N° d'ordre : 578

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

MASSÉ Bruno

CONCENTRATION ET DISPERSION SUR LES CONVEXES COMPACTS D'UNE LOI DE PROBABILITÉ MULTIDIMENSIONNELLE. PROBLÈMES STATISTIQUES ASSOCIÉS.

Soutenue le 21 Septembre 1990 devant la Commission d'Examen :

Président :	J. GEFFROY; Université Pierre et Marie Curie
Rapporteur :	M. ROUSSIGNOL, Université de Lille
Examinateurs :	A. BERLINET, Université de Montpellier
	P. JACOB, Université de Lille
	C. LEFEVRE, Université Libre de Bruxelles

Je tiens à remercier tout particulièrement :

Monsieur le Professeur Jean GEFFROY qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Monsieur le Professeur Pierre JACOB qui a dirigé tous mes travaux de recherche.

Messieurs les Professeurs Alain BERLINET, Claude LEFEVRE et Michel ROUSSIGNOL, qui ont accepté de participer au jury de cette thèse.

Je remercie également Madame Arlette Lengaigne, qui a dactylographié ce travail avec sa compétence coutumière ainsi que toutes les personnes qui ont participé à sa réalisation matérielle.

PLAN GÉNÉRAL

Pages

PREMIÈRE PARTIE : CONCENTRATION DES MESURES BORNÉES SUR R^N ET PROBLÈMES STATISTIQUES ASSOCIÉS

DEUXIÈME PARTIE : CONVOLUTION ET CONCENTRATION

TROISIÈME PARTIE : PRINCIPES D'INVARIANCE POUR LA PROBABILITE D'UN DILATÉ DE L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN ÉCHANTILLON

RÉSUMÉ GÉNÉRAL

Les trois parties correspondent à trois publications. La première contient certains résultats, étendus à $\mathbf{R}^N$, de la thèse de 3[ième] Cycle.

Dans la première partie, nous étendons aux mesures bornées sur $\mathbf{R}^N$, à partir des convexes fermés, la fonction de concentration de Paul Lévy, relative aux intervalles de $\mathbf{R}$. Nous dégageons, dans un premier temps, les propriétés générales de cette extension. Puis nous démontrons que la fonction de concentration d'un échantillon est un estimateur convergent de la fonction de concentration de la loi et que les convexes qui réalisent la fonction de concentration de l'échantillon permettent d'estimer un convexe réalisant la fonction de concentration de la loi. Enfin nous définissons et estimons l'ε-support d'une probabilité sur $\mathbf{R}^N$.

La deuxième partie est consacrée à une extension à $\mathbf{R}^2$ d'une propriété dûe à P. Lévy. Dans le but d'illustrer la dispersion des puissances successives de convolution d'une probabilité P sur $\mathbf{R}^2$, nous considérons deux généralisations de la fonction de concentration de P. Lévy relative aux intervalles de $\mathbf{R}$; l'une, notée Q, est définie à partir des boules de $\mathbf{R}^2$ et l'autre, notée $\bar{Q}$, à partir des convexes. Nous montrons la décroissance vers 0 des suites $(Q(P^{*n}, t))_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(\bar{Q}(P^{*n}, t))_{n\in\mathbf{N}^*}$, où t est un réel positif quelconque, respectivement en $1/n$ et $1/\sqrt{n}$. Enfin nous prouvons que, s'il admet une matrice de covariance, quel que soit $t \in \mathbf{R}^+$, les suites $(Q(P^{*n}, n^{\alpha t}))_{n\in\mathbf{N}^*}$ pour $\alpha \in]0, 1/2[$ et $(\bar{Q}(P^{*n}, n^{\alpha t}))_{n\in\mathbf{N}^*}$ pour $\alpha \in]0, 1[$ convergent vers 0.

Dans la troisième partie, on considère l'enveloppe convexe $C_n^\bullet$ d'un échantillon de taille n d'une loi P, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, sur $\mathbf{R}^N$ et on étudie, dans le cas où l'enveloppe convexe C_0 du support de la loi est compact, la vitesse de convergence de l'espérance mathématique du volume de $C_n^\bullet$ vers le volume de C_0 et, dans le cas général, la vitesse de convergence de $E[P(C_n^\bullet)]$ vers 1. Nous obtenons dans les deux cas des encadrements qui constituent une généralisation d'un résultat de Barany et Larman portant sur une loi uniforme sur un convexe compact. Puis nous montrons que les deux vitesses de convergence peuvent être rendues aussi lente que l'on veut par un choix adéquat de P. D'où l'intérêt de caractériser un borélien, peu distant de C_n^ω, dont la probabilité tend

vers 1 à une vitesse connue indépendante de P. Nous montrons, dans un premier temps, que la probabilité maximale des demi-espaces d'intersection vide avec C_n^ω tend vers 0 à une vitesse indépendante de P. Puis on obtient deux inégalités de type exponentiel pour la probabilité d'un dilaté de C_n^ω ; dans la première l'ampleur de la dilatation dépend de l'"ampleur" de C_n^ω, alors que dans la seconde elle est indépendante de ω. Dans le cas où l'espace des réalisations est $\mathbf{R}^2$, on obtient des vitesses de convergence particulièrement rapides à l'aide de techniques qui ne s'étendent pas aux espaces de dimension supérieure.

CONCENTRATION DES MESURES BORNEES SUR $\mathbb{R}^N$ ET PROBLEMES STATISTIQUES ASSOCIES

Bruno MASSÉ

Laboratoire de Statistique et Probabilités
Université des Sciences et Techniques
de Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ - CEDEX

Résumé : *La fonction de concentration de Paul Lévy, relative aux intervalles de* $\mathbb{R}$ *, peut être étendue aux mesures bornées sur* $\mathbb{R}^N$ *à partir des convexes fermés. Nous dégageons les propriétés générales de cette extension.*

Le problème de son estimation est résolu à l'aide des fonctions de concentration des mesures empiriques d'un échantillon de cette loi. Puis des théorèmes permettant d'estimer au moins un convexe fermé réalisant la fonction de concentration sont démontrés.

Enfin nous définissons et estimons, à l'aide de la fonction de concentration, l'ε*-support d'une probabilité sur* $\mathbb{R}^N$.

Abstract : *Paul Lévy's concentration function, with respect to the real intervals, may be extended to the bounded measures on* $\mathbb{R}^N$ *through the convex sets. We draw up the general properties of this extension.*

The problem of its estimation is solved with the help of the concentration functions of the empirical distributions. Then theorems, wich enable the estimation of one closed convex set realizing the value of the concentration function, are shown.

Finally we define and estimate, with the help of the concentration function, the ε*-support of a probability measure on* $\mathbb{R}^N$.

Mots clés : *Concentration - Fonction - Mesure - Estimation - Support - Vitesse de concergence.*

Indices de classification STMA : *01050 - 04080*

INTRODUCTION.-

C'est Paul Lévy qui, le premier, a défini la fonction de concentration d'une probabilité ([6]), *notamment* pour illustrer la dispersion d'une somme de variables aléatoires. Son étude porte sur les probabilités sur $\mathbb{R}$.

Etant donné une probabilité P , cette fonction, notée Q, est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad , \qquad Q(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} P([x - \frac{t}{2} \, ; \, x + \frac{t}{2}]) \; .$$

Puisque les segments fermés de $\mathbb{R}$, de longueur t donnée, sont à la fois les boules de $\mathbb{R}$ de rayon $\frac{t}{2}$, les convexes fermés, les compacts de mesure de Lebesgue t et les translatés de l'intervalle $[- \frac{t}{2} , \frac{t}{2}]$, de nombreuses généralisations sont envisageables pour les probabilités sur $\mathbb{R}^N$.

En particulier Sevast'yanov ([9]) a comparé la fonction de concentration sur les convexes fermés et celle obtenue à partir des images par les transformations affines d'un convexe fixé ; Rogozin, dans $\mathbb{R}$ ([8]) , et Essen, à partir des boules fermées d'un espace multidimensionnel ([7]), ont étudié le rapport existant entre les fonctions de concentration de plusieurs variables aléatoires et celle de leur somme ; Roger ([1]) et l'auteur ([10]) ont dégagé les propriétés générales de la fonction de concentration sur les boules fermées d'un espace métrique séparable et résolus quelques problèmes de continuité soulevés par cette généralisation.

Cet article est consacré à la fonction de concentration sur les convexes fermés de l'espace euclidien à N dimensions $\mathbb{R}^N$.

Dans le premier paragraphe nous dégageons les propriétés générales de cette fonction. Nous démontrons en particulier que la fonction de concentration d'une mesure bornée quelconque est croissante et continue à droite, que la concentration, à t_o fixé, est atteinte sur au moins un convexe fermé de mesure de Lebesgue t_o et que le supremum de la définition peut n'être pris que sur les convexes fermés inclus dans un compact fixe de $\mathbb{R}^N$ dépendant de t_o.

Dans le deuxième paragraphe, nous étudions quelques problèmes de continuité de la fonction de concentration. Nous prouvons notamment qu'elle est continue, en tant que fonction de deux variables, en un point si et seulement si elle y est continue par rapport à une de ses variables et que, si la mesure bornée μ_o ne charge pas les frontières des parties convexes de $\mathbb{R}^N$, la fonction de concentration de μ_o est continue.

Des problèmes d'estimation soulevés par cette généralisation de la définition de Paul Lévy et par le fait que la concentration est atteinte sur un convexe fermé sont étudiés dans le troisième paragraphe. Les estimateurs utilisés sont la fonction de concentration, et le convexe "réalisant" cette concentration, de la mesure empirique d'un échantillon. Nous obtenons, pour ces estimateurs, une vitesse de convergence exponentielle.

Dans le quatrième paragraphe nous définissons, à l'aide de la fonction de concentration sur les convexes fermés, les ε-supports et les pseudo-ε-supports d'une probabilité P_o et nous montrons que l'ε-support de la loi empirique d'un échantillon de loi P_o en est un estimateur convergent au sens de la distance de Hausdorff.

I - DEFINITION ET PROPRIETES GENERALES.-

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des convexes fermés compacts de l'espace euclidien à N dimensions $\mathbb{R}^N$, λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{C}_t$ l'ensemble des convexes compacts de volume t :

$$\mathcal{C}_t = \{C \in \mathcal{C} \ / \ \lambda(C) = t\} .$$

$\mathcal{C}_o$ est alors le sous-ensemble de $\mathcal{C}$ composé des convexes compacts de dimension strictement inférieure à N.

$\mathcal{M}_b$ désigne l'ensemble des mesures bornées sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$.

On appelle fonction de concentration l'application Q définie sur $\mathcal{M}_b \times \mathbb{R}^+$ par :

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_b \ , \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \ : \ Q(\mu,t) = \sup_{C \in \mathcal{C}_t} \mu(C) .$$

Et, pour μ fixée, l'application $Q(\mu,.)$ est appelée fonction de concentration de μ .

d désignant la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^N$ pour tout $C \in \mathcal{C}$ et tout $\delta \geq 0$, le dilaté fermé d'ordre δ de C

$$C^{\delta]} = \{x \in \mathbb{R}^N \ / \ d(x,C) \leq \delta\}$$

est encore un convexe compact et l'application qui à tout $\delta \geq 0$ associe $\lambda(C^{\delta]})$ est continue et croissante. Donc, étant donné t_1 et t_2 vérifiant $0 \leq t_1 < t_2$, tout élément de $\mathcal{C}_{t_1}$ est contenu dans au moins un élément de $\mathcal{C}_{t_2}$. Il en résulte que la fonction de concentration de toute mesure est non décroissante.

D'autre part, quel que soit $t > 0$, $\mathbb{R}^N$ est réunion dénombrable d'éléments de C_t. Donc $Q(\mu,t) > 0$ si $t > 0$ et si μ n'est pas la mesure nulle.

Un des objets de ce paragraphe est de prouver que les convexes importants dans le calcul de $Q(\mu,t)$ sont tous contenus dans un compact de $\mathbb{R}^N$ et que $Q(\mu,t)$ est atteint sur un élément de C_t si μ et t vérifient

$$Q(\mu,0) < Q(\mu,t) \quad .$$

Cette dernière condition découlera de l'égalité

$$\lim_{\alpha\to 0} \sup_{B\in\beta_\alpha} \mu(B) = Q(\mu,0)$$

où β_α est l'ensemble des parties B de $\mathbb{R}^N$, appelées bandes de $\mathbb{R}^N$ de largeur α, vérifiant : il existe une forme linéaire f et deux réels a et b tels que

$$B = \{x \in \mathbb{R}^N \;/\; a \leq f(x) \leq b\}$$

et

$$\alpha = (b-a) \;/\; (f(e_1)^2 + \ldots + f(e_N)^2)^{1/2} \quad ,$$

$(e_1,\ldots,e_N)$ désignant la base canonique de $\mathbb{R}^N$.

Ces trois propriétés seront démontrées à l'aide de deux lemmes. Le premier caractérise la limite d'une suite convergente, au sens de la distance d_H de Haussdorff sur l'ensemble F_b des fermés bornés de $\mathbb{R}^N$ d'éléments de C ; le second établit un lien entre le volume, le diamètre d'un convexe et la largeur minimale des bandes de $\mathbb{R}^N$ qui le contiennent.

Etant donné $\delta \geq 0$ et un borélien B, on pose

$$B^{\delta} = \{x \in \mathbb{R}^N \ / \ d(x,B) \leq \delta\}$$

et
$$\partial_{\delta} B = B^{\delta} \cap (B^c)^{\delta}$$

où B^c désigne le complémentaire de B dans $\mathbb{R}^N$.

I.A. - Lemme.-

Soit $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}$ convergente, au sens de d_H, et C_o sa limite. Alors $C_o \in \mathcal{C}$ et

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda(C_n) = \lambda(C_o) \quad .$$

N.B. - En particulier $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_t$, pour tout $t \geq 0$, sont des fermés de (F_b, d_H).

Démonstration :

Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, si on pose $d_n = d_H(C_n, C_o)$,

$$C_o \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} C_n^{2d_n} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} C_o^{4d_n} = C_o \quad .$$

Or tout dilaté d'un convexe d'un espace normé est convexe.

Donc C_o, qui est une intersection de convexes, est convexe et, puisque $C_o \in F_b$, $C_o \in \mathcal{C}$.

D'autre part soit λ_o la restriction de λ au dilaté d'ordre 6 de C_o et $n_o \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $n \geq n_o$, $d_n < 1$.

Alors, si $n \geq n_o$,

$$C_n \subset C_o^{2d_n} \subset C_n^{4d_n} \subset C_o^6 \quad ,$$

d'où

$$\lambda_o(C_n) \leq \lambda_o(C_o^{2d_n}) \leq \lambda_o(C_n) + \lambda_o(\partial_{4d_n} C_n) \; . \tag{1}$$

Or, en étendant [2] p. 1-16 aux mesures bornées, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_o(\partial_{4d_n} C_n) = 0 \; .$$

Ce qui, d'après (1), permet de conclure puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_o(C_o^{2d_n}) = \lambda_o(C_o) \; . \blacksquare$$

I.B. - Lemme.-

Soit $t > 0$, $C \in \mathcal{C}_t$ et $d = \mathrm{diam}(C)$. Alors C est contenu dans une bande de $\mathbb{R}^N$ de largeur $\sqrt[N-1]{\dfrac{tN!}{d}}$.

Démonstration :

Supposons, sans perte de généralité, que le premier axe de coordonnées de $\mathbb{R}^N$ coupe C selon un diamètre maximal.

Pour tout $n \in \{1,2,3,\ldots,N\}$, notons A_n (resp. B_n) le point, ou un des points, de C ayant la plus grande (resp. petite) énième coordonnée notée a_n (resp. b_n).

Puisque C est convexe, il contient le polyèdre convexe de sommets $A_1,\ldots,A_N$, $B_1,\ldots$ et B_N dont le volume est

$$d \, . \prod_{n=2}^{n=N} (a_n - b_n) \, / \, N! \quad .$$

Finalement, si on pose

$$\alpha = \mathrm{Min}\ \{a_n - b_n \ / \ n \in \{2,\ldots,N\}\} \quad ,$$

alors $\qquad d\alpha^{N-1}/N! \leqslant d \ . \ \prod_{n=2}^{n=N} (a_n - b_n)/N! \leqslant t$

et C est contenu dans une bande de largeur α. ■

I.C. - Proposition.-

Soit $\mu \in M_b$. Alors

$$\lim_{\alpha \to 0} \sup_{B \in \beta_\alpha} \mu(B) = Q(\mu,0) \quad .$$

Démonstration :

La suite décroissante $\left(\sup_{B\in\beta_{1/n}} \mu(B)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite ℓ supérieure ou égale à $Q(\mu,0)$. Supposons que $\eta = \ell - Q(\mu,0)$ soit strictement positif.

Soit B_o une boule fermée de $\mathbb{R}^N$ vérifiant

$$\mu(B_o) > \mu(\mathbb{R}^N) - \eta/4 \ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons B_n un élément de $\beta_{1/n}$ tel que

$$\mu(B_n) > \sup_{B\in\beta_{1/n}} \mu(B) - \eta/4$$

et posons

$$C_n = B_o \cap B_n \quad .$$

Alors quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu(C_n) > \sup_{B \in \beta_{1/n}} \mu(B) - \eta/2 \quad . \qquad (1)$$

La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant contenue dans le compact B_o , elle possède au moins une valeur d'adhérence, pour d_H , C_o contenue dans B_o. D'après le lemme I.A., $C_o \in \mathcal{C}_o$.

Soit $(C_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite de $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, où $d_k = d_H\,(C_{n_k}, C_o)$, converge en décroissant vers 0. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $C_{n_k} \subset C_o^{2d_k}$; donc

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\, \mu(C_{n_k}) \leq \mu(C_o) \leq Q(\mu,0) \ . \qquad (2)$$

Mais (1) entraîne :

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\, \mu(C_{n_k}) \geq \lim_{k\to+\infty} \sup_{B\in\beta_{1/n_k}} \mu(B) - \eta/2 = \eta/2 + Q(\mu,0) \ . \qquad (3)$$

Et (2) et (3) sont contradictoires. ■

Nous pouvons maintenant démontrer les deux propriétés importantes de ce paragraphe.

I.D. - Théorème.-

Soit $(\mu,t,\eta) \in \mathcal{M}_b \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$Q(\mu,0) < \eta < Q(\mu,t) \quad .$$

On pose $\mathcal{C}_{t,\eta} = \{C \in \mathcal{C}_t \ / \ \mu(C) \geq \eta\}$. Alors

1) $\sup\limits_{C \in \mathcal{C}_{t,\eta}} \operatorname{diam}(C) < +\infty$.

2) Il existe une boule B_o de $\mathbb{R}^N$ qui contient tous les éléments de $\mathcal{C}_{t,\eta}$.

N.B. - Cette dernière propriété entraîne :

$$\sup_{\substack{C \in \mathcal{C}_t \\ C \not\subset B_o}} \mu(C) < Q(\mu,t) = \sup_{\substack{C \in \mathcal{C}_t \\ C \subset B_o}} \mu(C) .$$

<u>Démonstration</u> :

1) D'après la proposition I.C., il existe $\alpha_o > 0$ tel que , quel que soit $\alpha < \alpha_o$,

$$\sup_{B \in \beta_\alpha} \mu(B) < \eta \quad .$$

Donc aucun élément de $\mathcal{C}_{t,\eta}$ n'est contenu dans un élément de β_{α_o} et le lemme I.B. entraîne

$$d_o = \sup_{C \in \mathcal{C}_{t,\eta}} \operatorname{diam}(C) \leq \frac{tN!}{\alpha_o^{N-1}} \quad .$$

2) Soit $(O,R) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$\mu(B(O,R)) > \mu(\mathbb{R}^N) - \eta \ .$$

Alors, quel que soit $C \in \mathcal{C}_{t,\eta}$,

$$C \cap B(O,R) \neq \emptyset \quad .$$

Donc $\mathcal{C}_{t,\eta} \subset \{C \in \mathcal{C}_t \ / \ C \subset B_o = B(O,R + d_o)\}$. ∎

I.E. - Théorème.-

Soit $\mu \in \mathcal{M}_b$.

1) Il existe un hyperplan affine H_o de $\mathbb{R}^N$ vérifiant :

$$\mu(H_o) = Q(\mu,0) .$$

2) Quel que soit $t > 0$ tel que

$$Q(\mu,0) < Q(\mu,t) ,$$

il existe $C_o \in \mathcal{C}_t$ vérifiant :

$$\mu(C_o) = Q(\mu,t) .$$

Démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons H_n un hyperplan affine vérifiant

$$\mu(H_n) > Q(\mu,0) - Q(\mu,0) / 2n .$$

Soit $(0,R_o) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$\mu(B(0,R_o)) > \mu(\mathbb{R}^N) - Q(\mu,0) / 2 .$$

Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = H_n \cap B(0, R_o)$ est de dimension $N-1$ et contenu dans le compact $B(0, R_o)$. Soit $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite convergente de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour d_H , A_o sa limite et H_o un hyperplan affine contenant A_o .

Soit $\varepsilon \in]0, Q(\mu,0) / 2[$ et $R > R_o$ tel que

$$\mu(B(0,R)) > \mu(\mathbb{R}^N) - \varepsilon$$

La suite $(A^R_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$, obtenue en posant $A^R_{n_k} = H_{n_k} \cap B(0,R)$, admet une valeur d'adhérence, pour d_H , A^R_o qui engendre également H_o . Donc

$$\mu(H_o) \geq \mu(A^R_o) = \lim_{i\to+\infty} \mu((A^R_o)^{2d_i}) \geq \overline{\lim_{i\to+\infty}}\ \mu(A^R_{n_{k_i}})$$

$$\geq \lim_{i\to+\infty}\left(Q(\mu,0) - \frac{Q(\mu,0)}{2n_{k_i}} - \varepsilon\right) = Q(\mu,0) - \varepsilon$$

où $(A^R_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une sous-suite de $(A^R_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers A^R_o , telle que la suite $(d_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, obtenue en posant $d_i = d_H(A^R_{n_{k_i}}, A^R_o)$, soit décroissante.

ε étant arbitraire, on obtient

$$\mu(H_o) \geq Q(\mu,0) .$$

Ce qui permet de conclure car, H_o étant réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}_o$,

$$\mu(H_o) \leq Q(\mu,0) .$$

2) Soit $t > 0$ vérifiant $Q(\mu,0) < Q(\mu,t)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons C_n un élément de $\mathcal{C}_t$ tel que

$$Q(\mu,t) \geq \mu(C_n) > Q(\mu,t) - (Q(\mu,t) - Q(\mu,0)) / 2n . \qquad (1)$$

D'après le théorème I.D., la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est contenue dans un compact de $\mathbb{R}^N$. Soit C_o la limite, pour d_H , d'une sous-suite convergente $(C_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, obtenue en posant $d_k = d_H(C_{n_k},C_o)$, soit décroissante. Alors, d'après (1) ,

$$\mu(C_o) = \lim_{k\to+\infty} \mu(C_o^{2d_k}) \geq \lim_{k\to+\infty} \mu(C_{n_k}) \geq Q(\mu,t) .$$

Finalement $\mu(C_o) = Q(\mu,t)$ car, d'après I.A., $C_o \in \mathcal{C}_t$.

I.F. - Remarque.

Seul le cas $Q(\mu,0) = Q(\mu,t)$ pose problème.

Si μ est à support compact S , étant donné H_o vérifiant $\mu(H_o) = Q(\mu,0)$, il existe un dilaté C_o de l'enveloppe convexe fermée de $H_o \cap S$ qui appartient à $\mathcal{C}_t$ et $\mu(C_o) = Q(\mu,0) = Q(\mu,t)$.

Dans le cas contraire, le contre-exemple suivant montre que $Q(\mu,t)$ peut n'être atteint sur aucun élément de $\mathcal{C}_t$.

Soit $O \in \mathbb{R}^N$ et H un hyperplan affine contenant O. Soit μ obtenue en plaçant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la masse $1/2^n$ sur $(B(O,n) - B(O,n-1)) \cap H$. Alors, par exemple,

$$1 = Q(\mu,0) = Q(\mu,1)$$

et aucun élément de $\mathcal{C}_1$ n'est de μ-mesure 1. ■

Pour conclure ce paragraphe, nous allons montrer que le théorème I.D. peut être étendu à un voisinage de μ pour la topologie de la convergence faible ; ρ_p désigne la distance de Prokhorov sur $\mathcal{M}_b$.

I.G. - Proposition.-

Soit $(\mu_o, t_o, \eta) \in \mathcal{M}_b \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant

$$Q(\mu,0) < \eta \leqslant Q(\mu_o, t_o) .$$

Alors il existe $\delta_o > 0$ tel que, si $\delta \leqslant \delta_o$,

$$\sup_{C \in \mathcal{C}_{t_o,\eta}^{\delta,\mu_o}} \operatorname{diam}(C) < +\infty$$

où $\mathcal{C}_{t_o,\eta}^{\delta,\mu_o} = \{C \in \mathcal{C}_{t_o} \ / \ \sup\limits_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_b \\ \rho_p(\mu,\mu_o) \leqslant \delta}} \mu(C) \geqslant \eta\}$.

Démonstration :

Pour tout $d \in \mathbb{R}^{+*}$, on pose

$$\mathcal{C}_{t_o}^{d} = \{C \in \mathcal{C}_{t_o} \ / \ \operatorname{diam}(C) \geqslant d\}$$

et $$\alpha(d) = \sqrt[N-1]{\frac{tN!}{d}} .$$

Alors, quel que soit $(\delta,d) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, d'après le lemme I.B.,

$$\sup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_b \\ \rho_p(\mu,\mu_o) \leqslant \delta}} \ \sup_{C \in \mathcal{C}_{t_o}^{d}} \mu(C) \leqslant \sup_{\substack{\mu \in \mathcal{M}_b \\ \rho_p(\mu,\mu_o)}} \ \sup_{B \in \beta_{\alpha(d)}} \mu(B)$$

$$\leqslant \sup_{B \in \beta_{\alpha(d)+2\delta}} \mu_o(B) .$$

Donc, d'après la proposition I.C., il existe δ_o assez petit et d_o assez grand tels que, si $\delta \leq \delta_o$

$$\sup_{\substack{\mu \in M_b \\ \rho_p(\mu,\mu_o) \leq \delta}} \ \sup_{C \in C_{t_o}^{d_o}} \mu(C) < \eta .$$

Donc $C_{t_o}^{d_o} \subset (C_{t_o,\eta}^{\delta,\mu_o})^c$ dès que $\delta \leq \delta_o$. ■

Nous avons vu que toutes les applications $Q(\mu,.)$ sont monotones croissantes. L'existence d'une limite à gauche en tout point $t_o > 0$ est donc assurée.

I.H. - Proposition.-

Soit $(\mu_o,t_o) \in M_b \times \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant

$$\lim_{t \to t_o} Q(\mu_o,t) > Q(\mu_o,0) \quad . \tag{0}$$

Alors il existe $\delta_o > 0$ tel que, si $\delta \leq \delta_o$,

$$\inf_{\substack{\mu \in M_b \\ \rho_p(\mu,\mu_o) \leq \delta}} Q(\mu,t_o) > Q(\mu_o,0) \quad .$$

Démonstration :

L'hypothèse (0) et le théorème I.E. entraînent l'existence de $x_o \in]0,t_o[$ et de $C_o \in C_{t_o-x_o}$ vérifiant

$$\mu_o(C_o) = Q(\mu_o,t_o-x_o) > Q(\mu_o,0) + x_o \ . \tag{1}$$

L'application qui à $y \in \mathbb{R}^+$ associe $\lambda((C_o)^y)$ *étant continue*, il existe $y_o > 0$ tel que

$$\lambda((C_o)^{y_o}) = t_o \ . \tag{2}$$

Soit

$$\delta = \frac{1}{2} \operatorname{Min}(x_o, y_o) \ . \tag{3}$$

Alors, grâce à (1) et (3), pour tout μ tel que $\rho_p(\mu,\mu_o) \leq \delta$,

$$Q(\mu_o,0) \leq Q(\mu_o,0) + x_o - 2\delta < \mu_o(C_o) - 2\delta \leq \mu((C_o)^{2\delta}) \ . \tag{4}$$

Or, grâce à (2) et (3), $(C_o)^{2\delta}$ est inclus dans un élément de C_{t_o} . Ce qui, compte tenu de (4), entraîne

$$\inf_{\substack{\mu\in M_b \\ \rho_p(\mu,\mu_o)\leq\delta}} Q(\mu,t_o) \geq \inf_{\substack{\mu\in M_b \\ \rho_p(\mu,\mu_o)\leq\delta}} \mu((C_o)^{2\delta}) > Q(\mu_o,0) \ . \ \blacksquare$$

I.I. - Proposition.-

Sous les hypothèses de I.H., il existe $(0,R,\delta) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$C^{\delta,\mu_o}_{t_o,\eta} \subset \{C \in C_{t_o} \ / \ C \subset B(0,R)\}$$

où η vérifie : $\displaystyle\inf_{\substack{\mu\in M_b \\ \rho_p(\mu,\mu_o)\leq\delta}} Q(\mu,t_o) > \eta > Q(\mu_o,0)$. (1)

N.B. - Grâce à (1), cette proposition entraîne, pour tout $\mu \in M_b$ tel que $\rho_p(\mu,\mu_o) \leq \delta$,

$$\sup_{\substack{C \in \mathcal{C}_{t_o} \\ C \not\subset B(0,R)}} \mu(C) < Q(\mu,t_o) = \sup_{\substack{C \in \mathcal{C}_{t_o} \\ C \subset B(0,R)}} \mu(C) \quad .$$

Démonstration :

D'après la proposition I.H., il existe $(\delta_o,\eta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$\inf_{\substack{\mu \in M_b \\ \rho_p(\mu,\mu_o) \leq \delta_o}} Q(\mu,t_o) > \eta > Q(\mu_o,0) \quad . \tag{2}$$

Soit $(0,R_1) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$\mu_o(B(0,R_1)) > \mu_o(\mathbb{R}^N) - \frac{\eta}{4} \, . \tag{3}$$

Soit $\delta_1 > 0$ tel que, d'après la proposition I.G.,

$$d_o = \sup_{C \in \mathcal{C}^{\delta_1,\mu_o}_{t_o,\eta}} \operatorname{diam}(C) < +\infty \tag{4}$$

Enfin soit $\delta = \operatorname{Min}(\delta_o, \delta_1, \frac{\eta}{4})$. Alors, grâce à (3), quel que soit μ vérifiant $\rho_p(\mu,\mu_o) \leq \delta$,

$$\mu(B(0,R_1 + \frac{\eta}{4})) > \mu(\mathbb{R}^N) - \frac{3\eta}{4} \, .$$

Ce qui, compte tenu de (2) et (4) , entraîne

$$\mathcal{C}^{\delta,\mu_o}_{t_o,\eta} \subset \{C \in \mathcal{C}_{t_o} \;/\; C \subset B(0, R_1 + \frac{\eta}{4} + d_o) \quad .$$

Et il suffit, pour conclure, de remarquer que (2) implique (1) et de poser

$$R = R_1 + \frac{\eta}{4} + d_o \quad .$$

II - CONTINUITE.-

Ce paragraphe est consacré à la résolution de quelques problèmes de continuité soulevés par la définition de la fonction de concentration.

Deux résultats importants y seront démontrés : la continuité à droite de la fonction de concentration de toute mesure bornée et l'équivalence entre la continuité de Q en un point, en tant que fonction de deux variables, et sa continuité, en ce même point, par rapport à une de ses variables.

$\mathbb{R}^+$ est muni de sa topologie usuelle, $\mathcal{M}_b$ de la topologie de la convergence faible et $\mathcal{M}_b \times \mathbb{R}^+$ de la topologie produit.

II.A. - Théorème.-

Soit $\mu \in \mathcal{M}_b$. $Q(\mu,.)$ est continue à droite.

Démonstration :

1) Quel que soit $t > 0$, tout élément de C_t est contenu dans un élément de $\beta_{\alpha(t)}$ où $\alpha(t) = \text{Max}(2\sqrt{t}\ ,\ \sqrt[N-1]{\sqrt{t}\, N!})$. En effet, étant donné $t > 0$, $C \in C_t$ et $d = \text{diam}(C)$, si $d > \sqrt{t}$, d'après le lemme I.B., C est contenu dans une bande de largeur $\sqrt[N-1]{\sqrt{t}\, N!}$ et, si $d \leq \sqrt{t}$, C est contenu dans une boule de rayon $\sqrt{t}$, donc dans une bande de largeur $2\sqrt{t}$.

Donc, quel que soit $t > 0$,

$$Q(\mu,0) \leq Q(\mu,t) \leq \sup_{B \in \beta_{\alpha(t)}} \mu(B) \quad .$$

Ce qui, avec la proposition I.C., entraîne la continuité de $Q(\mu,.)$ en 0.

2) Soit $t_o > 0$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels positifs convergeant vers t_o.

a) S'il existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tel que $Q(\mu,0) = Q(\mu,t_{n_o})$, alors, quel que soit $n \geqslant n_o$, du fait de la non-décroissance de $Q(\mu,.)$,

$$Q(\mu,0) = Q(\mu,t_o) = Q(\mu,t_n) .$$

b) Dans le cas contraire, notons $a \geqslant Q(\mu,t_o) \geqslant Q(\mu,0)$ la limite de la suite décroissante et minorée $(Q(\mu,t_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

α) Si $a = Q(\mu,0)$, alors $a = Q(\mu,t_o)$.

β) Si $a > Q(\mu,0)$, nous pouvons grâce au théorème I.E. construire une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant : quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

(1) $C_n \in \mathcal{C}_{t_n}$,

(2) $\mu(C_n) = Q(\mu,t_n)$,

(3) et C_n est contenu dans un élément C'_n de $\mathcal{C}_{t_1}$ tel que $\mu(C'_n) \geqslant a > Q(\mu,0)$.

D'après (3) et le théorème I.D., tous les termes de $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont contenus dans un même compact de $\mathbb{R}^N$.

Soit C_o la limite d'une sous-suite $(C_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, au sens de d_H, telle que la suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, obtenue en posant $d_k = d_H(C_o , C_{n_k})$, soit décroissante. Alors, d'après (2),

$$\mu(C_o) = \lim_{k\to+\infty} \mu(C_o^{2d_k}) \geq \lim_{k\to+\infty} \mu(C_{n_k}) = a \quad .$$

Ce qui entraîne $a = Q(\mu,t_o)$ puisque $a \geq Q(\mu,t_o)$ et, d'après (1) et le lemme I.A., $C_o \in \mathcal{C}_{t_o}$. ■

La proposition suivante nous donne une majoration du "module de continuité" de la fonction de concentration d'une mesure quelconque. Pour tout $\alpha > 0$ et tout borélien B , on pose

$$B^{-\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^N \ / \ \mathbf{d}(x,B^c) \geq \alpha\}.$$

II.B. - Proposition.-

Soit $\mu \in \mathcal{M}_b$, $t \geq 0$ et $\delta > 0$. Alors

$$0 \leq Q(\mu,t+\delta) - Q(\mu,t) \leq \sup_{C\in\mathcal{C}_{t+\delta}} \mu(\partial_{\sqrt[N]{\delta}}\, C) \ .$$

Démonstration :

Soit $C_o \in \mathcal{C}_{t+\delta}$ et $\alpha > 0$ tel que le convexe fermé $C_o^{-\alpha}$ soit de volume t. Soit $x \in \partial C_o^{-\alpha}$; un hyperplan affine d'appui de $C_o^{-\alpha}$ passe par x . Donc

$$\lambda((C_o^{-\alpha})^c \cap B(x\ ,\ \sqrt[N]{\delta})) \geq \frac{1}{2}\,\lambda(B(x,\ \sqrt[N]{\delta}\ )) \geq \delta \ .$$

D'où

$$\lambda((C_o^{-\alpha})^{\sqrt[N]{\delta}} - C_o^{-\alpha}) \geq \delta \quad .$$

Ce qui prouve que $\alpha \leq \sqrt[N]{\delta}$ car, puisque $(C_o^{-\alpha})^{\alpha} \subset C_o$,

$$\lambda((C_o^{-\alpha})^{\alpha} - C_o^{-\alpha}) \leq \delta \ .$$

Finalement :

$$Q(\mu,t+\delta)-Q(\mu,t) = \sup_{C\in\mathcal{C}_{t+\delta}} (\mu(C)-Q(\mu,t)) \leqslant \sup_{C\in\mathcal{C}_{t+\delta}} (\mu(C)-\mu(C^{-\sqrt[N]{\delta}}))$$

$$\leqslant \sup_{C\in\mathcal{C}_{t+\delta}} \mu(\partial_{\sqrt[N]{\delta}} C) \ . \ \blacksquare$$

Si μ est absolument continue par rapport à λ, ou plus généralement si μ ne charge pas les frontières des parties convexes de $\mathbb{R}^N$, $Q(\mu,.)$ est donc continue (et même uniformément continue puisqu'elle est monotone et bornée). En effet [2] p. 1-16 indique que, dans ce cas

$$\lim_{\alpha\to 0} \sup_{C\in\mathcal{C}} \mu(\partial_\alpha C) = 0 \quad .$$

La démonstration du deuxième résultat important de ce paragraphe se fait en trois étapes. Les deux premières montrent l'équivalence entre la continuité de $Q(\mu_o,.)$ en t_o et celle de $Q(.,t_o)$ en μ_o et la troisième est un lemme qui prouve la continuité de toute fonction de deux variables ayant les propriétés de Q déjà démontrées.

II.C. - *Proposition*.-

Soit $(\mu_o,t_o) \in M_b \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que l'application $Q(\mu_o,.)$ soit continue en t_o.

Alors $Q(.,t_o)$ est continue en μ_o.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$.

1) Soit x un réel vérifiant $0 < x < \varepsilon/2$, $x \leqslant t_o$ et

$$Q(\mu_o,t_o-x) \geq Q(\mu_o,t_o) - \varepsilon/2 + x \quad .$$

Soit $C_x \in \mathcal{C}_{t_o-x}$ tel que

$$\mu_o(C_x) \geq Q(\mu_o,t_o-x) - \varepsilon/2 \ .$$

Soit $y > 0$ tel que

$$\lambda(C_x^y) = t_o \quad .$$

Enfin soit $\delta_1 = \mathrm{Min}(x,y)$. Alors, si $\rho_p(\mu,\mu_o) \leq \delta_1$,

$$Q(\mu,t_o) \geq \mu(C_x^{\delta_1}) \geq \mu_o(C_x) - \delta_1 \geq Q(\mu_o,t_o-x) - \delta_1 - \varepsilon/2 \geq Q(\mu_o,t_o) - \varepsilon \ .$$

2) Soit B_o une boule fermée de $\mathbb{R}^N$ vérifiant :

$$\mu_o(\mathbb{R}^N - B_o) \leq \varepsilon/6 \quad ,$$

et $B_1 = B_o^{\varepsilon/6}$.

Soit μ vérifiant $\rho_p(\mu,\mu_o) \leq \varepsilon/6$, alors

$$Q(\mu,t_o) \leq \sup_{C\in\mathcal{C}_{t_o}} \mu(C \cap B_1) + \varepsilon/2 \ , \tag{1}$$

car $\mu(\mathbb{R}^N - B_1) \leq \varepsilon/2$ et, quel que soit $C \in \mathcal{C}$,

$$\mu(C) \leq \mu(C \cap B_1) + \mu(\mathbb{R}^N - B_1) \ .$$

D'autre part, soit λ_o la restriction de λ à $B_1^{\varepsilon/6}$ et $x > 0$ tel que :

$$Q(\mu_o,t_o+x) \leq Q(\mu_o,t_o) + \varepsilon/3 \quad . \tag{2}$$

Puisque λ_o est bornée et ne charge pas les frontières des parties convexes de $\mathbb{R}^N$, [2] p. 1-16 entraîne l'existence de $\alpha > 0$ tel que :

$$\sup_{C\in\mathcal{C}_{t_o}} \lambda_o(C^\alpha) \leq t_o + x \quad .$$

Soit $\delta_2 = \mathrm{Min}(\varepsilon/6\ ,\ \alpha)$. Tous les convexes fermés $(B_1 \cap C)^{\delta_2]}$, où $C \in \mathcal{C}_{t_o}$, sont de volume inférieur à $t_o + x$. En effet, si $C \in \mathcal{C}_{t_o}$

$$\lambda((B_1 \cap C)^{\delta_2]}) \leq \lambda(B_1^{\delta_2} \cap C^{\delta_2}) \leq \lambda_o(C^{\delta_2}) \quad .$$

Donc, si $\rho_p(\mu,\mu_o) \leq \delta_2$, grâce à (1) et (2),

$$\begin{aligned} Q(\mu,t_o) &\leq \sup_{C\in\mathcal{C}_{t_o}} \mu(C \cap B_1) + \varepsilon/2 \\ &\leq \sup_{C\in\mathcal{C}_{t_o}} \mu_o((C \cap B_1)^{\delta_2]}) + \varepsilon/2 + \delta_2 \\ &\leq Q(\mu_o,t_o+x) + \varepsilon/2 + \delta_2 \\ &\leq Q(\mu_o,t_o) + \varepsilon/3 + \varepsilon/2 + \delta_2 \leq Q(\mu_o,t_o) + \varepsilon \quad . \blacksquare \end{aligned}$$

La proposition II.C. admet la réciproque suivante. La deuxième propriété qui y est énoncée montre de nouveau la continuité de la fonction de concentration de toute mesure bornée ne chargeant pas les frontières des parties convexes de $\mathbb{R}^N$.

<u>*II.D. - Proposition*</u>.-

Soit $(\mu_o,t_o) \in \mathcal{M}_b \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que l'application $Q(\mu_o,.)$ soit discontinue en t_o. Alors

1) L'application $Q(.,t_o)$ est discontinue en μ_o.

2) Tout élément C_o de C_{t_o} vérifiant $\mu_o(C_o) = Q(\mu_o,t_o)$ a sa frontière chargée par μ_o.

<u>Démonstration</u> :

1) μ_o n'est pas la mesure nulle puisque $Q(\mu_o,.)$ admet un point de discontinuité.

Soit $P_o = \mu_o(.)/\mu_o(\mathbb{R}^N)$ et X_o une variable aléatoire de loi P_o.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons P_n la loi de $X_n = \varepsilon_n \times X_o$ où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en décroissant vers 1. Alors la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, obtenue en posant $\mu_n = \mu_o(\mathbb{R}^N) \times P_n$, converge faiblement vers μ_o et

$$Q(\mu_o,t_o) > \lim_{n\to+\infty} Q(\mu_o, t_o/\varepsilon_n^N) = \lim_{n\to+\infty} Q(\mu_n,t_o) ,$$

car $C \in C_{t_o}$ équivaut à $\frac{1}{\varepsilon_n} \times C \in C_{t_o}/\varepsilon_n^N$ et, quel que soit $C \in C_{t_o}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu_n(C) = \mu_o(\mathbb{R}^N) \times \Pr(\varepsilon_n \times X_o \in C) = \mu_o(\mathbb{R}^N) \times \Pr(X_o \in \frac{1}{\varepsilon_n} \times C) = \mu_o(\frac{1}{\varepsilon_n} \times C) .$$

2) $Q(\mu_o,.)$ étant continue à droite, croissante et discontinue en t_o, $Q(\mu_o,t_o) > Q(\mu_o,0)$; et, d'après le théorème I.E., il existe $C_o \in C_{t_o}$ vérifiant $\mu_o(C_o) = Q(\mu_o,t_o)$.

Puisque $C_o = \bigcup_{\alpha<0} \overset{\circ}{\widehat{C_o^\alpha}}$, $\mu_o(\partial C_o) = 0$ entraîne

$$Q(\mu_o,t_o) = \mu_o(C_o) = \lim_{\alpha\to 0^-} \mu_o(\overset{\circ}{\widehat{C_o^\alpha}}) \leq \lim_{\alpha\to 0^-} \mu_o(C_o^\alpha) \leq \lim_{t\to t_o^-} Q(\mu_o,t) .$$

Ce qui contredit la croissance et la discontinuité en t_o de $Q(\mu_o,.)$. ■

II.E. - *Lemme*.-

Soit (X,d) un espace métrique et f une fonction de $X \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

a) si $f(x,.)$ est continue en t , $f(.,t)$ est continue en x.

b) pour tout $x \in X$, $f(x,.)$ est croissante.

Alors f est continue, pour la topologie produit, en tout point (x_o,t_o) vérifiant :

c) $f(x_o,.)$ est continue en t_o .

Démonstration :

$f(x_o,.)$ étant croissante, il existe deux de ses points de continuité t_1 et t_2 qui vérifient $t_1 < t_o < t_2$ et

$$0 \leq f(x_o,t_2) - f(x_o,t_1) \leq \varepsilon/2 .$$

Soit $\eta \in \left]0, t_2-t_1\right[$ tel que $d(x,x_o) \leq \eta$ entraîne

$$|f(x_o,t_i) - f(x,t_i)| \leq \varepsilon/2 \quad \text{pour} \quad i = 0 \ , \ i = 1 \quad \text{et} \quad i = 2 \quad .$$

Soit $t \in [t_o-\eta, t_o+\eta]$ et x tel que $d(x,x_o) \leq \eta$.
Si $f(x,t) > f(x_o,t_o)$, alors

$$0 < f(x,t)-f(x_o,t_o) \leq f(x,t_2)-f(x_o,t_o) \leq |f(x,t_2)-f(x_o,t_2)| + |f(x_o,t_2)-f(x_o,t_o)| \leq \varepsilon \ . \ ■$$

La fonction de concentration sur $\mathbb{R}^N$, Q , vérifie, d'après le premier paragraphe et la proposition II.C. les conditions a) et b) de ce lemme. Nous pouvons donc énoncer, sans autre démonstration, le théorème suivant :

II.F. - Théorème.-

Soit $(\mu_o, t_o) \in M_b \times \mathbb{R}^{+*}$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) $Q(\mu_o, .)$ est continue en t_o .

b) $Q(., t_o)$ est continue en μ_o .

c) Q est continue en (μ_o, t_o) .

Notons que l'existence d'un élément de C_{t_o} , réalisant $Q(\mu_o, t_o)$, dont la frontière n'est pas chargée par μ_o entraîne, grâce à II.D.2.) et II.F., la continuité de Q en (μ_o, t_o) (1).

Le nombre 0 joue un rôle tout à fait particulier. En effet la fonction de concentration de toute mesure bornée est continue en 0 puisqu'elle est continue à droite et pourtant l'application $Q(.,0)$ n'est pas continue comme le montre le contre-exemple suivant, où δ_M désigne la mesure de Dirac au point M :

$N = 2$. Soit $\mu_o = \delta_{(o,o)} + \delta_{(1,o)}$ et $\mu_n = \frac{1}{2}\,\delta_{(o,o)} + \frac{1}{2}\,\delta_{(o,1/n)} + \delta_{(1,o)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers μ_o et $Q(\mu_o, 0) = 2$ alors que $Q(\mu_n, 0) = 1{,}5$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ∎

Cependant $Q(.,0)$ est continue en μ_o si μ_o ne charge pas les frontières des parties convexes de $\mathbb{R}^N$. En effet, si on pose $\rho = \rho_p(\mu,\mu_o)$ et si on reprend les notations de la démonstration de II.A., quel que soit $t > 0$,

$$0 \leqslant Q(\mu,0) \leqslant Q(\mu,t) \leqslant \sup_{B\in\beta_{\alpha(t)}} \mu(B) \leqslant \sup_{B\in\beta_{\alpha(t)}} \mu_o(B^{2\beta}) + 2\rho$$

$$\leqslant \sup_{B\in\beta_{\alpha(t)+4\rho}} \mu_o(B) + 2\rho .$$

Et cette dernière quantité tend vers $Q(\mu_o,0) = 0$ quand t et ρ tendent vers 0, d'après I.C.

Cette dernière propriété entraîne, grâce à (1), la continuité de Q en tout point (μ_o,t_o) de $M_b \times \mathbb{R}^+$ tel que μ_o ne charge pas les frontières des parties convexes de $\mathbb{R}^N$.

Enfin, toujours dans le cas où $\sup_{C\in C} \mu_o(\partial C) = 0$, si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers μ_o, la suite de fonctions $(Q(\mu_n,.))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $Q(\mu_o,.)$ puisque, d'après [2] p. 1-16 ;

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{C\in C} |\mu_n(C) - \mu_o(C)| = 0 \quad . \blacksquare$$

Le théorème II.A. et la proposition II.C. pourraient laisser croire que, étant donné $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M_b$ convergeant faiblement vers μ_o et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ convergeant en décroissant vers t_o, la suite $(Q(\mu_n,t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $Q(\mu_o,t_o)$. Le contre-exemple suivant montre que ce serait une erreur.

$N = 2$. Soit $\mu_o = \delta_{(o,1)} + \delta_{(o,-1)} + \delta_{(1,o)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_n = \delta_{(o,1)} + \delta_{(o,-1)} + \delta_{(1+1/n,o)}$. Alors $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers μ_o , $(1 + \frac{1}{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en décroissant vers 1 et, pour tout, $Q(\mu_o,1) = 3$ alors que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q(\mu_n, 1+ 1/2n) = 2 \quad . \blacksquare$$

Cependant nous verrons dans le troisième paragraphe de cet article que, si P_o est une probabilité , si $P_n^{\bullet}$ désigne la loi empirique d'un échantillon de taille n de loi P_o et si $t_n \downarrow t_o$, alors

$$\Pr\{\omega / \lim_{n\to+\infty} Q(P_n^{\omega}, t_n) = Q(P_o, t_o)\} = 1 \; .$$

Pour conclure ce paragraphe nous allons donner le pendant pour les applications $Q(.,t)$, de la proposition II.B. qui nous permettra, dans la suite de cet article, de préciser la vitesse de convergence des estimateurs qui y seront définis.

Etant donné $\varepsilon > 0$, $t \in \mathbb{R}^+$ et $(\mu_o,\mu_1) \in M_b \times M_b$, si $\rho_p(\mu_o,\mu_1) < \varepsilon$, alors :

$$|Q(\mu_o,t)-Q(\mu_1,t)| \leq \sup_{C\in C_t} |\mu_o(C)-\mu_1(C)| \leq \sup_{C\in C_t} \mu_o(\partial_{2\varepsilon}C) + 3\varepsilon$$

En effet, quel que soit $C \in C_t$,

$$\mu_o(C) - \mu_1(C) \leq \mu_1(C^{\varepsilon}) + \varepsilon - \mu_o(C^{-\varepsilon}) + \varepsilon \leq \mu_o(C^{2\varepsilon}) - \mu_o(C^{-\varepsilon}) + 3\varepsilon$$

et

$$\mu_1(C) - \mu_o(C) \leq \mu_o(C^{\varepsilon}) + \varepsilon - \mu_1(C^{-\varepsilon}) + \varepsilon \leq \mu_o(C^{\varepsilon}) - \mu_o(C^{-2\varepsilon}) + 3\varepsilon \; ,$$

puisque $(C^{-\varepsilon})^{\varepsilon} \subset C$, $(C^{-2\varepsilon})^{\varepsilon} \subset C^{-\varepsilon}$ et $(C^{\varepsilon})^{\varepsilon} = C^{2\varepsilon}$.

III - ESTIMATION.-

Ce paragraphe est consacré à l'estimation de la fonction de concentration d'une probabilité quelconque P_o sur $\mathbb{R}^N$ et d'un convexe qui, à t fixé, réalise $Q(P_o,t)$ ainsi qu'à l'étude de la vitesse de convergence des estimateurs utilisés.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},Pr)$ dans $\mathbb{R}^N$ muni de sa tribu borélienne, indépendantes et de même loi P_o. La tribu $\mathcal{A}$ est supposée complète. Pour tout $(n,\omega) \in \mathbb{N}^* \times \Omega$, on pose

$$P_n^\omega = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \delta_{X_n}(\omega) \quad .$$

Quel que soit $(n,\omega) \in \mathbb{N}^* \times \Omega$, P_n^ω est une mesure discrète ayant un nombre fini d'atomes. Une fois déterminés les volumes des enveloppes convexes de toutes les parties de l'ensemble des atomes de P_n^ω, le calcul de $Q(P_n^\omega,.)$ et la mise en évidence d'un convexe réalisant, à t fixé, $Q(P_n^\omega,t)$ se ramènent au calcul du maximum d'un nombre fini de réels, même pour les valeurs de t vérifiant $Q(P_n^\omega,t) = Q(P_n^\omega,0)$.

Les arguments utilisés par P. Roger ([1] p. 46) prouvent que $Q(P_n^\bullet,t)$ est une v.a.r. pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^+$.

Le théorème suivant montre que $Q(P_n^\bullet,.)$ est un estimateur convergent de $Q(P_o,.)$ au sens de la convergence simple. Aucune hypothèse n'est faite sur P_o ; ce n'est donc pas une simple conséquence des résultats figurant dans le deuxième paragraphe et de la convergence faible presque sûre de (P_n) vers P_o.

III.A. - Théorème.-

$$\Pr\{\omega \;/\; \forall t \in \mathbb{R}^+ \;,\; \lim_{n\to+\infty} Q(P_n^\omega, t) = Q(P_o, t)\} = 1 \;.$$

Démonstration :

$Q(P_o,.)$ est continue à droite et monotone ; l'ensemble de ses points de discontinuité est donc au plus dénombrable. On le note $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ en y incluant 0 à cause du rôle particulier que joue ce nombre dans les problèmes de continuité.

Le théorème I.E. indique l'existence, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, d'un convexe fermé C_i de volume t_i vérifiant

$$P_o(C_i) = Q(P_o, t_i) \;.$$

Posons $\Omega_o = \{\omega \;/\; (P_n^\omega)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers $P_o\}$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\Omega_i = \{\omega \;/\; \lim_{n\to+\infty} P_n^\omega(C_i) = P_o(C_i)\}.$$

Alors, grâce en particulier à la loi forte des grands nombres,

$$\Pr\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i\Big) = 1 \;.$$

Soit $\omega \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$.

Quel que soit $t \in \mathbb{R}^+ - \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$, puisque $\omega \in \Omega_o$, le théorème II.F. entraîne

$$\lim_{n\to+\infty} Q(P_n^\omega, t) = Q(P_o, t) \;.$$

Soit $t_j \in \{t_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un point de continuité $\tau > t_j$ de $Q(P_o,.)$ qui vérifie :

$$0 \leq Q(P_o,\tau) - Q(P_o,t_j) \leq \varepsilon/2 \quad . \tag{1}$$

Soit $n_o \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $n \geq n_o$,

$$|Q(P_n^\omega,\tau) - Q(P_o,\tau)| \leq \varepsilon/2 \ . \tag{2}$$

Puisque $\omega \in \Omega_j$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $n \geq n_1$,

$$|P_n^\omega(C_j) - P_o(C_j)| \leq \varepsilon \ . \tag{3}$$

Alors, si $n \geq \mathrm{Max}(n_o,n_1)$, d'après (1) et (2) ,

$$Q(P_n^\omega,t_j) - Q(P_o,t_j) \leq Q(P_n^\omega,\tau) - Q(P_o,\tau) + Q(P_o,\tau) - Q(P_o,t_j) \leq \varepsilon$$

et d'après (3) ,

$$Q(P_o,t_j) - Q(P_n^\omega,t_j) = P_o(C_j) - Q(P_n^\omega,t_j) \leq P_o(C_j) - P_n^\omega(C_j) \leq \varepsilon \quad . \blacksquare$$

Si l'application $Q(P_o,.)$ est continue, en particulier si P_o ne charge pas les frontières des parties convexes de $\mathbb{R}^N$, la convergence simple de $Q(P_n^\omega,.)$ vers $Q(P_o,.)$ entraîne sa convergence uniforme. Dans ce cas, on obtient donc

$$\Pr\{\omega \ / \ \lim_{n\to+\infty} \ \sup_{t\in\mathbb{R}^+} |Q(P_n^\omega,t) - Q(P_o,t)| = 0\} = 1 \quad .$$

La vitesse de convergence de $Q(P_n^\bullet,t)$ vers $Q(P_o,t)$ à t fixé, et celle de la convergence uniforme de $Q(P_n^\bullet,.)$ vers $Q(P_o,.)$ dans le cas où $Q(P_o,.)$ est continue découleront de la vitesse de convergence de $P_n^\bullet(B)$ vers $P_o(B)$, où B est un borélien quelconque de $\mathbb{R}^N$, et celle de la convergence de $P_n^\bullet$ vers P_o au sens de ρ_p.

Pour la première, en appliquant l'inégalité de Bernstein-Fréchet ([12]) à la suite $(1_B(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre $P_o(B)$, on obtient, pour tout $(n,\varepsilon) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[$,

$$\Pr\{P_n^\bullet(B) \leq P_o(B) - \varepsilon\} \leq e^{-2n\varepsilon^2}$$

et
$$\Pr\{P_o(B) \leq P_n^\bullet(B) - \varepsilon\} \leq e^{-2n\varepsilon^2} \quad . \tag{*}$$

J. Geffroy a obtenu la vitesse de convergence de $P_n^\bullet$ vers P_o, au sens de ρ_p, dans le cas où P_o est la loi d'une mesure aléatoire à valeurs dans l'ensemble des mesures positives et finies à distance finie d'un espace métrique séparable. Mais il n'utilise pas le fait que les réalisations des variables aléatoires sont des mesures.

En voici une démonstration dans le cadre qui nous intéresse. Les notations sont celles de ce paragraphe, mais P_o désigne une probabilité sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_X$ d'un espace métrique séparable X quelconque.

III.B. - Lemme (*dû à J. Geffroy*).

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $K \geq 4$ tel que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Pr\{\rho_p(P_n^\bullet, P_o) \geq \varepsilon\} \leq K\, e^{-2n(\varepsilon/K)^2} \quad .$$

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. X étant séparable, il existe une partition $\mathcal{D}$ de X à l'aide de boréliens de diamètre inférieur à ε.

Soit M le cardinal d'une partie finie $\mathcal{D}_o$ de $\mathcal{D}$ vérifiant

$$P_o(\bigcup_{\Delta\in\mathcal{D}_o} \Delta) \geq 1 - \varepsilon/4 \quad . \tag{1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$E_n = \bigcap_{\Delta\in\mathcal{D}_o} \{P_n^{\bullet}(\Delta) \geq P_o(\Delta) - \varepsilon/2M\} \quad ,$$

$$E_n' = \bigcap_{\Delta\in\mathcal{D}_o} \{P_o(\Delta) \geq P_n^{\bullet}(\Delta) - \varepsilon/2M\} \quad ,$$

et
$$E_n'' = \{P_n^{\bullet}(\bigcup_{\Delta\in\mathcal{D}-\mathcal{D}_o} \Delta) \leq \varepsilon/2\} \quad .$$

Soit $\omega \in E_n \cap E_n' \cap E_n''$. Alors $\rho_p(P_n^{\omega},P_o) \leq \varepsilon$. En effet, étant donné $A \in \mathcal{B}_X$ et $\mathcal{D}_A = \{\Delta \in \mathcal{D} \;/\; \Delta \cap A \neq \emptyset\}$,

$$A \subset \bigcup_{\Delta\in\mathcal{D}_A} \Delta \subset A^{\varepsilon} \quad .$$

D'où, d'après (1) et puisque $\omega \in E_n$ et $M = \text{Card}\, \mathcal{D}_o$,

$$P_o(A) \leq P_o(\bigcup_{\Delta\in\mathcal{D}_A} \Delta) \leq P_o(\bigcup_{\Delta\in\mathcal{D}_A\cap\mathcal{D}_o} \Delta) + \varepsilon/4 \leq \sum_{\Delta\in\mathcal{D}_A\cap\mathcal{D}_o} (P_n^{\omega}(\Delta) + \varepsilon/2M) + \varepsilon/4$$

$$\leq P_n^{\omega}(A^{\varepsilon}) + 3\varepsilon/4$$

et, puisque $\omega \in E_n' \cap E_n''$,

$$P_n^{\omega}(A) \leq P_n^{\omega}(\bigcup_{\Delta\in\mathcal{D}_A} \Delta) \leq P_n^{\omega}(\bigcup_{\Delta\in\mathcal{D}_A\cap\mathcal{D}_o} \Delta) + \varepsilon/2 \leq \sum_{\Delta\in\mathcal{D}_A\cap\mathcal{D}_o} (P_o(\Delta) + \varepsilon/2M) + \varepsilon/2$$

$$\leq P_o(A^{\varepsilon}) + \varepsilon \quad .$$

Ce qui permet de conclure en posant $K = 2(M+1)$ car , d'après (*) ,

$$1 - \Pr(E_n \cap E'_n \cap E''_n) \leq M \exp(- \frac{n\varepsilon^2}{2M^2}) + M \exp(- \frac{n\varepsilon^2}{2M^2}) + \exp(- \frac{n\varepsilon^2}{8})$$

$$\leq 2M \exp(- \frac{n\varepsilon^2}{2(M+1)^2}) + \exp(- \frac{n\varepsilon^2}{2(M+1)^2})$$

$$\leq 2(M+1) \exp(- 2n \frac{\varepsilon^2}{(2(M+1))^2}) \quad . \qquad (2)$$

III.C. - Proposition.-

Quel que soit $(\eta,t) \in]0,1[\times \mathbb{R}^+$, il existe deux réels positifs K et K' tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Pr\{|Q(P_n^\bullet,t) - Q(P_o,t)| \geq \eta\} \leq K\, e^{-nK'} \ .$$

Démonstration :

Soit $(\eta,t) \in]0,1[\times \mathbb{R}^+$.

Si t est un point de continuité de $Q(P_o,.)$, alors le théorème II.F. indique que P_o est un point de continuité de $Q(.,t)$. Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme III.B. en posant $K' = 2(\varepsilon/K)^2$.

Sinon considérons $\tau > t$, point de continuité de $Q(P_o,.)$, vérifiant

$$0 \leq Q(P_o,\tau) - Q(P_o,t) \leq \eta/2$$

et $C_o \in \mathcal{C}_t$ tel que

$$P_o(C_o) = Q(P_o,t) \ .$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\{|Q(P_n^\bullet,t)-Q(P_o,t)| \geq \eta\} \subset \{Q(P_n^\bullet,t) \geq Q(P_o,t)+\eta\} \cup \{Q(P_n^\bullet,t) \leq Q(P_o,t)-\eta\}$$

$$\subset \{Q(P_n^\bullet,\tau) \geq Q(P_o,\tau) + \eta/2\} \cup \{\dot{P}_n(C_o) \leq P_o(C_o)-\eta\} .$$

Donc, grâce à (*), au théorème II.F. et au lemme III.B., il existe deux réels positifs K_1 et K_1' tels que

$$\Pr\{|Q(P_n^\bullet,t) - Q(P_o,t)| \geq \eta\} \leq K_1\, e^{-nK_1'} + e^{-2n\eta^2} .$$

Ce qui permet de conclure en posant $K = K_1 + 1$ et $K' = \mathrm{Min}(K_1' , 2\eta^2)$. ■

Dans le cas où $Q(P_o,.)$ est continue on obtient même $\Pr\{\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |Q(P_n^\bullet,t) - Q(P_o,t)| \geq \eta\} \leq K\, e^{-nK'}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, car on a vu que dans ce cas, si $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers P_o , $(Q(\pi_n,.))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $Q(P_o,.)$.

La dernière propriété énoncée dans le deuxième paragraphe et l'inégalité (2) de la démonstration du lemme III.B. montrent que pour préciser les nombres K et K' il suffirait de connaître les nombres $\sup_{C\in\mathcal{C}_t} P_o(\partial_{2\varepsilon}C)$, pour $\varepsilon > 0$, et un borélien rassemblant la masse de P_o à ε près. Nous verrons dans le quatrième paragraphe de cet article qu'il est possible d'estimer un tel borélien de volume minimal.

Il a été annoncé, dans la conclusion du deuxième paragraphe, que l'ensemble des ω tels que, pour tout $t_o \in \mathbb{R}^+$ et toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels positifs convergeant vers t_o par valeurs supérieures ,

$$\lim_{n\to+\infty} Q(P_n^\omega,t_n) = Q(P_o,t_o) \quad ;$$

est de probabilité 1. Cela vient du fait que cet ensemble contient $\Omega'_o = \{(Q(P_n^\cdot,.))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $Q(P_o,.)\}$. En effet soit $\omega \in \Omega'_o$, $t_o \in \mathbb{R}^+$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant vers t_o par valeurs supérieures. $Q(P_o,.)$ étant continue à droite et croissante, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, Q(P_n^\omega,t_n) \leq \lim_{n\to+\infty} Q(P_n^\omega,t_o + \eta) = Q(P_o,t_o+\eta) \leq Q(P_o,t_o) + \varepsilon \ .$$

Donc $$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, Q(P_n^\omega,t_n) \leq Q(P_o,t_o) \quad .$$

Ce qui permet de conclure puisque

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, Q(P_n^\omega,t_n) \geq \lim_{n\to+\infty} Q(P_n^\omega,t_o) = Q(P_o,t_o) \quad . \blacksquare$$

Cependant cette propriété n'est plus vraie si la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers t_o par valeurs inférieures, comme le prouve le contre-exemple suivant :

$N = 2$. Soit $P_o = \frac{1}{3}\,\delta_{(o,o)} + \frac{1}{3}\,\delta_{(1,o)} + \frac{1}{3}\,\delta_{(o,1)}$ et $t_o = 1/2$.

Alors si ω est tel que $(Q(P_n^\omega,.))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $Q(P_o,.)$, et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $t_n \uparrow t_o$ et $t_n \neq t_o$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, Q(P_n^\omega,t_n) \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, (\lim_{m\to+\infty} Q(P_n^\omega,t_m))$$

du fait de la croissance des fonctions de concentration.

Mais $Q(P_o,1/2) = 1$ et, puisque les fonctions de concentration sont continues à droite et monotones,

$$\lim_{n\to+\infty} (\lim_{m\to+\infty} Q(P_n^\omega,t_m) = \lim_{t\to t_o^-} Q(P_o,t) = 2/3 \ .$$

L'estimation d'un élément de $\mathcal{C}_t$ réalisant $Q(P_o,t)$ découle du théorème, plus général, III.E. qui se démontre à l'aide du petit lemme suivant.

III.D. - Lemme.-

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F_b$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_b$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} d_H(F_n,F_o) = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \rho_p(\mu_n,\mu_o) = 0 \quad .$$

Alors

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, \mu_n(F_n) \leq \mu_o(F_o) \quad .$$

Démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$d_n = d_H(F_n,F_o)$$

et

$$\rho_n = \rho_p(\mu_n,\mu_o) \quad .$$

Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu_n(F_n) \leq \mu_n(F_o^{2d_n}) \leq \mu_o(F_o^{2d_n+2\rho_n}) + 2\,\rho_n \,.$$

Ce qui permet de conclure puisque

$$F_o = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_o^{2d_n+2\rho_n} \quad . \blacksquare$$

On suppose, dans ce qui suit, que P_o n'est pas portée par un hyperplan affine, c'est-à-dire $Q(P_o,.) \not\equiv 1$. Le cas $Q(P_o,t) = Q(P_o,0)$ sera étudié à la fin de ce paragraphe. Quel que soit $t \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$Q(P_o,t) > Q(P_o,0)$, on pose

$$\Gamma_t = \{C \in \mathcal{C}_t \ / \ P_o(C) = Q(P_o,t)\}$$

et, pour tout $(n,\omega) \in \mathbb{N}^* \times \Omega$,

$$\Gamma_{n,\omega,t} = \{C \in \mathcal{C}_t \ / \ P_n^\omega(C) = Q(P_n^\omega,t)\} \quad .$$

Tous ces ensembles sont non vides ; même si $Q(P_n^\omega,t) = Q(P_n^\omega,0)$ car, dans ce cas, P_n^ω étant à support compact K , si on note H un hyperplan affine vérifiant $P_n^\omega(H) = Q(P_n^\omega,0)$, il existe un dilaté de l'enveloppe convexe de $K \cap H$ qui appartient à $\mathcal{C}_t$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, Γ_t^ε désigne le dilaté d'ordre ε de Γ_t dans l'ensemble des fermés bornés de $\mathbb{R}^N$ muni de la distance de Hausdorff d_H ; c'est-à-dire $\Gamma_t^\varepsilon = \{C \in F_b \ / \ d_H(C,\Gamma_t) < \varepsilon\}$.

<u>*III.E. - Théorème.*</u>-

L'ensemble des ω vérifiant la propriété suivante est de probabilité 1.

Quel que soit $t \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $Q(P_o,t) > Q(P_o,0)$ et Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_o$,

$$\Gamma_{n,\omega,t} \subset \Gamma_t^\varepsilon \quad .$$

<u>Démonstration</u> :

Posons de nouveau

$$\Omega_o = \{\omega \ / \ (P_n^{\omega})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge faiblement vers } P_o\}$$

et $\Omega'_o = \{\omega \ / \ (Q(P_n^{\omega},.))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $Q(P_o,.)\}$.

Alors $Pr(\Omega_o \cap \Omega'_o) = 1$.

Soit $\omega \in \Omega_o \cap \Omega'_o$.

Soit $t_o \in \mathbb{R}^+$ tel que $Q(P_o,t_o) > Q(P_o,0)$ et $\varepsilon > 0$.

Un petit raisonnement par contraposée montre qu'il s'agit de prouver que toute suite $(C_n^{\omega})_{n\in\mathbb{N}^*}$ obtenue en prenant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un élément quelconque de Γ_{n,ω,t_o} est relativement compacte, pour d_H , et admet comme valeurs d'adhérence des éléments de Γ_{t_o} .

Soit $(C_n^{\omega})_{n\in\mathbb{N}^*}$ une telle suite et $a = Q(P_o,t_o) - Q(P_o,0) > 0$. $(C_n^{\omega})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est relativement compacte car tous ses termes sont inclus dans une même boule de $\mathbb{R}^N$. En effet, puisque $\omega \in \Omega'_o$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $n \geq n_1$,

$$P_n^{\omega}(C_n^{\omega}) = Q(P_n^{\omega},t_o) > Q(P_o,t_o) - \frac{a}{4} = \eta > Q(P_o,0) \quad . \tag{1}$$

Donc, si $\underline{\lim}_{t\to t_o} Q(P_o,t) > Q(P_o,0)$, il suffit d'appliquer la proposition I.I. car $\omega \in \Omega_o$. Et, dans le cas contraire, étant donné une boule $B(0,R)$ vérifiant $P_o(\partial B(0,R)) = 0$ et

$$P_o(B(0,R)) > 1 - (Q(P_o,0) + \frac{a}{4}) ,$$

il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $n \geq n_2$,

$$P_n^{\omega}(B(0,R)) > 1 - (Q(P_o,0) + \frac{a}{2}) \ ; \tag{2}$$

et la proposition I.G. indique l'existence de δ_o tel que

$$d = \sup_{C \in \mathcal{C}_{t_o,\eta}^{\delta_o, P_o}} \operatorname{diam}(C) < +\infty \quad ;$$

soit n_3 tel que, si $n \geq n_3$, $\rho_p(P_n^\omega, P_o) < \delta_o$; alors, grâce à (1) et (2) si $n \geq \operatorname{Max}(n_1, n_2, n_3)$,

$$C_n^\omega \subset B(0, R+d) .$$

Soit C_o la limite d'une sous-suite convergente $(C_{n_k}^\omega)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de $(C_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Le lemme I.A. montre que $C_o \in \mathcal{C}_{t_o}$. Ce qui permet de conclure car, d'après le lemme III.D. ,

$$Q(P_o, t_o) = \lim_{n \to +\infty} Q(P_n^\omega, t_o) = \overline{\lim_{k \to +\infty}}\, Q(P_{n_k}^\omega, t_o) = \overline{\lim_{k \to +\infty}}\, P_{n_k}(C_{n_k}^\omega) \leq P_o(C_o) \quad . \blacksquare$$

Cette démonstration n'utilise que la convergence faible de $(P_n^\omega)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers P_o et la convergence de $Q(P_n^\omega, t_o)$ vers $Q(P_o, t_o)$. Il en résulte que, étant donné $(\mu_o, t_o) \in \mathcal{M}_b \times \mathbb{R}^+$ tel que $Q(\mu_o, .)$ soit continue en t_o et $Q(\mu_o, t_o) > Q(\mu_o, 0)$ et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant faiblement vers μ_o , quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe $n_o \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $n \geq n_o$,

$$\Gamma_{n, t_o} \subset \Gamma_{t_o}^\varepsilon \quad ,$$

où $$\Gamma_{t_o} = \{C \in \mathcal{C}_{t_o} \ / \ \mu_o(C) = Q(\mu_o, t_o)\}$$

et $$\Gamma_{n, t_o} = \{C \in \mathcal{C}_{t_o} \ / \ \mu_n(C) = Q(\mu_n, t_o)\} \quad .$$

Le théorème précédent montre également que, si Γ_{t_o} est un singleton $\{C_o\}$, toute suite $(C_n^{\bullet})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un estimateur convergent de C_o au sens de d_H .

La vitesse de convergence de cet estimateur découle de la proposition plus générale III.G. qui se démontre à l'aide du lemme suivant.

Soit $t_o \in \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $Q(P_o,t_o) > Q(P_o,0)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute probabilité P sur $\mathbb{R}^N$, on pose :

$$Q_\varepsilon(P,t_o) = \sup_{\substack{C\in\mathcal{C}_{t_o} \\ C\notin\Gamma^\varepsilon_{t_o}}} P(C) \quad .$$

III.F. - Lemme.-

Soit $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de probabilités convergeant faiblement vers P_o et $\varepsilon > 0$. Alors

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, Q_\varepsilon(\pi_n,t_o) \leq Q_\varepsilon(P_o,t_o) \quad .$$

Démonstration :

D'après le théorème I.E., il existe un hyperplan affine H_o vérifiant

$$P_o(H_o) = Q(P_o,0) \quad .$$

Soit $0 \in H_o$. Alors

$$Q(P_o,0) = P_o(H_o) = \lim_{R\to+\infty} P_o(H_o \cap B(0,R)) \quad . \tag{1}$$

Pour tout $R > 0$, il existe un dilaté fermé de $H_o \cap B(0,R)$, noté C_R, qui appartient à C_{t_o}.

Le théorème I.D. entraîne

$$\sup_{C\in\Gamma_{t_o}} \operatorname{diam}(C) < +\infty \ .$$

Donc $d_1 = \sup_{C\in\Gamma^{\varepsilon}_{t_o}} \operatorname{diam}(C) < +\infty$.

Finalement, si $R > d_1/2$, $C_R \notin \Gamma^{\varepsilon}_{t_o}$ et, d'après (1),

$$Q_\varepsilon(P_o,t_o) \geq Q(P_o,0) \ .$$

Supposons que

$$a = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, Q_\varepsilon(\Pi_n,t_o) > Q_\varepsilon(P_o,t_o) \geq Q(P_o,0) = b \quad . \tag{2}$$

Soit $(\Pi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite de $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$Q_\varepsilon(\Pi_{n_k},\ t_o) > a - \frac{a-b}{2k} \ .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons C_k un élément de $C_{t_o} \cap (\Gamma^{\varepsilon}_{t_o})^c$ vérifiant

$$\Pi_{n_k}(C_k) > a - \frac{a-b}{2k} \ . \tag{3}$$

Les arguments utilisés dans la démonstration du théorème III.E. montrent que la suite $(C_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est d_H- relativement compacte. Soit C_o la limite d'une sous-suite convergente $(C_{k_i})_{i\in\mathbb{N}^*}$ de $(C_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$; alors, d'après le lemme I.A., $C_o \in \mathcal{C}_{t_o}$ et, d'après (3), $C_o \notin \Gamma^{\varepsilon}_{t_o}$.

Donc le lemme III.D. entraîne

$$\overline{\lim_{i\to+\infty}}\ \Pi_{n_{k_i}}(C_{k_i}) \leq P_o(C_o) \leq Q_\varepsilon(P_o,t_o) \ .$$

Ce qui contredit (2). ■

III.G. - Proposition.-

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $(K,K') \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $B_n \in \mathcal{A}$ vérifiant

$$B_n \subset \{\omega \ / \ \Gamma_{n,\omega,t_o} \subset \Gamma^{\varepsilon}_{t_o}\}$$

et $\Pr(B_n) > 1 - K\, e^{-nK'}$.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$.

1) Supposons $Q_\varepsilon(P_o,t_o) = Q(P_o,t_o)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons C_n un des éléments C de $\mathcal{C}_{t_o} \cap (\Gamma^{\varepsilon}_{t_o})^c$ vérifiant

$$P_o(C) \geq Q_\varepsilon(P_o,t_o) - (Q(P_o,t_o) - Q(P_o,0)) \ / \ 2n \ .$$

Grâce aux arguments déjà utilisés, $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est d_H - relativement compacte et la limite C_o d'une de ses sous-suites convergentes $(C_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ vérifie

$$C_o \in \mathcal{C}_{t_o}$$

et $$P_o(C_o) \geq \overline{\lim_{k\to+\infty}} P_o(C_{n_k}) = Q_\varepsilon(P_o,t_o) = Q(P_o,t_o) \quad .$$

Donc $C_o \in \Gamma_{t_o}$. Ce qui est absurde, puisque $(C_{n_k}) \subset \mathcal{C}_{t_o} \cap (\Gamma^\varepsilon_{t_o})^c$.

Donc $0 < a = Q(P_o,t_o) - Q_\varepsilon(P_o,t_o)$.

Le lemme III.F. peut se traduire par : quel que soit $\delta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $(\rho_p(\pi,P_o) \leq \eta)$ implique $(Q_\varepsilon(\pi,t_o) \leq Q_\varepsilon(P_o,t_o) + \delta)$.

En prenant $\delta = \frac{a}{2}$, on obtient $\eta > 0$ tel que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\{\omega / \ Q_\varepsilon(P^\omega_n,t_o) \geq Q_\varepsilon(P_o,t_o) + \tfrac{a}{2}\} \subset \{\omega \ / \ \rho_p(P^\omega_n,P_o) \geq \eta\} \quad .$$

Or, si (n,ω) vérifie $|Q(P^\omega_n,t_o) - Q(P_o,t_o)| < a/2$ et $\Gamma_{n,\omega,t_o} \not\subset \Gamma^\varepsilon_{t_o}$, alors

$$Q_\varepsilon(P^\omega_n,t_o) = Q(P^\omega_n,t_o) > Q(P_o,t_o) - a/2 = Q_\varepsilon(P_o,t_o) + a/2 \quad .$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\{\omega \ / \ \Gamma_{n,\omega,t_o} \not\subset \Gamma^\varepsilon_{t_o}\} = {} & (\{\omega \ / \ |Q(P^\omega_n,t_o)-Q(P_o,t_o)| < a/2\} \\ & \cap \{\omega \ / \ \Gamma_{n,\omega,t_o} \not\subset \Gamma^\varepsilon_{t_o}\}) \\ & \cup (\{\omega \ / \ |Q(P^\omega_n,t_o)-Q(P_o,t_o)| \geq a/2\} \\ & \cap \{\omega \ / \ \Gamma_{n,\omega,t_o} \not\subset \Gamma^\varepsilon_{t_o}\}) \\ \subset {} & \{\omega \ / \ \rho_p(P^\omega_n,P_o) \geq \eta\} \cup \{\omega \ / \ |Q(P^\omega_n,t_o)-Q(P_o,t_o)| \geq a/2\}\end{aligned}$$

Or, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$B^c_n = \{\omega / \ \rho_p(P^\omega_n,P_o) \geq \eta\} \cup \{\omega \ / \ |Q(P^\omega_n,t_o) - Q(P_o,t_o)| \geq a/2\} \ ,$$

le lemme III.B. et la proposition III.C. entraînent l'existence de quatre réels strictement positifs K_1 , K_2 , K_3 et K_4 tels que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Pr(B_n^c) \leq K_1 e^{-nK_2} + K_3 e^{-nK_4} .$$

Il ne reste plus qu'à poser $K = K_1 + K_3$ et $K' = Min(K_2,K_4)$. ■

Si Γ_{t_o} est un singleton $\{C_o\}$, la proposition précédent entraîne : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(K,K') \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que, quel que soit la suite $(C_n^\bullet)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\{\omega \ / \ d_H(C_n^\omega,C_o) > \varepsilon\}$ contient $B_n \in A$ tel que

$$Pr(B_n) > 1 - K e^{-nK'} .$$

Nous allons maintenant étudier ce que devient le théorème III.E. lorsque t_o vérifie $Q(P_o,t_o) = Q(P_o,0) > 0$.

Si P_o est à support compact, $Q(P_o,0)$ est atteint sur une partie compacte d'un hyperplan affine de $\mathbb{R}^N$ et tout ce qui précède reste valable.

Dans le cas contraire il s'agit de mettre en évidence un hyperplan affine H_o vérifiant

$$P_o(H_o) = Q(P_o,0) = Q(P_o,t_o) .$$

On note Γ_o et $\Gamma_{n,\omega}$, pour tout $(n,\omega) \in \mathbb{N}^* \times \Omega$, l'ensemble des hyperplans qui réalisent respectivement $Q(P_o,0)$ et $Q(P_n^\omega,0)$.

Soit O un point de $\mathbb{R}^N$. Soit $R_o \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$P_o(B(0,R_o)) > 1 - Q(P_o,0) / 4 \quad .$$

Soit Ω_{R_o} l'ensemble des $\omega \in \Omega$ vérifiant

$(P_n^{\omega})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers P_o ,

$$\lim_{n\to+\infty} P_n^{\omega}(B(0,R_o)) = P_o\, B(0,R_o)$$

et
$$\lim_{n\to+\infty} Q(P_n^{\omega},0) = Q(P_o,0) \quad .$$

Le théorème III.A. et la loi forte des grands nombres entraînent :

$$Pr(\Omega_{R_o}) = 1 \quad .$$

Soit $\omega \in \Omega_{R_o}$ et $n_o \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $n \geq n_o$,

$$P_n^{\omega}(B(0,R_o)) > 1 - \frac{1}{2}\, Q(P_o,0)$$

et
$$Q(P_n^{\omega},0) > \frac{1}{2}\, Q(P_o,0) \quad .$$

Alors les ensembles

$$\Gamma_{0,R} = \{H \cap B(0,R) \ / \ H \in \Gamma_o\}$$

et
$$\Gamma_{n,\omega,R} = \{H \cap B(0,R) \ / \ H \in \Gamma_{n,\omega}\} \quad ,$$

pour tout $n \geq n_o$ et tout $R \geq R_o + 1$, sont non vides et ne contiennent que des parties d'hyperplans affines de diamètres supérieurs à 1.

Soit $R \geq R_o + 1$.

Les arguments utilisés dans la démonstration de la première partie du théorème I.E. et dans celle du théorème III.E. montrent que toute suite $(\Delta_n)_{n\geq n_o}$ obtenue en notant Δ_n , pour tout $n \geq n_o$, l'un des éléments de $\Gamma_{n,\omega,R}$ est d_H - relativement compacte et possède pour valeurs d'adhérence des parties compactes d'hyperplans affines contenus dans des éléments de Γ_o .

Ce qui permet d'estimer Γ_o si Γ_o est un singleton et, d'une manière plus générale, d'obtenir :

quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \geq n_o$ tel que, si $n \geq n_1$,

$$\Gamma_{n,\omega,R} \subset \Gamma^{\varepsilon}_{0,R} \quad . \blacksquare$$

IV - ε-SUPPORT. DEFINITION ET ESTIMATION.-

Le support de la loi normale centrée et réduite Π est $\mathbb{R}^N$; mais, si O est l'origine de $\mathbb{R}^N$, $\Pi(B(O,3)^c)$ est très petit. Il peut être intéressant de connaître, s'il existe, un convexe compact C, de volume minimal, rassemblant la masse d'une probabilité P à ε près, où $\varepsilon \in]0,1[$; c'est-à-dire vérifiant $P(C) = 1 - \varepsilon$. Un tel convexe existe si P est absolument continue par rapport à λ. Mais si P est quelconque, il est possible que, pour tout borélien B, $P(B) \neq 1 - \varepsilon$.

C'est pourquoi nous définissons l'ε-support d'une probabilité quelconque de la manière suivante.

Soit P_o une probabilité vérifiant $Q(P_o,0) \neq 1$; autrement dit P_o n'est pas portée par un hyperplan *affine*. Soit ε un réel tel que $0 < \varepsilon < 1 - Q(P_o,0)$. Puisque $Q(P_o,.)$ est monotone et continue à droite, le nombre $t_o = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ \ / \ Q(P_o,t) \geq 1-\varepsilon\}$ existe et vérifie $Q(P_o,t_o) \geq 1 - \varepsilon > Q(P_o,0)$. Alors l'ensemble $S_\varepsilon = \{C \in \mathcal{C}_{t_o} \ / \ P_o(C) \geq 1 - \varepsilon\}$ est non vide puisqu'il contient $\{C \in \mathcal{C}_{t_o} \ / \ P_o(C) = Q(P_o,t_o)\}$ qui, d'après le théorème I.E., est non vide.

On appelle ε-support de P_o tout élément de S_ε.

Tout ε-support C_ε de P_o vérifie : quel que soit $C \in \mathcal{C}$ tel que $\lambda(C) < \lambda(C_\varepsilon)$,

$$P_o(C) < 1 - \varepsilon .$$

C_ε est donc un des convexes fermés de $\mathbb{R}^N$, de volume minimal t_o, qui rassemblent la masse de P_o à ε près.

Mais, comme le montre l'exemple suivant, cette définition ne permet pas d'estimer un ε-support de P_o à l'aide d'un ε-support de la loi empirique d'un échantillon de loi P_o .

$N = 2$. On reprend les notations du troisième paragraphe.

Soit O l'origine de $\mathbb{R}^2$ et $A = (0,100)$. Si P_o a pour densité par rapport à λ la fonction $1_{B(0,1/\sqrt{2\pi})} + \frac{1}{2}\, 1_{B(A,1/\sqrt{\pi})}$, alors $B(0,1/\sqrt{2\pi})$ est l'unique $\frac{1}{2}$ - support de P_o et $\{\omega \,/\, \exists n_o \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $n \geq n_o$, $B(0,\ 1/\sqrt{2\pi})$ est un $\frac{1}{2}$ - support de $P_n^{\omega}\}$ est contenu dans

$$\{\omega \,/\, \exists n_o \in \mathbb{N}^* \text{ tel que, si } n \geq n_o\ ,\ P_n^{\omega}(B(0,1/\sqrt{2\pi})) \geq P_n^{\omega}(B(A,1/\sqrt{\pi}))\}$$

qui est de probabilité nulle ; en effet -1 , par exemple, est un état récurrent de la chaîne de Markov $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = 1_{B(0,1/\sqrt{2\pi})}(X_n) - 1_{B(A,1/\sqrt{\pi})}(X_n) \quad \text{et} \quad Z_n = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \ . \blacksquare$$

Toutefois $P_o(B(A,1/\sqrt{\pi})) = 1 - \frac{1}{2}$ et, quel que soit $C \in \mathcal{C}$ tel que $\lambda(C) < \lambda(B(A,1/\sqrt{\pi}))$, $P_o(C) \leq 1 - \frac{1}{2}$; donc $B(A,\ 1/\sqrt{\pi})$ a des propriétés proches de la définition d'un $\frac{1}{2}$ - support de P_o . Nous dirons que c'est un pseudo ε-support de P_o .

Plus généralement on appelle pseudo ε-support d'une probabilité quelconque P_o tout convexe fermé compact $\tilde{C}_\varepsilon$ vérifiant :

$$P_o(\tilde{C}_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$

et, quel que soit $C \in \mathcal{C}$ tel que $\lambda(C) < \lambda(\tilde{C}_\varepsilon)$,

$$P_o(C) \leq 1 - \varepsilon \quad .$$

Dans ce qui suit $\tilde{S}_\varepsilon$ désigne l'ensemble des pseudo ε-supports de P_o et on pose :

$$A(\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R}^{+*} \ / \ Q(P_o,t) = 1 - \varepsilon\} \ .$$

S'il est clair que $\tilde{S}_\varepsilon$ contient S_ε , il est des cas où ces deux ensembles coïncident. C'est l'objet de la proposition suivante.

IV.A. - Proposition.-

$\tilde{S}_\varepsilon = S_\varepsilon$ si et seulement si $A(\varepsilon)$ est vide ou réduit à un point.

Démonstration :

a) Supposons que $A(\varepsilon)$ soit vide ou réduit à un point. Alors, quel que soit $t > t_o$, $Q(P_o,t) > 1-\varepsilon$ et, quel que soit $t < t_o$, $Q(P_o,t) < 1-\varepsilon$. Donc si $\tilde{C}_\varepsilon \in \tilde{S}_\varepsilon$, alors $\lambda(\tilde{C}_\varepsilon) = t_o$ et, puisque $P_o(\tilde{C}_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$, $\tilde{C}_\varepsilon \in S_\varepsilon$.

b) Le dernier cas possible, compte tenu de la croissance et de la continuité à droite de $Q(P_o,.)$, est $A(\varepsilon) = [t_o, t_1[$ où $t_1 > t_o$.

Soit $C_1 \in \mathcal{C}_{t_1}$ tel que $P_o(C_1) = Q(P_o,t_1)$. Alors $C_1 \in \tilde{S}_\varepsilon$ mais, puisque $S_\varepsilon \subset \mathcal{C}_{t_o}$, $C_1 \notin S_\varepsilon$. ■

Nous avons restreint notre étude au cas $\varepsilon < 1 - Q(P_o,0)$ afin d'être assuré de l'existence d'au moins un ε-support grâce au théorème I.E.. Mais si P est mesure discrète ayant un nombre fini d'atomes, nous avons déjà remarqué que, quel que soit $t \in \mathbb{R}^+$, il existe $C \in \mathcal{C}_t$

tel que $P(C) = Q(P,t)$ même si $Q(P,t) = Q(P,0)$. Nous pouvons donc étendre la définition de l'ε-support au cas où $1 > \varepsilon \geq 1-Q(P_o,0)$ et où P est la loi empirique d'un échantillon de loi P_o.

Cela va nous permettre d'envisager l'estimation d'au moins un ε-support ou pseudo ε-support de P_o.

Reprenons les notations du troisième paragraphe et, pour tout $(n,\omega) \in \mathbb{N}^* \times \Omega$, notons $S_{\varepsilon,n,\omega}$ l'ensemble des ε-supports de P_n^{ω}. Pour tout $\eta > 0$, S_ε^η $(\tilde{S}_\varepsilon^\eta)$ désigne le dilaté d'ordre η de S_ε $(\tilde{S}_\varepsilon)$ dans (F_b, d_H).

IV.B. - Théorème.-

L'ensemble des ω vérifiant la propriété suivante est de probabilité 1 :

Quel que soit $\eta > 0$, il existe n_o tel que, si $n \geq n_o$,

$$S_{\varepsilon,n,\omega} \subset S_\varepsilon^\eta \quad \text{si } A(\varepsilon) \text{ est vide ou réduit à un point}$$

et $$S_{\varepsilon,n,\omega} \subset \tilde{S}_\varepsilon^\eta \quad \text{sinon} .$$

Démonstration :

Soit Ω_1 l'ensemble des ω tels que $(Q(P_n^{\omega},.))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers $Q(P_o,.)$ et $(P_n^{\omega})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers P_o. Alors, grâce en particulier au théorème III.A.,

$$Pr(\Omega_1) = 1 .$$

Soit $\omega \in \Omega_1$ et $\eta > 0$.

D'après la proposition IV.A., il s'agit de montrer que toute suite $(C_n^{\omega})_{n\in\mathbb{N}^*}$, obtenue en notant C_n un élément quelconque de $S_{\varepsilon,n,\omega}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, est d_H - relativement compacte et possède pour valeurs d'adhérence des éléments de $\tilde{S}_{\varepsilon}$.

Soit $(C_n^{\omega})_{n\in\mathbb{N}^*}$ une telle suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $t_n = \lambda(C_n)$. Alors la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. En effet, puisque ε est strictement positif et $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(P_o,t) = 1$, il existe $\tau_o \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$Q(P_o,\tau_o) > 1 - \varepsilon \ ;$$

et, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} Q(P_n^{\omega},\tau_o) = Q(P_o,\tau_o)$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $n \geq n_1$,

$$Q(P_n^{\omega},\tau_o) > 1 - \varepsilon \ .$$

Donc, si $n \geq n_1$,

$$\lambda(C_n^{\omega}) \leq \tau_o \ .$$

Soit $\tau_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} t_n < +\infty$.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, C_n^{ω} est contenu dans un élément C'_n de C_{τ_1} qui vérifie :

$$P_n(C'_n) \geq 1 - \varepsilon > Q(P_o,0) \ .$$

Les arguments utilisés dans la démonstration du théorème III.E. prouvent que tous les termes de $(C'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont contenus dans une même boule de $\mathbb{R}^N$. C'est donc aussi le cas des termes de $(C_n^{\omega})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit C_o la limite d'une sous-suite convergente, au sens de d_H , $(C_{n_k}^{\omega})_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $(C_n^{\omega})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Le lemme III.D. implique

$$1 - \varepsilon \leqslant \overline{\lim_{k\to+\infty}} \; P_{n_k}^{\omega}(C_{n_k}^{\omega}) \leqslant P_o(C_o) \quad .$$

Si $\lambda(C_o) = t_o$, C_o est un ε-support de P_o .

Sinon, d'après la définition de t_o , $\lambda(C_o) > t_o$; et C_o est un pseudo ε-support de P_o . En effet supposons qu'il existe un convexe fermé C_1 vérifiant

$$t_1 = \lambda(C_1) < \lambda(C_o)$$

et

$$P_o(C_1) > 1 - \varepsilon .$$

Alors il existe $k_o \in \mathbb{N}^*$ tel que, si $k \geqslant k_o$,

$$Q(P_{n_k}^{\omega}, t_1) > 1 - \varepsilon .$$

D'où, si $k \geqslant k_o$,

$$t_{n_k} \leqslant t_1 < \lambda(C_o) \quad .$$

Ce qui contredit le lemme I.A. qui indique

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda(C_{n_k}^{\omega}) = \lambda(C_o) \quad . \blacksquare$$

Si $\tilde{S}_{\varepsilon}$ est un singleton, ce théorème permet son estimation. Dans le cas contraire, toute suite $(C_n^{\bullet})_{n\in\mathbb{N}^*}$ permet d'estimer au moins un pseudo ε-support de P_o .

CONCLUSION.-

En l'état de ces travaux, rién ne prouve que tout convexe "réalisant" $Q(P,t)$ soit, presque sûrement, une valeur d'adhérence des suites $(C_n^{\bullet})$ définies dans le troisième paragraphe. Cela ouvre des perspectives de recherche intéressantes surtout si on s'apercevait que tous ces convexes n'ont pas la même "probabilité" d'être une valeur d'adhérence.

Il reste, pour compléter le quatrième paragraphe, à étudier la vitesse de convergence des estimateurs de l'ε-support d'une probabilité sur $\mathbb{R}^N$. Les résultats obtenus dans le troisième paragraphe nous poussent à penser qu'elle est exponentielle.

Paul Lévy a démontré la décroissance en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ vers 0 de la concentration, en t fixé, de la puissance énième de convolution d'une probabilité sur $\mathbb{R}$. L'auteur de cet article ([11]) a pu établir que, si P est une probabilité sur $\mathbb{R}^2$, la concentration sur les convexes fermés décroît vers 0 en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ alors que la concentration sur les boules fermées décroît vers 0 en $\frac{1}{n}$. Les arguments figurant dans [11] nous permettent d'augurer, dans le cas d'une probabilité sur $\mathbb{R}^N$, la décroissance vers 0 en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ de la concentration sur les convexes fermés et en $n^{-N/2}$ de la concentration sur les boules fermées.

B I B L I O G R A P H I E

[1] ROGER P. - Fonction de concentration et mesures aléatoires. Etude de quelques problèmes de ocntinuité. Thèse de 3ème cycle 1982, Université de Lille I.

[2] BILLINGSLEY-TOPSOE - Uniformity in weak convergence. Z. Warhs. verw. Gebiete 7 p. 1-16 (1967).

[3] TORTRAT - Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires. Masson 1971.

[4] PARTHASARETHY - Probability mesures on metric spaces. Academis Press. 1967.

[5] DELESALLE D. - Propriétés de limite centrale relatives aux mesures aléatoires. Thèse de 3ème cycle 1983, Université de Lille I.

[6] LEVY P. - Théorie de l'addition des variations aléatoires. Gauthier-Villars 1937 (2ème édition 1954).

[7] ESSEN C.G. - On the Kolmogorov-Rogozin inequality for the concentration function. Z. Warhs. verw. Gebiete 5 p. 210-216 (1966).

[8] ROGOZIN - On the increase of dispersion of sums of independent random variables. Theor. Prob. Appl. Vol. 6 p. 97-99 (1961).

[9] SEVAST'YANOV - On multidimensional concentrations. Theor. Prob. Appl. Vol. 8 p. 116 (1963).

[10] MASSÉ - Concentration des mesures et problèmes statistiques associés. Thèse de 3ème cycle 1985, Université de Lille I.

[11] MASSÉ - Convolution et concentration Pub. IRMA, Lille, Vol. 2, n° 7, 1986.

[12] HOEFFDING - Probability inequalities for sums bounded random variables. J. Amer. Statist. Assoc. 58, 13-30 (1963).

CONVOLUTION ET CONCENTRATION

par

Bruno MASSÉ

Laboratoire de Probabilités et Statistique
Université des Sciences et Techniques de
Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX .

Résumé : Dans le but d'illustrer les dispersions des puissances successives de convolution d'une probabilité P sur $\mathbb{R}^2$, nous considérons deux généralisations de la fonction de concentration de P. Lévy relative aux intervalles de $\mathbb{R}$; l'une, notée Q, est définie à partir des boules de $\mathbb{R}^2$ et l'autre, notée $\bar{Q}$, à partir des convexes.

Nous montrons la décroissance vers 0 des suites $(Q(P^{*n},t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\bar{Q}(P^{*n},t))_{n\in\mathbb{N}^*}$, où t est un réel positif quelconque, respectivement en $1/n$ et $1/\sqrt{n}$.

Enfin nous prouvons que, si P admet une matrice de covariance, quelque soit $t \in \mathbb{R}^+$, les suites $(Q(P^{*n}, n^\alpha t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\alpha \in]0, 1/2[$ et $(\bar{Q}(P^{*n}, n^\alpha t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $\alpha \in]0,1[$ convergent vers 0.

Abstract : With intent to illustrate the dispersion of the successive powers of convolution of a probability measure on $\mathbb{R}^2$, we consider two generalizations of the P. Levy's concentration function refering to the real intervals ; one of them, noted Q , is defined through the spheres and the other, noted $\bar{Q}$, through the convex sets.

We show that the sequences $(Q(P^{*n},t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ and $(\bar{Q}(P^{*n},t))_{n\in\mathbb{N}^*}$, for each $t \in \mathbb{R}^+$, are decreasing to zero respectively in $1/n$ et $1/\sqrt{n}$.

Then we prove that, if P has a covariance matrix, for all $t \in \mathbb{R}^+$, the sequences $(Q(P^{*n}, n^\alpha t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ for $\alpha \in]0, 1/2[$ and $(\bar{Q}(P^{*n}, n^\alpha t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ for $\alpha \in]0,1[$ converge to 0 .

Mots clés : Lois de probabilité - Convolution - Fonctions de concentration - Vitesse de convergence

Indices de classification STMA : Principale : 01160 - Secondaire : 01110

0 - *INTRODUCTION*.-

Paul Lévy ([1]) a défini la fonction de concentration q d'une variable aléatoire réelle X par : pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$q(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} P_X([x, x+t])$$

où P_X désigne la loi de X.

Il a utilisé cette notion pour illustrer la dispersion de la puissance énième de convolution d'une probabilité P sur $\mathbb{R}$ et a établi que la suite $(q_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$, où q_n désigne la fonction de concentration de P^{*n}, décroit vers 0 en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ quelque soit $t \in \mathbb{R}^+$.

L'objet de cet article est de comparer les manières dont évolue cette propriété selon le choix que l'on fait parmi les nombreuses généralisations possibles de q. Dans ce but nous placerons dans $\mathbb{R}^2$, ce qui permet de répondre au problème posé en évitant aux démonstrations d'avoir une trop grande technicité. Considérant que les intervalles de $\mathbb{R}$ de longueur t sont à la fois des boules de rayon $\frac{t}{2}$ et des convexes de mesure de Lebesgue t nous définirons la fonction de concentration d'une probabilité sur $\mathbb{R}^2$, dans un premier temps, à partir des boules fermées et, dans un deuxième temps, à partir des convexes fermés de $\mathbb{R}^2$.

P. Roger, ([4]), a dégagé les propriétés générales de la première de ces deux généralisations, notée Q, et l'auteur, [5], a dégagé celles de la deuxième, notée $\bar{Q}$, a proposé des méthodes d'estimation de Q et $\bar{Q}$ et utilisé $\bar{Q}$ pour définir et estimer l'ε-support d'une probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

Nous allons, dans cet article, établir la décroissance vers 0 en $\frac{1}{n}$ de $(Q(P^{*n},t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ de $(\bar{Q}(P^{*n},t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour toute valeur de t et montrer que, si P admet une matrice de covariance inversible

$$\lim_{n\to+\infty} Q(P^{*n}, n^\alpha t) = 0 \qquad \text{pour tout } \alpha \in [0, \tfrac{1}{2}[$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \bar{Q}(P^{*n}, n^\alpha t) = 0 \qquad \text{pour tout } \alpha \in [0, 1[.$$

Une partie des démonstrations de II.1. et de II.5. s'inspire de techniques utilisées par P. Lévy.

I - RAPPEL DES RESULTATS OBTENUS PAR P. LEVY POUR LES PROBABILITES SUR $\mathbb{R}$ *([1], p. 63).-*

Soit P une probabilité non dégénérée sur $\mathbb{R}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes de loi P. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons P_n la loi de $X_1 + \dots + X_n$.

Soit $\eta > 0$ tel que la loi de $X_1 - X_2$ conditionnée par $\{|X_1 - X_2| > \eta\}$, notée P'', ne soit pas dégénérée.

Soit $t_o = \frac{2\pi}{3\eta}$.

Alors, quelque soit $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^+$,

$$q_n(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} P_n([x, x+t]) \leqslant \frac{6 \operatorname{Max}(t,t_o)}{K} \times \frac{1}{\sqrt{n}},$$

où, si $\sigma(P'')$ désigne l'écart type de P'' ,

$$K = \sqrt{2\pi\ P'([-\eta,\eta])\,\sigma^2(P'')} \quad .$$

Dans la suite de cet article, nous garderons les mêmes notations, mais P désignera une probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

II - CONCENTRATION SUR LES BOULES FERMEES ET CONVOLUTION.-

Soit Q l'application, appelée fonction de concentration sur les boules fermées de $\mathbb{R}^2$, définie par :

$$Q : \mathcal{M}_b \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(\mu\,,\ t) \longrightarrow Q(\mu,t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \mu(B(x,t)) \ ,$$

où $\mathcal{M}_b$ désigne l'ensemble des mesures bornées sur $\mathbb{R}^2$ et, quelque soit $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, $B(x,t)$ désigne la boule euclidienne de centre x et de rayon t.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la suite $(Q(P_n,t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante au sens large car, quelque soit $n > 1$,

$$Q(P_n,t) \leqslant \min(Q(P_{n-1},t),\ Q(P,t)) \qquad ([2],\ p.\ 165)\ .$$

Si P est une mesure de Dirac, $Q(P_n,t) = 1$ quelque soit $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^+$.

Dans ce qui suit nous supposons que P n'est pas une mesure de Dirac, $\|\ \|_1$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$, $\|\ \|_2$ la "norme du sup" sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire, si $\tau = (x,y)$, $\|\tau\|_2 = \mathrm{Max}(|x|,|y|)$, et φ la fonction caractéristique de P.

II.1. - Proposition.-

Quelque soit $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^{+*}$,

$$Q(P_n,t) \leq \frac{72\, t^2}{\pi^2} \int_{||\tau||_2 \leq \frac{\pi}{6t}} |\varphi(\tau)|^n \, d\tau .$$

Démonstration :

Soit $\eta \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\hat{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{C}$.

$$\tau = (x,y) \longrightarrow \hat{g}(\tau) = (1 - \frac{|x|}{\eta})(1 - \frac{|y|}{\eta}) \quad \text{si} \quad ||\tau||_2 \leq \eta$$

$$= 0 \quad \text{sinon} .$$

$\hat{g}$ est la fonction caractéristique d'une probabilité p sur $\mathbb{R}^2$ car, d'après le théorème de Polya, $\hat{g}(.,0)$ et $\hat{g}(0,.)$ sont les fonctions caractéristiques de deux probabilités sur $\mathbb{R}$.

De plus, $|\hat{g}|$ étant intégrable, p est à densité g définie par, quelque soit $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$g(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\{(x,y)/|x|\leq\eta \text{ et } |y|\leq\eta\}} \cos(<\binom{x}{y},\xi>)(1 - \frac{|x|}{\eta})(1 - \frac{|y|}{\eta}) \, dx\, dy$$

Or, si $||\xi||_2 \leq \frac{\pi}{6\eta}$ et $||\tau||_2 \leq \eta$, alors $|<\tau,\xi>| \leq 2\, ||\tau||_2\, ||\xi||_2 \leq \frac{\pi}{3}$.

Donc, grâce au théorème de Fubini, si $||\xi||_2 \leq \frac{\pi}{6\eta}$,

$$g(\xi) \geq \frac{1}{4\pi^2} \times \frac{1}{2} \times \int_{|x|\leq\eta} (1 - \frac{|x|}{\eta})\, dx \times \int_{|y|\leq\eta} (1 - \frac{|y|}{\eta})\, dy = \frac{\eta^2}{8\pi^2} .$$

Donc, quelque soit $a \in \mathbb{R}^2$,

$$P_n(B(a, \frac{\pi}{6\eta})) \leqslant \frac{8\pi^2}{\eta^2} \int_{\mathbb{R}^2} g(a-z)\, P_n(dz)$$

$$\leqslant \frac{8\pi^2}{\eta^2} \times \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\exp(-i<\tau, a>)\, \hat{g}(\tau)\, \psi^n(\tau)|\, d\tau$$

$$\leqslant \frac{2}{\eta^2} \int_{||\tau||_2 \leqslant \eta} |\psi(\tau)|^n\, d\tau\,,$$

car, puisque $|\hat{g} \times \psi^n| \leqslant |\hat{g}|$, $|\hat{g} \times \psi^n|$ est intégrable.

Il ne reste plus qu'à poser $t = \frac{\pi}{6\eta}$ pour obtenir le résultat annoncé.

Cette proposition nous incite à étudier l'ensemble $I = \{\tau \in \mathbb{R}^2 / |\psi(\tau)| = 1\}$.

II.2. - Lemme.-

Si I est de cardinal infini et possède un point d'accumulation, alors P est portée par une droite D et I est un ensemble $\mathcal{D}$, au plus dénombrable, de droites orthogonales à D telles que l'ensemble $\{\Delta \cap D \,/\, \Delta \in \mathcal{D}\}$ ne possède pas de point d'accumulation.

Démonstration : Supposons que I soit de cardinal infini et possède au moins un point d'accumulation τ_o.

1) $|\psi|$ étant continue, I est fermé et, par conséquent, $\tau_o \in I$. Il existe donc $A_o \subset \mathbb{R}^2$ et $a_o \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(A_o) = 1$$

et, quelque soit $x \in A_o$,

$$\langle x, \tau_o \rangle = a_o \quad (2\pi).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons τ_n un élément de I vérifiant $0 < ||\tau_o - \tau_n||_1 < \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $A_n \subset \mathbb{R}^2$ et $a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(A_n) = 1$$

et, quelque soit $x \in A_n$,

$$\langle x, \tau_n \rangle = a_n \quad (2\pi).$$

Soit $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. Alors $P(A) = 1$ et, puisque P n'est pas une mesure de Dirac, A n'est pas un singleton.

Soit x_o et x_1 deux éléments distincts de A et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$||x_1 - x_o||_1 \leqslant 2m\pi .$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle x_1 - x_o \, , \, \tau_n - \tau_o \rangle = 0 \quad (2\pi)$$

et, pour tout $n \geqslant m$,

$$|\langle x_1 - x_o \, , \, \tau_n - \tau_o \rangle| \leqslant ||x_1 - x_o||_1 \times ||\tau_n - \tau_o||_1 < 2\pi .$$

Donc, pour tout $n \geqslant m$,

$$\langle x_1 - x_o \, , \, \tau_n - \tau_o \rangle = 0 .$$

Soit $x \in A$ distinct de x_o et $m' \geq m$ tel que

$$||x-x_o||_1 \leq 2m'\pi .$$

Alors $\langle x-x_o, \tau_{m'}-\tau_o\rangle = 0$.

Donc x est sur la droite D passant par x_o et x_1 car $m' \geq m$. Donc $A \subset D$ et, finalement,

$$P(D) = 1 .$$

2) a) Si l'équation de D est $y = ax+b$, il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telle que $Z = (X, aX+b)$ soit de loi P.

Soit $\tau = (s_1, s_2)$ un élément de I. Alors, puisque

$$\varphi(\tau) = E(e^{i\langle Z,\tau\rangle}) = e^{ibs_2} E(e^{iX(s_1+as_2)}) , \ |E(e^{iX(s_1+as_2)})| = 1 . \qquad (1)$$

Et toute la droite d'équation $ay = -x + (s_1+as_2)$ est incluse dans I. De même, quelque soit $\tau' = (s_1', s_2') \in I$, toute la droite d'équation $ay = -x + (s_1'+as_2')$ est incluse dans I et

$$|E(e^{iX(s_1'+as_2')})| = 1 . \qquad (2)$$

Or (1) et (2) prouvent que les rapports $s_1+as_2 \,/\, s_1'+as_2'$ prennent un nombre de valeurs au plus dénombrable.

Donc I est bien constitué d'un ensemble $\mathcal{D}$, au plus dénombrable, de droites perpendiculaires à D.

b) Si l'équation de D est $x = a$, on remplace Z par Y telle que $Z = (a,Y)$ soit de loi P et on montre que, si $\tau = (s_1, s_2) \in I$, toute la droite d'équation $y = s_2$ est incluse dans I.

3) Si l'ensemble $\{\Delta \cap D \,/\, \Delta \in \mathcal{D}\}$ possédait un point d'accumulation τ'_o, on pourrait construire une suite $(\tau'_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset I$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau'_n \in D$ et

$$0 < ||\tau'_n - \tau'_o||_1 < \frac{1}{n} .$$

Et les arguments utilisés dans la première partie de cette démonstration prouveraient que, si D_1 désigne la droite perpendiculaire à D passant par τ'_o,

$$P(D_1) = 1 .$$

Ce qui est impossible puisque $P(D) = 1$ et P n'est pas une mesure de Dirac.

II.3. - Corollaire.-

$$\lambda^2(I) = 0 .$$

Démonstration : Si toute partie bornée de $\mathbb{R}^2$ ne contient qu'un nombre fini de points de I, I est au plus dénombrable et $\lambda^2(I) = 0$.

Sinon, I possède au moins un point d'accumulation et le lemme II.2. indique que I est un ensemble au plus dénombrable de droites. Donc $\lambda^2(I) = 0$.

On en déduit aisément la proposition suivante.

II.4. - Proposition.-

Quelque soit $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\lim_{n \to +\infty} Q(P_n, t) = 0 .$$

Démonstration : Soit $(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Pour tout $\alpha \in [0,1]$, posons

$$I_\alpha = \{\tau \in \mathbb{R}^2 \ / \ ||\tau||_2 \leqslant \frac{\pi}{6t} \quad \text{et} \quad |\psi(\tau)| \geqslant 1-\alpha\} .$$

Alors $I_o = \bigcap_{\alpha \in]0,1]} I_\alpha$ et $\lambda^2(I_1) = \dfrac{\pi^2}{36t^2} < +\infty$.

Donc, d'après le corollaire II.3.,

$$\lim_{\alpha \to 0} \lambda^2(I_\alpha) = \lambda^2(I_o) = 0 .$$

Soit $\eta \in]0,1]$ tel que

$$\lambda^2(I_\eta) \leqslant \frac{\pi^2}{72t^2} \frac{\varepsilon}{2} .$$

Alors, d'après la proposition II.1., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q(P_n, t) \leqslant \frac{72t^2}{\pi^2} \int_{||\tau||_2 \leqslant \frac{\pi}{6t}} |\psi(\tau)|^n \, d\tau$$

$$\leqslant \frac{72t^2}{\pi^2} \left[\iint_{||\tau||_2 \leqslant \frac{\pi}{6t}} (1-\eta)^n \, d\tau + \int_{I_\eta} d\tau \right]$$

$$\leqslant 8(1-\eta)^n + \varepsilon/2 .$$

Ce qui permet de conclure car ε est arbitraire.

Nous allons maintenant établir la décroissance en $\frac{1}{n}$ vers 0 de $(Q(P_n,t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans le cas où P n'est pas portée par une droite.

Dans le cas contraire, on se ramène aisément aux fonctions de concentration sur $\mathbb{R}$ et, d'après le paragraphe I , la décroissance est alors en $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

II.5. - *Lemme*.-

Si P n'est pas portée par une droite, il existe $(t_o,\beta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que, si $||\tau||_1 \leq t_o$,

$$|\phi(\tau)| \leq e^{-\beta||\tau||_1^2} .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\Psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{C}$, $\tau \longrightarrow |\phi(\tau)|^2$ la fonction caractéristique de la loi P' de $X_1 - X_2$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, si $||\tau||_1 \leq t$,

$$1 - \Psi(\tau) = \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \cos<\tau,x>) \quad P'(dx)$$

$$\geq \frac{1}{8} \int_{||x||_1 \leq \frac{\pi}{2t}} <\tau, x>^2 P'(dx) \tag{1}$$

Soit $t_o \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que la restriction de P' à $A_{t_o} = \{x \;/\; ||x||_1 \leq \frac{\pi}{2t_o}\}$ ne soit pas dégénérée et tel que $P'(A_{t_o}) > 0$.

Soit P" la loi de X_1-X_2 conditionnée par $\{X_1-X_2 \in A_{t_o}\}$.

Soit τ tel que $||\tau||_1 \leq t_o$, C le cercle unité et $y = \frac{\tau}{||\tau||_1} \in C$.

Alors, d'après (1),

$$1 - \Psi(\tau) \geq \frac{1}{8} \int_{A_{t_o}} <\tau,x>^2 \; P'(dx) = \frac{||\tau||_1^2 \; P'(A_{t_o})}{8} \int_{\mathbb{R}^2} <y,x>^2 \; P''(dx)$$

$$= \frac{||\tau||_1^2 \; P'(A_{t_o})}{8} \; y'\,\Gamma\, y \qquad (2)$$

où Γ désigne la matrice de covariance de P'' et y' la transposée de y.

Mais, puisque P'' n'est pas portée par une droite, quelque soit $y \in C$,

$$y'\,\Gamma y > 0 \; .$$

Et, puisque $y'\,\Gamma y$ est une fonction continue de y sur le compact C , il existe $\alpha > 0$ tel que, quelque soit $y \in C$,

$$y'\,\Gamma y \geq \alpha > 0 \; .$$

Ce qui, avec (2), entraîne, si $||\tau||_1 \leq t_o$,

$$1 - \Psi(\tau) \geq \frac{||\tau||_1^2 \; P'(A_{t_o})}{8} \; \alpha > 0 \; .$$

D'où, si $||\tau||_1 \leq t_o$,

$$|\psi(\tau)| \leq \exp\left(- \frac{\alpha \; P'(A_{t_o})}{16} \; ||\tau||_1^2\right) \; .$$

Il ne reste plus qu'à poser $\beta = \dfrac{\alpha \; P'(A_{t_o})}{16}$.

II.6. - Proposition.-

Si P n'est pas portée par une droite, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, il existe $K \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q(P_n, t) \leqslant \frac{K}{n} .$$

Démonstration : D'après le lemme précédent, il existe $(t_o, \beta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que, si $||\tau||_1 \leqslant t_o$,

$$|\vartheta(\tau)| \leqslant e^{-\beta||\tau||_1} .$$

Alors, grâce à la proposition II.1., si $t \leqslant \frac{\pi}{6t_o}$, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q(P_n, t) \leqslant Q(P_n, \frac{\pi}{6t_o}) \leqslant \frac{2}{t_o^2} \int_{||\tau||_2 \leqslant t_o} e^{-n\beta||\tau||_1^2} d\tau$$

$$\leqslant \frac{2}{t_o^2} \times 2\pi \int_0^{+\infty} \rho \; e^{-n\beta\rho^2} d\rho = \frac{2\pi}{t_o^2 \beta} \times \frac{1}{n} .$$

Et, si $t > \frac{\pi}{6t_o}$, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q(P_n, t) \leqslant \frac{72 \; t^2}{\pi^2} \int_{||\tau||_2 \leqslant \frac{\pi}{6t}} e^{-n\beta||\tau||_1^2} d\tau$$

$$\leqslant \frac{72 \; t^2}{\pi\beta} \times \frac{1}{n} .$$

Le lemme II.5. permet également d'obtenir une majoration plus fine pour de petites valeurs de t. C'est l'objet de la proposition suivante où on reprend les conditions et les notations de la démonstration précédente.

II.7. - Proposition.-

Si $t \leqslant t_o$, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q(P_n, t) \leqslant \frac{e^{t^2/2}}{2\beta n} .$$

Démonstration : Soit $t \leqslant t_o$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^2$.

Soit g la densité et $\hat{g}$ la fonction caractéristique de la loi normale centrée de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $||y||_1 \leqslant t$,

$$g(y) \geqslant \frac{1}{2\pi} e^{-t^2/2} \quad ;$$

et, puisque $|\hat{g}|$ est intégrable, $|\hat{g}\, \varphi^n|$ l'est aussi.

Donc

$$\begin{aligned} P_n(B(x,t)) &\leqslant 2\pi\, e^{t^2/2} \int_{||x-z||_1 \leqslant t} g(x-z)\, P_n(dz) \\ &\leqslant 2\pi\, e^{t^2/2} \times \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i<\tau,x>}\, \hat{g}(\tau)\, \varphi^n(\tau)\, d\tau \\ &\leqslant \frac{e^{t^2/2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-||\tau||_1^2/2}\, |\varphi(\tau)|^n\, d\tau \\ &\leqslant \frac{e^{t^2/2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-(2n\beta+1)\frac{||\tau||_1^2}{2}\right) d\tau \\ &\leqslant \frac{e^{t^2/2}}{2\beta n} . \end{aligned}$$

III - CONCENTRATION SUR LES CONVEXES FERMES ET CONVOLUTION.-

Soit $\bar{Q}$ l'application, appelée fonction de concentration sur les convexes fermés de $\mathbb{R}^2$, définie par :

$$\bar{Q} : \mathcal{M}_b \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(\mu, t) \longrightarrow \bar{Q}(\mu, t) = \sup_{C \in \mathcal{C}_t} \mu(C)$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{C}_t$ désigne l'ensemble des convexes fermés de $\mathbb{R}^2$ de mesure de Lebesgue t.

Si P est portée par une droite, il en est de même de P_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^+$,

$$\bar{Q}(P_n, t) = 1 .$$

Dans ce qui suit nous supposerons que P n'est pas portée par une droite.

Quelque soit $t \in \mathbb{R}^+$, la suite $(\bar{Q}(P_n, t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante au sens large car la démonstration figurant dans ([2], p. 165) reste valable si on remplace les boules fermées par des convexes fermés.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, notons β_α l'ensemble des bandes de $\mathbb{R}^2$ de largeur α.

III.1. - Lemme.-

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, il existe $K_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{B \in \beta_\alpha} P_n(B) \leq \frac{K_1}{\sqrt{n}} .$$

<u>Démonstration</u> : Reprenons les notations de la démonstration du lemme II.5.

Pour tout $\theta \in [0,\pi]$, notons P_θ et P''_θ les projections, respectives de P et P'' sur la droite D_θ passant par l'origine de $\mathbb{R}^2$ et admettant le vecteur de composantes $\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur et, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, désignons par α_θ le point $(\alpha\cos\theta, \alpha\sin\theta)$ de $\mathbb{R}^2$.

Alors, pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, $\sigma^2(P''_\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)\,\Gamma\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ est la variance de P''_θ.

Or, quelque soit $\theta \in [0,2\pi]$, $\sigma^2(P''_\theta) > 0$ car, puisque P'' n'est pas portée par une droite, P''_θ n'est pas une mesure de Dirac.

Donc, puisque $[0,\pi]$ est compact et $(\cos .\,, \sin .\,)\,\Gamma\begin{pmatrix}\cos .\\ \sin .\end{pmatrix}$ est une fonction continue de θ,

$$A = \inf_{\theta\in[0,\pi]} \sigma(P''_\theta) > 0 .$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. D'après le paragraphe I il existe $K'_1 > 0$ tel que, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sup_{B\in\beta_\alpha} P_n(B) &= \sup_{\theta\in[0,\pi]}\ \sup_{z\in D_\theta} P_\theta^{*n}([z, z+\alpha_\theta])\\ &\leqslant \sup_{\theta\in[0,\pi]} \frac{K'_1}{\sigma(P''_\theta)} \times \frac{1}{\sqrt{n}}\\ &\leqslant \frac{K'_1}{A} \times \frac{1}{\sqrt{n}} ,\end{aligned}$$

où P_θ^{*n} désigne la puissance énième de convolution de P_θ.

Il ne reste plus qu'à poser $K_1 = \dfrac{K'_1}{A}$.

III.2. - Proposition.-

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, il existe $K > 0$ tel que, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\bar{Q}(P_n,t) \leq \frac{K}{\sqrt{n}} .$$

Démonstration : Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Posons

$$C_t^1 = \{C \in C_t \ / \ \mathrm{diam}(C) \geq 1\} .$$

On montre aisément que tout élément de C_t^1 est contenu dans un élément de β_{2t}.

D'après le lemme III.1. et la proposition II.6. il existe $(K_1,K_2) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\bar{Q}(P_n,t) &= \mathrm{Max}\,\Big(\sup_{C\in C_t - C_t^1} P_n(C) \ , \ \sup_{C\in C_t^1} P_n(C)\Big)\\ &\leq \mathrm{Max}\,\Big(Q(P_n,1) \ , \ \sup_{B\in\beta_{2t}} P_n(B)\Big)\\ &\leq \mathrm{Max}\Big(\frac{K_2}{n} \ , \ \frac{K_1}{\sqrt{n}}\Big) .\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à poser $K = \mathrm{Max}(K_1,K_2)$.

L'objet du dernier paragraphe de cet article est de donner une autre vision de la dispersion de la puissance énième de convolution de P, dans le cas où P admet une matrice de covariance inversible. Il s'agit de déterminer danq quelle mesure on peut augmenter, en fonction de n, la valeur de la variable des applications $Q(P_n,.)$ et $\bar{Q}(P_n,.)$ tout en conservant des suites convergeant vers 0.

IV - CONVOLUTION, CONCENTRATION ET V.A. ADMETTANT UNE MATRICE DE COVARIANCE.-

P désigne maintenant une probabilité sur $\mathbb{R}^2$ admettant une matrice de covariance inversible.

Nous supposerons, sans perte de généralité, que P est centrée.

IV.1. - *Proposition*.-

Soit P_o absolument continue par rapport à λ^2. Alors les applications Q et $\bar{Q}$, de $\mathcal{M}_b \times \mathbb{R}^+$, muni de la topologie produit de la topologie de la convergence faible sur $\mathcal{M}_b$ et de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^+$, dans $\mathbb{R}^+$, muni de sa topologie usuelle, sont continues en (P_o,t), quelque soit $t \in \mathbb{R}^+$.

N.B. - Une étude plus complète de la continuité de Q et $\bar{Q}$ figure dans [5].

Démonstration :

1) Etablissons d'abord la continuité de $Q(P_o,.)$ et de $\bar{Q}(P_o,.)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tel que $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ et $\lambda^2(B) \leq \eta$ entraînent $P_o(B) \leq \varepsilon$.

a) Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs convergeant vers t_o.

Soit n_o tel que, si $n \geq n_o$,

$$|\pi\, t_n^2 - \pi\, t_o^2| \leq \eta .$$

Alors, si $n \geq n_o$,

$$|Q(P_o,t_n) - Q(P_o,t_o)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^2} |P_o(B(x,t_n)) - P_o(B(x,t_o))|$$

$$\leq \sup_{\substack{B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \\ \lambda^2(B)\leq\eta}} P_o(B) \leq \varepsilon .$$

b) Soit $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tel que $0 \leq t_2 - t_1 \leq \eta$.

On montre aisément que tout élément de $\mathcal{C}_{t_2}$ contient au moins un élément de $\mathcal{C}_{t_1}$. D'où, quelque soit $C \in \mathcal{C}_{t_2}$, si on note C' un élément de $\mathcal{C}_{t_1}$ contenu dans C ,

$$P_o(C) - \bar{Q}(P_o,t_1) \leq P_o(C) - P_o(C') = P_o(C-C') \leq \varepsilon .$$

Donc $\quad 0 \leq \bar{Q}(P_o,t_2) - \bar{Q}(P_o,t_1) = \sup_{C\in\mathcal{C}_{t_2}} (P_o(C) - \bar{Q}(P_o,t_1)) \leq \varepsilon$.

2) Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant faiblement vers P_o ; d'après [2], puisque P_o ne charge pas les frontières des éléments de $\mathcal{C}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{C\in\mathcal{C}} |P_n(C) - P_o(C)| = 0 .$$

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs convergeant vers t_o .

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n_o \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq n_o$,

$$\sup_{C\in\mathcal{C}} |P_n(C) - P_o(C)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$|Q(P_o,t_n) - Q(P_o,t_o)| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Alors, si $n \geqslant n_o$,

$$|Q(P_n,t_n) - Q(P_o,t_o)| \leqslant |Q(P_n,t_n) - Q(P_o,t_n)| + |Q(P_o,t_n) - Q(P_o,t_o)|$$

$$\leqslant \sup_{C\in\mathcal{C}_{t_n}} |P_n(C) - P_o(C)| + |Q(P_o,t_n) - Q(P_o,t_o)|$$

$$\leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

La continuité de $\bar{Q}$ en (P_o,t_o) se démontre de la même manière. Nous allons utiliser cette proposition pour démontrer le théorème suivant.

P_o désigne maintenant la loi normale centrée de même matrice de covariance que P.

IV.2. - Théorème.-

Quelque soit $t \in \mathbb{R}^+$,

1) $\lim_{n\to+\infty} Q(P_n, \sqrt{n}\, t) = Q(P_o,t)$ et $\lim_{n\to+\infty} \bar{Q}(P_n,nt) = \bar{Q}(P_o,t)$.

2) Pour tout $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, $\lim_{n\to+\infty} Q(P_n, n^\alpha t) = Q(P_o,0) = 0$

et, pour tout $\alpha \in [0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} \bar{Q}(P_n, n^\alpha t) = \bar{Q}(P_o,0) = 0$.

3) Si P est une loi normale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q(P_n,t) = Q(P, \frac{t}{\sqrt{n}})$$

et

$$\bar{Q}(P_n,t) = \bar{Q}(P, \frac{t}{n}) .$$

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons P_{Y_n} la loi de $Y_n = \dfrac{X_1 +\ldots+ X_n}{\sqrt{n}}$.

D'après le théorème central limite, $(P_{Y_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers P_o . De plus P_o est absolument continue par rapport à λ^2 puisque sa matrice de covariance est inversible. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est la loi de $\sqrt{n}\, Y_n$.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$.

1) Puisque $Q(.,t)$ et $\bar{Q}(.,t)$ sont continues en P_o ,

$$\lim_{n\to+\infty} \bar{Q}(P_n, \sqrt{n}\, t) = \lim_{n\to+\infty} Q(P_{Y_n},t) = Q(P_o,t)$$

et
$$\lim_{n\to+\infty} \bar{Q}(P_n , nt) = \lim_{n\to+\infty} \bar{Q}(P_{Y_n},t) = \bar{Q}(P_o,t) .$$

2) Puisque Q et $\bar{Q}$ sont continues en $(P_o,0)$,

pour tout $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, $\lim_{n\to+\infty} Q(P_n, n^\alpha t) = \lim_{n\to+\infty} Q(P_{Y_n}, \frac{t}{n^{\alpha-1/2}}) = Q(P_o,0) = 0$ et,

pour tout $\alpha \in [0, 1[$, $\lim_{n\to+\infty} \bar{Q}(P_n, n^\alpha t) = \lim_{n\to+\infty} \bar{Q}(P_{Y_n}, \frac{t}{n^{\alpha-1}}) = \bar{Q}(P_o,0) = 0$.

3) Si P est une loi normale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n est de loi P. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q(P_n,t) = Q(P_{Y_n}, \frac{t}{\sqrt{n}}) = Q(P, \frac{t}{\sqrt{n}})$$

et
$$\bar{Q}(P_n,t) = \bar{Q}(P_{Y_n},t/n) = \bar{Q}(P, t/n) .$$

IV.3. - Remarque.- Nous venons de voir que, si P admet une matrice de covariance, $\sup\{\alpha > 0 \,/\, \lim_{n\to+\infty} \bar{Q}(P_n, n^\alpha t) = 0\} = 1$. Dans le cas contraire, on peut prévoir que, s'il existe, ce nombre est plus grand. Par exemple supposons maintenant que la fonction caractéristique de P soit

$\psi : (x,y) \longrightarrow e^{|x|+|y|}$. Alors P n'admet pas de matrice de covariance puisqu'elle est le produit de deux lois de Cauchy et, si on note ψ_n la fonction caractéristique de $\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$

$$\psi_n(x,y) = (\psi(\tfrac{1}{n}(x,y)))^n = (e^{|x/n|+|y/n|})^n = \psi(x,y) \quad .$$

Donc, pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^+$,

$$\bar{Q}(P_n, n^2 t) = \bar{Q}(P,t) \ .$$

Et, finalement, quelque soit $\alpha < 2$,

$$\lim_{n\to+\infty} \bar{Q}(P_n,\ n^\alpha t) = \bar{Q}(P_o, 0) = 0 \quad .$$

V - LE CAS $\mathbb{R}^N$.-

Les démonstrations des paragraphes précédents s'étendent à $\mathbb{R}^N$ pour donner les propriétés suivantes P désigne une probabilité sur $\mathbb{R}^N$ qui n'est pas une mesure de Dirac. Soit m le plus petit entier naturel tel que P soit portée par un sous-ensemble affine de $\mathbb{R}^N$ de dimension m , alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la suite $(Q(P_n,t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît vers 0 en $\dfrac{1}{n^{m/2}}$ et, si $m = N$, $(\bar{Q}(P_n,t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît vers 0 en $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

D'autre part, si P admet une matrice de covariance inversible,

$$\lim_{n\to+\infty} Q(P_n,\ n^\alpha t) = 0 \quad , \text{ pour tout } \alpha < \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \bar{Q}(P_n,\ n^\alpha t) = 0 \quad , \text{ pour tout } \alpha < \frac{m}{2} \ .$$

VI - CONCLUSION.-

Les nombres $\alpha_o = \sup \{\alpha \in \mathbb{R}^+ \ / \ \lim\limits_{n\to+\infty} \bar{Q}(P^{*n}, n^\alpha t) = 0$, quelque soit $t \in \mathbb{R}^+\}$ et $\beta_o = \lim\limits_{n\to+\infty} (\bar{Q}P^{*n} , n^{\alpha_o})$ pourraient servir à caractériser la dispersion d'une probabilité P n'admettant pas de matrice de covariance. Il serait donc intéressant de savoir si ces nombres existent pour tout probabilité P et, si c'est le cas, de mettre au point leur estimation.

Je tiens à remercier Arlette Lengaigne qui a dactylographié ce texte avec soin et compétence.

BIBLIOGRAPHIE

[1] TORTRAT - Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires. Masson 1971.

[2] PARTHASARATHY - Probability measures on metric spaces. Academic Press 1967.

[3] BILLINGSLEY - TOPSOE - Uniformity in weak convergence. Z. Wahrs. verw. Gebiete 7 p. 1-16 1967.

[4] ROGER P. - Continuité de la fonction de concentration de P. Lévy. Pub. IRMA, Lille, Vol. 5, fasc. 1, 1983.

[5] MASSE B. - Concentration des mesures et problèmes statistiques associés. Thèse de 3ème cycle 1985. Université de Lille I.

PUB. IRMA, LILLE - 1990
Vol.22, N° VI

PRINCIPES D'INVARIANCE POUR LA PROBABILITÉ D'UN DILATÉ DE L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN ÉCHANTILLON (*)

par
Bruno MASSÉ
Laboratoire de Statistique et Probabilités (M 2)
Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois
59655 - Villeneuve d'Ascq Cedex (France)

Résumé : On étudie la vitesse de convergence de l'enveloppe convexe d'un échantillon vers l'enveloppe convexe du support de la loi et on obtient deux majorations, indépendantes de la loi, de la vitesse de convergence vers 1 de la probabilité d'un dilaté de l'enveloppe convexe d'un échantillon.

Summary : We study the convergence rate of the convex hull of a sample to the convex hull of the support of the law and we obtain two, majorizations, independant of the law, of the convergence rate to are of the probability of a dilated of the convex hull of a sample.

Mots clés : Echantillon – Estimation – Support – Enveloppe convexe.

A.M.S. Subject classification : 60A10 – 60E05

(*) Preprint

I - INTRODUCTION

Le problème de l'estimation du support d'une loi de probabilité a été envisagé sous divers aspects : dans le cas d'un support de type $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2/0 \leq x \leq 1 \,;\, 0 \leq y \leq f(x)\}$ Geffroy (1964) et Jacob (1984) ont étudié un estimateur de f ; Guilbart (1973) étudie la continuité de l'application qui à toute probabilité sur $\mathbf{R}^N$ associe l'enveloppe convexe fermée de son support ; Chevalier (1976) propose l'estimation du support, non nécessairement convexe, d'une probabilité sur $\mathbf{R}^N$ par la "méthode des partitions" et la "méthode des boules", il montre en particulier que certaines conditions sur la mesure des éléments de la partition ou des boules sont nécessaires à la convergence de l'estimateur ; Ripley et Rasson (1977) se sont préoccupés de l'estimation du support, supposé convexe, d'un processus de Poisson homogène, ils en proposent en particulier un estimateur sans biais ; enfin Jacob et Abbar (1989) ont proposé une méthode d'estimation du support, supposé être défini en coordonnées polaires dans le plan par $\{(\rho,\theta)/0 \leq \theta \leq 2\pi \,;\, 0 \leq \rho \leq \phi(\theta) \,;\, \phi(0) = \phi(2\pi)\}$, d'un processus ponctuel de Cox.

Dans cet article, on choisit, à la suite de plusieurs auteurs, d'estimer l'enveloppe convexe du support d'une loi de probabilité sur $\mathbf{R}^N$ à l'aide de l'enveloppe convexe d'un échantillon de cette loi ; ce qui lie le problème de l'estimation du support à une notion qui a déjà été l'objet de nombreux travaux : les premiers semblent être ceux de Geffroy (1958), Raynaud (1965) et Renyi et Sunlanke (1964) ; Efron (1965) étudie l'espérance mathématique du volume, du nombre de sommets, de faces et d'arêtes de l'enveloppe convexe d'un échantillon de loi quelconque sur $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$; Dwyer (1988), Buchta (1984), Van Wel (1989) et Barany et Larman (1988) ont étudié divers aspects du comportement asymptotique de l'enveloppe convexe d'un échantillon de loi uniforme à support compact et convexe ; Eddy et Gale (1981), dans le cas d'une loi à symétrie sphérique, puis Brozins et de Haan (1987), dans un cadre plus général, ont étudié la loi limite de la fonction de support de l'enveloppe convexe d'un échantillon ; Fisher (1969) s'est placé dans le cas d'une loi produit de lois de probabilité sur $\mathbf{R}$; Buchta, Müller et Ticky (1985) ont choisi de tirer l'échantillon à partir d'une loi concentrée sur la frontière d'un convexe compact.

Dans le deuxième paragraphe de cet article, l'écart entre l'enveloppe convexe $C_n^\bullet$ d'un échantillon de taille n et l'enveloppe convexe C_0 du support de la loi est mesuré à l'aide de l'espérance du volume de $C_0 \setminus C_n^\bullet$, dans le cas où C_0 est compact, et, dans le cas général, à l'aide de $E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^\bullet)]$ où P est la loi de l'échantillon. On obtient, pour ces deux quantités, des encadrements qui constituent une généralisation d'un résultat de Barany et Larman ([13] p. 275) portant sur une loi uniforme sur un convexe compact. Puis on montre que la vitesse de décroissance vers 0 de ces deux écarts peut être rendue aussi lente que l'on veut en choisissant, pour le premier (resp. pour le deuxième) une loi chargeant peu (resp. beaucoup) un voisinage de la frontière de l'enveloppe convexe de son support.

D'où l'objet du troisième paragraphe qui est de déterminer un borélien peu "distant" de C_n^ω, ici un dilaté de C_n^ω, dont la probabilité tend vers 1 à une vitesse connue indépendante de P. Une réponse est donnée à ce problème par la propriété suivante, par ailleurs d'une portée bien plus générale, dûe à Geffroy et démontrée, dans le cadre qui nous intéresse, dans [20] : soit $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbf{N}^*$, $P_n^\bullet$ la mesure empirique associée à $\{X_1, \ldots, X_n\}$, M le cardinal d'un ensemble de boules de rayon ε dont la réunion est de probabilité supérieure à $1 - \varepsilon\backslash 4$ et ρ la distance de Prokorov ; alors $Pr\{\rho(P_n^\bullet, P) \geq \varepsilon\} \leq 2(M+1)e^{-2n(\varepsilon/2(M+1))^2}$.

On obtient bien sûr la même majoration pour $Pr\{P[\mathbf{R}^N \setminus (C_n^\bullet)^a] \geq a\}$, où $a \in]0,1[$, et une inégalité du même type pour $Pr\{P[\mathbf{R}^N \setminus (C_n^\bullet)^a] \geq b\}$, où $a > 0$ et $b \in]0,1[$, en adaptant légèrement la démonstration. Mais, dans les deux cas, le nombre M est inconnu, en l'absence de renseignements sur P, et le second membre de l'inégalité n'est pas assez petit pour que de très grandes valeurs de n ; ce qui semble inévitable pour une propriété portant sur tous les boréliens de $\mathbf{R}^N$ alors que nous ne considérons, ici, que C_n^ω.

Nous montrerons, dans un premier temps, que la probabilité maximale des demi-espaces d'intersection vide avec C_n^ω tend vers 0 à une vitesse indépendante de P. Puis on obtient deux inégalités de type exponentiel pour la probabilité d'un dilaté de C_n^ω ; dans la première l'ampleur de la dilatation dépend de l'"ampleur" de C_n^ω, alors que dans la seconde, elle est indépendante de ω. Dans le cas où l'espace des réalisations est $\mathbf{R}^2$, on obtient des vitesses de convergence particulièrement rapides à l'aide de techniques qui ne s'étendent pas aux espaces de dimension supérieure.

II - ETUDE DE L'ÉCART ENTRE L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN ÉCHANTILLON ET L'ENVELOPPE CONVEXE DU SUPPORT DE LA LOI

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, Pr)$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^N$, muni de sa tribu borélienne, indépendantes et de même loi P absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^N$ notée λ. On note C_0 l'enveloppe convexe du support de P. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$, on note C_n^ω l'enveloppe convexe fermée de $\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$. Quel que soit $x \in \mathbf{R}^N$, $\mathcal{K}_x$ désigne l'ensemble des demi-espaces fermés dont la frontière contient x. Pour tout $\varepsilon \in [0,1]$, on pose $S(\varepsilon) = \{x \in C_0 / \inf_{K \in \mathcal{K}_x} P(K) \leq \varepsilon\}$. Les ensembles $S(\varepsilon)$ ont déjà été utilisés par Berany et Larman ([13]) pour une loi P uniforme sur un convexe compact de $\mathbf{R}^N$ C_0 ; ils ont montré, en particulier, qu'il existe n_0, $m_1 > 0$ et $m_2 > 0$ tels que

$$\forall n \geq n_0 \ , \ m_1 \lambda(S(\frac{1}{n})) \leq E(\lambda(C_O \setminus C_n^\bullet)) \leq m_2 \lambda(S(\frac{1}{n})) .$$

La proposition suivante étend leur étude à une loi P continue à support compact d'enveloppe convexe C_0, sans parvenir à la même précision.

Pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^2$, on pose $\binom{q}{p} = \frac{q!}{p!(q-p)!}$.

Proposition II.1.- *Si P est à support compact d'enveloppe convexe C_0, quel que soit $\varepsilon \in [0,1]$ et quel que soit $n > N$,*

$$\begin{aligned} &\lambda(S(\varepsilon)) + \lambda(C_0)\binom{n}{N-1}[(1-\varepsilon)^{n-N+1} + \varepsilon^{n-N+1}] \\ &\geq E[\lambda(C_0 \setminus C_n^\bullet)] \geq (1-\varepsilon)^n \lambda(S(\varepsilon)) \end{aligned}$$

■ Soit $\varepsilon \in [0,1]$ et $n > N$.

Soit v l'application de $\mathbf{R}^N$ dans $[0,1]$ définie par : $\forall x \in \mathbf{R}^N$, $v(x) = \inf_{K \in \mathcal{K}_x} P(K)$. Alors, quel que soit $x \in \mathbf{R}^N$,

$$(1 - v(x))^n \leq Pr(x \notin C_n^\bullet) \leq \binom{n}{N-1}[(1 - v(x))^{n-N+1} + (v(x))^{n-N+1}] . \quad (1)$$

Pour démontrer la première inégalité, notons K_x un élément de $\mathcal{K}_x$ vérifiant $P(K_x) = v(x)$. Alors :

$$\bigcap_{i=1}^{i=n} \{\omega / X_i(\omega) \notin K_x\} \subset \{\omega / x \notin C_n^\omega\} .$$

Pour la deuxième, notons Ω_0 l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels il n'existe pas $N+1$ points $X_i(\omega)(i \leq n)$ contenus dans un même hyperplan. P étant continue, $Pr(\Omega_0) = 1$. Si $\omega \in \Omega_0$ est tel que $x \notin C_n^\omega$, alors il existe $N-1$ éléments $X_{i_1}, \dots, X_{i_{N-1}}(\omega)$ de $\{X_i(\omega)/i \geq n\}$ tels qu'un des deux demi-espaces délimités par l'hyperplan contenant $x, X_{i_1}(\omega), \dots, X_{i_{N-1}}(\omega)$ contient $\{X_i(\omega)/i \leq n\}$. Si on note K ce demi-espace,

$$P(K)^{n-N+1} + (1-P(K))^{n-N+1} \leq (v(x))^{n-N+1} + (1-v(x))^{n-N+1}$$

puisque $x \in K$ et puisque la quantité $t^m + (1-t)^m$, pour $m \in \mathbf{R}^{+*}$ fixé et t variant dans $[0,1]$, est maximale lorsque t ou $1-t$ est minimal (2).

Or $E[\lambda(C_0 \setminus C_n^\bullet)] = \int_{C_0} Pr(x \notin C_n^\bullet)dx$. Grâce à (1), on obtient donc :

$$\int_{C_0 \setminus S(\varepsilon)} \binom{n}{N-1}[1 - v(x)^{n-N+1} + v(x)^{n-N+1}]dx + \lambda(S(\varepsilon))$$
$$\geq E[\lambda(C_0 \setminus C_n^\bullet)] \geq \int_{S(\varepsilon)} (1-v(x))^n dx$$

Ce qui permet de conclure, compte tenu de (2). ■

On peut aussi caractériser la qualité de C_n^ω, en tant qu'estimateur de l'enveloppe convexe du support de P, par la quantité $P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^\omega)$.

On obtient alors la proposition suivante, qui se démontre comme la précédente, mais où on peut se passer de l'hypothèse sur la compacité du support de P.

Proposition II.2.- *Quel que soit $\varepsilon \in [0,1]$ et quel que soit $n > N$,*

$$P(S(\varepsilon))(1-\varepsilon)^n \leq E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^\bullet)] \leq P(S(\varepsilon)) + \binom{n}{N-1}[(1-\varepsilon)^{n-N+1} + \varepsilon^{n-N+1}].$$

Remarque : En prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, puis $\varepsilon = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in]0,1[$, on obtient des résultats comparables à celui, cité plus haut, obtenu par Barany et Larman dans le cas où P est uniforme. Plus précisément : $\forall n > N$,

$$\frac{1}{4n} \leq \frac{1}{4}P(S(\frac{1}{n})) \leq E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^\bullet)] \leq P(S(\frac{1}{n^\alpha})) + \varphi_\alpha(n)$$

et $$\frac{1}{4n}\lambda(S(\frac{1}{n})) \leq E[\lambda(C_0 \setminus C_n^\bullet)] \leq \lambda(S(\frac{1}{n^\alpha})) + \varphi_\alpha(n)\lambda(C_0)$$

où $$\forall n > N,\ \varphi_\alpha(n) = \binom{n}{N-1}(\exp(-\frac{n-N+1}{n^\alpha}) + \frac{1}{n^{\alpha(n-N+1)}}).$$

■

Les deux exemples suivants montrent que les vitesses de convergence vers 0 de $E[\lambda(C_0 - C_n^\bullet)]$ et de $E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^\bullet)]$ peuvent être rendues aussi lentes que l'on veut par un choix adéquat de P.

Exemple 1.- Soit $\alpha > 6$ et P la probabilité sur $\mathbf{R}^2$ de densité f vérifiant : $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ où g est définie par $g(r) = \frac{4}{\pi}(1 - \frac{2\pi}{\alpha+1}(\frac{1}{2})^{\alpha+1})$ si $r \in]0, \frac{1}{2}[, g(r) = \frac{(1-r)^\alpha}{r}$ si $r \in [\frac{1}{2}, 1]$ et $g(r) = 0$ si $r > 1$.

Soit $n > 2$ tel que $\frac{1}{n} < \frac{2\pi}{\alpha+1}(\frac{1}{2})^{\alpha+1}$ et $r_n = 1 - (\frac{\alpha+1}{2\pi n})^{\frac{1}{\alpha+1}}$. Alors $r_n > \frac{1}{2}$ et $P(B(0,1) \setminus B(0,r_n)) = \frac{1}{n}$ et $\lambda(B(0,1) \setminus B(0,r_n)) \geq \pi(\frac{\alpha+1}{2\pi n})^{\frac{1}{\alpha+1}}$.

Donc $\lambda(S(\frac{1}{n})) \geq \pi(\frac{\alpha+1}{2\pi n})^{\frac{1}{\alpha+1}}$ et, d'après la proposition II.1.,

$$\frac{\pi}{4}(\frac{\alpha+1}{2\pi})^{\frac{1}{\alpha+1}}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{\alpha+1}} \leq E[\lambda(B(0,1) \setminus C_n^\bullet)] .$$

En posant $\beta = \frac{1}{\alpha+1}$, on a ainsi prouvé que, quel que soit $\beta \in]0, \frac{1}{7}[$, il existe une probabilité P telle que : il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \mathbf{R}^{+*}$ vérifiant : $\forall n \geq n_0$, $k\frac{1}{n^\beta} \leq E[\lambda(C_0 \setminus C_n^\bullet)]$.

Exemple 2.- Soit $\alpha \in]0,1[$ et h l'application de $]0,1[$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$\forall r \in]0,1[, \quad h(r) = \frac{(1-r^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{\pi^{1+\alpha} r^{1+\alpha}(1-r)} .$$

Alors $h(r)$ est équivalent au voisinage de $r = 1$, à $\frac{2^{\frac{\alpha}{2}}}{\pi^{1+\alpha}(1-r)^{1-\frac{\alpha}{2}}}$.

Donc, pour tout $x \in]0,1[$, l'intégrale $\int_x^1 h(r) r dr$ converge.

Soit $a \in]0,1[$ tel que

$$A = 2\pi \int_a^1 h(r) r dr < 1 .$$

Soit P la probabilité sur $\mathbf{R}^2$ de densité f vérifiant $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ où g est l'application de $\mathbf{R}^{+*}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $g(r) = \frac{1-A}{\pi a^2}$ si $r \in]0,a[$, $g(r) = h(r)$ sdi $r \in [a,1[$ et $g(r) = 0$ si $r \geq 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $r_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+\pi^2}} \geq a$.

Alors, si on note H une droite tangente à $B(0,r_n), H \cap B(0,1)$ a une longueur égale à $2\sqrt{1-r_n^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2+\pi^2}}$. Comme $B(0,r_n)$ a pour périmètre $\frac{2n\pi}{\sqrt{n^2+\pi^2}}$, il existe

n demi-plans $K_1, \ldots, K_n$, dont les frontières sont tangentes à $B(0, r_n)$, vérifiant : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$

$$(K_i \cap B(0,1)) \cap (K_j \cap B(0,1)) = \emptyset .$$

Comme P est invariante par rotation, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$P(K_i \cap B(0,1)) \leq \frac{1}{n} .$$

Ce qui prouve que $S(\frac{1}{n})$ contient $B(0,1) \setminus B(0, r_n)$.

De plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda(K_i \cap B(0,1)) \geq (1 - r_n)\sqrt{1 - r_n^2}$ et $f \geq g(r_n)$ sur $K_i \cap B(0,1)$.

Donc

$$\begin{aligned} P(S(\frac{1}{n})) &\geq P(B(0,1)) \setminus B(0, r_n)) \\ &\geq \sum_{i=1}^{i=n} P(K_i \cap B(0,1)) \\ &\geq n(1 - r_n)\sqrt{1 - r_n^2} g(r_n) \\ &\geq n(\frac{\sqrt{1 - r_n^2}}{\pi r_n})^{1+\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \end{aligned}$$

Ce qui, d'après la proposition II.2, prouve que : $\frac{1}{4n^\alpha} \leq E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^\bullet)]$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{n}{\sqrt{n^2+\pi^2}} \geq a$.

III - PROBABILITÉ D'UN DILATÉ DE L'ENVELOPPE CONVEXE D'UN ÉCHANTILLON

L'objet de la proposition 2 est de montrer que la probabilité maximale des demi-espaces d'intersection vide avec C_n^ω tend vers 0 à une vitesse indépendante de P. Sa démonstration utilise le lemme suivant.

Lemme III.1.- *Soit A un polyèdre convexe de $\mathbf{R}^N$ et K un demi-espace d'intersection vide avec A. Alors K est contenu dans la réunion d'au plus N demi-espaces dont les frontières contiennent chacune une face de A.*

■ Montrons d'abord que, si K_0 est un demi-espace d'appui de A de frontière notée H_0 et si α_0 désigne la dimension du sous-espace affine F engendré par $H_0 \cup A$, alors K_0 est contenu dans la réunion d'un demi-espace K_1 dont la frontière contient une face de A et d'un demi-espace K_1' de frontière, notée H_1', telle que la dimension α_1 du sous-espace affine engendré par $H_1' \cap A$ vérifie : $\alpha_1 \geq \alpha_0 + 1$. (1)

Soit H_1 l'hyperplan contenant une des faces de A définissant $H_0 \cup A$ et soit $D = H_1 \cap H_0$. On note V_1 un vecteur normal de H_1 et V_0 un vecteur normal de H_0. L'ensemble des vecteurs normaux de D est un espace vectoriel de dimension 2 qu'on oriente de façon que $(\widehat{V_1, V_0}) > 0$. Pour tout $\beta \in [0, 2\pi[$, on note H^β l'image de H_1 par la rotation d'angle β autour de D.

Il existe $\beta_0 \in]0, 2\pi[$ tel que : H^β est un hyperplan d'appui de A si et seulement si $\beta \in [0, \beta_0]$. Alors $H_1' = H^{\beta_0}$ contient au moins un point de la frontière de A qui n'est pas dans D. Comme $F \subset D$, la dimension du sous-espace affine engendrée par $H_1' \cap A$ est de dimension supérieure ou égale à $\alpha_0 + 1$.

H_1 et H_1' délimitent quatre parties fermées de $\mathbf{R}^N$ dont les intérieurs sont disjoints. L'une d'elles contient A et la réunion des trois autres est la réunion de deux demi-espaces K_1 et K_1', délimités respectivement par H_1 et H_1', et contient tout demi-espace d'appui de A contenant D. En particulier $K_0 \subset K_1 \cup K_1'$.

Soit K un demi-espace d'intersection vide avec A. Il existe un demi-espace d'appui de A, noté K_0, dont la frontière est parallèle à celle de K. De plus $K \subset K_0$.

En appliquant (1) à K_1', on construit K_2 et K_2' tels que la frontière de K_2 contient une face de A, $\dim(K_2' \cap A) \geq \alpha_1 + 1 \geq \alpha_0 + 2$ et $K_1' \subset K_2 \cup K_2'$; donc $K_0 \subset K_1 \cup K_2 \cup K_2'$ et les frontières de K_1 et K_2 contiennent chacune une face de A.

En itérant ce procédé, on parvient, au bout de $m \leq N-1$ étapes à construire K_m et K_m' tels que la frontière de K_m contient une face de A, $\dim(K_m' \cap A) = N-1$ et $K_{m-1}' \subset K_m \cup K_m'$. Donc $K_0 \subset K_1 \cup \cdots \cup K_m \cup K_m'$ et les frontières de $K_1, K_2, \ldots, K_m$ et K_m' contiennent chacune une face de A. ∎

Pour toute partie A de $\mathbf{R}^N$, on note $\bar{A}$ le complémentaire de A dans $\mathbf{R}^N$. $\mathcal{K}$ désigne l'ensemble des demi-espaces de $\mathbf{R}^N$. Soit $n > N$. Ω_0 désigne l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels il n'existe pas $N+1$ éléments de $\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$ contenus dans un même hyperplan. Pour toute partie $\{i_1, \ldots, n\}$, on note $B_0(i_1, \ldots, i_N)$ l'ensemble des $\omega \in \Omega_0$ pour lesquels l'enveloppe convexe fermée de $\{X_{i_1}(\omega), \ldots, X_{i_N}(\omega)\}$ est une face de C_n^ω et $B_\varepsilon(i_1, \ldots, i_N)$, pour $\varepsilon \in [0, 1/N[$, l'ensemble des $\omega \in B_0(i_1, \ldots, i_N)$ pour lesquels le demi-espace d'appui de C_n^ω contenant $\{X_{i_1}(\omega), \ldots, X_{i_N}(\omega)\}$ est de probabilité strictement supérieure à ε.

Soit $\varepsilon \in]0, 1/N[$. Si ω est tel que $\sup_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ K \subset \overline{C_n^\omega}}} P(K) > N\varepsilon$, il existe une partie $\{i_1, \ldots, i_N\}$ de $\{1, \ldots, n\}$ vérifiant $\omega \in B_\varepsilon(i_1, \ldots, i_N)$.

Ce qui, compte tenu de $Pr[B_\varepsilon(1, \ldots, N)] \leq (1-\varepsilon)^{n-N} + \varepsilon^{n-N}$, démontre la proposition suivante.

Proposition III.2.-

$\forall \varepsilon \in]0, 1/N[, \forall n > N,$

$$Pr\{\omega / \sup_{\substack{K \in K \\ K \subset \overline{C_n^\omega}}} P(K) > N\varepsilon\} \leq \binom{n}{N}[(1-\varepsilon)^{n-N} + \varepsilon^{n-N}].$$

Remarque : La probabilité de $B_0(1, \ldots, N)$ conditionnée par $\{\omega \mid C_n^\omega$ possède m sommets$\}$ $(N \leq m \leq n)$ vaut exactement $\frac{1}{\binom{m}{N}}$. Donc

$$Pr(B_0(1, \ldots, N)) \geq \frac{1}{\binom{n}{N}}$$

d'où $$Pr[B_\varepsilon(1, \ldots, N)/B_0(1, \ldots, N)] \leq \binom{n}{N}[(1-\varepsilon)^{n-N} + \varepsilon^{n-N}].$$

L'objet des deux théorèmes suivants est de montrer que l'on peut obtenir une vitesse de convergence vers 1 de la probabilité d'un dilaté de C_n^ω indépendante de P, à condition d'adapter l'ampleur de la dilatation de C_n^ω à l'ampleur de C_n^ω. On utilisera les notations suivantes : pour tout borélien B de $\mathbf{R}^N$, on note ∂B la frontière de B,

$$\forall n > N \text{ et } \forall \omega \in \Omega\,,\ R_n(\omega) = \mathrm{Inf}\{R > 0 / \exists x \in \mathbf{R}^N \text{ tel que } B(x, R) \supset C_n^\omega\}\,,$$

pour toute partie A de $\mathbf{R}^N$ et tout $a > 0$, A^a désigne le dilaté d'ordre a de A, c'est-à-dire $\{x \in \mathbf{R}^N / d(x, A) \leq a\}$ où d désigne la distance euclidienne sur $\mathbf{R}^N$. Le nombre k, figurant dans les deux énoncés, exprime le lien existant entre l'ampleur de la dilatation, $a_n(\omega)$ ou $b_n(\omega)$, et $R_n(\omega)$; plus il est choisi grand et plus $a_n(\omega)$ ou $b_n(\omega)$ est petit, mais plus la vitesse de convergence obtenue est lente. Le second de ces deux théorèmes étudie le cas $N = 2$ à l'aide de techniques qui ne semblent pas pouvoir se généraliser au cas $N > 2$ mais qui donnent une majoration nettement plus fine.

Théorème III.3.- *Soit $k > 3$. Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $n > N$, on pose $a_n(\omega) = \frac{2R_n(\omega)}{k-3}$. Alors, quel que soit $\varepsilon \in]0, 1/N[$ et $n > N$,*

$$Pr\{\omega / P\left[(C_n^\omega)^{a_n(\omega)}\right] < 1 - 2N^2k^{N-1}\varepsilon\} \leq \binom{n}{N}[(1-\varepsilon)^{n-N} + \varepsilon^{n-N}].$$

■ Soit $\varepsilon \in]0, 1/N[$, $n > N$ et ω tel que $\sup\limits_{\substack{K \in \underline{K} \\ K \subset \overline{C_n^\omega}}} \leq N\varepsilon$.

Soit $S = \{B(x_i, \frac{a_n(\omega)}{2}) / i \in \{1, \ldots, m\}\}$ un ensemble de boules fermées de rayon $\frac{a_n(\omega)}{2}$ centrées sur $\partial(C_n^\omega)^{a_n(\omega)}$ deux à deux disjointes. On suppose que S est maximal, c'est-à-dire que toute boule de rayon $\frac{a_n(\omega)}{2}$ centrée sur $\partial(C_n^\omega)^{a_n(\omega)}$ ne figurant pas dans S rencontre au moins un élément de S.

Soit $y \in \partial(C_n^\omega)^{a_n(\omega)}$. Il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que

$$B(y, \frac{a_n(\omega)}{2}) \bigcap B(x_i \cap \frac{a_n(\omega)}{2}) \neq \emptyset.$$

Donc $y \in B(x_i, a_n(\omega))$. Ce qui montre que

$$\partial(C_n^\omega)^{a_n(\omega)} \subset \bigcup_{i \leq m} B(x_i, a_n(\omega)).$$

Puisque C_n^ω est convexe, $\partial(C_n^\omega)^{a_n(\omega)} = \{x \in \mathbf{R}^N \mid d(x, C_n^\omega) = a_n(\omega)\}$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, il existe donc un demi-espace d'appui de C_n^ω, noté K_i, qui contient $B(x_i, a_n(\omega))$. D'où

$$\partial(C_n^\omega)^{a_n(\omega)} \subset \bigcup_{i \leq m} K_i.$$

Le convexe $\bigcap\limits_{i \geq m} \overline{K_i}$ est donc contenu dans le complémentaire de $\partial(C_n^\omega)^{a_n(\omega)}$. Ce qui prouve que :

$$\mathbf{R}^N \setminus (C_n^\omega)^{a_n(\omega)} \subset \bigcup_{i \leq m} K_i.$$

Or, quel que soit $i \in \{1, \ldots, m\}$, l'intérieur de K_i est contenu dans $\overline{C}_n^\omega$. Donc $P(K_i) \leq N\varepsilon$.

D'où $P\left[(C_n^\omega)^{a_n(\omega)}\right] \geq 1 - mN\varepsilon$.

Soit $i \in \{1, \ldots, m\}$ et $z \in B(x_i \frac{a_n(\omega)}{2})$. Alors

$$\frac{a_n(\omega)}{2} \leq d(x_i, C_n^\omega) - d(z, x_i) \leq d(z, C_n^\omega) \leq d(x_i, C_n^\omega) + d(z, x_i) \leq \frac{3a_n(\omega)}{2}.$$

Les boules $B(x_i, \frac{a_n(\omega)}{2})$, pour $i \in \{1, \ldots, m\}$, sont donc contenues dans $(C_n^\omega)^{(3/2)a_n(\omega)} \setminus (C_n^\omega)^{(1/2)a_n(\omega)}$; comme, de plus, elles sont disjointes,

$$\sum_{i=1}^{i=m} \lambda \left[B(x_i, \frac{a_n(\omega)}{2}) \right] \leq \lambda \left[(C_n^\omega)^{(3/2)a_n(\omega)} \setminus (C_n^\omega)^{(1/2)a_n(\omega)} \right] .$$

La formule de Steiner ([21] p. 220) prouve, en particulier, que, si C_1 et C_2 sont deux convexes vérifiant $C_1 \subset C_2$ et α_1 et α_2 sont deux réels positifs tels que $\alpha_1 < \alpha_2$, $\lambda(C_1^{\alpha_2} \setminus C_1^{\alpha_1}) \leq \lambda(C_2^{\alpha_2} \setminus C_2^{\alpha_1})$. Donc, si x est tel que $B(x, R_n(\omega)) \supset C_n^\omega$,

$$\sum_{i=1}^{i=m} \lambda \left[B(x_i, \frac{a_n(\omega)}{2}) \right] \leq \lambda \left[B(x, R_n(\omega) + \frac{3}{2} a_n(\omega)) \setminus B(x, R_n(\omega) + \frac{1}{2} a_n(\omega)) \right] .$$

Donc

$$\begin{aligned} m(\frac{a_n(\omega)}{2})^N &\leq (R_n(\omega) + \frac{3}{2} a_n(\omega))^N - (R_n(\omega) + \frac{1}{2} a_n(\omega))^N \\ &\leq a_n(\omega) N (R_n(\omega) + \frac{3}{2} a_n(\omega))^{N-1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$m \leq 2N(\frac{R_n(\omega) + \frac{3}{2} a_n(\omega)}{\frac{a_n(\omega)}{2}})^{N-1} = 2Nk^{N-1} .$$

Donc $\{\omega / \sup_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ K \subset \overline{C_n^\omega}}} P(K) \leq N\varepsilon\} \subset \{\omega / P\left[(C_n^\omega)^{a_n(\omega)} \right] \geq 1 - 2N^2 k^{N-1} \varepsilon\}$. Ce qui, avec la proposition III.2, permet de conclure. ■

Théorème III.4.- *Ici $N = 2$. Soit $k > 2\pi + 5$. Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $n > 2$, on pose $b_n(\omega) = \frac{4\pi^2 R_n(\omega)}{(k-5)^2 - 4\pi^2}$. Alors, quel que soit $\varepsilon \in]0, 1/N[$ et $n > 2$,*

$$Pr\{\omega / P\left[((C_n^\omega)^{b_n(\omega)} \right] < 1 - 2k\varepsilon\} \leq \binom{n}{2} [(1-\varepsilon)^{n-2} + \varepsilon^{n-2}] .$$

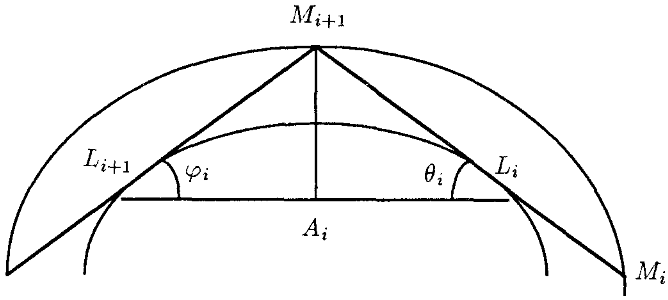
■ On utilise les notations et le vocabulaire usuels de la géométrie affine. Soit $\varepsilon \in]0, 1/2[, n > 2$ et $\omega \in \Omega$ tels que $\sup_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ K \subset \overline{C_n^\omega}}} P(K) \leq 2\varepsilon$.

Soit M_1 un point de $\partial (C_n^\omega)^{b_n(\omega)}$. Il existe exactement deux droites d'appui de C_n^ω qui contiennent M_1. Soit L_1 (resp. M_2) un point d'intersection de l'une d'entre elles, notée D_1, avec ∂C_n^ω (resp. $\partial (C_n^\omega)^{b_n(\omega)}$). Il n'existe qu'une seule droite d'appui de C_n^ω, notée D_2, distincte de D_1, qui contient M_2. On note L_2 (resp. M_3) un point d'intersection de D_2 avec la frontière de C_n^ω (resp. $((C_n^\omega)^{b_n(\omega)})$. On repète cette procédure jusqu'à obtenir une droite D_{m-1} délimitant un demi-plan d'appui de C_n^ω contenant M_1.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, notons A_i le projeté orthogonal de M_{i+1} sur la droite $(L_i L_{i+1})$ et θ_i (resp. φ_i) l'angle géométrique formé par les droites $(L_i L_{i+1})$ et $(L_i M_{i+1})$ (resp. $(M_{i+1} L_{i+1})$). Alors :

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} (\theta_i + \varphi_i) \leq 2\pi$$

et
$$\sum_{i=1}^{i=m-1} (L_{i+1} + M_{i+1} + M_{i+1}L_{i+1}) \leq 2\pi(R_n(\omega) + b_n(\omega))$$



Si A_i est intérieur à C_n^ω, alors :

$$b_n(\omega) \leq M_{i+1}A_i \leq M_{i+1}L_i \times \sin\theta_i \leq \theta_i \times M_{i+1}L_i$$

et
$$b_n(\omega) \leq M_{i+1}A_i \leq L_{i+1}M_{i+1} \times \sin\varphi_i \leq \varphi_i \times L_{i+1}M_{i+1} \,.$$

Sinon, $\theta_i + \varphi_i > \pi/2$; ce qui ne peut pas pas se produire pour plus de trois indices i.

Si $m > 4$, nous disposons d'au moins $2m - 2 - 2 \times 3 = 2m - 8$ nombres ψ_i et d'au moins $2m - 8$ nombres d_i vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{i=2m-8} \psi_i \leq 2\pi$$

$$\sum_{i=1}^{i=2m-8} d_i \leq 2\pi(R_n(\omega) + b_n(\omega))$$

et
$$\forall i \in \{1, \ldots, 2m-8\}, \;\; b_n(\omega) \leq \psi_i d_i$$

Il existe nécessairement une partie $\{d_{j_1}, \ldots, d_{j_{m-4}}\}$ de $m-4$ éléments de $\{d_1, \ldots, d_{2_{m-8}}\}$ vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \ldots, m-4\}\,,\, d_{j_i} \leq \frac{2\pi(R_n(\omega) + b_n(\omega))}{m-4}\,.$$

Donc

$$\forall i \in \{1, \ldots, m-4\}\,,\, \psi_{j_i} \geq \frac{(m-4)b_n(\omega)}{2\pi(R_n(\omega) + b_n(\omega))}\,.$$

Ce qui entraîne :

$$2\pi \geq \sum_{i=1}^{i=2m-8} \psi_i \geq \sum_{i=1}^{i=m-4} \psi_{j_i} \frac{(m-4)^2 b_n(\omega)}{2\pi(R_n(\omega) + b_n(\omega))}\,.$$

Donc $m \leq 2\pi\sqrt{\frac{R_n(\omega)}{b_n(\omega)} + 1} + 4$.

Ce qui permet de conclure puisque, si pour tout $i \in \{1, \ldots, m+1\}$ on note K_i le demi-plan d'appui de C_n^ω délimité par D_i,

$$\mathbf{R}^2 \setminus (C_n^\omega)^{b_n(\omega)} \subset \bigcup_{i=1}^{i=m+1} K_i\,.$$

■

Remarques : 1) Pour $N > 2$, un nombre m suffisant de demi-espaces d'appui de C_n^ω recouvrant $\mathbf{R}^N \setminus (C_n^\omega)^a$ peut s'exprimer en fonction de a et de $\lambda[(C_n^\omega)^a \setminus C_n^\omega]$. Plus précisément $m\frac{2\pi^{N/2}}{N\Gamma(N/2)}(\frac{a}{2})^N \leq \lambda[(C_n^\omega)^a \setminus C_n^\omega]$.

Pour calculer un majorant de m et luis faire jouer le rôle de $2Nk^{N-1}$ dans le théorème III.3., il faudrait être en mesure, connaissant C_n^ω, d'exprimer $\lambda[(C_n^\omega)^a \setminus C_n^\omega]$ en fonction de a. La formule de Steiner ([21], p. 220) le permet, mais son utilisation nécessite la connaissance de caractéristiques de C_n^ω difficiles à calculer.

2) A l'aide des théorèmes III.3. et III.4., on obtient : $\forall \varepsilon \in]0, 1/N[$ et $\forall n > N$,

$$E\left[P(\mathbf{R}^N \setminus (C_n^\bullet)^{a_n(\cdot)}\right] \leq \binom{n}{N}[(1-\varepsilon)^{n-N} + \varepsilon^{n-N}] + 2N^2k^{N-1}\varepsilon \qquad (1)$$

et, si $N = 2$,

$$E\left[P(\mathbf{R}^2 \setminus (C_n^\bullet)^{b_n(\cdot)}\right] \leq \binom{n}{2}[(1-\varepsilon)^{n-2} + \varepsilon^{n-2}] + 2k\varepsilon \qquad (2)$$

où les nombres k sont définis dans l'énoncé des théorèmes.

Si on prend $\varepsilon = \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in]0,1[$, on obtient : $\forall n > N$,

$$E\left[P(\mathbf{R}^N \setminus (C_n^\bullet)^{a_n(\cdot)}\right] \leq \binom{n}{N}[\exp(\frac{n-N}{n^\alpha}) + \frac{1}{n^{\alpha(n-N)}}] + 2N^2k^{N-1}\frac{1}{n^\alpha}$$

et

$$E\left[P(\mathbf{R}^2 \setminus (C_n^\bullet)^{b_n(\cdot)}\right] \leq \binom{n}{2}\exp(\frac{n-2}{n^\alpha}) + \frac{1}{n^{\alpha(n-2)}}] + 2k\frac{1}{n^\alpha}\,.$$

■

L'objet du théorème III.6. est de donner une majoration de $E[P(\mathbf{R}^N \setminus (C_n^\bullet)^a)]$ où a est indépendant de ω ; on obtient de plus des majorants qui, dans certains cas, sont plus petits que ceux figurant dans (1) et (2). Sa démonstration utilise le lemme suivant.

Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on note $\mathcal{K}(\varepsilon)$ l'ensemble des demi-espaces d'intersection vide avec $T(\varepsilon) = \mathbf{R}^N \setminus S(\varepsilon)$

Lemme III.5.-

$$\forall \varepsilon \in]0, 1/N[\,,\ \sup_{K\in\mathcal{K}_\varepsilon} P(K) \leq N\varepsilon\,.$$

■ Soit $\varepsilon \in]0, 1/N[$.

Remarquons d'abord que $T(\varepsilon)$ est convexe. En effet considérons x et y deux points distincts de $T(\varepsilon)$; s'il existait un point z du segment $[x,y]$ tel que $z \in S(\varepsilon)$, alors le demi-espace K contenant z sur sa frontière et vérifiant $P(K) \leq \varepsilon$ contiendrait soit x, soit y, soit les deux ; ce qui est impossible.

Remarquons ensuite que tout demi-espace K d'appui de $T(\varepsilon)$ en un point régulier x de sa frontière vérifie $P(K) \leq \varepsilon$. En effet tout autre hyperplan passant par x traverse l'intérieur de $T(\varepsilon)$; il délimite donc un demi-espace de probabilité strictement supérieure à ε.

Soit $a > 0$ et $\{B(x_i, a/2)/i \in \{1,\ldots,m\}\}$ un recouvrement fini de $\partial T(\varepsilon)$ à l'aide de m boules centrées sur $\partial T(\varepsilon)$ où on impose à m d'être strictement supérieur à N.

L'ensemble des points irréguliers de $\partial T(\varepsilon)$ ayant un projeté, sur une sphère intérieure à $T(\varepsilon)$, de mesure de Lebesgue nulle ([22] p. 136), pour tout $i \in$

$\{1,\ldots,m\}$, il existe $y_i \in B(x_i,a/2)$ point régulier de $\partial T(\varepsilon)$. Pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}$, on note H_i l'unique hyperplan d'appui de $T(\varepsilon)$ en y_i, V_i le vecteur normal unitaire orienté vers $T(\varepsilon)$ de H_i, H'_i l'image de H_i par la translation de vecteur aV_i, K_i le demi-espace d'appui de $T(\varepsilon)$ de frontière H_i et K'_i le demi-espace ouvert de frontière H'_i contenant $B(y_i,a)$.

Soit A le polyèdre convexe défini par $A = \bigcap_{i=1}^{i=m} (\mathbf{R}^N \setminus K'_i)$.

Soit $K \in \mathcal{K}(\varepsilon)$, alors, puisque $\partial T(\varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{i=m} B(y_i,a), K \cap A = \emptyset$ et, d'après le lemme III.1., $K \subset \bigcup_{j=1}^{j=n_0} K'_{ij}$ où $n_0 \le N$ et, pour $j=1$ à $j=n_0$, $ij \in \{1,\ldots,m\}$.

Donc

$$\begin{aligned} P(K) \le \sum_{j=1}^{j=n_0} P\left(K'_{ij}\right) &\le \sum_{j=1}^{j=n_0} \left[P(K_{ij} + P(K'_{ij} \setminus K_{ij})\right] \\ &\le N\varepsilon + N \sup_{B\in\beta_a} P(B) \end{aligned} \tag{1}$$

où β_a désigne l'ensemble des bandes de $\mathbf{R}^N$ de largeur a. Or $\lim_{a\to 0}\sup_{B\in\beta_a} P(B) = 0$ car P est continue ([20] p. 66). Grâce à (1), a étant arbitraire,

$$P(K) \le N\varepsilon\,.$$

∎

Soit $\varepsilon \in]0,1/N[, x_0 \in \mathbf{R}^N, R \in \mathbf{R}^{+*}$ et $r \in \mathbf{R}^{+*}$ tels que

$$B(x_0,r) \subset T(\varepsilon) \subset B(x_0,R)\,.$$

On pose de nouveau $v(x_0) = \inf_{K\in\mathcal{K}_{x_0}} P(K)$ où $\mathcal{K}_{x_0}$ est l'ensemble des demi-espaces de frontière contenant x_0.

Théorème III.6.- *Quel que soit $a \in]0,r[$ et quel que soit $n > N$,*

$$E\big[P(\mathbf{R}^N \setminus (C_n^\bullet)^a)\big] \le 2\binom{n}{N-1}\big[(1-\varepsilon)^{n-N+1} + \varepsilon^{n-N+1}\big] + 2N^2\big(\frac{2R^2}{ar} + 3\big)^{N-1}\varepsilon\,,$$

et, si $N=2$,

$$E\big[P(\mathbf{R}^2 \setminus (C_n^\bullet)^a)\big] \le 2n\big[(1-\varepsilon)^{n-1} + \varepsilon^{n-1}\big] + \big(4\pi\sqrt{\frac{R^2}{ar}+1} + 10\big)\varepsilon\,.$$

■ Soit $a \in]0, r[$ et $n > N$.

Soit $T_a(\varepsilon) = \left\{ y = x + a\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \mid x \in T(\varepsilon) \setminus \{x_0\} \right\}$.

Enfin soit $E_n = \{\omega / x_0 \in C_n^\omega\}$ et $\bar{E}_n = \Omega \setminus E_n$.

La majoration de $E\left[P(\mathbf{R}^N \setminus (C_n^\bullet)^a)\right] = \int_{\mathbf{R}^N} Pr(x \notin (C_n^\bullet)^a) dP(x)$ se fait en trois étapes.

1) Majoration de $\int_{B(x_0,a)} Pr(x \notin (C_n^\bullet)^a) dP(x)$.

Si $x \in B(x_0, a), Pr\left[(x \notin (C_n^\bullet)^a)/E_n\right] = 0$. Donc

$$
\begin{aligned}
&\int_{B(x_0,a)} Pr(x \notin (C_n^\bullet)^a) dP(x) \\
&\qquad = \int_{B(x_0,a)} Pr[(x \notin (C_n^\bullet)^a)/\bar{E}_n] Pr(\bar{E}_n) dP(x) \\
&\qquad \leq Pr(\bar{E}_n) \times P(B(x_0, a)) \\
&\qquad \leq \binom{n}{N-1} \left[(1 - v(x_0))^{n-N+1} + v(x_0)^{n-N+1}\right] \times P(B(x_0, a)) \\
&\qquad \leq \binom{n}{N-1} \left[(1 - \varepsilon)^{n-N+1} + \varepsilon^{n-N+1}\right] \times P(B(x_0, a))
\end{aligned}
$$

Car $x_0 \in T(\varepsilon)$ et la quantité $t^m + (1-t)^m$, pour $m \in \mathbf{R}^{+*}$ fixé et t variant dans $[0, 1]$, est maximale lorsque t ou $(1-t)$ est minimal.

2) Majoration de $\int_{T_a(\varepsilon)} Pr(x \notin (C_n^\bullet)^a) dP(x)$.

D'une part

$$
\begin{aligned}
&\int_{T_a(\varepsilon)} Pr\left[(x \notin (C_n^\bullet)^a) \cap \bar{E}_n\right] dP(x) \\
&\qquad \leq \int_{T_a(\varepsilon)} Pr(\bar{E}_n) dP(x) \\
&\qquad \leq \binom{n}{N-1} \left[(1 - \varepsilon)^{n-N+1} + \varepsilon^{n-N+1}\right] \times P(T_a(\varepsilon)).
\end{aligned}
$$

D'autre part, si x et ω sont tels que $x \notin (C_n^\omega)^a$, alors $x - a\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \notin C_n^\omega$; de plus, quel que soit $x \in T_a(\varepsilon)$, $x - a\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \in T(\varepsilon)$. Donc

$$
\begin{aligned}
\int_{T_a(\varepsilon)} Pr\left[(x \notin (C_n^\bullet)^a) \cap E_n\right] dP(x) &\leq \int_{T_a(\varepsilon)} Pr\Big(x - a\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \notin C_n^\omega\Big) dP(x) \\
&\leq \binom{n}{N-1} \left[(1 - \varepsilon)^{n-N+1} + \varepsilon^{n-N+1}\right],
\end{aligned}
$$

grâce aux arguments figurant dans la démonstration de la proposition II.1.

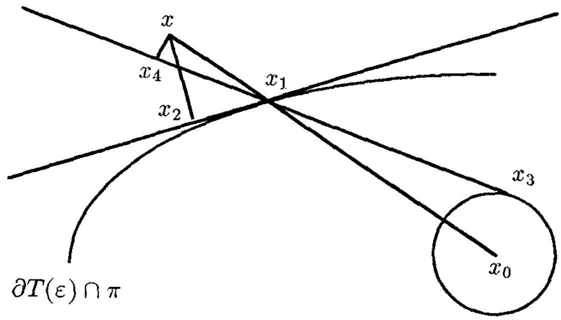
3) Majoration de $\int_{\mathbf{R}^N \setminus T_a(\varepsilon)} Pr(x \notin (C_n^\bullet)^a) dP(x)$.

On se contente de majorer $P(\mathbf{R}^N \setminus T_a(\varepsilon))$.

Remarquons d'abord que $T_a(\varepsilon) \supset (T(\varepsilon))^{ar/R}$ (1)

En effet : soit $x \in \partial T_a(\varepsilon), x_1 \in \partial T(\varepsilon)$ tel que $x - x_1 = a\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$, H un hyperplan d'appui de $T(\varepsilon)$ en x_1 et x_2 le projeté orthogonal de x sur H.

Si $x_2 \neq x_1$, soit π le sous-espace affine de dimension 2 contenant x, x_1 et x_2 (si $N = 2$, $\pi = \mathbf{R}^2$). Comme π contient x_0, il existe $x_3 \in \partial B(x_0, r)$ tel que $x - x_0$ est orthogonal à $x_3 - x_0$ et l'intersection des droites (x_3x_1) et (xx_2) appartient au segment $[x, x_2]$. Soit x_4 le projeté orthogonal de x sur la droite (x_3x_1).



Alors $\|x - x_2\| \geq \|x - x_4\| = \|x_3 - x_0\| \times \frac{\|x_1 - x\|}{\|x_1 - x_0\|} \geq \frac{ra}{R}$.

Si $x_2 = x_1$, alors $\|x - x_2\| = a$.

Or la distance de x à $T(\varepsilon)$ est supérieure à celle de x à H.

a) Si $N > 2$, en procédant comme dans la démonstration du théorème III.3., on recouvre $\mathbf{R}^N \setminus (T(\varepsilon))^{ar/R}$ à l'aide de $m \leq 2N(\frac{2R^2}{ar} + 3)^{N-1}$ demi-espaces contenus dans $\mathbf{R}^N \setminus T(\varepsilon)$. Le lemme III.5., et (1) prouvent alors que :

$$P(\mathbf{R}^N \setminus T_a(\varepsilon)) \leq 2N^2(\frac{2R^2}{ar} + 3)^{N-1}\varepsilon\,.$$

b) Si $N = 2$, en procédant comme dans la démonstration du théorème III.4., on recouvre $\mathbf{R}^2 \setminus (T(\varepsilon))^{ar/R}$ à l'aide de $m \leq 2\pi\sqrt{\frac{R^2}{ar} + 1} + 5$ demi-plans contenus dans $\mathbf{R}^2 \setminus T(\varepsilon)$. Le lemme III.5., et (1) prouvent alors que :

$$P(\mathbf{R}^2 \setminus T_a(\varepsilon)) \leq (4\pi\sqrt{\frac{R^2}{ar} + 1} + 10)\varepsilon\,.$$

∎

Si la densité f de P est telle qu'il existe une application g de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$ vérifiant $f(x) = g(\|x\|)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$, tous les ensembles $T(\varepsilon)$, pour $\varepsilon \in]0,1[$, sont des boules et on peut prendre $r = R$. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, notons $R(\varepsilon)$ le rayon de $T(\varepsilon)$. On obtient le corollaire suivant :

Corollaire III.7.- *Quel que soit $\varepsilon \in]0,1[$, $n > N$ et $a \in]0, R(\varepsilon)[$,*

$$E[P(\mathbf{R}^N \setminus (C_n^\bullet)^a)] \leq 2\binom{n}{N-1}[(1-\varepsilon)^{n-N+1} + \varepsilon^{n-N+1}] + 2N^2\Big(\frac{2R(\varepsilon)}{a} + 3\Big)^{N-1}\varepsilon\,,$$

et, si $N = 2$,

$$E[P(\mathbf{R}^2 \setminus (C_n^\bullet)^a)] \leq 2n[(1-\varepsilon)^{n-1} + \varepsilon^{n-1}] + \Big(4\pi\sqrt{\frac{R(\varepsilon)}{a} + 1} + 10\Big)\varepsilon\,,$$

IV - CONCLUSIONS.

Les arguments qui précèdent l'énoncé de la proposition III.2., montrent que $Pr(T(\varepsilon) \subset C_n^\bullet) \geq 1 - \binom{n}{N}[(1-\varepsilon)^{n-N} + \varepsilon^{n-N}]$. Ce qui permet l'estimation d'un majorant du nombre R du théorème III.6. et du nombre $R(\varepsilon)$ du corollaire III.7., à l'aide du rayon minimal des boules contenant C_n^ω.

Les théorèmes III.3 et III.4 permettent d'estimer un majorant du nombre M, figurant dans l'énoncé de la propriété de Geffroy citée dans l'introduction, qui est la seule quantité dépendant de P qui intervient dans cette propriété. Il suffit pour cela de choisir ε et k de sorte que $2N^2k^{N-1}\varepsilon < \frac{\alpha}{4}$, ou, si $N = 2$, $2k\varepsilon < \frac{\alpha}{4}$, et de déterminer un nombre suffisant de boules de rayon α dont la réunion contient $(C_n^\omega)^{a_n(\omega)}$, ou $(C_n^\omega)^{b_n(\omega)}$ si $N = 2$.

Si on ne dispose pas de renseignement sur P, il est impossible de calculer directement $P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^\omega)$; en revanche, dès que l'on a pu caractériser C_n^ω (ce qui, si N est grand, demande des calculs lourds) on connaît le nombre de ses sommets. Efron ([4] p. 335) a démontré que $E(\frac{M_{n+1}}{n+1}) = E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_n)]$ où M_{n+1} désigne le nombre de sommets de C_{n+1}. Mais, si ces espérances sont grandes, l'écart entre $\frac{M_{n+1}(\omega)}{n+1}$ et $E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_n^\bullet)]$ peut, a priori, être important avec une probabilité non négligeable. Il serait donc intéressant de connaître des majorants, indépendants de P, de la variance de M_n ou des quantités $Pr(|M_n - E[P(\mathbf{R}^N \setminus C_{n-1})]| > \varepsilon)$ et $Pr(|M_n - P(\mathbf{R}^N \setminus C_{n-1}^\bullet)| \geq \varepsilon)$.

RÉFÉRENCES

(1) **GEFFROY, (1958)** *Contribution à la théorie des valeurs extrêmes.* Thèse d'Etat. Faculté des Sciences de Paris.

(2) **RENYI et SUNLANKE (1964)** *Über die kervexe hülle von n zufälling gewählten Punkten II.* Z.W. 3. p. 138-147.

(3) **GEFFROY (1964)** *Sur un problème d'estimation géométrique.* Pub. ISUP 13, p. 191-200.

(4) **EFRON (1965)** *The convex hull of a random set of points.* Biometrika, 52, 3 and 4, p. 331-343.

(5) **RAYNAUD (1965)** *Sur le comportement asymptotique de l'enveloppe convexe d'un nuage de points tirés au hasard dans* R^n. C.R. Acad. Sci. Paris, 262, série A, 617-623.

(6) **GUILBART (1973)** *Etude de la continuité de l'application H qui à toute mesure de probabilité définie sur* $\mathbf{R}^N$ *fait correspondre l'enveloppe convexe fermée du support de cette mesure.* C.R. Acad. Sci. Paris 277, A, p. 999-1002.

(7) **CHEVALIER (1976)** *Estimation du support et du contour du support d'une loi de probabilité.* Ann. Inst. Henri Poincaré B. III, 4. p. 339-364.

(8) **RIPLEY et RASSON (1977)** *Finding the edge of a Poisson ferest.* J. Appl. Prob. 14. p. 483-491.

(9) **EDDY et GALE (1981)** *The convex hull of a spherically symetric sample.* Adv. Appl. Prob. 13. p. 751-763.

(10) **BUCHTA (1984)** *Stochastische approximation kowexer polygone.* Z.W. 67. p. 283-304.

(11) **JACOB (1984)** *Estimation du contour discontinu d'un processus ponctuel sur le plan.* Pub. ISUP XXIX 3-4, p. 1-25.

(12) **BROZIUS et DE HAAN (1987)** *On limiting laws for the convex hull of a sample.* J. Appl. Prob. 24. p. 852-862.

(13) **BARANY et LARMAN (1988)** *Convex bodies, economic cap coverings, random polytopes.* Mathematika, 35, p. 274-291.

(14) **JACOB et ABBAR (1988)** *Estimating the edge of a Cox process area.* Pub. IRMA, Lille, 13, VII, p. 1-17.

(15) **VAN WEL (1989)** *The convex hull of a uniform sample from the interior of a simple d-polytope.* J. Appl. Prob. 26, p. 259-273.

(16) **GRUBER (1983)** *Approximation of convex bodies. Dans "convexity and its applications".* Grüber et wills ed. Birkhäuser.

(17) **DWYER (1988)** *On the convex hull of a random points in a polytope.* J. Appl. Prob., 25, 688-699.

(18) **BUCHTA, MÜLLER et TICHY (1985)** *Stochastical approximation of convex bodies.* Math. Am. 271, p. 225-235.

(19) **FISHER (1969)** *Limiting sets and convex hulls of samples from product measures.* Ann. Math. Stat. 40. 5. p. 1824-1832.

(20) **MASSÉ (1988)** *Concentration des mesures bornées sur* $\mathbf{R}^N$ *et problèmes statistiques associés.* Statistique et Analyse des Données, 13.1. p. 59-113.

(21) **SANTALO (1976)** *Integral geometry and geometric probability.* Addison-Wesley Publishing.

(22) **VALENTINE (1964)** *Convex sets.* McGraw Hill New-York.

Résumé

Les trois parties correspondent à trois publications. Dans chacune d'elles, on se place dans le cas multivarié.

Dans la première, la fonction de concentration de Paul Lévy, relative aux intervalles réels, est étendue aux mesures bornées sur les espaces de dimensions supérieures à partir des convexes fermés. Les propriétés générales de cette extension sont étudiées, ainsi que quelques uns des problèmes statistiques qu'elle soulève. On conclut en définissant l'epsilon-support d'une probabilité et en en proposant un estimateur.

La deuxième partie est consacrée à la vitesse de décroissance de deux fonctions de concentration des puissances successives de convolution d'une probabilité.

Dans la troisième partie, on étudie la vitesse de convergence de l'enveloppe convexe d'un échantillon vers l'enveloppe convexe du support de la loi et on obtient deux majorations, indépendantes de la loi, de la vitesse de convergence vers un de la probabilité d'un dilaté de l'enveloppe convexe d'un échantillon.

MOTS CLÉS : **Fonction de concentration - Estimation - Vitesse de convergence - Convolution - Support - Convexes - Echantillon.**