N° d'ordre: 622

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Elhassan IDRISSI

LA L.S-CATÉGORIE D'UNE APPLICATION

Soutenue le 14 décembre 1990 devant la commission d'Examen :

Président	: D.TANRÉ, Professeur Université de Lille-Flandres-Artois
Directeur de Thèse	: J.C.THOMAS, Professeur Université de Lille-Flandres-Artois
Rapporteurs	: Y.FÉLIX, Professeur Université Catholique de Louvain-La-Neuve
	J.M.LEMAIRE, Professeur Université de Nice
	D.TANRÉ, Professeur Université de Lille-Flandres-Artois
Membres Invités	: S.HALPERIN, Professeur Université de Toronto
	K.HESS, Professeur invité à l'Université de Nice

A mes parents

Introduction.

Soit k un corps de caractéristique quelconque. Une k-algèbre de cochaînes (A,d) est une k-algèbre différentielle graduée (en abrégé *a.d.g*), concentrée en degré positifs ou nuls et dont la différentielle est de degré 1. On suppose de plus que $H^0(A) = k$, $H^1(A) = 0$ et pour tout i, $dim H^i(A) < \infty$. L'exemple standard d'un tel objet est l'algèbre $C^*(X;k)$ des cochaînes singulières à coefficients dans k d'un CW-complexe 1-connexe de type fini X. Halperin et Lemaire [H.L] ont introduit les invariants numériques

$$Acat(A)\,,\ lMcat(A)\,,\ rMcat(A),$$

tels que:

i) $max(lMcat(A)\,, rMcat(A)) \leq Acat(A))$,

ii) Si $A = C^*(X;k)$ alors $Acat(A) \leq cat(X)$.

$cat(X)$ désigne la catégorie de Lusternik-Schnirelmann de l'espace topologique X. Elle est définie par:

$cat(X) \leq n$ si X peut être recouvert par (n+1) ouverts contractiles dans X.

Lorsque l'on se restreint aux algèbres de cochaînes commutatives graduées alors

$$lMcat(A) = rMcat(A)$$

et la valeur commune de ces invariants est notée $Mcat(A)$. En outre K.Hess [He] a démontré que si $k = \mathbb{Q}$ alors,

$$(*) \qquad Mcat(A) = Acat(A).$$

Ce résultat associé à celui de Jessup [J] démontre la conjecture de Ganéa

$$cat(X \times S^n) = cat(X) + 1$$

pour les espaces rationnels.

Notre premier résultat (I-3) montre que pour les algèbres de cochaînes quelconques,

$$lMcat(A) \neq rMcat(A),$$

bien que $H(A)$ soit une algèbre graduée commutative.

Afin d'étendre la classe des espaces pour lesquels la conjecture de Ganéa est satisfaite, Ndombol [N] introduit l'invariant $biMcat(A)$, pour les algèbres de cochaînes quelconques et établit que

$$(*) \qquad Acat(A) = biMcat(A).$$

Dans l'exemple (I-4), nous montrons que

$$rMcat(A) \neq biMcat(A) \qquad \text{et} \qquad lMcat(A) \neq biMcat(A).$$

Les invariants précédents admettent une généralisation dans le contexte de la L.S-catégorie d'un homomorphisme d'a.d.g. ($cat(id_A) = cat(A)$) et l'on a

$$e(f) \leq max(lMcat(f), rMcat(f)) \leq biMcat(f) \leq Acat(f).$$

Les résultats récents [F.H.T$_2$] obtenus par Y. Félix, S. Halperin, et J-C Thomas reliant la catégorie d'une application et le grade du module d'holonomie montrent qu'il ne s'agit pas la d'une généralisation gratuite.

Pour notre part, ceci nous permet, dans l'exemple (I-5), de montrer que le résultat (*) de Ndombol ne s'étend pas à la catégorie d'un homomorphisme d'algèbres de cochaînes. Signalons que même si $k = \mathbb{Q}$, et si f est un homomorphisme induit au niveau des cochaînes par une application continue alors l'égalité $Acat(f) = biMcat(f)$ n'est pas nécessairement satisfaite, (II-3).

Dans le paragraphe (I-6) nous établissons l'inégalité $Acat(f) \leq cat(f)$, où $cat(f)$ désigne la L.S-catégorie d'une application continue introduite par Berstein et Ganea [B.G].

Dans la seconde partie nous étudions systématiquement dans le cadre de la théorie des modèles de Sullivan les diverses notions de catégories d'une application. En particulier, nous obtenons un "mapping theorem" (II-4) et des résultats sur les groupes de Gottlieb relatifs (II-5).

Le texte s'organise de la manière suivante:

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma plus profonde gratitude à Monsieur J.C.Thomas dont les conseils et les encouragements constants m'ont permis de mener à bien ce travail.

Monsieur D.Tanré m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de cette thèse, et de faire partie de ce jury; je lui exprime ici toute ma reconnaissance.

Je tiens à remercie Monsieurs Y.Félix et J.M.Lemaire pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Qu'ils trouvent ici l'expression de mes respectueux remerciements pour avoir accepté de juger cette thèse.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur S.Halperin et Madame K.Hess qui ont accepté de participer au jury.

I- La catégorie d'une application en caractéristique quelconque.

1-<u>T-modèle d'une application.</u>

Soit k un corps de caractéristique quelconque. Les espaces vectoriels et les algèbres considérés sont sur k et nous écrirons simplement $\otimes$ au lieu $\underset{k}{\otimes}$. On suppose que les a.d.g. considérées sont cohomologiquement 1-connexes et de type fini.

(1.1) Rappels.

1) On appelle extension libre [H.L] une injection $i : A \to A \sqcup T(V)$ d'a.d.g. telle que: V est la réunion croissante des sous-modules $V_{(i)}$, $i \geq 0$ avec

$$V_{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad dV_{(i)} \subset A \sqcup T(V_{(i-1)}) .$$

($\sqcup$ désigne le coproduit dans la catégorie des a.d.g.)
Un quasi-isomorphisme est un homomorphisme qui induit un isomorphime en cohomologie (il est désigné par $\backsim$).

2) Pour tout homomorphisme $f : A \to B$ d'*a.d.g.* Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & B \\ & A \sqcup T(V) \arrow[u, "\psi", "\backsim"'] \end{tikzcd}$$

où i est une extension libre et ψ un quasi-isomorphisme.

L'injection $i : A \to A \sqcup T(V)$ est appelée le T-modèle de f.

Si $A = k$, alors l'algèbre différentielle $(T(V), d)$ est appelée le T-modèle de B. Si en outre $dV \subset T^{\geq 2}(V)$, on dit que $(T(V), d)$ est un T-modèle minimal de B.

Si $f : (T(V) , d) \to (T(W) , \delta)$ est un quasi-isomorphisme entre modèles minimaux, alors f est un isomorphisme.

(1.2) Homotopie [B.L].

Soit $(T(V), d)$ le T-modèle d'une a.d.g. (A, d), on définit une a.d.g. libre

$$(T(V' \oplus V'' \oplus sV), D).$$

V' et V'' sont deux copies de V. Définissons D sur les générateurs de V' et V'' comme dans $T(V)$, et sur sV de la manière suivante
notons $S : T(V) \to T(V' \oplus V'' \oplus sV)$ l'application de R-modules de degré -1 définie par: pour tout v de V et pour tout $a, b \in T(V)$

$$S(v) = sv$$
$$S(a.b) = S(a).b'' + (-1)^{|a|}a'.S(b).$$

Alors D est définie sur sV par la formule:

$$D(sv) = v'' - v' - Sdv\,, \qquad \text{pour tout}\, sv \in sV\,.$$

Définition:
Soient $f_1, f_2 : T(V) \to B$ deux homomorphismes d'*a.d.g.* on dit que f_1 et f_2 sont homotopes s'il existe un morphisme d'a.d.g,

$$h : T(V' \oplus V'' \oplus sV) \to B$$

tel que: $hi' = f_1$ et $hi'' = f_2$.
On note: $f_1 \simeq f_2$.

(1.3) **Lemme de relèvement:**
Pour tout diagramme commutatif dans k-a.d.g.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A \sqcup T(V) & \xrightarrow[h]{} & C \end{array}$$

1) Si i est une extension libre et g un quasi-isomorphisme, alors il existe

$$\ell : A \sqcup T(V) \to B$$

tel que $g\ell \simeq h$ et $\ell i = f$.

Si de plus g est surjectif alors on peut choisir ℓ tel que $g\ell = h$.

2) Si i est une extension libre et un quasi-isomorphisme, alors il existe

$$\ell : A \sqcup T(V) \to B$$

tel que $g\ell \simeq h$ et $\ell i = f$.

Si de plus g est surjectif alors on peut supposer $g\ell = h$.

(1.4) A-bimodules, A-modules à gauche, A-modules à droite.

Soient A une a.d.g. et M un A-bimodule différentiel (resp. A-module différentiel à gauche, A-module différentiel à droite).

1) On appelle extension libre une injection

$$i : M \to M \oplus (A \otimes W \otimes A) \text{ (resp. } i : M \to M \oplus (A \otimes W)\,,\, i : M \to M \oplus (W \otimes A)\ )$$

telle que: W est la réunion croissante des sous-modules $W_{(i)}$, $\quad i \geq 0$; avec

$$W_{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad dW_{(i)} \subset M \oplus (A \otimes W_{(i-1)} \otimes A)\,,$$

(resp. $dW_{(i)} \subset M \oplus (A \otimes W_{(i-1)})\,,\, dW_{(i)} \subset M \oplus (W_{(i-1)} \otimes A)$).

2) Soit $f : M \to N$ un morphisme de A-bimodules, alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & N \\ & M \oplus A \otimes W \otimes A \arrow[u, "\psi"', "\backsim"] \end{tikzcd}$$

où i est une extension libre et ψ un quasi-isomorphisme.

3) Lemme de relèvement: Pour tout diagramme commutatif de A-bimodules différentiels

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & N \arrow[d, "g"] \\ M \oplus A \otimes W \otimes A \arrow[r, "h"'] & P \end{tikzcd}$$

i) Si i est une extension libre et g un quasi-isomorphisme, alors il existe

$$\ell : M \oplus A \otimes W \otimes A \to N$$

tel que $g\ell \simeq h$ et $\ell i = f$.
Si de plus g est surjectif alors on peut choisir ℓ avec $g\ell = h$.

ii) Si i est une extension libre et un quasi-isomorphisme, alors il existe

$$\ell : M \oplus A \otimes W \otimes A \to N$$

tel que $g\ell \simeq h$ et $\ell i = f$.
Si de plus g est surjectif alors on peut de nouveau supposer $g\ell = h$.

On énonce l'analogue pour les A-modules différentiels à gauche, les A-modules différentiels à droite.

2-Définitions des invariants $Acat$, $biMcat$,....

Soient $(T(V), d)$ un T-modèle minimal, B une a.d.g et $f : (T(V), d) \to B$ un morphisme *d'a.d.g.* Alors f induit sur B une structure naturelle de $T(V)$-module à gauche (resp. à droite, de bimodule) différentiel gradué. On note $T^{>n}(V)$ l'idéal différentiel de $T(V)$ engendré par les produits des éléments de V de longueur supérieur à n, on note encore d la différentielle induite par d sur le quotient $T(V)/T^{>n}(V)$.
D'après (1.1-2), il existe un quasi-isomorphisme

$$\psi : T(V \oplus W) \to T(V)/T^{>n}(V),$$

tel que le diagramme suivant commute

(2.1.0)
$$\begin{tikzcd} T(V) \arrow[r, "P"] \arrow[dr, dashed, "i"'] & T(V)/T^{>n}(V) \\ & T(V \oplus W) \arrow[u, "\psi"', "\sim"] \end{tikzcd}$$

$P : T(V) \to T(V)/T^{>n}(V)$ est la projection canonique.

(2.1.1) $Acat(f)$ (resp. $biMcat(f)$, $lMcat(f)$, $rMcat(f)$, $e_k(f)$) est le plus petit entier naturel n tel qu'il existe un morphisme

$$r : T(V \oplus W) \to B$$

d'algèbres différentielles (resp.$T(V)$-bimodules différentiels, $T(V)$-modules différentiels à gauche , $T(V)$-modules différentiels à droite, d'espaces vectoriels gradués différentiels), tel que $ri = f$.

(2.1.2) Soient $h : (A, d_A) \to (B, d_B)$ un morphisme d'a.d.g. et $\varphi : (T(V), d) \to (A, d_A)$, un modèle minimal de A, on pose :

$$(Acat(h), biMcat(h), lMcat(h), rMcat(h), e_k(h)) = \\ (Acat(h\varphi), biMcat(h\varphi), lMcat(h\varphi), rMcat(h\varphi), e_k(h\varphi)).$$

En particulier : si $h = id_A$ on trouve:

$$(Acat(h), biMcat(h), lMcat(h), rMcat(h), e_k(h)) = \\ (Acat(A), biMcat(A), lMcat(A), rMcat(A), e_k(A)).$$

Rappelons que [H.L] [N]:
$Acat(A)$ (respectivement $biMcat(A)$, $lMcat(A)$, $rMcat(A)$, $e_k(A)$) est le plus petit entier

naturel n tel que le morphisme i de (2.1.0) admette une retraction d'a.d.g. (respectivement $T(V)$-bimodules différentiels, $T(V)$-modules différentiels à gauche , $T(V)$-modules différentiels à droite, d'espaces vectoriels gradués différentiels).

(2.2) **Remarques**

1) Les invariants ne dépendent pas du T-modèle libre choisi.

2) Si $h' : A' \to A$ est un quasi-isomorphisme, alors $Acat(h) = Acat(hh')$.

3) Si $h \simeq h'$, où $h' : A \to B$ est un homomorphisme d'a.d.g. alors $Acat(h) = Acat(h')$

4) Des définitions il résulte clairement:

$$e(h) \leq (max(rMcat(h), lMcat(h)) \leq biMcat(h) \leq Acat(h) \leq min(AcatA, AcatB).$$

Nous verrons en (I-3, I-4,I-5) que les égalités ne sont pas toutes vraies

5) Pour tout diagramme commutatif à homotopie près dans k-a.d.g.:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\phi"', "\backsim"] & B \arrow[d, "\phi'", "\backsim"'] \\ A' \arrow[r, "h'"'] & B' \end{tikzcd}$$

où ϕ, ϕ' sont des quasi-isomorphismes, on a:

$$(Acat(h),\ biMcat(h),\ lMcat(h),\ rMcat(h),\ e_k(h)) = \\ (Acat(h'),\ biMcat(h'),\ lMcat(h'),\ rMcat(h'),\ e_k(h')).$$

6) $e_k(f)$ est le plus grand entier n tel qu'il existe une classe de cohomologie non nulle dans $H^*(T(V))$ représentée par un cycle dans $T^{\geq n}(V)$ dont l'image par f^* est non nulle.

7) Soit $h : C \to D$ un homorphisme *d'a.d.g.* C^+ l'idéal d'augmentation de C et $(C^+)^n$ la n-ème puissance de cet idéal, alors on définit $nil(h) = inf\{n| \quad h((C^+)^n) = 0\}$

Soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'a.d.g, alors $nil(f^*) \leq e_k(f)$.

8) Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux homomorphismes d'a.d.g , alors

$$Acat(g\,f) \leq min(Acat(f), Acat(g)).$$
$$biMcat(g\,f) \leq min(biMcat(f), biMcat(g)).$$
$$rMcat(g\,f) \leq min(rMcat(f)\,, rMcat(g)).$$
$$lMcat(g\,f) \leq min(lMcat(f)\,, lMcat(g)).$$

Pour calculer effectivement ces invariants, il faut disposer d'une factorisation ψ qui soit maniable. Remarquons à ce propos que l'homomorphisme d'algèbres graduées

$$\psi : T(V \oplus W) \to T(V)/T^{>n}(V)\,,$$

est une résolution semi-libre au sens de [F.H.T$_1$] dans la catégorie des $T(V)$-modules à gauche (resp à droite).
Pour la suite, nous avons besoin de la construction explicite d'une résolution de $T(V)/T^{>n}(V)$ comme $T(V)$-module à gauche (resp. à droite, de bimodule).

Soit $(T(V), d)$ un T-modèle minimal. Posons $M = s(V^{\otimes n+1})$ où $s : V \to V$ est l'opérateur de suspension, de degré -1, défini par $(sV)^n = V^{n+1}$.

(2.3) Résolution semi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V)\,,\,d)$ comme $T(V)$-module différentiel à gauche.
Considérons l'isomorphisme de k-espaces vectoriels gradués :

$$\alpha : T(V) \otimes M \to T^{>n}(V) \;\; ; \;\; a \otimes sx \to (-1)^{|a|} a \otimes x \quad , \quad |a| = \text{degré de}\, a$$

On étend la différentielle d de $T(V)$ à une différentielle δ sur $T(V) \otimes (k \oplus M)$, en posant pour tout $a \in T(V)$, et tout $sx \in M$:

$$\delta(a \otimes sx) = (\alpha - \alpha^{-1} d\alpha)(a \otimes sx).$$

Alors $(T(V) \otimes (k \oplus M), \delta)$ est une résolution semi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V), d)$ comme $T(V)$-module différentiel à gauche.
le morphisme,

$$F : (T(V) \otimes (k \oplus M)\,, \delta) \to (T(V)/T^{>n}(V)\,, d)$$

défini par:

$$F\Big|_{T(V)\otimes k} = P \otimes id\,, \qquad F\Big|_{k \otimes M} = 0\,.$$

est un quasi-isomorphisme.

(2.4) Résolution semi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V), d)$ comme $T(V)$-module différentiel à droite.

Considérons l'isomorphisme de k-espaces vectoriels gradués :

$$\overline{\alpha} : M \otimes T(V) \to T^{>n}(V) \;\; ; \;\; sy \otimes a \to y \otimes a.$$

On étend la différentielle d de $T(V)$ à une différentielle $\overline{\delta}$ sur $(k \oplus M) \otimes T(V)$, en posant pour tout $a \in T(V)$, et tout $sx \in M$:

$$\overline{\delta}(sx \otimes a) = (\overline{\alpha} - \overline{\alpha}^{-1} d\overline{\alpha})(sx \otimes a).$$

De même $((k \oplus M) \otimes T(V), \overline{\delta})$ est une résolution semi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V), d)$ comme $T(V)$-module différentiel à droite.

Le modèle module à gauche possède une structure de module à droite, et on utilise cette dernière pour construire le modèle bimodule.

(2.5) Résolution semi-libre de $(T(V)/T^{>n}(V), d)$ comme $T(V)$-bimodule différentiel.

i) Un homomorphisme de $T(V)$-bimodules différentiels

$$h : (T(V) \otimes (k \oplus sV) \otimes T(V), d_1) \to (T(V), d)$$

est obtenu en posant:

$$h(1 \otimes 1 \otimes 1) = 1$$
$$h(1 \otimes sv \otimes 1) = 0 \;\; ; \text{pour tout } \; v \in V$$

et

$$\begin{aligned} d_1(v \otimes 1 \otimes 1) &= dv \otimes 1 \otimes 1, \\ d_1(1 \otimes 1 \otimes v) &= 1 \otimes 1 \otimes dv, \\ d_1(1 \otimes sv \otimes 1) &= v \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes v - S(dv). \end{aligned}$$

où l'application $S : T^+(V) \to T(V) \otimes sV \otimes T(V)$ est définie, pour tout $v_1, ..., v_m \in V$, par:

$$\begin{aligned} S(v_1 \otimes ... \otimes v_m) &= 1 \otimes sv_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_m \\ &+ \sum_{j=2}^{m-1} (-1)^{|v_1|+..+|v_{j-1}|} v_1 \otimes ... \otimes v_{j-1} \otimes sv_j \otimes v_{j+1} \otimes ... \otimes v_m \\ &+ (-1)^{|v_1|+..+|v_{m-1}|} v_1 \otimes ... \otimes v_{m-1} \otimes sv_m \otimes 1. \end{aligned}$$

ii) Une structure de $T(V)$-module à droite sur $T(V) \otimes (k \oplus M)$ est donnée par:

$$\begin{cases} (a \otimes 1)\#a' = a.a' \otimes 1 \\ (a \otimes sx)\#a' = a.\alpha^{-1}(x \otimes a'). \end{cases}$$

avec $a \in T(V)$, $a' \in T(V)$, $sx \in M$.

Alors

a) $(T(V) \otimes (k \oplus M)) \underset{T(V)}{\otimes} (T(V) \otimes (k \oplus sV) \otimes T(V)) =$

$$(T(V) \otimes (k \oplus sV \oplus M \oplus M \otimes sV) \otimes T(V)), D)$$

b) $F \underset{T(V)}{\otimes} h$ est une résolution semi-libre de $T(V)/T^{>n}(V)$ comme $T(V)$-bimodule différentiel.

c) D vérifie les relations:

$$\begin{aligned}
D(1\otimes sv\otimes 1) &= d_1(1\otimes sv\otimes 1)\\
D(1\otimes sx\otimes 1) &= \delta(1\otimes sx\otimes 1)\\
D(1\otimes sx\otimes sv\otimes 1) &= x\otimes sv\otimes 1\\
&\quad -\alpha^{-1}d\alpha(1\otimes sx)\otimes sv\otimes 1\\
&\quad +(-1)^{|sx|}(1\otimes sx)\#v\otimes 1\\
&\quad +(-1)^{|sx|}(1\otimes sx)\otimes 1\otimes v\\
&\quad +(-1)^{|sx|}\sum_{i,j}(-1)^{\eta_{i,j}}((1\otimes sx)\#\overline{S}^i_j dv)\otimes sv_j\otimes(\hat{S}^i_j(dv)).
\end{aligned}$$

avec: $v\in V$, $sx\in M$, $sv\in sV$, v_j désigne une base homogène de V, et $\overline{S}^i_j$, $\hat{S}^i_j$ sont les endomorphismes de $T(V)$ définis par:

$$Sdv=\sum_{i,j}\overline{S}^i_j(dv)\otimes sv_j\otimes\hat{S}^i_j(dv)\ \in T(V)\otimes sV\otimes T(V).$$

Ces résolution canoniques ont été construites dans [F.H.L.T] et [N] respectivement et on les rappelle pour la commodité du lecteur.

Du lemme de relèvement [A.H], on déduit:

(2.6) **Proposition:** *Avec les notations précédentes,*

a) $lMcat(f)\leq n$ si et seulement s'il existe un morphisme

$$r: T(V)\otimes(k\oplus M)\to B$$

de $T(V)$-modules différentiels à gauche tel que $ri=f$.

b) $rMcat(f)\leq n$ si et seulement s'il existe un morphisme

$$\overline{r}:(k\oplus M)\otimes T(V)\to B$$

de $T(V)$-modules différentiels à droite tel que $\overline{r}i=f$.

c) $biMcat(f)\leq n$ si et seulement s'il existe un morphisme

$$R: T(V)\otimes(k\oplus M\oplus sV\oplus M\otimes sV)\otimes T(V)\to B$$

de $T(V)$-bimodules différentiels tel que $Ri=f$.

Alors le résultat de Ndombol [N] se généralise en:

(2.7) **Proposition:**

a) $lMcat(f) \leq n$ si et seulement s'il existe un morphisme

$$r : T(V) \otimes (k \oplus M) \to B$$

de $T(V)$-modules différentiels à gauche tel que $r(1 \otimes 1) = 1$.

b) $rMcat(f) \leq n$ si et seulement s'il existe un morphisme

$$\overline{r} : (k \oplus M) \otimes T(V) \to B$$

de $T(V)$-modules différentiels à droite tel que $\overline{r}(1 \otimes 1) = 1$.

c) $biMcat(f) \leq n$ si et seulement s'il existe un morphisme

$$R : T(V) \otimes (k \oplus M \oplus sV \oplus M \otimes sV) \otimes T(V) \to B$$

de $T(V)$-bimodules différentiels tel que $R(1 \otimes 1 \otimes 1) = 1$ et $R(1 \otimes sv \otimes 1) = 0$.

3-Exemple où $lMcat(id_A) \neq rMcat(id_A)$.

(3.1) Nous construisons un T-modèle minimal $A = (T(V), d)$ dont la cohomologie est une algèbre graduée commutative. L'espace vectoriel V est muni d'une nouvelle graduation $V = \bigoplus_{n \geq 1} V_{(n)}$ telle que pour $n > 2$ on a:

$$d(V_{(n)}) \subset T^{\geq 3}(V_{(\leq n-1)}) \oplus (V_{(1)} \otimes (V_{(2)} \oplus \ldots \oplus V_{(n-1)})) \oplus T^2(V_{(2)} \oplus \ldots \oplus V_{(n-1)}) \\ \oplus [V_{(1)}, T(V_{(\leq n-1)})].$$

où $V_{(\leq j)} = V_{(1)} \oplus V_{(2)} \oplus \ldots \oplus V_{(j)}$ et $[V_{(1)}, T(V_{(\leq j)})]$ désigne le sous espace vectoriel de $T(V)$ engendré par des éléments de la forme

$$vx - (-1)^{|v||x|} xv; \text{ avec } \quad v \in V_{(1)}\,,\ x \in T(V_{(\leq j)}) \quad \text{et} \quad dx = 0\,.$$

On pose:

$V_{(1)}$ l'espace vectoriel engendré par deux éléments a et a':

$$|a| = 2 = |a'|\,, \qquad da = 0 = da'.$$

$V_{(2)}$ l'espace vectoriel engendré par deux éléments b et b',

$$|b| = 3 = |b'|\,, \qquad db' = a'.a\,, \quad db = a.a'\,.$$

$$V_{(3)} = s\{[x] \in H^+(T(V_{(1)} \oplus V_{(2)})) \quad | x \in T^{\geq 3}(V_{(1)} \oplus V_{(2)}) \oplus (V_{(1)} \otimes V_{(2)}) \\ \oplus T^2(V_{(2)}) \oplus [V_{(1)}, T(V_{(\leq 2)})]\}.$$

$$d : V_{(3)} \longrightarrow T^{\geq 3}(V_{(1)} \oplus V_{(2)}) \oplus (V_{(1)} \otimes V_{(2)}) \oplus T^2(V_{(2)}) \oplus [V_{(1)}, T(V_{(\leq 2)})]$$

est une section de la restriction à $T^{\geq 3}(V_{(1)} \oplus V_{(2)}) \oplus (V_{(1)} \otimes V_{(2)}) \oplus T^2(V_{(2)}) \oplus [V_{(1)}, T(V_{(\leq 2)})]$ de la projection

$$p : T(V_{(1)} \oplus V_{(2)}) \cap Kerd \to H(T(V_{(1)} \oplus V_{(2)})).$$

$$V_{(n)} = s\{[x] \in H^+(T(V_{(<n)}) \,|\, x \in T^{\geq 3}(V_{(\leq n-1)}) \oplus (V_{(1)} \otimes (V_{(2)} \oplus \ldots \oplus V_{(n-1)})) \\ \oplus T^2(V_{(2)} \oplus \ldots \oplus V_{(n-1)}) \\ \oplus [V_{(1)}, T(V_{(\leq n-1)})]\}.$$

$$d : V_{(n)} \to T^{\geq 3}(V_{(\leq n-1)}) \oplus (V_{(1)} \otimes (V_{(2)} \oplus ... \oplus V_{(n-1)})) \oplus T^2(V_{(2)} \oplus ... \oplus V_{(n-1)}) \oplus [V_{(1)}, T(V_{(\leq n-1)})]$$

est une section de la restriction à

$$T^{\geq 3}(V_{(\leq n-1)}) \oplus (V_{(1)} \otimes (V_{(2)} \oplus ... \oplus V_{(n-1)})) \oplus T^2(V_{(2)} \oplus ... \oplus V_{(n-1)}) \oplus [V_{(1)}, T(V_{(\leq n-1)})]$$

de la projection

$$p : T(V_{(\leq n-1)}) \cap Kerd \to H(T(V_{(\leq n-1)})).$$

(3.2) $H(T(V))$ est commutative, en effet si $[x], [y] \in H(T(V))$ alors par construction

$$xy - (-1)^{|x||y|} yx$$

est un bord

(3.3) Montrons que $lMcat(T(V)) = 2$.

On a $lMcat(T(V) \geq 2$ car $d(a) = 0$ et a^2 n'est pas un bord. Reste à montrer que $lMcat(T(V)) \leq 2$.
D'après la proposition (2.7), il suffit de construire un homomorphisme

$$r : (T(V) \otimes (k \oplus M), \delta) \to (T(V), d)$$

de $T(V)$-modules différentiels à gauche tel que $r(1 \otimes 1) = 1$, avec $M = sV^{\otimes 3}$. On note (i_1, i_2, i_3) le tridegré d'un élément $s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \in s(V_{(i_1)} \otimes V_{(i_2)} \otimes V_{(i_3)}) \subset M$ et on ordonne les triplets par l'ordre lexicographique inverse. La différentielle , δ , baisse le tridegré des éléments de $k \otimes M$.
Construisons r, par récurrence sur le tridegré.
Soit (x, y, z) de tridegré (1,1,1) alors $x, y, z \in V_{(1)}$ et par conséquent $dx = dy = dz = 0$.
D'autre part, la définition de δ montre que:

$$r\delta(1 \otimes s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)) = r(x_1.x_2.x_3) = x_1.x_2.x_3 \in T^3(V).$$

Par construction de d, il existe $v \in T(V)$ tel que:

$$r\delta(1 \otimes s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)) = dv.$$

On pose $r(1 \otimes s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)) = v$.

Remarquons que $v \notin V_{(1)}$ car $v \neq 0$ et $|v| = 5$.

Supposons avoir construit r en tridegré $(i_1, i_2, i_3) < (p, q, t)$ tel que:

$$r\delta = dr,$$

et considérons (x_p, x_q, x_t) de tridegré (p, q, t), alors

$$\begin{aligned} r\delta(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) &= r(x_p.x_q.x_t \otimes 1 - \alpha^{-1} d(x_p.x_q.x_t)) \\ &= x_p.x_q.x_t - r(\alpha^{-1} d(x_p.x_q.x_t)). \end{aligned}$$

Posons: $d(x_p.x_q.x_t) = \sum_i y'_i \otimes y''_i$ où y''_i est un mot de longueur 3 et y'_i est un mot de longueur≥ 1. Comme r est $T(V)$-linéaire à gauche, nous obtenons:

$$\begin{aligned} r\delta((1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) &= x_p.x_q.x_t - r(\alpha^{-1}(\sum_i y'_i \otimes y''_i)) \\ &= x_p.x_q.x_t - (\sum_i (-1)^{|y'_i|} y'_i.r(1 \otimes sy''_i)). \end{aligned}$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $dr\delta(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) = 0$.
Pour des raisons de degré, $r(1 \otimes sy''_i) \notin V_{(1)}$, par suite

$$r\delta((1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) \in T^+(V) \otimes (V_{(>1)} \oplus T^{\geq 2}(V)).$$

Alors, par construction de $(T(V), d)$ il existe $v \in (V_{(>1)} \oplus T^{\geq 2}(V))$ tel que:

$$r\delta(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) = dv.$$

On pose: $r(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) = v$.
D'où l'existence de r.

(3.4) Vérifions que $rMcat(T(V)) > 2$.

Supposons que $rMcat(T(V)) \leq 2$. D'après la proposition (2.3), il existe un homomorphisme

$$\overline{r} : (k \oplus M) \otimes T(V) \to T(V)$$

de $T(V)$-modules différentiels à droite avec,

$$\overline{r}(1 \otimes 1) = 1 \quad \text{et} \qquad M = sV^{\otimes 3}.$$

Calculons $\overline{r}(s(a \otimes a \otimes a) \otimes 1)$;

$$\begin{aligned} d\overline{r}(s(a \otimes a \otimes a) \otimes 1) &= \overline{r}\overline{\delta}(s(a \otimes a \otimes a) \otimes 1) \\ &= \overline{r}(1 \otimes a^3) \\ &= a^3. \end{aligned}$$

D'où $\overline{r}(s(a \otimes a \otimes a) \otimes 1) = v$ avec $v \in V_{(3)}$, $\quad dv = a^3$.
Maintenant calculons $\overline{r}\overline{\delta}(s(a \otimes a \otimes b) \otimes 1)$:

$$\begin{aligned} \overline{r}\overline{\delta}(s(a \otimes a \otimes b) \otimes 1) &= \overline{r}(a \otimes a \otimes b - s(a \otimes a \otimes a) \otimes a') \\ &= a^2.b - v.a', \end{aligned}$$

qui ne peut pas être un bord. D'où la contradiction.

4- Exemple où $biMcat(A) \neq lMcat(A)$, et où $biMcat(A) \neq rMcat(A)$.

(4.1) Nous construisons un T-modèle minimal $A = (T(V), d)$ tel que :

$$V = \underset{i \geq 1}{\oplus} V_{(i)}, \qquad dV_{(1)} = 0 \qquad \text{et} \qquad dV_{(i)} \subset T^{\geq 3}(V_{(<i)}) \qquad \text{pour} \qquad i \geq 2.$$

Plus précisement, posons:

$$V_{(1)} = ka \oplus ka' \qquad \text{et} \qquad V_{(2)} = s(T^3(V_{(1)}))$$

avec $|a| = 2 = |a'|$, $da = 0 = da'$, si $v \in V_{(2)}$ alors $v = s^{-1}(w)$, $w \in T^3(V_{(1)})$, on pose: $dv = w$

$$V_{(3)} = s\{[x] \in H^+(T(V_{(1)} \oplus V_{(2)})) \quad | \; x \in T^{\geq 3}(V_{(1)} \oplus V_{(2)})\}.$$

$d : V_{(3)} \to T^{\geq 3}(V_{(1)} \oplus V_{(2)})$ est une section de la restriction à $T^{\geq 3}(V_{(1)} \oplus V_{(2)})$ de la projection

$$p : T(V_{(1)} \oplus V_{(2)}) \cap Kerd \to H(T(V_{(1)} \oplus V_{(2)})).$$

$$V_{(i)} = s\{[x] \in H^+(T(V_{(\leq i-1)})) \quad | \; x \in T^{\geq 3}(V_{(\leq i-1)})\}.$$

$d : V_{(i)} \to T^{\geq 3}(V_{(\leq i-1)})$ est une section de la restriction à $T^{\geq 3}(V_{(\leq i-1)})$ de la projection

$$p : T(V_{(\leq i-1)}) \cap Kerd \to H(T(V_{(\leq i-1)})).$$

(4.2) Montrons que $biMcat(T(V)) > 2$.

Sinon, d'après la proposition (2.7), il existe un homomorphisme,

$$R : T(V) \otimes (k \oplus M \oplus sV \oplus M \otimes sV) \otimes T(V) \to T(V)$$

de $T(V)$-bimodules différentiels tel que $R(1 \otimes 1 \otimes 1) = 1$ et $R(1 \otimes sv \otimes 1) = 0$.
Alors,

$$\begin{aligned} RD(1 \otimes s(a \otimes a \otimes a)) &= R(a \otimes a \otimes a) \\ &= a^3. \end{aligned}$$

D'où par construction, $R(1 \otimes s(a \otimes a \otimes a)) = b$ avec $b \in V_{(2)}$ et $db = a^3$.

$$\begin{aligned} RD(1 \otimes s(a \otimes a \otimes a')) &= R(a^2a' \otimes 1 \otimes 1) \\ &= a^2a'. \end{aligned}$$

et $R(1 \otimes s(a \otimes a \otimes a')) = b'$ avec $b' \in V_{(2)}$ et $db' = a^2a'$. Par suite,

$$\begin{aligned} RD(1 \otimes s(a \otimes a \otimes a) \otimes sa' \otimes 1) &= R(a^3 \otimes sa' \otimes 1 - a \otimes s(a \otimes a \otimes a') \otimes 1 \\ &\qquad + 1 \otimes s(a \otimes a \otimes a) \otimes a') \\ &= -ab' + ba'. \end{aligned}$$

Or ce dernier élément ne peut pas être un bord car $dV \subset T^{\geq 3}(V)$. D'où une contradiction.

(4.3) Montrons que $lMcat(T(V), d) = 2$.

Comme $2 = nil(H(T(V)) \leq lMcat(T(V))$, reste à montrer que $lMcat(T(V), d) \leq 2$.
Soit $M = s(V^{\otimes^3})$, on va construire par récurrence un homomorphisme

$$r : T(V) \otimes (k \oplus M) \to T(V)$$

de $T(V)$-modules différentiels à gauche tel que $r(1 \otimes 1) = 1$.
Posons: $s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \in M$ est de tridegré (i_1, i_2, i_3) si $x_j \in V_{(i_j)}; j = 1, 2, 3$.
On note $M_{<(p,q,t)}$ l'espace vectoriel engendré par les élements de tridegré $< (p, q, t)$.
Soit $s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \in M$ de tridegré $(1, 1, 1)$ alors $x_i \in V_{(1)}$, $dx_i = 0$. Alors,

$$\begin{aligned} rD(1 \otimes s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)) &= r(x_1.x_2.x_3 \otimes 1) \\ &= x_1.x_2.x_3. \end{aligned}$$

Par construction, il existe $y \in V_{(2)}$ tel que:

$$dy = rD(1 \otimes s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)).$$

On pose:

$$r(1 \otimes s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)) = y.$$

Supposons avoir construit r pour tout générateur $s(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3)$ de M de tridegré $< (p, q, t)$, et tel que $dr = rD$.
Soit maintenant $s(x_p \otimes x_q \otimes x_t) \in M$ de tridegré (p, q, t).

$$\begin{aligned} rD(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) &= r(x_p.x_q.x_t \otimes 1 - \alpha^{-1} d(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) \\ &= x_p.x_q.x_t - r(\alpha^{-1} d(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) \end{aligned}$$

Puisque $d(V) \subset T^{\geq 3}(V)$, alors $d(x_p.x_q.x_t) = \sum_i y'_i \otimes y''_i$ avec y''_i est un mot de longueur 3 et y'_i est un mot de longueur≥ 2. Alors

$$\begin{aligned} rD((1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) &= x_p.x_q.x_t - r(\alpha^{-1}(\sum_i y'_i \otimes y''_i)) \\ &= x_p.x_q.x_t - (\sum_i (-1)^{|y'_i|} y'_i.r(1 \otimes sy''_i)). \end{aligned}$$

D'où $rD(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) \in T^{\geq 3}(V)$.
Comme $D(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) \in T(V) \otimes (k \oplus M_{<(p,q,t)})$, d'aprés l'hypothèse de récurrence on a:

$$d(rD(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) = 0.$$

D'où par construction, il existe $y \in V$ tel que:

$$rD(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_t)) = dy.$$

On pose: $r(1 \otimes s(x_p \otimes x_q \otimes x_r)) = y$, d'où l'existence de r.

Conclusion: $lMcat(T(V), d) = 2$.

De même, on trouve $rMcat(T(V), d) = 2$.

5-Exemple où $biMcat(f) \neq Acat(f)$.

Soient $(T(V),d)$ un modèle libre minimal, et n un entier arbitraire. Considérons une factorisation de la projection $p : (T(V),d) \to (T(V)/T^{>n}(V),d)$.

$$\begin{tikzcd}
(T(V),d) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "i"'] & (T(V)/T^{>n}(V),d) \\
& (T(V) \sqcup T(W),D) \arrow[u, "\psi"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

Soient U un espace vectoriel isomorphe à $T^+(W)$, $\gamma : U \xrightarrow{\cong} T^+(W)$ un isomorphisme d'espaces vectoriels, et $\beta : T^+(W) \to U$ l'inverse de γ .
On définit une différentielle δ sur $T(V) \sqcup T(U)$, en posant:

$$\begin{cases} \delta(v) = d(v) & si \;\; v \in V, \\ \delta(u) = (id \sqcup \beta)d\gamma(u) & si \;\; u \in U, \end{cases}$$

alors δ est une dérivation, en effet:

$$\begin{aligned}
\delta^2(v) &= d^2(v) = 0 \;\; , \quad \text{si} \quad v \in V. \\
\delta^2(u) &= \delta((id \sqcup \beta)d\gamma(u)) \\
&= (id \sqcup \beta)d(d\gamma(u)) \\
&= 0 \qquad , \quad \text{si} \;\; u \in U.
\end{aligned}$$

Remarque: $\delta(U)$ appartient au sous espace vectoriel $T(V) \sqcup (k \oplus U)$ de $T(V) \sqcup T(W)$.

(5.1) **Lemme:** *Soit l'inclusion $j : (T(V),d) \to (T(V) \sqcup T(U),\delta)$. Alors*

$$biMcat(j) \leq n.$$

Preuve. Soit l'inclusion

$$r : (T(V) \sqcup T(W),D) \to (T(V) \sqcup T(U),\delta),$$

$r = id \sqcup \beta$. Clairement, r est un homomorphisme de $T(V)$-bimodules différentiels. On a donc le diagramme commutatif ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
(T(V),d) \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i"'] & (T(V) \sqcup T(U),\delta) \\
& (T(V) \sqcup T(W),D) \arrow[u, "r"']
\end{tikzcd}$$

et par définition $biMcat(j) \leq n$.■

Considérons le cas particulier suivant: $n = 1$, $T(V) = T(a)$ avec $|a| = 2$.

(5.2) **Lemme:** *Soit j comme dans le lemme.1, alors:*

$$i)\, biMcat(j) = 1.$$
$$ii)\, Acat(j) \geq 2.$$

Preuve. Un simple calcul nous donne,
$T(a) \sqcup T(W) = T(a) \sqcup T(w_3, w_4, w_5) \sqcup T(W')$, avec $|w_i| = i$ et $|w'| \geq 5$ si $w' \in W'$.

$$\begin{cases} Dw_3 = a^2 \\ Dw_4 = a.w_3 - w_3.a \\ Dw_5 = w_3.w_3 - a.w_4 - w_4.a \end{cases}$$

i) Montrons que $biMcat(j) = 1$.

$biMcat(j) \neq 0$ car $j^* : H(T(a), d) \to H(T(a) \sqcup T(U), \delta)$ est non nulle. D'après le lemme (5.1), $biMcat(j) = 1$.

ii) Montrons que $Acat(j) \geq 2$.

Supposons que $Acat(j) \leq 1$, par définition, il existe un morphisme

$$\ell : (T(a) \sqcup T(W), D) \to (T(a) \sqcup T(U), \delta)$$

d'a.d.g tel que $\ell i = j$ d'où $\ell(a) = a$.
Et pour des raisons de degré on a:

$$\begin{cases} \ell(w_3) = \beta(w_3) \\ \ell(w_4) = \beta(w_4) + \lambda a^2 & , \lambda \in k \\ \ell(w_5) \in T(V) \sqcup (k \oplus U), \end{cases}$$

mais,

$$\begin{aligned} \delta\ell(w_5) &= \ell D(w_5) \\ &= \ell(w_3 \otimes w_3 - a \otimes w_4 - w_4 \otimes a) \\ &= \beta(w_3).\beta(w_3) - a.\beta(w_4) - \beta(w_4).a - 2\lambda a^3. \end{aligned}$$

qui ne peut pas être un bord car

$$\delta(T(a) \sqcup (k \oplus U)) \subset (T(a) \sqcup (k \oplus U) \quad \text{et} \quad |u| \geq 6 \text{ si } u \in T^{\geq 2}(U).$$

D'où la contradiction.■

6-Quelques cas où $Acat(f) = biMcat(f)$.

On rappelle [E] qu'une a.d.g. (A,d) est dite k-formelle si (A,d) et $H^*(A,d)$ ont même T-modèles minimaux.

(6.1) **Définition:** *Un homomorphisme $f:(A,d)\to(B,d)$ d'a.d.g. est k-formalisable, si f et $f^*: H^*(A,d)\to H^*(B,d)$ ont même modèles minimaux, c.à.d s'il existe un diagramme commutatif dans k-a.d.g.*

$$\begin{tikzcd}
(H^*(A),0) \arrow[d, "f^*"'] & (T(V),d) \arrow[l, "\alpha A"', "\backsim"] \arrow[r, "\phi_A", "\backsim"'] \arrow[d, "j"'] & (A,d_A) \arrow[d, "f"] \\
(H^*(B),0) & (T(V)\sqcup T(U),d') \arrow[l, "\backsim"', "\alpha_B"] \arrow[r, "\backsim", "\phi_B"'] & (B,d_B)
\end{tikzcd}$$

où $\alpha_A,\phi_A,\alpha_B,\phi_B$ induisent des isomorphismes en cohomologie.

(6.2) **Remarque:** Si f est k-formalisable, nécessairement A (resp. B) sont des a.d.g formelles.

(6.3) **Proposition:** *Soit $f: A\to B$ un homomorphisme d'a.d.g. Si f est k-formalisable alors*

$$nil(f^*) = e_k(f) = biMcat(f) = lMcat(f) = rMcat(f) = Acat(f)\,.$$

Preuve. On sait que

$$nil(f^*) \leq e_k(f) \leq sup(lMcat(f), rMcat(f)) \leq biMcat(f) \leq Acat(f)\,,$$

reste donc à montrer que $nil(f^*) \geq Acat(f)$.
Puisque f est k-formalisable, il existe un diagramme commutatif dans k- a.d.g:

$$\begin{tikzcd}
(H^*(A),0) \arrow[d, "f^*"'] & (T(V),d) \arrow[l, "\alpha_A"', "\backsim"] \arrow[r, "\phi_A", "\backsim"'] \arrow[d, "j"'] & (A,d_A) \arrow[d, "f"] \\
(H^*(B),0) & (T(V)\sqcup T(U),d') \arrow[l, "\backsim"', "\alpha_B"] \arrow[r, "\backsim", "\phi_B"'] & (B,d_B)
\end{tikzcd}$$

où $\alpha_A,\phi_A,\alpha_B,\phi_B$ induisent des isomorphismes en cohomologie.
Supposons que $nil(f^*) = n$, alors $f^*\alpha_A$ se factorise à travers $T(V)/T^{>n}(V)$,

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[r, "f^*\alpha_A"] \arrow[dr, "p"'] & H^*(B) \\
 & T(V)/T^{>n}(V) \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

Considérons un modèle de p,

$$\begin{tikzcd} T(V) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "i"', "\sim"] & T(V)/T^{>n}(V) \\ & T(V) \sqcup T(W) \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

d'où un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} T(V) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & T(V) \sqcup T(U) \arrow[d, "\alpha_B", "\sim"'] \\ T(V) \sqcup T(W) \arrow[r, "h'=h\psi"'] & H^*(B) \end{tikzcd}$$

D'après le lemme de relèvement, il existe

$$\ell : T(V) \sqcup T(W) \to T(U)$$

tel que: $\ell i = j$, et d'après la remarque (I-2.2), $Acat(f) \leq n$.■

(6.4) **Proposition** *Soit $f : (T(V), d) \to (B, d_B)$ un homomorphisme d'a.d.g. Si la différentielle de $T(V)$ est quadratique, et $f^* : H^*(T(V), d) \to H^*(B, d_B)$ est injectif alors*

$$e_k(f) = Acat(f).$$

Remarque. Si f^* est injectif et $e(f) \leq n$ alors l'homomorphisme

$$p^* : H^*(T(V)) \to H^*(T(V)/T^{>n}(V))$$

est injectif.

Preuve. Supposons que $e_k(f) = n$.
Nous construisons un modèle $i : (T(V), d) \to (T(V) \sqcup T(W), D)$ de la projection

$$p : T(V) \to T(V)/T^{>n}(V)$$

tel que: $W = \bigoplus_{i \geq 2} W_i$, $DW \subset T(V) \sqcup T^+(W)$.
On procède par récurrence, Soient $[a_i]_{i \in I}$ une base de $coker(H^2(p))$ et W_2 est l'espace vectoriel ayant pour base $(w_i)_{i \in I}$.
On pose: $Dw_i = 0$; $\psi w_i = a_i$

Supposons avoir construit

$$\psi_m : (T(V) \sqcup T(W_m), D) \to (T(V)/T^{>n}(V), \overline{d})$$

vérifiant:

1) W_m est engendré par des éléments de degré i, avec $2 \leq i \leq m$.
2) $H^p(\psi_m)$ est un isomorphisme si $p \leq m$, et injectif si $p = m$.
3) $D(W_m) \subset T(V) \sqcup T^+(W_{m-1})$.
4) $\psi(W_m) \subset T^n(V)$.

Soient $[a_i]_{i \in I}$ une base de $coker(H^{m+1}(\psi_m))$ et $[b_j]_{j \in J}$ une base de $Ker(H^{m+2}(\psi_m))$; W^{m+1} est l'espace vectoriel ayant pour base $(w_i')_{i \in I}$ et $(w_j'')_{j \in J}$, tous en degré (m+1).
On pose:

$$W_{m+1} = W_m \oplus W^{m+1}\,; \qquad Dw_i' = 0\,; \qquad Dw_j'' = b_j$$
$$\psi_{m+1} = \psi_m \text{ sur } W_m\,; \quad \psi_{m+1}(w_i') = a_i\,; \qquad \psi_{m+1}(w'') = 0.$$

On a:
(*) $a_i \in T^n(V)$, sinon a_i est un cycle qui n'est pas un bord dans $T(V \oplus W_m)$, car d est quadratique et $D(W_m) \subset T(V) \sqcup T^+(W_{m-1})$.

(**) $b_j \in T(V) \sqcup T^+(W_m)$, et par conséquent $\psi(b_j) = 0$.
démonstration du (**): soit $b_j \in (T(V) \sqcup T(W_m))^{m+2}$ tel que: $\psi_m(b_j) = \overline{d}v'$ et $Db_j = 0$. Alors $b_j = v + w$ avec $v \in (T(V))^{m+2}$ et $w \in (T(V) \sqcup T^+(W_m))^{m+2}$.
D'après l'hypothèse de récurrence $Dv = 0 = Dw$ et $\psi_m(v) = 0 = \psi_m(w)$ car $w = \sum x_l w_l$ avec $x_l \in (T(V) \sqcup T(W_m))^+$; $w_l \in W_m$. Puisque p^* est injective alors v est un bord. D'où on peut choisir $b_j = w$.

Soit $\ell : (T(V) \sqcup T(W)\,, D) \to (B, d_B)$ l'homomorphisme d'a.d.g.défini par:

$$\begin{cases} \ell v = f(v)\,; & v \in V \\ \ell w = 0\,; & w \in W \end{cases}$$

on a: $\ell i = f$, d'où $Acat(f) \leq n$.■

(6.5) **Proposition:** *Soit $f : (T(V)\,, d) \to (T(V)\,, d)$ un homomorphisme d'a.d.g.*

$$Si \qquad ff = f \qquad alors \qquad biMcat(f) = Acat(f)\,.$$

Preuve. Considérons un T-modèle minimal $i : T(V) \to T(V) \sqcup T(W)$ de la projection

$$T(V) \xrightarrow{P} T(V)/T^{>n}(V)\,.$$

Supposons que $biMcat(f) = n$, alors il existe un homomorphisme

$$r : T(V \oplus W), D) \to (T(V), d)$$

de $T(V)$-bimodules différentiels, tel que

$$r(v.w) = f(v).r(w)\,;\; v \in T(V)\,,\; w \in T(V \oplus W)\,.$$

Posons: $R = fr$, on remarque que: $fR = R$.
Nous construisons:
i) une application k-linéaire ϕ de degré zéro

$$\phi : W^{<(p,q)} \to T(V \oplus W)$$

ii) un morphisme d'algèbre

$$\begin{aligned} \ell :& T(V \oplus W^{<(p,q)}) \to T(V) \\ \ell\Big|_{T(V)} &= f \\ \ell(x) &= R\phi(x)\,; \quad x \in W^{<(p,q)} \end{aligned}$$

iii) une application k-linéaire:

$$\begin{aligned} \theta &: T(V \oplus W^{<(pq)}) \to T(V \oplus W) \\ \theta\Big|_{T(V)} &= 0 \\ \theta(x) &= \ell(x) - \phi(x)\,; \quad x \in W^{<(p,q)} \end{aligned}$$

θ se prolonge de la manière suivante:
Soit $x = x_1 ... x_q$ avec $x_i \in V \oplus W^{<(p,q)}$, si x_t est le premier facteur de x qui est dans $W^{<(p,q)}$. on pose:

$$\theta(x) = f(x_1 ... x_{t-1})\theta(x_t)\ell(x_{t+1} ... x_q)\,,$$

tel que: $D\phi(x) = \ell D(x) - \theta D(x)$ pour tout $x \in W$

Remarques.

1)$R\ell = \ell$.

2)$R\theta = 0$ sur $T(V \oplus W^{<(p,q)})$.

3)$\ell D = d\ell$.

4)$\theta D = d\theta$.

Et on procède comme dans le cas absolu où $f = id_A$ [N].■

7-Comparaison entre *Acat* et la L.S-catégorie d'une application continue.

(7.1) Soient $f : S \to T$ une application continue entre CW-complexes simplement connexes et $P_n : E_n(T) \to T$ la n-ième fibration de Ganea de T [G]. Rappelons que [B,G]:

$$cat(f) \leq m$$

si les énoncés équivalents suivants sont satisfaits:

i) S peut être recouvert par (m+1)-ouverts U_i tels que la restriction de f à chaque ouvert U_i soit homotopiquement trivial.

ii) L'application f se factorise à travers P_n en $f'_n : \ S \to E_n(T)$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & T \\ S \arrow[r, "f'_n"'] & E_n(T). \arrow[u, "P_n"'] \end{tikzcd}$$

(7.2) **Proposition** [F.H.T$_2$]: *Soit F la fibre homotopique de l'application $f : S \to T$ entre CW-complexes simplement connexes. Si $cat(f) \leq m$ alors il existe une application*

$$g : F \to (\Omega T)^{*m}$$

ΩT-équivariante.
($(\Omega T)^{*m}$ désigne le joint de ΩT itéré m-fois)

(7.3) Soit $f : X \to Y$ une application continue entre CW-complexes simplement connexes dont les cohomologies singulières sont de type finies. Par définition un T-modèle minimal $\overline{f}$ de f est le T-modèle minimal de $C^*(f) : C^*(Y;k) \to C^*(X;k)$. On pose alors:

$$Acat(f) = Acat(\overline{f})$$
$$Mcat(f) = Mcat(\overline{f})$$
$$e_k(f) = e_k(\overline{f})$$

(7.4) **Théorème:** *Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques simplement connexes, alors*

$$Acat(f) \leq cat(f).$$

Preuve. Supposons que $cat(f) = m$, alors X peut être recouvert par (m+1)-ouverts U_i tels que la restriction de f à chaque ouvert U_i soit homotopiquement trivial. Donc pour chaque i il existe une homotopie

$$h_i : U_i \to Y^I ,$$

telle que: $e_0 \circ h_i = f_{|_{U_i}}$ et $e_1 \circ h = *$.

Y^I est l'espace des applications continues de $I = [0,1]$ dans Y et e_0 , e_1 sont les évaluations au point 0, respectivement au point 1.

Notons $C^{*,*}$ le double complexe des cochaînes singulières de X avec le système de coefficients déterminé par les cochaînes sur le recouvrement $(U_i)_{0\leq i\leq m}$, c.à.d

$$C^{p,q} = \prod_{l\in N_p} C^p(U_l),$$

où N_p est l'ensemble des (p+1)-uples $(i_0, ..., i_p)$ tels que

$$0 \leq i_0 \leq ... \leq i_p \text{ et } U_l = U_{i_0} \cap ... \cap U_{i_p} \neq \phi .$$

Soit le quasi-isomorphisme, $\eta : C^*(X) \to C^{*,*}$, défini par

$$s^q \to \prod_{i=0}^{m} s^q_{|_{U_i}} \in C^{0,q} .$$

Considérons un T-modèle de $C^*(Y)$

$$\Phi : T = T(V) \xrightarrow{\backsim} C^*(Y)$$

et un T-modèle de l'application $(C^*(e_0)\Phi, C^*(e_1)\Phi) : T \sqcup T \to C^*(Y^I)$

$$\varphi : T \sqcup T \sqcup T(Z) \xrightarrow{\backsim} C^*(Y^I).$$

Soit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\Phi", "\backsim"'] \arrow[d, "i_0"', "\backsim"] & C^*(Y) \arrow[r, "C^*(f)"] \arrow[d, "\backsim"', "C^*(e_0)"] & C^*(X) \arrow[r, "\eta", "\backsim"'] & C^{*,*} \arrow[d, "q"] \\
T \sqcup T \sqcup T(Z) \arrow[r, "\backsim", "\varphi"'] & C^*(Y^I) \arrow[rr, "h"] & & \prod_i C^*(U_i) \\
T \arrow[r, "\backsim", "\Phi"'] \arrow[u, "i_1", "\backsim"'] & C^*(Y) \arrow[rr, "\alpha"'] \arrow[u, "\backsim", "C^*(e_1)"'] & & \prod_i C^*(pt) \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

i_0 , i_1 sont des inclusions, q la projection. et $h = (C^*(h_i))$.
Puisque $e_1 \circ h_i = *$ alors $h \circ C^*(e_1)$ se factorise à travers $\prod_i C^*(point)$: $hC^*(e_1) = \beta\alpha$.
D'après le lemme (1.3), il existe un homomorphisme

$$\psi : T \sqcup T \sqcup T(Z) \to C^{*,*}$$

tel que: $q\psi = h\varphi$ et $\psi i_0 = \eta C^*(f)\Phi$.
Soient, $r : \prod_i C^*(pt) \to \prod_i K$ la projection et $s : \prod_i K \to \prod_i C^*(pt)$ l'inclusion. On a r et s sont des quasi-isomorphismes et $rs = id_{\prod_i K}$.
Soit le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \sqcup T \arrow[r, "(\alpha\Phi, sr\alpha\Phi)"] \arrow[d, "(i'_0, i'_1)"'] & \prod_i C^*(pt) \arrow[d, "\backsim"', "r"] \\
T \sqcup T \sqcup T(W) \arrow[r, "r\alpha\Phi\varphi'"'] & \prod_i K
\end{tikzcd}$$

où $\varphi' : T \sqcup T \sqcup T(W) \xrightarrow{\backsim} T$ est un T-modèle de (id_T, id_T).
Puisque r est un quasi-isomorphisme surjectif, d'après le lemme (1.3), il existe un homomorphisme d'a.d.g.

$$k : T \sqcup T \sqcup T(W) \to \prod_i C^*(pt)$$

avec $k(i'_0, i'_1) = (\alpha\Phi, sr\alpha\Phi)$ et $rk = r\alpha\Phi\varphi'$.
On applique le lemme (1.3) au diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\psi i_1"] \arrow[d, "i'_0"', "\backsim"] & C^{*,*} \arrow[d, "q"] \\
T \sqcup T \sqcup T(W) \arrow[r, "\beta k"'] & \prod_i C^*(U_i)
\end{tikzcd}$$

on obtient un homomorphisme d'a.d.g.

$$\theta : T \sqcup T \sqcup T(W) \to C^{*,*}$$

tel que: $q\theta = \beta k$ et $\theta i'_0 = \psi i_1$.
Puisque $C^{>m,*} = 0$ et $\theta i_1(T^+) \subset C^{+,*}$, alors θi_1 se factorise à travers $T(V)/T^{>m}(V)$.
Donc

$$Acat(f) = Acat(\theta i_1) \leq n$$

(car $\theta i_1 \simeq \eta C^*(f)\Phi$ et η est un quasi-isomorphisme) ■

(7.5) **Proposition:** *Soit $f : X \to Y$ une application continue. Si $H^*(f)$ est injective et T est k-coformel, alors*

$$biMcat(f) = Acat(f)\,.$$

Preuve. Par définition, un espace est coformel s'il admet un T-modèle à différentielle quadratique. La proposition résulte alors de (6.4). ∎

II- Le cas rationnel.

Soit $f : X \to Y$ une application continue entre CW-complexes 1-connexes de type fini. Lorsque $k = \mathbb{Q}$, la théorie du modèle de Sullivan, nous fournit des modèles commutatifs. On peut alors définir les invariants [F] $Acat_0(f)$, $Mcat_0(f)$ et $e_0(f)$ à l'aide de ces modèles. Dans ce chapitre nous comparons ces notions et celles définies précédemment, nous généralisons le "mapping theorem" et dans le dernier paragraphe nous étudions les groupes de Gottlieb relatifs.
Tous les espaces considérés dans ce chapitre sont supposés connexes par arcs et du type d'homotopie faible d'un CW-complexe de type fini.

1- <u>$\wedge$-modèle d'une application</u>.

(1.1) Dans toute la suite, on considère des $\mathbb{Q}$-algèbres graduées différentielles de type fini, 1-connexes ($H^0(A) \simeq \mathbb{Q}$, $H^1(A) = 0$), en abrégé a.d.g.c.
Un homomorphisme d'a.d.g.c. $f : (A, d) \to (A', d')$ est un homomorphisme d'algèbres graduées, compatible aux différentielles.
Une augmentation de (A, d) est un homomorphisme d'a.d.g.c.

$$\varepsilon_A : (A\,, d) \to (\mathbb{Q}\,, 0)\,.$$

Ici nos a.d.g.c. sont canoniquement augmentées.
Etant donné un espace vectoriel gradué $V = \bigoplus_{p\geq 0} V^p$; on notera $\wedge V$ l'algèbre commutative graduée libre suivante:

$$\wedge V = S(\bigoplus_p V^{2p}) \otimes E(\bigoplus_p V^{2p+1})\,,$$

où $S(\bigoplus_p V^{2p})$ est l'algèbre symétrique engendrée par les éléments de degrés pairs de V, et $E(\bigoplus_p V^{2p+1})$ est l'algèbre extérieure engendrée par les éléments de degrés impairs.
On désigne par $\wedge^n V$ le sous-espace vectoriel de $\wedge V$ engendré par les produits des éléments de V de longueur n. On pose $\wedge^{\geq n} V = \bigoplus_{i\geq n} \wedge^i V$.

(1.2) Une KS-extension [H] est une suite d'homomorphismes d'a.d.g.c

$$(B, d) \xrightarrow{i} (B \otimes \wedge V, d') \xrightarrow{\ell} (\wedge V, d')$$

satisfaisant les propriétés suivantes:
1) $i(b) = b \otimes 1$; pour $b \in B$, $\quad \ell = \varepsilon \otimes id_{\wedge X}$; où ε désigne l'augmentation de B.
2) Il existe un ensemble bien ordonné I tel que $V = \underset{\alpha \in I}{\oplus} V_\alpha$, (les éléments de V_α sont homogènes).
3) $d'(V_\alpha) \subset B \otimes \wedge(\underset{\beta<\alpha}{\oplus} V_\beta)$; $\quad \alpha \in I$.
Une KS-extension est dite minimale s'il existe une base telle que: $\alpha < \beta \Longrightarrow |x_\alpha| \leq |x_\beta|$ ($|x|$ désigne le degré de x).
Si $B = \mathbb{Q}$, une algèbre $(\wedge X, d)$ vérifiant 2) et 3) est appelée un KS-complexe.

Une homotopie (rel B) entre homomorphismes d'a.d.g.c. $f_0, f_1 : (B \otimes \wedge V, d) \to (A, d)$ tels que $f_0|_B = f_1|_B$, est un homomorphisme d'a.d.g.c. $h : (B \otimes \wedge V, d) \to (A, d) \otimes \wedge(t, dt)$ tel que:

$$\ell_0 f = f_0, \qquad \ell_1 f = f_1 ,$$

où $|t| = 0$ et ℓ_0 et ℓ_1 sont des augmentations : $\wedge(t, dt) \to \mathbb{Q}$; $\ell_0(t) = 0$, $\quad \ell_0(t) = 1$.
On écrit $f_0 \simeq f_1$ (rel B), si $B = \mathbb{Q}$ on écrit $f_0 \simeq f_1$.

(1.3) **Lemme de relèvement [H]:**

Etant donné un diagramme d'a.d.g.c commutatif

$$\begin{array}{ccc} (B,d) & \xrightarrow{f} & (C,d) \\ j \big\downarrow & & \simeq \big\downarrow h \\ (B \otimes \wedge V, d) & \xrightarrow[g]{} & (A,d) \end{array}$$

où $(B,d) \to (B \otimes \wedge V, d)$ est une KS-extension et h un quasi-isomorphisme, alors il existe un homomorphisme d'a.d.g.c.

$$\theta : (B \otimes \wedge V, d) \to (C, d)$$

tel que $\theta j = f$ et $h\theta \simeq g$.
De plus, si h est surjectif, on peut choisir θ tel que $h\theta = g$.

(1.4) Existence et unicité du modèle minimal d'un homomorphisme d'a.d.g.c. [H].

Soit $f : (B, d) \to (A, d)$ un homomorphisme d'a.d.g.c, alors il existe une KS-extension minimale, unique à isomorphisme près,

$$(B, d) \xrightarrow{i} (B \otimes \wedge V, d') \xrightarrow{\ell} (\wedge V, d')$$

et un homomorphisme d'a.d.g.c. $\psi : (B \otimes \wedge V, d) \to (A, d)$ tel que
i) $\psi i = f$.
ii) ψ est un quasi-isomorphisme.
Si $B = \mathbb{Q}$ on appelle $\psi : \wedge V \xrightarrow{\backsim} A$ le modèle minimal de A.

Etant donné un homomorphisme d'a.d.g.c. $f : A \to B$, on appelle modèle minimal de f la KS-extension minimale

$$j : (\wedge V, d) \to (\wedge V \otimes \wedge W, d)$$

telle qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\wedge V, d) \arrow[r, "\psi", "\backsim"'] \arrow[d, "j"'] & (A, d) \arrow[d, "f"] \\
(\wedge V \otimes \wedge W, d) \arrow[r, "\backsim", "\phi"'] & (A, d)
\end{tikzcd}$$

où $\psi : (\wedge V, d) \xrightarrow{\backsim} (A, d)$ est un modèle minimal de A et ϕ est un quasi-isomorphisme.

Soit $(\wedge V,\ d)$ un modèle de l'a.d.g.c. A, on note

$$\pi_*^{\psi}(A) = H^*(V\,, Q(d))\,,$$

où $Q(d)$ est la différentielle induite par la projection $p : \wedge^+ V \to \wedge^+ V / \wedge^{\geq 2} V$.

(1.5) Soit $\phi : (\wedge Z, d) \to (A, d_A)$ un modèle minimal de A. Considérons un KS-modèle minimal de la projection $p : (\wedge(Z), d) \to (\wedge(Z) / \wedge^{>n} Z, d)$:

$$\begin{tikzcd}
(\wedge(Z), d) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "i"'] & (\wedge Z / \wedge^{>n} (Z), d) \\
& (\wedge(Z) \otimes \wedge(T), D) \arrow[u, "\psi"', "\backsim"]
\end{tikzcd}$$

Par définition [F.H], $cat_0(A)$ (resp.$Mcat_0(A), e_0(A)$) $\leq n$ s'il existe un homomorphisme d'a.d.g.c (resp. de $(\wedge Z, d)$-modules différentiels, d'e.v.g. différentiels)

$$\ell : (\wedge Z \otimes \wedge T, D) \to (\wedge Z, d)$$

tel que: $\ell i = id_{\wedge Z}$.

(1.6) Rappelons que Sullivan a défini un foncteur contravariant A_{PL} de la catégorie des espaces topologiques dans celle des $\mathbb{Q}$-algèbres différentielles graduées commutatives. Le foncteur A_{PL} induit une équivalence entre la catégorie homotopique des espaces rationnels 1-connexes de type fini et celle des modèles minimaux 1-connexes de type fini.
En particulier, si X est un espace topologique 1-connexe de type fini, alors

$$H^*(A_{PL}(X), d) = H^*(X, \mathbb{Q}).$$

$H^*(X, \mathbb{Q})$ désigne la cohomologie singulière rationnelle, et si

$$\wedge V \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(X)$$

est un modèle minimal de $A_{PL}(X)$ alors

$$V^p \cong \pi_p^{\psi}(A_{PL}(X)) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(\pi_p(X), \mathbb{Q}).$$

(1.7) Soit X un CW-complexe 1-connexe de type fini, on pose

$$(cat_0(X),\ Mcat_0(X),\ e_0(X)) = (cat(A_{PL}(X)),\ Mcat_0(A_{PL}(X)),\ e_0(A_{PL}(X))).$$

2-Définitions des invariants $Acat_0(f), Mcat_0(f), e_0(f)$.

Soient $\overline{f} : (A, d_A) \to (B, d_B)$ un homomorphisme d'a.d.g.c. et $\phi : (\wedge Z, d) \to (A, d_A)$ un modèle minimal de A.
Considérons un KS-modèle minimal de la projection $p : (\wedge(Z), d) \to (\wedge(Z)/\wedge^{>n} Z, d)$,

$$\begin{tikzcd}
(\wedge(Z), d) \arrow[r, "p"] \arrow[dr] & (\wedge Z/\wedge^{>n}(Z), d) \\
& (\wedge(Z) \otimes \wedge(T), D) \arrow[u, "\psi", "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

(2.1) Nous appellerons $Acat_0(\overline{f})$ (resp.$Mcat_0(\overline{f}), e_0(\overline{f})$) le plus petit des entiers n pour lesquels il existe un homomorphisme d'a.d.g.c. (resp. de $(\wedge Z, d)$-modules différentiels, d'e.v.g. différentiels)

$$\ell : (\wedge Z \otimes \wedge T, D) \to (B, d_B)$$

rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
(\wedge Z, d) \arrow[r, "\overline{f}\phi"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr] & (B, d_B) \\
(\wedge Z/\wedge^{>n} Z, d) & (\wedge Z \otimes \wedge T, D) \arrow[l, "\simeq"', "\phi"] \arrow[u, "\ell"']
\end{tikzcd}$$

En particulier: si $\overline{f} = id_A$ alors

$$Acat_0(id_A) = cat_0(A), \quad Mcat_0(id_A) = Mcat_0(A), \quad e_0(id_A) = e_0(A).$$

(2.2) Soit $f : X \to Y$ une application continue entre CW-complexes 1-connexes de type fini. Notons $\overline{f} : (A, d_A) \to (B, d_B)$ un KS-modèle de $A_{PL}(f)$. Du théorème d'unicité des KS-modèles [H], il résulte immédiatement que les entiers $Acat_0(\overline{f})$, $Mcat_0(\overline{f})$ et $e_0(\overline{f})$ sont indépendants du KS-modèle $\overline{f}$ choisi, on pose:

$$Acat_0(f) = Acat_0(\overline{f})$$

$$Mcat_0(f) = Mcat_0(\overline{f})$$

$$e_0(f) = e_0(\overline{f})$$

(2.3) **Théorème[F;10,6]:** Soit $f : X \to Y$ une application continue. Si $f_{\mathbb{Q}}$ est une $\mathbb{Q}$-localisation de f alors $Acat_0(f) = cat(f_{\mathbb{Q}})$.

(2.4) **Remarques.**
i) Soit $\overline{f} : A \to B$ un homomorphisme d'a.d.g. Alors

$$Acat_0(\overline{f}) \leq min(cat_0(A), cat_0(B)),$$
$$Mcat_0(\overline{f}) \leq min(Mcat_0(A), Mcat_0(B).$$

ii)

$$Acat_0(\overline{f} \circ \overline{g}) \leq min(Acat_0(\overline{f}), Acat_0(\overline{g})),$$
$$Mcat_0(\overline{f} \circ \overline{g}) \leq min(Mcat_0(\overline{f}), Mcat_0(\overline{g}))$$

où $\overline{g} : B \to C$ est un homomorphisme d'a.d.g.c.

iii) Si on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\overline{f}} & B \\ \phi \downarrow \backsim & & \backsim \downarrow \psi \\ A' & \xrightarrow[\overline{f}']{} & B' \end{array}$$

alors $(Acat_0(\overline{f}), Mcat_0(\overline{f})) = (Acat_0(\overline{f}'), Mcat_0(\overline{f}'))$.

iv) $e(\overline{f})$ est le plus grand entier n tel qu'il existe une classe de cohomologie non nulle dans $H^*(\wedge(X)\, d)$ représentée par un cycle dans $\wedge^{\geq n}(V)$ dont l'image par $\overline{f}^*$ est non nulle.

v) $nil(\overline{f}^*) \leq e_0(\overline{f}) \leq M_0cat(\overline{f}) \leq A_0cat(\overline{f})$.

les exemples ci-dessous montrent que les deux premières inégalités peuvent être strictes.

Exemple$_1$: $nil(id_A^*) < e_0(id_A)$ [J], où

$$A = (\wedge(v_4, v_6, v_7, v_9, v_{11}), d)$$

avec

$$dv_4 = dv_6 = 0\,; \quad dv_7 = v_4^2\,; \quad dv_9 = v_4 v_6\,; \quad dv_{11} = v_6^2\,.$$

On a: $nil(id_A^*) = 2$, $e_0(id_A) = 3$.

Exemple$_2$: $e_0(id_A) < Mcat_0(id_A) = Acat_0(id_A)$,

Théorème [F.H.T$_3$]: *A l'exception des seuls espaces S^p, $S^p \times S^q$ (p,q impairs) et des espaces dont la cohomologie rationnelle est isomorphe à $\mathbb{Q}[\alpha]/\alpha^3$ tout espace satisfaisant aux conditions suivantes:*

i) $e(S) \leq 2$;

ii) L'algèbre de Lie $\pi_*(\Omega(S)) \otimes \mathbb{Q}$ *est abélienne,*

vérifie aussi:

$$dim\pi_*(S) \otimes \mathbb{Q} = \infty\,.$$

Dans ce cas, $e(S) = 2$ *et* $Mcat_0(S) = cat_0(S) = \infty$.

Par contre, d'après Hess [He], si $\overline{f} = id_A$ alors $Mcat_0(A) = cat_0(A)$. Dans la section suivante nous montrons que le résultat de K. Hess n'est pas vrai en général pour les applications.

3- Exemple où $Mcat_0(f) \neq Acat_0(f)$, et quelques cas où on a l'égalité.

(3.1) Un exemple où $Mcat_0(f) \neq Acat_0(f)$ [I].

Soient $(\wedge(v_2, v_5), d)$ un modèle minimal de $\mathbb{CP}^2$ et

$$j : (\wedge(v_2, v_5), d) \to (\wedge(V) \otimes \wedge(V'), D)$$

un KS-modèle de la projection $p : \wedge(V) \to \wedge(V)/\wedge^{>1}(V)$.
Posons

$$D_{|_V} = d \quad \text{et} \quad D(W) \subset \wedge(V) \otimes (\mathbb{Q} \oplus W).$$

On pose:

$$D(v) = d(v) \qquad \text{si } v \in V$$
$$D(\phi) = d(\phi) \qquad \text{si } \phi \in W$$

Soit l'inclusion $j : (\wedge(V), d) \to (\wedge(V) \otimes \wedge(W), D)$, o

$$\begin{cases} W = \wedge^+(V') \\ D/V = d \\ D(\phi) = d(\phi) \qquad \text{si } \phi \in W \end{cases}$$

Alors

$$Mcat_0(j) = 1 \quad , \qquad Acat_0(j) = 2 .$$

(3.2) **Proposition:** *Soit* $\overline{f} : (\wedge V, d) \to (\wedge V, d)$ *un homomorphisme d'a.d.g.c. Si* $\overline{f} \circ \overline{f} = \overline{f}$ *alors* $Mcat_0(\overline{f}) = Acat_0(\overline{f})$.

Preuve. Supposons que $Mcat_0(f) = n$ alors il existe un morphisme

$$r : \wedge(X) \otimes \wedge(Y) \to \wedge(X)$$

de $\wedge(X)$-module. On pose $R = fr$, et on procède comme dans le cas absolu $f = id$ [He].■

(3.3) **Proposition:** *Soit* $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ *une fibration rationnelle. Si* $j^* : H^*(E) \to H^*(F)$ *est surjective alors* $Mcat_0(p) = cat_0(B) = Acat_0(p)$.
Preuve. Ceci résulte de la proposition suivante. ■

(3.3') **Proposition:** *Soit* $(\wedge(X), d) \xrightarrow{i} (\wedge(X) \otimes \wedge(Y), d) \xrightarrow{\ell} (\wedge(Y), \overline{d})$ *une KS-extension. Si* $\ell^* : H^*(\wedge(X) \otimes \wedge(Y)) \to H^*(\wedge(Y))$ *est surjective, alors*

$$Mcat_0(i) = cat_0(\wedge X) = Acat_0(i) .$$

Preuve. Soient y_β une base homogène de $H(\wedge Y)$ et e_β des cycles de $\wedge X \otimes \wedge Y$ tel que $\ell(e_\beta)$ représente y_β. L'homomorphisme de $\wedge X$-modules différentiels

$$\eta : (\wedge X \otimes H(\wedge Y), d \otimes 0) \to (\wedge X \otimes \wedge Y, d),$$

défini par: $\eta(x) = x$; $\eta(y_\beta) = e_\beta$ est un quasi-isomorphisme (la suite spectrale de Serre dégénère au terme E_2). D'où il existe un morphisme de $\wedge X$-module différentiel

$$\xi : \wedge X \otimes \wedge Y \to \wedge X \otimes H(\wedge Y)$$

tel que $\eta\xi = id$.
Soient $\alpha \in H(\wedge Y)$ $(\alpha \neq 0)$ et $q : H(\wedge Y) \to \mathbb{Q}$ une application linéaire tel que $q(\alpha) = 1$.
Posons: $h = (id \otimes q)\xi : (\wedge X \otimes \wedge Y, d) \to (\wedge X, d)$, on a $h(x) = x$.
Il suffit de montrer que $Mcat_0(i) = Mcat_0(\wedge X)$. En effet, en utilisant le résultat de K. Hess [He] on obtient la suite de relations:

$$cat_0(\wedge X) \geq Acat_0(i) \geq Mcat_0(i) = Mcat_0(\wedge X) = cat_0(\wedge X).$$

Supposons que $Mcat_0(i) = n$ alors il existe un morphisme de $\wedge X$-module

$$r : \wedge X \otimes \wedge Z \to \wedge X \otimes \wedge Y$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\wedge(X) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "j"] & \wedge(X) \otimes \wedge(Y) \\
\wedge(X)/\wedge^{>n}(X) & \wedge(X) \otimes \wedge(Z) \arrow[l, "\simeq"', "\psi"] \arrow[u, "r"']
\end{tikzcd}$$

on pose $r' = hr$ alors $r'j = hrj = hi = id_{\wedge X}$. D'où $Mcat_0(\wedge X) \leq n$.■

Soit $\overline{f} : (A, d_A) \to (B, d_B)$ un homomorphisme d'a.d.g.c. On dit que $\overline{f}$ est formalisable au sens de Sullivan [T,III-7] [V], si $\overline{f}$ et $\overline{f}^* : H^*(A) \to H^*(B)$ ont mêmes $\wedge$-modèles minimaux.

(3.4) **Proposition:** *Si $\overline{f} : A \to B$ est formalisable au sens de Sullivan alors*

$$nil(\overline{f}^*) = Acat_0(\overline{f}).$$

Preuve. On procède comme dans la proposition (I-6.3) en remplaçant les T-modèles par des $\wedge$-modèles.■

4-"Mapping theorem".

Soient S, S' deux CW-complexes 1-connexes de type fini. S'il existe une application continue $g : S \to S'$ telle que $g_* : \pi_*(S) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_*(S') \otimes \mathbb{Q}$ est injective alors Y. Félix et S.Halperin [F.H] ont établi le résultat suivant connu sous le nom de "Mapping Theorem":

$$cat_0(S) \leq cat_0(S')\,.$$

Nous donnons une généralisation de ce résultat.

(4.1) **Théorème:** *Soit le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & T \arrow[d, "h"] \\ S' \arrow[r, "f'"'] & T' \end{tikzcd}$$

dans la catégorie des CW-complexes 1-connexes de type fini. Si $h_* : \pi_*(S)\otimes\mathbb{Q} \to \pi_*(S')\otimes\mathbb{Q}$ *est injective alors*

$$Acat_0(f) \leq Acat_0(f')$$
$$Mcat_0(f) \leq Mcat_0(f')$$

Preuve. On applique le foncteur A_{PL} au diagramme commutatif,

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & T \arrow[d, "h"] \\ s' \arrow[r, "f'"'] & T' \end{tikzcd}$$

d'où le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A_{PL}(S) & A_{PL}(T) \arrow[l, "A_{PL}(f)"'] \\ A_{PL}(S') \arrow[u, "A_{PL}(g)"] & A_{PL}(T') \arrow[l, "A_{PL}(f')"] \arrow[u, "A_{PL}(h)"'] \end{tikzcd}$$

dans la catégorie des algèbres différentielles graduées commutatives. Le théorème résulte alors de la proposition suivante.■

(4.2) **Proposition:** *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{g}"'] & B \arrow[d, "\overline{h}"'] \\ A' \arrow[r, "\overline{f}'"'] & B' \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans la catégorie des a.d.g.c. Si

$$\overline{g}_* : \pi_*^{\psi}(A) \to \pi_*^{\psi}(A')$$

est surjectif alors:

$$1) Acat_0(\overline{f}) \geq Acat_0(\overline{f}').$$

$$2) Mcat_0(\overline{f}) \geq Mcat_0(\overline{f}')$$

Preuve. Soit le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} \wedge(X) \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "i_1"'] & \wedge(X) \otimes \wedge(Y) \arrow[d, "\overline{h}"] \\ \wedge(X) \otimes \wedge(Z) \arrow[r, "\overline{f}'"'] & B' \end{tikzcd}$$

où i_0 et i_1 sont des $\wedge$-modèles minimals de $\overline{f}$, $\overline{g}$ respectivement.
Supposons que $Acat_0(\overline{f}) = n$, alors il existe un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} \wedge(X) \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "j_0"] & \wedge(X) \otimes \wedge(Y) \\ \wedge(X)/\wedge^{>n}(X) & \wedge(X) \otimes \wedge(V) \arrow[l, "\backsim", "\phi"'] \arrow[u, "\ell"'] \end{tikzcd}$$

On le tensorise par $\underset{\wedge(X)}{\otimes} (\wedge(X) \otimes \wedge(Z))$, on obtient le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} \wedge(X) \otimes \wedge(Z) \arrow[r, "i_0'"] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, "j_0'"] & \wedge(X) \otimes \wedge(Z) \otimes \wedge(Y) \\ \wedge(X)/\wedge^{>n}(X) \otimes \wedge(Z) & \wedge(X) \otimes \wedge(Z) \otimes \wedge(V) \arrow[l, "\backsim", "\phi'"'] \arrow[u, "\ell'"'] \end{tikzcd}$$

Mais $\wedge(X) \otimes \wedge(Z) \otimes \wedge(Y)$ est la somme amalgamé du diagramme

$$\begin{tikzcd} \wedge(X) \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "i_1"'] & \wedge(X) \otimes \wedge(Y) \\ \wedge(X) \otimes \wedge(Z) & \end{tikzcd}$$

d'où l'existence d'un homomorphisme d'a.d.g.c. $\beta : \wedge(X) \otimes \wedge(Z) \otimes \wedge(Y) \to B'$, tel que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
\wedge(X) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_0"'] & \wedge(X) \otimes \wedge(Z) \arrow[d, "i'_0"] \arrow[ddr, bend left, "\overline{f}'"] & \\
\wedge(X) \otimes \wedge(Y) \arrow[r, "i'_1"'] \arrow[drr, dashed, bend right, "\overline{h}"'] & \wedge(X) \otimes \wedge(Z) \otimes \wedge(Y) \arrow[dr, dashed, "\beta"] & \\
 & & B'
\end{tikzcd}$$

Par suite, nous obtenons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\wedge(X) \otimes \wedge(Z) \arrow[r, "\overline{f}'"] \arrow[d, "j'_0"'] & B' \\
\wedge(X) \otimes \wedge(Z) \otimes \wedge(V) \arrow[r, "\ell'"] & \wedge(X) \otimes \wedge(Z) \otimes \wedge(Y) \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Donc

$$Acat_0(\overline{f}') \leq Acat_0(j_0) \leq cat_0(\wedge(X)/\wedge^{\geq n}(X) \otimes \wedge(Z)$$

D'après [F.H] $Acat_0(\wedge(X)/\wedge^{\geq n}(X) \otimes \wedge(Z) \leq n$ ce qui montre que $Acat_0(\overline{f}') \leq Acat_0(\overline{f})$.

On procède de même pour $Mcat_0$.■

(4.3) **Proposition:** *Soit $f : S \to T$ une application continue . Supposons que*

$$f_* : \pi_*(S) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_*(T) \otimes \mathbb{Q}$$

est injective. Alors $Acat_0(f) = cat_0(S) = Mcat_0(f)$.

Preuve. D'après le théorème (4.1) appliqué au diagramme

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "id_S"] \arrow[d, "id_S"'] & S \arrow[d, "f"] \\
S \arrow[r, "f"'] & T
\end{tikzcd}$$

on a

$$Mcat_0(f) = Mcat_0(S),$$

et d'après [He] $Mcat_0(S) = cat_0(S)$, d'où $Mcat_0(f) = cat_0(S) = Acat_0(f)$.■

(4.4) **Corollaire:** *Soit $f : S \to T$ une application continue, si f admet un inverse homotopique à gauche alors*

$$Acat_0(f) = cat_0(S) = Mcat_0(f).$$

5- Comparaison entre $(Acat(f), Mcat(f))$ et $(Acat_0(f), Mcat_0(f))$.

(5.1) **Proposition:** *Soient $f : S \to T$ une application continue et $\overline{f} : (\wedge X, d) \to (\wedge Y, \delta)$ un modèle de Sullivan de f. Alors*

$$Acat(f) = Acat(\overline{f})$$
$$Mcat(f) = Mcat(\overline{f})$$

Preuve. D'après [H] , il existe un complexe $D(S)$ naturel en S tel que l'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(T(W),\delta) \arrow[r, "\backsim"] & C^*(S;\mathbb{Q}) \arrow[r, "\backsim"] & D(S) & A_{pl}(S) \arrow[l, "\backsim"'] & (\wedge Y, d) \arrow[l, "\backsim"'] \\
(T(V),\delta') \arrow[r, "\backsim"] \arrow[u, "f"] & C^*(T;\mathbb{Q}) \arrow[r, "\backsim"] \arrow[u, "C^*(f)"] & D(T) \arrow[u, "D(f)"] & A_{pl}(T) \arrow[l, "\backsim"'] \arrow[u, "A_{pl}(f)"] & (\wedge X, d') \arrow[l, "\backsim"'] \arrow[u, "\overline{f}"']
\end{tikzcd}$$

La remarque (I-2.2,4), entraîne le résultat.■

(5.2) **Théorème:** *Soit $\overline{f} : (\wedge X, d) \to (\wedge Z, \delta)$ un homomorphisme d'a.d.g.c. alors*

i) $Acat(\overline{f}) \leq Acat_0(\overline{f})$.

ii) $lMcat(\overline{f}) = Mcat_0(\overline{f})$.

iii) $e(\overline{f}) = e_0(\overline{f})$.

Preuve. Soient $\phi : (T(V), d) \to (\wedge(X), d)$ un T-modèle minimal de $(\wedge(X), d)$ et

$$i' : (T(V), d) \to (T(V) \sqcup T(W), D)$$

un T-modèle minimal de $\overline{f} : (\wedge(X), d) \to (\wedge(Z), \delta)$.
D'après [H.L] on a un diagramme commutatif

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
(T(V),d) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"', "\backsim"] & T(V)/J \arrow[r, "\alpha_T"] \arrow[d, "\backsim"] & T(V)/T^{>n}(V) \arrow[r, "\beta_T"] \arrow[d] & T(V)/I \arrow[d, "\backsim"'] \\
(\wedge(X),d) \arrow[r] & \wedge(X)/J' \arrow[r, "\alpha_\wedge"'] & \wedge(X)/\wedge^{>n}(X) \arrow[r, "\beta_\wedge"'] & \wedge(X)/I'
\end{tikzcd}$$

où $\beta_T\alpha_T$ et $\beta_\wedge\alpha_\wedge$ sont des quasi-isomorphismes, et
$I = T^{>n}(V) \oplus C$ tel que C est un supplémentaire de $Ker(d_2)$ dans $T^n(V)$.
$J = T^{>n}(X) \oplus D$ tel que D est un supplémentaire de $Im(d_2)$ dans $T^n(X)$.
$I' = \wedge^{>n}(X) \oplus C'$ tel que C' est un supplémentaire de $Ker(d_2)$ dans $\wedge^n(X)$.

$J' = \wedge^{>n}(X) \oplus D'$ tel que D' est un supplémentaire de $Im(d_2)$ dans $\wedge^n(X)$.

Les deux lemmes suivants s'obtiennent comme les lemmes correspondants de [H.L].

(5.3) **Lemme:** *Soit $T(V) \xrightarrow{j} T(V) \sqcup T(U) \xrightarrow{\backsim} T(V)/I$ un T-modèle minimal de la projection $T(V) \to T(V)/I$, alors $Acat(i')$ (resp. $lMcat(i')$, $e(i')$) $\leq n$) si et seulement s'il existe un morphisme $\ell : T(V) \sqcup T(U) \to T(V) \sqcup T(W)$ d'a.d.g (de $T(V)$-modules à gauche, d'e.v.g différentiels) tel que $\ell j = i'$.*

(5.4) **Lemme:** *Soit $\wedge(X) \xrightarrow{j'} \wedge(X) \otimes \wedge(Y) \xrightarrow{\backsim} \wedge(X)/I'$ un modèle minimal de la projection $\wedge(X) \to \wedge(X)/I'$, alors $Acat_0(\overline{f})$ $(Mcat_0(\overline{f}), e_0(\overline{f})) \leq n$ si et seulement s'il existe un morphisme $\ell' : \wedge(X) \otimes \wedge(Y) \to \wedge(Z)$ d'a.d.g.c. (de $(\wedge(X))$-modules, d'e.v.g différentiels) tel que $\ell' j' = \overline{f}$.*

(5.5) **Démonstration du théorème (5.2).** D'après (*) on obtient un diagramme commutatif d'a.d.g.

$$\begin{tikzcd}
(T(V), d) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\phi"', "\backsim"] & T(V) \sqcup T(U) \arrow[r, "\backsim"] \arrow[d, "\pi"', "\backsim"] & T(V)/I \arrow[d, "\backsim"', "\phi"] \\
(\wedge(X), d) \arrow[r, "j'"] & \wedge(X) \otimes \wedge(Y) \arrow[r, "\backsim"] & \wedge(X)/I'
\end{tikzcd}$$

i) Supposons que $Acat_0(\overline{f}) \leq n$. Alors il existe un morphisme d'a.d.g,

$$r' : \wedge(X) \otimes \wedge(Y) \to \wedge(Z)$$

tel que $r'j' = \overline{f}$.
Soit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "j"'] & T(V) \sqcup T(W) \arrow[d, "\backsim"', "\phi'"] \\
T(V) \sqcup T(U) \arrow[r, "r'\pi"'] & \wedge(Z)
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme de relèvement (I-1.3) et le lemme (5.3), on a $Acat(\overline{f}) \leq n$.

ii) Supposons que $Mcat_0(\overline{f}) \leq n$. Alors il existe un homomorphisme

$$r' : \wedge(X) \otimes \wedge(Y) \to \wedge(Z)$$

de $\wedge(X)$−modules différentiels, tel que: $r'j' = \overline{f}$.

Soit le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} T(V) \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "j"'] & T(V) \sqcup T(W) \arrow[d, "\phi'", "\backsim"'] \\ T(V) \sqcup T(U) \arrow[r, "r\pi"'] & \wedge(Z) \end{tikzcd}$$

On'a: $\phi' i' = \overline{f}\phi = r'j'\phi = r'\pi j$.
D'après le lemme de relèvement (II-1.3) et le lemme (5.4), on a $lMcat(\overline{f}) \leq n$.
Montrons que $Mcat_0(\overline{f}) \leq lMcat(\overline{f})$.

Supposons que $lMcat(\overline{f}) \leq n$, alors il existe un homomorphisme de $T(V)$-modules

$$r : T(V) \sqcup T(U) \to T(W)$$

tel que $rj = i'$.
D'après [H.L] il existe un homomorphisme de $(\wedge(X), d)$-modules

$$\overline{g} : \wedge(X) \otimes \wedge(Y) \to \wedge(X) \underset{T(V)}{\otimes} (T(V) \sqcup T(U))$$

tel que $(id.\pi) \circ \overline{g} = id$.
On pose $r' = (i' \otimes r) \circ \overline{g}$. D'où $Mcat_0(\overline{f}) \leq n$.

iii) La démonstration est analogue à la précédente.■

Remarque. Si $\overline{f}$ est $\mathbb{Q}$-formalisable, alors $Acat(\overline{f}) = Acat_0(\overline{f})$.

En effet si $\overline{f}$ est $\mathbb{Q}$-formalisable (I-6.1) alors elle est formalisable au sens de Sullivan (II-3.4). Et on applique les propositions (I-6.3) et (II-3.4).

6-Groupes de Gottlieb relatifs.

Soit $(\wedge V, d)$ un modèle minimal, dans [F.H] Y. Félix et S. Halperin ont défini le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel,

$$G_n^{\psi}(\wedge V, d),$$

des applications linéaires $g : V^n \to \mathbb{Q}$ qui s'étendent en des dérivations

$$\theta : (\wedge V, d) \to (\wedge V, d) \text{ de degré } -n$$

telle que: $d\theta - (-1)^n \theta d = 0$.

Lorsque $(\wedge V, d)$ désigne le modèle minimal d'un espace topologique nilpotent X, alors $G_n^{\psi}(\wedge V, d)$ coïncide avec $G_n(X_0)$, le groupe de Gottlieb du localisé X_0.

Le groupe [Go] $G_n(X)$ est le sous-groupe de $\pi_n(X)$ formé des éléments $\alpha : S^n \to X$ tel qu' il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S^n \vee X & \xrightarrow{\alpha \vee id} & X \\ \Vert & & \uparrow F \\ S^n \vee X & \xrightarrow{i} & S^n \times X \end{array}$$

(i désigne l'inclusion naturelle).

(6.1) **Théorème [F.H]:** *Si $cat(\wedge V, d) = m < \infty$, alors*

1) $G_{2n}^{\psi}(\wedge V, d) = 0$.
2) $dim G_{impair}^{\psi}(\wedge V, d) \leq m$.

Preuve. Nous donnons une démonstration algébrique de ce résultat, comparer avec [F].

1) Si $G_{2n}^{\psi}(\wedge V, d) \neq 0$ alors il existe $v_0 \in V^{2n}$ et une dérivation

$$\theta : (\wedge V, d) \to (\wedge V, d) \quad \text{de degré } -2n$$

telle que: $d\theta = \theta d; \quad \theta(v_0) = 1$

Notons ε l'augmentation de $\wedge V$.

Soit $h : (\wedge V, d) \to (\wedge \xi, 0)$, le morphisme d'a.d.g.c. défini par:

$$h(v) = \Sigma \varepsilon(\theta^i(v))\xi^i, \quad v \in V \quad (|\xi| = 2n)$$

où ε est l'augmentation de $\wedge V$ et $\theta^i = \theta \circ \theta \circ ... \circ \theta$.
Comme $h : V \to \xi\mathbb{Q}$ est surjectif (car $h(v_0) = \xi$), d'après le " mapping theorem",

$$cat_0(\wedge V) \geq cat_0(\wedge \xi) = \infty\,,$$

d'où la contradiction.

2) Soit $(g_{1,1}, ..., g_{i_1,1}, ..., g_{1,p}, ..., g_{i_p,p})$ une famille libre dans $Hom(V, \mathbb{Q})$, telle que

$$g_{j,l} \in G^{\psi}_{impair}(\wedge V, d)\,, \quad (|g_{j,l}| = n_l)\,.$$

Alors il existe des $v_{j,l}$ de V tels que

$$|v_{j,l}| = n_l \quad \text{et} \quad det(g_{j,l}(v_{k,l}))_{j,k} = \alpha_l \neq 0\,; \quad l = 1, ..., p$$

Soit $h : (\wedge V, d) \to \wedge(v_{1,1}, ..., v_{i_1,1}, ..., v_{1,p}, ..., v_{i_p,p}), 0)$ le morphisme d'$a.d.g.c$ défini par:

$$h(v) = \sum_{l=1}^{p}\sum_{r=1}^{i_l}(det(g_{j,l}(v'_{k,l})_{j,k}))v_{r,l} \quad \text{avec} \quad v'_{k,l} = v_{k,l} \quad \text{si} \quad j \neq r; \quad v'_{r,l} = v\,.$$

On a: $h(v_{r,l}) = \alpha_l v_{r,l}$.
D'après le "mapping theorem"

$$cat_0(\wedge V) = m \geq cat_0(\wedge(v_{1,1}, ..., v_{i_1,1}, ..., v_{1,p}, ..., v_{i_p,p})\,0) = i_1 + ... + i_p\,.$$

D'où $dimG^{\psi}_{impair}(\wedge V, d) \leq m$.■

(6.2) Considérons maintenant le cas relatif.

Soit $\overline{f} : (\wedge V, d) \to (\wedge W, \delta)$ un morphisme d'$a.d.g.c.$ On appelle $\overline{f}$-dérivation, une application linéaire de degré $-n$, $\theta : (\wedge V, d) \to (\wedge W, \delta)$, qui vérifie:

$$\theta(ab) = \theta(a)\overline{f}(b) + (-1)^{n|a|}\overline{f}(a)\theta(b)\,,$$

pour tout $a, b \in \wedge(V)$.

On désigne par $G^{\psi}_n(\wedge V, \wedge W; \overline{f})$ l'espace des applications linéaires $g : V^n \to \mathbb{Q}$ qui s'étendent en des $\overline{f}$-dérivations

$$\theta : (\wedge V, d) \to (\wedge W, \delta)$$

de degré $-n$, avec $\theta d = (-1)^n \delta\theta$.

Si $\overline{f}$ est le modèle d'une application continue $f : X \to Y$, on pose

$$G_n^\psi(X,Y;f) = G_n^\psi(\wedge V, \wedge W; \overline{f})$$

(6.3) **Remarques.**

1) Pour tout morphisme d'a.d.g.c. $\overline{f} : (\wedge V, d) \to (\wedge W, \delta)$ on a les relations suivantes:

$$G_n^\psi(\wedge V, \wedge V; id) = G_n^\psi(\wedge V) \subset G_n^\psi(\wedge V, \wedge W; \overline{f}).$$

2) $G_*^\psi(\wedge V, \mathbb{Q}; \varepsilon) = Hom(V, \mathbb{Q})$.

3) Si $\overline{f} \simeq \overline{g}$ alors $G_*^\psi(\wedge V, \wedge W; \overline{f}) = G_*^\psi(\wedge V, \wedge W; \overline{g})$.

4) si $\overline{f} \simeq 0$ alors $G_*^\psi(\wedge V, \wedge W; \overline{f}) = Hom(V, \mathbb{Q})$

(6.4) **Proposition:** *Etant donné un homomorphisme d'a.d.g.c.* $\overline{f} : (\wedge V,\ d) \to (\wedge W,\ \delta)$. *S'il existe un homomorphisme d'a.d.g.c.*

$$h : (\wedge V, d) \to (\wedge V, d) \otimes (\wedge W,\ \delta)$$

tel que:

$$h(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes f(v) + \sum v_i \otimes w_i\,,$$

avec $v_i \otimes w_i \in \wedge^+(V) \otimes \wedge^+(W)$, *alors* $G^\psi(\wedge V, \wedge W; f) = Hom(V, \mathbb{Q})$.

Démonstration. Montrons que $Hom(V, \mathbb{Q}) \subset G^\psi(\wedge V, \wedge W; f)$

Soit $g \in Hom^n(V, \mathbb{Q})$, alors elle définit un homomorphisme d'a.d.g.c.,

$$\alpha : (\wedge(V), d) \to (\wedge\xi/\xi^2, 0) = (H^*(S^n; \mathbb{Q}), 0)$$

tel que: $\alpha(v) = g(v).\xi$ pour tout $dv \in V$. On pose: $h' = (\alpha \otimes id)h : \wedge V \to H^*(S^n, \mathbb{Q}) \otimes \wedge W$. C'est un homomorphisme d'*a.d.g.c*, en effet: soit $v \in V$ alors

$$\begin{aligned}
dh'(v) &= d(g(v)\xi \otimes 1 + 1 \otimes \overline{f}(v) + \sum \alpha(v_i) \otimes w_i) \\
&= 1 \otimes d\overline{f}(v) + \sum (-1)^{|v_i|} \alpha(v_i) \otimes dw_i) \\
h'd(v) &= (\alpha \otimes id)hd(v) = (\alpha \otimes id)dh(v) \\
&= (\alpha \otimes id)(dv \otimes 1 + 1 \otimes d\overline{f}(v) + \sum (dv_i \otimes w_i + (-1)^{|v_i|} v_i \otimes dw_i)) \\
&= 1 \otimes d\overline{f}(v) + \sum (-1)^{|v_i|} \alpha(vi) \otimes dw_i.
\end{aligned}$$

D'autre part si $v \in V^n$ alors $h'(v) = g(v)\xi \otimes 1 + 1 \otimes \overline{f}(v)$.

D'où $g \in G_n^\psi(\wedge V, \wedge W; \overline{f})$. ■

(6.5) **Corollaire:** *Soit* $(\wedge V\,, d)$ *un modèle minimal, si* $g \in G^{\psi}_{2n+1}(\wedge V)$ *alors*

$$G^{\psi}_{*}(\wedge V, \wedge\xi; \alpha) = Hom^{*}(V, \mathbb{Q})\,,$$

où $\alpha : (\wedge V\,, d) \to (\wedge\xi\,, 0)$ *est un homomorphisme défini par:* $\alpha(v) = g(v)\xi\,,\ v \in V$.

(6.6) Soit $f : S \to T$ une application continue entre CW-complexes, par définition [W.K], $G_n(S, T; f)$ est le sous-groupe de $\pi_n(T)$ formé des éléments $\alpha : S^n \to T$ tels qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S^n \vee S \arrow[r, "\alpha\vee f"] \arrow[d, equal] & T \\ S^n \vee S \arrow[r, "i"] & S^n \times S \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd}$$

où i désigne l'inclusion canonique.

Remarques.

1) Si $ev : T^S \to T$ désigne l'évaluation , alors

$$ev_*(\pi_*(T^S, h)) = G_*(S, T; h)\,.$$

2) $G_n(S, S; id_S) = G_n(S)$.
3) $G_n(S, *; *) = \pi_n(S, *)$.
4) Si f est homotope à h alors

$$G_n(S, T; f) = G_n(S, T; h)\,.$$

5) $h_*(G_n(S)) \subset G_n(S, T; h)$.

Nous donnons ici une autre démonstration du résultat suivant.

(6.7) **Théorème [W.L]:** *Supposons que* $h : S \to T$ *admet un inverse* g *à gauche. Si* n *est pair et* p *est un nombre premier qui ne divise pas la caractéristique d'Euler-Poincaré ou bien* n *est impair et* p *premier où* ∞ *pourvu que* $\chi(S) \neq 0$, *alors*

$$G_n(S, T; h) \subset Ker(g_* h^T_p)\,.$$

où $h^T_p : \pi_n(T) \to H_n(T; \mathbb{Z}) \to H_n(S; \mathbb{Z}_p)$ *est la composition de l'application de Hurewicz tensorisé par* $\mathbb{Z}_p$.

(6.8) **Lemme:** *Etant donné un diagramme commutatif à homotopie près*

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{h} & T \\ \| & & \downarrow g \\ S & \xrightarrow{f} & S' \end{array}$$

alors $g_*(G_n(S,T;h)) \subset G_n(S,S';f)$.

Preuve du lemme. Si $\alpha \in G_n(S,T;h)$ alors $g_*(\alpha) \in G_n(S,T;gh)$, et puisque f est homotope à gh, alors $G_n(S,T;gh) = G_n(S,T;f)$. D'où $\alpha \in G_n(S,T;f)$.

(6.9) **Démonstration du théorème (6.7).**

Montrons d'abord que $G_n(S) = g_*(G_n(S,T;h))$.
Puisque $h_*(G_n(S)) \subset G_n(S,T;h)$, alors

$$G_n(S) = g_*h_*(G_n(S)) \subset g_*(G_n(S,T;h)).$$

Et d'après le lemme (6.8)

$$g_*(G_n(S,T;h)) \subset G_*(S,S;id_S) = G_*(S).$$

Or $G_n(S) \subset Ker(h_p^S)$ [G; théorème 4-3;4-4], d'où $g_*(G_n(S,T;h)) \subset Ker(h_p^S)$ ce qui implique $G_n(S,T;h) \subset Ker(h_p^S g_*)$. Et puisque $g_*h_p^T = h_*^S g_*$ alors

$$G_n(S,T;h) \subset Ker(g_*h_p^T)\,; \blacksquare$$

(6.10) **Proposition:** *Soit $f : X \to Y$ une application continue, et $\overline{f} : (\wedge V, d) \to (\wedge W, d)$ son modèle minimal, alors*

$$G_*(X_0, Y_0; f_0) = G_*^{\psi}(\wedge V, \wedge W; \overline{f}).$$

Preuve. Puisque S^n, est un espace formel il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'homotopie pointées d'applications, $[S^n, X_0]$ et l'ensemble des classes d'homotopies de morphismes d'a.d.g.c. augmentées, $[\wedge V\,, H^*(S^n\,;\mathbb{Q})]$.
La donnée d'une $\overline{f}$-dérivation

$$\theta : \wedge V \to \wedge W \quad \text{de degré} \quad -n\,,$$

qui commmute avec la différentielle est équivalent à celle d'un homomorphisme d'a.d.g.c.

$$h : \wedge V \to \wedge W \otimes H^*(S^n; \mathbb{Q}),$$

tel que: $h(v) = \overline{f}(v) \otimes 1 + \theta(v) \otimes \xi$.■

(6.11) **Proposition:** *Soit $f : S \to T$ une application continue admettant un inverse homotopique à gauche g, alors:*

$$g_*(G_n^\psi(S,T;f)) = G_n^\psi(S).$$

Et si de plus, $cat_0(f) = m < \infty$ alors:

$$\begin{aligned} &1)\ g_*(G_{2n}^\psi(S,T;f)) = 0, \\ &2)\ dim(g_*(G_{impair}^\psi(S,T;f))) \leq m. \end{aligned}$$

Preuve. Puisque f admet un inverse homotopique à gauche, d'après le corollaire (II-4-4), on a l'égalité

$$cat_0(S) = cat_0(f).$$

La proposition résulte alors du théorème (III-6.1) ■

(6.12) Les exemples ci-dessous montrent qu'on ne peut pas généraliser le théorème[F.H] au cas relatif.

1) Un exemple où $G_{2n}^\psi(A,X;f) \neq 0$ et où f admet un inverse à gauche.

Soit $f : (\wedge(v_2, v_3, v_5), d) \to (\wedge(w_3), 0)$ un morphisme d'*a.d.g.c*, défini par:

$$\begin{array}{ccccc} dv_2 = 0 & ; & dv_3 = 0 & ; & dv_5 = v_2^3 \\ f(v_2) = 0 & ; & f(v_3) = w_3 & ; & f(v_5) = 0. \end{array}$$

Dans ce cas, $G_2^\psi(\wedge V, \wedge W; f) \simeq \mathbb{Q}$. En effet la f-dérivation $\theta : \wedge V \to \wedge W$ de degré -2 définie par

$$\theta(v_2) = 1 \quad ; \quad \theta(v_3) = 0 \quad ; \quad \theta(v_5) = w_3$$

commute avec la différentielle.
et, $dim(G_{impair}^\psi(\wedge V, \wedge W; f)) = 2 > cat(f) = 1$.

2) Un exemple où $G_{2n}^\psi(A,X;f) \neq 0$ et où f est injective.

Soit $f : (\wedge(v_2, v_5), d) \rightarrow (\wedge(w_2, w_3), \delta)$un homomorphisme d'$a.d.g.c$ tel que :

$$dv_2 = 0 \quad ; \quad dv_5 = v_2^3 \quad ; \quad \delta w_2 = 0 \quad ; \quad \delta w_3 = w_2^2$$
$$f(v_2) = w_2 \quad ; \quad f(v_5) = w_2 w_3 .$$

Dans ce cas, $G_2^{\psi}(\wedge V, \wedge W; f) \cong \mathbb{Q}$, en effet la f-dérivation de deg -2 définit par:

$$\theta(v_2) = 1 \quad ; \quad \theta(v_5) = 3w_3$$

commute avec la différentielle.

III- REFERENCES

[H.A] L.Avramov, S.Halperin: Through the looking glass: a dictionary between rational homotopy theory and local algebra, *Lect. Notes in Math. Springer-Verlag 1183 (1986) 1-27.*

[B.G] I.Berstein, P.Ganea: The category of a map and of a cohomology class, *Fundamenta. Math. 50 (1961) 261-279*

[B.L] H.J.Baues, J.M.Lemaire: Minimal models in homotopy theory, *Math. Ann. 225 (1977) 219-242.*

[D] J.P.Doeraene: Type d'homotopie mod p des espaces de Ganea, *Rapport de séminaire 116, Louvain-La-Neuve (1987).*

[E] M.Elhaouari: Théorie de la déformation et p-formalité, *Thèse, Louvain-La-Neuve (1989)).*

[F] Y.Félix: La dichotomie elliptique-hyperbolique en homotopie rationnelle, *S.M.F. - Astérisque 176 (1989).*

[F.H.L.T] Y.Félix, S. Halperin, J.M.Lemaire, J.C.Thomas: Mod p loop space homology, *Inventiones Math.95 (1989) 247-262.*

[F.H.T$_1$] Y.Félix, S. Halperin, J.C.Thomas: Gorenstein spaces, *Adv in Math, 71 (1988) 92-112.*

[F.H.T$_2$] Y.Félix, S. Halperin, J.C.Thomas: The category of a map and the grade of a module. Preprint (1990).

[F.H.T$_3$] Y.Félix, S. Halperin, J.C.Thomas: L.S-catégorie et suite spectrale de Milnor-Moore (Une nuit dans le train), *Bull. Soc. math. France, 111 (1983) 89-96*

[G] T.Ganea: A generalisation of the homology and homotopy suspension, *Comment. Math. Helv, vol 39(1965) 295-322.*

[Go] D.H.Gottlieb: Evaluation subgroups of homotopy groups, *Amer. J. Math 91 (1969) 729-756.*

[H] S. Halperin: Lectures on minimal models, *Mémoire S.M.F. 9-10 (1983).*

[H.L] S.Halperin, J.M.Lemaire: Notions of category in differential algebra, *Lect. Notes in Math. Springer-Verlag 1318 (1988) 138-154.*

[He] K.Hess: A proof of Ganea's conjecture for rational spaces, *Ph.D.thesis M.I.T. Cambrige (1988).*

[I] E.Idrissi: Un exemple où Mcat est différent de Acat, *C.R.A.S,Paris, 310 (1990) 599-602.*

[J] B.Jessup: Rational Lusternik-Schnirelman category, fibrations and a conjecture of Ganea, *Ph.D. thesis, Univ. of Toronto (1987).*

[N] B.Ndombol: Sur la catégorie des algèbres de cochaînes, Preprint, (1990).

[S] D. Sullivan : Infinitesimal computations in topology, *Publ. I.H.E.S. 47 (1977) 269-331*

[T] J.C.Thomas: Applications rationnellements équivalentes, *Bull. Soc. Math. belgique, 34 (1982) 145-186.*

[V] M.Vigué-Poirrier: Formalité d'une application continue, *C.R.A.S, Paris, 289 (1979) 599-602.*

[W.K] M.H.Woo, J.R.Kim: Certain subgroups of homotopy groups, *J.of Korean Math. Soc. 21 (1984) 109-120.*

[W.L] M.H.Woo, K.Y.Lee: Homology and generalized evaluation subgroups of homotopy groups, *J.of Korean Math. Soc. 25 (1988) 333-342.*

Résumé.

A toute algèbre de cochaînes A sont associés les invariants numériques suivants: $biMcat(A)$, $rMcat(A)$ et $lMcat(A)$ qui approximent, pour tout corps $\mathbf{k}$ et lorsque $A = C^*(X;\mathbf{k})$, la catégorie au sens de Lusternik-Schnirelmann de l'espace X. Nous montrons dans ce travail que ces trois invariants sont deux à deux distincts.

Nous nous plaçons dans le cadre unificateur de la L.S-catégorie d'une application au sens de Berstein et Ganea. Ceci nous permet d'établir une version relative d'un certain nombre de résultats ("Mapping theorem" , groupes de Gottlieb, ...) et d'infirmer d'éventuelles généralisations du cas absolu.