N° d'ordre : 621

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Nicolas DUPONT

SUR DEUX PROBLÈMES LIÉS A LA FORMALITÉ

Soutenue le 14 décembre 1990 devant la Commission d'Examen :

Président :	D. TANRÉ, Professeur, Université de Lille-Flandres-Artois
Directeur de Thèse :	J.C. THOMAS, Professeur, Université de Lille-Flandres-Artois
Rapporteurs :	Y. FÉLIX, Professeur, Université de Louvain-la-Neuve
	D. TANRÉ, Professeur, Université de Lille-Flandres-Artois
	M. VIGUÉ, C.N.R.S.
Membres invités :	S. HALPERIN, Professeur, Université de Toronto
	K. HESS, Professeur invité à l'Université de Nice

Introduction.

Depuis les années 70, sous l'influence des travaux de D. Quillen [Q], puis de D. Sullivan [S], la théorie de l'homotopie a pris un nouvel essor. Un des résultats les plus remarquables de ces auteurs est de fournir de nouvelles algébrisations de la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques et les flêches les applications continues.

Le premier succés de ce point de vue fut la construction explicite [Q], d'un couple de foncteurs adjoints:

$$\begin{aligned} \lambda &: \mathrm{Top}_1 \longrightarrow \mathbb{Q}\text{-ldg} \\ |\ | &: \mathbb{Q}\text{-ldg} \longrightarrow \mathrm{Top}_1, \end{aligned}$$

où Top_1 désigne la catégorie des espaces topologiques 1-connexes, et $\mathbb{Q}$-ldg, celle des $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie différentielles graduées. De plus, pour tout S de Top_1, $H_*(\lambda(S)) \cong \pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}$, l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle de l'espace des lacets de S, et ces foncteurs induisent une équivalence de catégories entre:

1) La catégorie homotopique rationnelle des espaces 2-réduits.

2) La catégorie homotopique des $\mathbb{Q}$-ldg 1-réduites.

Peu après, D. Sullivan [S], introduit un couple de foncteurs adjoints:

$$\begin{aligned} A_{PL} &: \mathrm{Top} \longrightarrow \mathbb{Q}\text{-adgc} \\ <\ > &: \mathbb{Q}\text{-adgc} \longrightarrow \mathrm{Top}, \end{aligned}$$

de la catégorie des espaces topologiques dans celle des $\mathbb{Q}$-algèbres différentielles graduées commutatives. De plus, pour tout S de Top, $H^*(A_{PL}(S)) \cong H^*(S;\mathbb{Q})$. D. Sullivan prouve aussi (et surtout) l'existence d'une équivalence de catégories entre:

1) La catégorie homotopique rationnelle des espaces nilpotents dont la cohomologie rationnelle est connexe et de type fini (i.e. de dimension finie en chaque degré). Un tel espace est appelé ici "espace de Sullivan".

2) La catégorie homotopique des $\mathbb{Q}$-adgc cohomologiquement connexes qui admettent un modèle minimal de type fini.

En général, la connaissance de l'algèbre de cohomologie $H^*(S;\mathbb{Q})$ ou de l'algèbre de Lie d'homotopie $\pi_*(\Omega S) \otimes \mathbb{Q}$ ne suffit pas pour déterminer le type d'homotopie rationnelle de S. De même, une algèbre ou une algèbre de Lie, n'ont en général pas le même type d'homotopie que leurs algèbres d'homologie. Les algèbres et les espaces, formels ou coformels, sont ceux pour lesquels une de ces propriétés est vérifiée. Plus précisément:

DÉFINITIONS.

1) Soit $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{Q}$-ldg. On dit que $\mathcal{L}$ est coformelle si $\mathcal{L}$ et $H_*(\mathcal{L})$ ont même type d'homotopie dans la catégorie $\mathbb{Q}$-ldg.

Un espace S est dit $\mathbb{Q}$-coformel si $\lambda(S)$ est une algèbre de Lie coformelle.

2) Soit A dans $\mathbb{Q}$-adgc. On dit que A est formelle si A et $H^*(A)$ ont même type d'homotopie dans la catégorie $\mathbb{Q}$-adgc.

Un espace S est dit $\mathbb{Q}$-formel si $A_{PL}(S)$ est une algèbre formelle.

Il est possible, par des techniques quelques peu différentes, d'introduire les notions de formalité ou coformalité d'un espace lorsque l'anneau des coefficients est quelconque. Ceci fait l'objet de travaux en cours.

Afin de rendre plus explicites les définitions données, et plus compréhensible l'exposé de nos travaux, nous effectuons maintenant quelques rappels d'homotopie algébrique.

TYPE D'HOMOTOPIE:

On dit que deux espaces S et T ont même type d'homotopie rationnelle s'il existe des espaces $E_1, \ \dots \ , E_n$ et une suite d'applications continues $f_1, \ \dots \ , f_{n-1}$, induisant chacune un isomorphisme en cohomologie rationnelle avec:

$$S = E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xleftarrow{f_2}, \ \dots \ , \xleftarrow{f_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n = T.$$

On note $\mathbb{Q}$-adgc la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres graduées $A = \underset{i \geq 0}{\oplus} A_i$, commutatives (au sens gradué) et munies d'une différentielle de degré $+1$.

On dit que deux $\mathbb{Q}$-adgc A et B ont même type d'homotopie rationnelle s'il existe des $\mathbb{Q}$-adgc $C_1, \ \dots \ , C_n$, et une suite de quasi-isomorphismes (des morphismes induisant des isomorphismes en cohomologie) $g_1, \ \dots \ , g_{n-1}$, avec:

$$A = C_1 \xrightarrow{g_1} C_2 \xleftarrow{g_2}, \ \dots \ , \xleftarrow{g_{n-2}} C_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} C_n = B.$$

On note $\mathbb{Q}$-ldg la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie graduées $\mathcal{L} = \underset{i \geq 0}{\oplus} \mathcal{L}_i$, munies d'une différentielle de degré -1. Nous pouvons définir de manière similaire une équivalence d'homotopie rationnelle entre deux objets de $\mathbb{Q}$-ldg.

Ceci nous permet de définir les catégories homotopiques associées aux catégories Top, $\mathbb{Q}$-adgc et $\mathbb{Q}$-ldg.

MODÈLE MINIMAL:

Soit (A, d_A) une $\mathbb{Q}$-adgc cohomologiquement connexe. Un modèle minimal de (A, d_A) est un couple $((\Lambda X, d), \varphi)$

$$\varphi \ : \ (\Lambda X, d) \longrightarrow (A, d_A),$$

où φ est un quasi-isomorphisme et $(\Lambda X, d)$ une $\mathbb{Q}$-adgc libre connexe vérifiant les deux propriétés suivantes:

1) La différentielle d est décomposable i.e.

$$d \; : \; \Lambda^i X \longrightarrow \Lambda^{\geq i+1} X.$$

2) Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel X est muni d'une base bien ordonnée $X = \mathbb{Q}(x_i)_{i \in I}$ telle que pour tout i de I, $d(x_i) \in (\Lambda \mathbb{Q}(x_j)_{j<i})$.

Un tel modèle minimal existe toujours ([S] th. 5.1) et est déterminé à isomorphisme de $\mathbb{Q}$-adgc près. Deux $\mathbb{Q}$-adgc ont même type d'homotopie si et seulement si elles ont même modèle minimal.

D'une manière similaire, nous pouvons définir le modèle minimal d'un objet de $\mathbb{Q}$-ldg. La condition de nilpotence 2) ci-dessus est dans ce cas toujours vérifiée puisque la différentielle est de degré -1.

Par définition, le modèle minimal d'un espace de Sullivan S est le modèle minimal de la $\mathbb{Q}$-adgc $A_{PL}(S)$ des formes différentielles à coefficients polynomiaux sur S. Le modèle minimal de Quillen d'un espace 1-connexe S est le modèle minimal de l'algèbre de Lie $\lambda(S)$. Alors deux espaces ont même type d'homotopie rationnelle si et seulement s'ils ont des modèles minimaux (de Sullivan ou de Quillen) isomorphes.

Nous nous intéressons plus particulièrement dans ce travail aux espaces formels. Bien que l'on puisse penser qu'ils soient peu nombreux, il est en fait curieux de constater que beaucoup d'espaces "usuels" sont $\mathbb{Q}$-formels. En particulier (liste non exhaustive): Les sphères (plus généralement les suspensions), les groupes de Lie, les H-espaces, les espaces classifiants, beaucoup d'espaces homogènes (en particulier les espaces projectifs), et les variétés de Kälher compactes 1-connexes. De plus, tout produit et tout wedge d'espaces formels est formel. Ces espaces ont été beaucoup étudiés, une bibliographie est donnée sur ce sujet à la fin du premier chapitre.

La notion d'application $\mathbb{Q}$-formalisable est plus délicate à définir. Elle dépend des formalisations choisies pour les espaces $\mathbb{Q}$-formels. Soit $f \; : \; S \to T$ une application entre deux espaces $\mathbb{Q}$-formels. Notons

$$m(f) \; : \; m(T) \longrightarrow m(S),$$

l'application induite entre les modèles minimaux de T et de S, qui sont, par définition, ceux de $A_{PL}(T)$ et de $A_{PL}(S)$. On dit que f est $\mathbb{Q}$-formalisable s'il existe deux quasi-isomorphismes θ_T et θ_S tels que le diagramme suivant commute à homotopie près (pour la définition de l'homotopie entre deux flèches de $\mathbb{Q}$-adgc, voir par exemple [T]).

$$\begin{tikzcd} m(T) \arrow[r, "m(f)"] \arrow[d, "\theta_T"', "\simeq"] & m(S) \arrow[d, "\simeq"', "\theta_S"] \\ H^*(T;\mathbb{Q}) \arrow[r, "f^*"] & H^*(S;\mathbb{Q}). \end{tikzcd}$$

Signalons qu'il est possible d'introduire la notion d'application $\mathbb{Q}$-formalisable de manière plus "théorique". Pour cela, considérons la catégorie homotopique $Fl(\mathbb{Q}\text{-adgc})$ dont les objets sont les flêches de $\mathbb{Q}$-adgc. La notion de formalité dans cette catégorie est alors définie comme dans la catégorie $\mathbb{Q}$-adgc: Un objet de $Fl(\mathbb{Q}\text{-adgc})$ est formel s'il est relié à sa cohomologie par une suite d'équivalences faibles.

Les applications $\mathbb{Q}$-formalisables ont elles aussi beaucoup été étudiées. Le lecteur trouvera une bibliographie sur ce sujet à la fin du premier chapitre.

Comme exemple simple d'application non $\mathbb{Q}$-formalisable, nous pouvons citer l'application de Hopf $h \;:\; S^3 \to S^2$. En effet, cette application est nulle en cohomologie mais homotopiquement non triviale. Mais l'on peut remarquer que h se factorise en $h = (Id \times h) \circ i$

$$S^3 \overset{i}{\hookrightarrow} S^2 \times S^3 \xrightarrow{Id\times h} S^2,$$

et que les applications $(Id \times h)$ et i sont $\mathbb{Q}$-formalisables.

En fait, il est montré dans [F.T] que toute application entre espaces $\mathbb{Q}$-formels de source une suspension est la composée de deux applications $\mathbb{Q}$-formalisables. Les auteurs se demandent si le résultat persiste lorsque la source est quelconque. Le premier chapitre de notre travail consiste à répondre à cette question. Nous montrons le:

THÉORÈME. *(2 page 8). Toute application continue entre deux espaces de type fini 1-connexes et $\mathbb{Q}$-formels est la composée de deux applications $\mathbb{Q}$-formalisables.*

Les ingrédients principalement utilisés pour montrer ce résultat sont:

1) La mise en évidence d'une version "algèbrique" du théorème.

2) Une décomposition bien choisie d'une application entre modèles minimaux.

3) La démonstration du:

THÉORÈME. *(1 page 8). Toute application continue entre deux espaces de type fini 1-connexes et $\mathbb{Q}$-formels, qui est surjective en homotopie rationnelle, est alors $\mathbb{Q}$-formalisable.*

Pour situer notre deuxième travail du point de vue de l'homotopie des espaces, rappelons tout d'abord que les générateurs V d'un modèle minimal de Sullivan d'un espace S vérifient:

$$V^i \overset{e.v.g.}{\cong} \pi^i(S) \otimes \mathbb{Q}.$$

Si de plus S est un espace formel, alors V est muni d'un deuxième degré, $V = \bigoplus_{i\geq 0} V_i$, pour lequel la différentielle D est de degré -1. En outre, la cohomologie du modèle est concentrée en deuxième degré 0.

Ceci muni donc $\pi_*(S)\otimes\mathbb{Q}$ d'un deuxième degré. L'espace étant supposé de type fini, posons:

$$\varepsilon_p = \dim\pi_*^p(S)\otimes\mathbb{Q} < \infty.$$

Notre second résultat peut alors s'enoncer de la manière suivante:

THÉORÈME. *Soit S un CW-complexe $\mathbb{Q}$-formel de dimension finie. Si $\varepsilon_p = 0$ pour un $p \geq 2$, alors $\varepsilon_i = 0$ pour tout $i \geq 2$.*

Ce théorème nous permet de préciser la structure d'algèbre de Lie d'homotopie des espaces formels à dimension cohomologique finie. La "dualité" modèle de Sullivan - Modèle de Quillen [T], nous donne immédiatement le résultat suivant:

COROLLAIRE. *Soit S un CW-complexe $\mathbb{Q}$-formel de dimension finie. Si $\pi_*(\Omega S)\otimes\mathbb{Q}$ contient un crochet de Lie de longueur trois, alors $\pi_*(\Omega S)\otimes\mathbb{Q}$ contient des crochets de Lie de longueurs arbitraires.*

Ceci résout pour les espaces formels dont la cohomologie est de dimension finie la "conjecture des ε_i". Cette conjecture, comme nous le signalons dans le second article constituant la thèse, a pour origine la théorie des anneaux locaux.

Je voudrais clore la présentation de ce travail en exprimant ma profonde gratitude à tout ceux qui m'ont aidé dans son élaboration:

A mes amis de l'unité de géométrie de Lille I, M. El. Haouari et A. Ouadghiri. Nos fréquentes discussions mathématiques ont contribué à enrichir et préciser mes connaissances au fil du temps.

A K. Hess, avec qui j'ai pris plaisir et intérêt à travailler pendant son séjour à Villeneuve d'Ascq.

Aux Professeurs Y. Félix, S. Halperin et M. Vigué. Ils m'ont aidé dans mon travail et ont accepté de le relire avec soin.

A D. Tanré, qui me fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Enfin, à J.C. Thomas, qui a su être un directeur de thèse à la fois exigeant et patient, stimulant et toujours disponible. Sans ses qualités et sa connaissance profonde des sujets traités ici, ce travail n'aurait pas pu voir le jour.

BIBLIOGRAPHIE DE L'INTRODUCTION

[F.T] **Y. FÉLIX, D. TANRÉ**, *Sur la formalité des applications*, Lect. Notes in Math 1318 (1988), 99-123.

[Q] **D. QUILLEN**, *Rational homotopy theory*, Ann. of Maths 90 (1969), 205-295.

[S] **D. SULLIVAN**, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. I.H.E.S. (1978), 269-331.

[T] **D. TANRÉ**, *Homotopie rationnelle: Modèles de Chen, Quillen, Sullivan*, Lect. Notes in Math. Springer Verlag 1025 (1983).

Table des matières

CHAPITRE I

APPLICATIONS ENTRE ESPACES FORMELS

Résumé.

Nous démontrons ici que toute application φ entre espaces formels est la composée de deux applications formalisables. Pour cela, nous prouvons que si $H^*(\varphi)$ est injective en $D.R.$ homotopie, alors φ est formalisable.

Mots clés: Homotopie rationnelle, fibrations rationnelles, modèle de Sullivan, applications formalisables.

Classification A.M.S. 55 P 62 - 55 P 60 - 55 S 37.

Introduction.

La théorie des espaces formels introduite par D. Sullivan [13] est importante en homotopie rationnelle.

En effet, si un espace S 1-connexe à nombres de Betti finis est formel, alors tous ses invariants homotopiques rationnels s'obtiennent en fonction de $H^*(S;\mathbb{Q})$. En particulier (cf. I-4) si S est formel, l'algèbre de cohomologie de S définit *l'homotopie de De Rham* de S, $\pi_\psi^*(S) \cong Hom(\pi_*(S), \mathbb{Q})$.

Les espaces formels sont assez nombreux; ils comprennent notamment: les sphères, les H-espaces, les espaces classifiants, les variétés de Kähler compactes 1-connexes (voir [3]), etc...

De même, les applications φ, formalisables, entre deux espaces formels sont déterminées rationnellement par la donnée de $\varphi^* = H^*(\varphi;\mathbb{Q})$, et des formalisations choisies des espaces. Elles ont été introduites par Lemaire et Sigrist [10], et étudiées notamment par Arkowitz [1], Félix-Tanré [6], Shiga [14], Thomas [16] et Vigué [17], [14].

Il a été remarqué que la composée de deux applications formalisables n'est pas en général formalisable ([10], 3.10), mais qu'au contraire, toute application de source une suspension, de but un espace formel, est la composée de deux applications formalisables ([6], prop. 2.3).

Dans cet article, nous établissons une condition suffisante pour qu'une application entre espaces formels soit formalisable [th. 1], puis nous généralisons le résultat précédent [th. 2].

THÉORÈME 1. *Soit $\varphi : S \to T$ une application continue entre deux espaces formels 1-connexes à nombres de Betti finis. Si $\varphi^* : \; H^*(T;\mathbb{Q}) \to H^*(S;\mathbb{Q})$ induit une injection en D.R. homotopie, alors φ est une application formalisable.*

THÉORÈME 2. *Toute application continue $\varphi : S \to T$, où S et T sont deux espaces formels 1-connexes à nombres de Betti finis, est la composée de deux applications formalisables, i.e. il existe un espace formel E et deux applications formalisables ψ et ψ' tels que $\varphi = \psi' \circ \psi$.*

Le texte s'organise comme suit: nous fixons tout d'abord nos notations et effectuons quelques rappels sur la théorie de Sullivan (modèles minimaux, espaces formels...). Nous montrons dans une deuxième partie le théorème 1. Dans une troisième partie, nous donnons une version "algébrique" du théorème 2. Dans la dernière partie du texte, nous établissons le résultat souhaité.

I. Notations et rappels.

Soit Top_1 la catégorie des espaces 1-connexes à nombres de Betti finis, i.e. dont la cohomologie rationnelle est de type fini. En abrégé, un objet de Top_1 sera appelé un espace.

Un $\mathbb{Q}$-espace (ou espace rationnel) est un espace dont les groupes d'homotopie sont des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels. La catégorie des espaces rationnels sera notée $\mathbb{Q} - Top_1$.

On note: $A.D.G.C.$ la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres différentielles (A, d) graduées commutatives (au sens gradué) à cohomologie de type fini, avec:

$$A = \oplus_{p \geq 0} A^p,$$

$$d : A^p \to A^{p+1}.$$

En abrégé, nous dirons que (A, d) est une *a.d.g.c.* Si $d = 0$, nous noterons plus simplement $(A, 0) = A$, et A sera appelée une *a.g.c.*

Associant à chaque espace S l'*a.d.g.c.* $A_{PL}(S)$ des formes différentielles à coefficients polynomiaux sur l'espace S, et à toute *a.d.g.c.* (A, d), sa "réalisation géométrique" (que nous noterons $|(A, d)|$, ou $|A|$ si aucune confusion n'est à craindre sur la différentielle), Sullivan [13] établit une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique $\mathbb{Q} - Top_1$ et la catégorie homotopique des *a.d.g.c.* cohomologiquement 1-connexes (i.e. $H^0(A, d) = \mathbb{Q}$ et $H^1(A, d) = 0$).

Une application $\varphi : \ S \to T$ est un quasi-isomorphisme si $\varphi^* : \ H^*(T; \mathbb{Q}) \to H^*(S; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme. On dit que S et T ont le même type d'homotopie rationnelle s'il existe une suite finie de quasi-isomorphismes (notés par le symbole $\simeq$) entre S et T:

$$S = S_0 \overset{\simeq}{\leftarrow} S_1 \overset{\simeq}{\rightarrow} S_2 \overset{\simeq}{\leftarrow} \ \dots \ S_{n-1} \overset{\simeq}{\rightarrow} S_n = T.$$

Rappelons l'existence d'un foncteur (covariant) de localisation ℓ ([12],[13])

$$\ell : Top_1 \to \mathbb{Q} - Top_1,$$

qui associe à un espace S son $\mathbb{Q}$-localisé $S_{\mathbb{Q}}$. En particulier, S et $S_{\mathbb{Q}}$ ont le même type d'homotopie rationnelle. On pose alors:

1) DÉFINITIONS:

On dit que S est un espace formel s'il existe un quasi-isomorphisme θ_S:

$$\theta_S : \ S_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\simeq} \left|H^*(S; \mathbb{Q})\right|.$$

Une application $\varphi : S \to T$ entre deux espaces formels est dite formalisable s'il existe deux quasi-isomorphismes θ_S et θ_T:

$$\theta_S : \; S_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\simeq} \left|H^*(S;\mathbb{Q})\right|,$$

$$\theta_T : \; T_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\simeq} \left|H^*(T;\mathbb{Q})\right|,$$

tels que $|\varphi^*| \circ \theta_S$ soit homotope à $\theta_T \circ \varphi_{\mathbb{Q}}$, où $\varphi_{\mathbb{Q}} : \; S_{\mathbb{Q}} \to T_{\mathbb{Q}}$ désigne une localisation de φ.

2) Notion de modèle minimal. Interprétation algébrique de la formalité:

Soit (A,d) une *a.d.g.c.* cohomologiquement 1-connexe, alors (A,d) admet un modèle minimal unique à isomorphisme près ([13], chap. 5), i.e. un couple $((\Lambda X, d_X),\theta)$ où:

1) $X = \oplus_{i\geq 2} X^i$ est un espace vectoriel gradué 1-connexe,

2) ΛX désigne l'*a.g.c.* libre engendrée par X,

3) d_X est une différentielle d'algèbre de degré $+1$ et $d_X(X) \subset \Lambda^+ X . \Lambda^+ X$,

4) $\theta : (\Lambda X, d_X) \xrightarrow{\simeq} (A,d)$ est un quasi-isomorphisme d'*a.d.g.c.* (i.e. θ^* est un isomorphisme).

Par définition, un modèle minimal d'un espace S est un modèle minimal de $A_{PL}(S)$.

Nous utiliserons les propriétés suivantes:

a) Si $(\Lambda Y, d_Y)$ est un modèle minimal de S, alors il existe une application continue: $S \to \left|(\Lambda Y, d_Y)\right|$ qui est une localisation de S ([2]). D'où:

b) Propriété caractéristique d'un espace formel [10,17]:

Soit S un espace, alors S est formel si et seulement si un modèle minimal de S : $((\Lambda Y, d_Y), \eta_S)$, est un modèle minimal de $H^*(S;\mathbb{Q})$, i.e. il existe un quasi-isomorphisme θ_S:

$$\begin{array}{ccc} H^*(S;\mathbb{Q}) & \underset{\simeq}{\xleftarrow{\theta_S}} & (\Lambda Y, d_Y) \\ & & \eta_S \big\downarrow \simeq \\ & & A_{PL}(S). \end{array}$$

c) Propriété caractéristique d'une application formalisable [8,12]:

Soit $\varphi : S \to T$ une application entre deux espaces formels, $((\Lambda Y, d_Y), \eta_S)$ et $((\Lambda X, d_X), \eta_T)$ des modèles minimaux de S et de T. Alors φ est formalisable si et seulement s'il existe des quasi-isomorphismes θ_S et θ_T, et un homomorphisme $\overline{\varphi}$ tels que le diagramme suivant commute à homotopie près:

$$\begin{array}{ccc}
A_{PL}(T) & \xrightarrow{A_{PL}(\varphi)} & A_{PL}(S) \\
\eta_T \big\uparrow \simeq & & \eta_S \big\uparrow \simeq \\
(\Lambda X, d_X) & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & (\Lambda Y, d_Y) \\
\theta_T \big\downarrow \simeq & & \theta_S \big\downarrow \simeq \\
H^*(T;\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^*(S;\mathbb{Q}).
\end{array}$$

d) Remarques:

Soient φ et φ', deux applications continues entre espaces formels. Si φ est formalisable et si φ est homotope (resp. isomorphe) à φ', alors φ' est formalisable. S'il existe une équivalence d'homotopie k avec $k \circ \varphi'$ homotope à φ et φ formalisable, alors φ' est formalisable.

3) FORMALITÉ DES ALGÈBRES ET DES MORPHISMES D'ALGÈBRES:

Une *a.d.g.c.* (A, d) est dite formelle si un modèle minimal de (A, d) est aussi un modèle minimal de $H^*(A, d)$. Une application $f : (A, d) \to (A', d')$ entre *a.d.g.c.* formelles, est dite formalisable s'il existe deux quasi-isomorphismes (appelés formalisations) θ_A et $\theta_{A'}$, et un morphisme $\overline{f}$ tels que le diagramme suivant commute à homotopie près:

$$\begin{array}{ccc}
(A, d) & \xrightarrow{f} & (A', d') \\
\eta_A \big\uparrow \simeq & & \eta_{A'} \big\uparrow \simeq \\
(\Lambda U, d_U) & \xrightarrow{\overline{f}} & (\Lambda V, d_V) \\
\theta_A \big\downarrow \simeq & & \theta_{A'} \big\downarrow \simeq \\
H^*(A, d) & \xrightarrow{f^*} & H^*(A', d').
\end{array}$$

Dans ce diagramme, les couples $((\Lambda U, d_U), \eta_A)$ et $((\Lambda V, d_V), \eta_{A'})$ désignent respectivement des modèles minimaux de (A, d) et de (A', d').

a) Remarques:

Une *a.d.g.c.* est formelle si et seulement si sa "réalisation géométrique" est formelle. Une application entre deux *a.d.g.c.* formelles est formalisable si et seulement si sa "réalisation géométrique" est formalisable.

4) GROUPES DE *D.R.* HOMOTOPIE:

Soit $(\Lambda X, d) \xrightarrow{\simeq} A_{PL}(S)$ le modèle minimal d'un espace S. On appelle homotopie de De Rham (ou *D.R.* homotopie) de S, le groupe gradué $X \cong \mathrm{Hom}(\pi_*(S), \mathbb{Q})$.

On considère maintenant le *K.S.* modèle minimal ([8], prop. 6.1) d'un morphisme d'*a.d.g.c.* f.

$$(\Lambda X, d) \to (\Lambda X \otimes \Lambda Y, d') \to (\Lambda Y, \overline{d}').$$

Soit d'_ℓ la partie linéaire de d'. La suite exacte courte de $\mathbb{Q}$-modules différentiels suivante:

$$0 \to (X, 0) \to (X \oplus Y, d'_\ell) \to (Y, 0) \to 0,$$

induit une suite exacte longue en homologie appelée suite exacte de *D.R.* homotopie de f (voir [8], parag. 10.12).

II. Démonstration du théorème 1.

Considérons un modèle bigradué de φ^* et un modèle filtré de φ au sens de M. Vigué [18]. En particulier, on a les diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{array}{ccc} H^*(T;\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\varphi^*} & H^*(S;\mathbb{Q}) \\ \theta_T \uparrow \simeq & & \theta_S \uparrow \simeq \\ (\Lambda Z, D) & \xrightarrow{i} & (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D'), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A_{PL}(T) & \xrightarrow{A_{PL}(\varphi)} & A_{PL}(S) \\ \eta_T \uparrow \simeq & & \eta_S \uparrow \simeq \\ (\Lambda Z, D) & \xrightarrow{j} & (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D' + \sigma'), \end{array}$$

où l'algèbre $\Lambda Z \otimes \Lambda Z'$ est bigraduée, i.e. $(Z \oplus Z')^p_n = Z^p_n \oplus Z'^p_n$. On a de plus:

$$\begin{aligned} D' &: (\Lambda Z \otimes \Lambda Z')_i \to (\Lambda Z \otimes \Lambda Z')_{i-1}. \\ \sigma' &: (\Lambda Z \otimes \Lambda Z')_i \to (\Lambda Z \otimes \Lambda Z')_{\leq i-2}. \end{aligned}$$

D'après [18], prop. 2.3.4, φ est une application formalisable si et seulement si un modèle bigradué de φ^* est un modèle filtré de φ. Il nous suffit donc de montrer ([18], th. 2.2.4), l'existence du diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} A_{PL}(T) \arrow[r, "A_{PL}(\varphi)"] & A_{PL}(S) \\ (\Lambda Z, D) \arrow[u, "\rho_T", "\simeq"'] \arrow[r, "i"] & (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D'), \arrow[u, "\rho_S", "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

où:
1) ρ_T et ρ_S sont deux quasi-isomorphismes.
2) Pour tout Φ de $\Lambda(Z_0 \oplus Z'_0)$, la classe de $\rho_S(\Phi)$ est égale à $\theta_S(\Phi)$.

Supposons avoir défini un isomorphisme ω:

$$\omega \ : \ (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D' + \sigma') \xrightarrow{\cong} (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D'),$$

tel que $\omega_{|_{Z \oplus Z'_0}} = Id$.

Posons $\rho_T = \eta_T$ et $\rho_S = \eta_S \circ \omega^{-1}$. De l'égalité $\omega^{-1} \circ i = j$, on déduit que $\rho_S \circ i = \eta_S \circ j = A_{PL}(\varphi) \circ \eta_T$, ainsi le diagramme précédent est commutatif. De plus les propriétés 1) et 2) sont vérifiées.

Il nous reste à construire un tel ω. Puisque S est un espace formel, il existe un quasi-isomorphisme $\theta \ : \ (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D') \to A_{PL}(S)$. Le lemme de relèvement ([8], th. 5.19), nous assure alors de l'existence d'un quasi-isomorphisme Ω:

$$\Omega \ : \ (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D' + \sigma') \xrightarrow{\simeq} (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D'),$$

tel que le diagramme suivant commute à homotopie près.

$$\begin{tikzcd} (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D' + \sigma') \arrow[r, equal] \arrow[d, "\Omega", "\simeq"'] & (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D' + \sigma') \arrow[d, "\eta_S", "\simeq"'] \\ (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D') \arrow[r, "\theta", "\simeq"'] & A_{PL}(S). \end{tikzcd}$$

Puisque φ^* est supposée injective en $D.R.$ homotopie, alors D' est décomposable (par construction i est une $K.S.$ extension minimale). On en déduit (voir [13], th. 2.2) que σ' est décomposable et donc que Ω est un isomorphisme ([8], prop. 6.2). De plus, $(\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D')$ est un modèle bigradué de $H^*(S;\mathbb{Q})$ au sens de Halperin et Stasheff [9].

Remarquons que l'on peut supposer que $\Omega^* = Id$. En effet, considérons le diagramme commutatif ci-dessous:

$$\begin{tikzcd} (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D' + \sigma') \arrow[r, "\Omega"] & (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D') \arrow[r, "\alpha", "\simeq"'] \arrow[d, "\beta", "\cong"'] & H^*(S;\mathbb{Q}) \arrow[d, "(\Omega^*)^{-1}", "\cong"'] \\ & (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D') \arrow[r, "\alpha", "\simeq"'] & H^*(S;\mathbb{Q}), \end{tikzcd}$$

où α est un quasi-isomorphisme arbitraire (toujours surjectif), et où β est un isomorphisme obtenu par le lemme de relèvement. Quitte à remplacer α par $\alpha' = \alpha \circ (\alpha^*)^{-1}$, on peut supposer que $\alpha^* = Id$. Ainsi, $(\beta \circ \Omega)^* = Id$.

Soit maintenant $\Omega' : (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D') \to (\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D')$, défini de la façon suivante:

Si z est dans Z, on pose $\Omega'(z) = \Omega(z)$, ce qui définit $\Omega' : \Lambda Z \to \Lambda Z \otimes \Lambda Z'$. Puisque $D'(z) \in \Lambda Z$ et que $\sigma'(z) = 0$ (par construction), on en déduit que Ω' commute à D'.

Si z est dans Z'_0, on pose $\Omega'(z) = \Omega(z)$. Si z est dans Z'_1, $\Omega(z) = \Psi + \Psi'$ où Ψ est dans $(\Lambda Z \otimes \Lambda Z')_{\geq 1}$, et Ψ' dans $(\Lambda Z \otimes \Lambda Z')_0$. D'où $D'(\Psi) = \Omega(D' + \sigma')(z) = \Omega D'(z)$. On pose alors $\Omega'(z) = \Psi$, ce qui définit $\Omega' : \Lambda Z \otimes (\Lambda Z')_{\leq 1} \to \Lambda Z \otimes \Lambda Z'$ commutant à D'.

Supposons maintenant Ω' défini sur $\Lambda Z \otimes (\Lambda Z')_{<i}$, avec $i \geq 2$, tel que $\Omega'(z)$ soit un élément de $(\Lambda Z \otimes \Lambda Z')_{\geq 1}$ pour tout z de $Z'_{\geq 1}$. On construit Ω' formellement sur Z'_i de la manière suivante: si $z \in Z'_i$, alors $\Omega'(D'(z))$ est un D'-cocycle de $(\Lambda Z \otimes \Lambda Z')_{\geq 1}$, donc le D'-cobord d'un élément Ψ de $(\Lambda Z \otimes \Lambda Z')_{\geq 1}$. On pose alors $\Omega'(z) = \Psi$.

On remarque que Ω' est un automorphisme puisque $\Omega'_{|_{Z_0 \oplus Z'_0}} = \Omega_{|_{Z_0 \oplus Z'_0}}$, donc $(\Omega')^* = \Omega^* = Id$. De plus $(\Lambda Z \otimes \Lambda Z', D')$ est minimale. On pose alors $\omega = (\Omega')^{-1} \circ \Omega$, qui est l'isomorphisme cherché.

III. Version algébrique du théorème 2.

THÉORÈME 2 BIS. *Soit $f : (\Lambda X, d_X) \to (\Lambda Y, d_Y)$ un morphisme d'a.d.g.c. entre deux a.d.g.c. formelles. Alors il existe une a.d.g.c. minimale formelle $(\Lambda Z, d_Z)$, et g et h deux morphismes d'a.d.g.c. tels que le diagramme suivant commute à homotopie près:*

$$\begin{tikzcd}
H^*(\Lambda X, d_X) \arrow[d, "g^*"'] & (\Lambda X, d_X) \arrow[l, "\theta_X"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & (\Lambda Y, d_Y) \arrow[r, "\theta_Y"] & H^*(\Lambda Y, d_Y) \\
H^*(\Lambda Z, d_Z) & (\Lambda Z, d_Z) \arrow[l, "\theta_Z"'] \arrow[r, equal] & (\Lambda Z, d_Z) \arrow[r, "\theta'_Z"] \arrow[u, "h"'] & H^*(\Lambda Z, d_Z), \arrow[u, "h^*"']
\end{tikzcd}$$

avec $\theta_X, \theta_Y, \theta_Z$ et θ'_Z quatre quasi-isomorphismes (par définition, il est équivalent de dire que g et h sont des applications formalisables).

Montrons que le théorème 2 bis entraîne le théorème 2.

Soit donc $\varphi : S \to T$, une application entre deux espaces formels et $f : (\Lambda X, d_X) \to (\Lambda Y, d_Y)$ son modèle minimal, i.e. l'homomorphisme défini à homotopie près, obtenu par le lemme de relèvement:

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda X, d_X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\simeq"'] & (\Lambda Y, d_Y) \arrow[d, "\simeq"'] \\
A_{PL}(T) \arrow[r, "A_{PL}(\varphi)"] & A_{PL}(S).
\end{tikzcd}$$

L'utilisation du foncteur "réalisation géométrique" ainsi que celle du foncteur "localisation" nous donne le diagramme suivant, commutatif à homotopie près:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[d, "\ell_T"', "\simeq"] & S \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "\simeq"', "\ell_S"] \\
{|\Lambda X|} & {|\Lambda Y|} \arrow[l, "|f|"'] \arrow[d, "|h|"] \\
{|\Lambda Z|} \arrow[u, "|g|"] \arrow[r, equal] & {|\Lambda Z|}.
\end{tikzcd}$$

Ici et dans toute la suite, $|\Lambda X|$ (resp. $|\Lambda Y|$, $|\Lambda Z|$) désigne $|(\Lambda X, d_X)|$ (resp. $|(\Lambda Y, d_Y)|$, $|(\Lambda Z, d_Z|)$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $|g|$ est une fibration qui sera rationnelle puisque la base est 1-connexe ([7] ou [8], prop. 20.3).

Notons π la fibration image réciproque de $|g|$ par ℓ_T. On obtient le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, equal] \arrow[d] & F \arrow[d] \\
E \arrow[r, "\ell_E"] \arrow[d, "\pi"'] & {|\Lambda Z|} \arrow[d, "|g|"] \\
T \arrow[r, "\ell_T"] & {|\Lambda X|}.
\end{tikzcd}$$

Puisque ℓ_T est une équivalence d'homotopie rationnelle, il en est de même de ℓ_E.

D'autre part, notons H l'homotopie $H : S \times I \to |\Lambda X|$ tel que $H(x,0) = |g| \circ |h| \circ \ell_S$ et $H(x,1) = \ell_T \circ \varphi$.

La propriété de relèvement des homotopies pour les fibrations entraîne l'existence d'une homotopie $K : S \times I \to |\Lambda Z|$ telle que le diagramme ci-dessous commute.

$$\begin{tikzcd} S \times \{0\} \arrow[r, "|h| \circ \ell_S"] \arrow[d] & |\Lambda Z| \arrow[d, "|g|"] \\ S \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, "K"] & |\Lambda X|. \end{tikzcd}$$

Soit $k : S \to |\Lambda Z|$ définie en posant $k(x) = K(x,1)$.

Alors, $|h| \circ \ell_S \overset{K}{\simeq} k$, et $|g| \circ k = \ell_T \circ \varphi$. De la propriété universelle du produit fibré, nous déduisons l'existence d'une application continue α, rendant commutatif le diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, "\ell_E"] \arrow[d, "\pi"'] & |\Lambda Z| \arrow[d, "|g|"] \\ S \arrow[r, "\varphi"] & T \arrow[r, "\ell_T"] & |\Lambda X|. \end{tikzcd}$$

Finalement remarquons que:

- E est un espace formel puisqu'il a le même type d'homotopie rationnelle que $|\Lambda Z|$.

- π est formalisable puisque $\ell(\pi) = |g|$.

- α est formalisable puisque $\ell_E \circ \alpha \overset{K}{\simeq} |h| \circ \ell_S$, et que d'une part ℓ_E est une équivalence d'homotopie rationnelle, que d'autre part $|h| \circ \ell_S$ est formalisable (cf. remarque I 2) d)).

IV. Démonstration du théorème 2 bis.

Soit $f : (\Lambda X, d_X) \to (\Lambda Y, d_Y)$ un morphisme d'*a.d.g.c.* entre deux modèles minimaux d'espaces formels.

On peut supposer que:

$$\theta_X : (\Lambda X, d_X) \to H^*(\Lambda X, d_X),$$
$$\theta_Y : (\Lambda Y, d_Y) \to H^*(\Lambda Y, d_Y),$$

sont des modèles bigradués au sens de Halperin et Stasheff ([9]). En particulier, θ_X et θ_Y sont surjectifs. Notons I l'idéal de ΛX engendré par l'image de d_X dans ΛX, et $p : (\Lambda X, d_X) \to \Lambda X/I$ la projection naturelle (qui est un morphisme d'algèbres différentielles).

Considérons alors un modèle bigradué de $\Lambda X/I$. C'est en particulier un quasi-isomorphisme surjectif s:

$$s : (\Lambda W, d_W) \to \Lambda X/I.$$

De plus, il est clair que $\theta_Y \circ f$ se factorise à travers p. En effet, $((\Lambda Y, d_Y), \theta_Y)$ étant un modèle bigradué, l'image par θ_Y d'un d_Y-cobord est nulle. Donc si $p(\Psi)$ est nulle pour un élément Ψ de ΛX, alors $\theta_Y \circ f(\Psi) = 0$.

Nous obtenons ainsi le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} & & (\Lambda X, d_X) & \xrightarrow{f} & (\Lambda Y, d_Y) \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & {\scriptstyle \theta_Y}\downarrow \\ (\Lambda W, d_W) & \xrightarrow{s} & \Lambda X/I & \xrightarrow{u} & H^*(\Lambda Y, d_Y). \end{array}$$

Du lemme de relèvement ([8], th. 5.19), nous déduisons l'existence de morphismes d'*a.d.g.c.* $\hat{p} : (\Lambda X, d_X) \to (\Lambda W, d_W)$ et $v : (\Lambda W, d_W) \to (\Lambda Y, d_Y)$ tels que: $\theta_Y \circ v = u \circ s$ et $p = s \circ \hat{p}$. En particulier, puisque $\theta_Y \circ f = u \circ p$, on obtient alors: $\theta_Y \circ f = \theta_Y \circ v \circ \hat{p}$, et puisque θ_Y est un quasi-isomorphisme, d'après [8], prop. 5.15, $v \circ \hat{p}$ est homotope à f.

Quitte à considérer: $\theta'_Y = \theta_Y \circ (\theta^*_Y)^{-1}$, on peut supposer que $\theta^*_Y = Id$ et donc: $(\theta_Y \circ v)^* = v^* = (u \circ s)^* = u \circ s^*$. Posons:

$$\theta_W = (s^*)^{-1} \circ s \ : \ (\Lambda W, d_W) \xrightarrow{\simeq} H^*(\Lambda W, d_W).$$

D'où nous déduisons les égalités: $v^* \circ \theta_W = v^* \circ (s^*)^{-1} \circ s = g \circ s = \theta_Y \circ v$, i.e. v est une application formalisable. Il nous reste à prouver que p est une application formalisable. Pour cela (théorème 1), nous montrons.

LEMME. *p^* est injective en D.R. homotopie.*

Soit $X = \bigoplus_{i \geq 0} X_i$, la décomposition de X suivant le degré filtrant ([18]). Posons $U = U_0 = \bigoplus_{i \geq 1} U_0^{(i)}$, où pour tout $i \geq 1$, $U_0^{(i)}$ est une copie de X_i. Un modèle bigradué [18] de p^* est alors donné par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} H^*(\Lambda X, d_X) & \xrightarrow{p^*} & \Lambda X/I \\ \simeq\uparrow{\scriptstyle \theta_X} & & \simeq\uparrow{\scriptstyle \theta} \\ (\Lambda X, d_X) & \longrightarrow & (\Lambda X \otimes \Lambda U \otimes \Lambda V, D). \end{array}$$

Si l'on identifie un élément de X et sa classe dans $\Lambda X/I$, on obtient par construction:

$$\theta\Big|_{X_0} = Id_{X_0},\ \theta\Big|_{X_i} = 0\ i \geq 1,\ \theta\Big|_{U_0^{(i)}} : U_0^{(i)} \xrightarrow{\cong} X_i\ i \geq 1,\ \theta\Big|_V = 0 \text{ et } D\Big|_U = 0.$$

Montrons que l' on peut supposer que pour tout v de V, $D(v)$ est dans $\Lambda X \otimes \Lambda^{\geq 1}(U \oplus V)$. Pour cela, on procède par induction le long d'une $K.S.$ base fixée ([8], chap. 1).

Soit v le premier élément de la $K.S.$ base ne vérifiant pas cette condition. Posons $V = \overline{V} \oplus \langle v \rangle$ et $D(v) = \Phi + \Psi + \Psi'$, où $\Phi \neq 0 \in \Lambda X$, $\Psi \in \Lambda X \otimes \Lambda^{\geq 1} U$, et $\Psi' \in \Lambda X \otimes \Lambda U \otimes \Lambda^{\geq 1} V$. Alors Φ est un D-cocycle, donc un d_X-cocycle.

Supposons que Φ ne soit pas un d_X-cobord. Par construction de θ, $\theta(Dv) = \theta(\Phi + \Psi) = 0$. Mais Φ est alors dans $\Lambda X_0/I$ et est non nul alors que par définition de θ, $\theta(\Psi) \in (\Lambda X)_{\geq 1}/I$. Ceci est contradictoire.

On a donc $\Phi = d_X(\Phi')$ pour un élément Φ' de ΛX. On construit alors un isomorphisme ν respectant le bidegré:

$$\nu :\ \Lambda X \otimes \Lambda U \otimes \Lambda V \to \Lambda X \otimes \Lambda U \otimes \Lambda V,$$

où $\nu\Big|_{X \oplus U \oplus \overline{V}} = Id$, $\nu(v) = v - \Phi'$ et on pose $D' = \nu^{-1} D \nu$. On obtient ainsi par composition un modèle bigradué de p^*, isomorphe au précédent:

$$(\Lambda X, d_X) \to (\Lambda X \otimes \Lambda U \otimes \Lambda V, D').$$

Mais maintenant $D'(v) = \Psi + \Psi'$, ce qui achève le pas récurrent.

Nous déduisons qu'en particulier D est décomposable, ce qui démontre le lemme d'après [8], parag. 10.12 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] **M. ARKOWITZ**, *Formal differential graded algebras and homomorphisms*, J.P.A.A. 51 (1988), 35-52.

[2] **A.K. BOUSFIELD, V.K.A.M. GUGENHEIM**, *On P.L. De Rham theory and rational homotopy type*, Memoirs of A.M.S. 179 (1976).

[3] **P. DELIGNE, P.GRIFFITHS, J. MORGAN, D. SULLIVAN**, *The real homotopy theory for Kähler manifolds*, Invent. Math 29 (1975), 245-254.

[4] **Y. FÉLIX**, *Espaces formels et π-formels*, Homotopie Algébrique et Algèbre Locale, Astérisque 113-114 (1984), 96-108.

[5] **Y. FÉLIX, S. HALPERIN**, *Formals spaces with finite dimensional rational homotopy*, Trans. Amer. Math. Soc. 270 (1982), 575-588.

[6] **Y. FÉLIX, D. TANRÉ**, *Sur la formalité des applications*, Lect. Notes in Math 1318 (1988), 99-123.

[7] **P.P. GRIVEL**, *Formes différentielles et suites spectrales*, Ann. Inst. Fourier 29 (1979), 17-37.

[8] **S. HALPERIN**, *Lectures on minimal models*, Mémoires S.M.F nouvelle série 9-10 (1983).

[9] **S. HALPERIN, J.D. STASHEFF**, *Obstructions to homotopy equivalences*, Advances in Math. **32** (1979), 233–279.

[10] **J.M. LEMAIRE, F. SIGRIST**, *Sur les invariants d'homotopie rationnelle liés à la L.S. catégorie*, Comment Math. Helv. **56** (1981), 103-122.

[11] **J. NEISENDORFER, T. MILLER**, *Formal and coformal spaces*, Illinois J. of Math. **22,** (1978), 565-580.

[12] **M.M. POSTNIKOV**, *Localization of topological spaces*, Russian Math. Surveys **32-6,** (1977), 121-184.

[13] **D. SULLIVAN**, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. I.H.E.S. (1978), 269-331.

[14] **H. SHIGA**, *Rational homotopy types of cofibrations*, S.M.F. Astérisque 113-114 (1984), 298-307.

[15] **D. TANRÉ**, *Homotopie rationnelle: Modèles de Chen, Quillen, Sullivan*, Lect. Notes in Math. Springer Verlag 1025 (1983).

[16] **J.C. THOMAS**, *Applications rationnellement équivalentes*, Bull. Soc. Math. Belgique Vol.34. Fasc II, ser. B (1982), 145-186.

[17] **M. VIGUÉ-POIRRIER**, *Formalité d'une application continue*, C.R.A.S. Paris 289 (1979), 809-812.

[18] **M. VIGUÉ-POIRRIER**, *Réalisation de morphismes donnés en cohomologie et suite spectrale d'Eilenberg-Moore*, Trans. A.M.S. 265 (1981), 447-484.

CHAPITRE II

SUR LES DÉVIATIONS D'UNE $\mathbb{Q}$-ALGÈBRE

Résumé.

Soit H une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée commutative connexe et de dimension finie.

Nous montrons que si l'une des déviations de H est nulle, alors H est une algèbre de polynômes ou une intersection complète. Ceci répond partiellement au problème d'homotopie rationnelle "miroir" de celui posé par T.H. Gulliksen et G. Levin (voir [2] et [5] p. 154).

Mots clés: Homotopie rationnelle, déviations.

Classification A.M.S: 55 P 60.

I] Introduction.

Soit A un anneau local noethérien de corps résiduel k.

DÉFINITION 1. *Soit* $P_A(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \dim \operatorname{Tor}_j^A(k,k)t^j$ *le polynôme de Poincaré de* A, *on peut écrire (voir par exemple [1] prop. 0.4):*

$$P_A(t) = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(1+t^{2j+1})^{\varepsilon_{2j}}}{(1-t^{2j+2})^{\varepsilon_{2j+1}}}.$$

Alors l'entier ε_j *est appelé la* $j^{\text{ième}}$ *déviation de* A.

Dans [9], S. Halperin a montré que si l'une des déviations de A est nulle, alors A est une intersection complète, i.e. $\varepsilon_j = 0$ pour tout $j \geq 2$. Ceci répond à un problème posé par T.H. Gulliksen et G. Levin (conjecture C_3 dans [1]).

Plusieurs auteurs (voir en particulier [2] et [4]) ont remarqué que certains problèmes d'algèbre locale admettaient une "version miroir" en homotopie rationnelle. En particulier, soit H une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée commutative noethérienne connexe et $(\Lambda Z, D) \xrightarrow{\simeq} H$ son modèle bigradué au sens de Halperin et Stasheff ([10] chap. 3). Il est bien connu ([4]) que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \dim \operatorname{Tor}_j^H(\mathbb{Q},\mathbb{Q})t^j = \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(1+t^{2j+1})^{\varepsilon_{2j}}}{(1-t^{2j+2})^{\varepsilon_{2j+1}}},$$

avec $\varepsilon_j = \dim Z_j$ pour tout $j \geq 0$. Ainsi, le problème C_3 de [1] (résolu dans [9]), se traduit par ([4] prop. III. 16):

CONJECTURE 1. *Soit* H *une* $\mathbb{Q}$*-algèbre graduée commutative noethérienne connexe et* $(\Lambda Z, D) \xrightarrow{\simeq} H$ *son modèle bigradué au sens de Halperin et Stasheff. On note* $\varepsilon_i = \dim Z_i$ *; alors:*

Si $\varepsilon_i = 0$ *pour un* $i \in \mathbb{N}$ *donné quelconque, tous les* ε_j *sont nuls, pour* $j \geq 2$.

Si $H = H^{\text{pair}}$ est de dimension finie, alors H est un anneau local et le résultat de S. Halperin s'applique.

Cependant, dans le cas général, les techniques utilisées dans [9] ne s'adaptent pas, comme souvent, à l'étude du problème "miroir" en homotopie rationnelle. Ainsi la conjecture 1 reste un problème ouvert. Elle a été partiellement résolue par Y. Félix et J.C. Thomas ([4] th. IV. 5), qui ont montré que si H n'est pas une intersection complète (i.e. si $\varepsilon_2 \neq 0$), alors elle n'admet qu'un nombre fini de déviations non nulles.

Notre but est de prouver la conjecture 1 dans le cas où la dimension de H est supposée finie en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Plus précisément nous montrons le:

THÉORÈME 1. *Soit H une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée commutative connexe de dimension finie et $(\Lambda Z, D) \xrightarrow{\simeq} H$ son modèle bigradué au sens de Halperin et Stasheff.*

S'il existe un entier $i \geq 2$ tel que $Z_i = 0$ alors $Z_j = 0$ pour tout entier $j \geq 2$.

Nous allons en fait prouver ce résultat sous une forme plus générale. Considérons pour cela un KS-complexe minimal et connexe (la définition est donnée dans la deuxième partie du texte). On le note $(\Lambda X, d)$. Supposons que X soit muni d'une deuxième graduation, que l'on note inférieurement, $X = \bigoplus_{i \geq 0} X_i$, telle que pour tout $i \geq 0$, on ait $d \; : \; (\Lambda X)_i \to (\Lambda X)_{i-1}$. Alors la cohomologie du KS-complexe $(\Lambda X, d)$, appelé KS-complexe bigradué, est munie d'une seconde graduation i.e. pour tout $k \geq 1$, $H^k(\Lambda X, d) = \bigoplus_{n \geq 0} H^k_n(\Lambda X, d)$. On pose alors:

DÉFINITION 2. *Si $dim H_*(\Lambda X, d) < \infty$, on note (si aucune confusion n'est à craindre sur la différentielle) $\eta_*(\Lambda X)$ le plus grand entier n tel que $H_n(\Lambda X, d) \neq 0$. L' entier $\eta_*(\Lambda X)$ est appelé la dimension formelle de $H_*(\Lambda X, d)$.*

DÉFINITION 3. *On appelle "creux" de X, que l'on note $c_*(X)$, le plus grand entier n tel qu'il existe un entier l avec:*

- *X_l et X_{l+n} non nuls,*
- *X_j nul pour tout j tel que $l < j < l + n$.*

Remarquons que $\eta_*(\Lambda X)$ peut être défini sans que la dimension de $H^*(\Lambda X, d)$ soit finie. Ceci est du au fait que la dimension de $H_0(\Lambda X, d)$ peut être infinie.

Nous allons montrer le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Soit $(\Lambda X, d)$ un KS-complexe minimal connexe bigradué tel que $dim H_*(\Lambda X, d) < \infty$, alors:*

$$c_*(X) \leq \eta_*(\Lambda X) + 1.$$

Ce résultat entraîne immédiatement le théorème 1. En effet, le modèle bigradué d'Halperin et Stasheff $(\Lambda Z, D)$ de H (voir [10]) vérifie toutes les hypothèses du théorème 2. De plus, dans ce cas, $\eta_*(\Lambda Z) = 0$. Supposons donc qu'un Z_i soit nul pour un $i \geq 2$, on en déduit que Z_j est nul pour tout $j \geq i$ et, d'après ([4] th. IV. 5), que $Z_j = 0$ pour tout $j \geq 2$.

Notre but est donc maintenant de démontrer le théorème 2. Pour cela, nous commençons par préciser nos notations et nous effectuons quelques rappels, notamment sur les KS-complexes. Par la suite quelques résultats préliminaires sont prouvés, puis nous démontrons le théorème 2.

Ainsi le texte s'organise-t-il comme suit:

I] Introduction.
II] Notations et Rappels.
III] Deux lemmes préliminaires.
IV] Démonstration du théorème 2.

Le théorème 2 s'inspire d'un résultat montré dans [8]. L'auteur exprime sa vive reconnaissance à S. Halperin sans qui cet article n'aurait pu être écrit.

II] Notations et rappels.

Le corps de base sera toujours celui des rationnels. Ainsi, par exemple, les foncteurs hom et $\otimes$ désigneront $\hom_{\mathbb{Q}}$ et $\underset{\mathbb{Q}}{\otimes}$. De même, les espaces vectoriels ou les algèbres considérés ici seront toujours définis sur $\mathbb{Q}$.

Soit $X = \underset{i \geq 1}{\oplus} X^i$ un espace vectoriel gradué supérieurement, où chaque X^i est de dimension finie. On note $|x|$ le degré d'un élément homogène x de X.

On désigne par ΛX l'algèbre libre graduée commutative (au sens gradué) sur X.

$$\Lambda X = E(X^{\text{impair}}) \otimes S(X^{\text{pair}})$$

est alors l'algèbre extérieure sur les générateurs de X de degré impair tensorisée (sur $\mathbb{Q}$) par l'algèbre symétrique sur les générateurs de X de degré pair. Si $(x_i)_{i \in I}$ désigne une $\mathbb{Q}$-base de X, nous noterons parfois $\Lambda X = \Lambda((x_i)_{i \in I})$. Si $X = x.\mathbb{Q}$, nous noterons $\Lambda X = \Lambda x$. La graduation sur ΛX est définie par: $|a.b| = |a| + |b|$ où a et b sont deux éléments homogènes de ΛX.

Soit maintenant $d \ : \ \Lambda X \to \Lambda X$ une application linéaire vérifiant les trois conditions suivantes:

1) $d \ : \ (\Lambda X)^i \to (\Lambda^{\geq 2} X)^{i+1}$, i.e. d est décomposable et de degré $+1$.

2) $d(a.b) = d(a).b + (-1)^{|a|} a.db$, pour tout couple (a, b) d'éléments homogènes de ΛX.

3) $d \circ d = 0$.

4) Il existe une base $(x_i)_{i \in I}$ de X indexée par un ensemble bien ordonné I tel que $d(x_j) \in \Lambda((x_i)_{i<j})$.

L'algèbre ΛX munie d'une telle application d, appelée différentielle, est appelée un KS-complexe ([6]) minimal connexe et de type fini. Elle est notée $(\Lambda X, d)$. Par référence à la théorie de Sullivan [11], nous appellerons plus simplement "KS-modèle" un KS-complexe minimal connexe et de type fini.

On peut décomposer la différentielle d sous la forme $d = d_2 + d_3 + \ \dots \ + d_i + \ \dots$ avec $d_i|_X \ : \ X \to \Lambda^i(X)$. On remarque qu'alors d_2 est une différentielle qui est appelée partie quadratique de d.

La graduation sur $(\Lambda X, d)$ induit une graduation sur l'algèbre de cohomologie $H^*(\Lambda X, d)$, i.e. $H^*(\Lambda X, d) = \underset{n \geq 0}{\oplus} H^n(\Lambda X, d)$ avec $H^0(\Lambda X, d) = \mathbb{Q}$. Nous dirons qu'une algèbre H est de dimension finie lorsqu'elle est de dimension finie en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué.

Nous appellerons KS-modèle bigradué, un KS-modèle $(\Lambda X, d)$ où X est muni d'une deuxième graduation, notée inférieurement, $X = \underset{j \geq 0}{\oplus} X_j$, pour laquelle chaque X_j est de dimension finie, et d de degré -1, i.e. $d \ : \ (\Lambda X)_j \to (\Lambda X)_{j-1}$. Le degré inférieur d'un élément homogène a de ΛX est noté $||a||$.

La graduation inférieure sur un KS-modèle bigradué $(\Lambda X, d)$ induit une seconde graduation sur $H^*(\Lambda X, d)$, i.e. pour tout $k \geq 1$, $H_*^k(\Lambda X, d) = \bigoplus_{n \geq 0} H_n^k(\Lambda X, d)$.

Un modèle bigradué d'Halperin et Stasheff (voir [10] chap. 3) est un KS-modèle bigradué $(\Lambda X, d)$ tel que $H_*(\Lambda X, d) \cong H_0(\Lambda X, d)$.

Ici, le symbole $\cong$ désigne un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives. Le symbole $\simeq$ désignera un quasi-isomorphisme (un morphisme induisant un isomorphisme en cohomologie) d'algèbres différentielles graduées commutatives.

Nous faisons maintenant quelques rappels sur ces modèles. Tout d'abord, remarquons que l'on a:

$$d \ : \ \Lambda(X_i) \to \Lambda(X_{<i}).$$

Supposons que $\Lambda X = \Lambda(X_{\leq k} \oplus X_{\geq l})$. On définit alors, de façon naturelle, le sous-modèle:

$$(\Lambda(X_{\leq k}), d) \hookrightarrow (\Lambda(X_{\leq k} \oplus X_{\geq l}), d),$$

ainsi que le modèle quotient:

$$(\Lambda(X_{\leq k} \oplus X_{\geq l}), d) \twoheadrightarrow (\Lambda(X_{\geq l}), \overline{d}) = (\Lambda X \underset{\Lambda X_{\leq k}}{\otimes} \mathbb{Q}, \overline{d}).$$

Considérons maintenant le diagramme suivant de KS-modèles:

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda Y, d_Y) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & (\Lambda Z, d_Z) \\
(\Lambda T, d_T),
\end{tikzcd}$$

où f et g sont des morphismes d'algèbres différentielles. Ces applications font de $(\Lambda Z, d_Z)$ et $(\Lambda T, d_T)$ des $(\Lambda Y, d_Y)$-modules différentiels.

On appelle somme amalgamée de $(\Lambda Z, d_Z)$ et de $(\Lambda T, d_T)$ par f et g, l'algèbre différentielle $(\Lambda Z, d_Z) \underset{(\Lambda Y, d_Y)}{\otimes} (\Lambda T, d_T)$, qui rend commutatif le diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda Y, d_Y) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & (\Lambda Z, d_Z) \arrow[d] \\
(\Lambda T, d_T) \arrow[r] & (\Lambda Z, d_Z) \underset{(\Lambda Y, d_Y)}{\otimes} (\Lambda T, d_T).
\end{tikzcd}$$

Remarquons que si l'on considère le diagramme suivant de KS-modèles bigradués:

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda(X_{\leq k}), d) \arrow[r] \arrow[d] & (\Lambda(X_{\leq k} \oplus X_{\geq l}), d) \\
(\Lambda T, d_T),
\end{tikzcd}$$

alors $(\Lambda(X_{\leq k} \oplus X_{\geq l}), d) \underset{(\Lambda(X_{\leq k}),d)}{\otimes} (\Lambda T, d_T) \cong (\Lambda(X_{\geq l} \oplus T), D)$, où D désigne la différentielle définie de façon unique par d et d_T.

Nous terminons ces quelques rappels par la notion de dérivation.

Une dérivation sur un KS-modèle $(\Lambda X, d)$ est une application linéaire θ : $(\Lambda X, d) \to (\Lambda X, d)$ telle que les propriétés suivantes soient vérifiées:

1) θ est homogène pour le degré, i.e. il existe un entier noté $|\theta|$, le degré de θ, tel que pour tout Ψ de $(\Lambda X)^i$, $\theta(\Psi) \in (\Lambda X)^{i+|\theta|}$,

2) $\theta(a.b) = \theta(a).b + (-1)^{|a||\theta|} a.\theta(b)$ pour tout couple (a, b) d'éléments homogènes de ΛX.

En fait, toutes les dérivations considérées ici seront des cycles dans l'algèbre de Lie différentielle des dérivations de $(\Lambda X, d)$, i.e. elles vérifieront la propriété supplémentaire:

3) $\theta d - (-1)^{|\theta|} d\theta = 0$.

Par souci de simplification, une dérivation désignera toujours ici une dérivation vérifiant la propriété 3).

Soit maintenant une KS-extension (voir [6]):

$$(1) \ : \ (\Lambda y, 0) \to (\Lambda y \otimes \Lambda Y, d) \to (\Lambda Y, \overline{d}),$$

où $(\Lambda y \otimes \Lambda Y, d)$ est un KS-modèle (en particulier d est décomposable) et $|y|$ impair. Considérons les parties quadratiques d_2 et $\overline{d}_2$ des différentielles d et $\overline{d}$. Ecrivons pour tout Ψ de ΛY:

$$d_2(1 \otimes \Psi) = 1 \otimes \overline{d}_2(\Psi) + y \otimes \xi(\Psi).$$

Ceci définit une application ξ : $(\Lambda Y, \overline{d}_2) \to (\Lambda Y, \overline{d}_2)$ qui respecte la longueur des mots. Puisque d_2 et $\overline{d}_2$ sont des différentielles, il est facile de vérifier que ξ est une dérivation, de degré $1 - |y|$, appelée <u>dérivation associée à la KS-extension (1)</u>.

Décomposons maintenant Y sous la forme $Y = \mathrm{Im}(\xi_{|_Y}) \oplus S$. On dit que la dérivation ξ est fortement localement finie si l'espace vectoriel S et les espaces vectoriels $\xi^k(S)$ pour $k \geq 1$ engendrent Y. Il est alors clair que toute dérivation ξ associée à une KS-extension (1) qui est nilpotente, i.e. telle que $\xi^n = 0$ pour un entier n suffisamment grand, est alors fortement localement finie. C'est le cas en particulier si $\dim Y < \infty$.

III] Deux lemmes préliminaires.

Soit $(\Lambda(V \oplus W), d)$ un KS-modèle bigradué et c une constante entière ≥ 1. On suppose que:

1) $\dim H_*(\Lambda(V \oplus W), d) < \infty$,

2) $V = V_{\leq k}$ et $W = W_{\geq k+c}$,

3) $H_i(\Lambda(V \oplus W), d) = 0$ pour $i \geq c-1$.

Notons $(\Lambda V, d)$ le sous-modèle de $(\Lambda(V \oplus W), d)$, $(\Lambda W, \overline{d})$ le modèle quotient et $(v_1, \ \ldots \ , v_r)$ une base (finie) bien ordonnée de V.

On suppose de plus qu'il existe un morphisme ν non trivial:

$$\nu \ : \ (\Lambda V, d) \longrightarrow (\Lambda b, 0).$$

On pose $||b|| = 0$.

LEMME 1. *Considérons la somme amalgamée suivante:*

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda V, d) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "i"'] & (\Lambda b, 0) \arrow[d, "j"] \\
(\Lambda(V \oplus W), d) \arrow[r, "\tau"] & (\Lambda W \otimes \Lambda b, D).
\end{tikzcd}$$

Il existe alors une dérivation θ:

$$\theta \ : \ (\Lambda W \otimes \Lambda b, D) \longrightarrow (\Lambda W \otimes \Lambda b, D),$$

telle que $\theta(b) = 1$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 1:

Soit $\xi \ : \ (\Lambda b, 0) \rightarrow (\Lambda b, 0)$ la dérivation définie par $\xi(b) = 1$. Supposons avoir défini une application linéaire ξ' de degré -$|b|$:

$$\xi' \ : \ (\Lambda(V \oplus W), d) \longrightarrow (\Lambda W \otimes \Lambda b, D),$$

vérifiant:

a) $\xi' \circ i = j \circ \xi \circ \nu$.

b) $\xi' d - (-1)^{|b|} D\xi' = 0$.

c) Pour tout couple d'éléments α et β de $\Lambda(V \oplus W)$,

$$\xi'(\alpha.\beta) = \xi'(\alpha).\tau(\beta) + (-1)^{|\alpha||b|}\tau(\alpha).\xi'(\beta).$$

Soit alors l'application linéaire θ de degré -$|b|$:

$$\theta \ : \ (\Lambda(V \oplus W), d) \underset{(\Lambda V, d)}{\otimes} (\Lambda b, 0) \cong (\Lambda W \otimes \Lambda b, D) \longrightarrow (\Lambda W \otimes \Lambda b, D),$$

définie par: $\theta(\alpha \otimes b^n) = \xi'(\alpha).b^n + (-1)^{|\alpha||b|}\tau(\alpha).\xi(b^n)$, pour tout α de $\Lambda(V \oplus W)$.

Soit β dans ΛV. On a alors les égalités suivantes:

$$\begin{aligned}
\theta(\alpha.\beta \otimes b^n) &= \xi'(\alpha).\tau(\beta).b^n + (-1)^{|\alpha||b|}\tau(\alpha).\xi'(\beta).b^n \\
&\quad + (-1)^{(|\alpha|+|\beta|)|b|}\tau(\alpha).\tau(\beta).\xi(b^n). \\
\theta(\alpha \otimes \nu(\beta).b^n) &= \xi'(\alpha).\nu(\beta).b^n + (-1)^{|\alpha||b|}\tau(\alpha).\xi(\nu(\beta).b^n) \\
&= \xi'(\alpha).\nu(\beta).b^n + (-1)^{|\alpha||b|}\tau(\alpha).(\xi'(\beta).b^n + (-1)^{|\beta||b|}\nu(\beta).\xi(b^n)),
\end{aligned}$$

car par hypothèse $\xi'(\beta) = \xi \circ (\beta)$. Mais, la commutation du diagramme de somme amalgamée entraîne que $\tau(\beta) = \nu(\beta)$, par suite $\theta(\alpha.\beta \otimes b^n) = \theta(\alpha \otimes \nu(\beta).b^n)$ et donc θ est bien définie.

Un simple calcul utilisant l'hypothèse b) nous montre que:

$$\theta(d(\alpha) \otimes b^n) - (-1)^{|b|}D\theta(\alpha \otimes b^n) = 0.$$

De plus, on vérifie facilement que si α et β sont dans ΛW alors:

$$\theta(\alpha \otimes b^n.\beta \otimes b^m) = \theta(\alpha \otimes b^n).\beta.b^m + (-1)^{|b|(|\alpha|+|b^n|)}\alpha.b^n.\theta(\beta \otimes b^m).$$

Par suite θ est bien une dérivation, de degré -$|b|$. De plus, on a $\theta(b) = 1$ et donc θ est la dérivation cherchée. Il nous reste maintenant à construire ξ'.

Soit $\overline{V} = \oplus \overline{V}^j$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué défini par $\overline{V}^j = V_i^{j+|b|}$. A chaque générateur v de V correspond un générateur noté $\overline{v}$ de $\overline{V}$.

On construit tout d'abord une différentielle $\overline{d}$ et une application linéaire η de bidegré $(-|b|,\ 0)$:

$$\eta \ : \ (\Lambda(V \oplus W), d) \to (\Lambda(V \oplus W) \otimes \overline{V}, \overline{d}),$$

telle que $\eta \circ d - (-1)^{|b|}\overline{d} \circ \eta = 0$.

Pour cela, on remarque que $\Lambda(V \oplus W) \otimes \overline{V}$ est un $\Lambda(V \oplus W)$-bimodule pour les multiplications (notées toutes deux $\star$) données par:

$$(\psi \otimes \overline{v}) \star \phi = (-1)^{|\overline{v}||\phi|}\psi.\phi \otimes \overline{v} \quad \text{et} \quad \phi \star (\psi \otimes \overline{v}) = \phi.\psi \otimes \overline{v}.$$

Posons alors pour tout v de V, $\eta(v) = 1 \otimes \overline{v}$, et prolongeons η sur ΛV par la formule suivante:

$$(2): \quad \eta(\alpha.\beta) = \eta(\alpha) \star \beta + (-1)^{|\eta||\alpha|}\alpha \star \eta(\beta).$$

Nous posons maintenant, pour tout $\overline{v}$ de $\overline{V}$, $\overline{d}(1 \otimes \overline{v}) = (-1)^{|\eta|}\eta(d(v))$ et $\overline{d}_{|_{\Lambda(V\oplus W)\otimes 1}} = d$.

On prolonge $\overline{d}$ sur $\Lambda(V \oplus W) \otimes \overline{V}$ par la formule suivante:

$$\overline{d}(\alpha \otimes \overline{v}) = d(\alpha) \otimes \overline{v} + (-1)^{|\alpha|}\alpha \star \overline{d}(\overline{v}).$$

Il est alors clair que $(\Lambda(V \oplus W) \otimes \overline{V}, \overline{d})$ est un $(\Lambda(V \oplus W), d)$-bimodule différentiel.

Puisque par construction $\eta \circ d - (-1)^{|\eta|}\overline{d} \circ \eta$ est nul sur V, un simple calcul montre alors que $\eta \circ d - (-1)^{|\eta|}\overline{d} \circ \eta$ est nul sur ΛV, et par conséquent que $(\overline{d})^2(1 \otimes \overline{v}) = (-1)^{|\eta|}\overline{d} \circ \eta(d(v)) = 0$. Donc $\overline{d}$ est bien une différentielle.

Nous savons par hypothèse que $H_{\geq c-1}(\Lambda(V \oplus W), d) = 0$ et que $\overline{V} = \overline{V}_{\leq k}$. On peut filtrer le module $(\Lambda(V \oplus W) \otimes \overline{V}, \overline{d})$ par les sous-modules différentiels $(\Lambda(V \oplus W) \otimes (\overline{v}_1, \ \dots \ , \overline{v}_i), \overline{d})$. Un argument immédiat de suite spectrale nous assure alors que $H_{\geq c+k-1}(\Lambda(V \oplus W) \otimes \overline{V}, \overline{d}) = 0$.

Cette égalité nous permet maintenant de déterminer η sur W de telle sorte que $(\eta \circ d - (-1)^{|\eta|}\overline{d} \circ \eta)(w)$ soit nul pour tout w de W. On raisonne par récurrence sur le degré inférieur de w.

Soit η définie sur $W_{\leq j-1}$ pour un $j \geq k + c$, on prolonge η sur $\Lambda V \otimes \Lambda(W_{\leq j-1})$ par la formule (2).

Soit alors w_j dans W_j. On a $(\eta \circ d - (-1)^{|\eta|}\overline{d} \circ \eta)(d(w_j)) = 0$, et donc $\eta \circ d(w_j)$ est un $\overline{d}$-cycle. Mais $||d(w_j)|| = ||\eta \circ d(w_j)|| = j - 1 \geq c + k - 1$. On en conclut que $\eta \circ d(w_j)$ est un $\overline{d}$-bord.

Si $\eta \circ d(w_j) = \overline{d}(\alpha)$, on pose $\eta(w_j) = (-1)^{|\eta|}\alpha$. Ceci nous défini η tel que $\eta \circ d - (-1)^{|\eta|}\overline{d} \circ \eta$ soit nul sur $W_{\leq j}$. La formule d'extension (2) nous assure que $\eta \circ d - (-1)^{|\eta|}\overline{d} \circ \eta$ est nul sur $\Lambda(V \oplus W_{\leq j})$. De plus η est bien de bidegré $(-|b|, \ 0)$.

Soit maintenant π l'application linéaire de degré 0

$$\pi \ : \ (\Lambda(V \oplus W) \otimes \overline{V}, \overline{d}) \longrightarrow (\Lambda W \otimes \Lambda b, D),$$

définie par $\pi(\alpha \otimes \overline{v}) = \tau(\alpha).\xi \circ \nu(v)$ pour tout α de $\Lambda(V \oplus W)$ et tout $\overline{v}$ de $\overline{V}$.

Posons $\xi' = \pi \circ \eta$. Il est facile de vérifier que $\xi' \circ i = j \circ \xi \circ \nu$ (propriété a). En effet, par définition cette égalité est vraie sur V. Par la formule d'extension (2), elle est alors vraie sur ΛV.

De plus, on a bien:

$$\begin{aligned} \pi \circ \eta(\alpha.\beta) &= \pi(\eta(\alpha) \star \beta + (-1)^{|b||\alpha|}\alpha \star \eta(\beta)), \\ &= \pi \circ \eta(\alpha).\tau(\beta) + (-1)^{|b||\alpha|}\tau(\alpha).\pi \circ \eta(\beta), \end{aligned}$$

donc la propriété c) est bien vérifiée.

Un simple calcul utilisant le fait que $D \circ \xi = 0$ nous montre maintenant que $\pi \circ \overline{d} = D \circ \pi$. L'égalité $\eta \circ d - (-1)^{|b|}\overline{d} \circ \eta = 0$ nous permet alors de prouver la propriété b).

LEMME 2. *On note toujours $(v_1, \ \dots \ , v_r)$ une base bien ordonnée de V. Pour tout $i \leq r+1$, considérons le modèle quotient:*

$$(\Lambda X(i), \overline{d}(i)) = (\Lambda(v_i, \ \dots \ , v_r) \otimes \Lambda W, \overline{d}(i)).$$

On suppose que $|v_i|$ est impair. Soit la KS-extension suivante:

$$(3) \qquad (\Lambda v_i, 0) \to (\Lambda X(i), \overline{d}(i)) \twoheadrightarrow (\Lambda X(i+1), \overline{d}(i+1)).$$

Alors la dérivation associée à cette KS-extension est nilpotente. (voir la partie II] du texte pour la définition).

DÉMONSTRATION DU LEMME 2:

Puisque le degré de v_i est impair, on peut définir un homomorphisme d'algèbres différentielles $\rho \ : \ (\Lambda V, d) \to (\Lambda v_i, 0)$ en posant $\rho(v_i) = v_i$ et $\rho = 0$ sur les autres générateurs de V. Considérons alors les sommes amalgamées suivantes:

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda V, d) & \xrightarrow{\rho} & (\Lambda v_i, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\Lambda(V \oplus W), d) & \xrightarrow{\tau} & (\Lambda v_i \otimes W, D), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda(v_i, \ \dots \ , v_r), \overline{d}) & \xrightarrow{\overline{\rho}} & (\Lambda v_i, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\Lambda(v_i, \ \dots \ , v_r) \otimes \Lambda W, \overline{d}(i)) & \xrightarrow{\overline{\tau}} & (\Lambda v_i \otimes \Lambda W, D'). \end{array}$$

D'après la définition d'une somme amalgamée, on a clairement $D' = D$.

Nous savons de plus par le lemme 1 et par ([7] lemme 1.1) que $(\Lambda v_i \otimes \Lambda W, D) \cong (\Lambda v_i, 0) \otimes (\Lambda W, \overline{d})$.

Notons $\xi \ : \ (\Lambda X(i+1), \overline{d}_2(i+1)) \to (\Lambda X(i+1), \overline{d}_2(i+1))$ la dérivation associée à la KS-extension (3). Nous allons montrer que:

$$\xi(X(i+1)) \subset \bigoplus_{j \geq i+1} \mathbb{Q}.v_j.$$

Alors, puisque ξ baisse strictement le deuxième degré, on en déduira que ξ est bien nilpotente.

Soit x dans $X(i+1)$. Si $|x| \leq k$, alors $\xi(x)$ ne peut avoir de composante dans W, puisqu'on aurait sinon $|v_i.\xi(x)| \geq k+2$.

Soit maintenant w dans W alors:

$$\overline{d}_2(i)(w) = \overline{d}_2(i+1)(w) + v_i.\xi(w).$$

Ecrivons $\xi(w) = \alpha + \beta$ avec $\alpha \in \bigoplus_{j \geq i+1} \mathbb{Q}.v_j$ et $\beta \in W$.

Par commutation, $\overline{\tau}(\overline{d}_2(i)(w)) = D'_2\overline{\tau}(w) = \overline{d}_2(w) \in W$. De plus:

$$\begin{aligned} \overline{\tau}(\overline{d}_2(i)(w)) &= \overline{\tau}(\overline{d}_2(i+1)(w)) + \overline{\tau}(v_i.\xi(w)) \\ &= \overline{\tau}(\overline{d}_2(i+1)(w)) + v_i.\beta. \end{aligned}$$

Mais $\overline{d}_2(i+1)(w) \in \Lambda(v_{i+1}, \ \dots \ , v_r) \otimes \Lambda W$ et donc $\overline{\tau}(\overline{d}_2(i+1)(w)) \in \Lambda W$.

On en déduit que $v_i.\beta$ est nul et par suite que β est nul.

IV] Démonstration du théorème 2.

Le théorème 2 est obtenu comme corollaire du résultat suivant:

THÉORÈME 2-BIS. *Soit* $(\Lambda(V \oplus W), d)$ *un KS-modèle bigradué et* c *une constante entière* ≥ 1. *On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées:*

1) $\dim H_*(\Lambda(V \oplus W), d) < \infty$,

2) $V = V_{\leq k}$ *et* $W = W_{\geq k+c}$,

3) $H_i(\Lambda(V \oplus W), d) = 0$ *pour* $i \geq c-1$.

Alors W *est nul.*

Il est immédiat de constater que ceci prouve le théorème 2. En effet, si $c_*(X) > \eta_*(\Lambda X)+1$, alors $(\Lambda X, d) = (\Lambda(V \oplus W), d)$ avec $V = V_{\leq k}$ et $W = W_{\geq k+\eta_*(\Lambda X)+2} \neq 0$. Mais ceci est impossible puisque $H_i(\Lambda X, d) = 0$ pour tout $i \geq \eta_*(\Lambda X) + 1$.

Pour prouver le théorème 2-bis, nous allons montrer successivement les propositions suivantes:

a) $\dim H_*(\Lambda V, d) < \infty$,

b) $\dim H_*(\Lambda W, \overline{d}) < \infty$,

c) $\eta_*(\Lambda(V \oplus W)) = \eta_*(\Lambda V) + \eta_*(\Lambda W)$.

Supposons ce résultat acquis. Puisque $\eta_*(\Lambda(V \oplus W)) < c-1$ alors:

$$k + c > c - 1 > \eta_*(\Lambda V) + \eta_*(\Lambda W) \geq \eta_*(\Lambda W).$$

Or $W = W_{\geq k+c}$ et donc W est nul.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2-BIS. *a):*

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos contenant $\mathbb{Q}$.

Supposons que la dimension de $H_*(\Lambda V, d)$ soit infinie. Alors la dimension de $H_*((\Lambda V, d) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{K})$ est infinie en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Puisque V est de dimension finie, d'après ([8] prop. 5.1), on en déduit l'existence d'un morphisme non trivial:

$$\rho \ : \ (\Lambda V, d) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{K} \to (\Lambda b, 0) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{K}, \quad |b| = 2.$$

Il est clair que le lemme 1 reste vrai lorsque le corps de base est une extension de $\mathbb{Q}$. On en déduit donc l'existence d'une dérivation:

$$\theta \ : \ (\Lambda W \otimes \Lambda b, D) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{K} \to \Lambda W \otimes \Lambda b, D) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{K},$$

telle que $\theta(b) = 1$.

Mais ceci entraîne ([7] lemme 1.1) qu'il existe un isomorphisme d'algèbres différentielles:

$$(\Lambda W \otimes \Lambda b, D) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{K} \cong (\Lambda W, \overline{d}) \otimes (\Lambda b, 0) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{K}.$$

On considère alors la composée:

$$(\Lambda(V \oplus W), d) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{K} \xrightarrow{r} (\Lambda W, \overline{d}) \otimes (\Lambda b, 0) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{K} \twoheadrightarrow (\Lambda b, 0) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{K}.$$

C'est clairement un morphisme non trivial puisque ρ est non trivial. D'après ([8] prop. 5.2), on en déduit que la dimension de $H_*((\Lambda(V \oplus W), d) \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{K})$ est infinie (en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel). Ceci est en contradiction avec l'hypothèse $\dim H_*(\Lambda(V \oplus W), d) < \infty$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2-BIS. *b) et c):*

On considère le modèle quotient:

$$(\Lambda X(i), \overline{d}(i)) = (\Lambda(v_i, \ \dots \ , v_r) \otimes \Lambda W, \overline{d}(i)).$$

On suppose que $\dim H_*(\Lambda X(i), \overline{d}(i)) < \infty$ (ceci est vrai pour $i = 1$). Nous allons prouver que:

- si $|v_i|$ est pair alors $\dim H_*(\Lambda X(i+1), \overline{d}(i+1)) < \infty$ et $\eta_*(\Lambda X(i+1)) = \eta_*(\Lambda X(i)) + ||v_i|| + 1$,

- si $|v_i|$ est impair alors $\dim H_*(\Lambda X(i+1), \overline{d}(i+1)) < \infty$ et $\eta_*(\Lambda X(i+1)) = \eta_*(\Lambda X(i)) - ||v_i||$.

Supposons ce résultat acquis.

Un raisonnement par induction nous montre que $\dim H_*(\Lambda X(r+1), \overline{d}(i+1)) < \infty$ ce qui prouve b). Puisque par a) $\dim H_*(\Lambda V, d) < \infty$, nous pouvons appliquer ce même résultat à $W = 0$. Mais $\eta_*(\Lambda X(i+1)) - \eta_*(\Lambda X(i))$ ne dépend pas de W ce qui montre c).

Premier cas: $|v_i|$ est pair.

On considère les complexes bigradués $(\Lambda X(i+1), \overline{d}(i+1))$ et $(\Lambda X(i) \otimes \Lambda y, \overline{d}(i))$ avec $\overline{d}(i)(y) = v_i$ et y de bidegré $(|v_i| - 1, \ ||v_i|| + 1)$. Ces complexes ont même homologie puisqu'ils ont des modèles minimaux isomorphes ([6]).

On filtre $\Lambda X(i) \otimes \Lambda y$ par la filtration décroissante dont le $j^{\text{ième}}$ terme est $F^j = (\Lambda X(i))^{\geq j} \otimes \Lambda y$. Alors la différentielle augmente le degré filtrant. Ceci nous donne donc une suite spectrale (E) qui converge (puisque de premier quadrant) vers $H^*(\Lambda X(i+1), \overline{d}(i+1))$. Un calcul simple nous montre alors que $E_2^{p,q} = (H^p(\Lambda(X(i), \overline{d}(i)) \otimes \Lambda y)^{p+q}$.

Puisque par hypothèse $\dim H^*(\Lambda X(i), d) < \infty$, alors $\dim H^*(\Lambda X(i+1), d) < \infty$ car $|y|$ est impair.

Soit une classe $[h]$ de deuxième degré maximum dans $H^*(\Lambda X(i), \overline{d}(i))$. Alors $h.v_i$ est un $\overline{d}(i)$-cobord dans $\Lambda X(i)$. On en déduit que $[h].y$ reste un cycle à tous les étages de la suite spectrale (argument de "coin"). Ceci prouve le résultat souhaité.

REMARQUE:

On voit ici pourquoi les techniques utilisées ne suffisent pas à montrer la conjecture 1 en toute généralité. En effet, l'hypothèse "$\dim H_*(\Lambda X(i), d) < \infty$" faite ci-dessus ne peut pas être affaiblie par l'hypothèse "$\eta_*(\Lambda X(i))$ est défini". Par exemple si $\Lambda X(i) = \Lambda x$ avec $|x| = 2$ et $||x|| = 0$, le résultat ci-dessus est faux.

<u>Deuxième cas:</u> $|v_i|$ est impair.

On considère la KS-extension suivante:

$$(\Lambda v_i, 0) \to (\Lambda X(i), \overline{d}(i)) \twoheadrightarrow (\Lambda X(i+1), \overline{d}(i+1)).$$

D'après le lemme 2, nous savons que la dérivation associée à cette KS-extension est nilpotente.

Puisque par hypothèse $\dim H^*(\Lambda X(i), \overline{d}(i)) < \infty$, on en déduit ([8] prop. 4.2) que $\dim H^*(\Lambda X(i+1), \overline{d}(i+1)) < \infty$.

Si maintenant nous filtrons $\Lambda X(i) = \Lambda v_i \otimes \Lambda X(i+1)$ par la filtration croissante de $j^{\text{ième}}$ terme $F^j = \Lambda v_i \otimes (\Lambda X(i+1))_{\leq j}$, nous obtenons une suite spectrale (E) convergeant (puisque de premier cadrant) vers $H_*(\Lambda X(i), \overline{d}(i))$. Un simple calcul nous montre que $E^2_{p,q} = (\Lambda v_i \otimes H_p(\Lambda X(i+1), \overline{d}(i+1)))_{p+q}$.

Il est alors clair que si h désigne une classe de degré maximum dans $H_*(\Lambda Y, \overline{d})$, $y \otimes h$ reste un cycle à tous les étages de la suite spectrale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **L. Avramov**, *Free lie subalgebras of the cohomology of local rings*, Trans. of the A.M.S. 270 (1982), 598-608.

[2] **L. Avramov, S. Halperin**, *Through the looking glass: A dictionary between rational homotopy theory and local algebra*, Lectures Notes in Math. (Springer Verlag) 1183 (1986), 3-27.

[3] **Y. Félix, S. Halperin**, *Rational L.S. Category and its applications*, Trans. of the A.M.S. 273 (1982), 1-37.

[4] **Y. Félix, J.C. Thomas**, *The radius of convergence of Poincaré series of loop spaces*, Invent. Math. 68 (1982), 257-274.

[5] **T.H. Gulliksen, G. Levin**, *Homology of local rings*, Queen's paper in Pure and Appl. Math. 20 (1969).

[6] **S. Halperin**, *Lectures on minimal models*, Mémoires S.M.F. nouvelle série 9-10 (1983).

[7] **S. Halperin**, *Torsion gaps in the homotopy of finite complexes*, Topology 27 No. 3 (1988), 367-375.

[8] **S. Halperin**, *Torsion gaps in the homotopy of finite complexes II*, Preprint.

[9] **S. Halperin**, *The non-vanishing of the deviations of a local ring*, Comment. Math. Helvetici 62 (1987), 646-653.

[10] **S. Halperin, J.d. Stasheff**, *Obstructions to homotopy equivalences*, Advances in Math. 32 (1979), 233-279.

[11] **D. Sullivan**, *Infinitesimal computation in topology*, Publ I.H.E.S. 47 (1977), 269-331.

Université des Sciences et Techniques de Lille-Flandres-Artois.
U.R.A. au CNRS D751
59655 Villeneuve d'Ascq. France.

Résumé

Nous nous intéressons dans ce travail à deux problèmes d'homotopie rationnelle, liés à la théorie de la formalité.

1) Nous prouvons que toute application entre espaces formels est la composée de deux applications formalisables.

2) Soit H une algèbre connexe de dimension finie sur $\mathbf{Q}$. Nous montrons que si une déviation de H est nulle, alors H est une intersection complète.

Mots clés : Homotopie rationnelle, formalité, déviations.