

50376  
1991  
110

66781

50376  
1991  
110

# THESE

N° d'ordre 747

présentée à

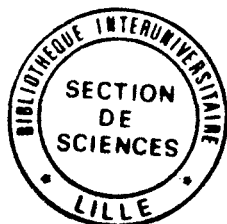
L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR EN ELECTRONIQUE**

par

**BENLAMLIH Omar**



**INFLUENCE DE LA TOPOGRAPHIE LOCALE DU SOL ET DE SES  
CARACTERISTIQUES ELECTRIQUES SUR LA PROPAGATION DES  
ONDES ELECTROMAGNETIQUES BASSES FREQUENCES**

soutenue le 01 Juillet 1991 devant la Commission d'Examen

Membres du jury : MM. R. GABILLARD  
J. FONTAINE  
P. DEGAUQUE  
A. ZEDDAM

Président, Rapporteur  
Rapporteur  
Directeur de thèse  
Examineur

# S O M M A I R E

## INTRODUCTION

### CHAPITRE I : ANOMALIE BIDIMENSIONNELLE ENTERREE ET ECLAIREE PAR UNE LIGNE SOURCE

#### I) INTRODUCTION

#### II) POSITION DU PROBLEME ET MISE EN EQUATION

II.1) Description du problème

II.2) Formulation du problème

II.3) Application de la formulation à notre modèle -  
formulation de l'équation intégrale

II.3.1) Expression du champ électrique reçu  
sous la forme de la solution d'une  
équation de Fredholm

II.3.2) Application à notre modèle

#### III) RESOLUTION DE L'EQUATION INTEGRALE

III.1) Méthode de résolution

III.2) Transformation du système intégrale en système  
linéaire

III.3) Optimisation du calcul de la matrice

#### IV) CALCUL DES COMPOSANTES DU CHAMP ELECTRIQUE A L'EXTERIEUR DE L'ANOMALIE

IV.1) Champ électrique

IV.2) Champ magnétique

#### V) VALIDATION DU MODELE

## **VI) ETUDE PARAMETRIQUE**

- VI.1) Influence de la conductivité
- VI.2) Influence de la profondeur de l'anomalie
- VI.3) Influence de la largeur de la vallée

## **VII) CONCLUSION**

# **CHAPITRE II : ANOMALIE BIDIMENSIONNELLE ECLAIREE PAR UNE LIGNE DE DIPOLES - INFLUENCE D'UN OBSTACLE**

## **I) INTRODUCTION**

## **II) DESCRIPTION DU PROBLEME**

## **III) EXPRESSION DES COMPOSANTES DU POTENTIEL DE HERTZ**

- III.1) Expression générale
- III.2) Expression des composantes du potentiel de Hertz dans les milieux 1 et 0
- III.3) Conditions aux limites et calcul des fonctions inconnues

## **IV) EXPRESSION DU CHAMP ELECTRIQUE**

- IV.1) Champ à l'extérieur de l'anomalie
- IV.2) Champ à l'intérieur de l'anomalie

## **V) RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS INTEGRALES**

- V.1) Méthode de résolution
- V.2) Discrétisation des équations de Fredholm
- V.3) Mise sous forme matricielle du système
- V.4) Optimisation du calcul de la matrice

## **VI) ETUDE PARAMETRIQUE**

- VI.1) Influence de la distance sol-anomalie
- VI.2) Influence de la hauteur de l'anomalie
- VI.3) Influence de la largeur de l'anomalie
- VI.4) Influence de la conductivité de l'anomalie

## **VII) CONCLUSION**

### **CHAPITRE III : ANOMALIE BIDIMENSIONNELLE ECLAIREE PAR UNE LIGNE DE DIPOLES - INFLUENCE D'UNE VALLEE**

#### **I) INTRODUCTION**

#### **II) POTENTIEL DE HERTZ**

- II.1) Expression générale
- II.2) Approximation : solution quasi-statique

#### **III) CHAMP ELECTRIQUE**

- III.1) Champ électrique à l'extérieur de l'anomalie
- III.2) Champ électrique à l'intérieur de l'anomalie

#### **IV) RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS INTEGRALES**

- IV.1) Discrétisation des équations de Fredholm
- IV.2) Mise en équation sous forme matricielle
- IV.3) Optimisation du calcul de la matrice

#### **V) RESULTATS NUMERIQUES**

#### **VI) CONCLUSION**

## **CHAPITRE IV : METHODE DES DIFFERENCES FINIES**

### **I) INTRODUCTION**

### **II) EQUATIONS DE BASE DU PROBLEME**

II.1) Position du problème

II.2) Expression des équations fondamentales

### **III) METHODE DE RESOLUTION**

III.1) Principe de la résolution

III.2) Rappel sur la méthode aux différences finies

### **IV) LIMITATION ARTIFICIELLE DU DOMAINE**

IV.1) Modèle de Neumann

IV.2) Modèle de Dirichlet

### **V) DERIVATION DES EQUATIONS DE DIFFERENCES FINIES**

V.1) Discrétisation du domaine

V.2) Dérivation de la fonction puissance

### **VI) SYSTEME D'EQUATIONS NODALES LINEAIRES**

VI.1) Mise sous forme matricielle

VI.1.a) Modèle de Dirichlet

VI.1.b) Modèle de Neumann

VI.2) Méthode de résolution

### **VII) CONCLUSION**

**CHAPITRE V : RESULTATS NUMERIQUES CONCERNANT L'INFLUENCE D'UNE ANOMALIE  
BIDIMENSIONNELLE ECLAIREE PAR UNE ONDE PLANE -  
METHODE AUX DIFFERENCES FINIES**

**I) INTRODUCTION**

**II) VALIDITE DU MODELE**

**III) CRITERE DE DECOUPAGE**

III.1) Découpage optimal

III.1.a) Dans la direction OX

III.1.b) Dans la direction OZ

III.2) Taille du domaine

**IV) APPLICATIONS**

IV.1) Coefficient de réflexion

IV.2) Comparaison entre équations intégrales et  
différences finies

IV.2.a) Influence de la conductivité

IV.2.b) Influence de l'angle d'incidence

IV.3) Etude du champ au voisinage ou dans une  
anomalie de conductivité

IV.3.a) Influence de la conductivité

IV.3.b) Influence de la largeur

IV.4) Etude de la vallée

IV.4.a) Vallée à section droite rectangulaire

IV.4.b) Comparaison entre anomalie à section  
droite rectangulaire et anomalie  
"réelle"

IV.4.c) Etude du champ dans une vallée "réelle"

IV.5) Etude de la colline

IV.5.a) Comparaison entre colline "réelle" et  
colline à section droite rectangulaire

IV.5.b) Colline "réelle"

**V) CONCLUSION**

**CONCLUSION GENERALE**

## I N T R O D U C T I O N

L'étude de la propagation des ondes basses fréquences (de l'ordre ou inférieure à 100 kHz) au voisinage de la surface du sol et notamment l'influence de la topographie du terrain sur l'amplitude et la phase de l'onde de sol, a fait l'objet de nombreuses études. La plupart d'entre elles sont basées sur le concept de l'impédance de surface, valable pour des anomalies ayant des rayons de courbures grands par rapport à la longueur d'onde [1]. Elles permettent de prédire le comportement moyen du champ sur des distances importantes, mais ne peuvent rendre compte d'effets locaux au voisinage immédiat d'une anomalie dont les dimensions sont petites vis-à-vis de la longueur d'onde. Un développement complet en onde a été proposé par BAHAR [2] mais n'est pas de mise en oeuvre facile pour résoudre le problème envisagé.

Dans ce travail, nous présentons deux méthodes de calcul basées soit sur un formalisme d'équations intégrales, soit sur une méthode classique aux différences finies.

Dans le premier chapitre nous étudierons le cas d'une anomalie enterrée à une distance  $D$  de la surface du sol, et éclairée par une ligne source, la distance  $D$  pouvant être nulle afin d'essayer de simuler une vallée. Dans le deuxième chapitre nous ferons l'étude de l'influence d'un obstacle situé au-dessus du sol, tel qu'une forêt, sur l'amplitude du champ électromagnétique.

Nous nous intéresserons ensuite à l'étude d'une vallée dans le troisième chapitre. Le quatrième chapitre sera consacré à l'approche théorique servant de base pour réaliser un modèle en différences finies. Il sera suivi d'un cinquième chapitre rassemblant les résultats obtenus par ce modèle.

## CHAPITRE I

### ANOMALIE BIDIMENSIONNELLE ENTERREE ECLAIREE PAR UNE LIGNE-SOURCE

#### I) INTRODUCTION

Les modèles numériques à deux dimensions qui seront décrits dans ce chapitre et les deux suivants, sont basés sur le même formalisme mathématique mettant en jeu des équations intégrales de Fredholm.

Nous présenterons tout d'abord l'approche théorique qui a servi de base pour réaliser cette étude. Nous décrirons ensuite certains résultats numériques obtenus par notre modèle et nous donnerons également une comparaison entre ce dernier et les résultats trouvés dans la littérature.

La configuration géométrique envisagée est celle d'une anomalie de conductivité  $\sigma$  située dans le sol, et dont la partie supérieure se situe à une hauteur  $D$  au-dessous de la surface du sol. Si  $D \rightarrow 0$  cela correspond géométriquement à une vallée, mais il faut bien noter que la continuité des courants sur l'interface n'est pas prise en compte explicitement. Le seul critère de validité des résultats sera donc associé à la convergence numérique en changeant le découpage de l'anomalie.



## II) POSITION DU PROBLEME ET MISE EN EQUATION

### II.1) Description du problème

On considère un demi-milieu homogène et infini de conductivité  $\sigma$ , renfermant une anomalie de conductivité  $\sigma_2$  dont l'une des dimensions est infinie dans la direction  $y$ ' $y$  et qui représente donc une section droite  $S'$ .

Ce demi-milieu conducteur homogène est surmonté d'un demi-milieu infini et isolant simulant l'air.

Le champ électromagnétique est créé par un fil de longueur infinie parcouru par un courant  $I$ . Ce fil que l'on appellera ligne-source est placé à la surface du sol le long de l'axe  $oy$  et crée en tout point de l'espace deux composantes  $H_x$  et  $H_z$  de champ magnétique et une seule composante  $E_y$  pour le champ électrique.

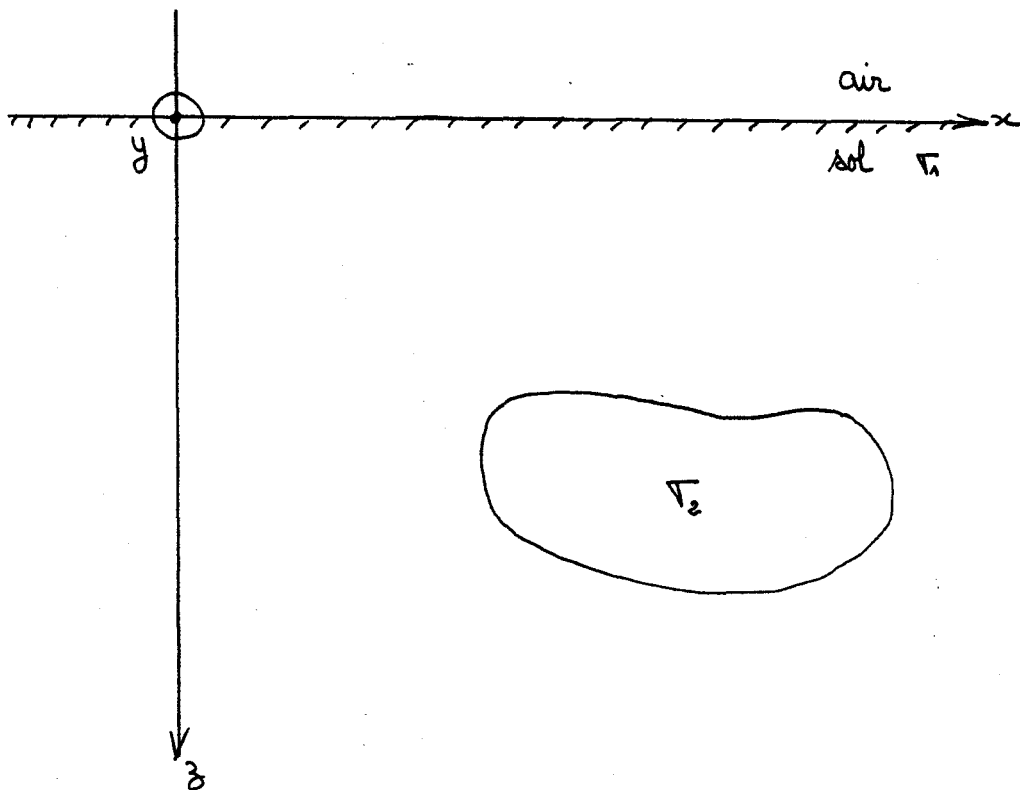


Figure I-1

## II.2) Formulation du problème |3|

Nous supposons que les variations dans le temps de tous les vecteurs électromagnétiques se font sinusoidalement et à la même fréquence que le courant  $I$  et sont représentées par la fonction du temps  $e^{j\omega t}$ . Les équations de Maxwell (utilisant le système d'unités MKS) peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$-\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \hat{Z}(\omega) \cdot \vec{H} + \vec{M}_i \quad (I-1)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \hat{Y}(\omega) \cdot \vec{E} + \vec{J}_i \quad (I-2)$$

avec

$$\hat{Z}(\omega) = j\omega\mu \quad (I-3)$$

$$\hat{Y}(\omega) = \sigma + j\omega\epsilon$$

où  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  sont respectivement la constante diélectrique, la perméabilité magnétique et la conductivité du milieu.

Le paramètre  $\hat{Z}$  ayant les dimensions de l'impédance linéique sera appelé l'impéditivité du milieu, tandis que  $\hat{Y}$  ayant les dimensions de l'admittance linéique sera l'admittivité du milieu |4|. Dans les formules (I-1) et (I-2),  $\hat{Z}(\omega) \cdot \vec{H}$  et  $\hat{Y}(\omega) \cdot \vec{E}$  sont respectivement les courants magnétiques et électriques induits dans le milieu par les champs électromagnétiques.

$\hat{Z}(\omega)$  et  $\hat{Y}(\omega)$  définissent parfaitement les caractéristiques électromagnétiques du milieu. Si  $\hat{Z}$  et  $\hat{Y}$  sont indépendants de  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ , le milieu est dit linéaire. Il est homogène si  $\hat{Z}$  et  $\hat{Y}$  ne dépendent pas de la position, et il sera isotrope si  $\hat{Z}$  et  $\hat{Y}$  sont indépendants de la direction.

$\vec{M}_i$  et  $\vec{J}_i$  représentent respectivement les courants d'excitation magnétiques et électriques produits par les sources émettrices du champ électromagnétique.

Les équations (I-1) et (I-2) nous permettent de déterminer les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  complexes en tout point de l'espace.

Considérons le cas où les régions sont quasi-homogènes, c'est-à-dire ne contenant que quelques anomalies de résistivité localisées. Harrington [4] a démontré qu'il était possible d'obtenir la solution générale des équations de Maxwell relatives à la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu quasi-homogène sous forme d'équations intégrales. Il a montré en particulier qu'on pourrait remplacer les hétérogénéités considérées par une distribution équivalente de courant.

En effet, écrivons les équations (1) et (2) sous la forme suivante :

$$-\nabla \wedge \vec{E} = \hat{z}_{mil} \cdot \vec{H} + \vec{M} \quad (I-4)$$

$$\nabla \wedge \vec{H} = \hat{y}_{mil} \cdot \vec{E} + \vec{J} \quad (I-5)$$

où les courants "effectifs" seront :

$$\vec{M} = (\hat{z} - \hat{z}_{mil}) \cdot \vec{H} + \vec{M}_i \quad (I-6)$$

$$\vec{J} = (\hat{y} - \hat{y}_{mil}) \cdot \vec{E} + \vec{J}_i \quad (I-7)$$

$\hat{z}_{mil}$  et  $\hat{y}_{mil}$  sont les constantes du milieu sans anomalie de conductivité. Les courants "effectifs" sont donc composés en deux parties :

\* les courants d'excitation  $\vec{M}_i$  et  $\vec{J}_i$

\*\* les courants de diffraction magnétique et électrique

$\vec{M}_D$  et  $\vec{J}_D$  donnés par les relations suivantes :

$$\vec{M}_D = (\hat{z} - \hat{z}_{mil}) \cdot \vec{H} \quad (I-8)$$

$$\vec{J}_D = (\hat{y} - \hat{y}_{mil}) \cdot \vec{E} \quad (I-9)$$

Il est clair que  $\vec{M}_D$  et  $\vec{J}_D$  n'existent qu'aux endroits où  $\hat{z}$  et  $\hat{y}$  sont différents de  $\hat{z}_{mil}$  et  $\hat{y}_{mil}$ , c'est-à-dire à l'intérieur des hétérogénéités. Nous sommes donc amenés à remplacer les hétérogénéités par des courants de diffraction et ensuite à traiter les courants effectifs  $\vec{M}$  et  $\vec{J}$  comme des courants d'excitation dans un milieu homogène.

Les courants de diffraction  $\vec{M}_D$  et  $\vec{J}_D$ , donnés par les équations (I-8) et (I-9) sont eux-mêmes fonction des champs  $\vec{H}$  et  $\vec{E}$ .

Nous aurons donc en tout point de l'espace un champ électromagnétique qui sera fonction du champ à l'intérieur des hétérogénéités. Cette formulation du problème est générale et valable pour tout modèle pour n'importe quel type de source et n'importe quelle anomalie.

### II.3) Application de la formulation à notre modèle - formulation de l'équation intégrale

Comme nous l'avons vu, il faudra remplacer l'anomalie par une distribution d'éléments de courants. Ce procédé est bien connu et a déjà fait l'objet de plusieurs études, notamment par Caeterman [5] et Hohmann [6].

Nous nous contenterons donc de rappeler la méthode brièvement.

#### II.3.1) Expression du champ électrique reçu sous la forme de la solution d'une équation de Fredholm

Le système d'équations (I-4) et (I-5) peut s'écrire :

$$-\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \hat{z}_{mil} \cdot \vec{H} + \vec{M}_D + \vec{M}_i \quad (I-10)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \hat{y}_{mil} \cdot \vec{E} + \vec{J}_D + \vec{J}_i \quad (I-11)$$

où  $\vec{M}_D$  et  $\vec{J}_D$  sont donnés par les relations (I-8) et (I-9) que nous rappellerons :

$$\vec{M}_D = (\hat{z} - \hat{z}_{mil}) \cdot \vec{H} \quad (I-8)$$

$$\vec{J}_D = (\hat{y} - \hat{y}_{mil}) \cdot \vec{E} \quad (I-9)$$

$\hat{z}$  et  $\hat{y}$  sont des fonctions de position.

$\hat{z}_{mil}$  et  $\hat{y}_{mil}$  sont des constantes des milieux.

Dans le cas que nous envisageons il y a trois milieux, l'air, le sol et une seule anomalie de conductivité qui sont notés de façon générale :

$$\hat{Z}_n = j\omega\mu_0 \quad (I-12)$$

et 
$$\hat{Y}_n = \tau_n + j\omega\epsilon_n \quad (I-13)$$

Dans un modèle tel que le notre, il n'y a qu'une seule composante du champ électrique puisque la source et l'anomalie possèdent toutes deux une symétrie de translation suivant oy. Il est donc clair que dans ce modèle, les composantes du champ électromagnétique sont indépendantes de la coordonnée y, et le système est rendu bidimensionnel.

Compte tenu de ces hypothèses, nous obtenons en combinant (I-10) et (I-11), la relation suivante appelée l'équation de Helmholtz :

$$(\nabla^2 + k^2) E_y = j\omega\mu_0 [J_i \cdot \delta_1 + J_d \cdot \delta_2] \quad (I-14)$$

où  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont des fonctions de distribution qui valent respectivement 1 à l'intérieur de la ligne source et à l'intérieur de l'anomalie et qui sont nulles ailleurs et où :

$$k^2 = -\hat{Z}_{mil} \cdot \hat{Y}_{mil} \quad (I-15)$$

soit encore :

$$k_n^2 = (\omega^2 \epsilon_n \mu + j\omega\mu_0 \tau_n) \quad (I-16)$$

avec  $n=0,1$  ou 2 représentant l'indice du milieu considéré.

Posons 
$$E_y = E_y^i + E_y^d \quad (I-17)$$

où  $E_y^i$  est le champ électrique incident, dû à la densité de courant  $J_i$  de la source d'excitation

et  $E_y^d$  est le champ électrique diffracté, dû à la densité de courant  $J_d$  de la source de diffraction (anomalie).

Ces champs  $E_y^i$  et  $E_y^d$  satisfont donc d'après (I-14) les deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$(\nabla^2 + k^2) E_y^i = j \omega \mu_0 J_i \delta_1 \quad (I-18)$$

$$(\nabla^2 + k^2) E_y^d = j \omega \mu_0 J_0 \delta_2 \quad (I-19)$$

d'une manière générale, le champ électrique total à n'importe quel point de l'espace est donné par une combinaison linéaire des solutions (I-18) et (I-19), satisfaisant aux "conditions aux limites", à la surface du sol.

Le champ  $E_y^i$  de l'équation (I-18) est tout simplement celui dû à la ligne source placée dans un demi-milieu.

Examinons l'équation (I-19). Le courant de diffraction  $J_d$  donné par l'équation (I-9) n'existe qu'à l'intérieur de l'anomalie. La solution s'obtient donc d'une manière classique comme suit :

$$E_y^d(x, z) = \iint_{S'} J_0(x', z') G(x, z, x', z') dx' dz' \quad (I-20)$$

où  $G$  est la fonction de Green associée au champ électrique créé par une distribution de lignes sources de courant, placée à la position de l'anomalie et  $S'$  la section droite de l'anomalie.

En utilisant l'équation (I-17), on obtient le champ électrique en tout point de l'espace et particulièrement dans l'anomalie et qui s'écrit sous la forme :

$$E_y(x, z) = E_y^i(x, z) + \iint_{S'} (\hat{y}_s - \hat{y}_1) E_y(x', z') G(x, z, x', z') dx' dz' \quad (I-21)$$

Le champ électrique total en un point quelconque de l'espace s'exprime en fonction du champ électrique à l'intérieur de l'anomalie et du champ primaire.

Cette relation, valable en tout point de l'espace et particulièrement au sein de l'anomalie, permet de déterminer le champ électrique à l'intérieur de celle-ci. L'équation (I-21) se transforme alors en une équation intégrale de Fredholm du deuxième espèce avec le champ électrique comme inconnue.

Les solutions obtenues jusqu'à présent ont un caractère général.

II.3.2) Application à notre modèle

La solution de l'équation (I-18) est simplement le champ électrique émis par une ligne-source placée à la surface du sol qui est donné par |7| :

$$E_y^i(x, z) = \frac{-j\omega\mu_0 I}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\mu_1 z}}{\mu_0 + \mu_1} \cos \lambda x \, d\lambda \quad (I-22)$$

où  $\mu_0 = (\lambda^2 - k_0^2)^{1/2}$  (I-23)

$$\mu_1 = (\lambda^2 - k_1^2)^{1/2} \quad (I-24)$$

$k_0$  et  $k_1$  sont les constantes de propagation dans l'air et dans le sol explicitées dans l'équation (I-16).

Nous avons vu que l'anomalie va également être assimilée à un ensemble de lignes sources parallèles entre elles et à l'axe des y. Dans ce cas la fonction de Green  $G(x, z, x', z')$  associée au champ reçu en un point  $(x, z)$  lorsque la ligne est au point  $(x', z')$  est donnée par l'expression suivante |7| :

$$G(x, z, x', z') = \frac{-j\omega\mu_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} e^{-\mu_1(z+z')} + e^{-\mu_1|z-z'|} \right\} \frac{\cos \lambda(x-x')}{\mu_1} d\lambda \quad (I-25)$$

On remarque que l'on peut mettre  $G$  sous forme de la somme de deux fonctions de Green :

$$G_p = \frac{-j\omega\mu_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu_1|z-z'|}}{\mu_1} \cos \lambda(x-x') \, d\lambda \quad (I-26)$$

et  $G_s = \frac{-j\omega\mu_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu_1(z+z')}}{\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} \mu_1} \cos \lambda(x-x') \, d\lambda \quad (I-27)$

qui correspondent respectivement aux fonctions de Green associées à l'onde directe (milieu homogène et infini) et à l'onde secondaire (terme correctif pour tenir compte de la présence de l'interface air-sol).

Compte tenu de ces remarques, l'équation intégrale (I-21) se met sous la forme :

$$E_y(x, z) = E_y^i(x, z) + \iint_{S'} [(\sigma_2(x', z') - \sigma_1) + j\omega(\epsilon_2(x', z') - \epsilon_1)] \cdot E_y(x', z') G(x, z, x', z') dx' dz' \quad (I-28)$$

### III) RESOLUTION DE L'EQUATION INTEGRALE

#### III.1) Méthode de résolution

Le calcul du champ en tout point de l'espace implique tout d'abord que l'équation (I-28) que doit satisfaire le champ dans l'anomalie ait été résolue.

Plusieurs techniques numériques de résolution de telles équations existent dans la littérature et ont été décrites, notamment par Harrington (1968) |8|, Parry (1969) |9| et Dieter et al. (1969) |10|.

Nous avons choisi la méthode des moments avec la technique point segment. Les fonctions de base et de test sont respectivement des créneaux et des Diracs qui ont pour domaine de définition les éléments de surface  $dS'$  de l'anomalie |8|.

La technique consiste à diviser la surface  $S'$  de l'anomalie en  $N$  éléments de surface carrées de côté  $\Delta$  comme le montre la figure ci-après :



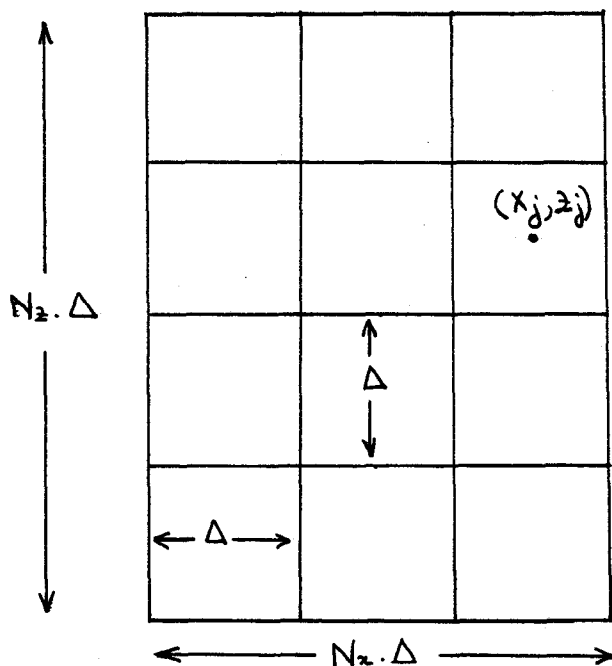


Figure I-2

Afin de simplifier la mise en oeuvre numérique et surtout de diminuer le temps de calcul la section droite de l'anomalie a été supposée rectangulaire, ce qui permettra d'utiliser de nombreuses propriétés de symétrie.

L'anomalie est donc divisée en  $N_x$  éléments suivant l'axe OX, et en  $N_z$  éléments suivant l'axe OZ.

Chaque maille est identifiée par les coordonnées de son centre  $M_j(X_j, Z_j)$ . De plus, les dimensions des mailles sont telles que l'on puisse supposer que le champ est constant dans chacune d'elles. Chaque maille joue alors le rôle d'une ligne de dipôles qui rayonnera dans l'espace. Avec cette approximation liée au choix de la fonction base, on obtient après projection sur les fonctions test, le champ électrique dans la maille  $M_m$  :

$$E_y(M_m) = E_y^i(M_m) + \frac{k_2^2 - k_1^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{N_z} E_y(M_n) \left[ \iint_{S_n} \{ G_p(M_m, M_n) \} dS' \right. \\ \left. \dots + G_s(M_m, M_n) \Delta^2 \right] \quad (I-29)$$

$M_n$  et  $M_m$  sont respectivement les centres de la maille d'émission et de celle de la réception.

Dans cette expression, nous avons supposé que la fonction de Green secondaire  $G_s$  est constante sur chaque cellule. En tout cas, la fonction de Green primaire  $G_p$  est singulière et puisque les distances entre les cellules sont petites, cette fonction est très importante relativement à  $G_s$ . Pour ces deux raisons, la valeur de l'intégrale de  $G_p$  sur chaque cellule l'emporte.

L'intégrale  $G_s$  est calculée numériquement de la manière suivante :

$$G_s = \int_0^{\infty} f(\lambda) d\lambda$$

Nous l'écrivons sous forme de séries :

$$G_s = y_1 + y_2 + \dots + y_N + Y$$

Chaque terme  $y_i$  de cette série est la valeur de l'intégrale calculée entre deux zéros consécutifs de la fonction  $f(\lambda)$ . Ces zéros sont les zéros de la fonction cosinus et les zéros de la partie réelle et la partie imaginaire de l'exponentielle. Ces intégrales sont calculées par la méthode de Simpson. Le dernier terme  $Y$  est calculé par la méthode de l'accélération de convergence d'Atchinson [13].

L'intégrale  $G_p$  peut être calculée numériquement, mais de très bons résultats ont été donnés par une procédure simple. Suivant Richmond (1965-1966) [11], [12], on obtient un bon résultat en approchant la cellule carrée à une cellule circulaire ayant la même surface de section droite. Ainsi, la valeur de l'intégrale quand la cellule d'émission est celle de réception :

$$\iint_{S_n} G_p dS = -j \frac{\pi}{k_1^2} \left\{ \pi k_1 a H_1^{(2)}(k_1 a) - 2j \right\} \quad \text{I-30)$$

et quand la cellule d'émission  $m$  est différente de celle de réception d'indice  $n$  :

$$\iint_{S_n} G_p dS = -j \frac{\pi^2}{k_1^2} a J_1(k_1 a) H_0^{(2)}(k_1 r_{mn}) \quad (\text{I-31})$$

où  $H_0^{(2)}$  et  $H_1^{(2)}$  sont respectivement les fonctions de Hankel de seconde espèce du 1<sup>er</sup> ordre et du second ordre,  $J_1$  est la fonction de Bessel d'ordre (1)

$$\text{et } r_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (z_m - z_n)^2} \quad (\text{I-32}) \quad \text{et} \quad a = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{I-33})$$

On peut alors simplifier la notation en écrivant (I-29) sous forme :

$$E_m = E_m^i + a_0 \sum_{n=1}^{N_2 \cdot N_3} E_n \cdot G_n^m \quad (\text{I-34})$$

$E_m$  : champ total dans la cellule m

$E_m^i$  : champ incident sur la cellule m

$$a_0 = \frac{k_2^2 - k_1^2}{2\pi} \quad (\text{I-35})$$

$E_n$  : champ total dans la cellule n

$$G_n^m = \iint_{S_n} G_p \cdot dS' + \iint_{S_n} G_s \cdot dS' \quad (\text{I-36})$$

### III.2) Transformation du système intégrale en système linéaire

En écrivant l'équation (I-34) pour chaque cellule, on obtient un système de N équations linéaires à N inconnues, qui sont les valeurs du champ électrique dans l'anomalie. On peut l'écrire sous forme matricielle :

$$[C] [E_y^a] = [E_y^i] \quad (I-37)$$

où les éléments de la matrice [C] sont donnés par :

$$m=n \quad C_{mn} = 1 + a_0 \left[ j \frac{\pi}{k_1} \left\{ \pi k_1 a H_1^{(2)}(k_1 a) - 2j \right\} - \Delta^2 G_s(M_m, M_n) \right] \quad (I-38)$$

$$m \neq n \quad C_{mn} = a_0 \left[ j \frac{\pi^2}{k_1^2} a J_1(k_1 a) H_0^{(2)}(k_1 r_{mn}) - \Delta^2 G_s(M_m, M_n) \right] \quad (I-39)$$

La matrice  $[E_y^a]$  est une matrice colonne, c'est la matrice inconnue qui représente le champ à l'intérieur de l'anomalie :

$$[E_y^a] = \begin{bmatrix} E_{y_1}^a \\ E_{y_2}^a \\ \vdots \\ E_{y_N}^a \end{bmatrix} \quad (I-40)$$

et la matrice  $[E_y^i]$  est une matrice colonne représentant le champ incident sur les cellules de l'anomalie :

$$[E_y^i] = \begin{bmatrix} E_{y_1}^i \\ E_{y_2}^i \\ \vdots \\ E_{y_N}^i \end{bmatrix} \quad (I-41)$$

En résolvant le système (I-37), on obtient le champ à l'intérieur de chaque cellule.

### III.3) Optimisation du calcul de la matrice

Au vu du système (I-37), on s'aperçoit que la matrice  $[C]$  peut être décomposée en deux matrices dont on fait la somme  $[C_1]$  et  $[C_2]$  la matrice  $[C_1]$  d'ordre  $N \times N$  dont les éléments sont :

$$\text{si } m=n \quad C_{mn}^1 = 1 + a_0 j \frac{\pi}{k_1^2} \left\{ \pi k_1 a H_1^{(2)}(k_1 a) - 2j \right\} \quad (\text{I-42})$$

$$\text{si } m \neq n \quad C_{mn}^1 = a_0 j \frac{\pi^2}{k_1^2} a J_1(k_1 a) H_0^{(2)}(k_1 r_{mn}) \quad (\text{I-43})$$

et la matrice  $[C_2]$  d'ordre  $N \times N$  dont les éléments sont :

$$C_{mn}^2 = a_0 \Delta^2 G_s(M_m, M_n) \quad (\text{I-44})$$

et on a la relation  $[C] = [C^1] + [C^2] \quad (\text{I-45})$

Les éléments de la matrice  $[C^1]$  correspondent aux effets mutuels directs que produisent les lignes de dipôles équivalents.

Les éléments de la matrice  $[C^2]$  correspondent aux effets secondaires que produisent les lignes de dipôles équivalents après "réflexion" sur l'interface.

On remarque sur les éléments des deux matrices une symétrie.

En effet :  $C_{mn}^1 = C_{nm}^1$

et  $C_{mn}^2 = C_{nm}^2 \quad (\text{I-46})$

Il en résulte la symétrie globale de la matrice  $[C]$ .

En plus, chaque matrice  $C_1$  et  $C_2$  peut être divisée en  $N_z \times N_z$  sous-matrices notées respectivement  $[t_{ij}]$  et  $[t'_{ij}]$  et caractérisant l'effet d'une tranche horizontale  $i$  sur une tranche  $y$ . Les sous-matrices  $[t_{ij}]$  et  $[t'_{ij}]$  sont d'ordre  $N_x \times N_x$ .

anomalie

tranche 1
tranche 2
tranche 3

sous-matrice  $[t_{ij}]$

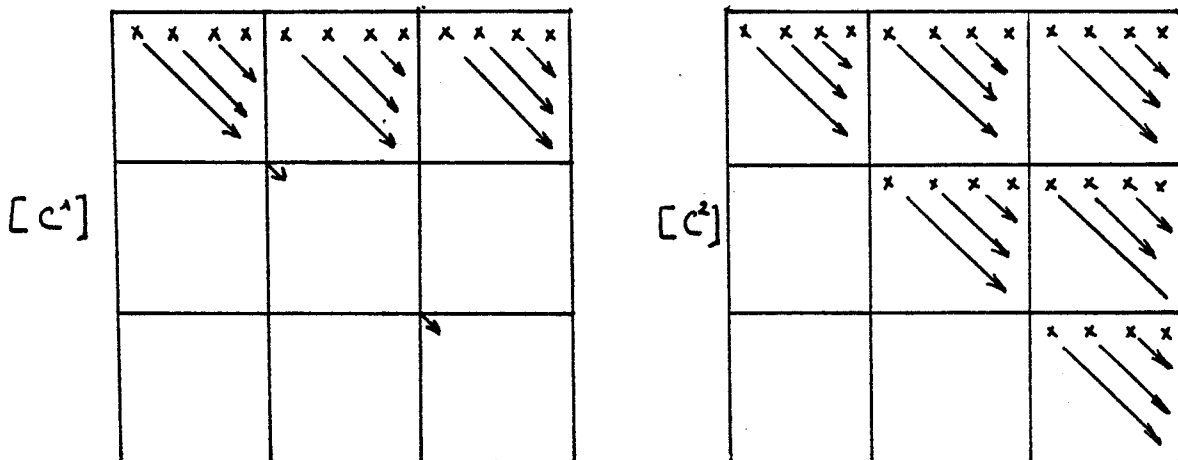
$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$
	$t_{22}$	$t_{23}$
		$t_{33}$

et chaque sous-matrice  $[t_{ij}]$  ou  $[t'_{ij}]$  est symétrique puisque leurs éléments ne sont autres que les  $C_{mn}$  et la relation (I-46) reste valable.

On découpe les sous-matrices  $[t_{ij}]$  et  $[t'_{ij}]$  en éléments représentant l'effet d'un élément  $m$  sur un élément  $n$ . L'effet de l'élément  $m+1$  sur  $n+1$  est le même que l'effet de  $m$  sur  $n$ . On en déduit que pour connaître l'effet d'une tranche sur une autre il suffit de connaître la première ligne de la sous-matrice caractérisant cet effet.

Enfin pour la matrice  $[C^1]$ , l'effet d'une tranche  $\alpha+1$  sur une tranche  $\beta+1$  est le même que l'effet d'une tranche  $\alpha$  sur une tranche  $\beta$ . Il suffit donc de calculer l'effet d'une tranche sur elle-même et sur toutes les autres pour compléter la matrice  $[C^1]$ .

En résumé pour compléter la matrice  $[C^1]$ , il suffit de calculer les éléments de la première ligne. Par contre pour compléter la matrice  $[C^2]$ , il faut calculer les éléments de la première ligne de chaque sous-matrice tranche comme le montre la figure ci-dessous :



pour  $[C^1]$  on ne calcule donc que  $(N_x \times N_z)$  éléments parmi  $(N_x \times N_z) * (N_x \times N_z)$  éléments de la matrice.

Et pour  $[C^2]$  on ne calcule que  $N_x * (N_z \times \frac{(N_z+1)}{2})$  éléments.

**IV) CALCUL DES COMPOSANTES DU CHAMP ELECTRIQUE A L'EXTERIEUR DE L'ANOMALIE**

**IV.1) Champ électrique**

Nous avons vu que le champ en tout point de l'espace est composé du champ primaire provenant de l'émetteur et du champ rayonné par les lignes de dipôles équivalentes à l'anomalie. L'expression du rayonnement de la ligne source est donnée par la formule (I-22). Quant aux mailles, chacune d'elle rayonne comme une ligne de dipôles élémentaires qui sont dans la même direction, elle-même perpendiculaire à la section droite de l'anomalie. On procède alors de la même façon que pour calculer l'effet d'une maille sur une autre, mais cette fois-ci en prenant comme point d'observation un point de l'espace.

On obtient l'équation suivante :

$$E(M) = E^i(M) + a_0 \sum_{n=1}^N E_n \iint_{S_n} (G_p^n + G_s^n) dS' \quad (I-47)$$

$$\text{où } G_p^n = \frac{-j\omega\mu_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\mu_1(z-\delta_n)} \frac{\cos \lambda(x-x_n)}{\mu_1} d\lambda = -j\frac{\pi}{2} H_0(k, r_n) \quad (I-48)$$

$$\text{et } G_s^n = -j\frac{\omega\mu_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} \frac{e^{-\mu_1(z+\delta_n)}}{\mu_1} \cos \lambda(x-x_n) d\lambda \quad (I-49)$$

Les fonctions  $G_p^n$  et  $G_s^n$  représentent respectivement la fonction de Green correspondant à l'effet direct de la maille n sur le point de réception et la fonction de Green correspondant à l'effet secondaire de la maille n sur le point de réception M.

Dans l'hypothèse où la distance entre la maille rayonnante considérée et le point de réception est relativement grande par rapport aux dimensions de la maille, on suppose que les fonctions de Green données par (I-48) et (I-49) ne changent pas à l'intérieur d'une maille. Ce qui conduit à des valeurs simples des intégrales apparaissant dans la formule (I-47) :

$$\iint_{S_n} G_p^n dS' = \Delta^2 G_p^n \quad (I-50)$$

$$\text{et } \iint_{S_n} G_s^n dS' = \Delta^2 G_s^n \quad (I-51)$$

L'expression du champ électrique en un point M situé à l'extérieur de l'anomalie est alors donnée par :

$$E(M) = E^i(M) + a_0 \sum_{n=1}^N E_n \Delta^2 \{ G_p^n + G_s^n \} \quad (I-52)$$



#### IV.2) Champ magnétique

Les calculs développés en annexe I nous donnent les expressions du champ magnétique horizontal et vertical en tout point de l'espace situé à l'extérieur de l'anomalie :

$$H_x(M) = H_x^i(M) + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} (H_{np}^x + H_{ns}^x) \quad (I-53)$$

$$H_z(M) = H_z^i(M) + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} (H_{np}^z + H_{ns}^z) \quad (I-54)$$

où  $H_x^i(M)$  et  $H_z^i(M)$  sont respectivement les champs magnétiques primaires émis par la ligne source suivant la direction OX et OZ. Ces champs sont donnés par :

$$H_x^i(M) = \frac{I}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\mu_n}{\mu_n + \mu_0} \cos(\lambda x) e^{-\mu_n z} d\lambda \quad (I-55)$$

$$H_z^i(M) = \frac{-I}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\mu_n + \mu_0} \sin(\lambda x) e^{-\mu_n z} d\lambda \quad (I-56)$$

Les valeurs  $H_{np}^x$ ,  $H_{ns}^x$ ,  $H_{np}^z$  et  $H_{ns}^z$  sont les champs magnétiques primaires ou secondaires rayonnés par une maille n suivant la direction OY ou OZ. Elles sont données par :

$$H_{np}^x = j \frac{k_1 \pi}{2} \Delta^2 \frac{(z - z_n)}{r_n} H_n^{(e)}(k_1 r_n) E_n^a \quad (I-57)$$

$$H_{ns}^x = - \Delta^2 \int_0^{+\infty} \frac{\mu_n - \mu_0}{\mu_n + \mu_0} e^{-\mu_n(z+z_n)} \cos \lambda(x-x_n) d\lambda E_n^a \quad (I-58)$$

$$H_{np}^2 = \int \frac{k \cdot \pi}{2} \Delta^2 \frac{(x-x_n)}{r_n} H_1^{(2)}(k_1 r_n) E_n^a \quad (I-59)$$

$$H_{ns}^2 = - \Delta^2 \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{u_\lambda} \frac{u_\lambda - u_0}{u_\lambda + u_0} e^{-u_\lambda (z+z_n)} \sin \lambda (x-x_n) d\lambda \cdot E_n^a \quad (I-60)$$

avec  $r = \sqrt{(x-x_n)^2 + (z-z_n)^2}$  (I-61)

**V) VALIDATION DU MODELE**

Afin de valider le modèle numérique, nous avons comparé nos résultats à ceux donnés dans la littérature pour une anomalie particulière. Hohmann [6] ainsi que Coggon [14] (en utilisant la méthode des éléments finis) ont traité la structure représentée sur la figure (I-3) :

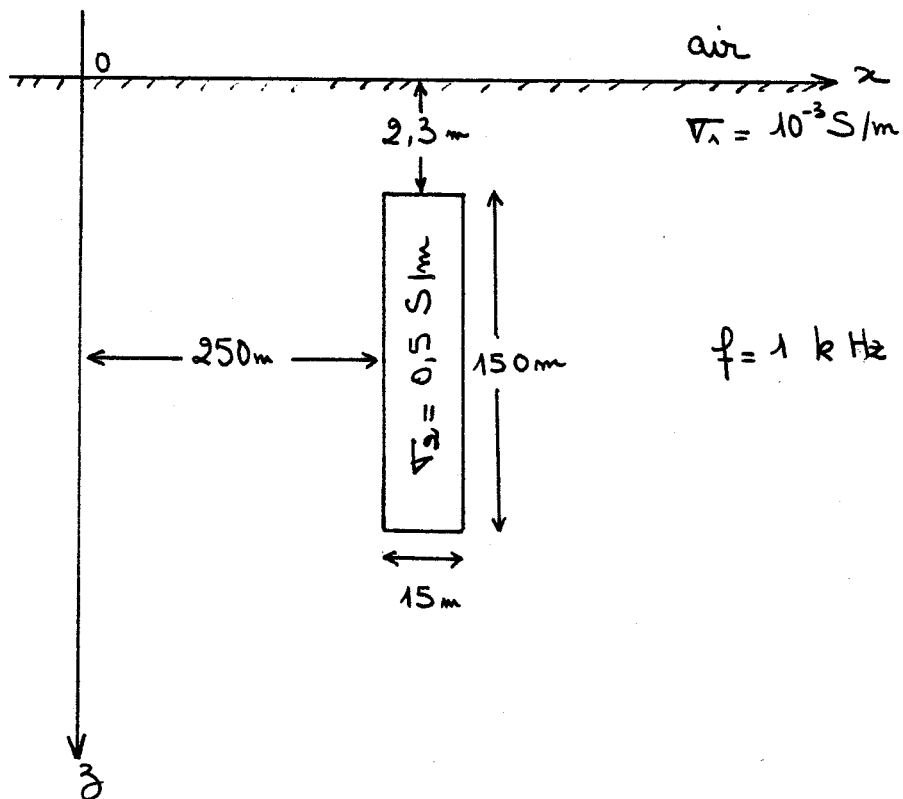


Figure I-3

Il s'agit d'une anomalie dont la section droite est rectangulaire et située à quelques mètres en-dessous de la surface du sol.

Ces auteurs introduisent un facteur de normalisation du champ magnétique défini par :

$$H_z^P = \frac{I}{2\pi x}$$

qui n'est autre que le champ qui serait obtenu si la ligne était située dans l'air, milieu homogène et infini. Les deux courbes de la Planche I-1 représentent la variation des composantes  $H_x$  et  $H_z$  lorsque le point de réception se déplace à la surface du sol. L'abscisse  $x$  représente la distance entre ce point et la ligne source d'excitation située à l'origine 0. La courbe en trait plein se réfère aux résultats du programme mis au point et nous avons reporté en trait pointillé les résultats obtenus par Coggon. L'accord entre ces deux approches semble satisfaisant. A titre indicatif nous avons également indiqué la variation du champ primaire qui est celui que l'on obtiendrait à la surface du sol en l'absence d'anomalie (demi-milieu homogène).

Nous n'avons pas trouvé dans la littérature des exemples montrant la variation du champ électrique dû à l'anomalie. Cela tient au fait que dans ces problèmes, de type prospection géophysique, il est beaucoup plus facile de mesurer en basse fréquence les deux composantes du champ magnétique que celles du champ électrique.

## VI) ETUDE PARAMETRIQUE

### VI.1) Influence de la conductivité

Envisageons tout d'abord une anomalie de section droite carrée de côté 100 m et dont le toit est situé à une profondeur  $H = 20$  m.

La fréquence d'émission de la ligne source, située à 500 m de cette anomalie, est de 10 kHz.

Validation du modèle

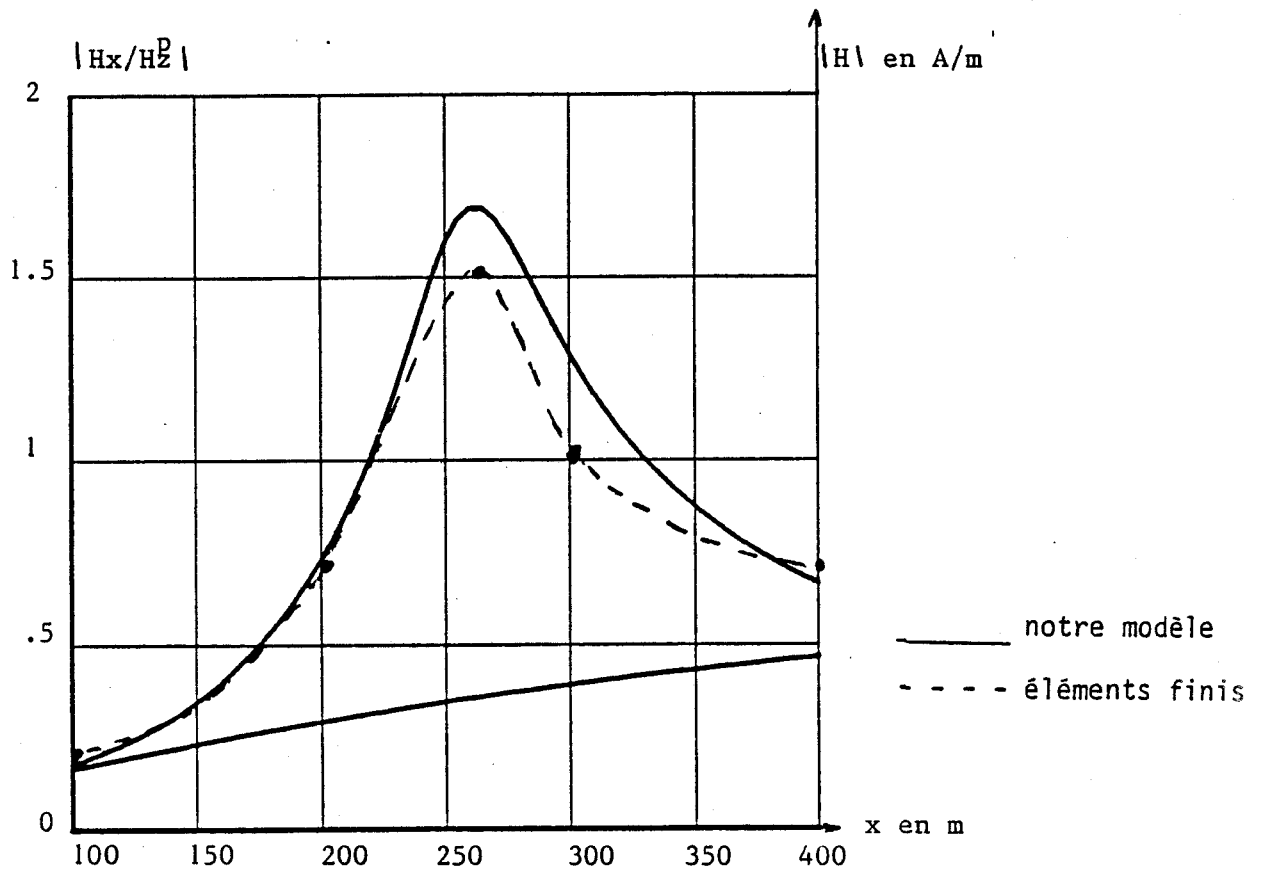
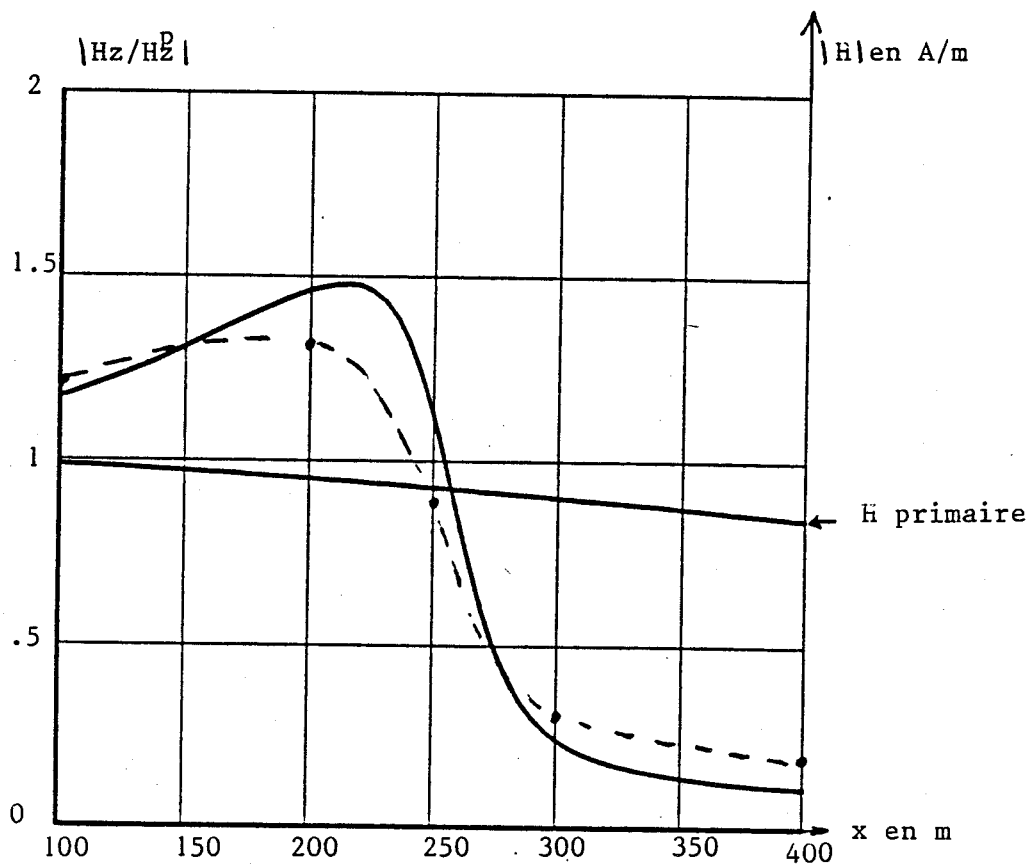


Planche I-1



La conductivité du milieu encaissant est de  $10^{-3}$  S/m tandis que celle de l'anomalie est de  $10^{-2}$  S/m ou 0, ce qui correspond au cas de l'air. (Figure I-4)

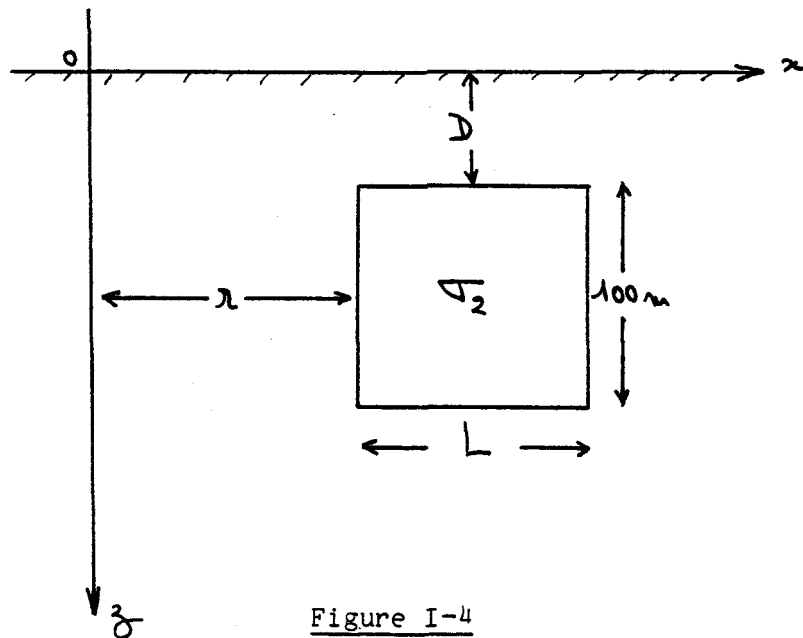


Figure I-4

Dans cet exemple, l'anomalie a été divisée en 25 carrés de 20 m de côté et on distingue donc des "tranches" horizontales numérotées de 1 à 5, la tranche n° 1 étant celle qui est située le plus près de la surface du sol.

Pour une conductivité  $\sigma_2 = 10^{-2}$  S/m, la planche I-2a montre l'amplitude du champ primaire dans les tranches 1, 3 et 5, c'est-à-dire le champ qui existerait dans ces tranches si l'anomalie avait une conductivité identique à celle du milieu encaissant, soit  $10^{-3}$  S/m. La variation de ce champ primaire à la surface du sol ( $Z=0$ ) a également été tracée.

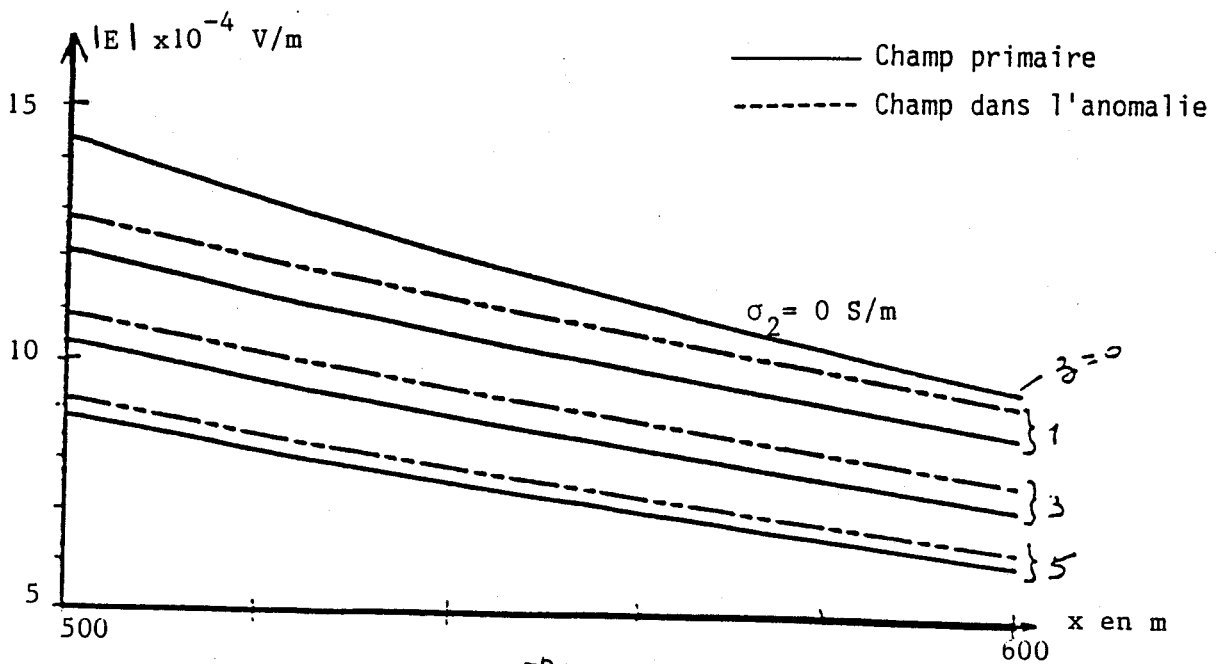
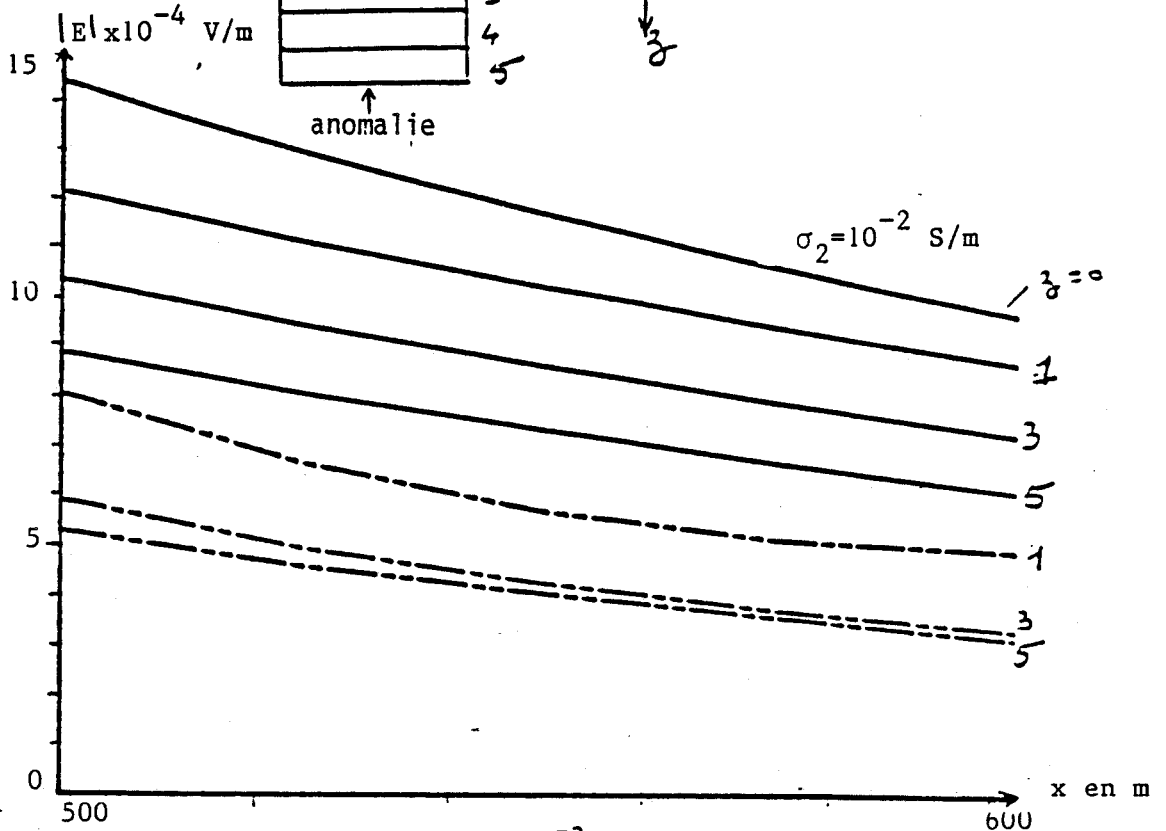
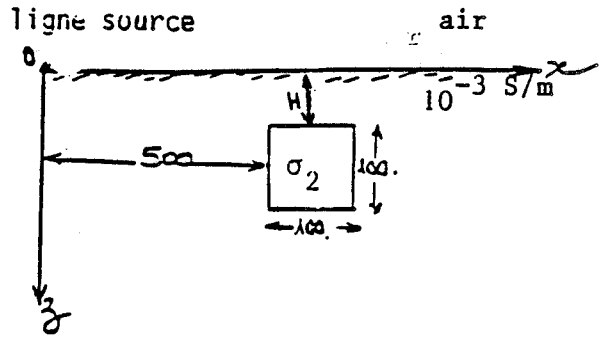
Les courbes en pointillés correspondent au champ dans l'anomalie.

On remarque une diminution importante de celui-ci par rapport au cas du milieu homogène.

Les courbes de la Planche I-2b supposent une anomalie isolante. On remarque que le champ dans l'anomalie est peu différent (légèrement supérieur) au champ primaire. Pour espérer pouvoir simuler une vallée, l'étape suivante consiste à diminuer progressivement la profondeur de l'anomalie de manière à ce que son toit affleure la surface du sol.

Influence de la conductivité

$f = 10 \text{ KHz} ; H = 20\text{m}$



### VI.2) Influence de la profondeur de l'anomalie

Dans les exemples suivants, nous n'envisagerons que le cas d'une anomalie isolante. Les planches I-3 et I-4 correspondent ainsi à deux cas extrêmes :  $H = 20$  m et  $H = 0$  m et ont été obtenues respectivement en supposant que la distance entre la cavité et la ligne source est de 500 m et de 1500 m. On note le même comportement du champ électrique en fonction de la tranche suivant laquelle on se situe, une distance émetteur-anomalie de 1500 m présentant l'avantage d'assurer un champ primaire pratiquement indépendant de la position horizontale du point d'observation dans l'anomalie.

Pour  $H = 0$  m, ce qui correspond à une vallée située dans un milieu encaissant de  $10^{-3}$  S/m, on note que le champ dans la vallée n'est que légèrement supérieur au champ primaire donc au champ qui serait obtenu à une profondeur identique mais dans le demi-milieu homogène que constituerait le sol.

### VI.3) Influence de la largeur de la vallée

La planche I-5 montre une comparaison entre les valeurs du champ électrique dans une vallée de 100 m et de 200 m de large. La fréquence est, comme précédemment de 10 kHz et la conductivité du sol de  $10^{-3}$  S/m. On remarque d'une façon générale l'augmentation du champ électrique lorsque la largeur de la vallée devient plus importante. Cependant la décroissance de l'amplitude du champ en fonction de la profondeur du point d'observation dans la vallée reste du même ordre de grandeur que la décroissance du champ dans le sol. Il ne faut cependant pas oublier que ces résultats ont été obtenus pour une profondeur de pénétration dans le sol de 158 m, c'est-à-dire supérieure à la profondeur de la vallée. De plus ce type d'excitation magnétique n'engendrant qu'une composante horizontale  $E_y$ , favorise la continuité du champ électrique dans l'air et dans le sol.

Influence de la profondeur

f = 10 KHz

distance ligne-anomalie : 500m

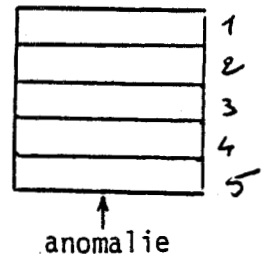
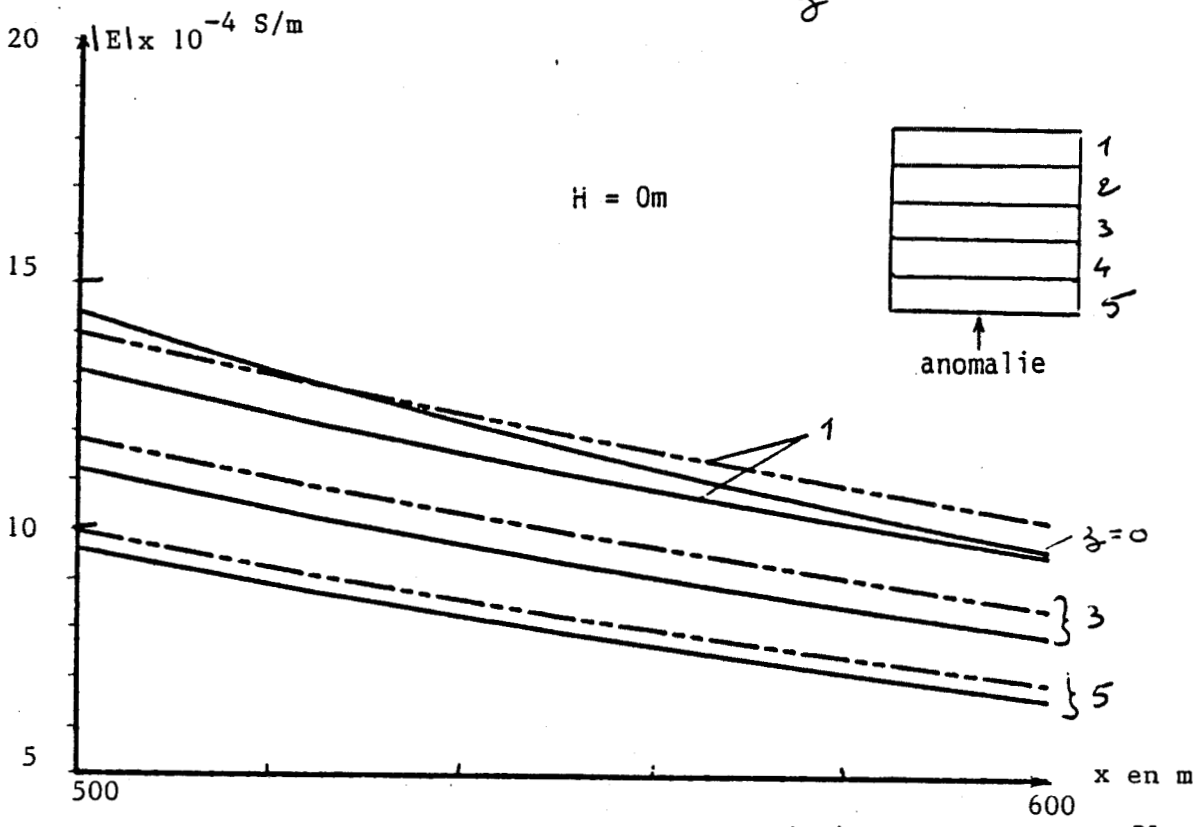
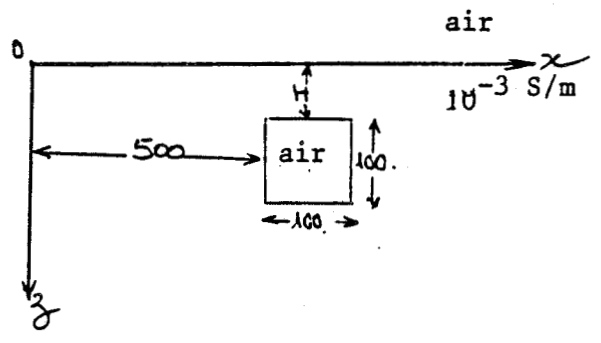
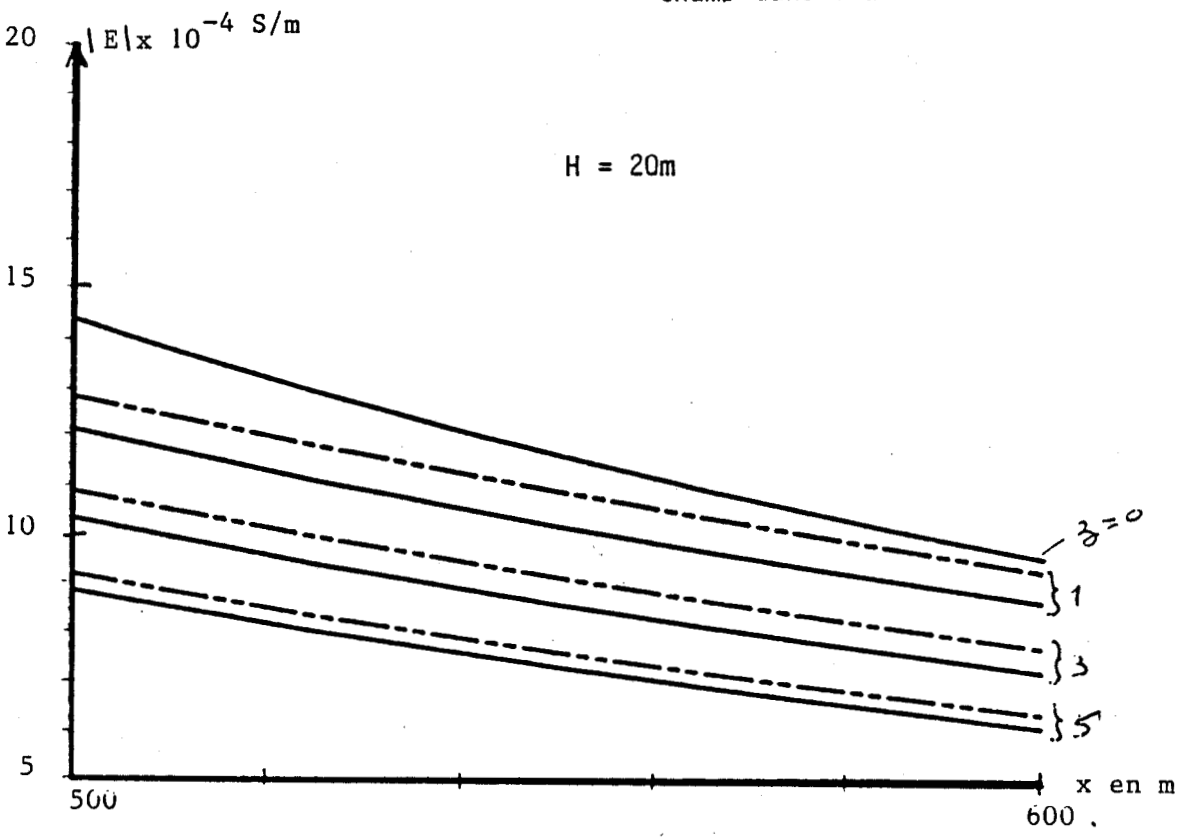


Planche I-3

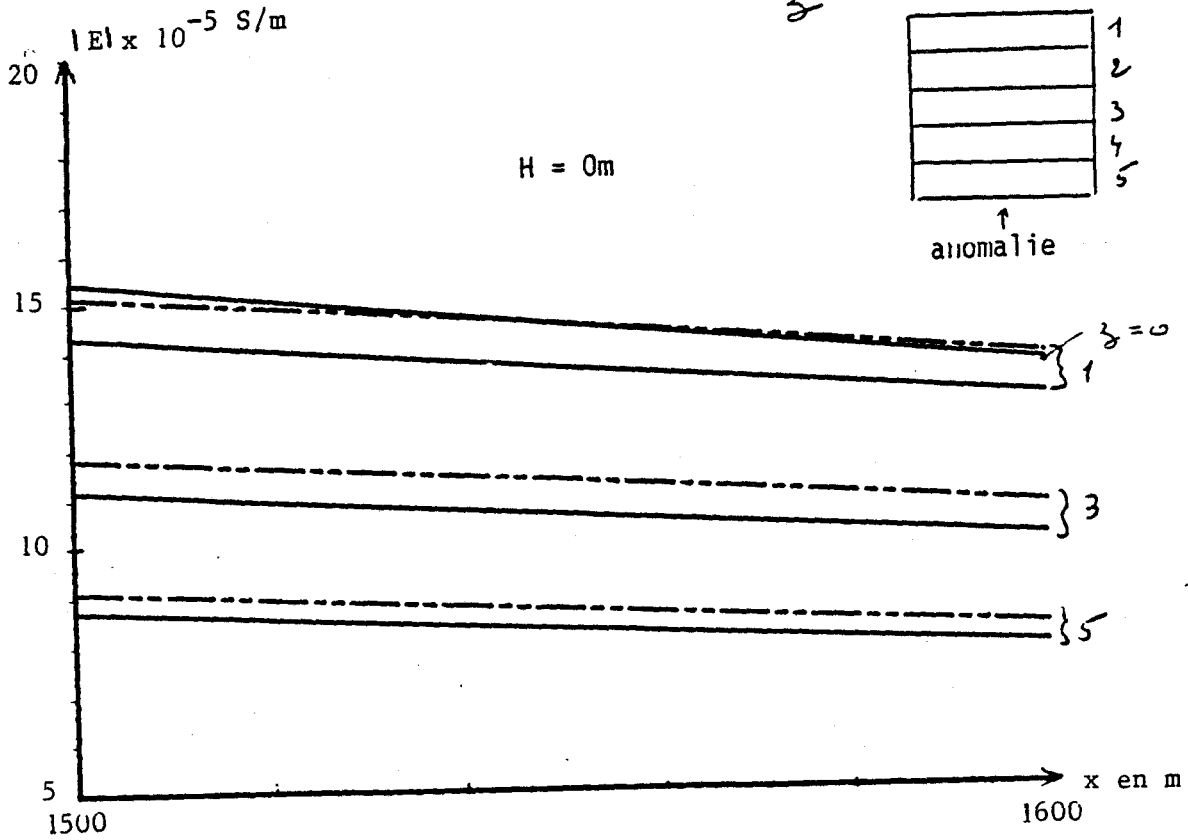
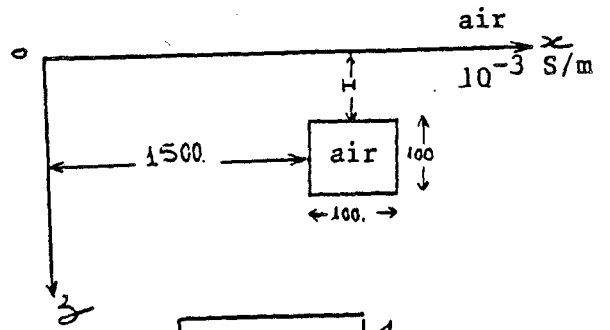




Influence de la profondeur

f = 10 KHz

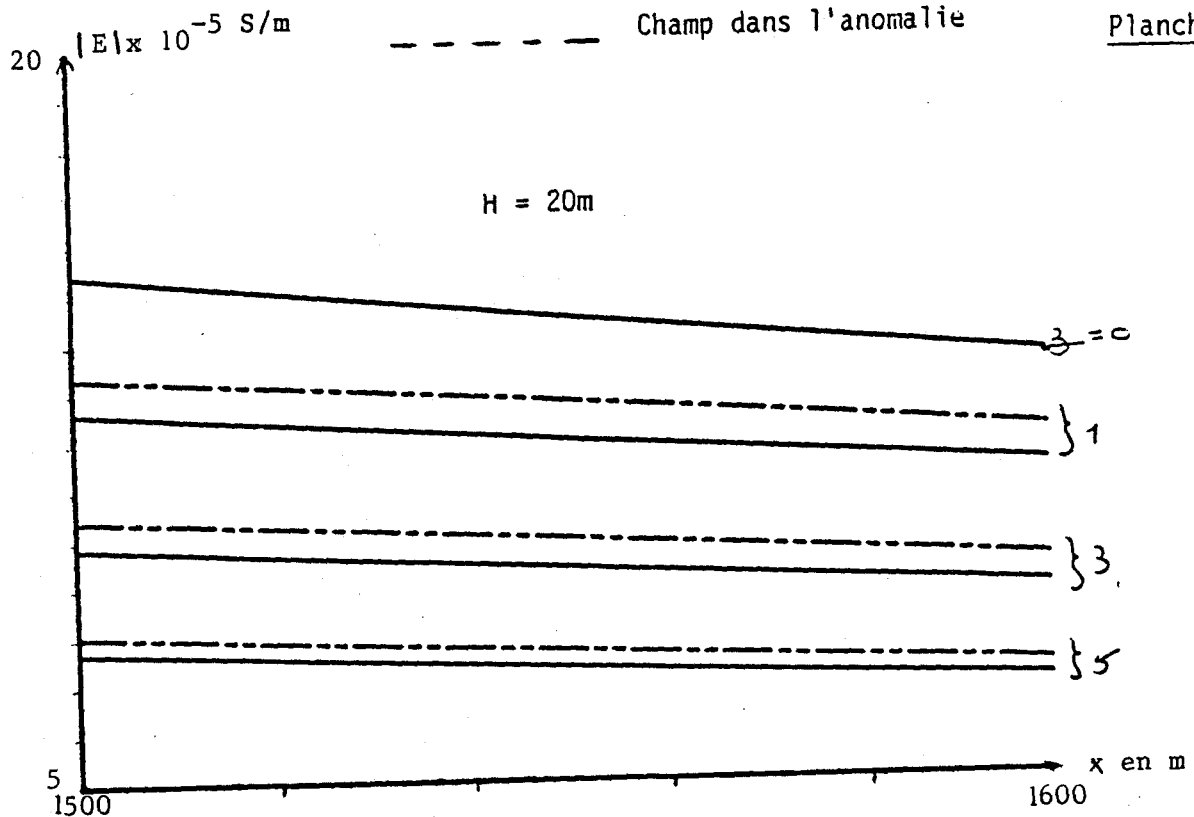
distance ligne-anomalie : 1500m



— Champ primaire

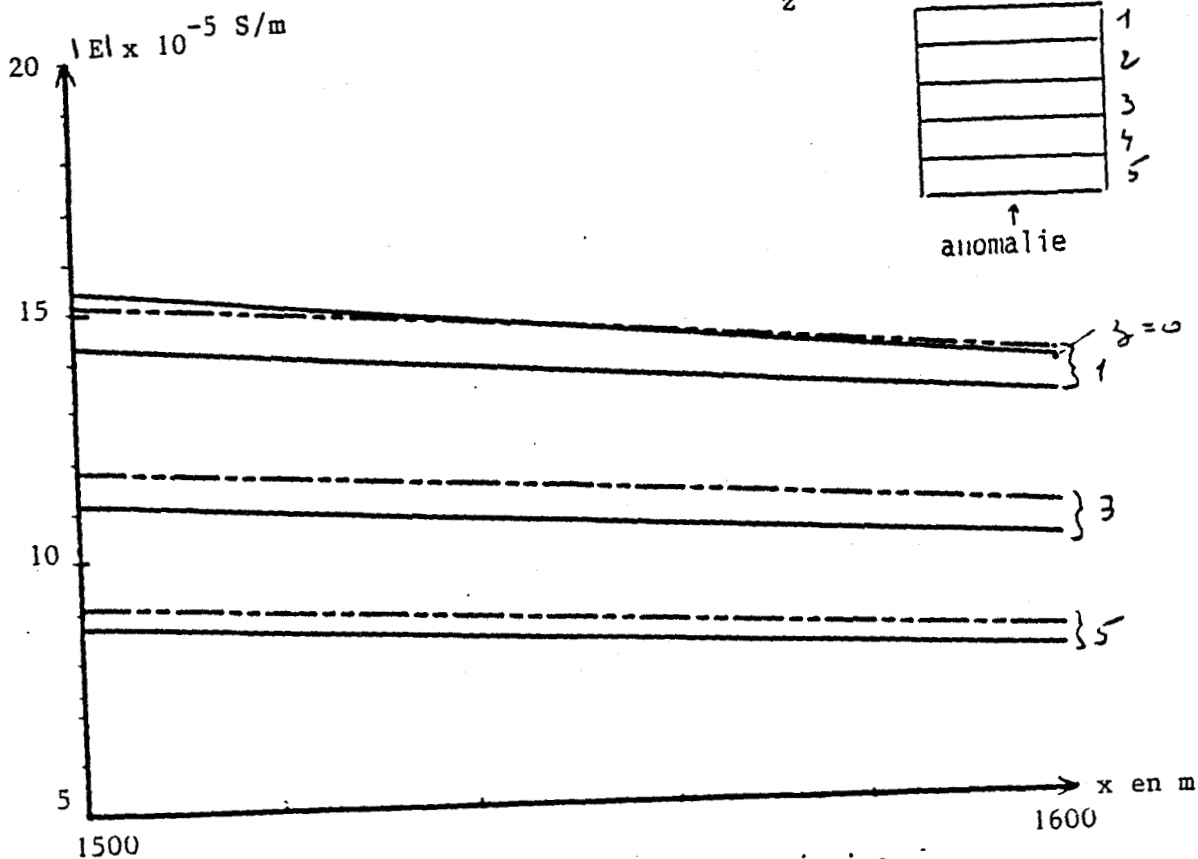
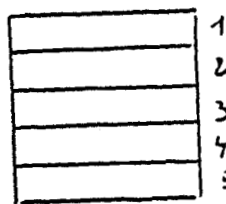
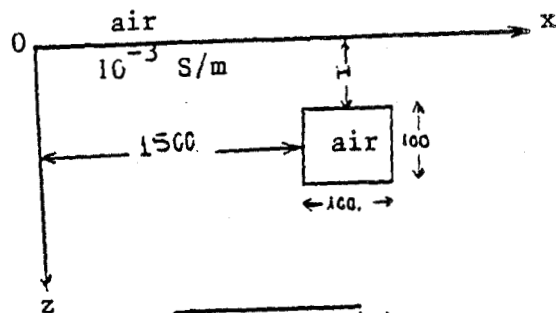
- - - - - Champ dans l'anomalie

Planche I-4



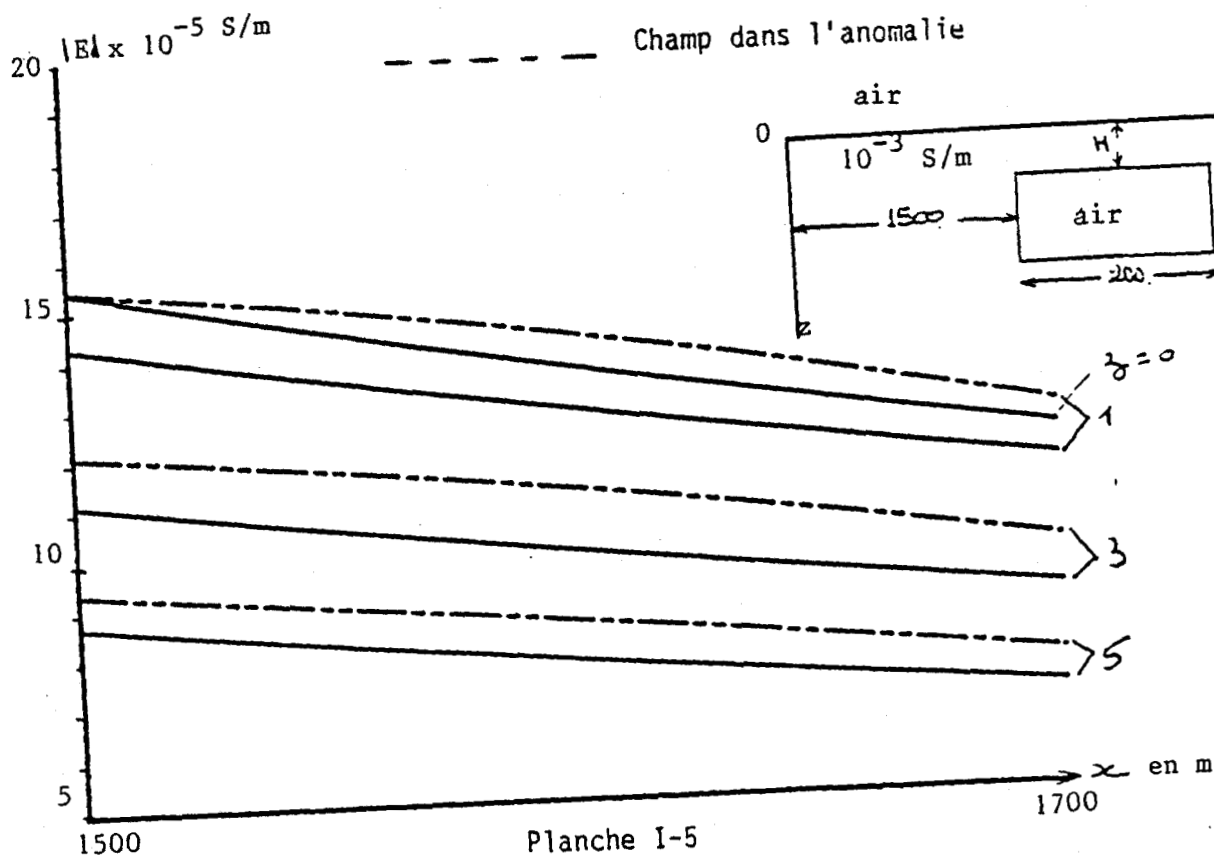
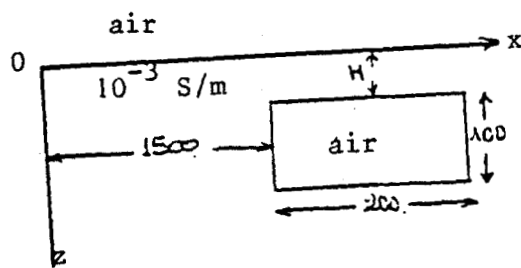
Influence de la largeur

$f = 10 \text{ KHz}$  ;  $H = 0\text{m}$



Champ primaire

Champ dans l'anomalie



## VII) CONCLUSION

Nous allons donc nous intéresser dans les chapitres suivants à l'influence des conditions d'excitation avec notamment l'introduction d'une ligne de dipôles verticaux ou horizontaux. Compte tenu des difficultés auxquelles on peut se heurter, nous présenterons tout d'abord le cas où l'anomalie est située dans l'air, afin de simuler un obstacle, puis nous verrons dans le chapitre III, le cas de la vallée.

## CHAPITRE II

### ANOMALIE BIDIMENSIONNELLE ECLAIRÉE PAR UNE LIGNE DE DIPOLES

#### INFLUENCE D'UN OBSTACLE

##### I) INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de l'influence d'une forêt ou d'une montagne sur l'amplitude du champ électrique. Les travaux théoriques et expérimentaux ont montré que pour des fréquences inférieures à quelques dizaines de MHz, la forêt ou la montagne pouvaient être assimilées à une anomalie homogène présentant des conductivités de  $10^{-2}$  à  $10^{-4}$  S/m, et de  $10^{-5}$  à  $10^{-6}$  S/m pour une forêt avec une permittivité de 1,1.

Nous commencerons par établir les expressions du champ à l'intérieur de l'anomalie, puis nous en déduisons les expressions du champ en tout point de l'espace.

La théorie développée dans ce chapitre est générale et applicable à l'étude soit d'un obstacle, soit d'une vallée. Cependant des simplifications pourront être faites dans le cas d'une vallée et cette étude sera menée dans le chapitre suivant.

Une étude paramétrique sera effectuée pour évaluer l'influence de la fréquence, des dimensions de l'anomalie, et des caractéristiques de celle-ci sur la modification de l'amplitude du champ en son voisinage. L'émetteur est une ligne de dipôles verticaux, horizontaux, ou une onde plane.

## II) DESCRIPTION DU MODELE

On considère une anomalie parallélépipédique dont l'une des directions est infinie. Elle est de conductivité  $\sigma_2$ , de section  $S$ , située dans un demi-milieu qui peut représenter soit l'air soit le sol. Il est séparé d'un autre demi-milieu homogène et infini de conductivité  $\sigma_0$  par une interface plane. Le modèle est schématisé par la Figure ci-dessous :

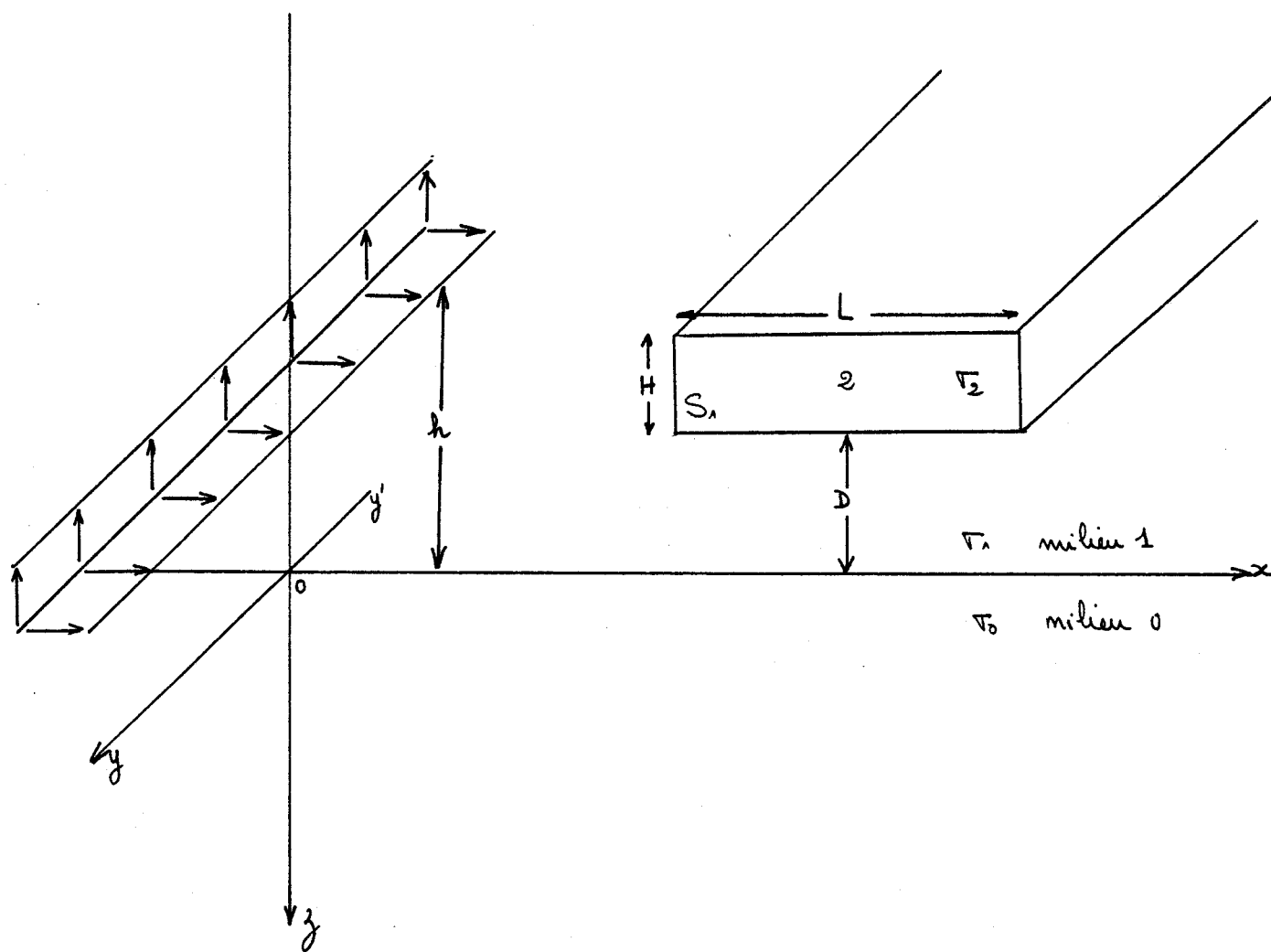


Figure II-1

La ligne d'excitation est formée d'un ensemble de dipôles électriques horizontaux ou verticaux.

L'anomalie de hauteur H et de largeur L, est située à une distance D de la surface du sol.

Le champ électromagnétique est créé par deux lignes d'électrodes disposées parallèlement à y'y, à une distance h de l'interface air-sol.

Nous nous proposons de déterminer les composantes du champ électrique en tout point de l'espace.

### III) EXPRESSION DES COMPOSANTES DU POTENTIEL DE HERTZ

#### III.1) Expression générale

On peut montrer que le champ électromagnétique dérive d'un potentiel  $\pi$ , et que le champ électrique est donné par la relation

$$\vec{E} = \text{rot rot } \vec{\pi} \quad (\text{II-1})$$

Le potentiel de Hertz  $\pi$  doit vérifier l'équation de Helmholtz suivante :

$$(\Delta^2 - \gamma^2) \vec{\pi} = - \frac{P_1}{\epsilon} \delta(x, z) \quad (\text{II-2})$$

avec  $\delta(x, z) = 1$  dans le dipôle et  $p_1 = \frac{Il}{2\pi \sigma_1^*}$

où  $\sigma_1^* = (\sigma_1 + j \omega \epsilon_1)$ .

Le problème est invariant dans une translation suivant y'y. Le Laplacien sera donc sous forme de dérivées secondes suivant x'x et z'z seulement

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

On cherche la solution de l'équation de Helmholtz, aux dérivées partielles sous forme intégrale, en utilisant le théorème de Green.

On peut montrer que les expressions générales du potentiel de Hertz dans le milieu (1), créées par une ligne de dipôles sources horizontaux et en présence d'une anomalie de section droite  $S_1$ , sont données par :  
[15],[16]

$$\begin{aligned} \pi_{1x}(x, z) &= \frac{I l}{2 \pi \sigma_1^*} [k_0(\gamma_1 R_{01}) - k_0(\gamma_1 R_{02})] + \dots \\ &+ \frac{1}{2 \pi} \int_{x'x} \pi_{1x}(x', 0) \left\{ \frac{\partial}{\partial z'} [k_0(\gamma_1 R_1) - k_0(\gamma_1 R_2)] \right\}_{z'=0} dx' \\ &+ \frac{\sigma_2^* - \sigma_1^*}{2 \pi \sigma_1^*} \int_{S_1} E_{2x}(M_1) [k_0(\gamma_1 R_1) - k_0(\gamma_1 R_2)] dx_1 dz_1 \end{aligned} \quad \text{(II-3)}$$

$$\begin{aligned} \pi_{1z}(x, z) &= \frac{1}{2 \pi} \int_{x'x} \pi_{1z}(x', 0) \left\{ \frac{\partial}{\partial z'} [k_0(\gamma_1 R_1) - k_0(\gamma_1 R_2)] \right\}_{z'=0} dx' \\ &+ \frac{\sigma_2^* - \sigma_1^*}{2 \pi \sigma_1^*} \int_{S_1} E_{2z}(M_1) [k_0(\gamma_1 R_1') - k_0(\gamma_1 R_2')] dx_1 dz_1 \end{aligned} \quad \text{(II-4)}$$

Les distances  $R_{01}$ ,  $R_{02}$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_1'$  et  $R_2'$  sont définies sur la Figure ci-après :

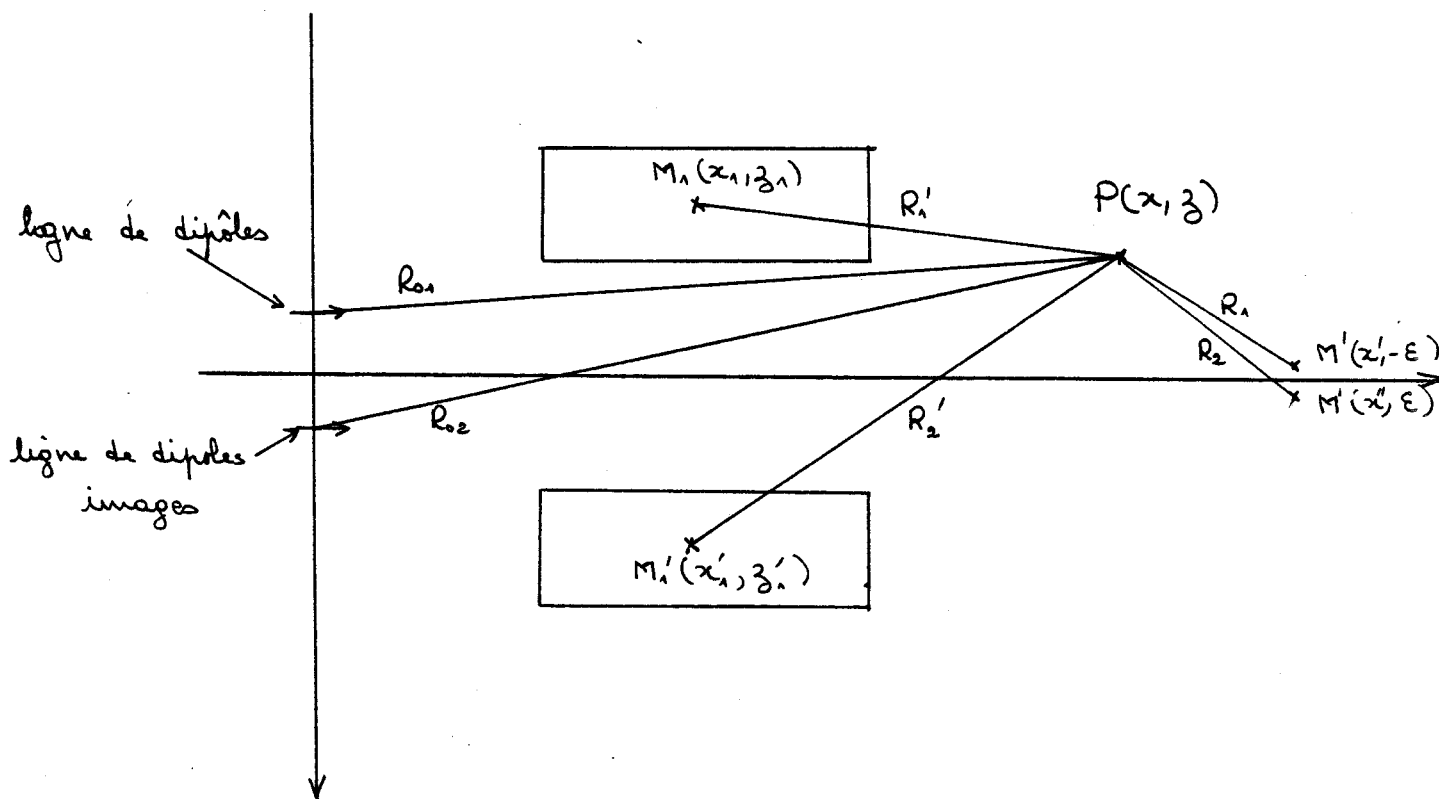


Figure II-2

$R_{01}$  et  $R_{02}$  représentent respectivement les distances entre l'émetteur et le point M de réception, et entre l'image de l'émetteur et M.

$R_1$  et  $R_2$  représentent respectivement les distances entre M et un point  $M'(x')$  de l'interface air-sol, et entre l'image de ce point et M.

$R_1'$  et  $R_2'$  représentent respectivement les distances entre M et un point  $M_1(x_1, z_1)$  de l'anomalie et entre M et l'image de  $M_1$ .

$\gamma_1^2 = j\omega\mu(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)$   $\gamma_1$  : coefficient de propagation dans le milieu 1

$E_{2X}(M_1)$  et  $E_{2Z}(M_1)$  représentent respectivement le champ électrique suivant la direction des x et la direction des z en un point  $M_1$  de coordonnées  $(x_1, z_1)$  situé à l'intérieur de l'anomalie.

### III.2) Expressions des composantes du potentiel de Hertz dans les milieux 0 et 1

Considérons la formule (II-3).

Soit I la première intégrale de cette équation.



Remplaçons dans I la fonction de Kelvin indice zéro par son expression intégrale donnée par :

$$K_0(\gamma_1 \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}) = \int_0^{+\infty} e^{-\mu_1 |z-z'|} \frac{\cos \lambda (x-x')}{\mu_1} d\lambda \quad (\text{II-5})$$

avec  $\mu_1^2 = \lambda^2 + \gamma_1^2 \quad \text{Re}(\gamma_1) > 0$

et  $\lambda$  est un réel arbitraire.

Sachant que  $z-z' < 0$ , on trouve :

$$I = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_{1x}(x', 0) dx' \int_0^{+\infty} e^{\mu_1 z} \cos \lambda (x-x') d\lambda \quad (\text{II-6})$$

L'intégrale I peut se décomposer en une somme de deux intégrales  $I_1$  et  $I_2$  données par les relations suivantes :

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} [f_1(\lambda) + f_1(-\lambda)] e^{\mu_1 z} \cos(\lambda x) d\lambda$$

$$I_2 = -\frac{j}{2\pi} \int_0^{+\infty} [f_1(\lambda) - f_1(-\lambda)] e^{\mu_1 z} \sin(\lambda x) d\lambda \quad (\text{II-7})$$

avec :

$$f_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_{1x}(x', 0) e^{-j\lambda x} dx'$$

transformée de Fourier de  $\pi_{1x}(x', 0)$ .

Soit J la deuxième intégrale de (II-3), en reportant (II-5) dans cette intégrale, on trouve l'expression suivante :

$$J = \frac{V_2^* - V_1^*}{2\pi V_1^*} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{S_1} E_{2x}(M_1) \left[ e^{\mu_1 |z-z_1|} - e^{-\mu_1 (z+z_1)} \right] \cdot \frac{\cos \lambda (z-z_1)}{\mu_1} dz_1 dx_1 \quad (\text{II-8})$$

avec  $V^* = V + j\omega E$

De même, nous pouvons décomposer J en une somme de deux intégrales J<sub>1</sub> et J<sub>2</sub> telles que :

$$J_1 = \frac{V_2^* - V_1^*}{2\pi V_1^*} \int_0^{+\infty} \cos \lambda z d\lambda \int_{S_1} E_{2x}(M_1) \left[ e^{-\mu_1 |z-z_1|} - e^{\mu_1 (z+z_1)} \right] \cdot \frac{\cos \lambda z_1}{\mu_1} dx_1 dz_1$$

$$J_2 = \frac{V_2^* - V_1^*}{2\pi V_1^*} \int_0^{+\infty} \sin \lambda z d\lambda \int_{S_1} E_{2x}(M_1) \left[ e^{-\mu_1 |z-z_1|} - e^{\mu_1 (z+z_1)} \right] \cdot \frac{\sin \lambda z_1}{\mu_1} dx_1 dz_1 \quad (\text{II-9})$$

Compte tenu de cette décomposition de J et de la décomposition de I nous aboutissons à l'expression du potentiel de Hertz suivant la direction des x :

$$\begin{aligned} \Pi_{1x}(x, z) = & \frac{I l}{2\pi V_1^*} \int_0^{+\infty} \left[ e^{-\mu_1 |z+h|} - e^{\mu_1 (z-h)} \right] \frac{\cos \lambda z}{\mu_1} d\lambda \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[ f_1(\lambda) + f_1(-\lambda) \right] e^{\mu_1 z} \cos \lambda z d\lambda \\ & - \frac{j}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[ f_1(\lambda) - f_1(-\lambda) \right] e^{\mu_1 z} \sin \lambda z d\lambda + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots + \frac{V_2^* - V_1^*}{2\pi V_1^*} \int_0^{+\infty} \cos \lambda z \, d\lambda \int_{S_1} E_{2z}(M_1) \left[ e^{-\mu_1 |z - z_1|} - e^{\mu_1 (z + z_1)} \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad \cdot \frac{\cos \lambda z_1}{\mu_1} \, dx_1 \, dz_1 \\
 & + \frac{V_2^* - V_1^*}{2\pi V_1^*} \int_0^{+\infty} \sin \lambda z \, d\lambda \int_{S_1} E_{2z}(M_1) \left[ e^{-\mu_1 |z - z_1|} - e^{\mu_1 (z + z_1)} \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad \cdot \frac{\sin \lambda z_1}{\mu_1} \, dx_1 \, dz_1 \qquad \qquad \qquad \text{(II-10)}
 \end{aligned}$$

Les fonctions  $f_1(\lambda)$  et  $f_1(-\lambda)$  sont des inconnues que l'on déterminera en utilisant les conditions aux limites sur l'axe  $x'x$  qui sépare le milieu 0 du milieu 1 (interface air-sol).

Pour effectuer ce calcul, il est nécessaire d'établir une relation analogue à (II-10) pour  $\pi_{0x}$  qui est la composante suivant  $x$  du potentiel de Hertz dans le milieu (0). On montre que  $\pi_{0x}$  est donnée par la relation ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 \pi_{0x}(M) &= \frac{-1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[ f_0(\lambda) + f_0(-\lambda) \right] e^{-\mu_0 z} \cos(\lambda x) \, d\lambda \\
 & - \frac{j}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left[ f_0(\lambda) - f_0(-\lambda) \right] e^{-\mu_0 z} \sin(\lambda x) \, d\lambda \qquad \qquad \qquad \text{(II-11)}
 \end{aligned}$$

avec :

$$f_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \pi_{0x}(x', 0) e^{-j\lambda x'} \, dx'$$

transformée de Fourier de  $\pi_{0x}$ .

Dans la relation (II-11),  $u_0$  est donnée par l'expression suivante :

$$u_0^2 = \lambda^2 + \gamma_0^2$$

$\gamma_0$  constante de propagation dans le sol.

### III.3) Conditions aux limites et calcul des fonctions inconnues

Les relations permettant d'explicitier les conditions aux limites sont résumées ci-dessous :

$$\gamma_0^2 \pi_{0x} = \gamma_1^2 \pi_{1x} \quad z=0$$

$$\gamma_0^2 \frac{\partial \pi_{0x}}{\partial z} = \gamma_1^2 \frac{\partial \pi_{1x}}{\partial z} \quad z=0$$

$$\gamma_0^2 \pi_{0z} = \gamma_1^2 \pi_{1z} \quad z=0 \quad (\text{II-12})$$

$$\frac{\partial \pi_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{0z}}{\partial z} = \frac{\partial \pi_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial \pi_{1z}}{\partial x} \quad z=0$$

En appliquant ces conditions à notre modèle, nous aboutissons à un système de quatre équations à quatre inconnues. De sa résolution, on déduit l'expression de  $\pi_{1x}$  :

$$\begin{aligned} \pi_{1x}(M) = & \frac{I l}{2 \pi \sigma_1^*} \int_0^{+\infty} \left[ e^{-\mu_1(z+h)} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} e^{\mu_1(z-h)} \right] \frac{\cos \lambda x d\lambda}{\mu_1} \\ & + \frac{\sigma_2^* - \sigma_1^*}{2 \pi \sigma_1^*} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{S_1} E_{2x}(M_1) \left[ e^{-\mu_1(z-z_1)} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} e^{\mu_1(z+z_1)} \right] \\ & \cdot \frac{\cos \lambda(x-x_1)}{\mu_1} dx_1 dz_1 \quad (\text{II-13}) \end{aligned}$$

Dans cette expression la première intégrale, simple, traduit le rayonnement de la ligne de dipôles, et la seconde intégrale, double, traduit la diffraction de l'onde émise par l'anomalie.

De même, la résolution du système composé par les formules (II-12) nous donne l'expression de  $\pi_{0x}$ , composante suivant x du potentiel de Hertz dans le sol :

$$\begin{aligned} \pi_{0x}(M) = & \frac{I l}{2\pi\sigma_1^*} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0^2} \int_0^{+\infty} e^{-\mu_0 z - \mu_1 h} \cdot \frac{2\mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \frac{\cos \lambda x}{\mu_1} d\lambda \\ & + \frac{\sigma_2^* - \sigma_1^*}{2\pi\sigma_1^*} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_0^2} \int_0^{+\infty} E_{2x}(M_1) \left[ e^{-\mu_1 |z - z_1|} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} e^{\mu_1(z + z_1)} \right] \\ & \cdot \frac{\cos \lambda (x - x_1)}{\mu_1} dx_1 dz_1 \end{aligned} \quad (II-14)$$

Nous remarquons que cette formule est également composée de deux intégrales ; une simple, traduisant le rayonnement de l'émetteur dans le sol, et une double, traduisant le rayonnement dans le sol dû à la diffraction par l'anomalie de l'onde émise par l'émetteur.

Si nous considérons maintenant la dernière formule du système (II-12), elle peut être mise sous forme :

$$\frac{\partial}{\partial z} (\pi_{1z} - \pi_{0z}) = \frac{\partial}{\partial x} (\pi_{0x} - \pi_{1x}) \quad (II-15)$$

Par un raisonnement analogue à celui du calcul de  $\pi_{1x}$ , on tire l'expression de  $\pi_{1z}$  en se basant sur les conditions aux limites associées à  $\pi_z$  et sur la formule (II-15). On trouve :

$$\begin{aligned} \pi_{12} = & -2 P_1 \int_0^{+\infty} e^{\mu_1(z-h)} \lambda \frac{\mu_1 - \mu_0}{\gamma_1^2 \mu_1 + \gamma_0^2 \mu_0} \sin(\lambda x) d\lambda \\ & - \frac{\nabla_2^* - \nabla_1^*}{2\pi \nabla_1^*} \int_0^{+\infty} \int_{S_1} E_{2x}(M_1) 2\lambda e^{\mu_1(z+z_1)} \frac{\mu_1 - \mu_0}{\gamma_1^2 \mu_0 + \gamma_0^2 \mu_1} \sin(\lambda(x-x_1)) dx dz_1 \\ & + \frac{\nabla_2^* - \nabla_1^*}{2\pi \nabla_1^*} \int_0^{+\infty} \int_{S_1} E_{2z}(M_1) \left[ e^{-\mu_1(z-z_1)} + \frac{\gamma_0^2 \mu_1 - \gamma_1^2 \mu_0}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} e^{\mu_1(z+z_1)} \right] \\ & \cdot \frac{\cos \lambda(x-x_1)}{\mu_1} dx_1 dz_1 d\lambda \quad (\text{II-16}) \end{aligned}$$

avec

$$P_1 = \frac{I l}{2\pi \nabla_1^*}$$

Remarque importante

Ces formules montrent que chaque élément de la surface de la section droite de l'anomalie est équivalent à deux paires de lignes de dipôles électriques, l'une de dipôles verticaux, l'autre de dipôles horizontaux, dont les moments sont respectivement :

$$P_v = \frac{\nabla_2^* - \nabla_1^*}{2\pi \nabla_1^*} E_{2z}(M_1) dS_1$$

$$P_H = \frac{\nabla_2^* - \nabla_1^*}{2\pi \nabla_1^*} E_{2x}(M_1) dS_1$$

Les champs  $E_{2x}(M_1)$  et  $E_{2z}(M_1)$  sont les champs totaux au point  $M_1$  de la surface  $dS$ .

IV) EXPRESSION DU CHAMP ELECTRIQUE

IV.1) Champ à l'extérieur de l'anomalie

Nous déduisons l'expression des composantes du champ électrique, dans le milieu (1) et à l'intérieur de l'anomalie, des formules (II-13) et (II-16) à l'aide de la relation (II-1).

Dans le milieu (1) les composantes du champ électrique  $E_1$  en un point M situé à l'extérieur de l'anomalie sont données par les relations suivantes :

$$E_{1x}(M) = E_{1x}^p(M) - A_0 \int_0^{+\infty} \int_{S_1} E_{2x}(M) \mu_1 (\mu_1 - \mu_0) \cdot$$

$$\left[ \frac{2\lambda^2}{\gamma_1^2 \mu_0 + \gamma_0^2 \mu_1} + \frac{1}{\mu_1 + \mu_0} \right] \cos \lambda (x - x_1) dx_1 dz_1 d\lambda$$

$$- A_0 \int_{S_1} E_{2z}(M_1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} K_0(\gamma_1 R_1) dx_1 dz_1$$

$$+ A_0 \int_{S_1} E_{2z}(M_1) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} K_0(\gamma_1 R_1) dx_1 dz_1$$

$$- A_0 \int_0^{+\infty} \int_{S_1} E_{2z}(M_1) \lambda \frac{\gamma_0^2 \mu_1 - \gamma_1^2 \mu_0}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} e^{\mu_1 (z + z_1)} \cdot$$

$$\sin \lambda (x - x_1) dx_1 dz_1 d\lambda \quad (II-17)$$

$$E_{1z}(M) = E_z^P(M) - A_0 \int_0^{+\infty} \int_{S_1} E_{2x}(M_1) \lambda (\mu_1 - \mu_0) \cdot$$

$$\left[ \frac{2\lambda^2}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} + \frac{1}{\mu_1 + \mu_0} \right] e^{\mu_1(z+z_1)} \sin \lambda(x-x_1) dx_1 dz_1 d\lambda$$

$$+ A_0 \int_{S_1} E_{2x}(M_1) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} K_0(\gamma_1 R_1) dx_1 dz_1$$

$$- A_0 \int_{S_1} E_{2z}(M_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_0(\gamma_1 R_1) dx_1 dz_1$$

$$+ A_0 \int_0^{+\infty} \int_{S_1} E_{2z}(M_1) \lambda^2 \frac{\gamma_0^2 \mu_1 - \gamma_1^2 \mu_0}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} \frac{e^{\mu_1(z+z_1)}}{\mu_1} \cos \lambda(x-x_1) dx_1 dz_1 d\lambda$$

(II-18)

que nous mettrons sous la forme suivante :

$$E_{1x}(M) = E_x^P(M) - A_0 \int_{S_1} [G_{pz}^x(R_1) + G_{sz}^x(R_2)] E_{2x}(M_1) dx_1 dz_1$$

(II-19)

$$+ A_0 \int_{S_1} [G_{pz}^z(R_1) - G_{sz}^z(R_2)] E_{2z}(M_1) dx_1 dz_1$$

$$E_{1z}(M) = E_z^P(M) + A_0 \int_{S_1} [G_{pz}^x(R_1) - G_{sz}^x(R_2)] E_{2x}(M_1) dx_1 dz_1$$

(II-20)

$$- A_0 \int_S [G_{pz}^z(R_1) - G_{sz}^z(R_2)] E_{2z}(M_1) dx_1 dz_1$$

avec  $R_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (z-z_1)^2}$  distance entre M et  $M_1$

$R_2 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (z+z_1)^2}$  distance entre M et l'image de  $M_1$



$$E_z^P(M) = -P_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} K_0(\gamma_1 r_1) - P_1 \int_0^{+\infty} \mu_1 (\mu_1 - \mu_0) \cdot \left[ \frac{2\lambda^2}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} + \frac{1}{\mu_1 + \mu_0} \right] e^{\mu_1(z-h)} \cos(\lambda x) d\lambda \quad (II-21)$$

$$E_z^P(M) = P_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} K_0(\gamma_1 r_1) - P_1 \int_0^{+\infty} \lambda (\mu_1 - \mu_0) \cdot \left[ \frac{2\lambda^2}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} + \frac{1}{\mu_1 + \mu_0} \right] e^{\mu_1(z-h)} \sin(\lambda x) d\lambda \quad (II-22)$$

(II-21) et (II-22) représentent les composantes suivant x et z du champ électrique émis par l'émetteur qui est une ligne de dipôles horizontaux. Le premier terme correspond au rayonnement direct, et le deuxième correspond au rayonnement secondaire.

On pourrait également montrer que si l'émetteur est une ligne de dipôles électriques verticaux, les composantes du champ en demi-milieu sont données par :

$$E_x^P(M) = P_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} K_0(\gamma_1 r_1) - P_1 \int_0^{+\infty} \lambda \frac{\gamma_0^2 \mu_1 - \gamma_1^2 \mu_0}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} e^{\mu_1(z-h)} \sin(\lambda x) d\lambda$$

$$E_x^P(M) = -P_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_0(\gamma_1 r_1) + P_1 \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^2}{\mu_1} \frac{\gamma_0^2 \mu_1 - \gamma_1^2 \mu_0}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} e^{\mu_1(z-h)} \cos(\lambda x) d\lambda$$

$r_1$  représente la distance entre l'émetteur et le point M.

$$A_0 = \frac{\nabla_2^* - \nabla_1^*}{2\pi \nabla_1^*}$$

$$G_{pz}^x(R_1) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} K_0(\gamma_1 R_1)$$

$$G_{Sx}^x(R_2) = \int_0^{+\infty} \mu_1 (\mu_1 - \mu_0) \left[ \frac{2\lambda^2}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} + \frac{1}{\mu_1 + \mu_0} \right] e^{\mu_1(z+z_1)} \cos \lambda(x-x_1) d\lambda$$

$$G_{Px}^z(R_1) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} K_0(\gamma_1 R_1)$$

$$G_{Sx}^z(R_2) = \int_0^{+\infty} \lambda \frac{\gamma_0^2 \mu_1 - \gamma_1^2 \mu_0}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} e^{\mu_1(z+z_1)} \sin \lambda(x-x_1) d\lambda$$

(II-23)

$$G_{Px}^z(R_1) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} K_0(\gamma_1 R_1)$$

$$G_{Sx}^z(R_2) = \int_0^{+\infty} \lambda (\mu_1 - \mu_0) \left[ \frac{2\lambda^2}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} + \frac{1}{\mu_1 + \mu_0} \right] e^{\mu_1(z+z_1)} \sin \lambda(x-x_1) d\lambda$$

$$G_{Px}^z(R_1) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_0(\gamma_1 R_1)$$

$$G_{Sx}^z(R_2) = \int_0^{+\infty} \lambda^2 \frac{\gamma_0^2 \mu_1 - \gamma_1^2 \mu_0}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} e^{\mu_1(z+z_1)} \frac{\cos \lambda(x-x_1)}{\mu_1} d\lambda$$

Dans les formules (II-19) et (II-20) nous remarquons que la connaissance du champ à un point quelconque à l'extérieur de l'anomalie suppose le calcul préliminaire du champ en tout point de l'anomalie.

#### IV.2) Champ à l'intérieur de l'anomalie

Remarquons tout d'abord que pour établir les formules (II-19) et (II-20), aucune restriction n'ayant été imposée à la position du point d'observation M, les expressions sont valables dans l'espace entier. En particulier ce point M peut donc se trouver à l'intérieur du volume V de l'anomalie, et l'inconnue est précisément le champ total à l'intérieur de l'anomalie en fonction duquel est exprimée la distribution de courant équivalente.

Dans ces conditions, (II-19) et (II-20) constituent un système d'équations intégrales de Fredholm.

La résolution de ce système nous permettra de connaître le champ en tout point de l'anomalie, et donc l'ensemble des lignes de dipôles équivalentes.

Dans une deuxième étape, le champ électrique en tout point de l'espace pourra être calculé.

Le champ en un point M à l'intérieur de l'anomalie est donné par :

$$\frac{\sqrt{\epsilon_0}^*}{\sqrt{\epsilon_1}^*} E_{2n}(M_1) = E_x^p(M) - A_0 \int_{S_1} [G_{p2}^x(R_1) + G_{s2}^x(R_2)] E_{2n}(M_1) dx_1 dz_1 \\ + A_0 \int_{S_1} [G_{p2}^z(R_1) - G_{s2}^z(R_2)] E_{2z}(M_1) dx_1 dz_1 \quad (\text{II-24})$$

$$\frac{\sqrt{\epsilon_2}^*}{\sqrt{\epsilon_1}^*} E_{2z}(M_1) = E_z^p(M) + A_0 \int_{S_1} [G_{p2}^x(R_1) - G_{s2}^x(R_2)] E_{2x}(M_1) dx_1 dz_1 \\ - A_0 \int_{S_1} [G_{p2}^z(R_1) - G_{s2}^z(R_2)] E_{2z}(M_1) dx_1 dz_1 \quad (\text{II-25})$$

## V) RESOLUTIONS DU SYSTEME D'EQUATIONS INTEGRALES

### V.1) Méthode de résolution

(II-23) et (II-24) constituent un système de deux équations intégrales de FREDHOLM que nous devons résoudre pour connaître le champ en tout point de l'anomalie.

Pour ce faire, nous allons transformer ce système d'équations intégrales en un système d'équations algébriques, en utilisant la méthode des moments par la technique point-segment.

Cette méthode déjà décrite dans le premier chapitre, consiste à diviser la section droite de l'anomalie  $S$  en  $N$  éléments de surface dont les dimensions sont tellement petites que l'on puisse supposer que dans chacun d'eux le champ électrique est constant, et a pour valeur celle prise au milieu de l'élément de surface considéré.

### V.2) Discrétisation des équations de FREDHOLM

Nous considérons une anomalie de surface  $S$  que nous discrétisons en  $N$  éléments carrés semblables  $S_n$  de côté  $\Delta$ , comme le montre la figure ci-dessous :

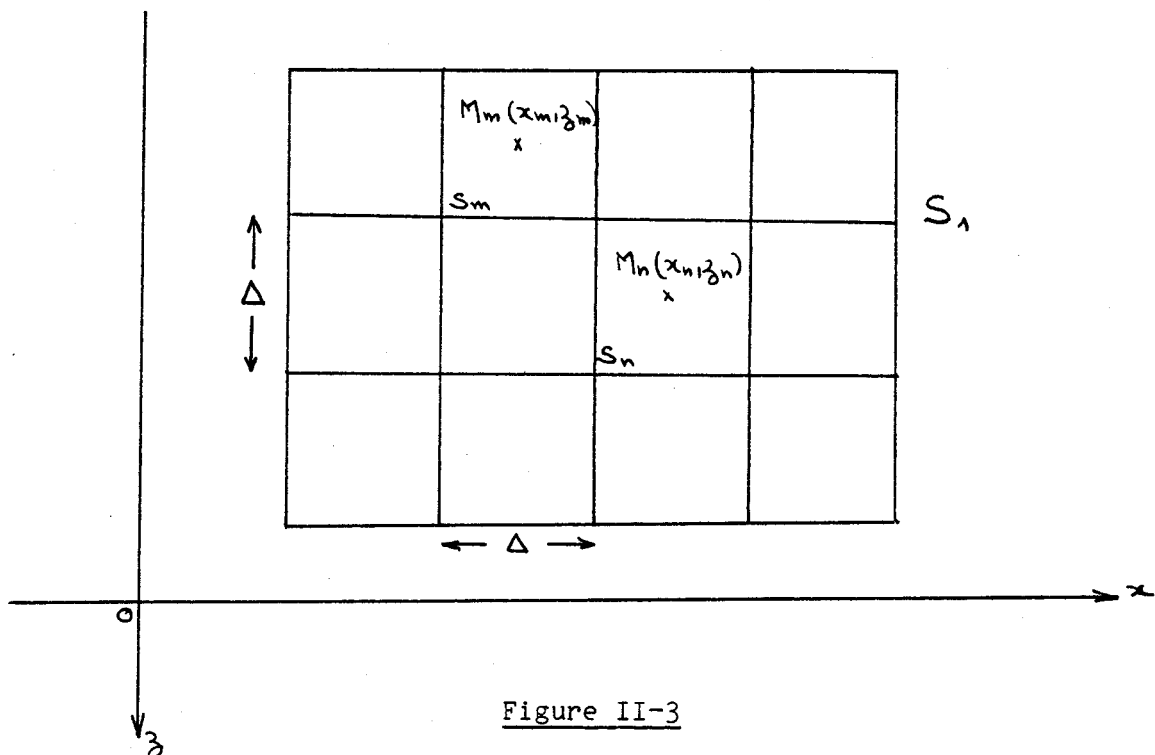


Figure II-3

Nous avons  $N_x$  tranches verticales et  $N_z$  tranches horizontales.

Dans ces conditions, les formules (II-24) et (II-25) du champ à l'intérieur de l'anomalie deviennent, pour un point  $M_m$  représentant le centre de la maille indiquée par  $m$  :

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_2^*}{\nabla_1^*} E_{2x}(M_m) = E_x^P(M_m) - A_0 \sum_{n=1}^N E_{2x}(M_n) \int_{S_n} [G_{px}^x(R_{1mn}) + G_{sx}^x(R_{2mn})] dS \\ + A_0 \sum_{n=1}^N E_{2z}(M_n) \int_{S_n} [G_{pz}^z(R_{1mn}) - G_{sz}^z(R_{2mn})] dS \end{aligned} \quad (\text{II-26})$$

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_2^*}{\nabla_1^*} E_{2z}(M_m) = E_{2z}^P(M_m) + A_0 \sum_{n=1}^N E_{2x}(M_n) \int_{S_n} [G_{px}^z(R_{1mn}) - G_{sx}^z(R_{2mn})] dS_1 \\ - A_0 \sum_{n=1}^N E_{2z}(M_n) \int_{S_n} [G_{pz}^z(R_{1mn}) - G_{sz}^z(R_{2mn})] dS_1 \end{aligned} \quad (\text{II-27})$$

avec :

$$R_{1mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (z_m - z_n)^2}$$

distance entre les points  $M_m$  et  $M_n$

et :

$$R_{2mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (z_m + z_n)^2}$$

distance entre  $M_m$  et l'image de  $M_n$ .

Nous avons montré en annexe que parmi les intégrales figurant dans les formules (II-26) et (II-27), certaines ont pu être calculées analytiquement, d'autres ont été ramenées à des intégrales simples.

En utilisant ces résultats de l'annexe, nous aboutissons aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_2^*}{\nabla_1^*} E_{22}(M_m) = & E_{22}^p(M_m) - A_0 \sum_{n=1}^{\infty} E_{22}(M_n) \left\{ - \int_0^{+\infty} \frac{\mu_1 - \mu_0}{\lambda} \frac{\mu_0 \mu_1 + \lambda^2}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} e^{\mu_1(z_m + z_n)} \right. \\ & \cdot \left[ e^{\mu_1 \frac{\Delta}{2}} - e^{-\mu_1 \frac{\Delta}{2}} \right] \cdot \left[ \sin \lambda \left( x_m - x_n - \frac{\Delta}{2} \right) - \sin \lambda \left( x_m - x_n + \frac{\Delta}{2} \right) \right] d\lambda \\ & + \gamma_1 \int_{x_n - \frac{\Delta}{2}}^{x_n + \frac{\Delta}{2}} \left[ \frac{z_m - z_n - \Delta/2}{R_{11}} K_1(\gamma_1 R_{11}) - \frac{z_m - z_n + \Delta/2}{R_{12}} K_1(\gamma_1 R_{12}) \right] dx_1 \left. \right\} \\ & + A_0 \sum_{n=1}^{\infty} E_{22}(M_n) \left\{ - \int_0^{+\infty} \frac{\gamma_0^2 \mu_1 - \gamma_1^2 \mu_0}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} e^{\mu_1(z_m + z_n)} \right. \\ & \cdot \left[ e^{\mu_1 \frac{\Delta}{2}} - e^{-\mu_1 \frac{\Delta}{2}} \right] \left[ \cos \lambda \left( x_m - x_n - \frac{\Delta}{2} \right) - \cos \lambda \left( x_m - x_n + \frac{\Delta}{2} \right) \right] d\lambda \\ & + \left[ K_0(\gamma_1 R'_{11}) - K_0(\gamma_1 R'_{12}) - K_0(\gamma_1 R'_{21}) + K_0(\gamma_1 R'_{22}) \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\nabla_2^*}{\nabla_1^*} E_{22} (M_m) = E_2^P (M_m) + A_0 \sum_{n=1}^N E_{2x} (M_n) \left\{ - \int_0^{+\infty} \frac{\mu_0 \mu_1 + \lambda^2}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} e^{\mu_1 (z_m + z_n)} \right.$$

$$\cdot [ e^{\mu_1 \frac{\Delta}{2}} - e^{-\mu_1 \frac{\Delta}{2}} ] [ \cos \lambda (x_m - x_n - \frac{\Delta}{2}) - \cos \lambda (x_m - x_n + \frac{\Delta}{2}) ] d\lambda$$

$$\left. + [ K_0 (\gamma_1 R_{11}') - K_0 (\gamma_1 R_{12}') - K_0 (\gamma_1 R_{21}') + K_0 (\gamma_1 R_{22}') ] \right\}$$

$$+ A_0 \sum_{n=1}^N E_{2z} (M_n) \left\{ - \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\mu_1^2} \frac{\gamma_0^2 \mu_1 - \gamma_1^2 \mu_0}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} e^{\mu_1 (z_m + z_n)} \right.$$

$$\cdot [ e^{\mu_1 \frac{\Delta}{2}} - e^{-\mu_1 \frac{\Delta}{2}} ] [ \sin \lambda (x_m - x_n - \frac{\Delta}{2}) - \sin \lambda (x_m - x_n + \frac{\Delta}{2}) ] d\lambda$$

$$\left. - \gamma_1 \int_{z_n - \frac{\Delta}{2}}^{z_n + \frac{\Delta}{2}} \left[ \frac{x_m - x_n - \frac{\Delta}{2}}{R_{11}''} K_1 (\gamma_1 R_{11}'') - \frac{x_m - x_n + \frac{\Delta}{2}}{R_{12}''} K_1 (\gamma_1 R_{12}'') \right] \frac{dz}{z} \right\}$$

(II-29)

$K_1$  est la fonction de Kelvin d'indice 1.

$$R_{11}' = \sqrt{(x_m - x_n - \frac{\Delta}{2})^2 + (z_m - z_n - \frac{\Delta}{2})^2}$$

$$R_{12}' = \sqrt{(x_m - x_n + \frac{\Delta}{2})^2 + (z_m - z_n - \frac{\Delta}{2})^2}$$

$$R_{21}' = \sqrt{\left(x_m - x_n - \frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(z_m - z_n + \frac{\Delta}{2}\right)^2}$$

$$R_{22}' = \sqrt{\left(x_m - x_n + \frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(z_m - z_n + \frac{\Delta}{2}\right)^2}$$

$$R_{11}'' = \sqrt{\left(x_n - x_1\right)^2 + \left(z_m - z_n - \frac{\Delta}{2}\right)^2}$$

$$R_{12}'' = \sqrt{\left(x_n - x_1\right)^2 + \left(z_m - z_n + \frac{\Delta}{2}\right)^2}$$

$$R_{11}''' = \sqrt{\left(x_m - x_n - \frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(z_m - z_1\right)^2}$$

$$R_{12}''' = \sqrt{\left(x_m - x_n + \frac{\Delta}{2}\right)^2 + \left(z_m - z_1\right)^2}$$

et le champ émis par les lignes de dipôles a pour expression :

$$E_x^p(M) = - P_1 \frac{\gamma_1}{r_1^3} \left[ \left\{ (z+h)^2 - (x-x_{emet})^2 \right\} K_1(\gamma_1 r_1) + \gamma_1 (z+h)^2 r_1 K_0(\gamma_1 r_1) \right]$$

$$- P_1 \int_0^{+\infty} u_1 (u_1 - u_0) \frac{u_0 u_1 + \lambda^2}{\gamma_0^2 u_1 + \gamma_1^2 u_0} e^{u_1(z-h)} \cos \lambda (x - x_{emet}) dA$$



$$E_z^P(M) = P_1 \frac{\gamma_1}{r_1^3} (x - x_{emet}) (z + h) \left[ 2 K_1(\gamma_1 r_1) + \gamma_1 r_1 K_0(\gamma_1 r_1) \right]$$

$$- P_1 \int_0^{+\infty} \lambda (\mu_1 - \mu_0) \frac{\mu_0 \mu_1 + \lambda^2}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} e^{-\mu_1 (z-h)} \frac{1}{r_1 \lambda (x - x_{emet})} d\lambda \quad (II-31)$$

avec

$$r_1 = \sqrt{(x - x_{emet})^2 + (z + h)^2}$$

$x_{emet}$  étant l'abscisse de l'émetteur.

Le calcul du champ dans chacune des N mailles de l'anomalie nous donne un système linéaire de 2N équations à 2N inconnues. La résolution de ce système nous permettra d'avoir la valeur du champ au centre de chaque surface élémentaire de l'anomalie.

Pour simplifier la notation, nous écrirons ce système sous forme matricielle.

### V.3) Mise sous forme matricielle du système

Les équations (II-28) et (II-29) peuvent être écrites sous forme :

$$\frac{\nabla_z^*}{\nabla_x^*} E_{2x}(M_m) = E_x^P(M_m) + A_0 \sum_{n=1}^N E_{2x}(M_n) \left[ I_{1m}^n + I_{2n}^n \right] + A_0 \sum_{n=1}^N E_{2z}(M_n) \left[ I_{3m}^n + I_{4n}^n \right] \quad (II-32)$$

$$\frac{\nabla_z^*}{\nabla_x^*} E_{2z}(M_m) = E_z^P(M_m) + A_0 \sum_{n=1}^N E_{2x}(M_n) \left[ I_{5m}^n + I_{4n}^n \right] + A_0 \sum_{n=1}^N E_{2z}(M_n) \left[ I_{7m}^n - I_{8n}^n \right] \quad (II-33)$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\frac{\nabla_2^*}{\nabla_1^*} \vec{E} = \vec{E}^p + A_0 [M] \vec{E}$$

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{x2} \\ \vdots \\ E_{xN} \\ E_{z1} \\ E_{z2} \\ \vdots \\ E_{zN} \end{bmatrix}$$

matrice colonne de 2N éléments représentant le champ électrique inconnu.

$E^p$  : champ électrique rayonné par l'émetteur dans l'anomalie qui aura la même forme matricielle que E.

M : matrice 2N x 2N, représentant les effets d'une maille sur une autre. Elle se présente sous forme de 4 blocs sous matrices :

$M_{xx}$	$M_{xz}$
$M_{zx}$	$M_{zz}$

dont les éléments sont une somme ou une différence des éléments  $I_m^n$

$$\begin{aligned} M_{xx}(n,m) &= I_{1m}^n + I_{2m}^n \\ M_{xz}(n,m) &= I_{3m}^n + I_{4m}^n \\ M_{zx}(n,m) &= I_{5m}^n + I_{4m}^n \\ M_{zz}(n,m) &= I_{7m}^n - I_{8m}^n \end{aligned}$$

La décomposition ainsi faite nous permettra de minimiser énormément le temps de calcul des éléments de la matrice [M].

La matrice [M] peut être alors mise sous forme :

$I_{1m}^n + I_{2m}^n$	$I_{3m}^n + I_{4m}^n$
$I_{5m}^n + I_{6m}^n$	$I_{7m}^n - I_{8m}^n$

#### V.4) Optimisation du calcul de la matrice

Dans le calcul des éléments de la matrice [M], il y a plusieurs formes de symétrie et d'antisymétrie que nous nous proposons de déterminer afin de minimiser le temps de calcul.

Remarquons tout d'abord qu'en intervertissant les rôles de m et n dans les formules (II-28) et (II-29), les sous-matrices [I<sub>1</sub>], [I<sub>2</sub>], [I<sub>4</sub>], [I<sub>7</sub>] et [I<sub>3</sub>] sont symétriques et que les sous-matrices [I<sub>3</sub>] et [I<sub>5</sub>] sont antisymétriques.

Nous ne calculerons donc que la moitié des éléments des sous-matrices.

En découpant l'anomalie en N<sub>Z</sub> tranches horizontales, on peut montrer que chacune des sous-matrices [I<sub>k</sub>] peut se mettre sous forme de matrice de N<sub>Z</sub> x N<sub>Z</sub> blocs [t<sub>ij</sub>] correspondant à l'effet de la tranche i sur la tranche j.

tranche I
tranche II
tranche III

$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$
	$t_{22}$	$t_{23}$
		$t_{33}$

Ainsi nous pouvons remarquer que pour les sous-matrices  $[I_1], [I_2], [I_7]$  et  $[I_8]$ , les blocs  $[t_{ij}]$  sont symétriques, alors qu'ils sont antisymétriques pour les sous-matrices  $[I_3], [I_4]$  et  $[I_5]$ . Nous ne calculerons donc que la moitié des éléments de chaque bloc  $[t_{ij}]$ .

De plus, l'effet d'une tranche  $i$  sur une tranche  $j$  est le même que celui de la tranche  $i+1$  sur la tranche  $j+1$ , pour les sous-matrices  $[I_2], [I_4]$  et  $[I_5]$ . Il suffit donc de calculer l'effet d'une tranche sur elle-même, et sur toutes les autres, et en déduire tous les éléments de la sous-matrice.

Par contre cette propriété n'est pas vérifiée par les autres sous-matrices. Il faudra donc calculer l'effet de chaque tranche sur elle-même et sur toutes les autres. Néanmoins, nous pouvons remarquer que l'égalité entre deux blocs  $[t_{ij}]$  et  $[t_{i'j'}]$  est possible si  $i+j$  est égal à  $i'+j'$ .

Nous ne calculerons donc que l'effet de la première tranche sur toutes les tranches, et de toutes les autres sur la dernière.

Enfin pour la matrice  $[I_4]$ , l'effet d'une tranche sur elle-même est nul.

Il en est de même si on avait découpé l'anomalie en  $N_x$  tranches verticales. Donc l'effet d'un élément sur lui-même ou sur un autre élément appartenant à la même tranche verticale ou horizontale est nul.

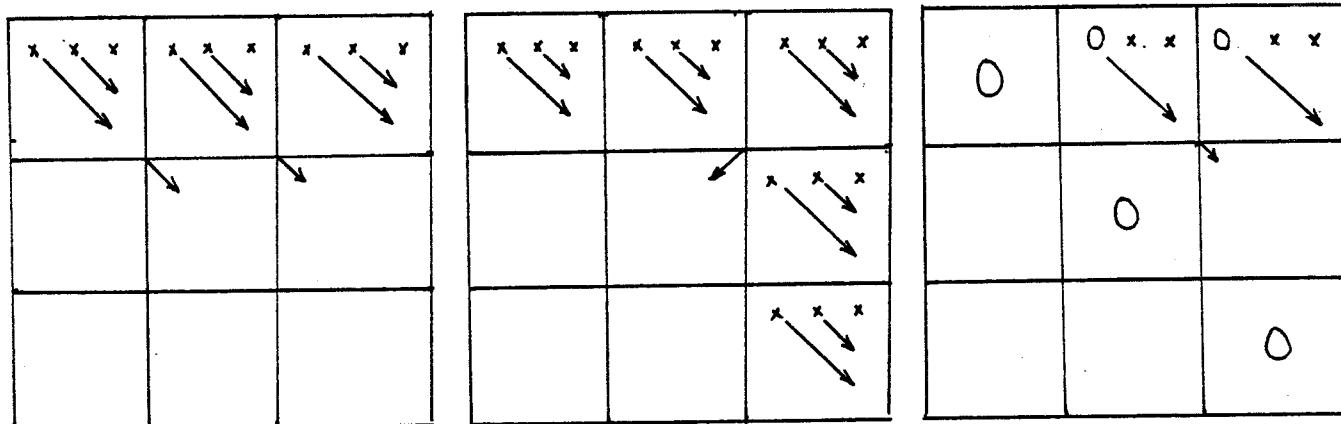
Une dernière remarque, à l'intérieur de chaque bloc,  $t_{ij} = t_{i+1,j+1}$ .

En résumé :

Pour compléter les sous matrices  $[I_1]$   $[I_3]$   $[I_5]$  ou  $[I_7]$ , il faut calculer la première ligne de chaque bloc  $[t_{1j}]_{j=1,Nz}$  et la première ligne de chaque bloc  $[t_{iNz}]_{i=1,nz}$ .

Pour compléter les sous-matrices  $[I_2]$  et  $[I_8]$  il suffit de calculer la première ligne de la sous-matrice.

Enfin pour compléter  $[I_4]$ , il suffit de calculer l'effet d'une maille sur toutes les autres qui ne se trouvent ni dans sa tranche verticale, ni dans sa tranche horizontale.



$[I_2]$  et  $[I_8]$   
symétrique par bloc  
symétrique globalement

$[I_1]$  et  $[I_7]$   
symétrique globalement  
 $[I_3]$  et  $[I_5]$   
antisymétrique globalement,  
les quatre sont symétriques  
par bloc

$[I_4]$  anti-  
symétrique  
par bloc  
symétrique  
globalement

## VI) ETUDE PARAMETRIQUE

### VI.1) Influence de la distance sol-anomalie

La Planche II.1 représente la variation du champ vertical re-rayonné par une anomalie située à une distance  $D$  de 80 m ou à une distance  $D \rightarrow \infty$ .

Le champ électrique incident est vertical, d'amplitude 1 V/m et se propage le long de l'axe des  $x$  positifs. La conductivité du sol est de  $10^{-3}$  S/m, celle de l'anomalie de  $10^{-4}$  S/m et la fréquence de 100 kHz.

De plus, comme la distance  $D$  est un paramètre, le point de réception est toujours situé à la même hauteur que le centre de l'anomalie.

On remarque que les courbes correspondant à ces deux valeurs de  $D$  sont pratiquement confondues, l'influence du sol étant négligeable.

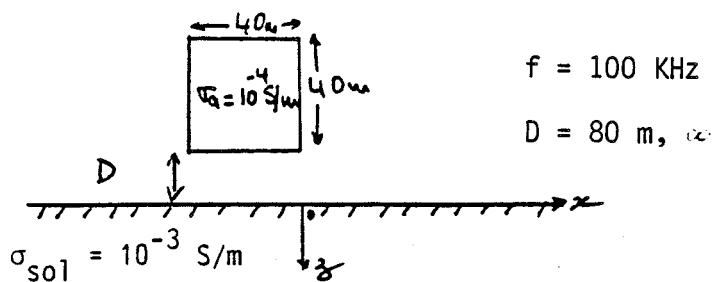
Les courbes tracées sur la Planche II.2 correspondent aux valeurs de  $D$  suivantes : 80 m, 10 m et 0 m. Elles montrent que la présence du sol devient critique pour  $D < 10$  m.

Lorsque l'anomalie est "posée" sur le sol, la Planche II.3 a pour but de mettre en évidence l'influence du découpage de l'anomalie. Dans ce cas, comme dans tous les exemples qui seront présents ultérieurement, le champ électrique re-rayonné et le champ électrique total sont calculés à la surface du sol. Pour les conductivités et fréquences envisagées, on peut estimer que la convergence est atteinte lorsque l'hétérogénéité est divisée en  $6^4$  mailles carrées ayant donc chacune une dimension de 5 m x 5 m.

### VI.2) Influence de la hauteur de l'anomalie

Les Planches II.4 à II.5 représentent la variation du champ pour une largeur d'anomalie de 40 m et pour une conductivité valant respectivement  $10^{-3}$  S/m et  $10^{-4}$  S/m. Les courbes ont été tracées pour différentes valeurs de hauteur d'obstacle : 10 m, 20 m et 40 m.

Influence de la distance sol - anomalie



$|E_{\text{tot}}| \text{ (V/m)}$

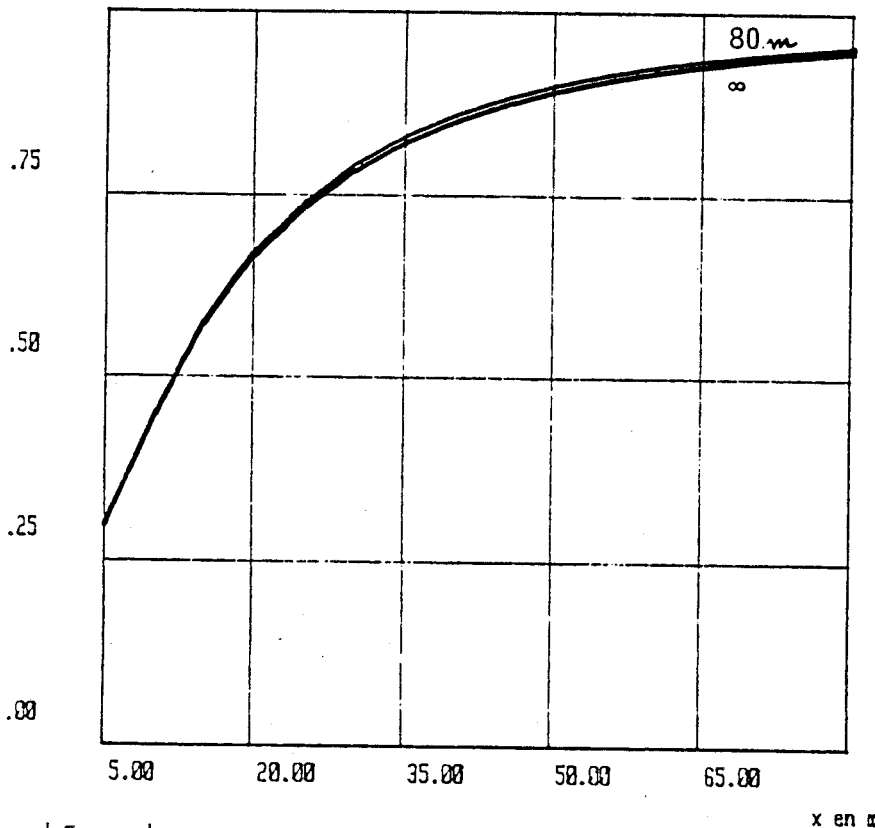
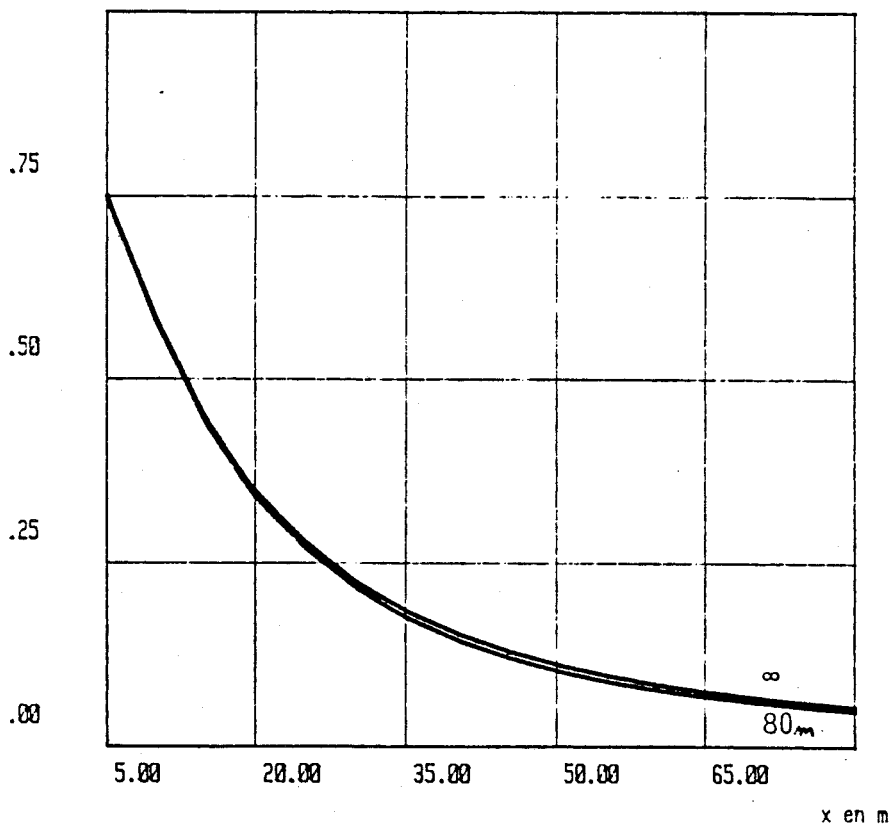
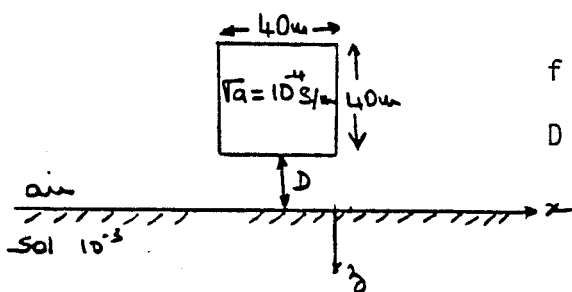


Planche II-1

$|E_{\text{eray}}| \text{ (V/m)}$



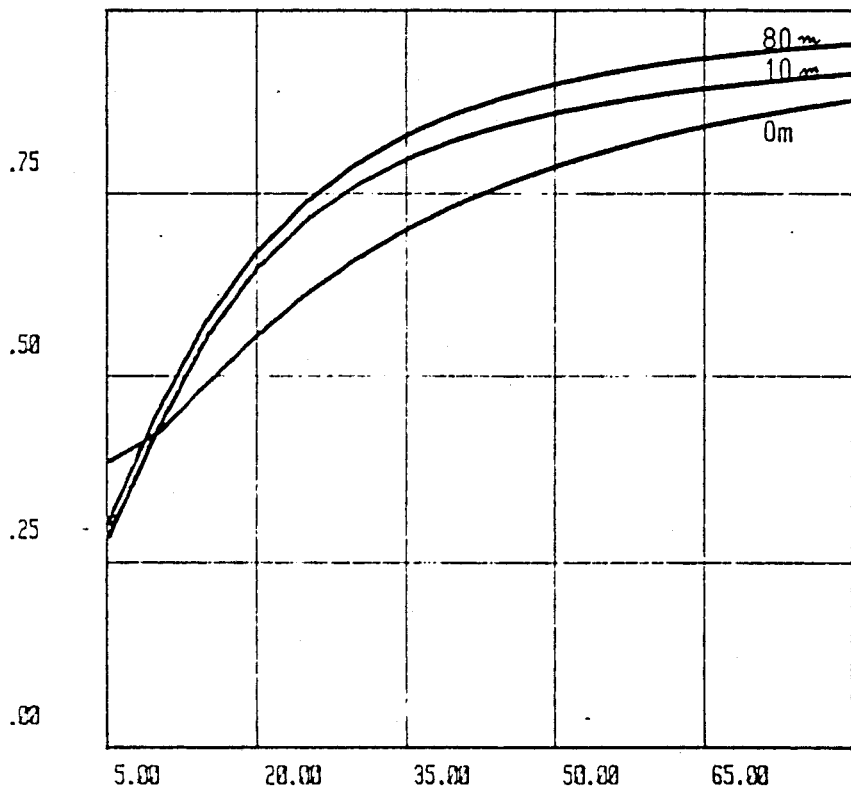
Influence de la distance sol - anomalie



$f = 100 \text{ KHz}$

$D = 0, 10, 80 \text{ m}$

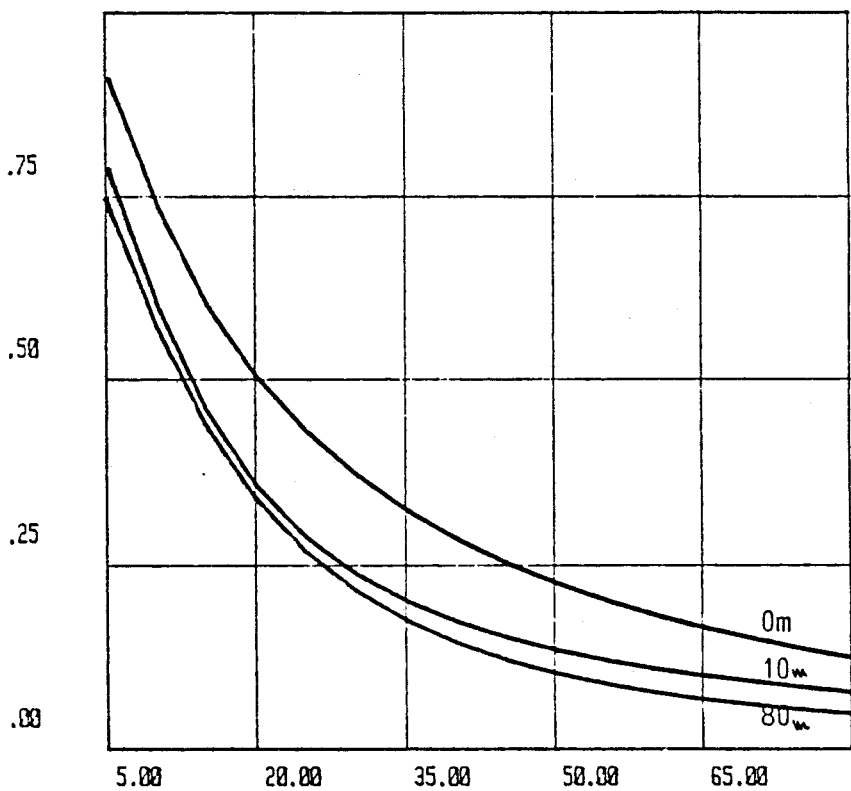
$|E_{\text{tot}}| \text{ (V/m)}$



x en m

Planche II-2

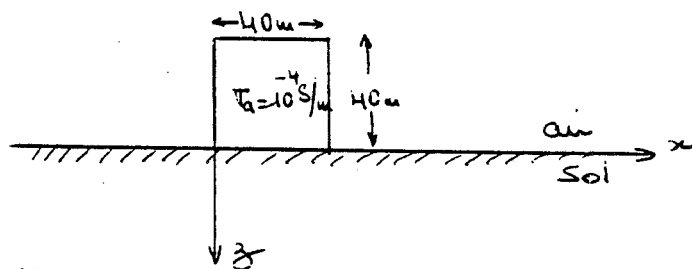
$|E_{\text{eray}}| \text{ (V/m)}$



x en m

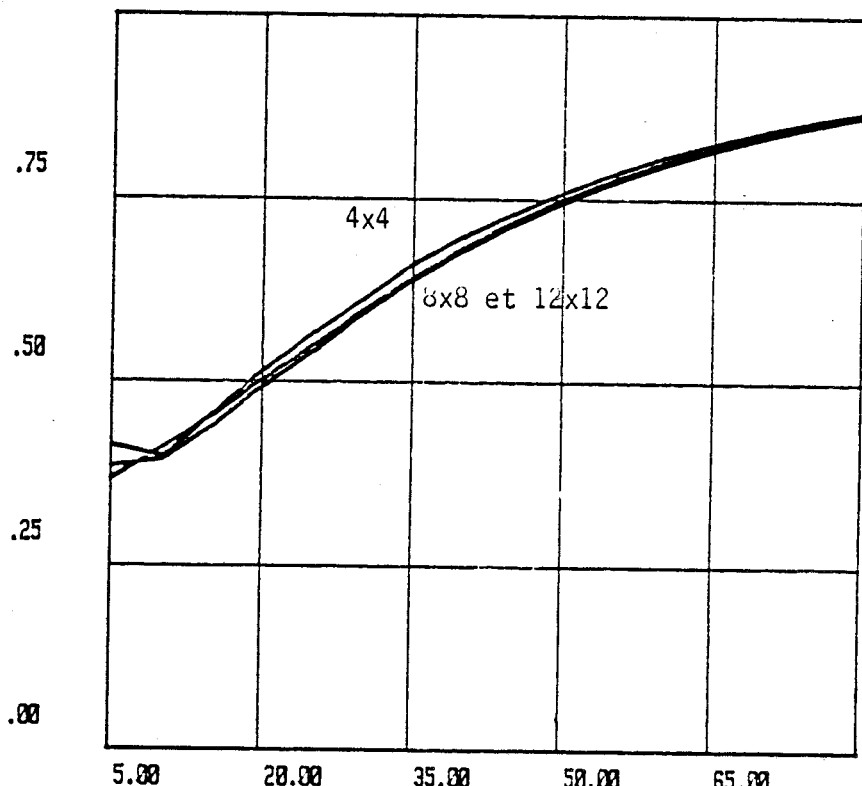


Etude de la convergence



f=100 KHz

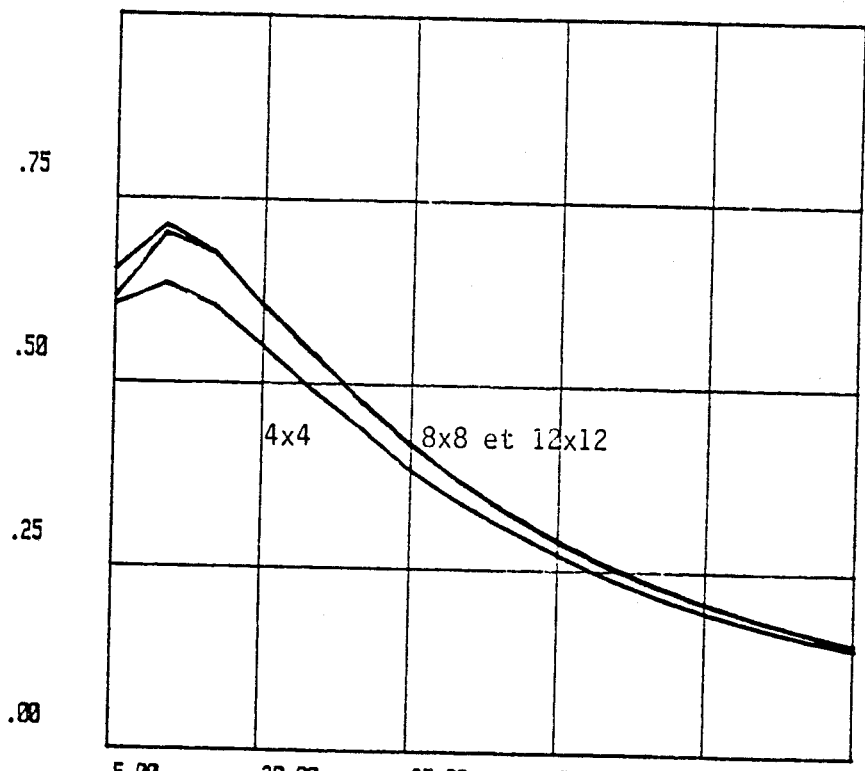
| E\_tot | (V/m)



x (m)

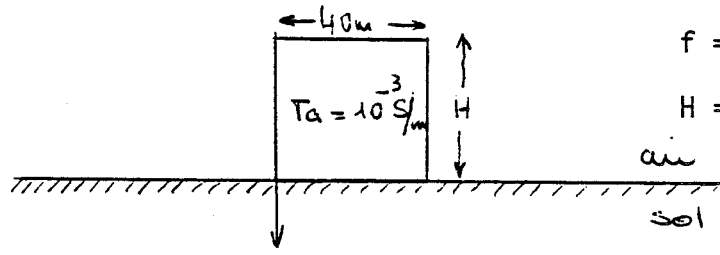
Planche II- 3

| E\_eray | (V/m)



x (m)

Influence de la hauteur



f = 100 KHz

H = 10, 20 et 40m

| Etot |  $\sqrt{m}$

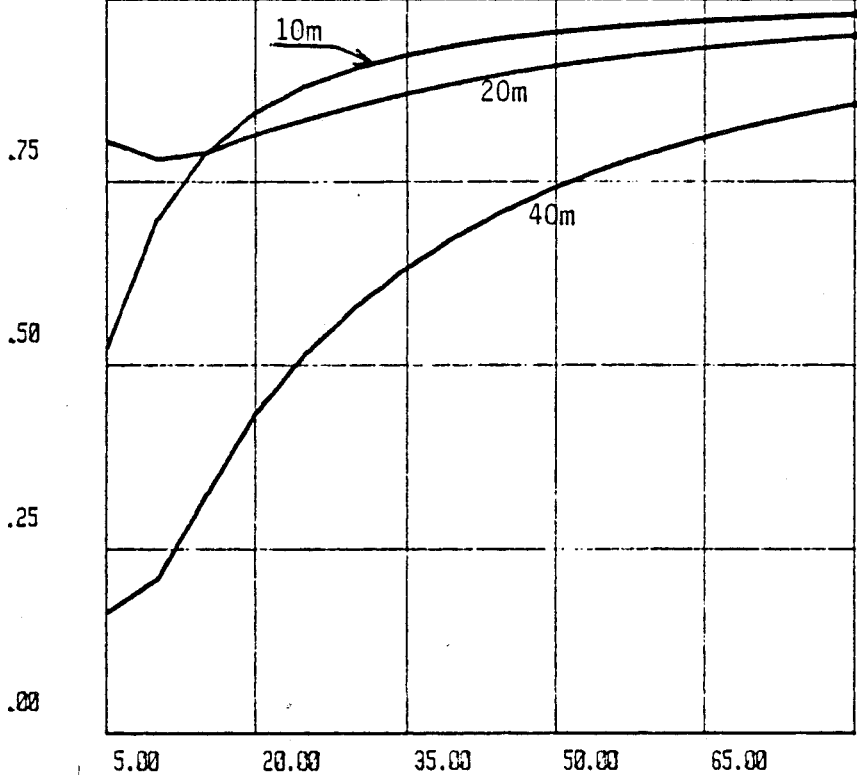
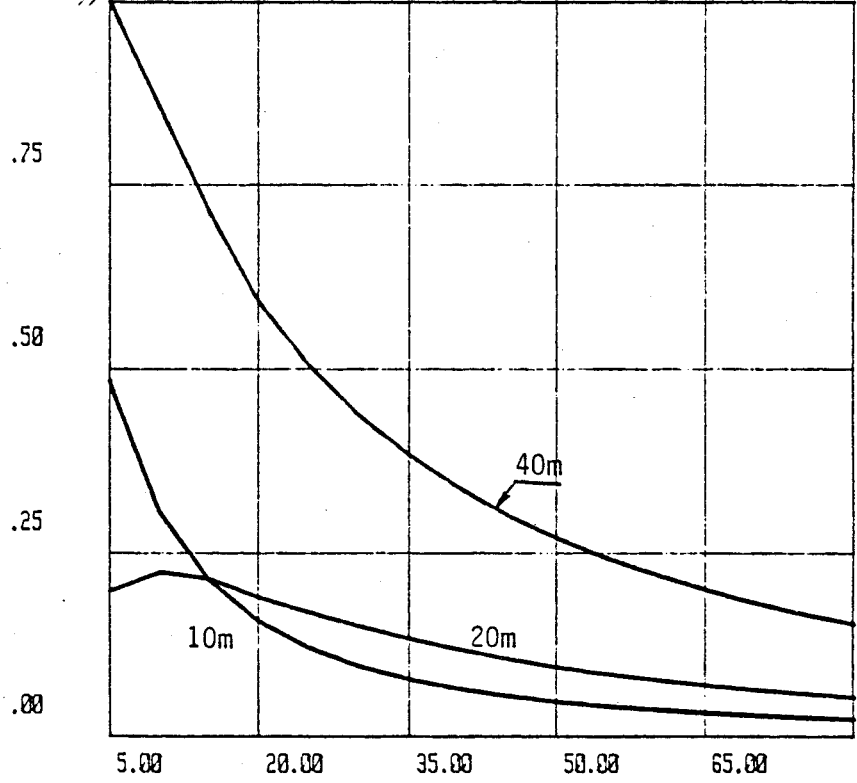


Planche II-4

| Eeray |  $\sqrt{m}$



x en m

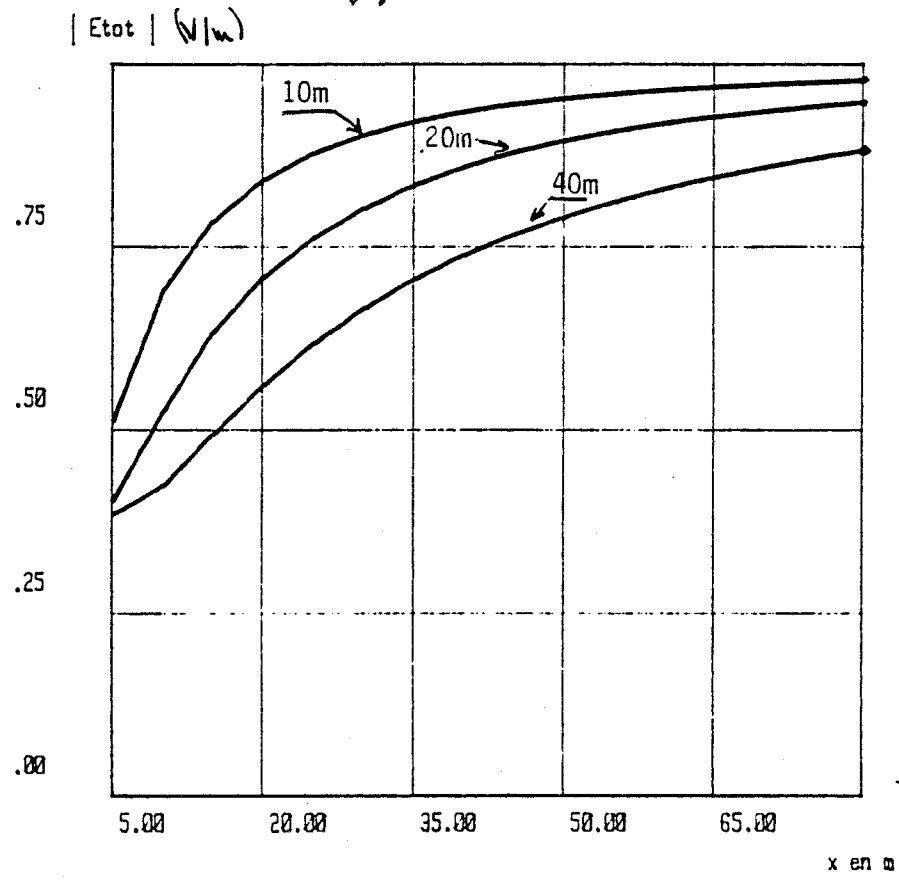
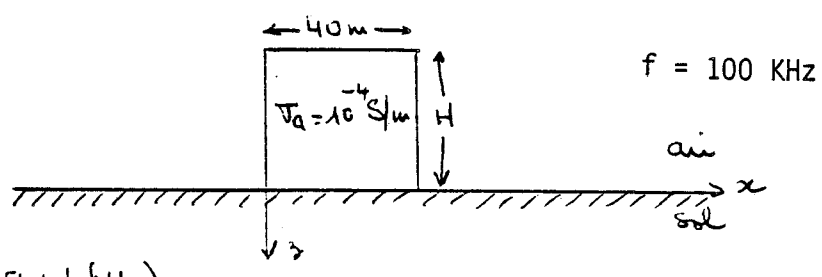
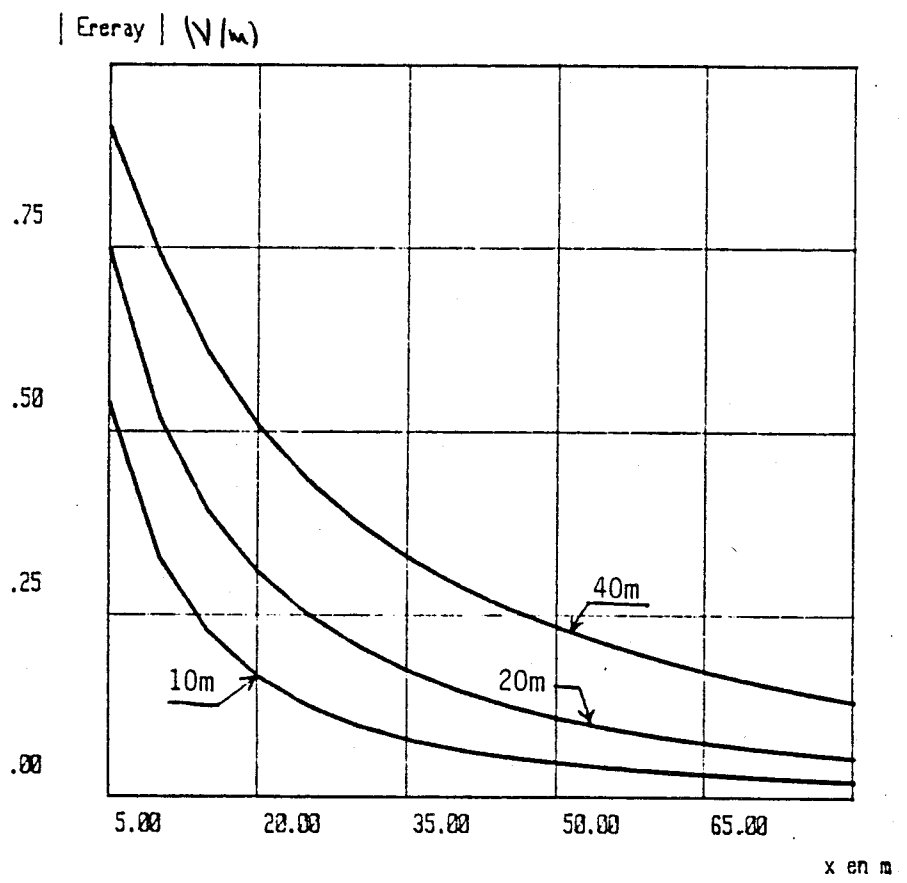


Planche II-5



On remarque qu'à une distance du bord de l'obstacle égale à deux fois sa hauteur, l'écart sur l'amplitude du champ total par rapport au champ sans obstacle, est inférieur à 20 %. Il faut cependant noter que les applications numériques faites avec ce modèle ont été limitées à des conductivités d'anomalie inférieures à  $10^{-3}$  S/m.

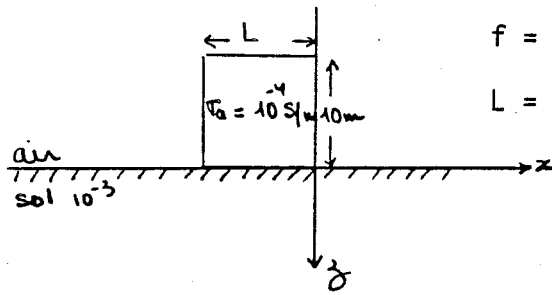
### **VI.3) Influence de la largeur de l'anomalie**

Sur les Planches II.6 à II.8, nous avons considéré successivement une hauteur d'obstacle H de 10 m, 20 m et 40 m, sa conductivité étant de  $10^{-4}$  S/m. Dans chaque cas, la largeur de l'anomalie a été introduite en paramètre et varie de 1 fois à 3 ou 4 fois la hauteur.

L'examen des courbes montre que la largeur de l'anomalie n'est pas critique puisque les différences entre les champs re-rayonnés restent faibles dès que la largeur de l'obstacle devient du même ordre de grandeur que sa hauteur.

### **VI.4) Influence de la conductivité de l'anomalie**

Pour un obstacle situé à la surface du sol, les résultats de l'étude paramétrique en fonction de la conductivité de l'obstacle sont donnés sur la Planche II.9. On s'est intéressé plus spécialement à l'amplitude du champ au voisinage et dans l'obstacle, le point d'observation se déplaçant ainsi de 40 m de part et d'autre du bord de l'anomalie. Nous remarquons que le champ total varie de façon importante lorsque la conductivité passe de  $10^{-6}$  S/m à  $10^{-4}$  S/m.



f = 100 KHz

L = 10, 20, 40m

| Etot | (V/m)

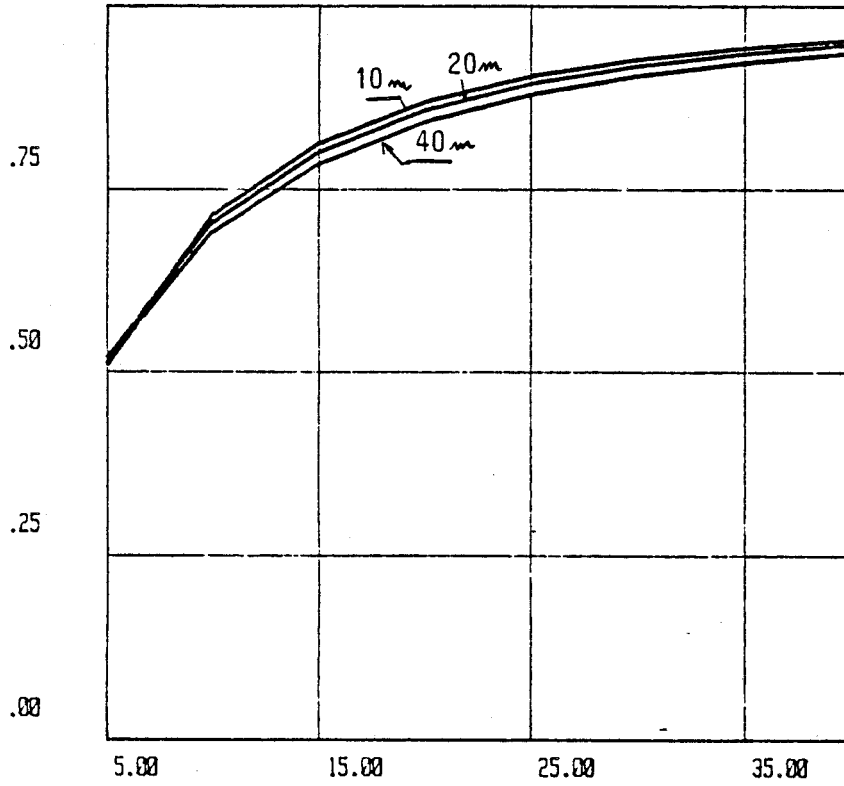
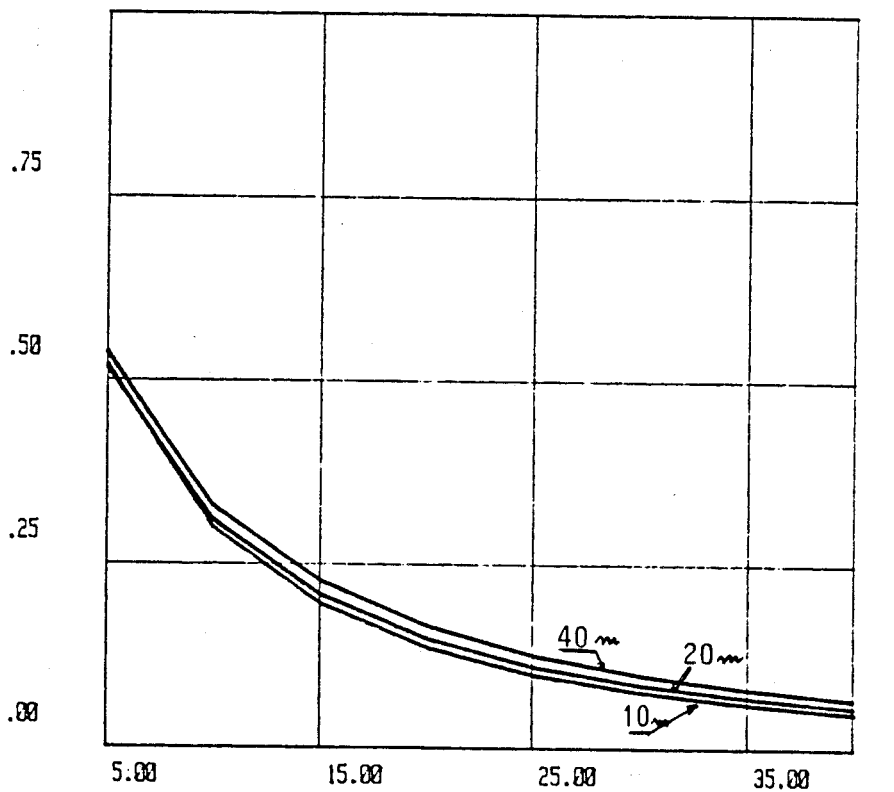
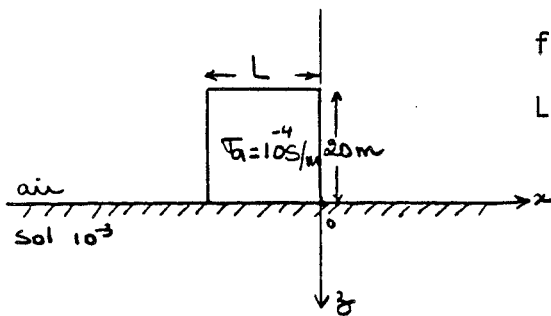


Planche II-6

| Eeray | (V/m)



Influence de la largeur de l'anomalie H = 20 m



f = 100 KHz

L = 20, 40, 80m

| Etot | (V/m)

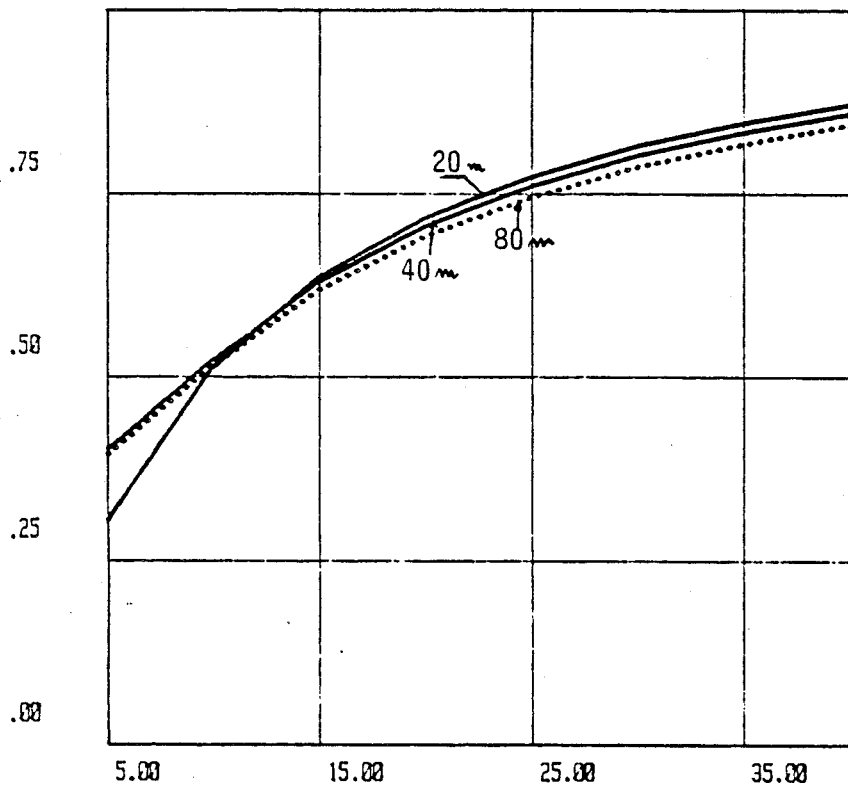
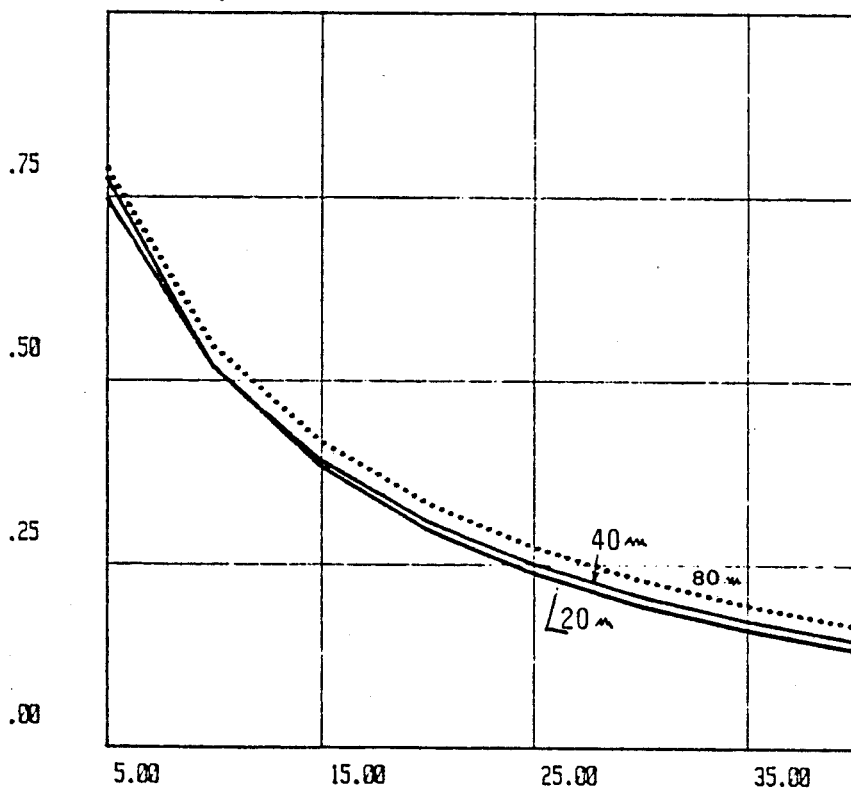
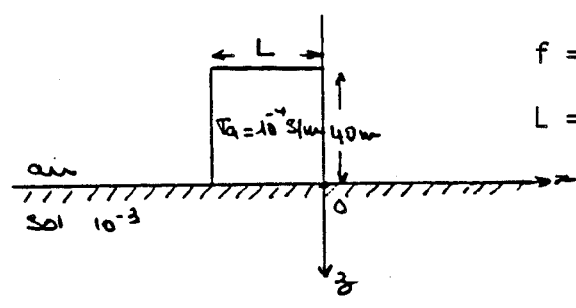


Planche II-7

| Eeray | (V/m)



Influence de la largeur de l'anomalie H = 40 m



f = 100 KHz

L = 40, 80, 120m

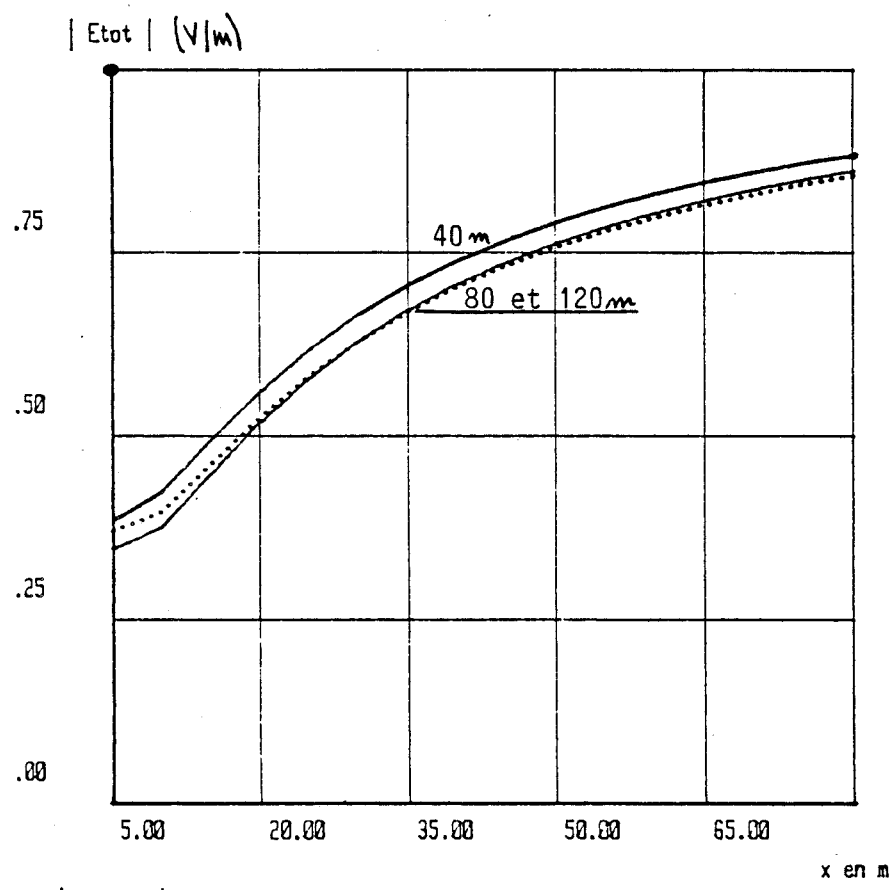
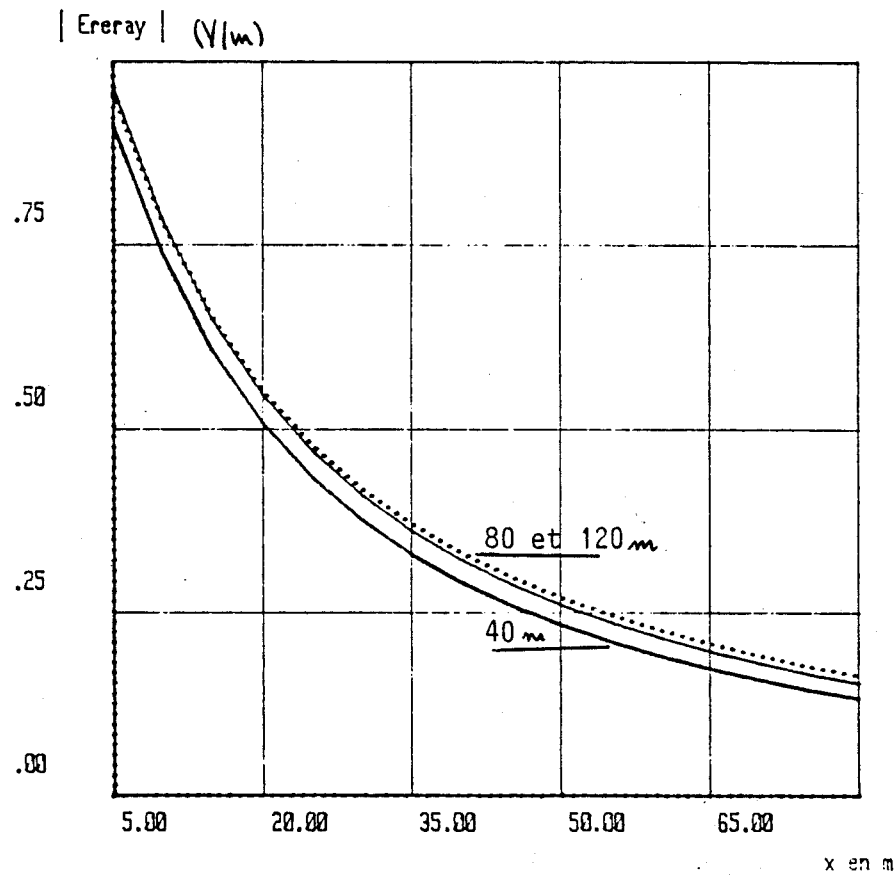


Planche II-8



Influence de la conductivité  $f = 100 \text{ kHz}$

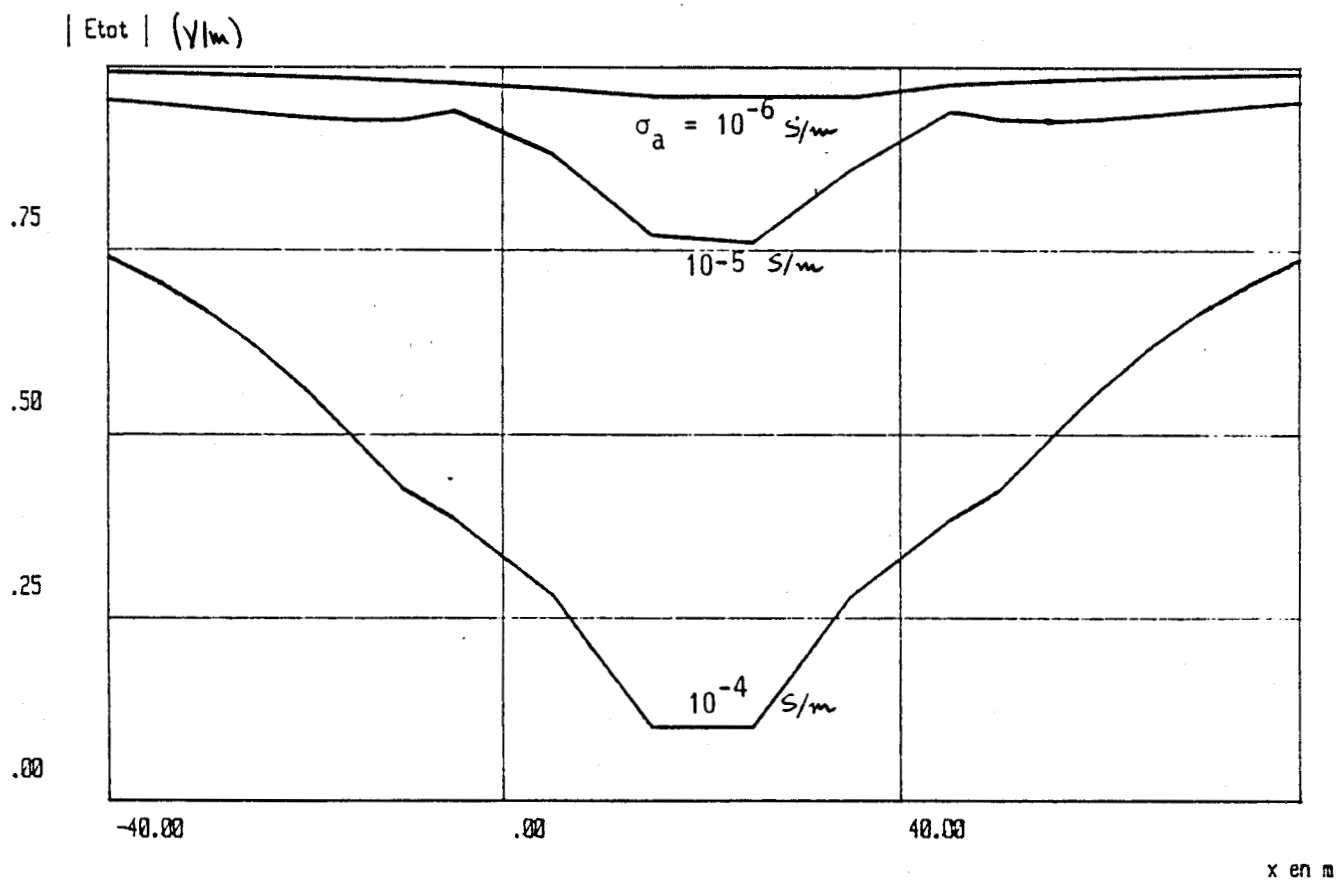
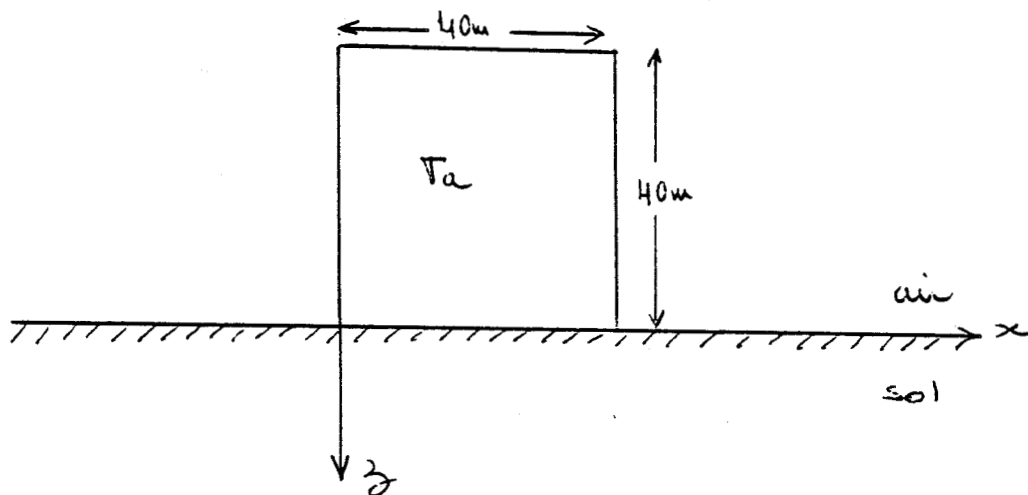


Planche II-9



## VII) CONCLUSION

Nous avons vu d'après cette étude paramétrique que la largeur de l'anomalie n'a pas une très grande influence sur l'amplitude du champ, tout au moins lorsque cette largeur est supérieure ou du même ordre de grandeur que la hauteur  $H$  de l'obstacle. Les calculs menés pour une fréquence de l'onde incidente de 100 kHz ont également montré que l'anomalie ne provoque une variation du champ supérieure ou égale à 20 % que si le point d'observation se situe à une distance d'un de ses bords inférieure à deux fois la hauteur  $H$ .

Une autre approche théorique développée dans le quatrième chapitre consiste à résoudre directement le problème à l'aide d'une méthode aux différences finies.

C H A P I T R E   I I I

ANOMALIE BIDIMENSIONNELLE ECLAIREE PAR UNE LIGNE DE DIPOLES

INFLUENCE D'UNE VALLEE

I) INTRODUCTION

Nous étudions dans ce chapitre les possibilités d'utiliser le modèle décrit précédemment pour étudier l'influence d'une vallée sur l'amplitude du champ électromagnétique. L'étude théorique sera détaillée car des simplifications vont pouvoir être introduites dans le modèle.

II) POTENTIEL DE HERTZ

II.1) Expression générale

On considère une anomalie bidimensionnelle de section droite rectangulaire, située à une distance  $D$  de la surface du sol.

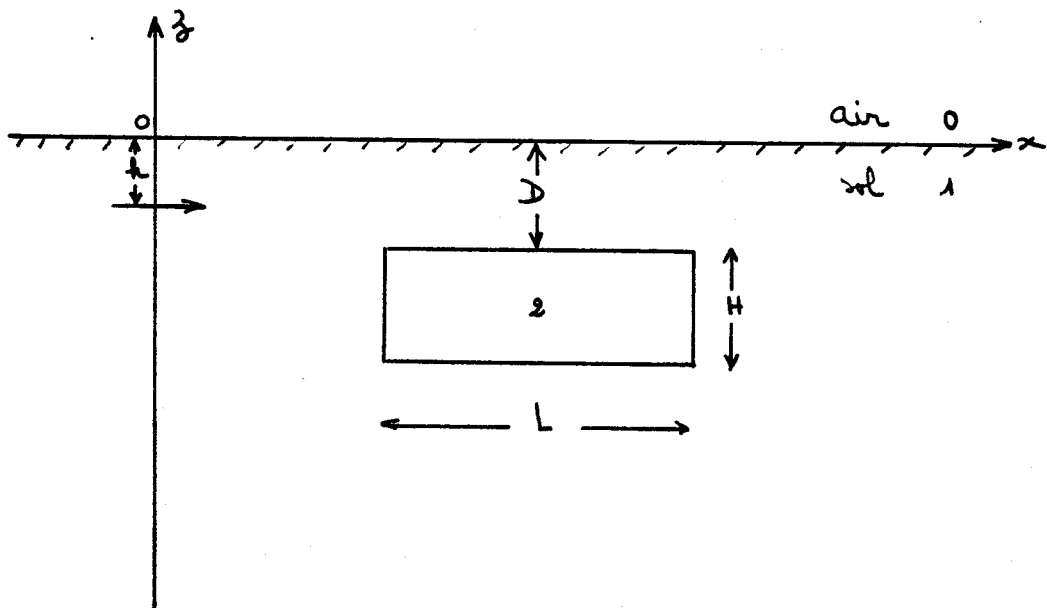


Figure III-1

Le milieu (0) étant l'air, et le milieu 1 étant le sol.

Nous rappelons que l'idée de base pour traiter la vallée est de considérer le milieu 2 comme étant une cavité et de faire tendre la distance D vers zéro.

Reprenons les expressions générales du potentiel de Hertz dans le milieu (1) et données par les formules (II-16) et (II-19) :

$$\begin{aligned} \Pi_{1x}(M) = & P_1 \int_0^{+\infty} \left[ e^{-\mu_1 |z+h|} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} e^{\mu_1(z-h)} \right] \frac{\cos \lambda x}{\mu_1} d\lambda \\ & + \frac{\nabla_2^* - \nabla_1^*}{2\pi \nabla_1^*} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{S_1} E_{2x}(M_1) \left[ e^{-\mu_1 |z-z_1|} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} e^{\mu_1(z+z_1)} \right] \\ & \cdot \frac{\cos \lambda (x-x_1)}{\mu_1} dx_1 dz_1 \end{aligned} \quad \text{(III-1)}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{1z}(M) = & -2P_1 \int_0^{+\infty} e^{\mu_1(z-h)} \lambda \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_0} \sin \lambda x d\lambda \\ & - \frac{\nabla_2^* - \nabla_1^*}{2\pi \nabla_1^*} \int_0^{+\infty} \int_{S_1} E_{2z}(M_1) d\lambda e^{\mu_1(z+z_1)} \frac{\mu_1 - \mu_0}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} \sin \lambda (x-x_1) dx_1 dz_1 d\lambda \\ & + \frac{\nabla_2^* - \nabla_1^*}{2\pi \nabla_1^*} \int_0^{+\infty} \int_{S_1} E_{2z}(M_1) \left[ e^{-\mu_1 |z-z_1|} + \frac{\gamma_0^2 \mu_1 - \gamma_1^2 \mu_0}{\gamma_0^2 \mu_1 + \gamma_1^2 \mu_0} e^{\mu_1(z+z_1)} \right] \\ & \cdot \frac{\cos \lambda (x-x_1)}{\mu_1} dx_1 dz_1 d\lambda \end{aligned} \quad \text{(III-2)}$$

avec

$$P_1 = \frac{I l}{2\pi \nabla_1^*}$$

II.2) Approximations : solution quasi-statique

Plaçons-nous maintenant dans le cas des basses fréquences pour lequel une solution quasi-statique des équations de propagation peut être obtenue. Si la distance horizontale émetteur-récepteur est beaucoup plus petite que la longueur d'onde dans l'air, on peut poser  $\gamma_0 = 0$  soit  $u_0 = \lambda$  dans les équations précédentes.

Il en résulte alors de nouvelles formes pour le potentiel de Hertz et nous obtenons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \Pi_{12}(M) = & P_1 \int_0^{+\infty} \left[ e^{-u_1(z+h)} + \frac{u_1 - \lambda}{u_1 + \lambda} \right] e^{u_1(z-h)} \frac{\cos(\lambda x)}{u_1} d\lambda \\ & + \frac{\sigma_2^* - \sigma_1^*}{2\pi\sigma_1^*} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{S_1} E_{2z}(M_h) \left[ e^{-u_1(z-z_1)} + e^{u_1(z+z_1)} \frac{u_1 - \lambda}{u_1 + \lambda} \right] \\ & \cdot \frac{\cos \lambda(x-x_1)}{u_1} dx, dz_1 \end{aligned} \quad \text{(III-3)}$$

et

$$\begin{aligned} \Pi_{12}(M) = & \frac{2P_1}{\gamma_1^2} \int_0^{+\infty} e^{u_1(z-h)} (1-u_1) \sin(\lambda x) d\lambda \\ & + \frac{\sigma_2^* - \sigma_1^*}{2\pi\sigma_1^*} \frac{1}{\gamma_1^2} \int_0^{+\infty} \int_{S_1} E_{2z}(M_h) 2 e^{u_1(z+z_1)} (1-u_1) \sin(\lambda(x-x_1)) dx, dz_1 d\lambda \\ & + \frac{\sigma_2^* - \sigma_1^*}{2\pi\sigma_1^*} \int_0^{+\infty} \int_{S_1} E_{2z}(M_h) \left[ e^{-u_1(z-z_1)} - e^{u_1(z+z_1)} \right] \frac{\cos \lambda(x-x_1)}{u_1} \frac{dx_1 dz_1 d\lambda}{u_1} \end{aligned} \quad \text{(III-4)}$$

### III) CHAMP ELECTRIQUE

#### III.1) Champ électrique à l'extérieur de l'anomalie

En appliquant la relation

$$\vec{E} = \text{rot rot } \vec{\pi}$$

aux équations (III-3) et (III-4), nous obtenons directement l'expression des composantes du champ électrique dans le sol et à l'intérieur de l'anomalie.

Après tout calcul fait, ces expressions sont données par les relations suivantes :

$$E_{1z}(M) = E_z^P(M) - A_0 \int_{S_1} E_{2z}(M_1) [G_{P_x^y}(M, M_1) + G_{S_x^y}(M, M_1)] dS_1$$

$$+ A_0 \int_{S_1} E_{2z}(M_1) [G_{P_z^x}(M, M_1) + G_{S_z^x}(M, M_1)^{(III-5)}] dS_1$$

et

$$E_{1z}(M) = E_z^P(M) + A_0 \int_{S_1} E_{2z}(M_1) [G_{P_x^z}(M, M_1) + G_{S_x^z}(M, M_1)] dS_1$$

(III-6)

$$- A_0 \int_{S_1} E_{2z}(M_1) [G_{P_z^z}(M, M_1) - G_{S_z^z}(M, M_1)] dS_1$$

où

$$A_0 = \frac{\nabla_2^* - \nabla_1^*}{2\pi \nabla_1^*}$$

Les différentes fonctions de Green G intervenant dans ces formules sont rassemblées dans le tableau III-7 suivant :

$$E_x^p(M) = -P_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} [k_0(\gamma_1 r_1) + k_0(\gamma_1 r_2)]$$

$$E_z^p(M) = P_1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} [k_0(\gamma_1 r_1) + k_0(\gamma_1 r_2)]$$

$$P_1 = \frac{I l}{2 \pi \gamma_1^*}$$

$$r_1 = \sqrt{(x^2) + (z+h)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + (z-h)^2}$$

h étant la profondeur de l'émetteur. Cette distance est positive.

$$G_{p_x}^x(M, M_1) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_0(\gamma_1 R_1))$$

$$G_{s_x}^x(M, M_1) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_0(\gamma_1 R_2))$$

$$G_{p_z}^x(M, M_1) = G_{p_x}^z(M, M_1) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} k_0(\gamma_1 R_1)$$

$$G_{s_z}^x(M, M_1) = G_{s_x}^z(M, M_1) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} k_0(\gamma_1 R_2)$$

$$G_{p_z}^z(M, M_1) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} k_0(\gamma_1 R_1)$$

$$G_{s_z}^z(M, M_1) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} k_0(\gamma_1 R_2)$$

$$R_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (z+z_1)^2}$$

$k_0$  étant la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0.

Nous remarquons que le champ électrique suivant la direction des x est composé de trois termes. Le premier représente le champ incident provenant de la source suivant la direction des x. Le second représente le rayonnement suivant x de la ligne de dipôles horizontaux équivalente à l'anomalie. Le troisième terme représente le rayonnement suivant z de la ligne de dipôles verticaux équivalente à l'anomalie. En effet nous avons vu dans le chapitre précédent que l'anomalie est équivalente à deux paires de lignes de dipôles électriques, l'une de dipôles verticaux, l'autre de dipôles horizontaux. Une remarque analogue pourrait être faite pour la composante suivant l'axe des z du champ électrique.

### III.2) Champ électrique à l'intérieur de l'anomalie

Les formules (III-5) et (III-6) étant générales, nous pouvons choisir le point M à l'intérieur de l'anomalie. Ce choix nous amènera à une équation intégrale de Fredholm.

Si on fait la même chose pour tous les points de l'anomalie, on obtient un système d'équations intégrales dont l'inconnue est le champ à l'intérieur de l'anomalie.

Le champ en un point M de l'anomalie est donné par :

$$\frac{\nabla_2^*}{\nabla_1^*} E_{2y}(M) = E_x^P(M) - A_0 \int_{S_1} E_{2x}(M_1) [G_{py}^y + G_{sy}^y] dS_1 - A_0 \int_{S_1} E_{2z}(M_1) [G_{pz}^x - G_{sz}^x]^{III-8) dS_1$$

et

$$\frac{\nabla_2^*}{\nabla_1^*} E_{2z}(M) = E_z^P(M) + A_0 \int_{S_1} E_{2x}(M_1) [G_{px}^z + G_{sx}^z] dS_1 - A_0 \int_{S_1} E_{2z}(M_1) [G_{pz}^z - G_{sz}^z] dS_1^{(III-9)}$$

où  $\nabla_1^* = \nabla_1 + j\omega\epsilon_1$

et  $\nabla_2^* = \nabla_2 + j\omega\epsilon_2$

IV) RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS INTEGRALES

IV.1) Discrétisation des équations de Fredholm

La méthode de résolution reste la même que celle du chapitre précédent. Nous découpons l'anomalie en  $N_x$  tranches verticales et  $N_z$  tranches horizontales. Une cellule  $n$  est repérée par son centre  $M_n$  de coordonnées  $(x_n, z_n)$  comme le montre la Figure ci-dessous :

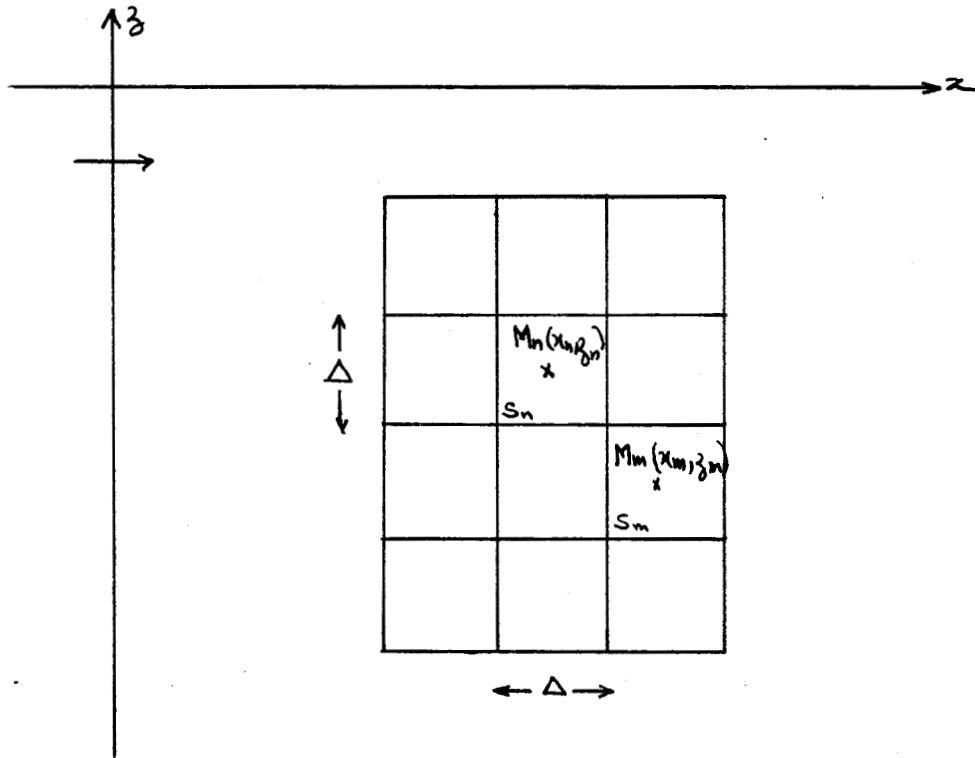


Figure III-2

Nous transformerons ainsi les formules (III-8) et (III-9) en :

$$\frac{\nabla_2^*}{\nabla_1^*} E_{2x}(M_n) = E_x^P(M_n) - A_0 \sum_{m=1}^N E_{2x}(M_m) \int_{S_1} [G_{P_x}^y(R_{1mn}) + G_{S_x}^y(R_{2mn})] dx_1 dz_1$$

$$+ A_0 \sum_{m=1}^N E_{2z}(M_m) \int_{S_1} [G_{P_z}^x(R_{1mn}) - G_{S_z}^x(R_{2mn})] dx_1 dz_1$$

(III-10)



et

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_2^*}{\nabla_1^*} E_{22}(M_n) &= E_{22}^P(M_n) + A_0 \sum_{m=1}^N E_{2x}(M_m) \int_{S_1} [G_{px}^2(R_{1mn}) - G_{sx}^2(R_{2mn})] dS_1 \\ &\quad - A_0 \sum_{m=1}^N E_{2z}(M_m) \int_{S_1} [G_{pz}^2(R_{1mn}) - G_{sz}^2(R_{2mn})] dS_1 \end{aligned} \quad (\text{III-11})$$

avec  $R_{1mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (z_m - z_n)^2}$

et  $R_{2mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (z_m + z_n)^2}$

Les dimensions des cellules sont suffisamment petites pour que l'on puisse supposer que le champ électrique connu soit constant à l'intérieur de chaque cellule. Sa valeur est celle prise au centre de chaque maille.

En utilisant les résultats de l'annexe, nous écrivons les expressions du champ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_2^*}{\nabla_1^*} E_{xn} &= E_{xn}^P - A_0 \sum_{m=1}^N E_{xm} (I_{n1}^m + I_{n2}^m) \\ &\quad + A_0 \sum_{m=1}^N E_{zm} (I_{n3}^m + I_{n4}^m) \end{aligned} \quad (\text{III-12})$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\nabla_2^*}{\nabla_1^*} E_{zn} &= E_{zn}^P + A_0 \sum_{m=1}^N E_{xm} (I_{n3}^m - I_{n4}^m) \\ &\quad - A_0 \sum_{m=1}^N E_{zm} (I_{n1}^{m'} + I_{n2}^{m'}) \end{aligned} \quad (\text{III-13})$$

Les différentes intégrales  $I_{ij}^m$  sont exprimées dans le tableau III-14 suivant :

$$I_{n1}^m = \gamma_1 \int_{x_m - \frac{\Delta}{2}}^{x_m + \frac{\Delta}{2}} \left[ \frac{z_n - z_m - \Delta/2}{R_{11}} K_1(\gamma_1 R_{11}) - \frac{z_n - z_m + \Delta/2}{R_{12}} K_1(\gamma_1 R_{12}) \right] dx_1$$

$$I_{n2}^m = -\gamma_1 \int_{x_m - \frac{\Delta}{2}}^{x_m + \frac{\Delta}{2}} \left[ \frac{z_n + z_m + \Delta/2}{R_{21}} K_1(\gamma_1 R_{21}) - \frac{z_n + z_m - \Delta/2}{R_{22}} K_1(\gamma_1 R_{22}) \right] dx_1$$

$$I_{n1}^{m'} = \gamma_1 \int_{z_m - \frac{\Delta}{2}}^{z_m + \frac{\Delta}{2}} \left[ \frac{x_n - x_m - \Delta/2}{R_{11}'} K_1(\gamma_1 R_{11}') - \frac{x_n - x_m + \Delta/2}{R_{12}'} K_1(\gamma_1 R_{12}') \right] dz_1$$

$$I_{n2}^{m'} = -\gamma_1 \int_{z_m - \frac{\Delta}{2}}^{z_m + \frac{\Delta}{2}} \left[ \frac{x_n - x_m - \Delta/2}{R_{21}'} K_1(\gamma_1 R_{21}') - \frac{x_n - x_m + \Delta/2}{R_{22}'} K_1(\gamma_1 R_{22}') \right] dz_1$$

$$I_{n3}^m = \left[ K_0(\gamma_1 R_{11}'') - K_0(\gamma_1 R_{12}'') - K_0(\gamma_1 R_{21}'') + K_0(\gamma_1 R_{22}'') \right]$$

$$I_{n4}^m = \left[ K_0(\gamma_1 R_{11}''') - K_0(\gamma_1 R_{12}''') - K_0(\gamma_1 R_{21}''') + K_0(\gamma_1 R_{22}''') \right]$$

$$R_{11} = \sqrt{(x_n - x_1)^2 + (z_n - z_m - \frac{\Delta}{2})^2}$$

$$R_{12} = \sqrt{(x_n - x_1)^2 + (z_n - z_m + \frac{\Delta}{2})^2}$$

$$R_{21} = \sqrt{(x_n - x_1)^2 + (z_n + z_m + \frac{\Delta}{2})^2}$$

$$R_{22} = \sqrt{(x_n - x_1)^2 + (z_n + z_m - \frac{\Delta}{2})^2}$$

$$R_{11}' = \sqrt{(x_n - x_m - \frac{\Delta}{2})^2 + (z_n - z_1)^2}$$

$$R_{12}' = \sqrt{(x_n - x_m + \frac{\Delta}{2})^2 + (z_n - z_1)^2}$$

$$R_{21}' = \sqrt{(x_n - x_m - \frac{\Delta}{2})^2 + (z_n + z_1)^2}$$

$$R_{22}' = \sqrt{(x_n - x_m + \frac{\Delta}{2})^2 + (z_n + z_1)^2}$$

$$R_{11}'' = \sqrt{(x_n - x_m - \frac{\Delta}{2})^2 + (z_n - z_m - \frac{\Delta}{2})^2}$$

$$R_{12}'' = \sqrt{(x_n - x_m + \frac{\Delta}{2})^2 + (z_n - z_m - \frac{\Delta}{2})^2}$$

$$R_{21}'' = \sqrt{(x_n - x_m - \frac{\Delta}{2})^2 + (z_n - z_m + \frac{\Delta}{2})^2}$$

$$R_{22}'' = \sqrt{(x_n - x_m + \frac{\Delta}{2})^2 + (z_n - z_m + \frac{\Delta}{2})^2}$$

$$R_{11}''' = \sqrt{(x_n - x_m - \frac{\Delta}{2})^2 + (z_n + z_m + \frac{\Delta}{2})^2}$$

$$R_{12}''' = \sqrt{(x_n - x_m + \frac{\Delta}{2})^2 + (z_n + z_m + \frac{\Delta}{2})^2}$$

$$R_{21}''' = \sqrt{(x_n - x_m - \frac{\Delta}{2})^2 + (z_n + z_m - \frac{\Delta}{2})^2}$$

$$R_{22}''' = \sqrt{(x_n - x_m + \frac{\Delta}{2})^2 + (z_n + z_m - \frac{\Delta}{2})^2}$$

IV.2) Mise en équation sous forme matricielle

Le système d'équations (III-12) et (III-13) peut être mis sous forme matricielle :

$$\frac{\nabla_S^*}{\nabla_\lambda^*} [E] = [E^p] - A_0 [M] [E]$$

où  $[E] = \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{x2} \\ \vdots \\ E_{xN} \\ E_{z1} \\ E_{z2} \\ \vdots \\ E_{zN} \end{bmatrix}$        $[E^p] = \begin{bmatrix} E_{x1}^p \\ E_{x2}^p \\ \vdots \\ E_{xN}^p \\ E_{z1}^p \\ E_{z2}^p \\ \vdots \\ E_{zN}^p \end{bmatrix}$

$[M]$  : matrice  $2N \times 2N$  ayant la forme suivante :

$$\left[ \begin{array}{c|c} M_{xx} & M_{xz} \\ \hline M_{zx} & M_{zz} \end{array} \right]$$

où

$$\begin{aligned} M_{xx}(m,n) &= I_{n1}^m + I_{n2}^m \\ M_{xz}(m,n) &= -I_{n3}^m - I_{n4}^m \\ M_{zx}(m,n) &= -I_{n3}^m + I_{n4}^m \\ M_{zz}(m,n) &= I_{n1}^{m'} + I_{n2}^{m'} \end{aligned}$$

la matrice  $[M]$  peut être écrite alors :

$$\left[ \begin{array}{c|c} I_{n1}^m + I_{n2}^m & -I_{n3}^m - I_{n4}^m \\ \hline -I_{n3}^m + I_{n4}^m & I_{n1}^{m'} + I_{n2}^{m'} \end{array} \right]$$

**IV.3) Optimisation du calcul de la matrice**

En faisant des remarques analogues à celles du deuxième chapitre, on déduit plusieurs lois de symétrie et d'antisymétrie des éléments de la matrice  $[M]$  et notamment que toutes les sous-matrices  $[I_{\mathbb{N}}]$  sont symétriques.

Si nous découpons l'anomalie en  $N_z$  tranches horizontales, nous pouvons mettre chaque matrice  $[I_{\mathbb{N}}]$  sous forme de  $N_z \times N_z$  blocs  $t_{ij}$  représentant l'effet de la tranche  $i$  sur la tranche  $j$ .

tranche I
tranche II
tranche III

$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$
	$t_{22}$	$t_{23}$
		$t_{33}$

Les blocs  $[t_{ij}]_{i \neq j}$  sont symétriques pour  $[I_{\mathbb{N}1}]$   $[I_{\mathbb{N}2}]$   $[I_{\mathbb{N}1}']$  et  $[I_{\mathbb{N}2}']$  et sont antisymétriques pour  $[I_{\mathbb{N}3}]$  et  $[I_{\mathbb{N}4}]$ .

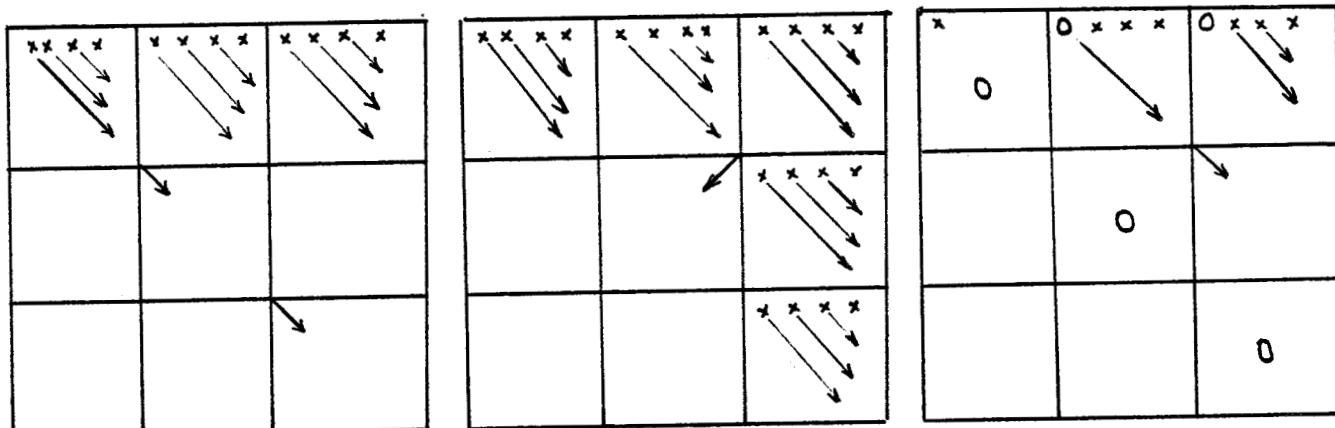
Pour les sous-matrices  $[I_{\mathbb{N}1}]$ ,  $[I_{\mathbb{N}1}']$  et  $[I_{\mathbb{N}3}]$ , le bloc  $[t_{ij}]$  est le même que le bloc  $[t_{i+1, j+1}]$ .

Pour les sous-matrices  $[I_{\mathbb{N}2}]$ ,  $[I_{\mathbb{N}2}']$  et  $[I_{\mathbb{N}4}]$ , le bloc  $[t_{ij}]$  est le même qu'un bloc  $[t_{i', j'}]$  si  $i + j = i' + j'$ .

Pour  $[I_{\mathbb{N}3}]$ , l'effet d'un élément sur un autre appartenant à sa tranche horizontale ou verticale est nul.

En résumé, il suffit de calculer :

- la première ligne pour les sous-matrices  $[I_{\mathbb{N}1}]$  et  $[I_{\mathbb{N}1}']$
- la première ligne de chaque bloc  $[t_{ij}]_{\substack{j > i \\ \text{ou } i=j=1}}$  pour les sous-matrices  $[I_{\mathbb{N}2}]$   $[I_{\mathbb{N}2}']$  et  $[I_{\mathbb{N}4}]$
- la première ligne de chaque bloc  $[t_{ij}]_{j > i}$  pour la sous-matrice  $[I_{\mathbb{N}3}]$ .



$[I_{R1}]$  et  $[I'_1]$   
 symétrie globale  
 symétrie des blocs

symétrie globale  
 symétrie des blocs  
 $[I_2]$   $[I'_2]$   
 antisymétrie des  
 blocs  $[I_4]$

$[I_3]$   
 symétrie globale  
 antisymétrie  
 des blocs

**V) RESULTATS NUMERIQUES**

Nous nous limiterons dans nos applications à une anomalie de conductivité  $10^{-2}$  S/m afin de tester le programme, puis à une anomalie isolante pour laquelle la distance D (Figure III-3) tendra progressivement vers zéro. La fréquence d'émission est de 1 kHz, l'émetteur est une ligne de dipôles horizontaux situés à la surface du sol, et l'anomalie est de section droite carrée faisant 100 m de hauteur et 100 m de largeur. Cette configuration est schématisée par la Figure III-3.

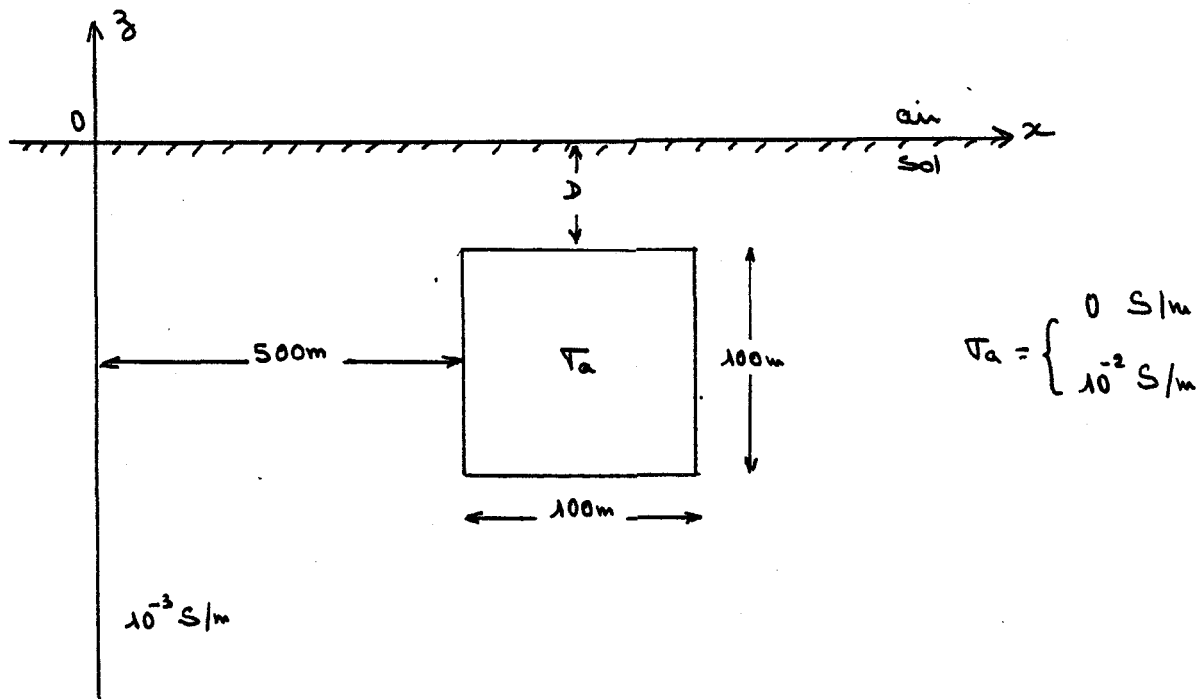


Figure III-3

Nous avons indiqué sur les tableaux suivants la valeur du champ électrique horizontal  $e_x$  et vertical  $e_z$  aux centres des mailles  $M_i$  quand l'anomalie est divisée en 25 éléments. Nous avons noté également sur le même tableau, la moyenne calculée à partir des quatre points entourant  $M_i$  quand l'anomalie est divisée en 100 éléments, et ceci afin de montrer ou non la convergence du procédé de calcul numérique.

Les tableaux III-1 et III-2 correspondent à une anomalie de conductivité  $10^{-2}$  S/m dont le toit est à 20 m de la surface du sol, et les tableaux III-3 et III-4 correspondent à la même anomalie mais ayant un toit à la surface du sol.

Nous remarquons sur ces tableaux la convergence de la méthode.

Par contre, quand l'anomalie représente une vallée les tableaux III-5 et III-6 montrent que la convergence n'est pas réalisée. De nombreux essais effectués ont montré qu'il est vain d'espérer atteindre une convergence, même avec un découpage très fin. Ceci est dû au fait que dans l'anomalie le champ électrique primaire est essentiellement horizontal et qu'il existe une discontinuité très importante de la composante verticale au

voisinage de la surface du sol. Lorsque la cavité affleure la surface, le champ vertical doit devenir continu mais, dans cette méthode, cela impliquerait de diviser l'anomalie en mailles de plus en plus petites au fur et à mesure que le toit de la cavité s'approche de la surface du sol.

## VI) CONCLUSION

La méthode que nous avons décrite ne peut s'appliquer pour traiter le cas d'une vallée. Dans le chapitre suivant, nous allons donc décrire une autre approche bidimensionnelle basée sur une méthode aux différences finies.



Influence du découpage

$\sigma_{ano} = 10^{-2}$  S/m , toit à 20 m

1<sup>e</sup> ligne --> 5 x 5

2<sup>e</sup> ligne --> 10 x 10

$\frac{Er}{Er}$	1.29	1.06	.92	.85	.8
	1.27	1	.86	.8	.78
	1.09	1.08	.98	.86	.68
	1.12	1.09	.99	.87	.69
	1.06	1.1	1.04	.92	.71
	1.07	1.12	1.06	.93	.71
	1	1.12	1.11	1	.77
	1.02	1.15	1.14	1.03	.79
	1.02	1.22	1.27	1.22	1.08
	1.03	1.25	1.29	1.23	1.08

x 10<sup>-3</sup>

excitation par ligne de DEH h = 0

f = 1 kHz

Influence du découpage

$\sigma_{ano} = 10^{-2}$  S/m , toit à 20 m

1<sup>e</sup> ligne : 5 x 5

2<sup>e</sup> ligne : 10 x 10

$\frac{Ez}{Ez}$	.95	.33	.07	.13	.44
	.97	.35	.07	.16	.46
	.97	.49	.21	.06	.2
	1	.51	.2	.09	.24
	.91	.56	.33	.19	.12
	.94	.58	.33	.18	.12
	.78	.57	.43	.36	.4
	.8	.57	.43	.36	.38
	.56	.51	.48	.49	.72
	.56	.52	.48	.51	.72

x 10<sup>-3</sup>

ligne de DEH

# Influence du découpage

$\sigma_{ano} = 10^{-2} \text{ S/m}$  , toit affleurant la surface

1<sup>e</sup> ligne : 5 x 5

2<sup>e</sup> ligne : 10 x 10

$\frac{Er}{Er}$

	.91 .9	.8 .77	.73 .7	.68 .65	.64 .63
	1.04 1.06	.97 .97	.88 .86	.79 .78	.65 .66
	1.08 1.1	1.11 1.12	1.04 1.05	.91 .92	.71 .72
	1.08 1.1	1.21 1.24	1.18 1.22	1.05 1.08	.79 .82
	1.17 1.18	1.38 1.42	1.4 1.44	1.31 1.33	1.1 1.11

$\times 10^{-4}$

Influence du découpage

$\sigma_{ano} = 10^{-2} \text{ S/m}$  , toit affleurant la surface

1<sup>e</sup> ligne : 5 x 5

2<sup>e</sup> ligne : 10 x 10

Ez	8.19	1.61	.51	2.19	6.01
	8.29	1.78	.55	2.33	6.12
	9.6	3.17	.63	1.35	4.57
	9.99	3.37	.51	1.52	4.91
	9.02	4.27	1.92	.62	1.87
	9.42	4.52	1.89	.81	2.18
	7.35	4.59	3.08	2.2	1.97
	7.66	4.77	3.06	2.12	1.86
	4.6	4.18	3.92	3.9	5.76
	4.7	4.22	3.94	4.08	5.85

x 10<sup>-5</sup>

Influence du découpage

$\sigma_{ano} = 0$  S/m , toit affleurant la surface

1<sup>e</sup> ligne : 5 x 5

2<sup>e</sup> ligne : 10 x 10

Er <hr/> Er	520.8 80.9	1915.2 64.8	2287.6 30.3	1915.1 64.8	520.6 81
	473.7 58.2	1758 51.9	2010.4 27.4	1758 51.9	473.7 58.2
	418 36.6	1354.2 36.2	1464.2 35.3	1354.2 36.2	418 36.6
	297.2 18.36	929.4 25	945.3 31.6	929.4 25	297.2 18.36
	141 10.7	479.7 16.8	456 19.94	479.7 16.8	141 10.7

Influence du découpage

$\sigma_{ano} = 0$  S/m , toit affleurant la surface

1<sup>e</sup> ligne : 5 x 5

2<sup>e</sup> ligne : 10 x 10

Ez	682.1	300.1	.03	300.1	682.1
	17.6	13.4	5.4	13.4	17.6
Ez	64.1	118.6	.06	118.6	64.1
	14.5	12.3	2.5	12.3	14.5
Ez	50.9	74.3	0.07	74.3	50.9
	5.8	2.32	.7	2.32	5.8
Ez	88	42.5	.06	42.5	88
	2.37	2.4	1.6	2.4	2.37
Ez	135.5	16.5	.05	16.5	135.5
	11	9.8	2.5	9.8	11

## CHAPITRE IV

### METHODE DES DIFFERENCES FINIES

#### I) INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent nous avons mis en évidence les limites de la méthode de calcul numérique basée sur les résolutions d'équations intégrales quant à l'étude de la vallée. Pour pouvoir résoudre cette configuration géométrique, nous envisageons dans ce chapitre une résolution directe des équations de Maxwell, en utilisant la méthode des différences finies.

Dans ce chapitre nous présenterons la modélisation d'une structure bidimensionnelle, hétérogène, illuminée par une onde plane. Nous avons choisi la méthode des différences finies associée à un calcul variationnel à cause de sa simplicité et sa souplesse.

Dans le dernier chapitre, de nombreuses applications en géophysique seront présentées. Nous pensons que l'exploitation de ce modèle conduit à une amélioration de la méthode actuelle d'interprétation.

## II) EQUATIONS DE BASE DU PROBLEME

Nous traitons la mise au point d'un modèle numérique permettant de simuler la réponse d'une structure hétérogène bidimensionnelle illuminée par une onde électromagnétique plane en polarisation T.M.

### II.1) Position du problème

L'onde plane est incidente sous un angle  $\theta$ , sur un demi-milieu représentant le sol, ou sur un milieu composé d'une ou de plusieurs couches homogènes dont la dernière est infinie (fig. IV-1), renfermant une anomalie de section quelconque.

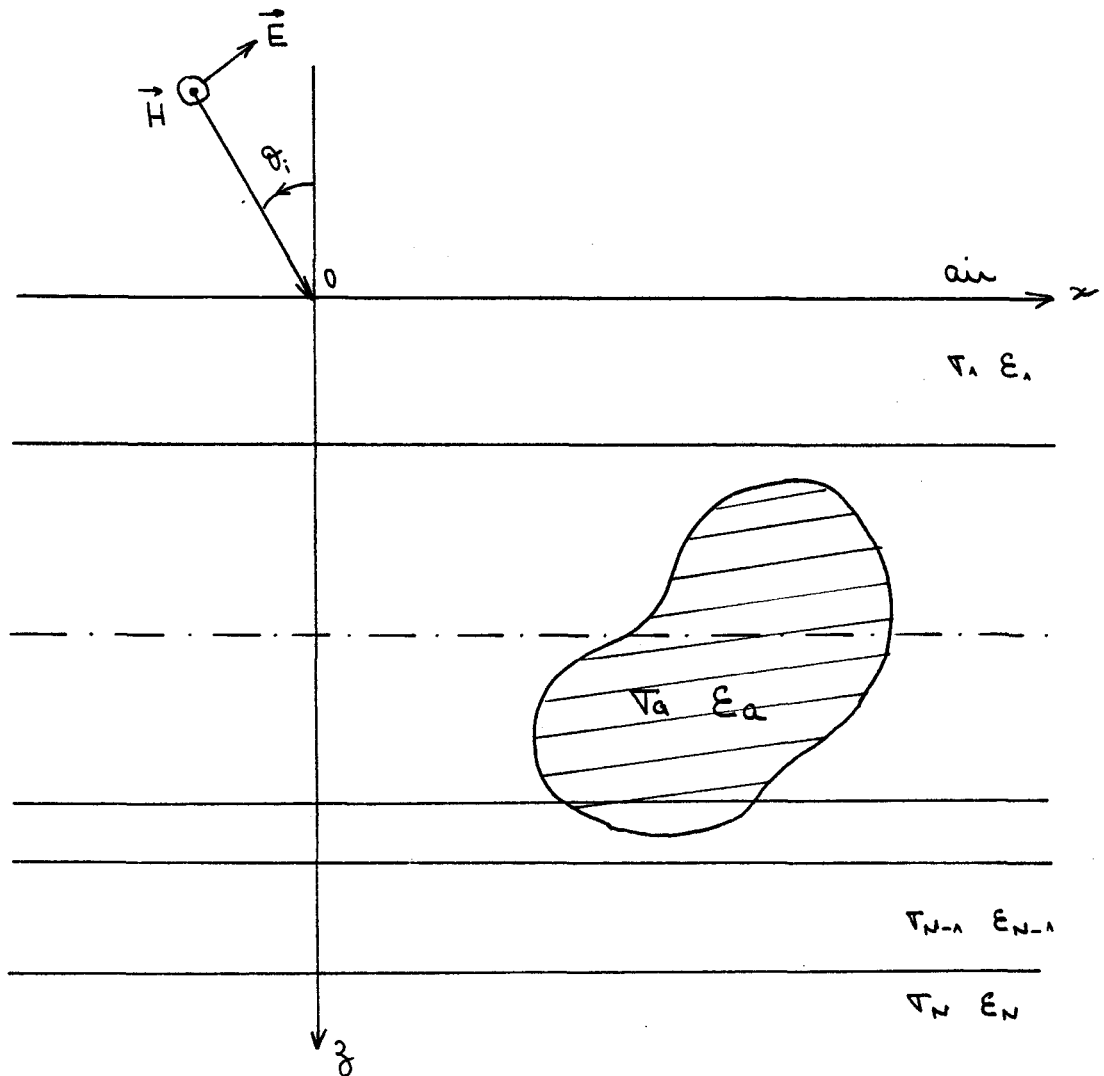


Figure IV-1



La structure du terrain est telle que les paramètres électromagnétiques sont fonctions de position :

$$\begin{cases} \nabla(M) = \nabla(x, z) \\ \epsilon(M) = \epsilon(x, z) \\ \mu(M) = \mu(x, z) \end{cases} \quad (\text{IV-1})$$

et d'autre part elle est invariante selon l'axe OY :

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} \vec{E}(x, z) \\ \vec{H}(x, z) \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{IV-2})$$

## II.2) Expression des équations fondamentales

Compte tenu de l'invariance du problème selon l'axe OY, les équations de Maxwell peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}_y \\ \text{rot } \vec{H}_y = [\nabla(x, z) + j\omega\epsilon(x, z)] \vec{E} \end{cases} \quad (\text{IV-3})$$

Nous pouvons donc en déduire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = j\omega\mu H_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} = -(\nabla + j\omega\epsilon) E_x \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = (\nabla + j\omega\epsilon) E_z \end{cases} \quad (\text{IV-4})$$

En éliminant  $E_x$  et  $E_z$  dans l'équation (IV-4), nous aboutissons à l'équation différentielle que vérifie le champ magnétique  $H_y$  :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\nu + j\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial x} H_y \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\nu + j\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} H_y \right] = j\omega\mu H_y \quad (\text{IV-5})$$

que nous écrivons sous la forme suivante :

$$\left[ \frac{1}{\nu + j\omega\epsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - j\omega\mu \right] H_y = 0 \quad (\text{IV-6})$$

### III) METHODE DE RESOLUTION

#### III.1) Principe de la résolution

La résolution de l'équation (IV-6) nous permettra de connaître le champ magnétique  $H_y$  en tout point de l'espace, et par conséquent le champ électrique. Vu la forme compliquée de cette équation, la résolution analytique s'avère impossible. Nous utiliserons la méthode numérique des différences finies associée à un calcul variationnel.

Le principe consiste à subdiviser l'air et le milieu stratifié en éléments discrets et en supposant que sur chaque élément  $\sigma$  et  $\epsilon$  restent constants. Nous délimitons les frontières par des conditions aux limites analytiques. (Figure IV-2)

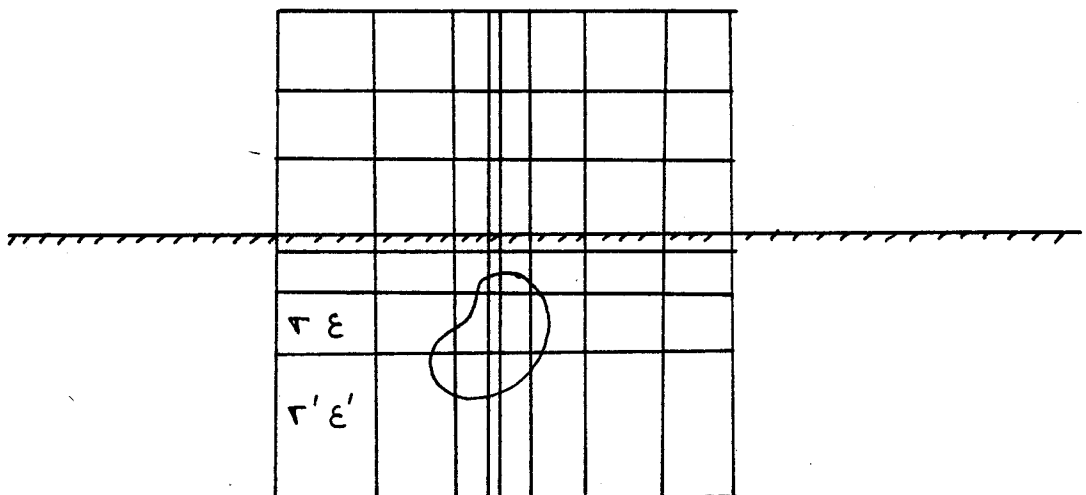


Figure IV-2

Sur chaque élément  $i$  du domaine considéré, l'équation (IV-6) s'écrit :

$$\left[ \frac{1}{\Gamma_i + j\omega \epsilon_i} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - j\omega \mu \right] H_y = 0 \quad (\text{IV-7})$$

Cette équation sera résolue par la méthode des différences finies.

### III.2) Rappel sur la méthode aux différences finies |18|

L'équation (IV-6) peut se mettre sous la forme suivante :

$$L H_y = f \quad (\text{IV-8})$$

où  $L$  est l'opérateur

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi \right]$$

avec

$$k = \frac{1}{\Gamma + j\omega \epsilon} \quad \text{et} \quad \phi = j\omega \mu$$

$f$  est le second membre qui est nul dans notre cas. Nous montrons en annexe que la résolution de l'équation (IV-6) se ramène au calcul de la valeur de  $H_y$  telle que la fonction  $F(H_y)$  définie par l'équation (IV-9) passe par un extrémum :

$$\begin{aligned} F(H_y) &= \frac{1}{2} \langle L H_y, H_y \rangle - \langle H_y, f \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle L H_y, H_y \rangle \end{aligned} \quad (\text{IV-9})$$

$$\text{où} \quad \langle L H_y, H_y \rangle = \iint_{\Omega} (L H_y)(H_y) d\Omega \quad (\text{IV-10})$$

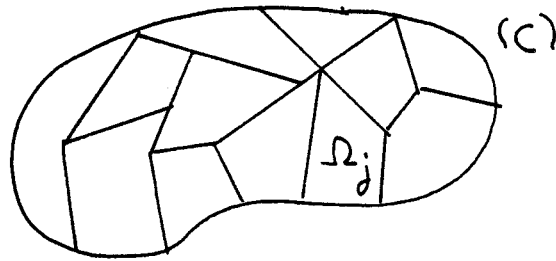


Figure IV-3

Sur un élément discret, la fonction s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 F(H_y) &= \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} (L_j H_y) (H_y) d\Omega_j \\
 &= \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} ([k_j \Delta - \phi] H_y) H_y d\Omega_j
 \end{aligned}$$

où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

En utilisant l'identité de Green :

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega_j} H_y \Delta H_y d\Omega_j &= - \iint_{\Omega_j} (\nabla H_y)^2 d\Omega_j \\
 &\quad + \oint_{C_j} H_y \frac{\partial H_y}{\partial n} dl
 \end{aligned}$$

où  $n$  est la normale extérieure à  $(\Omega_j)$

$(C_j)$  est le contour fermé de  $(\Omega_j)$

$\frac{\partial}{\partial n}$  désigne la dérivée normale de la fonction

Le champ magnétique étant continu sur l'interface des éléments, l'intégrale :

$$\sum_j \oint_{C_j} H_y \frac{\partial H_y}{\partial n} dl = \oint_C H_y \frac{\partial H_y}{\partial n} dl$$

où (C) est le contour fermé de ( $\Omega$ ) et  
n est la normale dirigée vers l'extérieur de ( $\Omega$ )

Nous pouvons donc écrire la fonction  $F(H_y)$  sous la forme suivante :

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \left[ \iint_{\Omega_j} \left\{ k_j \left[ \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \oint H_y^2 \right\} d\Omega_j \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \oint_C k_f \cdot H_y \cdot \frac{\partial H_y}{\partial n} dl \right] \quad (\text{IV-11})$$

où  $k_f = (\sigma_f + j \omega \epsilon_f)^{-1}$  ;  $\sigma_f$  et  $\epsilon_f$  sont respectivement la conductivité et la permittivité électriques des mailles frontières.

Cette fonction quadratique est composée des deux intégrales : la première traduisant la puissance dissipée à travers la surface ( $\Omega$ ) du domaine, et la seconde traduisant la puissance écoulee à travers la frontière (C).

En effet, la puissance dissipée à travers la surface ( $\Omega$ ) est le flux de la divergence du vecteur de pointyng  $\vec{S}$  à travers la surface ( $\Omega$ ).

le vecteur de pointyng étant  $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \wedge \vec{H}$ , la puissance moyenne

dissipée à travers  $\Omega$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
 P_f &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{S} \, d\Omega \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} \operatorname{div} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \, d\Omega_j \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} (\vec{H} \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}) \, d\Omega_j \quad (\text{IV-12})
 \end{aligned}$$

or les équations de Maxwell donnent :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{E} &= -j \omega \mu \vec{H} \\
 \vec{E} &= (\nabla + j \omega \epsilon)^{-1} \operatorname{rot} \vec{H}
 \end{aligned}$$

En injectant ces équations dans l'équation (IV-12), nous obtenons une nouvelle expression de la puissance. Soit :

$$P_f = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} [k_j (\operatorname{rot} \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}) + j \omega \mu \vec{H} \cdot \vec{H}] \, d\Omega_j$$

avec  $k_j = (\nabla_j + j \omega \epsilon_j)^{-1}$

ou encore :

$$P_f = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} [k_j \left\{ \left( \frac{\partial H_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right\} + j \omega \mu H_y^2] \, d\Omega_j$$

Ainsi, en résumé, la solution du problème n'est autre que celle qui rend minimum la puissance dissipée dans le système.

Il nous reste à présent à déterminer les frontières du domaine considéré et à les interpréter mathématiquement.

#### IV) LIMITATION ARTIFICIELLE DU DOMAINE

Le domaine où l'étude sera faite se schématise de la façon suivante :

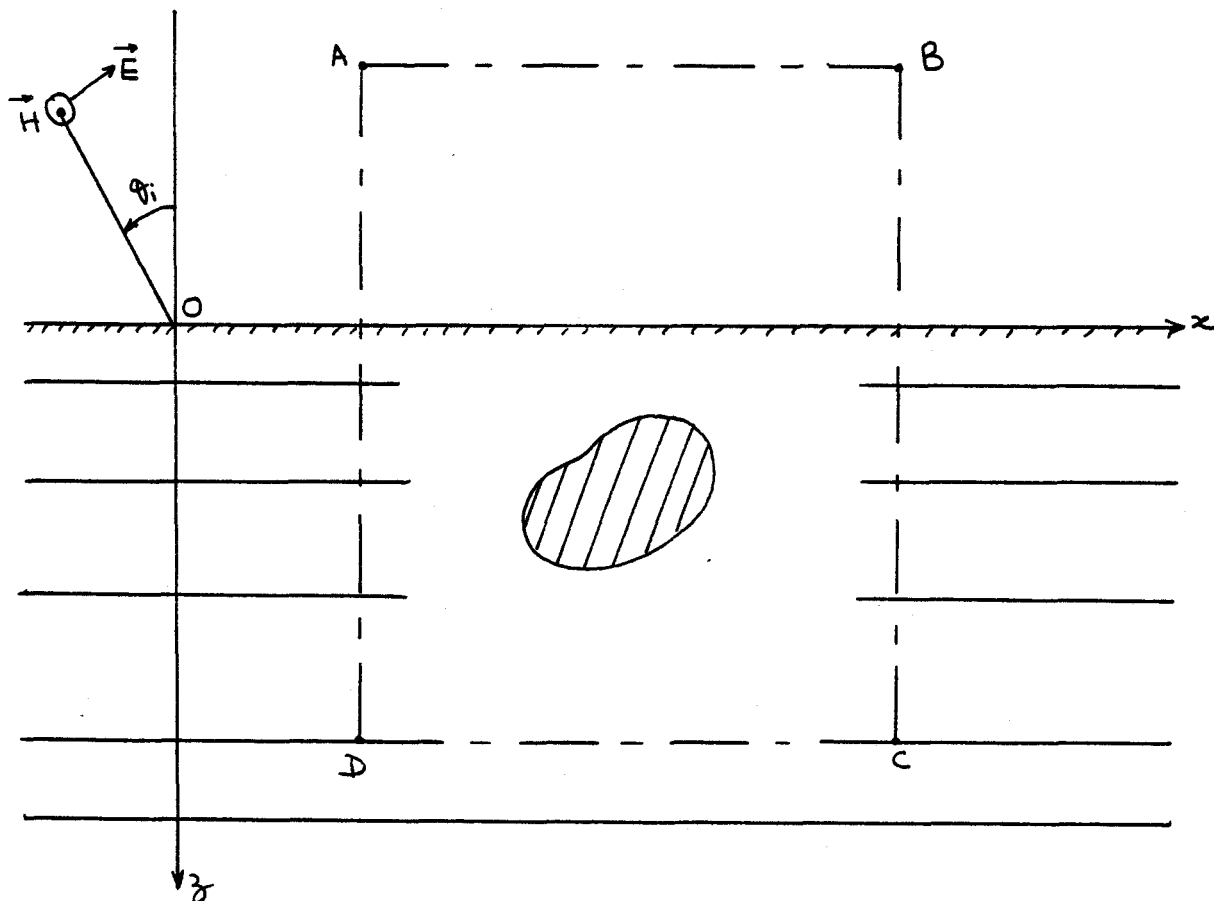


Figure IV-4

Il est représenté par une surface délimitée par le contour artificiel  $ABCD$ . Cette surface contient une anomalie de forme et de conductivité quelconque modifiant ainsi la distribution du champ dans cette région de l'espace. On choisit un domaine suffisamment grand pour que l'on puisse supposer que l'influence de l'anomalie ne se fait plus sentir sur le contour. Sur les contours  $AD$  et  $BC$ , nous supposerons donc que le milieu se comporte comme une structure stratifiée horizontalement et nous nous fixerons des conditions aux limites tenant compte de ce fait. Nous étudierons deux choix différents de ces conditions aux limites, associées respectivement au modèle de Neumann, et au modèle de Dirichlet.

**IV.1) Modèle de Neumann**

En supposant que l'influence de l'anomalie ne se fait plus sentir sur le contour artificiel, on peut considérer que le champ électromagnétique est égal au champ tabulaire sur les bords du domaine. Ce champ tabulaire peut être déterminé analytiquement, le détail du calcul étant développé en annexe.

Le schéma de ce modèle est le suivant :

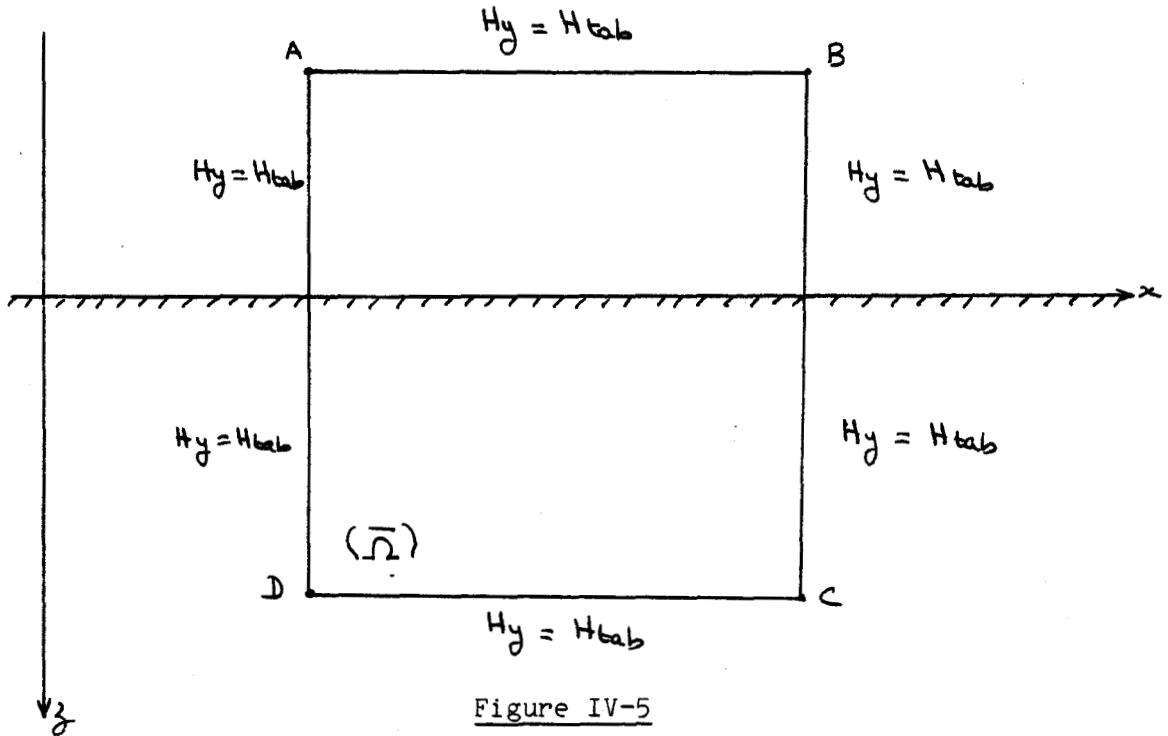


Figure IV-5

Mathématiquement il s'exprime par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi \right] H_y = 0 \quad \text{sur } (\bar{\Omega}) \\ H_y = H_{tab} \quad \text{sur } (\bar{AB}), (\bar{BC}), (\bar{CD}) \text{ et } (\bar{DA}) \end{array} \right. \quad (IV-13)$$

où  $(\Omega)$  est la surface du domaine délimité par ABCD.

$$k = [\nabla(x, z) + j \omega \epsilon(x, z)]^{-1}$$

$$\phi = j \omega \mu$$



La fonction "puissance" de ce modèle est donnée par

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \left[ \int_{\Omega_j} \left\{ k_j \left[ \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \phi H_y^2 \right\} \right] \quad (\text{IV-14})$$

Ce problème est auto-adjoint, son développement conduit à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est symétrique [19].

#### IV.2) Modèle de Dirichlet

Dans le but de réduire l'étendue du domaine ABCD, nous appliquerons une condition de type Cauchy sur les bords  $(\overline{BC})$  et  $(\overline{DA})$  mais nous supposerons connu le champ sur les limites horizontales  $(\overline{AB})$  et  $(\overline{CD})$ .

Nous avons supposé que le champ électromagnétique sur les deux bords  $(\overline{BC})$  et  $(\overline{DA})$  redevient tabulaire, soit :

$$H_{y \text{ total}} = H_{y \text{ tab}}$$

or 
$$H_{y \text{ tab}} = (a_m e^{-\mu_m z} + b_m e^{\mu_m z}) e^{-\gamma_0 \sin \vartheta_i x}$$

où  $a_m$  et  $b_m$  sont des constantes,

$$\mu_m^2 = \gamma_m^2 + \lambda^2 \quad \text{avec} \quad j\lambda = \gamma_0 \sin \vartheta_i$$

$\gamma_0$  : constante de propagation dans l'air.

d'où 
$$\frac{d H_{y \text{ tab}}}{dx} = -\gamma_0 \sin \vartheta_i H_{y \text{ tab}}$$

soit 
$$\gamma_0 \sin \vartheta_i H_{y \text{ total}} + \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV-15})$$

Ce modèle est schématisé par la figure suivante :

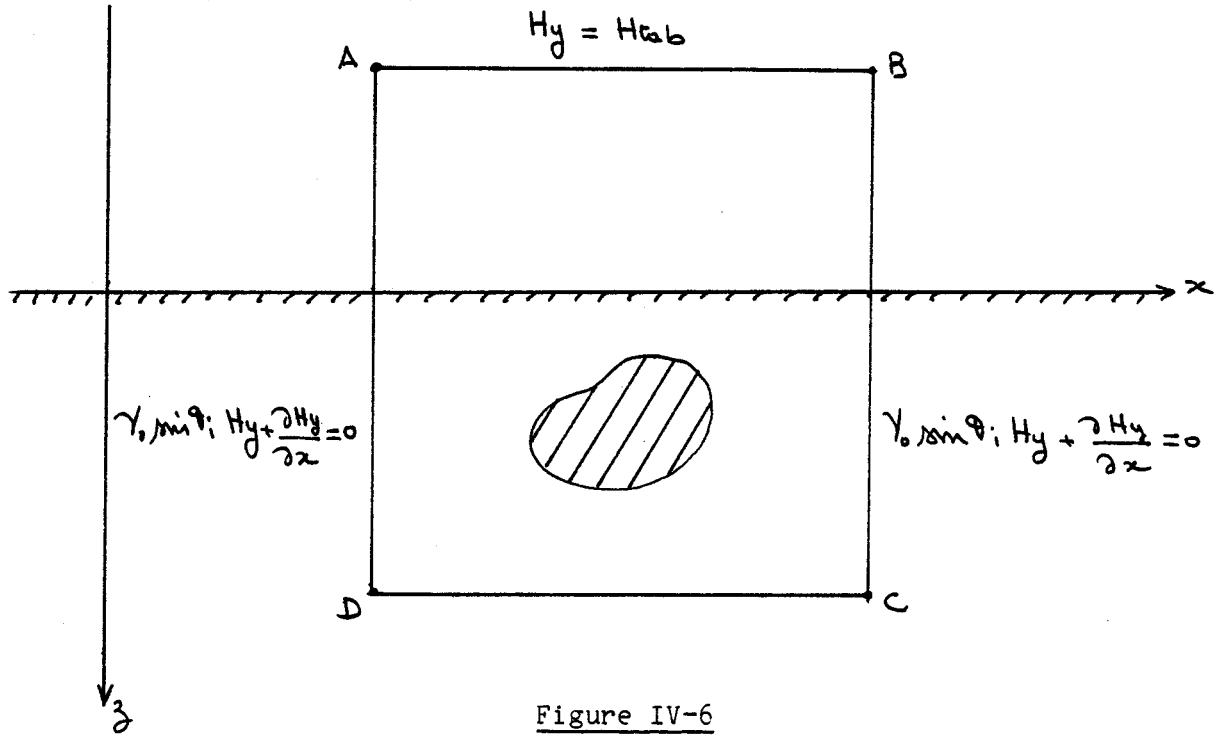


Figure IV-6

Mathématiquement, l'ensemble des conditions s'exprime par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial}{\partial z} \right) - \phi \right] H_y = 0 \text{ sur } (\bar{\Omega}) \cup (\bar{DA}) \cup (\bar{BC}) \\ H_y = H_{y_{tab}} \text{ sur } (\bar{AB}) \text{ et } (\bar{CD}) \\ \gamma_0 \sin \theta; H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0 \text{ sur } (\bar{BC}) \text{ et } (\bar{DA}) \end{array} \right. \quad (\text{IV-16})$$

D'après la définition de la dérivée normale :

$$\left\{ \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial n} \right\}_{(x, z) \in (\bar{BC})} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \cos(\vec{n}_{BC}, \vec{e}_x) = \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

$$\left\{ \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial n} \right\}_{(x, z) \in (\bar{DA})} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \cos(\vec{n}_{DA}, \vec{e}_x) = - \frac{\partial H_y}{\partial x}$$

Nous aboutissons à la fonction de "puissance" de ce modèle qui est donnée par :

$$F(H_y) = \frac{1}{2} \sum_j \iint_{\Omega_j} \left\{ k_j \left[ \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \phi H_y^2 \right\} d\Omega_j$$

$$\pm \frac{\gamma_0}{2} \sin \theta_i \oint_{C_i} k_f H_y^2 dl \quad (IV-17)$$

où  $C_i = (\overline{BC}) \cup (\overline{DA})$

Le signe plus devant la deuxième intégrale correspond au contour (BC), et le signe moins correspond au contour (DA).

## V) DERIVATION DES EQUATIONS DE DIFFERENCES FINIES

### V.1) Discretisation du domaine

Le domaine est choisi rectangulaire, avec un découpage irrégulier suivant la direction des x et la direction des z. Les noeuds dans la direction des x sont indicés par  $i = 1, 2, \dots, N_x$ , et dans la direction des z, ils sont indicés par  $j = 1, 2, \dots, N_z$ . Les bords extrêmes à droite et à gauche du domaine sont représentés par  $i = N_x$  et  $i = 1$ . Les bords extrêmes en haut et en bas du domaine sont représentés par l'indice  $j=1$  et  $j=N_z$ . Le découpage est tel que  $\sigma$  et  $\epsilon$  sont constants sur chaque rectangle élémentaire. (Fig. IV-7)

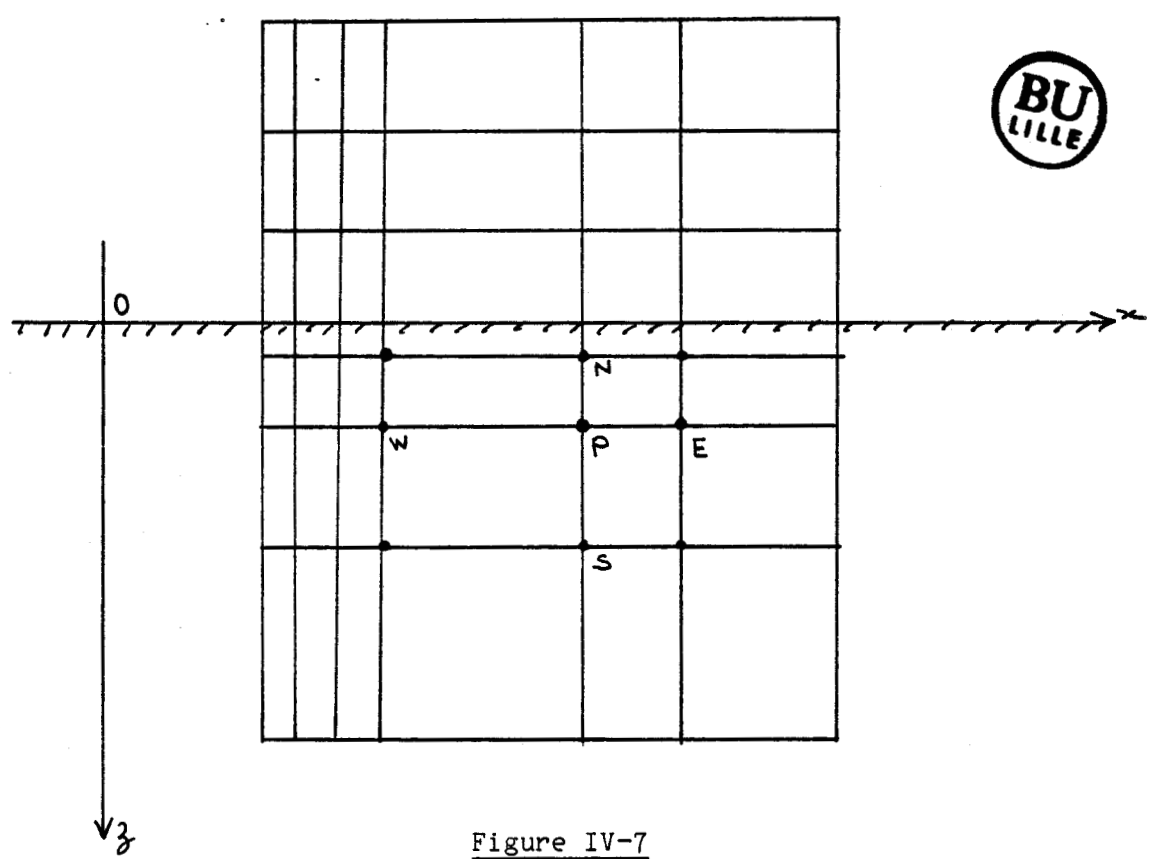


Figure IV-7

Le champ magnétique inconnu  $H_y$  n'est connu qu'en un nombre fini de points. Soit sur tous les noeuds des frontières du domaine pour le modèle de Neumann, et sur les noeuds des frontières du haut et du bas pour le modèle de Dirichlet.

**V.2) Dérivation de la fonction puissance**

Considérons un point P situé à l'intérieur du domaine et plus particulièrement les quatres mailles associées au noeud P.

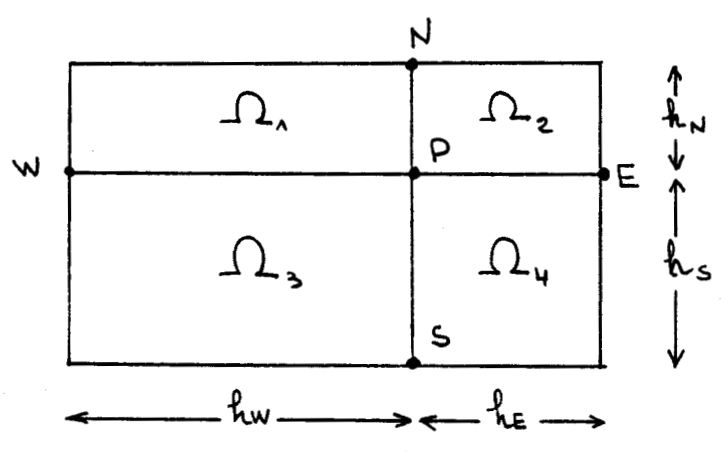


Figure IV-8

La fonction (IV-11) s'exprime de la manière suivante sur la maille (NW.N.P.PW) :

$$F_1(H_y) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega_1} \left\{ k_1 \left[ \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \phi H_y^2 \right\} d\Omega_1$$

Les expressions des différentes intégrales de dérivées partielles de la fonction inconnue  $H_y$  sont approximées :

$$\iint_{\Omega_1} k_1 \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 d\Omega_1 \quad \text{par} \quad \frac{k_1}{2} \left[ \frac{(H_N - H_{NW})^2 + (H_P - H_W)^2}{h_w^2} \right] h_N h_w$$

$$\iint_{\Omega_1} k_1 \left( \frac{\partial H_y}{\partial z} \right)^2 d\Omega_1 \quad \text{par} \quad \frac{k_1}{2} \left[ \frac{(H_W - H_{NW})^2 + (H_P - H_N)^2}{h_N^2} \right] h_N h_w \quad (\text{IV-18})$$

$$\iint_{\Omega_1} \phi H_y^2 d\Omega_1 \quad \text{par} \quad \frac{\phi}{4} (H_{NW}^2 + H_N^2 + H_P^2 + H_W^2) h_N h_w$$

En se basant sur l'approximation présentée par Forsythe [20], la valeur approchée de  $H_y(x,z)$  est affectée au centre  $M_1$  de la maille  $\Omega$ .

Les mêmes approximations du type de celles présentées en (IV-18) sont faites pour les expressions de la fonction sur les trois autres mailles ayant en commun le sommet P.

la fonction  $F(H_y)$  admet un extremum au point P si la relation suivante est satisfaite :

$$\frac{\partial F(H_y)}{\partial H_P} = 0$$

En reportant les approximations définies par (IV-18) dans la fonction  $F(H_y)$  (IV-11), et en appliquant la relation ci-dessus, on montre en annexe que la valeur du champ au noeud P est reliée aux quatre valeurs  $H_N$ ,  $H_E$ ,  $H_S$  et  $H_W$  des noeuds voisins par la formule suivante :

$$C_P H_P + C_L H_W + C_B H_S + C_R H_E + G H_N = 0 \quad (\text{IV-19})$$

où

$$C_L = \frac{-1}{2 h_W} (k_1 h_W + k_2 h_S) \quad (\text{IV-19.1})$$

coefficient de couplage entre les noeuds P et W

$$C_R = \frac{-1}{2 h_E} (k_3 h_S + k_4 h_W) \quad (\text{IV-19.2})$$

coefficient de couplage entre les noeuds P et E

$$C_B = \frac{-1}{2 h_S} (k_2 h_W + k_3 h_E) \quad (\text{IV-19.3})$$

coefficient de couplage entre les noeuds P et S

$$C_T = \frac{-1}{2 h_N} (k_1 h_W + k_4 h_E) \quad (\text{IV-19.4})$$

coefficient de couplage entre les noeuds P et N

et

$$C_P = - (C_L + C_B + C_R + C_T) + \frac{\Phi}{4} (h_N h_W + h_S h_W + h_E h_S + h_N h_E) \quad (\text{IV-19.5})$$

coefficient de couplage entre P et lui-même

avec

$$k_j = (\sigma_j + j \omega \epsilon_j)^{-1} \quad \text{et} \quad \Phi = j \omega \mu$$

L'équation (IV-19) ainsi obtenue montre que la valeur du champ magnétique en P dépend seulement des valeurs du champ sur les points adjacents du point P. Les coefficients de couplage C sont fonctions de la géométrie et des propriétés physiques des mailles entourant P.

Nous allons maintenant traiter le cas où P appartient à (BC) ou à (CD), que l'on peut trouver dans le modèle de Dirichlet. (Figure IV-9)

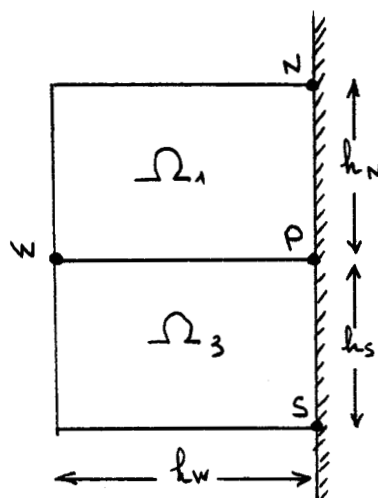


Figure IV-9

Considérons les noeuds appartenant au segment  $\overline{BC}$ . Compte tenu de l'étude précédente nous avons la relation qui lie le champ magnétique  $H_y$  en P aux valeurs des champs aux points l'entourant :

$$C_P H_P + C_L H_W + C_T H_N + C_B H_S = 0 \quad (\text{IV-20})$$

où

$$C_L = \frac{-1}{2h_w} (k_1 h_w + k_3 h_s) \quad (\text{IV-20.1})$$

$$C_T = \frac{-1}{2h_w} k_1 h_w \quad (\text{IV-20.2})$$

$$C_B = \frac{-1}{2h_s} k_3 h_w \quad (\text{IV-20.3})$$

$$C_P = -(C_L + C_T + C_B) + \frac{\Phi}{4} (h_N h_W + h_S h_W) + \dots \quad (\text{IV-20.4})$$

$$- \gamma_0 \sin \theta_i h_W C_L$$

représentent respectivement les couplages entre P et les points W, N et S.

Une étude analogue donne la valeur du champ en un point P situé sur le segment  $(\overline{AD})$ . (Figure IV-10)

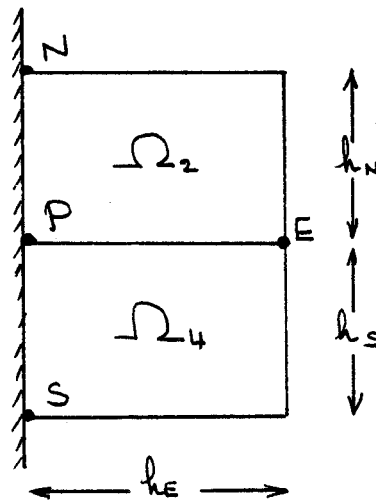


Figure IV-10

$$C_P H_P + C_R H_E + C_T H_N + C_B H_S = 0 \quad (\text{IV-21})$$

où

$$C_R = - \frac{1}{2h_E} (k_1 h_N + k_2 h_S) \quad (\text{IV-21.1})$$

$$C_T = \frac{-1}{2h_N} k_1 h_E \quad (\text{IV-21.2})$$



$$C_B = \frac{-1}{2h_s} k_2 h_E \quad (\text{IV-21.3})$$

$$C_P = - (C_R + C_T + C_B) + \frac{\Phi}{4} (h_s h_E + h_N h_E) + \dots \quad (\text{IV-21.4})$$
$$+ \gamma_0 \sin \varphi_i h_E C_R$$

représentent respectivement les couplages entre le point P et les points E, N et S.

En écrivant ces équations sur tous les noeuds inconnus du domaine, nous aboutissons à un système linéaire d'équations nodales régissant le comportement discret de chaque valeur nodale  $H_y$ .

## VI) SYSTEME D'EQUATIONS NODALES LINEAIRES

### VI.1) Mise sous forme matricielle

#### VI.1.a) Modèle de Dirichlet

Nous illustrons le système linéaire du modèle de Dirichlet par l'exemple de la figure ci-après, le champ étant connu en tout point sur les bords AB et CD :

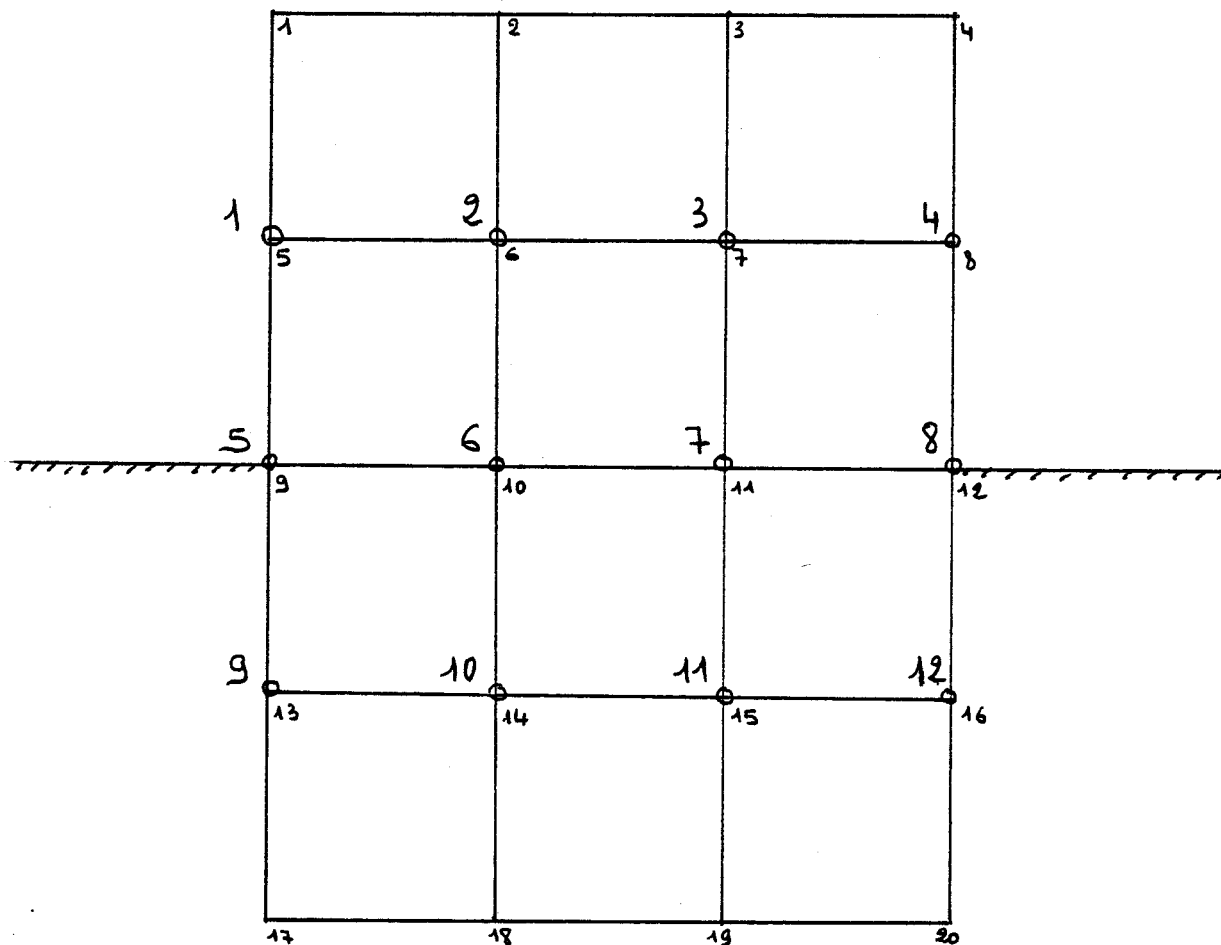


Figure IV-11

Dans cet exemple  $N_x = 4$  et  $N_z = 5$

Nous avons choisi deux jeux de numérotations :

- Les noeuds inconnus sont numérotés de 1 à 12 progressivement et périodiquement de gauche à droite et du haut en bas.
- Tous les noeuds sont numérotés de 1 à 20. (figure IX-11)

Le système matriciel du modèle considéré peut se mettre sous la forme suivante :

(IV-22)

où  $[C]$  est la matrice carrée de résistivité, ses éléments  $C_{Pij}$ ,  $C_{Lij}$ ,  $C_{Tij}$ ,  $C_{Rij}$  et  $C_{Bij}$  ( $j=1, \dots, 12$ ) sont donnés par les expressions IV-19, IV-20 ou IV-21 suivant la position du point dans le maillage.

$[H]$  vecteur colonne des inconnues  $H_j$  ( $j=1, 12$ ).

$[B]$  vecteur colonne second membre.

$$[H] = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_{11} \\ H_{12} \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -C_{T1} H_{tab}(1) \\ -C_{T2} H_{tab}(2) \\ -C_{T3} H_{tab}(3) \\ -C_{T4} H_{tab}(4) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -C_{B9} H_{tab}(17) \\ -C_{B10} H_{tab}(18) \\ -C_{B11} H_{tab}(19) \\ -C_{B12} H_{tab}(20) \end{bmatrix}$$

La matrice  $[C]$  est carrée d'ordre  $N = (N_z - 2)N_x$ .

$C_{P1}$	$C_{R1}$	0	0	$C_{B1}$							
$C_{L2}$	$C_{P2}$	$C_{R2}$	0	0	$C_{B2}$					○	
0	$C_{L3}$	$C_{P3}$	$C_{R3}$	0	0	$C_{B3}$					
0	0	$C_{L4}$	$C_{P4}$	0	0	0	$C_{B4}$				
$C_{T5}$	0	0	0	$C_{P5}$	$C_{R5}$	0	0	$C_{B5}$			
	$C_{T6}$	0	0	$C_{L6}$	$C_{P6}$	$C_{R6}$	0	0	$C_{B6}$		
		$C_{T7}$	0	0	$C_{L7}$	$C_{P7}$	$C_{R7}$	0	0	$C_{B7}$	
			$C_{T8}$	0	0	$C_{L8}$	$C_{P8}$	0	0	0	$C_{B8}$
				$C_{T9}$	0	0	0	$C_{P9}$	0	0	0
					$C_{T10}$	0	0	$C_{L10}$	$C_{P10}$	0	0
						$C_{T11}$	0	0	$C_{L11}$	$C_{P11}$	$C_{R11}$
							$C_{T12}$	0	0	$C_{L12}$	$C_{P12}$

Dans les formules IV-18, IV-19 et IV-20 on peut remarquer que le couplage d'un noeud M sur un noeud N est le même que le couplage de N sur M et par conséquent la matrice est symétrique.

En outre la matrice [C] possède les propriétés suivantes :

- 1) Relativement creuse, les termes non nuls se regroupent en bande de part et d'autre de la diagonale principale, de largeur  $2N_x + 1$ .

2) L'élément de la diagonale est strictement dominant :

$$|C_{i,i}| \gg \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |C_{i,j}| \quad i=1, \dots, N$$

3) Elle est irréductible (GASTINEL (21)) par conséquent on ne peut diminuer l'ordre du système lors de la résolution (VARGA (22)).

4) Elle possède la propriété "A" de Young (YOUNG, 1954) (MUFTI (23)), c'est-à-dire qu'après plusieurs présentations simultanées des lignes et des colonnes correspondantes, la matrice [C] peut être transformée sous forme de matrice de blocs tridiagonaux. VARGA (22) a montré que si A est munie des deux propriétés 2) et 3) elle ne peut être singulière.

VI.1.b) Modèle de Neumann

Les champs sont supposés connus en tout point sur les bords AB, BC, CD et DA, nous traiterons ce modèle sur le même exemple que dans le modèle de Dirichlet :

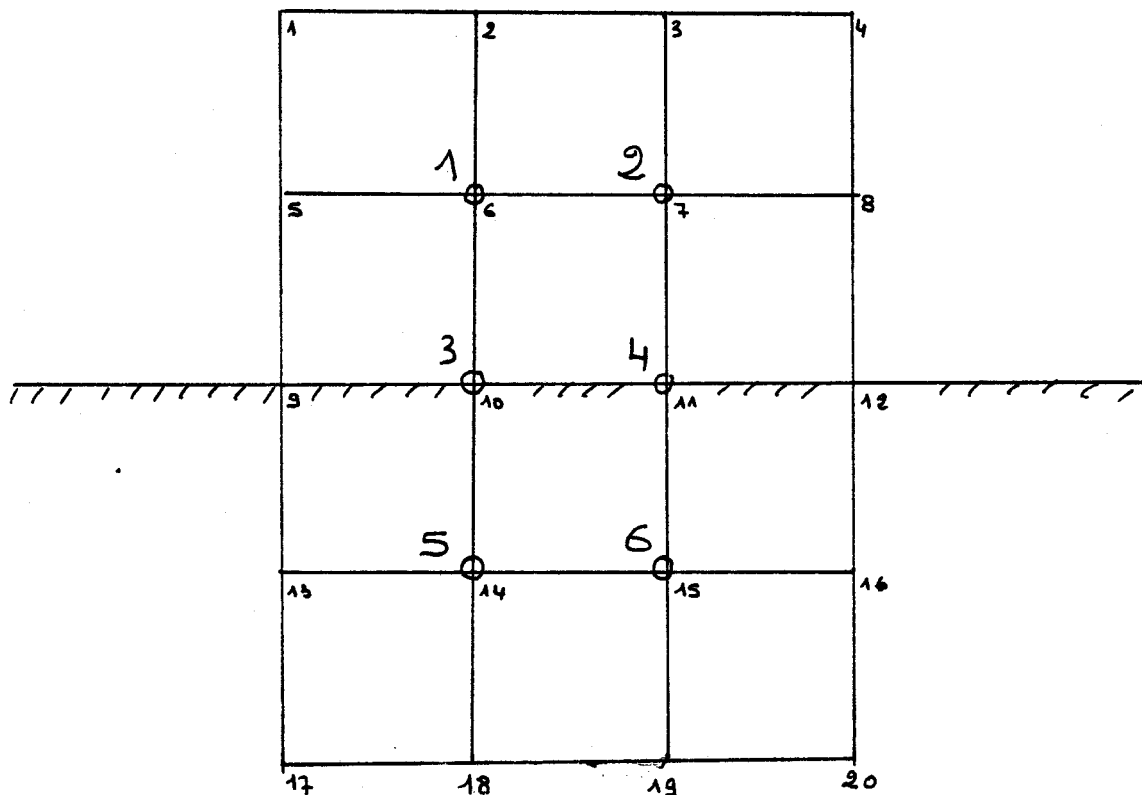


Figure IV-12

Nous avons changé le jeu de numérotations, les noeuds inconnus sont numérotés de 1 à 6 et tous les noeuds sont numérotés de 1 à 20.

Nous appliquons l'équations IV-19 sur tous les noeuds inconnus ; nous aboutissons à un système que nous mettrons sous la forme matricielle suivante :

$$[A] \cdot [H] = [D]$$

$$[ ] = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} -C_{L1} H_{tab}(5) - C_{T1} H_{tab}(2) \\ -C_{R2} H_{tab}(8) - C_{T2} H_{tab}(3) \\ -C_{L3} H_{tab}(9) \\ -C_{R4} H_{tab}(12) \\ -C_{L5} H_{tab}(13) - C_{B5} H_{tab}(18) \\ -C_{B6} H_{tab}(19) - C_{R6} H_{tab}(16) \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} C_{P1} & C_{R1} & C_{B1} & 0 & 0 & 0 \\ C_{L2} & C_{P2} & 0 & C_{B2} & 0 & 0 \\ C_{T3} & 0 & C_{P3} & C_{R3} & C_{B3} & 0 \\ 0 & C_{T4} & C_{L4} & C_{P4} & 0 & C_{B4} \\ 0 & 0 & C_{T5} & 0 & C_{P5} & C_{R5} \\ 0 & 0 & 0 & C_{T6} & C_{L6} & C_{P6} \end{bmatrix}$$

La matrice [A] a les mêmes propriétés que la matrice [C].

## VI.2) Méthode de résolution

La méthode que nous utilisons est une méthode de résolution directe sans inversion. Nous avons fait ce choix pour deux raisons :

- 1) La matrice est stable. Vu la 2<sup>ème</sup> propriété, des erreurs provenant des erreurs d'anomalies sont réduites. Le pivotage n'est pas nécessaire. [22]
- 2) La symétrie de bande par rapport à la diagonale principale permet de stocker la moitié des éléments en mémoire du calculateur d'où un gain de place mémoire.  
En outre la méthode directe est plus rapide que la méthode itérative.

Appliquons maintenant l'algorithme d'élimination de Gauss.

Considérons la première équation du système IV-22

$$C_{P1} H_1 + C_{R1} H_2 + C_{B1} H_3 = B_1$$

soit 
$$H_1 = \frac{1}{C_{P1}} \left[ B_1 - C_{R1} H_2 - C_{B1} H_3 \right]$$

en reportant cette relation dans les équations de IV-22, on élimine  $H_1$  et on ne modifie que les éléments de la sous-matrice  $[C_1]$  d'ordre  $(N_x+1)$  puisque  $H_1$  n'intervient plus au-delà de la  $(N_x+1)$ <sup>ème</sup> ligne.

$$[C_1] = \begin{bmatrix} C_{P1} & C_{R1} & 0 & 0 & C_{B1} \\ C_{L2} & C_{P2} & C_{R2} & 0 & 0 \\ 0 & C_{L3} & C_{P3} & C_{R3} & 0 \\ 0 & 0 & C_{L4} & C_{P4} & 0 \\ C_{L5} & 0 & 0 & 0 & C_{P5} \end{bmatrix}$$

Puis l'élimination de la seconde inconnue  $H_2$  ne fait modifier que les éléments de la sous-matrice  $[C_2]$  dont une partie des éléments, entourée de pointillés, a déjà été modifiée par la première élimination,  $[C_2]$  étant toujours symétrique d'ordre  $(N_x+1)$

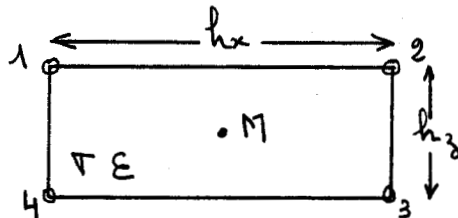
$$[C_2] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{32} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & 0 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{25} \\ \hline C_{T6} & 0 & 0 & C_{L6} & C_{P6} \end{bmatrix}$$

et ainsi de suite jusqu'à la dernière sous-matrice que l'on résoud, et on a le champ  $H_y$  sur les  $(N_x+1)$  derniers noeuds.

A chaque étape d'élimination, on stockera en fichier à accès direct la première ligne de chaque sous-matrice. Ce processus est répété  $(N_x(N_z-3))$  fois.

Dans l'étape de substitution montante, on relit chaque ligne stockée en fichier puis on calcule les valeurs de  $H_y$  correspondantes.

Ainsi nous avons la valeur du champ magnétique en tout point du domaine et nous pouvons calculer le champ électrique à l'intérieur de chaque maille à partir des formules suivantes :



$$E_x(M) = \frac{-1}{\nabla + j\omega\epsilon} \frac{1}{2} \left[ \frac{(H_3 + H_4) - (H_1 + H_2)}{h_z} \right]$$

$$E_z(M) = \frac{1}{\nabla + j\omega\epsilon} \frac{1}{2} \left[ \frac{(H_1 + H_4) - (H_2 + H_3)}{h_x} \right]$$



## VII) CONCLUSION

Le modèle que nous venons d'illustrer présente un vaste domaine d'applications. Nous pouvons étudier, grâce à ce modèle, le comportement d'une onde électromagnétique plane en mode TM dans un espace renfermant un obstacle tel qu'une forêt ou une colline, ou renfermant une vallée ou un gisement, ou encore l'étude de l'onde se propageant dans un milieu stratifié.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons certains résultats obtenus avec le modèle numérique réalisé.

## C H A P I T R E V

### RESULTATS NUMERIQUES CONCERNANT L'INFLUENCE

### D'UNE ANOMALIE BI-DIMENSIONNELLE ECLAIREE PAR UNE ONDE PLANE

### METHODE AUX DIFFERENCES FINIES

#### I) INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit le principe d'un modèle de calcul, basé sur la méthode aux différences finies, afin d'étudier l'influence de la topographie du terrain sur la propagation des ondes électromagnétiques.

La première étape développée dans ce chapitre consiste en une validation numérique de ce modèle basée sur une comparaison à des résultats soit publiés dans la littérature pour certaines configurations, soit à ceux que nous avons développé dans le deuxième chapitre et concernant l'influence d'une anomalie de section droite rectangulaire placée sur la surface du sol.

Nous présentons ensuite des résultats concernant les fluctuations du champ magnétique au voisinage d'un obstacle ou dans une vallée.

## II) VALIDITE DU MODELE

Les méthodes numériques ne trouvent leur sanction que dans l'efficacité et la qualité qu'elles démontrent lors de leur utilisation.

La finalité de notre travail a été conçue en fonction d'elles et il était donc essentiel de vérifier concrètement sur des applications en géophysique données en littérature les potentialités de cette méthode.

L'exemple numérique de validation que nous avons choisi est celui d'une structure du sous-sol représentée par la Figure V-1.a

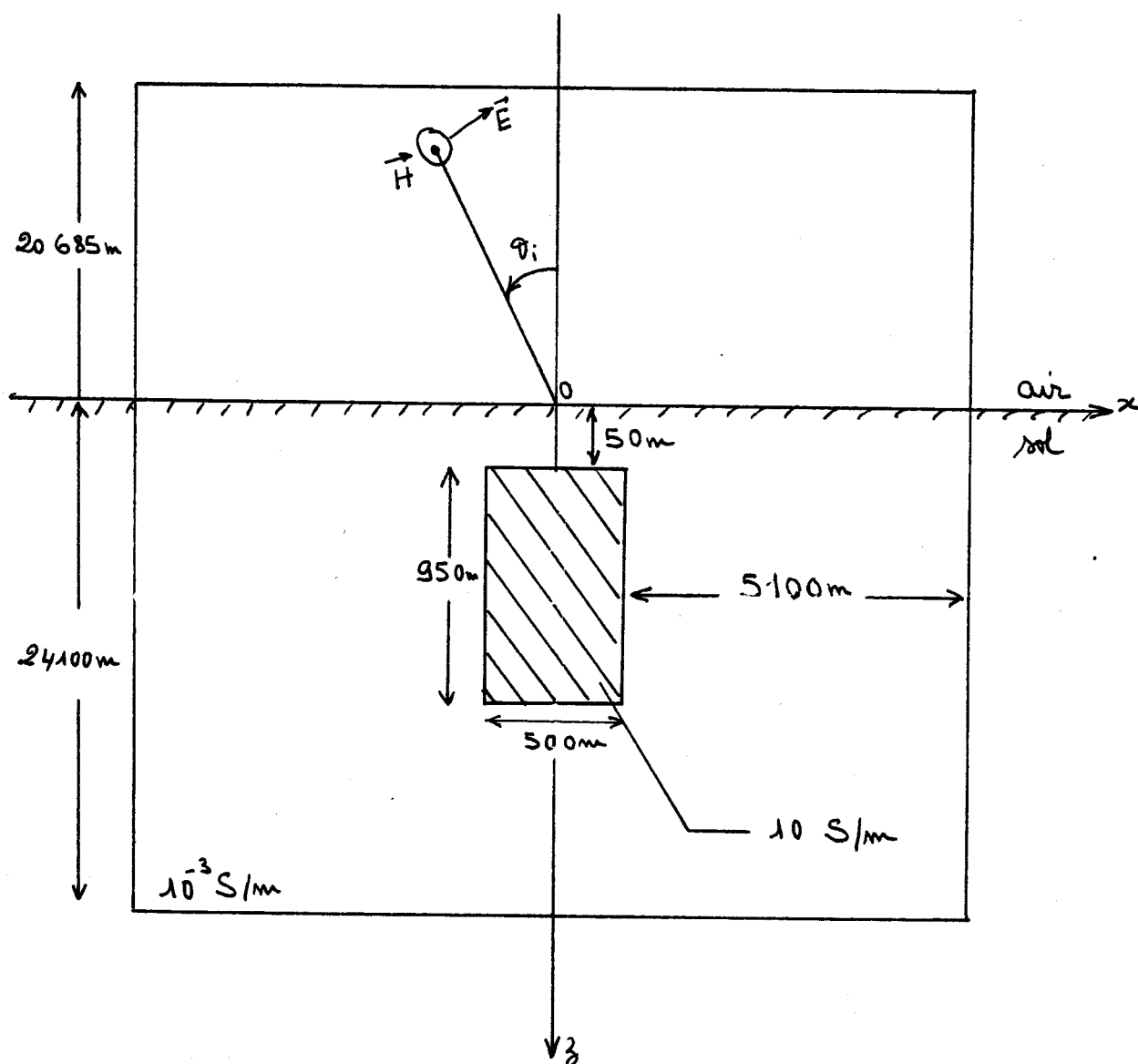


Figure V-1.a

Nous avons supposé une fréquence d'émission de 10 Hz et un angle d'incidence  $\theta = 0^\circ$ .

La structure comporte un fil conducteur dont la distance entre l'interface air-sol et le toit de l'anomalie est de 50 m.

On suppose que le milieu encaissant au voisinage de l'anomalie est homogène.

Nous avons comparé notre résultat avec celui obtenu par Bennani [26] à partir d'une technique aux éléments finis.

Sur la Planche V-1, nous avons tracé l'indice d'anomalie  $I_{ex}$  calculé par notre modèle et par celui de Bennani [26]. Cet indice est défini par :

$$I_{ex} = \frac{|E_{x\text{tab}}| - |E_{x\text{cal}}|}{|E_{x\text{tab}}|}$$

où  $|E_{x\text{tab}}|$  est le module du champ électrique horizontal  $E_x$  du milieu homogène ;  $|E_{x\text{cal}}|$  celui du champ  $E_x$  en présence d'anomalie. L'indice a été calculé à 25 cm en-dessous de la surface du sol. Le modèle discrétisé est composé de 33 tranches horizontales d'épaisseurs consécutives valant respectivement de haut en bas : 5000 m, 5000, 4000, 3000, 2000, 1000, 500, 100, 50, 20, 10, 5, 0,5, 19.5, 30, 50, 75, 100, 125, 150, 200, 250, 350, 500, 750, 1000, 1500, 2000, 3000, 4000, 5000 et 5000 mètres dont 12 sont dans l'air, et 34 mailles verticales par rapport à l'origine 0, 17 mailles à partir de l'origine de largeurs consécutives : 50 m, 100, 100, 100, 125, 125, 350, 350, 450, 450, 450, 450, 450, 450, 450 et 450 mètres (Figure V-1.b)

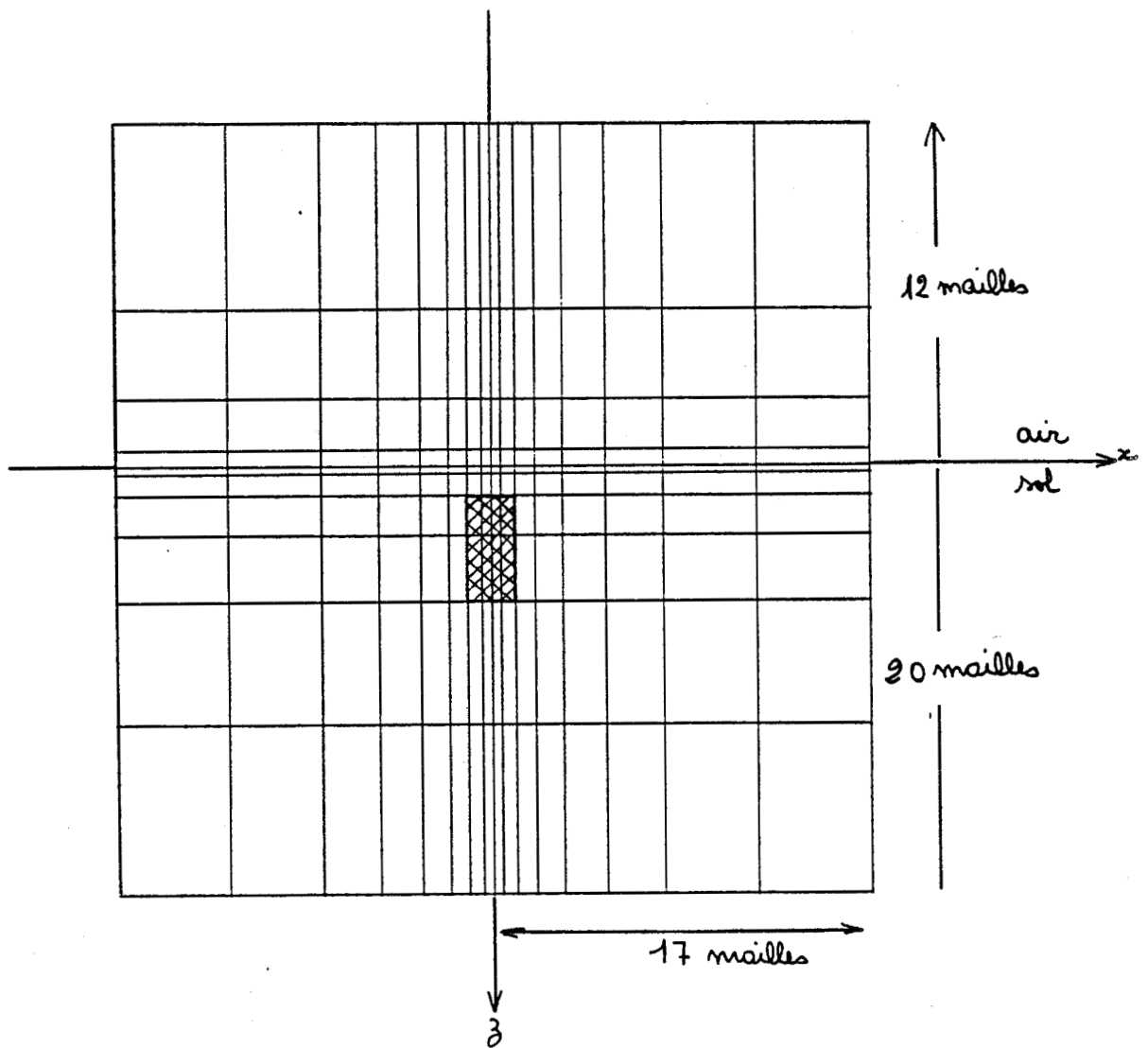
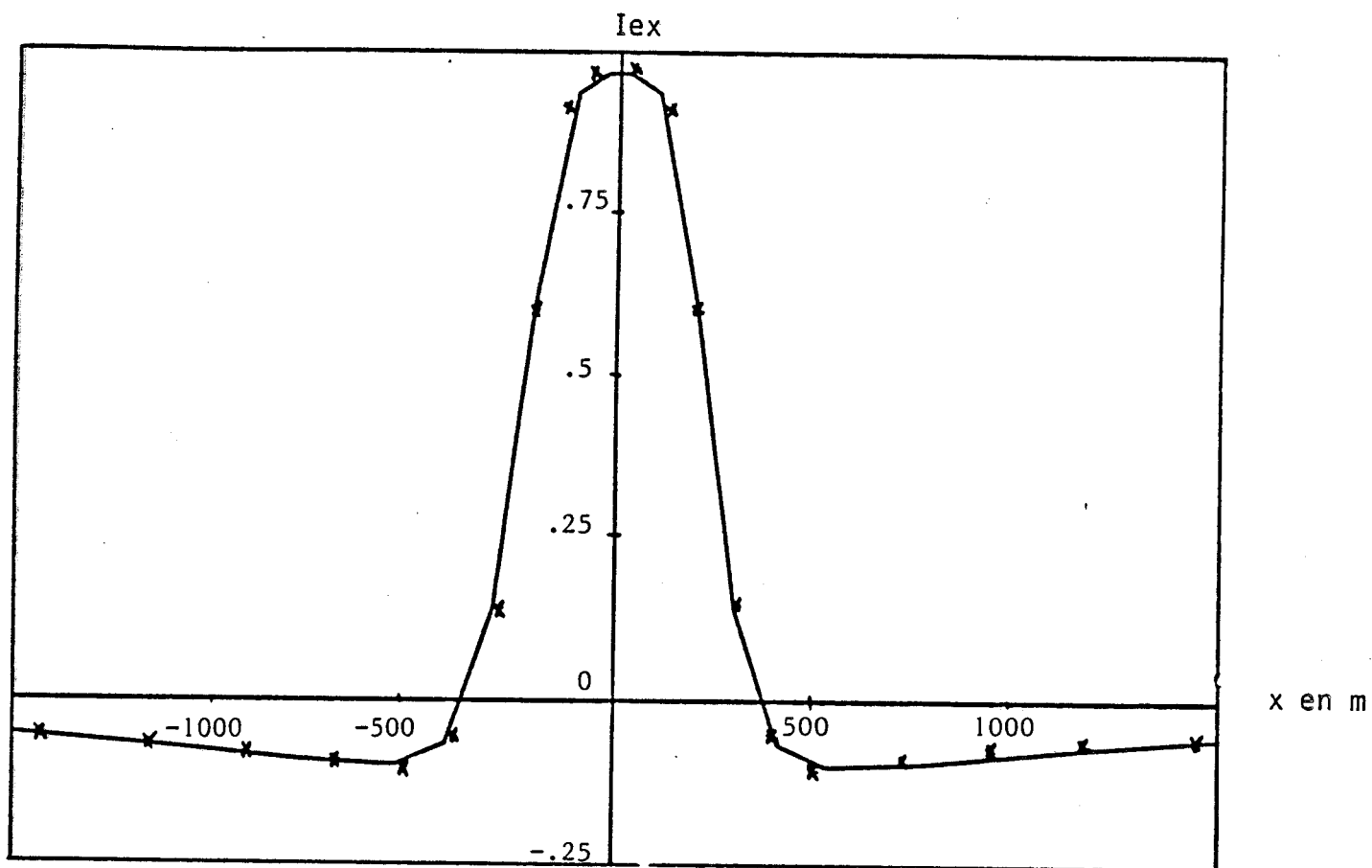


Figure V-1.b

Les deux résultats obtenus par les deux méthodes coïncident parfaitement (Planche V-1).

### III) CRITERE DE DECOUPAGE

Les erreurs qui seront rencontrées peuvent être de deux types : l'une d'ordre numérique (précision disponible par la machine, erreur d'arrondi due au système matriciel), l'autre étant liée à la méthode numérique choisie (l'approximation d'un problème continu par un problème discret en différences finies). Ce deuxième type d'erreur, bien sûr peut être réduit par d'autres types d'approximation d'ordre plus élevé en différences finies. En pratique, l'étude de convergence du problème se fait par affinement du réseau de mailles, mais ce qui risque également



x x x x éléments finis  
 ——— différences finies

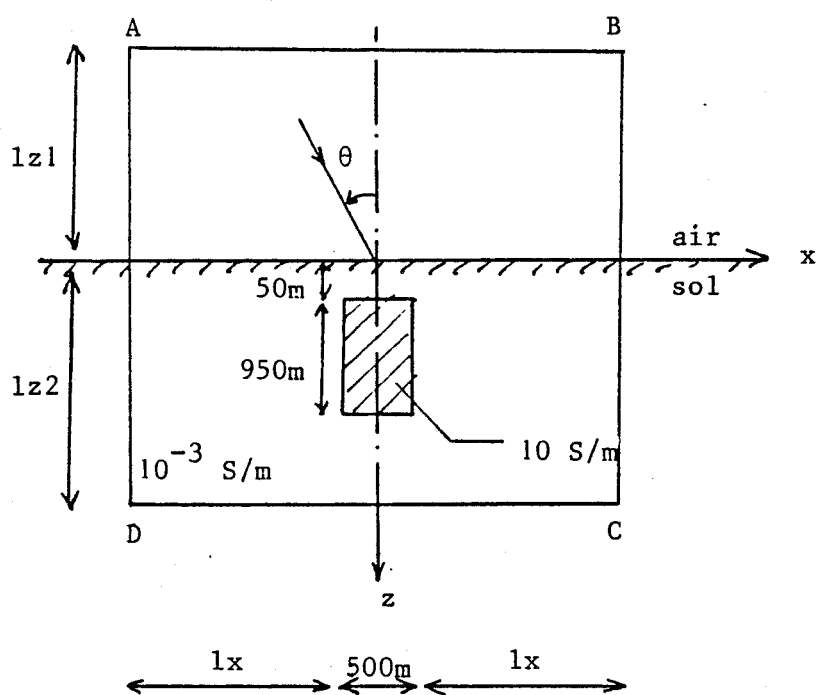


Planche V-1

d'entraîner une erreur numérique croissante. Il faut donc optimiser le nombre de mailles et si besoin est, faire exécuter le programme en double précision.

Dans le cas général, la convergence ne peut être montrée qu'en changeant le mode de découpage et en étudiant la stabilité de la solution.

### III.1) Découpage optimal

On construit le plus souvent un maillage irrégulier qui suit certaines "règles" empiriques que nous décrivons en détail ci-dessous :

#### a) Dans la direction OX

D'après MUFTI [24], le découpage horizontal suivant l'axe des X doit être fait suivant une variation croissante logarithmiquement à partir de l'origine choisie au milieu du maillage.

En présence d'une anomalie, le champ magnétique résultant varie, de toute façon, rapidement aux bords de l'hétérogénéité et dans cette zone, le maillage doit être serré tout en respectant certains critères de découpage [24].

Une autre règle citée par MUFTI [25] est que la taille des mailles doit être en progression géométrique de raison  $a = \sqrt{2}$  en s'éloignant de l'hétérogénéité.

Cependant, dans les nombreux exemples que nous avons traité, il nous est apparu de faire tous les passages avec un pas en X constant.

#### b) Dans la direction OZ

Lors d'un passage d'un milieu à un autre, la variation du champ magnétique est exponentielle. Nous essayons d'ajuster cette variation en choisissant les épaisseurs des couches au voisinage de l'interface, prudemment faible.

### III.2) Taille du domaine

Dans le quatrième chapitre, nous avons précisé que le domaine doit être suffisamment grand pour que l'on puisse supposer que l'influence de l'anomalie ne se fait plus sentir sur les bords.

Un deuxième type d'erreurs pourrait provenir du choix d'un domaine assez limité. Pour étudier la convergence liée à cette erreur, il suffit de simuler plusieurs modèles d'extension variable du contour (ABCD).

Pratiquement, nous avons trouvé que la solution reste stable si le domaine a les dimensions suivantes : (Figure V-2)

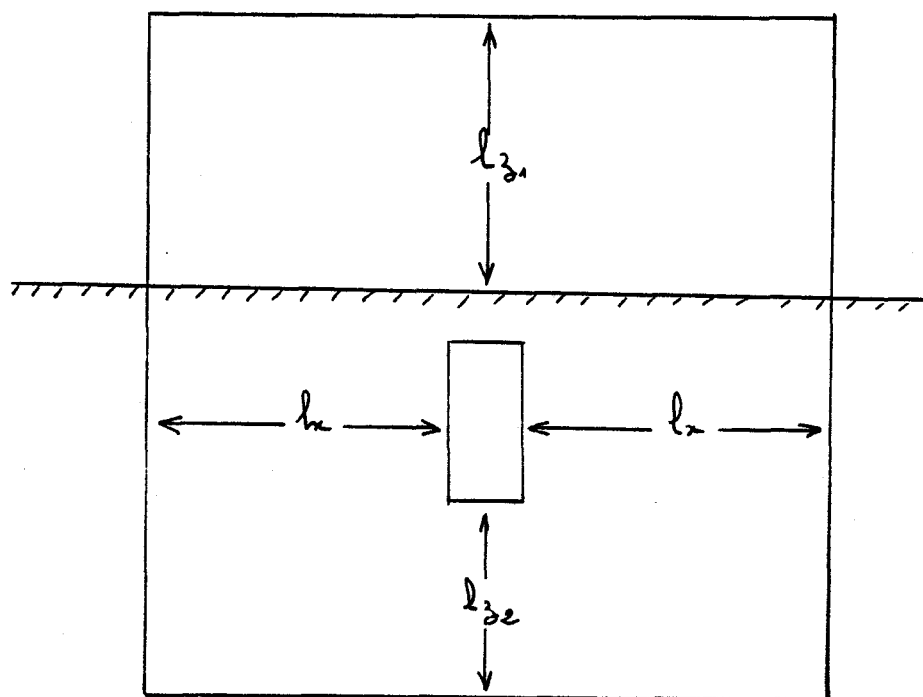


Figure V-2

$$l_x > \delta$$

$$l_{z1} > 2\delta$$

$$l_{z2} > \delta$$

$\delta$  étant la profondeur de pénétration dans le milieu dont la conductivité est la plus élevée.



#### **IV) APPLICATIONS**

Dans tous les exemples présents dans ce paragraphe, l'amplitude du champ magnétique incident dans l'air a été normalisée à 1A/m.

##### **IV.1) Coefficient de réflexion**

Dans les paragraphes suivants nous devons évaluer l'effet engendré par l'anomalie à l'intérieur du domaine artificiel considéré. Cet effet étant négligeable loin de l'anomalie, le champ tabulaire est imposé sur les bords du maillage. Le champ dépend évidemment de la fréquence, de l'angle d'incidence et des conductivités des milieux choisis. Nous nous proposons au préalable d'étudier les variations du champ électrique en fonction des paramètres de l'onde et des caractéristiques du lieu de propagation.

Nous avons donc tracé sur la Planche V-2, le module et la phase du coefficient de réflexion en mode TM, en fonction de la fréquence. La conductivité du milieu réfrigérant est égale à  $10^{-3}$  S/m et la permittivité relative est égale à 10.

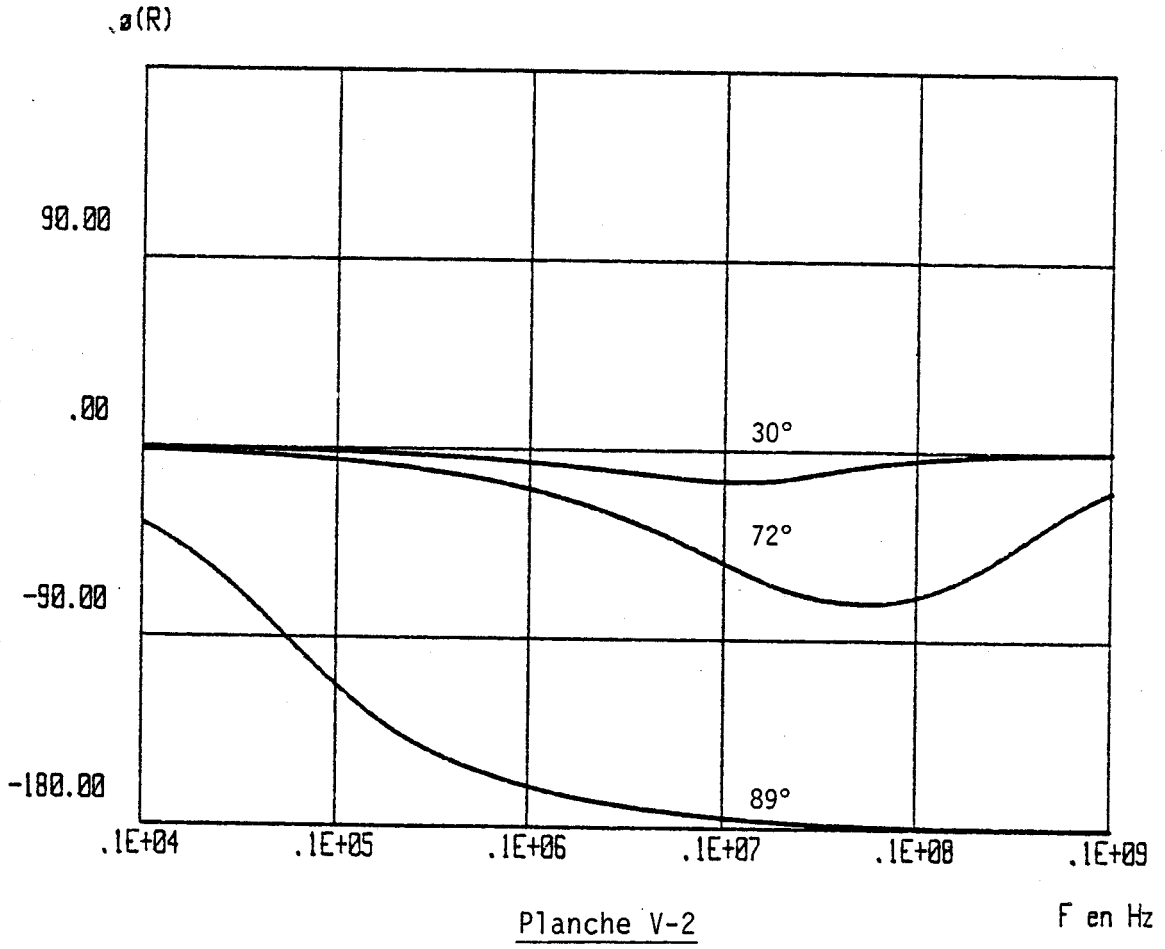
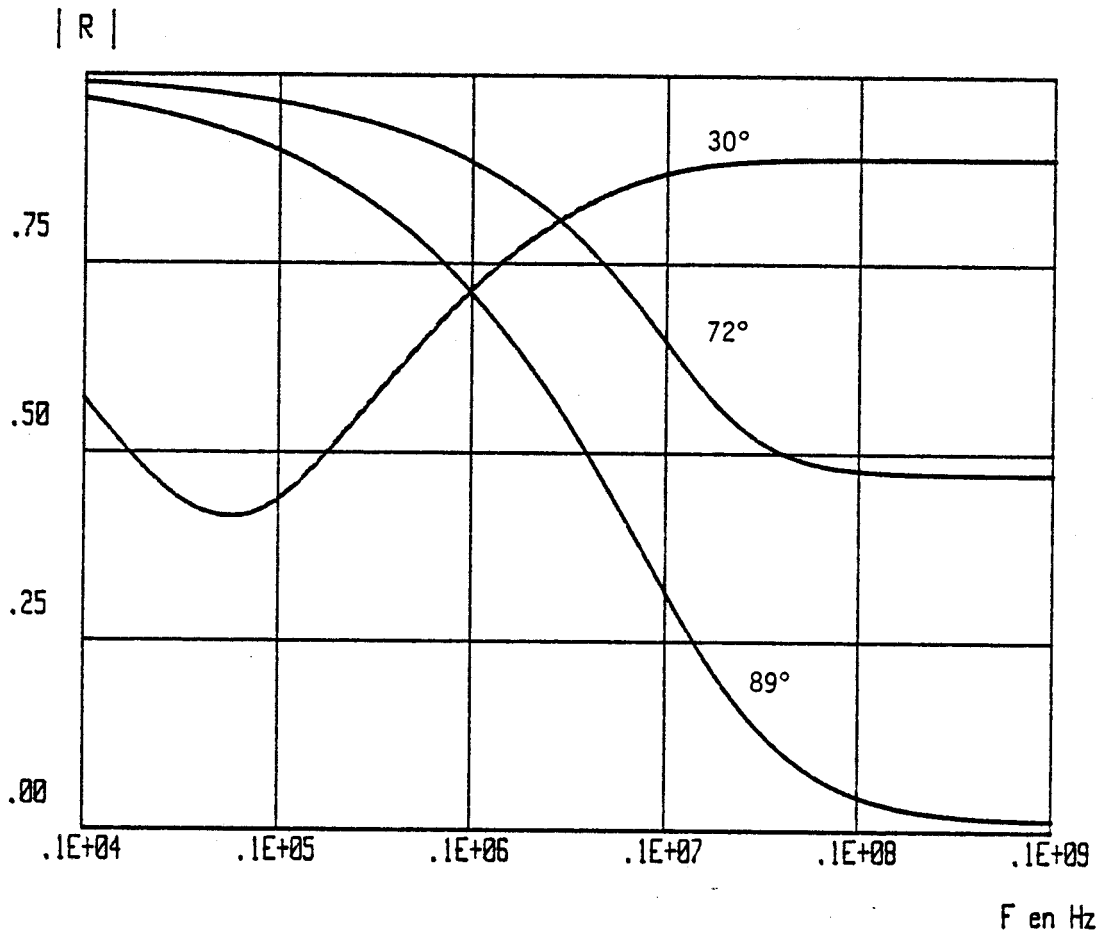
Nous remarquons que le coefficient de réflexion passe de 0,4 à 0,7 entre 10 kHz et 100 kHz pour un angle d'incidence de  $30^\circ$ , la phase reste pratiquement nulle, le champ doit passer donc du simple au double entre ces deux fréquences.

Pour une fréquence donnée de 100 kHz, le coefficient de réflexion est le même pour les deux angles d'incidence  $30^\circ$  et  $89^\circ$ , mais l'amplitude du champ total sera différente puisque la phase vaut respectivement  $-20^\circ$  et  $-160^\circ$ .

##### **IV.2) Comparaison entre équations intégrales et différences finies**

Un moyen de validation du modèle est de comparer les résultats à ceux donnés par la méthode des équations intégrales décrites au 2ème chapitre.

Coefficient de réflexion



Pour cela, nous avons représenté sur les Planches V-3 et V-4 les courbes représentant le champ électrique vertical donné par les 2 méthodes en fonction de la distance anomalie-récepteur. Cette configuration est schématisée sur la Figure suivante :

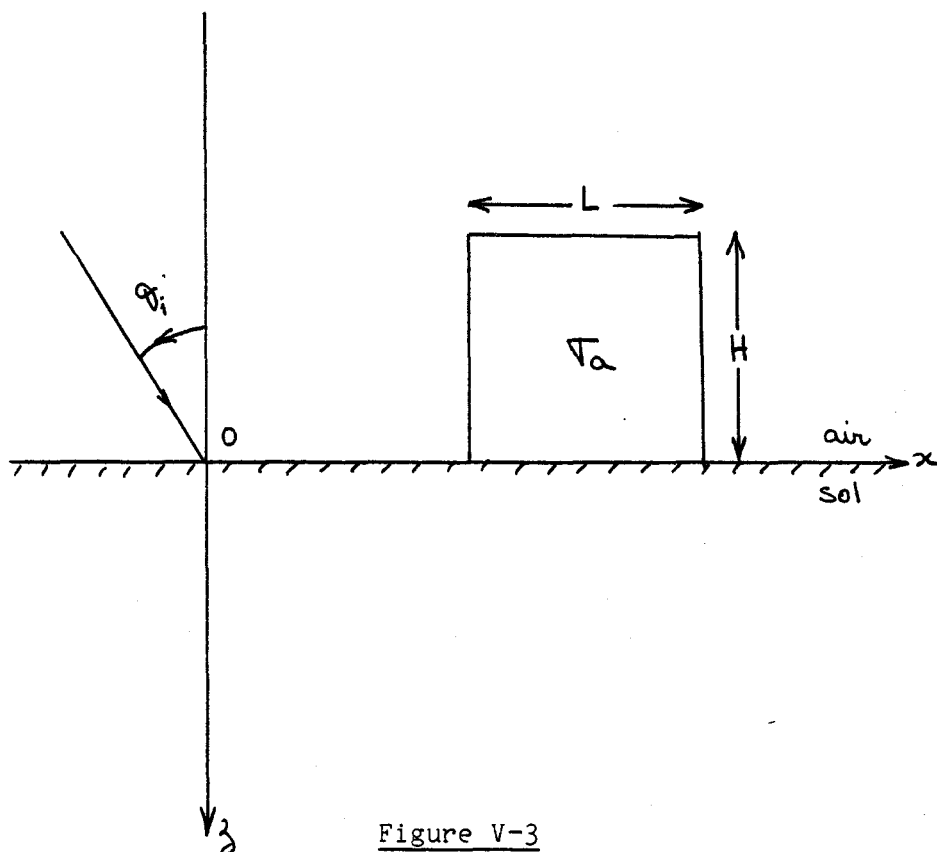


Figure V-3

H la hauteur de l'anomalie et L sa longueur sont égales et valent 40 mètres.  $\theta_i$  l'angle d'incidence vaut  $30^\circ$  ou  $89^\circ$ , et la fréquence est soit 10 kHz ou 100 kHz.

Les courbes sont paramétrées en  $\sigma_a$  conductivité de l'anomalie.

La réception se fait au voisinage du sol.

Nous remarquons sur ces courbes qu'à 30 m de l'anomalie, les deux méthodes coïncident parfaitement ; à 15 m de l'anomalie, la différence n'excède pas 4 % pour une conductivité de  $10^{-4}$  S/m. Pour une conductivité de  $10^{-6}$  S/m les courbes ne présentent pas de différence.

a) Influence de la conductivité

Comme on le remarque sur les courbes précédentes, la composante verticale  $E_z$  du champ électrique est très sensible à une conductivité de l'anomalie supérieure ou égale à  $10^{-5}$  S/m et ceci pour une fréquence de 10 kHz.

A 15 m de l'anomalie, le champ a varié de 50 % de la valeur initiale. Par contre pour une conductivité inférieure ou égale à  $10^{-3}$  S/m et pour une fréquence de 100 kHz,  $E_z$  ne varie que très faiblement puisque nous remarquons une variation inférieure à 15 % pour  $10^{-5}$  S/m, et une variation inférieure à 3 % pour  $10^{-6}$  S/m.

b) Influence de l'angle d'incidence

Sur la planche (V-4) nous avons tracé pour deux valeurs de l'angle d'incidence  $\theta = 30^\circ$  et  $89^\circ$ , la composante verticale du champ électrique. La fréquence est égale à 100 kHz et la conductivité de l'anomalie est de  $10^{-4}$  S/m. La variation de l'angle d'incidence est sans effet sur le comportement de  $E_z$  au voisinage de l'anomalie.

**IV.3) Etude du champ au voisinage ou dans une anomalie de conductivité**

a) Influence de la conductivité

Nous reprenons la configuration décrite sur la Figure V-3. La hauteur  $H$  de l'anomalie est égale à 40 m ; la fréquence est 100 kHz et l'angle d'incidence est  $\theta = 89^\circ$ . La conductivité de l'anomalie peut être égale à  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$  ou  $10^{-6}$  S/m. Le champ est calculé à une hauteur de 15 m de part et d'autre et dans l'anomalie. Nous avons représenté sur la Planche V-5 le module du champ électrique vertical  $E_z$  et horizontal  $E_x$ .  $E_z$  diminue fortement à l'intérieur de l'anomalie lorsque la conductivité est de  $10^{-4}$  S/m, mais reste pratiquement insensible à la présence de l'anomalie de  $10^{-6}$  S/m. D'autre part, nous remarquons sur la Planche V-5.b que la composante horizontale  $E_x$  du champ électrique varie très

Comparaison avec les équations intégrales

$\theta = 89^\circ$

—— équations intégrales  
----- différences finies

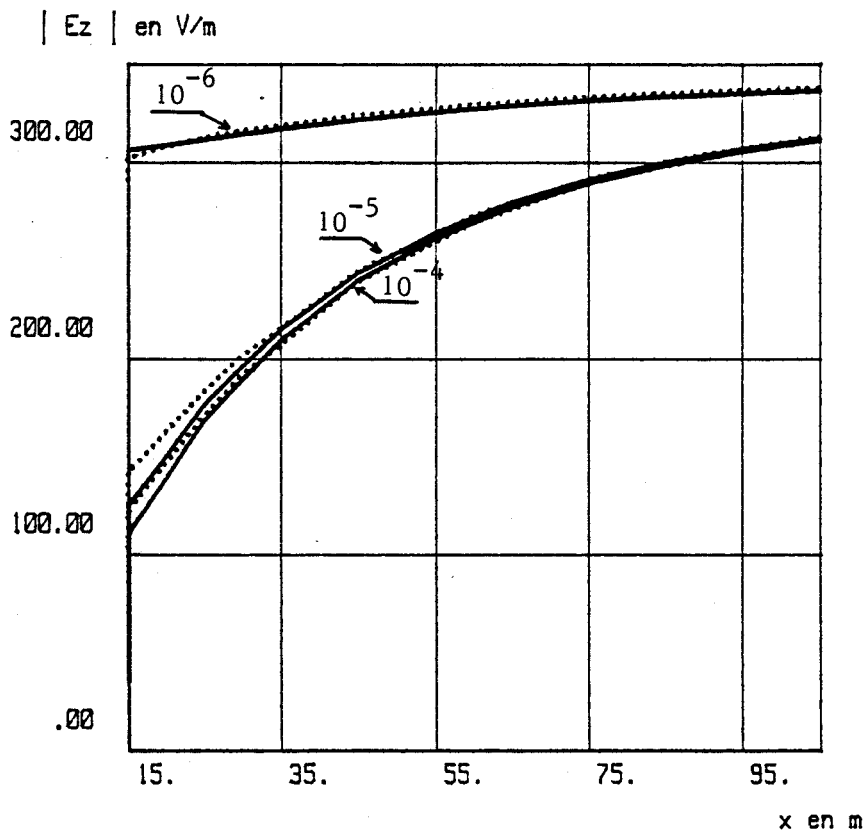
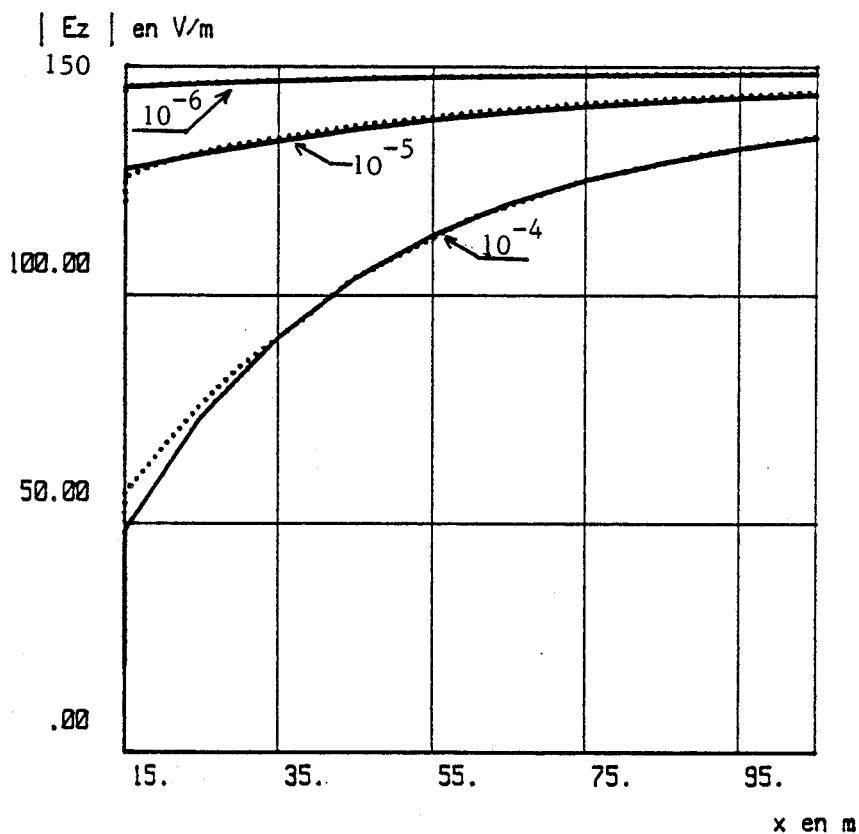


Planche V-3

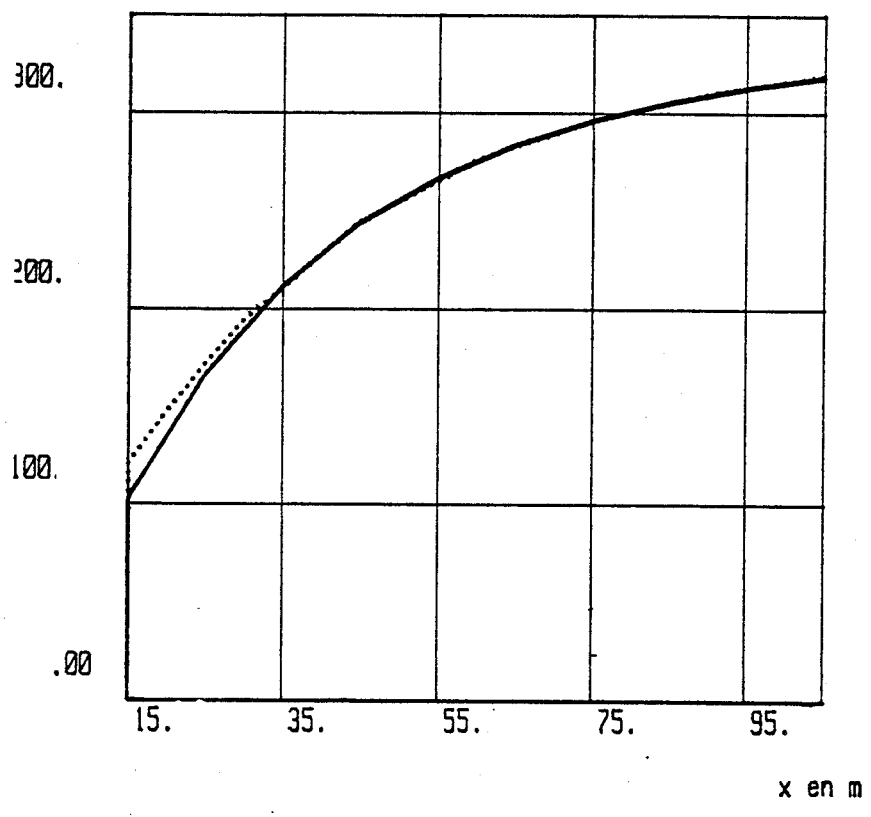
Comparaison avec les équations intégrales

$f = 100 \text{ KHz}$      $\theta = 89^\circ$

$\sigma = 10^{-4} \text{ S/m}$

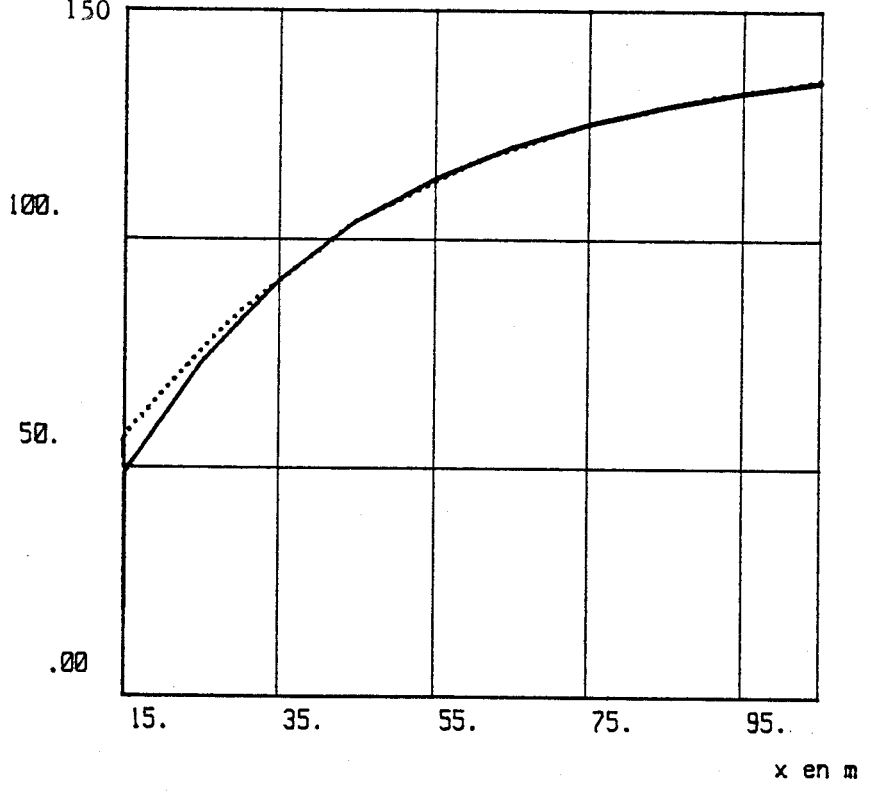
— équations intégrales  
- - - différences finies

$|E_z|$  en V/m



$\theta_i = 30^\circ$

$|E_z|$  en V/m

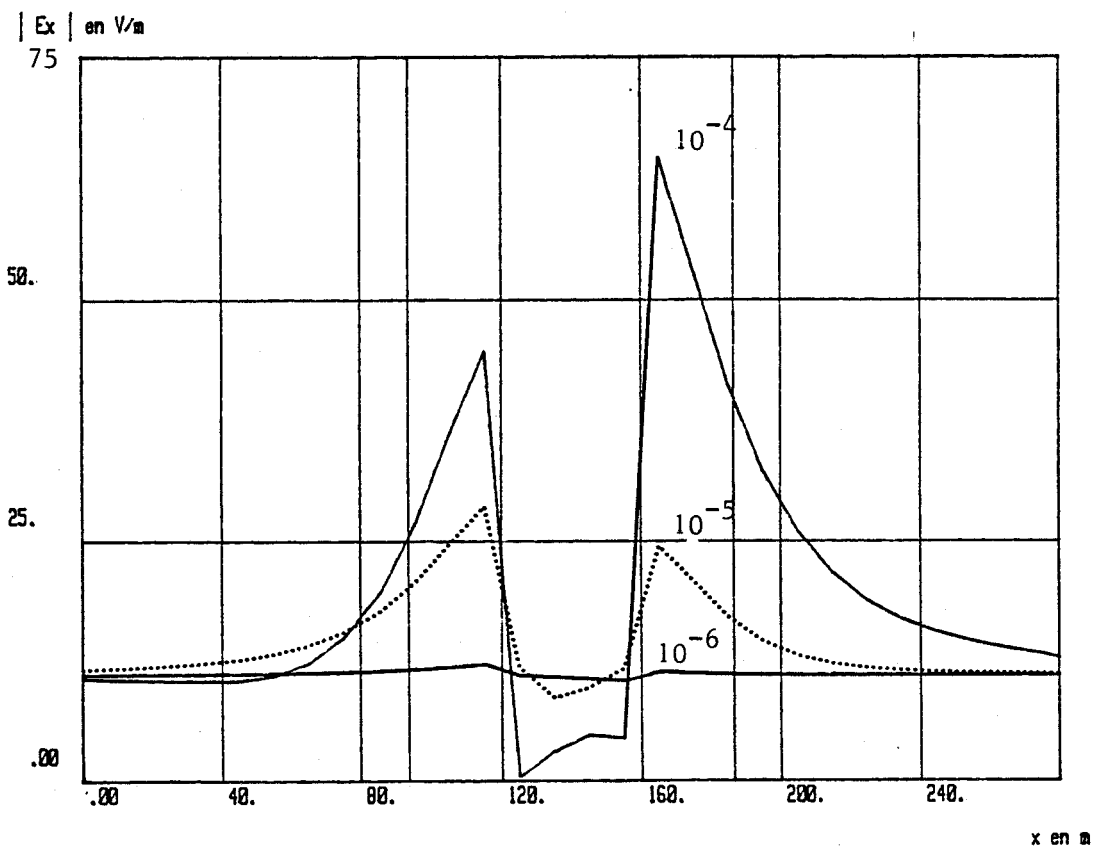
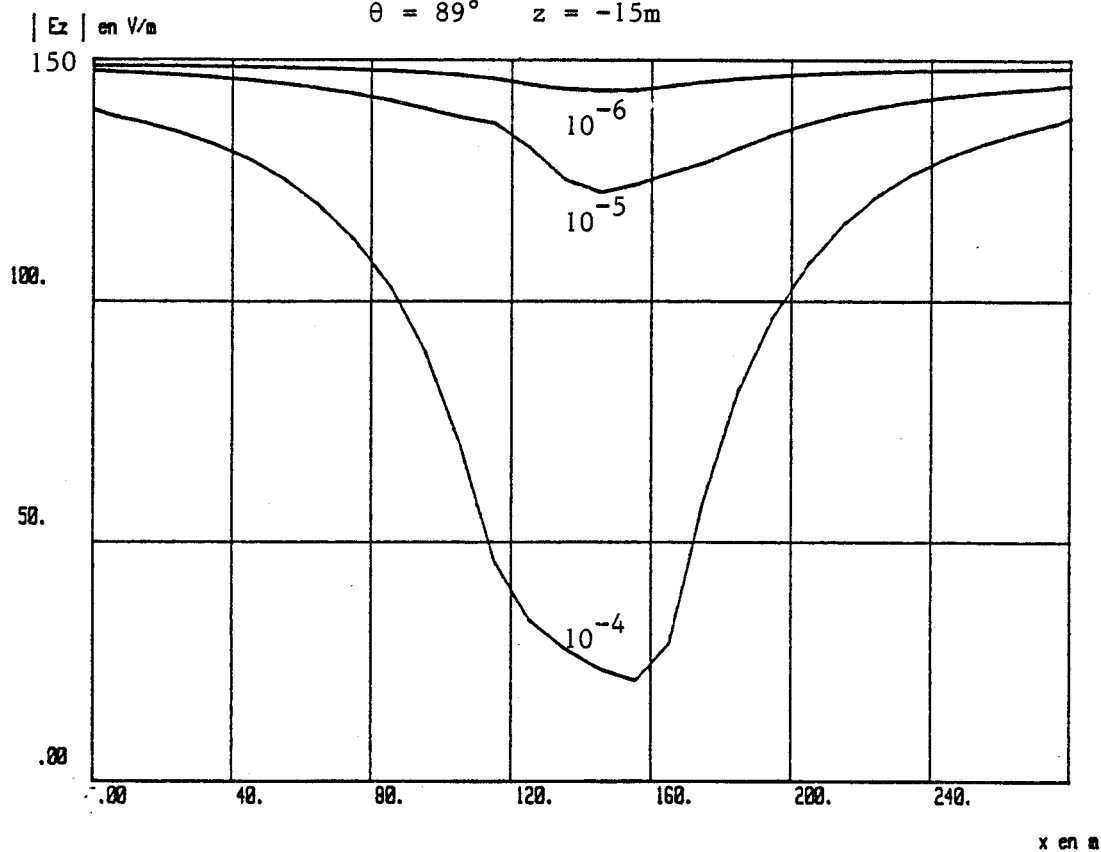


$\theta_i = 89^\circ$

### Influence de la conductivité

f = 100 KHz ; anomalie: 40x40m

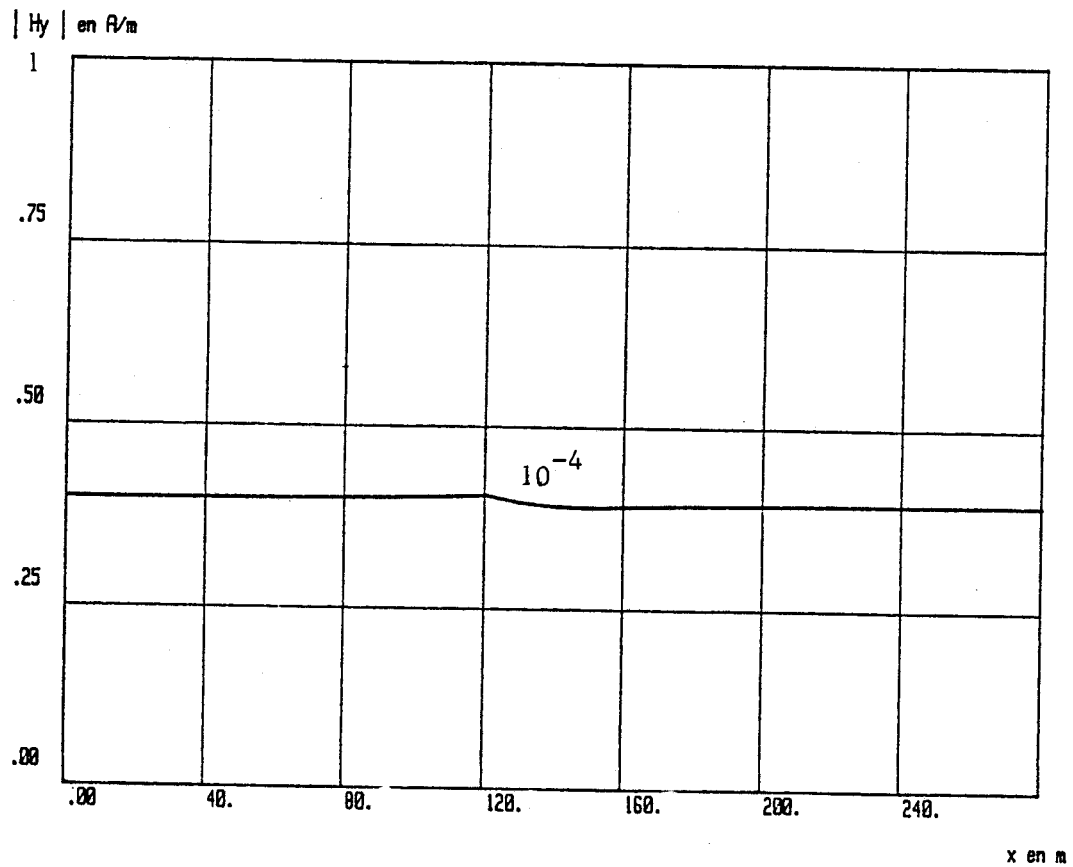
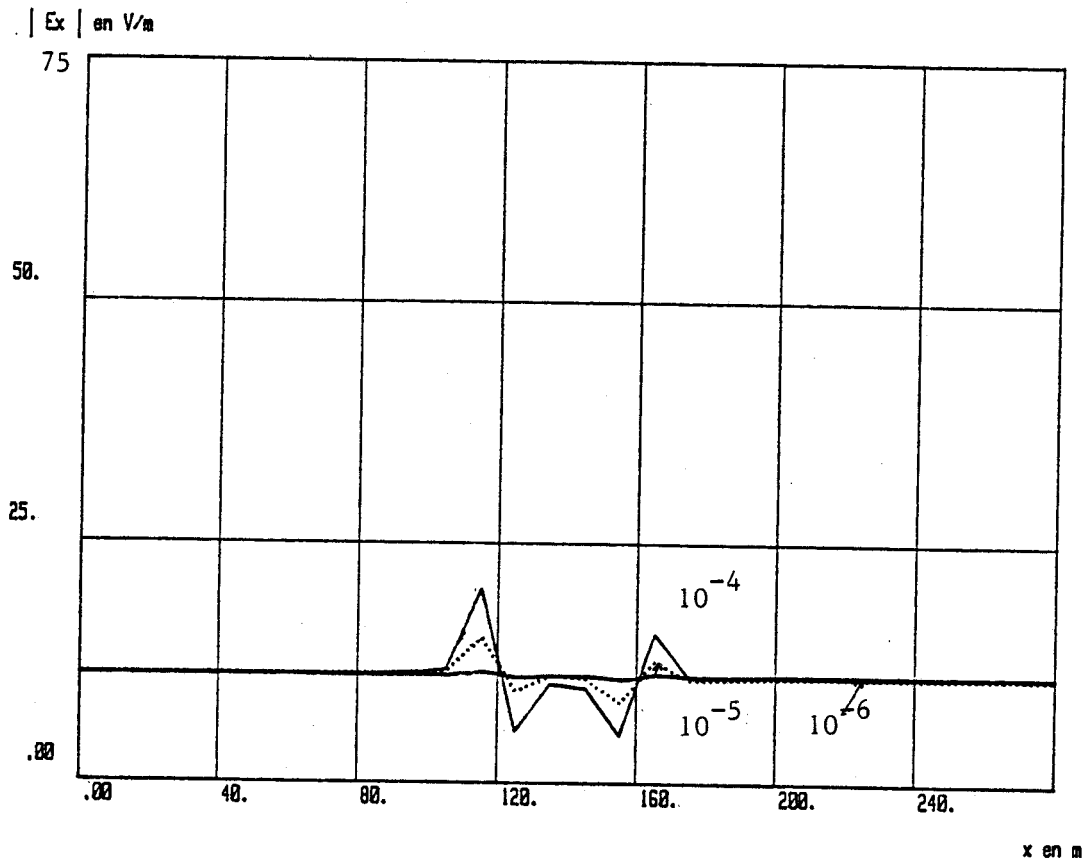
$\theta = 89^\circ$     z = -15m



127  
Influence de la conductivité

$f = 100 \text{ KHz}$  ; anomalie:  $40 \times 40 \text{ m}$

$\theta = 89^\circ$      $z = -5 \text{ cm}$

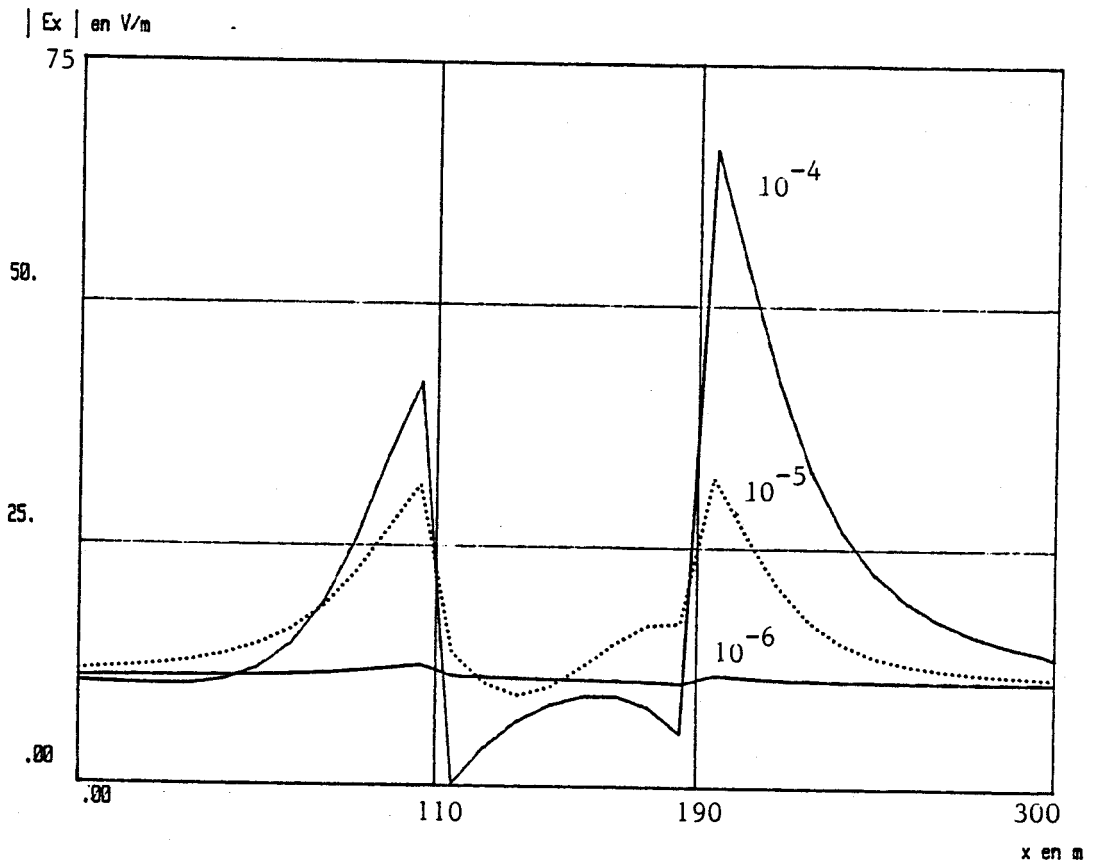
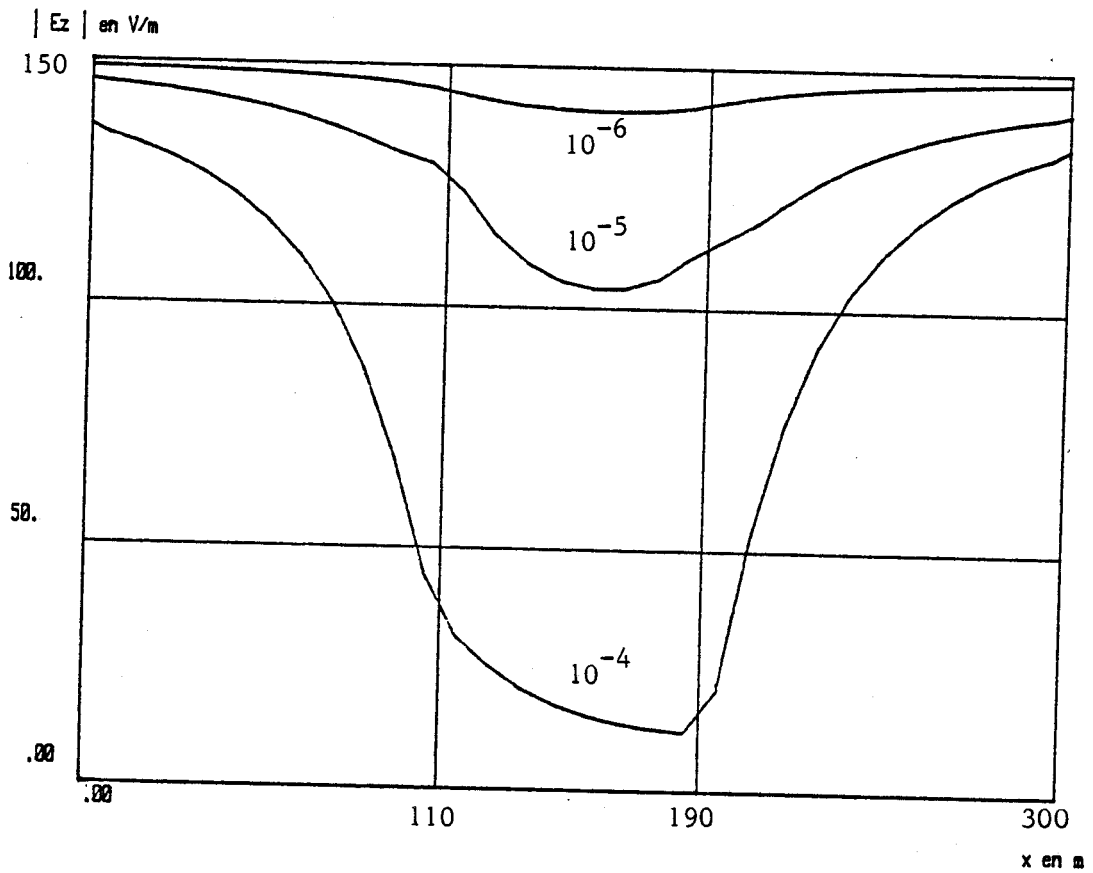




# Influence de la conductivité

f = 100 KHz ; anomalie: 80x40m

$\theta = 89^\circ$     z = -15m



rapidement au voisinage immédiat de l'anomalie. Cet effet diminue lorsque le point de calcul du champ se situe à la surface du sol. (Planche V-6.a)

La courbe b de la Planche V-6 montre l'invariance du champ magnétique quant à la présence d'une anomalie de  $10^{-4}$  S/m.

#### b) Influence de la largeur

Les courbes des Planches V-7 et V-8 ont été tracées pour une anomalie de largeur plus importante que précédemment et égale à 80 m, et pour deux hauteurs du point de réception : 15 m et 5 cm. La comparaison de la forme de ces courbes avec celles des Planches V-5 et V-6 montre que la diminution du champ en fonction de la position du récepteur est peu sensible à la largeur de l'anomalie. En effet, à une distance  $r$  de l'anomalie de l'ordre de sa hauteur  $h$ , l'amplitude du champ est 0,7 fois sa valeur  $E_0$  en l'absence d'anomalie, et lorsque  $r = 2h$ , le champ atteint  $0,8 E_0$ .

On remarque de plus sur les Planches V-7 et V-8 que la composante verticale  $E_z$  est peu dépendante de la hauteur du point d'observation tandis que les fluctuations rapides de la composante horizontale au voisinage de l'obstacle diminuent fortement lorsque le point de réception s'approche de la surface.

#### IV.4) Etude de la vallée

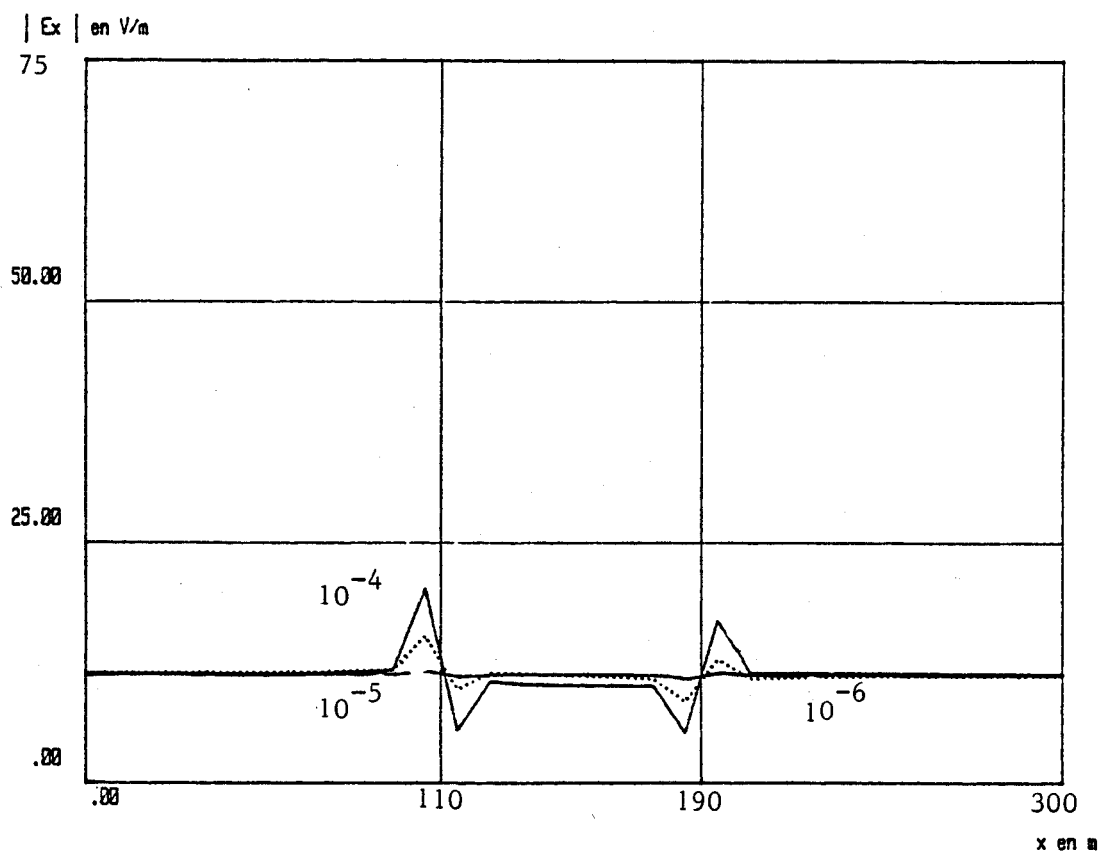
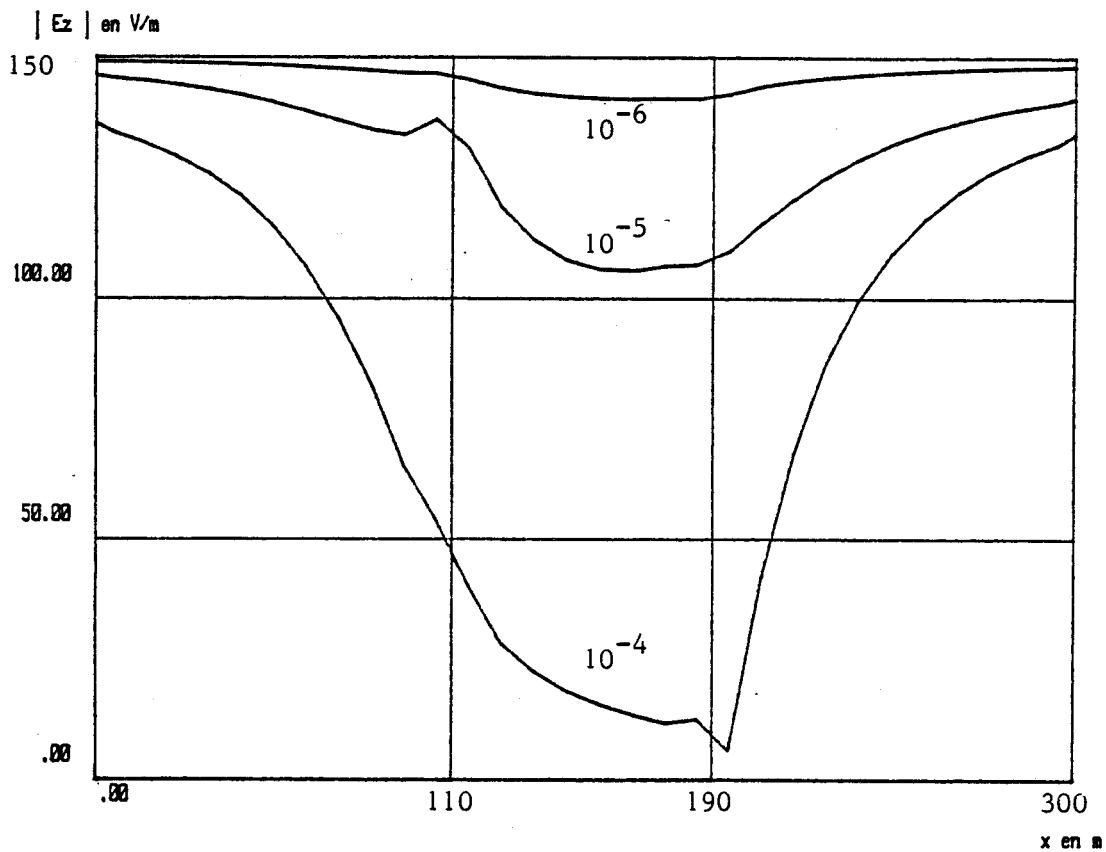
Nous commencerons cette étude par celle d'une vallée de section droite rectangulaire puis nous aborderons le cas d'une vallée "réelle" ayant des pentes non abruptes. Cette vallée peut être assimilée à une anomalie de conductivité nulle située juste en-dessous de l'interface air-sol.

La fréquence envisagée est de 10 kHz ou 100 kHz et l'angle d'incidence de  $30^\circ$  ou  $89^\circ$ .

Influence de la largeur

f = 100 KHz ; anomalie: 80x40m

$\theta = 89^\circ$     z = -5cm



a) Vallée à section droite rectangulaire

Nous schématisons cette configuration géométrique sur la Figure V-4

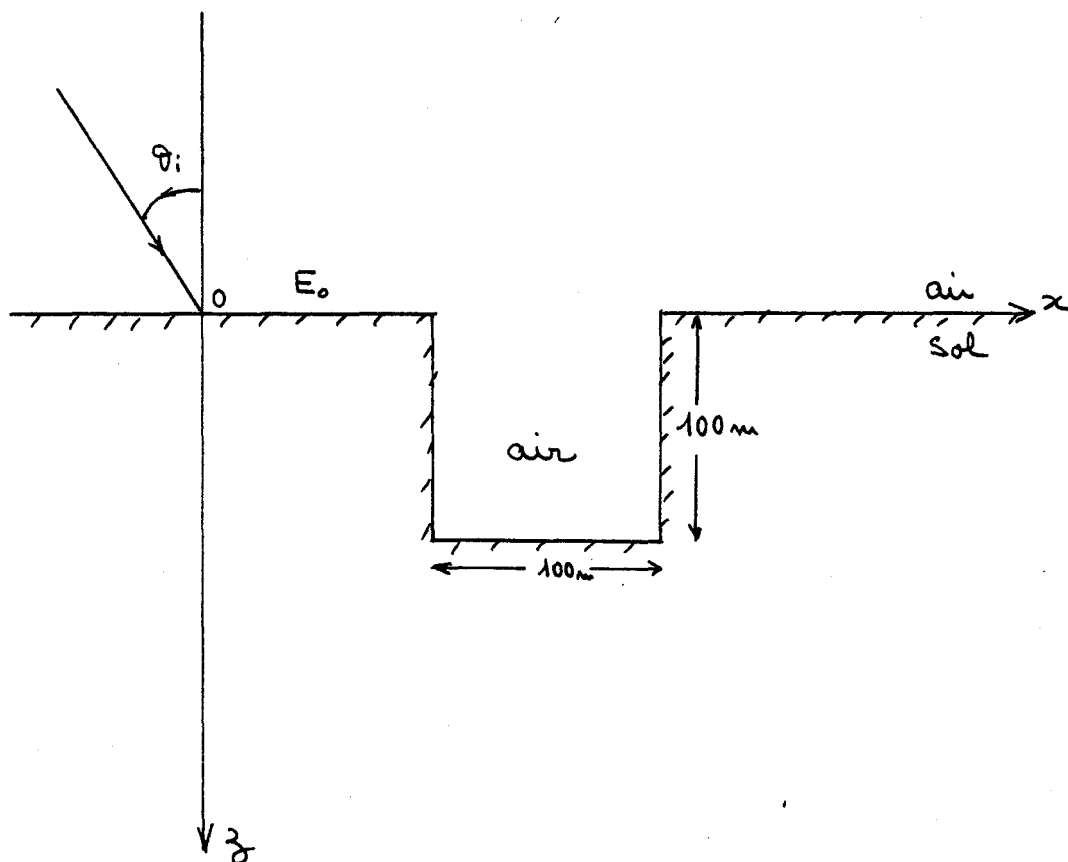


Figure V-4

Dans une première étape, la fréquence d'émission est de 10 kHz et l'onde arrive sous incidence rasante ( $\theta = 39^\circ$ ).

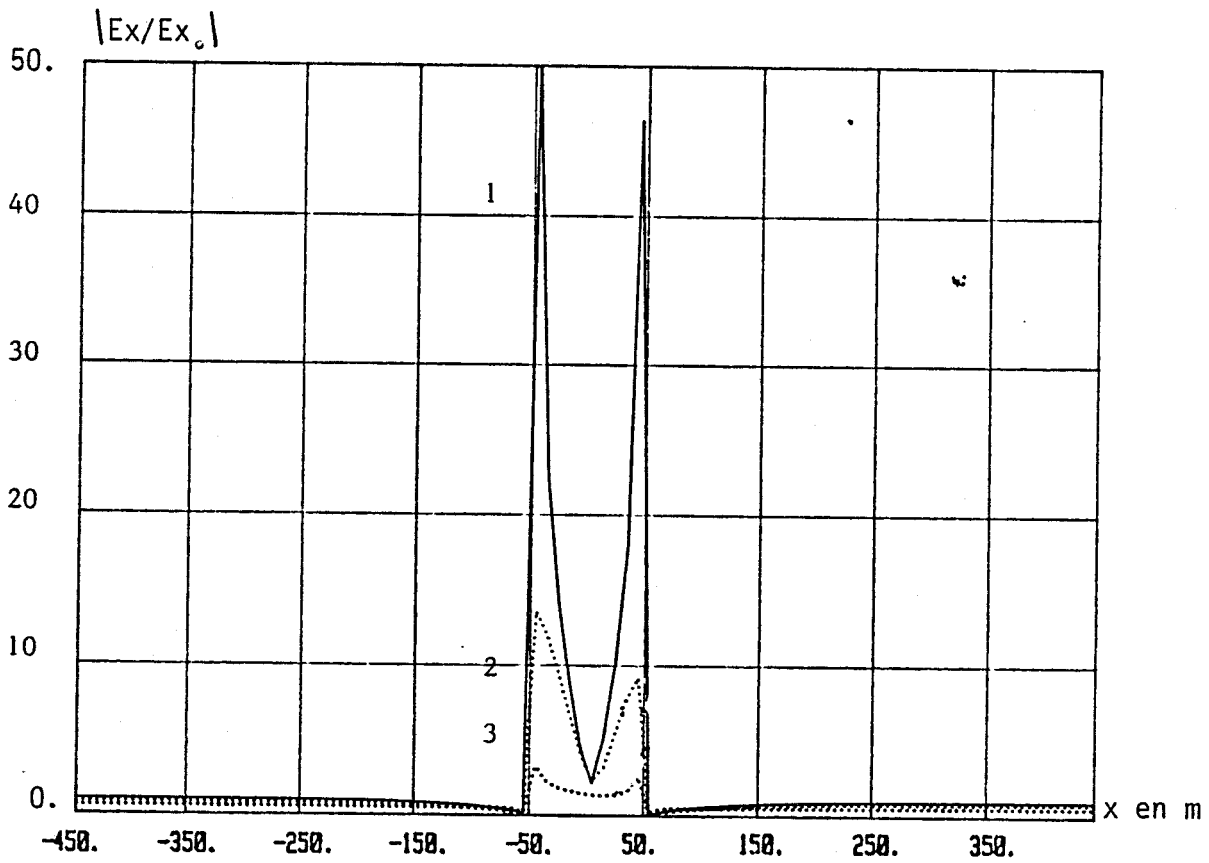
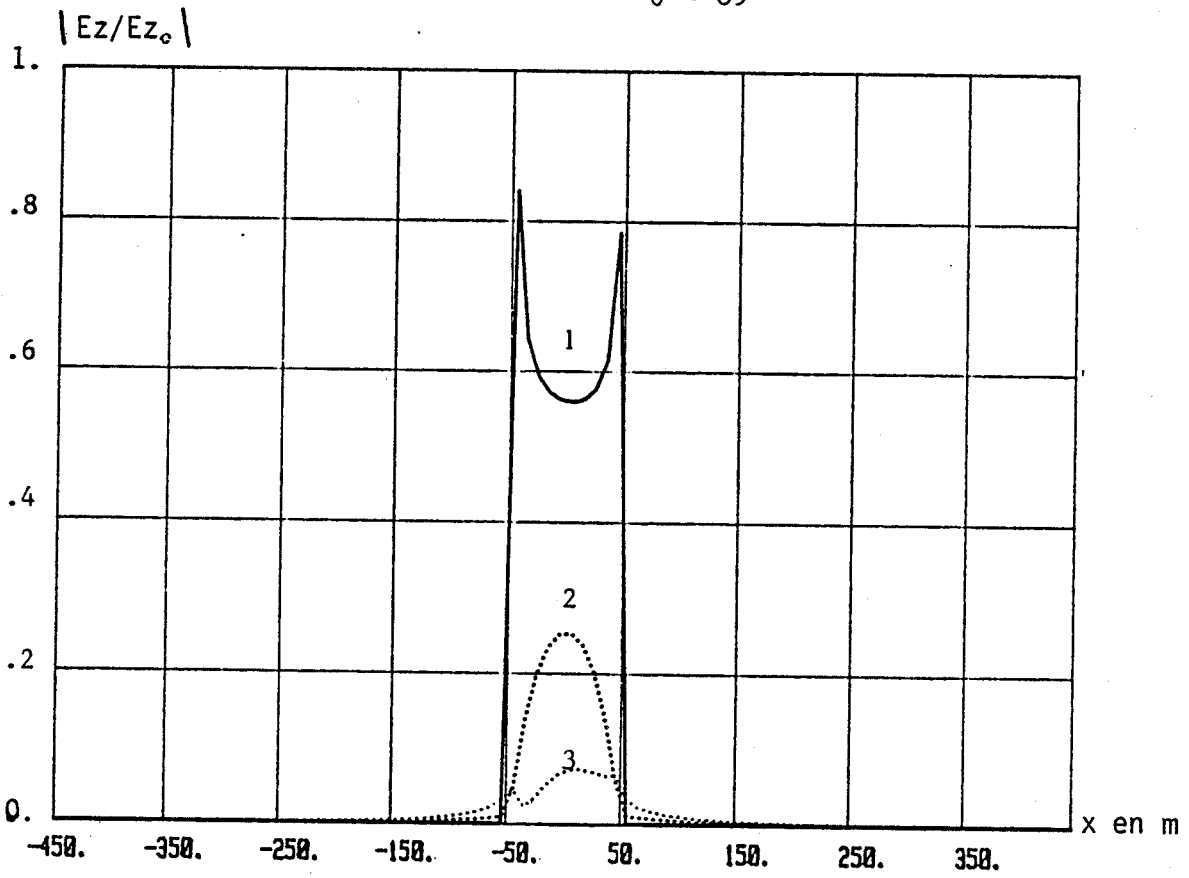
Sur les Planches V-9 et V-10 nous avons représenté en fonction de la position horizontale du récepteur la variation du rapport  $E_z/E_{z0}$  et  $E_x/E_{x0}$  où  $E_{z0}$  et  $E_{x0}$  sont respectivement les amplitudes des composantes verticales et horizontales du champ électrique à la surface du sol, loin de l'anomalie ;  $E_z$  et  $E_x$  étant associés au champ en tout point. Sur chaque figure, les trois courbes numérotées de 1 à 3, représentent respectivement les champs reçus à des profondeurs de 25, 34 ou 94 mètres.

132

Influence de la profondeur du récepteur

$f = 10 \text{ KHz}$

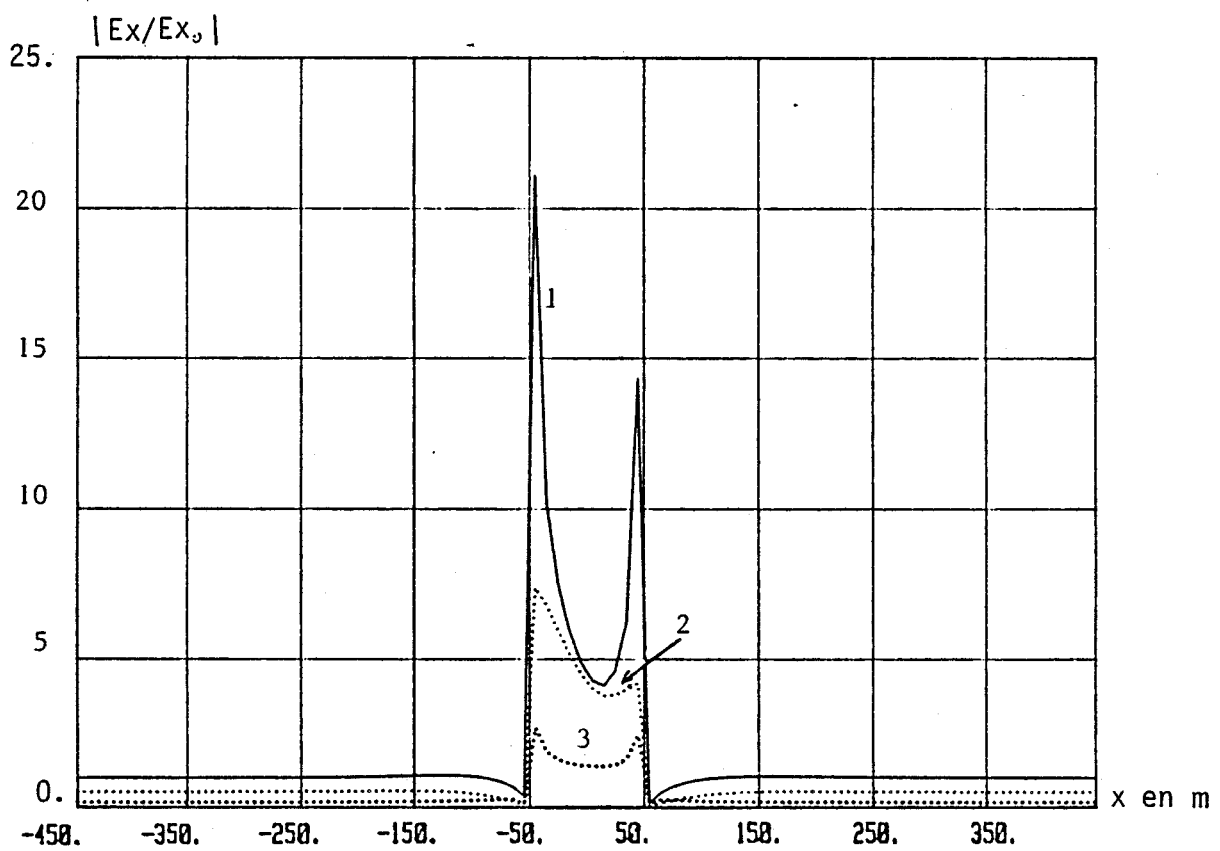
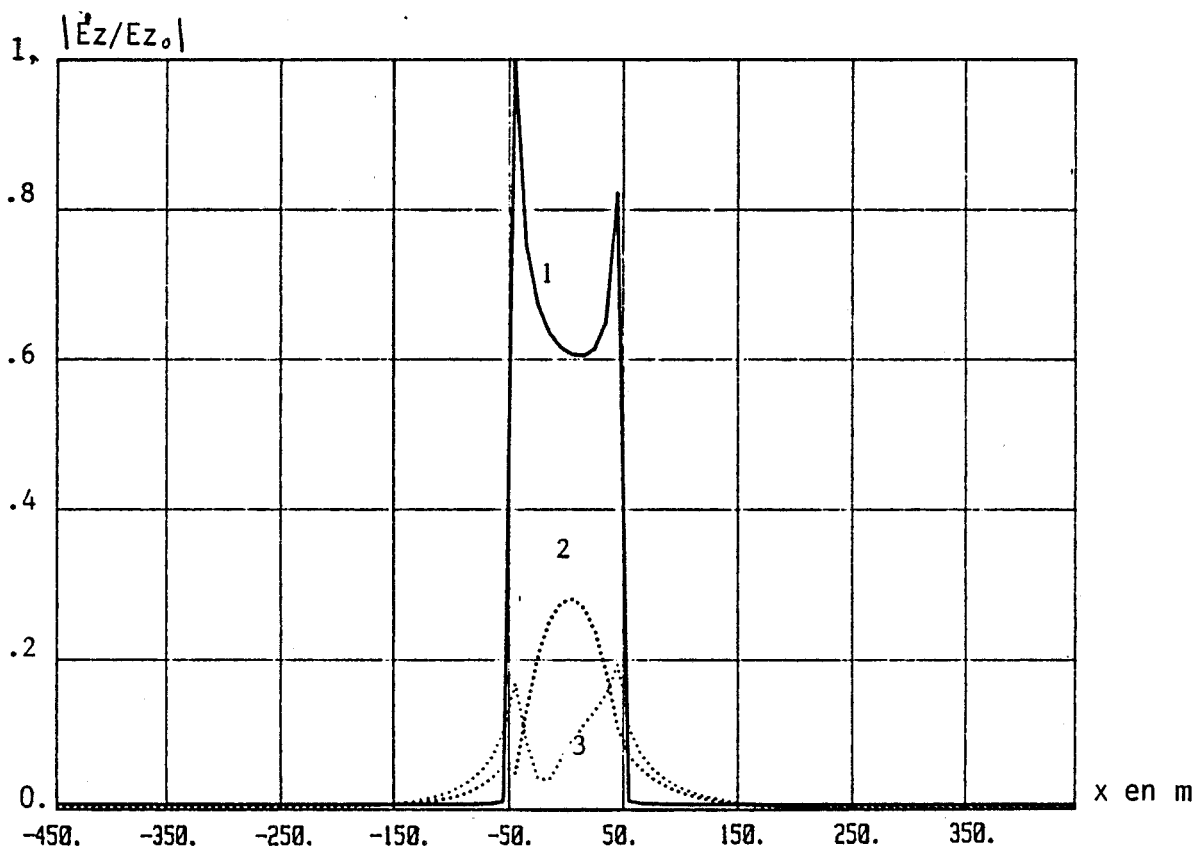
$\theta = 89^\circ$



# Influence de la profondeur du récepteur

$f = 100 \text{ KHz}$

$\theta = 89^\circ$



La largeur de l'anomalie est de 100 m. Les courbes (a) de la Planche V-9 montrent que le champ électrique vertical normalisé  $E_z/E_{z0}$  est quasiment nul à l'extérieur de l'anomalie puisqu'il est proportionnel au rapport  $\omega \epsilon_0/\sigma$ .

A l'intérieur de l'anomalie, le champ n'est évidemment pas nul et on note qu'à une profondeur de 25 m, le champ normalisé  $E_z/E_{z0}$  vaut 0.6. Cette valeur s'affaiblit d'autant plus que l'on s'approche du fond de la vallée. On note de plus l'apparition d'une composante horizontale importante notamment près des parois verticales.

Les courbes de la Planche V-10 tracées pour une fréquence de 100 kHz montrent que le comportement du champ en fonction de la position du récepteur est tout à fait identique au cas précédent.

Par contre, si le champ magnétique à l'intérieur de l'anomalie est égal à celui régnant à la surface du sol pour la fréquence de 10 kHz, nous remarquons qu'il le dépasse à la fréquence de 100 kHz (Planche V-11).

Pour une largeur de 200 m de l'anomalie (Planches V-12 et V-13), le champ  $E_z$  au fond de la vallée est plus intense que celui calculé dans le cas d'une anomalie de 100 m de large. Nous remarquons aussi que l'atténuation à 100 kHz est du même ordre de grandeur qu'à 10 kHz.

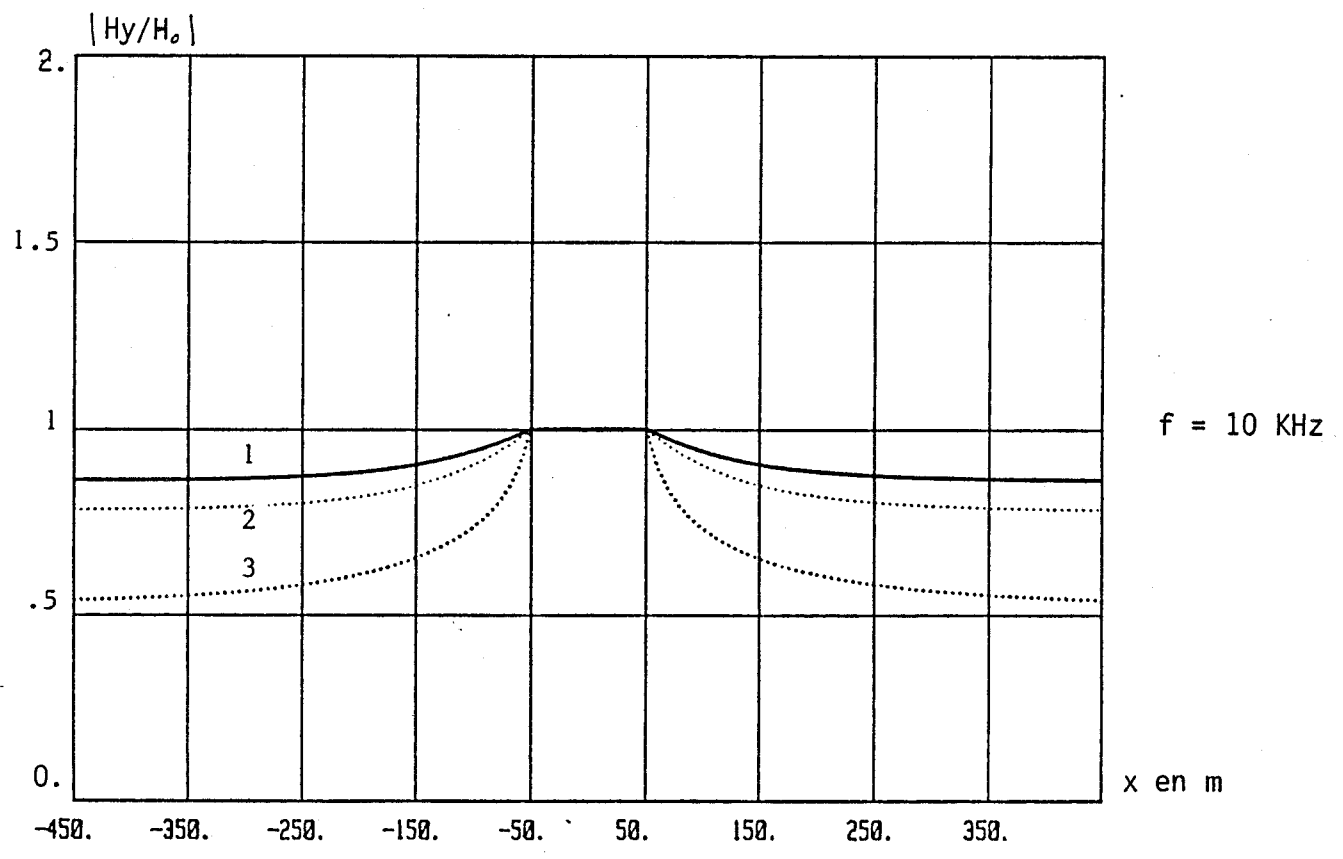
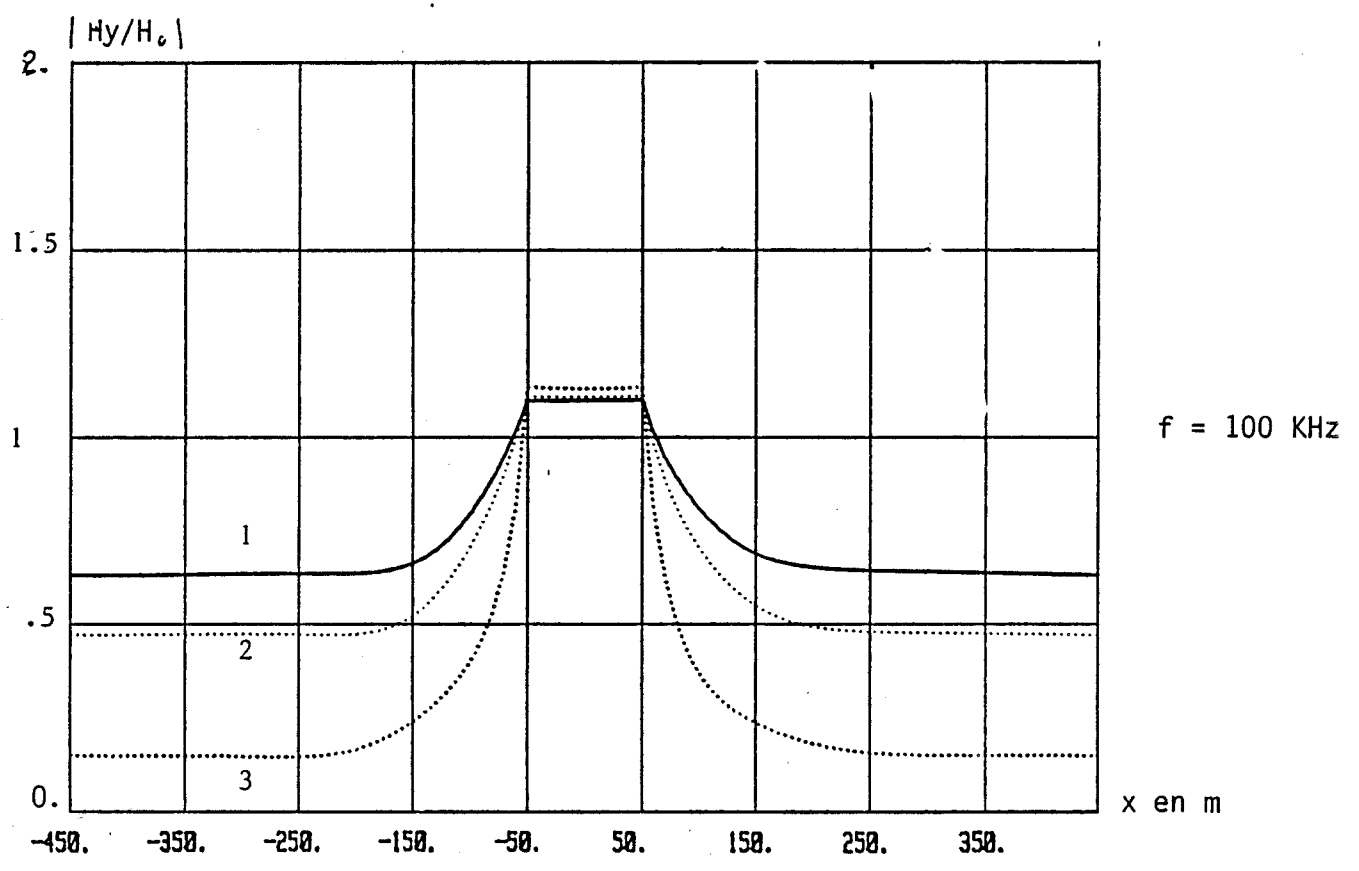
b) Comparaison entre anomalie à section droite rectangulaire et anomalie "réelle"

Dans ce paragraphe nous comparons trois types de vallées : deux ayant une section droite rectangulaire, et la troisième ayant une section droite de forme trapézoïdale.

Les trois vallées sont représentées par les Figures V-5 ci-dessous :

Influence de la profondeur du récepteur

$\theta_i = 89^\circ$





$f = 100 \text{ KHz}$

vallée : 200x100m

$\theta = 89^\circ$

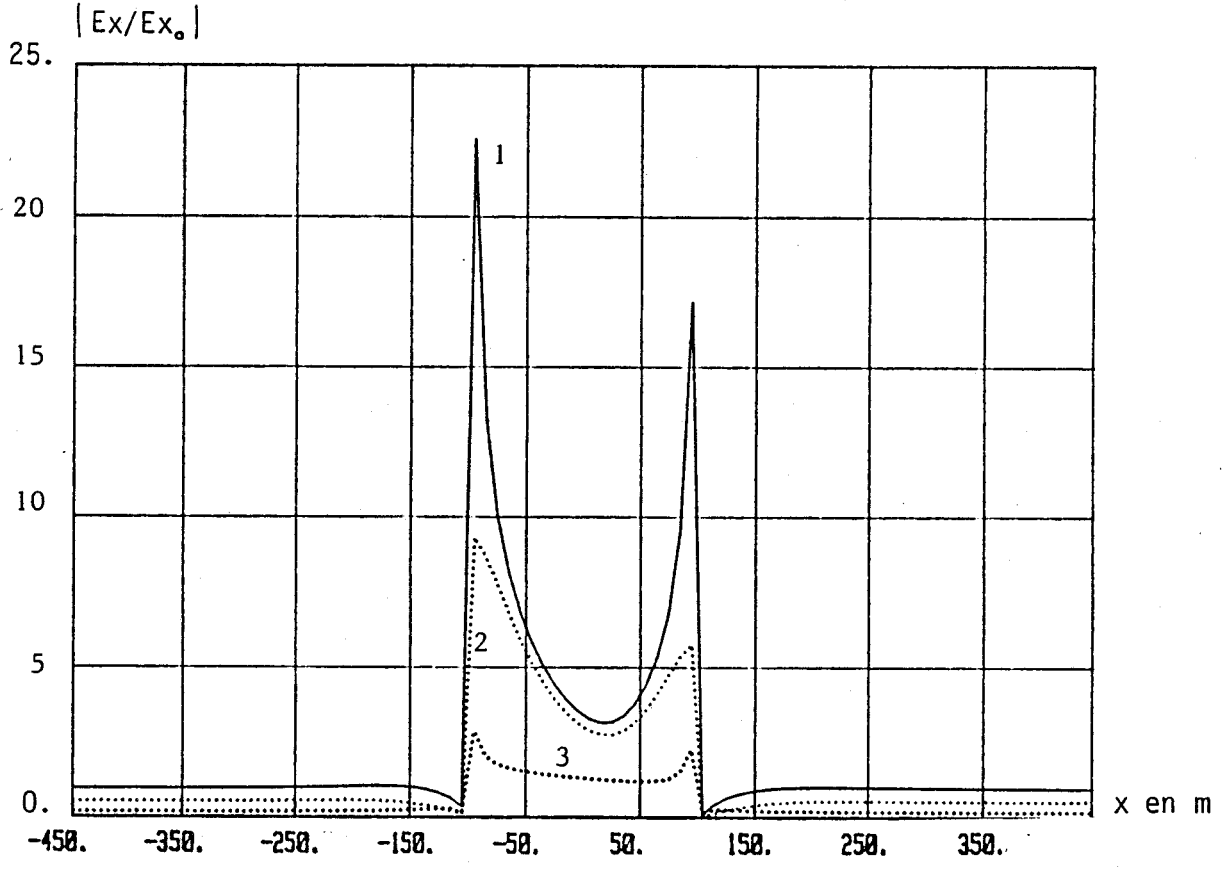
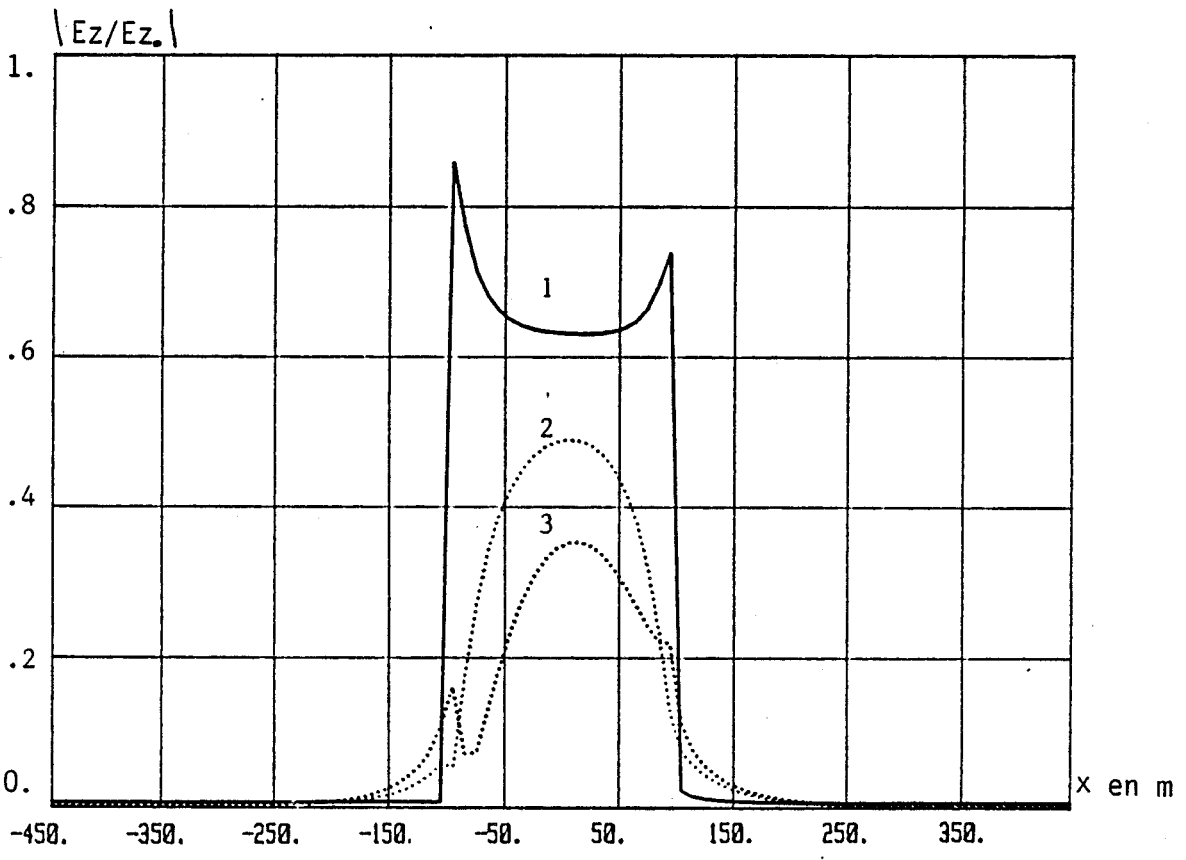
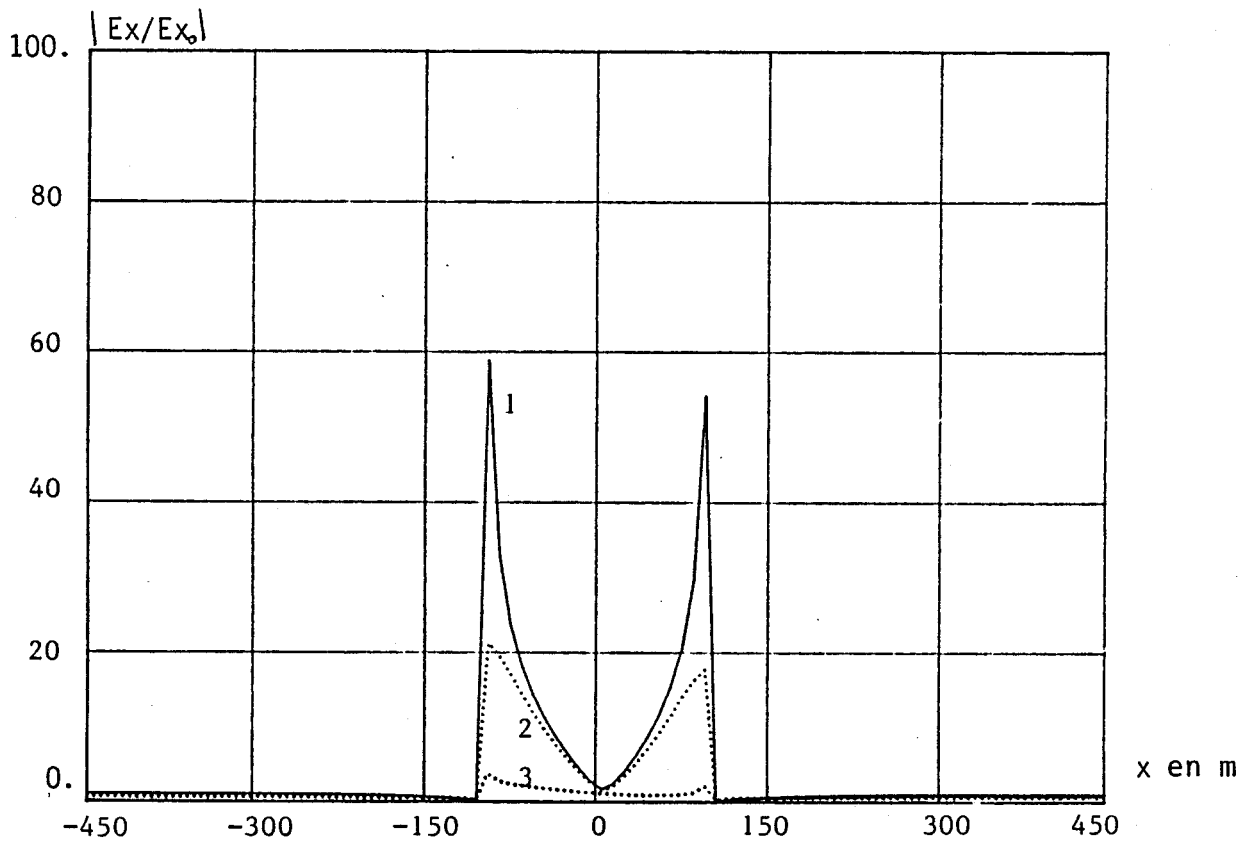
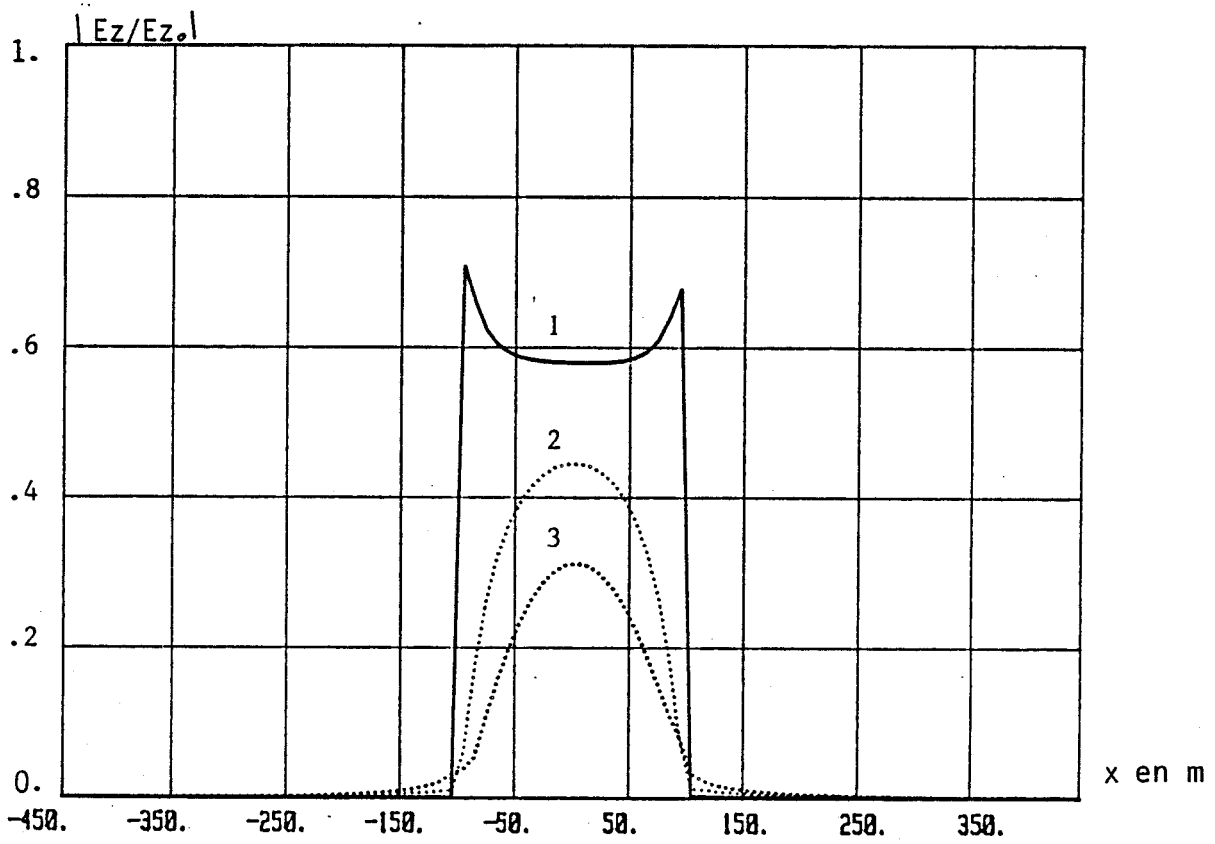


Planche V-12

$f = 10 \text{ KHz}$

vallée :  $200 \times 100 \text{ m}$

$\theta = 89^\circ$



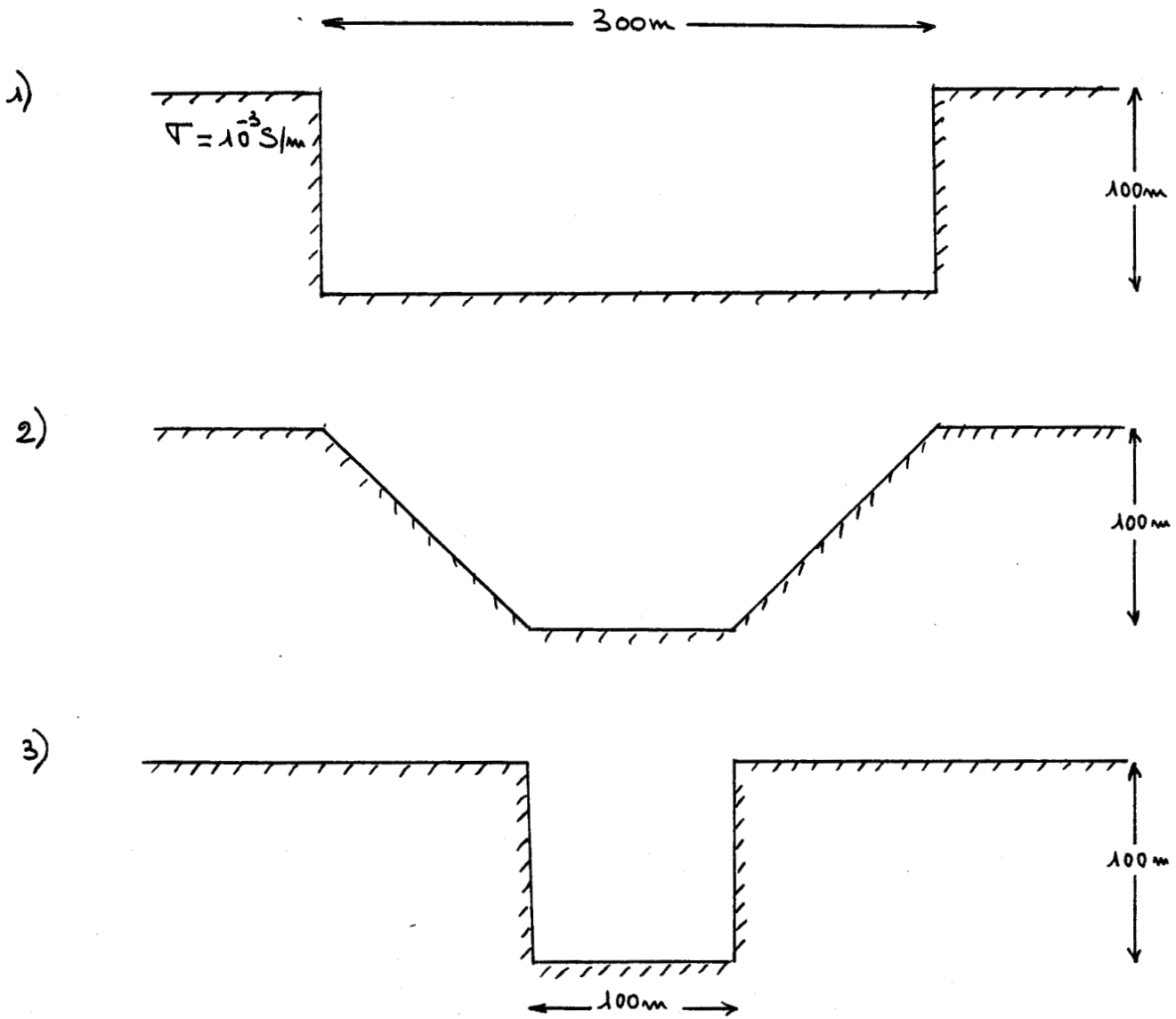


Figure V-5

A une fréquence de 100 kHz et pour un angle d'incidence de  $89^\circ$ , le champ magnétique a été représenté pour ces trois vallées à la distance de 5 m au-dessus du sol, et à 95 m en-dessous.

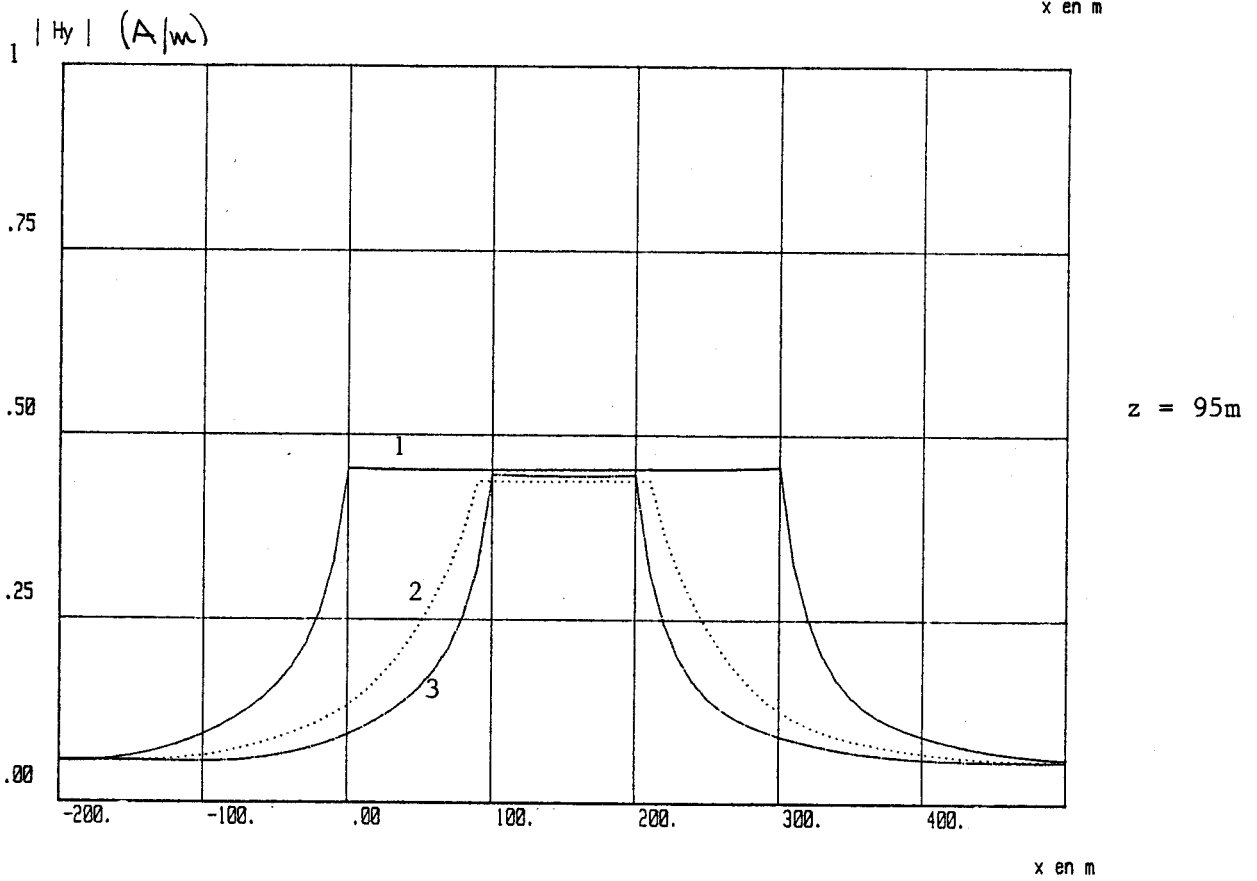
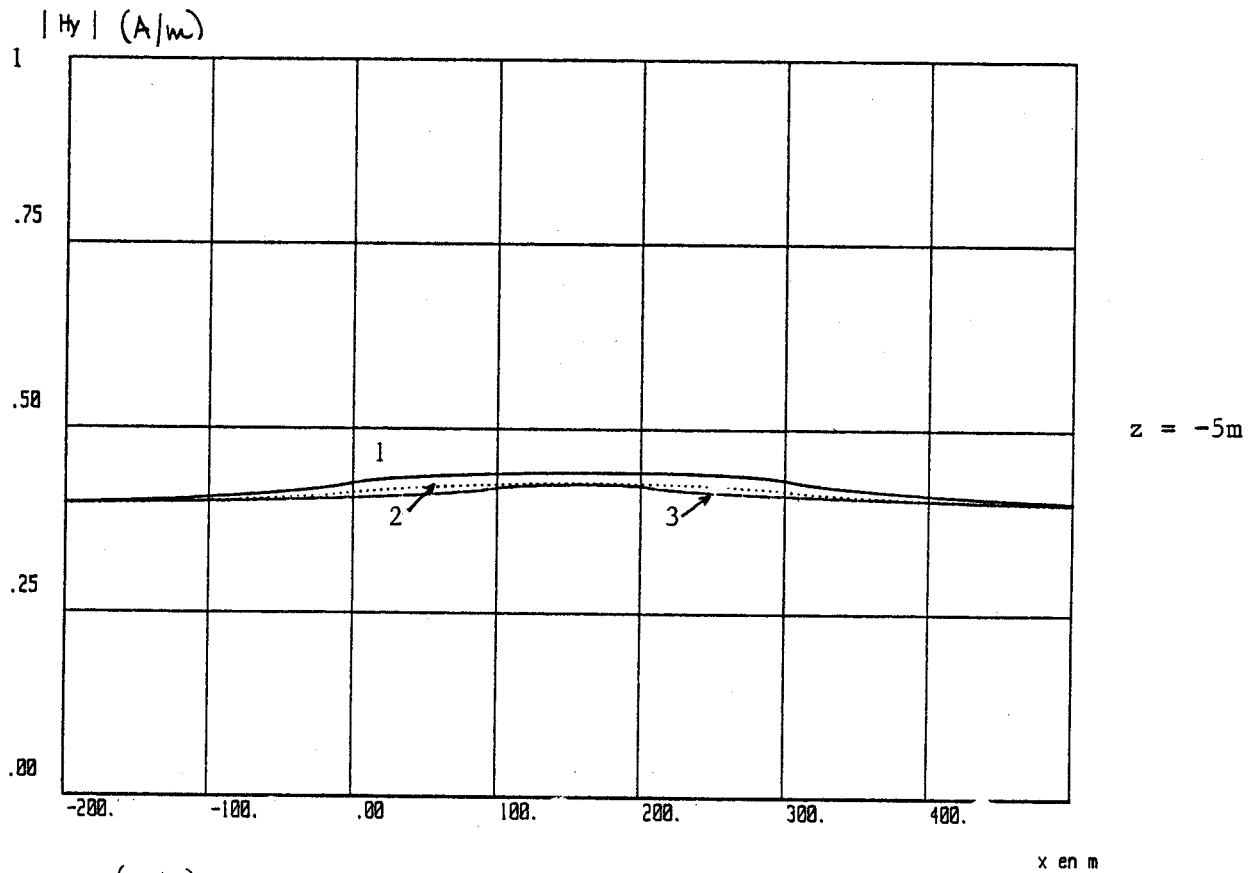
Comme précédemment, le champ magnétique est normalisé à 1 A/m. Nous observons que le champ correspondant à la vallée "réelle" s'intercale entre les deux autres, mais il a un comportement proche de celui associé à la vallée étroite. (Planche V-14)

Nous retrouvons cet effet sur les composantes  $E_x$  et  $E_z$  du champ électrique représentées sur les Planches de V-15 à V-19.

Comparaison entre différents types

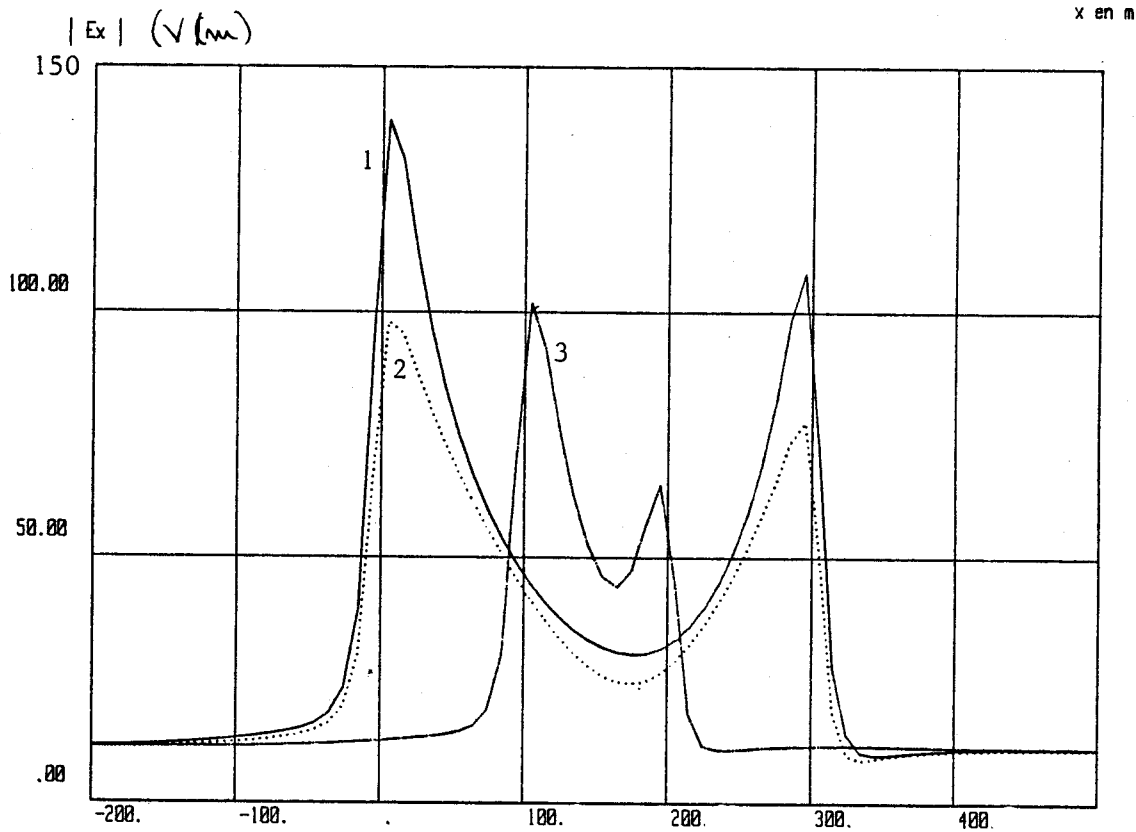
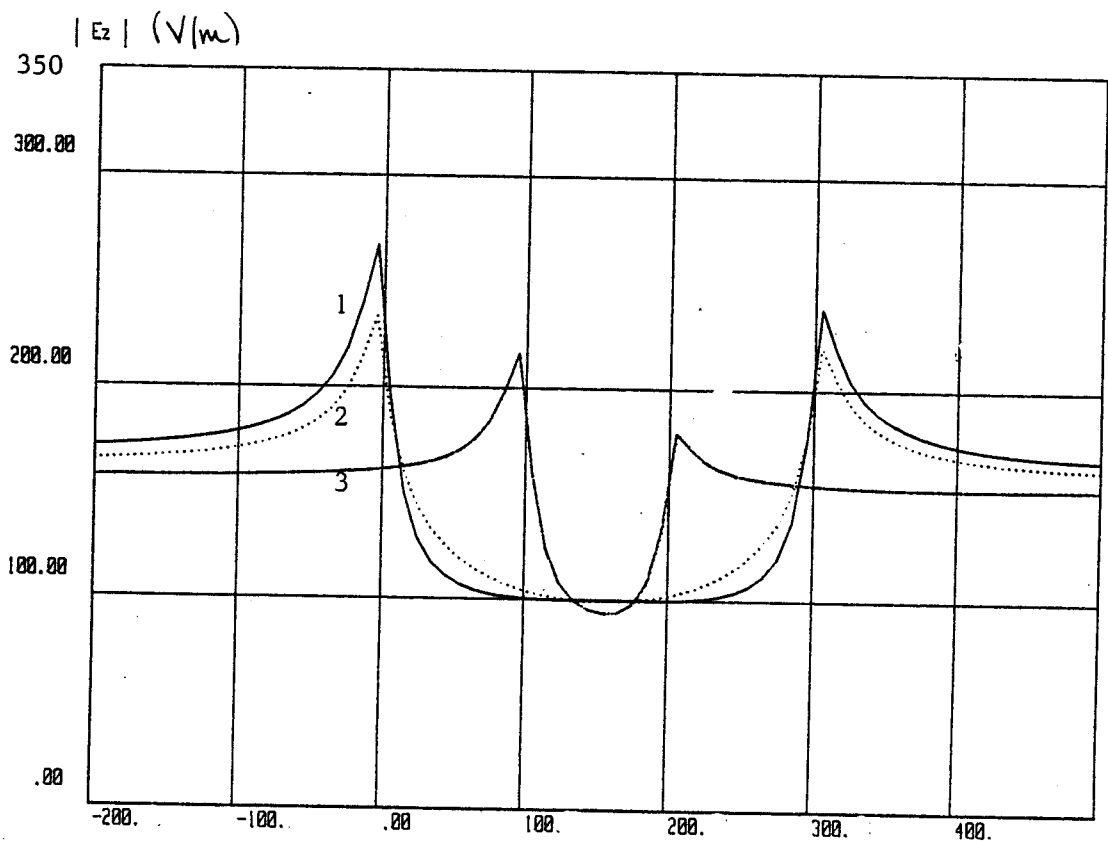
de vallées

$f = 100 \text{ KHz}$      $\theta^i = 89^\circ$



Comparaison entre différents types  
de vallées

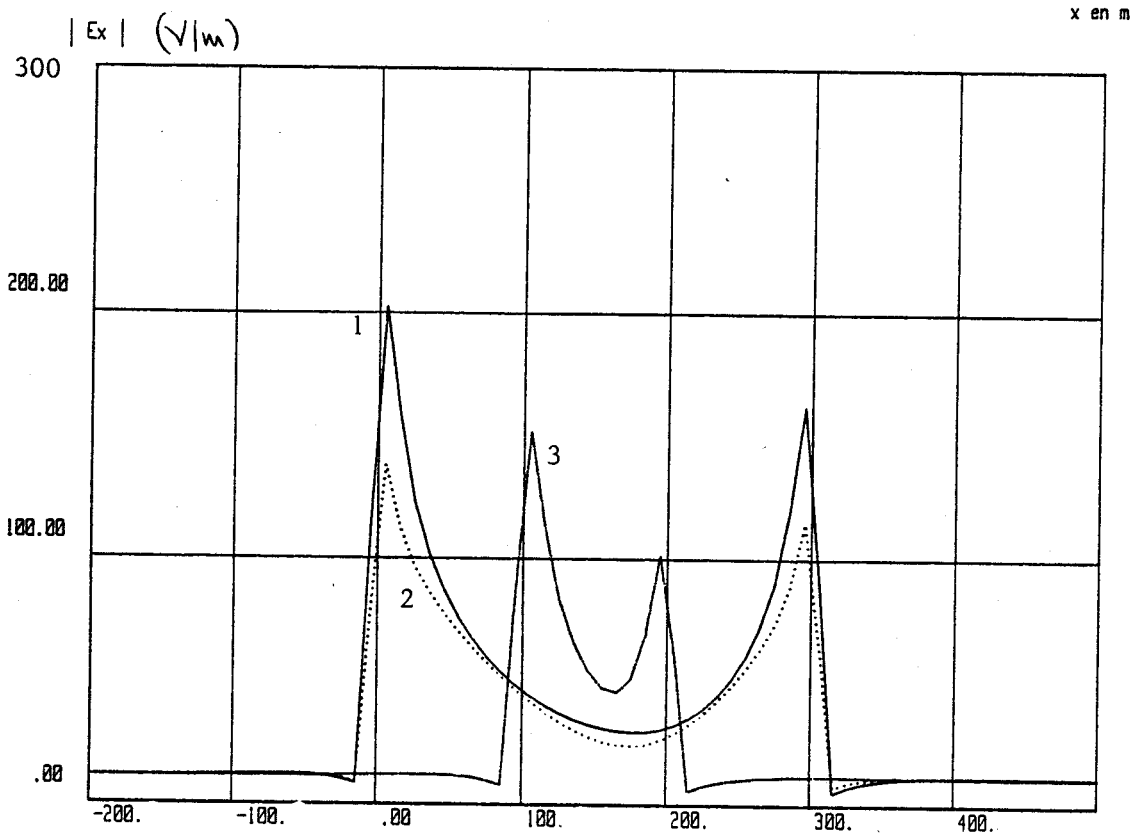
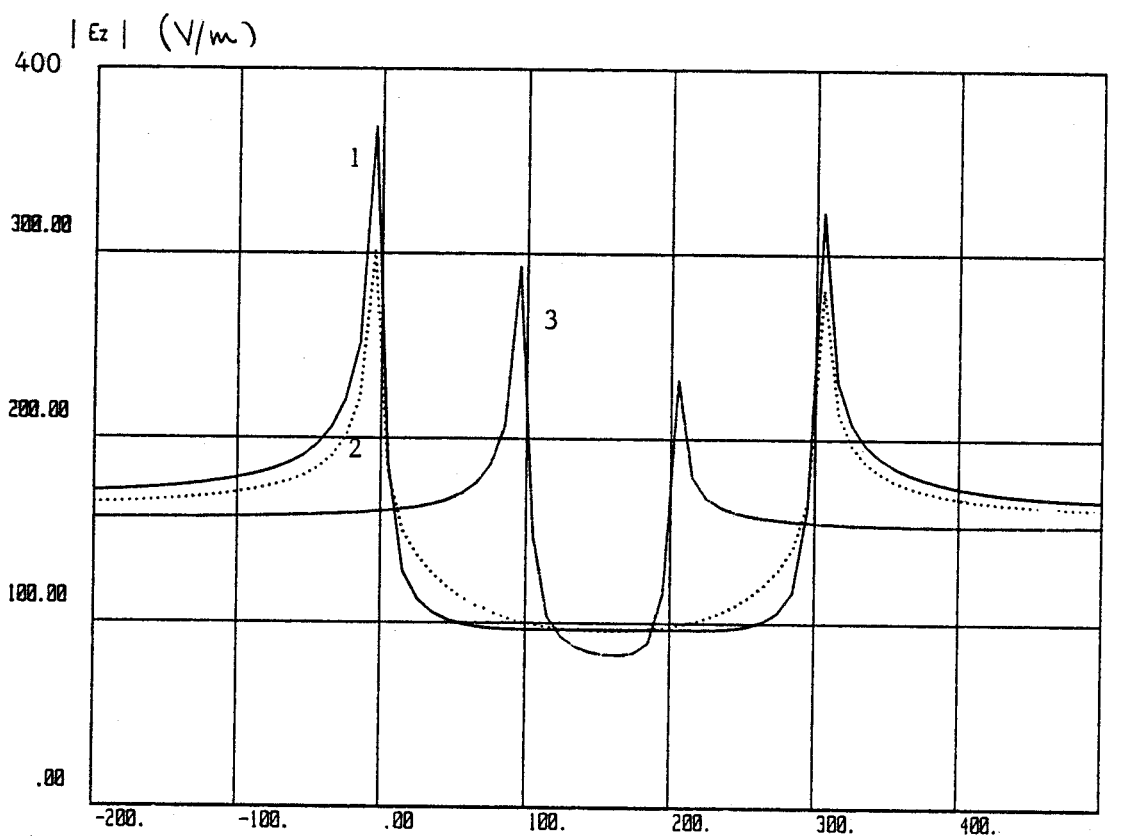
$f = 100 \text{ KHz}$     $\theta = 89^\circ$     $z = -5\text{m}$



Comparaison entre différents types

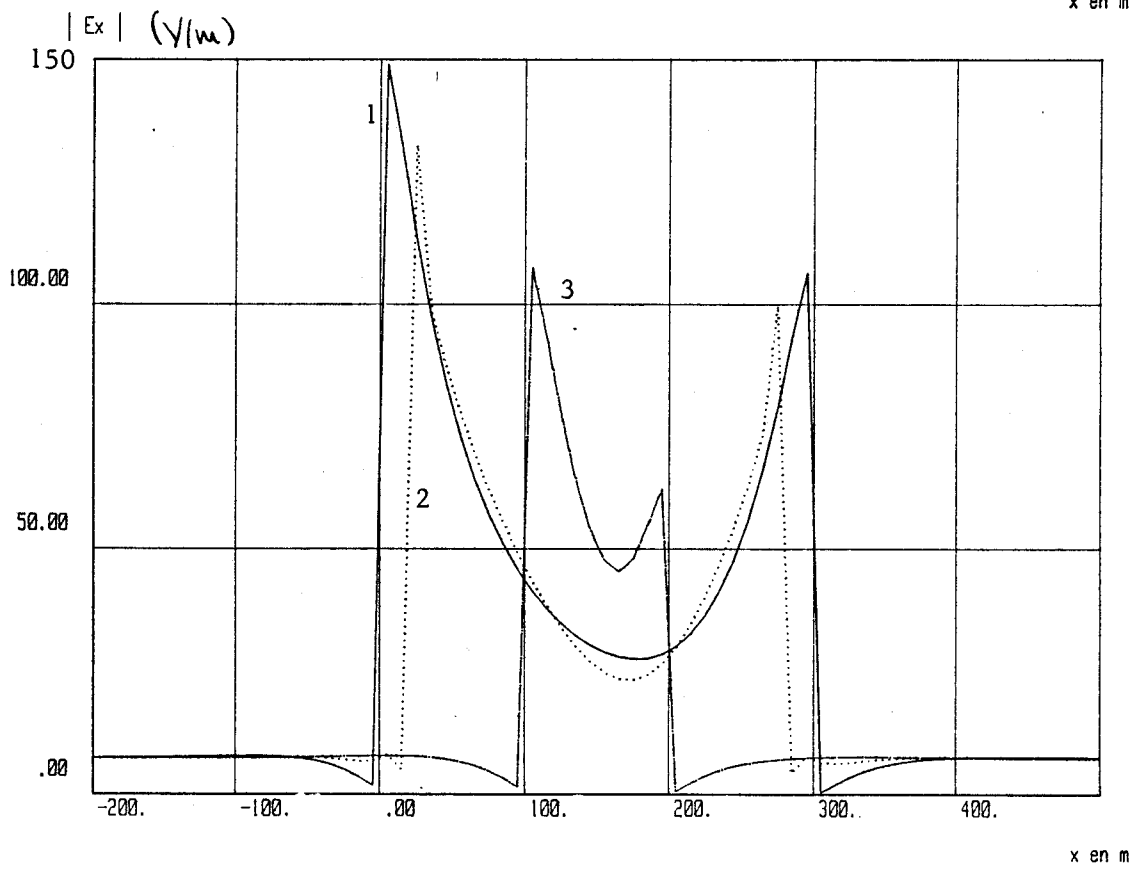
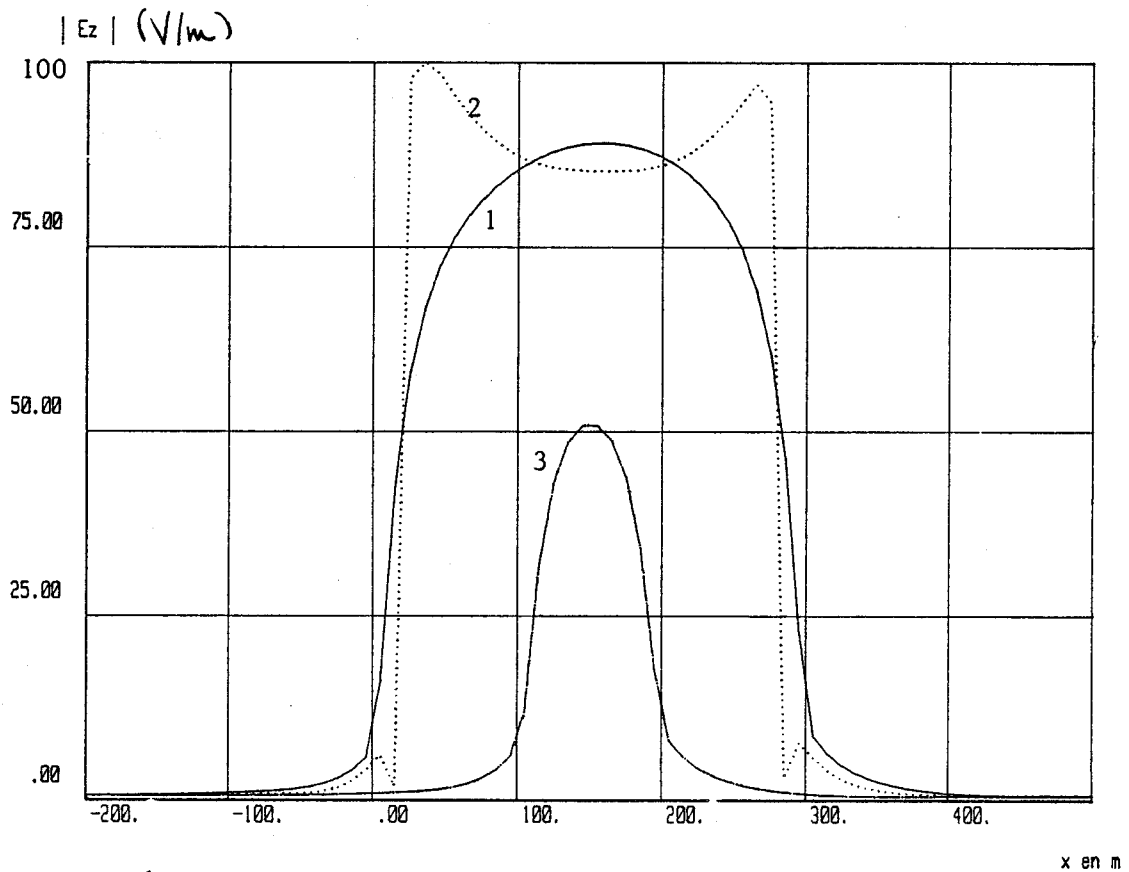
de vallées

$f = 100 \text{ KHz}$     $\theta = 89^\circ$     $z = 0\text{m}$



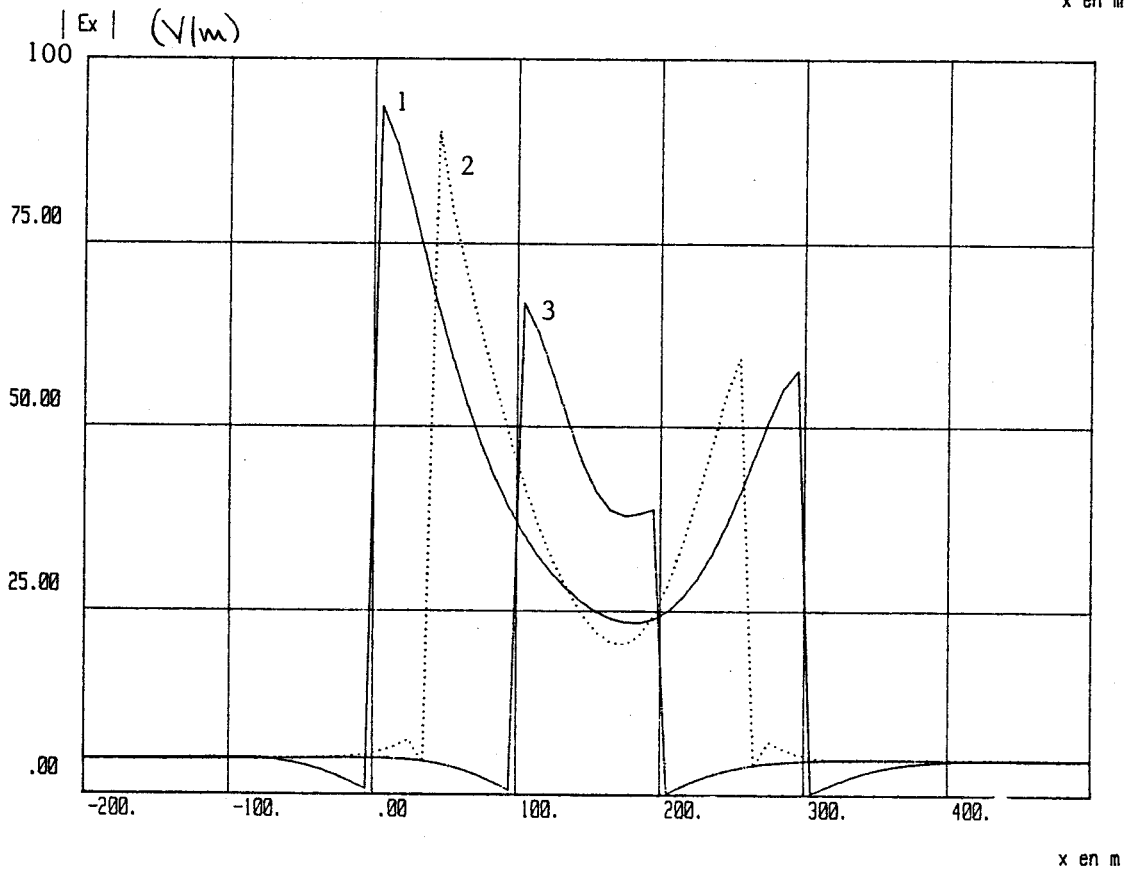
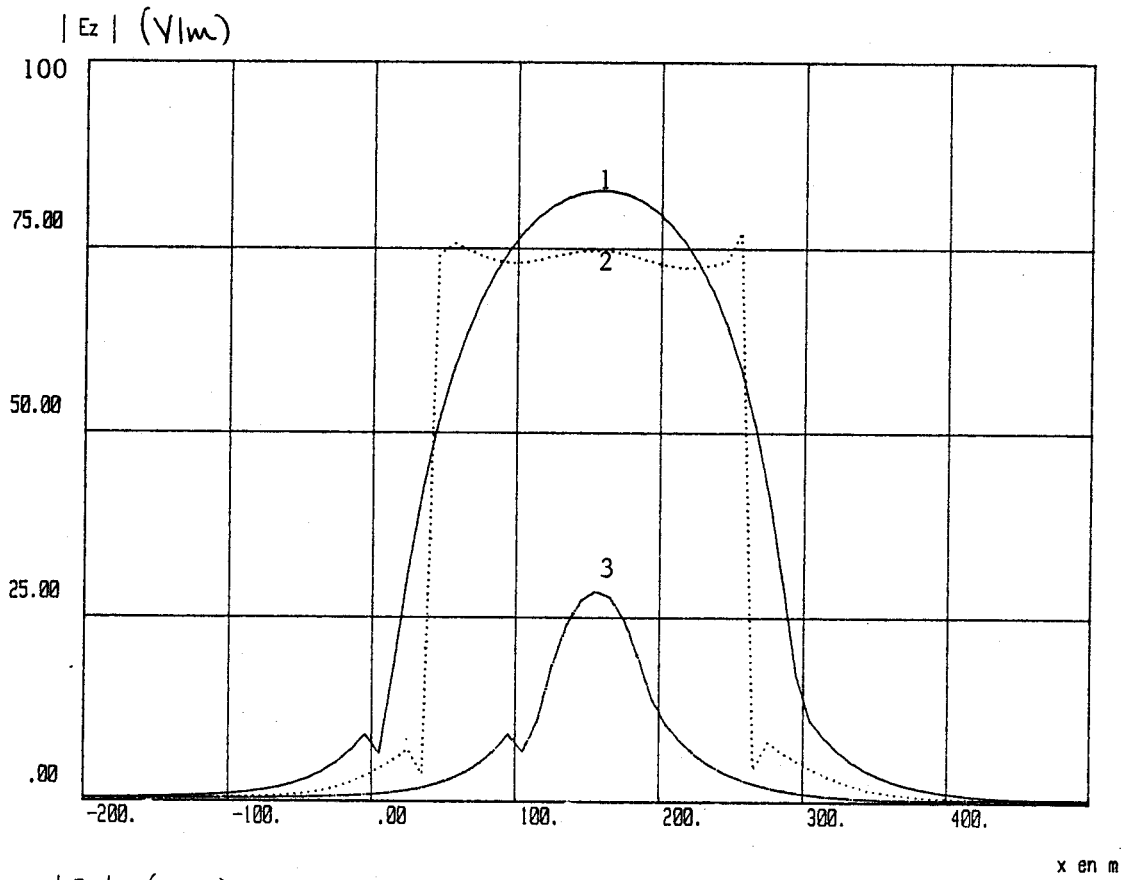
Comparaison entre différents types  
de vallées

$f = 100 \text{ KHz}$     $\theta = 89^\circ$     $z = 22.5 \text{ m}$



Comparaison entre différents types  
de vallées

$f = 100 \text{ KHz}$   $\theta = 89^\circ$   $z = 45\text{m}$

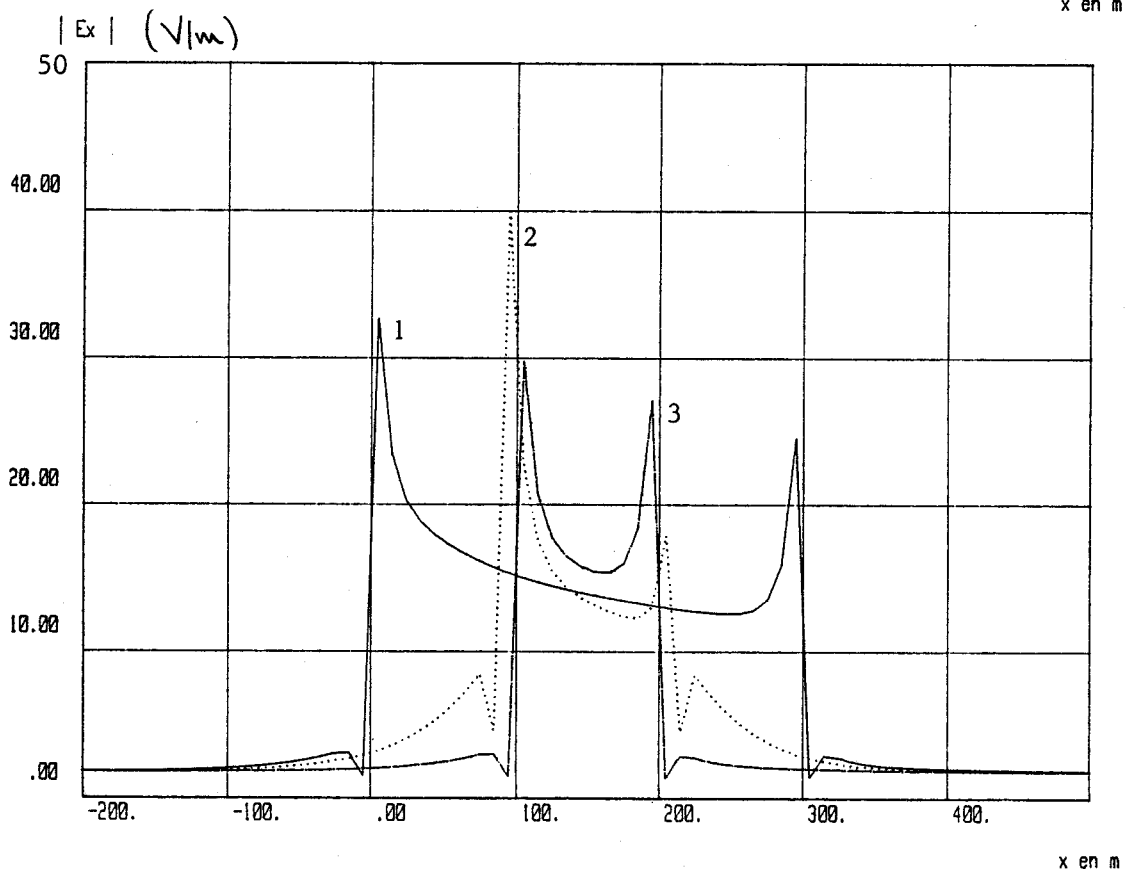
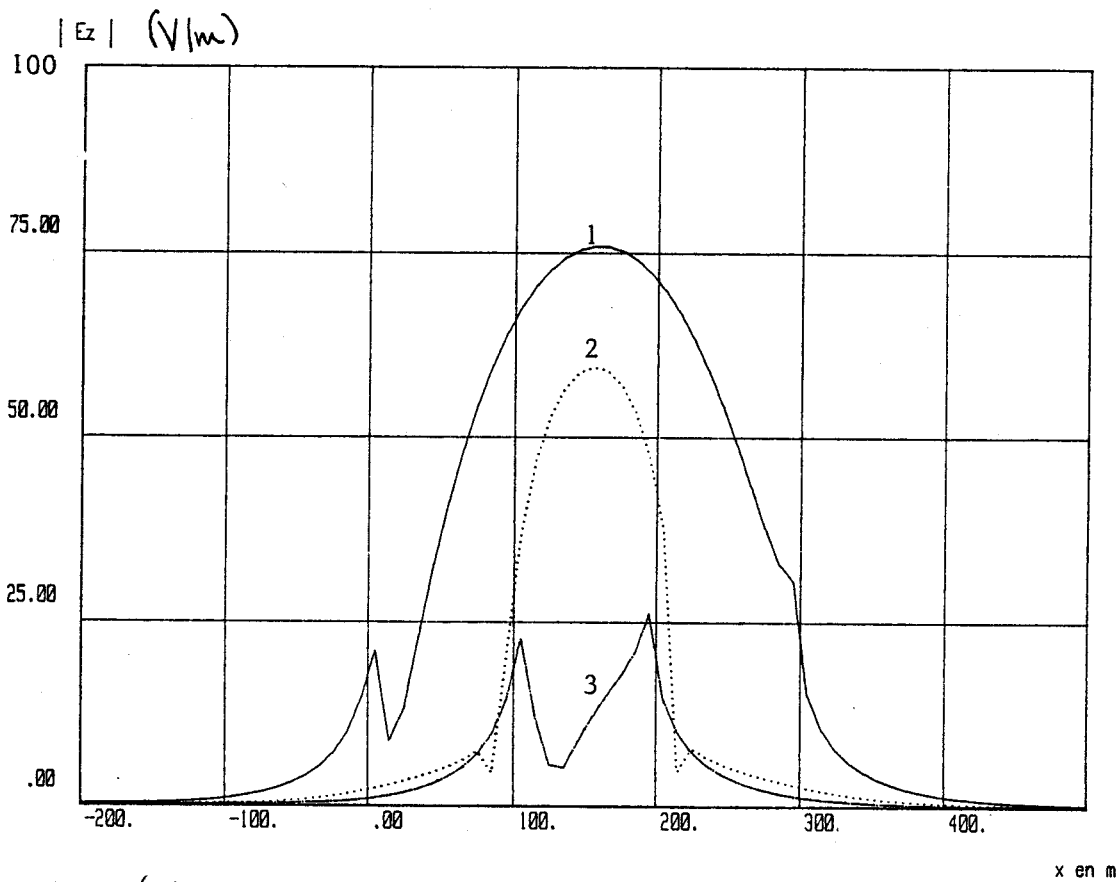




144  
Comparaison entre différents types

de vallées

$f = 100 \text{ KHz}$     $\theta = 89^\circ$     $z = 95\text{m}$

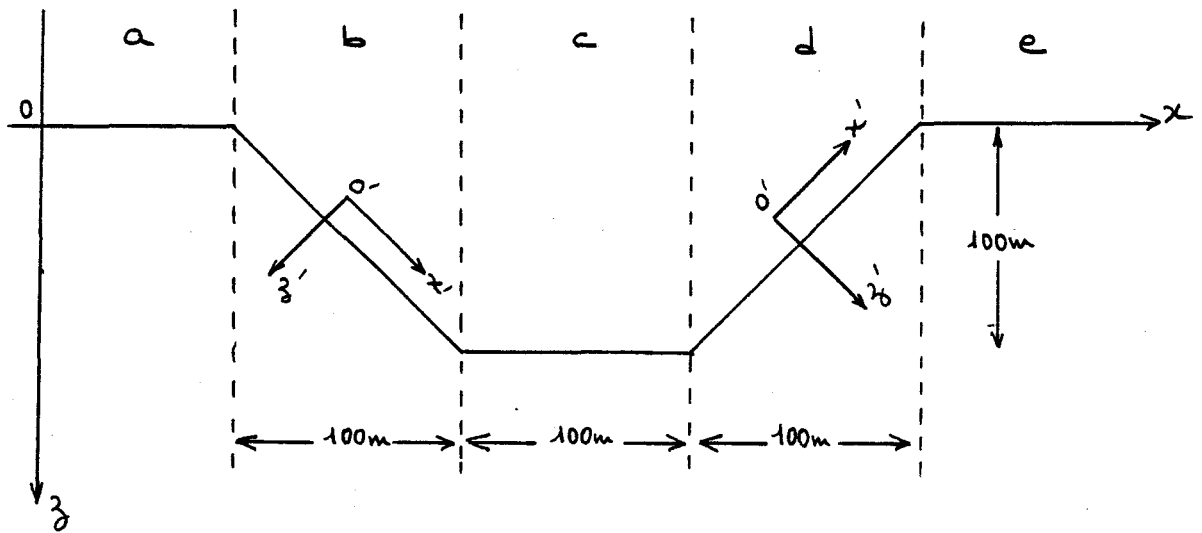


Ces planches correspondent respectivement à des distances entre le point de réception et la surface du sol de -5 m, 0 m, 22.5 m, 45 m et 95 m.

Au-dessus de l'anomalie on constate sur les Planches V-15 et V-16 que la composante verticale  $E_z$  subit une diminution d'amplitude. On note également que dans ce cas, les vallées de type 1) et 2) provoquent une modification très voisine du champ  $E_z$  et une augmentation de la composante horizontale du champ électrique.

c) Etude du champ dans une vallée "réelle"

Dans ce paragraphe, nous ne considérons que la vallée "réelle", type 2), schématisée ci-dessous :



La réception s'effectue à 5 m de hauteur suivant le profil du terrain.

Nous utiliserons deux repères : XOZ que l'on appellera repère fixe, et X'O'Z' que l'on appellera repère local.

Le calcul des composantes du champ dans le repère X'O'Z' se fait à partir de celles dans le repère XOZ.

Nous distinguons cinq régions :

Dans les régions a), b) et c) à interface horizontale on a :

$$E_x' = E_x$$

$$E_z' = E_z$$

Dans la région b)

$$E_x' = (E_x + E_z) \times 0,707$$

$$E_z' = (E_z - E_x) \times 0,707$$

Dans la région d)

$$E_x' = (E_x - E_z) \times 0,707$$

$$E_z' = (E_x + E_z) \times 0,707$$

Les composantes du champ dans le repère XOZ sont tracées sur les courbes de la Planche V-20 pour la fréquence de 10 kHz et sous un angle de 89°.

Dans les mêmes conditions, nous avons représenté sur la Planche V-21 courbes a) les modules du champ électrique vertical et horizontal dans le repère local. Les courbes b) représentent leurs phases respectives. Les composantes  $E_x$  et  $E_z$  étant déphasées, la polarisation de l'onde devient elliptique, et l'amplitude maximum du champ suivant le grand axe de l'ellipse est donnée par la formule suivante [27] :

$$E = \left[ \left( E_{x0} \cos \phi_x \cos \alpha + E_{z0} \cos \phi_z \sin \alpha \right)^2 + \left( E_{x0} \sin \phi_x \cos \alpha + E_{z0} \sin \phi_z \sin \alpha \right)^2 \right]^{1/2}$$

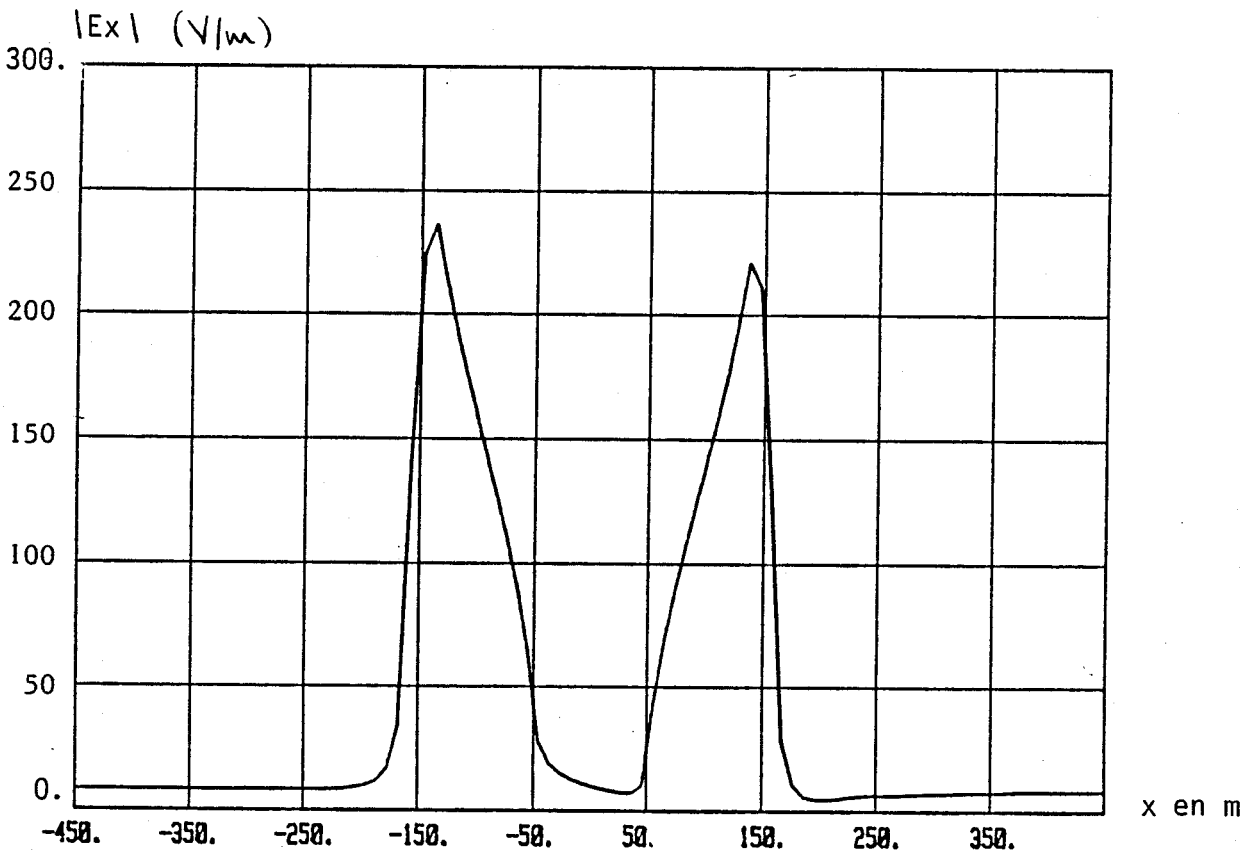
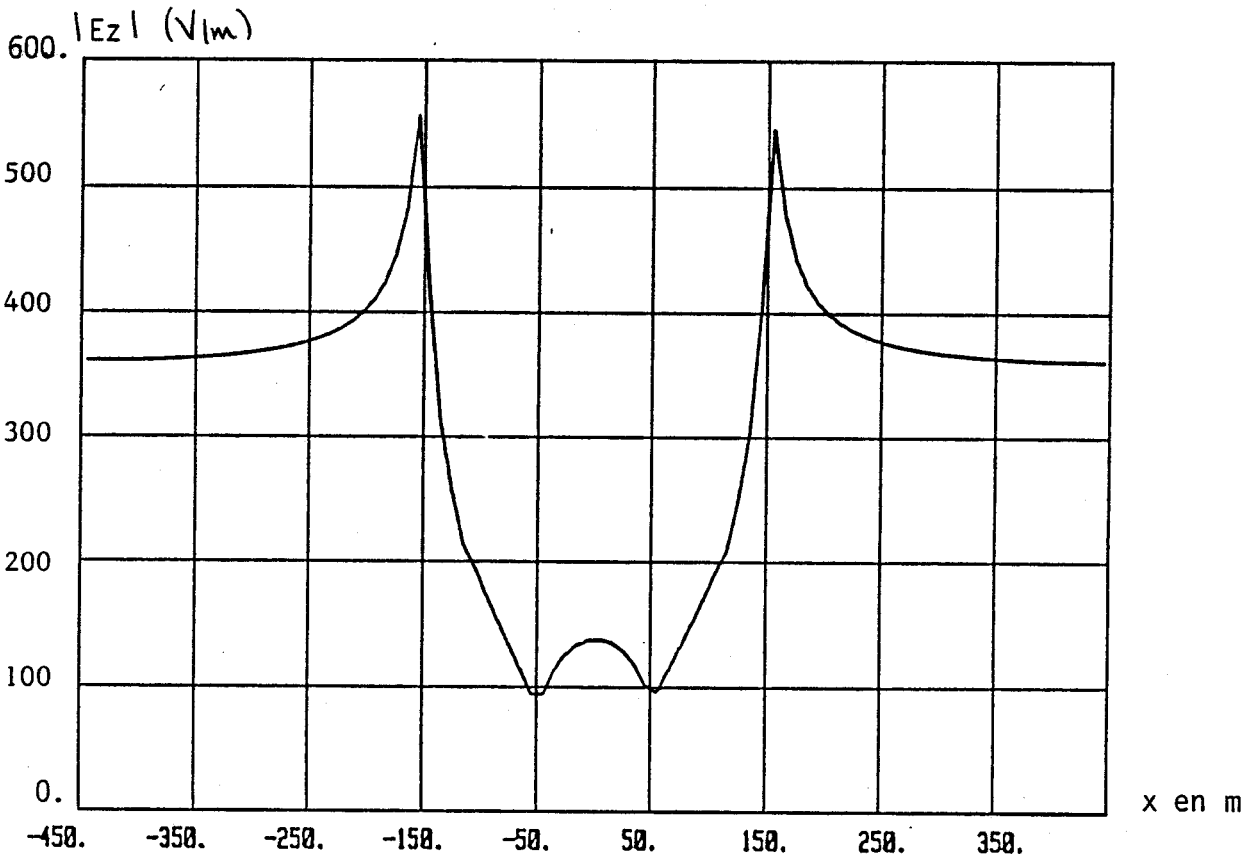
avec  $E_x = E_{x0} e^{j\phi_x}$

et  $E_z = E_{z0} e^{j\phi_z}$

$$\alpha = \arctg \left( \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4A^2}}{2A} \right)$$

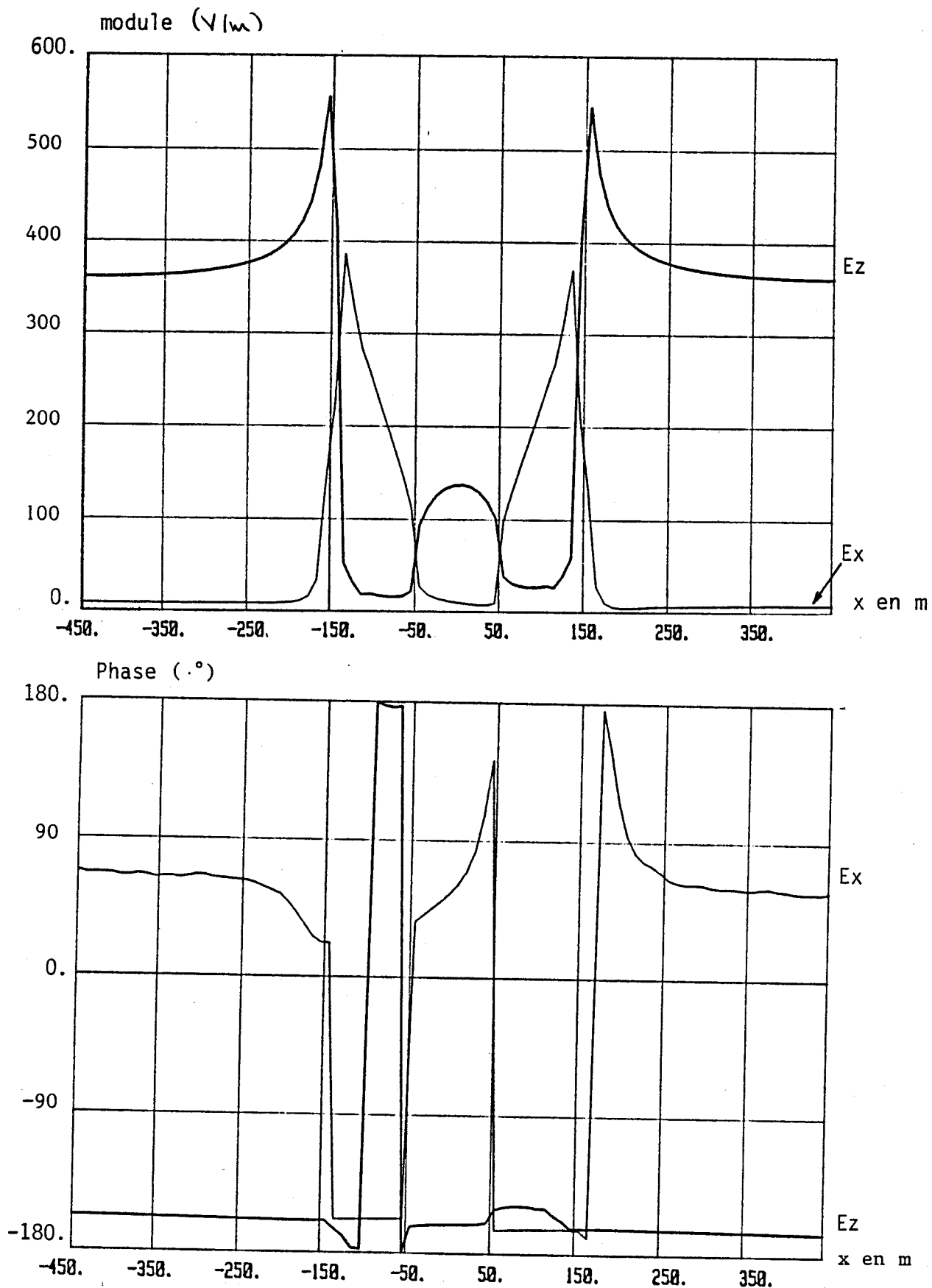
Vallée réelle-repère fixe

$f = 10 \text{ KHz}$     $\theta = 89^\circ$



Vallée réelle- repère local

$f = 10 \text{ KHz}$      $\theta = 89^\circ$



$$A = E_{x_0} E_{z_0} \cos(\phi_x - \phi_z)$$

$$B = E_{x_0}^2 - E_{z_0}^2$$

$\alpha$  étant la phase du champ total, nous l'avons représentée ainsi que le module sur la Planche V-22. La phase est quasiment nulle sur les régions obliques, et vaut  $90^\circ$  sur les régions horizontales. Quant au module, il vaut pratiquement  $E_z$  sur les parties horizontales et  $E_x$  sur les parties obliques.

Nous avons également tracé pour une autre fréquence égale à 100 kHz, les composantes du champ électrique dans le repère local, ainsi que le module du champ total (Planche V-23). Nous remarquons que le comportement de l'onde reste semblable à celui observé pour une fréquence de 10 kHz et l'atténuation au fond de la vallée reste toujours la même. Le changement de l'angle d'incidence ou de la fréquence de l'onde ne change rien à cette atténuation comme on peut le remarquer sur les Planche V-24 et V-25 correspondant à un angle d'incidence de  $30^\circ$ .

#### Influence de la conductivité :

Le champ électrique au voisinage de la surface du sol dépendant de la conductivité et de la fréquence, nous avons normalisé dans ce paragraphe l'amplitude du champ vertical, horizontal ou total à celui que l'on obtiendrait dans l'air loin de la vallée.

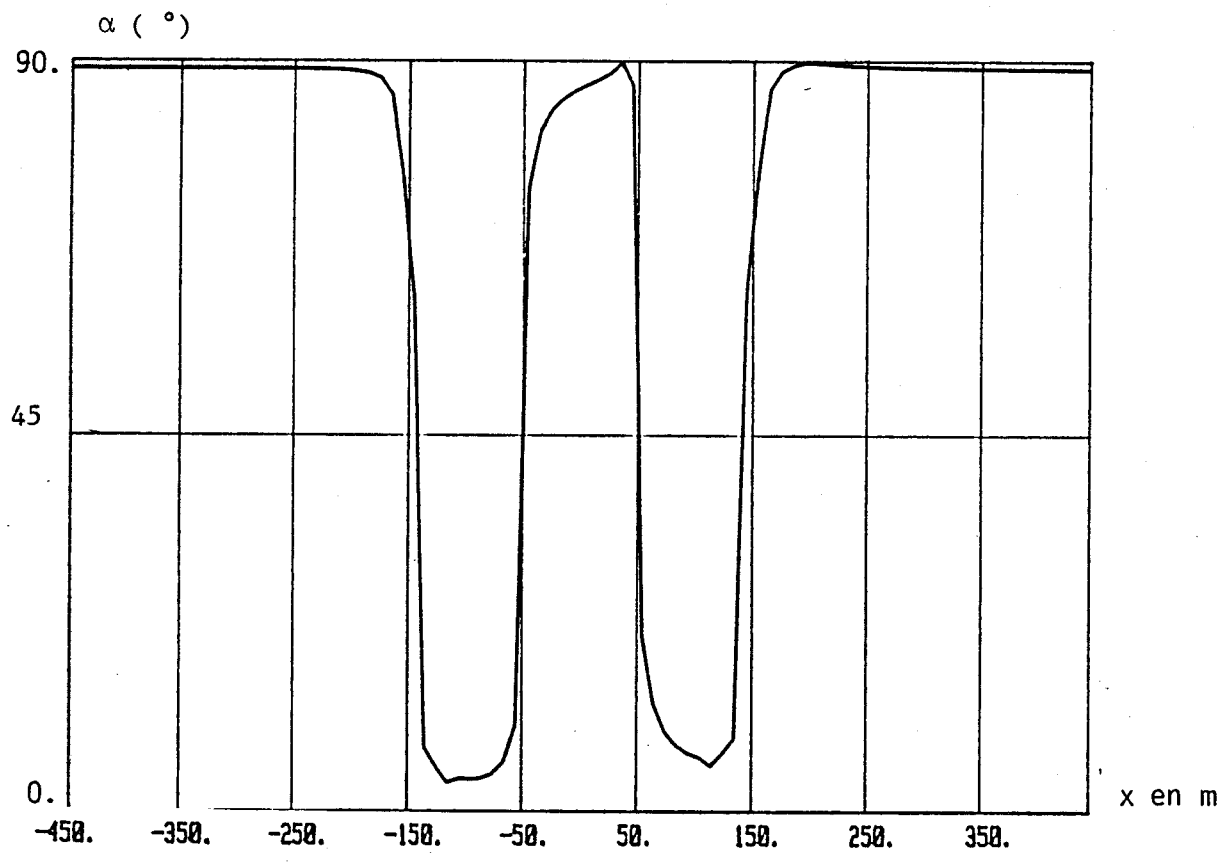
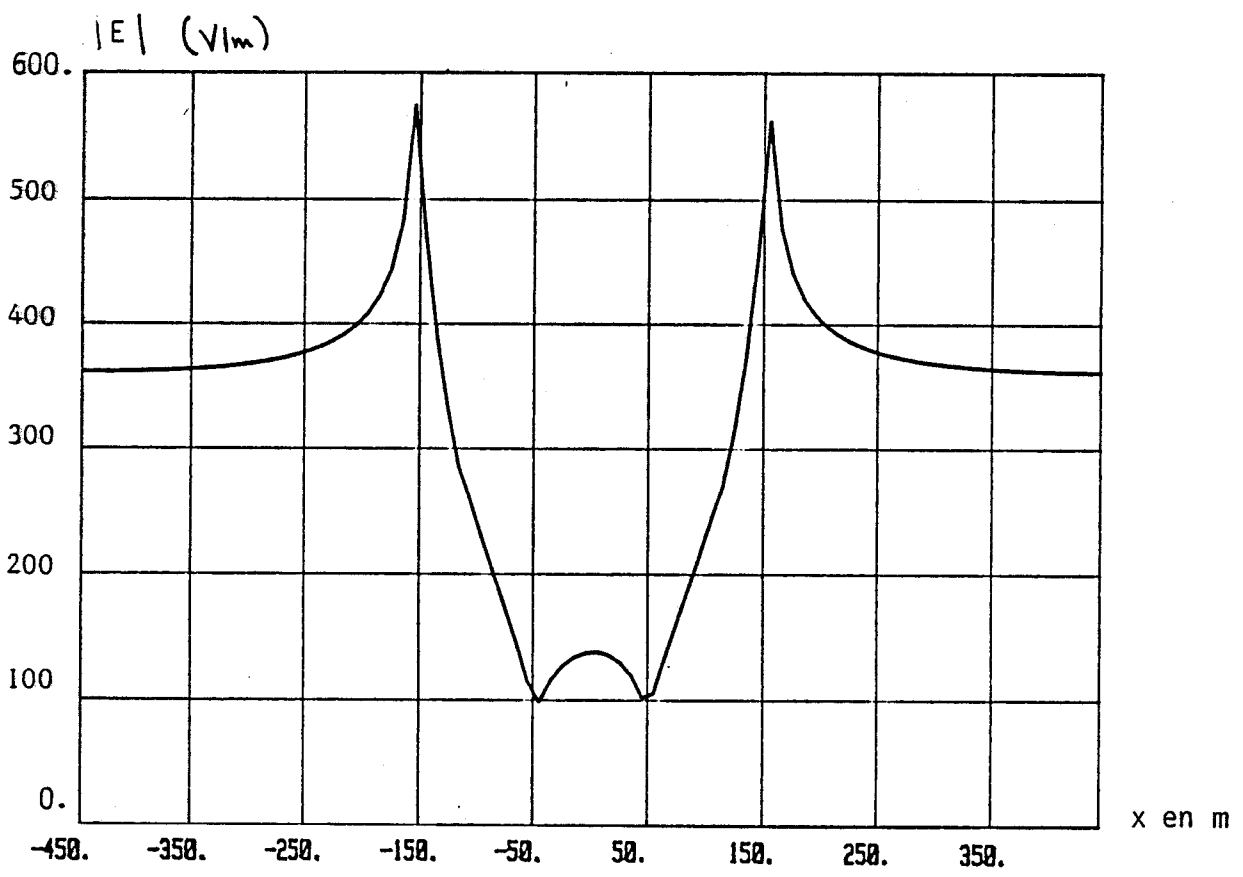
Les Planches V-26 à V-28 représentent respectivement les variations de ces différentes composantes pour une conductivité  $\sigma = 10^{-2}$  S/m et  $10^{-3}$  S/m et une fréquence de 10 kHz ou 100 kHz. La comparaison de ces différentes courbes montre que les caractéristiques électriques du terrain et la fréquence ne jouent pas un rôle très important sur la carte du champ électrique au voisinage ou dans la vallée.

#### IV.5) Etude de la colline

Nous commencerons cette étude par une comparaison entre une colline "réelle" et deux collines particulières ayant respectivement même sommet et même base que la colline "réelle".

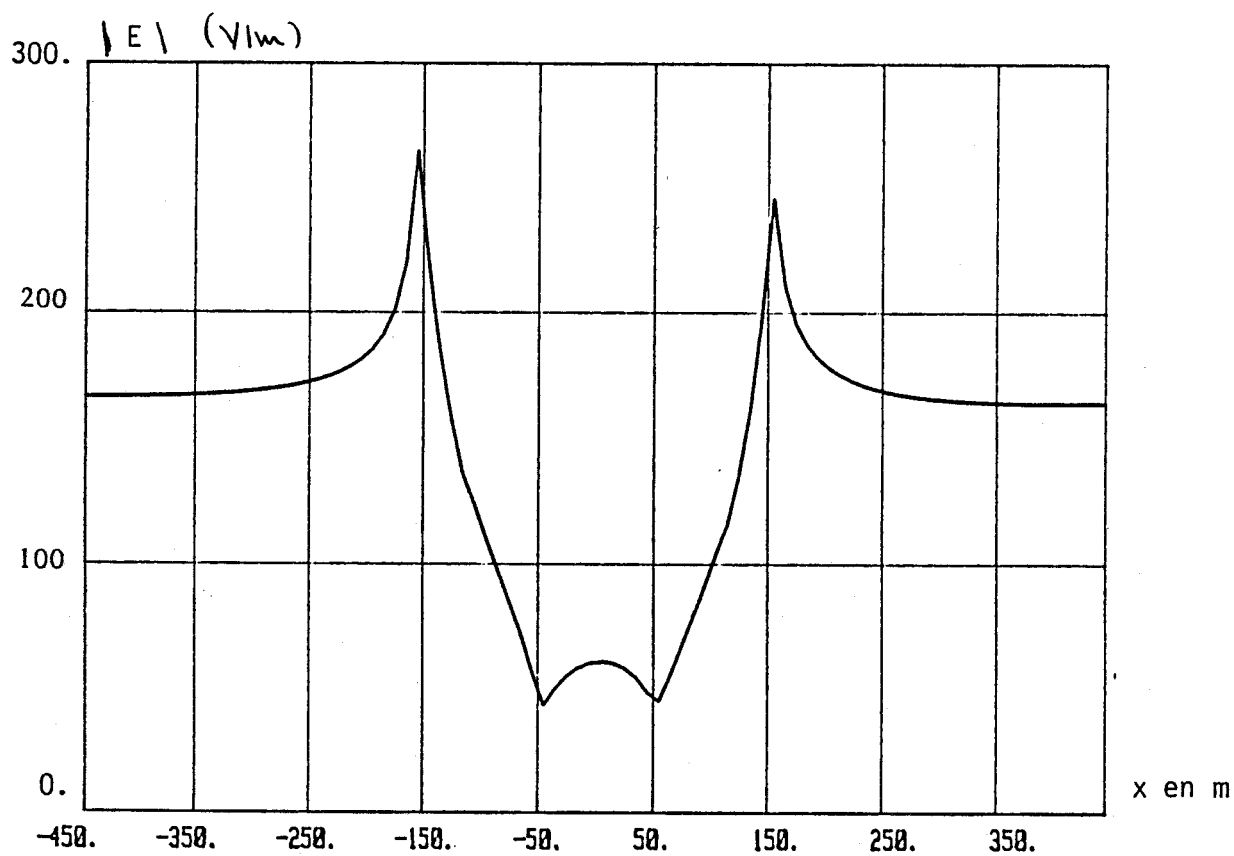
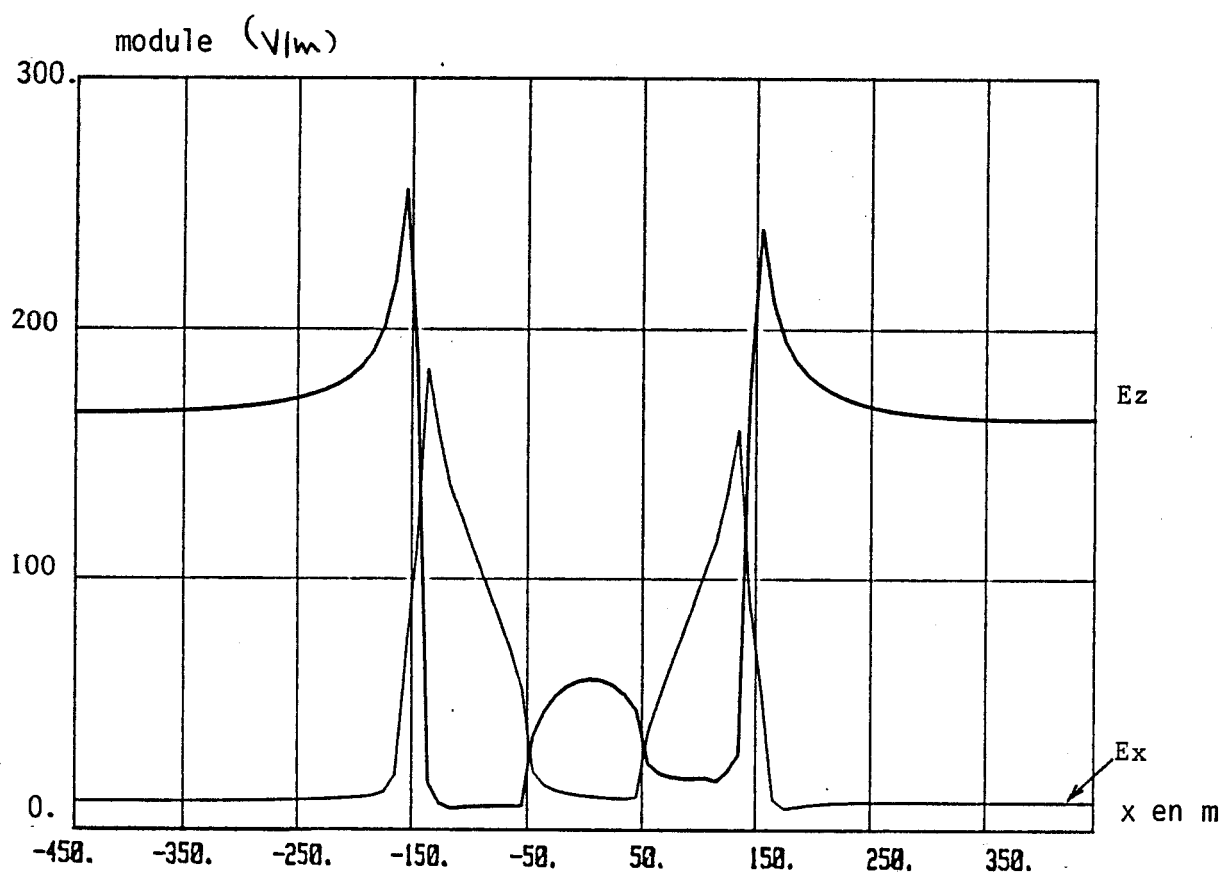
Valée réelle

f = 10 KHz     $\theta = 89^\circ$



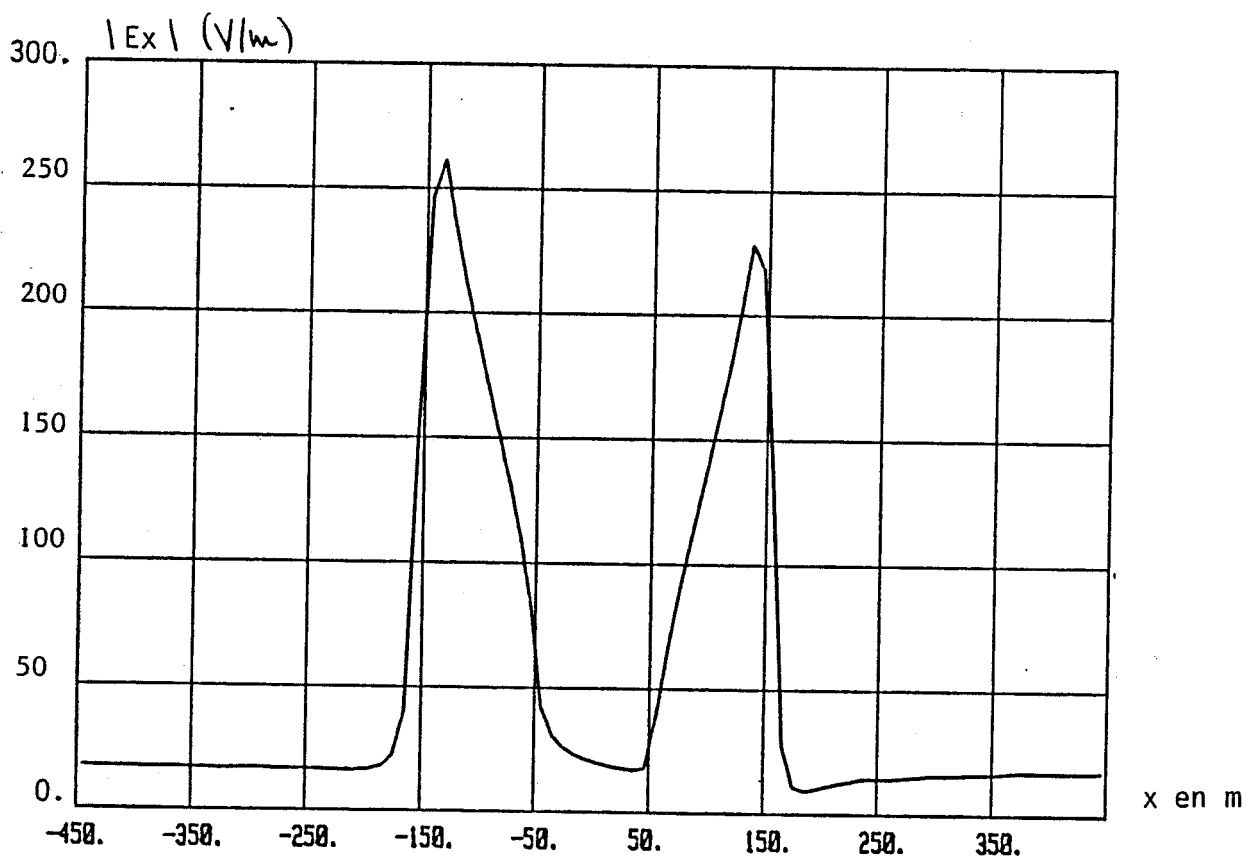
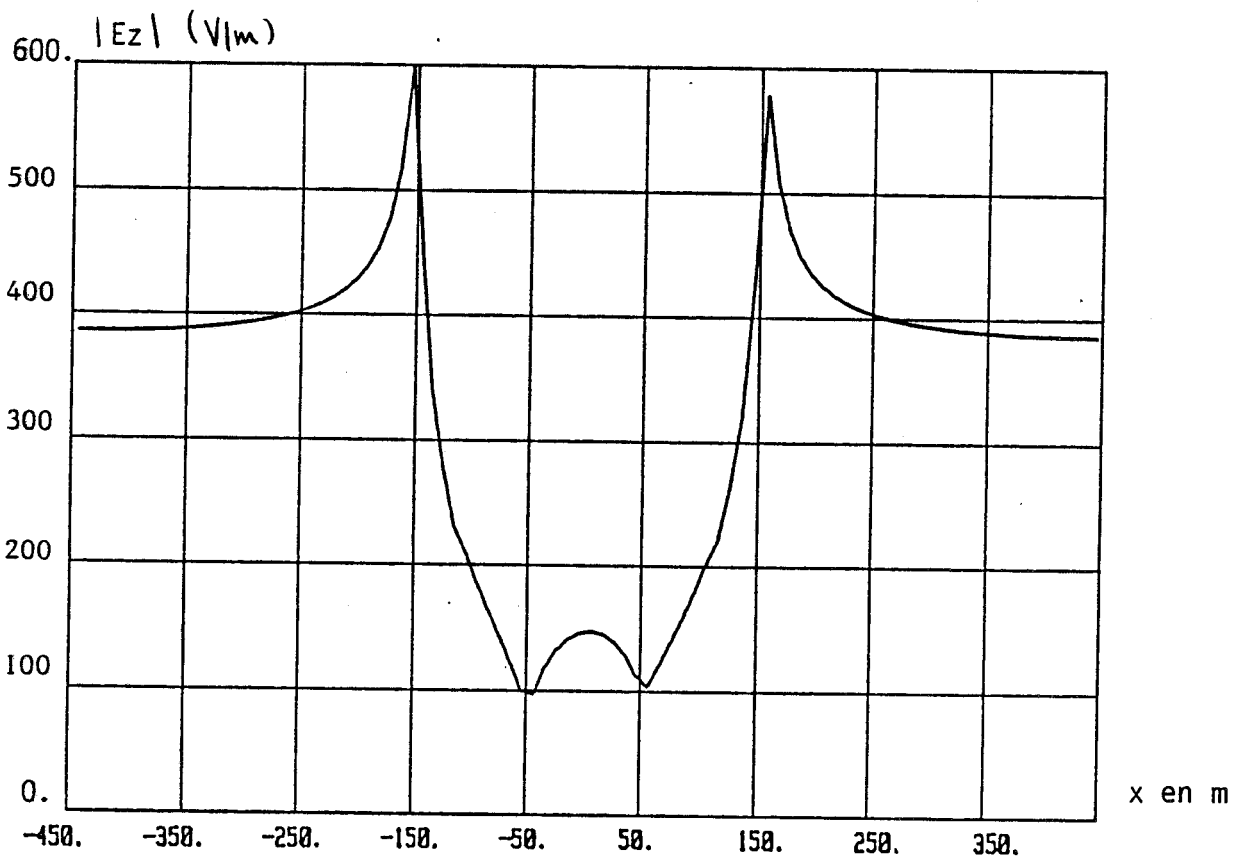
Valée réelle-repère local

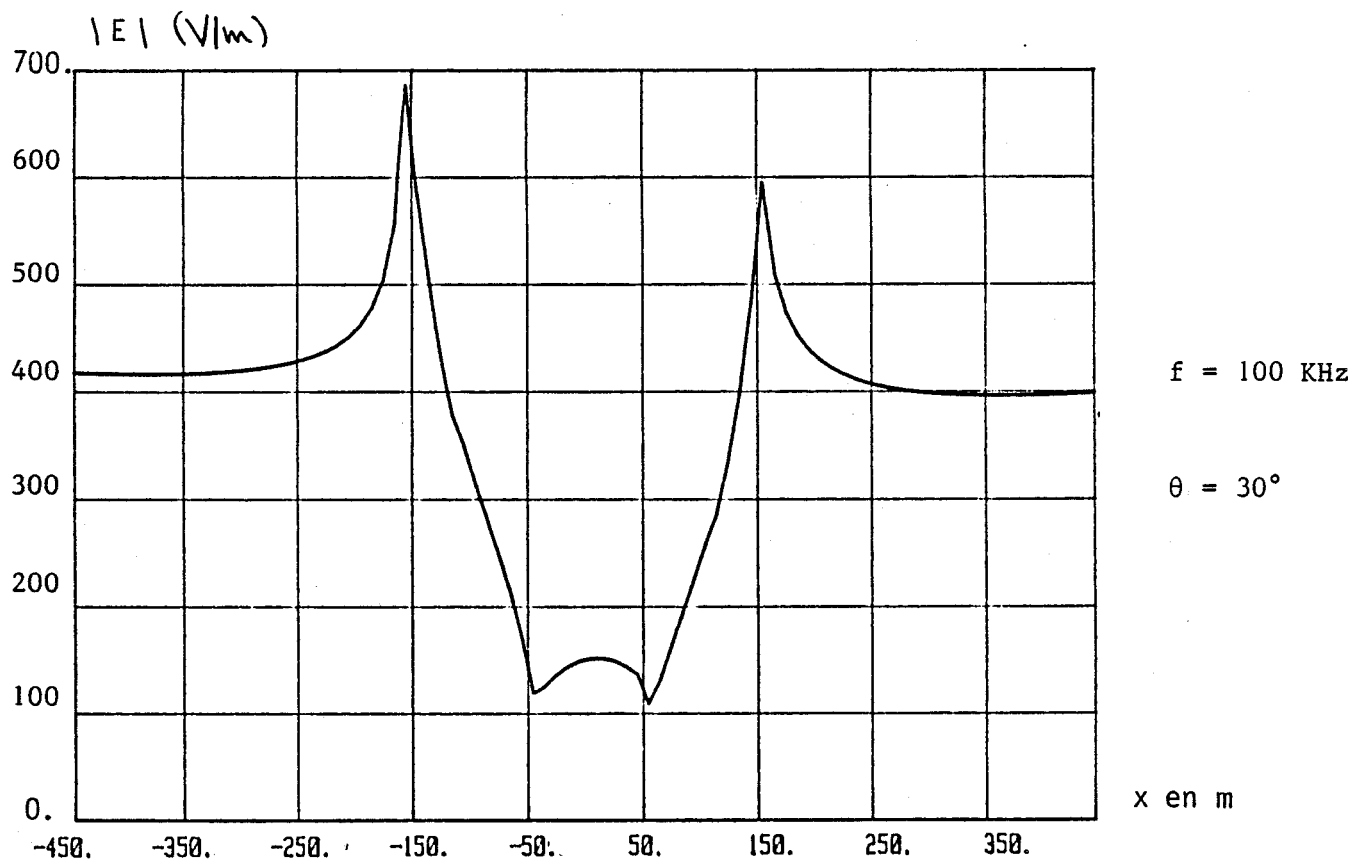
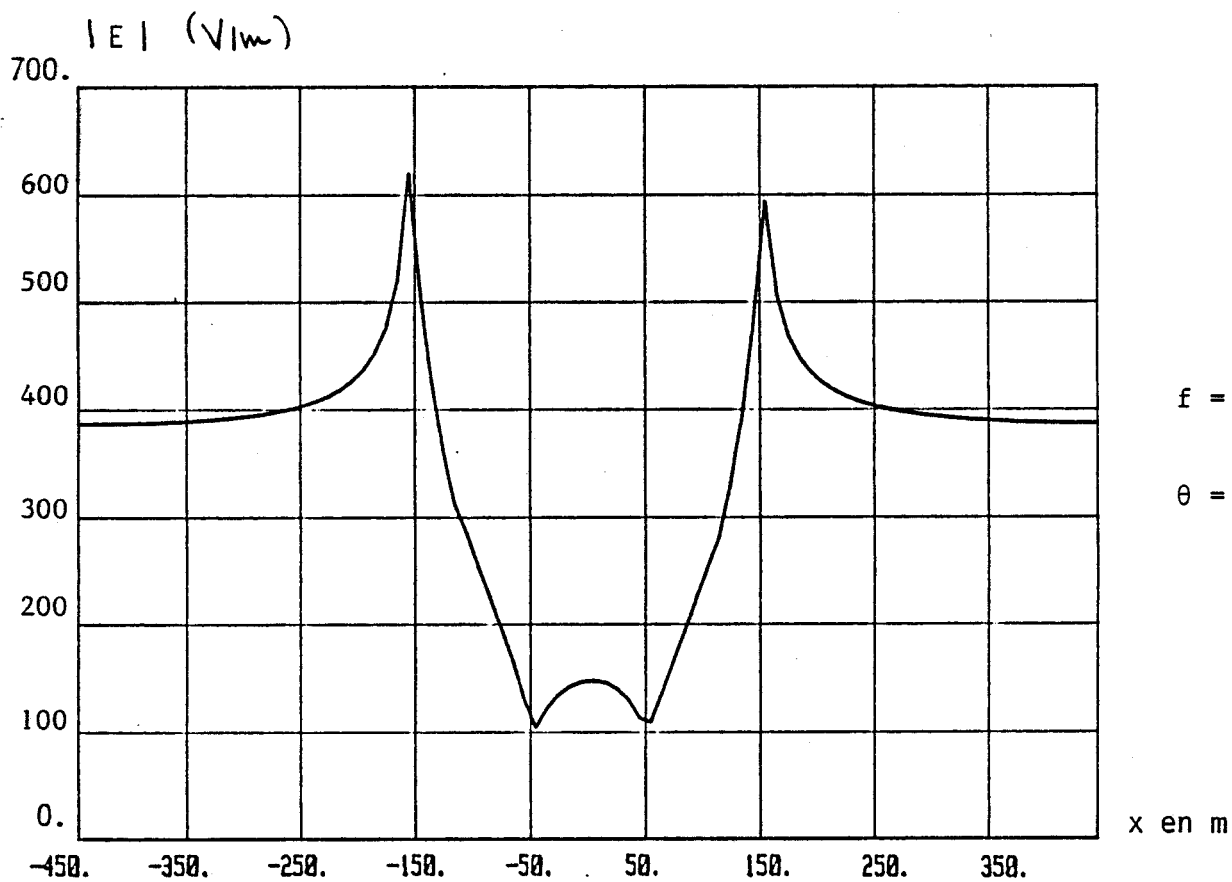
f 100 KHz     $\theta = 89^\circ$





$f = 10, \text{ KHz}$        $\theta = 30^\circ$





154  
Influence de la conductivité

..... 10 KHz

\_\_\_\_\_ 100 KHz

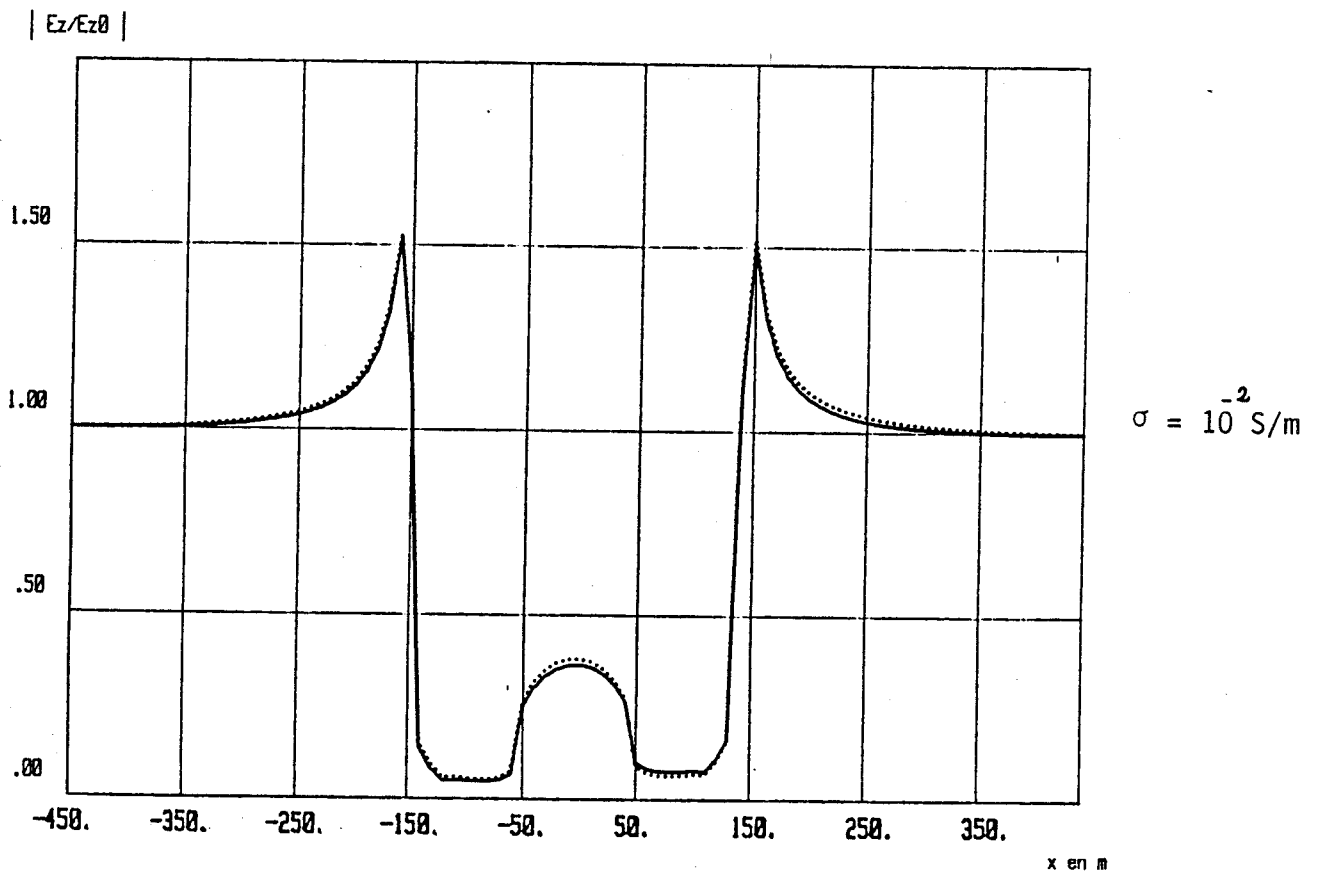
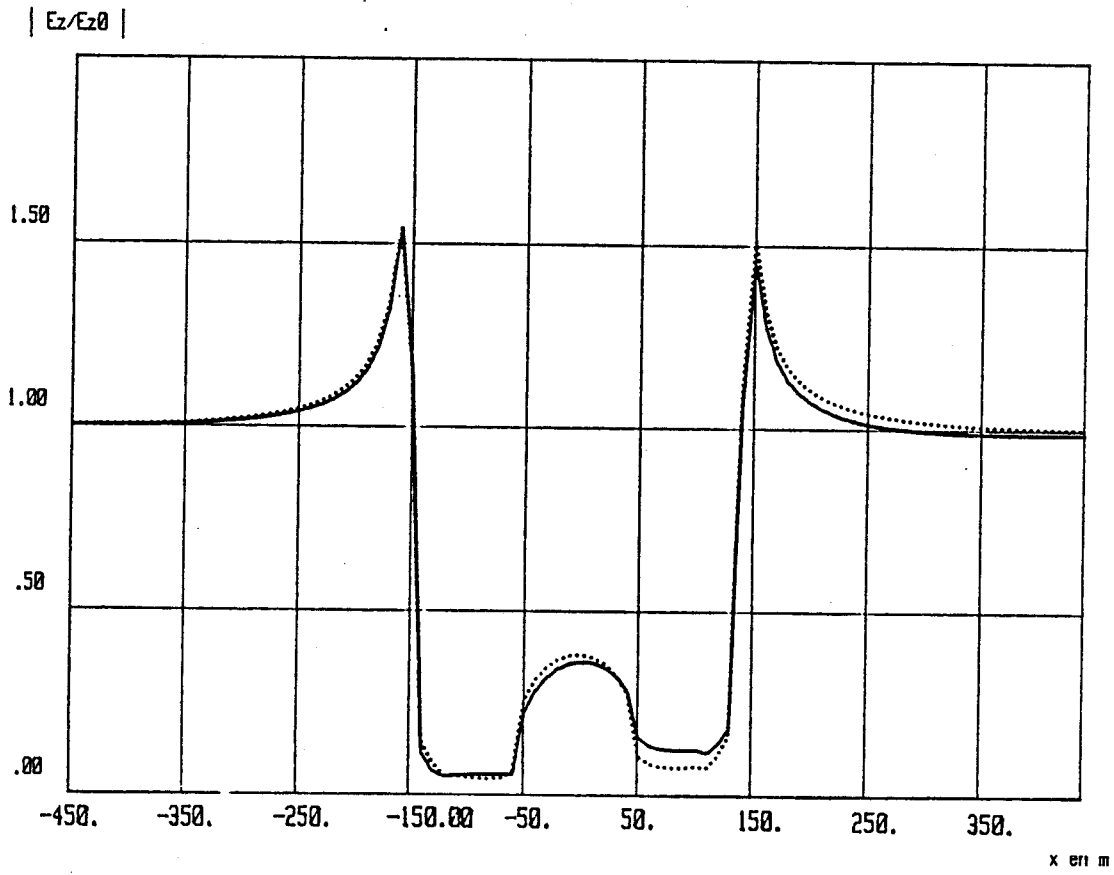


figure V-26

..... 10 KHz Influence de la conductivité

———— 100 KHz

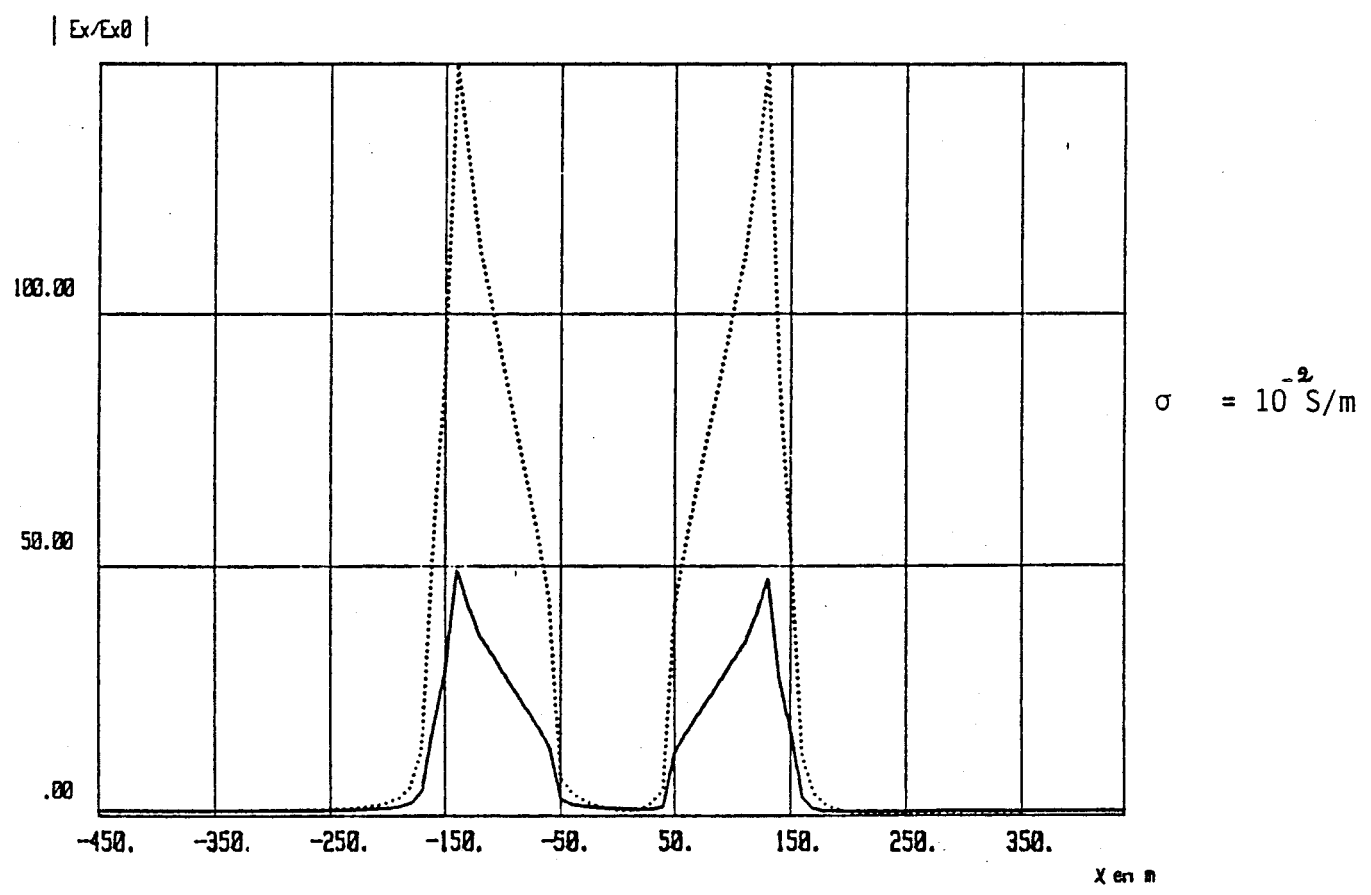
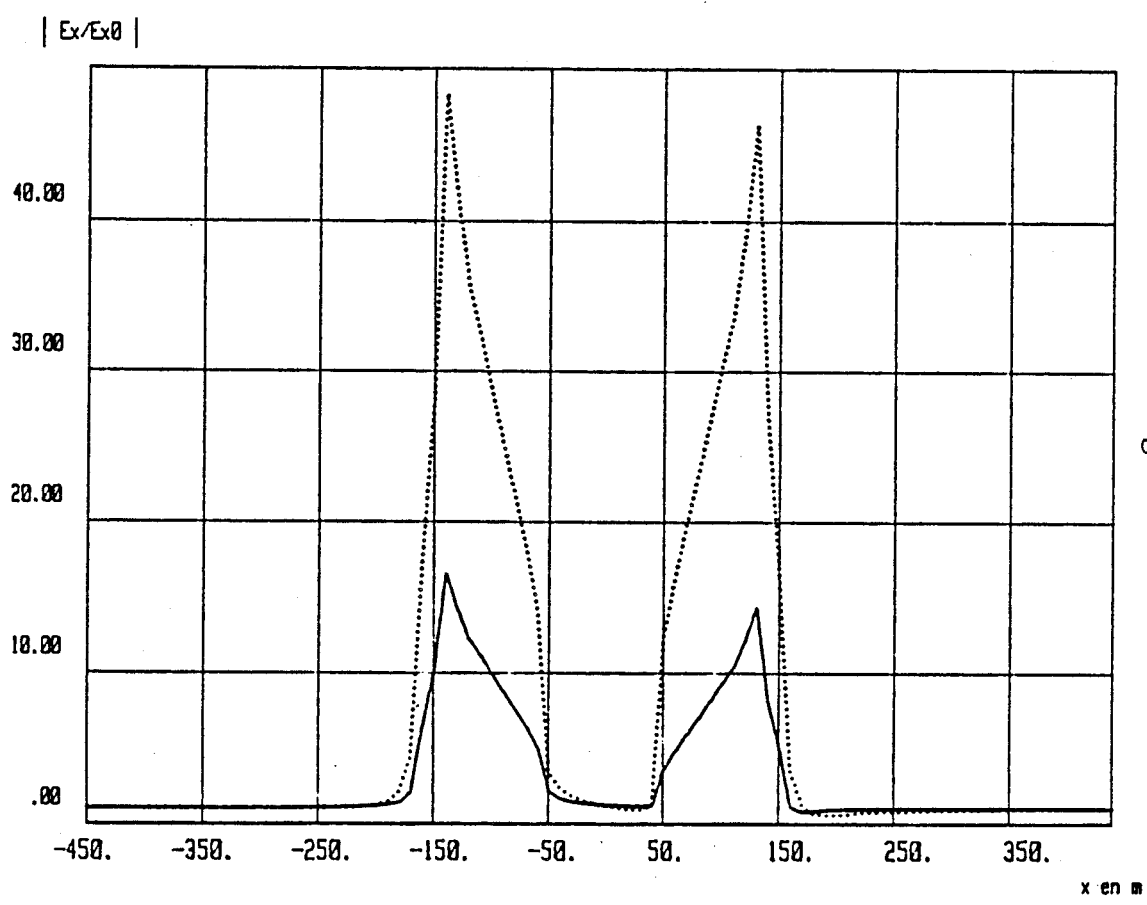


figure V-27

Influence de la conductivité

..... 10 KHz  
—— 100 KHz

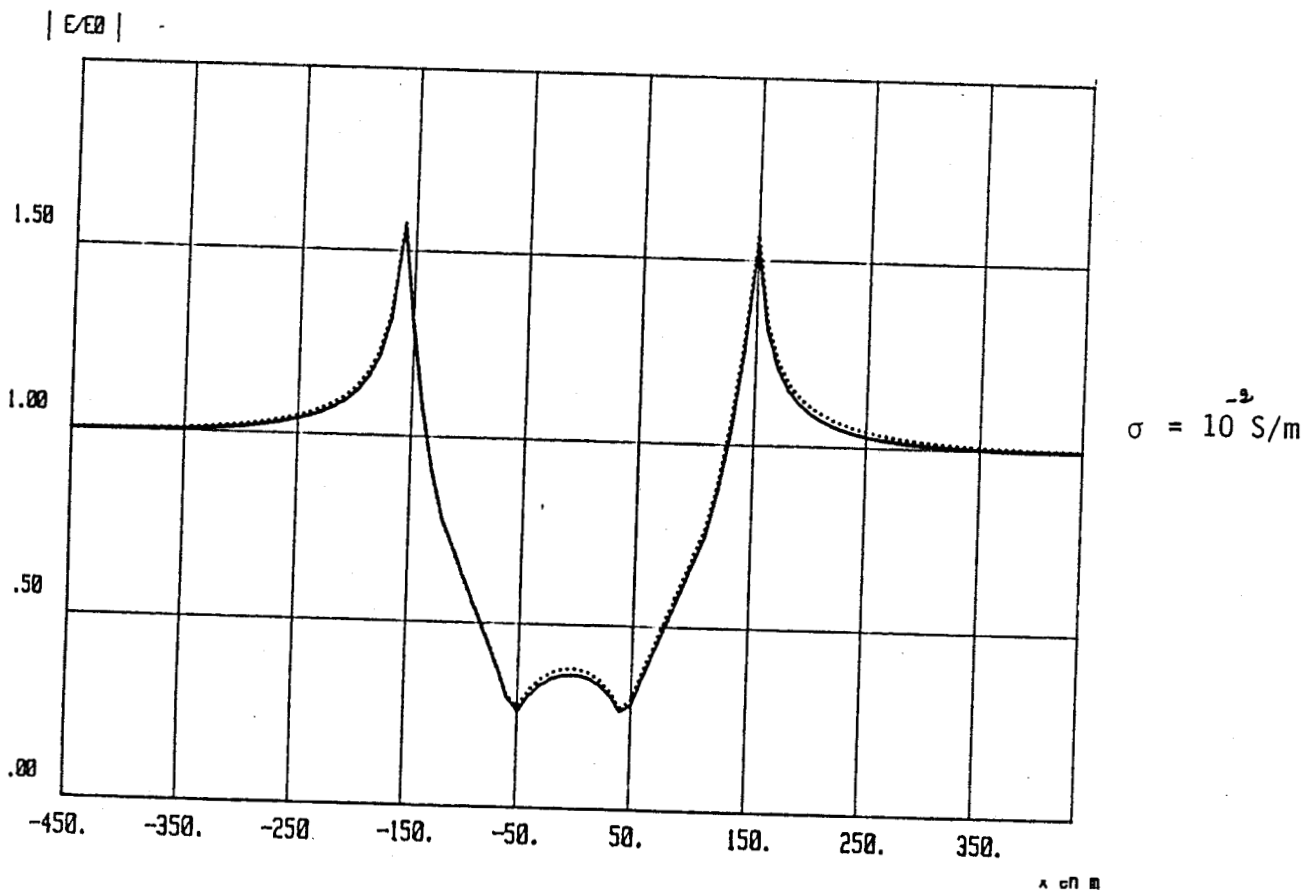
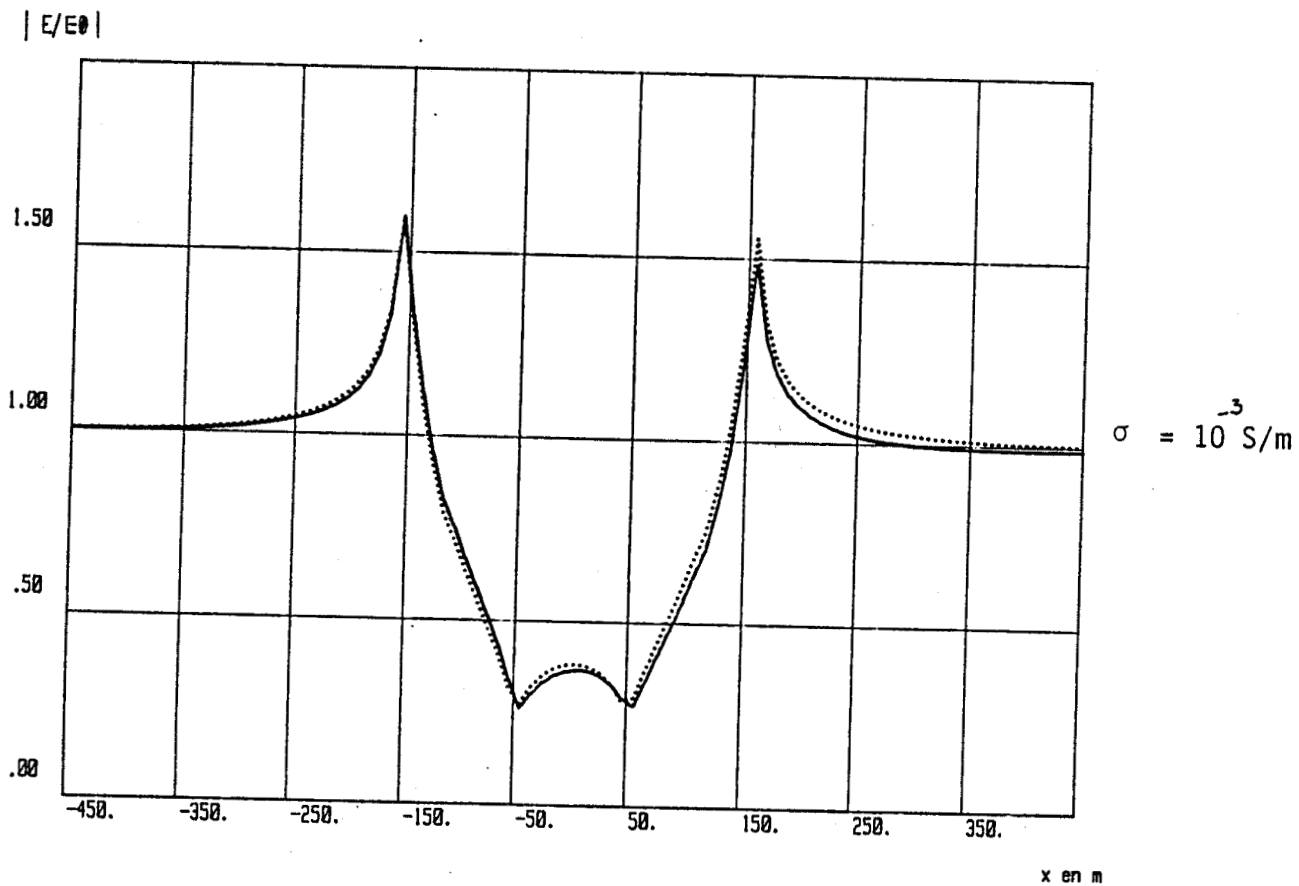


figure V-28

a) Comparaison entre colline "réelle" et colline à section droite rectangulaire

Les formes envisagées sont représentées sur la Figure V-6

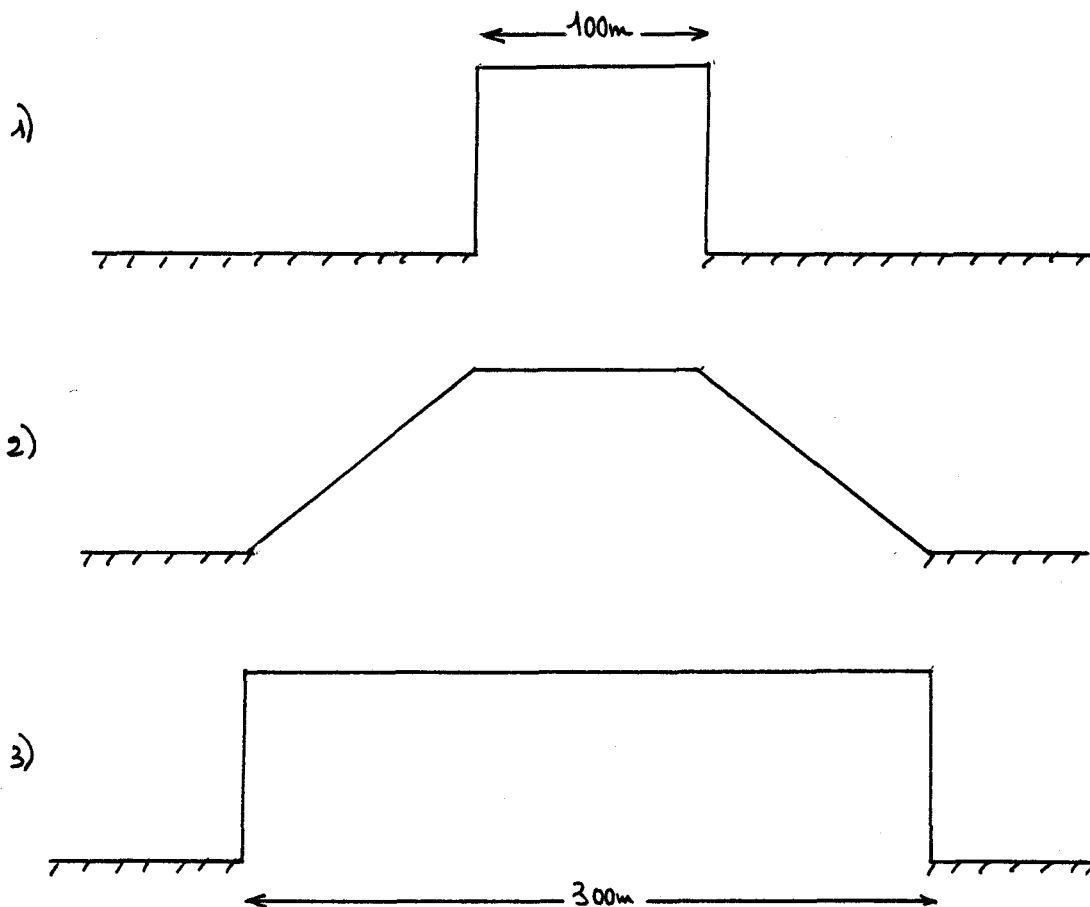


Figure V-6

La conductivité de la colline est supposée égale à  $10^{-4}$  S/m.

Nous avons représenté sur les planches V-29 à V-31 les composantes verticales et horizontales du champ reçu à 5 m au-dessus de l'axe x'x qui coïncide avec la partie de l'interface horizontale air-sol.

la planche V-29 correspond à une fréquence de 10 kHz et un angle de  $89^\circ$ . Nous remarquons que loin de l'anomalie, le champ  $E_z$  en présence de la colline "réelle" s'approche de celui de la colline ayant la même largeur de sommet. L'effet de pointe sur  $E_x$ , déjà rencontré lors de l'étude de la vallée, est plus marqué pour une colline "réelle". A 100 kHz, cet effet s'affaiblit (Planche V-30).

$f = 10 \text{ KHz}$     $\theta = 89^\circ$     $\sigma = 10^{-4} \text{ S/m}$

$z = -5\text{m}$

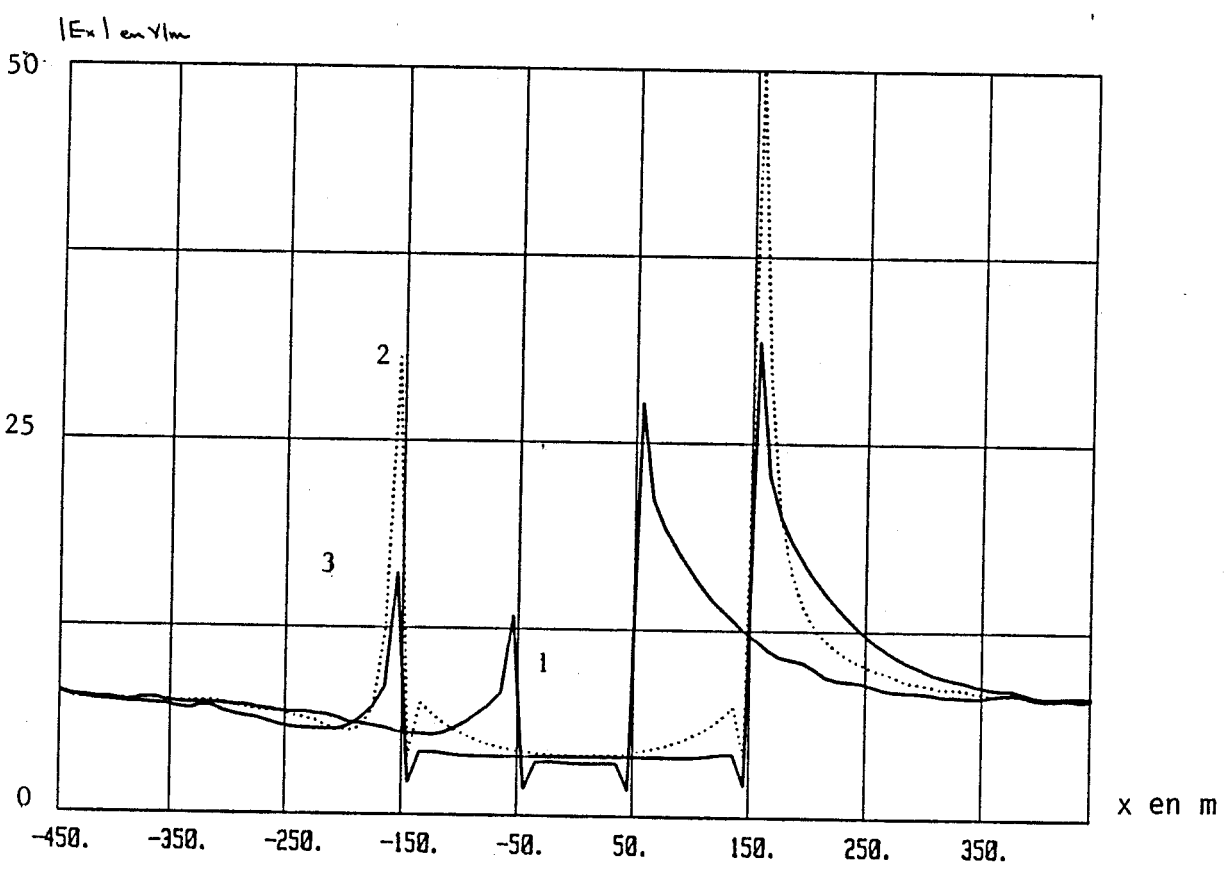
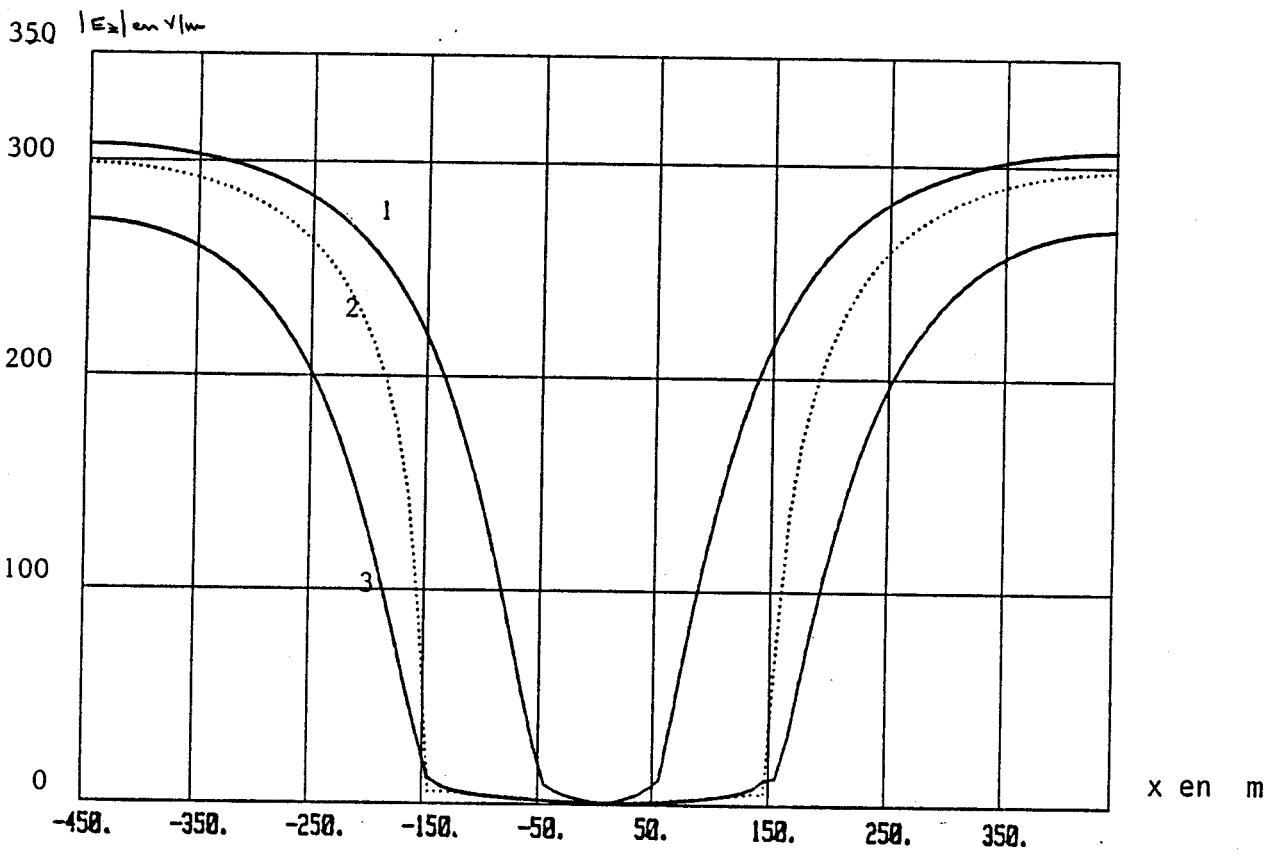
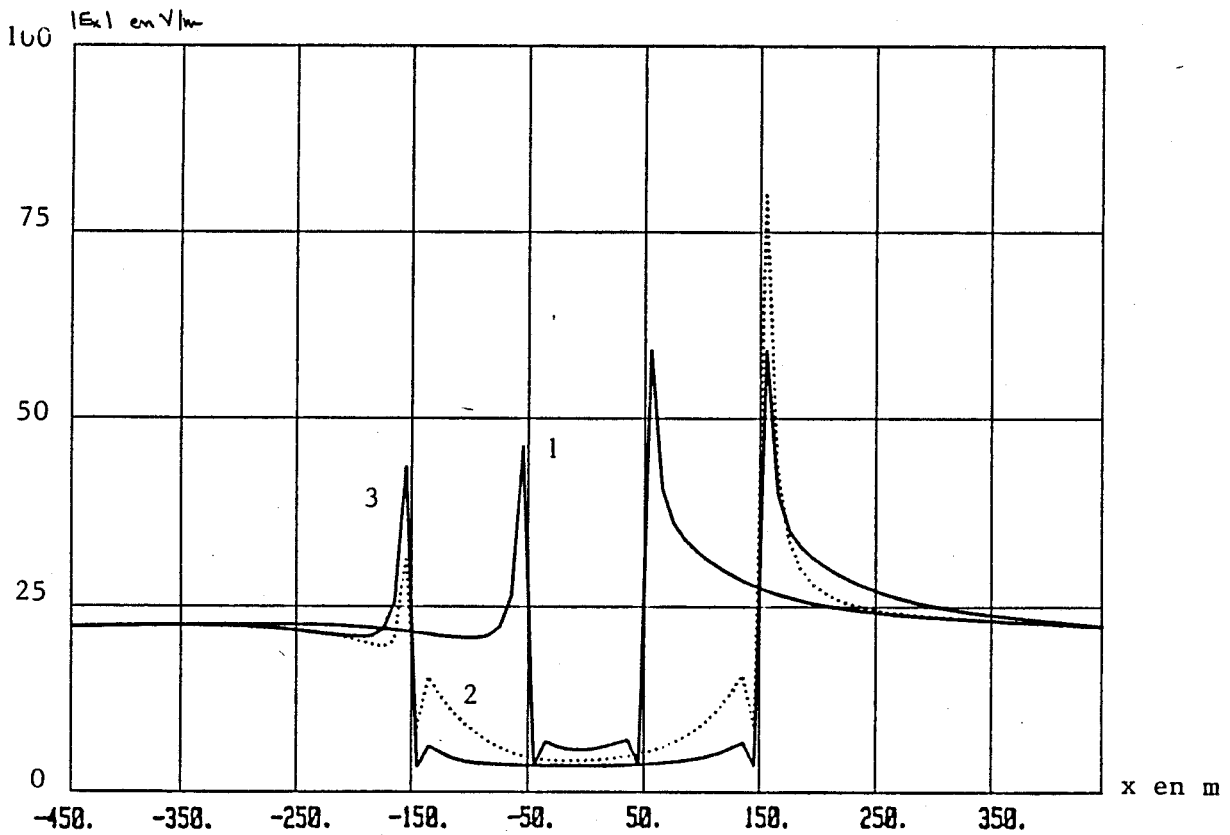
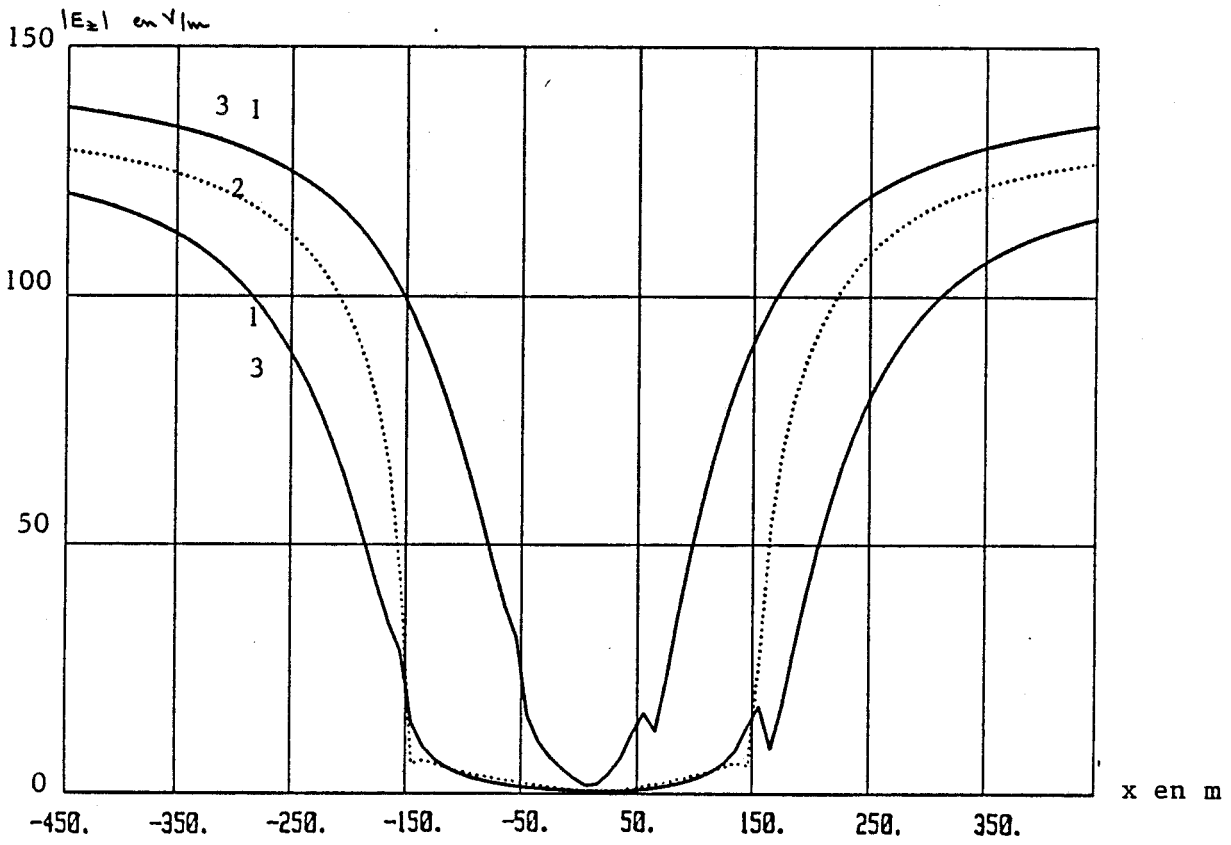


Planche V-29

$f = 100 \text{ KHz}$   $\theta = 89^\circ$   $\sigma = 10^{-4} \text{ S/m}$

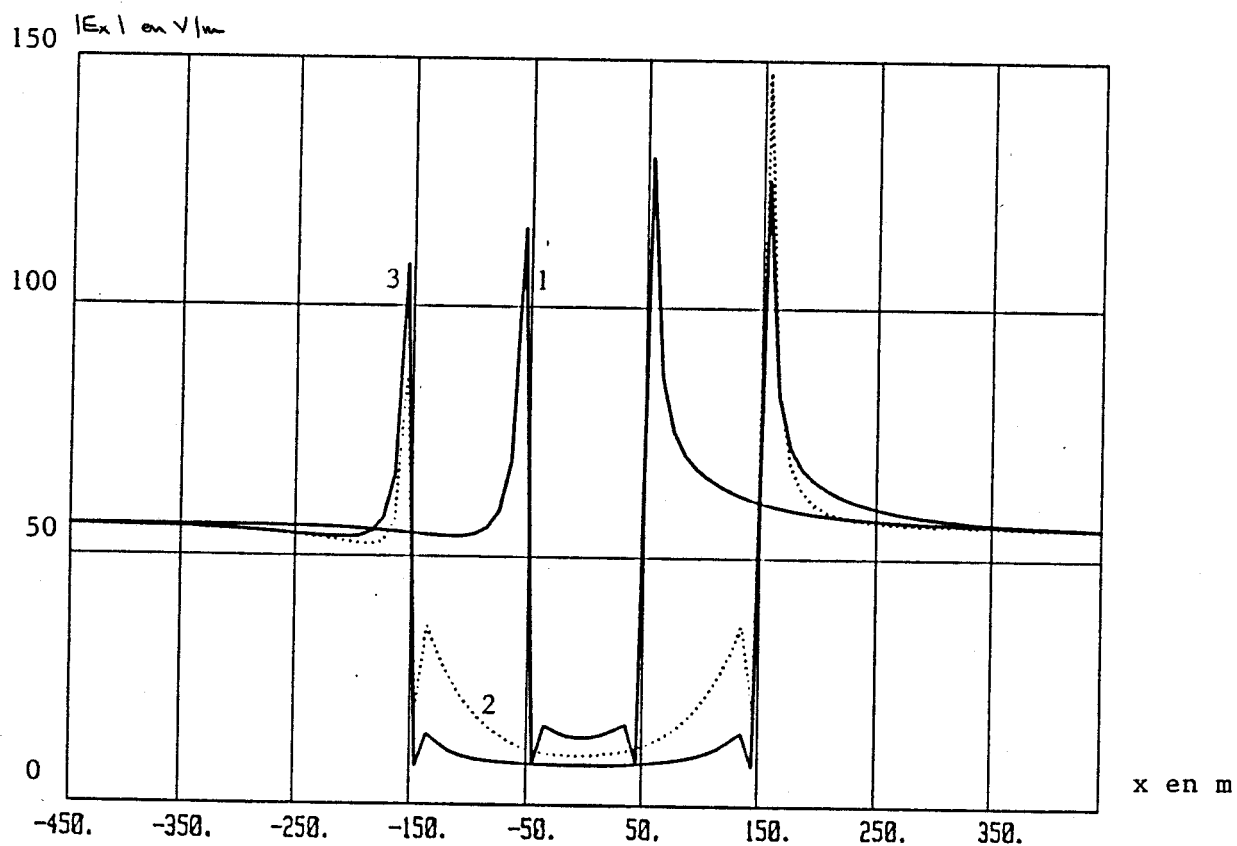
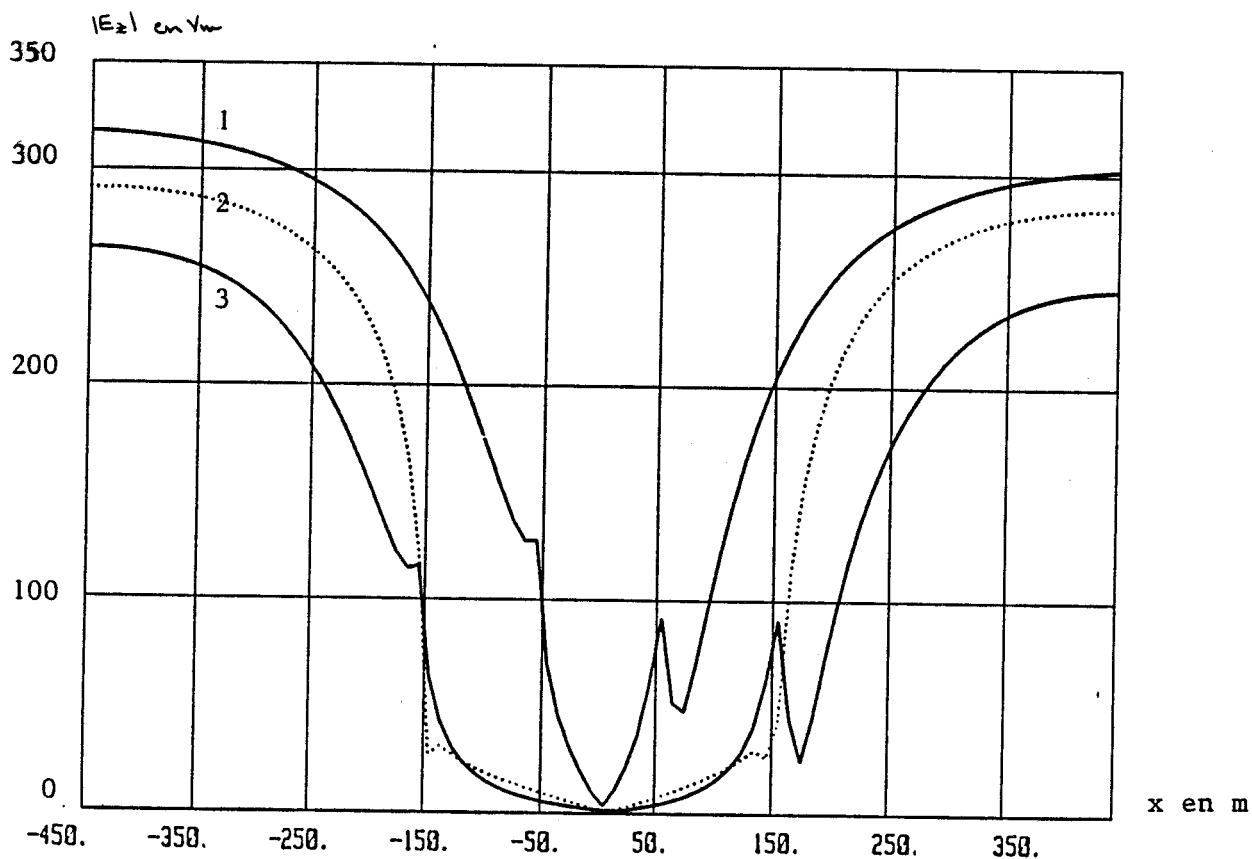
$z = -5\text{m}$





$f = 10 \text{ KHz}$     $\theta = 30^\circ$     $\sigma = 10^{-4} \text{ S/m}$

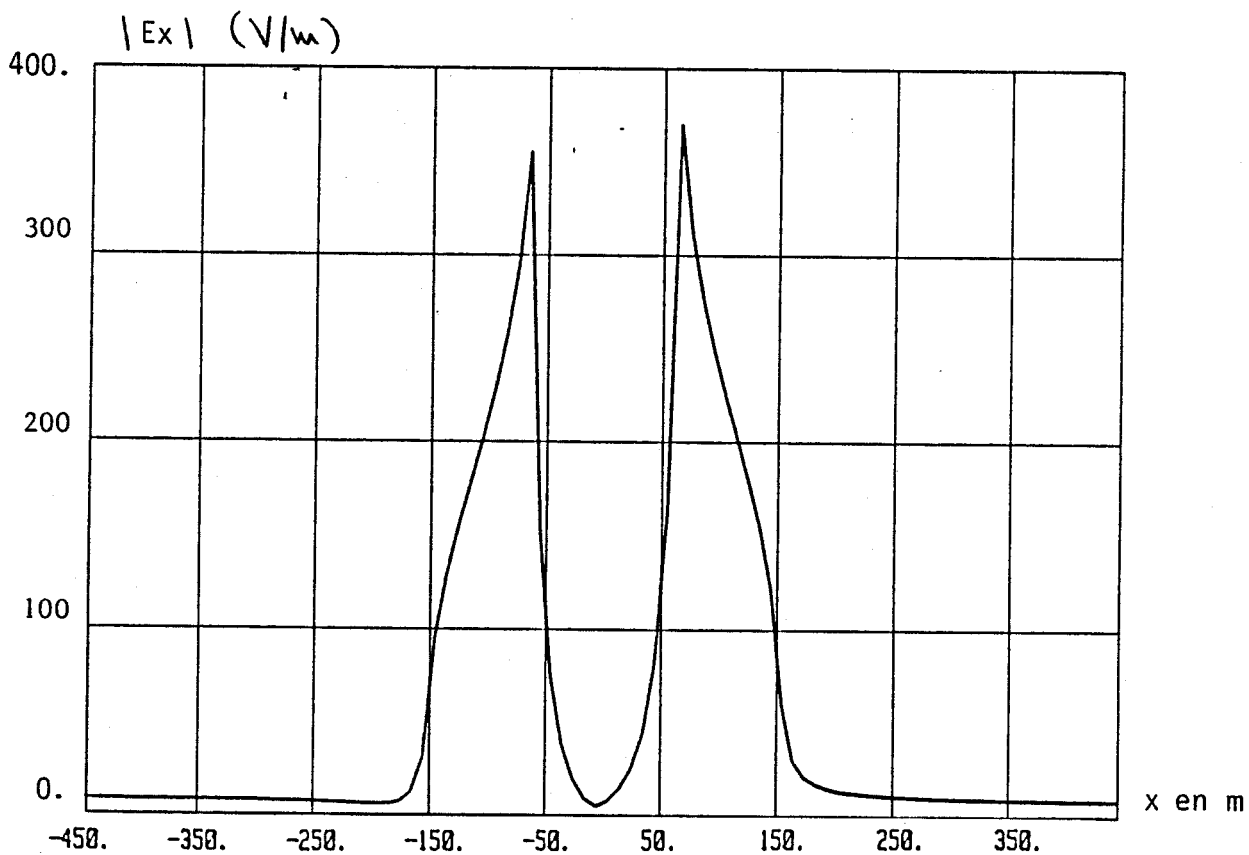
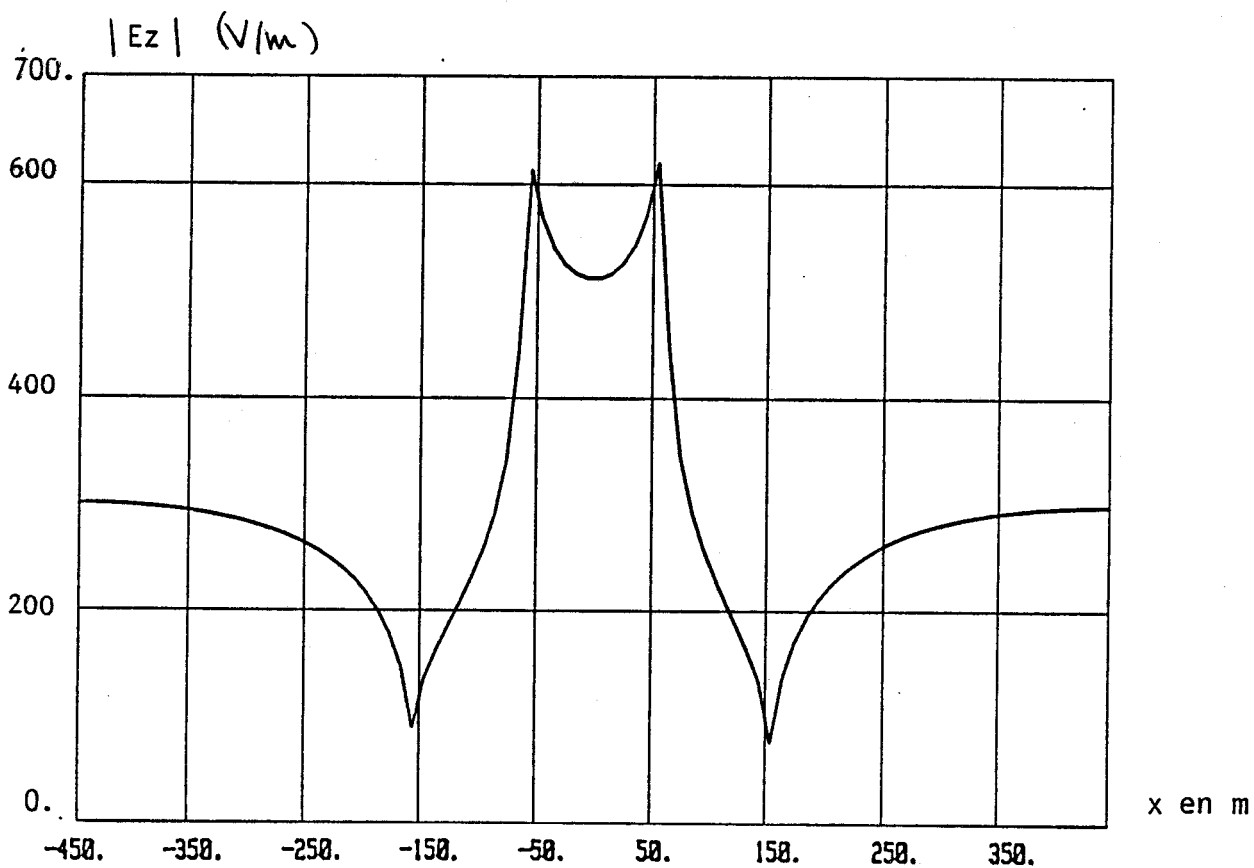
$z = -5\text{m}$



Colline réelle-repère fixe

$f = 10 \text{ KHz}$     $\theta = 89^\circ$     $\sigma = 10^{-4} \text{ S/m}$

$z = -5\text{m}$



Les mêmes remarques pourront être faites quand on change d'angle d'incidence. Les courbes de la Planche V-31 ayant été obtenues pour un angle de  $30^\circ$  et une fréquence de 10 kHz.

b) colline "réelle"

La colline "réelle" est du type 2) de la Figure V-6.

Pour une fréquence de 10 kHz et sous un angle de  $89^\circ$ , nous avons représenté les composantes verticales et horizontales du champ électrique liées au repère fixe XOZ reçu à 5 m de hauteur en suivant le profil de la colline (Planche V-32). On remarque une augmentation du champ sur les parties supérieures de l'anomalie avec un effet de "pointe" au voisinage des arêtes.

V) CONCLUSION

Le modèle numérique aux différences finies nous a permis d'étudier l'effet local d'un obstacle situé à la surface du sol (colline, forêt...) ou d'une vallée.

Nous avons montré tout d'abord le bon accord qui existe entre les prédictions de l'amplitude du champ au voisinage d'un obstacle de section droite rectangulaire calculées soit par des méthodes d'équations intégrales, soit avec le modèle aux différences finies. Pour les hauteurs et conductivités envisagées et dans une gamme de fréquences s'étendant entre 10 kHz et 100 kHz, l'effet de l'anomalie se fait sentir de part et d'autre de celle-ci jusqu'à une distance ayant le même ordre de grandeur que sa hauteur puisque dans ce cas, la variation relative du champ n'est plus que de 20 %. La simulation d'une colline ayant une section droite de forme trapézoïdale a permis de mettre en évidence les effets locaux de renforcement du champ électrique par rapport au demi-milieu homogène.

Enfin nous avons montré que si l'antenne de réception suit le profil d'une vallée, le champ magnétique n'est quasiment pas affecté par l'effet de masque et conserve une valeur identique à celle obtenue sur l'interface horizontal air-sol loin de la vallée. Le champ électrique subit par contre une atténuation importante lorsque le récepteur pénètre dans la vallée puisqu'à une "profondeur" de 20 m l'atténuation est de 2 dB et atteint 11 dB à 100 m. Cette différence importante de comportement entre le champ électrique et le champ magnétique a pu être vérifiée expérimentalement lors de différentes campagnes de mesures. Celles-ci ont cependant été menées en accordant le dispositif de réception mobile sur une station d'émission lointaine, fonctionnant en ondes entretenues. Afin de pouvoir distinguer l'onde de sol, prise en compte dans notre modèle, de l'onde dite de ciel provenant d'une réflexion sur l'ionosphère, il serait nécessaire d'envisager des mesures dans le domaine temporel en utilisant par exemple le système d'émission LORAN.

### CONCLUSION GENERALE

Nous nous sommes intéressés dans notre travail à une modélisation théorique permettant de prévoir les variations du champ électromagnétique au voisinage immédiat d'une anomalie topographie soit au-dessus d'un interface plan horizontal (colline, forêt...), soit en-dessous de celui-ci (vallée...). Nous avons supposé qu'aussi bien l'excitation que la structure était bidimensionnelle et l'étude a donc été limitée au cas d'une onde plane incidente ou d'une onde provenant d'une ligne-source ou d'une ligne infinie de dipôles horizontaux ou verticaux.

La première étape décrite dans ce mémoire est basée sur un formalisme d'équations intégrales. En effet, d'un point de vue purement géométrique, on peut considérer qu'une vallée ou une montagne correspond à une anomalie de conductivité dans le milieu qui la contient et qui se comporte donc comme une antenne bidimensionnelle de réception donc re-rayonnante lorsqu'elle est excitée par une onde électromagnétique.

Après avoir décrit le formalisme mathématique, nous avons effectué une étude paramétrique montrant l'influence d'une colline ou d'une forêt sur l'amplitude du champ électrique en son voisinage et ceci dans la gamme basse fréquence (10 kHz - 100 kHz). Afin de diminuer le temps calcul, seule une anomalie ayant une section droite rectangulaire a été traitée dans cette étape afin de bénéficier de certaines propriétés de symétrie. Nous avons montré dans ce cas que l'effet de masque produit par l'obstacle se manifeste essentiellement lorsque le récepteur se situe à une distance des bords de l'anomalie inférieure à la hauteur de celle-ci. De plus, compte tenu de la gamme de fréquences envisagées, l'amplitude du champ électrique dépend peu de la conductivité de l'anomalie sauf si celle-ci devient très isolante ( $\sigma < 10^{-5}$  S/m).

Devant l'impossibilité d'appliquer une telle approche au cas d'une anomalie isolante située dans le sol mais au voisinage immédiat de l'interface, une autre technique numérique a dû être développée pour simuler l'influence d'une vallée. La méthode aux différences finies a été choisie et une première étape a consisté en une validation du code de calcul en effectuant des comparaisons d'une part avec des résultats de la littérature et d'autre part avec le modèle basé sur la résolution d'un système d'équations intégrales. Nous avons d'abord pu mettre en évidence l'influence de la forme et de la largeur d'un obstacle, puis la distribution du champ électromagnétique dans des vallées de différentes formes a été présentée. Un résultat important de cette étude est que le champ magnétique varie très peu en fonction de la position du récepteur en dehors ou dans la vallée tandis que le champ électrique subit une atténuation importante lorsque le point de réception s'enfonce dans la vallée.

Ces résultats sont en accord avec des résultats expérimentaux préliminaires. Une campagne de mesures est prévue prochainement en utilisant comme source d'émission les émetteurs LORAN afin que la mesure du champ électromagnétique puisse être faite sur l'onde s'étant propagée uniquement à la surface du sol.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] E.C. FIELD, "Low frequency ground wave propagation over narrow terrain features", IEEE Trans. on Ant. and Prop., vol. AP30, pp.831-836, 1982.
- [2] E. BAHAR, "Physical interpretation of the full wave solutions for the E.M. fields scattered from irregular stratified media", Radio Sci., pp.749-759, 1988.
- [3] J.B. STEPHEN, "Etude théorique de faisabilité de la détection de chambres magnétiques enterrées dans un demi-milieu dissipatif stratifié utilisant un modèle numérique bidimensionnel", Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, USTL, 1978.
- [4] HARRINGTON, "Time harmonic electromagnetic fields", New York, Mac Graw Hill, 1961.
- [5] M. CAUTERMAN, "Etude théorique de l'influence d'une anomalie de résistivité de forme quelconque sur le champ électromagnétique créé par un dipôle en milieu absorbant", Thèse de doctorat d'état, USTL, 1975.
- [6] G.W. HOHMANN, "Electromagnetic scattering by conductors in the earth near a line source of current", Geophysics, V. 36, pp.101-131, 1971.
- [7] J. WAIT, "Electromagnetic waves in stratified media", New York, Mac Millan, pp.25-28, 1962.
- [8] HARRINGTON, "Field computation by moments methods", New York, Mac Millan, 1968.
- [9] PARRY, "Integral equation formulations of a conductive earth", Berkeley, Ph. D. thesis, University of California, 1969.

- [10] DIETER et al., I.P. and resistivity type curves for three-dimensional bodies", Geophysics, V. 34, pp.615-632, 1969.
- [11] RICHMOND, "Scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross-section shape", IEEE Trans., V. AP. 13, pp. 334-341, 1965.
- [12] RICHMOND, "T.E. waves scattering by a dielectric cylinder of arbitrary cross-section shape", IEEE Trans., V. AP. 14, pp.460-464, 1966.
- [13] A. ZEDDAM, "Etude théorique et expérimentale du rayonnement d'une impulsion de courant se propageant sur un fil parallèle à la surface du sol - Application à l'exploration des terrains de subsurface", Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, USTL, 1980.
- [14] COGGON, Personal communication, 1970.
- [15] J.L. MARTIN, "Etude théorique de l'influence d'une hétérogénéité de conductivité et de forme quelconque sur le champ électromagnétique rayonné par une ligne de dipôles", Diplôme d'Etudes Approfondies de Micro-onde, USTL, 1976.
- [16] CAUTERMAN, "Etude des effets parasites de la topologie de la surface du sol", Rapport interne USTL.
- [17] M. MORSE and H. FESHBACH, "Methods of theoretical physics", New York, Mc Graw Hill, 1953.
- [18] NGUYAN, "Modélisation numérique de la réponse d'une structure bidimensionnelle illuminée par une onde électromagnétique plane", Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, USTL, 1982.
- [19] A. WEXLER, "Computation of electromagnetic fields", IEEE Trans., on micro theory and techn., Vol. MTT 17, n° 8, 1969.
- [20] G.E. FORSYTHE, W.R. WASON, "Finite difference method for partial differential equations". Ed. John WILEY and SONS, New York, 1967.



- [21] N. GASTINEL, "Analyse numérique linéaire", Ed. Hermann, 1966.
- [22] R.S. VARGA, "Matrix iterative analysis", Ed. Prentice-Hall, Inc. 1962.
- [23] I.R. MUFTI, "Finite difference resistivity modeling for arbitrarily shaped two dimensional structures", Geophysics, Vol. 44, n° 4, 1976.
- [24] I.R. MUFTI, "A practical approach to finite difference resistivity modeling. Geophysics, Vol. 43, n° 5, 1978.
- [25] I.R. MUFTI, "Finite difference evaluation of apparent resistivity curves". Geophysical prospecting, Vol. 28, 1980.
- [26] A. BENANI, "Modélisation du sondage magnéto tellurique par la méthode des éléments finis", Diplôme d'Etudes Approfondies de Micro-onde à l'USTL, 1982.
- [27] J.P. DUBUS, "Théorie et mise en application d'une méthode de sondage électromagnétique utilisable en prospection géophysique à faible profondeur", Thèse de doctorat d'état, USTL, 1974.
- [28] D.F. PRIDMORE, G.W. HOHMANN, S.H. WARD, W.R. STILL, "An investigation of finite element modeling for electrical and electromagnetic data in three dimensions", Geophysics, Vol. 46, n° 7, 1981.
- [29] P. RAVIART, P. FAURE, "Cours d'analyse numérique", Ecole Polytechnique, 1976.
- [30] O.C. ZIENKIEWICZ, "La méthode des éléments finis", Ediscience Paris, 1973.

