

N° d'ordre : 771

50376
1991
230

66367

50376
1991
230

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Discipline : Lasers, Molécules et Rayonnements Atmosphériques

par

William SERGENT



ETUDE EXPERIMENTALE D'EFFETS DYNAMIQUES DANS UN BISTABLE TOUT OPTIQUE SOUMIS A UNE MODULATION EXTERNE PERIODIQUE

Soutenue le 24 Octobre 1991 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

MM. P. GLORIEUX
D. DANGOISSE
Mme M. LE BERRE
MM. M. DESCAMPS
B. SEGARD

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur

Ce travail a été réalisé à l'U.F.R. de physique de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, dans le laboratoire de Spectroscopie Hertzienne associé au C.N.R.S., et dirigé par le Professeur B. MACKE. Je le remercie de m'avoir accepté dans son laboratoire.

Je remercie également Monsieur le Professeur P. GLORIEUX de l'Université de Lille de m'avoir fait l'honneur de juger ce travail et de présider le jury.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur le Professeur D. DANGOISSE et Madame M. LE BERRE, Directeur de Recherche au C.N.R.S., qui ont accepté de rapporter ce travail. Mes remerciements vont également à Monsieur le Professeur M. DESCAMPS qui a bien voulu examiner les études présentées.

Ce travail a été effectué en collaboration et sous la direction de Bernard SEGARD et Jaouad ZEMMOURI qui n'ont cessé de me prodiguer leurs conseils depuis mon entrée au laboratoire, ce dont je les remercie sincèrement. Je tiens à associer à ces remerciements Daniel HENNEQUIN et Magid TAKI pour les fructueux échanges scientifiques que nous avons pu avoir.

Je remercie Monsieur J.M. LAPAUW pour son aide et sa sympathie ainsi que toute l'équipe du "3ème étage".

Je suis enfin très reconnaissant envers le personnel technique du laboratoire et de l'U.F.R. qui a permis la réalisation de ce mémoire.



TABLE DES MATIERES

Introduction	11
---------------------------	----

Chapitre 1: *Système physique, dispositifs expérimentaux et optimisation d'un Pérot-Fabry de 23 m*

1-1 - Introduction	19
1-2 - L'absorbeur moléculaire	20
1-3 - Cavités Pérot-Fabry	22
1-3-1 - Caractéristiques des guides d'onde	22
1-3-2 - Description du Pérot-Fabry de 182 m	24
1-3-3 - Optimisation du Pérot-Fabry de 23 m	26
1-4 - Détection, source et modulation de fréquence	37

Chapitre 2: *Modèle monomode en présence d'une modulation du champ incident*

2-1 - Introduction	47
2-2 - Elaboration du modèle monomode	48
2-3 - Calibration du modèle	59

Chapitre 3: *Evolution des résonances dans un bistable optique soumis à une modulation de fréquence*

3-1 - Introduction	71
3-2 - Mise en oeuvre expérimentale	72
3-3 - Mise en évidence des principaux effets	75
3-4 - Influence de la puissance incidente	86
3-5 - Influence du désaccord moléculaire	89
3-6 - Conclusion	106

Chapitre 4: Chaos dans un bistable optique soumis à une modulation de fréquence

4-1 - Introduction	111
4-2 - Réponses des bistables optiques à la modulation	112
4-3 - Vérification expérimentale de l'origine des phénomènes erratiques	114
4-4 - Diagrammes de bifurcation	122
4-5 - Diagrammes de phase et applications de premier retour	133
4-6 - Cartes des phases	146
4-7 - Bistabilité généralisée	150
Conclusion	159
Références bibliographiques	163
Annexe	169



INTRODUCTION

Pendant longtemps, les scientifiques tentèrent de restreindre leur description de l'univers à des modèles purement linéaires. Mais nombre de phénomènes échappaient à cette modélisation. Il fallut alors se résoudre à introduire des termes non linéaires dans les équations pour retrouver les comportements observés. La conséquence la plus déroutante de l'introduction de cette non linéarité fut l'apparition du chaos. Apparition déroutante dans la mesure où le chaos, lié à la notion sous-jacente de désordre, paraissait en contradiction avec les principes du déterminisme qui prévoyait des évolutions régulières et parfaitement prévisibles. Naïvement, la situation était comparable à celle d'un spectateur qui assiste pour la première fois à un match de football américain sans en connaître les règles. Les mouvements des joueurs lui semblent aléatoires et désordonnés. En effet il peut se demander pourquoi tel joueur sort du terrain pour "parler" avec d'autres personnes (dans le cas d'une blessure), pourquoi tel autre s'éloigne du ballon (l'avant qui s'éloigne) etc... Pourtant comme tous les sports, celui-ci est régi par des règles très strictes et est donc globalement ordonné. De même, le chaos est fondamentalement déterministe et son désordre n'est qu'apparence.

Les premiers comportements chaotiques déterministes ont été mis en évidence par H. POINCARÉ (1892) sur certains systèmes mécaniques régis par les équations de Hamilton. Ce n'est qu'en 1963 que le physicien-météorologue E.N. LORENZ montra qu'un simple ensemble de trois équations différentielles couplées du premier ordre peut conduire à des trajectoires

chaotiques. Ce fut l'une des premières découvertes de chaos déterministe dans les systèmes dissipatifs.

La différence essentielle entre un système chaotique et un système linéaire réside dans l'influence des conditions initiales sur l'évolution du système. En effet pour un système linéaire, deux trajectoires correspondant à des conditions initiales très peu différentes resteront toujours voisines au cours du temps. Cette propriété reste vraie pour les systèmes faiblement non linéaires. En revanche pour un régime chaotique, même si les conditions initiales ont été choisies les plus proches possibles les unes des autres, les deux trajectoires finiront inéluctablement par diverger à l'échelle des temps longs. Un exemple est habituellement cité pour illustrer cette propriété, il s'agit de "l'effet papillon". Ce dernier affirme qu'un battement d'ailes de papillon au dessus de Pékin peut avoir des effets catastrophiques sur le microclimat new-yorkais. Cette sensibilité aux conditions initiales remet donc fortement en question la notion de prédictibilité à long terme comme nous pouvons le constater tous les jours à l'écoute des prévisions météorologiques.

Parmi les nombreux systèmes non linéaires qui ont tendance à évoluer vers le chaos et que souvent nous ne remarquons pas ou plus, les systèmes modulés périodiquement tiennent une place non négligeables (TOMITA 1986). Ils sont l'objet d'études importantes dans des spécialités apparamment sans aucune interaction telles que météorologie, mécanique, écologie, électronique, médecine ou optique. Parmi les comportements chaotiques mis en évidence, on peut citer l'évolution des populations végétales et animales liée au cycle saisonnier (MAY 1987) et celle des

masses atmosphériques et plus généralement des climats soumis aux cycles journalier et annuel mais également au cycle des précessions des équinoxes. Le chaos peut également apparaître en médecine dans les rythmes cardiaques (GLASS 1987), en mécanique dans le mouvement d'un pendule forcé (D'HUMIERES 1982) et en électronique dans les jonctions Josephson (CIRILLO 1982), les systèmes à jonctions couplées (VAN BUSKIRK 1985) et plus généralement les oscillateurs non linéaires (TESTA 1982). Enfin en optique, il apparaît aussi bien dans les systèmes actifs (lasers) (HAKEN 1975) que dans les systèmes passifs (GAO 1989).

L'optique non linéaire est bien adaptée à l'étude de systèmes forcés périodiquement. La plupart des études ont été réalisées sur des systèmes actifs. Citons par exemple le laser CO₂ avec modulation des pertes de la cavité (ARECCHI 1982) ou de la fréquence (MIDAVAINÉ 1985), le laser à fibre avec modulation de la pompe (PHILIPS 1987) et le laser à signal injecté modulé (YAMADA 1980). Notre équipe étudie quant à elle les systèmes passifs et plus exactement les bistables tout optique qui présentent un grand intérêt au niveau des applications en télécommunication et échanges de données. Dans notre cas, ceux-ci sont constitués de résonateurs Pérot-Fabry de 23 et 182 mètres de long dans lesquels est introduit un gaz absorbant saturable sous faible pression, l'acide cyanhydrique HCN, qui peut être considéré comme un système à deux niveaux d'énergie.

Un système optique est dit bistable si, pour une même valeur d'un paramètre de contrôle, il possède deux états de transmission stables différents (GIBBS 1976, LUGIATO 1984). Ainsi dans le cas où la cavité est

vide, la puissance transmise I_{out} est proportionnelle à la puissance incidente I_{in} . En revanche, dès que la cavité contient l'absorbeur saturable, I_{out} devient alors une fonction non linéaire de I_{in} . Pour de fortes non linéarités la courbe stationnaire $I_{out}=f(I_{in})$ prend une forme en S dont seule la branche intermédiaire est instable. Le système est alors bistable. Ainsi, selon sa préparation, la cavité peut transmettre une grande ou petite fraction de l'intensité incidente. Dans certaines conditions, les états stationnaires des branches stables de la courbe en S peuvent se déstabiliser et donner naissance à des instabilités. Ces dernières se manifestent par une auto-oscillation de la puissance transmise par le bistable alors que la puissance incidente ainsi que tous les autres paramètres du système sont maintenus constants. Ces instabilités peuvent être classées en deux types, les instabilités monomodes et multimodes (LUGIATO 1985), suivant qu'elles mettent en jeu un ou plusieurs modes de la cavité optique. Pour les systèmes passifs, les deux types d'instabilités ont été mis en évidence expérimentalement assez récemment par Orozco et al pour le premier (OROZCO 1984, 1989) et dans notre laboratoire pour le second (SEGARD 1988, 1989). Dans ce dernier cas, le mécanisme d'apparition des instabilités multimodes ne met en jeu que deux modes de la cavité: le mode au voisinage duquel le bistable est excité et l'un de ses modes latéraux. Les derniers travaux relatifs à l'étude de ces instabilités figurent en annexe de ce mémoire. Que ce soit pour les instabilités monomodes ou pour les instabilités multimodes, les expériences n'ont mis en évidence aucun comportements chaotiques alors que ces derniers étaient prévus par les simulations numériques. L'application d'une modulation extérieure, en l'occurrence une modulation de la fréquence du champ excitateur, a permis l'observation de tels comportements. Le

présent mémoire est consacré à la description des phénomènes observés dans ce cas.

La première expérience envisagée consistait à étudier l'évolution des fréquences de résonance du bistable en fonction de l'amplitude de la modulation, tous les autres paramètres étant fixés. L'apparition de signaux erratiques lors des expériences nous a tout naturellement incité à étudier plus en détail ce phénomène qui s'est avéré être de nature chaotique.

Le premier chapitre de ce mémoire sera consacré à la description des bistables optiques et de l'ensemble des dispositifs expérimentaux mis en oeuvre. L'accent sera particulièrement mis sur les améliorations effectuées sur le Pérot-Fabry de 23 m. Dans la seconde partie, nous décrirons le modèle numérique que nous avons développé afin d'analyser les résultats expérimentaux obtenus. Le troisième chapitre s'attachera à l'étude qualitative de la dynamique des résonances non linéaires lorsque le système est soumis à une modulation de fréquence. Enfin, le dernier chapitre sera consacré à l'étude des comportements chaotiques présentés par le système.



CHAPITRE 1:

**Systeme physique, dispositifs
experimentaux et optimisation
d'un Pérot-Fabry de 23 m**

1-1 - Introduction**1-2 - L'absorbeur moléculaire****1-3 - Cavités Pérot-Fabry****1-3-1 - Caractéristiques des guides d'onde****1-3-2 - Description du Pérot-Fabry de 182 m****1-3-3 - Optimisation du Pérot-Fabry de 23 m****1-4 - Détection, source et modulation de fréquence**

1-1: Introduction

Les expériences que nous présentons dans ce mémoire se situent dans le cadre d'une étude globale de la "dynamique" des bistables optiques. En particulier ceux dont l'un des paramètres de contrôle est soumis à une modulation périodique.

En ce qui nous concerne, ce bistable est constitué par un résonateur Pérot-Fabry rempli d'un gaz absorbant saturable, en l'occurrence l'acide cyanhydrique HC^{15}N , à faible pression. Le paramètre modulé est la fréquence du champ exciteur.

Deux résonateurs Pérot-Fabry ont été utilisés de longueurs respectives 182 mètres et 23 mètres. Ils sont tous deux constitués de cellules en guide d'onde circulaire "fermées" par des miroirs semi-réfléchissants.

Ce premier chapitre sera consacré à la description de ces bistables.

Dans un premier temps nous rappellerons les caractéristiques de l'absorbeur. Puis nous décrirons les deux cavités utilisées ainsi que leurs éléments constitutifs. L'accent sera particulièrement mis sur les améliorations que nous avons apportées à la cavité de 23 mètres afin d'optimiser ses performances. Enfin, le dernier paragraphe sera consacré à la description de la détection, de la source, ainsi que du dispositif de modulation de sa fréquence.

1-2: L'absorbeur moléculaire

Cet absorbeur est un gaz d'acide cyanhydrique HC^{15}N à basse pression (de l'ordre du millitorr), excité au voisinage de sa transition rotationnelle $(J=0; M=0) \rightarrow (J=1; M=0)$ à la fréquence $\nu_m = 86.054961 \text{ GHz}$ ($\lambda \approx 3.5 \text{ mm}$) (PEARSON 1976).

Bien que la molécule HC^{15}N présente une faible structure hyperfine (étalée sur environ 16 kHz pour la raie considérée) liée au couplage des spins 1/2 de H et de ^{15}N , dans les conditions expérimentales la transition $J=0 \rightarrow 1$ est caractérisée par une unique fréquence de Rabi $\nu_R = \mu E / h\sqrt{3}$ (μ représentant l'élément de matrice du moment dipolaire pour la transition considérée, h la constante de Planck et E l'amplitude du champ électrique microonde) (ZEMMOURI 1987 et SEGARD 1989). Ainsi la molécule de HC^{15}N peut être considérée comme un système idéal à 2 niveaux d'énergie.

Son fort moment dipolaire électrique ($\mu = 2.986$ Debye) (EBENSTEIN 1984) rend la transition facilement saturable avec des puissances de source modérées. A titre indicatif on obtient $\nu_R = 1$ MHz pour un champ moyen d'environ 1.2 V/cm ce qui correspond à une puissance incidente de 50 mW pour les guides d'onde utilisés. Un tel niveau de puissance peut être facilement atteint, étant donné que dans le domaine de fréquence correspondant à la transition moléculaire (< 100 GHz), nous disposons de sources puissantes (Klystron) caractérisées de plus par un très faible bruit d'amplitude.

Notons que l'acide cyanhydrique utilisé est fabriqué sur place selon une méthode décrite par LEGON et al (1980). Le produit est obtenu par réaction de l'isotope de cyanure de potassium $KC^{15}N$ sur l'acide phosphorique en présence de pentaoxyde de phosphore comme desséchant. La pureté du gaz a été mesurée par spectrographie de masse à l'USTL par M. RICART et donne une concentration de $HC^{15}N$ de l'ordre de 80 % (ZEMMOURI 1987).

Le calcul du coefficient d'absorption en régime collisionnel dominant dans le cas de la transition $J=0 \rightarrow 1$ de $HC^{15}N$ conduit à la valeur de 1.35 m^{-1} à la température ambiante (300 K). Compte tenu de la pureté du gaz effectivement utilisé, on aboutit à un coefficient d'absorption en puissance α de 1.1 m^{-1} . Des mesures indirectes utilisant une technique de transitoires cohérents (SEGARD 1987) donnent $\alpha = (1 \pm 0.1) \text{ m}^{-1}$, valeur très voisine de celle obtenue par SENITZKI (1963).

Le mécanisme de relaxation de la transition rotationnelle est essentiellement collisionnel et peut être caractérisé par un taux de

relaxation unique γ ($=\gamma_{||} = \gamma_{\perp}$) proportionnel à la pression du gaz. L'élargissement dû aux collisions HCN-HCN a été mesuré précisément à 300 K et donne $\Delta\nu_{\text{coll}} = \gamma / 2\pi = 22.75$ kHz/mTorr (demi largeur à mi-hauteur notée par la suite HWHM) (COLMONT 1985). Le temps de relaxation correspondant est de 7 μ s à 1 mTorr.

Enfin, bien que la largeur Doppler $\Delta\nu_D$ (définie par la demi-largeur à 1/e) soit de 120 kHz à 300 K, valeur très grande devant l'étalement de la structure hyperfine, celle-ci pourra être ignorée. En effet on a pu vérifier que la transmission en puissance du gaz s'écartait peu de celle obtenue en absence de l'effet Doppler, que ce soit en régime d'interaction linéaire ou en régime de forte saturation (SEGARD 1989).

1-3: Cavités Pérot-Fabry

1-3-1: Caractéristiques des guides d'onde

Précisons brièvement les propriétés essentielles des guides constitutifs des cavités Pérot-Fabry.

Ce sont des guides d'onde circulaires hélicoïdaux fabriqués dans les années 70 par la Société Anonyme de Télécommunication (S.A.T) dans le cadre d'un projet de télécommunication longue distance par ondes millimétriques (C.N.E.T. 1974). Chaque tronçon a une longueur d'environ 11.2 mètres et un diamètre interne de 60 mm. La tolérance sur le diamètre est de 20 microns. Le guide est constitué d'un enroulement hélicoïdal à spires jointives, de fil de cuivre émaillé (diamètre 0.5 mm), maintenu par deux couches auto-adhésives de

mylar ($e=180 \mu\text{m}$). L'ensemble est fixé sur la paroi interne d'un cylindre en aluminium de 1.5 mm d'épaisseur. L'enroulement hélicoïdal fait office de filtre pour tous les modes circulaires induisant des courants longitudinaux dans la paroi du guide. Ainsi seuls les modes TE_{0n} peuvent se propager et gardent la même structure que dans les guides lisses. D'autre part, la distribution correspondante du champ électrique, écrite en coordonnées cylindriques, est particulièrement simple:

$$E_z = E_r = 0 \quad ; \quad E_\theta = E_0 J_1(j_{1m} r/r_0)$$

où j_{1m} est le $m^{\text{ième}}$ zéro de la fonction de Bessel d'ordre 1 et r_0 le rayon interne du guide. Le champ électrique n'a qu'une seule composante E_θ qui ne dépend que de la distance r à l'axe et s'annule sur l'axe et sur les parois du guide. Notons qu'en un point donné, le champ garde alors une direction fixe (champ polarisé rectilignement).

Le champ électrique étant nul sur la paroi du guide, les pertes liées à la propagation sont très faibles. Ainsi, à 86 GHz, l'atténuation propre du guide pour le mode de plus faibles pertes (TE_{01}) est de 1.7 dB/km.

Les sources hyperfréquences disponibles utilisent des guides d'onde rectangulaires (mode TE_{10}). Ainsi l'excitation du guide d'onde dans son mode TE_{01} nécessite l'utilisation de transformateur de mode assurant le passage du mode TE_{10} rectangulaire au mode TE_{01} circulaire. Les transformateurs utilisés, de type King (HITACHI W6414), sont caractérisés par une faible perte d'insertion sur une large gamme

d'utilisation. Ils sont associés à un filtre de mode constitué par un guide hélicoïdal de diamètre intérieur 5.5 mm, filtrant tous les modes autres que les modes TE_{0m} et sous coupure pour ceux-ci dès que $m > 1$. Les pertes d'insertion maximales données par le constructeur sont de 1.5 dB pour le mode TE_{01} dans la gamme 75-110 GHz, les modes d'ordres supérieurs étant excités à 40 dB en dessous du mode utile. Enfin le passage du diamètre nominal de la gamme de fréquence au diamètre 60 mm s'effectue par un adaptateur de diamètre. La perte d'insertion mesurée de l'ensemble (adaptateur de diamètre, transformateur de mode et filtre) est de 1.25 dB à 86 GHz.

1-3-2: Description du Pérot-Fabry de 182 m

L'élément de base de ce Pérot-Fabry est une cellule de 182 mètres de long constituée de 16 tronçons de 11.2 mètres répartis en deux lignes de 91 mètres. Celles-ci sont reliées entre elles par deux coudes 90° à pan coupé en diamètre 60 mm. Cette cellule est fermée par des fenêtres d'étanchéité en "Kel-F" (polychlorotrifluoroéthylène) d'épaisseur 1.2 mm placées à l'intérieur d'un élément du guide en duralumin. Compte tenu de l'indice du Kel-F, l'épaisseur des fenêtres correspond à un trajet optique sensiblement égal à un nombre entier de demi-longueurs d'onde, ce qui conduit à un coefficient de réflexion global de la fenêtre proche de zéro et à une transmission minimale. La mise sous vide s'effectue à l'aide d'une pompe à diffusion d'huile de débit 200 l/s à travers deux éléments de pompage reliés entre eux et placés au milieu des deux lignes. L'atténuation hyperfréquence introduite par ce dispositif de pompage est très faible, estimée au maximum à 0.1 dB.

La perte d'insertion totale de la cellule est de 1.4 dB à 86 GHz. Elle est imputable pour une bonne partie aux coudes dont les pertes sont estimées au total à 0.6 dB ainsi qu'au guide lui-même (0.3 à 0.4 dB).

La transformation de cette cellule en résonateur Pérot-Fabry est rendue possible, étant donnée sa faible atténuation propre, en introduisant des grilles semi-réfléchissantes à ses extrémités. Ces grilles sont des disques métalliques de faible épaisseur, percées de trous circulaires suivant un motif hexagonal. Le diamètre et l'entre-axes des trous définissent le coefficient de réflexion de la grille à une fréquence donnée.

Les deux grilles de ce Pérot-Fabry sont identiques, leur épaisseur est de 0.35 mm, le diamètre des trous est de 1.1 mm avec un entre-axes de 1.6 mm. Leurs coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance ont été déterminés à partir des caractéristiques du Pérot-Fabry (ZEMMOURI 1987) et valent respectivement $R=0.9514$ et $T=0.0481$. Ce résultat montre que la perte propre des grilles est négligeable.

D'un point de vue pratique, la première grille est fixée sur la face d'entrée de la cellule. Le couplage de l'onde incidente avec la cavité est optimisé en ajustant la position de la tête source (source, transformateur de mode, adaptateur de diamètre) par rapport à la cellule. La deuxième grille est fixée sur l'adaptateur de diamètre associé à la détection également mobile par rapport à la cellule, ce qui permet de régler la longueur de la cavité. Les pertes liées à l'utilisation

de ce dispositif d'accord de cavité sont négligeables devant l'atténuation propre de la cellule (1.4 dB).

La cavité ainsi constituée est caractérisée à 86 GHz par un intervalle spectral libre (I.S.L.) de 825 kHz et par une largeur de mode $\Delta\nu_{\text{mode}} = 48$ kHz (HWHM) ce qui correspond à une finesse $F=8.6$. La transmission maximale de la cavité est de -17.5 dB. Enfin, compte tenu de la puissance incidente disponible le champ intracavité maximal correspond à une fréquence de Rabi moyenne de 1.2 MHz*.

1-3-3: Optimisation du Pérot-Fabry de 23 mètres

La cellule de base de cette cavité est constituée de deux tronçons de guide placés en ligne et reliés entre eux par un élément de pompage. L'absence de coudes et la faible longueur du guide font que l'atténuation propre de cet ensemble est très faible (< 0.1 dB). Les caractéristiques de la cavité dépendent donc de façon critique de la qualité des couplages d'entrée et de sortie ainsi que des pertes introduites par les fenêtres d'étanchéité. Aussi tous les éléments constitutifs du résonateur (adaptateur de diamètre inclus) doivent être assemblés de façon rigide pour éviter toute perte liée à un mauvais alignement de ces éléments. Pour assurer l'accord de la cavité, la grille d'entrée est placée à l'intérieur d'un dispositif de translation motorisé lui assurant un bon alignement quelle que soit sa position. Notons que cette configuration ne permet plus d'optimiser le couplage de l'onde

* Cette valeur a été estimée en comparant des cycles de bistabilité expérimentaux avec des cycles calculés à l'aide d'un modèle de cavité en anneau en utilisant une technique décrite plus en détail au chapitre 2.

incidente avec la cavité et ce dernier dépendra donc de la position de la grille d'entrée.

Dans son état initial caractérisé par l'utilisation de fenêtres de Kel-F de 2 mm d'épaisseur placées à l'intérieur de la cavité, ainsi que de grilles identiques à celle du Pérot-Fabry de 182 m, la largeur des modes ($\Delta\nu_{\text{mode}}$) était de l'ordre de 150 kHz.

Une optimisation de ce résonateur s'est révélée indispensable afin de disposer d'une cavité de caractéristiques au moins comparables à celles du Pérot-Fabry de 182 m à l'exception de son intervalle spectral libre beaucoup plus grand (I.S.L.=6.6 MHz). Dans ces conditions, le bistable constitué de cette cavité satisfera d'avantage aux conditions de validité du modèle monomode.

Nous avons recherché à diminuer la largeur du mode tout en maintenant le champ intracavité à une valeur la plus grande possible. Ceci permet d'accéder à une gamme de variation des paramètres expérimentaux plus large que dans les expériences effectuées sur le Pérot-Fabry de 182 m en particulier pour la pression de l'absorbeur.

Néanmoins l'optimisation de ces deux grandeurs ne doit pas se faire au dépend de la transmission. En effet celle-ci doit être suffisante pour l'observation des phénomènes. Toutefois, on peut tolérer une transmission maximale allant jusqu'à -18 dB (valeur comparable à celle obtenue pour le Pérot-Fabry de 182 m).

L'optimisation du Pérot-Fabry se fait en réduisant au maximum l'atténuation A de la cellule, puis en ajustant le coefficient de réflexion

R des miroirs supposés identiques et sans pertes. Deux critères sont appliqués pour le choix du coefficient de réflexion R. Le premier critère consiste à rechercher la valeur de R correspondant au champ interne maximal. Le second critère est un compromis qui permet d'optimiser simultanément la finesse et la valeur du champ intracavité; c'est alors le produit finesse-champ interne qui doit être maximal. Rappelons que la finesse est maximale pour $R=1$ ce qui correspond à un champ interne nul.

La transmission du Pérot-Fabry vide, de longueur ℓ , excité dans le mode TE_{01} s'écrit:

$$T_r(\nu) = \frac{AT^2}{1+A^2R^2-2AR.\cos\Phi(\nu)} \quad (1-1)$$

$\Phi(\nu)$ représente le déphasage de l'onde au cours d'un aller et retour, soit:

$$\Phi(\nu) = 2 k_1 \ell \quad (1-2)$$

où k_1 est la constante de propagation de l'onde guidée dans le mode TE_{01} .

Dans le cas où la cavité est accordée, la transmission est maximale, elle prend alors la forme:

$$T_M = \frac{AT^2}{(1-AR)^2} \quad (1-3)$$

Le résonateur est caractérisé par sa finesse F , définie comme le rapport de l'intervalle spectral libre (I.S.L.) à la largeur totale à mi-hauteur d'un mode de la cavité, soit:

$$F = \frac{\text{I.S.L.}}{2\Delta\nu_{\text{mode}}} = \frac{\pi\sqrt{AR}}{1-AR} \quad (1-4)$$

Le rapport du champ interne (valeur mesurée juste devant la grille de sortie) au champ incident s'écrira:

$$\frac{E_c}{E_i} = \frac{\sqrt{AT}}{1-AR} = \frac{\sqrt{A(1-R)}}{1-AR} \quad (1-5)$$

Le coefficient de réflexion R conduisant à la valeur maximale du champ interne est donné par la relation:

$$R = 2 - \frac{1}{A} \quad (1-6)$$

alors que le maximum du produit finesse-champ interne est atteint lorsque R vérifie la relation:

$$R = \frac{(3A-2) + \sqrt{(3A-2)^2 + 8A}}{4A} \quad (1-7)$$

Il convient de préciser les performances ultimes du Pérot-Fabry. Celles-ci sont obtenues en négligeant toutes les pertes autres que les pertes propres du guide dont la valeur nominale est environ -0.04 dB ce qui correspond à une atténuation $A=0.9908$.

Le premier critère conduit aux valeurs suivantes pour les grandeurs caractéristiques du Pérot-Fabry:

$$\begin{array}{lll}
 R = 0.9907 & \text{soit} & T = 0.0093 \\
 F = 169 & \text{soit} & \Delta v_{\text{mode}} = 19.5 \text{ kHz} \\
 E_c/E_i = 5.22 & & \\
 T_M = 0.252 & (\approx -6 \text{ dB}) &
 \end{array}$$

Pour le deuxième critère on obtient:

$$\begin{array}{lll}
 R = 0.9969 & & (T = 0.0031) \\
 F = 255 & & (\Delta v_{\text{mode}} = 13 \text{ kHz}) \\
 E_c/E_i = 4.52 & & \\
 T_M = 0.062 & (\approx -12 \text{ dB}) &
 \end{array}$$

En comparant ces deux résultats nous constatons une augmentation de 66% de la finesse alors que le champ interne ne diminue que légèrement ($\approx 15\%$) lorsqu'on passe du premier au second critère. En revanche la transmission baisse d'un facteur 4 mais sa valeur reste acceptable compte tenu de la puissance disponible et de la sensibilité de la détection (rappelons que la transmission maximale doit être supérieure à -18 dB).

En fait nous avons retrouvé ce résultat pour les différents cas envisagés par la suite, aussi nous limiterons nous désormais à l'utilisation du deuxième critère.

La configuration décrite précédemment est difficile à mettre en oeuvre expérimentalement dans la mesure où elle implique de mettre

sous vide le dispositif de translation, ce qui est très délicat. Pour cette raison il est nécessaire de placer l'une des fenêtres d'étanchéité à l'intérieur du Pérot-Fabry. Cette fenêtre devra être antireflet ($n\lambda/2$) de manière à éviter les réflexions parasites et à augmenter sa transmission. La recherche d'un matériau possédant une faible atténuation propre nous a conduit au choix d'une fenêtre en saphir. A la fréquence d'utilisation du Pérot-Fabry (86 GHz), ce matériau est caractérisé par un coefficient d'absorption de 0.025 Neper/cm et par un indice de réfraction de 3.065 (AFSAR 1986).

De façon à limiter les déformations liées à la pression différentielle à laquelle cette fenêtre sera soumise, nous avons opté pour une fenêtre $3\lambda/2$ dont l'épaisseur est de 1.706 mm. L'atténuation de l'ensemble cellule-fenêtre est alors estimée à: $A = 0.9837$ ($= -0.071$ dB), ce qui conduit à:

$$\begin{aligned} R &= 0.9945 & (T &= 0.0055) \\ F &= 143 & (\Delta\nu_{\text{mode}} &= 23 \text{ kHz}) \\ E_c/E_i &= 3.4 \\ T_M &= 0.063 & (-12 \text{ dB}) \end{aligned}$$

D'autre part nous sommes amenés dans nos expériences à utiliser aussi bien un Pérot-Fabry qu'une simple cellule d'interaction. Pour cette raison il est intéressant d'introduire une seconde fenêtre identique à la première à l'intérieur de la cavité. L'atténuation est alors: $A = 0.9766$ (≈ -0.102 dB)

Dans ce cas, on obtient:

$$\begin{aligned}
 R &= 0.9921 & (T &= 0.0079) \\
 F &= 99 & (\Delta v_{\text{mode}} &= 33.2 \text{ kHz}) \\
 E_c/E_i &= 2.84 \\
 T_M &= 0.063 & (\approx -12 \text{ dB})
 \end{aligned}$$

La réalisation de ce Pérot-Fabry n'a pu être entreprise du fait des délais trop longs de fabrication des miroirs et des fenêtres et de leur coût trop élevé. De plus nous n'étions pas certain que les caractéristiques du saphir, qui dépendent des procédés de fabrication, seraient celles que nous avons retenu pour les estimations indiquées ci-dessus. Les performances du Pérot-Fabry auraient alors été modifiées de façon imprévisible.

Nous avons donc recherché une solution basée sur l'utilisation exclusive de fenêtres d'étanchéité en matériaux courants (Téflon, Plexiglas...) ainsi que des jeux de grilles déjà disponibles au laboratoire. La solution retenue consiste à utiliser des miroirs de coefficients de réflexion différents. En effet en plaçant à la sortie du Pérot-Fabry un miroir de faible coefficient de transmission, les pertes par aller et retour sont réduites et la finesse augmente. De plus en utilisant un miroir d'entrée de transmission importante, on augmente le couplage du champ incident avec la cavité ce qui permet d'obtenir un fort champ interne. Enfin l'introduction d'une seule fenêtre à l'intérieur de la cavité diminuera son coefficient de pertes.

Dans ce cas les relations donnant la transmission maximale et la finesse restent inchangées (équations 1-3 et 1-4) à condition d'effectuer le changement de variable suivant:

$$R = \sqrt{R_e R_s} \quad (1-8)$$

où R_e et R_s représentent respectivement les coefficients de réflexion en puissance des miroirs d'entrée et de sortie.

Le rapport entre le champ interne et le champ incident s'écrit:

$$\frac{E_c}{E_i} = \frac{\sqrt{A(1-R_e)}}{1-A\sqrt{R_e R_s}} \quad (1-9)$$

La finesse, le champ interne ou le produit finesse-champ interne sont des fonctions monotones et croissantes de R_s et sont donc maximales pour $R_s=1$. Ce résultat confirme ce qui a été dit précédemment à savoir que le miroir de sortie doit posséder un coefficient de réflexion le plus grand possible, ceci évidemment dans la mesure où la transmission maximale du Pérot-Fabry reste suffisante.

Après de nombreux essais de fenêtres et de miroirs, nous avons retenu la configuration suivante pour le Pérot-Fabry (figure 1.1):

- + une grille d'entrée hors vide, placée dans un dispositif de translation relié à une platine de translation Microcontrôle (UT50) équipée d'un moteur pas à pas (pas = 0.1 μ m) dont la course est de 16 mm. Les coefficients de réflexion R_e et de

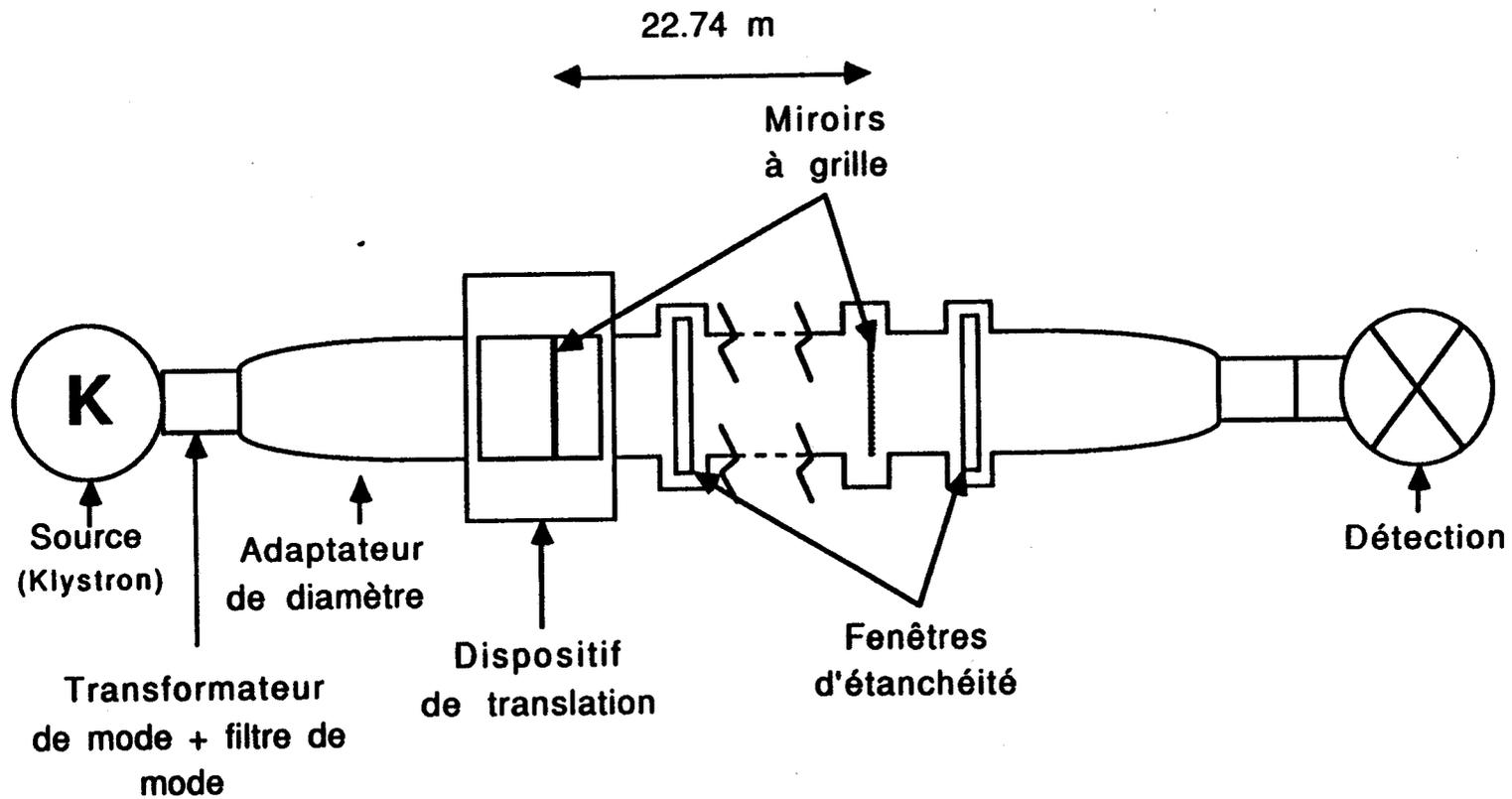


Figure 1.1: Représentation schématique du Pérot-Fabry de 23 mètres

transmission T_e sont identiques à ceux utilisés pour le Pérot-Fabry de 182 mètres ($R_e=0.9514$ et $T_e=0.0481$).

+ une fenêtre d'entrée, interne au Pérot-Fabry, constituée par un disque de Téflon de 5 mm d'épaisseur afin d'éviter le fluage dû à la différence de pression qu'elle subit.

+ une grille de sortie fixe et placée sous vide de coefficient de réflexion R_s et de transmission T_s ($R_s+T_s=1$). Les caractéristiques de cette grille sont les suivantes:

Epaisseur = 0.35 mm; Diamètre des trous = 1 mm; Entre-axes = 1.7 mm.

+ une fenêtre d'étanchéité en Plexiglas de 2.5 mm d'épaisseur (externe au Pérot-Fabry).

Les caractéristiques du Pérot-Fabry ainsi réalisé varient légèrement en fonction de la position de la grille d'entrée, ainsi nous obtenons pour la largeur du mode:

$$42.3 \text{ kHz} < \Delta V_{\text{mode}} < 56.7 \text{ kHz}$$

et pour la transmission maximale:

$$-8.35 \text{ dB} > T_M > -10.7 \text{ dB}$$

la valeur maximale de T_M étant obtenue lorsque la largeur du mode est minimale.

La variation des caractéristiques du Pérot-Fabry est attribuable à un léger désalignement du dispositif de translation et probablement à un effet de cavités couplées lié au fait que la fenêtre de Téflon n'est probablement pas antireflet. Compte tenu des bonnes performances atteintes, il ne nous est pas apparu nécessaire d'ajuster l'épaisseur de cette fenêtre, opération problématique étant donnée notre méconnaissance de l'indice de Téflon à la fréquence de travail. Pour des raisons de simplicité, le Pérot-Fabry continuera à être modélisé par une cavité unique.

Des mesures systématiques des largeurs de mode et de la transmission ont permis de déterminer le coefficient de réflexion de la grille de sortie, soit

$$R_s = 0.9951 \pm 0.0007$$

$$(T_s = 0.0049)$$

ainsi que la valeur de l'atténuation de la cellule:

$$0.974 < A < 0.987$$

Les caractéristiques recalculées pour ces deux valeurs extrêmes de A sont récapitulées dans le tableau suivant:

	A = 0.974	A = 0.987
F	58.5	78
ΔV_{mode}	56.4 kHz	42.4 kHz
T_M	0.085 (≈ -10.7 dB)	0.15 (≈ -8.2 dB)
E_c / E_i	4.2	5.55

En comparant ces caractéristiques avec celles du cas idéal de deux miroirs identiques plus une fenêtre en saphir $3\lambda/2$, nous constatons que la largeur du mode n'est augmentée que d'un facteur 2 environ, en revanche le champ intracavité et la transmission sont nettement plus grands.

Le résonateur de 23 mètres ainsi réalisé possède une largeur de mode (≈ 50 kHz) pratiquement égale à celle du Pérot-Fabry de 182 m mais avec un intervalle spectral libre huit fois plus grand (6.6 MHz). Dans des conditions expérimentales comparables, il constitue l'équivalent monomode de ce dernier.

1-4: Détection, source et modulation de fréquence

La détection est assurée par un mélangeur à diode Schottky polarisée, délivrant un signal proportionnel à la puissance transmise par la cavité (détection quadratique). Un circulateur à trois voies (isolation 25 dB) isole la cellule de la détection de façon à éviter que

l'énergie réfléchié par le piston de court-circuit du mélangeur ne soit totalement renvoyée vers la cavité.

La source est un klystron Varian (type VRB 2111A-34) délivrant une puissance maximale de 500 mW. Cette source est isolée de la cavité par deux circulateurs identiques à celui utilisé au niveau de la détection. Les klystrons sont des sources à très faible bruit de phase, caractérisées par un spectre de fréquence très étroit (< 1 kHz) mais affectées par des fluctuations lentes de leur fréquence (≈ 1 Hz) qui peuvent être de grande amplitude (≈ 500 kHz). Il est donc indispensable de stabiliser cette fréquence.

En fait le klystron est synchronisé en phase sur une harmonique d'un étalon à la fréquence $F_e = 4.8$ GHz (source solide - Frequency source 4.4-4.9 GHz) lui-même verrouillé en phase sur un étalon primaire à 100 MHz (synthétiseur AILTECH 360D11). Pratiquement, la phase du battement entre la source et l'harmonique de l'étalon à 4.8 GHz (à la fréquence intermédiaire; $F_i = 30$ MHz) est comparée à celle d'un deuxième étalon primaire à 30 MHz (3×10 MHz) et la tension de déséquilibre du comparateur de phase est appliquée à l'électrode de commande de la fréquence du klystron (réflecteur) après amplification et filtrage.

Le bruit de phase haute fréquence de l'étalon après multiplication est nettement supérieur à celui du klystron libre. Pour éviter que ce bruit soit transféré au klystron asservi, on est amené à limiter au maximum la bande passante (bande minimale ≤ 10 kHz) ainsi que le gain de la boucle d'asservissement. Dans ces conditions, il est impossible de moduler la fréquence de la source en modulant la

fréquence de l'un des deux étalons primaires sans introduire un bruit de phase rédhibitoire.

La solution retenue met en oeuvre le dispositif schématisé sur la figure 1.2. La tension de modulation est appliquée au réflecteur par l'intermédiaire d'un transformateur dont l'entrée est adaptée 50 Ω par adjonction d'une résistance série de 27 Ω . Le gain de ce transformateur est de 0.2 pour une bande passante à 3 dB de 20 kHz à 8.6 MHz.

Le champ électrique de l'onde émise par la source s'écrit alors:

$$E(t) = E_0 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(m) \sin[2\pi(v_0 + nf)t]$$

où $m = \Delta v / f$. v_0 est la fréquence centrale du klystron, f la fréquence de modulation, Δv l'excursion maximale de fréquence, m l'indice de modulation et n l'indice des composantes spectrales. J_n désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n .

Cette décomposition spectrale se retrouve au niveau du battement avec l'étalon. Dans la mesure où la fréquence de modulation f est largement supérieure à la bande passante de la boucle d'asservissement, seule la composante centrale ($n=0$) est prise en compte par cette dernière. Ainsi la fréquence centrale de la source modulée sera verrouillée en phase sur l'étalon et la modulation ne sera pas corrigée par la chaîne de synchronisation.

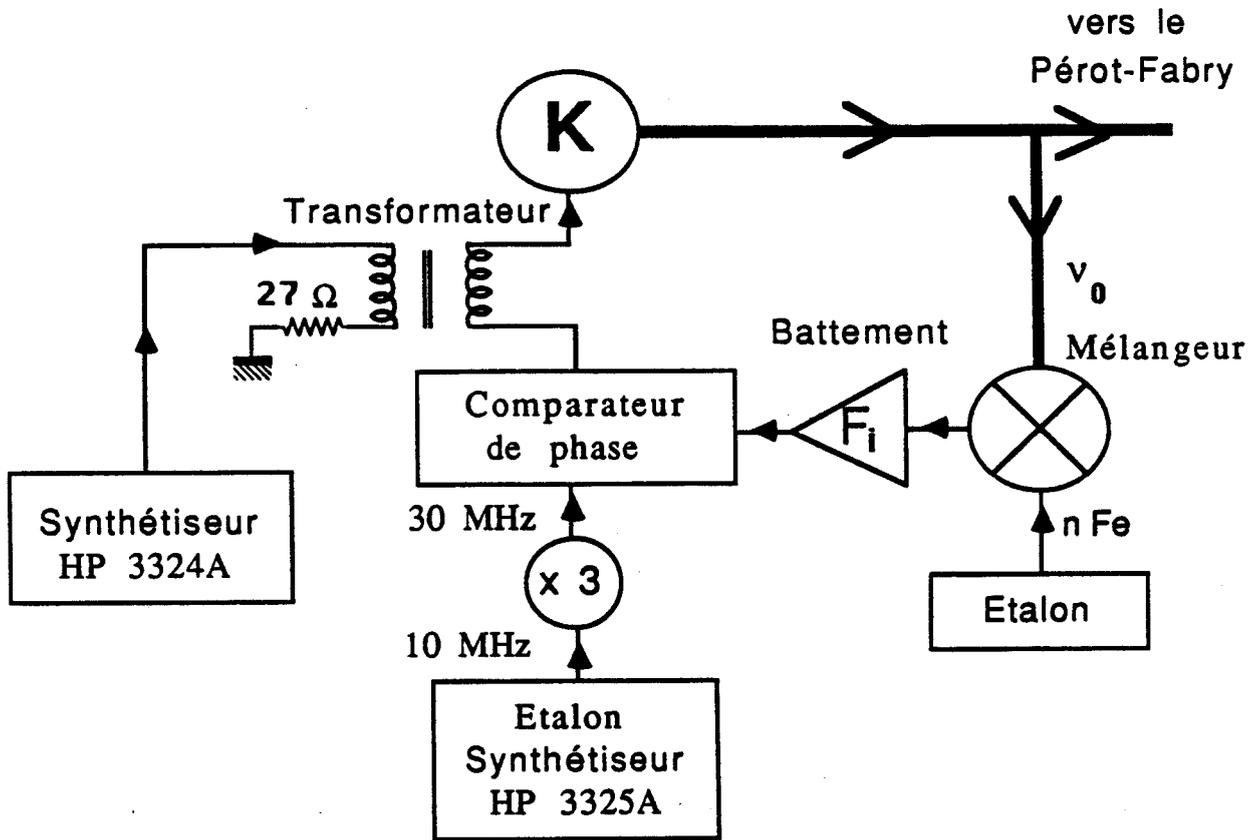


Figure 1.2 : Dispositif expérimental de modulation de fréquence

La figure 1.3 donne un exemple de spectre du champ émis par la source lorsque la fréquence et la tension de modulation valent respectivement 84 kHz et 126 mV (valeur crête à crête). Ce spectre est obtenu en effectuant une détection superhétérodyne de l'onde émise par le klystron (figure 1.4). Cette détection consiste à effectuer sur un mélangeur le battement entre l'onde émise par le klystron ($\nu_0 \approx 86$ GHz) et l'harmonique 2 de celle émise par un oscillateur local à la fréquence (ν_{OL}) de 43 GHz. L'onde issue du klystron est fortement atténuée, la source et l'oscillateur local sont tous les deux stabilisés en phase. Dans une telle détection, l'amplitude du battement est directement proportionnelle au champ électrique de l'onde émise par le klystron et sa fréquence vaut $|\nu_0 - 2\nu_{OL}|$ (≈ 540 MHz). Le spectre de la source a donc été transféré autour de 500 MHz et visualisé à l'aide d'un analyseur de spectre (ADVANTEST TR 4131, bande passante 10 kHz-3.5 GHz). Dans le cas de la figure 1.3, la bande passante du filtre d'analyse est de 1 kHz. Ne sont visualisées que la composante centrale correspondant à ν_0 et les deux premières composantes latérales bien distinctes situées à 84 kHz de celle-ci. Ces composantes sont caractérisées par des pics très étroits dont la largeur à 3 dB est du même ordre de grandeur que celle du filtre. L'amplitude relative de ces pics par rapport au bruit est d'au moins 15 dB au-dessus du bruit.

La mesure de l'amplitude des différentes composantes du spectre du champ émis permet de déterminer l'indice de modulation m et donc l'excursion de fréquence $\Delta\nu$. Ceci donne accès à la sensibilité du montage définie comme le rapport de l'excursion de fréquence sur l'amplitude de la tension de modulation appliquée aux bornes du transformateur. Dans la mesure où la bande passante et le gain de la

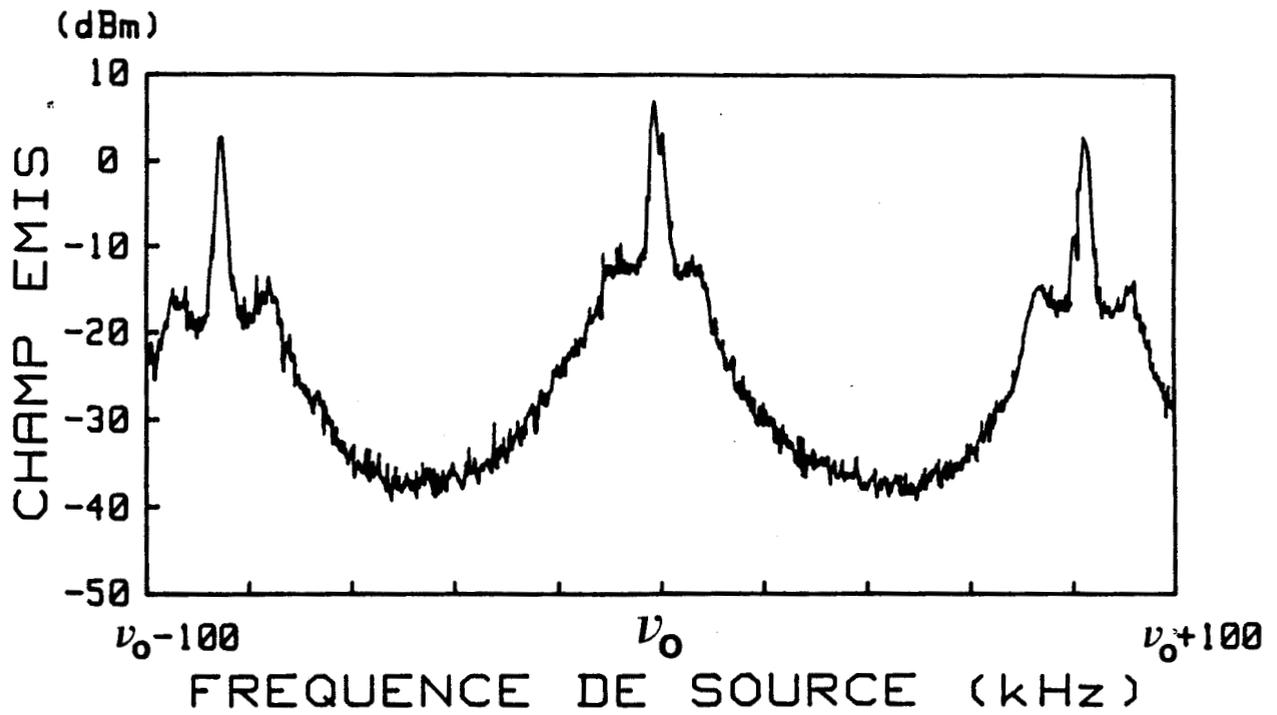


Figure 1.3 : Exemple de spectre du champ émis par la source en présence de modulation de fréquence.

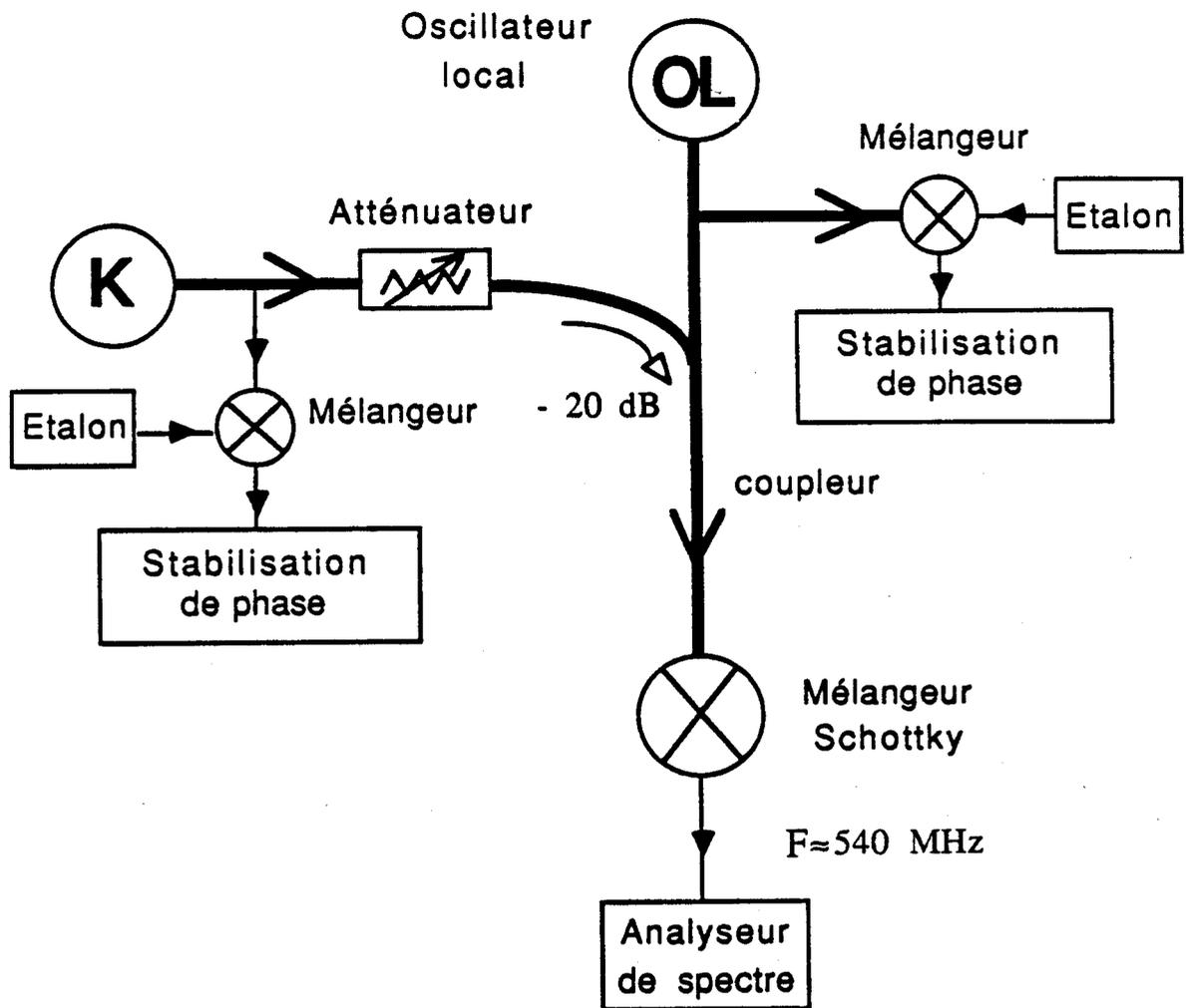
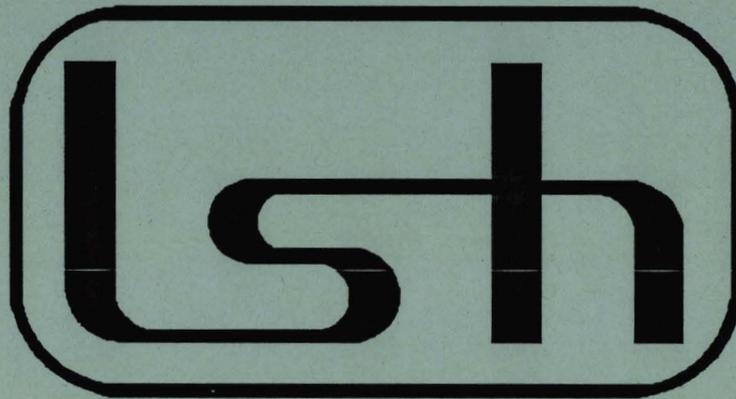


Figure 1.4 : Détection superhétérodyne de l'onde émise par le klystron

boucle d'asservissement sont réglés à leur minimum, la sensibilité du montage peut être considérée comme constante dans l'intervalle de fréquence 30 kHz-400 kHz et vaut 1.37 MHz/V ($\pm 10\%$).



CHAPITRE 2:

**Modèle monomode en présence
d'une modulation du champ
incident**

2-1 - Introduction**2-2 - Elaboration du modèle monomode****2-3 - Calibration du modèle**

2-1: Introduction

Les expériences que nous présentons dans ce mémoire ont été réalisées aussi bien sur le Pérot-Fabry de 182 m que sur celui de 23 m. Les conditions expérimentales nous incitent à considérer que l'interaction de l'onde avec le bistable optique ne met en jeu qu'un seul mode longitudinal de la cavité. En effet les valeurs des fréquences de modulation utilisées (de l'ordre de 100 à 200 kHz) restent comparables à la largeur totale des modes de la cavité et sont beaucoup plus petites que l'intervalle spectral libre (6.6 MHz pour le Pérot-Fabry de 23 m). Ce chapitre est consacré à la description du modèle monomode que nous avons mis en oeuvre pour rendre compte des effets dynamiques observés.

2-2: Elaboration du modèle monomode

Dans ce modèle, le milieu absorbant saturable est représenté par une collection de systèmes à deux niveaux dont la fréquence de transition est ν_m . Il sera caractérisé par son coefficient d'absorption en puissance à la résonance en régime linéaire α . Les taux de relaxation de la polarisation moléculaire ainsi que de la différence de population sont notés respectivement γ_{\perp} et γ_{\parallel} . Dans le cas particulier de nos expériences, rappelons que ces taux sont identiques ($\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel} = \gamma$). Ce milieu est en interaction de type dipolaire électrique avec une onde cohérente à la fréquence ν_0 .

De façon à décrire le bistable par un système d'équations relativement simples conduisant à des durées de calculs numériques raisonnables, nous avons été amenés à simplifier considérablement le modèle. Tout d'abord, nous nous plaçons dans le cas de l'onde plane négligeant ainsi les effets liés à la structure transverse du faisceau. D'autre part les effets liés à l'existence de deux ondes se propageant en sens inverse et en particulier la modulation du champ liée à l'existence d'ondes stationnaires, dont les effets doivent être comparables à ceux liés à la structure transverse, sont également négligés. Du fait de cette approximation, ce modèle ne peut décrire dans son intégralité la physique du bistable effectivement utilisé. Ainsi, il a été récemment montré (LE BERRE 1991) que les effets de réseau longitudinal dus aux ondes se propageant en sens inverse, sont primordiaux pour interpréter l'apparition des instabilités multimodes dans un Pérot-Fabry. Toutefois, le modèle simplifié que nous proposons, met en évidence des phénomènes très voisins de ceux observés

expérimentalement tels que les instabilités (SEGARD 1989), le déplacement de la fréquence de résonance et l'apparition du chaos. Ainsi, le Pérot-Fabry de longueur ℓ est décrit par une cavité en anneau "équivalente" de longueur double ($L=2\ell$) représentée sur la figure 2.1:

Les miroirs M_2 et M_3 sont parfaitement réfléchissants ($R=1$; $T=0$) alors que les miroirs M_1 et M_4 possèdent les mêmes caractéristiques que les miroirs d'entrée et de sortie du Pérot-Fabry.

Les pertes, qui dans l'expérience sont réparties de manière non uniformes dans la cellule, sont supposées localisées au niveau des miroirs. Ceci revient à modifier la valeur des coefficients de réflexion et de transmission de ces derniers.

Enfin, dans le but de disposer d'un modèle utilisable pour les deux Pérot-Fabry, les miroirs d'entrée et de sortie sont considérés comme identiques et caractérisés par:

$$+ \text{Pérot-Fabry de 182 m: } T = \sqrt{A} T_e \quad \text{et} \quad R = A R_e$$

$$\text{soit } T = 0.041 \text{ et } R = 0.690$$

où A est l'atténuation de la cellule ($A=0.724$), T_e et R_e les coefficients de transmission et de réflexion en puissance des deux miroirs.

$$+ \text{Pérot-Fabry de 23 m: } T = \sqrt{A T_e T_s} \quad \text{et} \quad R = A \sqrt{R_e R_s}$$

$$\text{soit } T = 0.015 \text{ et } R = 0.960 \text{ pour } A=0.987$$

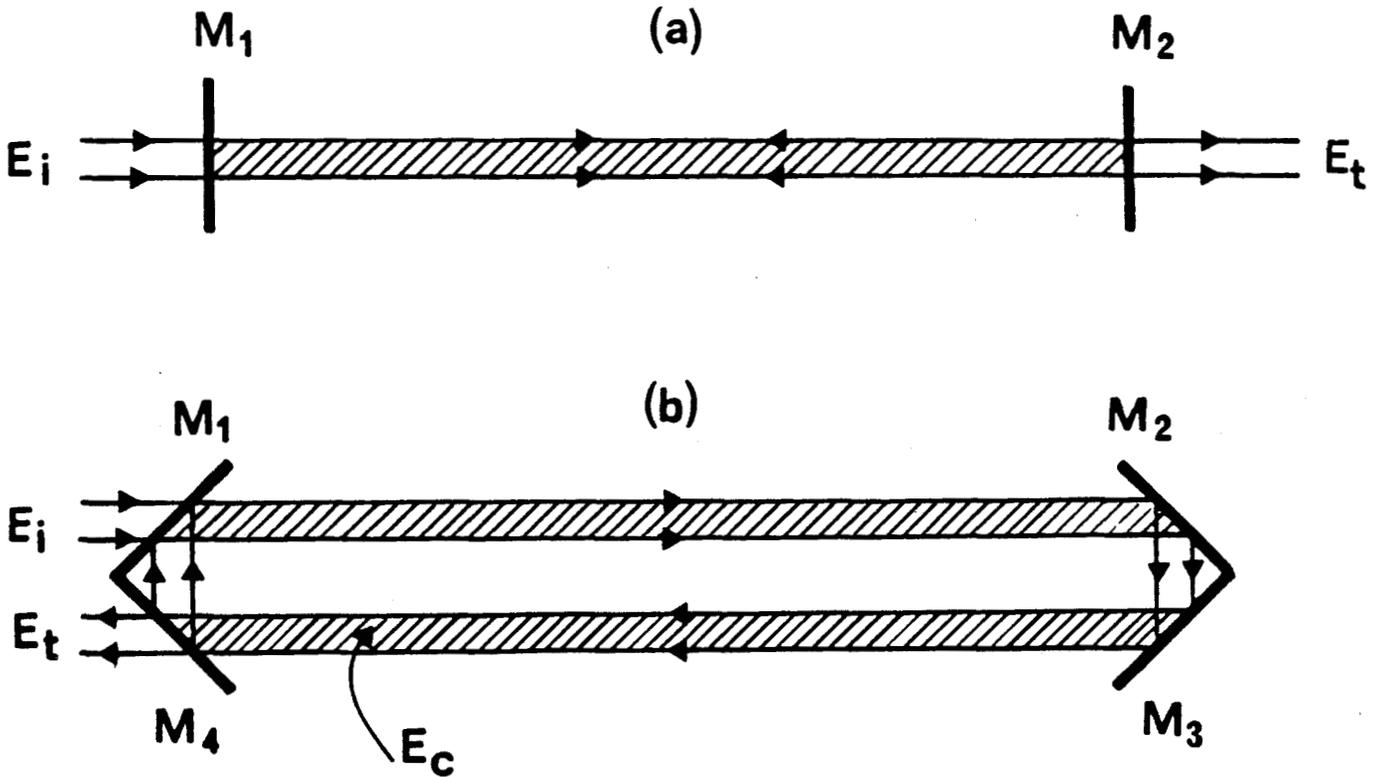


Figure 2.1 : (a) cavité Pécrot-Fabry

M_1 et M_2 sont des miroirs semi-réfléchissants, sans pertes, de coefficient de réflexion R_e et R_s

(b) cavité en anneau équivalente.

M_2 et M_3 sont des miroirs totalement réfléchissants; M_1 et M_4 sont supposés identiques et caractérisés par un coefficient de réflexion R et de transmission T .

Dans ces conditions, dans le référentiel tournant à la fréquence ν_0 , la dynamique du système est gouvernée par les équations de Bloch-Maxwell (LUGIATO 1984):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial t} &= -\frac{\alpha}{2} P \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \gamma_{\perp} \left\{ FD - (1 + i\Delta) P \right\} \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= -\gamma_{\parallel} \left\{ \frac{1}{2} (FP^* + F^*P) + D - 1 \right\} \end{aligned} \quad (2-1)$$

où F représente l'enveloppe normalisée, lentement variable du champ électrique, défini par:

$$F(z,t) = 2\pi \frac{V_R(z,t)}{\sqrt{\gamma_{\parallel} \gamma_{\perp}}} \quad (2-2)$$

où: $\nu_R(z,t) = \mu E/h$ est la fréquence de Rabi (en Hz) du champ intracavité; D est la différence de population normalisée, P l'enveloppe normalisée lentement variable de la polarisation moléculaire, c la vitesse de la lumière et Δ le désaccord de fréquence moléculaire donné par:

$$\Delta = 2\pi \frac{\nu_m - \nu_0}{\gamma_{\perp}} \quad (2-3)$$

La configuration de la cavité en anneau impose la condition de bouclage suivante:

$$F(0,t) = Ty + \text{Re}^{-i\delta_0} F(L,t) \quad (2-4)$$

où y est le champ d'entrée normalisé donné par:

$$y = 2\pi \frac{V_{Ri}}{\sqrt{\gamma_{||} \gamma_{\perp} T}} \quad (2-5)$$

et δ_0 le désaccord en fréquence de la cavité défini par:

$$\delta_0 = 2\pi \frac{V_p - V_0}{c/L} \quad (2-6)$$

V_{Ri} est la fréquence de Rabi du champ incident et V_p représente la fréquence du mode le plus proche de la source.

De manière à obtenir une condition de bouclage particulièrement simple, nous effectuerons le changement de variable suivant (NARDUCCI 1985, OROZCO 1989):

$$\begin{aligned} F_1(z,t) &= F(z,t) \exp\left\{\frac{z}{L} (\text{Ln}R - i\delta_0)\right\} + Ty \frac{z}{L} \\ P_1(z,t) &= P(z,t) \exp\left\{\frac{z}{L} (\text{Ln}R - i\delta_0)\right\} \\ D_1(z,t) &= D(z,t) \end{aligned} \quad (2-7)$$

La condition de bouclage (2-4) s'écrit alors:

$$F_1(0,t) = F_1(L,t) \quad (2-8)$$

Ceci suggère une décomposition en série de Fourier des variables du système (F_1 , P_1 et D_1) qui peuvent se mettre sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} F_1(z,t) \\ P_1(z,t) \\ D_1(z,t) \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{ik_n z} \begin{Bmatrix} f_n(t) \\ p_n(t) \\ d_n(t) \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

$$\begin{Bmatrix} F_1^*(z,t) \\ P_1^*(z,t) \end{Bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{-ik_n z} \begin{Bmatrix} f_n^*(t) \\ p_n^*(t) \end{Bmatrix} \quad (2-10)$$

$$\text{et } d_n(t) = d_{-n}^*(t) \quad (\text{puisque } D_1(z,t) \text{ est réel})$$

où $k_n = 2\pi n/L$ (avec $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Cette décomposition équivaut à projeter champ, polarisation et différence de population sur les modes longitudinaux de la cavité, le mode résonant étant associé à l'indice $n=0$.

A chacun de ces modes est associée la fonction propre:

$$u_n(z) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_n z} \quad (2-11)$$

satisfaisant la condition d'orthogonalité:

$$\langle u_n | u_m \rangle = \int_0^L u_n^*(z) u_m(z) dz = \delta_{n,m} \quad (2-12)$$

La composante x_n d'une variable du système X sur le mode n s'écrit alors:

$$x_n = \langle u_n | X \rangle \quad (2-13)$$

avec: $x_n = f_n, f_n^*, p_n, p_n^*$ ou d_n
 $X = F_1, F_1^*, P_1, P_1^*$ ou D

Il convient de noter à ce niveau que la décomposition en série de Fourier revient à "périodiser" spatialement les variables du système (période L) et que si la condition de bouclage sur F_1 (2-8) n'introduit alors aucune discontinuité, il n'en est pas de même sur P_1 et D_1 . En effet, on aura en général:

$$P_1(0,t) \neq P_1(L,t) \text{ et } D_1(0,t) \neq D_1(L,t)$$

Dans ces conditions, il faut en toute rigueur sommer sur un nombre infini de termes pour éviter le phénomène de Gibbs (PAPOULIS 1988). Si l'on veut limiter la description du système à un nombre relativement faible de modes, il faut donc que les discontinuités sur P_1 et D_1 soient négligeables. Or dans le cas qui nous concerne d'un milieu absorbant en régime stationnaire, le champ effectif F a tendance à décroître avec z. Parallèlement la différence de population D va croître. Pour que la discontinuité sur D_1 (égal à D) soit négligeable il faut que la différence de population

D et donc les autres variables F et P soient pratiquement uniformes. L'absorption du milieu doit donc être négligeable ce qui conduit à la condition:

$$\frac{\alpha L}{1 + \Delta^2 + |F|^2} \ll 1 \quad (2-14)$$

La condition de continuité sur P_1 , compte tenu de l'uniformité de P, requiert que l'exponentielle de la deuxième des équations (2-7) soit pratiquement égale à 1 ce qui sera vérifié si:

$$\begin{aligned} 1 - R &\ll 1 \\ \delta_0 &\ll 1 \end{aligned} \quad (2-15)$$

Dans ces conditions les variables F_1 , P_1 et D_1 sont uniformes en z et l'on peut se limiter au seul terme d'ordre $n=0$ de la série de Fourier ce qui conduit à une description monomode de l'évolution du système. En projetant alors les équations de Bloch-Maxwell sur le mode $n=0$ on obtient les équations suivantes:

$$\frac{df_0}{dt} = \frac{Tc}{L} y \left\{ 1 - (\text{Ln}R - i\delta_0) \frac{\Gamma_0}{L} \right\} + \frac{T}{L} \Gamma_0 \frac{dy}{dt} + \frac{c}{L} (\text{Ln}R - i\delta_0) f_0 - \frac{\alpha c}{2} p_0$$

$$\frac{dp_0}{dt} = -\gamma \left\{ f_0 d_0 - \frac{T y}{L} d_0 \Gamma_0 - (1+i\Delta) p_0 \right\} \quad (2-16)$$

$$\frac{dd_0}{dt} = -\gamma \left\{ \frac{1}{2} [f_0^* p_0 + f_0 p_0^*] \Phi_0 - \frac{T y}{2L} [p_0 + p_0^*] \Psi_0 + d_0 - 1 \right\}$$

où Γ_0 , Φ_0 et Ψ_0 sont définis par:

$$\Gamma_0 = \frac{L}{2}; \Phi_0 = \frac{R^2 - 1}{2R^2 \text{Ln}R}; \Psi_0 = \frac{L(R^2 - 1 - 2\text{Ln}R)}{4R^2 \text{Ln}^2 R} \quad (2-17)$$

En tenant compte des conditions (2-15) caractérisant l'approximation du champ uniforme qui suppose que $T < 1 - R \ll 1$, ces fonctions se réduisent à:

$$\Gamma_0 = \frac{L}{2}; \Phi_0 = 1; \Psi_0 = \frac{L}{2} \quad (2-18)$$

Il est à noter que f_0 , p_0 et d_0 sont alors respectivement égaux à F , P et D .

Les équations qui régissent l'interaction de l'onde plane avec le milieu non linéaire dans le cas monomode s'écrivent finalement:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \kappa \left\{ \frac{T}{1-R} \left(y + \frac{L}{2c} \frac{dy}{dt} \right) - (1+i\Theta)F - 2CP \right\} \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma \left\{ FD - (1+i\Delta)P \right\} \\ \frac{dD}{dt} &= -\gamma \left\{ \frac{1}{2} (FP^* + F^*P) + D - 1 \right\} \end{aligned} \quad (2-19)$$

où:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{(1-R)c}{L} = 2\pi \Delta v_{\text{mode}} \\ C &= \frac{\alpha L}{4(1-R)} = \text{coefficient de coopérativité} \\ \Theta &= \frac{\delta_0}{1-R} \end{aligned} \quad (2-20)$$

Il est à noter que dans les équations (2-16) relatives à la polarisation p_0 et à la différence de population d_0 , le terme Ty est négligé par rapport au champ électrique f_0 puisque celui-ci est de l'ordre de grandeur de y et que T est nettement inférieur à 1. Les équations complexes (2-19) qui correspondent à un système de cinq équations différentielles réelles, sont utilisables quel que soit le type de modulation appliquée au champ incident. Dans le cas d'une modulation d'amplitude le champ incident s'écrit:

$$y = y_0 [1 + m \sin(2\pi ft)] \quad (2-21)$$

On se limitera par la suite à la modulation de fréquence qui est introduite dans les équations en écrivant le champ d'entrée sous la forme:

$$y = y_0 e^{i \frac{\Delta v}{f} \sin(2\pi ft)} \quad (2-22)$$

où y_0 représente l'amplitude maximale du champ d'entrée, f la fréquence de modulation et Δv l'excursion de fréquence.

Dans l'équation (2-19) relative au champ, le terme $\frac{L}{2c} \frac{dy}{dt}$ tient compte du fait que la propagation de l'onde dans le Pérot-Fabry introduit un déphasage sur le champ exciteur et donc que la phase de la modulation n'est pas la même en tout point du bistable. Dans le cas où l'approximation monomode est pleinement justifiée, ce terme peut être négligé. En effet il s'écrit:

$$\frac{L}{2c} \frac{dy}{dt} = i \pi \Delta v \frac{L}{c} \cos(2\pi ft) y \quad (2-23)$$

Dans la mesure où l'excursion de fréquence est beaucoup plus petite que l'intervalle spectral libre ($\Delta\nu \ll \text{I.S.L.} = c/L$ c'est à dire $\frac{\Delta\nu L}{c} \ll 1$), le terme $\frac{L}{2c} \frac{d y}{dt}$ est négligeable devant y . Ceci est particulièrement vrai dans le cas du bistable de 23 m où l'intervalle spectral libre vaut 6 MHz alors que l'excursion de fréquence maximale est de l'ordre de 200 kHz.

Dans ces conditions, on peut poser:

$$F = F' e^{i \frac{\Delta\nu}{f} \sin(2\pi ft)}$$

$$P = P' e^{i \frac{\Delta\nu}{f} \sin(2\pi ft)}$$
(2-24)

ce qui revient à se placer dans le repère tournant à la fréquence instantanée de la source et non plus à la fréquence moyenne du champ incident.

Les deux premières équations du système (2-19) s'écrivent alors:

$$\frac{dF'}{dt} = K \left\{ \frac{T}{1-R} y - (1+i\Theta')F' - 2CP' \right\} \quad (2-25)$$

$$\text{où: } \Theta' = \Theta + \frac{2\pi\Delta\nu}{K} \cos(2\pi ft) \quad (2-26)$$

$$\frac{dP'}{dt} = \gamma \{ F'D - (1+i\Delta')P' \} \quad (2-27)$$

$$\text{où: } \Delta' = \Delta + \frac{2\pi\Delta v}{\gamma} \cos(2\pi ft) \quad (2-28)$$

Dans ces conditions, la modulation de fréquence appliquée sur le champ incident correspond à une simple modulation des deux paramètres Δ et Θ . Ces équations montrent que la modulation de fréquence est de type multiplicative (termes en Δ 'P' et Θ 'F') alors que la modulation d'amplitude est de type additive.

2-3: Calibration du modèle

Les approximations introduites lors de l'élaboration du modèle font que les résultats qu'il fournit avec des paramètres correctement estimés ne sont pas parfaitement conformes à la réalité expérimentale. Il est alors nécessaire d'ajuster un des paramètres pour qu'au moins le comportement stationnaire du bistable soit bien reproduit par le modèle.

Ainsi pour le Pérot-Fabry de 182 m, le coefficient d'absorption en puissance α du milieu a dû être fixé à la valeur $0,8 \text{ m}^{-1}$ au lieu de 1 m^{-1} (valeur mesurée expérimentalement) afin de faire coïncider les cycles de bistabilité expérimentaux avec les cycles calculés à l'aide du système d'équations (2-1) et (2-4) (équations multimodes) (SEGARD 1989). Pour décrire la procédure utilisée pour ajuster α , nous avons représenté sur la figure 2.2 un exemple de cycle de bistabilité obtenu lorsque l'on balaye la puissance incidente. On désigne par P_H et P_B les puissances

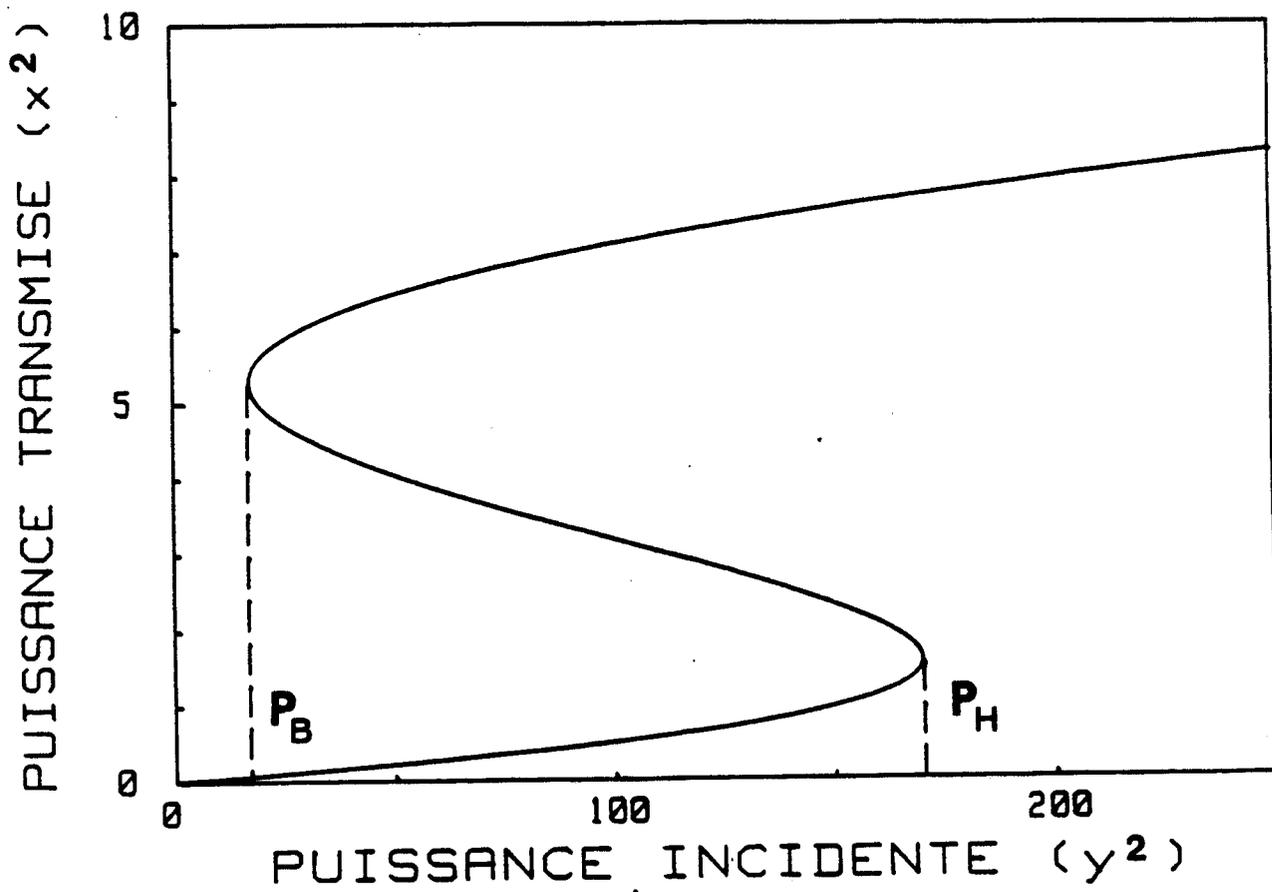


Figure 2.2 : Exemple de cycle de bistabilité.

incidentes associées respectivement au seuil de commutation de l'état bas vers l'état haut (seuil haut) et au seuil de commutation de ce dernier état vers l'état bas (seuil bas). Le coefficient α est ajusté de façon à obtenir le même rapport P_H/P_B pour les expériences et les simulations numériques.

Il est à noter, toujours pour le Pérot-Fabry de 182 m, que les conditions permettant de limiter la description du bistable à un seul mode longitudinal de la cavité ne sont pas vérifiées. En effet, dans les conditions expérimentales, ni $(1-R)=0.3$, ni surtout δ_0 , qui peut prendre des valeurs allant jusque 4.5, ne sont très petits devant l'unité.

Sur la figure 2.3 sont représentées les courbes stationnaires (puissance transmise en fonction de la puissance incidente) calculées en utilisant d'une part les équations complètes de Bloch-Maxwell et d'autre part le système monomode. Ces courbes ont été calculées avec les paramètres d'une des expériences présentées par la suite. Notons que dans le cas des équations monomodes, la solution stationnaire est donnée par la relation (LUGIATO 1984):

$$y = x \frac{1-R}{T} \left\{ \left[1 + \frac{2C}{1+\Delta^2+x^2} \right]^2 + \left[\Theta - \frac{2C\Delta}{1+\Delta^2+x^2} \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (2-29)$$

où:

$$x = 2\pi \frac{V_{Rt}(z,t)}{\sqrt{\gamma_{||}\gamma_{\perp}}} \quad (2-30)$$

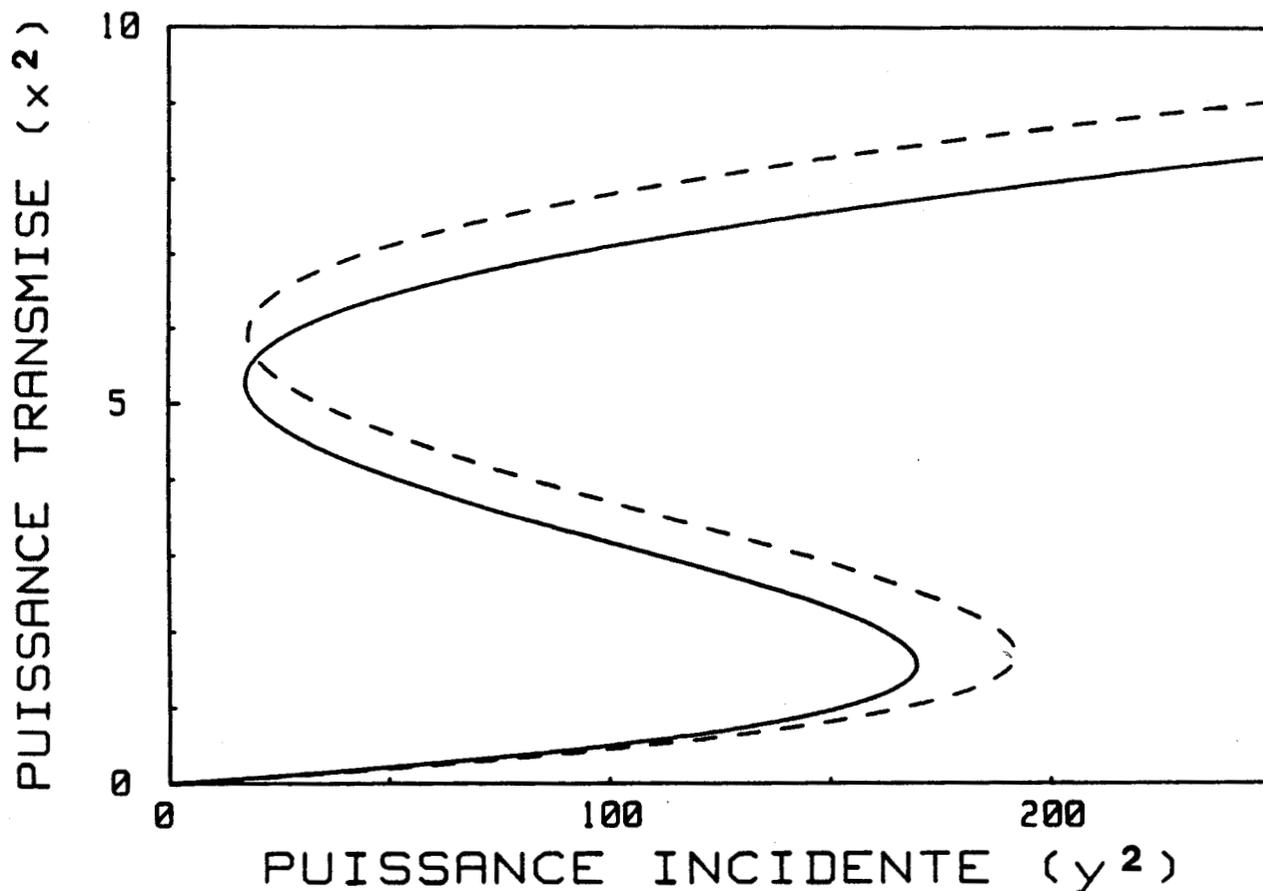


Figure 2.3 : Comparaison entre les solutions stationnaires calculées à l'aide des équations de Bloch-Maxwell complètes (—) et celles calculées à l'aide du modèle monomode (--).
 Paramètres: pression= 0.63 mTorr, $\nu_p - \nu_0 = 433.6$ kHz, $\nu_p = \nu_m$ et $\alpha \ell = 146$.

On constate que ces courbes présentent assez peu de différences. Le rapport P_H/P_B varie en fait de 10%. Cette similitude entre les deux courbes stationnaires permet d'espérer que les équations monomodes fourniront une description satisfaisante de la dynamique du bistable. Les résultats présentés dans les chapitres suivants en sont la preuve.

En revanche, pour le Pérot-Fabry de 23 m, le modèle monomode paraît plus adapté. En effet $(1-R)$ vaut 0.04 alors que δ_0 et l'épaisseur optique en présence de saturation (2-14) sont respectivement inférieurs à 0.95 et 0.2 dans la plupart des expériences. Le coefficient d'absorption sera ajusté en faisant coïncider les cycles donnés par ce modèle avec ceux obtenus expérimentalement par balayage de la fréquence de la source. On se limitera au cas où la fréquence moléculaire coïncide avec celle d'un mode de la cavité ($\nu_m = \nu_p$).

On se propose donc d'observer le comportement du bistable lorsque l'on balaye la fréquence de la source à puissance incidente donnée (indiquée par P_1 sur la figure 2.4 où sont représentées les puissances de seuil P_H et P_B en fonction du désaccord moléculaire). Lorsque le désaccord moléculaire croît, le système est initialement sur la branche haute du cycle (puissance incidente supérieure au seuil bas; $P_1 > P_B$) et ne commute vers la branche basse qu'au point P c'est à dire quand la puissance incidente devient inférieure à ce seuil ($P_1 < P_B$). Il ne retourne vers l'état haut que lorsque la puissance incidente est à nouveau supérieure au seuil haut de commutation ($P_1 > P_H$) c'est à dire en Q. Lorsque l'on balaye le

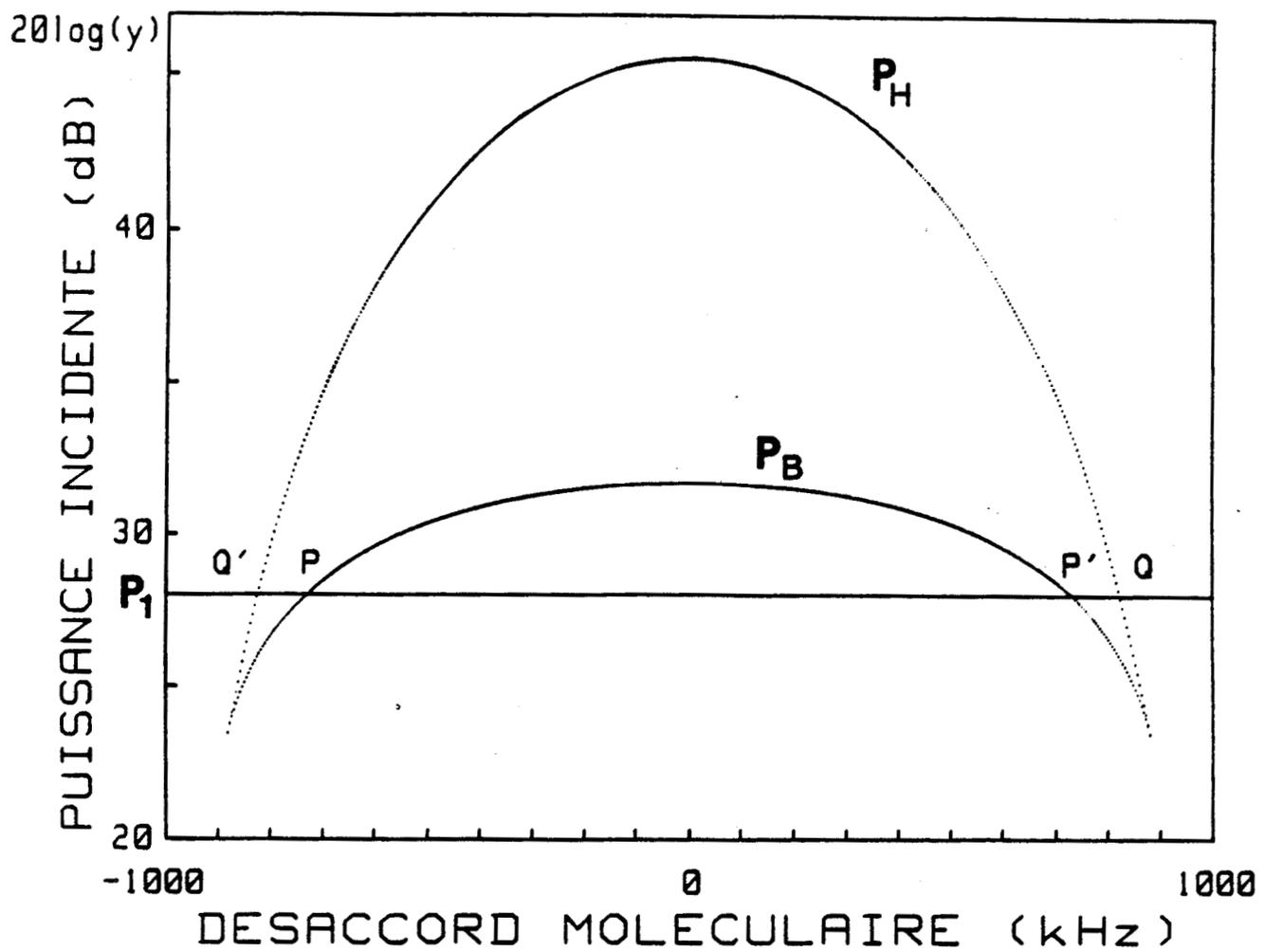


Figure 2.4 : Diagramme donnant les puissances incidentes associées aux seuils de commutation haut et bas en fonction du désaccord moléculaire, dans le cas où la fréquence de la transition moléculaire coïncide avec celle d'un mode de la cavité ($\nu_p = \nu_m$).
 Lorsque l'on balaye la fréquence de la source à puissance constante (P_1), le système bascule de l'état haut vers l'état bas en P (resp P') et retourne à l'état haut en Q (resp Q') lorsque le désaccord moléculaire croît (resp décroît).

désaccord moléculaire en sens inverse, ses commutations ont lieu respectivement en P' et Q'.

La figure 2.5 donne un exemple de cycle de bistabilité obtenu expérimentalement dans ces conditions. La pression est de 2.15 mTorr et le désaccord moléculaire est balayé de -1500 à 1500 kHz. Pour obtenir ce type de courbes, la puissance incidente est atténuée par rapport à sa valeur maximale. Dans le cas présenté, l'atténuation est de 6 dB. Pour différentes valeurs de l'atténuation, on mesure le désaccord moléculaire associé à chaque commutation. On peut ainsi reconstruire une courbe analogue à celle de la figure 2.4. La valeur du coefficient d'absorption est alors ajustée de manière à ce que ces deux courbes soient superposables (voir figure 2.6). Le meilleur résultat est obtenu pour $\alpha=0.8 \text{ m}^{-1}$.

On peut alors accéder aux valeurs des champs incidents (y) associés aux puissances incidentes effectivement appliquées. La valeur du champ incident maximale (atténuation de 0 dB) a ainsi été estimée dans le cas présent à $y=145.8$ ce qui correspond à une fréquence de Rabi incidente de 880 kHz. Cette valeur est en fait susceptible de varier d'approximativement 20% suivant la position de la grille d'entrée qui rappelle le modifie le couplage de l'onde incidente avec la cavité.

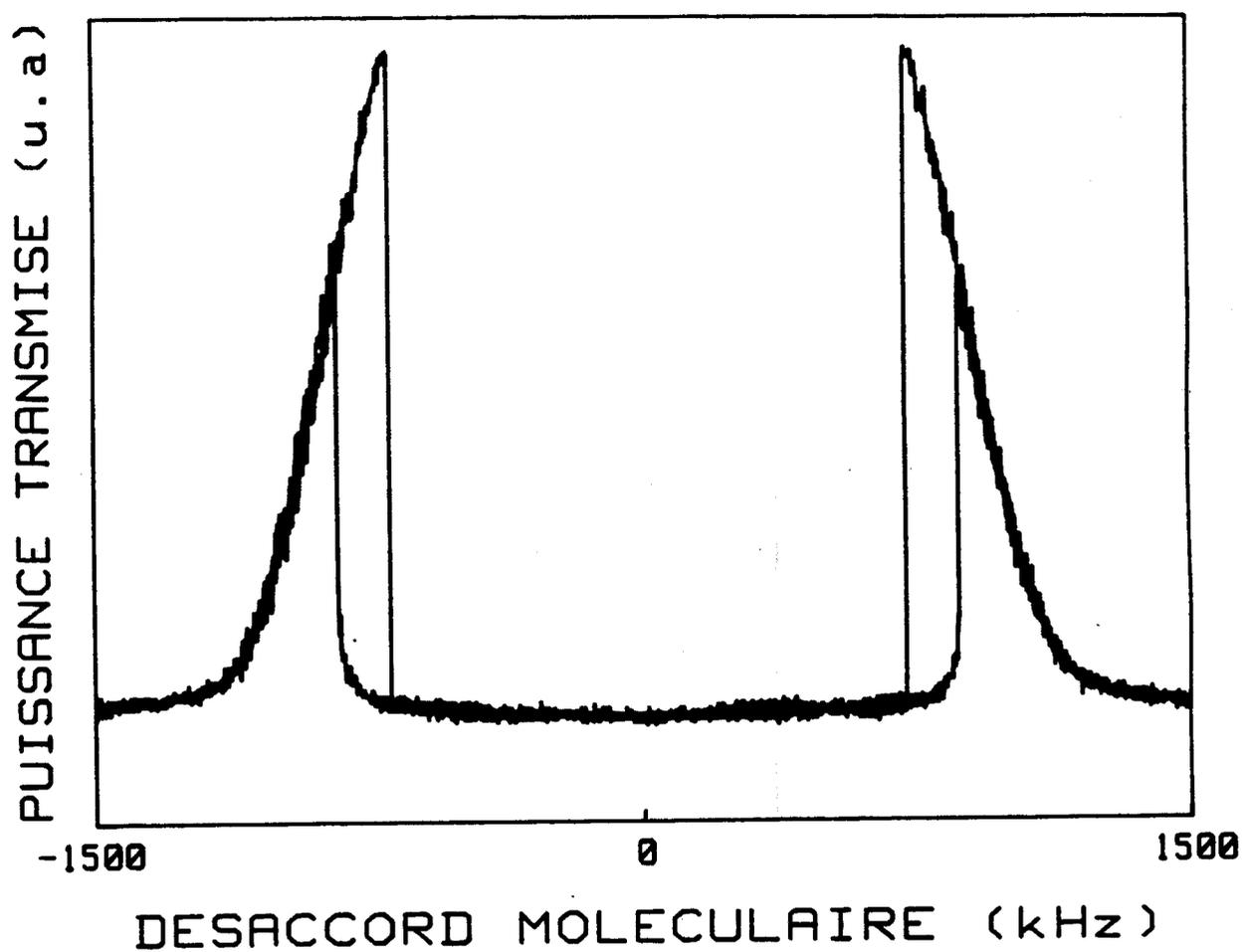


Figure 2.5 : Cycle de bistabilité en fréquence expérimental.
p=2.15 mTorr; Fréquence de Rabi incidente=427 kHz

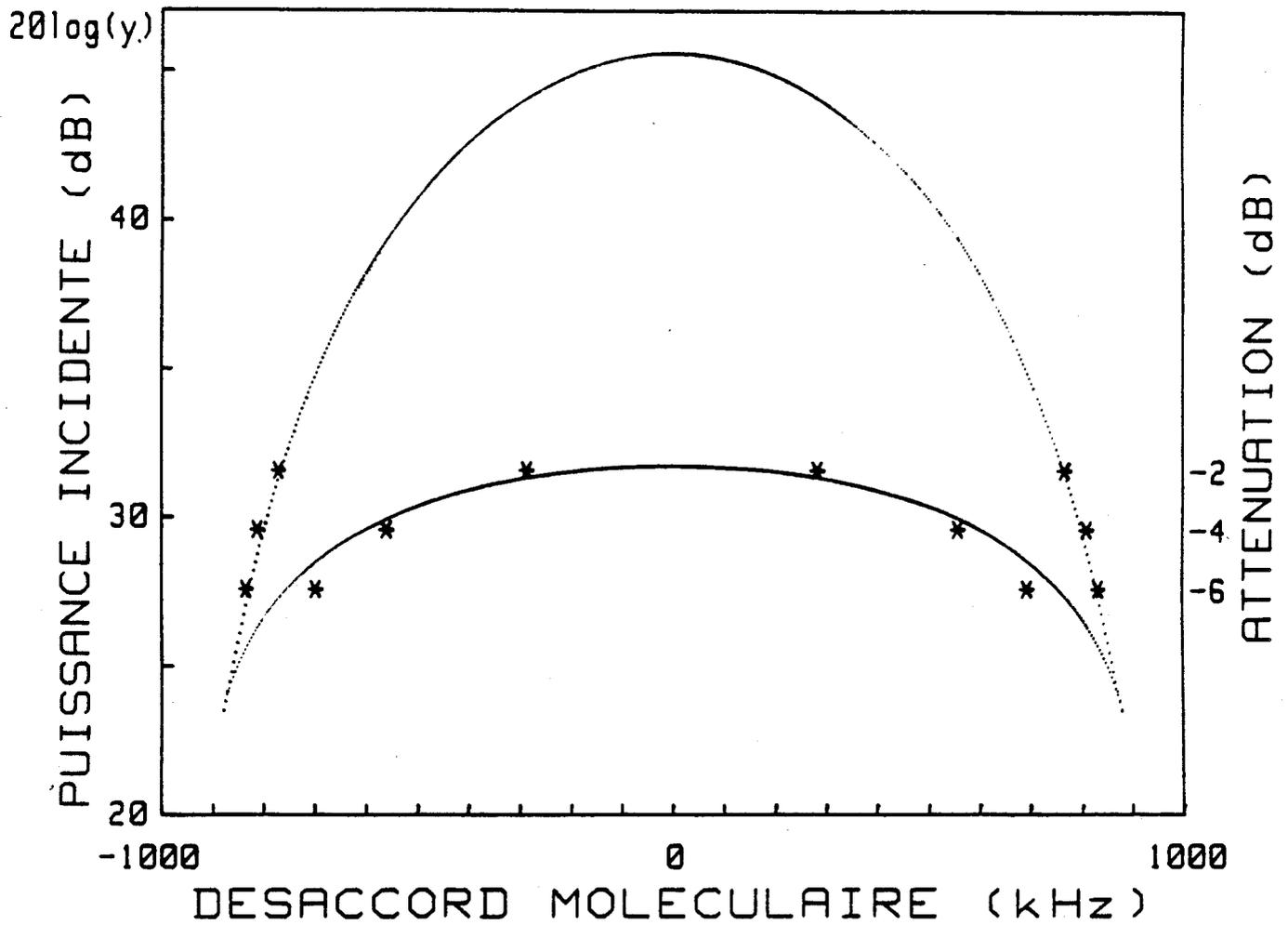
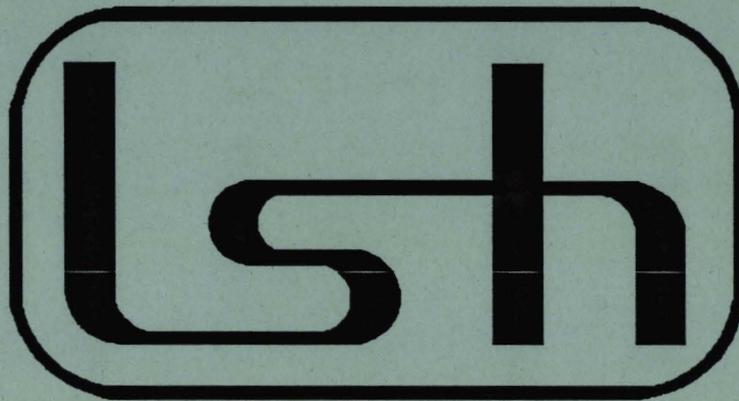


Figure 2.6 : Position des seuils de commutation du bistable en fonction du désaccord moléculaire.
 Courbe numérique (—) et points expérimentaux (*)
 Conditions: $p=2.15$ mTorr; $v_p=v_m$.



CHAPITRE 3:

**Evolution des résonances dans un
bistable optique soumis à une
modulation de fréquence**

3-1 - Introduction**3-2 - Mise en oeuvre expérimentale****3-3 - Mise en évidence des principaux effets****3-4 - Influence de la puissance incidente****3-5 - Influence du désaccord moléculaire****3-6 - Conclusion**

3-1: Introduction

Le phénomène de résonance est un phénomène physique commun à de nombreuses disciplines scientifiques telles que la mécanique (pendule) ou l'électricité (circuit RLC). Ce phénomène est observable lorsque l'on applique sur le système étudié un signal de modulation sinusoïdal. On observe alors l'évolution de la réponse du système en fonction de la fréquence de modulation. La résonance est caractérisée par la fréquence à laquelle cette réponse est maximale. Dans les systèmes linéaires, la fréquence de résonance est indépendante de l'amplitude de la modulation. En revanche si le système devient non linéaire, la courbe de résonance subit des déformations lorsque l'on augmente l'amplitude du signal de modulation. Dans notre cas où la fréquence du champ incident est modulée, cela peut se traduire par un déplacement de la résonance vers les basses ou hautes fréquences ainsi que par l'apparition successive d'une résonance subharmonique, de cycles d'hystérésis et d'instabilités.

On se propose d'étudier dans ce chapitre l'évolution des courbes de résonance des deux bistables (23 et 182 m) en fonction de différents paramètres tels que l'excursion de fréquence liée à l'amplitude de modulation, la puissance incidente injectée dans la cavité et le désaccord moléculaire. Comme précédemment, on se limitera au cas où la fréquence de la transition moléculaire ν_m coïncide avec celle d'un mode de la cavité ν_p . Les résultats expérimentaux seront alors comparés aux simulations numériques obtenues à l'aide du modèle monomode présenté dans le chapitre précédent.

3-2: Mise en oeuvre expérimentale

Pour un jeu de paramètres expérimentaux donné, les courbes de résonance sont mises en évidence en balayant la fréquence du signal de modulation. Un premier synthétiseur-générateur de fonctions (HP de type 3324 A) fournit le signal de modulation qui est injecté au niveau d'un transformateur situé entre le comparateur de phase et le réflecteur du klystron (figure 3.1). Le klystron est alors stabilisé en phase suivant la méthode présentée au chapitre 1. Ce synthétiseur assure un balayage linéaire de la fréquence de modulation à fréquence croissante puis décroissante. Cette fréquence varie typiquement entre 50 et 250 kHz et la fréquence du balayage est de 100 Hz. Les fréquences de modulation extrêmes sont ajustées au début de la manipulation de telle sorte que la fréquence de résonance soit toujours observable. Un deuxième synthétiseur-générateur de

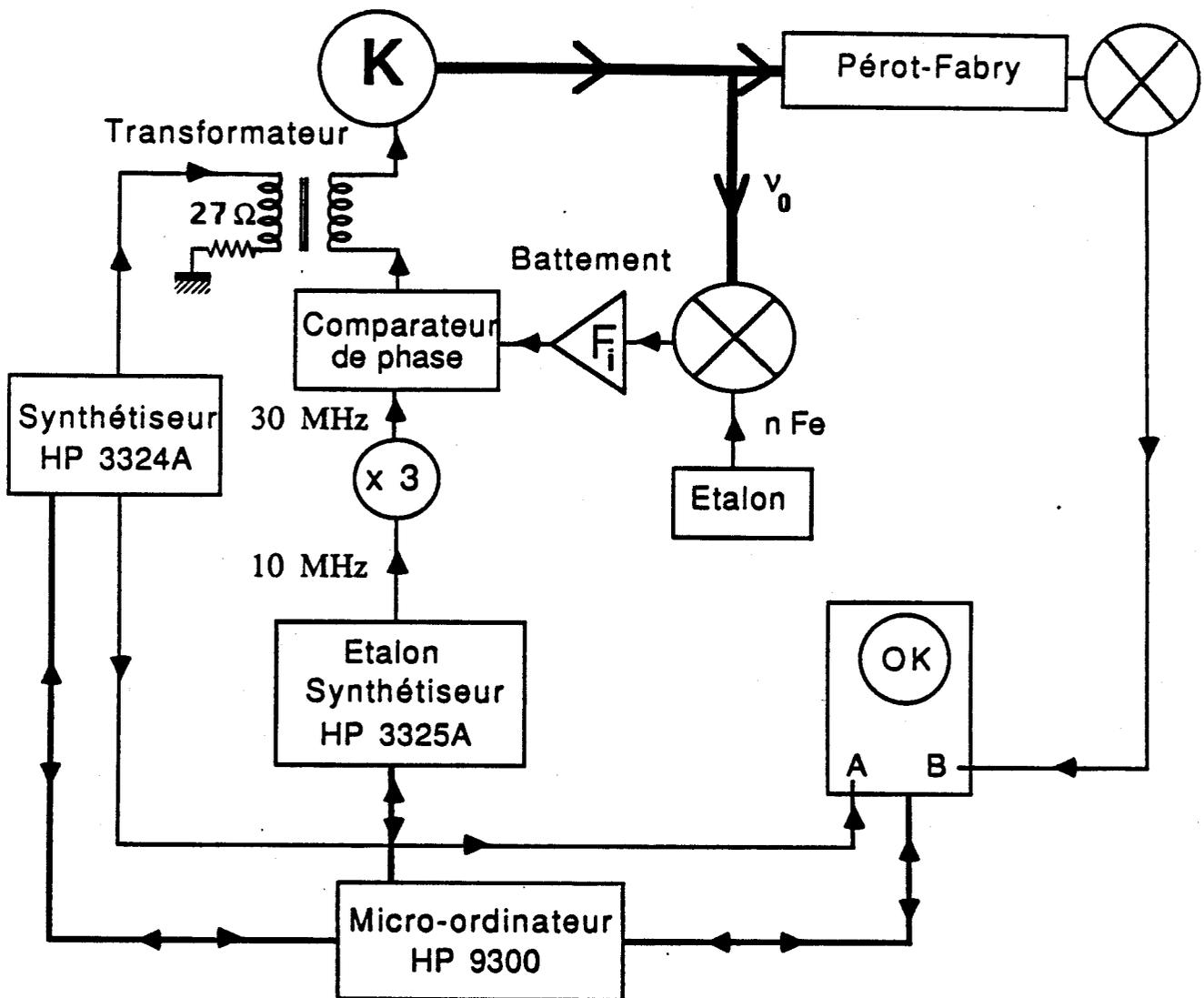


Figure 3.1: Dispositif expérimental utilisé pour l'obtention des courbes de résonance.

fonctions (HP de type 3325 A), inclus dans la chaîne d'asservissement de la source, fixe le désaccord moléculaire situé dans les expériences que nous présentons dans la gamme de fréquence 300-1000 kHz. Le signal détecté ainsi que le signal de commande du balayage de la fréquence de modulation sont envoyés sur un oscilloscope numérique (Lecroy 9400). Les deux synthétiseurs et l'oscilloscope numérique sont pilotés par un micro-ordinateur (HP 9300). Pour une valeur du désaccord moléculaire fixée par l'intermédiaire de l'ordinateur, ce dernier incrémente l'amplitude du signal de modulation. Celle-ci varie en général de 20 à 200 mV (valeur crête à crête) ce qui correspond à des excursions de fréquence allant de 13.7 à 137 kHz. Pour chaque valeur de cette excursion de fréquence, les signaux stockés sur l'oscilloscope numérique sont transférés vers l'ordinateur et stockés en mémoire de masse. A la fin du cycle de variation de l'excursion de fréquence, le désaccord moléculaire peut être incrémenté pour une nouvelle séquence de mesure. Il est à noter que les paramètres associés à chaque courbe sont stockés dans le mêmes fichier que cette dernière.

Cette automatisation de l'expérience permet sa réalisation en un temps relativement court en comparaison avec la lente dérive des paramètres expérimentaux, en particulier la longueur de la cavité. Toutefois des tests d'arrêt sont prévus pour permettre le contrôle, et éventuellement l'ajustage de la position en fréquence du mode de la cavité par rapport à la transition moléculaire.

Nous nous proposons dans le paragraphe suivant de décrire les principaux phénomènes observés sur les courbes de résonance avant de passer à une étude plus systématique.

3-3: Mise en évidence des principaux effets

Nous avons tracé pour cela les courbes de résonance, c'est à dire la puissance maximale transmise par le bistable en fonction de la fréquence de modulation, pour des valeurs croissantes de l'excursion de fréquence.

Trois techniques de détermination de la puissance maximale ont été utilisées successivement:

- + la première consiste à enregistrer la totalité du signal détecté correspondant à une période de balayage (ce qui correspond approximativement à 1500 oscillations avec 10 points minimum par oscillation). L'obtention des courbes de résonance nécessite alors un traitement numérique utilisant une procédure de recherche des maxima associés à chaque période du signal de modulation. Cette méthode permet de mettre en évidence toute variation rapide de la puissance transmise à l'échelle de temps de la période de modulation. Les fluctuations périodiques ou erratiques du signal oscillant détecté se manifesteront par l'apparition d'instabilités sur la courbe de résonance. Cette méthode nécessite toutefois de long temps de calcul.

+ pour la seconde méthode, le signal est traité directement par un oscilloscope numérique (Lecroy 9400). Celui-ci possède un logiciel qui calcule les maxima du signal et trace alors directement la courbe de résonance correspondante. Cette méthode permet de s'affranchir d'un long traitement informatique. Toutefois la procédure de calcul des maxima utilise une technique de prise d'échantillons répartis sur une centaine de périodes de balayage. Ceci a pour effet de déformer les cycles d'hystérésis qui, du fait du bruit, fluctuent toujours légèrement d'une période de balayage à l'autre.

+ la dernière méthode utilise un détecteur de crêtes à la sortie du Pérot-Fabry. Ce détecteur possède une bande passante de 10 kHz - 2 MHz. Mais le signal doit être fortement amplifié pour dépasser le seuil de détection de la diode. Ceci a pour effet d'augmenter l'amplitude du bruit (bruit d'amplificateur).

Ces deux dernières méthodes ne donnent que l'enveloppe maximale des instabilités observées.

La figure 3.2 présente une série de courbes obtenues avec le bistable de 182 m pour un désaccord moléculaire de 587 kHz, la pression valant 0.77 mTorr et la fréquence de Rabi incidente estimée à 1.8 MHz (ZEMMOURI 1990). La fréquence de modulation est balayée dans cette expérience entre 30 et 160 kHz. La courbe de résonance (a) obtenue pour la plus faible valeur de l'excursion de fréquence (13.7 kHz) correspond à la réponse linéaire du

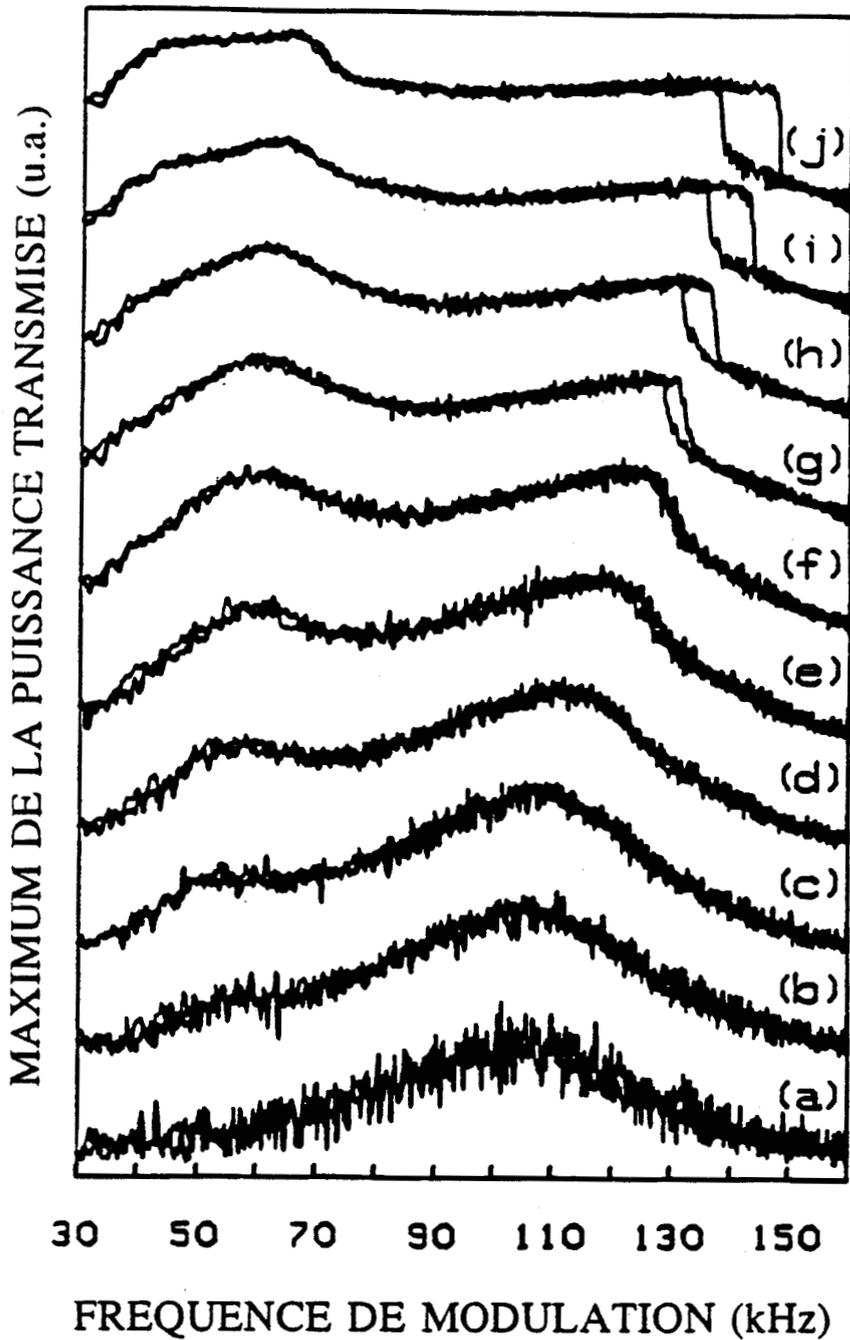


Figure 3.2: Courbes de résonance expérimentales en fonction de la fréquence de modulation pour différentes excursions de fréquence $\Delta\nu=13.7$ (a), 27.4 (b), 41.2 (c), 54.8 (d), 68.6 (e), 82.3 (f), 96 (g), 109.8 (h), 123.5 (i) et 137.2 kHz (j).
 Pression=0.77 mTorr; désaccord moléculaire=587 kHz; fréquence de Rabi incidente = 1.8 MHz.

système. On constate alors que lorsque l'excursion de fréquence augmente, la courbe de résonance se déforme et son maximum se déplace vers les hautes fréquences passant d'environ 108 kHz pour la plus faible excursion de fréquence à plus de 135 kHz pour la plus forte (137.2 kHz (j)). D'autre part une résonance subharmonique (harmonique 1/2) apparaît nettement dès que l'excursion de fréquence dépasse 41.2 kHz (c). Cette résonance se déplace dans le même sens que celui de la résonance principale, mais sa vitesse de déplacement est plus faible. Pour l'excursion de fréquence maximale (137.2 kHz), le déplacement relatif de la résonance subharmonique est d'environ 40% inférieur à celui de la résonance principale. Pour les fortes excursions de fréquence c'est à dire à partir de 96 kHz (g), il y a apparition sur le flanc haute fréquence de la courbe de résonance d'un cycle d'hystérésis qui s'élargit progressivement avec l'excursion de fréquence. Les mêmes comportements sont retrouvés sur les simulations numériques de la figure 3.3 effectuées avec les paramètres de l'expérience. Les courbes numériques sont en excellent accord avec les résultats expérimentaux. On constate toutefois un déplacement d'ensemble de la dynamique vers les hautes fréquences de modulation typiquement de 20 à 30 kHz. De plus l'apparition des cycles d'hystérésis nécessite des modulations environ 15% plus fortes que dans l'expérience .

Les figures 3.4 et 3.5 visualisent les résultats expérimentaux et numériques obtenus dans des conditions nettement différentes de celles des deux courbes précédentes (désaccord moléculaire = 433.6 kHz, pression = 0.63 mTorr, fréquence de Rabi incidente = 1.4 MHz). Il est à noter que la série de courbes expérimentales

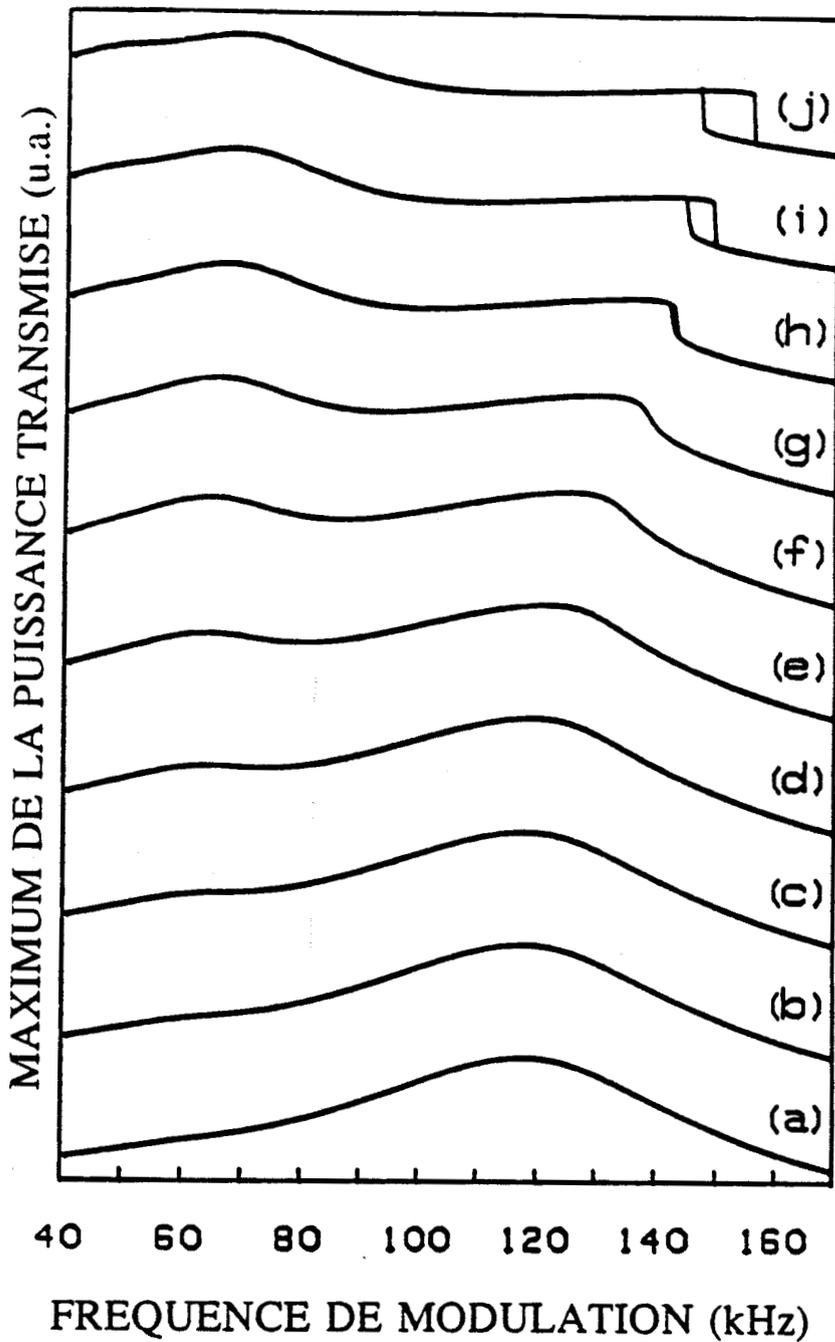


Figure 3.3: Courbes de résonance numériques obtenues dans les mêmes conditions que les courbes expérimentales de la figure 3.2.

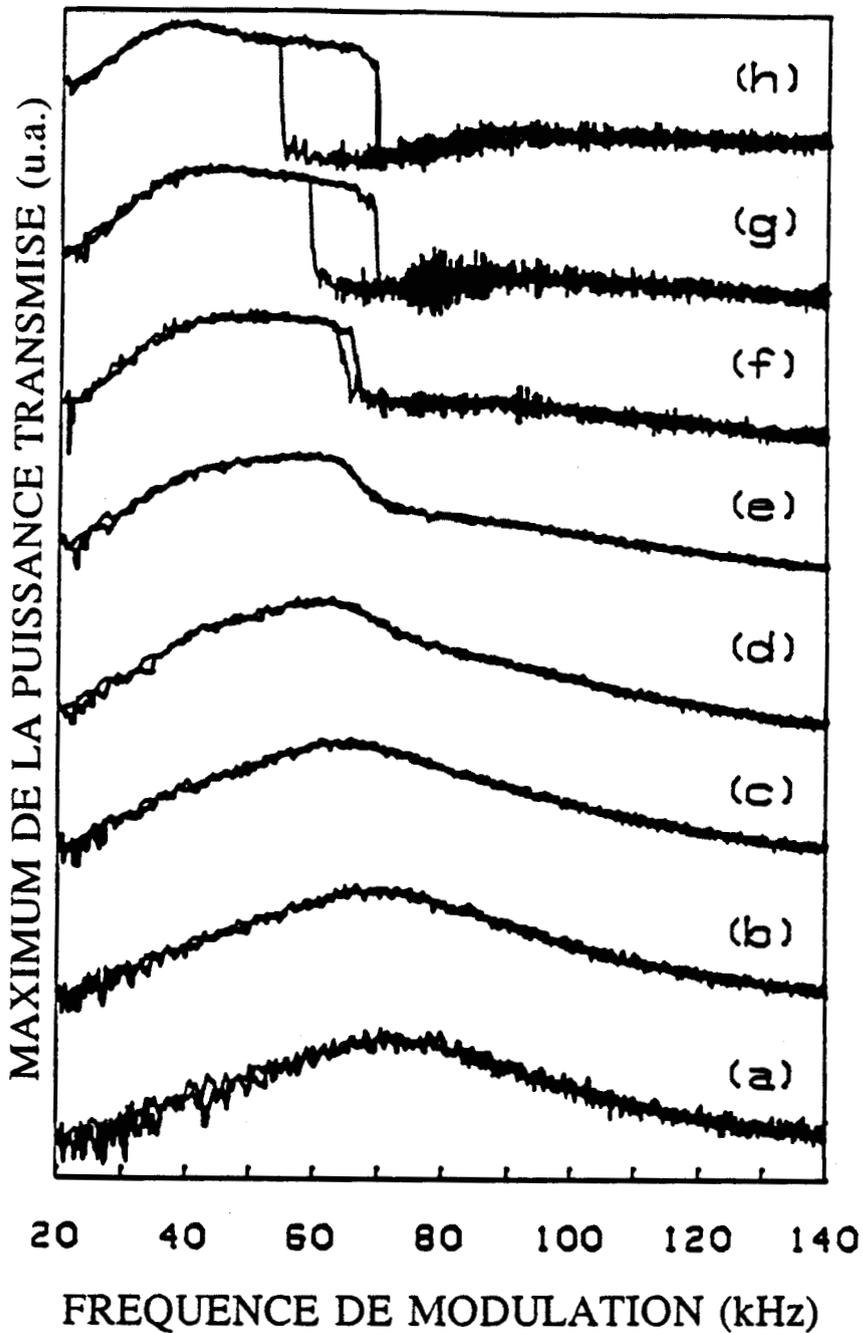


Figure 3.4: Courbes de résonance expérimentales en fonction de la fréquence de modulation pour différentes excursions de fréquence $\Delta\nu=20.6$ (a), 34.3 (b), 48 (c), 61.7 (d), 75.6 (e), 89.2 (f), 102.9 (g) et 116.6 kHz (h).
 Pression = 0.63 mTorr; désaccord moléculaire = 433.6 kHz; fréquence de Rabi incidente ≈ 1.4 MHz.

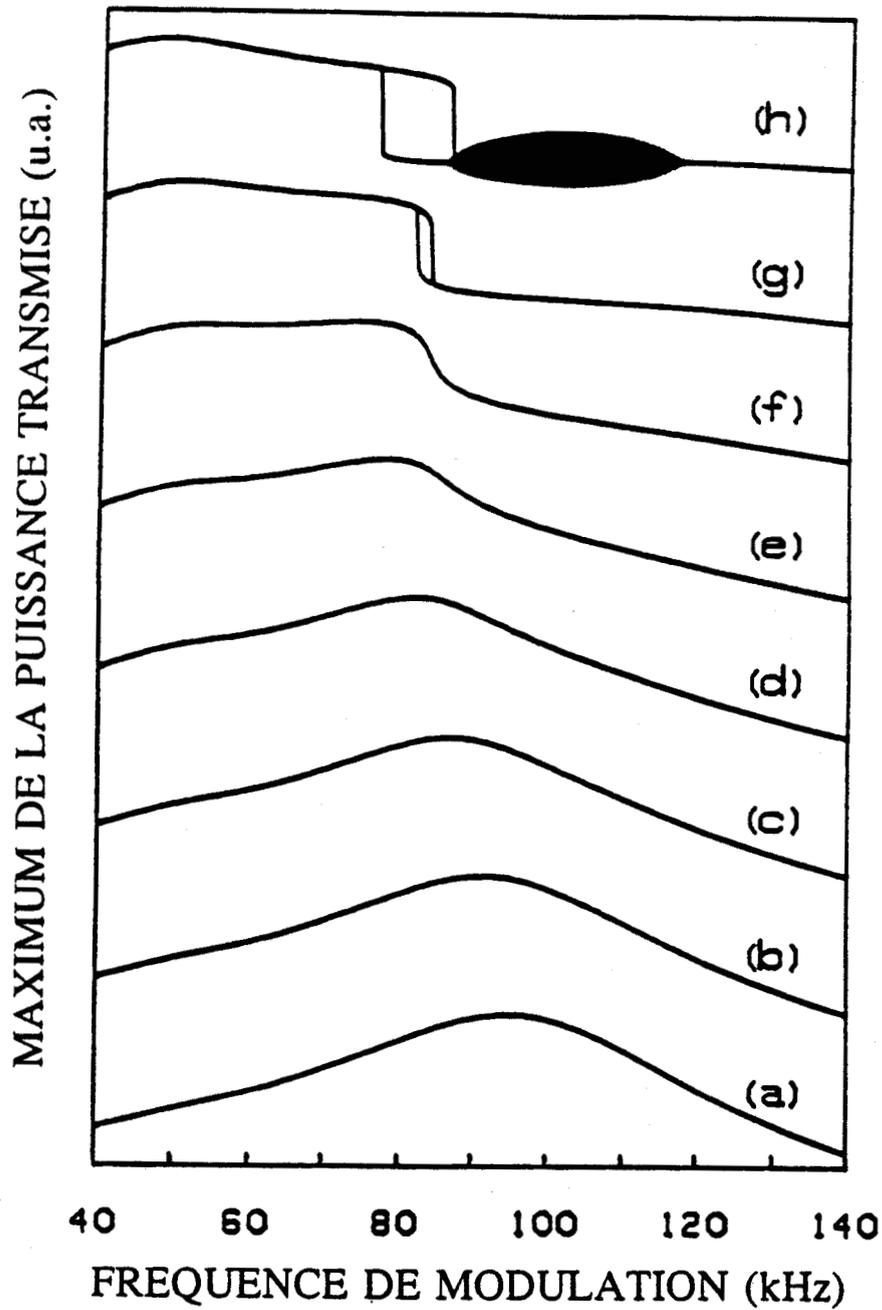


Figure 3.5: Courbes de résonance numériques obtenues dans les mêmes conditions que les courbes expérimentales de la figure 3.4.

ainsi que celle de la figure 3.2 ont été obtenues en utilisant la méthode numérique de détermination de la puissance maximale transmise. Les comportements mis en évidence sont analogues à ceux déjà observés. Mais la fréquence de résonance se déplace dans ce cas vers les basses fréquences. De plus, des oscillations périodiques mais aussi erratiques apparaissent au voisinage de la fréquence de résonance du régime linéaire (courbe g). Nous verrons au chapitre suivant que ces oscillations peuvent être associées à l'apparition du chaos. Notons que les cycles d'hystérésis apparaissent toujours sur le versant haute fréquence de la courbe de résonance, alors que des travaux récents (ERNEUX 1987, MANDEL 1988) prévoient dans ce cas leur apparition sur l'autre versant. Ce résultat n'est pas en contradiction avec les résultats présentés par Minorsky qui prévoient l'apparition des cycles d'hystérésis sur les deux flancs de la courbe de résonance (MINORSKY 1947).

Les mêmes comportements sont observés avec le bistable de 23 m. Ainsi sur la figure 3.6 nous présentons une série expérimentale dans laquelle le déplacement de la fréquence de résonance a lieu vers les hautes fréquences pour un désaccord moléculaire de 660 kHz, une pression de 1.2 mTorr et une fréquence de Rabi incidente estimée à 817 kHz. Sur la figure 3.7 la fréquence de résonance se déplace vers les basses fréquences dans les mêmes conditions expérimentales excepté pour le désaccord moléculaire qui est maintenu constant à 360 kHz.

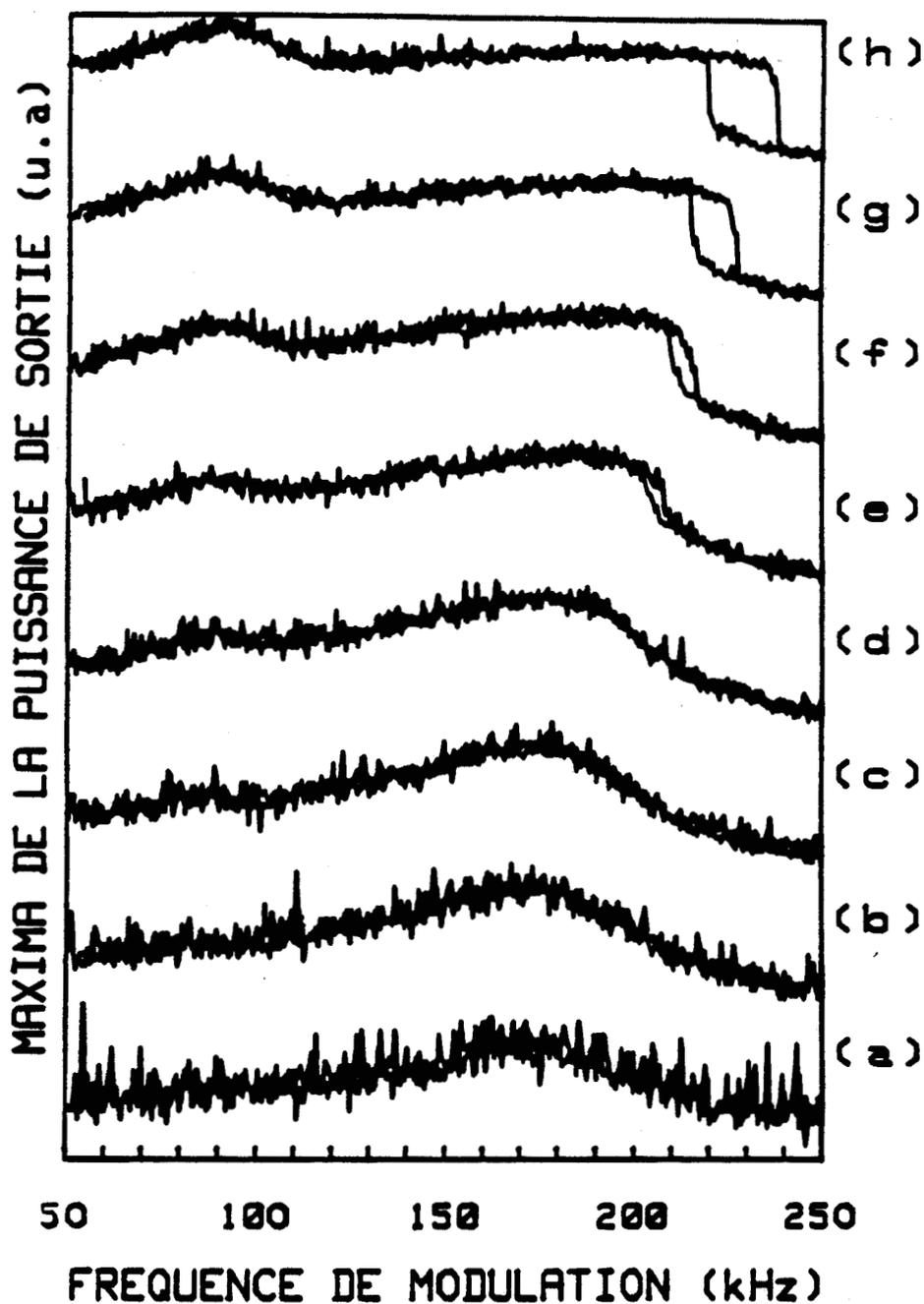


Figure 3.6: Courbes de résonance expérimentales en fonction de la fréquence de modulation pour différentes excursions de fréquence $\Delta\nu=23.7$ (a), 47.5 (b), 71.2 (c), 95 (d), 118 (e), 142.5 (f), 166.2 (g) et 190 kHz (h).
 Pression = 1.2 mTorr; désaccord moléculaire = 660 kHz; fréquence de Rabi incidente = 810 kHz.
 Bistable de 23 m.

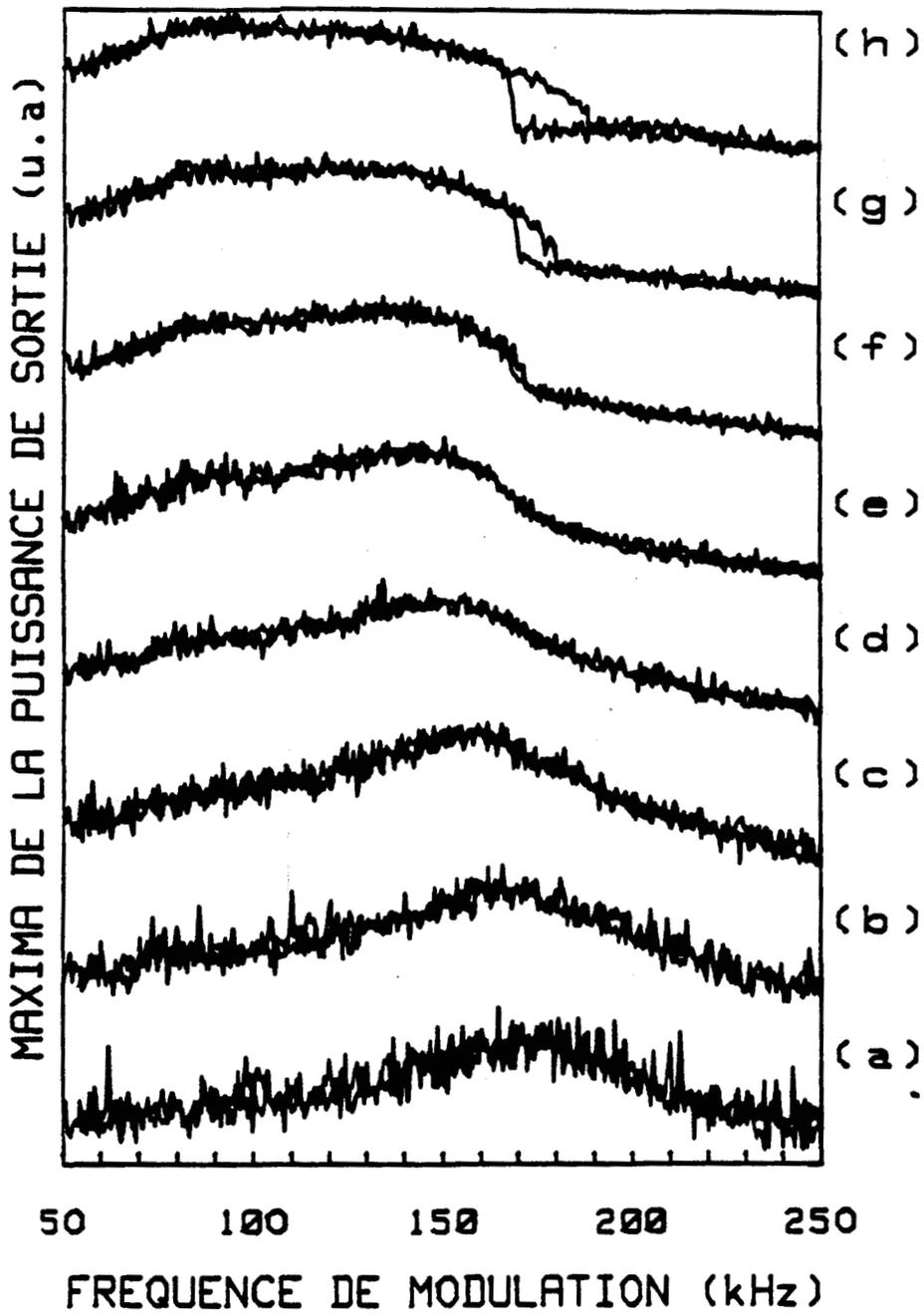


Figure 3.7: Courbes de résonance expérimentale.
Mêmes conditions que pour la figure 3.6 mais avec un désaccord moléculaire = 360 kHz.

En résumé, lorsque l'excursion de fréquence croît, quatre phénomènes apparaissent successivement:

- (i) déplacement de la fréquence de résonance selon les valeurs du désaccord moléculaire, tous les autres paramètres étant fixés; cette fréquence peut se déplacer vers les basses ou les hautes fréquences.
- (ii) apparition d'une résonance subharmonique (harmonique 1/2). Cette résonance évolue avec le forçage dans le même sens que la résonance principale mais avec une vitesse plus faible.
- (iii) développement d'un cycle d'hystérésis dont l'aire augmente avec l'excursion de fréquence et qui se situe toujours sur le flanc haute fréquence de la courbe de résonance.
- (iv) apparition d'instabilités pour les fortes valeurs de l'excursion de fréquence. Ces instabilités apparaissent initialement au voisinage de la fréquence de résonance linéaire du système. Ce phénomène apparait uniquement dans le cas où la fréquence de résonance se déplace vers les basses fréquences. Ces oscillations correspondent à des variations périodiques ou erratiques de l'amplitude de la puissance transmise.

Nous allons consacrer la suite de ce chapitre à une étude systématique du déplacement de la fréquence de résonance en fonction de la puissance incidente et du désaccord moléculaire. Une étude en fonction de la pression s'avère très délicate car d'une part ce paramètre, connu avec une précision assez médiocre, intervient par l'intermédiaire du taux de relaxation γ dans tous les paramètres du modèle numérique. Précisons que, sauf indications contraires, toutes les expériences présentées par la suite ont été effectuées sur le bistable de 23 m.

3-4: Influence de la puissance incidente

Ce paragraphe est consacré à l'évolution de la fréquence de résonance en fonction de la puissance incidente. Cette dernière est réglable par l'intermédiaire d'un atténuateur placé à l'entrée du Pérot-Fabry. Sur la figure 3.8 nous représentons l'évolution de la fréquence de résonance linéaire (c'est à dire lorsque l'excursion de fréquence est minimale) en fonction de l'atténuation (en dB) de la puissance incidente.

La fréquence de résonance décroît pratiquement linéairement avec l'atténuation. Cette loi linéaire, qui reste approximativement valable quelle que soit l'excursion de fréquence, est caractérisée par un coefficient directeur moyen de l'ordre de grandeur de 15 kHz/dB. Cet effet est observable sur la figure 3.9 où est représentée l'évolution de la fréquence de résonance en fonction de l'excursion de fréquence pour deux

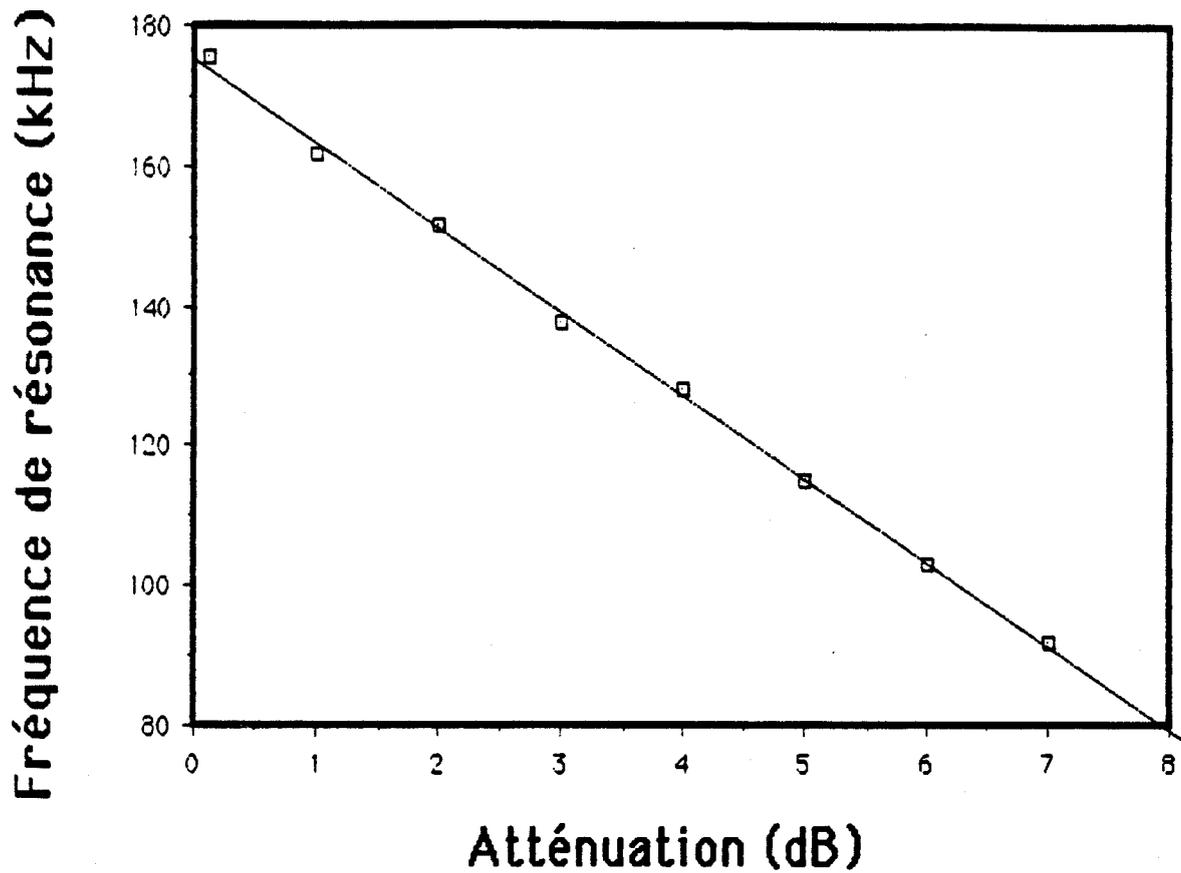


Figure 3.8 : Evolution de la fréquence de résonance linéaire en fonction de la puissance incidente.
Conditions: $p = 1.7$ mTorr; largeur du mode - 99 kHz; désaccord moléculaire - 885 kHz; excursion de fréquence - 27.44 kHz; fréquence de Rabi incidente ≈ 942 kHz.

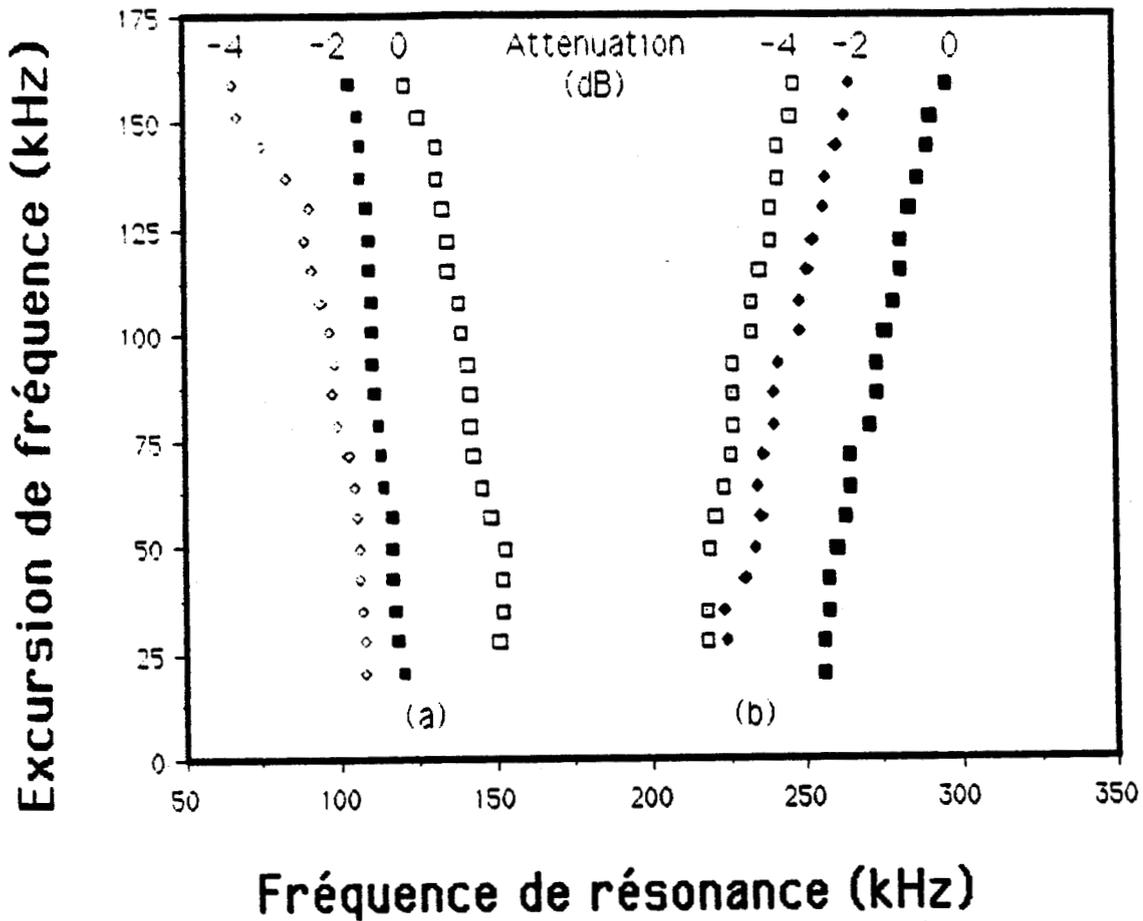


Figure 3.9 : Rôle de la puissance incidente sur l'évolution de la fréquence de résonance en fonction de l'excursion de fréquence.
 Conditions: $p = 1.8$ mTorr; atténuations - 0, 2 et 4 dB; largeur du mode - 96 kHz.
 Désaccords moléculaires: (a) 720 kHz et (b) 1040 kHz.

valeurs du désaccord moléculaire correspondant à des déplacements vers les basses fréquences et vers les hautes fréquences. Pour chaque désaccord moléculaire, le déplacement des résonances a été mesuré pour trois valeurs distinctes de la puissance incidente correspondant à des atténuations respectives de 0, 2 et 4 dB. On constate que la variation de l'atténuation se traduit par un déplacement d'ensemble des deux courbes. Une diminution de la puissance incidente revient donc effectivement à translater quasi uniformément vers les basses fréquences toutes les fréquences de résonance quelque soit l'excursion de fréquence.

Le rôle de la puissance incidente est donc de décaler globalement les fréquences de résonance. Nous allons voir dans le paragraphe suivant que, contrairement à la puissance incidente, le désaccord moléculaire joue un rôle primordial sur la dynamique des résonances non linéaires.

3-5: Influence du désaccord moléculaire

Comme cela a déjà été mis en évidence précédemment, le désaccord moléculaire influe sur le sens de déplacement de la fréquence de la résonance. Ce paragraphe étudie l'évolution de la fréquence de résonance en fonction du désaccord moléculaire et cela pour différentes excursions de fréquence.

Sur la figure 3.10 sont représentés les points expérimentaux montrant l'évolution de la fréquence de résonance en fonction de

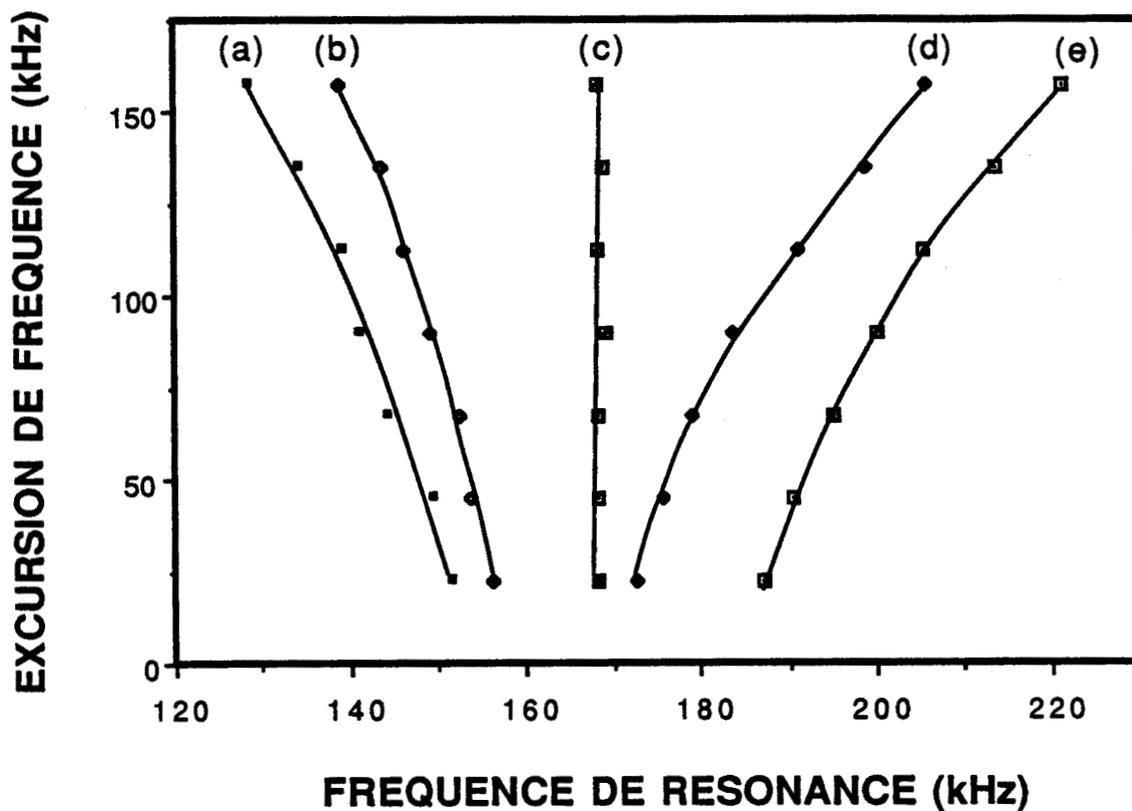


Figure 3.10 : Influence du désaccord moléculaire sur le déplacement des fréquences de résonance. Expériences.

Conditions: $p = 1.2$ mTorr; fréquence de Rabi incidente ≈ 809 kHz; largeur du mode = 107 kHz.

Désaccords moléculaires: (a) 540, (b) 570, (c) 630, (d) 660 et (e) 690 kHz.

l'excursion de fréquence pour différentes valeurs du désaccord moléculaire.

On constate sur cette figure que la fréquence de résonance est pratiquement constante pour un désaccord moléculaire de 630 kHz (c). Pour les désaccords moléculaires inférieurs, la fréquence de résonance évolue vers les basses fréquences alors qu'elle est déplacée vers les hautes fréquences pour les désaccords moléculaires supérieurs. Notons que l'excursion de fréquence est limitée à 160 kHz, valeur au delà de laquelle apparaissent les cycles d'hystérésis. Les simulations numériques de la figure 3.11 ont été tracées dans les conditions de l'expérience excepté pour les désaccords moléculaires qui sont légèrement décalés vers les hautes fréquences (600 à 750 kHz)

Dans la gamme d'excursion de fréquence explorée expérimentalement, les comportements sont similaires. Notons toutefois que les fréquences linéaires associées aux différents désaccords moléculaires évoluent sur un domaine beaucoup plus étroit que dans les expériences. Pour des excursions de fréquence supérieures à 150 kHz, les simulations numériques mettent en évidence une évolution des fréquences de résonance plus complexe. L'évolution vers les basses fréquences semble s'arrêter pour ensuite s'infléchir vers les hautes fréquences.

Les écarts observés entre expériences et simulations numériques ne sont pas surprenants étant donnée l'ampleur des approximations introduites lors de l'établissement du modèle numérique. Elles sont également liées à une estimation imparfaite

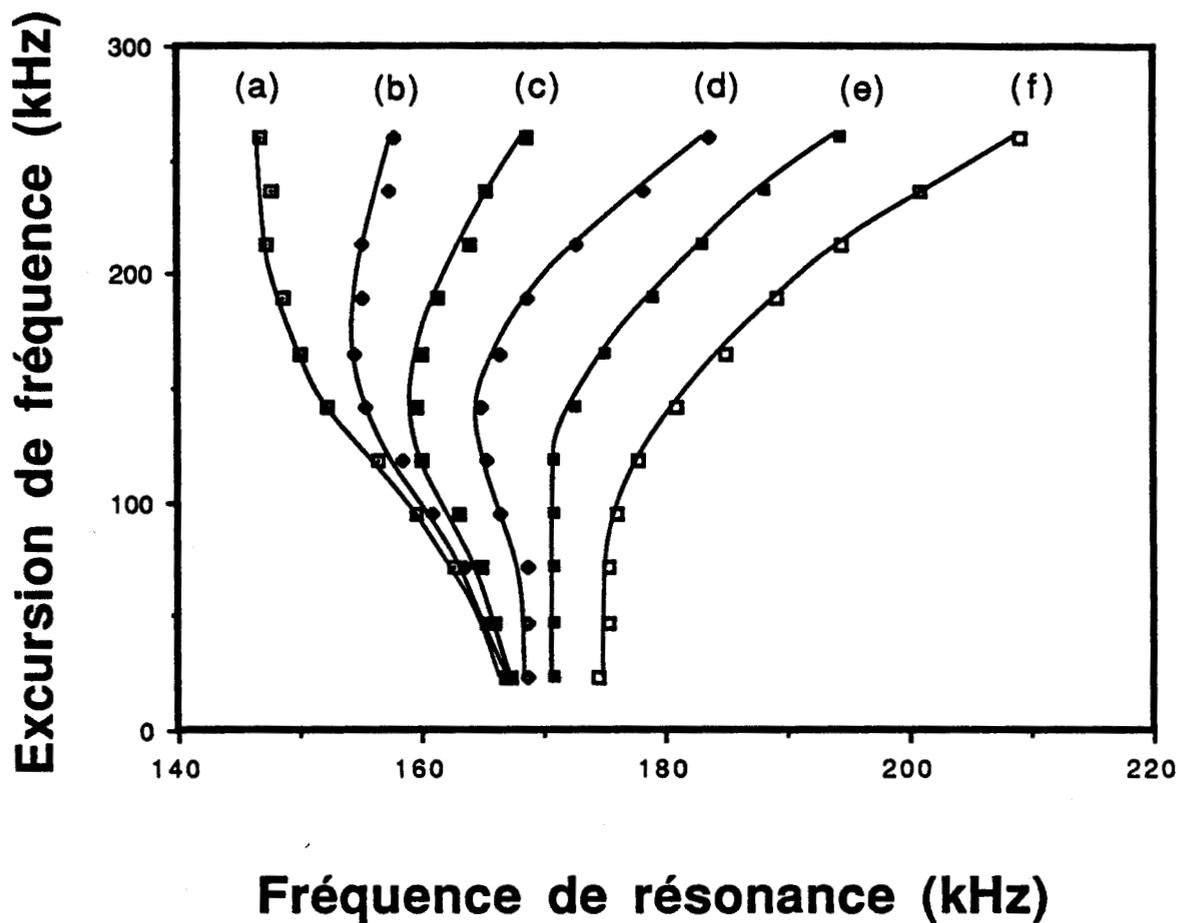


Figure 3.11 : Influence du désaccord moléculaire sur le déplacement des fréquences de résonance. Simulations numériques.
 Désaccords moléculaires: (a) 600, (b) 630, (c) 660, (d) 690, (e) 720 et (f) 750 kHz.
 Les autres paramètres sont identiques à ceux de la figure 3.10.

de la puissance incidente où à une précision insuffisante dans la mesure de la pression qui rappelle le intervient dans tous les paramètres du système par l'intermédiaire du taux de relaxation γ .

Le comportement mis en évidence précédemment peut être analysé en mesurant directement les fréquences de résonance en fonction du désaccord moléculaire. La figure 3.12 montre cette évolution observée expérimentalement pour trois valeurs distinctes de l'excursion de fréquence dans des conditions différentes de celles de la figure 3.10 (voir légende).

L'analyse de ces résultats montre que la courbe donnant l'évolution de la fréquence de résonance linéaire obtenue à très faible excursion de fréquence (courbe a) présente un point d'inflexion pour un désaccord moléculaire voisin de 750 kHz. La concavité de la courbe est négative (respectivement positive) pour des désaccords moléculaires inférieurs (respectivement supérieurs) à cette valeur. Lorsque l'excursion de fréquence augmente (courbes b et c) la courbe pivote autour de ce point d'inflexion. Le déplacement des fréquences de résonance s'effectue vers les basses fréquences lorsque la courbure de la courbe (a) est négative et vers les hautes fréquences dans le cas contraire. Pour le point d'inflexion, on n'observe évidemment pas de déplacement de la fréquence de résonance. Les résultats numériques correspondant à cette expérience (figure 3.13) révèlent de nouveau une plus grande complexité. La courbe associée aux fréquences de résonance linéaires (a) est beaucoup moins régulière et présente un méplat très prononcé. L'existence d'un tel méplat peut expliquer la faible extension du domaine de variation de la fréquence de résonance

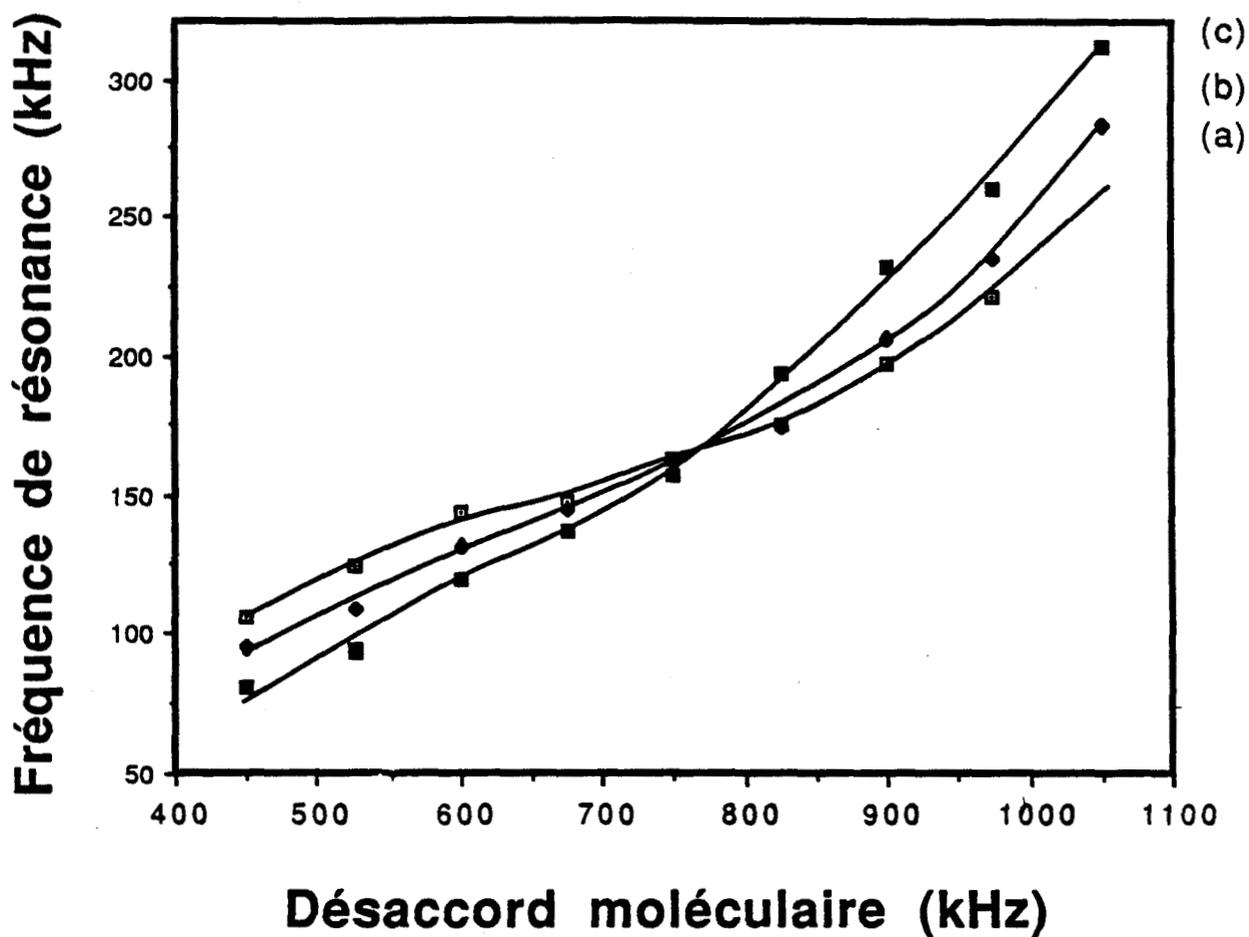


Figure 3.12 : Evolution de la fréquence de résonance en fonction du désaccord moléculaire.

Expériences.

Conditions: $p = 1.85$ mTorr; fréquence de Rabi incidente ≈ 880 kHz; largeur du mode = 101 kHz.

Excursions de fréquences: (a) 21.18, (b) 69.61 et (c) 130.15 kHz.

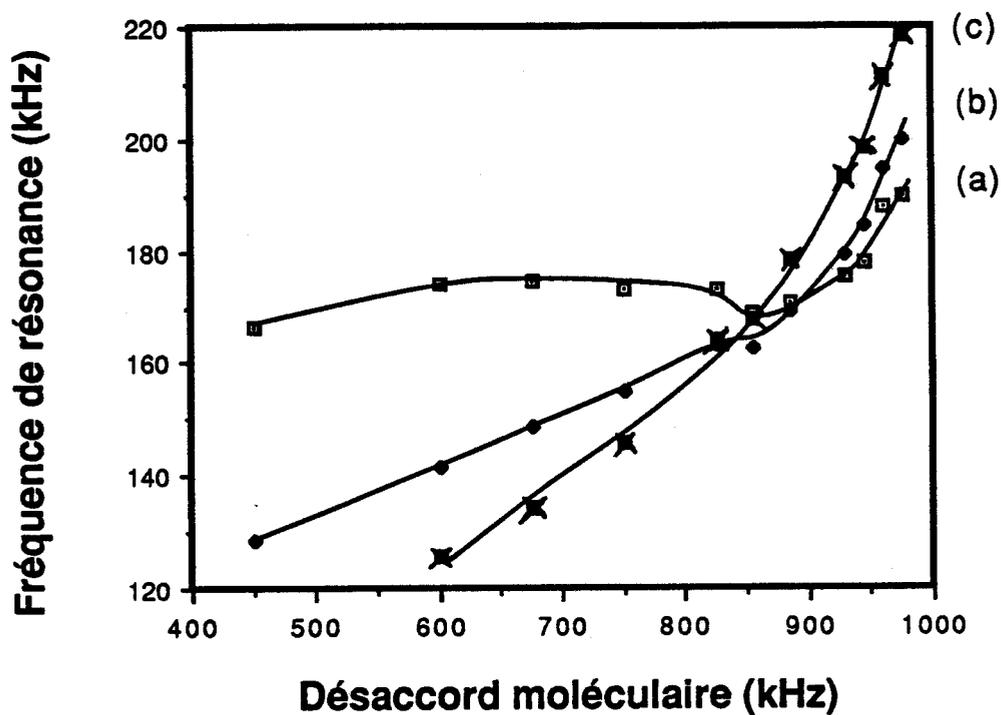


Figure 3.13 : Evolution de la fréquence de résonance en fonction du désaccord moléculaire. Simulations numériques. Excursions de fréquence: (a) 13.01, (b) 71.58 et (c) 106.72 kHz. Les autres paramètres sont identiques à ceux de la figure 3.12.

linéaire observée sur la figure 3.11. D'autres simulations numériques ont montré que la forme de cette courbe dépend principalement de la pression et que pour des valeurs plus faibles de celle-ci, elle retrouve une allure comparable à la courbe expérimentale correspondante. Ceci tendrait à montrer que la pression mesurée est surévaluée du moins dans cette expérience. Les irrégularités de la courbe 3.13 (a) ont une incidence sur le déplacement des fréquences de résonance en fonction de l'excursion de fréquence, mais globalement, on observe un déplacement vers les basses fréquences (respectivement hautes fréquences) dans les zones de concavité négative (respectivement positive). Le décalage de la courbe (c) par rapport aux deux autres courbes est lié à un déplacement de l'ensemble des fréquences de résonance analogue à celui observé sur la figure 3.11 pour les fortes excursions de fréquence.

Le sens de déplacement des résonances peut s'expliquer analytiquement à l'aide d'un modèle qualitatif très simple. Rappelons tout d'abord que dans toutes les expériences présentées, le désaccord moléculaire Δ est proportionnel au désaccord de cavité Θ ($v_m = v_p$). D'autre part, les résultats que nous venons de décrire montrent que la courbe donnant la fréquence de résonance linéaire f_R en fonction du paramètre Δ présente un point d'inflexion pour une valeur particulière de Δ notée Δ_0 (figure 3.14). Cette courbe reflète en fait la non linéarité du système par rapport à Δ . Enfin nous avons vu au chapitre 2 que la modulation de la fréquence du champ incident est équivalente à une modulation du paramètre Δ ($\Theta \approx \Delta$). La valeur instantanée du désaccord moléculaire s'écrit:

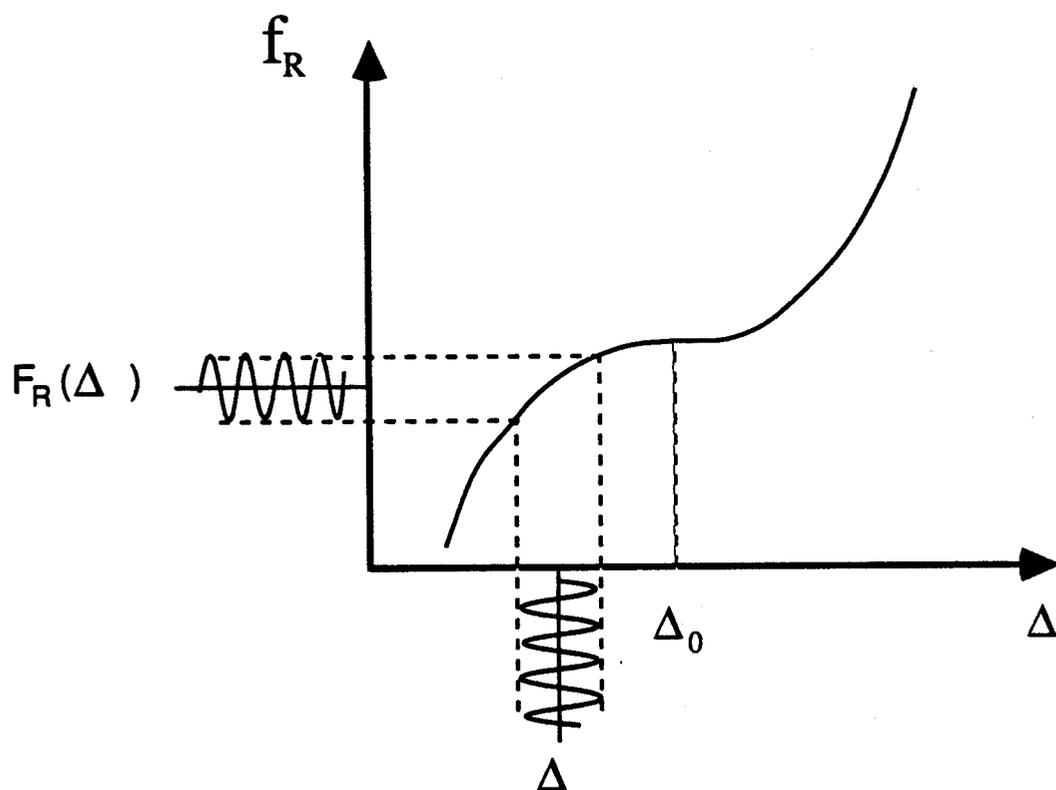


Figure 3.14 : La modulation du désaccord moléculaire se traduit par une modulation de la fréquence de résonance.

$$\Delta'(t) = \Delta + \delta \cos(2\pi ft) \quad (\text{avec } \delta = 2\pi\Delta v/\gamma) \quad (3-1)$$

Cette modulation induit une modulation de la fréquence de résonance f_R du système. La valeur instantanée de la fréquence de résonance $f_R(t)$ est alors donnée par le développement limité suivant:

$$\begin{aligned} f_R(\Delta, t) = & f_R(\Delta) + \frac{\partial f_R(\Delta)}{\partial \Delta'} \delta \cos(2\pi ft) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_R(\Delta)}{\partial \Delta'^2} \delta^2 \cos^2(2\pi ft) + \dots \end{aligned} \quad (3-2)$$

On peut raisonnablement considérer que la fréquence de résonance observée $F_R(\Delta)$ correspond à la moyenne temporelle de $f_R(t)$ soit:
 $F_R(\Delta) = \langle f_R(\Delta, t) \rangle$.

$$\begin{aligned} F_R(\Delta) = & f_R(\Delta) + \frac{\partial f_R(\Delta)}{\partial \Delta'} \delta \langle \cos(2\pi ft) \rangle \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_R(\Delta)}{\partial \Delta'^2} \delta^2 \langle \cos^2(2\pi ft) \rangle + \dots \end{aligned} \quad (3-3)$$

or sachant que:

$$\langle \cos^{2p+1}(2\pi ft) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \cos^{2p}(2\pi ft) \rangle \neq 0 \quad (3-4)$$

Nous obtenons alors:

$$F_R(\Delta) = f_R(\Delta) + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f_R(\Delta)}{\partial \Delta'^2} \delta^2 + \text{termes de puissance paire d'ordre supérieur} \quad (3-5)$$

De cette relation peuvent se déduire les résultats suivants:

+ si $\Delta = \Delta_0$, c'est à dire au point d'inflexion, alors

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_R(\Delta)}{\partial \Delta'^2} = 0. \text{ Dans ce cas particulier, } F_R(\Delta) = f_R(\Delta) + O(\delta^4).$$

Il n'y a donc pas de déplacement de la fréquence de résonance du moins pour les faibles et moyennes excursions de fréquence.



+ si $\Delta < \Delta_0$, le terme $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_R(\Delta)}{\partial \Delta'^2} < 0$ (la courbure est négative).

La fréquence de résonance $F_R(\Delta)$ se déplace alors vers les basses fréquences.

+ si $\Delta > \Delta_0$, au contraire la dérivée seconde est positive et la fréquence de résonance se déplace vers les hautes fréquences.

+ les termes d'ordres supérieurs ($\delta^4 \dots$) sont responsables des déplacements vers les hautes fréquences observés pour les grandes valeurs de l'excursion de fréquence lorsque $\Delta' \leq \Delta_0$ dans les simulations numériques.

Ce modèle permet de relier le sens de déplacement de la fréquence de résonance à la valeur du désaccord moléculaire. La relation (3-5) montre que le déplacement de la résonance doit suivre une loi en Δv^2 pour les faibles valeurs de l'excursion de fréquence. Pour vérifier cette loi, nous avons tracé la courbe $\text{Ln}|F_R(\Delta v) - F_R(0)|$ en fonction de $\text{Ln}(\Delta v)$ où $F_R(0)$ représente la fréquence de résonance linéaire (correspondant à l'excursion de fréquence minimale). Nous n'avons retenu que quelques cas expérimentaux et numériques où la dispersion des points de mesure est minimale. Les figures 3.15 (a) et (b) correspondent aux courbes expérimentales présentées dans la figure 3.10. Le calcul des pentes initiales donne des valeurs très proches de 2. Ce résultat bien que présenté uniquement sur deux cas expérimentaux se retrouve aussi bien avec d'autres conditions expérimentales que sur les simulations numériques. Nous avons effectué une étude comparable dans le cas où la fréquence de résonance ne se déplace pas pour les faibles valeurs de l'excursion de fréquence ($\Delta = \Delta_0$). Les résultats correspondants sont représentés sur la figure 3.16. Dans ces deux cas la pente correspondant aux plus fortes valeurs de l'excursion Δv est voisine de 4. Ces résultats tendent à montrer que la relation (3-5) décrit correctement l'évolution de la résonance. Cette évolution en fonction de l'excursion de fréquence (Δv) suivrait tout d'abord une loi en Δv^2 et serait modifiée par la suite à cause des termes d'ordres supérieurs de la relation 3-5. La même étude a été effectuée sur le déplacement des fréquences de résonance du bistable de 182 m dans les conditions de la figure 3.2. La figure 3.17 (a) représente l'évolution de la résonance principale alors que 3.17 (b) reflète celle de la résonance subharmonique 1/2. Les deux pentes sont proches de 2, ce qui montre que la loi

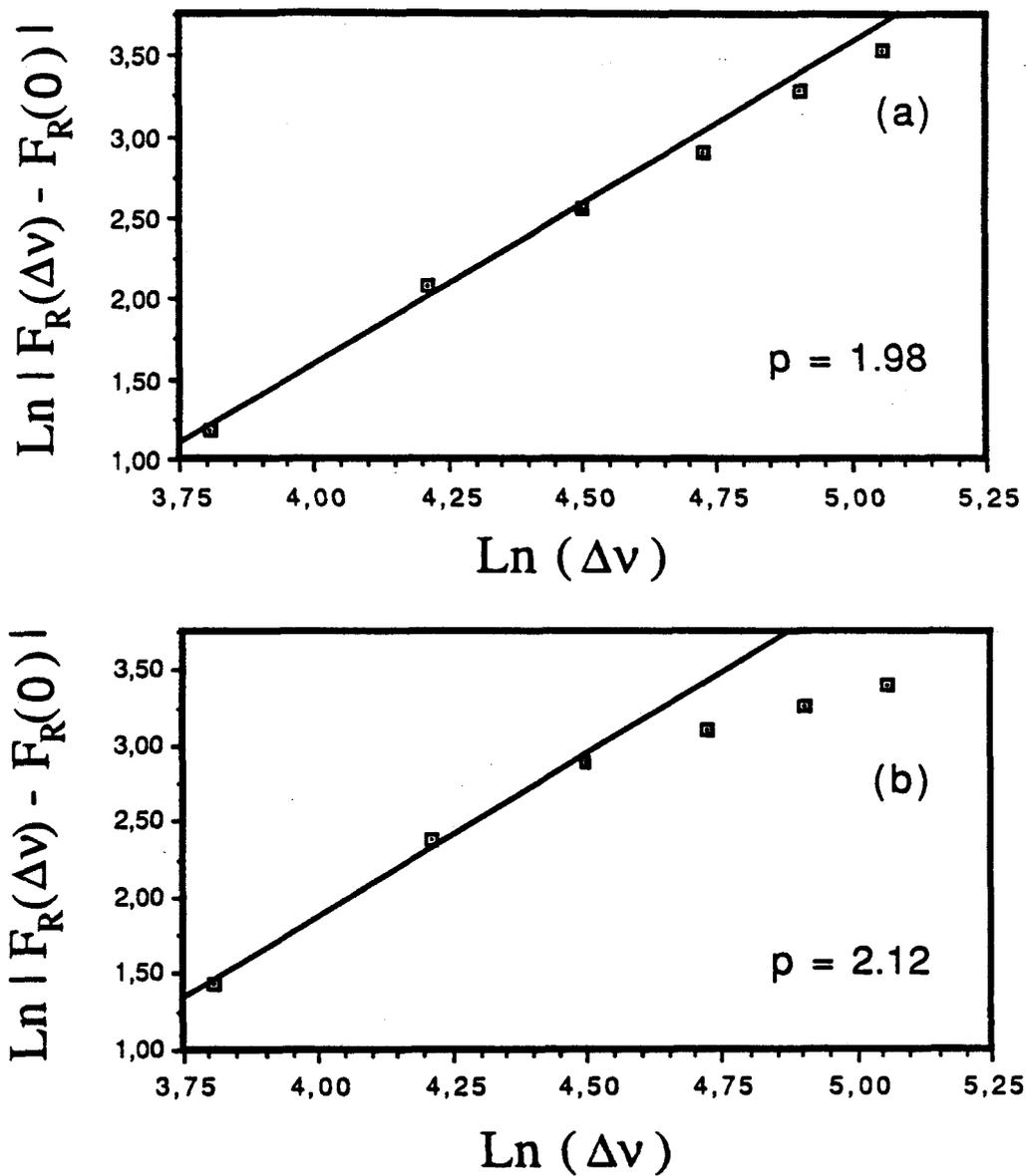


Figure 3.15 : Tests de la loi de déplacement de la résonance pour les faibles valeurs de l'excursion de fréquence.
Conditions expérimentales de la figure 3.10.
Désaccord moléculaire = 300 kHz (a)
et 690 kHz (b).

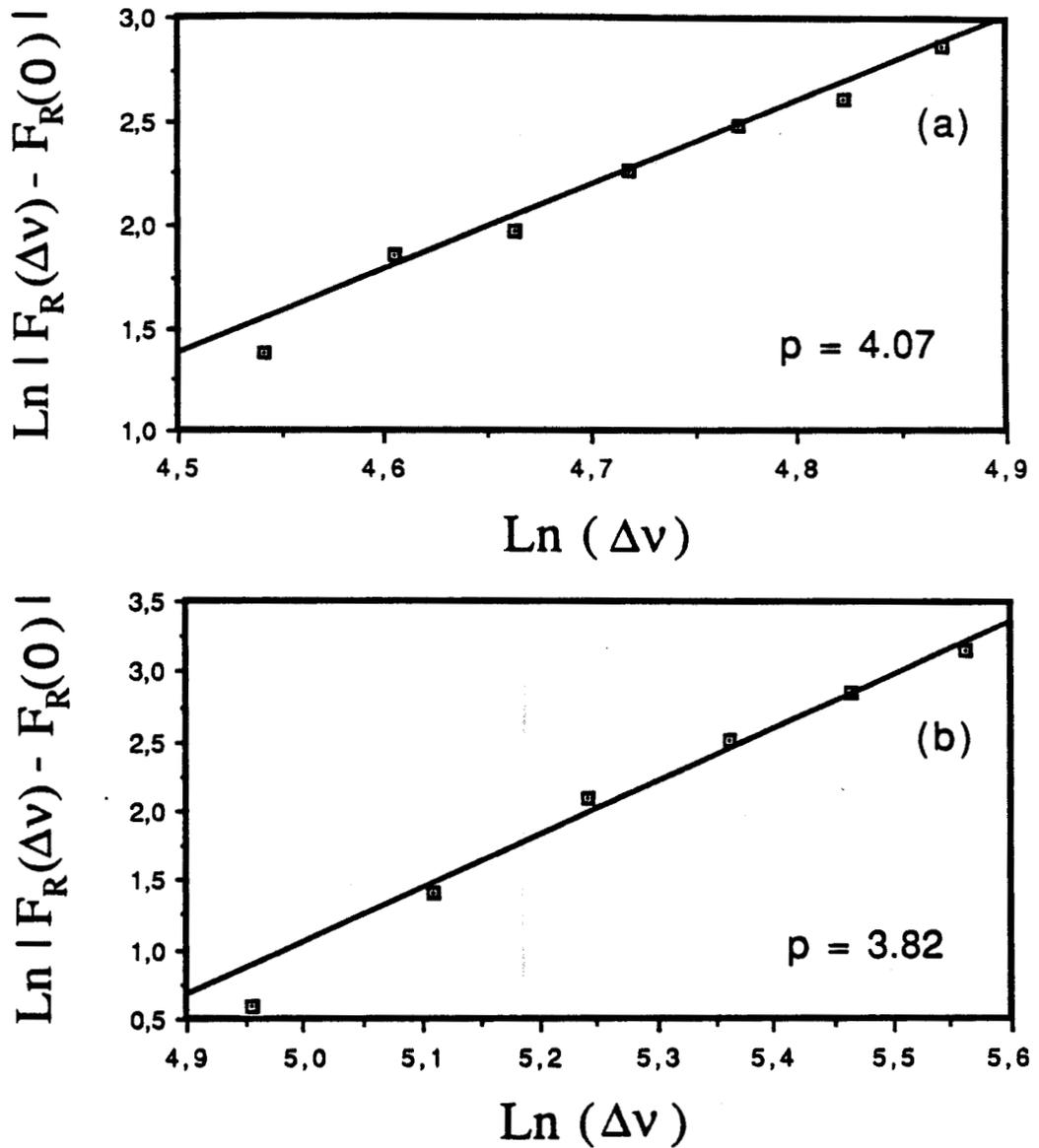


Figure 3.16 : Tests de la loi de déplacement de la résonance pour les grandes excursions de fréquence lorsque la fréquence de résonance ne change pas pour les faibles et moyennes excursions de fréquence.

- (a) Expérience. Conditions: pression = 1.85 mTorr, désaccord moléculaire = 825 kHz, fréquence de Rabi incidente \approx 880 kHz.
- (b) Simulations. Conditions de la figure 3.11. désaccord moléculaire = 720 kHz.

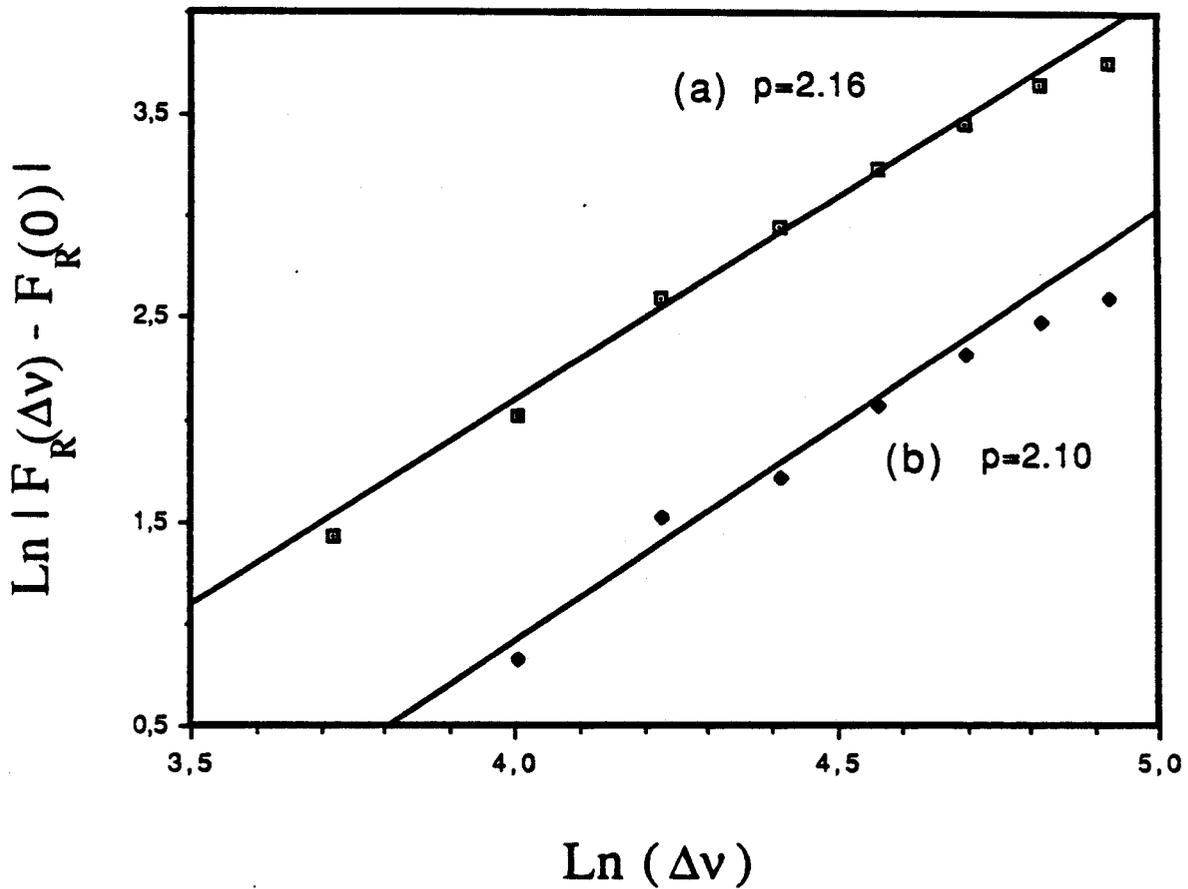


Figure 3.17 : Tests de la loi de déplacement de la résonance principale (a) et de la résonance subharmonique 1/2 (b) dans le bistable de 182 m pour les faibles valeurs de l'excursion de fréquence.
Mêmes conditions que pour la figure 3.2.

quadratique décrivant le déplacement en fréquence de la résonance principale est également valable pour la résonance subharmonique.

Le modèle analytique le plus simple, qui rend compte d'un déplacement des fréquences de résonance avec des caractéristiques comparables à celles que nous avons observées, met en jeu une équation de Duffing avec modulation (GUCKENHEIMER 1983). Dans ce modèle le sens des déplacements de la fréquence de résonance est clairement lié à l'existence ou non d'une solution triple pour l'état stationnaire.

Bien que ce modèle décrive une réalité physique différente de celle de notre bistable, il est intéressant de savoir si ce dernier est caractérisé par l'existence d'une telle corrélation. Dans notre cas l'existence d'une solution triple correspond à l'apparition de la bistabilité. Rappelons tout d'abord les principales caractéristiques de l'équation de Duffing considérée. Cette équation est une équation différentielle du second ordre qui s'écrit de la manière suivante:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + c x + \varepsilon x^3 = F \cos(\omega t) \quad (3-6)$$

où x représente par exemple le déplacement d'un pendule, k la constante d'amortissement, \sqrt{c} la fréquence propre ($c > 0$), εx^3 le terme de non linéarité et $F \cos(\omega t)$ la modulation extérieure.

Dans ce modèle, la fréquence de résonance se déplace vers les basses ou hautes fréquences selon la valeur du paramètre ε (JORDAN 1977). Si ε est négatif la fréquence de résonance se déplace vers les basses fréquences, s'il est positif vers les hautes fréquences; la fréquence de résonance ne se déplace pas si $\varepsilon = 0$. En absence de forçage, le système possède une solution stationnaire triple sous certaines conditions. En effet les solutions stationnaires sont données par:

$$x(c + \varepsilon x^2) = 0 \quad (3-17)$$

La première solution triviale est $x=0$. L'existence d'autres solutions dépend de la valeur de ε .

+ si $\varepsilon > 0$, $x^2 = -\frac{c}{\varepsilon} < 0$, il n'y a donc pas de solution stationnaire autre que $x=0$.

+ si $\varepsilon < 0$, $x^2 = -\frac{c}{\varepsilon} > 0$ d'où $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{\varepsilon}}$. Il y a alors dans ce cas trois solutions stationnaires.

Dans ce modèle, le sens de déplacement de la résonance est lié à l'existence ou non d'une solution stationnaire triple.

Les tests d'existence de cette corrélation dans notre système ont été effectués uniquement sur des simulations numériques. Les désaccords moléculaires caractérisant la limite de l'existence de la bistabilité ont été calculés pour différentes pressions par la même méthode qui nous a permis de calibrer le

coefficient d'absorption en puissance α dans le chapitre 2. Cette limite est représentée sur un graphe pression en fonction du désaccord moléculaire (figure 3.18). Sur cette figure la zone hachurée correspond à la région où le système est bistable. Dans les mêmes conditions, nous avons étudié l'évolution des résonances pour différentes valeurs de la pression. Les points indiquent pour différentes pressions les valeurs du désaccord moléculaire pour lesquelles la fréquence de résonance est pratiquement indépendante de l'excursion de fréquence. On constate que la courbe indiquant le non déplacement de la résonance est très voisine de la limite d'existence de la bistabilité statique, celles-ci sont pratiquement "parallèles" et séparées d'environ 50 kHz. Dans notre système, il n'y a pas coïncidence exacte entre non déplacement de la résonance et limite de bistabilité mais ces deux phénomènes semblent toutefois corrélés.

3-6: Conclusion

Nous avons donc dans ce chapitre mis en évidence les différents phénomènes intervenant sur les courbes de résonance lorsque le bistable est soumis à une modulation de fréquence. Lorsque l'on augmente l'excursion de fréquence, apparaissent successivement une résonance subharmonique, puis un cycle d'hystérésis et enfin des instabilités. Nous nous sommes dans ce mémoire plus particulièrement intéressés au déplacement de la résonance principale. Nous avons ainsi montré que le déplacement des fréquences de résonance principale et subharmonique était lié

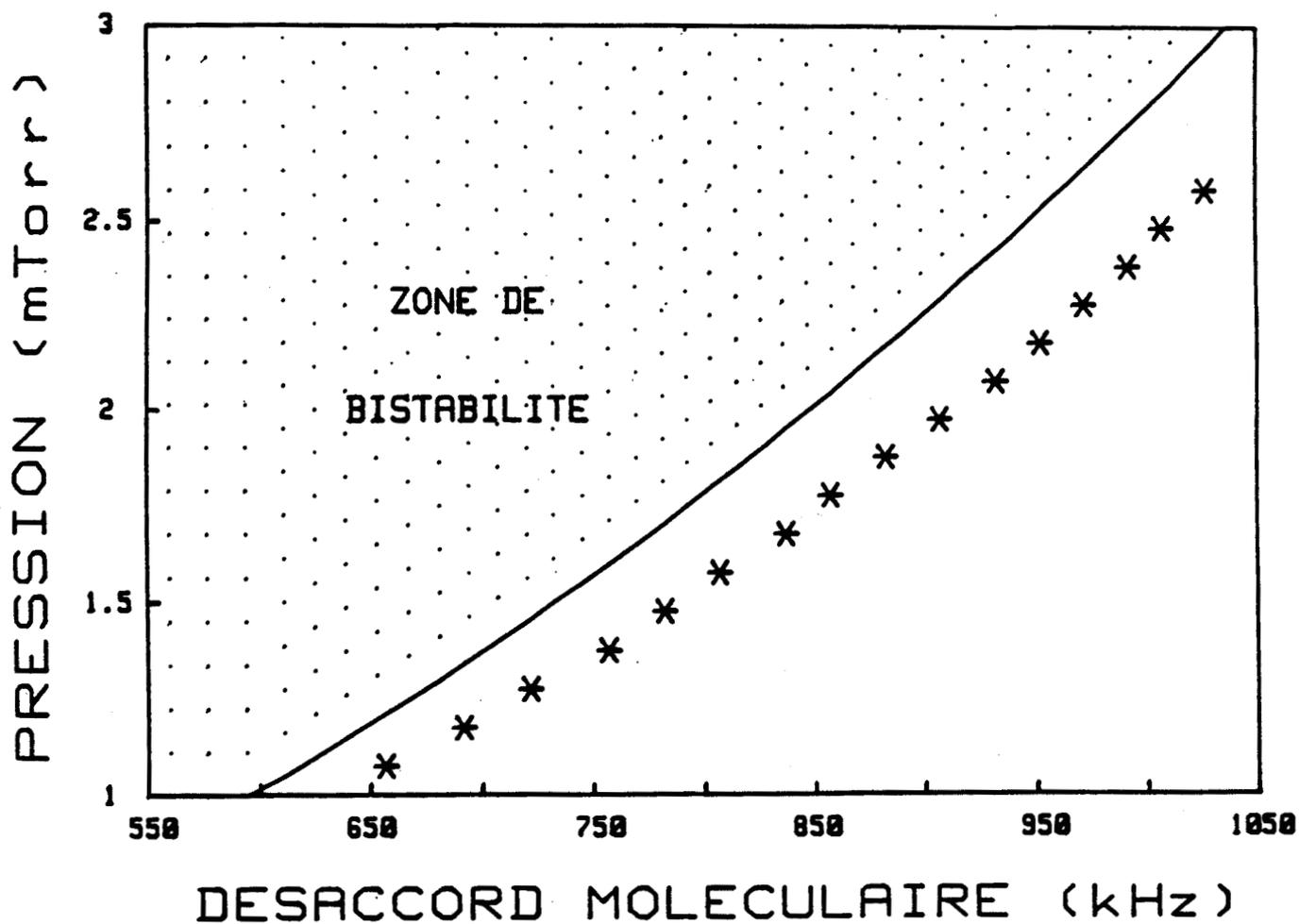


Figure 3.18: Représentation dans le plan pression-désaccord moléculaire de la zone d'existence de la bistabilité statique (—) et de la limite de non déplacement de la fréquence de résonance (*).
Condition: largeur du mode = 99.6 kHz.

à la valeur du désaccord moléculaire. Le modèle qualitatif proposé permet d'expliquer ce déplacement. D'autre part, nous avons mis en évidence une corrélation entre bistabilité et sens de déplacement. Un modèle analytique s'avère nécessaire pour rendre compte de cette corrélation mais aussi pour décrire et analyser l'apparition des cycles d'hystérésis. Une recherche de solutions analytiques sur le modèle développé pour les simulations numériques s'est avérée beaucoup trop complexe. Un modèle simplifié utilisant un système de deux équations obtenues par élimination adiabatique de la polarisation et de la population est en cours d'élaboration en collaboration avec les théoriciens de notre laboratoire mais les résultats sont trop parcellaires pour être actuellement utilisables. L'étude des instabilités et en particulier des comportements erratiques qui ont été observés uniquement dans le cas où la fréquence de résonance se déplace vers les basses fréquences et pour les fortes excursions de fréquence fera l'objet du chapitre suivant.



CHAPITRE 4:

**Chaos dans un bistable optique
soumis à une modulation de
fréquence**

4-1 - Introduction**4-2 - Réponses des bistables optiques à la modulation****4-3 - Vérification expérimentale de l'origine des phénomènes erratiques****4-4 - Diagrammes de bifurcation****4-5 - Diagrammes de phase et applications de premier retour****4-6 - Carte des phases****4-7 - Bistabilité généralisée**

4-1: Introduction

Après avoir étudié en détail le phénomène de déplacement des résonances non linéaires, nous allons nous consacrer à l'étude des oscillations erratiques observées aux fortes excursions de fréquence lorsque la fréquence de résonance se déplace vers les basses fréquences.

Cette étude, en partie publiée (ZEMMOURI 1991), débute par une mise en évidence des différents comportements temporels présentés par les bistables modulés. Nous contrôlerons ensuite que l'origine de ces régimes erratiques est uniquement liée à l'interaction de l'onde incidente avec le gaz absorbant saturable dans le Pérot-Fabry.

Les différents signaux observés seront ensuite analysés par l'intermédiaire des techniques habituelles telles que les diagrammes de

bifurcation, les diagrammes de phase et les applications de premier retour. Ces dernières nous permettront de vérifier que les comportements erratiques observés sont de nature chaotique et non "bruyante" ou quasipériodique. Tous les résultats expérimentaux seront comparés à ceux issus du modèle monomode. Enfin un dernier paragraphe sera consacré à la bistabilité généralisée qui n'a pu être, pour le moment, mise en évidence que par simulations numériques.

4-2: Réponses des bistables optiques à la modulation

Les bistables optiques de 23 m et de 182 m soumis à une modulation de la fréquence de source présentent des comportements temporels analogues qui diffèrent selon les valeurs des paramètres expérimentaux. Sur la figure 4.1 est représentée l'évolution temporelle de la puissance transmise par le bistable de 23 m lorsque le désaccord moléculaire décroît (489 (a), 382 (b) et 372 kHz (c)) alors que les autres paramètres expérimentaux sont maintenus constants. Signalons que dans toutes les expériences présentées dans ce chapitre, la transition moléculaire est en résonance avec un des modes de la cavité. Dans les conditions que nous venons de décrire, le système répond tout d'abord à la période de modulation T puis double sa période (régime $2T$) et devient erratique. Notons que les régimes périodiques $2^n T$ avec $n \geq 2$ (n entier) semblent se situer dans d'étroits domaines de paramètres et la présence du bruit de phase de la source, responsable des fluctuations du signal temporel en régime $2T$, n'a jamais permis de les mettre clairement en évidence. En revanche cette séquence $T-2T$ se termine naturellement par un régime erratique qui perd toute

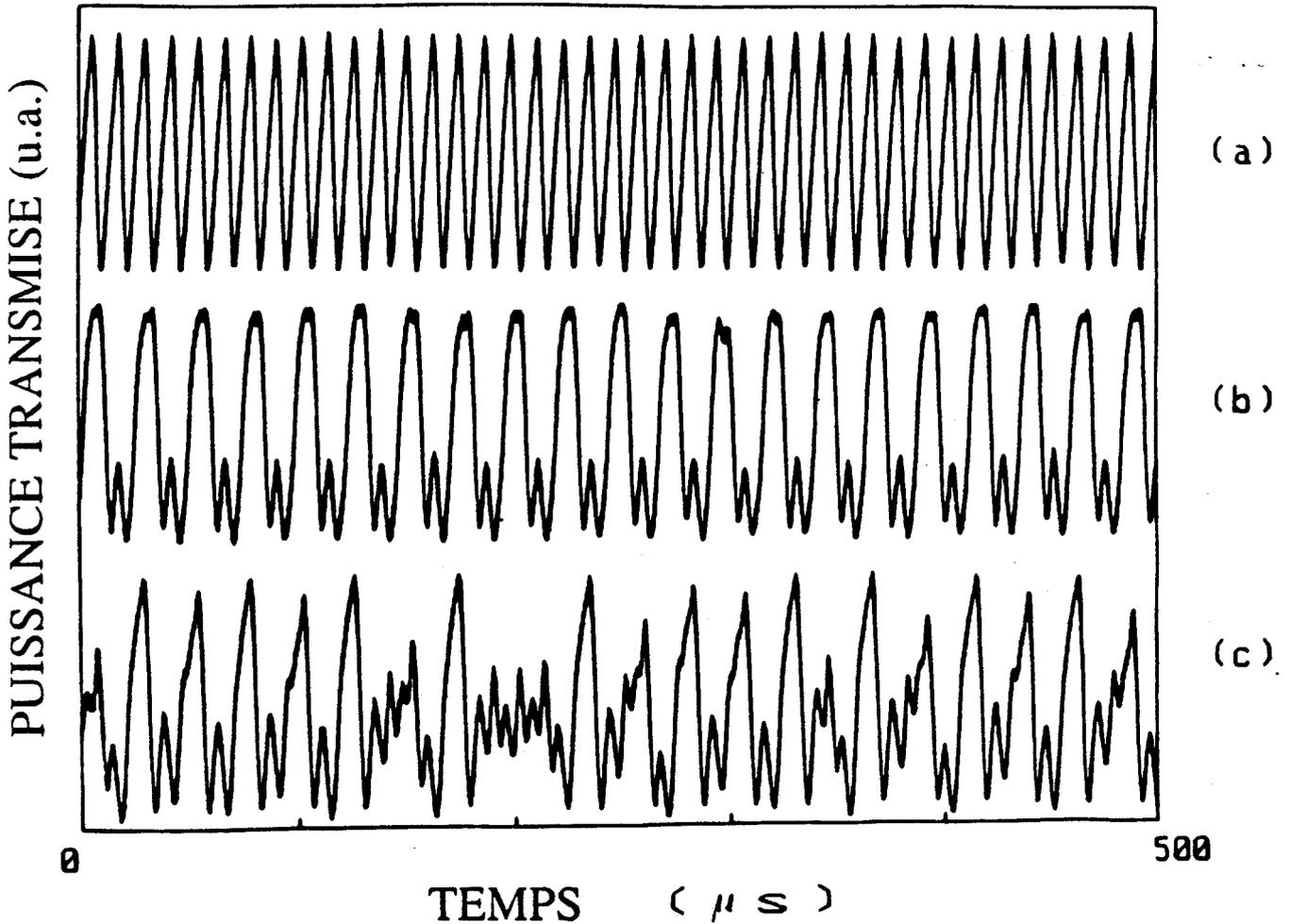


Figure 4.1: Evolution temporelle de la puissance transmise par le bistable de 23 m pour des désaccords moléculaires décroissants: 489 (a), 382 (b) et 372 kHz (c).

Les oscillations périodiques de (a) subissent un doublement de période en (b) et deviennent "chaotiques" en (c).

Conditions: pression = 1.85 mTorr; fréquence de modulation = 83 kHz; excursion de fréquence = 132 kHz; fréquence de Rabi incidente \approx 772.5 kHz.

régularité. Des résultats tout à fait similaires ont été obtenus sur le Pérot-Fabry de 182 m. Ainsi, sur la figure 4.2, la même séquence en augmentant l'excursion de fréquence: oscillation T-périodique puis 2T périodique et finalement un régime erratique. Il est à noter que d'autres régimes tels que le 3T ont pu également être observés sur les deux bistables.

Avant d'entreprendre une analyse systématique de ces phénomènes erratiques, il paraît nécessaire de vérifier que les oscillations observées dans les bistables sont engendrées uniquement par l'interaction de l'onde modulée avec ceux-ci et qu'elles ne sont pas liées à des fluctuations propres à la source ou à une contre-réaction du bistable sur cette dernière (retour de l'onde sur la source).

4-3: Vérification expérimentale de l'origine des phénomènes erratiques

Les tests présentés dans ce paragraphe ont été réalisés sur le Pérot-Fabry de 182 m. Ils consistent à comparer les spectres des champs émis par la source et transmis par le bistable dans des conditions expérimentales où le système présente soit un dédoublement de période (2T) ou soit un comportement erratique. On utilise pour cela la technique de détection superhétérodyne déjà décrite dans le paragraphe 4 du chapitre 1. Un schéma du dispositif de détection du signal transmis est présenté sur la figure 4.3. Un commutateur permet d'envoyer l'onde soit sur la détection superhétérodyne ou soit sur une détection de type quadratique. Cette dernière est utilisée pour contrôler les formes des signaux temporels. Le dispositif permettant l'analyse du

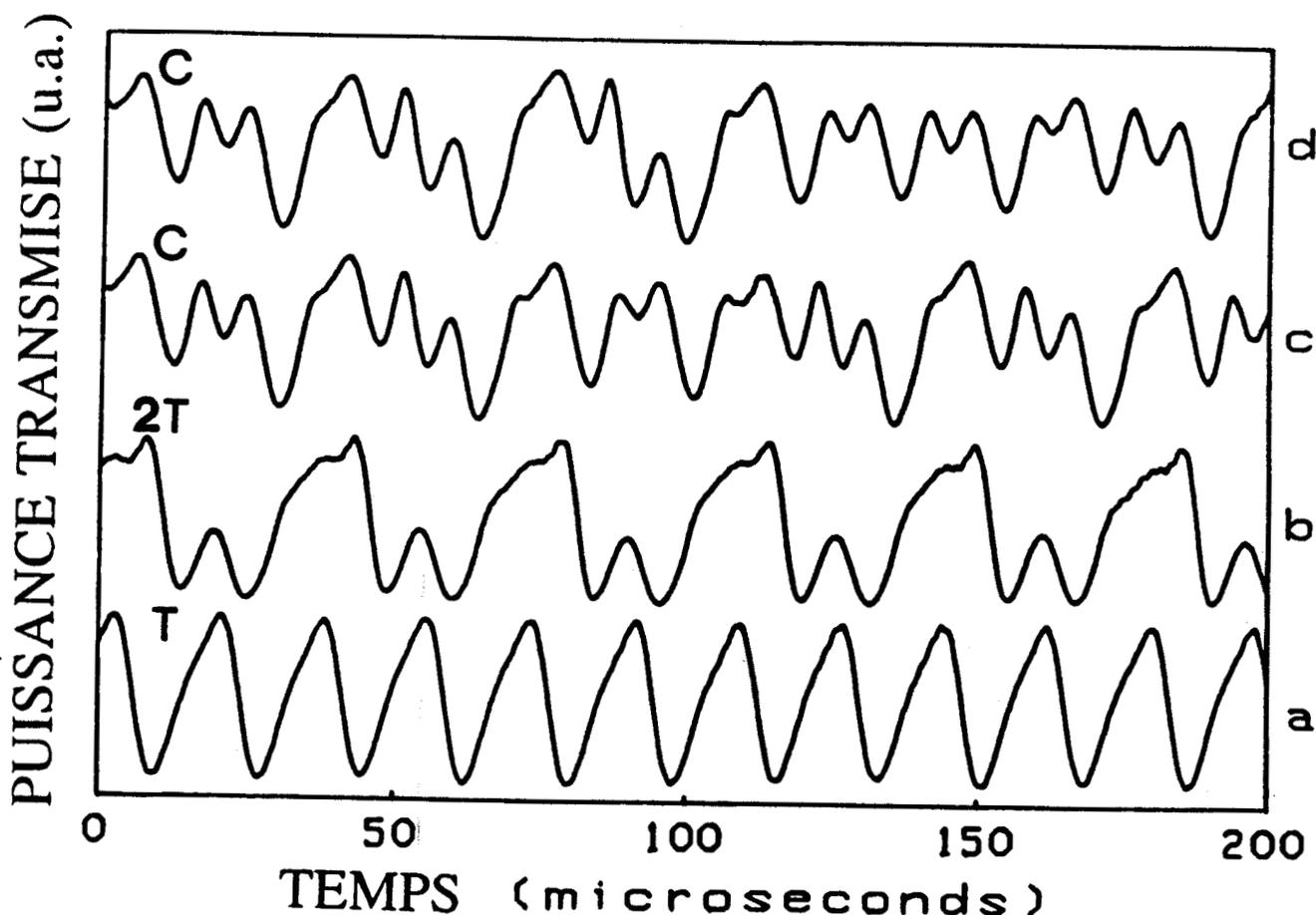


Figure 4.2: Evolution temporelle de la puissance transmise par le bistable de 182 m pour des excursions de fréquence croissantes: 42 (a), 78 (b), 97 (c) et 112 kHz (d).

T, 2T et C indiquent respectivement un régime périodique à la fréquence de modulation, un doublement de période et deux régimes "chaotiques".

Conditions: pression = 0.5 mTorr; fréquence de modulation = 56.5 kHz; désaccord moléculaire = 308.6 kHz; fréquence de Rabi incidente \approx 1.8 MHz.

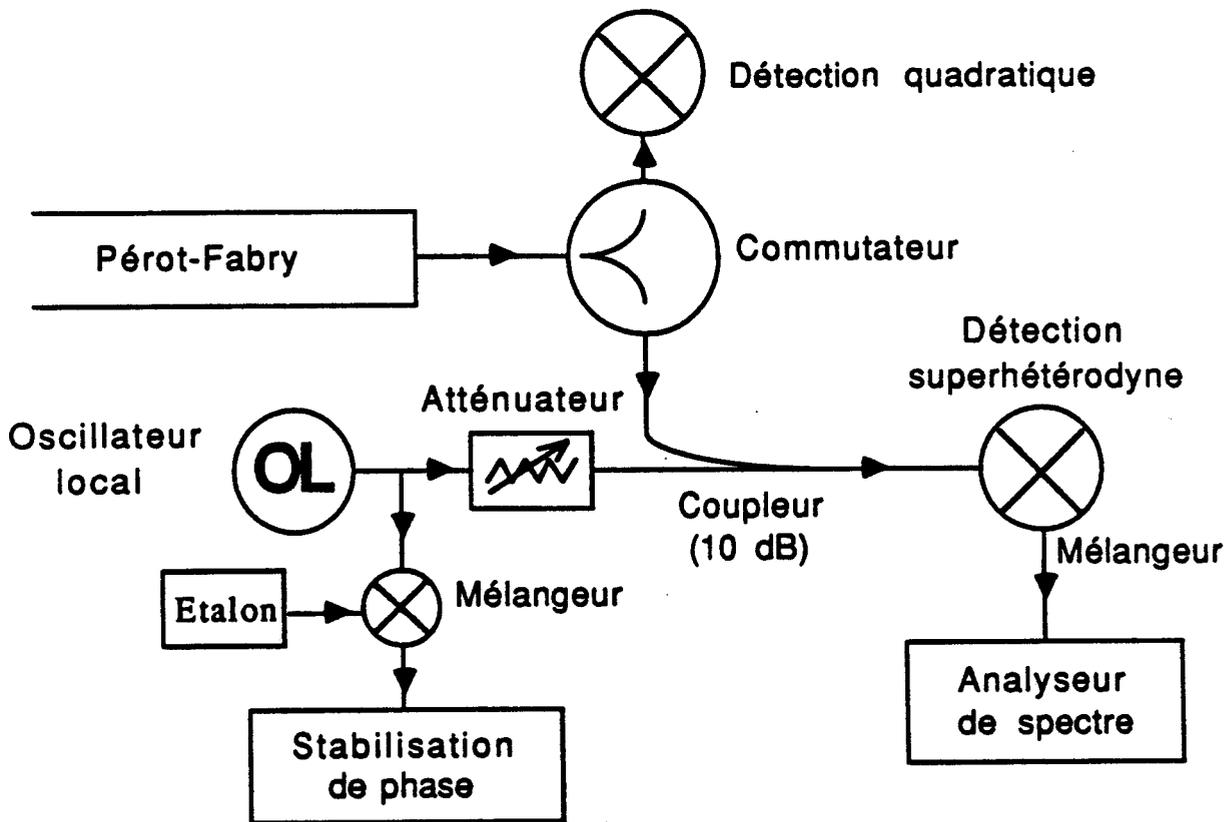


Figure 4.3 : Dispositif expérimental d'observation du spectre du champ transmis par le bistable. La détection quadratique est utilisée pour le contrôle des signaux temporels.

spectre du champ émis par la source couplée au bistable est représenté sur la figure 4.4.

La figure 4.5 présente le spectre du champ transmis par le bistable en présence d'un dédoublement de période. La pression est fixée à 0.67 mTorr, le désaccord moléculaire vaut 358 kHz, la fréquence de modulation 84 kHz et l'excursion de fréquence 86 kHz. Ce spectre fait apparaître la composante centrale du champ modulé ainsi que les deux bandes latérales situées à 84 kHz de cette dernière. Le dédoublement de période se manifeste par l'apparition de deux autres composantes d'amplitudes comparables à celles des bandes latérales et se situent à environ 42 kHz de la composante centrale. Le spectre du champ émis par la source, observé dans des conditions analogues, est représenté sur la figure 4.6. A 42 kHz de la composante centrale du spectre, il ne subsiste que des pics résiduels dont l'amplitude se situe au moins à 25 dB au dessous de celles des bandes latérales. Ce résultat montre que la source n'est pas impliquée dans le mécanisme de dédoublement de période et plus généralement dans celui des régimes erratiques. Les pics résiduels observés sur le spectre du champ émis par la source peuvent être attribués au fait que l'onde réfléchiée par le bistable est légèrement couplée à la détection. Nous avons donc vérifié que les phénomènes observés sont exclusivement liés à l'interaction entre l'onde incidente et le bistable.

Dans des conditions expérimentales où le comportement du système devient erratique, le spectre du champ transmis par le bistable présente une allure quasi-continue caractéristique de tous les phénomènes aperiodiques (figure 4.7). Cependant un tel spectre n'est pas automatiquement attribuable à un signal aperiodique (bruit ou

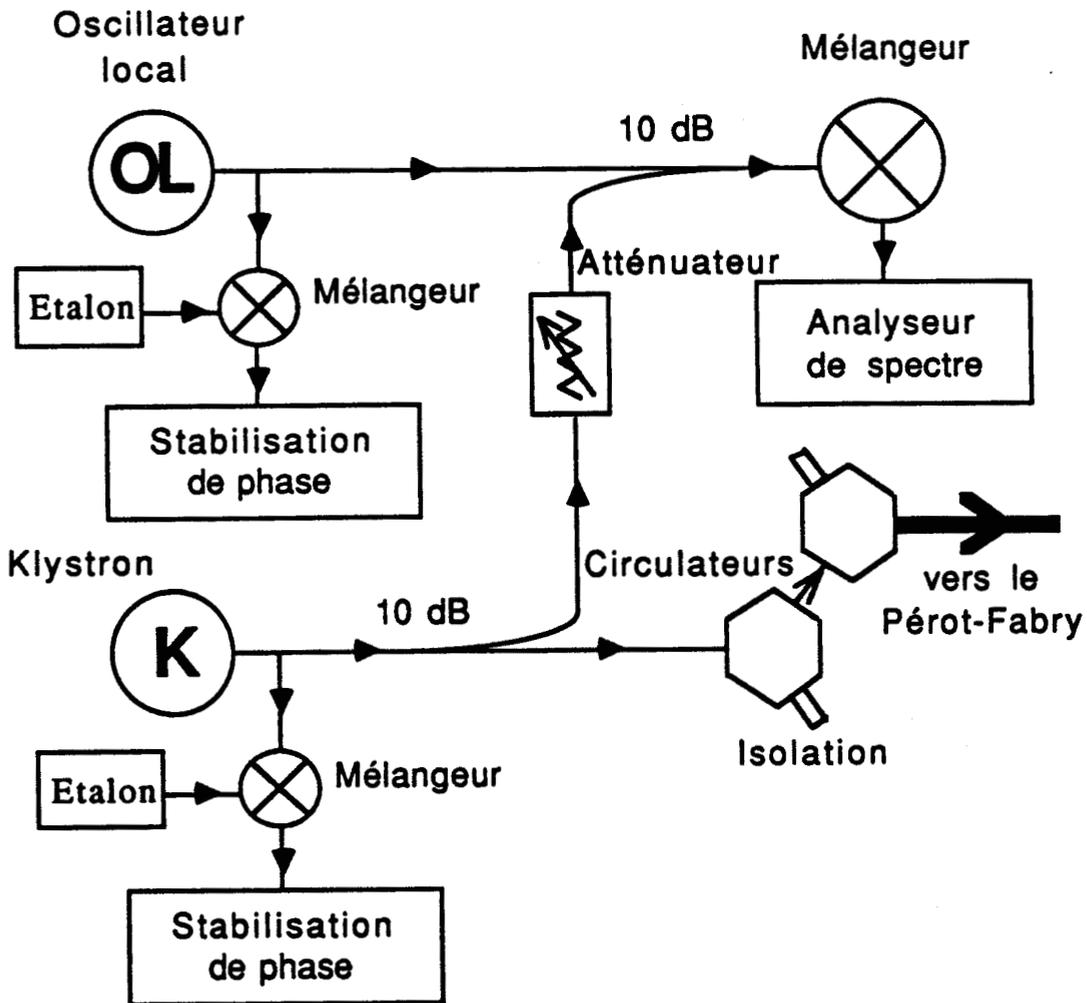


Figure 4.4 : Dispositif d'analyse du spectre du champ émis par la source couplée au bistable.

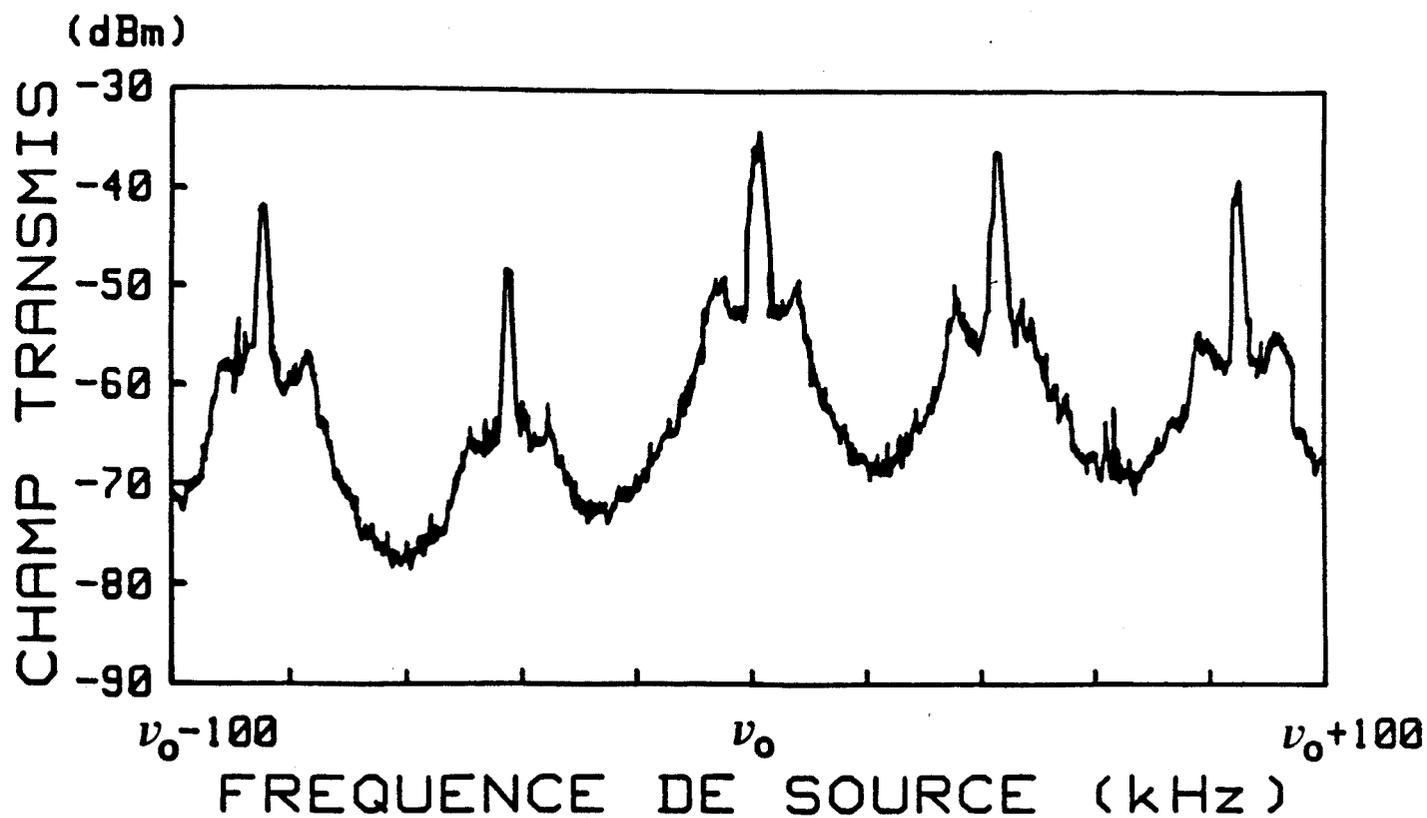


Figure 4.5: Spectre du champ transmis par le bistable de 182 m en présence d'un dédoublement de période.
 Conditions: pression = 0.67 mTorr; désaccord moléculaire = 358.7 kHz; fréquence de modulation = 84 kHz; excursion de fréquence = 86 kHz; $\nu_m = \nu_p$.

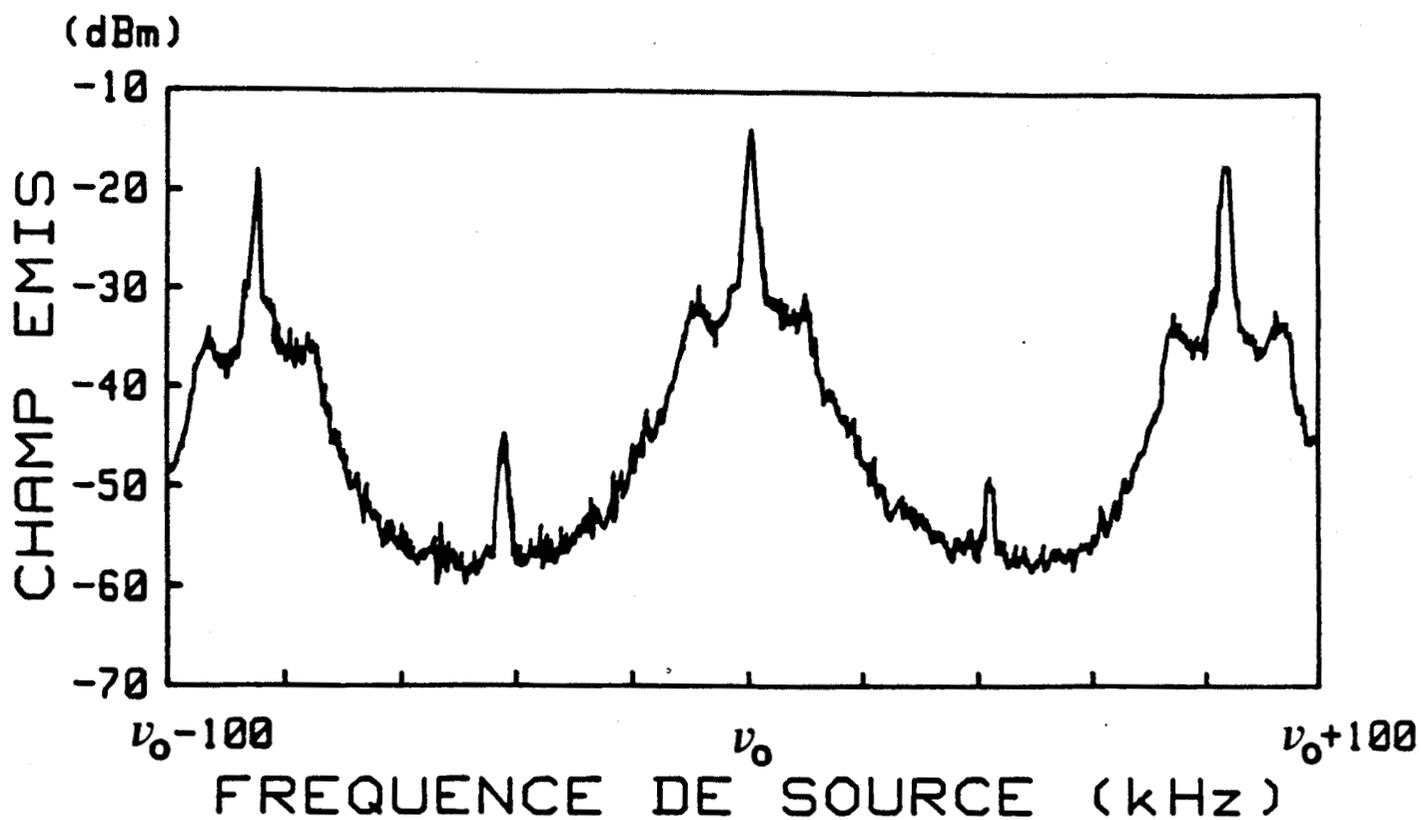


Figure 4.6: Spectre du champ émis par la source en présence d'un dédoublement de période.

Conditions: pression = 0.84 mTorr; désaccord moléculaire = 391.5 kHz; fréquence de modulation = 84 kHz; excursion de fréquence = 86 kHz; $\nu_m = \nu_p$.

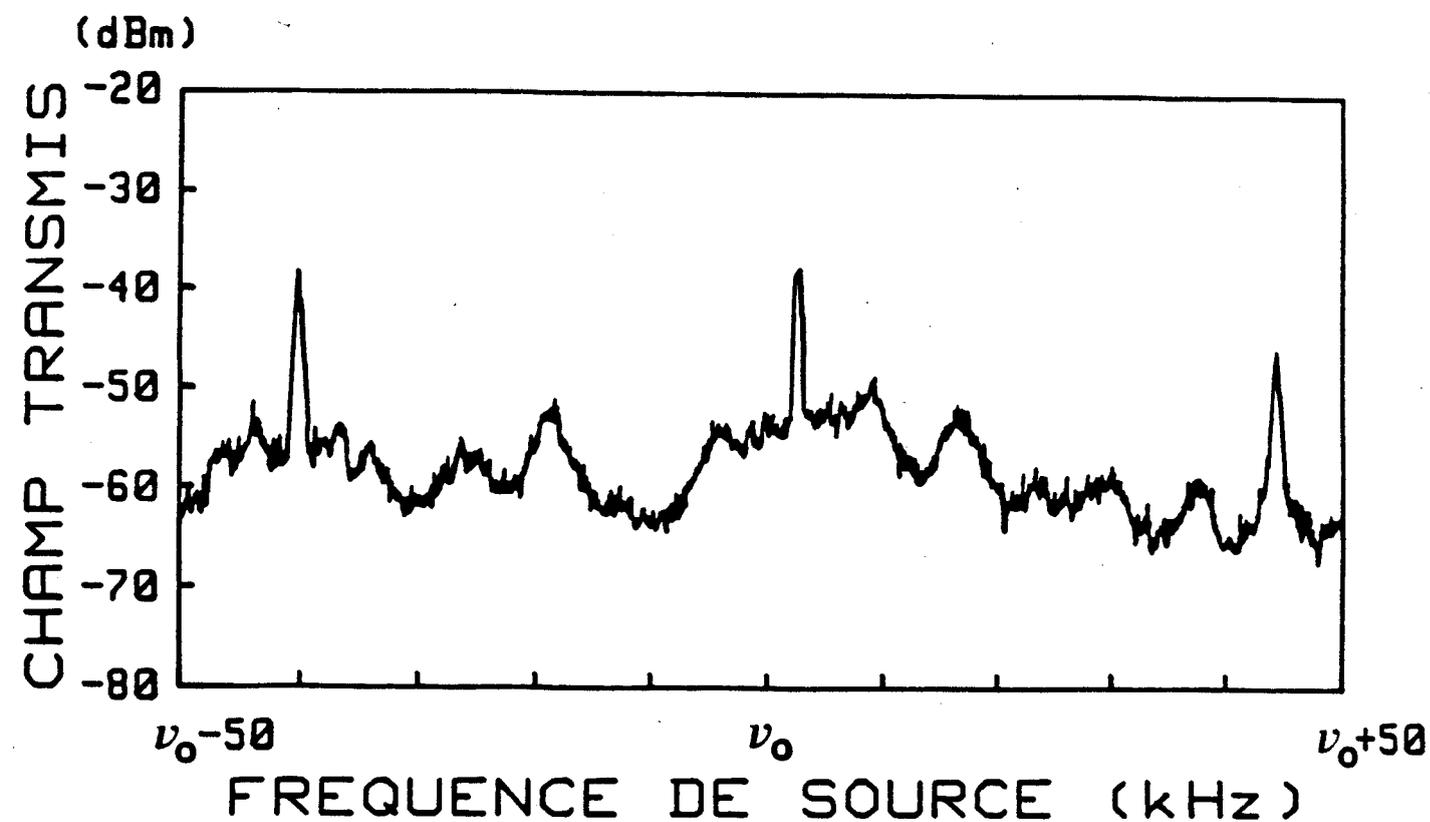


Figure 4.7: Spectre du champ transmis par le bistable en présence d'un régime erratique.

Conditions: pression = 0.91 mTorr; désaccord moléculaire = 192.5 kHz; fréquence de modulation = 84 kHz; excursion de fréquence = 86 kHz; $\nu_m = \nu_p$.

chaos) car c'est également la forme prise par le spectre d'un signal quasi-périodique à nombre de fréquences très élevé. Cette méthode d'analyse nous a permis uniquement de préciser l'origine des oscillations observées sur les courbes de résonance. Elle ne permet pas à elle seule de faire la distinction entre un bruit, un régime quasipériodique ou chaotique d'où la nécessité de recourir à d'autres méthodes.

Nous nous proposons dans la suite de ce chapitre d'analyser notre système de manière plus globale ce qui nous permettra de définir les frontières existant entre les différents régimes. Ceci sera rendu possible grâce à l'utilisation des diagrammes de bifurcation. Puis nous reconstruirons les attracteurs associés aux différents régimes dans un espace des phases à trois dimensions et nous utiliserons les applications de premier retour qui caractérisent et signent parfaitement le type des régimes. Les résultats expérimentaux correspondant à chacune de ces étapes seront comparés avec ceux calculés à l'aide du modèle monomode présenté dans le deuxième chapitre de ce mémoire. L'ensemble des expériences présentées par la suite a été réalisé sur le bistable de 23 m.

4-4: Diagrammes de bifurcation

La visualisation d'un diagramme de bifurcation permet d'appréhender l'ensemble du comportement du système en fonction d'un paramètre de contrôle que l'on balaye, et s'avère particulièrement utile pour caractériser ce comportement comme nous le verrons par la suite. Dans nos expériences six paramètres peuvent être ajustés: la

pression, le désaccord moléculaire, la fréquence de modulation, l'amplitude de modulation (excursion de fréquence), la puissance incidente et la longueur de la cavité. Mais seuls l'excursion de fréquence et surtout le désaccord moléculaire ont été balayés dans nos expériences. En fait la plupart des diagrammes de bifurcation présentés dans ce mémoire ont été obtenus en balayant le désaccord moléculaire. Rappelons que la longueur de la cavité sera toujours ajustée de façon à avoir une coïncidence de fréquence entre un mode de la cavité et la transition moléculaire.

Dans le cas d'un système modulé extérieurement, le diagramme de bifurcation permet de visualiser, en fonction du paramètre modulé, l'ensemble des valeurs successives que peut prendre la puissance transmise en un point particulier du signal de modulation. Ainsi pour une valeur particulière du paramètre de contrôle, les régimes périodiques T , $2T$... nT seront représentés respectivement par 1, 2... n points et tout régime erratique sera représenté par une "infinité" de points. Le dispositif expérimental permettant l'obtention des diagrammes de bifurcation est représenté sur la figure 4.8. Il s'agit d'une technique assez couramment utilisée au laboratoire (DANGOISSE 1987, DEROZIER 1991). Le signal de modulation appliqué au réflecteur du klystron est généré par un synthétiseur-générateur de fonctions (Hewlett-Packard 3325 A). Le signal détecté à la sortie du bistable, préalablement amplifié par un amplificateur 0-2 MHz, est traité par un échantillonneur bloqueur (SHM 2E). L'ouverture de la porte de l'échantillonneur est commandée par une impulsion fournie par un générateur d'impulsions (Philips; type PM 5715), lui-même synchronisé sur le signal de modulation. Ce générateur d'impulsions permet de régler la position de l'impulsion commandant l'ouverture de la porte

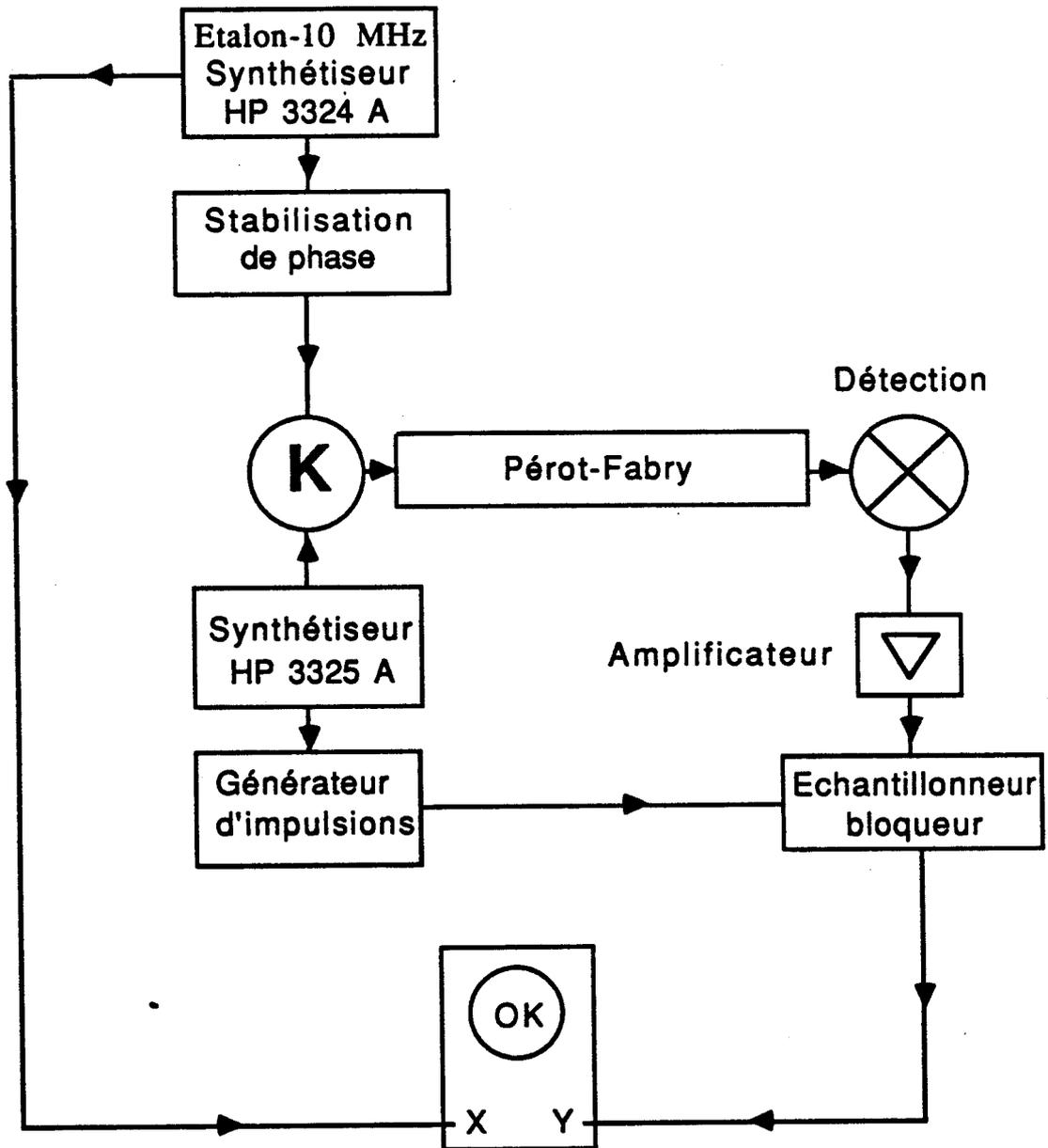
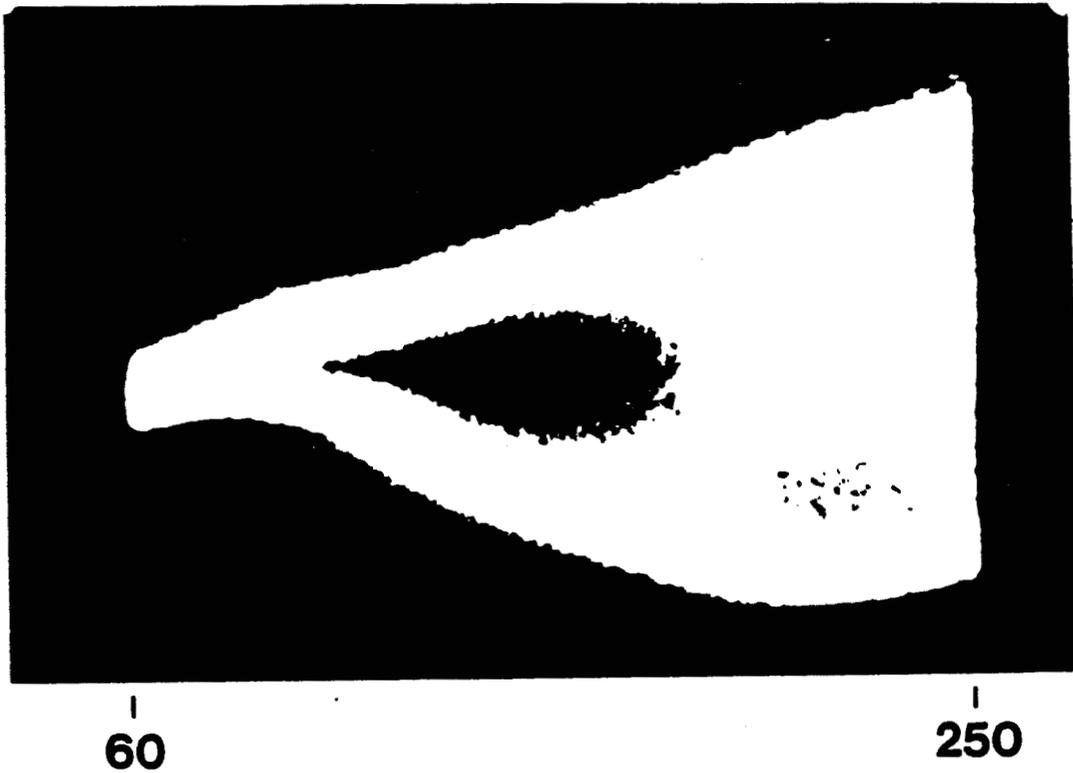


Figure 4.8 : Observation des diagrammes de bifurcation:
dispositif expérimental.
(balayage du désaccord moléculaire)

d'échantillonnage en n'importe quel point de la sinusoïde d'excitation. La position des portes d'échantillonnage influe de façon importante sur la représentation des diagrammes de bifurcation. Aussi il convient d'ajuster cette position de façon à accroître au maximum le développement des diagrammes de bifurcation ce qui rend leur exploitation plus aisée. La position optimale se situe sur la pente de la sinusoïde d'excitation. Le signal délivré par l'échantillonneur est ensuite visualisé sur un oscilloscope en fonction du désaccord moléculaire balayé à l'aide d'un deuxième synthétiseur (HP 3324 A) ou en fonction de l'amplitude du signal de modulation. Les diagrammes de bifurcation expérimentaux visualisés sur oscilloscope et photographiés seront comparés dans la suite aux diagrammes de bifurcation numériques calculés à l'aide du modèle monomode dans des conditions voisines de celles des expériences.

Ce paragraphe sera illustré par quatre diagrammes de bifurcation bien représentatifs des comportements observés dans notre système. Le premier diagramme expérimental représenté sur la figure 4.9 correspond à une séquence analogue à celle présentée lors de l'étude des signaux temporels (figure 4.2). Dans cette expérience, le paramètre de contrôle balayé est l'amplitude de modulation (excursion de fréquence). Lorsque cette amplitude croît, le système initialement T-périodique voit sa période doublée puis son comportement devient erratique. Ce comportement correspond au début d'une cascade sous-harmonique (scénario de Feigenbaum) où le signal passe d'un régime de période T à un régime 2T, puis 4T, 8T... (BERGE 1984) puis perd toute récurrence et devient erratique. La présence d'un régime erratique après un doublement de période est déjà une forte indication d'un chaos déterministe. Expérimentalement cette cascade est masquée voire



EXCURSION DE FREQUENCE

Figure 4.9: Diagramme de bifurcation expérimental.
Conditions: pression = 2.3 mTorr; fréquence de modulation = 156.3 kHz; fréquence de Rabi incidente = 810 kHz; désaccord moléculaire = 282 kHz.

interrompue (MOSS 1989) par les fluctuations dues au bruit de phase de la source qui empêchent de discerner les régimes périodiques d'ordres supérieurs à 2 tels que 4T, 8T... Notons toutefois que le régime 4T peut être observé sur le spectre du champ transmis.

Les trois autres diagrammes expérimentaux présentés ont été obtenus pour trois valeurs distinctes de la puissance incidente alors que le désaccord moléculaire est lentement balayé des hautes vers les basses fréquences (les autres paramètres sont maintenus constants). Dans tous les cas la pression vaut 2.4 mTorr, la fréquence de modulation 144 kHz et l'excursion de fréquence 164 kHz. La largeur totale à mi-hauteur du mode de la cavité était lors de l'expérience de 99.6 kHz.

Pour le premier de ces diagrammes de bifurcation (figure 4.10-a), la fréquence de Rabi incidente est estimée à 990 kHz. Il est important de constater que le régime erratique apparaît brutalement après un régime T-périodique. Cette zone erratique est interrompue par une fenêtre 4T. De plus des "nervures" correspondant à des orbites instables apparaissent très nettement. Les simulations numériques issues du modèle monomode en onde plane reproduisent d'une manière tout à fait surprenante le diagramme de bifurcation expérimental (figure 4.10-b). Les paramètres sont identiques à ceux de l'expérience à l'exception de la fréquence de modulation (115 kHz) qui a été minorée de 20% par rapport à sa valeur expérimentale. Ce diagramme met clairement en évidence une alternance entre régimes erratiques et périodiques nT qui dans l'expérience est masquée par le bruit de phase de la source. Les fenêtres périodiques visibles se succèdent en ordre décroissant en passant par des régimes 8T, 7T... et 3T. Un agrandissement de la partie haute fréquence de ce

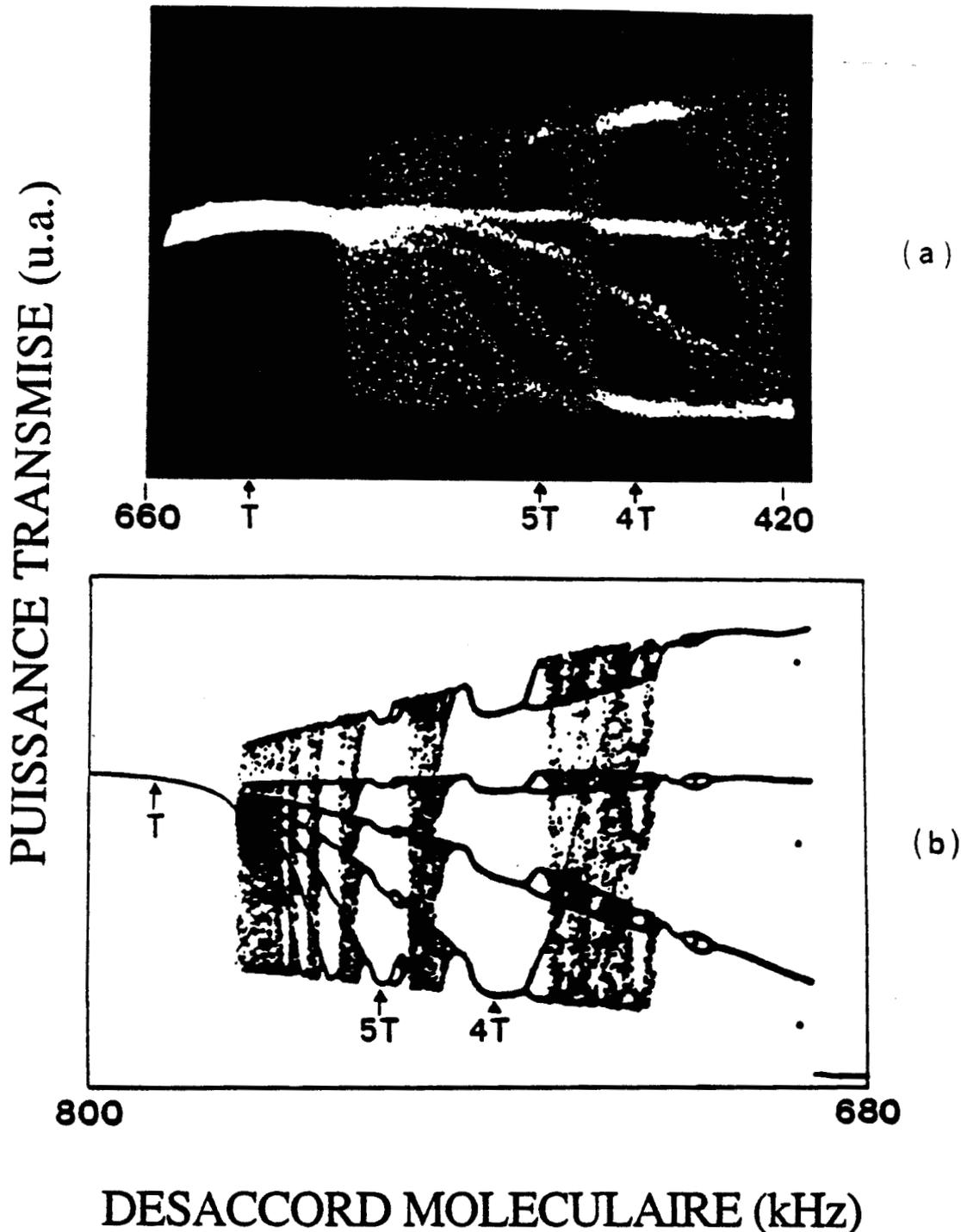
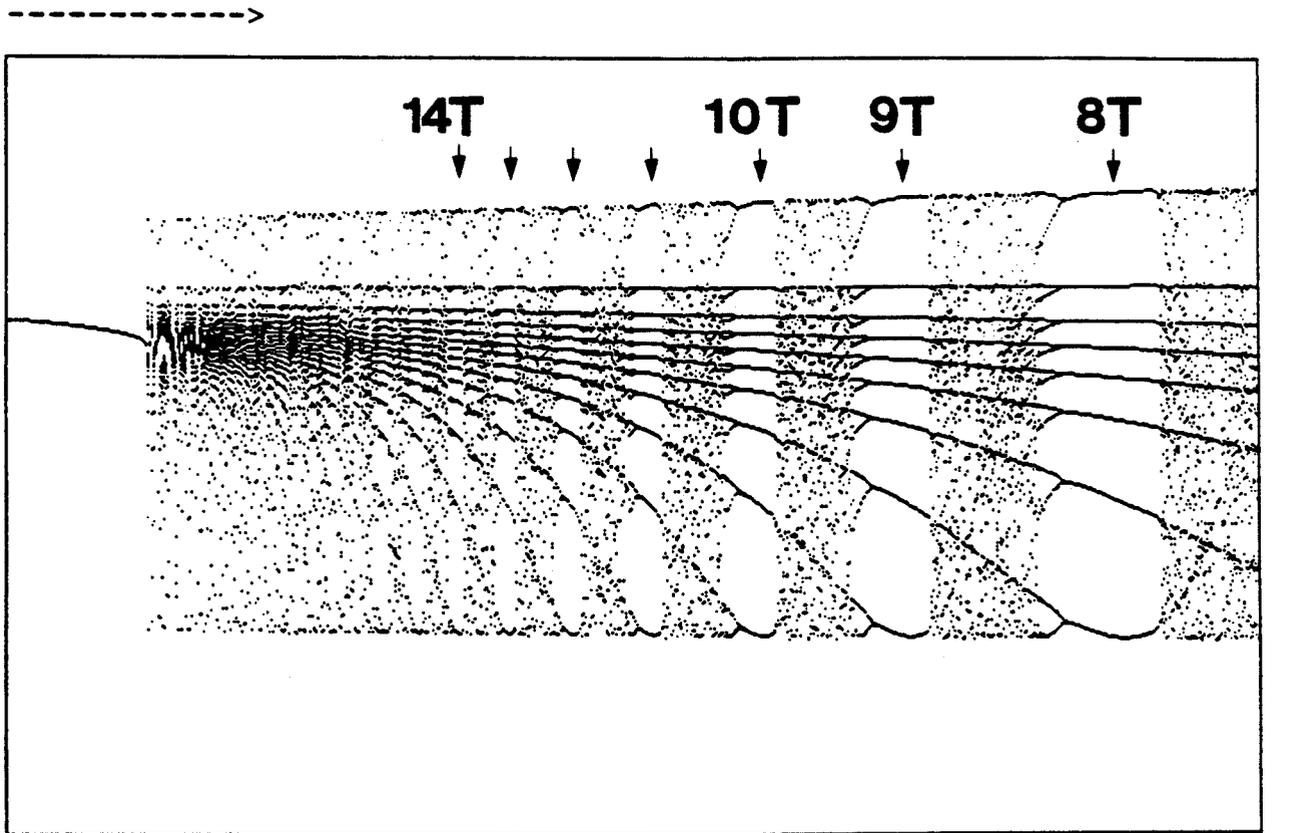


Figure 4.10: Diagrammes de bifurcation expérimental (a) et numérique (b) observés pour une fréquence de Rabi incidente de 990 kHz lorsque l'on balaye le désaccord moléculaire.
 Conditions: pression = 2.4 mTorr; excursion de fréquence = 164 kHz; fréquence de modulation = 144 kHz pour l'expérience et 115 kHz pour les simulations.

diagramme de bifurcation (figure 4.11) montre l'existence de fenêtres périodiques de $8T$ à $14T$. La largeur de ces fenêtres augmente au fur et à mesure que leur ordre décroît. Pour les faibles valeurs du désaccord moléculaire, le système tombe sur la branche basse du cycle de bistabilité. Ce phénomène n'apparaît pas sur le diagramme expérimental mais a été néanmoins observé. Des diagrammes de bifurcation semblables ont été obtenus par simulations numériques sur un circuit électronique (BRORSON 1983), expérimentalement et numériquement sur des jonctions p-n couplées (VAN BUSKIRK 1985), ainsi que numériquement sur un laser à absorbant saturable à pompe modulée (LAUTERBORN 1988). Dans le premier cas, le scénario est interprété comme une succession de crises alors que dans les deux autres cas il s'agit de quasipériodicité. Dans notre cas, une exploration systématique de toutes les zones erratiques sur les diagrammes de bifurcations numériques par l'intermédiaire des applications de premier retour que nous présentons par la suite n'a pas permis de mettre en évidence de la quasipériodicité. D'autre part, dans les simulations numériques, le diagramme de bifurcation est observé pour des valeurs du désaccord moléculaire plus grandes que dans les expériences. Mais des simulations numériques ont montré qu'une variation relativement faible de quelques centièmes de certains paramètres (telle la pression) entraîne un déplacement en fréquence non négligeable de l'ensemble de la dynamique du système. Comme dans le chapitre précédent les écarts entre expériences et simulations sont attribuables à une estimation imparfaite de la puissance incidente ainsi qu'à une mesure imprécise de la pression.

Les deux autres diagrammes de bifurcation expérimentaux représentés sur les figures 4.12 et 4.13 ont été obtenus pour des



774

765

DESACCORD MOLECULAIRE (kHz)

Figure 4.11: Agrandissement d'une partie du diagramme de bifurcation de la figure 4.10-b.

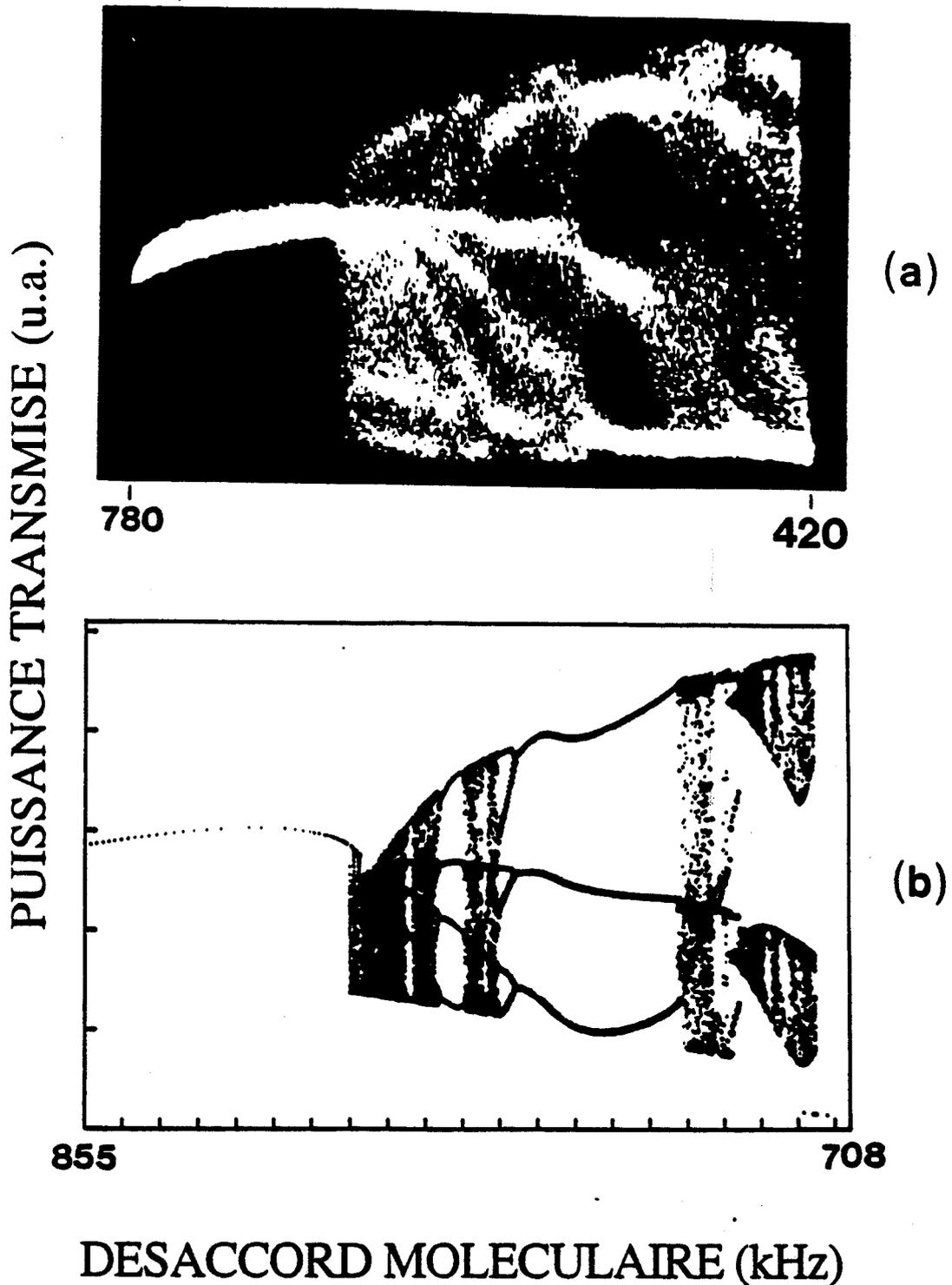


Figure 4.12: Diagrammes de bifurcation expérimental (a) et numérique (b) obtenus dans les mêmes conditions que ceux de la figure 4.10 excepté la fréquence de Rabi incidente qui est estimée à 920 kHz.

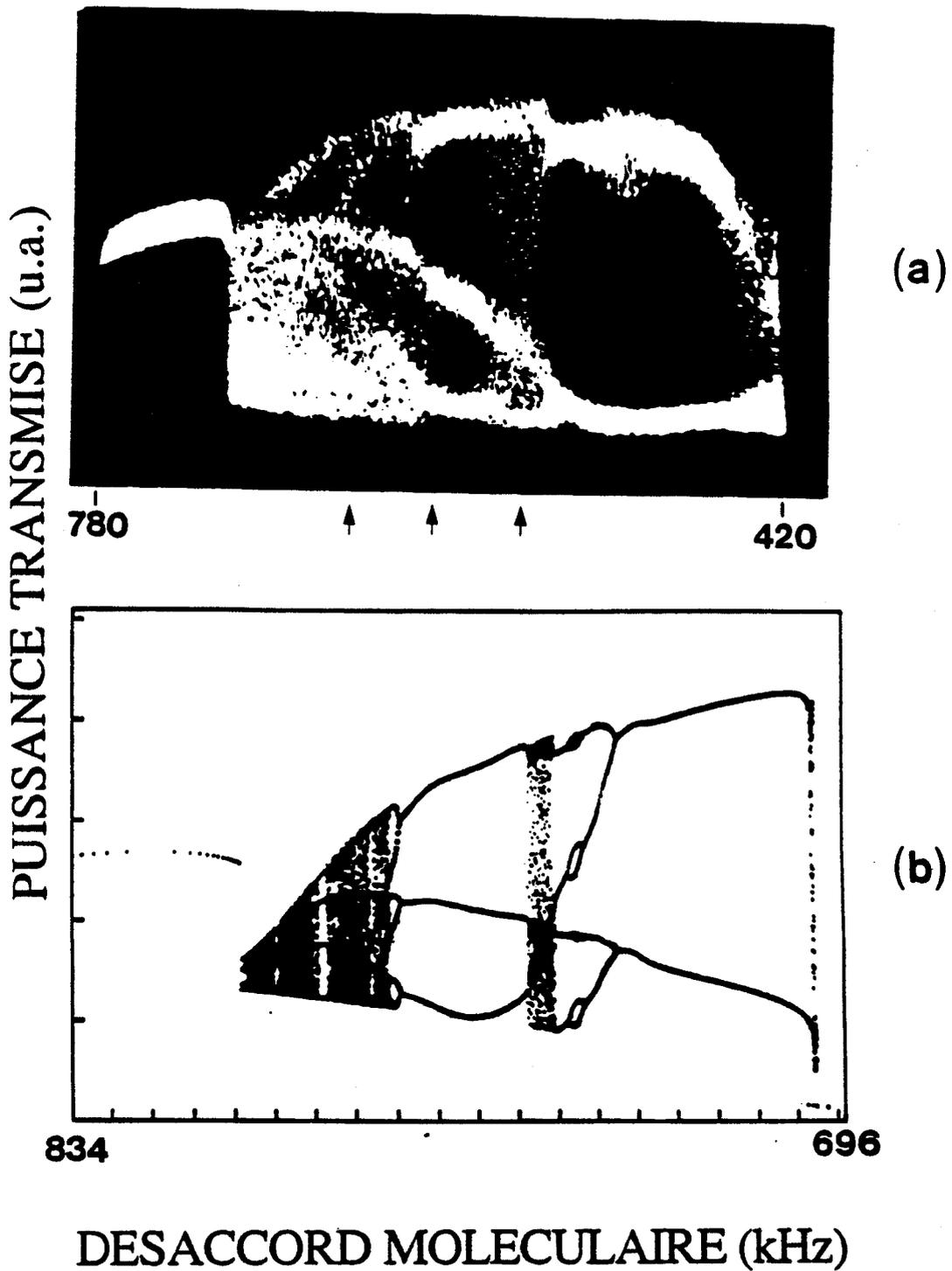


Figure 4.13: Diagrammes de bifurcation expérimental (a) et numérique (b) obtenus dans les mêmes conditions que ceux de la figure 4.10 excepté la fréquence de Rabi incidente qui est estimée à 890 kHz.

fréquences de Rabi incidentes de 920 kHz et 890 kHz respectivement. Tout comme pour le diagramme de la figure 4.10-b, les résultats numériques correspondant utilisent une fréquence de modulation égale à 115 kHz. Là encore, le "chaos" apparaît brutalement après le régime T et est interrompu par des fenêtres périodiques dont l'ordre décroît ($3T$, $2T$) avec le désaccord moléculaire. Le système tombe également après une étroite bande chaotique sur la branche basse pour les faibles valeurs du désaccord moléculaire. Notons enfin que l'examen des trois diagrammes (figures 4.10, 4.12, 4.13) montre que le nombre de fenêtres périodiques observables croît avec la puissance incidente.

La vision globale de la dynamique du bistable, que fournissent les diagrammes de bifurcation, nous renseigne sur les conditions dans lesquelles le système passe d'un régime à un autre. Mais en aucun cas elle ne nous informe sur la nature même des régimes erratiques. Pour cela nous avons recours aux diagrammes de phase et aux applications de premier retour.

4-5: Diagrammes de phase et applications de premier retour

Dans la mesure où le système physique ne peut être décrit par un système d'équations intégrables, on est amené à étudier chaque solution par l'intermédiaire de sa trajectoire dans l'espace des variables. Construire cet espace des variables ou espace des phases du système dynamique nécessite la connaissance de tous ses degrés de liberté. Or on n'a que partiellement accès à cette information du moins expérimentalement. Si le nombre de degrés de liberté est grand (>3) on

se contente de projeter l'attracteur dans un sous-espace des phases de dimension maximale égale à trois.

Dans la pratique, on ne mesure en général que les variations d'une seule grandeur liée de manière plus ou moins complexe à une ou plusieurs des variables du système. Toutefois l'évolution de cette grandeur reflète suffisamment bien le comportement global du système pour permettre de reconstruire l'attracteur. Si on observe par exemple la variable $I(t)$ où I désigne la puissance transmise par le bistable, il est possible de reconstruire l'attracteur dans l'espace $I(t), I(t+\tau), I(t+2\tau)$ où τ est un intervalle de temps arbitraire. On considère ainsi que les intensités du signal détecté, prises à des temps différents, sont des variables indépendantes du système (TAKENS 1981, FARMER 1982). La représentation obtenue dans un tel espace n'est certes pas identique à celle obtenue dans l'espace des phases mais conserve les propriétés topologiques de l'attracteur.

En présence d'une modulation extérieure, la phase instantanée de la modulation notée $\Phi(t)=2\pi ft$ est une variable connue du système. Il paraît donc judicieux d'utiliser cette variable pour la représentation des attracteurs. L'espace de projection sera alors défini par $\Phi(t), I(t), I(t+\tau)$. Ces trois grandeurs sont associées à un système de coordonnées cylindriques où la phase instantanée de la modulation $\Phi(t)$ correspond à la coordonnée angulaire, $I(t)$ à la coordonnée radiale et $I(t+\tau)$ à la coordonnée longitudinale.

Les signaux temporels issus des expériences et des simulations numériques sont alors enregistrés sur micro-ordinateur puis traités numériquement de manière à reconstruire les trajectoires

correspondantes. Les diagrammes de phase représentés sur les figures 4.14 a-b-c ont été obtenus dans les mêmes conditions que les diagrammes de bifurcation des figures 4.10, 4.12 et 4.13 mais pour une fréquence de Rabi incidente estimée à 910 kHz. Ils correspondent à trois valeurs distinctes du désaccord moléculaire respectivement égales à 420 (a), 408 (b) et 360 kHz (c). Dans ces conditions expérimentales, le diagramme de bifurcation a une forme très voisine de celle du diagramme de la figure 4.13 et les diagrammes de phase correspondent au régime 3T (b) et aux deux zones erratiques situées de part et d'autre de cette région (voir flèches sur la figure 4.13). Dans les trois cas, la trajectoire du système est confinée dans une région localisée de l'espace que l'on désigne par le terme d'attracteur. Notons la forte ressemblance entre les deux attracteurs associés aux régimes erratiques qui semblent être de même nature. Ces attracteurs sont similaires à ceux calculés à l'aide du modèle monomode et représentés sur les figures 4.14 d-e-f. Compte tenu du déplacement d'ensemble de la dynamique dans les simulations, ces trois courbes ont été calculées pour des valeurs du désaccord moléculaire déduites des valeurs expérimentales par homothétie et correspondent aux trois zones explorées dans les expériences. Ce choix n'introduit que de légères différences entre comportements expérimentaux et numériques.

Pour les deux désaccords moléculaires extrêmes (courbes d et f), l'homothétie conduit à des trajectoires expérimentales et numériques comparables. En revanche, la valeur intermédiaire (courbe e) correspond à un régime 6T alors qu'expérimentalement on observe un régime 3T bruyant. La comparaison entre les figures (b) et (e) permet d'illustrer la difficulté à discerner expérimentalement les régimes périodiques d'ordres supérieurs dans une cascade sous-harmonique et

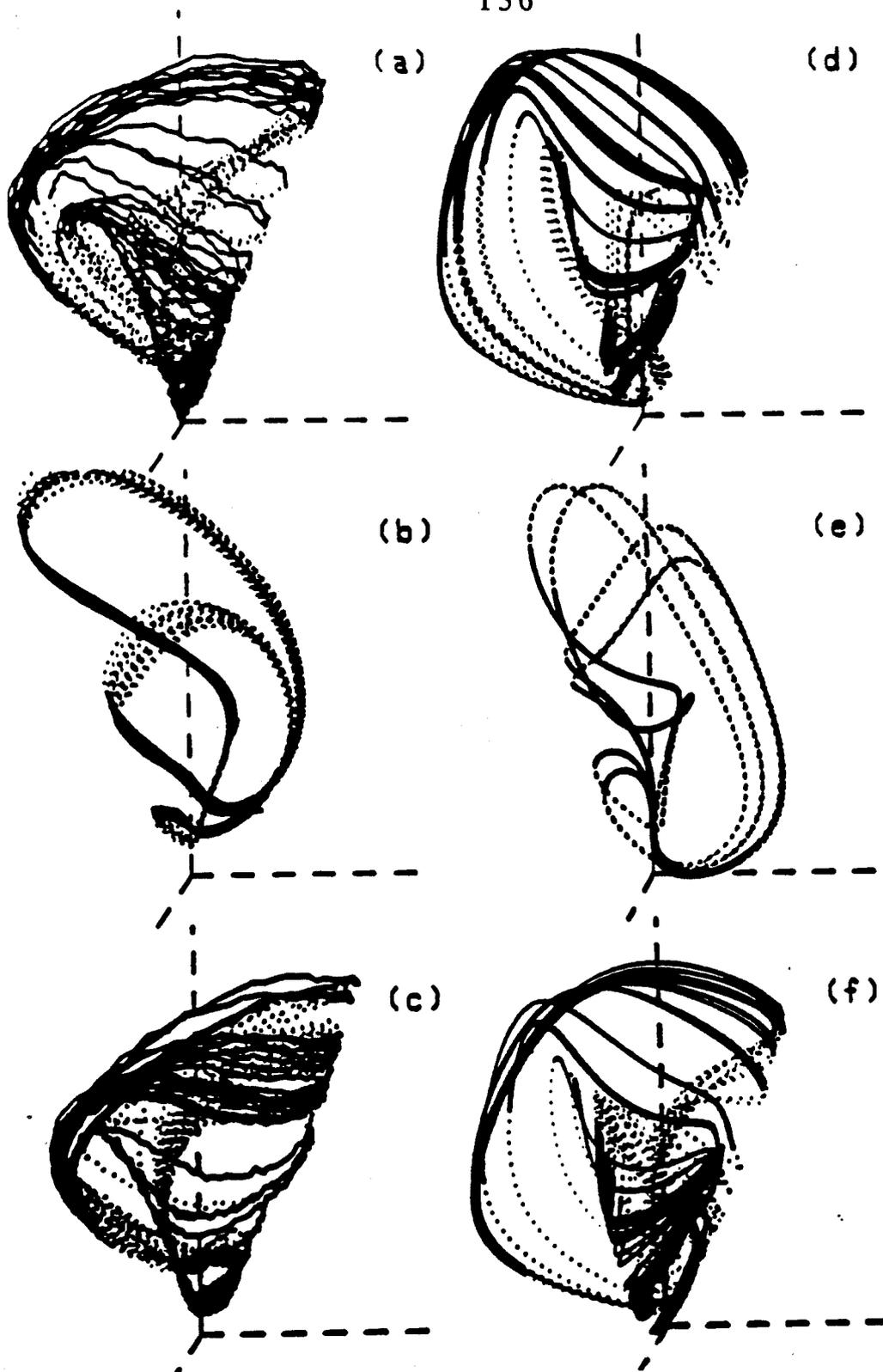


Figure 4.14: Attracteurs expérimentaux (a-b-c) et numériques (d-e-f) reconstruits, obtenus pour deux régimes chaotiques différents (a-d) et (c-f) situés de part et d'autre d'un régime périodique (3T pour (b) et 6T pour (c)).

Conditions: fréquence de Rabi incidente ≈ 910 kHz; désaccord moléculaire=420 (a), 408 (b), 360 (c), 816 (d), 804 (e) et 762 kHz (f).

Les autres paramètres sont identiques à ceux de la figure 4.10.

donc dans le cas présent le 6T du 3T. En effet pour le 6T numérique, la trajectoire décrit six boucles se regroupant par paires. A l'intérieur de chaque paire, l'écart entre boucles est comparable aux fluctuations introduites par le bruit sur les trois boucles du diagramme expérimental.

L'analyse de la trajectoire du système dans l'espace des phases par l'intermédiaire des applications de premier retour va permettre de préciser la nature des attracteurs. Dans le système de coordonnées que nous utilisons, les applications de premier retour peuvent se reconstruire de la façon suivante. Considérons un plan P contenant l'axe longitudinal $I(t+\tau)$ et caractérisé par une valeur particulière de la coordonnée angulaire $\Phi_0 = \Phi(t_0) \pmod{2\pi}$ (figure 4.15). La trajectoire du système traverse ce plan deux fois par période du signal de modulation (T) dans des sens opposés. Si l'on ne tient compte que des points d'intersection de la trajectoire avec ce plan correspondant à un sens de traversée déterminé, nous obtenons la série de points notés $P_0, P_1 \dots P_n$ et caractérisés dans le plan P par leurs abscisses $I(t_0), I(t_0+T) \dots I(t_0+nT)$. L'ensemble de ces points définit une section de Poincaré. L'application de premier retour s'obtient alors en traçant l'abscisse $I(t_0+(k+1)T)$ des points P_{k+1} en fonction de l'abscisse $I(t_0+kT)$ de leur antécédents P_k . Si dans les constructions de l'attracteur l'intervalle de temps τ est égal à la période de modulation T, les points d'intersection de la trajectoire avec le plan P définissent directement l'application de premier retour. L'application de premier retour apparaît comme étant une section de Poincaré particulière. Cette méthode de construction permet de restituer les applications telles qu'elles peuvent être obtenues expérimentalement.

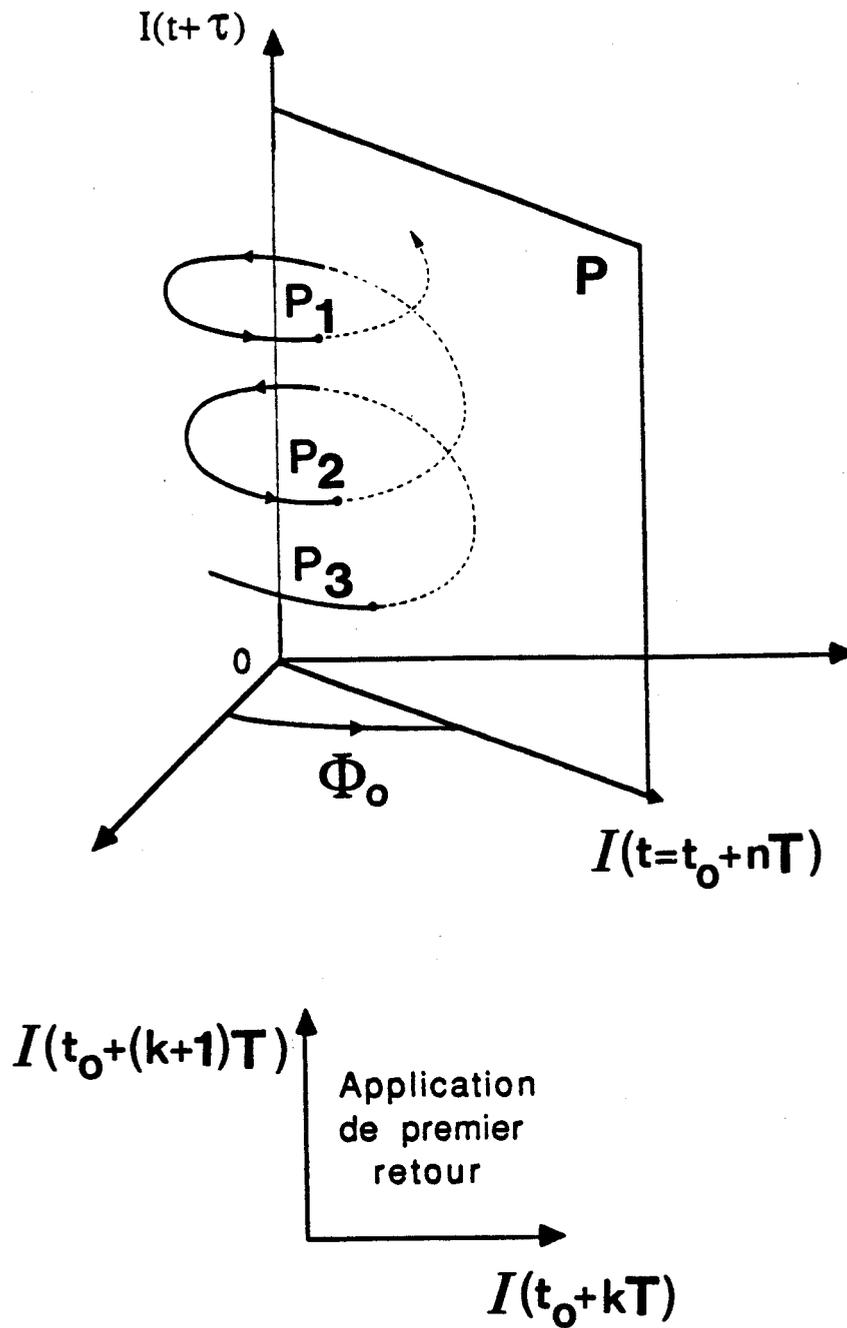


Figure 4.15 : Construction des applications de premier retour.

La technique expérimentale mise en oeuvre utilise le montage de la figure 4.8. Le signal de sortie de l'échantillonneur est échantillonné par un second échantillonneur bloqueur suivant la séquence décrite sur le schéma synoptique de la figure 4.16. L'ouverture des portes des deux échantillonneurs est commandée par le même signal impulsionnel de période T . Cette ouverture des portes est déclenchée sur le front descendant des impulsions pour le premier échantillonneur alors qu'elle l'est sur le front montant pour le second. Ainsi le signal de sortie du premier échantillonneur dont l'amplitude vaut $I(t_0+nT)$ après la $n^{\text{ième}}$ prise d'échantillon est échantillonné par le deuxième échantillonneur juste avant la $(n+1)^{\text{ième}}$ prise d'échantillon. A l'issue d'une impulsion de commande d'ouverture des portes, les signaux de sortie des deux échantillonneurs sont donc respectivement $I(t_0+nT)$ pour le second échantillonneur et $I(t_0+(n+1)T)$ pour le premier. Les applications de premier retour sont alors visualisées en envoyant les signaux de sortie des deux échantillonneurs sur les voies X et Y d'un oscilloscope. Cette technique permet une analyse très rapide des différents comportements présentés par le bistable. Les signaux détectés ont également été stockés sur micro-ordinateur et les applications de premier retour reconstruites numériquement. Les courbes photographiées sur l'écran de l'oscilloscope et celles reconstruites à partir des signaux temporels sont comparées par la suite à leurs analogues numériques.

De tels graphes constituent un outil très utile pour caractériser les différents régimes observés. Ainsi pour un signal T -périodique, la trajectoire se referme sur elle-même au bout d'une période de modulation (T). L'application ne comporte alors qu'un seul point (élargi par le bruit dans les expériences) présent sur la première bissectrice

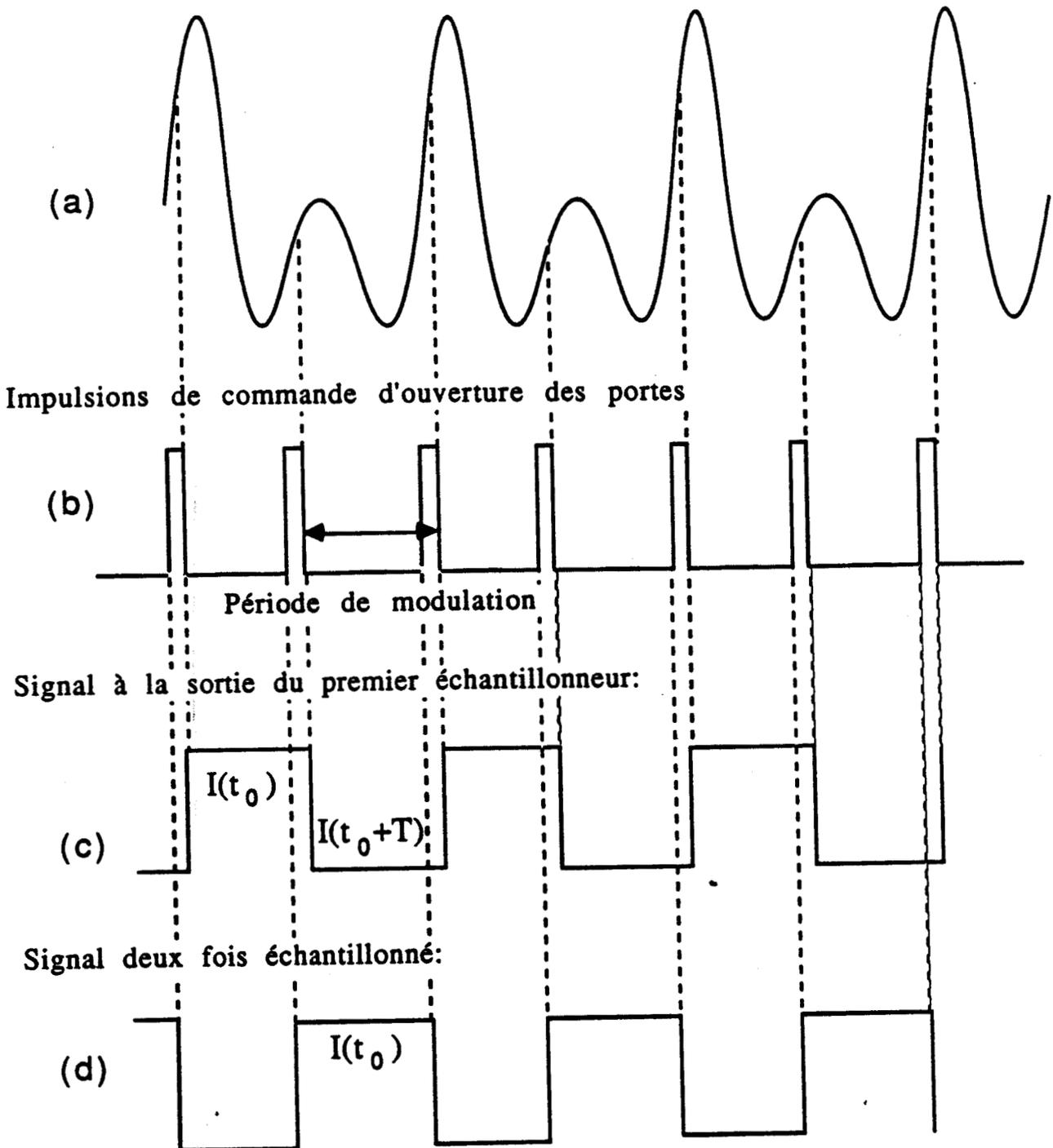
Signal $2T$ -périodique

Figure 4.16 : Synoptique de la séquence d'échantillonnage utilisée pour l'obtention des applications de premier retour.

(en effet $I(t_0+(n+1)T)=I(t_0+nT)$). Lorsqu'un dédoublement de période se produit, la trajectoire se referme après deux périodes de modulation. On observera donc deux points répartis symétriquement de part et d'autre de la première bissectrice. Dans le cas d'un régime $3T$, on observera alors trois points et ainsi de suite. Pour un signal chaotique, on obtient une courbe continue présentant au moins un extremum. Le cas d'un régime quasipériodique est particulier; sa trajectoire dans l'espace des phases s'inscrit sur un tore. Par exemple dans le cas où le système modulé à la fréquence f est bipériodique, c'est à dire caractérisé par l'apparition d'une deuxième fréquence f_1 , l'attracteur est un tore que l'on peut représenter dans R^3 (figure 4.17). Toute trajectoire s'enroulant sur le tore peut être considérée comme la superposition de deux mouvements: une révolution autour de l'"axe" du tore et une rotation autour de l'axe du "cylindre" formant le tore. Chaque fréquence est alors attachée à l'un de ces mouvements. Les points d'intersection d'une trajectoire avec le plan de coupe P apparaissent à des intervalles de temps réguliers, égaux à la période du premier mouvement (soit $T=1/f$). Ils sont répartis le long d'une courbe fermée (C). Si le rapport f/f_1 est irrationnel, la trajectoire ne se referme jamais sur elle-même et couvre totalement la surface du tore. L'application de premier retour est alors une courbe fermée continue. Si le rapport est rationnel, l'application de premier retour est un ensemble de points répartis le long de la courbe (C) (tâches) (SCHUSTER 1984). Il y a alors accrochage des deux fréquences l'une sur l'autre, pour être plus précis de f_1 sur f (fréquence de modulation).

La visualisation en direct sur oscilloscope des applications de premier retour est donc un atout majeur dans l'exploitation des résultats en temps réel. Tout au long des expériences, le désaccord

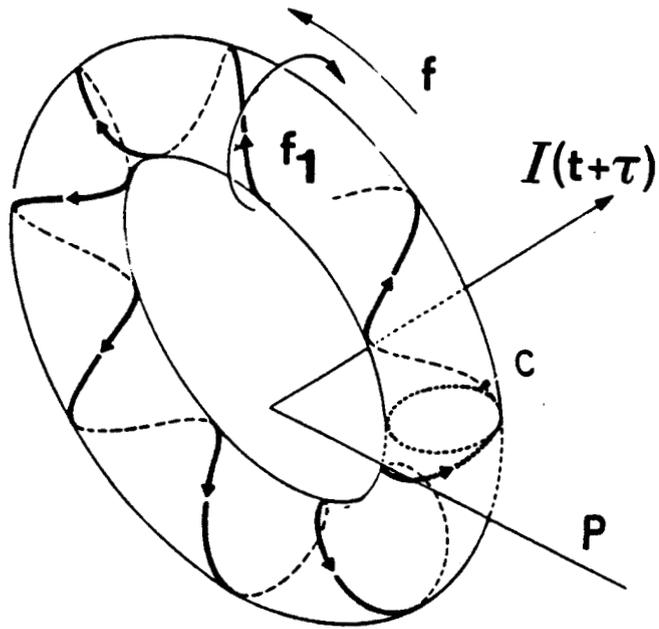


Figure 4.17: Tore représentatif des attracteurs quasi-périodiques.

moléculaire a été lentement balayé et l'évolution des attracteurs a pu ainsi être suivie permettant ainsi de repérer les différents régimes.

Les figures 4.18 a-f présentent les applications de premier retour correspondant aux attracteurs visualisés sur les figures 4.14 a-f. L'observation des applications de premier retour (a, d) et (c, f) confirme qu'il n'existe pas de différence entre les deux régimes chaotiques observés de part et d'autre de la fenêtre 3T.

Les figures 4.19 a-b-c-d reproduisent plusieurs diagrammes de premier retour correspondant à différents régimes observés expérimentalement pour une pression de 1.85 mTorr, une fréquence de modulation de 83 kHz, une excursion de fréquence de 134 kHz et une fréquence de Rabi incidente estimée à 773 kHz. En diminuant le désaccord moléculaire on observe successivement un régime 2T légèrement chaotique (4.19-a), puis un chaos dont l'application de premier retour prend la forme d'un "V" (4.19-b), ensuite une fenêtre 3T apparaît (4.19-c) pour enfin laisser place à un autre régime chaotique dont l'application de premier retour a cette fois-ci la forme d'un "M" (4.19-d).

Nous avons donc montré que toutes les applications de premier retour expérimentales et numériques correspondant à des régimes erratiques sont des courbes continues mais en aucun cas fermées. Ce résultat a jusqu'à présent été vérifié dans les différentes zones erratiques des diagrammes de bifurcation pour une grande variété de paramètres. Tout porte à croire que ces régimes sont dans notre cas de nature chaotique et en aucun cas quasi-périodique.

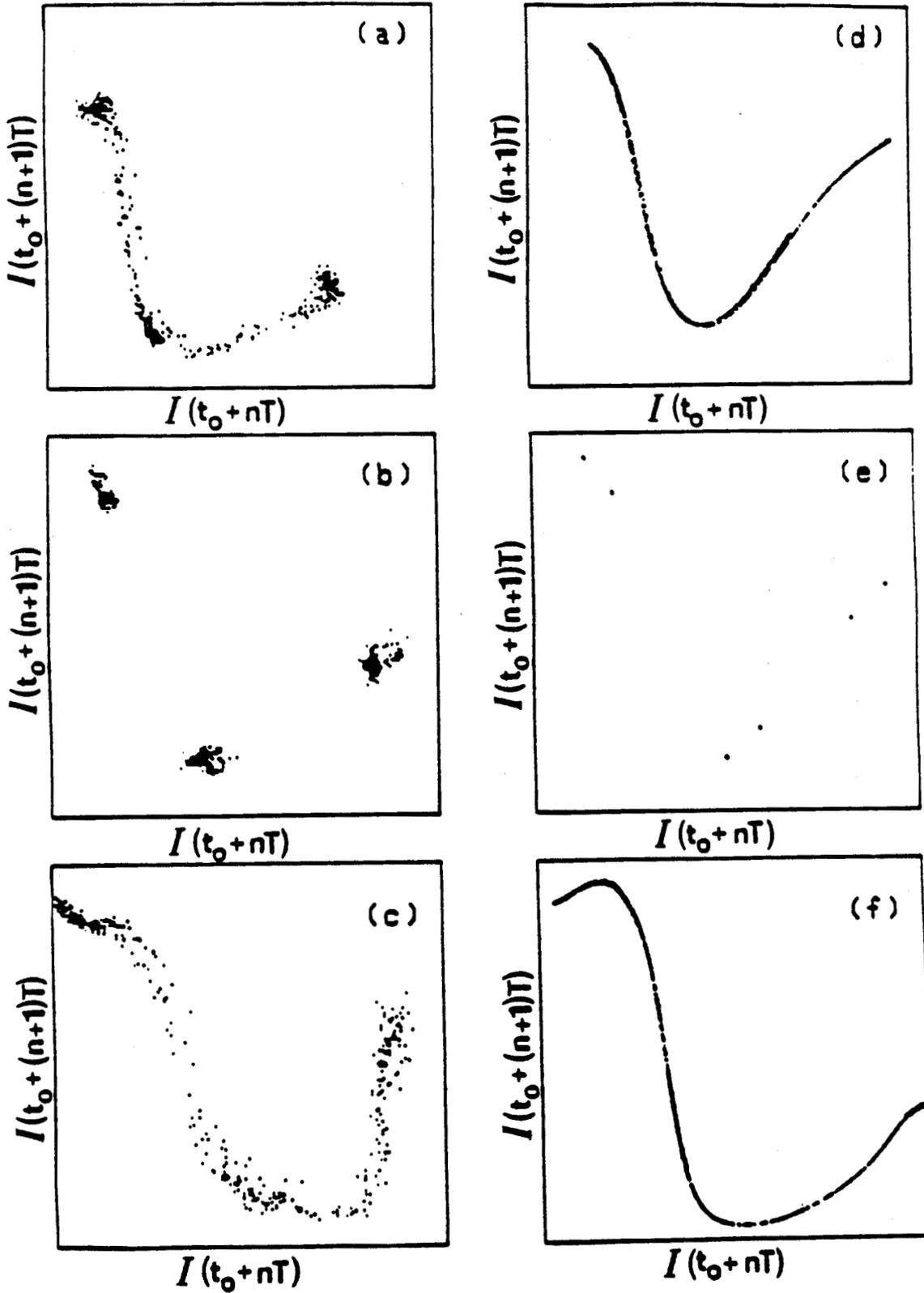
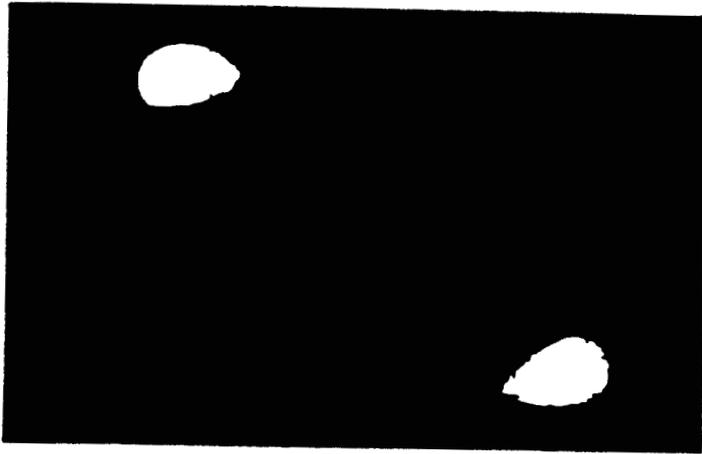
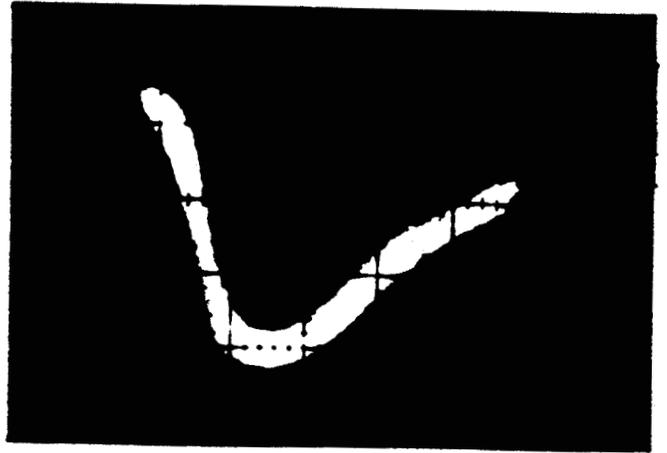


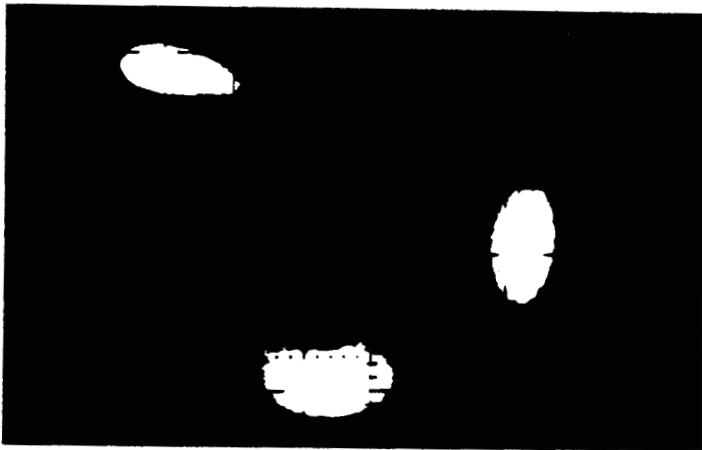
Figure 4.18: Applications de premier retour expérimentales (a-c) et numériques (d-f) correspondant aux diagrammes des phases des figures 4.14.



(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 4.19: Autres exemples d'applications de premier retour.
 Conditions: pression = 1.85 mTorr; fréquence de modulation = 83 kHz; excursion de fréquence = 134 kHz; fréquence de Rabi incidente \approx 773 kHz.
 (a) régime 2T, (b) chaos, (c) régime 3T et (d) chaos.

4-6: Cartes des phases

Il est intéressant de passer à une étude plus globale permettant ainsi une comparaison plus générale entre les résultats expérimentaux et numériques.

Sur la figure 4.20 nous avons reporté dans l'espace des paramètres défini par la fréquence de modulation et le désaccord moléculaire, les différents régimes dynamiques observés expérimentalement a) et numériquement b) pour une pression de 2.5 mTorr, une excursion de fréquence de 160 kHz et une fréquence de Rabi incidente de 1060 kHz. Expérimentalement, les frontières de ces régimes ont été déterminées à l'aide des applications de premier retour observées sur oscilloscope. Sur de telles cartes des phases, les diagrammes de bifurcation présentés précédemment correspondent à des horizontales (fréquence de modulation fixe). Bien entendu, la limite entre un régime périodique et un régime chaotique est difficile à discerner du fait de la présence du bruit de phase. Ainsi un régime 2T-périodique bruyant est indiscernable d'un régime chaotique de type C2 (proche du 2T périodique) dont le spectre est caractérisé par l'existence d'une forte composante à la fréquence moitié de celle de la modulation. Aussi ces deux régimes seront-ils notés à l'aide du même symbole (C2).

Dans le cas de la carte numérique, les fenêtres périodiques d'ordre supérieur à 3T caractérisées par des zones d'existence trop étroites, n'ont pas été indiquées pour ne pas surcharger le dessin. L'examen de ces cartes met en évidence des différences importantes telles que l'existence du chaos dans les expériences pour un désaccord moléculaire de l'ordre de 800 kHz ou le déplacement de la dynamique

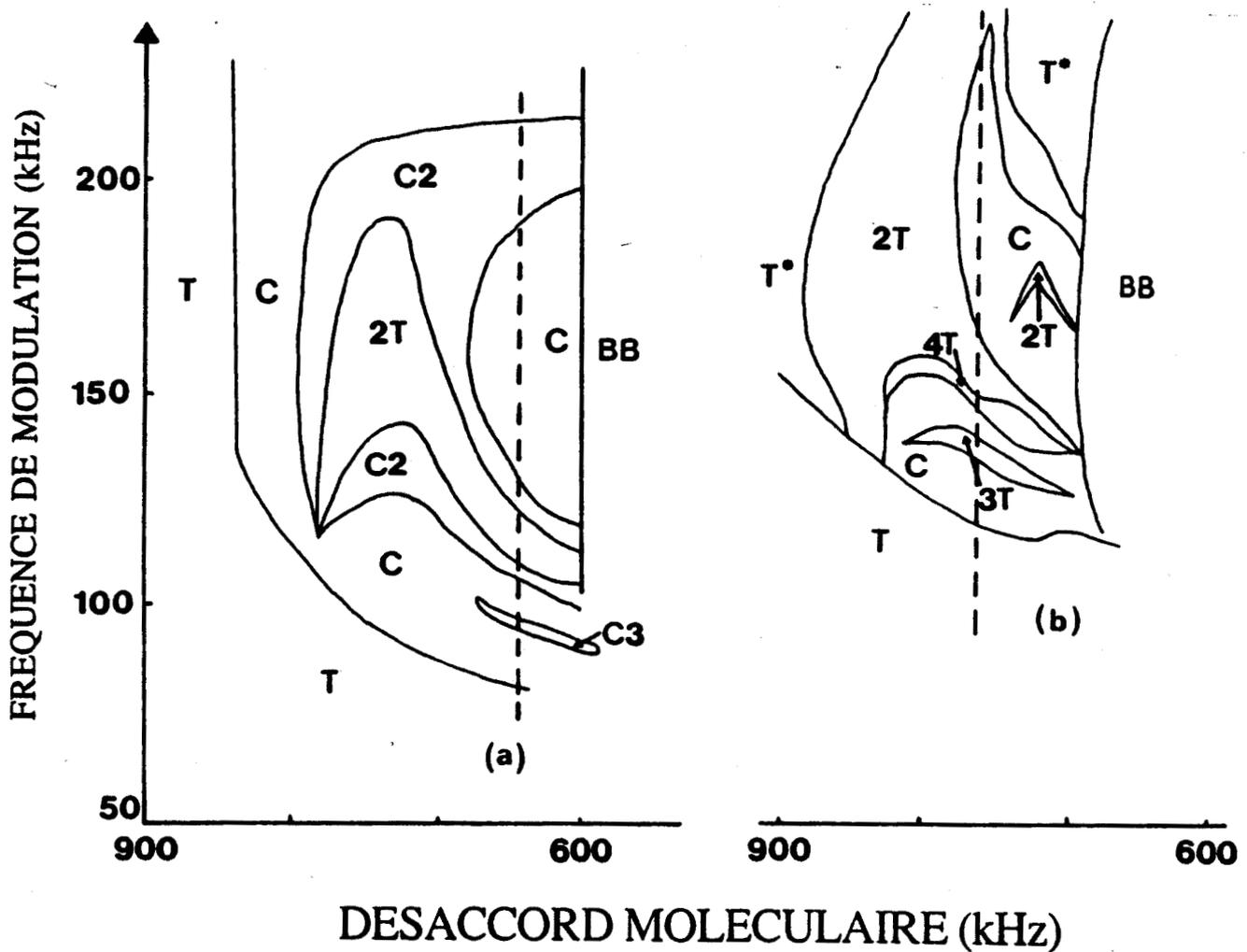


Figure 4.20: Cartes des phases expérimentale (a) et numérique (b) du bistable modulé représentées dans le plan fréquence de modulation - désaccord moléculaire. BB indique que le système tombe sur la branche basse du cycle de bistabilité. C2 (respectivement C3) peuvent indiquer soit du chaos, soit des régimes périodiques bruyants 2T (3T). Conditions: pression = 2.5 mTorr; fréquence de Rabi incidente ≈ 1060 kHz; excursion de fréquence = 160 kHz.

vers les fréquences de modulation élevées pour les simulations numériques. Toutefois, des comportements similaires peuvent être observés. Par exemple, le long des chemins marqués par une ligne pointillée, les séquences observées sont pratiquement les mêmes à savoir T, chaos, 3T, chaos, 2T et chaos. D'autre part comme nous l'avons déjà vu avec les diagrammes de bifurcation, le système tombe sur la branche basse (BB) pour les plus faibles valeurs du désaccord moléculaire.

La carte des phases obtenue par simulations numériques met également en évidence l'existence de deux types d'attracteurs T-périodiques différents. En effet, lorsque le désaccord moléculaire est de l'ordre de 900 kHz, en augmentant la fréquence de modulation le système passe brutalement d'un régime périodique T à un second régime également périodique noté T* mais d'allure très différente. L'amplitude du premier est plus grande que celle du deuxième (figure 4.21). En fait le système est passé brusquement d'un attracteur à un autre. L'apparition brutale du chaos après un régime périodique T (et donc la présence d'une discontinuité) pourrait donc être due à une compétition entre plusieurs attracteurs. De telles compétitions entre attracteurs ont été observées sur des lasers à signal injecté (BANDY 1985, JONES 1990) et conduisent d'ailleurs à des évolutions temporelles de la puissance transmise tout à fait comparables à celles de nos expériences. Le paragraphe suivant sera consacré à l'étude de cette compétition entre attracteurs qui doit être caractérisée par l'existence d'une bistabilité (bistabilité généralisée).

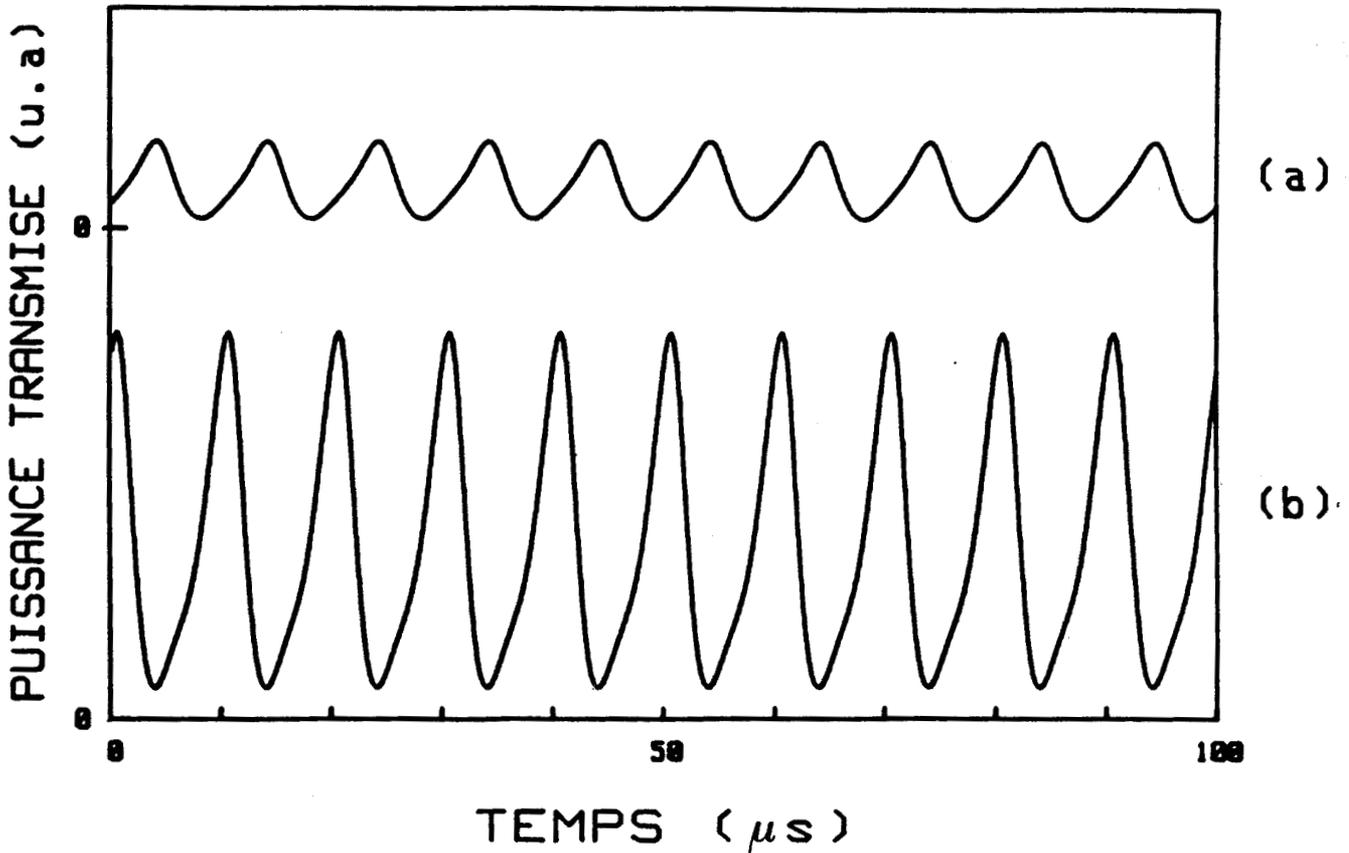


Figure 4.21: Signaux temporels T et T* correspondant aux deux régimes périodiques différents mis en évidence sur la figure 4.20 pour des fréquences de modulation de 200 (a) et 100 kHz (b).

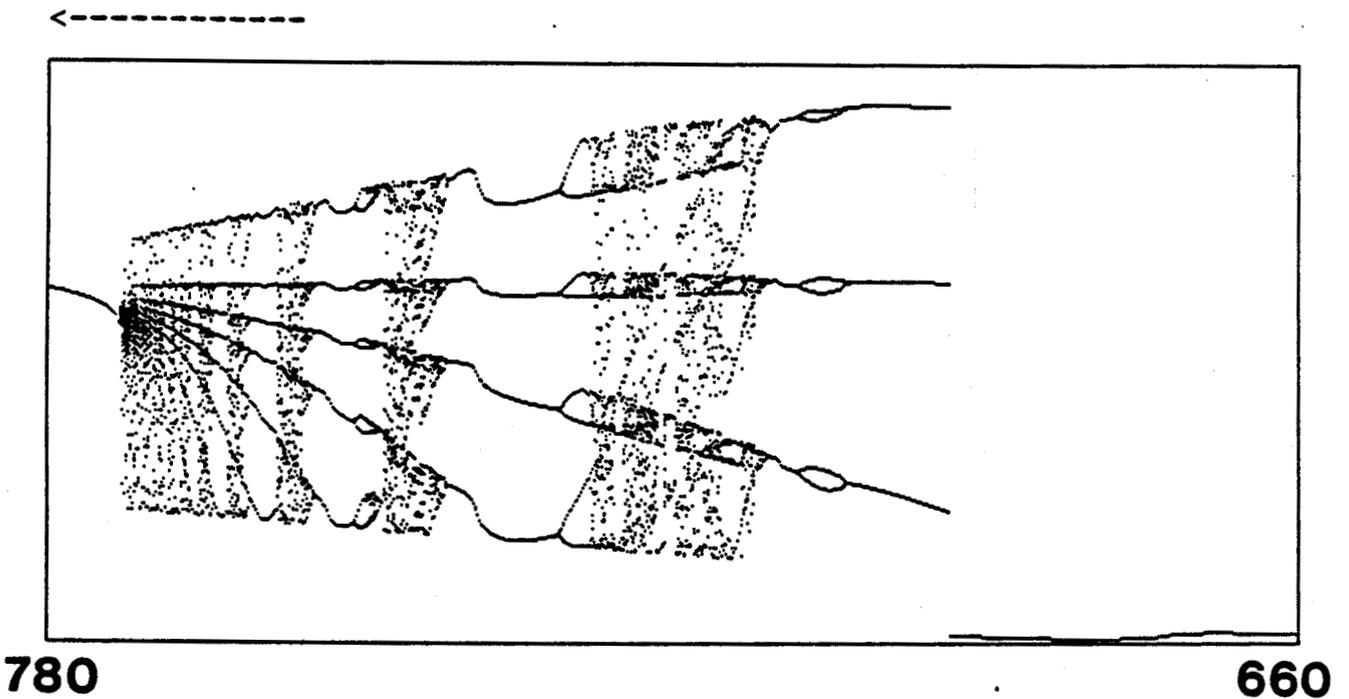
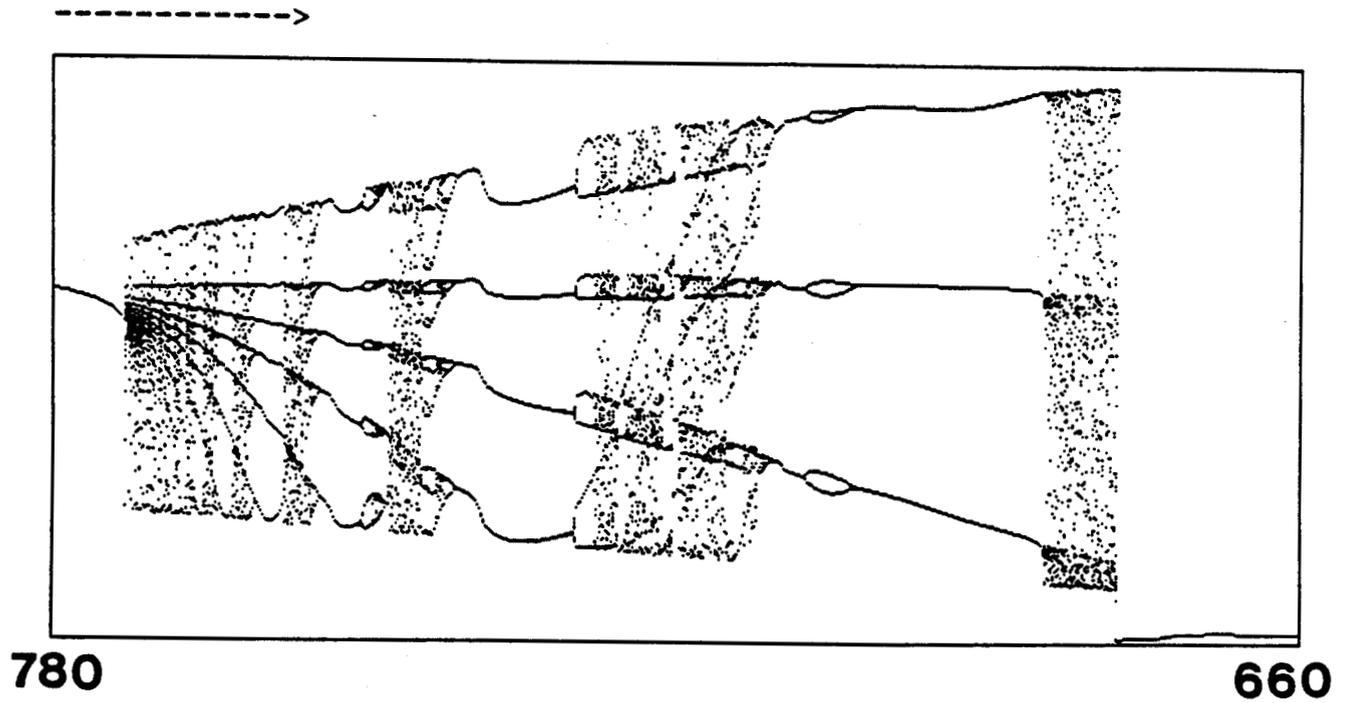
Conditions: pression = 2.5 mTorr; désaccord moléculaire = 900 kHz; largeur du mode = 96 kHz; fréquence de Rabi incidente \approx 1065 kHz.

4-7: Bistabilité généralisée

Pour mettre en évidence l'existence simultanée de plusieurs attracteurs et donc de la bistabilité généralisée associée, nous avons calculé les diagrammes de bifurcation retour (désaccords moléculaires croissants) correspondant aux diagrammes de bifurcation aller (désaccords moléculaires décroissants) des figures 4.10-b et 4.13-b. Nous avons pris soin dans chaque cas de démarrer les diagrammes de bifurcation retour avec les conditions finales des diagrammes de bifurcation aller.

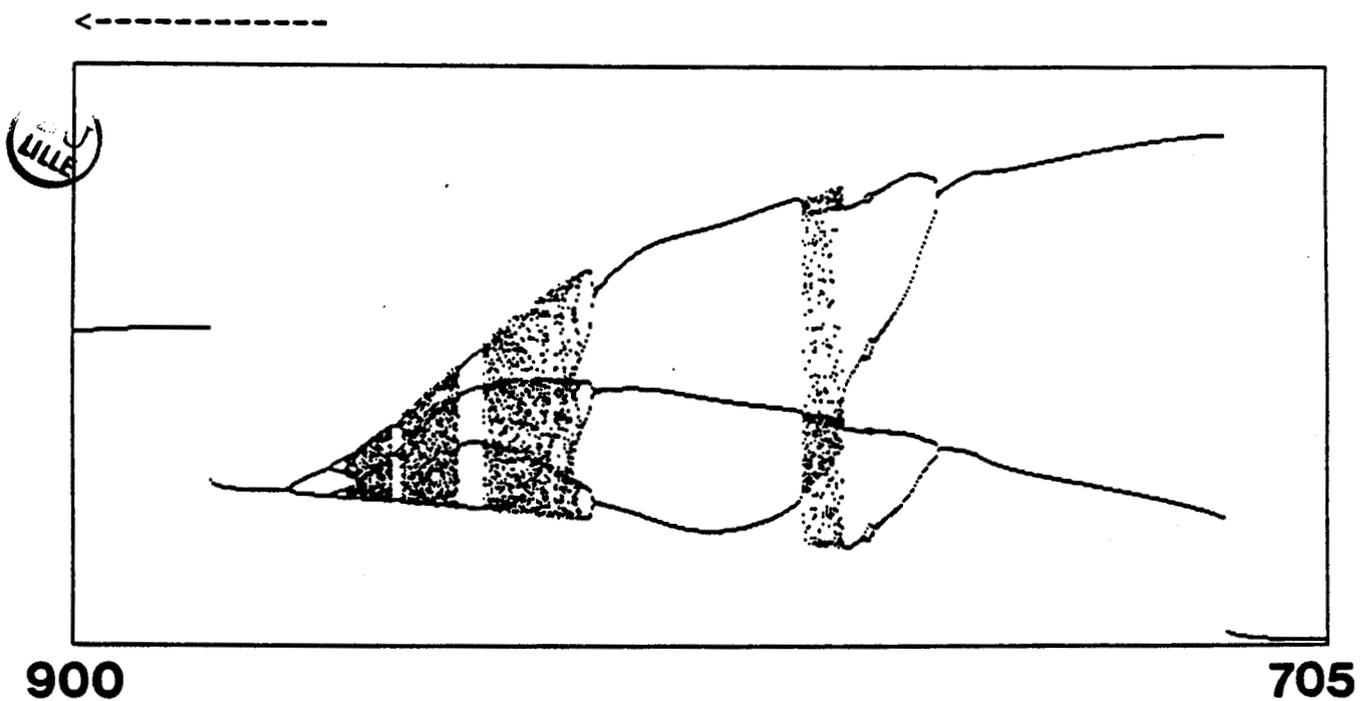
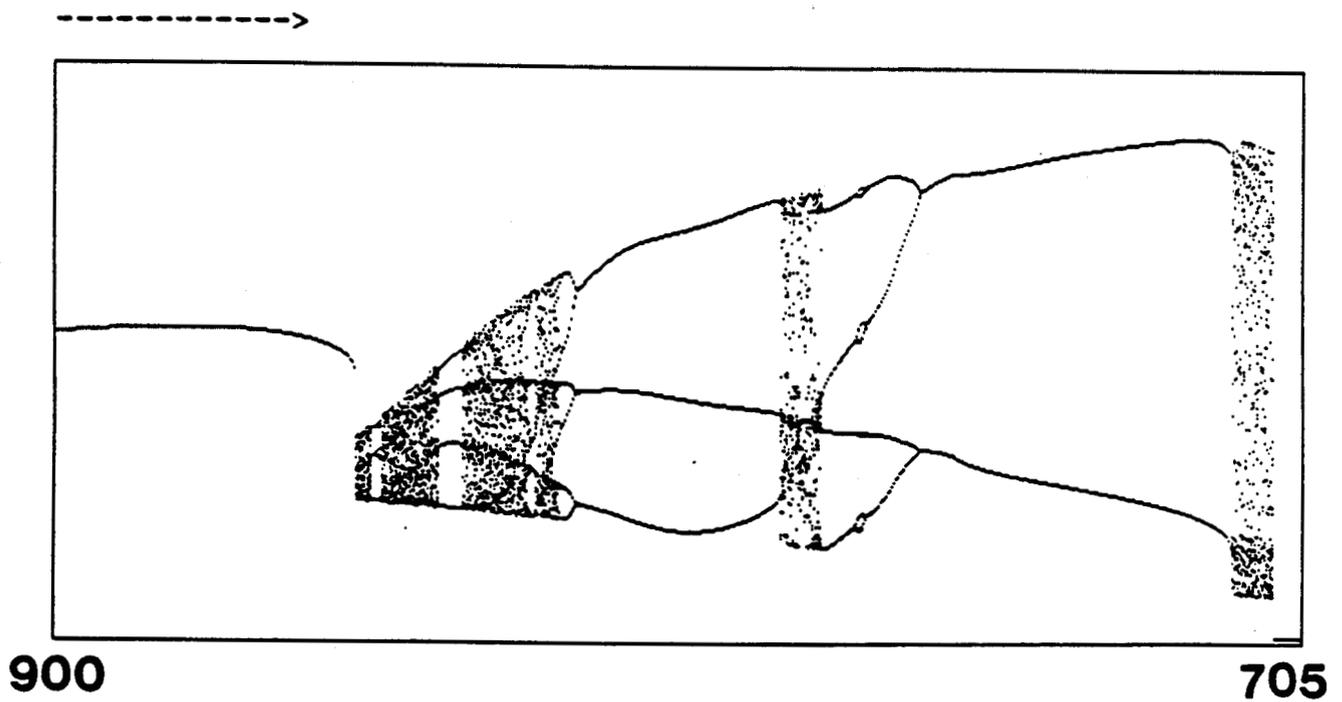
Ainsi sur la figure 4.22 sont représentés les diagrammes de bifurcation aller et retour correspondant à la figure 4.10-b. Dans ce cas le désaccord moléculaire est balayé entre 780 et 660 kHz. On constate alors que pour les plus faibles valeurs du désaccord moléculaire, le système est bistable entre la branche basse et la branche haute du cycle de bistabilité. En effet pour le diagramme de bifurcation retour le système remonte sur la branche haute pour un désaccord moléculaire plus grand que celui pour lequel il est tombé sur la branche basse dans le cas du diagramme de bifurcation aller. En revanche pour toutes les autres valeurs du désaccord moléculaire, les diagrammes de bifurcation aller et retour sont tout à fait identiques. Nous retrouvons aux mêmes endroits les différentes fenêtres périodiques ainsi que le passage brutal entre la solution T-périodique et le chaos. Dans ces conditions, le système ne présente pas de bistabilité généralisée.

Le cas de la figure 4.23 est différent. Il correspond aux diagrammes de bifurcation aller et retour associés à la figure 4.13. Le désaccord moléculaire est balayé entre 900 et 705 kHz. Dans ce cas



DESACCORD MOLECULAIRE (kHz)

Figure 4.22: Diagrammes de bifurcation aller (a) et retour (b) correspondant à la figure 4.10-b. La flèche indique le sens de balayage.



DESACCORD MOLECULAIRE (kHz)

Figure 4.23: Diagrammes de bifurcation aller (a) et retour (b) correspondant à la figure 4.13-b. La flèche indique le sens de balayage.

également le système est bistable entre la branche basse et la branche haute pour les plus faibles valeurs du désaccord moléculaire. Mais nous ne retrouvons plus le passage brutal entre la solution T-périodique et le chaos visible sur le diagramme de bifurcation aller. En effet, au retour, le diagramme de bifurcation suit une cascade sous-harmonique c'est à dire devient, après la zone chaotique, 4T, 2T puis T et ne passe sur l'attracteur périodique T* que pour une valeur du désaccord moléculaire plus grande. Entre 879 kHz et 854 kHz le système présente de la bistabilité généralisée. La traversée de cette zone dans un sens ou dans l'autre ne dévoile pas les mêmes régimes.

Dans ce cas, la présence de bistabilité généralisée montre que deux attracteurs entrent en compétition, ce qui peut être la cause de l'apparition brutale du chaos après un régime T-périodique. L'interprétation de ce phénomène dynamique peut se faire par analogie avec la bistabilité entre états stationnaires. En effet l'un ou l'autre des deux états stables peut être occupé selon l'histoire antérieure du système.

Au regard de ces résultats, il serait donc intéressant de connaître les valeurs des différents paramètres qui délimitent la zone de bistabilité généralisée dans notre système. De même, visualiser sur oscilloscope les différents attracteurs nous permettrait de comprendre plus en détail les différents mécanismes induits dans le bistable lors d'une modulation de fréquence.

Une interprétation détaillée des différents comportements observés dans notre système dépasse le cadre de ce travail. Cependant une comparaison avec les travaux antérieurs permet de supposer que

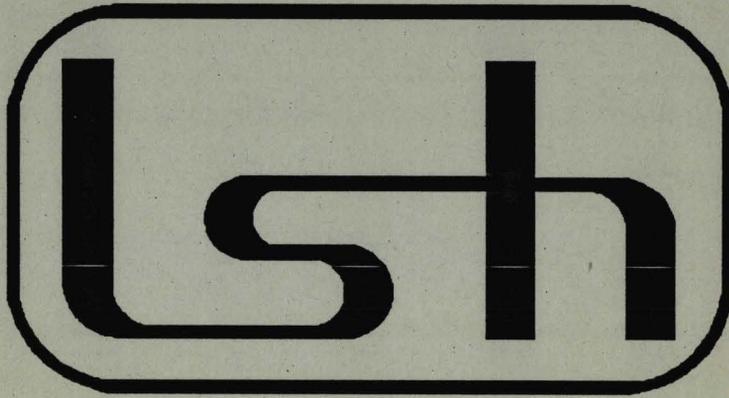
les mécanismes en présence proviennent soit de la compétition entre plusieurs fréquences ce qui engendrerait de la quasi-périodicité (LAUTERBORN 1988), soit d'une bifurcation homocline (LEFRANC 1991). Une analyse systématique de toutes les zones erratiques à l'aide des applications de premier retour n'a jamais mis en évidence de la quasi-périodicité. De plus, l'ordre des fenêtres périodiques observées sur les diagrammes de bifurcation ne permet pas de retrouver la séquence de Farey des nombres rationnels. En revanche, l'hypothèse de la bifurcation homocline par rapport à un cycle limite semble être confortée par plusieurs points:

- (i) on constate sur la figure 4.11 que la séquence des fenêtres périodiques convergent vers un point d'accumulation aux alentours de 770 kHz. Ce point correspondrait à la bifurcation homocline.
- (ii) toujours sur la figure 4.11 où le balayage s'effectue dans le sens des désaccords moléculaires décroissants, les fenêtres périodiques apparaissent après un régime chaotique par cascade sous-harmonique et se déstabilisent ensuite brutalement par ce qui semble être une bifurcation tangente (voir fenêtre 8T par exemple). Ce comportement qui est une des caractéristiques d'une bifurcation homocline par rapport à un cycle limite n'est en fait observable que pour des désaccords moléculaires proches de celui caractérisant la bifurcation homocline, c'est à dire uniquement pour les fenêtres périodiques d'ordre élevé.

(iii) il semblerait que le scénario soit différent suivant la position de la bifurcation homocline par rapport au désaccord moléculaire associé à la déstabilisation de la solution périodique. Si l'orbite périodique se déstabilise pour un désaccord moléculaire inférieur à celui correspondant au point d'accumulation (bifurcation homocline), on observe de la bistabilité généralisée et donc la cascade de Feigenbaum (figure 4.23). Dans le cas contraire, le système passe brutalement d'un régime T-périodique au chaos sans apparition de bistabilité généralisée (figure 4.22).

Ces hypothèses sont en cours de vérification et les résultats ne peuvent malheureusement être présentés dans ce mémoire. Nos investigations consistent à évaluer les valeurs propres de la matrice de Floquet par rapport à un cycle limite au voisinage de l'apparition du chaos et d'autre part à construire une carte à une dimension de manière à identifier le chaos homocline. Ces études seront complétées par l'évaluation des exposants de Lyapunov ainsi que la dimension fractale caractérisant les attracteurs étranges (GRASSBERGER 1983).

156



CONCLUSION

Les expériences et les simulations numériques présentées dans ce mémoire traitent des effets dynamiques observés dans deux systèmes bistables tout optique lorsque l'on module la fréquence du champ excitateur.

Dans un premier temps, nous avons analysé l'évolution des courbes de résonance en fonction de l'amplitude de la modulation. Nous avons ainsi pu montrer que les fréquences de résonance peuvent alors se déplacer. Ce déplacement s'effectue vers les basses ou les hautes fréquences de modulation selon la valeur du désaccord moléculaire. Lorsque l'amplitude de la modulation croît, apparaissent successivement sur la courbe de résonance une composante subharmonique $1/2$, puis un cycle d'hystérésis toujours situé sur le flanc haute fréquence de cette courbe. Des instabilités sont également observées uniquement dans le cas où la résonance se déplace vers les basses fréquences. L'élaboration d'un modèle analytique simple nous a permis de caractériser le sens d'évolution de la fréquence de résonance. Nous avons ainsi pu montrer que le déplacement des fréquences de résonance en fonction de l'excursion de fréquence suit une loi quadratique du moins pour les faibles modulations. Ce modèle ne nous renseigne malheureusement pas sur les conditions d'apparition des cycles d'hystérésis. La mise en oeuvre, en collaboration avec les théoriciens de notre laboratoire, d'un modèle analytique à deux équations pourrait fournir les explications attendues.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude des instabilités observées sur la courbe de résonance. L'utilisation de techniques usuelles telles que diagrammes de bifurcation, diagrammes de phase et

applications de premier retour nous ont permis de montrer que les phénomènes erratiques observés expérimentalement sont bien de nature chaotique et non quasi-périodique. L'observation des diagrammes de bifurcation obtenus par balayage du désaccord moléculaire a mis en évidence un passage brutal entre le régime T-périodique et le régime chaotique. Ce scénario peut dans certains cas être caractérisé par la présence de bistabilité généralisée qui met en évidence une compétition entre plusieurs attracteurs. L'analyse des comportements caractéristiques de ce scénario laisse à penser que ce dernier impliquerait la présence d'une bifurcation homocline. Une étude est actuellement en cours de développement afin de tester la validité de cette hypothèse.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- + AFSAR M.N., C.P.E.M. 86 Digest., "Conference in Precision Electromagnetic Measurements" (Cat N°86CH2267-3), Gaithersburg, HD, U.S.A, 23-27 Juin 1986 (New York, U.S.A.: I.E.E.E. 86), p 159-60 (1986)
- + ARECCHI F.T., MEUCCI R, PUCCIONI G et TREDICCE J, Phys. Rev. Lett. 49, 1217 (1982)
- + BANDY D.K., NARDUCCI L.M. et LUGIATO L.A., J. Opt. Soc. Am. B 2, 148 (1985)
- + BERGE P, POMEAU Y et VIDAL C, "L'ordre dans le chaos", Hermann Ed., Paris (1984)
- + BRORSON S.D., DEWEY D et LINSAY P.S., Phys. Rev. A 28, 1201 (1983)
- + CIRILLO M et PEDERSEN N.F., Phys. Rev. A 90, 150 (1982)
- + C.N.E.T., A. Telec 29, 327 (1974); pour une revue documentaire sur les différents systèmes développés dans le monde voir: "International Conference on Millimetric Waveguide Systems", London, 1976 (I.E.E.E., London 76); Bell Syst. Tech. J 56, 10 (1977)
- + COLMONT M, J. Mol. Spectros. 114, 298 (1985)
- + DANGOISSE D, GLORIEUX P et HENNEQUIN D, Phys. Rev. A 36, 4775 (1987)
- + DEROZIER D, BIELAWSKI S et GLORIEUX P, Optics Comm. 83, 97 (1991)
- + D'HUMIERES D, BEASLY M.R., HUBERMANN B.A. et LIBCHABER A, Phys. Rev. A 26, 3483 (1982)
- + EBENSTEIN W.L. et MUENSTER J.S., J. Chem. Phys. 80, 3989 (1984)
- + ERNEUX T, BAER S.M. et MANDEL P, Phys. Rev. A 35, 1165 (1987)
- + FARMER J.D., Physica 4D, 366 (1982)
- + GAO J.Y., GUANG X.J., SUN J.W., GUO X.Z. et ZHEN Z.R., Optics. Comm. 71, 224 (1989)

- + GIBBS H.M., McCALL J.S. et VENKATESAN T.N.C., Phys. Rev. Lett. 36, 113 (1976)
- + GLASS L, GOLDBERGER A.L., COURTEMANCHE M et SCHRIER A, "Dynamical chaos", Princeton University Press, 9 (1987)
- + GRASSBERGER P et PROCACCIA I, Phys. Rev. Lett. 50, 346 (1983); GRASSBERGER P et PROCACCIA I, Physica 9D, 189 (1983)
- + GUCKENHEIMER J et HOLMES P, Nonlinear Oscillations, "Dynamical systems and bifurcations of vector fields", Springer, Berlin (1983)
- + HAKEN H, Phys. Lett. 53A, 77 (1975)
- + JONES D.J. et BANDY D.K., J. Opt. Soc. Am. B 7, 2119 (1990)
- + JORDAN D.W. et SMITH P, "Non linear ordinary differential equations", Clarendon Press, Oxford (1977)
- + LAUTERBORN W et EICK I, J. Opt. Soc. Am. B 5, 1089 (1988)
- + LE BERRE M, RESSAYRE E et TALLET A, Phys. Rev. A (à paraître) (1991); LE BERRE M, RESSAYRE E et TALLET A, Optics Comm. (à paraître) (1991)
- + LEFRANC M, HENNEQUIN D et DANGOISSE D, J. Opt. Soc. Am. B 8, 239 (1991)
- + LEGON A.C., MILLEN D.J. et ROGERS S.C., Proc. Soc. Lond. A 370, 213 (1980)
- + LORENZ E.N., J. Atmos. Sci. 20, 130 (1963)
- + LUGIATO L.A., Progress in Optics, Ed. E. Wolf, Vol. 21 (1984)
- + LUGIATO L.A. et NARDUCCI L.M., Phys. Rev. A 32, 1576 (1985)
- + MANDEL P, NARDONE P et ERNEUX T, J. Opt. Soc. Am. B 5, 1113 (1988)
- + MAY R.M., F.R.S., "Dynamical chaos", Princeton University Press, 27 (1987)
- + MIDAVAINÉ T, DANGOISSE D et GLORIEUX P, Phys. Rev. Lett. 55, 1989 (1985)

- + MINORSKY N, "Introduction to non linear ordinary mechanics", J.W. Edwards, Ann Arbor (1947)
- + MOSS F et McCLINTOCK P.V.E., "Noise in nonlinear dynamical systems", Cambridge University Press, Volume 3 (1989)
- + NARDUCCI L.M., TREDICCE J.R., LUGIATO L.A., ABRAHAM N.B. et BANDY D.K., Phys. Rev. A 32, 1588 (1985)
- + OROZCO L.A., ROSENBERGER A.T. et KIMBLE H.J., Phys. Rev. Lett. 53, 2547 (1984)
- + OROZCO L.A., KIMBLE K.J., ROSENBERGER A.T., ASQUINI M.L., BRAMBILLA M et NARDUCCI L.M., Phys. Rev. A 39, 1235 (1989)
- + OTT E, Rev. Mod. Phys. 53, 655 (1981)
- + PAPOULIS A, "Signal Analysis", Mc Graw-Hill International Editions, Electronical & Electronic Engineering Series, New York (1988)
- + PEARSON E.F., CRESWELL R.A., WINNEWISSER M et WINNEWISSER G, Z. Naturforsch. 31, 1394 (1976)
- + PHILIPS M.W., GONG H, FERGUSON A.I. et HANNA D.C., Optics Comm. 61, 216 (1987)
- + POINCARÉ H, "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste", Gauthier-Villars, Paris (1892)
- + SCHUSTER H.G., "Deterministic chaos", Physik-Verlag (1984)
- + SEGARD B, ZEMMOURI J et MACKE B, Europhys. Lett. 4, 47 (1987)
- + SEGARD B et MACKE B, Phys. Rev. Lett. 60, 412 (1988)
- + SEGARD B, MACKE B, LUGIATO L.A., PRATTI F et BRAMBILLA M, Phys. Rev. A 39, 703 (1989)
- + SEGARD B, SERGENT W, MACKE B et ABRAHAM N.B., Phys. Rev. A 39, 6029 (1989)
- + SENITZKY B, GOULD G et CUTLER S, Phys. Rev. A 130, 1460 (1963)
- + TAKENS F, Lecture notes in Math., Springer Heidelberg, New York, 898 (1981)

- + TESTA J, PEREZ J et JEFFRIES C, Phys. Rev. Lett. 48, 714 (1982)
- + TOMITA K, "Chaos", Manchester University Press, 211-236 (1986)
- + VAN BUSKIRK R et JEFFRIES C, Phys. Rev. A 31, 3332 (1985)
- + YAMADA T et GRAHAM R, Phys. Rev. Lett. 45, 1322 (1980)
- + ZEMMOURI J, Thèse de doctorat, Lille 1 (1987)
- + ZEMMOURI J, SEGARD B, MACKÉ B et GLORIEUX P, Optics. Comm. 79, 431 (1990)
- + ZEMMOURI J, SERGENT W et SEGARD B, Optics. Comm. 84, 199 (1991)



ANNEXE

Second side-mode instability in optical bistability with a two-level, homogeneously broadened medium

B. Ségard, W. Sargent, B. Macke, and N. B. Abraham*

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, Université de Lille I, F-59655 Villeneuve d'Ascq, CEDEX, France

(Received 18 January 1989)

We report the observation of an instability in a bistable optical system with a homogeneously broadened two-level medium involving the onset of the cavity side mode that is two modes away from the source frequency and three modes away from the molecular resonance frequency. These measurements extend the range of a recent report [Phys. Rev. A **39**, 703 (1989)] of observations of the multimode instability in optical bistability predicted by Lugiato and Bonifacio [Lett. Nuovo Cimento **21**, 505 (1978); **21**, 510 (1978)], with the key difference being that the experimental observations in the previous report were limited to instabilities of the side mode adjacent to the source frequency.

Part of the revitalization of the study of optical instabilities in recent years owes much to the application to the study of optical bistability of the methods of stability analysis developed for multimode lasers.^{1,2} Using these methods in 1978, Bonifacio and Lugiato³ predicted a multimode instability in the Maxwell Bloch equation of optical bistability. At nearly the same time, Ikeda⁴ simplified the equations to a delay-differential equations and predicted not only instabilities but also chaos. [It is worth noting that in recent years it has become clear that delay-differential equations rather than simple delay equations (one-dimensional maps) are required to accurately simulate the experimental systems.^{5(a)} In this form the delay-differential equations correspond to the coupling of an infinite number of modes.⁵] While the delay-induced instabilities were soon observed⁶ and have been well studied,⁵ it was not until recently⁷ that the particular form of multimode instability predicted by Bonifacio and Lugiato for an optically bistable system using a homogeneously broadened, two-level medium (where the instability arises from coherent effects) was observed, albeit in the dispersive (detuned) case. A systematic study of the experimental characteristics of this instability and a comparison with numerical simulations using plane-wave models has been recently reported.⁸

A similar instability has been observed by Khitrova, Valley, and Gibbs⁹ using sodium vapor pumped off-resonance to generate Raman gain for side modes 9–12 free spectral ranges away from the pumping laser frequency. Their experiments differ from those of Ref. 8 and those reported here in that the Doppler broadening of the sodium transition was large and comparable to the Rabi frequency and that the pumping laser field excited the medium without circulating the laser cavity. In such a case the authors describe the system as a “Raman laser.”

In the previous experimental studies (Ref. 8) similar to those reported here, no instabilities were observed for resonant tuning of the source frequency and the molecular resonance frequency although instabilities had been pre-

dicted for those experimental operating conditions using a plane-wave model. The absence of instabilities in the purely absorptive case was attributed⁸ to the suppression of instabilities by the transverse profile of the externally injected field as had been predicted previously.¹⁰ Experimentally this is difficult to study because the strong absorption on resonance and finite source power make it difficult to reach large values of the excitation or of the Rabi frequency. However, when the frequency of the driving field was detuned from the molecular resonance frequency, instabilities were observed which involved the onset of the cavity mode adjacent to the external driving field. This led to the development of two rules of thumb for the instabilities: first, that the pulsing frequency would be given approximately by the Rabi frequency (as the band of frequencies receiving gain by the Raman process has its center frequency separated from the frequency of the driving field by the Rabi frequency); and second, that the pulsing frequency would be given approximately by the separation of the nearest cavity mode from the driving frequency. It is, in fact, the generalized Rabi frequency which determines the separation between the source frequency and the peak of the band of frequencies where there is Raman gain for a homogeneously broadened medium, but for the small detunings in the experiment of Ref. 8 the two were relatively equal in predictive power. Actually, it is the coincidence of the gain (rule 1) and resonance with some mode of the cavity (rule 2) that leads to the onset of the instability. (It is worth noting that similar rules of thumb exist for the experiment of Khitrova *et al.*⁹ but in their case the Doppler broadening of the transition and the velocity of the optically excited atoms cause the peak of the Raman gain to be separated from the frequency of the driving field by the Rabi frequency rather than the generalized Rabi frequency.)

Since in the dispersive case the instability predominantly involves the weak excitation of a single unstable mode (as demonstrated in Ref. 8 by heterodyne detection), the resulting intensity pulsations are nearly periodic

and correspond to a beat between the frequency of the driving field and that of the excited mode.

It is easy to see how the rules of thumb should be generalized. Rule 1 remains unchanged because it locates the frequency range where the Raman process provides gain, though as the strength of the driving field increases, the width of this range grows. Hence the Rabi frequency does not precisely determine the pulsing frequency. Rule 2 is also not exact because the strongly driven medium causes mode pulling of the empty cavity resonance frequencies, though these effects are usually small. Modifications can easily occur in principle to rule 2, as the criterion for an instability is simply that some cavity mode fall within the region of frequencies where there is gain. Which mode satisfies this condition depends on the detunings of the source frequency and the molecular resonance frequency from the cavity frequencies and from each other, and on the free spectral range.

We have extended the measurements in Ref. 8 to operating conditions which lead to an instability of the cavity mode that is the second one away from the source frequency and the third one away from the molecular resonance frequency. As the detuning of the source frequency is relatively far from the molecular frequency and relatively close to one cavity resonance frequency, the intracavity field is larger than in the previous experiments leading to a higher Rabi frequency that excites an instability with a pulsing frequency of the order of 1500 kHz in contrast to the nearest sideband instabilities which appeared in the range of 400–700 kHz.

The experimental setup is as given in Ref. 8. Briefly, the optical cavity is a waveguide Fabry Perot, 182 m in length, filled with 0.9 to 1.5 mTorr of HCN. The $J=0$ and $M=0$ to $J=1$ and $M=1$ rotational transition used is at a frequency of approximately 86 GHz. Although the transition has a narrow hyperfine structure spanning 15 kHz, a collisional linewidth of 22 kHz, and a Doppler linewidth of 100 kHz (all values HWHM) for the strengths of the fields used in this experiment (which lead to a Rabi frequency larger than 400 kHz), the system behaves as a homogeneously broadened, two-level medium. The source is a phase-locked klystron with an output power of 500 mW of which approximately 160 mW is coupled to the lowest-order mode of the waveguide. The signal is detected by a Schottky-barrier diode mixer.

Figure 1 gives a plot of the output power versus the source frequency which corresponds to the experimental Fig. 15 of Ref. 8. Figure 2(a) schematically locates the molecular resonance frequency in the comb of resonance frequencies of the longitudinal cavity modes and indicates the range of the source frequency scanned in Fig. 1. The two steps in output power in Fig. 1 are parts of the multiple hysteresis loops that are found as the source frequency is increased and decreased.

In the lower step in Fig. 1 at the location marked *B*, an instability occurs with pulsing characteristics shown in inset *B* in the figure. The pulsing frequency of 469 kHz corresponds to the excitation of the mode nearest the source frequency. This mode is marked ν_p , and the source frequency ν_0 is located between the molecular frequency ν_m and the mode ν_p . The Rabi frequency is rela-

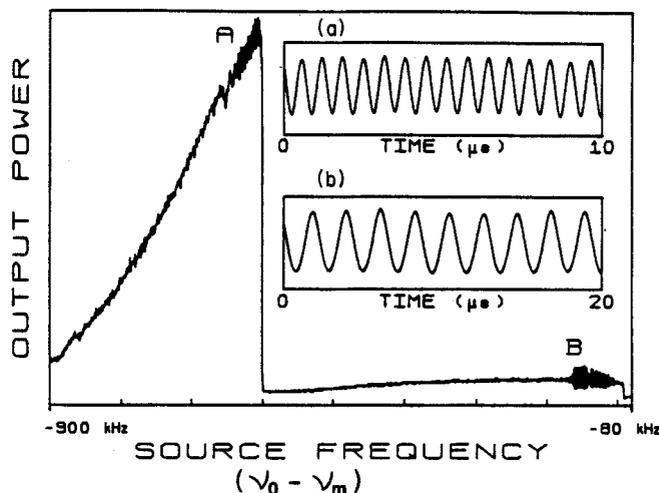


FIG. 1. Plot of output power vs source frequency with two regions of instability indicated by *A* and *B* with insets showing the intensity pulsations in these two regions.

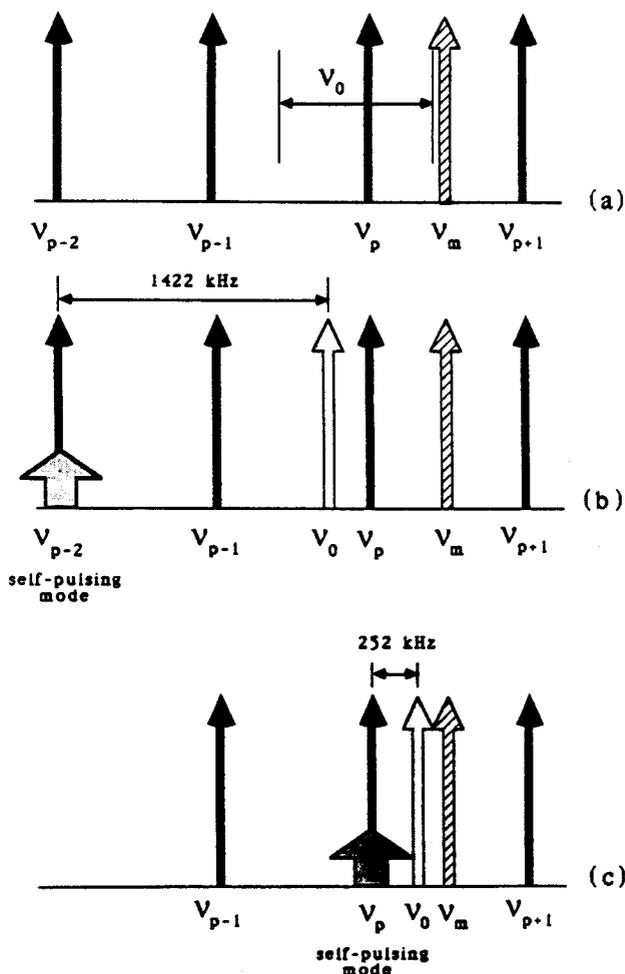


FIG. 2. Schematic drawing locating the cavity frequencies ν_i , the source frequency ν_0 , and the molecular resonance frequency ν_m for the experiments shown in Fig. 1. (a) Cavity and molecular frequencies with range of source frequency detuning spanned by Fig. 1, (b) with source frequency at the specific value corresponding to *A* in Fig. 1, (c) with source frequency at the specific value corresponding to *B* in Fig. 1.

TABLE I. Observations of the second side-mode instability.

$\nu_p - \nu_0$ (kHz)	$\nu_m - \nu_0$ (kHz)	ν_{osc} (kHz)	$\nu_{th} = \nu_0 - \nu_{p \pm 2} $ (kHz)	$\nu_{gen-Rabi}$ (kHz)	ν_{Rabi} (kHz)	Unstable mode
315	780	1450	1335	1093	766	$p - 2$
285	750	1480	1365	1122	836	$p - 2$
-270	-864	1508	1380	1266	925	$p + 2$
-216	-804	1535	1434	1318	1044	$p + 2$
228	660	1533	1422			$p - 2$
276	645	1461	1474			$p - 2$
-198	-672	1520	1450	1200	980	$p + 2$

tively low in this case because the near coincidence of the source and molecular frequencies causes large absorption and a relatively low intracavity field strength. The difference between the pulsing frequency at 469 kHz and $\nu_0 - \nu_p = 252$ kHz is caused by mode pulling.

On the upper step of Fig. 1 at the location marked *A*, another instability occurs with pulsing characteristics as shown in inset *A*. The pulsing frequency of 1533 kHz corresponds to the excitation of the mode that is second from the source frequency, namely, the mode labeled ν_{p-2} in Fig. 2(b) where the location of the source frequency is indicated as being between ν_{p-1} and ν_p . The larger separation between the source and molecular frequencies leads to a larger intracavity field due to a lower absorption. The generalized Rabi frequency is therefore larger due to a combination of a stronger field and larger detuning which give the Raman gain at a correspondingly larger distance from the source frequency.

A variety of similar observations of the second side-mode instability are presented in Table I. We see that rule 2 remains a useful predictor of the pulsing frequency and that the mode-pulling effects are relatively smaller than for the nearest side-mode instability observed here and in Ref. 8. Rule 1 is not as robust, and unlike the case of the nearest side-mode instability in Ref. 8 (where both the Rabi frequency and the generalized Rabi frequency were effective predictors of the pulsing frequency) the generalized Rabi frequency is a better predictor. The

departure by as much as 30% arises from the specific location of the mode ν_{p-2} within the band of frequencies having Raman gain.

Similar instabilities involving the second side mode have been observed in the theoretical studies of this problem. For example, in Ref. 8, Fig. 24(b), one sees two regions of instability for a resonantly tuned (purely absorptive) case. These pulsations appear at the cavity mode spacing for low intracavity Rabi frequencies and at twice the cavity mode spacing for higher intracavity Rabi frequencies. Similar effects are to be expected in the theoretical studies of the dispersive case.

As in the comparison reported in Ref. 8, however, we found no evidence of a second side-mode instability in the purely absorptive case within the range of source powers accessible with our source.

We are pleased to acknowledge useful discussions with L. A. Lugiato. The circular waveguide components used have been kindly donated by the Centre National d'Etude des Télécommunications through Dr. A. Boulouard. This work was carried out in the framework of the European Economic Community twinning project on "Dynamics of Nonlinear Optical Systems." Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Université de Lille is Unité associée au Centre National de la Recherche Scientifique and is also supported by the Région Nord—Pas-de-Calais.

*Present address: Department of Physics, Bryn Mawr College, Bryn Mawr, PA 19010-2899.

¹H. Risken and K. Nummedal, *J. Appl. Phys.* **39**, 4662 (1968).

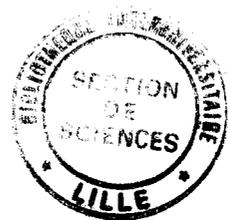
²R. Graham and H. Haken, *Z. Phys.* **213**, 420 (1968).

³R. Bonifacio and L. A. Lugiato, *Lett. Nuovo Cimento* **21**, 505 (1978); **21**, 510 (1978); see also S. L. McCall, *Appl. Phys. Lett.* **32**, 284 (1978). The dispersive case was analyzed in L. A. Lugiato, *Opt. Commun.* **33**, 108 (1980); R. Bonifacio, M. Gronchi, and L. A. Lugiato, *ibid.* **30**, 129 (1979); M. Gronchi, V. Benza, L. A. Lugiato, P. Meystre, and M. Sargent III, *Phys. Rev. A* **24**, 1419 (1981); L. A. Lugiato, V. Benza, L. M. Narducci, and J. D. Farina, *Z. Phys. B* **49**, 351 (1983).

⁴K. Ikeda, *Opt. Commun.* **30**, 257 (1979); see also in *Optical Instabilities*, edited by R. W. Boyd, M. G. Raymer, and L. M. Narducci (Cambridge University Press, Cambridge, 1986), p. 85.

⁵(a) M. LeBerre, E. Ressayre, A. Tallet, and H. M. Gibbs, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 274 (1986); M. LeBerre, E. Ressayre, A. Tallet, H. M. Gibbs, D. L. Kaplan, and M. H. Rose, *Phys. Rev. A* **35**, 4020 (1987); H. M. Gibbs, D. L. Kaplan, F. A. Hopf, M. LeBerre, E. Ressayre, and A. Tallet, in *Instabilities and Chaos in Quantum Optics II*, edited by N. B. Abraham, F. T. Arecchi, and L. A. Lugiato, (Plenum, New York, 1988), p. 247 and references therein; (b) see also M. W. Derstine, H. M. Gibbs, F. A. Hopf, and D. L. Kaplan, *Phys. Rev. A* **27**, 3200 (1983); J. Y. Gao, L. M. Narducci, H. Sadiky, M. Squicciarini, and J. M. Yuan, *ibid.* **30**, 901 (1984); R. Vallée, P. Dubois, M. Cote, and C. Delisle, *ibid.* **36**, 1327 (1987); C.-F. Li, in *Optical Bistability, Instability and Optical Computing*, edited by H.-Y. Zhang and K. K. Lee (World Scientific, Singapore, 1988), p. 37; H.-J. Zhang, J.-H. Dai, P. Y. Wang, and C.-D. Jin, *J. Opt. Soc. Am. B* **3**, 231 (1986).

- ⁶H. M. Gibbs, F. A. Hopf, D. L. Kaplan, and R. L. Shoemaker, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 474 (1981).
- ⁷B. Ségard and B. Macke, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 412 (1988); in *Optical Bistability IV*, edited by W. Firth, N. Peyghambarian, and A. Tallet (Les Editions de Physique, Paris, 1988) [reprinted from *J. Phys. (Paris) Colloq.* **49**, Suppl. No. 6, C2-371 (1988)].
- ⁸B. Ségard, B. Macke, L. A. Lugiato, F. Prati, and M. Brambilla, *Phys. Rev. A* **39**, 703 (1989).
- ⁹G. Khitrova, J. F. Valley, and H. M. Gibbs, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1126 (1988); in *Optical Bistability IV*, edited by W. Firth, N. Peyghambarian, and A. Tallet (Les Editions de Physique, Paris, 1988) [reprinted from *J. Phys. (Paris) Colloq.* **49**, Suppl. No. 6, C2-483 (1988)]. Related behavior has been reported by D. Grandclément, G. Grynberg, and M. Pinard, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 40 (1987).
- ¹⁰A transverse radial profile of the fields destroys the instability in the purely absorptive case of optical bistability: L. A. Lugiato, L. M. Narducci, D. K. Bandy, and C. A. Pennise, *Opt. Commun.* **46**, 64 (1983); but not in the dispersive cases, L. A. Lugiato and M. Milani, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 15 (1985); L. A. Lugiato and L. M. Narducci, *Phys. Rev. A* **32**, 1576 (1985). Although these calculations use the simple approximation of a fixed transverse beam profile (a crude assumption for most optical beams in cavities), such a model is quite appropriate to the waveguided beam in the cavity of our experiment.



Résumé

Les travaux présentés sont relatifs à l'étude de la réponse d'un bistable tout optique à une modulation d'un de ses paramètres de contrôle. Les bistables sous investigations sont constitués par des résonateurs Pérot-Fabry remplis d'un absorbant saturable (milieu non linéaire) et le paramètre modulé est la fréquence du champ exciteur.

A faible amplitude de modulation, le bistable présente une courbe de résonance centrée sur la fréquence de ses oscillations de relaxation. Lorsque l'amplitude de modulation croît, cette courbe se déforme; on observe tout d'abord un déplacement de la fréquence de résonance, puis la croissance d'une résonance subharmonique $1/2$ et d'un cycle d'hystérésis. Dans certaines conditions expérimentales, on observe également l'apparition d'"instabilités" au voisinage de la fréquence de relaxation.

Les deux premiers chapitres du mémoire sont consacrés respectivement à la description des bistables et d'un modèle numérique élaboré en vue d'une confrontation avec les résultats expérimentaux. Un troisième chapitre aborde l'étude détaillée du déplacement des fréquences de résonance. Cette étude a montré que le sens et l'amplitude de ce dernier dépend de façon cruciale de la fréquence centrale du champ exciteur et a conduit à l'élaboration d'un modèle analytique simple qui précise en particulier la loi de variation de ce déplacement en fonction de l'amplitude de la modulation. Les comportements erratiques associés aux instabilités qui apparaissent sur la courbe de résonance sont analysés dans un dernier chapitre. Ces comportements s'avèrent être de nature chaotique et non quasi-périodique. Les scénarios suivis par le bistable mettent en évidence un passage brutal d'un régime T-périodique à un régime chaotique accompagné ou non de bistabilité généralisée. L'apparition du chaos serait alors due à une compétition entre attracteurs dont l'un serait caractérisé par l'existence d'une bifurcation homocline. La vérification de cette hypothèse est actuellement en cours.