

N° d'ordre : 755

50376
1991
250

66139

50376
1991
250

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

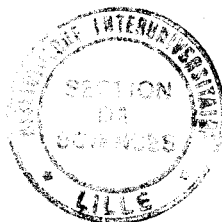
pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN ELECTRONIQUE

par

Nabil BENJELLOUN

**DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES ELECTRIQUES
D'ANTENNES DESCENDUES DANS DES FORAGES DE
RECONNAISSANCE - APPLICATION A LA TOMOGRAPHIE
ELECTROMAGNETIQUE**



soutenu le 11 juillet 1991 devant la Commission d'Examen

Membres du jury : MM.

R. GABILLARD

Président

A. ZEDDAM

Rapporteur

B. DEMOULIN

Rapporteur

P. DEGAUQUE

Directeur de thèse

R. LAGABRIELLE

Examineur

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Radiopropagation et Electronique (L.R.P.E) de L'Université des sciences et techniques de Lille Flandres Artois, dirigée par Monsieur le Professeur R.GABILLARD.

Je remercie Monsieur le Professeur R.GABILLARD de m'avoir fait l'honneur de juger mon travail, et de présider le jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma reconnaissance et de mon plus profond respect.

Cette thèse a été effectuée sous la direction de Monsieur le Professeur P. DEGAUQUE . Ses conseils éclairés et son soutien permanent ont été déterminants à l'aboutissement de ce travail. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour cette aide efficace.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur A. ZEDDAM , Ingénieur du C.N.E.T , qui a assuré la tâche de rapporteur de cette thèse.

Je remercie Monsieur B. DEMOULIN Maitre de conférence de L'Université de Lille I, de m'avoir fait l'honneur de juger mon travail et de participer au jury. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma reconnaissance.

Je tiens à remercier Monsieur R. LAGABRIELLE, chef de la section de Géophysique Appliquée au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (L.C.P.C) de Nantes, qui a bien voulu examiner mon travail et participer au jury. Ce travail a pu être réalisé grâce à un contrat L.C.P.C et l'aide de Monsieur LAGABRIELLE a été constante.

Mes remerciements s'adressent également à Madame M.DEMOULIN pour sa collaboration et son aide dans le calcul numérique.

Je ne terminerai pas cet avant propos sans exprimer mes remerciements à Monsieur DEHORTER qui a contribué à l'élaboration de ce document, et à tous les membres de l'équipe du Radiopropagation et Electronique pour leur aide sympathique.

SOMMAIRE

CHAPITRE I : PRESENTATION DU PROCEDE DE TOMOGRAPHIE ELECTROMAGNETIQUE

INTRODUCTION (p.3)

I.1 - PROPAGATION DANS UN MILIEU HOMOGENE ET INFINI (p.4)

I.1.1 - Expressions du champ rayonné par un dipôle (p.4)

I.1.2 - comportement du champ rayonné (p.7)

I.1.2.1 - Comportement en basse fréquence

I.1.2.2 - Comportement en haute fréquence

I.2 - RESULTATS EXPERIMENTAUX (p.10)

I.2.1 - Description des antennes (p.10)

I.2.1.1 - Mesures de l'impédance d'entrée dans un milieu homogène

I.2.1.2 - Influence de la profondeur de la sonde sur l'impédance d'entrée

I.2.1.3 - Influence de la position de la sonde

I.3 - TRANSMISSION ENTRE DEUX FORAGES (p.16)

I.3.1 - Mesures (p.20)

I.3.2 - Problème inverse (p.24)

I.3.2.1 - Théorie des rayons "rectilignes"

I.3.2.2 - Inversion des amplitudes

I.3.2.3 - Résultats

CONCLUSION (p.32)

CHAPITRE II : RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE DANS UN MILIEU HOMOGENE

INTRODUCTION (p.33)

II.1 - FORMULATION DE L'EQUATION INTEGRALE EN CHAMP ELECTRIQUE (p.35)

II.2 - RESOLUTION DE L'EQUATION INTEGRALE PAR LA METHODE DES MOMENTS

II.2.1 - La méthode des moments (p.47)

II.2.1.1 - Principe de la méthode

II.2.1.2 - Application de la méthode des moments à une structure filiforme

II.2.1.3 - Ligne chargée

II.2.2 - Méthode point-segment (p.47)

II.2.3 - Méthode de Galerkin (p.50)

II.3 EXEMPLES NUMERIQUES (p.54)

II.3.1 - Cas d'une ligne au dessus d'un sol parfaitement conducteur (p.54)

II.3.1.1 - Matrice de couplage (p.56)

a) méthode de point-segment

b) méthode de Galerkin

II.3.1.2 Ligne au dessus d'un sol parfaitement conducteur
Confrontation avec la théorie des lignes (p.59)

II.3.1.3 Antenne en "J" (p.67)

CONCLUSION (p.73)

CHAPITRE III : MODELISATION THEORIQUE D'UNE ANTENNE CYLINDRIQUE CENTREE

DANS UN FORAGE

INTRODUCTION (p.74)

III.1 - RAYONNEMENT D'UN DIPOLE ELECTRIQUE VERTICAL (p.76)

III.1.1 - Détermination du potentiel de Hertz (p.77)

III.1.2 - Potentiel de Hertz dans les différents milieux (p.82) :

III.1.3 - Conditions aux limites - Expressions du potentiel de Hertz et du champ électromagnétique (p.85)

III.2 - ANTENNE MINCE CENTREE DANS UN MILIEU STRATIFIE (p.91)

III.2.1 - Calcul de la matrice impédance (p.91)

a) *formulation de l'équation intégrale*

III.2.2 - Résolution de l'équation intégrale par la méthode des moments (p.93)

III.3 - EXEMPLES NUMERIQUES (p.96)

III.3.1 - Distribution du courant sur l'antenne (p.97)

III.3.1.a - Antenne située dans un milieu homogène et infini

III.3.1.b - Antenne située dans un trou sec

III.3.1.c - Antenne située dans un milieu à 3 couches

III.3.2 - Variation de l'impédance d'entrée - Adaptation de l'antenne (p. 104)

III.3.2.1 - Cas d'un trou "sec"

III.3.2.2 - Cas d'un milieu à 3 couches

a) Influence du rayon du forage

b) Influence du rayon de l'isolant autour de l'antenne

III.3.3 - Influence de la présence du forage sur le champ rayonné (p. 124)

III.3.3.1 - Cas d'un trou "sec"

III.3.3.2 - Cas d'un milieu à 3 couches

CONCLUSION (p. 135)

CHAPITRE IV : INFLUENCE DE LA POSITION DE LA SONDE DANS LE TUBE ISOLANT

INTRODUCTION (p. 136)

IV.1 - EXPRESSIONS DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE (p. 138)

IV.2 - REPRESENTATION INTEGRALE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE (p. 143)

IV.2.1 - Représentation intégrale du potentiel de Hertz (p. 143)

IV.2.2 - Potentiel de Hertz - milieu à 2 couches (p. 143)

IV.2.2.1 - Conditions aux limites - composantes du champ

IV.2.3 - Potentiel de Hertz - milieu à 3 couches (p. 148)

IV.2.3.1 - Conditions aux limites - composantes du champ

IV.3 ANTENNE MINCE EXCENTREE DANS UN FORAGE (p. 155)

IV.3.1 Matrice impédance (p. 156)

IV.4 - RESULTATS DES APPLICATIONS NUMERIQUES (p. 158)

IV.4.1 - Milieu à 2 couches (p. 159)

IV.4.1.1 - Influence de l'excentrage sur la distribution du courant

IV.4.1.2 - Influence de l'excentrage sur le champ E_z

IV.4.1.3 - Influence de l'excentrage sur l'impédance d'entrée
et la fréquence d'accord

IV.4.2 - Milieu à 3 couches (p.165)

IV.4.2.1 - Repartition du courant sur l'antenne

IV.4.2.2 - Impédance d'entrée - Fréquence d'accord

IV.4.3 - Influence de la perméabilité (p.167)

CONCLUSION (p.173)

CHAPITRE V : MODELISATION THEORIQUE D'UNE ANTENNE "J" DANS UN MILIEU

STRATIFIE RADIALEMENT

INTRODUCTION (p. 174)

V.1 - EXPRESSIONS DU POTENTIEL DE HERTZ POUR UN DIPOLE ELECTRIQUE HORIZONTAL (p. 175)

V.1.1 - Formulation intégrale du potentiel de Hertz (p.177)

V.1.2 - Potentiel de Hertz dans les différents milieux (p.184)

V.1.3 - Conditions aux limites - Expressions du champ (p.185)

V.1.3.1 - Expressions du champ (p.189)

V.2 - MATRICE IMPEDANCE DE L'ANTENNE EN J (p. 193)

V.2.1 - Expressions du champ rayonné par l'antenne (p.195)

a) *Contribution de la partie verticale*

b) *Contribution de la partie horizontale*

V.2.2 - Matrice impédance (p.196)

V.2.2.1 - Dipole source vertical (p.197)

a) *Dipole d'observation vertical*

b) *Dipole d'observation horizontale*

V.2.2.2 - Dipole source horizontal (p.199)

a) *Dipole d'observation vertical*

b) *Dipole d'observation horizontale*

V.3 - EXEMPLES NUMERIQUES (p.200)

V.3.1 - Antenne en milieu homogène (air) (p.200)

V.3.2 - Antenne centrée dans le forage (p.204)

V.3.3 - Antenne excentrée dans le forage (p.208)

V.4 - CONCLUSION (p.208)

CONCLUSION GENERALE (p.209)

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

La connaissance de la nature du sol est d'une grande importance pour le génie civil. Si on s'intéresse par exemple aux couches de terrain se trouvant dans les vingt premiers mètres à partir de la surface, des sondages ponctuels et des carottages peuvent être effectués. On conçoit cependant que pour des raisons de temps et de coût, la distance entre les forages systématiques de reconnaissance ne puisse pas être inférieure à quelques mètres (typiquement 5 m à 10 m).

L'objet de la tomographie est de valoriser ces forages en essayant de " reconstruire " le terrain, en terme de ses paramètres physiques caractéristiques, grâce à des mesures de transmission entre forages. Les deux méthodes classiques sont l'électromagnétisme et la sismique, faisant intervenir des transmissions qui sont sensibles à la permittivité complexe du milieu ou à la vitesse des ondes de vibration en tout point du sol.

Dans le cadre de ce travail, nous ne nous intéressons qu'au procédé de tomographie électromagnétique dans le domaine fréquentiel pour lequel une antenne d'émission et une antenne de réception sont descendues dans un forage. L'amplitude et éventuellement la phase du signal sont enregistrées pour de nombreuses positions des antennes.

Nous exposons essentiellement l'approche théorique que nous avons suivie pour montrer la faisabilité de la méthode en nous intéressant plus particulièrement à la variation de l'impédance d'entrée des antennes en fonction de leur position dans le forage. Nous décrirons en préambule les résultats théoriques de la propagation en milieu homogène et infini qui ont permis de choisir la fréquence d'émission, puis les premiers essais qui ont été effectués. Le deuxième chapitre sera consacré à la présentation du

formalisme permettant de calculer la distribution du courant sur une antenne de forme quelconque. Le troisième et le quatrième chapitres traiteront respectivement l'influence du sol sur une antenne demi-onde soit centrée soit excentrée dans le forage. Enfin l'analyse théorique et les résultats numériques pour l'antenne en J, utilisée dans les expériences, seront décrits dans le cinquième chapitre.

CHAPITRE I

PRESENTATION DU PROCEDE DE TOMOGRAPHIE

ELECTROMAGNETIQUE

CHAPITRE I : PRESENTATION DU PROCEDE DE TOMOGRAPHIE ELECTROMAGNETIQUE

INTRODUCTION (p.3)

I.1 - PROPAGATION DANS UN MILIEU HOMOGENE ET INFINI (p.4)

I.1.1 - Expressions du champ rayonné par un dipôle (p.4)

I.1.2 - comportement du champ rayonné (p.7)

I.1.2.1 - Comportement en basse fréquence

I.1.2.2 - Comportement en haute fréquence

I.2 - RESULTATS EXPERIMENTAUX (p.10)

I.2.1 - Description des antennes (p.10)

I.2.1.1 - Mesures de l'impédance d'entrée dans un milieu homogène

I.2.1.2 - Influence de la profondeur de la sonde sur l'impédance d'entrée

I.2.1.3 - Influence de la position de la sonde

I.3 - TRANSMISSION ENTRE DEUX FORAGES (p.16)

I.3.1 - Mesures (p.20)

I.3.2 - Problème inverse (p.24)

I.3.2.1 - Théorie des rayons "rectilignes"

I.3.2.2 - Inversion des amplitudes

I.3.2.3 - Résultats

CONCLUSION (p.32)

INTRODUCTION

Nous développons dans ce premier chapitre l'approche théorique permettant de calculer le champ électromagnétique rayonné par un dipole électrique vertical (D.E.V) .

Après un bref rappel des conditions de propagation dans un milieu conducteur homogène et infini, nous présenterons les résultats des campagnes de mesures effectuées dans des zones karstiques sur les sites du Viaduc de la Planchette dans le Massif Central.

Les sondes d'émission et de réception réalisées dans le laboratoire, nous ont permis de faire des premiers essais. Un premier type d'essai a consisté à mesurer l'impédance d'entrée et la fréquence d'accord de l'antenne en fonction de sa profondeur. Ceci nous a permis de voir la sensibilité de l'antenne d'émission vis à vis de son environnement. Nous avons ensuite mesuré l'amplitude du signal sur l'antenne réceptrice (située dans un forage voisin) pour chaque position de la source, le forage récepteur est ausculté sur toute sa longueur.

Les matériaux constituant le sol seront donc différenciés par leur aptitude à transmettre ou non l'énergie électromagnétique.

L'ensemble des amplitudes ainsi mesurées vient alimenter des programmes de reconstruction spécifiquement mis au point par le laboratoire central des Ponts et Chaussées (L.C.P.C) qui déterminent la répartition des propriétés d'atténuation de l'onde électromagnétique dans le plan défini par les forages de mesure.

I.1 - Propagation dans un milieu homogène et infini

I.1.1 - Expression du champ rayonné par un dipole

Dans un milieu supposé tout d'abord homogène, on considère un dipole électrique dont l'axe de rotation coïncide avec l'axe oz du système de coordonnées cylindriques représenté Figure (I - 1).

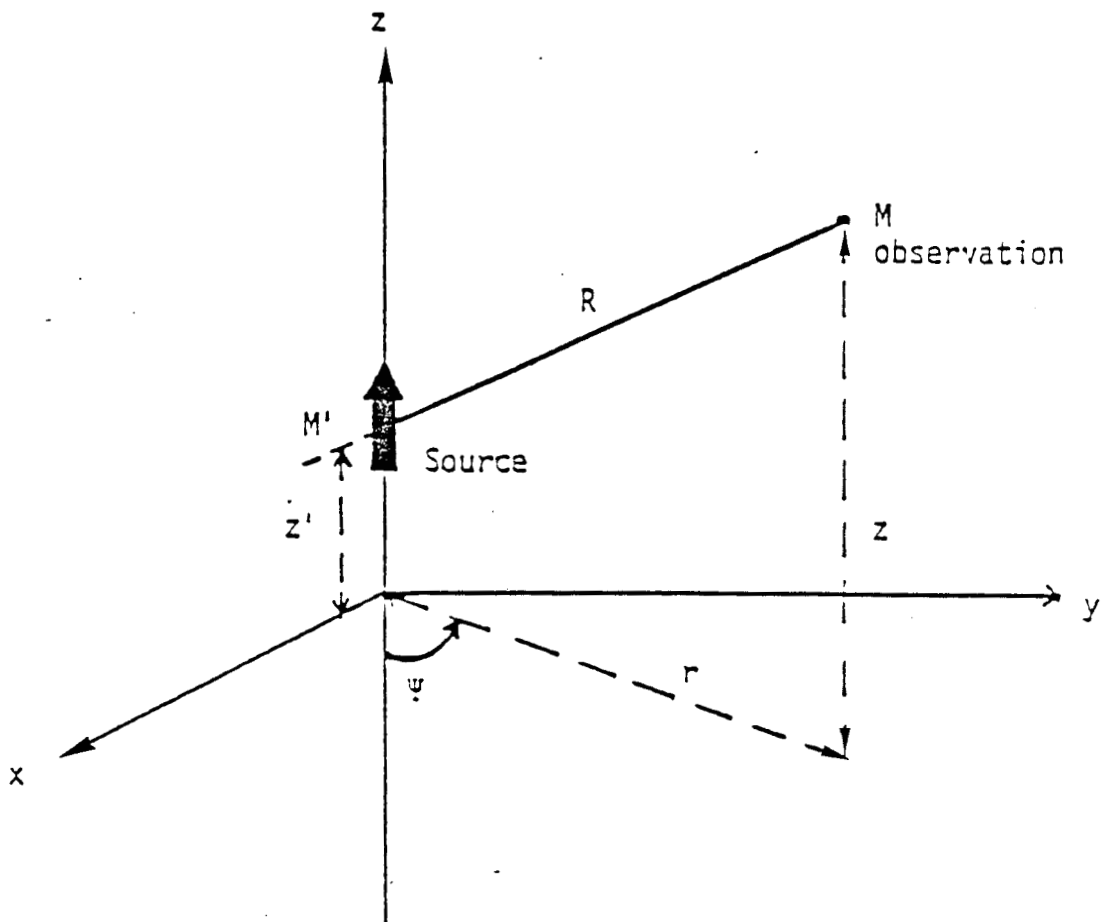


Figure. I - 1 : Rayonnement d'un dipole électrique dans un milieu homogène.

Le milieu de conductivité σ , de perméabilité μ , et de permittivité ϵ , contient pour unique source de rayonnement ce dipole infinitésimal de longueur dl parcouru par un courant $I = I_0 e^{j\omega t}$.

Les points d'observation et d'émission M et M' sont repérés par leurs coordonnées cylindriques.

Le champ électromagnétique rayonné est solution des équations de Maxwell. En introduisant le potentiel de Hertz Π , les composantes électriques E et magnétiques H sont déduites de :

$$\vec{E} = \text{rot rot } \vec{\Pi} \tag{I.1}$$

$$\vec{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \text{ rot } \vec{\Pi}$$

Le vecteur $\vec{\Pi}$ résulte de l'équation de Helmotz :

$$(\Delta - \gamma^2) \vec{\Pi} = \frac{\vec{P}}{\epsilon} \delta(R) \tag{I.2}$$

\vec{P} : Polarisation électrique du dipole ; $\gamma = -\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \sigma$ constante de propagation du milieu; la pulsation $\omega = 2\pi f$, f : la fréquence de travail, $j = \sqrt{-1}$. ; Δ : le laplacien ; δ : fonction de Dirac.

Dans le cas présent, la symétrie de révolution du système fait que Π se réduit à une seule composante suivant l'axe des Z :

$$\Pi = \frac{I \cdot dl}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)} \frac{e^{-\gamma R}}{R} \tag{I.3}$$

$$R = \sqrt{r^2 + (z - z')^2} \quad : \text{ distance émetteur- recepteur}$$

Le développement des calculs mènent aux composantes suivantes des champs électromagnétiques :

$$E_r(M) = \frac{I \cdot dl}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left[\frac{e^{-\gamma R}}{R} \right]$$

$$E_z(M) = \frac{I \cdot dl}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma^2 \right] \left[\frac{e^{-\gamma R}}{R} \right] \quad (I.4)$$

$$H_\psi(M) = \frac{I \cdot dl}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{e^{-\gamma R}}{R} \right]$$

d'où:

$$E_r(M) = \frac{I \cdot dl}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)} r (z - z') (\gamma^2 R^2 + 3\gamma R + 3) \left[\frac{e^{-\gamma R}}{R^5} \right]$$

$$E_z(M) = \frac{I \cdot dl}{4\pi(\sigma + j\omega\epsilon)} \left[\frac{(z-z')^2}{R^2} (\gamma^2 R^2 + 3\gamma R + 3) - (\gamma^2 R^2 + \gamma R + 1) \right] \dots \left[\frac{e^{-\gamma R}}{R^3} \right]$$

$$H_\psi(M) = - \frac{I \cdot dl}{4\pi} r (\gamma R + 1) \left[\frac{e^{-\gamma R}}{R^3} \right] \quad (I.5)$$

I. 2 - Comportement du champ rayonné

I. 2 . 1 - En basse fréquence

Si la fréquence d'émission est telle que ($\sigma \gg \omega \varepsilon$), on définit une profondeur de pénétration des ondes dans le sol par :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\omega \mu \sigma}} \quad (\text{I . 6})$$

Dans le cas d'une liaison horizontale, on remarque d'après les formules (I.4) que le champ décroît en fonction de la distance émetteur récepteur suivant un facteur $\exp(-r / \delta) / r$ si $|\gamma r| \gg 1$. De la même façon on voit que si la fréquence augmente, le terme exponentiel est prépondérant, ce qui provoque une décroissance rapide du champ en fonction de la fréquence.

I.2.2 - Comportement en haute fréquence

Pour l'étude des variations du champ électromagnétique, on définit deux paramètres physiques du milieu [1].

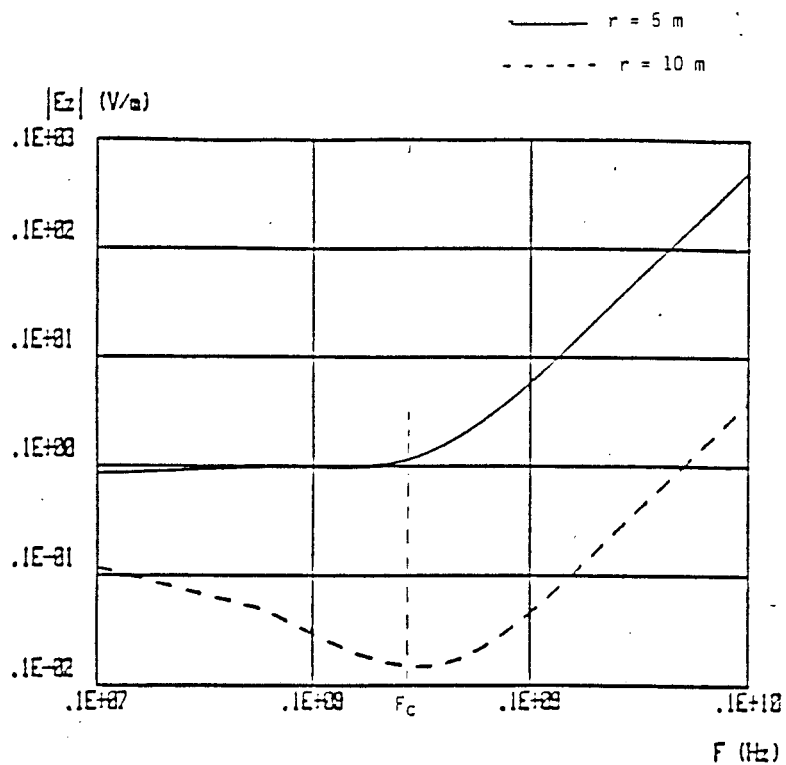
$$f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad : \text{fréquence caractéristique} \quad (\text{I . 7})$$

$$L_c = \frac{2}{\sigma} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad : \text{distance caractéristique} \quad (\text{I . 8})$$

A titre indicatif, nous donnons dans le tableau ci-dessous les valeurs de ces paramètres caractéristiques en fonction de σ et ε .

PLANCHE I - 1 : Variation de E_z avec la fréquence

Paramètre : distance (r)



Variation de E_z avec la position verticale du récepteur

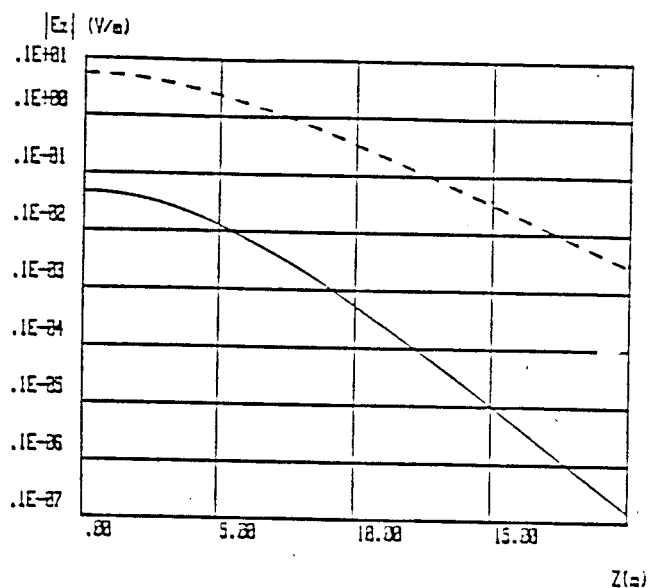


PLANCHE I - 2 : Paramètre : conductivité

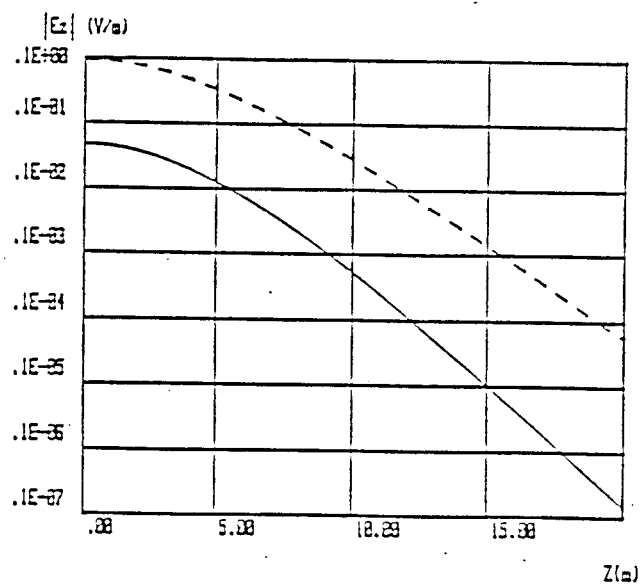


PLANCHE I - 3 : Paramètre : permittivité

pour $\epsilon_r = 5$	σ (s / m)	10^{-1}	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}
	L_c (m)	0,12	0,24	1,2	2,4	12
	F_c (MHz)	360	180	36	18	3,6

pour $\epsilon_r = 10$	σ (s / m)	10^{-1}	$5 \cdot 10^{-2}$	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-3}
	L_c (m)	0,17	0,34	1,7	2,4	17
	F_c (MHz)	180	90	18	9	1,8

Si on envisage une distance de propagation entre 10 et 20 m, on se rend compte d'après ce tableau de la très grande sensibilité de la liaison à la conductivité du milieu. Cependant, pour réaliser une transmission supérieure à une dizaine de mètres pour $\sigma = 10^{-2}$ S/m, une fréquence de 100 MHz vérifie toujours la condition $\omega \epsilon \gg \sigma$.

Sur les courbes représentant la variation du champ $|E_z|$ en fonction de la fréquence : planche (I - 1), on constate l'augmentation du champ pour les fréquences supérieures à F_c . D'autre part, on remarque la grande sensibilité du rayonnement à la conductivité du milieu, planche (I - 2), et de façon moindre à la permittivité planche (I - 3).

Pour une distance entre forages de l'ordre d'une dizaine de mètres, et pour un milieu dont la conductivité est inférieure ou égale à 10^{-2} S/m, une étude numérique détaillée [2] a montré qu'avec une puissance d'émission de l'ordre du Watt, une transmission à travers le sol est possible dans une gamme de fréquences comprise entre 100 MHz et 300 MHz. Dans la suite de l'étude, la fréquence de 200 MHz a été choisie (sauf indication contraire).

I.2. Résultats expérimentaux

Pour pouvoir interpréter les mesures résultant d'une transmission entre forages, il faut que le courant d'émission, donc l'impédance d'entrée de l'antenne dépende peu de la profondeur de la sonde.

Nous nous sommes donc intéressés dans un premier temps à une étude expérimentale de la variation de l'impédance d'entrée de l'antenne en fonction de sa profondeur dans le sol. Nous présentons ensuite les mesures effectuées sur le site d'un futur Viaduc.

Avant de donner les résultats de ces mesures, nous allons faire une description des antennes utilisées.

I.2.1 - Description des antennes

Le diamètre du forage représente la limitation principale dans le choix de l'antenne, car son diamètre est de l'ordre de 7 à 9 cm. Différentes variantes géométriques d'antennes ont été réalisées et testées au laboratoire. Les meilleures performances ont été obtenues pour l'antenne dite en J, figure (I - 2), qui est un dipole en $\lambda/2$ excité à son extrémité au moyen d'une ligne bifilaire d'adaptation de longueur $l \cong \lambda/4$

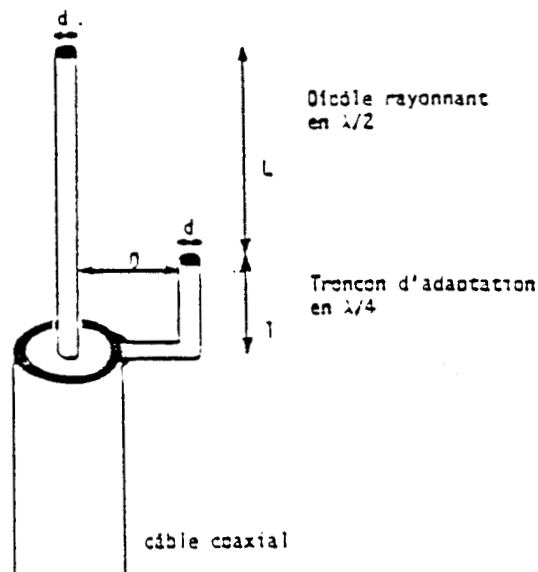
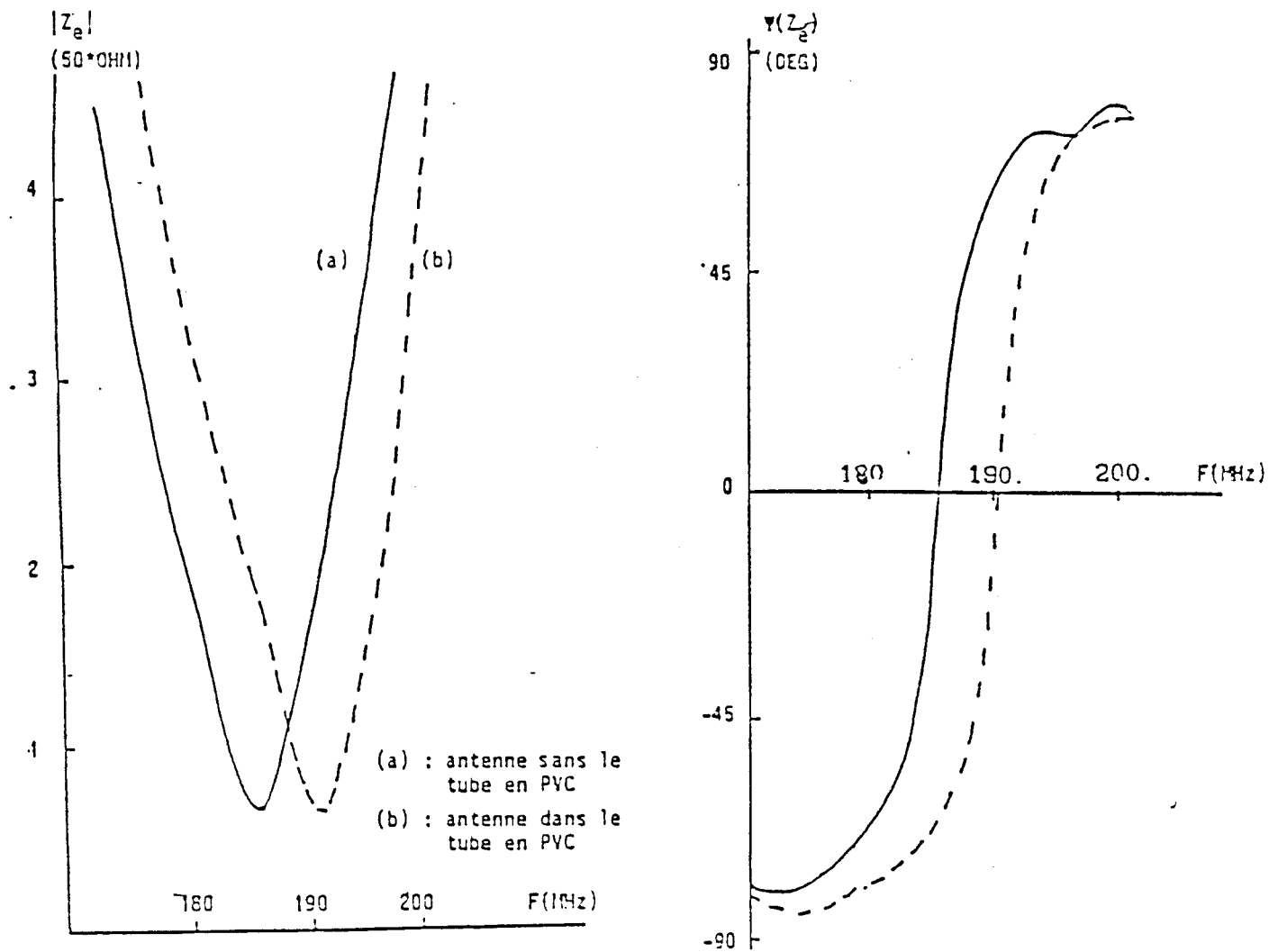


Figure I - 2 : Antenne en J

PLANCHE I - 4 : ANTENNE EN J

IMPEDANCE D'ENTREE EN FONCTION DE LA FREQUENCE



Pour une fréquence de 200 MHz, une antenne a été réalisée avec un diamètre $d=0.35$ mm, l'élément rayonnant de longueur $L = 72$ cm et l'élément d'adaptation de longueur $l = 32$ cm sont distants de $D = 4.1$ cm. La rigidité mécanique de l'antenne étant insuffisante, vu le diamètre du fil, celui-ci a été collé sur un support mince en P.V.C alvéolé, l'ensemble a été introduit dans un tube en P.V.C de diamètre extérieur 5 cm et d'épaisseur 3.5 mm. Des joints d'étanchéité ont été placés sur les extrémités du tube pour que la sonde puisse être immergée.

I.2. 1. 1 - Mesure de l'impédance d'entrée dans un milieu homogène

Le logiciel mis au point sur un ordinateur H.P 9836, [2], permet de piloter automatiquement la procédure de mesure de l'impédance de charge placée à l'extrémité d'un câble coaxial. L'étalonnage est obtenu à partir d'un court-circuit.

Sur la planche (I - 4), nous avons représenté les variations de l'amplitude et de la phase de l'impédance d'entrée en espace libre en fonction de la fréquence. Les deux courbes ont été tracées dans le cas où l'antenne est placée ou non dans le tube en P.V.C. On constate un décalage de 5 MHz de la fréquence d'accord (définie lorsque la partie imaginaire de l'impédance d'entrée est nulle) entre les deux cas dû à la permittivité diélectrique du tube.

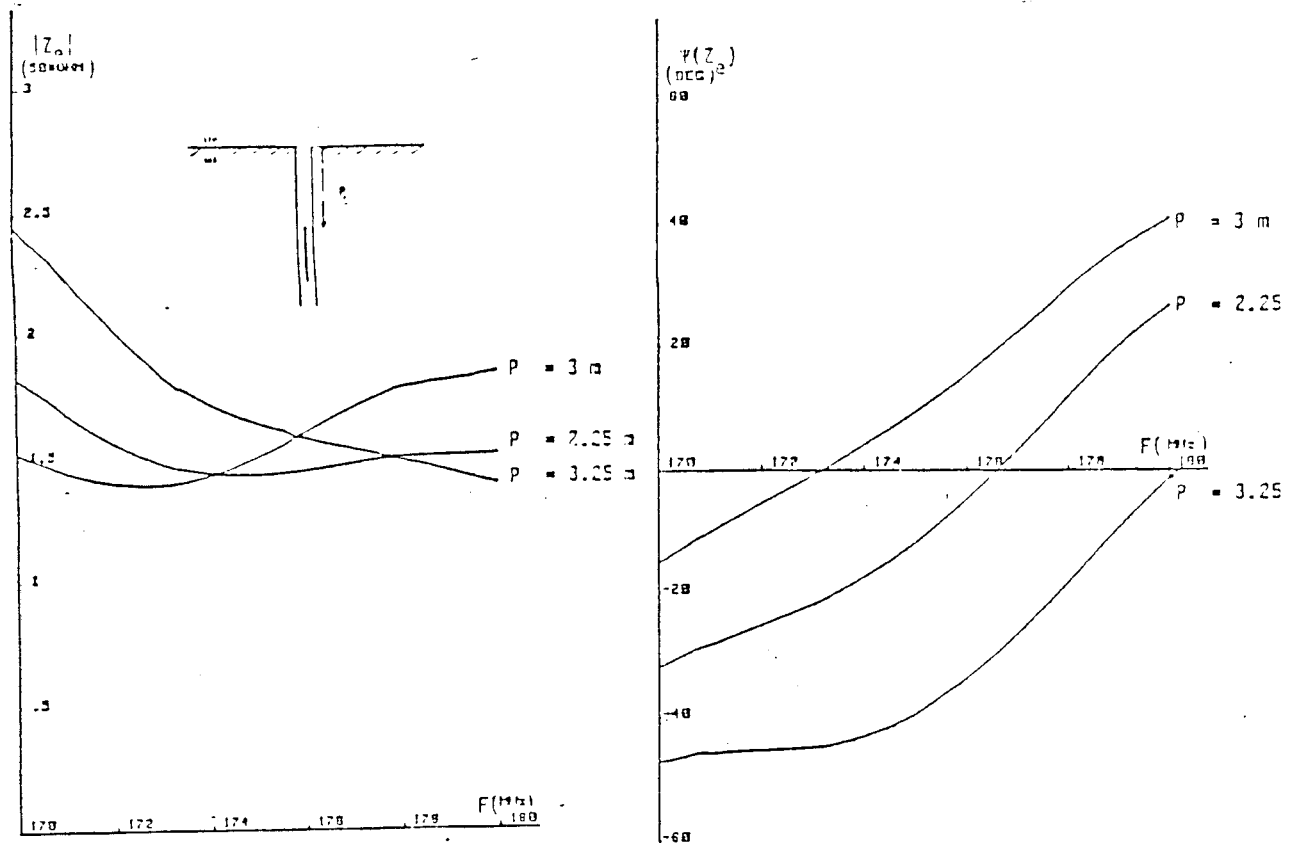
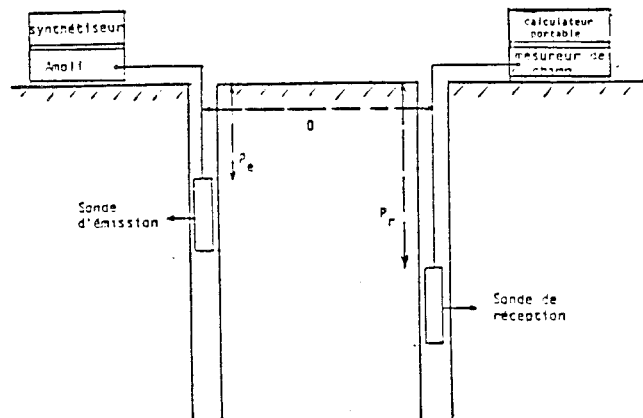
I.2.1.2 - Influence de la profondeur de la sonde sur l'impédance d'entrée [3]

Ces mesures ont eu lieu en 1986 dans un forage en milieu granitique de la région de Saint-Brieuc.

Les mesures de l'impédance d'entrée de l'antenne en fonction de la fréquence ont été faites dans la bande de 170 MHz à 180 MHz pour des profondeurs de la sonde variant entre 0 et 9 m, ceci avec un pas de 25 cm.

CHAPITRE I : PRESENTATION DU PROCEDE DE TOMOGRAPHIE ELECTROMAGNETIQUE

Planche I - 5 : Impédance d'entrée pour trois profondeurs de l'antenne.



Les courbes obtenues ne montrent pas de variations importantes de Z_e sauf pour certaines positions de la sonde et notamment lorsque la profondeur est soit de 1.75 m, soit de 3.25 m. Les courbes de la planche (I - 5) correspondent aux cas extrêmes qui ont été enregistrés et on remarque que la fréquence d'accord varie entre 173 MHz et 180 MHz. Cependant pour la fréquence centrale choisie de 175 MHz, le module de l'impédance d'entrée ne varie pas dans des proportions importantes puisqu'il reste compris entre 72 Ω et 82 Ω .

Ces variations de fréquence d'accord et de Z_e peuvent s'expliquer par un changement de résistivité du milieu encaissant dans la zone de profondeur mentionnée précédemment.

Une synthèse des différents résultats de mesure est donnée sur la planche (I - 6), où nous avons reporté la variation de la fréquence d'accord (f_a) et de la résistance d'entrée en fonction de la profondeur de la sonde. Entre 1 m et 2 m, on trouve des résultats voisins de ceux correspondant à des profondeurs supérieures à 3 m avec une fréquence d'accord élevée caractérisant un milieu isolant. Par contre, entre 1.75 m et 3.25 m, il y a une diminution brutale de f_a qui doit correspondre à une couche conductrice ou à la présence d'eau due à des fissures dans le sol.

Lors d'une transmission forage-forage, la fréquence d'émission sera fixe. La courbe de la planche (I - 7) montre donc pour une fréquence de 175.6 MHz, les variations du module de l'impédance d'entrée en fonction de la profondeur de la sonde. La valeur de $|Z_e|$ se situe au voisinage de $77 \Omega \pm 3 \Omega$ dans la zone conductrice située à $z=2$ m pour laquelle la valeur minimum de $|Z_e|$ est de 71.5 Ω , ce qui correspond à une variation relative maximum de 10 % du module de Z_e .

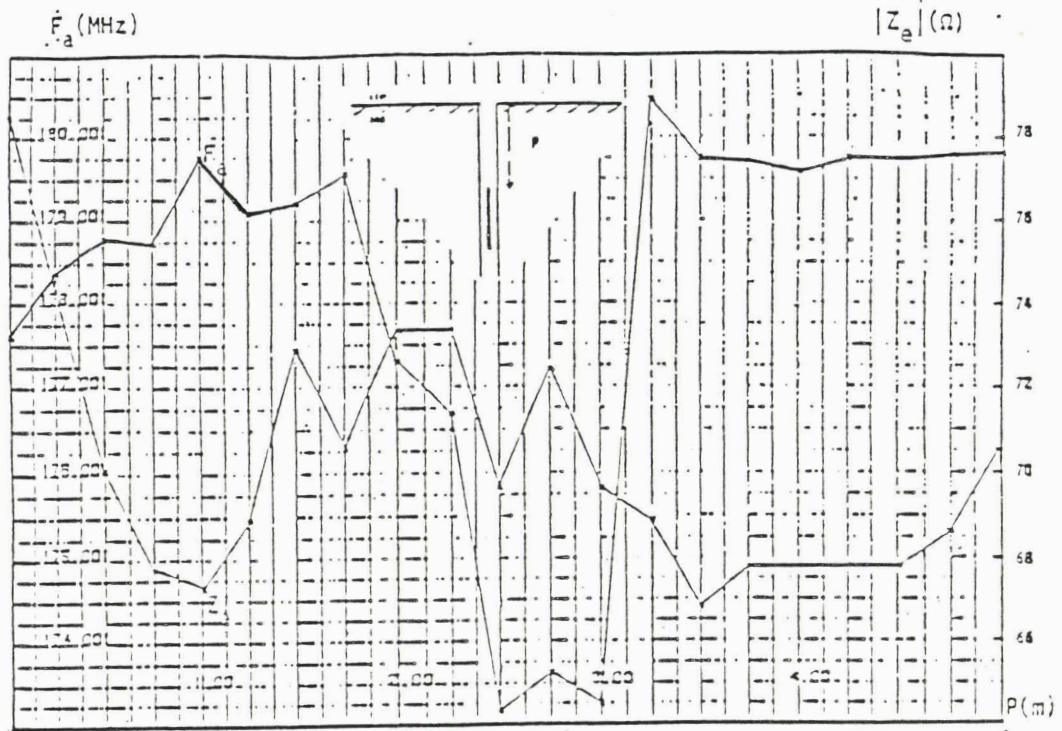


Planche I - 6 : Variation de la fréquence d'accord et de l'impédance d'entrée en fonction de la profondeur de l'antenne.

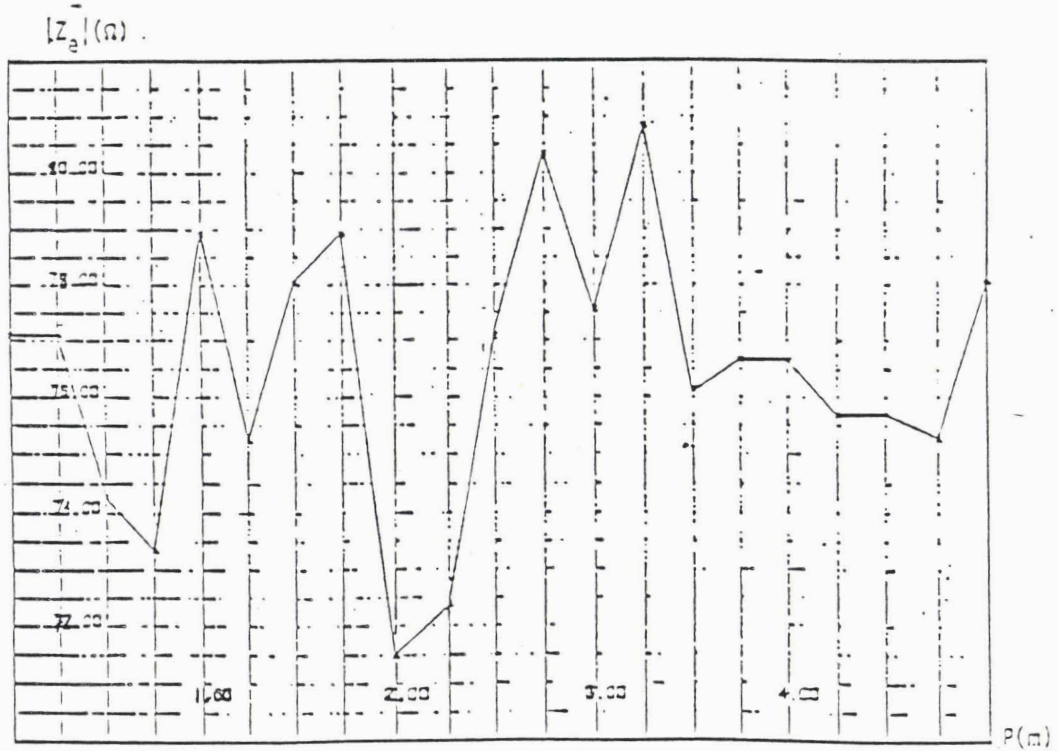


Planche I - 7 : Impédance d'entrée en fonction de la profondeur d'antenne à la fréquence $F = 175.6$ MHz

I.2.1.3 - Influence de la position de la sonde

L'antenne ne pouvant être maintenue centrée dans l'axe du trou, elle peut s'approcher ou s'éloigner des parois. Afin de mettre en évidence l'influence de l'excentrage de l'antenne sur la fréquence d'accord, nous avons représenté sur la planche (I - 8) la variation de l'amplitude et de la phase de l'impédance d'entrée en fonction de la fréquence, lorsque l'antenne est maintenue à une profondeur constante mais faible de l'ordre de 1 m, permettant à l'opérateur, soit de centrer la sonde par rapport au trou, soit de la plaquer contre une paroi. On remarque que la variation de la fréquence d'accord est faible (± 1 MHz) ainsi que les fluctuations de $|Z_e|$.

Une autre expérimentation, consiste à faire subir à l'antenne un mouvement de balancement d'une paroi à l'autre. On note sur la planche (I - 9) des résultats tout à fait similaires à ceux que l'on vient de décrire, la fréquence d'accord reste comprise entre 177 MHz et 179 MHz.

On voit donc d'après ces résultats expérimentaux qui seront interprétés théoriquement dans la suite de notre travail, que la variation de l'amplitude du courant d'émission en fonction de la profondeur de la sonde ne risque pas d'être un phénomène trop gênant pour l'interprétation des mesures en transmission forage-forage.

I.3 - Transmission entre deux forages

Les antennes utilisées à l'émission et à la réception sont les antennes en J décrites dans la deuxième partie de ce chapitre.

Les sondes d'émission et de réception ne contiennent aucune électronique le signal est injecté depuis la surface à l'aide d'un câble coaxial sur l'antenne d'émission ; l'antenne de réception est elle aussi reliée au récepteur de surface (mesureur de champ ou analyseur de spectre) par un câble coaxial ; les mesures seront enregistrées sur disquette, ce qui permet un dépouillement ultérieur.

PLANCHE I - 8 : Impedance d'entree en fonction de la fréquence
 Influence de la position de l'antenne par rapport
 à l'axe du forage.

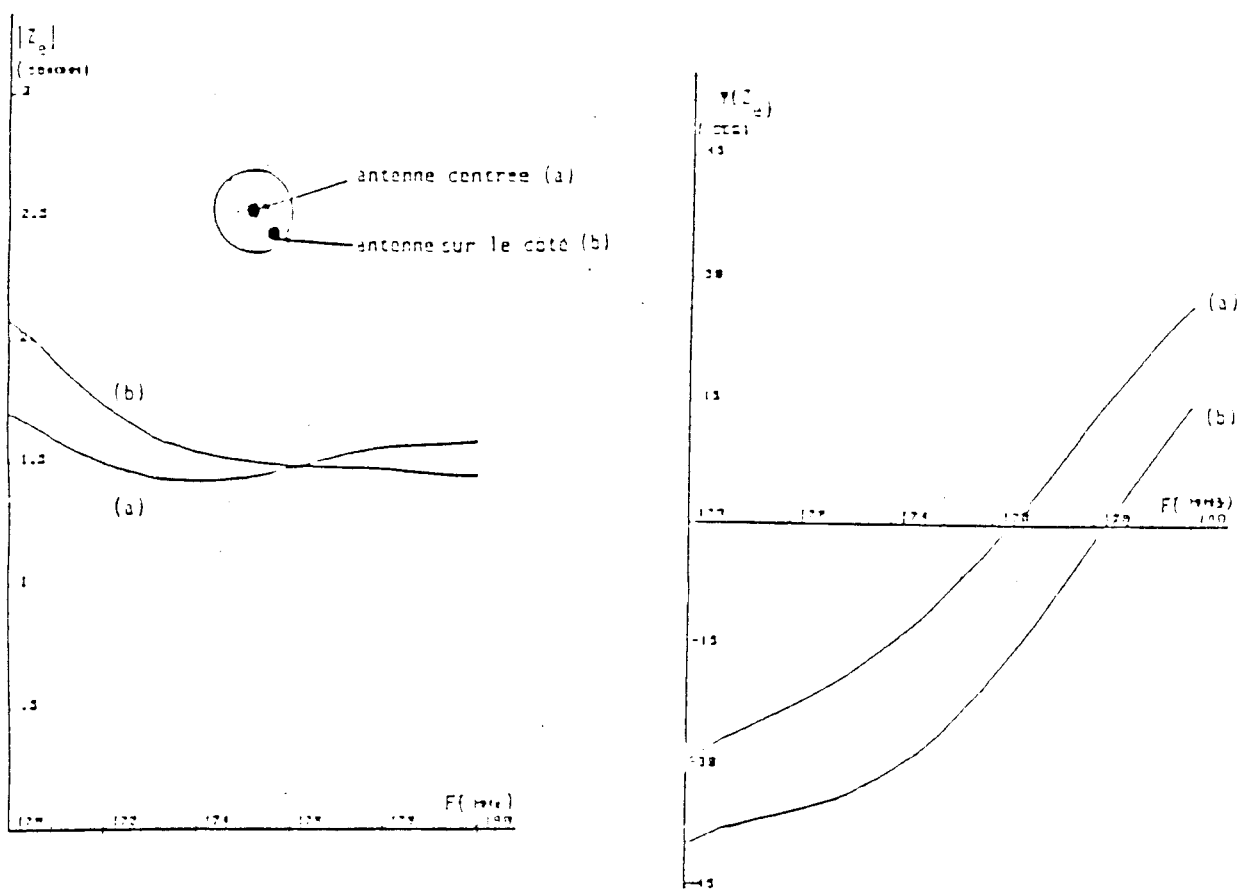
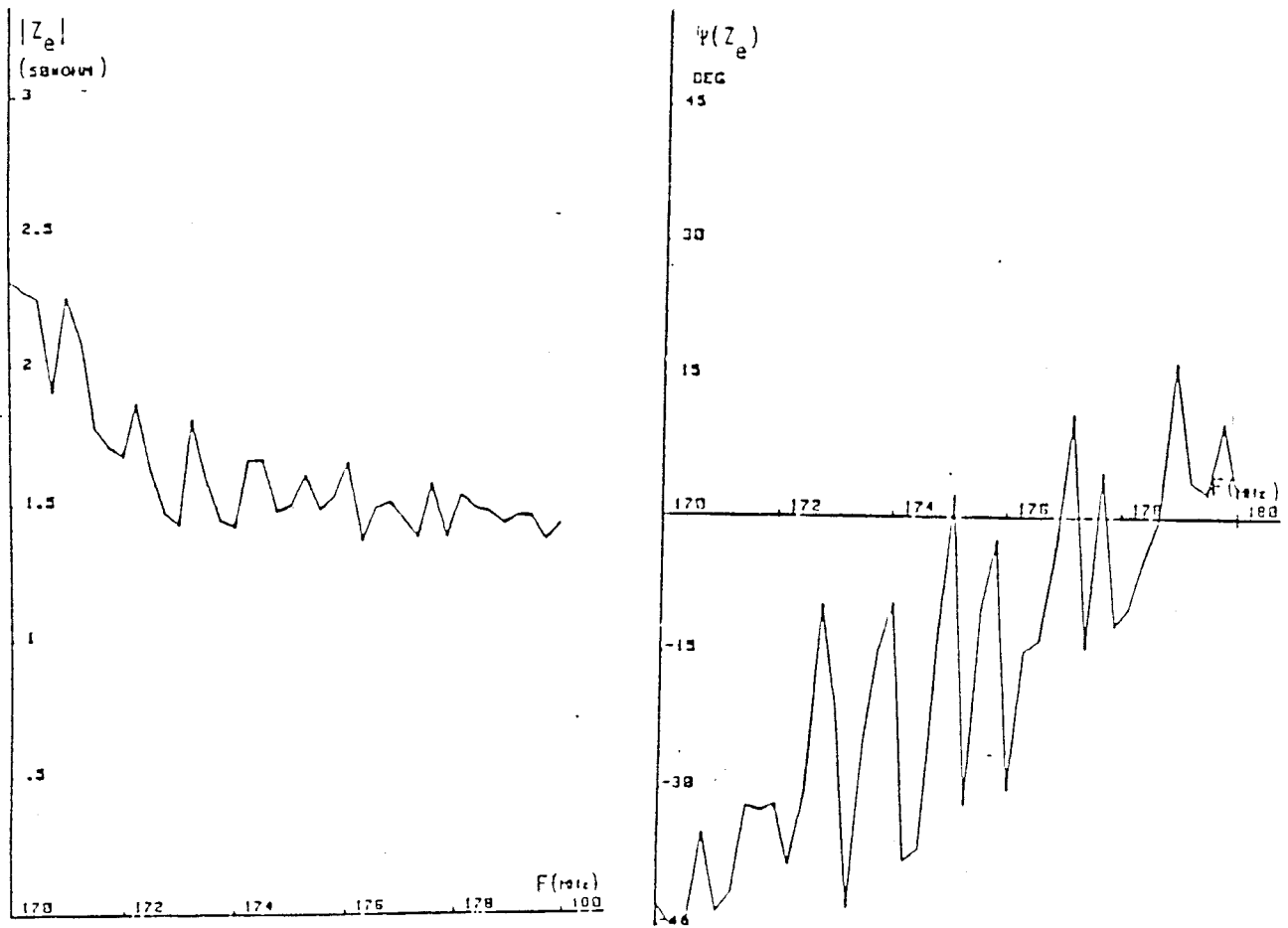


Planche I - 9 : Impedance d'entrée en fonction de la fréquence
Influence du mouvement de balancement.



La puissance à l'émission est constante (120 db/ μ V sur 50 Ω) soit 20 mW, la fréquence de travail est 179.2 MHz correspondant à la fréquence moyenne de résonance de la sonde dans le sol.

Pour chaque position de la source (P_e) (Cf. Fig I - 3), le forage "récepteur" est ausculté sur toute sa longueur (P_r) (le pas de mesure est de 0.25 m pour le récepteur et 0.5 m pour la source).

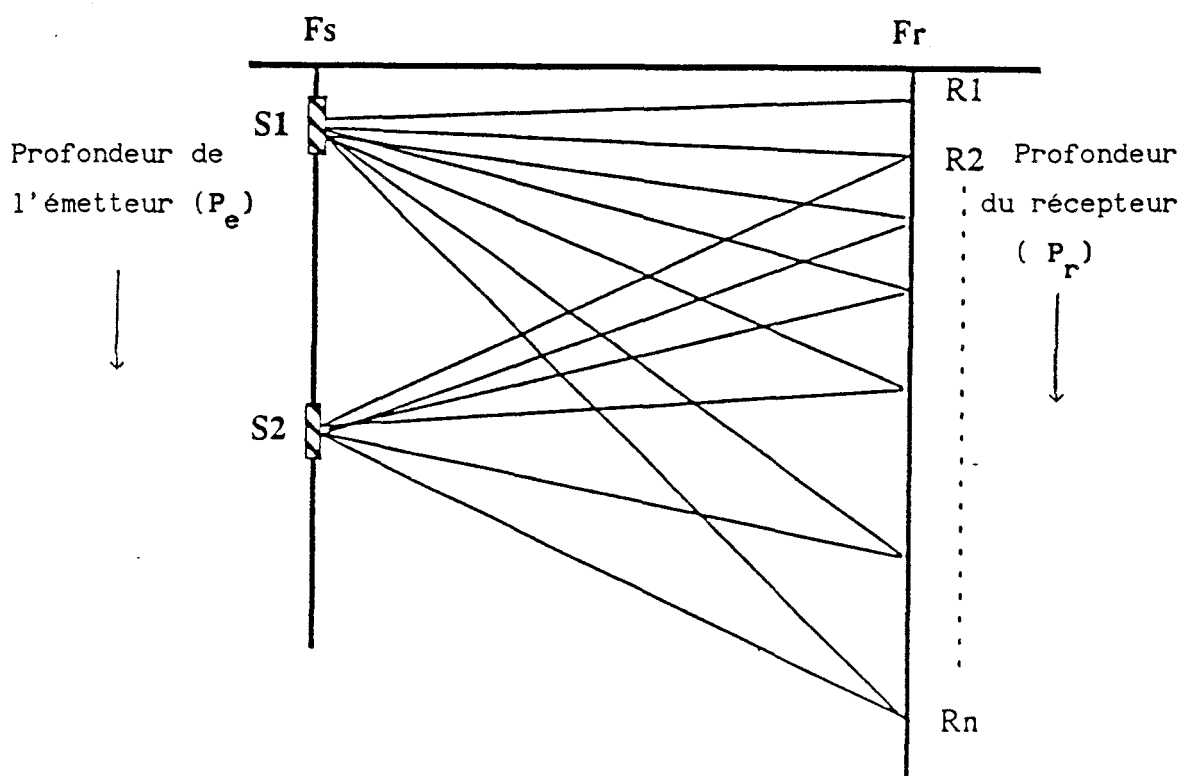


FIGURE I - 3

L'interprétation des mesures ne pouvant se faire de façon relativement simple que si l'onde directe à travers le sol est prépondérante vis à vis de l'onde de surface se propageant en grande partie dans l'air ; les enregistrements n'ont été effectués qu'à partir d'une profondeur (P_e et P_r) de 5 m. En effet, compte tenu des distances entre forages (4.5 m ou 11 m),

une étude théorique montre que l'onde directe est prépondérante dans cette configuration géométrique. Les mesures ont été faites sur le site de Marvejols (Massif Central) à l'emplacement d'une future pile de pont. En effet, des forages de reconnaissance effectués dans cette zone ont montré la présence d'un volume karstique dont il est important de connaître les limites géométriques.

I.3.1 - MESURES

Quatre liaisons entre forages ont été réalisées (Cf. Figure I-4) : Sd1-Sd4 ; Sd4-Sd1 ; Sd2-Sd4 et Sd3-Sd1.

Dans les deux premières liaisons, nous avons simplement échangé les forages source et récepteur afin de tester la réciprocité du système d'émission-réception et donc de valider en quelque sorte la méthode.

Les deux autres transmissions ont été effectuées dans les plans diagonaux traversant les fondations de la culée.

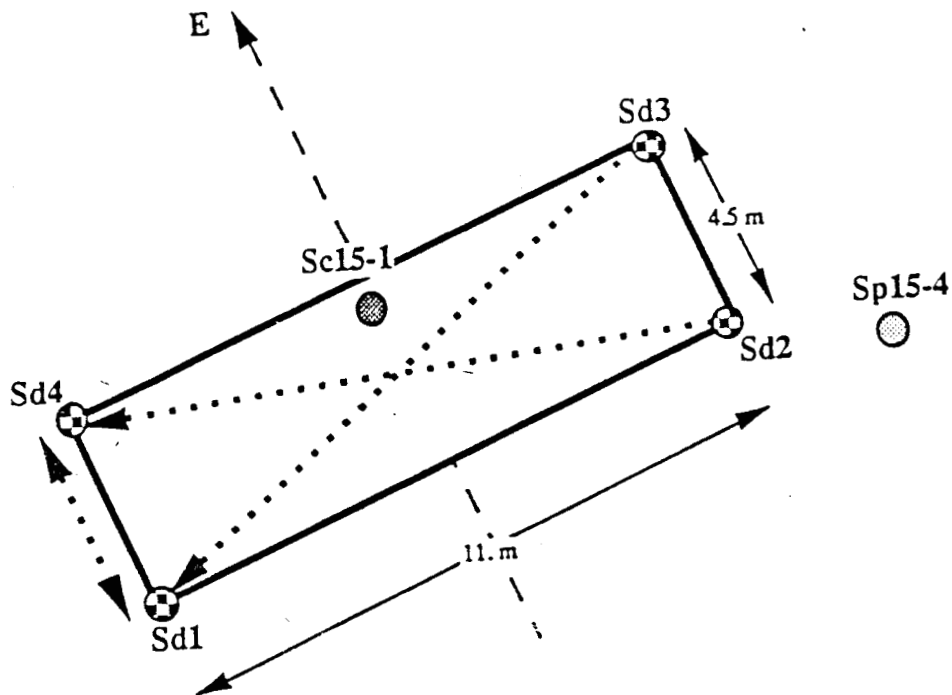


Figure (I - 4)

Nous noterons par la suite :

SfN : source dans le forage N

RfP : récepteur dans le forage P

SP : sondage pressiométrique

SC : sondage carotté

SD : sondage destructif

Les tomographies Sf1 → Rf4 et Sf4 → Rf1, planches (I - 10) et (I - 11), où la source est alternativement en Sd1 et Sd4 montrent la grande similitude entre ces résultats. Le code de couleur choisi indique la tension mesurée en dB/ μ V, proportionnelle au champ électrique vertical E_z , pour chaque couple de profondeur (P_r et P_e).

Nous avons représenté sur la planche (I - 12-a) la carte de champ pour la tomographie Sf3 → Rf1. On remarque que lorsque les sondes sont à la même profondeur (diagonale de la cartographie) l'amplitude du champ est de 4 dB/ μ V entre 5 m et 6.5 m, de 50 dB/ μ V à 9 m, mais on enregistre 16 dB/ μ V au fond du forage (\cong 14 m), l'erreur maximale de lecture est de \pm 4 dB/ μ V correspondant au changement de couleur.

La tomographie Sf2 → Rf4, planche (I - 12-b) laisse apparaître des distributions d'amplitude similaires ; on peut donc s'attendre à ce qu'une zone absorbante (comprise entre 5.5 m et 7.5 m) surplombe une anomalie transparente.

Cependant, il s'avère difficile d'identifier la nature exacte de l'hétérogénéité à partir de ces courbes, ainsi que leur position. Néanmoins, ces résultats d'enregistrement nous renseignent sur l'hétérogénéité du terrain.

Une interprétation plus précise a été effectuée par le laboratoire central des Ponts et Chaussées à partir d'un modèle de reconstruction que nous allons décrire brièvement.

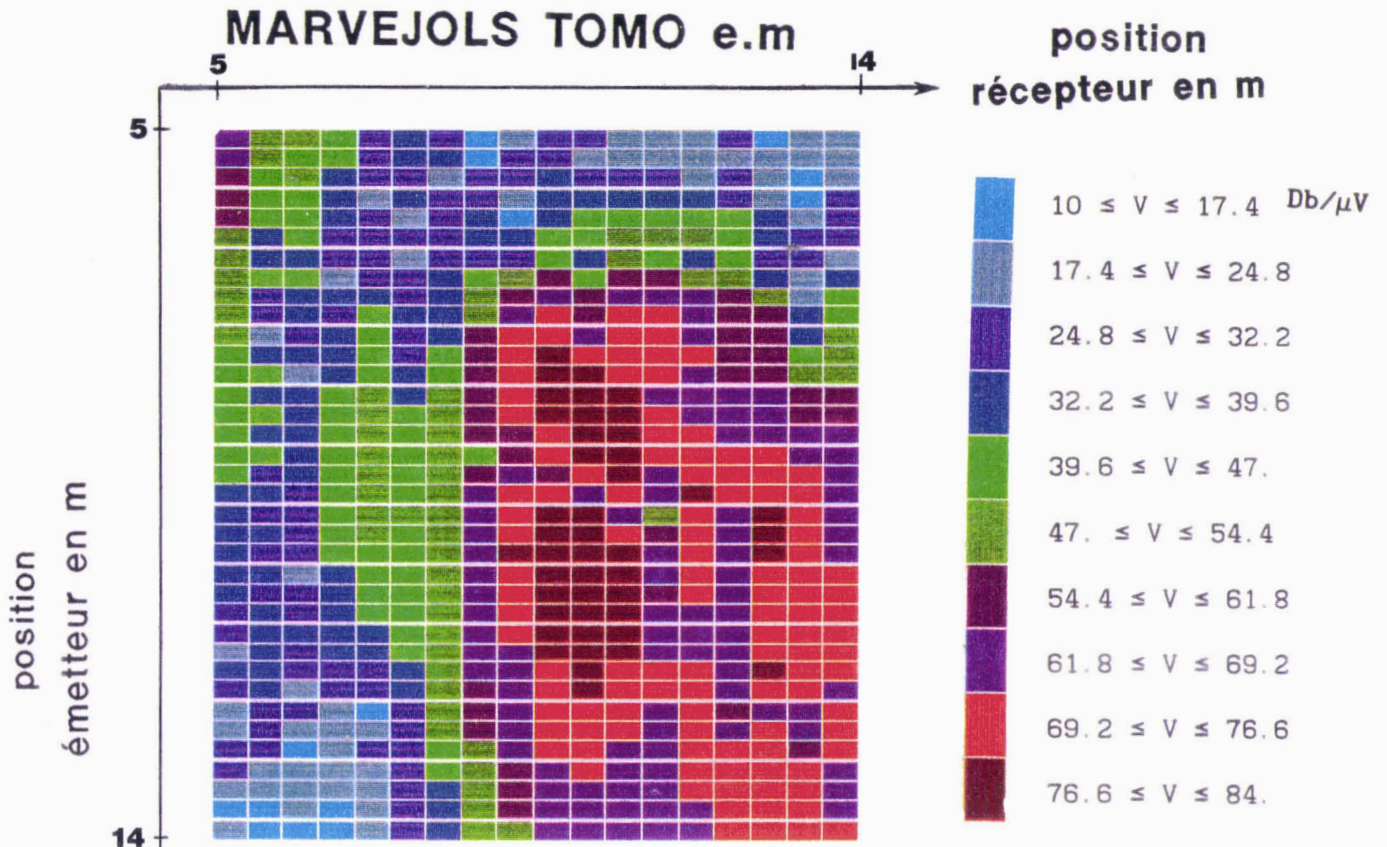
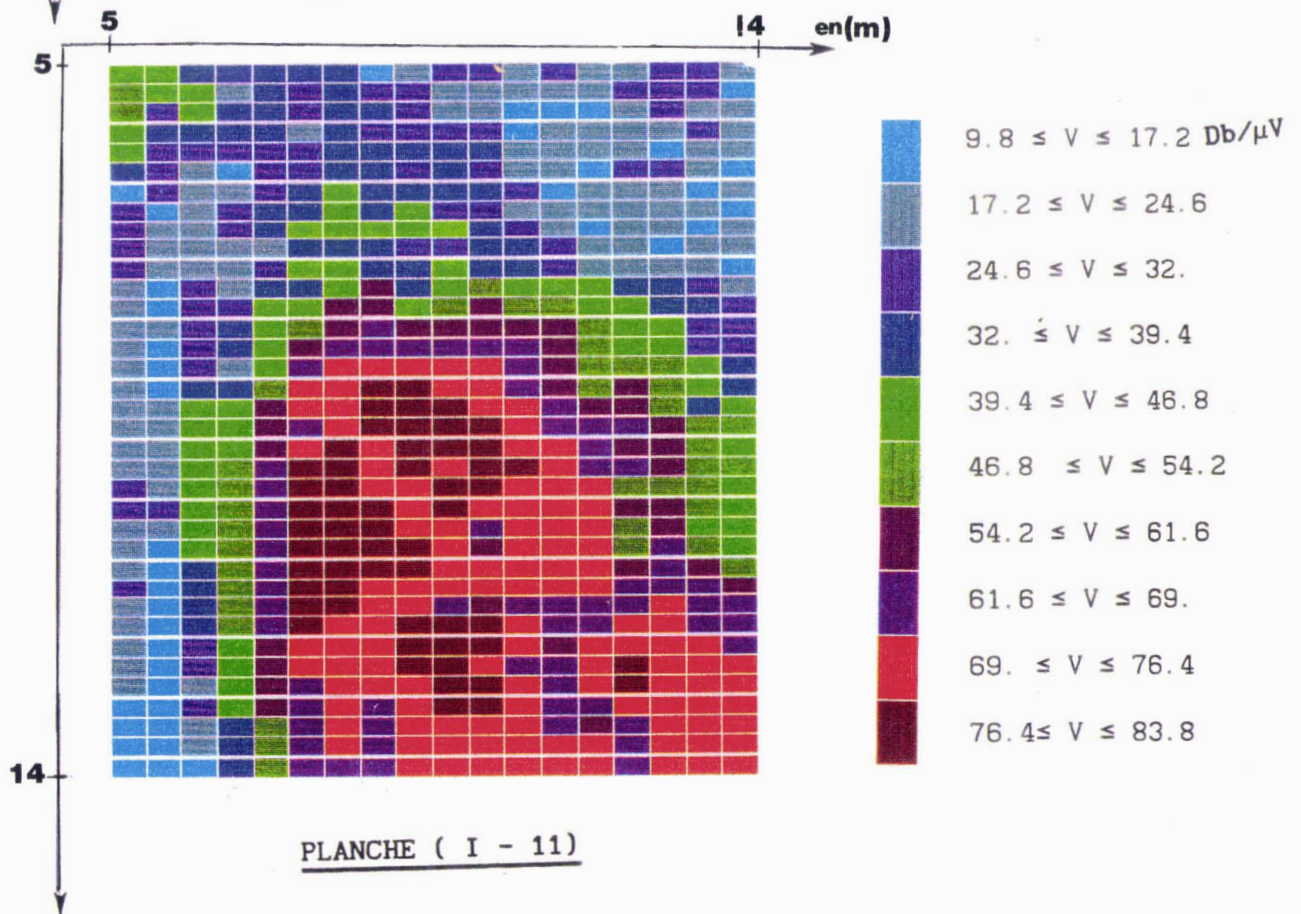


PLANCHE (I - 10)



MARVEJOLS TOMO e.m

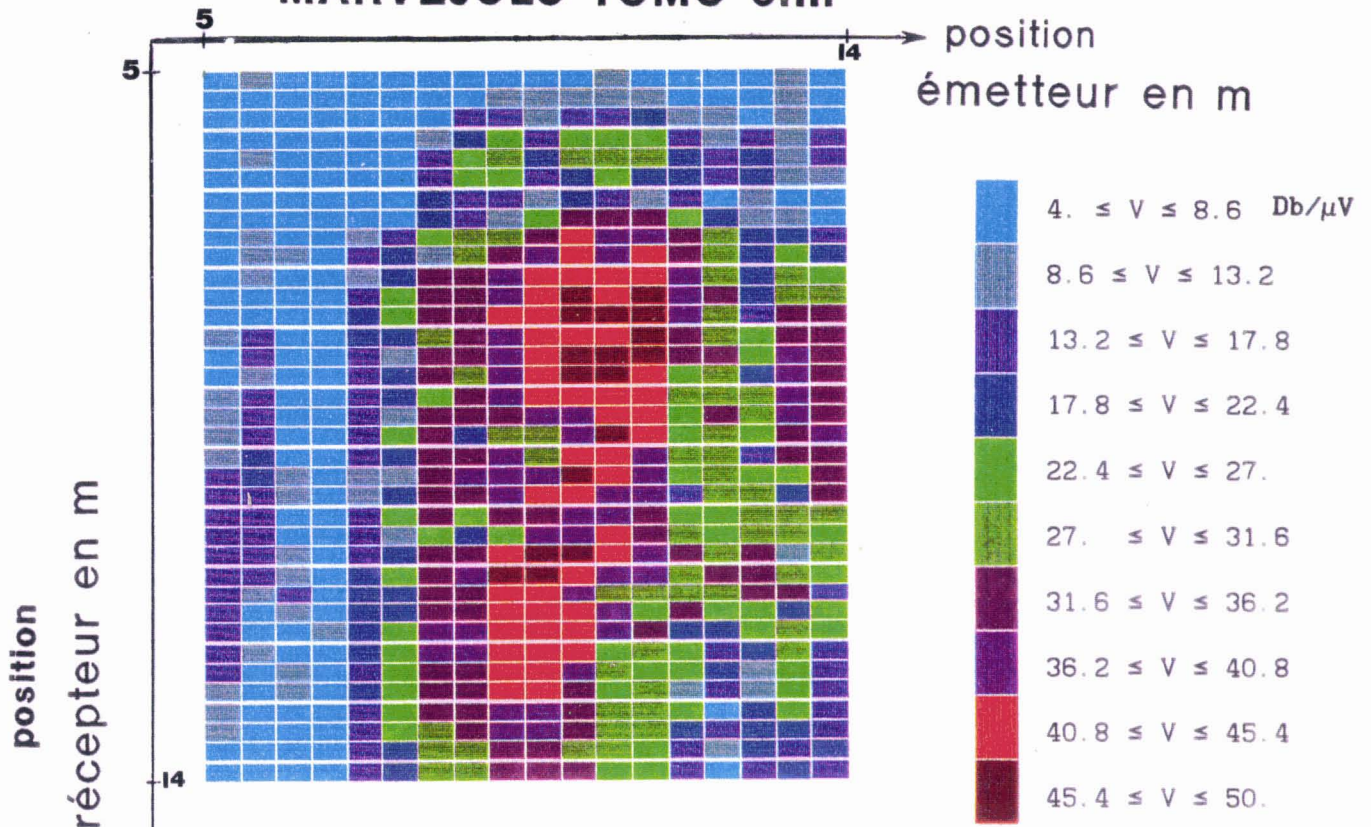


PLANCHE (I - 12.a)

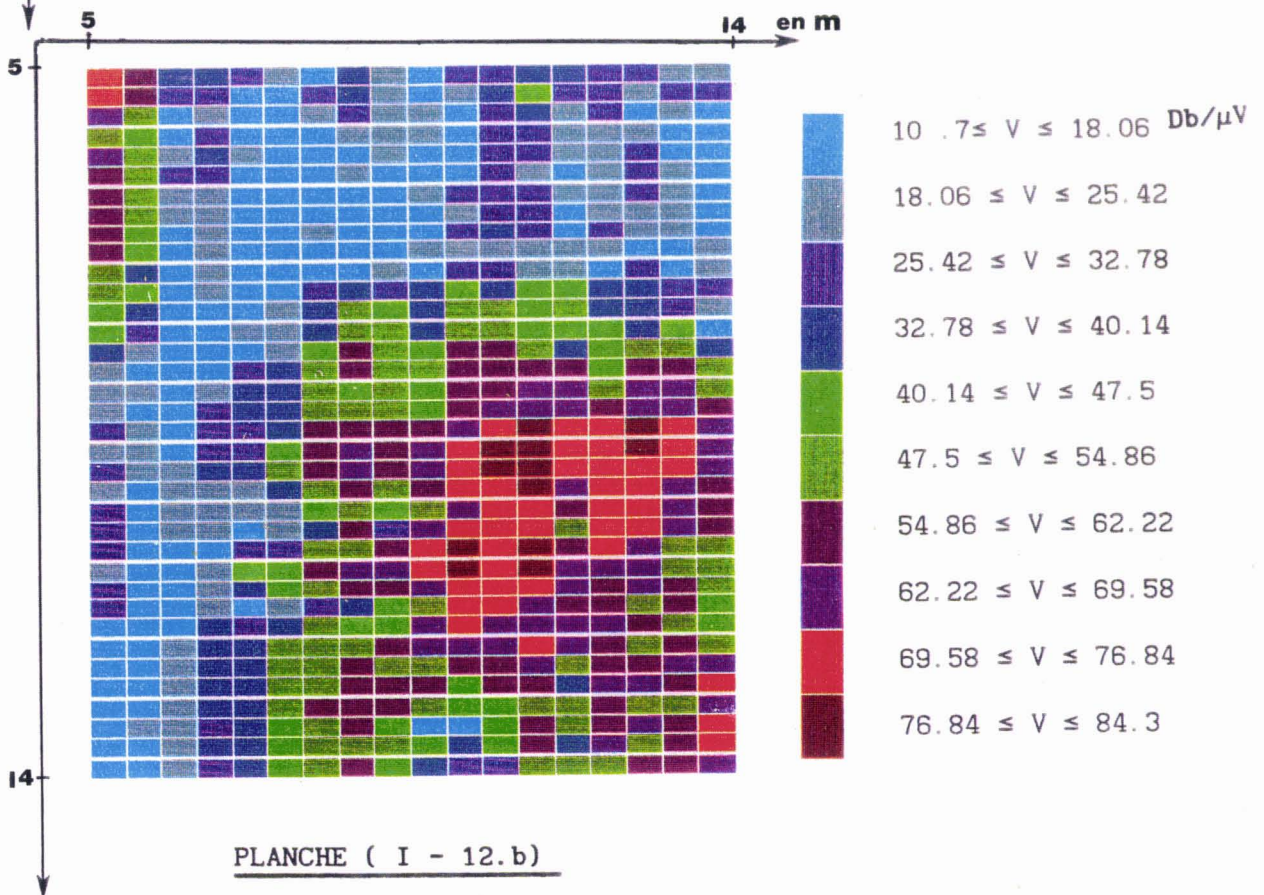


PLANCHE (I - 12.b)

I.3.2 - Problème inverse [4]

I.3.2.1- Théorie des rayons "rectilignes"

Une des principales difficultés rencontrées en tomographie électromagnétique lors de la "reconstruction" du terrain est la complexité des phénomènes de propagation mis en jeu et notamment la prise en compte de la "diffraction" par les hétérogénéités.

Une première approche qui peut être faite en vue de simplifier considérablement le formalisme et de considérer, comme modèle direct une structure bidimensionnelle indiquée sur la figure (I - 5).

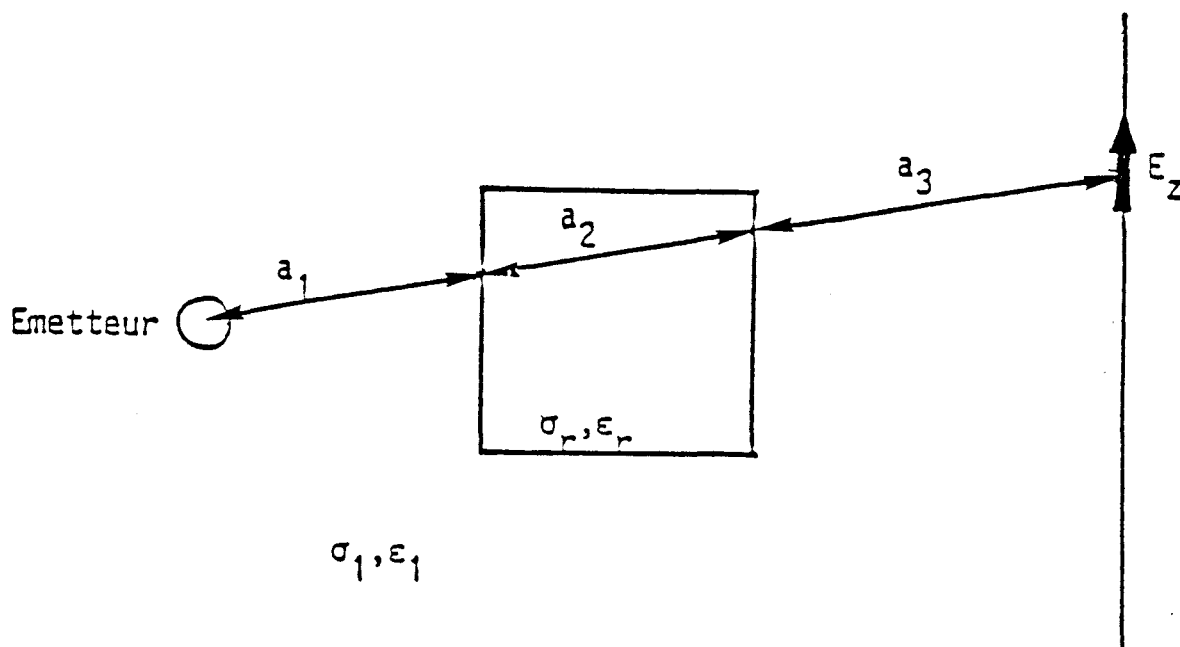


figure I - 5

La zone du terrain comprise entre l'émetteur et le récepteur est discrétisée en carrés ou en rectangles. Dans l'hypothèse où les permittivités ne varient que faiblement d'une maille à l'autre et à une fréquence suffisamment élevée pour être dans l'approximation de l'onde plane, on peut supposer une propagation quasi-optique, suivant des rayons et en première approximation négliger leurs courbures. Si on envisage la

configuration bidimensionnelle représentée précédemment, le champ E_z est donné par :

$$E_z = K e^{(-\gamma_1 a_1 - \gamma_2 a_2 - \gamma_3 a_3)} \quad (I .9)$$

γ_1 et γ_2 sont respectivement les constantes de propagation dans le milieu encaissant et dans l'hétérogénéité.

La théorie élémentaire des rayons telle qu'elle a été écrite dans ce paragraphe ne peut donner des sens de variation corrects que si un seul des deux paramètres σ , ϵ varie d'un point à l'autre mais, présente évidemment des limitations dans le cas d'un phénomène de diffraction par le volume de l'hétérogénéité.

I.3.2.2 - Inversion des amplitudes

18 positions de dipole émetteur (pas de 0.5 m) et 36 du récepteur (pas de 0.25 m) ont fourni 648 Amplitudes et phases. Le programme RAI-2D, mis au point par le L.C.P.C fait appel à une technique d'inversion géométrique itérative qui est une forme améliorée de S.I.R.T (Simultaneous Iterative Reconstruction Techniques). Les 648 Amplitudes ont été inversées grâce à RAI-2D avec l'approximation de la formule (I - 9). Les interprétations ont été faites par le L.C.P.C [4] et [19], dont nous allons extraire les principaux résultats.

I.3.2.3 Résultats

Chaque tomographie représente la distribution spatiale d'une variable "gamma" décrivant l'aptitude des matériaux à transmettre l'énergie électromagnétique dans cette bande de fréquence (200 MHz). Les résultats de l'inversion obtenue à partir des mesures entre les forages F1 et F4 sont représentés sur la planche (I - 13) sur laquelle les niveaux de gris illustrent le coefficient d'absorption (du plus absorbant : noir au plus transparent : blanc).

MARVEJOLS : TOMO e.m.

sf4-rf1

sf1-rf4

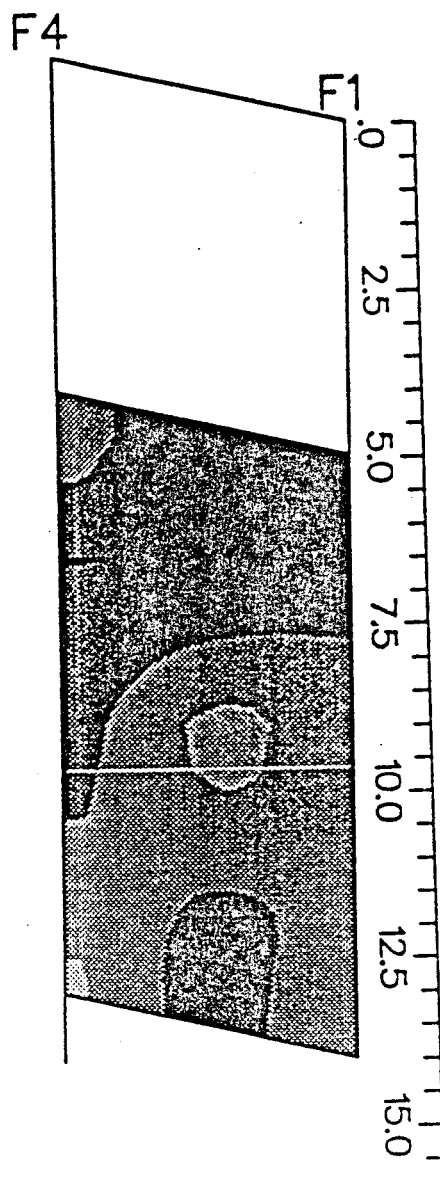
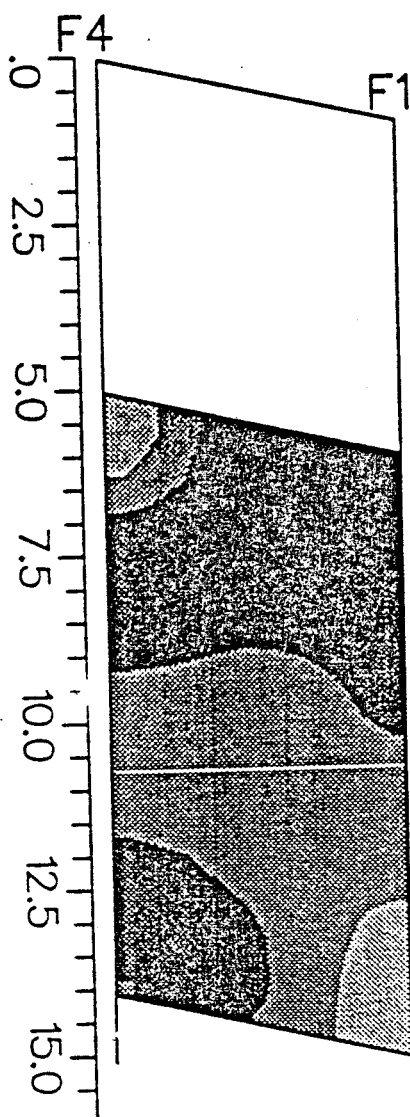


PLANCHE (I - 13) : Tomographie e.m dans le plan sur-sur
Le forage source est pris alernativement en Sd1 puis Sd4.
Les niveaux de gris indiquent le coefficient d'absorption
de l'onde e.m dans les matériaux
(du plus absorbant : noir au plus transparent : blanc)

Source : Rapport interne L.C.P.C service physique (Janvier 1991)

Nous observons à nouveau une grande similitude entre les représentations respectives des deux mesures : du forage F1 vers le forage F4 ou inversement.

L'information principale contenue dans ces tomographies : Zone absorbante à pendage traversant toute la zone, puis plus bas milieu transparent, est similaire d'une image à l'autre.

Comme ces résultats sont obtenus à partir de données et de traitement indépendant, nous en déduisons que les informations écrites sont bien reliées aux terrains auscultés et non pas à des artéfacts de calcul liés à la méthode.

Tomographie Sf3 - Rf1

Deux types d'hétérogénéité sont détectés sur la planche (I - 14), on décèle d'une part, des matériaux absorbants dans la partie supérieure de l'image, côté F1. D'autre part, on note une forte anomalie liée à des matériaux très transparents au centre de l'image.

Il convient à présent de comparer ces résultats aux informations complémentaires dont on dispose (principalement le forage carotté SC 15 - 1 et le forage préssiométrique SP 15 - 14, ainsi que le forage destructif SD 15 - 4).

Le karst a été repéré dans le forage SC 15 - 1, sa localisation et sa taille correspondent très précisément à l'anomalie transparente détectée par la tomographie. Ceci explique donc bien la "transparence" des matériaux vis à vis de l'onde électromagnétique dans cette zone. A l'opposé, les zones absorbantes peuvent être reliées aux zones fracturées du calcaire comportant des passages argileux (donc conducteurs électriques et absorbants électromagnétiques).

De plus, côté F1, la séquence des matériaux rencontrés correspond bien avec celle décrite lors des tomographies F4 - F1.

MARVEJOLS : TOMO e.m. ; sf3-rf1

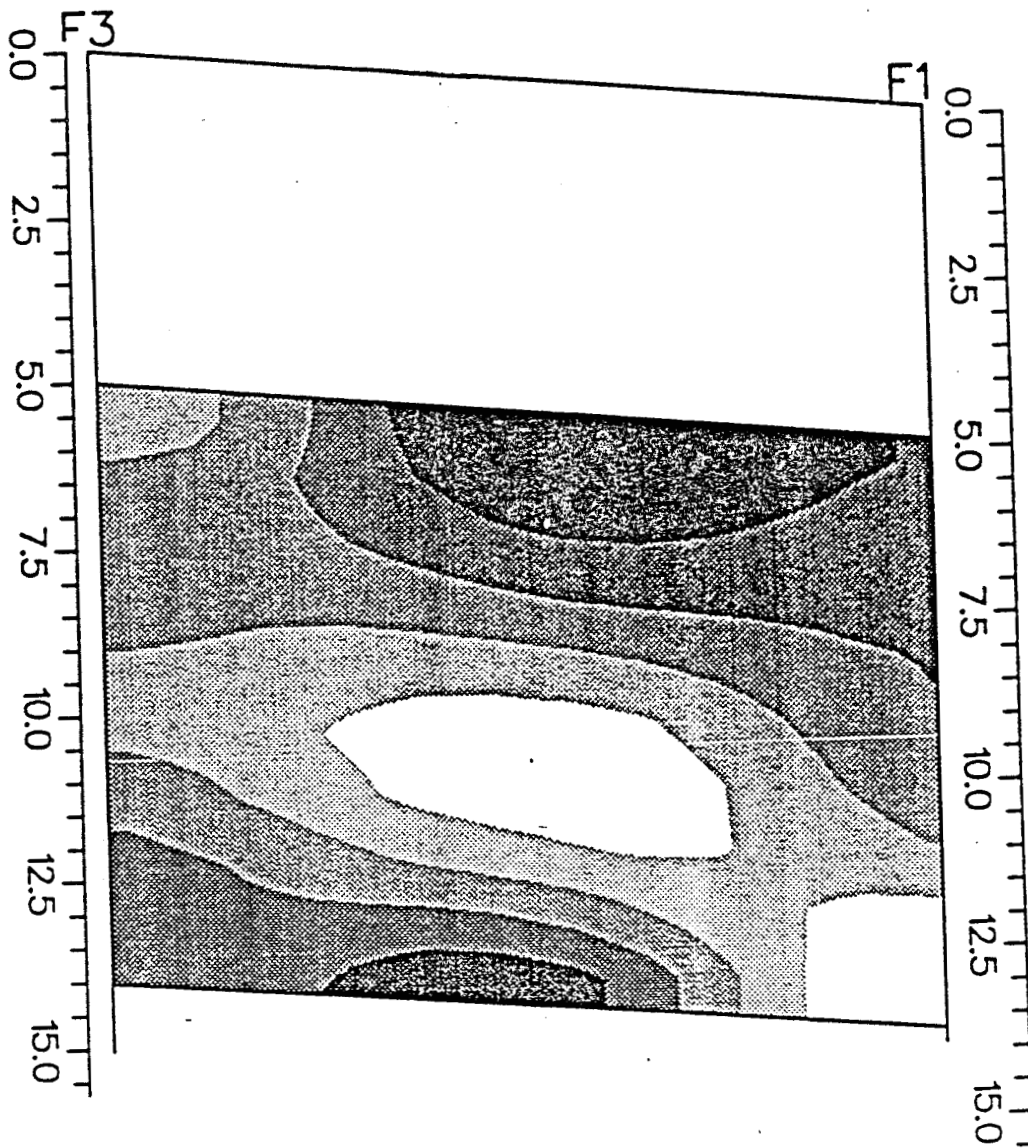


PLANCHE (I - 14) : Tomographie e.m dans le plan Sd3-Sd1
Le forage source est en Sd3. Les niveaux de gris indiquent
le coefficient d'absorption de l'onde e.m dans les matériaux
(du plus absorbant : noir au plus transparent : blanc)

Les anomalies inférieures ne sont très certainement pas à prendre en considération. Ceci pour deux raisons : le nombre de mesure décrivant précisément ces zones est insuffisant et d'autre part, ces anomalies peuvent être expliquées comme des artéfacts dûs aux hétérogénéités réelles détectées.

En résumé, nous détectons donc :

- * une zone absorbante (calcaire + argile) traversant F1 avec un pendage tel qu'il n'atteint pas F3 dans la zone auscultée.
- * une zone transparente pentue également, plus proche de F1 que de F3.

Tomographie Sf2 - Rf4 (Cf Planche I - 15) [4]

Nous obtenons ici le même type de séquence de matériaux : une zone absorbante traversant l'image dans la partie supérieure qui surplombe une anomalie transparente. Ici, la zone absorbante ne semble pas dotée d'un pendage comme c'était le cas précédemment. De plus, la section apparente du karst (transparente) semble plus réduite.

Côté F4, la partie absorbante correspond très bien aux constatations faites à partir du forage SD 15 - 4 (zone fracturée). En revanche, le SD 15 - 2 n'a pas mis en évidence d'hétérogénéités, mais le forage pressiométrique SP 15 - 4 (situé non loin du SD 15 - 2) a détecté une zone très fracturée dont l'extension et la profondeur correspondent bien à la zone absorbante de la tomographie électromagnétique.

Conclusion [4]

Deux types d'hétérogénéités semblent détectés grâce aux tomographies électromagnétiques sur le site du futur Viaduc.

MARVEJOLS : TOMO e.m. ; sf2-rf4

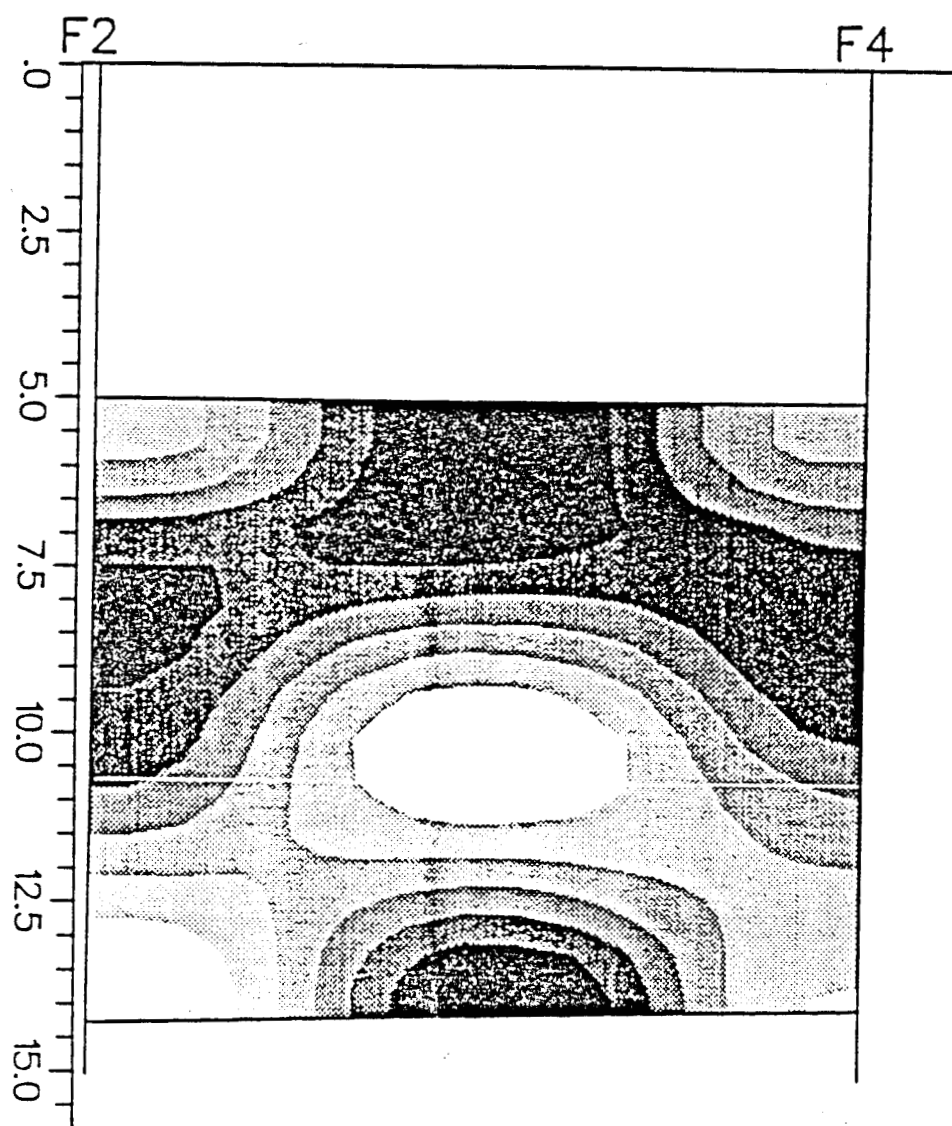


PLANCHE (I - 15) : Tomographie e.m dans le plan Sd4-Sd2
Le forage source est en Sd2. Les niveaux de gris indiquent
le coefficient d'absorption de l'onde e.m dans les matériaux
(du plus absorbant : noir au plus transparent : blanc)

* Une zone absorbante reliée à la présence d'argile au sein des calcaires (+ fissuration) d'une épaisseur de l'ordre de 2.5 m, qui s'étend de manière pseudo-horizontale dans le plan Sd2 et Sd4 et qui présente un pendage (dans le sens du terrain) dans le plan Sd3 - Sd1.

* Une zone transparente (vide) à une dizaine de mètres de profondeur, d'une extension verticale de 1.5 m à 2 m quasiment centrée sur la zone auscultée dont la section apparente est plus grande dans le plan Sd3 - Sd1 que dans Sd2 - Sd4.

Cette dernière pourrait donc correspondre à une anomalie de type "galerie" traversant la zone perpendiculaire au plan Sd2 - Sd4 (et donc aux lignes iso-niveaux de topographie) et de manière plus oblique par rapport au plan Sd3 - Sd1.

CONCLUSION

Malgré le peu d'expérience associée à la méthode de tomographie électromagnétique, cette série de mesures laisse un bilan positif. Elle permet d'une part, de montrer que l'amplitude du signal mesuré est rattachée aux propriétés de terrain, et d'autre part, que la mise en relation des tomographies électromagnétiques avec les autres résultats (issus de diagraphies) permet de formuler des hypothèses sur la configuration des hétérogénéités rencontrées.

On peut s'étonner de constater que l'approximation des rayons fonctionne assez bien, ce qui signifie sans doute que l'essentiel de l'énergie se propage au voisinage du trajet le plus rapide entre l'émetteur et le récepteur. Les rayons peuvent être considérés non comme des lignes mathématiques idéales mais comme ayant une certaine épaisseur (rayons gaussiens), et l'algorithme RAI - 2D tient compte de cette remarque grâce à la notion de zone d'influence.[4]

Nous nous attachons dans les chapitres suivants à une modélisation théorique de l'antenne en J utilisée en émission et en réception, afin de confronter les résultats de mesure avec notre modèle théorique.

Nous étudierons en particulier, l'influence du milieu encaissant sur les caractéristiques électriques de l'antenne (impédance d'entrée, fréquence d'accord...), puis le comportement du champ en zone lointaine en présence de l'anomalie.

CHAPITRE II

RAYONNEMENT DANS UN MILIEU HOMOGENE

CHAPITRE II : RAYONNEMENT D'UNE ANTENNE DANS UN MILIEU HOMOGENE

INTRODUCTION (p.33)

II.1 - FORMULATION DE L'EQUATION INTEGRALE EN CHAMP ELECTRIQUE (p.35)

II.2 - RESOLUTION DE L'EQUATION INTEGRALE PAR LA METHODE DES MOMENTS

II.2.1 - La méthode des moments (p.47)

II.2.1.1 - Principe de la méthode

II.2.1.2 - Application de la méthode des moments à une structure filiforme

II.2.1.3 - Ligne chargée

II.2.2 - Méthode point-segment (p.47)

II.2.3 - Méthode de Galerkin (p.50)

II.3 EXEMPLES NUMERIQUES (p.54)

II.3.1 - Cas d'une ligne au dessus d'un sol parfaitement conducteur (p.54)

II.3.1.1 - Matrice de couplage (p.56)

a) méthode de point-segment

b) méthode de Galerkin

II.3.1.2 Ligne au dessus d'un sol parfaitement conducteur
Confrontation avec la théorie des lignes (p.59)

II.3.1.3 Antenne en "J" (p.67)

CONCLUSION (p.73)

INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous allons rappeler le formalisme de base servant à déterminer la distribution du courant sur une structure filiforme constituée d'un assemblage de segments élémentaires connectés ou non entre eux. En effet la détermination de l'impédance d'entrée d'une antenne filaire excitée en un point quelconque, et de sa fréquence d'accord implique le calcul du courant en tout point de la structure.

Nous nous intéressons dans un premier temps, à calculer la distribution du courant sur une antenne filaire quand celle-ci est située dans un milieu homogène et infini.

L'application des conditions aux limites à la surface de la structure donne le champ incident sous une forme intégrale dont l'intégrand comporte le courant induit sur le conducteur. La résolution de cette équation se fait par la méthode des moments. Après un bref rappel de la méthode et le choix du couple fonctions de base - fonctions de test nous indiquerons la façon de déterminer la matrice impédance généralisée en coordonnées curvilignes définissant le couplage entre un élément source $r'(l')$ et un élément d'observation $r(l)$.

De manière à valider le code de calcul sur des structures de plus en plus complexes, nous nous proposons d'étudier dans un premier temps le couplage d'une onde électromagnétique avec une ligne de transmission horizontale (plongée dans un champ électromagnétique) et comportant des fils de descente verticaux situés au dessus d'un sol parfaitement conducteur

La matrice de couplage généralisée étant indépendante de l'excitation, nous appliquerons notre modèle à une ligne excitée par un générateur localisé. Nous étudierons le cas d'un court-circuit ou d'une charge localisée sur un segment élémentaire de la ligne afin de mettre en évidence les résonances bien connues d'une telle ligne .

Enfin pour clore ce chapitre, nous appliquerons notre modèle à l'antenne dite en J que nous avons décrite dans le chapitre précédent et utilisée comme antenne d'émission - réception pour la tomographie électromagnétique .

II.1 - FORMULATION DE L'EQUATION INTEGRALE EN CHAMP ELECTRIQUE [5]

Les structures filaires considérées peuvent être construites de différentes façons à l'aide d'un nombre arbitraire de segments filiformes, les segments peuvent être droits ou courbes. Les régions dans lesquelles deux ou plusieurs segments sont connectés seront appelées jonctions .

Les jonctions constituent les discontinuités de la structure. Soit une structure filaire située dans un milieu homogène de permittivité ϵ , de perméabilité μ , et de conductivité σ ; on supposera que tous les segments de la structure gardent un rayon constant et qu'ils sont parfaitement conducteurs.

De manière à simplifier l'équation du courant, nous ferons les calculs dans le cadre de l'approximation des fils minces :

- Le rayon du fil est supposé très petit devant la longueur d'onde λ ($ka \ll 1$ avec $k = 2\pi/\lambda$) et que son axe a un rayon de courbure grand par rapport à λ .

- Le courant de surface est pratiquement parallèle à l'axe du fil, la composante circonférentielle étant très petite et négligeable.

- Les courants et les charges sont uniformément distribués autour de la circonférence C d'une section droite du fil et ceci quelle que soit la position de cette section droite le long de l'axe du fil.

La structure filaire est soumise à un champ incident E_i, H_i de fréquence angulaire ω . On se place dans un régime sinusoïdal $e^{j\omega t}$.

Par réaction à ce champ, les courants et les charges sont induits le long de la structure . Ils rerayonnent un champ secondaire E_D et H_D qui, ajouté au champ incident , crée le champ total E_t et H_t en tout point de l'espace .

$$\vec{E}_t = \vec{E}_i + \vec{E}_D \quad (II.1)$$

L'équation intégrale du champ électrique diffracté par la structure s'obtient directement à partir des potentiels vecteur \vec{A} , et scalaire Φ donnés par :

$$\vec{E}_D = -j\omega\vec{A} - \text{grad}\Phi \quad (II.2)$$

où le potentiel vecteur \vec{A} est défini par :

$$\vec{A} = \mu \int \int_S \vec{J} \cdot G(R) \cdot ds' \quad (II.3)$$

et le potentiel scalaire Φ par :

$$\Phi(s) = \frac{1}{\epsilon} \int \int_S \rho \cdot G(R) \cdot ds' \quad (II.4)$$

R est la distance du point d'observation à un point courant de la surface S de la structure, et G(R) est la fonction de Green .

$$G(R) = \frac{e^{-\gamma_0 R}}{4\pi R} \quad (II.5)$$

$\gamma_0^2 = -\omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma$: constante de propagation du milieu .

$$R = \sqrt{(l-l')^2 + a^2} \quad ; \quad a : \text{rayon du fil}$$

Soit $\vec{r}(l)$ la fonction vectorielle décrivant l'axe curviligne d'un segment du fil par rapport à un système de coordonnées donné, en fonction de l'abscisse curviligne l le long de cet axe (Fig II-1). D'après les hypothèses des fils minces, on a le long de la circonférence C d'une section

droite du fil circulaire d'abscisse curviligne l :

$$\vec{J} = \frac{I(l) \vec{t}(l)}{2 \pi a} \quad (\text{II.6})$$

$$\rho = \frac{Q'(l')}{2 \pi a}$$

où $I(l)$ est l'intensité du courant total au point d'abscisse curviligne l , $\vec{t}(l)$ le vecteur localement tangent à l'axe l , et $Q'(l')$ la charge par unité de longueur le long du segment.

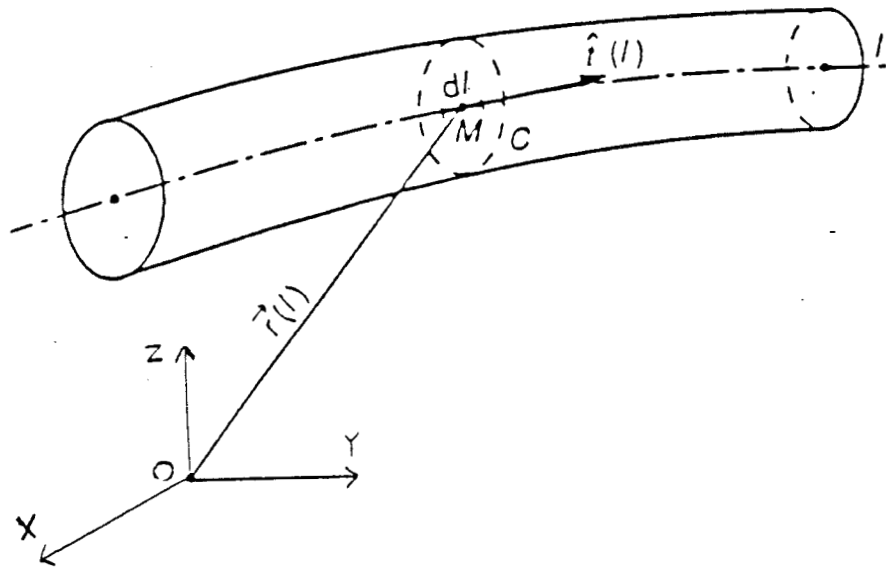


Figure (II - 1) : coordonnées définissant localement un fil quelconque

Compte tenu de (II.6) l'intégration autour de la circonférence C dans (II.3) et (II.4) donne:

$$\vec{A} = \mu \int_{\text{axe}} I(l') G(R) \vec{t}(l') dl' \quad (\text{II.7})$$

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon} \int_{\text{axe}} Q'(l') G(R) dl' \quad (\text{II.8})$$

En outre, les densités de courant J_S et de charge ρ sont reliées par l'équation de continuité:

$$\text{div} \vec{J}_S = -j \omega \rho \quad (\text{II.9})$$

où div_S est la divergence le long de la surface S de la structure.

En prenant l'expression de J_S suivant le vecteur tangentiel $\vec{t}(l')$:

$$\text{div}_S \vec{J} = \text{div} [J_S \vec{t}(l')] = \vec{t}(l') \text{grad} J_S + J_S \cdot \text{div} \vec{t}(l') \quad (\text{II.10})$$

Si on se place en dehors de points anguleux qui introduisent une discontinuité du plan tangent (pour cela on supposera un rayon de courbure faible) on peut définir en tout point courant l' , le rayon de courbure associé.

En effet on se place ici dans l'hypothèse des fils minces.

Dans ce cas, le vecteur unitaire \vec{t} dans un repère lié au cercle sera tangent à ce dernier ; donc $\text{div} \vec{t} = 0$.

D'une façon générale, ceci revient à choisir un repère lié au fil.

L'équation (II.10) se réduit alors à :

$$\vec{\text{div}} J_s = t(l') \vec{\text{grad}}' J_s(l') \quad (\text{II.11})$$

Par notation grad' s'applique à la variable l' . En appliquant (II.11) à la condition de continuité des densités de courant (II.9) on obtient :

$$Q'(l') = 2\pi a \rho = \frac{j}{\omega} t(l') \vec{\text{grad}}' I(l') \quad (\text{II.12})$$

Le potentiel scalaire Φ en (II.8) s'écrit alors :

$$\Phi = \frac{j}{\omega \epsilon} \int_{\text{axe}} t(l') \vec{\text{grad}}' I(l') \cdot G(R) \cdot dl' \quad (\text{II.13})$$

D'après la définition du champ diffracté en (II.2) on obtient :

$$\vec{E}_D(l) = -j \omega \mu \int_{\text{axe}} I(l') t(l') G(R) dl' - \frac{j}{\omega \epsilon} \int_{\text{axe}} t(l') \vec{\text{grad}}' I(l') \dots G(R) dl' \quad (\text{II.14})$$

En écrivant la condition aux limites sur la surface du fil parfaitement conducteur.

$$t(l) \vec{E}_i(l) + t(l) \vec{E}_D(l) = 0$$

Nous obtenons une équation intégrale de type Fredholm de 1^{ère} espèce.

$$t(l) \vec{E}_i(l) = j \omega \mu \int_0^L I(l') t(l') t(l) G(R) dl' + \frac{j}{\omega \epsilon} t(l) \vec{\text{grad}} \int_0^L \dots t(l') \vec{\text{grad}} I(l') G(R) dl' \quad (\text{II.15})$$

avec L : longueur de la structure

Le courant cherché $I(l')$ est donc solution de cette équation intégrale-différentielle dite de Pocklington [6].

II.2 - RESOLUTION DE L'EQUATION INTEGRALE PAR LA METHODE DES MOMENT [7]

II.2.1 - La méthode des moments

La méthode des moments permet la résolution numérique des équations fonctionnelles développées par Harrington [7], la méthode est largement utilisée dans les problèmes d'électromagnétisme et notamment d'antennes [8,9] de même que dans autres domaines.

II.2.1.1 - Principe de la méthode

La méthode consiste à transformer une équation intégral-différentielle en un système matriciel plus commode à résoudre. Soit l'équation :

$$L(\phi) = g \quad (\text{II.16})$$

où L : l'opérateur intégral-différentiel linéaire et continu
 ϕ : la fonction inconnue

g : la fonction excitation connue.

soit une base de fonctions ($\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$), on a :

$$\phi = \sum_n \alpha_n \phi_n \quad (\text{II.17})$$

En substituant (II.17) dans (II.16) et en utilisant la linéarité de L :

$$L(\phi) = \sum_n \alpha_n L(\phi_n) = g \quad (\text{II.18})$$

où les égalités sont généralement approchées.

Soit $w_1, w_2, w_3, \dots, w_m$ une base de fonctions dans D . Le produit scalaire désigné par \langle, \rangle des équations (II.18) par chacune des fonctions

w_m donne, compte tenu de la linéarité de L :

$$\langle L(\Phi), w_m \rangle = \sum_n \langle \alpha_n L(\phi_n), w_m \rangle = \langle g, w_m \rangle \quad (\text{II.19})$$

$m = 1, 2, \dots$

où

$$\langle h, g \rangle = \int_D h(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

D : Domaine de définition de l'opérateur L.

Sous une forme matricielle, la seconde équation (II.19) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} l_{m n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_m \end{bmatrix} \quad (\text{II.20})$$

avec:

$[l_{mn}]$: matrice d'ordre $M \times N$ et dont le terme général $l_{mn} = \langle L(\phi_n), w_m \rangle$

$[\alpha_n]$: matrice colonne des coefficients inconnus

$[g_m]$: matrice colonne d'excitation dont le terme général $g_m = \langle g, w_m \rangle$

Le système matriciel n'admet de solution que si $M \geq N$, les valeurs de M et N sont généralement choisies égales. Les fonctions $L(\phi)$ sont linéairement indépendantes, la matrice $[l_{mn}]$ est régulière et son inverse $[l_{mn}]^{-1}$ existe.

Dans ces conditions la solution de l'équation (II.20) existe et est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{mn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g_m \end{bmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Le choix des fonctions bases ϕ_n et w_m est arbitraire, mais il est évident que la simplicité des calculs et la rapidité de la convergence dépendent très fortement des fonctions choisies. Parmi les couples base-test utilisés le plus souvent et que nous développerons dans ce chapitre, on peut noter :

- La méthode "point-segment" où les fonctions base (ϕ_n) sont des impulsions rectangulaires et les fonctions test (w_m) sont des Dirac.

- La méthode Galerkin où le couple base-test est formé de fonctions triangulaires linéaires identiques.

II.2.1.2 - Application de la méthode des moments à une structure filiforme

Nous avons montré dans les paragraphes précédents que le champ incident pour une structure et la distribution du courant $I(l')$ sur celle-ci sont reliés par une équation intégral-différentielle du type:

$$\vec{t}(l) \vec{E}_i(l) = j \omega \mu \int_{\text{axe}} I(l') \vec{t}(l') \vec{t}(l) G(R) dl' + \frac{j}{\omega \epsilon} \vec{t}(l) \overrightarrow{\text{grad}} \int_{\text{axe}} \dots \vec{t}(l') \overrightarrow{\text{grad}} I(l') G(R) dl' \quad (\text{II.22})$$

Soit $\phi_n(l')$ la base de fonctions sur laquelle est développé le courant inconnu $I(l')$

$$I(l') = \sum_n \phi_n(l') I_n \quad (\text{II.23})$$

En reportant (II.23) dans (II.22) et en inversant l'ordre des opérations \int et \sum on obtient :

$$\vec{t}(l) \vec{E}_i = \sum_n I_n \vec{t}(l) \left[j\omega\mu \int_{\Delta l_n} \phi_n(l') \vec{t}(l') G(R) dl' + \frac{j}{\omega\epsilon} \overrightarrow{\text{grad}} \int_{\Delta l_n} \vec{t}(l') \dots \overrightarrow{\text{grad}} \phi_n(l') G(R) dl' \right] \quad (\text{II.24})$$

Le terme entre crochets n'est autre que le champ électrique E_n rayonné par la

structure parcourue par un courant $\vec{i}_n(l') = \phi_n(l') \vec{t}(l')$. Si les fonctions ϕ_n sont définies sur un segment élémentaire Δl_n du fil, les intégrales sont nulles en dehors de ce segment et E_n est le champ électrique rayonné par le même segment.

Soit $\{w_m\}$ un ensemble de fonctions test définies sur des segments élémentaires Δl_m , le produit scalaire des deux membres de (II.24) par $\{w_m\}$ donne :

$$\int_{\Delta l_m} w_m \vec{t}(l) \cdot \vec{E}_i dl = \sum_n I_n \int_{\Delta l_m} \vec{E}_n \vec{t}(l) w_m(l) dl \quad (II.25)$$

où

$$l_{mn} = \int_{\Delta l_m} \vec{E}_n \vec{t}(l) w_m dl \quad (II.26)$$

Le premier membre de (II.25) représente la tension induite sur le segment Δl_m . Pour cette raison, la matrice $[l_{mn}]$ sera désignée par la suite par $[Z_{mn}]$ appelée "matrice impédance généralisée".

Le système (II.25) sous forme matricielle s'exprime par :

$$\begin{bmatrix} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \quad (II.27)$$

avec:

$$\begin{bmatrix} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{matrice tension généralisée} \quad (II.28)$$

$$[I] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} \quad \text{distribution du courant inconnu} \quad (\text{II.29})$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} & \dots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} & \dots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \dots & z_{mn} & \dots & z_{mN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N1} & z_{N2} & \dots & z_{Nn} & \dots & z_{NN} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{matrice impédance} \\ \text{généralisée} \end{array} \quad (\text{II.30})$$

où

$$V_m = \int_{\Delta l_m} W_m(l) \vec{E}_i(l) \cdot \vec{t}(l) dl \quad (\text{II.31})$$

z_{mn} est donné en (II.26).

A partir de l'équation (II.27) on déduit immédiatement la matrice courant:

$$[I] = [Y] \cdot [V] \quad (\text{II.32})$$

avec $[Y] = [Z]^{-1}$ matrice admittance (II.33)

Lorsqu'une antenne fonctionne en réception, c'est-à-dire plongée dans un champ électromagnétique, le vecteur excitation [V] donné en (II.31) est fonction du champ tangentiel incident sur sa surface.

Dans le cas d'une antenne fonctionnant en émission, le champ excitateur est localisé sur le ou les éléments où est branché le générateur de tension et est nul sur tous les autres éléments. Si le générateur est appliqué sur un seul élément k, le vecteur courant est donné par:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_N \end{bmatrix} = V_k \begin{bmatrix} Y_{1k} \\ Y_{2k} \\ \vdots \\ Y_{Nk} \end{bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Le vecteur courant est donné par la colonne k de la matrice admittance généralisée [Y].

Les éléments de la diagonale principale de la matrice [Y] donnent donc les admittances d'entrée de l'antenne. Ces admittances ne dépendent pas de la tension appliquée à l'entrée. En régime de réception elles sont dites admittances internes.

On peut également déterminer l'admittance d'entrée de l'élément k, en fonction de la tension et du courant sur le même élément par:

$$Y_e^k = \frac{i_k}{V_k} = \frac{i_k}{\sum_{n=1}^N Z_{kn} \cdot i_n} \quad (\text{II.35})$$

avec : V_k : la tension appliquée sur l'élément k
 i_k : le courant sur l'élément k
 Z_{kn} : les éléments de la colonne k de la matrice généralisée [Z]

II.2.1.3 - Ligne chargée

En désignant par Z_s l'impédance par unité de longueur aux bornes du segment Δl_m , la condition aux limites devient:

$$\vec{E}_i t(1) + \vec{E}_D t(1) = \vec{E}_t t(1) = Z_s I(l_k) t(1) \delta(1-l_k)$$

avec

$$\delta(1-l_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } l=l_k \text{ élément } k \text{ contient la charge} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

En projetant le champ total sur une fonction test $w_m(1)$:

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_t t(1), \vec{W}_m(1) \rangle &= \int_{\Delta l_k} \vec{W}_m(1) Z_s I(l_k) t(1) dl \\ &= \Delta l_k Z_s I(l_k) t(1) \delta(1-l_k) \end{aligned}$$

On peut donc représenter la différence de potentiel sur l'élément k par:

$$V_{c k} = Z_{c k} I(l_k)$$

où $Z_{ck} = Z_s \times \Delta l_k$ impédance de la charge

V_{ck} : la différence de potentiel aux bornes de la charge

$I(l_k)$: le courant qui traverse la charge

On choisit une discrétisation de la structure telle que cette charge soit localisée sur le segment k.

En notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$$

$[Z_c]$: matrice diagonale de même dimension que la matrice Z, dont tous les éléments sont nuls à l'exception de l'élément k de sa diagonale .

$[V_c]$: est une matrice nulle partout à part l'élément k.

En ajoutant la matrice $[V_c]$ à la matrice $[V]$ on obtient la nouvelle matrice excitation $[V]$:

$$[V] = [V_c] + [V]$$

Finalement, le système matriciel devient :

$$[V] = [Z_T] \times [I]$$

avec :

$$[Z_T] = [Z] + [Z_c]$$

La même procédure est applicable à plusieurs charges localisées à condition d'adopter convenablement la discrétisation de l'antenne de façon que la matrice $[Z_c]$ comporte sur sa diagonale tous les éléments de charges de même indice que le segment correspondant.

II.2.2 - Méthode de point-segment

Nous rappelons que dans cette méthode, la structure est divisée en N segments élémentaires de longueur Δ , chaque élément Z_{mn} de la matrice

généralisée [Z] représente l'interaction entre le segment observation m et le segment source n . (Figure II - 2)

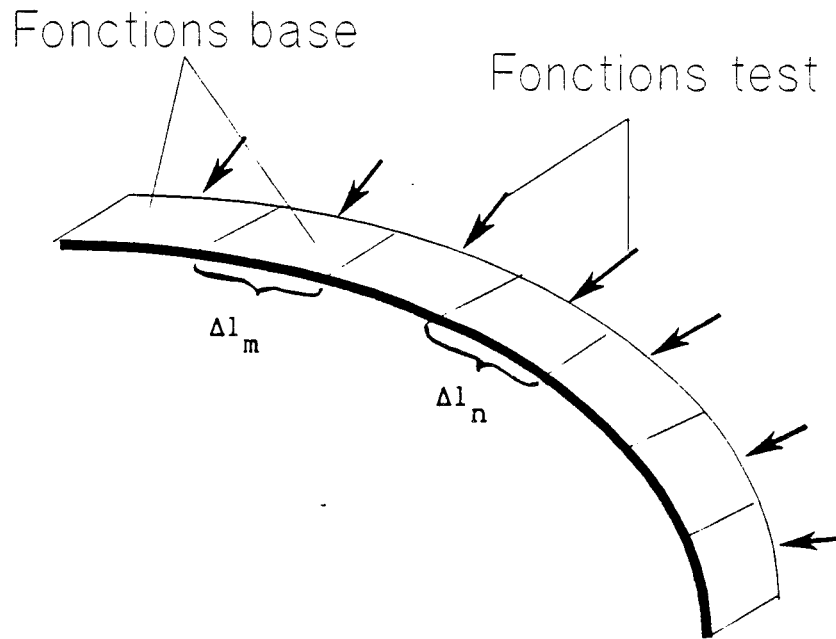


Figure (II - 2)

Le couple base-test est défini par:

$$\phi_n (l') = \begin{cases} 1 & l_n - \Delta \leq l' \leq l_n + \Delta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$w_m (l) = \begin{cases} \Delta \delta(l-l') & l_m - \Delta \leq l \leq l_m + \Delta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

A partir de l'équation (II.21) Z_{mn} peut s'écrire:

$$Z_{mn} = j \omega \mu \Delta \int_{\Delta l_m} \int_{\Delta l_n} G(R) \delta(1-l_m) \phi_n(l') \vec{t}(l) \vec{t}(l') dl dl' + \frac{j \Delta}{\omega \epsilon} \dots \int_{\Delta l_m} \int_{\Delta l_n} \delta(1-l_m) \vec{t}(l) \overrightarrow{\text{grad}} \left[\vec{t}(l) \overrightarrow{\text{grad}} \phi_n(l') \cdot G(R) \right] dl dl' \quad (\text{II.36})$$

en tenant compte du fait que :

$$\vec{t}(l) \overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial l} \quad \text{et} \quad \vec{t}(l') \overrightarrow{\text{grad}}' = \frac{\partial}{\partial l'} \quad (\text{II.37})$$

le deuxième membre de gauche devient:

$$\frac{j \Delta}{\omega \epsilon} \int_{\Delta l_m} \delta(1-l') \frac{\partial}{\partial l} \left[\int_{\Delta l_n} \frac{\partial \phi_n}{\partial l'} G(R) \cdot dl' \right] dl \quad (\text{II.38})$$

En faisant une intégration par partie de l'expression entre crochets :

$$\int_{\Delta l_n} \frac{\partial \phi_n}{\partial l'} G(R) dl' = G(R) \phi_n(l') \Big|_{\Delta l_n} - \int_{\Delta l_n} \frac{\partial G(R)}{\partial l'} \phi_n(l') dl'$$

En tenant compte du fait que la fonction est nulle aux extrémités, (II.38) devient:

$$j \frac{\Delta}{\omega \epsilon} \int_{\Delta l_m} \left[\int_{\Delta l_n} \frac{\partial^2 G(R)}{\partial l \partial l'} \phi_n(l') dl \right] \delta(1-l_m) dl \quad (\text{II.39})$$

En utilisant les approximations des différences finies centrées, nous obtenons les expressions suivantes :

$$\frac{\partial^2 G(R)}{\partial l \partial l'} = \frac{G(1 + \frac{\Delta}{2}, l' + \frac{\Delta}{2}) - G(1 + \frac{\Delta}{2}, l' - \frac{\Delta}{2}) - G(1 - \frac{\Delta}{2}, l' + \frac{\Delta}{2}) + G(1 - \frac{\Delta}{2}, l' - \frac{\Delta}{2})}{\Delta^2}$$

(II.40)

$$\int_{\Delta l_m} G(l, l') \delta(l - l_m) dl = G(l, l_m)$$

En utilisant (II.39) et (II.40), Z_{mn} s'écrit finalement :

$$Z_{mn} = \frac{j}{\omega \epsilon \Delta} \int_{\Delta l_m} G(l_m + \frac{\Delta}{2}, l' + \frac{\Delta}{2}) - G(l_m + \frac{\Delta}{2}, l' - \frac{\Delta}{2}) - G(l_m - \frac{\Delta}{2}, l' + \frac{\Delta}{2}) + G(l_m - \frac{\Delta}{2}, l' - \frac{\Delta}{2}) \dots \gamma^2 \Delta^2 G(l_m, l') \vec{t}(l) \vec{t}(l') dl' \quad (II.41)$$

Cette méthode permet de donner une approximation en escalier du courant. Les fonctions ϕ_n donnent un courant discontinu le long du fil, il en résulte d'après (II.12) que la charge $Q'(l')$ associée à cette approximation du courant est concentrée aux jonctions entre les segments élémentaires sous la forme d'une impulsion de Dirac, alors qu'en réalité, le courant et la densité de charge sont continus le long d'un fil.

II. 2. 3. - Méthode de Galerkin

Dans cette méthode le couple base-test est formé de fonctions triangulaires linéaires définies par :

$$\phi_n(l') = \begin{cases} \frac{\Delta - |l' - l_n|}{\Delta} & \text{pour } l_n - \Delta < l' < l_n + \Delta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (II.42)$$

$$w_m(l) = \begin{cases} \frac{\Delta - |l - l_m|}{\Delta} & \text{pour } l_m - \Delta < l < l_m + \Delta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Elles donnent une approximation linéaire par morceau du courant.

A partir de l'équation (II.26) Z_{mn} s'écrit :

$$Z_{mn} = j\omega\mu \int_{l_m - \Delta}^{l_m + \Delta} \int_{l_n - \Delta}^{l_n + \Delta} w_m(l) \phi_n(l') G(R) \vec{t}(l) \vec{t}(l') dl dl' + \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{l_m - \Delta}^{l_m + \Delta} \int_{l_n - \Delta}^{l_n + \Delta} \dots w_m(l) \frac{\partial}{\partial l} \left[\frac{\partial \phi_n}{\partial l'} \cdot G(R) \right] dl dl' \quad (II.43)$$

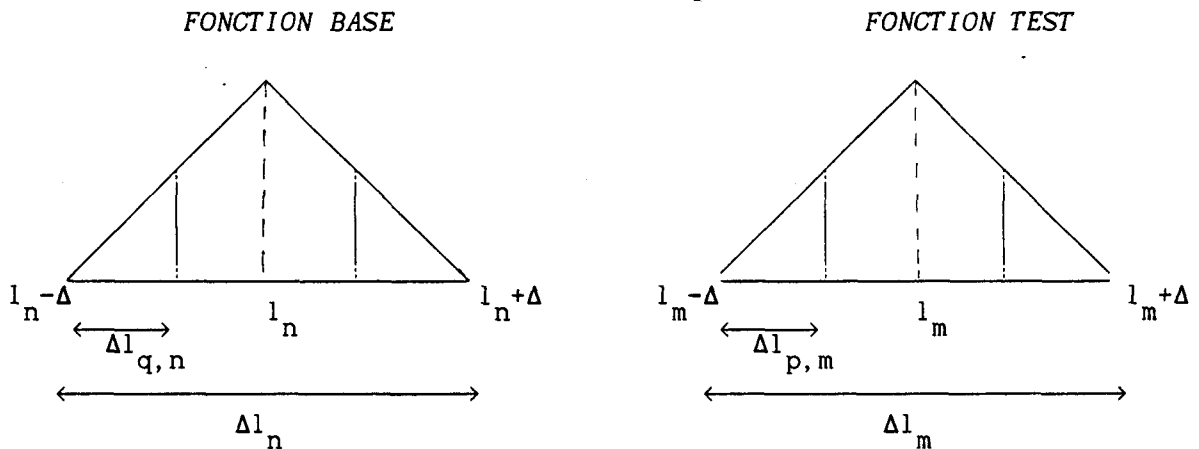
Examinons le 2^{ème} terme du membre de droite, on voit apparaître l'intégrale de $\frac{\partial G}{\partial l}$ qu'il est souhaitable d'éliminer pour des questions de stabilité numérique. Nous allons donc transformer cette intégrale en faisant une intégration par partie :

$$\int_{l_m - \Delta}^{l_m + \Delta} \frac{\partial G}{\partial l} w_m(l) dl = \left[G(R) w_m(l) \right]_{l_m - \Delta}^{l_m + \Delta} - \int_{l_m - \Delta}^{l_m + \Delta} G(R) \frac{\partial w_m(l)}{\partial l} dl$$

En tenant compte du fait que la fonction test $w_m(l)$ est nulle aux extrémités, on obtient :

$$Z_{mn} = j\omega\mu \int_{l_m - \Delta}^{l_m + \Delta} \int_{l_n - \Delta}^{l_n + \Delta} G(R) w_m(l) \phi_n(l') \vec{t}(l) \vec{t}(l') dl dl' + \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_{l_m - \Delta}^{l_m + \Delta} \int_{l_n - \Delta}^{l_n + \Delta} G(R) \dots \frac{\partial w_m(l)}{\partial l} \frac{\partial \phi_n(l')}{\partial l'} dl dl' \quad (\text{II.44})$$

On remarque que les dérivées de la fonction de Green n'apparaissent plus mais l'intégrale double subsiste. Une méthode de calcul approché des intégrales au second membre (II.44) consiste à diviser chacun des éléments Δl_m et Δl_n en quatre segments de longueurs identiques et à supposer que l'intégrale de la fonction de Green sur un segment élémentaire $\Delta l_{q,n}$ ($q=1$ à 4) de l'élément Δl_n est constante lorsque le point d'observation se déplace le long d'un segment élémentaire $\Delta l_{p,m}$ ($p=1$ à 4) de l'élément Δl_m est égal à sa valeur au centre de l'élément $\Delta l_{p,m}$ considéré.



subdivision des éléments Δl_m et Δl_n

On admet d'autre part, que le découpage du fil est suffisamment fin pour que les vecteurs $\vec{t}(l)$ et $\vec{t}(l')$ soient approximativement constants sur un segment élémentaire $\Delta l_{q,n}$ ou $\Delta l_{p,m}$. Dans ces conditions, on donne une

approximation de l'expression (II.44) (le calcul détaillé est développé en Annexe 1). On obtient :

$$Z_{mn} = j\omega\mu \sum_{p,q} \frac{\vec{\Delta l}_{q,m}}{l_{q,m}} \cdot \frac{\vec{\Delta l}_{p,m}}{l_{p,m}} T(p,m) \Psi_1(m_p, n_q) + \frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_{p,q} TP(p,m) TP(q,n) \Psi(m_p, n_q) \quad (\text{II.45})$$

avec :

$$T(p, m) = \int_{\Delta l_{p,m}} w_m(l) dl$$

$$TP(p, m) = \begin{cases} 0.5 & p = 1, 2 \\ -0.5 & p = 3, 4 \end{cases}$$

$$\Psi(m_p, n_q) = \frac{1}{\Delta l_{q,n}} \int_{\Delta l_{q,n}} \frac{e^{-\gamma R(m_p, l')}}{4\pi R(m_p, l')} dl'$$

$$\Psi_1(m_p, n_q) = \int_{\Delta l_{q,n}} \frac{e^{-\gamma R(m_p, l')}}{4\pi R(m_p, l')} \phi_n(l') dl'$$

$R(m_p, l') = | \vec{r}_p - \vec{r}' |$ où r_p est le centre du segment $\Delta l_{p,m}$ et r' le point courant du segment $\Delta l_{q,n}$.

Lorsque les éléments $\Delta l_{p,m}$ et $\Delta l_{q,n}$ sont confondus, r_p est à prendre sur l'axe du fil et r' sur une courbe parallèle à l'axe translaté dans la direction perpendiculaire à ce dernier est d'une distance égale au rayon a du fil.

$$R(m_p, l') = \sqrt{(l_{p,m} - l')^2 + a^2} \quad \text{où } l_{p,m} = l_m - (2p - 3) \frac{\Delta}{2}$$

II. 3 - EXEMPLES NUMERIQUES

Dans ce paragraphe, la mise en oeuvre pratique des formules établies précédemment est illustrée sur quelques exemples.

II. 3 . 1 - Cas de la ligne au-dessus d'un sol parfaitement conducteur

Le sol étant parfaitement conducteur, on peut donc appliquer la théorie des images électriques ; la présence d'un interface air-sol va se traduire par les effets suivants :

- le fil au-dessus du sol est équivalent à deux fils dans l'espace libre.
- lorsque la ligne horizontale comporte des fils de descente verticaux, on peut supprimer le sol à condition de prolonger le fil par son symétrique par rapport au sol.
- addition d'un terme supplémentaire à la composante électrique du champ incident, dû à la réflexion de ce dernier sur l'interface air-sol.

Le champ appliqué est maintenant constitué du champ incident et du champ réfléchi par l'interface air-sol :

$$\vec{E}^{\text{app}} = \vec{E}^{\text{i}} + \vec{E}^{\text{r}} \quad (\text{II.46})$$

Il est important de remarquer que E^{i} et E^{r} doivent être prolongés dans la région située dans le milieu conducteur.

L'équation intégral-différentielle sera obtenue d'une façon analogue à celle du paragraphe précédent en remplaçant E_i par le champ E_{app} et en prenant en considération les courants induits sur la ligne et son image. La géométrie de la ligne étudiée ainsi que le système de coordonnées utilisé dans les calculs sont illustrés par la figure (II-3).

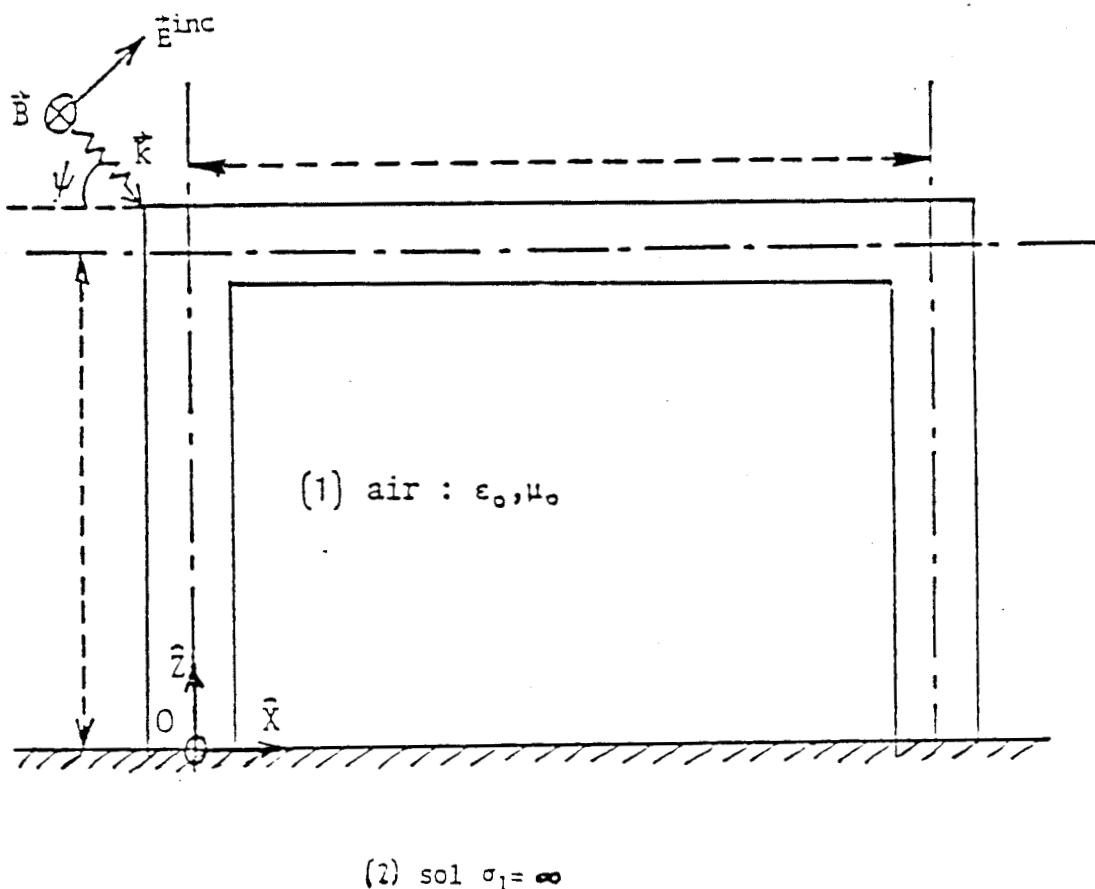


Figure (II-3): Ligne située au dessus du sol

Enfin, pour clore cette partie, nous indiquons que nous aurons à distinguer par la suite deux sortes d'excitation, suivant que l'antenne est plongée dans un champ électromagnétique incident ou excité par un générateur de tension localisé sur la partie verticale.

II. 3. 1. 1 - Matrice de couplage

A partir des expressions de Z_{mn} établies en (II.41) et (II.45), les points source et observation peuvent être situés sur un même segment ou des segments distincts, ce qui traduit le fait que tous les couplages sont pris en compte (interaction d'un segment sur lui-même mais aussi de celui avec chacun des autres segments de la structure). Dans le cas de la structure étudiée, on distingue le cas où les segments source et observation sont situés sur le même axe ($\vec{t}(l) // \vec{t}(l')$), le produit scalaire des vecteurs tangents est égal à l'unité. Par contre lorsque ceux-ci sont situés sur des axes orthogonaux $\vec{t}(l) \cdot \vec{t}(l')$ est identiquement nulle.

a) Méthode de point segment

Lors de la résolution de l'équation intégral-différentielle par la méthode de point-segment, la partie horizontale est divisée en N_x éléments, chaque ligne de descente est décomposée en N_z éléments.

De plus, l'existence de jonctions entre les brins non alignés de la structure nous a conduit à adopter la répartition illustrée par la fig (II - 4) pour les fonctions de "base" et de "test" utilisées dans cette méthode.

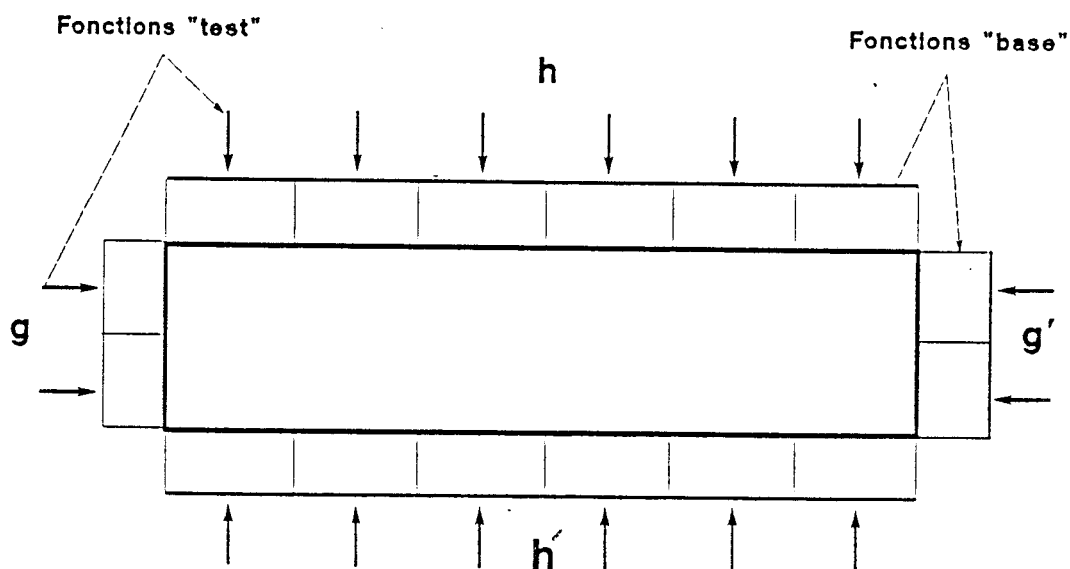


Figure (II-4)

N_x représente l'ordre du découpage choisi pour la partie horizontale et N_z celui choisi pour chaque partie verticale ; l'ordre de découpage est donc égal à :

$$N = 2 N_x + 2 N_z$$

La longueur de chaque élément du découpage est :

$$\Delta = \frac{2 (L + 2h)}{N} \quad (II . 46)$$

D'une façon générale, notons $[Z^{ik}]$ les éléments de matrice correspondant à l'influence de l'élément i sur l'élément k.

D'après des considérations de symétrie de la structure, il est seulement nécessaire de calculer les sous-matrices $[Z^{hh}]$, $[Z^{hg}]$, $[Z^{hh'}]$ et $[Z^{gg'}]$ pour obtenir les autres termes de la matrice $[Z]$.

De plus, ces sous-matrices possèdent des propriétés de symétrie mis à part $[Z^{hg}]$, qui réduisent leur temps de calcul.

En effet le terme Z_{mn} dépend uniquement de la fonction de Green, donc du carré de la distance qui sépare le brin m du brin n. Il suffit de calculer une colonne ou une ligne des sous-matrices $[Z^{hh}]$, $[Z^{hh'}]$ et $[Z^{gg'}]$ pour déduire tous les autres éléments de celles-ci, elles sont dites de type Toeplitz.

En conclusion, la connaissance de la matrice $[Z]$ nécessite le calcul de $[2 N_x + N_z (N_x + 1)]$ éléments.

b) Méthode de Galerkin

Dans le cas où le couple base-test est constitué des fonctions triangulaires linéaires, la présence des jonctions entre les brins horizontaux et verticaux nous a conduit à adopter la répartition illustrée par la figure (II - 5).

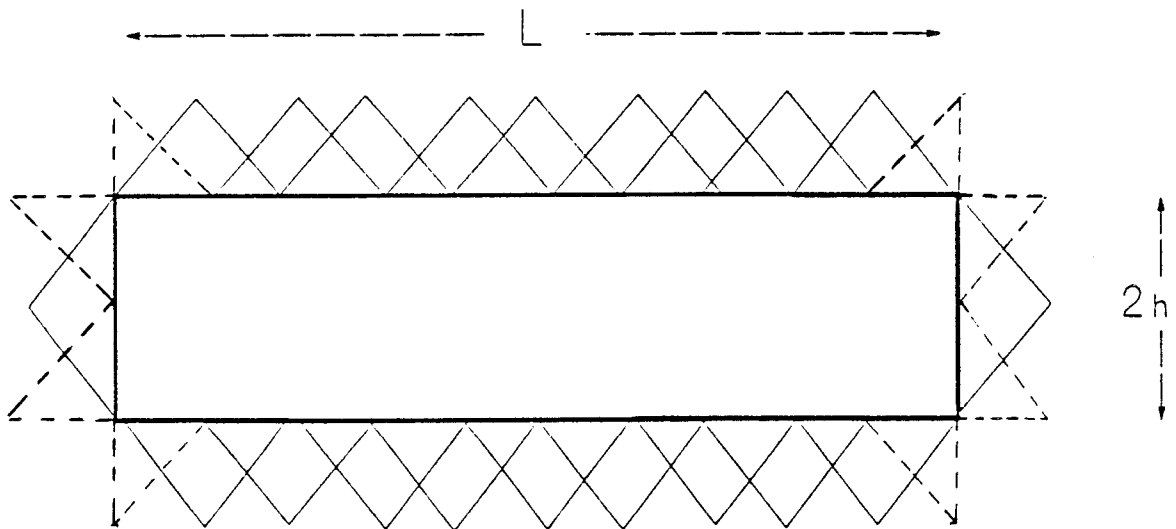


Figure (II - 5): méthode de Galerkin

On remarque que pour les éléments "coin" la projection du champ sur une fonction test conduit à une intégrale sur la moitié de l'élément Δl_m , cette remarque reste valable lorsque le courant est projeté sur une fonction base $\phi_n(l')$ dans la formule (II.43).

Par conséquent, nous aurons à distinguer dans les couplages "coin" :

- dipole source sur un coin et dipole d'observation sur une fonction entière.
- dipole source sur un coin et dipole d'observation sur un coin identique ou différent.

N_x représente l'ordre du découpage choisi pour la partie horizontale et N_z celui pour la partie verticale, l'ordre total est donc égal à :

$$N = 2 (N_x + N_z)$$

La longueur de l'élément horizontal :

$$L = (N_x - 1) . \Delta$$

Celui de la partie verticale est :

$$2 h = (N_z + 1) . \Delta$$

La tension induite sur le segment Δl_m due à un courant unité le long du segment Δl_n coin, est la superposition du courant induit sur l'élément coin parallèle et de celui qui lui est perpendiculaire. Par ailleurs nous prendrons la précaution d'une \sum de $p = 1, 2$ (respectivement $q = 1, 2$) ou $p = 3, 4$ (respectivement $q = 3, 4$) selon que le dipole source ou observation est situé sur un coin.

Enfin, tous les éléments de symétrie pour les sous-matrices $[Z^{hh}]$, $[Z^{hh'}]$ et $[Z^{gg'}]$ restent valables puisque c'est une symétrie géométrique du problème et non lié à la méthode des moments.

II. 3. 1. 2 - Ligne au-dessus d'un sol parfaitement conducteur- confrontation avec la théorie des lignes

Nous allons tout d'abord, dans cette étude, considérer le cas d'une ligne court-circuitée aux extrémités déjà traitée par Taylor et Castillo [10] puis par d'autres auteurs. De nombreuses thèses [11,12] et publications [13,14,15] ont fait l'objet de cette étude, la plus récente [11] faisant une comparaison entre la théorie des lignes et celle des antennes.

Dans le cas où la ligne est soumise à une onde arrivant sous incidence normale, ce qui correspond à une valeur de l'angle ψ , représenté sur la figure (II - 3), égal à 90° , on a :

Le champ E_x^{app} incident sur le fil est la somme du champ primaire E_x^i et du champ réfléchi par le sol. Dans le cas d'une attaque simultanée nous avons :

$$E_x^{app} = E_x^i (1 - e^{2jkh}) \quad (II.48)$$

où $k = 2 \pi / \lambda$

E_x^i : champ incident primaire suivant x pour une onde plane monochromatique est pris égal à 1 V/m.

Dans les applications numériques que nous présentons par la suite, la longueur de la ligne sera fixée à 20 m, de rayon $a = 5$ mm.

Nous avons représenté sur la planche (II-1) le module du courant obtenu pour différents découpages en fonction de la fréquence pour une ligne située à 2.5 m au-dessus du sol, et court-circuitée aux extrémités. Sur la planche (II-1.a), on remarque que la méthode des moments converge, le couple base-test étant des triangles. Par contre, avec la méthode point-segment, planche (II-1.b) le module du courant à la première résonance ne garde pas une valeur constante en fonction du découpage. En outre, nous constatons que pour une longueur d'onde supérieure à 6 fois la longueur de la ligne ($f < 2.5$ MHz), des instabilités apparaissent dans le calcul numérique et conduisent à une non convergence de la méthode point-segment. Ceci est dû au fait que l'intégrale des dérivées secondes des fonctions de Green a été approchée par des différences finies. Par contre la méthode de Galerkin évite le calcul de cette dernière.

Enfin, en comparant les amplitudes du courant à la première résonance donnée sur les planches (II-1.a) et (II-1.b), on estime que la valeur correcte est obtenue dans la méthode de point-segment pour un découpage $\Delta = 0.5$ m, soit un rapport $\frac{2h}{\Delta} = 10$.

LIGNE AU DESSUS D'UN SOL PARFAITEMENT CONDUCTEUR

Paramètre : pas de découpage

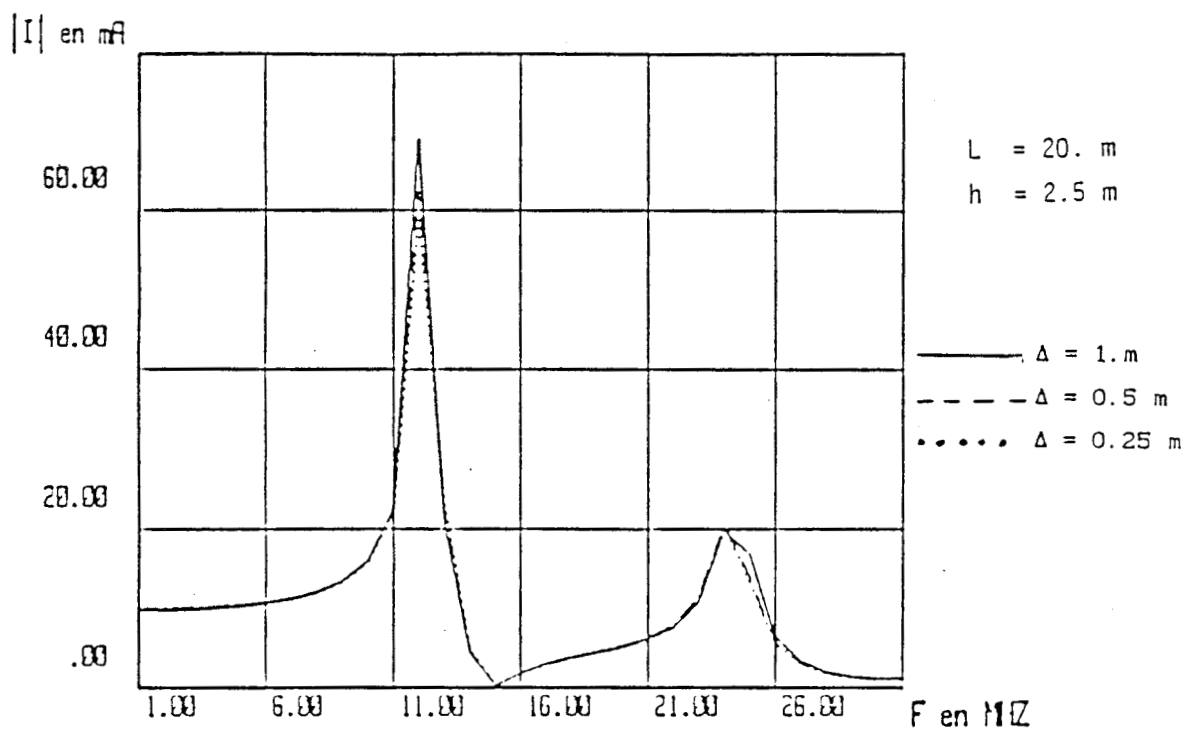


Planche (II - 1.a): Méthode de Galerkin (Triangle-Triangle)

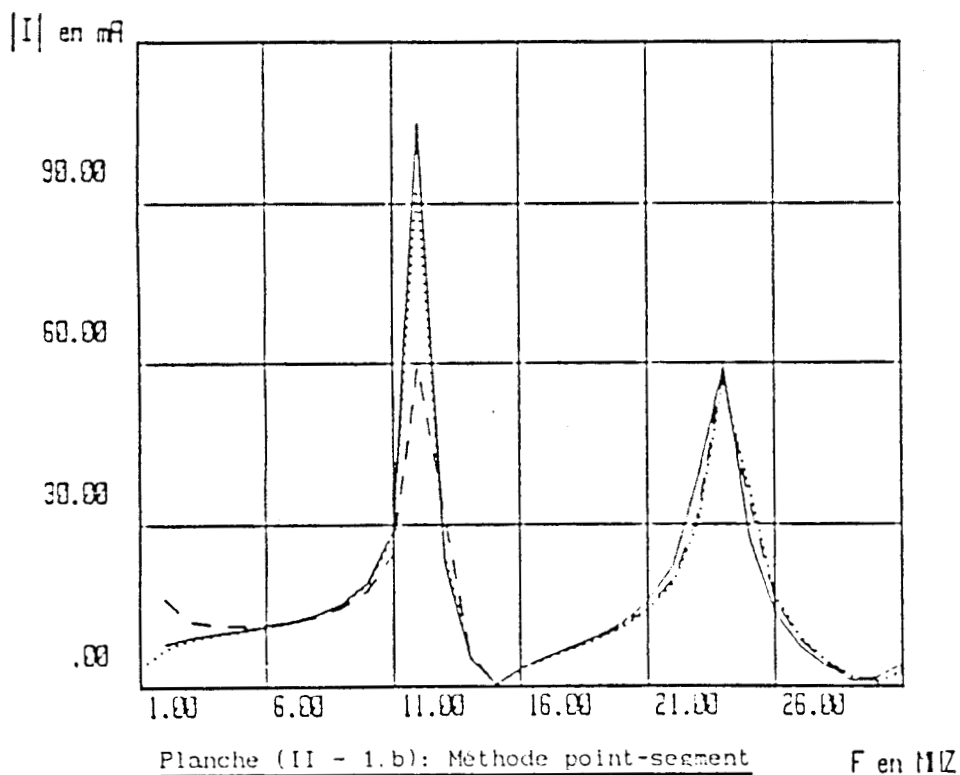


Planche (II - 1.b): Méthode point-segment F en MHz

Néanmoins nous observons dans chacun des cas que la ligne court-circuitée aux extrémités présente des antirésonances correspondant aux fréquences :

$$F_A = k \frac{C}{L} \quad (II.49)$$

qui sont propres à la longueur horizontale de la ligne.

Notons aussi des résonances aux fréquences :

$$F_R = k \frac{C}{L + 2h} \quad (II.50)$$

Celles-ci sont donc liées aux modes propres de la structure aérienne dans son ensemble.

Les planches (II-2.a) et (II-2.b) qui illustrent la réponse fréquentielle de la ligne située à 50 cm au-dessus du sol montrent qu'avec un pas de découpage $\Delta=25$ cm la convergence de la méthode des moments n'est plus atteinte aux fréquences de résonance. Compte tenu des dimensions de la partie verticale, il faudrait prendre un pas $\Delta=10$ cm, ceci correspond à un découpage en 420 éléments de la structure, ce qui engendre un dépassement de la mémoire de l'ordinateur H P 9000 dont nous disposons.

Notons à nouveau des fréquences de résonance et d'antirésonance caractéristiques respectivement de longueur de la ligne et de la structure aérienne dans son ensemble.

Dans ce cas particulier d'une ligne court-circuitée aux extrémités planche (II-1) et (II-2), le courant à l'extrémité de la ligne s'exprime selon la théorie des lignes de transmission [16] par la relation :

$$I_M = 4 \frac{E_x^i h}{Z_c} \quad (II.51)$$

LIGNE AU DESSUS D'UN SOL PARFAITEMENT CONDUCTEUR

Paramètre : pas de découpage

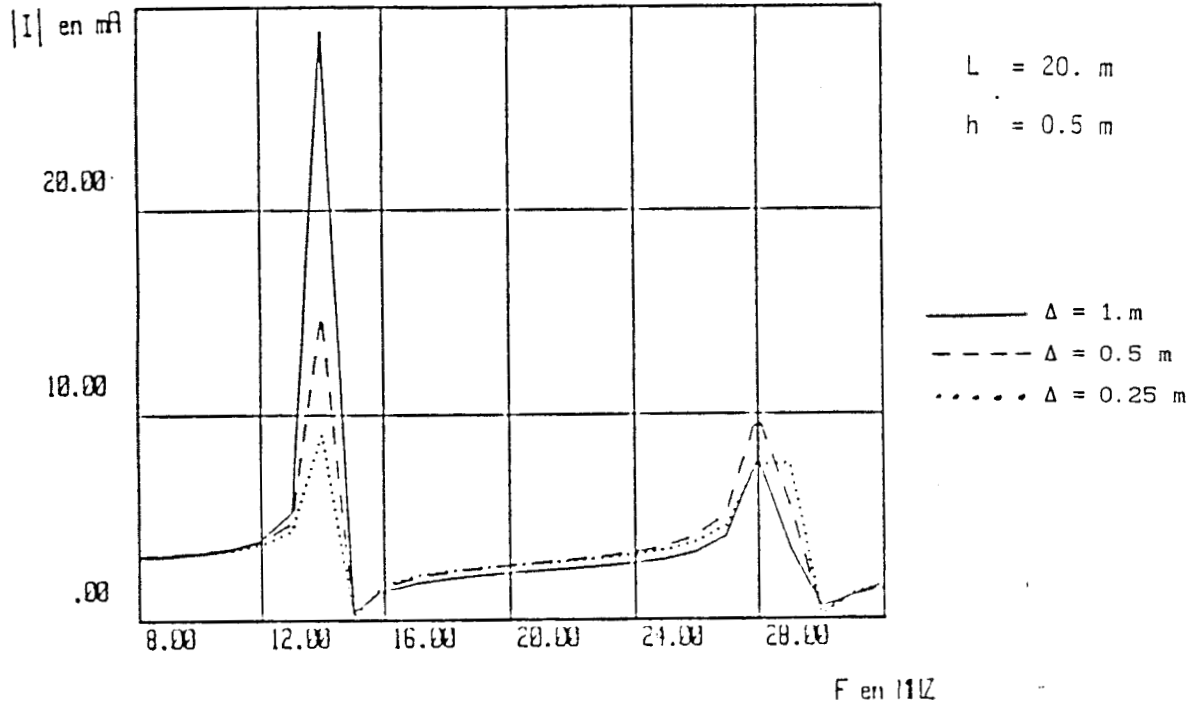
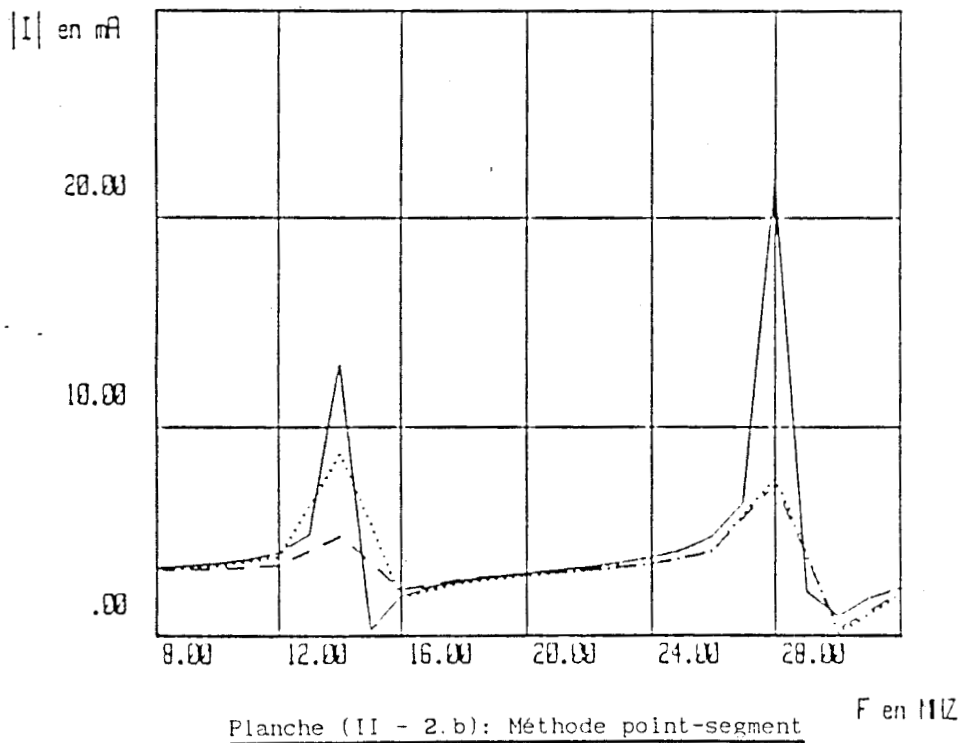


Planche (II - 2.a): Méthode de Galerkin (Triangle-Triangle)



Z_c est l'impédance caractéristique de la ligne bifilaire équivalente donnée par :

$$Z_c = 120 \ln \left(\frac{2h}{a} \right) \quad (\text{II.52})$$

Sauf indication contraire, les dimensions de la ligne restent fixées à une longueur ($L=20$ m), une hauteur ($h=50$ cm) au dessus du sol, et de rayon ($a=5$ mm).

La planche (II-3) représente le module du courant pour des impédances de charge identiques pour chaque partie verticale valant 635Ω qui n'est autre que l'impédance caractéristique de la ligne horizontale. Le champ électrique total reste constant sur la partie horizontale et est normalisé à 1 V/m.

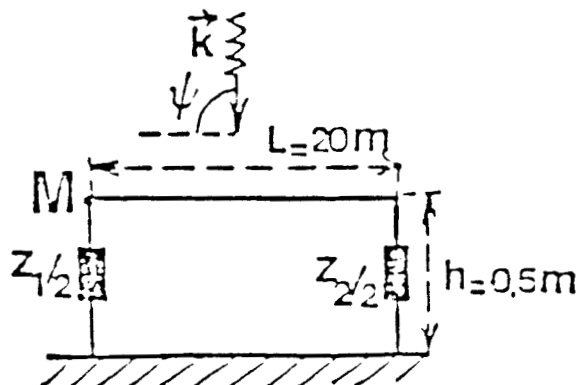
Nous pouvons remarquer que :

- les valeurs des maximums de courant, ne dépassent jamais la valeur obtenue dans le cas d'un court-circuit.
- les fréquences d'antirésonances restent les mêmes.

Sur les planches (II-4) et (II-5), nous avons représenté le module du courant en fonction de la fréquence, et ceci dans le cas où la partie verticale gauche est excitée par un champ E_z^t de 1 V/m. Compte-tenu des dimensions de la structure, cela revient à étudier une ligne bifilaire en haute fréquence. Sur la planche (II-4), on considère le cas d'une ligne court-circuitée et en choisissant un pas de discrétisation de 25 cm. on remarque que l'amplitude du courant à la résonance diffère entre les deux méthodes de résolution. Cet écart est d'ailleurs très marqué au voisinage de la première résonance.

Lorsque la structure est fermée sur son impédance caractéristique, planche (II-5), le module du courant reste pratiquement constant et donné

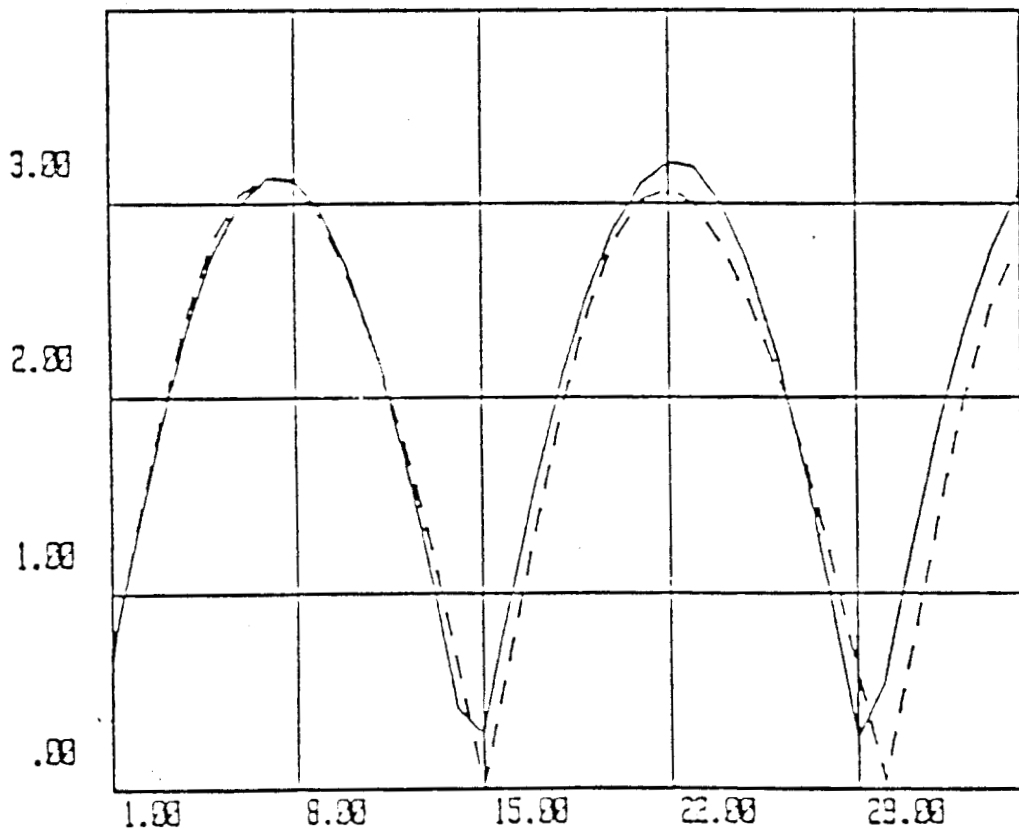
LIGNE AU DESSUS D'UN SOL PARFAITEMENT CONDUCTEUR
 FERMEE SUR SON IMPEDANCE CARACTERISTIQUE



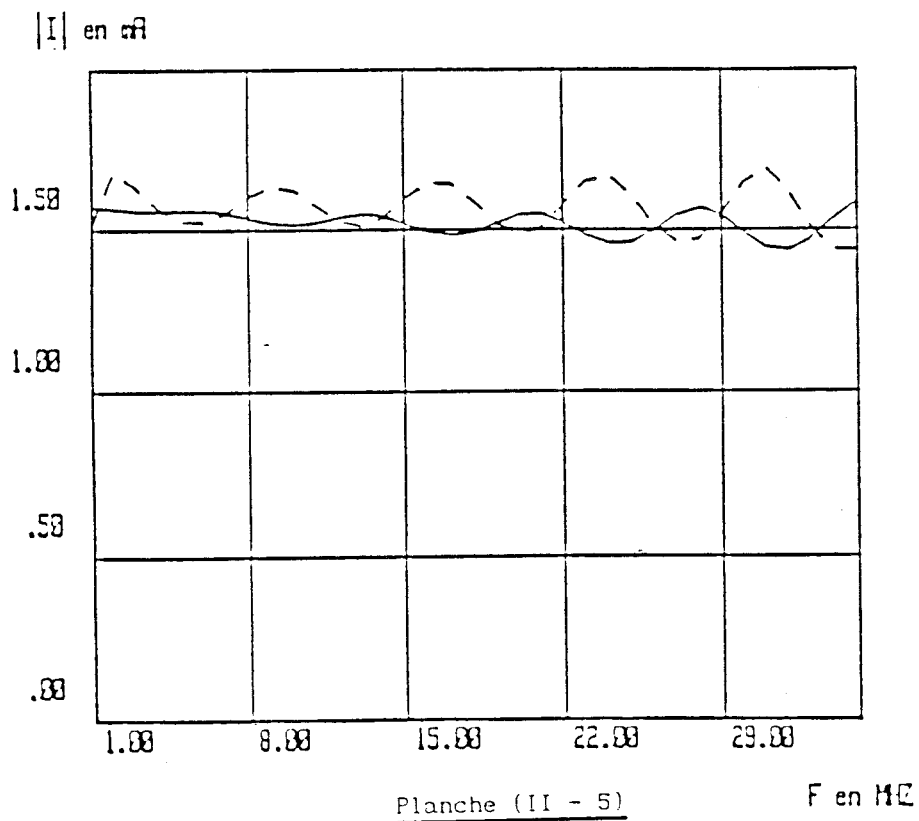
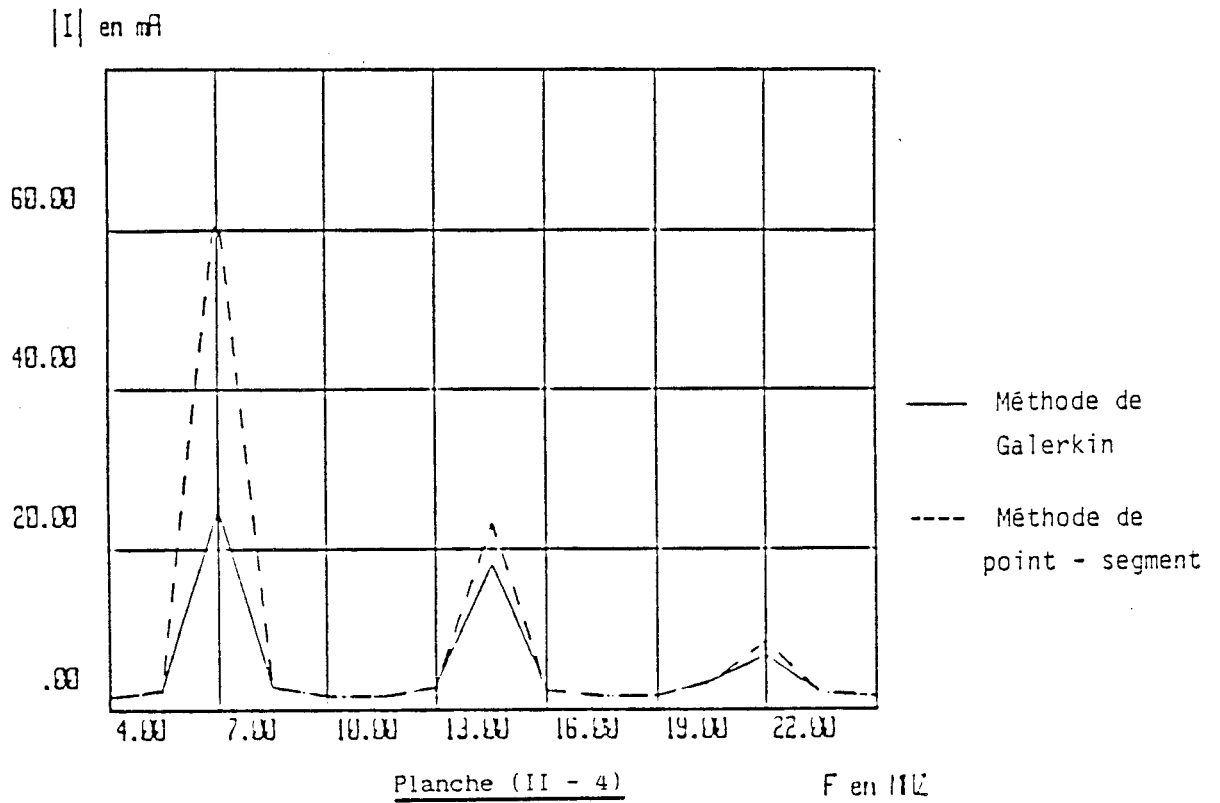
— Méthode de Galerkin
 ---- Méthode de point-segment

$$\begin{cases} Z_1/2 = Z_2/2 = Z_C \\ a = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \end{cases}$$

$|I|$ en mA



F en MHz



par :

$$I = \frac{V}{Z_c} \approx 1.6 \text{ mA} \quad (\text{II.53})$$

avec

$$V = \int_{-h}^{+h} E_o \, dl = E_o \cdot 2h = 1 \text{ Volt}$$

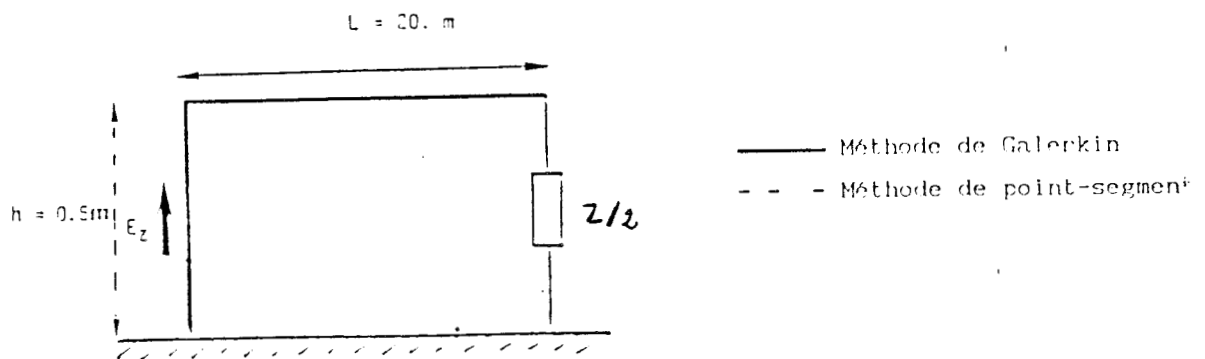
Nous avons représenté sur la planche (II-6) le module du courant en fonction de l'abscisse curviligne de la ligne, l'origine étant prise à l'entrée du générateur (extrémité gauche) et lorsque l'extrémité droite de la ligne comporte une charge de 40 K Ω , correspondant pratiquement au cas d'un circuit ouvert. La fréquence est prise égale à 15 MHz. On remarque que la ligne présente des maximums (ventre de courant) et des minimums (ou noeuds de courant) distants de quart d'onde mais il existe un excellent accord entre la méthode de Galerkin et la méthode point-segment.

Cette étude préliminaire montre donc les difficultés numériques auxquelles on se heurte pour déterminer la distribution du courant sur une structure résonnante dont un des côtés est beaucoup plus petit que l'autre.

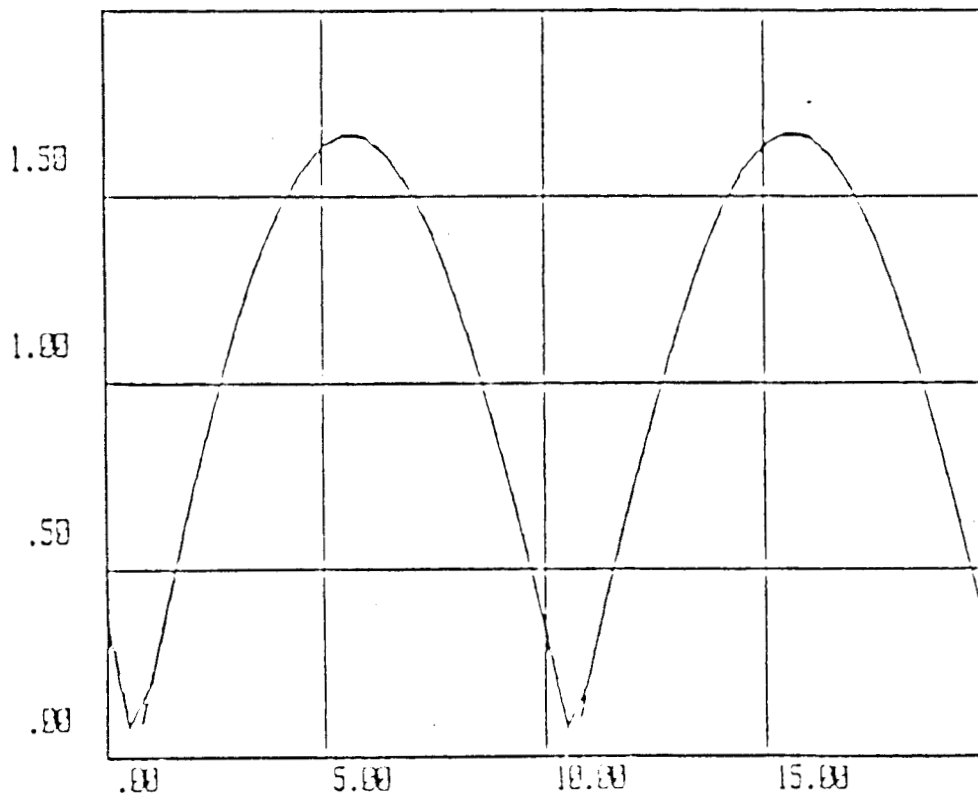
II. 3. 1. 3 - Antenne en J

Une antenne dite en J est constituée de deux brins parallèles de longueurs $(2K - 1) \frac{\lambda}{4}$ et $(2K + 1) \frac{\lambda}{4}$ ($K = 1, 2, \dots$) distants de $D \ll \lambda$ et alimentée à ses extrémités par un câble coaxial comme le montre la figure (II-6).

LIGNE BIFILAIRE EN CIRCUIT OUVERT(charge de $40. \text{k}\Omega$)



$|I(x)|$ en mA



X en mètre

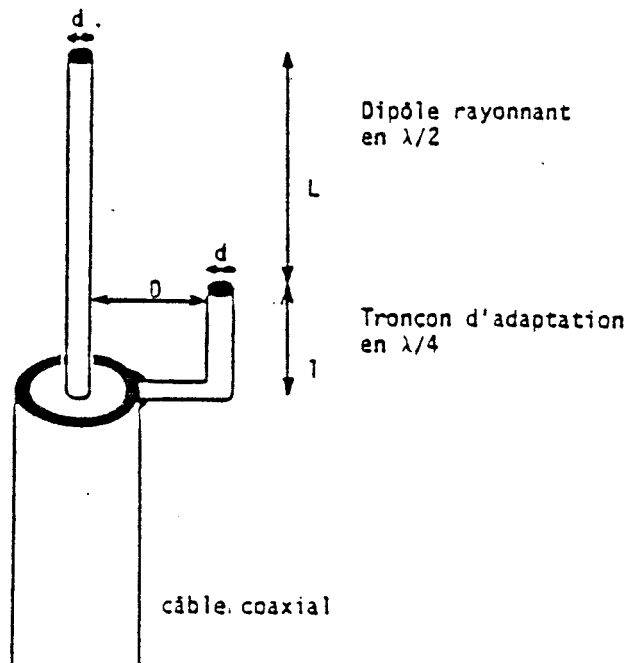


FIGURE (II - 6) ANTENNE EN J

Pour une fréquence de travail de 200 MHz, nous avons tracé le module du courant pour un fil de diamètre $d = 2$ mm.

Sur la planche (II-7), l'élément rayonnant est de longueur $L = 75$ cm ($\lambda/2$) et l'élément d'adaptation de longueur $l = 37.5$ cm ($\lambda/4$) distant de $D = 4$ cm, ce qui correspond à $D \cong \lambda/36$, le pas de découpage $\Delta = 1$ cm, soit $D/\Delta = 4$. Cependant il est utile de préciser que ce rapport ne peut atteindre 10 comme il serait souhaitable pour la convergence, et ceci pour les raisons suivantes :

- d'une part, ce découpage engendre un dépassement de la mémoire de l'ordinateur.

- d'autre part, l'approximation des fils minces ne serait plus satisfaite puisque le diamètre du fil ne serait plus négligeable vis à vis de la longueur Δ d'un élément.

ANTENNE en J

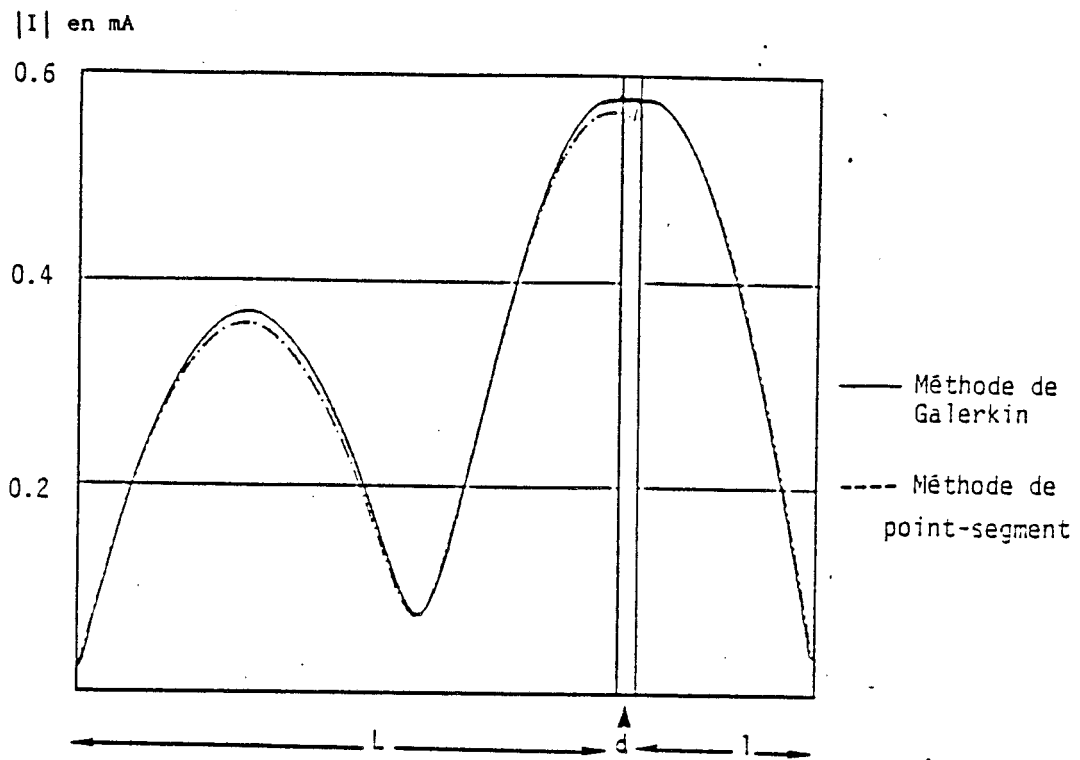


Planche (II - 7)

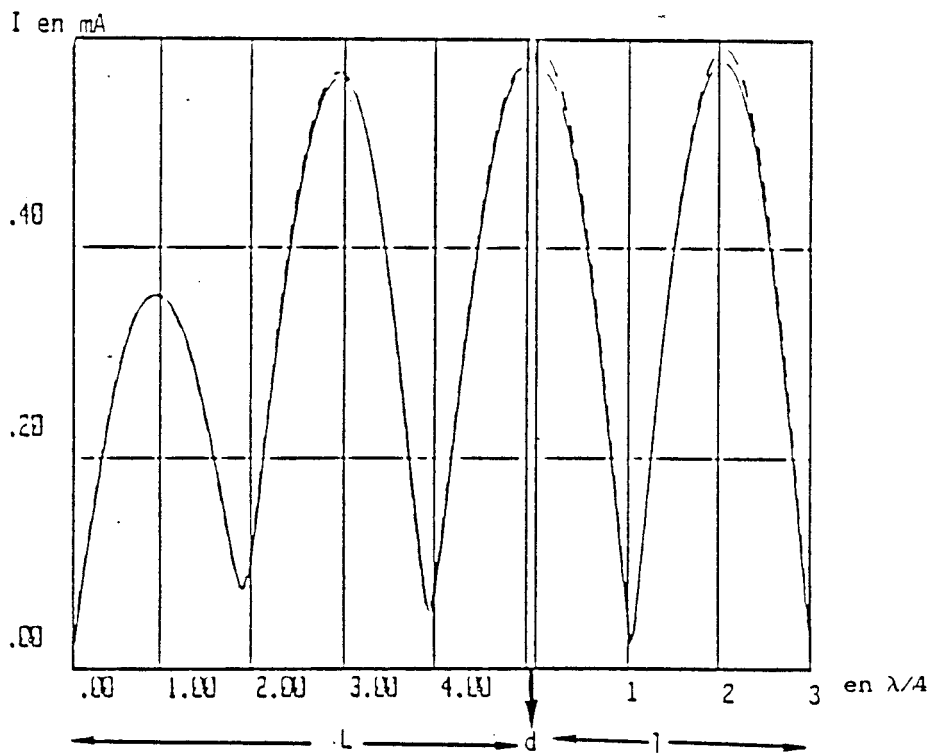


Planche (II - 8)

Néanmoins, on remarque que le module du courant présente une double alternance et que le maximum est atteint aux extrémités du tronçon d'alimentation.

Notons une légère variation du courant sur la partie horizontale (D) de l'antenne avec la méthode de point-segment, ceci provient du fait que le courant est approximé en escalier sur la fonction de base $\phi_n(l')$, donc l'équation de continuité du courant et de la charge n'est pas vérifiée sur les points anguleux. Par contre la méthode des "triangles" assure la continuité du courant. On peut donc s'attendre à un écart d'impédance d'entrée (ou de la fréquence d'accord) entre les deux méthodes de résolution.

Sur la planche (II-8), nous avons représenté les variations de l'amplitude du module du courant sur la ligne tel que l'élément rayonnant est de longueur $L = 75 \text{ cm}$ ($\lambda/2$), l'élément d'adaptation étant dans cet exemple de longueur $l = 112.5 \text{ cm}$ ($3\lambda/4$), la distance les séparant "d" restant fixée à 4 cm. On remarque à nouveau que le module du courant présente des maximums le long de l'antenne tous les $(2K + 1) \lambda/4$ à partir de l'extrémité ouverte.

Enfin, afin de mettre en évidence les variations de l'impédance d'entrée, nous avons représenté sur les planches (II-9) et (II-10) la partie réelle et imaginaire de l'impédance d'entrée sur le tronçon d'alimentation en fonction de la fréquence. On constate un décalage de 2.5 MHz de la fréquence d'accord entre les deux méthodes de résolution, l'impédance d'entrée est voisine de 40Ω à l'accord.

VARIATION FREQUENTIELLE DE L'IMPEDANCE D'ENTREE SUR UNE ANTENNE J

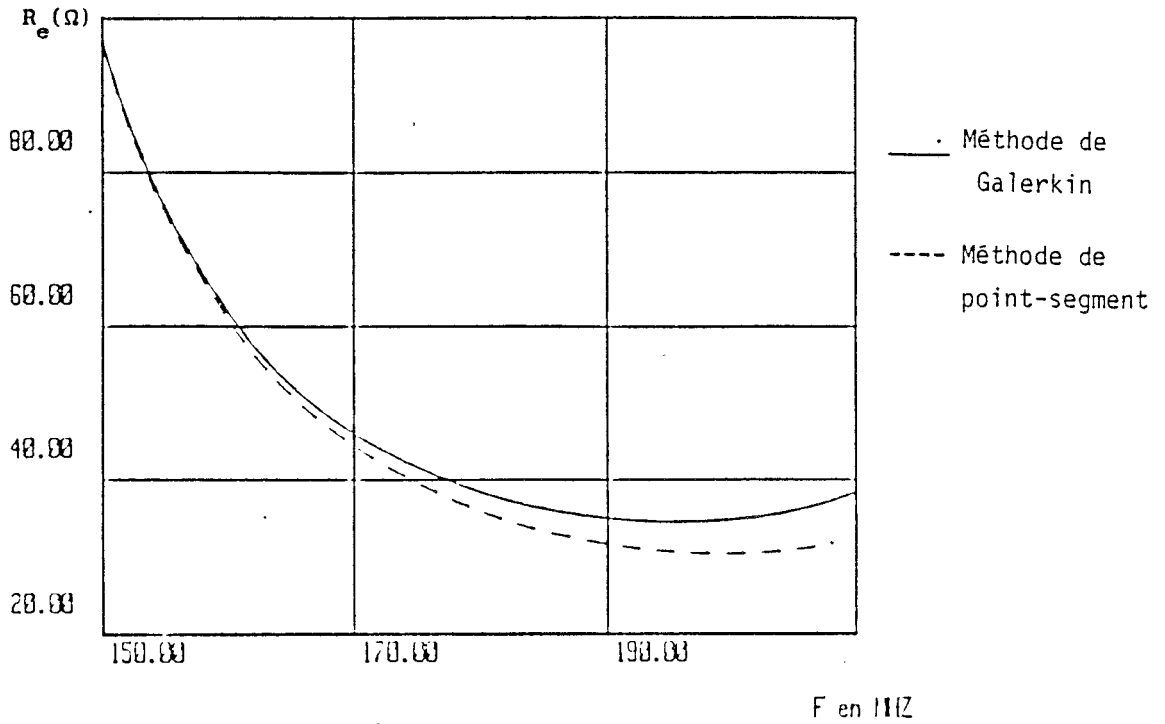


Planche (II - 9)

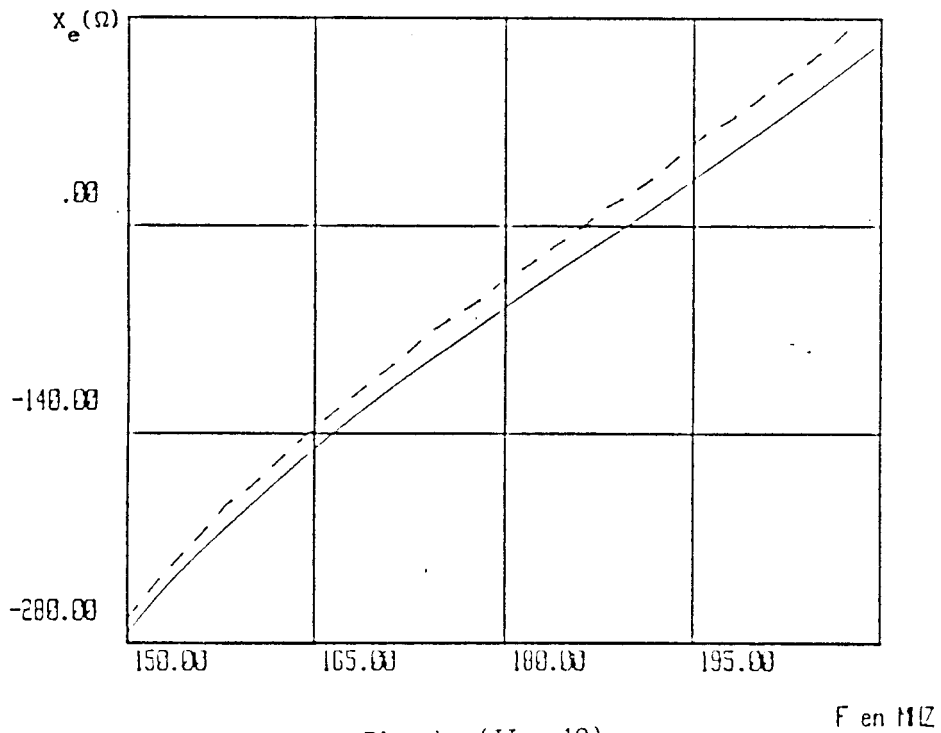


Planche (II - 10)

CONCLUSION

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à établir un code de calcul permettant de donner la répartition du courant et l'impédance d'entrée d'une structure filiforme mince isolée dans l'espace. Nous avons résolu l'équation intégrale par la méthode des moments et nous avons comparé deux méthodes de résolution : la méthode de "point-segment" et celle des triangles linéaires.

Nous avons remarqué que le choix de cette dernière évite le calcul de la dérivée seconde des fonctions de Green et procure une convergence rapide, une continuité du courant sur les points anguleux et des gains appréciables en temps de calcul.

Nous avons préféré inverser la matrice des impédances généralisées au lieu de résoudre le système de N équations afin de pouvoir appliquer avec la même matrice inversée, différentes matrices d'excitation.

La théorie des antennes a tout d'abord été appliquée à une structure horizontale au-dessus d'un sol parfaitement conducteur avec des fils de descente verticaux. La théorie des images nous a permis de construire la structure équivalente dans un milieu homogène et nous avons montré l'accord entre la théorie des lignes et celle des antennes .

L'étude paramétrique qui a été effectuée montre les difficultés de prédiction de l'amplitude des résonances dans le cas d'une structure fortement dissymétrique et court - circuitée à ses extrémités. Une antenne J a ensuite été étudiée et, malgré un découpage pouvant ne pas être suffisamment fin, l'accord entre la méthode de Galerkin et point-segment laisse supposer que l'allure de la distribution du courant est correcte.

Enfin une ligne bifilaire en circuit ouvert nous a permis de valider nos résultats pour une antenne en forme de J .

CHAPITRE III

MODELISATION THEORIQUE D'UNE ANTENNE CYLINDRIQUE

CENTREE DANS UN FORAGE

CHAPITRE III : MODELISATION THEORIQUE D'UNE ANTENNE CYLINDRIQUE CENTREE

DANS UN FORAGE

INTRODUCTION (p.74)

III.1 - RAYONNEMENT D'UN DIPOLE ELECTRIQUE VERTICAL (p.76)

III.1.1 - Détermination du potentiel de Hertz (p.77)

III.1.2 - Potentiel de Hertz dans les différents milieux (p.82)

III.1.3 - Conditions aux limites - Expressions du potentiel de Hertz et du champ électromagnétique (p.85)

III.2 - ANTENNE MINCE CENTREE DANS UN MILIEU STRATIFIE (p.91)

III.2.1 - Calcul de la matrice impédance (p.91)

a) *formulation de l'équation intégrale*

III.2.2 - Résolution de l'équation intégrale par la méthode des moments (p.93)

III.3 - EXEMPLES NUMERIQUES (p.96)

III.3.1 - Distribution du courant sur l'antenne (p.97)

III.3.1.a - Antenne située dans un milieu homogène et infini

III.3.1.b - Antenne située dans un trou sec

III.3.1.c - Antenne située dans un milieu à 3 couches

III.3.2 - Variation de l'impédance d'entrée - Adaptation de
l'antenne (p.104)

III.3.2.1 - Cas d'un trou "sec"

III.3.2.2 - Cas d'un milieu à 3 couches

a) *Influence du rayon du forage*

b) *Influence du rayon de l'isolant autour de l'antenne*

III.3.3 - Influence de la présence du forage sur le champ rayonné
(p.124)

III.3.3.1 - Cas d'un trou "sec"

III.3.3.2 - Cas d'un milieu à 3 couches

CONCLUSION (p.135)

INTRODUCTION

Nous nous intéressons dans ce chapitre au rayonnement d'un dipole électrique vertical de longueur infinitésimale dl , puis d'une antenne mince cylindrique située dans un forage .

Nous présentons dans un premier temps ,le formalisme de base servant à déterminer le potentiel de Hertz dans un milieu stratifié radialement à 3 couches. Un milieu à 2 couches est simplement obtenu à partir de ce modèle en introduisant dans les formules, des paramètres électriques identiques pour deux couches successives. Nous nous limitons dans ce chapitre au cas d'un dipole centré, c'est à dire dont l'axe coïncide avec l'axe de symétrie de révolution du forage.

Dans un second paragraphe, nous établirons le champ rayonné par une antenne cylindrique centrée, afin de déterminer l'équation intégrale de l'antenne, donc sa matrice de couplage généralisée.

La dernière partie sera consacrée à l'influence de la présence du forage sur les "performances" de rayonnement de l'antenne d'émission. En effet comme nous l'avons signalé dans le premier chapitre, la présence de l'interface forage - sol se manifeste de deux façons :

- Modification de l'impédance d'entrée de l'antenne en fonction de la nature du milieu encaissant (ce qui provoque une variation de la distribution du courant, donc du champ rayonné)

- Perturbation du champ lointain

Dans les exemples numériques qui seront envisagés, le milieu comportant l'axe du forage sera l'air, le milieu encaissant extérieur sera le sol, la couche intermédiaire simulant une présence d'eau. Dans le cas d'un trou sec, une modélisation à 2 couches supposera, comme précédemment, que l'axe du forage se situe dans l'air, le milieu extérieur étant le sol.

Dans pratiquement tous les cas $\mu_i = \mu_0$ et $\sigma_0 = 0$, mais nous ne tiendrons compte de ces valeurs particulières que dans les formules finales afin d'obtenir des résultats plus généraux.

III.1 - RAYONNEMENT D'UN DIPOLE ELECTRIQUE VERTICAL

Considérons un milieu stratifié à 2 ou 3 couches et affectons à chacun de ces milieux une permittivité ϵ_i , une conductivité σ_i , et une perméabilité μ_i .

Chaque milieu est supposé isotrope et homogène que nous appellerons respectivement milieu (0), milieu (1), milieu (2). Nous supposons l'existence d'une unique source de rayonnement électromagnétique qui est un dipole placé dans le milieu (0). Il a une longueur dl , un rayon r_a , et est parcouru par un courant $I = I_0 e^{j\omega t}$.

Les point d'observation et d'émission M et M' sont repérés par leur coordonnées cylindriques (figure III-1)

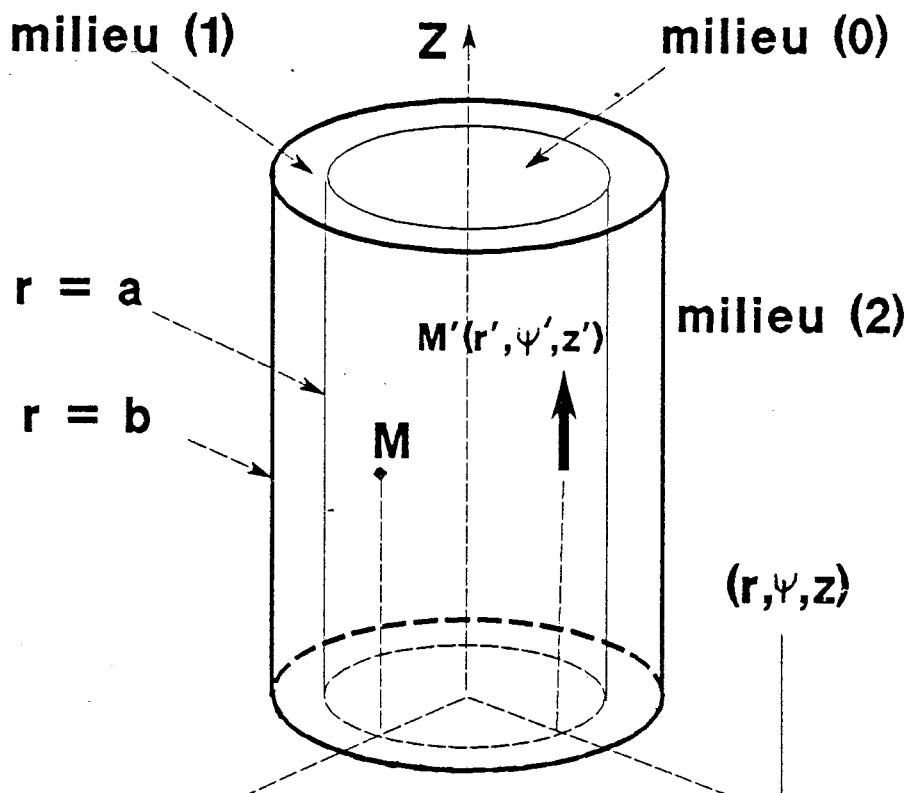


FIGURE III - 1

Le premier cylindre séparant le milieu (0) du milieu (1) a pour rayon (a), et le deuxième séparant le milieu (1) du milieu (2) a pour rayon (b).

Nous supposons dans tout ce qui suit que les cylindres sont de dimensions longitudinales infinies. Le problème traité correspond donc à un milieu stratifié radialement

III.1.1 - Détermination du potentiel de Hertz

Nous allons nous attacher à déterminer les composantes du potentiel de Hertz dans les différents milieux pour un dipole électrique vertical.

Ce potentiel de Hertz doit satisfaire l'équation d'onde :

$$\left[\Delta - \gamma_i^2 \right] \vec{\Pi} = - \frac{\vec{p}}{\epsilon} \delta(R) \quad (\text{III.1})$$

$\gamma_i^2 = - \omega^2 \mu_i \epsilon_i + j \omega \mu_i \sigma_i$: constante de propagation intrinsèque du milieu considéré

ω , Δ , $\delta(R)$, P et j sont exprimés en (II.1)

Les composantes du potentiel de Hertz pourront donc être formées par des combinaisons linéaires des solutions de l'équation sans second membre:

$$\left[\Delta - \gamma_i^2 \right] \vec{\Pi} = 0 \quad (\text{III.2})$$

auxquelles sera ajoutée une solution particulière de l'équation avec second membre .

En coordonnées cylindriques l'équation d'onde (III.2) sans second membre s'écrit:

$$\left[\frac{\delta^2}{\delta r^2} + \frac{1}{r} \frac{\delta}{\delta r} + \frac{1}{r^2} \frac{\delta^2}{\delta \psi^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2} - \gamma_i^2 \right] \Pi = 0 \quad (\text{III.3})$$

Compte tenu de la symétrie de révolution, le potentiel de Hertz Π n'admet qu'une seule composante Π_z , que nous noterons par la suite simplement Π .

On obtient sa forme générale par la méthode de séparation des variables [17], ce qui revient à supposer que Π est le produit d'une fonction de r , par une fonction de ψ et par une fonction de z , c'est-à-dire:

$$\Pi = F(r) \cdot G(\psi) \cdot H(z) \quad (\text{III.4})$$

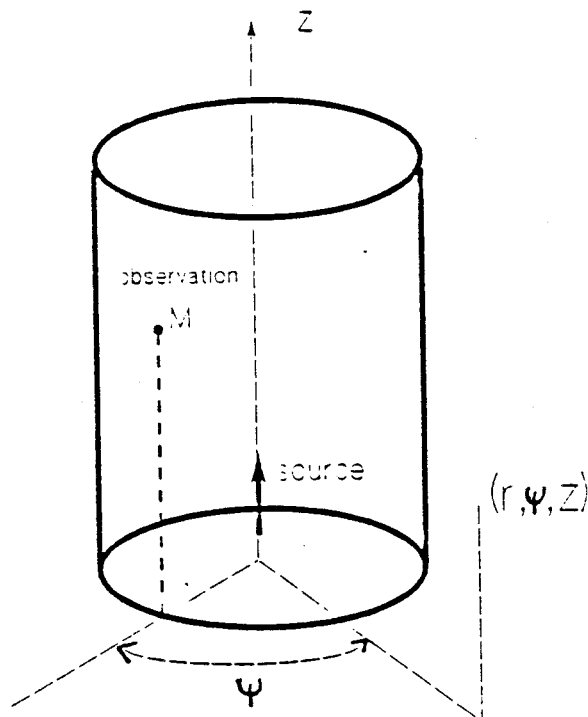


Figure (III - 1) Système de coordonnées définissant localement un dipole

En portant (III.4) dans (III.3) , en effectuant les différentiations indiquées et en divisant par Π on obtient

$$\left(\frac{1}{F} \frac{\delta^2 F}{\delta r^2} + \frac{1}{r.F} \cdot \frac{\delta F}{\delta r} + \frac{1}{r^2 G} \frac{\delta^2 G}{\delta \psi^2} + \frac{1}{H} \frac{\delta^2 H}{\delta Z^2} - \gamma_1^2 \right) = 0 \quad (III.5)$$

posons:

$$\frac{1}{H} \frac{\delta^2 H}{\delta Z^2} = - \lambda^2 \quad (III.6)$$

et

$$\frac{1}{G} \cdot \frac{\delta^2 G}{\delta \psi^2} = - n^2 \quad (III.7)$$

En remplaçant (III.6) et (III.7) dans (III.5) et en multipliant par r^2 et $f(r)$ on obtient:

$$r^2 \frac{\delta^2 F}{\delta r^2} + r \frac{\delta F}{\delta r} - \left[n^2 + (\lambda^2 + \gamma_1^2) \cdot r^2 \right] \cdot F = 0 \quad (III.8)$$

La solution générale de l'équation (III.6) est :

$$H (z) = h_0 e^{-j \lambda z} + h_1 e^{j \lambda z} \quad (III.9)$$

de même pour l'équation (III.7) on obtient :

$$G(\psi) = g_0 e^{-j n \psi} + g_1 e^{j n \psi} \quad (\text{III.10})$$

h_0, h_1, g_0, g_1 sont des constantes d'intégration arbitraires.

$G(\psi)$ doit prendre la même valeur si on change ψ en $\psi + 2\pi$. Il faut donc que n soit un entier.

Introduisons le changement de variable suivant

$$\begin{aligned} X &= U_1 r \\ \text{avec } U_1^2 &= \lambda^2 + \gamma_1^2 \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

l'équation (III.8) peut s'écrire avec ces nouvelles variables :

$$X^2 \frac{\delta^2 F}{\delta X^2} + X \frac{\delta F}{\delta X} - (n^2 + X^2) F = 0 \quad (\text{III.12})$$

(III.12) est une équation différentielle de Bessel dont la solution générale est :

$$F(X) = f_0 K_n(r U_1) + f_1 I_n(r U_1) \quad (\text{III.13})$$

f_0 et f_1 sont deux constantes arbitraires.

$I_n(r U_1)$ est la fonction de Bessel modifiée de 1^{ère} espèce.

$K_n(r U_1)$ est la fonction de Bessel modifiée de 2^{ème} espèce.

Si l'on veut que le potentiel de Hertz Π possède une symétrie de révolution cylindrique, c'est-à-dire, soit indépendant de ψ , il faut choisir ($n = 0$) dans l'équation (III.7).

En tenant compte de (III.4) la solution générale de l'équation d'onde possédant une symétrie de révolution ,peut s'exprimer par:

$$\Pi (r.z) = \left[f_0 K_0 (r.U_i) + f_1 I_0 (r.U_i) \right] \cdot \left[h_0 e^{-j \lambda z} + h_1 e^{j \lambda z} \right] \quad (III.14)$$

$$\text{avec : } U_i = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_i^2} \quad (III.15)$$

Le potentiel de Hertz pourra se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire de solutions ayant la forme donnée par l'équation (III.14).En ordonnant une telle combinaison par rapport aux valeurs de λ on obtient:

$$\Pi (r.z) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[f_0 K_0 (r.U_i) + f_1 I_0 (r.U_i) \right] \cdot \left[h_0 e^{-j \lambda z} + h_1 e^{j \lambda z} \right] \quad (III.16)$$

On remarque que l'équation (III.16) peut se réduire à:

$$\Pi (r.z) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} h_2 e^{-j \lambda z} \cdot \left[f_0 K_0 (r.U_i) + f_1 I_0 (r.U_i) \right] \quad (III.17)$$

Compte tenu de la parité des fonction de Bessel par rapport à la valeur de λ .

h_2 est une nouvelle constante arbitraire telle que:

$$h_2 = h_0 + h_1$$

Si le nombre de termes devient très grand, la combinaison linéaire (III.17) se transforme en une intégrale :

$$\Pi (r,z) = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[A_0 K_0 (r.U_1) + A_1 I_0 (r.U_1) \right] e^{-j\lambda z} . d\lambda \quad (III.18)$$

A_0 et A_1 sont dans cette intégrale deux fonctions arbitraires de la valeur λ :

$$A_0 = h_2 f_0$$

$$A_1 = h_2 f_1$$

III.1.2 - Potentiel de Hertz dans les différents milieux

Les potentiels de Hertz Π_0 , Π_1 et Π_2 possèdent une seule composante Π_{0z} , Π_{1z} et Π_{2z} dans chacun des milieux 0, 1 et 2.

Le dipole d'émission étant situé dans le milieu (0), il produit un rayonnement primaire qui est par définition celui qui serait émis dans un milieu homogène et infini.

Un récepteur situé dans le milieu(0) recevra d'une part ce rayonnement primaire et d'autre part un rayonnement secondaire provenant de la partie du rayonnement primaire qui s'est réfléchi sur la surface du milieu (1).

Un récepteur situé dans le milieu encaissant recevra seulement un rayonnement secondaire.

Les potentiels de Hertz secondaire Π_{0s} , Π_{1s} , Π_{2s} traduisant la réflexion ou la réfraction sur les différents interfaces, peuvent être représentés par des intégrales du type (III.18). Cependant le potentiel Π_{2s} doit s'annuler à l'infini et la constante A_1 doit être nulle. De même dans le milieu (0), la distance r entre le point de réception et

l'axe des z peut tendre vers zéro . Il faut donc que la constante A_0 soit nulle pour éviter une divergence du potentiel.

Les potentiels de Hertz seront donc donnés par les formules suivantes:

potentiel dans le milieu (0) :

$$\begin{aligned} \Pi_{os} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{o1} \cdot I_0 (r U_0) \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \\ \Pi_o &= \Pi_{op} + \Pi_{os} = \Pi_{op} + \int_{-\infty}^{+\infty} f_{o1} \cdot I_0 (r U_0) \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

potentiel dans le milieu (1) :

$$\Pi_1 = \Pi_{1s} = \int_{\lambda} \left[g_{11} K_0 (r \cdot U_1) + f_{11} I_0 (r \cdot U_1) \right] e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (\text{III.20})$$

Potentiel dans le milieu (2) :

$$\Pi_2 = \Pi_{2s} = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{o2} \cdot K_0 (r U_2) \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (\text{III.21})$$

Le potentiel primaire Π_{op} , étant une solution particulière de l'équation d'onde avec second membre (III.1). Il est donné par la fonction de Green (I.2) soit :

$$\Pi_{op} = \frac{I \cdot dl}{4\pi(\sigma_0 + j \omega \epsilon_0)} \cdot \frac{e^{-\gamma_0 R}}{R} \quad (\text{III.23})$$

En utilisant la représentation intégrale de $K_0(rU_0)$ on obtient:

$$\Pi_{op} = \frac{I \cdot dl}{4\pi^2(\sigma_0 + j \omega \epsilon_0)} \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} K_0(r \cdot U_0) \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (\text{III.24})$$

Dans la suite de l'étude, on sera amené à étudier le rayonnement de chaque élément d'une antenne sur un autre élément.

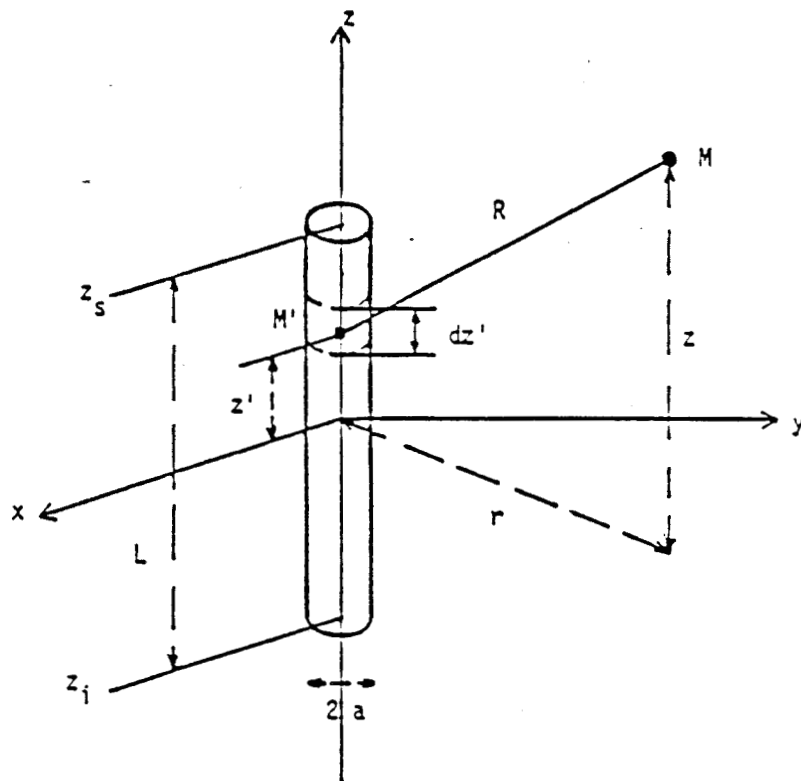


Figure (III - 2)

La distance z de la formule (III.24) qui représente la distance verticale entre la source et le point de réception sera donc notée de façon plus générale \hat{z} , avec $\hat{z} = z - z'$

III.1.3 Conditions aux limites -

Expressions du potentiel de Hertz et du champ électromagnétique

Le champ électromagnétique rayonné est solution des équations de Maxwell. En introduisant le potentiel de Hertz Π_i les champs électrique E_i et magnétique H_i sont déduits de :

$$\vec{E}_i = \text{rot} \text{ rot } \vec{\Pi}_i \quad (III.24)$$

$$\vec{H}_i = (\sigma_i + j \omega \epsilon_i) \text{ rot } \vec{\Pi}_i$$

avec $i = 0, 1, 2$ caractérisant le milieu de propagation

Le développement des calculs nous mène aux composantes suivantes:

$$E_{i,r}(M) = \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \Pi_i$$

$$E_{i,z}(M) = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_i^2 \right] \Pi_i \quad (III.25)$$

$$H_{i,\psi}(M) = (\sigma_i + j \omega \epsilon_i) \frac{\partial \Pi_i}{\partial r}$$

les expressions de Π_i sont données dans le paragraphe précédent en (III.19), (III.20), (III.21) et (III.23).

a - conditions aux limites pour les composantes du champ

La condition d'égalité des composantes tangentielles du champ de part et d'autre des interfaces de séparation milieu(0) - milieu(1) et milieu(1) - milieu(2), se traduit donc par les conditions :

$$\left[\begin{array}{l} E_{0,z}(M) = E_{1,z}(M) \\ H_{0,\psi}(M) = H_{1,\psi}(M) \end{array} \right]_{r=a} \quad (\text{III.26.a})$$

$$\left[\begin{array}{l} E_{1,z}(M) = E_{2,z}(M) \\ H_{1,\psi}(M) = H_{2,\psi}(M) \end{array} \right]_{r=b} \quad (\text{III.26.b})$$

qui sont valables pour toutes valeurs de z.

En appliquant les conditions (III.26.a) et (III.26.b) aux composantes du champ exprimées en fonction Π_i , les expressions du paragraphe précédent mènent à:

$$U_0^2 \left[A_0 K_0(aU_0) + f_{01} I_0(aU_0) \right] = U_1^2 \left[g_{11} K_0(aU_1) + f_{11} I_0(aU_1) \right]$$

$$U_1^2 \left[g_{11} K_0(bU_1) + f_{11} I_0(bU_1) \right] = U_2^2 g_{02} K_0(bU_2)$$

$$U_0 (\sigma_0 + j \omega \varepsilon_0) \left[A_0 K'_0(aU_0) + f_{01} I'_0(aU_0) \right] = U_1 (\sigma_1 + j \omega \varepsilon_1) \dots \left[g_{11} K'_0(aU_1) + f_{11} I'_0(aU_1) \right]$$

$$U_1 (\sigma_1 + j \omega \varepsilon_1) \left[G_{11} K'_0(bU_1) + f_{11} I'_0(bU_1) \right] = U_2 (\sigma_2 + j \omega \varepsilon_2) G_{02}$$

Le système (III.32) est un système de 4 équations à 4 inconnues, puisque la constante d'intégration du champ primaire A_0 est connue.

La résolution de ce système ainsi que le calcul détaillé des expressions du champ sont donnés en Annexe 2. On trouve en particulier les expressions des constantes d'intégration secondaire, f_{01} , f_{11} , g_{11} et g_{02} :

$$f_{01} = - A_0 \frac{\alpha_0 \delta_0 K_0(c_0) [K_1(c_1) + T_m I_1(c_1)] - K_1(c_0) [K_0(c_1) - T_m I_0(c_1)]}{\alpha_0 \delta_0 I_0(c_0) [K_1(c_1) + T_m I_1(c_1)] + I_1(c_0) [K_0(c_1) - T_m I_0(c_1)]}$$

$$= - A_0 F(\lambda)$$

$$g_{11} = A_0 \alpha_0^2 \frac{K_0(c_0) - F(\lambda) I_0(c_0)}{K_0(c_1) - T_m I_0(c_1)} = A_0 \cdot g(\lambda) \quad (\text{III.28})$$

$$f_{11} = - T_m \cdot g_{11}$$

$$g_{02} = \frac{1}{\alpha_1^2} \cdot \frac{K_0(bU_2) - T_m I_0(bU_1)}{K_0(bU_2)} \cdot g_{11}$$

avec:

$$T_m = - \frac{\alpha_1 \delta_1 K_0(bU_2) K_1(bU_1) - K_0(bU_1) K_1(bU_2)}{\alpha_1 \delta_1 K_0(bU_2) I_1(bU_1) + I_0(bU_1) K_1(bU_2)}$$

$$c_0 = a \cdot U_0 \quad ; \quad c_1 = a \cdot U_1$$

$$\alpha_0 = \frac{U_0}{U_1} \quad ; \quad \alpha_1 = \frac{U_2}{U_1} \quad (III.29)$$

$$\delta_0 = \frac{(\sigma_1 + j \omega \varepsilon_1)}{(\sigma_0 + j \omega \varepsilon_0)} \quad ; \quad \delta_1 = \frac{(\sigma_1 + j \omega \varepsilon_1)}{(\sigma_2 + j \omega \varepsilon_2)}$$

$$A_0 = \frac{I \cdot dl}{4\pi^2 (\sigma_0 + j \omega \varepsilon_0)}$$

Les potentiels de Hertz seront donc donnés par les expressions :

$$\Pi_0 = A_0 \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} [K_0(r \cdot U_0) - F(\lambda) I_0(rU_0)] e^{-j\lambda \hat{z}} \cdot d\lambda$$

$$\Pi_1 = A_0 \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} [K_0(r \cdot U_1) - T_m I_0(rU_1)] g(\lambda) e^{-j\lambda \hat{z}} \cdot d\lambda \quad (III.30)$$

$$\Pi_2 = A_0 \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{K_0(bU_1) - T_m I_0(bU_1)}{K_0(bU_2)} g(\lambda) \cdot K_0(rU_2) \cdot e^{-j\lambda \hat{z}} \cdot d\lambda$$

b - Cas particulier d'un milieu stratifié à deux couches

La solution pour un milieu stratifié à 2 couches est obtenue à partir des expressions précédentes en égalant les caractéristiques électriques des milieux 1 et 2 .

On obtient donc $U_1 = U_2$ et $\alpha_1 = \delta_1 = 1$.

par ailleurs on peut vérifier facilement que : $T_m = 0$.

La constante d'intégration du potentiel secondaire dans le milieu(0) s'écrit:

$$F(\lambda) = \frac{\alpha_0 \delta_0 K_0(aU_0) K_1(aU_1) - K_1(aU_0) K_0(aU_1)}{\alpha_0 \delta_0 I_0(aU_0) K_1(aU_1) + I_1(aU_0) K_0(aU_1)} \quad (\text{III.31})$$

En remplaçant (III.31) dans l'expression (III.27) de $g(\lambda)$, on aboutit à l'expression suivante:

$$g(\lambda) = \alpha_0^2 \frac{K_0(aU_0) I_1(aU_0) - K_1(aU_0) I_0(aU_0)}{\alpha_0 \delta_0 I_0(aU_0) K_1(aU_1) + I_1(aU_0) K_0(aU_1)} \quad (\text{III.32})$$

D'après la relation de wronskian :

$$K_0(\bar{z}) I_0'(\bar{z}) - K_0'(\bar{z}) I_0(\bar{z}) = \frac{1}{\bar{z}} \quad (\text{III.37})$$

avec : \bar{z} : nombre complexe

La constante d'intégration se met sous la forme :

$$g(\lambda) = \frac{\alpha_o^2}{a U_o} \cdot \frac{1}{\alpha_o \delta_o I_o(aU_o) K_1(aU_1) + I_1(aU_o) K_o(aU_1)} \quad (\text{III.34})$$

Les potentiels de Hertz dans les différents milieux s'écrivent:

$$\Pi_o = \int_{-\infty}^{+\infty} A_o \left[K_o(r, U_o) - F(\lambda) I_o(r, U_o) \right] e^{-j\lambda \hat{z}} \cdot d\lambda \quad (\text{III.35})$$

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} A_o \cdot K_o(r, U_2) \cdot g(\lambda) \cdot e^{-j\lambda \hat{z}} \cdot d\lambda$$

c - Expressions du champ rayonné suivant l'axe OZ

On rappelle les expression du champ E_z pour un dipole électrique vertical centré, calculées en annexe 2

milieu (0) :

$$E_{oz}(M) = -2 \cdot \int_0^{+\infty} A_o \left[K_o(r, U_o) - F(\lambda) I_o(r, U_o) \right] \cdot U_o^2 \cdot \cos(\lambda \hat{z}) \cdot d\lambda \quad (\text{III.39})$$

milieu (1) :

$$E_{1z}(M) = -2 \int_0^{+\infty} A_0 \left[K_0(r U_1) - T_m(\lambda) I_0(r U_1) \right] \cdot U_1^2 \cdot g(\lambda) \cos(\lambda \hat{z}) \cdot d\lambda \quad (\text{III.37})$$

milieu (2) :

$$E_{2,z}(M) = -2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} A_0 \frac{K_0(b U_1) - T_m I_0(b U_1)}{K_0(b U_2)} \cdot U_2^2 \cdot g(\lambda) \cdot \cos(\lambda \hat{z}) \cdot d\lambda \quad (\text{III.38})$$

Les constantes d'intégration $g(\lambda)$, $f(\lambda)$ et T_m sont données en Annexe 3. Si le milieu stratifié est à 2 couches, on prendra dans ce cas les expressions calculées en (III.35) et (III.36).

III.2 - ANTENNE MINCE CENTREE DANS UN MILIEU STRATIFIE

Dans le deuxième chapitre nous avons explicité l'ensemble des hypothèses et méthodes que nous utilisons pour la modélisation d'une antenne filaire mince. Ces différentes hypothèses et méthodes sont de caractère très général et sont applicables quelque soit la constitution du milieu de propagation.

III.2.1 - Calcul de la matrice impédance

a - Formulation de l'équation intégrale

L'antenne se trouve dans le milieu(0) de caractéristiques électriques σ_0 , μ_0 , ϵ_0 . Rappelons que l'antenne, placée sur l'axe oz est un fil métallique de conductivité infinie.

Nous avons vu que tout se passe comme si le courant était confiné sur l'axe principal.

Pour une antenne située dans le milieu(0), on obtient en écrivant la condition $E_z^i + E_z^r = 0$ sur la surface de l'antenne :

$$E_z^i = - \frac{1}{2\Pi^2(\sigma_o + j\omega \epsilon_o)} \int_{z_i}^{z_s} \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o^2 \left[K_o(rU_o) - F(\lambda) I_o(rU_o) \right] \cdot \cos(\lambda \hat{z}) \dots i(z') \cdot dz' \quad (\text{III.39})$$

où $i(z')$ est le courant sur l'antenne d'émission à l'abscisse z' .

Ce champ total peut se décomposer en la somme d'un champ primaire et d'un champ secondaire.

avec : $E_{z,p}^i$: le champ primaire sur l'antenne, comme si elle était située dans un milieu homogène et infini

$$E_{z,p}^i = \frac{-1}{2\Pi^2(\sigma_o + j\omega \epsilon_o)} \int_{z_i}^{z_s} \left[\int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o^2 K_o(rU_o) \cos(\lambda \hat{z}) \cdot d\lambda \right] i(z') dz \quad (\text{III.40})$$

$E_{z,s}^i$: le champ secondaire sur l'antenne plongée dans le milieu(0).

$$E_{z,s}^i = \frac{-1}{2\Pi^2(\sigma_o + j\omega \epsilon_o)} \int_{z_i}^{z_s} \left[\int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o^2 F(\lambda) I_o(rU_o) \cos(\lambda \hat{z}) d\lambda \right] i(z') dz' \quad (\text{III.41})$$

III.2.2 - Résolution de l'équation intégrale par la méthode des moments

La résolution de l'équation intégrale en milieu stratifié se fait de manière similaire à celle effectuée dans le cas d'un milieu infini. Les fonctions base et test sont des fonctions triangulaires linéaires définies en (II.28).

Le champ primaire incident sur l'antenne donné par (III.40) est identique à celui calculé en (II.15) pour une structure droite. Il est donné par :

$$E_{z,p}^i = \frac{-1}{2\pi^2(\sigma_o + j\omega \epsilon_o)} \int_{z_i}^{z_s} \left[\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_o^2 \right] G(z, z') \right] \cdot i(z') \cdot dz' \quad (III.42)$$

Après le découpage en éléments Δ , le courant est remplacé dans l'équation (III.39) par son développement:

$$i(z') = \sum_{n=1}^N i_n b_n(z') \quad (III.43)$$

On obtient donc:

$$E_z^i = \frac{-1}{2\pi^2(\sigma_o + j\omega \epsilon_o)} \sum_{n=1}^N i_n \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} \left[\int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o^2 \left[K_o(rU_o) - F(\lambda) I_o(rU_o) \right] \dots \cos(\lambda \hat{z}) \cdot d\lambda \right] \cdot b_n(z') \cdot dz' \quad (III.44)$$

Soit, en projetant sur les fonctions test:

$$\langle E_z^i, t_m(z) \rangle = \frac{-1}{2\pi^2(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0)} \sum_{n=1}^N i_n \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} \left[\int_{\lambda=0}^{+\infty} U_0^2 \left[K_0(rU_0) - \dots f(\lambda) I_0(rU_0) \right] \cos(\lambda z) \cdot t_m(z) \cdot dz \right] \cdot b_n(z') dz' \cdot d\lambda \quad (\text{III.45})$$

Le système matriciel équivalent est:

$$[v] = [z] \cdot [I]$$

avec:

$$[z] = [z]^p + [z]^s \quad (\text{III.46})$$

La matrice de "couplage primaire" est donnée en (II.45), on rappelle son expression

$$Z_{mn}^p = j\omega\mu \sum_{p,q} \frac{\overset{\rightarrow}{\Delta l}_{q,n}}{\Delta l_{q,n}} \frac{\overset{\rightarrow}{\Delta l}_{p,m}}{\Delta l_{p,m}} T(p,m) \Psi_1(m_p, n_q) + \frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_{p,q} TP(p,m) TP(q,n) \Psi(m_p, n_q) \quad (\text{III.47})$$

tandis que la matrice de "couplage secondaire" prend la forme suivante:

$$Z_{mn}^s = \frac{1}{2\Pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \int_{\lambda=0}^{+\infty} \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} \left[\int_{z_m-\Delta}^{z_m+\Delta} U_o^2 \cdot f(\lambda) \cdot I_o(rU_o) \cdot \cos(\lambda z) \cdot t_m(z) \dots dz \right] \cdot b_n(z') \cdot dz' \cdot d\lambda \quad (\text{III.48})$$

Les calculs developpés en annexe 2 montrent que l'intégrale triple se réduit en une intégrale simple. ces calculs mènent à:

$$Z_{mn}^s = \frac{\Delta^2}{2\Pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o^2 \cdot f(\lambda) \cdot I_o(rU_o) \cdot \cos[\lambda(z_m - z_n)] \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{\lambda\Delta}{2}\right)}{\left(\frac{\lambda\Delta}{2}\right)} \right]^4 \cdot d\lambda \quad (\text{III.49})$$

REMARQUES

La matrice [Z] peut se décomposer sous la somme de deux matrices :

- [Z]^P: matrice source correspondant au cas du milieu homogène et infini, elle est donc du type Toeplitz et la connaissance d'une seule ligne suffit pour la construire entièrement.
- [Z]^S: matrice secondaire dont les éléments sont des intégrales des fonctions de Bessel .

Dans ce dernier cas, deux éléments Z_{mn} et $Z_{m'n'}$, sont égaux lorsque:

$$m - n = m' - n'$$

La matrice secondaire est aussi du type Toeplitz .Le calcul de N éléments suffit pour remplir toute cette matrice.

III.3 - EXEMPLES NUMERIQUES

Nous disposons donc d'un modèle mathématique permettant de calculer le rayonnement d'un dipole électrique vertical dans un milieu stratifié radialement. Cela va nous permettre de déterminer l'influence du trou de forage sur le rayonnement "lointain" de l'antenne, et d'étudier les modifications d'impédance d'entrée en fonction de divers paramètres électriques et géométriques telque : la conductivité du milieu encaissant, diamètre du forage,...

Les configurations géométriques qui seront décrites sont :

- milieu à deux couches (trou sec)

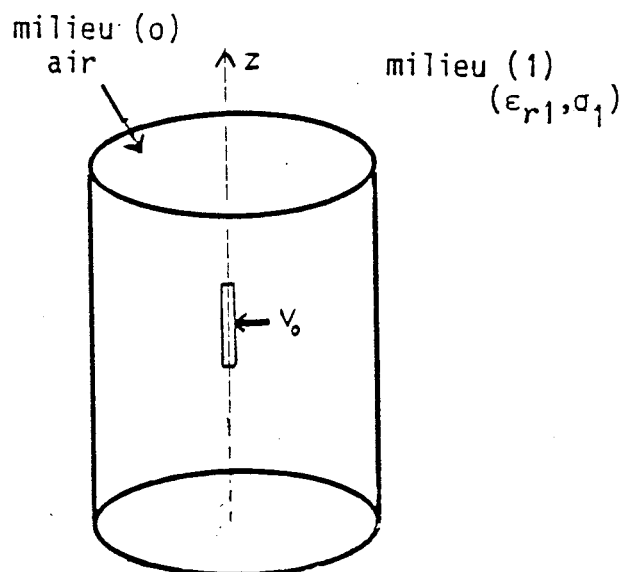


Figure (III - 3)

- milieu à trois couches (trou rempli d'eau)

Afin d'assurer un rayonnement important de l'antenne, nous supposerons dans cette configuration, que l'antenne est placée dans un tube isolant. En négligeant en première approximation, l'influence de la permittivité électrique de ce dernier, le schéma équivalent représente la géométrie étudiée.

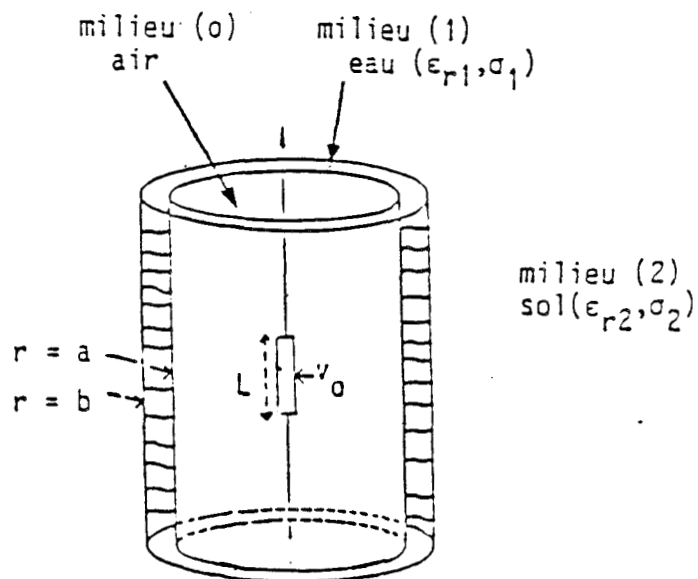


Figure (III - 4)

Sauf indication contraire, la fréquence d'émission est de 200.MHz, l'antenne d'émission est une antenne filaire dont la longueur est "voisine" de celle correspondant à la résonance en $\lambda/2$, car on supposera souvent que la longueur de cette antenne est fixée (les conditions de résonance vont dépendre de l'environnement).

III.3.1 - DISTRIBUTION DU COURANT SUR L'ANTENNE

Dans ce paragraphe, nous supposerons que la permittivité relative du sol est $\epsilon_r = 5$.

III.3.1.a - Antenne située dans un milieu homogène et infini

On choisit à priori une longueur d'antenne correspondant à une demi-longueur d'onde dans un milieu parfaitement diélectrique et de permittivité ϵ_r . La longueur L est donc donnée par:

$$L = \frac{C}{2\pi f \sqrt{\epsilon_r}} \quad (\text{III.50})$$

où C est la vitesse de la lumière et f la fréquence, pour une fréquence de 200.MHz, on obtient $L = 33.5$ cm.

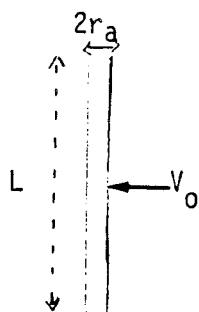
De plus le rayon r_a de l'antenne est de $0.003L$, soit 1.mm, ce rayon d'antenne aura toujours cette valeur dans les différents exemples donnés dans ce chapitre. L'antenne est excitée en son centre par un générateur délivrant une différence de potentiel normalisée à 1 Volt.

La planche (III-1) représente le module de la distribution du courant sur une antenne qui serait **complètement immergée** dans un milieu homogène. Trois conductivités du sol ont été envisagées : $\sigma = 10^{-1}$ S/m, 10^{-2} S/m et 10^{-3} S/m. On remarque que pour les faibles valeurs de conductivité (10^{-2} et 10^{-3} S/m), l'allure des courbes reste pratiquement sinusoïdale. Par contre lorsque $\sigma = 10^{-1}$ S/m, la distribution devient triangulaire. Ceci est caractéristique d'un milieu très conducteur pour lequel il ne sera pas possible d'obtenir une résonance en demi-onde de l'antenne. Ce cas correspond à l'inégalité ($\sigma > \omega\epsilon$) puisque, compte tenu des valeurs introduites dans le modèle, $\omega\epsilon = 4.10^{-2}$. L'écart en amplitude entre les courbes $\sigma = 10^{-2}$ S/m et $\sigma = 10^{-3}$ S/m s'explique par la variation de l'impédance d'entrée de l'antenne ($Z_e = 70 \Omega + j 16 \Omega$ pour $\sigma = 10^{-2}$ S/m et $Z_e = 41 \Omega + j 20 \Omega$ pour $\sigma = 10^{-3}$ S/m).

On voit donc qu'une telle antenne complètement "immergée" dans le milieu présente une grande sensibilité au milieu environnant, le courant, donc le champ émis variant presque dans un rapport 2 lorsque la conductivité du sol passe de 10^{-2} à 10^{-3} S / m.

Distribution du courant sur une antenne dans un milieu homogène

paramètre : conductivité



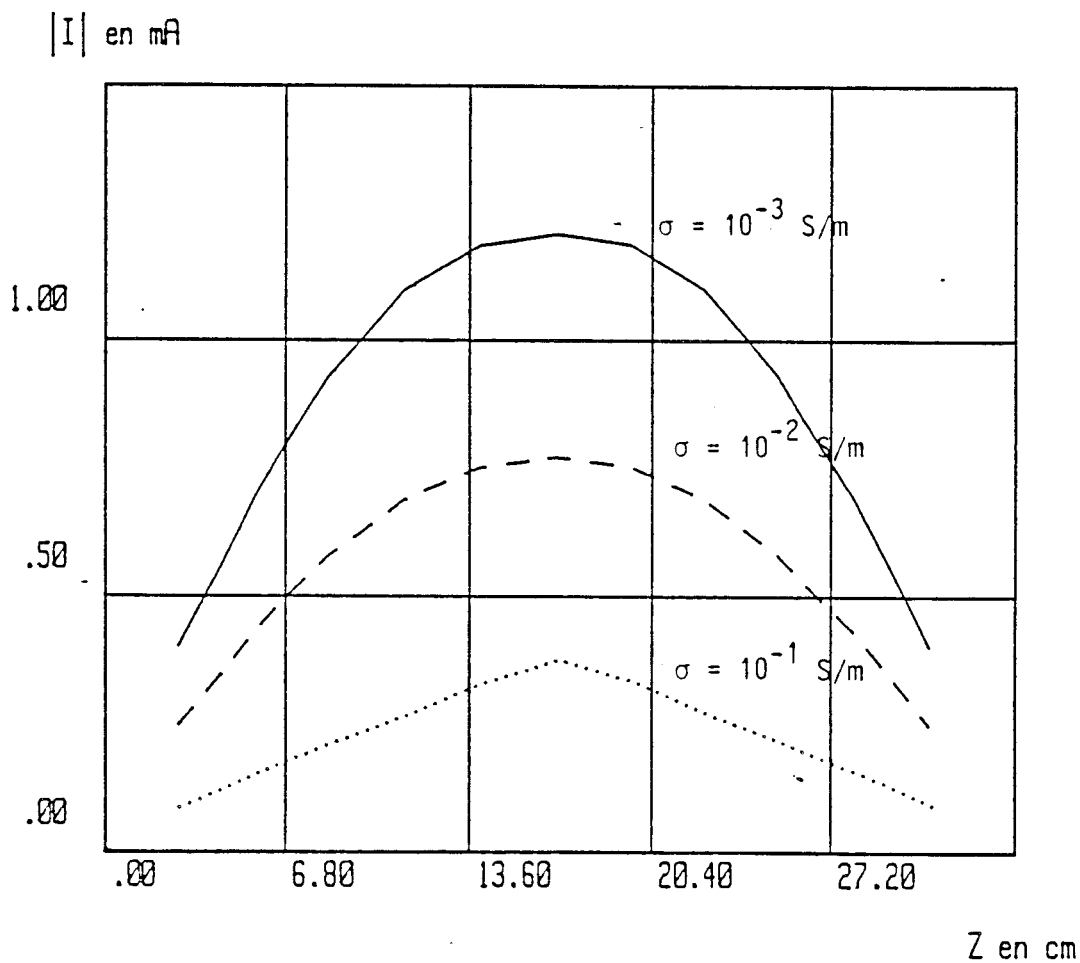
F = 200 MHz

So1

L = 33.5 cm

r_a = 1 mm

ε_r = 5



III.3.1.b - Antenne située dans un "trou sec"

La planche (III-2) représente de la même façon que précédemment la distribution du courant sur l'antenne mais lorsque celle-ci est descendue dans un "trou sec" de rayon $a = 5.5$ cm. Le milieu entourant immédiatement l'antenne étant l'air, la longueur de celle-ci a été choisie égale à une demi longueur d'onde dans l'air, considéré comme milieu homogène et infini, soit 75 cm compte tenu de la fréquence 200 MHz .

Les courbes de la planche (III-2) ont été tracées pour les mêmes valeurs de conductivité du sol que précédemment, soit 10^{-1} S/m, 10^{-2} S/m et 10^{-3} S/m. A titre de comparaison, la distribution de courant de l'antenne isolée dans l'air est également donnée. On remarque que lorsque σ passe de 10^{-1} S/m à 10^{-2} S/m le module du courant maximum ne varie que de 10 % . On note enfin qu'il n'y a plus de différence notable entre $\sigma = 10^{-2}$ S/m et 10^{-3} S/m.

Enfin, afin de mettre en évidence l'influence de la permittivité relative ϵ_r , on a envisagé sur la planche (III-3) des conductivités de 10^{-2} S/m et 10^{-3} S/m et des permittivités relatives valant soit 5, soit 10. On note que pour cette configuration d'antenne située dans un trou sec, et lorsque $(\omega\epsilon)_{\text{sol}} > \sigma_{\text{sol}}$ la distribution du courant dépend essentiellement de la permittivité du milieu encaissant.

III.3.1.c - Antenne située dans un milieu à 3 couches

L'antenne dont la longueur d'onde est égale à $(\lambda/2)_{\text{air}}$, soit 75 cm est placée dans un milieu constitué radialement d'air, d'eau et du sol. Cela est représenté sur la figure (III - 4). Le rayon a du "tube d'air" est 4.5 cm, le rayon extérieur du "tube d'eau" est de 5.5 cm, ce qui correspond donc à une épaisseur d'eau de 1 cm entre la paroi isolante et le sol.

Les paramètres électriques sont $\sigma = 2$ S/m et $\epsilon_r = 80$. Cette valeur élevée de conductivité permettra de mettre en évidence l'influence d'une fine couche fortement conductrice entre l'antenne et le sol. Cependant

Distribution du courant sur une antenne dans un milieu à 2 couches
air/sol

paramètre : conductivité du sol (σ_1)

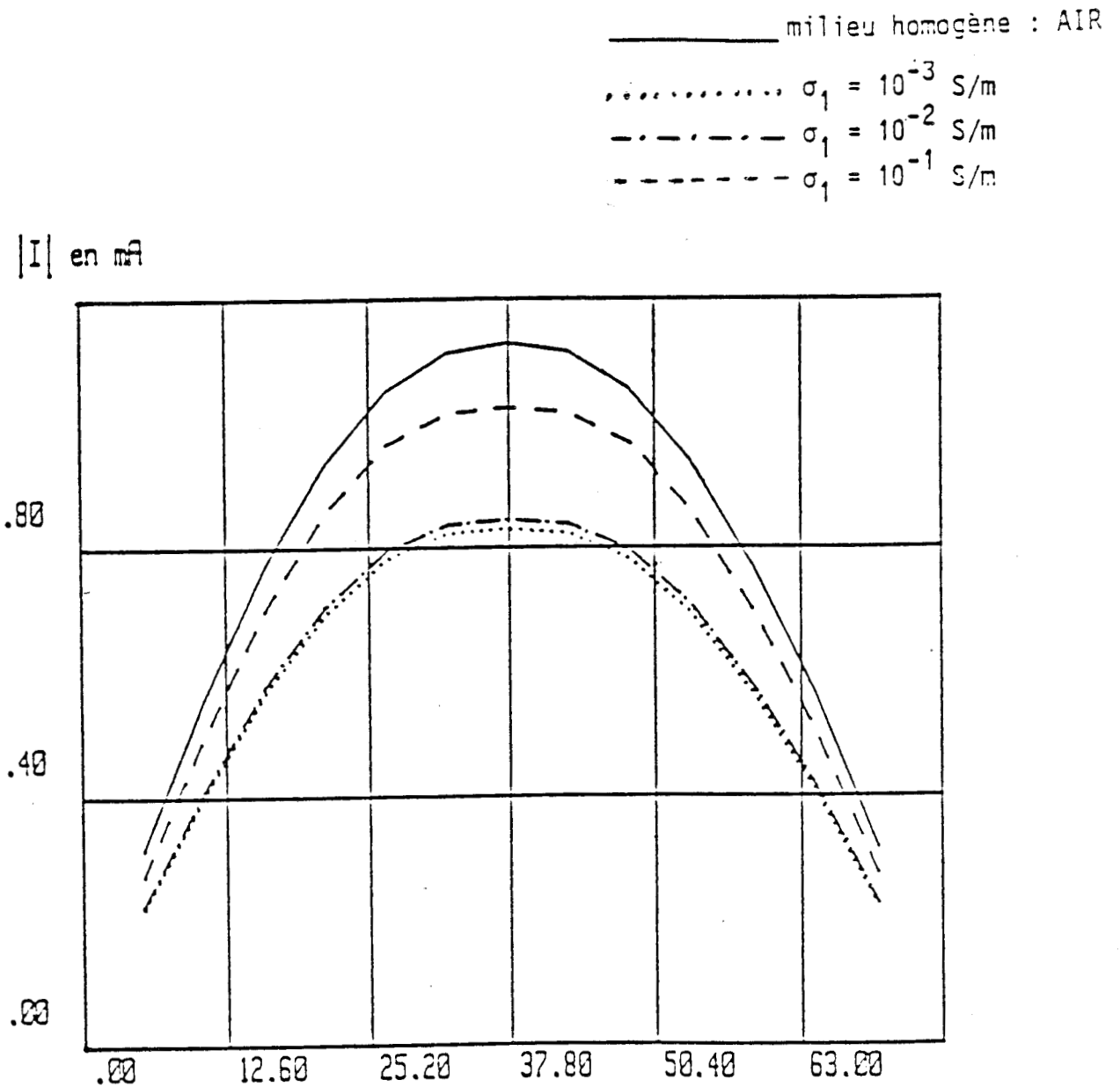
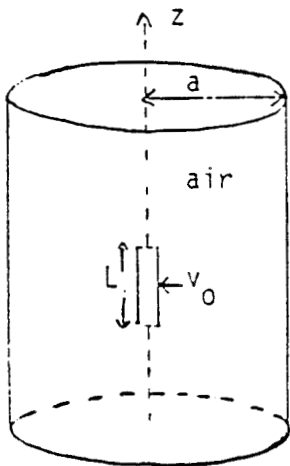


PLANCHE III - 2

Distribution en courant sur une antenne dans un milieu à 2 couches : air/sol



milieu (1) : sol

σ_1, ϵ_1

- $\epsilon_{r1} = 5$, $\sigma_1 = 10^{-3}$
- $\epsilon_{r1} = 5$ $\sigma_1 = 10^{-2}$
- - - - $\epsilon_{r1} = 10$ $\sigma_1 = 10^{-3}$
- - - - $\epsilon_{r1} = 10$ $\sigma_1 = 10^{-2}$

$|I|$ en mA

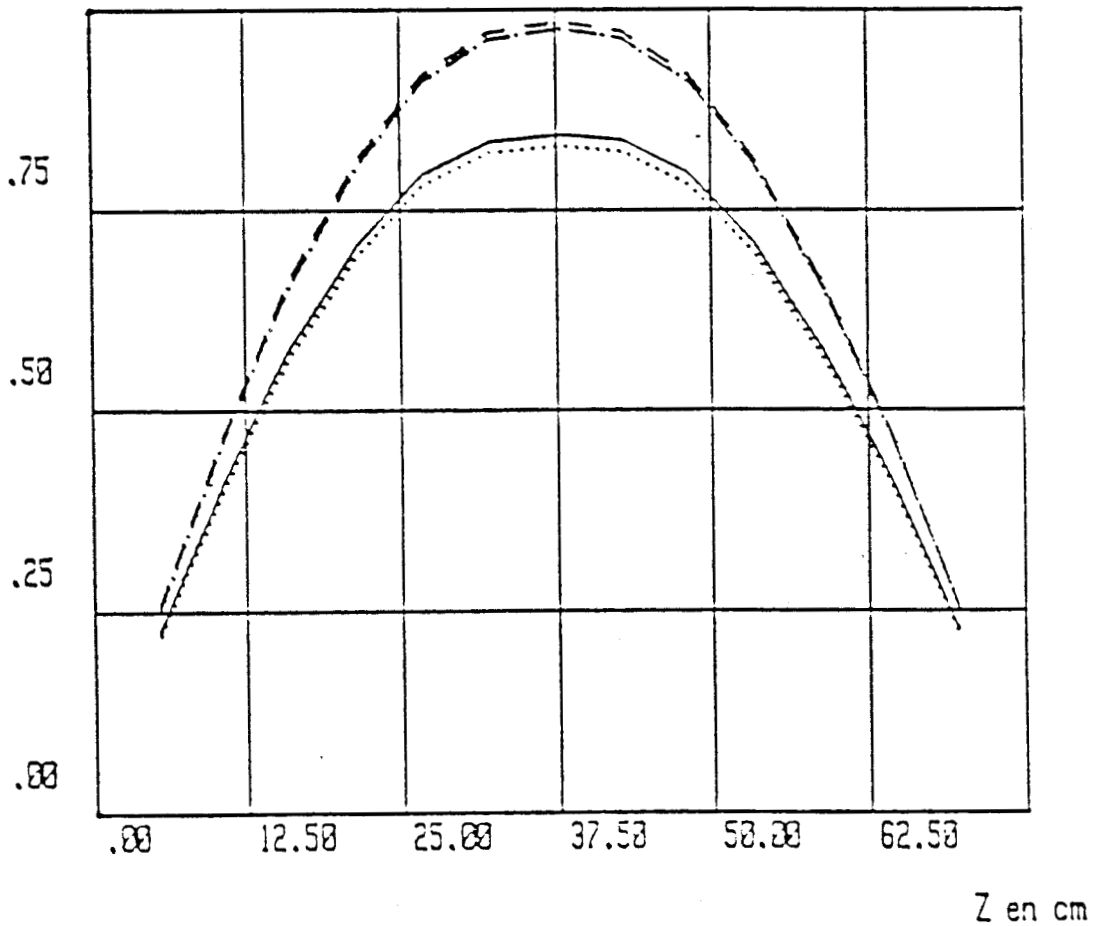
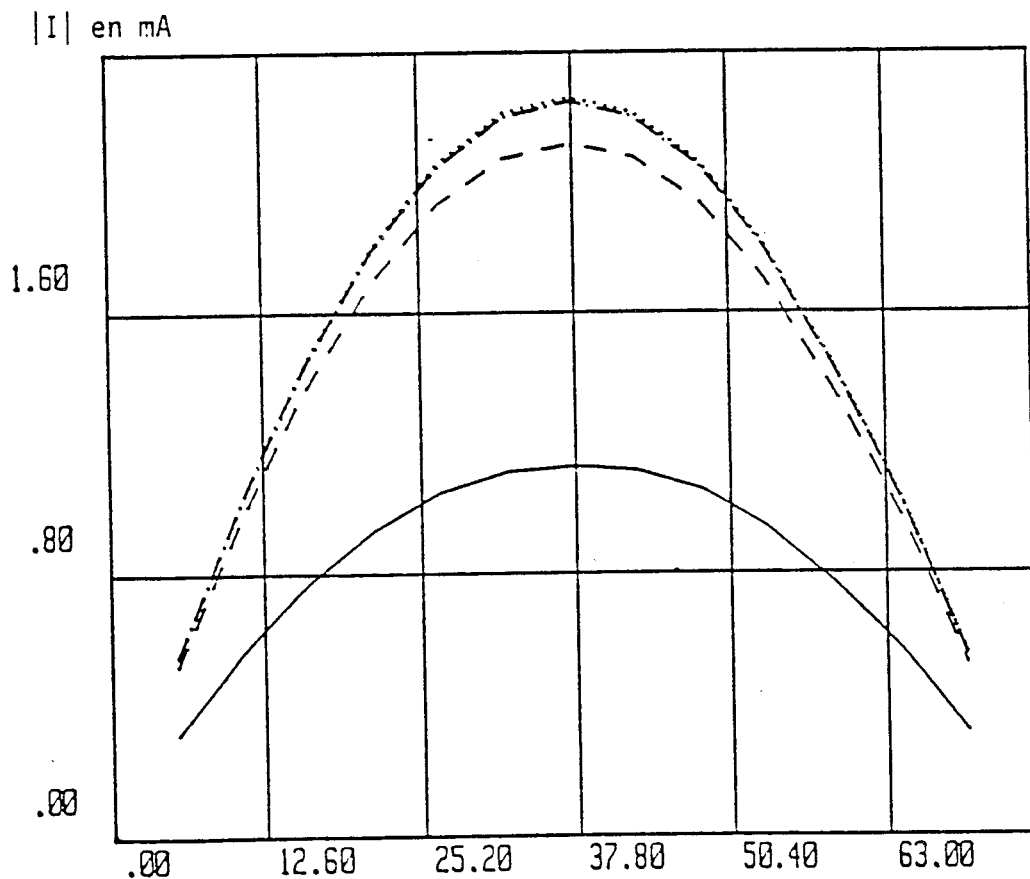
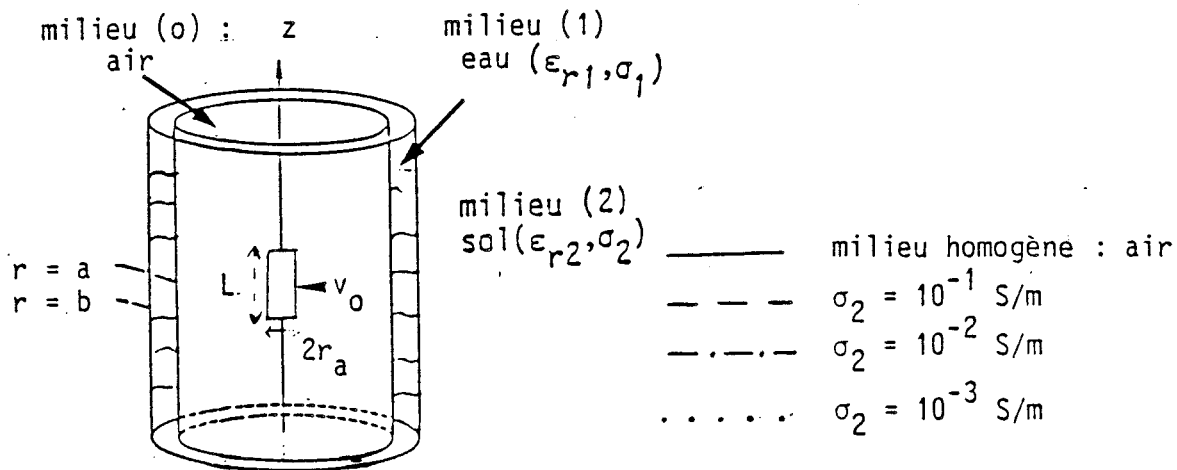


Planche III - 3

Distribution en courant sur une antenne dans un milieu à 3 couches

AIR / EAU / SOL

Paramètre : conductivité du milieu (2)



Z en cm

Planche III - 4

d'autres courbes seront également présentées pour une conductivité de l'eau dite "douce" $\sigma = 10^{-1}$ S/m. Les distributions du courant sont données sur la planche (III-4) pour les trois valeurs de la conductivité du sol.

On remarque évidemment une différence importante entre la courbe de "référence" (qui est celle de la distribution du courant sur une antenne placée uniquement dans l'air) et celles correspondant au milieu à 3 couches. Par contre la pellicule d'eau jouant, en quelque sorte le rôle de masque vis à vis du milieu extérieur, l'amplitude du courant est pratiquement indépendante de la conductivité du milieu encaissant. Ceci reste vrai également vis à vis de la permittivité comme on peut s'en rendre compte sur les courbes de la Planche (III-5) correspondant aux différents couples de valeur : $\sigma = 10^{-2}$ et $\sigma = 10^{-3}$ S/m et $\epsilon_r = 5$ ou 10.

Enfin les courbes des planches (III-6) et (III-7) reprennent les mêmes configurations que celles qui viennent d'être traitées mais pour une conductivité d'eau douce $\sigma_{\text{eau}} = 10^{-1}$ S/m. Malgré cette valeur plus faible de conductivité, on note encore la faible dépendance du courant par rapport aux caractéristiques du milieu encaissant.

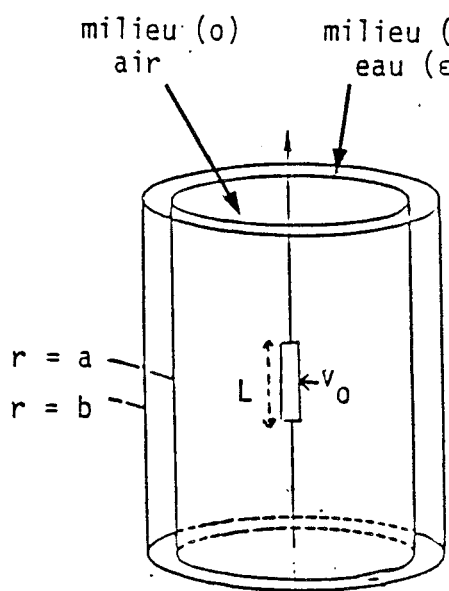
III.3.2 - VARIATION DE L'IMPEDANCE D'ENTREE - ADAPTATION DE L'ANTENNE

Une autre façon de mettre en évidence l'influence du sol est de déterminer les variations d'impédance d'entrée de l'antenne en fonction de la fréquence et pour diverses configurations.

III.3.2.1 - Cas d'un "trou sec"

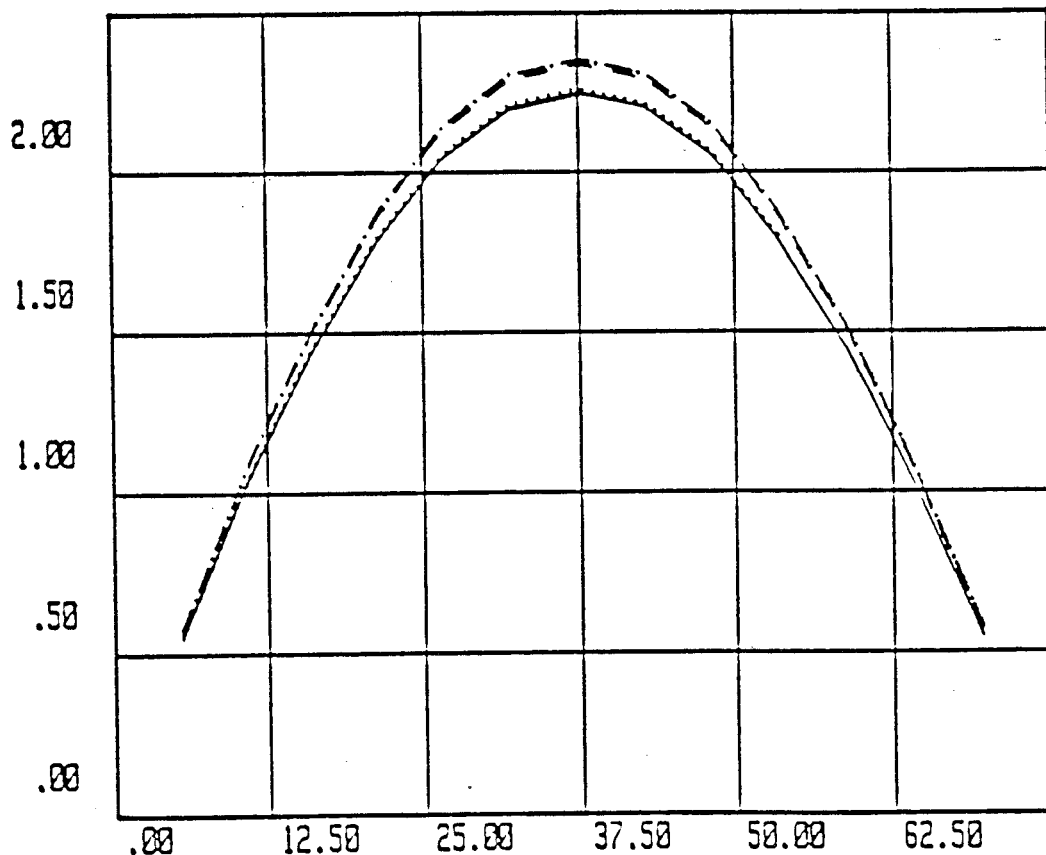
Le rayon a du trou reste fixé à 4.5 cm et la permittivité relative du sol ϵ_r est égale à 5. Les modifications de l'impédance d'entrée en fonction des caractéristiques du milieu encaissant peuvent s'expliquer par le fait que la distribution de courant sur une antenne dépend, comme nous l'avons vu dans le développement théorique, de l'interaction entre chacun des éléments de longueur infinitésimale la composant. Dans ce type de calcul, il est donc important de calculer tout d'abord le champ vertical E_z que rayonne un

Distribution du courant sur une antenne dans un milieu à 3 couches
air / eau / sol



- $\epsilon_{r2} = 5$, $\sigma_2 = 10^{-3}$ S/m
- $\epsilon_{r2} = 5$, $\sigma_2 = 10^{-2}$ S/m
- · - · - $\epsilon_{r2} = 10$, $\sigma_2 = 10^{-3}$ S/m
- $\epsilon_{r2} = 10$, $\sigma_2 = 10^{-2}$ S/m

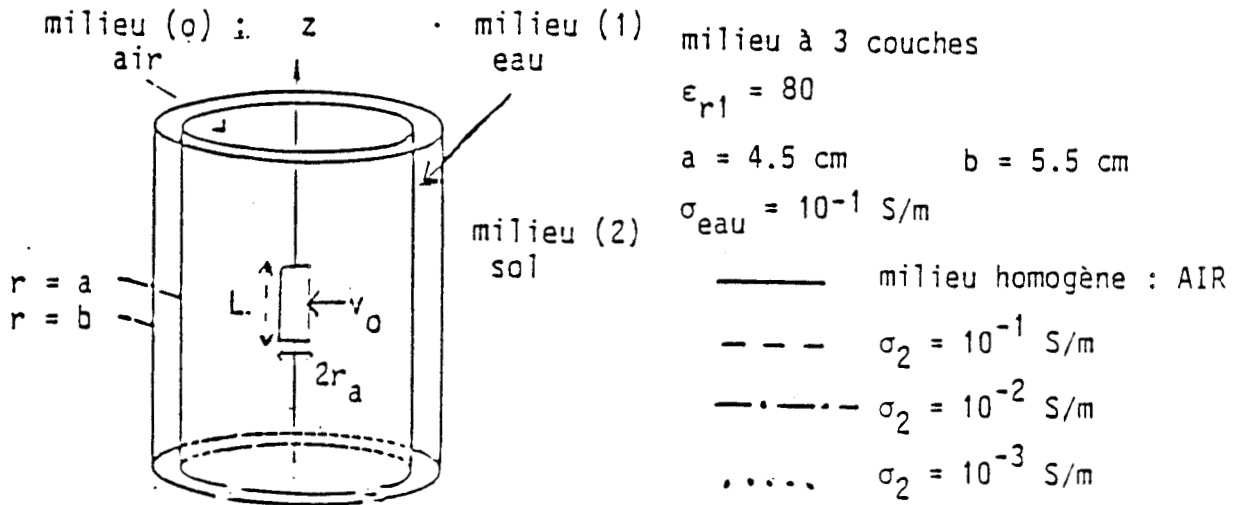
$|I|$ en mA



Distribution du courant sur une antenne dans un milieu à 3 couches

 air / eau douce / sol

 paramètre : conductivité du milieu (2)



|I| en mA

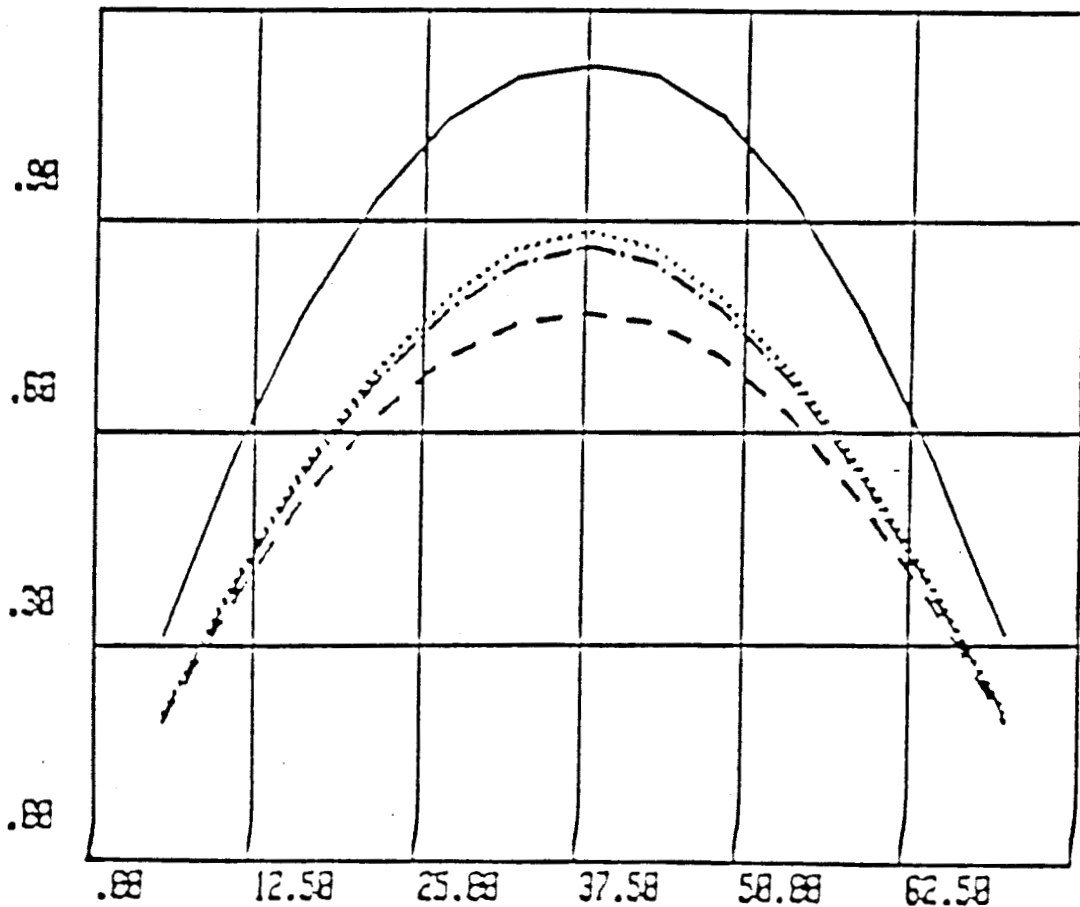
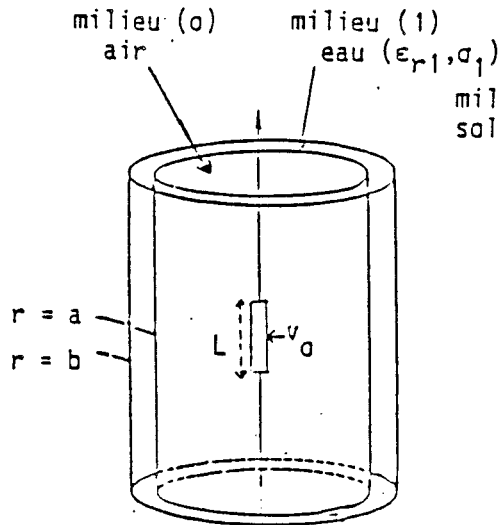


PLANCHE III - 6

Z en cm

Distribution du courant sur une antenne dans un milieu à 3 couches

 air / eau douce / sol



$\epsilon_{r1} = 80$ $\sigma_{\text{eau}} = 10^{-1} \text{ S/m}$

..... $\epsilon_{r2} = 5$, $\sigma_2 = 10^{-3} \text{ S/m}$

———— $\epsilon_{r2} = 5$, $\sigma_2 = 10^{-2} \text{ S/m}$

- - - - $\epsilon_{r2} = 10$, $\sigma_2 = 10^{-3} \text{ S/m}$

----- $\epsilon_{r2} = 10$, $\sigma_2 = 10^{-2} \text{ S/m}$

$|I|$ en mA

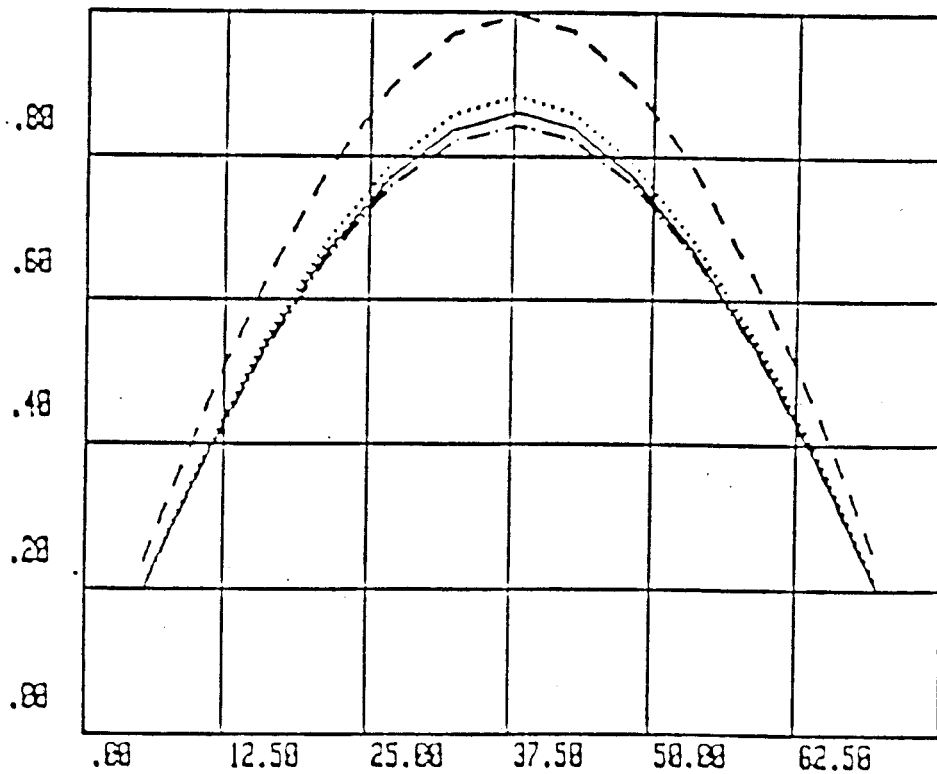


PLANCHE III - 7

Z en cm

élément sur un autre situé à une distance z .

La planche (III-8) représente ainsi la variation du module de E_z en fonction de la distance z suivant l'axe de forage.

Le calcul a été effectué d'une part en supposant le milieu homogène (le sol) et, d'autre part un milieu à 2 couches, le rayon "a" du forage étant soit de 1cm, soit de 3 cm. On remarque évidemment que l'écart par rapport au milieu homogène se fait sentir sur les distances z d'autant plus grandes que le rayon "a" est important. La planche (III-9) correspond au cas d'un rayon de 4.5 cm, les courbes qui seraient obtenues en milieu homogène (air ou sol) sont également données. Si la distance verticale entre le dipôle élémentaire d'émission et le point de réception sur l'axe est inférieure ou égale au rayon du trou, les courbes montrent que l'influence du sol est négligeable. Pour des distances comprises entre 5 et 20 cm, donc entre 1 et 4 fois le rayon, le champ s'écarte notablement de celui que l'on aurait en espace libre. Enfin pour des distances plus importantes, l'amplitude du champ devient voisine de celle associée à une propagation dans le sol uniquement.

Les planches (III-10) et (III-11) représentent les variations de l'impédance d'entrée de l'antenne excitée en son milieu en fonction de la fréquence. La longueur de l'antenne est de 75 cm, soit $\lambda/2$ dans l'air, le rayon "a" du trou de forage est toujours de 4.5 cm.

Afin de voir l'influence de la conductivité du milieu encaissant, les courbes de ces planches ont été tracées pour une conductivité de sol valant 10^{-1} S/m, 10^{-2} et 10^{-3} S/m, la permittivité relative ϵ_r étant constante, égale à 5. On remarque sur la planche (III-11) que, dans le cas d'une antenne centrée dans un trou sec de 4.5 cm de rayon, la fréquence d'accord est quasiment indépendante de la conductivité du sol. Par contre la partie réelle de l'impédance d'entrée est modifiée pour des conductivités importantes, de l'ordre de 10^{-1} S/m comme on le note sur la planche (III-10).

Variation de $|E_z|$ en fonction de la position verticale du récepteur

milieu à 2 couches (air/sol) paramètre : rayon du trou

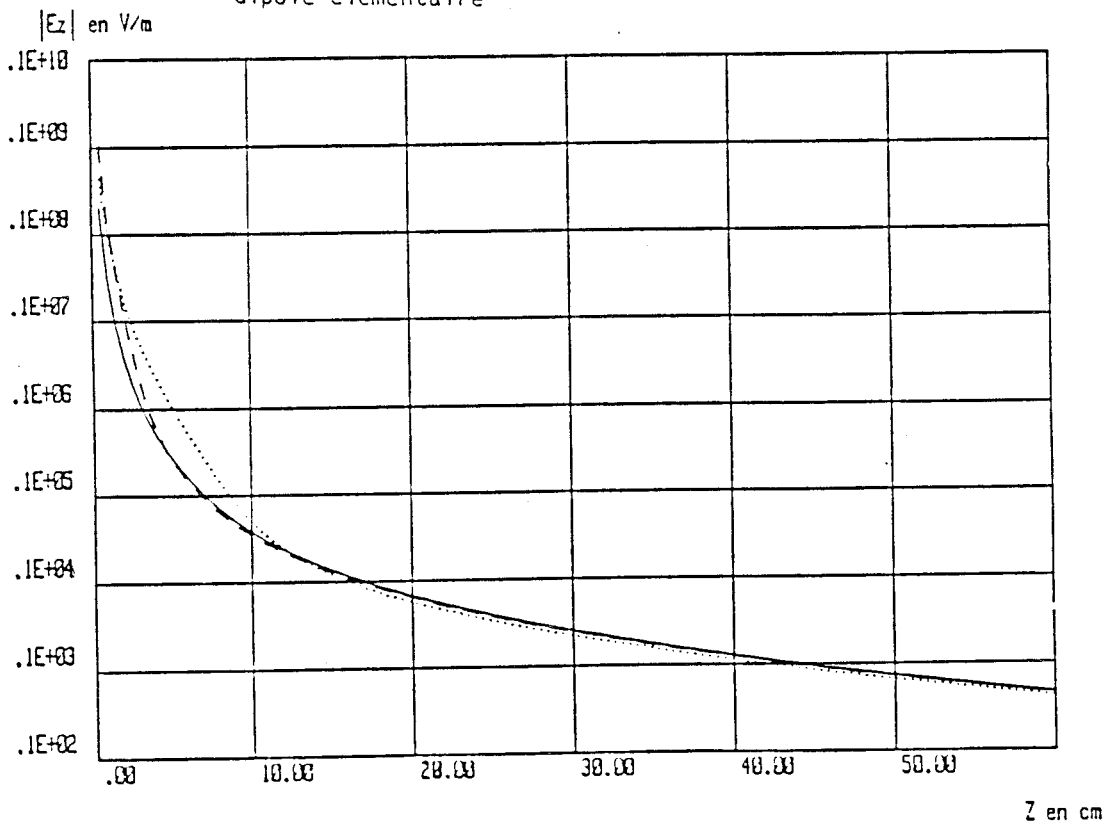
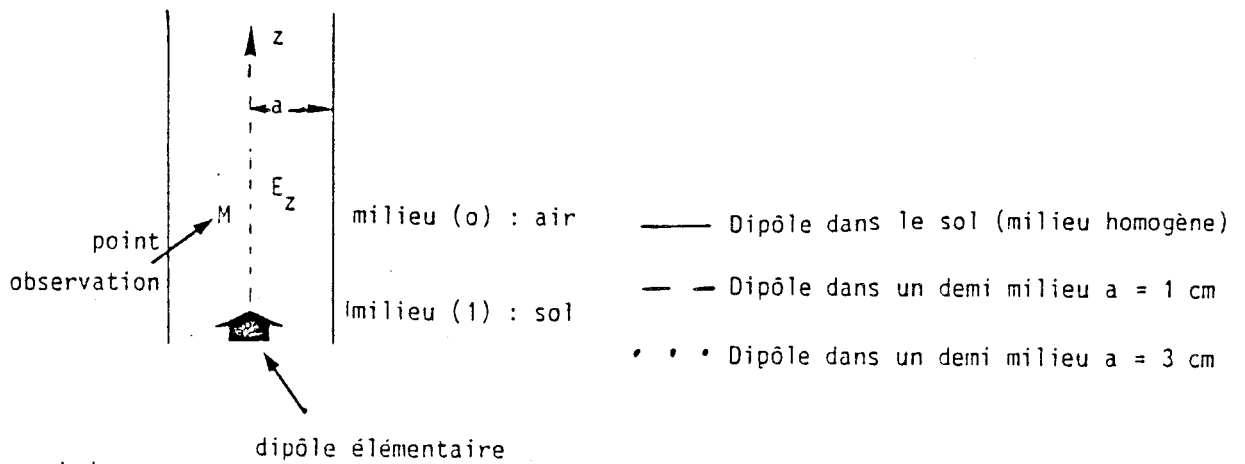
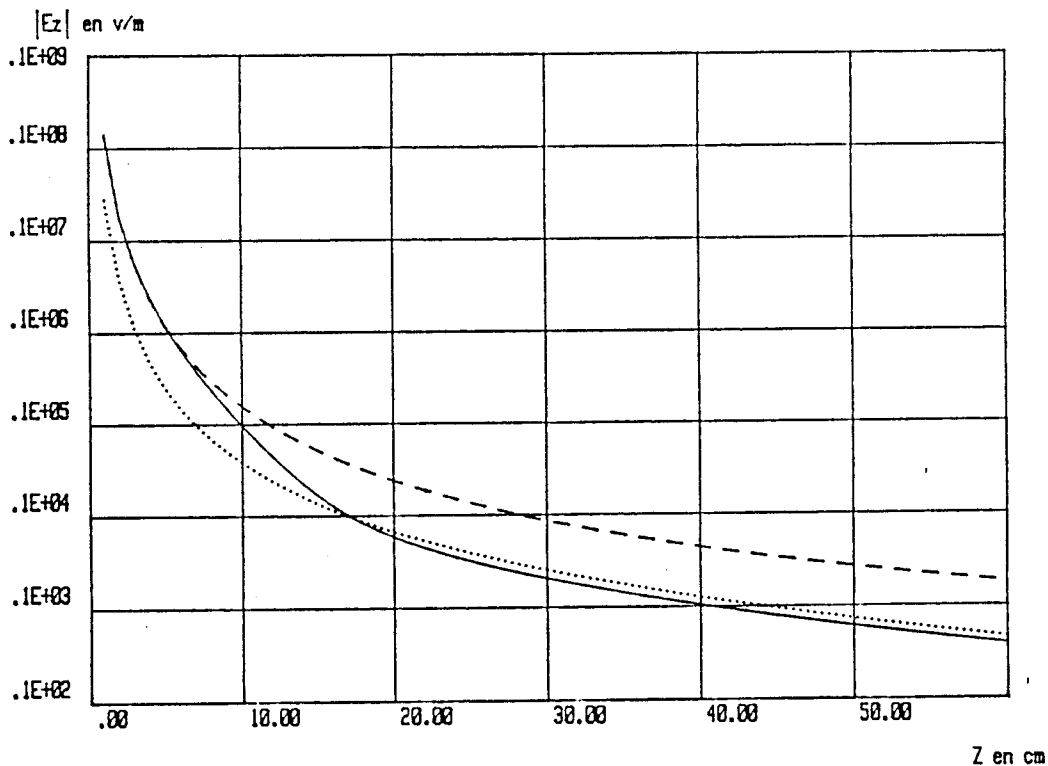
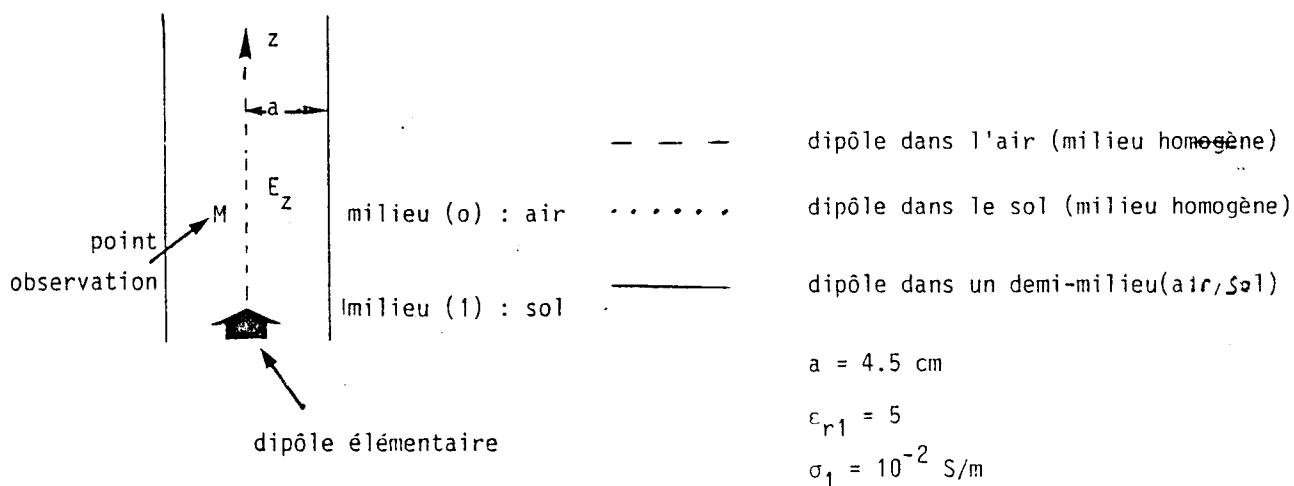


Planche III - 8

variation de $|E_z|$ en fonction de la position verticale du récepteur

comparaison : milieu homogène et demi- milieu



Variation fréquentielle de l'impédance d'entrée au milieu d'une antenne dans un milieu à 2 couches

paramètre : conductivité du milieu (1) (σ_1)

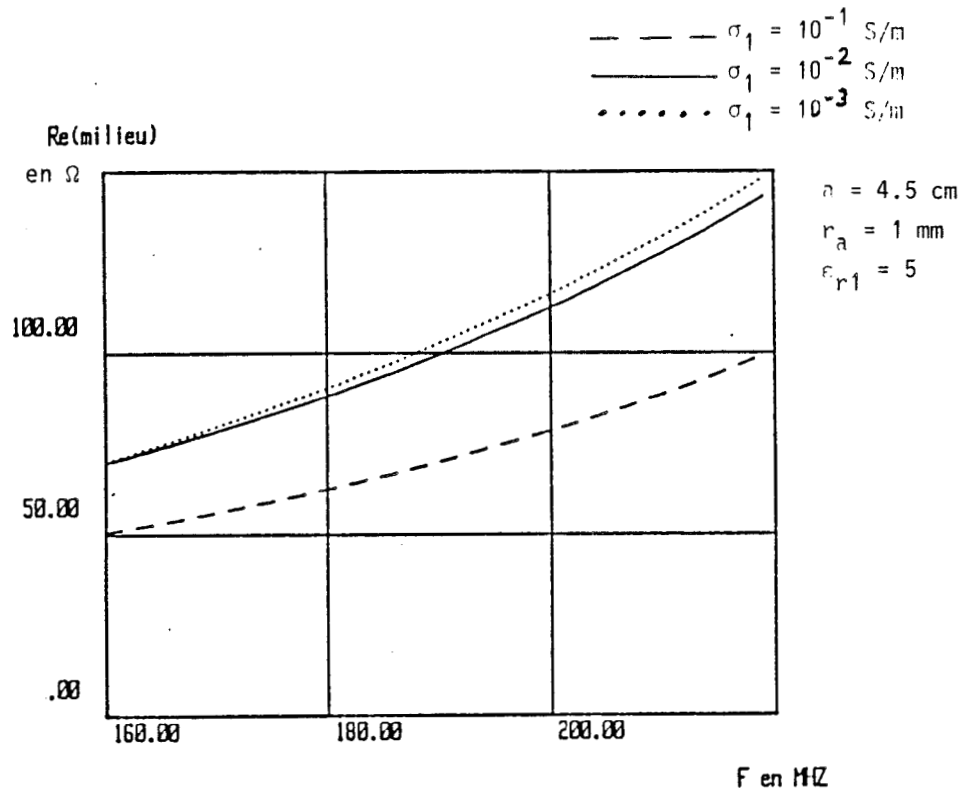


Planche III - 10

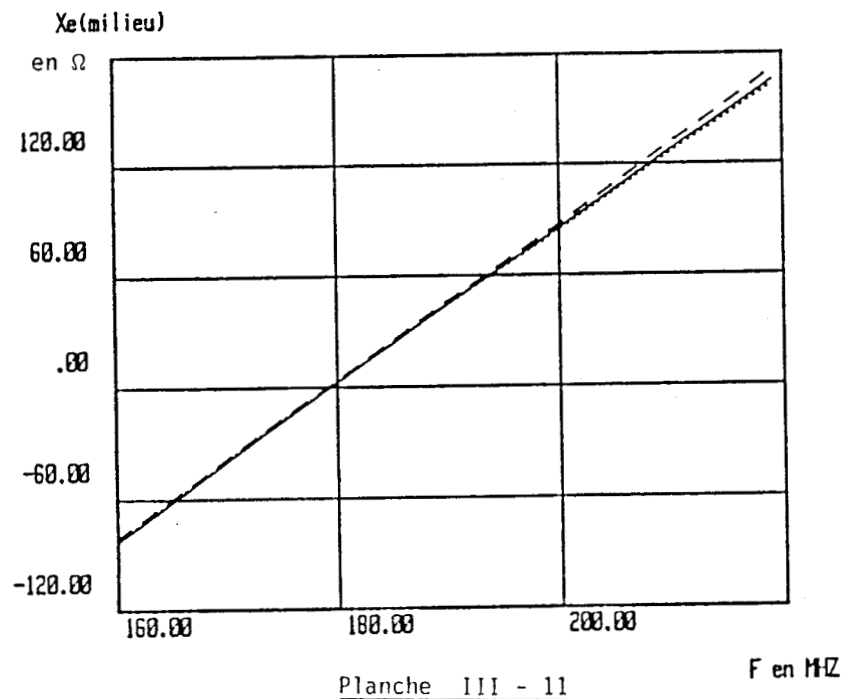


Planche III - 11

III.3.2.2 - Cas d'un milieu à trois couches

Nous avons vu précédemment que la conductivité du milieu extérieur ne modifie pas sensiblement la distribution du courant sur l'antenne, tout au moins pour une épaisseur d'eau de 1 cm ($\sigma_{\text{eau}} = 2 \text{ S/m}$). L'étude paramétrique présentée dans ce paragraphe est donc limitée à l'influence de l'épaisseur de la couche d'eau obtenue en considérant soit différents rayons de forage, soit différents rayons de l'isolant disposé autour de l'antenne.

a - Influence du rayon de forage

Le premier milieu, qui est l'air, et contenant l'antenne a un rayon constant $a = 4.5 \text{ cm}$. Le milieu extérieur se situant à une distance "b" de l'axe, est caractérisé par $\sigma_{\text{sol}} = 10^{-2} \text{ S/m}$ et $(\epsilon_r)_{\text{sol}} = 5$.

Avant de présenter les résultats concernant les impédances d'entrée, il est intéressant de comparer, comme dans le cas d'un milieu à deux couches, le champ vertical E_z reçu dans l'axe du forage à une distance z d'un dipole d'émission en fonction du rayon b . Sur la planche (III-12), les courbes, correspondant à un milieu à deux couches (sans eau) et un milieu à trois couches ($b = 5 \text{ cm}$ et $b = 5.5 \text{ cm}$) ont été représentées. On remarque une variation importante de E_z en fonction de l'épaisseur d'eau (comprise dans cet exemple entre 0 et 1 cm). On peut donc s'attendre à une grande sensibilité de l'impédance d'entrée. Cet effet est cependant moins marqué lorsque la conductivité de l'eau est 10^{-1} S/m , comme on le remarque sur la planche (III-13).

Les planches (III-14) et (III-15) représentent ainsi les variations de la partie réelle (R_e) et imaginaire (X_e) de l'impédance d'entrée en fonction de la fréquence lorsque b varie de 4.5 cm (Cas extrême d'épaisseur d'eau nulle, c'est-à-dire un milieu à 2 couches air-sol) à 6 cm. Sur la planche (III-14), nous avons également fait figurer la courbe correspondant à l'autre cas extrême $b \rightarrow \infty$ (milieu à deux couches air-eau). On remarque sur cette planche que la résistance d'entrée varie très rapidement lorsque le rayon extérieur passe de 4.5 cm à 6 cm, c'est-à-dire

Variation de $|E_z|$ en fonction de la position verticale du récepteur milieu à 3 couches (air-eau-sol) paramètre : rayon (b)

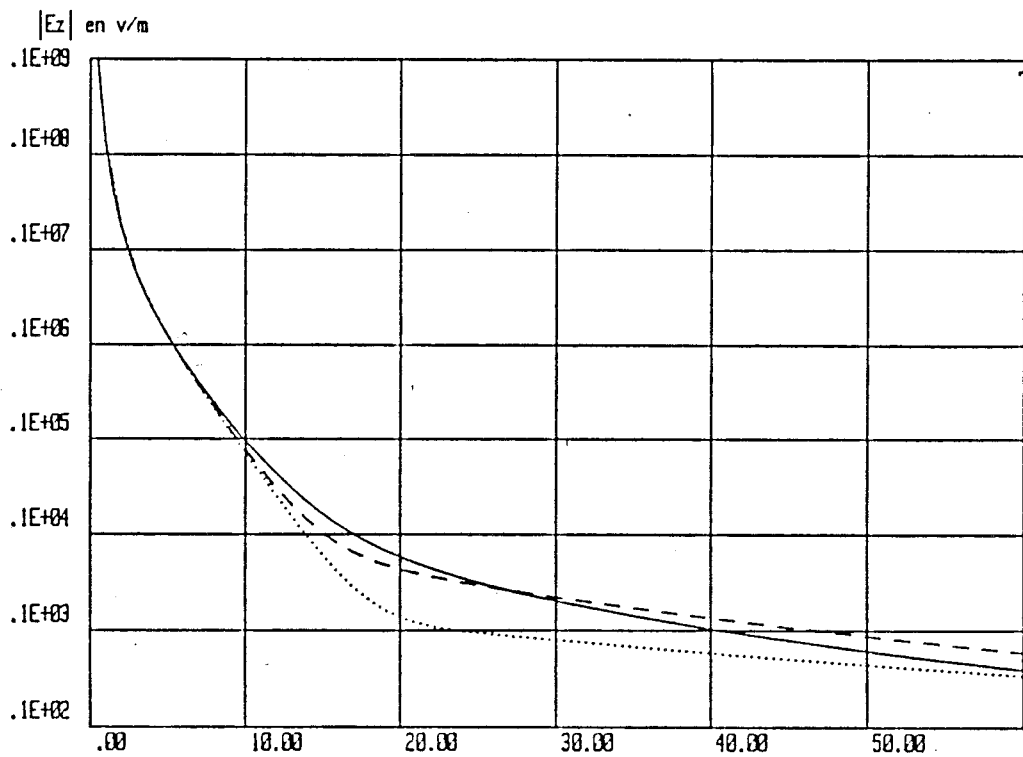
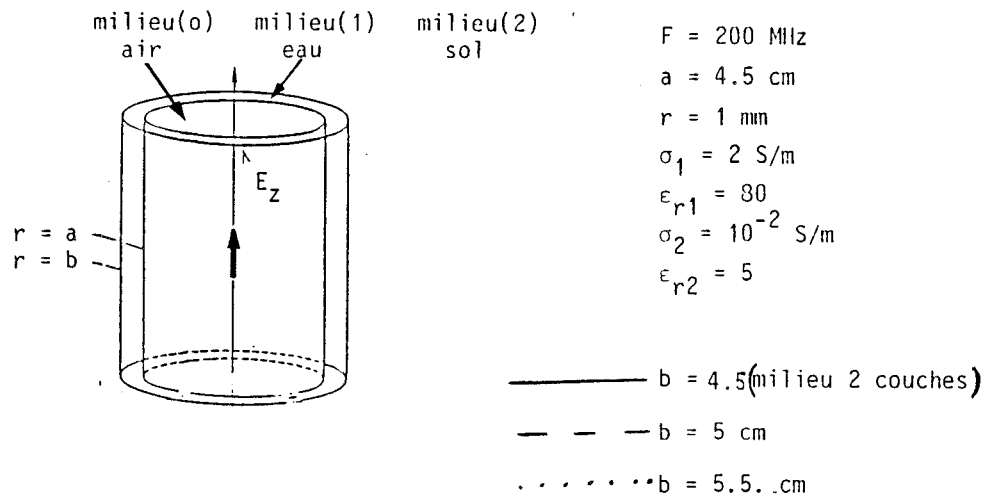


Planche III - 12

Z en cm

Variation de E_z en fonction de la position verticale
du récepteur

- Comparaison : milieu 2 couches
milieu 3 couches

Cas de l'eau douce

—	air/sol	a = 4.5 cm	
- - -	air/eau douce/sol	a = 4.5 cm	b = 5 cm
.....	air/eau douce/sol	a = 4.5 cm	b = 5.5 cm

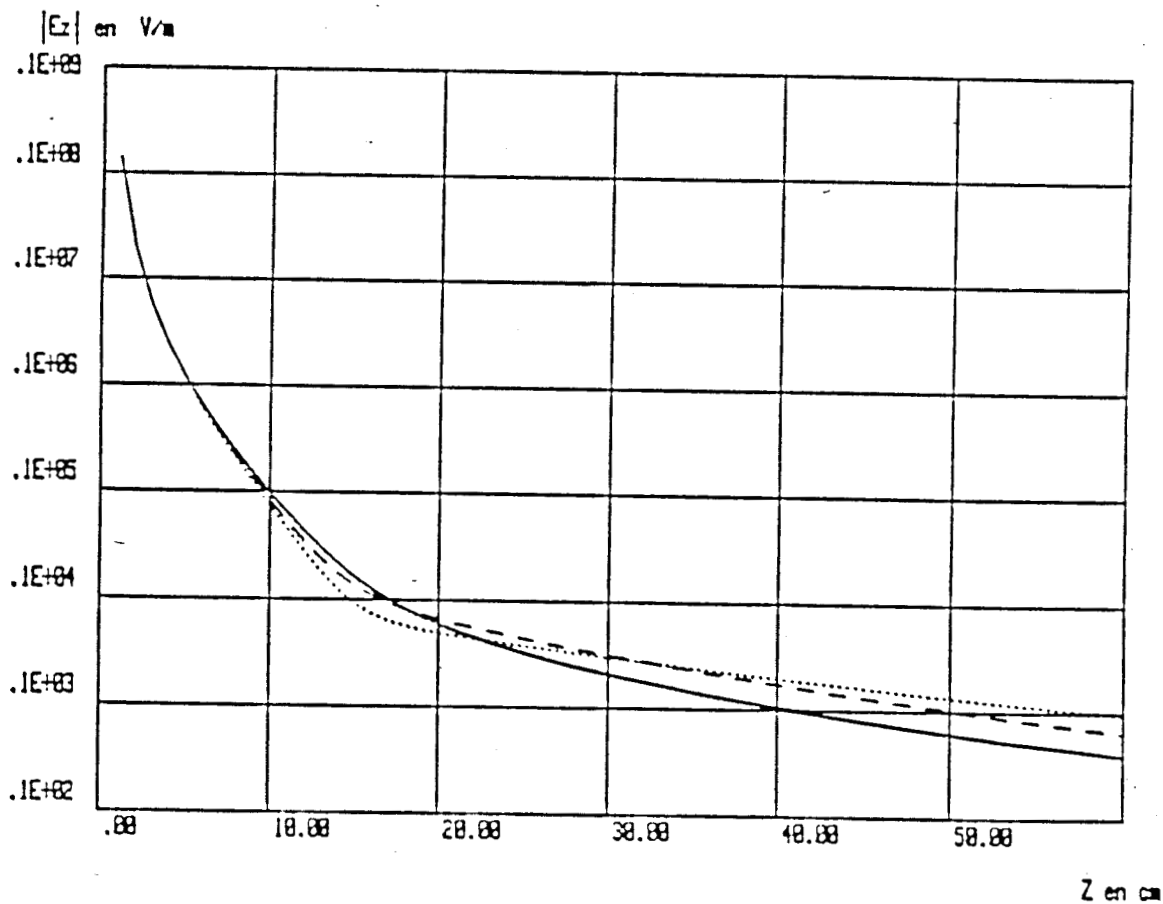


PLANCHE III - 13

Variation fréquentielle de l'impédance d'entrée du milieu d'une antenne dans un milieu à 3 couches - paramètre : rayon (b)

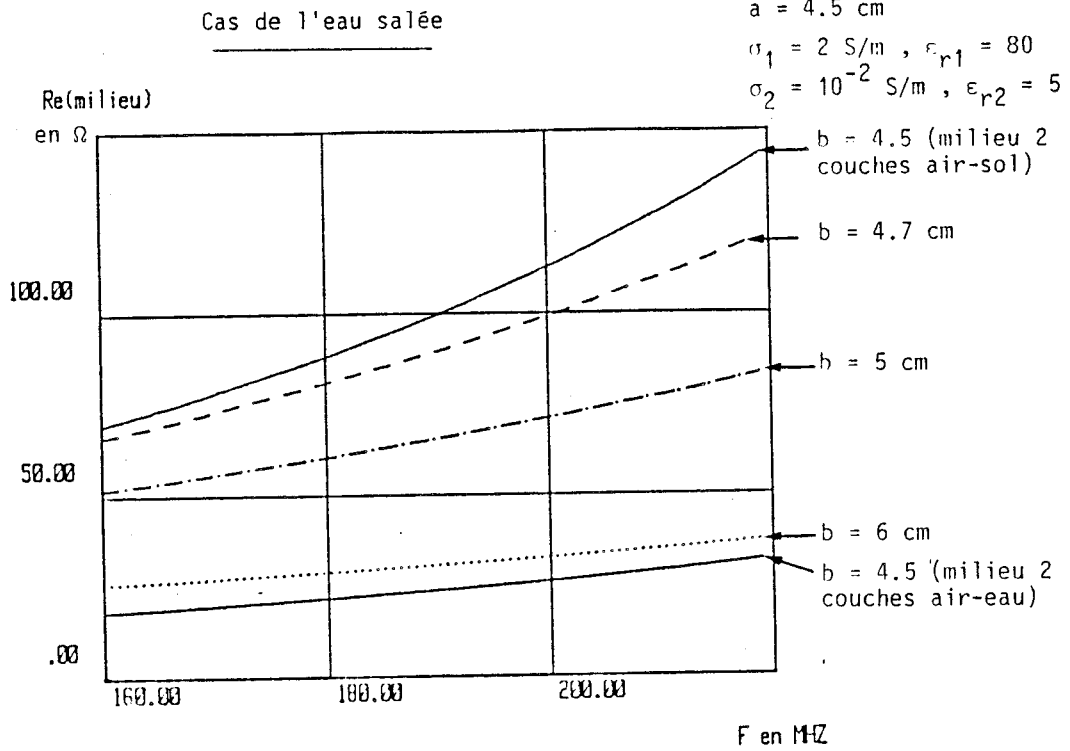
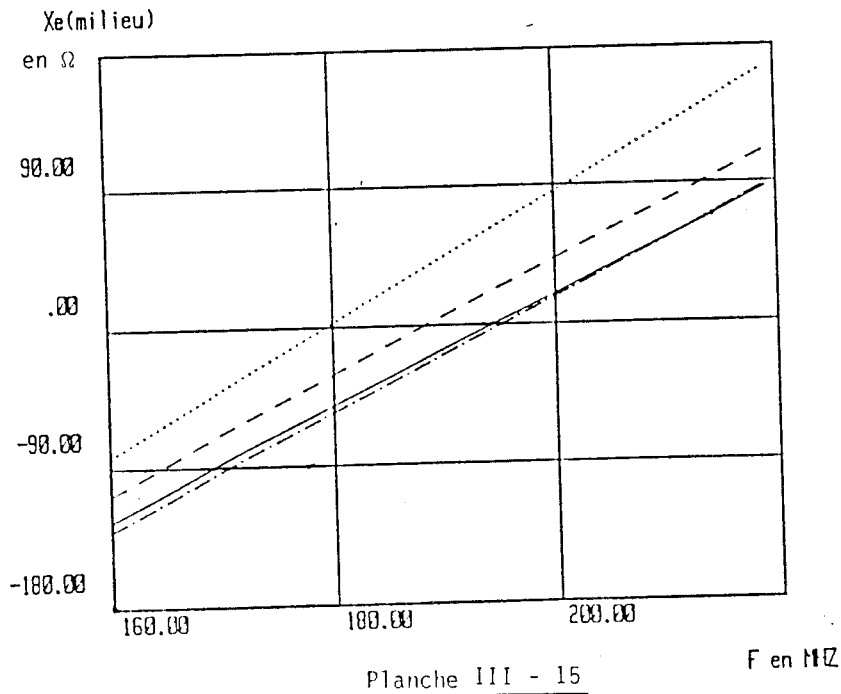


Planche III - 14



pour une épaisseur d'eau comprise entre 0 et 1.5 cm. Cette conclusion reste valable pour la variation de la partie imaginaire de l'impédance d'entrée comme on peut le constater sur la planche (III-15).

Pour des épaisseurs d'eau plus importantes, comprises entre 1.5 cm et 5.5 cm, la planche (III-16) montre que la partie réelle de l'impédance d'entrée "oscille" autour de la valeur limite associée à une propagation dans un milieu à 2 couches air-eau, tandis que la partie imaginaire converge quasiment uniformément vers cette valeur limite comme on s'en aperçoit d'après la planche (III-17).

Enfin, l'étude paramétrique montre qu'au-delà d'un rayon $b = 10$ cm, soit une épaisseur d'eau de 5.5 cm, on n'observe plus de différences notables entre les courbes, le sol n'ayant plus que très peu d'influence sur l'impédance d'entrée de l'antenne.

Lorsque la conductivité de l'eau située entre l'antenne et le sol est de 10^{-1} S/m (cas de l'eau douce), les courants de déplacement dans ce milieu deviennent du même ordre de grandeur que les courants de conduction ($\sigma_{\text{eau}} \approx \omega \varepsilon_{\text{eau}}$). Dans ces conditions, les planches (III-18) à (III-21) représentent l'influence du rayon extérieur b du forage sur les variations des parties réelles et imaginaires de l'impédance d'entrée. Les allures de ces courbes sont très voisines de celles obtenues dans le cas $\sigma_{\text{eau}} = 2$ S/m hormis le fait que la convergence vers un milieu à 2 couches air-eau ne se produit que pour des valeurs importantes du rayon b ($b > 60$ cm). En particulier, on remarque sur la planche (III-20) les variations importantes de la résistance d'entrée lorsque $b = 20$ cm, ce qui correspond à une épaisseur d'eau de 15.5 cm. Ceci peut s'expliquer par les phénomènes de résonance de la cavité cylindrique ayant comme couches limites l'air, qui est le milieu dans lequel est placé, et le sol. Ce phénomène n'apparaissant pas dans le cas d'une eau salée ($\sigma = 2$ S/m) due à l'atténuation des ondes lors de leur propagation.

Variation fréquentielle de l'impédance d'entrée au milieu d'une
antenne dans un milieu à 3 couches

Paramètre : rayon (b) ; cas de l'eau salée

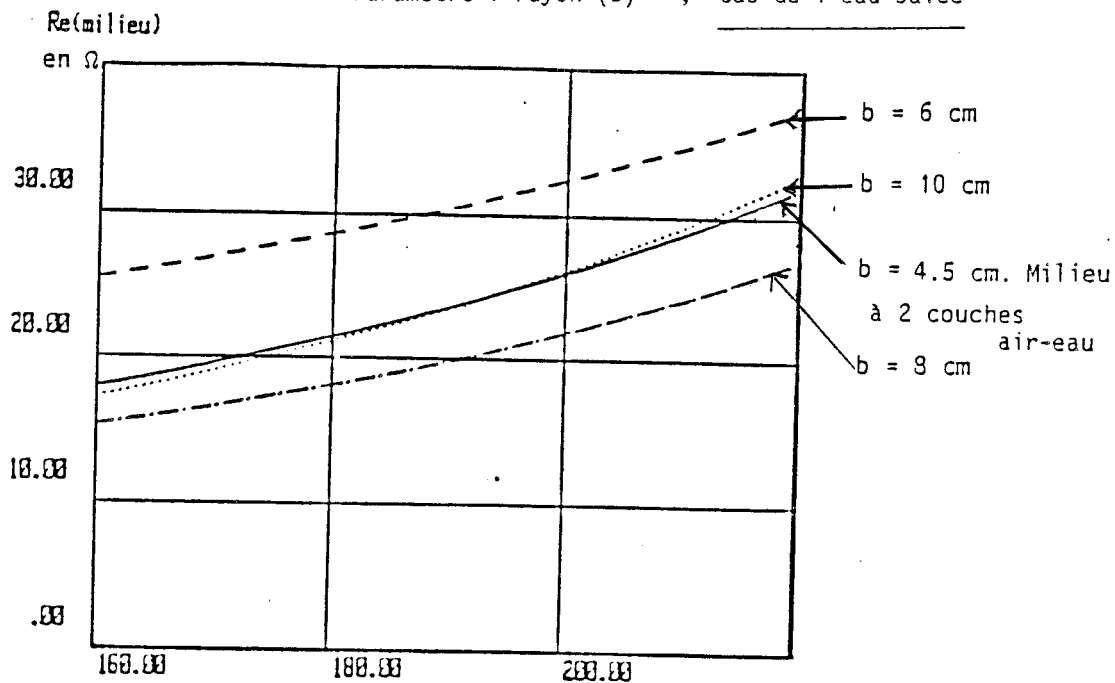


PLANCHE III - 16

F en MHz

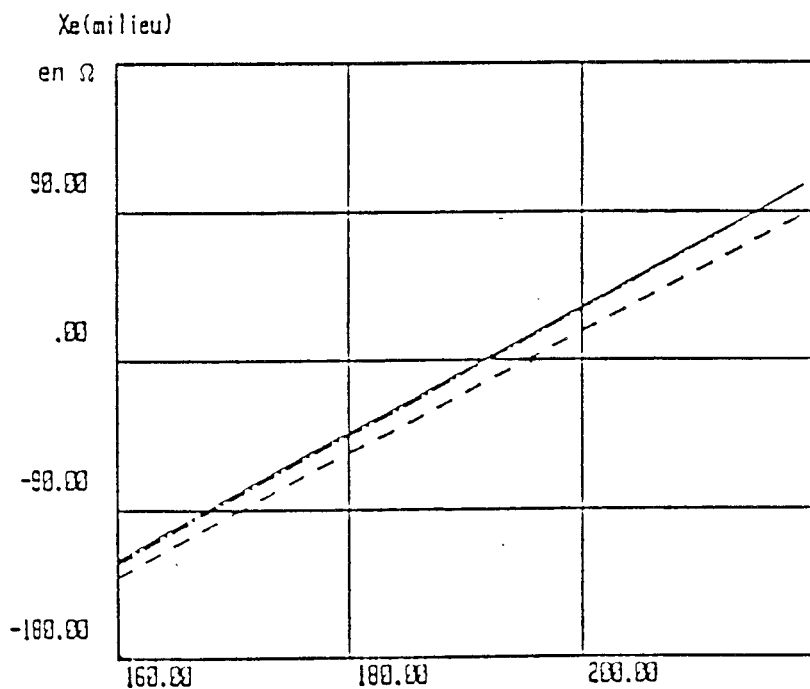


PLANCHE III - 17

F en MHz

Variation fréquentielle de l'impédance d'entrée au milieu d'une

 d'une antenne dans un milieu à 3 couches

Paramètre: rayon (b) cas de l'eau douce

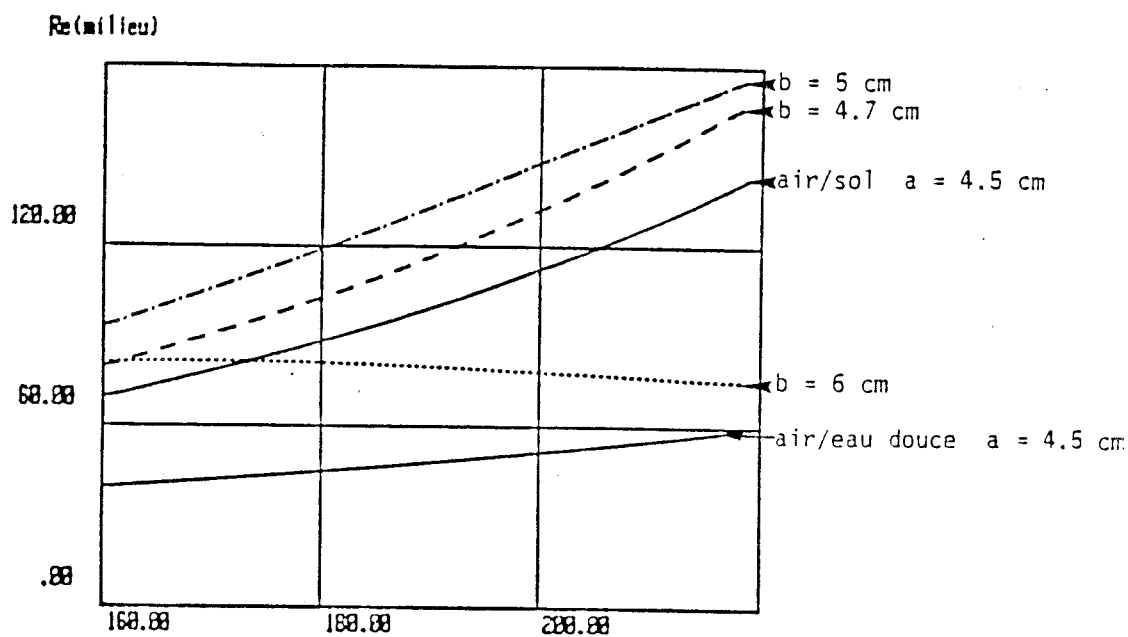


PLANCHE III - 18

F en MHz

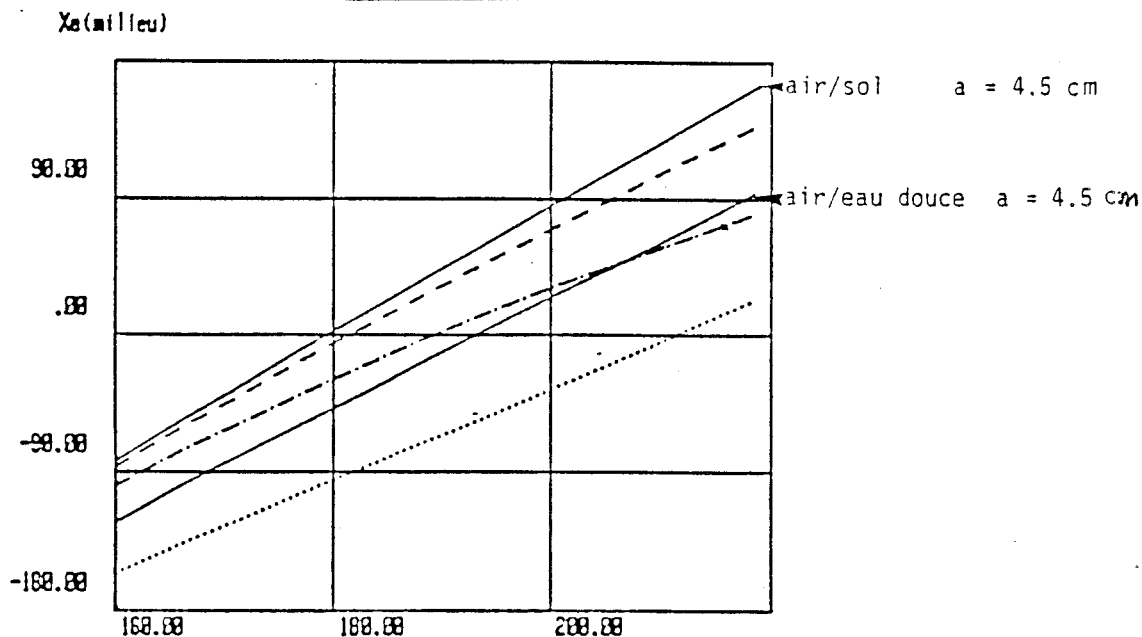


PLANCHE III - 19

F en MHz

Variation fréquentielle de l'impédance d'entrée au milieu d'une
antenne dans un milieu à 3 couches

Paramètre : rayon (b) cas de l'eau douce

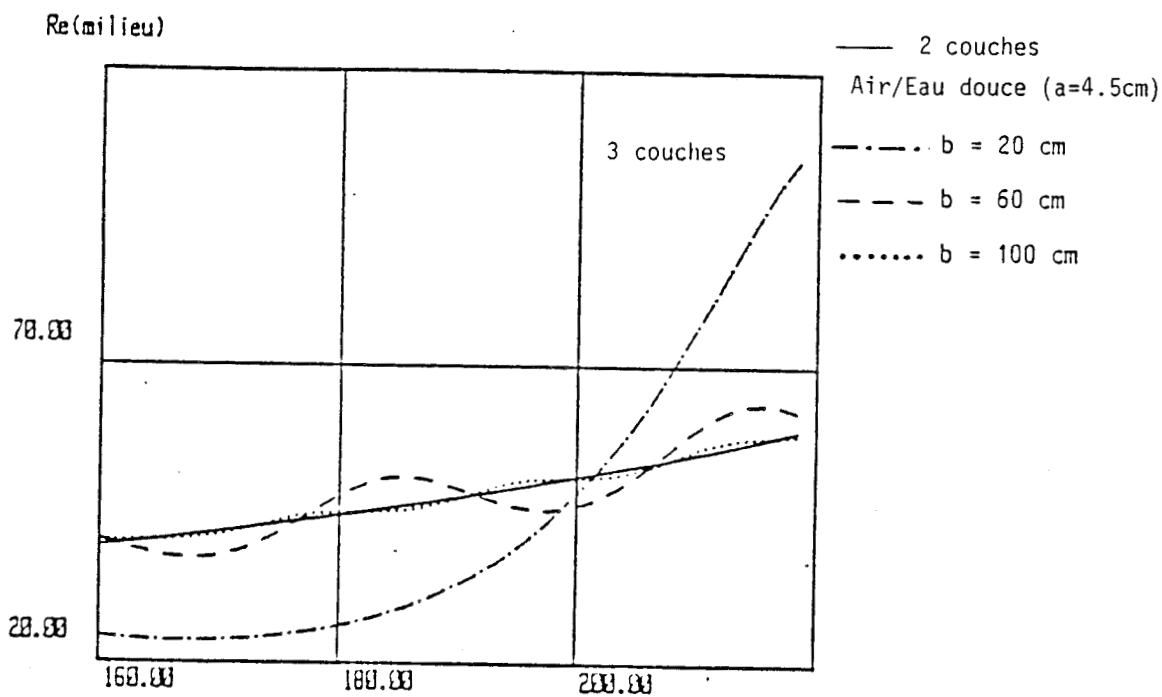


PLANCHE III - 20

F en MHz

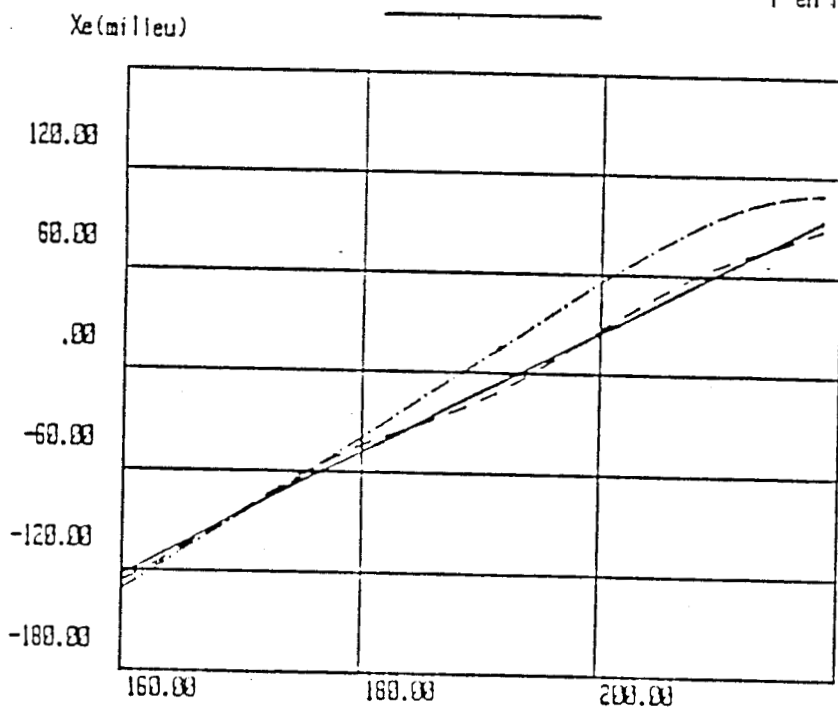


PLANCHE III - 21

F en MHz

b - Influence du rayon de l'isolant autour de l'antenne

On suppose maintenant que le rayon de forage rempli d'eau soit constant $b = 5.5$ cm. Nous avons déjà signalé qu'une antenne totalement immergée ne peut plus être résonnante, le problème qui se pose est donc de connaître le rayon minimum "a" de la partie isolante autour de l'antenne et l'influence de celle-ci sur la fréquence de résonance.

Les planches (III-22) et (III-23) représentent les variations de l'impédance d'entrée lorsque le rayon a varie de 1 cm à 5 cm. A titre de comparaison le cas du trou sec ($a = b = 5.5$ cm) a également été reporté. On remarque tout d'abord que même pour un rayon faible de 1 cm, l'accord de l'antenne devient possible puisque la partie imaginaire de l'impédance d'entrée s'annule pour une fréquence de 167 MHz.

On note ensuite une variation importante de l'impédance d'entrée et de la fréquence d'accord dès que le rayon de l'isolant atteint 2 cm, valeur qui se stabilise ensuite pour un rayon compris entre 2 cm et 4 cm. On peut donc en conclure que le diamètre de la sonde contenant une antenne filaire rectiligne doit être d'au moins 4 cm.

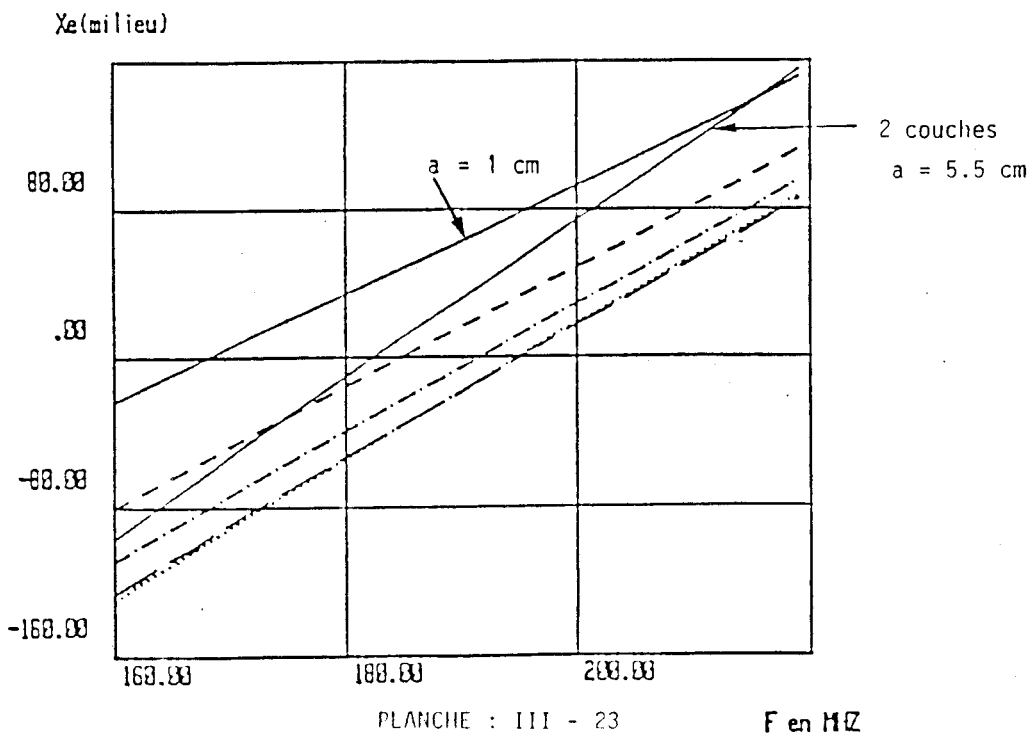
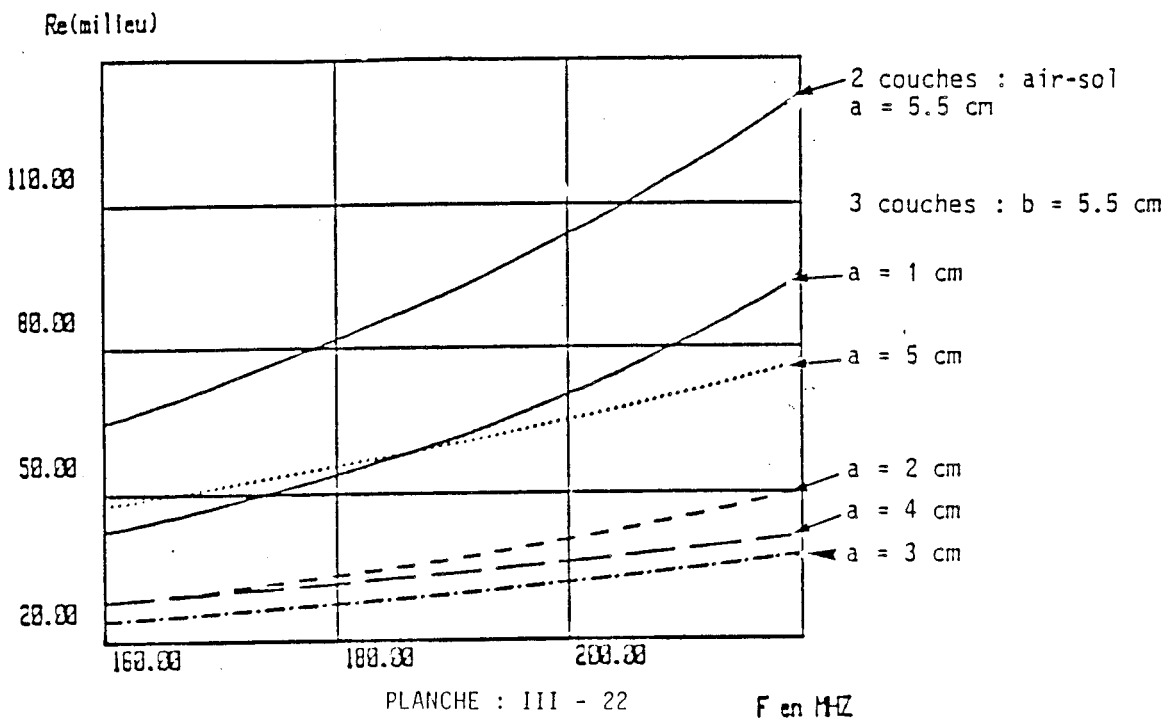
Sur les planches (III-24) et (III-25) on remarque de nouveau une variation rapide de l'impédance d'entrée lorsque le rayon de l'isolant passe de 5 cm à 5.5 cm (milieu à 2 couches sans eau), c'est-à-dire lorsque l'épaisseur d'eau autour de la sonde est inférieure à 5 mm.

Les planches (III-26) et (III-27) correspondent au cas d'un trou rempli d'eau douce. On remarque, notamment sur la planche (III-26), la très grande variation de l'impédance d'entrée en fonction du rayon a de l'isolant autour de l'antenne. En effet, on avait vu que si la conductivité de l'eau est importante ($\sigma = 2$ S/m), les valeurs de la résistance d'entrée se stabilisent lorsque le rayon a était compris entre 2 cm et 4 cm. Ce n'est plus le cas dans cet exemple et on peut donc s'attendre en pratique à une fluctuation importante de l'impédance d'entrée Z_e en fonction de l'épaisseur d'eau, donc de la position de la sonde dans le forage.

Variation fréquentielle de l'impédance d'entrée au milieu d'une

 d'antenne dans un milieu à 3 couches

 Paramètre : rayon (a)



Variation fréquentielle de l'impédance d'entrée au milieu d'une

 antenne dans un milieu à 3 couches

Paramètre : rayon (a)

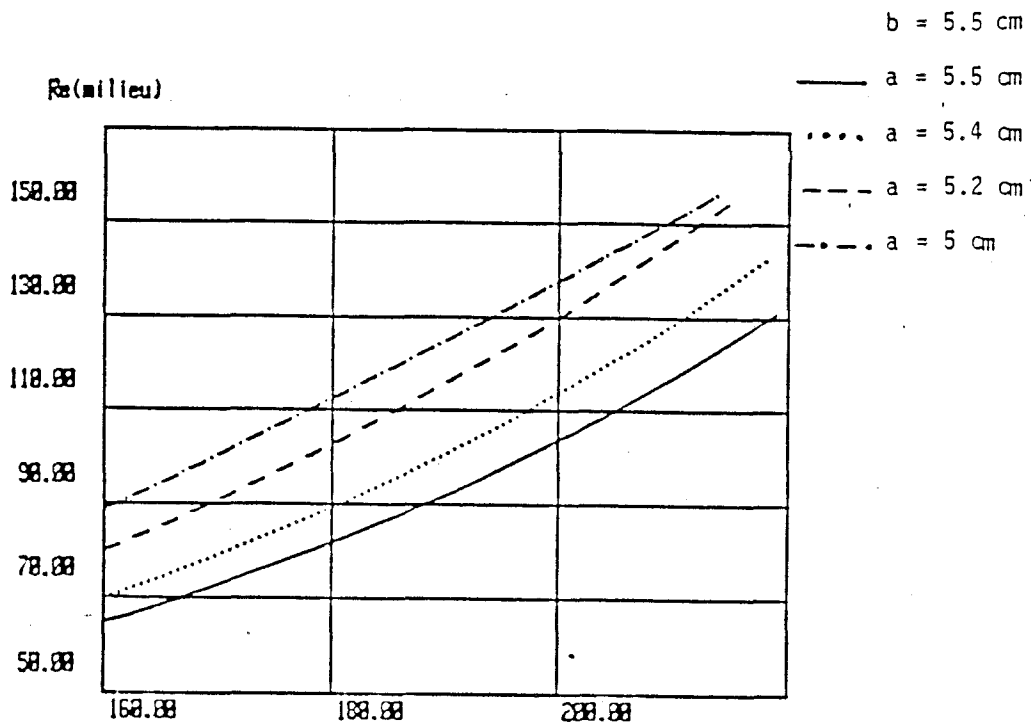


PLANCHE III - 24

F en MHz

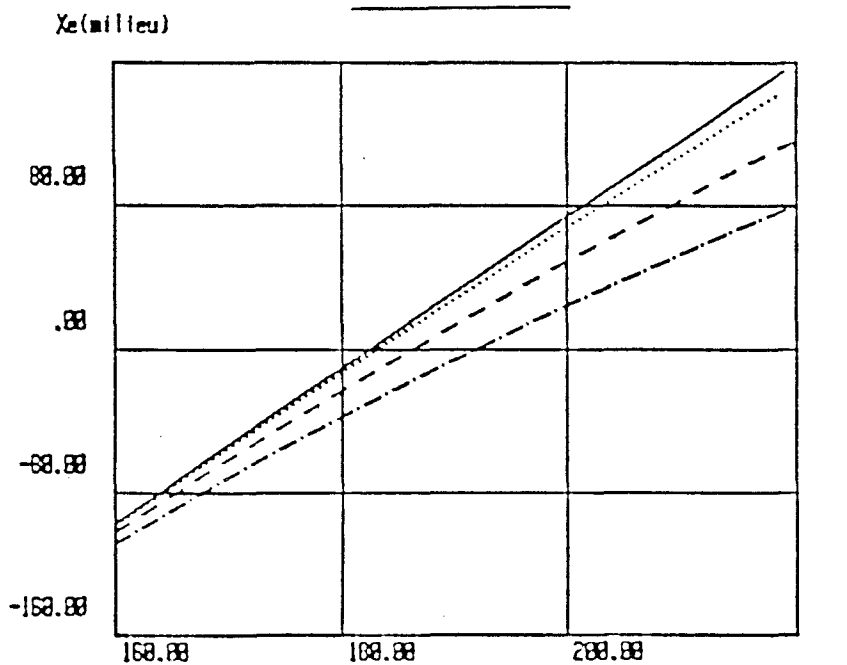


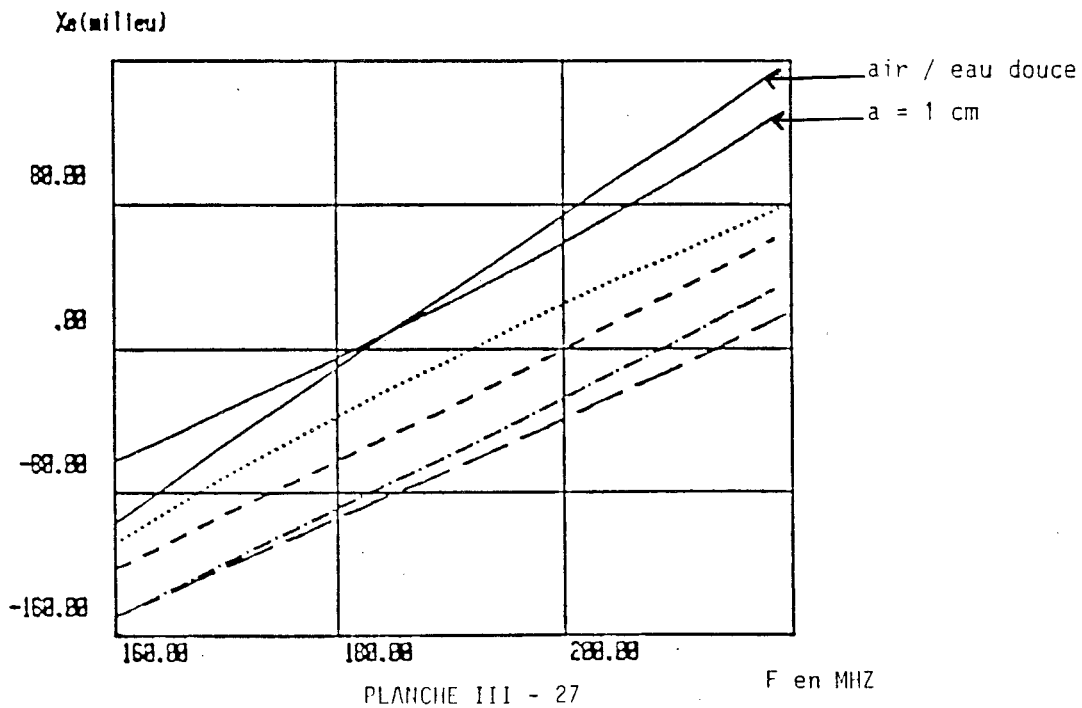
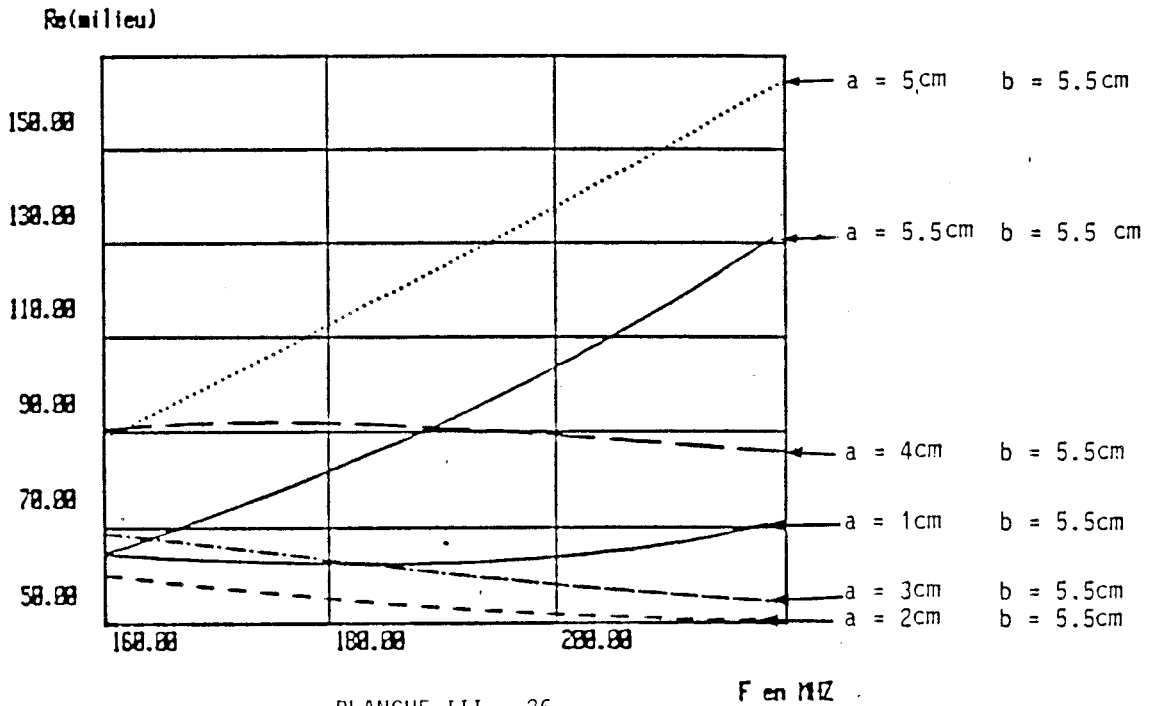
PLANCHE III - 25

F en MHz

Variation fréquentielle de l'impédance d'entrée au centre de
de l'antenne dans un milieu à 3 couches

Paramètre : rayon (a)

Cas de l'eau douce $\sigma = 10^{-1}$ S/m air / eau douce / sol



Enfin les planches (III-28) et (III-29) montrent les variations rapides de Z_e pour des faibles épaisseurs d'eau.

III.3.3 - INFLUENCE DE LA PRESENCE DU FORAGE SUR LE CHAMP RAYONNE

Dans le procédé de tomographie électromagnétique ou plus exactement dans le traitement des données, donc pour la "reconstruction du terrain", on sera amené à négliger l'influence du forage. Or celui-ci peut se manifester de deux façons. La première est que l'antenne, descendue dans le forage, voit son impédance d'entrée, donc sa répartition du courant, modifiée de par la configuration géométrique et électrique du milieu qui l'entoure. Cet aspect a été traité dans le paragraphe précédent. L'autre "manifestation" du forage est la modification du champ lointain, qui serait par exemple mesuré dans un autre forage .

Pour étudier l'influence de la présence du trou de forage sur le champ rayonné, il n'est pas opportun de calculer le rayonnement de toute l'antenne mais de déterminer seulement celui d'un dipole dont le moment électrique Idl est une constante, normalisée dans les exemples suivants à 1 A.m. En effet, cette approche permet de s'affranchir des modifications de l'impédance d'entrée et donc de bien différencier les causes de modifications du champ reçu.

III.3.3.1 - Cas d'un trou sec

Etudions tout d'abord les variations du champ électrique vertical E_z au voisinage immédiat du forage. Les courbes de la planche (III-30) ont été tracées pour une distance horizontale r entre le dipole, situé sur l'axe du forage, et le point de réception variant entre 0 et 30 cm.

Le sol est caractérisé par ces paramètres $\sigma = 10^{-2}$ S/m, $\epsilon_r = 5$, le rayon du forage "a" étant de 4.5 cm. La courbe correspondante à ce milieu stratifié radialement à 2 couches est notée "air-sol" et, à titre de comparaison, une propagation uniquement dans l'air ou dans le sol (donc considérés successivement comme milieux homogènes) a également été considérée. On remarque que sur les 3 premiers centimètres, le champ E_z est relativement

Variation fréquentielle de l'impédance d'entrée au centre d'une antenne

 dans un milieu à 3 couches

Cas de l'eau douce

Paramètre : rayon (a)

$$\sigma_{\text{eau}} = 10^{-1} \text{ S/m}$$

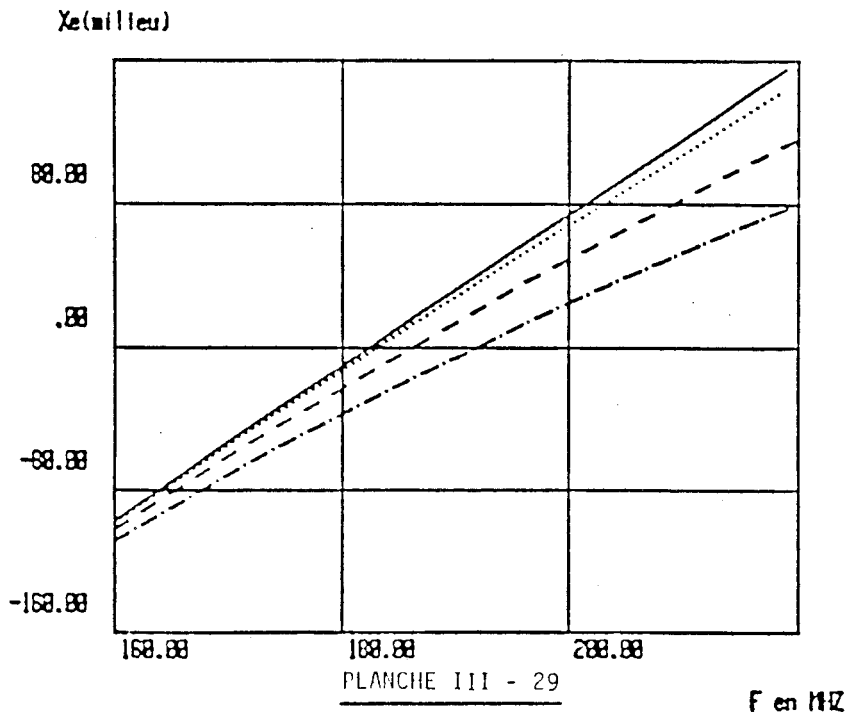
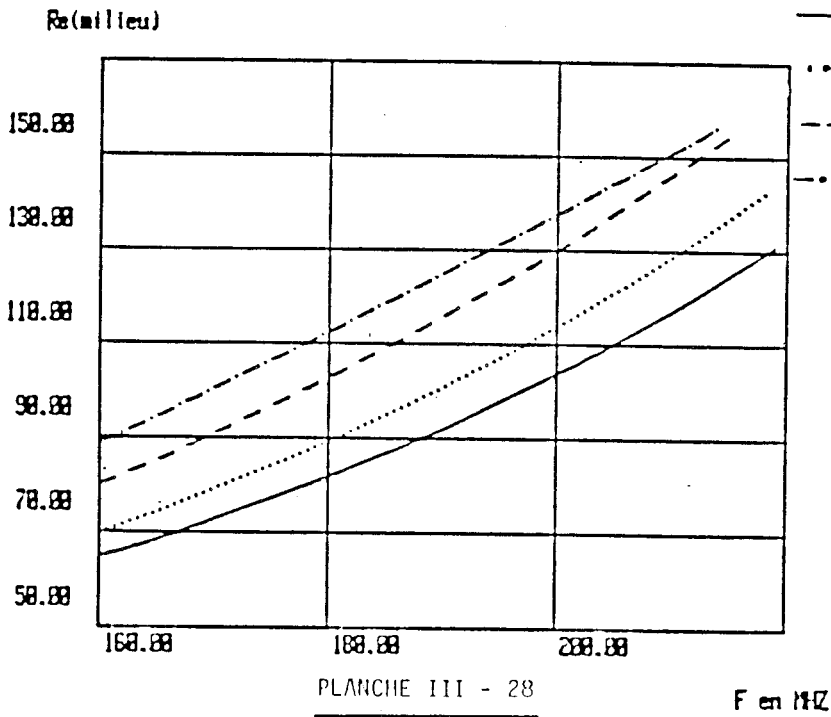
b = 5.5 cm

— a = 5.5 cm

..... a = 5.4 cm

- - - a = 5.2 cm

- . - . a = 5 cm



Influence de la présence du forage sur le champ $|E_z|$ rayonné
 en fonction de la position radiale du récepteur
 comparaison : milieu homogène à un demi-milieu

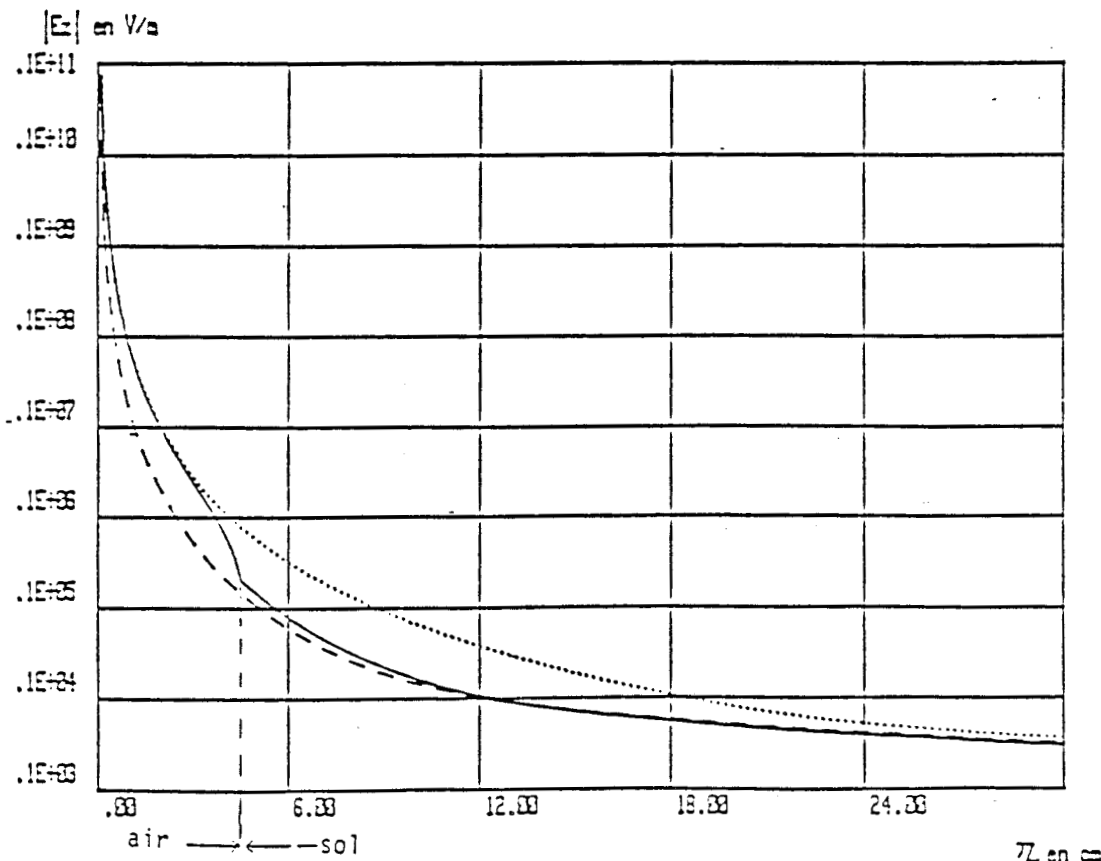
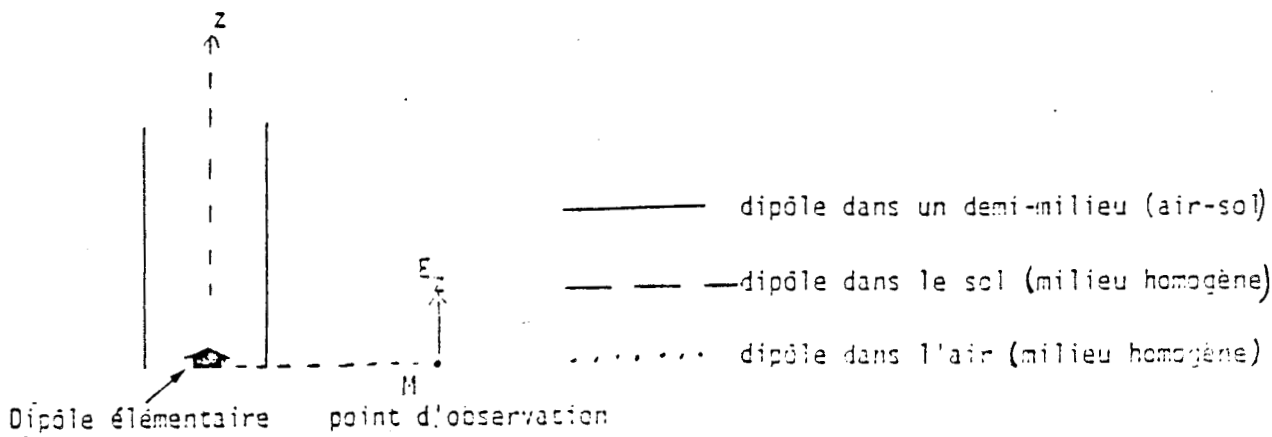


Planche III - 30

peu influencé par la présence du sol. Entre 3 cm et 4.5 cm, on assiste à un changement de courbure de la courbe qui est ensuite pratiquement confondue avec celle correspondante au sol, considéré comme milieu homogène. Pour des distances radiales supérieures à 30 cm, la planche (III-31) montre la faible importance du trou de forage sur le champ rayonné radialement à grande distance.

Une autre façon de mettre en évidence l'importance éventuelle du trou de forage dans l'interprétation des données de tomographie électromagnétique est de calculer le module et la phase du champ E_z , à une distance horizontale donnée, de 5 m dans notre exemple, en fonction de la profondeur du point de réception. Comme l'influence de la surface du sol a été négligée dans toute cette approche théorique, l'origine $z = 0$ a été choisie à la profondeur du dipole d'émission. Les courbes des planches (III-32) et (III-33) montrent la comparaison milieu homogène-milieu à 2 couches. On ne remarque pas de modification sensible pour le champ reçu, tant au niveau de son amplitude que de sa phase et une tomographie effectuée en trou sec pourra donc être interprétée à l'aide d'un modèle théorique ne tenant pas compte des trous de forage.

III.3.3.2 - Cas d'un milieu à 3 couches

La planche (III-34) représente la variation du champ E_z en fonction de la distance radiale r , dans un milieu à 2 couches ($a = 4.5$ cm) et à 3 couches ($a = 4.5$ cm et $b = 5.5$ cm). Les paramètres électriques de l'eau correspondant à la couche intermédiaire sont $\sigma = 2$ S/m et $\epsilon_r = 80$. On remarque la variation brutale du champ lorsque le point d'observation s'approche de la transition air-eau et l'atténuation supplémentaire qui en résulte pour le champ dans le sol.

Dans les exemples suivants, nous allons comparer le champ vertical E_z reçu à une distance de 5 m d'un dipole d'émission placé dans un milieu à 3 couches et ceci en fonction de la profondeur relative z du point d'observation. Le rayon "a" de l'air isolant l'antenne de l'eau est de 4.5 cm, le rayon du forage variant entre 5 cm et 10 cm.

CHAPITRE III : MODELISATION D'UNE ANTENNE CYLINDRIQUE CENTREE DANS UN FORAGE

Influence de la présence du forage sur le champ $|E_z|$ rayonné
 en fonction de la position radiale du récepteur
 comparaison : milieu homogène à un demi-milieu

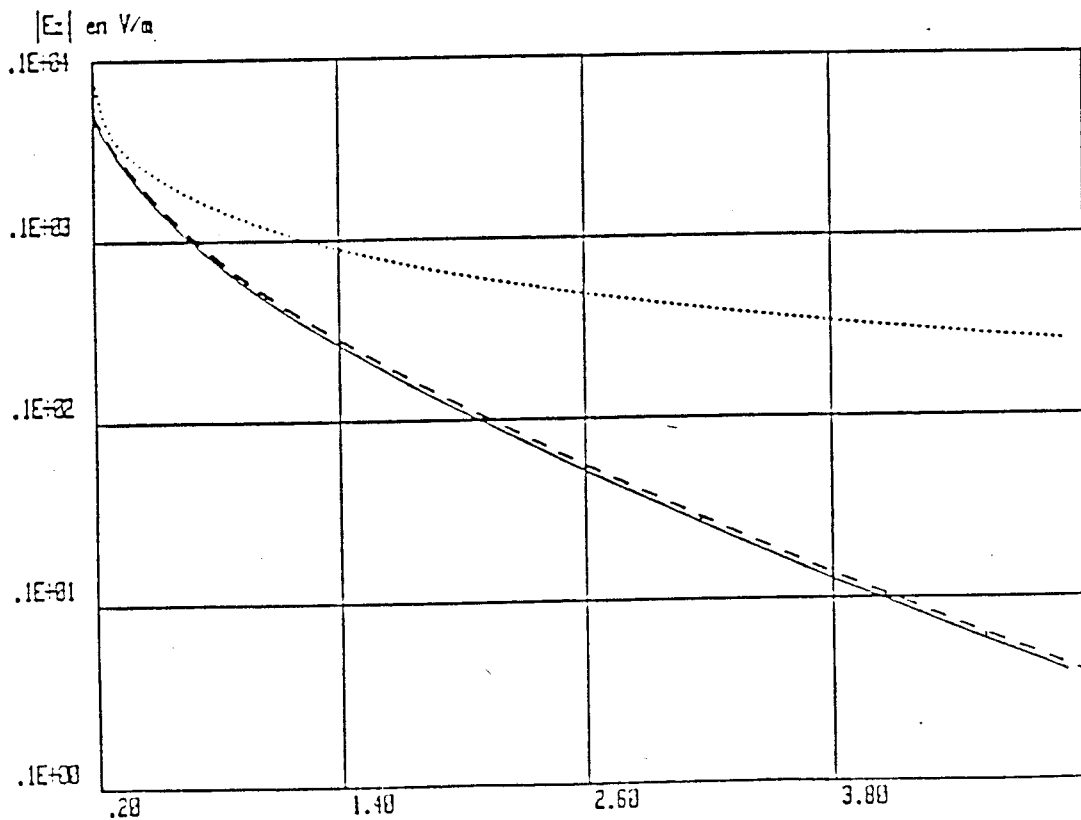
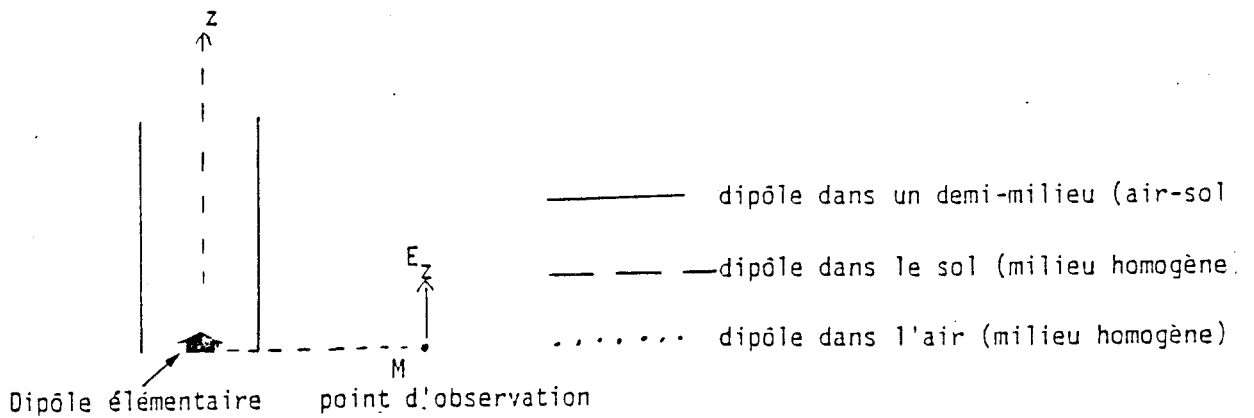


Planche III - 31

r en metre

Influence de la présence du forage sur le champ E_z rayonné en fonction de la position verticale du récepteur

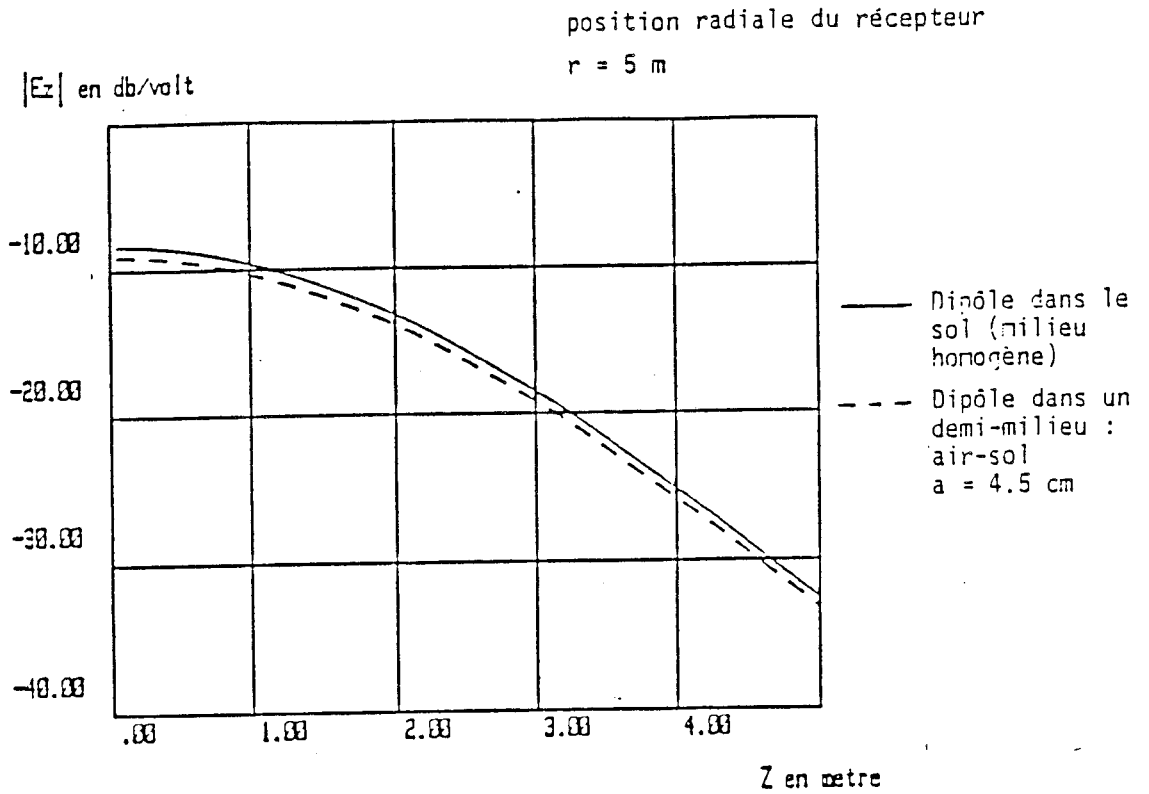


PLANCHE III - 32

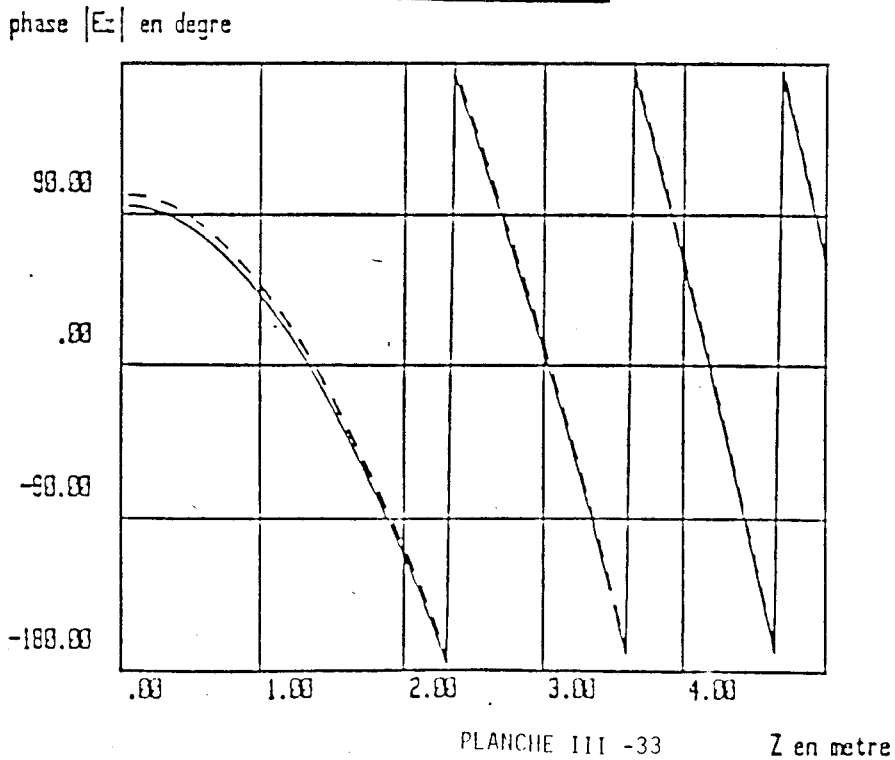
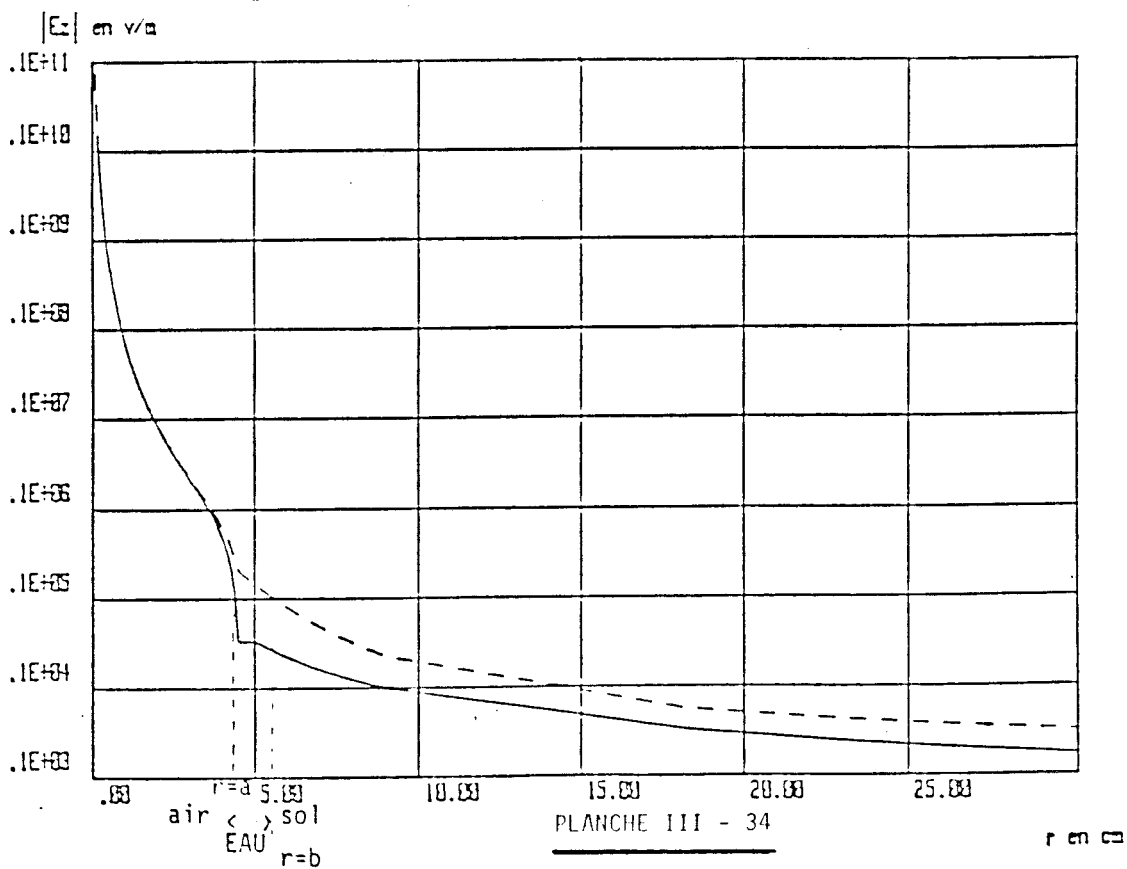
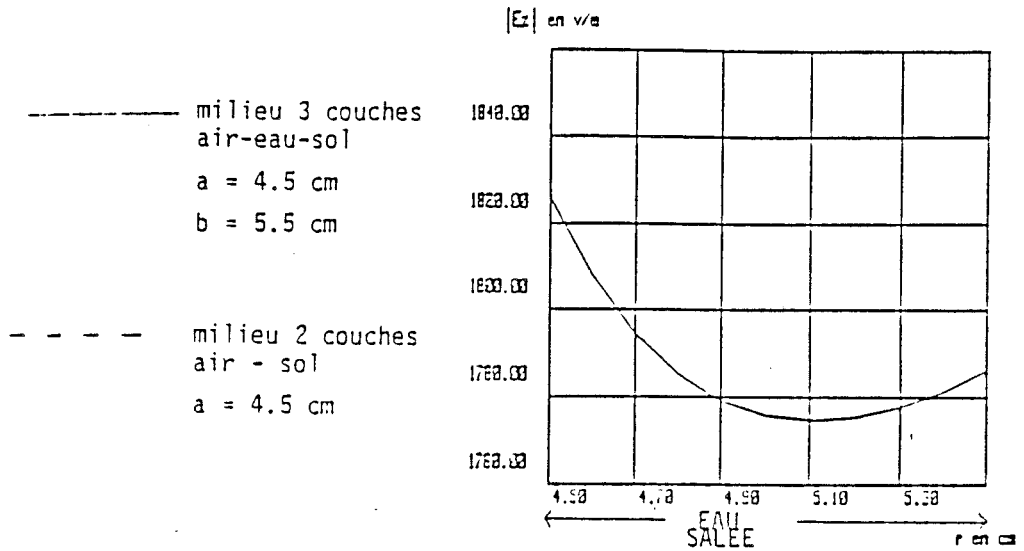


PLANCHE III - 33

Variation de E_z en fonction de la position radiale du recepateur

comparaison : milieu 2 couches

milieu 3 couches - eau salée ($\sigma = 2 \text{ S/m}$)



Les courbes de la planche (III-35) montrent que la présence d'une couche d'eau entre l'antenne et le sol joue le rôle d'absorbant des ondes électromagnétiques mais que les courbes se décalent pratiquement les unes des autres par translation. Compte-tenu des distances et profondeurs relatives des émetteur-récepteur, on peut donc considérer que la couche d'eau introduit une atténuation du champ pratiquement indépendante de la position du point de réception. Cette atténuation est de l'ordre de 5 dB pour une couche d'eau de 5 mm d'épaisseur, de 10 à 12 dB pour 15 mm et atteint 20 à 25 dB pour 55 mm d'épaisseur. Compte-tenu des valeurs décrites dans le premier chapitre concernant la puissance d'émission et la sensibilité de la chaîne de réception, une épaisseur d'eau de 15 mm semble être la valeur maximum tolérable pour éviter une atténuation prohibitive du signal.

Pour cette épaisseur, la planche (III-36) montre que la phase de E_z ne subit également qu'une translation par rapport au cas du milieu homogène, ce qui facilite l'interprétation des mesures de phase.

Cas de l'eau douce

La planche (III-37) représente la variation du champ E_z en fonction de la distance radiale. Comme dans le cas d'un milieu intermédiaire formé par de l'eau salée, on note la variation rapide du champ au voisinage des transitions de conductivité. Par contre on note sur la planche (III-38) que l'influence de cette épaisseur d'eau sur l'atténuation totale du champ à une distance horizontale de 5 m reste relativement modérée puisqu'elle est de l'ordre de quelques dB pour 55 mm. La réception devrait donc être assurée même si l'épaisseur d'eau douce est de quelques centimètres. Enfin la planche (III-39) montre que la phase du champ électrique vertical ne subit pratiquement qu'un décalage dû à la présence de l'eau.

CHAPITRE III : MODELISATION D'UNE ANTENNE CYLINDRIQUE CENTREE DANS UN FORAGE

Influence de la présence du forage sur le champ E_z rayonné en fonction de la position verticale du récepteur : milieu à 3 couches

eau salée $\sigma = 2 \text{ S/m}$

$\sigma_{\text{sol}} = 10^{-2} \text{ S/m}$

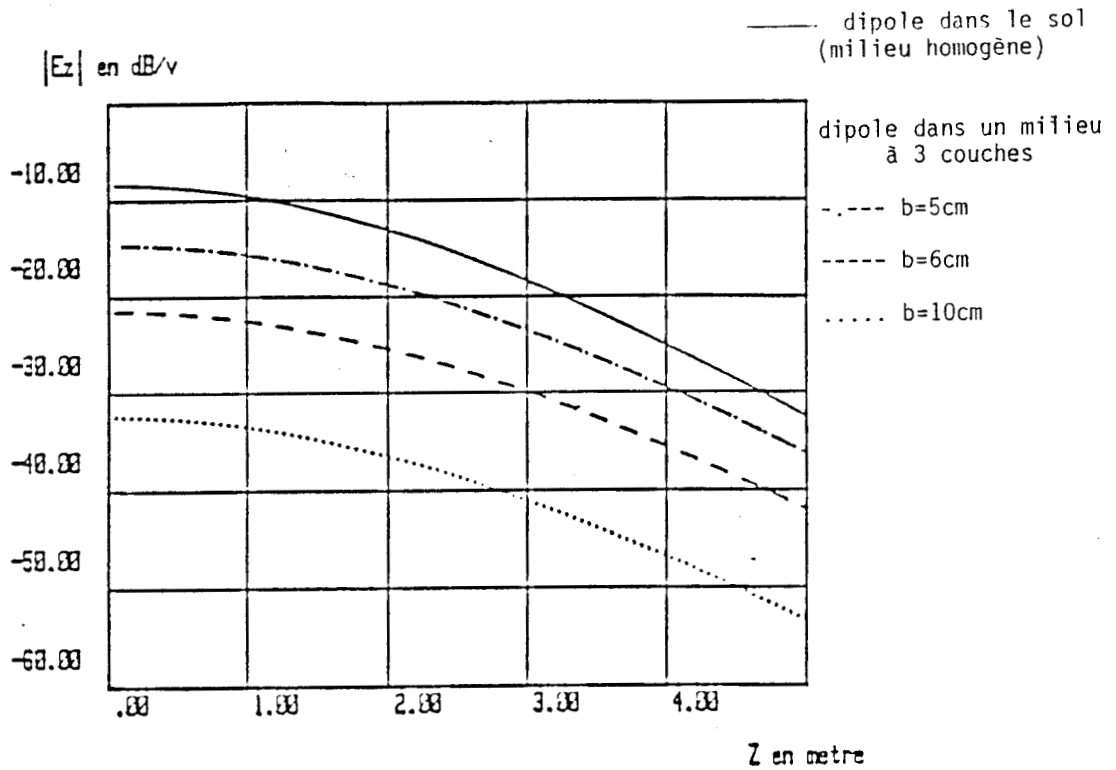


Planche III - 35

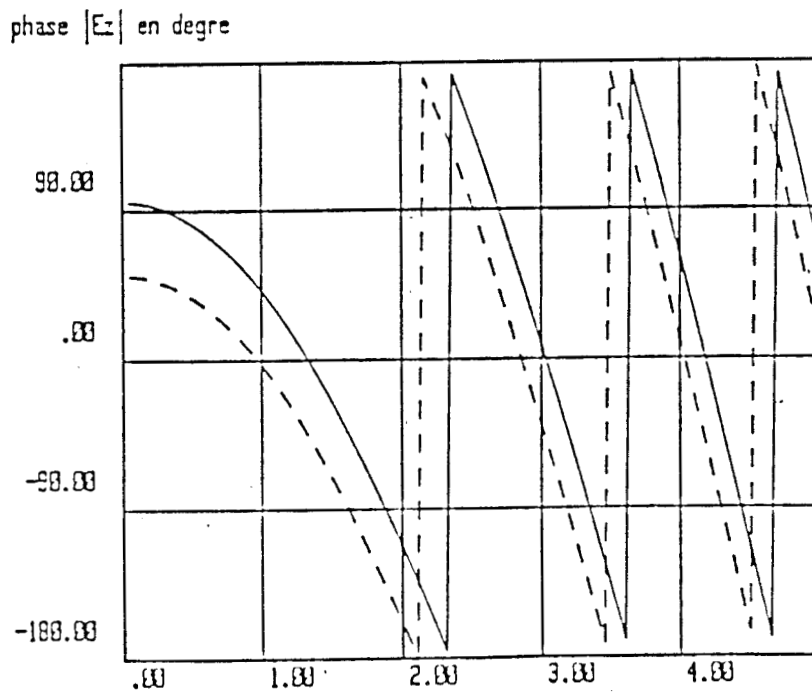


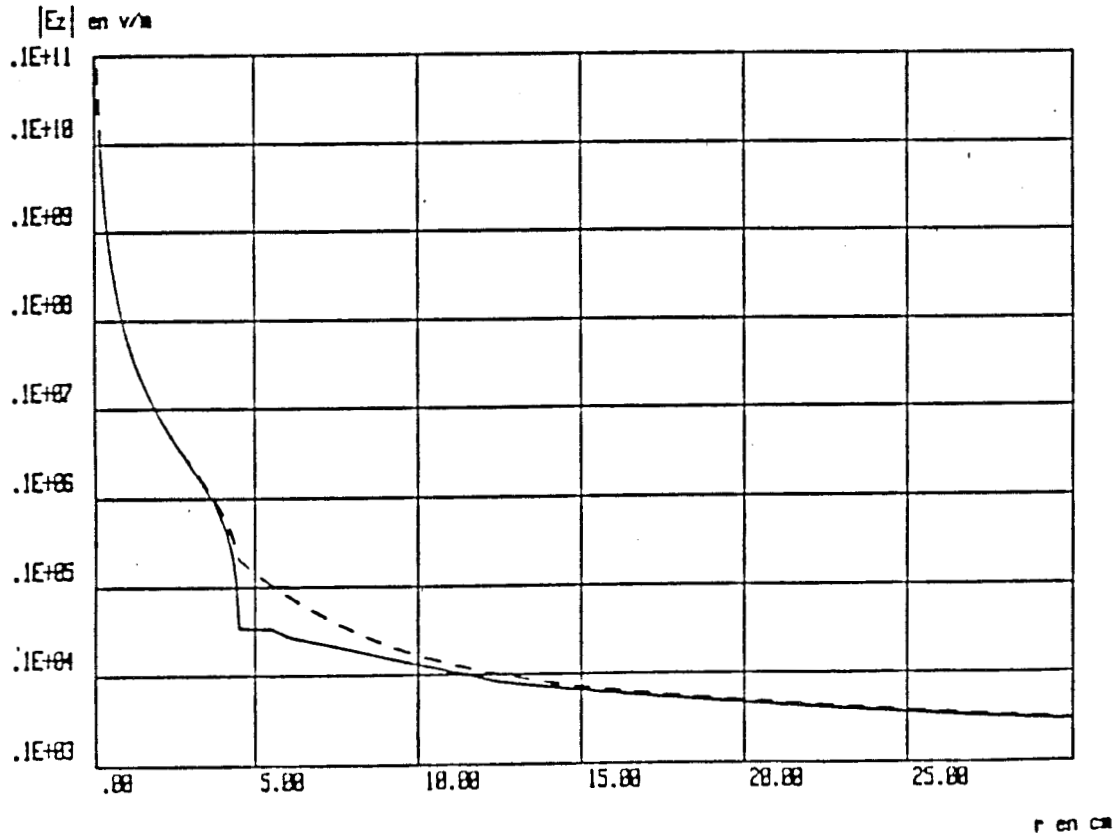
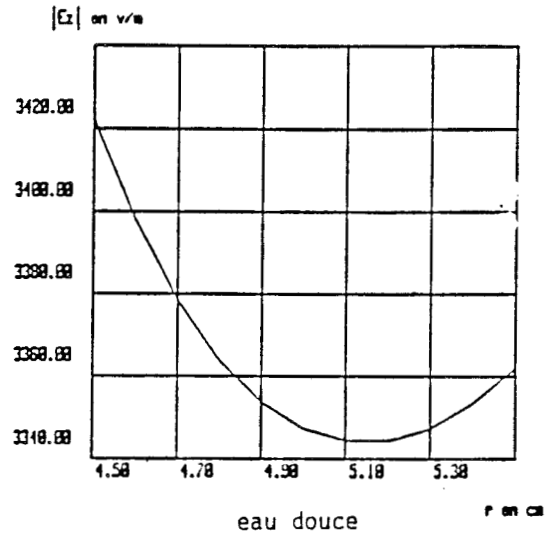
Planche III - 36

Variation de $|E_z|$ en fonction de la position radiale
 Comparaison : milieu 2 couches
 milieu 3 couches

--- air / sol
 a = 4.5 cm

— air / eau douce / sol
 a = 4.5 cm
 b = 5.5 cm

$\sigma_{sol} = 10^{-2}$ S/m



Influence de la présence du forage sur le champ $|E_z|$ en fonction de la position verticale du récepteur

$\sigma_{sol} = 10^{-2}$ S/m Dipôle dans le sol air / eau douce / sol

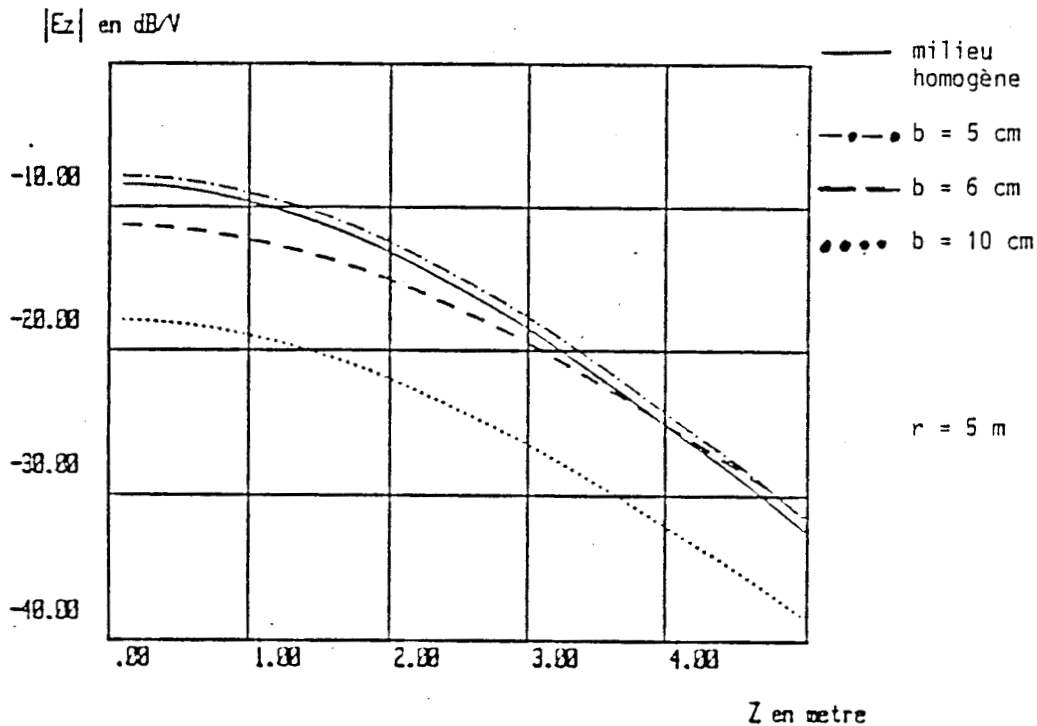


PLANCHE III-38

phase $|E_z|$ en degre

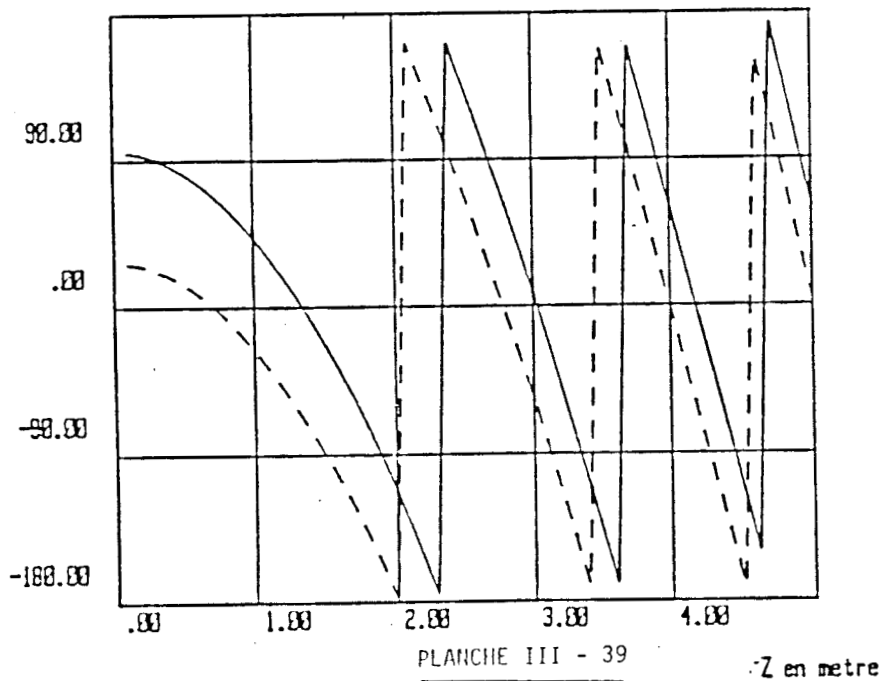


PLANCHE III - 39

CONCLUSION

A l'aide des modèles théoriques décrits dans les premiers paragraphes de ce chapitre, une étude paramétrique montrant l'influence du forage a été effectuée. Comme nous l'avons signalé, la présence de cette anomalie peut se manifester de deux façons : modification de la distribution du courant sur l'antenne due à une variation de son impédance d'entrée et perturbation du champ rayonné dans le sol .

Un trou sec a été simulé par un milieu stratifié radialement à 2 couches : air-sol. Nous avons vu que si le rayon du forage est d'environ 5 cm, la fréquence d'accord de l'antenne est pratiquement indépendante de la conductivité du sol, σ variant de 10^{-1} S/m et 10^{-3} S/m. Par contre la partie réelle de l'impédance d'entrée R_e à l'accord subit une variation de 50 % lorsque σ passe de 10^{-1} S/m à 10^{-2} S/m. (R_e passe de 60 Ω à 90 Ω) mais reste ensuite pratiquement constant pour σ compris entre 10^{-2} S/m et 10^{-3} S/m. Si l'antenne reste accordée, la variation du courant d'émission est celle de la résistance d'entrée. Il faut noter que, compte-tenu de la fréquence de 200 MHz choisie et de la valeur de la permittivité relative $\epsilon_r = 5$, la valeur 10^{-1} S/m correspond au cas où $\sigma > \omega\epsilon$. Enfin l'étude menée sur la variation du champ à plusieurs mètres du forage a montré que le champ rayonné pouvait être calculé, à partir de la distribution correcte du courant sur l'antenne, en négligeant l'influence du forage.

Un trou rempli d'eau correspond à un milieu stratifié radialement à 3 couches : air-eau-sol. Nous avons vu qu'il est nécessaire d'avoir un tube isolant de rayon supérieur ou égal à 2 cm de manière à ce que l'antenne puisse être accordée à une fréquence voisine de celle qui serait obtenue en trou sec. Dans ce cas, si l'épaisseur d'eau entre l'isolant et le sol est supérieure à 5 mm, l'impédance d'entrée est pratiquement indépendante des paramètres électriques du sol. Le champ rayonné à grande distance subit une atténuation par rapport au cas d'un trou sec, celle-ci étant de 10 à 12 dB pour l'épaisseur de la couche d'eau de 15 mm. Ces résultats ont été obtenus

en supposant une conductivité très élevée de l'eau, valant 2 S/m. Dans le cas d'une eau douce, une conductivité de 10^{-1} S/m, l'atténuation supplémentaire dans les mêmes conditions que précédemment n'est que de quelques dB.

Il serait intéressant de poursuivre cette étude, afin de mettre en évidence l'influence de l'excentrage de l'antenne dans le trou du forage, et les modifications apportées sur l'impédance d'entrée, et le champ en zone lointaine. Ceci est l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE IV

INFLUENCE DE LA POSITION DE LA SONDE

DANS LE TUBE ISOLANT

CHAPITRE IV : INFLUENCE DE LA POSITION DE LA SONDE DANS LE TUBE ISOLANT

INTRODUCTION (p.136)

IV.1 - EXPRESSIONS DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE (p.138)

IV.2 - REPRESENTATION INTEGRALE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE (p.143)

IV.2.1 - Représentation intégrale du potentiel de Hertz (p.143)

IV.2.2 - Potentiel de Hertz - milieu à 2 couches (p.143)

IV.2.2.1 - Conditions aux limites - composantes du champ

IV.2.3 - Potentiel de Hertz - milieu à 3 couches (p.148)

IV.2.3.1 - Conditions aux limites - composantes du champ

IV.3 ANTENNE MINCE EXCENTREE DANS UN FORAGE (p.155)

IV.3.1 Matrice impédance (p.156)

IV.4 - RESULTATS DES APPLICATIONS NUMERIQUES (p.158)

IV.4.1 - Milieu à 2 couches (p.159)

IV.4.1.1 - Influence de l'excentrage sur la distribution du courant

IV.4.1.2 - Influence de l'excentrage sur le champ E_z

IV.4.1.3 - Influence de l'excentrage sur l'impédance d'entrée
et la fréquence d'accord

IV.4.2 - Milieu à 3 couches (p.165)

IV.4.2.1 - Repartition du courant sur l'antenne

IV.4.2.2 - Impédance d'entrée - Fréquence d'accord

IV.4.3 - Influence de la perméabilité (p.167)

CONCLUSION (p.173)

INTRODUCTION

Nous nous sommes intéressés dans le chapitre précédent à étudier l'influence du forage sur les caractéristiques électriques d'une antenne centrée. Nous allons nous attacher plus particulièrement dans ce chapitre à déterminer l'effet de l'excentrage de l'antenne sur la répartition du courant, la fréquence d'accord, ...

Nous établirons dans un premier temps le potentiel de Hertz sous sa forme intégrale, dans une couche d'indice (i). L'excentrage d'un dipole ne conservant plus la symétrie de révolution cylindrique du problème étudié, ceci se traduit physiquement par l'addition d'un terme supplémentaire au potentiel électrique, appelé potentiel magnétique. Nous noterons ce potentiel par la suite $\vec{\Pi}^*$.

Nous étudierons successivement le rayonnement d'un dipole placé dans un milieu stratifié radialement à 2 couches, puis à 3 couches.

Les conditions de continuité du champ tangentiel sur chaque interface de séparation permettent de déterminer les constantes d'intégration des potentiels de Hertz $\vec{\Pi}$ et $\vec{\Pi}^*$. Nous établirons par la suite les expressions des composantes du champ électrique et magnétique. En se plaçant dans les conditions d'une antenne filaire mince, le champ rayonné par l'antenne est la superposition des rayonnements de chacun des dipôles élémentaires. La résolution de l'équation intégrale du champ se fait par la méthode des moments, et nous déduisons ensuite la matrice impédance généralisée [Z].

L'étude numérique ne nécessite pas un développement particulier, seule la convergence des calculs doit être soigneusement examinée.

Dans les applications numériques, nous comparons le champ rayonné E_z dans le milieu (0) ou dans le milieu encaissant, par rapport aux résultats obtenus dans le troisième chapitre (Dipole centré), nous donnerons également quelques exemples de la variation de l'impédance d'entrée de l'antenne, de sa fréquence d'accord en fonction de l'excentrage,...

IV.1 - EXPRESSIONS DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Nous avons établi dans le chapitre précédent, le potentiel de Hertz pour un D.E.V centré sur l'axe du forage. Compte tenu de la symétrie de révolution géométrique du problème nous avons vu que le potentiel de Hertz admet une seule composante dirigée suivant l'axe oz. Dans ce chapitre, nous abordons le cas général du dipole excentré. En effet la symétrie de révolution cylindrique n'est plus conservée et ceci va se traduire par l'addition d'un terme supplémentaire, le potentiel magnétique, orienté également suivant l'axe oz. Nous noterons par la suite ce potentiel Π^* .

Les composantes \vec{E}_i et \vec{H}_i du champ dérivent de $\vec{\Pi}_i$ et $\vec{\Pi}_i^*$ par les relations suivantes :

$$\vec{E}_i = \text{rot rot } \vec{\Pi}_i \vec{k} - j\omega\mu_i \text{rot } \vec{\Pi}_i^* \vec{k} \quad (\text{IV.1})$$

$$\vec{H}_i = (\sigma_i + j\omega\epsilon_i) \text{rot } \vec{\Pi}_i \vec{k} + \text{rot rot } \vec{\Pi}_i^* \vec{k} \quad (\text{IV.2})$$

\vec{k} : vecteur unitaire suivant z, i = 0, 1, 2 caractérise le milieu de propagation.

On se place dans les conditions où chaque milieu est isotrope et homogène. Nous supposons ensuite l'existence d'une unique source de rayonnement de nature électrique, qui est un dipole infinitésimal placé dans le milieu(0).

Les potentiels de Hertz $\vec{\Pi}_i$ et $\vec{\Pi}_i^*$ devront chacun satisfaire l'équation d'onde :

$$(\Delta - \gamma_i^2) \vec{\Pi}_i = - \frac{\vec{P}}{\epsilon} \delta(R) \quad (\text{IV.3})$$

pour le potentiel de Hertz électrique et :

$$(\Delta - \gamma_i^2) \vec{\Pi}_i^* = 0 \quad (\text{IV.4})$$

pour le potentiel de Hertz magnétique.

$\Delta, \gamma_i, P, \delta(R)$ sont donnés en (III.1).

La solution générale des équations (IV.3) et (IV.4) a été déterminée dans le cas d'un dipole centré, son expression est donnée par:

$$\Pi_i(r, z) = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[f_i K_0(r U_i) + g_i I_0(r U_i) \right] \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (IV.5)$$

r et z représentent respectivement les distances verticale et radiale entre la source et le point de réception. Si on se place dans les conditions de la figure (IV - 1) représentant la géométrie étudiée dans un système d'axe de coordonnées cylindriques. Ces distances (r et z) seront notées d'une façon plus générale \hat{r} et \hat{z} .

avec $\hat{z} = z - z'$ et \hat{r} la distance radiale entre la source et le point et de réception donnée en coordonnées cylindriques par:

$$\hat{r} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos(\psi - \psi')}$$

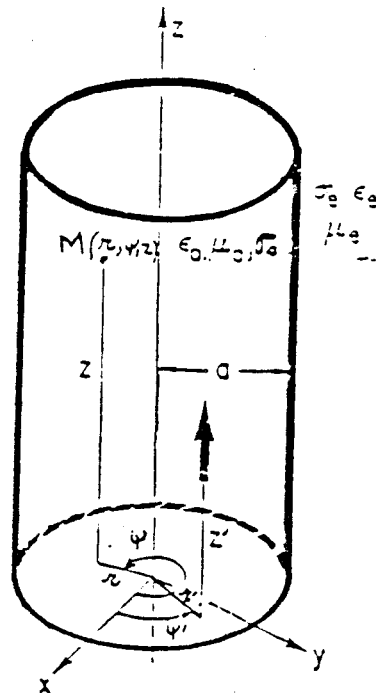


Figure (IV - 1)

En introduisant le théorème d'addition des fonctions de Bessel :

$$K_0(\hat{r} U_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} I_m(r' U_0) K_m(r U_0) e^{-jm(\psi - \psi')} \quad (IV.6)$$

L'expression (IV.5) s'écrit d'une façon plus générale:

$$\Pi_i = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[f_{im} K_m(r U_i) + g_{im} I_m(r U_i) \right] e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda\hat{z}} \cdot d\lambda$$

Pour le potentiel de Hertz électrique, et:

(IV.7)

$$\Pi_i^* = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[h_{im} K_m(r U_i) + A_{im} I_m(r U_i) \right] e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda\hat{z}} \cdot d\lambda$$

Pour le potentiel de Hertz magnétique, puisque (IV.3) et (IV.4) ont une même solution générale .

$I_m(r U_i)$: fonction de bessel modifiée de 1^{ère} espèce d'ordre m

$K_m(r U_i)$: fonction de bessel modifiée de 2^{ème} espèce d'ordre m

f_{im} , g_{im} , h_{im} , A_{im} constantes d'intégration inconnues .

$$U_i = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_i^2} \quad , \quad \lambda : \text{variable réelle} \quad \text{et} \quad \hat{\psi} = \psi - \psi'$$

Le développement des formules en (IV.1) et (IV.2), mène aux expressions suivantes du champ:

$$\begin{aligned}
 E_{i,r} &= \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \Pi_i - j\omega \mu_i \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_i^*}{\partial \psi} \\
 E_{i,\psi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \psi \partial z} \Pi_i + j\omega \mu_i \frac{\partial \Pi_i^*}{\partial r}
 \end{aligned} \tag{IV.8}$$

$$E_{i,z} = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_i^2 \right] \Pi_i$$

pour les composantes électriques , et :

$$\begin{aligned}
 H_{i,r} &= (\sigma_i + j\omega \varepsilon_i) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} \Pi_i + \frac{\partial^2 \Pi_i^*}{\partial r \partial z} \\
 H_{i,\psi} &= -(\sigma_i + j\omega \varepsilon_i) \frac{\partial \Pi_i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_i^*}{\partial \psi \partial z}
 \end{aligned} \tag{IV.9}$$

$$H_{i,z} = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_i^2 \right] \Pi_i^*$$

pour les composantes du champ magnétique.

Afin de simplifier l'écriture des potentiels et du champ électromagnétique, on voit, d'après l'équation (IV.7) que les différentes composantes notées sous forme condensée Γ peuvent se mettre sous la forme

$$\Gamma_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{i,m} e^{-jm\psi} e^{-j\lambda z} d\lambda \tag{IV.10}$$

avec :

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} -j\lambda \Gamma_{i,m} e^{-jm\hat{\psi}} e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda$$

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial \psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} -jm \Gamma_{i,m} e^{-jm\hat{\psi}} e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda$$

(IV. 11)

Γ_i est donc l'une des composantes du champ ou du potentiel de Hertz.
On obtient pour les composantes réduites du champ électromagnétique:

$$E_{im,r} = -j\lambda \frac{\partial \Pi_{im}}{\partial r} - \frac{m\omega \mu_i}{r} \Pi_{im}^*$$

$$E_{im,\psi} = \frac{-m\lambda}{r} \Pi_{im} + j\omega \mu_i \frac{\partial \Pi_{im}^*}{\partial r}$$

(IV. 12)

$$E_{im,z} = -U_i^2 \Pi_{im}$$

pour les composantes réduites du champ électrique, et:

$$H_{im,r} = -jm (\sigma_i + j\omega \epsilon_i) \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_{im}}{\partial \psi} - j\lambda \frac{\partial \Pi_{im}^*}{\partial r}$$

$$H_{im,\psi} = -(\sigma_i + j\omega \epsilon_i) \frac{\partial \Pi_{im}}{\partial r} - \frac{m\lambda}{r} \Pi_{im}^*$$

(IV. 13)

$$H_{im,z} = -U_i^2 \Pi_{im}^*$$

pour les composantes réduites du champ magnétique .

IV.2 - REPRESENTATION INTEGRALE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

IV.2.1 - Représentation intégrale du potentiel primaire:

Nous sommes ramenés à déterminer la solution particulière de l'équation d'onde (IV.3) dans le milieu (0). Π_{op} doit s'exprimer sous une forme intégrale du type (IV.7). Pour cela, il suffit de remplacer r par \hat{r} dans l'expression du potentiel primaire en (III.24), en introduisant ensuite l'identité de Bessel (IV.6) on obtient :

$$\Pi_{op} = \frac{I dl}{4\pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_m(rU_o) \cdot I_m(r'U_o) e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda \quad (IV.14)$$

Le potentiel de Hertz magnétique sera uniquement secondaire puisqu'il n'existe pas de source magnétique dans le milieu (0).

IV. 2.2 - Potentiel de Hertz - milieu à 2 couches

Les vecteurs de Hertz Π_o , Π_o^* , Π_1 et Π_1^* possèdent une seule composante, dirigée suivant l'axe oz . La solution générale se met dans ces conditions sous la forme suivante:

milieu (0)

$$\Pi_{os} = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{om} I_m(rU_o) e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda \quad (IV.15)$$

$$\Pi_{os}^* = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{om} I_m(rU_o) e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda$$

En effet les constantes f_{om} et h_{om} doivent être nulles , puisque la fonction de Bessel modifiée $K_m(rU_o)$ tend vers l'infini quand r tend vers zéro. Le potentiel de Hertz s'écrit dans le milieu(0) :

$$\begin{aligned}\Pi_o &= \Pi_{op} + \Pi_{os} \\ \Pi_o^* &= \Pi_{os}^*\end{aligned}\tag{IV. 16}$$

milieu (1) :

$$\Pi_1 = \Pi_{1s} = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{1m} K_m(rU_1) e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda\tag{IV. 17}$$

$$\Pi_{1s}^* = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_{1m} K_m(rU_1) e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda$$

Π_{1s} et Π_{1s}^* devant s'annuler à l'infini, les constantes g_{1m} et A_{1m} de l'équation (IV.7) doivent être nulles pour éviter une divergence du potentiel.

Le problème consiste maintenant à déterminer les constantes d'intégration : g_{om} , A_{om} , f_{1m} et h_{1m} .

IV .2.2.1 - Conditions aux limites - composantes du champ :

La continuité du champ tangentiel à la surface de séparation milieu(0)-milieu(1), se traduit par les relations suivantes :

$$\left| \begin{aligned} E_{o,z}(M) &= E_{1,z}(M) \\ H_{o,z}(M) &= H_{1,z}(M) \\ E_{o,\psi}(M) &= E_{1,\psi}(M) \\ H_{o,\psi}(M) &= H_{1,\psi}(M) \end{aligned} \right| \text{ pour } r = a\tag{IV. 18}$$

ceci conduit à résoudre un système de 4 équations à 4 inconnues . En faisant appel à la formule (IV - 9) des composantes réduites , on obtient :

$$U_o^2 \Pi_{om} = U_1^2 \Pi_{1m}$$

$$U_o^2 \Pi_{om}^* = U_1^2 \Pi_{1m}^*$$

(IV.19)

$$\frac{-m\lambda}{a} \Pi_{om} + j\omega \mu_o \frac{\partial \Pi_{om}^*}{\partial r} = \frac{-m\lambda}{a} \Pi_{1m} + j\omega \mu_1 \frac{\partial \Pi_{1m}^*}{\partial r}$$

$$\frac{\gamma_o^2}{j\omega\mu_o} \frac{\partial \Pi_{om}}{\partial r} + \frac{m\lambda}{a} \Pi_{om}^* = \frac{\gamma_1^2}{j\omega\mu_1} \frac{\partial \Pi_{1m}}{\partial r} + \frac{m\lambda}{a} \Pi_{1m}^*$$

Le calcul développé du système (IV.19) est explicité en Annexe 3 et on montre en particulier que les expressions des constantes d'intégrations secondaires sont données par :

$$g_{om} = -f_{om} \frac{K_m(aU_o)}{I_m(aU_o)} \frac{F(\alpha_{2m})}{F(\alpha_{1m})}$$

$$A_{om} = f_{om} \frac{1}{j\omega\mu_o} \cdot \frac{1}{a I_m^2(aU_o)} \frac{\theta_m}{F(\alpha_{1m})}$$

$$f_{1m} = f_{om} \cdot \frac{U_o^3}{U_1^2} \cdot \frac{\gamma_o^2}{a} \frac{1}{I_m(aU_o) K_m(aU_1)} \frac{\alpha_{om}}{F(\alpha_{1m})} \quad (IV.20)$$

$$h_{1m} = \frac{f_{om}}{j\omega \mu_o} \left[\frac{U_o}{U_1} \right]^2 \frac{1}{I_m(aU_o) K_m(aU_1)} \frac{\theta_m}{F(\alpha_{1m})}$$

avec :

$$f_{om} = \frac{I \, dl}{4\pi^2 (\sigma + j\omega\epsilon)} I_m(r' U_o)$$

$$\theta_m = \frac{m\lambda}{a} \left[1 - \left[\frac{U_o}{U_1} \right]^2 \right]$$

$$\alpha_{om} = \frac{I'_m}{I_m} - \frac{U_o}{U_1} \frac{\mu_1}{\mu_o} \cdot \frac{K'_m(aU_1)}{K_m(aU_1)}$$

(IV.21)

$$\alpha_{1m} = \frac{\mu_1}{\mu_o} \frac{I'_m}{I_m} - \frac{U_o}{U_1} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_o^2} \frac{K'_m(aU_1)}{K_m(aU_1)}$$

$$\alpha_{2m} = \frac{\mu_1}{\mu_o} \frac{K'_m}{K_m} - \frac{U_o}{U_1} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_o^2} \frac{K'_m(aU_1)}{K_m(aU_1)}$$

$$F(\alpha_{im}) = \frac{\mu_1}{\mu_o} \theta_m^2 + U_o^2 \gamma_o^2 \cdot \alpha_{om} \cdot \alpha_{im} \quad i = 1, 2$$

Si la variable des fonctions de Bessel n'est pas précisée cela signifie que l'argument est aU_o .

Les dérivées des fonctions de Bessel k'_m et I'_m sont données en annexe 4.

En faisant appel aux expressions (IV.8) et (IV.9), on déduit aisément les expressions du champ électromagnétique. Les bornes d'intégration, et l'ordre de sommation se réduisent puisque toutes les fonctions sont paires (Annexe 4). Comme nous nous intéressons par la suite au champ rayonné par l'antenne suivant l'axe oz, nous allons expliciter la composante E_z .

milieu (0):

Le champ électrique dans ce milieu se décompose en un champ primaire et un champ secondaire :

$$E_{o,z} = E_{o,z}^P + E_{o,z}^S$$

$E_{o,z}^P$ est le champ rayonné par un dipole électrique vertical dans un milieu homogène et infini, il est donné en (II.14). La composante secondaire s'écrit :

$$E_{o,z}^S = -2. \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o^2 \left[g_{oo} I_o(rU_o) + 2. \sum_{m=0}^{+\infty} g_{om} I_m(rU_o) \cos(m\hat{\psi}) \right] \cos(\lambda\hat{z}) d\lambda \quad (IV.22)$$

milieu (1) :

$$E_{1,z} = -2. \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_1^2 \left[f_{1o} K_o(rU_1) + 2. \sum_{m=0}^{+\infty} f_{1m} K_m(rU_1) \cos(m\hat{\psi}) \right] \cos(\lambda\hat{z}) d\lambda \quad (IV.23)$$

g_{oo} et f_{1o} sont déterminées respectivement à partir de g_{om} et f_{1m} pour $m = 0$.

IV.2.3 - Potentiel de Hertz - milieu à 3 couches :

On considère dans ce paragraphe un milieu stratifié radialement à 3 couches. Affectons à chacun des milieux une conductivité σ_i , une permittivité ϵ_i et une perméabilité μ_i . Nous nous plaçons dans les mêmes conditions que le paragraphe précédent (milieu à 2 couches), c'est-à-dire que le dipole source est placé dans le milieu (0) et contient pour unique source de rayonnement un dipole électrique verticale de moment "I dl". Le tube isolant contenant le dipole est de rayon "a". L'épaisseur de l'isolant étant faible, on peut négliger en première approximation son influence. Le schéma représenté sur la figure (IV - 2) montre que l'antenne est placée dans le milieu (0) qui est généralement l'air, le milieu (1) peut être très conducteur si le forage est rempli d'eau, le milieu (2) est le sol.

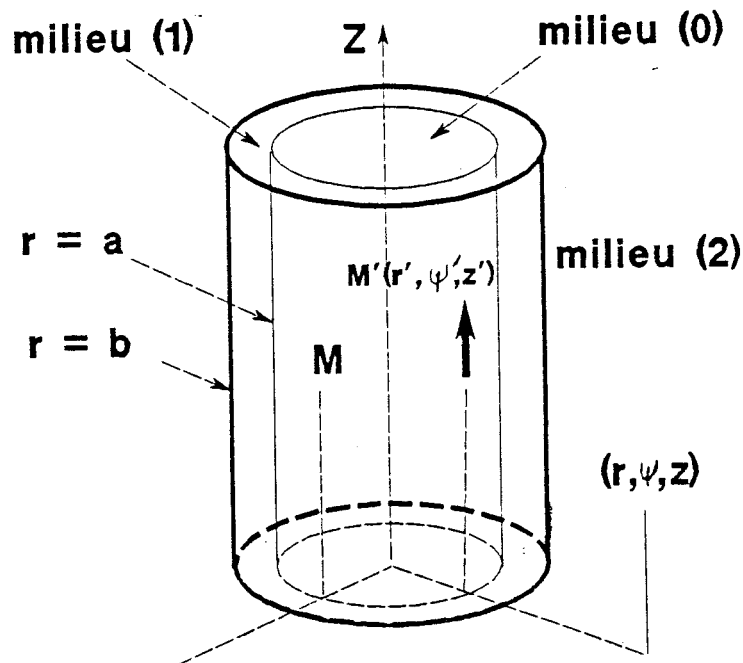


Figure IV - 2 DIPOLE EXCENTRE DANS UN MILIEU A 3 COUCHES

La solution générale des potentiels de Hertz Π_i et Π_i^* dans chacun des milieux (0, 1, 2) donnée en (IV.7) se réduit dans le cas présent à:

milieu (0)

$$\Pi_o = \Pi_{op} + \Pi_{os}$$

$$\Pi_{os} = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_{om} I_m(rU_o) e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda \quad (IV.24)$$

$$\Pi_{os}^* = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{om} I_m(rU_o) e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda$$

Π_{op} reste identique à celui calculé en (IV.14) pour un milieu à 2 couches. Π_{os} et Π_{os}^* étant solution générale de l'équation d'onde (IV.3) et (IV.4).

milieu (1)

$$\Pi_1 = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[f_{1m} K_m(rU_1) + g_{1m} I_m(rU_1) \right] e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda \quad (IV.25)$$

$$\Pi_1^* = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[h_{1m} K_m(rU_1) + A_{1m} I_m(rU_1) \right] e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda$$

milieu (2) :

Dans le milieu (2) le potentiel de Hertz, uniquement secondaire, doit s'annuler à l'infini . Les constantes g_{2m} et A_{2m} sont donc nulles, afin d'éviter une divergence du potentiel

$$\Pi_2 = \Pi_{2s} = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{2m} K_m(rU_2) e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda$$

$$\Pi_{2s}^* = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_{2m} K_m(rU_2) e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda \quad (IV.26)$$

Nous sommes ramenés à nouveau à déterminer les constantes d'intégration secondaires.

IV.2.3 1 Conditions aux limites - composantes du champ

Les conditions de continuité du champ tangentiel sur les interfaces de séparation milieu(0)-milieu(1) et milieu(1)-milieu(2), conduisent à:

$$\left| \begin{array}{l} E_{o,z}(M) = E_{1,z}(M) \\ H_{o,z}(M) = H_{1,z}(M) \\ E_{o,\psi}(M) = E_{1,\psi}(M) \\ H_{o,\psi}(M) = H_{1,\psi}(M) \end{array} \right| \text{ pour } r=a \quad \left| \begin{array}{l} E_{1,z}(M) = E_{2,z}(M) \\ H_{1,z}(M) = H_{2,z}(M) \\ E_{1,\psi}(M) = E_{2,\psi}(M) \\ H_{1,\psi}(M) = H_{2,\psi}(M) \end{array} \right| \text{ r = b} \quad (IV.27)$$

qui sont valables pour toute valeur de z.

En introduisant les relations de Maxwell (IV.12) et (IV.13) donnant l'écriture réduite du champ électromagnétique, on obtient:

pour $r = a$

$$\begin{aligned}
 U_0^2 \Pi_{0m} &= U_1^2 \Pi_{1m} \\
 U_0^2 \Pi_{0m}^* &= U_1^2 \Pi_{1m}^* \\
 \frac{-m\lambda}{a} \Pi_{0m} + j\omega \mu_0 \frac{\partial \Pi_{0m}^*}{\partial r} &= \frac{-m\lambda}{a} \Pi_{1m} + j\omega \mu_1 \frac{\partial \Pi_{1m}^*}{\partial r} \\
 \frac{\gamma_0^2}{j\omega\mu_0} \frac{\partial \Pi_{0m}}{\partial r} + \frac{m\lambda}{a} \Pi_{0m}^* &= \frac{\gamma_1^2}{j\omega\mu_1} \frac{\partial \Pi_{1m}}{\partial r} + \frac{m\lambda}{a} \Pi_{1m}^*
 \end{aligned} \tag{IV.28}$$

pour $r = b$

$$\begin{aligned}
 U_1^2 \Pi_{1m} &= U_2^2 \Pi_{2m} \\
 U_1^2 \Pi_{1m}^* &= U_2^2 \Pi_{2m}^* \\
 \frac{-m\lambda}{b} \Pi_{1m} + j\omega \mu_1 \frac{\partial \Pi_{1m}^*}{\partial r} &= \frac{-m\lambda}{b} \Pi_{2m} + j\omega \mu_2 \frac{\partial \Pi_{2m}^*}{\partial r} \\
 \frac{\gamma_1^2}{j\omega\mu_1} \frac{\partial \Pi_{1m}}{\partial r} + \frac{m\lambda}{b} \Pi_{1m}^* &= \frac{\gamma_2^2}{j\omega\mu_2} \frac{\partial \Pi_{2m}}{\partial r} + \frac{m\lambda}{b} \Pi_{2m}^*
 \end{aligned} \tag{IV.29}$$

(IV.28) et (IV.29) forment un système de 8 équations à 8 inconnues. La résolution de ce système ainsi que le calcul détaillé des expressions du champ sont données en annexe 4 . On trouve en particulier les constantes d'intégration secondaire en fonction des caractéristiques électriques et géométriques du forage.

$$g_{om} = - f_{om} \frac{K_m}{I_m} \frac{F(\alpha_{4m})}{F(\alpha_{2m})}$$

$$f_{1m} = \frac{f_{om}}{D} \left(\frac{U_o}{U_1} \right)^2 \left\{ - K_m \cdot I_m (bU_1) \left[1 - \frac{F(\alpha_{4m})}{F(\alpha_{2m})} \right] - \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 \frac{\gamma_o^2}{a \cdot b \cdot D} \dots \frac{I_m (aU_1)}{I_m} \frac{F_1}{F(\alpha_{2m})} \right\}$$

$$g_{1m} = \frac{f_{om}}{D} \left(\frac{U_o}{U_1} \right)^2 \left\{ - K_m \cdot K_m (bU_1) \left[1 - \frac{F(\alpha_{4m})}{F(\alpha_{2m})} \right] + \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 \frac{\gamma_o^2}{a \cdot b \cdot D} \dots \frac{K_m (aU_1)}{I_m} \frac{F_1}{F(\alpha_{2m})} \right\}$$

$$f_{2m} = \frac{f_{om}}{D} \left(\frac{U_o}{U_1} \right)^2 \frac{\gamma_o^2}{a \cdot b} \cdot \frac{1}{I_m \cdot K_m (bU_2)} \frac{F_1}{F(\alpha_{2m})} \quad (IV.30)$$

f_{om} étant la constante d'intégration primaire donnée en (IV.21)

Les autres termes s'expriment de la façon suivante :

$$F(\alpha_{im}) = (\vartheta_{om}^2 + U_o^2 \gamma_o^2 \alpha_{1m} \alpha_{im}) (\vartheta_{1m}^2 + U_2^2 \gamma_2^2 \alpha_{om} \alpha_{3m}) + \left(\frac{U_o \cdot U_2}{U_1^2} \right)^2 \cdot \frac{\gamma_1^4}{a \cdot b \cdot D^2}$$

$$\dots \frac{-2 \cdot \vartheta_{om} \cdot \vartheta_{1m}}{\gamma_1^2} + \left(\frac{U_o \cdot U_2}{U_1^2} \right)^2 \frac{1}{a \cdot b \cdot D^2} + U_o U_2 \left[\frac{\gamma_o^2 \gamma_2^2}{\gamma_1^4} \alpha_{im} \alpha_{3m} + \alpha_{om} \alpha_{1m} \right]$$

pour $i = 2, 4$

$$F_1 = \vartheta_{om} \vartheta_{1m} - U_o U_2 \gamma_1^2 \alpha_{om} \alpha_{1m} - \gamma_1^2 \left[\frac{U_o \cdot U_2}{U_1^2} \right]^2 \frac{1}{a \cdot b \cdot D^2}$$

$$D = K_m(aU_1) I_m(bU_1) - K_m(bU_1) I_m(aU_1)$$

$$\vartheta_{om} = \frac{m\lambda}{a} \left[1 - \left(\frac{U_o}{U_1} \right)^2 \right] \quad ; \quad \vartheta_{1m} = \frac{m\lambda}{b} \left[1 - \left(\frac{U_1}{U_2} \right)^2 \right]$$

$$\alpha_{om} = \frac{K'_m(bU_2)}{K_m(bU_2)} - \frac{U_2}{U_1} \beta_{om} \quad ; \quad \alpha_{1m} = \frac{I'_m}{I_m} + \frac{U_o}{U_1} \beta_{1m}$$

$$\alpha_{2m} = \frac{I'_m}{I_m} + \frac{U_o}{U_1} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_o^2} \beta_{1m}$$

$$\alpha_{3m} = \frac{K'_m(bU_2)}{K_m(bU_2)} - \frac{U_2}{U_1} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} \beta_{om} \quad ; \quad \alpha_{4m} = \frac{K'_m}{K_m} - \frac{U_o}{U_1} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_o^2} \beta_{1m}$$

et :

$$\beta_{om} = \frac{K_m \cdot I'_m(bU_1) - I_m \cdot K'_m(bU_1)}{K_m \cdot I_m(bU_1) - I_m \cdot K_m(bU_1)} \quad ; \quad \beta_{1m} = \frac{I'_m \cdot K_m(bU_1) - K'_m \cdot I_m(bU_1)}{K_m \cdot I_m(bU_1) - I_m \cdot K_m(bU_1)}$$

$$U_i = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_i^2}$$

Si la variable des fonctions de Bessel n'est pas précisée cela signifie que l'argument est aU_o

Remarque :

Les constantes d'intégration, donc les composantes du potentiel de Hertz pour un milieu à 2 couches, ne peuvent pas être obtenues à partir des expressions du milieu à 3 couches en prenant des caractéristiques électriques identiques pour deux milieux successifs, en faisant tendre le rayon a vers b compte tenu des singularités qui apparaissent dans les dénominateurs des différentes fonctions.

Le problème consiste maintenant à déterminer les composantes du champ dans chaque milieu. Le calcul développé en Annexe 4 montre que le champ E_z est pair par rapport à "m" et "λ", ce qui mène aux composantes suivantes:

milieu (0):

$$E_{oz} = E_{oz}^p + E_{oz}^s$$

$$E_{o,z}^s = -2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o^2 \left[g_{oo} I_o(rU_o) + 2 \sum_{m=0}^{+\infty} g_{om} I_m(rU_o) \cos(m\hat{\psi}) \right] \cos(\lambda\hat{z}) d\lambda \quad (IV.31)$$

milieu (1):

$$E_{1,z} = -2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_1^2 \left[f_{1o} K_o(rU_1) + g_{1o} I_o(rU_1) + 2 \sum_{m=0}^{+\infty} \left[f_{1m} K_m(rU_1) + g_{1m} \right. \right. \\ \left. \left. \dots I_m(rU_1) \cos(m\hat{\psi}) \right] \cos(\lambda\hat{z}) d\lambda \quad (IV.32)$$

milieu (2):

$$E_{1,z} = -2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_2^2 \left[f_{2o} K_o(rU_2) + 2 \sum_{m=0}^{+\infty} f_{2m} K_m(rU_2) \cos(m\hat{\psi}) \right] \cos(\lambda\hat{z}) d\lambda \quad (IV.33)$$

g_{00} , f_{10} , g_{10} et f_{20} sont calculées respectivement à partir de g_{0m} , f_{1m} , g_{1m} et f_{2m} en prenant dans (IV.30) $m = 0$.

IV . 3 - ANTENNE MINCE EXCENTREE DANS UN FORAGE :

Rappelons que pour calculer le champ rayonné par l'antenne en un point de l'espace, on considère l'antenne comme une succession de dipôles élémentaires, et on somme la contribution de tous ses éléments.

Le champ tangentiel à la surface de l'antenne, située dans le milieu (0), composé du champ incident E_z^i et du champ rayonné E_z^r , doit être nul puisque l'antenne est supposée infiniment conductrice. Ceci mène à :

$$E_{o,z}^i + E_{o,z}^r = 0$$

$$E_{o,z}^i = - \int_{z_i}^{z_s} E_{o,z}^p \cdot dz - \int_{z_i}^{z_s} E_{o,z}^s \cdot dz \quad (IV.34)$$

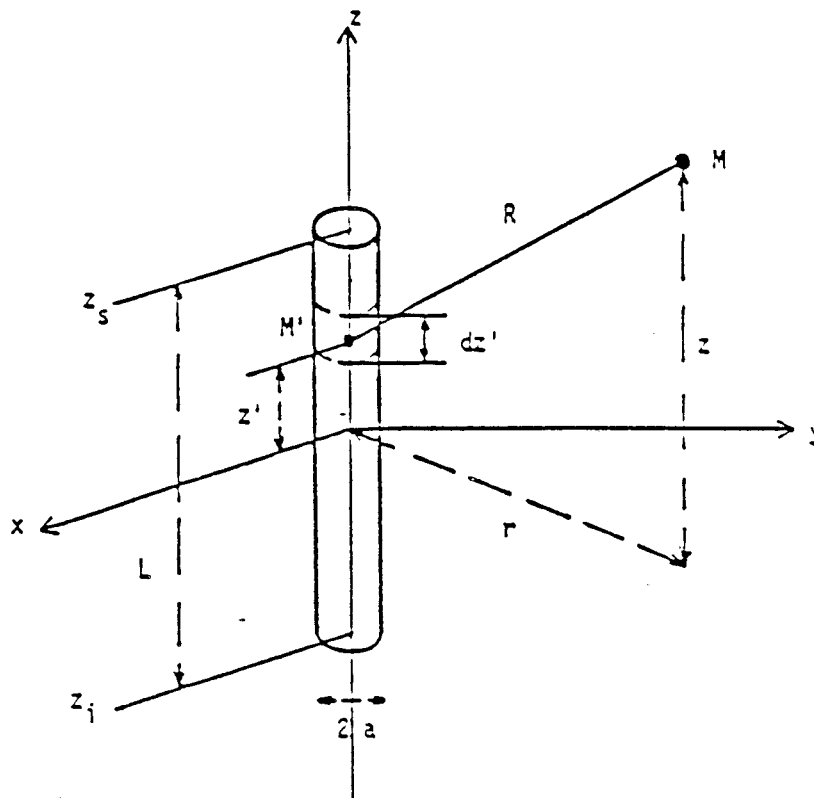


Figure IV - 4 : antenne filaire

IV.3.1 - Matrice impédance

La matrice d'impédance généralisée traduisant le couplage entre tous les éléments de la structure se met sous la forme:

$$[Z] = [Z] + [Z]^S \quad (IV.35)$$

l'élément Z_{mn}^p traduisant le couplage primaire entre deux éléments de la structure m et n est explicité en (II.45), il est indépendant des caractéristiques électriques et géométriques du forage .

Nous nous intéressons par la suite à déterminer les éléments de la matrice généralisée secondaire $[Z]^S$.

Afin de mettre en évidence le moment électrique du dipole, posons dans (IV.20) et (IV.30):

$$g_{om} = g'_{om} I_m(r' U_o) \frac{i(z') dz'}{4\pi^2 (\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \quad (IV.36)$$

où $i(z')$ est le courant sur l'antenne d'émission à l'abscisse z' .

En remplaçant, dans la formule (IV.34) $E_{o,z}^S$ par son expression (IV.31) on obtient l'équation intégrale dont le courant $i(z')$ est solution . Comme précédemment, cette équation est résolue par la méthode des moments. En choisissant comme fonctions de base et de test des fonctions triangulaires sur une largeur 2Δ et centrées sur les abscisses z_n et z_k , on obtient en suivant une démarche analogue à celle décrite dans le chapitre précédent

$$\begin{aligned}
 \langle E_{oz}^{i,s} ; w_k(z) \rangle = & \frac{1}{2\pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \sum_{n=1}^N i_n \int_{z_n-\Delta}^{z_n+\Delta} \int_{z_k-\Delta}^{z_k+\Delta} \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o^2 \left[g'_{oo} I_o(rU_o) \right. \\
 & \left. \dots I_o(r'U_o) + 2 \sum_{m=0}^{+\infty} g'_{om} I_m(rU_o) I_m(r'U_o) \right] \cos(\lambda z) w_k(z) \phi_n(z') d\lambda dz'
 \end{aligned}
 \tag{IV.37}$$

l'intégrale triple se réduit en une intégrale simple et les calculs détaillés en annexe 3 mènent à:

$$\begin{aligned}
 \langle E_{oz}^{i,s} ; w_k(z) \rangle = & \frac{\Delta^2}{2\pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \sum_{n=1}^N i_n \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o^2 \left[g'_{oo} I_o(rU_o) I_o(r'U_o) + \right. \\
 & \left. \dots 2 \sum_{m=0}^{+\infty} g'_{om} I_m(rU_o) I_m(r'U_o) \right] \cos\lambda(z_k - z_n) \frac{\sin^4\left[\frac{\lambda \Delta}{2}\right]}{\left[\frac{\lambda \Delta}{2}\right]^4} d\lambda
 \end{aligned}
 \tag{IV.38}$$

$\Delta = \frac{L}{N+1}$ (L longueur de l'antenne et Δ : longueur d'un segment élémentaire)

$$\langle E_{oz}^{i,s} ; w_k(z) \rangle \approx E_{oz}^{i,s} (z_k) \times \Delta = V_k^s$$

L'équation (IV - 37) s'exprime sous forme matricielle par:

$$[V]^s = [Z]^s \times [i]$$

les impédances mutuelles de la matrice $[Z]^S$ sont données par:

$$Z_{kn}^S = \frac{\Delta^2}{2\pi^2(\sigma + j\omega\epsilon_0)} \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_0^2 \left[g'_{00} I_0(rU_0) I_0(r'U_0) + 2 \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} g'_{0m} I_m(rU_0) \dots I_m(r'U_0) \right] \cos\lambda(z_k - z_n) \frac{\sin^4\left(\frac{\lambda \Delta}{2}\right)}{\left(\frac{\lambda \Delta}{2}\right)^4} d\lambda \quad (IV.39)$$

la matrice excitation est donnée par:

$$[V] = [V]^P + [V]^S$$

avec:

$$[V] = [Z]^P [i] + [Z]^S [i] = [Z] [i]$$

Il est intéressant de constater que deux éléments de la matrice $[Z]^S$ sont égaux lorsque la distance les séparant est identique, nous déduisons à nouveau que la matrice généralisée $[Z]$ est de type Toeplitz.

IV. 4 - RESULTATS DES APPLICATIONS NUMERIQUES:

A partir des expressions mathématiques et des méthodes de résolution numérique décrites dans les paragraphes précédents, nous allons examiner l'influence de la position de l'antenne dans le trou du forage sur les caractéristiques d'adaptation et, pour quelques configurations, sur l'amplitude .

Sauf indication contraire, la permittivité du milieu encaissant $\epsilon_r = 5$. l'antenne d'émission est une antenne filaire dont la longueur est "voisine" de celle correspondant à la résonance en $\lambda/2$ soit 75 cm à une fréquence de 200 MHz , car on supposera souvent que la longueur de cette antenne est fixe (les conditions de résonance vont dépendre d'une part de l'environnement et d'autre part de la distance d'excentrage). L'antenne est placée dans le milieu (0).

IV.4.1 - milieu à 2 couches

IV.4.1.1 - Influence de l'excentrage sur la distribution du courant

Les courbes de la planche (IV-1) représentent la distribution du courant sur l'antenne placée dans "un forage sec", le rayon de ce dernier est $a = 4.5$ cm . Trois valeurs d'excentrage "d" ont été envisagées $d = 2$ cm, $d = 3$ et $d = 4$ cm . A titre de comparaison la distribution du courant de l'antenne centrée dans l'axe " $d = 0$ " est également donnée. Le milieu encaissant a pour conductivité $\sigma_1 = 10^{-2}$ S/m. On remarque que pour des valeurs de d allant de 0 à 2 cm, la distribution du courant garde une allure sinusoïdale, la variation du courant maximum est de 8% pour $d = 2$ cm et de 10% pour $d = 3$ cm . Par contre on assiste à une grande diminution du courant et un changement d'allure de la courbe pour $d = 4$ cm , ce qui est caractéristique d'une antenne désadaptée. On doit donc s'attendre à une variation importante du champ E_z , et éventuellement de l'impédance d'entrée de l'antenne. pour cette dernière distance d'excentrage.

IV.4.1.2 - influence de l'excentrage sur le champ E_z

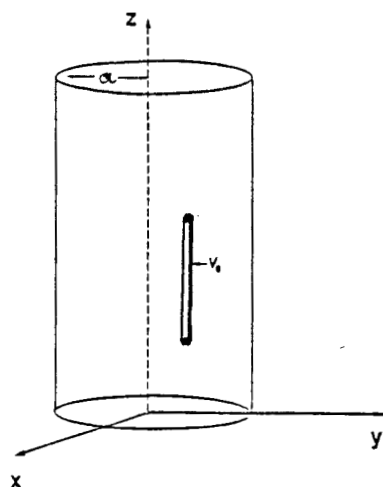
Avant de présenter les résultats concernant l'impédance d'entrée et la fréquence d'accord de l'antenne, il est intéressant de donner la variation du champ E_z dans le milieu (0) lorsque l'émetteur est un dipole élémentaire et lorsque le point de réception est situé sur le même axe .

CHAPITRE IV : INFLUENCE DE LA POSITION DE L'ANTENNE DANS LE TUBE ISOLANT

DISTRIBUTION DU COURANT SUR UNE ANTENNE EXCENTREE

Paramètre: Distance de l'antenne à l'axe du forage

Milieu à 2 couches : AIR / SOL



- Antenne centrée
- - - Antenne à 2 cm de oz
- . . . Antenne à 3 cm de oz
- - - Antenne à 4 cm de oz

$|I|$ en mA

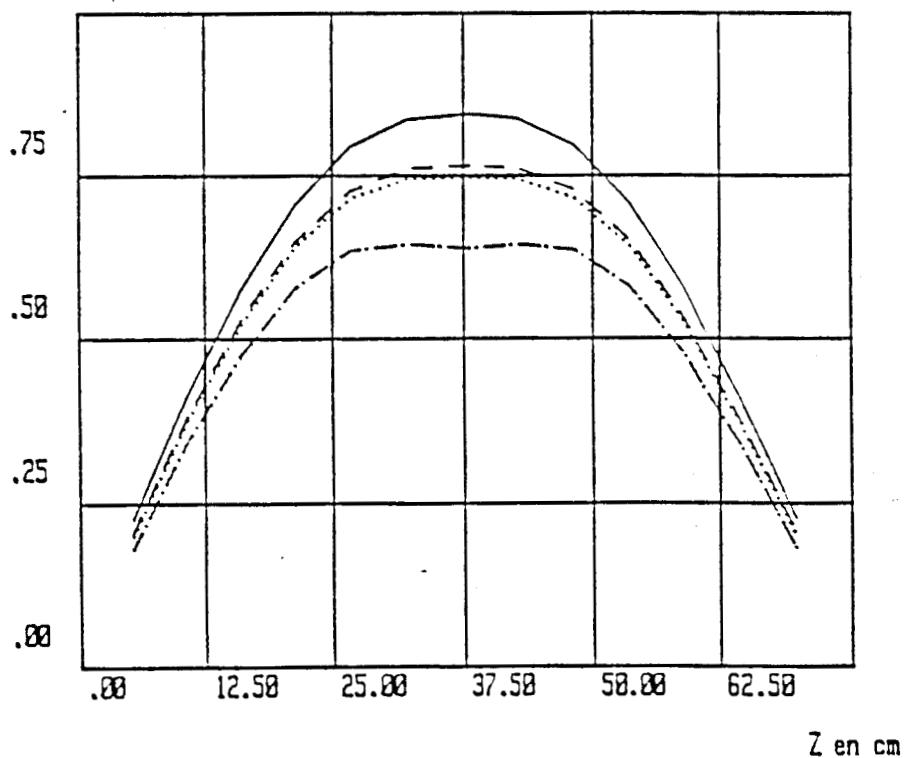


Planche (IV - 1)

Les courbes de la planche (IV - 2) ont été tracées pour des caractéristiques électriques et géométriques identiques à celles du paragraphe précédent, c'est-à-dire $a = 4.5 \text{ cm}$, $\epsilon_{r1} = 5$ et $\sigma_1 = 10^{-2} \text{ S/m}$, le milieu entourant immédiatement l'antenne étant l'air. On remarque une diminution importante du champ pour $d = 3 \text{ cm}$ c'est-à-dire lorsque le dipole source se rapproche de la paroi de séparation des 2 milieux .

IV.4.1.3 - Influence de l'excentrage sur l'impédance d'entrée et la fréquence d'accord

Afin de mettre en évidence l'influence de la conductivité du milieu encaissant sur l'impédance d'entrée de l'antenne, nous avons choisi trois valeurs de conductivité, $\sigma_1 = 10^{-1} \text{ S/m}$, 10^{-2} , et 10^{-3} S/m . On se place dans les mêmes conditions que précédemment : $L = 75 \text{ cm}$ et $\epsilon_{r1} = 5$. La fréquence est prise égale à 179 MHz correspondant à la fréquence de résonance d'une antenne centrée. Sur les planches (IV - 3) et (IV - 4) nous avons représenté les parties réelle et imaginaire de l'impédance d'entrée au milieu de l'antenne en fonction de la distance d'excentrage. On remarque que la partie imaginaire (X_e) est pratiquement indépendante de la conductivité du milieu encaissant pour un décentrage de 1 cm au maximum, par contre la partie réelle (R_e) est sensiblement modifiée pour des conductivités importantes, comme on le note sur la planche (IV - 3). D'autre part pour $d > 1 \text{ cm}$ on enregistre une grande variation de R_e entre $\sigma = 10^{-2}$ et 10^{-1} S/m et de façon moindre pour $\sigma = 10^{-3} \text{ S/m}$.

Les planches (IV - 5) et (IV - 6) représentent les variations de l'impédance d'entrée de l'antenne excitée en son milieu en fonction de la fréquence. La longueur de l'antenne est 75 cm, soit $\lambda/2$ dans l'air, le rayon a du trou de forage est toujours 4.5 cm .

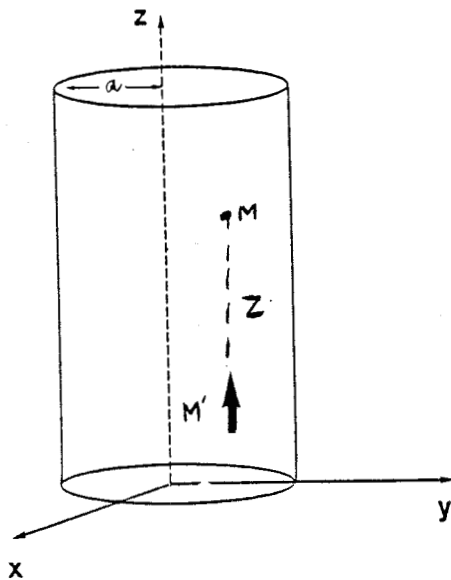
Afin de voir l'influence de la distance d'excentrage sur la fréquence d'accord, les courbes de ces planches ont été tracées pour $d = 2 \text{ cm}$, 3 cm , et 4 cm , la conductivité $\sigma_1 = 10^{-2} \text{ S/m}$ et la permittivité relative étant constante, $\epsilon_{r1} = 5$. A titre de comparaison, la variation de l'impédance d'entrée en fonction de la fréquence pour une antenne centrée a également

CHAPITRE IV : INFLUENCE DE LA POSITION DE L'ANTENNE DANS LE TUBE ISOLANT

VARIATION DE $|E_z|$ EN FONCTION DE LA POSITION DU RECEPTEUR

Comparaison : - Dipole centré
 -- Dipole excentré

Milieu à 2 couches : AIR / SOL



..... Dipole centré
 --- Dipole à 2 cm de oz
 — Dipole à 3 cm de oz

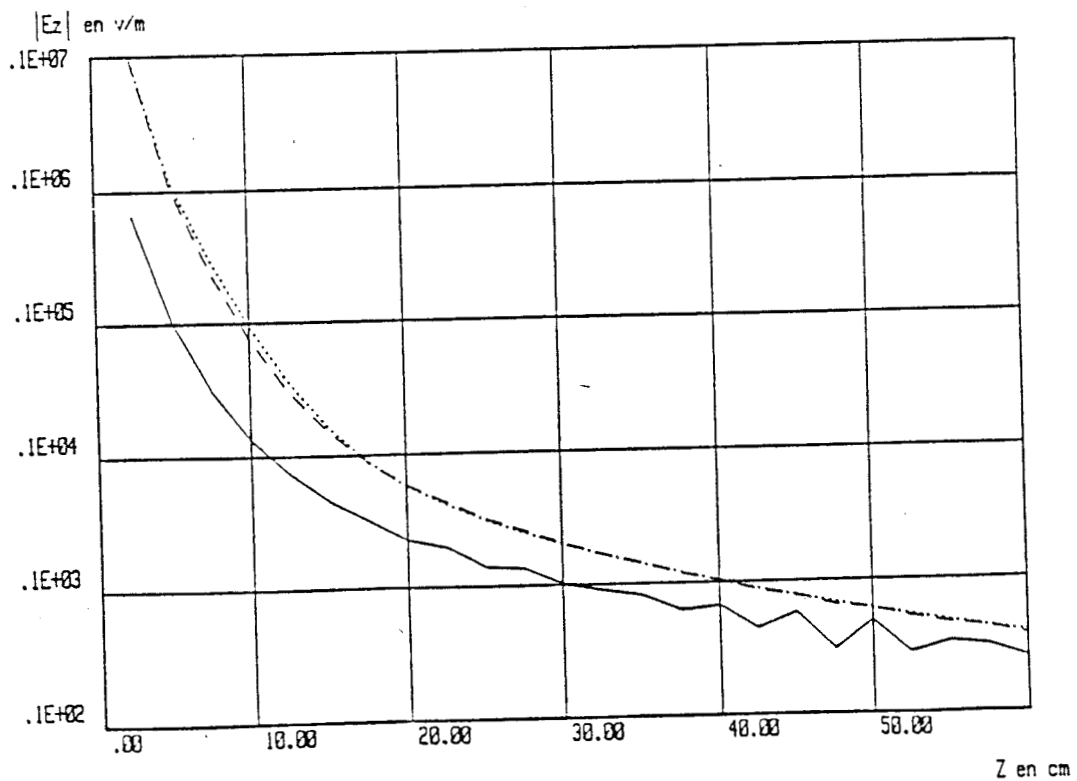


Planche (IV - 2)

VARIATION FREQUENTIELLE DE L'IMPEDANCE D'ENTREE AU MILIEU DE L'ANTENNE

Paramètre : La conductivité

$a = 4.5 \text{ cm}$

R_e (milieu) en Ω

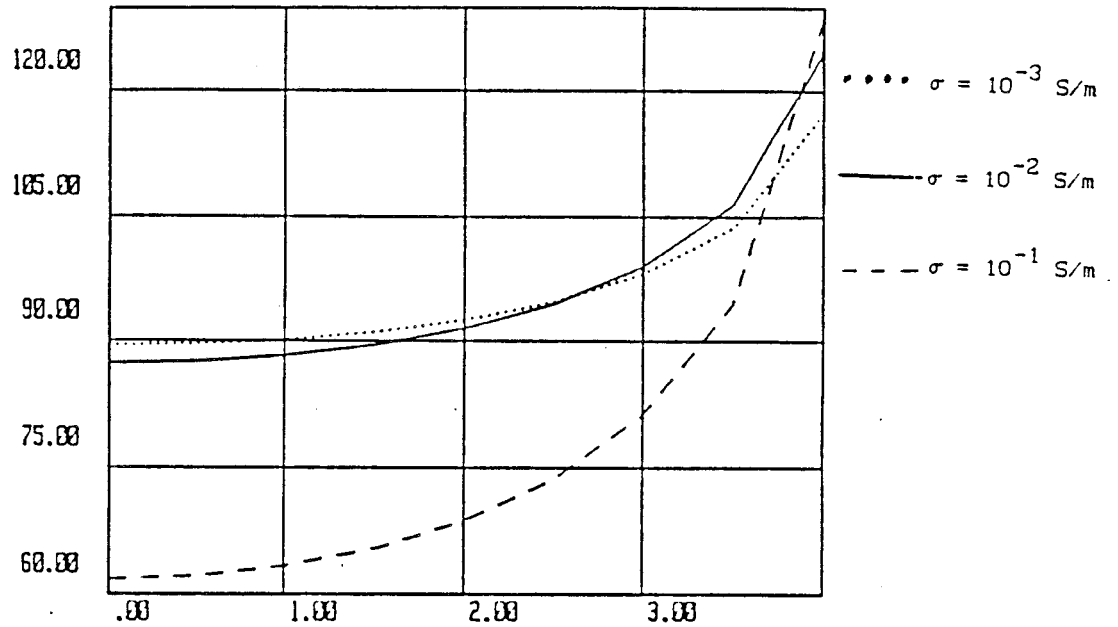
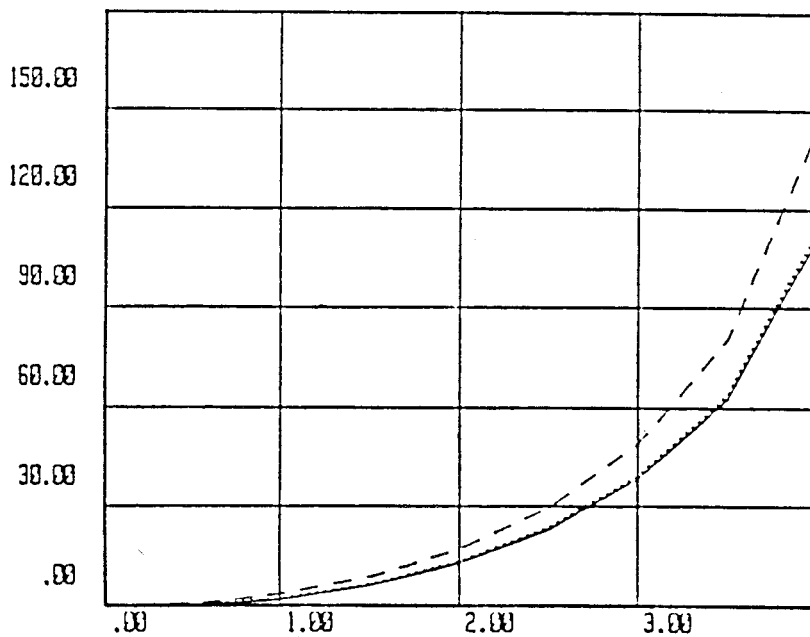


Planche (IV - 3)

d en cm

X_e (milieu) en Ω



d en cm

Planche (IV - 4)

CHAPITRE IV : INFLUENCE DE LA POSITION DE L'ANTENNE DANS LE TUBE ISOLANT

VARIATION FREQUENTIELLE DE L'IMPEDANCE D'ENTREE AU MILIEU DE L'ANTENNE

Paramètre: Distance d'excentrage

R_e (milieu) en Ω Milieu à 2 couches : AIR / SOL

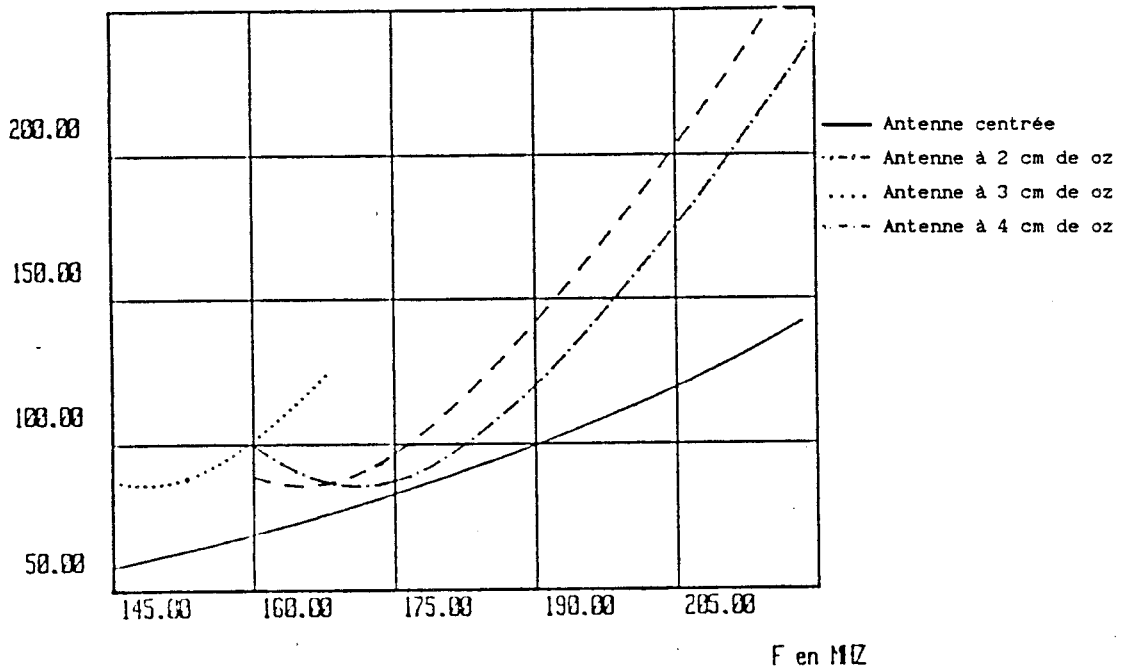


Planche (IV - 5)

X_e (milieu) en Ω

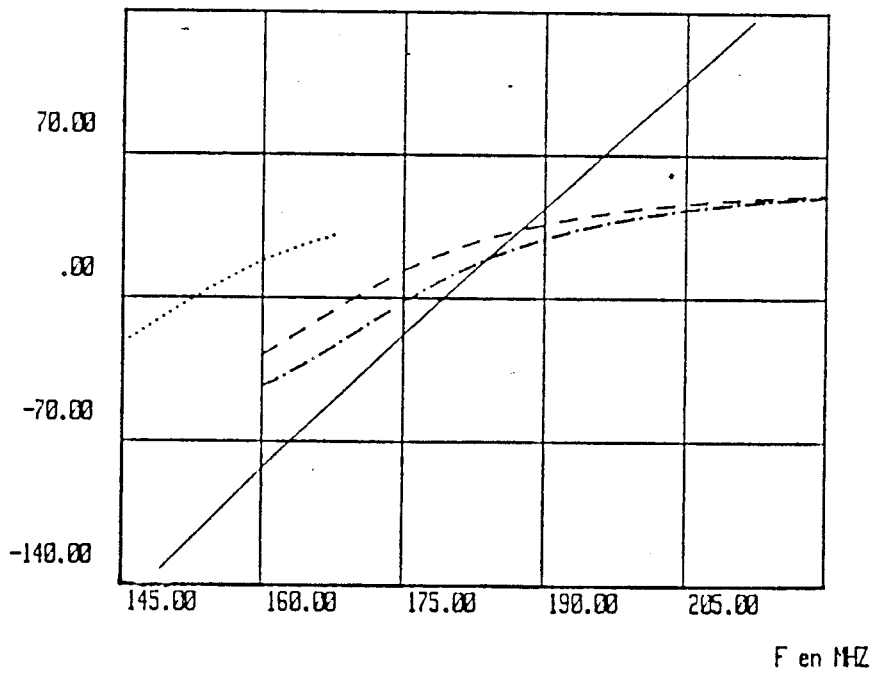


Planche (IV - 6)

été reportée. Lorsque la distance "d" est quelconque, le temps d'exécution du programme est long (1 Heure par point sur un calculateur H P 9000). Les courbes ont donc été tracées dans une gamme de fréquence s'étendant au voisinage de la fréquence de résonance de l'antenne. On remarque sur la planche (IV - 6) que pour une distance d'excentrage $d < 2$ cm la fréquence d'accord reste quasiment constante; par contre lorsque $d > 2$ cm, la fréquence d'accord varie rapidement l'écart étant de 10.MHz pour $d = 3$ cm et 35.MHz pour $d = 4$ cm, on rappelle que le rayon du forage est de 4.5 cm . Par contre si on détermine la valeur de la résistance d'entrée associée à la fréquence de résonance, on trouve qu'elle dépend très peu de l'excentrage puisqu'elle vaut $87 \Omega \pm 1 \Omega$.

IV.4.2 - milieu à 3 couches

Pour certaines configurations expérimentales, il peut arriver que le trou de forage soit rempli d'eau. L'antenne descendue dans son tube isolant se trouve donc en présence d'un milieu à 3 couches formées respectivement de l'air, de l'eau et du sol. Nous étudierons dans ce paragraphe l'influence de l'excentrage de l'antenne dans le tube isolant, celui ci étant toujours supposé centré.

La conductivité de l'eau a été choisie égale à 10^{-1} S/m et sa permittivité $\epsilon_r = 80$.

IV.4.2.1 - Répartition du courant sur l'antenne

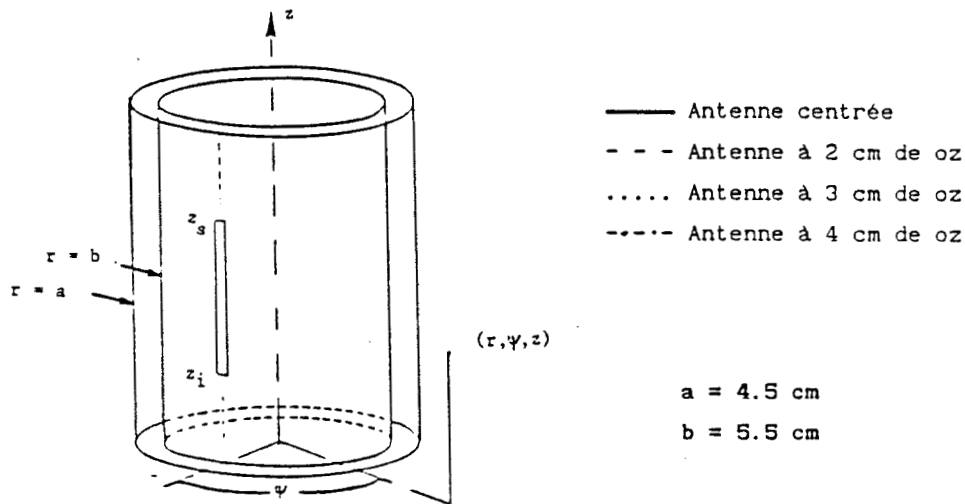
Le premier milieu, qui est l'air, et contenant l'antenne a un rayon constant $a = 4.5$ cm . Le milieu extérieur se situant à une distance $b = 5.5$ cm de l'axe, est caractérisé par $\sigma_{sol} = 10^{-2}$ S/m et $\epsilon_{rsol} = 5$.

Sur la planche (IV - 7) nous avons représenté le module du courant pour différentes positions de l'antenne dans le forage : $d = 2$ cm, 3 cm et 4 cm , nous avons reporté également la courbe correspondant à une antenne centrée. On remarque une grande diminution du courant maximum sur l'antenne, d'autant plus que l'antenne est excentrée. De plus la distribution du courant ne garde pas une allure sinusoïdale pour $d = 4$ cm et la variation du courant

DISTRIBUTION DU COURANT SUR UNE ANTENNE EXCENTREE

Paramètre : Distance d'excentrage

Milieu à 3 couches : AIR / EAU-DOUCE / SOL



$|I|$ en mA

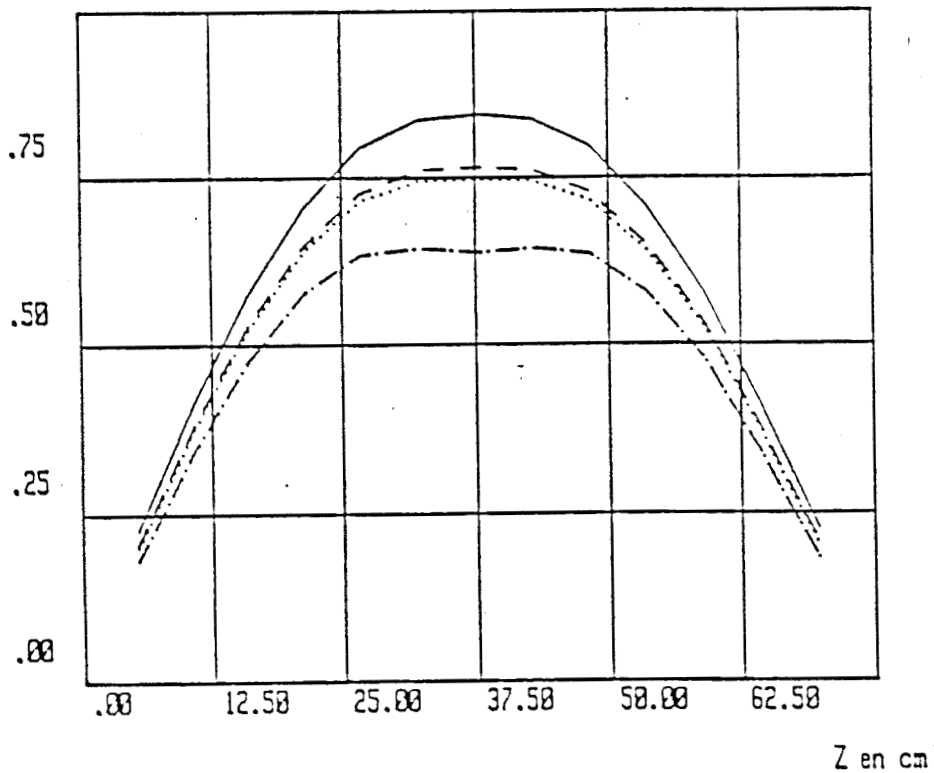


Planche (IV - 7)

maximum pour ce cas extrême est de 70% ce qui produira une grande variation de l'impédance d'entrée de l'antenne.

IV.4.2.2 Impédance d'entrée - Fréquence d'accord

Dans ce paragraphe, nous avons fixé le rayon de l'isolant contenant l'antenne $a = 3$ cm, le milieu extérieur se situant à une distance $b = 4.5$ cm de l'axe, est caractérisé par $\sigma_{sol} = 10^{-2}$ S/m et $\epsilon_{rsol} = 5$. Le milieu intermédiaire d'épaisseur 1.5 cm est caractérisé par $\sigma_1 = 10^{-1}$ S/m et $\epsilon_{r1} = 80$. La fréquence de travail est de 119 MHz correspondant à la fréquence de résonance d'une antenne centrée, dont la longueur reste fixé à 75 cm.

Les planches (IV - 8) et (IV - 9) représentent ainsi les variations de la partie réelle (R_e) et imaginaire (X_e) de l'impédance d'entrée en fonction de la distance "d" de l'excentrage. On remarque sur ces planches la variation rapide de X_e et R_e lorsque d passe de 0.5 cm à 2.5 cm.

Les courbes des planches (IV - 10) et (IV - 11) représentent la variation de l'impédance d'entrée de l'antenne en fonction de la fréquence. Les caractéristiques électriques et géométriques du forage sont celles données au début de ce paragraphe. Nous avons choisi deux positions de l'antenne par rapport à l'axe $d = 1.5$ cm et $d = 2$ cm, le cas d'une antenne centrée a été également reportée. On note des variations importantes de la fréquence d'accord pour $d = 2$ cm et de façon moindre pour $d = 1.5$ cm. En particulier on note sur la planche (IV - 11) les variations importantes de la résistance d'entrée lorsque $d = 2$ cm.

IV.4.3 Influence de la perméabilité

Dans le diagramme de rayonnement de l'antenne du à son excentrage, on se rend compte qu'une part importante de l'énergie rayonnée par l'antenne d'émission se propage dans une direction opposée à celle du récepteur, et n'est donc pas utile dans le procédé de tomographie. Afin d'augmenter le signal reçu, à puissance d'émission constante, on peut penser noyer l'antenne de façon dissymétrique dans un matériau présentant une

CHAPITRE IV : INFLUENCE DE LA POSITION DE L'ANTENNE DANS LE TUBE ISOLANT

VARIATION DE L'IMPEDANCE D'ENTREE EN FONCTION DE LA DISTANCE D'EXCENTRAGE

Milieu à 3 couches : AIR / EAU-DOUCE / SOL

R_e (milieu) en Ω

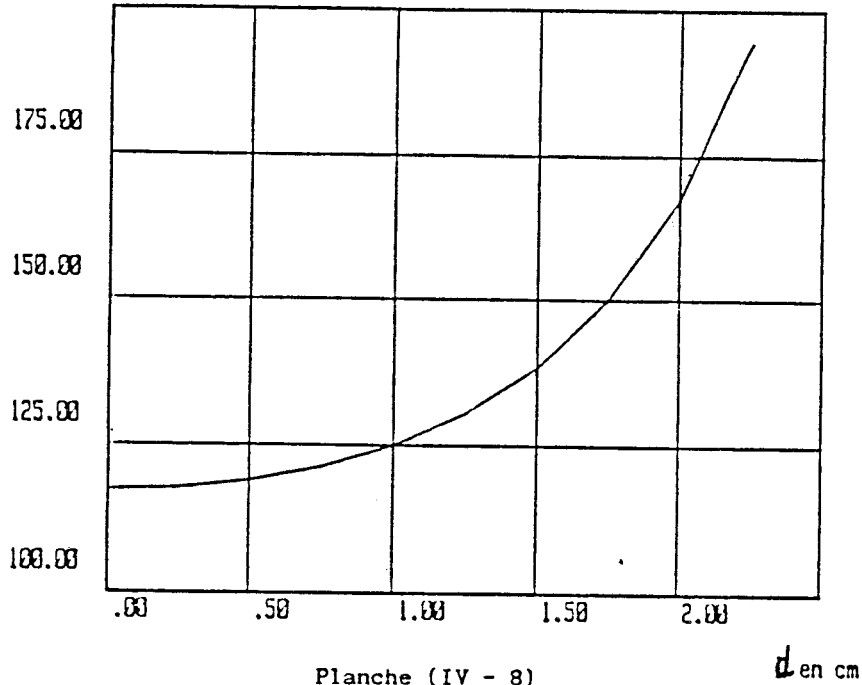


Planche (IV - 8)

X_e (milieu) en Ω

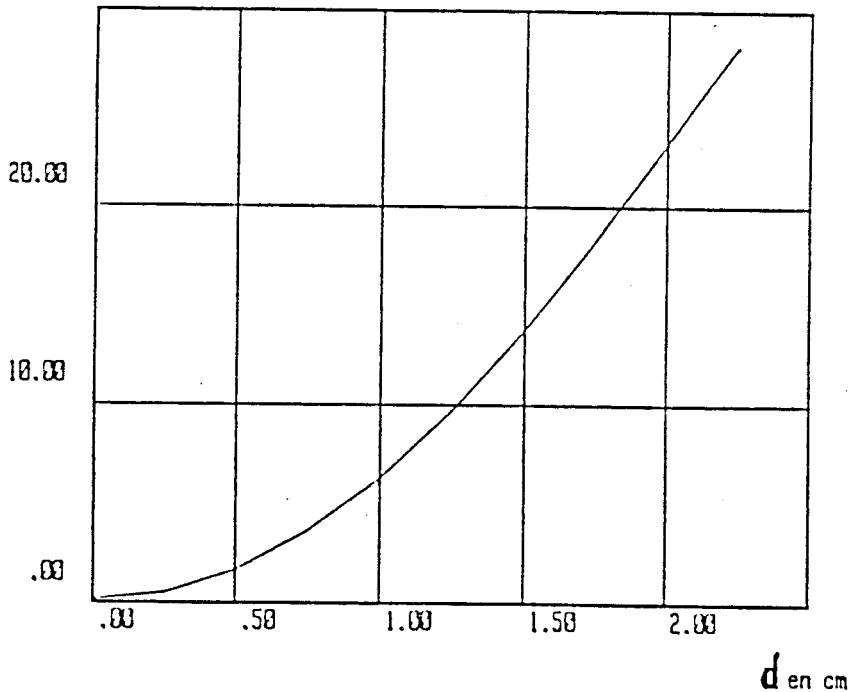
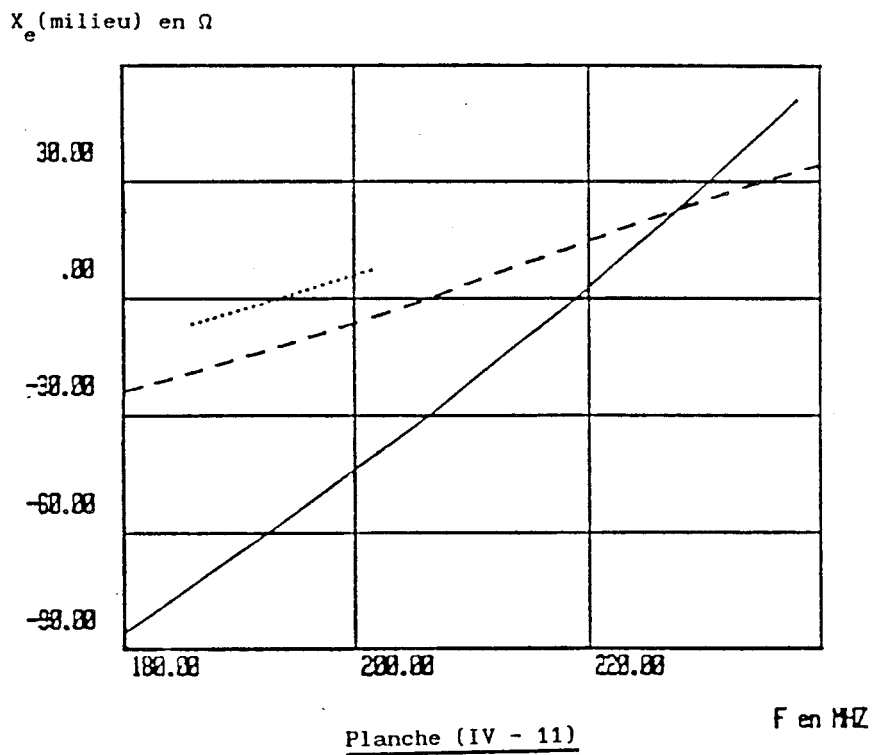
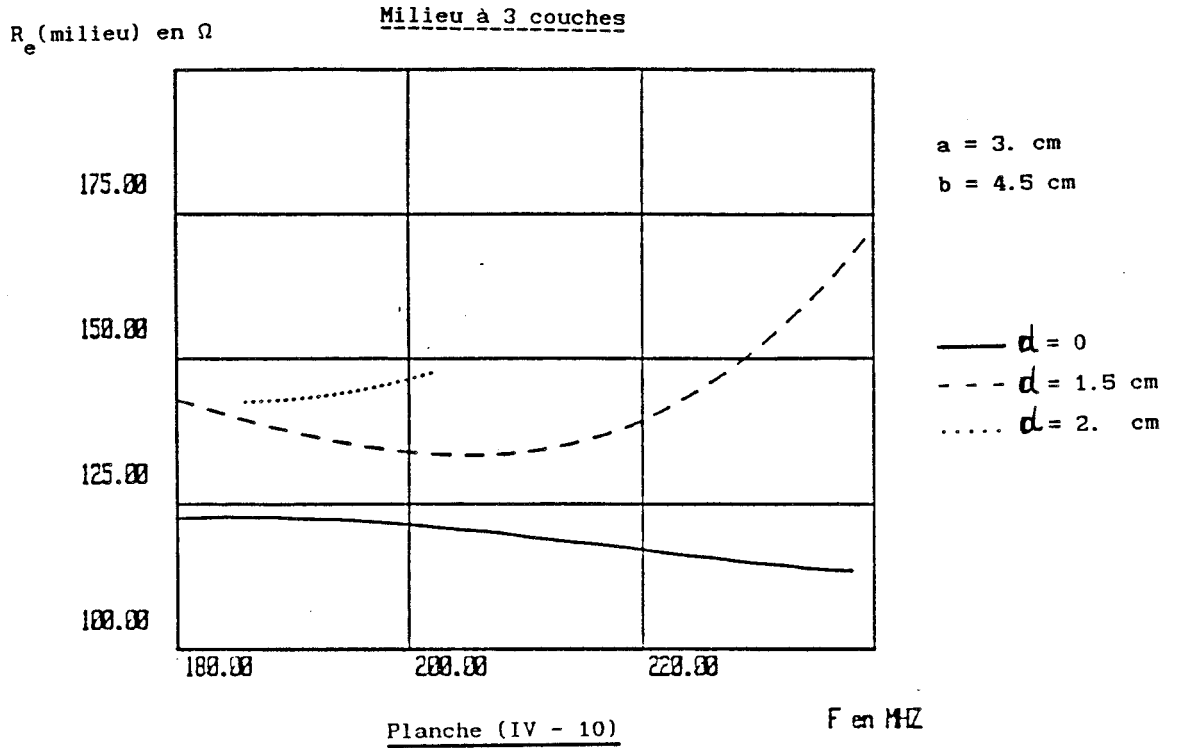


Planche (IV - 9)

CHAPITRE IV : INFLUENCE DE LA POSITION DE L'ANTENNE DANS LE TUBE ISOLANT

VARIATION FREQUENTIELLE DE L'IMPEDANCE D'ENTREE AU MILIEU DE L'ANTENNE

Paramètre : Distance d'excentrage

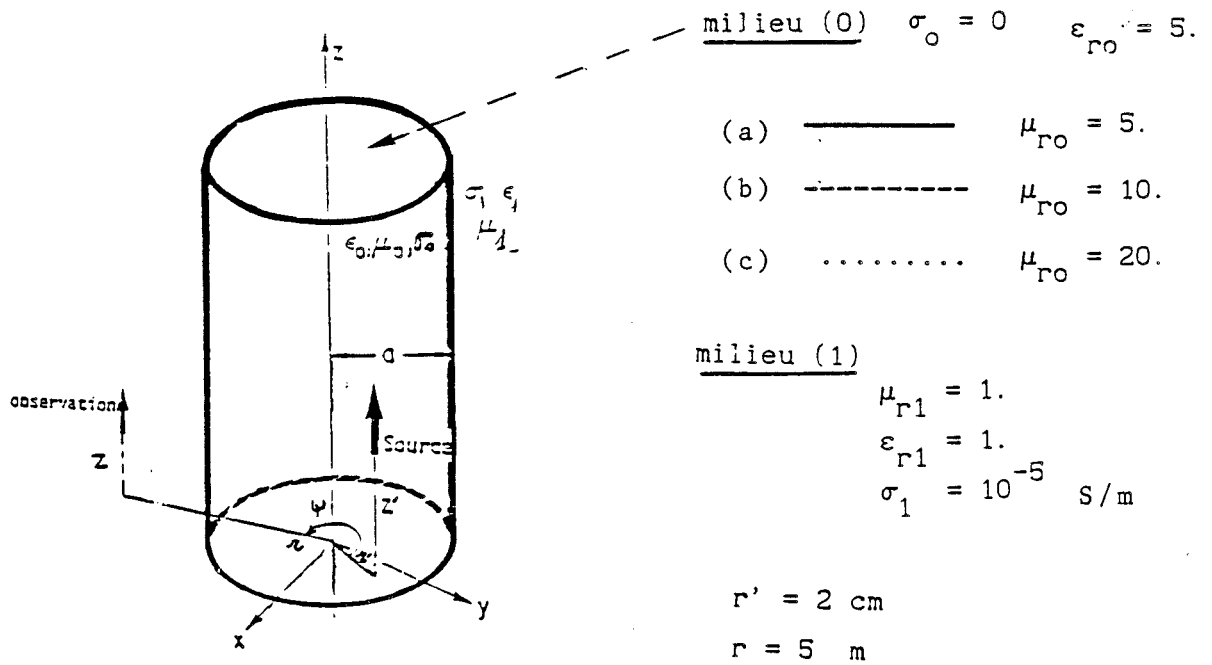


perméabilité élevée . En se limitant au cas d'un dipole élémentaire d'émission, les programmes précédents ont été utilisés pour étudier la faisabilité d'un tel dispositif de focalisation de l'énergie dans une direction donnée.

Nous allons donc nous intéresser dans ce paragraphe à étudier le comportement du champ rayonné par un dipole électrique vertical enrobé d'un matériau composite de perméabilité $\mu_{r0} = 5, 10$ et 20 . Le milieu encaissant est l'air supposé milieu homogène et infini. la conductivité du milieu (0) contenant le dipole source est $\sigma_0 = 0$,de permittivité $\epsilon_{r0} = 5$. La fréquence de travail est de 200 MHz . Le moment électrique $I dl$ est normalisé à 1 A.m .

Les courbes de la planche (IV - 12) représentent la variation de E_z autour du forage en maintenant la distance horizontale à 5 m , Le dipole source est excentré de 2 cm par rapport à l'axe du cylindre présentant une perméabilité magnétique. Le cylindre a un rayon de 4.5 cm . On n'enregistre pas une variation importante de $| E_z |$ pour les différentes positions du récepteur.

L'introduction d'un matériau ayant une perméabilité de 5 à 20 ne semble donc pas être une solution pour modifier le diagramme de rayonnement de l'antenne.



$|E_z|$ en dB

$F = 200$. MHz

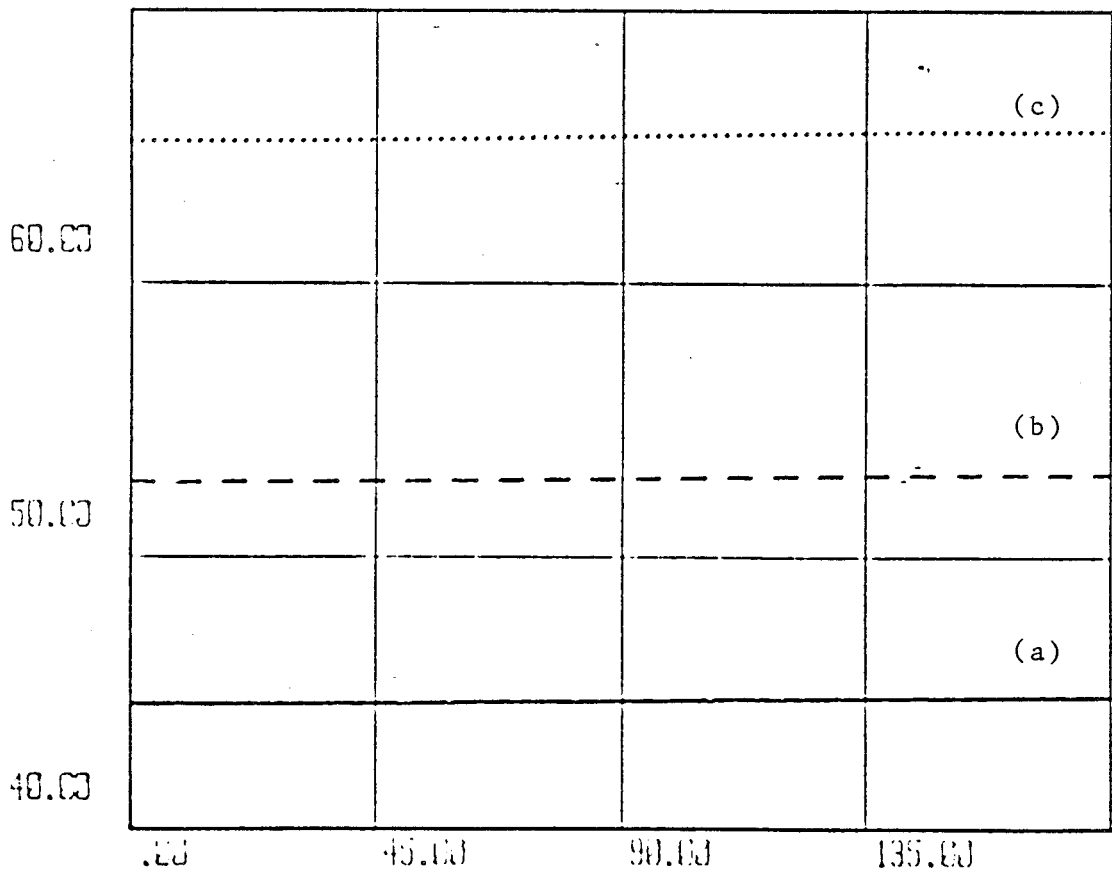


PLANCHE IV - 12

ψ en degré

CONCLUSION

Nous avons fait une étude paramétrique montrant l'influence de la position de l'antenne dans le trou de forage, sur la distribution du courant due à une variation de l'impédance d'entrée .

Un trou sec a été simulé par un milieu stratifié radialement à 2 couches. Nous avons vu qu'un excentrage de 2 cm pour un rayon d'isolant de 4.5 cm, ne modifie pas sensiblement la fréquence d'accord de l'antenne. La résistance de rayonnement à l'accord reste pratiquement constante pour σ compris entre 10^{-2} S/m et 10^{-3} S/m, soit $81 \Omega \pm 1 \Omega$. Par contre lorsque $\sigma = 10^{-1}$ S/m, la résistance de rayonnement varie rapidement . Enfin la fréquence d'accord reste pratiquement indépendante de la conductivité du milieu encaissant.

Un trou rempli d'eau-douce ($\sigma = 10^{-1}$ S/m) correspond à un milieu stratifié radialement à 3 couches. Nous avons vu que si on fixe le rayon du forage $b = 4.5$ cm, et pour une épaisseur d'eau de 15 mm, la fréquence d'accord varie rapidement avec la position de l'antenne dans le le cylindre isolant; cependant pour $d = 1.5$ cm la variation de la fréquence d'accord (ΔF_a) est de 10 MHz , par contre pour $d = 2$ cm on a $\Delta F_a = 35$ MHz , ce qui va provoquer une grande sensibilité de l'antenne avec sa position . La résistance de rayonnement varie de 50% environ.

Le modèle d'antenne qui a été envisagé correspond à une antenne rectiligne, alimentée en son centre. Un prolongement de ces travaux consiste à simuler une antenne en forme de J . C'est ce que nous nous proposons d'étudier dans le chapitre suivant.

CHAPITRE V

MODELISATION THEORIQUE D'UNE ANTENNE "J"

CHAPITRE V : MODELISATION THEORIQUE D'UNE ANTENNE "J" DANS UN MILIEU

STRATIFIE RADIALEMENT

INTRODUCTION (p.174)

V.1 - EXPRESSIONS DU POTENTIEL DE HERTZ POUR UN DIPOLE ELECTRIQUE HORIZONTAL (p.175)

V.1.1 - Formulation intégrale du potentiel de Hertz (p.177)

V.1.2 - Potentiel de Hertz dans les différents milieux (p.184)

V.1.3 - Conditions aux limites - Expressions du champ (p.185)

V.1.3.1 - Expressions du champ (p.189)

V.2 - MATRICE IMPEDANCE DE L'ANTENNE EN J (p.193)

V.2.1 - Expressions du champ rayonné par l'antenne (p.195)

a) Contribution de la partie verticale

b) Contribution de la partie horizontale

V.2.2 - Matrice impédance (p.196)

V.2.2.1 - Dipole source vertical (p.197)

a) Dipole d'observation vertical

b) Dipole d'observation horizontale

V.2.2.2 - Dipole source horizontal (p.199)

a)Dipole d'observation vertical

b)Dipole d'observation horizontale

V.3 - EXEMPLES NUMERIQUES (p.200)

V.3.1 - Antenne en milieu homogène (air) (p.200)

V.3.2 - Antenne centrée dans le forage (p.204)

V.3.3 - Antenne excentrée dans le forage (p.208)

V.4 - CONCLUSION (p.208)

CONCLUSION GENERALE (p.209)

INTRODUCTION

Nous nous sommes intéressés dans les chapitres précédents au rayonnement d'un dipole électrique vertical, puis d'une antenne filaire dans un milieu stratifié radialement.

Le modèle d'antenne utilisé dans une tomographie électromagnétique à l'émission comme à la réception est actuellement une antenne en J. La prise en compte de l'élément horizontal de l'antenne nécessite donc un développement mathématique supplémentaire afin d'obtenir les expressions du champ rayonné par un dipole électrique horizontal (D.E.H) dans un milieu stratifié radialement.

Ceci permettra de prendre en compte dans la matrice impédance généralisée, les interactions existants entre tous les éléments horizontaux et verticaux de la structure étudiée.

Le rayonnement d'un D.E.H s'exprime généralement à l'aide d'un potentiel vecteur de Hertz primaire dont la direction est la même que celui du dipôle d'émission (horizontal dans ce cas) et d'un potentiel secondaire dirigé suivant un axe orthogonal (ou d'un potentiel magnétique horizontal). Cependant toutes les équations développées dans les chapitres précédents ont été obtenues à partir de potentiel de Hertz électrique n'ayant qu'une composante verticale. Afin de simplifier les calculs et donc de faire un parallélisme entre le rayonnement d'un dipôle vertical et horizontal, nous avons choisi d'exprimer le champ rayonné par un D.E.H en fonction d'un potentiel vecteur électrique et d'un potentiel vecteur magnétique, chacun de ces vecteurs n'ayant qu'une composante verticale.

Le calcul sera d'abord effectué sur les potentiels primaires, puis généralisé aux potentiels secondaires.

En écrivant les conditions aux limites sur la surface du fil, on aboutit comme précédemment, à l'équation intégrale que doit satisfaire le courant sur l'antenne et qui est résolue par la méthode des moments.

Nous nous limitons dans ce chapitre à un milieu stratifié radialement à 2 couches. Dans les applications numériques, les couches correspondent à l'air (forage sec) et au milieu encaissant

V.1-EXPRESSIONS DU POTENTIEL DE HERTZ POUR UN DIPOLE ELECTRIQUE HORIZONTAL

Considérons un milieu stratifié radialement à 2 couches de caractéristiques électriques différentes et que nous appellerons respectivement milieu (0) et milieu (1). Nous affectons à chacun des milieux une conductivité σ_1 , une permittivité ϵ_1 et perméabilité μ_1 . Chaque milieu est supposé isotrope et homogène. Nous supposons que cette structure est excitée par un dipole électrique horizontal (D.E.H) situé dans le milieu (0). La structure étudiée est représentée sur la figure (V - 1).

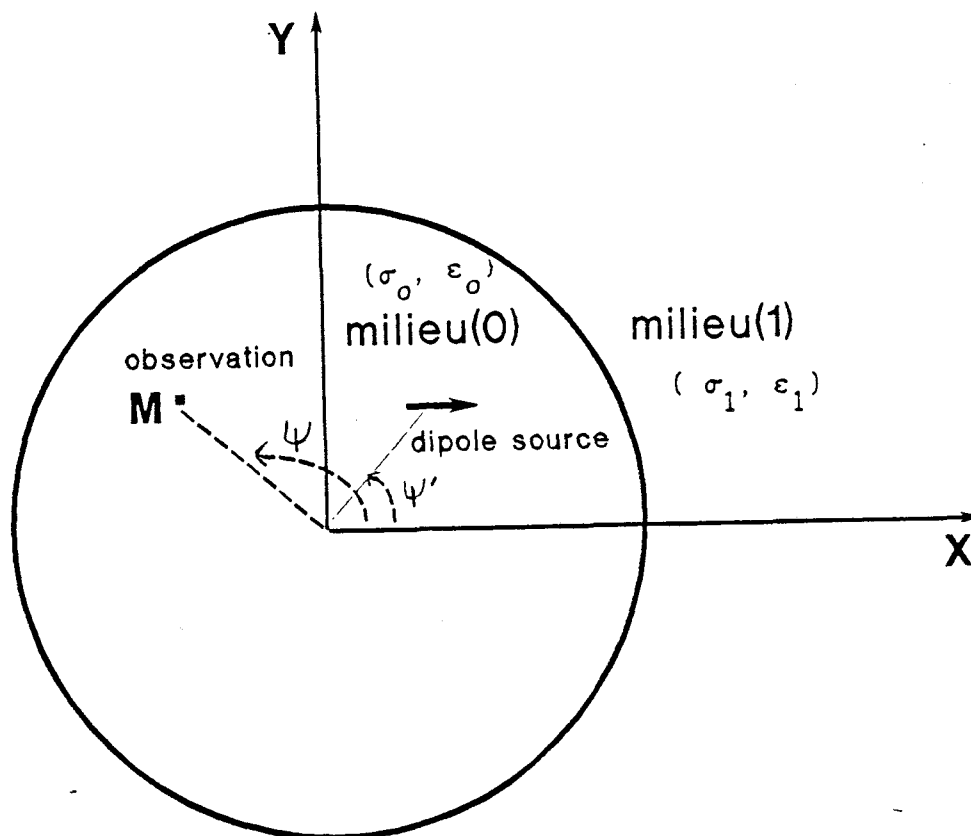


figure V - 1

Nous utiliserons successivement les coordonnées cylindriques pour définir la position du dipole, et les coordonnées cartésiennes pour calculer les composantes du champ. Nous prenons dans chaque système d'axe le dipole source à la hauteur $z' = 0$.

En se plaçant dans le cas général du dipôle excentré, nous ajouterons au potentiel électrique $\vec{\Pi}$ une composante magnétique $\vec{\Pi}^*$, chacune de ces composantes devant donc satisfaire l'équation d'onde du type :

$$(\Delta - \gamma_1^2) \vec{\Pi}_1 = - \frac{\vec{P}_0}{\epsilon} \delta(x-x') \cdot \delta(y-y') \cdot \delta(z-z') \quad (V.1)$$

\vec{P}_0 est la polarisation électrique définie par :

$$\vec{P}_0 = \frac{I \cdot d\vec{l}}{4\pi(\sigma_0 + j\omega \epsilon_0)} \quad (V.2)$$

$$\text{et : } \gamma_1^2 = -\omega^2 \mu_1 \epsilon_1 + j\omega \epsilon_1 \sigma_1$$

x', y', z' étant les coordonnées du dipôle d'émission.

Les potentiels de Hertz électrique et magnétique sont dirigés suivant l'axe ox , nous les noterons par la suite simplement Π . Nous décomposons donc ces potentiels dans chacun des milieux de la façon suivante:

milieu (0)

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \Pi_p + \Pi_{os} \\ \Pi_0^* &= \Pi_{os}^* \end{aligned} \quad (V.3)$$

Π_p , Π_{os} et Π_{os}^* sont respectivement les potentiels de Hertz électrique primaire, secondaire et le potentiel magnétique secondaire.

$$\Pi_p = \frac{I \cdot dl}{4\pi(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \frac{e^{-\gamma_o R}}{R} \quad (V.4)$$

$$\text{avec } R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos(\psi - \psi') + z^2} = \sqrt{\hat{r}^2 + z^2}$$

où \hat{r} désigne la distance horizontale émetteur-récepteur, la configuration géométrique est la même que celle représentée figure (IV - 1)

milieu (1)

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \Pi_{1s} \\ \Pi_1^* &= \Pi_{1s}^* \end{aligned} \quad (V.5)$$

Les potentiels dans le milieu (1) sont uniquement secondaires puisqu'il n'existe pas de source de rayonnement dans ce milieu .

V.1.1 Formulation intégrale du potentiel de Hertz

Nous allons nous intéresser dans un premier temps à déterminer le champ primaire vertical $E_{z,p}$ sous une forme intégrale ceci dans le but de simplifier le formalisme mathématique des composantes secondaires du champ électromagnétique rayonné par le D.E.H [18] .

A partir des relations de Maxwell liées au potentiel primaire Π_p dans un milieu homogène et infini, la composante du champ suivant oz est donnée par:

$$E_{z,p} = \frac{\partial^2 \Pi_p}{\partial x \partial z} = \left[\cos \psi \frac{\partial}{\partial r} - \sin \psi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} \right] \frac{\partial \Pi_p}{\partial z} \quad (V.6)$$

En faisant appel à la formule (IV.14) du potentiel primaire en coordonnées cylindriques établie dans le chapitre précédent, le champ $E_{z,p}$ se met sous la forme suivante:

$$E_{z,p} = \frac{I \cdot dl}{4\pi^2 (\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} -j\lambda F(\lambda) e^{-j\lambda z} d\lambda \quad (V.7)$$

avec:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\cos(\psi) \frac{\partial K_m(rU_o)}{\partial r} + \frac{j m \sin(\psi)}{r} K_m(rU_o) \right] e^{-j m \hat{\psi}} \cdot I_m(r'U_o) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[U_o \cos(\psi) K'_m(rU_o) + \frac{j m \sin(\psi)}{r} K_m(rU_o) \right] e^{-j m \hat{\psi}} \cdot I_m(r'U_o) \end{aligned} \quad (V.8)$$

K'_m étant la dérivée de la fonction de Bessel modifiée K_m par rapport à rU_o .

En introduisant les deux identités de Bessel :

$$\begin{aligned} K'_m(z) &= -\frac{1}{2} \left[K_{m+1}(z) + K_{m-1}(z) \right] \\ K_m(z) &= \frac{z}{2m} \left[K_{m+1}(z) - K_{m-1}(z) \right] \end{aligned} \quad (V.9)$$

L'équation (V.8) mène à:

$$F(\lambda) = \frac{U_0}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[-\cos(\psi) \left[K_{m+1} + K_{m-1} \right] + j \sin(\psi) \left[K_{m+1} - K_{m-1} \right] \right] I_m(r'U_0) \cdot e^{-jm\hat{\psi}} \quad (V.10)$$

Si la variable des fonctions de Bessel n'est pas précisée cela signifie que l'argument est rU_0 .

En passant en notation exponentielle des fonctions cosinus et sinus on aboutit à :

$$F(\lambda) = - \frac{U_0}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\left[K_{m+1} \cdot e^{-j\psi} + K_{m-1} \cdot e^{j\psi} \right] \cdot I_m(r'U_0) \cdot e^{-jm\hat{\psi}} \right] \quad (V.11)$$

En introduisant (V.11) dans l'expression du champ (V.7) , on obtient:

$$E_{z,p} = \frac{I \cdot dl}{4\pi^2(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0)} \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} j\lambda \frac{U_0}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\left[K_{m+1} \cdot e^{-j\psi} + K_{m-1} \cdot e^{j\psi} \right] \cdot I_m(r'U_0) \right] \dots e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (V.12)$$

Ce champ vertical pourrait être obtenu à partir d'une autre expression d'un potentiel de Hertz électrique qui n'aurait qu'une composante dirigée suivant l'axe des z. En effet, si on note V_p ce potentiel, la composante verticale du champ primaire serait donnée par :

$$E_{z,p} = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_o^2 \right] V_p \quad (V.13)$$

Choisissons pour V_p une expression ayant la même forme que l'intégrale figurant dans (V.12), soit:

$$V_p = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \left[K_{m+1} \cdot e^{-j\psi} + K_{m-1} \cdot e^{j\psi} \right] e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (V.14)$$

A_m étant une constante d'intégration inconnue.

En remplaçant V_p dans l'équation (V.13) et compte tenu du fait que $U_o^2 = \lambda^2 + \gamma_o^2$, $E_{z,p}$ s'écrit dans ces conditions :

$$E_{z,p} = - \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} U_o^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \left[K_{m+1} \cdot e^{-j\psi} + K_{m-1} \cdot e^{j\psi} \right] e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (V.15)$$

La constante A_m est obtenue en identifiant le champ $E_{z,p}$ donné en (V.12) et (V.15). On obtient aisément:

$$A_m = \frac{- I \cdot dl}{4\pi^2 (\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \frac{j \lambda}{2 U_o} I_m(r' U_o) \quad (V.16)$$

Le potentiel primaire V_p s'écrit donc:

$$V_p = \frac{- I. dl}{4\pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j \lambda}{2U_o} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[K_{m+1} \cdot e^{-j\psi} + K_{m-1} \cdot e^{j\psi} \right] I_m(r' U_o) e^{-jm\psi} \dots e^{-j\lambda z} . d\lambda \quad (V.17)$$

Ce potentiel étant une solution particulière de l'équation d'onde (V.1) avec second membre, nous déduisons donc que la solution générale se met dans chacun des milieux, sous la forme suivante:

$$V_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ A_{im} \left[K_{m+1} \cdot e^{-j\psi} + K_{m-1} \cdot e^{j\psi} \right] + B_{im} \left[I_{m+1} \cdot e^{-j\psi} + I_{m-1} \cdot e^{j\psi} \right] \right\} e^{-jm\psi} \cdot e^{-j\lambda z} . d\lambda \quad (V.18)$$

A_{im} et B_{im} sont des constantes inconnues , i : caractérisé le milieu de propagation. Les fonctions de Bessel modifiées sont d'argument rU_i .

L'introduction de ce potentiel électrique V_p dirigé suivant l'axe des z a permis de trouver la valeur correcte du champ électrique vertical E_z rayonné par l'antenne horizontale .

Cependant, il est nécessaire d'introduire un autre potentiel de type "magnétique" V_p^* n'admettant également qu'une seule composante suivant l'axe des z . En effet ce potentiel V_p^* permettra de déterminer la valeur correcte du champ magnétique H_z . Il faut noter que si E_z et H_z sont données par des expressions correctes en tout point, les autres composantes du champ électromagnétique pouvant s'exprimer en fonction de E_z et H_z le seront également. Pour cela nous suivons une démarche tout à fait similaire à celle que nous venons d'exposer.

Le champ magnétique vertical rayonné par le dipôle électrique horizontal dans un milieu homogène et infini est donné par:

$$H_{z,p} = (\sigma_o + j\omega\epsilon_o) \frac{\partial \Pi_p}{\partial y} = (\sigma_o + j\omega\epsilon_o) \left[\sin(\psi) \frac{\partial}{\partial r} + \cos(\psi) \frac{\partial}{\partial \psi} \right] \Pi_p \quad (V.19)$$

En introduisant Π_p sous forme intégrale définie en (IV.14), on obtient:

$$H_{z,p} = \frac{I \cdot dl}{4\pi^2} \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} G(\lambda) \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (V.20)$$

avec:

$$G(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[U_o \sin(\psi) K'_m(rU_o) - \frac{j m \cos(\psi)}{r} \cdot K_m(rU_o) \right] I_m(r'U_o) \cdot e^{-jm\hat{\psi}} \quad (V.21)$$

En faisant appel aux identités de Bessel (V.9) et en passant en notation exponentielle des fonctions cos et sin, ces calculs mènent à:

$$G(\lambda) = \frac{-jU_o}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\left(K_{m+1} \cdot e^{-j\psi} - K_{m-1} \cdot e^{j\psi} \right) \cdot I_m(r'U_o) \cdot e^{-jm\hat{\psi}} \right] \quad (V.22)$$

Les fonctions de Bessel modifiées K_{m+1} et K_{m-1} sont d'arguments rU_o .

En introduisant (V.22) dans l'expression du champ (V.20), on obtient:

$$H_{z,p} = \frac{-j \cdot I \cdot dl}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_o}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\left(K_{m+1} \cdot e^{-j\psi} - K_{m-1} \cdot e^{j\psi} \right) \cdot I_m(r' U_o) \cdot e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda z} \right] \quad (V.23)$$

Choisissons pour V_p^* une expression qui a la même forme intégrale que (V.23) :

$$V_p^* = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^* \left[K_{m+1} \cdot e^{-j\psi} - K_{m-1} \cdot e^{j\psi} \right] e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (V.24)$$

A_m^* étant une constante d'intégration inconnue.

Le champ magnétique $H_{z,p}$ est déterminé à partir du potentiel V_p^* dirigé suivant l'axe oz par :

$$H_{z,p} = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma_o^2 \right] V_p^* \quad (V.25)$$

En remplaçant V_p^* par son expression (V.24), et en tenant compte du fait que $U_o^2 = \lambda^2 + \gamma_o^2$, on obtient :

$$H_{z,p} = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} -U_o^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^* \left[K_{m+1} \cdot e^{-j\psi} - K_{m-1} \cdot e^{j\psi} \right] e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (V.26)$$

Cependant les expressions (V.23) et (V.26) devant être identiques, on en déduit :

$$A_m^* = j \frac{I \cdot dl}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2U_o} \quad (V.27)$$

Le potentiel magnétique primaire devient :

$$V_p^* = j \frac{I \cdot dl}{4\pi^2} \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2U_0} \left[K_{m+1} \cdot e^{-j\psi} - K_{m-1} \cdot e^{j\psi} \right] \cdot e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (V.28)$$

La solution générale s'écrit donc dans chacun des milieux:

$$V_i^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ A_{im}^* \left[K_{m+1} \cdot e^{-j\psi} - K_{m-1} \cdot e^{j\psi} \right] + B_{im}^* \left[I_{m+1} \cdot e^{-j\psi} - I_{m-1} \cdot e^{j\psi} \right] \right\} e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (V.29)$$

A_{im}^* et B_{im}^* sont des constantes inconnues. les fonctions de Bessel sont d'argument rU_i .

avec $U_i = \sqrt{\lambda^2 + \gamma_i^2}$, i caractérise le milieu de propagation.

V.1.2 - Potentiel de Hertz dans les différents milieux

milieu (0)

Le potentiel dans le milieu (0) se décompose, comme nous l'avons vu au début de ce paragraphe, en un potentiel primaire et un potentiel secondaire. Lorsque le point de réception est situé sur l'axe oz, afin d'éviter une divergence du potentiel on doit nécessairement prendre $A_{om} = 0$ dans (V.18) et $A_{om}^* = 0$ dans (V.28), on obtient:

$$V_o = V_p + V_s = V_p + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_{om} \left[I_{m+1}(rU_o) \cdot e^{-j\psi} + I_{m-1}(rU_o) \cdot e^{j\psi} \right] e^{-jm\hat{\psi}} \dots e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (V.30)$$

$$V_o^* = V_p^* + V_s^* = V_p^* + \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_{om}^* \left[I_{m+1}(rU_o) \cdot e^{-j\psi} - I_{m-1}(rU_o) \cdot e^{j\psi} \right] e^{-jm\hat{\psi}} \dots e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda$$

milieu (1)

Pour garder une valeur finie des potentiels V et V* , les constantes B_{1m} et B*_{1m} dans (V.18) et (V.28) doivent être nulles. On obtient donc les expressions suivantes du potentiel :

$$V_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{1m} \left[K_{m+1}(rU_1) \cdot e^{-j\psi} + K_{m-1}(rU_1) \cdot e^{j\psi} \right] e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (V.31)$$

$$V_1^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{1m}^* \left[K_{m+1}(rU_1) \cdot e^{-j\psi} - K_{m-1}(rU_1) \cdot e^{j\psi} \right] e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda$$

V.1.3 - Conditions aux limites - Expressions du champ

→ →

Les composantes du champ E et H dérivent de V et V* par les relations de Maxwell établies en (IV.1) et (IV.2) dont nous rappelons les expressions:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_i &= \text{rot rot } V_i \vec{k} - j\omega\mu_i \text{rot } V_i^* \vec{k} \\
 \vec{H}_i &= (\sigma_i + j\omega\epsilon_i) \text{rot } V_i \vec{k} + \text{rot rot } V_i^* \vec{k}
 \end{aligned}
 \tag{V.32}$$

\vec{k} étant le vecteur unitaire suivant l'axe oz et i caractérise le milieu de propagation.

Le développement des relations de Maxwell appliquées aux potentiels V_i et V_i^* mène à des expressions identiques à celles calculées dans le chapitre précédent. Afin de simplifier l'écriture des potentiels et du champ électromagnétique, nous noterons ces composantes comme précédemment sous forme condensée Γ_i défini par:

$$\Gamma_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{i,m} e^{-jm\psi} e^{-j\lambda z} d\lambda
 \tag{V.33}$$

Γ_i est donc l'une quelconque des composantes du champ ou du potentiel, Γ_{im} étant la composante réduite .

On obtient pour les composantes réduites du champ électromagnétiques:

$$\begin{aligned}
 E_{im,r} &= -j\lambda \frac{\partial V_{im}}{\partial r} - \frac{m\omega\mu_i}{r} V_{im}^* \\
 E_{im,\psi} &= \frac{-m\lambda}{r} V_{im} + j\omega\mu_i \frac{\partial V_{im}^*}{\partial r} \\
 E_{im,z} &= -U_i^2 V_{im}
 \end{aligned}
 \tag{V.34}$$

pour les composantes du champ électrique, et:

$$\begin{aligned}
 H_{im,r} &= -jm(\sigma_i + j\omega \varepsilon_i) \frac{1}{r} V_{im} - j\lambda \frac{\partial V_{im}^*}{\partial r} \\
 H_{im,\psi} &= -(\sigma_i + j\omega \varepsilon_i) \frac{\partial V_{im}}{\partial r} - \frac{m\lambda}{r} V_{im} \\
 H_{im,z} &= -U_i^2 V_{im}^*
 \end{aligned} \tag{V.35}$$

pour les composantes du champ magnétique.

Les constantes d'intégration B_{om} , B_{om}^* , A_{1m} et A_{1m}^* sont obtenues en appliquant la continuité du champ tangentiel sur l'interface de séparation milieu(0)-milieu(1), c'est à dire pour $r = a$. En procédant d'une façon similaire que pour un dipôle excentré dans un milieu à deux couches, les calculs mènent à:

$$\begin{aligned}
 B_{om} &= \frac{-A_m C_m(aU_o) \cdot F(\alpha_{3m}) + A_m^* \cdot j\omega\mu \cdot U_o \cdot D_m(aU_o) \cdot \theta_m(\alpha_{1m} - \alpha_{om})}{\chi_m \cdot F(\alpha_{2m})} \\
 B_{om}^* &= \frac{U_o(\sigma_o + j\omega\varepsilon_o) A_m \theta_m C_m(aU_o) \cdot (\alpha_{3m} - \alpha_{2m}) - A_m^* \cdot D_m(aU_o) \cdot (\theta_m^2 - U_o^2 \gamma_o^2 \cdot \alpha_{1m} \alpha_{2m})}{Z_m(aU_o) \cdot F(\alpha_{2m})} \\
 A_{1m} &= \frac{U_o^2}{U_1^2} \cdot \frac{A_m \cdot C_m(aU_o) \cdot U_o^2 \gamma_o^2 (\alpha_{3m} - \alpha_{2m}) + A_m^* \cdot j\omega\mu \cdot U_o \cdot D_m(aU_o) \cdot \theta_m (\alpha_{1m} - \alpha_{om})}{C_m(aU_1) \cdot F(\alpha_{2m})} \\
 A_{1m}^* &= \frac{U_o^2}{U_1^2} \cdot \frac{U_o(\sigma_o + j\omega\varepsilon_o) A_m \theta_m C_m(aU_o) \cdot (\alpha_{3m} - \alpha_{2m}) + A_m^* U_o^2 \gamma_o^2 \cdot D_m(aU_o) \cdot \alpha_{2m} (\alpha_{1m} - \alpha_{om})}{D_m(aU_1) \cdot F(\alpha_{2m})}
 \end{aligned} \tag{V.36}$$

avec:

$$X_m(\beta) = I_{m+1}(\beta) \cdot e^{-j\psi} + I_{m-1}(\beta) \cdot e^{j\psi} ; \quad Z_m(\beta) = I_{m+1}(\beta) \cdot e^{-j\psi} - I_{m-1}(\beta) \cdot e^{j\psi}$$

(V.37)

$$C_m(\beta) = K_{m+1}(\beta) \cdot e^{-j\psi} + K_{m-1}(\beta) \cdot e^{j\psi} ; \quad D_m(\beta) = K_{m+1}(\beta) \cdot e^{-j\psi} - K_{m-1}(\beta) \cdot e^{j\psi}$$

β étant un nombre complexe.

Les autres termes sont définis par:

$$F(\alpha_{im}) = \theta_m - U_o^2 \gamma_o^2 \cdot \alpha_{om} \cdot \alpha_{im} \quad \text{pour } i = 2, 3$$

$$\theta_m = \frac{m\lambda}{a} \left[1 - \left(\frac{U_o}{U_1} \right)^2 \right]$$

$$\alpha_{om} = \frac{Z'_m(aU_o)}{Z_m(aU_o)} - \frac{U_o}{U_1} \frac{D'_m(aU_1)}{D_m(aU_1)} \quad (V.38)$$

$$\alpha_{1m} = \frac{D'_m(aU_o)}{D_m(aU_o)} - \frac{U_o}{U_1} \frac{D'_m(aU_1)}{D_m(aU_1)}$$

$$\alpha_{2m} = \frac{X'_m(aU_o)}{X_m(aU_o)} - \frac{U_o}{U_1} \frac{\sigma_1 + j\omega\epsilon_1}{\sigma_o + j\omega\epsilon_o} \frac{C'_m(aU_1)}{C_m(aU_1)}$$

$$\alpha_{3m} = \frac{C'_m(aU_o)}{C_m(aU_o)} - \frac{U_o}{U_1} \frac{\sigma_1 + j\omega\epsilon_1}{\sigma_o + j\omega\epsilon_o} \frac{C'_m(aU_1)}{C_m(aU_1)}$$

V.1.3.1 - Expressions du champ

Connaissant les constantes d'intégration secondaires les composantes du champ électromagnétique en tout point de l'espace sont déterminées donc à partir des expressions réduites du champ définies en (V.34) et (V.35). Puisque nous nous intéressons par la suite au champ électrique tangentiel en tout point de l'antenne en J, nous allons donc nous attacher plus particulièrement à déterminer les composante du champ $E_{0,z}$ et $E_{0,x}$ dans le milieu (0). Par conséquent on choisira le système d'axes oxyz de telle manière que l'axe ox coïncide avec la partie horizontale de l'antenne, cependant ψ et ψ' ne peuvent prendre comme valeur que 0° et 180° . La structure étudiée ainsi que le système d'axes choisi sont représentés sur la figure (V - 2) .

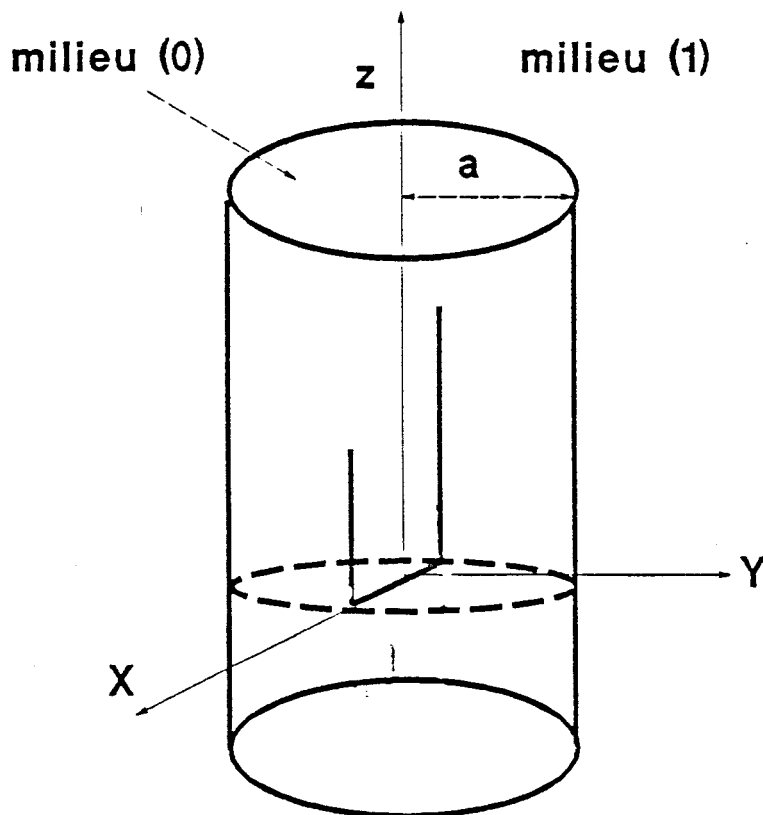


FIGURE (V - 2) : coordonnées définissant localement l'antenne J

De ce fait : $e^{j\psi} = e^{-j\psi} = \cos(\psi)$ qui prend uniquement les valeurs ± 1 .
Le potentiel magnétique primaire en (V.28) s'écrit donc :

$$V_p^* = j \frac{I \cdot dl}{4\pi^2} \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2U_o} \left[K_{m+1}(rU_o) - K_{m-1}(rU_o) \right] \cdot \cos(\psi) \cdot e^{-jm\psi} \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (V.39)$$

En introduisant l'identité de Bessel:

$$K_{m+1}(rU_o) - K_{m-1}(rU_o) = \frac{2m}{rU_o} K_m(rU_o)$$

et en décomposant le terme sous le signe \int en la somme de deux termes, on peut vérifier facilement que $V_p^* = 0$; donc $A_m^* = 0$.

les expressions (V.37) et leurs dérivées se réduisent dans ces conditions à:

$$\begin{aligned} X_m(\beta) &= 2 \cos(\psi) \cdot I'_m(\beta) & ; & \quad X'_m(\beta) = 2 \cos(\psi) \cdot I''_m(\beta) \\ Z_m(\beta) &= \frac{-2m}{z} \cdot \cos(\psi) \cdot I_m(\beta) & ; & \quad Z'_m(\beta) = \frac{2m}{z} \cdot \cos(\psi) \cdot \left[\frac{I_m(\beta)}{\beta} - I'_m(\beta) \right] \\ C_m(\beta) &= -2 \cos(\psi) \cdot K'_m(\beta) & ; & \quad C'_m(\beta) = -2 \cos(\psi) \cdot K''_m(\beta) \\ D_m(\beta) &= \frac{2m}{z} \cdot \cos(\psi) \cdot K_m(\beta) & ; & \quad D'_m(\beta) = -\frac{2m}{\beta} \cdot \cos(\psi) \cdot \left[\frac{K_m(\beta)}{\beta} - K'_m(\beta) \right] \end{aligned} \quad (V.40)$$

β étant une nombre complexe et I'_m , K'_m , I''_m et K''_m sont respectivement les dérivées premières et secondes des fonctions de Bessel I_m et K_m par rapport à la variable β .

En introduisant (V.40) dans les expressions des constantes d'intégrations (V.36), ces dernières se réduisent à:

$$B_{om} = A_m \frac{K'_m(aU_o)}{I'_m(aU_o)} \frac{F(\alpha_{3m})}{F(\alpha_{2m})}$$

$$\begin{aligned}
 B_{om}^* &= A_m U_o^2 (\sigma_o + j\omega\epsilon_o) \frac{a \cdot \theta_m}{m} \frac{\alpha_{3m} - \alpha_{2m}}{F(\alpha_{2m})} \\
 A_{1m} &= A_m \frac{K'_m(aU_o)}{K'_m(aU_1)} \left[\frac{U_o^2 \cdot \gamma_o}{U_1} \right]^2 \cdot \frac{\alpha_{3m} - \alpha_{2m}}{F(\alpha_{2m})} \quad (V.41) \\
 A_{1m}^* &= - A_m \frac{K'_m(aU_o)}{K'_m(aU_1)} (\sigma_o + j\omega\epsilon_o) \frac{U_o^3}{U_1} \frac{a \cdot \theta_m}{m} \frac{\alpha_{3m} - \alpha_{2m}}{F(\alpha_{2m})}
 \end{aligned}$$

a étant le rayon du forage, les autres termes sont définis comme précédemment en tenant compte des expressions (V.40).

Il est intéressant de remarquer que toutes les constantes d'intégration en (V.41) sont paires par rapport à m, par contre A_{1m} et B_{om}^* sont impaires par rapport à λ , et B_{om} et A_{1m}^* sont impaires par rapport à λ .

On passe des coordonnées cylindriques aux coordonnées rectangulaires par les relations suivantes:

$$E_x = E_r \cos(\psi) - E_\psi \sin(\psi)$$

Dans le cas présent E_x se réduit à :

$$E_x = E_r \cos(\psi) \quad (V.42)$$

puisque ψ prend uniquement les valeurs 0° et 180° et $\sin(\psi) = 0$.

L'antenne étant placée dans le milieu(0), le champ électrique dans ce milieu se décompose en un champ primaire et un champ secondaire:

$$\begin{aligned}
 E_{oz} &= E_{oz}^p + E_{oz}^s \\
 E_{ox} &= E_{ox}^p + E_{ox}^s \quad (V.43)
 \end{aligned}$$

E_{oz}^P et E_{ox}^P représentent le champ électrique primaire rayonné par un dipole électrique horizontal dans un milieu homogène et infini, ces expressions sont données dans le deuxième chapitre. Nous nous intéressons par la suite uniquement aux composantes secondaires, ce qui va nous permettre de déterminer la matrice impédance généralisée secondaire.

A partir des relations de Maxwell appliquées aux potentiels $V_{o,s}$ et $V_{o,s}^*$, on en déduit:

$$E_{oz}^S = - 2. \cos(\psi) \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_{om} I'_m(rU_o) \cdot e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (V.44)$$

$$E_{ox}^S = 2 \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[-j\lambda U_o B_{om} \cdot I''_m(rU_o) + \left(\frac{m^2 \omega \mu}{r^2 U_o} \right) B_{om}^* \cdot I_m(rU_o) \right] e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda$$

Afin de faire apparaitre la distribution du courant sur l'antenne, posons :

$$B_{om} = A_m \cdot B_m \quad (V.45)$$

$$B_{om}^* = A_m U_o^2 (\sigma_o + j\omega \epsilon_o) \cdot B_m^*$$

A_m étant la constante d'intégration primaire définie en (V.16), donnée par :

$$A_m = \frac{-i(x') \cdot dx'}{4\pi^2(\sigma_o + j\omega \epsilon_o)} \frac{j \lambda}{2 U_o} I_m(r'U_o)$$

En introduisant (V.45) et l'expression de A_m dans (V.44), on obtient :

$$E_{oz}^S = \frac{-i(x') \cdot dx'}{4\pi^2(\sigma_o + j\omega \epsilon_o)} \cos(\psi) \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} j\lambda U_o \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m I'_m(rU_o) I_m(r'U_o) e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (V.46)$$

$$E_{ox}^S = \frac{-i(x') \cdot dx'}{4\pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\lambda^2 B_m \cdot I_m''(rU_o) + \frac{\lambda m^2 \gamma_o^2}{r^2} I_m(rU_o) \cdot B_m^* \right] \cdot I_m(r'U_o) e^{-jm\hat{\psi}} \cdot e^{-j\lambda z} \cdot d\lambda \quad (V.47)$$

B_m^* étant proportionnelle à θ_m , elle l'est aussi à λ et l'expression entre crochets en (V.47) est donc paire par rapport à λ et m . Dans ces conditions on peut montrer comme précédemment (cf annexe A4.3) que les bornes d'intégration et l'ordre de sommation en (V.46) et (V.47) sont réduites à $[0, +\infty]$. ce qui mène à :

$$E_{oz}^S = \frac{i(x') \cdot dx'}{4\pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \cos(\psi) \int_{\lambda=0}^{+\infty} \lambda \left\{ B_o I_o'(rU_o) \cdot I_o(r'U_o) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} B_m I_m'(rU_o) \dots I_m(r'U_o) \cdot \cos(m\hat{\psi}) \right\} \sin(\lambda z) \cdot d\lambda \quad (V.48)$$

$$E_{ox}^S = \frac{-i(x') \cdot dx'}{4\pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \int_{\lambda=0}^{+\infty} \left\{ \lambda^2 B_o I_o''(rU_o) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\lambda^2 B_m I_m''(rU_o) + \left(\frac{m \cdot \gamma_o}{r} \right)^2 \dots \lambda \cdot I_m(rU_o) \right] I_m(r'U_o) \cdot \cos(m\hat{\psi}) \right\} \cdot \cos(\lambda z) \cdot d\lambda$$

V.2 - MATRICE IMPEDANCE DE L'ANTENNE en J

Le champ rayonné par la structure située dans un milieu stratifié radialement se décompose en un rayonnement primaire et en un rayonnement secondaire, la matrice impédance s'écrit donc sous la forme suivante :

$$[Z] = [Z]^p + [Z]^s$$

$[Z^p]$ est la matrice de couplage primaire comme si l'antenne était située dans un milieu homogène et infini. Son terme généralisé a été développé dans le deuxième chapitre.

Nous allons nous attacher plus particulièrement dans ce paragraphe à déterminer les éléments de couplage secondaire Z_{kn}^s .

La structure étudiée ainsi que le système d'axe choisi sont représentés sur la figure (V - 3). Les deux parties de l'antenne parallèles entre elles sont distantes de D , x_i et x_s représentent respectivement l'excentrage de l'élément appartenant à la ligne d'adaptation l et de l'élément rayonnant L par rapport à l'axe oz . La distance $D = x_s - x_i$ étant la longueur de l'élément horizontal.

Avant d'entreprendre le calcul de la matrice impédance rappelons tout d'abord les expressions du champ rayonné par les parties verticales et horizontales constituant l'antenne en J.

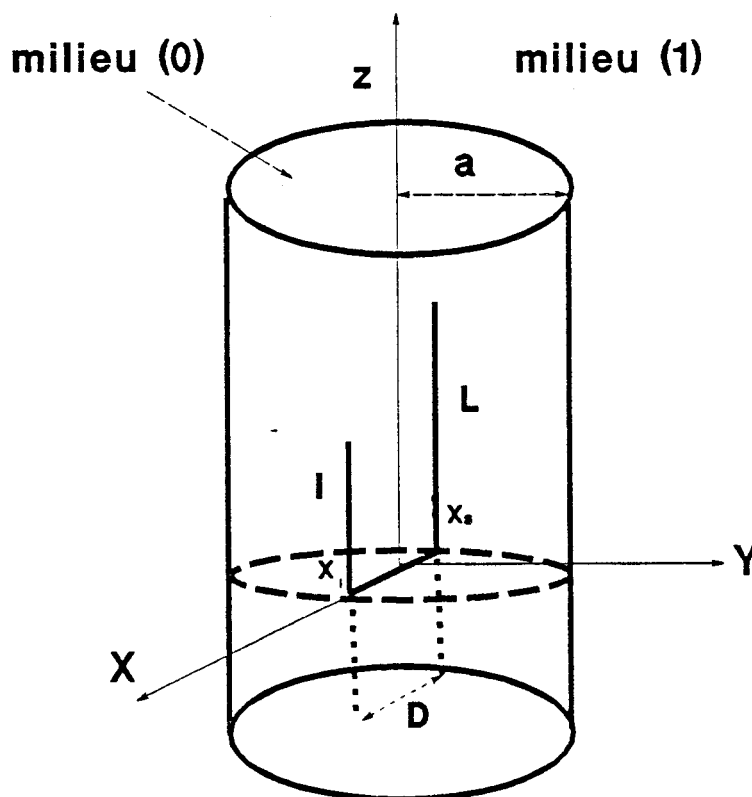


Figure (V - 3)

V.2.1 - Expressions du champ rayonné par l'antenne :

La matrice de couplage généralisée [Z] nécessite la connaissance des champs tangentiels sur l'antenne. Nous allons donc donner les expressions de $E_{o,x}^S$ et $E_{o,z}^S$ rayonnées par les parties verticales et horizontales de l'antenne et qui sont obtenues en effectuant l'intégration des champs rayonnés par les dipôles élémentaires constituant l'antenne.

a - Contribution de la partie verticale

En faisant appel aux formules du champ rayonné par un D.E.V excentré par rapport à l'axe oz développées en Annexe (A4.3). On obtient:

$$E_{z,s}^r = -2. \int_{z_i}^{z_s} \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o^2 \left[g_{oo} I_o(rU_o) + 2. \sum_{m=0}^{+\infty} g_{om} I_m(rU_o) \cos(m\hat{\psi}) \right] \cos(\lambda\hat{z}) d\lambda dz' \quad (V.49)$$

L'angle ψ ne peut prendre comme valeur que 0° ou 180° .

Le champ secondaire horizontal rayonné par un dipole vertical est obtenu à partir de $E_r \cos(\psi)$ puisque $\sin(\psi) \equiv 0$.

$$E_{x,s}^r = 2 \cos(\psi) \int_{z_i}^{z_s} \int_{\lambda} \left[\lambda U_o g_{oo} I'_o(rU_o) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\lambda U_o g_{om} I'_m(rU_o) + \frac{m\omega\mu}{r} A_{om} I_m(rU_o) \right] \dots \cos(m\hat{\psi}) \right] \sin(\lambda\hat{z}) d\lambda dz' \quad (V.50)$$

Les constantes d'intégration g_{om} et A_{om} contenant le courant $i(z')$ sont définies dans le quatrième chapitre.

b - Contribution de la partie horizontale

En faisant appel à l'expression (V.48) du champ secondaire rayonné par un D.E.H dans le milieu (0), on obtient :

$$E_{oz}^r = \frac{1}{4\pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \int_{x_i}^{x_s} i(x') \cos(\psi) \left[\lambda \left\{ B_o I'_o(rU_o) \cdot I_o(r'U_o) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} B_m I'_m(rU_o) \right. \right. \\ \left. \left. \dots I_m(r'U_o) \cdot \cos(m\hat{\psi}) \right\} \sin(\lambda z) \cdot d\lambda \cdot dx' \right] \quad (V.51)$$

$$E_{ox}^s = \frac{-1}{4\pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \int_{\lambda=0}^{+\infty} \int_{x_i}^{x_s} i(x') \left\{ \lambda^2 B_o I''_o(rU_o) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\lambda^2 B_m I''_m(rU_o) \right. \right. \\ \left. \left. \dots \left[\frac{m \cdot \gamma_o}{r} \right]^2 \lambda \cdot I_m(rU_o) \right] I_m(r'U_o) \cdot \cos(m\hat{\psi}) \right\} d\lambda \cdot dx' \quad (V.52)$$

On a pris dans (V.52) $\cos(\lambda z) = 1$ puisque la partie horizontale de l'antenne est confondue avec l'axe ox.

V.2.2 - MATRICE IMPEDANCE

Les équations (V.49) - (V.50) et (V.51) - (V.52) sont respectivement des équations intégrales dont le courant $i(z')$ et $i(x')$ est solution. Nous noterons d'une façon générale ces courants par $i(l')$. Comme précédemment, chacune des équations est résolue par la méthode des moments en choisissant comme fonctions de base et de test des fonctions triangulaires centrées sur une largeur 2Δ et centrées sur les abscisses l_n et l_k . Nous noterons les éléments de la matrice impédance par Z_{kn}^{ij} signifiant le couplage de l'élément k (situé sur la partie i de l'antenne) sur l'élément n (situé sur l'élément j). Nous allons distinguer la suite les couplages Z_{kn}^{vv} , Z_{kn}^{vh} , Z_{kn}^{hh} et Z_{kn}^{hv} .

V.2.2.1 Dipôle source vertical

a) dipole d'observation vertical

Z_{kn}^{vv} représentant le couplage entre deux éléments verticaux k et n situés respectivement à l'abscisse z_k et z_n a été déterminé dans le chapitre précédent. Cependant on s'était limité au cas où les deux éléments sont confondus sur le même axe vertical. Dans le cas présent on aura à distinguer également le couplage entre un élément k situé sur la partie rayonnante L, et de l'élément n situé sur la partie l, ou inversement. Dans ces conditions on peut déterminer d'une façon générale le couplage entre deux éléments verticaux donné par:

$$Z_{kn}^{vv} = \frac{1}{2\pi^2(\sigma_0 + j\omega\epsilon_0)} \int_{z_k - \Delta}^{z_k + \Delta} \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_0^2 \left[g'_{00} I_0(rU_0) I_0(r'U_0) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} g'_{0m} \dots I_m(rU_0) \cdot I_m(r'U_0) \cos(m\hat{\psi}) \right] \cos(\lambda\hat{z}) \cdot \phi_n(z') \cdot w_k(z) \cdot dz \cdot dz' \cdot d\lambda \quad (V.53)$$

Les bornes d'intégration doivent être prises entre $[z_i - \Delta, z_i]$ ou $[z_i, z_i + \Delta]$ lorsque l'élément i est situé sur un coin .

En intervertissant l'ordre des intégrales et en posant :

$$J(\lambda) = \int_{z_k - \Delta}^{z_k + \Delta} \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} \cos(\lambda\hat{z}) \phi_n(z') w_k(z) dz dz' \quad (V.54)$$

l'intégrale triple se réduit en une intégrale simple.

Les calculs développés en annexe 5 donnent l'expression de $J(\lambda)$, On obtient finalement une intégrale simple pour l'expression (V.54) :

$$Z_{kn}^{vv} = \frac{1}{2\pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o^2 \left[g'_{oo} I_o(rU_o) I_o(r'U_o) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} g'_{om} I_m(rU_o) I_m(r'U_o) \dots \cos(m\hat{\psi}) \right] J(\lambda) . d\lambda \quad (V.55)$$

b) Dipole d'observation horizontal

En faisant appel à l'expression (V.50) du champ rayonné par l'antenne verticale et en appliquant la méthode des moments sur des fonctions base $\phi_n(z')$ et test $w_k(x)$, on obtient:

$$Z_{kn}^{hv} = \frac{1}{2\pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o \left[g'_{oo} I_o(r'U_o) . S_o + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \left(g'_{om} S_m + \frac{m^2}{aU_o} G_m P_m \right) I_m(r'U_o) \dots \cos(m\hat{\psi}) \right] . J_1(\lambda) . d\lambda \quad (V.56)$$

avec:

$$S_m = \int_{x_k - \Delta}^{x_k + \Delta} I'_m(rU_o) . w_k(x) . \cos(\psi) . dx$$

$$P_m = \int_{x_k - \Delta}^{x_k + \Delta} \frac{I_m(rU_o)}{r} w_k(x) . \cos(\psi) . dx \quad (V.57)$$

$$J_1(\lambda) = \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} \lambda \sin(\lambda z') . \phi_n(z') . dz'$$

Les intégrales S_m , P_m et $J_1(\lambda)$ sont développées en annexe 5 .

Une méthode d'approximation a été utilisée pour calculer S_m et P_m .

V.2.2.2 - Dipole source horizontal

a) Dipole d'observation vertical

En faisant appel à la formule (V.48.a) et en appliquant la méthode des moments on aboutit à :

$$Z_{kn}^{vh} = \frac{1}{2\pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o \left\{ B_o I'_o(rU_o) \cdot L_o + 2 \cdot \sum_{m=1}^{+\infty} \left[B_m \cdot I'_m(rU_o) \cdot L_m \cdot \cos(m\hat{\psi}) \right] \right\} \cdot J_1(\lambda) \cdot d\lambda \quad (V.58)$$

avec:

$$L_m = \int_{x_n - \Delta}^{x_n + \Delta} I_m(r'U_o) \cdot \phi_n(x') \cdot dx' \quad (V.59)$$



b) Dipole d'observation horizontal

En faisant appel à l'expression du champ rayonné par l'élément horizontale et en appliquant la méthode des moments, on obtient:

$$Z_{kn}^{hh} = \frac{-1}{2\pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} \int_{\lambda=0}^{+\infty} \left\{ \lambda^2 B_o \cdot T_o \cdot L_o + 2 \cdot \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\lambda^2 B_m \cdot T_m + m^2 \gamma_o^2 \lambda R_m \cdot H_m \right] \cdot L_m \cdot \cos(m\hat{\psi}) \right\} \dots d\lambda \quad (V.60)$$

avec:

$$H_m = \int_{x_k - \Delta}^{x_k + \Delta} \frac{I'_m(rU_o)}{r^2 U_o} w_k(x) \cdot dx \quad ; \quad T_m = \int_{x_k - \Delta}^{x_k + \Delta} I''_m(rU_o) \cdot w_k(x) \cdot dx \quad (V.61)$$

Le développement de H_m et T_m est donné en Annexe 5.

V.3 - EXEMPLES NUMERIQUES

L'antenne en J aura une dimension constante dans la suite des exemples figure (V - 2) , longueur de la ligne d'adaptation : 32 cm, longueur du bras rayonnant : 72 cm, distance horizontale d entre brins 4 cm, diamètre du fil constituant l'antenne : 1 mm.

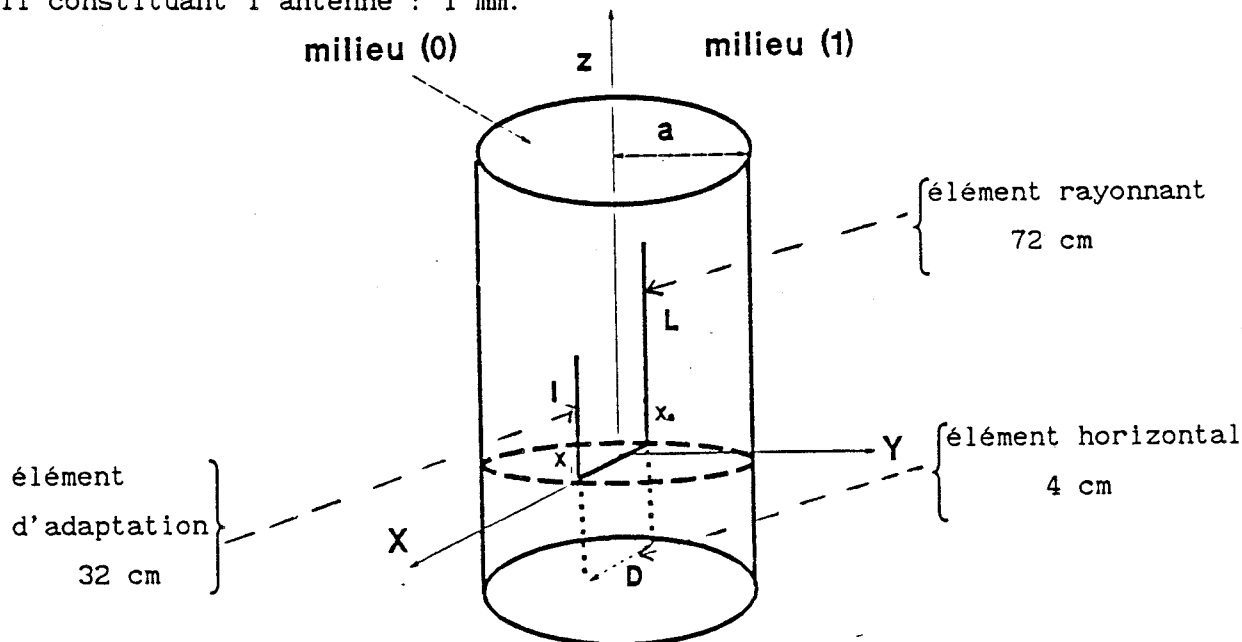


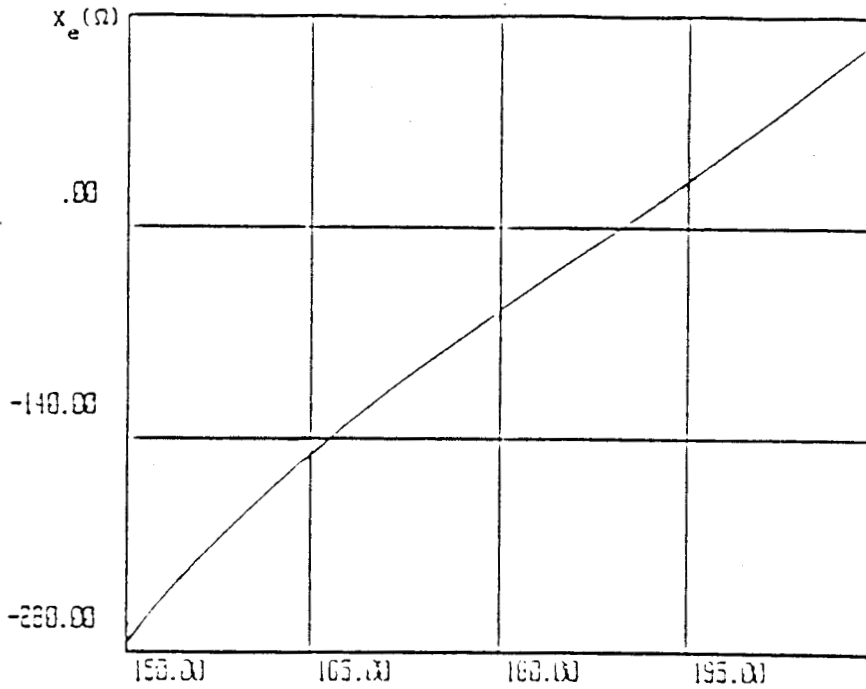
FIGURE V - 3 : ANTENNE EN J

V.3.1 - Antenne en milieu homogène (air)

Nous avons tout d'abord repris sur la planche (V - 1) la variation de l'impédance d'entrée de l'antenne en fonction de la fréquence. Nous rappelons que la méthode choisie pour la résolution de l'équation intégrale est celle de galerkin, l'antenne étant divisée en éléments ayant une largeur $\Delta = 1$ cm. Comme nous avons déjà eu l'occasion de le signaler dans le deuxième chapitre, cette largeur Δ est la valeur minimum qui puisse être faite, compte tenu du temps calcul et de la place mémoire disponible sur le calculateur H.P 9000 du laboratoire.

Nous avons reporté sur la planche (V - 2) les variations du module $|Z_e|$ et de la phase $\psi(Z_e)$ de l'impédance d'entrée qui ont été mesurées soit dans le cas d'une antenne isolée dans l'air (a) soit d'une antenne dans un tube en P.V.C (b) .

Impédance d'entrée en fonction de la fréquence

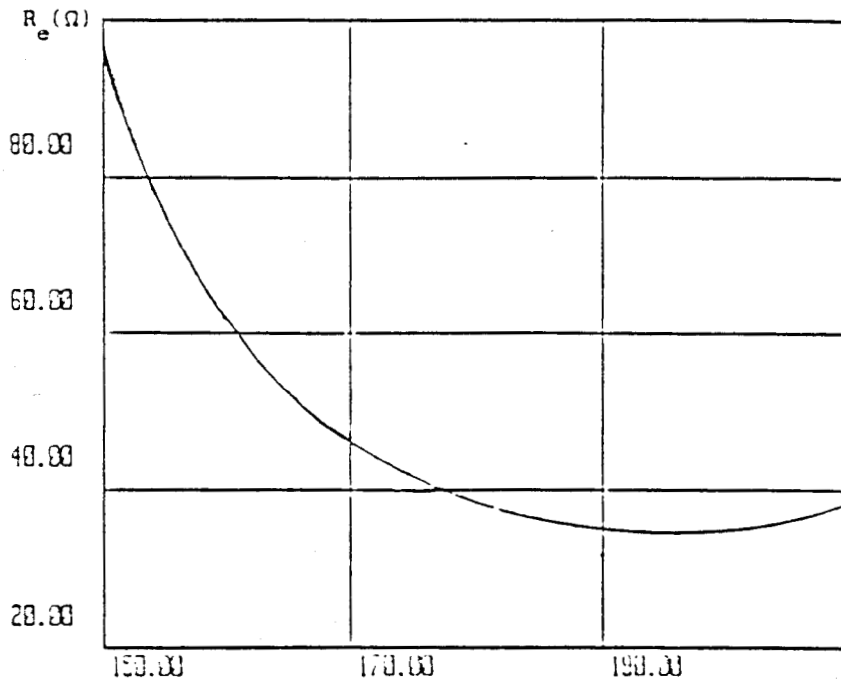


$r_a = 1$ mm

$L = 72$ cm

$l = 32$ cm

F en MHz



F en MHz

PLANCHE V - 1

ANTENNE EN " J "

Impédance d'entrée en fonction de la fréquence

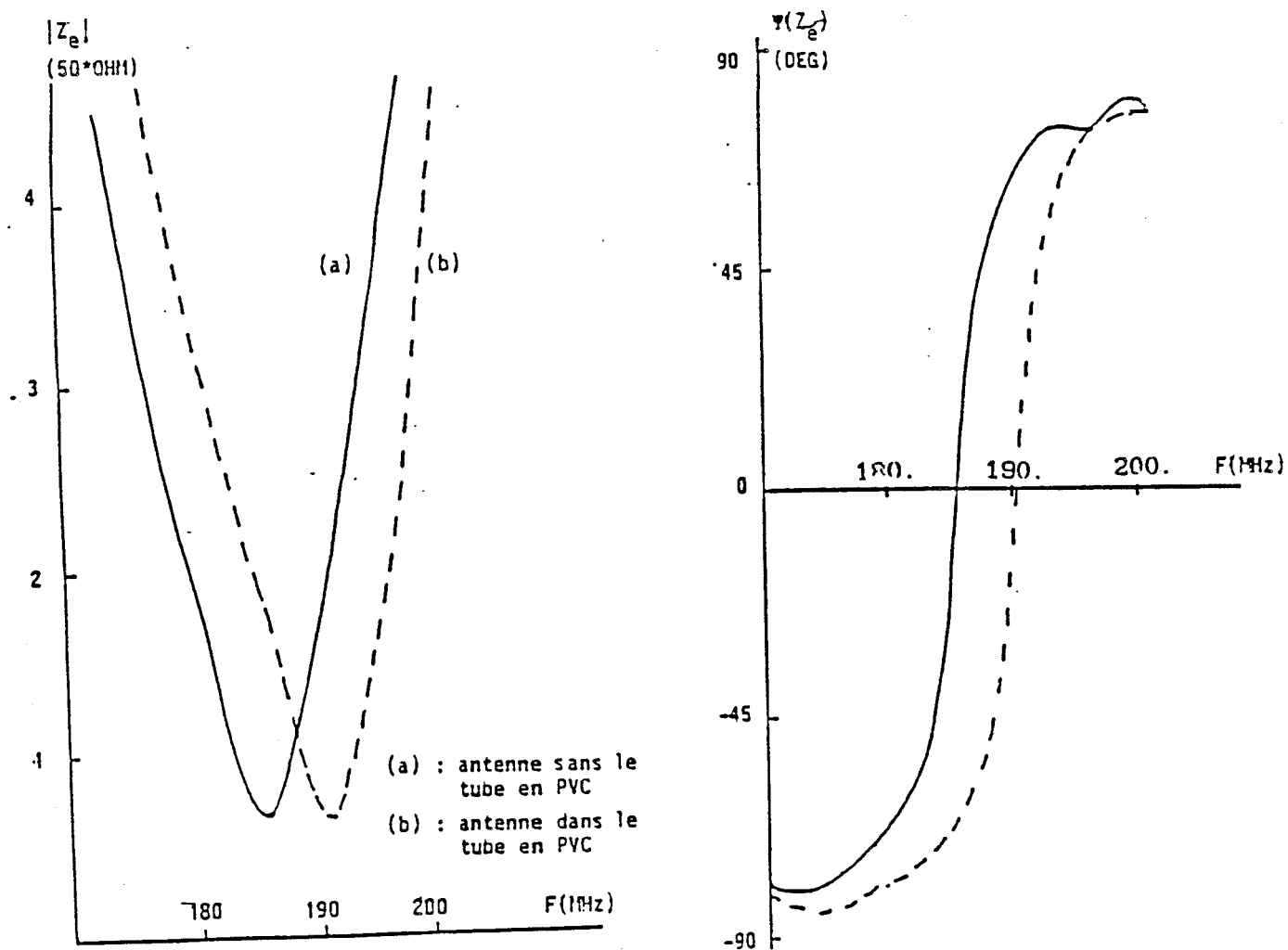


PLANCHE V - 2 ANTENNE J REELLE

Si on compare les résultats donnés par la courbe (a) à ceux obtenus numériquement, on remarque que la fréquence d'accord f_a théorique est de 185 MHz et que la résistance d'entrée correspondante est de 38Ω . Expérimentalement, on trouve $f_a = 185$ MHz et $R_a = 42 \Omega$. Le faible désaccord peut s'expliquer par les différences géométriques entre l'antenne réelle et l'antenne théorique. En effet:

1) L'antenne expérimentale a un diamètre de 0.37 mm (au lieu de 2 mm dans le modèle). Cette faible valeur de diamètre n'a pu être introduite dans le modèle numérique car elle provoque des non convergences dans le calcul. En effet le principe du calcul du courant consiste à écrire la nullité de la composante tangentielle du champ sur la surface de l'antenne. Dans l'hypothèse des antennes minces, ceci revient à supposer que tout le courant est concentré sur l'axe du fil et à calculer le champ à une distance variant entre le rayon de ce fil et la longueur de l'antenne et qu'une faible erreur de calcul introduira une instabilité de la matrice impédance.

2) l'excitation théorique se fait sur un élément Δ au milieu de la partie horizontale. En pratique, l'excitation est différente, mais non modélisable facilement. Celle-ci est représenté sur la figure (V - 4):

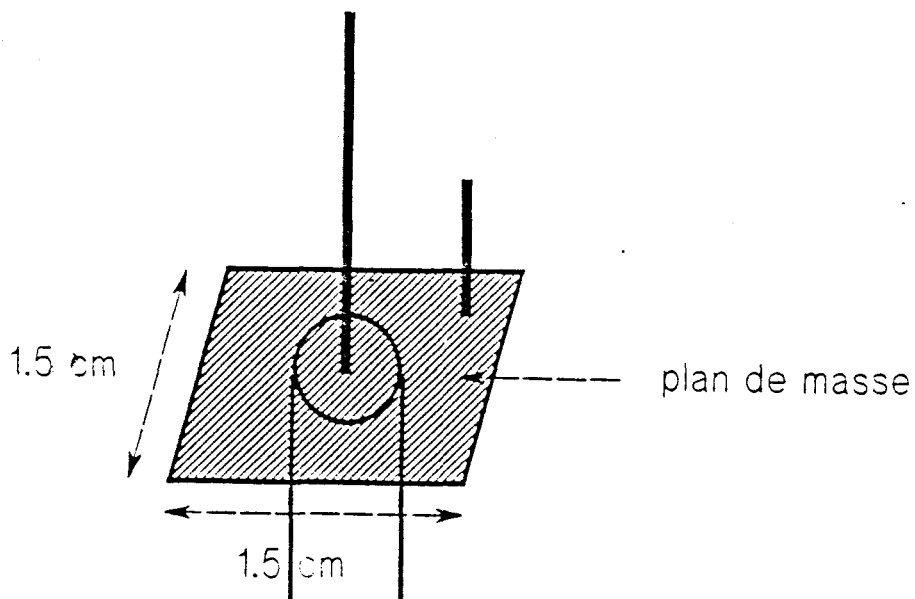
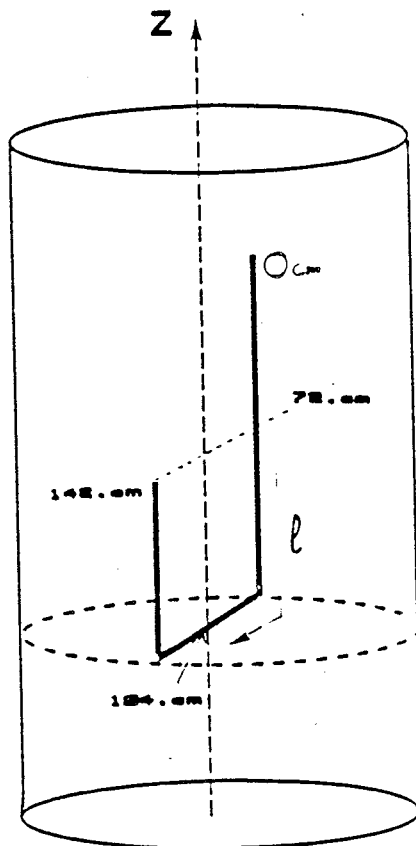


FIGURE V - 4 : ANTENNE J REELLE

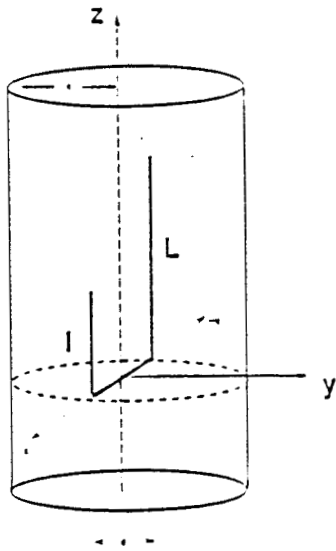
3) Les fils minces constituant l'antenne sont collés contre une fine plaque de P.V.C afin d'obtenir une certaine rigidité mécanique.

V.3.2 - Antenne centrée dans le forage

Le rayon du trou de forage est fixé à 6 cm et supposons d'abord que l'antenne soit centrée



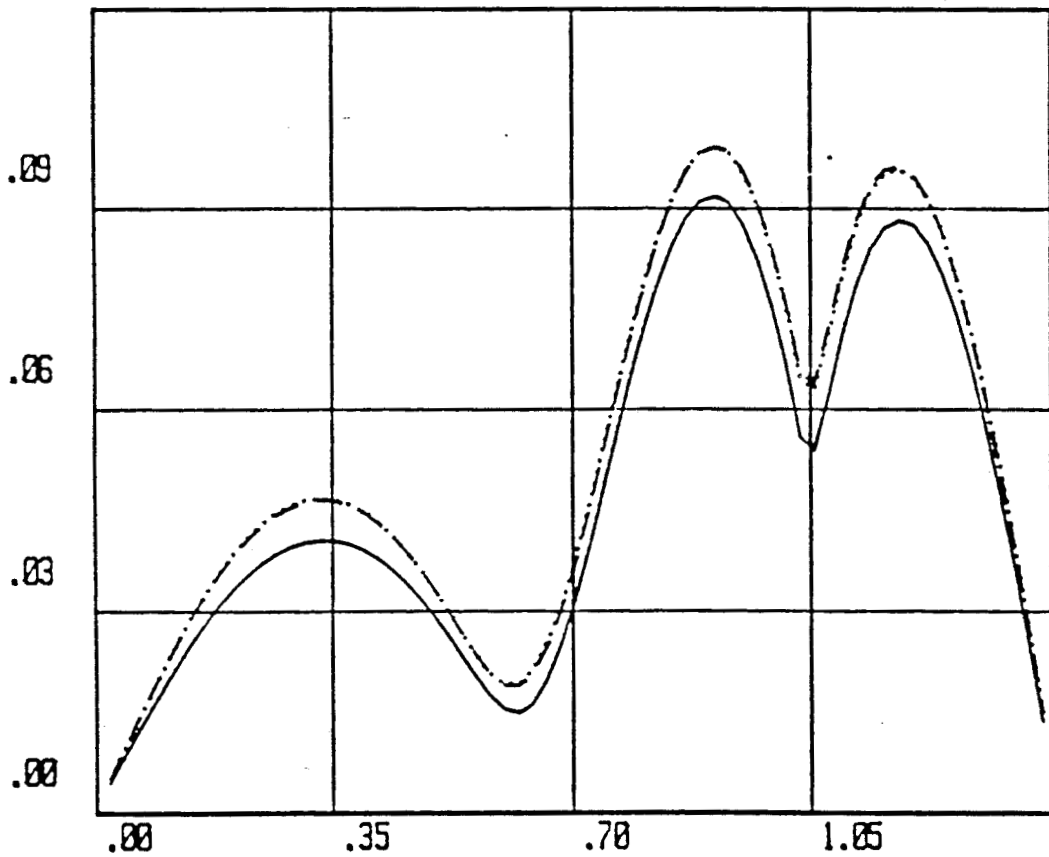
Les courbes de la planche (V - 3) montrent la variation du courant sur l'ensemble de la structure rayonnante pour une fréquence de 200 MHz. La conductivité du terrain a été introduite en paramètre et vaut 10^{-1} S/m, 10^{-2} S/m et 10^{-3} S/m. L'abscisse curviligne l a une origine o au sommet de l'élément rayonnant qui s'étend donc de 0 à 72 cm, l'excitation étant faite à l'abscisse 106 cm. On constate que la forme de la distribution du courant sur l'élément rayonnant est proche de celle associée à une résonance en $\lambda/2$. Par contre la ligne d'adaptation est trop longue puisque le courant ne passe



————— $\sigma_1 = 10^{-1}$ S/m
 - - - - - $\sigma_1 = 10^{-2}$ S/m
 $\sigma_1 = 10^{-3}$ S/m

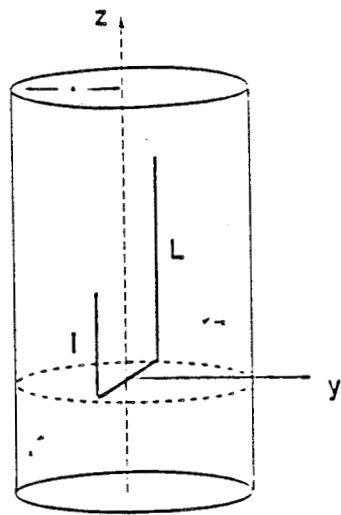
$\epsilon_{r1} = 5$

$|I|$ en mA



l en m

PLANCHE V - 3 ANTENNE EN J CENTREE SUR L' AXE DU FORAGE



--- F = 170. MHz

— F = 175 MHz

- . - . - F = 180 MHz

$|I|$ en mA

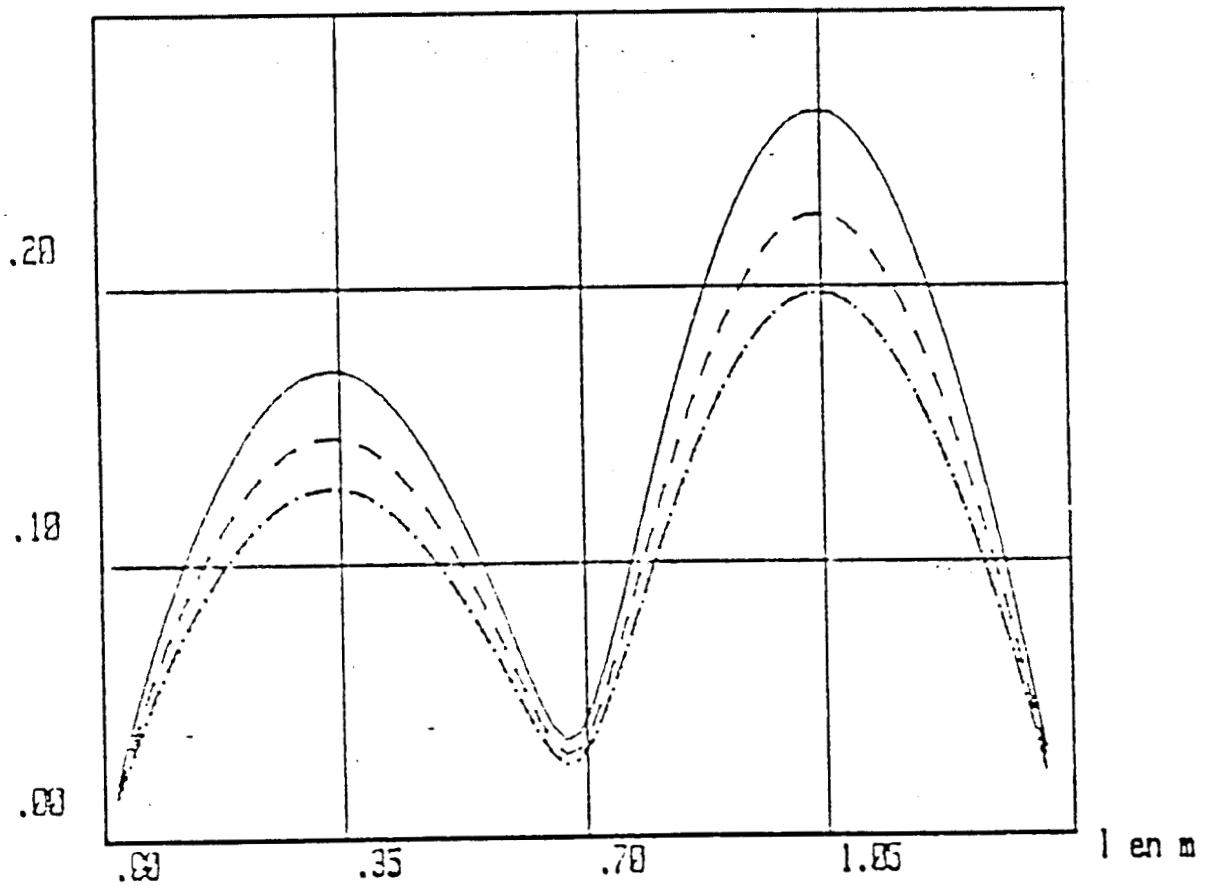
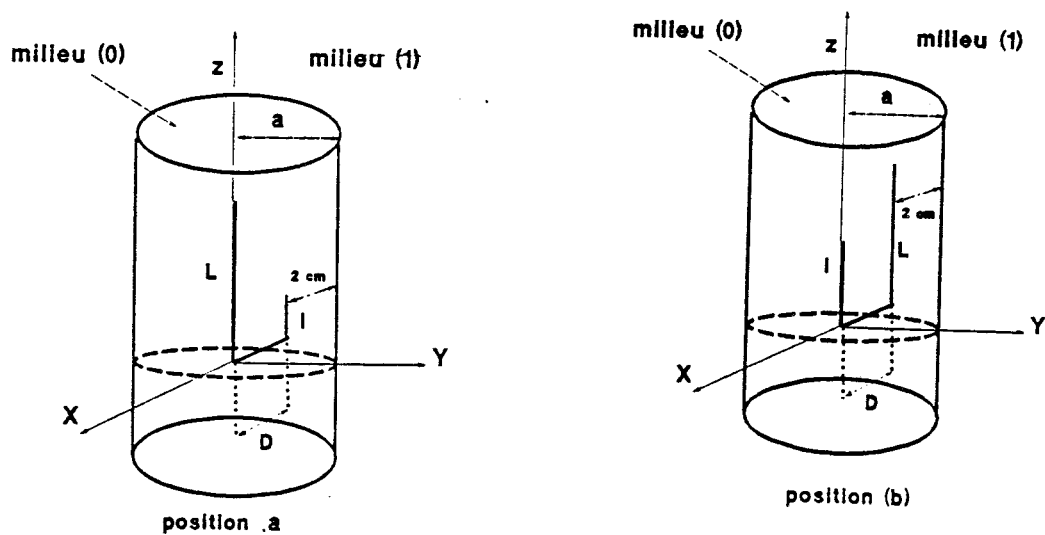


PLANCHE V - 4 DISTRIBUTION DU COURANT SUR UNE ANTENNE EN J

Paramètre : la fréquence



$F = 175 \text{ MHz}$

$|I|$ en mA

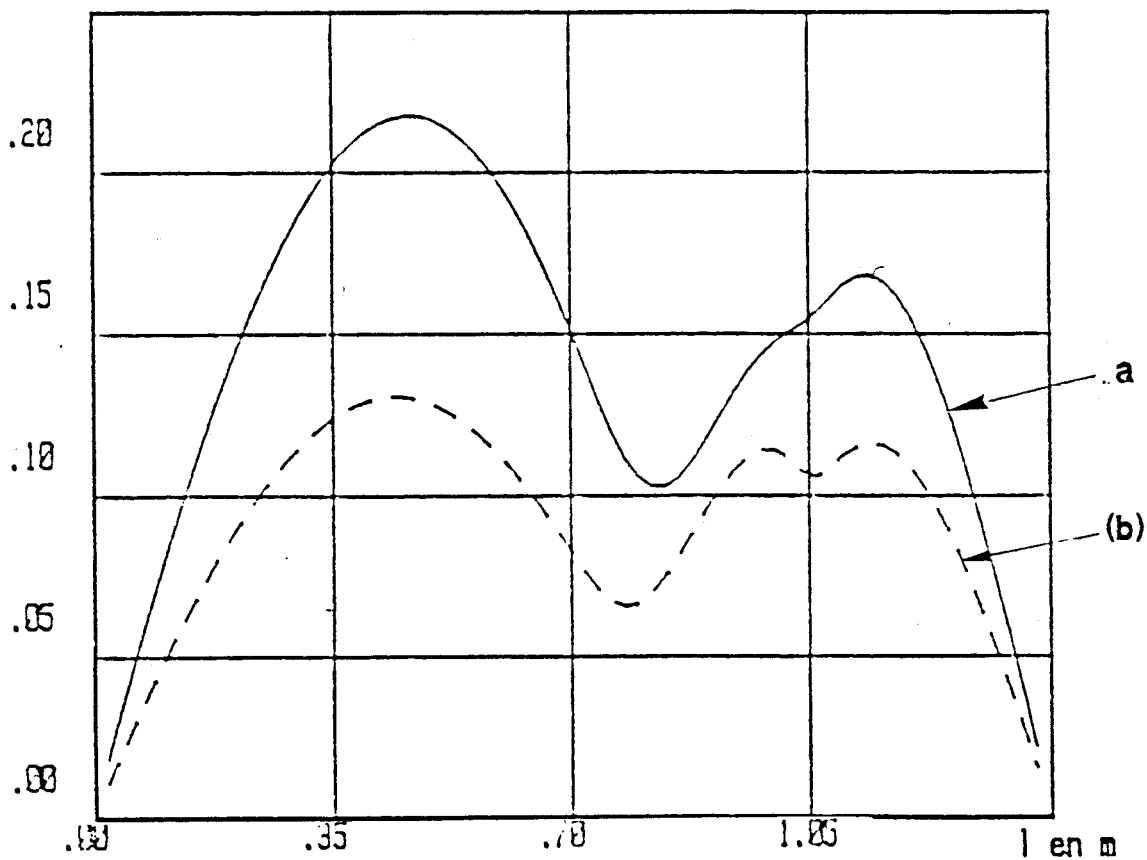


PLANCHE V - 5 DISTRIBUTION DU COURANT SUR UNE ANTENNE EN J

pas par un extremum au point d'alimentation. Malgré cette désadaptation, on remarque que le courant est peu dépendant de la conductivité du terrain, les courbes correspondant à $\sigma = 10^{-2}$ S/m et $\sigma = 10^{-3}$ S/m étant confondues, l'écart avec la courbe associée à $\sigma = 10^{-1}$ S/m ne dépassant pas 12%.

Afin de trouver la résonance de l'antenne, nous avons tracé la variation du courant pour des fréquences plus basses : 170 MHz, 175 MHz et 180 MHz, planche (V - 4). L'accord se situe à 175 MHz et on remarque bien dans ce cas que le maximum du courant est produit sur l'élément d'excitation. La résistance d'entrée est de 89 Ω . La courbe expérimentale présentée sur la planche (I - 7) montre qu'en fonction de la profondeur et de la position de la sonde, la fréquence d'accord varie entre 174 MHz et 178 MHz et la résistance d'entrée entre 65 Ω et 80 Ω . (L'antenne est dans ce cas à l'intérieur d'un tube en P.V.C)

V.3.3 - Antenne excentrée dans le forage

Les deux positions d'antenne envisagées ainsi que les distributions du courant correspondantes sont données sur la planche (V - 5) .

On constate un désaccord de l'antenne qui peut se manifester soit par une augmentation, soit par une diminution du courant maximum sur l'élément "rayonnant", ceci par rapport au cas de l'antenne centrée adaptée. Par contre l'impédance d'entrée est plus élevée puisqu'elle vaut 150 Ω et 180 Ω . Il faut enfin noter que l'amplitude du courant sur les deux brins de la ligne d'adaptation n'est plus symétrique et que, par conséquent, cette ligne va contribuer au rayonnement de la structure.

V.4 - CONCLUSION

Nous avons décrit dans ce chapitre le formalisme théorique permettant de calculer les caractéristiques électriques d'une antenne en J descendue dans un forage. Le code de calcul numérique qui a été mis au point a ainsi permis de mettre en évidence l'influence du sol sur ses conditions d'adaptation.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Le travail présenté dans cette thèse développe essentiellement l'aspect théorique lié au comportement d'antennes utilisées en tomographie électromagnétique. Nous avons tout d'abord rappelé les premiers résultats expérimentaux obtenus sur un site karstique. Pour une fréquence d'émission de l'ordre de 200 MHz et une distance entre forage de 5 m à 10 m, des mesures de champ, en fonction de la position des antennes d'émission et de réception descendues dans le forage, ont confirmé la possibilité d'utilisation de cette méthode.

L'inversion des données effectuée par le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées a permis de localiser une cavité qui avait été détectée par d'autres techniques. De plus la corrélation entre les résultats de ces mesures et ceux issus des sondages est satisfaisante.

Un point critique dans la mise en oeuvre de cette technique réside dans la réalisation des antennes ou plus exactement dans la variation de leur caractéristiques électriques en fonction de la position de la sonde dans le forage.

Nous nous sommes intéressés tout d'abord à une antenne verticale centrée sur l'axe du trou et nous avons montré que si le milieu encaissant a une conductivité de 10^{-1} S/m à 10^{-3} S/m par exemple, cela provoque une diminution de 5 % de la fréquence d'accord. Si cette fréquence d'accord est peu dépendante de la conductivité, la résistance d'entrée de l'antenne subit une diminution importante de l'ordre de 40% lorsque la conductivité du sol devient supérieure à 10^{-1} S/m. Cette valeur élevée de conductivité correspond au cas où les courants de conduction deviennent plus importants que les courants de déplacement .

Si l'antenne est descendue dans un trou rempli d'eau, ses brins situés dans un tube isolant doivent se situer à une distance d'au moins 2cm. de l'eau afin de pouvoir obtenir une résonance.

L'influence de l'excentrage de l'antenne demi-onde dans le trou de forage a ensuite montré que pour un rayon du trou de 4.5 cm, un décentrage de 2 cm ne modifie pas sensiblement la fréquence d'accord. La résistance d'entrée associée à la résistance de rayonnement de l'antenne subit par contre une variation importante lors du décentrage si la conductivité du sol devient égale ou supérieur à 10^{-1} S/m .

Enfin la dernière partie de ce travail a été consacrée à l'étude d'une antenne en J . Un accord satisfaisant apparait entre les prévisions théoriques et les premiers résultats expérimentaux.

Il serait nécessaire de poursuivre cette étude notamment au niveau expérimental, afin d'une part de valider nos différents résultats et d'autre part, de développer dans de nombreuses configurations les méthodes d'interprétation.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. GABILLARD, P. DEGAUQUE, J.R. WAIT
"Subsurface electromagnetic telecommunication"
IEEE - Décembre 1972.
- [2] M. KASSI-LAHLU
"Rayonnement d'une antenne verticale placée dans un forage
Application à la tomographie électromagnétique"
thèse, Université de Lille I, 1986.
- [3] P. DEGAUQUE et M. KASSI-LAHLU
"Tomographie électromagnétique - Transmission forage-forage
compte rendu des mesures effectuées à s^t - Brieux"
Rapport final du contrat L.C.P.C / U.S.T.L de Lille I
Octobre 1986.
- [4] PH. COTE
"Ascultation tomographique du sous - sol d'un appui du
Viaduc de La Planchette"
Rapport interne Laboratoire Central Des Ponts et Chaussées,
service physique, Décembre 1991.
- [5] F. MOLINET
"Compatibilité électromagnétique "
Chap.9, Couplage d'une onde plane à des antennes filaires.
Collection scientifique et technique des annales de
télécommunications.
- [6] POCKLINTONG, A.J POGGIO, E.K MILLER
"Integral equation, Solutions of three dimensional scattering
problems" Computer technique for electromagnetic,
R. MITTRA, University of Illinois, éditée par PERGAMON -
1973.

- [7] "Field Computation by moment method"
Editeur MAC MILLAN - New York, 1963.
- [8] C.M BUTTLER, D.R WILTON
"Analysis of various numerical techniques applied to thin-wire scatters"
IEEE Transactions of antenna and propagation, Juil 1975.
- [9] D.R WILTON, C.M BUTLER
"Efficient numerical techniques for solving pocklington Equations and their relationship to other methods"
IEEE Transactions of antenna and propagation, Janv 1976.
- [10] C.D TAYLOR, J.R CASTILLO
"On Electromagnetic field excitation of an shielded multiconducteur cables"
I.E.E.E trans on E.M.C, Vol 20, pp 495 - 500, Nov. 1978
- [11] A. ZEDDAM
"Couplage d'une onde électromagnétique rayonnée par une décharge orageuse à un câble de télécommunications"
thèse de doctorat d'état à l'université de Lille I, Juillet 1988.
- [12] L. KONE
" Conception d'outils numériques et de bancs de mesures permettant d'évaluer l'efficacité de blindage des câbles et connecteurs", thèse de l'Université de Lille I, 1989
- [13] A. ZEDDAM, P. DEGAUQUE
"Theoretical and experimental results of the coupling between a buried cable and a lightning stroke"
Soumis pour présentation à Int. Symp. On EMC, Zurich, Mars 1989.

- [14] P. DEGAUQUE, A. ZEDDAM
"Couplage entre une onde électromagnétique et un câble aérien ou enterré. Remarque sur les approches basées sur la méthode des lignes de transmissions" Note technique CNET, NT/LAA/ELR/465 , Avril 1985.
- [15] A. ZEDDAM, P. DEGAUQUE
"Common mode voltage on a multiwire shielded cable illuminated by a electromagnetic pulse"
Electromagn. Pulse symp. Menlo Park, California, May 1988.
- [16] A. ALBERT, J.R. SMITH
"Coupling of external electromagnetic field to transmission lines". JOHN WILEY and sons, New York (London), Sydney (TORONTO), 1977.
- [17] R. GABILLARD
"Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs, Application aux télécommunications souterraines", cours de L'Institut Radiotechnique de L'Université de Lille I.
- [18] J.R. WAIT, D.A. HILL
"Impedance of an electric Dipole Located in a cylindrical cavity in a dissipative Medium"
Applied physics 11.351-356, July 1976.
- [19] P. COTE
"TOMOGRAPHIES SISMIQUES EN GENIE - CIVIL "
Thèse, Université de Joseph Fourier - GRENOBLE I, Octobre 1988

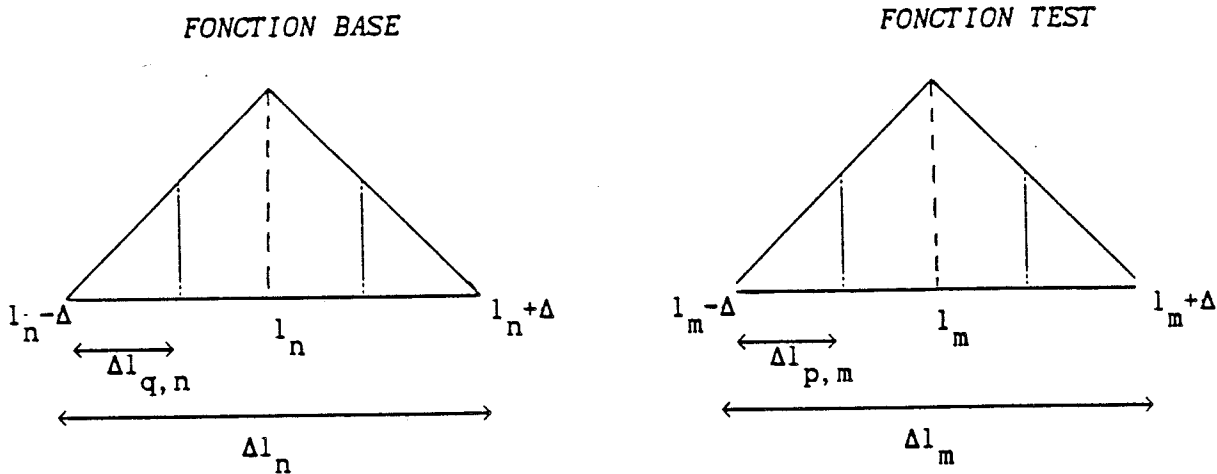
ANNEXES

ANNEXE A.1

APPROXIMATIONS DES INTEGRALES INTERVENANT DANS

LE CALCUL DE LA MATRICE IMPEDANCE

La méthode d'approximation de l'intégrale double consiste à diviser chacun des segments élémentaires Δl_m et Δl_n en 4 segments identiques de longueurs respectives $\Delta l_m/4$ et $\Delta l_n/4$, et de supposer que la fonction de Green sur un segment élémentaire $\Delta l_{q,n}$ ($q=1,4$) de l'élément Δl_n est constante lorsque le point d'observation se déplace le long du segment $\Delta l_{p,m}$ ($p=1,4$) de l'élément Δl_m , est égale à sa valeur au centre de l'élément $\Delta l_{p,m}$ considéré.



subdivision des éléments Δl_m et Δl_n

Nous sommes ramenés à calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\Delta l_n} \int_{\Delta l_m} G(R) w_m(l) \phi_n(l') \vec{t}(l) \vec{t}(l') dl dl'$$

$$I_2 = \int_{\Delta l_n} \int_{\Delta l_m} G(R) \frac{\partial w_m(l)}{\partial l} \frac{\partial \phi_n(l')}{\partial l} dl dl'$$

On admet que le découpage sur Δl_m et Δl_n est assez fin pour que $\vec{t}(l)$ et

\rightarrow
 $t(l')$ soient approximativement constant sur un segment élémentaire $\Delta l_{p,m}$ et $\Delta l_{q,n}$. Dans ces conditions:

$$I_1 = \sum_{p,q} \int_{\Delta l_{q,n}} \int_{\Delta l_{p,m}} G(R) w_m(l) \phi_n(l') \cdot \frac{\overrightarrow{\Delta l}_{p,m}}{\Delta l_{p,m}} \frac{\overrightarrow{\Delta l}_{q,m}}{\Delta l_{q,m}} \cdot dl \cdot dl'$$

$$= \sum_{p,q} \int_{\Delta l_{q,n}} \left[\int_{\Delta l_{p,m}} G(R) w_m(l) dl \right] \phi_n(l') dl' \frac{\overrightarrow{\Delta l}_{p,m}}{\Delta l_{p,m}} \frac{\overrightarrow{\Delta l}_{q,m}}{\Delta l_{q,m}}$$

En supposant que $G(R)$ est constant sur $\Delta l_{p,m}$:

$$I_1 = \int_{\Delta l_{q,m}} G[R(m_p, l')] \cdot \phi_n(l') \left[\int_{\Delta l_{p,m}} w_m(l) dl \right] \cdot dl' \frac{\overrightarrow{\Delta l}_{p,m}}{\Delta l_{p,m}} \frac{\overrightarrow{\Delta l}_{q,m}}{\Delta l_{q,m}}$$

Posons:

$$T(p,m) = \int_{\Delta l_{p,m}} w_m(l) dl$$

$$R(m_p, l') = |\vec{r}_{mp} - \vec{r}'|$$

$$\Psi'(m_p, n_q) = \int_{\Delta l_{q,n}} G[R(m_p, l')] \phi_n(l') dl'$$

l'intégrale I_1 s'écrit finalement sous la forme:

$$I_1 = \sum_{p,q} \Psi'(m_p, n_q) \cdot T(p,m) \frac{\overrightarrow{\Delta l}_{p,m}}{\Delta l_{p,m}} \frac{\overrightarrow{\Delta l}_{q,m}}{\Delta l_{q,m}}$$

Dans le cas où les fonctions base-test sont triangulaires linéaires, on obtient:

$$T(p, m) = \begin{cases} \Delta/8 & \text{pour } p = 1, 2 \\ 3\Delta/8 & \text{pour } p = 3, 4 \end{cases}$$

Calculons à présent l'expression de l'intégrale I_2

$$I_2 = \sum_{p, q}^4 \int_{\Delta l_{p, m}} \int_{\Delta l_{q, n}} TP1(p, m) \cdot TP1(q, n) \cdot G(R) \cdot dl \cdot dl'$$

avec:

$$TP1(p, m) = \frac{\partial w_m(l)}{\partial l} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{pour } p = 1, 2 \\ -\frac{1}{\Delta} & \text{pour } p = 3, 4 \end{cases}$$

$$TP1(q, n) = \frac{\partial \phi_n(l')}{\partial l'} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{pour } q = 1, 2 \\ -\frac{1}{\Delta} & \text{pour } q = 3, 4 \end{cases}$$

L'intégrale I_2 se réduit à :

$$I_2 = \sum_{p, q}^4 TP1(p, m) \cdot TP1(q, n) \int_{\Delta l_{q, n}} G(R) \cdot dl' \cdot \int_{\Delta l_{p, m}} dl$$

posons:

$$\Psi(m_p, n_q) = \frac{1}{\Delta l_{q, n}} \int_{\Delta l_{q, n}} \frac{e^{-\gamma_0 R(m_p, l')}}{4\pi R(m_p, l')} \cdot dl'$$

$$TP(p, m) = \Delta l_{p, m} \cdot TP1(p, m)$$

$$TP(q, n) = \Delta l_{q, n} \cdot TP1(q, n)$$

L'expression de I_2 s'écrit finalement:

$$I_2 = \sum_{p,q}^4 TP(p,m) \cdot TP(q,n) \cdot \Psi(m_p, n_q)$$
$$TP(p,m) = TP(q,n) = \begin{cases} 1/2 & \text{pour } p = 1,2 \text{ ou } q = 1,2 \\ -1/2 & \text{pour } p = 3,4 \text{ ou } q = 3,4 \end{cases}$$

ANNEXE A.2

**CALCUL DES CONSTANTES D'INTEGRATION ET
DES COMPOSANTES DU CHAMP
POUR UN DIPOLE CENTREE**

ANNEXE A.2 : CONSTANTES D'INTEGRATION ET COMPOSANTES DU CHAMP - DIPOLE CENTRE

ANNEXE A.2

Dans cette partie nous allons calculer les constantes d'intégrations secondaires, puis les composantes du champ électromagnétique E_r , E_z et H_ψ pour un dipôle électrique vertical centré dans un milieu stratifié à 3 couches.

Nous rappelons le système (III.32) de 4 équations à 4 inconnues, obtenu à partir de la continuité du champ tangentiel sur chaque interface de séparation.

$$U_0^2 \left[A_0 K_0(aU_0) + f_{01} I_0(aU_0) \right] = U_1^2 \left[g_{11} K_0(aU_1) + f_{11} I_0(aU_1) \right] \quad (1)$$

$$U_1^2 \left[g_{11} K_0(bU_1) + f_{11} I_0(bU_1) \right] = U_2^2 g_{02} K_0(bU_2) \quad (2)$$

$$U_0 (\sigma_0 + j \omega \varepsilon_0) \left[A_0 K'_0(aU_0) + f_{01} I'_0(aU_0) \right] = U_1 (\sigma_1 + j \omega \varepsilon_1) \dots \left[g_{11} K'_0(aU_1) + f_{11} I'_0(aU_1) \right] \quad (3)$$

$$U_1 (\sigma_1 + j \omega \varepsilon_1) \left[G_{11} K'_0(bU_1) + f_{11} I'_0(bU_1) \right] = U_2 (\sigma_2 + j \omega \varepsilon_2) G_{02} K'_0(bU_2) \quad (4)$$

$K'_0(z)$ et $I'_0(z)$ étant les dérivées des fonctions de Bessel modifiées $K_0(z)$ et $I_0(z)$, définies par

$$K'_0(z) = -K_1(z) \quad \text{et} \quad I'_0(z) = I_1(z)$$

z est un nombre complexe.

A partir de (2) et (4) on déduit l'expression de G_{02} , donnée par:

ANNEXE A.2 : CONSTANTES D'INTEGRATION ET COMPOSANTES DU CHAMP - DIPOLE CENTRE

$$G_{o2} = \frac{1}{\alpha_1^2} \frac{G_{11} K_o(bU_1) + F_{11} I_o(bU_1)}{K_o(bU_2)} \quad (5)$$

$$G_{o2} = \frac{\delta_1}{\alpha_1^2} \frac{G_{11} K_1(bU_1) - F_{11} I_1(bU_1)}{K_1(bU_2)} \quad (6)$$

avec :

$$\alpha_1 = \frac{U_2}{U_1} \quad \text{et} \quad \delta_1 = \frac{(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)}{(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2)}$$

les expressions (5) et (6) doivent être identique:

$$\begin{aligned} F_{11} &= - \frac{\alpha_1 \delta_1 K_o(bU_2) K_1(bU_1) - K_o(bU_1) K_1(bU_2)}{\alpha_1 \delta_1 K_o(bU_2) I_1(bU_1) + I_o(bU_1) K_1(bU_2)} \cdot G_{11} \\ &= - T_m \cdot G_{11} \end{aligned} \quad (7)$$

En introduisant l'expression (7) dans (1) et (3), on obtient:

$$U_o^2 [A_o K_o(aU_o) + F_{o1} I_o(aU_o)] = U_1^2 G_{11} [K_o(aU_o) - T_m I_o(aU_1)] \quad (8)$$

$$U_o(\sigma_o + j\omega\epsilon_o) [A_o K'_o(aU_o) + F_{o1} I'_o(aU_o)] = U_1(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) [K'_o(aU_1) - T_m I'_o(aU_1)] \quad (9)$$

Les équations (8) et (9) forment un système de 2 équations à 2 inconnues, dont la solution est donnée par:

ANNEXE A.2 : CONSTANTES D'INTEGRATION ET COMPOSANTES DU CHAMP - DIPOLE CENTRE

$$f_{o1} = - A_o \frac{\alpha_o \delta_o K_o(c_o) [K_1(c_1) + T_m I_1(c_1)] - K_1(c_o) [K_o(c_1) - T_m I_o(c_1)]}{\alpha_o \delta_o I_o(c_o) [K_1(c_1) + T_m I_1(c_1)] + I_1(c_o) [K_o(c_1) - T_m I_o(c_1)]}$$

$$= - A_o F(\lambda)$$
(10)

et:

$$g_{11} = A_o \alpha_o^2 \frac{K_o(c_o) - F(\lambda) I_o(c_o)}{K_o(c_1) - T_m I_o(c_1)} = A_o \cdot g(\lambda)$$
(11)

avec :

$$\alpha_o = \frac{U_o}{U_1} \qquad \delta_o = \frac{(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)}{(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)}$$

$$c_o = aU_o \quad \text{et} \quad c_1 = aU_1$$

En introduisant l'expression de F_{11} en (7) dans (5), on obtient:

$$g_{o2} = \frac{1}{\alpha_1^2} \cdot \frac{K_o(bU_2) - T_m I_o(bU_1)}{K_o(bU_2)} \cdot g_{11}$$
(12)

CALCUL DES COMPOSANTES DU CHAMP

Les composantes du champ électromagnétique sont déduites à partir du potentiel de Hertz dans chacun des milieux de propagation.

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= \text{rot rot } \vec{\Pi}_i \\ \vec{H}_i &= (\sigma_i + j\omega\epsilon_i) \text{rot } \vec{\Pi}_i \end{aligned}$$

En appliquant les relations de Maxwell aux potentiels dans chacun des milieux sous forme intégrale, on aboutit à :

milieu (0)

$$E_{o,r} = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} -j\lambda U_o \frac{\partial \Pi_{o,m}}{\partial (rU_o)} e^{-j\lambda \hat{z}} d\lambda = -j \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \lambda U_o A_o \left[K'_o(rU_o) - F(\lambda) I'_o(rU_o) \right] e^{-j\lambda \hat{z}} d\lambda$$

$$E_{o,z} = - \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} U_o^2 \Pi_{o,m} e^{-j\lambda \hat{z}} d\lambda = - \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} U_o^2 A_o \left[K_o(rU_o) - F(\lambda) I_o(rU_o) \right] e^{-j\lambda \hat{z}} d\lambda \quad (13)$$

$$H_{o,\psi} = -(\sigma_o + j\omega\epsilon_o) \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} U_o \frac{\partial \Pi_{o,m}}{\partial (rU_o)} e^{-j\lambda \hat{z}} d\lambda = -(\sigma_o + j\omega\epsilon_o) \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} U_o A_o \left[K'_o(rU_o) - F(\lambda) I'_o(rU_o) \right] e^{-j\lambda \hat{z}} d\lambda$$

milieu (1)

$$E_{1,r} = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} -j\lambda U_1 G_{11} \left[K'_o(rU_1) - T_m I'_o(rU_1) \right] e^{-j\lambda \hat{z}} d\lambda$$

$$E_{1,z} = - \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} U_1^2 G_{11} \left[K'_0(rU_1) - T_m I'_0(rU_1) \right] e^{-j\lambda \hat{z}} \cdot d\lambda \quad (14)$$

$$H_{1,\psi} = -(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} U_1 G_{11} \left[K'_0(rU_1) - T_m I'_0(rU_1) \right] e^{-j\lambda \hat{z}} \cdot d\lambda$$

milieu (2)

$$E_{2,r} = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} -j\lambda U_2 \cdot G_{o2} \cdot K'_0(rU_2) e^{-j\lambda \hat{z}} \cdot d\lambda$$

$$E_{2,z} = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} U_2^2 \cdot G_{o2} \cdot K_0(rU_2) e^{-j\lambda \hat{z}} \cdot d\lambda \quad (15)$$

$$H_{2,\psi} = -(\sigma_2 + j\omega\epsilon_2) \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} U_2 G_{o2} \cdot K'_0(rU_2) e^{-j\lambda \hat{z}} \cdot d\lambda$$

On peut verifier facilement la parité des fonctions de Bessel modifiées de 1^{ère} et 2^{ème} espèce, ainsi les constantes d'intégrations $F(\lambda)$, G_{o2} et T_m puisqu'ils dépendent de λ^2 .

De ce fait:

$$-j \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \lambda F_1(\lambda) e^{-j\lambda \hat{z}} \cdot d\lambda = -2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} \lambda F_1(\lambda) \cdot \sin(\lambda \hat{z}) \cdot d\lambda$$

$$\int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} F_2(\lambda) e^{-j\lambda \hat{z}} \cdot d\lambda = 2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} F_2(\lambda) \cdot \cos(\lambda \hat{z}) \cdot d\lambda \quad (16)$$

ANNEXE A.2 : CONSTANTES D'INTEGRATION ET COMPOSANTES DU CHAMP - DIPOLE CENTRE

$F_1(\lambda)$ et $F_2(\lambda)$ sont des fonctions paires par rapport à λ .

L'expression (16) appliquée aux expressions du champ (13), (14) et (15) fournissent:

milieu (0)

$$E_{o,r} = -2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} \lambda U_o A_o \left[K'_o(rU_o) - F(\lambda) I'_o(rU_o) \right] \cdot \sin(\lambda \hat{z}) d\lambda$$

$$E_{o,z} = -2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o^2 A_o \left[K_o(rU_o) - F(\lambda) I_o(rU_o) \right] \cdot \cos(\lambda \hat{z}) d\lambda$$

$$H_{o,\psi} = -2 (\sigma_o + j\omega\epsilon_o) \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_o A_o \left[K'_o(rU_o) - F(\lambda) I'_o(rU_o) \right] \cdot \cos(\lambda \hat{z}) d\lambda$$

milieu (1)

$$E_{1,r} = -2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} \lambda U_1 G_{11} \left[K'_o(rU_1) - T_m I'_o(rU_1) \right] \cdot \sin(\lambda \hat{z}) d\lambda$$

$$E_{1,z} = -2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_1^2 G_{11} \left[K_o(rU_1) - T_m I_o(rU_1) \right] \cdot \cos(\lambda \hat{z}) d\lambda$$

$$H_{1,\psi} = -2 (\sigma_1 + j\omega\epsilon_1) \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_1 G_{11} \left[K'_o(rU_1) - T_m I'_o(rU_1) \right] \cdot \cos(\lambda \hat{z}) d\lambda$$

milieu (2)

$$E_{2,r} = -2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} \lambda U_2 \cdot G_{o2} \cdot K'_o(rU_2) \cdot \sin(\lambda \hat{z}) \cdot d\lambda$$

$$E_{2,z} = -2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_2^2 \cdot G_{o2} \cdot K_o(rU_2) \cdot \cos(\lambda \hat{z}) \cdot d\lambda$$

$$H_{2,\psi} = -2 (\sigma_2 + j\omega\epsilon_2) \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_2 \cdot G_{o2} \cdot K'_o(rU_2) \cdot \cos(\lambda \hat{z}) \cdot d\lambda$$

avec:

$$K'_o(rU_1) = -K_1(rU_1) \quad ; \quad I'_o(rU_1) = I_1(rU_1)$$

\hat{z} : étant la distance verticale entre les points source et observation.

Annexe A2.2

Nous aurons souvent à calculer l'intégrale:

$$I = \int_{z_k - \Delta}^{z_n + \Delta} \left[\int_{z_k - \Delta}^{z_k + \Delta} \cos[\lambda (z - z')] \cdot w_k(z) dz \right] \cdot \phi_n(z') dz'$$

$w_k(z)$ et $\phi_n(z')$ sont respectivement les fonctions test et base trinagulaires linéaires.

Calculons tout d'abord l'intégrale entre crochets:

$$J_1 = \int_{z_k - \Delta}^{z_k + \Delta} \cos[\lambda (z - z')] \cdot w_k(z) dz$$

En faisant une intégration par partie on aboutit à:

$$J_1 = 4 \frac{\sin^2\left[\frac{\lambda\Delta}{2}\right]}{\lambda^2\Delta} \cdot \cos[\lambda (z_k - z')]$$

En multipliant et divisant par Δ , on obtient:

$$J_1 = \Delta \frac{\sin^2\left[\frac{\lambda\Delta}{2}\right]}{\left[\frac{\lambda\Delta}{2}\right]^2} \cdot \cos[\lambda (z_k - z')]$$

ANNEXE A.2 : CONSTANTES D'INTEGRATION ET COMPOSANTES DU CHAMP - DIPOLE CENTRE

En remplaçant l'expression de J_1 dans I :

$$I = \Delta \frac{\sin^2\left[\frac{\lambda\Delta}{2}\right]}{\left[\frac{\lambda\Delta}{2}\right]^2} \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} \cos\left[\lambda(z_k - z')\right] \phi_n(z') dz'$$

posons:

$$J_2 = \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} \cos\left[\lambda(z_k - z')\right] \cdot \phi_n(z') dz'$$

On obtient la même forme intégrale que J_1 , En tennant de la parité de la fonction cosinus:

$$J_2 = \Delta \cdot \frac{\sin^2\left[\frac{\lambda\Delta}{2}\right]}{\left[\frac{\lambda\Delta}{2}\right]^2} \cdot \cos\left[\lambda(z_k - z_n)\right]$$

On obtient finalement:

$$I = \Delta^2 \cdot \frac{\sin^4\left[\frac{\lambda\Delta}{2}\right]}{\left[\frac{\lambda\Delta}{2}\right]^4} \cdot \cos\left[\lambda(z_k - z_n)\right]$$

I garde une valeur finie lorsque $\lambda = 0$ puisque:

$$\frac{\sin\left[\frac{\lambda\Delta}{2}\right]}{\left[\frac{\lambda\Delta}{2}\right]} \equiv 1.$$

ANNEXE A.3

CALCUL DES CONSTANTES D'INTEGRATION POUR

UN DIPOLE EXCENTREE

Dans ce paragraphe nous allons déterminer les constantes d'intégrations secondaires du potentiel de Hertz pour un dipôle excentré dans un milieu à 2 couches. La condition de continuité du champ tangentiel sur l'interface de séparation milieu(0)-milieu(1) conduit à résoudre un système de 4 équations à 4 inconnues, dont nous rappelons l'expression:

$$U_0^2 \Pi_{om} = U_1^2 \Pi_{1m}$$

$$U_0^2 \Pi_{om}^* = U_1^2 \Pi_{1m}^*$$

$$\frac{-m\lambda}{a} \Pi_{om} + j\omega \mu_0 \frac{\partial \Pi_{om}^*}{\partial r} = \frac{-m\lambda}{a} \Pi_{1m} + j\omega \mu_1 \frac{\partial \Pi_{1m}^*}{\partial r}$$

$$\frac{\gamma_0^2}{j\omega\mu_0} \frac{\partial \Pi_{om}}{\partial r} + \frac{m\lambda}{a} \Pi_{om}^* = \frac{\gamma_1^2}{j\omega\mu_1} \frac{\partial \Pi_{1m}}{\partial r} + \frac{m\lambda}{a} \Pi_{1m}^*$$

En introduisant les potentiels de Hertz Π_i et Π_i^* sous forme intégrale:

$$U_0^2 \left[f_{om} K_m(aU_0) + G_{om} I_m(aU_0) \right] = U_1^2 f_{1m} K_m(aU_1) \quad (1)$$

$$U_0^2 A_{om} I_m(aU_0) = U_1^2 h_{1m} K_m(aU_1) \quad (2)$$

$$\frac{-m\lambda}{a} \left[f_{om} K_m(aU_0) + G_{om} I_m(aU_0) \right] + j\omega\mu_0 U_0 A_{om} I_m'(aU_0) = \frac{-m\lambda}{a} f_{1m} K_m(aU_1) + \dots j\omega\mu_1 U_1 h_{1m} K_m'(aU_1) \quad (3)$$

$$\frac{U_0 \gamma_0^2}{j\omega\mu} \left[f_{om} K_m'(aU_0) + G_{om} I_m'(aU_0) \right] + \frac{m\lambda}{a} A_{om} I_m(aU_0) = \frac{U_1 \gamma_1^2}{j\omega\mu_1} f_{1m} K_m(aU_1) + \frac{m\lambda}{a} h_{1m} K_m'(aU_1) \quad (4)$$

I_m' et K_m' sont les dérivées des fonctions de Bessel par rapport à aU_i .

ANNEXE A.3 : DETERMINATION DES CONSTANTES D'INTEGRATION - DIPOLE EXCENTRE

f_{om} étant la constante d'intégration du potentiel primaire, donné par(IV.14):

$$f_{om} = \frac{i(1) dl}{4\pi^2(\sigma_o + j\omega\epsilon_o)} I_m(r' U_o)$$

En introduisant les expressions de f_{1m} et h_{1m} données en (1) et (2) dans les équations (3) et (4) . On aboutit à:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_m I_m G_{om} + j\omega\mu_o U_o I_m \alpha_{om} A_{om} = \theta_m K_m f_{om} \\ \mu_o U_o \gamma_o^2 I_m \alpha_{1m} G_{om} + j\omega\mu_o \mu_1 \theta_m I_m A_{om} = - U_o^2 \gamma_o^2 K_m f_{om} \mu_o \alpha_{2m} \end{array} \right. \quad (5)$$

K_m et I_m sont d'argument aU_o .

avec:

$$\begin{aligned} \theta_m &= \frac{m\lambda}{a} \left[1 - \left(\frac{U_o}{U_1} \right)^2 \right] \\ \alpha_{om} &= \frac{I'_m}{I_m} - \frac{U_o}{U_1} \frac{\mu_1}{\mu_o} \cdot \frac{K'_m (aU_1)}{K_m (aU_1)} \\ \alpha_{1m} &= \frac{\mu_1}{\mu_o} \frac{I'_m}{I_m} - \frac{U_o}{U_1} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_o^2} \frac{K'_m (aU_1)}{K_m (aU_1)} \\ \alpha_{2m} &= \frac{\mu_1}{\mu_o} \frac{K'_m}{K_m} - \frac{U_o}{U_1} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_o^2} \frac{K'_m (aU_1)}{K_m (aU_1)} \end{aligned} \quad (6)$$

(5) est un système de 2 équations à 2 inconnues. On obtient aisément:

$$g_{om} = -f_{om} \frac{K_m(aU_o)}{I_m(aU_o)} \frac{F(\alpha_{2m})}{F(\alpha_{1m})} \quad (7)$$

$$A_{om} = -f_{om} \frac{U_o \gamma_o^2}{j\omega\mu_1} \cdot \frac{K_m(aU_o)}{I_m(aU_o)} \frac{\theta_m(\alpha_{2m}-\alpha_{1m})}{F(\alpha_{1m})}$$

avec:

$$F(\alpha_{im}) = \frac{\mu_1}{\mu_o} \theta_m^2 + U_o^2 \gamma_o^2 \cdot \alpha_{om} \cdot \alpha_{im} \quad i = 1, 2$$

En introduisant l'identité du Wronskian:

$$K'_m(\chi) \cdot I_m(\chi) - K_m(\chi) \cdot I'_m(\chi) = \frac{1}{\chi}$$

l'expression de $(\alpha_{2m}-\alpha_{1m})$ se réduit à :

$$\alpha_{2m}-\alpha_{1m} = -\frac{\mu_1}{\mu_o} \cdot \frac{1}{U_o} \cdot \frac{1}{I_m(aU_o) \cdot K_m(aU_o)}$$

L'expression de A_{om} s'écrit finalement:

$$A_{om} = f_{om} \frac{1}{a \cdot j\omega\mu_1} \cdot \frac{1}{[I_m(aU_o)]^2} \frac{\theta_m}{F(\alpha_{1m})} \quad (8)$$

En introduisant les expressions de g_{om} et A_{om} dans (1) et (2). On obtient:

$$f_{1m} = f_{om} \cdot \frac{U_o^3}{U_1^2} \cdot \frac{\gamma_o^2}{a} \cdot \frac{1}{I_m(aU_o) K_m(aU_1)} \frac{\alpha_{om}}{F(\alpha_{1m})}$$

$$h_{1m} = \frac{f_{om}}{j\omega \mu_o} \left[\frac{U_o}{U_1} \right]^2 \frac{1}{I_m(aU_o) K_m(aU_1)} \frac{\theta_m}{F(\alpha_{1m})} \quad (9)$$

Remarques:

- Les fonctions de Bessel modifiées K_m , I_m et leur dérivés K'_m et I'_m sont pair par rapport à m , puisque m prend uniquement des valeurs entières

- On peut donc vérifier facilement que les constantes d'intégration :

- g_{0m} et f_{1m} pair par rapport à m .

- A_{0m} et h_{1m} impair par rapport à m .

- Les expressions (6) sont mises sous la forme d'un rapport des fonctions de Bessel puisqu'ils se réduisent d'une façon générale à:

$$\frac{K'_m(\chi)}{K_m(\chi)} = \frac{-m}{\chi} - \frac{K_{m-1}(\chi)}{K_m(\chi)}$$

$$\frac{I'_m(\chi)}{I_m(\chi)} = \frac{-m}{\chi} + \frac{I_{m-1}(\chi)}{I_m(\chi)}$$

χ étant un nombre complexe.

milieu à 3 couches:

La continuité du champ tangentiel sur les interfaces de séparation milieu(0)-milieu(1) et milieu(1)-milieu(2) donnée en (IV-28) et (IV-29) par:

pour r = a

$$U_0^2 \Pi_{0m} = U_1^2 \Pi_{1m} \quad (1)$$

$$U_0^2 \Pi_{0m}^* = U_1^2 \Pi_{1m}^* \quad (2)$$

$$\frac{-m\lambda}{a} \Pi_{0m} + j\omega \mu \frac{\partial \Pi_{0m}^*}{\partial r} = \frac{-m\lambda}{a} \Pi_{1m} + j\omega \mu \frac{\partial \Pi_{1m}^*}{\partial r} \quad (3)$$

$$\frac{\gamma_0^2}{j\omega\mu} \frac{\partial \Pi_{0m}}{\partial r} + \frac{m\lambda}{a} \Pi_{0m}^* = \frac{\gamma_1^2}{j\omega\mu} \frac{\partial \Pi_{1m}}{\partial r} + \frac{m\lambda}{a} \Pi_{1m}^* \quad (4)$$

pour r = b

$$U_1^2 \Pi_{1m} = U_2^2 \Pi_{2m} \quad (5)$$

$$U_1^2 \Pi_{1m}^* = U_2^2 \Pi_{2m}^* \quad (6)$$

$$\frac{-m\lambda}{b} \Pi_{1m} + j\omega \mu \frac{\partial \Pi_{1m}^*}{\partial r} = \frac{-m\lambda}{b} \Pi_{2m} + j\omega \mu \frac{\partial \Pi_{2m}^*}{\partial r} \quad (7)$$

$$\frac{\gamma_1^2}{j\omega\mu} \frac{\partial \Pi_{1m}}{\partial r} + \frac{m\lambda}{b} \Pi_{1m}^* = \frac{\gamma_2^2}{j\omega\mu} \frac{\partial \Pi_{2m}}{\partial r} + \frac{m\lambda}{b} \Pi_{2m}^* \quad (8)$$

En remplaçant respectivement les expressions (1)-(2) et (5)-(6) dans (3)-(4) et (7)-(8) . On obtient:

pour r = a

$$\frac{-m\lambda}{a} \left[1 - \frac{U_0^2}{U_1^2} \right] \Pi_{0m} + j\omega \mu U_0 \frac{\partial \Pi_{0m}^*}{\partial(rU_0)} - j\omega \mu U_0 \frac{\partial \Pi_{1m}^*}{\partial(rU_1)} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{m\lambda}{a} \left[1 - \frac{U_0^2}{U_1^2} \right] \Pi_{0m}^* + \frac{U_0^2 \gamma_0^2}{j\omega\mu} \frac{\partial \Pi_{0m}}{\partial(rU_0)} - \frac{U_1 \gamma_1^2}{j\omega\mu} \frac{\partial \Pi_{1m}}{\partial(rU_1)} = 0 \quad (9)$$

pour r = b

$$\frac{-m\lambda}{b} \left[1 - \frac{U_1^2}{U_2^2} \right] \Pi_{1m} + j\omega \mu U_1 \frac{\partial \Pi_{1m}^*}{\partial (rU_1)} - j\omega \mu U_2 \frac{\partial \Pi_{2m}^*}{\partial (rU_2)} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{m\lambda}{b} \left[1 - \frac{U_1^2}{U_2^2} \right] \Pi_{1m}^* + \frac{U_1^2 \gamma_1^2}{j\omega\mu} \frac{\partial \Pi_{1m}}{\partial (rU_1)} - \frac{U_2^2 \gamma_2^2}{j\omega\mu} \frac{\partial \Pi_{2m}}{\partial (rU_2)} = 0 \quad (11)$$

posons:

$$\varphi_{om} = \frac{m\lambda}{a} \left[1 - \frac{U_o^2}{U_1^2} \right]$$

$$\varphi_{1m} = \frac{m\lambda}{b} \left[1 - \frac{U_1^2}{U_2^2} \right]$$

En introduisant les expressions (1),(2),(5) et (6) du potentiel de Hertz sous forme intégrale, on aboutit à un système de 4 équations à 4 inconnues : G_{om}, f_{1m}, G_{1m} et f_{2m} , dont les solutions sont données en (IV.30).

En reportant les valeurs de ces 4 dernières constantes dans les équations (1),(2),(5) et (6) . On obtient donc les autres constantes données par:

$$A_{om} = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\gamma_o^2}{a} \frac{1}{\left[I_m(aU_o) \right]^2} \cdot f_{om} \cdot \frac{Y_{1m}}{F(\alpha_{2m})}$$

$$h_{1m} = \frac{f_{om}}{j\omega\mu a \cdot D} \cdot \left[\frac{U_o}{U_1} \right]^2 \left\{ \frac{I_m(bU_1)}{I_m(aU_o)} \frac{Y_{1m}}{F(\alpha_{2m})} + \left[\frac{U_2}{U_1} \right]^2 \frac{\gamma_o^2}{b \cdot D} \frac{I_m(aU_1)}{I_m(aU_o)} \cdot \frac{Y_{2m}}{F(\alpha_{2m})} \right\}$$

$$A_{1m} = \frac{-\gamma_o^2 \cdot f_{om}}{j\omega\mu a \cdot D} \left[\frac{U_o}{U_1} \right]^2 \left\{ \frac{K_m(bU_1)}{I_m(aU_o)} \frac{Y_{1m}}{F(\alpha_{2m})} + \left[\frac{U_2}{U_1} \right]^2 \frac{1}{b \cdot D} \frac{K_m(aU_1)}{I_m(aU_o)} \cdot \frac{Y_{2m}}{F(\alpha_{2m})} \right\}$$

$$h_{1m} = \frac{-\gamma_o^2 \cdot f_{om}}{j\omega\mu a \cdot b \cdot D} \left[\frac{U_o}{U_1} \right]^2 \cdot \frac{1}{I_m(aU_o) \cdot K_m(bU_2)} \frac{Y_{2m}}{F(\alpha_{2m})}$$

"a" et "b" étant respectivement le rayon du tube isolant et du forage.

ANNEXE A.3 : DETERMINATION DES CONSTANTES D'INTEGRATION - DIPOLE EXCENTRE

Les autres termes s'expriment :

$$Y_{1m} = \vartheta_{om} \cdot \left[\vartheta_{1m}^2 + U_2 \cdot \gamma_2^2 \cdot \alpha_{om} \cdot \alpha_{3m} - \left(\frac{U_o}{U_1} \right)^2 \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 \frac{\vartheta_{1m}}{\vartheta_{om}} \cdot \frac{1}{a \cdot b \cdot D^2} \right]$$

$$Y_{2m} = U_2 \cdot \gamma_2^2 \cdot \alpha_{3m} \cdot \vartheta_{om} + U_o \cdot \gamma_1^2 \cdot \alpha_{1m} \cdot \vartheta_{1m}$$

Les autres termes α_{im} , D sont donnés en (IV.30).

ANNEXE A3.2

Nous aurons souvent à réduire l'ordre des sommations lors du calcul des expressions du champ et du potentiel, selon que le terme à l'intérieur du signe \sum est pair ou impair suivant m .

$$S_{1m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f_{im} \cdot C_m(rU_i) \cdot e^{-jm\hat{\psi}}$$

$$S_{2m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m \cdot f_{im} \cdot C_m(rU_i) \cdot e^{-jm\hat{\psi}}$$

C_m représente la fonction de Bessel modifiée K_m ou I_m . f_{im} étant une fonction paire, et $\hat{\psi} = \psi - \psi'$.

Nous décomposons S_{1m} en une somme de 3 termes:

$$S_{1m} = S_0 + S_1 + S_2 = f_{i0} C_0(rU_i) + \sum_{m=-\infty}^{-1} f_{im} C_m(rU_i) e^{-jm\hat{\psi}} + \sum_{m=1}^{+\infty} f_{im} C_m(rU_i) e^{-jm\hat{\psi}}$$

En posant dans S_2 le changement d'indice m en $-m$ on obtient aisément:

$$S_{1m} = f_{i0} C_0(rU_i) + 2 \sum_{m=1} f_{im} C_m(rU_i) \cdot \cos(m\hat{\psi})$$

En procédant d'une façon similaire que S_{1m} , on peut montrer:

$$S_{2m} = 2 \sum_{m=1} m \cdot f_{im} C_m(rU_i) \cdot \sin(m\hat{\psi})$$

puisque la fonction est nulle pour $m = 0$.

Calculons les intégrales:

$$I_1 = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda \quad ; \quad I_2 = \int_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \lambda \cdot F(\lambda) e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda$$

$F(\lambda)$ étant une fonction paire apr rapport à λ .

Nous décomposons chaque intégrale en une somme de deux termes:

$$I_1 = \int_{\lambda=-\infty}^0 F(\lambda) e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda + \int_{\lambda=0}^{+\infty} F(\lambda) e^{-j\lambda\hat{z}} d\lambda$$

En posant le changement de variable $\lambda' = -\lambda$ dans l'expression de l'intégrale entre $[-\infty, 0]$. On obtient:

$$I_1 = 2 \cdot \int_{\lambda=0}^{+\infty} F(\lambda) \cdot \cos(\lambda\hat{z}) \cdot d\lambda$$

En procédant d'une façon similaire pour I_2 , on montre:

$$I_1 = -2j \cdot \int_{\lambda=0}^{+\infty} \lambda \cdot F(\lambda) \cdot \sin(\lambda\hat{z}) \cdot d\lambda$$

ANNEXE A.4

COMPOSANTES DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

POUR UN DIPOLE EXCENTRE

EXPRESSIONS DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Les expressions du champ électromagnétique dans chacun des milieux sont déduites à partir des relations de Maxwell. En introduisant le potentiel de Hertz sous forme intégrale et en tenant compte des expressions précédentes, On obtient:

$$E_{iz} = -2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_i^2 \left\{ f_{io} K_o(rU_i) + g_{io} I_o(rU_i) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \left[f_{im} K_m(rU_i) + g_{im} I_m(rU_i) \right] \dots \cos(m\hat{\psi}) \right\} \cos(\lambda\hat{z}) \cdot d\lambda$$

$$E_{i\psi} = 4 \int_{\lambda=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ \frac{j m \lambda}{r} \left[f_{im} K_m(rU_i) + g_{im} I_m(rU_i) \right] \cos(\lambda\hat{z}) - j \omega \mu_i U_i \left[h_{im} K'_m(rU_i) + \dots A_{im} I'_m(rU_i) \right] \sin(\lambda\hat{z}) \right\} \sin(\lambda\hat{z}) \cdot d\lambda$$

$$E_{ir} = 2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} \left\{ \lambda U_i \left[-f_{io} K_1(rU_i) + g_{io} I_1(rU_i) \right] + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda U_i \left[f_{im} K'_m(rU_i) + g_{im} I'_m(rU_i) \right] \dots + \frac{m \omega \mu}{r} \left[h_{im} K_m(rU_i) + A_{im} I_m(rU_i) \right] \cos(m\hat{\psi}) \right\} \sin(\lambda\hat{z}) \cdot d\lambda$$

pour les composantes électriques, et :

$$H_{iz} = -2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} U_i^2 \left\{ A_{io} K_o(rU_i) + h_{io} I_o(rU_i) + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \left[A_{im} K_m(rU_i) + h_{im} I_m(rU_i) \right] \dots \cos(m\hat{\psi}) \right\} \cos(\lambda\hat{z}) \cdot d\lambda$$

$$H_{i,\psi} = 2 \int_{\lambda=0}^{+\infty} \left\{ \delta_i \left[-f_{i0} K_1(rU_i) + g_{i0} I_1(rU_i) \right] + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \delta_i \left[f_{im} K'_m(rU_i) + g_{im} I'_m(rU_i) \right] \right. \\ \left. \dots + \frac{m\lambda}{r} \left[A_{im} K_m(rU_i) + h_{im} I_m(rU_i) \right] \cos(m\hat{\psi}) \right\} \cos(\lambda\hat{z}) \cdot d\lambda$$

$$H_{ir} = 4 \cdot \int_{\lambda=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m(\sigma_i + j\omega\epsilon_i)}{r} \left[f_{im} K_m(rU_i) + g_{im} I_m(rU_i) \right] + \lambda U_i \left[A_{im} K_m(rU_i) + \right. \\ \left. \dots h_{im} I_m(rU_i) \right] \sin(m\hat{\psi}) \left. \right\} \cos(\lambda\hat{z}) \cdot d\lambda$$

pour les composantes magnétiques.

avec $\delta_i = U_i (\sigma_i + j\omega\epsilon_i)$ et i indice du milieu de propagation.

Remarques :

Les constantes d'intégrations f_{im} et g_{im} correspondent au potentiel électrique Π_i dans le milieu d'indice i , par contre A_{im} et h_{im} sont les constantes d'intégration du potentiel magnétique Π_i^* dans le milieu d'indice i .

Pour un milieu à 2 couches $h_{0m} = A_{1m} = g_{1m} = 0$

Pour un milieu à 3 couches $h_{0m} = A_{2m} = g_{2m} = 0$

ANNEXE A.5

APPROXIMATIONS DES INTEGRALES INTERVENANT DANS
LE CALCUL DE LA MATRICE IMPEDANCE SECONDAIRE

ANNEXE 5: Approximation des intégrales intervenant dans le calcul de la matrice impédance généralisé [Z] .

$$S_m = \int_{x_k - \Delta}^{x_k + \Delta} I'_m(rU_o) \cdot w_k(x) \cdot dx$$

$$P_m = \int_{x_k - \Delta}^{x_k + \Delta} \frac{I_m(rU_o)}{r} w_k(x) \cdot dx$$

$$J_1(\lambda) = \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} \lambda \sin(\lambda z') \cdot \phi_n(z') \cdot dz'$$

$$L_m = \int_{x_n - \Delta}^{x_n + \Delta} I_m(rU_o) \cdot \phi_n(x') \cdot dx'$$

$$T_m = \int_{x_k - \Delta}^{x_k + \Delta} - I''_m(rU_o) \cdot w_k(x) \cdot dx$$

$$H_m = \int_{x_k - \Delta}^{x_k + \Delta} \frac{I'_m(rU_o)}{r^2 U_o} w_k(x) \cdot dx$$

Dans le calcul des intégrales, nous décomposons chaque intégrale en une somme de deux termes. En effet, un élément i peut être situé sur un coin, cependant l'intégrale sera définie uniquement entre $[x_i - \Delta, x_i]$ ou $[x_i, x_i + \Delta]$ Nous noterons chacune des intégrales I par :

$$I^+ \quad \text{Pour} \quad x_i - \Delta \leq x \leq x_i$$

$$I^- \quad \text{Pour} \quad x_i \leq x \leq x_i + \Delta$$

1) Calcul de l'intégrale J_1

$$J_1(\lambda) = \int_{z_n - \Delta}^{z_n + \Delta} \lambda \sin(\lambda z') \cdot \phi_n(z') \cdot dz' = J_1^+(\lambda) + J_1^-(\lambda)$$

En faisant une intégration par partie, on obtient aisément :

$$J_1^-(\lambda) = -\lambda \cdot \cos(\lambda z_n) + \frac{\sin(\lambda z_n) - \sin[\lambda(z_n - \Delta)]}{\Delta}$$

$$J_1^+(\lambda) = \lambda \cdot \cos(\lambda z_n) + \frac{\sin(\lambda z_n) - \sin[\lambda(z_n + \Delta)]}{\Delta}$$

$$J_1(\lambda) = 4 \sin(\lambda z_n) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\lambda \Delta}{2}\right)}{\Delta}$$

2) Calcul de l'intégrale S_m

$$S_m = \int_{x_k - \Delta}^{x_k + \Delta} I'_m(rU_0) \cdot w_k(x) \cos \psi \cdot dx = \int_{x_k - \Delta}^{x_k + \Delta} I'_m(rU_0) \cdot \frac{\Delta + (x - x_k)}{\Delta} \cdot \cos \psi \cdot dx$$

Si $x > 0$ alors $r = x$ et $\cos \psi = 1$

Si $x < 0$ alors $r = -x$ et $\cos \psi = -1$

a) Si $x > 0$

$$S_m^+ = \int_{x_k - \Delta}^{x_k} I'_m(xU_0) \cdot \frac{\Delta + x - x_k}{\Delta} \cdot dx$$

ANNEXE A.5 : APPROXIMATIONS DES INTEGRALES INTERVENANT DANS [Z] SECONDAIRE

En faisant une intégration par partie, on obtient :

$$S_m^+ = \frac{I_m(x_k U_o)}{U_o} - \frac{1}{\Delta U_o} \int_{x_k - \Delta}^{x_k} I_m(x U_o) \cdot dx$$

La méthode d'approximation de l'intégrale consiste à diviser l'intervalle 2Δ en p éléments identiques, et de supposer que la fonction varie peu sur l'élément $\Delta x_{k,p}$ ($p = 1,4$) et égale à la valeur au centre de cet intervalle.

Cette méthode d'approximation sera utilisée dans le calcul des autres intégrales :

$$S_m^+ = \frac{I_m(x_k U_o)}{U_o} - \frac{1}{\Delta U_o} \sum_{i=1}^{P/2} \int_{x_k - \Delta + (i-1) \frac{2\Delta}{p}}^{x_k - \Delta + 2i\Delta/p} I_m(x U_o) \cdot dx$$

$$S_m^+ \approx \frac{I_m(x_k U_o)}{U_o} - \frac{2}{p U_o} \sum_{i=1}^{P/2} I_m(x_{ik} U_o)]$$

En suivant une démarche similaire, on démontre

$$S_m^- \approx - \frac{I_m(x_k U_o)}{U_o} + \frac{2}{p U_o} \sum_{i=p/2 + 1}^p I_m(x_{ik} U_o)]$$

b) Si $x < 0$

$$S_m^+ \approx \frac{I_m(-x_k U_0)}{U_0} - \frac{2}{pU_0} \sum_{i=1}^{p/2} I_m(-x_{ik} U_0)$$

$$S_m^- \approx -\frac{I_m(-x_k U_0)}{U_0} + \frac{2}{pU_0} \sum_{i=p/2+1}^p I_m(-x_{ik} U_0)$$

x_{ik} étant le centre du segment x_i , défini par:

$$[x_{ik} = x_k - \Delta + (2i - 1) \frac{\Delta}{p}]$$

3) Approximation de l'intégrale P_m

En suivant une démarche similaire . On obtient :

pour $x > 0$

$$P_m^+ = \frac{2\Delta}{p^2} \sum_{i=1}^{p/2} (2i - 1) \frac{I_m(x_{ik} U_0)}{x_{ik}}$$

$$P_m^- = \frac{2\Delta}{p^2} \sum_{i=p/2+1}^p (2p - 2i + 1) \frac{I_m(x_{ik} U_0)}{x_{ik}}$$

Pour $x < 0$

$$P_m^+ = \frac{2\Delta}{p^2} \sum_{i=1}^{p/2} (2i - 1) \frac{I_m(-x_{ik} U_0)}{x_{ik}}$$

$$P_m^- = \frac{2\Delta}{p^2} \sum_{i=p/2+1}^p (2p - 2i + 1) \frac{I_m(-x_{ik}U_o)}{x_{ik}}$$

4) Approximation de l'intégrale de L_m

$$L_m^+ = \frac{2\Delta}{p^2} \sum_{i=1}^{P/2} (2i - 1) \cdot I_m(x_{in}U_o)$$

$$L_m^- = \frac{2\Delta}{p^2} \sum_{i=p/2+1}^p (2p - 2i + 1) \cdot I_m(x_{in}U_o)$$

Valable pour $x > 0$ et pour $x < 0$

5) Approximation de l'intégrale T_m

Pour $x > 0$

$$T_m^+ = \frac{I_m'(x_k U_o)}{U_o} - \frac{1}{\Delta U_o^2} \left[I_m(x_k U_o) - I_m[(x_k - \Delta)U_o] \right]$$

$$T_m^- = \frac{-I_m'(x_k U_o)}{U_o} + \frac{1}{\Delta U_o^2} \left[I_m[(x_k + \Delta)U_o] - I_m(x_k U_o) \right]$$

b) pour $x < 0$

$$T_m^+ = \frac{-I_m'(-x_k U_o)}{U_o} - \frac{1}{\Delta U_o^2} \left[I_m(-x_k U_o) - I_m[-(x_k - \Delta)U_o] \right]$$

$$T_m^- = \frac{-I_m'(-x_k U_o)}{U_o} + \frac{1}{\Delta U_o^2} \left[I_m[-(x_k + \Delta)U_o] - I_m(-x_k U_o) \right]$$

6) Approximation de l'intégrale H_m

$$H_m = \int_{x_k - \Delta}^{x_k + \Delta} \frac{I'_m(rU_o)}{r^2 U_o} w_k(x) \cdot dx = H_m^+ + H_m^-$$

$$H_m^+ = \sum_{i=1}^{p/2} \frac{2(2i-1) \cdot \Delta^2}{p^2} \frac{I'_m(x_{ik} U_o)}{x_{ik}^2 U_o}$$

$$H_m^- = \sum_{i=p/2+1}^p \frac{(2p - 2i + 1) \cdot \Delta}{p^2} \frac{I'_m(x_{ik} U_o)}{x_{ik}^2 U_o}$$

pour toutes valeurs de x .

RESUME

La transmission des ondes électromagnétiques dans le sol représente pour le génie civil un moyen pratique pour l'étude des terrains

Notre travail porte sur la tomographie électromagnétique dans le domaine fréquentiel pour lequel une antenne d'émission et une antenne de réception sont descendues dans deux forages voisins. L'ensemble des amplitudes ainsi mesurées vient alimenter des programmes de reconstruction spécifiquement mis au point par le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées qui déterminent les propriétés d'atténuation de l'onde électromagnétique, donc de la nature du plan défini entre les deux forages de mesure.

Un point critique dans la mise en oeuvre de cette technique réside dans la réalisation des antennes, ou plus exactement dans la variation de leurs caractéristiques en fonction de la position de la sonde dans le forage.

Nous nous sommes intéressés tout d'abord à une antenne verticale centrée sur l'axe du trou, et nous avons montré l'influence de l'interface forage - sol sur les caractéristiques d'adaptation et sur le champ lointain; une étude comparative avec une antenne excentrée a été faite par la suite.

Enfin la dernière partie de ce travail a été consacrée à l'étude d'une antenne en "J" utilisée lors des campagnes de mesures. Un accord satisfaisant apparaît entre les prévisions théoriques et les premiers résultats expérimentaux.

MOTS CLES

**TOMOGRAPHIE ELECTROMAGNETIQUE
TRANSMISSION ENTRE FORAGES
LIGNE HORIZONTALE AU DESSUS DU SOL
ANTENNE FILAIRE
ANTENNE " J"
MILIEU STRATIFIE RADIALEMENT
DIPOLE ELECTRIQUE VERTICAL OU HORIZONTAL**

