N° d'ordre: 838

50376
1991
296

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE SECTION DE SCIENCES LILLE

65460

50376
1991
296

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR
En Productique : Automatique et Informatique Industrielle

par

Philippe Declerck

ANALYSE STRUCTURALE ET FONCTIONNELLE DES GRANDS SYSTEMES APPLICATION A UNE CENTRALE PWR 900 MW

Soutenue le 20 décembre 1991 devant la commission d'examen:

JURY :

Président:	M. Staroswiecki
Rapporteur:	G. Dauphin
Rapporteur:	M. Darouach
Examinateur:	J Ragot
Examinateur:	J-P. Cassar
Invité:	J-P. Hennebicq

AVANT PROPOS

Les travaux relatifs à la validation des données, à la détection des défaillances et au diagnostic des systèmes industriels complexes ont connu un grand développement depuis une dizaine d'années. A l'université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois, des travaux dans ce domaine, aussi bien en recherche qu'en transfert sont réalisés. Parallèlement, des entreprises manifestent un intérêt certain pour ce type d'étude.

Ainsi, ce travail de recherche a été effectué au Laboratoire d'Automatique et Informatique de Lille U.R.A CNRS n° D 1440 sous la direction de Monsieur le Professeur Marcel Staroswiecki dans le cadre d'un contrat industriel avec la Direction des Etudes et Recherches de l'Electricité De France à Chatou. Le contrat "Méthodes et modèle de validation fonctionnelle pour la régulation de niveau GV des REP 900" a permis de lancer l'approche structurale et a été suivi par d'autres études notamment pour ELF AQUITAINE dans le cadre du projet PLATINE (réalisation d'une plate-forme inhabitée).

Avant d'entreprendre l'exposé de ce mémoire, je tiens à exprimer ma reconnaissance à toutes les personnes qui ont déterminé ce travail.

Nous remercions vivement:

Monsieur M. STAROSWIECKI, Professeur à l'U.S.T.L.F.A. et Directeur de l'A.R.E.M.I., pour m'avoir confier cette étude et m'avoir soutenu tout au long de mes travaux.

Madame G. DAUPHIN, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille pour l'intérêt qu'elle a bien voulu porter au jugement de ce travail et pour sa présence parmi les membres du jury en tant que rapporteur.

Monsieur M. DAROUACH, professeur à l'IUT de Longwy, qui nous a fait l'honneur de juger ce travail en acceptant d'en être le rapporteur.

Monsieur J. RAGOT, professeur à l'université de Nancy pour l'intérêt qu'il a témoigné à ces travaux en tant que membre du jury.

Monsieur J-P CASSAR, maître de conférence à l'U.S.T.L.F.A. pour ses suggestions et remarques prodiguées au cours de ces années de collaboration.

Monsieur J-P HENNEBICQ, chargé de mission au département "communications en centrale-conduite" à la Direction des Etudes et Recherches de l'EDF à Chatou pour m'avoir fait confiance . Les problèmes qu'il a soulevé sur la surveillance des grands systèmes ont joué un grand rôle dans notre recherche.

Nos remerciements vont également à tous ceux qui, de près ou de loin, ont permis la réalisation de ce travail, en particulier l'ensemble du groupe ASPIC du LAIL et aussi Madame Flament Claudie et Mademoiselle Zamoum Malika qui ont participé à la dactylographie de cet ouvrage .

SOMMAIRE

Introduction générale

1 Modèles comportementaux

2 Modèles structuraux

3 Modèles fonctionnels

4 Application au secondaire d'une centrale PWR 900 MW.

Conclusion et perspectives

Chapitre 1: Modèles Comportementaux

1 Méthodes "sans modèle processus".

1-1 Détection par reconnaissance des limites du processus

1-2 Traitement du signal

1-3 Reconnaissance des formes

1-4 Système expert

2 Méthodes avec "modèle processus"

2-1 Approche qualitative

2-2 Approche quantitative

2-2-1 Principe

2-2-2 Formulation du problème

2-2-3 Génération des invariants

2-2-3-1 Estimation paramétrique.

2-2-3-2 Estimation d'état

2-2-4 Utilisation en détection et isolation

2-2-4-1 Introduction.

2-2-4-2 Détection

2-2-4-3 Isolation

3 Conclusion

Bibliographie

Chapitre 2: Modèles Structuraux

1 Représentation structurale du processus

1-1 Description

1-2 Caractérisation des sous-systèmes

2 Analyse structurale par la théorie des graphes

2-1 Le graphe biparti B_X

2-1-1 Graphe disjoint

2-1-1-1 Description

2-1-1-2 Les graphes disjoints dans la littérature

2-1-1-2-1 Autres définitions

2-1-1-2-2 Algorithmes de couplage

2-1-2 Remarques initiales : théorème de Koenig-Hall et déficiences

2-1-3 Support extérieur

2-1-4 Caractères canoniques

2-1-5 Décomposition canonique

2-2 Le graphe associé biparti par la procédure d'inclusion.

2-2-1 Description

2-2-2 Les Trois Composantes

2-2-3 Caractéristiques conservées

2-2-4 Nouvelles caractéristiques

2-3 Le graphe associé G par la procédure d'inclusion.

2-3-1 Définition du graphe associé G

2-3-2 Connexité simple

2-3-3 Connexité orientée

2-3-4 Connexité forte

2-4 Résumé et mise en oeuvre

3 Domaine de validité structurale

3-1 Cohérence sur-graphe / sur-système

3-2 Fonctions et variables prétextes

3-2-1 Equivalence système / sur-système

3-2-2 Conditions d'équivalence

3-2-2-1 Conditions 3) de la propriété 3-2-1/1

3-2-2-2 Condition 2) de la propriété 3-2-1/1

3-2-3 Exploitation structurale des chaînes alternées .

3-2-3-1 Interprétation

3-2-3-2 Utilisation des chaînes alternées

4 Conclusion

Annexes

Bibliographie

Chapitre 3: Modèles Fonctionnels

1- Présentation

2- La méthode Flow-Model

3- SADT

3-1 Définitions
3-2 principes généraux
3-3 Le modèle SADT
3-4 Lecture des diagrammes
3-4-1 Actigramme
3-4-2 Datagramme
3-5 Conclusion

4 Modèle dérivé de SADT

4-1 Classes des données et des activités.
4-1-1 Classes des données
4-1-2 Classes des activités
4-2 Modèle de l'actigramme
4-2-1 Observations
4-2-2 Modèle graphique
4-3 exemples

5- Conclusion

Bibliographie

Chapitre 4: Application au Secondaire d'une Centrale PWR 900 MW.

1 Présentation du processus

1-1 Présentation générale

1-1-1 Le circuit primaire .

1-1-2 Le circuit secondaire

1-1-3 La régulation

1-2 Description du modèle par blocs

1-2-1 Processus énergétique

1-2-2 Alimentation en eau .

1-2-3 Régulation

2 Modéle fonctionnel

2-1 Activité de niveau 1

2-2 Hiérarchie des activités

2-3 Représentation graphique des activités

2-4 Cohérence analyse fonctionnelle / modèle de calcul

3 Modéle structural

3-1 Structure du modèle du processus .

3-2 Structure des relations de surveillance

3-3 Isolation

3-3-1 On considére l'ensemble des fonctions élémentaires

3-3-2 Regroupement des fonctions suivant les blocs de calcul

3-3-3 Regroupement des fonctions suivant les activités

4 Validation

4-1 Structure générale de la maquette

4-2 Modèle de défaillance d'un capteur

4-3 Modèle de défaillance d'un actionneur du type vanne.

4-4 Résultats de simulation

5 Conclusion

Annexes

Introduction générale

Les systèmes automatisés de production sont caractérisés par une complexité de plus en plus importante : capteurs et actionneurs nombreux , géographiquement répartis , modes de fonctionnement multiples , interaction importante entre les opérateurs et le processus (agents de conduite , de maintenance , de gestion) .

Leur complexité les rend vulnérables aux défaillances , celles-ci étant à l'origine de coûts importants en termes de sécurité (risque d'accidents , de pollutions ,.....) et en termes de disponibilité (diminution de la productivité , non qualité,.....) . En effet , dans la structure hiérarchisée d'un système technologique , les ordres sont élaborés à chaque niveau à partir des informations relevées sur le système physique par des capteurs . Toute défaillance à ce niveau conduit à générer des informations fausses qui seront utilisées aux niveaux supérieurs . Symétriquement , la défaillance d'un système de commande générera des ordres incorrects exploités par les niveaux inférieurs .

Cette vulnérabilité justifie l'introduction dans le système de commande , d'une couche logicielle de surveillance , intermédiaire entre le processus et son instrumentation (producteurs d'informations) et les différents utilisateurs (consommateurs d'informations) . Il s'agit alors de traiter les données relevées sur le système pour détecter et diagnostiquer ses défaillances , et ainsi aider la décision des opérateurs , qu'ils conduisent le processus , qu'il le maintiennent ou qu'ils le gèrent .

Cette couche logicielle est cependant difficile à définir pour les grands systèmes car leur complexité est souvent le résultat d'une structure qui interconnecte un grand nombre d'objets industriels : les caractéristiques sont très différentes (réacteurs , réservoirs , actionneurs , capteurs , etc...) ; de même , les activités physiques (génération , accumulation , transport , ...) et informationnelles (régulation , mesure , mémorisation ,...) sont diverses. Des modèles de natures différentes doivent alors être utilisés .

- Pour la conception d'un système de surveillance , le modèle le plus couramment employé est le modèle comportemental. Il décrit l'évolution des variables caractéristiques du processus en fonction de son état et des commandes appliquées.

- Il est cependant possible d'utiliser des données de nature différente . Ainsi , les informations initiales auxquelles on a souvent accès sont les "flow-sheet" qui constituent un modèle topologique décrivant les flux de matière et d'énergie dans le processus physique , et les liens informationnels . Cette structure "composant" indique comment est constitué le système automatisé de production .

- Par ailleurs , on dispose aussi d'outils d'analyse fonctionnelle qui permettent de caractériser le système en termes de fonctions réalisées par les différents objets qui le constituent .

Ainsi , l'ensemble de la représentation d'un système complexe fait intervenir les trois aspects de modélisation suivants:

- Fonctionnel : que fait le système automatisé de production?
- Topologique : comment est constitué le système automatisé de production?
- Comportemental : quelles sont les lois d'évolution des variables décrivant le système automatisé de production?

Ces trois niveaux de description constituent la connaissance de base pour toute méthode de conception de système de surveillance et fournissent le cadre du travail de recherche présenté dans ce mémoire . A partir de cette connaissance , le rôle du système de surveillance sera de fournir une image de l'état physique du processus . Dans le cas où une défaillance se produit , cette image comprend :

- la désignation de l'élément défaillant
- le nouveau modèle de l'élément .

Au moyen de ces informations , le système de commande aura pour tâche d'adapter son action afin d'éviter (au moins) les modes de fonctionnement interdits ou critiques . Cette action pourra comprendre , par exemple:

- une reconfiguration dans un mode normal par substitution d'éléments redondants
- une reprise manuelle par les opérateurs
- une reconfiguration automatique dans un mode dégradé .

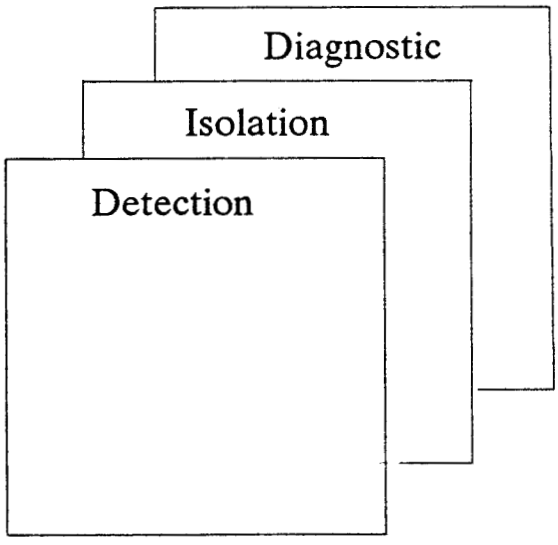
Les fonctions du système de surveillance peuvent être classées de la façon suivante, selon le degré de finesse des informations fournies.

- Détection de défaillance

Elle consiste à décider , après analyse des informations disponibles , quel est le type de fonctionnement du processus , normal ou défaillant . Lorsque les informations disponibles sont insuffisantes , le système de détection peut mettre sa décision en attente de données complémentaires .

- Isolation de défaillance

Elle consiste à localiser l'élément défaillant qui peut être :
+ un capteur
+ un actionneur
+ un composant processus
+ un organe de calcul
+ l'opérateur humain



Fonctions du système de surveillance

- Diagnostic de la défaillance

C'est la détermination du nouveau modèle de l'élément défaillant ou plus largement , la sélection parmi un ensemble de défauts prérépertoriés , de celui qui est le plus vraisemblablement présent .

Les fonctions de détection , d'isolation et de diagnostic doivent être optimisées selon un cahier des charges qui peut comprendre les éléments suivants :

- non-détection
- rapidité de détection
- sensibilité aux pannes
- fausses alarmes
- isolation incorrecte
- robustesse
- facilité d'implantation

Certains éléments concernent plus particulièrement la sécurité du système comme l'isolation incorrecte , la non-détection , la rapidité de détection , la sensibilité aux pannes . D'autres éléments mettent l'accent sur la disponibilité (fausses alarmes , robustesse).

Non détection

Lorsqu'une défaillance n'entraîne aucune réponse du système de surveillance , ce dernier fait une non-détection . Celle-ci peut être acceptable pour des fautes sans conséquence , par exemple un biais faible sur un capteur secondaire . Par contre , la non-détection est inacceptable si la défaillance a un impact important sur le processus .

Rapidité de la détection

La rapidité de la détection peut être définie par le délai écoulé entre l'apparition d'une défaillance et sa détection. Sous l'hypothèse que la défaillance a été détectée , la rapidité de la réaction peut être d'une importance capitale dans certaines applications par exemple aréospatiales : une défaillance qui persiste trop longtemps sans détection et correction peut non seulement détruire la mission du système mais aussi le système lui-même . Dans d'autres applications , il est préférable de détecter de manière fiable les défaillances au détriment de la rapidité d'exécution .

Sensibilité aux pannes

La sensibilité représente la capacité de détecter des pannes de faible ampleur . Dans certains cadres , ce critère est important car la connaissance d'une dégradation du système permet alors une anticipation de la réaction .

Certains systèmes peuvent d'autre part nécessiter une sensibilité aux pannes et une rapidité de détection . Cette double exigence entraînera l'emploi de techniques plus complexes et par exemple l'utilisation conjointe des redondances analytique et physique moyennant l'installation de capteurs supplémentaires.

Fausses alarmes

Le système de surveillance produit une fausse alarme s'il annonce une défaillance alors que le processus est en fonctionnement normal . La fausse alarme peut être considérée comme un des points les plus délicats de la surveillance : la présence d'une alarme alors que le système fonctionne normalement , amène rapidement les opérateurs à manquer de confiance dans le système de surveillance et donc à sous-estimer d'éventuelles défaillances réelles . Cependant , pour un système de surveillance qui présente un taux de fausse alarme raisonnable en fonctionnement normal , une fausse alarme lors d'un changement inhabituel de régime peut être acceptable pour certaines applications . A l'opposé , certains défauts , même faibles , peuvent avoir des conséquences importantes : il est préférable dans ce cas de réagir même au risque de fausses alarmes.

Isolation incorrecte

La détection , dans ce cas , a correctement détecté l'état défaillant du système mais a mal isolé le composant responsable . Le système peut alors être reconfiguré de manière inadaptée : ceci peut avoir des conséquences aussi graves qu'une non-détection.

Robustesse

La robustesse est la capacité pour le système de surveillance de ne pas voir se dégrader ses performances dans des conditions autres que celles optimales pour lequel il a été conçu . La robustesse désigne différents problèmes à résoudre qui sont les suivants:

- insensibilité aux erreurs de modélisation

Un problème important est constitué par les incertitudes sur les paramètres physiques du système . Si ceux-ci sont exacts , le système de surveillance est conçu selon un modèle exact et la détection , l'isolation seront extrêmement efficaces . Cependant , même dans le cas ou le système est modélisé avec précision et que celui-ci appartient à la plus simple des classes c'est à dire linéaire et invariant dans le temps , certains paramètres ne seront connus qu'approximativement et la procédure de détection ayant pour référence un modèle inexact déclarera le système en état de défaillance . Ce problème se retrouve dans les grands systèmes qui sont généralement non-linéaires.

- insensibilité aux perturbations

Les systèmes sont toujours soumis à des entrées autres que celles prévues par le concepteur du système de surveillance . Ces entrées , appelées perturbations , sont des fonctions aléatoires provenant de l'environnement , telles que les variations du vent pour un avion . Ces bruits vont se superposer au bruit habituel des capteurs et vont provoquer une dégradation de la surveillance . Un système robuste vis à vis des entrées inconnues est donc nécessaire.

Facilité d'implantation

En plus des qualités précédemment décrites , le concepteur du système de surveillance doit considérer les possibilités d'implantation au niveau matériel (nombre de capteurs , type et emplacement , unités de calcul , cheminement des données ,...) mais aussi logiciel (occupation mémoire , temps d'exécution etc...) . Plus encore , la précision numérique ou le bruit causé par les erreurs d'arrondi doivent être incorporés dans la méthode au même titre que les bruits capteurs et processus . D'autre part , disposer d'une panoplie de méthodes permettant un compromis entre complexité et efficacité est d'une utilité certaine . Par exemple , dans [BASS 80] , un catalogue de

tests statistiques permet le choix entre un test très complexe (rapport de vraisemblance) , un test plus rapide dérivé du premier et des heuristiques moins générales , pas très efficaces mais très simples . De même , [AITO 90] donne une comparaison des caractéristiques numériques de plusieurs méthodes de surveillance. La modularité d'une méthode peut être un atout intéressant pour des applications dont le modèle est de grandes dimensions ou utilisant des calculateurs de faible capacité (système de surveillance en avionique)

En réalité , les critères cités précédemment ne peuvent être optimaux simultanément et un compromis devra être effectué . Par exemple , les concepts de taux de fausses alarmes et de rapidité sont habituellement opposés : un système qui répond rapidement doit nécessairement être sensible ce qui augmente le taux de fausses alarmes . Plus encore , le compromis devra suivre un cahier des charges difficile à établir car il exige une compréhension globale du processus au sein de son environnement économique et humain.

Pour remplir le cahier des charges, la conception du système de surveillance nécessite différentes descriptions du système et notamment la triple description du système automatisé de production. Dans ce sens, les trois premières parties de ce mémoire seront respectivement consacrées à la mise en oeuvre des modèles comportemental, structurel, et fonctionnel. Dans une dernière partie, nous appliquerons la démarche développée au secondaire d'une centrale PWR 900 MW.

Chapitre 1: Modèles comportementaux

Ce chapitre décrit les méthodes de surveillances basées sur une description du système qui pourra être la limite des variables de sortie du processus , leurs distribution statistiques , un ensemble de classes caractéristiques du système (reconnaissance de forme) , une description humaine (système expert) . Cette représentation pourra être plus complète et être qualitative (physique qualitative) ou quantitative (méthode par identification ou estimation).

Chapitre 2: Modèles structuraux

Le modèle comportemental décrit l'évolution des variables d'état du processus et constitue donc la représentation la plus détaillée du fonctionnement du système . Cela se traduit dans la description par un grand nombre de variables , de fonctions et pour ces dernières une grande diversité de types : qualitatif / quantitatif , linéaire / non-linéaire , statique / dynamique ...

L'expérience montre que pour un grand système , le modèle est souvent connu avec imprécision : l'utilisation des équations d'état et de mesure dans leur forme classique est peu adaptée .

Très souvent, l'unique modèle du système est dans la pratique une description essentiellement graphique . Elle est constituée de blocs interconnectés dans un réseau chacun étant un modèle d'un sous-processus . Pris au sens structural , ce modèle largement utilisé dans l'industrie, est un premier jalon permettant la connaissance du système .

Cette représentation sera le modèle utilisé dans ce chapitre. On prendra de plus l'hypothèse où très peu d'informations sont disponibles sur le processus : seule la structure sera connue avec exactitude . Nous analyserons ce modèle du processus afin de tirer des renseignements applicables à la détection de défaillance . L'étape suivante complétera ce prémodèle par des données quantitatives qui permettront sur la base d'une structuration en sous-systèmes , un traitement numérique réduit du modèle . Cette mise en oeuvre des phases qualitative et quantitative permettra l'élaboration du système de surveillance.

Chapitre 3: Modèles fonctionnels

Une procédure de surveillance a pour fonctions la détection , l'isolation de l'élément défaillant et le diagnostic de son type de panne. Ce système doit aussi transmettre ces différentes informations aux systèmes de maintenance et de contrôle commande. La présence des opérateurs humains qui exploitent rend indispensable une présentation adaptée de ces informations. En effet, celles-ci peuvent être ignorées ou pire mal comprise et une donnée erronée réinjectée dans le processus par la commande peut avoir des conséquences inattendues. Ce canal de transmission sujet aux "bruits" constitue un maillon à part entière de la chaîne de surveillance. Dans ce chapitre, nous présentons un interface opérateur/machine qui aura pour objectif de donner une formulation ciblée des informations. Il permettra ainsi une adaptation plus rapide et plus efficace de la réaction des opérateurs à la réalité , physique et dynamique du système commandé .

Chapitre 4: Application au secondaire d'une centrale PWR 900 MW.

Dans ce chapitre , nous mettons en oeuvre les différents outils d'application précédemment développés. Le processus considéré est le secondaire d'une centrale PWR 900 MW et plus précisément le générateur de vapeur. Pour cela , nous développons un logiciel permettant la simulation du système, ainsi que celle de ses défaillances. Le système de surveillance développé permet leur mise en évidence, et valide ainsi l'approche proposée.

1 Modèles comportementaux

Chapitre 1: Modèles Comportementaux

1 Méthodes "sans modèle processus".

- 1-1 Détection par reconnaissance des limites du processus
- 1-2 Traitement du signal
- 1-3 Reconnaissance des formes
- 1-4 Système expert

2 Méthodes avec "modèle processus"

- 2-1 Approche qualitative
- 2-2 Approche quantitative
  - 2-2-1 Principe
  - 2-2-2 Formulation du problème
  - 2-2-3 Génération des invariants
    - 2-2-3-1 Estimation paramétrique.
    - 2-2-3-2 Estimation d'état
  - 2-2-4 Utilisation en détection et isolation
    - 2-2-4-1 Introduction.
    - 2-2-4-2 Détection
    - 2-2-4-3 Isolation

3 Conclusion

Bibliographie

Introduction

La complexité des processus industriels , les progrès techniques conduisent à une automatisation de plus en plus poussée des systèmes avec pour conséquence une meilleure maîtrise des processus . Pour cela , le système de commande est conçu pour un modèle bien défini selon des critères d'optimalité . Un risque inévitable est cependant que le système de commande peut réagir de manière imprévisible à une modification provoquée par une défaillance . Des réactions contraires à la disponibilité du matériel et la sécurité des personnes peuvent ainsi s'ajouter aux effets initiaux de la défaillance.

Afin de minimiser ces réactions indésirables , une solution est d'introduire un interface qui adapte la réponse du système de commande aux événements imprévus et au nouveau modèle qui en découle.

Différentes méthodes permettent la surveillance d'un système . Nous donnerons une description résumée de ces approches afin de situer l'étude relativement au panorama des systèmes de surveillance et nous classerons les méthodes en deux principaux groupes selon la complètude du modèle utilisé.

1 Méthodes "sans modèle processus".

1-1 Détection par reconnaissance des limites du processus

Très répandue en milieu industriel , cette méthode est basée sur l'observation du fonctionnement du système par un opérateur ou un dispositif automatique . Les grandeurs sont comparées en ligne à des seuils haut et bas prédéterminés . Le modèle du système est donc formé de ces inégalités.

- Ces grandeurs peuvent être les mesures des capteurs.

Par exemple , dans un générateur de vapeur , le niveau d'eau qui correspond à un certain taux liquide/vapeur ne doit pas être inférieur à un certain seuil afin de ne pas détériorer les faisceaux tubulaires . Il ne doit pas non plus être supérieur à un certain niveau afin de ne pas perturber le fonctionnement du sécheur-surchauffeur situé à la partie supérieure du générateur de vapeur.

- Ces grandeurs peuvent être les gradients des mesures.

La dynamique du système est ainsi prise en compte permettant une certaine prédiction.

Ces méthodes ont pour principale qualité la simplicité et une combinaison de tests statiques et dynamiques peut être effectuée . Cependant , elles conviennent surtout pour des pannes franches , présentent un taux de fausse alarme important et ne permettent pas la caractérisation de la panne.

- Ces grandeurs peuvent être des mesures prédites.

Dans les procédures précédentes , les limites sont habituellement fixées afin de laisser un temps de réaction suffisamment long à l'opérateur. Cependant , ceci conduit à provoquer des fausses alarmes inutiles si les variables retournent à un niveau normal en l'absence de réaction . Anticiper l'évolution du système en déterminant le temps ou un seuil sera dépassé , peut diminuer ces inconvénients . Les méthodes utilisées sont des méthodes d'extrapolation [DEKE 81].

1-2 Traitement du signal

Les signaux de sortie se décomposent fréquemment en des composantes basses fréquences de grande amplitude et des composantes hautes fréquences de faible amplitude . Ces dernières peuvent être caractérisées par:

- leur loi de distribution statistique.

Après une étude préliminaire de la loi de distribution , on détermine un ensemble de paramètres qui la caractérisent (moyenne , variance...) . La détection compare alors par le biais de tests statistiques les paramètres ou les caractères de référence à ceux correspondant à chaque instant . Le résultat des tests détermine l'occurrence d'un défaut.

- la densité spectrale et la fonction d'autocorrélation .

La surveillance est basée sur une estimation du temps de réponse du capteur , cette estimation pouvant se déduire de l'analyse des fluctuations naturelles du signal . La détermination de la constante de temps nécessite entre autres le calcul de la densité spectrale de puissance à l'aide de la transformée rapide de Fourrier [ZWIN 79].

L'analyse des signaux a été appliquée sur des systèmes de transmissions (boite de vitesse) , sur des turbo-réacteurs , sur des capteurs de vibrations , sur des capteurs de flux de neutron dans les réacteurs nucléaires [ZWIN 79] [SAED 79] [WILL 79].

1-3 Reconnaissance des formes

Parfois , le degré de complexité d'un système est tel que l'utilisation d'un modèle classique est difficilement envisageable . Il est alors nécessaire d'avoir recours à des modèles construits à partir des seules informations fournies par les capteurs et par l'homme.

A partir d'une population d'apprentissage des classes sont extraites soit par discussion avec les opérateurs soit à posteriori par les méthodes d'analyse de données . A chaque classe est ensuite associé un mode de fonctionnement (normal , détérioré) . Le diagnostic consistera donc à affecter à chaque échantillon d'observation , une classe prédéterminée [DUBU 81] . Ce problème de discrimination peut être résolu par différentes approches (statistique , géométrique , réseaux neuromimétiques).

1-4 Système expert

Le système expert est composé classiquement d'une base de connaissances et d'un moteur d'inférences . Facilement modifiable par un spécialiste du domaine traité , la base de connaissances contient généralement deux parties, la base de faits et la base de régles . La base de faits est constituée d'informations provenant des systèmes de détection ou des opérateurs humains [GERT 88]. La base de régles est formée des connaissances opératoires représentant le "savoir-faire" sur le domaine étudié . Ces régles indiquent , à partir des faits contenus dans la base de faits , quelles sont les conséquences à tirer (nouveaux faits) . En d'autres termes , la base de règles est composée d'une combinaison de règles logiques élémentaires du type " si symptôme et symptôme alors conclusion " . La conclusion peut alors servir de symptôme pour une autre proposition logique . Ainsi , il suffira qu'au moins une (resp. qu'aucune) régle soit activée pour que le système soit déclaré défaillant (non défaillant).

Une application des systèmes experts est par exemple une coopération SE/opérateur ou technicien de maintenance qui permet de guider le technicien jusqu'à la localisation de la panne dans le système complet [DUPA 90] [MARR 86] . Notons que la base de connaissances constitue un certain modèle du processus. Une introduction présentant les points fondamentaux des systèmes experts peut être trouvée dans [BRUN 90] tandis que [TZAF 89] donne une revue des concepts et des outils appliqués aux systèmes de surveillance.

2 Méthodes avec "modèle processus"

Une modélisation du processus physique est le préalable à ces méthodes qui se différencient selon que la modélisation est qualitative ou quantitative . Pour cette dernière classe , les équations d'état et de mesure seront utilisées dans leur forme classique.

2-1 Approche qualitative

La physique traditionnelle , avec ses formalismes mathématiques complexes , est loin du raisonnement humain commun sur le monde qui nous entoure . A l'opposé , la physique qualitative a pour objectif une approche plus "spontanée" de modélisation et raisonne sur un modèle plus simple.

Pour cela , chaque domaine de variation des variables est partagé en un nombre réduit de plages et seule l'appartenance de cette variable à un de ces intervalles est considérée dans le modèle qualitatif . Pour le partitionnement le plus simple en trois intervalles $x>0$, $x<0$ et $x=0$, on définit les opérations d'addition et de multiplication qualitatives suivantes:

addition

	−	0	+
−	−	−	?
0	−	0	+
+	?	+	+

multiplication

	−	0	+
−	+	0	−
0	0	0	0
+	−	0	+

Le signe ? indique que le résultat est indéterminé .

Selon cette logique le modèle qualitatif est établi soit à partir du modèle physique quantitatif conventionnel soit à partir d'un schéma physique.

Chaque état est défini par une modalité du vecteur des variables caractéristiques du système et son évolution est définie par le modèle correspondant . Le diagramme d'état est une représentation graphique classique des transitions entre états . Le séquencement se déduit de la mise en oeuvre du modèle relatif à l'état actif . On peut remarquer que le nombre d'états dépend fortement du nombre de variables caractéristiques : par exemple pour un régulateur de pression , deux variables caractéristiques entraînent 9 états.

La mise en oeuvre de la méthode qualitative nécessite un traitement réduit pour des exemples simples . Une limitation à considérer est le nombre d'états pour les grands systèmes.

Face aux restrictions imposées par le modèle qualitatif , des extensions utilisent des modèles plus complets et notamment augmentent le niveau de description avec la notion d'amplitude dans le multivalué [DEKL 84] , avec l'aspect temporel pour l'approche par décomposition du signal [LEYN 90] [MONT 90] ou en ajoutant des instants de traitements quantitatifs par l'approche quasi-qualitative [CHARB 90].

2-2 Approche quantitative

Pionniers de la détection de défaillance , Beard et Jones [BEAR 7I] [JONE 73] ont défini les premiers concepts de détection et d'isolation à partir d'une idée judicieuse d'espace invariant . Sur une base totalement différente, Potter et Suman [POTT 77] ont introduit l'espace de parité , généralisé ensuite par Chow [CHOW 80].
Correspondant à une approche plus structurelle , les configurations multi-observateurs [CLAR 78] sont l'objet d'un regain d'intérêt à l'heure actuelle tandis que les synthèses qui semblent se dégager sur ces différentes méthodes [MASS 89] [FRAN 89] [PATT 89] [STAR 91] montrent la maturité de la réflexion dans le domaine de la détection de défaillance.

2-2-1 Principe

La plupart des méthodes de détection et d'isolation avec modèle partent de l'idée de redondance : [CHOW 80] déclare que toute méthode de détection repose sur l'utilisation de redondances ; de même [FAYO 87] [MAQU 87] [AITO 90] parlent de la nécessité d'effectuer des recoupements ou de comparer des informations pour s'assurer de leur qualité. Exprimée de manière simple , la redondance apparait dans la redondance physique ou plusieurs capteurs mesurent la même grandeur.

Quand l'implantation des capteurs est limitée par le coût , l'espace disponible, etc .... , les approches basées sur un modèle du système et exprimant une redondance analytique ou fonctionnelle deviennent indispensables . Elles permettent de détecter et d'isoler les pannes capteurs mais aussi les pannes actionneurs et processus.

2-2-2 Formulation du problème

Le problème de la détection de défaillance peut être résumé sous la forme suivante inspirée de [BENV 80] :

Etant donné un ensemble de données $y_0,y_1,...y_n$ et deux classes de modèles C_0 et C_1, décider de la validité des hypothèse H_0 et H_1 définies ci- dessous .

H_0 : $y_0,y_1,...y_n$ suit un des modèle de la classe C_0

H_1 : il existe un instant r , $1 \leq r \leq n$ tel que :
$y_0,y_1,...y_{r-1}$ suit un modèle de C_0
$y_r,...y_n$ suit un modèle de C_1

Ceci peut être complété par l'estimation de l'instant du changement de modèle et par l'identification du modèle en ligne

Pour représenter le système , de nombreuses méthodes utilisent le modèle linéaire discrétisé suivant où les matrices A, B et C sont supposées connues [WILL 75]

$$x(k+1) = A * x(k) + B * u(k) + w(k)$$
$$y(k) = C * x(k) + v(k)$$

avec

$$E(w(k)\, w^t(j)) = Q\, \delta_{kj}$$
$$E(v(k)\, v^t(j)) = R\, \delta_{kj}$$

δ_{kj} étant le symbole de Kronecker

w (k) et v (k) représentant respectivement les erreurs de modélisation et le bruit du aux capteurs .

Les causes pouvant amener à une divergence entre le comportement du système et celui de son modèle sont:

1) défaillances dans les actionneurs , dans les composants du système ou dans les capteurs

2) erreurs de modélisation

3) bruit du système et des mesures

Supposons que le système réel obéisse à:

$$x(k+1) = A * x(k) + B * u(k) + E * e(k) + F * f(k) + w(k)$$
$$y(k) = C * x(k) + G * g(k) + H * h(k) + v(k)$$

E représente la matrice de distribution des erreurs de modélisation e (k) dans l'équation d'état.

F représente la matrice de distribution des défaillances actionneurs et composants f (k).

G représente la matrice de distribution des erreurs de modélisation g (k) dans l'équation de mesure.

H représente la matrice de distribution des défaillances capteurs h (k).

A , B et C sont supposées connues . Leurs modifications provoquées par les défaillances ou des erreurs de modélisation sont exprimées par e , f , g , h associées aux matrices correspondantes E , F , G et H . Dans différents travaux , ces matrices sont supposées connues [FRAN 90] alors que e , f , g , h représentent ce qui est inconnu . Une approche utilisant la structure physique peut être à priori un moyen pour connaître E , F , G et H .

[GERT 88] donne une description plus réduite de ce modèle . Dans cette représentation , le biais est employé pour modéliser des défaillances autres que celles des capteurs et des actionneurs : pour l'équation d'état , une défaillance se traduit par un changement de A (ΔA) ou de B (ΔB) , par un changement de la variance Q (ΔQ) ou un biais (d) ; de même , une défaillance capteur prend la forme d'un changement dans C (ΔC) , un bruit plus fort (ΔR) ou un biais (b) [WILL 75] [GERT 88] .

Les équations respectives sont :

$$x(k+1) = A'(k) * x(k) + B'(k) * u(k) + d(k) + w(k)$$
$$y(k) = C'(k) * x(k) + b(k) + v(k)$$

avec

$$A'(k) = A + \Delta A(k)$$
$$B'(k) = B + \Delta B(k)$$
$$C'(k) = C + \Delta C(k)$$
$$Q'(k) = Q + \Delta Q(k)$$
$$R'(k) = R + \Delta R(k)$$
$$E(w(k)w^t(j)) = Q' \delta_{kj}$$
$$E(v(k)v^t(j)) = R' \delta_{kj}$$

2-2-3 Génération des invariants

Principalement , deux démarches différentes permettent la génération des invariants : d'une part l'espace de parité , les observateurs et les filtres détecteurs utilisent une technique d'estimation d'état ; d'autre part , l'estimation paramétrique se place dans le cadre de l'identification .

2-2-3-1 Estimation paramétrique.

Toute défaillance se traduit par une modification des paramètres physiques comme la constante d'un ressort , une masse , une résistance , une capacité , une inductance etc.... L'idée de l'estimation paramétrique consiste donc en une détection des défaillances par l'identification des paramètres du modèle . Elle suit la procédure suivante [ISER 84]

1) choix du modèle

Un modèle statique $f (x) = 0$ sera par exemple décrit par l'équation polynomiale suivante :

$$f (x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

De même , à un modèle dynamique f (y , u , t) linéaire pourra correspondre l'équation différentielle suivante (l'exposant indique le rang de la dérivée) :

$$a_n y^{(n)}(t) + ... + a_1 y'(t) + y(t) = b_m u^{(m)}(t) + ... + b_1 u'(t) + b_0 u(t)$$

2) détermination des relations entre les paramètres du modèle Q et les paramètres physiques P

$$Q = g (P)$$

3) identification de Q à partir des données disponibles , c'est à dire , les entrées u et les mesures y

4) détermination des paramètres physiques P

$$P = g^{-1} (Q)$$

5) Calcul du résidu ΔP différence entre P et les paramètres du modèle non défaillant

6) décision .

Une condition nécessaire à cette procédure est l'inversibilité de g . Dans le cas contraire , la démarche se réduit aux points 1 , 2 , 3 , et 6 . Cette procédure est étudiée dans [RAUL 83] [RAUL 85] où la méthode d'identification est la méthode du modèle.

2-2-3-2 Estimation d'état

Les méthodes de détection- localisation de défauts utilisant une estimation d'état peuvent être classées selon deux approches selon que l'estimation d'état est effectuée de manière explicite ou non:

-les filtres détecteurs et les observateurs
-l'espace de parité

Filtres détecteur et observateurs.

Le modèle étant linéaire , la forme générale du filtre permettant la génération du résidu est de la forme :

$$x'(k+1/k) = A * x'(k/k) + B * u(k)$$
$$x'(k+1/k+1) = x'(k+1/k) + K * r(k+1)$$
$$r(k+1) = y(k+1) - C * x'(k+1/k)$$

où $x'(k/t)$ est l'estimation de x à l'instant k étant donné y(1) , ... ,y(t) pour $t \leq k$ et $C*x'(k+1/k)$ est la prédiction de $y(k+1)$ connaissant y(1) , ... ,y(k)

Le filtre présentera deux fonctions :

a) estimer l'état
b) générer des résidus pour la détection de défaillance

Dans les équations du filtre , seul le gain K peut être choisi et selon son expression , les propriétés du filtre seront modifiées . Ainsi , il pourra agir [FRAN 9O] sur:

1) La compensation des différentes conditions initiales
2) La stabilisation du modèle de surveillance en cas de système instable .
3) Le découplage des effets des défaillances entre elles et des entrées inconnues.

- Filtre de Kalman-Bucy

Il se caractérise par un calcul itératif du gain K.

Testé par différents auteurs , ceux-ci ont constaté une efficacité certaine si l'erreur de modélisation est nulle , mais aussi des possibilité de divergence dans le cas contraire . De plus , le filtre répond lentement à toute défaillance montrant ainsi de faibles performances en détection de défaillances . En effet , lorsque la matrice de covariance de l'erreur d'estimation est faible , K devient petit ce qui traduit une confiance dans les estimations précédentes et un doute sur les nouvelles mesures [RADI 84] . Ainsi , le filtre de Kalman-Bucy , optimal pour un rôle d'estimation du vecteur d'état , montre des performances moindres dans un rôle de surveillance .

- Filtre détecteur [BEAR 71] [JONE 73] [CHOW 80]

Méthode orientée vers la surveillance , le choix de la matrice K n'est plus d'apporter une bonne estimation du vecteur d'état mais plutôt que le résidu soit représentatif de certaines défaillances . L'idée est de choisir K pour que chaque type de défaillance se traduise dans le résidu . Celui-ci s'oriente alors dans un espace prédéfini.

Soit $\varepsilon(k)$ l'erreur de l'estimation du vecteur d'état x (k).

$$\varepsilon(k) = x(k) - x'(k/k-1)$$

et soit r (k) le résidu d'estimation:

$$r(k) = y(k) - y'(k/k-1)$$

$$\varepsilon(k+1) = x(k+1) - x'(k+1/k)$$

$$= A\,x(k) + B\,u(k) + F\,f(k) - A\,x'(k/k) - B\,u(k)$$ avec les notations du 2-2-2

$$\varepsilon(k+1) = A[x(k) - x'(k/k)] + F\,f(k)$$

$$x'(k/k) = x'(k/k-1) + K[y(k) - y'(k/k-1)]$$

$$= x'(k/k-1) + KCx(k) + KHh(k) - KCx'(k/k-1)$$

$$\varepsilon(k+1) = A[x(k) - x'(k/k-1) - KCx(k) - KHh(k) + KCx'(k/k-1)] + F\,f(k)$$

$$= A[(I-KC)(x(k) - x'(k/k-1)) - KHh(k)] + F\,f(k)$$

$$\varepsilon(k+1) = A(I-KC)\,\varepsilon(k) - AKHh(k) + F\,f(k)$$

$$\varepsilon(k+1) = A_0 * \varepsilon(k) - A K H h(k) + F f(k)$$

avec $A_0 = A[I - K * C]$ la matrice en boucle fermée du filtre.

De même:

$$r(k) = y(k) - y'(k/k-1)$$
$$= C x(k) + H h(k) - C x'(k/k-1)$$

d'où:

$$r(k) = C \varepsilon(k) + H h(k)$$

En absence de défaillance : $h(k) = 0$ et $f(k) = 0$

La défaillance de l'actionneur n°j est exprimée par:

$f(k) = \varphi(k) e_j$

où e_j est un vecteur dont les éléments sont nuls sauf le jème élément égal à 1 et $\varphi(k)$ est une fonction du temps qui correspond à l'évolution de la défaillance.

$$\varepsilon(k+1) = A_0 \varepsilon(k) + F_j \varphi(k)$$
$$r(k) = C \varepsilon(k)$$

Sous l'hypothèse que le système a convergé avant cet instant , on obtient pour une défaillance à l'instant $t = 0$:

$$\varepsilon(1) = A_0 \varepsilon(0) + F_j \varphi(0) = F_j \varphi(0)$$
$$\varepsilon(2) = A_0 \varepsilon(1) + F_j \varphi(1) = A_0 F_j \varphi(0) + F_j \varphi(1)$$
$$\varepsilon(3) = A_0 \varepsilon(2) + F_j \varphi(2) = A_0^2 F_j \varphi(0) + A_0 F_j \varphi(1) + F_j \varphi(2)$$
$$\vdots$$

d'où:

$$\begin{vmatrix} r(1) \\ r(2) \\ r(3) \\ . \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ C A_0 & C & 0 & 0 \\ C A_0^2 & C A_0 & C & 0 \\ . & . & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_j\varphi(0) \\ F_j\varphi(1) \\ F_j\varphi(2) \\ F_j\varphi(3) \\ . \end{vmatrix}$$

Pour les défaillances actionneur , un gain K tel que $C A_0^i$ et C aient la même direction quel que soit i produira un effet directionnel sur r qui sera donc dans l'espace généré par $C F_j$ de dimension 1.

La défaillance du capteur n°j est exprimée par:

$h(k) = \nu(k)\, e_j$

$\nu(K)$ est une fonction du temps représentant l'évolution de la défaillance.

On note $N = A K H$

d'où

$\varepsilon(k+1) = A_0\, \varepsilon(k) - N_j\, \nu(k)$

avec N_j la j ème colonne de N.

$r(k) = C * \varepsilon(k) + H_j * \nu(k)$

$r(k+1) = C A_0\, \varepsilon(k) - C N_j\, \nu(k) + H_j\, \nu(k+1)$

$r(k+2) = C A_0^2\, \varepsilon(k) - C N_j\, \nu(k) - C N_j\, \nu(k+1) + H_j\, \nu(k+2)$

$$\begin{vmatrix} r(1) \\ r(2) \\ r(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_j & 0 & 0 \\ -C N_j & H_j & 0 \\ -C A_0 N_j & -C N_j & H_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \nu(1) \\ \nu(2) \\ \nu(3) \end{vmatrix}$$

De même , pour les défaillances capteurs , le gain K sera choisi afin que $C A_0^i N_j$ et $C N_j$ aient la même direction quel que soit i . La signature de la panne sera alors contenue dans l'espace (H_j , C_{Nj}) de dimension 2.

Conceptuellement claire , cette méthode, historiquement la première , illustre les principes fondamentaux de la détection de défaillance : elle comprend non seulement la détection mais aussi l'isolation des pannes . Développée initialement dans un cadre déterministe , Jones décrit une procédure permettant de choisir la structure de K pour un objectif de détection , isolation puis de préciser les paramètres restants afin de minimiser la covariance de l'erreur d'estimation ce qui produit un filtre sous-optimal.

Une limitation à la méthode de Beard et Jones est cependant la nécessité d'avoir des observateurs de rang plein ce qui limite les classes de systèmes auxquels la méthode est applicable . Utilisant une approche géométrique , le problème de la recherche d'un filtre détecteur de Beard et Jones a été reformulé et résolu dans [MASS 86] qui donne les liens duaux avec le problème du découplage dans la théorie du contrôle et éclaircit différents points non résolus dans les travaux de Beard . La limitation d'un observateur de rang complet n'est plus nécessaire dans la généralisation apportée dans [MASS 89].

- Configurations multiobservateurs.

Contrairement au filtre détecteur de Beard et Jones , le choix des observateurs qui détermine l'isolation , dépendra non de critères matriciels ou géométriques mais de la structure des composants , capteurs ou actionneurs . Comme ci-dessus , chaque résidu est conçu afin d'être sensible à une défaillance ou à un ensemble de défaillances et insensible vis à vis d'autres défaillances . La configuration des observateurs dépendra aussi du nombre de défaillances qui doivent être détectées simultanément . Trois possibilités peuvent être distinguées.

(a) Les défaillances doivent être détectées mais non isolées .

(b) Chaque panne simple doit être détectée et isolée

(c) Toutes les défaillances doivent être détectées et isolées même si elles sont simultanées.

La démarche de détection et d'isolation des défauts étant identique pour les défaillances capteur et actionneur , la description ci-dessous fera uniquement référence aux pannes capteurs afin d'éviter toute répétition.

Cas a) Pour ce cas , un observateur unique piloté par l'ensemble des mesures suffit. La défaillance d'un capteur entraînera de mauvaises estimations et une augmentation de tous les résidus. Cette configuration ne permet que la détection.

Cas b) Dans le schéma SOS (simplified observer scheme [CLAR 78]) , un seul capteur s pilote l'observateur . La mesure qui permet l'estimation globale du vecteur d'état est choisie . La logique de décision est la suivante : si le capteur $m \neq s$ qui donc ne pilote pas l'observateur , est en défaut , toutes les estimations sont correctes sauf celle correspondant à m:

$(\forall i \neq m)$ $y_i - y_i' = 0$ y_i' étant l'estimation de y_i .

Par contre , si le capteur s est en défaut , toutes les estimations sont erronées , sauf celles correspondant à s:

$(\forall i \neq s)$ $y_i - y_i' \neq 0$

Les effets sont donc différents et l'isolation d'une panne simple est possible . L'isolation d'une panne multiple ne comprenant pas s est aussi possible . Par contre la défaillance de s masquera la défaillance de tout autre capteur ou groupe de capteurs.

Une autre technique appelée GOS (Generalised Observer Scheme [FRAN 87] consiste à piloter chaque observateur par toutes les mesures sauf une : y_i n'est pas utilisé dans le ième observateur car y_i est supposé perturbé par la défaillance et ainsi n'apporte aucune information sur le système . L'augmentation du nombre de mesures de pilotage donne plus de liberté pour le réglage de l'observateur ce qui permet d'augmenter la robustesse aux entrées inconnues.

Cas c) L'approche des observateurs dédiés (DOS : Dedicated Observer Scheme) proposée par [CLAR 89] consiste à utiliser comme dans l'approche GOS autant d'observateurs que de capteurs mais chaque capteur pilote un observateur qui estimera toutes les mesures (le vecteur d'état est supposé totalement observable à partir de chaque mesure du procédé) . Les m vecteurs d'informations sont utilisés de la manière suivante:

L'absence de défaut se traduit par

$\forall$ i , j égal à 1 ,2 ,...,m

$$y_{i/j} - y_i = 0$$

où $y_{i/j}$ est l'estimation de y_i donnée par l'observateur j.

La présence de défaut sur le q ième capteur se manifeste par :

$-\forall\ i \neq q$

$$y_{i/q} - y_i \neq 0$$

En d'autres termes , l'observateur piloté par le capteur en défaut produit des estimations éloignées des mesures .

$-\forall\ i \neq q\ j \neq q$

$$y_{i/j} - y_i = 0$$
$$y_{q/j} - y_q \neq 0$$

Ainsi , les autres observateurs délivrent des estimations proches des mesures , sauf pour l'estimation de la mesure du capteur défaillant.

La matrice d'erreur d'estimation des observateurs est de la forme :

$E = (e_1 , e_2 , ... , e_m)$
tel que $e_k = y - y_k$ relatif à l'observateur k
avec $y_k = (y_{1/k} , ... , y_{m/k})^t$

L'étude de la structure de E montre que l'isolation de la défaillance d'un capteur est possible même en présence de plusieurs défauts simultanés comme le montre l'exemple suivant.

Pour la défaillance de deux capteurs q=4 et q'=7 , la description précédente indique que E prend la forme suivante:

$$
E = \left|\begin{array}{ccccccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right|
$$

(q --> : 4e ligne ; q'--> : 7e ligne)

avec 1 pour un résidu sensible à la défaillance

Espace de parité

Principe :

Le principe de l'espace de parité est de tester la cohérence d'un modèle avec le processus physique . Le modèle est constitué de relations nommées relations de redondance analytique dont une particularité est que le résidu n'est pas calculé de manière itérative contrairement aux démarches précédentes . Ces relations mettent en rapport directement les mesures et les commandes accessibles pour l'obtention du résidu . Une défaillance est détectée lorsque le résidu sort d'un domaine prédéfini . Deux classes de relations peuvent être distinguées:

- redondance statique

La redondance directe se traduit par l'existence d'une dépendance entre les sorties : par exemple la mesure d'un capteur est exprimée en fonction des autres . Cette dépendance est représentée par les relations de redondance analytiques (RRA) qui sont les relations algébriques entre les mesures . L'exemple élémentaire est celui de la redondance physique où deux capteurs mesurent la même grandeur . La relation , en absence de bruit , est alors:

$$y_1 - y_2 = 0$$

La forme générale nommée aussi cas statique utilise le modèle suivant:

$$y = C x + \Delta y$$

avec
y le vecteur de mesure de dimension (m.1)
x les variables physiques de dimension (n.1)
C la matrice de mesure de dimension (m.n) et de rang n
Δy l'erreur de mesure

Par exemple , en avionique un ensemble de quatre accéléromètres mesurant l'accélération dans un espace tridimensionnel peut se représenter ainsi . Les processus chimiques linéaires et statiques décrits par des équations de conservation de la matière peuvent être décrits par cette forme.

Des relations de surveillance sont obtenues si il existe une matrice de projection V telle que:

$$V^t C = 0$$

La matrice de projection V exprime l'espace orthogonal à C (espace de parité) de dimension (m.(m-n)).

Alors :

$$V^t y = V^t C x + V^t \Delta y$$

où $V^t y = V^t \Delta y$

Soit p le vecteur de parité donné par

$$p = V^t y$$

qui est déterminé par les valeurs de y

D'autre part , $p = V^t . \Delta y$

Le vecteur de parité exprime ainsi les erreurs des mesures indépendamment du vecteur inconnu x . Plus encore , les m colonnes de V^t définissent m directions associées respectivement à chacune des m mesures . Ainsi , la défaillance d'un capteur i produit une erreur de mesure $\Delta y = (0 ,...,0 ,\Delta y_i , 0,...,0)$ et le vecteur de parité se positionnera selon le vecteur V^t_i qui est la ième colonne de V^t. A la condition que cette direction soit différente des m-1 autres , la panne d'un capteur sera identifiée . Le raisonnement peut être étendu pour une panne multiple [HAMA 86] en considérant non des directions mais plus généralement des sous-espaces.

L'espace de parité peut être décrit analytiquement de différentes façons : les RRA pourront ainsi être choisies de manière optimale selon différents critères:

* critère des moindres carrés pour l'estimation de X
* robustesse
* sensibilité aux défaillances etc ...[MENG 91]

Il est à noter que le premier critère est équivalent à l'orthonormalité de V . Celle-ci entraîne d'autre part l'équation $V V^t = I - C (C^t C)^{-1} C^t$. Ce résultat est généralement exprimé de manière très ambiguë [FRAN 90] : cette équation n'impose pas un choix particulier de V [BRUN 90] . Elle apporte par contre un moyen de calculer V en prenant de manière arbitraire la matrice V triangulaire supérieure ou inférieure [POTT 77] [HAMA 86] . De ce qui précède , l'équivalence entre l'espace de parité et une autre méthode par exemple celle des écarts de fermeture des équations de bilan nécessite uniquement l'orthonormalité [FAYO 87] . [AITO 90] donne d'autre part une comparaison de l'espace de parité , la méthode des écarts de fermetures et la méthode des termes correctifs normalisés.

- Redondance dynamique

Les RRA sont ici des relations dynamiques entre les sorties capteurs et les entrées actionneurs développées sur un horizon fini . A l'opposé de la redondance statique , la redondance dynamique est utilisable pour surveiller les capteurs et les actionneurs . Elle nécessite d'autre part un nombre plus réduit de capteurs que la redondance statique ou physique avec pour contrepartie une augmentation de la complexité en raison de la considération de la dynamique du système.

L'exemple suivant d'un système du premier ordre illustre la redondance temporelle :

$$v(k+1) = A * v(k) + T * u(k)$$

où v représente la mesure par exemple d'une vitesse .

Le résidu sera directement :

$$r(k+1) = v(k+1) - A * v(k) - T * u(k)$$

Une défaillance d'un capteur ou d'un actionneur se traduira ainsi dans r (k) .

Plus généralement , les relations de redondance analytique dynamique (RRAD) seront établis à partir des équations d'état et de mesure . Celles-ci seront développées sur un horizon fini p suffisamment grand pour exprimer la redondance.

Les équations d'état et de mesure écrites aux instants k,...,k+p donnent :

$$y(k,p) = O(p)\,x(k) + C(p)\,u(k,p)$$

avec :

$$y(k,p) = (\, y^t(k), y^t(k+1), \ldots, y^t(k+p)\,)^t$$

$$u(k,p) = (\, u^t(k), u^t(k+1), \ldots, u^t(k+p)\,)^t$$

O (p) matrice d'observabilité d'ordre p

$$O(p) = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^p \end{vmatrix}$$

et

$$C(p) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & 0 \\ CA^{p-1}B & CA^{p-2}B & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

De là :

$$y(k,p) - C(p)u(k,p) = O(p)x(k)$$

On retrouve une forme identique au cas statique . Des expressions similaires peuvent être retrouvées si on remplace y par $y(k,p) - C(p)u(k,p)$, C par $O(p)$ et x par $x(k)$. A V correspond alors l' espace orthogonal à l'espace d'observabilité (espace de parité généralisé) ce qui permet la création des RRAD.

Comme pour la redondance directe , de nombreux modèles différents pourront être générés . Présentant des structures et des paramètres différents et donc des sensibilités aux pannes et des robustesses particulières , une sélection selon les critères déjà cités pourra être effectuée.

Dans [CHOW 80] [CHOW 84] est donnée une formulation sous forme d'une optimisation Minimax du problème de la recherche du modèle le plus robuste . Pour des système stochastiques , les relations de résidu minimal pour une erreur de modélisation maximale sont recherchées . Cette formulation , est en pratique trop complexe . Des approximations dans des cas simples sont cependant possibles.

Plus simple , une solution élégante [CHOW 80] [LOU 86] est réalisable lorsque l'incertitude sur le modèle peut être décrite par un ensemble fini de modèles possibles . L'espace de parité généralisé est alors choisi tel qu'il soit au maximum orthogonal aux différents espaces d'observabilité . La matrice décrivant ces derniers est alors décomposé selon des valeurs singulières ce qui donne une solution pour chaque niveau de robustesse choisi.

Récemment , la robustesse vis à vis des entrées inconnues a été l'objet de nombreuses études et des solutions peuvent être trouvées dans [WÜNN 88] [FRAN 89].

Approche structurelle

- Graphe de transport

Orientés vers la validation de données dans des procédés industriels statiques décrits par des équations de bilan matière , [DARO 86] [FAYO 87] [MAQU 87] mettent en évidence les parties inobservables du processus c'est à dire les zones où l'on ne dispose ni de mesures , ni d'estimations des grandeurs caractéristiques . Le processus est schématisé à l'aide d'un réseau de transport , graphe orienté où les noeuds représentent des unités élémentaires de production et les arcs les voies de circulation de la matière . Ce réseau est décrit par sa matrice d'incidence ne comportant donc que les valeurs 1 , -1 et 0 . La méthode du pivot conduit à une forme équivalente de la matrice d'incidence appelée forme canonique . Remarquons que ce résultat est sans erreur numérique en raison des coefficients de la matrice d'incidence.

La forme canonique met en évidence deux catégories de grandeurs:

- Les grandeurs observables déterminées par mesure ou estimation par équation de bilan matière.
- Les grandeurs inobservables , non déterminables par manque d'information.

De même , les équations peuvent être partagées en trois classes:

- Les équations de déduction : des variables non-mesurées peuvent ainsi être déduites.
- Les équations de redondance : celles-ci donnent la partie surveillable du procédé.
- Le complément des classes ci-dessus ne permettant ni déduction , ni redondance.

L'examen de la matrice d'incidence détermine quatre classes de variables selon que la variable est soit mesurée ou non , estimée ou non par les équations de bilan matière

- grandeurs mesurées

+ estimables

Ces variables sont liées par les équations de redondance . Pouvant être obtenues aussi par agrégation graphique de la matrice initiale d'incidence , ces équations définissent un nouveau réseau ou chaque voie dispose d'un point de mesure.

+ non estimables

Elles n'apparaissent pas dans les équations de redondance et ne pourront être corrigées.

- grandeurs non mesurées

+ estimables

Ces grandeurs se déduisent à partir de celles appartenant aux deux classes précédemment définies.

+ non estimables

Le nombre de points de mesures est insuffisant pour permettre une évaluation de ces variables . Une implantation de nouveaux capteurs est nécessaire .

- *Blocs de transfert interconnectés* [STAR 90a] [STAR 90b] [COCQ 91]

Le processus complexe est supposé linéaire et est représenté sous la forme classique d'un graphe composé de blocs interconnectés . Chaque bloc contient un modèle sous la forme d'un polynôme en p (opérateur de Laplace) . Si le bloc est mono-entrée mono-sortie , la forme retenue pour le modèle est:

$$s(p) * D(p) - e(p) * N(p) = 0$$

avec N(p) (resp. D(p)) numérateur (resp. dénominateur) de la fonction de transfert .

Si c(p) et x(p) sont les vecteurs colonnes des variables connues et inconnues , le système peut alors être décrit par :

$$J(p)\, c(p) + K(p) * x(p) = 0$$

où J(p) et K(p) sont des matrices polynomiales.

De forme identique au cas statique , cette expression peut être traitée directement moyennant des conditions de rang et de dimensions . Il suffit pour cela de multiplier à gauche par W tel que:

$$W(p) * K(p) = 0$$

Ainsi ,

$$W(p) * J(p) * c(p) = 0$$

ce qui donne les relations de surveillance en fonction de l'opérateur de Laplace . La discrêtisation des expressions donnera la forme temporelle des relations de surveillance.

2-2-4 Utilisation en détection et isolation

2-2-4-1 Introduction.

L'ensemble des relations de surveillance élaborées à partir de l'analyse du système permet de générer un vecteur de résidus , qui sera testé en permanence par le système de surveillance, afin d'une part de détecter l'apparition d'un défaut et d'autre part de tenter de le localiser.

En fonctionnement normal, les imperfections du modèle et la présence des bruits (processus, mesures) se traduisent par un vecteur des résidus non nul, aléatoire, dont on peut supposer les caractéristiques connues.

En fonctionnement défaillant, ces caractéristiques sont modifiées. L'analyse des résidus doit alors permettre la détection précoce du fonctionnement défaillant. A partir de la notion de structure associée à chaque relation de surveillance , on essaiera de localiser la source de l'incohérence.

Dans le cas linéaire , l'étude des directions de panne dans l'espace de parité permet l'isolation de défaillance . Ce cadre est cependant idéal et le caractère non linéaire du processus étudié permet difficilement l'emploi de cette méthode.

Une autre démarche conduit à utiliser des informations plus robustes comme la structure associée à chaque relation de surveillance . A partir de cette connaissance minimale , on essayera alors de localiser la source de l'incohérence.

2-2-4-2 Détection

Cohérence d'une relation de surveillance.

Une relation de surveillance s'écrit sous la forme suivante:

(1) $\varphi\,[\,y(k,p),\,u(k,p)\,] = r(k+p)$

où $y(k,p)$ désigne les observations successives, aux instants $k,..,k+p$ d'un sous ensemble de capteurs $y \subset Y$ (Y ensemble de tous les capteurs)
$u(k,p)$ représente les valeurs successives, sur l'horizon d'un sous ensemble de commandes $u \subset U$

φ est une application de $R^{|y|\,|u|}$ ---> R , mettant en oeuvre un sous ensemble $f \subset F$ de fonctions-processus ou fonctions décrivant le processus.

Le résidu r(t), calculé à chaque instant t, ne s'écarte de zéro , en fonctionnement normal, que sous l'influence des erreurs de modélisation, des bruits liés au processus et à la mesure. Il s'agit donc d'une variable aléatoire, dont on peut supposer connue la distribution de probabilité, lorsque le système est en mode de fonctionnement normal. (hypothèse Ho)

La procédure de décision associée à la surveillance du résidu lui fait correspondre, de façon générale , un indicateur de cohérence, c(r) de la façon suivante :

Pour $\alpha < \beta$,

$r \in [\,-\alpha\,,\,+\alpha\,]$ $\quad c(r)=1$

la relation est cohérente

$r \in [\,-\beta\,,\,-\alpha\,[\,\cup\,]\,\alpha\,,\,\beta\,]$ $\quad c(r) = X$

on ne peut pas décider de la cohérence ou de l'incohérence de la relation

$r \notin [\,-\beta\,,\,\beta\,]$ $\quad c(r)=0$

la relation est incohérente

Remarque . Certaines procédures de décision utilisent $\alpha = \beta$, la zone d'indécision n'existe alors pas .

D'autre part , la détermination des seuils α et β caractérise la qualité de la procédure de décision. En effet , la probabilité de fausse alarme P_{fa} est une fonction de β et la probabilité de reconnaissance non erronée du fonctionnement normal P_0 est une fonction de α . La probabilité de non décision est égale à $1-P_{fa}-P_o$.

$$P_{fa} = \int_{r \notin [-\beta , \beta]} p(r/H_0)\, P(H_0)\, dr$$

$$P_0 = \int_{r \in [-\alpha , \alpha]} p(r/H_0)\, P(H_0)\, dr$$

Pour pouvoir évaluer la qualité de la procédure en termes de probabilité de détection ou de non détection d'une défaillance , il faut supposer connue la distribution de probabilité du résidu en fonctionnement défaillant (hypothèse H_1) . Un schéma classique de test entre les deux hypothèses H_0 et H_1 est donné fig 2-2-4/1.

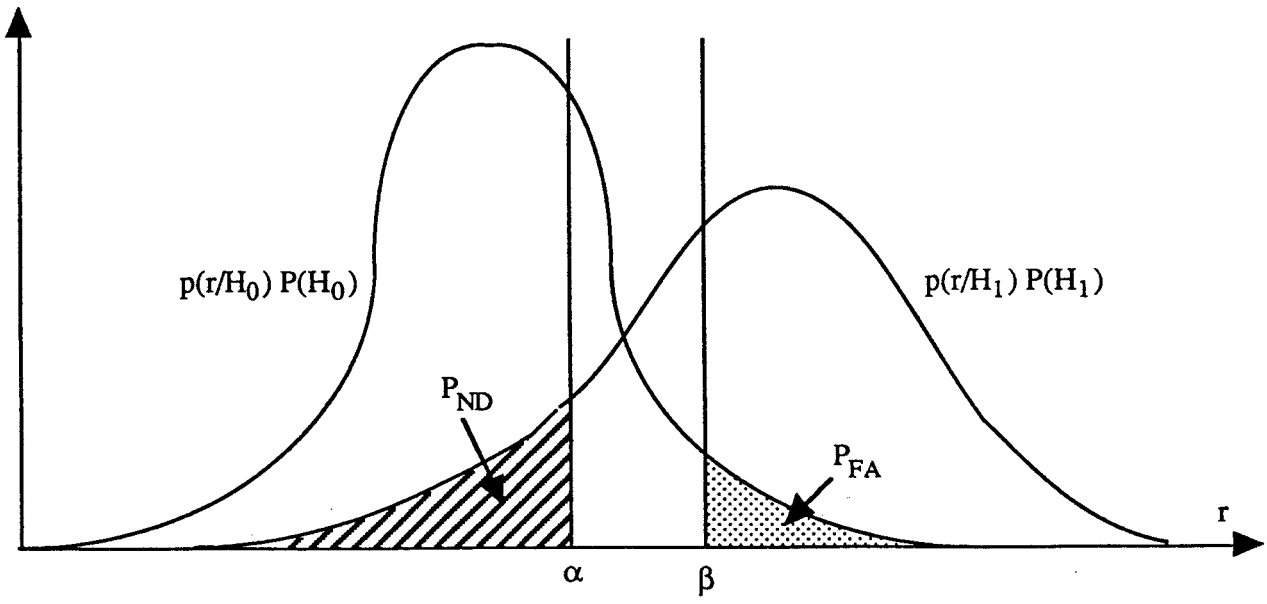


Figure 2-2-4/1

Probabilité de fausse alarme

$$P_{fa} = \int_{\beta}^{\infty} p(r/H_0)\, P(H_0)\, dr$$

Probabilité de non détection

$$P_{nd} = \int_{-\infty}^{\alpha} p(r/H_1)\, p(H_1)\, dr$$

Le choix des seuils α et β est réalisé de façon à assurer un compromis acceptable entre les probabilités de fausse alarme (contraire à la disponibilité du processus), de non détection (contraire à la sécurité du processus), et le temps nécessaire à la décision (contraire à la sécurité du processus).

Cohérence de l'ensemble des relations de surveillance.

On se place dans le cas où la zone d'indécision n'existe pas.

A tout instant t, on dispose de l'ensemble des résidus. $\{ r_i(t) \quad i=1,...n \}$. A chacun de ceux-ci est associé un indicateur de cohérence $c [r_i(t)] \in \{O,1\}$.

Dans ces conditions, au vecteur des résidus est associé un mot de n bits formé par le vecteur des indicateurs de cohérence.

$$R^n \text{-----} > \{ 0 , 1 \}^n$$

$$r (t) \text{-----} > C [r(t)]$$

Si l'on suppose que la procédure de décision est sans fausse alarme , le mot de cohérence associé au fonctionnement normal a tous ses bits à 0 .

2-2-4-3 Isolation

On considere les 3 ensembles suivants :

ϕ ensemble des relations de surveillance utilisées.

Y ensemble des capteurs implantés sur le processus.

F ensemble des fonctions élémentaires distinguées au niveau du processus.

On note $P_2 (X)$ l'ensemble des partitions en 2 classes d'un ensemble X.

Structure élément

On définit la structure-élément d'une relation φ au moyen de l'application suivante:

$$SE : \phi \text{-----} > P_2 (y)$$

$$\varphi \text{-----} > SE(\varphi) = \{ E(\varphi), \overline{E}(\varphi) \}$$

Où $E(\varphi)$ désigne le sous ensemble des capteurs dont la valeur est utilisée pour le calcul de la relation φ (à un ou plusieurs instants de la fenêtre [k,k+p] associée à cette relation) et le sous ensemble des fonctions élémentaires processus utilisées pour la définition de la relation de surveillance φ . $\overline{E}(\varphi)$ est alors le sous-ensemble d'éléments complémentaire. $E(\varphi)$ peut être interprété comme le sous-ensemble de éléments à la défaillance desquels la relation φ est sensible. Cette approche repose sur l'idée de structure : on n'étudie pas la sensibilité plus ou moins grande du résidu par rapport à un défaillance plus ou moins importante de l'élément , mais simplement l'existence ou non d'une liaison entre les deux entités :

défaillance élément <----------> Cohérence de la relation

Sous l'hypothèse d'une procédure de décision sans non détection , la défaillance de tout élément de $E(\varphi)$ rendra la relation incohérente et le bit c(r) correspondant du mot de cohérence prendra la valeur 1

Réciproquement, à tout élément , on peut associer une partition de l'ensemble des relations de surveillance en deux classes.

E -----> $P_2(\phi)$

e -----> $\{\phi(e), \overline{\phi}(e)\}$

avec $\phi(e)$ ensemble des relations utilisant au moins une valeur issue du capteur e sur leur fenêtre d'observation ou la fonctions processus e dans l'établissement de la relation . C'est l'ensemble des relations sensibles à une défaillance de l'élément e.

Sous l'hypothèse d'une procédure de décision sans non détection , la défaillance de l'élément e rendra toutes les relations de $\phi(e)$ incohérentes. Les bits correspondants du mot de cohérence prendront alors la valeur 1 . De même , sous l'hypothèse d'une procédure de décision sans fausses alarmes , la défaillance de l'élément e laissera les relations $\overline{\phi}(e)$ cohérentes . Les bits correspondants prendront alors la valeur 0 . Les conditions d'une procédure sans non détection et sans fausse alarme constituent ainsi l'hypothèse structurale . Notons que la procédure de décision obeit à cette hypothèse dans le cas où toute défaillance est d'amplitude importante . Ainsi , on peut associer à chaque élément un mot de $\{0,1\}^n$ de la façon suivante:

$M : E \text{------} > \{ 0,1 \}^n$

$e \text{------} > M(e) = (m_1\ m_2 \ldots\ldots m_n)$

$m_i = 1 <=> \varphi \in \phi(e)$

$m_i = 0 <=> \varphi \notin \phi(e)$

La défaillance de l'élément e pourra alors être suspectée en comparant le mot de cohérence calculé à partir des résidus à l'instant t au mot M(e) . En effet , si l'élément e est défaillant alors $C [r(t)] = M(e)$.

Utilisation en temps réel .

A chaque capteur $y \in Y$ (à chaque fonction $f \in F$) on associe le mot M(y) (M(f)) qui est le mot de cohérence théoriquement observé si le capteur y (la fonction f) est défaillant (défaillante).

Soient m et p respectivement les cardinaux de Y et de F, on a donc un ensemble de m+p mots dans $\{ 0,1 \}^n$, correspondant chacun à la défaillance d'un capteur (d'une fonction) . Par ailleurs, le mot (0,0,....,0) dans $\{ 0,1 \}^n$ correspond au fonctionnement normal sans défaillance.

L'utilisation en temps réel est alors la suivante : à chaque instant t

.acquisition des sorties capteurs et des consignes.

.calcul des n résidus associés aux n relations de surveillance.

.pour chaque résidu, application de la méthode de décision et détermination du mot de cohérence C [r(t)]

.comparaison du mot de cohérence observé aux m+p+1 mots de cohérence théoriques.

Séparabilité des différents modes de fonctionnement

On dispose à priori de m+p+1 mots de cohérence théoriques dans $\{ 0,1 \}^n$. Cependant, rien ne permet d'affirmer que ces mots sont tous différents entre eux : des couples du type (y_i,y_j) , (f_i,f_j) ou (y_i,f_j) pour lesquels les ensembles de relations sensibles sont les mêmes pour les deux éléments du couple conduiront à des mots théorique identiques et donc à une impossibilité de distinguer la défaillance de l'un ou de l'autre des éléments du couple.

Plus généralement, il sera impossible de distinguer structurellement la défaillance d'un élément (capteur ou fonction processus) parmi la classe d'équivalence des éléments ayant le même ensemble de relations sensibles.

Degrés de séparabilité des modes de fonctionnement

La notion de degré de séparabilité va nous permettre de comparer deux à deux les différents éléments (capteurs et fonction-processus) par l'intermédiaire d'un indice de similarité bâti sur les mots de cohérence associés.

Soit $\phi(e)$ le sous-ensemble des relations utilisant l'élément $e \in E$.

Considérons deux éléments e_i et e_j de E , $\phi(e_i)$ et $\phi(ej)$ les sous-ensembles associés , on définit (fig 2-2-4/2).

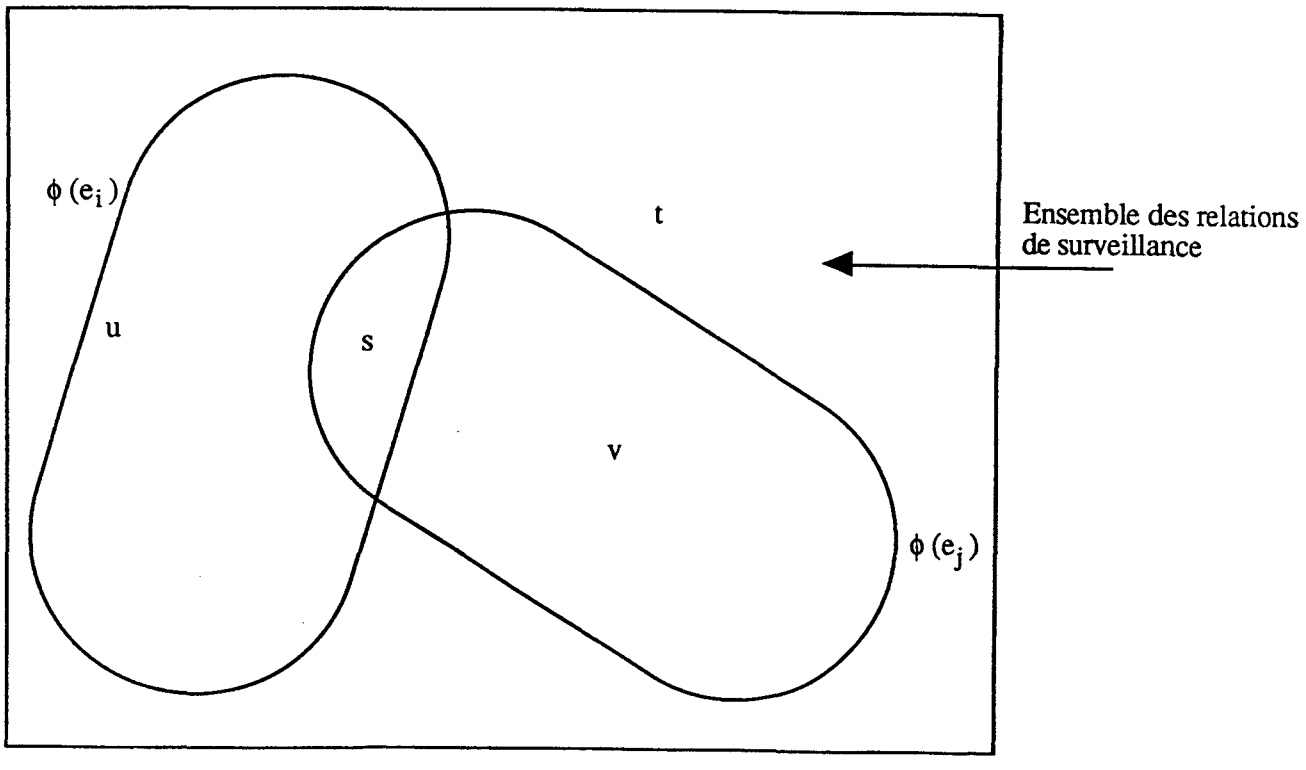


Figure 2-2-4/2

$s = | \phi(e_i) \cap \phi(e_j) |$ nombre de relations de surveillance sensibles à la fois à une défaillance de e_i et à une défaillance de e_j.

$u = |\phi(e_i)|$ - s nombre de relations de surveillance sensibles à une défaillance de e_i et non de e_j.

$v = |\phi(e_j)|$ - s nombre de relations de surveillance sensibles à une défaillance de e_j et non de e_i.

$t = n-s-u-v$ nombre des relations de surveillance insensibles à une défaillance de e_i ou de e_j.

Toute fonction croissante de s et de t, décroissante de u et de v peut être utilisée pour bâtir un indice de similarité entre e_i et e_j. Pour définir un indice de séparabilité (donc de dissimilarité) on peut utiliser, par exemple:

$$\delta(e_i,e_j) = 1 - (s+t)/n$$

$$\delta(e_i,e_j) = 1 - s/(s+u+v)$$

On peut remarquer que l'indice de séparabilité ainsi défini est symétrique: $\delta(e_i,e_j) = \delta(e_j,e_i)$. Le degré de cohérence d'un élément nous permettra d'introduire une notion de couplage orienté.

Degré de cohérence d'un élément [HAMA 86].

L'examen de la figure 2-2-4/2 conduit à la remarque suivante : lors d'une défaillance de l'élément e_j, l'ensemble des relations de surveillance $\phi(e_j)$ deviennent incohérentes, et par voie de conséquence, une partie des relations de $\phi(ei)$ le deviennent aussi. Le lien entre les deux éléments e_i et e_j est donc une notion orientée, que l'on définira de la façon suivante :

$$d(e_i/e_j) = u/(u+s) = 1 - s/(u+s) \quad \text{(défaillance de } e_j\text{)}$$

$$d(e_j/e_i) = v/(v+s) = 1 - s/(v+s) \quad \text{(défaillance de } e_i\text{)}$$

$$\forall\ (i,j) \in \{1,....m+p\}^2$$

Le lien entre e_i et e_j indique la partie des relations sensibles à e_i qui reste encore vérifiée malgré une défaillance de e_j . De là :

$$d(e_i/e_i) = 0 \quad \forall\ i \in \{1,....m+p\}$$

A tout élément $e_j \in E$ on peut alors associer le vecteur $d(E/e_j)$ défini comme suit :

$$d(E/e_j) = (d(e_1/e_j), d(e_2/e_j), ...d(e_{m+p}/e_j))$$

Ce vecteur est un "mot" de m+p valeurs, comprises entre 0 et 1 , qui caractérise la défaillance de l'élément e_j. On appellera ce mot "Signature de panne de l'élément e_j". On peut remarquer que la signature ainsi définie est totalement indépendante de la nature de la panne (biais, dérive... pour un capteur, fuite, blocage... pour le processus). On ajoutera à ces m+p signatures, le mot $d(E/H_0) = (0, 0, ..., 0)$, signature du fonctionnement normal.

Algorithme de décision

Compte tenu de l'imperfection des procédures de décision, on constate également qu'il pourra être difficile de distinguer des modes de fonctionnement pour lesquels les mots de cohérence théoriques seraient peu différents les uns de autres.

En effet , pour un mode de fonctionnement donné, le mot de cohérence observé n'est identique au mot théorique que si l'ensemble des n procédures de décision est sans erreur. En fait, chaque procédure de décision est caractérisée par un taux de fausses alarmes, de non détections de sorte que, pour un mode de fonctionnement donné, le mot de cohérence observé est en réalité un vecteur aléatoire dont on peut étudier la distribution autour du mot de cohérence théorique. En pratique, deux approches sont possibles:

-pour un mot de cohérence donné, calculé à l'instant k+p, reconnaître le mode de fonctionnement dont le mot théorique est le plus proche dans $\{0,1\}^n$

-effectuer la reconnaissance du mode de fonctionnement sur la base du calcul de plusieurs mots de cohérence successifs.

Ces deux approches sont à approfondir sur le plan théorique. On peut d'ores et déjà noter que la deuxième introduit par nature un retard à la détection.

3 Conclusion

Le système de surveillance doit réaliser des fonctions de détection , d'isolation et de diagnostic selon les critères de taux de fausse alarme , de non-détection ,.... Chaque méthode présentée est une réponse possible qui peut être utilisée seule ou de manière conjointe avec d'autres supervisées par un système de niveau supérieur . Lorsque le modèle est connu , les méthodes globales permettent la surveillance . Si seuls les signes des dynamiques du système peuvent être connus , l'approche qualitative pourra être employée . Par contre , l'existence d'un modèle linéaire complet sous forme d'équations d'état et de mesure permettra l'emploi de méthodes quantitatives génératrices d'informations plus nombreuses et plus précises.

En réalité , le modèle disponible pour un grand système est fréquemment intermédiaire entre les deux précédents et les méthodes d'espace de parité , des observateurs etc..... ne pourront en général être appliquées directement ou complètement sur le processus . En effet , la complexité du système se caractérise par la multitude et la diversité des composants:

- La taille du système entraîne un nombre important de fonctions et de variables . Ceci est de plus multiplié par la paramètrisation du modèle en fonction du point de fonctionnement.

- le modèle présentera de nombreux types de fonctions linéaires , bilinéaires , non linéaires , statiques et dynamiques.

Ainsi l'utilisation directe du modèle d'état dans sa forme classique est inadaptée et une démarche différente doit être employée . Une prémodélisation manipulant un nombre réduit d'informations semble constituer un pas indispensable avant toute résolution . Ainsi , une caractérisation structurelle permettant d'éviter l'emploi précoce de méthodes numériques constituera un guide dans la structure du processus . Elle donnera aussi une souplesse d'utilisation face aux informations nouvelles sur le processus comme une meilleure connaissance du système ou une évolution de son modèle.

Bibliographie

[AITO 90] A . Aitouche
Détection et localisation de défaillances de capteurs Thèse de doctorat , Nancy I , 4 dec. 90 .

[BASS 80] M.Basseville et A.Benveniste
Detection of abrupt changes in signals and dynamical systems. Lectures notes in control and information sciences.1980, Springer-Verlag . Berlin.

[BASS 82] M.Basseville
Contribution à la détection séquentielle de ruptures de modèles statistiques . Thèse d'état, n° 355 , Rennes , juin 1982 .

[BASS 88] M. Basseville
Detecting changes in signals and systems . A survey . Automatica , vol. 24 , n°3 .

[BEAR 71] R.V. Beard
Failure accommodation in linear systems through self-reorganization . Rept. MVT-71-1 ,1971. Man Vehicle Laboratory , Cambridge , Massachusetts .

[BENV 80] A. Benveniste
Advanced Methods of Change Detection: An Overview. Dans M.Basseville et A.Benveniste. Detection of abrupt changes in signals and dynamical systems. Lectures notes in control and information sciences. 1980, Springer-Verlag . Berlin.

[BRUN 90] J. Brunet , D. Jaume , M Labarrère , A. Rault ,M.Vergé.
Détection et diagnostic de pannes . Approche par modélisation. ed. Hermes . 1990 .

[BENK 87] A. Benkherouf , A.Y Allidina
Sensor fault detection using overlapping decomposition. Large scale systems 12 (1987) 3-21

[CECC 85] T. Cecchin

Conception d'une usine pilote minéralurgique automatisée. Elaboration et application d'une stratégie de diagnostic d'état de fonctionnement de procédés industriels en temps réel. Institut National Polytechnique de lorraine ,thèse, 17 decembre 1985 .

[CHAR 90] P. Charbonnaud , R. Bertin

Méthodologie de modélisation des systèmes physiques par la physique qualitative . Une application au diagnostic technique . International conference on C.I.M: integration aspects . CIMEX , Bordeaux 1990 .

[CHOW 80a] E.Y.Chow

Failure detection system design methodology. Sc.D.Thesis , Lab.Inform.Decision Syst. , MIT , Cambridge , MA , 1980 .

[CHOW 80b] E.Y. Chow, X-C Lou, G.C Verghese, A.S. Willsky.

Redundancy relations and robust failure detection.

dans M.Basseville et A.Benveniste Detection of abrupt changes in signals and dynamical systems. Lectures notes in control and information sciences. 1980, Springer-Verlag . Berlin.

[CHOW 84] E.Y. Chow , A.S. Willsky

Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems . IEEE Trans on A.C , Vol AC-29 n°7 , july 1984 .

[CLAR 78] R.N Clark

Instrument Fault DetectionIEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol-AES-14 , 456-465 , 1978

[CLAR 89] R.N Clark

State Estimation Schemes for instrument Fault Detection. In fault diagnosis in dynamic systems . Theory and Applications . R. Patton , P. Frank and R.Clark. Prentice Hall International Series in systems and control engineering. 1989 .

[COCQ 91] V. Cocquempot , M. Staroswiecki et J-P Cassar .
Generation of robust Analytical Redundancy Relations. First European Control Conference , ECC'91 ,Grenoble , France , 2-5 juillet 91 .

[DARO 86] M. Darouach
Observabilité et validation des données de systèmes de grandes dimensions . Application à l'équilibrage des bilans de mesures . Thèse d'état , 25 juin 1986 .

[DARO 86] M. Darouach , J. Ragot , J.Fayolle ,D.Maquin
Calcul hiérarchisé et décomposition des systèmes linéaires et bilinéaires appliqué à la validation des données . Revue AFCET A.P.I.I Vol 20 , pp 405-432, 1986

[DECK 82] J.C. Deckert,Jay L.Fisher , David B. Lanning and Asok Ray
A signal validation methodology for nuclear power plants. American Control Conference , Arlington , Virginia , june 14-16, 1982 .

[DECL 91] P. Declerck, M.Staroswiecki
Identification of structurally solvable sub-systems for the design of Fault Detection and Isolation Schemes, using the Embedding Procedure 9th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation. Budapest , Hungary , July 8-12 , 1991 .

[DECL 91] P. Declerck , M.Staroswiecki
Characterisation of the Canonical Components of a stuctural Graph for Fault Detection in Large Scale Industrial Plants . First European Control Conference , ECC'91 , Grenoble , France , 2-5 juillet 91.

[DEKE 81] R.M.C De Keyser , A.R Van Cauwenberghe
A self-tuning multistep predictor application. Automatica. 1981, 17 , 167 .

[DEKL 84] J. De Kleer , J.S Brown
A qualitative physics based on confluences. Artificial Intelligence 24 , 1984.

[DUBU 81] B. Dubuisson

Aide à la décision pour la surveillance d'un système technologique complexe . Le point en automatique, Vol.1 , ed. Technique et documentation , 1981 .

[FANG] C.Z. Fang and W. Ge

Failure isolation in linear systems Proc. 12 th , IMACS World Congress on Scientific Computation , Paris , 1988 .

[FAYO 87] J. Fayolle

Validation de données et diagnostic des procédés industriels . Université de Nancy 1 , thèse , 25 septembre 1987 .

[FRAN 87] P.M. Frank

Advanced Fault Detection and Isolation Schemes using nonlinear and robust Observers . Preprints 10 th World Congress on Aut. Conf. , IFAC , RFA , july 1987

[FRAN 88] P.M. Frank

Fault Diagnosis on the Basis of Dynamic Process Models.Proc. 12 th , IMACS World Congress on Scientific Computation , Paris , 1988.

[FRAN 89] P.M. Frank and J. Wünnenberg

Robust Fault Detection using Unknown Input Observer Schemes. In fault diagnosis in dynamic systems . Theory and Applications . R.Patton , P.Frank and R.Clark . Prentice Hall International Series in systems and control engineering . 1989 .

[FRAN 90] P.M. Frank

Fault Diagnosis in Dynamic systems using Analytical and Knowledge-based Redundancy- A Survey and some new results. Automatica, Vol. 26 , N° 3 , pp 459-474 , 1990.

[GERT 88] Janos J.Gertler

Survey of model-based failure detection and isolation in complex plants. IEEE Trans. on A.C., december 1988.

[GERT 89] Janos J.Gertler
Robust isolable models for failure diagnosis. AICHE Journal , Nov. 1989 , Vol. 35 , n° 11 .

[HAMA 86] M. Hamad
Validation des mesures et détection des capteurs défaillants dans un système de controle commande. Thèse, Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois , 17 juin 1986.

[ISER 84] R. Isermann
Process fault detection based on modeling and estimation methods - A survey. Automatica , Vol. 20 , n° 4 , pp 387-404, 1984.

[JONE 73] H.L Jones
Failure detection in linear systems. Ph.D. Thesis. 1973, Dept. of Aeronautics , M.I.T. . Cambridge, Massachusetts.

[LAMB 90] D. Lambrecht
Rapport de DEA. Université des sciences et techniques de Lille. Septembre 90.

[LEYN 90] L. Leynal , S. Feray Beaumont , S. Gentil
Event oriented versus interval oriented qualitative simulation proceeding IMACS , Bruxelles , 3-7 sept. 1990.

[LIM 85] N. Limnios et J-P Jeannette
Traitement automatique des arbres de défaillance. Le Nouvel Automatisme , janvier-février 1985 .

[LOU 86] Xi-Chang Lou , Alan S.Willsky and George C.Verghese
Optimally Robust Redundancy Relations for Failure Detection in Uncertain Systems. Automatica, Vol 22 , n°3 , PP 333-344 , 1986 .

[MAQU 87] D.Maquin
Observabilité , diagnostic et validation de données des procédés industriels. Thèse de doctorat de l'université de Nancy I ,Nancy , novembre 1987 .

[MASSO 86] M.-A. Massoumnia
A geometric approach to the synthesis of failure detection filters .IEEE Trans. on Aut. Control , Vol. AC-31 , n° 9 , 1986 .

[MASSO 89] M.-A. Massoumnia G. C. Verghese and A. S. Willsky
Failure detection and identification. IEEE Trans. on Aut. Control, vol. 34 , n°3 , march 1989 .

[MENG 91] JH. Meng , M.Staroswiecki
Optimal sensitivity design of parity relations Tenth IASTED International Conference "Modelling, Identification an Control" Innsbruck, Austria. February 18-21 , 1991

[MIRO 80] L.A Mironovski
Functional diagnosis of dynamic systems (survey) Leningrad. Translated from Avtomatika , n°.8 , pp 96-121 , August 1980 .

[MONT 90] J. Montmain , L Leynal , S. Gentil
On line interpretation of a dynamic simulation for diagnosis, Proceeding IMACS , Bruxelles , 3-7 sept. 1990

[PATT 89] R.J. Patton , S.M Kangethe
Robust Fault Diagnosis using Eigenstructure Assignement of Observers. In fault diagnosis in dynamic systems . Theory and Applications. R.Patton , P. Frank and R. Clark .Prentice Hall International Series in systems and control engineering . 1989 .

[POTT 77] J.E.Potter , M.C.Suman
Thresholdeless redundancy management with array of skewed instruments. Integrity in Electronic Flight Control Systems, Agardograph-224 , pp.15-25 , 1977.

[RAUL 83] A.Rault , D.Jaume , M.Vergé
Identification en temps réel et detection de défauts sur processus industriels. AI IASTED Symposium , Lille March 1983.

[RAUL 85] A.Rault , D.Jaume , M.Vergé
Méthode originale de détection de défauts sur processus industriels. Revue A.P.I.I , 19 - 45-68 ,1985.

[SAED 79] E. Saedler
Hypothesis testing and system identification methods for on-line vibration monitoring of nuclear power reactors. 5 th IFAC Symposium on identification and systemparameter Estimation. 1979, Darmstadt Pergamon Press. Oxford .

[STAR 89] M.Staroswiecki , P.Declerck
Analytical redundancy in non linear interconnected systems by means of structural analysis. IFAC Symposium on Advanced Information Processing in Automatic Control , 3-5 july 1989, Nancy , France

[STAR 89] M.Staroswiecki , J.Ph.Cassar, Ph.Declerck
Automatic Analytical Redundancy relationships generation in complex interconnected system based on a structural approach. INCARF 89 New Delhi.

[STAR 90] M.Staroswiecki , V. Cocquempot et J.Ph.Cassar
Generation of relation for the system supervision using the transfer-function. IASTED Innsbruck , fevrier 90.

[STAR 90] M.Staroswiecki , V. Cocquempot et J.Ph.Cassar
Generation of analytical redundancy relations in a linear interconnected system. Proceedings of IMACS-IFAC International Symposium. Brussel , September 3-7 , 1990 .

[STAR 91] M.Staroswiecki , V. Cocquempot et J.Ph.Cassar
Observer Based and parity space approaches for failure detection and identification. IMACS MCTS , Lille , may 91 .

[TZAF 89] S.G. Tzafestas
In fault diagnosis in dynamic systems . Theory and Applications. R. Patton , P. Frank and R. Clark. Prentice Hall International Series in systems and control engineering. 1989 .

[WILL 76] A.S.Willsky

A survey of design methods in failure detection in dynamic systems. Automatica , vol. 12 , pp. 601-611 , 1976 .

[WILL 79] M.M.R William and R. Sher

Progress in nuclear energy . Vol. I, 1979 . Pergamon Press, Oxford.

[WÜNN 88] J. Wünnenberg P.M Frank

Model-based residal generation for dynamical systems with unknown inputs. Proc. 12 th IMACS World Congress on Scientific Computation , Paris ,Vol. 2 ,435-437 , July 1988.

[ZWIN 79] G.C Zwingelstein and B.R Upadhyaya

Identification of multivariate models for noise analysis of nuclear plant. 5th IFAC Symposium on identification and system parameter Estimation . Darmstadt Pergamon Press. 1979, Oxford.

[ZWIN 83] G. Zwinglstein

Méthodes de détection et localisation de capteurs défaillants et techniques de validation de mesures complexes. Rapport HP 40/83/381 , EDF Chatou juin 1983.

2 Modèles structuraux

Chapitre 2: Modèles Structuraux

1 Représentation structurale du processus

1-1 Description

1-2 Caractérisation des sous-systèmes

2 Analyse structurale par la théorie des graphes

2-1 Le graphe biparti B_X

2-1-1 Graphe disjoint

2-1-1-1 Description

2-1-1-2 Les graphes disjoints dans la littérature

2-1-1-2-1 Autres définitions

2-1-1-2-2 Algorithmes de couplage

2-1-2 Remarques initiales : théorème de Koenig-Hall et déficiences

2-1-3 Support extérieur

2-1-4 Caractères canoniques

2-1-5 Décomposition canonique

2-2 Le graphe associé biparti par la procédure d'inclusion.

2-2-1 Description

2-2-2 Les Trois Composantes

2-2-3 Caractéristiques conservées

2-2-4 Nouvelles caractéristiques

2-3 Le graphe associé G par la procédure d'inclusion.

2-3-1 Définition du graphe associé G

2-3-2 Connexité simple

2-3-3 Connexité orientée

2-3-4 Connexité forte

2-4 Résumé et mise en oeuvre

3 Domaine de validité structurale

3-1 Cohérence sur-graphe / sur-système

3-2 Fonctions et variables prétextes

3-2-1 Equivalence système / sur-système

3-2-2 Conditions d'équivalence

3-2-2-1 Conditions 3) de la propriété 3-2-1/1

3-2-2-2 Condition 2) de la propriété 3-2-1/1

3-2-3 Exploitation structurale des chaînes alternées .

3-2-3-1 Interprétation

3-2-3-2 Utilisation des chaînes alternées

4 Conclusion

Annexes

Bibliographie

De nombreuses méthodes ont été développées pour la conception du système de surveillance, avec pour objectifs la détection, l'isolation et le diagnostic des défaillances , permettant la reconfiguration du système de production.

Ces méthodes différent par le modèle de représentation du processus qu'elles utilisent. La représentation la plus pauvre décrit les limites de variations des variables du processus , leur distribution statistique dans différents modes de fonctionnement; des modèles plus élaborés décrivent l'évolution du système sous forme qualitative (système à base de connaissance, physique qualitative) ou quantitative (identification de paramètres ou estimation d'état).

Ce dernier type de représentation décrit l'évolution des variables d'état du processus et constitue donc la représentation la plus détaillée du fonctionnement du système . Il doit contenir pour cela , l'ensemble des variables , des paramètres et des relations qui les lient sous forme d'équations algébriques , différentielles ,... .

Cela se traduit dans la description par un grand nombre de variables , de fonctions et pour ces dernières par une grandes diversité de types : qualitatif / quantitatif , linéaire / non-linéaire , statique / dynamique ... Si le type d'une relation est connu , de nombreuses incertitudes subsistent encore comme la précision des paramètres par exemple.

Ainsi , l'expérience montre que pour un grand système , le modèle est souvent connu avec imprécision : l'utilisation des équations d'état et de mesure dans leur forme classique est peu adaptée .

En réalité , l'unique modèle du système est dans la pratique une description essentiellement graphique . Elle est constituée de blocs interconnectés dans un réseau chacun étant un modèle d'un sous-processus . Pris au sens structural , ce modèle est fréquemment un premier jalon permettant la connaissance du système . Il est d'autre part un outil de travail largement utilisé dans l'industrie.

Cette représentation sera le modèle utilisé dans ce chapitre. On supposera de plus que très peu d'informations sont disponibles sur le processus : seule la structure sera connue avec exactitude . Nous analyserons ce modèle du processus afin d'en tirer des renseignements applicables à la détection de défaillance . L'étape suivante complétera ce prémodèle par des données quantitatives qui permettront sur la base d'une structuration en sous-systèmes , un traitement numérique réduit du modèle.

Ainsi , cette mise en oeuvre des phases successives qualitative et quantitative pourra être appliquée à l'élaboration du système de surveillance et permettra d'exprimer les structures des relations de surveillance .

L'intérêt de développer cette approche est multiple :

- La représentation structurale est proche de la représentation mentale de l'opérateur car elle tient compte de la topologie du processus et permet le repérage de chaque composant physique dans la structure .

- La représentation permet l'incorporation de différents niveaux de connaissance pour la description comportementale du processus .

- L'approche structurale peut être appliquée à des extensions directes de la détection de défaillance comme l'implantation de nouveaux capteurs .

- Cette approche est robuste relativement aux valeurs des coefficients.

- Argument non des moindres pour toute recherche appliquée , la représentation par blocs interconnectés est un modèle extrêmement courant dans l'industrie .

Cette approche s'appuiera sur une représentation structurale du système qui est présentée en 1 ainsi que les notations de base .

Puis , le sous-chapitre 2 présentera les outils graphiques . A ce niveau , il est à noter que les résultats sont totalement indépendants de la représentation sous forme d'équations, et peuvent être appliquées à la structure liant deux classes d'objets quelconques .

Le sous-chapitre 3 présentera l'application de la théorie des graphes au modèle défini par des blocs interconnectés . Cette opération n'est pas systématique et des conditions de représentativité structurelle seront développées .

1 Représentation structurale du processus [STAR 89 a]

Le processus est représenté par une structure de blocs interconnectés (voir figure 1-1/1). A chacun de ces blocs correspond un ensemble de contraintes de natures différentes ou non, liant les variables. Aucune hypothèse n'est faite sur telle variable qui serait variable de sortie ou d'entrée selon la terminologie courante . L'ensemble du système est ainsi représenté par un ensemble de m contraintes .

$$F = \{ f_1 , f_2 , \dots , f_m \}$$

qui sont appliquées à un ensemble de n variables :

$$Y = \{ y_1 , y_2 , \dots , y_n \}$$

Sous forme abrégée , ceci est noté :

$$(1) \qquad F(Y) = 0$$

Aucune hypothèse structurale ne sera faite au cours de cette étude . En particulier , m et n peuvent prendre toutes les valeurs . De même la structure est tout à fait quelconque.

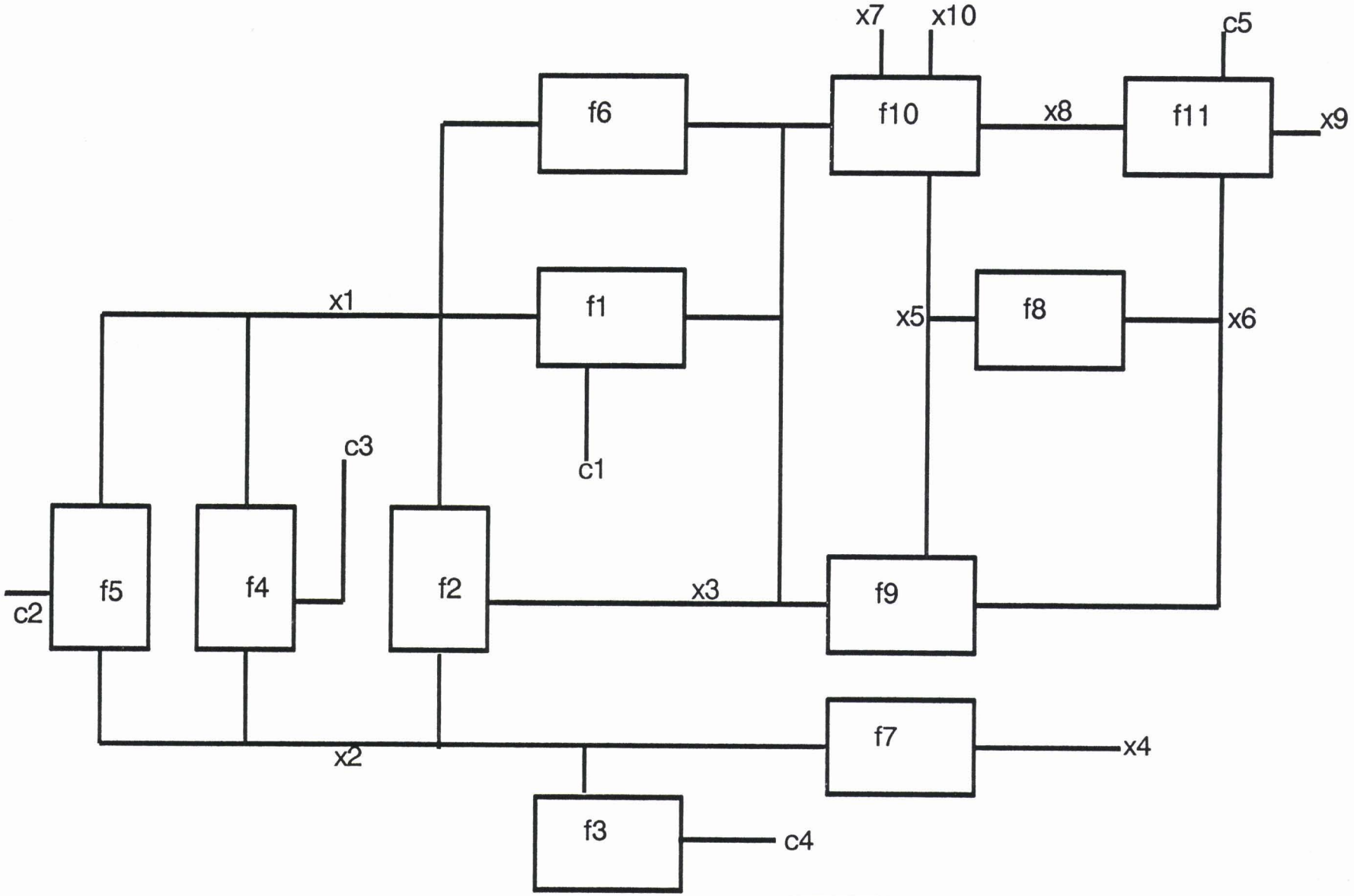
1-1 Description

La structure est décrite par la relation binaire suivante:

$$S : F . Y \longrightarrow \{ 0 , 1 \}$$

$$(f_i , y_j) \longrightarrow S (f_i , y_j)$$

tel que $S (f_i , y_j) = 1$ ssi la contrainte f_i est appliquée à la variable y_j .


x7
x10
c5
f6
f10
x8
f11
x9
x1
f1
x5
f8
x6
c1
c3
f5
f4
f2
x3
f9
c2
f7
x4
x2
f3
c4

Soit $\underline{\underline{P}}$ (E) l'ensemble des parties d'un ensemble E donné , les deux applications suivantes définissent respectivement les structures lignes et colonnes du système :

$Q : \underline{\underline{P}}(F) \longrightarrow \underline{\underline{P}}(Y)$

$\underline{\underline{F}} \longrightarrow Q(\underline{\underline{F}}) = \{ y_j \mid \exists\ f_i \in \underline{\underline{F}}$ tel que $S(f_i , y_j) = 1 \}$

$R : \underline{\underline{P}}(Y) \longrightarrow \underline{\underline{P}}(F)$

$\underline{\underline{Y}} \longrightarrow R(\underline{\underline{Y}}) = \{ f_j \mid \exists\, y_i \in \underline{\underline{Y}}$ tel que $S(f_j, y_i) = 1 \}$

Le graphe biparti $B_0 = G (F , Y ; A_0)$ associé à la relation S est défini par :

$$(f_i , y_j) \in A_0 \iff S (f_i , y_j) = 1$$

Les applications suivantes introduisent les principales notations :

Soit $V_0 = F \cup Y$

$(\forall\, V \subset V_0)$, on définit :

$\mu_A (V , B_0) = \{ a \in A_0 \mid (\exists (v , w) \in V.V_0$ et $a = (v , w)$ ou $a = (w , v) \}$

$\mu_A (V , B_0)$ est ainsi l'ensemble des arcs de A_0 présentant une extrémité au moins dans V .

$\mu_A^- (V , B_0) = \{ a \in A_0 \mid (\exists (v , w) \in V.V_0$ et $a = (v , w) \}$

$\mu_A^+ (V , B_0) = \{ a \in A_0 \mid (\exists (v , w) \in V.V_0$ et $a = (w , v) \}$

De même , $(\forall\, A \subset A_0)$

$\mu_V (A , B_0) = \{ v \in V_0 \mid (\exists\, a \in A_0) \ (\exists\, w \in V_0)\ a = (v , w)$ ou $a = (w , v) \}$

$\mu_V (A , B_0)$ est donc l'ensemble des sommets extrémité d'au moins un arc de A .

$\mu_V^- (A , B_0) = \{ v \in V_0 \mid (\exists\, a \in A_0) \ (\exists\, w \in V_0)\, a = (w , v) \}$

$\mu_V^+ (A , B_0) = \{ v \in V_0 \mid (\exists\, a \in A_0) \ (\exists\, w \in V_0)\, a = (v , w) \}$

D'autre part ,

$\mu_V (\mu_A (f_i , B_0) , B_0) \setminus \{ f_i \} = Q (f_i)$

$\mu_V (\mu_A (x_i , B_0) , B_0) \setminus \{ x_i \} = R (x_i)$

où f_i (resp. x_i) est écrit à la place de $\{ f_i \}$ (resp. $\{ x_i \}$) par simplicité d'écriture .

Soit { C , X } une partition en deux parties de l'ensemble Y (dans l'application, C sera le sous-ensemble des variables connues et X le sous-ensemble des inconnues) .

Une restriction de B_0 est définie par :

$$B_X = G (F_X , X ; A_X)$$

avec $F_X = R (X)$

$$A_X = \mu_A (X , B_0)$$

Exemple 1 (t désigne le temps et p l'opérateur de Laplace):
(cet exemple correspond au schéma de la figure 1-1/1)

$F = \{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7,f_8,f_9,f_{10},f_{11},f_{12}\}$
$C = \{ c_1,c_2,c_3,c_4,c_5 \}$
$X = \{ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10} \}$

$f_1 : c_1 (t) - x_1 (t) + x_3 (t) = 0$
$f_2 : x_2 (t) - x_3 (t) - x_1 (t) = 0$
$f_3 : x_2 (t) - c_4 (t) = 0$
$f_4 : 2 . x_2 (t) + x_1 (t) - c_3 (t) = 0$
$f_5 : x_2 (p) + x_1 (p) / (1 + \tau p) - c_2 (p) = 0$
$f_6 : (1 + \tau_1 p) / (1 + \tau_2 p) x_1 (p) - x_3 (p) = 0$
$f_7 : a . x_2 (t) + b - x_4 (t) = 0$
$f_8 : x_5 (t) - (x_6 (t))^{1/2} = 0$
$f_9 : x_6 (t) - x_3 (t) + x_5 (t) = 0$
$f_{10} : - x_8 (t) + x_7 (t) - x_{10} (t) - x_5 (t) + x_3 (t) = 0$
$f_{11} : - x_9 (t) + (x_8 (t) . x_6 (t))^2 + c_5 (t) = 0$
$f_{12} : c_1 (t) - c_4 (t) = 0$

Structure :
$f_1(c_1,x_1,x_3) = 0$
$f_2(x_1,x_2,x_3) = 0$
$f_3 (c_4 ,x_2) = 0$
$f_4 (x_1, x_2 , c_3) = 0$
$f_5 (x_1 , x_2 , c_2) = 0$
$f_6 (x_1,x_3) = 0$
$f_7 (x_2,x_4) = 0$
$f_8 (x_5,x_6) = 0$
$f_9 (x_3,x_5,x_6) = 0$
$f_{10} (x_3 , x_5,x_7,x_8,x_{10}) = 0$
$f_{11} (c_5 ,x_6 , x_8 , x_9) = 0$
$f_{12} (c_1,c_4) = 0$

$F_X = F \setminus \{ f_{12} \}$ f_{12} est une Relation de Redondance Analytique (RRA) , c'est à dire une relation ne faisant intervenir que des variables connues , et qui peut donc être utilisée directement sous cette forme par le système de surveillance.

Le graphe biparti B_X est présenté dans le tableau 1-1/1.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_9	x_{10}	x_7	x_8
f_4	**1**	1								
f_5	1	**1**								
f_6	1		**1**							
f_1	1		1							
f_2	1	1	1							
f_3		1								
f_7		1		**1**						
f_8					**1**	1				
f_9			1		1	**1**				
f_{10}			1		1			1	**1**	1
f_{11}						1	1			**1**

Tableau 1-1/1

Fin de l'exemple 1

1-2 Caractérisation des sous-systèmes

A chaque sous-ensemble de fonctions ϕ de F , on associe un sous-système défini par le couple $(\phi, Q(\phi))$.

Un sous-système est donc l'image d'un sous ensemble de F par l'application suivante:

$$\underline{\underline{P}}(F) \text{ -----> } \underline{\underline{P}}(F).\underline{\underline{P}}(Y)$$
$$\phi \text{ -----> } (\phi, Q(\phi))$$

Soit un sous-système $(\phi, Q(\phi))$.

Soit $Q_C(\phi) = Q(\phi) \cap C$

$Q_X(\phi) = Q(\phi) \cap X$

Les contraintes associées au sous-système mettent en relation les variables $Q_C(\phi)$ et $Q_X(\phi)$ de manière statique ou dynamique et peuvent être écrites :

$$\phi(Q_C(\phi), Q_X(\phi)) = 0 \qquad (1)$$

Considérons les variables de $Q_C(\phi)$, et soit e(t) l'ensemble des valeurs (qualitative ou quantitatives) prises par ces variables à l'instant t. Pour un intervalle $[t_1, t_2]$ donné, un ensemble ordonné des e(t) ($t \in [t_1, t_2]$) forme une trajectoire de $Q_C(\phi)$.

Définition

Pour une trajectoire de $Q_C(\phi)$ donnée, la solution de (1) est l'ensemble T des trajectoires de $Q_X(\phi)$ telles que (1) est vérifiée.

Définition

Un sous-système est dit compatible si $T \neq \varnothing$

Il est dit déterminé si $|T| = 1$ et sous-déterminé si $|T| > 1$

Soit un sous-système déterminé .

Il est dit sur-déterminé si ($\exists \varphi \subset \phi$ et $\varphi \neq \phi$) tel que

$$Q_X(\varphi) = Q_X(\phi)$$
$$\text{et } T_\varphi = T_\phi$$

Le sous-système ϕ est dit juste-déterminé s'il n'est pas sur-déterminé.

Exemple

$$C = Ax$$

Si la matrice carrée A est de rang plein , le système est juste déterminé.

2 Analyse structurale par la théorie des graphes

Dans ce sous-chapitre , la structure du système est étudiée à travers trois graphes différents . Le graphe biparti B_X représente la structure initiale du système tandis que B^+ et G sont deux surgraphes dérivés respectivement de B et B^+ . Nous présentons maintenant les caractères canoniques et les propriétés de ces graphes . Cette étude théorique est l'étape préliminaire à la conception d'algorithmes qui permettront d'exprimer la partie surveillable du système ainsi que la structure des RRA.

2-1 Le graphe biparti B_X

Dans cette partie , nous déterminons les caractéristiques canoniques à l'aide des notions de graphe disjoint et de support appelé aussi recouvrement dans [BERG 73].

Les graphes disjoints mettent en relief la structure des arcs tandis qu'aux supports correspond la structure des sommets . La notion de support , peut être moins immédiate , est peu employée sauf dans [LIN 74] inspiré par [ORE 62] . Par exemple, elle n'est pas rappelée dans des ouvrages tel que [GOND 79] alors que dans le même livre , le couplage ainsi que ses algorithmes sont très détaillés .

2-1-1 Graphe disjoint

2-1-1-1 Description

Définition

Soit $E \subset F_X \cup X$

La projection sur E est une fonction P_E définie par:

$$P_E : \underline{\underline{P}}(A_0) \longrightarrow E$$

$$A \longrightarrow P_E(A) = \mu_V(A, B_X) \cap E$$

$P_E(A)$ est l'ensemble des sommets de E qui sont extrémité d'au moins un arc de A dans la restriction B_X.

Définition

$G (F_X , X ; A)$ est un graphe disjoint de B_X si et seulement si:

1) $A \subset A_0$

2) P_{FX} et P_X sont des applications injectives de A respectivement dans F_X et X .

Définition

Un graphe disjoint maximal de B_X est défini par $G (F_X , X ; A)$ tel que :

$\forall A' \subset A , A' \neq A$ et $G (F_X , X ; A')$ n'est pas disjoint .

L'ensemble des graphes disjoints maximaux de B_X est noté $E (B_X)$. On notera $W \in E (B_X)$ un graphe disjoint maximal et A(W) l'ensemble de ses arètes.

Exemple 1 (figure 2-1-1-1/1)

Soit $B_X = G (F_X , X , A_X)$

avec $F_X = \{ f_1 , f_2 , f_3 \}$

$X = \{ x_1 , x_2 , x_3 \}$

$A_X = \{ (f_1,x_1) , (f_1,x_2) , (f_2,x_3) , (f_3,x_3) \}$

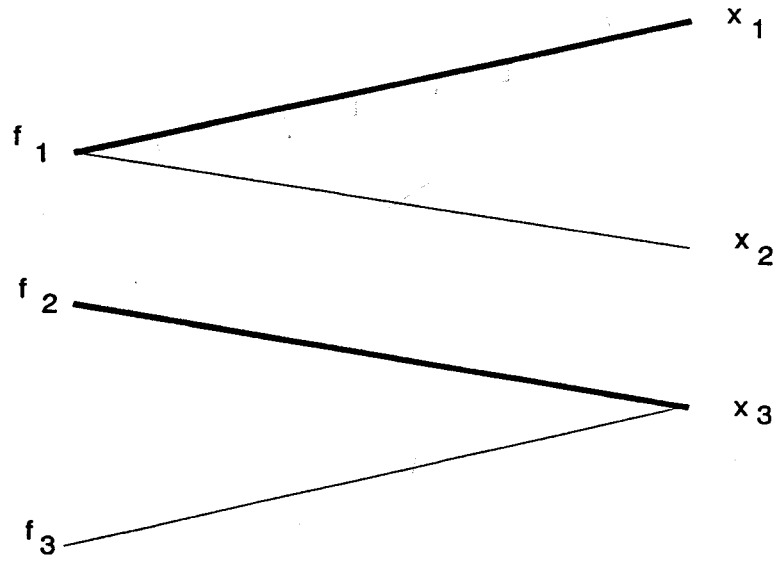


Figure 2-1-1-1/1

Les graphes disjoints maximaux sont définis par les ensembles d'arcs suivants:

$A_1 = \{ (f_1,x_1), (f_2,x_3) \}$
$A_2 = \{ (f_1,x_2), (f_2,x_3) \}$
$A_3 = \{ (f_1,x_1), (f_3,x_3) \}$
$A_4 = \{ (f_1,x_2), (f_3,x_3) \}$

Exemple 2 : suite de l'exemple du chapitre 1-1 (une illustration est donnée en figure 2-1-1-1/2)

Soit $B_X = G (F_X , X , A_X)$
avec $F_X = \{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7,f_8,f_9,f_{10},f_{11}\}$
$X = \{ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10} \}$

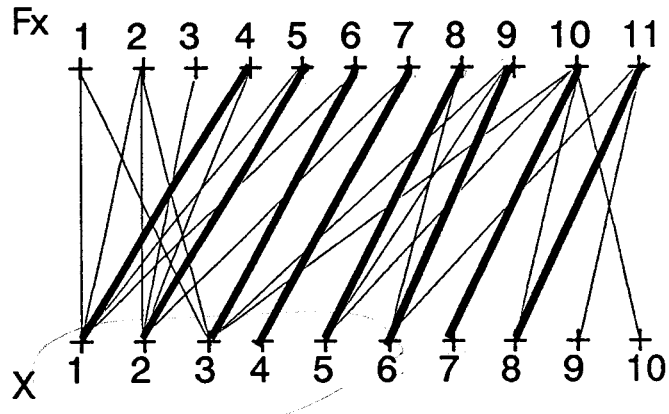


Figure 2-1-1-1/2

Les arcs du graphe disjoint maximal W sont :
$A (W) = \{ (f_4,x_1) , (f_5,x_2) , (f_6,x_3) , (f_7,x_4) , (f_8,x_5) , (f_9,x_6) , (f_{10},x_7) , f_{11},x_8) \}$
Fin de l'exemple 2

Introduisons à présent la notion de graphe disjoint complet. Cette notion sera fréquemment utilisée par la suite , elle permettra en particulier la construction des deux surgraphes B^+ et G .

Définition

Un graphe disjoint $G^D = G (F_X , X ; A)$ de B_X est complet si P_{FX} et P_X sont surjectives .

Tous les sommets de F_X et X sont ainsi "couverts" par un arc de A ou en d'autres termes sont incidents à un arc de A .

La propriété suivante est immédiate:

Propriété 2-1-1-1/1

Tous les graphes disjoints et complets de B_X sont maximaux.

2-1-1-2 Les graphes disjoints dans la littérature

2-1-1-2-1 Autres définitions

Dans la littérature , les termes "graphes disjoints" sont fréquemment remplacés par celui de couplage , ce dernier désignant aussi bien l'action de coupler que le résultat. Le rang terme dont la définition est donnée ci-dessous , est aussi couramment employé. Il s'appuie sur une représentation matricielle.

Définition

Un graphe biparti peut être complètement décrit à l'aide d'une matrice M souvent appelée matrice booléenne , dont chaque élément m_{ij} est égal à 1 si il existe un arc du sommet $f_i \in F_X$ vers $x_j \in X$.

Soit $M = (m_{ij})$ cette matrice de dimension (m , n)

Le rang terme de M , noté t (M) est égal à k maximum tel que:

$m_{i(1)j(1)}\ m_{i(2)j(2)} \cdots\cdots m_{i(k)j(k)} \neq 0$

avec ($\forall$ p,q entier) $p \neq q \Rightarrow i(p) \neq i(q)$ et $j(p) \neq j(q)$

Le rang terme est équivalent à la détermination sur un échiquier de dimension (m,n) du nombre maximal de tours (au sens des échecs) tel que l'on puisse les placer sur un m_{ij} non nul , et qui ne sont pas susceptibles d'être prises par une autre tour , c'est à dire qu'aucune d'entre elles ne se retrouve sur la même ligne ou la même colonne qu'une autre . C'est d'ailleurs sur cette image que dans [PRES 81] est développé un algorithme pour le calcul de rang-terme, appelé abusivement rang générique , basé sur les mathématiques combinatoires . Graphiquement chaque tour correspond à un arc du graphe disjoint , chaque colonne à un élément de X et chaque ligne à un élément de F_X. Dans ces conditions , le résultat suivant est immédiat:

$$(\forall W \in E(B_X) \quad t (M) = | A (W) |$$

La structure de la matrice M peut aussi être dégagée par permutation des lignes et des colonnes en vue d'obtenir une structure bloc diagonale ou bloc-triangulaire . Le rang terme sera alors défini par le nombre d'éléments non nuls dans la matrice de permutation maximale de lignes ou de colonnes contenue dans M.

Exemple :

$$M = \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & f_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & f_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & f_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & f_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array}$$

Un réarrangement des lignes et des colonnes est donné par L et C avec :

$$L = \begin{array}{ccccc} f_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ f_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ f_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$C = \begin{array}{cccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

d'où M' = L M C =

	x_4	x_2	x_3	x_1
f_2	1	1	0	0
f_3	1	1	0	0
f_1	1	1	1	0
f_4	0	1	1	1

t (M) = 4

Fin de l'exemple

2-1-1-2-2 Algorithmes de couplage

Le problème de la recherche d'un graphe disjoint maximal ou du couplage de cardinal maximal est essentiellement un problème de nature combinatoire . Il serait ainsi possible d'énumérer exhaustivement tous les couplages possibles : par exemple si | F_X | = n alors le nombre de couplages distincts est de l'ordre de n ! : procéder de cette façon pour n suffisamment grand est donc irréalisable . La recherche sur les problèmes de couplage consiste à déterminer des algorithmes de complexité polynomiale et non exponentielle.

Initialement , le problème du couplage a été étudié dans le cadre des graphes bipartis par Hall [ROY 70] qui a présenté un algorithme de couplage maximal . Ce problème a été étendu par Kuhn au problème du couplage de poids maximal où une valuation est donnée aux arcs.

Parallèlement à ces études , le problème de flot à coût minimal [FORD 62] donne un moyen de résolution par transformation du graphe biparti en graphe de transport en ajoutant un noeud source et un noeud puits.

Dans un cadre plus large , Berge [BERG 57] a caractérisé les couplages de cardinal maximal dans des graphes quelconques , donnant ainsi une base pour des algorithmes de complexité polynomiale pour le cas des graphes non bipartis .

Un principe général a été donné [EDMO 63] , ainsi que des algorithmes fondamentaux qui ont inspiré de nombreux algorithmes performants actuels . Le principe général consiste à utiliser l'algorithme primal-dual [PAPA 82] de la programmation linéaire pour ramener le problème du couplage de poids maximal à la résolution d'une suite de problèmes de couplages de cardinal maximal ce qui montre l'importance de ce dernier.

En collaboration avec Minoux dans [BART 78] est proposé un système de marquage ainsi qu'un algorithme de couplage de cardinal maximal dans un graphe quelconque : cet algorithme , utilisant le nouveau système de marquage , tout en restant très proche de l'algorithme original d' Edmonds possède une borne supérieure du nombre d'opération en $n^{5/2}$.

Illustrée par de nombreuses figures , une description détaillée dans [GOND 79] présenté les algorithmes de couplage maximum et de couplage de poids maximum tandis que [MINO 86] donne les listings complets des Algorithmes en FORTRAN où la lisibilité et la structuration ont été des impératifs.

Placé dans un cadre plus général , le couplage peut être décrit en termes de matroïdes : le graphe disjoint ne correspond pas à une seule matroïde mais à l'intersection de deux matroïdes [PAPA 82] . Une introduction à la théorie des matroïdes à partir d'une dualité théorie des graphes / matroïdes peut être trouvée dans [HARA 66] . Des présentations plus complètes peuvent être trouvées dans [LAWL 76] [GOND 79].

2-1-2 Remarques initiales : théorème de Köenig-Hall et déficiences

Le théorème suivant donne la condition d'existence d'un graphe disjoint complet relativement aux éléments de F_X ou X . L'application de la contraposée de ce théorème montre l'existence de sous-systèmes présentant certaines caractéristiques . Ce théorème constitue un premier pas vers la décomposition canonique qui sera définie ultérieurement.

Théorème 1 ou Théorème de Köenig-Hall (1934)

Il existe un graphe disjoint $G (F_X , X ; A)$ tel que $P_{FX} (A) = F_X$ si et seulement si

$(\forall F' \subset F_X)$ $\quad | Q_X (F') | \geq | F' |$

En d'autres termes , il existe un couplage saturant tous les éléments de F_X , si et seulement si quel que soit le sous-ensemble F' inclus dans F_X , le cardinal de ses successeurs est supérieur ou égal au cardinal de F' .

Dans la théorie des couplages , ce théorème découle du théorème de Köenig (1931) tandis que dans la théorie des flots , le théorème de Gale (1957) présente une forme équivalente dans les réseaux de transport bipartis . Ce dernier est un corollaire d'un théorème de Berge [BERG 57] . Les théorèmes précédents peuvent être obtenus à partir du théorème fondamental du flot maximum [FORD 62] .

La contraposée du théorème de Köenig-Hall va être appliquée dans les différents cas suivants .

Soit $W \in E (B_X)$.

Cas 1 : $| A (W) | < | F_X |$

Contraposée

Il n'existe pas de graphe disjoint $G (F_X , X ; A)$ tel que
$P_{FX} (A) = F_X$ si et seulement si
$(\exists F' \subset F_X)$ $\quad | Q_X (F') | < | F' |$

Pour chaque sous-structure $(F', Q_X(F'))$, la différence $| F' | - | Q_X (F') |$ peut être formée . Le maximum de ces différences sera appelé la déficience du graphe biparti pour F_X [ORE 62] et noté δ_{FX}.

$$\delta_{FX} = \underset{F' \subset F_X}{MAX} (| F' | - | Q_X (F') |)$$

Dans cette définition , la partie vide de F_X ne doit pas être exclue des parties de F_X à considérer pour définir le maximum [ROY 70] d'où:

$$\delta_F \geq (| \varnothing | - | Q_X (\varnothing) |) = 0 - 0 = 0$$

La déficience est donc un entier positif ou nul.

Cas 2 : $| A (W) | < | X |$

La forme duale de la contraposée précédente est:

Il n'existe pas de graphe disjoint $G (F_X , X ; A)$ tel que $P_X (A) = X$ si et seulement si

$(\exists X' \subset X)$ $\quad | R (X') | < | X' |$

Comme ci-dessus , la déficience pour X sera définie par :

$$\delta_X = \text{MAX} (| X' | - | R (X') |$$
$$X' \subset X$$

et $\delta_X \geq 0$

Cas 3 : $| A (W) | < | F_X |$ et $| A (W) | < | X |$

Ce cas est l'association de deux cas précédents et présente ainsi leurs conclusions. L'exemple suivant montre différentes partitions du système.

Exemple (l'exemple est illustré par la figure 2-1-2/1):

$W \in E (B_X)$
$A (W) = \{ (1,1) , (3,2) , (4,4) \}$
$F' = \{ f_1 , f_2 , f_3 \}$
$Q_X (F') = \{ x_1 , x_2 \}$
$X' = \{ x_2 , x_3 , x_4 \}$
$R (X') = \{ f_3 , f_4 \}$
$Q_X (F') \cap X' = \{ x_2 \}$
$F' \cap R (X') = \{ f_3 \}$
$F'' = \{ f_1 , f_2 \}$; $Q_X (F'') = \{ x_1 \}$
$\delta_{Fx} = 1$; $\delta_X = 1$;

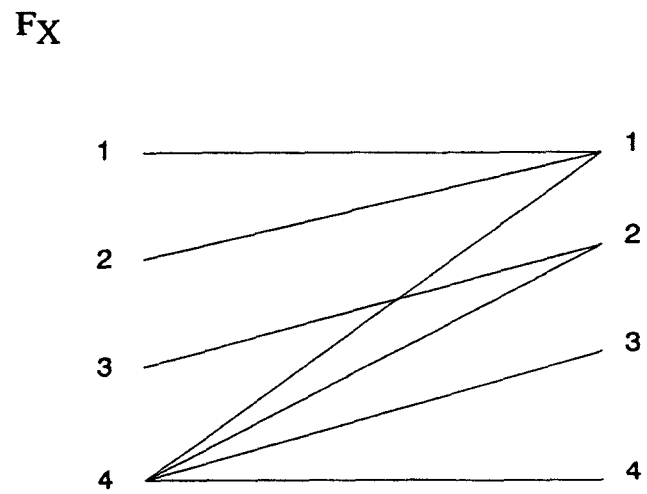


Figure 2-1-2/1

Fin de l'exemple

2-1-3 Support extérieur

Définition:

Un couple d'ensembles (α , β) est un support extérieur de B_X si et seulement si:

$$1)\ \alpha \subset F_X\ ;\ \beta \subset X$$
$$2)\ A_X \cap (\overline{\alpha}.\overline{\beta}) = \varnothing$$

où $\overline{\alpha}$ (respectivement $\overline{\beta}$) est le complément de α dans F_X (respectivement de β dans X).

Soit γ (B_X) l'ensemble des supports extérieurs de B_X . Le nombre $|\ \alpha\ | + |\ \beta\ |$ est appelé la dimension du support extérieur.

La dimension extérieure de B_X est définie par:

$$\dim(B_X) = \min_{(\alpha,\beta) \in \gamma(B_X)} (|\ \alpha\ | + |\ \beta\ |)$$

Un support extérieur (α , β) de dimension égale à la dimension extérieure de B_X est appelé support extérieur minimal (SEM).

Définition

Un sous graphe de B_X est dit semi-irréductible s'il présenté un SEM unique $(\alpha, \varnothing)$ ou $(\varnothing, \beta)$.

Un sous-graphe de B_X est dit irréductible s'il présenté uniquement deux SEM $(\alpha, \varnothing)$ et $(\varnothing, \beta)$.

Un sous-graphe de B_X ni semi-irréductible ni irréductible est dit réductible.

Le théorème suivant lie les SEM, les graphes disjoints et les déficiences.

Théorème 2 [DULM 58] [ROY 70]

Soit $G(F_X, X; A) \in E(B_X)$

$$\dim(B_X) = |A| = |F_X| - \delta_{FX} = |X| - \delta_X$$

2-1-4 Caractères canoniques

A partir des concepts de graphes disjoints et de SEM, nous présentons les caractères canonique d'un graphe biparti quelconque.

Théorème 3 [DULM 58]

Quel que soit le graphe biparti B_X de dimension extérieure finie, il existe deux SEM uniques (α_*, β^*) et (α^*, β_*) tels que si (α, β) est un autre SEM, alors:

1) α_* est un sous-ensemble de α ou $\alpha_* = \varnothing$
2) α est un sous-ensemble de α^*
3) β_* est un sous-ensemble de β ou $\beta_* = \varnothing$
4) β est un sous-ensemble de β^*.

Les couples (α_*, β^*) et (α^*, β_*) sont dit supports extérieurs minimaux extrêmes.

Définition

Les trois composantes canoniques sont définies par (figure 2-1-4/1):

$B^{>} = G(\overline{\alpha}^{*}, \beta_{*}; A_X{}^{>})$

$B^{<} = G(\alpha_{*}, \overline{\beta}^{*}; A_X{}^{<})$

$B^{=} = G(\alpha^{*} \setminus \alpha_{*}, \beta^{*} \setminus \beta_{*}; A_X{}^{=})$

avec

$A_X{}^{>} = A_X \cap (\overline{\alpha}^{*} . \beta_{*})$

$A_X{}^{<} = A_X \cap (\alpha_{*} . \overline{\beta}^{*})$

$A_X{}^{=} = A_X \cap (\alpha^{*} \setminus \alpha_{*} . \beta^{*} \setminus \beta_{*})$

Elles sont caractérisées par :

Théorème 4 [DULM 58]

1) $(\varnothing, \beta_{*})$ et $(\alpha_{*}, \varnothing)$ sont respectivement les SEM uniques de $B^{>}$ et $B^{<}$ ($B^{>}$ et $B^{<}$ sont semi-irréductibles) .

$(\alpha^{*} \setminus \alpha_{*}, \varnothing)$ et $(\varnothing, \beta^{*} \setminus \beta_{*})$ sont des SEM de $B^{=}$.

2) Si $W \in E(B_X)$ alors

$A(W^{>}) = A(W) \cap (\overline{\alpha}^{*} . \beta_{*})$ avec $W^{>} \in E(B^{>})$

$A(W^{<}) = A(W) \cap (\alpha_{*} . \overline{\beta}^{*})$ avec $W^{<} \in E(B^{<})$

$A(W^{=}) = A(W) \cap (\alpha^{*} \setminus \alpha_{*} . \beta^{*} \setminus \beta_{*})$ avec $W^{=} \in E(B^{=})$ et

$W = W^{>} \oplus W^{<} \oplus W^{=}$

La somme des graphes $\oplus$ est définie par l'union des sommets et des arcs des différents graphes .

$|A(W^{>})| = |\beta_{*}|$

$|A(W^{<})| = |\alpha_{*}|$

$|A(W^{=})| = |\alpha^{*} \setminus \alpha_{*}| = |\beta^{*} \setminus \beta_{*}|$

et le sous-graphe $W^{=}$ est le seul complet

3) $(\alpha_{*} . \overline{\beta}^{*}) \cup (\overline{\alpha}^{*} . \beta_{*}) = \varnothing$

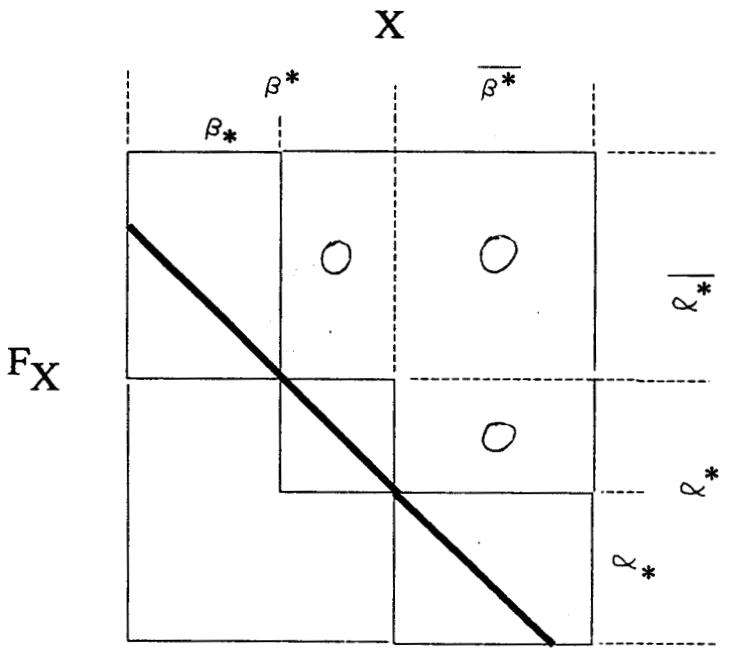


Figure 2-1-4/1: décomposition canonique

Exemple (suite de l'exemple du chapitre 1-1)

$\overline{\alpha^*} = \{ f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6 \}$; $\beta_* = \{x_1,x_2,x_3\}$
$\alpha_* = \{ f_{10},f_{11} \}$; $\overline{\beta^*} = \{ x_7,x_8,x_9,x_{10} \}$
$\alpha^* \backslash \alpha_* = \{ f_7,f_8,f_9 \}$; $\beta^* \backslash \beta_* = \{ x_4,x_5,x_6 \}$

Les ensembles suivants sont associés à W :

$$I(W) = F_X \setminus P_{F_X}(A(W))$$
$$J(W) = X \setminus P_X(A(W))$$

Exemple (suite de l'exemple du chapitre 1-1)

$I(W) = \{ f_1,f_2,f_3 \}$; $J(W) = \{ x_9,x_{10}\}$

Ainsi , les éléments de I (W) (resp. J (W) appartiennent à F_X (resp. X) et ne sont pas les extrémités d'un arc de A (W).

Proposition :[MURO 87]

$$\overline{\alpha}^* = \cup_{W \in E(B_X)} I(W) \qquad \overline{\beta}^* = \cup_{W \in E(B_X)} J(W)$$

Plus explicitement , un sommet de F_X (resp. X) appartient à $\overline{\alpha}^*$ (resp. $\overline{\beta}^*$) relativement au sous-graphe semi-irréductible formé des arcs $A_X \cap (\overline{\alpha}^* . \beta_*)$ (resp. $A_X \cap (\alpha_* . \overline{\beta}^*)$) si et seulement si , il existe un graphe disjoint ne le "couvrant" pas.

Conséquences:

1) $\forall W \in E(B_X)$ $I(W) \subset \overline{\alpha}^*$ et $J(W) \subset \overline{\beta}^*$

2) Le graphe disjoint maximal W sur B_X est la somme des graphes disjoints $W^>$, $W^<$ et $W^=$ relativement à $B^>$, $B^<$ et $B^=$. Ces derniers sont définis sur les ensembles $\overline{\alpha}^*$, α_* , $\alpha^* \backslash \alpha_*$ et β_*, $\overline{\beta}^*$, $\beta^* \backslash \beta_*$ dont les intersections sont vides . De là:

$$I(W) = I(W^>) \cup I(W^<) \cup I(W^=) = I(W^>)$$
$$J(W) = J(W^>) \cup J(W^<) \cup J(W^=) = J(W^<)$$

3) Si $|A(W)| = |F_X|$, $I(W) = \varnothing$ et $\overline{\alpha}^* = \varnothing$
Si $|A(W)| = |X|$, $J(W) = \varnothing$ et $\overline{\beta}^* = \varnothing$

Ainsi le graphe disjoint est complet , $\overline{\alpha}^* = \varnothing$ et $\overline{\beta}^* = \varnothing$ et comme $(\forall e \in F_X \cup X)\ \mu_A(e) \neq \varnothing$, les composantes semi-irréductibles n'existent pas.

Nous présentons un théorème (théorème 6) qui conduit à un algorithme pour la décomposition de F_X (resp. X) en α_* , $\overline{\alpha}^*$, $\alpha^* \backslash \alpha_*$ (resp. β_* , $\overline{\beta}^*$, $\beta^* \backslash \beta_*$) . Il utilise pour cela la construction de chaînes alternées , que nous présentons tout d'abord.

Chaînes alternées

Développées par Berge [BERG 57], les chaînes alternées , ne constituent pas un outil exploité dans les travaux de Dulmage-Mendelsohn ou de Murota . Elles ne sont d'ailleurs pas citées . La liaison entre ces différentes études dans la théorie des graphes sera réalisée par le théorème 6 qui relie la notion de chaîne alternée et la décomposition canonique de Dulmage-Mendelsohn.

Définition

Soit $W = G(F_X, X; A(W)) \in E(B_X)$.

Une chaîne alternée $L = G(F_L, X_L; A_L)$ sur W est définie par (figure 2-1-4/2):

1) $F_L \cup X_L = \mu_V(A_L)$; $F_L \subset F_X$; $X_L \subset X$; $A_L \subset A_X$.

2) Les n arcs de A_L sont renommés sous la forme a_i telle que :

$A_L = \{ a_i \mid i = 1..n \}$

$a_i \in A(W) <=> a_{i+1} \notin A(W)$ et $P_{FX}(a_i) = P_{FX}(a_{i+1})$ ou $i = n$

$a_i \notin A(W) <=> a_{i+1} \in A(W)$ et $P_X(a_i) = P_X(a_{i+1})$ ou $i = n$

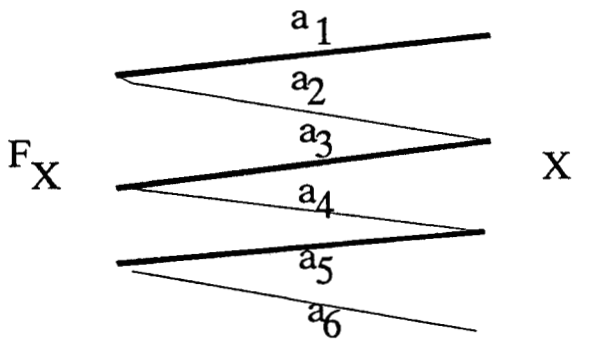


Figure 2-1-4/2: chaîne alternée

Théorème 5 [BERG 57] [ROY 7O] [BART 78]

Un graphe disjoint est maximal si et seulement si il n'existe pas de chaîne alternée reliant un sommet de $I(W) \cup J(W)$ à un autre sommet de $I(W) \cup J(W)$.

Nous introduisons le théorème suivant :

Théorème 6 (décomposition par les chaînes alternées) [DECL 91]

a) $e \in \overline{\alpha}^* \cup \beta_* <=> \exists L = G (F_L , X_L ; A_L)$ tel que :

1) $e \in \mu_V (a_n , B_X)$
2) $P_{FX} (a_1) \in I (W)$

b) $e \in \alpha_* \cup \overline{\beta}^* <=> \exists L = G (F_L , X_L ; A_L)$ tel que :

1) $e \in \mu_V (a_1 , B_X)$
2) $P_X (a_n) \in J (W)$

La démonstration est reportée en annexe 1.

Ce théorème permet de décomposer la structure de B_X en trois composantes canoniques. Il suffit pour cela de définir des chaînes alternées qui permettront de classer les sommets de F_X en α_* , $\overline{\alpha}^*$, $\alpha^* \backslash \alpha_*$ et X en β_* , $\overline{\beta}^*$, $\beta^* \backslash \beta_*$.

2-1-5 Décomposition canonique

Il existe k tel que les ensembles F_X et X sont décomposables en k+2 parties (figure 2-1-5/1) vérifiant:

$F_X = \alpha_* \cup S_1 \cup S_2 \cup ..... \cup S_k \cup \overline{\alpha}^*$

$X = \overline{\beta}^* \cup T_1 \cup T_2 \cup ..... \cup T_k \cup \beta_*$

avec

$S_i \cap \alpha_* = \emptyset$ pour i = 1,2,...,k
$S_i \cap \overline{\alpha}^* = \emptyset$ pour i = 1,2,...,k
$S_i \cap S_j = \emptyset$ pour tout i , j , $i \neq j$
$T_i \cap \beta_* = \emptyset$ pour i = 1,2,...,k
$T_i \cap \overline{\beta}^* = \emptyset$ pour i = 1,2,...,k
$T_i \cap T_j = \emptyset$ pour tout i , j , $i \neq j$
$| S_i | = | T_i |$
(α_i , β_i) est un SEM de B_X pour i = 1 à k où
$\alpha_i = \alpha_* \cup S_1 \cup S_2 \cup ..... \cup S_i$
$\beta_i = T_{i+1} \cup T_{i+2} \cup ..... \cup T_k \cup \beta_*$

Cette décomposition est toujours possible et est unique.

Théorème 7 [DULM 58]

1) Les sous-graphes $B_i = G (S_i , T_i ; A_i)$ où $A_i = A_X \cap (S_i . T_i)$ sont irréductibles et leurs uniques SEM sont $(S_i , \varnothing)$ et $(\varnothing , T_i)$

2) Soit $W_i \in E (B_i)$ avec $A (W_i) = A (W) \cap (S_i . T_i)$
Tout sous-graphe W_i est complet et $W^{=} = W_1 \oplus W_2 \oplus .... \oplus W_k$

3) Soit
$R_1 = (\alpha_* . \overline{\beta}^*) \cup (S_1 . T_1) \cup (S_2 . T_2) \cup ... \cup (S_k . T_k) \cup (\overline{\alpha}^* . \beta_*)$
$R_2 = (\alpha_* . \beta^*) \cup (\alpha^* . \beta_*) \cup \bigcup_{i<j} (S_i . T_j)$
$R_3 = (\alpha_* . \overline{\beta}^*) \cup (\overline{\alpha}^* . \beta_*) \cup \bigcup_{i>j} (S_i . T_j)$
R_1 , R_2 , R_3 forment une partition de $F_X . X$
La décomposition du produit cartésien $F_X . X$ en R_1 , R_2 et R_3 est toujours possible et est une décomposition unique

Définition

Un arc de B_X est dit admissible s'il existe un graphe disjoint de cardinal maximal le contenant .

Le sous-ensemble de B_X formé de tous les arcs admissibles est appelé le coeur de B_X .

Théorème 8 [DULM 58]

Si R_1 , R_2 et R_3 forment la décomposition canonique de $F_X . X$ relativement à un graphe B_X réductible de dimension extérieure finie (figure 2-1-5/1) alors :
(i) tous les éléments de $A_X \cap R2$ sont inadmissibles
(ii) tous les éléments de $A_X \cap R1$ sont admissibles
(iii) $A_X \cap R_3 = \varnothing$

$A_X \cap R_1$ constitue donc le coeur de B_X.

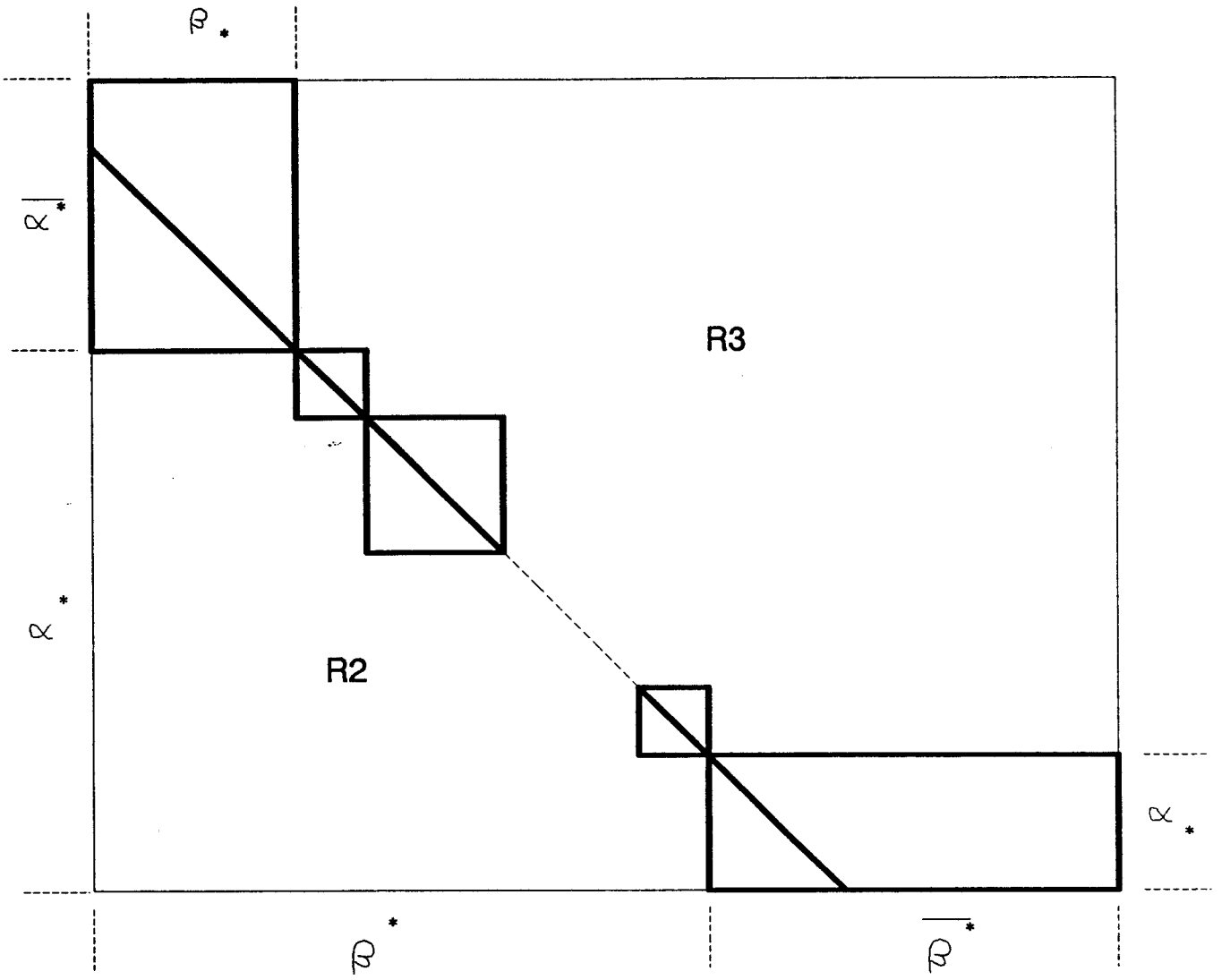


Figure 2-1-5/1

Coupe Bipartie

Nous introduisons la définition de coupe bipartie . Comme les supports extérieurs minimaux ou les chaînes alternées , cette notion permet de donner une caractérisation des composantes canoniques.

Soit B' = G (F' , X' ; A') un sous-graphe de B_X et W'= G (F' , X' ; A (W')) une restriction de W à B' avec A (W') = A (W) ∩ (F' . X').

Définition relative à F '

Une coupe bipartie $C_{F'}$ de $\Phi \neq \varnothing$ inclus dans F' sur B' est définie par:

$$C_{F'}(\Phi, B') = A' \cap (\Phi . X' \setminus Q(\Phi, W'))$$

Exemple (figure 2-1-5/2)

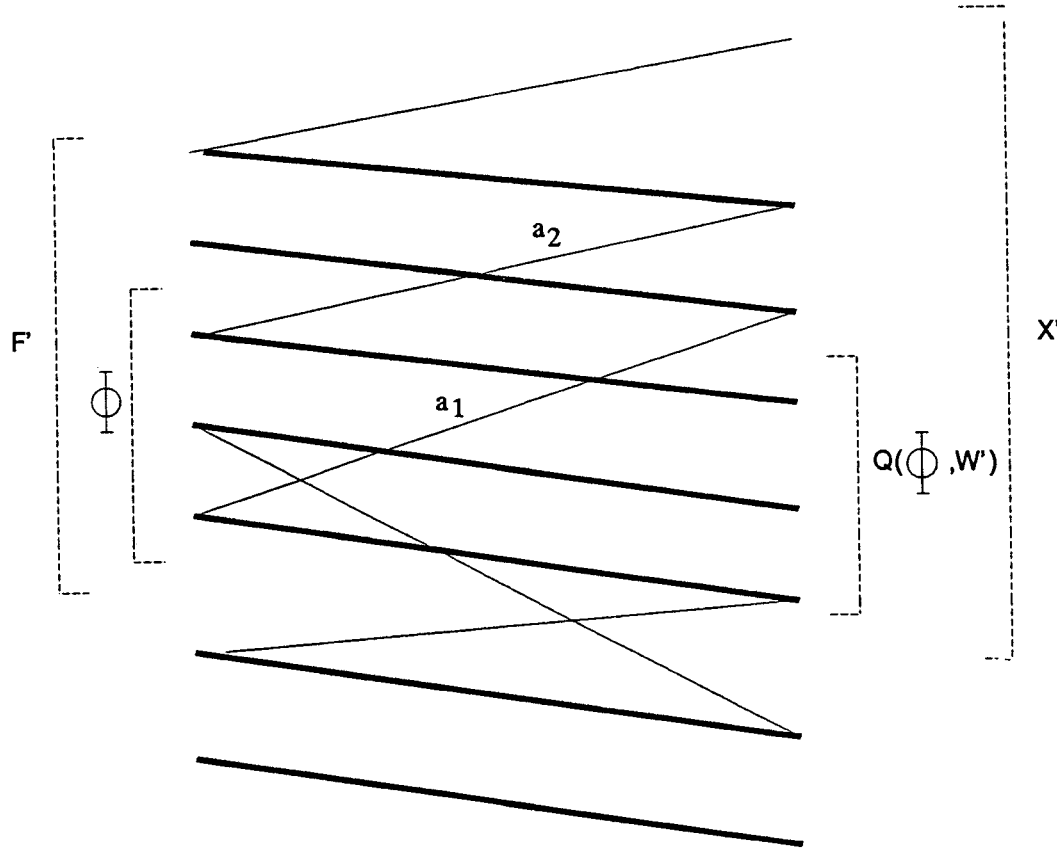


Figure 2-1-5/2: coupe bipartie

$$C_{F'}(\Phi, B') = \{ a_1 , a_2 \}$$

Définition relative à X '

La coupe bipartie $C_{X'}$ de $\Phi \neq \varnothing$ inclus dans X' sur B' est définie par :

$$C_{X'}(\Phi, B') = A' \cap (F' \setminus R(\Phi, W') . \Phi)$$

Nous introduisons les propriétés suivantes . Celles-ci sont en rapport direct avec la décomposition canonique présentée par les théorèmes 4 et 7.

Propriété 2-1-5/1

$$C_{F'}(\alpha^*, B^>) = C_{F'}(\alpha^* \setminus I(W), B^>) = \varnothing$$

Démonstration

Les arcs de $W^>$ couvrent les éléments de β_*. De là, $\beta_* \setminus Q(\alpha^*, W^>) = \varnothing$ et $C(\alpha^*, B^>) = A^> \cap (\alpha^* . \beta_* \setminus Q(\alpha^*, W^>) = \varnothing$. Les éléments de α^* couplés par $W^>$ incluent l'ensemble $\alpha^* \setminus I(W)$. De là, $C(\alpha^* \setminus I(W), B^>) = \varnothing$

Propriété 2-1-5/2

$$C_{F'}(S_i, B_i) = \varnothing \quad \text{pour } i=1,...,k$$
$$C_{F'}(\alpha^* \setminus \alpha_*, B^=) = \varnothing$$

Démonstration

Le graphe B_i de la composante irréductible i est défini sur $S_i . T_i$. Or, tous les éléments de T_i sont extrémités d'un arc de $W_i = A(W) \cap (S_i . T_i)$. Le raisonnement est identique pour $B^=$.

Propriété 2-1-5/3

$$C_{F'}(\alpha_*, B^<) = \alpha_* . J(W)$$

Sachant que $J(W^<) = J(W)$, la propriété est directement l'application de la définition de la coupe bipartie.

Les propriétés suivantes se déduisent directement par symétrie.

Propriété 2-1-5/4

$$C_{X'}(\beta^*, B^<) = C_{X'}(\beta^* \setminus J(W), B^<) = \varnothing$$
$$C_{X'}(T_i, B_i) = \varnothing$$
$$C_{X'}(\beta^* \setminus \beta_*, B^=) = \varnothing$$
$$C_{X'}(\beta_*, B^>) = \beta_* . I(W)$$

Propriété 2-1-5/5

Si B' est un graphe semi-irréductible de SEM (α_* , $\varnothing$) ou est irréductible , alors :
($\forall \Phi \subset F'$ et $\Phi \neq F'$) $\quad C_{F'}(\Phi, B') \neq \varnothing$

La démonstration est reportée en annexe 2 .

Exemple 1

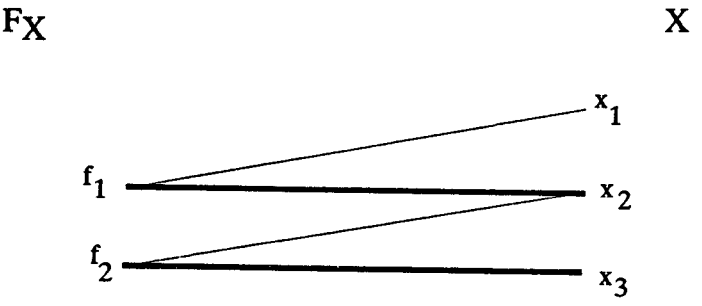


Figure 2-1-5/3

$C_{F'}(\{f_1\}, B') = \{(f_1, x_1)\}$
$C_{F'}(\{f_2\}, B') = \{(f_2, x_2)\}$

Exemple 2:

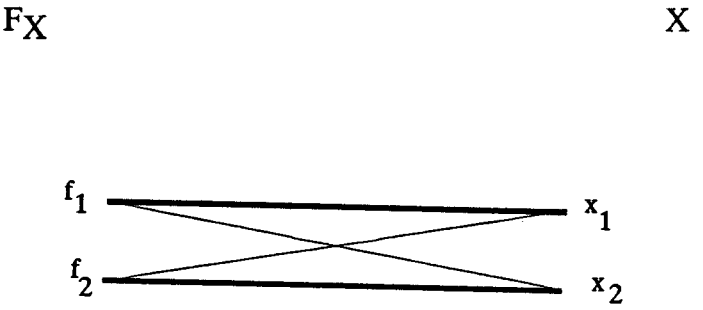


Figure 2-1-5/4

$C_{F'}(\{f_1\}, B') = \{(f_1, x_2)\}$
$C_{F'}(\{f_2\}, B') = \{(f_2, x_1)\}$
Fin de l'exemple 2

Propriété 2-1-5/6

Si B' est un graphe semi-irréductible de SEM ($\varnothing$, β_*) ou est irréductible alors :
($\forall \Phi \subset X'$ et $\Phi \neq X'$) $\quad C_{X'}(\Phi, B') \neq \varnothing$

Cette propriété est duale de 2-1-5/5

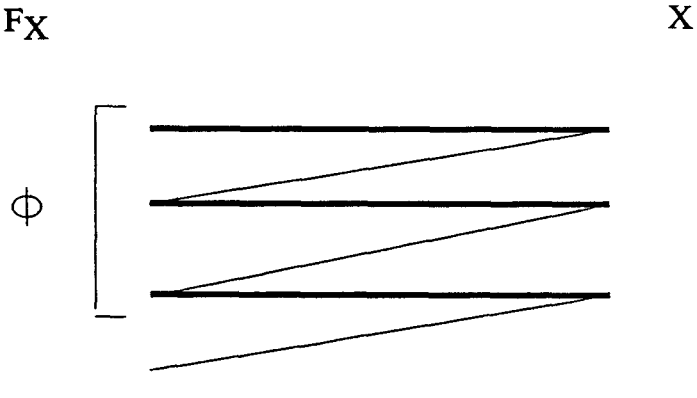
La propriété 2-1-5/5 est une implication qui peut devenir une équivalence moyennant une hypothèse restrictive : le graphe disjoint W' doit alors être pris complet relativement aux éléments de X'.

Théorème 9

Soit $W' \in E(B')$ tel que W' est complet relativement à X' .
B' est un graphe irréductible ssi
($\forall \Phi \subset F'$ et $\Phi \neq F'$) $\quad C_{F'}(\Phi, B') \neq \varnothing$

La démonstration est reportée en annexe 3

Exemple 1:



$C(\Phi, B') = \varnothing \quad => B'$ n'est pas irréductible

Figure 2-1-5/5

Exemple 2:

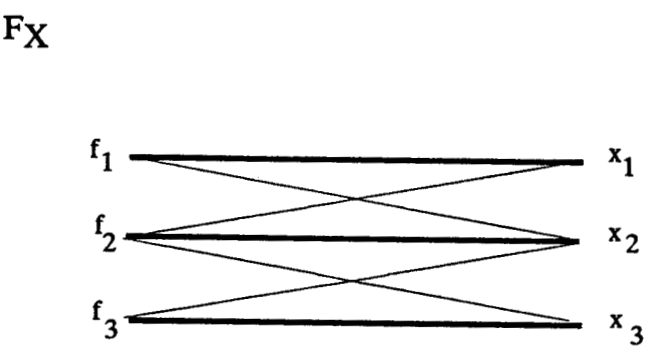
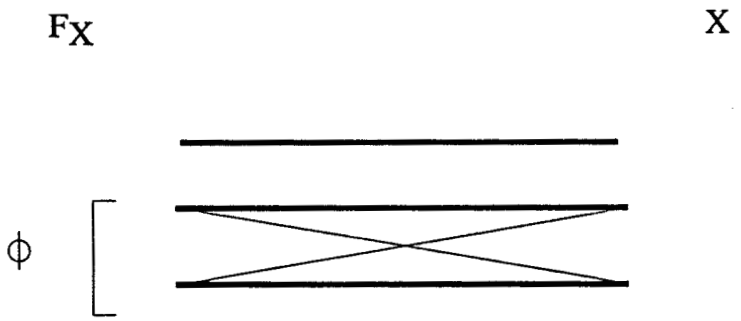


Figure 2-1-5/6

$C_{F'}(\{f_1\}, B') = \{(f_1, x_2)\}$
$C_{F'}(\{f_2\}, B') = \{(f_2, x_1), (f_2, x_3)\}$
$C_{F'}(\{f_3\}, B') = \{(f_3, x_2)\}$
$C_{F'}(\{f_1,f_2\}, B') = \{(f_2, x_3)\}$
$C_{F'}(\{f_2,f_3\}, B') = \{(f_2, x_1)\}$
$C_{F'}(\{f_1,f_3\}, B') = \{(f_1, x_2), (f_3, x_2)\}$

Exemple 3:



$C(\Phi, B') = \varnothing$ => B' n'est pas irréductible

Figure 2-1-5/7

Fin de l'exemple 3

Théorème 10

Soit $W' \in E(B')$ tel que W' est complet relativement à F' .
B' est un graphe irréductible ssi
$(\forall \Phi \subset X' \text{ et } \Phi \neq X') \quad C_{X'}(\Phi, B') \neq \varnothing$

La démonstration est identique à celle du théorème précédent.

2-2 Le graphe associé biparti par la procédure d'inclusion.

Dans ce chapitre , nous analysons le graphe initial à l'aide d'une nouvelle structure. Celle-ci présentera des sommets et des arcs supplémentaires donc des dimensions supérieures . Cette surstructure constituera une image du graphe initial , élément d'une famille de graphes associés à B_X , se différenciant par le graphe disjoint W initial choisi.

[LEE 66a] [LEE 66b] fut historiquement le premier à présenter une modification de la structure du système initial . Dans ces travaux portant sur l'analyse de grands systèmes chimiques et thermodynamiques , les variables de débit , de température etc ..... sont considérées comme toujours plus nombreuses que les équations et ainsi la différence entre les variables et les fonctions constitue les "degrés de liberté" . Les variables en excès sont alors préassignées à certaines valeurs pour permettre la résolution du système d'équations . Le choix des variables en excès parmi l'ensemble des variables est combinatoire et une méthode permet de sélectionner les variables minimisant la complexité des calculs [STEW 65].

Pour des systèmes rectangulaires présentant là aussi plus d'inconnues que d'équations [SARG 78] propose une méthode symétrique : les variables en excès ne sont pas retirées en les préassignant mais $|X|-|F_X|$ équations sont adjointes , chacune contenant toutes les variables , ce qui permet d'avoir un système carré de $|X|$ équations à $|X|$ inconnues. Les $|X|-|F_X|$ équations adjointes sont ensuite supprimées après décomposition .

Dans ces travaux , il peut être remarqué que les structures considérées sont particulières . Le système est rectangulaire avec $|X| > |F_X|$. De plus , on suppose implicitement que toutes les fonctions sont couplées . Les systèmes considérés correspondent en réalité à la composante canonique $B^<$, les parties $B^=$ et $B^>$ n'existant pas .

Dans ce chapitre , la construction de nouveaux graphes va nous permettre de généraliser ces études. A partir des structures initiales du graphe biparti B_X et d'un graphe disjoint W de B_X , nous définirons des graphes étendus B^+ et W^+ puis le graphe non biparti G. Comme à chaque graphe biparti est associée une famille de graphes disjoints , une famille de graphes étendus B^+ et G pourra être obtenue . Chaque élément B^+ ou G sera une image de B_X contenant toute l'information présente dans celui-ci.

2-2-1 Description

Soit :

$F_+ = \{ f_{i+} \mid x_i \in J(W) \}$
$F^+ = F \cup F_+$
$X_+ = \{ x_{i+} \mid f_i \in I(W) \}$
$X^+ = X \cup X_+$
$V_> = \{ (f_i , x_{i+}) \mid f_i \in I(W)\ x_{i+} \in X_+ \}$
$V_< = \{ (f_{i+} , x_i) \mid x_i \in J(W)\ f_{i+} \in F_+ \}$

Exemple 1 (tableaux 1-1/1 et 2-2-1/1)

$X_+ = \{ x_{1+} , x_{2+} , x_{3+} \}$
$V_> = \{ (f_1 , x_{1+}) , (f_2 , x_{2+}) , (f_3 , x_{3+}) \}$
$F_+ = \{ f_{9+} , f_{10+} \}$
$V_< = (f_{9+} , x_9) , (f_{10+} , x_{10}) \}$

Fin de l'exemple

Soient les graphes :

$B^+ = G(F^+ , X^+ ; A^+)$
avec $A^+ = A_X \cup V_> \cup V_<$

et $W^+ = G(F^+ , X^+ ; A(W^+))$
avec $A(W^+) = A(W) \cup V_> \cup V_<$
La propriété suivante est immédiate:

Propriété 2-2-1/1

Le graphe W^+ est un sous-graphe disjoint complet de B^+ .

Les propriétés suivantes utilisent la notion de chaîne alternée.

	x_1	x_2	x_3	x_{1+}	x_{2+}	x_{3+}	x_4	x_5	x_6	x_9	x_{10}	x_7	x_8
f_4	**1**	**1**											
f_5	1	**1**											
f_6	1		**1**										
f_1	1		1	**1**									
f_2	1	1	1		**1**								
f_3		1				**1**							
f_7		1					**1**						
f_8								**1**	1				
f_9			1					1	**1**				
f_{9+}										**1**			
f_{10+}											**1**		
f_{10}			1					1			1	**1**	1
f_{11}									1	1			**1**

tableau 2-2-1/1

Propriété 2-2-1/2

a) La chaîne alternée telle que $a_n \in V_>$ est unique et est définie par :
$L = G (F_L , X_L ; A_L)$ avec
$F_L = \mu_V (a_n) \cap F_X$
$X_L = \mu_V (a_n) \cap X$
$A_L = \{ a_n \}$

b) La chaîne alternée telle que $a_1 \in V_<$ est unique et est définie par :
$L = G (F_L , X_L ; A_L)$ avec
$F_L = \mu_V (a_1) \cap F_X$
$X_L = \mu_V (a_1) \cap X$
$A_L = \{ a_1 \}$

Démonstration

Soit $a_n \in V_>$.

$a_n = (f_i , x_{i+})$ vérifie $P_X+ (a_n) \in X_+$. Comme $V_> \subset A (W^+)$, $a_n \in A (W^+)$.

A chaque $f_i \in I (W)$ est associée , par construction une variable x_{i+} d'où l'arc (f_i , x_{i+}) . Ainsi , a_n est le seul arc associé à x_{i+} . De ce fait , $(\nexists a_{n-1} \in A^+)$ tel que $a_n \neq a_{n-1}$ et $P_X+ (a_{n-1}) = x_{i+}$: la chaîne alternée est réduite à a_n .

La démonstration est symétrique pour la seconde partie .

Propriété 2-2-1/3

$(\forall u \in V_> \cup V_<) (\exists v \in V_> \cup V_<)$

tel que :

1) $v \neq u$

2) Il existe une chaîne alternée $L = G (F_L , X_L ; A_L)$ avec:

$(a_1 = u$ et $a_n = v)$ ou $(a_n = u$ et $a_1 = v)$

La démonstration est reportée en annexe 4 .

2-2-2 Les Trois Composantes

Soit:

$$B^{>+} = G (\alpha^* , \beta_* \cup X_+ ; A_X{}^{>+})$$
$$B^{<+} = G (\alpha_* \cup F_+ , \beta^* ; A_X{}^{<+})$$

avec

$$A_X{}^{>+} = A^+ \cap (\alpha^* . (\beta_* \cup X_+))$$
$$A_X{}^{<+} = A^+ \cap ((\alpha_* \cup F_+) . \beta^*)$$

Les éléments de F_+ et X_+ sont donnés par la connaissance de $I (W)$ et $J (W)$ tandis que les éléments de α_* , α^* , β_* et β^* sont donnés par le corollaire suivant du théorème 6.

Corollaire 2-2-2 du théorème 6 [DECL 91b]

$e \in \bar{\alpha}^* \cup \beta_* <=> \exists L = G(F_L, X_L ; A_L)$ tel que

1) $e \in \mu_V(a_n, B^+)$
2) $P_X+(a_1) \in X_+$

$e \in \alpha_* \cup \bar{\beta}^* <=> \exists L = G(F_L, X_L ; A_L)$ tel que

1) $e \in \mu_V(a_1, B^+)$
2) $P_F+(a_n) \in F_+$

Preuve

Directe : les chaînes alternées du théorème 6 sont étendues par les arcs de $V_>$ et $V_<$.

Exemple 1 (tableau 2-2-1/1)

$a_1 = (f_1, x_{1+})$
$F_L = \{ f_1, f_6 \}$; $X_L = \{ x_{1+}, x_3, x_1 \}$
$A_L = \{ (f_1, x_{1+}), (f_1, x_3), (f_6, x_3), (f_6, x_1) \}$

2-2-3 Caractéristiques conservées

Les propriétés suivantes montrent la conservation de la structure de $B^=$ dans la nouvelle structure obtenue par la procédure d'inclusion et en particulier , la partition de $F_X \setminus (\alpha_* \cup \bar{\alpha}^*)$ et $X \setminus (\bar{\beta}^* \cup \beta_*)$.

Propriété 2-2-3/1 [DECL 91b]

Soit $\alpha_i' = \alpha_i \cup F_+$
$\beta_i' = \beta_i \cup X_+$
(α_i', β_i') est un SEM de B^+.

La preuve est donnée en annexe 5 .

Propriété 2-2-3/5 [DECL 91b]

Les composantes irréductibles B_i de B_X sont irréductibles dans B^+ .

Preuve

Comme B_i est couvert par un sous-graphe disjoint complet W_i et aussi par W (théorème 7) , aucun élément de S_i (T_i) n'appartient à I (W) (J (W)) . Par construction , les arcs dans (S_i . T_i) pour B et B^+ sont les mêmes et alors les SEM (Si , ø) et (ø , Ti) sont conservés .

2-2-4 Nouvelles caractéristiques

Les différences entre les graphes W et W^+ , B_X et B^+ sont maintenant montrées.

Propriété 2-2-4/1 [DECL 91b]

Le graphe B^+ n'a aucune composante semi-irréductible .

La preuve est reportée en annexe 6

Les propriétés suivantes donnent des indications importantes sur la structure de $B^{>+}$ et $B^{<+}$.

Propriété 2-2-4/2 [DECL 91b]

Les graphes disjoints maximaux sur $B^{>+}$ et $B^{<+}$ sont complets .

La preuve est reportée en annexe 7 .

Propriété 2-2-4/3 [DECL 91b]

($\forall$ W $\in$ E (B_X)) $B^{>+}$ et $B^{<+}$ ne sont pas irréductibles .

La preuve est reportée en annexe 8 .

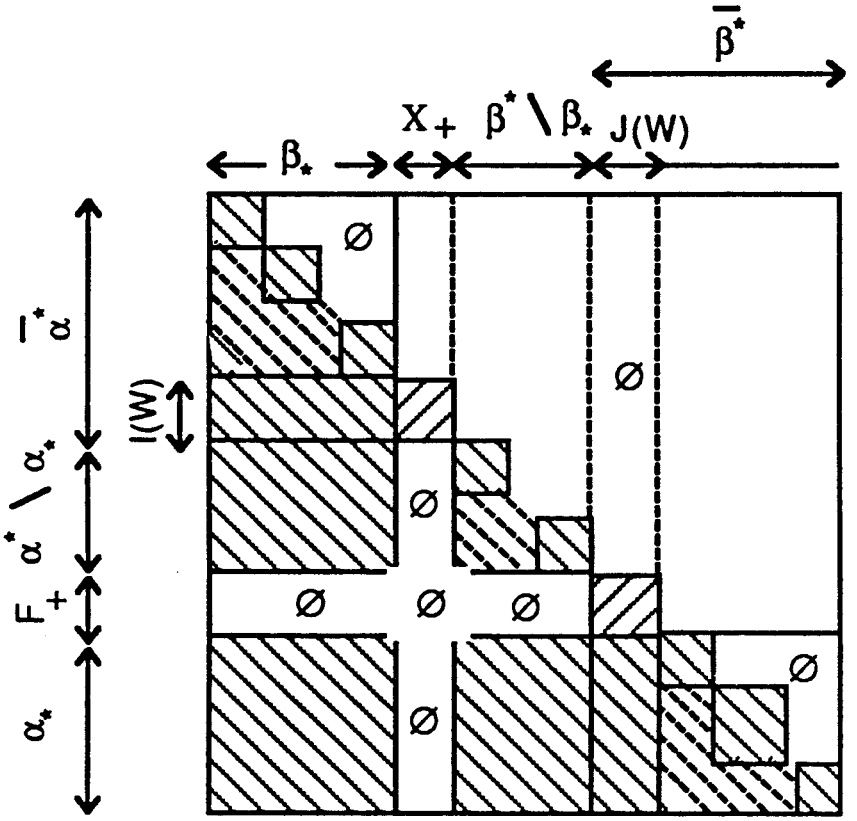


Figure 2-2-3/1: le graphe biparti B^+

Les propriétés précédentes peuvent maintenant être exploitées . Comme W^+ est complet , la décomposition canonique appliquée à B^+ conduit à une structure sans composante semi-irréductible (figure 2-2-3/1) . La structure des composantes irréductibles de B_X est conservée . De plus , les graphes disjoints sur $B^{>+}$ et $B^{<+}$ sont complets et $B^{>+}$ et $B^{<+}$ sont composés d'au moins deux composantes irréductibles (propriété 2-2-4/3).

Si $B^{<+}$ (resp. $B^{>+}$) contient l (resp. m) composantes irréductibles , la structure de B^+ est définie par :

$$F^+ = \cup_{i=1}^{m} s_i^+ \qquad X^+ = \cup_{i=1}^{m} T_i^+$$

avec :

pour $B^{=+}$

$S_{l+i}^{+} = S_i$, $T_{l+i}^{+} = T_i$ pour i = 1 à k

pour $B^{<+}$

$$\bigcup_{i=1}^{l} S_i^{+} = \alpha_* \cup F_+ \qquad \bigcup_{i=1}^{l} T_i^{+} = \bar{\beta}^*$$

pour $B^{>+}$

$$\bigcup_{i=l+k+1}^{l+k+m} S_i^{+} = \bar{\alpha}^* \qquad \bigcup_{i=l+k+1}^{l+k+m} T_i^{+} = \beta_* \cup X_+$$

$S_i^{+} \cap S_j^{+} = \varnothing$ pour tout i , j , $i \neq j$

$T_i^{+} \cap T_j^{+} = \varnothing$ pour tout i , j , $i \neq j$

$| S_i+ | = | T_i^{+} |$

$(\alpha_i^{+} , \beta_i^{+})$ est un SEM de B^{+} , i = 1 , 2 ,...., l+k+m , où $\alpha_i^{+} = \cup S_j^{+}$, $\beta_i^{+} = \cup T_j^{+}$

2-3 Le graphe associé G par la procédure d'inclusion .

2-3-1 Définition du graphe associé G

La sur-structure B^+ se caractérise par un nombre de sommets et d'arcs plus important que le graphe initial B_X . Cette mise en forme étant terminée , le graphe G associé peut être directement défini sans que la connaissance de B_X et de sa structure soit nécessaire .

Le graphe G = G (V ; A) associé à B^+ relativement à W^+ est défini par : [DECL 91a]

1) $V = A(W^+)$

2) $A = \{ (a_h, a_j) \in A^+.A^+ \mid a_h \in A(W^+), a_j \in A(W^+)$ $\exists a_i \in A^+ \setminus A(W^+)$ tel que $P_F+(a_h) = P_F+(a_i)$ et $P_X+(a_i) = P_X+(a_j)\}$

Un exemple est donné en figure 2-3-1/1.

Le graphe G présente ainsi un nombre d'éléments plus réduit que B^+ .

Ainsi :

$|V| = |A(W^+)| = |F^+| = |X^+|$

Le graphe G a deux fois moins de sommets que B^+ qui a pour cardinal

$|F_X| + |J(W)| + |X| + |I(W)|$

Le calcul comparant les sommets de B_X et G montre qu'il est nécessaire que $|I(W)| + |J(W)| < |F_X| + |X|$ ce qui est toujours vérifié car $I(W) \subset F_X$ et $J(W) \subset X$.

Ainsi , le graphe G présentera toujours moins de sommets que B_X sauf dans le cas limite où celui-ci est sans arc . Les cardinaux sont alors égaux .

De même , pour les arcs :

$|A| = |A^+| - |A(W^+)|$

avec $|A^+| = |A_X| + |I(W)| + |J(W)|$

$|A(W^+)| = |A(W)| + |I(W)| + |J(W)|$

d'où

$|A| = |A_X| - |A(W)|$

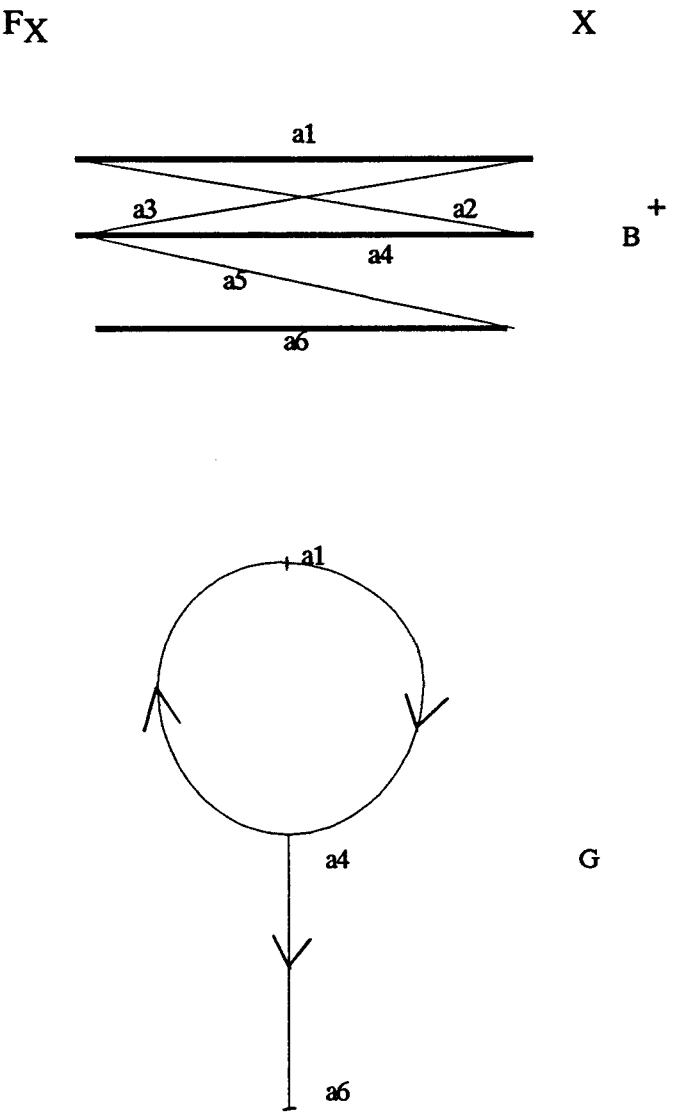


Figure 2-3-1/1.

Le graphe G présente également moins d'arcs que le graphe biparti B_X sauf dans le cas d'un graphe B_X sans arc comme ci-dessus . Ce cas particulier ne peut se présenter en raison de la définition de B_X à partir de B_0 .

2-3-2 Connexité simple

Définition

Une chaîne de longueur q est une séquence de q arcs (distincts ou non):
$L = \{ a_1 , a_2 , \dots , a_q \}$
telle que chaque arc a_r de la séquence ($2 \leq r \leq q-1$) ait une extrémité commune avec

l'arc a_{r-1} ($a_{r-1} \neq a_r$) et l'autre extrémité commune avec l'arc a_{r+1} ($a_{r+1} \neq a_r$).

L'extrémité u de a_1 non adjacente à a_2 et l'extrémité v de a_q non adjacente à a_{q-1} sont appelées les extrémités de la chaîne L . On dit aussi que la chaîne L joint les sommets u et v .

On considère $\mathfrak{R}_S$ la relation binaire de connexité simple :

u $\mathfrak{R}_S$ v ssi il existe une chaîne entre u et v ou u = v .

Cette relation est une relation d'équivalence c'est-à-dire qu'elle vérifie les trois propriétés

u $\mathfrak{R}_S$ u pour tout u : Réflexivité
u $\mathfrak{R}_S$ v => v $\mathfrak{R}_S$ u : Symétrie
u $\mathfrak{R}_S$ v et v $\mathfrak{R}_S$ w => v $\mathfrak{R}_S$ w : Transitivité

Elle induit donc une partition de V en classes d'équivalence qui portent les noms de composantes simplement connexes (S-connexe) du graphe G . Celles-ci ne présentant aucun lien entre elles , l'étude structurelle peut être menée pour chaque composante indépendamment des autres .

2-3-3 Connexité orientée

Définition

Un chemin de longueur q est une séquence de q arcs :
$P = \{ a_1 , a_2 , ... , a_q \}$
avec :

$a_1 = (u_0 , u_1) , a_2 = (u_1 , u_2) , ... , a_q = (u_{q-1} , u_q)$

Autrement dit , un chemin est une chaîne dont les arcs sont orientés dans le même sens .

Le sommet u_0 est l'extrémité initiale du chemin P ; le sommet u_q est l'extrémité terminale du chemin P .

Notation

Soient deux sommets u et v . v est dit atteignable à partir de u sur G , ce qui est noté " u ---> v " , si et seulement si , il existe un chemin de u à v sur G .

La relation binaire de connexité orientée $\mathfrak{R}_O$ est définie par :

$u \mathfrak{R}_O v <=> u \dashrightarrow v$ ou $u = v$

Cette relation est réflexive , transitive mais non symétrique : elle n'induit donc pas une partition en classes d'équivalence . Les propriétés suivantes permettent cependant de construire une partition de V .

Propriété 2-3-3/1 [DECL 91a]

$(\forall u \in V_>)(\nexists v \in V)$ tel que $v \dashrightarrow u$ et $v \neq u$

$(\forall u \in V_<)(\nexists v \in V)$ tel que $u \dashrightarrow v$ et $v \neq u$

La démonstration est reportée en annexe 9 .

Propriété 2-3-3/2 [DECL 91a]

$(\forall u \in V_> \cup V_<)(\nexists v \in V_> \cup V_<)$ tel que :

1) $u \neq v$

2) $u \dashrightarrow v$ ou $v \dashrightarrow u$

La démonstration est présentée en annexe 10

Soient les graphes $G^> = G(V^> ; A^>)$, $G^< = G(V^< ; A^<)$ et $G^= = G(V^= ; A^=)$ (figure 2-3-3/1) définis par :

$V^> = \{ v \mid (v \in V)(\exists u \in V_>)\, u \dashrightarrow v \}$

$V^< = \{ v \mid (v \in V)(\exists u \in V_<)\, v \dashrightarrow u \}$

$V^= = V \setminus (V^> \cup V^<)$

alors $V = V^> \cup V^< \cup V^=$

$A^> = \{ a \mid \mu_V(a, G) \subset V^> \}$

$A^< = \{ a \mid \mu_V(a, G) \subset V^< \}$

$A^= = \{ a \mid \mu_V(a, G) \subset V^= \}$

Les sousgraphes $B^>$, $B^<$, $B^=$ de B_X et les sous-graphes $G^>$, $G^<$, $G^=$ de G sont liés par les correspondances suivantes :

Théorème 11 [DECL 91a]

$B^>$ et $G^>$: $\overline{\alpha}^* = P_F(V^>)$; $\beta_* = P_X(V^>)$

$B^<$ et $G^<$: $\alpha_* = P_F(V^<)$; $\overline{\beta}^* = P_X(V^<)$

$B^=$ et $G^=$: $\alpha^* \setminus \alpha_* = P_F(V^=)$; $\beta^* \setminus \beta_* = P_X(V^=)$

La démonstration est présentée en annexe 11 .

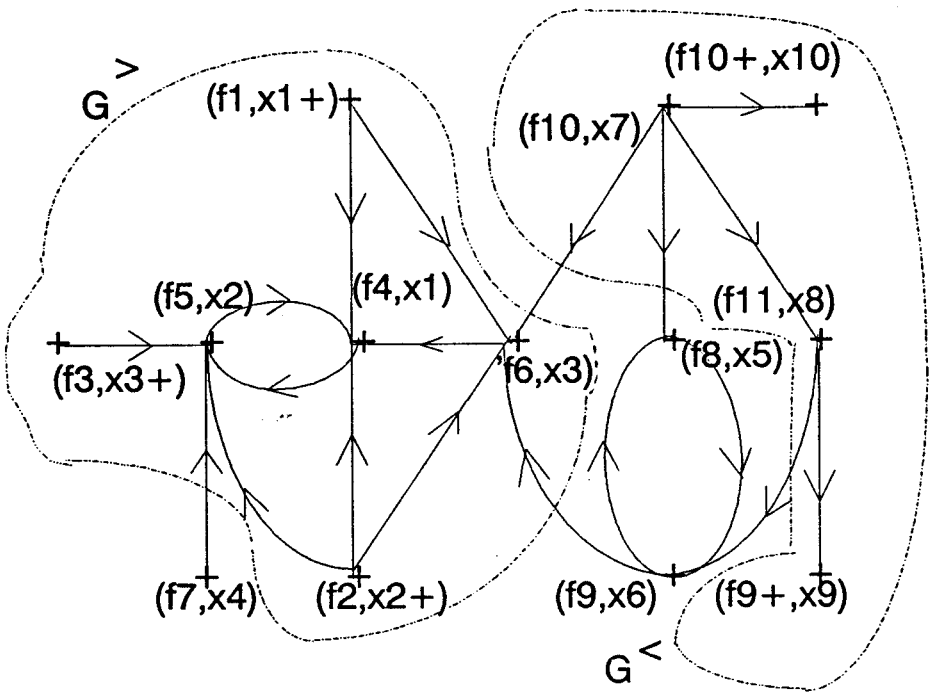


Figure 2-3-3/1: suite de l'exemple du tableau 1-1/1

2-3-4 Connexité forte

Un graphe est dit fortement connexe si, étant donnés deux sommets quelconques u et v pris dans cet ordre , il existe un chemin d'extrémité initiale u et d'extrémité terminale v . En d'autres termes , la relation suivante définit la connexité forte :

$u \mathfrak{R}_F v <=>$

* il existe à la fois un chemin de u à v et un chemin de v à u

ou

* u = v

Ce dernier cas correspond à un chemin de longueur nulle .

Cette relation est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence sont définies par:

$$(\forall\, u_0 \in V)\ \ V(u_0) = \{ u \mid u \in V \text{ et } u \,\mathfrak{R}_F\, u_0 \}$$

qui forment une partition de V en V_1 , V_2 ,... , V_q . q est appelé le nombre de connexité forte du graphe . Les sous-graphes G_1 , G_2 ,... , G_q engendrés par les sous ensembles V_1 , V_2 ,... , V_q sont fortement connexes et sont appelés les composantes fortement connexes de G (F-connexe) . Un graphe est fortement connexe si et seulement si il n'a qu'une seule composante fortement connexe.

Les théorèmes suivants sont extraits de [HARA 65] [GON 79] [RICH 75].

Théorème 12

Un graphe F-connexe est S-connexe

Démonstration

Elle est immédiate : un chemin est une chaîne dont tous les arcs présentent la même orientation . Pour un graphe non S-connexe , l'absence de chaînes entre au moins deux parties du graphe entraîne l'absence de chemins entre ces 2 parties et donc que le graphe est non F-connexe .

Théorème 13

Chaque sommet est contenu dans *exactement* une composante F-connexe .

Chaque arc est contenu dans *au plus* une composante F-connexe

Définition

Un circuit est un chemin dont les extrémités coïncident .

Théorème 14 [BERG 73]

Un arc est dans une composante F-connexe ssi cet arc appartient à un circuit inclus dans la composante F-connexe

Théorème 15

($\forall\, v \in V$) le graphe $G = G(\{ v \} ; \varnothing)$ est un graphe F- connexe

Ainsi le seul graphe F-connexe et sans circuit est celui composé d'exactement un point.

un point.

Théorème 16

Un graphe sans circuit contient au moins un point sans arc sortant et un point sans arc entrant

Corollaire 16

Si chaque point du graphe a au moins un arc sortant , le graphe contient un circuit

Graphe condensé

Soit le graphe $G = G(V ; A)$ et $V_1 , V_2 ,\dots , V_n$ une partition quelconque de V.

La condensation du graphe selon cette partition est le graphe $D(G) = G(D(V) ; D(A))$
tel que :

$$D(V) = \{ V_1 , V_2 ,\dots , V_n \}$$

$D(A) = \{ (V_i , V_j) \in D(V) . D(V)$ tels que $(\exists (v_i , v_j) \in V_i . V_j$ vérifiant $(v_i , v_j) \in A \}$

Remarque

Le terme réduction défini dans [GOND 79] et [RICH 75] est remplacé par le terme condensation [HARA 65] plus expressif .

La contraction définie dans [BERG 73] est une notion voisine mais différente, le graphe contracté pouvant être un multigraphe c'est à dire qu' il peut exister plusieurs arêtes entre deux sommets .

Théorème 17 [GOND 79] [HARA 65]

La condensation d'un graphe selon les composantes F - connexes est un graphe sans circuit

Théorème 18 [HARA 65]

La condensation d'un graphe F-connexe selon les composantes F-connexe consiste en exactement un point

Théorème 19

Les propositions suivantes sont équivalentes pour un graphe G quelconque

1) G est F-connexe

2) La condensation de G , selon la partition ci-dessous est F-connexe .

$$D(V) = \{ V_1 , V_2 , \ldots , V_n \}$$

et chaque V_i présente une structure F-connexe

Le corollaire 16 va être généralisé sous la forme du théorème 21 : ce théorème constitue un résultat intermédiaire pour établir l'équivalence entre la décomposition de Dulmage-Mendelsohn et la décomposition par la procédure d'inclusion.

Les notations suivantes correspondent à un élargissement de la définition de la coupe [FORD 62] [PICA 8O] où les hypothèses restrictives sont que la source $S^+ \in U$ et que le puits $S^- \in U$.

Soit le sous-graphe $G' = G (V' ; A')$ de G avec $\mu_V (A') \subset V'$.

$$(\forall a \in A') \qquad \mu_V^+ (a , G') = \{ v \in V' \mid (\exists w \in V') (a = (v , w)) \}$$

$$(\forall a \in A') \qquad \mu_V^- (a , G') = \{ v \in V' \mid (\exists w \in V') (a = (w , v)) \}$$

Les ensembles des arcs sortants et entrants d'un sous-ensemble de sommets $U \subset V'$ de G' sont définis respectivement par :

$$C^- (U , G') = \{ a \in A' \mid \mu_V^+ (a , G') \subset U \text{ et } \mu_V^- (a , G') \not\subset U \}$$

$$C^+ (U , G') = \{ a \in A' \mid \mu_V^+ (a , G') \not\subset U \text{ et } \mu_V^- (a , G') \subset U \}$$

Définition

Le cocycle de U dans G' est un ensemble d'arcs non vide partitionné en deux classes $C^- (U , G')$ et $C^+ (U , G')$.

Définition

Un cocircuit relatif à U dans G' est un cocycle tel que $C^- (U , G') = \varnothing$ ou $C^+ (U , G') = \varnothing$

En d'autres termes , tous les arcs sont orientés dans le même sens soit vers l'extérieur de U , soit vers l'intérieur de U.

Relatif aux cocircuits , le théorème suivant est un des théorèmes montrant la dualité graphe fortement connexe , graphe sans circuit . La démonstration est donnée par un enchaînement logique et bouclé des preuves des propositions (1) => (2) , (2) => (3) , (3) => (1) . La démonstration s'appuie sur le lemme des arcs colorés de Minty (196O).

Théorème 2O [BERG 73]

Pour un graphe G' S-connexe avec au moins un arc , les conditions suivantes sont équivalentes :

1) G' est fortement connexe .

2) Par tout arc passe un circuit .

3) G' ne contient pas de cocircuit

Développé indépendamment du théorème de Berge , le théorème ci-dessous est relatif à l'équivalence (1) et (3) . N'imposant pas que G' soit S-connexe , il constitue une généralisation du théorème de Berge.

Théorème 21

Soit $G = G (V ; A)$ et $G' = G (V' ; A')$ un sous-graphe de G tel que $| V' | > 1$

G' est une structure F-connexe si et seulement si :

$(\forall U \neq V')$ et $(U \subset V')$ et $(U \neq \emptyset)$

$$C^{-} (U , G') \neq \emptyset$$

La démonstration est reportée en annexe 12

Remarque 1

L'application de la proposition suivante :

$(\forall v \in V') \; C^{-} (\{ v \} , G') \neq \emptyset$

n'entraîne pas que le graphe G' est f -connexe .

Exemple (figure 2-3-4/1)

$C^{-} (\{ M_i \} , G') \neq \emptyset$ pour i = 1 à 4

$C^{-} (\{ M_3 , M_4 \} , G') = \emptyset$

Fin de l'exemple

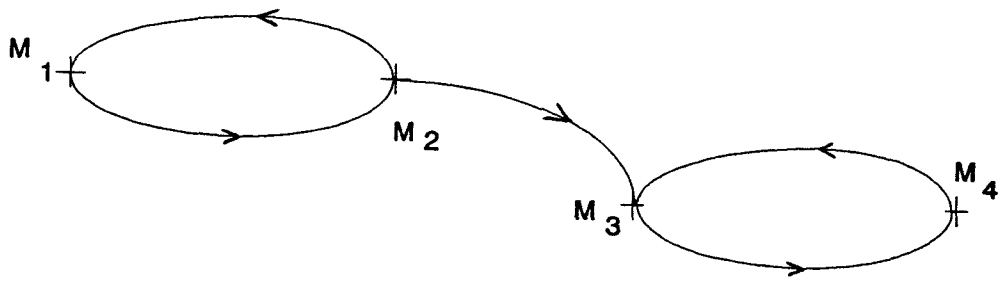


Figure 2-3-4/1

Remarque 2

La différence entre les deux théorèmes réside non seulement dans la formulation mais aussi dans la non équivalence entre (3) théorème 20 et l'expression suivante du théorème 21:

$$(\forall U \neq V') \text{ et } (U \subset V') \; C^-(U, G') \neq \varnothing$$

d'où

$$C^-(V' \setminus U, G') \neq \varnothing$$

qui est égal à : $C^+(U, G') \neq \varnothing$

Ainsi , U ne présente pas de cocircuit .

La réciproque n'est pas vraie en raison de la définition du cocircuit qui est un cocycle correspondant à un ensemble non vide : le cocircuit vide n'existe pas par définition . La figure 2-3-4/2 illustre la différence.

Le graphe G' est non F-connexe et $C^-(\{M_1, M_2\}, G') = \varnothing$.
Pourtant , il ne contient aucun cocircuit et que des cocycles . Pour $U = \{M_1, M_2\}$, bien que $C^+(U, G') = \varnothing$, $C^-(U, G')$ n'est pas considéré comme un cocircuit car étant vide . De là , G' ne contenant pas de cocircuit n'entraîne pas que G' soit F-connexe.

Figure 2-3-4/2

Remarque 3

Le graphe F-connexe G'= G ({ M_1 } ; { (M_1 , M_1) }) est considéré dans le théorème de Berge et non dans le théorème 21. A l'opposé , ce dernier considère les graphes sans arcs . Comme les graphes G (V' ; A) tel que V' est un singleton , sont F-connexes , le théorème 21 peut être généralisé sous la forme:

Théorème 22

Soit G = G (V ; A) et G' = G (V' ; A') un sous-graphe de G
G' est une structure F-connexe si et seulement si :

$$| V' | = 1$$

ou

$$(\forall\ U \neq V')\ \text{et}\ (U \subset V')\ \text{et}\ (U \neq \varnothing)$$
$$C^{-}(U, G') \neq \varnothing$$

Les théorèmes suivants vont lier le graphe G étendu et le graphe biparti B_X . L'équivalence entre une partie des structures F-connexes de G et les composants irréductibles de B_X est montrée.

Théorème 23

Soit le graphe biparti B' de graphe disjoint complet W' .
$(\forall \Phi \subset F')$ et $(\Phi \neq F')$ $C_{F'}(\Phi, B') \neq \varnothing$ <=>
le graphe G' associé est F-connexe

La démonstration est reportée en annexe 13

exemple 1

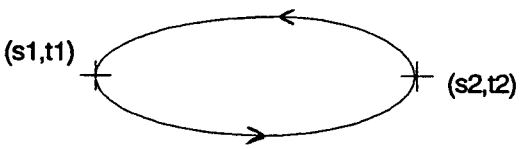


figure 2-3-4/3

	t_1	t_2
s_1	1	1
s_2	1	1

$\phi = \{s_1\} => \phi . \{t2\} \neq \emptyset$

$\phi = \{s_2\} => \phi . \{t_1\} \neq \emptyset$

Exemple 2

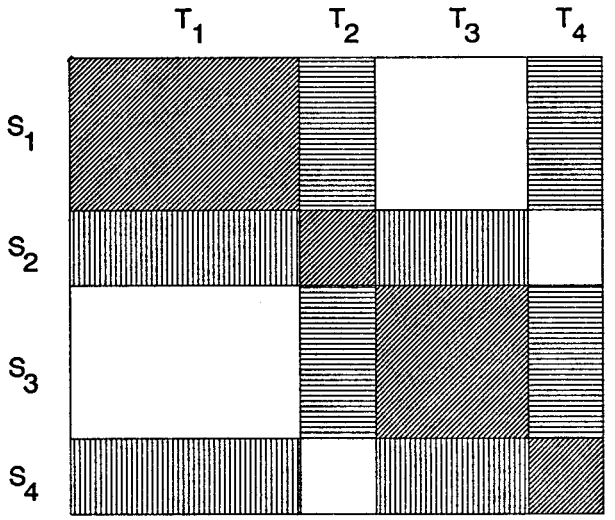


Figure 2-3-4/4

$\phi = S_1 => S_1 . (T_2 \cup T_3 \cup T_4) \neq \emptyset$
$\phi = S_2 => S_2 . (T_1 \cup T_3 \cup T_4) \neq \emptyset$
$\phi = S_3 => S_3 . (T_1 \cup T_2 \cup T_4) \neq \emptyset$
$\phi = S_4 => S_4 . (T_1 \cup T_2 \cup T_3) \neq \emptyset$
$\phi = S_1 \cup S_3 => (S_1 \cup S_3) . (T_2 \cup T_4) \neq \emptyset$
$\phi = S_2 \cup S_4 => (S_2 \cup S_4) . (T_1 \cup T_3) \neq \emptyset$
etc ...

Exemple 3

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1					
2	1	1						
3	1		1	1		1		
4			1	1				
5			1		1	1	1	
6					1	1		
7							1	1
8	1						1	1

G' est F-connexe (figure 2-3-4/5).

Théorème 24

Soit B' = G (S' , T' ; A_B') un sous-graphe de B^+ de graphe disjoint W' complet et soit G' le graphe associé à B'
B' est un graphe irréductible ssi
G' est un graphe F-connexe

Démonstration

Elle se déduit des théorèmes 23 et 9.

Comme le théorème 6, son corollaire et les propriétés 2-2-1/2 et 2-2-1/3, le théorème suivant présente la canonicité des graphes bipartis à travers les chaînes alternées . En particulier , il caractérise les composantes irréductibles.

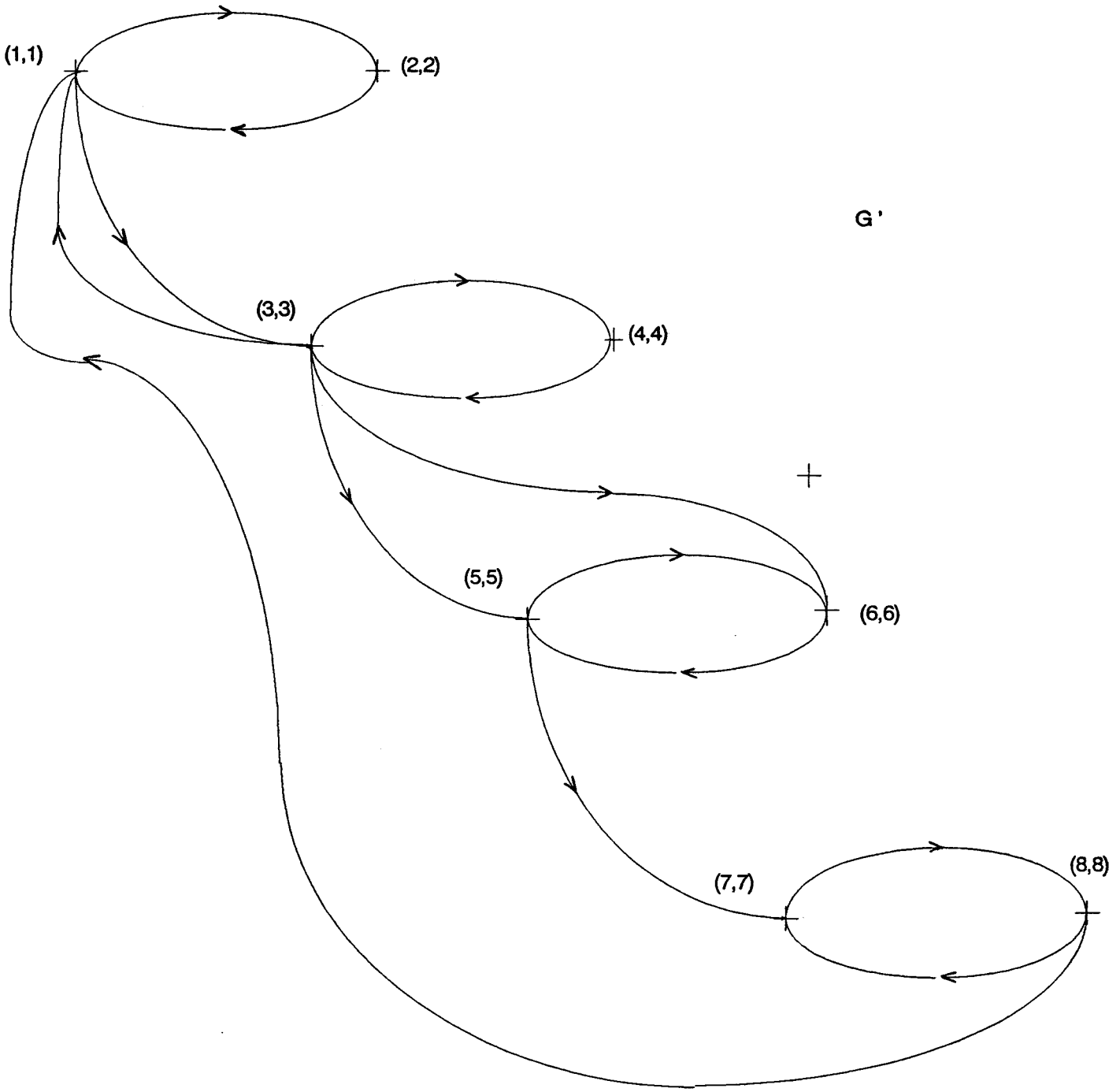


Figure 2-3-4/5

Théorème 25

Soit $B' = G (S' , T' ; A_b')$ un sous graphe de B^+ , de graphe disjoint W' complet.

B' est un graphe irréductible ssi

$(\forall (a_i , a_j) \in A (W') . A (W'))$ pris dans cet ordre , il existe une chaîne alternée L sous-graphe de B' telle que :

ses n arcs peuvent être renommés sous la forme $A_L = \{ b_1 , ... , b_n \}$ avec b_1 (b_n) correspondant à a_i (a_j)

La démonstration est reportée en annexe 14

Remarque

Dans le théorème 25 , il est nécessaires que le graphe disjoint W' de B' soit complet comme l'illustre le contre-exemple suivant (figure 2-3-4/6):
B' est semi-irréductible de SEM ($\{ s_1 , s_2 \} , \varnothing$) .

Théorème 26

Soit $B_X = G (F_X , X ; A_X)$, B^+ son graphe étendu et $G = G (V ; A)$ le graphe associé de B^+ relativement à W^+ .

Les sous-graphes F-connexes de $G^=$ sont les graphes associés aux composantes irréductibles de B_X

La démonstration est reportée en annexe 15 .

Remarque

Les graphes $G^>$ et $G^<$ peuvent comporter des structures F-connexes . Celles-ci , si elles ne correspondent pas aux composantes irréductibles de B_X, sont toutefois associées avec des composantes irréductibles de B^+ comme les structures F-connexe de $G^=$. Dans ce sens , si le graphe disjoint W est complet , $B_X = B^+$, $G^> = \varnothing$ et $G^< = \varnothing$.

Un théorème réduit est donc :

Soit $B_X = G (F_X , X ; A_X)$ et W un graphe disjoint complet .

Soit $G = G (V ; A)$ le graphe associé de B^+ .

Les sous-graphes F-connexes de G sont les graphes associés aux composantes irréductibles de B_X .

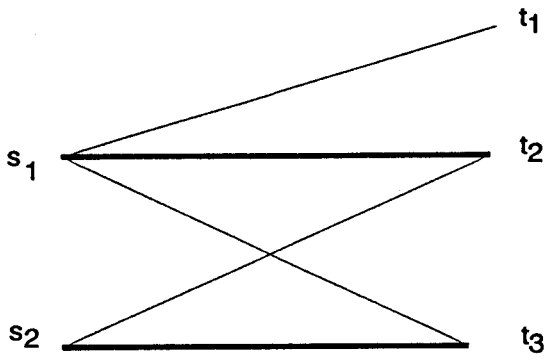


Figure 2-3-4/6

2-4 Résumé et mise en oeuvre

Nous résumons les principaux résultats de ce chapitre. La démarche suivante les classe en trois phases.

1) Caractérisation

La caractérisation est l'extraction du caractère principal du système . Celui-ci peut être exprimé par un graphe disjoint maximal ou un support extérieur minimal. Cette étape permet la réalisation de la phase suivante.

2) Synthèse

La synthèse est l'extension du système initial dans un sursystème qui l'inclut . Cette surstructure a pour qualité d'être une expression plus simple du graphe initial tout en gardant son information. La synthèse est donc une simplification particulière du modèle.

3) Analyse

L'analyse est l'emploi de différentes techniques graphiques permettant le partitionnement du système. Cette décomposition peut être effectuée selon:

- les composantes s-connexes
- les trois composantes $G^{>}$, $G^{<}$ et $G^{=}$ ou $B^{>}$, $B^{<}$ et $B^{=}$.
- les composantes irréductibles ou les structures F-connexes.

Ces structures peuvent être déduites à partir:

- des caractères principaux du type graphe disjoint maximal ou SEM.
- des caractères dérivés des précédents.

Ceux-ci sont:

+ les chaînes alternées pour les graphes bipartis ou les chemins pour les graphes non-bipartis.

+ La coupe bipartie pour les graphes bipartis ou la forme améliorée des cocircuits pour les graphes non-bipartis.

Les composantes irréductibles et les trois composantes $B^<$, $B^>$ et $B^=$ sont liées aux notions de chaîne alternée et de chemin par les théorèmes suivants . Leurs applications permet l'obtention des différentes composantes.

composantes sur B_X	chaîne alternée sur B^+	chemin sur G
composantes irréductibles B_i	Théorème 25	Théorème 26
3 composantes $B^>$, $B^<$ et $B^=$	Corollaire 2-2-2	Théorème 11

L'enchaînement des trois phases permet de concevoir l'algorithme suivant de recherche des relations de surveillance.

Algorithme

1) Caractérisation

Rechercher un graphe disjoint maximal W .

Soit I(W) et J(W) les ensembles de sommets non extrémité d'un arc de W et appartenant respectivement à F_X et X.

2) Synthèse

En déduire le graphe disjoint W^+ et le graphe biparti B^+ en ajoutant des arcs aux sommets de I(W) et J(W) afin que W^+ soit complet. Construire G en condensant les arcs de W^+. B^+ et G sont définis par:

$F_+ = \{ f_{i+} \mid x_i \in J(W) \}$

$F^+ = F \cup F_+$

$X_+ = \{ x_{i+} \mid f_i \in I(W) \}$

$X^+ = X \cup X_+$

$V_> = \{ (f_i, x_{i+}) \mid f_i \in I(W)\ x_{i+} \in X_+ \}$

$V_< = \{ (f_{i+}, x_i) \mid x_i \in J(W)\ f_{i+} \in F_+ \}$

Soient les graphes B^+ et W^+.:

$$B^+ = G(F^+, X^+; A^+)$$

avec $A^+ = A_X \cup V_> \cup V_<$

et $W^+ = G(F^+, X^+; A(W^+))$

avec $A(W^+) = A(W) \cup V_> \cup V_<$

Le graphe $G = G(V; A)$ associé à B^+ relativement à W^+ est défini par:

$V = A(W^+)$

$A = \{ (a_h, a_j) \in A^+.A^+ \mid a_h \in A(W^+), a_j \in A(W^+)\ \exists a_i \in A^+ \setminus A(W^+)$ tel que $P_{F^+}(a_h) = P_{F^+}(a_i)$ et $P_{X^+}(a_i) = P_{X^+}(a_j) \}$

3) Analyse et obtention des relations de surveillance

- Rechercher le graphe $G^> = G(V^>; A^>)$ défini par :

$V^> = \{ v \mid (v \in V)(\exists u \in V_>)\ u \dashrightarrow v \}$

$A^> = \{ a \mid \mu_V(a, G) \subset V^> \}$

- Décomposer $G^>$ selon les structures s-connexes.

- Rechercher les structures f-connexes dans le graphe $G^>$ et condenser $G^>$ selon celles-ci. Soit G_C le graphe condensé (figure 2-4/1).

- Déterminer sur G_C pour chaque élément u de $V_>$ le graphe s-connexe sans cycle (arbre) suivant:

$G(u) = G (V(u) ; A(u))$

$V(u) = \{ v \mid (v \in V) \; u \dashrightarrow v \}$

$A(u) = \{ a \mid \mu_V (a , G_C) \subset V(u) \}$

Chaque graphe G(u) définit la structure d'une relation de surveillance (figure 2-4/2).

Contrairement à la démarche en trois points , la recherche des composantes S-connexes , F-connexes et les trois composantes peut être effectuée dans un ordre quelconque. On peut cependant limiter l'étude à une des composantes S-connexes et/ou à une des trois composantes puis effectuer sur cette partie une décomposition en structures F-connexes.

La mise en oeuvre pourra utiliser des ouvrages comme celui de [RICH 75] ou M.Minoux et G.Bartnik [MINO 86]. Ce dernier traite de la résolution de problèmes sur les graphes du point de vue informatique , c'est à dire tout ce qui touche à la conception et à la réalisation des algorithmes (structure des données , mise en oeuvre etc..). Ainsi , la caractérisation pourra s'appuyer sur les algorithmes de recherche du couplage maximal [chapitre 9 MINO 86] ou du flot maximal [chapitre 8 MINO 86]. De même , les composantes S-connexes et F-connexes sont traitées au chapitre 2. La synthèse ne présente pas de difficultés de même que l'obtention des trois composantes.

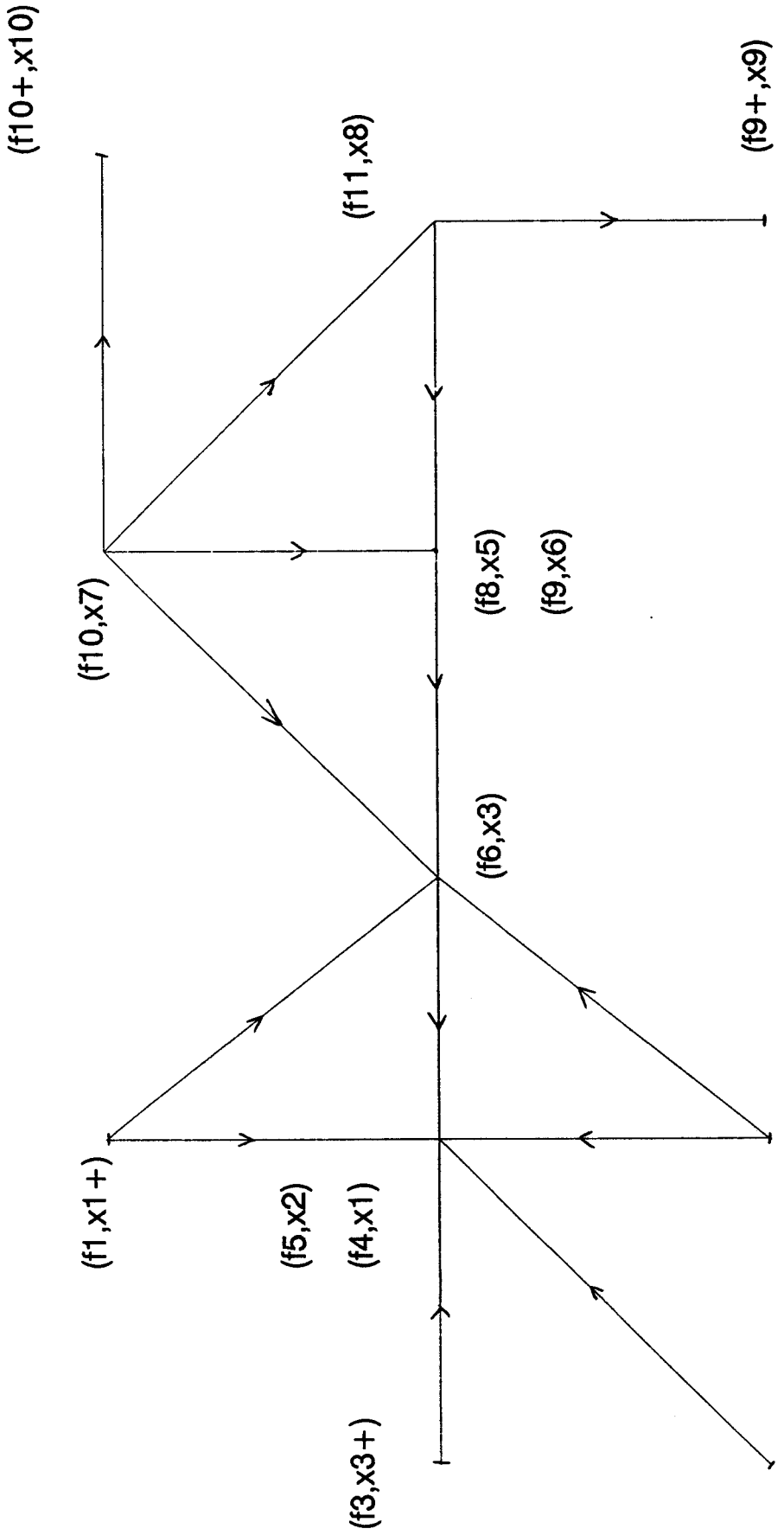


Figure 2-4/1: graphe condensé

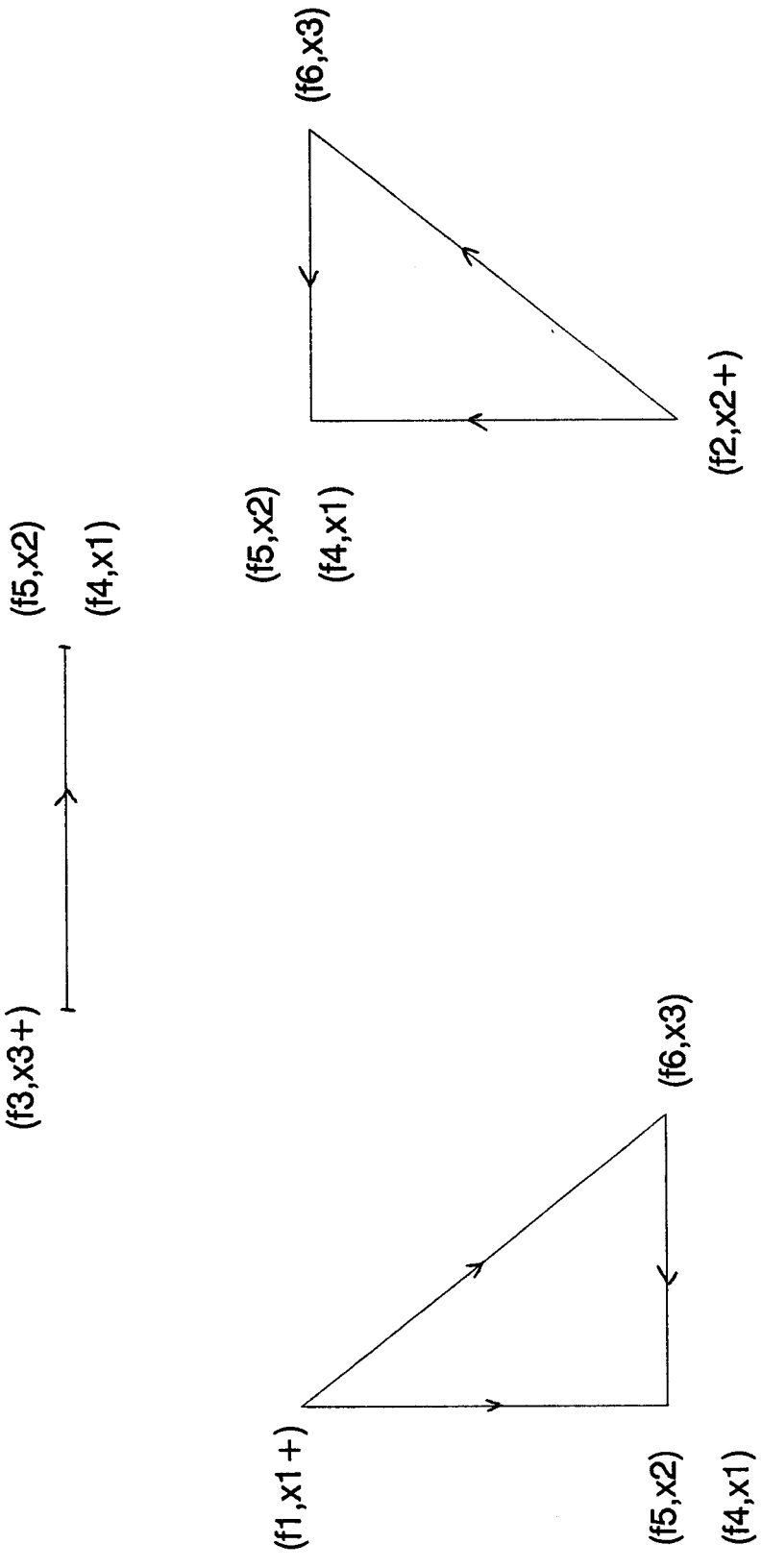


Figure 2-4/2: graphes des relations de surveillance

3 Domaine de validité structurale

Dans ce sous-chapitre , nous abordons la résolution de très grands systèmes d'équations algébriques linéaires ou non linéaires dans lesquels le nombre de variables apparaissant dans chaque équation est petit comparé au nombre total de variables du système. Ce genre de système est fréquent dans les processus industriels complexes (usines chimiques, réseaux électriques etc...). En réalité , tout système de taille réduite peut devenir complexe si la résolution du problème nécessite une modélisation trés analytique et trés fine . Par exemple , un amplificateur peut être considéré à travers un gain mais aussi à travers ses composants élémentaires .

Devant la taille de ces systèmes , les méthodes traditionnelles sont clairement inadaptés , même à l'aide de l'informatique : matrices de dimensions importantes , saturation mémoire ..... Une méthode plus adaptée est d'aborder le problème par une décomposition en sous système plus simples à résoudre . Pour cela , la résolution structurale n'a besoin que d'un modèle extrèmement pauvre en informations pour analyser le système . Seule est donnée la connaissance des liens entre variables et fonctions, plus précisémment celle des dérivées partielles structurellement différentes de zéro . A partir de la structure que forment ces liens , nous donnerons des conclusions sur la résolution ainsi que sur le rôle des nouveaux sommets de F_+ et X_+ introduits par la procédure d'inclusion .

Le système d'équations a d'autre part une réalité numérique et les domaines de variation des valeurs des coefficients ont une influence sur les solutions. Nous donnerons dans ce chapitre , le domaine de validité des interprètations structurales.

3-1 Cohérence sur-graphe / sur-système

Soit le système initial défini par :

(1) $$F_X (X , C) = 0$$

Soient J (X) et J (C) les jacobiens respectifs de F_X par rapport à X et à C d'où :

(2) $$J (X) \; dX + J (C) \, dC = 0$$

En posant $dD = - J (C) \, dC$, on a :

(3) $$J (X) \, dX = dD$$

On associe au graphe biparti B^+ la forme suivante :

(4) $$J^+ (X^+) dX^+ = dD^+$$

avec $D^+ = (D^t , E^t)^t$ E représentant les données relatives aux relations de F_+

L'égalité (4) présente autant de fonctions que d'inconnues et ainsi le théorème de Spivak peut lui être appliqué .

Théorème 1 ou théorème de Spivak [SPIV 65]

Soit le système présentant une solution $\underline{\underline{X}}^+$ pour une certaine valeur des données $\underline{\underline{C}}$ du système .

Si $\det (J (\underline{\underline{X}}^+) \neq O$,
alors , le système a une unique solution X^+ autour de $\underline{\underline{X}}^+$ pour une perturbation arbitraire de C dans un voisinage de $\underline{\underline{C}}$.

Propriété 3-1/1

$\text{rang } J (\underline{\underline{X}}^+) \leq | A (W^+) |$

En effet , $| A (W^+) |$ est égal par construction au nombre de lignes ou de colonnes de $J (\underline{\underline{X}}^+)$. Celui-ci est d'autre part la valeur maximale du rang d'où la propriété.

Afin d'avoir une cohérence entre système et représentation structurale , nous adoptons l'hypothèse de travail suivante.

Hypothèse:

$$\det (J (\underline{\underline{X}}^+) \neq O$$

Ainsi , $\text{rang } J (\underline{\underline{X}}^+) = | A (W^+) |$

L'hypothèse peut aussi être définie relativement au graphe initial B_X dont l'inclusion dans le graphe B^+ est présentée dans la figure 3-1/1 .

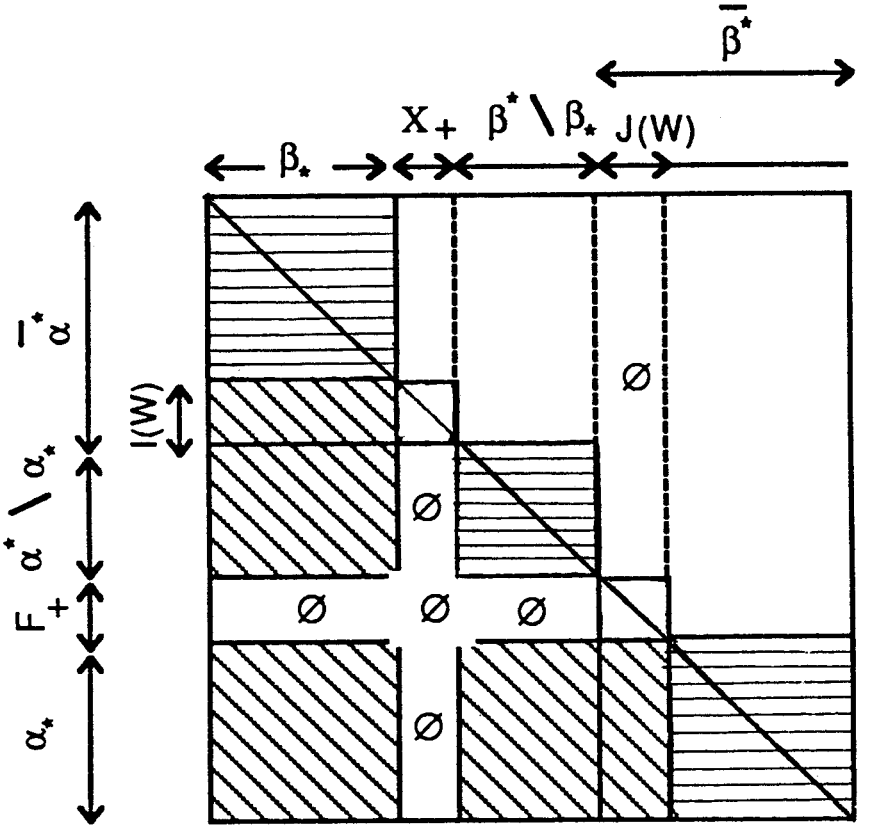


Figure 3-1/1

La propriété 2-2-1/2 indique que les colonnes de X_+ et les lignes de F_+ sont vides à l'exception des arcs de $V_> \cup V_<$ qui prolongent la diagonale de part et d'autre . Ces derniers correspondent à des éléments non nuls . De là , le développement du déterminant selon la diagonale principale donne :

$$\det (J (\underline{\underline{X}}^+)) = \prod_{V_>} a_>^i * \det (J (\underline{\underline{X}}^-) * \prod_{V_<} a_<^i$$

avec $J (\underline{\underline{X}}^-)$ jacobien relatif à F\I(W) et X\J(W)

A $a_>^i$ ($a_<^i$) est associée une valeur numérique non nulle, par exemple un, pour représenter l'existence de chaque arc de $V_>$ et $V_<$

Une hypothèse équivalente est donc :

$$\text{rang } J (\underline{\underline{X}}^-) \neq O$$

En développant selon la structure canonique de B_X , celle-ci peut encore être affinée :

$$\det (J (\underline{\underline{X}}^-)) = \det (M^>) * \det (M^=) * \det (M^<)$$

$M^{>}$ est la matrice relative à la struture de $A\ (\ B_X\ ) \cap \bar{\alpha}^*\backslash I(W)\ .\ \beta_*$. Il en est de même pour $M^{<}$ et $A\ (\ B_X\ ) \cap \alpha_*\ .\ \bar{\beta}^*\backslash J(W)$ et pour $M^{=}$ et $A\ (\ B_X\ ) \cap \alpha^*\backslash\alpha_*\ .\ \beta^*\backslash\beta_*$.

On peut remarquer que des permutations de lignes entre I(W) et $M^{>}$ peuvent rendre le determinant de $M^{>}$ différent de zéro s'il ne l'était pas initialement . Il en est de même pour le determinant de $M^{<}$ avec des permutations de colonnes entre J(W) et $M^{<}$. Avant tout calcul , il est nettement préférable de vérifier que les structures correspondantes sont de rang maximal : si elles ne le sont pas , le determinant est en effet nul .

La composante $B^{=}$ quant à elle , ne présente aucune ligne ou colonne en réserve: une éventuelle dépendance linéaire est sans appel.

3-2 Fonctions et variables prétextes

3-2-1 Equivalence système / sur-système

- Eléments de X_+

Pour chaque fonction f_i de I (W) donc non couplée , une variable x_{i+} a été introduite . Celle-ci constitue un nouveau degré de liberté .

	C	X	x_{i+}
f_i	...	.....	1

<----------X^+ -------->

L'équivalence des systèmes peut être obtenue en donnant à chaque fonction de I (W) la forme équivalente suivante dans le sursystème:

$$f_i : f_i\ (C, X) + x_{i+} = 0$$
$$\text{avec } f_{xi+} : x_{i+} = 0 \quad (\text{ cas a })$$

La variable introduite x_{i+} doit alors être connue et égale à zéro .

- éléments de F_+

Pour chaque variable x_i de J (W) donc non couplée , une fonction f_{i+} a été introduite . Celle-ci constitue une nouvelle contrainte.

	C	$X\backslash\{x_{i+}\}$	x_{i+}
f_i	...	.....	1
f_{i+}			1

L'équivalence des systèmes nécessite que chaque fonction f_{i+} prenne la forme suivante:

$$f_{i+} : x_i = e_{i+}$$

La fonction introduite f_{i+} , malgré sa présence , ne doit pas être une contrainte et e_{i+} sera considérée comme une inconnue dans le sursystème (cas b). Les données e_{i+} forment le vecteur de données E du sur-système (4).

Il est à noter que les informations algébriques (a) et (b) ne sont pas considérées dans le surgraphe biparti B^+ : $f_{xi+} \notin F^+$ et $e_{i+} \notin X^+$.

Par ce procédé , le graphe disjoint W^+ est complet : différents résultats graphiques ont ainsi pu être établis .

Les conditions pour que le système puisse représenter le système F_X (X , C) peuvent maintenant être résumées par la propriété suivante:

propriété 3-2-1/1

Si 1) rang J ($\underline{\underline{X}}^{-}$) = | A (W) |

2) $\forall i \; x_{i+} = 0$

3) $\forall i \; e_{i+}$ est une inconnue

Alors la solution du système initial F_X (X , C) = O pourra être obtenue par la résolution du sur-système .

Démonstration

La démonstration se trouve déjà dans les commentaires précédents:

- La condition 1 garantit la résolvabilité du sur-système pour des valeurs données de E.

- Les conditions 2 et 3 donnent l'équivalence système / sur-système .

3-2-2 Conditions d'équivalence

3-2-2-1 Conditions 3) de la propriété 3-2-1/1

Celle-ci se réalise directement par la construction du sur-système présentée en 3-2-1: on remplace les donnés e_{i+} relatives aux fonctions de F_+ par les variables x_i associées à J (W) .

E constitue donc un sous-ensemble de variables de X.

3-2-2-2 Condition 2) de la propriété 3-2-1/1

Contrairement à la condition 3) , celle-ci n'est pas immédiate . En effet , la résolution de F^+ (X^+ , C) = O permet de donner X^+ et chaque variable x_{i+} de X_+ inclus dans X^+ pourra prendre une valeur nulle ou non.

Nous allons étudier cette condition à travers les déterminants caractéristiques qui seront définis pour le problème posé .

Le jacobien J ($\underline{\underline{X}}^+$) relatif au sur-système est partitionné afin de faire apparaître J ($\underline{\underline{X}}^-$) dont le déterminant est différent de zéro .

$$J(X^+) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

A_1 est la diagonale des éléments $a_>{}^i$ définis au chapitre 3-1

$A_3 = 0$

et $A_4 = \begin{vmatrix} A_{41} & A_{42} \\ A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}$

A_{44} est la diagonale des éléments $a_<{}^i$

$A_{43} = 0$

et $A_{41} = J(\underline{\underline{X}}^-)$

J (X) (de dimension m.n) apparaît en supprimant les colonnes (resp. les lignes) correspondant à A_1 (resp. A_{44}) de J ($\underline{\underline{X}}^+$)

$$J(X) = \begin{vmatrix} & A_2 & \\ A_{41} & & A_{42} \end{vmatrix}$$

A_{41} est une matrice carrée de dimension | A (W) | notée r dont le déterminant est dit déterminant principal de J (X) [GILL 84] . Pour les m-r autres lignes , un déterminant auxiliaire appelé déterminant caractéristique peut être construit à partir du déterminant principal en ajoutant une ligne et une colonne :

$$\gamma_i = \begin{vmatrix} & & dD_{m-r+1} \\ & A_{41} & \vdots \\ & & dD_m \\ \hline a_{2i}{}^1 \ldots\ldots a_{2i}{}^r & & dD_i \end{vmatrix}$$

pour i = 1 à m-r

$a_{2i}{}^j$ est un élément de A_2 de ligne i et de colonne j .

dD_i est l'élément de D dont la ligne correspond à celle de A_2 choisie .

Les éléments dD_{m-r+1} à dD_m correspondent aux lignes de A_{41}.

A l'aide de ces m-r déterminants caractéristiques , le théorème de Rouché donne la condition de compatibilité du système (3) .

Théorème 2 ou théorème de Rouché

Le système est compatible ssi tous les déterminants caractéristiques sont nuls .

ou en d'autres termes :

Le système est incompatible ssi au moins un des déterminants caractéristiques n'est pas nul .

Il peut être montré que la condition de compatibilité équivaut à l'appartenance du vecteur dD au sous espace engendré par les colonnes de J (X) (d'où l'existence de dX).

En d'autres termes , la condition de compatibilité peut s'écrire:

$$\text{rang}\,(J(X)\ , dD) = \text{rang}\,(J(X))$$

Expression des déterminants caractéristiques

Le calcul de γ_i peut être développé selon la relation suivante : soit une matrice Z quelconque telle que $\det(Z_1) \neq 0$.

$$Z = \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{vmatrix}$$

$$\det(Z) = \det(Z_1^{-1}) * \det(Z_4 - Z_3 Z_1^{-1} Z_2)$$

De là :

$$\gamma_i = \det(A_{41}^{-1}) * \det(dD_i - (a_{2i}^{1} \ldots a_{2i}^{r}) A_{41}^{-1} (dD_{m-r+1} \ldots dD_m)^t)$$

Le théorème suivant donne une autre condition pour que le système (3) soit compatible

Théorème 3

Soit rang J ($\underline{\underline{X}}^{-}$) = | A (W) |
Le système (3) est compatible ssi
($\forall x_{i+} \in X_{+}$) $dx_{i+} = 0$

La démonstration est reportée en annexe 16.

Les résultats suivants montrent les liens entre les déterminants caractéristiques et les variables de X_{+} .

Propriété 3-2-2/1 : expression des variables prétextes

L'expression suivante correspond à chacune des variables prétextes x_{i+} de X_{+} . L'indice i est le numéro de ligne après un éventuel réindiçage .

$dx_{i+} = dD_i - (a_{2i}{}^{1} \ldots a_{2i}{}^{r}) A_{41}{}^{-1} (dD_{m-r+1} \ldots dD_m)^t$

La démonstration est reportée en annexe 17.

Conséquence

La variable prétexte de résolution dx_{i+} apparait dans l'expression du déterminant caractéristique d'où

$$\gamma_i = \det (A_{41}{}^{-1}) dx_{i+}$$

Cette conséquence permet de donner une autre preuve du théorème 3.

Théorème 4

Soit un système présentant au moins une solution .
Le système est compatible ssi
$\underline{\underline{X}}_{+} = 0$ sur la trajectoire des variables connues .

La démonstration est en annexe 18.

Conséquence

Un processus réel présente $\underline{\underline{X}}_+ = O$ sur sa trajectoire .

En effet , celui-ci présente au moins une solution et plus encore , X existe toujours: le système est compatible.

La propriété 3-2-1/1 dans le chapitre équivalence système/sur-système prend alors une forme réduite:

Propriété 3-2-2/2

Pour un processus physique , si rang $J (\underline{\underline{X}}^-) = | A (W) |$
alors , la solution du système $F_X (X , C) = 0$ pourra être obtenue par la résolution du sur-système .

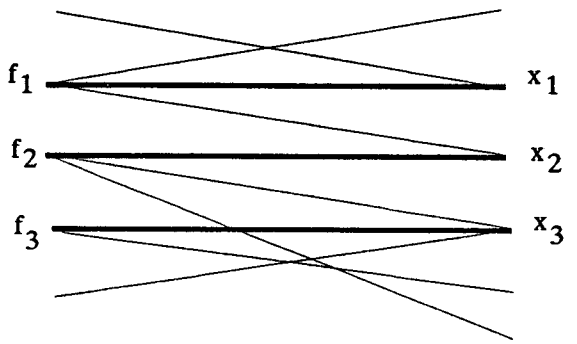
3-2-3 Exploitation structurale des chaînes alternées .

L'étude de la théorie des graphes a montré l'importance de la notion de chaîne alternée par exemple dans le théorème 6 . Interessons nous à son interprétation dans un système d'équations.

3-2-3-1 Interprétation

Comme le graphe disjoint W^+ est complet , chaque chaîne alternée peut être complétée éventuellement en ajoutant des arcs de W^+ afin qu'elle débute et commence par un arc de W^+ ou en d'autres termes qu'elle définisse un sous-système complet .

Forme graphique



Forme matricielle

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	....
f_1	*	+	.	.	.	.	....
f_2	.	*	+	.	.	.	....
f_3	.	.	*	.	.	.	....
f_4	.....						
f_5	.....						

Forme équation

$f_1 (x_1 , x_2 , ...) = 0$
$f_2 (x_2 , x_3 , ...) = 0$
$f_3 (x_3 , ...) = 0$
$f_4 (.....) = 0$
$f_5 (.....) = 0$

Les descriptions ci-dessus montrent clairement que , la résolution de f_1 (resp. f_2) pour obtenir x_1 (resp. x_2) dépend de la résolution de f_2 (resp. f_3). A la condition que cette struture ne soit pas comprise dans des composantes irréductibles , la séquence des calculs suivra l'ordre f_3 puis f_2 puis f_1.

L'interprétation structurale est donc :

La chaîne alternée représente une dépendance de résolution: si il existe entre deux sous-ensembles disjoints X_1 et X_2 de X^+ une chaîne alternée dont l'indiçage est croissant de X_1 à X_2, le calcul de X_1 nécessite le calcul de X_2. Dans le cas particulier d'une structure bloc-triangulaire, cette relation exprimera l'ordre inverse dans lequel on doit résoudre le système.

On peut remarquer que la séquence des calculs pour obtenir les différentes valeurs suivra un sens opposé si la structure du système complet est triangulaire.

Le chapitre 2-2a montré que l'on peut associer directement , à chaque chaîne alternée , un chemin orienté dans le graphe orienté G . Le sens de dépendance suivra l'orientation du chemin , ce qui donne une représentation très explicite de la dépendance ou de la résolution .

3-2-3-2 Utilisation des chaînes alternées

- F_+ Fonctions Prétextes de Résolution

La propriété 2-2-1/2 indique que chaque ligne relative à un élément f_{i+} est vide à l'exception de l'arc de $V_<$. L'interprétation est que la résolution de (f_{i+} , x_i) , ne dépend d'aucune résolution autre que elle-même.

De même , le corollaire 2-2-2-1 du théorème 6 indique que pour chaque f_{i+} , l'ensemble des chaînes alternées donne l'ensemble des fonctions dont la résolution nécessite la résolution de f_{i+} . Il faut cependant noter que la partie b) du théorème ne précise pas que ces fonctions ont uniquement besoin de la résolution de f_{i+} .

Ainsi , chaque couple (f_{i+} , x_i) définit un ensemble de fonctions qui exigent la résolution de f_{i+} et l'obtention de x_i . Cette dépendance est représentée symboliquement dans la figure 3-2-3-2/1.

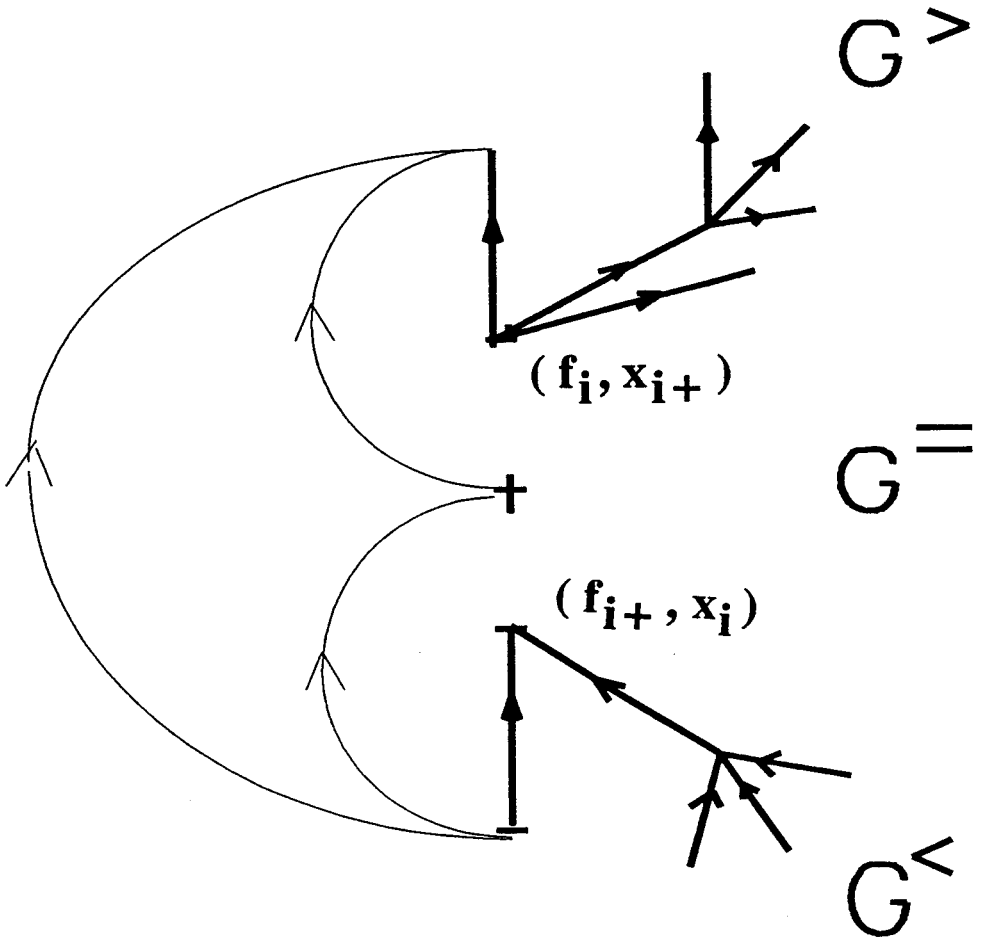


Figure 3-2-3-2/1

Cependant la fonction f_{i+} est de la forme $x_i = e_{i+}$ avec e_{i+} inconnu : la résolution de f_{i+} ne peut donner la valeur de sa variable de sortie . Il en sera de même pour toute résolution dépendant de celle de f_{i+}. Les variables correspondantes seront donc sous-déterminées et le sous-système défini par ce procédé sera la composante sous -déterminée.

Permettant une résolution fictive , chaque élément f_{i+} de F_+ a constitué un prétexte de résolution .

- X_+ : Variable Prétextes de Résolution

La propriété 2-2-1/2 indique que chaque colonne relative à un élément x_{i+} est vide à l'exception de l'arc de $V_>$. L'interprétation est donc qu'aucune résolution autre que celle de (f_i , x_{i+}) n'a besoin de la résolution de (f_i , x_{i+}) .

Le corollaire 2-2-2-1du théorème 6 donne :

Pour chaque x_{i+} , l'ensemble des chaînes alternées définit l'ensemble des fonctions dont la résolution est nécessaire pour obtenir x_{i+} .

Les surgraphes permettent donc de donner l'information structurelle suivante :

* $(\forall x_{i+} \in X_+)\ x_{i+} = f(C)$ ou f représente l'expression structurelle de x_{i+} .

D'autre part , nous avons:

* Le système $F(Y) = 0$ décrit un processus physique .

Ainsi , chaque variable de X incluse dans Y existe sous l'hypothèse que la description est exacte: les équations du modèle forment un système compatible.

Le théorème 4 donne le résultat algébrique suivant :

$(\forall x_{i+} \in X_+)\ x_{i+} = 0$

Chaque variable x_{i+} est donc surdéterminée. Les relations de surveillance sont donc:

$(\forall x_{i+} \in X_+)\ f(C) = 0$

Le nombre de relations de surveillance est ainsi égal au cardinal de X_+ .

D'autre part , chaque variable x_{i+} représente l'image de la compatibilité du sous système correspondant et plus physiquement de la cohérence du modèle avec la réalité du processus .

- graphe complémentaire

Les éléments du complémentaire des composantes sur et sous-déterminée dans la résolution ne dépendent d'aucune relation supplémentaire et ne permettent la résolution d'aucune variable supplémentaire : ils forment la composante juste déterminée .

4 Conclusion

Le modèle structurel sous forme de blocs interconnectés a constitué l'objet de cette étude . Sur ce modèle , nous avons développé une approche structurale, phase préalable à l'approche quantitative . Les outils en ce domaine appartiennent à la théorie des graphes .

Les auteurs principaux dans cette partie des mathématiques , notamment Berge et d'autre part Dulmage et Mendelsohn ont conçu parallèlement des fondements théoriques importants sur les graphes bipartis . Aucun rapprochement n'étant établi entre ces différents travaux , nous avons présenté dans ce chapitre , une synthèse de ces développements théoriques . Ainsi le concept de chaîne alternée de Berge a été appliqué à la décomposition canonique de Dulmage Mendelsohn . Le résultat a été une définition des trois composantes canoniques mais aussi un moyen de les obtenir graphiquement . De même , nous avons donné le lien entre la connexité orientée dans le graphe G et les chaînes alternées dans B_X et B^+ . Image de B par la procédure d'inclusion , le graphe G peut être construit quel que soit le graphe initial et sa structure. Il représente d'une manière synthétique le graphe B_X en comportant moins de sommets et d'arcs.

A un niveau structurel intermédiaire entre celui des arcs et des trois composantes , nous avons introduit la notion de coupe bipartie et donné ses rapports avec les composantes irréductibles . Pour les graphes orientés , nous avons généralisé le théorème de Berge liant les structures F-connexes et le concept de cocycle en affranchissant celui-ci de l'hypothèse de structure S-connexe . L'enchaînements des différents théorèmes liant les notions de structures F-connexes , de cocycle , de coupe bipartie et de composante irréductible prouve le caractère unique de la décomposition de $G^=$, ce qui n'est pas le cas pour les composantes $G^<$ et $G^>$.

Ces résultats structuraux peuvent être appliqués à tout graphe biparti représentant la structure de lien entre deux familles d'objets . Pour la surveillance des systèmes complexes , ces classes seront respectivement des fonctions et des variables .

Cependant , la représentation d'un système d'équations sous la forme d'un graphe biparti comporte des limitations . Cette représentation devra respecter certaines hypothèses . Au niveau graphique , les surgraphes B^+ et G sont des images du graphe initial présentant de nouvelles fonctions et variables . En réalité , seules les variables de X_+ représentent l'écart système/sur-système qui sera d'ailleurs nul pour un système compatible ce qui est le cas d'un processus physique . Cette interprétation doit cependant être modulée pour une approche quantitative qui tiendra compte des erreurs de modélisations et des erreurs de mesures : le système sera incompatible et chaque variable appartenant à X_+ donnera une image de cette incompatibilité qui pourra être utilisée en surveillance de processus .

Annexe 1

Théorème 6 de décomposition par les chaînes alternées [DECL 91]

a) $e \in \overline{\alpha}^* \cup \beta_* \Leftrightarrow \exists L = G(F_L, X_L; A_L)$ tel que :

1) $e \in \mu_V(a_n, B_x)$
2) $P_{F_X}(a_1) \in I(W)$

b) $e \in \alpha_* \cup \overline{\beta}^* \Leftrightarrow \exists L = G(F_L, X_L; A_L)$ tel que :

1) $e \in \mu_V(a_1, B_x)$
2) $P_X(a_n) \in J(W)$

Démonstration :

Soit $e \in \overline{\alpha}^* \cup \beta_*$

Supposons que $e \in \overline{\alpha}^*$.

Comme $\overline{\alpha}^* . \overline{\beta}_* = \varnothing$ (théoreme 2), $\exists x_1 \in \beta_*$ tel que $(e, x_1) \in A_x$

Les deux possibilités sont :

* $e \in I(W)$

$L = G(F_L, X_L; A_L)$ est une chaîne alternée avec :

$F_L = \{e\}$; $X_L = \{x_1\}$; $A_L = \{(e, x_1)\}$; $(e, x_1) = a_1 = a_n$

$e \in \mu_V(a_n, B_x)$ et $P_F(a_1) \in I(W)$

* $e \notin I(W)$ (point 1)

Comme $e \notin I(W)$, $\exists x_1 \in \beta_*$ tel que $(e, x_1) \in A(W)$ (comme ci-dessus, $\overline{\alpha}^* . \overline{\beta}_* = \varnothing$)

Si nous nous référons à la proposition 3.1(2) de [MURO 87], comme $e \in \overline{\alpha}^*$, il existe un graphe disjoint maximal W' tel que $\mu_A(e, B_x) \cap A(W') = \varnothing$ ou $e \in I(W')$.

Comme le graphe disjoint maximal W' est l'union des graphes disjoints maximaux $W^>$, $W^<$, $W^=$ sur respectivement $B^>$, $B^<$, $B^=$ et $| W^> | = | \beta_* |$, $\mu_A(x_1, B_x) \cap A(W') = \varnothing$ autrement W' ne serait pas maximal.

Considérons f_1 tel que $(f_1, x_1) \in A(W')$. Ainsi, (f_1, x_1) existe. (point 2)

Comme $(e, x_1) \in A(W)$, $(f_1, x_1) \notin A(W)$ autrement le graphe W ne serait pas disjoint.

Alors

$(e, x1) = a_n \in A(W)$

$(f_1, x_1) = a_{n-1} \notin A(W)$

et $P_X(a_n) = P_X(a_{n-1})$

Les deux possibilités pour f_1 sont :

$+ \mu_A(f_1, B_X) \notin A(W)$ (point 3)

Alors, $f_1 \in I(W)$ et $P_F(a_{n-1}) \in I(W)$

$+ \mu_A(f_1, B_X) \in A(W)$

Alors $f_1 \notin I(W)$

Considérons x_2 tel que $(f_1, x_2) \in A(W)$ (point 4)

Alors $(f_1, x_1) = a_{n-1} \notin A(W)$

$(f_1, x_2) = a_{n-2} \in A(W)$

et $P_F(a_{n-1}) = P_F(a_{n-2})$ (point 5)

Les points 1 à 5 peuvent être répétés avec une légère différence:

Comme $(f_1, x_1) \in A(W')$ (point 2), $(f_1, x_2) \notin A(W')$ parce que W' est un graphe disjoint.

Du théorème 5 de Berge [ROY 70] [BERG 57] [BART 78], nous savons qu'il n'existe pas de chaîne alternée entre $e \in I(W')$ et un autre élément appartenant à $I(W')$ ou $J(W')$. L'existence de la chaîne alternée (les arcs sont a_n, a_{n-1}, a_{n-2}) entraîne que $x_2 \notin J(W)$.

Considérons f_2 tel que $(f_2, x_2) \in A(W')$.

Comme $(f_1, x_2) \in A(W)$, $(f_2, x_2) \notin A(W)$

$(f_1, x_2) = a_{n-2} \in A(W)$

$(f_2, x_2) = a_{n-3} \notin A(W)$.

et $P_X(a_{n-2}) = P_X(a_{n-3})$

etc...

Les pas de la démonstration peuvent être réitérés. Le graphe étant fini, cette itération doit s'arrêter et l'unique possibilité d'arrêt est au point 3 :

$P_X(a_2) = P_X(a_2)$ et

$P_F(a_1) \in I(W)$

ce qui termine la construction de la chaîne alternée.

Maintenant, supposons que $e \in \beta_*$.

Il existe $f_0 \in \overline{\alpha}^*$, tel que $(f_0, e) \in A_X$. En effet, autrement le couple $(\varnothing, \beta^* \setminus \{e\})$ serait un autre support minimal extérieur pour $B^>$ et la dimension extérieure de $B^>$ serait inférieure à $|\beta^*|$.

L'existence f_0 de conduit à recommencer la chaîne de raisonnement avec $e \in \overline{\alpha}^*$.

Pour le sous-graphe semi-irréductible défini sur $\alpha^* . \overline{\beta}^*$, la démonstration est symétrique.

Réciproque :

Soit une chaîne alternée $L = G(F_L, X_L; A_L)$ telle que :

$A_L = \{a_1, \ldots, a_k, \ldots a_n\}$

$e \in \mu_V (a_n, B_x)$

$P_F (a_1) \in I (W)$

$\mu_V(a_k) \in \overline{\alpha}^* \cup \beta_* \; (\forall\, k = 1 \text{ à } n)$

Comme $P_F (a_1) \in I (W)$, la chaîne alternée présente la forme :

k pair $\quad a_k \in A(W)$

k impair $\quad a_{2k} \notin A(W)$

Deux cas se présentent :

* n pair

$a_{n-1} \notin A(W)$ et $a_n \in A(W) \Rightarrow P_x (a_{n-1}) = P_x (a_n)$

- $e \in \beta^*$

Ajoutons un arc (e', e) avec $e' \in \alpha^*$.

Alors $P_x ((e', e)) = P_x (a_n) = P_x (a_{n-1}) \Rightarrow (e', e) \in A(W)$ ce qui est impossible car $P_x (e', e) = P_x (a_n)$.

De plus, la définition de la chaîne alternée n'est pas respectée.

- $e \in \overline{\alpha}^*$

Ajoutons un arc (e, e') avec $e' \in \overline{\beta}_*$

Ceci est impossible car d'après la 3ème proposition du théorème 4, $\overline{\alpha}^* \,.\, \overline{\beta}_* = \varnothing$.

* n impair

$a_{n-1} \in A(W)$ et $a_n \notin A(W) \Rightarrow P_F (a_{n-1}) = P_F (a_n)$

- $e \in \beta_*$

Pour prolonger la chaîne alternée, ajoutons $(e', e) = a_{n+1} \in A(W)$ avec $P_x (a_n) = P_x (a_{n+1})$ et $e' \in \alpha^*$

Or $A(W) \subset (\overline{\alpha}^* \,.\, \beta_*) \cup (\alpha_* \,.\, \overline{\beta}^*) \cup (\alpha^* \setminus \alpha_* \,.\, \beta^* \setminus \beta_*)$ (th. 4)

Comme $(e', e) \in \alpha^* \,.\, \beta_*$, l'arc (e', e) n'existe pas.

- $e \in \overline{\alpha^*}$

Ajoutons un arc (e, e') avec $e' \in \overline{\beta_*}$.
Ceci est de nouveau impossible car alors $P_F(a_{n-1}) = P_F(a_n) = P_F((e, e'))$ ce qui ne respecte pas la définition de la chaîne alternée.

Supposons maintenant, une chaîne alternée quelconque telle que $e \in \mu_V(a_n, B_x) P_F(a_1) \in I(W)$ et $e \in \alpha^* \cup \overline{\beta_*}$. La chaîne alternée est en particulier une chaîne qui amène nécessairement un des deux cas ci-dessus qui représente le passage, en cas d'existence, de $A_x^>$ à $A_x^< \cup A_x^=$.
La démonstration est symétrique pour $B^<$.

Annexe 2

Propriété 2-1-5/5

Si B' est un graphe semi-irreductible de SEM (α_*, $\varnothing$) ou est irreductible,
alors : ($\forall\ \Phi \subset F'$ et $\Phi \neq F'$) $C_{F'}(\Phi, B') \neq \varnothing$

Démonstration

Hypothèse : ($\exists\ \Phi \subset F'$) tel que ($\Phi \neq F'$) et $C(\Phi, B') = \varnothing$
Ainsi $A' \cap (\Phi\ .\ X' \setminus Q(\Phi, W')) = \varnothing$
Comme $\Phi \subset F'$ et $Q(\Phi, W') \subset X'$, $\Phi\ \cup (F' \setminus \Phi) = F'$ et $Q(\Phi, W') \cup (X' \setminus Q(\Phi, W')) = X'$

Les arcs de A' appartiennent donc à :
$\Phi\ .\ Q(\Phi, W')$
$F' \setminus \Phi\ .\ Q(\Phi, W')$
$F' \setminus \Phi\ .\ X \setminus Q(\Phi, W')$
Si B' est irréductible, B' présente deux supports minimaux (F', $\varnothing$) et ($\varnothing$, X') .
Or ($F' \setminus \Phi$, $Q(\Phi, W')$) est un autre support minimal. En effet :

$$|F' \setminus \Phi\ | + |Q(\Phi, W')\ | = |F' \setminus \Phi\ | + |\ \Phi\ | = |F'|$$

Car W' est un graphe disjoint sur B' irréductible.
B' n'est donc pas irréductible ce qui est une contradiction.
Le raisonnement est identique pour une composante semi-irréductible de support extérieur minimal unique (α_*, $\varnothing$).

Annexe 3

Théorème 9

Soit W' $\in$ E (B') tel que W' est complet relativement à X'.
B' est un graphe irréductible si et seulement si
($\forall$ $\Phi \subset$ F' et $\Phi \neq$ F') $C_{F'}(\Phi, B') \neq \varnothing$

Démonstration

Soit B' réductible. Il est donc décomposable en k composantes irréductibles B_i et une composante semi-irréductible $B^>$ (théorème 7).

* $B^>$ existe.
Soit $\Phi = R(\beta_*, W')$
$\Phi = R(\beta_*, W^>)$ car $W' = W^= \oplus W^>$ et $W^=$ n'est pas défini sur β_* mais sur $\beta^* \setminus \beta_*$ (théorème 4)
$W^>$ est défini sur $(\overline{\alpha}^*. \beta_*)$ d'où $\Phi \subset \overline{\alpha}^*$.
$C_{F'}(\Phi, B') \subset \overline{\alpha}^*. \overline{\beta}_*$ par définition.
Or $\overline{\alpha}^*. \overline{\beta}_* \subset R_3'$ et $R_3' = \varnothing$ (théorème 8) d'où : $C(\Phi, B') = \varnothing$.

* $B^>$ n'existe pas.
B' est décomposable en k composantes irréductibles. Le théorème 8 déclare que $A_b' \cap R_3' = \varnothing$,

R_3' étant défini par $= \bigcup_{i>j} (S_i' \times T_j')$, le graphe ne présentant pas de composantes semi-irréductibles.

Pour $\Phi = S_k$, $S_k \times \bigcup_{j=1}^{k-1} T_J = \varnothing$. De plus, comme $T_k = \mu_V^- (\mu_A^-(\Phi, W'))$ (car chaque sous graphe W_i est complet) et :

si $T' = \bigcup_{j=1}^{k} T_J$, $\nexists$ $a \in A_b'$ tel que :
$\mu_V^+(a) \subset \Phi$ et $\mu_V^-(a) \subset T' \setminus T_k$ (ou $\mu_V^-(a) \not\subset \mu_V^-(\mu_A^-(\Phi, W'))$).
Ainsi ($\exists$ $\Phi \subset$ S') $C_{F'}(\Phi, B') = \varnothing$

Annexe 4

Propriété 2-2-1/3

$(\forall u \in V_> \cup V_<)$ $(\nexists v \in V_> \cup V_<)$ tel que :

1) $v \neq u$

2) Il existe une chaîne alternée $L = G(F_L, X_L ; A_L)$ avec: $(a_1 = u$ et $a_n = v)$ ou $(a_n = u$ et $a_1 = v)$.

Démonstration

Soit $u \in V_>$

Les deux possibilités de chaîne alternée sont $u = a_n$ et $u = a_1$.

* $u = a_n$

La propriété 2-2-1/2 indique qu'il ne peut exister de chaîne alternée avec $v = a_1$ et $v \neq u$ et donc en particulier avec $v \in V_> \cup V_<$.

* $u = a_1$

Nécessairement si $v = a_n$ et $v \neq u$, $v \notin V_>$ d'après la propriété 2-2-1/2.

Soit $v \in V_<$.

Soit une chaîne alternée L avec :

$A_L = \{a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n\}$

$P_F(a_1) = P_F(a_2)$ car $a_1 \in A(W^+)$

De là, $P_F(a_2) \in I(W)$.

De même, $P_X(a_{n-1}) = P_X(a_n)$ car $a_n \in A(W^+)$.

De là, $P_X(a_{n-1}) \in J(W)$.

L'existence de L nécessite l'existence de la chaîne alternée L' définie par :

$A_{L'} = \{a_i \mid i = 2 \ldots n-1\}$

L' relie donc deux sommets insaturés distincts.

Or, le théorème 5 de Berge [BERG 57] indique qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un couplage d'un graphe biparti soit maximal est qu'il n'existe pas de chaîne alternée reliant deux sommets insaturés distincts. Comme le graphe disjoint est complet et donc en particulier maximal, ni L' ni L n'existe de ce fait.

La démonstration est symétrique pour $u \in V_<$.

Annexe 5

Propriété 2-2-3/1

Soit $\alpha_i' = \alpha_i \cup F_+$

$\beta_i' = \beta_i \cup X_+$

(α_i', β_i') est un SEM de B^+.

Démonstration

La décomposition canonique donne :

$F_+ = \alpha_* \cup S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_k \cup \overline{\alpha}^*$

$X = \overline{\beta}^* \cup T_1 \cup T_2 \ldots \cup T_k \cup \beta_*$ et (α_i, β_i) est un SEM pour i = 1 à k avec :

$\alpha_i = \alpha_* \cup S_1 .. \cup S_i$

$\beta_i = T_{i+1} \cup ... \cup T_k \cup \beta_*$

Ajoutés à A_X, les éléments de $V_>$ et $V_<$ vérifient :

$(\forall a \in V_>)$ $P_X^+(a) \in X_+$ et

$(\forall a \in V_<)$ $P_F^+(a) \in F_+$

Aussi $(\alpha_i \cup F_+, \beta_i \cup X_+)$ est un support de B^+.

La suite de la démonstration montre qu'il est aussi minimal.

Comme X_+ est composé d'éléments ajoutés au graphe initial, $|\beta_* \cup X_+| = |\beta_*| + |X_+|$.

Par construction de B^+, $|X_+| = |V_>| = |I(W)|$.

Plus encore, le théorème 4 conduit à $|\beta_*| = |A(W^>)| = |\overline{\alpha}^* \setminus I(W^>)|$, $\overline{\alpha}^* \setminus I(W^>)$ étant les éléments couverts par $W^>$.

Alors $|\beta_* \cup X_+| = |\overline{\alpha}^* \setminus I(W^>)| + |I(W)|$.

Comme $W = W^> \oplus W^< \oplus W^=$ et $W^>$, $W^<$, $W^=$ sont définis sur différents ensembles, $I(W) = I(W^>) \cup I(W^<) \cup I(W^=)$. Comme les éléments de α_* et $\alpha^* \setminus \alpha_*$ sont couverts par respectivement $W^<$ et $W^=$, $I(W) = I(W^>)$.

Ainsi $|\beta_* \cup X_+| = |\overline{\alpha}^* \setminus I(W)| + |I(W)|$.

Comme $I(W) \subset \overline{\alpha}^*$ (proposition 3.1.(2) de [MURO 87]), $|\beta_* \cup X_+| = |\overline{\alpha}^*|$.

$|\alpha_i \cup F_+| + |\beta_i \cup X_+| =$

$|\alpha_* \cup S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_i \cup F_+| +$

$|T_{i+1} \cup ... \cup T_k \cup \beta_* \cup X_+| =$

$|F_+| + |\alpha_*| + |S_1| + ... + |S_i| + |T_{i+1}| + ... + |T_k| + |\beta_* \cup X_+| =$

$|F_+| + |\alpha_*| + |S_1| + ... + |S_k| + |\beta_* \cup X_+| =$

$|F_+| + |\alpha_*| + |S_1| + ... + |S_k| + |\overline{\alpha}^*| =$

$|F_+| + |F_x| = |F^+|$

Comme W^+ est un sous graphe disjoint complet de B^+ (propriété 2-2-1/1), $|A(W^+)| = |F^+| = |X^+|$. Le théorème 2 indique que dim $(B^+) = |A(W^+)|$. Ainsi dim $(B^+) = |F^+|$. Alors, le support $(\alpha_i \cup F_+, \beta_i \cup X_+)$ est minimal.

Annexe 6

Propriété 2-2-4/1

Le graphe B^+ n'a aucune composante semi-irréductible.

Démonstration

La propriété 2-2-1/1 dit que le sous graphe disjoint W^+ est complet. La proposition 3.1.(2) de [MURO 87] conduit à $\overline{\alpha}^* = \varnothing$ et $\overline{\beta}^* = \varnothing$.
Ainsi $A_x{}^> = \varnothing$ $A_x{}^< = \varnothing$ et $B^> = G(\varnothing, \beta_* ; \varnothing)$ $B^< = G(\alpha_*, \varnothing ; \varnothing)$.
Les sous graphes disjoints maximaux $W^>$ et $W^<$ n'ont pas d'arcs et ainsi l'application du théorème 4 donne :

$|A(W^>)| = 0 = |\beta_*|$

$|A(W^<)| = 0 = |\alpha_*|$

Les graphes $B^>$ et $B^<$ n'ont ni sommets ni arcs et n'existent pas..

Annexe 7

Propriété 2-2-4/2

Les graphes disjoints maximaux sur $B^{>+}$ et $B^{<+}$ sont complets.

Démonstration

L'hypothèse que $\alpha_* = \bar{\beta}^* = \varnothing$ et $S_i = T_i = \varnothing$ pour i = 1 à k est prise : B_X est réduit à $B^>$. Comme $\bar{\beta}^* = \varnothing$, la proposition 3.1(2) de [MURO 87] conduit à J (W) = ∅ et ainsi $F_+ = \varnothing$.

$$F^+ = F_X \cup F_+$$
$$= \alpha_* \cup S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_k \cup \bar{\alpha}^* \cup F_+$$
$$= \bar{\alpha}^*$$

et $X^+ = X \cup X_+$
$$= \bar{\beta}^* \cup T_1 \cup T_2 \ldots \cup T_k \cup \beta_* \cup X_+$$
$$= \beta_* \cup X_+$$

Ainsi, le graphe B^+ est réduit à $B^{>+}$. Plus encore, la propriété 2-2-1/1 montre que W^+ est un sous graphe complet de B^+. Comme $B^{>+} = B^+$, le sous graphe disjoint maximal sur $B^{>+}$ est aussi complet.
La preuve est symétrique pour $B^{<+}$.

Annexe 8

Propriété 2-2-4/3

$(\forall W \in E(B_X))$ $B^{>+}$ et $B^{<+}$ ne sont pas irréductibles.

Démonstration

Supposons que $B^{<}$ n'existe pas. Alors, $\alpha_* = \bar{\beta}^* = \varnothing$. La proposition 3.1.(2) de [MURO 87] conduit à $J(W) = \varnothing$ et $F_+ = \varnothing$: $B^{<+}$ n'existe pas.

Supposons maintenant, que le composant semi-irréductible $B^{<}$ existe :

$(\alpha_*, \varnothing)$ est l'unique SEM de $B^{<}$ et $|A(W^{<})| = |\alpha_*|$. $(\bar{\beta}^*, \varnothing)$ est le support de $B^{<}$ qui n'est pas minimal : $|\bar{\beta}^*| > |\alpha_*|$.

Alors $|\bar{\beta}^*| > |A(W^{<})|$ et $|\bar{\beta}^*| - |\alpha_*|$ est le cardinal des éléments de $\bar{\beta}^*$ qui sont les extrémités d'aucun arc de $A(W^{<})$.

Ainsi, $J(W^{<}) \neq \varnothing$. Comme $W = W^{<} \oplus W^{>} \oplus W^{=}$ et $W^{<}$, $W^{>}$, $W^{=}$ sont définis sur différents ensembles, $J(W) \neq \varnothing$ et ainsi $F_+ \neq \varnothing$. F_+ peut être défini par :

$(\forall f_{i+} \in F_+)$ $(\exists x_i \in j(W))$ et

$(\exists (f_{i+}, x_i) \in V_<)$ tel que $\mu_A (f_{i+}, B^+) = \{(f_{i+}, x_i)\}$

If $B^{<+}$ est irréductible, les deux unique SEM seraient : $(\alpha_* \cup F_+, \varnothing)$ et $(\varnothing, \bar{\beta}^*)$.

Soit $f_{i+} \in F_+$. Alors, $(\alpha_* \cup F_+ \setminus \{f_{i+}\}, \{x_i\})$ est un autre SEM de $B^{<+}$ comme l'unique arc couvert par f_{i+} est maintenant couvert par x_i.

Ainsi, $B^{<+}$ n'est pas irréductible.

La démonstration est symétrique pour $B^{>+}$.

Annexe 9

Propriété (2-3-3/1)

$(\forall u \in V_>)\ (\nexists v \in V)$ tel que $v \rightarrow u$ et $v \neq u$

$(\forall u \in V_<)\ (\nexists v \in V)$ tel que $u \rightarrow v$ et $v \neq u$

Démonstration

Soit, un chemin de $v \in V$ vers $u \in V_>$ dont les arcs de A sont :
$(v, a_1)\ (a_1, a_2)...(a_{m-2}, a_{m-1})\ (a_{m-1}, a_m)\ (a_m, u)$.
Considérons l'arc (a_m, u). la construction du graphe G a nécessité l'existence de l'arc noté a_{m+1} tel que :

$$a_{m+1} \in A^+ \setminus A(W^+)$$
$$P_{F^+}(a_m) = P_{F^+}(a_{m+1}) \qquad (1)$$
$$P_{x^+}(a_{m+1}) = P_{x^+}(u)$$

Ceci correspond à une chaîne alternée telle que n = 3 et dont les arcs a_1, a_2, a_3 correspondent respectivement à a_m, a_{m+1}, u.
Or la propriété 2-2-1/2 du 2) indique que l'unique chaîne alternée telle que $a_n \in V_>$ ou $P_{X+}(a_n) \in X_+$ est composé de l'arc $a_n = a_1$. Ainsi la chaîne alternée formée de a_m, a_{m+1}, u (et aussi a_{m+1}, u) n'existe pas. La condition (1) de la construction de l'arc (a_m, u) n'est pas remplie ce qui interdit l'écriture du chemin de v vers u.
La démonstration est symétrique pour la seconde partie.

Annexe 10

Propriété 2-3-3/2 [DECL 91a]

($\forall u \in V_> \cup V_<$) ($\nexists v \in V_> \cup V_<$) tel que:

1) $u \neq v$

2) u---> v ou v ---> u

Démonstration

Soit $u \in V_> \cup V_<$, $v \in V_> \cup V_<$.

Supposons qu'il existe un chemin orienté de u à v . Il est défini par : ($a_1 = u, a_n = v$) (a_1 , a_3), (a_3 , a_5) , ..., (a_{n-4} , a_{n-2}), (a_{n-2} , a_n) (on indice de deux en deux pour simplifier).

La construction de G à partir de B^+ nécessite l'existence des arcs a_2 , a_4 ,...,a_{n-1} tel que $a_{2k} \notin A$ (W') pour k = 1 à (n-1)/2 ,

et $P_{F^+}(a_h) = P_{F^+}(a_i)$

$P_{X^+}(a_i) = P_{X^+}(a_j)$

avec h = 2 k + 1 , i = 2 k + 2 et j = 2 k + 3 pour k = 0 à (n-3) /2

ce qui définit une chaîne alternée L^+ (F_{L^+} , X_{L^+}; A_{L^+})

avec $A_{L^+} = \{ a_i \mid a_i \in A^+ \text{ et } i = 1 \text{ à } n \}$

Comme $a_1 = u \in V_> \cup V_<$ et $a_n = v \in V_> \cup V_<$, l'application de la propriété 2-2-1/3 du 2 montre la non existence de ce chemin.

La démonstration est symétrique pour la seconde partie.

Annexe 11

Soit les graphes $G^{>} = G (V^{>} ; A^{>})$, $G^{<} = G (V^{<} ; A^{<})$ et $G^{=} = G (V^{=} ; A^{=})$ définis par:

$V^{>} = \{ v \mid (v \in V)(\exists u \in V_{>}) u \text{--->} v \}$

$V^{>} = \{ v \mid (v \in V)(\exists u \in V_{<}) u \text{--->} v \}$

$V^{=} = V \setminus (V^{>} \cup V^{>})$

alors $V = V^{>} \cup V^{>} \cup V^{=}$

$A^{>} = \{ a \mid \mu V(a , G) \subset V^{>} \}$

$A^{<} = \{ a \mid \mu V(a , G) \subset V^{<} \}$

$A^{=} = \{ a \mid \mu V(a , G) \subset V^{=} \}$

Les sous-graphes $B^{>}$, $B^{<}$, $B^{=}$ de B_X et les sous-graphes $G^{>}$, $G^{<}$, $G^{=}$ de G sont respectivement liés par les correspondances suivantes:

Théorème 11 [DECL 91a]

$B^{>}$ et $G^{>}$: $\overline{\alpha}^{*} = P_F (V^{>})$: $\beta_{*} = P_X (V^{>})$

$B^{<}$ et $G^{<}$: $\alpha_{*} = P_F (V^{<})$: $\overline{\beta}^{*} = P_X (V^{<})$

$B^{=}$ et $G^{=}$: $\alpha^{*} \setminus \alpha_{*} = P_F (V^{=})$: $\beta^{*} \setminus \beta_{*} = P_X (V^{=})$

Démonstration

Soit $e \in \overline{\alpha}^{*} \cup \beta_{*}$

Le théorème 6 déclare qu'il existe une chaîne alternée $L = G (F_L , X_L ; A_L)$

$A_L = \{ a_i \mid i = 1 \text{ à } m \}$ tel que:

1) $e \in \mu V(a_m , B_X)$

2) $P_F (a_1) \in I (W)$

Comme $P_F (a_1) \in I (W)$, $a_1 \notin A (W)$

Supposons $e \in \overline{\alpha}^{*}$

La chaîne alternée telle que le dernier arc appartient à A (W) est choisie.

- Si $a_m \notin A (W)$, $a_{m-1} \in A (W)$ et $P_F (a_{m-1}) = P_F (a_m)$. Alors la chaîne alternée telle que les arcs sont a_i i = 1 à n avec n = m-1 est considérée.

- Si $a_m \in A (W)$, n = m.

$a_{2k} \in A (W)$ pour k = 1 à n/2 (n est pair)

Soit $\{ f_0 \} = P_F (a_1)$

A f_0 est associé x_{0+} dans le graphe biparti B^{+}. Soit $a^{+} = (f_0 , x_{0+}) \in A (W^{+})$.

La chaîne alternée correspondante est $L^+ (F_{L^+}, X_{L^+} ; A_{L^+})$ avec $A_{L^+} = \{ a^+ \} \cup A_L$.

Comme $A_{L^+} \cap A (W^+) = \{ a^+ \} \cup \{ a_{2k} \mid k = 1 \text{ à } (n-2)/2 \}$, le sous-graphe G' de G est :

$G' = G (V' ; A')$

avec $V' = A_{L^+} \cap A (W^+)$

$A' = \{ (a^+ , a_2) \cup \{ a_{2k} , a_{2k+2}) \mid k = 1 \text{ à } (n-2)/2 \}$

Comme $a^+ \in V_>$, $V' \subset V^>$

Ainsi, $a_n \in V^>$. Comme $e = P_F (a_n) \in P_F (V^>)$, $\bar{\alpha}^* \subset P_F (V^>)$.

Supposons maintenant $e \in \beta^*$. Comme dans l'annexe 1 (théorème 6), il existe $f \in \bar{\alpha}^*$ tel que $(f , e) \in A^>$. Plus encore $| A (W^>) | = | \beta^* . |$ (théorème 4), il existe $f \in \bar{\alpha}^*$ tel que $(f , e) \in .A (W^>)$.

Si $a_m \in .A (W)$, les arcs de la chaîne alternée sont a_i $i = 1$ à n avec $n = m$.

Autrement, $n = m+1$ avec $a_{m+1} = (f , e)$. Comme $P_X (a_m) = P_X (a_{m+1})$ avec $a_m \notin A (W)$ et $a_{m+1} \in .A (W)$, le surgraphe est une chaîne alternée.

Comme la suite de la démonstration est identique à ci-dessus, $e \in P_X (a_n)$ avec $a_n \in V^>$ et $\beta^* . \subset P_X (V^>)$

Pour $G_<$, la démonstration est symétrique et

$\alpha_* \subset P_F (V^>)$

$\bar{\beta}^* \subset P_F (V^>)$

Réciproque

Soit $v_1 = (f_1, x_1) \in V_<$

Alors, $f_1 \in F_+$ et $x_1 \in J (W)$

Comme $\mu_A (x_1 , B_X) \notin A (W)$, la proposition 3.1.(2) de [MURO 87] conduit à $x_1 \in \bar{\beta}^*$.

Supposons que $v_2 = (f_2, x_2) \in V$ tel que $(v_2 , v_1) \in A$.

Comme $V = A (W^+)$, $v_1 \in A (W^+)$ et $v_2 \in A (W^+)$. De plus, comme (v_2 , v_1) existe, $\exists$ $a_i \in A^+ \setminus A (W^+)$ tel que $P_{F^+}(v_2) = P_{F^+}(a_i)$ et $P_{X^+}(a_i) = P_{X^+}(v_1)$.

Alors, $a_i = (f_2 , x_1)$

Comme $\bar{\alpha}^* . \beta^* = \varnothing$ (théorème 4), $f_2 \in \alpha_*$

Pour la cohérence de la notation, $W = W_1$. Comme $\mu_A (x_1 , B_X) \notin A (W_1)$, un autre sous-graphe disjoint maximal W_2 peut être construit.

$A (W_2) = A (W_1) \setminus \{ (f_2, x_2) \} \cup \{ (f_2, x_1) \}$

d'où $| A (W_2) | = | A (W_1) |$

Ainsi, $x_2 \in J (W_2)$ et $\mu_A (x_2 , W_2) \notin A (W_2)$

La proposition conduit à $x_2 \in \beta^*$. Le raisonnement peut être répété pour un sommet v_3 tel que $(v_3, v_2) \in A$ etc... L'itération de la procédure donne :

$(\forall\ v = (f, x) \in V)$ et $(v \neq v_1)$ tel que $v \dashrightarrow v_1$,

$f \in \alpha_*$ et $x \in \bar{\beta}^*$. De plus $v \notin V_<$ (propriété 2-3-3/2 du 3). La définition de $V^<$ conduit à :

$(\forall\ v = (f, x) \in V^< \setminus V_<)\ f \in \alpha_*$ et $x \in \bar{\beta}^*$.

En d'autre termes : $P_F(V^<) \subset \alpha_*$ et

$$P_X(V^<) \subset \bar{\beta}^*$$

Pour $G^>$: $P_F(V^>) \subset \alpha^*$

$$P_X(V^>) \subset \beta_*$$

Ainsi la conclusion est :

$P_F(V^<) = \alpha_*$; $P_X(V^<) = \bar{\beta}^*$ et

$P_F(V^>) = \bar{\alpha}^*$; $P_X(V^>) = \beta_*$

Plus encore , W^+ est un sous-graphe disjoint. Comme $V = A(W^+)$, $\forall (v, v') \in V.V$ et $v \neq v'$, $P_F(v) \neq P_F(v')$ et $P_X(v) \neq P_X(v')$.

Ainsi, $P_F(V) = P_F(V^< \cup V^> \cup V^=)$

$$= P_F(V^<) \cup P_F(V^>) \cup P_F(V^=)$$

$$= \alpha_* \cup \bar{\alpha}^* \cup P_F(V^=)$$

De plus , $V = A(W^+)$ est un sous graphe disjoint complet de $B^+ = G(F^+, X^+ ; A^+)$ et $F \subset F^+$, $X \subset X^+$. Alors $P_F(V) = F$; $P_X(V) = X$ et $P_F(V^=) = F \setminus (\alpha_* \cup \bar{\alpha}^*) = \alpha^* \setminus \alpha_*$

Egalement, $P_X(V^=) = \beta^* \setminus \beta_*$.

Annexe 12

Théorème 21

Soit G = G (V;A) et G' = G (V';A') un sous-graphe de G tel que $|V'| > 1$.
G' est une structure f-connexe si et seulement si
$(\forall U \neq V')$ et $(U \subset V')$ et $(U \neq \emptyset)$ $C^-(U, G') \neq \emptyset$.

Démonstration

Soit G' = G (V';A') un graphe f-connexe.
Soit $U \neq V'$ et $U \subset V'$.
Soit $\overline{U}$ le complémentaire de U dans V' $\overline{U} \neq \emptyset$ car $U \neq V'$. Soit $(u,v) \in (U \times \overline{U})$.
Par hypothèse, il existe au moins un chemin de u vers v et un chemin de v vers u.
On considère le chemin CH = G (U_1;A_1), qui est le plus grand sous-graphe du chemin de u vers v tel que son extrémité initiale est u et $(\forall a \in A_1)$ μ_S (a, CH) $\subset$ U.
L'arc qui succède au dernier arc de CH est, soit d'extrémité terminale dans $\overline{U}$, soit n'existe pas. Dans ce dernier cas, le chemin de u vers v se réduit à CH qui ne présente pas d'extrémité terminale dans $\overline{U}$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Exemple : (voir figure A-12/1).
Le graphe est f-connexe .
$U = \{M_1, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9, M_{10}\}$
$C^-(U,G) = \{(M_1, M_0)\ (M_1, M_2)\ (M_4, M_3)\ (M_5, M_7)\ (M_{10}, M_{11})\ (M_9, M_{11})\}$
$C^-(\overline{U},G) = \{(M_0, M_1)\ (M_{11}, M_1)\ (M_3, M_6)\ (M_7, M_8)\}$

Réciproque

Soit l'hypothèse suivante :
$(\forall U \neq V'$ et $U \subset V')$ $C^-(U, G') \neq \emptyset$.
Soit $M_1 \in V'$. $C^-(M_1, G') \neq \emptyset$.
Ainsi, chaque point a un arc sortant qui introduit de par l'existence de son extrémité terminale un nouveau point :
$(\forall M_1 \in V')$ $\mu_V^-(\mu_A^-(M_1)) \neq \emptyset$.
Un point $M_2 \in \mu_V^-(\mu_A^-(u))$ est considéré. Pour M_2, le même raisonnement peut être réitéré, etc....

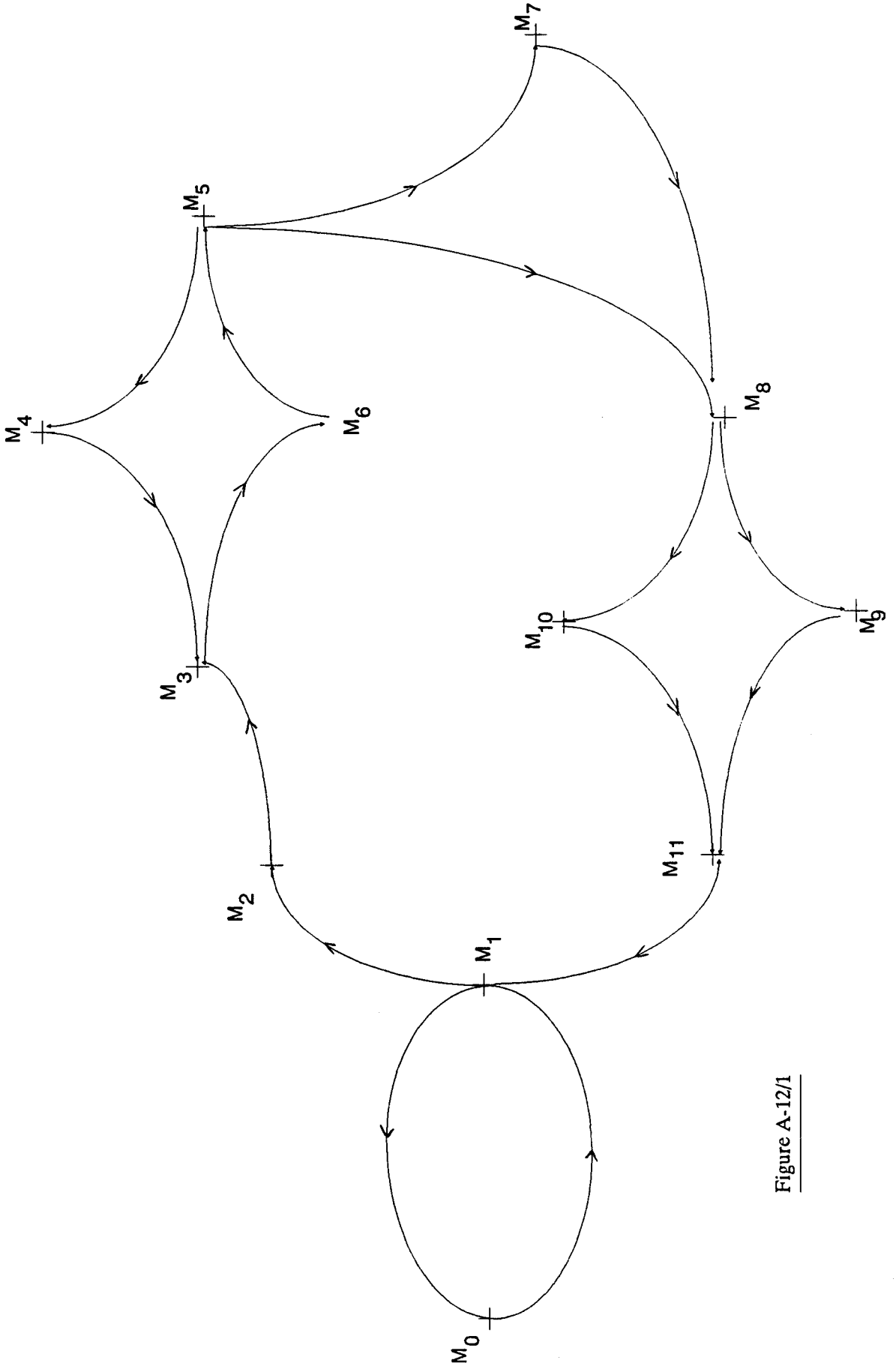


Figure A-12/1

L'itération doit se répéter de manière infinie afin de respecter l'hypothèse .Si chaque nouveau point n'est pas un point déjà introduit et donc n'a pas déjà un arc sortant, l'ensemble des sommets est infini.
Cependant, le graphe est fini ainsi que le nombre de sommets. Il existe donc un sommet M_k tel que son arc sortant ait pour extrémité terminale un point M_l déjà introduit et ayant un arc sortant.

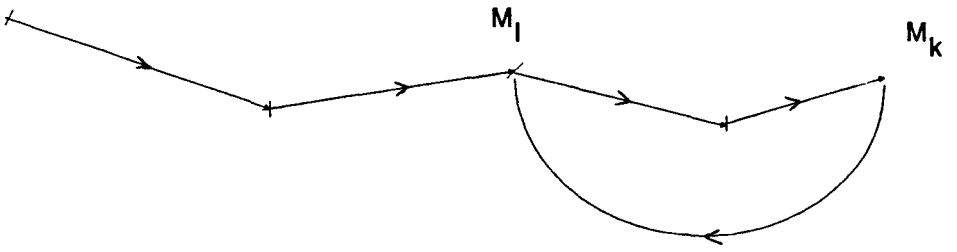


Figure A-12/2

Par la construction des k premières itérations, il existe un chemin joignant M_l à M_k. De même, l'arc sortant de M_k vers M_l est un chemin de M_k vers M_l. Il existe donc une structure f-connexe auquelle appartiennent M_l et M_k. Soient les points appartenant à cette structure formant V_k.
Il peut être remarqué que d'autres arcs peuvent exister entre les différents points de la figure. Celle-ci fait apparaître un cactus formé d'une tige et d'un bouton notion de la théorie des graphes employée par [Lin 74] [Lin 77] puis par [Rech 88].
V' peut être partitionnée en éléments V_P tel que :

$V_i \cap V_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$

pour $p \neq k \quad V_P = \{M_P \mid M_P \in V' \setminus V_k\}$

$p = k \quad V_P = V_k$

Sur ce nouvel ensemble de points V_P, le graphe condensé $D_1(G')$ est formé. L'hypothèse $C^-(U, G') \neq \varnothing$ peut être appliquée qui correspond ici à $C^-(V_P, D_1(G')) \neq \varnothing$.
De nouveau, un graphe condensé $D_2(D_1(G'))$ peut être établi et la procédure peut ainsi être réitérée.
Le graphe G' étant fini, le nombre d'itération est limité et le dernier graphe induit $D_n(D_{n-1}(...(G')))$ sera un point. Or un point est une structure f-connexe (théorème 15). De plus, la condensation d'un graphe en un point entraîne que celui-ci est f-connexe (théorème 18). $D_{n-1}(...(G'))$ est donc f-connexe.
Plus encore, le théorème 19 déclare que la condensation d'un graphe en un graphe f connexe entraîne que ce premier est f-connexe. L'application de ce théorème autant de fois qu'il est nécessaire entraîne que le graphe G' est f-connexe.

Annexe 13

Théorème 23

Soit le graphe biparti B' de graphe disjoint W' complet
$(\forall\ \Phi \subset F')$ et $(\Phi \neq F')\ \ C_{F'}(\Phi, B') \neq \varnothing$
$\Leftrightarrow$ le graphe G' est f-connexe.

Démonstration

Soit G' = G(V';A') f-connexe. Ceci est équivalent à $(\forall\ U \neq V'$ et $U \subset V')\ C(U, G') \neq \varnothing \Leftrightarrow$
$(\exists\ a \in A')\ \mu_V^+(a) \in U$ et $\mu_V^-(a) \notin U$.
Soit $a_h = \mu_V^+(a)$ et $a_j = \mu_V^-(a)$ d'où $a = (a_h, a_j) \in (U \times V \backslash U)$.
a n'existe que par l'existence de a_i tel que

$$P_F^+(a_h) = P_F^+(a_i)$$
$$P_X^+(a_i) = P_X^+(a_j)$$

Soit $P_F^+(U) = \Phi$
Comme $a_h \in U$ et donc $P_F^+(a_h) \in \Phi$, $P_F^+(a_i) \in \Phi$. (1)
Comme $V' \subset A(W^+)$ avec W^+ graphe disjoint complet et que de plus B' présente un graphe complet W'.
$P_F^+(V' \backslash U) = S' \backslash P_F^+(U) = S' \backslash \Phi$
$P_X^+(V' \backslash U) = T' \backslash P_X^+(U)$
$a_j \in V' \backslash U$ et donc $P_X^+(a_j) \in T' \backslash P_X^+(U)$ d'où $P_X^+(a_i) \in T' \backslash P_X^+(U)$.
Comme $U = \mu_A^-(\Phi, W^+)$, $P_X^+(a_i) \in T' \backslash P_X^+(\mu_A^-(\Phi, W'))$. (2)
Comme $(\forall\ a_i \in A_X)\ a_i \in (F_X \times X)$
une autre forme pour (1) et (2) est $\mu_V^+(a_i) \in \Phi$ et
$\mu_V^-(a_i) \notin \mu_V^-(\mu_A^-(\Phi, W'))$.

Annexe 14

Théorème 25

Soit B' = G (S', T';A_b') un sous-graphe de B^+, de graphe disjoint W' complet.
B' est un graphe irreductible si et seulement si $\forall$ (a_i, a_j) $\in$ A(W') . A(W') pris dans cet ordre, il existe une chaîne alternée L sous-graphe de B' telle que :
ses n arcs peuvent être renommés sous la forme A_L = {b_1,...., b_n} avec b_1 (b_n) correspondant à a_i (a_j).

Démonstration :

Soient a_i, a_j deux arcs quelconques de A(W').
Dans le graphe associé G', les deux arcs deviennent deux sommets de V' = A(W').
Le théorème 24 indique que B' est un graphe irreductible si et seulement si G' est un graphe f-connexe : quel ques soient deux sommets a_i, a_j de V' pris dans cet ordre, il existe un chemin de a_i à a_j. Après avoir renommé chaque sommet du chemin (on choisit un pas de deux pour simplifier l'explication), celui-ci prend la forme :
(b_1, b_3) (b_3, b_5)....(b_{n-2}, b_n) avec b_1 (b_n) correspond à a_1, (a_j).
La construction de G' à partir de B' a nécessité l'existence des arcs b_2, b_4.... tels que :
$b_{2k} \notin$ A (W') pour k = 1 à (n-1)/2 (n impair)
avec de plus :
$P_F^+ (b_h) = P_F^+ (b_i)$
$P_X^+ (b_i) = P_X^+ (b_j)$
pour h = 2k+1, j = 2k+3, i = 2k+2
k = 0 à (n-3)/2
Ceci correspond également à la définition d'une chaîne alternée dont les arcs sont :
A_L = {b_i | i=1 à n} avec la particularité que :
b_1, $b_n \in$ A (W')
Inversement, l'existence d'une chaîne alternée dans B' entraîne naturellement l'existence d'un chemin dans G' : l'écriture sous forme chaîne alternée ou chemin orienté est équivalente, cette dernière étant cependant plus condensée.

BU LILLE

Annexe 15

Théorème 26

Soit $B_X = G(F_X, X; A_X)$, B^+ son graphe étendu et $G = G(V;A)$ le graphe associé de B^+ relativement à W^+.
Les sous-graphes f-connexes de $G^=$ sont respectivement les graphes associés des composantes irréductibles de B_X.

Démonstration

La propriété 2-2-3/5 indique que les composants irreductibles B_i de B_X restent irréductibles dans B^+. Pour chacun de ces sous-graphes de B^+, le théorème 24 entraîne que le graphe associé G_i est f-connexe. Chaque G_i est de plus maximal. En effet, dans le cas contraire, une autre structure f-connexe G'_i tel que $G_i \subset G'_i$ existerait. De ce fait, il existerait un B'_i irréductible correspondant à G'_i tel que $B_i \subset B'_i$. Comme les composantes irréductibles issues de la décomposition canonique de B^+ sont les structures les plus grandes, B_i ne serait plus irréductible ce qui est une contradiction.
D'autre part, commes les composantes irréductibles de B_X sont des sous-graphes de $B^=$, le théorème 11 donnant la correspondance entre $B^=$ et $G^=$ montre que les structures f-connexes associées aux composants irréductibles B_i sont sous-graphes de $G^=$.

Annexe 16

Théorème 3

Soit rang J ($\underline{\underline{X}}^{-}$) = | A (W) |

Le système (3) est compatible ssi

($\forall x_{i+} \in X_{+}$) $dx_{i+} = 0$

Démonstration

Soit le système compatible:

$$J(X)\,dX = dD \qquad (1)$$

avec

$$J(X) = \left| \begin{array}{c} A_2 \\ \hline A_{41} \quad | \quad A_{42} \end{array} \right|$$

d'où

$$A_2\,dX = dD_1 \quad (a)$$

$$(A_{41}\ A_{42})\,dX = dD_2 \quad (b)$$

Soit le sur-système correspondant. Comme det ($J(X^{+})$) $\neq 0$, il est compatible et dX+ vérifie donc le sur-système suivant:

$$J(X^{+})\,dX^{+} = dD^{+}$$

ou $A_1\,dX_{+} + A_2\,dX = dD_1$

$$A_4\,dX = (dD_2, dE)^{t}$$

d'où $A_1\,dX_{+} = 0$ et $dX_{+} = 0$

Réciproque

Soit $dX_{+} = 0$

Comme det ($J(X^{+})$) $\neq 0$, le sur-système suivant est compatible: dX^{+} existe et donc aussi dX.

$$J(X^{+})\,dX^{+} = dD^{+}$$

$$A_1\,dX_{+} + A_2\,dX = dD_1$$

$$A_4\,dX = (dD_2, dE)^{t}$$

En retirant les dernières lignes de A_4 , le système initial (1) est retrouvé et est donc également compatible.

Annexe 17

Propriété 3-2-2/1 : expression des variables prétextes

L'expression suivante correspond à chacune des variables prétextes x_{i+} de X_+ . L'indice i est le numéro de ligne après un éventuel réindiçage .

$$dx_{i+} = dD_i - (a_{2i}{}^1 \ldots a_{2i}{}^r) A_{41}{}^{-1} (dD_{m-r+1} \ldots dD_m)^t$$

Démonstration

Le jacobien du sursystème est partitionné en quatre blocs tels que A_1 soit non singulier.

Soit $A = J (X^+)$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = A$$

En posant l'inverse de A comme ci-dessous (det $A \neq 0$) ,

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}$$

les composantes M_1 , M_2 , M_3 et M_4 peuvent être calculées par les équations matricielles suivantes :

$$M_4 = (A_4 - A_3 A_1{}^{-1} A_2)^{-1}$$
$$M_3 = - M_4 A_3 A_1{}^{-1}$$
$$M_2 = - A1^{-1} A_2 M_4$$
$$M_1 = A1^{-1} + A_1{}^{-1} A_2 M_4 A_3 A_1{}^{-1}$$

d'où , comme $A_1 = I_{m-r}$ et $A_3 = 0$

$$M_4 = A_4{}^{-1}$$
$$M_3 = 0$$
$$M_2 = -A_2 A_4{}^{-1}$$
$$M_1 = I_{m-r}$$

$$\begin{vmatrix} dX_+ \\ dX \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & -A_2 A_4^{-1} \\ 0 & A_4^{-1} \end{vmatrix} dD^+$$

dX_+ de dimension m-r et dX n .

Comme $dD^+ = (dD_1, dD_2, dE)^t$ avec dD_1 , dD_2, dE de dimension respectivement m-r ,r et n-r ,

$$dX_+ = dD_1 - A_2 A_4^{-1} (dD_2 , dE)^t$$
$$dX = A_4^{-1} (dD_2 , dE)^t$$

$A_2 A_4^{-1}$ est calculé ci-dessous .

$$A_4 = \begin{vmatrix} A_{41} & A_{42} \\ A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}$$

On pose

$$A_4^{-1} = \begin{vmatrix} M_5 & M_6 \\ M_7 & M_8 \end{vmatrix}$$

$M_8 = (A_{44} - A_{43} A_{44}^{-1} A_{42})-1$
$M_7 = - M_{44} A_{43} A_{41}^{-1}$
$M_6 = - A_{41}^{-1} A_{42} M_{44}$
$M_5 = A_{41}^{-1} + A_{41}^{-1} A_{42} M_{44} A_{43} A_{41}^{-1}$

d'où , comme $A_{43} = 0$ et $A_{44} = I_{n-r}$

$M_8 = I_{n-r}$
$M_7 = 0$
$M_6 = - A_{41}^{-1} A_{42}$
$M_5 = A_{41}^{-1}$

$$A_4^{-1} = \begin{vmatrix} A_{41}^{-1} & -A_{41}^{-1} A_{42} \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix}$$

D'autre part , A_2 présente la structure suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,r} & 0 \cdots 0 \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m-r,1} \cdots a_{m-r,r} & 0 \cdots 0 \end{vmatrix}$$

$a_{i,j}$ i de à 1 à m-r et j de r+1 à n égale 0 car les lignes de A_2 correspondent aux relations non couplées et les colonnes de r+1 à n aux colonnes des variables non couplées . Une intersection non vide indiquerait qu'un couplage entre une relation non couplée et une variable non couplée peut être effectuée et de là , le couplage est non maximal ce qui est contraire à l'hypothèse .

A_2 est donc de la forme

$A_2 = (A_{21} , 0)$ avec A21 de dimension m-r . r

Dans ces conditions $A_2 A_4^{-1}$ vaut :

$$A_2 A_4^{-1} = \begin{vmatrix} A_{21} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{41}^{-1} & - A_{41}^{-1} A_{42} \\ 0 & I_{n-r} \end{vmatrix}$$

$$= (A_{21} A_{41}^{-1} , - A_{21} A_{41}^{-1} A_{42})$$

D'autre part , A_{41}^{-1} conserve la structure de A_{41} qui est bloc-triangulaire, les blocs étant carrés . En effet , un partitionnement , peut être effectué selon par exemple la première composante irréductible : $M_1 = B_1$

$$A_{41} = \begin{vmatrix} B_1 & 0 & . & . & 0 \\ & B_2 & . & & . \\ & & . & . & . \\ & B & & . & 0 \\ & & & & B_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1 & 0 \\ M_3 & M_4 \end{vmatrix}$$

d'où

$$A_{41}^{-1} = \begin{vmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ - M_4^{-1} M_3 B_1^{-1} & M_4^{-1} \end{vmatrix}$$

M_4 peut de même être partitionné . Le raisonnement peut être réitéré jusqu'à la forme finale :

$$A_{41}^{-1} = \begin{vmatrix} B_1^{-1} & 0 & \cdot & 0 \\ & B_2^{-1} & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & 0 \\ B & & & B_n^{-1} \end{vmatrix}$$

L'étude de la forme canonique montre d'autre part que A_{21} est de la forme (C_1 , 0) avec les colonnes de C_1 correspondant à celles de B_1 . De même A_{42} est de la forme (O , L_1)^t avec les lignes L_1 correspond à celles de B_n .

Ceci entraîne la nullité de

$$- A_{21} A_{41}^{-1} A_{42}$$

d'où l'égalité:

$$dX^+ = dD_1 - A_{21} A_{41}^{-1} dD_2.$$

Annexe 18

Théorème 4

Soit un système présentant au moins une solution .
Le système est compatible ssi
$\underline{\underline{X}}_+ = 0$ sur la trajectoire des variables connues .

Démonstration

Soit X_1 vérifiant $F_X (X_1 , C) = 0$
En particulier , pour f_i appartenant à I(W) , $f_i (X_1,C) = 0$
Soit le sur-système $F^+ (X_1{}^+ , C) = 0$
ou $F^+ (X_1 , C , X_+) = 0$
La forme des relations de I (W) du type
$f_i (X_1 , C) + x_{i+} = 0$
donne directement
$X_+ = 0$

Réciproque

Soit $X_+ = 0$ pour la trajectoire des variables connues .
Supposons que le système a une solution X. Une perturbation est appliquée aux données D dans un voisinage de $\underline{\underline{D}}$
d'où
$J (X) dX = dD$
Comme $X_+ = 0$ sur la trajectoire , $dX_{i+} = 0$ d'où le système ci-dessus est compatible (théorème 3) et dX existe . Ainsi , le système initial présente une solution X + dX après perturbation . Le raisonnement peut alors être répété de proche en proche le long de la trajectoire.

Bibliographie

[BART 78] G.W Bartnik
Algorithmes de couplages dans les graphes .Thèse de doctorat troisième cycle , université Paris VI, 1978.

[BERG 57] C. Berge
Two theorems in graph theory. Proceedings of the National Academy of Sciences,Vol. 43 , pp 842-844 , 1957 .

[BERG 73] C. Berge
Graphes et Hypergraphes . Dunod 1973 .

[BROW 72] F.T. Brown
Direct application of the loop rule to bond graphs. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. September 72 .

[DAVI 77] E.J. Davidson
Connectability and structural controllability of composite systems. Automatica , Vol.13 , pp 109-123 , 77.

[DECL 91] P. Declerck, M.Staroswiecki
Identification of structurally solvable sub-systems for the design of Fault Detection and Isolation Schemes, using the Embedding Procedure 9th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation. Budapest , Hungary , July 8-12, 1991.

[DECL 91] P. Declerck, M.Staroswiecki
Characterisation of the Canonical Components of a Structural Graph for Fault Detection in Large Scale Industrial Plants .First European Control Conference , ECC'91 ,Grenoble , France , 2-5 juillet 91 .

[DUFO 79] J. Dufour
Méthodes et méthodologie d'analyse de systèmes complexes. Applications aux procédés industriels et aux systèmes macroéconomiques. Thèse d'état, Université de Lyon , mai 1979 .

[DULM 58] A.L. Dulmage and N.S. Mendelshon
Coverings of bipartite graphs. Canad. J. Math. , 10 , 517-534, 1958.

[DULM 59] A.L. Dulmage and N.S. Mendelshon
A structure theory of bipartite graphs of finite exterior dimension. Trans. of Royal Soc. Canada , Section III , 53 , 1-13, 1959.

[DULM 62] A.L. Dulmage and N.S. Mendelshon
On the inversion of sparse matrices. Math. Comp. , 16 , 494-496, 1962.

[DULM 63] A.L. Dulmage and N.S. Mendelshon
Two algorithms for bipartite graphs. SIAM J. 11 , 183-194, 1963.

[EDMO 65] J. Edmonds
Paths , trees and flowers. Canadian Journal of Mathematics, Vol. 17 , pp 449-467, 1965.

[FORD 62] L.R. Ford and D.R. Fulkerson
Flows in network. Princeton Univ. Press , Princeton . (traduction française par J-C Arinal , Gauthier-Villars , Paris 1967) .

[GILL 79] J.C Gille
Calcul matriciel et introduction à l'analyse fonctionnelle pour ingénieurs. Eyrolles, Montréal , éditions Lidec, 1979 , 2 Vol.

[GOND 79] M. Gondran, M. Minoux
Graphes et Algorithmes , Eyrolles Paris, 1979.

[HARA 65] F. Harary R.Z. Norman D. Cartwright
Structural models. An introduction to the theory of directed graphs. John Wiley & Sons ,Inc. Newyork. London. Sydney. 1965.

[HARA 69] F. Harary
Matroids Versus Graphs . Lecture Notes in mathematics. The many facets of graph theory, Springer-Verlag , Berlin-Heidelberg-Newyork.Vol. 110, 1969.

[HARA 71] F. Harary

Sparse matrices and graph theory . Proceedings of the Oxford Conference of the Institute of Mathematics and its Applications, april 1970. Large sparse sets of linear equations. Academic press . London and Newyork 1971.

[HELL 71] E. Hellerman and D. Rarick

Reinversion with the preassigned pivot procedure. Mathematical programming 1 pp 195-216 . North-Holland Publishing Company, 1971.

[IRI 69] M. Iri

The maximum-rank minimum-term-rank theorem for the pivotal transforms of a matrix. Linear algebra and its applications 2 (1969) , 427-446.

[LAWL 76] E.L. Lawler

Combinatorial Optimization : Networks and matroids.Holt , Rinehalt and Winston , New York, 1976.

[LEE 66] W. Lee , J.H Christensen and D.F Rudd

Design variable selection to simplify process calculations. AICHE (American Institut of Chemical Engineers) J., 12 ,1104-1110, 1966.

[LEE 66] W. Lee and D.F Rudd

On the ordering of recycle calculations. AICHE (American Institute of Chemical Engineers) J., 12 ,1184-1190, 1966.

[LIN 74] C-T. Lin

Structural Controllability. IEEE , vol AC-19 , n°3 , june 1974 .

[LIN 77] C-T. Lin

System structure and minimal structure controllability. IEEE vol AC-22 , n°5 , october 1977.

[MINO 86] M.Minoux G.Bartnik
Graphes Algorithmes Logiciels. Dunod Informatique, 1986.

[MORA 78] M. Morari and G.Stephanopoulos
Comments on finding the generic rank of a structural matrix. IEEE vol AC-23 , n°3 , june 1978 .

[MURO 87] K. Murota
Systems analysis by graphs and matroids. Structural solvability and controllability. Algorithms and combinatoric 3 , Springer-verlag , 1987.

[ORE 62] O. Ore
Theory of Graphs. American Mathematical Society Colloquium Publications Volume XXXVIII, 1962 .

[PAPA 82] C.H. Papadimitriou and K.Steiglitz
Combinatorial Optimization : Algorithms and Complexity. Prentice-Hall , Englewood Cliffs , 1982 .

[PICA 80] J.C. Picard and M. Queyranne
On the structure of all minimum cuts in a network and applications. Math. Prog. Study , 13 , 8-16, 1980.

[PRES 81] R. Prescott J.B Pearson
Communication on finding the generic rank. Rice University , Houston 1981 .

[RECH 88] C. Rech
Commandabilité et observabilité structurelles des systèmes interconnectés. Thèse préparé au sein du laboratoire d'automatique de grenoble. soutenue à Lille I , juin 1988 .

[RICH 75] M.Richetin
Analyse structurale des systèmes complexes en vue d'une commande hiérarchisée. Thèse de doctorat d'état , Toulouse n° 674 , 1975 .

[ROSE 71] R.C. Rosenberg

State-space formulation for bond graph models of multiport systems.journal of dynamic systems , measurement , and control . March 71.

[ROSE 71] R.C. Rosenberg

Solvability of bond graph junction structures with loops . IEEE trans. on circuits and systems , vol cas-26, No 2 , february 79 .

[ROY 70] B. Roy

Algèbre moderne et théorie des graphes , Dunod , Paris , 1970.

[SARG 78] R.W.H Sargent

The decomposition of systems of procedures and algebraic equations . Lectures notes in mathematics, Vol. 63 pp 158-178. Springer-Verlag 1978.

[SCHI 81] C. Schizas and F.J. Evans

A graph theoretic approach to multivariable control system design. Automatica , Vol.17 , No 2 , pp.371-377 , 1981 .

[SHIEL 76] R.W Shields J.B. Pearson

Structural controllability of multiinput linear systems . IEEE vol AC-21 , april 1976 .

[SPIV 65] M. Spivak

Calculus on Manifolds , Benjamin , New York , 1965 .

[STAR 89] M.Staroswiecki , P.Declerck

Analytical redundancy in non linear interconnected systems by means of structural analysis. IFAC Symposium on Advanced Information Processing in Automatic Control , 3-5 july 1989, Nancy , France

[STAR 89] M.Staroswiecki , J.Ph.Cassar, Ph.Declerck

Automatic Analytical Redundancy relationships generation in complex interconnected system based on a structural approach. INCARF 89 New Delhi.

[STEW 62] D.V. Steward
On an approach to techniques for the analysis of the structure of large systems of equations . SIAM Review , 4 , 321-342, 1962.

[STEW 65] D.V. Steward
Partitioning and tearing systems of equations . SIAM J. Numer. Anal. Series B2 , 345- 365, 1965.

[SUEU 89] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy
Structural controllability/observabilitty of linear systèmes represented by bond graphs. Journal of the Franklin Institute Vol.326, No 6, pp. 869-883, 1989.

[SUEU] C. Sueur and G. Dauphin-Tanguy
Bond-graph approach for structural analysis of MIMO linear systems. Journal of the Franklin Institute . à paraitre .

[SUEU 90] C. Sueur
Contribution à la modèlisation et à l'analyse des systèmes dynamiques par une approche Bond-Graph, Thèse de doctorat , 5 oct. 90 , Université des sciences et Techniques de Lille Flandres Artois .

[THUA 76] A. Thuaire
Analyse structurale des grands systèmes d'équations. Thèse d'état en informatique , 1976 , Nice .

[WALT 80] E. Walter
Sur l'identification de modèles à représentation d'état. Thèse de doctorat d'état , Paris-sud 1980 .

[WELS 76] D.J.A Welsh
Matroid theory . Academic Press . 1976.

Notations

B , B_0 , B_X graphes bipartis
A , A_0 , A_X ensembles d'arcs
V , V_0 ensembles de sommets
$\mu_A (V , B)$ ensemble des arcs ayant une extrémité dans V (P.5)
$\mu_A^- (V , B)$ ensemble des arcs sortants de V (P.5)
$\mu_A^+ (V , B)$ ensemble des arcs entrants dans V (P.5)
$\mu_V (A , B)$ ensemble des sommets extrémité d'au moins un arc de A (P.5)
$\mu_V^- (A , B)$ ensemble des sommets extrémité terminale d'au moins un arc de A (P.5)
$\mu_V^+ (A , B)$ ensemble des sommets extrémité initiale d'au moins un arc de A (P.5)
$Q (f_i)$ ensemble des variables liées à f_i par un arc (P.5)
$R (x_i)$ ensemble des fonctions liées à x_i par un arc (P.5)
P_F (resp. P_X) projection de l'ensemble des arcs sur les fonctions (resp. variables) (P.9)
W couplage
$E (B_X)$ ensemble des couplages maximaux sur B_X (P.10).
δ déficience (P.16)
$B^> , B^< , B^=$ (P.20)
L chaîne alternée (P.22)
R_1 , R_2 , R_3 (P.25)
$C_{F'} (\Phi , B')$ arcs "sortants" de Φ ensemble de fonctions (P.27)
$C_{X'} (\Phi , B')$ arcs "entrants" dans Φ ensemble de variables (P.27)
$V_> , V_<$ (P.34)
$B^{>+} , B^{<+}$ (P.36)
$B^{=+}$ (P.40)
G graphe associé (P.41)
u ---> v v est atteignable à partir de u (P.44)
$V^> , V^< , V^=$ (P.44)
$G^> , G^< , G^=$ (P.44)
$C^- (U , G')$ ensemble des arcs sortants de l'ensemble des sommets U (P.48)
$C^+ (U , G')$ ensemble des arcs entrants dans l'ensemble des sommets U (P.48)

3 Modèles fonctionnels

Chapitre 3: Modèles Fonctionnels

1- Présentation

2- La méthode Flow-Model

3- SADT

- 3-1 Définitions
- 3-2 principes généraux
- 3-3 Le modèle SADT
- 3-4 Lecture des diagrammes
  - 3-4-1 Actigramme
  - 3-4-2 Datagramme
- 3-5 Conclusion

4 Modèle dérivé de SADT

- 4-1 Classes des données et des activités.
  - 4-1-1 Classes des données
  - 4-1-2 Classes des activités
- 4-2 Modèle de l'actigramme
  - 4-2-1 Observations
  - 4-2-2 Modèle graphique
- 4-3 exemples

5- Conclusion

Bibliographie

1 Présentation

Dans une situation de fonctionnement normal , le système de conduite automatique assure une autonomie quasi-totale du processus . Les opérateurs complètent le système automatique et gèrent les modes de fonctionnement transitoires que le système de conduite ne peut pas prendre en charge . Dans les phases transitoires provoquées par une défaillance , le rôle de l'opérateur est le suivant :

- identifier le dysfonctionnement (détecter rapidement la présence d'une situation aberrante , isoler la cause)
- Commander le processus (assurer un mode de fonctionnement dégradé , entreprendre des actions correctrices et rétablir le fonctionnement prévu)

Ces tâches sont facilitées par l'emploi de terminaux qui apportent , de par leurs capacités de calcul et de transmission de données , de nombreuses informations mesurables ou déduites sur l'état du processus . Les différentes données sont disponibles sur les nombreux panneaux et consoles de la salle de contrôle contenant les mesures et les commandes [BELT 87] . Pour les centrales nucléaires , les panneaux et les consoles sont disposés sèlon la structure du processus et sont répartis en panneau réacteur , panneau du générateur de vapeur , panneau de la turbine/ génératrice , panneau du condenseur/ circuit d'eau alimentaire , panneaux des sécurités etc .....

Cependant les opérateurs doivent prendre connaissance de l'ensemble de ces données qui sont les valeurs des variables physiques , l'état de disponibilité du processus,... Leur nombre rend difficile l'appréhension complète de l'ensemble des données par les opérateurs [GOVI 87] . Les distances séparant les panneaux dans la salle de contrôle, rendent de plus difficile une supervision par un seul contrôleur . Pour surmonter cette limitation humaine , pour les centrales nucléaires , deux opérateurs sont employés : un opérateur pour le réacteur , le second pour le reste du processus. Quant à la nature des données , une quantité importante d'informations de faible intérêt sont présentées aux opérateurs qui sont contraints à un filtrage des données pertinentes [WRIG 86] [DRAN 82] : une information secondaire pour un mode de fonctionnement donné peut avoir de l'importance pour d'autres modes ce qui amène les concepteurs à la complétude des systèmes d'information. Cette surcharge informationnelle est mise en évidence par les cascades d'alarmes provoquées par des pannes secondaires [FORT 83] .

Selon une étude de [LEEC 83] , dans une salle de contrôle de centrale nucléaire , plus de 50 pour cent des alarmes sont jugées sans importance par les opérateurs contre seulement 20 pourcent jugées nécessaires. Face aux milliers de capteurs logiques et analogiques que comporte une centrale nucléaire , une tendance actuelle est plus à la suppression qu'à l'implantation de capteurs.

Dans ces conditions , avertir de la panne de tel ou tel composant à un niveau physique élémentaire ne semble pas adapté et constitue un élément de plus noyé dans la foule d'informations . De plus , les opérateurs ne sont pas toujours dans un état mental réceptif [TANG 89] soumis à la pression d'être à la fois face à un processus complexe multivariable composé d'éléments aux interactivités nombreuses et sous des contraintes de rentabilité , de sécurité et d'urgence d'une réponse . Synthétiser toutes ces données dans ces conditions semble difficile . Three Miles Island en est un exemple frappant où 200 alarmes se sont déclenchées simultanément devant l'opérateur [DANI 86] . Renforcé par une mauvaise présentation de la signalisation [TABO 89] , un raisonnement erroné de l'opérateur a entraîné le premier accident grave de l'histoire des centrales nucléaires .

Produire des informations en termes globaux et cohérents adaptés aux opérateurs est donc une nécessité . Les méthodes d'analyse fonctionnelle (AF) ayant pour objectif la modélisation des systèmes sous forme aisément communicable semblent une réponse indiquée . De plus , informer les opérateurs d'une défaillance en termes d'activités rejoint le raisonnement humain . Etablissant les liens entre l'activité défaillante et les activités fondamentales du système , les opérateurs pourront en déduire leurs propres activités [FEIG 82].

La modélisation fonctionnelle pourra s'appuyer sur les différentes descriptions disponibles des processus industriels complexes (modèles comportementaux, descriptions topologiques)

Nous décrivons ci-dessous deux méthodes utilisables pour la modélisation fonctionnelle de processus industriels: Flow-Model et SADT.

2 La méthode Flow-Model

La méthode Flow-Model [LIND 82] [RASM 85] [TABO 89] est une démarche développée par Lindt qui permet la construction du modèle fonctionnel d'un processus thermo-dynamique . Elle est basée sur l'identification des structures de flot de masse et d'énergie à différents niveaux d'agrégation physique du système .

L'objectif est d'apporter , selon Lindt , un moyen systématique d'identifier les objectifs et donc les ordres du système de contrôle commande mais aussi d'apporter une aide au diagnostic .

Représentant les aspects qualitatifs des fonctions du processus , le graphe , résultat de la modélisation, décrit la topologie des circuits massiques et énergétiques . Il est constitué à l'aide de noeuds correspondant chacun à une fonction du processus. L'auteur fait l'hypothèse que les différentes fonctions appartiennent à un nombre limité de classes . On peut remarquer que celles-ci sont cohérentes avec les primitives de [GOVI 87] qui représentent les fonctions d'un système énergétique naval en mettant cependant plus l'accent sur le coté composant du processus (source , puits , conduite , capacité , échangeur thermique , gain , contrôleur , réacteur , échangeur de phase liquide/vapeur , etc...) .

Les différentes fonctions du Flow-Model sont décrites ci-dessous .

- Fonction de stockage

Elle représente la propriété d'accumulation de la masse ou de l'énergie . Le paramètre caractérise le niveau de masse ou d'énergie . Ce paramètre peut être un vecteur indiquant les niveaux de masses accumulées des différents composants dans le cas d'une réaction chimique .

- Fonction de transport

Elle représente la propriété de transfert de masse ou d'énergie entre deux systèmes . Elle est caractérisée par le débit massique ou énergétique .

- Fonction de distribution

Elle représente la propriété de répartition entre les flots entrants et les flots sortants . Les rapports de distribution la caractérisent .

- Fonction de barrière

Elle représente la propriété du système d'empêcher le transfert de matière ou d'énergie entre 2 systèmes différents.

- Fonction de source / puits

Elle représente la propriété du système de se comporter comme un réservoir infini de masse ou d'énergie . Bien qu'aucun système physiquement réalisable n'ait la capacité de délivrer ou de recevoir de la masse ou de l'énergie de manière infinie , cette représentation peut dans beaucoup de cas , être acceptée.

- Fonction support et condition

Elle représente la propriété d'un système de niveau (n-1) de fournir les conditions nécessaires pour permettre à un autre système (n) de remplir sa fonction . Cette fonction (n -1) est représentée par un flow-model de niveau inférieur (n- 1) . A chaque fonction (n-1) est associée une expression fonction d'une variable . Celle ci est la condition à satisfaire pour assurer l'objectif du niveau supérieur (n) . Elle représente aussi l'objectif du niveau inférieur (n-1) . Graphiquement , la fonction support est reliée à une autre fonction non support du niveau (n) par un lien d'information se terminant par un T . La condition est écrite à côté de ce lien .

Liens entre deux flow-model de niveau (n) et (n-1)

1) mode condition

Ce mode a été décrit dans la définition de la fonction support et condition.

2) mode décomposition /agrégation

Un noeud de niveau n est éclaté en un flow-model de niveau n-1 . Ce mode se retrouve dans SADT.

Analyse de l'exemple figure 2/3.

1) Le modèle est topologique donc d'établissement aisé si on ne considère pas les conditions .

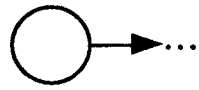
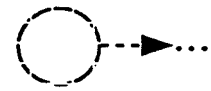
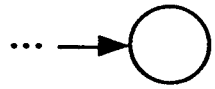
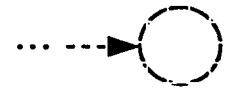
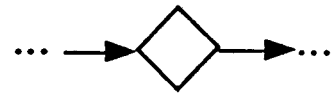
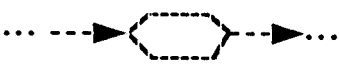
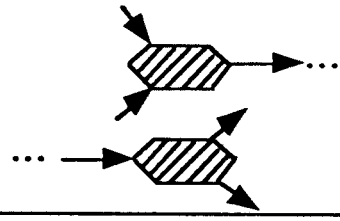
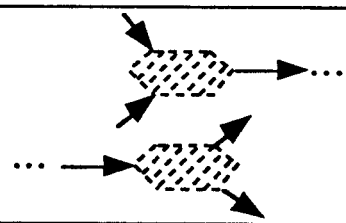
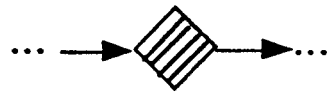
ENTITES	SYMBOLES	
	MASSE	ENERGIE
Source		
Puits		
Transport		
Stockage		
Distribution		
Barrière		

Figure 2/1: les différents symboles de Flow-model

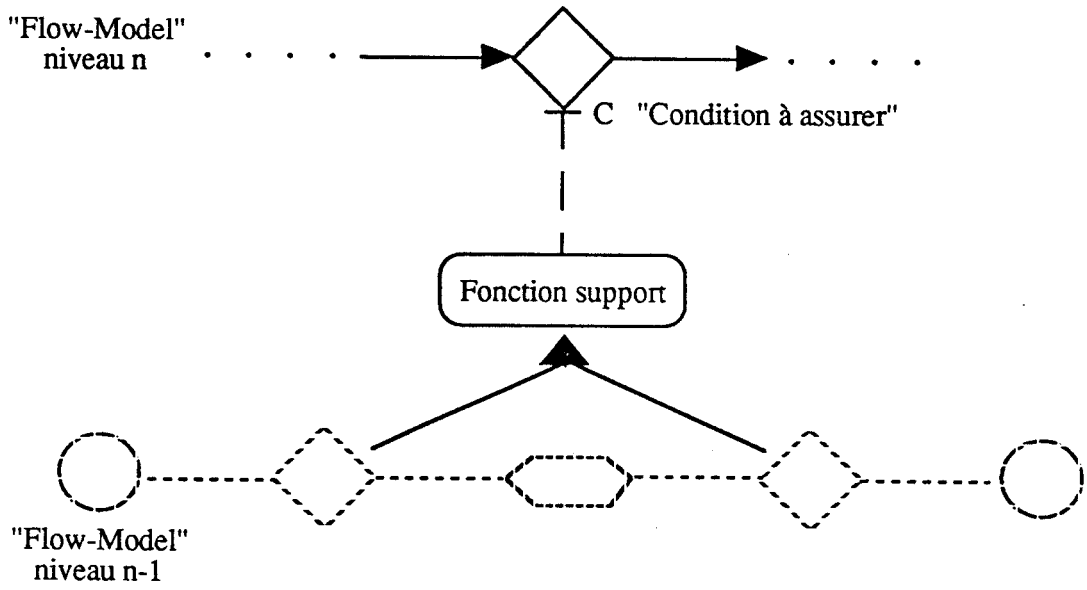


Figure 2/2: fonction support et condition

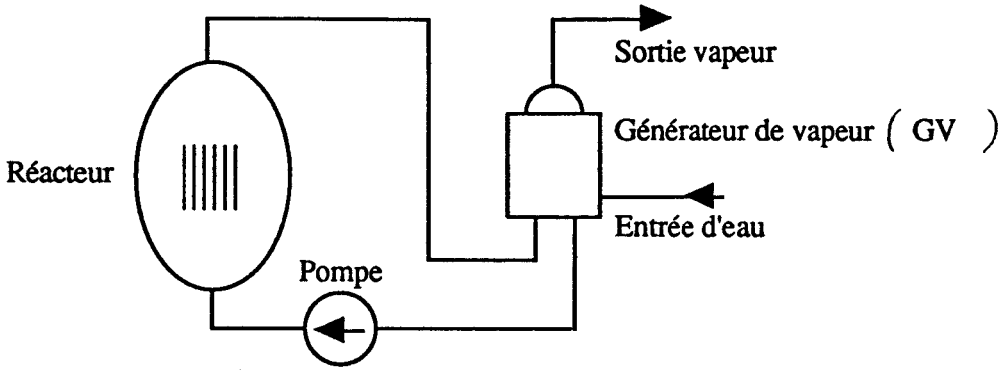
2) L'auteur a donné un modèle des activités du processus et peu défini les données : une masse peut être associée à une phase liquide , gazeuse etc..... et une énergie peut être mécanique , chimique etc ..... et aussi cinétique ou potentielle . Ainsi , les transformations eau/vapeur , énergie électrique/ mécanique ,.. ne sont pas représentées .

3) Une étude détaillée confirme le sentiment exprimé dans [BELH 89] au niveau de l'aspect informationnel : le modèle ne comporte pas les fonctions de régulation ou de commande de manière explicite au même titre que les primitives de base (transport etc.....). C'est la raison pour laquelle l'auteur déclare que l'exemple qu'il donne est extrêmement simple car purement processus . Ni les commandes , ni les mesures n'apparaissent de ce fait . L'intérêt pour les opérateurs de conduite est donc réduit malgré ce que déclare Lindt [LIND 82].

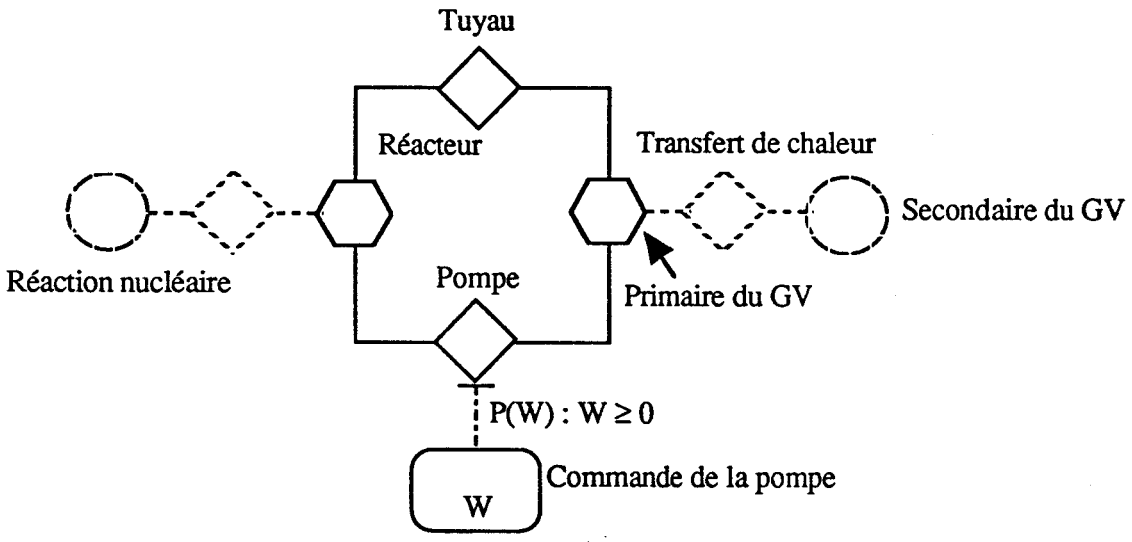
4) La conséquence de cette représentation incomplète du système est que le modèle est non-hiérarchique. Ceci est illustré par l'exemple : la variable F (F flot moyen énergétique dans le primaire) apparait au niveau n et ne se retrouve pas au niveau inférieur n-1.

Conclusion

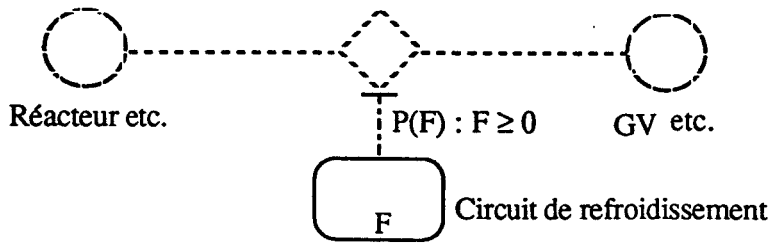
A partir d'une connaissance précise des processus , l'auteur a proposé un modèle massique et énergétique utilisant une décomposition topologique du système ainsi qu'une classification des activités du processus . Trop axé sur la physique du système , le côté informationnel n'a pas été clairement intégré . L'approche que nous avons développée se propose d'établir un modèle complet en tenant compte des aspects massiques , énergétiques mais aussi informationnels à travers la méthodologie SADT .



Structure physique



Flow Model de niveau n-1



Flow Model de niveau n

Figure 2/3 : exemple tiré de [LIND82]

3 SADT

Différentes méthodes d'AF ont déjà été développées (IDEF , GRAI , SA/SD....[DOUM 84] [BREU 84]) pour des domaines spécialisés (gestion de production , informatique , ...). Contrairement à celles-ci , SADT est utilisée dans des domaines très variés (banques , télécommunications , ...) et par un nombre important d'entreprises.

Décrivons tout d'abord la méthode SADT et son modèle. Nous appliquerons ensuite cette démarche aux processus physiques.

3 - 1 Définitions

SADT est une méthode de modélisation système dont l'objectif est une expression rigoureuse d'idées qui précédemment semblaient trop informulées ou trop incohérentes pour être utilisées rationnellement . Pour cela , elle cherche à favoriser la communication entre le créateur et le lecteur . Cette exigence de communication conduit à la réalisation de modèles ou "d'images" de la réalité qui se présenteront sous forme de diagrammes codifiés selon une certaine grammaire . Ce langage sous forme de boîtes et de flèches constitue une partie essentielle et incontournable de SADT . Non moins importante , est la méthode de pensée et d'action revendiquée par l'auteur de la méthode [ROSS 85] et qui sera la propriété de la Softech ,Inc à partir de l'année 77 . Elle ne fera partie du domaine public qu'avec le livre [IGL 89] de IGL technology . Cette discipline de pensée et d'action permet différentes modélisations ou observations des systèmes qui initialement n'étaient pas prévisibles . Le résultat de la technique SADT n'est donc en aucun cas la solution d'un problème . Par contre une modélisation pertinente est un support efficace de réflexion et constitue un catalyseur à une démarche intellectuelle .

3 - 2 principes généraux

Les principaux concepts dirigeant la construction d'un modèle S.A.D.T. sont les suivants :

1) S.A.D.T. attaque un problème en construisant un modèle de celui-ci dans le but d'exprimer une compréhension en profondeur de ce qu'est le problème .

L'analyse fonctionnelle découlant naturellement de ce premier abord , ce point est particulièrement décisif .

2) L'analyse de tout problème est menée de manière descendante , modulaire , hiérarchique et structurée . Chaque activité d'un niveau , avec ses données et son support , est explicitée par un ensemble d'activités d'un niveau inférieur .

3) S.A.D.T. différencie autant qu'il est possible le modèle fonctionnel et le modèle de conception : l'étude du problème et la description d'une solution de celui-ci .

4) S.A.D.T. modélise à la fois les objets (les données , les variables) et les activités (réalisées par des hommes , des machines) .

5) Le langage de S.A.D.T. favorise un travail d'équipe discipliné et coordonné et permet de mettre en évidence les résultats qui reflètent le mieux la qualité de ce travail.

6) Les concepts précédents sont exprimés dans un modèle graphique qui montre les modules , leurs relations et leur intégration dans une structure hiérarchisée .

L'objectif de l'utilisation d'un modèle graphique est de montrer comment le système fonctionne logiquement , en distinguant les activités et les moyens nécessaires pour chaque activité . L'outil graphique permet de représenter les contraintes qui agissent sur la manière dont la transformation est faite entre les données d'entrée et de sortie.

L'outil graphique permet , également , d'exposer graduellement les détails . Chaque activité d'un diagramme peut être "éclatée" en sous activités faisant apparaître des données plus détaillées. Cette démarche sera reconduite jusqu'à ce que l'on ait atteint un niveau de détail suffisant pour maîtriser parfaitement le système étudié .

3 - 3 Le modèle SADT

Le modèle SADT est composé principalement :

- de diagramme d'activités ou actigrammes représentant l'ensemble des activités du système
- de diagrammes de données ou datagrammes représentant l'ensemble des données du systèmes .
- d'une liste hiérarchique du système analysé .

Il est complété par des textes explicatifs sur les actigrammes et les datagrammes , diagrammes Pour Expliquer Seulement appelés PES , d'un glossaire définissant les principaux termes employés dans les diagrammes et textes et de conditions d'activation logique .

Nous décrivons ci-dessous les actigrammes et les datagrammes. Les autres éléments sont détaillés dans [IGL 89] .

- Rôle d'un diagramme d'activités ou actigramme.

" Le diagramme d'activités identifié par un verbe d'action :
- crée , génère une donnée en sortie
- transforme , modifie , change d'état une donnée d'entrée
- sollicite la donnée d'entrée

à partir de directives de contrôles , en s'appuyant sur les potentialités des mécanismes "

La distinction entre données d'entrée et données de contrôle permet de différencier , parmi les données sollicitées par l'activité , celles qui ne sont pas modifiées (les données de contrôle) mais qui influent sur son comportement , de celle qui sont créées , générées , transformées , sollicitées (données d'entrées) par l'activité .

Les données de contrôle auront donc une influence déclenchante ou inhibitrice sur l'activité concernée , ou seront tout simplement considérées comme paramètres "contrôlant" la transformation de la donnée d'entrée en donnée de sortie .

Les mécanismes indiquent ce qui "supporte" la fonction. Si l'analyste souhaite indiquer " qui " réalise telle ou telle fonction, il utilisera les mécanismes pour identifier le département , le service , l'individu qui est responsable .

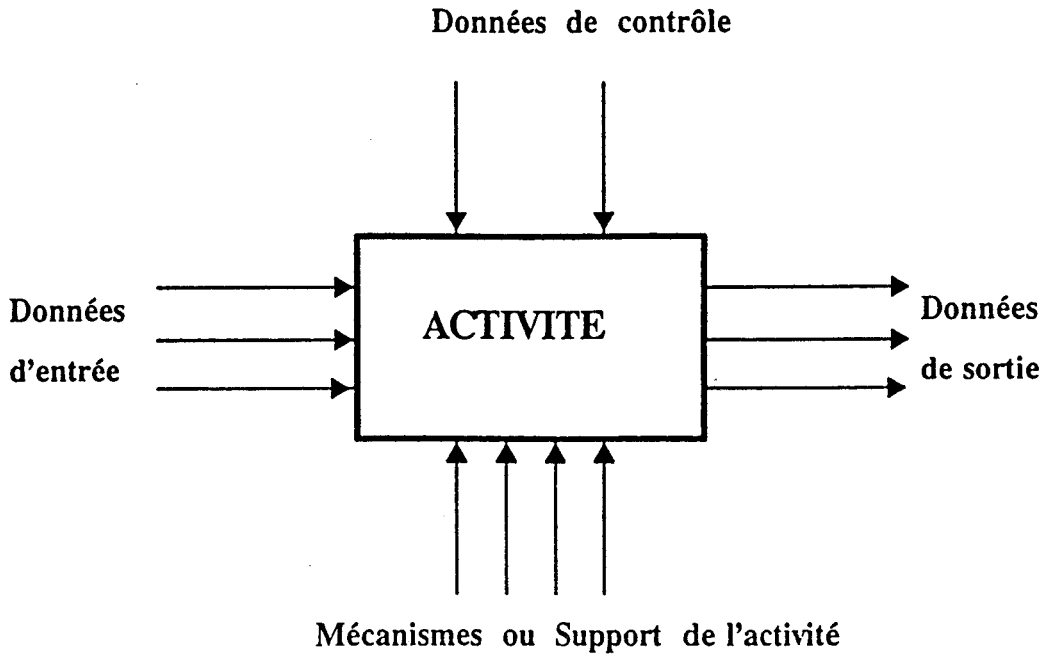


Figure 3-3/1: actigramme

- Rôle d'un diagramme de données ou datagramme

"Un diagramme de données ou datagramme crée à partir d'activités d'entrée (activités génératrices) sous le contrôle d'activités de création une donnée , manipulée , observée par l'activité de sortie (activités utilisatrices) sous le contrôle d'activités de manipulation , d'observation ou d'utilisation".

Les mécanismes ou supports de la donnée expriment pour un datagramme le dispositif de mémorisation de données .

- Définitions différentes de l'actigramme

La définition de l'actigramme donnée ci-dessus est de [IGL 89] . Une autre définition peut être trouvée dans [IGL 82] ou dans [ROSS 85] .

" Les données d'entrée (gauche) sont transformées en données de sortie (droite) par les fonctions représentées par la boîte . Le contrôle (haut) agit sur la manière dont la transformation est faite . Cette information permet à l'analyste d'indiquer les données qui , au lieu d'être transformées régissent cette transformation " .

L'idée de transformation joue donc un rôle essentiel dans cette définition .

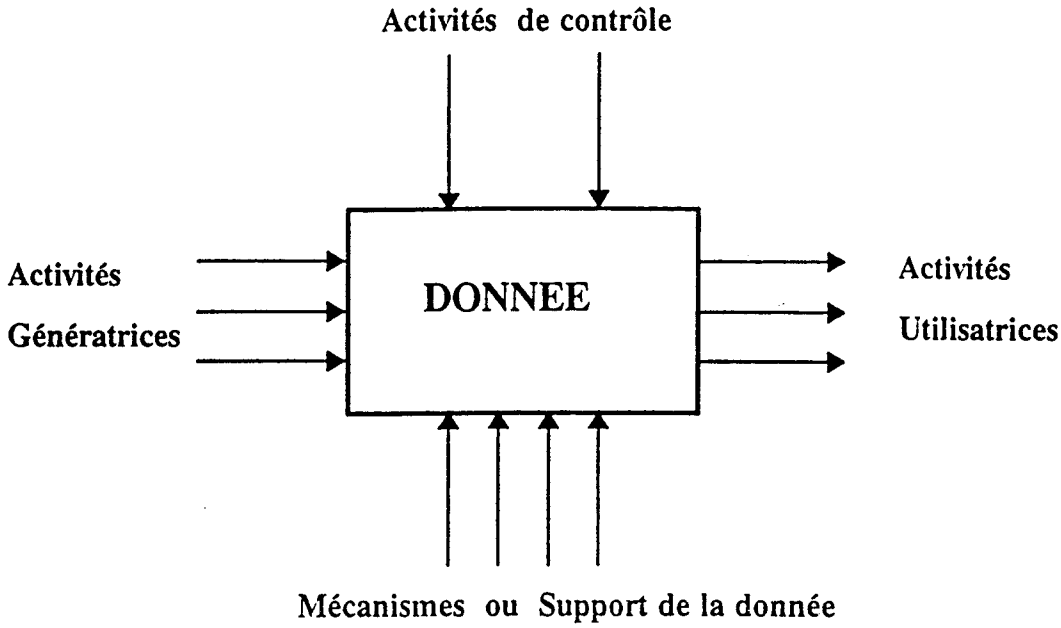


Figure 3-3/2: datagramme

La définition [89] est cependant différente : dans la définition [89] et autour du verbe " transformer " , les auteurs ont ajoutés les verbes "crée , génère , modifie , change et sollicite" permettant de cette manière un assouplissement de la définition [82] et donc un élargissement des descriptions possibles des activités . La définition [89] englobe la définition [82] qui forme le " coeur " ou le fondement de la nouvelle définition .

Cependant , ceci crée une définition ambiguë :

- La présence de l'entrée et non celle du contrôle est indispensable pour le concept de transformation .
- A l'opposé , la définition [89] déclare que toute activité doit comporter un contrôle et autorise l'absence d'entrée .

Cette modification de la définition correspond en réalité à la difficulté de construire un diagramme SADT et en particulier de répondre à la question : est-ce que cette donnée est une entrée ou un contrôle ? La pratique de SADT montre que la différence entrée/ contrôle est délicate à effectuer . Si aucun choix ne s'impose , SADT conseille de placer la donnée en contrôle , la séparation contrôle / entrée apparaissant au niveau inférieur .

3-4 Lecture des diagrammes

Dans le chapitre cycle auteur-lecteur , SADT décrit le protocole nécessaire pour lire un diagramme composé de plusieurs boîtes . Ce protocole suit une décomposition en 6 points - lire les titres des boîtes en diagonale - observer le diagramme Père etc .....Cependant , la lecture d'un actigramme ou d'un datagramme n'est pas abordée explicitement .

Pourtant , la lecture d'un diagramme amène fréquemment à la conceptualisation sous forme de phrases ordinaires sujet + verbe + complément : certains exemples en sont des illustrations dans lesquelles le verbe et le complément sont indissociables (exemple : ex 2 IGL 89 p. 26 ; IGL 82 p. 22) .

Afin de compléter SADT , nous proposons deux lectures nommées respectivement horizontale et verticale des actigrammes . Chaque lecture suit un certain ordre des idées exprimées . Cette lecture initiale peut ensuite être élargie en ajoutant de nouveaux éléments jusqu'à l'obtention d'une vision globale de l'actigramme .

3-4-1 Actigramme

- La lecture horizontale d'un actigramme fait intervenir les trois phases suivantes:

H1 : lire le titre de l'actigramme

H2 : lire la donnée de sortie

SADT déclare en effet " un actigramme crée , génère une donnée en sortie ". La génération de la sortie est le but de l'activité qui doit obligatoirement avoir une sortie .

H3 : lire la donnée d'entrée

SADT déclare " un actigramme transforme , modifie , change d'état une donnée d'entrée " et " sollicite une donnée d'entrée"

La lecture horizontale est effectuée lorsque les informations issues de H1 , H2 , H3 sont associées dans la phase H suivante qui est aussi identique à celle de [IGL 82] et suit l'ordre des termes de [IGL 89] .

Phrase H :

"Les données d'entrées sont transformées en donnée de sortie par les fonctions représentées par la boîte "

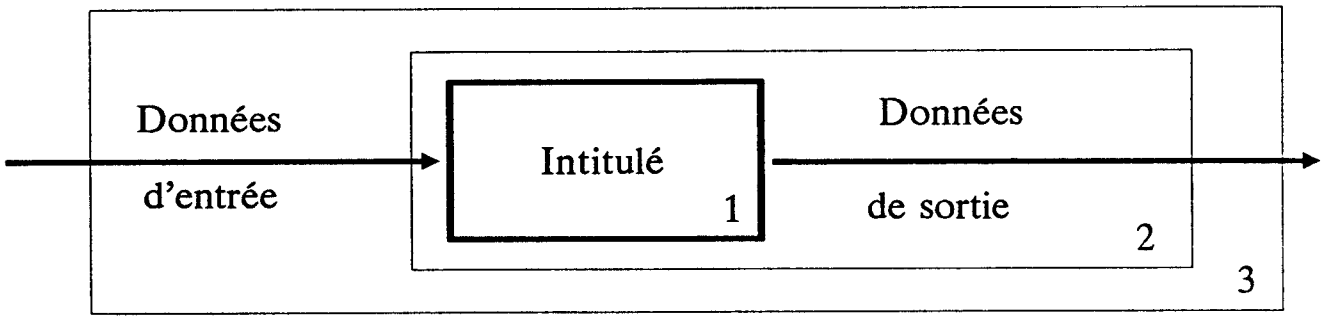


Figure 3-4-1/1

La lecture H sera d'autant plus adaptée que la création de l'actigramme a suivi une logique de transformation . Parfois cependant , l'actigramme est conçu comme une génération de la sortie sans présence d'entrée : l'origine peut provenir d'une difficulté de formulation en termes de transformation .

Remarque :

La lecture H se retrouve partiellement et sans être formulée dans l'annexe 2 de [DOUM 84] sur les réseau GRAI . Celle-ci présente une figure qui donne les composantes d'une activité où l'ordre des dessins coïncide en partie avec l'enchaînement de la lecture horizontale .

- La lecture verticale d'un actigramme associe quant à elle, les phases suivantes:

V1 : lire le titre de l'actigramme

Les lectures V1 et H1 sont donc identiques .

V2 : lire le sujet qui effectue l'activité

Le sujet fait partie des mécanismes avec les potentialités. [XU 84] déclare : " les flèches de mécanismes indiquent le sujet du verbe inscrit dans la boîte . Elles fournissent ainsi une information fort utile pour la compréhension de l'ensemble".

V3 : lire les directives de contrôles .

Cette partie constitue la partie la plus délicate de l'activité et est donc placée en fin .

La lecture verticale est effectuée lorsque les informations issues de V1 , V2 , V3 , sont associées dans la phrase V suivante .

Phrase V

" Le sujet effectue l'action intitulée avec les mécanismes support de l'activité selon les directives de contrôle . "

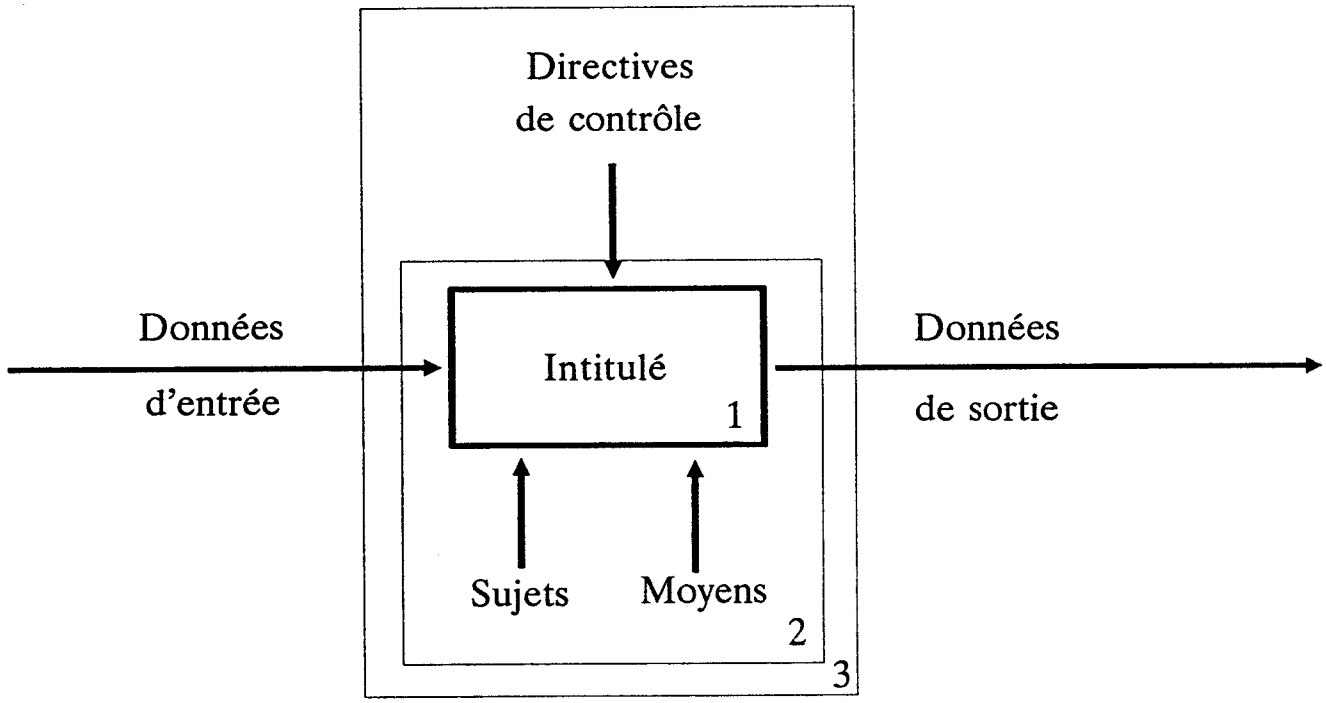


Figure 3-4-1/2

- Comparaison des phrases

La lecture de l'actigramme est constituée par 2 lectures représentées par 2 phrases H et V de nature différentes :

- La phrase horizontale met l'accent sur les données : l'activité est de transformer une donnée d'entrée en une donnée de sortie . La phrase H est de type donnée et sera donc nommée "dataphrase" . Il peut être remarqué que SADT définit les activités à l'aide de dataphrases .

- La phrase verticale met en relief l'action de l'activité : " le sujet effectue l'action ... " et est donc du type activité . La phrase verticale prendra le nom de "actiphrase".

Nous donnons ci-dessous un exemple illustrant la lecture de la figure 3-4-1/3 tiré de [IGL 89]:

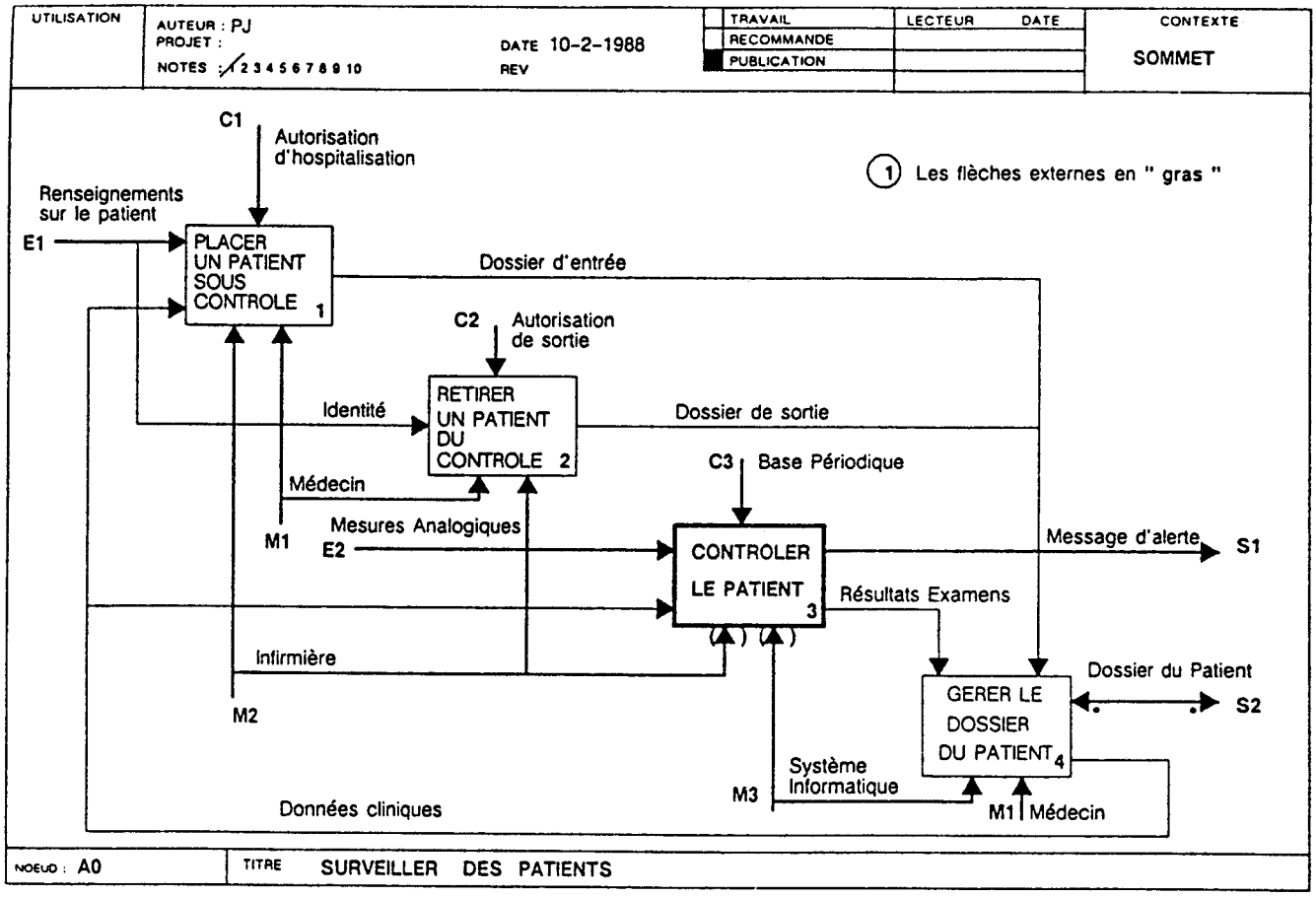


Figure 3-4-1/3

A 1

V : l'infirmière et le médecin placent un patient sous contrôle selon l'autorisation d'hospitalisation .

H :les renseignements sur le patient et les examens cliniques sont transformés en renseignements du dossier d'entrée par l'activité de placer un patient sous contrôle plus précisément par les activités de lire et d'enregistrer .

A 2

V : Le médecin et l'infirmière retirent un patient du contrôle selon l'autorisation de sortie .

H: Le dossier de sortie est généré par l'action de retirer un patient du contrôle . Le renseignement identité est transformé en renseignement du dossier de sortie par l'activité "retirer un patient du contrôle" plus précisément par les activités de "enregistrer l'identité" et "établir le dossier de sortie".

A 3

V : l'infirmière contrôle le patient au moyen d'un système informatique sur une base périodique .

H :les mesures analogiques et les données cliniques sont transformées en message d'alerte et en résultats d'examens par l'activité de contrôle des patients .

A 4

V :le médecin gère le dossier du patient au moyen d'un système informatique selon les résultats d'examens et le dossier d'entrée .

H :le dossier du patient et les données cliniques sont générés par l'activité de gérer le dossier du patient (phrase H réduite)

D'autre part , nous pouvons introduire de nouveaux éléments dans les lectures H et V . Par exemple , on peut ajouter pour la lecture H de l'activité A3: .....1) effectué par l'infirmière 2) au moyen du système informatique , 3) sur une base périodique.

3-4-2 Datagramme

La procédure de lecture d'un datagramme est exprimée de manière complexe si on se réfère à la définition (" sous le contrôle " est par exemple noté deux fois au sein de la même phrase)

Une autre forme qui n'est pas présentée comme une définition par [IGL 89] permet toutefois de la décrire de façon plus efficace .

- l'activité d'entrée (G) crée , génère la donnée
- l'activité de sortie (U) utilise la donnée
- l'activité de contrôle (C) influence la création , l'utilisation ou la manipulation de données .
- le support est le mécanisme de mémorisation des données

Cette description est facilement compréhensible malgré sa forme éclatée . Une forme synthétique du type dataphrase ou actiphrase parait difficile à obtenir comme l'illustre la définition officielle de SADT . La recherche d'une forme plus harmonieuse n'a pas permis d'obtenir une expression convaincante .

3-5 Conclusion

SADT rappelle que le monde qui nous entoure , ou du moins le modèle que nous en avons , est composé d'objets (données) et d'actions (activités) : c'est d'ailleurs pour cette raison que les langages naturels sont essentiellement formés de noms et de verbes [IGL 89]. Une technique qui ne mettrait l'accent que sur un des deux aspects ne représenterait que partiellement la réalité.

En réponse à ce concept , la solution pour SADT est de toujours examiner ensemble les " données " et les " activités " c'est pourquoi SADT demande la création de deux diagrammes , les actigrammes et les datagrammes .

Cependant , dans le domaine de l'automatique , les utilisateurs de SADT ne ressentent pas le besoin d'utiliser les datagrammes pour représenter leurs études ([LHOS 85], [PIER 87],.....) . Il est de plus connu que les datagrammes ne sont pas utilisés dans la phase de création des diagrammes contrairement à la démarche SADT et à ses concepts.

Ainsi, Pierreval [PIER 87] déclare très laconiquement "outre un aspect peu convivial semble-t-il , les datagrammes n'apportent pas les éléments suffisants à la conception de base de données de production " . Plus généralement D.T. Ross déclare [ROSS 85] que la plupart des modélisations sont basées sur les activités , mais que pour certaines applications , la modélisation à base de données est plus appropriée .

D'autre part , dans [IGL 89] , sur 5 exemples de modèle SADT (chapitre 9) , un seul contient des datagrammes . Une lecture de cet exemple (gérer les achats) montre que , contrairement aux autres exemples du livre , les intitulés des données illustrent directement une activité (commande , avis d'arrivage , bon de réception,.....): les données " appellent" naturellement les activités . Les datagrammes sont donc intéressants dans ce domaine.

En général , les utilisateurs préfèrent une description synthétique du système. En cela les actigrammes à la définition condensée sont plus performants que les datagrammes de forme plus éclatée et répondent de ce fait plus à l'attente du lecteur .

D'autre part , les datagrammes et les actigrammes sont des outils de création du modéle fonctionnel. Ils représentent deux images du système dont la cohérence est établie par la vérification croisée [IGL 89].

Les systèmes industriels sont des exemples dont l'AF est intéressante à considérer.

En effet , leur construction physique a nécessité obligatoirement la définition préalable des actions que devrait réaliser le processus . Toutes ces opérations ont été mûrement réfléchies avant la conception du processus et la solution obtenue est la solution quasi-optimale fruit de l'alternance de réflexions et d'essais . La réalisation du processus a nécessité une modélisation précise et préalable ce qui correspond à la phase de création de SADT .

Dans ces conditions , si l'A F d'un processus existant est engagée , la phase créative est courcircuitée : l'AF ne pourra être *au mieux* qu'une description fidèle du système. Le regroupement des activités se fait sans difficulté selon l'enchaînement des opérations physiques ou la proximité physique . De même , les classes de données sont peu nombreuses et offrent peu de degré de liberté . En conséquence , par exemple dans [PIER 87] , le cycle auteur/ lecteur a été réduit à une unique remise de l' AF effectuée aux industriels .

A l'opposé , le système étudié dans [LHOS 85] permet de mettre en valeur les différentes facettes de SADT . Il présente une composante humaine importante (créer un système automatisé) et aucun modèle rigoureux n'a existé avant la réalisation de l'AF . La création des diagrammes peut alors être guidée par la démarche SADT et notamment utiliser les datagrammes pour observer une autre facette du système.

De par sa plasticité , SADT peut s'adapter à de nombreuses situations et convenir à différents systèmes . Il est cependant difficile de caractériser très précisément les problèmes auxquels SADT est facilement applicable : la manière dont l'utilisateur pratique SADT est aussi un élément déterminant et de plus difficile à cerner [ROSS 85].

4 Modèle dérivé de SADT

Dans ce chapitre , nous appliquons la méthode SADT à un système automatisé de production et nous donnons les classes des données et des activités qui le caractérisent. Nous proposons d'autre part un modéle dérivé de SADT à partir d'une certaine classification des données.

4-1 Classes des données et des activités.

4-1-1 Classes des données

Considérons un système automatisé de production. Les entrées et les sorties de ce système sont :

+ soit de la matière
+ soit de l'énergie
+ soit de l'information ou encore une combinaison de ces 3 éléments .

Remarque :
L'utilisation des variables généralisées [SUEU 90] permet d'exprimer l'énérgie comme le produit d'une variable d'effort par une variable de flux.

4-1-2 Classes des activités

Les activités régiront non seulement la masse et l'énergie comme dans le modèle de Lindt mais aussi l'information . La description n'est donc pas uniquement physique mais se place complètement dans le cadre de l'automatique qui manipule et transforme des informations.

Les différentes activités seront principalement les fonctions du Flow-Model (transport, source, distribution,...) présentées au chapitre 2. Cette liste est non limitative et peut être complétée selon les besoins de l'analyse fonctionnelle.

Remarques

En réalité , chaque intitulé d'activité est associé à la partie la plus caractéristique du modéle comportemental. En effet , des phénomènes annexes existent. Par exemple , un tuyau permettant le transport de matière peut présenter des fuites (dissipation) ou des accumulations . Le transport de matière nécessite souvent une donnée d'appoint comme une énergie alimentant une pompe . Cette dernière sera décrite par une source d'énergie au niveau inférieur . De même , une fonction de régulation peut effacer une partie de données , en mémoriser etc...

Il est à remarquer que le cheminement des flots d'informations est différent de celui de la masse et l'énergie : une même donnée peut être mise sur plusieurs supports différents et être fournie à plusieurs calculateurs . Le modèle comportemental correspondant à la fonction de répartition pour l'information et pour la masse et l'énergie est différent .

4-2 Modèle de l'actigramme

Basée sur des principes solides , SADT peut s'adapter à de nombreux systèmes . Nous allons décrire plus précisément les processus industriels en tirant profit de cette plasticité. La démarche est issue de l'observation d'AF effectuées sur des systèmes à composantes physiques et informationnelles .

4-2-1 Observations

Soit l'activité figure 4-2-1/1 tirée de l'AF SADT [IGL 89] d'un système fabriquant des matériaux composites . L'activité est " découper et marquer " (du tissu) . Une sortie générée est " découpes marquées " ce qui est totalement cohérent avec l'intitulé de l'activité . Une autre sortie est " déchets " : elle est aussi générée par l'activité .

Cependant , si on introduit la notion d'objectif de l'activité relativement à un critère de rendement , il est peu concevable que la sortie "déchets" fasse partie de l'objectif de l'activité . Sa génération est seulement nécessaire pour que l'activité génère la sortie " découpes marquées " . La prise en compte de l'objectif de l'activité classe donc les sorties en sortie principale et secondaire .

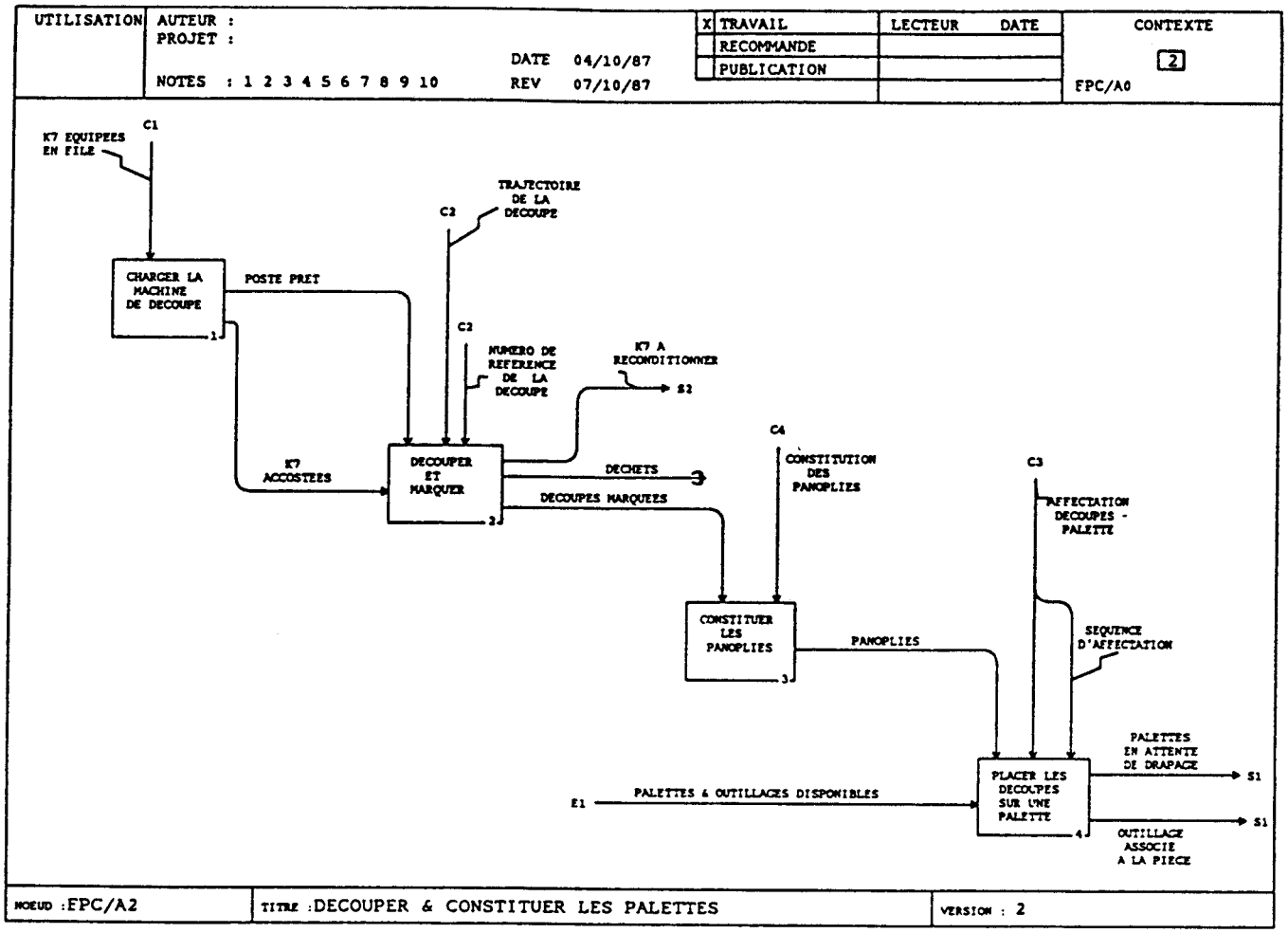


Figure 4-2-1/1

Un autre exemple tiré du même livre montre que l'activité "cuire" (des pièces) génère des "pièces cuites" (sortie principale) mais aussi "l'outillage à reconditionner" et "l'historique de la fabrication" (sorties secondaires) . Il peut être constaté que "l'historique" est associé dans la même sortie avec "l'outillage" malgré une nature manifestement différente . Ce contraste entre données se retrouve dans l'entrée de contrôle de l'activité où "la pièce crue et l'outillage prêts" côtoient le "cycle et la séquence de polymérisation".

L'observation des entrées montre un classement similaire. L'activité de " Cuire " a trait à la " pièce crue " qui est clairement le seul élément à cuire , donc est l'entrée principale. Ces remarques peuvent être faites sans difficulté sur d'autres exemples de systèmes industriels dont les composantes physiques et informationnelles peuvent toujours être distinguées.

Dans ce sens, nous introduisons un diagramme, dans lequel les données ont été réparties suivant des classes plus nombreuses, selon les critères ci-dessous:

- La dichotomie information / physique

- La dichotomie principale/secondaire

Exemple : la pièce crue (entrée principale) est transformée en pièce cuite (sortie principale) selon le cycle et la séquence de polymérisation (entrée secondaire) lorsque l'outillage est prêt (entrée secondaire).

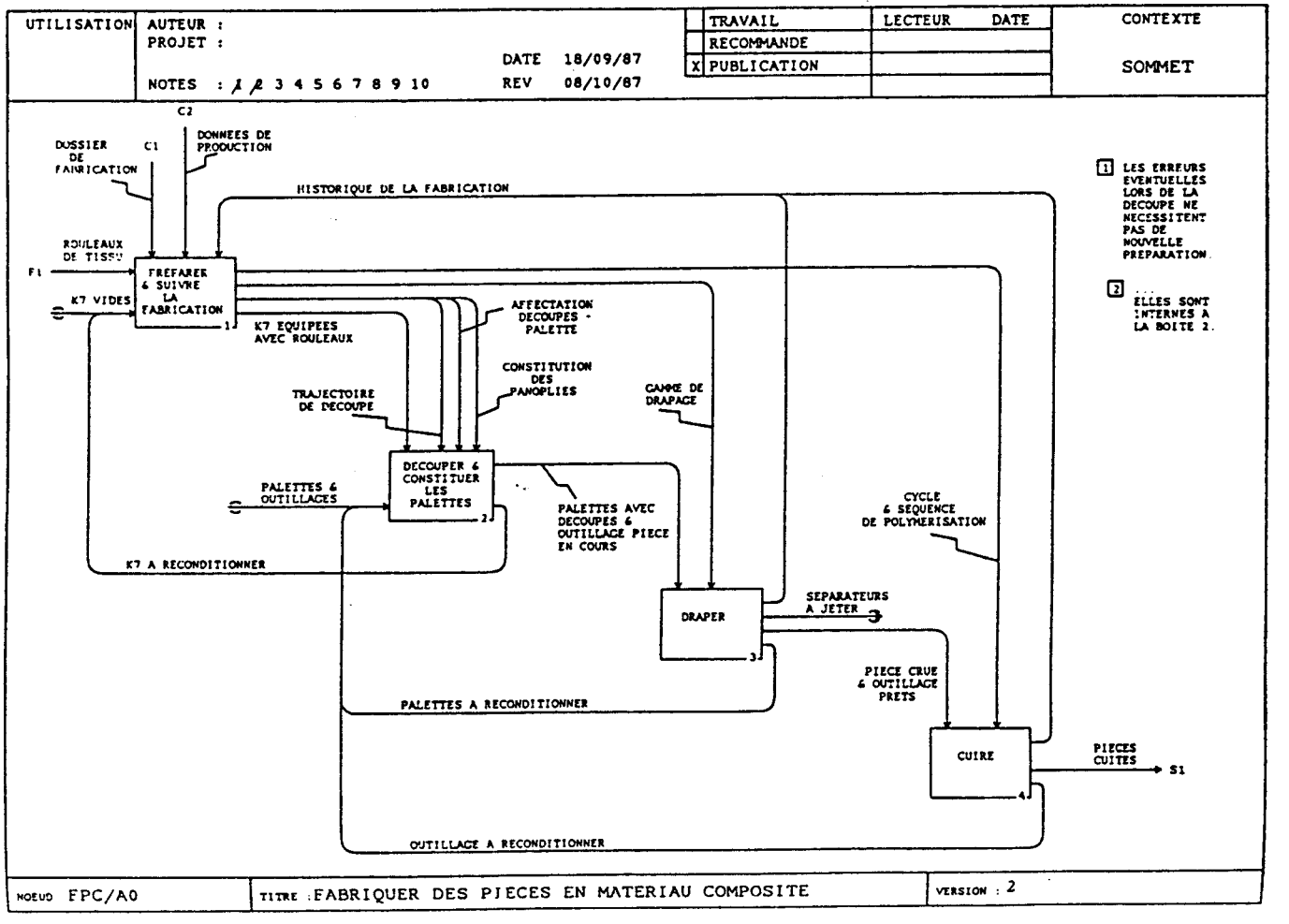


Figure 4-2-1/2

4-2-2 Modèle graphique

Tourné vers le processus physique , le modèle graphique est un affinement du modèle SADT .

Comme lui , les actigrammes sont composés de boîtes et de flèches qui font la connexion entre les boîtes . Les boîtes représentent les constituants de la décomposition et les flèches , les interfaces entre les constituants .

De manière identique , les données d'entrée (à gauche) sont transformées en données de sortie (à droite) par les fonctions représentées par la boîte . Enfin , les mécanismes ou supports par exemple les appareils ou les calculateurs , indiquent l'appareil qui "supporte" la fonction .

L'apport se situe au niveau de la représentation des données qui ne sont pas l'objet principal de la transformation. Les entrées et les sorties sont classées de la manière suivante:

- entrées secondaires

La transformation de l'entrée principale en sortie également principale peut être modulée par deux types de données .

+ entrées secondaires physiques e (φ)

Ce sont des contraintes physiques qui vont moduler le comportement de l'activité .

Ex : température ambiante pour l'activité réfrigérer d'une tour de refroidissement.

+ Entrée secondaires d'informations e (i)

Une partie ou l'ensemble d'une activité peut être une régulation et dépendre des consignes et des caractéristiques physiques mesurées . Ce sont des données de contrôle .

- sorties secondaires :

Deux types de données générés par l'activité sont distingués :

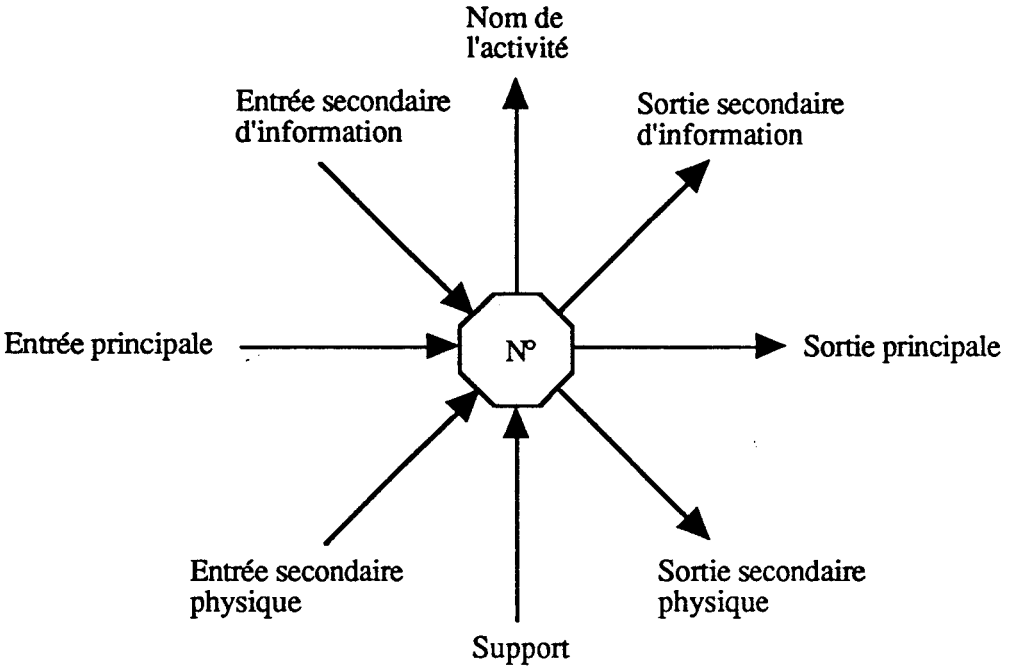


Figure 4-2-2/1: modèle dérivé

+ Sorties secondaires physique S (φ)

L'activité génère une sortie ou une caractéristique physique qui entrera dans une autre activité en tant que entrée physique .

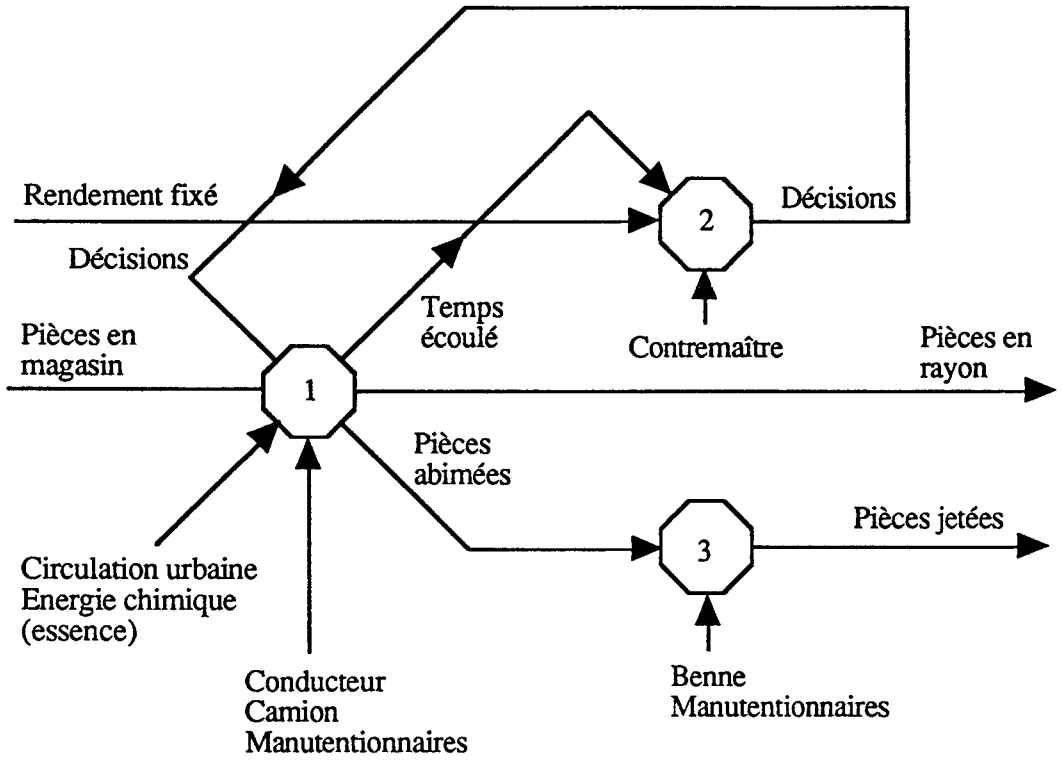
+ Sorties secondaires d'informations S (i)

L'activité génère une donnée qui sera utilisée sur le plan information par une autre activité . C'est par exemple une mesure utilisée dans une régulation .

Le nom de l'activité peut être omis dans la partie dessin du formalisme s'il est rappelé en dehors . Il en est de même pour le support . On peut noter que l'emplacement des flèches du module obéit aux conventions généralement admises : séparé par l'axe nom de la fonction /support , les 3 entrées (resp. sorties) sont situés à gauche (resp. à droite) . Une séparation verticale est aussi effectuée entre " abstraction " (entrée et sortie secondaires d'information , nom de la fonction) et " physique " (entrée et sortie secondaires physique , support) par l'entrée et la sortie principale : ceux-ci peuvent aussi bien être une donnée physique ou d'information .

4-3 Exemples

Appliquée à un processus physique , la construction de l'AF entraîne naturellement la création des activités physiques du processus mais aussi de régulation et de commande . La recherche des activités suivra ces 2 aspects et donc les dimensions physiques et informationnelles de manière simultanée.



1: ranger ; 2: obtenir un rendement donné ; 3: jeter

Figure 4-2-2/2: exemple

Les données définies ci-dessus sont replacées dans le contexte SADT en figure 4-2-2/3 et 4-2-2/4.

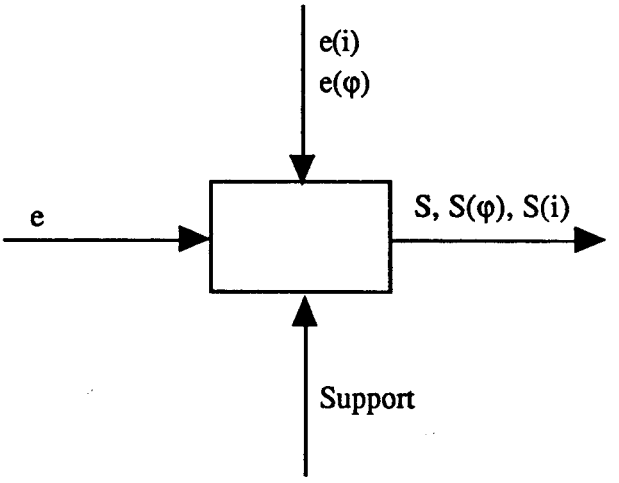


Figure 4-2-2/3

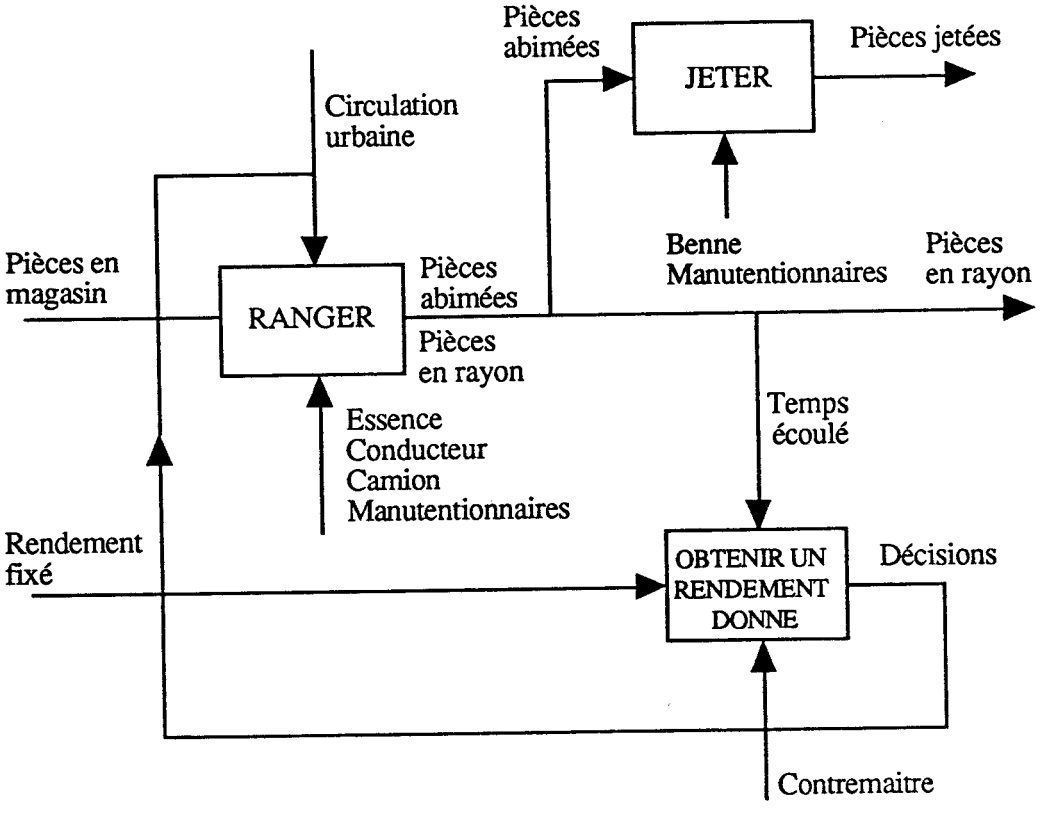


Figure 4-2-2/4: exemple

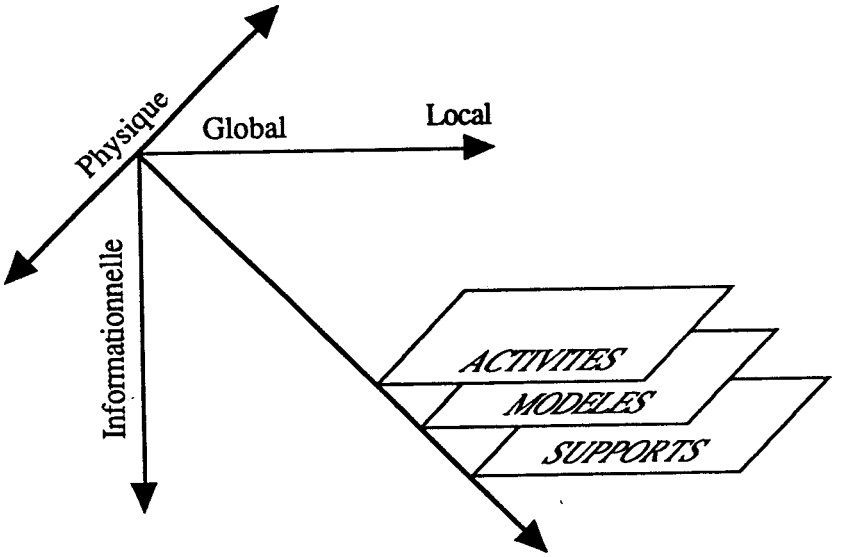
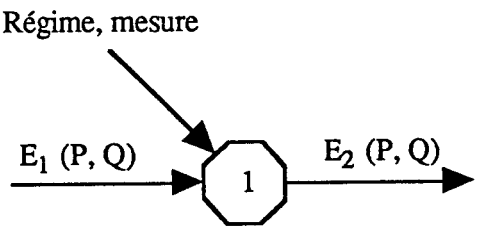


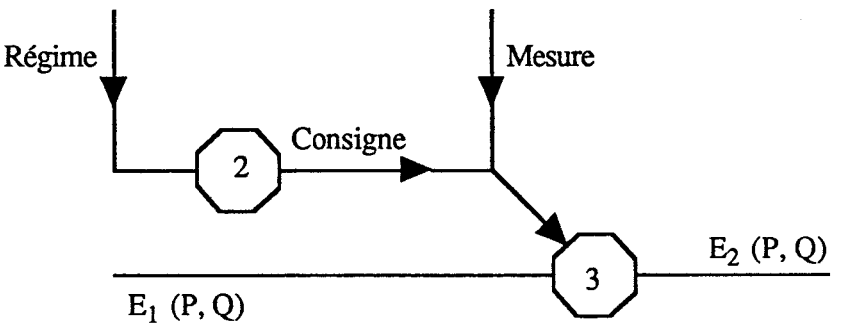
Figure 4-3/1

Exemple: régulation d'une vanne (E désigne une énergie)



1 : Transformer selon régime

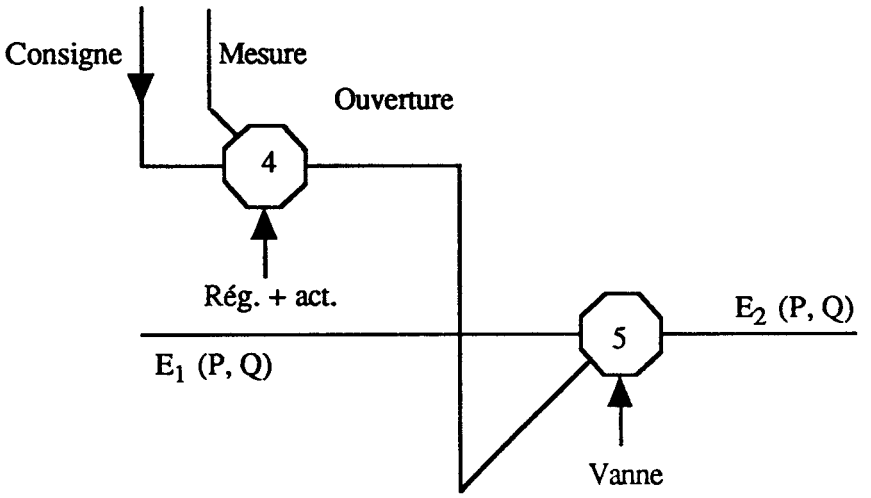
Figure 4-3/2



2 : Produire consigne (transformer régime en consigne)
3 : Transformer selon la consigne

1 = 2 + 3

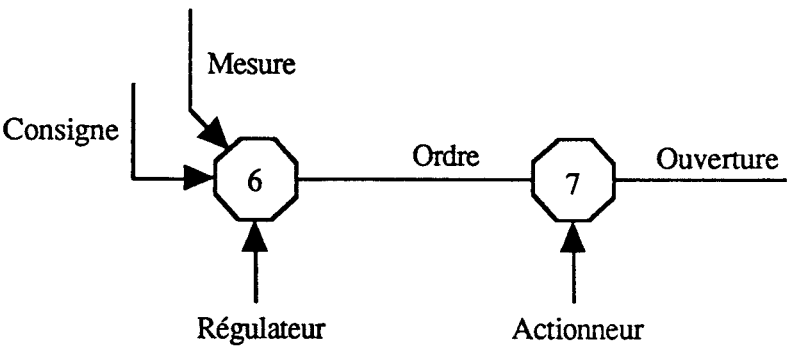
Figure 4-3/3



4 : Ouvre la vanne (transforme la consigne en ouverture selon la mesure)
5 : Transformer E_1 en E_2

3 = 4 + 5

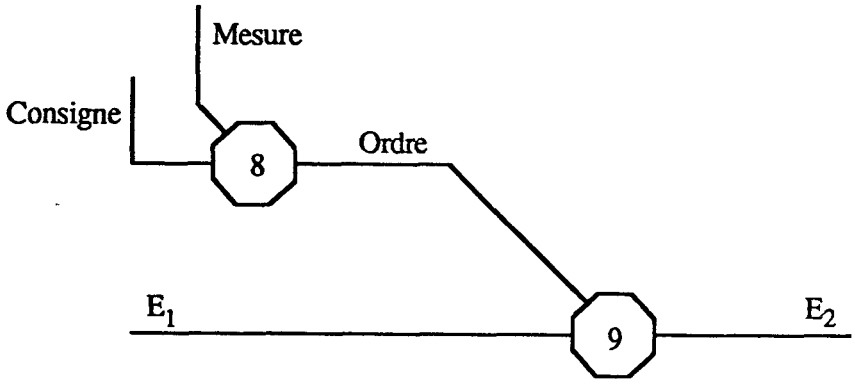
Figure 4-3/4



6 : Produire ordre
7 : Convertir
4 = 6 + 7

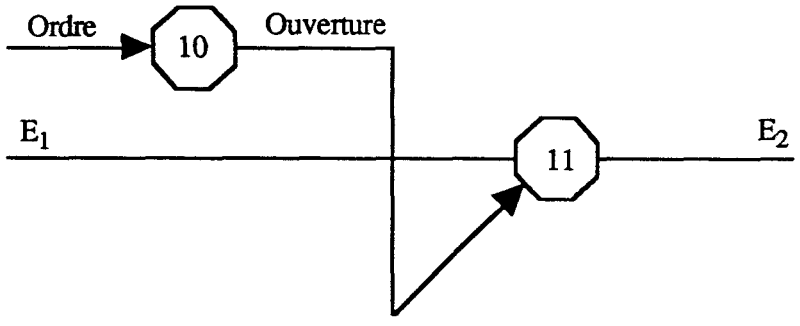
Figure 4-3/5

Cette analyse fonctionnelle n'est pas unique comme le montre la nouvelle décomposition de l'activité 3.



8 : Produire ordre (8 = 6)
9 : Transformer selon ordre
3 = 8 + 9

Figure 4-3/6



10 : Convertir 10 = 7
11 : Transformer E_1 en E_2
9 = 10 + 11

Figure 4-3/7

5 Conclusion

A partir des concepts fondamentaux de SADT , la conception des lectures horizontale et verticale des activités donne un moyen de mettre en relief les facettes donnée et activité du système . Utiles dans toute phase d'étude délicate , ces lectures abordent le modèle par une décomposition structurée de la représentation par diagramme . Leur simplicité de mise en oeuvre constitue une aide à la création des activités avec leurs différentes données.

La comparaison des datagrammes et des actigrammes a montré la facilité d'emploi de ces derniers et leur transparence . L'utilité des datagrammes est largement tributaire du niveau de complexité du système à modéliser et ainsi , un processus physique dont les données et les activités sont connues et classées ne nécessitera pour sa modélisation que l'emploi des actigrammes . Toutefois , le modèle SADT est quasi-universel et peut être modifié pour des applications particulières : nous avons proposé un modèle dérivé de SADT qui a été conçu pour le domaine de l'automatique où les notions d'information et d'objectif revêtent une importance particulière.

Placé dans un système de surveillance, cet interface opérateur/processus permettra de désigner clairement les défaillances de ce dernier . Proche du raisonnement humain , les expressions en termes d'activités constitueront un support de réflexion pour l'opérateur . Perdant peu de temps à l'interprétation des différents résultats , l'opérateur pourra se consacrer plus rapidement au réajustement du système de contrôle commande et à la compensation des dysfonctionnements du système complexe .

Bibliographie

[BELH 89] A. Belhimeur

Contribution à l'étude d'une méthode de conception des automatismes des systemes de conduite des processus industriels. Thèse, 1989, Université de Lille .

[BELT 87] Leo Beltracchi

A direct manipulation interface for water-based rankine cycle heat engines. IEEE Trans. on systems , man , and cybernetics SMC 17 , No 3 , may/june 87 .

[BREU 84] A.D. Breuil

Outils de conception et de décision dans les organisations de gestion de production , Thèse d'état , 13 nov. 84 , Bordeaux I .

[DANI 86] F. Daniellou

L'opérateur. la Vanne . l'Ecran . Ergonomie des salles de contrôle , Edition de l'ANACT , 1986 .

[DOUM 84] G. Doumeingts

" Méthode GRAI : méthode de conception des systèmes en productique", thèse d'état ,13 nov. 84, Bordeaux I.

[DRAN 82] J. Dransart

Le rôle et la hiérarchisation des alarmes , les modes d'information des opérateurs , leur évolution. Journées d'étude Conception des salles de contrôle sous l'angle de la sécurité et des facteurs humains, Union des industries chimiques , Gif-sur-Yvette,1982.

[DUPA 90] R. Dupas

Apport des méthodes d'apprentissage symbolique automatique pour l'aide à la maintenance industrielle. Thèse, 30 janvier 90, Université de Valenciennes.

[FEIG 82] E.A. Feigenbaum

The handbook of the artificial intelligence . Vol.3 , William Kauffmann inc., California, 1982 .

[FORT 83] D.A Fortin

Christmas trees and sweaty palms . Ninth Ann. Adv. Cont. Conf. , West Lafayette , Indiana , 1983 , pp 49-54 .

[FROM 88] B. Froment

Proposition d'un modèle capable d'optimiser le fonctionnement d'un système de production en respectant les contraintes organisationnelles imposées par la fonction gestion dans le cadre des ateliers flexibles de mécanique générale. Thèse , discipline mécanique , 1988, ECP université.

[GOOD 80] L.P. Goodstein , j. Rasmussen

The use of man-machine design criteria in computerized control rooms. Automation for safety in shopping and offshore Petroleum Operations, A.B Aune and S.Vlietztra (eds) , North-holland Pub. Comp. 1980.

[GOVI 87] T. Govindaraj

Qualitative approximation methodology for modeling and simulation of large dynamic systems : application to a marine steam power plant. IEEE trans. on systems , man , and cybernetics , SMC-17 , No 6 , november/december 87 .

[IGL 82] I.G.L. Technology

Introduction A SADT . IGL France. pp 1-50 . 1982 .

[IGL 89] I.G.L. Technology

SADT un langage pour communiquer. Eyrolle 1989 .

[LEES 83] F.P Lees

Process computer alarm and disturbance analysis : review of the state of art Computers and Chem. Eng. , Vol.7 ,n°6, 1983, 669-694.

[LHOS 85] P.Lhoste

Exploitation des systèmes automatisés , EX.A.O: Proposition d'une approche méthodologique et d'outil d'assistance. Thèse de 3 ème cycle Université de Nancy 1 , dec. 85.

[LIND 82] Morten Lind
Multilevel flow modelling of process plant for diagnosis and control . Riso national laboratory , DK 4000 Roskilde , Denmark , august 82 .

[LISS 86] M. Lissandre
La méthode SADT . Génie Logiciel , n°4 , pp 58-62, 1986.

[MALO 81] H. Maloubier , G. Doumeingts , D. Breuil
Les méthodes d'analyse en gestion de production. 3èmes journées scientifiques et techniques de la production automatisée, Toulouse 3,4 et 5 juin 1981.

[MARRA 86] Maledh Marrakchi
Représentation des connaissances pour l'aide au diagnostic industriel : application au système expert SEDIAG. Thèse, 7 mars 86, Université de Valenciennes.

[PIER 87] H. Pierreval
Analyse , modèlisation et simulation des systèmes de production; application au cas d'une fonderie. Thèse de doctorat , 29 mai 87 , Université Claude Bernard - Lyon 1 .

[RASM 74] J. Rasmussen
Mental procedure in real-life tasks : a case study in electronic Trouble Shooting. Ergonomics, n°3, pp 293-307 , 1974 .

[RASM 83] Jens Rasmussen
Skills , rules , and knowledge ; signals ,signs, and symbols , and other distinctions in human performance models. IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics , vol.SMC-13 ,No 3 , may/june 83.

[RASM 85] Jens Rasmussen
The role of hierarchical knowledge representation in dcision making and system management. IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics, vol. SMC-15 ,No 2 , march/april 85 .

[ROSS 77 a] D.T. Ross

" Structured Analysis (SA) : a language for communicating Ideas " , IEEE Trans. Software Engineering , Vol. SE-3 , No. 1 , Jan.1977, pp. 16-34.

[ROSS 77 b] D.T. Ross

" Structured Analysis for requirements definition " , IEEE Trans. Software Engineering , Vol. SE-3 , No. 1 , Jan.1977 , pp. 6-15.

[ROSS 85] D.T Ross

" Applications and extensions of SADT ", IEEE , April 1985 , pp. 25-34 .

[SUEU 90] C. Sueur

Contribution à la modèlisation et à l'analyse des systèmes dynamiques par une approche Bond-Graph, Thèse de doctorat , 5 oct. 90 , Université des sciences et Techniques de Lille Flandres Artois .

[TABO] V. Taborin

Coopération entre opérateur et système d'aide à la décision pour la conduite de procédés continus: application à l'interface opérateur système expert du projet ALLIANCE . Thèse de doctorat , Université de Valenciennes , Mars 1989 .

[TANG 89] Xiaoming Tang

Contribution à la conception des systèmes à base de connaissance temps réel pour l'aide au contrôle de procédés continus. Thèse , 12 octobre 89, Uuniversité de Valenciennes.

[WRIG 86] M.L Wright

An expert system for real-time control. IEEE Soft , March 86 , pp 16-26.

[XU 84] Xu Fuyuan

Un système automatique , graphique et interactif d'aide à l'analyse structurée (AU.G.I.A.S). Thèse , 23 nov. 84 , Lyon I.

4 Application au secondaire d'une centrale PWR 900 MW.

Chapitre 4: Application au Secondaire d'une Centrale PWR 900 MW.

1 Présentation du processus

1-1 Présentation générale

1-1-1 Le circuit primaire .

1-1-2 Le circuit secondaire

1-1-3 La régulation

1-2 Description du modèle par blocs

1-2-1 Processus énergétique

1-2-2 Alimentation en eau .

1-2-3 Régulation

2 Modéle fonctionnel

2-1 Activité de niveau 1

2-2 Hiérarchie des activités

2-3 Représentation graphique des activités

2-4 Cohérence analyse fonctionnelle / modèle de calcul

3 Modéle structural

3-1 Structure du modèle du processus .

3-2 Structure des relations de surveillance

3-3 Isolation

3-3-1 On considére l'ensemble des fonctions élémentaires

3-3-2 Regroupement des fonctions suivant les blocs de calcul

3-3-3 Regroupement des fonctions suivant les activités

4 Validation

4-1 Structure générale de la maquette

4-2 Modèle de défaillance d'un capteur

4-3 Modèle de défaillance d'un actionneur du type vanne.

4-4 Résultats de simulation

5 Conclusion

Annexes

Introduction

La régulation de niveau des générateurs de vapeur REP 900 MW est une chaîne sensible pour laquelle les défauts internes se traduisent dans la plupart des cas par un arrêt d'urgence (de l'ordre de 0,5/tranche/an) . La reprise en manuel est en effet trop tardive pour permettre un rétablissement de la situation lorsqu'elle s'est trop dégradée .

Il importe donc de prévoir un dispositif capable de détecter de façon précoce ces défauts (informations d'entrée , actionneurs , processus ,..) et de prendre les actions correctrices sur la commande (passage en manuel forcé ,...) pour éviter leurs conséquences immédiates et donner le temps à l'opérateur de faire un diagnostic plus complet lorsque cela est possible.

Le dispositif de détection des défauts est fondé sur l'utilisation de relations de surveillance , établies à partir du modèle du processus et sur la transmission des défaillances à l'opérateur.

1 Présentation du processus

1-1 Présentation générale

Les réacteurs des centrales PWR appartiennent à la filière dite à eau ordinaire , à cycle indirect. Ces centrales sont caractérisées par l'UO_2 enrichi qui sert de combustible , et par l'eau ordinaire qui sert à la fois de fluide caloporteur et de modérateur.

L'eau du circuit primaire extrait la chaleur produite au sein du combustible et la véhicule jusqu'à des échangeurs , les générateurs de vapeur où elle sert à vaporiser l'eau du circuit secondaire.

Dans le circuit secondaire , la vapeur à la sortie des générateurs de vapeur va se détendre dans la turbine ; après condensation et réchauffage , l'eau revient alimenter les générateurs de vapeur.

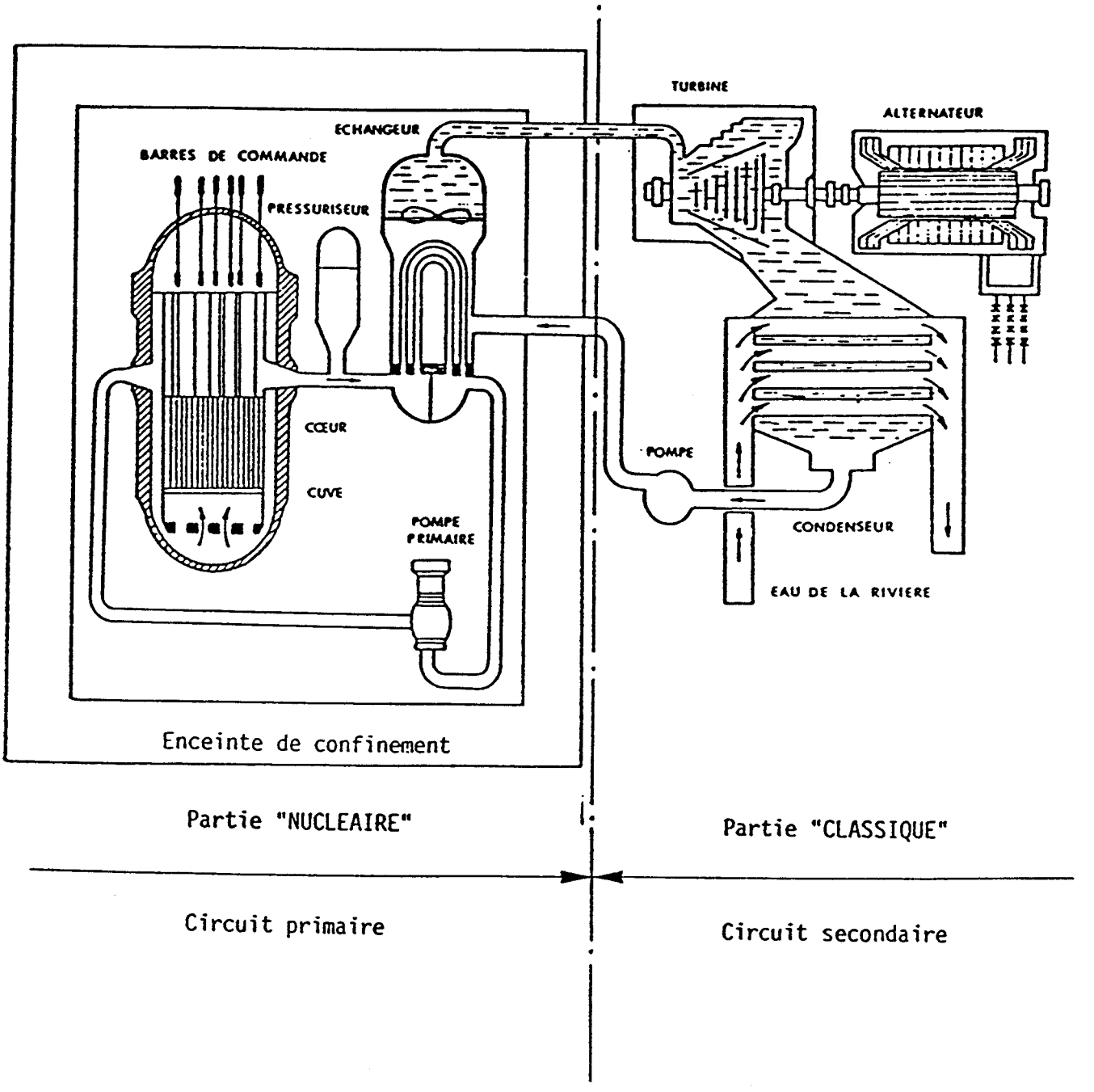


Figure 1-1/1: schéma de principe d'une tranche nucléaire PWR 900 MW

1-1-1 Le circuit primaire .

Il comprend essentiellement :

- le réacteur .

C'est l'enceinte où a lieu la réaction nucléaire et l'échange calorifique entre le combustible et le fluide caloporteur .

- le pressuriseur .

Son rôle est de maintenir une pression constante au sein du circuit primaire (fluide caloporteur).

- les pompes primaires .

Elle maintiennent un débit suffisant afin de transporter l'énergie du fluide primaire vers les générateurs de vapeur .

- le circuit de contrôle volumétrique et chimique .

+ Il maintient la masse d'eau constante dans le circuit primaire .

+ Il permet le contrôle de la concentration en bore du fluide primaire ainsi que son traitement chimique .

1-1-2 Le circuit secondaire

- le générateur de vapeur .

L'eau du primaire est maintenue en phase liquide dans un réacteur à eau sous pression PWR ou REP . Comme le rôle d'une chaudière nucléaire est de fournir le débit vapeur nécessaire à l'alimentation du groupe turboalternateur , le générateur transfère l'énergie thermique du circuit primaire au circuit secondaire en vaporisant le fluide secondaire .

- le groupe turboalternateur .

Il comprend la turbine , un ensemble sécheur-surchauffeur et l'alternateur .

+ la turbine comporte un corps haute pression HP et trois corps basse pression BP .

+ Les séparateurs-surchauffeurs séchent et surchauffent la vapeur qui s'est déjà détendue dans le corps haute pression avant son admission dans le corps basse pression.

+ L'alternateur transforme l'énergie mécanique en énergie électrique : 900 MW sous 24 KV.

- Le système de condensation .

Composé essentiellement d'un condenseur et de son dispositif de mise sous vide, il condense la vapeur d'échappement des corps BP de la turbine et du contournement vapeur.

- Les pompes .

Les pompes participant à l' alimentation des générateur de vapeur sont les pompes d'extraction de l'eau du condenseur, et les turbopompes alimentaires .

- La réfrigération principale .

Pièce maîtresse de toute machine thermodynamique , la source froide doit permettre le rejet d'une quantité de chaleur de l' ordre du double de l'énergie électrique produite .

1-1-3 La régulation

Le groupe turboalternateur est conçu pour fonctionner à la puissance nominale sous les conditions normales de tension et de fréquence du réseau .

Il peut cependant aussi :

- fonctionner à toute charge intermédiaire entre la puissance nominale et la puissance nulle .
- accepter des variations de charge et des délestages .

En charge normale , la turbine fonctionne en régulation de puissance . La demande puissance est constituée par la consigne affichée sur le programmateur de charge et par la demande instantanée de charge du réseau .

Si la puissance électrique demandée varie , l'action des soupapes réglantes d'admission HP de la turbine accroit ou réduit le débit de vapeur vive entraînant la modification des grandeur des circuits primaires et secondaires . Répondant au transitoire en suivant la charge de la turbine , la régulation du réacteur module la température du circuit primaire . Eventuellement , en cas de forte variation de la charge (> 10 %) , le contournement au condenseur s'ouvre pour absorber le déséquilibre entre le débit vapeur demandé par la turbine et le débit fourni par le réacteur .

Les demandes de puissance étant ainsi intégralement et instantanément répercutées sur l' appareil de production de vapeur , le mode de réglage est un mode à turbine prioritaire pur .

1-2 Description par blocs du modèle

Le modèle du processus associe des fonctions de transfert , des équations algébriques et des non-linéarités . Il a été obtenu en appliquant des équation de bilan : bilan d'énergie , de masse ,....

Ce modèle simplifié permet de représenter les évolution des grandeurs nécessaires à l' étude du générateur et notamment de sa dynamique . En particulier , il donne l'évolution des principaux paramètres physiques (pressions , débits , niveau d'eau...).

Les 11 blocs du modèle peuvent être répartis selon leur appartenance au processus énergétique , à l'alimentation en eau et à la régulation.

1-2-1 Processus énergétique

- Bloc puissance nucléaire .

Ce bloc rend compte de l'énergie primaire produite (Wp) en fonction de l'état des barres de contrôle (dont l' image est donnée par Robar) , en fonction de la concentration en bore de l'eau (dont l'image est donnée par Robor) , et en fonction de la température moyenne entre la branche chaude et la branche froide du circuit primaire .

- Bloc inertie échange thermique primaire / secondaire .

Ce bloc exprime l' échange d'énergie entre le coeur et le générateur de vapeur , la différence des deux produisant une température moyenne entre la branche chaude et la branche froide du circuit primaire Tm . D'autre part l'énergie thermique reçue par le générateur de vapeur (Wgv) dépend avec un coefficient d'échange Kechgv :

+ de la température moyenne du primaire (Tm)
+ de la température de la vapeur dans le GV (Tv)

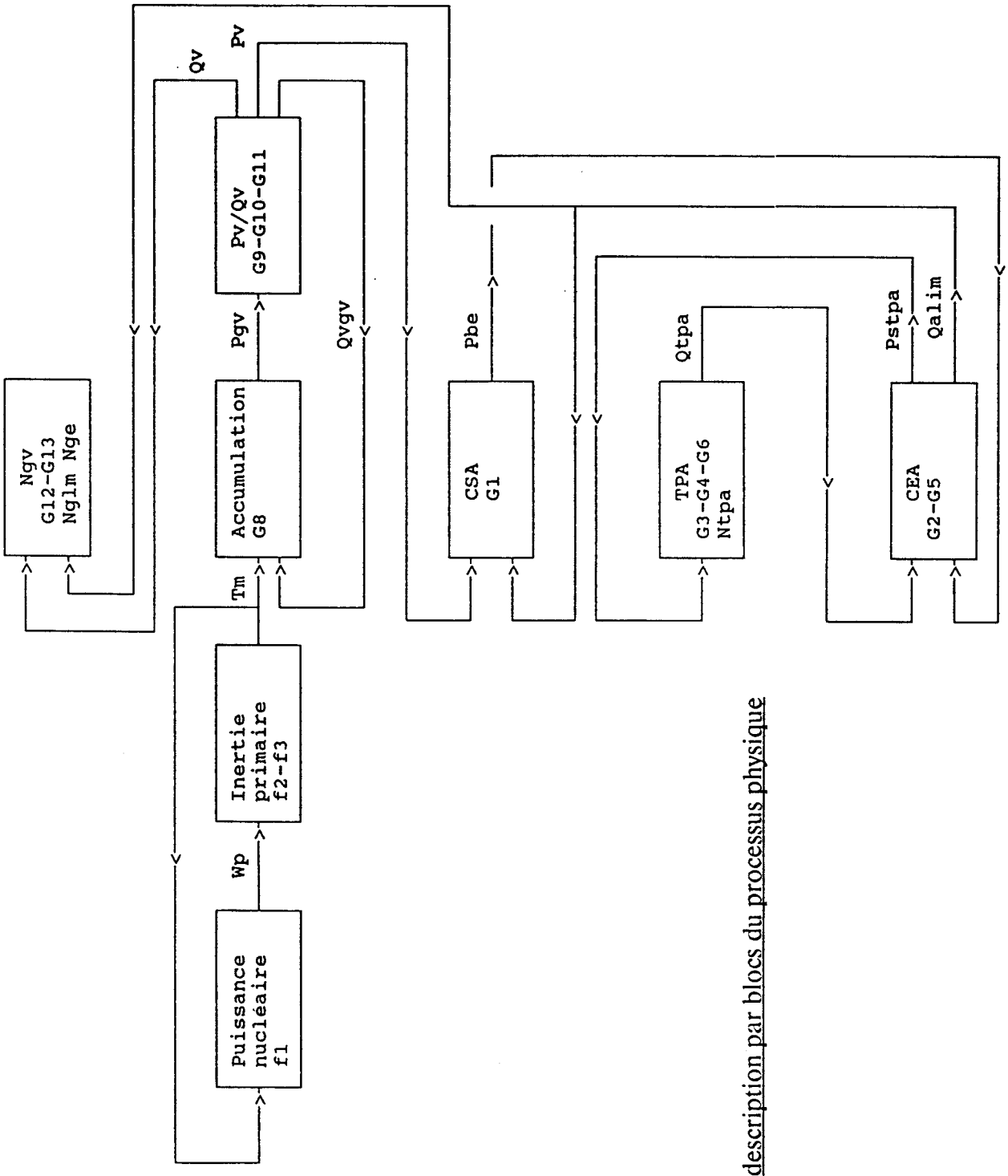


Figure 1-2-1/1: description par blocs du processus physique

- Bloc accumulation .

Qvgv étant l'énergie produite par le générateur de vapeur , ce bloc exprime le lien entre Qvgv et Wgv et donc l'accumulation d'énergie dans le GV dont une image est Tv .

- Bloc Pv/Qv (loi pression-débit vapeur).

Le bloc Pv/Qv représente le phénomène de détente dans les conduites .

Ainsi , Qvgv au carré que divise Kgvbar exprime les pertes de charges dans les conduites , ces pertes étant égales au delta de pression Pgv (sortie du Gv) - Pv (au niveau du barillet vapeur) . Le filtre du premier ordre exprime le retard de l'écoulement provoqué par la longueur de la tuyauterie .

Le débit vapeur d'admission de la turbine (Qvturb) est égal au débit vapeur (Qv) moins le débit vapeur au contournement (Qvc) ce dernier étant fonction de l'ouverture Oc et de la pression vapeur au barillet Pv . L'introduction de Cot permet de simuler une variation de demande du réseau qui se répercute alors très rapidement sur la turbine par l' intermédiaire de sa vanne (Ot) .

1-2-2 Alimentation en eau .

- Bloc CSA (Circuit soupapes alimentaires).

Ce bloc représente la vanne alimentaire reliée au générateur de vapeur , cette vanne étant commandée par la consigne d'ouverture Covaln qui est entrée dans un convertisseur D/A puis électropneumatique.

A partir de l'ouverture Ovaln et du débit Qvaln , la différence de pression aux bornes de la vanne peut ensuite être calculée.

De même , la pression du barillet eau est déduite de la pression vapeur à la sortie du générateur de vapeur .

- Bloc CEA (Circuit d'eau alimentaire).

Le débit d'eau de la turbopompe alimentaire permet d'obtenir le débit d'eau alimentaire fournie au générateur de vapeur , qui est aussi égal au débit de la vanne alimentaire .

Quant à la pression de sortie de la TPA , elle résulte de la pression au barillet eau et du débit d'eau alimentaire ; en effet , les pertes de charge barillet - TPA Pstpa - Pbe sont égales à Kalim * Qalim au carré .

- Bloc TPA (Turbo Pompe Alimentaire).

La vitesse de la TPA est fonction de la différence entre le couple moteur et le couple résistant , ce dernier étant déterminé en fonction de la différence entre la pression de sortie et la pression d'entrée de la turbopompe , de la vitesse de la turbopompe et de son débit :

Cr = (K * Débit * Delta de pression) / Vitesse .

Cette vitesse est asservie par une régulation hydropneumatique Woodward à la consigne de vitesse Cntpa . Cette régulation élabore pour cela , une consigne d'ouverture de soupape de la turbopompe alimentaire .

La vitesse et la différence de pression entre l' entrée et la sortie de la TPA déterminent le débit d'eau alimentaire.

- Bloc NGV (Générateur de vapeur) .

Le bloc NGV permet d'évaluer le niveau d'eau dans le générateur de vapeur en fonction du débit d'eau alimentaire entrant et du débit vapeur sortant au niveau du barillet vapeur.

On a deux méthodes pour obtenir ce niveau :

+ D'une part , on a un niveau gamme étroite calculé en fonction du débit d'eau et du débit de vapeur . Néanmoins , cette donnée n'est pas totalement représentative du fait de l'effet de gonflement tassement . Cela est pris en compte , dans la simulation , par deux filtres : un filtre sur le débit d'eau alimentaire avec une constante de temps de tassement Th et un filtre sur le débit de vapeur avec un facteur de gonflement G et une constante de temps de gonflement Tg .

+ D'autre part , l'imprécision de cette première mesure a entraîné l'introduction d' un deuxième capteur qui mesure la masse d'eau liquide contenue dans le générateur de vapeur apportant ainsi une représentation plus fiable du niveau.

1-2-3 Régulation

- Bloc RN (Régulation de niveau).

La régulation de niveau permet d'élaborer une consigne de débit d'eau Cqe .

Tout d'abord , aussi bien pour le niveau gamme large que pour le niveau gamme étroite , un régulateur de type P.I.D ou proportionnel dérivée élabore une consigne de débit d'eau (Srngl et Srnge) , fonction de l'écart entre le niveau effectif (Nge et Ngl) et une consigne de niveau (Cnge et Cngl) .

On additionne les consignes de débit d'eau gamme étroite (Srnge) et gamme large (Srgl) pour obtenir la consigne de débit d'eau (Cqe) .

- Bloc RDE (Régulation de débit d'eau).

Ce régulateur élabore la consigne d'ouverture de la vanne alimentaire à partir de la différence entre la consigne de débit d'eau calculée précédemment et le débit d'eau alimentaire effectif .

La consigne d'ouverture de vanne alimentaire est égale à Kdp * Srqe / sqrt (Dpvalnf) qui est une reécriture de la relation physique

Delta de pression = K * (Débit / Ouverture) au carré .

- Bloc Rdp (Régulateur de Delta de pression).

Ce régulateur élabore une consigne de vitesse de la turbopompe alimentaire Cntpa à partir de la valeur de Dp (pression barillet eau Pbe - pression barillet vapeur Pv) à atteindre. A partir de la consigne de delta de pression Cdp et la mesure de Dp , l'écart Edp est calculé puis injecté dans le régulateur de type P.I. . on en déduit la consigne de vitesse de la turbopompe .

2 Modéle fonctionnel

2-1 Activité de niveau 1

L'activité de niveau 1 sera de "Transformer le combustible en énergie électrique selon la demande du réseau".

Afin de mettre en relief l'alimentation d'eau du générateur de vapeur , les autres activités de la centrale seront décrites globalement sans détailler les nombreuses régulations.

2-2 Hiérarchie des activités

Elle est présentée en annexe 1.

2-3 Représentation graphique des activités

Nous donnons à titre d'exemple en annexe 2 trois des vingt planches composant l'analyse fonctionnelle effectuée .

Activité A31

Le rôle de la TPA est d'acheminer l'eau du condenseur au générateur de vapeur. Elle crée pour cela une pression de refoulement qui provoque la circulation de l'eau à travers le barillet eau et la vanne alimentaire placé à sa sortie (A33). Cette mise en pression de l'eau nécessite la rotation de la TPA. L'énergie mécanique nécessaire provient d'une partie de l'énergie de la turbine(A32).

Activité A32

La transformation énergie turbine/énergie TPA (A35) est commandé en vitesse par un calculateur (A34) qui produit la consigne de vitesse Cntpa.

Activité A35

L'activité A37 décrit uniquement la transformation énergétique turbine/TPA. Cette action est modulée par l'ouverture de la soupape de la TPA. Cette dernière est commandée par une régulation mécanique du type Woodward à partir de la consigne de vitesse (A36).

2-4 Cohérence analyse fonctionnelle / modèle de calcul

Comme plus haut, nous donnons à titre d'exemple une des planches montrant les correspondances analyse fonctionnelle / modèle de calcul .

Validant l'approche énergétique , une coïncidence quasi-parfaite apparaît avec le modèle de calcul . Celui-ci ayant été simplifié non seulement pour des raisons de taille mémoire mais aussi des besoins de représentation intermédiaire entre un modèle classique et un modèle qualitatif , des variables apparaissent uniquement dans l'analyse fonctionnelle comme le couple moteur et la vitesse angulaire de la turbine .

Le modèle de calcul confirme donc l'analyse fonctionnelle effectuée. Le tableau 2-3/1 donne la relation entre la représentation par blocs et l'analyse fonctionnelle.

Remarque : les groupes d'activités reliés à un bloc peuvent être renommés sous un nom unique .

blocs		fonctions	
désignation	fonctions-processus	désignation de l'activité	fonction processus
nucléaire	1	⊂ A9	1 à 5
inertie primaire	2 à 5	⊂ A9	1 à 5
accumulation	6 à 9	A14	6 à 9
Pv / Qv	10 à 19	A5 A8 A12	15 à 18 13 à 14 10 à 12-19
Ngv	53 à 58	A17	53 à 58
Cea	37-50	A24	37-50
Tpa	38 à49-51-52	A33 A36 A37	44 à49-51-52 38 à 42 43
Csa	30 à 36	A27 A29	34 à 36 30 à 33

Tableau 2-3/1: Relation entre la représentation par blocs et l'analyse fonctionnelle.

3 Modéle structural

3-1 Structure du modèle du processus .

Le modèle est composé de 59 fonctions liant 62 variables connues et inconnues . Les listes des variables connues (capteurs , commandes) , des variables physiques caractéristiques du processus , des fonctions et des expressions correspondantes sont données en annexe 4. L'ensemble E des éléments à surveiller est composé des capteurs et des fonctions processus suivants:

Y = {Tm,Pgv,Pv,Qv,Pstpa,Qalim,Ntpa,Nge,nge1,nge2,Nglm,Dp}
F = {f1,f2,....,f19,f30,f31,.....,f59}

3-2 Structure des relations de surveillance

Le tableau décrivant le processus complet (annexe 5) est partitionné selon les variables connues et inconnues . Notons que le modèle des capteurs n'est pas représenté par une fonction ce qui permet d'avoir un tableau plus réduit , la démarche structurelle pouvant s'appliquer dans les deux cas .

Une triangularisation simple permet alors de ramener les arcs dans la partie triangulaire inférieure du tableau . L'algorithme suivant est tiré de [DARO 86]

Algorithme

Etape 1 : i := 0 ; j := 0 ;
Etape 2 : trouver la ligne de A avec le nombre minimal d'éléments (soit k ce nombre)
Etape 3 : i := i + 1 , associer à cette figure l'indice i , éliminer cette ligne
Etape 4 : Associer aux colonnes qui ont des éléments dans cette ligne , les indices j+1 , j+2 ,.... et éliminer ces colonnes ; j := j + k ;
Etape 5 : si il y a encore des lignes reprendre l'étape 2 sinon la fin de l'ordonnancement est atteinte

Cet algorithme décrit une triangularisation par rapport aux lignes . En inversant lignes et colonnes dans l'algorithme ou en transposant la matrice , une triangularisation par rapport aux colonnes est obtenue .

Les structures S-connexes liant les fonctions et les variables inconnues sont ensuite extraites : 5 composantes peuvent être dégagées.

Nous retirons du modèle les relations f32 et f41. Celles-ci sont en effet des non linéarités avec hystérèsis et seuil ce qui empêche l'expression d'une variable en fonction des autres par ces relations. Pour le système F \ { f_{32} , f_{41} } , la composante sous-déterminée est l'ensemble { f_1 } , la structure juste-déterminée est { f2 , f3 , f30 , f31 , f33 à f36 , f38 , f39 , f40 , f42 à f45 , f52 } tandis que { f4 à f19 , f37 , f46 à f51 , f53 à f58 } est la composante sur-déterminée .

La linéarisation des fonctions f_{32} et f_{41} permet d'avoir une structure surdéterminée plus importante. La composante sous-déterminée est alors l'ensemble { f_1 } , la structure juste-déterminée est { f2 , f3 } tandis que le complément donne la partie surveillable du processus.

Pour chacune des structures S-connexes , on a recherché les structures des relations de surveillance . Nous donnons ci-dessous les listes des variables connues nécessaires au calcul des relations et des fonctions intervenant dans la relation.

<u>Ensemble des relations de surveillance avec les variables capteurs exprimées dans la relation</u>

Rc (Pgv,Tm,Pv)
Rd (Pv,Pgv,Qv)
Re (Pv,Oc,Qv,Dot)
Rf (Nge,Qalim,Qv)
Rg (Nglm,Qalim,Qv)
Rh (Nge,Nglm,Qalim,Qv)
Ri (Dp,Qalim,Covaln)
Rj (Dp,Pstpa,Qalim,Pv)
Rk (Ntpa,Qalim,Pstpa,Petpa)
Rl (Ntpa,Qalim,Pstpa,Petpa,Cntpa)
Rm (Ntpa,Pstpa,Petpa,Cntpa)
Ro (Tm,Pgv,Qv)
Rp (Nge,Nge1)
Rq (Nge,Nge2)
Rr (Nge1,Nge2)
Rs (Ntpa,Qalim)
Rt (Qalim,Pstpa,Pv)

Ensemble des fonctions processus par relation de surveillance

Rc (4 à 12)
Rd (10 à 12 -19)
Re (13 à 18)
Rf (55 à 58)
Rg (53-54)
Rh (53 à 58)
Ri (30 à 36-59)
Rj (37-59)
Rk (46 à 51)
Rl (38 à 45-50 à 52)
Rm (38 à 49-51-52)
R0 (4 à 9-19)
Rs (38 à 50-52)
Rt (30 à 37)

Remarque: les relations Ra , Rb et Rn utilisant l'équation très approximée f_1 ont été retirées des tableaux.

3-3 Isolation

A partir du modèle du système physique , nous avons obtenu 17 relations différentes dont 3 relations basées sur la redondance physique du niveau gamme étroite . Ces 17 relations (dont 12 liées à l'alimentation d'eau) décrivent le système physique de façon redondante et permettent non seulement de détecter la présence d'une défaillance mais aussi d'isoler des pannes à partir de leurs structures.

Structures capteurs et processus des relations de surveillance

L'étude des structures capteurs et processus des relations de surveillance conduit à la définition d'un ensemble de mots binaires caractéristiques des différentes défaillances possibles.

Pour ce qui concerne l'utilisation des structures capteurs , les défaillances envisagées sont les pannes simples des capteurs. De même , pour les structures processus ,on envisage les pannes simples de chaque fonction processus . Dans les deux cas ,on peut envisager des regroupements d'éléments suivant des critères fonctionnels ; pour les fonctions processus ,nous présentons 3 approches:

Eléments / Relations	Tm	Pgv	Pv	Qv	PstpaQalimNtpa	Nge	Nge1	Nge2	Nglm	Dp	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10	G11	G12	G13
c	1	1		1														1	1				
d		1	1	1															1		1		
e			1	1																1			
f				1	1		1																1
g				1	1				1													1	
h				1	1		1		1													1	1
i					1					1	1						1						
j			1		1	1				1		1					1						
k					1	1	1							1	1	1							
l					1	1	1						1		1	1							
m					1		1						1	1		1							
o	1	1		1														1			1		
p						1	1																
q						1		1															
r							1	1															
s					1	1							1	1	1								
t			1		1	1					1	1											

Figure 3-3/1: tableau de sensibilité

- ensemble des fonctions élémentaires
- regroupement des fonctions suivant les blocs de calcul du programme de simulation
- regroupement des fonctions suivant les activités distinguées par l'analyse fonctionnelle au niveau physique .

3-3-1 On considére l'ensemble des fonctions élémentaires

On considère tout d'abord les classes d'équivalence des éléments (capteurs ou fonctions processus) ayant le même ensemble de relations sensibles : il sera impossible de distinguer la défaillance d'un élément d'une classe de celle d'un autre élément de la même classe .

Si l'on restreint l'analyse aux capteurs , on constate qu'ils ont tous des mots caractéristiques différents .Pour l'ensemble des fonctions processus , on trouve la partition en classe d'équivalence donnée par le tableau 3-3-1/1.

groupe de fonctions processus	fonction processus
G1	30 à 36
G2	37
G3	38 à 45 -52
G4	46 à 49
G5	50
G6	51
G7	59
G8	4 à 9
G9	10 à 12
G10	13 à 18
G11	19
G12	53-54
G13	55 à 58

Groupes de fonctions processus isolables :tableau 3-3-1/1

Si l'on considére l'ensemble des éléments capteurs et fonctions processus , on constate que certains couples capteurs-fonctions ont le même mot caractéristique . Le tableau 2 donne l'ensemble de tous les mots caractéristiques calculés .

On constate en effet qu'un manque d'isolation existe entre :

Tm température moyenne primaire et le groupe de fonctions G8 = { 4 à 9 }

Nglm niveau gamme large et le groupe de fonctions G12= {53,54}

Dp et G7={59} . Cependant la fonction f59 ne contient aucun paramètre physique et ne peut donc correspondre à une défaillance. Le couple (Dp, f59) ne constitue pas un manque d'isolation .

3-3-2 Regroupement des fonctions suivant les blocs de calcul

Le regroupement des fonctions suivant les blocs de calcul du programme de simulation se traduit par la classification suivante (tableau 3-3-2/1)

blocs	fonction processus	groupe de fonctions processus
accumulation	4 à 9	G8
PV/QV	10 à 19	G9-G10-G11
NGV	53 à 58	G12-G13
CEA	37-50	G2-G5
TPA	38 à 49 51-52	G3-G4-G6
CSA	30 à 36	G1

Tableau 3-3-2/1

La signature caractéristique de la défaillance d'un bloc s'obtient simplement au moyen d'un OU logique appliqué aux mots caractéristiques des éléments du bloc . On obtient ainsi :

Mot(accu) =Mot(G8)

Mot(Pv/Qv)=Mot(G9) V Mot(G10) V Mot(G11)

Mot(Ngv) =Mot(G12) V Mot(G13)

Mot(CEA) =Mot(G2) V Mot(G5)

Mot(TPA) =Mot(G3) V Mot(G4) V Mot(G6)

Mot(CSA) =Mot(G1)

Les manques d'isolation déjà évoqués restent bien évidemment vrais . Ils se traduisent par une confusion des défaillances suivantes :

- Tm et le bloc accu
- Nglm et le bloc Ngv

3-3-3 Regroupement des fonctions suivant les activités

La liste suivante donne la relation entre activités et fonctions processus pour l'analyse fonctionnelle effectuée . La défaillance d'une activité est entraînée par la défaillance de l'une quelconque des fonctions processus qui lui sont associées.

Cependant une possibilité d'ambiguïté de diagnostic apparait .Elle découle des deux faits suivants :

* Toutes les fonctions processus d'une même classe d'équivalence ont le même mot caractéristique . Il est donc impossible de distinguer la défaillance de l'une de la défaillance de l'autre .

* Une activité peut n'utiliser qu'une partie des fonctions processus d'une classe d'équivalence . Leur défaillance cause bien sur la défaillance de l'activité . Cependant la défaillance de l'une des fonctions processus appartenant au complément produira le même mot caractéristique , bien que l'activité considérée ne soit pas défaillante .

La figure 3-3-3/1 illustre cette ambiguïté .

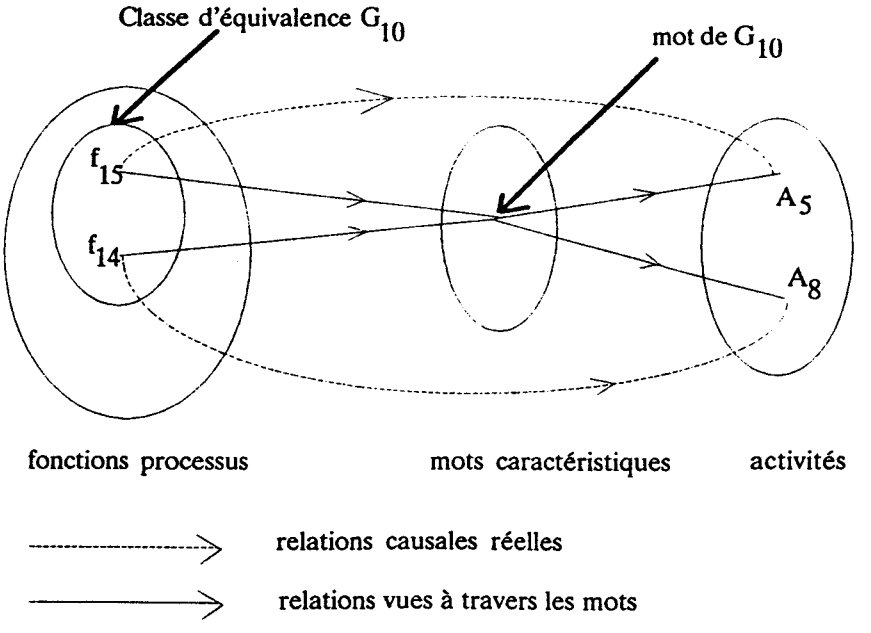


Figure 3-3-3/1

Liste des activités et des mots caractéristiques associés

* transformer Pvturb,Qvturb en énergie mécanique selon la demande réseau : A5
  fonctions processus associées { 15 à 17}
  ambiguïté de diagnostic car {15 à 17} ⊂ G10
  M(A5) = M(G10)
* transmettre à partir de Pv,Qv de l'énergie à la turbine selon la demande turbine :A8
  fonctions processus associées {13,14}
  ambiguïté de diagnostic car {13,14}⊂ G10
  M(A8) = M(G10)
* transmettre l'énergie entre GV et barillet A12
  fonctions processus associées { 10 à 12} ∪ {19} ∪ { 36} = G9 ∪ G11 ∪ { 36 }
  ambiguïté de diagnostic car {36} ⊂ G1
  M(A12) = M(G9) V M(G11) V M(G1)
* transformer l'énergie reçue du primaire en énergie vapeur :A14
  fonctions processus associées { 6 à 9}
  ambiguïté de diagnostic car { 6 à 9} ⊂ G8
  M(A14) = M(G8)
* accumuler de l'eau :A17
  fonctions processus associées {53 à 58} ∪ {36} = G12∪G13 ∪ {36}
  ambiguïté de diagnostic car {36} ⊂ G1
  M(A17) = M(G12) V M(G13) V M(G1)
* transporter l'eau entre TPA et vanne :A24
  - entre TPA et barillet eau :A24a
    fonctions processus associées {50,37}
    M(A24a) = M(G5) V M(G2)
  - entre barillet eau et vanne :A24b
    fonctions processus associées {36}
    ambiguïté car {36} ⊂ G1
    M(A24b) = M(G1)
* transformer (Pev,Qalim) en (P,Q) :A27
  fonctions processus associées {34 à 35}
  ambiguïté car {34 à 35} ⊂ G1
  M(A27) = M(G1)

*convertir l'ordre d'ouverture en ouverture :A29

fonctions processus associées {30 à 33}

ambiguïté car {30 à 33} ⊂ G1

M(A29) = M(G1)

* Les 2 activités précédentes peuvent être réunies dans l'activité " transformer (Pev,Qalim) en (P,Q) selon l'ordre d'ouverture :A27-29 "

fonctions processus associées {30 à 36}

ambiguïté car 36 ∈ {30 à 36}

M(A27-29) = M(G1)

* transformer E(P,Q) en E(Pstpa,Qtpa) modulé par (Cm,Ntpa) :A33

fonctions processus associées { 44 à 49,51,52}

* transformer Cntpa en ouverture de la soupape : A36

fonctions processus associées {38 à 42}

* transformer l'énergie d'alimentation TPA en énergie mécanique: A37

fonctions processus associées {43}

* Les activités A33, A36 et A37 peuvent être réunies dans l'activité " transformer les énergies selon Cntpa : A33-36-37 "

fonctions processus associées {38 à 49,51,52}

M(A33-36-37) = M(G3) V M(G4) V M(G6)

remarques.

1) L'activité inertie échange thermique ne peut être surveillée car nécessite le contrôle d'un groupe de relations qui comporte la relation 1 très approximée : cette dernière fait partie des relations a b n qui ont été retirées

2) Le tableau des activités dont la défaillance donne lieu à une ambiguïté de diagnostic est donnée ci-dessous :

* si défaillance de G1 , ambiguïté entre A12,A17,A24b,A27 et A29
* si défaillance de G10 , ambiguïté entre A5 et A8
* si défaillance de G8 , ambiguïté sur A14

4 Validation

4-1 Structure générale de la maquette

Le logiciel de validation / simulation GENESIS programmé en TURBO-PASCAL 4 et utilisant les fonctions graphiques de TOOLBOX se décompose en différents blocs dont les rôles sont définis ci-dessous . Ce logiciel est accompagné d'un utilitaire RESURJENCE de restitution à l'écran ou sur papier des simulations sauvegardées par GENESIS .

bloc simulation

Remplaçant la centrale , il représente les différentes grandeurs d'évolution du processus et de la régulation en marche normale . Il utilise un modèle simplifié de la centrale PWR mettant l'accent sur la régulation de niveau d'eau du générateur de vapeur (figure 4/1).

bloc défaillance

Son rôle est de créer des défaillances capteur , actionneur , régulation . Les modèles correspondants sont décrits en 4-2 .

bloc détection

Il met en oeuvre les relations de surveillance afin de détecter et d'isoler les différentes défaillances .

bloc gestion de la simulation

Son rôle est de définir les paramètres globaux de la simulation ainsi que les événements particuliers du type changement de régulation ou défaillance .

bloc sortie des résultats

Les diverses données peuvent être sorties soit de manière immédiate (GENESIS) soit de manière différée (RESURJENCE) sur écran et imprimante.

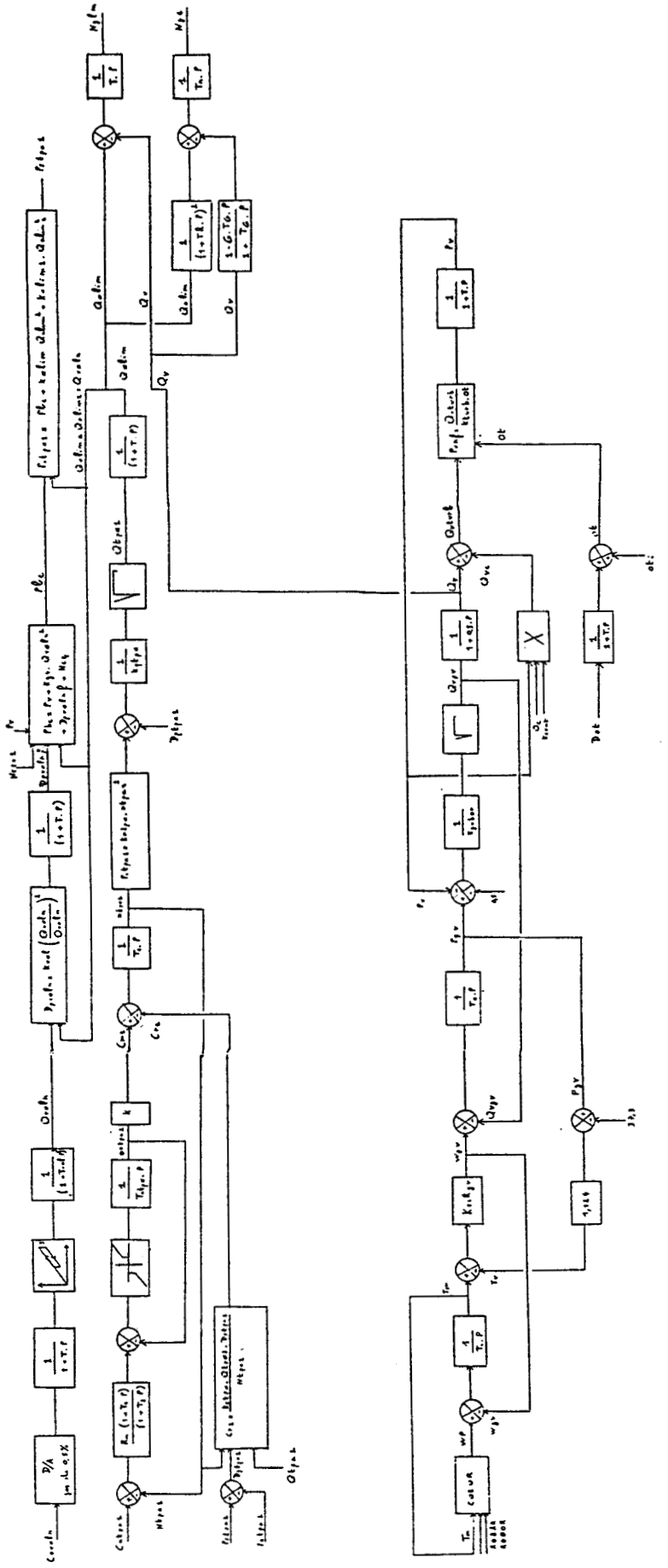


Figure 4/1: centrale PWR 900 MW

Les évolutions des résidus des relations de surveillance et des grandeurs physiques peuvent être fournies ainsi que les conditions de la simulation : régime ,période d'échantillonnage ,paramètres de la défaillance , amplitude minimale et maximale des résidus , paramètres de la régulation.

4-2 Modèle de défaillance d'un capteur

Le modèle de défaillance utilisée dans la simulation est une forme simplifiée de la représentation schématique d'un capteur [HAMA 86] . Ce modèle a été étendu aux actionneurs .

Les éléments retenus pour modéliser la défaillance d'un capteur sont décrits ci-dessous :

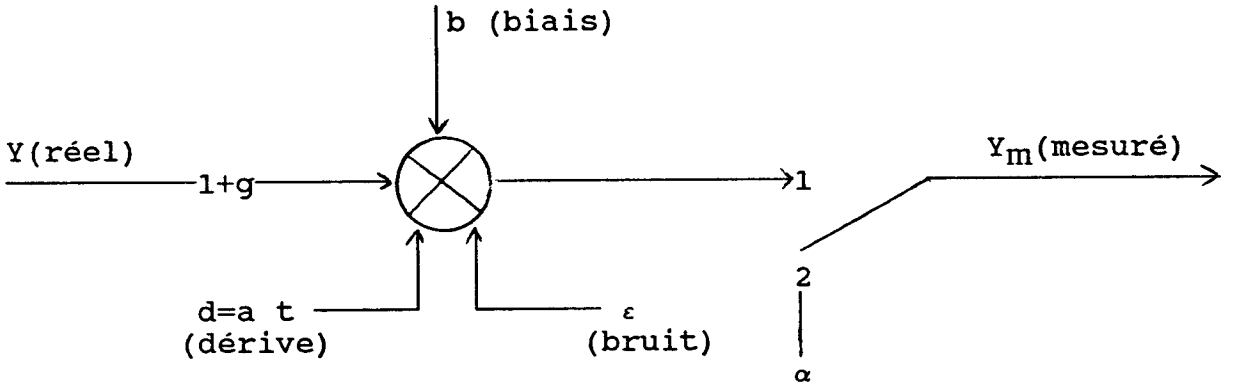


Figure 4-2/1: modèle de défaillance d'un capteur

- Le gain g représente le facteur d'échelle . En fonctionnement normal , il est égal à 0 .

- Le biais b est une erreur constante qui s'ajoute à la mesure .

- La dérive : c'est une erreur additive , comme le biais mais à la différence de celui-ci elle n'est pas constante dans le temps . Elle est ici choisie linéaire en fonction du temps.

$$d = a \, . \, t$$

- Le bruit ε : la sortie du capteur est entachée de bruit qui peut augmenter sous l'effet d'une défaillance . Le bruit gaussien stationnaire de moyenne nulle et de variance σ est retenu .

- Le blocage : le capteur fournit en permanence la même information α quelle que soit son entrée .

Les différents éléments sont ainsi caractérisés par les paramètres réunis dans le tableau suivant :

élément	facteur d'échelle	biais	dérive d=a.t	bruit N= (0,σ)	blocage
paramètre	g	b	a	σ	α , b_g

Tableau 4-2/1

avec $b_g < 0$ pas de blocage ; $b_g > 0$ $Y_m = \alpha$

Compte tenu de cette modélisation , Y_m a la forme suivante :

$$Y_m = [\,(1+g)\,Y + b + a.t + \epsilon\,]\,V\,[\,\alpha\,]$$

avec V : ou exclusif

Les paramètres du fonctionnement non-défaillant du capteur sont :

paramètre	g	b	a	σ	b_g	α
valeur (non-défaillante)	0	0	0	σ normal	<0	qcq

Tableau 4-2/2

Liste des capteurs : Tm , Pgv , Pv , Qv , Pstpa , Qalim , Ntpa , Nge , Nge1 , Nge2 , Nglm, Dp

4-3 Modèle de défaillance d'un actionneur.

Comme les actionneurs rencontrés dans cette étude sont des vannes, on prend cet exemple pour présenter le modèle de défaillance. Sa forme est symétrique au modèle de défaillance d'un capteur :

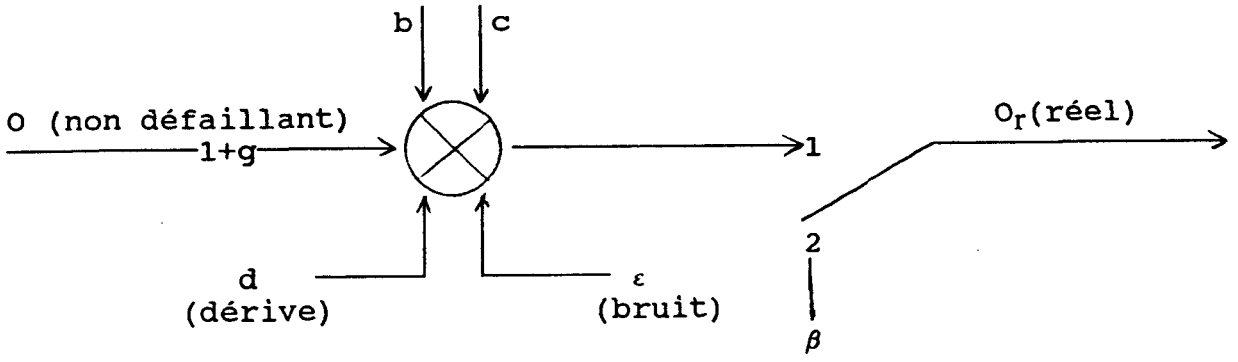


Figure 4-3/1: modèle de défaillance pour une vanne

Eléments :

- le gain g
- Le biais b : il s'ajoute à l'ouverture non-défaillante .
- La dérive d : c'est une erreur additive non constante dans le temps.
- Le bruit ϵ : l'ouverture de l'actionneur est entachée de bruit qui peut augmenter sous l'effet d'une défaillance.
- Le battement c ou vibration sinusoïdale.
- le blocage β : la position de la vanne est constante .

d'où :

$$O\sigma = [\,(1+g)\,O + c + b + a\,t + \epsilon\,]\,V\,[\,\beta\,]$$

avec les paramètres de la même forme que le tableau 4-2/1.

Les paramètres du fonctionnement non-défaillant de l'actionneur sont identiques au tableau 4-2/2.

Liste des actionneurs: Ovaln , Ostpa , Ot

4-4 Résultats de simulation

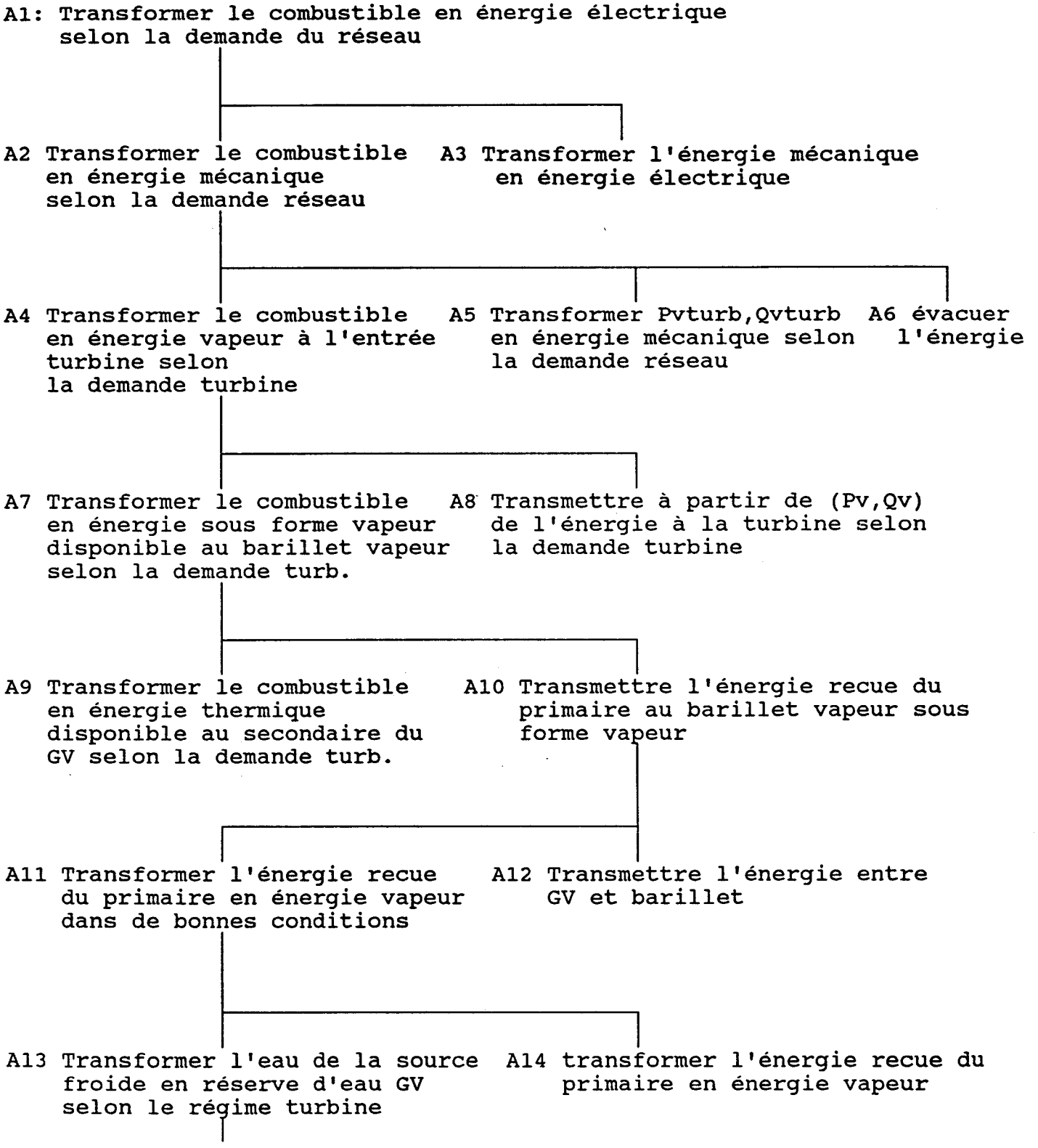
Les résultats de simulation sont en annexe 1. Celle-ci présente l'évolution des résidus des relations de surveillance lors de défaillances ainsi que la comparaison avec le tableau des signatures.

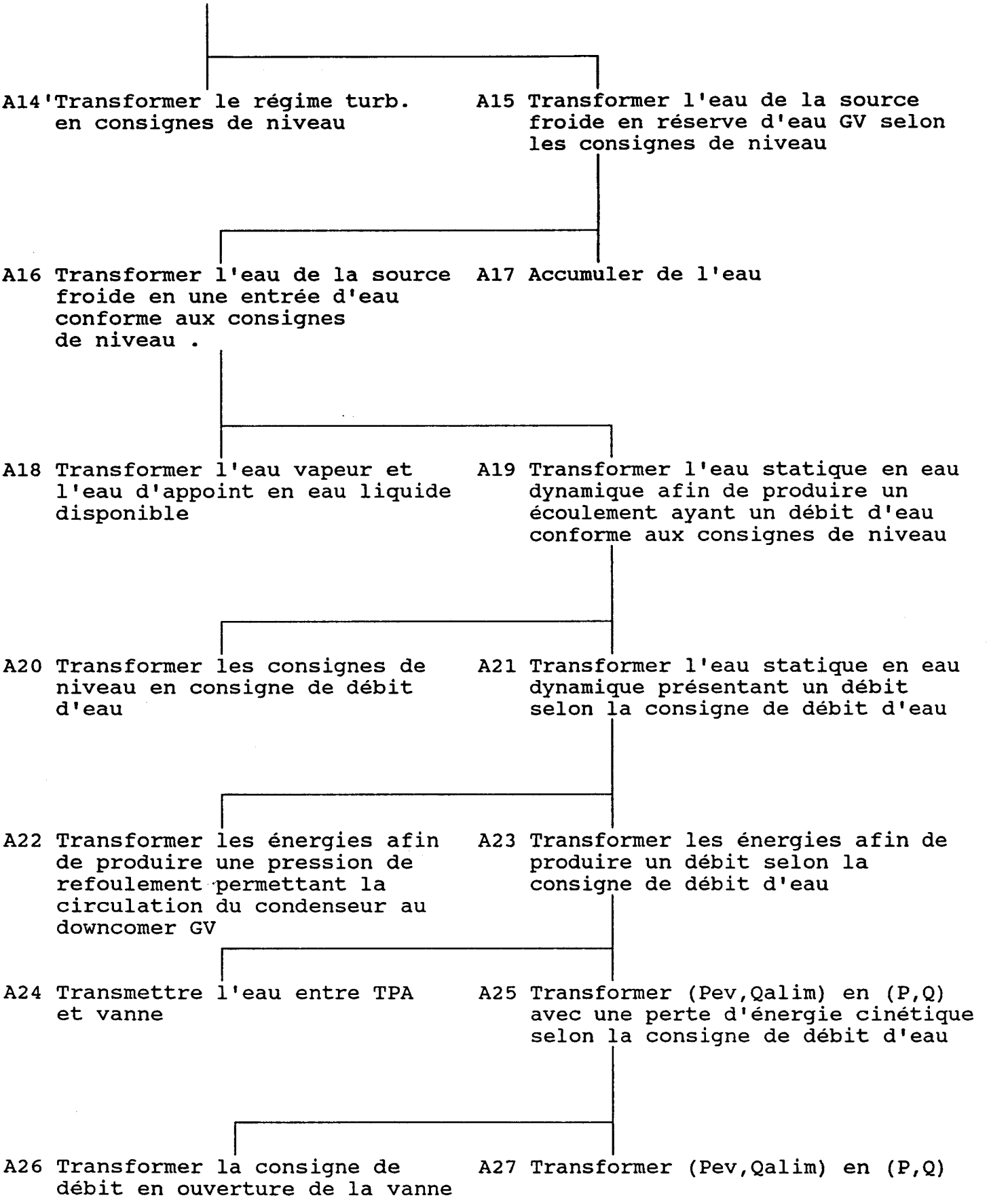
5 Conclusion

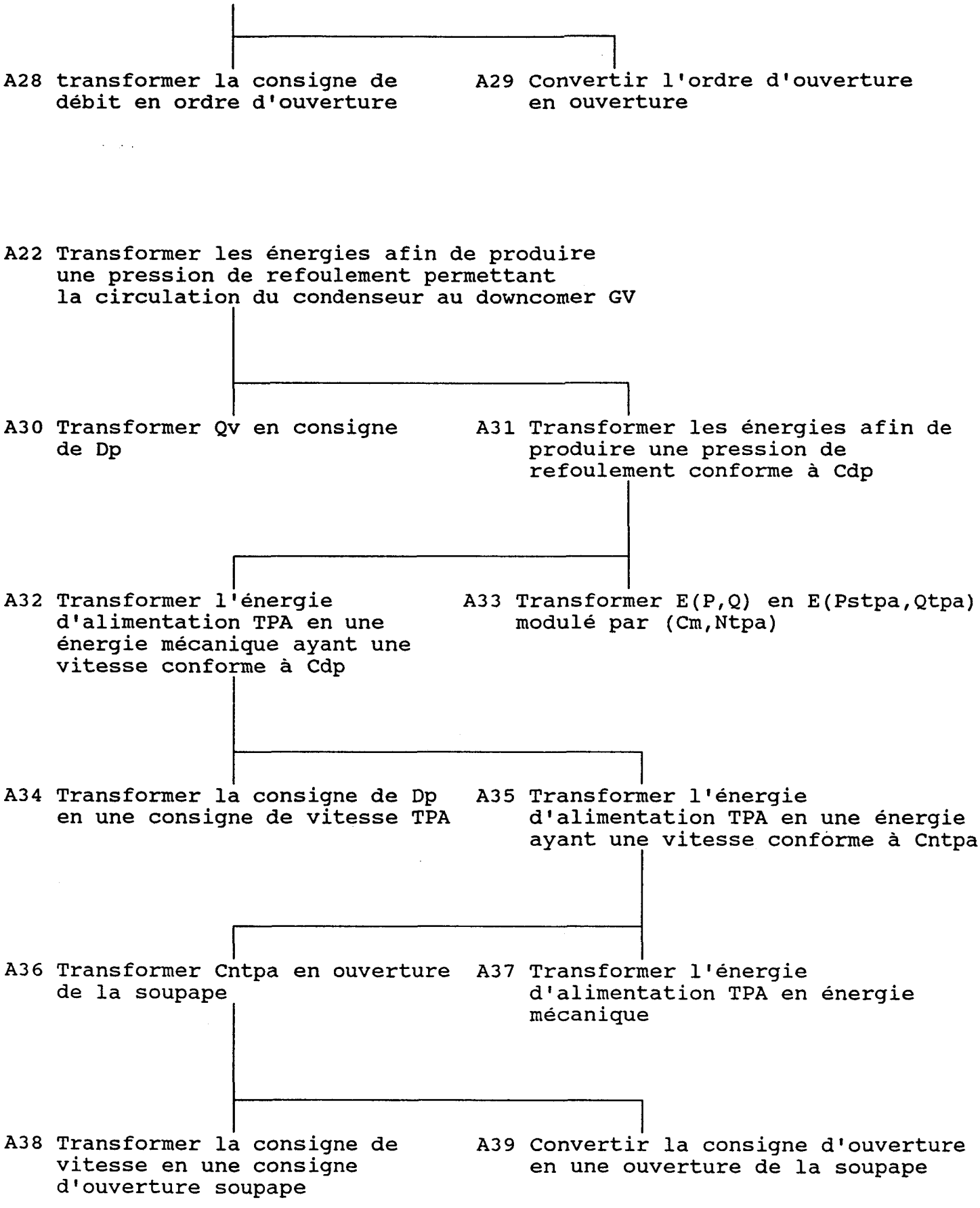
L'approche structurale a permis la détermination de relations de surveillance pour des systèmes complexes représentés par un ensemble de blocs interconnectés . Les relations prennent en compte l'aspect dynamique et non-linéaire du processus .

Après avoir implanté le modèle simplifié du processus et élaboré le système , de nombreuse simulations ont été effectuées . Des résidus négligeables ont été obtenus en marche normale confirmant l'informatisation exacte des modèles du processus et des relations de surveillance . Par des simulations de défaillances , les relations ont montré leur aptitude à identifier les pannes et à les localiser fournissant ainsi de précieux renseignements à l'opérateur . Ces derniers peuvent être synthétisés sous forme d'activités. Ainsi , la triple modélisation a permis de concevoir l'interface dans ses aspects algorithme et langage pour communiquer.

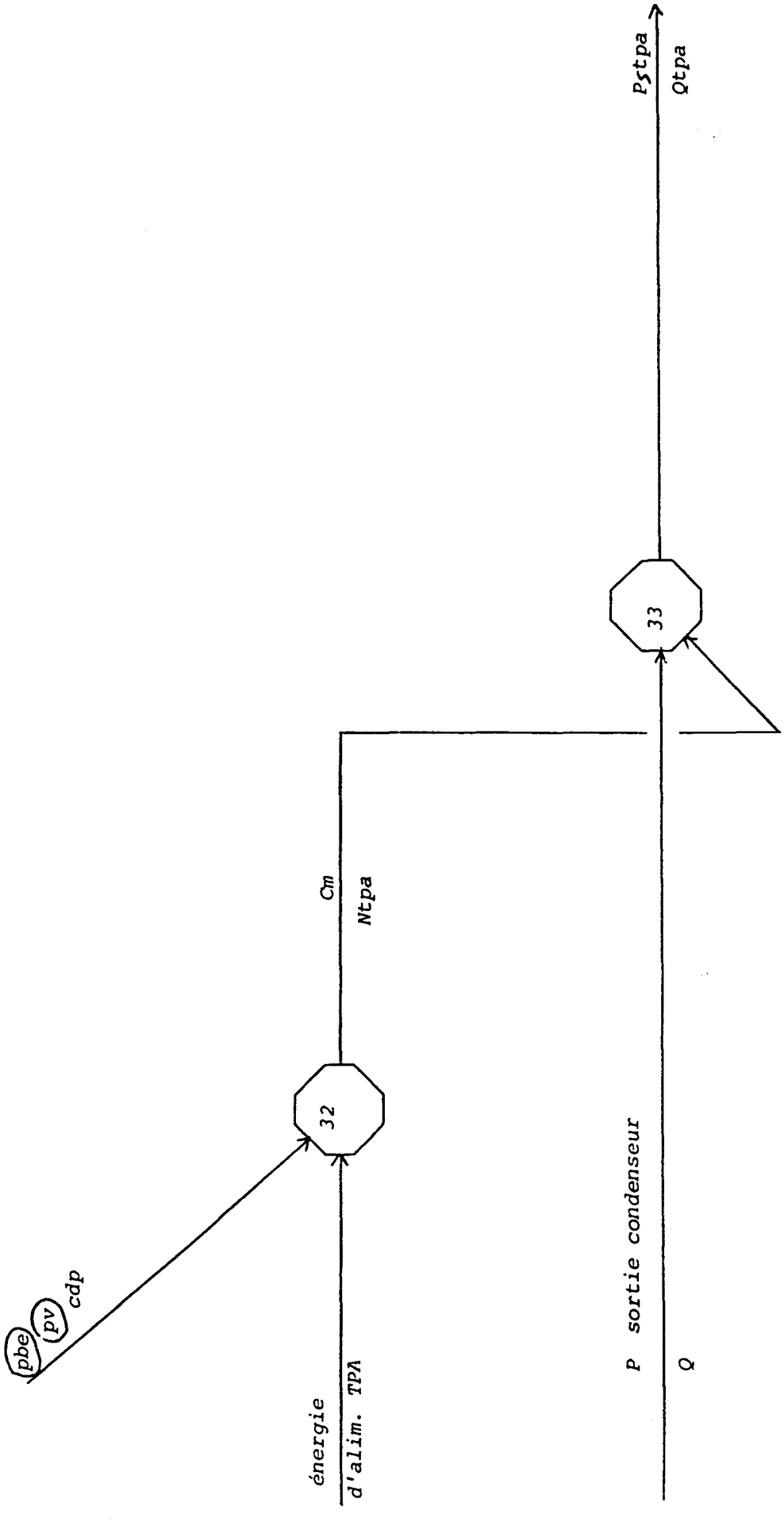
Annexe 1


A1: Transformer le combustible en énergie électrique selon la demande du réseau
A2 Transformer le combustible en énergie mécanique selon la demande réseau
A3 Transformer l'énergie mécanique en énergie électrique
A4 Transformer le combustible en énergie vapeur à l'entrée turbine selon la demande turbine
A5 Transformer Pvturb,Qvturb en énergie mécanique selon la demande réseau
A6 évacuer l'énergie
A7 Transformer le combustible en énergie sous forme vapeur disponible au barillet vapeur selon la demande turb.
A8 Transmettre à partir de (Pv,Qv) de l'énergie à la turbine selon la demande turbine
A9 Transformer le combustible en énergie thermique disponible au secondaire du GV selon la demande turb.
A10 Transmettre l'énergie recue du primaire au barillet vapeur sous forme vapeur
A11 Transformer l'énergie recue du primaire en énergie vapeur dans de bonnes conditions
A12 Transmettre l'énergie entre GV et barillet
A13 Transformer l'eau de la source froide en réserve d'eau GV selon le régime turbine
A14 transformer l'énergie recue du primaire en énergie vapeur


A14 Transformer le régime turb. en consignes de niveau
A15 Transformer l'eau de la source froide en réserve d'eau GV selon les consignes de niveau
A16 Transformer l'eau de la source froide en une entrée d'eau conforme aux consignes de niveau .
A17 Accumuler de l'eau
A18 Transformer l'eau vapeur et l'eau d'appoint en eau liquide disponible
A19 Transformer l'eau statique en eau dynamique afin de produire un écoulement ayant un débit d'eau conforme aux consignes de niveau
A20 Transformer les consignes de niveau en consigne de débit d'eau
A21 Transformer l'eau statique en eau dynamique présentant un débit selon la consigne de débit d'eau
A22 Transformer les énergies afin de produire une pression de refoulement permettant la circulation du condenseur au downcomer GV
A23 Transformer les énergies afin de produire un débit selon la consigne de débit d'eau
A24 Transmettre l'eau entre TPA et vanne
A25 Transformer (Pev,Qalim) en (P,Q) avec une perte d'énergie cinétique selon la consigne de débit d'eau
A26 Transformer la consigne de débit en ouverture de la vanne
A27 Transformer (Pev,Qalim) en (P,Q)


A28 transformer la consigne de débit en ordre d'ouverture
A29 Convertir l'ordre d'ouverture en ouverture
A22 Transformer les énergies afin de produire une pression de refoulement permettant la circulation du condenseur au downcomer GV
A30 Transformer Qv en consigne de Dp
A31 Transformer les énergies afin de produire une pression de refoulement conforme à Cdp
A32 Transformer l'énergie d'alimentation TPA en une énergie mécanique ayant une vitesse conforme à Cdp
A33 Transformer E(P,Q) en E(Pstpa,Qtpa) modulé par (Cm,Ntpa)
A34 Transformer la consigne de Dp en une consigne de vitesse TPA
A35 Transformer l'énergie d'alimentation TPA en une énergie ayant une vitesse conforme à Cntpa
A36 Transformer Cntpa en ouverture de la soupape
A37 Transformer l'énergie d'alimentation TPA en énergie mécanique
A38 Transformer la consigne de vitesse en une consigne d'ouverture soupape
A39 Convertir la consigne d'ouverture en une ouverture de la soupape

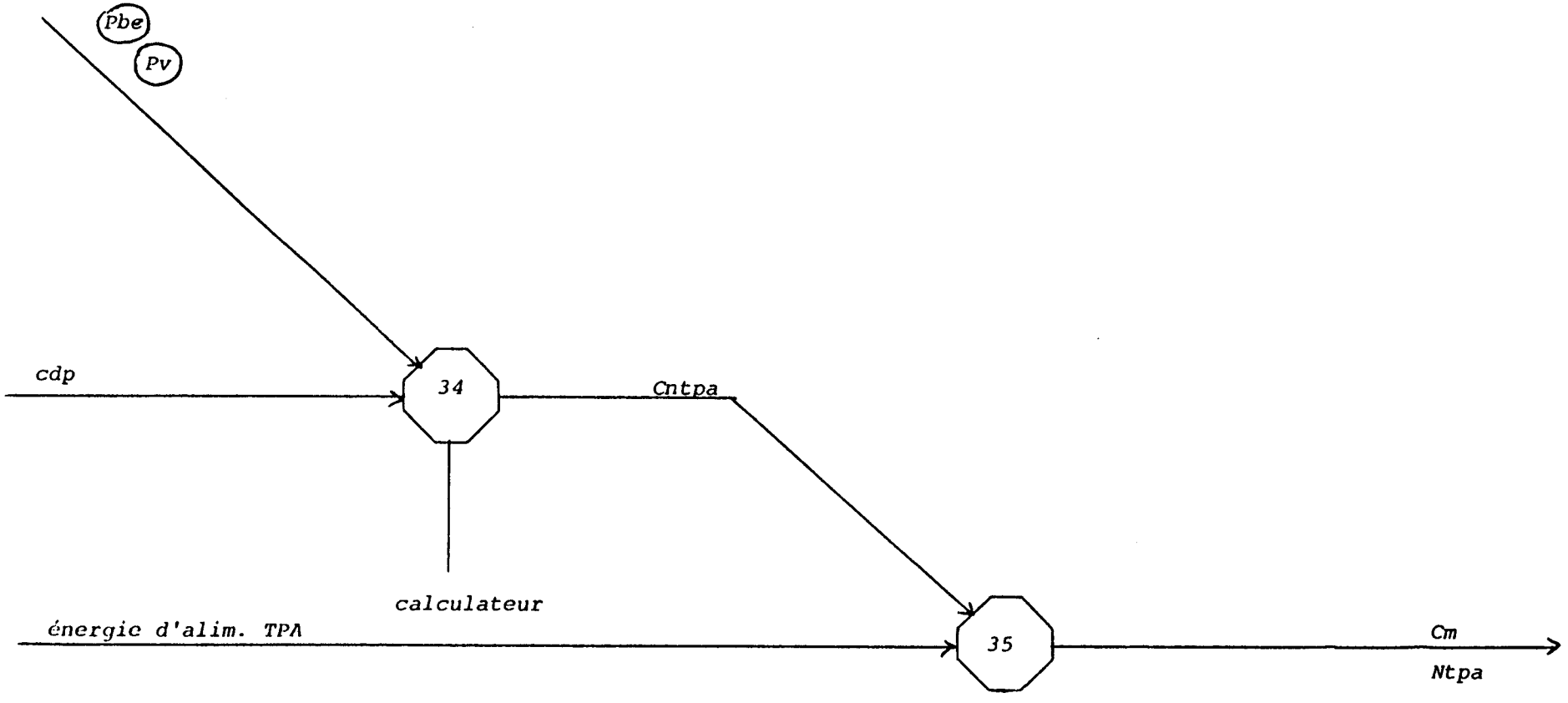
Annexe 2



31 : Transformer les énergies afin de produire une pression de refoulement conforme à Cdp

32 : Transformer l'énergie d'alimentation TPA en une énergie mécanique ayant une vitesse conforme à Cdp

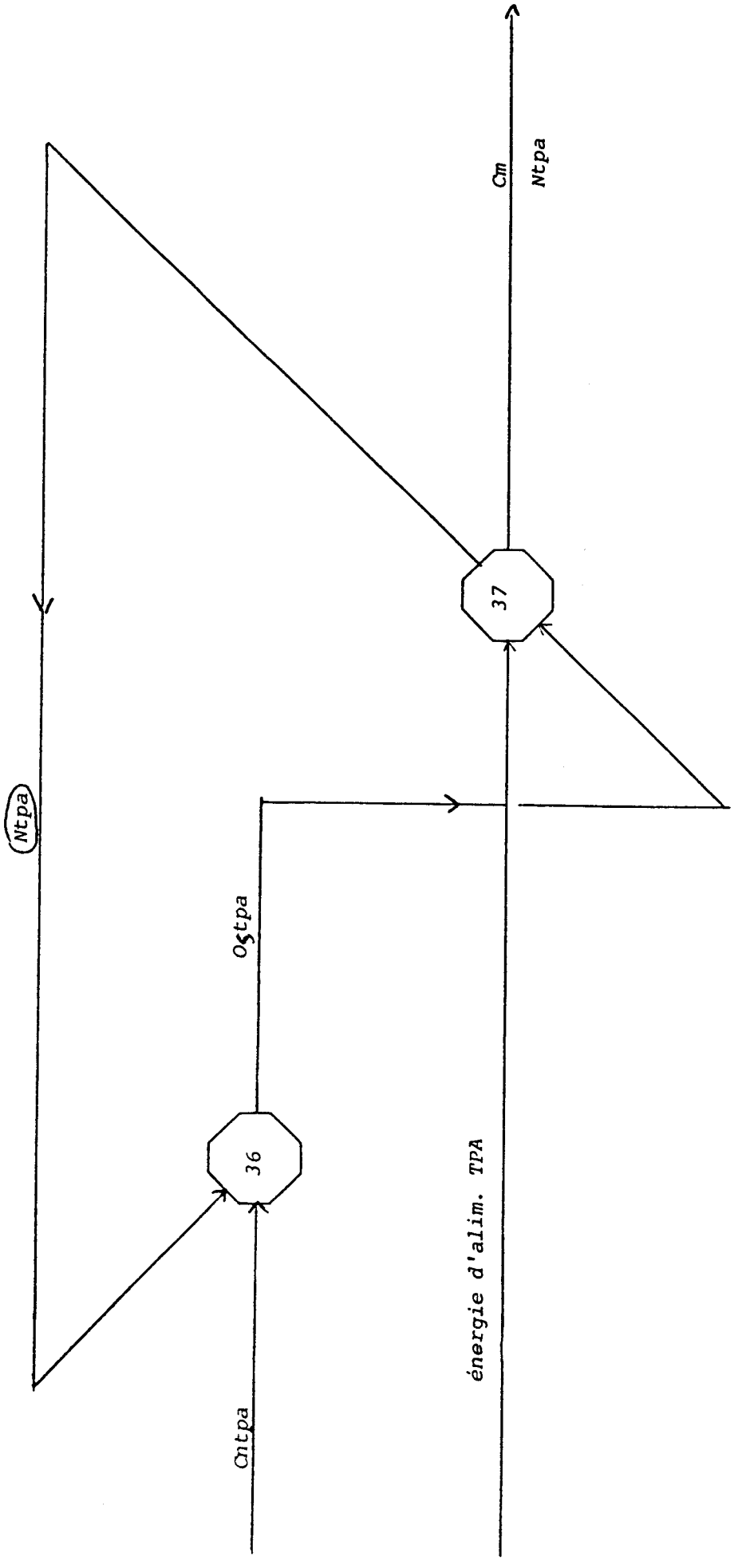
33 : Transformer E (P, Q) en E (Pstpa, Qtpa) modulé par (Cm, Ntpa).



32 : Transformer l'énergie d'alimentation TPA en une énergie mécanique ayant une vitesse conforme à Cdp

34 : Transformer la consigne de dp en une consigne de vitesse TPA

35 : Transformer l'énergie d'alimentation TPA en une énergie ayant une vitesse conforme à Cntpa.



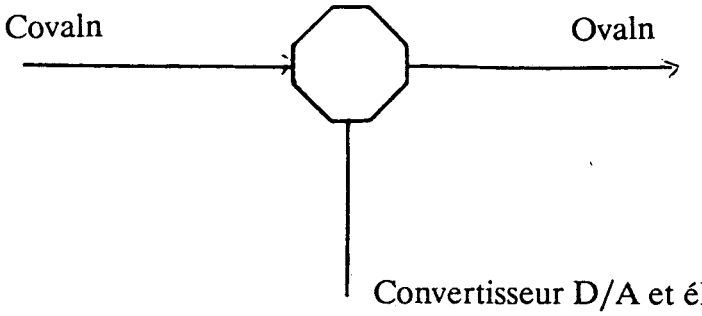
35 : Transformer l'énergie d'alimentation TPA en une énergie ayant une vitesse conforme à Cntpa

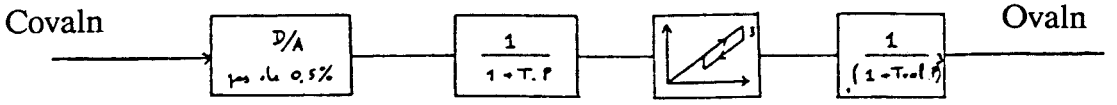
36 : Transformer Cntpa en ouverture de la soupape

37 : Transformer l'énergie d'alimentation TPA en énergie mécanique.

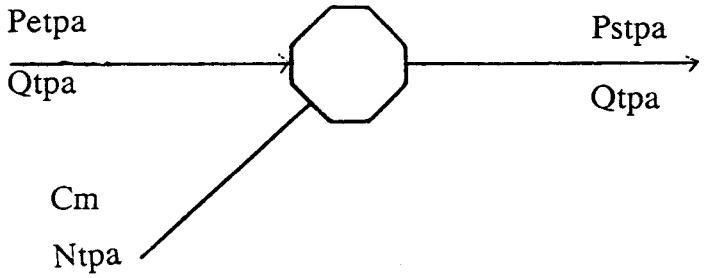
Annexe 3

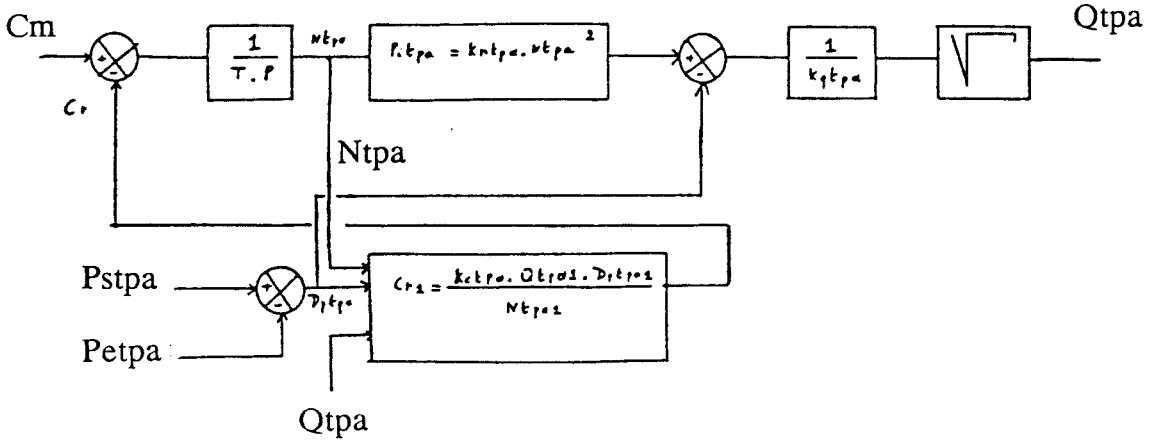
A29 Convertir l'ordre d'ouverture en ouverture





A33 Transformer E(P,Q) en E(Pstpa,Qtpa) modulé par (Cm,Ntpa)





Annexe 4

Liste des variables connues

x_{16}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{30}
Tm	Pgv	Pv	Qv	Oc	Dot	Oti	Covaln
x_{38}	x_{39}	x_{44}	x_{52}	x_{55}	x_{59}	x_{61}	x_{62}
Pstpa	Qalim	Ntpa1	Cntpa1	Petpa1	Nge	Nglm	Dp

Liste des fonctions processus

f_1 $(x_{16},x_{17},x_{18},x_1)$ $x_1 = (x_{17} + x_{18} - \text{Alpham}\, x_{16})/\text{Alphap} + \text{Ku}\, x_{16}$

f_2 (x_1,x_5,x_2) $x_2 = x_1 - x_5$

f_3 (x_2,x_{16}) $x_{16}(p) = x_2(p)/\text{Ti} \cdot p$

f_4 (x_{16},x_3,x_4) $x_4 = x_{16} - x_3$

f_5 (x_4,x_5) $x_5 = \text{Kechgv} \cdot x_4$

f_6 (x_5,x_8,x_6) $x_6 = x_5 - x_8$

f_7 (x_6,x_{19}) $x_{19}(p) = x_6(p)/\text{Ta} \cdot p$

f_8 (x_3,x_7) $x_3 = 1{,}124\, x_7$

f_9 (x_7,x_{19}) $x_7 = x_{19} - 37{,}3$

f_{10} (x_{19},x_{20},x_{10}) $x_{10} = x_{19} - x_{20} - 0{,}5$

f_{11} (x_{10},x_9) $x_9 = x_{10} / \text{Kgvbar}$

f_{12} (x_9,x_8) $x_8 = x_9^{1/2}$

f_{13} (x_{21},x_{12},x_{11}) $x_{12} = x_{21} - x_{11}$

f_{14} (x_{20},x_{22},x_{11}) $x_{11} = \text{Kcont} \cdot x_{20} \cdot x_{22}$

f_{15} (x_{12},x_{13},x_{15}) $x_{15} = x_{12}/\text{Kturb}.x_{13}$

f_{16} (x_{14},x_{13},x_{24}) $x_{13} = x_{14} + x_{24}$

f_{17} (x_{23},x_{14}) $x_{14}(p) = x_{23}(p)/(1+\text{T}\, p)$

f_{18} (x_{15},x_{20}) $x_{20}(p) = x_{15}(p)/(1+\text{T}\, p)$

f_{19} (x_8,x_{21}) $x_{21}(p) = x_8(p)/(1+\text{T}\, p)$

f_{30} (x_{30},x_{31}) $x_{31} = \text{Int}(2.x_{30})/2$

f_{31} (x_{31},x_{32}) $x_{32}(p) = x_{31}(p)/(1+8\, p)$

f_{32} (x_{32},x_{33}) non linéarité avec hystérésis: x_{32} croissant , $x_{33} = x_{32}$; x_{32} décroissant $x_{33} = x_{32} - 3$

f_{33} (x_{33},x_{34}) $x_{34}(p) = x_{33}(p)/(1+\text{Tval}\, p)^3$

f_{34} (x_{34},x_{39},x_{35}) $x_{35} = \text{Kval}\, (x_{39}/x_{34})^2$

f_{35} (x_{35},x_{36}) $x_{36}(p) = x_{35}(p)/(1+\text{Tvalnf}\, p)$

f_{36} $(x_{36},x_{20},x_{37},x_{39})$ $x_{37} = x_{20} + \text{Kgv}\, x_{39}^2 + x_{36} + \text{Hce}$

f_{37} (x_{37},x_{38},x_{39}) $x_{38} = x_{37} + (Kalim + Kalim1)\, x_{39}^2$

f_{38} (x_{52},x_{44},x_{51}) $x_{51} = x_{52} - x_{44}$

f_{39} (x_{51},x_{50}) $x_{50}(p) = x_{51}(p)\, Rn\, (1+T_1\, p)/(1+T_2\, p)$

f_{40} (x_{50},x_{49},x_{47}) $x_{49} = x_{50} - x_{47}$

f_{41} (x_{49},x_{48}) non linéarité avec seuil: $-h < x_{49} < h$, $x_{48} = 0$; $x_{49} > h$ ou $x_{49} < -h$, $x_{48} = x_{49}$

f_{42} (x_{48},x_{47}) $x_{47}(p) = x_{48}(p)/Tstpa\, p$

f_{43} (x_{47},x_{46}) $x_{46} = x_{47}$

f_{44} (x_{46},x_{53},x_{45}) $x_{45} = x_{46} - x_{53}$

f_{45} (x_{45},x_{44}) $x_{44}(p) = x_{45}(p)/ Tl\, p$

f_{46} (x_{44},x_{43}) $x_{43} = Kntpa\, x_{44}^2$

f_{47} (x_{43},x_{42},x_{54}) $x_{42} = x_{43} - x_{54}$

f_{48} (x_{42},x_{41}) $x_{41} = x_{42} / Kqtpa$

f_{49} (x_{40},x_{41}) $x_{40} = (x_{41})^{1/2}$

f_{50} (x_{40},x_{39}) $x_{39}(p) = x_{40}(p)/(1+T\, p)$

f_{51} (x_{38},x_{55},x_{54}) $x_{54} = x_{38} - x_{55}$

f_{52} $(x_{54},x_{40},x_{44},x_{53})$ $x_{53} = Kctpa\, x_{40}\, x_{54}/x_{44}$

f_{53} (x_{39},x_{21},x_{60}) $x_{60} = x_{39} - x_{21}$

f_{54} (x_{60},x_{61}) $x_{61}(p) = x_{60}(p)/T\, p$

f_{55} (x_{39},x_{56}) $x_{56}(p) = x_{39}(p)/(1+Th\, p)^2$

f_{56} (x_{56},x_{58},x_{57}) $x_{57} = x_{56} - x_{58}$

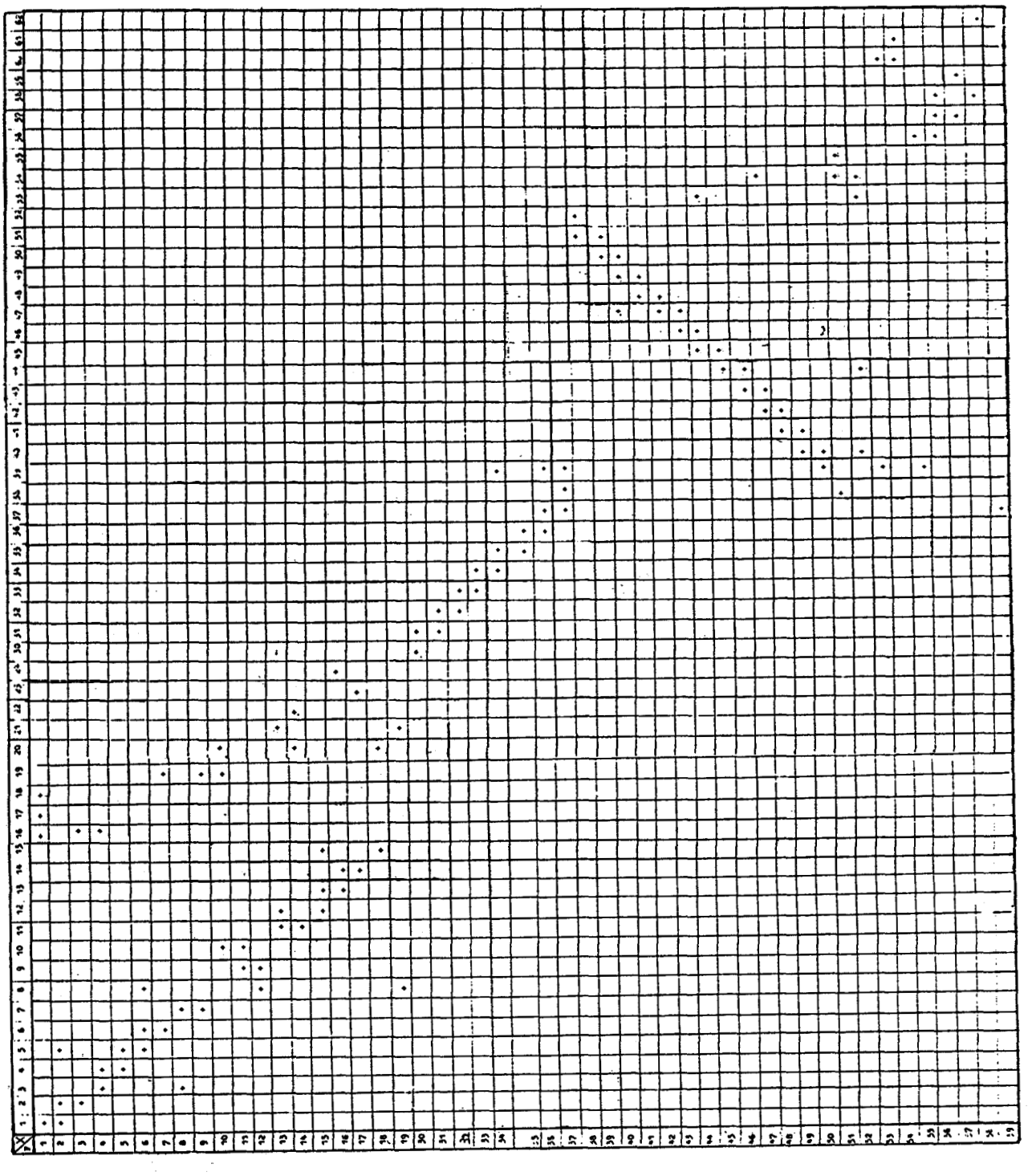
f_{57} (x_{57},x_{59}) $x_{59}(p) = x_{57}(p)/ Tn\, p$

f_{58} (x_{58},x_{21}) $x_{58}(p) = (1 - G\, Tg\, p)\, x_{21}(p) /(1+Tg\, p)$

f_{59} (x_{20},x_{62},x_{37}) $x_{37} = x_{20} - x_{62}$

Les valeurs des coefficients utilisées en particulier dans la simulation proviennent d'identifications effectuées à l'EDF.

Annexe 5



Structure du processus

Annexe 6
Simulation de défaillances

1 Capteur de débit d'eau de la vanne alimentaire Qalim

1-1 Description du défaut

Le défaut est un gain de 0.5 (0 en fonctionnement normal) .

1-2 Evolution des résidus

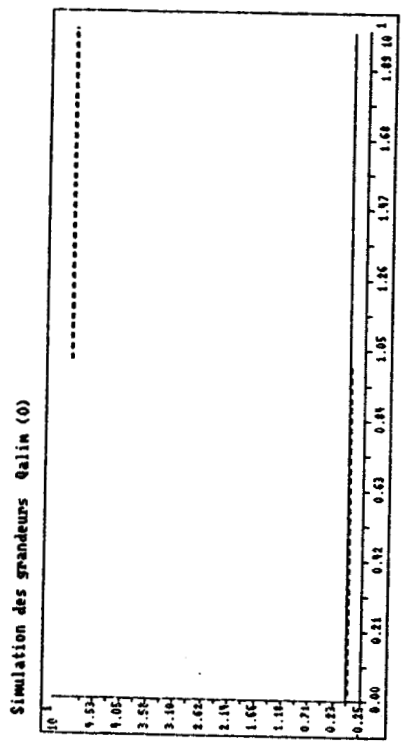
Les courbes ainsi que les divers paramètres de la simulation sont présentés ci-dessous .

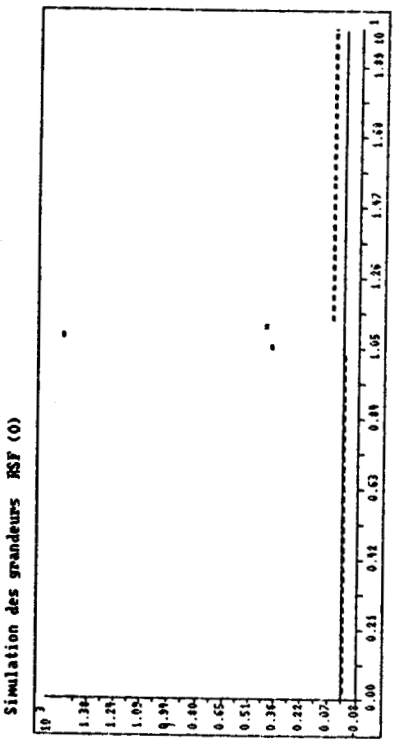
1-3 Résultats

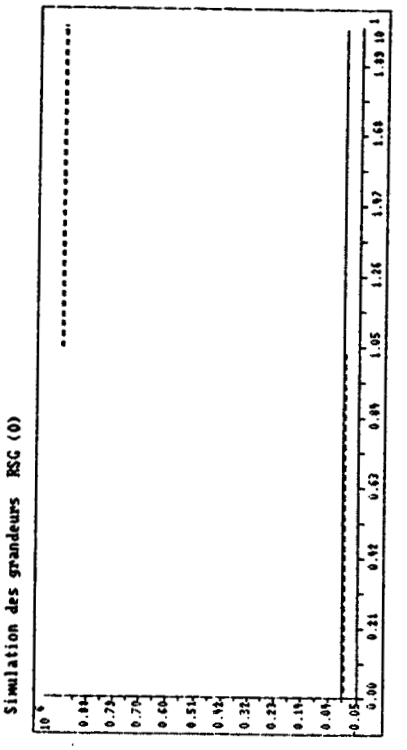
Les résidus suivants f,g,h,i,j,k,l,s,t passent de 0 au bruit numérique près à une valeur supérieur à 10 EE -3 montrant l'effet de défaillance . D'autre part , les autres résidus ne sont pas affectés .

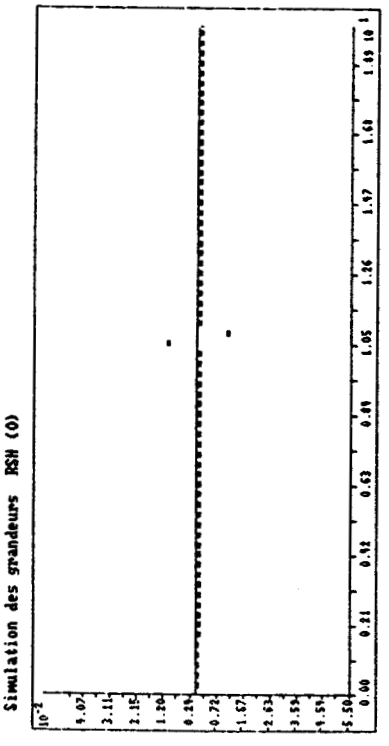
La signature valide la colonne correspondante du tableau des sensibilités .

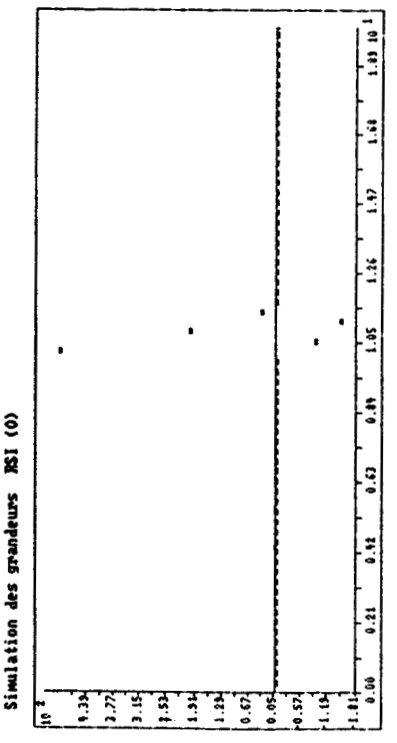
```
QV00=  100.00 %          dt=   0.300 s    de=   0.300 s
VALEURS INITIALES (  mesurees sans aucune erreur )
   tmi=   55.32   pgvi=   59.80   pvi=   58.30   qvi=  100.00
pstpai=   85.80 qalimi=  100.00 ntpai=   91.03  ngei=   44.00 nglmi=   71.00
  dpi=    9.50  otii=   95.29 ovalni=   53.23 ostpai=  132.27   cri=  132.27

 CAPTEUR : le temps de la defaillance est    10.00 s
           le capteur defaillant est Qalim
           les 7 nouveaux parametres sont :
             0.500   0.000   0.000   0.000  -1.000   0.000   0.000
Relation  Min         max                  Relation  Min         Max
RSA     -4.045E-14  0.000E+00              RSB      0.000E+00  2.289E-04
RSC     -5.384E-05  0.000E+00              RSD     -1.400E-13  0.000E+00
RSE     -4.673E-04  0.000E+00              RSF     -1.417E-04  1.525E+03
RSG     -9.146E-04  9.739E+05              RSH     -1.100E-02  1.090E-02
RSI     -1.483E+02  5.000E+02              RSJ     -3.865E+00  0.000E+00
RSK     -6.997E-02  0.000E+00              RSL     -1.333E-01  1.855E-01
RSM     -3.119E-05  0.000E+00              RSN      0.000E+00  4.048E-05
RSO      0.000E+00  0.000E+00              RSP      0.000E+00  0.000E+00
RSQ      0.000E+00  0.000E+00              RSR      0.000E+00  0.000E+00
RSS     -1.004E+00  5.799E-01              RST     -7.186E-07  5.000E+02
```

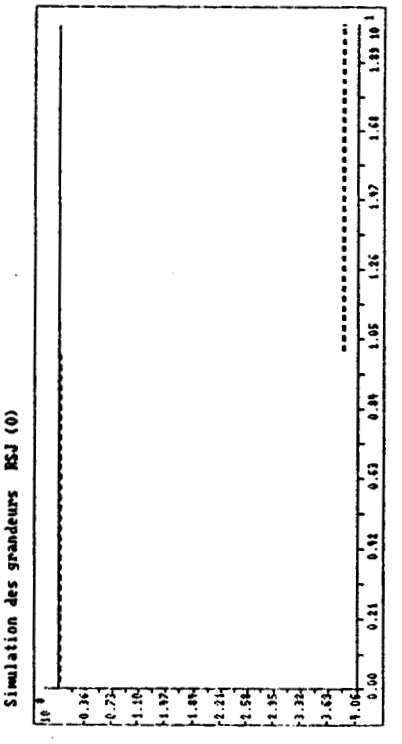

Simulation des grandeurs Qalim (0)


Simulation des grandeurs RSF (0)

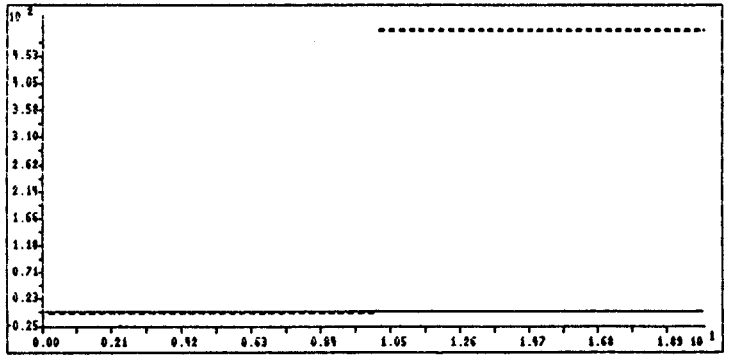

Simulation des grandeurs RSG (0)


Simulation des grandeurs RSH (0)

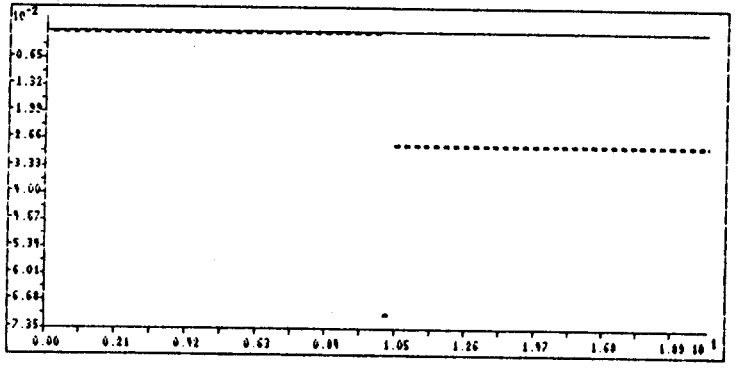

Simulation des grandeurs RSI (0)


Simulation des grandeurs RSJ (0)

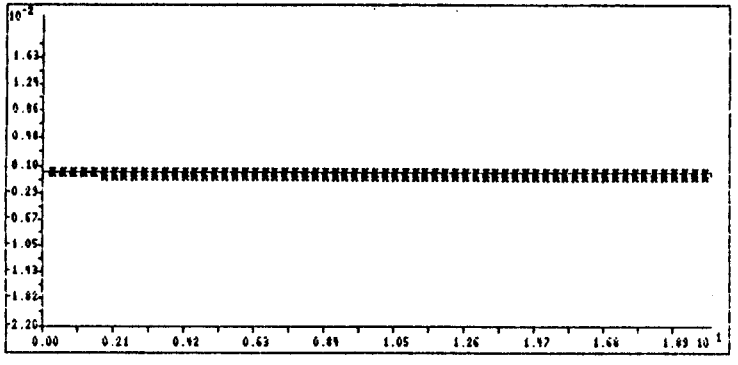
Simulation des grandeurs RST (0)



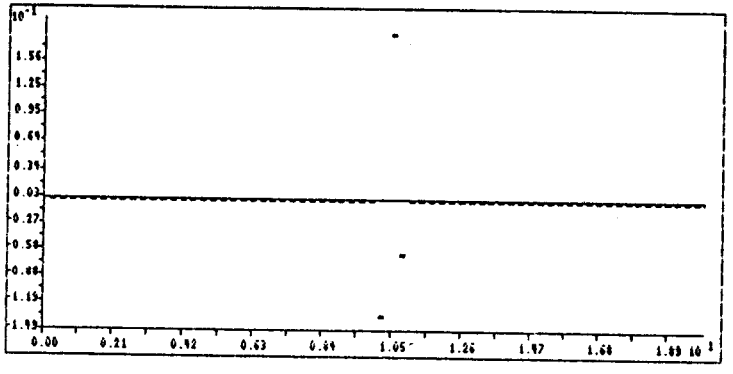
Simulation des grandeurs RSX (0)



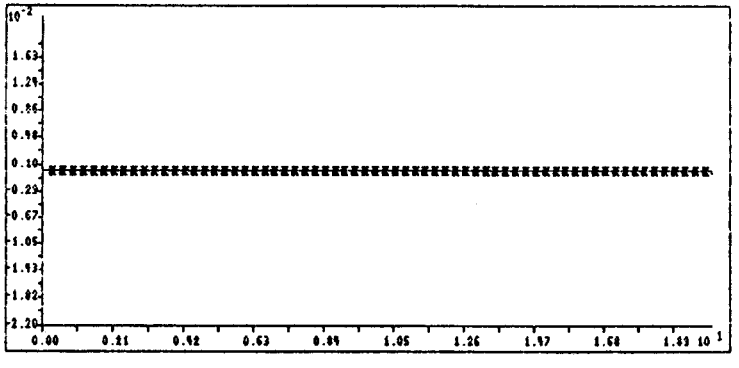
Simulation des grandeurs RSC (0) RSD (+) RSE (X) RSM (*)



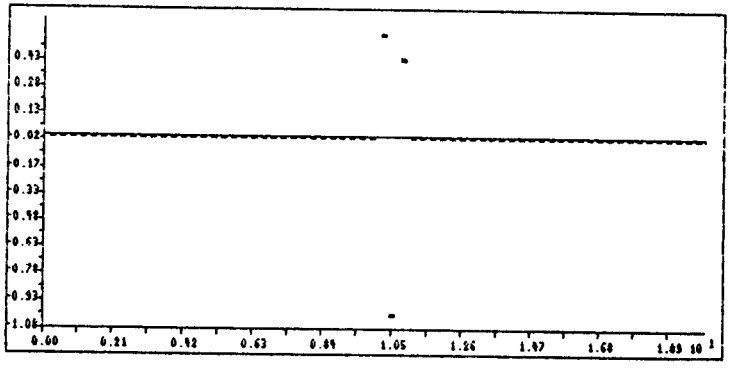
Simulation des grandeurs RSL (0)



Simulation des grandeurs RSO (0) RSP (+) RSQ (X) RSR (*)



Simulation des grandeurs RSS (0)



2 Actionneur de la vanne alimentaire commandant l'ouverture Ovaln

2-1 Description du défaut

Le défaut est un blocage de l'ouverture à 65 dans la même unité que Ovaln. La valeur initiale de Ovaln est 53,23.

2-2 Evolution des résidus

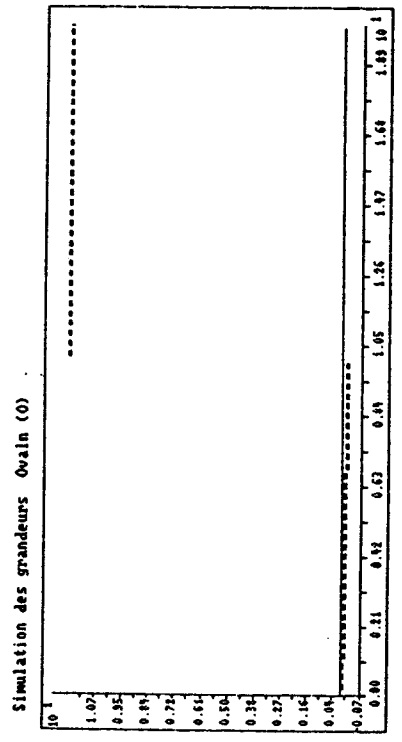
Les courbes ainsi que les divers paramètres de la simulation sont présentés ci-dessous .

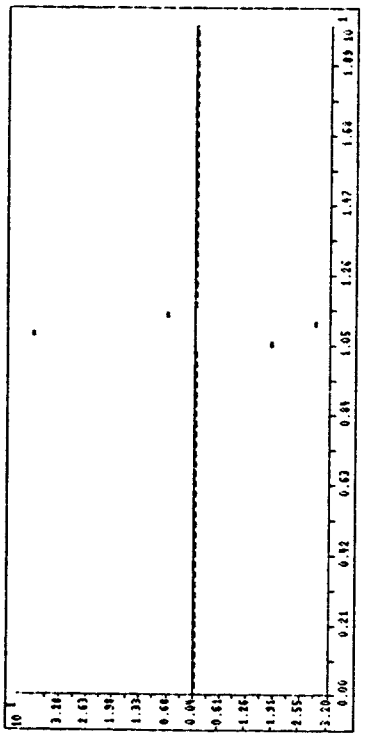
2-3 Résultats

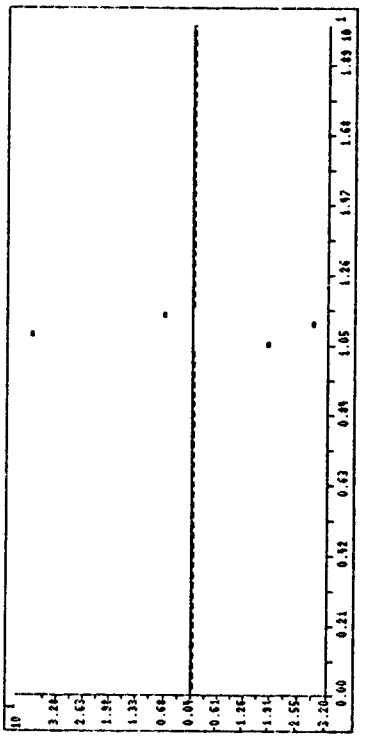
Les résidus suivants i,t passent de 0 au bruit numérique près à une valeur supérieur à 10 EE -3 montrant l'effet de défaillance . D'autre part , les autres résidus ne sont pas affectés .

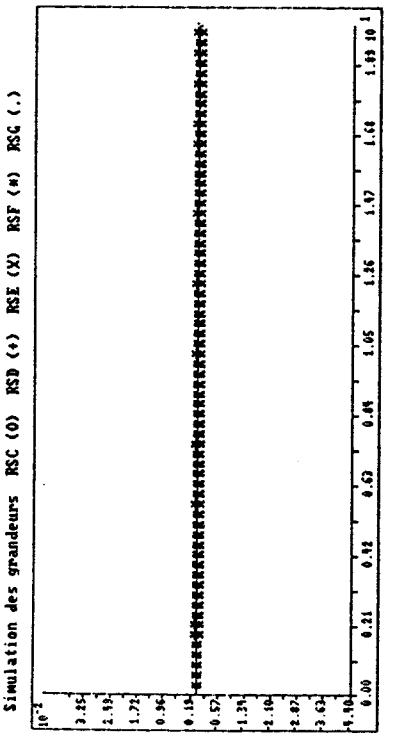
La signature valide la colonne correspondante G_1 du tableau des sensibilités .

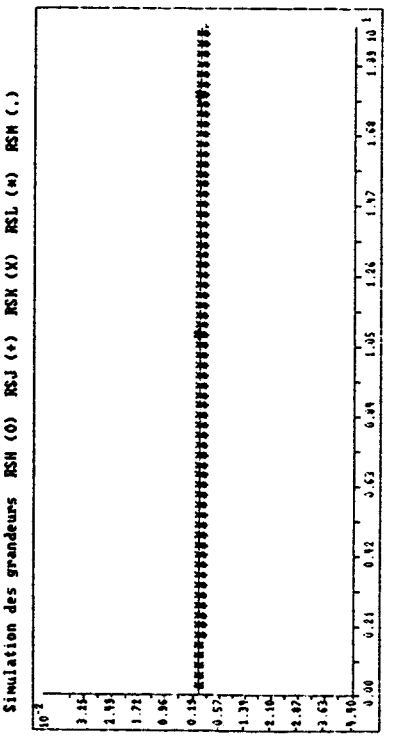
```
QV00=  100.00 %          dt=   0.300 s    de=   0.300 s
VALEURS INITIALES (  mesurees sans aucune erreur )
   tmi=   55.32   pqvi=   59.80   pvi=   58.30   qvi=  100.00
pstpai=   85.80 qalimi=  100.00 ntpai=   91.03  ngei=   44.00 nglmi=   71.00
  dpi=    9.50  otii=   95.29 ovalni=   53.23 ostpai=  132.27   cri=  132.27

ACTIONNEUR :le temps de la defaillance est    10.00 s
            le numero de l actionneur  defaillant est 1
            les 7 nouveaux parametres sont :
               0.000   0.000   0.000   0.000  65.000   0.000   0.000
Relation  Min          max          Relation  Min          Max
RSA     -4.045E-14  0.000E+00       RSB      0.000E+00  2.289E-04
RSC     -5.384E-05  0.000E+00       RSD     -1.400E-13  0.000E+00
RSE     -4.673E-04  0.000E+00       RSF     -1.417E-04  4.725E-04
RSG     -9.463E-04  1.602E-03       RSH     -8.913E-04  0.000E+00
RSI     -2.864E+01  3.909E+01       RSJ     -1.000E-03  0.000E+00
RSK     -1.659E-06  2.057E-04       RSL     -2.630E-04  2.717E-04
RSM     -9.741E-04  9.747E-04       RSN      0.000E+00  4.048E-05
RSO      0.000E+00  0.000E+00       RSP      0.000E+00  0.000E+00
RSQ      0.000E+00  0.000E+00       RSR      0.000E+00  0.000E+00
RSS     -8.912E-04  9.182E-04       RST     -2.864E+01  3.909E+01
```

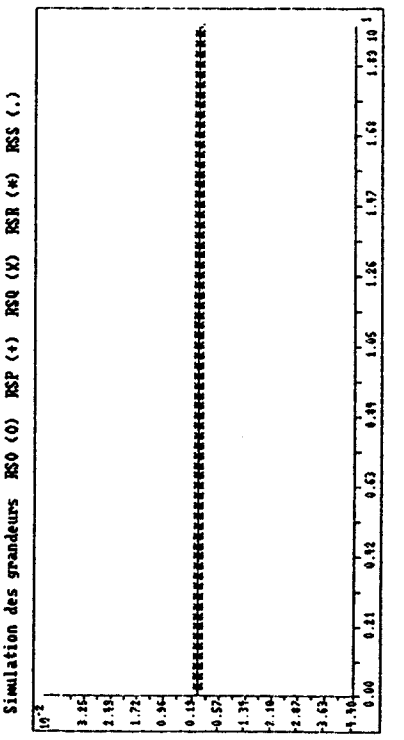

Simulation des grandeurs Qvain (0)


Simulation des grandeurs RSI (0)


Simulation des grandeurs RST (0)


Simulation des grandeurs RSC (0) RSD (+) RSE (X) RSF (*) RSG (.)


Simulation des grandeurs RSH (0) RSJ (+) RSK (X) RSL (*) RSM (.)


Simulation des grandeurs RSO (0) RSP (+) RSQ (X) RSR (*) RSS (.)

Conclusion et perspectives

Conclusion et perspectives

Les progrès théoriques de l'Automatique et le développement technologique et informatique ont permis , ces dernières décennies , une automatisation poussée des moyens de production. Les opérateurs humains peuvent agir avec une performance accrue sur le système. Pour cela, les opérateurs de conduite définissent les objectifs à atteindre et les appliquent sur le système de contrôle commande après connaissance du vecteur d'état et de l'état opérationnel du processus. Cette connaissance est centralisée dans la salle de contrôle qui est l'extrémité d'un canal sur lequel affluent de nombreuses données.

Parallèlement à ces progrès techniques, les opérateurs de conduite ont vu leurs responsabilités augmenter. Ils doivent en effet assurer la sécurité de systèmes présentant des capacités de production de plus en plus grandes: les conséquences d'une défaillance sont donc plus importantes. Dans un même temps, leur tâche s'est compliquée car ils doivent prendre des décisions après avoir traité des quantités importantes d'informations notamment en cas de crise.

Ainsi, la difficulté des tâches de supervision fait ressentir les besoins d'une assistance dans les activités décisionnelles des personnels humains . Sans se substituer aux raisonnements des opérateurs de conduite , un interface homme/machine peut être une aide dans les situations urgentes et constituer un support de réflexion .

Fondamentalement , cette couche logiciel exige une représentation des connaissances parfaitement définie . Tout en étant la plus complète possible , elle devra éviter le piège d'une précision excessive : son objectif est de transmettre le maximum d'informations aux opérateurs dans un minimum de temps ceci dans un contexte d'urgence .

Dans ce cadre, nous avons choisi le "langage pour communiquer" SADT et développé ces concepts à travers une nouvelle lecture des actigrammes. De même , nous avons proposé un modèle dérivé de SADT pour l'analyse fonctionnelle des processus physiques et de contrôle commande et appliqué cette démarche à une centrale PWR 900 MW. L'étude a montré la cohérence entre les différentes descriptions du processus.

Avancer plus loin nécessite l'étude du modèle du système entier. Or, les opérateurs sont une partie active de celui-ci. Comme ce système humain est complexe, sa modélisation nécessitera l'emploi complet de la méthode SADT comme la méthode de création des actigrammes et des datagrammes. Les opérateurs joueront le rôle d'expert mais feront partie aussi du système à modéliser. Cette représentation de la supervision permettra de cerner les besoins des opérateurs et donc de constituer une base solide sur laquelle une synthèse pourra s'établir: sa finalité sera de fusionner les méthodes de conception d'interface homme/machine qui sont tournées vers un même récepteur : l'opérateur.

Néanmoins , la conception d'un interface homme/machine est un art plus qu'une science [BELT 87] . De même la valeur d'un concept ou d'une méthode d'analyse fonctionnelle dépend plus d'un jugement humain que de critères rigoureux et absolus. La validation est de loin la phase la plus difficile. Contrairement à une démonstration dont l'enchaînement des idées fournit une preuve tangible , ici l'intérêt d'un interface est établi en premier lieu par l'acceptation des principes par un grand nombre de personnes puis , par une expérimentation sur site. Devant la difficulté de cette mise en oeuvre et devant les enjeux économiques et aussi humains , une réflexion profonde d'analyse et de synthèse devra être menée avant toute expérimentation.

A un niveau plus technique, ce langage pour communiquer nécessite la transformation en termes plus compréhensibles de données de base. Les informations que traite l'interface opérateur/machine sont générées par une couche inférieure suivant une ou plusieurs méthodes de surveillance combinées locales , globales ,... .

La conception d'un système de surveillance par une démarche globale suppose la manipulation de modèles de grands systèmes . Ces processus sont souvent constitués par l'interconnexion d'un très grand nombre de composants , eux-mêmes étant représentés par un modèle élémentaire plus ou moins connu . Les méthodes habituelles sont donc difficilement applicables et une phase préalable de prémodélisation structurelle sera un guide de résolution.

l'analyse structurelle donne un moyen pour identifier les parties de l'ensemble du processus sur lequel l'instrumentation communique assez d'information au système de surveillance . Le problème est donc celui de la décomposition du graphe biparti.

BIBLIOTHÈQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

Partant du graphe initial , nous avons utilisé la procédure d'inclusion qui permet d'englober le système dans une sur-structure particulière. Image non-unique du système initial, le sur-graphe peut toujours être obtenu quelle que soit la structure initiale. Ses caractéristiques permettent la génération de nombreux résultats structuraux. Des manipulations simples menées sur le sur-graphe conduisent à la décomposition canonique . Ainsi , le sous-système sur-déterminé représente la partie du système qui peut être surveillée par un système de surveillance . Les structures des relations de surveillance seront également générée par les méthodes structurelles qui guideront la résolution des sous-systèmes et donc la conception des relations de redondance.

Appliquée au modèle d'une centrale PWR 900 MW , la démarche structurelle a permis l'obtention des relations de surveillance. Implantées, elles ont montré leur aptitude à être une autre représentation du processus et leur capacité à isoler les défaillances. Les simulations montrent la cohérence entre les résultats théoriques et leur application.

Cependant, la surveillance des grands systèmes n'est qu'une des applications possibles des approches structurales. En effet , tout système d'équations pouvant être associé à un graphe biparti peut être traité par les outils graphiques. De nombreux concepts peuvent ainsi être vus à travers leurs images structurales en simulation, identification, modélisation, observation, commande,... L'approche structurale se prolonge donc naturellement dans ces différents domaines ce qui permettra de mieux connaître et contrôler le système automatisé de production.