

50376
1991
30

65 910

50376
1991
30
n° d'ordre: 615

THESE de DOCTORAT

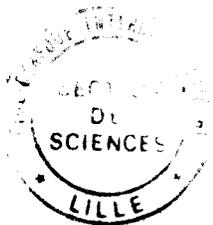
présentée à

l'Université des Sciences et Techniques de Lille-Flandres-Artois

Spécialité

GENIE CIVIL

**CONTRIBUTION A L'HOMOGENEISATION
EN PHASE LINEAIRE ET NON LINEAIRE
APPLICATION AU RENFORCEMENT DES SOLS**



présentée par

Erick PRUCHNICKI

Agrégé de génie-civil



soutenue le 1 Février 1991 devant le jury composé de :

M. B. HALPHEN
M. P. DE BUHAN
M. WIECHERT
M. JP. HENRY
M. I. SHAHROUR
M. P. SUQUET

Président
Rapporteur
Rapporteur

AVANT - PROPOS

Le présent travail a été mené au Département sol et structure du laboratoire de Mécanique de Lille. Ce travail n'existerait pas sans l'aide du Professeur SHAHROUR qui a assuré la direction de cette thèse avec grande compétence et une parfaite disponibilité.

M. B. HALPHEN, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury, je l'en remercie.

M. P. de BUHAN, Professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, a bien voulu être rapporteur de ce travail. Je lui suis reconnaissant.

M. WIECHERT, Professeur à l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille, a accepté d'être rapporteur de ce travail. Je l'en remercie.

M. JP .HENRY, Professeur à l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille, a accepté de participer à ce jury, malgré ses lourdes charges. Je le remercie.

M. P. SUQUET, Directeur de recherche au Laboratoire de mécanique et d'acoustique de Marseille, m'a fait l'honneur de participer à ce jury, qu'il accepte mes remerciements.

Enfin je remercie tous les collègues et amis qui m'ont apporté leur soutien au cours de ces années de thèse. Je citerai en particulier W. CHEHADE et B. BENCHEIKH pour leur aide, et Madame Françoise HENRY pour avoir assuré la frappe de ce mémoire.

J'adresse une pensée particulière à ma famille pour son affection et sa patience.

SOMMAIRE

RESUME	1
NOTATIONS	3
INTRODUCTION	6
1ère PARTIE : THEORIE DE L'HOMOGENEISATION	8
• Aspects fondamentaux	
• Etude en phase élastique linéaire	
CHAPITRE I	
PRELIMINAIRE : ELEMENTS DE BASE DE L'HOMOGENEISATION	9
1.1 CONCEPTS DE BASE	11
1.2 CONDITIONS FONDAMENTALES	11
CHAPITRE II	
HOMOGENEISATION EN PHASE ELASTIQUE LINEAIRE	13
2.1 INTRODUCTION	14
2.2 FORMULATION LOCALE DES METHODES DEFINISSANT UN MILIEU EQUIVALENT	14
2.2.1 Méthodes simplifiées	14
2.2.2 Méthodes de Hill-Mandel	14
2.2.3 Méthode de l'homogénéisation	15
2.3 DECOMPOSITION DU PROBLEME ET COEFFICIENTS DU MATERIAU EQUIVALENT	15
2.3.1 Approche primale	15
2.3.2 Approche duale	16
2.3.3 Tenseur de concentration de contrainte et de déformation	16

2.4 METHODE DE L'HOMOGENEISATION	17
2.4.1 Justification de l'introduction des valeurs moyennes, approche des développements asymptotiques	17
2.4.2 Convergence des champs de contraintes et de déplacement	20
2.4.3 Etude de l'approche duale	20
2.4.3.1 Formulation variationnelle	20
2.4.3.2 Cas des matériaux à renforcement unidirectionnel	23
2.4.3.2.1 Simplification des problèmes élémentaires	24
2.4.3.2.2 Discrétisation des problèmes aux éléments finis	25
2.4.3.2.3 Conditions de périodicité	26
2.5 ETUDE DES METHODES DE DETERMINATION DU MATERIAU EQUIVALENT	26
2.5.1 Etude des symétries	26
2.5.2 Comparaison des différentes méthodes	30
2.5.2.1 Les approches primales	30
2.5.2.2 Les approches duales	33
2.5.3 Introduction de la technique d'homogénéisation dans le code de calcul élastique Pecelas	34
 CHAPITRE III	
 APPLICATION AU GENIE CIVIL	36
 3.1 LA TERRE ARMEE	37
3.1.1 Théorie simplifiée de Romstad (1976)	37
3.1.2 Approche numérique	39
 3.2 MATERIAU MULTICOUCHE	46
3.2.1 Association d'un multicouche à la terre armée	46
3.2.1.1 Conservation du module d'Young de l'acier	46
3.2.1.2 Variation du module d'Young de l'acier	47
3.2.2 Théorie de l'homogénéisation des stratifiés	47
3.2.3 Etude numérique de l'approche duale de Hill-Mandel	48
 3.3 GROUPE DE PIEUX	50
3.3.1 Méthode de l'homogénéisation sur les milieux périodiques avec cavités : application aux groupes de pieux vides	50
3.3.2 Approche numérique par la méthode de l'homogénéisation	53
 3.4 COMPARAISON NUMERIQUE DE L'APPROCHE PRIMALE DE LA METHODE DE HILL MANDEL ET DE LA METHODE DE L'HOMOGENEISATION	64
 2ème PARTIE : THEORIE DE L'HOMOGENEISATION EN COMPORTEMENT NON LINEAIRE	65

CHAPITRE IV

ETUDE DES DOMAINES DE RESISTANCE ET D'ELASTICITE MACROSCOPIQUES APPLICATION A LA TERRE ARMEE ET AUX COLONNES BALLATEES	67
4.1 GENERALITES	68
4.2 DOMAINE DE RESISTANCE DU MATERIAU EQUIVALENT	68
4.2.1 Méthode de Hill - Mandel	69
4.2.1.1 Approche primale	69
4.2.1.2 Approche duale	69
4.2.2 Méthode de l'homogénéisation	70
4.2.3 Etude du matériau multicouche à deux constituants par la méthode de l'homogénéisation	70
4.2.3.1 Résultats théoriques	72
4.2.3.2 Application à la terre armée	74
4.2.3.2.1 Critère bidimensionnel simplifié de la terre armée	74
4.2.3.2.2 Caractérisation du multicouche associé	75
4.2.3.2.3 Comparaison des critères homogénéisés bidimensionnels et de son homologue simplifié	75
4.3 DOMAINE D'ELASTICITE INITIAL DU MATERIAU EQUIVALENT	82
4.3.1 Méthode de l'homogénéisation pour le multicouche	82
4.3.2 Etude numérique	83
4.3.2.1 Terre armée	84
4.3.2.2 Colonnes ballastées	87

CHAPITRE V

HOMOGENEISATION EN PHASE ELASTOPLASTIQUE ETUDE NUMERIQUE SUR LA TERRE ARMEE ET LES COLONNES BALLASTEES	90
5.1 ASPECT THEORIQUE	91
5.1.1 Déformation plastique macroscopique	92
5.1.2 Résultat de convergence	93
5.2 ADAPTATION NUMERIQUE EN VUE DE L'OBTENTION DE LOIS D'EVOLUTION MACROSCOPIQUE	94
5.2.1 Formulation variationnelle	94
5.2.2 Discrétisation aux éléments finis	95
5.2.3 Adaptation du code Peplas	96
5.3 SIMULATION NUMERIQUE SUR DES STRATIFIES	98
5.3.1 Nature des simulations	98
5.3.2 Application à la terre armée	101
5.3.2.1 Approche primale de la méthode de Hill - Mandel	101
5.3.2.2 Méthode de l'homogénéisation	104
5.3.2.2.1 Comportement associé du sable	104
5.3.2.2.2 Comportement non dilatant du sable	115
5.3.3 Application aux colonnes ballastées	118
5.3.3.1 Approche primale de la méthode de Hill - Mandel	118
5.3.3.2 Méthode de l'homogénéisation	120

5.4 MODELISATION DU COMPORTEMENT DU MATERIAU MULTICOUCHE HOMOGENEISE	130
5.4.1 Modèle à deux variables internes	130
5.4.2 Modélisation de l'écroissage du domaine élastique	149
CONCLUSION	151
BIBLIOGRAPHIE	153
Annexe 1 : Régularité de la formulation duale de la méthode de l'homogénéisation	156
Annexe 2 : Formulation variationnelle de l'approche primale de la méthode de l'homogénéisation en phase élastique	158
Annexe 3 : Vérification du principe de macro-homogénéité pour les C-M-m de la méthode de l'homogénéisation	160
Annexe 4 : Comparaison sur des exemples de l'approche primale de la méthode de Hill-Mandel et de la méthode de l'homogénéisation	162
Annexe 5 : Nature des courbes délimitant le domaine élastique homogénéisé pour le matériau multicouche si les constituants obéissent à des critères de Mohr-Coulomb	165
Annexe 6 : Introduction des conditions de périodicité dans le code en non linéaire Pecplas	167
Annexe 7 : Méthode de l'homogénéisation pour le matériau multicouche : équivalence des caractérisations macroscopique et microscopique en déformation plane	169

Résumé :

Devant l'accroissement important de l'emploi des matériaux composites dans l'industrie, de nombreux développements théoriques et numériques ont été effectués afin de leur associer un matériau homogène équivalent. Le présent travail constitue une contribution dans ce sens. Il comprend deux parties.

La première est consacrée au comportement des composites en phase élastique linéaire. Après une étude théorique, nous avons introduit les techniques d'homogénéisation dans le programme de calcul aux éléments finis, Pecelas. Cet outil a été utilisé pour réaliser des études sur la terre armée et le groupe de pieux.

La deuxième partie porte sur l'étude du comportement des composites en phase élastoplastique. La théorie de l'homogénéisation est rappelée. Ensuite, son introduction dans le programme de calcul élastoplastique Pecplas est décrite. La terre armée et les colonnes ballastées ont été modélisées par un multicouche, ce qui a permis d'étudier leur domaine d'élasticité et de rupture. Quant à l'étude de la loi d'évolution, nous avons pu l'obtenir grâce à des simulations numériques par éléments finis.

Cette étude a permis d'élaborer un modèle de comportement à deux variables internes pour la loi d'évolution homogénéisée. Nous avons pu en déduire la manière dont s'effectue l'écrouissage du domaine d'élasticité homogénéisé.

Abstract:

The increasing use of composite materials in industry calls for numerical and fundamental important works on the development of design methods for composite structures. These methods are based on the determination of a homogeneous material which is equivalent to the composite material. The present work is a contribution in this field. It consists of two parts:

The first part deals with composites in the linear elastic domain. After a presentation of theories used in this domain, some methods are introduced in the finite element program Pecelas. This program is then used to study the behaviour of reinforced earth and piles group.

The second part deals with the behaviour of composites in the elastoplastic domain. After a presentation of the theory and its variational formulation, we describe its introduction in the finite element program Pecplas. This program is then used to study the behaviour of reinforced earth and stone columns in the plastic domain.

In the case of multilayered composite materials, a constitutive law with two internal parameters is developed. This law permits the determination of the elastic domain, the failure criterion and the evolution law of multilayered elastoplastic composite materials.

NOTATIONS

•	produit tensoriel une fois contracté
:	produit tensoriel deux fois contracté
$\langle z \rangle$	désigne la moyenne sur le V-E-R, Y soit $\frac{1}{ Y } \int_Y z \, dY$
$\llbracket \lambda \rrbracket$	$= \lambda_r - \lambda_s$
$ Y $	surface ou volume du domaine Y suivant sa nature

Alphabet latin

a	tenseur de rigidité
A	tenseur de souplesse
B	tenseur de symétrie géométrique par rapport à un plan
B_e	matrice de passage du champ de déplacement au champ de déformation discrétisé
C ou C'	cohésion
CA	espace des champs de déplacement cinématiquement admissible
C_d	cohésion de dilatance
C_E	tenseur de concentration de déformation
C_Σ	tenseur de concentration de contrainte
DE	domaine d'élasticité
DP(Y)	ensemble des champs de déplacement à déformation périodique sur la cellule de base Y
DR	domaine de rupture
e	champ de déformation microscopique
esp	espacement des pieux
e_v	déformation volumique
E	tenseur de déformation macroscopique
E ou E'	accompagné d'indices, désignent des modules d'Young
$E_Q = \sqrt{E:E}$	déformation macroscopique équivalente
E_v	espacement vertical des armatures d'axe en axe
f	force volumique

Notations

$f_e = 0$	équation du domaine élastique d'un matériau
F	matrice de force
F^P	matrice de force due à l'entrée en plastification
F_{su}	force surfacique imposée
F_{int}	force surfacique à l'interface
G	module de cisaillement
n	normale intérieure à l'interface
N	matrice d'interpolation
$PM = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2}$	pression moyenne macroscopique
Q	différence entre les contraintes principales majeure et mineure macroscopiques
R_T	matrice de rigidité totale
S	section transversale
SA	espace des champs de contrainte statiquement admissible
T^e	matrice de localisation d'un élément
u	champs de déplacement microscopique
\bar{u}	champs de déplacement imposé
$U = \frac{\Sigma_{11} - \Sigma_{22}}{\sqrt{2}}$	composante dans le plan déviatorique des contraintes macroscopiques en bidimensionnel
v	champ de déplacement
V	vecteur unicolonne représentant le champ de déplacement discrétisé
\mathcal{V}	domaine de l'espace
w	proportion en volume
$W = \sqrt{2} \Sigma_{12}$	composante dans le plan déviatorique des contraintes macroscopiques en bidimensionnel
(x_1, x_2, x_3)	composante du repère macroscopique
(y_1, y_2, y_3)	composante du repère microscopique
Y	volume élémentaire de référence

Alphabet grec

α_E	direction de la déformation principale macroscopique mineure par rapport à l'axe y_2
α_Σ	direction de la contrainte principale macroscopique mineure par rapport à l'axe y_2
δ	tenseur unitaire
ε	rapport d'échelle
Γ	interface
φ	angle de frottement interne
φ_d	angle de dilatance
Φ	diamètre extérieur des pieux
Φ_s	angle au sommet du cône représentant le critère de Mohr-Coulomb en déformation plane pour le sol
Ψ	champ de déplacement
λ, μ	coefficients définissant le tenseur de rigidité
ν	coefficient de Poisson
$\pi(E)$	désigne la fonction d'appui d'un convexe dans la direction E
σ	tenseur de contrainte microscopique
σ_0	résistance à la traction - compression des armatures par unité de longueur dans la direction y_2
σ_n	contrainte normale

Notations

Σ	tenseur de contrainte macroscopique
Σ_1	contrainte principale macroscopique mineure
Σ_2	contrainte principale macroscopique majeure
τ	contrainte de cisaillement

Indices

bas

i	distingue les modules d'Young d'anisotropie
ij	distingue les coefficients de Poisson d'anisotropie
r	relatif au renforcement
s	relatif au matériau à renforcer

haut

e	élastique
e f d	désigne les entités relatives à l'approche duale de Hill - Mandel
e f p	désigne les entités relatives à l'approche primale de Hill - Mandel
e q	désigne les entités relatives au matériau équivalent
e q d	désigne les entités relatives à une approche duale équivalente
e q p	désigne les entités relatives à une approche primale équivalente
hom	désigne les entités associées à la méthode de l'homogénéisation
ij	lié à un problème élémentaire
p	plastique

INTRODUCTION

Les matériaux composites connaissent actuellement un développement spectaculaire car ils permettent l'obtention de composés ayant des caractéristiques mécaniques, chimiques et pondérales inégalées auparavant. Dans la plupart des cas, ils résultent de l'association de plusieurs matériaux aux caractéristiques complémentaires ; dans les cas courants, ils résultent simplement de l'union :

- d'un renfort se présentant sous forme d'éléments longitudinaux (fibres) ou plats (feuilles, plaques),
- d'une matrice servant de support aux éléments renforçants.

Suivant la disposition relative fibre-matrice, on peut considérer deux grandes catégories de composites :

- ceux à structure aléatoire pour lesquels la position relative fibre-matrice est quelconque. Des exemples de développement récent de telles structures sont donnés en génie civil par :
 - les bétons de fibre (béton + fibres d'acier) utilisés pour les dallages des locaux industriels,
 - les bétons de polymère (résine organique + agrégats + fibres de verre) employés pour la restauration des bâtiments,
 - les mortiers armés de fibres (polymère + ciment + fibres de ciment) qui servent à la confection d'éléments de façade préfabriqués, de mur antibruit, de corniche de pont,
 - le texsol (fibre textile + sol) utilisé pour la stabilité des pentes.
- ceux à structure régulière ou périodique, ce qui signifie que la position relative fibre matrice est parfaitement définie. C'est ainsi que l'on peut générer une structure faite avec un tel matériau par juxtaposition d'un petit élément de volume choisi judicieusement. On peut citer comme illustration :
 - la terre armée,
 - les groupes de pieux,
 - les colonnes ballastées,
 - le renforcement par géotextile.

Les possibilités d'association sont innombrables. Actuellement, on cherche à concevoir des composites répondant à des exigences bien particulières de l'industrie. Ce qui introduit le concept "d'élaboration de matériau sur mesure". Dans ce contexte, il se développe actuellement pour les matériaux multicouches des logiciels d'aide à la conception, de façon à faciliter la prise en compte de critères économiques et techniques.

Ces matériaux génèrent des structures fortement hétérogènes sur lesquels les calculs sont complexes. C'est pourquoi, on cherche à développer des méthodes permettant de leur associer un matériau homogène équivalent, afin de se ramener à des problèmes mécaniques avec des solutions analytiques connues, ou encore de s'orienter vers une résolution numérique simplifiée. Ce processus est qualifié "d'homogénéisation". C'est un domaine de la mécanique qui a fait l'objet de beaucoup de recherche durant ces dernières années.

Benssoussan, Lions, Papanicolaou (1979) ont introduit les bases mathématiques de la théorie de l'homogénéisation. Dumontet (1983) et Lene (1984) ont étudié les problèmes d'homogénéisation en phase élastique sur des matériaux fibrés, et sur des stratifiés... Suquet (1982) [3] a élaboré la théorie de l'homogénéisation en phase élastoplastique. Une application sur des plaques en aluminium trouées a été effectuée par Michel (1984) par le biais d'un calcul numérique. En s'appuyant sur les concepts du calcul à la rupture introduit par Salençon (1983), de Buhan (1986) [3] a élaboré une théorie permettant à partir des critères de rupture de chaque constituant de définir celui du matériau équivalent.

Ce travail constitue une contribution aux développements des méthodes de l'homogénéisation et à leur application aux problèmes du génie civil qui sont caractérisés par leur forte non-linéarité. Il est composé de deux parties.

Dans la première partie, nous rappelons les bases de la théorie de l'homogénéisation. Ensuite, nous présentons la formulation duale de la méthode de l'homogénéisation en phase élastique. Sur le plan numérique, nous donnons les modifications ayant permis d'introduire l'homogénéisation dans le programme de calcul par éléments finis "Pecelas" et son application à la détermination des caractéristiques homogénéisées de la terre armée et d'un groupe de pieux.

La deuxième partie s'articule autour de la caractérisation du matériau équivalent en phase non linéaire, grâce à la détermination de ses domaines de rupture et d'élasticité et de sa loi d'évolution. Nous montrons la manière dont nous avons introduit les techniques d'homogénéisation dans le code de calcul aux éléments finis en phase élastoplastique "Pecplas" ... Cet outil de calcul puissant a permis de déterminer la loi d'évolution du matériau homogénéisé sur des chemins de contraintes imposés, de manière à mettre en évidence l'anisotropie du matériau. Au vu des résultats, nous proposons un modèle simple de comportement élastoplastique du matériau homogénéisé.

THEORIE DE L'HOMOGENEISATION

- **Aspects fondamentaux**
- **Etude en phase élastique linéaire**

Cette partie est composée de trois chapitres :

Dans le chapitre I, on s'attache à introduire les concepts de base de l'homogénéisation, la notion de grandeur macro-micro, le concept d'échelle et de volume élémentaire de référence.

Le chapitre II est consacré à la présentation en phase élastique des différentes méthodes utilisées pour la détermination du matériau équivalent. On développe plus particulièrement les grandes lignes de l'approche duale de la méthode de l'homogénéisation. On présente l'introduction de l'homogénéisation dans le code Pecelas.

Au chapitre III, on présente des applications sur des exemples classiques du génie civil, la terre armée et le groupe de pieux.

**PRELIMINAIRE : ELEMENTS DE
BASE DE L'HOMOGENEISATION**

1.1 CONCEPTS DE BASE

1.2 CONDITIONS FONDAMENTALES

Echantillon de
matériau

Volume élémentaire
de référence (V-E-R)

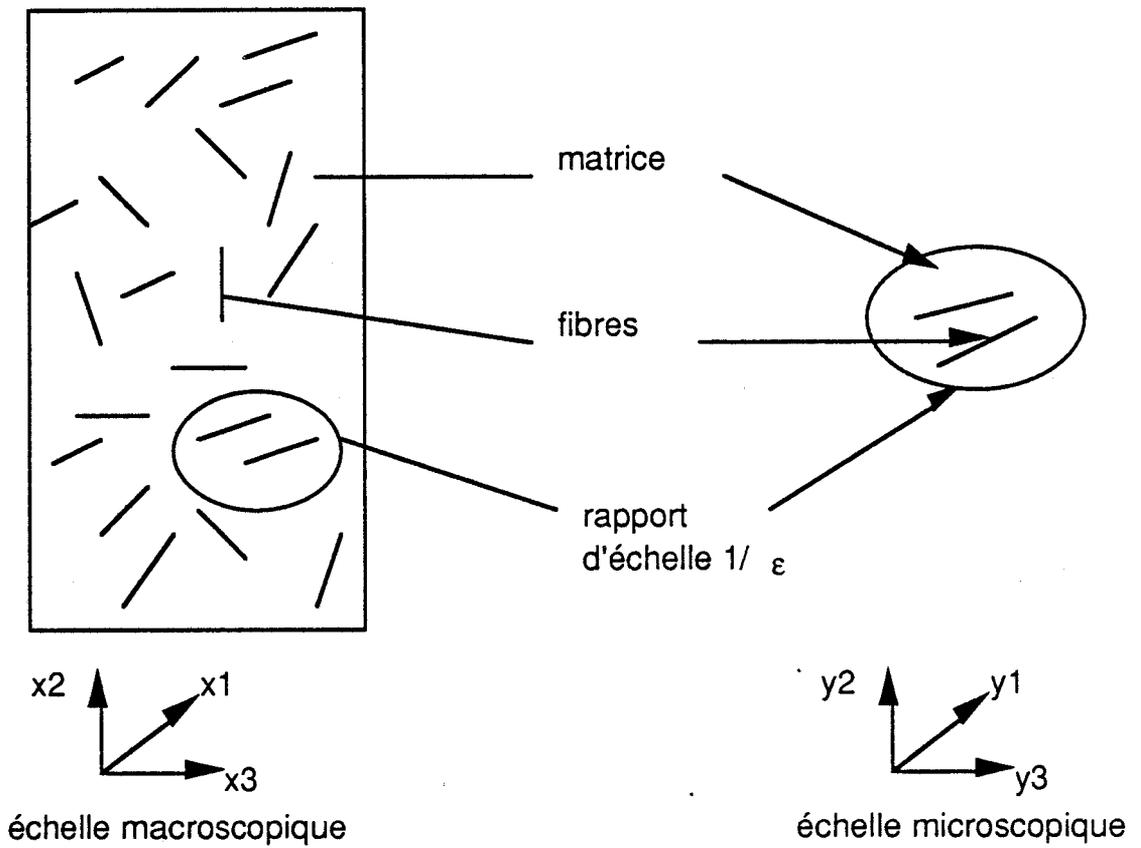


fig I1: Echelle macro-micro

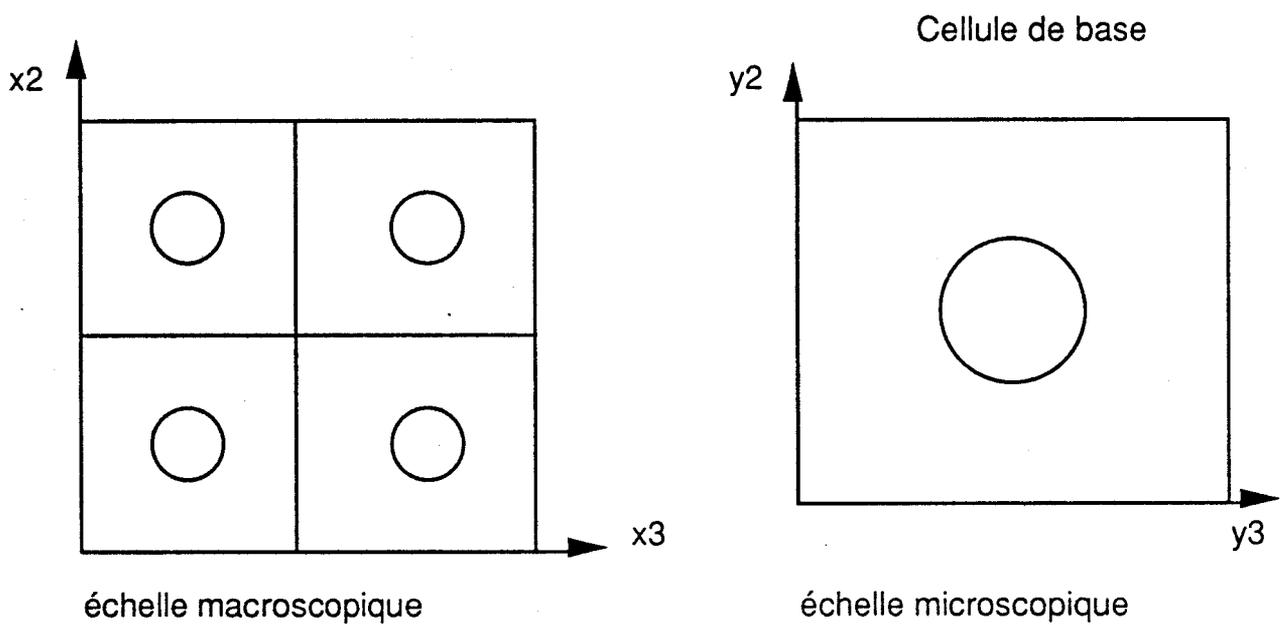


fig I2: Cas de structures périodiques à fibres

1.1 CONCEPTS DE BASE

On considère un échantillon comportant un grand nombre d'hétérogénéités, et par conséquent représentatif de la structure globale du matériau sur lequel on définit une échelle macroscopique ou globale. On cherche à extraire de cet échantillon un petit élément de volume représentatif du matériau que l'on appelle volume élémentaire de référence V-E-R dont on donne la représentation sur la fig. I.1.

Si l'association d'un ensemble de V-E-R permet de reconstituer exactement le matériau dans sa globalité à l'échelle macroscopique, on parle de structure périodique, le V-E-R porte alors le nom de cellule de base dont on donne un exemple sur la fig. I.2.

Le repère lié au V-E-R définit l'échelle microscopique. On introduit également le rapport d'échelle qui s'explique mathématiquement par :

$$\varepsilon = \frac{y}{x}$$

Les grandeurs macroscopiques sont définies comme les valeurs moyennes sur le V-E-R Y de leurs homologues microscopiques, soit :

$$\Sigma = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma(y) dY$$

$$E = \frac{1}{|Y|} \int_Y e(y) dY$$

1.2 CONDITIONS FONDAMENTALES

On impose au V-E-R un chemin de déformation macroscopique ou de contrainte macroscopique et on détermine l'évolution de sa variable duale, respectivement la contrainte et la déformation.

Afin de pouvoir considérer le tenseur de contrainte moyen, associé au tenseur de déformation moyen, comme un chargement extérieur au V-E-R, il faut satisfaire le principe de macro-homogénéité de Hill, soit :

$$(1.1) \quad \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma : e dY = \Sigma : E$$

L'équation d'équilibre du problème microscopique écrite sur le V-E-R ne prend pas en compte les forces de volume. Physiquement, on peut le justifier par la constatation que ces forces sont étrangères à l'hétérogénéité du matériau or le processus d'homogénéisation est une recherche de caractéristiques intrinsèques du matériau ; par conséquent cette équation s'écrit :

$$(1.2) \quad \text{div}_y \sigma = 0$$

Il faut enfin imposer au V-E-R des conditions caractéristiques des différentes méthodes de détermination du milieu équivalent que l'on peut qualifier en s'inspirant de Suquet (1983) [5] de conditions macro-micro (C-M-m). En effet, elles permettent d'attacher, au problème microscopique d'homogénéisation, les diverses variantes qui aboutissent à l'obtention des caractéristiques macroscopiques du milieu homogène équivalent. Les possibilités de formulation sont très nombreuses. Nous présentons celles qui sont les plus couramment utilisées.

- Méthodes de Hill-Mandel :

Elles sont caractérisées par des conditions aux limites particulières.

- approche primale

$$u = E y \text{ sur } \partial Y$$

ce qui implique que : $\langle e(u) \rangle = E$

- approche duale

On impose $\sigma(y) \cdot n = \Sigma \cdot n$ sur ∂Y

Σ est un tenseur des contraintes donné. En tenant compte de (1.2), Suquet (1982) [3] a montré que :

$$\Sigma = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma \, dY$$

- Méthode de l'homogénéisation :

Elle est spécifique aux milieux périodiques. Afin de traduire la répétitivité du milieu, on impose des conditions de périodicité au niveau de la cellule de base sur les tenseurs de contrainte et de déformation :

σ Y périodique

$e(u)$ Y périodique

Lene (1984) a démontré que :

$e(u)$ Y périodique $\Leftrightarrow u \in P D(Y)$

$$P D(Y) = \{u \in [H^1(Y)]^3, \quad u = E y + v \quad v \in [H_{per}^1(Y)]^3\}$$

$H^1(Y)$ et $H^1_{per}(Y)$ désignent des espaces de Hilbert à fonctions quelconques respectivement non périodiques et périodiques. Ces espaces garantissent l'existence des dérivées et des intégrales intervenant dans la formulation variationnelle.

HOMOGENEISATION EN PHASE

ELASTIQUE LINEAIRE

- 2.1 INTRODUCTION
- 2.2 FORMULATION LOCALE DES METHODES DEFINISSANT UN MILIEU EQUIVALENT
 - 2.2.1 Méthodes simplifiées
 - 2.2.2 Méthodes de Hill-Mandel
 - 2.2.3 Méthode de l'homogénéisation
- 2.3 DECOMPOSITION DU PROBLEME ET COEFFICIENTS DU MATERIAU EQUIVALENT
 - 2.3.1 Approche primale
 - 2.3.2 Approche duale
 - 2.3.3 Tenseur de concentration de contrainte et de déformation
- 2.4 METHODE DE L'HOMOGENEISATION
 - 2.4.1 Justification de l'introduction des valeurs moyennes, approche des développements asymptotiques
 - 2.4.2 Convergence des champs de contraintes et de déplacement
 - 2.4.3 Etude de l'approche duale
 - 2.4.3.1 Formulation variationnelle
 - 2.4.3.2 Cas des matériaux à renforcement unidirectionnel
 - 2.4.3.2.1 Simplification des problèmes élémentaires
 - 2.4.3.2.2 Discrétisation des problèmes aux éléments finis
 - 2.4.3.2.3 Conditions de périodicité
- 2.5 ETUDE DES METHODES DE DETERMINATION DU MATERIAU EQUIVALENT
 - 2.5.1 Etude des symétries
 - 2.5.2 Comparaison des différentes méthodes
 - 2.5.2.1 Les approches primales
 - 2.5.2.2 Les approches duales
 - 2.5.3 Introduction de la technique d'homogénéisation dans le code de calcul élastique Pecelas

2.1 INTRODUCTION

Après avoir présenté, les différentes méthodes de détermination du milieu équivalent, nous montrons que les problèmes d'élasticité auxquels ils aboutissent peuvent être décomposés en problèmes élémentaires avec un tenseur de contrainte ou de déformation macroscopique imposé unitaire. Ce qui permet d'introduire les tenseurs de concentration de déformation ou de contrainte permettant le passage du niveau macroscopique au niveau microscopique. Nous donnons la justification de la théorie de la méthode de l'homogénéisation par le biais des développements asymptotiques, et nous rappelons les résultats de convergence. Nous présentons l'approche duale, et nous démontrons ses propriétés. Quant à l'approche primale, elle est donnée en annexe 2. Dans le dernier paragraphe, nous avons regroupé des développements relatifs aux différentes méthodes de détermination du milieu équivalent.

2.2 FORMULATION LOCALE DES METHODES DEFINISSANT UN MILIEU EQUIVALENT

Ces approches sont scindées en trois catégories :

- méthodes simplifiées,
- méthodes de Hill - Mandel,
- méthodes de l'homogénéisation.

Les deux dernières sont directement liées aux C.M.m. introduit au chapitre I.

2.2.1 Méthodes simplifiées

- Approche de Voigt ou primale

Elle consiste à postuler que la déformation macroscopique se distribue de manière uniforme sur l'élément de référence soit :

$$e_{y \ ij}(u) = E_{ij} \quad \text{dans } Y$$

Le passage à la moyenne sur la loi de comportement de chacun des constituants donne alors :

$$\Sigma = \langle a \rangle E$$

Ainsi, on retrouve la loi des mélanges sur les coefficients de rigidité.

- Approche de Reuss ou duale

On postule que le tenseur de contrainte macroscopique, que l'on impose à la cellule de base, se distribue de manière uniforme au niveau local

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} \quad \text{dans } Y$$

ce qui conduit à :

$$E = \langle A \rangle \Sigma$$

C'est la loi des mélanges sur les coefficients de souplesse.

Ces méthodes sont approximatives car elles supposent une répartition uniforme au niveau microscopique de la contrainte ou de la déformation macroscopique qui ne prend pas en compte l'hétérogénéité du matériau. Les méthodes qui suivent sont de ce point de vue plus précises.

2.2.2 Méthode de Hill-Mandel

- L'approche primale est caractérisée par des conditions aux limites linéaires en déplacement

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \sigma = 0 & \text{dans } Y \\ \sigma = a(y) : e & \text{dans } Y \\ u = E.y & \text{sur } \partial Y \end{cases}$$

- L'approche duale est obtenue en imposant sur la périphérie de Y des contraintes générées par un tenseur de contrainte donné Σ

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \sigma = 0 & \text{dans } Y \\ A(y) : \sigma = e & \text{dans } Y \\ \sigma.n = \Sigma.n & \text{sur } \partial Y \end{cases}$$

2.2.3 Méthode de l'homogénéisation

- Approche primale, la cellule de base est soumise à un tenseur de déformation macroscopique E

$$\left[\begin{array}{ll} \operatorname{div}_y \sigma = 0 & \text{dans } Y \\ \sigma = a(y) : \epsilon(u) & \text{dans } Y \\ \langle \epsilon(u) \rangle = E & \\ e Y \text{ périodique, } \sigma.n Y \text{ antipériodique} & \end{array} \right.$$

- Approche duale, on impose à la cellule de base un tenseur des contraintes macroscopique Σ

$$\left[\begin{array}{ll} \operatorname{div}_y \sigma = 0 & \text{dans } Y \\ A(y) : \sigma = \epsilon(u) & \text{dans } Y \\ \langle \sigma \rangle = \Sigma & \\ e Y \text{ périodique, } \sigma.n Y \text{ antipériodique} & \end{array} \right.$$

comme $u \in D P(Y)$, on peut écrire que $u = E y + v$, ce qui permet de travailler sur un champ v satisfaisant des conditions de périodicité.

2.3 DECOMPOSITION DU PROBLEME ET COEFFICIENTS DU MATERIAU EQUIVALENT

On peut décomposer le tenseur de déformation macroscopique :

$$E = E_{kh} E^{kh} \text{ avec } E_{ij}^{kh} = \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^h + \delta_i^h \delta_j^k)$$

comme les formulations précédentes sont linéaires en E , en désignant par u^{kh} le champ de déplacement résultant du tenseur de déformation moyen unitaire E^{kh} , on peut alors écrire :

$$(2.1) \quad u = E_{kh} u^{kh}$$

2.3.1 Approche primale

Le problème décomposé se formule de la manière suivante :

$$\left[\begin{array}{ll} \operatorname{div}_y \sigma^{kh} = 0 & \text{dans } Y \\ \sigma^{kh} = a(y) : \epsilon(u^{kh}) & \text{dans } Y \\ \langle \epsilon(u^{kh}) \rangle = E^{kh} & \\ + \text{C-M-m} & \end{array} \right.$$

Comme les coefficients homogénéisés sont des relations entre les grandeurs macroscopiques.

$$\langle \sigma_{ij}^{kh} \rangle = a_{ijpq}^{eqp} \langle \epsilon_{pq}(u^{kh}) \rangle$$

$$\langle \epsilon_{pq}(u^{kh}) \rangle = E_{pq}^{kh}$$

$$a_{ijkh}^{eqp} = \langle \sigma_{ij}^{kh} \rangle$$

ainsi pour obtenir le tenseur d'élasticité du matériau équivalent, il faut résoudre six problèmes d'élasticité sur le V-E-R.

2.3.2 Approche duale

$$\left[\begin{array}{ll} \text{div}_y \sigma^{kh} = 0 & \text{dans } Y \\ A(y) : \sigma^{kh} = e(u^{kh}) & \text{dans } Y \\ \langle \sigma^{kh} \rangle = \Sigma^{kh} & \text{avec } \Sigma_{ij}^{kh} = \frac{1}{2} (\delta_i^k \delta_j^h + \delta_j^k \delta_i^h) \\ + \text{C-M-m} \end{array} \right.$$

de la même manière que précédemment, on peut écrire :

$$\langle e_{ij}^{kh} \rangle = A_{ijkl}^{eqd} \langle \sigma_{lm}^{kh} \rangle$$

avec
$$\langle \sigma_{lm}^{kh} \rangle = \frac{1}{2} (\delta_l^k \delta_m^h + \delta_l^h \delta_m^k)$$

ce qui donne :

$$A_{ijkl}^{eqd} = \langle e_{ij}^{kh} \rangle$$

L'approche duale permet le calcul direct du tenseur de souplesse homogénéisé par opposition à l'approche primale qui permet de calculer directement le tenseur de rigidité homogénéisé. Pour les conditions C-M-m correspondant à la méthode de l'homogénéisation, il y a équivalence des approches primale et duale, Suquet (1982) [3] a démontré que :

$$(A^{hom})^{-1} = a^{hom}$$

2.3.3 Tenseur de concentration de contrainte et de déformation

A partir de (2.1), on peut écrire que :

$$e(u) = E_{kh} e(u^{kh}(y))$$

$e(u^{kh}(y))$ représente la répartition des déformations microscopiques résultant de l'application d'un tenseur de déformation macroscopique unitaire sur le V-E-R. On l'appelle le tenseur de concentration de déformation car il permet le passage du tenseur de déformation macroscopique au tenseur de déformation microscopique.

On introduit la notation suivante pour le matériau équivalent :

$$(C_E^{eq})^{kh} = e(u^{kh}(y))$$

De même, le tenseur des contraintes microscopiques est linéaire vis à vis des composantes du tenseur des contraintes macroscopiques :

$$\sigma = \sigma^{kh}(y) \Sigma_{kh}$$

$\sigma^{kh}(y)$ est la répartition de la contrainte microscopique résultant de l'application d'un tenseur de contrainte macroscopique unitaire sur le V-E-R. Il est baptisé le tenseur de concentration de contraintes car il permet d'obtenir la répartition de la contrainte microscopique connaissant l'état de sollicitation macroscopique. On adopte la notation :

$$(C_\Sigma^{eq})^{kh} = \sigma^{kh}(y)$$

2.4 METHODE DE L'HOMOGENEISATION

2.4.1 Justification de l'introduction des valeurs moyennes, approche des développements asymptotiques

On considère un milieu élastique hétérogène soumis à des conditions aux limites en force sur $\Gamma_{F_{su}}$ et en déplacement sur Γ_u (fig. II.1) et à des forces de volume f . Les champs de contraintes, de déformations et de déplacements dépendent du rapport d'échelle ϵ , les équations qu'ils doivent vérifier sont :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \sigma_\epsilon + f = 0 & \text{dans } \nu \\ \sigma_\epsilon = a(y) : e_\epsilon & \text{dans } \nu \\ \sigma_\epsilon \cdot n = F_{su} & \text{sur } \Gamma_{su} \\ u_\epsilon = \bar{u} & \text{sur } \Gamma_u \end{cases}$$

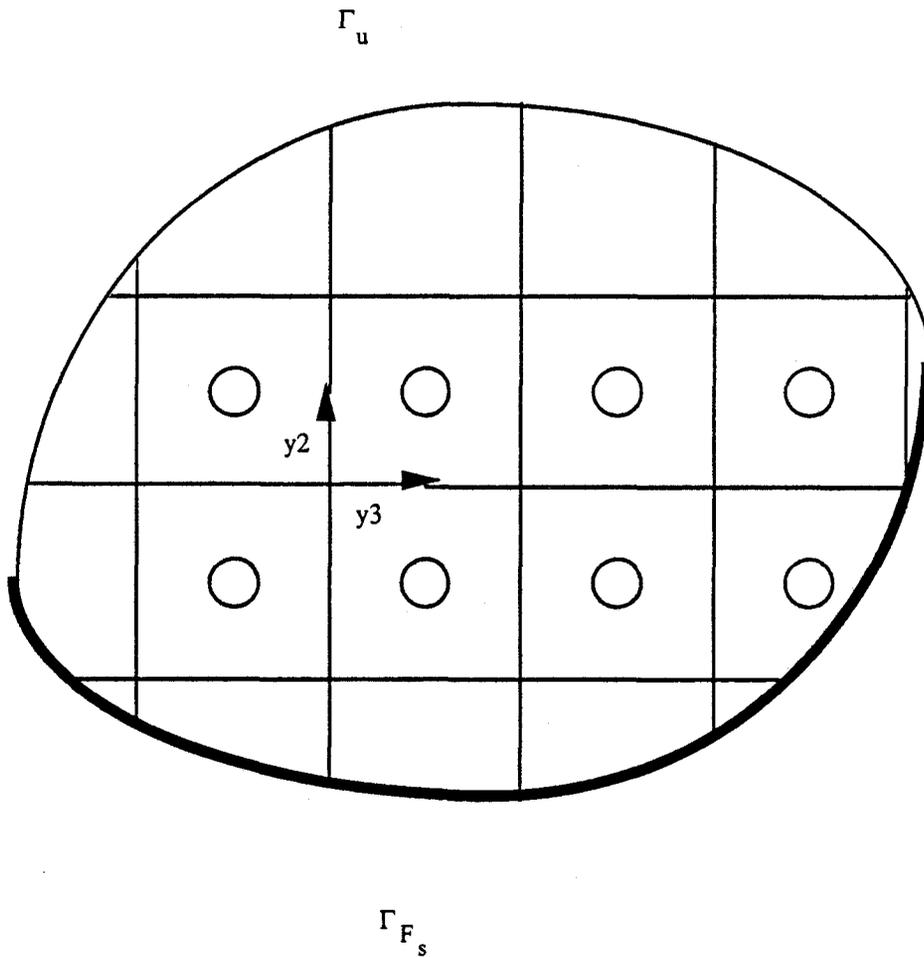
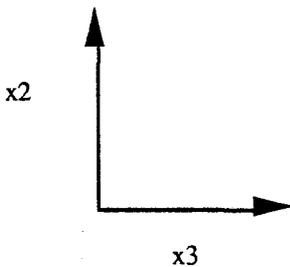


fig II.1: Domaine hétérogène ν soumis à des conditions aux limites en force et en déplacement



On postule l'existence d'un développement asymptotique sur le champ de déplacement :

$$u_\varepsilon(x,y) = u_0(x,y) + \varepsilon u_1(x,y) + \varepsilon^2 u_2(x,y) + \dots$$

On impose à toutes ces fonctions d'être périodiques en Y . On pose :

$$e_x \quad ij = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$e_y \quad ij = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right)$$

en remarquant que :

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y}$$

On obtient alors :

$$e_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} e_0 + e_1 + \varepsilon e_2 + \dots$$

avec :

$$e_0 = e_y(u_0)$$

$$e_1 = e_x(u_0) + e_y(u_1)$$

$$e_2 = e_x(u_1) + e_y(u_2)$$

de même :

$$\sigma_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \sigma_0 + \sigma_1 + \varepsilon \sigma_2 + \dots$$

$$\operatorname{div} \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{div}_y \sigma_0 + \frac{1}{\varepsilon} (\operatorname{div}_x \sigma_0 + \operatorname{div}_y \sigma_1) + (\operatorname{div}_x \sigma_1 + \operatorname{div}_y \sigma_2) + \dots$$

avec $\sigma_i = a(y) : e_i \quad i = 0, 1, \dots, n$

L'injection de ces équations dans le groupe d'équations (2.2) donne :

$$\sigma_0 = 0 \Rightarrow e_y(u_0) = 0 \Rightarrow u_0 = u_0(x)$$

et comme u_1 est Y périodique, on a :

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y e_1 \, dY = \frac{1}{|Y|} \int_Y (e_x(u_0) + e_y(u_1)) \, dY = e_x(u_0)$$

finalment, on obtient la formulation microscopique de ce problème d'élasticité.

$$(2.3) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_y \sigma_1 = 0 \\ \sigma_1 = a(y) : (e_x(u_0) + e_y(u_1)) \\ u_1 \text{ } Y \text{ périodique} \quad \sigma_1 \text{ } n \text{ } Y \text{ antipériodique} \end{cases}$$

où x joue le rôle d'un paramètre.

$e_x(u_0)$ et $e_y(u_1)$ s'interprètent respectivement comme la déformation macroscopique et microscopique. Comme au § 2.3, on peut, en invoquant la linéarité par rapport à la déformation macroscopique, écrire que :

$$u_1 = v^{kh} e_x^{kh}(u_0)$$

et alors :

$$(2.4) \quad e_1 = (E^{kh} + e_y(v^{kh})) e_x^{kh}(u_0)$$

donc v^{kh} satisfait aux équations locales du problème d'homogénéisation.

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y \sigma_1^{kh} = 0 \\ \sigma_1^{kh} = a(y) : (E^{kh} + e_y(v^{kh})) \\ v^{kh} \text{ Y périodique} , \quad \sigma_1^{kh} \cdot n \text{ Y antipériodique} \end{cases}$$

On cherche maintenant à établir la formulation macroscopique de ce problème d'élasticité, le terme d'ordre 0 de l'équation d'équilibre donne :

$$\operatorname{div}_y \sigma_2 + \operatorname{div}_x \sigma_1 + f = 0$$

en passant à la moyenne sur Y et en tenant compte de l'antipériodicité de $\sigma_2 \cdot n$ en y , on écrit :

$$\operatorname{div}_x \langle \sigma_1 \rangle + f = 0$$

le terme d'ordre 0 du développement de σ_ε donne :

$$\sigma_1 \cdot n = F_{su}$$

en passant à la moyenne sur Y et compte tenu du fait que F_{su} est un chargement indépendant de l'échelle macroscopique, on a :

$$\langle \sigma_1 \rangle \cdot n = F_{su}$$

grâce à (2.4) et aux lois de comportement, on peut écrire que :

$$\langle \sigma_1 \rangle = a^{hom} : e_x(u_0)$$

et comme on vérifie facilement que :

$$\langle e_1 \rangle = e_x(u_0)$$

On a :

$$\langle \sigma_1 \rangle = a^{hom} : \langle e_1 \rangle$$

Par conséquent, ces champs de contrainte et de déformation moyens vérifient la formulation macroscopique du problème de l'élasticité.

$$\left[\begin{array}{ll} \operatorname{div}_x \langle \sigma_1 \rangle + f = 0 & \text{dans } \nu \\ \langle \sigma_1 \rangle = a^{\text{hom}} : e_1(u_0) & \text{dans } \nu \\ \langle \sigma_1 \rangle \cdot n = F_{\text{su}} & \text{sur } \Gamma_{F_{\text{su}}} \\ u_0 = \overline{u} & \text{sur } \Gamma_u \end{array} \right.$$

Par conséquent, ces variables moyennes sont associées au matériau homogénéisé équivalent.

2.4.2 Convergence des champs de contrainte et de déplacement

Duvaut (1976) a démontré la convergence faible :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, y) &= u_0 && \text{dans } [H^1(\nu)]^3 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon(x, y) &= \langle \sigma_1 \rangle && \text{dans } [L^2(\nu)]_s^6 \end{aligned}$$

Par conséquent, il est légitime de remplacer l'étude des matériaux fortement hétérogènes, c'est-à-dire à petit rapport d'échelle ε par leur matériau homogène équivalent. Sanchez-Palencia (1980) a établi la convergence forte dans $[L^2(\nu)]_s^6$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sigma_\varepsilon - \sigma_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) = 0$$

Ces résultats montrent que le champ de contrainte microscopique σ_1 est une approximation du champ réel σ_ε meilleure que celle donnée par le tenseur macroscopique $\langle \sigma_1 \rangle$. D'où l'importance du tenseur de concentration de contrainte qui permet d'obtenir le champ de contrainte microscopique σ_1 à partir de la connaissance de son homologue macroscopique $\langle \sigma_1 \rangle$.

2.4.3 Etude de l'approche duale

On considère un composite à deux constituants et à interface parfaite. L'inclusion peut rencontrer le bord de la cellule de base de façon à ce que soit respectée sur les matériaux la condition de périodicité sur la cellule de base Y (fig. II.2).

2.4.3.1 Formulation variationnelle

On rappelle l'expression d'un problème élémentaire sur la cellule de base

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{div}_y \sigma^{kh} = 0 \\ \sigma^{kh} = a(y) : e(u^{kh}) \\ \langle \sigma^{kh} \rangle = \Sigma^{kh} \\ e(u^{kh}) \text{ } Y \text{ périodique, } \sigma^{kh} \cdot n \text{ } Y \text{ antipériodique} \end{array} \right.$$

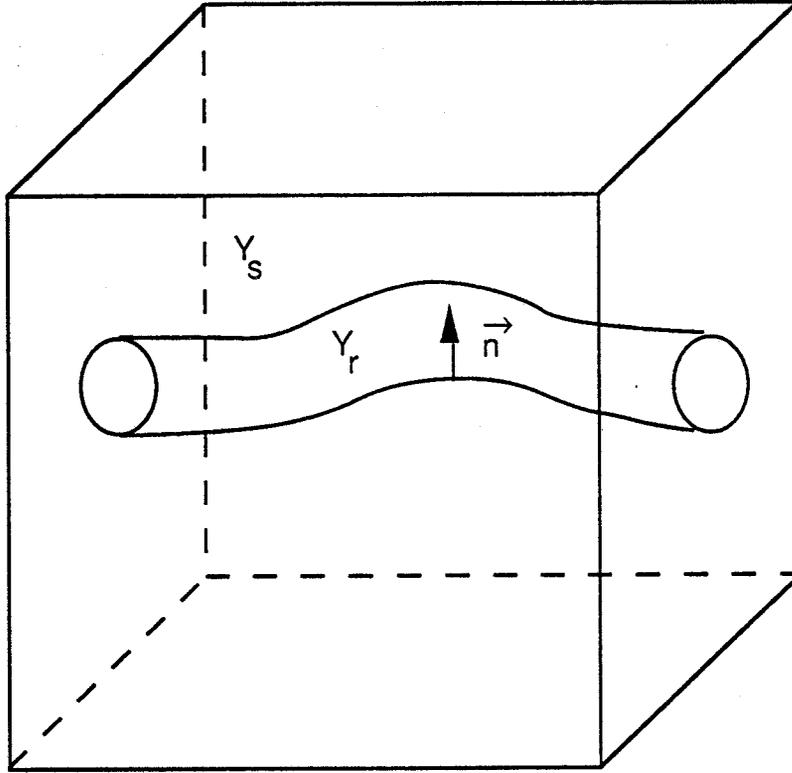


fig. II.2 : Cellule de base

$$Y = Y_s \cup Y_r$$

Y_s : matrice

Y_r : inclusion de renforcement

Γ : interface

\vec{n} : normale unitaire à l'interface

comme $e(u^{kh})$ est Y périodique, on peut écrire :

$$u_i^{kh} = E_{ij} y_j + v_i^{kh} \quad \text{avec } v_i^{kh} \text{ } Y \text{ périodique}$$

$$(2.5) \quad \text{alors } \sigma_{ij}^{kh} = a_{ijlm} [E_{lm} + e_{lm}(v^{kh})]$$

en passant à la moyenne Y :

$$(2.6) \quad \Sigma_{ij}^{kh} = \langle \sigma_{ij}^{kh} \rangle = \langle a_{ijlm} \rangle E_{lm} + \langle a_{ijlm} e_{lm}(v^{kh}) \rangle$$

en multipliant (2.5) par $e_{ij}(\psi)$ et en passant à la moyenne Y :

$$\langle \sigma_{ij}^{kh} e_{ij}(\psi) \rangle = \langle a_{ijlm} (E_{lm} + e_{lm}(v^{kh})) e_{ij}(\psi) \rangle$$

comme le champ de déplacement virtuel ψ est Y périodique alors $e(\psi)$ l'est aussi. Alors les hypothèses de l'annexe 3 sur les champs de contrainte et de déformation sont vérifiées, ce qui permet d'écrire :

$$\langle \sigma_{ij}^{kh} e_{ij}(\psi) \rangle = \langle \sigma_{ij}^{kh} \rangle \langle e_{ij}(\psi) \rangle$$

or ψ est Y périodique, donc $\langle e_{ij}(\psi) \rangle = 0$, et en prémultipliant (2.6) par E_{ij}^* , on obtient le système :

$$(2.7) \quad \begin{cases} E_{ij}^* \langle a_{ijlm} \rangle E_{lm} + E_{ij}^* \langle a_{ijlm} e_{lm}(v^{kh}) \rangle = E_{ij}^* \Sigma_{ij}^{kh} \\ \langle a_{ijlm} e_{ij}(\psi) \rangle E_{lm} + \langle a_{ijlm} e_{lm}(v^{kh}) e_{ij}(\psi) \rangle = 0 \end{cases}$$

On peut simplifier l'écriture de cette formulation en remarquant que :

$$\begin{aligned} \langle a_{jkh} e_{kh}(v^{lm}) \rangle &= \frac{1}{|Y|} \int_Y a_{jkh} (v_h^{lm})_{,k} dY \\ &= \frac{1}{|Y|} \left[\int_Y (a_{ijkh} v_h^{lm})_{,k} dY - \int_Y (a_{ijkh})_{,k} v_h^{lm} dY \right] \end{aligned}$$

et comme les coefficients d'élasticité sont constants par morceau :

$$\langle a_{ijkh} e_{kh}(v^{lm}) \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y a_{ijkh} (v_h^{lm})_{,k} dY$$

et d'après le théorème de la divergence que l'on applique sur $Y_s \cup Y_r$

$$\langle a_{ijkh} e_{kh}(v^{lm}) \rangle = \frac{1}{|Y|} \left[\int_{\partial Y} a_{ijkh} v_h^{lm} n_k d(\partial Y) - \int_{\Gamma} [a_{ijkh}] [n_k] v_h^{lm} d\Gamma \right]$$

et comme a et v^{lm} sont Y périodiques, on aboutit :

$$\langle a_{ijkh} e_{kh}(v^{lm}) \rangle = - \frac{1}{|Y|} \int_{\Gamma} [a_{ijkh}] [n_j] v_i^{lm} d\Gamma$$

On pose $(F_i^{int})_{kh} = [a_{ijkh}] n_j$

Les matériaux constitutifs du composite sont isotropes, par conséquent, on peut écrire F^{int} sous la forme :

$$F^{int} = \begin{bmatrix} -[\lambda+2\mu] n_1 & -[\lambda] n_1 & -[\lambda] n_1 & 0 & -[\mu] n_3 & -[\mu] n_2 \\ -[\lambda] n_2 & -[\lambda+2\mu] n_2 & -[\lambda] n_2 & -[\mu] n_3 & 0 & -[\mu] n_1 \\ -[\lambda] n_3 & -[\lambda] n_3 & -[\lambda+2\mu] n_3 & -[\mu] n_2 & -[\mu] n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

D'après la formulation variationnelle (2.7), on voit que l'inconnu du problème est constitué par le vecteur unicolonne comprenant les six composantes du tenseur de déformation macroscopique et les trois composantes du champ de déplacement macroscopique v^{kh} soit :

$$\{E, v^{kh}\} = \{E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{23}, 2E_{13}, 2E_{12}, v_1^{kh}, v_2^{kh}, v_3^{kh}\}$$

D'après le résultat du § 2.3.2, on obtient l'expression du tenseur de souplesse homogénéisé en fonction des inconnues du problème, soit :

$$A_{ijkh}^{hom} = \langle e_{ij}(u^{kh}) \rangle = E_{ij} + \langle e_{ij}(v^{kh}) \rangle$$

2.4.3.2 Cas des matériaux à renforcement unidirectionnel

Comme le milieu présente une période quelconque dans la direction y_1 (fig. II.3), les champs de déplacement v^{kh} sont indépendants de y_1 , et on peut travailler sur une cellule de base contenue dans le plan perpendiculaire aux fibres. L'approche primale de cette méthode a été développée par Lene (1984).

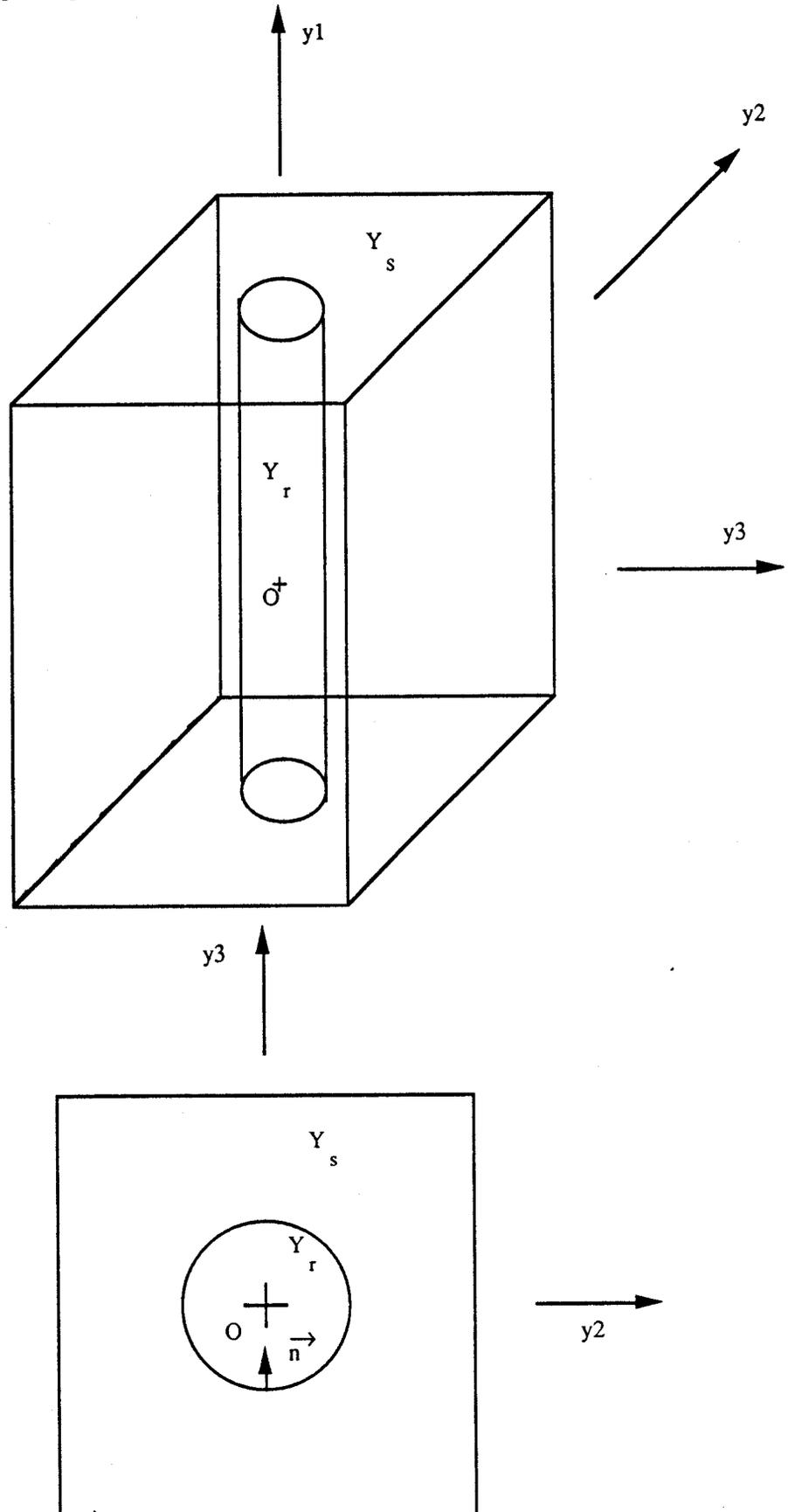


fig. II.3 : Cellule de base pour un matériau à renforcement unidirectionnel

2.4.3.2.1 Simplification des problèmes élémentaires

On se propose d'établir les résultats suivants au niveau des champs de déplacement microscopiques solutions des problèmes élémentaires :

$$v^{\alpha\beta}(y_2, y_3) = (0, v_2^{\alpha\beta}, v_3^{\alpha\beta})$$

$$v^{11}(y_2, y_3) = (0, v_2^{11}, v_3^{11})$$

$$v^{\alpha 1}(y_2, y_3) = (v_1^{\alpha 1}, 0, 0)$$

avec $\alpha, \beta = 2$ ou 3 .

On s'aperçoit que les problèmes décomposés sont du type déformation plane ou bien Laplacien.

- Etude de $v^{\alpha\beta}$

Dans la formulation variationnelle (2.7), on peut prendre les composantes $\{E^*, \psi\}$ sous la forme :

$$\{0, 0, 0, 0, 2E_{13}^*, 2E_{12}^*, \psi_1, 0, 0\}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} E_{1\alpha}^* \langle a_{1\alpha 1\alpha} \rangle E_{1\alpha} + E_{1\alpha}^* \langle a_{1\alpha} \rangle e_{1\alpha}(v^{kh}) = 0 \\ \langle a_{1\alpha 1\alpha} \rangle e_{1\alpha}(\psi) + E_{1\alpha} + \langle a_{1\alpha 1\alpha} \rangle e_{1\alpha}(\psi) = 0 \end{cases}$$

Comme la forme bilinéaire (2.7) est définie (annexe 1), la forme extraite ci-dessus l'est aussi, et par conséquent :

$$E_{13} = E_{12} = 0$$

$$\frac{\partial v_1^{kh}}{\partial y_\alpha} = 0$$

et comme il faut bloquer v_1^{kh} en un point pour avoir un problème bien posé, on a le résultat : $v_1^{kh} = 0$.

- Etude de v^{11}

On prend cette fois $\{E^*, \psi\}$ sous la forme :

$$\{0, 0, 0, 0, 2E_{13}^*, 2E_{12}^*, \psi_1, 0, 0\}$$

et par un raisonnement similaire, on aboutit à :

$$E_{12} = E_{13} = 0 \quad v_1^{11} = 0$$

- Etude de $v^{\alpha 1}$

En choisissant $\{E^*, \psi\}$

$$\{E_{11}^*, E_{22}^*, E_{33}^*, 2E_{23}^*, 0, 0, 0, \psi_2, \psi_3\}$$

on peut montrer que :

$$\begin{aligned} v_2^{\alpha 1} = v_3^{\alpha 1} &= 0 \\ E_{11} = E_{22} = E_{33} = E_{23} &= 0 \end{aligned}$$

2.4.3.2.2 Discrétisation des problèmes par éléments finis

La discrétisation des problèmes élémentaires précédents est réalisée à l'aide de la technique des éléments finis. Si on divise le domaine Y en n éléments et que l'on note :

N : la matrice d'interpolation
 ψ : le vecteur unicolonne représentant le champ de déplacement ψ aux noeuds du maillage
 V : le vecteur colonne représentant les déplacements aux noeuds du maillage
 T^e : la matrice de localisation d'un élément

Le déplacement en un point quelconque d'un élément est donné par :

$$v = N T^e V$$

ce qui donne après dérivation, les composantes des déformations :

$$e = B_e T^e V$$

On peut alors établir la forme discrétisée du terme suivant :

$$E_{ij}^* \langle a_{ijlm} e_{lm} (v^{kh}) \rangle = - \frac{E_{lm}^*}{|Y|} \int_{\Gamma} (F_i^{int})_{lm} v_i^{kh} d\Gamma$$

On assimile l'interface à un nombre fini de segments notés n_c et F^{int} à la forme matricielle du § 2.4.3.1.

$$E_{ij}^* \langle a_{ijlm} e_{lm} (v^{kh}) \rangle = - \frac{1}{|Y|} t_E^* \left(\sum_{i=1}^{n_c} \int_{\Gamma_i} t_{F^{int}} N T^e d\Gamma \right) v^{kh}$$

les composantes du vecteur inconnues généralisées et du tenseur F^{int} prennent la forme :

- pour les problèmes de déformation plane dans le plan (y_2, y_3)

$$\{E, v^{kh}\} = \{E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{23}, v_2^{kh}, v_3^{kh}\}$$

$$F^{int} = \begin{pmatrix} -\lambda n_2 & -(\lambda + 2\mu) n_2 & -\lambda n_2 & -\mu n_3 \\ -\lambda n_3 & -(\lambda + 2\mu) n_3 & -\lambda n_3 & -\mu n_3 \end{pmatrix}$$

- pour les problèmes de Laplacien

$$\{E, v^{kh}\} = \{2E_{13}, 2E_{12}, v_1\}$$

$$F^{int} = (-\mu n_3, -\mu n_2)$$

Ce qui permet de définir la partie de la matrice de rigidité associée à ce terme, soit :

$$R_c = \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1}^{n_e} \int_{\Gamma_i} t_{F^{int}} N T^e d\Gamma$$

Le terme $\langle a_{ijklm} e_{lm}^{(vkh)} e_{ij}(\psi) \rangle$ donne, après discrétisation, la matrice de rigidité classique des problèmes de mécanique que l'on note R .

L'expression discrétisée totale de la formulation variationnelle (2.7) s'écrit :

$$[t_E^*, t_\psi'] \begin{bmatrix} a_{moy} & R_c \\ t_{Rc} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ v^{kh} \end{bmatrix} = [t_E^*, t_\psi'] \begin{bmatrix} \Sigma^{kh} \\ 0 \end{bmatrix}$$

la matrice de rigidité totale R_T est composée de 4 blocs :

- la matrice des coefficients de rigidité moyens sur la cellule de base que l'on note a_{moy}
- la matrice R_c correspond au couplage entre les déformations macroscopiques et microscopiques
- la matrice de rigidité classique R .

2.4.2.3.3 Conditions de périodicité

Elles sont réalisées en ajoutant des ressorts de rigidité infinie entre les noeuds périodiques. Pour les problèmes bidimensionnels, la contribution de ces ressorts est donnée sous la forme :

$$R_p = \begin{bmatrix} & 2i-1 & 2i & & 2j-1 & 2j & \\ & 0 & | & | & 0 & | & | & 0 & \\ \hline & K & 0 & \hline & 0 & K & \hline & 0 & | & | & 0 & | & | & 0 & \\ \hline & -K & 0 & \hline & 0 & -K & \hline & 0 & | & | & 0 & | & | & 0 & \end{bmatrix} \begin{matrix} 2i-1 \\ 2i \\ 2j-1 \\ 2j \end{matrix}$$

i et j sont les numéros des noeuds périodiques. K est un nombre très grand vis à vis des coefficients de la matrice de rigidité, on a pris $K = 10^6 \sup_{l,m} (r_{lm})$.

2.5. ETUDE DES METHODES DE DETERMINATION DU MATERIAU EQUIVALENT

2.5.1 Etude des symétries de l'approche duale

Si la cellule de base possède des symétries, on peut réduire le domaine d'étude et remplacer les conditions de périodicité par des conditions de blocage des noeuds sur la périphérie du domaine.

Au préalable, établissons quelques définitions :

- Un matériau possède la symétrie matérielle par rapport à un plan P si, et seulement si, on a :

$$a_{ijkh} = b_{il} b_{jm} b_{kp} b_{hq} a_{lm pq}$$

B représente le tenseur de symétrie géométrique par rapport à ce plan

P est le plan de symétrie matériel pour la cellule de base Y si :

* P est plan de symétrie géométrique

** P est plan de symétrie matérielle.

a. 1er point

Si P est plan de symétrie matériel pour Y , les champs u^{lm} solutions des problèmes élémentaires satisfont :

$$z_i^{lm}(y') = b_{lp} b_{mq} b_{ir} u_r^{pq}(y)$$

avec $y'_i = b_{ip} y_p$

démonstration

A partir de $u_k^{pq}(y)$ qui est solution du problème d'élasticité défini sur Y , définissons :

$$z_\gamma^{\alpha\beta}(y') = b_{\alpha p} b_{\beta q} b_{\gamma h} u_h^{pq}(y)$$

on a alors :

$$e_{\gamma\delta}(z^{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z^{\alpha\beta}}{\partial y'_\gamma} + \frac{\partial z^{\alpha\beta}}{\partial y'_\delta} \right)$$

et comme B est une isométrie :

$$B^{-1} = {}^t B \quad \Rightarrow \quad y_j = b_{kj} y'_k$$

$$e_{\gamma\delta}(z^{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} b_{\alpha p} b_{\beta q} b_{\delta h} b_{\gamma k} \left(\frac{\partial u_k^{pq}}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k^{pq}}{\partial y_h} \right)$$

de même, on montre que :

$$(\sigma_{sy})_{ij}^{\alpha\beta} = \sigma_{ij}(z^{\alpha\beta}) = b_{\alpha p} b_{\beta q} b_{il} b_{jm} \sigma_{lm}(u^{pq})$$

d'où :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij}(z^{\alpha\beta}) \rangle &= b_{\alpha p} b_{\beta q} b_{il} b_{jm} \langle \sigma_{lm}(v^{pq}) \rangle \\ &= b_{\alpha p} b_{\beta q} b_{il} b_{jm} \Sigma_{lm}^{pq} \\ &= b_{\alpha p} b_{\beta q} b_{il} b_{jm} \left[\frac{1}{2} (\delta_l^p \delta_m^q + \delta_l^q \delta_m^p) \right] \end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned} b_{\alpha p} b_{\beta q} b_{il} b_{jm} \delta_1^p \delta_m^q &= b_{\alpha p} b_{\beta q} b_{ip} b_{jq} \\ &= b_{ip} b_{\alpha p} b_{\beta q} b_{jq} = \delta_i^\alpha \delta_j^\beta \end{aligned}$$

donc :

$$\langle \sigma_{ij}^{\alpha\beta}(z^{\alpha\beta}) \rangle = \frac{1}{2} (\delta_i^\alpha \delta_j^\beta + \delta_i^\beta \delta_j^\alpha) = \Sigma_{ij}^{\alpha\beta}$$

donc $z^{\alpha\beta}(y')$ vérifie :

$$\begin{cases} (\sigma_{sy})_{ij,j}^{\alpha\beta} = 0 \\ a_{ijkh} e_{kh}(z^{\alpha\beta}) = (\sigma_{sy})_{ij}^{\alpha\beta} \\ \langle (\sigma_{sy})_{ij}^{\alpha\beta} \rangle = \Sigma_{ij}^{\alpha\beta} \\ + C-M-m \end{cases}$$

$z^{\alpha\beta}$ et $v^{\alpha\beta}$ vérifie le même problème d'élasticité ; elles sont donc égales à une constante additive près que l'on peut prendre nulle, ce qui achève la démonstration.

b. 2ème point

On se propose maintenant de montrer que le matériau équivalent respecte la symétrie matérielle par rapport à P. On reprend la définition du tenseur de souplesse homogénéisé :

$$A_{lmpq}^{eqd} = \frac{1}{|Y|} \int_Y e_{lm}(u^{pq}) dY$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} b_{il} b_{jm} b_{kp} b_{hq} A_{lmpq}^{eqd} &= \frac{1}{|Y|} \int_Y e_{ij}(z^{kh}) dY \\ &= \frac{1}{\det B |Y|} \int_Y e_{ij}(z^{kh}) \det B dY' \end{aligned}$$

et comme la géométrie de Y est invariante pour la transformation B, on obtient :

$$b_{il} b_{jm} b_{kp} b_{hq} A_{lmpq}^{eqd} = A_{ijkh}^{eqd}$$

ce qui achève la démonstration.

c. Pour étudier la symétrie par rapport au plan médiateur $y_1 = 0$, il suffit de prendre :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PROBLEME ELEMENTAIRE	CONDITIONS $\left\{ \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_1 = Y_1 / 2 \end{array} \right.$	CONDITIONS $\left\{ \begin{array}{l} y_2 = \pm Y_2 / 2 \\ y_3 = \pm Y_3 / 2 \end{array} \right.$
v^{11}	$\left. \begin{array}{l} \sigma_{12}^{11} = 0 \\ \sigma_{13}^{11} = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \sigma_t^{11} = 0$ $v_1^{11} = 0 \Leftrightarrow v_n^{11} = 0$	C-M-m
v^{22}	$\left. \begin{array}{l} \sigma_{12}^{22} = 0 \\ \sigma_{13}^{22} = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \sigma_t^{22} = 0$ $v_1^{22} = 0 \Leftrightarrow v_n^{22} = 0$	C-M-m
v^{33}	$\left. \begin{array}{l} \sigma_{12}^{33} = 0 \\ \sigma_{13}^{33} = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \sigma_t^{33} = 0$ $v_1^{33} = 0 \Leftrightarrow v_n^{33} = 0$	C-M-m
v^{23}	$\left. \begin{array}{l} \sigma_{12}^{23} = 0 \\ \sigma_{13}^{23} = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \sigma_t^{23} = 0$ $v_1^{23} = 0 \Leftrightarrow v_n^{23} = 0$	C-M-m
v^{31}	$\left. \begin{array}{l} v_2^{31} = 0 \\ v_3^{31} = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow v_t^{31} = 0$ $\sigma_{11}^{31} = 0 \Leftrightarrow \sigma_n^{31} = 0$	C-M-m
v^{12}	$\left. \begin{array}{l} v_2^{12} = 0 \\ v_3^{12} = 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow v_t^{12} = 0$ $\sigma_{11}^{12} = 0 \Leftrightarrow \sigma_n^{12} = 0$	C-M-m

tableau II.1: Remplacement des C-M-m par des conditions de blocage résultant de la symétrie par rapport au plan $y_1=0$

Pour le reste, il est facile d'établir les résultats suivants :

- le matériau équivalent est tel que les coefficients non nuls contiennent un nombre pair de fois l'indice 1, et le champ microscopique de déformation est pair en y_1 .

Les coefficients de souplesse homogénéisés résultent de calcul de moyenne sur la cellule réduite Y_{re} issue de ces considérations de symétrie.

$$A_{ijkh}^{eqd} = \langle e_{ij} (u^{kh}) \rangle_{Y_{re}}$$

$$Y_{re} = Y \cap \{y = (y_1, y_2, y_3) \quad , \quad y_1 \geq 0\}$$

Ce résultat est particulièrement intéressant pour la méthode de l'homogénéisation, car il permet de remplacer les conditions de périodicité par des conditions aux limites classiques de blocage des noeuds comme il est indiqué dans le tableau II.1. De plus, si le plan de symétrie matériel n'est pas $y_1 = 0$, on peut adapter les résultats grâce à une permutation circulaire des indices.

2.5.2 Comparaison des différentes méthodes

2.5.2.1 Les approches primales

On se propose d'établir que :

$$a_{pqrs}^{eqp} E_{pq} E_{rs} \geq a_{pqrs}^{hom} E_{pq} E_{rs}$$

D'après le § 2.3.3, on peut dire que $(C_E^{eqp})^{kh}$ vérifie le système d'équations :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_y (\sigma^{kh}) = 0 & \text{dans } Y \\ \sigma^{kh} = a(y) : (C_E^{eqp} (u^{kh})) & \text{dans } Y \\ + \text{C-M-m} \end{cases}$$

En utilisant la propriété d'ellipticité du tenseur de rigidité de chaque matériau

$$\langle a_{ijkh} (e_{ij}^{hom} - e_{ij}^{eqp}) (e_{kk}^{hom} - e_{kk}^{eqp}) \rangle \geq 0$$

e^{hom} et e^{eqp} représentent la répartition microscopique dans le V-E-R des tenseurs de déformation issue respectivement de la méthode de l'homogénéisation et de celle plus générale introduisant la notion de milieu équivalent.

On a alors :

$$e_{ij}^{hom} = (C_E^{hom})_{ij}^{pq} E_{pq}$$

$$e_{ij}^{eqp} = (C_E^{eqp})_{ij}^{pq} E_{pq}$$

soit alors :

$$\begin{aligned} & \langle a_{ijkh} ((C_E^{hom})_{ij}^{pq} - (C_E^{eqp})_{ij}^{pq}) ((C_E^{hom})_{kh}^{rs} - (C_E^{eqp})_{kh}^{rs}) \rangle E_{pq} E_{rs} \geq 0 \\ (2.8) \quad & \langle a_{ijkh} ((C_E^{eqp})_{ij}^{pq} (C_E^{eqp})_{kh}^{rs}) \rangle E_{pq} E_{rs} + \langle a_{ijkh} (C_E^{hom})_{ij}^{pq} (C_E^{hom})_{kh}^{rs} \rangle E_{pq} E_{rs} \\ & - 2 \langle a_{ijkh} (C_E^{hom})_{ij}^{pq} (C_E^{eqp})_{kh}^{rs} \rangle E_{pq} E_{rs} \geq 0 \end{aligned}$$

comme le tenseur de rigidité du matériau équivalent peut se mettre sous la forme :

$$a_{pqrs}^{eqp} = \langle a_{ijkh} (C_E^{eqp})_{ij}^{pq} (C_E^{eqp})_{kh}^{rs} \rangle$$

en effet $a_{ijkh} (C_E^{eqp})_{ij}^{pq} = \sigma_{kh}^{eqp} (u^{pq})$

et comme le principe de macro-homogénéité de Hill (éq. (1.1)) se trouve vérifié, on peut écrire :

$$\begin{aligned} a_{pqrs}^{eqp} &= \langle \sigma_{kh}^{eqp} (u^{pq}) (C_E^{eqp})_{kh}^{rs} \rangle = \langle \sigma_{kh}^{eqp} (u^{pq}) \rangle \langle (C_E^{eqp})_{kh}^{rs} \rangle \\ &= \langle \sigma_{kh}^{eqp} (u^{pq}) \rangle \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.

L'égalité est a fortiori réalisée sur le tenseur de rigidité homogénéisé

$$a_{pqrs}^{hom} = \langle a_{ijkh} (C_E^{hom})_{ij}^{pq} (C_E^{hom})_{kh}^{rs} \rangle$$

de plus :

$$\langle a_{ijkh} (C_E^{hom})_{ij}^{pq} (C_E^{eqp})_{kh}^{rs} \rangle = \langle e_{kh}^{hom} (u^{pq}) (C_E^{eqp})_{kh}^{rs} \rangle$$

et conformément à l'annexe 3 :

$$\begin{aligned} &= \langle e_{kh}^{hom} (u^{pq}) \rangle \langle (C_E^{eqp})_{kh}^{rs} \rangle \\ &= \langle e_{rs}^{hom} (u^{pq}) \rangle = a_{pqrs}^{hom} \end{aligned}$$

Finalement, l'inégalité (2.8) se simplifie :

$$a_{pqrs}^{eqp} E_{pq} E_{rs} \geq a_{pqrs}^{hom} E_{pq} E_{rs}$$

Cela signifie que pour un tenseur de déformation macroscopique donné, l'énergie associée au matériau homogénéisé est toujours plus petite que celle issue des méthodes de Voigt ou de Hill-Mandel. Dans le cas particulier de la méthode de Voigt, on sait que :

$$a_{pqrs}^{eqp} = \langle a_{pqrs} \rangle$$

ce qui implique que :

$$\langle a_{pqrs} \rangle E_{pq} E_{rs} \geq a_{pqrs}^{hom} E_{pq} E_{rs}$$

si on suppose qu'entre les deux matériaux du composite l'inégalité suivante est vérifiée :

$$(a_r)_{pqrs} E_{pq} E_{rs} \geq (a_s)_{pqrs} E_{pq} E_{rs}$$

On a finalement :

$$(a_r)_{pqrs} E_{pq} E_{rs} \geq a_{pqrs}^{hom} E_{pq} E_{rs}$$

b. Nous proposons de montrer que :

$$a_{ijrs}^{\text{hom}} = a_{ijrs}^{\text{efp}}$$

On applique à la cellule de base un tenseur de déformation macroscopique unitaire E_{ij} .

Le problème d'élasticité de l'approche primale de la méthode de Hill - Mandel s'explique.

$$(2.9) \quad \begin{cases} \text{div}_y (\sigma^{\text{efp}})^{ij} = 0 & \text{dans } Y \\ (\sigma^{\text{efp}})^{ij} = a(y) : e^{\text{efp}}(u^{ij}) & \text{dans } Y \\ u_k^{ij} = E_{kh}^{ij} y_h & \text{sur } \partial Y \end{cases}$$

On constate que le champ de déplacement est de la forme :

$$u_k^{ij} = E_{kh}^{ij} y_h + v_k \quad \text{avec } v_k = 0 \text{ sur } \partial Y$$

par conséquent v_k est Y périodique, et ainsi u^{ij} est un champ de déplacement à déformation périodique, ce qui entraîne que :

- $e^{\text{efp}}(u^{ij})$ est Y périodique
- $(\sigma^{\text{efp}})^{ij} \cdot n$ est Y antipériodique

Le problème d'élasticité local de la méthode de l'homogénéisation est :

$$(2.10) \quad \begin{cases} \text{div}_y (\sigma^{\text{hom}})^{rs} = 0 \\ (\sigma^{\text{hom}})^{rs} = a(y) : e^{\text{hom}}(u^{rs}) \\ u^{rs} = E^{rs} \cdot y + v^{rs} \\ v^{rs} \text{ } Y \text{ périodique} \end{cases}$$

On se propose de calculer le travail d'un champ de contrainte vérifiant (2.9) dans un champ de déformation satisfaisant (2.10), ce qui donne :

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \int_Y (\sigma^{\text{efp}})^{ij} : e^{\text{hom}}(u^{rs}) \, dY &= \int_Y a_{khlm} e_{lm}^{\text{efp}}(u^{ij}) e_{kh}^{\text{hom}}(u^{rs}) \, dY \\ &= \int_Y a_{khlm} e_{kh}^{\text{hom}}(u^{rs}) e_{lm}^{\text{efp}}(u^{ij}) \, dY \\ &= \int_Y (\sigma^{\text{hom}})^{rs} : e^{\text{efp}}(u^{ij}) \, dY \end{aligned}$$

les hypothèses de l'annexe 3 sur les champs de contrainte et de déformation étant vérifiées, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \langle (\sigma^{\text{efp}})^{ij} : e^{\text{hom}}(u^{rs}) \rangle &= \langle (\sigma^{\text{efp}})^{ij} \rangle : \langle e^{\text{hom}}(u^{rs}) \rangle \\ \langle (\sigma^{\text{hom}})^{rs} : e^{\text{efp}}(u^{ij}) \rangle &= \langle (\sigma^{\text{hom}})^{rs} \rangle : \langle e^{\text{efp}}(u^{ij}) \rangle \end{aligned}$$

En tenant compte de l'égalité (2.11), on peut écrire que :

$$\langle (\sigma^{efp})_{ij} \rangle : \langle e^{hom} (u^{rs}) \rangle = \langle (\sigma^{hom})_{rs} \rangle : \langle e^{efp} (u^{ij}) \rangle$$

et comme :

$$\langle e^{hom} (u^{rs}) \rangle = E^{rs}$$

$$\langle e^{efp} (u^{ij}) \rangle = E^{ij}$$

On obtient :

$$\langle (\sigma_{rs}^{efp})^{ij} \rangle = \langle (\sigma_{ij}^{hom})^{rs} \rangle$$

soit :

$$a_{ijrs}^{efp} = a_{ijrs}^{hom}$$

Dans ces deux approches, bien que la répartition microscopique des champs de déformation macroscopique soit différente, globalement au niveau macroscopique, on obtient théoriquement des caractéristiques identiques. Cependant, dans la méthode de Hill-Mandel, les problèmes élémentaires restent tridimensionnels et les calculs ne sont pas aussi simples que ceux de la méthode de l'homogénéisation. D'autre part, les C-M-m de la méthode de l'homogénéisation semblent être plus proches physiquement de la réalité.

2.5.2.2 Les approches duales

a) Pour une démarche similaire à celle du § précédent, on peut établir que :

$$(2.12) \quad A_{pqrs}^{eqd} \Sigma_{pq} \Sigma_{rs} \geq A_{pqrs}^{hom} \Sigma_{pq} \Sigma_{rs}$$

Dans le cas particulier de l'approche de Reuss, on sait que :

$$A_{pqrs}^{eqd} = \langle A_{pqrs} \rangle$$

et alors on peut écrire :

$$\langle A_{pqrs} \rangle \Sigma_{pq} \Sigma_{rs} \geq A_{pqrs}^{hom} \Sigma_{pq} \Sigma_{rs}$$

pour un composite à deux constituants satisfaisant l'inégalité :

$$(A_s)_{pqrs} \Sigma_{pq} \Sigma_{rs} \geq (A_r)_{pqrs} \Sigma_{pq} \Sigma_{rs}$$

il vient :

$$(A_s)_{pqrs} \Sigma_{pq} \Sigma_{rs} \geq A_{pqrs}^{hom} \Sigma_{pq} \Sigma_{rs}$$

b) Dans le cas où le milieu est périodique, on peut appliquer la méthode de Hill-Mandel sur un V-E-R comportant m cellules de base, et on a alors le résultat suivant :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} A_{ijkh}^{eqd}(m) = A_{ijkh}^{hom}$$

On peut établir ce résultat en utilisant la méthode des développements asymptotiques du § 2.4.1, et en prenant les m cellules de base comme domaine macroscopique, le domaine microscopique restant celui d'une cellule de base, le rapport d'échelle est alors :

$$\varepsilon = \frac{1}{m}$$

2.5.3 Introduction de la technique d'homogénéisation dans le code de calcul élastique Pecelas

On présente sur la fig. II.4 l'organigramme général du programme.

Pour adapter la version initiale de Pecelas à la recherche des caractéristiques élastiques équivalentes, nous avons introduit :

- une modification de la matrice de rigidité pour la formulation duale de la méthode de l'homogénéisation,
- des conditions de périodicité par adjonction des matrices du § 2.4.3.2.3,
- des matrices de forces particulières,
- le calcul des valeurs moyennes du tenseur de contrainte et de déformation permettant de déterminer le tenseur élastique du matériau équivalent.

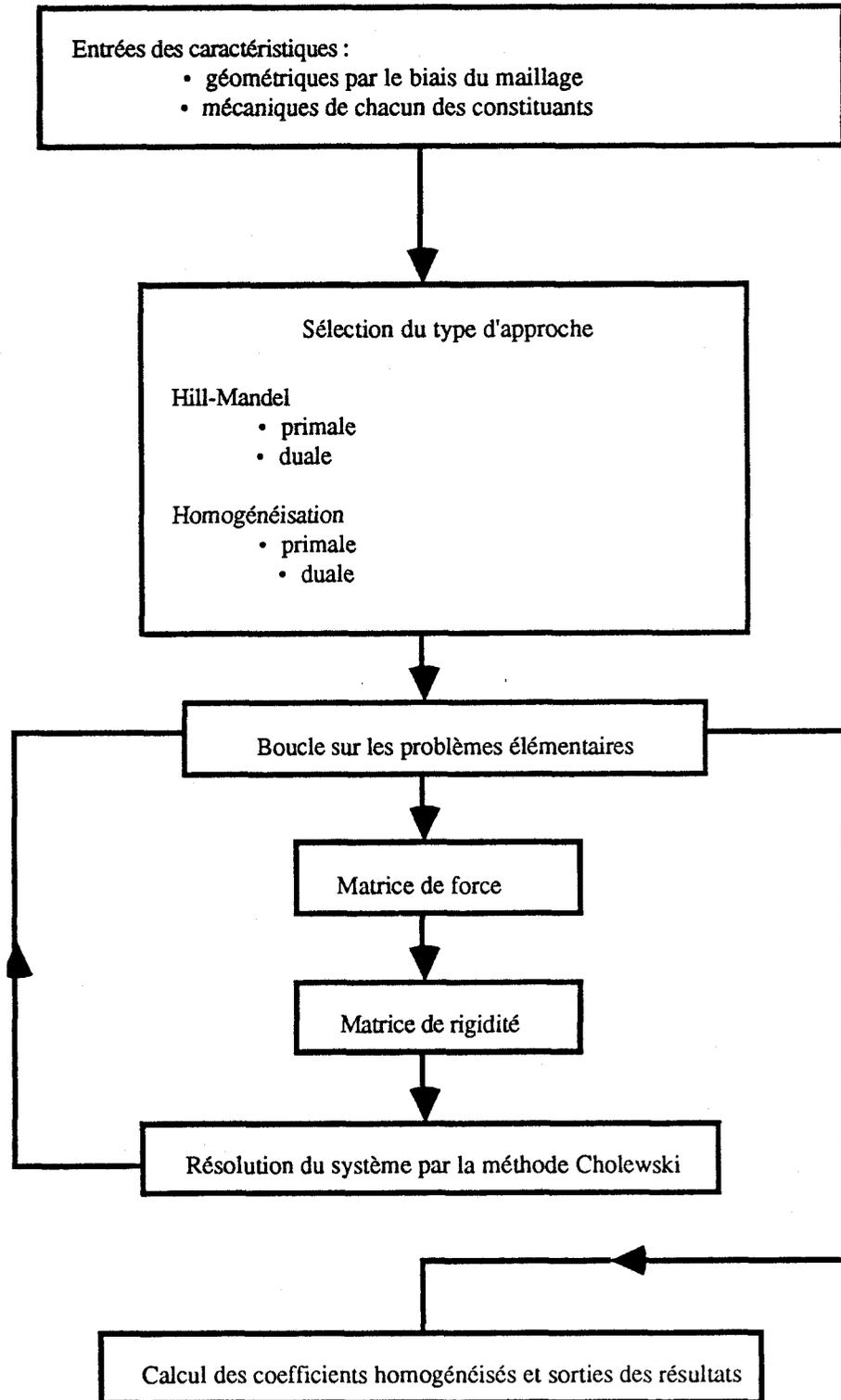


fig. II.4 : Structure du programme permettant la détermination des caractéristiques du milieu équivalent

APPLICATION AU GENIE CIVIL

3.1 LA TERRE ARMEE

3.1.1 Théorie simplifiée de Romstad (1976)

3.1.2 Approche numérique

3.2 MATERIAU MULTICOUCHE

3.2.1 Association d'un multicouche à la terre armée

3.2.1.1 Conservation du module d'Young de l'acier

3.2.1.2 Variation du module d'Young de l'acier

3.2.2 Théorie de l'homogénéisation des stratifiés

3.2.3 Etude numérique de l'approche duale de Hill-Mandel

3.3 GROUPE DE PIEUX

3.3.1 Méthode de l'homogénéisation sur les milieux périodiques avec cavités : application aux groupes de pieux vides

3.3.2 Approche numérique par la méthode de l'homogénéisation

3.4 COMPARAISON NUMERIQUE DE L'APPROCHE PRIMALE DE LA METHODE DE HILL MANDEL ET DE LA METHODE DE L'HOMOGENEISATION

3.1 LA TERRE ARMEE

3.1.1 Théorie simplifiée de Romstad (1976)

En considérant l'approche duale de la méthode de l'homogénéisation, on prend dans la direction y_1 définie sur la fig. III.1 un tenseur macroscopique unitaire :

$$\langle \sigma_{ij}^{11} \rangle = 0 \quad \text{avec } ij = 22, 33, 12, 13, 23$$

Comme le pourcentage en volume w_r des armatures ne dépasse pas 1 %, on peut considérer que le tenseur de déformation et de contrainte locales sont sensiblement uniformes dans chacun des constituants. Ce qui permet d'écrire :

$$\langle \sigma_{11}^{11} \rangle = \frac{1}{(S_r + S_s)} \left[(\sigma_{11}^{11})_s S_s + (\sigma_{11}^{11})_r S_r \right]$$

et négligeant S_r devant S_s :

$$(3.1) \quad \langle \sigma_{11}^{11} \rangle S_s = (\sigma_{11}^{11})_s S_s + (\sigma_{11}^{11})_r S_r$$

et comme σ_{22}^{11} et σ_{33}^{11} doivent vérifier la condition de continuité de la contrainte à l'interface sable-acier :

$$(\sigma_{22}^{11})_s = 0$$

$$(\sigma_{22}^{11})_r = 0$$

$$(\sigma_{33}^{11})_s = 0$$

$$(\sigma_{33}^{11})_r = 0$$

les lois de comportement s'écrivent alors :

$$(3.2) \quad (e_{11}^{11})_s = \frac{(\sigma_{11}^{11})_s}{E_s}$$

$$(3.3) \quad (e_{11}^{11})_r = \frac{(\sigma_{11}^{11})_r}{E_r}$$

et comme l'interface est parfaite :

$$(3.4) \quad (e_{11}^{11})_s = (e_{11}^{11})_r$$

de plus :

$$(3.5) \quad (e_{11}^{11})_s = \langle e_{11}^{11} \rangle$$

en combinant (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), on arrive :

$$(e_{11}^{11})_r = \frac{S_s}{(S_s E_s + S_r E_r)} = \langle e_{11}^{11} \rangle$$

en posant $\alpha = \frac{E_r S_r}{E_s S_s}$, on peut écrire :

$$A_{1111}^{\text{hom}} = \langle e_{11}^{11} \rangle = \frac{1}{E_s (1 + \alpha)}$$

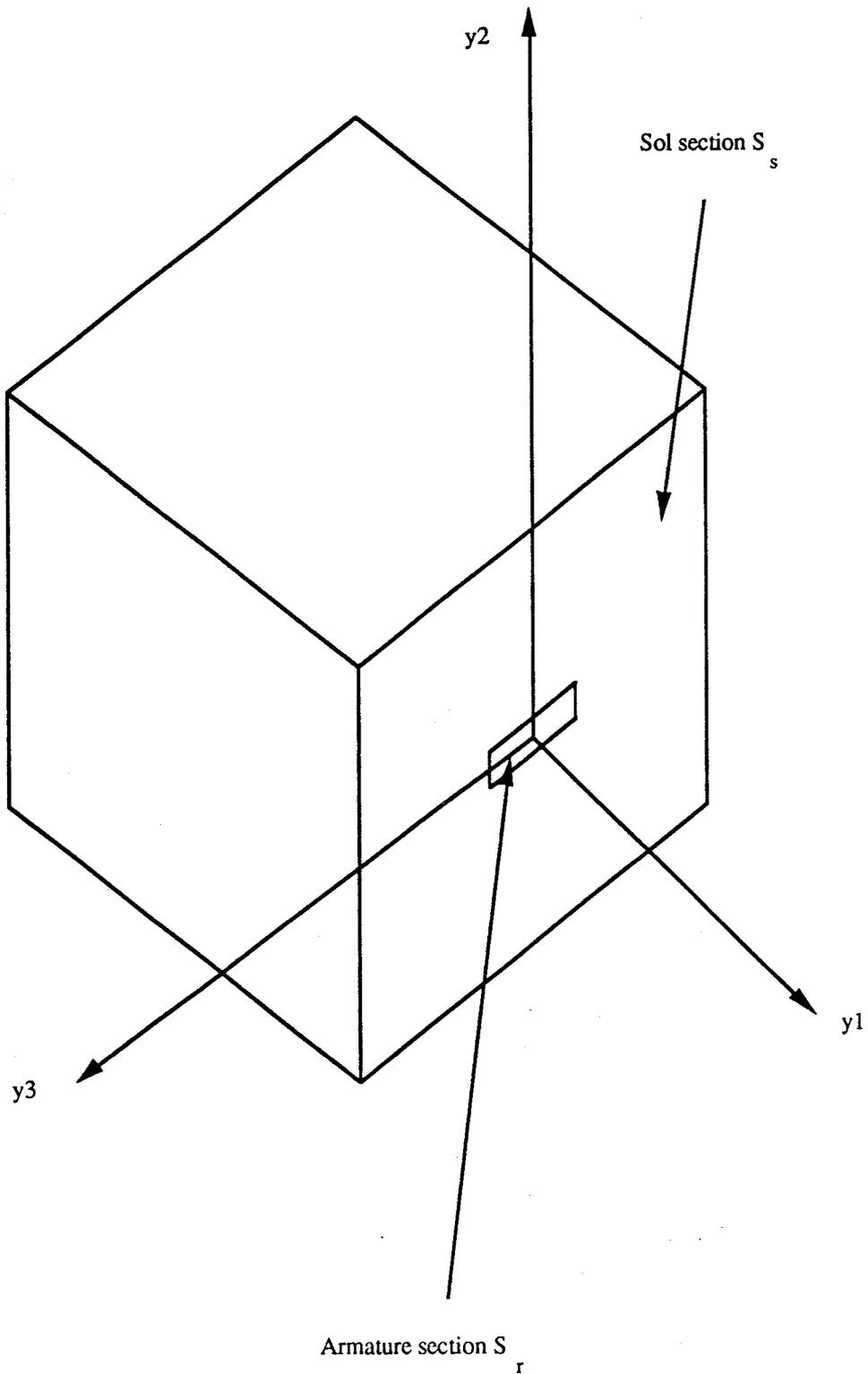


fig. III.1 : Cellule de base dans le cas de la terre armée

$$\left. \begin{aligned} A_{1122}^{\text{hom}} &= \langle e_{22}^{11} \rangle \\ A_{1111}^{\text{hom}} &= (e_{11}^{11})_s \\ (e_{22}^{11})_s &= -v_s (e_{11}^{11})_s \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{1122}^{\text{hom}} = -v_s A_{1111}^{\text{hom}}$$

$$A_{1133}^{\text{hom}} = -v_s A_{1111}^{\text{hom}}$$

En imposant successivement des tenseurs de contraintes unitaires dans les différentes directions de l'espace, on construit la matrice de souplesse du matériau homogénéisé, soit :

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{E_s (1 + \alpha)} \begin{bmatrix} 1 & -v_s & -v_s \\ -v_s & 1 + \alpha (1 - v_s^2) & -v_s [1 + \alpha (1 + v_s)] \\ -v_s & -v_s [1 + \alpha (1 + v_s)] & 1 + \alpha (1 - v_s^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 e_{23} \\ 2 e_{13} \\ 2 e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G_s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

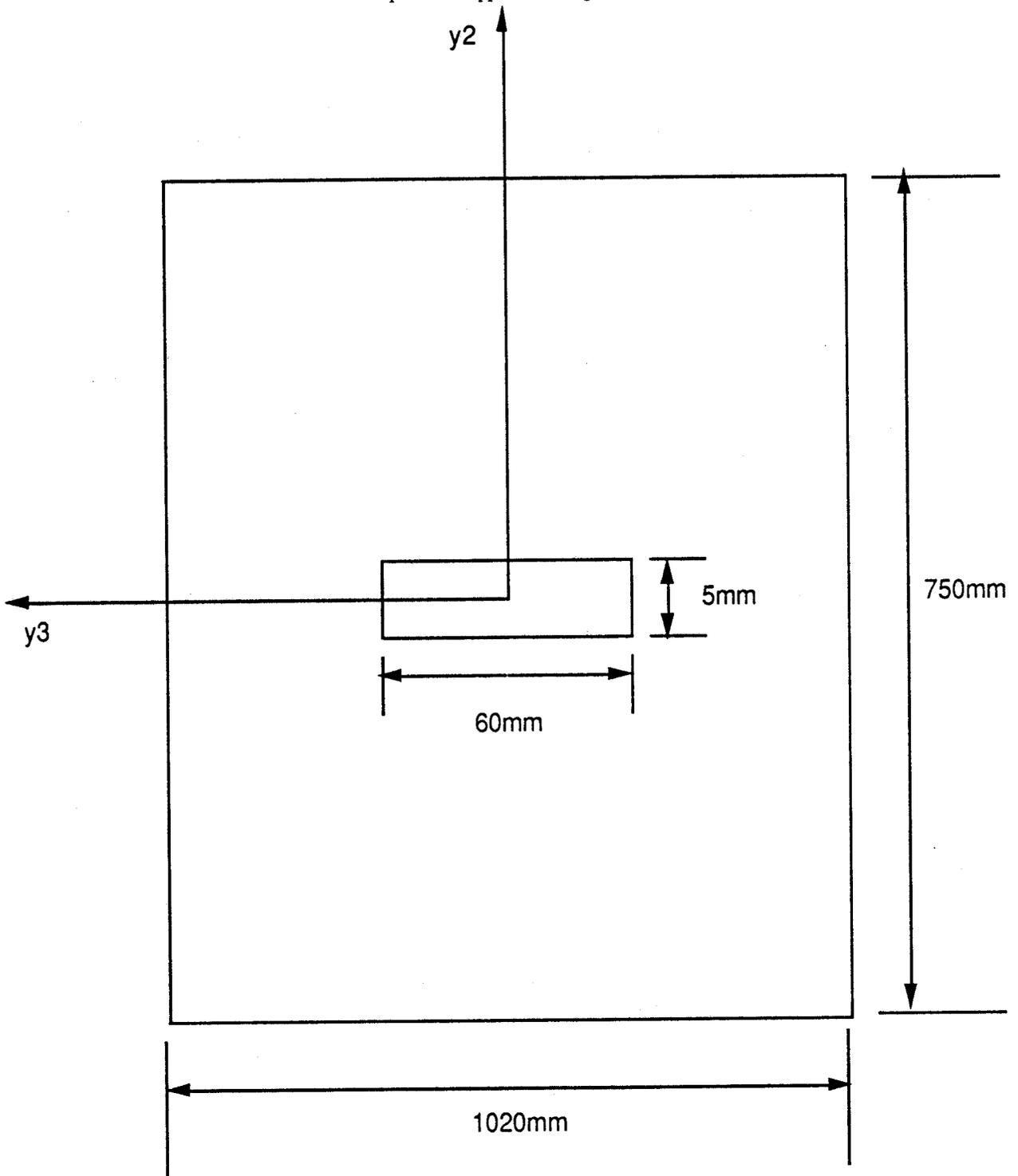
3.1.2 Approche numérique

Tous les calculs aux éléments finis présentés dans ce paragraphe et les suivants ont été effectués avec des éléments isoparamétriques à 8 noeuds qui donnent une bonne précision.

Nous constatons au vu du tableau III.1 que la théorie simplifiée précédente donne de bons résultats. En effet, le calcul numérique a donné une répartition sensiblement uniforme de la contrainte macroscopique dans chaque constituant comme le suppose la théorie de Romstad (1976). A partir de l'exemple de la fig. III.2, nous avons décidé d'étudier l'influence de certains paramètres sur le tenseur de rigidité homogénéisé.

(MPa) ⁻¹	A ₁₁₁₁ ^{hom}	A ₂₂₂₂ ^{hom}	A ₁₁₂₂ ^{hom}	A ₂₂₃₃ ^{hom}	A ₂₃₂₃ ^{hom}	A ₁₃₁₃ ^{hom}	A ₁₂₁₂ ^{hom}
Théorie de l'homogénéisation	43,05x10 ⁻⁴	64,49x10 ⁻⁴	-12,92x10 ⁻⁴	-22,06x10 ⁻⁴	17,33x10 ⁻³	17,25x10 ⁻³	17,33x10 ⁻³
Théorie simplifiée	43,04x10 ⁻⁴	64,54x10 ⁻⁴	-12,91x10 ⁻⁴	-22,13x10 ⁻⁴	17,33x10 ⁻³	17,33x10 ⁻³	17,33x10 ⁻³

tableau III.1 : Comparaison des résultats du calcul du tenseur de souplesse homogénéisé avec ceux de la théorie simplifiée.



$$E_r = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$E_s = 150 \text{ MPa}$$

$$\nu_r = 0.22$$

$$\nu_s = 0.3$$

fig. III.2 : Caractéristiques dimensionnelles d'une cellule de base en terre armée correspondant à une peau en béton

Afin de montrer l'influence du pourcentage en volume d'acier, nous avons fait varier l'espacement vertical des lits d'armatures, nous reportons les résultats des caractéristiques homogénéisées dans les tableaux III.2 et III.3.

E_v (mm)	W_r (%)	a_{1111}^{hom}	a_{2222}^{hom}	a_{3333}^{hom}	a_{1122}^{hom}	a_{1133}^{hom}	a_{2233}^{hom}	$a_{2323}^{hom} = G_{23}$	$a_{1313}^{hom} = G_{13}$	$a_{1212}^{hom} = G_{12}$
600	0,049 %	304,8	202	202,50	86,57	86,68	86,59	57,73	58,02	57,73
750	0,039 %	284,2	202	202,40	86,57	86,63	86,58	57,72	57,96	57,72
900	0,033 %	270,5	202	202,30	86,56	86,63	86,57	57,71	57,91	57,72
Caractéristique du sol		202	202	202	86,53	86,53	86,53	57,69	57,69	57,69

tableau III.2 : Tenseur de rigidité homogénéisé de la terre armée influence de l'espacement des lits d'armatures

E_v (mm)	w_r (%)	E_1^{hom}	E_2^{hom}	E_3^{hom}	γ_{23}^{hom}	γ_{13}^{hom}	γ_{12}^{hom}
600	0,049 %	252,9	155,90	156,20	0,3484	0,2997	0,3001
750	0,039 %	232,3	155,10	155,40	0,342	0,2998	0,3000
900	0,033 %	218,6	154,50	154,70	0,3371	0,2998	0,3000
Caractéristique de sol	/	150	150	150	0,30	0,30	0,30

tableau III.3 : Caractéristiques de rigidité homogénéisées de la terre armée influence de l'espacement des lits d'armatures

Il apparaît que la plupart des coefficients sont très proches de ceux du sol, pour ceux ne vérifiant pas cette assertion, c'est-à-dire a_{1111}^{hom} , E_1^{hom} , γ_{23}^{hom} , nous avons reporté leur variation en fonction du pourcentage volumique d'acier respectivement sur les fig. III.3, III.4, III.5.

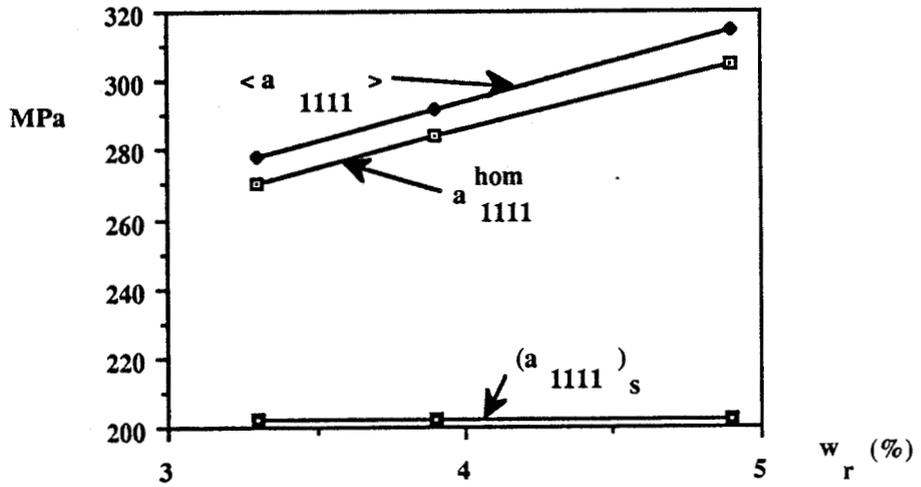


fig III 3: terre armée, influence de la proportion volumique d'acier sur $\langle a_{1111} \rangle$ et a_{1111}^{hom}

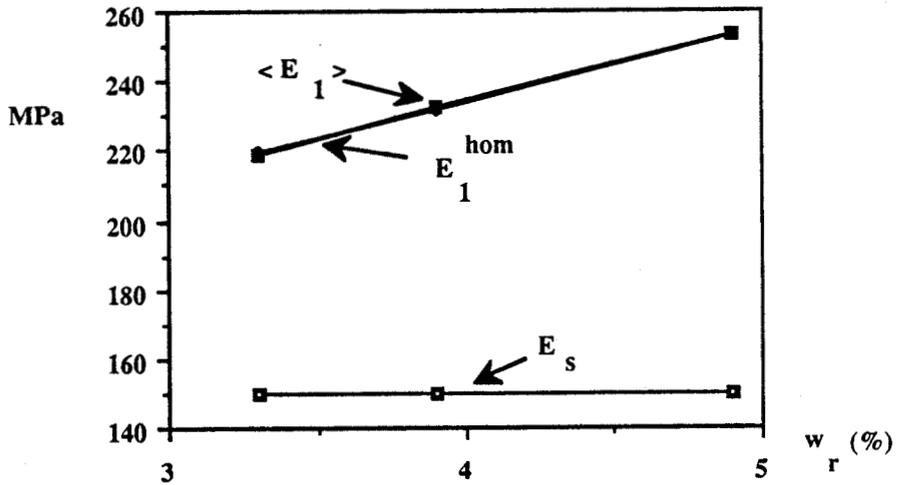


fig III 4: terre armée, influence de la proportion volumique d'acier sur $\langle E_1 \rangle$ et E_1^{hom}

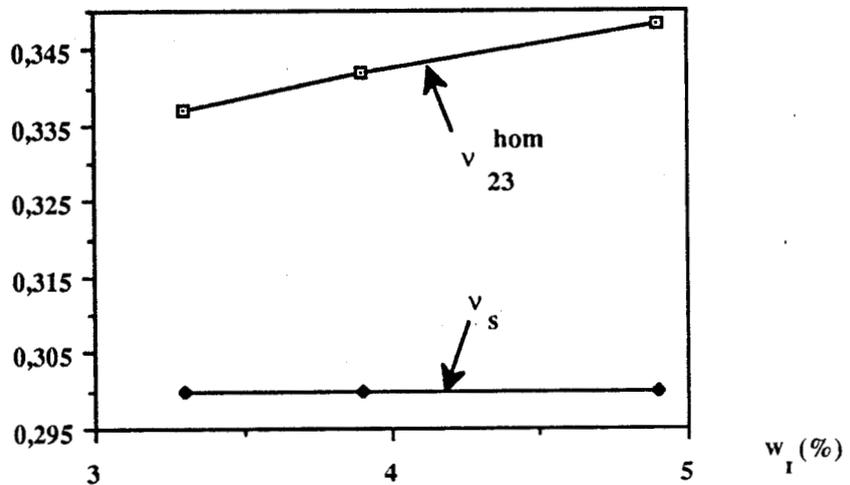


fig III 5: terre armée, influence de la proportion volumique d'acier sur le coefficient de Poisson transversal homogénéisé

Par suite du faible domaine d'élasticité du sol et du fait que sa rigidité dépend de l'état de contrainte auquel il est soumis, il est difficile de connaître les caractéristiques du sol avec précision. C'est pourquoi, nous avons étudié l'influence de la valeur de son module d'Young sur les caractéristiques homogénéisées.

E_s (MPa)	a_{1111}^{hom}	a_{2222}^{hom}	a_{3333}^{hom}	a_{1122}^{hom}	a_{1133}^{hom}	a_{2233}^{hom}	$a_{2323}^{hom}=G_{23}$	$a_{1313}^{hom}=G_{13}$	$a_{1212}^{hom}=G_{12}$
50	149,7	67,34	67,47	28,86	28,88	28,86	19,24	19,32	19,24
100	216,90	134,70	134,90	57,71	57,77	57,72	38,48	38,64	38,48
150	284,20	202	202,30	86,56	86,63	86,57	57,71	57,91	57,72

tableau III.4 : Tenseur de rigidité homogénéisé de la terre armée influence du module d'Young du sol

E_s MPa	E_1^{hom}	E_2^{hom}	E_3^{hom}	γ_{23}^{hom}	γ_{13}^{hom}	γ_{12}^{hom}
50	132,3	53,01	53,11	0,3763	0,2998	0,300
100	182,30	104,30	104,50	0,3543	0,2998	0,300
150	232,20	155,10	155,40	0,342	0,2998	0,300

tableau III.5 : Caractéristique de rigidité homogénéisée de la terre armée influence du module d'Young du sol

Les résultats sont reportés dans les tableaux III.4 et III.5, on peut une nouvelle fois constater que la plupart des coefficients de rigidité sont proches de ceux du sol, sauf a_{1111}^{hom} , E_1^{hom} , ν_{23}^{hom} dont nous avons reporté les variations respectivement sur les fig. III.6, III.7, III.8. Il ressort des fig. III.3 et III.6 que l'on peut assimiler la rigidité longitudinale homogénéisée à sa valeur moyenne avec une erreur ne dépassant pas 3 %. Les fig. III.4 et III.7 montre que :

$$\langle E_1 \rangle = E_1^{hom}$$

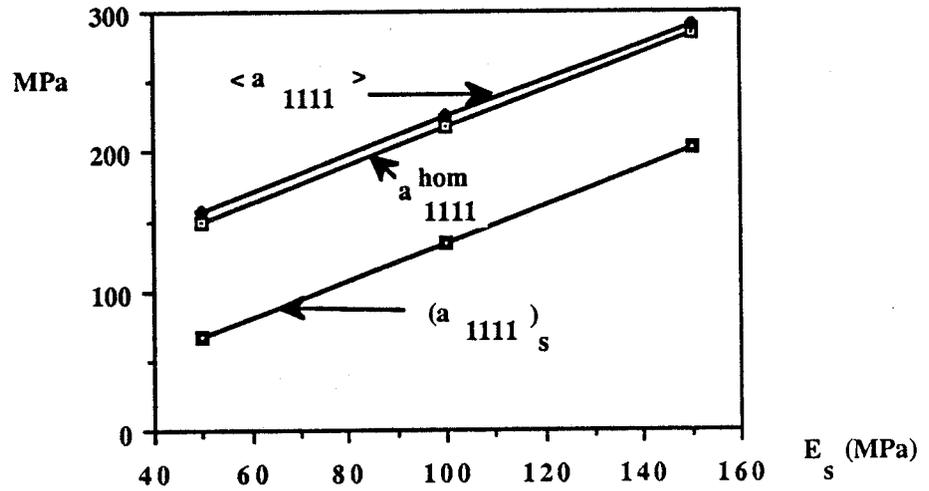


fig III 6: terre armée, influence du module d'Young du sol sur $\langle a_{1111} \rangle$ et a_{1111}^{hom}

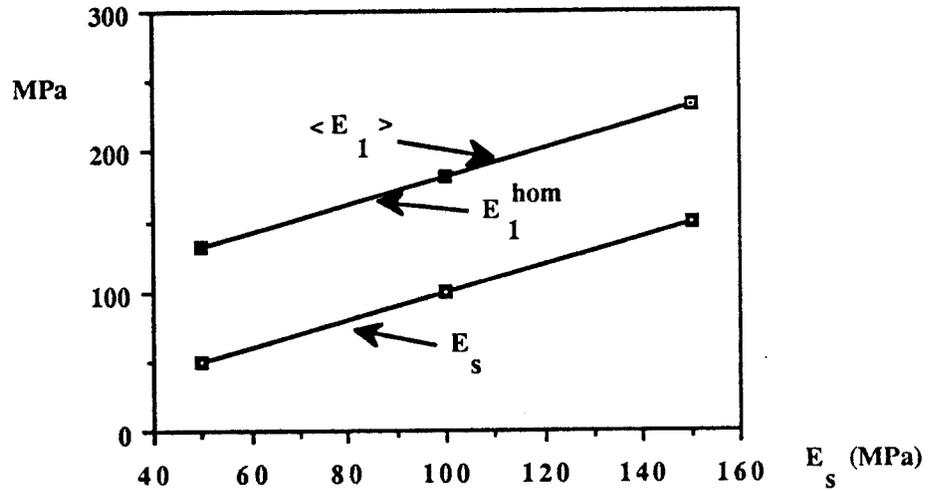


fig III 7: terre armée, influence du module d'Young du sol sur $\langle E_1 \rangle$ et E_1^{hom}

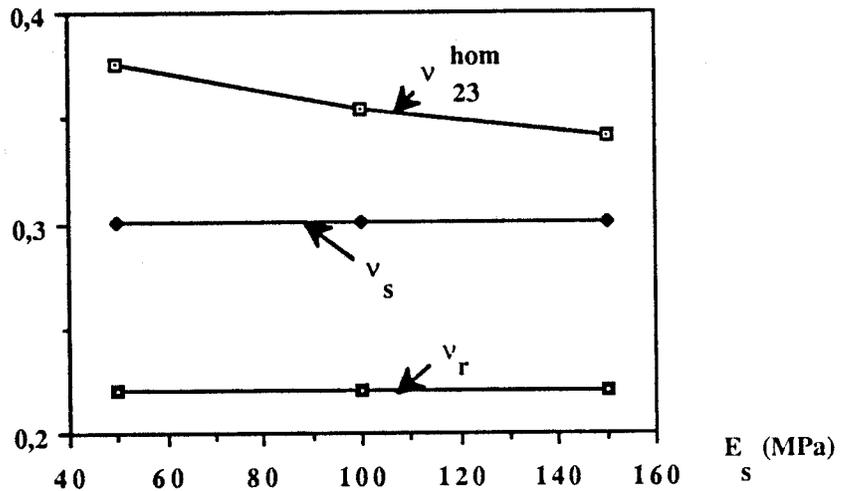


fig III 8: terre armée, influence du module d'Young du sol sur le coefficient de Poisson transversal homogénéisé

A ce propos, Lene (1984) a démontré l'égalité rigoureuse lorsque le coefficient de Poisson est identique dans chaque constituant. Enfin, les fig. III.5 et III.8 montrent pour le coefficient de Poisson transversal homogénéisé :

- une légère augmentation avec le pourcentage d'acier,
- une décroissance avec le module d'Young du sol.

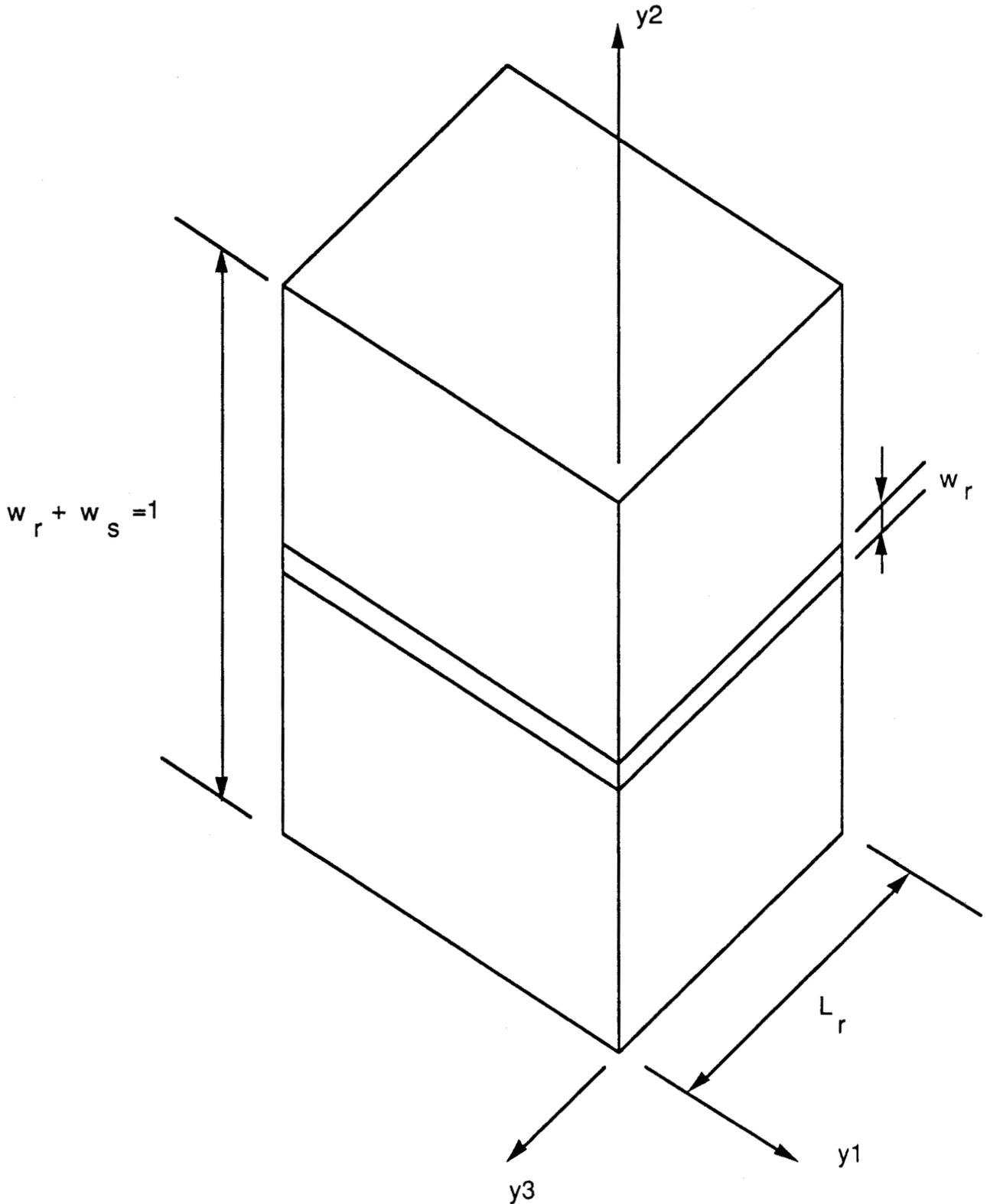


fig. III.9 : Cellule de base pour le matériau multicouche

3.2 MATERIAU MULTICOUCHE

On se propose de définir une méthode permettant d'associer à la terre armée un matériau multicouche dont on donne les caractéristiques et le repère de référence sur la fig. III.9.

Dans les plans (y_1, y_3) et (y_2, y_3) , il n'est pas question de faire une étude comparative car la disposition géométrique acier-sol est complètement différente, ce qui entraîne des disparités de comportement mécanique notables.

3.2.1 Association d'un multicouche à la terre armée

Pour la terre armée, les caractéristiques homogénéisées dans le plan (y_1, y_2) semblent dépendre essentiellement de celles du sol et de la rigidité à la traction-compression de l'acier caractérisée par le produit $E_r S_r$. Cette constatation suggère d'associer à la terre armée un matériau multicouche conservant la rigidité longitudinale des barres d'acier, soit :

$$E'_r w_r E_v L_r = E_r S_r$$

E'_r est le module d'Young de l'acier dans le multicouche associé.

L_r est l'espacement horizontal des armatures.

E'_r et w_r sont indéterminés, ce qui introduit naturellement les deux hypothèses suivantes :

• on prend $E'_r = E_r$ et alors $w_r = \frac{S_r}{L_r E_v}$

• on se donne w_r ce qui fixe $E'_r = \frac{E_r S_r}{w_r L_r E_v}$

3.2.1.1 Conservation du module d'Young de l'acier

On reprend l'exemple de la fig. III.2. L'épaisseur du métal du multicouche est alors :

$$w_r = \frac{5 \times 60}{1020 \times 750} = 0,0392 \%$$

Les résultats reportés dans le tableau III.6 montrent une faible différence entre les caractéristiques de la terre armée et du multicouche associé.

MPa	a ₁₁₁₁ hom	a ₁₁₂₂ hom	a ₂₂₂₂ hom	a ₁₂₁₂ hom
Matériau multicouche	288,4	86,56	202	57,71
Matériau terre armée	284,2	86,57	202	57,72

tableau III.6 : Comparaison des tenseurs de rigidité homogénéisés de la terre armée et du multicouche en conservant le module d'Young longitudinal de l'acier

3.2.1.2 Variation du module d'Young de l'acier

Nous avons réalisé une étude sur trois matériaux multicouches en augmentant à chaque fois son épaisseur, et en diminuant par conséquent son module d'Young longitudinal. On constate que les coefficients de rigidité du matériau homogénéisé sont sensiblement identiques pour la terre armée et les trois multicouches envisagées dans le tableau III.7. Le fait d'augmenter l'épaisseur du multicouche est intéressant du point de vue de la discrétisation du domaine car il permet de réaliser un maillage plus lâche de l'acier, et par conséquent de la structure globale tout en respectant des conditions d'élanement modéré (inférieur à 5) sur les éléments. On diminue ainsi le nombre d'éléments de la discrétisation de la cellule de base, ce qui est appréciable pour les calculs non linéaires que nous envisageons de faire dans la deuxième partie.

MPa	w _r (prop. en volume d'acier)	E' _r	a ^{hom} _{a 1111}	a ^{hom} _{a 1122}	a ^{hom} _{a 2222}	a ^{hom} _{a 1212}
Terre armée	0,0392 %	210 000	284,2	86,57	202	57,72
multicouche 1	0,392 %	21 000	287,8	86,76	202,7	57,92
multicouche 2	0,59 %	14 000	287,6	86,87	203,1	58,03
multicouche 3	0,784 %	10 500	287,2	86,98	203,5	58,14

tableau III.7 : Comparaison des tenseurs de rigidité homogénéisés de la terre armée et du multicouche en faisant varier le module d'Young longitudinal et l'épaisseur de l'acier

3.2.2 Théorie de l'homogénéisation des stratifiés

A partir de la théorie de Salamon (1968), Harrison, Gerrard (1972) ont réalisé une application sur les sols renforcés. Cette théorie est basée sur la considération que les champs de contrainte ou de déformation macroscopiques se répartissent en des champs microscopiques constants dans chaque constituant, et respectant à l'interface la condition de continuité du tenseur de contrainte, et pour des matériaux à adhérence parfaite, la continuité de la déformation tangentielle. Ensuite, par élimination des grandeurs microscopiques, il est possible d'obtenir des relations ne faisant intervenir que les grandeurs macroscopiques, c'est-à-dire la loi de comportement du matériau équivalent. On donne les résultats :

$$v_{13}^{hom} = \frac{\frac{(1 - w_r) E_s v_s}{(1 - v_s^2)} + \frac{w_r E_r v_r}{(1 - v_r^2)}}{\frac{(1 - w_r) E_s}{(1 - v_s^2)} + \frac{w_r E_r}{(1 - v_r^2)}}$$

$$v_{12}^{\text{hom}} = \left(1 - v_{13}^{\text{hom}}\right) \left[\frac{(1 - w_r) v_s}{(1 - v_s)} + \frac{w_r v_r}{(1 - v_r)} \right]$$

$$v_{32}^{\text{hom}} = v_{12}^{\text{hom}}$$

$$E_{11}^{\text{hom}} = \left[1 - (v_{13}^{\text{hom}})^2\right] \left[\frac{(1 - w_r) E_s}{(1 - v_s)^2} + \frac{w_r E_r}{(1 - v_r)^2} \right]$$

$$E_{33}^{\text{hom}} = E_{11}^{\text{hom}}$$

$$\frac{1}{E_{22}^{\text{hom}}} = \frac{(1 - w_r)}{E_s} \left(1 - \frac{2 v_s^2}{(1 - v_s)}\right) + \frac{w_r}{E_r} \left(1 - \frac{2 v_r^2}{(1 - v_r)}\right) + \frac{2 (v_{12}^{\text{hom}})^2}{(1 - v_{13}^{\text{hom}}) E_{11}^{\text{hom}}}$$

$$G_{13}^{\text{hom}} = \frac{E_{11}^{\text{hom}}}{2(1 + v_{13}^{\text{hom}})}$$

$$\frac{1}{G_{12}^{\text{hom}}} = \frac{1}{G_{23}^{\text{hom}}} = \frac{2(1 - w_r)(1 + v_s)}{E_s} + \frac{2 w_r(1 + v_r)}{E_r}$$

$$G_{23}^{\text{hom}} = G_{12}^{\text{hom}}$$

Ces expressions constituent la formulation analytique exacte du tenseur de rigidité issue de la méthode de l'homogénéisation. En effet, les champs de contraintes constants dans chaque constituant vérifient la condition d'antipériodicité. La condition d'équilibre dans chaque constituant est alors immédiate, à l'interface elle est une conséquence directe de la condition de continuité du tenseur de contrainte sur cette facette.

Quant au champ de déformation, il vérifie la condition de périodicité. Le problème est de s'assurer qu'il est possible de trouver un champ de déplacement tel que :

$$e = e(u)$$

Or, les conditions de compatibilité sont assurées dans chaque constituant, car ce sont des relations linéaires entre les dérivées secondes des composantes de ce tenseur. En tenant compte de la condition de continuité de la déformation tangentielle à l'interface, on peut affirmer que ce champ de déformation dérive d'un champ de déplacement.

Par conséquent, ces champs de contrainte et de déformation constant par morceau constituent l'unique solution du problème d'élasticité de la méthode de l'homogénéisation.

3.2.3 Etude numérique de l'approche duale de Hill-Mandel

Nous nous sommes intéressés aux problèmes élémentaires dans le plan (y_1, y_2) et nous avons travaillé sur une cellule de base très longue dans la direction y_3 de manière à satisfaire l'hypothèse de déformation plane.

Le faible pourcentage en volume d'acier et sa disposition géométrique particulière font que le renforcement est sollicité sur une partie minime du contour comme indiqué sur la fig. III.10. On conçoit alors que la cellule de base se

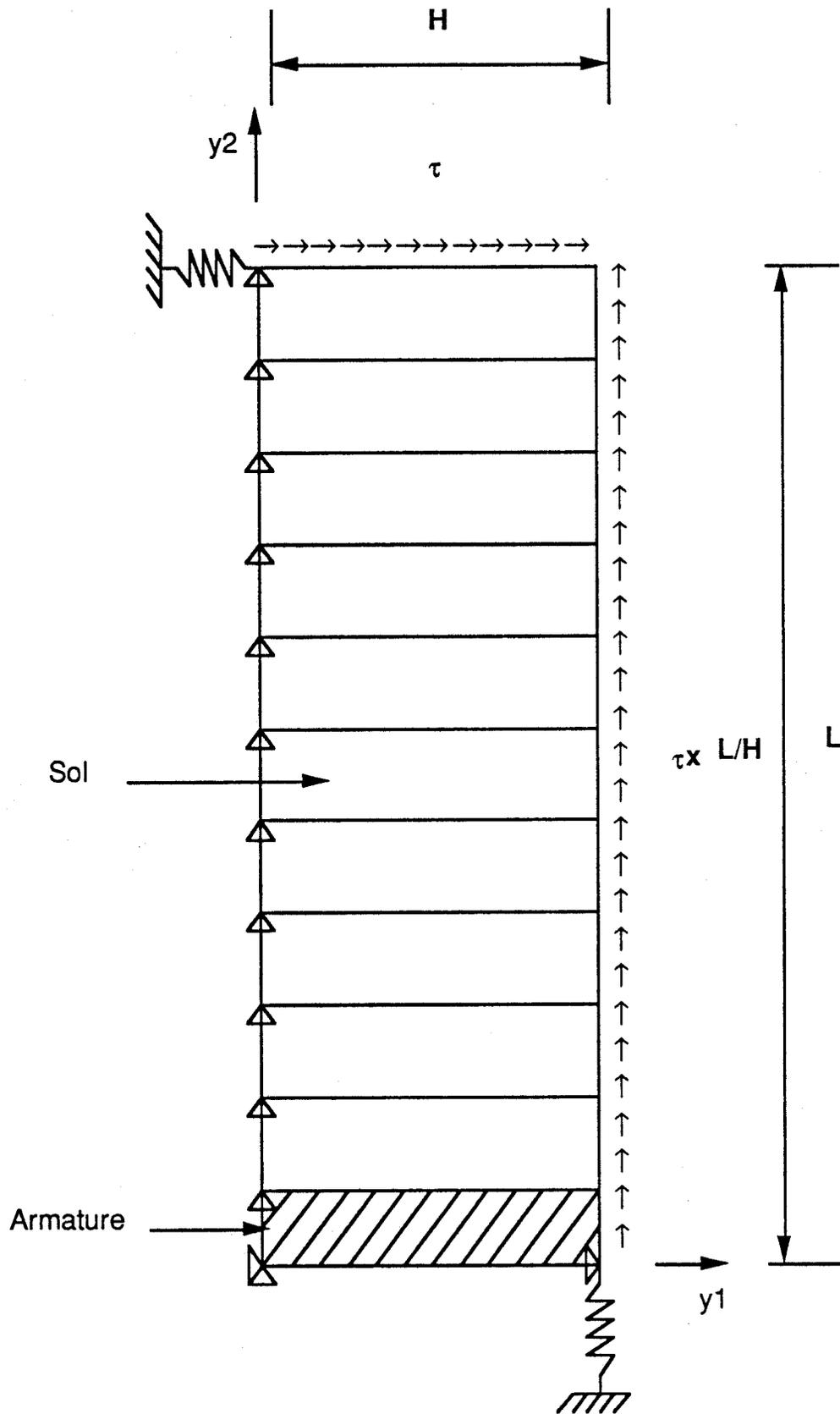


fig. III.10 : Approche duale de type Hill-Mandel, conditions aux limites pour le problème de cisaillement pur

comporte vis-à-vis de cette sollicitation comme un matériau essentiellement constitué de sable. Les calculs conduisent à un tenseur de souplesse équivalent très proche de celui du sable.

Ainsi, l'inégalité (2.12) se trouve vérifiée. Afin de réduire le nombre de noeuds du maillage, nous avons travaillé sur une cellule de base rectangulaire. Pour le problème élémentaire de cisaillement pur, nous avons dû modifier les C-M-m de Hill-Mandel afin de garder l'équilibre global. Nous avons appliqué un cisaillement uniforme différent sur chaque facette comme indiqué sur la fig. III 10 de façon à ce que le torseur des forces extérieures soit nul.

Au niveau numérique, nous avons rencontré des problèmes d'instabilité sur la matrice de rigidité que nous avons résolu en ajoutant deux ressorts de rigidité très faibles, indiqués sur la fig. III 10. Ce type de conditions aux limites vérifie le principe de macro-homogénéité de Hill du chapitre I.

3.3 GROUPE DE PIEUX

Durant les dernières décennies, on a construit des structures de plus en plus imposantes (off-shore, centrale nucléaire, ...). Pour reprendre les charges importantes de telles structures, il est nécessaire d'utiliser un grand nombre de pieux dans un espace réduit, ce qui constitue des groupes de pieux.

Une modélisation rigoureuse consiste à prendre en compte chacun des pieux de manière individuelle. Cette méthode présente l'inconvénient d'être lourde dès que le nombre de pieux devient élevé. Une autre voie consiste à faire une analogie entre l'ensemble pieux-sol et un matériau composite. Dans cette perspective, on est amené à remplacer le groupe de pieux par un matériau homogène équivalent. Cette méthode a l'avantage d'être simple. Postel (1985) a étudié la réponse sismique d'un groupe de pieux en travaillant sur le matériau homogène associé.

En off-shore, il existe des pieux formés d'un tube cylindrique en acier que l'on enfonce dans le sol par battage. Au cours de l'enfoncement, des arrangements granulaires particuliers peuvent se former à l'extrémité du pieu entraînant la formation d'un bouchon de sable tout au long de l'enfoncement, et le pieu reste vide. Comme, nous nous intéressons aux caractéristiques de l'ensemble pieu-sol en partie courante, et non au phénomène local de résistance de pointe, tout ce qui suit est relatif à des pieux très longs, dits flottants, et travaillant essentiellement au frottement latéral. Pour toute l'étude, on se réfère au repère de la fig. III.11.

3.3.1 Méthode de l'homogénéisation sur les structures périodiques avec cavités : application aux groupes de pieux vides

On désigne par Y^* la partie pleine de Y et par \tilde{Y} sa partie vide (fig. III.12). Les champs de déplacement et de contrainte n'étant pas a priori définis sur Y , du point de vue théorique, il est nécessaire de les définir sur la cellule entière par un prolongement, respectant les conditions de continuité de ces champs à la séparation vide-matériau. En conséquence, le champ de contrainte est supposé nul dans la cavité. Lene (1984) et Duvaut (1977) ont démontré :

- la convergence du champ de déplacement lorsque le rapport d'échelle tend vers 0, vers la solution du problème d'élasticité du matériau homogénéisé,
- l'indépendance du champ de déformation et de contrainte macroscopique vis-à-vis du prolongement choisi.

Ces résultats conduisent à une définition généralisée du champ de déformation macroscopique :

$$E_{ij} = \frac{1}{2|Y|} \int_{\partial Y} (u_i n_j + u_j n_i) d(\partial Y)$$

où ∂Y représente le contour extérieur de la cellule de base.

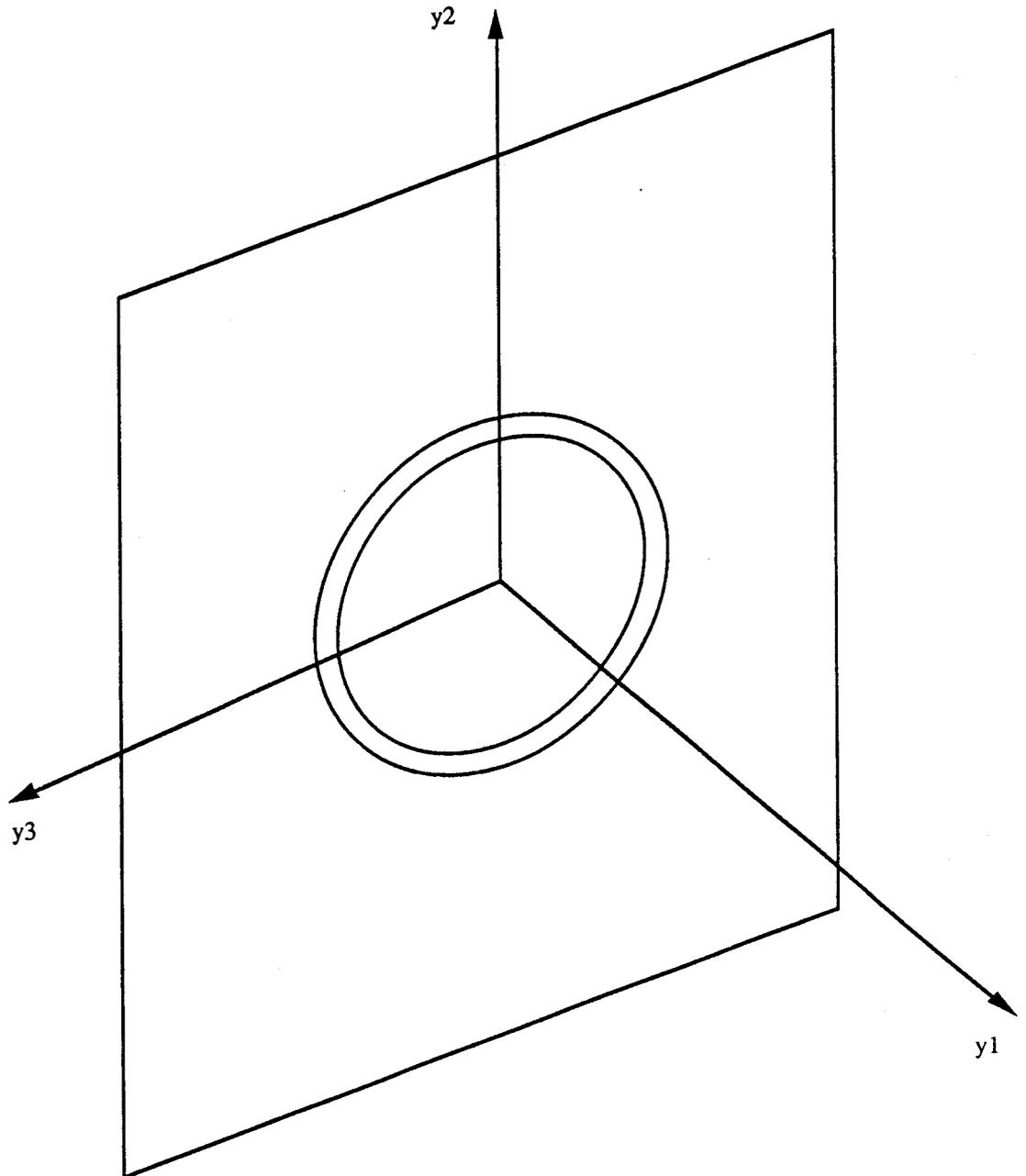
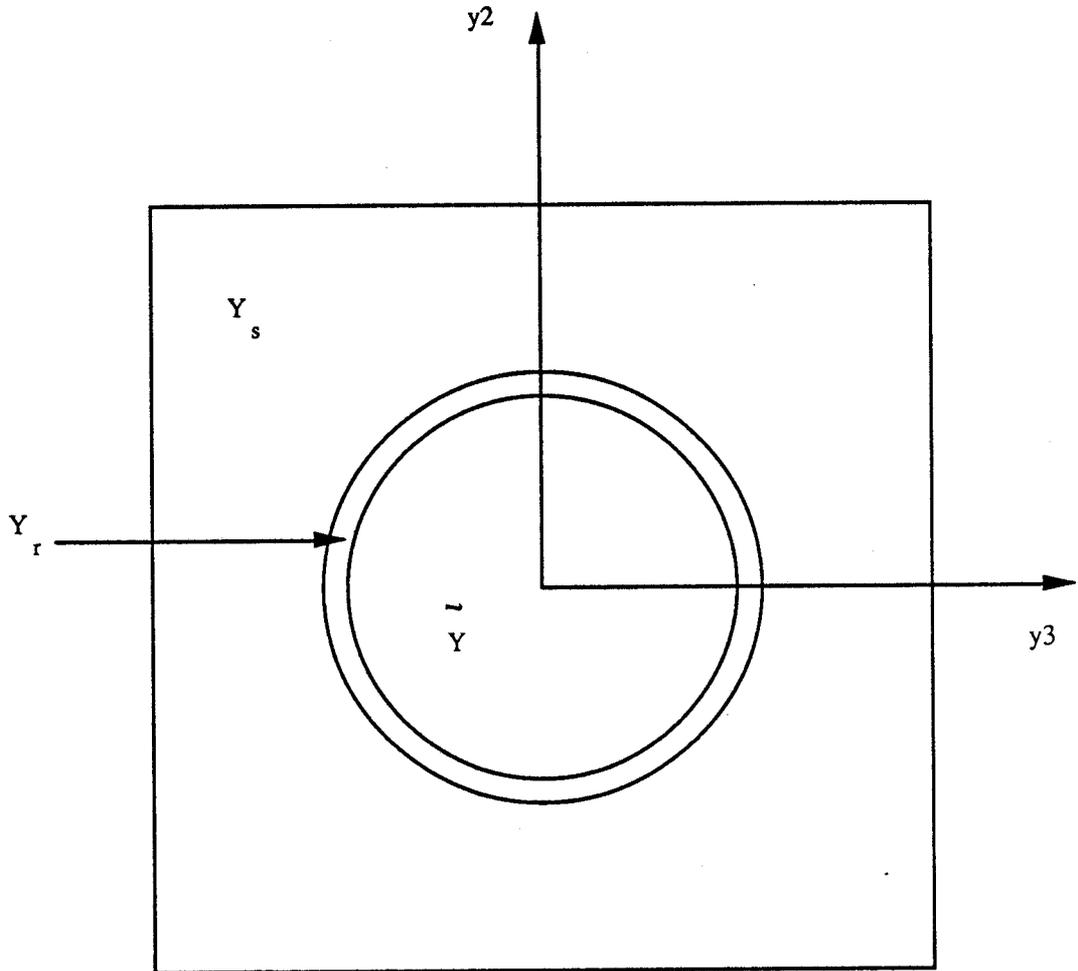


fig. III.11 : Cellule de base pour un groupe de pieux tubés



$$Y^* = Y \cup Y_r$$

fig. III.12 : Cellule de base pour le pieu vide

Ce qui permet de définir les composantes du tenseur de souplesse :

$$A_{ijkh}^{hom} = \frac{1}{2|Y|} \int_{\partial Y} (u_i^{kh} n_j + u_j^{kh} n_i) d(\partial Y)$$

En ce qui concerne l'approche primale comme le champ de contrainte macroscopique est toujours nul dans la cavité, on obtient :

$$a_{ijkh}^{hom} = \frac{1}{2|Y|} \int_{Y^*} \sigma_{ij}^{kh} dY$$

3.3.2 Approche numérique par la méthode de l'homogénéisation

Le diamètre extérieur des pieux est fixé à 0,5 m et l'épaisseur du tube d'acier à 1 cm.

Nous avons réalisé deux études sur les groupes de pieux vides, et remplis de sol en faisant varier :

- l'espacement des pieux (tableaux III.8, III.10),
- du module d'Young du sol (tableaux III.9, III.11).

esp (cm)	w_r	a_{1111}^{hom}	a_{3333}^{hom}	a_{1122}^{hom}	a_{2233}^{hom}	$a_{1212}^{hom}=G_{12}$	$a_{2323}^{hom}=G_{23}$	E_1^{hom}	E_3^{hom}	v_{13}^{hom}	v_{23}^{hom}
100	0,0139	3442	262,30	109,20	129,20	87,46	66,23	3381	197,7	0,2789	0,4858
150	0,00684	1642	226,30	95,57	103,30	69,53	61,41	1586	177,50	0,29	0,4426
200	0,00385	1012	215,20	91,44	95,57	64,12	59,78	957,8	170,10	0,2943	0,4219
250	0,00246	720,10	210,30	89,63	92,22	61,74	59,03	667	166,10	0,2963	0,4071
sable seul		201,93	201,93	86,53	86,53	57,70	57,70	150	150	0,30	0,30

tableau III.8 : Pieu plein influence de l'espacement des pieux

E_s (MPa)	w_r	a_{1111}^{hom} (MPa)	a_{3333}^{hom}	a_{1122}^{hom}	a_{2233}^{hom}	$a_{1212}^{hom}=G_{12}$	$a_{2323}^{hom}=G_{23}$	E_1^{hom}	E_3^{hom}	v_{13}^{hom}	v_{23}^{hom}
50	0,01539	3303	93,43	38,07	44,68	31,21	24,21	3282	71,94	0,2757	0,4758
100	0,01539	3373	178,10	73,76	87,20	59,45	45,24	3332	135	0,278	0,4848
150	0,01539	3442	262,30	109,20	129,20	87,46	66,23	3381	197,7	0,2789	0,4426

tableau III.9 : Pieu plein influence du module d'Young du sol

e (cm)	w_r	a_{1111}^{hom}	a_{3333}^{hom}	a_{1122}^{hom}	a_{2233}^{hom}	$a_{1212}^{hom}=G_{12}$	$a_{2323}^{hom}=G_{23}$	E_1^{hom}	E_3^{hom}	v_{13}^{hom}	v_{23}^{hom}
100	0,01539	3414	248,60	108,90	142,60	87,42	51,42	3354	166,20	0,2783	0,5675
150	0,00684	1629	220	95,45	109,50	69,51	54,99	1574	164	0,2897	0,4845
200	0,00385	1005	211,60	91,48	99,11	64,11	56,15	950,9	162,70	0,2941	0,4467
250	0,00246	715,60	208	89,59	94,50	61,73	56,70	662,60	161,50	0,2962	0,4233
sable seul		201,93	201,93	86,53	86,53	57,70	57,70	150	150	0,30	0,30

tableau III.10 : Pieu vide influence de l'espacement des pieux

E_s (MPa)	w_r	a_{1111}^{hom} (MPa)	a_{3333}^{hom}	a_{1122}^{hom}	a_{2233}^{hom}	$a_{1212}^{hom}=G_{12}$	$a_{2323}^{hom}=G_{23}$	E_1^{hom}	E_3^{hom}	ν_{13}^{hom}	ν_{23}^{hom}
50	0,01539	3294	89,52	38,04	48,55	31,20	20,28	3273	63,10	0,2755	0,5401
100	0,01539	3354	169,40	73,62	95,82	59,43	35,94	3313	114,90	0,2776	0,5615
150	0,01539	3414	248,60	108,90	142,60	87,42	51,42	3354	166,20	0,2783	0,5675

tableau III.11 : Pieu vide influence du module d'Young du sol

Espacement des pieux

Les figures III.13, III.14 font apparaître que les coefficients a_{3333}^{hom} , a_{1122}^{hom} et a_{2323}^{hom} tendent vers les caractéristiques correspondantes du sol seul lorsque l'espacement des pieux augmente.

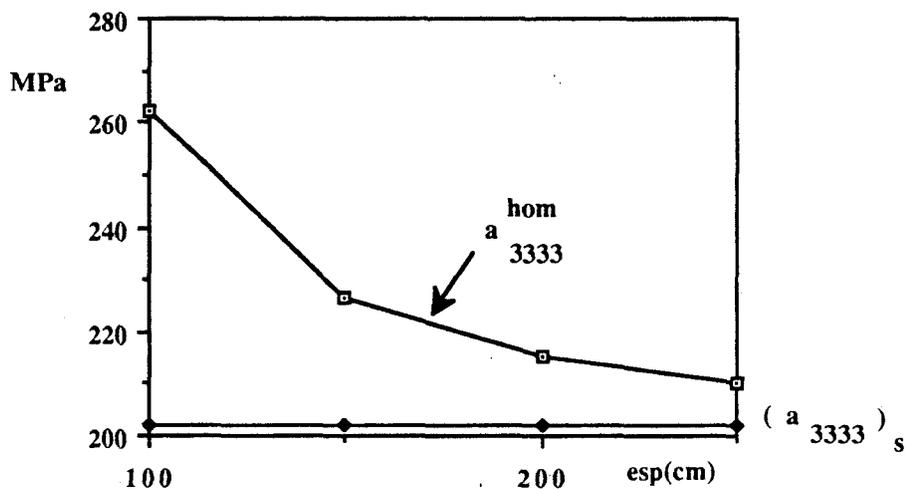


fig III 13: pieux remplis de sol, influence de leurs espacements sur a_{3333}^{hom}

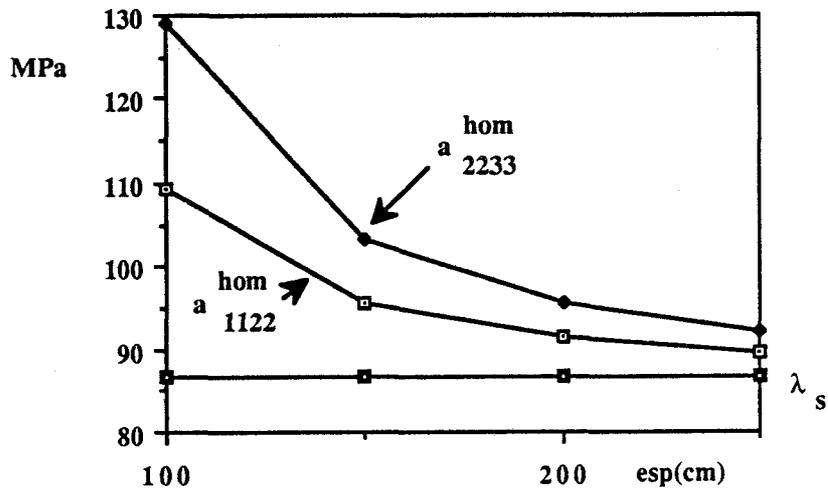


fig III 14: pieux remplis de sol, influence de leurs espacements sur
hom a 1122 et hom a 2233

Les coefficients de rigidité de cisaillement de la fig. III 15 accusent le même phénomène, dont on peut facilement donner une interprétation physique. En supposant la validité d'une approche de type Reuss, on peut énoncer :

$$\frac{1}{G_{ij}^{hom}} = \frac{w_r}{(G_{ij})_r} + \frac{(1 - w_r)}{(G_{ij})_s}$$

avec $ij = 1,2$ ou $2,3$

ou comme $(G_{ij})_r \geq (G_{ij})_s$ et $w_r \approx 0 \Rightarrow G_{ij}^{hom} \approx (G_{ij})_s$

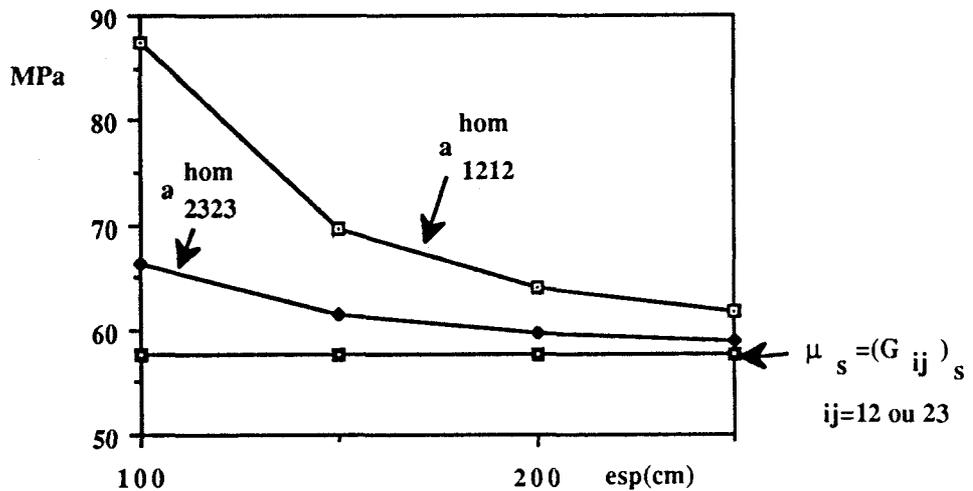


fig III 15: pieux remplis de sol, influence de leurs espacements sur
les caractéristiques de cisaillement homogénéisées

Ainsi, avec l'espacement des pieux, la contrainte macroscopique tend à se répartir au niveau microscopique de façon uniforme dans chaque constituant. Ainsi, l'effet de groupe s'atténue avec l'augmentation de ce paramètre.

La fig. III 16 illustre la variation comparée de a_{1111}^{hom} et de $\langle a_{1111} \rangle$, elle montre que leur différence ne dépasse pas 10 % du coefficient longitudinal homogénéisé.

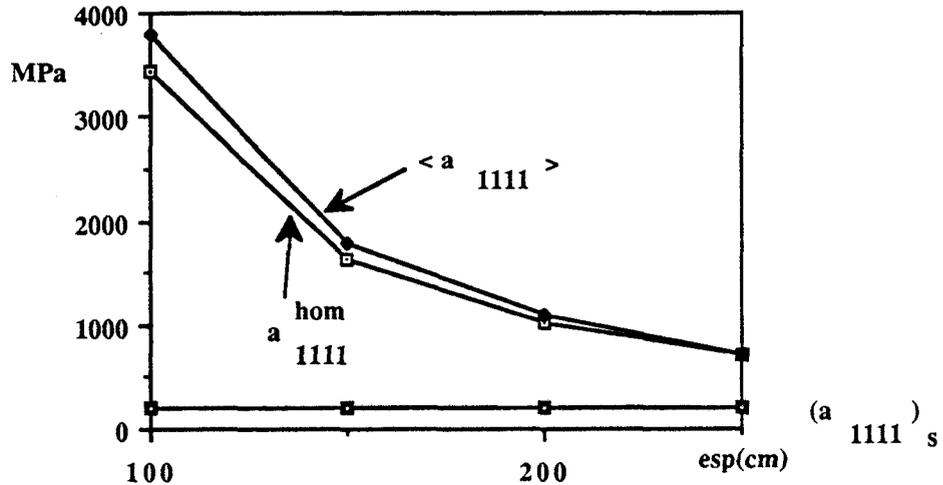


fig III 16: pieux remplis de sol, influence de leurs espacements sur $\langle a_{1111} \rangle$ et a_{1111}^{hom}

La fig. III.17 montre une différence nettement moins importante entre E_1^{hom} et $\langle E_1 \rangle$. La fig. III.18 montre que le coefficient de Poisson longitudinal est peu éloigné de celui du sol et s'en rapproche davantage avec l'espacement des pieux.

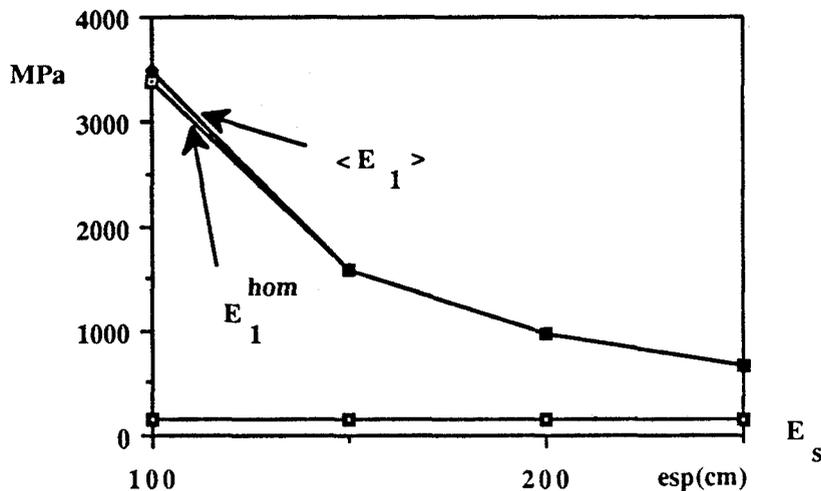


fig III 17: pieux remplis de sol, influence de leurs espacements sur $\langle E_1 \rangle$ et E_1^{hom}

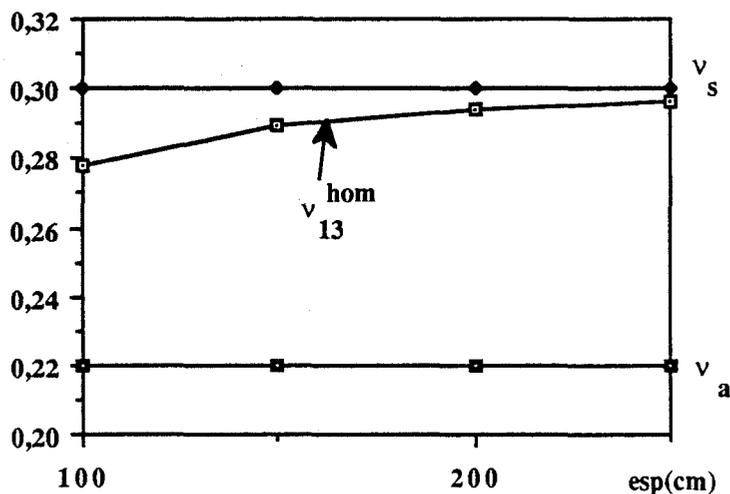


fig III 18: pieux remplis de sol, influence de leurs espacements sur le coefficient de Poisson longitudinal homogénéisé

Entre les cas du pieu vide et du pieu plein, on constate globalement une faible différence sur les caractéristiques homogénéisées, c'est une conséquence de la faible rigidité du sol. Une différence sensible a été observée sur certains coefficients.

La fig. III.22 montre que la rigidité au cisaillement transversal présente la particularité d'augmenter avec l'espacement des pieux vides, alors qu'elle présente une décroissance dans le cas des pieux pleins. Dans les deux cas, il y a rapprochement asymptotique vers la caractéristique du sol. On peut remarquer que pour le pieu plein, le module d'Young transversal (fig. III. 19), la rigidité transversale a_{333}^{hom} , (fig. III.21) ont des valeurs plus importantes que leurs homologues obtenus dans le cas du pieu vide.

Par conséquent, la fig. III.20 montre que le coefficient de Poisson transversal des groupes de pieux vides est

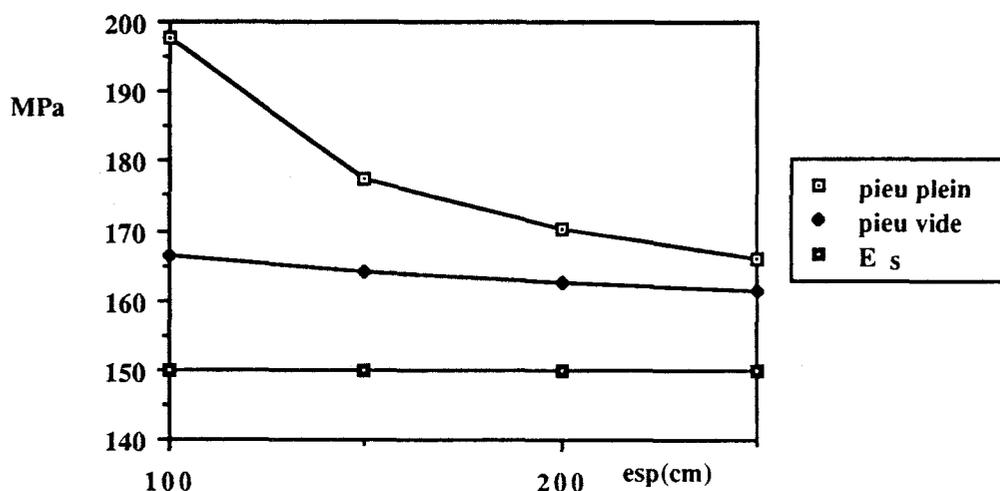


fig III 19: influence de l'espacement des pieux sur le module d' Young transversal homogénéisé

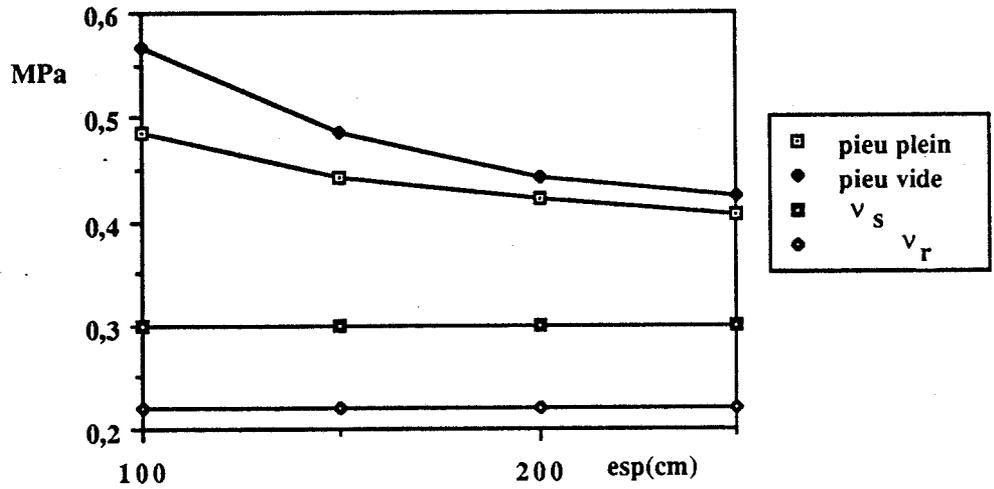


fig III 20: influence de l'espacement des pieux sur le coefficient de Poisson transversal homogénéisé

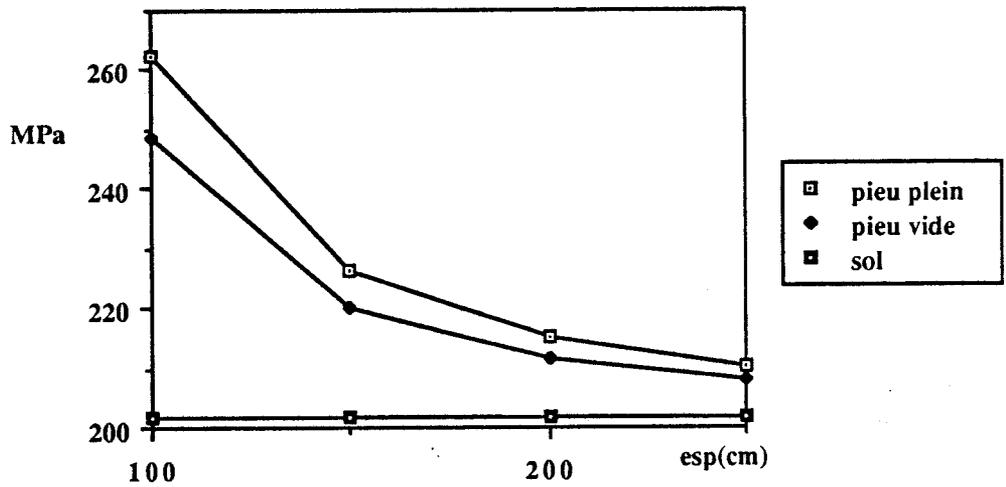


fig III 21: influence de l'espacement des pieux sur μ_{hom} a 3333

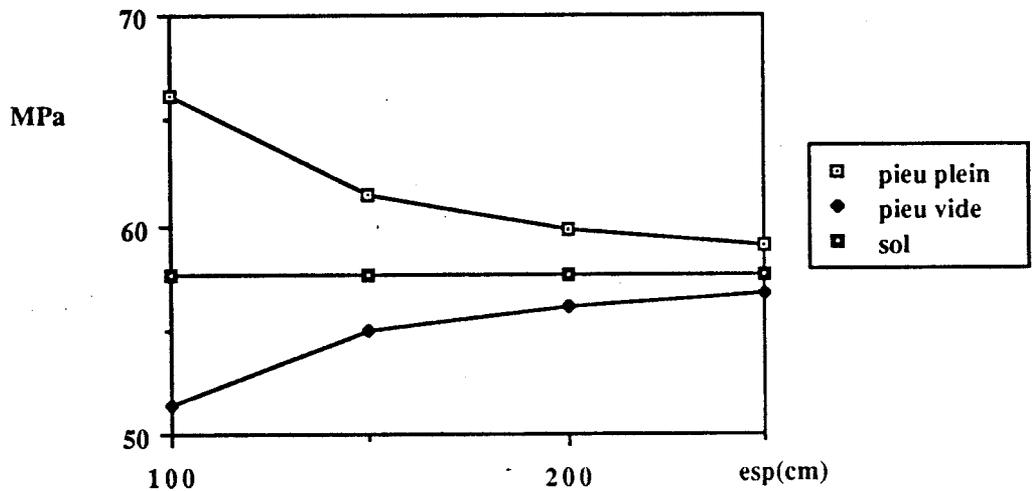


fig III 22: influence de l'espacement des pieux sur μ_{hom} a 2323

plus important que celui de son homologue pour les pieux remplis de sol. La fig. III.23 met en évidence qu'il en est de même pour le coefficient de rigidité a_{2233}^{hom} .

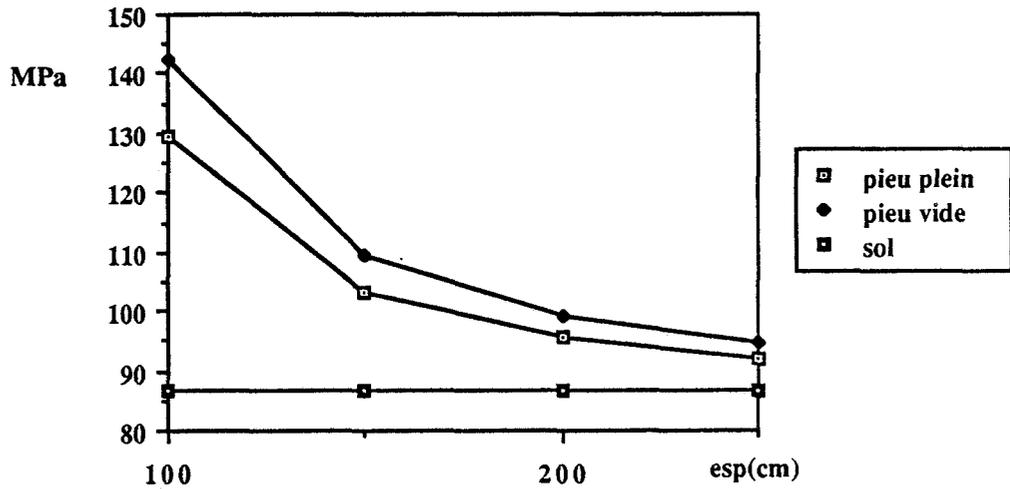


fig III 23: influence de l'espacement des pieux sur

a_{2233}^{hom}

Enfin, toutes les courbes font apparaître le rapprochement de ces coefficients vers ceux du sol.

Module d'Young du sol

Les fig. III.24, 25, 26 montrent un accroissement linéaire des coefficients a_{3333}^{hom} , a_{1122}^{hom} , a_{2233}^{hom} , a_{1212}^{hom} et a_{2323}^{hom} en fonction du module d'Young du sol.

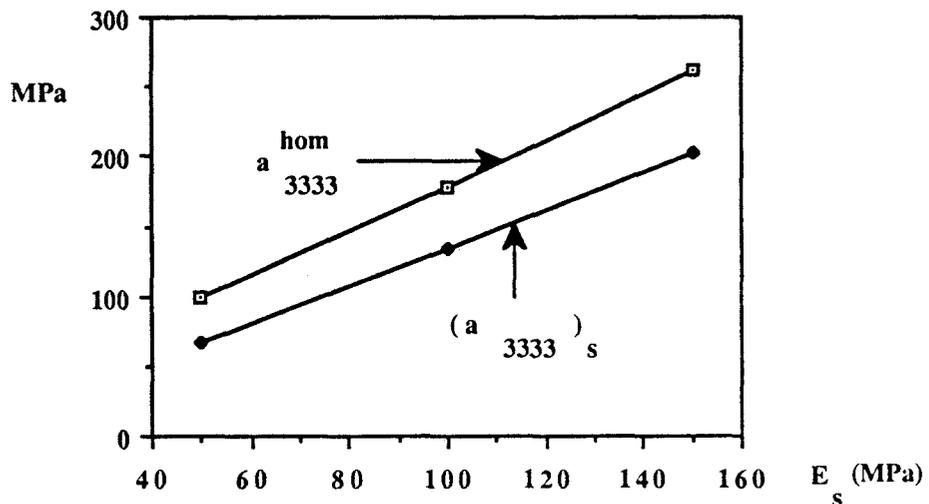


fig III 24: pieux remplis de sol, influence du module d' Young du sol sur

a_{3333}^{hom}

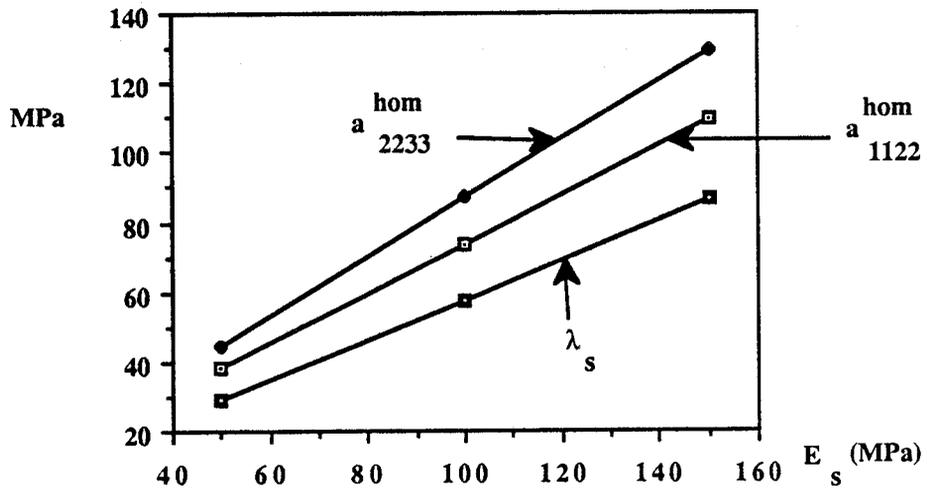


fig III 25: pieux remplis de sol, influence du module d'Young du sol sur $a_{hom 1122}$ et $a_{hom 2233}$

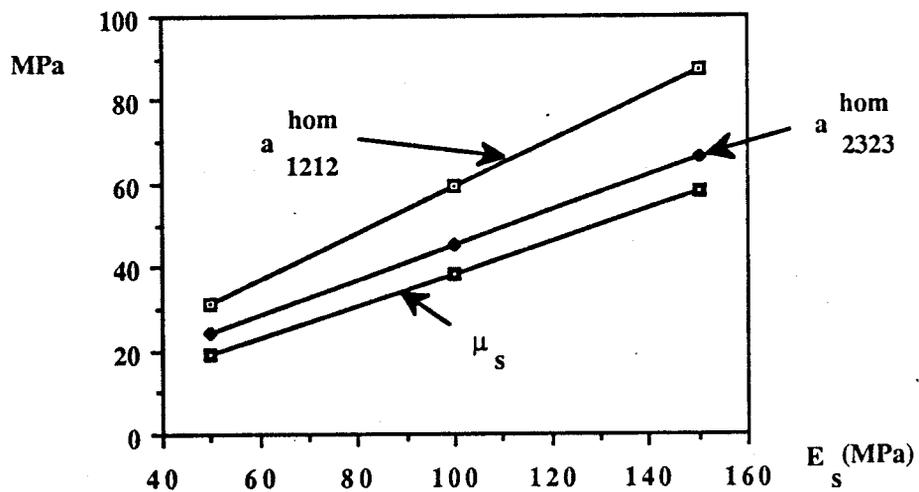


fig III 26: pieux remplis de sol, influence du module d'Young du sol sur les coefficients de cisaillement homogénéisés

La fig. III.27 fait apparaître que le module d'Young du sol n'a pas beaucoup d'influence sur $a_{hom 1111}$ et que cette valeur reste peu éloignée de la rigidité longitudinale moyenne.

Pour le coefficient de Poisson longitudinal homogénéisé, la fig. III.29 suggère la même remarque.

La fig. III.28 confirme l'assimilation du module d'Young longitudinal homogénéisé à sa valeur moyenne.

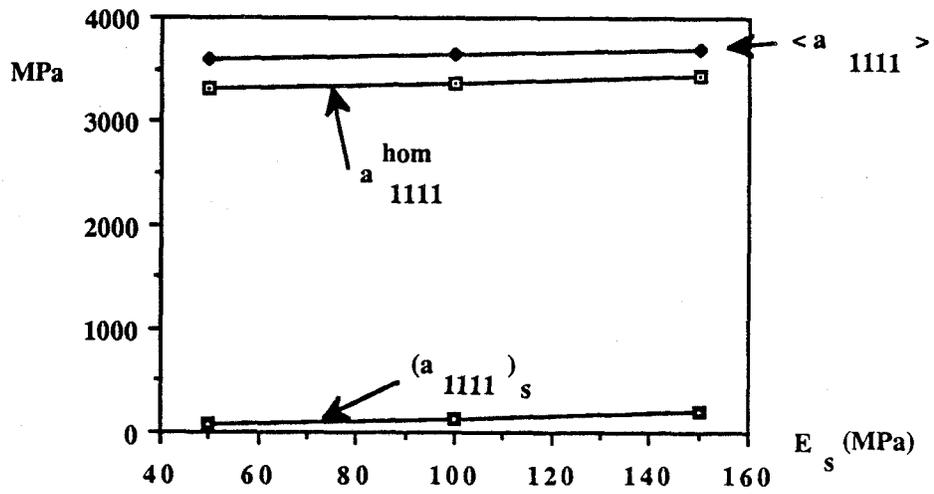


fig III 27: pieux remplis de sol, influence du module d'Young du sol sur $\langle a_{1111} \rangle$ et a_{1111}^{hom}

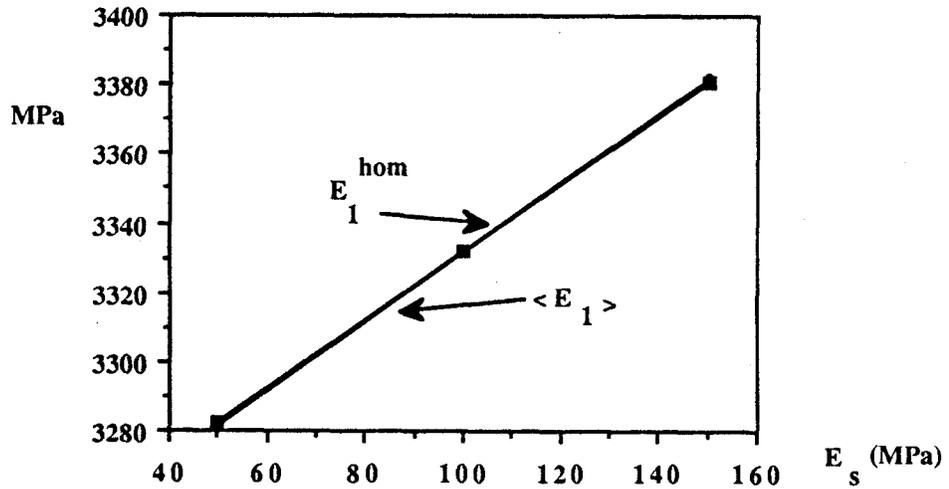


fig III 28: pieux remplis de sol, influence du module d'Young du sol sur $\langle E_1 \rangle$ et E_1^{hom}

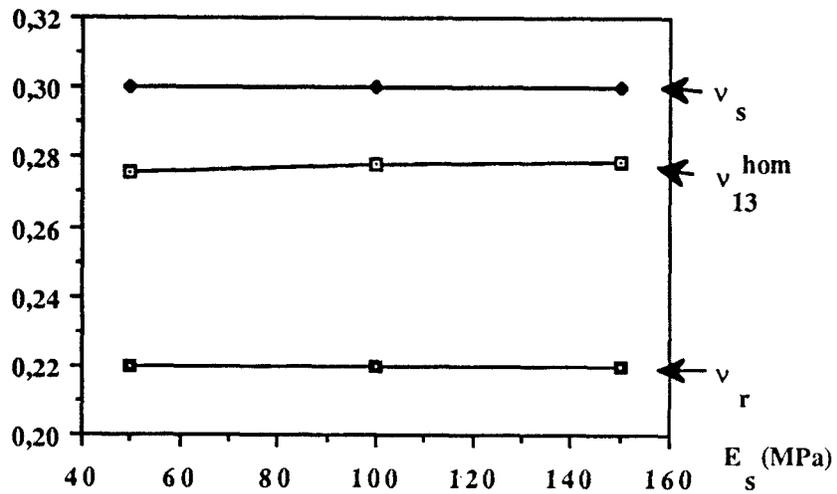


fig III 29: pieux remplis de sol, influence du module d'Young du sol sur le coefficient de Poisson longitudinal homogénéisé

Comme dans l'étude précédente, nous avons constaté que les mêmes coefficients d'élasticité présentent une différence entre les cas du pieu vide et plein.

Les fig. III.30 et III.32 montrent que le module d'Young et le coefficient de rigidité transversaux homogénéisés du pieu vide sont inférieurs à leurs homologues du pieu plein. Par ailleurs, on constate un accroissement linéaire de ces coefficients.

Pour le coefficient de Poisson transversal homogénéisé, la fig. III.31 fait apparaître logiquement des valeurs plus modestes dans le cas du pieu plein. Et pour lequel, il accuse la particularité de présenter un maximum.

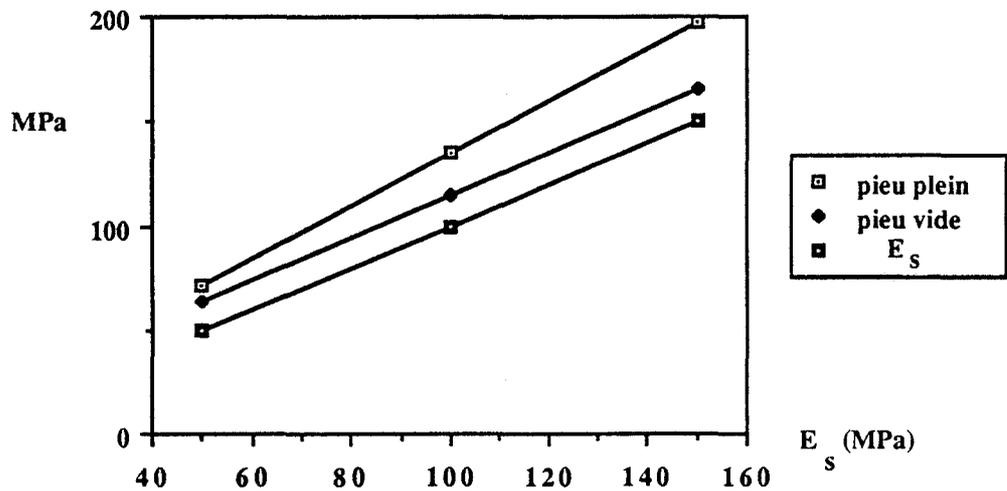


fig III 30: influence du module d'Young du sol sur le module d'Young transversal homogénéisé

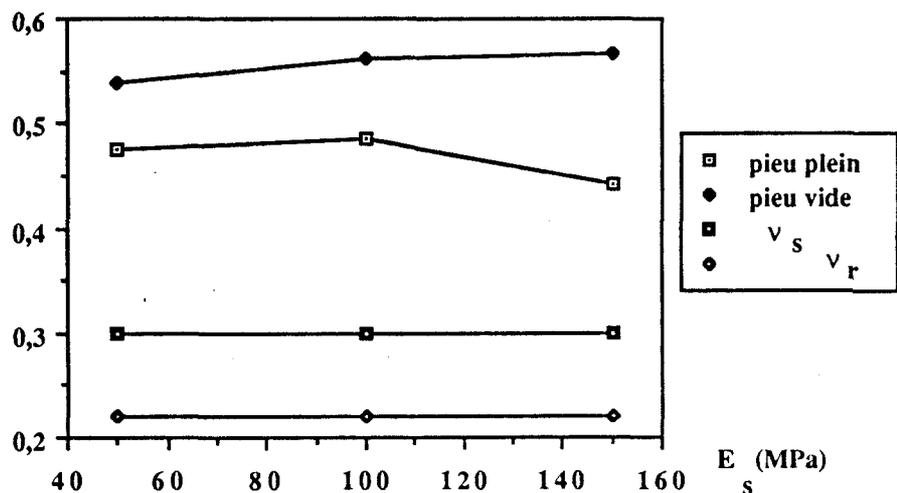


fig III 31: influence du module d'Young du sol sur le coefficient de Poisson transversal homogénéisé

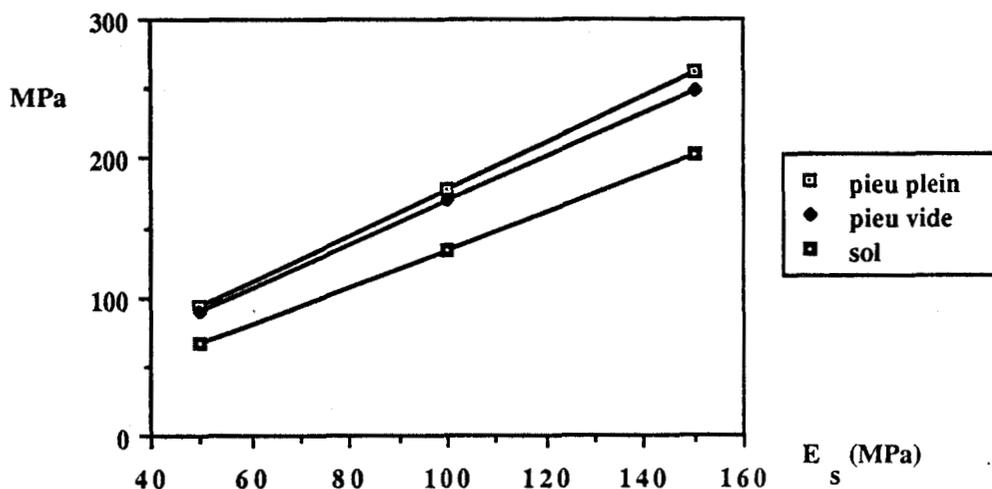


fig III.32: influence du module d'Young du sol sur a_{333}^{hom}

Sur la fig. III.34, on note une position relative identique du coefficient a_{223}^{hom} entre les cas du pieu vide et plein.

Les coefficients a_{232}^{hom} de la fig. III.33 mettent en évidence une variation linéaire avec une particularité : le coefficient du pieu vide devient inférieur à la valeur correspondante du sol lorsque son module d'Young dépasse 70 MPa environ.

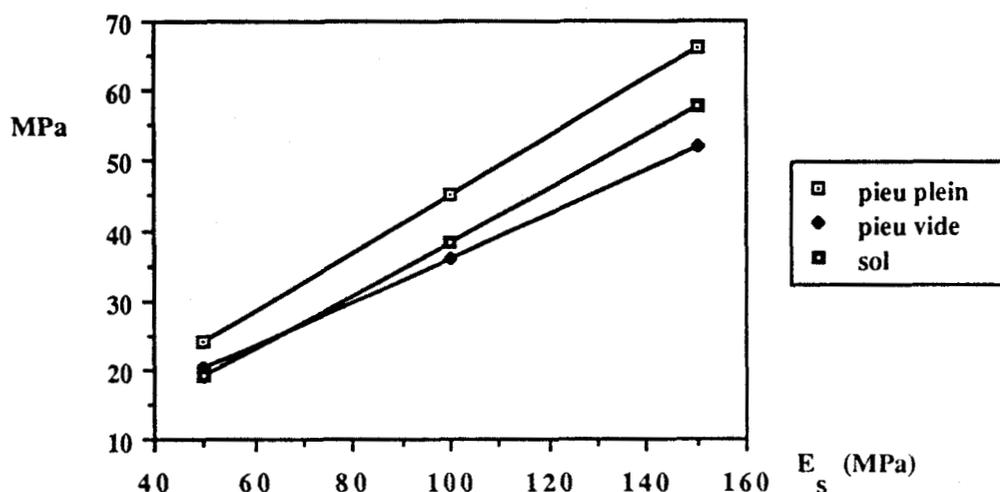


fig III.33: influence du module d'Young du sol sur a_{232}^{hom}

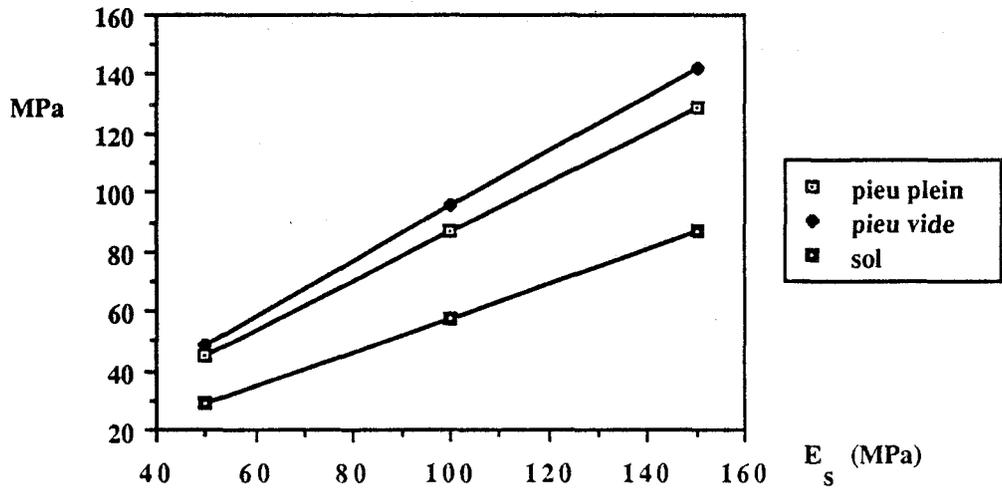


fig III 34: influence du module d 'Young du sol sur
hom
a 2233

3.4 COMPARAISON NUMERIQUE DE L'APPROCHE PRIMALE DE LA METHODE DE HILL-MANDEL ET DE LA METHODE DE L'HOMOGENEISATION

Pour l'approche primale de Hill -Mandel, les problèmes élémentaires restent a priori tridimensionnels. Cependant, pour des matériaux à renforcement unidimensionnel, on peut choisir une cellule de base ayant une longueur dans la direction y_1 des fibres très importantes vis-à-vis de ses dimensions transversales dans le plan (y_2, y_3) . Ce qui justifie l'hypothèse de déformation plane prise pour la résolution des problèmes élémentaires dans le plan transversal.

Pour déterminer les champs de déplacement v , nous avons repris les développements de la méthode de l'homogénéisation, en remplaçant les conditions de périodicité par des blocages sur la périphérie de la cellule de base permettant de satisfaire les conditions aux limites sur le champ de déplacement total, soit :

$$u = E.y \quad \text{sur } \partial Y$$

Nous présentons, en annexe 4, une étude comparative numérique de manière à illustrer le résultat du § 2.5.2.1.

**THEORIE DE L'HOMOGENEISATION
EN COMPORTEMENT NON LINEAIRE**

Cette partie est composée de deux chapitres.

Au chapitre IV, nous rappelons les principaux points théoriques permettant la détermination du domaine de résistance équivalent, plus particulièrement, nous insistons sur les développements liés à la disposition géométrique de type stratifié ; ce qui permet, après avoir associé un matériau multicouche à la terre armée, de faire une étude comparative numérique des résultats donnés par le critère homogénéisé en déformation plane, et sa version simplifiée.

Après avoir défini le domaine d'élasticité initial équivalent, l'allure du critère d'élasticité homogénéisé est étudié numériquement sur deux exemples de matériau multicouche : terre armée et les colonnes ballastées.

Au chapitre V, nous donnons les principaux résultats de la théorie de l'homogénéisation en phase élastoplastique. Après une présentation de la formulation variationnelle, on décrit le programme utilisé (Pecplas) pour la détermination des lois d'évolution macroscopiques.

Cet outil de calcul est ensuite utilisé pour la détermination des lois d'évolution de la terre armée et des colonnes ballastées. Des essais numériques ont été réalisés en appliquant une consolidation isotrope puis un tenseur de contrainte macroscopique à direction fixe jusqu'à la rupture. Les résultats ont permis de mettre en évidence l'anisotropie du matériau. Ensuite nous présentons une application de la technique de l'homogénéisation pour un réseau de colonnes ballastées sous fondation rigide, ce qui permet de vérifier les hypothèses introduites dans ce type de calcul.

Nous constatons que le modèle de comportement élastoplastique du matériau multicouche homogénéisé possède deux variables internes, ce qui permet de comparer les courbes d'évolution issues de cette modélisation avec celles obtenues par éléments finis.

Nous terminons par une mise en évidence de la manière dont s'effectue l'écroutissement du domaine d'élasticité.

**ETUDE DES DOMAINES DE RESISTANCE ET
D'ELASTICITE MACROSCOPIQUES.
APPLICATION A LA TERRE ARMEE ET AUX
COLONNES BALLASTEES**

4.1 GENERALITES

4.2 DOMAINE DE RESISTANCE DU MATERIAU EQUIVALENT

4.2.1 Méthode de Hill-Mandel

4.2.1.1 Approche primale

4.2.1.2 Approche duale

4.2.2 Méthode de l'homogénéisation

4.2.3 Etude du matériau multicouche à deux constituants

4.2.3.1 Approche duale de la méthode de Hill-Mandel

4.2.3.2 Méthode de l'homogénéisation

4.2.3.3 Application à la terre armée

4.2.3.3.1 Critère bidimensionnel simplifié de la terre armée

4.2.3.3.2 Caractérisation du multicouche associé

**4.2.3.3.3 Comparaison des critères homogénéisés
bidimensionnels et de son homologue simplifié**

4.3 DOMAINE D'ELASTICITE INITIAL DU MATERIAU EQUIVALENT

4.3.1 Méthode de l'homogénéisation pour le multicouche

4.3.2 Etude numérique

4.3.2.1 Terre armée

4.3.2.2 Colonnes ballastées

4.1 GENERALITES

La connaissance de la limite de rupture d'une structure permet de mieux appréhender son dimensionnement. Les approches statiques et cinématiques du calcul à la rupture (Salençon (1983)) permettent d'encadrer le domaine de stabilité d'une structure. Pour des ouvrages en terre armée présentant de fortes hétérogénéités, il est nécessaire, pour obtenir un encadrement serré, d'imaginer des champs de contrainte pour l'approche statique, ou de déformation pour l'approche cinématique, nettement plus complexes que ceux résultant d'une étude sur des matériaux homogènes.

Dans cette perspective, Ciss (1985) a développé, en s'inspirant des travaux de Pastor (1983), Pastor, Turgeman (1983), Turgeman (1983), un code de calcul aux éléments finis permettant d'approcher par l'intérieur et l'extérieur le domaine de rupture de la terre armée. Malgré l'utilisation d'un maillage serré, l'encadrement de la charge limite reste très grossier.

Face à ces difficultés, l'idée naturelle est de remplacer les milieux hétérogènes par un matériau homogène équivalent, avec l'idée de pouvoir reprendre les méthodes d'investigation développées pour les structures homogènes. Ce type d'approche est conditionné par la connaissance du domaine de résistance du matériau équivalent ; c'est ainsi que Suquet (1983) [4] et de Buhan (1986) [3] ont introduit les concepts fondamentaux permettant la détermination théorique d'un tel critère. Ces auteurs considèrent le V-E-R comme une structure dans laquelle ils définissent les espaces des champs de contrainte statiquement admissibles, et de déformation cinématiquement admissible.

Par application des méthodes du calcul à la rupture, ils aboutissent à la détermination du critère de rupture du matériau homogène équivalent. de Buhan, Talienco (1988) ont constaté la bonne concordance des résultats théoriques avec les données issues d'essais expérimentaux sur des matériaux composites fibrés.

Plus spécifiquement, des applications sur des structures de Génie-Civil ont été proposées par :

- de Buhan (1985) [2],
- de Buhan, Salençon (1987)
- de Buhan, Mangiavacchi, Nova, Pelligrini, Salençon (1989)
- Salençon (1985)
- Salençon, de Buhan (1989)

Elles ont permis d'améliorer les bornes supérieures connues du domaine de stabilité de certaines structures classiques.

Un autre aspect important du comportement non linéaire des matériaux est la détermination de leur limite d'élasticité initiale. Ce qui permet une approche du dimensionnement des structures en évitant toute plastification.

4.2 DOMAINE DE RESISTANCE DU MATERIAU EQUIVALENT

Nous reprenons les hypothèses du calcul à la rupture. Les matériaux obéissent à une loi de comportement élastique - parfaitement plastique. Ils suivent une loi d'écoulement plastique associée, ce qui assure les équivalences des approches statiques et cinématiques du domaine de résistance.

Il existe plusieurs méthodes permettant de définir le critère de rupture du matériau équivalent ; elles s'apparentent aux C-M-m énoncés au chapitre I.

4.2.1 Méthode de Hill-Mandel

4.2.1.1 Approche primale

- **Approche statique**

On introduit l'espace des champs de contrainte statiquement admissible :

$$SA^{efp} = \{ \sigma \text{ tq } \operatorname{div}_y \sigma = 0 \text{ dans } Y \text{ et } \int \sigma \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

Ce qui permet de donner la définition statique du domaine de résistance :

$$DR^{efp} = \{ \Sigma \text{ tq } \exists \sigma \in SA^{efp}, \langle \sigma \rangle = \Sigma, \sigma \in DR(y) \}$$

- **Approche cinématique**

L'espace des champs de déplacement cinématiquement admissible est donné par :

$$CA^{efp} = \{ u \text{ tq } u = E \cdot y \text{ sur } \partial Y \}$$

le convexe du matériau équivalent est alors défini à partir de sa fonction d'appui par :

$$\pi^{efp}(E) = \inf \{ \langle \pi(e(u)) \rangle, u \in CA^{efp} \}$$

dans laquelle :

$$\pi(e(u)) = \sup \{ \langle \sigma : e(u) \rangle, \sigma \in DR(y) \}$$

Dans l'espace \mathcal{R}^6 des contraintes, l'équation de l'hyperplan tangent au convexe équivalent est alors donnée par :

$$\Sigma : E = \pi^{efp}(E)$$

Les composantes du tenseur E définissent les coordonnées de la normale à l'hyperplan.

4.2.1.2 Approche duale

- Pour l'approche statique, on définit au préalable l'espace des champs de contrainte statiquement admissible :

$$SA^{efd} = \{ \sigma \text{ tq } \operatorname{div}_y \sigma = 0 \text{ dans } Y, \\ \sigma \cdot n = \Sigma \cdot n \text{ sur } \partial Y, \text{ et } \int \sigma \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

d'où la définition du domaine de résistance équivalent :

$$DR^{efd} = \{ \Sigma \text{ tq } \exists \sigma \in SA^{efd}, \Sigma = \langle \sigma \rangle \\ \sigma \in DR(y), \forall y \in Y \}$$

- Pour l'approche cinématique, on introduit l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissible :

$$CA^{efd} = \{ u \}$$

On définit alors la fonction d'appui :

$$\pi^{efd} = \inf \{ \langle \pi(e(u)) \rangle, u \in CA^{efd} \}$$

4.2.2 Méthode de l'homogénéisation

- **Approche statique**

On définit l'espace des champs de contrainte statiquement admissible par :

$$SA^{hom} = \{ \sigma \text{ tq } \operatorname{div}_y \sigma = 0 \text{ sur } Y, \sigma \text{ est } Y \text{ périodique, } \int \sigma \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

Le convexe homogénéisé est alors défini par :

$$DR^{hom} = \{ \Sigma \text{ tq } \exists \sigma \in SA^{hom}, \Sigma = \langle \sigma \rangle \sigma \in DR(y) \forall y \in Y \}$$

- **Approche cinématique**

On donne l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissible par :

$$CA^{hom} = \{ u \text{ tq } u = Ey + v \text{ avec } v \text{ } Y \text{ périodique} \}$$

La fonction d'appui du convexe dans la direction E est alors :

$$\pi^{hom}(E) = \inf \{ \langle \pi(e(u)) \rangle, u \in CA^{hom} \}$$

On voit facilement que :

$$SA^{efd} \subset SA^{hom} \subset SA^{efp}$$

ce qui conduit à un encadrement du domaine de résistance du matériau homogénéisé :

$$DR^{efd} \subset DR^{hom} \subset DR^{efp}$$

Désormais, nous prendrons l'hypothèse de convexité sur les critères de chaque constituant, ce qui permet d'assurer la convexité du domaine de résistance équivalent.

4.2.3 Etude du matériau multicouche à deux constituants par la méthode de l'homogénéisation

De façon à réaliser une étude simplifiée sur des structures hétérogènes comme les colonnes ballastées ou la terre armée, on leur associe un matériau multicouche équivalent. Cette hypothèse permet en outre de travailler en déformation plane dans la direction y_3 , en prenant le repère de la fig. IV.1.

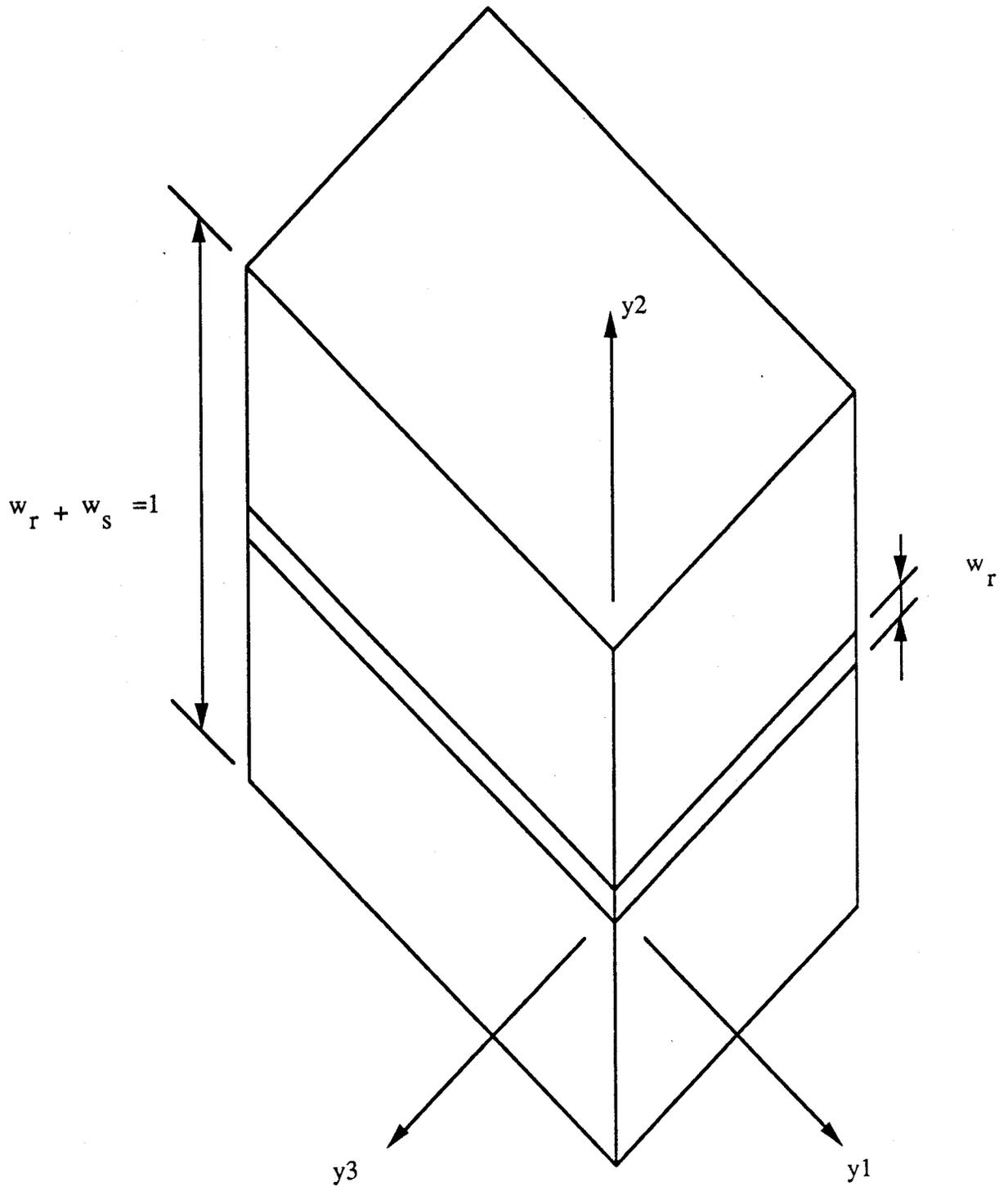


fig. IV.1 : Matériau multicouche

4.2.3.1 Résultats théoriques

Conformément à de Buhan (1986) [3], on rappelle brièvement les résultats dont on va se servir :

a) Tridimensionnelle

$$\Sigma \in DR^{\text{hom}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists (\sigma_r, \sigma_s) \in DR_r \times DR_s \\ \Sigma = w_r \sigma_r + w_s \sigma_s \\ \sigma_r \cdot n = \sigma_s \cdot n \end{cases}$$

On remarque que les champs de contrainte microscopiques sont constants par morceau. Si la recherche s'effectue pour des composites à deux constituants, en tenant compte de la condition de continuité à l'interface, l'espace des champs de contrainte statiquement admissible est un sous espace vectoriel de dimension 9 de l'espace de dimension infinie SA^{hom} .

b) Bidimensionnelle

Les structures en terre armée se prêtent bien à l'hypothèse de déformation plane car elles sont infiniment longues dans une direction de l'espace. Conformément à Salençon (1983), on considère des critères en déformation plane pour chaque constituant, et pour lesquels on conserve les anciennes notations. Ces critères dépendent uniquement de l'état de contrainte dans le plan de déformation. En se référant au repère de la fig. IV.2, on détermine le convexe homogénéisé dans l'espace tridimensionnel des contraintes macroscopiques dont les composantes sont prises sous la forme :

$$(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \sqrt{2} \Sigma_{12})$$

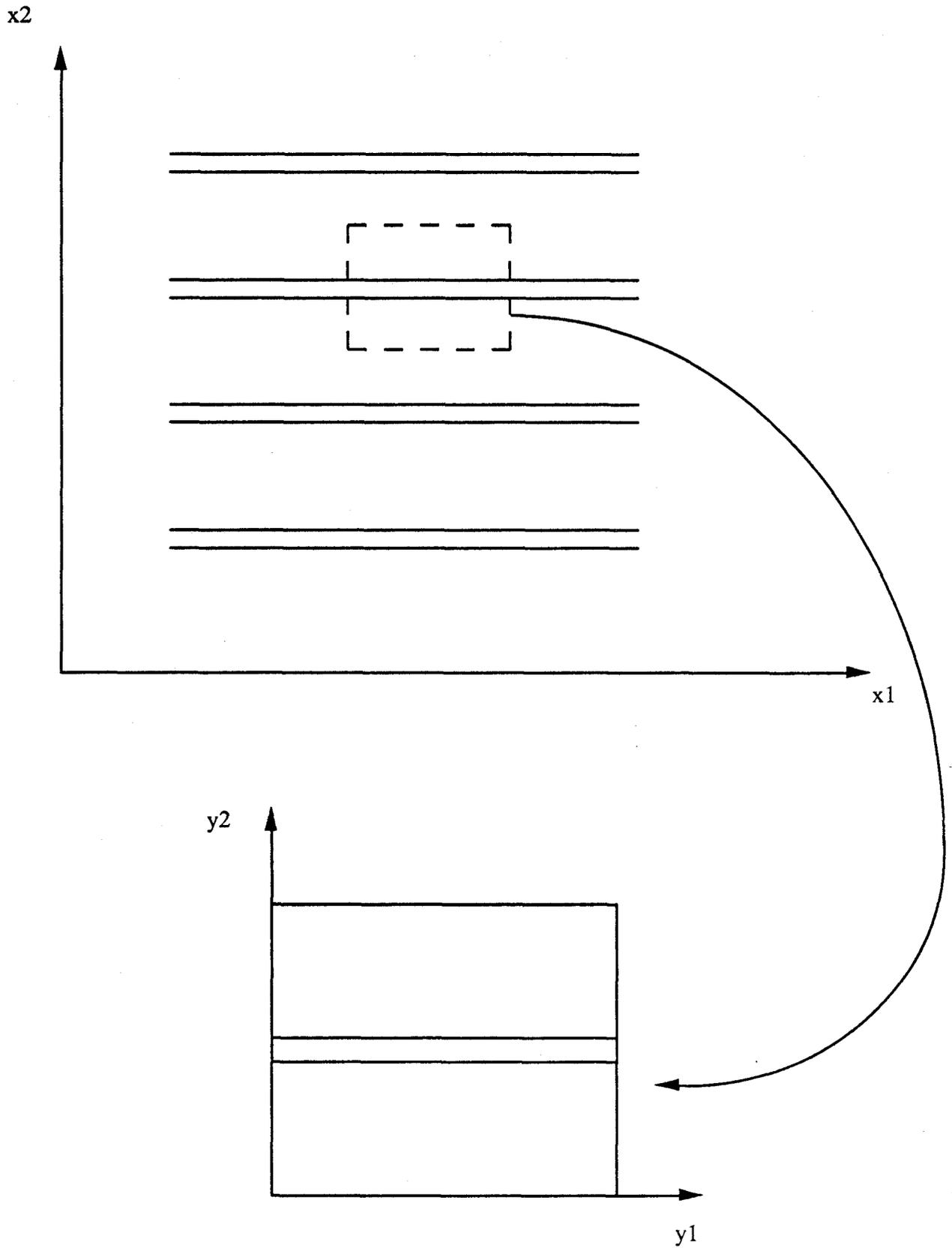


fig. IV 2 : Etude bidimensionnelle de la terre armée

Il est alors possible de donner une expression très simple du convexe homogénéisé, en désignant par dr_r et dr_s les projections des domaines DR_r et DR_s sur le plan de coordonnées $(\Sigma_{22}, \sqrt{2} \Sigma_{12})$:

$$\Sigma \in DR^{\text{hom}} \Leftrightarrow \begin{cases} (\Sigma_{22}, \sqrt{2} \Sigma_{12}) \in dr_r \cap dr_s \\ \Sigma_{11}^-(\Sigma_{22}, \sqrt{2} \Sigma_{12}) \leq \Sigma_{11} \leq \Sigma_{11}^+(\Sigma_{22}, \sqrt{2} \Sigma_{12}) \end{cases}$$

avec, $\Sigma_{11}^{\pm} = w_r (\sigma_{11})_r^{\pm} + w_s (\sigma_{11})_s^{\pm}$

en se fixant un couple $(\Sigma_{22}, \sqrt{2} \Sigma_{12})$, on définit pour le matériau renforçant (pour le sol il suffit de remplacer les indices r par s)

$$(\sigma_{11})_r^+ = \sup \{ (\sigma_{11})_r, ((\sigma_{11})_r, \Sigma_{22}, \sqrt{2} \Sigma_{12}) \in DR_r \}$$

$$(\sigma_{11})_r^- = \inf \{ (\sigma_{11})_r, ((\sigma_{11})_r, \Sigma_{22}, \sqrt{2} \Sigma_{12}) \in DR_r \}$$

A partir de ces expressions, il est possible, en fixant le critère de rupture de chaque constituant, de créer un programme de calcul déterminant le convexe homogénéisé dans un plan de pression moyenne constante. En cherchant l'intersection de ce critère avec plusieurs plans, on peut se faire une idée de sa représentation spatiale.

4.2.3.2 Application à la terre armée

4.2.3.2.1 Critère bidimensionnel simplifié de la terre armée

Comme la proportion en volume de l'acier est très faible vis-à-vis de celle du sol, de Buhan (1985) [1] et Siad (1987) ont proposé d'assimiler la terre armée à un matériau multicouche avec une épaisseur d'acier nulle ; ce qui conduit à la définition suivante du domaine de résistance :

$$\Sigma \in DR^{\text{hom}} \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma = \sigma_s + \sigma_r \\ \sigma_s \in DR_s \\ -\sigma_0 \leq (\sigma_{11})_r \leq \sigma_0 \\ (\sigma_{ij})_r = 0 \quad i \neq 1 \quad \text{ou} \quad j \neq 1 \end{cases}$$

σ_0 représente la résistance à la traction-compression des armatures par unité de longueur dans la direction y_2 .

Nous allons maintenant considérer que le sol obéit à un critère de Mohr-Coulomb en déformation plane dont l'expression est :

$$\sigma_s \in DR_s \Leftrightarrow \sqrt{\frac{((\sigma_{22})_s - (\sigma_{11})_s)^2}{4} + (\sigma_{12})_s^2} + \frac{1}{2} [(\sigma_{11})_s + (\sigma_{22})_s] \sin \varphi_s \leq 0$$

En travaillant dans le repère de contraintes précédemment défini, ce critère est représenté par un demi-cône :

- de sommet 0,
- d'axe la droite des contraintes isotropes,
- d'angle au sommet Φ_s défini par $\text{tg } \Phi_s = \sin \varphi_s$

La définition précédente implique que le convexe homogénéisé simplifié est engendré par la translation de ce demi-cône parallèlement à l'axe des contraintes Σ_{11} , l'abscisse de son sommet restant à l'intérieur du segment $[S_1, S_2]$ avec :

$$S_1 \begin{vmatrix} -\sigma_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad S_2 \begin{vmatrix} \sigma_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Nous donnons sur la fig. IV.3 un organigramme permettant de situer un état de contrainte par rapport à ce convexe simplifié. Il a servi de support à la réalisation d'un programme déterminant l'intersection de ce convexe avec un plan à pression moyenne donnée.

4.2.3.2.2 Caractérisation du multicouche associé

Les armatures travaillent essentiellement en traction-compression ; par conséquent, le matériau multicouche associé doit conserver cette capacité de résistance des armatures. Si l'on considère que l'acier obéit à un critère de Tresca, il faut alors satisfaire :

$$(4.1) \quad C'_r E_v L_T w_r = C_r S_r$$

C_r et C'_r représentent respectivement la cohésion de l'acier dans la terre armée et le matériau multicouche associé.

4.2.3.2.3 Comparaison des critères homogénéisés bidimensionnels et de son homologue simplifié

Dans le cas de matériaux obéissant à un critère de Mohr-Coulomb, les expressions analytiques du convexe bidimensionnel homogénéisé proposées par Talienco, Sacchi Landriani (1988) sont d'un maniement délicat. Nous avons préféré utiliser les expressions de la théorie générale du paragraphe précédent.

Sur cette base, nous avons développé au laboratoire des programmes déterminant, dans un plan à pression moyenne donnée, les convexes bidimensionnels :

- homogénéisé,
- homogénéisé simplifié de la terre armée

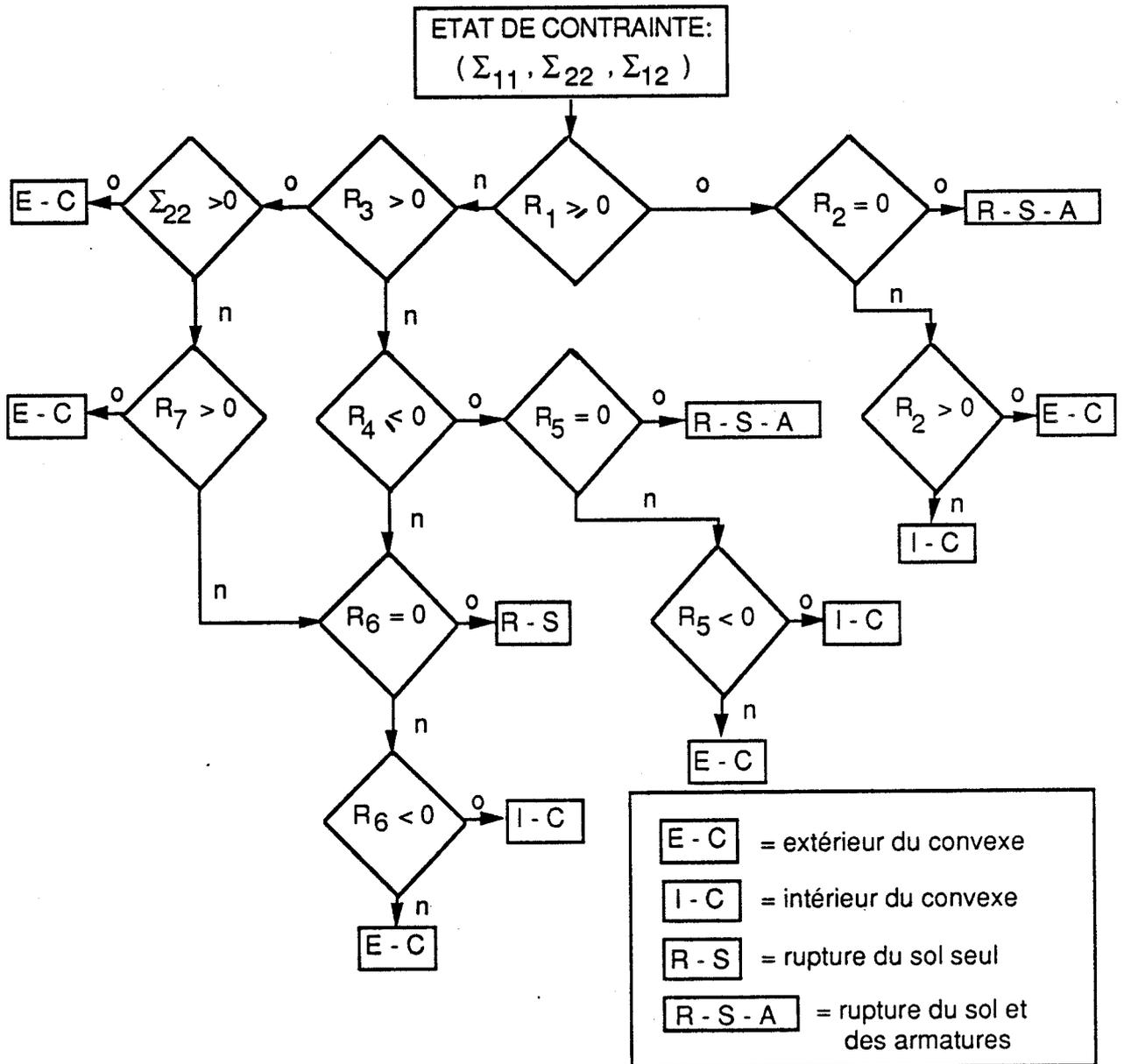
Du point de vue numérique, nous avons repris les caractéristiques dimensionnelles données sur la fig. III.2. Le sol obéit à un critère de Mohr-Coulomb, et l'acier à un critère de Tresca dont les caractéristiques mécaniques de cohésion et d'angle de frottement interne sont :

$$\begin{aligned} C_s &= 0 & \varphi_s &= 30^\circ \\ C_r &= 120 \text{ MPa} & \varphi_r &= 0 \end{aligned}$$

Nous lui avons associé le multicouche 3 introduit au § 3.2.12.

La relation (4.1) donne alors, $C'_r = 6 \text{ MPa}$, soit :

$$\sigma_0 = 2C'_r w_r = 0,094 \text{ MPa}$$



$$R_1 = \Sigma_{11} - (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi_s) \Sigma_{22} - \sigma_0$$

$$R_2 = \sqrt{\frac{(\Sigma_{22} - \Sigma_{11} + \sigma_0)^2}{4} + \Sigma_{12}^2} + \frac{(\Sigma_{11} + \Sigma_{22} - \sigma_0)}{2} \sin \varphi_s$$

$$R_3 = \Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \sigma_0 \quad R_4 = \Sigma_{11} - (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi_s) \Sigma_{22} + \sigma_0$$

$$R_5 = \sqrt{\frac{(\Sigma_{22} - \Sigma_{11} - \sigma_0)^2}{4} + \Sigma_{12}^2} + \frac{(\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \sigma_0)}{2} \sin \varphi_s$$

$$R_6 = |\Sigma_{12}| - \operatorname{tg} \varphi_s |\Sigma_{22}| \quad R_7 = \Sigma_{11} + \Sigma_{22} - \sigma_0$$

fig. IV.3 : Situation d'un état de contrainte par rapport au convexe simplifié de la terre armée

Nous comparons les intersections de ces convexes avec différents plans de pression moyenne :

- PM = 0 (fig. IV.4 et la fig. IV.5)
- PM = - 0,05 MPa (fig. IV.6 et la fig. IV.7)
- PM = - 0,3 MPa (fig. IV.8 et la fig. IV.9)
- PM = - 0,5 MPa (fig. IV.10 et la fig. IV.11)

Sur ces figures, nous avons repéré le plan déviatorique par deux axes représentant :

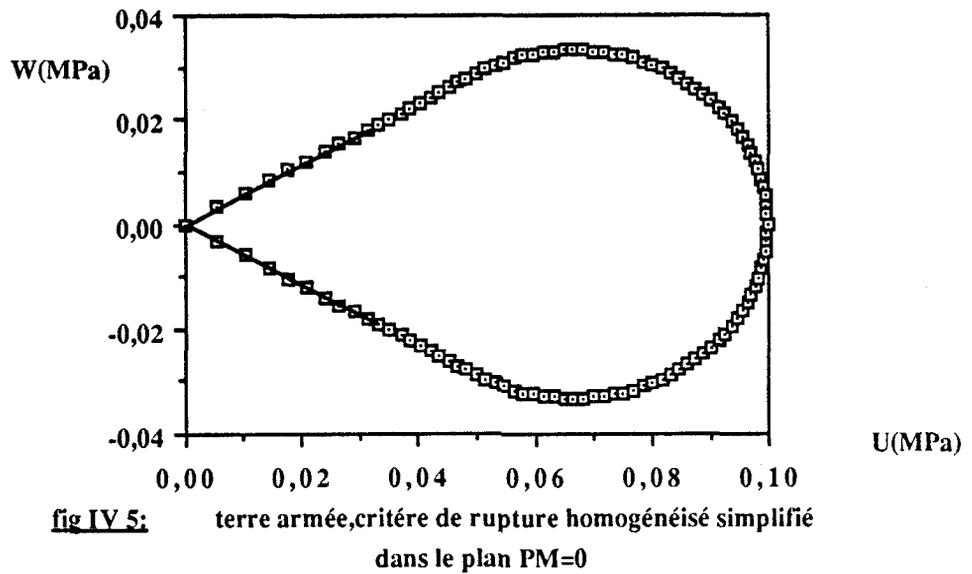
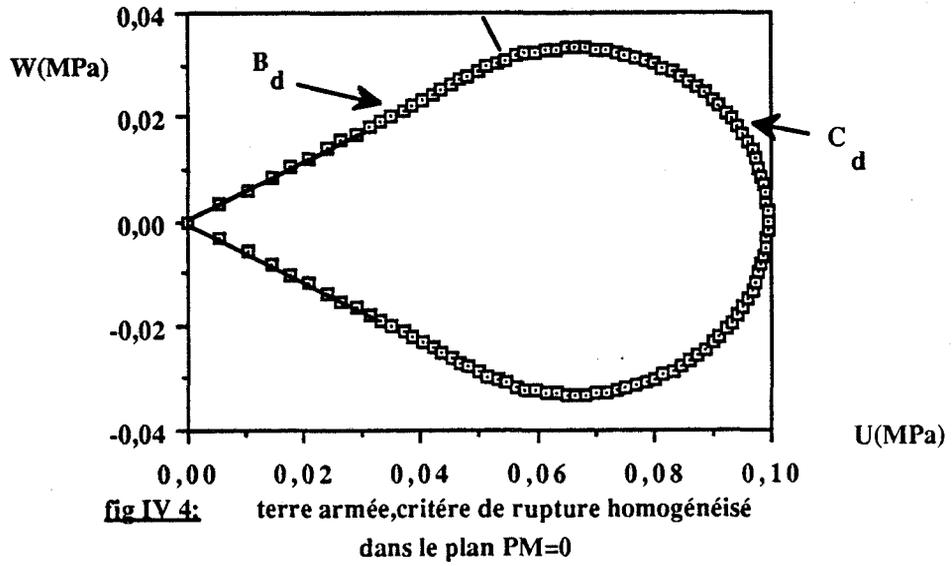
$$U = \frac{\Sigma_{11} - \Sigma_{22}}{\sqrt{2}}$$

$$W = \sqrt{2} \Sigma_{12}$$

Nous notons une très bonne concordance des résultats de ces théories, ce qui confirme l'hypothèse de travail en traction-compression des armatures. Pour PM = 0 et PM = - 0,05 MPa, le critère de rupture homogénéisé présente deux parties distinctes que nous avons repérées par B_d et C_d sur la fig. IV.4. Pour PM = - 0,3 MPa et PM = - 0,5 MPa, le critère se découpe en trois parties notées A_d, B_d, C_d sur la fig. IV.8.

Ces parties correspondent à différents modes de rupture de la terre armée :

- pour A_d, rupture du sol et des armatures en compression
- pour B_d, rupture du sol seul
- pour C_d, rupture du sol et des armatures en traction



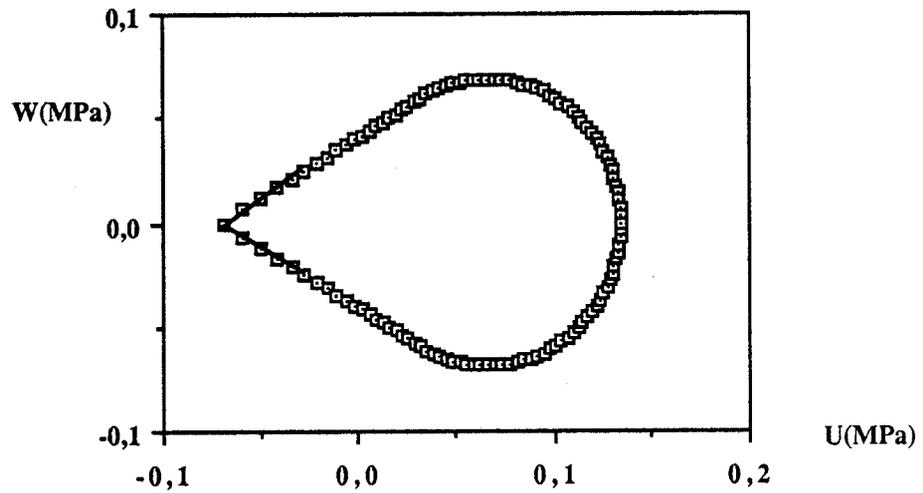


fig IV 6: terre armée, critère de rupture homogénéisé
dans le plan $PM = -0,05$ MPa

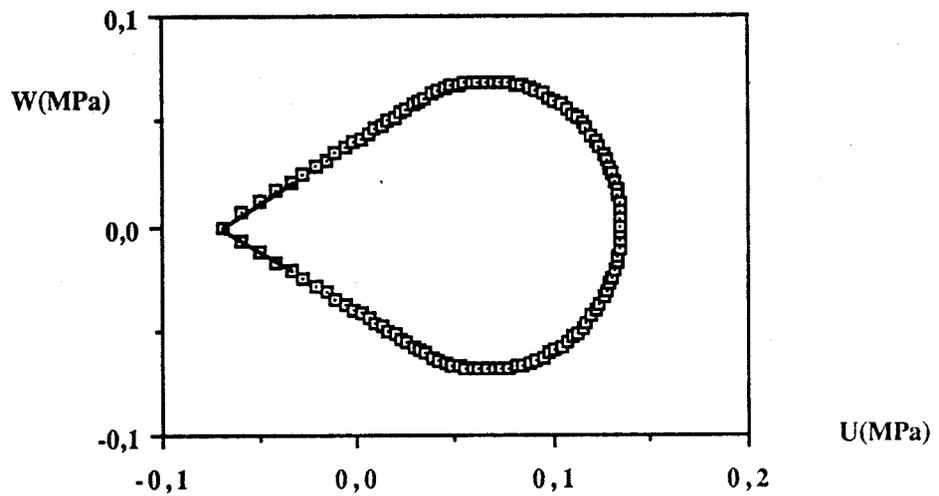


fig IV 7: terre armée, critère de rupture homogénéisé simplifié
dans le plan $PM = -0,05$ MPa

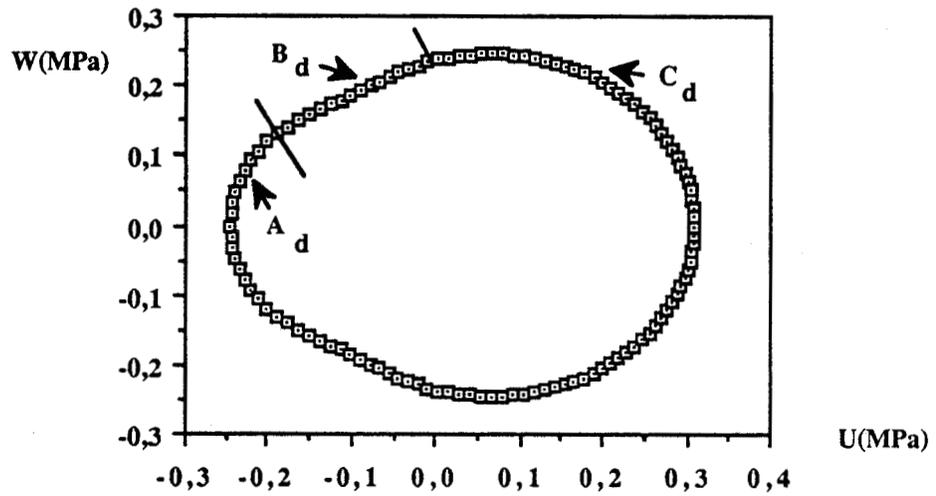


fig IV 8: terre armée, critère de rupture homogénéisé dans le plan $PM = -0,3$ MPa

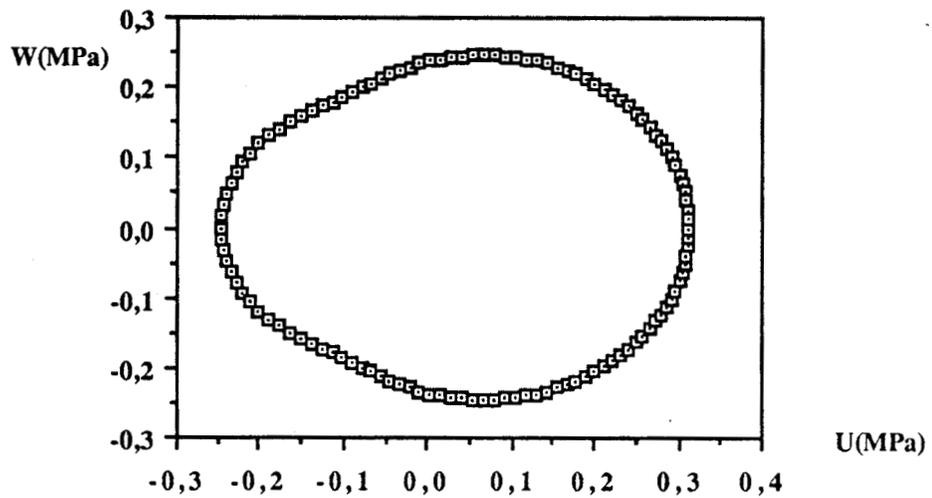
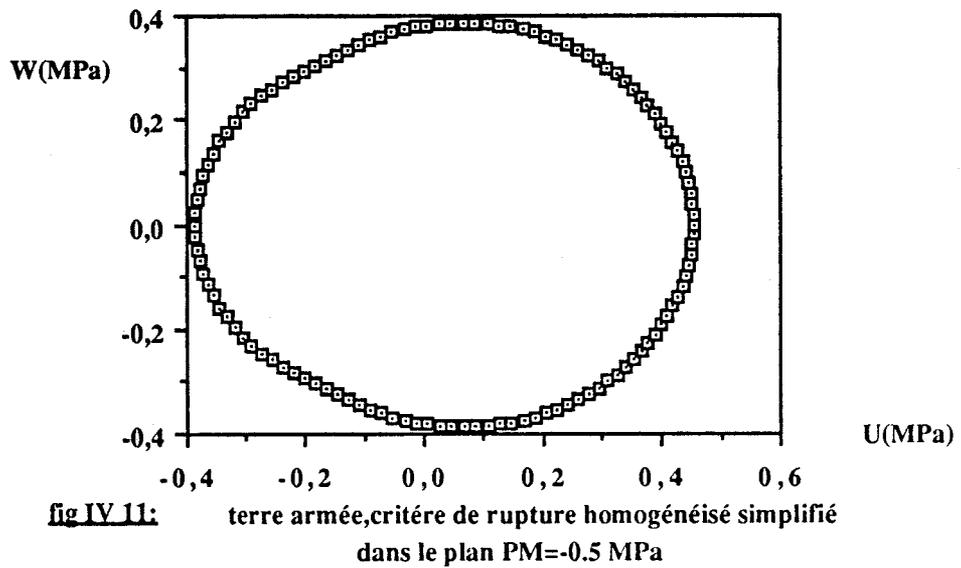
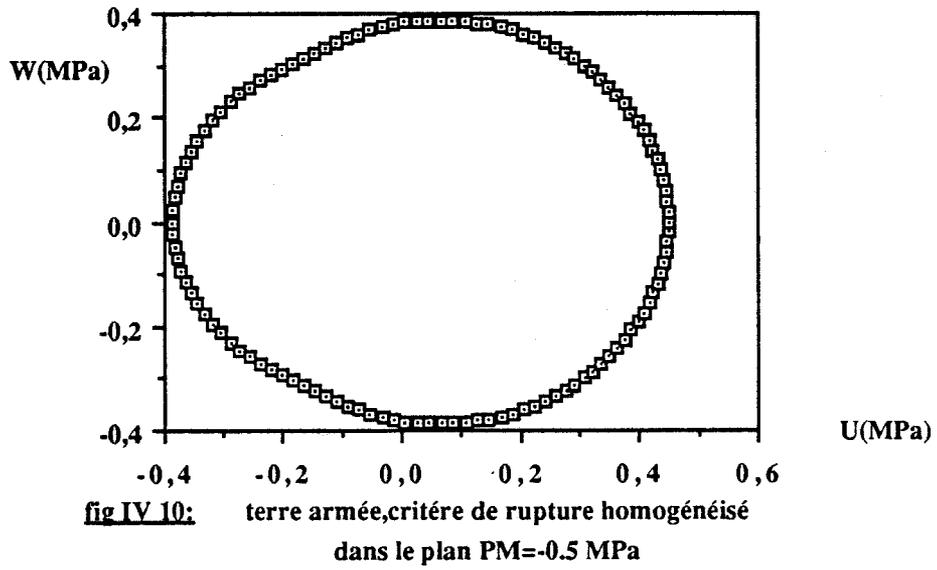


fig IV 9: terre armée, critère de rupture homogénéisé simplifié dans le plan $PM = -0,3$ MPa



4.3 DOMAINE D'ELASTICITE INITIAL DU MATERIAU EQUIVALENT

Pour un composite à deux constituants, à interface Γ parfaite, on désigne par DE^{eq} le domaine d'élasticité du matériau équivalent :

$$DE^{eq} = \{ \Sigma, \exists \sigma(y) \in SA^{eq}, \forall y \in \Gamma \forall t \in P, \text{ on a } \int t.e(\sigma,y).t = 0, \Sigma = \langle \sigma \rangle, \forall y f_e(y, \sigma) < 0, \sigma = a:e \}$$

SA^{eq} désigne l'espace des contraintes statiquement admissible, dont les formulations précises sont données au § précédent suivant le type de méthode envisagée.

$f_e(y, \sigma)$ représente la surface de charge en un point y du V-E-R.

t désigne un vecteur quelconque du plan tangent à l'interface.

La condition de continuité de la déformation dans le plan tangent à l'interface implique que l'état de contrainte microscopique doit vérifier une condition supplémentaire par rapport à l'approche à la rupture, ce qui implique l'inclusion évidente :

$$DE^{eq} \subset DR^{eq}$$

4.3.1 Méthode de l'homogénéisation pour le multicouche

D'après ce qui vient d'être introduit, on peut écrire :

$$DE^{hom} = \{ \Sigma, \exists \sigma(y) \in SA^{hom}, \forall y \in \Gamma (e_{ij})_s(\sigma_s, y) = (e_{ij})_r(\sigma_r, y) \text{ pour } (i,j) = (1,1), (1,3), (3,3), \Sigma = \langle \sigma \rangle, \forall y f_e(y, \sigma) < 0 \}$$

D'après le chapitre III, on peut dire, qu'en phase élastique, les champs de contrainte microscopique sont constants par morceau dans chacun des constituants ce qui permet de donner la définition suivante du domaine d'élasticité homogénéisé pour un multicouche à deux constituants :

$$DE^{hom} = \{ \Sigma, \exists \sigma_r, \sigma_s \text{ avec } (e_{ij})_s(\sigma_s) = (e_{ij})_r(\sigma_r), (i,j) = (1,1) \text{ ou } (1,3) \text{ ou } (3,3) \\ \Sigma = w_r \sigma_r + w_s \sigma_s, (f_e)_r(\sigma_r) < 0 \text{ et } (f_e)_s(\sigma_s) < 0 \text{ et } \sigma_{r,n} = \sigma_{s,n} \}$$

Si les matériaux sont sollicités en déformation plane dans la direction y_3 , les relations de l'élasticité s'écrivent :

$$(4.2) \quad (e_{11})_r = \frac{(1 + \nu_r)}{E_r} [(\sigma_{11})_r (1 - \nu_r) - (\sigma_{22})_r \nu_r]$$

$$(4.3) \quad (e_{11})_s = \frac{(1 + \nu_s)}{E_s} [(\sigma_{11})_s (1 - \nu_s) - (\sigma_{22})_s \nu_s]$$

comme l'interface est parfaite

$$(e_{11})_r = (e_{11})_s$$

soit alors $(\sigma_{11})_r (1 - \nu_r) - (\sigma_{22})_r \nu_r = k [(\sigma_{11})_s (1 - \nu_s) - (\sigma_{22})_s \nu_s]$

avec
$$k = \frac{(1 + \nu_s) E_r}{(1 + \nu_r) E_s}$$

Le champ de contrainte doit satisfaire :

$$(4.4) \quad \Sigma_{11} = w_r (\sigma_{11})_r + w_s (\sigma_{11})_s$$

$$(4.5) \quad \Sigma_{22} = (\sigma_{22})_r = (\sigma_{22})_s$$

$$(4.6) \quad \Sigma_{12} = (\sigma_{12})_r = (\sigma_{12})_s$$

ce qui permet d'écrire :

$$(4.7) \quad (\sigma_{11})_s = H_s \Sigma_{11} + I_s \Sigma_{22}$$

$$(4.8) \quad (\sigma_{11})_r = H_r \Sigma_{11} + I_r \Sigma_{22}$$

$$(4.9) \quad \text{avec } H_s = \left[w_r k \left(\frac{1 - \nu_s}{1 - \nu_r} \right) + w_s \right]^{-1}$$

$$(4.10) \quad I_s = -H_s w_r \frac{(\nu_r - \nu_s k)}{(1 - \nu_r)}$$

$$(4.11) \quad H_r = \left[w_s \left(\frac{1 - \nu_r}{1 - \nu_s} \right) \frac{1}{k} + w_r \right]^{-1}$$

$$(4.12) \quad I_r = -H_r w_s \frac{(\nu_s - \nu_r k^{-1})}{(1 - \nu_s)}$$

en injectant (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) dans les expressions de $(f_e)_s$ et $(f_e)_r$, on obtient :

$$DE^{\text{hom}} = \{ \Sigma \text{ tq } F_s(\Sigma) < 0 \quad \text{et} \quad F_r(\Sigma) < 0 \}$$

Dans l'espace des contraintes macroscopiques F_s et F_r désignent respectivement les zones pour lesquelles le sol et l'acier restent en phase élastique. Le domaine d'élasticité homogénéisé est l'intersection de ces zones.

4.3.2 Etude numérique

Dans le plan déviatorique des contraintes microscopiques repéré par (U, W) le critère de Mohr-Coulomb est limité par un cercle. Par conséquent, dans le plan déviatorique des contraintes macroscopiques, les courbes $F_r = 0$ et $F_s = 0$ délimitant le domaine élastique sont des portions de conique.

Nous avons développé un code de calcul permettant de déterminer l'intersection de ce domaine d'élasticité homogénéisé avec un plan $PM = cte$.

Nous présentons deux études sur les matériaux :

- terre armée,
- colonnes ballastées.

On vérifie en annexe 5 que les portions de coniques délimitant alors le domaine d'élasticité sont des parties d'ellipse.

Il nous a semblé intéressant de présenter la position du domaine d'élasticité par rapport au domaine de résistance.

4.3.2.1 Terre armée

On reprend le multicouche précédent pour lequel les caractéristiques élastiques des constituants sont données au chapitre III.

Sur les fig. IV.12, IV.13, IV.14, le domaine d'élasticité est représenté par une seule ellipse qui correspond à l'entrée en plastification du sol, ce qui signifie qu'elle se trouve à l'intérieur de l'ellipse délimitant l'entrée en plastification de l'acier.

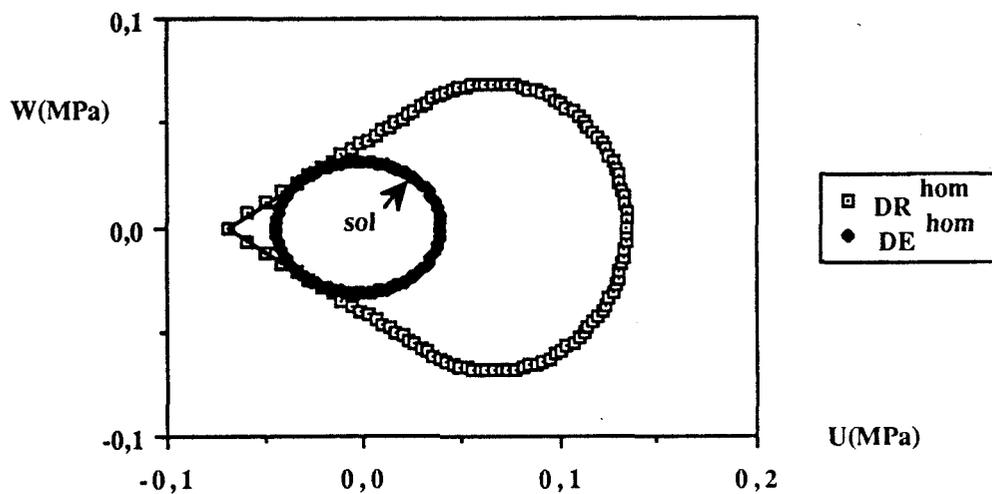


fig IV.12: terre armée, domaines de résistance et d'élasticité homogénéisés dans le plan $PM = -0.05 \text{ MPa}$

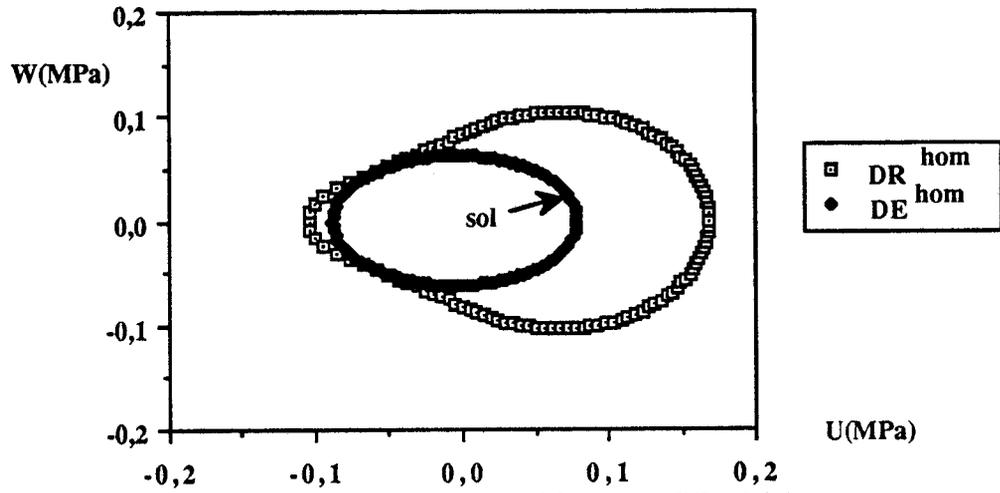


fig IV 13: terre armée, domaines de résistance et d'élasticité homogénéisés dans le plan $PM = -0.1$ MPa

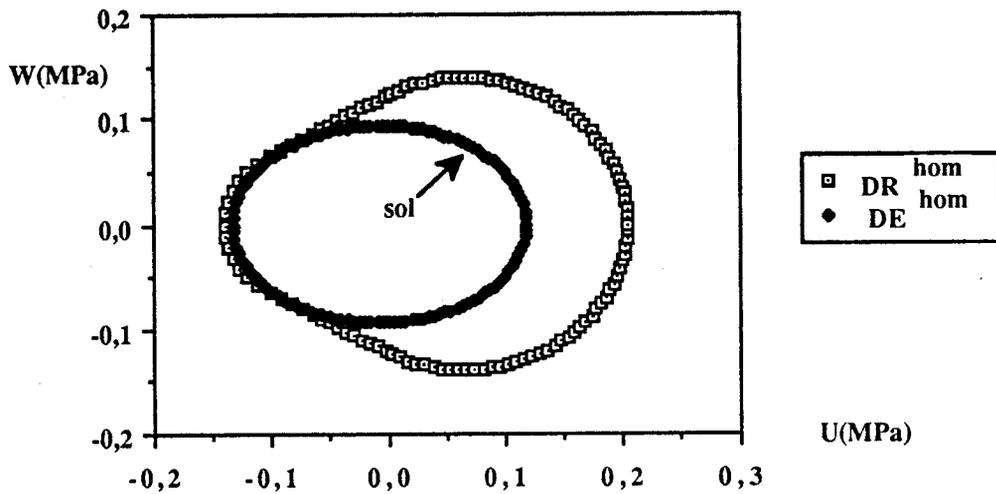


fig IV 14: terre armée, domaines de résistance et d'élasticité homogénéisés dans le plan $PM = -0.15$ MPa

Sur les fig. IV.15 et IV.16, le domaine d'élasticité est limité par deux courbes. On peut remarquer que la zone relative à la plastification de l'acier peut être assimilée à une droite parallèle à l'axe W .

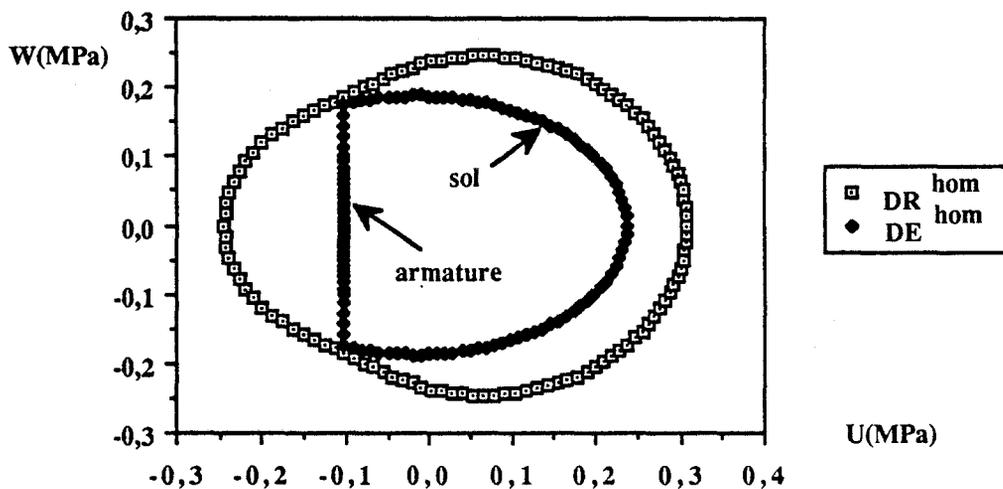


fig IV 15: terre armée, domaines de résistance et d'élasticité homogénéisés dans le plan $PM = -0.3$ MPa

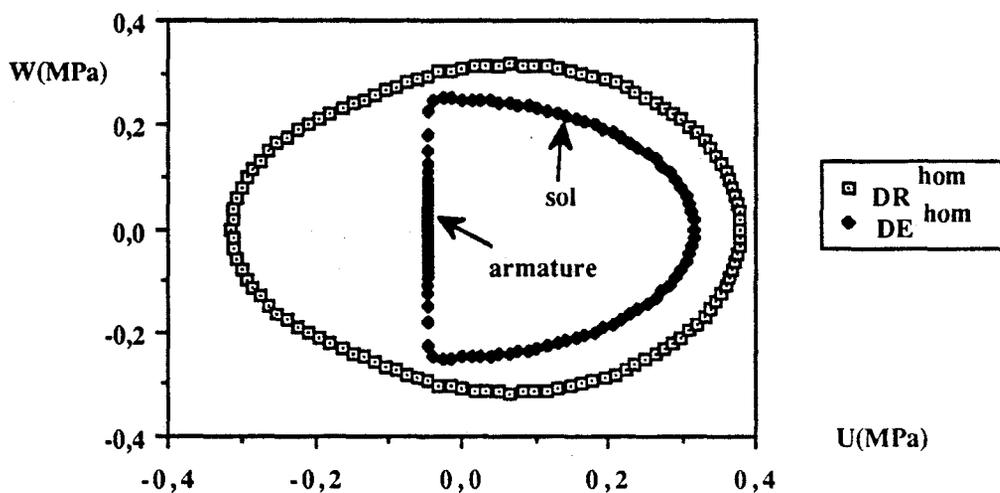


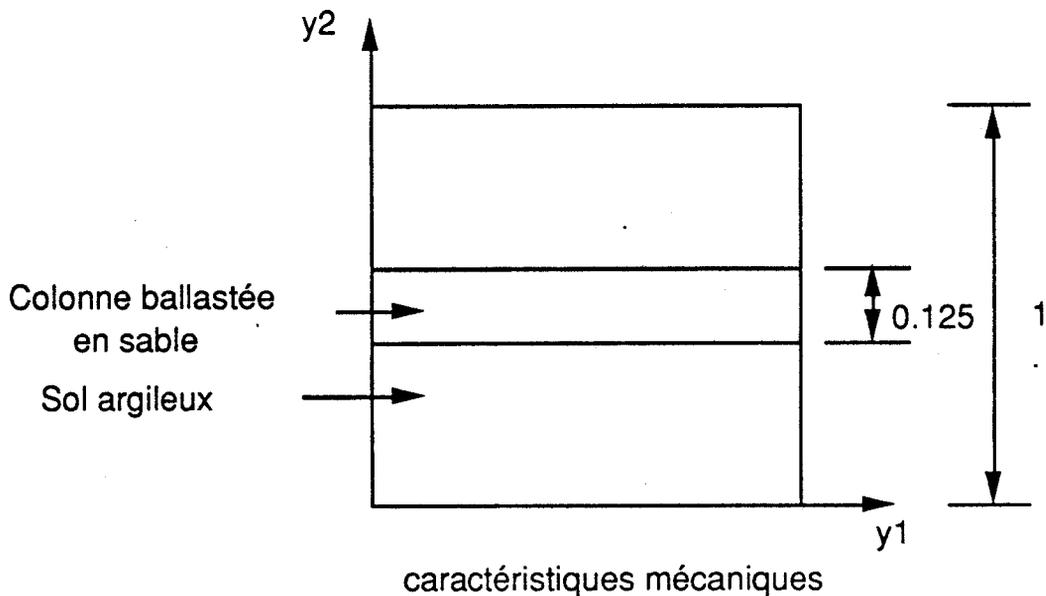
fig IV 16: terre armée, domaines de résistance et d'élasticité homogénéisés dans le plan $PM = -0.4$ MPa

En effet, l'expression numérique de ce convexe (annexe 5) montre que les coefficients pondérateurs de Σ_{11} et de Σ_{22} sont environ 100 fois plus grands que ceux de Σ_{12} , et l'ellipse à un grand axe dans la direction W très supérieur à son petit axe dans la direction U . Ainsi, pour le niveau de contrainte qui nous intéresse, Σ_{12} a peu d'influence sur l'équation de l'ellipse. A l'intersection des limites de ces deux zones, nous sommes sur un point anguleux dit singulier du domaine élastique, a priori, au niveau microscopique, les deux constituants ont la possibilité de plastifier. Par conséquent, si, au cours de la détermination de la réponse contrainte-déformation macroscopique, on tombe sur un tel point, on ne peut rien dire a priori sur l'évolution de la plastification qui semble dépendre du chemin de chargement macroscopique.

Sur les fig. IV.12, 13, 14, 15, on note l'existence de points de contacts entre les domaines d'élasticité et de rupture qui doivent correspondre à des ruptures du matériau homogénéisé, juste à la sortie de la phase élastique. Ceci laisse entrevoir la possibilité d'obtenir un comportement élastique parfaitement plastique sur des chemins de sollicitations macroscopiques particuliers.

4.3.2.2 Colonnes ballastées

Pour cette étude, nous avons modélisé, un réseau de colonnes ballastées par un matériau multicouche de façon à conserver la proportion en volume du sable de la colonne et celle du sol. Sur la fig. IV.17, nous donnons les caractéristiques géométriques et mécaniques retenues. Sur les fig. IV.18, 19, 20, 21, on retrouve la présence de deux zones de plastification, et par conséquent l'existence de points singuliers anguleux à leur intersection.



élément renforçant, colonne de sable	$v_r = 0.3$ $E_r = 200 \text{ MPa}$ $\varphi_r = 35^\circ$ $C_r = 0$
élément sol	$v_s = 0.3$ $E_s = 10 \text{ MPa}$ $\varphi_s = 20^\circ$ $C_s = 0.01 \text{ MPa}$

fig IV 17: Caractéristiques dimensionnelles et mécaniques d'un sol renforcé par des colonnes ballastées

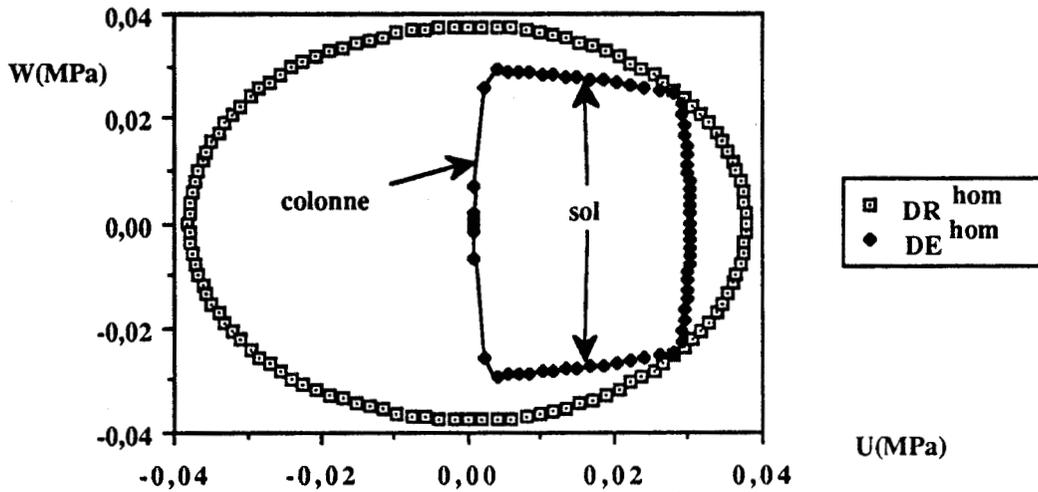


fig IV 18: colonnes ballastées, domaines de résistance et d'élasticité homogénéisés dans le plan $PM = -0.05$ MPa

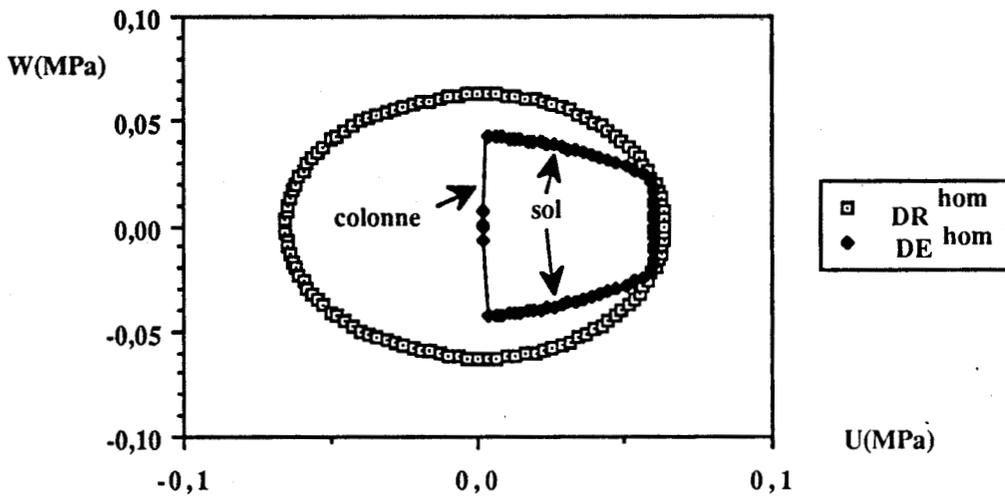


fig IV 19: colonnes ballastées, domaines de résistance et d'élasticité homogénéisés dans le plan $PM = -0.1$ MPa

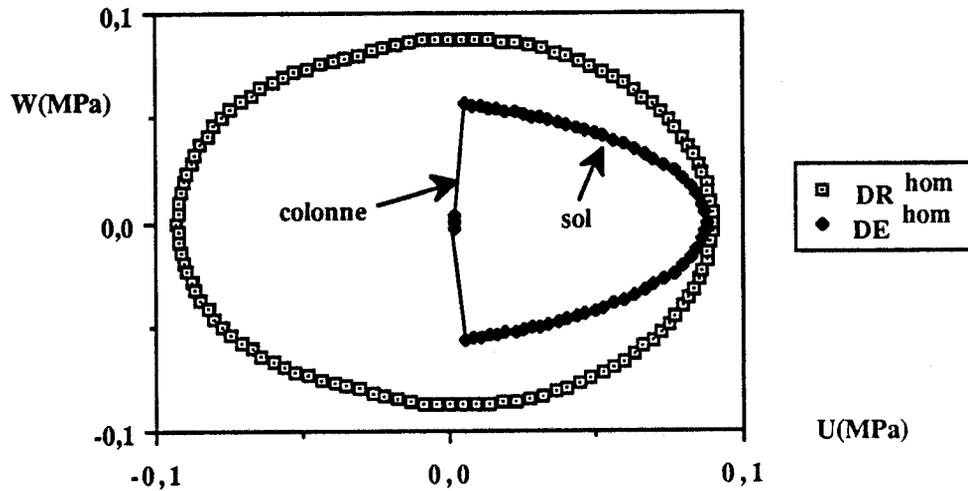


fig IV 20: colonnes ballastées, domaines de résistance et d'élasticité homogénéisés dans le plan $PM=-0.15$ MPa

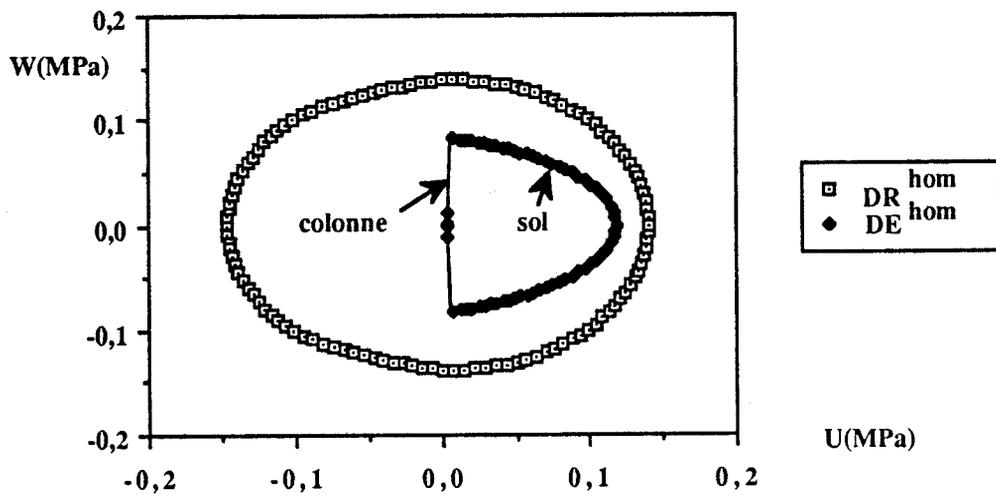


fig IV 21: colonnes ballastées, domaines de résistance et d'élasticité homogénéisés dans le plan $PM=-0.25$ MPa

<p>HOMOGENEISATION EN PHASE ELASTOPLASTIQUE ETUDE NUMERIQUE SUR LA TERRE ARMEE ET LES COLONNES BALLASTEES</p>

5.1 ASPECT THEORIQUE

- 5.1.1 Déformation plastique macroscopique
- 5.1.2 Résultat de convergence

5.2 ADAPTATION NUMERIQUE EN VUE DE L'OBTENTION DE LOIS D'EVOLUTION MACROSCOPIQUES

- 5.2.1 Formulation variationnelle
- 5.2.2 Discrétisation aux éléments finis
- 5.2.3 Adaptation du code Pecplas

5.3 SIMULATION NUMERIQUE SUR DES STRATIFIES

- 5.3.1 Nature des simulations
- 5.3.2 Application à la terre armée
 - 5.3.2.1 Approche primale de la méthode de Hill - Mandel
 - 5.3.2.2 Méthode de l'homogénéisation
 - 5.3.2.2.1 Comportement associé du sable
 - 5.3.2.2.2 Comportement non dilatant du sable
- 5.3.3 Application aux colonnes ballastées
 - 5.3.3.1 Approche primale de la méthode de Hill - Mandel
 - 5.3.3.2 Méthode de l'homogénéisation

5.4 MODELISATION DU MATERIAU MULTICOUCHE HOMOGENEISE

- 5.4.1 Modèle à deux variables internes
- 5.4.2 Modélisation de l'écroutissage du domaine élastique

5.1 ASPECT THEORIQUE

En considérant un comportement élastoplastique des constituants, on donne l'approche locale permettant la détermination de la loi d'évolution du matériau équivalent pour un chemin de contrainte macroscopique imposé.

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{div}_y \sigma = 0 \quad \text{dans } Y \quad (5.2) \\
 A(y) : \sigma + e^P = \epsilon(u) \quad \text{dans } Y \quad (5.3) \\
 \langle \sigma \rangle = \Sigma(t) \\
 f_e(y, \sigma) < 0 \quad de^P = 0 \\
 f_e(y, \sigma) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l}
 * \quad \frac{\partial f_e}{\partial \sigma} : d\sigma \geq 0 \quad de^P = d\lambda \frac{\partial f_e}{\partial \sigma}, \quad d\lambda \geq 0 \\
 * \quad \frac{\partial f_e}{\partial \sigma} : d\sigma < 0 \quad de^P = 0
 \end{array} \right. \\
 + C - M - m
 \end{array} \right\} (5.1)
 \end{array}$$

$\Sigma(t)$ représente le tenseur de contrainte macroscopique à un instant du chargement.

En multipliant (5.3) par le tenseur de concentration de contrainte, et en passant à la valeur moyenne, on obtient :

$$\langle A_{ijkl} \sigma_{lm} (C_{\Sigma}^{eq, kh})_{ij} \rangle + \langle (C_{\Sigma}^{eq, kh})_{ij} e_{ij}^p \rangle = \langle (C_{\Sigma}^{eq, kh})_{ij} e_{ij}(u) \rangle$$

On peut écrire d'après le chapitre II que :

$$A_{ijkl} (C_{\Sigma}^{eq, kh})_{ij} = e_{lm}(u^{kh})$$

En tenant compte du principe de macro-homogénéité de Hill-Mandel :

$$\begin{aligned}
 \langle A_{ijkl} \sigma_{lm} (C_{\Sigma}^{eq, kh})_{ij} \rangle &= \langle e_{lm}(u^{kh}) \sigma_{lm} \rangle \\
 &= \langle e_{lm}(u^{kh}) \rangle \langle \sigma_{lm} \rangle \\
 &= A_{khlm}^{eq} \Sigma_{lm}
 \end{aligned}$$

de la même manière :

$$\begin{aligned}
 \langle (C_{\Sigma}^{eq, kh})_{ij} e_{ij}(u) \rangle &= \langle (C_{\Sigma}^{kh})_{ij} \rangle \langle e_{ij}(u) \rangle \\
 &= \langle e_{kh}(u) \rangle \\
 &= E_{kh}
 \end{aligned}$$

ce qui donne finalement :

$$(5.4) \quad A_{khlm}^{eq} \Sigma_{lm} + \langle (C_{\Sigma}^{eq})_{ij}^{kh} e_{ij}^p(y, \sigma) \rangle = E_{kh}$$

La réduction du 2e terme de cette équation suppose la connaissance de la répartition des déformations plastiques sur le V-E-R. Elles déterminent aussi le potentiel moyen sur le V-E-R qui est le potentiel de dissipation du matériau équivalent conformément à Suquet (1980) [1] et Francfort, Nguyen, Suquet (1983). Par conséquent, le matériau équivalent possède une infinité de variables internes qui sont les déformations plastiques microscopiques. Le problème d'évolution élastoplastique est indissociable de son homologue microscopique.

C'est ainsi que Suquet (1983) [5] a proposé une modélisation simplifiée comportant un nombre fini de variables internes. Plus particulièrement, Andrieux (1983) a proposé pour homogénéiser les bétons fissurés, un modèle à deux variables internes qui sont les discontinuités de déplacement tangentielles et normales aux lèvres de la fissure. A noter aussi une application originale de Mohamed Rachad (1986), en appliquant les techniques de l'homogénéisation sur la structure cristalline microscopique des métaux et en envisageant la possibilité de glissement à l'interface entre les cristaux, il a retrouvé les concepts classiques de la plasticité.

5.1.1 Déformation plastique macroscopique

Au niveau macroscopique, on écrit la partition classique des déformations :

$$E = E^e + E^p$$

avec :

E^e déformation élastique macroscopique

E^p déformation plastique macroscopique

Comme $E^e = A^{eq} : \Sigma$, on a :

$$E = A^{eq} : \Sigma + E^p$$

en comparant avec (5.4), il apparaît que :

$$E_{kh}^p = \langle (C_{\Sigma}^{eq})^{kh} : e^p \rangle$$

Ce qui signifie que la déformation plastique macroscopique n'est pas comme pour les autres grandeurs, la moyenne sur le V-E-R de son homologue microscopique.

Cependant, si on se place dans le cas de la méthode de l'homogénéisation, avec l'hypothèse de compatibilité des déformations plastiques, on se propose de montrer que :

$$E^p = \langle e^p \rangle$$

On sait alors que :

$$\left[\begin{array}{l} e^p \text{ est } Y \text{ périodique} \\ \exists u^p \text{ avec } e^p = c(u^p) \end{array} \right.$$

ce qui permet d'écrire :

$$\langle (C_{\Sigma}^{\text{hom}})^{\text{kh}}_{ij} e_{ij}^{\text{p}} \rangle = \langle (C_{\Sigma}^{\text{hom}})^{\text{kh}}_{ij} e_{ij}(u^{\text{p}}) \rangle = \langle (C_{\Sigma}^{\text{hom}})^{\text{kh}}_{ij} \rangle \langle e_{ij}(u^{\text{p}}) \rangle = \langle e_{ij}^{\text{p}} \rangle$$

ce qui établit le résultat.

5.1.2 Résultat de convergence

En reprenant le domaine et les notations de la fig. II.1 et du § 2.4, le problème d'évolution défini sur le milieu hétérogène périodique dépend du rapport d'échelle ε et vérifie à l'instant t . Le système d'équation :

$$\left[\begin{array}{ll} \text{div } \sigma_{\varepsilon}(t) + f = 0 & \text{dans } \nu \\ A : \sigma_{\varepsilon}(t) + e_{\varepsilon}^{\text{p}}(t) = e(u_{\varepsilon}(t)) & \text{dans } \nu \\ \text{si } f_e(x, y, \sigma_{\varepsilon}(t)) < 0 \Rightarrow d e_{\varepsilon}^{\text{p}} = 0 & \\ \text{si } f_e(x, y, \sigma_{\varepsilon}(t)) = 0 & \left\{ \begin{array}{l} * \frac{\partial f_e}{\partial \sigma_{\varepsilon}} : d\sigma_{\varepsilon} \geq 0 \quad d e_{\varepsilon}^{\text{p}} = d\lambda \frac{\partial f_e}{\partial \sigma_{\varepsilon}} \text{ avec } d\lambda \geq 0 \\ * \frac{\partial f_e}{\partial \sigma_{\varepsilon}} : d\sigma_{\varepsilon} < 0 \quad d e_{\varepsilon}^{\text{p}} = 0 \end{array} \right. \\ \sigma_{\varepsilon}(t).n = F_{\text{su}}(t) & \text{sur } \Gamma_{F_{\text{su}}} \\ u_{\varepsilon}(t) = \overline{u}(t) & \text{sur } \Gamma_u \end{array} \right.$$

Suquet (1982) [2] a établi la convergence lorsque ε tend vers 0 des champs de contrainte et de déplacement vers la solution $\Sigma(t)$ et $u_0(t)$ du problème d'évolution posé sur le matériau équivalent issu de la méthode de l'homogénéisation et vérifiant le système d'équations :

$$\left[\begin{array}{ll} \text{div}_x (\Sigma(t)) + f = 0 & \text{dans } \nu \\ A^{\text{hom}} : \Sigma(t) + \langle (C_{\Sigma}^{\text{hom}}) : e^{\text{p}} \rangle = E(u_0(t)) & \text{dans } \nu \\ + \text{la règle d'écoulement élastoplastique} & \\ u_0(t) = \overline{u}(t) & \text{sur } \Gamma_u \\ \Sigma(t).n = F_{\text{su}}(t) & \text{sur } \Gamma_{F_{\text{su}}} \end{array} \right.$$

e^{p} dépend de toute l'histoire du chargement en contrainte macroscopique, il est obtenu par résolution sur la cellule de base, et jusqu'à l'instant t du problème d'évolution défini par le système d'équations (5.1).

5.2 ADAPTATION NUMERIQUE EN VUE DE L'OBTENTION DE LOIS D'EVOLUTION MACROSCOPIQUES

Nous nous intéressons exclusivement aux méthodes :

- de Hill - Mandel, approche primale
- de l'homogénéisation.

En effet, les applications qui suivent cette étude seront menées exclusivement sur le matériau multicouche avec l'approche primale de la méthode de Hill - Mandel et avec la méthode de l'homogénéisation.

Michel (1984) a utilisé ces deux méthodes pour l'étude macroscopique de plaques en aluminium perforées. Sur des composites à fibres courtes, Agarwal, Lifshitz, Broutman (1974) ont déterminé des courbes de réponse, contrainte-déformation macroscopiques, en utilisant l'approche primale de Hill - Mandel. Sur des composites à fibres longues, Velliappan, Curiskis (1984) ont réalisé le même type d'étude par l'approche duale de Hill - Mandel.

5.2.1 Formulation variationnelle

L'état de déformation plastique de la cellule de base, étant fixé, on donne pour un niveau de contrainte macroscopique donné la formulation locale du problème d'homogénéisation

$$\left[\begin{array}{ll} \text{div}_y \sigma = 0 & \text{dans } Y \\ \sigma = a : (e(u) - e^P) & \text{dans } Y \\ \langle \sigma \rangle = \Sigma \\ + \text{C-M-m} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

On décompose le champ de déplacement sous la forme :

$$u = E.y + v$$

par conséquent (5.5) devient :

$$(5.6) \quad a : E + a : e(v) = \sigma + a : e^P$$

en passant à la moyenne sur le V-E-R, et en prémultipliant par un champ de déformation E^*

$$E^* : \langle a \rangle : E + E^* : \langle a : e(v) \rangle = E^* : \langle \sigma \rangle + E^* : \langle a : e^P \rangle$$

de la même manière, en multipliant (5.6) par un champ de déformation $e(\psi)$, le champ de déplacement ψ appartenant au même espace que celui de v et en passant ensuite à la valeur moyenne :

$$\langle a : e(\psi) \rangle : E + \langle a : e(\psi) : e(v) \rangle = \langle \sigma : e(\psi) \rangle + \langle a : e(\psi) : e^P \rangle$$

On se propose maintenant d'établir que :

$$\langle \sigma : e(\psi) \rangle = 0$$

a) Approche primale de la méthode de Hill - Mandel.

La condition C-M-m est alors :

$$u = E y \quad \text{sur } \partial Y$$

par conséquent les champs v et ψ sont nuls sur la périphérie du V-E-R. En reprenant les développements de l'annexe 3, on a immédiatement :

$$\langle \sigma : e(\psi) \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \sigma_{ij} \psi_i n_j d(\partial Y) = 0$$

d'où la formulation variationnelle du problème d'évolution :

$$(5.7) \quad \begin{cases} E^* : \langle a \rangle : E + E^* : \langle a : e(v) \rangle = E^* : \Sigma + E^* : \langle a : e^P \rangle \\ \langle a : e(\psi) \rangle : E + \langle a : e(\psi) : e(v) \rangle = \langle a : e(\psi) : e^P \rangle \\ \text{avec } v \text{ et } \psi \text{ nulles sur } \partial Y \end{cases}$$

b) Méthode de l'homogénéisation

ψ vérifie des conditions de périodicité, on a d'après le chapitre II :

$$\langle \sigma : e(\psi) \rangle = 0$$

La formulation variationnelle reste identique à (5.7) avec cependant v et ψ qui respectent des conditions de périodicité sur la cellule de base.

Par rapport à la phase élastique, il apparaît dans la matrice de force deux termes résultant de la plastification du V-E-R :

$$\begin{cases} * & E^* : \langle a : e^P \rangle \\ * & \langle a : e(\psi) : e^P \rangle \end{cases}$$

5.2.2 Discrétisation aux éléments finis

Nous donnons la discrétisation des termes liés à la plastification :

$$E^* \langle a : e^P \rangle = {}^t E^* \sum_{i=1}^{n_c} \left(\int_{\Omega_c} a : e^P d\Omega \right)$$

$$\langle a : e(\psi) : e^P \rangle = {}^t \psi \sum_{i=1}^{n_c} {}^t T^c \left(\int_{\Omega_c} {}^t B_c a : e^P d\Omega \right)$$

En posant :

$$F_{P1} = \sum_{i=1}^{n_e} \left(\int_{\Omega_e} a : e^P d\Omega \right)$$

$$F_{P2} = \sum_{i=1}^{n_e} t_{T^e} \left(\int_{\Omega_e} t_{B^e} a : e^P d\Omega \right)$$

l'expression discrétisée de la formulation variationnelle devient :

$$(t_{E^*}, t_{\psi'}) R_T \begin{pmatrix} E \\ V \end{pmatrix} = (t_{E^*}, t_{\psi'}) (F + F^P)$$

$$\text{avec } F = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F^P = \begin{bmatrix} F_{P1} \\ F_{P2} \end{bmatrix}$$

5.2.3 Adaptation du code Pecplas

Ce code de calcul a été développé au Laboratoire de Mécanique de Lille pour l'analyse des structures à comportement non linéaire.

En reprenant la discrétisation précédente, on a l'équation :

$$(5.8) \quad R_T X - F - F^P = 0$$

X représente le vecteur des inconnues du problème.

Les matrices représentant les inconnues et les forces plastiques sont données à la fin de l'itération K par X_K et F_K^P

$$\text{avec } (5.9) \quad X_K = X_{K-1} + \delta X_K$$

$$(5.10) \quad F_K^P = F_{K-1}^P + \delta F_K^P$$

Un calcul itératif permet de déterminer la répartition de la déformation plastique résultant de chaque incrément de chargement.

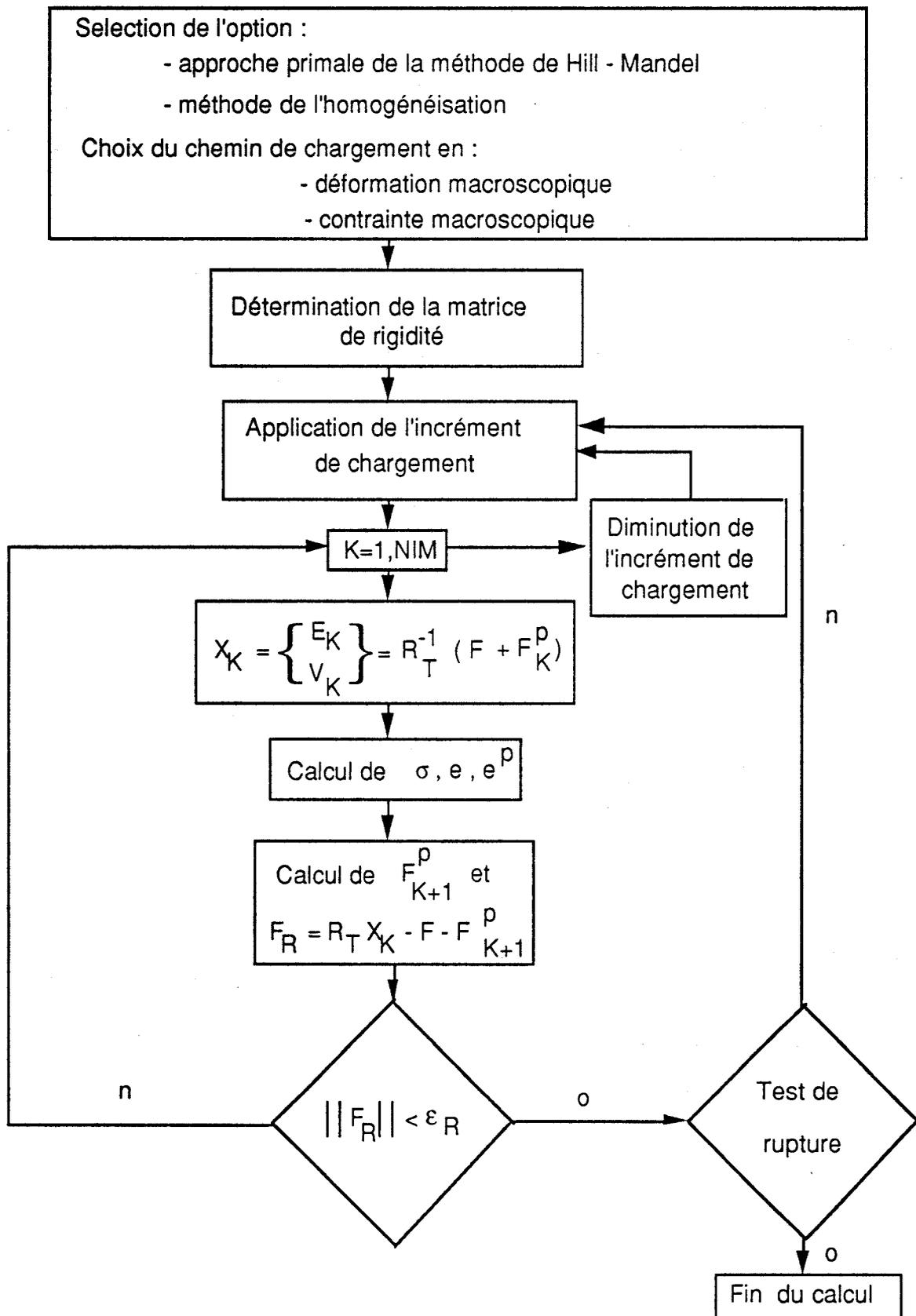


fig. V.1 : Structure du code permettant la détermination de la loi d'évolution du matériau équivalent

En reportant (5.9), (5.10) dans (5.8) et en procédant par regroupement :

$$R_T \delta X^K - \delta F_R = 0$$

avec
$$\delta F_R = - \delta F_K^P + F_R$$

F_R représente les forces non équilibrées à l'itération précédente, il est donné par :

$$F_R = R_T X_{K-1} - F_K^P - F$$

la variation des inconnues pendant la $K^{\text{ième}}$ itération est donnée par :

$$\delta X^K = R_T^{-1} \delta F_R$$

C'est-à-dire que les forces non équilibrées sont réparties à l'aide de la matrice de souplesse initiale de la structure. Il s'agit de la méthode de Newton-Raphson modifiée ; néanmoins, il existe d'autres procédés accélérant la convergence. Ils tiennent compte de la diminution de la rigidité de la structure due à la plastification au cours du chargement. L'inconvénient vient du fait qu'il faut inverser à chaque fois une nouvelle matrice de rigidité, ce qui augmente les temps et les coûts de calcul. Sur la fig. IV.1, nous indiquons la structure du code de calcul permettant la détermination de la loi d'évolution du matériau équivalent.

Nous arrêtons le calcul lorsque :

- le palier plastique, et par conséquent, la rupture sont atteints. Au niveau du programme, nous avons imposé que les conditions suivantes soient réalisées :

$$\|\Delta \Sigma\| < 10^{-5} \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \|\Delta E^P\| > 0,2 \%$$

Pour la méthode de l'homogénéisation, les conditions de périodicité ont été introduites par la méthode des multiplicateurs de Lagrange présentée en annexe 6.

5.3 SIMULATION NUMERIQUE SUR DES STRATIFIES

5.3.1 Nature des simulations

Nous présentons des études sur les multicouches associés à la terre armée et aux colonnes ballastées, et dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont données aux chapitres III et IV.

Nous avons déterminé les lois d'évolution du matériau équivalent sur un chemin de déformation macroscopique plane dans le plan (y_1, y_2) . Ce qui pose le problème théorique de la coïncidence avec une loi d'évolution déterminée en partant d'un état de déformation plan au niveau microscopique. Ce problème est schématisé sur la fig. V.2.

Pour la méthode de l'homogénéisation, et si les constituants sont isotropes, on a prouvé l'équivalence de ces démarches en annexe 7.

Ainsi, pour cette méthode, la loi d'évolution macroscopique en déformation plane a pu être obtenue en ramenant cette hypothèse au niveau local microscopique. Nous avons considéré que les matériaux constituant le composite obéissent à des critères de "Mohr-Coulomb" en déformation plane, l'expression de ce critère est définie par:

$$f_e = \sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 4\sigma_{12}^2} + \sin \varphi (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - 2C \cos \varphi < 0$$

C et φ désignent la cohésion et l'angle de frottement interne.

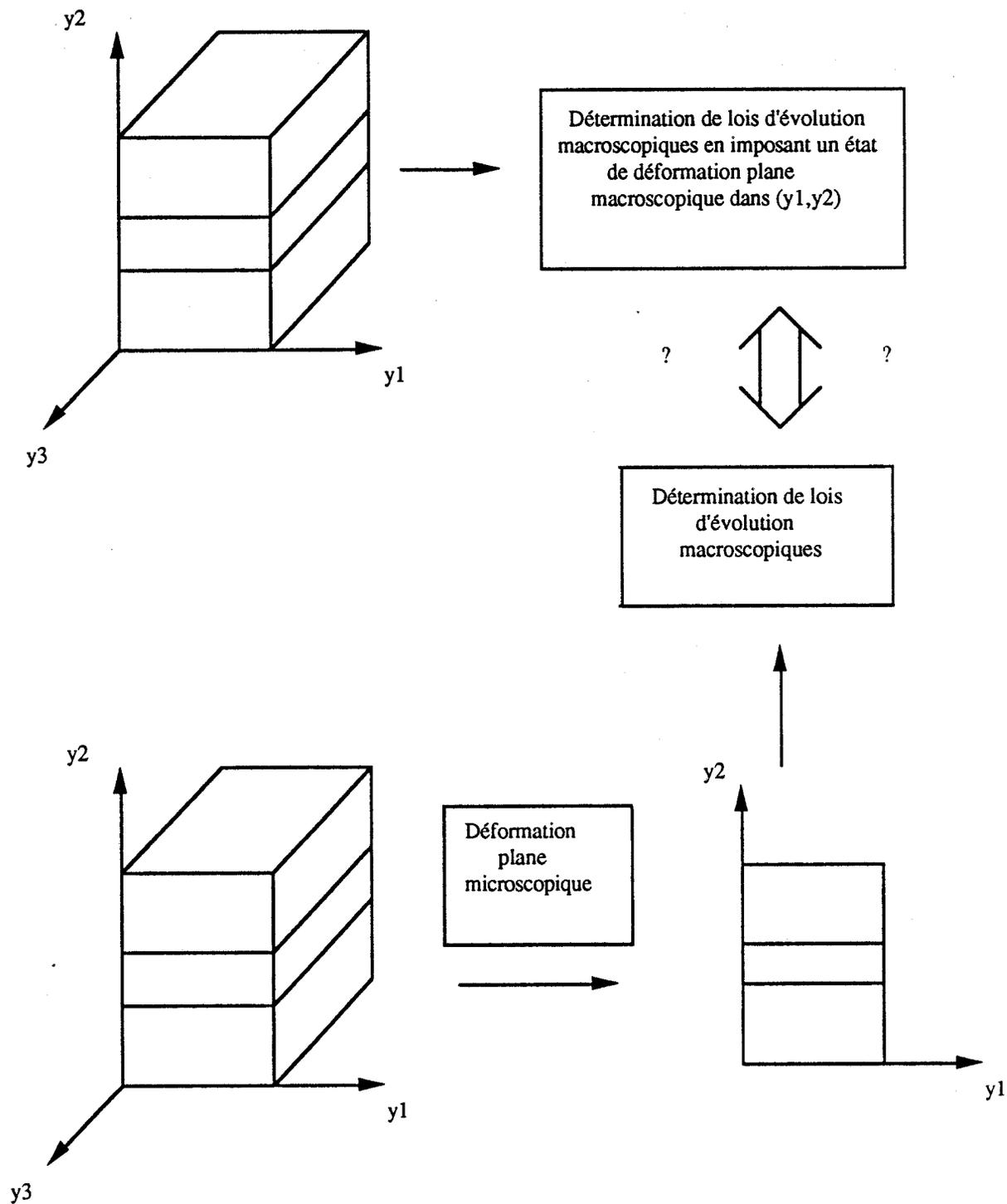


fig. V.2 : Problème théorique lié à l'étude bidimensionnelle en déformation plane

Les essais réalisés par simulation numérique, se sont déroulés en deux parties. Nous avons d'abord imposé une consolidation dans le plan de déformation plane, selon deux chemins :

- Une consolidation homogène isotrope (C-H-I) obtenue en imposant artificiellement un état de contrainte microscopique homogène et isotrope accompagné d'une déformation nulle.

- Une consolidation isotrope (C-I) obtenue, de manière classique, en chargeant macroscopiquement la cellule de base jusqu'à un état de contrainte isotrope fixé.

A partir de cette consolidation, nous avons imposé, jusqu'à la rupture, un tenseur de contrainte macroscopique sans rotation des axes principaux, et comme indiqué sur la fig. V.3, les composantes des incréments

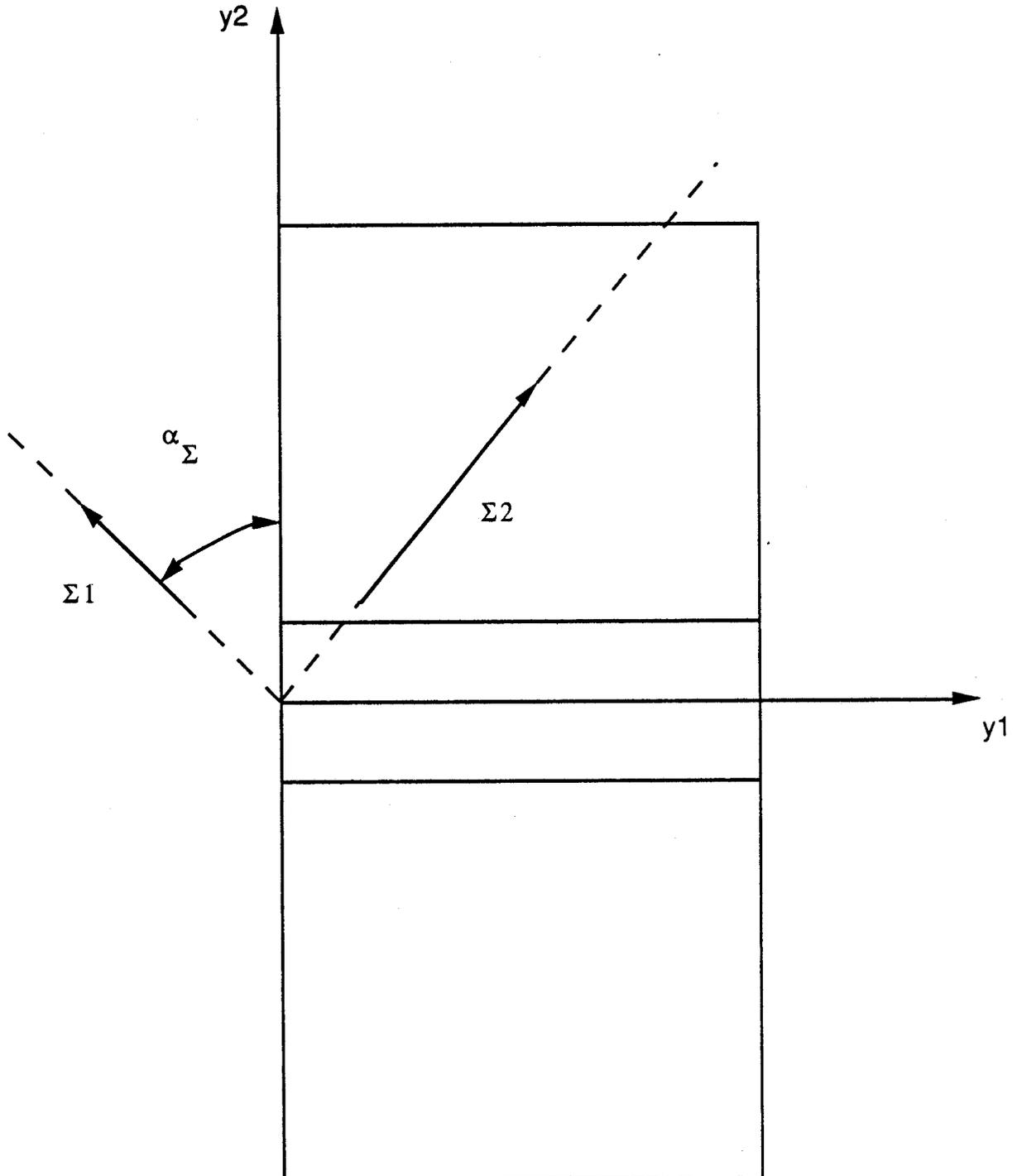


fig. V.3 : Direction des axes principaux du tenseur de contrainte macroscopique

de ce tenseur dans le repère (y_1, y_2) sont :

$$d\Sigma_{11} = [d\Sigma_1 + d\Sigma_2 + (d\Sigma_2 - d\Sigma_1) \cos(2\alpha_\Sigma)] / 2$$

$$d\Sigma_{22} = [d\Sigma_1 + d\Sigma_2 - (d\Sigma_2 - d\Sigma_1) \cos(2\alpha_\Sigma)] / 2$$

$$d\Sigma_{12} = [d\Sigma_2 - d\Sigma_1] \sin(2\alpha_\Sigma) / 2$$

avec $\alpha_\Sigma = (y_2, \Sigma_1)$

Σ_1 et Σ_2 désignent respectivement les contraintes principales mineure et majeure.

Nous avons réalisé des essais en :

- compression suivant Σ_1 , $d\Sigma_1 \neq 0$ et $d\Sigma_2 = 0$
- traction suivant Σ_2 , $d\Sigma_1 = 0$ et $d\Sigma_2 \neq 0$

Pour chaque essai, nous avons représenté :

- Σ_1
- Σ_2
- la différence des contraintes principales $Q = \Sigma_2 - \Sigma_1$
- la pression moyenne en restreignant le tenseur de contrainte macroscopiques à ses composantes dans le plan (y_1, y_2) soit $PM = (\Sigma_1 + \Sigma_2)/2$ en fonction de la déformation équivalente.

$$EQ = \sqrt{E_{11}^2 + E_{22}^2 + 2E_{12}^2}$$

L'anisotropie a pour conséquence la non coïncidence des directions principales des tenseurs de contrainte et de déformation définies pour ces derniers par :

$$\alpha_E = (y_2, E_1)$$

C'est pourquoi nous avons tracé leur évolution en fonction de la déformation équivalente.

5.3.2 Application à la terre armée

5.3.2.1 Approche primale de la méthode de Hill - Mandel

Après une consolidation C-H-I à 1 bar, nous avons réalisé une série d'essais de compression suivant Σ_1 , tout en laissant Σ_2 constant. Pour $\alpha_\Sigma = 0$ ou 90° , il n'y a pas de cisaillement et les directions des axes principaux de contrainte et de déformation restent confondues avec les axes du repère (y_1, y_2) . C'est pourquoi, pour ce type d'essais, l'évolution de ces grandeurs n'a pas été présentée. Pour $\alpha_\Sigma = 60^\circ$ (fig. V.7) et pour $\alpha_\Sigma = 90^\circ$ (fig.V.9), le comportement du type élastique - parfaitement plastique qui est mis en évidence correspond à une coïncidence des limites d'élasticité et de rupture dans ces directions de sollicitation. Pour $\alpha_\Sigma = 30^\circ$, on note, après une phase élastique, une plastification progressive jusqu'à la rupture (fig. V.5), ce qui est beaucoup moins marquée pour $\alpha_\Sigma = 0$ (fig.V.4).

Pour $\alpha_\Sigma = 30^\circ$ (fig. V.6) et pour $\alpha_\Sigma = 60^\circ$ (fig. V.8), on voit une différence des directions des axes principaux de déformation et de contrainte à la rupture. De plus, on remarque une évolution de la direction des axes principaux du tenseur de déformation dès qu'il y a plastification.

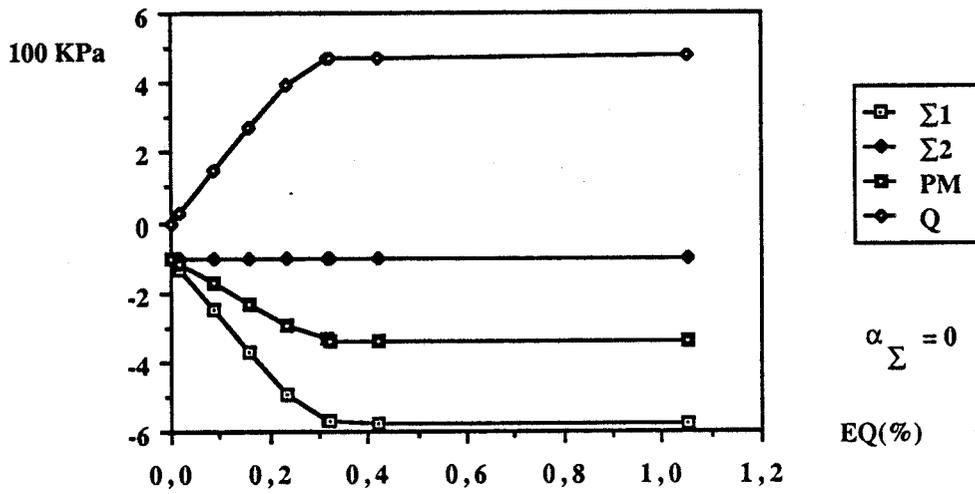


fig V 4 : méthode de Hill-Mandel sur la terre armée, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.1 MPa

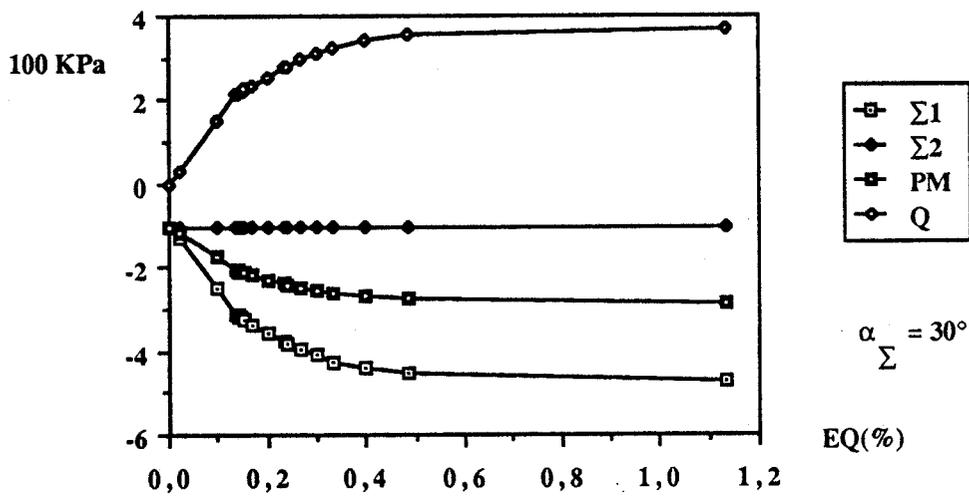


fig V 5 : méthode de Hill-Mandel sur la terre armée, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.1 MPa

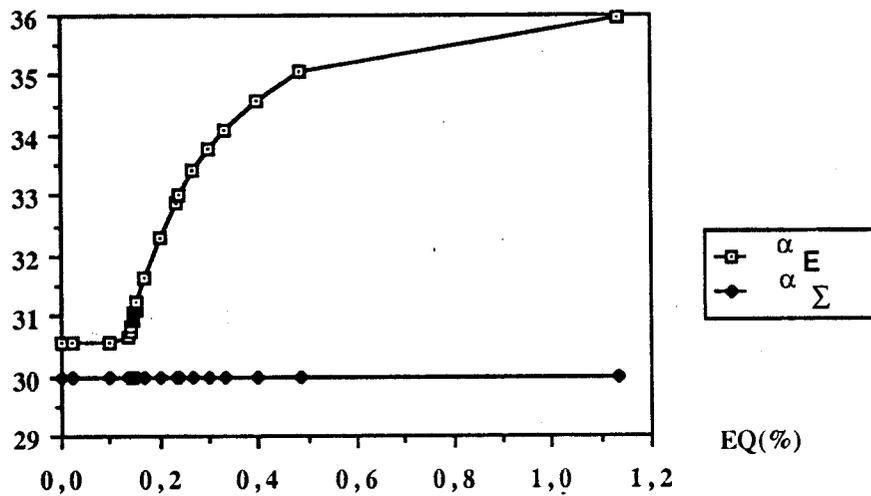


fig V 6 : méthode de Hill-Mandel sur la terre armée, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.1 MPa
 évolution des axes principaux

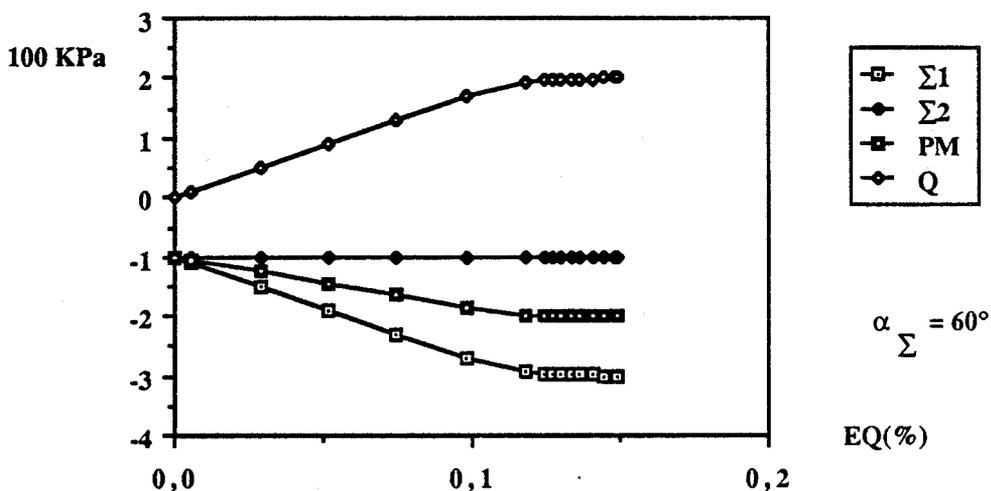


fig V 7: méthode de Hill-Mandel sur la terre armée, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.1 MPa

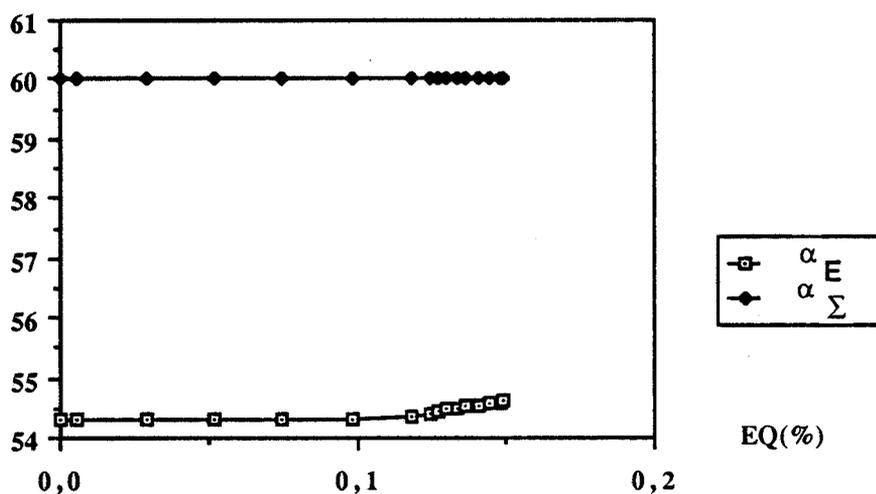


fig V 8: méthode de Hill-Mandel sur la terre armée, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.1 MPa
 évolution des axes principaux

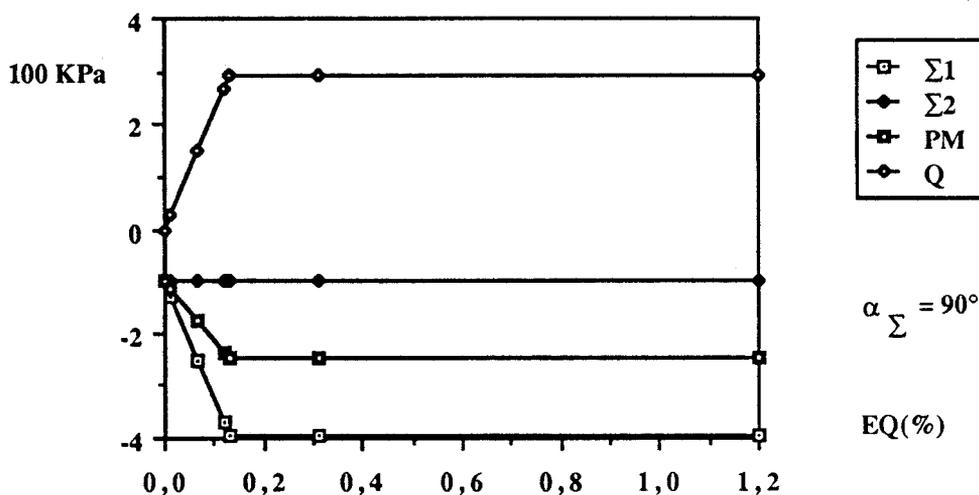


fig V 9: méthode de Hill-Mandel sur la terre armée, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.1 MPa

Cette constatation peut s'expliquer de la manière suivante . Au début de l'essai, l'état de déformation macroscopique est nulle ; par conséquent, comme la direction du tenseur de contrainte reste constante, et que seul son module change, la relation de l'élasticité macroscopique implique que la direction du tenseur de déformation macroscopique est fixe lors de la phase élastique.

En utilisant les coordonnées cartésiennes $(\alpha_\Sigma, \Sigma_2 - \Sigma_1)$, nous avons mis en évidence l'anisotropie des limites d'élasticité et de rupture sur la fig. V.10.

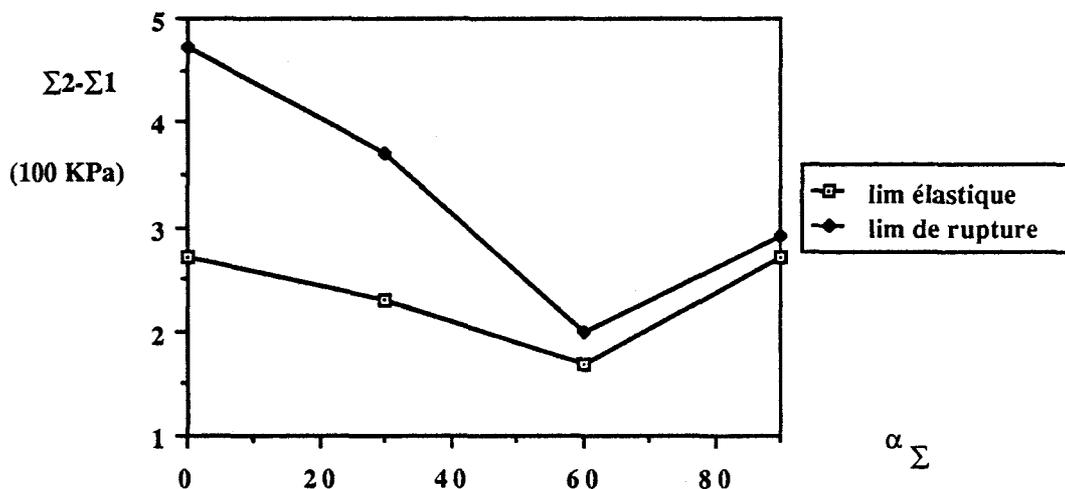


fig V 10: anisotropie de la terre armée, à partir d'essais de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.1 MPA, méthode de Hill-Mandel

On note conformément aux considérations de Boehler (1975), une résistance minimale pour une inclinaison du tenseur de contrainte comprise entre 50° et 70°.

5.3.2.2 Méthode de l'homogénéisation

5.3.2.2.1 Comportement associé du sable

a) Essai à partir de consolidation C-H-I

Nous avons réalisé deux séries d'essais en compression suivant Σ_1 en partant respectivement d'une C-H-I de -0,05 MPa et de -0,1 MPa.

* Essais de compression

Pour $\alpha_\Sigma = 0$ (fig. V.11), on distingue une très légère rupture de pente lors de l'entrée en plastification. Pour faire apparaître l'irréversibilité de façon plus probante, nous avons effectué sur la fig. V.12 un déchargement, mettant en évidence l'existence de déformation plastique macroscopique.

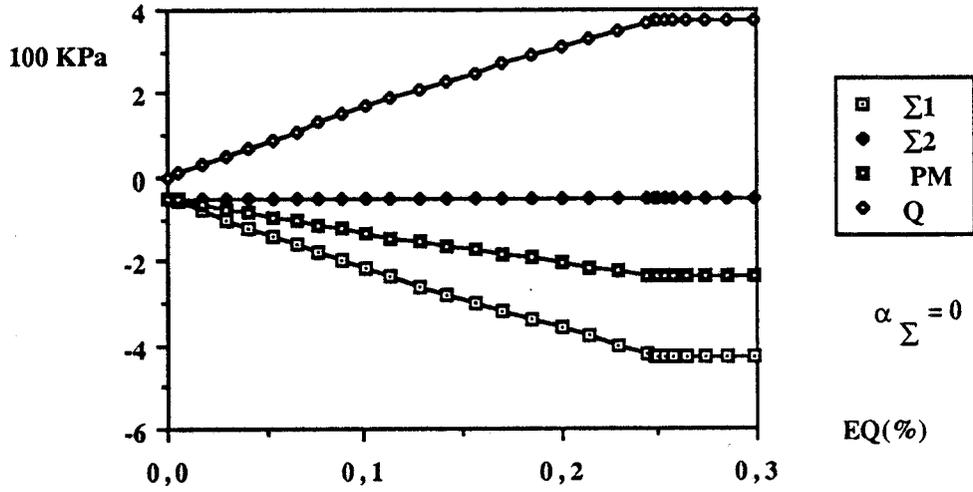


fig V 11: homogénéisation de la terre armée, essai de compression en $\Sigma 1$, après C-H-I de -0.05 MPa

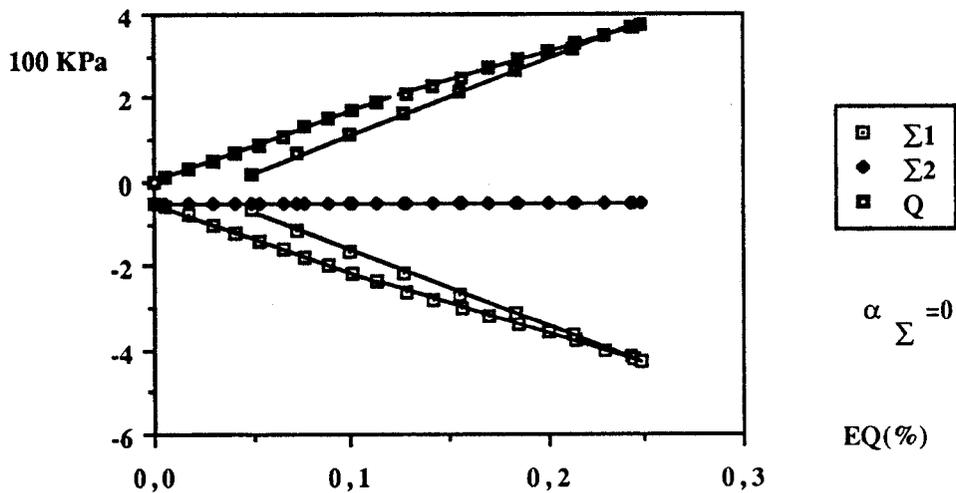


fig V 12: homogénéisation de la terre armée, essai de compression en $\Sigma 1$, après C-H-I de -0.05 MPa simulation de déchargement

Pour $\alpha_{\Sigma} = 15^{\circ}$, on voit bien la coïncidence du début de variation des axes principaux du tenseur de déformation sur la fig. V.14 avec la première rupture de pente de la fig. V.13 qui correspond à l'entrée en plastification du matériau.

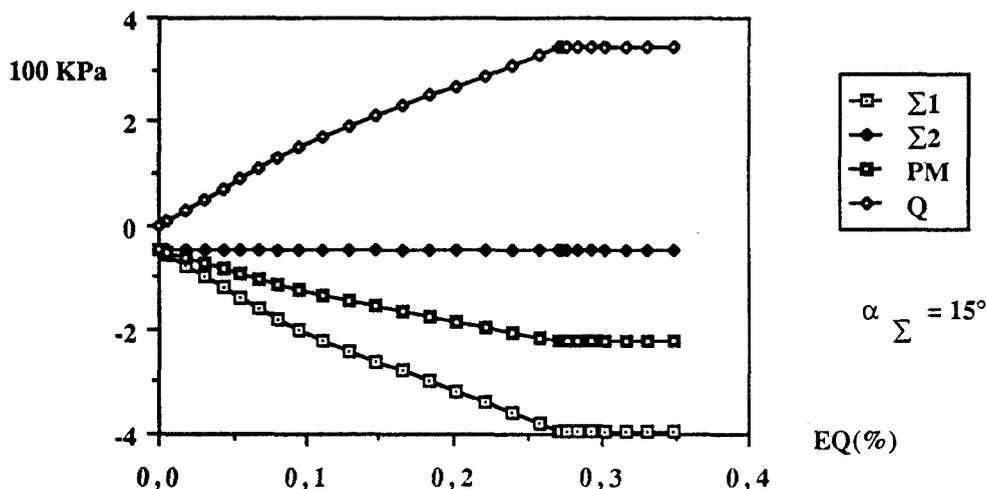


fig V 13: homogénéisation de la terre armée,essai de compression suivant Σ_1 ,après C-H-I de -0.05 MPa

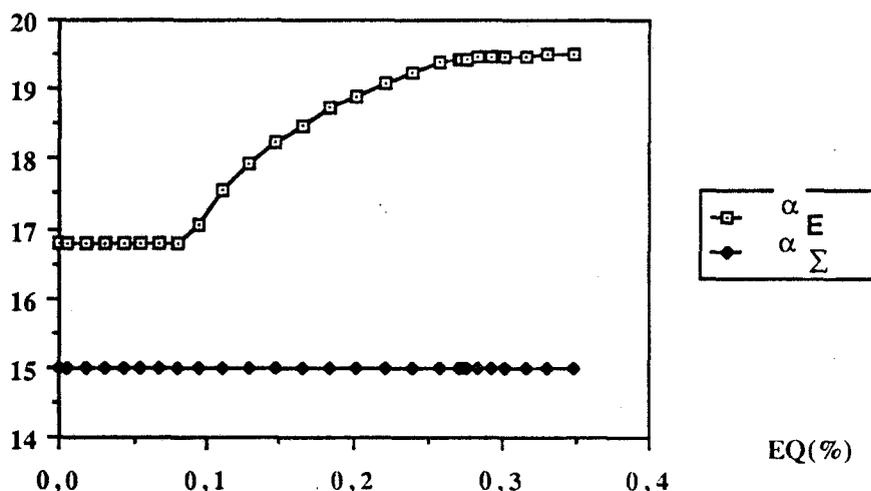


fig V 14: homogénéisation de la terre armée,essai de compression suivant Σ_1 ,après C-H-I de -0.05 MPa
 évolution des axes principaux

Sur la fig. V.15, la rupture de pente due à la plastification est encore plus nette.

Pour $\alpha_{\Sigma} = 45^{\circ}$, on remarque sur la fig. V.16 une diminution progressive de la rigidité entre le début de la plastification et la rupture. Sur la fig. V.17, on remarque une forte différence des axes principaux de contrainte et de déformation à la rupture. Pour une inclinaison du tenseur de contrainte de 60° , on remarque (fig. V.18) un comportement élastique parfaitement plastique.

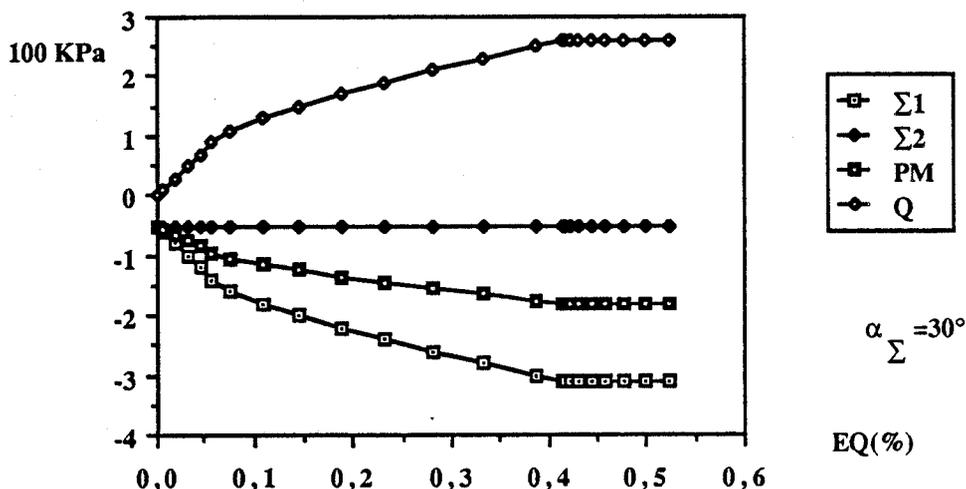


fig V 15: homogénéisation de la terre armée, essai de compression suivant $\Sigma 1$, après C-H-I de -0.05 MPa

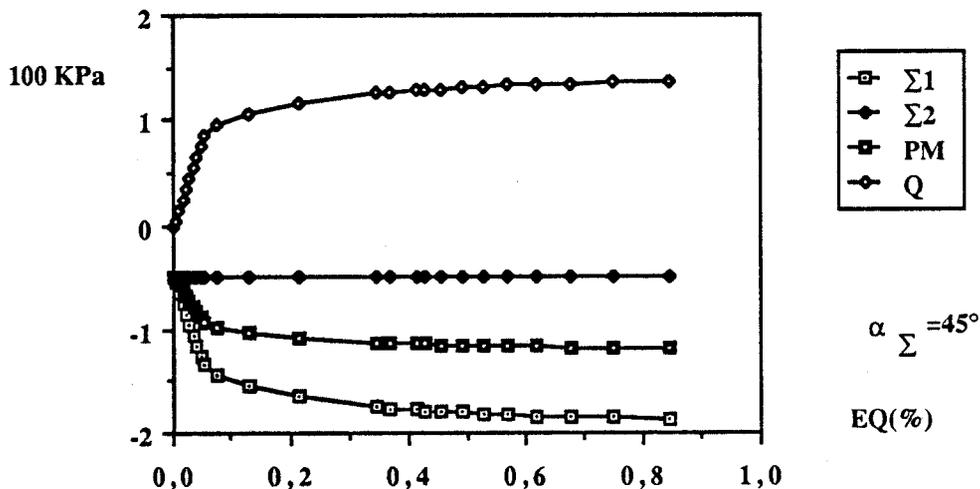


fig V 16: homogénéisation de la terre armée, essai de compression suivant $\Sigma 1$, après C-H-I de -0.05 MPa

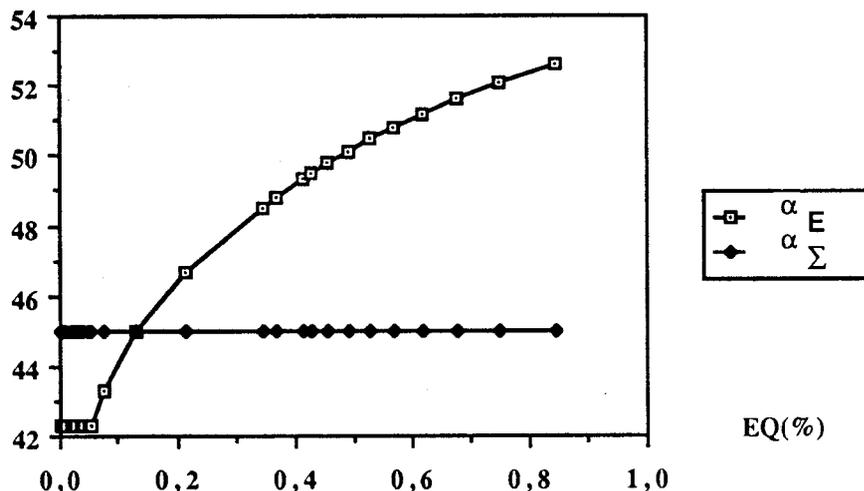


fig V 17: homogénéisation de la terre armée, essai de compression suivant $\Sigma 1$, après C-H-I de -0.05 MPa
 évolution des axes principaux

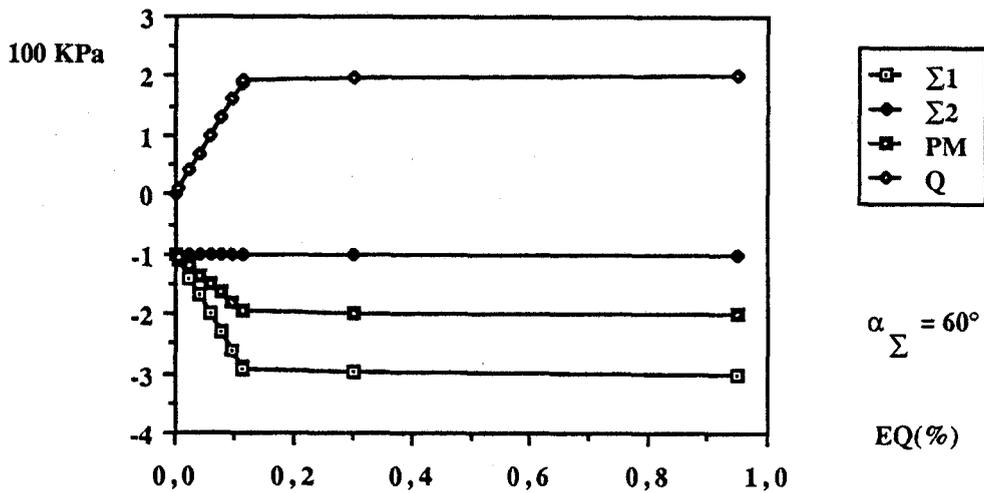


fig V 18: homogénéisation de la terre armée, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.1 MPa

* Essais de traction

Deux séries d'essais en traction ont été réalisées pour les mêmes C-H-I que les essais précédents. Le même phénomène de progressivité de la plastification a été observé pour d'autres directions des axes principaux du tenseur de contrainte : * $\alpha_{\Sigma} = 15^\circ$ (fig. V.19) , * $\alpha_{\Sigma} = 30^\circ$ (fig. V.20)

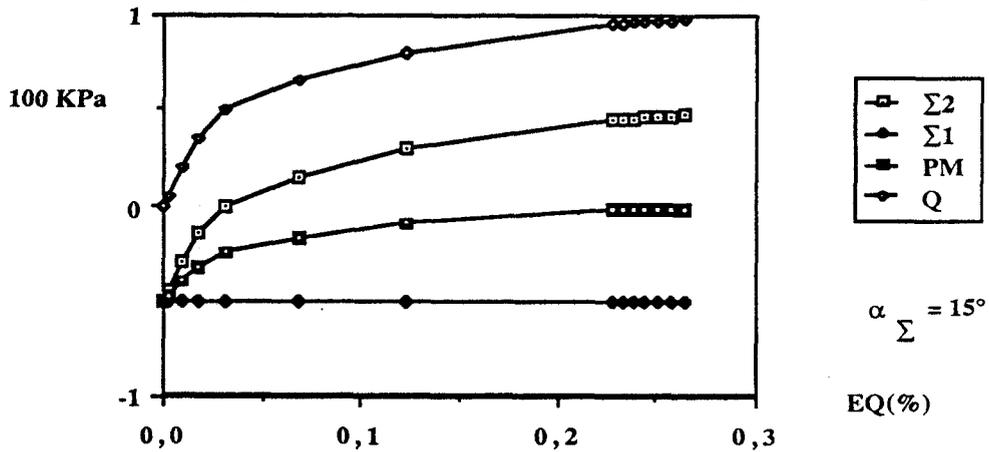


fig V 19: homogénéisation sur la terre armée, essai de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.05 MPa

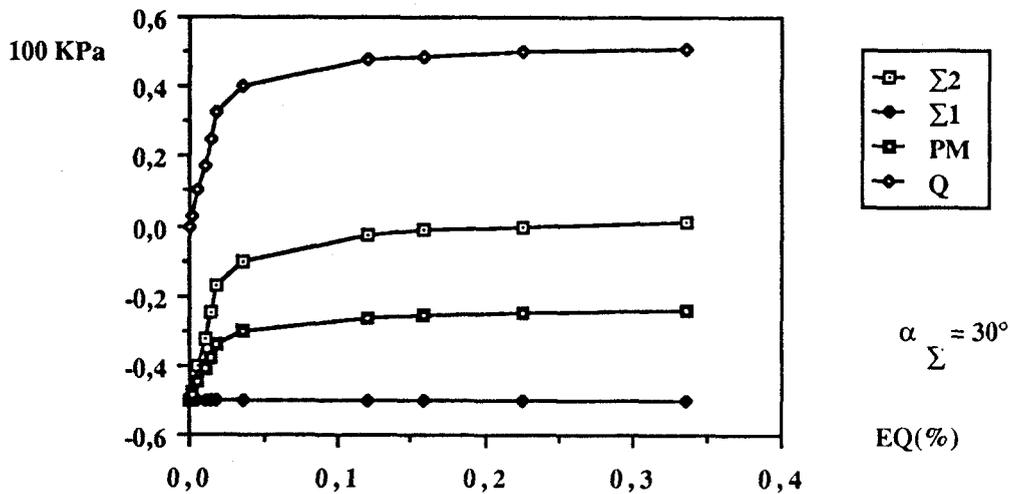


fig V 20: homogénéisation de la terre armée, essai de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.05 MPa

Pour une direction des axes principaux du tenseur de contrainte de 60° , on remarque que la rupture est atteinte quasiment en fin de phase élastique (fig. V.21 et V.22).

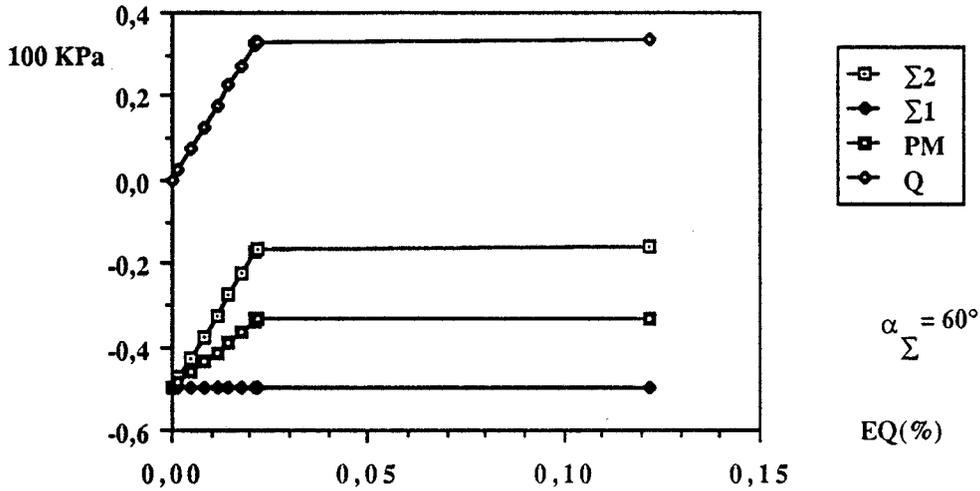


fig V 21: homogénéisation de la terre armée, essai de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.05 MPa

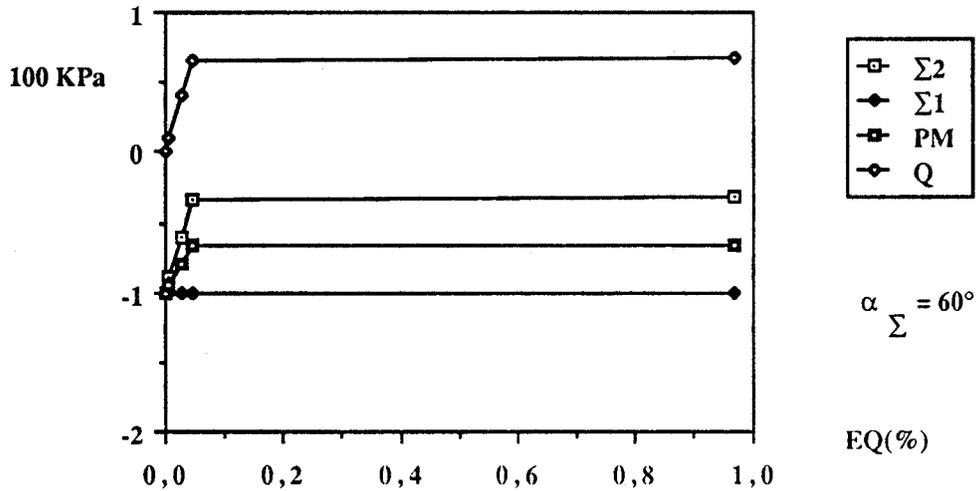


fig V 22: homogénéisation de la terre armée, essai de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.1 MPa

La comparaison des fig. V.10 et V.24 permet de constater que les limites de rupture issues de l'approche primale de la méthode de Hill - Mandel et de la méthode de l'homogénéisation sont sensiblement identiques, ce qui vérifie le résultat du chapitre IV, prévoyant des charges de rupture inférieures ou égales pour la méthode de l'homogénéisation.

Au niveau de l'écroutissage, pour $\alpha_\Sigma = 30^\circ$ la comparaison des fig. V.5 et V.23 fait ressortir une progressivité beaucoup plus importante pour la méthode primale de Hill - Mandel. En effet, l'observation du niveau microscopique montre que l'entrée en plastification s'effectue de manière très progressive par opposition à la méthode de l'homogénéisation qui conduit à une plastification uniforme par le bloc dans chaque constituant. Les fig. V.24 et V.25 mettent en évidence les anisotropies des limites élastique et de rupture. On constate un minimum lorsque α_Σ est proche de 60° qui est proche de $\pi/4 + \varphi/2$

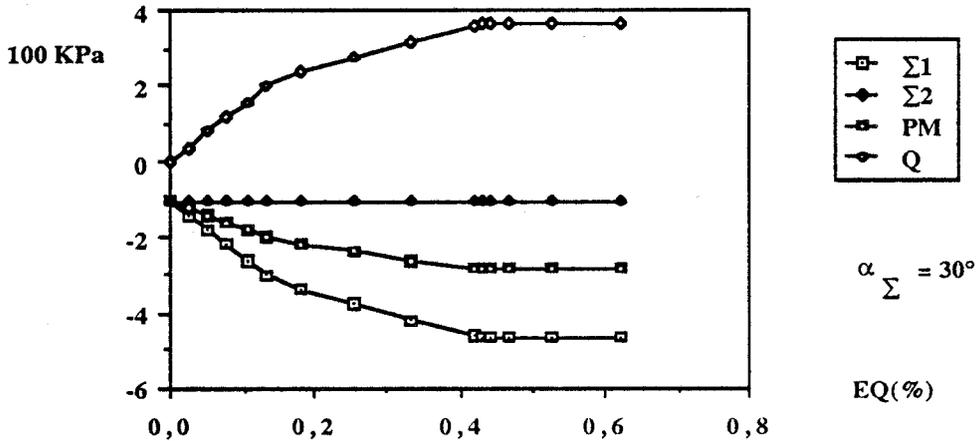


fig V 23: homogénéisation de la terre armée, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.1 MPa

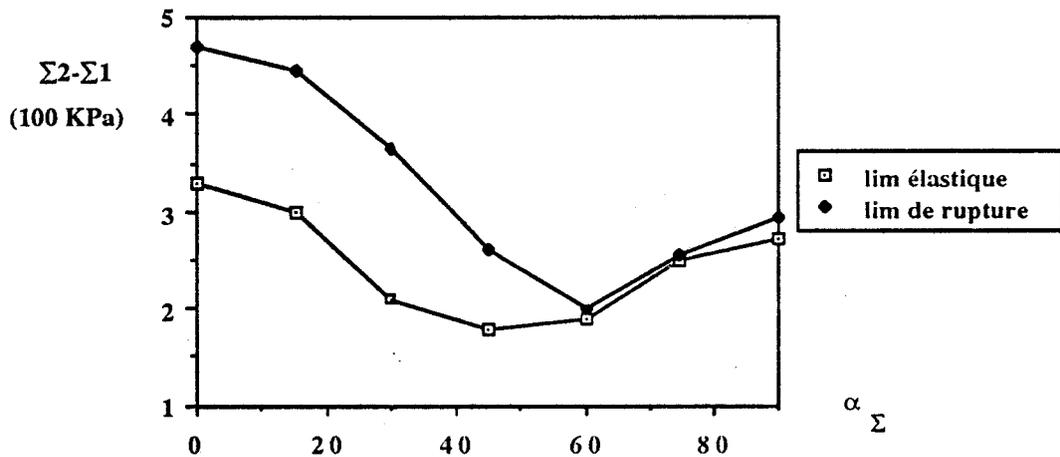


fig V 24: anisotropie de la terre armée, à partir d'essais de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.1 MPa, méthode de l'homogénéisation

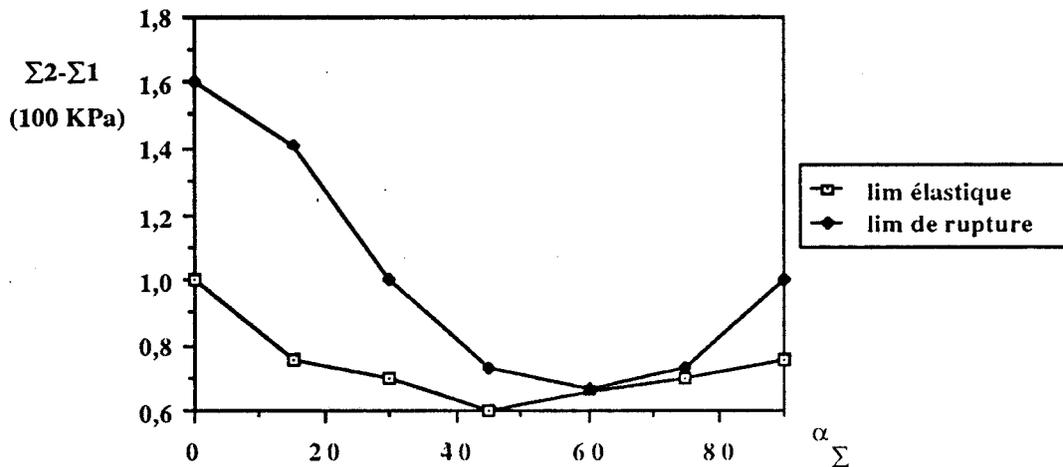


fig V 25: anisotropie de la terre armée, à partir d'essais de traction, après C-H-I de -0.1 MPa, méthode de l'homogénéisation

b) Essai à partir d'une consolidation (C-I)

Après une consolidation à $-0,1$ MPa, nous avons réalisé une série d'essais en compression suivant Σ_1 . Lors de la phase de consolidation, il n'y a pas de cisaillement dans l'échantillon, ce qui se traduit par une coïncidence des directions principales du tenseur de déformation avec les axes de coordonnées ($\alpha_E = 0$).

Dans la deuxième partie de l'essai, l'application d'un déviateur provoque une forte rotation des axes principaux en début de la phase élastique que nous illustrons pour $\alpha_\Sigma = 75^\circ$ (fig. V.27).

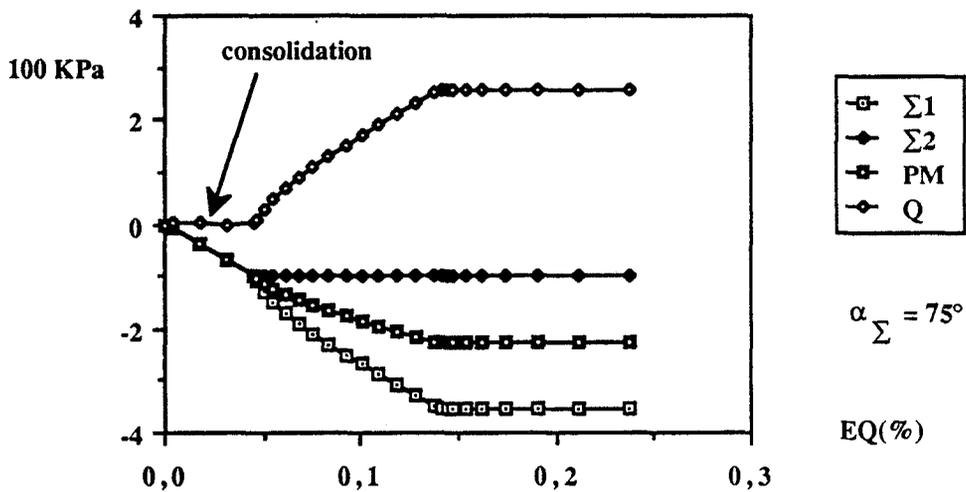


fig V 26: homogénéisation de la terre armée, essai de compression suivant Σ_1 , après C-I de -0.1 MPa

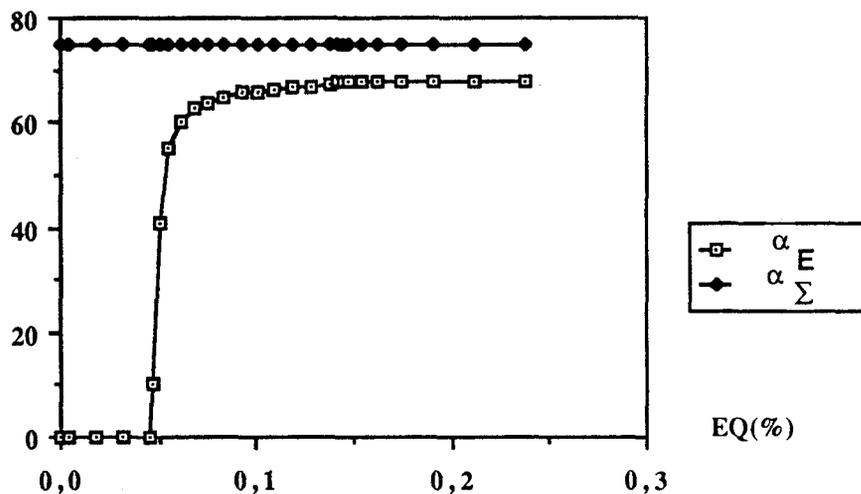


fig V 27: homogénéisation de la terre armée, essai de compression suivant Σ_1 , après C-I de -0.1 MPa
 évolution des axes principaux

La réponse contrainte-déformation équivalente totale que nous avons reporté pour $\alpha_\Sigma = 75^\circ$ et $\alpha_\Sigma = 90^\circ$ montre une non linéarité durant la phase élastique résultant d'une modification du chemin de contrainte macroscopique après la consolidation (fig. V.26), (fig. V.28). Pour $\alpha_\Sigma = 45^\circ$, on remarque que ce phénomène est moins marqué (fig. V.29). Pour observer la linéarité parfaite de la phase élastique, la contrainte et la déformation doivent être comptées à partir de la fin de la consolidation.

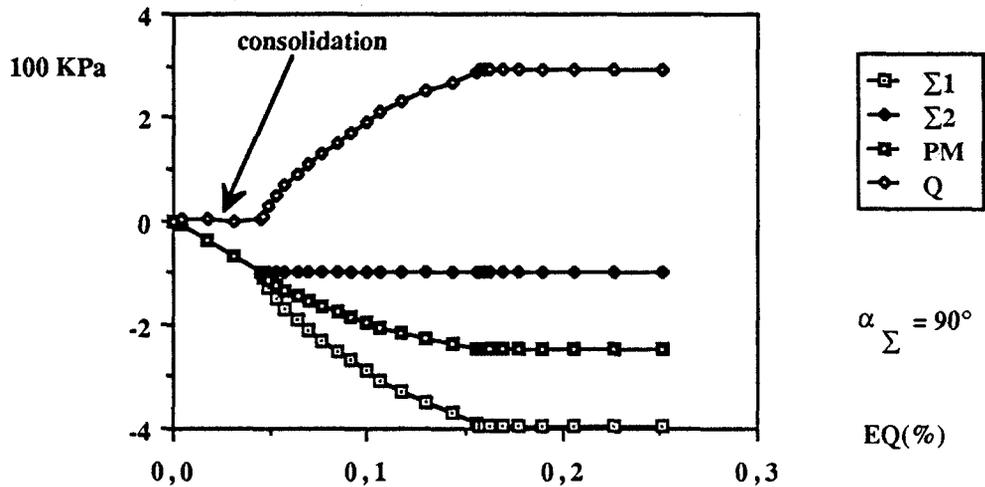


fig V 28: homogénéisation de la terre armée, essai de compression suivant Σ_1 , après C-I de -0.1 MPa

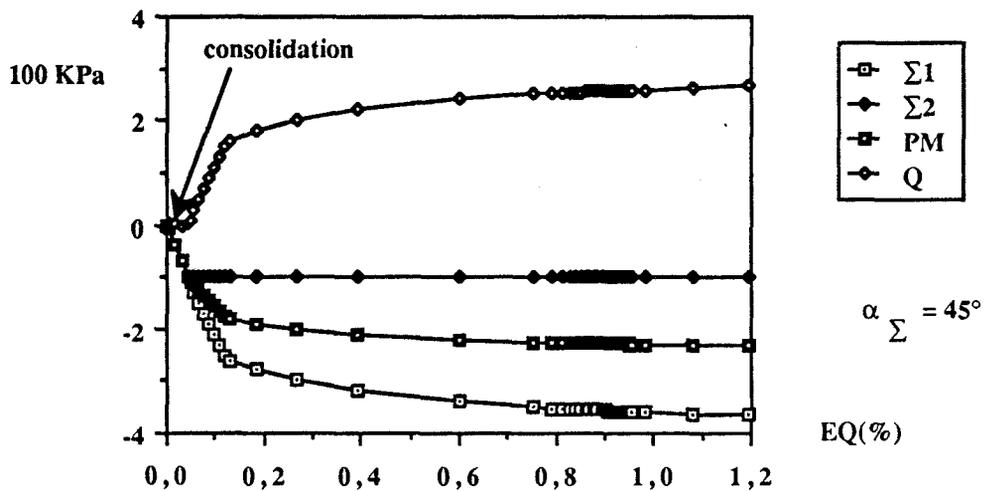
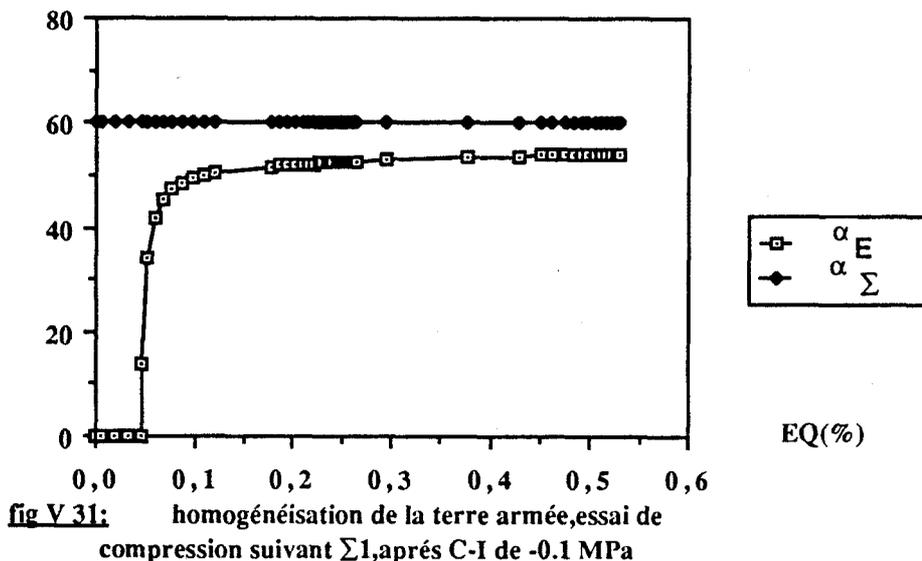
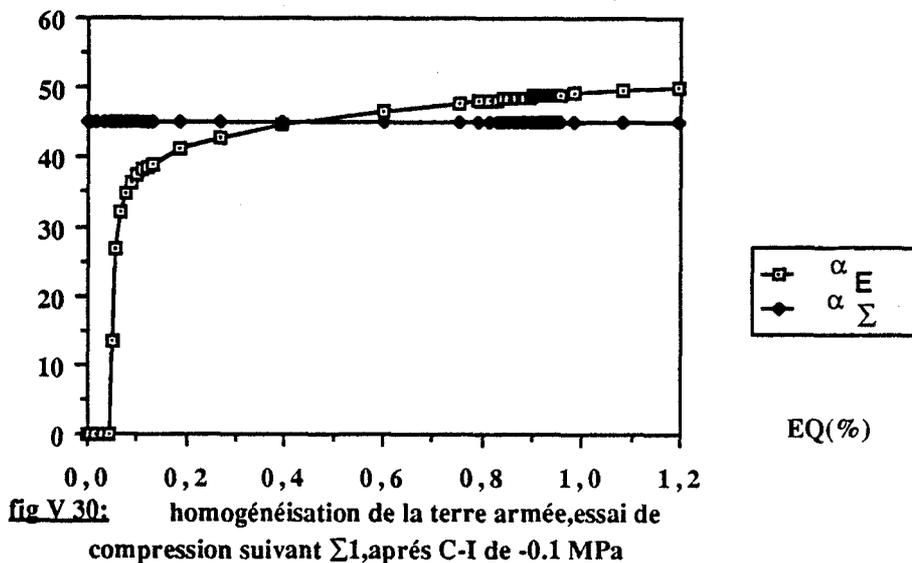


fig V 29: homogénéisation de la terre armée, essai de compression suivant Σ_1 , après C-I de -0.1 MPa

Pour $\alpha_\Sigma = 45^\circ$ (fig V 30) et $\alpha_\Sigma = 90^\circ$ (fig V 31), on note un rapprochement des axes principaux des tenseurs de contrainte et de déformation à la rupture.



Sur la fig. V.32, nous avons fait apparaître l'anisotropie des limites élastiques et de rupture. On note une particularité pour la limite élastique qui présente deux zones de décroissance, ce qui n'est pas envisagé dans le cadre de la théorie simplifiée de l'anisotropie de Boehler (1975). En comparant les fig. V.24 et V.32, on constate que la limite élastique est plus importante pour les essais réalisés après une C-H-I.

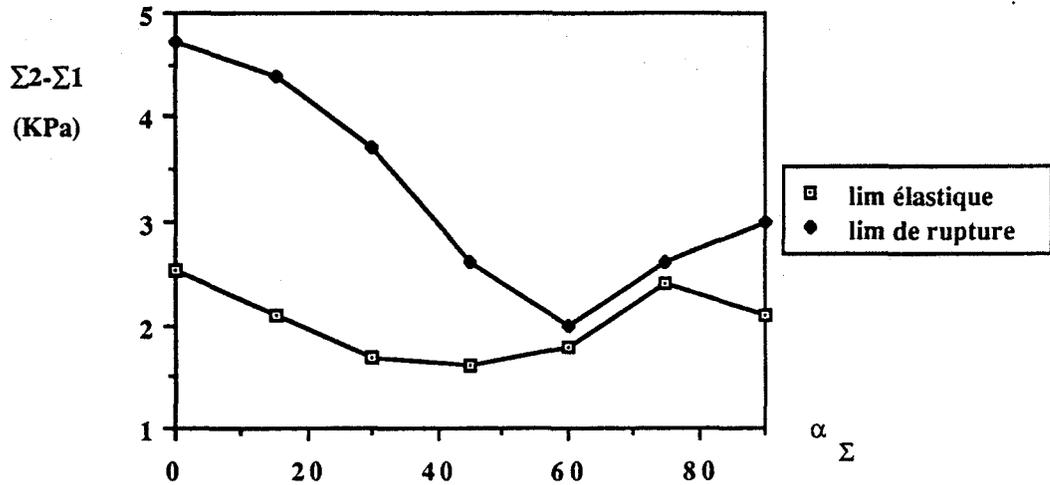


fig V.32: anisotropie de la terre armée, à partir d'essais de compression suivant Σ_1 , après C-I de -0.1 MPa, méthode de l'homogénéisation

Les limites de résistance sont identiques, car le domaine de rupture ne dépend pas, pour un chemin de contrainte macroscopique donné, de l'état de déformation macroscopique.

c) Comparaison avec les limites élastiques et de rupture théorique

La programmation des domaines élastiques et de résistance théorique du chapitre IV a permis de déterminer les limites élastiques et de rupture sur les chemins de contrainte des essais précédents. La théorie et les simulations numériques ont donné des résultats très voisins (fig. V.33). Néanmoins, on note quelques divergences sur les limites élastiques des chemins de traction (fig. V.34 et V.35) qui semblent être liées à des problèmes de précision numérique.

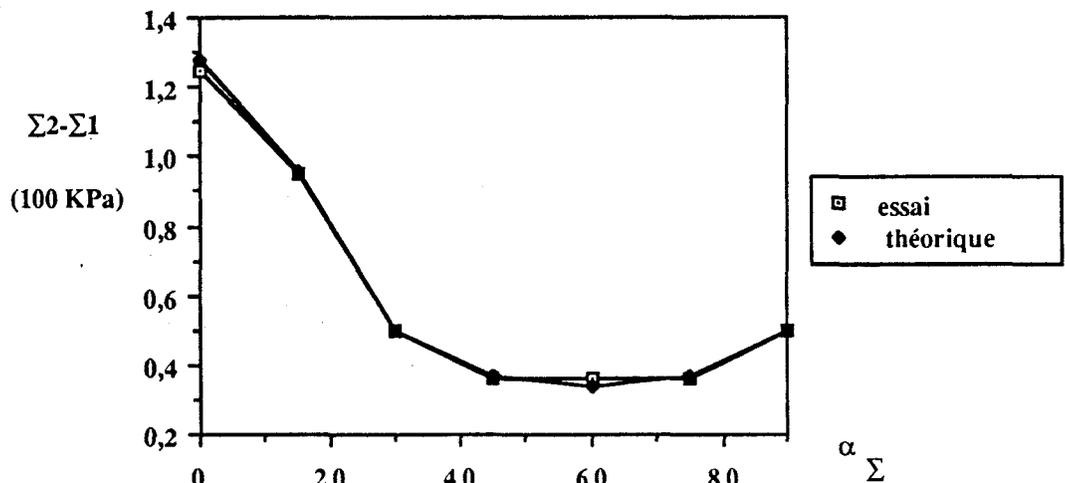


fig V.33: anisotropie de rupture de la terre armée, à partir d'essais de traction suivant Σ_2 , après C-I de -0.05 MPa, comparaison avec les prédictions du critère homogénéisé

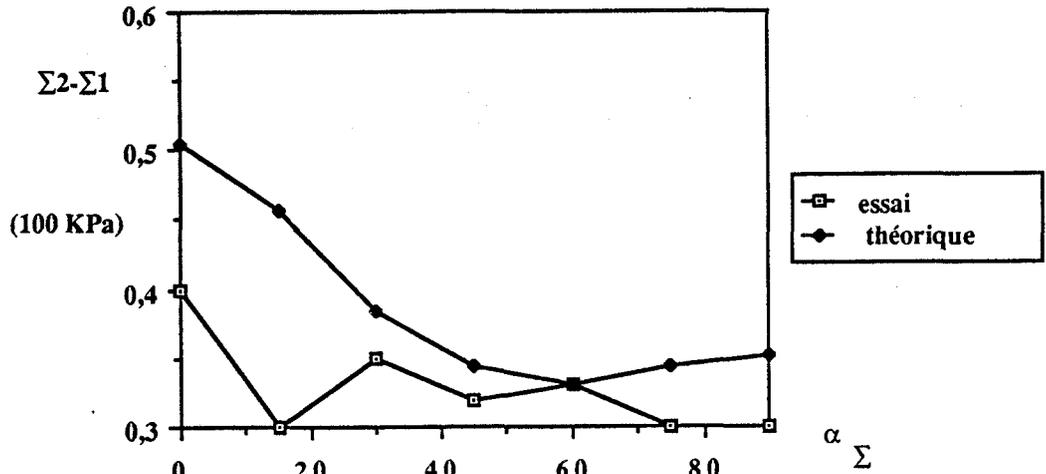


fig V.34: anisotropie élastique de la terre armée, à partir d'essais de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa, comparaison avec les prédictions du critère homogénéisé

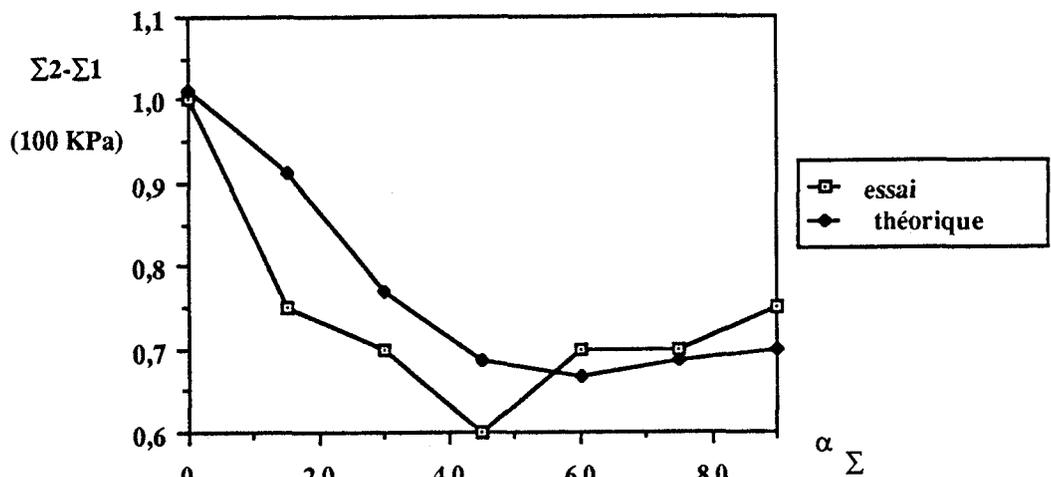


fig V.35: anisotropie élastique de la terre armée, à partir d'essais de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.1 MPa, comparaison avec les prédictions du critère homogénéisé

5.3.2.2.2 Comportement non dilatant du sable

a) Formalisme d'une loi non associée

En réalité les sables n'obéissent pas à une loi d'écoulement associée. Pour un critère de Mohr-Coulomb, elle peut être définie comme suit, en introduisant un angle de dilatance φ_d .

Si l'état de contrainte σ se trouve sur la surface de charge :

$$f_e(\sigma) = \sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 4\sigma_{12}^2} + \sin \varphi (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - 2C \cos \varphi = 0$$

il est possible de lui associer un état de contrainte σ' tq :

$$g = \sqrt{(\sigma'_{22} - \sigma'_{11})^2 + 4\sigma_{12}^2} + \sin \varphi_d (\sigma'_{22} + \sigma'_{22}) - 2C_d \cos \varphi_d = 0$$

la direction de l'incrément du tenseur des déformations plastiques est alors donnée par :

$$de^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma'}$$

de plus σ' et σ doivent vérifier :

$$\sigma : e^p \geq \sigma' : e^p$$

Cette dernière inégalité implique que l'état de contrainte σ n'est pas intérieure au domaine limité par :

$$g = 0$$

La fig. V. 36 schématise graphiquement dans le plan de Mohr-Coulomb cette loi d'écoulement.

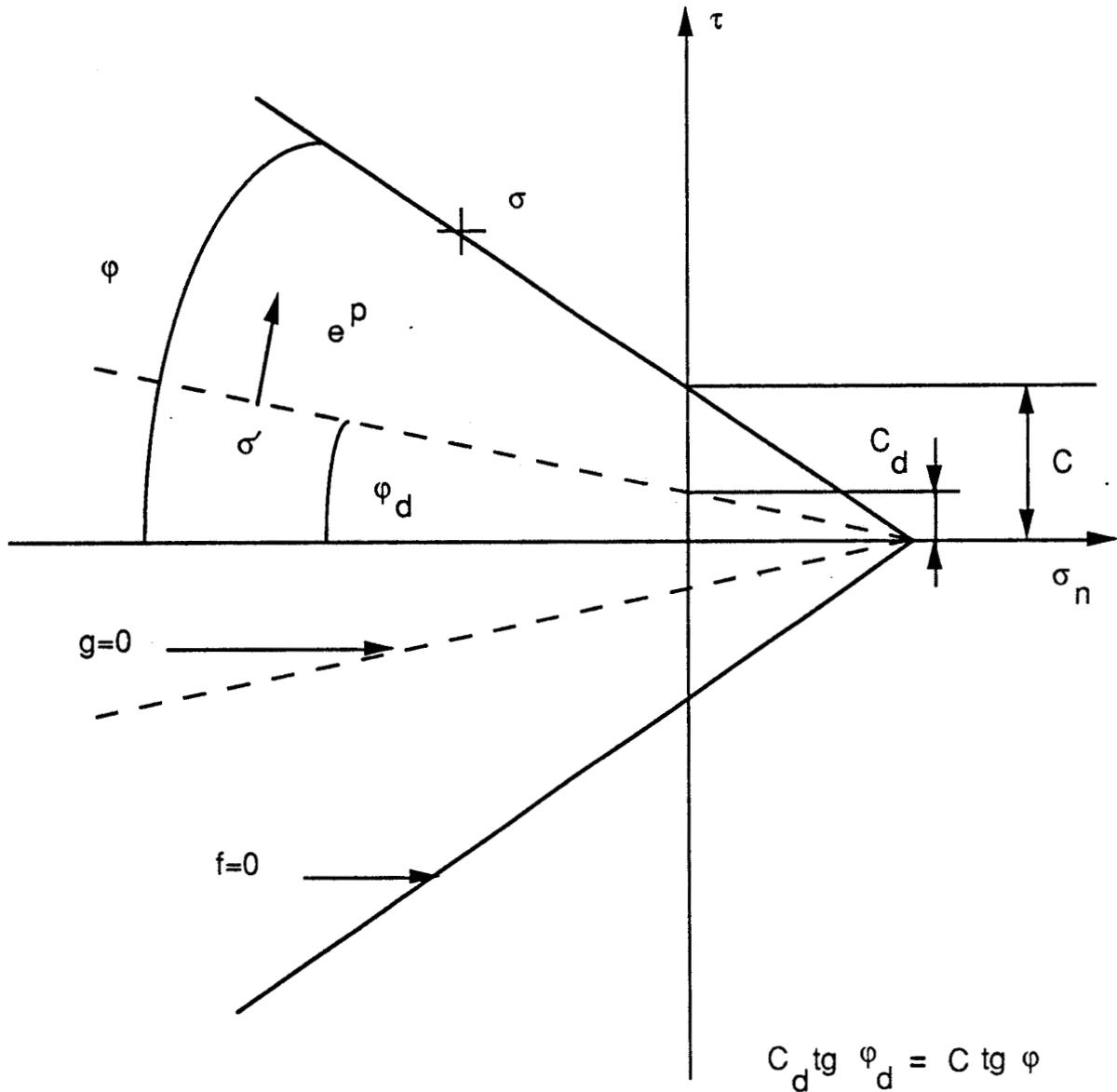


fig. V.36 : Loi non associée de Mohr-Coulomb caractérisée par un angle de dilatance φ_d

b) Essai après C-H-I de - 0,05 MPa

Nous avons effectué une série d'essais en compression suivant $\Sigma 1$ en prenant pour le sable $\varphi_d = 0$. Ce qui donne $\epsilon_v^p = 0$ (sable non dilatant).

Pour $\alpha_\Sigma = 60^\circ$, le comportement est élastique-parfaitement plastique (fig. V.37). Pour $\alpha_\Sigma = 90^\circ$, on peut constater une évolution à écrouissage progressif jusqu'à la rupture (fig. V.38).

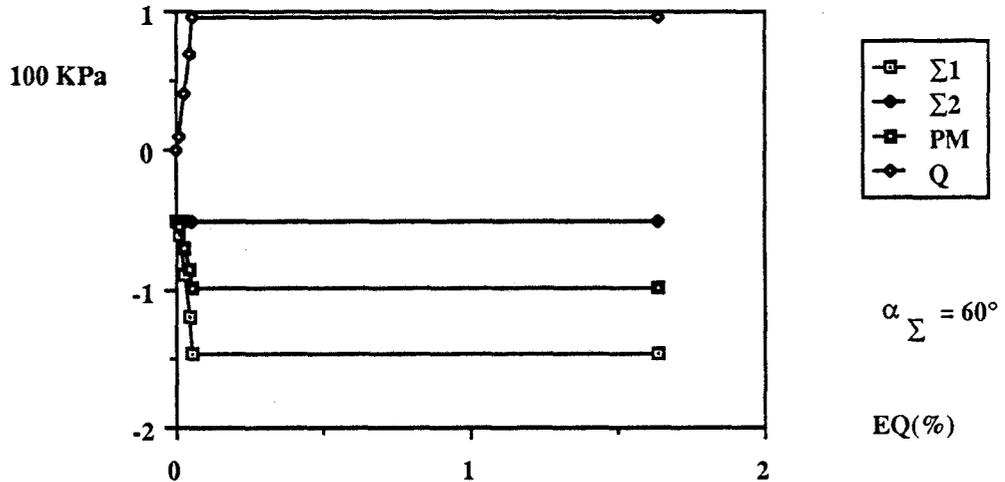


fig V 37: homogénéisation de la terre armée pour un comportement non dilatant du sable, essai de compression suivant $\Sigma 1$, après C-H-I de -0.05 MPa

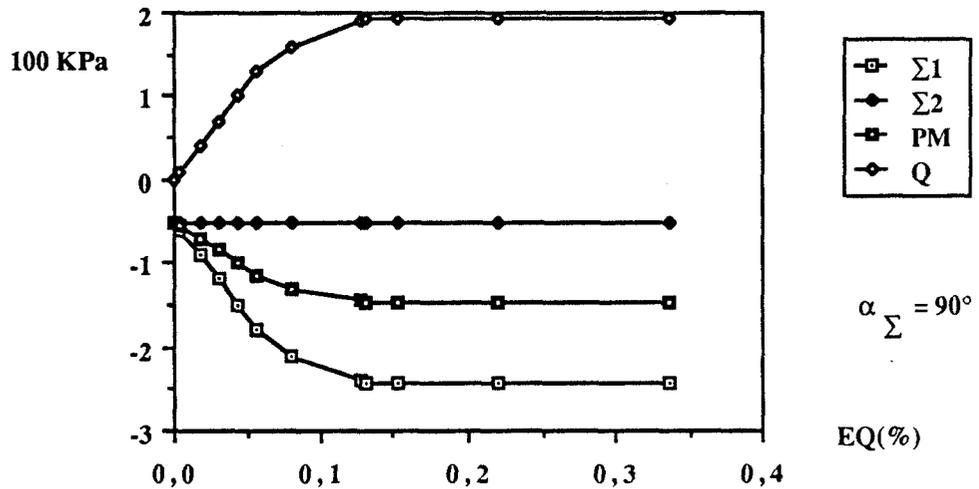


fig V 38: homogénéisation de la terre armée pour un comportement non dilatant du sable, essai de compression suivant $\Sigma 1$, après C-H-I de -0.05 MPa

Sur la fig. V.39, on fait une comparaison avec l'anisotropie à la rupture issue du même type d'essais, mais avec l'hypothèse d'une loi de comportement associée sur le sable. Conformément au théorème d'association, on constate que les limites de rupture de la présente série sont inférieures à celles obtenues avec une loi associée. Par contre, la loi d'écoulement plastique n'a pas d'influence sur les limites élastiques qui restent rigoureusement identiques.

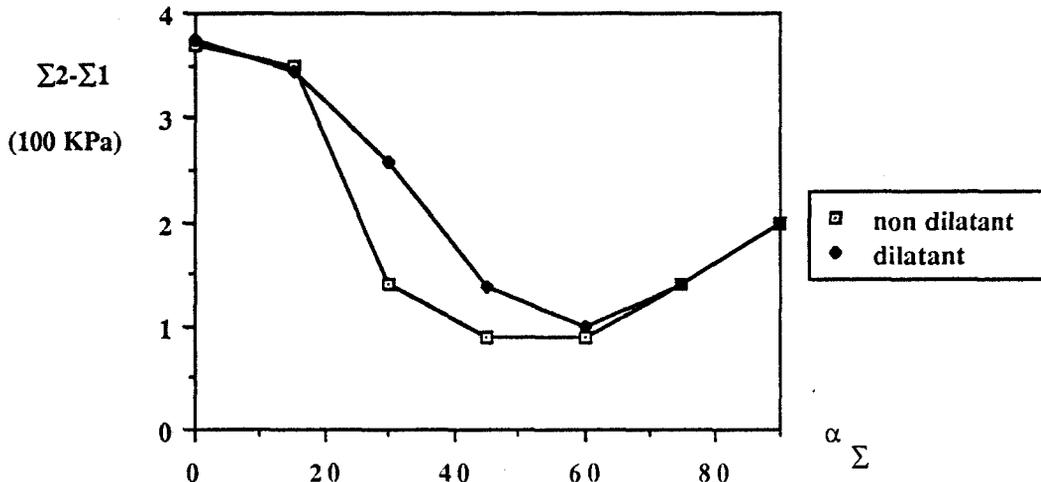


fig V.39: anisotropie de rupture de la terre armée, pour différents comportements du sable et résultant d'essais de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0,05 MPa méthode de l'homogénéisation

5.3.3 Application aux colonnes ballastées

5.3.3.1 Approche primale de la méthode de Hill - Mandel

Après une C-H-I de - 0,05 MPa, nous avons réalisé une série d'essais en compression suivant Σ_1 . Pour $\alpha_\Sigma = 30^\circ$ (fig V.40, V.41) et $\alpha_\Sigma = 60^\circ$ (fig. V.42, V.43), il apparaît que les limites élastiques sont très faibles. Le matériau entre en plastification quasiment dès le début de l'essai.

Au cours du chargement, les courbes montrent une diminution de la rigidité, et par conséquent, une progressivité de l'écroutissage. Les fig. V.41 et V.43 mettent en évidence la coïncidence des directions principales des tenseurs de déformation et de contrainte à la rupture.

La fig. V.44 révèle une faible anisotropie à la rupture. L'anisotropie de la limite élastique présente un maximum pour une direction intermédiaires des axes principaux du tenseur de contrainte, Boehler (1975) envisage la possibilité d'une telle anisotropie pour les charges de rupture. On note que les limites élastiques restent faibles par rapport à celles de la rupture.

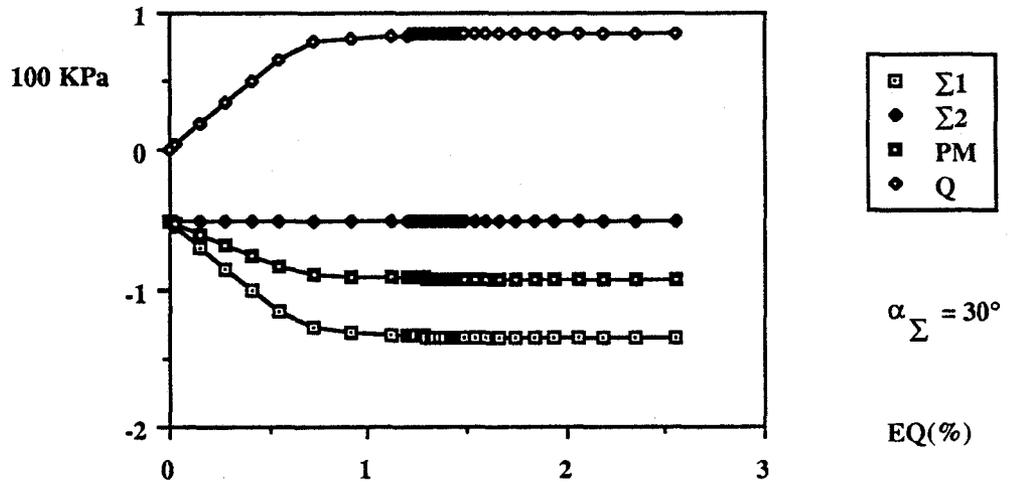


fig V 40: méthode de Hill-Mandel sur colonnes ballastées, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa

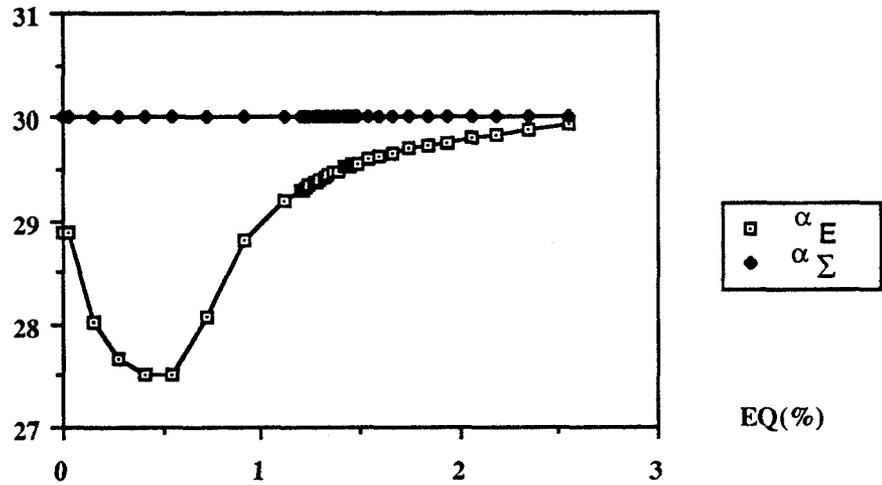


fig V 41: méthode de Hill-Mandel sur colonnes ballastées, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa
 évolution des axes principaux

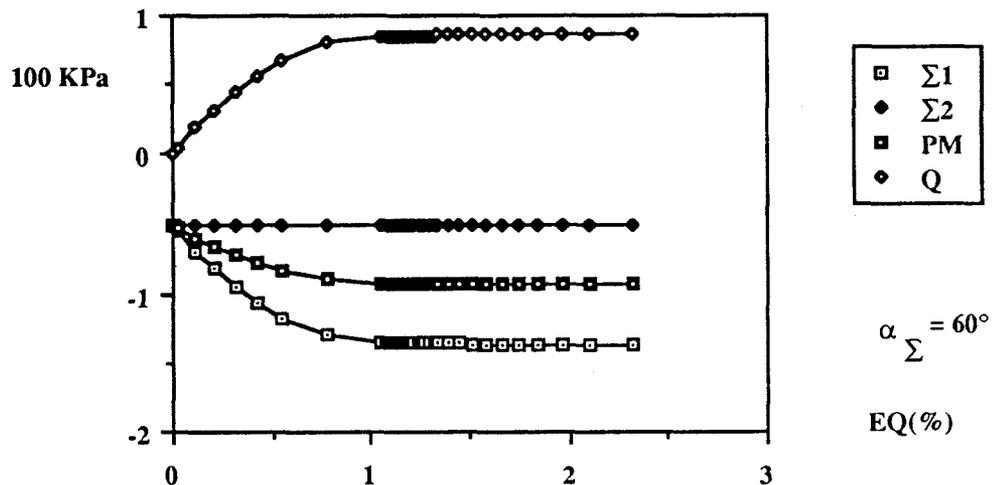


fig V 42: méthode de Hill-Mandel sur colonnes ballastées, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa

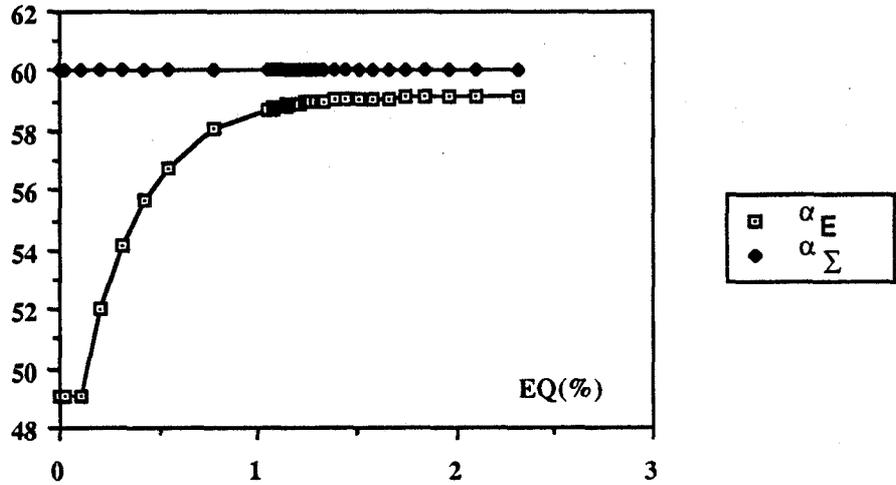


fig V 43: méthode de Hill-Mandel sur colonnes ballastées, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa évolution des axes principaux

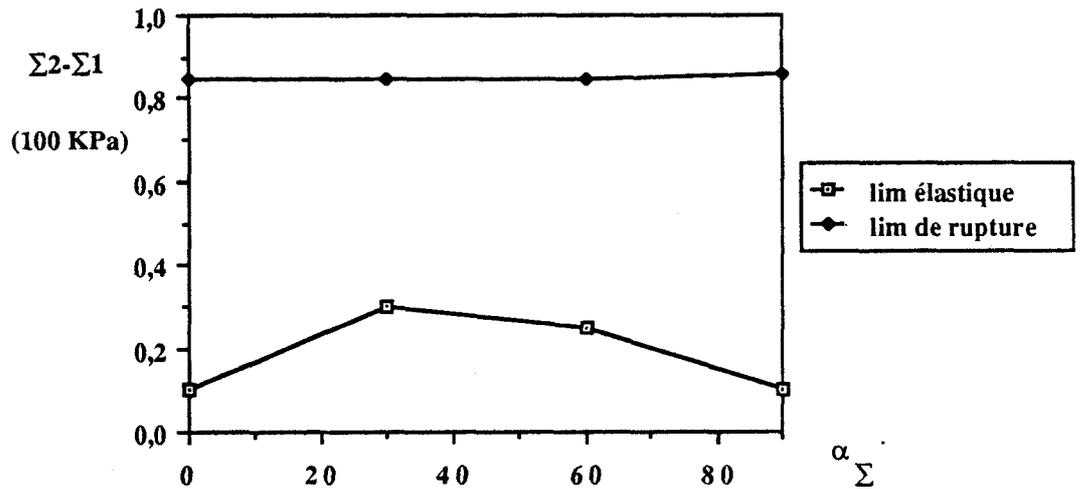


fig V 44: anisotropie des colonnes ballastées, à partir d'essais de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa, méthode de Hill-Mandel

5.3.3.2 Méthode de l'homogénéisation

a) Lois d'évolution

Après une C-H-I à - 0,05 MPa, nous avons réalisé deux séries d'essais :

- en compression suivant Σ_1
- en traction suivant Σ_2

Pour $\alpha_\Sigma = 30^\circ$ et $\alpha_\Sigma = 60^\circ$, l'observation des fig. V.45, V.46, V.47 montre que les courbes sont formées de trois parties linéaires :

- une portion de droite pour la zone élastique
- une portion de droite pour la zone plastique
- le palier de rupture

Ce comportement simple peut être modélisé par l'association patin-ressort de la fig. V.48.

Pour $\alpha_{\Sigma} = 30^{\circ}$, il y a rapprochement des directions principales des tenseurs de contrainte et de déformation à la rupture (fig. V.49, V.50).

Les fig. V.51, V.52 montrent que la limite élastique atteint des valeurs maximales pour une direction intermédiaire du tenseur de contrainte.

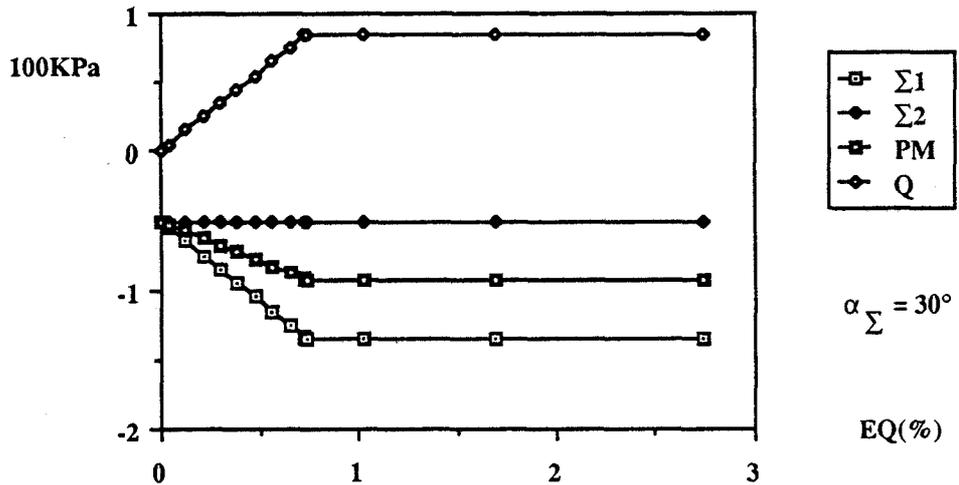


fig V 45: homogénéisation des colonnes ballastées, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa

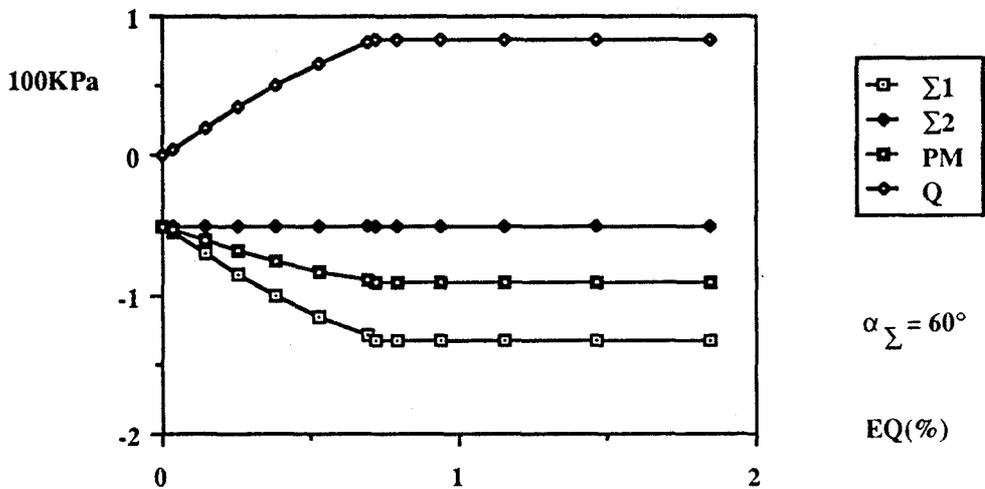


fig V 46: homogénéisation des colonnes ballastées, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa

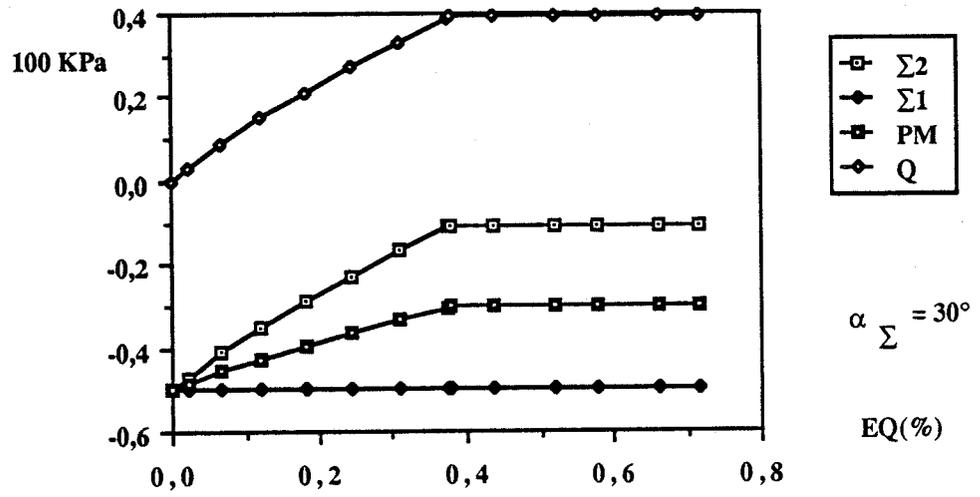


fig V 47: homogénéisation des colonnes ballastées, essai de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0,05 MPa

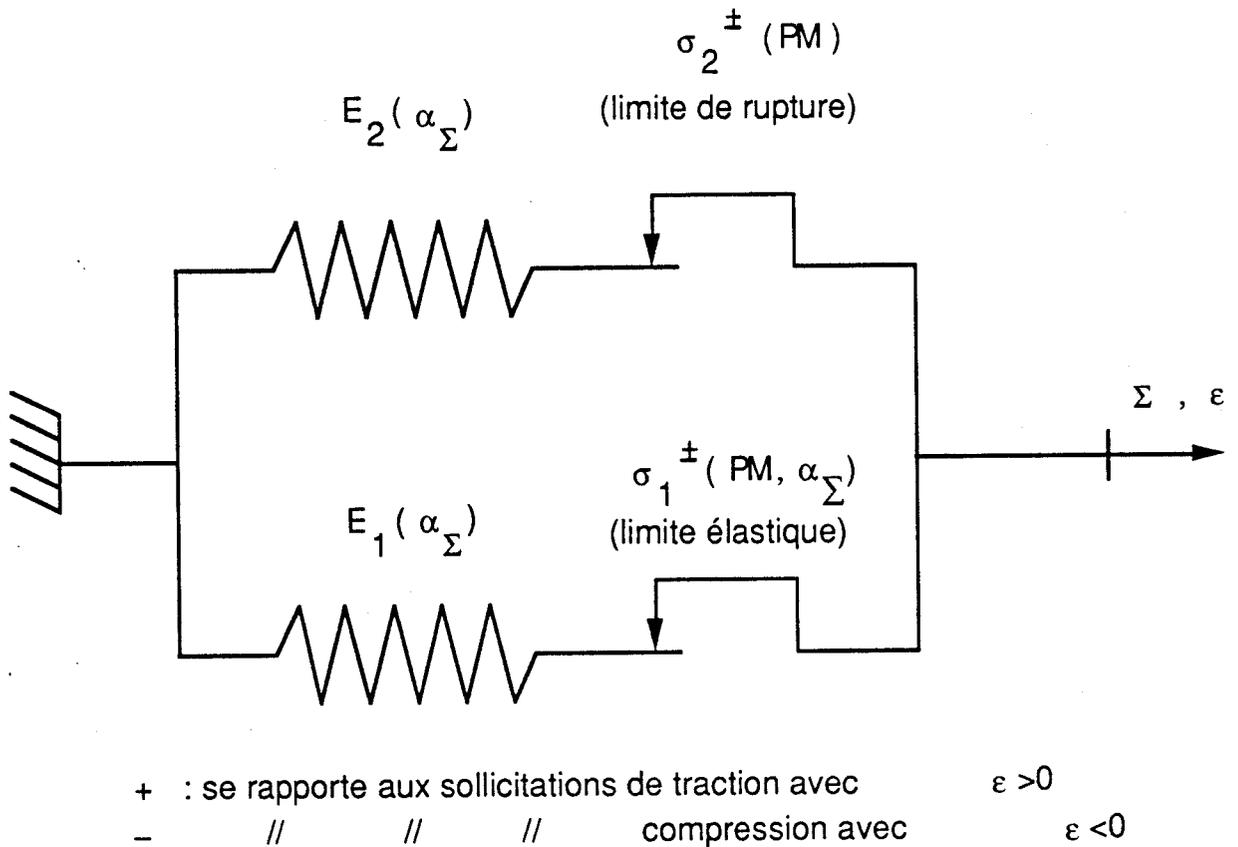


fig. V.48 : Colonnes ballastées, modèle simple de comportement du matériau homogénéisé pour une direction de sollicitation du tenseur de contrainte macroscopique

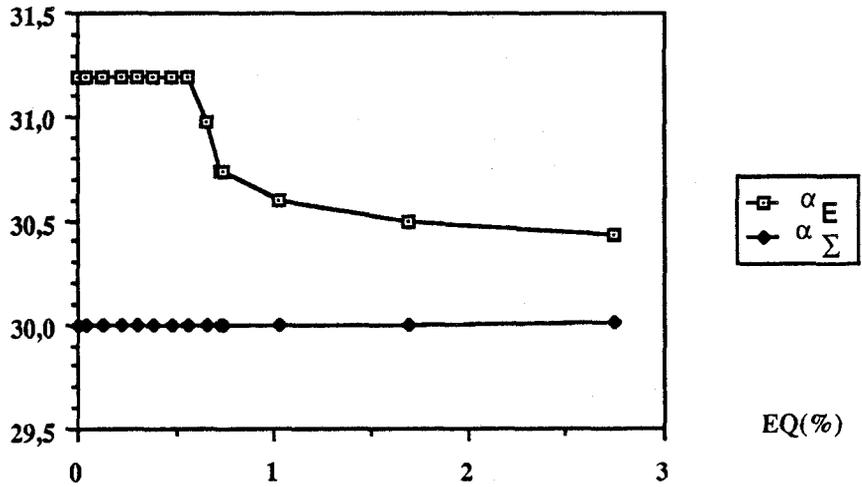


fig V 49: homogénéisation des colonnes ballastées, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa
 évolution des axes principaux

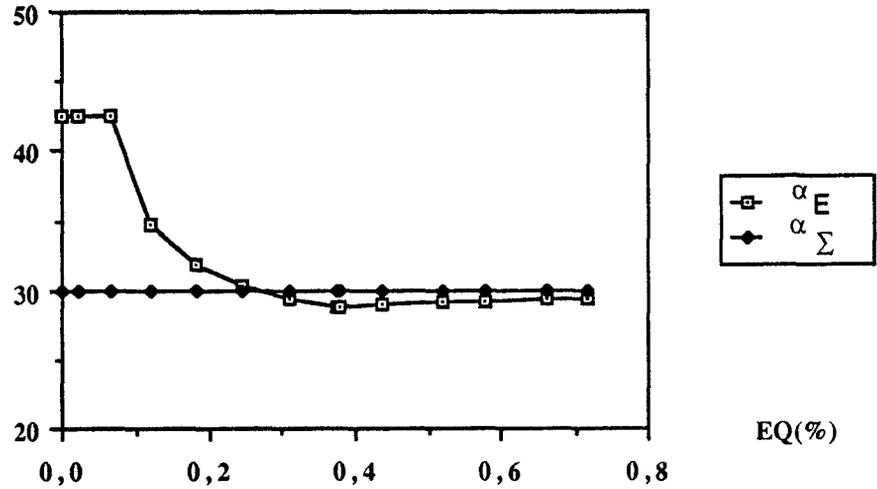


fig V 50: homogénéisation des colonnes ballastées, essai de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.05 MPa
 évolution des axes principaux

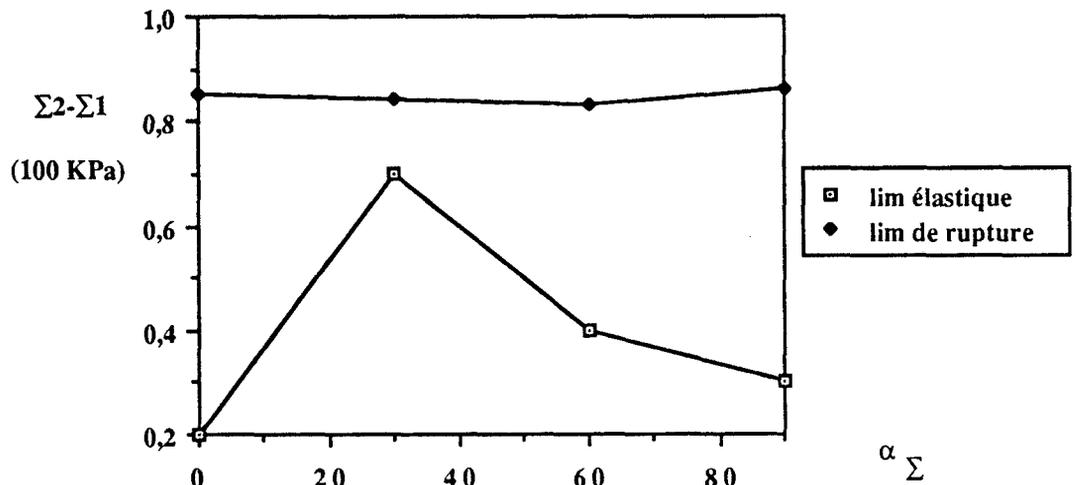


fig V 51: anisotropie des colonnes ballastées, à partir d'essais de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa, méthode de l'homogénéisation

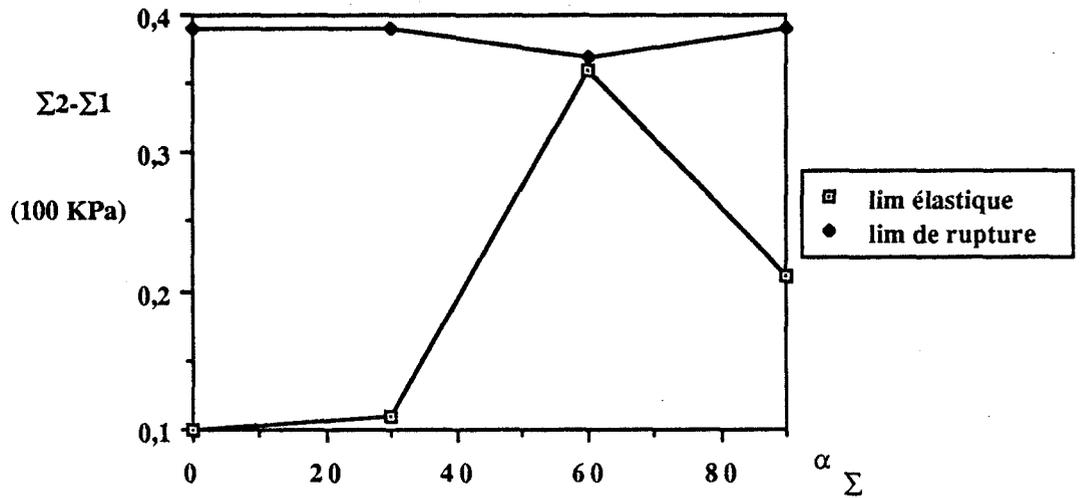


fig V.52: anisotropie des colonnes ballastées, à partir d'essais de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.05 MPa, méthode de l'homogénéisation

b) Comparaison avec les limites élastiques et de ruptures théoriques

Les résultats théoriques confirment la faible anisotropie à la rupture observée sur les fig. V.51, V.52. Les fig. V.53 et V.54 montrent une bonne concordance de l'anisotropie élastique avec les prédictions théoriques.

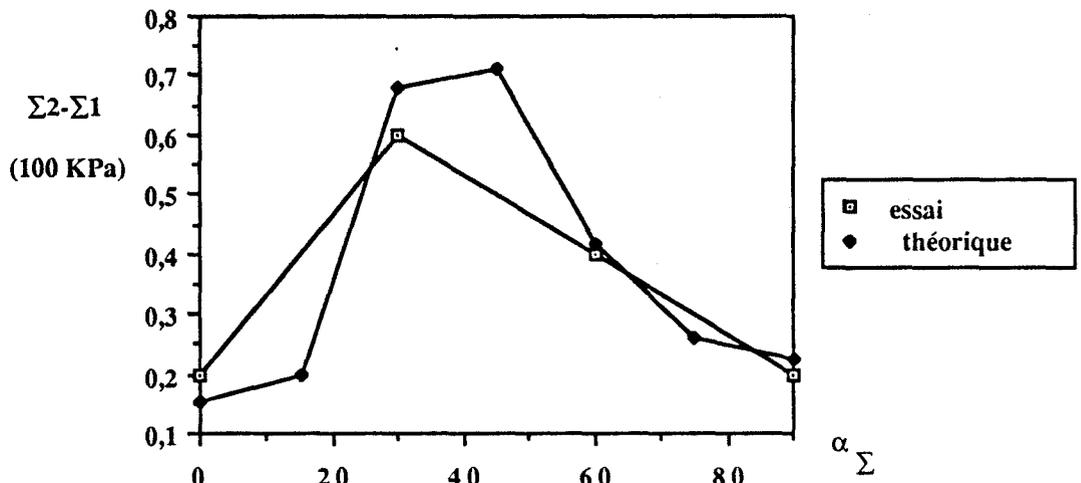


fig V.53: anisotropie élastique des colonnes ballastées, à partir d'essais de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa, comparaison avec les prédictions du critère homogénéisé

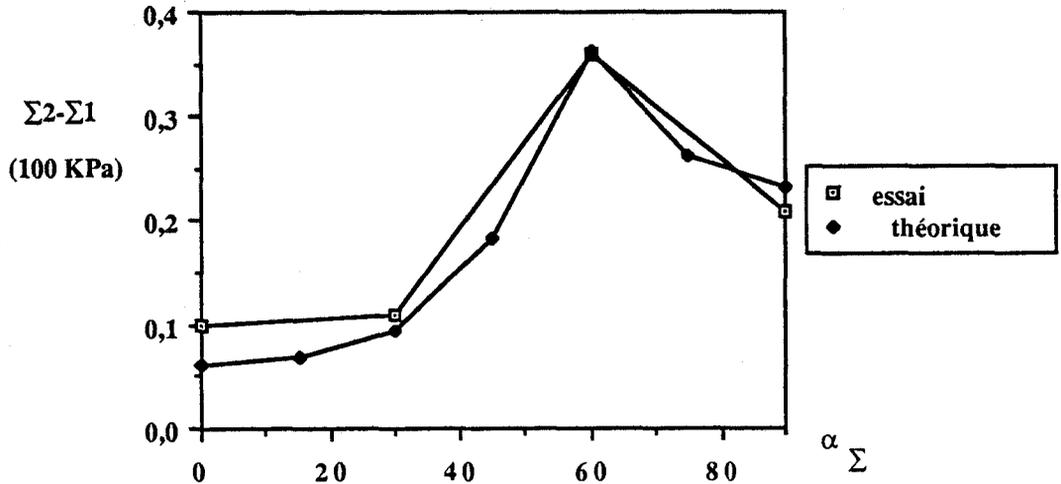


fig V 54: anisotropie élastique des colonnes ballastées, à partir d'essais de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.05 MPa, comparaison avec les prédictions du critère homogénéisé

c) Caractéristiques du matériau homogénéisé

On remarque sur les fig. V.55 à V.61 que la représentation du critère de rupture dans divers plans de pression moyenne peut être assimilée à un cercle.

Sur la fig. V.62, nous avons représenté l'évolution de son rayon en fonction de la pression moyenne. On remarque que cette variation est sensiblement linéaire. On a par conséquent cherché à assimiler le critère homogénéisé à un critère de Mohr-Coulomb. A l'aide de cette courbe, nous avons déterminé les paramètres de ce critère :

$$\phi^{\text{hom}} = 21,4^\circ \qquad C^{\text{hom}} = 0,0084 \text{ MPa}$$

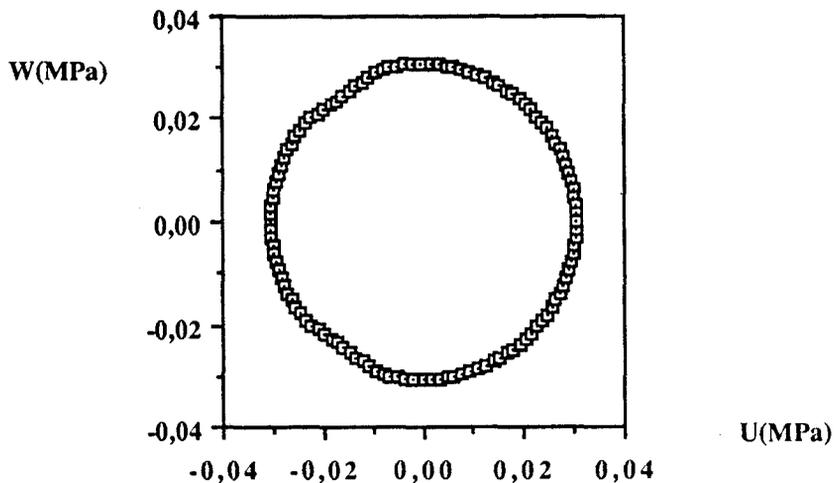
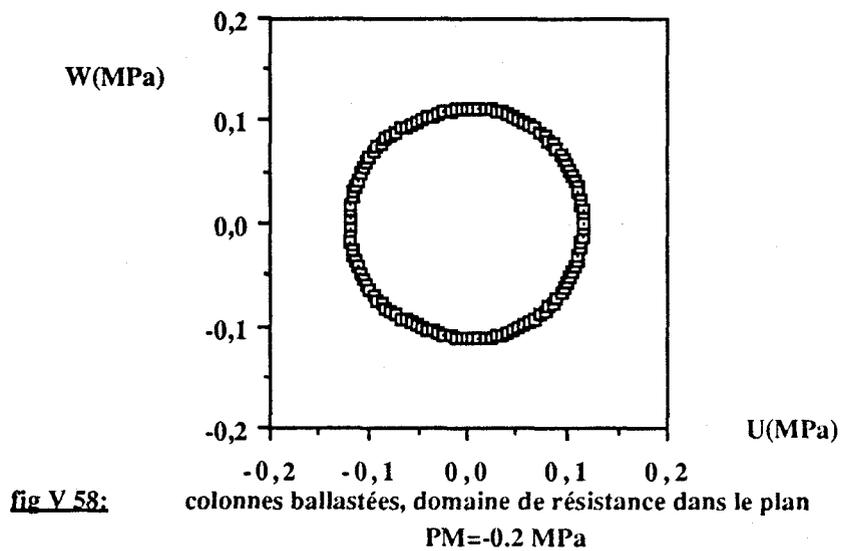
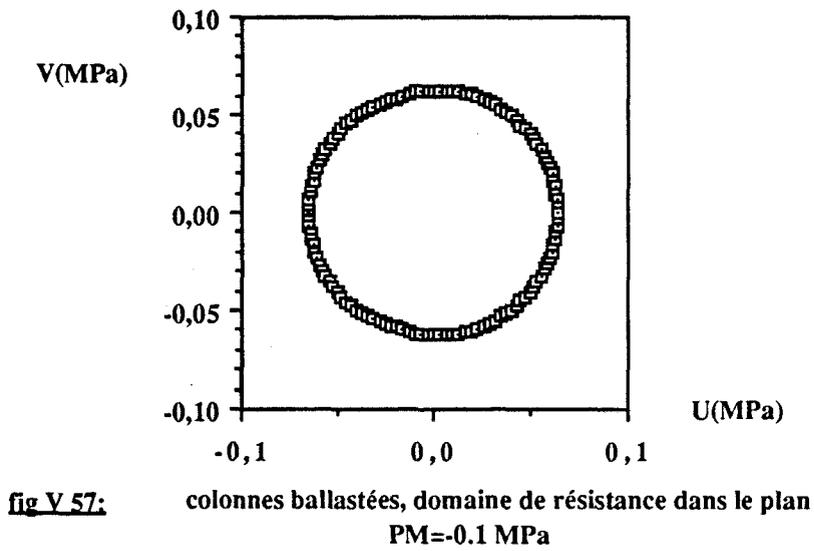
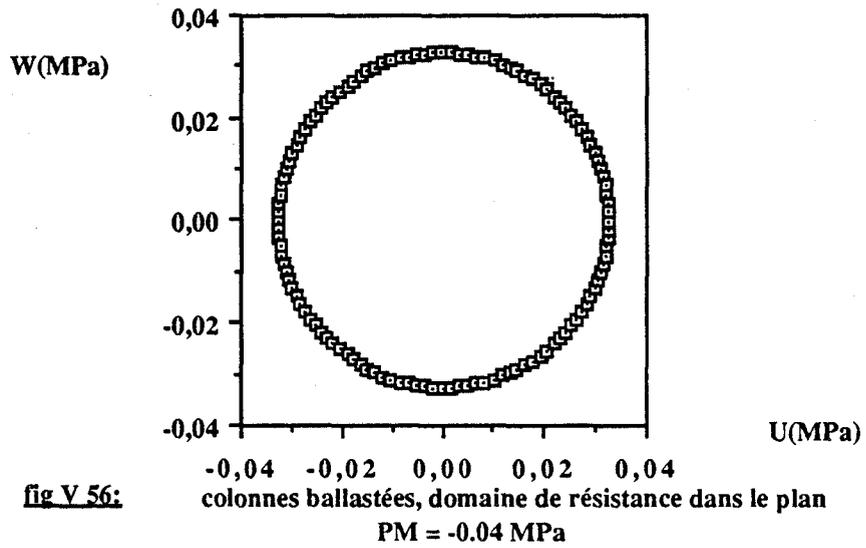


fig V 55: colonnes ballastées, domaine de résistance dans le plan PM=-0.036 MPa



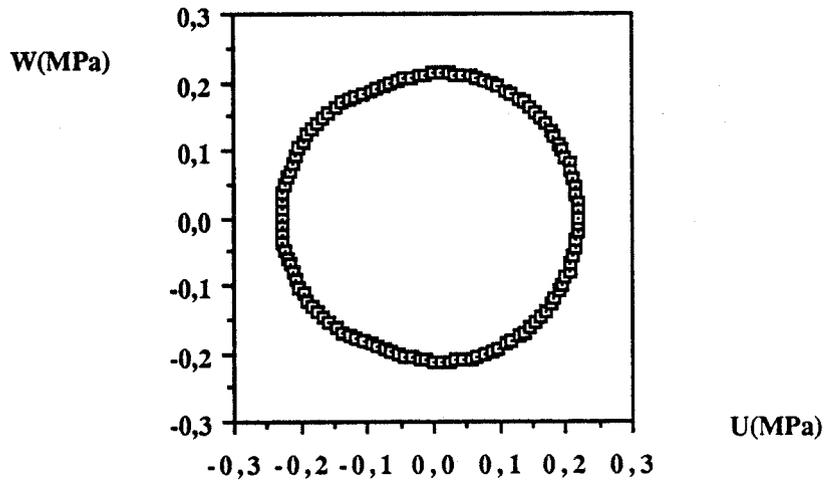


fig V 59: colonnes ballastées, domaine de résistance dans le plan
 $PM = -0.4$ MPa

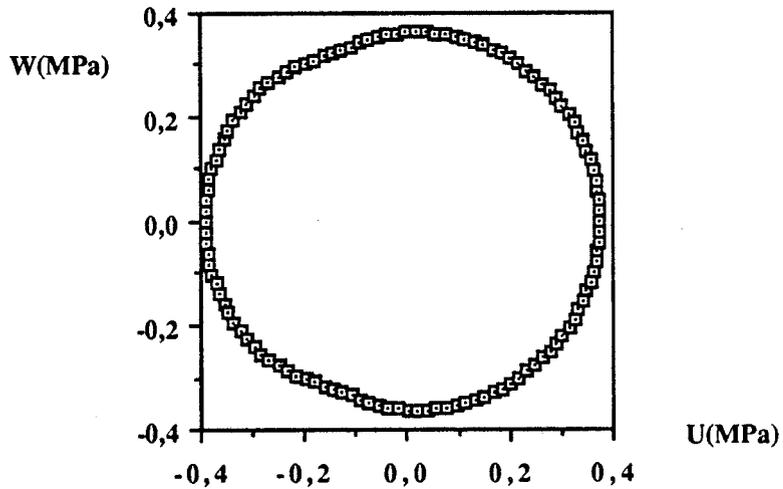


fig V 60: colonnes ballastées, domaine de résistance dans le plan
 $PM = -0.7$ MPa

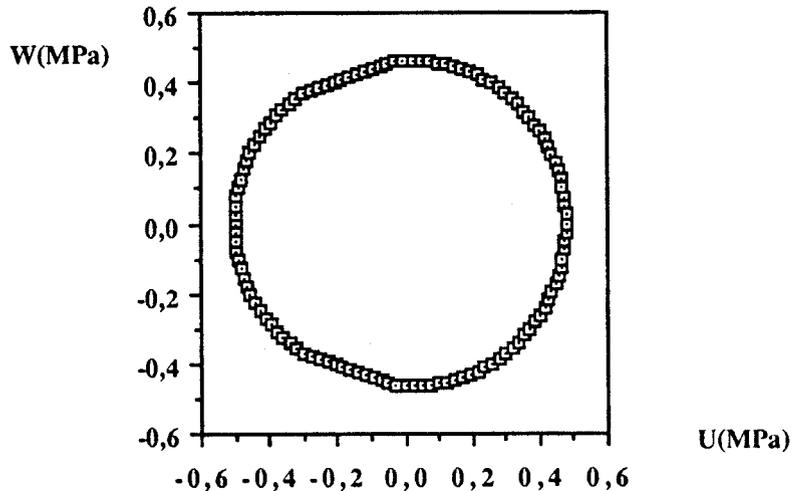


fig V 61: colonnes ballastées, domaine de résistance dans le plan
 $PM = -0.9$ MPa

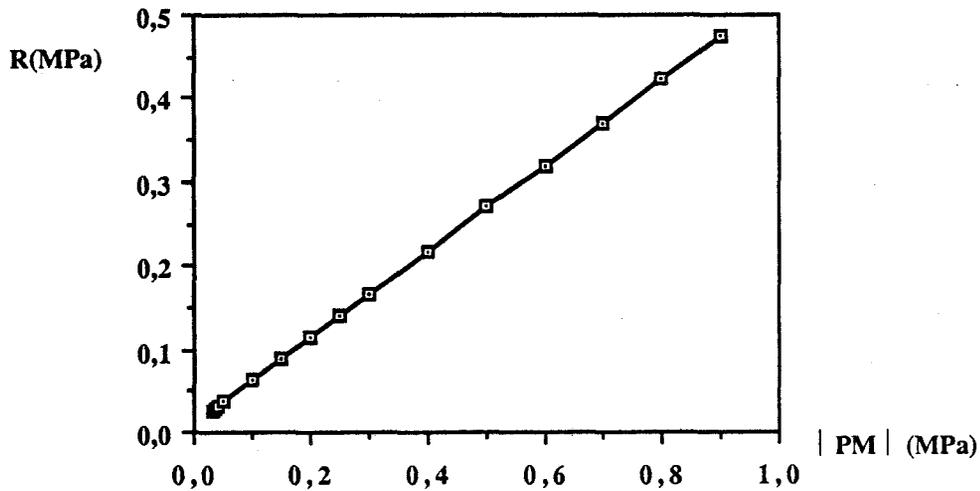


fig V 62: variation du rayon du domaine de résistance en fonction de PM

Les résultats montrent que :

- la rupture du matériau présente une anisotropie peu marquée,
- le domaine de résistance est proche de celui du sol ; par conséquent, à long terme, la colonne améliore peu les caractéristiques de résistance du sol.

Au niveau des caractéristiques élastiques, l'amélioration due à la colonne est nettement plus marquée, comme l'atteste les valeurs des caractéristiques homogénéisées issues d'une application des relations du § 3.2.2.

$$\nu_{13}^{\text{hom}} = \nu_{12}^{\text{hom}} = \nu_{32}^{\text{hom}} = 0,3$$

$$E_{11}^{\text{hom}} = 33,75 \text{ MPa}$$

$$E_{22}^{\text{hom}} = 13,68 \text{ MPa}$$

$$G_{13}^{\text{hom}} = 12,98 \text{ MPa}$$

$$G_{23}^{\text{hom}} = G_{12}^{\text{hom}} = 4,36 \text{ MPa}$$

alors que les caractéristiques du sol sont :

$$\nu_s = 0,3$$

$$E_s = 10 \text{ MPa}$$

$$G_s = 3,85 \text{ MPa}$$

d) Réseau de colonnes ballastées sous fondation rigide

On s'intéresse à un massif infiniment grand de colonnes ballastées sous fondation rigide comme l'indique la fig. V.63, la cellule de base se trouve sollicitée par un chemin de déformation macroscopique de type oedométrique. La fig. V.64 représente la loi d'évolution du matériau homogénéisé suivant ce chemin de sollicitation.

Bien que la réponse soit linéaire, une amorce de déchargement met en évidence que la rigidité initiale n'est pas élastique, et qu'il y a, par conséquent, plastification dès le début de la simulation. Un retour au niveau des contraintes microscopiques montre que cette plastification s'effectue au niveau de la colonne, et que le sol reste en phase élastique même pour des déformations importantes. Afin de proposer une étude simplifiée de ce problème, Soyez (1985) postule ce type d'hypothèse.

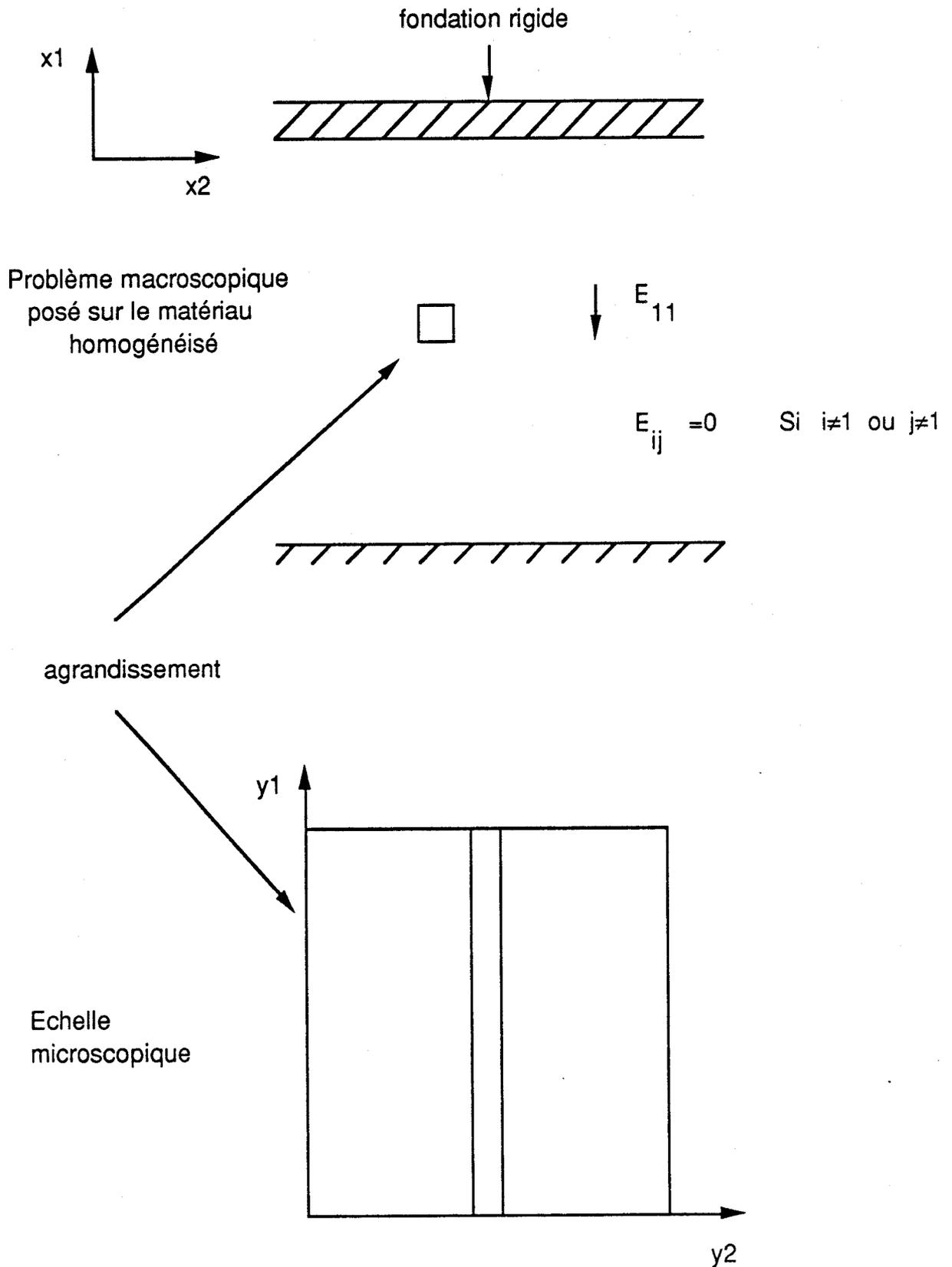


fig. V.63 : Etude d'un réseau de colonnes ballastées par la technique de l'homogénéisation

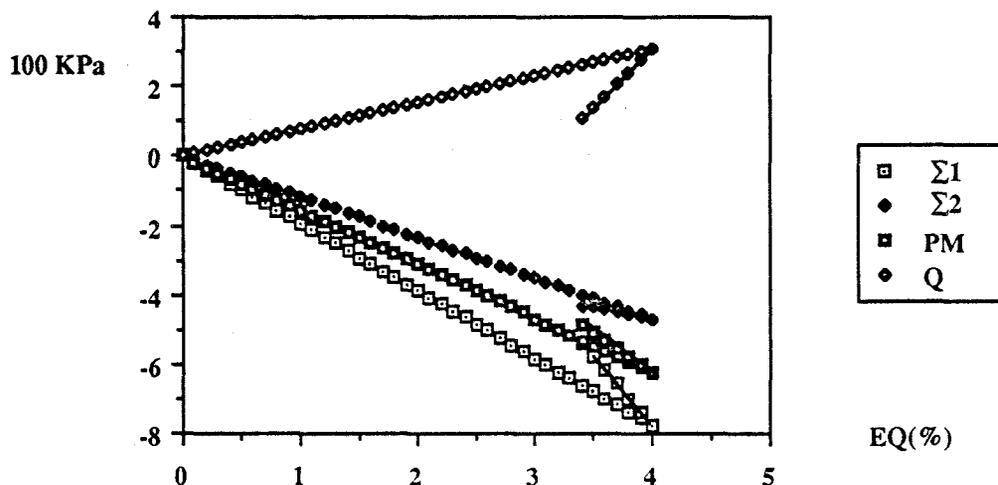


fig V 64: réseau de colonnes ballastées sous fondation rigide, état de sollicitation oedométrique

5.4 MODELISATION DU COMPORTEMENT DU MATERIAU MULTICOUCHE HOMOGENEISE

5.4.1 Modèle à deux variables internes

L'étude du § 3.2.2 permet d'affirmer que, juste avant la plastification, les champs de contrainte et de déformation se répartissent uniformément dans chaque constituant du multicouche. Par conséquent, la plastification de chaque matériau s'effectue de manière uniforme et durant toute la phase non linéaire ; les déformations totales, plastiques, et les contraintes restent constantes dans chaque constituant. Les hypothèses de normalité de la loi d'écoulement et de convexité du domaine de résistance assurent l'unicité de cette solution.

Par conséquent, le modèle de comportement du matériau homogénéisé comporte deux variables internes représentées par l'état de plastification de chaque constituant.

Ci-dessous nous allons décrire ce modèle.

En phase élastique, le passage des contraintes macroscopiques aux contraintes microscopiques est donné par les relations (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12).

En phase plastique, dès que l'un des constituants plastifie, soit par exemple le sol, on a :

$$(5.11) \quad (f_e)_s = 0$$

$$(5.12) \quad (df_e)_s = 0$$

En combinant (5.11), (5.12) avec les équations (4.5), (4.6), (4.4) on obtient :

$$\sigma_r = h_r(\Sigma)$$

$$\sigma_s = h_s(\Sigma)$$

Ensuite, grâce aux relations de l'élasticité, on peut déterminer les déformations élastiques :

$$e_s^e(\Sigma) \quad , \quad e_r^e(\Sigma)$$

L'équation de continuité de la déformation à l'interface permet d'écrire que :

$$(5.13) \quad (e_{11}^e)_r(\Sigma) = (e_{11}^e)_s(\Sigma) + (e_{11}^p)_s(\Sigma)$$

Ce qui permet de déterminer l'incrément de déformation plastique dû à l'incrément de chargement $d\Sigma$, si la loi de comportement est associée il est donné par:

$$(de_{11}^p)_s = d\lambda \frac{\partial(f_c)_s}{\partial(\sigma_{11})_s} \quad \text{avec} \quad d\lambda \geq 0?$$

Dès que le deuxième constituant plastifie, les multiplicateurs de plasticité ne peuvent pas être déterminés à l'aide des équations du problème, les déformations sont alors indéterminées et le palier plastique de rupture est atteint.

Nous présentons maintenant une étude comparative des résultats obtenus pour les essais précédents avec ceux de cette modélisation.

- **terre armée**

Sur les fig. V.65 à V.72, nous avons sélectionné quelques courbes pour lesquelles la modélisation donne des résultats en très bon accord avec ceux des essais.

On peut toutefois mentionner quelques petites divergences dues à l'incertitude introduite par les calculs par éléments finis. La comparaison des fig. V.73, V.74 et des fig. V.77, V.78 montre une entrée en plasticité plus rapide pour l'essai.

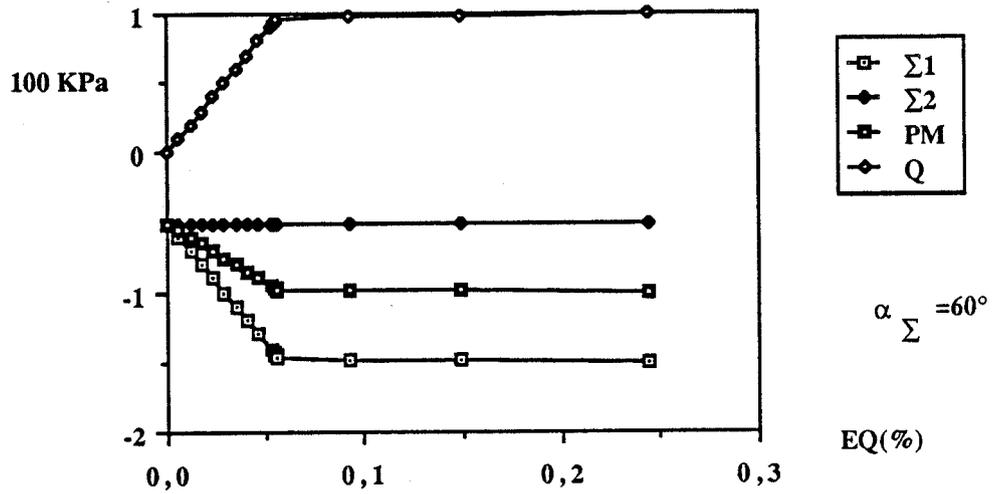


fig V 65: homogénéisation de la terre armée, essai de compression suivant $\Sigma 1$, après C-H-I de -0.05 MPa

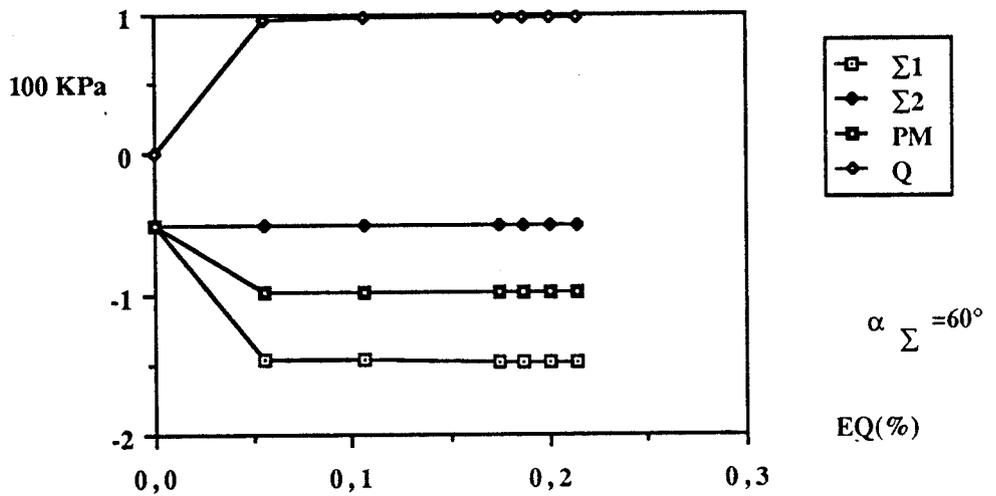


fig V 66: homogénéisation de la terre armée, modélisation de compression suivant $\Sigma 1$, après C-H-I de -0.05 MPa

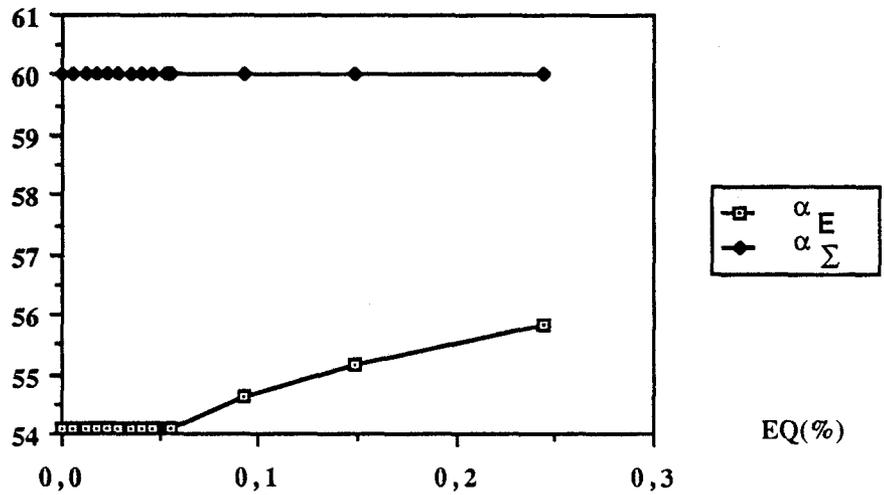


fig V 67: homogénéisation de la terre armée, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa évolution des axes principaux

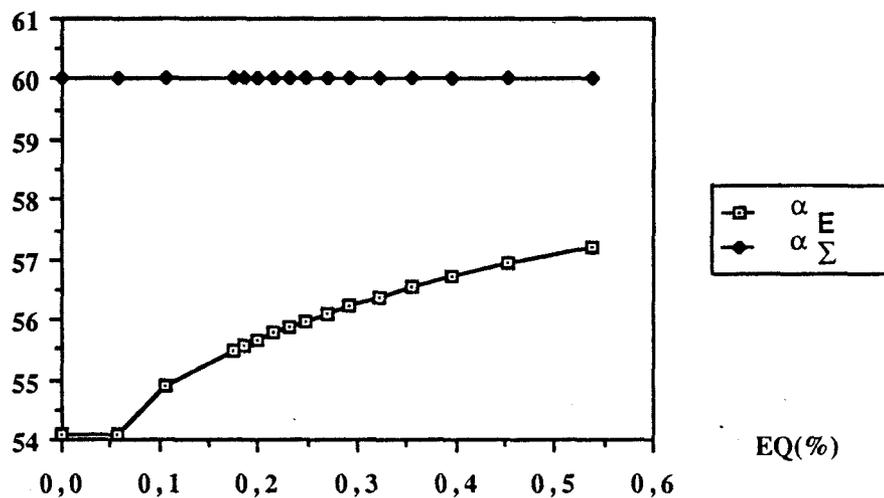


fig V 68: homogénéisation de la terre armée, modélisation de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa évolution des axes principaux

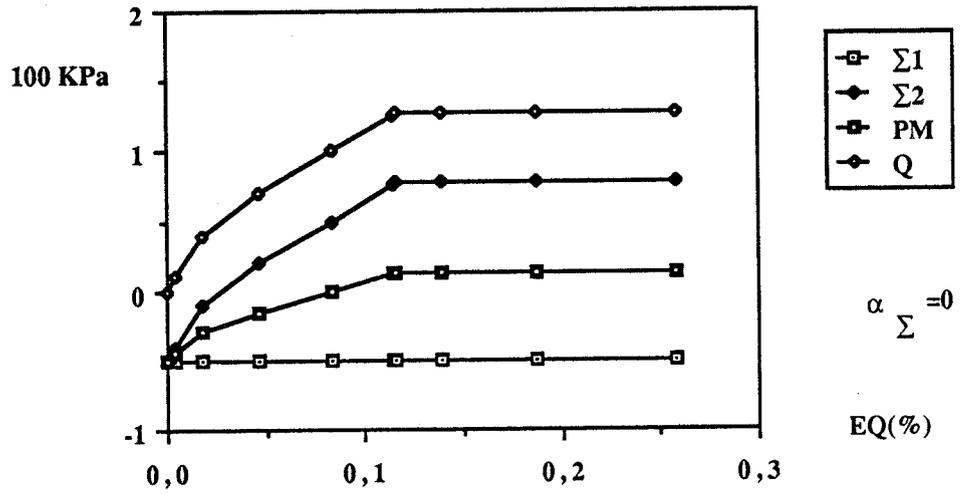


fig V 69: homogénéisation de la terre armée, essai de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.05 MPa

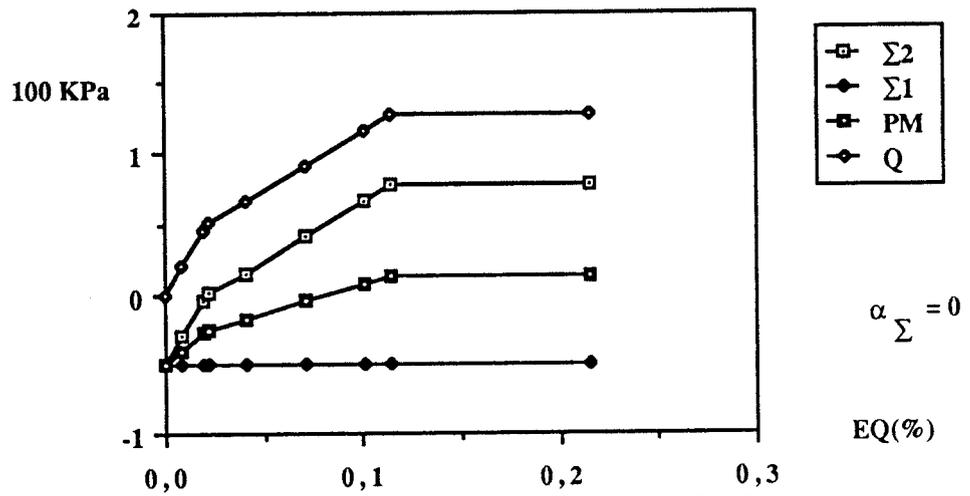


fig V 70: homogénéisation de la terre armée, modélisation de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.05 MPa

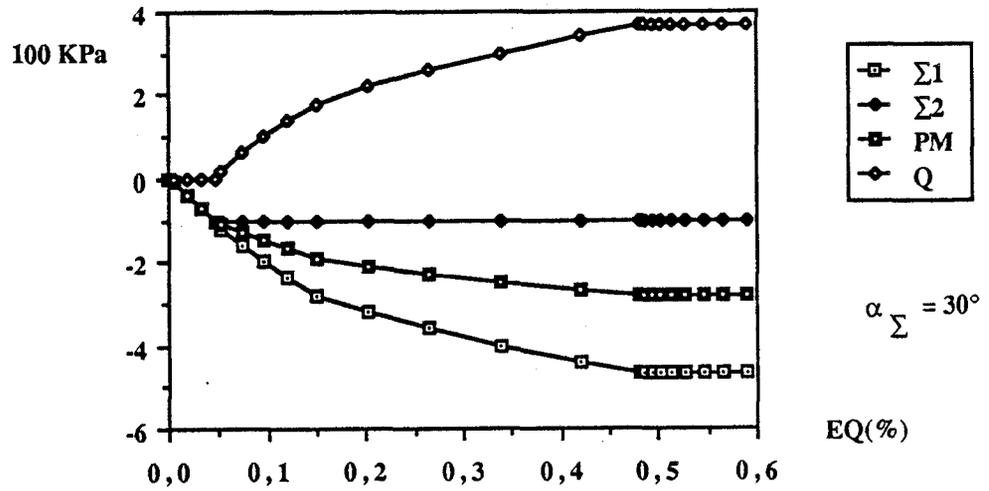


fig V 71: homogénéisation de la terre armée, essai de compression suivant $\Sigma 1$, après C-I de -0.1 MPa

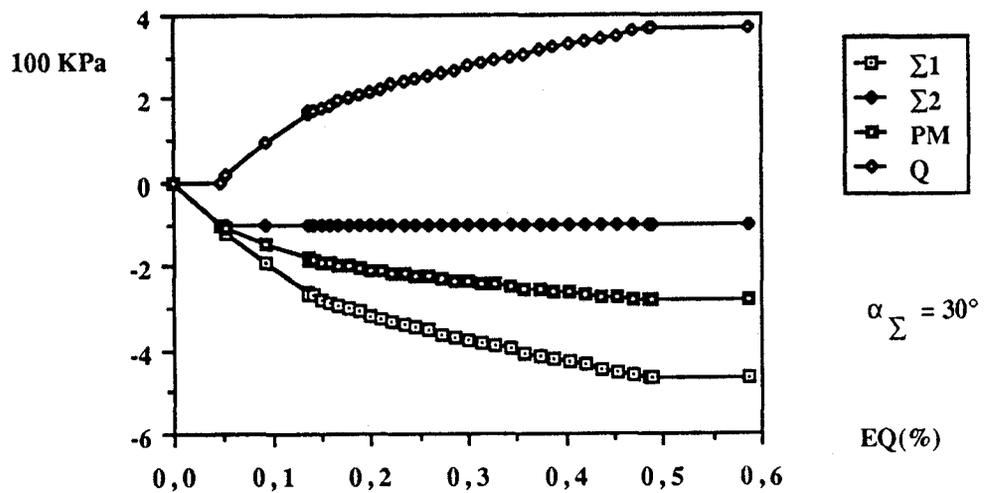


fig V 72: homogénéisation de la terre armée, modélisation de compression suivant $\Sigma 1$, après C-I de -0.1 MPa

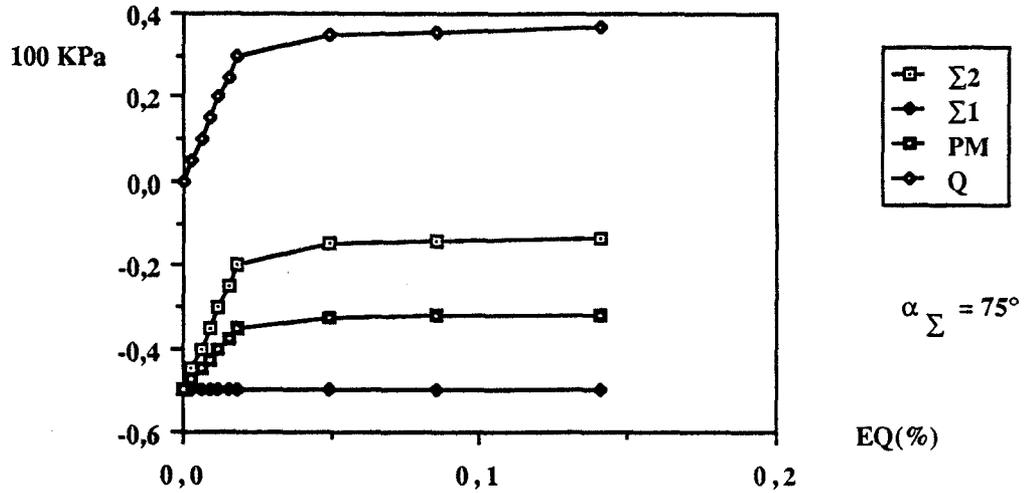


fig V 73: homogénéisation de la terre armée, essai de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.05 MPa

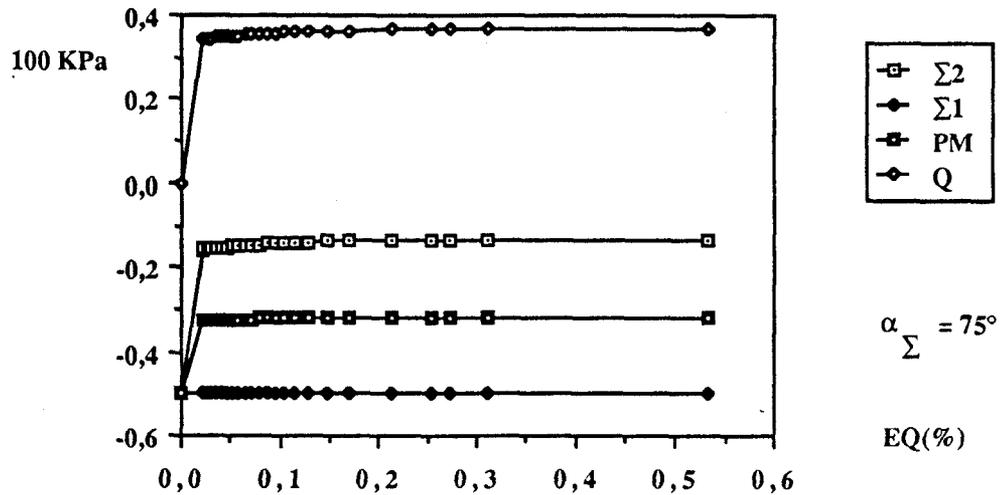


fig V 74: homogénéisation de la terre armée, modélisation de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.05 MPa

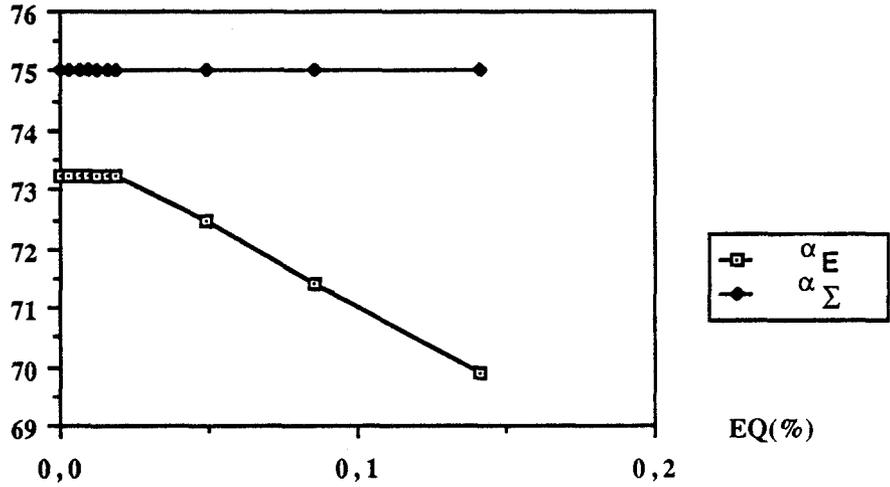


fig V 75: homogénéisation de la terre armée,essai de traction suivant Σ_2 ,après C-H-I de -0.05 MPa évolution des axes principaux

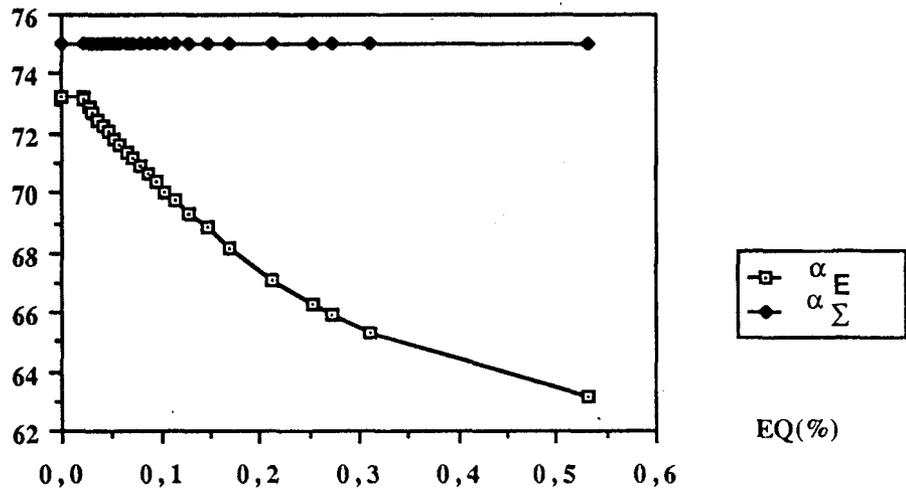


fig V 76: homogénéisation de la terre armée,modélisation de de traction suivant Σ_2 ,après C-H-I de -0.05 MPa évolution des axes principaux

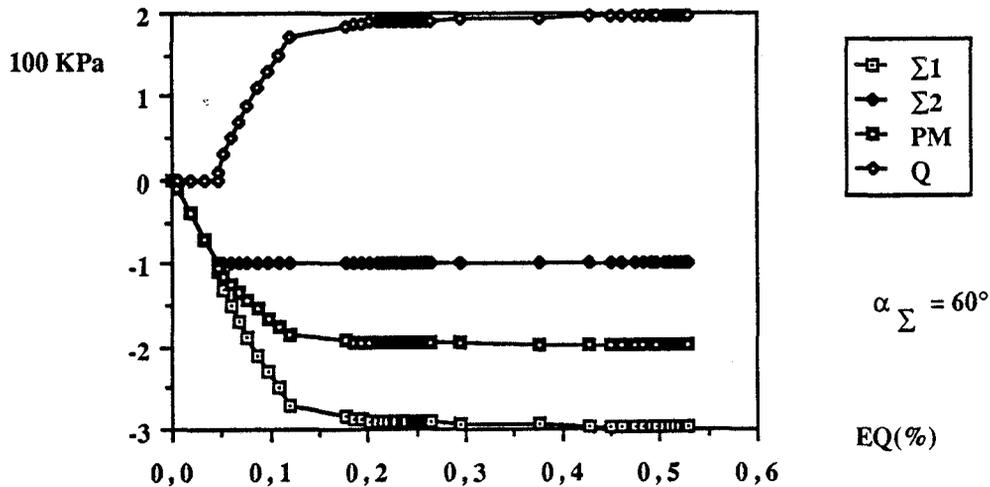


fig V 77: homogénéisation de la terre armée, essai de compression suivant $\Sigma 1$, après C-I de -0.1 MPa

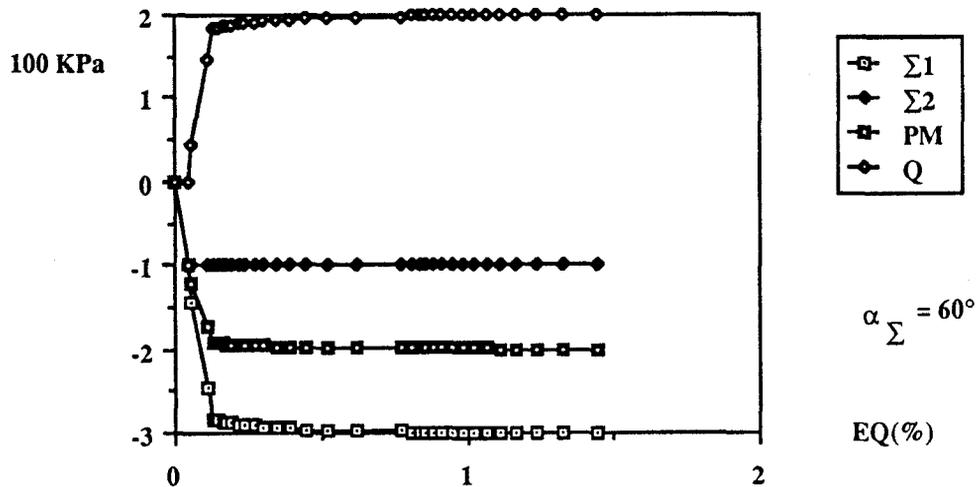
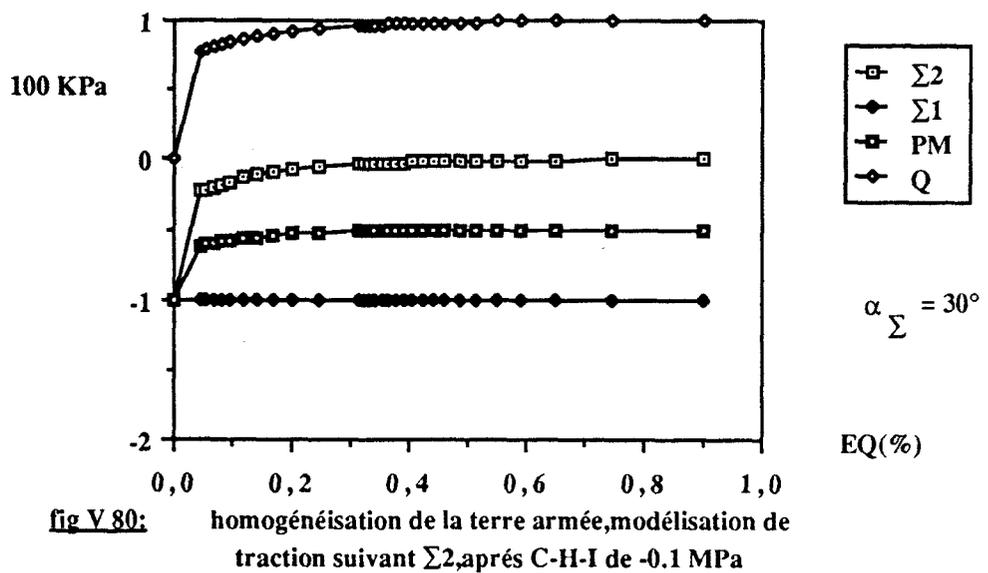
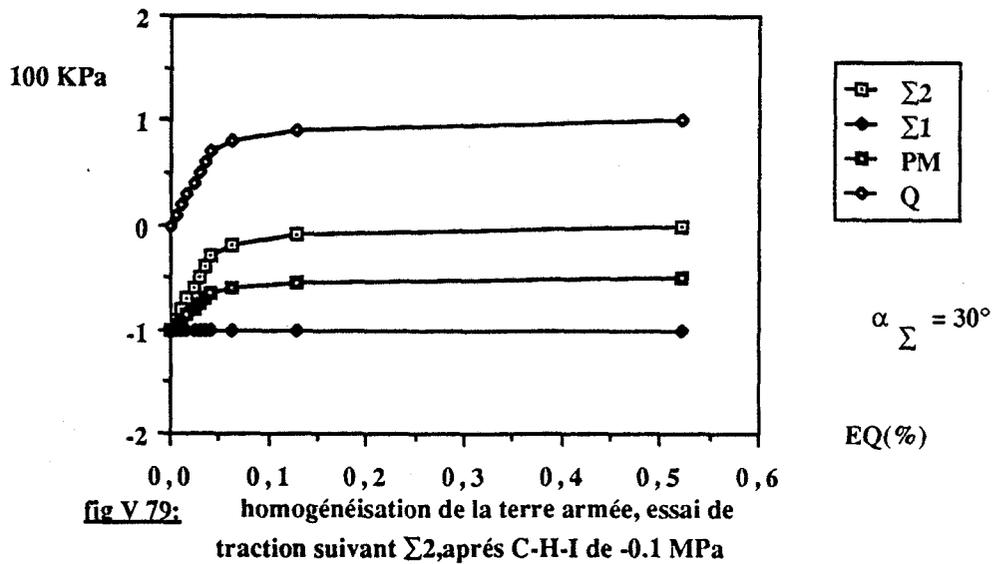
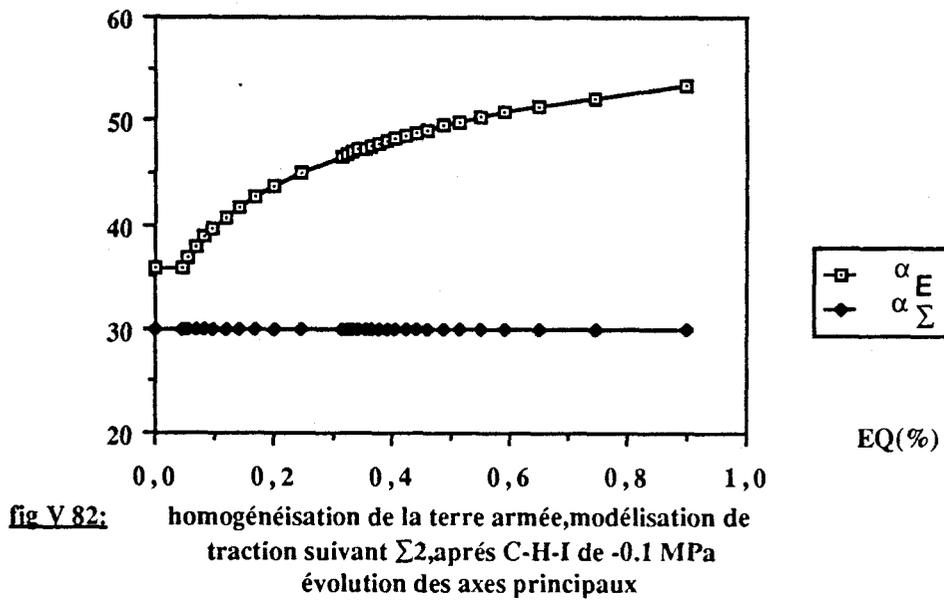
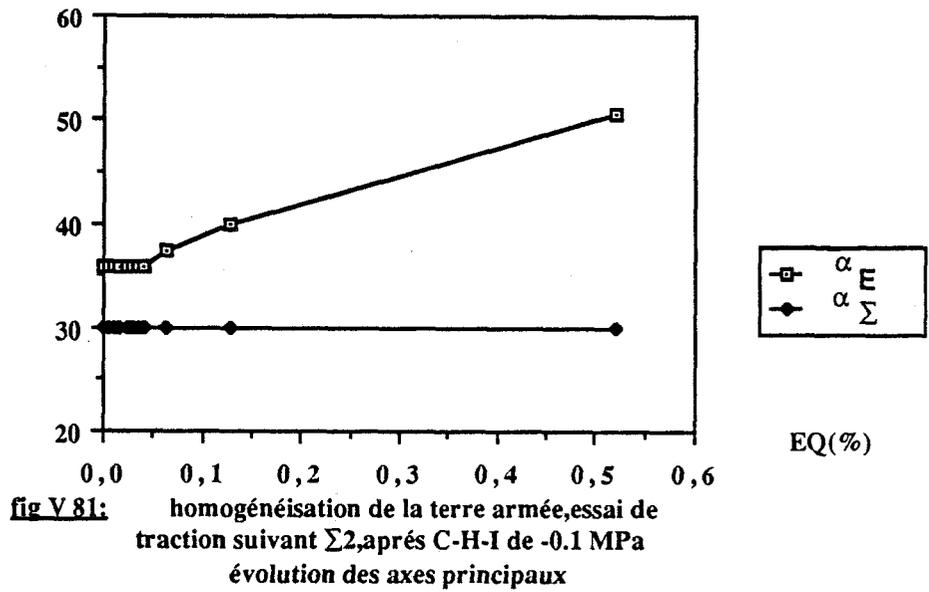


fig V 78: homogénéisation de la terre armée, modélisation de compression suivant $\Sigma 1$, après C-I de -0.1 MPa

La diminution de rigidité jusqu'à la rupture est moins explicite pour l'essai, ce que l'on observe en comparant :

- sur les fig. V.79 et V.80 pour les courbes d'évolution des contraintes
- sur les fig. V.75 et V.76 et les fig. V.81 et V.82 pour les courbes d'évolution des directions principales.





Sur les essais réalisés, en prenant l'hypothèse d'un comportement non dilatant du sable, on note des différences notables avec la prédiction du modèle.

La comparaison des fig. V.83 et V.84 et des fig. V.85 et V.86 accuse une prédiction de la charge de rupture plus faible pour les essais. Sur la fig. V.87, nous avons reporté la différence qui en résulte au niveau de l'anisotropie à la rupture. Pour l'anisotropie élastique, les résultats sont comparables.

L'évolution de l'écroutissage est nettement mieux simulée par la modélisation comme l'atteste la comparaison :

- des fig. V.83 et V.84 pour les courbes d'évolution en contrainte,
- des fig. V.88 et V.89 et des fig. V.90 et V.91 pour les courbes d'évolution des directions des axes principaux.

Plus particulièrement la comparaison des fig. V.85 et V.86 montre un comportement élastique parfaitement plastique pour l'essai alors que sur la courbe de la modélisation, on observe un léger écroutissage jusqu'à la rupture.

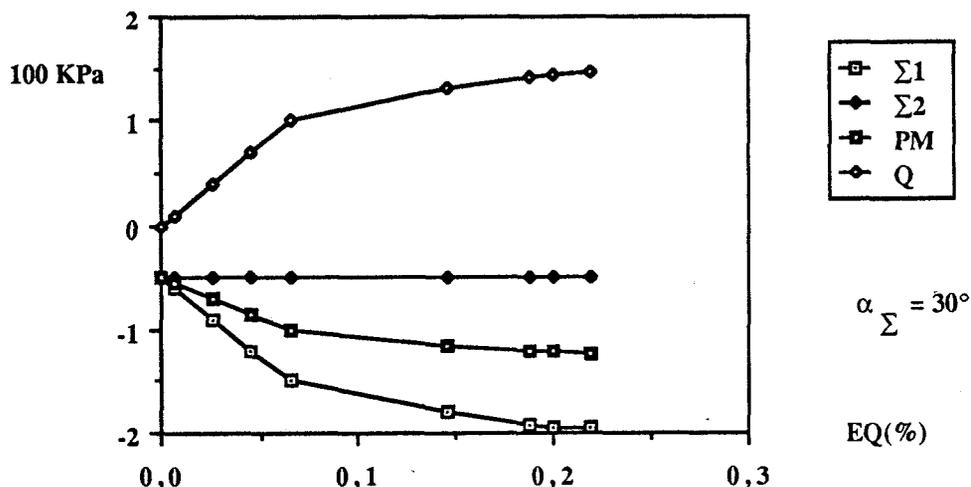


fig V.83: homogénéisation de la terre armée, comportement non dilatant du sable, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa

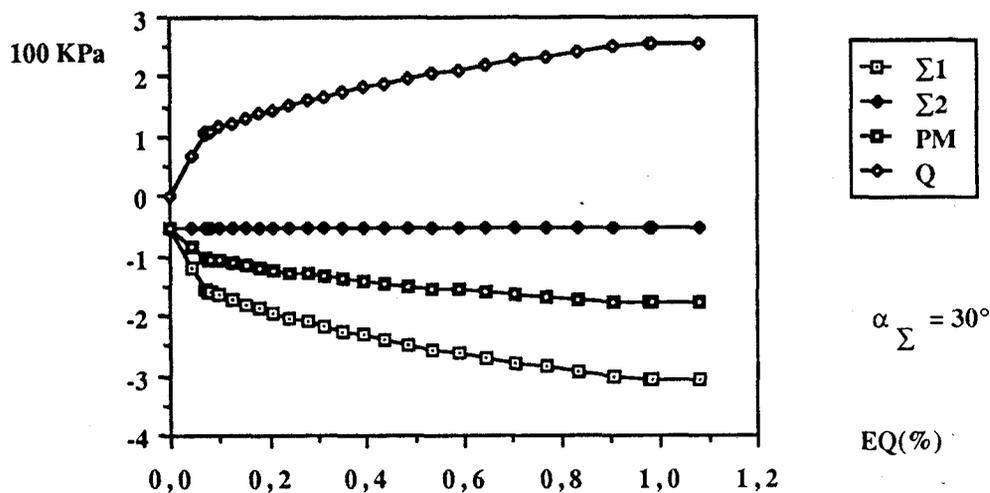


fig V.84: homogénéisation de la terre armée, comportement non dilatant du sable, modélisation de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa

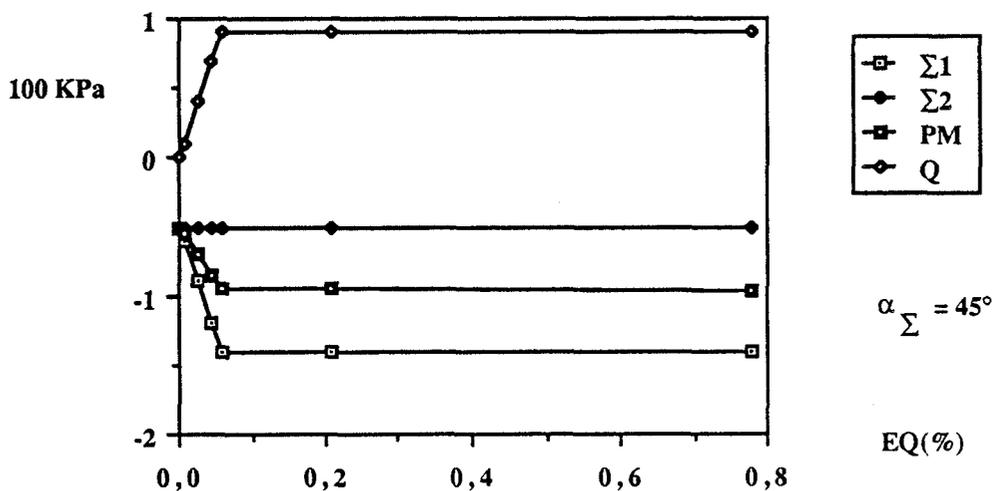


fig V 85: homogénéisation de la terre armée, comportement non dilatant du sable, essai de compression suivant $\Sigma 1$, après C-H-I de -0.05 MPa

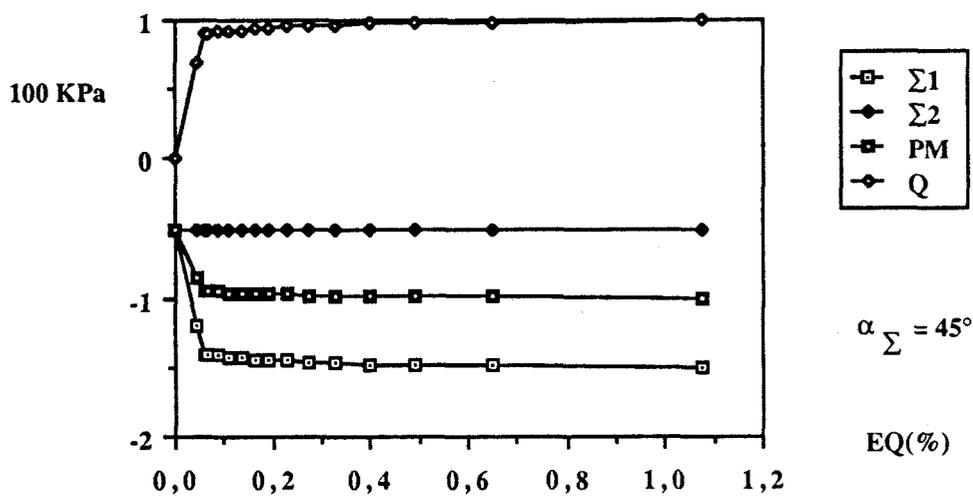


fig V 86: homogénéisation de la terre armée, comportement non dilatant du sable, modélisation de compression suivant $\Sigma 1$, après C-H-I de -0.05 MPa

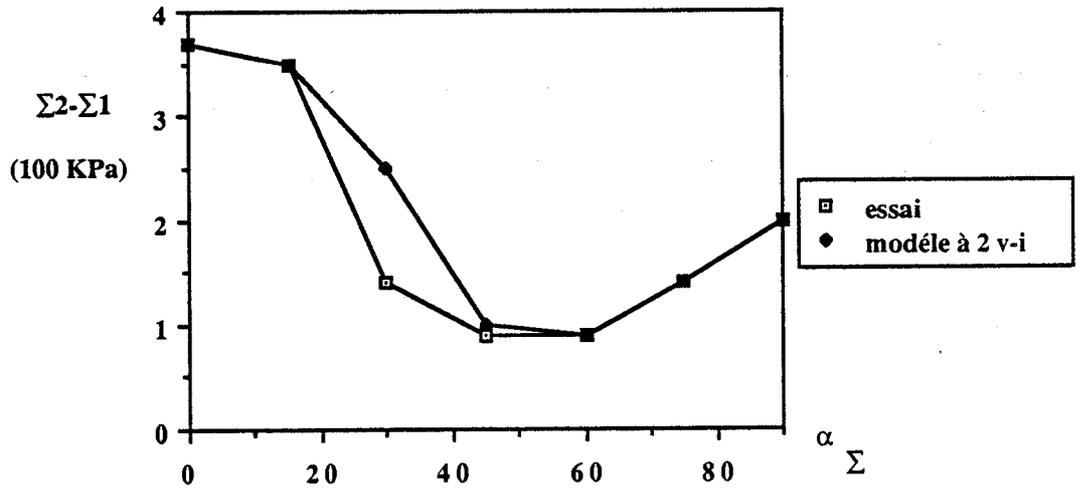


fig V 87: anisotropie de rupture de la terre armée, à partir d'essais de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.05 MPa, méthode de l'homogénéisation, comportement non dilatant du sable

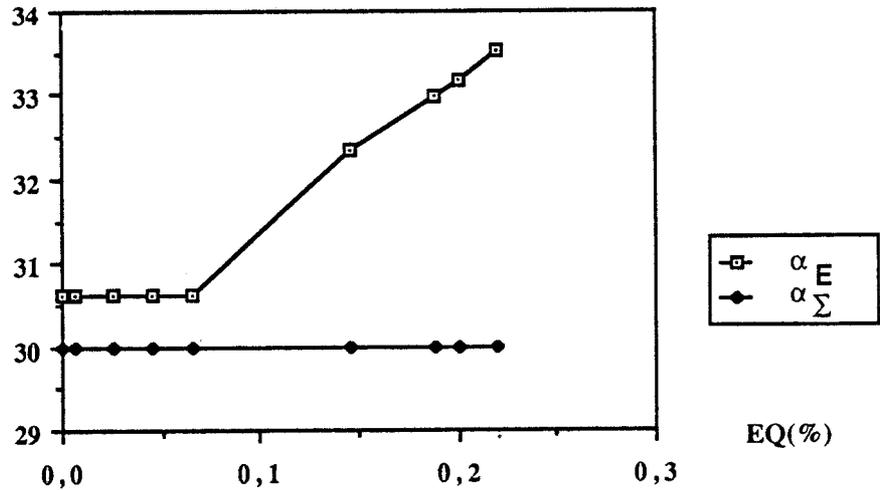


fig V 88: homogénéisation de la terre armée, comportement non dilatant du sable, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa évolution des axes principaux

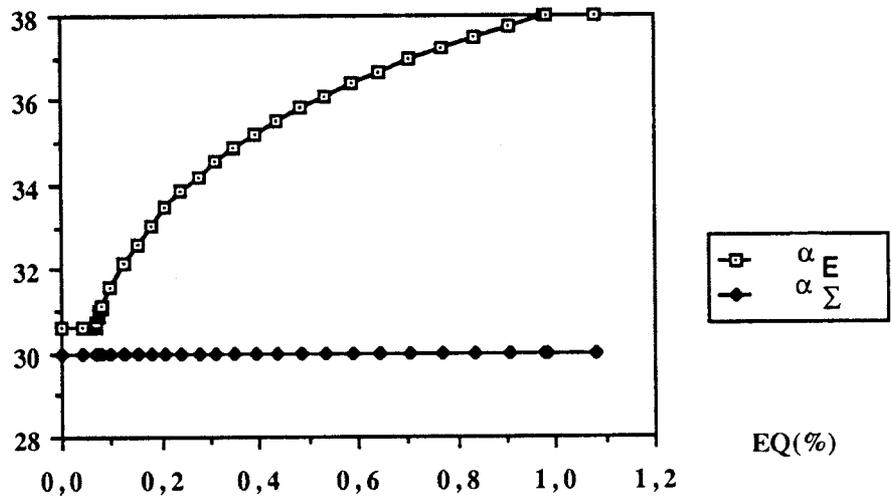


fig V 89: homogénéisation de la terre armée, comportement non dilatant du sable modélisation de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa évolution des axes principaux

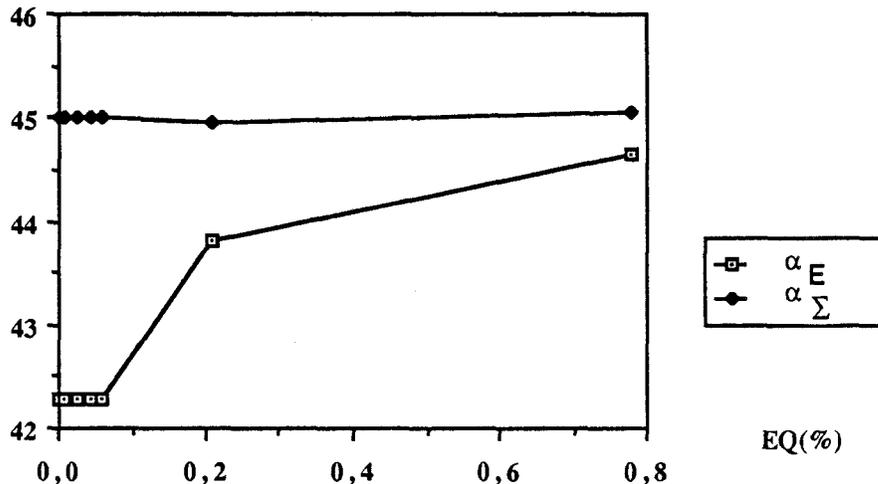


fig V 90: homogénéisation de la terre armée, comportement non dilatant du sable, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa
 évolution des axes principaux

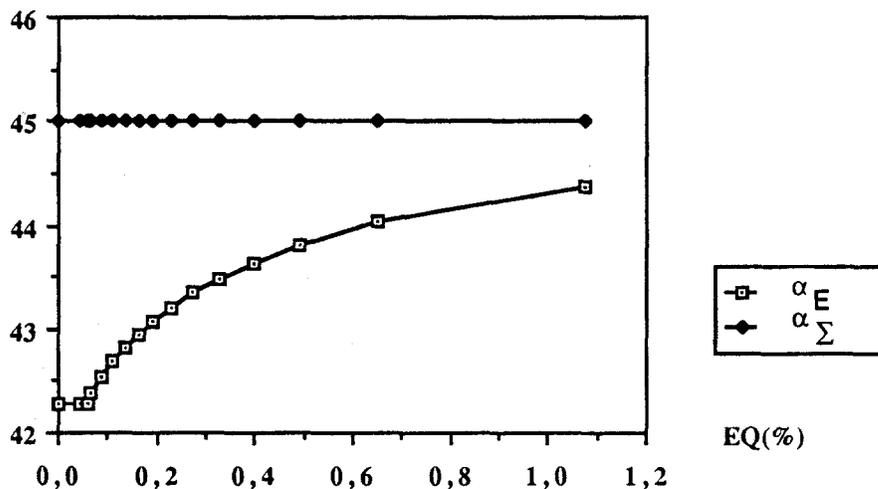


fig V 91: homogénéisation de la terre armée, comportement non dilatant du sable
 modélisation de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa
 évolution des axes principaux

• colonnes ballastées

La comparaison des fig. V.92 et V.93, des fig. V.94 et V.95, des fig. V.96 et V.97 confirment le bien fondé de la modélisation. Par opposition aux résultats des autres essais, la fig. V.98 ne donne pas un rapprochement des directions principales des tenseurs de contrainte et de déformation à la rupture, alors que pour la modélisation, fig. V.99, on observe que ces directions sont quasiment identiques à la rupture.

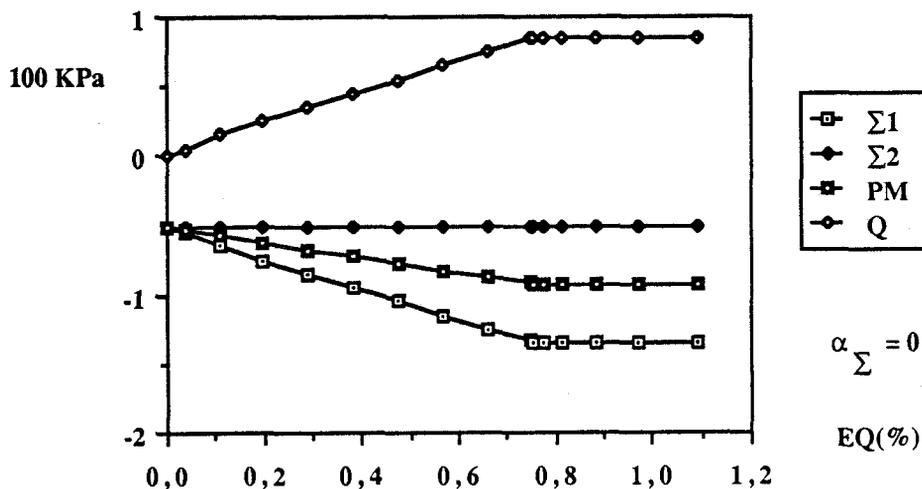


fig V 92: homogénéisation des colonnes ballastées, essai de compression suivant $\Sigma 1$, après C-H-I de -0.05 MPa

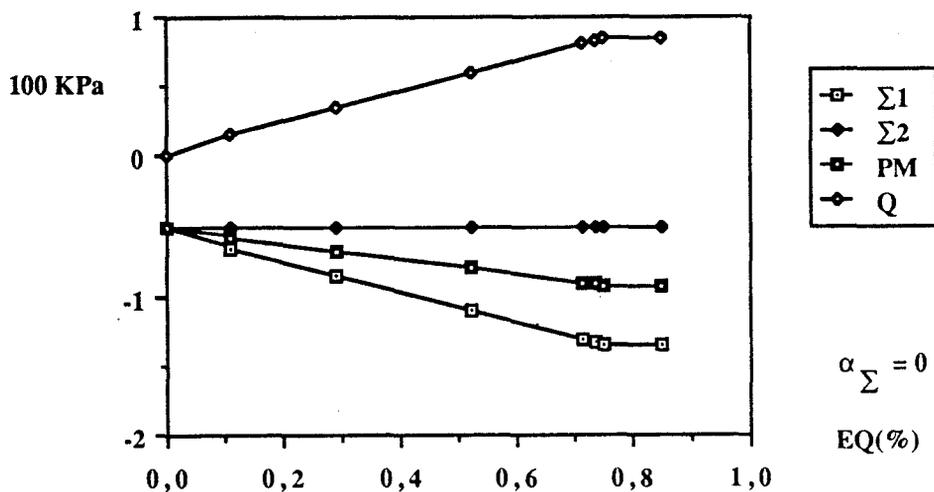


fig V 93: homogénéisation des colonnes ballastées, modélisation de compression suivant $\Sigma 1$, après C-H-I de -0.05 MPa

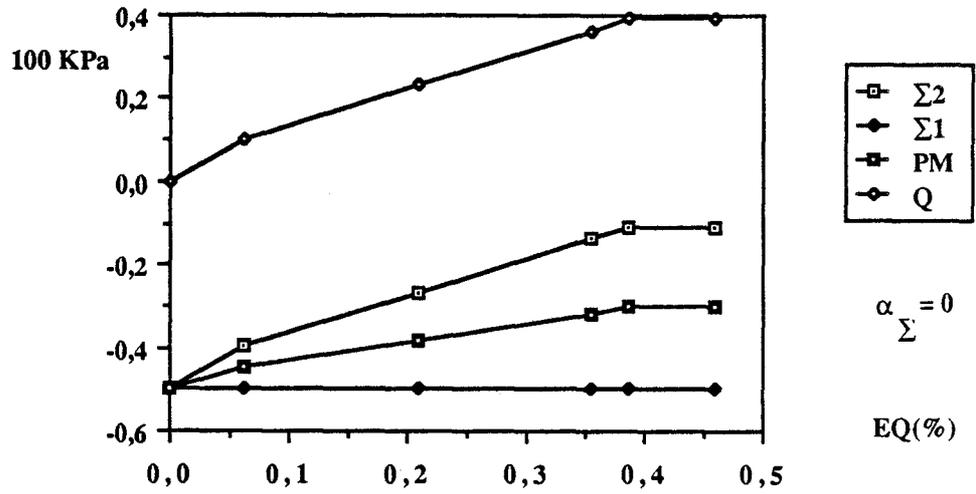


fig V 94: homogénéisation des colonnes ballastées, essai de traction suivant $\Sigma 2$, après C-H-I de -0.05 MPa

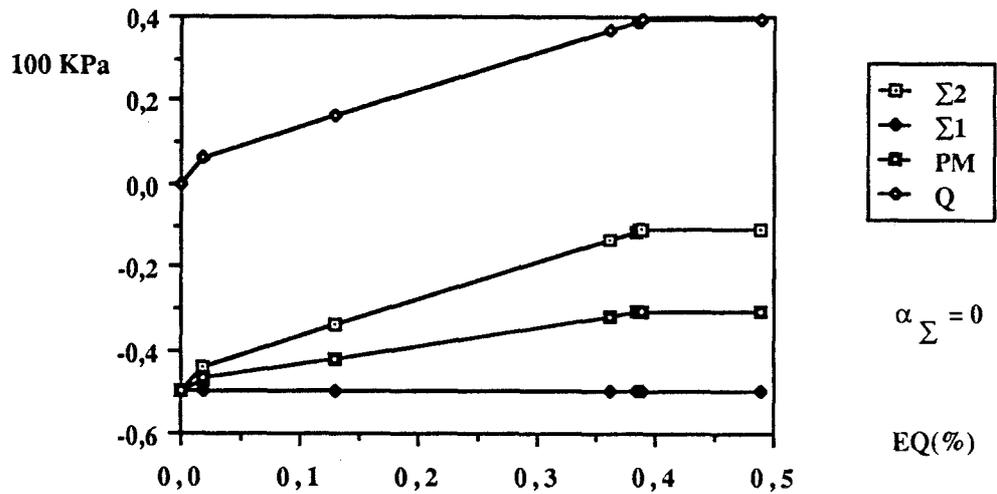


fig V 95: homogénéisation des colonnes ballastées, modélisation de traction suivant $\Sigma 2$, après C-H-I de -0.05 MPa

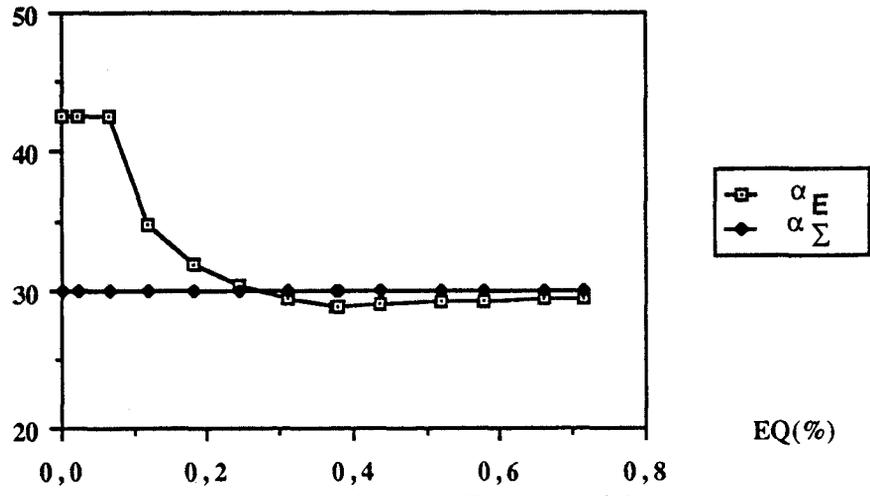


fig V 96: homogénéisation des colonnes ballastées, essai de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.05 MPa évolution des axes principaux

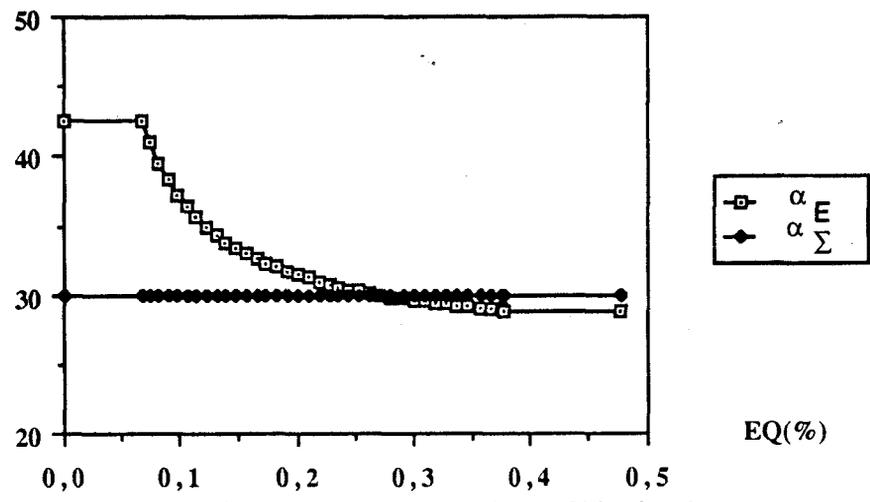


fig V 97: homogénéisation des colonnes ballastées, modélisation de traction suivant Σ_2 , après C-H-I de -0.05 MPa évolution des axes principaux

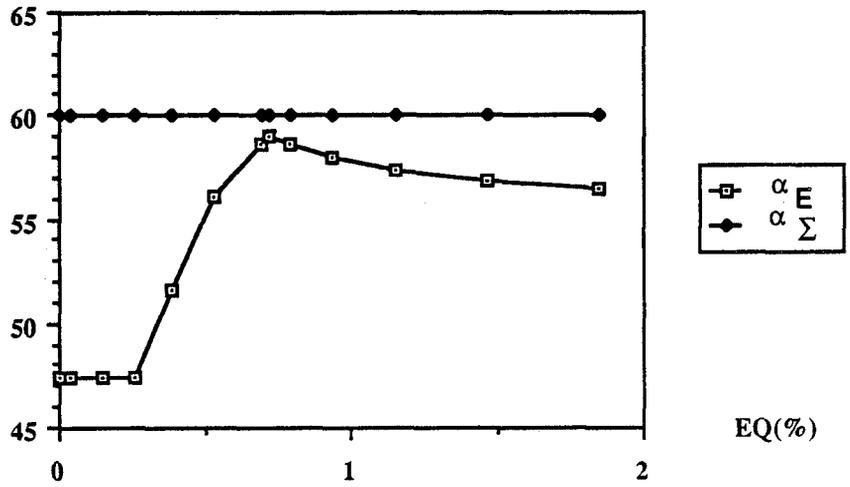


fig V 98: homogénéisation des colonnes ballastées, essai de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa
 évolution des axes principaux

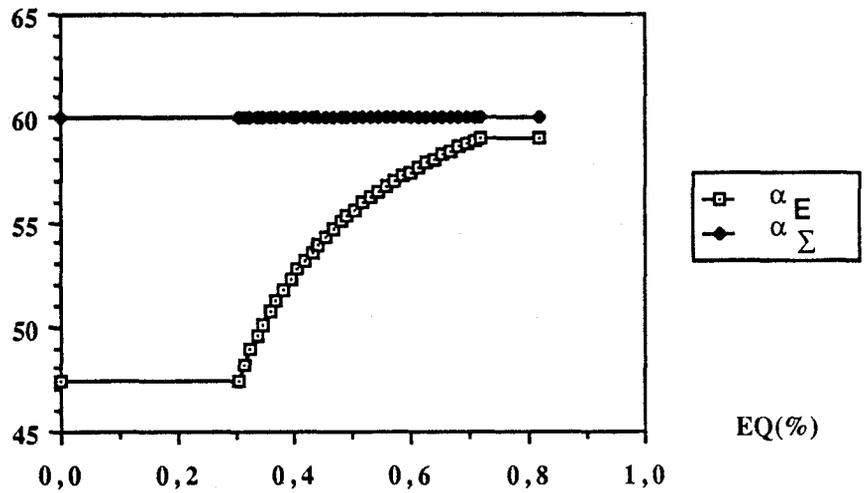


fig V 99: homogénéisation des colonnes ballastées, modélisation de compression suivant Σ_1 , après C-H-I de -0.05 MPa
 évolution des axes principaux

5.4.2 Modélisation de l'écroutissage du domaine élastique

La relation entre les contraintes macroscopiques et microscopiques n'est plus linéaire dès qu'il y a plastification, elle peut se mettre sous la forme :

$$(5.14) \quad \sigma = C_{\Sigma}^{\text{hom}} : \Sigma + \sigma^{\text{re}}(\Sigma(s), 0 \leq s \leq t)$$

σ^{re} est un état de contrainte résiduel qui dépend de toute l'histoire de l'évolution des contraintes macroscopiques jusqu'à l'instant t . Il représente l'état de contrainte qui subsisterait dans la cellule de base, si on annulait l'état de contrainte macroscopique. Ainsi $(C_{\Sigma}^{\text{hom}}) : \Sigma$ est l'état de contrainte microscopique que l'on obtiendrait si les matériaux avaient un comportement purement élastique.

En passant à la moyenne sur Y des termes de (5.14), on obtient :

$$(5.15) \quad \langle \sigma^{\text{re}} \rangle = 0$$

Comme σ et $C_{\Sigma}^{\text{hom}} : \Sigma$ sont des champs de contraintes constants dans chaque matériau du composite, il résulte d'après (5.14) que σ^{re} satisfait la même propriété.

De (5.15), on déduit alors :

$$w_r (\sigma_{11}^{\text{re}})_r + w_s (\sigma_{11}^{\text{re}})_s = 0$$

soit
$$(\sigma_{11}^{\text{re}})_r = - \frac{w_s}{w_r} (\sigma_{11}^{\text{re}})_s$$

$$w_r (\sigma_{22}^{\text{re}})_r + w_s (\sigma_{22}^{\text{re}})_s = 0$$

$$w_r (\sigma_{12}^{\text{re}})_r + w_s (\sigma_{12}^{\text{re}})_s = 0$$

en tenant compte des conditions de continuité de la contrainte à l'interface :

$$(\sigma_{ij}^{\text{re}})_r = (\sigma_{ij}^{\text{re}})_s$$

On aboutit à :

$$(\sigma_{ij}^{\text{re}})_r = 0$$

$$(\sigma_{ij}^{\text{re}})_s = 0$$

pour $(i,j) = (1,2)$ ou $(2,2)$

Les équations (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8) permettent alors d'écrire :

$$(\sigma_{11})_r = H_r \Sigma_{11} + I_r \Sigma_{22} - \frac{w_s}{w_r} (\sigma_{11})_s^{re}$$

$$(\sigma_{22})_r = \Sigma_{22}$$

$$(\sigma_{12})_r = \Sigma_{12}$$

$$(\sigma_{11})_s = H_s \Sigma_{11} + I_s \Sigma_{22} + (\sigma_{11})_s^{re}$$

$$(\sigma_{22})_s = \Sigma_{22}$$

$$(\sigma_{12})_s = \Sigma_{12}$$

En supposant $H_r \neq 0$ et $H_s \neq 0$ les relations précédentes peuvent se mettre sous la forme :

$$(\sigma_{11})_r = H_r (\Sigma_{11} + (t_1)_r) + I_r \Sigma_{22}$$

$$(\sigma_{22})_r = \Sigma_{22}$$

$$(\sigma_{12})_r = \Sigma_{12}$$

$$(\sigma_{11})_s = H_s (\Sigma_{11} + (t_1)_s) + I_s \Sigma_{22}$$

$$(\sigma_{22})_s = \Sigma_{22}$$

$$(\sigma_{12})_s = \Sigma_{12}$$

avec

$$(t_1)_r = - \frac{w_s (\sigma_{11})_s^{re}}{w_r H_r} \quad (t_1)_s = \frac{(\sigma_{11})_s^{re}}{H_s}$$

Par conséquent, en reprenant les notations du § 4.3.1, le domaine d'élasticité homogénéisé peut être caractérisé à tout moment de la plastification par les conditions :

$$\begin{cases} F_r (\Sigma_{11} + (t_1)_r, \Sigma_{22}, \Sigma_{12}) < 0 \\ F_s (\Sigma_{11} + (t_1)_s, \Sigma_{22}, \Sigma_{12}) < 0 \end{cases}$$

En se référant à l'espace tridimensionnel des contraintes dont les composantes sont :

$$(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \sqrt{2} \Sigma_{12})$$

Ces expressions signifient que les deux zones délimitant le domaine d'élasticité initial subissent au cours de l'écroutissage des translations parallèlement à l'axe des Σ_{11} de même direction, mais de sens opposés. Les coordonnées des vecteurs translations sont :

$$t_r (-(t_1)_r, 0, 0) \quad \text{et} \quad t_s (-(t_1)_s, 0, 0)$$

Si le domaine d'élasticité est délimité simplement par une des deux zones précédentes comme on l'a constaté pour la terre armée et pour certaines valeurs de la pression moyenne sur les fig. IV.12, IV.13, IV.14.

On peut alors affirmer, que dans cette zone de contrainte, l'écroutissage de la surface de charge est parfaitement cinématique.

CONCLUSION

Rappel du but de l'étude

Ce travail constitue une contribution à l'étude des techniques de l'homogénéisation en phases linéaire et non linéaire. Pour réaliser cette étude, nous avons introduit ces techniques dans un programme de calcul aux éléments finis.

Principaux résultats

Comportement linéaire

L'étude sur la terre armée fait ressortir que les caractéristiques homogénéisées sont proches de celles du sol, sauf pour les caractéristiques de rigidité dans la direction du renforcement et pour le coefficient de Poisson transversal.

Pour les groupes de pieux, la technique de l'homogénéisation rend compte des effets de groupe, car elle prend en considération les phénomènes de concentration de contrainte à l'interface. L'étude paramétrique fait ressortir que cet effet s'atténue avec l'espacement des pieux.

Comportement non linéaire

Les lois d'évolution obtenues par la méthode des éléments finis sur la terre armée et les colonnes ballastées mettent en évidence que le comportement du matériau homogène équivalent présente un écrouissage même si les constituants initiaux obéissent à une loi élastoplastique parfaite.

On constate que le matériau homogène équivalent présente une anisotropie sur la limite élastique, la limite de rupture et sur l'écrouissage.

En particulier, nous avons mis en évidence que le domaine d'élasticité homogénéisé est l'intersection de deux zones correspondant chacune à l'entrée en plastification d'un des constituants. L'écrouissage de ce domaine résulte d'une translation sur chacune de ces zones.

D'autre part, nous avons fait apparaître que le matériau multicouche homogénéisé obéit à un modèle à deux variables internes donnant des lois d'évolution proches de celles obtenues avec le calcul aux éléments finis.

Perspectives

Deux axes de recherche peuvent être développés :

Validation

Les prédictions de la théorie de l'homogénéisation sont à comparer à des résultats d'essais en laboratoire et d'observations sur des ouvrages en vraie grandeur. Le fait d'introduire une interface imparfaite devrait permettre de mieux appréhender la réalité.

Développements théoriques

Il apparaît que le modèle à deux variables internes pour le multicouche peut être généralisé au cas tridimensionnel. Pour lequel il est possible d'envisager des critères, sur chaque constituant, plus sophistiqués que celui de Mohr-Coulomb. Pour des configurations géométriques plus compliquées, des modèles de comportement approximatifs comportant un nombre fini de variables internes peuvent être envisagés.

BIBLIOGRAPHIE

- AGARWAL B.D., LIFSHITZ J.M., BROUTMAN L.J. (1974)** - "Elastic-plastic element analysis of short fibre composites" - *Fibre science and technology* 7, Applied Sciences publishers LTD ENGLAND
- ANDRIEUX (1983)** - "Un modèle de matériau microfissuré - Application aux roches et aux bétons" - Thèse ENPC
- BENSOUSSAN A., LIONS J.L., PAPANICOLAOU G. (1979)** - "Asymptotic analysis for periodic structures studies in mathematics and its applications (volume5)" - North holland publishing company - Amsterdam, New-York, Oxford
- BOEHLER J.P. (1975)** - "Contributions théorique et expérimentale à l'étude des milieux plastiques anisotropes" - Thèse d'Etat Grenoble
- [1] **de BUHAN P. (1985)** - "Critère de rupture d'un matériau renforcé par armatures" - CRAS, t. 301, série II, n° 9
- [2] **de BUHAN P. (1985)** - "Calcul par une méthode d'homogénéisation de la résistance au poinçonnement d'un demi-espace multicouche" - Communication au 7ème congrès français de mécanique, Bordeaux
- [3] **de BUHAN P. (1986)** - "Approche fondamentale du calcul des ouvrages en sols renforcés" - Thèse d'Etat, Paris VI
- de BUHAN P., MANGIAVACCHI R., NOVA R., PELLEGRINI G., SALENCON J. (1989)** - "Yield design of reinforced earth walls by a homogeneization method". *Geotechnique* 39, n° 2
- de BUHAN P., SALENCON J. (1987)** - "Analyse de la stabilité des ouvrages en sols renforcés par une méthode d'homogénéisation". *Revue française de géotechnique*, n° 41
- de BUHAN P., SIAD L., SALENCON J. (1986)** - "Critère de résistance pour le matériau "terre armée". CRAS, t. 302, série II, n° 7
- de BUHAN P., TALIERCO A. (1988)** - "Critère de résistance macroscopique pour les matériaux composites à fibres". CRAS, t. 307, série II, p. 227-232
- CISS A. (1985)** - "Etude de la stabilité des massifs en sol renforcé par armatures métalliques à l'aide de formulations numériques de l'analyse limite" - Thèse de Docteur Ingénieur, Grenoble

- DUVAUT G.** (1976) - "Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus - Application à l'étude des matériaux composites élastiques. Homogénéisation" - Theoretical and Applied Mechanics, WT Koiter, North Holland publishing company
- DUVAUT G.** (1977) - "Comportement macroscopique d'une plaque perforée périodiquement" - Lectures Notes in Math, n° 594, pp. 131-145
- DUMONTET H.** (1983) - "Homogénéisation des matériaux stratifiés de type élastique linéaire, non linéaire, viscoélastique". Thèse de 3ème cycle, Paris VI
- FRANCFORT G., QUOC SON NGUYEN, SUQUET P.** (1983) - "Thermodynamique et lois de comportement thermomécanique homogénéisées". CRAS, t. 296, Série II, avril
- HARRISON J., GERRARD C.** (1972) - "Elastic theory applied to reinforced earth". Journal of soil mechanics and foundations, division december
- LENE F.** (1984) - "Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement". Thèse d'Etat Paris VI
- MICHEL J.C.** (1984) - "Homogénéisation de matériaux élastoplastiques avec cavités". Thèse de 3e cycle, Paris VI
- RACHAD Mohamed I.** (1986) - "Etude par homogénéisation de comportements micro-structuraux avec glissements" - Thèse de 3ème cycle, Paris VI
- PASTOR J.** (1983) - "Application de la théorie de l'analyse limite aux milieux isotropes et orthotropes de révolution. Formulations numériques de l'approche statique par la méthode des éléments finis. Thèse d'Etat, Grenoble
- PASTOR J., TURGEMAN S.** (1983) - "Approche numérique des charges limites pour un matériau orthotrope de révolution en déformation plane". J.M.T.A, vol. 2, n° 3
- POSTEL M.** (1985) - "Homogénéisation et réponse sismique de fondations sur pieux". Thèse de Docteur Ingénieur, Centrale Paris.
- ROMSTAD K.M., HERRMANN L.R., SHEN Chih-Kang** (1976) - "Integrated study of reinforced earth I. Theoretical formulation". Journal of the geotechnical engineering division
- SALOMON M.D.G.** (1968) - "Elastic moduli of a stratified rock mass". Int. J. Rock Mechanics, Vol. 5, pp. 519-527, Pergamon Press
- SALENCON J.** (1983) - "Calcul à la rupture et analyse limite" - Presses de l'ENPC
- SALENCON J.** (1985) - "Yield-strength of anisotropic soils. Theoretical and applied Mechanics". Elsevier science, publishers BV North Holland, IUTAM
- SANCHEZ - PALENCIA E.** (1980) - "Non-Homogeneous Media and Vibration Theory". Springer - Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- SALENCON J., de BUHAN P.** (1989) - "Analyse de stabilité d'ouvrages en sols renforcés" - Géotechnique n° 41
- SIAD L.** (1987) - "Analyse de la stabilité des ouvrages en terre armée par une méthode d'homogénéisation" Thèse de 3ème cycle, ENPC
- SOYEZ B.** (1985) - "Méthodes de dimensionnement des colonnes ballastées" - Bulletin de liaison du Laboratoire des Ponts et Chaussées, n° 135

- [1] **SUQUET P.** (1980) - "Sur l'homogénéisation de la loi de comportement d'une classe de matériaux dissipatifs non linéaires". CRAS, t. 291, série A, septembre
 - [2] **SUQUET P.** (1982) - "Une méthode duale en homogénéisation : Application aux milieux élastiques". J.M.T.A., pp 79-98
 - [3] **SUQUET P.** (1982) - "Plasticité et homogénéisation" - Thèse d'Etat, Paris VI
 - [4] **SUQUET P.** (1983) - "Analyse limite et homogénéisation" - CRAS, t. 296, série II, mai
 - [5] **SUQUET P.** (1983) - "Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity". Plasticity today symposium, Udine
- TALIERCO A., SACCHI LANDRIANI G.** (1988) - "A failure condition for Layered Rock". J. Rock Mech., Vol. 25, n° 5, Pergamon Press
- TURGEMAN S.** (1983) - "Contribution au calcul des charges limites en milieux isotropes et orthotropes de révolution par une approche cinématique numérique". Thèse d'Etat, Grenoble
- VALLIAPPAN S., CURISKIS J.I.** (1984) - "Constitutive relationships for composite materials through micromechanics" - Mechanics of Engineering Materials, Edited by CS Desai and RH Gallagher, John Wiley and Sons LTD

ANNEXE 1

REGULARITE DE LA FORMULATION DUALE DE LA METHODE DE L'HOMOGENEISATION

On impose à la cellule de base un tenseur de contrainte macroscopiques nul. Pour démontrer que la forme bilinéaire associée à l'approche duale de la méthode de l'homogénéisation est définie, il suffit d'établir qu'en phase élastique, les inconnues constituées par les composantes du tenseur macroscopique E et du champ de déplacement périodique v sont nulles.

En multipliant l'équation d'équilibre pour un champ u^* de déplacement à déformation périodique :

$$\sigma_{ij,j} u_i^* = 0$$

ou encore :

$$(A.1) \quad \int_Y \sigma_{ij,j} u_i^* dY = \int_Y (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} dY - \int_Y \sigma_{ij} u_{i,j}^* dY = 0$$

comme $u^* \in DP(Y)$ $u_i^* = E_{ik}^* y_k + \psi_i^*$

alors

$$\int_Y (\sigma_{ij} u_i^*)_{,j} dY = \int_Y (\sigma_{ij} E_{ik}^* y_k)_{,j} dY - \int_Y (\sigma_{ij} \psi_i^*)_{,j} dY$$

par antipériodicité de $\sigma_{ij} n_j$ et périodicité de ψ_i^* :

$$\int_Y (\sigma_{ij} \psi_i^*)_{,j} dY = \int_{\partial Y} \sigma_{ij} \psi_i^* n_j d(\partial Y) = 0$$

de plus :

$$\begin{aligned} \int_Y (\sigma_{ij} E_{ik}^* y_k)_j dY &= \int_Y \sigma_{ij,j} E_{ik}^* y_k dY + \int_Y \sigma_{ij} E_{ij}^* dY \\ &= \int_Y \sigma_{ij} E_{ij}^* dY = E_{ij}^* \int_Y \sigma_{ij} dY \\ &= |Y| E_{ij}^* \Sigma_{ij} = |Y| E^* : \Sigma \end{aligned}$$

et (A.1) s'écrit donc :

$$\int_Y a_{ijkl} u_{k,h} u_{i,j}^* dY = |Y| E^* : \Sigma \quad \forall u^* \in DP(Y)$$

On retrouve ici la forme classique de l'élasticité donc u est nul à une constante additive près.

Comme $u \in DP(Y)$

$$u = Ey + v \quad v \text{ est } Y \text{ périodique}$$

or $u = 0$ donc $v = -Ey$.

Pour satisfaire la condition de périodicité sur v , il faut que $E = 0$ et $v = 0$.

Ce qui prouve le résultat.

ANNEXE 2

FORMULATION VARIATIONNELLE DE L'APPROCHE PRIMALE DE LA METHODE DE L'HOMOGENEISATION EN PHASE ELASTIQUE

Par des développements similaires à ceux de l'approche duale, on obtient assez facilement :

$$\int_Y a_{ijkh} e_{kh}^{(v^{lm})} e_{ij}(\varphi) dY = - \int_Y a_{ijkh} e_{kh}(\varphi) dY = L^{ij}(\varphi)$$

v^{kh} Y périodique
 $\forall \varphi$ Y périodique

$$\begin{aligned} L^{ij}(\varphi) &= - \int_Y a_{ijkh} e_{kh}(\varphi) dY = - \int_Y [(a_{ijkh} \varphi_h)_{,k} - (a_{ijkh})_{,k} \varphi_h] dY \\ &= - \int_{\partial Y} a_{ijkh} \varphi_h n_k d(\partial Y) + \int_{\Gamma} [a_{ijkh}] \varphi_h n_k d\Gamma \\ &\quad + \int_Y (a_{ijkh})_{,k} \varphi_h dY \end{aligned}$$

Compte tenu des conditions de périodicité, la première intégrale est nulle.

On considère que les matériaux constitutifs du composite sont homogènes. Donc les coefficients d'élasticité sont constants par morceau, et alors :

$$L^{ij}(\varphi) = \int_{\Gamma} (F_h^{int})_{ij} \varphi_h d\Gamma$$

Annexe 2
Formulation variationnelle de l'approche primale de la méthode de
l'homogénéisation en phase élastique

avec $(F_h^{int})_{ij} = \llbracket a_{ijkh} n_k \rrbracket$

Les forces s'exercent à l'interface. Pour des composites à constituants isotropes, on donne dans le tab. A1. l'expression des vecteurs forces des six problèmes élémentaires.

Dans l'approche duale, on retrouve ces expressions au niveau de la matrice de rigidité et l'écriture de la matrice de force s'en trouve allégé.

Les coefficients de rigidité homogénéisés s'explicitent :

$$\begin{aligned} a_{ijkh}^{hom} &= \langle \sigma_{ij}^{kh} \rangle = \langle a_{ijlm} e_{lm} (u^{kh}) \rangle \\ &= \langle a_{ijlm} (E_{lm}^{kh} + e_{lm} (v^{kh})) \rangle \\ &= \langle a_{ijlm} \rangle + \langle \sigma_{ij} (v^{kh}) \rangle \end{aligned}$$

Type de problème	v^{11}	v^{22}	v^{33}	v^{23}	v^{31}	v^{12}
vecteur force F^{int}	$\llbracket \lambda + 2\mu \rrbracket n_1$	$\llbracket \lambda \rrbracket n_1$	$\llbracket \lambda \rrbracket n_1$	0	$\llbracket \mu \rrbracket n_3$	$\llbracket \mu \rrbracket n_2$
	$\llbracket \lambda \rrbracket n_2$	$\llbracket \lambda + 2\mu \rrbracket n_2$	$\llbracket \lambda \rrbracket n_2$	$\llbracket \mu \rrbracket n_3$	0	$\llbracket \mu \rrbracket n_1$
	$\llbracket \lambda \rrbracket n_3$	$\llbracket \lambda \rrbracket n_3$	$\llbracket \lambda + 2\mu \rrbracket n_3$	$\llbracket \mu \rrbracket n_2$	$\llbracket \mu \rrbracket n_1$	0

Tab. A1

ANNEXE 3

VERIFICATION DU PRINCIPE DE MACRO- HOMOGENEITE POUR LES C-M-m DE LA METHODE DE L'HOMOGENEISATION

σ et e vérifient sur la cellule de base les conditions :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_Y \sigma = 0 \\ e \text{ Y périodique} \\ \sigma \cdot n \text{ Y antipériodique} \end{cases}$$

On se propose d'établir que :

$$\langle \sigma_{ij} e_{yij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle \langle e_{yij} \rangle$$

En utilisant la formule de Green :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} e_{yij} \rangle &= \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma_{ij} e_{yij}(u) \, dY \\ &= \frac{1}{|Y|} \left[\int_{\partial Y} \sigma_{ij} n_j u_i \, d(\partial Y) - \int_Y \sigma_{ij,j} u_i \, dY \right] \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y} \sigma_{ij} n_j u_i \, d(\partial Y) \end{aligned}$$

comme $e_Y(u)$ est Y périodique, on a :

$$u_i = E_{ik} y_k + v_i \quad \text{avec } v_i \text{ Y périodique}$$

ANNEXE 4

COMPARAISON SUR DES EXEMPLES DE L'APPROCHE PRIMALE DE LA METHODE DE HILL-MANDEL ET DE LA METHODE DE L'HOMOGENEISATION

* Terre armée

On a repris l'exemple de la fig. III.2, nous constatons que les tenseurs de rigidité des deux méthodes sont comparables.

* Multicouche associée à la terre armée

On a travaillé sur l'exemple du multicouche de la fig. A1 ; les résultats obtenus sont comparables :

(MPa)	a_{2222}^{hom}	a_{3333}^{hom}	a_{2233}^{hom}	a_{2323}^{hom}
Méthode de l'homogénéisation	203,5	287,2	105,3	58,14
Approche primale de la méthode de Hill-Mandel	208,4	287,6	105,7	60,72

Annexe 4
 Comparaison sur des exemples de l'approche primale
 de la méthode de Hill-Mandel et de la méthode de l'homogénéisation

* **Pieu rempli de sol :**

On a travaillé sur l'exemple de la fig. A2 :

(MPa)	hom a ₂₂₂₂	hom a ₂₂₃₃	hom a ₂₃₂₃
Méthode de l'homogénéisation	262,30	129,20	66,23
Approche primale de la méthode de Hill-Mandel	262,90	129,80	66,47

* **Pieu vide dans le sol**

(MPa)	hom a ₂₂₂₂	hom a ₂₂₃₃	hom a ₂₃₂₃
Méthode de l'homogénéisation	248,60	142,60	51,42
Approche primale de la méthode de Hill-Mandel	249,50	142,80	53,15

Annexe 4
Comparaison sur des exemples de l'approche primale
de la méthode de Hill-Mandel et de la méthode de l'homogénéisation

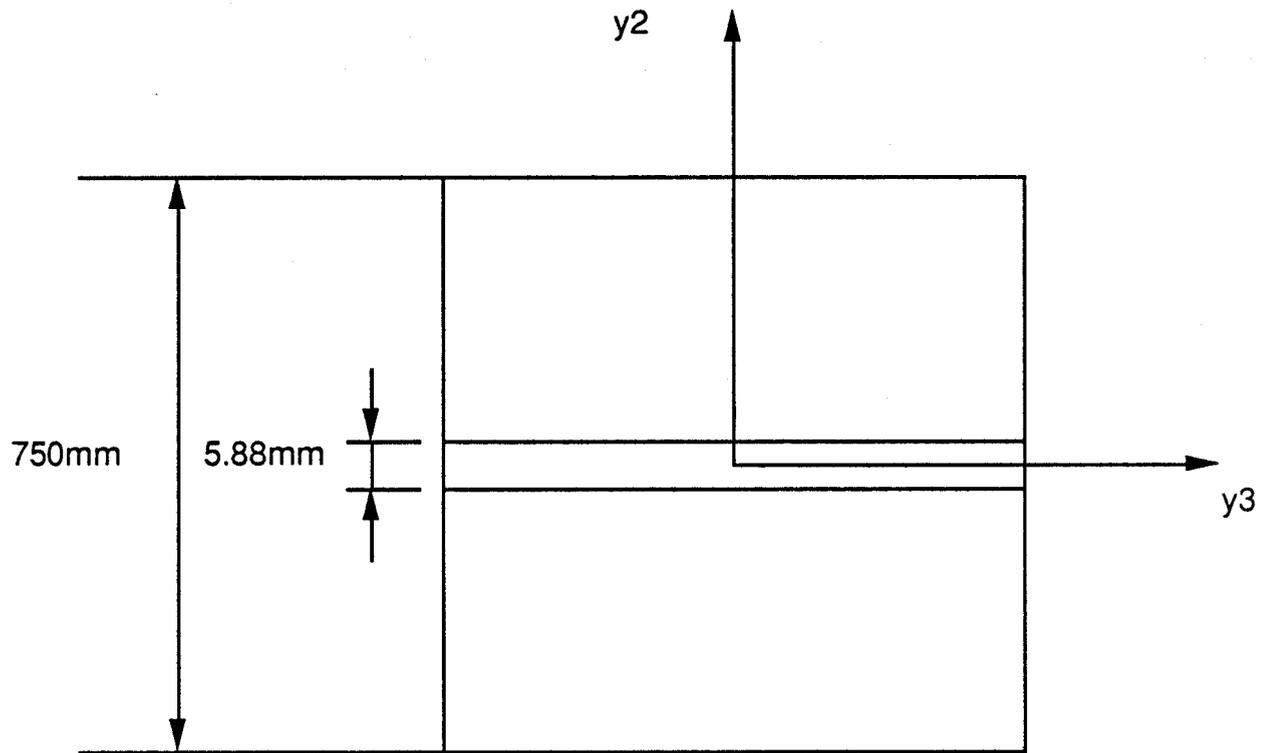


fig A1: Matériau multicouche

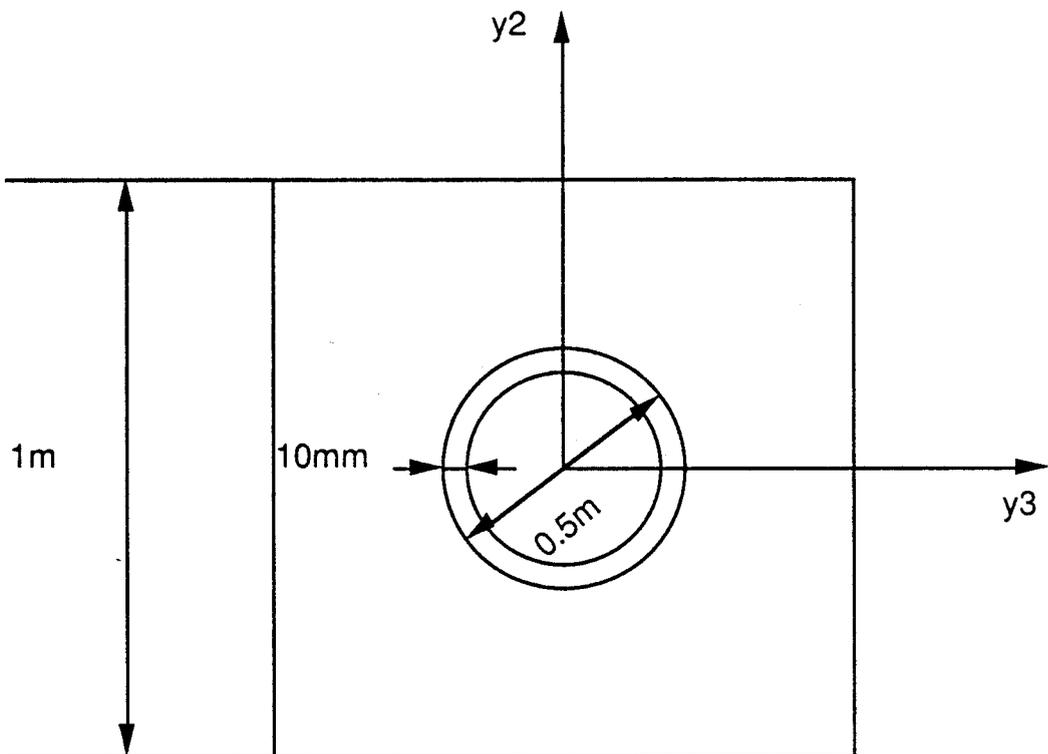


fig A 2: Tube d'acier dans le sol

ANNEXE 5

NATURE DES COURBES DELIMITANT LE DOMAINE ELASTIQUE HOMOGENEISE POUR LE MATERIAU MULTICOUCHE, SI LES CONSTITUANTS OBEISSENT A DES CRITERES DE MOHR-COULOMB

On s'intéresse à la zone limite du domaine élastique correspondant à l'entrée en plastification du renforcement ; pour étudier celle du sol, il suffit de transposer les indices r par s . L'équation de cette surface dans l'espace des contraintes macroscopiques est :

$$(A.2) \quad \sqrt{\frac{(H_r \Sigma_{11} + I_r \Sigma_{22} - \Sigma_{22})^2}{4} + \Sigma_{12}^2} + \sin \varphi_r \left(\frac{H_r \Sigma_{11} + I_r \Sigma_{22} + \Sigma_{22}}{2} \right) - C_r \cos \varphi_r = 0$$

Pour sa représentation dans le plan déviatorique, nous proposons d'utiliser les axes de coordonnées :

$$U = \frac{(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})}{\sqrt{2}} \quad PM = \frac{(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})}{2}$$

soit $\Sigma_{11} = PM + \frac{U}{\sqrt{2}} \quad \Sigma_{22} = PM - \frac{U}{\sqrt{2}}$

en injectant ces expressions dans (A.2), on obtient après réduction une expression du type :

$$(A.3) \quad K_1 (U + K_2)^2 + 4\Sigma_{12}^2 = K_3$$

avec $K_1 = \frac{1}{2} [(H_r - I_r) (1 - \sin \varphi_r) + \sin \varphi_r] [(H_r - I_r) (1 + \sin \varphi_r) - \sin \varphi_r]$

Pour que (A.3) soit l'équation d'une ellipse d'axes parallèles à ceux du repère (U, W), il faut que $K_1 > 0$ et $K_3 > 0$. Comme le calcul de K_3 est compliqué, nous nous sommes intéressés à la condition nécessaire, $K_1 > 0$ permettant d'affirmer que lorsque la représentation du critère défini par (A.2) dans un plan de pression moyenne donnée existe, il s'agit d'une ellipse.

Nature des courbes délimitant le domaine élastique homogénéisé pour le matériau multicouche, si les constituants obéissent à des critères de Mohr-Coulomb

En posant :

$$k_1 = \frac{-\sin \varphi_r}{1 - \sin \varphi_r} \quad k_2 = \frac{\sin \varphi_r}{1 + \sin \varphi_r}$$

$$K_1 > 0 \Leftrightarrow (H_r - I_r) \in] -\infty, k_1 [\cup] k_2, +\infty [$$

Nous vérifions cette condition sur les deux exemples que nous avons étudiés :

• **Terre armée**

$$k = 21,31$$

pour le sol

$$\begin{array}{ll} H_s = 0,87 & I_s = -0,07 \\ k_1 = -1 & k_2 = 0,333 \end{array}$$

$$\text{donc } K_1 > 0$$

pour l'acier

$$\begin{array}{ll} H_r = 16,63 & I_r = -0,025 \\ k_1 = k_2 = 0 & \end{array}$$

$$\text{donc } K_1 > 0$$

• **Colonnes ballastées**

$$k = 20$$

pour le sol

$$\begin{array}{ll} H_s = 0,296 & I_s = 3,44 \\ k_1 = -0,520 & k_2 = 0,255 \end{array}$$

$$\text{donc } K_1 > 0$$

• **pour la colonne de sable**

$$\begin{array}{ll} H_r = 5,926 & I_r = -0,060 \\ k_1 = -1,345 & k_2 = 0,365 \end{array}$$

$$\text{donc } K_1 > 0$$

ANNEXE 6

INTRODUCTION DES CONDITIONS DE PERIODICITE DANS LE CODE EN NON LINEAIRE PECPLAS

Comme la matrice de rigidité intervient dans la convergence, afin d'éviter de la modifier, nous avons introduit les conditions de périodicité en utilisant la méthode de Lagrange, par opposition à la méthode utilisée pour Pecelas, et consistant à modifier la rigidité en ajoutant deux ressorts infiniment rigides, entre les noeuds périodiques.

Sur le problème discrétisé, on écrit les conditions de périodicité à l'aide d'une matrice D ce qui permet d'écrire globalement le nouveau système à résoudre :

$$\begin{cases} R_T X = F + F^P \\ DX = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce problème est équivalente à la détermination de la valeur des multiplicateurs de Lagrange λ et du vecteur inconnu qui minimise la quantité.

$$J = \frac{1}{2} \iota_X R_T X - \iota_X (F + F^P) - \iota_X \iota_D \lambda$$

Cette condition est obtenue pour :

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial J}{\partial X} = 0$$

or :

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = - \iota(DX) = 0 \Rightarrow DX = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial X} = R_T X - F - F^P - \iota_D \lambda = 0$$

ce qui conduit à la résolution du système :

$$\left[\begin{array}{c|c} R_T & -^tD \\ \hline -D & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F^P \\ 0 \end{bmatrix}$$

ANNEXE 7

METHODE DE L'HOMOGENEISATION POUR LE MATERIAU MULTICOUCHE : EQUIVALENCE DES CARACTERISATIONS MACROSCOPIQUE ET MICROS- COPIQUE EN DEFORMATION PLANE

Si le problème est défini en déformation plane au niveau microscopique, il l'est forcément au niveau macroscopique.

Réciproquement, on se donne un état de déformation plane au niveau macroscopique :

$$E_{13} = E_{23} = E_{33} = 0$$

Comme on sait que le tenseur de déformation microscopique est constant dans chaque constituant, il vient :

$$E_{13} = w_s (e_{13})_s + w_r (e_{13})_r = 0$$

$$E_{33} = w_s (e_{33})_s + w_r (e_{33})_r = 0$$

Comme l'interface est parfaite, on peut y écrire la continuité du tenseur des déformations :

$$(e_{13})_s = (e_{13})_r$$

$$(e_{33})_s = (e_{33})_r$$

Il est alors immédiat que :

$$(e_{13})_s = 0$$

$$(e_{33})_s = 0$$

En ce qui concerne la déformation de cisaillement dans le plan 2, 3, durant toute la phase élastique, on peut écrire que :

$$(A.4) \quad (\sigma_{23})_r = 2 G_r (e_{23})_r$$

$$(A.5) \quad (\sigma_{23})_s = 2 G_s (e_{23})_s$$

La continuité de la contrainte à l'interface permet d'affirmer que :

$$(\sigma_{23})_r = (\sigma_{23})_s$$

soit :

$$(A.6) \quad 2G_r (e_{23})_r = 2 G_s (e_{23})_s$$

et comme on sait que :

$$(A.7) \quad E_{23} = w_s (e_{23})_s + w_r (e_{23})_r = 0$$

de (A.4), (A.5), (A.6), (A.7), on peut tirer que :

$$(e_{23})_s = (e_{23})_r = 0$$

$$(\sigma_{23})_s = (\sigma_{23})_r = 0$$

Ce qui permet d'affirmer qu'au moment de l'entrée en plastification d'un des matériaux, par exemple le sol, la direction des déformations plastiques est telle que :

$$(de_{23}^p)_s = 0$$

En effet, l'hypothèse d'isotropie des constituants permet d'affirmer que le potentiel plastique g présente une symétrie par rapport au plan $(0, y_1, y_2)$, soit alors :

$$(g)_s (\sigma_{23}) = (g)_s (-\sigma_{23})$$

et

$$\frac{\partial (g)_s}{\partial \sigma_{23}} (\sigma_{23}) = \frac{-\partial (g)_s}{\partial \sigma_{23}} (-\sigma_{23})$$

pour $\sigma_{23} = 0$ on obtient

$$\left(\frac{\partial (g)_s}{\partial \sigma_{23}} \right)_{\sigma_{23} = 0} = 0$$



en considérant la loi d'écoulement plastique (si elle est associée $g = f_e$), et en tenant compte qu'à l'entrée en plastification, on a $(\sigma_{23})_s = 0$, il apparaît que :

$$(de_{23}^p)_s = d\lambda \left(\frac{\partial (g)_s}{\partial \sigma_{23}} \right)_{\sigma_{23} = 0} = 0$$

ce qui montre que le sol reste élastique vis-à-vis du cisaillement dans le plan (y_2, y_3) et, par conséquent, la déformation correspondante reste nulle, ce qui achève la démonstration.

PPN 036121967

**CONTRIBUTION A L'HOMOGENEISATION
EN PHASE NON LINEAIRE
APPLICATION AU RENFORCEMENT DES SOLS**

E.PRUCHNICKI

Résumé:

Devant l'accroissement important de l'emploi des matériaux composites dans l'industrie, de nombreux développements théoriques et numériques ont été effectués afin de leur associer un matériau homogène équivalent. Le présent travail constitue une contribution dans ce sens. Il comprend deux parties.

La première est consacrée au comportement des composites en phase élastique linéaire. Après une étude théorique, nous avons introduit les techniques d'homogénéisation dans le programme de calcul aux éléments finis, Pecelas. Cet outil a été utilisé pour réaliser des études sur la terre armée et le groupe de pieux.

La deuxième partie porte sur l'étude du comportement des composites en phase élastoplastique. La théorie de l'homogénéisation est rappelée. Ensuite, son introduction dans le programme de calcul élastoplastique Pecplas est décrite. La terre armée et les colonnes ballastées ont été modélisées par un multicouche, ce qui a permis d'étudier leur domaine d'élasticité et de rupture. Quant à l'étude de la loi d'évolution, nous avons pu l'obtenir grâce à des simulations numériques par éléments finis.

Cette étude a permis d'élaborer un modèle de comportement à deux variables internes pour la loi d'évolution homogénéisée. Nous avons pu en déduire la manière dont s'effectue l'écrouissage du domaine d'élasticité homogénéisé.

Mots Clés : Homogénéisation - élastoplastique - milieux périodiques - terre armée - colonnes ballastées - groupe de pieux - éléments finis.