

50376
1991
304



65886

50376
1991
304

N° d'ordre: 814

THESE DE DOCTORAT
présentée à
L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE
LILLE FLANDRES ARTOIS
pour obtenir le Grade de
DOCTEUR EN MECANIQUE
par
VANHEE Luc

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU
COMPORTEMENT HYDRODYNAMIQUE DES
CELLULES D'ELECTRODEPOSITION.

Soutenue le 28 Novembre 1991

devant la Commission d'examen

Membres du Jury :

Rapporteurs :

M. DYMENT, Professeur à l'USTL Flandres Artois.
M. WINAND, Professeur à l'UL de Bruxelles.

Membres :

M. HA MINH HIEU, Professeur à l'INP de Toulouse.
M. VANDROMME, Professeur à l'INSA de ROUEN.
M. STANISLAS, Professeur à l'école Centrale de Lille.
M. ROUAULT, Directeur technique de BEAUTOR S.A.
M. MOTTOULLE, Responsable de l'assurance qualité de TDM S.A.
M. WEYMEERSCH, Responsable des "procédés
électrolytiques" à RDCS.

PREAMBULE

Ce travail a fait l'objet d'une Convention Industrielle pour la Formation par la Recherche entre BEAUTOR S.A. et l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille. Je remercie Monsieur POLARD, Directeur général de BEAUTOR S.A., ainsi que Monsieur BAHUREL, Directeur de l'I.M.F.L., de m'avoir permis de réaliser cette étude.

Ce travail a été mené en collaboration étroite avec le service "Métallurgie-Electrochimie" du Professeur WINAND, de l'Université Libre de Bruxelles. Je lui suis reconnaissant pour l'intérêt qu'il a témoigné pour ce travail.

Je remercie Monsieur le Professeur DYMENT pour m'avoir accueilli au sein de son équipe ainsi que pour sa participation au jury de la Commission d'examen.

Je suis reconnaissant et je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur STANISLAS de Centrale Lille, pour la qualité de l'encadrement scientifique qu'il a fourni, et surtout pour le soutien moral qu'il a su m'apporter tout au long de cette étude.

Je remercie également Monsieur ROUAULT, directeur technique de BEAUTOR S.A., ainsi que Monsieur WEYMEERSCH, responsable du service "procédés électrolytiques" du Centre de Recherche du Groupe COCKERILL SAMBRE, pour toute l'attention qu'ils ont eue à l'égard de ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur DAMIENS, technicien à l'Université Libre de Bruxelles, ainsi qu'à Monsieur DUPONT, maître de conférence à Centrale Lille, pour leur participation aux études expérimentales.

Je suis reconnaissant envers Messieurs HA MINH HIEU, VANDROMME et MOTTOULLE d'avoir examiné avec intérêt ce travail et d'avoir accepté de participer à la Commission d'examen.

Je tiens également à remercier Monsieur MONNIER, Ingénieur du groupe de Mécanique des Fluides Fondamentale de l'I.M.F.L., pour tous les conseils qu'il a donnés et qui m'ont permis de poursuivre le travail qu'il avait réalisé.

Je suis aussi reconnaissant aux membres du groupe de Mécanique des Fluides Fondamentale de l'I.M.F.L. pour l'accueil et l'amitié qu'ils m'ont témoignés.

Pour terminer, je remercie l'Agence Nationale pour la Recherche Technique qui a subventionné en partie ce travail de recherche.

Table des Matières

NOTATIONS PRINCIPALES	4
I INTRODUCTION ET POSITION DU PROBLEME.	7
1 L'ELECTRODEPOSITION DANS L'INDUSTRIE:	9
1.1 Introduction:	9
1.2 La ligne d'électro-déposition:	11
1.3 Les cellules d'électro-déposition:	12
1.4 Le but industriel:	14
2 POSITION SCIENTIFIQUE DU PROBLEME:	15
2.1 Introduction:	15
2.2 Simplification du problème hydrodynamique:	16
2.2.1 Phénomènes chimiques:	16
2.2.2 Phénomènes électriques:	19
2.2.3 Phénomènes hydrauliques:	21
2.2.4 Conclusions:	24
2.3 Contribution au transport du métal à déposer:	25
2.3.1 Equations générales pour une espèce ionique:	25
2.3.2 Simplifications inhérentes aux caractéristiques des cellules d'électro- zingage:	27
2.4 Caractéristiques de la solution:	30
2.5 Conclusions:	32
3 INFLUENCE DE L'HYDRODYNAMIQUE SUR LE RENDEMENT CATHODIQUE ET LA QUALITE DU DEPÔT	35
3.1 Introduction:	35
3.2 La densité de courant limite de diffusion:	37
3.2.1 Définitions:	37
3.2.2 Evaluation de la densité de courant limite de diffusion:	39
3.3 Conclusions:	41
4 BUT DE CETTE ETUDE:	43
4.1 Introduction:	43

4.2	Prédiction des écoulements:	44
4.3	Modélisation électrochimique:	46
4.4	Application industrielle des résultats:	46
II MODELISATION HYDRODYNAMIQUE		49
5	FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME HYDRODYNAMIQUE	51
5.1	Introduction:	51
5.2	Equations de NAVIER-STOKES:	51
5.3	Equations de REYNOLDS:	53
5.4	Problème de fermeture:	54
5.5	Equations de transport pour les grandeurs turbulentes:	55
6	APPLICATION AUX ECOULEMENTS ETUDIES	59
6.1	Simplifications des équations:	59
6.2	Base de données expérimentales:	61
6.2.1	Écoulements de POISEUILLE:	61
6.2.2	Écoulements de COUETTE:	63
6.2.3	Écoulements de COUETTE avec gradient de pression:	65
6.3	Retour sur les fermetures au premier ordre:	67
6.3.1	Modèle de longueur de mélange.	67
6.3.2	Modèle à une équation de transport.	68
6.3.3	Modèle à deux équations de transport.	69
6.4	Conclusions:	76
7	MODELES DE FERMETURES AU SECOND ORDRE:	77
7.1	Introduction:	77
7.2	Modélisations dans les écoulements fortement turbulents:	81
7.2.1	Modélisation de la diffusion turbulente:	81
7.2.2	Modélisation du terme de dissipation:	82
7.2.3	Modélisation du terme de redistribution de l'énergie:	83
7.3	Equation de transport pour le taux de dissipation isotrope ϵ :	94
7.4	Extensions des modèles aux régions faiblement turbulentes:	96
7.4.1	La diffusion turbulente:	96
7.4.2	Le taux de dissipation:	97
7.4.3	La redistribution de l'énergie turbulente:	99
7.5	CONCLUSIONS:	100
8	APPLICATION DE DIFFERENTS MODELES AUX TENSIONS DE REYNOLDS AUX ECOULEMENTS ENVISAGES	101
8.1	Introduction:	101
8.2	Méthode numérique:	102
8.3	Prédiction des écoulements de POISEUILLE:	102
8.4	Prédiction des écoulements de COUETTE purs:	103

8.5	Prédictions des écoulements de COUETTE avec gradient de pression: . . .	104
8.5.1	Écoulements de type COUETTE:	105
8.5.2	Écoulements intermédiaires:	106
8.5.3	Écoulements de type POISEUILLE:	106
8.6	COMPARAISONS ENTRE LES PREDICTION D'UN MODELE $k-\epsilon$ ET CELLES D'UN MODELE AUX TENSIONS DE REYNOLDS:	107
8.7	CONCLUSIONS:	108
9	INFLUENCES DES RUGOSITES DE PAROI	113
9.1	INTRODUCTION	113
9.2	PRISE EN COMPTE DES EFFETS DE RUGOSITE:	114
9.2.1	Paramètre de représentation de la rugosité de paroi:	114
9.2.2	Effets de la rugosité sur la perte de charge:	115
9.2.3	Effets de la rugosité sur la distribution de vitesse:	116
9.3	Prise en compte des effets de rugosité de paroi dans un modèle de longueur de mélange.	117
9.4	Application aux cellules d'électro-déposition:	120
9.4.1	Prise en compte des effets de rugosité au sens de ROTTA dans le modèle de longueur de mélange de MONNIER:	121
9.4.2	Prise en compte des effets de rugosité au sens de HAN dans le modèle de longueur de mélange de MONNIER:	122
9.4.3	Résultats:	124
9.5	CONCLUSION:	127
III	MODELISATION ELECTROCHIMIQUE.	129
10	FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME ELECTROCHIMIQUE	131
10.1	Introduction:	131
10.2	Domaine et procédé de calcul:	132
10.3	Écoulements laminaires:	132
10.3.1	Equation pour la quantité de mouvement.	132
10.3.2	Equation pour la concentration.	133
10.4	Écoulements turbulents:	134
10.4.1	Equations pour la quantité de mouvement:	134
10.4.2	Equation pour la concentration de l'ion zinc.	134
11	CALCUL DE LA COUCHE LIMITE DE DIFFUSION DANS LE CAS D'UN ECOULEMENT LAMINAIRE	137
11.1	Introduction:	137
11.2	Écoulements de POISEUILLE laminaires:	137
11.2.1	Résolution analytique:	138
11.2.2	Résolution numérique:	139
11.3	Écoulements de COUETTE laminaires avec gradient de pression:	140

11.3.1	Résolution analytique:	140
11.3.2	Résolution numérique:	141
11.4	Exploitation des résultats:	142
12	ECOULEMENTS TURBULENTS	145
12.1	Introduction:	145
12.2	Ecoulements de POISEUILLE turbulents:	147
12.2.1	Résolution analytique:	147
12.2.2	Résolution numérique:	149
12.3	Ecoulements de COUETTE turbulents avec gradient de pression:	150
12.3.1	Résolution analytique:	151
12.3.2	Résolution numérique:	151
12.4	Exploitation des résultats obtenus:	153
12.5	Conclusions:	156
13	ETUDE EXPERIMENTALE	157
13.1	Dispositif expérimental:	157
13.2	Procédé expérimental et mesures effectuées:	158
13.2.1	Procédé expérimental:	158
13.2.2	Mesures réalisées:	160
13.2.3	Exploitation des mesures:	164
13.2.4	Influence de la concentration en traceur:	164
13.2.5	Influences de l'écoulement et de la densité de courant de travail:	164
13.2.6	Représentation des phénomènes mis en évidence:	165
13.3	Conclusions:	167
14	APPLICATIONS ET CONCLUSIONS DE CETTE PARTIE	169
14.1	Applications des résultats obtenus:	169
14.1.1	Confrontation entre la loi expérimentale et le modèle numérique:	169
14.1.2	Application du modèle complet aux mesures:	170
14.1.3	Confrontation du modèle avec d'autres mesures expérimentales:	170
14.2	Conclusions de cette partie:	172
IV	APPLICATION INDUSTRIELLE DES RESULTATS PRECEDENTS ET CONCEPTION D'UNE NOUVELLE CELLULE D'ELECTRO-ZINGAGE.	175
15	DEFINITION D'UNE NOUVELLE CELLULE INDUSTRIELLE	177
15.1	Introduction:	177
15.2	Application des résultats à la conception d'une cellule d'électro-déposition:	178
15.2.1	Condition de transfert des mesures de laboratoire aux cellules industrielles:	178
15.2.2	Application de la condition de transfert aux cellules de la société BEAUTOR S.A.:	179

15.2.3	Application des résultats obtenus à la conception d'une cellule capable de réaliser des dépôts mono-orientés:	179
15.3	Conception d'une nouvelle cellule industrielle:	180
15.3.1	Charges à respecter:	180
15.3.2	Définition du canal:	181
15.3.3	Définition des injecteurs:	181
15.4	Performances de la nouvelle cellule:	182
15.5	Conclusions:	183
16	ETUDE EXPERIMENTALE DE L'INFLUENCE DE LA GEOMETRIE DU NEZ D'INJECTION	185
16.1	Introduction:	185
16.2	Règles de similitude:	186
16.2.1	Inventaire des grandeurs caractéristiques de l'écoulement:	186
16.2.2	Lois d'évolutions:	188
16.2.3	Conditions de similitude entre la maquette et la cellule industrielle:	191
16.3	Application des règles de similitude à la maquette:	192
16.3.1	Caractéristiques de la cellule industrielle:	193
16.3.2	Caractéristiques de la maquette:	193
16.3.3	Equipement de la maquette:	194
16.3.4	Lois de similitude réalisées:	195
16.4	Mesures réalisées et qualification de la maquette:	197
16.4.1	Mesures réalisées:	197
16.4.2	Qualification de la maquette:	199
16.5	Résultats expérimentaux:	202
16.5.1	Fraction de débit passant réellement dans le canal de la cellule:	202
16.5.2	Loi de variation de la pression \hat{P}_r au point d'injection:	205
16.5.3	Coefficients de pertes de charges relatifs à la géométrie du nez d'injection:	207
16.5.4	Coefficient de perte de charge dans le corps de l'injecteur:	209
16.5.5	Hauteurs des jets d'injection et d'éjection:	210
16.6	Conclusions:	212
17	Conclusions de cette partie:	213
V	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	215
18	CONCLUSIONS	217
19	PERSPECTIVES	221
ANNEXES		223
.1	ANNEXE A1	223
.2	ANNEXE A2:	226
.3	ANNEXE A3:	231

.4 ANNEXE A4: 238
.5 ANNEXE B 244

REFERENCES **250**

NOTATIONS PRINCIPALES:

Grandeurs caractéristiques relatives aux écoulements:

d_h	:Diamètre hydraulique d'une conduite.
h	:Hauteur de l'écoulement.
k	:Energie cinétique turbulente.
l	:Largeur du canal.
L	:Longueur totale du canal.
\vec{n}	:Vecteur normal aux surfaces.
P	:Pression statique instantanée.
\bar{P}	:Pression statique moyenne.
p	:Fluctuation de pression.
\hat{P}	:Pression motrice moyenne.
P_a	:Pression atmosphérique.
P_{ij}	:Taux de production de la corrélation $\overline{u_i u_j}$.
P_ϵ	:Taux de production de l'énergie turbulente.
Q	:Débit dans le canal.
R	:Rayon du tambour cathodique.
Re	:Nombre de Reynolds: $Re = \frac{Uh}{\nu}$.
Re_b	:Nombre de Reynolds basé sur la vitesse de la ligne: $Re_b = \frac{V_b h}{\nu}$.
Re_{moy}	:Nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne $Re_{moy} = \frac{U'_{moy} h}{\nu}$.
Re_{max}	:Nombre de Reynolds basé sur la vitesse maximale $Re_{max} = \frac{U'_{max} h}{\nu}$.
\bar{U}	:Composante de la vitesse moyenne dans la direction x .
U^+	:Vitesse adimensionnée: $U^+ = \frac{\bar{U}}{u_\tau}$.
U_i	:Composante de la vitesse instantanée dans la direction i .
\bar{U}_i	:Composante de la vitesse moyenne dans la direction i .
u_i	:Composante de la vitesse fluctuante dans la direction i . ($u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$)
$\overline{u_i u_j}$:Corrélation double de vitesses. (composante du tenseur de Reynolds.)
U_{moy}	:Vitesse moyenne du profil de vitesse.
U_{max}	:Vitesse maximale du profil de vitesse.
U_q	:Vitesse débitante dans le canal.
u_τ	:Vitesse de frottement pariétale.
$u_{\tau 1}$:Vitesse de frottement anodique ($y = 0$).
$u_{\tau 2}$:Vitesse de frottement cathodique ($y = h$).
u'_τ	:Vitesse de frottement définie par: $u'^2_\tau = u_{\tau 1}^2 + u_{\tau 2}^2$.
u^*_τ	:Vitesse de frottement fictive qui tient compte du dégagement de gaz.
V_b	:Vitesse de la paroi mobile.
$x_1 = x$:Direction de l'écoulement moyen.
$x_2 = y$:Direction perpendiculaire aux parois, dirigée de la paroi fixe (anode) vers la cathode.

$x_3 = z$: Direction telle que (O, x_1, x_2, x_3) soit un trièdre direct.
 y^+ : Distance pariétale adimensionnée: $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$

δ_l : Epaisseur de la sous-couche visqueuse.
 δ_{ij} : Symbole de KRONECKER.
 ϵ : Taux de dissipation isotrope de l'énergie cinétique turbulente.
 ϵ_{ij} : Taux de dissipation isotrope de la corrélation $\overline{u_i u_j}$.
 Φ_{ij}, Ψ_{ij} : Taux de redistribution de la corrélation $\overline{u_i u_j}$.
 μ : Viscosité dynamique de la solution.
 ν : Viscosité cinématique de la solution.
 ν_t : Viscosité turbulente.
 ρ : Masse volumique de la solution.

Grandeurs caractéristiques relatives à l'électro-chimie:

C_i : Concentration moyenne de l'espèce i .
 C_∞ : Concentration loin des parois solides.
 D_i : Coefficient de diffusion moléculaire de l'espèce ionique i .
 E : Champ électrique.
 F : Constante de Faraday.
 J : Densité de courant de travail.
 J_{lim} : Densité de courant limite de diffusion.
 kt : Coefficient de transfert de masse.
 kt_{lim} : Coefficient de transfert de masse limite.
 \vec{N}_i : Flux des ions d'espèce i .
 Sh : Nombre de Sherwood.
 S_c : Nombre de Schmidt: $S_c = \frac{\nu}{D}$
 S_t : Nombre de Schmidt turbulent.
 T C : Température en degrés CELSIUS.
 z_i : Charge de l'ion d'espèce i .

δ : Epaisseur de la couche limite de diffusion.
 ϕ : Potentiel électrique.
 ρ_e : Densité volumique de charges.
 η : Rendement de courant cathodique.

Grandeurs relatives à la quatrième partie:

g : Accélération de la pesanteur.
 h_1 : Hauteur du jet d'injection.

- h_2 :Hauteur du jet d'éjection.
 J :Perte de charge.
 o :Ouverture du nez d'injection.
 \hat{P}_c :Pression motrice dans la canalisation d'arrivée.
 \hat{P}_i :Pression motrice dans le canal d'uniformisation.
 \hat{P}_r :Pression motrice dans le canal de la cellule au point d'injection.
 Q_t :Débit total injecté.
 Q_r :Débit réel dans la cellule.
 Q_f :Débit de fuite.
 Re_r :Nombre de Reynolds basé sur la vitesse réelle: $Re_r = \frac{U_r h}{\nu}$
 U_i :Vitesse débitante dans le canal d'uniformisation.
 U_r :Vitesse débitante réelle dans la cellule.
 U_f :Vitesse débitante de fuite.
- α :Angle d'injection.
 ξ :Coefficient de perte de charge.
 θ :Angle entre les extrémités du canal de la cellule et la verticale.

Part I

**INTRODUCTION ET POSITION
DU PROBLEME.**

Chapitre 1

L'ELECTRODEPOSITION DANS L'INDUSTRIE:

1.1 Introduction:

De nos jours, beaucoup d'industries font appel aux techniques électro-chimiques pour la réalisation de leurs produits. Un important domaine d'application de ces techniques est l'électro-métallurgie par voie électrolytique. En effet, celle-ci est de plus en plus utilisée dans les industries d'extraction et de raffinage de minéraux et tend à remplacer la méthode pyro-métallurgique. Pour l'extraction, le minerai est broyé avant d'être dissous dans une solution acide qui ionise le métal. Celui-ci est ensuite récupéré par électro-déposition. Pour le raffinage des métaux, l'alliage est aussi dissous. Une électrolyse sélective permet de recueillir le métal désiré sous une forme pure. Dans les deux cas, le minéral est ainsi généralement récupéré par électro-déposition cathodique sous forme de feuilles ou de plaques.

Une autre application importante de l'électro-déposition est le revêtement de surface. A titre d'exemple, les industries de l'électronique, de la conserverie, aussi bien que celles de l'automobile, ainsi que leurs fournisseurs font appel à ce procédé.

En électronique, l'électrolyse est essentiellement utilisée soit pour la fabrication des plaques de circuits imprimés, où une fine couche de cuivre est déposée sur un substrat en résine époxyde; soit pour la réalisation de dépôts d'alliages sur les connecteurs afin d'améliorer leur résistance à la corrosion, leur soudabilité et la conductivité de la connection.

Une des premières utilisations de la tôle préprotégée est l'emballage métallique des produits de grande consommation, et en particulier les conserves alimentaires. Pour ces dernières, la tôle est revêtue par une très fine couche d'étain. Ce métal, d'aspect argenté, assure une protection de longue durée; car il n'est pas oxydé par l'air, à température ambiante. La tôle étamée est obtenue par électro-déposition. Ce mode d'élaboration donne des dépôts de quelques microns d'épaisseur très homogènes et très adhérents à l'acier.

Bien que les matières plastiques prennent de plus en plus d'importance dans la réalisation des véhicules (boucliers de protection, rétroviseurs,...), pour des raisons de coût et de propriétés physiques, la carrosserie de ceux-ci est généralement élaborée par emboutissage

de feuilles d'acier laminé. Le véhicule passant la majeure partie de sa vie à l'extérieur est soumis à un environnement très oxydant qui a pour effet de détériorer la carrosserie. Afin de lutter contre cette corrosion atmosphérique et pour répondre aux exigences toujours plus grandes des consommateurs, l'industrie automobile s'est mise à utiliser des tôles pré-protégées. Ceci lui a permis d'étendre les garanties anti-corrosion jusqu'à des durées de dix ans. Dans le secteur de l'automobile, le but principal de l'utilisation des tôles revêtues est la protection cathodique des carrosseries des véhicules, afin d'améliorer leur résistance à la corrosion atmosphérique. Contrairement à l'étain, il faut un métal, ou un alliage de ce métal, qui s'oxyde rapidement à température ambiante. Le revêtement constitue alors, avec l'acier, une pile électro-chimique dans laquelle il joue le rôle de réducteur en se sacrifiant et s'oxydant. Le dépôt réalisé est généralement constitué de zinc pur, ou d'un alliage de ce métal.

Bien que la galvanisation à chaud revienne moins cher que l'électrodéposition du zinc pur, et que la qualité des produits obtenus par cette première méthode ne cesse de croître, l'électrodéposition conserve des avantages qui lui assurent un avenir prospère. Elle permet en effet la réalisation de dépôts très fins et très réguliers, dont l'aspect visuel est de qualité supérieure à celui d'une tôle galvanisée (qualité qui se retrouve une fois la tôle peinte). Mais l'atout principal de l'électro-déposition est la possibilité de co-déposer avec le zinc différents autres métaux qui apportent au revêtement des propriétés supplémentaires. Une des principales causes de la corrosion des carrosseries est due à la perforation du dépôt par la projection de gravillons en roulant. La codéposition du zinc et du nickel est, par exemple, un moyen d'atténuer cette agression extérieure. Le zinc assure la protection cathodique de la tôle. Le nickel, par sa dureté, limite les perforations. De plus en plus de nouveaux produits de ce type envahissent le marché de l'automobile, et viennent petit à petit se substituer à la simple tôle électrozinguée.

De nos jours, la tendance évolue vers une utilisation de plus en plus massive de produits électrorevêtus pour la carrosserie. Industriellement, cette tendance nécessite une augmentation de la production des lignes de pré-protection de la tôle tout en limitant le coût de cette opération.

Parallèlement à cette exigence, à la fois pour satisfaire le consommateur et dans un souci de rentabilité optimale, le monde industriel fait évoluer sa production suivant des critères de qualité totale. Cette qualité apportée aussi bien au processus de fabrication qu'au produit fini permet à l'entreprise d'être plus compétitive vis à vis de la concurrence. Cette nouvelle politique de production touche particulièrement le secteur de l'automobile qui veut lutter contre les importations étrangères. Il s'ensuit des plus grandes exigences du constructeur envers le fournisseur de tôle pré-protégée. La qualité du revêtement protecteur est en effet essentielle pour répondre aux conditions de résistance à l'emboutissage et à la corrosion, ainsi qu'aux conditions de soudabilité et d'adhérence. Cette qualité influence aussi l'état de surface du produit et donc son aptitude à être peint.

La pré-protection des tôles d'acier laminé est réalisée dans des cellules d'électro-déposition. Elle consiste à déposer sur une ou sur les deux faces de la tôle un revêtement constitué d'une fine épaisseur de zinc (environ $10\mu\text{m}$) ou d'un alliage riche en cet élément. Ce dépôt permet d'assurer une protection de l'acier contre l'oxydation par deux méthodes.

C'est premièrement un revêtement au même titre qu'une peinture. Il a en effet une bonne tenue à la corrosion et empêche le contact entre l'environnement agressif et l'acier. Il agit aussi en tant que protecteur cathodique de l'acier. En effet, dans le cas d'une irrégularité de revêtement, les deux métaux vont former une pile électrochimique. Le zinc étant plus électronégatif que le fer, il va se sacrifier en cas d'oxydation. De plus, l'oxyde de zinc obtenu aura tendance à combler l'irrégularité de surface. La pré-protection des tôles ainsi réalisée est donc très performante.

Le partenaire industriel de cette étude est la société BEAUTOR S.A. Cette entreprise, qui était au départ une aciérie ainsi qu'un établissement de laminage à chaud, s'est reconvertie progressivement à l'usinage à froid. En 1966, elle devient filiale du groupe belge COCKERILL-SAMBRE. De 1974 à 1976, elle s'équipe d'une ligne d'électrozingage qui la place, dès 1976, comme premier producteur européen de tôles électrozinguées mono-face. En 1977, elle cesse ses dernières activités d'aciérie. Depuis, elle ne cesse de développer le laminage à froid et l'électro-zingage. La tôle électro-zinguée produite est principalement destinée à l'automobile.

La présente étude vise à l'amélioration de la compréhension et des performances du procédé utilisé par cette société. Toutefois, les résultats obtenus peuvent généralement être extrapolés aux procédés mis en oeuvre pour la conserverie, l'extraction et le raffinage. En effet, les cellules d'électro-déposition utilisées dans ces différents secteurs d'activité ont en général une configuration et un comportement analogue, aussi bien du point de vue hydrodynamique, qu'électro-chimique.

1.2 La ligne d'électro-déposition:

Une ligne d'électro-déposition est un ensemble d'éléments permettant de retirer un minéral de son support électrolytique afin de le déposer sur un substrat. Dans le cas de l'extraction ou du raffinage des métaux, le dépôt est par la suite récupéré sous forme de plaque ou de feuille (le substrat est choisi pour que le métal y adhère peu). Dans le cas de la protection des tôles d'acier, le dépôt doit rester adhérent à l'acier.

La ligne d'électrodéposition décrite dans cette partie est celle utilisée par la société BEAUTOR S.A. Elle permet la réalisation de dépôts de zinc sur une ou sur les deux faces des feuilles d'acier préalablement laminées.

Les bandes de métal se présentent sous forme de bobines (coil) dont la largeur peut varier de 700 mm à 1500 mm pour des épaisseurs de 0,4 mm à 3 mm. Ces bandes sont traitées dans une installation comprenant trois parties principales: une section d'entrée, une section centrale et une section de sortie (fig. 1-1).

La section d'entrée est constituée d'une première partie comprenant deux dérouleuses de bobines, une cisaille et une soudeuse permettant de relier bout à bout deux bobines successives. Vient ensuite un accumulateur d'entrée afin de permettre un fonctionnement continu de la ligne. Cette première section se termine par une installation qui prépare la tôle à recevoir le dépôt afin que celui-ci adhère correctement à l'acier (dégraissage, avivage, rinçage et séchage).

La bande passe ensuite dans la section centrale de la ligne, constituée de 8 cellules d'électro-zingage de type radial, dans lesquelles le revêtement électrolytique est réalisé. Cette partie centrale se termine par une unité de traitement de finition afin de préparer la tôle pour un meilleur accrochage de la peinture (phosphatation ou chromatisation). Selon l'ordre de passage dans les différentes cellules, le revêtement en zinc est réalisé sur une seule face ou sur les deux faces.

La ligne se termine par une section de sortie composée d'un nouvel accumulateur pour permettre le travail en continu, d'une unité de contrôle de l'épaisseur de zinc sur chacune des faces et enfin d'un système permettant le reconditionnement des bobines (marquage, huilage, cisailage et enroulement).

1.3 Les cellules d'électro-déposition:

Les cellules d'électro-déposition sont des machines qui mettent en contact le support électrolytique du minéral à extraire avec le substrat prévu pour le recevoir. L'application d'une tension électrique suffisante permet le déplacement du minéral vers son substrat; ainsi que la réaction d'électrolyse de celui-ci. Dans le cas de l'électro-zingage, le zinc se trouve sous forme d'ions Zn^{++} en suspension dans une solution qui sert de support électrolytique. Un courant électrique est appliqué entre une cathode (substrat) et une anode. La tension ainsi créée a pour effet de déplacer les ions et permet la réaction de réduction correspondant au dépôt de ceux-ci sur le substrat.

Deux types d'anodes peuvent être utilisées: les anodes insolubles et les anodes solubles. Les premières servent uniquement d'électrodes permettant le passage du courant dans la solution. Elles sont donc chimiquement passives. Les secondes participent en plus à la régénération en ions de la solution électrolytique. Il s'agit, par exemple, de paniers en titane (inerte) contenant le métal à ioniser, sous forme de pastilles (fig. 1-2). Une des principales utilisations de ce procédé est l'électro-raffinage. La société BEAUTOR S.A. utilise des cellules à anodes insolubles. Ceci assure une distance constante entre les électrodes; ce qui est une garantie de qualité et d'uniformité pour le dépôt.

La diversité des cellules d'électro-déposition que l'on peut rencontrer est assez importante. Elles peuvent être de simples bacs contenant la solution et dans lesquels les électrodes sont immergées. Pour assurer le renouvellement en ions, le mouvement de l'électrolyte est obtenu soit par convection naturelle, soit par agitation (fig. 1-3). Elles peuvent être aussi beaucoup plus complexes et, comme les cellules d'électro-zingage de tôle, nécessiter la mise en mouvement des électrodes ainsi que la convection forcée de l'électrolyte (fig. 1-4).

Dans les cellules qui font l'objet de cette étude, la solution électrolytique est animée d'un mouvement de convection forcée dans un canal formé par les électrodes. Ceci assure le renouvellement du fluide ainsi qu'une bonne agitation (écoulement turbulent). De plus, afin de réaliser un dépôt en continu sur les bandes d'acier, la cathode est animée d'un mouvement de translation uniforme par rapport à l'anode. Les écoulements rencontrés dans de telles cellules sont des écoulements de type COUETTE (écoulements de COUETTE

avec gradient longitudinal de pression). Ils peuvent être co-courants ou contre-courants par rapport au mouvement de la cathode.

Les cellules radiales utilisées par la société BEAUTOR S.A. (fig. 1-5) se composent essentiellement d'un tambour sur lequel vient se plaquer la bande à traiter. Une virole centrale en acier inoxydable sert à amener le courant à la bande. Une seule face de celle-ci est donc en contact avec l'électrolyte. L'anode est constituée par la carcasse de la cellule, protégée intérieurement par une couche de plomb (anode insoluble). L'électrolyte (solution de sulfate de zinc en milieu acide à la température de 50 C) est injecté dans la partie inférieure et récupéré de part et d'autre de la cellule. La distance anode-cathode est très petite (de l'ordre de 10 mm). Cette faible distance autorise une importante vitesse de dépôt du zinc par l'utilisation d'une densité de courant électrique élevée ($100 A/dm^2$) sous une différence de potentiel modérée (7 à 8 volts). Elle assure aussi un écoulement fortement cisailé où règne un taux de turbulence élevé. La bande traverse la cellule à une vitesse de l'ordre de 60 *m/mn*. Du fait de leur géométrie, ces cellules travaillent à la fois en écoulement co-courant et contre-courant par rapport à la tôle. Etant donné que l'anode est insoluble, l'installation nécessite une station de régénération continue de l'électrolyte. Cette régénération est effectuée par dissolution de zinc extra pur en milieu sulfurique.

Compte-tenu de l'intérêt et de la diversité du produit, il existe de nombreux types de cellules correspondant soit à des choix technologiques différents, soit à des objectifs différents en matière de caractéristiques du produit.

A titre d'exemple, certaines cellules permettent de réaliser des dépôts simultanés sur les deux faces d'une tôle (fig. 1-6). La bande d'acier passe à mi-distance de deux anodes insolubles et forme ainsi deux canaux fluides symétriques. La polarité cathodique de la tôle est assurée par un cylindre conducteur en entrée de la cellule. Deux versions différentes existent. Soit la cellule est immergée dans l'électrolyte et la convection forcée de la solution se fait par entraînement par la bande (écoulement de COUETTE). Soit l'électrolyte est injecté à une vitesse supérieure à celle de la bande et l'écoulement est de type COUETTE co-courant. La distance anode-cathode est de l'ordre de 10 *mm*. La faible distance anode-cathode, le mouvement de la tôle et l'agitation turbulente sont autant de points communs avec les cellules radiales. La vitesse de défilement de la tôle atteint souvent 400 *m/mn*, car les dépôts, qui sont réalisés dans ces cellules, sont généralement beaucoup plus fins que dans les cellules radiales.

Les figures (1-7) et (1-8) montrent deux exemples (cités par DEGREGZ <1-1>) de cellules construites à échelles réduites, au fonctionnement analogue aux précédentes, pour l'extraction du cuivre. Celles-ci permettent la production de feuilles de métal en continu. Le cuivre, extrait de l'électrolyte, se dépose soit sur un tambour rotatif soit sur une courroie mobile; il est ensuite récupéré sous forme de bande. Ces cellules pilotes ont permis de produire des feuilles de cuivre de 0,2 *mm* d'épaisseur pour des densités de courant de $150 A/dm^2$. La distance anode-cathode était de l'ordre de 3 *mm* et la feuille de métal était produite à une cadence voisine de 60 *m/mn*.

1.4 Le but industriel:

Le but industriel de cette étude est double. En effet, pour répondre aux exigences énoncées dans l'introduction de ce chapitre, le fournisseur de tôles pré-protégées doit augmenter sa production tout en améliorant la qualité du produit fini. Il est évident que ces deux objectifs sont étroitement liés, et que le premier est difficile à obtenir sans incidence néfaste sur la qualité du dépôt de zinc.

Pour augmenter la production d'une ligne d'électro-déposition, il faut accroître la vitesse de déplacement de la tôle. Si l'on veut conserver une même épaisseur de dépôt, il faut alors soit multiplier le nombre de cellules, soit augmenter la vitesse de dépôt et donc la densité de courant imposée au sein des cellules. Dans les deux cas la consommation de courant sera identique. La seconde solution semble donc être la plus intéressante. Malheureusement, celle-ci va à l'encontre du deuxième objectif. En effet, pour des conditions hydrodynamiques et électro-chimiques données (écoulement et composition de la solution fixés) une augmentation de la densité de courant s'accompagne, dans le cas du zinc, d'une élévation de la quantité d'hydrogène dégagée sur la cathode. Ceci se traduit par une baisse de rendement en courant et par une détérioration de la qualité du dépôt. Une autre incidence de l'élévation de la densité de courant peut être un changement dans la structure cristalline du revêtement et donc un non respect des qualités requises pour celui-ci.

Il est important pour l'industriel de connaître, en fonction des conditions de fonctionnement de la ligne (composition de la solution, hydrodynamique interne des cellules), la production que celle-ci peut assurer, tout en répondant aux critères de qualité de dépôt pour satisfaire pleinement sa clientèle. Pour cela, il est essentiel de maîtriser la structure du dépôt pour que celui-ci ait les propriétés fonctionnelles désirées.

Chapitre 2

POSITION SCIENTIFIQUE DU PROBLEME:

2.1 Introduction:

Le chapitre précédent montre l'importance pour le producteur de tôles pré-revêtues d'augmenter la capacité de ses installations et de faire évoluer son produit avec un souci constant de qualité du dépôt. Ces deux exigences nécessitent l'aptitude à contrôler au mieux le fonctionnement des cellules d'électro-déposition, et de savoir prédire correctement leur comportement en vue de tout changement ultérieur. Malheureusement, il est très difficile pour l'industriel de réaliser ces études sans perturber notablement la production des lignes existantes. Tout développement doit donc se faire sur la base de modélisation expérimentale et numérique. Les résultats ainsi obtenus sont alors soit directement appliqués aux cellules industrielles, soit ils font l'objet d'une confirmation sur un prototype inséré dans une ligne pilote.

Lors d'une étude par similitude, afin d'étudier le comportement global d'une installation, il faut faire l'inventaire des différents paramètres pouvant influencer le fonctionnement de celle-ci et déterminer les interactions que ces paramètres peuvent avoir les uns avec les autres. Dans le cas d'une cellule d'électro-déposition, ces paramètres sont nombreux. En effet, l'électro-chimie fait à la fois appel aux sciences de la chimie, de l'électricité et de la mécanique des fluides.

Les phénomènes chimiques affectent essentiellement le voisinage des électrodes où ont lieu les réactions d'oxydation ou de réduction. Toutefois, la composition du support électrolytique a aussi une grande importance, car c'est elle qui fixe la conductivité de la solution. L'électricité a deux contributions principales: La différence de potentiel imposée entre les électrodes participe au transport des ions vers celles-ci par migration (force à distance d'origine électrique sur une particule chargée); elle participe aussi et surtout aux réactions électro-chimiques en fournissant la différence de potentiel nécessaire aux oxydations ou aux réductions. Pour finir, le rôle de la mécanique des fluides réside essentiellement dans l'hydrodynamique interne des cellules. Les contributions sont le transport de l'espèce ionique à déposer, vers les électrodes, et l'évacuation des gaz dégagés par les réactions.

L'étude présentée ici a pour objet d'étudier l'influence de l'hydrodynamique sur le fonctionnement des cellules d'électro-déposition. Une première contribution qu'il faut mentionner est la participation à la réalisation d'un dépôt uniforme sur toute la largeur de la tôle. Cette qualité est obtenue en assurant la bidimensionnalité de l'écoulement du support électrolytique. Cette bidimensionnalité dépend principalement de la géométrie du canal et de la forme de l'injecteur.

Pour déterminer l'influence de l'écoulement sur les différents processus intervenant dans les cellules d'électro-déposition, il faut d'abord savoir le prédire correctement. Etant donnée la complexité de fonctionnement d'une cellule, la prédiction de l'écoulement qui la traverse passe par une série de simplifications notables. Une fois que l'écoulement est connu, il est possible d'étudier son concours au transport du métal à déposer afin d'envisager les améliorations qu'il est possible d'apporter au rendement de l'installation et à la qualité de dépôt obtenu.

2.2 Simplification du problème hydrodynamique:

Les cellules d'électro-déposition utilisées pour la fabrication de tôles pré-protégées ont un fonctionnement hydrodynamique à priori très complexe:

- Le fluide électrolytique est à composition chimique et à propriétés physiques variables tout au long de sa traversée de la cellule.
- L'écoulement est turbulent tridimensionnel.
- L'application d'un champ électrique crée des forces à distance.
- Les dégagements gazeux sur les électrodes rendent la solution diphasique.

Prédire de façon détaillée et complète l'hydrodynamique paraît difficilement envisageable. Il faut donc simplifier le problème en négligeant certains phénomènes, pour pouvoir simuler numériquement ou expérimentalement le comportement du fluide dans la cellule.

Dans cette partie, nous allons uniquement étudier les influences que peuvent avoir les différents phénomènes chimiques, électriques, ou engendrés par la géométrie du canal sur l'écoulement interne de la solution. Ceci afin de montrer qu'en première approximation, l'écoulement peut être étudié indépendamment des autres phénomènes, et qu'il peut alors être modélisé simplement. Ceci est en grande partie un résumé du travail de MONNIER <1-2>, réalisé lors d'une première étude de l'hydrodynamique des écoulements turbulents dans les cellules d'électro-zingage de la société BEAUTOR S.A.

2.2.1 Phénomènes chimiques:

Le fluide injecté dans une cellule est une solution aqueuse de sulfate de zinc et d'acide sulfurique. Dans une cellule industrielle du type de celle de la figure (1-5), la composition est typiquement de 1 mole/l de sulfate de zinc et de 0,87 mole/l d'acide sulfurique. En

pratique, on ajoute souvent un électrolyte inerte (ici de l'acide sulfurique) qui ne participe pas aux réactions sur les électrodes, mais qui intervient principalement en augmentant la conductivité de la solution, et donc en diminuant la chute ohmique entre les électrodes. Ceci permet de limiter considérablement la consommation énergétique de l'installation. Une telle solution a un PH voisin de 0.

Les phénomènes chimiques qui interviennent dans les cellules sont des réactions d'oxydation ou de réduction qui ont lieu sur les surfaces des électrodes (dépôt de métal et dégagement d'hydrogène sur la cathode, dégagement d'oxygène sur l'anode). Elles ont pour effet de modifier la composition chimique locale ou moyenne de l'électrolyte.

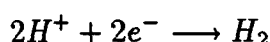
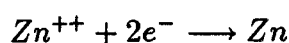
L'électro-zingage de la tôle provoque une diminution de la concentration moyenne en zinc de l'électrolyte. Considérons des cellules du type de celle de la figure (1-5). Pour réaliser un pré-revêtement d'une épaisseur de $10 \mu m$ sur une face, dans 8 cellules consécutives, sur une bande de $1,5 m$ de largeur passant dans les cellules à la vitesse de $90 m/min$, et dans lesquelles on injecte $160 m^3/h$ par cellule, l'appauvrissement massique en zinc de la solution sera de $0,7\%$. Ceci occasionne une diminution de $0,04\%$ de la masse volumique moyenne de la solution. Cette variation est très faible et l'on peut négliger la variation de masse volumique du fluide due à la consommation du zinc.

L'agitation turbulente qui règne au sein des cellules est grande (le nombre de REYNOLDS basé sur la hauteur du canal et sur la vitesse de défilement de la bande est supérieur à 10.000). Cette agitation homogénéise la solution dans la majeure partie de l'écoulement. La concentration en zinc y est constante. La consommation de métal affaiblit la concentration en zinc uniquement dans une très petite région de l'écoulement, appelée couche de diffusion (fig. 1-9a), contre la cathode. WEYMEERSH, WINAND et RENARD <1-3> montrent que la taille de cette région est de l'ordre de quelques microns dans des conditions limites. Ce cas extrême, jamais rencontré dans les problèmes industriels, est obtenu quand la vitesse de dépôt est égale à la vitesse de transport des ions zinc. La densité de courant qui correspond à ce cas est appelée densité de courant limite de diffusion. Elle est obtenue quand la concentration en métal contenue dans la solution s'annule à la paroi (fig. 1-9b). Au dessus de cette valeur, la consommation en zinc à la cathode est limitée par le transport des ions zinc. En plus du dépôt métallique, un dégagement d'hydrogène se produit alors. Dans ce cas limite, la variation de masse volumique du fluide, sur l'épaisseur de la couche de diffusion, serait de l'ordre de 5% . Cette situation majore la variation réelle, puisqu'une cellule fonctionne toujours en dessous de la densité de courant limite. Pour cette raison, nous négligerons la diminution de masse volumique due à cet appauvrissement local en métal.

Un autre phénomène électrochimique se produisant au voisinage des électrodes concerne les différents ions contenus dans la solution. Du fait de leur charge positive, sous l'action du champ électrique, les ions hydrogènes vont être attirés vers la cathode et repoussés par l'anode. De la même façon, les ions OH^- , HSO_4^- et SO_4^{2-} vont se déplacer de la cathode vers l'anode. La variation de masse volumique locale due à ces migrations est très difficile à évaluer; d'autant plus que les processus de diffusion moléculaire et turbulente vont lutter contre cette migration et donc la limiter. Une autre incidence liée à ces phénomènes de migration est une variation locale du PH , et donc de la conductivité de la solution. En

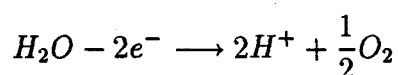
première approximation, nous allons négliger ces phénomènes et supposer que la solution est partout électriquement neutre.

À la cathode, deux réactions de réduction sont possibles: le dépôt de zinc et le dégagement d'hydrogène.



Le cation qui va réagir en priorité à la surface de la cathode en acier est l'ion pour lequel la différence de potentiel nécessaire à la réaction est la plus basse. Le potentiel de réduction global des ions hydrogène sur l'acier est inférieur au potentiel des ions zinc. De ce fait, pour de faibles densités de courant, l'électrolyse de la solution ne donne lieu qu'à un dégagement d'hydrogène. Il n'y a pas de dépôt métallique. Pour une densité de courant plus élevée (c'est le cas des cellules étudiées) les deux réactions de réduction sont simultanées. Dès lors, le constituant superficiel de l'électrode devient le zinc, substrat pour lequel le potentiel global de réduction des ions hydrogène est supérieur à celui des ions zinc. De ce fait, le dégagement d'hydrogène diminue très fortement et le zinc se dépose avec un rendement voisin de 98%. Le dégagement gazeux a donc surtout lieu au début du revêtement de la tôle. La présence de bulles d'hydrogène au voisinage de la cathode sera très faible. Nous pouvons donc supposer que celle-ci perturbe très peu l'hydrodynamique de la cellule. Cette consommation en ions H^{+} , combinée avec celle qui a lieu dans la station de régénération, compense la production de ces ions à la surface de l'anode. De ce fait, le PH moyen de la solution ne subit pas d'évolution au cours du temps. La consommation des cations par la cathode compense en grande partie les phénomènes issus de la migration; supposer qu'au voisinage de cette électrode la solution est électriquement neutre est une approximation correcte.

Sur une anode insoluble, la seule réaction d'oxydation est celle de l'eau. Il s'ensuit une production d'ions hydrogènes ainsi qu'un dégagement d'oxygène gazeux:



Reprenons le cas limite de fonctionnement en taille et en vitesse de bande des cellules de la société BEAUTOR S.A. (fig. 1-5): réalisation d'un dépôt de 10 microns d'épaisseur sur une seule face et dans 8 cellules consécutives sur une bande de 1,5 m de largeur animée d'une vitesse de 90 m/min. On suppose que le débit injecté par cellule est 160 m³/h. Dans ce cas de fonctionnement, et dans l'hypothèse où le rendement cathodique est de 100%, 20 grammes/seconde de zinc sont déposés dans chaque cellule. Ceci correspond à l'utilisation de 0,61 mole/seconde d'électrons. L'application du bilan chimique ci-dessus indique une production de 0,61 mole/seconde d'ions hydrogène et un dégagement de 0,15 mole/seconde d'oxygène.

Mais comme nous l'avons vu précédemment, la réduction des ions hydrogènes dans la station de régénération ainsi que sur la surface de la cathode compense cette production et conduit à une évolution nulle du PH moyen au cours du temps. La faible masse atomique de cette espèce ionique ne confère à cette production aucune incidence sur la masse volumique locale de la solution. La seule incidence peut être une variation locale de la conductivité de l'électrolyte.

La quantité d'oxygène dégagée représente, dans l'hypothèse d'une pression de 1 atmosphère, un débit volumique de gaz de 3,4 litre/seconde. En effet, l'oxydation des molécules d'eau provoque la formation de bulles d'oxygène sur la surface de l'anode. Celles-ci se détachent dès qu'elles atteignent une taille critique, qui dépend de l'état de surface de l'électrode et de l'agitation turbulente de la solution. Etant donné l'importance du nombre de REYNOLDS caractérisant l'écoulement de la solution, nous pouvons supposer que les bulles sont petites et uniformément réparties dans tout le volume de l'électrolyte. Nous écartons donc les phénomènes de coalescence qui peuvent se produire. Dans ces conditions, nous pouvons considérer que le fluide est homogène et que sa masse volumique diminue lors de sa traversée de la cellule. A la sortie de celle-ci, dans les conditions citées précédemment le volume de gaz produit représente 7,6% du volume total. La faiblesse de la masse volumique du gaz par rapport à celle de l'électrolyte a pour incidence une diminution de la masse volumique totale de la solution de l'ordre de 7,6% lors de son passage dans la cellule. Il s'ensuit une augmentation de la vitesse débitante ainsi qu'une variation de la perte de charge locale. La prise en compte précise du dégagement de gaz ne peut être faite qu'en considérant le fluide comme étant biphasique. Dans le but de simplifier notablement les simulations numériques et expérimentales, nous allons négliger la présence de l'oxygène ainsi que les variations des grandeurs moyennes de l'écoulement qu'il produit. La masse volumique de la solution et les vitesses débitantes seront donc supposées constantes tout au long de la traversée de la cellule.

Dans le cas d'une anode soluble, le dégagement d'oxygène est remplacé par une oxydation de celle-ci. La quantité d'ions métalliques alors produite est équivalente à la consommation cathodique. Dans cette situation, supposer la masse volumique ainsi que les vitesses débitantes constantes tout le long de la cellule est une approximation très proche de la réalité.

En conclusion, les simplifications envisagées dans cette partie permettent de considérer la solution électrolytique comme un fluide homogène à composition chimique et propriétés physiques constantes.

2.2.2 Phénomènes électriques:

L'application d'un champ électrique aux bornes des électrodes des cellules d'électro-déposition a deux effets majeurs sur la solution électrolytique:

- Le passage du courant au travers de la solution s'accompagne d'une dissipation d'énergie, par effet JOULE.
- Le potentiel électrique induit des forces à distance qui provoquent la migration des particules chargées.

La dissipation d'énergie électrique par effet JOULE s'additionne à la dissipation visqueuse due à l'écoulement pour produire un échauffement de la solution. Dans le cas des cellules radiales de la société BEAUTOR S.A. la différence de potentiel entre les électrodes est de 10 volts pour une intensité consommée par cellule de 40.000 ampères. La puissance utilisée pour le fonctionnement est donc de 400 KW. Si l'on néglige l'énergie absorbée par les réactions d'oxydation et de réduction, on peut supposer que toute cette puissance se dissipe par effet JOULE et contribue à l'échauffement de la solution. Si l'on majore la perte de charge par dissipation visqueuse dans la cellule par 1 bar pour un débit de fluide de $160 \text{ m}^3/\text{h}$, la puissance transformée sous forme de chaleur est de 4,4 KW. Cette contribution à l'échauffement de la solution est donc négligeable par rapport à l'effet JOULE. En assimilant l'électrolyte à de l'eau, l'élévation de température entre l'entrée et les sorties de la cellule est alors de l'ordre de 1,8 C. Ceci provoque une diminution de la masse volumique d'environ 0,05% et une diminution de la viscosité cinématique du fluide inférieure à 2%. Ces variations sont faibles et peuvent être négligées. Pour améliorer sa conductivité, la solution est maintenue à une température de 50 C au niveau de la station de régénération; il n'y a donc pas de variation notable de la température de la solution au cours du temps.

La tension appliquée aux bornes des électrodes crée des forces à distances qui agissent sur les particules chargées contenues dans la solution. Ces forces sont égales à $\rho_e \vec{E}$ où ρ_e est la densité de charge et \vec{E} est le vecteur champ électrique. Elles interviennent dans les équations de NAVIER-STOKES qui régissent le mouvement du fluide dans la cellule, en tant que forces à distance analogues aux forces de pesanteur (le champ électrique étant constant au cours du temps, il n'y a pas de forces d'origine magnétique). La répartition spatiale des deux grandeurs ρ_e et \vec{E} est régie par les équations de MAXWELL et la loi d'OHM.

Du fait de l'agitation turbulente élevée dans la majeure partie de l'écoulement, la solution est généralement électriquement neutre ($\rho_e = 0$). La densité de charge est non nulle uniquement au voisinage immédiat des électrodes du fait des réactions d'oxydo-réduction et des effets de migration. Comme, nous l'avons vu précédemment, ces régions ont une épaisseur de l'ordre de grandeur de quelques microns; et les différents phénomènes qui s'y produisent (diffusion, migration des différentes espèces ioniques) ont tendance à conserver l'électro-neutralité locale de la solution. L'équation de conservation de la masse permet d'évaluer le rapport des ordres de grandeur des deux composantes du vecteur vitesse de la solution, dans les couches pariétales de diffusion. On obtient:

$$\frac{V}{U} \simeq 10^{-5}$$

où U est la composante du vecteur vitesse suivant la direction de l'écoulement moyen.

V est la composante normale aux électrodes.

Le champ électrique n'influence que la composante V du vecteur vitesse de l'écoulement. On peut donc le négliger. Ceci conduit à une simplification importante car la simulation numérique de l'hydrodynamique des cellules ne nécessite pas la résolution des équations

de MAXWELL et de la loi d'OHM. Le mouvement de l'électrolyte est régi uniquement par les équations de NAVIER-STOKES et peut être étudié indépendamment des phénomènes électro-chimiques.

Remarque: Dans les études électro-chimiques numériques, l'hypothèse d'électro-neutralité locale est généralement retenue dans toute la solution. La comparaison des résultats ainsi obtenus avec les expériences montre que cette hypothèse s'avère ne pas être pénalisante.

2.2.3 Phénomènes hydrauliques:

Dans les parties précédentes, nous avons fait toute une série d'hypothèses simplificatrices concernant essentiellement la nature de la solution. Le fluide peut être considéré comme homogène, à composition chimique et propriétés physiques constantes. L'étude de son mouvement nécessite uniquement la résolution des équations de NAVIER-STOKES. Malgré ces hypothèses, l'écoulement de l'électrolyte dans les cellules industrielles, étant donné son caractère tridimensionnel, reste difficile à étudier dans toute sa généralité. Des hypothèses supplémentaires vont donc permettre de schématiser la configuration de l'écoulement au sein des cellules.

Le paramètre généralement retenu pour déterminer la nature des écoulements est le nombre de REYNOLDS:

$$Re = \frac{Uh}{\nu}$$

Il permet de savoir si l'écoulement est laminaire ou turbulent. Dans le cas où le canal a un rayon de courbure (cas des cellules de type radial), l'écoulement passe par une étape intermédiaire qui est l'état laminaire avec tourbillons de TAYLOR (fig. 1-10a et 1-10b). Pour déterminer la nature de l'écoulement, il convient d'utiliser un deuxième paramètre qui est le nombre de TAYLOR/DEAN:

$$Ta = \frac{Uh}{\nu} \sqrt{\frac{h}{R}}$$

où U est une vitesse caractéristique de l'écoulement.

h est la distance anode-cathode. (0,01 m)

R est le rayon de courbure du canal. (1 m)

ν est la viscosité cinématique de l'électrolyte.

($\nu = 0,55 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ à la température de 50 C).

MONNIER <1-2> montre qu'il convient de retenir comme vitesse caractéristique pour le calcul de ces deux paramètres la vitesse de la bande d'acier ($> 1\text{m/s}$). Le nombre de REYNOLDS correspondant est alors supérieur à 10.000 et la valeur du nombre de TAYLOR/DEAN est supérieure à 1.000. Pour ces valeurs des deux nombres sans dimension, que le canal soit plan ou courbé et quel que soit le débit injecté, le régime de l'écoulement

est toujours turbulent. Cette agitation de l'électrolyte participe au transport des ions métalliques et aide ainsi à l'électro-déposition.

Une autre influence du rayon de courbure du canal des cellules de type radial est la création de forces centrifuges qui ont tendance à modifier l'écoulement du fluide. Le paramètre qui permet d'évaluer l'importance de ces forces est le rapport h/R . Pour les cellules radiales, ce rapport vaut:

$$\frac{h}{R} \simeq 10^{-2}$$

Les expériences effectuées par BURTON et CARPER <1-5> montrent que, pour cette valeur, les effets de la courbure sont négligeables. Le comportement hydrodynamique des cellules radiales est donc identique à celui des cellules ayant un canal plan. Ceci a pour effet de simplifier considérablement le problème en le ramenant à l'étude des écoulements entre deux parois planes et parallèles.

Les parties latérales du canal formé par les électrodes sont fermées afin d'éviter des fuites sur les côtés. La géométrie de ces régions va induire un caractère plus ou moins tridimensionnel de l'écoulement, accompagné d'un développement de couche limite latérale. Dans les cellules radiales, la surface des parties latérales du canal (fig. 1-11a) représente environ 10% de la surface totale de passage. Néanmoins, l'obstruction du canal, créée par la bande de métal, compense en grande partie ces zones (la surface d'une bande de 1,5 m de largeur pour une épaisseur de 1 mm occupe 8% de la section de passage). Nous pouvons donc négliger ces zones et supposer que la section de passage de l'électrolyte est obtenue en prenant la largeur du tambour multipliée par la hauteur du canal sans bande (fig. 1-11b). (L'obstruction de la section de passage de la solution par la bande est alors négligée.) L'erreur commise sur la vitesse débitante est très petite.

Le développement des couches limites latérales est difficile à évaluer avec précision. Toutefois, les mesures effectuées par HUSSAIN et REYNOLDS <1-6>, pour un écoulement de POISEUILLE turbulent dans un canal plan rectangulaire et analogue à celui de la figure 1-11b, montrent que ce développement suit le même épaissement qu'une couche limite sur plaque plane:

$$\delta_L = 0,37x \left(\frac{xU_\infty}{\nu} \right)^{-\frac{1}{5}}$$

où U_∞ est la vitesse maximale du profil de vitesse.

x est l'abscisse dans la direction de l'écoulement moyen.

ν est la viscosité cinématique du fluide.

δ_L est l'épaisseur de la couche limite latérale.

Si nous considérons de l'eau à 50 C circulant avec une vitesse de 1 m/s dans un canal de longueur de 2 m, l'épaisseur des couches limites, à la sortie du canal, est de l'ordre de 3 cm (correspondant à une épaisseur de déplacement de l'ordre de 3 mm). Dans les cellules

radiales, la rotation du tambour va influencer cette épaisseur. Du côté où l'écoulement est co-courant à la tôle d'acier, l'entraînement de l'électrolyte va réduire cette épaisseur. De l'autre côté, c'est l'effet inverse qui se produit. Cependant, dans les deux cas, la présence des couches limites est négligeable par rapport à la largeur du tambour qui est de 1,8 m. La largeur maximale des bandes (centrées sur le tambour) étant de 1,5 m, les extrémités de celles-ci sont suffisamment éloignées de ces perturbations. On peut donc supposer que l'hydrodynamique au voisinage de la tôle n'est pas influencée par la présence de ces couches limites latérales.

Le fait que les tôles à traiter aient une épaisseur pouvant atteindre 2 à 3 mm induit également un caractère tridimensionnel de l'écoulement. En effet, la hauteur de passage pour le fluide est plus faible entre la tôle et l'anode qu'entre le tambour et l'anode. Cette différence de hauteur facilite l'écoulement sur les côtés de la cellule. La vitesse débitante est donc plus faible au centre qu'aux extrémités du tambour. Ce phénomène s'accroît avec l'épaisseur de la tôle. MONNIER <1-2> a montré que pour des tôles de faible épaisseur (< 1 mm), ou de largeur voisine de celle du tambour, la variation transversale de vitesse débitante est inférieure à 6%. Pour une tôle épaisse (3 mm) la variation de vitesse débitante peut atteindre 25%. Les bandes de métal utilisées par l'industrie de l'automobile (principal consommateur de tôles électrozinguées) répondent aux conditions de tailles qui permettent de négliger ce phénomène. Pour la simulation, nous pouvons supposer que le canal est de hauteur constante sans faire perdre à l'étude son intérêt industriel.

La solution électrolytique est injectée au centre de la cellule, perpendiculairement à la cathode. Le fluide se répartit ensuite de chaque côté de la cellule. Cette répartition n'est pas égale du fait de l'entraînement de la solution par le tambour. Elle dépend de la vitesse de rotation de celui-ci ainsi que du débit injecté. La détermination de cette répartition a été faite par similitude expérimentale sur une maquette à échelle réduite (MONNIER <1-2>). Une fois cette répartition effectuée, le comportement hydrodynamique de la cellule correspond à deux écoulements distincts dans des canaux de section rectangulaire: un écoulement de type COUETTE co-courant au mouvement de la cathode et un écoulement de type COUETTE contre-courant. Ces deux écoulements peuvent être étudiés séparément l'un de l'autre. Ils comportent tous deux une zone d'établissement du profil de vitesse et une zone établie. La longueur de la zone d'établissement est fonction du développement des couches limites sur la tôle et sur l'anode, et dépend donc principalement du nombre de REYNOLDS, de la configuration de l'écoulement ainsi que de l'injection du fluide (répartition et conditions d'entrée). Dans la zone d'établissement, l'écoulement est plan et difficile à simuler numériquement. Toutefois cette zone d'établissement est relativement courte par rapport aux longueurs totales des canaux. En effet, MONNIER <1-2> a montré que l'on pouvait estimer la longueur de cette région à 40 fois la hauteur de passage entre le tambour et l'anode. Ceci représente environ 20% de la longueur totale des canaux. La partie de l'écoulement la plus longue à s'établir se situe à mi-distance des électrodes où a lieu la jonction des couches limites. Les phénomènes électro-chimiques se produisent contre les parois; l'écoulement s'y établit en même temps que la vitesse de frottement pariétale u_τ (paramètre caractéristique de ces régions). DEISSLER <1-7> montre que pour une conduite ou un canal bidimension-

nel, la longueur d'établissement de u_r est très faible (environ 6 hauteurs de passage). Les résultats de simulation expérimentale d'une cellule d'électrodéposition, obtenus par MONNIER <1-2>, montrent que les grandeurs pariétales sont établies au bout de 7 hauteurs de passage. Les mesures de JACOBS, reportées par CEBECI et SMITH <1-8>, confirment cette remarque en montrant que lors du passage d'une couche limite d'une paroi lisse à une paroi rugueuse, l'écoulement au voisinage immédiat de la surface s'établit beaucoup plus rapidement que le reste de la couche limite. Dans ces conditions et du point de vue électro-chimique, nous pouvons considérer que la longueur de la zone d'établissement représente 3% de la longueur totale des canaux. Nous allons donc négliger cette région, et étudier uniquement la partie établie des écoulements.

2.2.4 Conclusions:

Les hypothèses simplificatrices proposées dans cette partie nous permettent d'envisager l'étude du comportement hydrodynamique des cellules d'électro-déposition dans les conditions suivantes:

- Nous pouvons considérer l'électrolyte comme un fluide homogène à composition chimique et propriétés physiques constantes.
- Nous pouvons négliger les effets du champ électrique. Le mouvement de l'électrolyte est régi uniquement par les équations de NAVIER-STOKES.
- L'écoulement est turbulent et nous pouvons négliger les effets de courbure des canaux. La simulation numérique peut donc se faire dans un canal rectiligne.
- La répartition du débit de part et d'autre de la cellule a fait l'objet d'une étude par simulation expérimentale sur maquette (MONNIER <1-2>). Elle ne nécessite aucune investigation complémentaire et ne sera pas considérée dans cette étude.
- Nous pouvons négliger l'influence de la géométrie des parties latérales des canaux ainsi que l'influence de l'épaisseur de la tôle d'acier. Nous pouvons donc considérer le canal comme étant rectangulaire.
- Du fait de l'importance du rapport largeur sur hauteur du canal (180), nous pouvons négliger la présence des couches limites latérales. L'écoulement est plan; il est donc reproductible par unité de largeur.
- Nous pouvons négliger la zone d'établissement de l'écoulement et ne considérer que les parties établies.

Ces différentes conditions confèrent à l'écoulement les propriétés suivantes: Il est plan, permanent et par droites parallèles. Les grandeurs dynamiques moyennes qui le caractérisent ne sont fonction que de l'ordonnée y (coordonnée normale aux électrodes). La seule composante non nulle du vecteur vitesse moyenne est celle suivant la direction longitudinale x . La pression motrice \hat{P} est indépendante de la coordonnée transversale z . Ces différentes propriétés permettront, un peu plus loin, de simplifier les équations qui régissent l'écoulement.

2.3 Contribution au transport du métal à déposer:

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, une fois l'écoulement connu, il est possible d'étudier son concours au transport du métal à déposer et d'envisager les améliorations qu'il est possible d'apporter au rendement de l'installation et à la qualité de dépôt. Il ne faut toutefois pas oublier que la circulation de l'électrolyte contribue aussi au renouvellement des ions dans la cellule.

Le fluide électrolytique qui circule dans les cellules est une solution de sulfate de zinc. Dans une telle solution, les espèces ioniques en présence sont Zn^{++} , H^+ pour les cations et SO_4^{--} , $H_2SO_4^-$ et OH^- pour les anions. La répartition de ces ions dans la solution obéit aux lois électro-chimiques: transport par migration et réaction chimique se produisant sur l'une ou l'autre des électrodes. Cette répartition dépend aussi des phénomènes de transport de masse comme la diffusion et la convection.

2.3.1 Equations générales pour une espèce ionique:

L'équation locale qui régit la concentration d'une espèce dans une solution en mouvement s'écrit:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = R_i - \text{div}(\vec{N}_i)$$

C_i est la concentration de l'espèce i .

R_i est son taux de production dans le volume considéré.

N_i est le flux de concentration.

Le flux \vec{N}_i est un vecteur qui indique la direction dans laquelle l'espèce considérée se déplace, et le nombre de moles par unité de temps qui traverse une surface d'aire unité perpendiculaire à cette direction. Il est donc égal au produit de la vitesse de déplacement de l'espèce par sa concentration:

$$\vec{N}_i = \vec{v}_i C_i$$

Ces déplacements sont dus à la convection par le mouvement du support électrolytique, à la diffusion moléculaire, à l'agitation turbulente de la solution et à la migration sous l'effet du champ électrique. Dans les cellules d'électro-zingage, le champ électrique est permanent; il n'y a donc pas de champ magnétique. NEWMAN <1-9> montre que, dans le cas de solutions fortement concentrées (solutions industrielles), le flux \vec{N}_i peut être mis sous la forme:

$$\vec{N}_i = \underbrace{C_i \vec{V}}_{(a)} - \underbrace{D_i \vec{\text{grad}} C_i}_{(b)} - \underbrace{\frac{z_i F}{RT} D_i C_i \vec{\text{grad}} \varphi}_{(c)}$$

Dans cette équation pour le flux, le terme (a) représente la convection. Il fait intervenir le vecteur vitesse instantanée \vec{V} du petit volume de solution considéré. Celui-ci est obtenu à partir des équations de NAVIER- STOKES. (b) est la diffusion moléculaire. Elle dépend uniquement du coefficient de diffusion moléculaire D_i de l'espèce ionique (celui-ci est essentiellement fonction de la composition de la solution et de sa température). Pour finir, le terme (c) représente la migration due au champ électrique. Il fait intervenir le coefficient de diffusion D_i de l'ion, sa charge z_i , la température T en degrés KELVIN, et le potentiel électrique φ de la solution. \mathcal{R} est la constante universelle des gaz, F est la constante de FARADAY. Le potentiel électrique φ est une inconnue; sa répartition est régie par les lois fondamentales de l'électromagnétique et les lois de MAXWELL appliquées à une solution électrolytique.

Dans le cas où il n'y a pas de limitation de transport de matière, cette équation est équivalente à la loi d'OHM appliquée à une seule espèce ionique. En effet, la loi d'OHM établit que la densité de courant est la somme des courants transportés par chacune des espèces ioniques. Elle est obtenue en sommant les produits de la vitesse de déplacement de chaque espèce par sa concentration et sa charge:

$$\vec{J} = \sum_i z_i F C_i \vec{v}_i$$

D'après la définition du flux de concentration, nous obtenons:

$$\vec{J} = \sum_i z_i F \vec{N}_i$$

Dans un repère fixe, pour un milieu continu et en l'absence de champ magnétique, les équations fondamentales de l'électromagnétique se réduisent à <1-10>:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

où \vec{D} est le vecteur champ de déplacement, et ϵ la permittivité du milieu. L'application de la loi de MAXWELL conduit à:

$$\text{div} (\epsilon \vec{E}) = \rho_e$$

ρ_e est la densité de charge contenue dans l'élément de solution étudié. Elle est égale au produit de la quantité des différentes espèces en présence par leur charge:

$$\rho_e = \sum_i z_i F C_i$$

Le potentiel scalaire φ , pour un champ électrique irrotationnel, est défini par:

$$\vec{g} \text{rad} \varphi = -\vec{E}$$

L'utilisation de l'équation de MAXWELL permet d'exprimer le potentiel électrique en fonction de la densité locale de charge de la solution:

$$\text{div} (\epsilon \vec{g} \text{rad} \varphi) = - \sum_i z_i F C_i$$

Le système d'équations que nous obtenons ainsi forme un système fermé. Le nombre d'équations dépend du nombre d'espèces ioniques en présence. Dans le cas d'une cellule d'électro-zingage nous avons 4 espèces principales: ZN^{++} , H^+ , SO_4^{-} et HSO_4^- (le PH étant égal à 0, nous pouvons négliger la présence des ions OH^-). Le système est le suivant:

- quatre équations de transport pour les différentes espèces:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \text{div} \left(C_i \vec{U} - D_i \vec{g} \text{rad} C_i - \frac{z_i F}{RT} D_i C_i \vec{g} \text{rad} \varphi \right) = R_i$$

- une équation de POISSON pour le potentiel électrique:

$$\text{div} (\epsilon \vec{g} \text{rad} \varphi) = - \sum_i z_i F C_i$$

A ces équations, il faut ajouter les quatre équations de NAVIER-STOKES pour déterminer le champ de vitesse, ainsi que les conditions limites sur les frontières du domaine étudié. Si les conditions limites sont imposées pour la densité de courant ou pour le champ électrique, il faut adjoindre au système précédent les équations pour ces grandeurs.

Dans le cas général, le problème est donc complexe à résoudre. Toutefois la configuration des cellules d'électro-zingage permet de simplifier considérablement son étude.

2.3.2 Simplifications inhérentes aux caractéristiques des cellules d'électro-zingage:

Dans ce qui suit, les simplifications proposées sont toutes valables pour les cellules d'électro-zingage faisant l'objet de notre étude. Cependant, nous allons étendre le domaine des écoulements envisagés à ceux des cellules de laboratoire, afin de pouvoir appliquer les résultats de simulation numérique à ces cellules. Le but de

cette opération est la confirmation des résultats de simulation numérique par des expériences, ainsi que la recherche des paramètres de similitude permettant de transposer les résultats expérimentaux aux cellules industrielles.

On suppose l'écoulement de la solution permanent et établi dans un canal plan à parois parallèles formé par les électrodes. Dans ces conditions, en un point de coordonnées fixées, les concentrations moyennes des différentes espèces sont indépendantes du temps. Dans les cellules d'électro-déposition (industrielles ou de laboratoire), les réactions chimiques ont lieu uniquement sur la surface des électrodes. Il n'y a donc pas de terme source dans les équations de transport pour les différentes espèces. Celles-ci se réduisent alors à:

$$\text{div} \vec{N}_i = 0$$

soit encore

$$\vec{U} \text{grad} C_i = \text{div} (D_i \text{grad} C_i) - \text{div} \left(\frac{z_i F}{RT} D_i C_i \text{grad} \varphi \right)$$

Les coefficients de diffusion dépendent de la composition locale de la solution et de la température. Les phénomènes électro-chimiques ont lieu au voisinage des parois, WRANGLÉN et NILSSON <1-1> suggèrent de déterminer ces coefficients à l'aide de la composition moyenne au voisinage des électrodes. ACRIVOS <1-12> montre que dans le cas de solution à grand nombre de SCHMIDT (cas des cellules d'électro-zingage), on peut utiliser les coefficients de diffusion moléculaire déterminés à partir de la composition au loin. Ceci reste vrai quelles que soient les conditions limites pour l'écoulement; même si les propriétés physiques du fluide varient avec la composition de la solution dans les régions pariétales, puisqu'à nombre de SCHMIDT élevé ces régions sont très petites. Nous allons retenir cette hypothèse qui rejoint celles faites sur la nature de l'écoulement: les coefficients de diffusion moléculaire des différentes espèces ioniques et la permittivité de l'électrolyte ne dépendent que de la composition moyenne et de la température.

Dans le cas d'un écoulement turbulent, l'agitation turbulente dans la région centrale de l'écoulement tend à éliminer les variations de concentration. Les concentrations des différents ions sont constantes et la solution y est électriquement neutre. Les gradients de concentration n'existent que dans les régions pariétales où la turbulence est faible. La taille de ces régions dépend du coefficient de diffusion de l'espèce considérée <1-9> (elle a pour ordre de grandeur quelques microns).

Ce concept de couche pariétale reste valable dans le cas où l'écoulement est laminaire. En effet, nous ne considérons que les cas des solutions électrolytiques animées d'un mouvement de translation parallèle aux électrodes. Du fait de ce mouvement,

dans la région centrale de l'écoulement, le flux en ions par convection forcée est très important. Cette convection a pour effet de créer un approvisionnement du centre du canal en espèces ioniques. Approvisionnement qui est bien supérieur à ce que pourraient être les effets de migration et de diffusion dans cette région.

Cette convection intervient aussi dans le cas des écoulements turbulents, et se superpose aux effets de la turbulence. Pour ces écoulements les couches pariétales sont plus fines.

Nous pouvons donc distinguer deux régions: une zone pariétale, où le transport se fait à priori par convection, par diffusion moléculaire et turbulente, et par migration; et une zone centrale, où les seuls processus de transport qui interviennent sont la convection et la diffusion turbulente.

NEWMAN <1-9> suggère d'utiliser la propriété d'électro-neutralité de la solution à travers tout l'écoulement. La couche pariétale dans laquelle existent les gradients de concentration peut être découpée en deux régions: la double couche électrique et la couche de diffusion. Au voisinage immédiat de l'électrode, dans la double couche électrique, la répartition des ions est telle que la solution forme un dipôle de type condensateur (fig. 1-12). Dans cette zone, dont l'épaisseur est d'une dizaine d'angströem, le fluide n'est pas électriquement neutre. La couche de diffusion est beaucoup plus importante (quelques microns); l'hypothèse d'électroneutralité de cette région est une bonne approximation (fig. 1-12b). Etant donnée sa dimension, la double couche électrique peut être négligée. L'équation de MAXWELL se réduit alors à:

$$\Delta\varphi = 0 \quad (2.1)$$

Remarque: Supposer l'électro-neutralité locale à travers toute la solution donne des résultats très satisfaisants <1-13>. L'avantage de cette hypothèse réside dans le fait que le potentiel électrique ne dépend plus des répartitions des différents constituants. Il suffit alors de résoudre l'équation (2-1) couplée à l'équation de transport de l'espèce considérée ainsi qu'aux équations de NAVIER-STOKES. Pour connaître les conditions limites sur le potentiel électrique, il faut modéliser les surpotentiels de réactions sur les surfaces et les surpotentiels de concentration qui s'additionnent à la variation de potentiel due à la chute ohmique.

La présence d'acide sulfurique dans la solution diminue la résistance ohmique de celle-ci ainsi que la contribution de la migration au transport des ions. Les ions H^+ , en excès dans la solution, ont un coefficient de mobilité très petit par rapport à ceux des autres espèces ioniques. C'est donc cette espèce qui assure le transport de charge par migration. Nous allons nous placer dans l'hypothèse de densité de courant élevée (pour des raisons de rendement de production, les cellules d'électro-zingage répondent à ce critère), et nous intéresser à l'ion métallique que l'on veut déposer. Son équation de transport s'écrit:

$$\vec{U} \text{grad} C = \text{div} (D \text{grad} C) - \text{div} \left(\frac{zF}{RT} DC \text{grad} \varphi \right)$$

Dans la région centrale de l'écoulement, il n'y a pas de gradient de concentration. De ce fait, les termes de l'équation précédente sont tous nuls. Ce qui se passe à l'anode pour le métal ne nous intéresse pas.

Au voisinage de la cathode, du fait de la consommation par déposition, il y a un appauvrissement en zinc, et les trois processus de transport interviennent. Toutefois le terme de migration peut être négligé du fait de la présence en excès des ions H^+ . La migration intervient uniquement dans la double-couche.

L'équation pour la concentration d'un ion métallique que l'on dépose dans une cellule d'électro-zingage se réduit donc à:

$$\vec{U} \text{grad} C = \text{div} (D \text{grad} C) \quad (2.2)$$

elle peut être résolue indépendamment des équations pour les autres espèces ioniques et de la répartition du potentiel électrique à travers la solution.

2.4 Caractéristiques de la solution:

Les simplifications faites afin de déterminer l'écoulement dans des cellules, nous permettent de considérer la solution comme un fluide homogène à propriétés physiques et composition chimique constantes. Le fluide est alors caractérisé, du point de vue hydrodynamique, par sa masse volumique et sa viscosité.

L'électrolyte est une solution aqueuse de sulfate de zinc (1 mole/l) et d'acide sulfurique (0,87 mole/l) à la température de 50 C. Sa masse volumique a été déterminée par pesée: elle est de 1192 kg/m³. Nous avons mesuré la viscosité cinématique de la solution à l'aide d'un viscosimètre à capillaire. La figure (1-13) montre son évolution en fonction de la température. Celle-ci est plus élevée mais suit la même loi de variation que l'eau. Cette évolution peut être représentée par la formule:

$$\nu = 1,46 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-0,0082T}$$

où la température est exprimée en degrés CELSIUS.

L'équation de transport pour les ions zinc fait intervenir la concentration de cette espèce et son coefficient de diffusion ionique dans la solution. Du fait de l'importance du terme de convection, la concentration au centre du canal est constante et est

égale à la concentration moyenne à l'entrée de la cellule (on a vérifié par simulation numérique que l'on peut négliger la variation de concentration moyenne liée à l'appauvrissement de la solution). L'appauvrissement en zinc n'a lieu que dans la couche de diffusion. La valeur du coefficient de diffusion dépend de la composition de la solution et de la température <1-9>. La mesure de ce coefficient peut se faire par chrono-potentiométrie et vérification de la loi de SAND <1-14>, ou par mesure de la densité de courant limite de diffusion sur électrode tournante et application de la loi de VIELSTICH <1-14>. DEGREGZ et WINAND <1-15> estiment que les erreurs systématiques provenant de ces méthodes de mesure du coefficient de diffusion peuvent atteindre 20%. Pour le zinc, à cause du dégagement d'hydrogène, ces méthodes de mesure sont très imprécises (la présence d'hydrogène au voisinage de la cathode peut perturber le résultat de plus de 50%). L'ion zinc étant une espèce ionique très voisine de l'ion cuivrique, leurs coefficients de diffusion moléculaire sont sensiblement égaux (dans les mêmes conditions de composition de solution et de température). Cette hypothèse est généralement retenue pour déterminer le coefficient de diffusion du zinc.

Dans le cas de solutions fortement diluées, NEWMAN <1-9> propose une formule approximative pour les variations du coefficient de diffusion avec la température:

$$\frac{D\mu}{T} = \text{conste} \quad (2.3)$$

où la température est exprimée en KELVIN.

Cette relation montre l'importance de l'influence de la température de la solution. Le coefficient de diffusion peut varier de 2 à 3% par degré.

La solution utilisée dans les cellules d'électro-zingage est forte (faible dilution des espèces ioniques). La présence d'acide sulfurique en proportion élevée fixe la conductivité de la solution et influence le coefficient de diffusion des ions zinc. Dans de telles solutions, ce coefficient dépend principalement de la concentration en sulfate de zinc, en acide sulfurique et de la température. WRANGLÉN et NILSSON <1-11> proposent pour l'ion cuivrique:

$$D(T) = D(25C) [1 + 0,024 (T - 25)]$$

et

$$10^9 D(18C) = 0,52 - 0,1C_{CuSO_4} - 0,07 (C_{H_2SO_4} - 1,5)$$

où la température est exprimée en degrés CELSIUS et les concentrations en mole/l. Ces formules approximatives ont été établies à partir des mesures de COLE et GORDON <1-16>.

WANG, CHEN, OKEEFE, DEGREGZ et WINAND <1-14> utilisent la formulation suivante:

$$D(18C) = \frac{4,7 \cdot 10^{-9}}{5 + \Gamma}$$

pour déterminer le coefficient de diffusion en fonction de la composition de la solution. Γ est la force ionique de la solution. Dans le cas d'une solution de sulfate de zinc et d'acide sulfurique, la force ionique peut être mise sous la forme:

$$\Gamma = 4C_{ZnSO_4} + 3C_{H_2SO_4}$$

Les concentrations sont exprimées en mole/l.

Les différentes formules approchées présentées ci-dessus donnent approximativement les mêmes évolutions du coefficient de diffusion avec la composition de la solution et la température. On note toutefois entre elles des écarts pouvant atteindre 15% (fig. 1-14). Nous avons comparé les prédictions obtenues avec les différents systèmes qu'il était possible de former à partir des relations ci-dessus, avec les valeurs des coefficients de diffusion pour le cuivre et le zinc proposées dans la littérature. Le système qui semble le plus représentatif des variations du coefficient de diffusion avec la composition de la solution et la température est:

$$\frac{D\mu}{T} = \text{conste}$$

$$10^9 D(18C) = 0,52 - 0,1C_{CuSO_4} - 0,07(C_{H_2SO_4} - 1,5)$$

Pour une solution aqueuse de sulfate de zinc à 1 mole/l et d'acide sulfurique à 0,87 mole/l à la température de 50 C, le coefficient de diffusion des ions zinc est $D = 0,95 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ et la viscosité $\mu = 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ kg/ms}$, ce qui correspond à une valeur de $2 \cdot 10^{-15}$ pour la constante de l'équation (2.3).

2.5 Conclusions:

Dans ce chapitre, nous avons vu qu'il était possible de simplifier considérablement les équations régissant les écoulements internes des cellules d'électro-zingage. Ceux-ci peuvent être déterminés indépendamment des autres phénomènes chimiques ou électriques et ne nécessitent que la résolution des équations de NAVIER-STOKES

dans le cas d'un écoulement plan, permanent et par droites parallèles. De la même façon, il est possible de simplifier les équations qui régissent le transport des ions zinc vers la cathode et de supposer que, pour une solution donnée (coefficient de diffusion des ions zinc fixé), le flux d'ions zinc vers la cathode dépend uniquement des caractéristiques de l'écoulement.

Nous avons vu que les phénomènes électro-chimiques concernant l'ion zinc ont lieu dans une couche très mince, contre la cathode (tôle d'acier). Cette couche est appelée couche de diffusion. La résolution des équations de NAVIER-STOKES pour l'écoulement dans la cellule permet de connaître les caractéristiques de cet écoulement au voisinage de la bande d'acier. La confrontation des résultats obtenus avec les caractéristiques des écoulements dans les cellules de laboratoire permet alors de déterminer les paramètres de similitude à respecter, si l'on veut reproduire les mêmes conditions de fonctionnement.

Comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, le rendement et la qualité de dépôt cathodique peuvent être caractérisés par certains paramètres électro-chimiques. Ces paramètres dépendent des conditions hydrodynamiques de fonctionnement des cellules. La connaissance des relations correspondantes peut être obtenue expérimentalement ou par la résolution de l'équation de transport de l'espèce que l'on dépose. Une fois cette relation déterminée, il est possible, par similitude, de reproduire à l'échelle industrielle les conditions hydrodynamiques d'obtention du rendement et de la qualité de dépôt désirés.

Chapitre 3

INFLUENCE DE L'HYDRODYNAMIQUE SUR LE RENDEMENT CATHODIQUE ET LA QUALITE DU DEPÔT

3.1 Introduction:

Beaucoup de facteurs ont de l'influence sur le type de dépôt obtenu sur la cathode: la densité de courant imposée, la concentration de l'ion métallique, l'hydrodynamique de la cellule, la température, le *PH*, la composition de la solution, la présence de catalyseurs ou d'inhibiteurs, l'état de surface de la cathode et l'épaisseur du dépôt réalisé <1-1>.

Dans cette étude, l'état de surface de la cathode est fixé: il s'agit d'une tôle d'acier laminée. L'épaisseur du dépôt dépend de la demande du client. Pour les écoulements dans les cellules d'électro-zingage, la surface est toujours hydrodynamiquement lisse. L'influence de la température, du *PH* et de la composition du bain se fait par l'intermédiaire du coefficient de diffusion ionique du métal que l'on dépose. Ces paramètres fixent aussi la conductivité de la solution; de ces paramètres dépend en conséquence le rendement énergétique de l'installation et donc le coût de production de tôle pré-revêtue. La densité de courant imposée dépend, quant à elle, de l'épaisseur du dépôt désirée et donc de la vitesse de fonctionnement de la ligne d'électrozingage. Pour des raisons de productivité, cette vitesse doit être la plus grande possible. La présence d'inhibiteurs est liée pour sa part au taux de pollution de la solution. Le seul paramètre sur lequel on peut intervenir facilement, sans influencer notablement la vitesse de production et le rendement énergétique de l'installation, est l'hydrodynamique interne des cellules. Il ne faut toutefois

pas oublier que l'écoulement contribue aussi au renouvellement de la solution et à l'évacuation des bulles d'oxygène produites sur l'anode. Ce qui impose des limites aux variations des paramètres hydrodynamiques.

Les résultats obtenus en laboratoire montrent tous que le rendement cathodique dépend de la densité de courant imposée. Ce rendement de dépôt est directement lié à la quantité d'hydrogène dégagée. WEYMEERSH A., WINAND R. et RENARD L. <1-3> montrent (fig. 1-15a) que dans le cas de fortes densités de courant, le rendement diminue pour le zinc quand la densité de courant augmente. L'explication est la suivante: augmenter la densité de courant rapproche de la densité de courant limite de diffusion (vitesse limite de dépôt). Le transport des ions zinc n'est plus suffisant pour assurer la présence de cette espèce en quantité suffisante contre la cathode. L'ion hydrogène se substitue alors au zinc pour permettre le passage du courant. Pour conserver un bon rendement cathodique, il faut repousser la limite de la vitesse de transport des ions. Il faut donc augmenter la densité de courant limite de diffusion. La figure (1-15a) montre que ceci peut être obtenu en augmentant la vitesse débitante.

WEYMEERSH A., WINAND R. et RENARD L. <1-3> ont aussi étudié l'influence de la vitesse débitante et celle de la densité de courant imposée sur l'aspect macroscopique du dépôt obtenu, pour des épaisseurs de dépôt de zinc allant de 25 à 75 microns (fig. 1-15b). Ils ont mis en évidence l'intérêt d'avoir une vitesse débitante de l'électrolyte élevée.

La qualité d'un dépôt dépend de la structure cristalline et du mode de croissance de celui-ci. WINAND <1-17> suggère deux paramètres essentiels permettant de déterminer le type de dépôt obtenu: le rapport J/J_{lim} entre la densité de courant cathodique imposée et la densité de courant limite de diffusion, et l'intensité d'inhibition (paramètre représentant le taux et la force des inhibiteurs). Comme nous l'avons vu précédemment, pour limiter la quantité d'hydrogène dégagée et avoir un bon rendement cathodique, il faut travailler bien au dessous de la densité de courant limite de diffusion. Cette limite est une fonction de la composition de la solution, de la température et des caractéristiques de l'écoulement. L'inhibition est due à la présence à la surface de la cathode de substances (molécules, atomes ou ions) différentes du cation qui doit être déposé. Ces substances couvrent en partie l'électrode et retardent donc le processus cathodique. Elles sont appelées inhibiteurs et ont une influence très importante sur la structure cristalline du dépôt. L'intensité d'inhibition caractérise la quantité de ces substances au voisinage de la cathode. Dans l'industrie, la présence d'inhibiteurs est essentiellement due à la pollution de la solution. L'utilisation d'un électrolyte riche en acide sulfurique pur permet de limiter l'intensité d'inhibition.

A partir de relevés expérimentaux, WINAND <1-17> propose un diagramme (fig. 1-16) montrant l'influence des deux paramètres précédents sur la structure cristalline d'un dépôt métallique. Le paramètre qui nous intéresse est le rapport de la densité de courant sur sa limite, il caractérise le transport de matière. Comme nous l'avons

vu dans le chapitre précédent, ce transport de matière dépend essentiellement de la diffusion et de la convection. Pour connaître ce paramètre, il faut savoir déterminer la densité de courant limite de diffusion.

L'application industrielle de ce diagramme peut être la suivante: Pour une vitesse de production de la ligne d'électro-zingage et une épaisseur de dépôt données, la densité de courant à imposer est fixée. Le contrôle de la structure cristalline du dépôt peut se faire en jouant sur la densité de courant limite de diffusion en agissant sur les paramètres qui l'influencent.

Le rendement de dépôt cathodique, comme le type de structure cristalline dépendent de la densité de courant limite de diffusion. Celle-ci est elle-même liée aux conditions de fonctionnement des cellules. Sa détermination est un des axes actuels de la recherche en électro-chimie.

3.2 La densité de courant limite de diffusion:

3.2.1 Définitions:

Comme nous l'avons énoncé précédemment, la densité de courant limite de diffusion est la densité de courant à partir de laquelle la vitesse de déposition imposée est supérieure à la vitesse de transport des ions à travers la solution. Elle se caractérise par une concentration nulle sur la cathode de l'espèce que l'on dépose (fig. 1-9b).

Reprenons les équations établies dans le chapitre précédent. La densité de courant \vec{J} est la somme des courants transportés par chacune des espèces ioniques.

$$\vec{J} = \sum_i z_i F \vec{N}_i$$

Si nous appliquons cette formule à la cathode en supposant que la seule espèce réagissant sur cette surface est le zinc (rendement de 100%), nous avons:

$$J = z_{Zn} F N_{Zn} \quad (3.1)$$

(les autres espèces ne réagissent pas sur cette surface, leurs flux sont nuls.)

Sur la surface de l'électrode, la composante normale de la vitesse est nulle. Il n'y a donc pas de convection. L'équation (3.1) se réduit alors à:

$$J = z_{Zn} F D \frac{\partial C_{Zn}}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

(voir l'équation (2.2) dans laquelle seule la diffusion normale à l'électrode intervient. Dans la suite on abandonne l'indice Zn .)

Dans le cas de la densité de courant limite de diffusion, le profil de concentration est généralement schématisé (fig. 1-9b, traits pointillés) de façon à faire apparaître une longueur caractéristique δ appelée épaisseur de la couche limite de diffusion.

$$\delta = \frac{C_{\infty}}{\left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=0}}$$

d'où

$$J_{lim} = \frac{zFDC_{\infty}}{\delta}$$

A partir de ce résultat, il est généralement commode de définir le nombre de SHERWOOD:

$$Sh = 10^{-3} \frac{J_{lim} d}{zFDC_{\infty}}$$

où d est une longueur caractéristique de la cellule (le paramètre généralement retenu est le diamètre hydraulique de celle-ci). Le nombre de SHERWOOD caractérise le transfert de matière. Par identification des deux formules ci-dessus, on montre que Sh est proportionnel à d/δ .

Un autre nombre sans dimension joue un rôle important dans ce type de problème. Il s'agit du nombre de SCHMIDT qui caractérise la diffusion dans la solution électrolytique:

$$Sc = \frac{\nu}{D}$$

Ce nombre sans dimension met en évidence la similitude qui existe entre le transport d'une grandeur scalaire comme la concentration, et celui de la température. Pour cette dernière, le nombre sans dimension utilisé est le nombre de PRANDTL: $Pr = \nu/\mathcal{D}$ où \mathcal{D} est la diffusivité thermique.

Un paramètre est souvent utilisé en électrochimie pour caractériser le transport de matière limite. Il s'agit du coefficient de transfert de masse kt :

$$kt_{lim} = \frac{J_{lim}}{zFC_{\infty}} = \frac{D}{\delta}$$

Il est homogène à une vitesse et représente la vitesse de diffusion de l'ion vers la cathode.

3.2.2 Evaluation de la densité de courant limite de diffusion:

La densité de courant limite de diffusion dépend de la nature de la solution utilisée (composition et température), et de l'hydrodynamique interne des cellules. La détermination de ces relations par voie expérimentale est assez délicate. En effet, la densité de courant limite est une grandeur difficilement mesurable avec précision. Les résultats expérimentaux sont généralement utilisés pour confirmer ou démentir les lois établies dans le passé, et généralement dérivées de l'analyse du transport d'autres grandeurs scalaires comme la température. Dans le cas des écoulements turbulents et établis dans des canaux, la loi qui est souvent prise comme référence est la loi de CHILTON-COLBURN <1-14>:

$$Sh = f Re^{0,8} Sc^{1/3} \quad \text{avec} \quad Re = \frac{Ud}{\nu} \quad \text{et} \quad Sc = \frac{\nu}{D}$$

La longueur d retenue pour caractériser le canal est le diamètre hydraulique. f est un facteur de proportionnalité. Cette loi est issue de résultats obtenus pour les transferts thermiques, et a été transposée à l'électrochimie par analogie. NEWMAN <1-18> cite des mesures expérimentales qui sont en bon accord avec cette loi. Il fait aussi remarquer que certains auteurs critiquent l'application de cette loi aux systèmes électro-chimiques du fait de l'importance du nombre de SCHMIDT qu'on y rencontre. En effet, pour le transfert de la chaleur, le nombre de SCHMIDT (ou de PRANDTL) est voisin de l'unité alors qu'il peut être 1000 fois plus grand pour le transport de matière en électro-chimie.

Une autre loi communément utilisée comme référence est la loi proposée par VIELSTICH <1-3>:

$$Sh = f Re^{0,9} Sc^{1/3}$$

Ces deux lois ne diffèrent que par l'exposant attribué au nombre de REYNOLDS et la constante de proportionnalité. La différence d'exposant étant petite, il est difficile de discerner si les mesures expérimentales suivent plutôt une loi que l'autre. Toutefois, les résultats reportés dans les références <1-14> et <1-15> semblent mieux suivre la loi de VIELSTICH. Le principal problème réside dans la détermination de la constante de proportionnalité. Ce facteur varie en effet avec la géométrie du canal utilisé. Ceci serait dû à un mauvais choix de la longueur caractéristique retenue <1-14>. Les résultats expérimentaux ne sont donc pas reproductibles d'une cellule de laboratoire à une autre, et il est difficile de les appliquer aux cellules industrielles.

IBL <1-19> préconise l'utilisation de la loi proposée par BRAUER (1971) dans le cas d'une solution à nombre de SCHMIDT élevé:

$$Sh = 0,016 Re^{7/8} Sc^{1/3}$$

Il cite également la corrélation de DEISSLER (1944):

$$Sh = 0,025 Re^{7/8} Sc^{1/4}$$

Celle-ci, très populaire dans le passé, n'est plus considérée comme valide de nos jours. L'exposant attribué au nombre de SCHMIDT serait plus proche de 1/3 que de 1/4. Pourtant, IBL fait état de résultats expérimentaux obtenus pour des nombres de SCHMIDT élevés (650 et 2500) qui sont en très bon accord avec la loi proposée par DEISSLER.

PICKETT et ONG <1-20> ont étudié l'influence de la nature de l'écoulement, dans un canal de section rectangulaire, sur les lois qui caractérisent le transfert de matière, dans le cas de la densité de courant limite de diffusion. Les résultats expérimentaux qu'ils ont obtenus pour un écoulement turbulent établi montrent que ces lois s'établissent au bout de 12 diamètres hydrauliques, et que celle qui représente le mieux le transfert de matière est celle de CHILTON-COLBURN avec un facteur de proportionnalité de 0,023. (il n'ont pas étudié l'influence du nombre de SCHMIDT). Dans le cas d'électrodes courtes, le transfert de matière n'est pas établi. Celui-ci dépend alors de la longueur des électrodes, et l'influence du nombre de REYNOLDS intervient alors avec un exposant voisin de 2/3.

WRANGLÉN et NILSSON <1-11> ont étudié les lois de transfert de matière dans le cas d'un écoulement en canal rectangulaire non établi. Ils proposent en premier lieu une solution analytique basée sur une série d'hypothèses simplificatrices du problème. Pour un écoulement turbulent, ils montrent ainsi que la densité de courant limite de diffusion varie avec le nombre de REYNOLDS à la puissance 3/5. Pourtant les mesures expérimentales qu'ils ont obtenues dans les mêmes conditions d'écoulements indiquent plutôt une évolution avec un exposant voisin de 1/2. Ils attribuent cette différence à une perturbation causée par les parois latérales de leur cellule.

On peut citer pour finir les travaux de YAKHOT <1-21> qui a étudié les effets de diffusion dus à la turbulence, dans les écoulements pariétaux. Ces effets peuvent être modélisés à l'aide d'une grandeur scalaire appelée coefficient de diffusion turbulente. A partir de mesures expérimentales, il montre que ce paramètre caractéristique du transfert de matière peut être relié au nombre de REYNOLDS de l'écoulement, par une relation de proportionnalité. Pour des écoulements de COUETTE entre deux cylindres le nombre de REYNOLDS intervient avec un exposant allant de 0,69 à 0,86. L'application du même modèle aux écoulements de canaux, combinée à l'utilisation de la formule de BLASIUS, donne un exposant de 7/8. Ces résultats sont à rapprocher des lois énoncées précédemment.

On peut constater que les lois d'évolution de la densité de courant limite de diffusion (ou du nombre de SHERWOOD qui la représente sous forme d'un nombre sans dimension), en fonction des caractéristiques de la solution ou de l'écoulement, ne sont pas encore parfaitement définies. Celles-ci sont souvent issues d'une transposition des résultats obtenus pour le transfert de chaleur, au transfert de matière. Cette transposition semble souffrir de deux faiblesses pour ce qui concerne les règles de similitude. La première est le non respect de l'ordre de grandeur des nombres de SCHMIDT (ou de PRANDTL). En effet, le nombre de PRANDTL caractérisant la diffusion de la chaleur est d'ordre unité, alors que le nombre de SCHMIDT spécifique à l'électrochimie est généralement 100 à 1000 fois plus grand. La seconde faiblesse réside dans le choix de la longueur caractéristique du canal. La grandeur habituellement retenue est le diamètre hydraulique. Ce paramètre s'avère judicieux pour des canaux de section circulaire ou rectangulaire dont le rapport des côtés est compris entre 0,5 et 2. Mais dès que le rapport des côtés dépasse ces limites, cette longueur n'est plus caractéristique du phénomène. Il faut alors, soit utiliser un facteur de correction analogue à ceux employés lors des calculs de perte de charge, soit choisir une autre longueur pour caractériser le canal. L'application des lois décrites ci-dessus pour évaluer la densité de courant limite de diffusion dans les cellules industrielles est difficilement envisageable (d'autant plus que dans ces dernières, la cathode est animée d'un mouvement de translation).

3.3 Conclusions:

Nous avons vu dans ce chapitre que l'hydrodynamique interne aux cellules d'électro-déposition joue un rôle important pour l'obtention d'un bon rendement cathodique. Son influence sur le type de dépôt réalisé est tout aussi important. Dans les deux cas, la contribution de l'hydrodynamique peut être évaluée par l'intermédiaire d'un paramètre caractéristique du transport du métal: la densité de courant limite de diffusion. Cette grandeur dépend en effet de la composition de la solution, de la température et de l'écoulement interne à la cellule par l'intermédiaire de lois de type CHILTON-COLBURN. Pour que l'industriel puisse maîtriser la qualité du dépôt réalisé et le rendement cathodique, il lui faut connaître avec exactitude la loi permettant de déterminer la densité de courant limite de diffusion dans le cas particulier des cellules qu'il utilise. Malheureusement, la difficulté à mesurer la densité de courant limite fait que, de nos jours, ces lois sont encore très incertaines. De plus, elles sont généralement déterminées dans des cellules de laboratoire dont la géométrie est éloignée de celle des cellules industrielles. Les résultats expérimentaux ne sont donc pas applicables par similitude au problème industriel. Actuellement, les seuls procédés sûrs pour connaître le type de dépôt réalisé, en fonction des réglages de la cellule, sont soit la réalisation d'essais directement sur le site de production, soit le passage par une maquette à échelle réduite insérée dans une ligne pilote.

Chapitre 4

BUT DE CETTE ETUDE:

4.1 Introduction:

La contribution de l'hydrodynamique au fonctionnement des cellules d'électrozingage est importante. C'est en effet le mouvement forcé de la solution qui assure l'approvisionnement en métal à déposer ainsi que l'évacuation des gaz issus des réactions d'oxydation ou de réduction sur les électrodes. Ceci permet à la solution de conserver une bonne conductivité, et réduit en conséquence la consommation énergétique de la cellule. Ces deux aspects nécessitent l'utilisation de vitesses débitantes élevées. Une autre contribution provient de la nature de l'écoulement. L'agitation turbulente permet d'homogénéiser la solution dans la majeure partie de l'écoulement. S'il est turbulent, on peut considérer le fluide à composition chimique et à propriétés physiques constantes. L'agitation turbulente participe aussi au transport des ions vers les électrodes. Elle facilite donc le passage du courant à travers la solution et assure la présence d'ions zinc en quantité suffisante au voisinage de la cathode.

Le concours de l'hydrodynamique ne se limite pas uniquement à ces phénomènes de transport. Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, c'est elle qui contrôle en partie le rendement cathodique ainsi que le type de dépôt réalisé. La prise en compte de son influence est donc capitale pour l'obtention d'un revêtement de qualité. Le paramètre déterminant pour le type de dépôt est le rapport J/J_{lim} . J_{lim} croît avec la vitesse débitante relative à la tôle. La figure (1-15b) indique que les dépôts de qualité sont obtenus pour des rapports J/J_{lim} modérés et donc pour une vitesse débitante relative élevée.

Pour connaître la contribution de l'écoulement au fonctionnement des cellules d'électrozingage, il faut, en premier lieu, savoir prédire correctement l'écoulement de la solution. Une fois celui-ci connu, il est alors possible d'étudier son influence sur la réalisation du revêtement et d'envisager les améliorations qu'il est possible d'apporter au fonctionnement des cellules. Le but de cette étude est donc double. Une première partie concerne la prédiction des écoulements à l'intérieur des cellules d'électro-déposition. Une seconde partie concerne l'influence de l'écoulement

sur le dépôt par la détermination de la loi liant la densité de courant limite de diffusion aux caractéristiques de cet écoulement. Elle passe par une modélisation électro-chimique. Dans ces deux parties, notre étude est basée sur des simulations numériques.

Une troisième partie présente l'application des résultats obtenus aux cellules industrielles.

4.2 Prédiction des écoulements:

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, l'écoulement dans une cellule d'électro-zingage du type de celle de la figure (1-5) peut être étudié en distinguant trois régions: une zone d'injection, une région d'établissement de chaque écoulement, et une partie où les écoulements amont et aval sont établis. Les travaux de MONNIER <1-2> ont montré que la région d'établissement peut être négligée. La particularité de la zone d'injection est qu'elle est le siège de la répartition des débits amont et aval. Cette répartition a été étudiée de façon complète par similitude expérimentale <1-2>. Nous allons donc nous intéresser essentiellement à l'écoulement dans les parties établies.

Les écoulements que l'on rencontre dans ces zones sont identiques aux écoulements qui se produisent entre deux parois parallèles, dont l'une est animée d'un mouvement de translation uniforme. Ils engendrent un gradient longitudinal de pression motrice constant, et sont généralement dénommés écoulements de COUETTE avec gradient de pression. Le gradient de pression motrice peut être favorable ou adverse (fig. 1-17). Comme il est possible de montrer l'identité de ces deux écoulements par une symétrie ponctuelle, nous ne nous intéresserons qu'au cas du gradient de pression favorable. Un cas particulier important correspond au gradient de pression nul. Le mouvement du fluide est alors uniquement dû à l'entraînement par la paroi mobile. Il s'agit de l'écoulement de COUETTE pur.

Les écoulements de COUETTE avec gradient longitudinal de pression peuvent être scindés en trois familles. Celles-ci peuvent être distinguées par comparaison entre la vitesse débitante et la vitesse de la paroi mobile (fig 1-18). Si la vitesse débitante est nettement supérieure à la vitesse de la paroi mobile, l'écoulement sera dit de type POISEUILLE. Dans le cas contraire, l'écoulement sera dit de type COUETTE. Pour finir, si les deux vitesses sont du même ordre de grandeur, nous l'appellerons écoulement "intermédiaire".

A cet ensemble d'écoulements, et dans le but de valider les modèles de turbulence utilisés, nous pouvons ajouter le cas dans lequel les deux parois sont fixes: les écoulements de POISEUILLE purs.

Sur la base d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices qui altèrent très peu l'intérêt industriel de l'étude, et que nous avons rappelé succinctement au chapitre

2, il est possible de prédire les écoulements dans les zones établies par simulation numérique. Cette étude à été faite par MONNIER <1-2> à l'aide de modèles de fermeture au premier ordre. Ces modèles, basés sur l'utilisation de l'hypothèse de BOUSSINESQ, se sont montrés performants pour prédire les profils de vitesse, dans la plupart des écoulements que l'on peut rencontrer dans les cellules d'électro-zingage.

Cependant, ces modèles ne donnent que très peu d'informations sur la turbulence de l'écoulement. Les modèles les plus sophistiqués, à une ou à deux équations de transport, représentent la turbulence uniquement par son énergie cinétique moyenne. Celle-ci représente le taux d'agitation local de la solution. La turbulence est donc représentée par une grandeur isotrope sans distinction de direction privilégiée.

Il existe par ailleurs des discordances entre les mesures expérimentales des profils de vitesse utilisées pour valider les modèles et les prédictions obtenues. Comme nous allons le voir un peu plus loin, les modèles de fermeture au premier ordre semblent accuser certaines faiblesses lors de la prédiction des écoulements de type POISEUILLE. Celles-ci seraient dues à l'utilisation de l'hypothèse de BOUSSINESQ qui est visiblement mise en défaut pour ces écoulements. Les mesures expérimentales en notre possession indiquent aussi un saut d'énergie turbulente lors du passage des écoulements de type COUETTE au type POISEUILLE <1-2>. Les modèles de fermeture au premier ordre ne reproduisent pas cet écart.

La première partie de la présente étude est une poursuite des travaux de MONNIER <1-2>. Deux développements sont proposés:

Le premier concerne l'étude des performances des modèles de fermeture au second ordre pour prédire les écoulements qui nous intéressent. Ces modèles, qui ne sont plus basés sur l'hypothèse de BOUSSINESQ, donnent beaucoup plus d'informations sur la turbulence. Ils permettent de prédire la répartition de l'énergie cinétique turbulente dans les différentes directions et donc de prendre en compte l'anisotropie qui existe près des parois.

Les modèles de turbulence classiques ne sont utilisables que dans des canaux constitués de parois hydrodynamiquement lisses. Dans les cellules d'électro-zingage, la cathode est une feuille d'acier laminée. Les conditions de fonctionnement de ces cellules nous permettent de négliger la rugosité de cette paroi. De même, la rugosité due au dépôt est négligeable. L'anode en plomb vieillit au cours du temps. En effet, les réactions d'oxydation qui y ont lieu modifient son état de surface. La paroi peut ne pas être hydrodynamiquement lisse. Cependant, les effets dûs à cette rugosité seront toujours petits. Le deuxième développement proposé dans cette étude est la prise en compte des effets de rugosité de paroi dans une modélisation simple de la turbulence. Deux cas peuvent être envisagés: une ou deux parois rugueuses.

4.3 Modélisation électrochimique:

La seconde partie de cette étude est l'application de la modélisation de la turbulence à l'électrochimie. Le but de ce travail est de déterminer la loi de variation de la densité de courant limite de diffusion avec les conditions d'écoulement. Ceci permet de connaître l'influence de l'hydrodynamique sur le rendement cathodique et la qualité du dépôt. Cette étude met aussi en évidence les paramètres déterminants pour exprimer cette loi de façon universelle. Elle permet donc d'envisager une méthode d'extrapolation des résultats expérimentaux obtenus dans les cellules de laboratoire aux cellules industrielles pour lesquelles la cathode est mobile.

Cette étude débute par les écoulements laminaires. Le but de cette démarche est la validation du modèle numérique de résolution des équations. En effet, pour les écoulements laminaires, l'équation pour la concentration peut être résolue analytiquement. Les résultats de cette partie sont aussi intéressants pour mettre en évidence les hypothèses simplificatrices à utiliser pour les écoulements turbulents. Ils montrent enfin les paramètres déterminants pour la densité de courant limite.

L'étude numérique pour les écoulements turbulents montre quels sont les paramètres qui influencent directement la densité de courant limite de diffusion. Ce sont les grandeurs qu'il faut respecter si l'on veut reproduire le même transport pariétal de l'ion à déposer, dans des cellules de sections différentes. Ces caractéristiques de l'écoulement sont les grandeurs à utiliser pour former les nombres sans dimension des lois de transfert pariétal de matière. Les résultats de notre simulation numérique sont enfin comparés aux lois présentées dans le chapitre précédent.

Cette partie se termine par une étude expérimentale en cellule de laboratoire, faite pour le zinc, dont le but est de valider les résultats obtenus numériquement. Elle expose une méthode de mesure de la densité de courant limite de diffusion, et donne les évolutions de cette grandeur avec les différents paramètres que nous avons fait varier. Les expériences ont permis de valider les calculs numériques, et d'y ajouter les effets non négligeables du dégagement d'hydrogène sur la cathode. Nos résultats sont enfin comparés à d'autres mesures expérimentales.

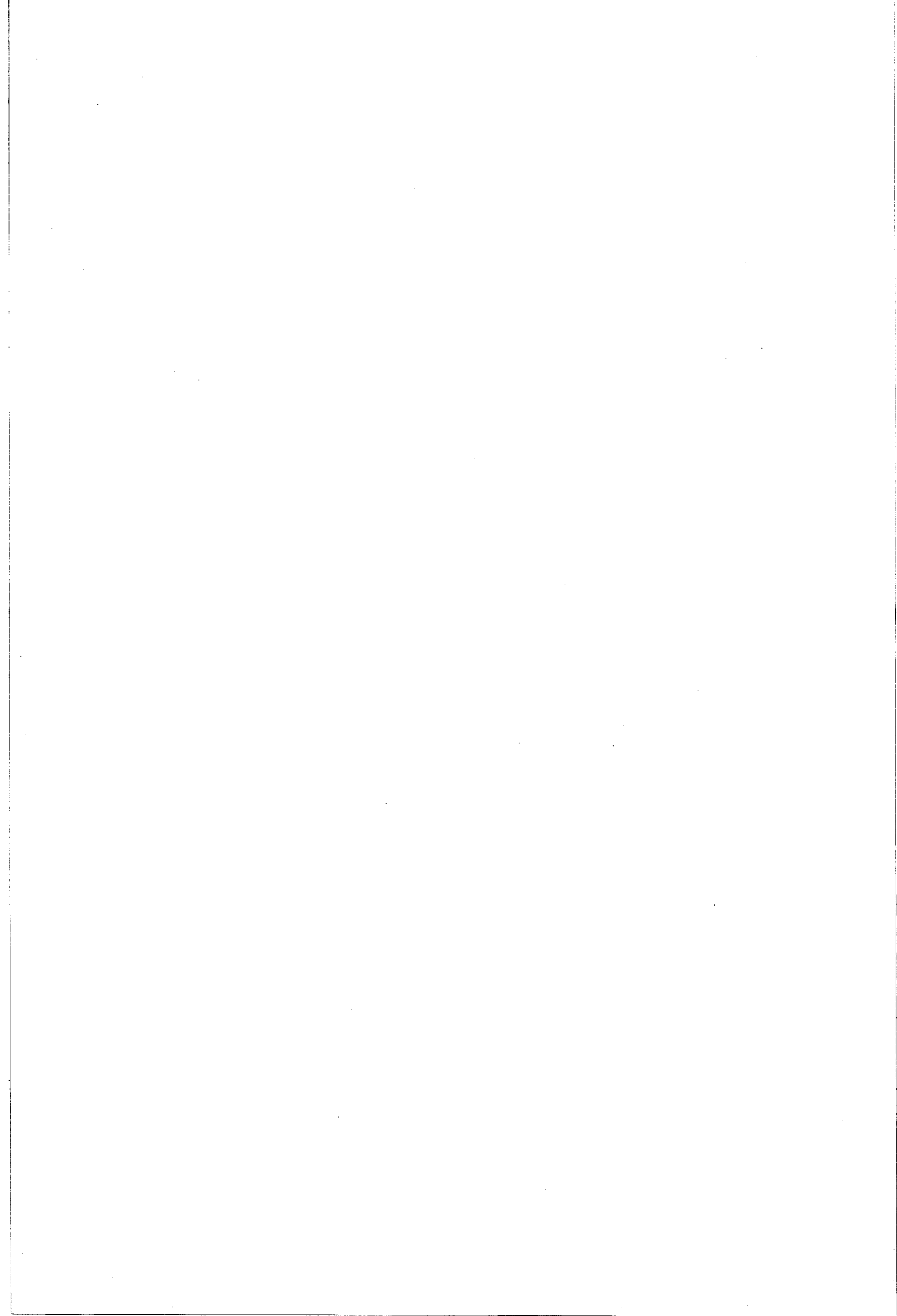
4.4 Application industrielle des résultats:

La partie précédente montre l'influence qu'a l'écoulement sur le transport de matière. Les conditions de ce transport sont déterminantes pour la qualité et le type de dépôt réalisé. Les modèles de turbulence permettent de calculer avec précision les caractéristiques des écoulements et donc les conditions dans lesquelles il faut se mettre pour réaliser un dépôt de qualité. La dernière partie de ce travail montre, sur la base d'une étude expérimentale réalisée en collaboration avec le centre de recherche et de développement du groupe COCKERILL SAMBRE (RDCS) et le département électro-métallurgie de l'Université Libre de BRUXELLES, la difficulté

que l'on rencontre en essayant de contrôler la totalité de l'écoulement dans les cellules actuelles. Une nouvelle configuration de cellule ainsi que son dispositif d'injection du fluide sont proposés. Ce dernier a été défini par voie expérimentale sur maquette. On détermine aussi les conditions de fonctionnement de cette nouvelle cellule radiale pour l'élaboration d'un dépôt à structure cristalline contrôlée.

Part II

**MODELISATION
HYDRODYNAMIQUE**



Chapitre 5

FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME HYDRODYNAMIQUE

5.1 Introduction:

Tout écoulement de fluide est gouverné par un ensemble d'équations représentant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale, auquel il faut ajouter les lois de comportement des propriétés physiques du fluide (viscosité, masse volumique ...).

Les écoulements dans les cellules d'électro-zingage pouvant être considérés comme isothermes et isovolumes, et le fluide comme homogène, le système précédent se réduit à quatre équations communément appelées équations de NAVIER-STOKES: une équation de conservation de la masse, et trois équations de quantité de mouvement.

5.2 Equations de NAVIER-STOKES:

Pour un fluide newtonien, isovolume, à température constante, les équations de NAVIER-STOKES se réduisent à:

– l'équation de continuité:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.1)$$

– et aux équations de quantité de mouvement.

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + f_i \text{ pour: } i = 1, 2, 3 \quad (5.2)$$

Le premier membre de l'équation (5.2) qui correspond à une variation de la quantité de mouvement locale, se décompose en une partie instationnaire et une partie correspondant à la convection par l'écoulement. Dans le membre de droite, le premier terme est un gradient de pression. C'est un terme de production de la quantité de mouvement par différence de pression. Le deuxième terme correspond à la variation de la quantité de mouvement par diffusion visqueuse. Le dernier terme représente la production due aux forces à distance. Comme dans les cellules d'électro-zingage, nous pouvons négliger les forces d'origine inertielle, électrique et magnétique, ce terme ne traduit que les effets du champ de pesanteur. Les actions de la pression et de la pesanteur peuvent être regroupées en une seule expression qui fait intervenir le gradient de pression motrice.

Dans le système précédent, nous avons quatre inconnues: la pression et les trois composantes de la vitesse, pour quatre équations. Le système est donc fermé. A ce stade, la méthode numérique d'appréhension d'un écoulement turbulent s'appelle la simulation directe. Une telle résolution nécessite un maillage dont la distance maximale entre les noeuds est inférieure à la taille caractéristique des plus petites structures contenues dans l'écoulement. MONNIER <1-2> a estimé à $7 \cdot 10^9$ le nombre de points de maillage nécessaire pour résoudre les écoulements dans les cellules. Les écoulements étant turbulents, cette résolution nécessite en plus un maillage temporel, dont les intervalles doivent être inférieurs au temps caractéristique des plus petites structures présentes dans l'écoulement. La simulation directe de ces écoulements n'est donc pas actuellement envisageable dans une optique industrielle.

Remarques:

- a) Les échelles de KOLMOGOROV ou les micro-échelles de TAYLOR qui peuvent être choisies comme grandeurs caractéristiques des petites structures dépendent du nombre de REYNOLDS de l'écoulement. Plus celui-ci est grand, plus le nombre de points de maillage à utiliser doit donc être important. Il est de nos jours possible, à l'aide de moyens de calculs performants, de simuler directement des écoulements à faibles nombres de REYNOLDS. Mais ces calculs sont très longs, très onéreux, et encore très limités. Nous pouvons citer à titre d'exemple les travaux de KIM, MOIN et MOSER <2-1> ou ceux de DANG et DESCHAMPS <2-2>. Ces derniers ont étudié l'écoulement de POISEUILLE turbulent en canal plan. Les calculs ont nécessité un maillage de plus de 37000 points pour un nombre de REYNOLDS, basé sur la vitesse moyenne de l'écoulement et sur la hauteur du canal, de l'ordre de 4000. La limitation des moyens de calcul se traduit par une limitation en nombre de REYNOLDS. De ce fait, la simulation directe n'est pas directement applicable aux problèmes industriels.
- b) Un autre type de simulation numérique des équations de NAVIER- STOKES permet le calcul d'écoulements turbulents à nombres de REYNOLDS plus

élevés. Il s'agit de la modélisation sous maille (large eddy simulation). Cette technique de résolution utilise un maillage dont la distance entre les noeuds est supérieure aux petites échelles. A l'intérieur des cellules ainsi formées, la turbulence est modélisée par une viscosité apparente, dite viscosité sous-maille. Cette méthode est équivalente à un filtrage des équations de NAVIER-STOKES pour ne résoudre que les mouvements dont la taille est supérieure à une certaine échelle. Nous pouvons citer dans ce domaine les travaux de PINELLI et BENOCCI <2-3> ou ceux de HORIUTI <2-4>. A titre d'exemple, ce dernier a simulé un écoulement turbulent de canal plan pour un nombre de REYNOLDS de l'ordre de 13.000. Le maillage qu'il a utilisé contenait plus de $4 \cdot 10^6$ noeuds. Cette méthode de résolution nécessite l'utilisation d'un matériel informatique très performant qui la rend excessivement onéreuse. Elle n'est pas non plus adaptée au problème industriel que nous étudions.

5.3 Equations de REYNOLDS:

Dans notre étude, nous sommes intéressés uniquement par les caractéristiques moyennes des écoulements. O. REYNOLDS a proposé de décomposer toute grandeur instantanée A d'un écoulement turbulent en une partie moyenne \bar{A} et une partie fluctuante a .

$$A = \bar{A} + a$$

Par analogie avec la modélisation sous maille, ce procédé est équivalent à l'utilisation d'un filtre passe-bas ne conservant que la composante continue des variables.

L'application de cette décomposition conduit à:

$$U_i = \bar{U}_i + u_i \quad \text{pour: } i = 1, 2, 3 \quad P = \bar{P} + p'$$

L'utilisation de cette décomposition dans les équations de NAVIER-STOKES permet, après avoir effectué un moyennage temporel de celles-ci, d'obtenir les équations de REYNOLDS:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{5.3}$$

$$\rho \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i u_j} \right] + f_i \quad \text{pour: } i = 1, 2, 3 \tag{5.4}$$

(1) (2) (3) (4) (5)

La première équation, dite de continuité, représente la conservation de la masse, la deuxième, dite de quantité de mouvement, le principe fondamental de la dynamique. Les différents termes de l'équation de quantité de mouvement représentent:

- (1) : la convection
- (2) : le terme source dû au gradient de pression
- (3) : la diffusion moléculaire
- (4) : la diffusion turbulente
- (5) : le terme source dû aux forces à distance (pesanteur)

Les grandeurs à déterminer deviennent des moyennes temporelles. Nous remarquons aussi l'apparition de termes supplémentaires $\overline{u_i u_j}$ appelés tensions de REYNOLDS qui, bien que d'origine convective, jouent un rôle diffusif vis à vis de la quantité de mouvement moyenne. Ces 6 inconnues supplémentaires (corrélations vitesse-vitesse) peuvent être regroupées pour former un tenseur symétrique: le tenseur de REYNOLDS.

Les 4 équations de REYNOLDS contiennent 10 inconnues (les 3 composantes de la vitesse moyenne, la pression moyenne et les 6 corrélations vitesse-vitesse). Ces équations forment donc un système ouvert. Pour le résoudre, il faut formuler des lois qui permettent d'équilibrer le nombre d'équations et le nombre d'inconnues. C'est ce que l'on appelle généralement le "problème de fermeture".

5.4 Problème de fermeture:

Pour assurer l'équilibre entre nombre d'équations et nombre d'inconnues, différentes méthodes sont envisageables.

Une première méthode consiste à modéliser les contraintes de REYNOLDS en les reliant algébriquement aux autres inconnues du problème. Cette méthode donne les modèles de type "longueur de mélange".

Une deuxième méthode relie les contraintes de REYNOLDS aux autres inconnues du problème, non plus par des relations algébriques, mais par l'intermédiaire de grandeurs caractéristiques de la turbulence. Ces grandeurs caractéristiques introduites sont alors des inconnues supplémentaires qui sont déterminées localement à partir de leur équation de transport. Cette méthode donne lieu à deux types de modèles: les "modèles à une équation de transport" et les "modèles à deux équations de transport".

Ces deux procédés d'appréhension du problème de fermeture peuvent être regroupés sous l'appellation "fermetures au premier ordre". Ce nom provient du fait que

ces différents modèles ont pour but de ramener le nombre d'inconnues au nombre d'équations par l'utilisation de l'hypothèse de BOUSSINESQ. Ces modèles ont été décrits, testés et améliorés pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression par MONNIER <1-2>.

Une troisième méthode possible consiste non plus à ramener le nombre d'inconnues au nombre d'équations, mais à ramener le nombre d'équations au nombre d'inconnues. Ce procédé donne lieu aux modèles de "fermeture au second ordre" ou "modèles aux tensions de REYNOLDS". Pour cela, on écrit des équations de transport supplémentaires pour les contraintes de REYNOLDS. L'établissement des équations pour ces corrélations doubles de vitesses fait apparaître d'autres inconnues (corrélations pression-vitesse, corrélations triples de vitesses). Par conséquent, le système obtenu (à dix équations) reste ouvert et nécessite des fermetures complémentaires.

5.5 Equations de transport pour les grandeurs turbulentes:

En utilisant la décomposition de REYNOLDS dans les équations de quantité de mouvement, il est possible de dériver des équations de transport pour les contraintes de REYNOLDS. Après réarrangement, celles-ci peuvent être formulées de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
 \overline{U_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = & - \left[\overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} \right] \\
 (1) & \qquad \qquad \qquad (2) \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-\overline{u_i u_j u_k} - \frac{p}{\rho} (\delta_{ik} u_j + \delta_{jk} u_i) + \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad (3) \qquad \qquad \qquad (4) \qquad \qquad \qquad (5) \\
 & + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \\
 & \qquad \qquad \qquad (6) \qquad \qquad \qquad (7)
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

l'interprétation physique suivante peut ainsi être donnée aux différents termes:

(1) : convection de la corrélation par l'écoulement moyen

(2) : production par interaction entre le champ turbulent et l'écoulement moyen

- (3) : diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse
- (4) : diffusion turbulente due aux fluctuations de pression
- (5) : diffusion visqueuse
- (6) : redistribution de l'énergie cinétique turbulente entre les corrélations vitesse-vitesse (retour à l'isotropie pour les corrélations normales)
- (7) : dissipation visqueuse

Le terme de dissipation visqueuse est généralement représenté sous la forme tensorielle suivante:

$$\epsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (5.6)$$

ϵ_{ij} est appelé taux de dissipation de la corrélation $\overline{u_i u_j}$.

L'utilisation de la décomposition de REYNOLDS permet aussi scinder l'énergie cinétique totale de l'écoulement en l'énergie cinétique moyenne plus l'énergie cinétique turbulente, notée k .

$$\frac{1}{2} \overline{U_i^2} = \frac{1}{2} \overline{U_i^2} + \frac{1}{2} \overline{u_i^2} = \frac{1}{2} \overline{U_i^2} + k$$

Il est alors possible de formuler une équation de transport pour l'énergie turbulente par contraction puis sommation des indices dans l'équation (5.5). Nous obtenons:

$$\overline{U_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} = \underbrace{- \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{(2)} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\underbrace{\frac{1}{2} \overline{u_i u_j u_k}}_{(3)} + \underbrace{\frac{\overline{p}}{\rho} u_k}_{(4)} - \underbrace{\nu \frac{\partial k}{\partial x_k}}_{(5)} \right] - \underbrace{\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{(6)} \quad (5.7)$$

où les différents termes ont la signification physique suivante:

- (1) : convection par l'écoulement moyen
- (2) : production d'énergie turbulente par l'écoulement moyen. Ce terme exprime le transfert d'énergie de l'écoulement moyen vers le mouvement turbulent.
- (3) : diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse
- (4) : diffusion turbulente due aux fluctuations de pression
- (5) : diffusion moléculaire
- (6) : dissipation isotrope de l'énergie turbulente, notée ϵ

Remarques:

- a) Lors de la contraction d'indice dans l'équation (5.5), le terme de redistribution disparaît.
- b) Le taux de dissipation isotrope de l'énergie turbulente ne représente qu'une partie de la dissipation visqueuse. En effet, les termes (5) et (6) peuvent être réarrangés pour donner:

$$\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_k^2} - \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \right] - \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}$$

La première partie du membre de droite représente le transport de l'énergie cinétique par les forces visqueuses (diffusion visqueuse). Le deuxième terme traduit la dissipation totale de l'énergie cinétique turbulente en chaleur. Dans le cas d'une turbulence isotrope, ϵ représente réellement le taux de dissipation visqueuse de la turbulence $\langle 1-2 \rangle$.

Une dernière équation de transport est généralement utilisée dans les différents modèles de turbulence. Elle se déduit également des équations de NAVIER-STOKES. Il s'agit de l'équation de transport pour le taux de dissipation isotrope ϵ :

$$\overline{U_k} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} = \underbrace{- 2\nu \left[\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right]}_{(1)} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} - \underbrace{2\nu \overline{u_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_k}}_{(2)}$$

(1)

(2)

$$- 2\nu \left[\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right] - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_k \epsilon'} + 2 \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_k} \right] \quad (5.8)$$

(3)

(4)

(5)

(6)

$$- 2\nu^2 \overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right)^2}$$

(7)

La signification des différents termes est la suivante:

- (1) : convection par l'écoulement moyen
- (2) : production par l'écoulement moyen
- (3) : production par le mouvement turbulent
- (4) : diffusion turbulente due aux fluctuations de vitesse

(5) : diffusion turbulente due aux fluctuations de pression

(6) : diffusion moléculaire

(7) : dissipation visqueuse de la dissipation

Chapitre 6

APPLICATION AUX ÉCOULEMENTS ÉTUDIÉS

6.1 Simplifications des équations:

Les simplifications, proposées dans la première partie, nous permettent de considérer les écoulements étudiés comme plan, permanents, établis et par droites parallèles entre deux parois planes. Les propriétés suivantes peuvent alors être utilisées (fig. 1-17):

- Toutes les grandeurs sont indépendantes de la coordonnée $x_3 = z$.
- La seule composante non nulle du vecteur vitesse moyenne est celle dans la direction $x_1 = x$.
- Les grandeurs dynamiques moyennes ne sont fonction que de l'ordonnée $x_2 = y$.

Ces propriétés permettent de simplifier les équations de REYNOLDS ainsi que les équations pour les grandeurs turbulentes. Les équations de REYNOLDS deviennent:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\nu \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} - \overline{u_1 u_2} \right] \\
 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} [-\overline{u_2 u_2}] \\
 0 &= \overline{u_2 u_3}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

De la première équation, compte tenu du fait que l'écoulement est par droites parallèles, on peut déduire que:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial x_1} = cste$$

En effet, comme l'écoulement est établi et par droites parallèles, $\overline{u_2 u_2}$ ne dépend que de x_2 et la variation de \hat{P} avec x_2 est découplée de celle de x_1 .

La connaissance des pressions motrices aux extrémités du domaine de calcul, nous permet de calculer le gradient longitudinal de pression. Dès lors, les seules inconnues importantes du problème sont la vitesse moyenne locale $\overline{U_1}$ et la contrainte de cisaillement turbulente $\overline{u_1 u_2}$.

Les équations de transport pour les contraintes de REYNOLDS se simplifient en:

$$0 = -2\overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} + 2 \frac{\overline{p \partial u_1}}{\rho \partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\overline{u_1 u_1 u_2} - \nu \frac{\partial \overline{u_1 u_1}}{\partial x_2} \right] - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \right)}$$

$$0 = 2 \frac{\overline{p \partial u_2}}{\rho \partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\overline{u_2 u_2 u_2} + 2 \frac{\overline{p u_2}}{\rho} - \nu \frac{\partial \overline{u_2 u_2}}{\partial x_2} \right] - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \right)}$$

$$0 = 2 \frac{\overline{p \partial u_3}}{\rho \partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\overline{u_2 u_3 u_3} - \nu \frac{\partial \overline{u_3 u_3}}{\partial x_2} \right] - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_k} \frac{\partial u_3}{\partial x_k} \right)}$$

$$0 = -\overline{u_2 u_2} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} + \frac{\overline{p}}{\rho} \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\overline{u_1 u_2 u_3} + \frac{\overline{p u_1}}{\rho} - \nu \frac{\partial \overline{u_1 u_2}}{\partial x_2} \right] - 2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \right)}$$

Les équations de transport pour les corrélations $\overline{u_1 u_3}$ et $\overline{u_2 u_3}$ n'ont aucun intérêt puisque d'après les équations de la quantité de mouvement (6.1) $\overline{u_2 u_3}$ est nulle, et $\overline{u_1 u_3}$ n'intervient pas dans le problème. Les équations ci-dessus montrent que tout le transfert d'énergie cinétique de l'écoulement moyen en énergie cinétique turbulente se fait dans la direction x_1 . En effet, $\overline{u_1 u_1}$ reçoit directement de la production de l'écoulement moyen; production qui est ensuite transmise en partie aux autres corrélations normales par les termes de redistribution de l'énergie (termes favorisant l'isotropie de la turbulence). La contrainte de cisaillement $\overline{u_1 u_2}$ reçoit aussi une partie de sa production par l'écoulement moyen.

La sommation des trois premières équations permet d'obtenir l'équation de transport pour l'énergie turbulente k .

$$0 = -\overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\overline{u_2 k'} + \frac{\overline{p u_2}}{\rho} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_2} \right] - \epsilon \quad (6.2)$$

L'équation de transport pour le taux de dissipation isotrope ϵ se réduit à:

$$\begin{aligned} 0 = & - 2\nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} - 2\nu \overline{u_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \overline{U_1}}{\partial x_2^2} \\ & - 2\nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\overline{u_2 \epsilon'} + 2 \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_2} \right] \\ & - 2\nu^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

6.2 Base de données expérimentales:

Pour vérifier l'aptitude des modèles numériques à prédire les écoulements dans les cellules, il est nécessaire d'évaluer leurs performances à l'aide de cas tests d'origine expérimentale. Ces cas tests doivent être le plus proche possible des écoulements étudiés. Une recherche bibliographique a permis à MONNIER <1-2> de constituer une base de données, relative aux écoulements de POISEUILLE, de COUETTE et de COUETTE avec gradient longitudinal de pression. C'est cet ensemble de mesures que nous allons reprendre pour évaluer les performances des modèles de simulation numérique utilisés.

L'écoulement dans une cellule est complètement défini par la donnée des deux paramètres suivants: la vitesse de la paroi mobile et le gradient longitudinal de pression. Ces deux paramètres permettent de classer les écoulements dans les trois familles énoncées ci-dessus. Les écoulements de COUETTE avec gradient de pression peuvent encore être scindés en trois sous-groupes (fig. 1-18). Avant de comparer les résultats obtenus numériquement avec ces cas tests, il est intéressant de confronter les mesures expérimentales entre elles.

6.2.1 Ecoulements de POISEUILLE:

MONNIER a regroupé les mesures expérimentales de CLARK <2-5>, COMTEBELLOT <2-6>, EL TELBANY et REYNOLDS <2-7> <2-8> <2-9> <2-10>, HUSSAIN et REYNOLDS <1-6> et LAUFER <2-11> <2-12>. Les nombres de REYNOLDS Re_{max} basés sur la vitesse maximale de l'écoulement et sur la hauteur du passage varient de 24.600 à 514.000 pour l'ensemble des expériences.

La figure (2-1) compare les profils de vitesse moyenne obtenus par ces différents auteurs pour des nombres de REYNOLDS voisins (CLARK n'a pas reproduit cette

grandeur dans son article). Dans l'ensemble, les mesures sont en accord. Seules celles de COMTE-BELLOT diffèrent légèrement des autres. L'écoulement dans la section de mesure n'est peut-être pas parfaitement établi. En effet, COMTE-BELLOT fait remarquer que le convergent situé en aval de la veine d'expérience provoque une courbure des lignes de courant dans une partie du canal, mais l'auteur assure que la section de mesure n'est pas sensible à ce phénomène.

L'écoulement de POISEUILLE entre deux parois parallèles provient de la réunion de deux couches limites sur plaques planes. Les profils de vitesse moyenne de chaque demi canal inférieur et supérieur doivent donc vérifier la loi logarithmique universelle relative à ces écoulements:

$$u^+ = A \ln(y^+) + B \quad \text{où} \quad u^+ = \frac{\overline{U}_1}{u_\tau} \quad \text{et} \quad y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}$$

Les expériences les plus récentes montrent que A et B prennent des valeurs respectivement voisines de 2,5 et 5. Les mesures fournies par les différents auteurs donnent le tableau suivant:

	A	B
CLARK <2-5>	3	5,5
COMTE-BELLOT <2-6>	2,7	4,5 à 6
EL TELBANY et REYNOLDS <2-7>	2,86	variable
HUSSAIN et REYNOLDS <1-6>	2,44	5
LAUFER <2-11>	2,55	5,1

Les variations observées proviennent de la difficulté à déterminer la vitesse de frottement u_τ qui intervient dans la loi de paroi. Pour connaître u_τ , il faut, en effet, soit connaître le profil de vitesse dans la sous-couche visqueuse, soit connaître avec précision le gradient longitudinal de pression. Les mesures de ces grandeurs sont assez difficiles à effectuer avec justesse.

Les différents auteurs de ces travaux ont aussi mesuré les composantes normales du tenseur de REYNOLDS. Une comparaison pour chaque auteur de ces grandeurs rendues sans dimension par u_τ montre que les rapports ainsi obtenus sont indépendants du nombre de REYNOLDS de l'écoulement. Par sommation, nous pouvons calculer l'énergie cinétique turbulente k . La figure (2-2a) montre que les profils de k/u_τ^2 sont séparés en deux groupes. Les profils obtenus par COMTE-BELLOT et EL TELBANY et REYNOLDS sont très proches, ils ne diffèrent qu'au centre du canal. Ceux obtenus par CLARK et LAUFER donnent un niveau d'énergie nettement plus bas. Néanmoins, dans les régions pariétales, les mesures de CLARK s'éloignent de celles de LAUFER pour rejoindre le premier groupe. Ces différences peuvent, peut être,

être attribuées aux différentes façons dont les couches limites et la turbulence ont été déclenchées à l'entrée des différentes veines d'expériences (le taux de turbulence de l'écoulement potentiel initial met un certain temps à disparaître).

Pour les écoulements de POISEUILLE, la principale composante de l'énergie cinétique turbulente est dans la direction longitudinale. La figure (2-2b) présente les profils obtenus pour la corrélation \overline{uu} . on retrouve les deux groupes énoncés précédemment. Les figures (2-2c) et (2-2d) montrent respectivement les profils pour les corrélations \overline{vv} et \overline{ww} . Bien que les résultats soient moins dispersés, ils mettent aussi en évidence les deux groupes.

Les profils présentés ont été normés par la vitesse de frottement pariétale. La difficulté à mesurer cette grandeur peut expliquer en partie la dispersion observée. Mais elle ne peut en aucun cas justifier les différences de forme. Les profils de vitesse moyenne obtenus par COMTE-BELLOT conduisent à émettre quelques réserves quant aux grandeurs turbulentes mesurées. De ce fait, les résultats appartenant au second groupe et appuyés par trois auteurs apparaissent actuellement comme les plus fiables.

6.2.2 Ecoulements de COUETTE:

La base de données expérimentales formée par MONNIER regroupe pour ces écoulements les mesures de EL TELBANY et REYNOLDS <2-7> à <2-10>, de LEUTHEUSSER et CHU <2-13>, de REICHARDT <2-14> <2-15> et de ROBERTSON et JOHNSON <2-16>. Pour l'ensemble de ces écoulements, les nombres de REYNOLDS Re_b varient de 1.080 à 68.400. Ces nombres de REYNOLDS sont beaucoup plus faibles que ceux des écoulements de POISEUILLE et cet ensemble de mesures contient des écoulements laminaires. Pour avoir la certitude que les écoulements pris comme référence sont turbulents, nous ne nous intéresserons qu'à ceux dont le nombre de REYNOLDS Re_b est supérieur à 50.000. Ceci nous amène donc à supprimer tout un ensemble de mesures, et en particulier celles de LEUTHEUSSER et CHU. La figure (2-3a) montre l'influence du nombre de REYNOLDS Re_b sur le profil de vitesse moyenne. Celui-ci a la forme d'un S plus ou moins prononcé selon la valeur de Re_b . La figure (2-3b) compare les résultats obtenus par les différents auteurs pour des nombres de REYNOLDS élevés ($Re_b > 50.000$). Les mesures de ROBERTSON et JOHNSON diffèrent de celles obtenues par les autres auteurs. Cette différence ne s'explique pas par la valeur des nombres de REYNOLDS respectifs.

Le profil de vitesse moyenne est linéaire dans la partie centrale du canal, l'étendue de cette plage dépend du nombre de REYNOLDS. La contrainte moyenne de cisaillement dont dépend le taux de production de l'énergie turbulente y est donc constante. Cette région est donc à rapprocher des écoulements homogènes cisailés, comme ceux étudiés par CHAMPAGNE et al <2-17>, et qui sont utilisés pour déterminer les constantes des modèles de la turbulence.

Dans les régions pariétales, l'écoulement suit la loi universelle de paroi. Les constantes A et B sont données pour les différents auteurs dans le tableau suivant:

	A	B
EL TELBANY et REYNOLDS <2-7>	2,55	5,1
REICHARDT <2-14>	2,5	5,5
ROBERTSON et JOHNSON <2-16>	2,43	5,6

Ces valeurs sont très proches des valeurs obtenues pour les couches limites turbulentes sur plaque plane (2,5 et 5). Nous pouvons donc considérer que, comme les écoulements de POISEUILLE, les écoulements de COUETTE vérifient dans les régions pariétales la loi universelle de paroi.

L'ensemble de mesures regroupées pour les écoulements de COUETTE est très pauvre en données sur la turbulence. Seuls EL TELBANY et REYNOLDS ont mesuré les trois corrélations normales ainsi que la contrainte turbulente de cisaillement \overline{uv} . Les mesures de ROBERTSON et JOHNSON se sont limitées à la composante longitudinale du tenseur de REYNOLDS. La figure (2-4a) compare les résultats obtenus par ces différents auteurs. Le niveau de la corrélation \overline{uu} issu des expériences de EL TELBANY et REYNOLDS est supérieur aux mesures de ROBERTSON et JOHNSON. Cette différence ne peut pas être attribuée au nombre de REYNOLDS. Les profils représentés sont rendus sans dimension par u_τ . ROBERTSON et JOHNSON ont calculé des vitesses de frottement pariétales plus élevées que EL TELBANY et REYNOLDS. Ceci peut expliquer partiellement la différence de niveau observée. La figure (2-4b) montre les trois composantes normales du tenseur de REYNOLDS. La constance du taux de production de l'énergie turbulente dans la partie centrale de l'écoulement permet d'expliquer la forme relativement plane de ces profils. Les équations de transport pour les tensions de REYNOLDS montrent que toute l'énergie turbulente est produite dans la direction longitudinale. Cette énergie est ensuite redistribuée dans les autres directions par les fluctuations de pression. Ces mesures nous montrent que la redistribution dans les directions y et z sont inégales (ceci est dû à la présence des parois).

Avant d'examiner les écoulements de COUETTE avec gradient longitudinal de pression, qui peuvent être vus comme une combinaison d'un écoulement de POISEUILLE avec un écoulement de COUETTE pur, il est intéressant de comparer ces deux écoulements fondamentaux entre eux. Les profils d'énergie turbulente et des trois corrélations normales obtenus par EL TELBANY et REYNOLDS sont représentés figure (2-5). La turbulence dans les régions pariétales est identique pour les deux types d'écoulement. Nous avons en effet vu que la loi universelle de paroi, établie pour une couche limite sur plaque plane, était vérifiée dans les deux cas. Les taux de production et de redistribution de l'énergie turbulente sont donc identiques dans ces régions.

Les différents profils pour les grandeurs turbulentes se distinguent seulement dans la région centrale du canal. Cette différence est principalement due au taux de production de l'énergie turbulente. Pour l'écoulement de POISEUILLE, le cisaillement moyen et la corrélation \overline{uv} s'annulent au centre du canal. La production d'énergie turbulente y est donc nulle. La turbulence qui règne dans cette partie de l'écoulement provient des zones pariétales par diffusion. Pour l'écoulement de COUETTE pur, le taux de production de l'énergie turbulente n'est pas nul, et permet d'expliquer les niveaux de turbulence plus élevés pour les écoulements de COUETTE pur que pour les écoulements de POISEUILLE. Cet écart est plus important pour les deux composantes de fluctuations parallèles aux parois.

La répartition de l'énergie turbulente dans les différentes directions d'un écoulement peut être évaluée à partir des rapports $\overline{u_i u_i}/k$ (sans sommation sur i). Le tableau ci-dessous compare ces rapports pour les écoulements de POISEUILLE et de COUETTE pur, au centre du canal.

	\overline{uu}/k	\overline{vv}/k	\overline{ww}/k
POISEUILLE	1,15	0,30	0,55
COUETTE pur	1,16	0,40	0,44

Nous constatons que les rapports sont du même ordre de grandeur, et que les écarts interviennent principalement pour \overline{vv}/k et \overline{ww}/k . Dans l'écoulement de COUETTE pur, dans la partie centrale du canal, la répartition de l'énergie turbulente se fait principalement par le terme de redistribution. Celle-ci se fait de façon équivalente pour \overline{vv} et \overline{ww} . Dans l'écoulement de POISEUILLE, cette répartition est due, à la fois, à la redistribution et à la diffusion turbulente. La diffusion turbulente permet donc de donner une explication aux différences enregistrées. La figure (2-5) montre aussi que le profil de \overline{vv} , rendu sans dimension, cette fois-ci, par la vitesse de frottement u_τ , est relativement plat pour l'écoulement de POISEUILLE alors que les profils de \overline{uu} et \overline{ww} suivent l'évolution du profil d'énergie turbulente k . Un examen des équations de transport pour les grandeurs turbulentes indique, en effet, que la diffusion se fait essentiellement dans la direction normale aux parois. La corrélation \overline{vv} est donc plus affectée par ce processus de transport que les autres corrélations.

6.2.3 Ecoulements de COUETTE avec gradient de pression:

Pour cette dernière famille d'écoulements (qui sont en fait les écoulements que l'on rencontre dans les cellules d'électro-déposition) les données expérimentales en notre possession ne regroupent que les travaux de EL TELBANY et REYNOLDS <2-7>

à <2-10> et de HUEY et WILLIAMSON <2-18>. Ces derniers ont étudié uniquement les écoulements pour lesquels la vitesse débitante est nulle. Le gradient de pression s'oppose alors au mouvement du fluide qui est créé par l'entraînement dû à la paroi mobile. EL TELBANY et REYNOLDS ont étudié les écoulements de COUETTE avec gradient longitudinal de pression favorable. Afin de pouvoir comparer les mesures entre elles, les changements de repère suivants ont été appliqués aux mesures de HUEY et WILLIAMSON:

$$\bar{U}(y) = V_b - \bar{U}(h - y) \quad \text{et} \quad \overline{u_i u_j}(y) = \overline{u_i u_j}(h - y)$$

Ces changements de repère ne modifient en rien la nature des résultats.

La seule composante du tenseur de REYNOLDS mesurée par HUEY et WILLIAMSON est \overline{uv} . EL TELBANY et REYNOLDS ont mesuré pour leur part les trois composantes normales de ce tenseur ainsi que \overline{uv} . La figure (2-6) compare les résultats obtenus par ces auteurs pour des nombres de REYNOLDS voisins. Au voisinage de la paroi ayant la vitesse de frottement la plus élevée, les profils de vitesse sont identiques. Ils diffèrent au voisinage de l'autre paroi; mais il faut signaler que les vitesses débitantes des deux profils représentés sont légèrement différentes. En effet, le changement de repère effectué pour les mesures de HUEY et WILLIAMSON donne une vitesse débitante égale à la vitesse de la paroi, alors que pour EL TELBANY et REYNOLDS la vitesse débitante vaut $0,97V_b$. A l'exception de la région de l'écoulement proche de la paroi mobile, les profils de \overline{uv} ont tous deux la même forme mais accusent une nette différence de niveau. Différence de niveau qui est à rapprocher de celles constatées pour les écoulements de POISEUILLE (fig. 2-2) et pour les écoulements de COUETTE pur (fig. 2-4a). En effet, quel que soit l'écoulement considéré, les mesures de grandeurs turbulentes réalisées par EL TELBANY et REYNOLDS sont en général supérieures aux mesures des autres auteurs. Toutefois, les travaux de EL TELBANY et REYNOLDS sont les plus complets et seront retenus comme références pour la simulation numérique.

Pour finir, la figure (2-7) représente des profils de vitesse moyenne et d'énergie turbulente obtenus expérimentalement par EL TELBANY et REYNOLDS. Les profils d'énergie turbulente sont rendus sans dimension à l'aide des deux vitesses de frottement pariétales par $u_r'^2 = u_{r1}^2 + u_{r2}^2$. Ces différents profils sont assez similaires et les différences notables entre eux se situent uniquement au voisinage de la paroi mobile. Ces différences sont liées aux variations du cisaillement de l'écoulement dans cette région. Comme nous l'avons énoncé précédemment, les écoulements représentés peuvent être divisés en trois groupes (fig. 1-18). Du point de vue industriel, les écoulements intermédiaires n'ont pas d'intérêt puisqu'au voisinage de la cathode (paroi mobile) l'écoulement est peu cisailé et donc peu turbulent. Le transport des ions zinc par la turbulence serait alors très faible. Ces écoulements ont cependant un grand intérêt en tant que cas test pour valider les modèles numériques. Ils permettent, en effet, d'évaluer les performances des modèles de turbulence pour les

écoulements de paroi à faible vitesse de frottement et à faible taux de turbulence. Ces écoulements sont à rapprocher des écoulements à surface libre.

6.3 Retour sur les fermetures au premier ordre:

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, les fermetures au premier ordre sont basées sur une hypothèse simplificatrice: l'hypothèse de BOUSSINESQ (1877), qui relie les contraintes de REYNOLDS à d'autres grandeurs caractéristiques moyennes de l'écoulement. Cette opération a pour but de ramener le nombre d'inconnues du problème au nombre d'équations. Cette hypothèse suppose que les contraintes turbulentes agissent de façon analogue aux contraintes visqueuses. Leurs approximations sont donc proportionnelles aux gradients de vitesses (qui ne sont autres que les éléments du tenseur taux de déformation de l'écoulement). Elle s'écrit:

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left[\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right] + \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (6.4)$$

Le terme complémentaire $\frac{2}{3} \delta_{ij} k$ est introduit pour que la relation reste cohérente après contraction des indices. ν_t est un scalaire non constant caractéristique de la turbulence de l'écoulement et s'appelle viscosité turbulente. Les six inconnues du tenseur de REYNOLDS sont donc remplacées par une seule inconnue, la viscosité turbulente, qu'il convient de déterminer. C'est dans la façon de déterminer ce scalaire que se distinguent les différentes classes de modélisation.

6.3.1 Modèle de longueur de mélange.

La première formulation de longueur de mélange est due à PRANDTL (1925). Dans le cas des écoulements parallèles et quasi-parallèles, le terme prépondérant du taux de déformation de l'écoulement est le gradient transversal de vitesse. PRANDTL propose:

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2} \right|$$

Différentes formulations algébriques pour l ont été proposées, suivant le type d'écoulement considéré. On peut citer les plus classiques dues à PRANDTL pour la couche limite, à NIKURADSE pour l'écoulement de tuyau, à VAN DRIEST pour la zone pariétale et à REICHARDT pour l'écoulement de COUETTE.

Différents modèles pour la longueur de mélange ont été testés par MONNIER <1-2> pour les écoulements qui nous intéressent. Cette étude a mis en évidence qu'une même formulation algébrique pour la longueur de mélange ne pouvait pas convenir à

la fois aux écoulements de POISEUILLE, de COUETTE purs et de COUETTE avec gradient de pression. C'est en effet l'inconvénient majeur de ce type de modèles. MONNIER a alors proposé une longueur de mélange dont les coefficients s'adaptent au type d'écoulement envisagé dans la gamme étudiée. Les résultats qu'il a obtenus montrent que le modèle prédit très bien la vitesse moyenne des écoulements de COUETTE purs et de POISEUILLE. Il prédit correctement les écoulements de type COUETTE, mais les prédictions se dégradent fortement quand le gradient de pression augmente. Ces dégradations peuvent être principalement attribuées à trois causes:

- Le modèle utilise l'hypothèse de BOUSSINESQ qui suppose que le cisaillement est proportionnel au taux de déformation de l'écoulement. Il impose donc l'annulation simultanée de ces deux grandeurs.
- Le modèle évalue la viscosité turbulente à l'aide d'une longueur de mélange algébrique. La vitesse caractéristique de la turbulence est supposée être proportionnelle au gradient transversal de vitesse moyenne.
- La longueur de mélange choisie, de forme polynômiale en fonction des distances aux parois, n'est pas forcément bien représentative de la turbulence qui règne au sein de l'écoulement.

Ce modèle permet de déterminer la vitesse moyenne des écoulements, mais donne très peu d'informations sur la turbulence.

6.3.2 Modèle à une équation de transport.

Les modèles à une équation de transport définissent la contrainte turbulente en utilisant l'énergie turbulente k pour déterminer la vitesse caractéristique de la turbulence. Ils font appel ou non au concept de viscosité turbulente. L'utilisation de l'énergie turbulente nécessite alors la résolution de son équation de transport dans laquelle la diffusion turbulente et le taux de dissipation isotrope ϵ doivent être modélisés. Ces modélisations utilisent généralement l'hypothèse de BOUSSINESQ. Pour la diffusion turbulente, l'hypothèse retenue est de type gradient (homogène à l'hypothèse de BOUSSINESQ). Le mécanisme de diffusion turbulente pour k est supposé être identique au processus de diffusion moléculaire (loi de FICK). L'approximation pour ϵ utilise une longueur de mélange.

MONNIER <1-2> a testé différents modèles de ce type. Ils prédisent correctement les écoulements de POISEUILLE, mais ils prédisent assez mal les écoulements de COUETTE purs, et en particulier le niveau d'énergie turbulente de ceux-ci.

MONNIER a montré qu'il était possible d'améliorer les prédictions des profils de vitesse, pour l'écoulement de COUETTE pur, sans pour cela détériorer celles pour l'écoulement de POISEUILLE, en utilisant la formulation qu'il avait obtenue pour

les modèles de longueur de mélange. Mais ce changement n'apporte par grand-chose pour les prédictions de l'énergie turbulente.

Le modèle prédit correctement les profils de vitesse pour les écoulements de COUETTE purs et de POISEUILLE. Pour les écoulements de type COUETTE, les prédictions se détériorent quand le gradient de pression augmente. On peut imputer ces faiblesses aux différentes hypothèses utilisées dans la modélisation.

- Comme les modèles de longueur de mélange, les modèles à une équation de transport utilisent l'hypothèse de BOUSSINESQ. Ils imposent donc l'annulation simultanée de la contrainte de cisaillement et du taux de déformation de l'écoulement. Ce qui n'est pas vérifié par les écoulements de type POISEUILLE.
- Ces modèles évaluent la viscosité turbulente et le taux de dissipation isotrope à l'aide d'échelles de longueur empiriques. Les formulations algébriques retenues ne sont peut être pas assez représentatives des phénomènes turbulents régissant les écoulements.

Pour les écoulements de COUETTE et de type COUETTE, les profils d'énergie turbulente calculés surestiment les données expérimentales de EL TELBANY et REYNOLDS. Pourtant, lors de l'étude de la base de données, pour l'écoulement de COUETTE pur, celles-ci nous semblaient déjà hautes. Pour les écoulements de POISEUILLE et de type POISEUILLE, le modèle sous-estime le niveau d'énergie obtenu par EL TELBANY et REYNOLDS. Mais, pour l'écoulement de POISEUILLE, le modèle est en parfait accord avec les mesures de CLARK qui semblent être plus proches de la réalité. Lors du passage des écoulements de type COUETTE aux écoulements de type POISEUILLE, EL TELBANY et REYNOLDS signalent un saut du niveau d'énergie turbulente que le modèle ne reproduit pas.

6.3.3 Modèle à deux équations de transport.

Pour donner aux modèles de fermeture au premier ordre un caractère universel, il est intéressant de ne plus exprimer les échelles représentatives de la turbulence par des fonctions empiriques, mais de les exprimer à l'aide de grandeurs caractéristiques locales. C'est ce que permettent les modèles à deux équations de transport.

Comme pour les modèles à une équation de transport, la vitesse turbulente retenue est la racine carrée de l'énergie cinétique turbulente (échelle représentative des grosses structures). Il reste à déterminer la longueur caractéristique de ces structures ainsi que les échelles représentatives des petits mouvements de dissipation.

La théorie se base sur le processus de transfert de l'énergie en cascade. Le nombre de REYNOLDS est supposé suffisamment grand pour pouvoir considérer la turbulence en équilibre local. C'est donc le transfert par les grosses structures qui contrôle la

dissipation de l'énergie cinétique en chaleur. Les échelles caractéristiques des grosses structures sont suffisantes pour décrire tous les phénomènes turbulents.

La longueur caractéristique devant être une grandeur représentative de la turbulence, SPALDING <2-19> et ROTTA <2-20> ont proposé de déterminer cette grandeur à l'aide d'une équation de transport supplémentaire. Se pose alors le problème du choix de la grandeur transportée qui permettra de construire la longueur caractéristique. Différents termes ont été proposés et testés par KOLMOGOROV, CHOU, JONES et LAUNDER, ROTTA, SPALDING... La grandeur, la plus testée, et qui est aujourd'hui à peu près universellement utilisée, est le taux de dissipation isotrope ϵ . Cette grandeur a l'avantage d'intervenir directement dans l'équation de transport pour k . De plus, son équation de transport (5-8) est dérivée directement des équations de NAVIER-STOKES. Le taux de dissipation isotrope forme avec l'énergie turbulente les modèles communément appelés modèles $k - \epsilon$.

Ces modèles de fermeture du premier ordre utilisent l'hypothèse de BOUSSINESQ, dans laquelle, la vitesse et la longueur caractéristiques retenues pour exprimer la viscosité turbulente apparente sont la racine carrée de l'énergie turbulente et une longueur l obtenue par des considération dimensionnelle:

$$l = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon} \quad \text{d'où} \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

où C_μ est une constante.

La modélisation du terme de diffusion dans l'équation de transport pour k est celle des modèles à une équation de transport. Mais cette fois, le taux de dissipation isotrope ϵ , obtenu à l'aide de son équation de transport, n'est plus modélisé. L'équation de transport pour k s'écrit:

$$0 = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_2} \right] - \epsilon$$

L'utilisation de l'hypothèse d'équilibre local de la turbulence permet de simplifier l'équation de transport (6-3) en quantifiant les ordres de grandeurs des différents termes. Posons:

L : longueur caractéristique des grosses structures contenant l'énergie.

u' : vitesse caractéristique des grosses structures.

l : longueur caractéristique des structures dissipatives

(échelle de KOLMOGOROV).

v' : vitesse caractéristique des structures dissipatives (échelle de KOLMOGOROV).

Les échelles de KOLMOGOROV sont bien appropriées pour évaluer les gradients de fluctuations de vitesse; u' et L les quantités (TENNEKES et LUMLEY <2-21>). De ce fait nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_2} &\equiv \frac{v'^2}{l^2} \frac{u'}{L} \\ \overline{u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial x_2^2}} &\equiv \frac{u'^2 v'}{L^2 l} \\ \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] &\equiv \frac{v'^3}{l^3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\overline{u_2 \epsilon'} \right] &\equiv \frac{u' v'^2}{L l^2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \right] &\equiv \frac{u' v'^2}{L l^2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial x_2} \right] &\equiv \frac{1}{L^2} \frac{v'^2}{l^2} \\ \overline{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right)^2} &\equiv \frac{v'^2}{l^4} \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse d'équilibre local de la turbulence, le taux de dissipation de l'énergie turbulente est déterminé par le taux de transfert de l'énergie des grosses structures vers les petites. De ce fait:

$$\epsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2} \equiv \frac{u'^3}{L}$$

comme $l \equiv \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}}$ et $v' \equiv (\nu \epsilon)^{\frac{1}{4}}$

$$\text{alors} \quad \frac{l}{L} \equiv Re_L^{-3/4} \quad \text{et} \quad \frac{v'}{u'} \equiv Re_L^{-1/4}$$

où $Re_L = \frac{u'L}{\nu}$ est appelé nombre de REYNOLDS turbulent.

Reportons ces résultats dans l'équation pour ϵ :

$$\begin{aligned}
 0 = & - 2\nu \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} - 2\nu u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \overline{U_1}}{\partial x_2^2} \\
 & \qquad \qquad \qquad 1 \qquad \qquad \qquad Re_L^{-1/2} \\
 & - 2\nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\overline{u_2 \epsilon'} + 2 \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_2} \right] \qquad (6.5) \\
 & \qquad \qquad \qquad Re_L^{1/2} \qquad \qquad \qquad 1 \qquad \qquad \qquad Re_L^{-1} \qquad \qquad \qquad 1 \\
 & - 2\nu^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right)^2 \\
 & \qquad \qquad \qquad Re_L^{1/2}
 \end{aligned}$$

Quand le nombre de REYNOLDS turbulent est très grand, les petits mouvements deviennent isotropes et les corrélations non diagonales s'annulent.

Pour un nombre de REYNOLDS turbulent fini, les échelles des mouvements dissipatifs prennent part à l'anisotropie des échelles des grosses structures au travers du rapport des échelles de temps de ces différents mouvements <2-22>. Ce rapport est:

$$\frac{l}{L} = Re_L^{-1/2}$$

De ce fait, le tenseur d'anisotropie des échelles dissipatives peut être relié au tenseur d'anisotropie des échelles de production de la turbulence.

$$\left[\nu \frac{\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l}}{\epsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right] = Re_L^{-1/2} \left[\frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right]$$

Plaçons nous en premier lieu dans le cas où le nombre de REYNOLDS turbulent est élevé. L'équation (6.5) se réduit à:

$$0 = - 2\nu \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\overline{u_2 \epsilon'} + 2 \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_j} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \right]$$

(1)
(2)

$$- 2\nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] - 2\nu^2 \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right)^2$$

(3)
(4)

Les termes (3) et (4) sont les termes les plus importants (ils tendent vers l'infini). Mais quand ils sont pris ensemble, leur différence est de l'ordre de grandeur des termes de production par l'écoulement moyen (1) et de diffusion (2). RODI <2-23> montre que ces termes qui représentent la production par les mouvements turbulents et la destruction de ϵ peuvent être modélisés ensemble sous la forme:

$$(3) + (4) = C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon}{k}$$

Comme dans les équations pour la quantité de mouvement et l'équation de transport pour k , les termes de diffusion turbulente sont modélisés à l'aide d'une hypothèse de transport par gradient:

$$(2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[- \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_2} \right]$$

où σ_ϵ est une constante (homogène au nombre de PRANDTL) voisine de l'unité.

HANJALIC et LAUNDER <2-24> proposent de modéliser la production par l'écoulement moyen à partir de sa formulation générale donnée dans l'équation (5.8): puisqu'une contraction d'indices conduit à l'obtention de composantes de ϵ , la modélisation suivante semble appropriée:

$$2\nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right] = \left[C_{\epsilon 1} \frac{\overline{u_i u_k}}{k} \right] \epsilon$$

$C_{\epsilon 1}$ est une constante. L'application de ce modèle aux écoulements par droites parallèles permet d'écrire:

$$C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2}$$

Pour les parties de l'écoulement où le nombre de REYNOLDS turbulent est grand, en utilisant l'hypothèse de BOUSSINESQ, l'équation de transport pour ϵ est modélisée de la façon suivante:

$$0 = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_2} \right] - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (6.6)$$

Les écoulements que nous étudions sont confinés par des parois solides. Au voisinage de celles-ci, le nombre de REYNOLDS turbulent est fini. Il n'est donc pas possible d'utiliser l'équation réduite précédente. Deux solutions sont envisageables pour étendre les prédictions jusqu'aux parois.

La première consiste à utiliser des "fonctions de paroi" (lois universelles de la zone interne d'une couche limite sur plaque plane). Ceci permet de "sauter" les régions pariétales à faible nombre de REYNOLDS turbulent. Le calcul ne commence qu'à une certaine distance de la paroi. Cette méthode qui ne permet pas de caractériser les grandeurs turbulentes au voisinage de la paroi, n'a aucun intérêt pour un problème électro-chimique.

La seconde solution consiste à élargir la modélisation de l'équation de transport pour ϵ aux nombres de REYNOLDS turbulents modérés. Pour cela, il faut tenir compte de la diffusion moléculaire et de l'influence de ce nombre de REYNOLDS sur la production par l'écoulement moyen et sur la dissipation. La diffusion moléculaire ne nécessite aucune modélisation. La production par l'écoulement moyen contient deux termes. Les effets du nombre de REYNOLDS turbulent sur le premier terme (équation 6.3) sont obtenus en permettant aux coefficients $C_{\epsilon 1}$ et $C_{\epsilon 2}$ de varier avec Re_L . Le second terme, lié au gradient du taux de déformation, doit être modélisé. Le choix de la modélisation dépend de l'auteur et du but qu'il donne à ce terme. Par exemple, CHIEN <2-25> choisit une expression qui impose à ϵ une croissance quadratique avec la distance à la paroi; LAUNDER et SHARMA <2-26>, se basant sur la théorie de transport tourbillonnaire, choisissent un terme dont l'effet est d'augmenter le taux de dissipation dans la zone tampon. Nous appelons ce terme E .

D'autres modifications supplémentaires sont apportées aux équations de transport afin d'améliorer et de faciliter le calcul dans les régions pariétales. Une fonction f_μ est ajoutée dans l'expression de la viscosité turbulente afin de mieux prédire la contrainte de cisaillement. Le taux de dissipation ne s'annule pas à la paroi, le terme de destruction dans son équation de transport tend alors vers l'infini. Pour éviter ceci, on remplace ϵ par une autre grandeur transportée:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - D \quad (6.7)$$

Celle-ci a les mêmes propriétés que ϵ et a l'avantage de s'annuler à la paroi. Différentes formulations ont été proposées pour D .

Pour les écoulements que nous étudions, le système à résoudre devient:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} \right] \\ 0 &= \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_2} \right] - \epsilon \\ 0 &= C_{\epsilon 1} f_1 \frac{\tilde{\epsilon}}{k} \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_2} \right] - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} + E \quad (6.8) \\ \epsilon &= \tilde{\epsilon} + D \\ \nu_t &= C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\epsilon}} \end{aligned}$$

Les constantes C_μ , $C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$ sont déterminées à partir de mesures expérimentales obtenues sur la décroissance de la turbulence de grille et dans les couches limites turbulentes. σ_k et σ_ϵ sont optimisées numériquement. f_μ , f_1 , f_2 sont des fonctions soit du nombre de REYNOLDS turbulent, soit de la distance à la paroi, soit d'une combinaison des deux.

MONNIER <1-2> a appliqué différents modèles de ce type aux écoulements étudiés afin de constater les améliorations qu'ils pouvaient apporter par rapport aux modèles à une équation de transport. La figure 2-8 montre les prédictions obtenues avec le modèle proposé par CHIEN pour les écoulements de COUETTE purs et de POISEUILLE. Il prédit correctement le profil de vitesse moyenne des écoulements de COUETTE pur et sous-estime légèrement celui des écoulements de POISEUILLE. Les résultats obtenus pour l'énergie turbulente sont identiques à ceux obtenus avec un modèle à une équation de transport. Cependant, nous pouvons signaler que le modèle de CHIEN prédit un pic pariétal pour l'énergie turbulente plus faible. Les prédictions obtenues pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression sont présentées figure 2-9. Comme pour les modèles précédents, les prédictions se détériorent quand le gradient de pression augmente. Cette faiblesse est peut être attribuable à l'utilisation de l'hypothèse de BOUSSINESQ. En règle générale, les conclusions que l'on peut émettre sont identiques à celles formulées pour les modèles à une équation de transport. Néanmoins trois remarques peuvent être faites. Le modèle utilisé n'a pas été optimisé pour les écoulements étudiés. Les pics pariétaux pour k sont plus faibles que ceux obtenus avec le modèle à une équation de transport. Le profil de vitesse moyenne obtenu pour les écoulements intermédiaires (expérience

$n^{\circ}9$) est meilleur (en particulier au voisinage de la paroi mobile). Malheureusement, cette amélioration se fait au détriment du profil d'énergie turbulente.

De l'analyse faite par MONNIER <1-2> de ces modèles, les conclusions suivantes peuvent être tirées:

- Comme les modèles précédents, les modèles $k - \epsilon$ utilisent l'hypothèse de BOUSSINESQ. Hypothèse qui n'est pas vérifiée pour les écoulements de type POISEUILLE.
- Ces modèles évaluent les vitesses et les longueurs caractéristiques de la viscosité turbulente à l'aide de grandeurs turbulentes locales. Ils n'utilisent plus de formulations empiriques sensées être représentatives de la turbulence et ont donc un caractère beaucoup plus universel.
- Leur universalité est tout de même limitée aux écoulements dont la turbulence a atteint ou est proche de l'équilibre local.
- Enfin, comme les modèles à une équation de transport, ils permettent de quantifier l'agitation locale du fluide à l'aide de l'énergie cinétique turbulente.

6.4 Conclusions:

Les modèles de fermeture au premier ordre, testés par MONNIER, donnent d'assez bonnes prédictions pour les profils de vitesse moyenne. C'est pour les écoulements de type POISEUILLE, que les prédictions, comparées aux mesures de EL TELBANY et REYNOLDS, sont les moins bonnes. Les faiblesses des modèles peuvent en partie être attribuées à l'utilisation de l'hypothèse de BOUSSINESQ.

Les modèles à une et à deux équations de transport permettent de calculer les profils d'énergie turbulente k . Ils nous informent donc sur le taux d'agitation local de l'écoulement, mais ne permettent pas de connaître les directions privilégiées de cette agitation. Pour les écoulements de COUETTE pur et de type COUETTE, les calculs donnent la bonne forme du profil de k , mais ils sur-estiment l'ensemble des mesures expérimentales en notre possession. Lors du passage des écoulements de type COUETTE aux écoulements de type POISEUILLE, les modèles ne reproduisent pas le saut de niveau d'énergie turbulente signalé par EL TELBANY et REYNOLDS. Pour les écoulements de POISEUILLE et de type POISEUILLE, les calculs sous-estiment les mesures de EL TELBANY et REYNOLDS. Il faut signaler que pour les écoulements de POISEUILLE, les prédictions sont en accord avec les mesures des autres auteurs qui nous semblent plus réalistes. Les calculs sont aussi en désaccord avec les mesures de EL TELBANY et REYNOLDS pour ce qui concerne la forme du profil d'énergie turbulente, au voisinage du point maximum de vitesse moyenne. Ce désaccord peut en partie être imputable à l'utilisation de l'hypothèse de BOUSSINESQ.

Chapitre 7

MODELES DE FERMETURES AU SECOND ORDRE:

7.1 Introduction:

Les fermetures du second ordre, encore appelées modèles aux tensions de REYNOLDS, n'utilisent pas d'hypothèse de type BOUSSINESQ pour exprimer directement les contraintes de REYNOLDS. Elles utilisent des équations supplémentaires (équations de REYNOLDS) pour calculer ces inconnues en chaque point:

$$\begin{aligned} \overline{U_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = & - \left[\overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-\overline{u_i u_j u_k} - \frac{p}{\rho} (\delta_{ik} u_j + \delta_{jk} u_i) + \nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right] \\ & + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \end{aligned}$$

Ces équations de transport des contraintes turbulentes font apparaître de nouvelles inconnues (corrélations triples de vitesse, corrélations pression- vitesse...) qui laissent le système ouvert. On peut répéter le processus pour déterminer les corrélations triples et ainsi de suite. On obtient alors une suite d'équations aux dérivées partielles introduisant à chaque étape des corrélations d'ordre supérieur. Pour fermer le système, il est nécessaire de s'arrêter à une étape et de modéliser les inconnues. L'étape choisie pour ce type de modèles est la première. Les inconnues calculées sont les corrélations doubles de vitesse. Les inconnues à modéliser sont, dans l'ordre de complexité, les corrélations triples de vitesse et les corrélations pression-vitesse des équations (5.5). Dans ces équations, les termes de convection, de production et de diffusion moléculaire ne nécessitent aucune modélisation. Les termes à modéliser sont donc la diffusion turbulente, la redistribution et la dissipation.

Avant de modéliser ces différents termes, revenons sur la simplification des équations dans le cas des écoulements que nous étudions. Celle-ci nous a montré que la seule contrainte turbulente inconnue intervenant dans l'équation de quantité de mouvement longitudinale est la contrainte de cisaillement $\overline{u_1 u_2}$. Cette remarque suggère l'utilisation d'un modèle de fermeture au second ordre simplifié: modèle à trois équations de transport pour l'énergie turbulente k , son taux de dissipation isotrope ϵ et la contrainte de cisaillement $\overline{u_1 u_2}$. Un tel modèle a été proposé par HANJALIC et LAUNDER <2-24>. Ce modèle nécessite cependant des approximations très contraignantes et ne permet de caractériser la turbulence que par son énergie k (grandeur isotrope). Un modèle aux tensions de REYNOLDS plus complet permet quant à lui de prédire les directions privilégiées des fluctuations.

Beaucoup de modèles différents sont proposés dans la littérature. Nous avons choisi de ne présenter que trois modèles qui semblent particulièrement intéressants, simples et qui sont représentatifs des principales propositions de fermetures. Les formulations les plus couramment employées sont en effet très semblables à ces modèles. Les variantes sont généralement obtenues par le changement ou l'adjonction de fonctions d'amortissement, ou de termes correcteurs plus ou moins complexes, afin d'améliorer les prédictions dans certaines régions de l'écoulement considéré. Les fermetures aux tensions de REYNOLDS se distinguent principalement par la modélisation du terme de redistribution de l'énergie turbulente (ce terme n'apparaît pas dans les fermetures au premier ordre). Ceci permet de les classer en familles. Les propositions présentées montrent trois exemples de modélisations de ce terme qui sont caractéristiques des principales familles rencontrées.

A leurs origines, les modèles aux tensions de REYNOLDS ont été développés pour des écoulements libres et fortement turbulents. De nos jours, on tente de les adapter aux écoulements pariétaux, aux zones faiblement turbulentes et à la relaminarisation. Les adaptations sont souvent dérivées de travaux similaires avec des modèles $k - \epsilon$.

Les modèles que nous allons décrire ont été proposés par SO et YOO <2-27>, <2-28>, JONES et MUSONGE <2-29> (ou JONES et PASCAU <2-30>) et GIBSON et RODI <2-31>. Les fermetures des références <2-29> et <2-30> ont été développées pour être utilisées dans des écoulements libres et fortement turbulents. La proposition de GIBSON et RODI convient aux écoulements confinés par une paroi solide. Mais elle n'est pas utilisable jusqu'à cette paroi; elle utilise des fonctions de paroi. Les phénomènes électro-chimiques liés à l'électro-déposition du zinc sont confinés contre la cathode et principalement dans la sous-couche visqueuse. Pour cette raison, les fermetures présentées sont complétées ici pour permettre leur utilisation jusqu'aux parois solides.

SO et YOO sont partis directement des travaux exposés dans les références <2-24>, <2-32> et <2-33>. HANJALIC et LAUNDER <2-24> ont proposé en 1972 une fermeture des équations de REYNOLDS pour les écoulements libres et fortement turbulents. Les recherches de LAUNDER, REECE et RODI <2-32> ont permis en

1975 de compléter cette fermeture pour les écoulements pariétaux. Mais le calcul ne pouvait pas être mené jusqu'aux parois car il supposait toujours l'écoulement fortement turbulent. En 1976, HANJALIC et LAUNDER <2-33> proposent une extension du modèle aux zones de faible turbulence et donnent la possibilité d'utiliser les équations modélisées jusqu'aux parois. L'ensemble de ces travaux a débouché sur une fermeture au deuxième ordre utilisable pour tout écoulement. Cette proposition est encore, de nos jours, considérée comme le modèle de référence. SO et YOO ont repris les équations pour les tensions de REYNOLDS de la référence <2-33> auxquelles ils ont apporté de légères modifications afin d'améliorer les prédictions au voisinage immédiat des parois. Ils ont remplacé l'équation de transport pour le taux de dissipation isotrope ϵ par la proposition de CHIEN <2-25>. Ils ont appliqué le système ainsi obtenu aux écoulements de POISEUILLE en conduite cylindrique avec et sans injection pariétale.

JONES et MUSONGE <2-29> ont repris le cheminement utilisé dans la référence <2-24> pour la modélisation de la redistribution de l'énergie. Ceci leur a permis de mettre en évidence, contrairement à ce qui était supposé auparavant, que le cisaillement moyen de l'écoulement a de l'influence sur le retour à l'isotropie de la turbulence. Ils ont alors proposé une modélisation plus générale pour la redistribution de l'énergie. La fermeture proposée n'est valable que pour les écoulements fortement turbulents et non confinés. Les principales prédictions réalisées avec leur modèle montrent une très bonne simulation des écoulements turbulents homogènes à haut nombre de REYNOLDS. JONES et MUSONGE ont aussi montré la capacité de cette fermeture à simuler un jet plan dans une atmosphère au repos. JONES et PASCAU <2-30> ont utilisé le même modèle pour un jet tourbillonnaire confiné. Il donne de bien meilleures prédictions qu'un modèle $k - \epsilon$. Nous avons, selon leur concept, étendu leur proposition pour permettre le calcul jusqu'aux parois solides des écoulements que nous étudions (effets des parois sur la redistribution de l'énergie, prise en compte de l'intensité de la turbulence).

GIBSON et RODI <2-31> utilisent une fermeture des équations de REYNOLDS dont la modélisation de la redistribution de l'énergie turbulente est beaucoup plus simple que les propositions précédentes. Il s'agit d'une simplification de la formulation décrite dans la référence <2-24> et proposée par LAUNDER en 1975. Ils appliquent leur modèle au calcul d'écoulements de canaux à surface libre. Afin de tenir compte des effets de la surface libre et de la paroi solide sur la redistribution de l'énergie, ils reprennent l'équation de la référence <2-34>. GIBSON et LAUNDER <2-34> sont partis des travaux de SHIR <2-35> (1973) qu'ils ont étendus. Le modèle de GIBSON et RODI ne permet pas le calcul jusqu'aux parois solides; il nécessite l'utilisation des lois de paroi. Nous l'avons complété pour étendre son utilisation à tout l'écoulement. L'intérêt de ce modèle pour les écoulements que nous étudions est double: les équations de cette fermeture sont relativement simples et les écoulements à surface libre sont à rapprocher des écoulements que nous avons qualifiés d'intermédiaires (figure 1-18).

Tous ces modèles nécessitent la connaissance du taux de dissipation isotrope ϵ , et

donc la résolution de son équation de transport. Les différents modèles étudiés se distinguent aussi par les approximations faites pour que cette équation puisse être résolue.

Les fermetures proposées par SO et YOO ou par GIBSON et RODI concernent les équations de transport, pour les tensions de REYNOLDS suivantes:

$$\begin{aligned}
 \overline{U_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k}} = & - \left[\overline{u_j u_k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k}} + \overline{u_i u_k \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k}} \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\underbrace{-\overline{u_i u_j u_k} - \frac{p}{\rho} (\delta_{ik} u_j + \delta_{jk} u_i)}_{(1)} + \nu \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} \right] \\
 & + \underbrace{\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{(2)} \underbrace{- 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}_{(3)}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

JONES et MUSONGE utilisent pour leur part la forme suivante de ces équations, comme point de départ pour leur modèle:

$$\begin{aligned}
 \overline{U_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k}} = & - \left[\overline{u_j u_k \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k}} + \overline{u_i u_k \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k}} \right] \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\underbrace{-\overline{u_i u_j u_k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\overline{p u_k}}{\rho}}_{(1')} + \nu \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} \right] \\
 & - \underbrace{\left[\frac{u_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{u_j}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{u_k}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} \right]}_{(2')} \underbrace{- 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}_{(3)}
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Cette forme met en évidence le fait que les corrélations gradient de pression-vitesse (terme (2') de l'équation (7.2)) peuvent être décomposées en une partie anisotrope et en une partie isotrope. LUMLEY <2-36> a interprété la seconde partie comme étant le taux auquel l'énergie turbulente était redistribuée parmi les composantes normales du tenseur de REYNOLDS.

Les fermetures choisies sont décrites et discutées dans la suite de ce chapitre (les termes à modéliser sont numérotés dans les équations précédentes). Elles sont présentées en trois temps. On examine tout d'abord les approximations qui permettent de clore les équations pour les tensions de REYNOLDS dans les régions

fortement turbulentes. Dans un second temps, on compare les équations de transport pour le taux de dissipation isotrope ϵ . Pour finir, on étudie les modifications à apporter dans les équations de transport des contraintes de REYNOLDS afin d'étendre le modèle aux écoulements faiblement turbulents. Les approximations retenues pour chacun des trois modèles seront respectivement représentées par les lettres SY, JM et GR, initiales des auteurs des articles de référence.

7.2 Modélisations dans les écoulements fortement turbulents:

Dans les régions pleinement turbulentes, on suppose généralement que la turbulence est en équilibre local. Les grandeurs caractéristiques des grosses structures suffisent à décrire le mouvement turbulent.

7.2.1 Modélisation de la diffusion turbulente:

Les termes de diffusion turbulente (1) et (1') des équations (7.1) et (7.2) contiennent deux parties: la diffusion par fluctuations de vitesse et celle par fluctuations de pression. Certains auteurs (c'est le cas pour JM) proposent de modéliser ces deux termes conjointement; d'autres supposent que la contribution des fluctuations de pression est négligeable (SY et GR). Les approximations retenues sont:

- SY:

$$\overline{u_i u_j u_k} = -0,11 \frac{k}{\epsilon} \left[\overline{u_l u_j} \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_l u_i} \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_l u_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right] \quad (7.3)$$

- JM:

$$\left(\overline{u_i u_j u_k} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\overline{u_k p}}{\rho} \right) = -0,22 \frac{k}{\epsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \quad (7.4)$$

- GR:

$$\overline{u_i u_j u_k} = -0,22 \frac{k}{\epsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \quad (7.5)$$

Ces trois modélisations font appel à l'hypothèse d'une diffusion turbulente de type gradient. La formulation de SY est déduite de l'équation de transport pour les corrélations triples de vitesse. Après modélisation et simplification de celle-ci, il est possible de formuler cette expression <2-24>. Le fait de négliger ou de prendre en compte la contribution des fluctuations de pression n'a aucune influence sur

l'approximation retenue; les modèles JM et GR sont identiques. Ils reprennent la proposition de DALY et HARLOW <2-37>.

La diffusion turbulente ne représente en fait qu'une faible partie du transport des tensions de REYNOLDS. Ces trois formulations donnent des prédictions similaires.

Appliqués aux écoulements que nous étudions, les modèles précédents s'écrivent:

	SY	JM et GR
$\overline{u^2}$	$0,22 \frac{k}{\epsilon} \overline{uv} \frac{d\overline{uv}}{dy} + 0,11 \frac{k}{\epsilon} \overline{v^2} \frac{d\overline{u^2}}{dy}$	$0,22 \frac{k}{\epsilon} \overline{v^2} \frac{d\overline{u^2}}{dy}$
$\overline{v^2}$	$0,33 \frac{k}{\epsilon} \overline{v^2} \frac{d\overline{v^2}}{dy}$	$0,22 \frac{k}{\epsilon} \overline{v^2} \frac{d\overline{v^2}}{dy}$
$\overline{w^2}$	$0,11 \frac{k}{\epsilon} \overline{v^2} \frac{d\overline{w^2}}{dy}$	$0,22 \frac{k}{\epsilon} \overline{v^2} \frac{d\overline{w^2}}{dy}$
\overline{uv}	$0,22 \frac{k}{\epsilon} \overline{v^2} \frac{d\overline{uv}}{dy} + 0,11 \frac{k}{\epsilon} \overline{uv} \frac{d\overline{v^2}}{dy}$	$0,22 \frac{k}{\epsilon} \overline{v^2} \frac{d\overline{uv}}{dy}$

La fermeture utilisée par JM et GR aboutit au même coefficient de diffusion pour chacune des tensions de REYNOLDS. La diffusion qui, dans les écoulements que nous étudions, n'a lieu essentiellement que dans la direction normale aux parois, est fonction de l'amplitude des fluctuations de vitesse dans cette direction.

La fermeture utilisée par SY donne deux types de termes. Une diffusion turbulente de type gradient dont l'importance dépend aussi du niveau de la corrélation $\overline{v^2}$, mais dont le coefficient n'est plus isotrope (il est trois fois plus élevé dans l'équation pour $\overline{v^2}$ que dans celle pour $\overline{w^2}$). Dans ce modèle, les diffusions de la corrélation normale $\overline{u^2}$ et de la contrainte de cisaillement \overline{uv} ont deux origines distinctes.

Les constantes utilisées dans ces approximations ont été déterminées par optimisation numérique. Le coefficient de multiplication (k/ϵ) peut être interprété comme le temps caractéristique des structures qui contiennent l'énergie, et donc comme un temps caractéristique de la diffusion turbulente.

7.2.2 Modélisation du terme de dissipation:

Dans les régions où le nombre de REYNOLDS turbulent est élevé, nous pouvons considérer que les petites structures turbulentes, qui sont principalement respons-

ables de la dissipation de l'énergie turbulente en chaleur, sont isotropes. Dans ce cas, les termes de dissipation (3) et (3') pour les différentes contraintes de REYNOLDS peuvent être représentés par:

$$\epsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon \quad (7.6)$$

où ϵ est le taux de dissipation isotrope: $\epsilon = \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2}$.

Ceci est confirmé par les travaux de WEINSTOCK et BURK <2-38> qui, à partir des mesures faites par CHAMPAGNE et al <2-17> dans un écoulement à cisaillement homogène, ont obtenu:

$$\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon} = 0,72 \quad \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon} = 0,60 \quad \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon} = 0,68$$

C'est cette hypothèse, déjà émise par KOLMOGOROV en 1941, qui est retenue pour les trois modèles que nous étudions. La contrainte de cisaillement \overline{uv} ne subit alors aucune dissipation directe.

7.2.3 Modélisation du terme de redistribution de l'énergie:

La redistribution de l'énergie entre les différentes composantes du tenseur de REYNOLDS est représentée par les termes (2) et (2') des équations (7.1) et (7.2). C'est sa modélisation qui distingue principalement les trois fermetures décrites. La redistribution de l'énergie est sans trace. Elle n'intervient donc pas dans les modèles $k-\epsilon$. L'importance de ce terme dans le transport de la turbulence mérite un examen détaillé.

CHOU <2-39> a montré qu'en écoulement de fluide isovolume, il est possible d'écrire une équation de POISSON pour les fluctuations de pression et leurs dérivées (annexe A1). La formule de GREEN permet alors d'exprimer les corrélations qui créent la redistribution de l'énergie, en tout point M_o du domaine de fluide étudié, à l'aide d'intégrales de volume et de surface étendues à la totalité du fluide en mouvement. Ces intégrales sont toutes des fonctions de corrélations spatiales. Les équations (.3) et (.4) ainsi obtenues dans l'annexe A1 servent de points de départ à la modélisation de la redistribution de l'énergie.

Loin des parois solides ou des surfaces libres, les équations (.3) et (.4) de l'annexe A1 peuvent être simplifiées moyennant quelques approximations, pour prendre la forme proposée par les équations (.5) et (.6) de l'annexe A2. Les termes de redistribution de l'énergie turbulente (2) et (2') s'écrivent alors:

$$\begin{aligned}
 (2) &= \left(b_{nj}^{mi} + b_{ni}^{mj} \right) \Phi_{ij1} + \frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} \left(a_{nj}^{mi} + a_{ni}^{mj} \right) \Phi_{ij2} \\
 (2') &= \left(-B_{nj}^{mi} - B_{ni}^{mj} + \frac{2}{3} \delta_{ij} B_{nk}^{mk} \right) \Psi_{ij1} + \frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} \left(-A_{nj}^{mi} - A_{ni}^{mj} + \frac{2}{3} \delta_{ij} A_{nk}^{mk} \right) \Psi_{ij2}
 \end{aligned}$$

A, B, a, b sont des tenseurs d'ordre 4 ne faisant intervenir que des grandeurs turbulentes.

Les équations ci-dessus montrent qu'il y a deux processus distincts donnant naissance à la redistribution. Un premier terme d'indice 1 ne fait intervenir que des grandeurs turbulentes; tandis que le second d'indice 2 dépend directement du taux de déformation moyen de l'écoulement moyen.

Pour cette raison, ROTTA <2-20> supposa que le terme de redistribution (2) obéissait à deux lois de comportement différentes qu'il était possible de modéliser séparément. Dans un écoulement homogène, non isotrope et sans contrainte moyenne, seule la première partie de la redistribution, notée Φ_{ij1} , est significative. Puisque pour un tel écoulement, la turbulence évolue vers l'isotropie, ce terme a pour effet de diminuer l'anisotropie entre les différentes contraintes normales du tenseur de REYNOLDS. Il représente donc l'action de la corrélation pression-contrainte à favoriser le "retour à l'isotropie". Pour un écoulement avec une contrainte moyenne de cisaillement, la production de l'énergie turbulente se fait essentiellement dans la direction de l'écoulement. Mais, cette fois ci, l'énergie turbulente est redistribuée aux autres composantes normales du tenseur de REYNOLDS par deux processus: le retour à l'isotropie et le second terme, noté Φ_{ij2} qualifié de terme rapide. Ce terme porte ce nom car il agit de façon analogue à la production d'énergie par l'écoulement moyen.

Dans un écoulement homogène sans contrainte moyenne ($\frac{d\overline{U}}{dx_k} = 0$), la turbulence présente les évolutions suivantes:

- l'énergie turbulente diminue et sa répartition spatiale entre les différentes contraintes normales évolue vers l'isotropie.
- la corrélation croisée $\overline{u_i v_j}$ diminue et tend vers zéro.

En utilisant ces remarques, ROTTA <2-20> proposa de modéliser ce terme de la façon suivante:

$$\Phi_{ij1} = -C_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (7.7)$$

où C_1 est une constante, k/ϵ représente le temps caractéristique de décroissance de la turbulence et $a_{ij} = \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k$ est le tenseur d'anisotropie. Le signe négatif permet à ce modèle de favoriser l'isotropie de la turbulence.

HANJALIC et LAUNDER <2-24> se servent de la représentation tensorielle du terme rapide et de ses propriétés pour élaborer leur modèle. La condition (.14) de l'annexe A2 suggère que le tenseur $a_{ij}^{m_i}$ peut être représenté de façon approximative par une combinaison linéaire des tensions de REYNOLDS, vérifiant les conditions (.9), (.11), (.13) et (.14) de cette annexe. HANJALIC et LAUNDER <2-24> ont proposé une telle formulation, puis ils ont ajouté des doubles produits des contraintes de REYNOLDS dans leur approximation, afin que celle-ci soit en accord avec les mesures de CHAMPAGNE, HARRIS et CORRSIN <2-17>. LAUNDER, REECE et RODI <2-32> reprennent la combinaison linéaire de la référence <2-24> (le désaccord avec les mesures de CHAMPAGNE et al provenait d'une valeur trop élevée de la constante C_1 dans le terme de retour à l'isotropie de la turbulence). Ils ont obtenu:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij2} = & -\frac{(C_2 + 8)}{11} \left[P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right] \\ & - \frac{(30C_2 - 2)}{55} k \left[\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right] \\ & - \frac{(8C_2 - 2)}{11} \left[D_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right] \end{aligned} \quad (7.8)$$

P est le taux de production de l'énergie turbulente k :

$$P = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}$$

et

$$\begin{aligned} P_{ij} = & - \left[\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} \right] \\ D_{ij} = & - \left[\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_j} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_i} \right] \end{aligned}$$

P_{ij} est le taux de production de la corrélation $\overline{u_i u_j}$, D_{ij} est un terme qui est également analogue à de la production.

Afin de déterminer les deux constantes C_1 et C_2 , LAUNDER, REECE et RODI ont repris les mesures expérimentales faites par CHAMPAGNE et al <2-17> en

écoulement avec cisaillement homogène. Les équations pour les tensions de REYNOLDS, modélisées en supposant que les mouvements de dissipation étaient isotropes, ont été appliquées à ces écoulements. Ceci a permis de déterminer $C_1 = 1,5$ et $C_2 = 0,4$ (HANJALIC et LAUNDER <2-24> proposaient $C_1 = 2,5$).

SO et YOO ont repris les équations (7.7) et (7.8) avec les valeurs des constantes définies ci-dessus comme modèle de la redistribution de l'énergie turbulente.

LAUNDER, REECE et RODI ont aussi proposé une formulation dégénérée de l'équation (7.8) en ne conservant que le premier terme du membre de droite:

$$\Phi_{ij2} = -\alpha \left[P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right] \quad (7.9)$$

Il s'agit du terme dominant de l'équation (7.8). Cette proposition vérifie correctement les propriétés et les caractéristiques de la redistribution de l'énergie turbulente. L'équation (7.9) correspond en fait à la contrepartie de la proposition de ROTTA pour Φ_{ij1} . Tandis que le terme de ROTTA agit directement en faveur de l'isotropie du champ des contraintes de REYNOLDS, ce terme, analogue à la production par l'écoulement moyen, rend la production des contraintes de REYNOLDS plus isotrope. LAUNDER, REECE et RODI suggèrent de modéliser la redistribution de l'énergie par les équations (7.7) et (7.9) avec les constantes $C_1 = 1,5$ et $\alpha = 0,6$.

GIBSON et RODI reprennent le même modèle mais avec les constantes $C_1 = 1,8$ et $\alpha = 0,6$. La constante C_1 est modifiée afin de prédire un meilleur niveau pour les contraintes normales, dans les écoulements libres et cisailés.

JONES et MUSONGE s'intéressent au terme (2') de l'équation (7.2). Il est aussi possible de distinguer deux contributions notées respectivement Ψ_{ij1} et Ψ_{ij2} . JM ont développé une équation pour le terme dit de "retour à l'isotropie" Ψ_{ij1} , qui montre que, contrairement à l'hypothèse qui a conduit à l'équation (7.7), ce terme est lié au taux de déformation moyen de l'écoulement. Puisque les deux parties Ψ_{ij1} et Ψ_{ij2} de (2') semblent dépendre simultanément des gradients de vitesse moyenne, ils ne les différencient pas lors de la modélisation et proposent:

$$(2') = \Psi_{ij} = -C'_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) + \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_m} A_{ij}^{mi} \quad (7.10)$$

Cette formulation est semblable aux modèles qui précèdent. JONES et MUSONGE n'appliquent à ce modèle que les conditions de contraction et de symétrie vérifiées par (2'):

$$\sum_i \Psi_{ii} = 0.$$

$$\Psi_{ij} = \Psi_{ji}$$

Le deuxième terme du membre de droite de l'équation (7.10) fait apparaître un tenseur d'ordre 4. JONES et MUSONGE modélisent celui-ci par la combinaison linéaire la plus générale des tensions de REYNOLDS qui satisfasse aux conditions imposées à Ψ_{ij} . Ils ont obtenus pour les écoulements isovolumes:

$$\begin{aligned} \Psi_{ij} = & -C'_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) + C'_2 \delta_{ij} \overline{u_m u_l} \frac{\partial \overline{U_l}}{\partial x_m} \\ & + C'_3 \left[\overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} \right] + C'_4 k \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \\ & - \left(\frac{2}{3} C'_2 + C'_3 \right) \left[\overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_i} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_j} \right] \end{aligned} \quad (7.11)$$

Pour déterminer les constantes du modèle, JONES et MUSONGE ont utilisé les mesures en écoulement à cisaillement homogène et uniforme de TAVOULARIS et CORRISIN <2-40>. Ils ont fixé $C'_1 = 1,5$; ce qui leur a permis de déterminer:

C'_2	C'_3	C'_4
-0,53	0,67	-0,12

Le choix de $C'_1 = 1,5$ donne la même modélisation du "retour à l'isotropie" que celle de LAUNDER, REECE et RODI <2-32>.

Comparons l'importance des redistributions rapides entre les contraintes de REYNOLDS normales des trois modèles présentés, pour les écoulements que nous étudions.

	u^2	v^2	w^2
SY	+0,94	-0,36	-0,58
GR	+0,80	-0,40	-0,40
JM	+0,81	-0,28	-0,53

Les constantes présentées dans le tableau ci-dessus sont les coefficients multiplicateurs de la redistribution rapide. Pour les écoulements que nous étudions, cette redistribution modélisée se réduit à $\overline{uv} \frac{dU}{dy}$. Les trois propositions retirent près de la moitié de la turbulence produite dans la direction longitudinale, pour la transférer dans les autres directions de l'écoulement. La formulation retenue par SY favorise davantage ce transfert. Nous pouvons constater que le modèle de JM a pour effet principal d'augmenter l'anisotropie entre les corrélations $\overline{v^2}$ et $\overline{w^2}$; tandis que la formule simplifiée, utilisée par GR, encourage leur égalité. Cette particularité du modèle de JM est un avantage sur les modèles issus de la proposition de LAUNDER, REECE et RODI dont les prédictions sont généralement trop isotropes.

Pour les écoulements confinés par une paroi solide ou une surface libre, il faut ajouter l'influence des surfaces sur la redistribution.

Dans la zone interne d'une couche limite turbulente, le taux de déformation moyen de l'écoulement est loin d'être homogène. De ce fait, les approximations faites précédemment sont inadaptées. De plus, les mesures expérimentales faites dans un tel écoulement montrent que la contrainte turbulente longitudinale est considérablement plus grande que la contrainte transversale et que la contrainte de cisaillement turbulente \overline{uv} est relativement plus petite (en comparaison avec les écoulements à taux de déformation uniforme). Pour tenir compte des variations rapides de la contrainte moyenne $\frac{dU}{dy}$, ROTTA <2-20> puis LAUNDER, REECE et RODI <2-32> ont proposé un terme complémentaire à la modélisation de la redistribution rapide. Les différentes tentatives n'ont pas été satisfaisantes mais elles ont permis de mettre en évidence que l'influence de la proximité de parois solides ne pouvait pas être simplement attribuée aux variations rapides de la contrainte moyenne. Il faut prendre en compte la contribution au terme de redistribution de l'intégrale de surface qui apparaît dans les équations (.3) et (.4) de l'annexe A1 quand une partie de cette surface est une portion de paroi solide ou de surface libre.

IRWIN <2-41> montra que, dans le cas précis où l'écoulement considéré est confiné par une paroi solide plane, dans le plan (x, z) , l'équation (.4) de l'annexe A1 peut être réarrangée de façon à faire disparaître l'intégrale de surface. Cette opération est appliquée aux équations (.3) et (.4) dans l'annexe A3. On aboutit aux équations (.19) et (.20) de cette même annexe.

Ces équations montrent que la proximité d'une paroi induit deux contributions dans la redistribution. Elle affecte en effet le retour à l'isotropie et la redistribution rapide. L'apparition de l'image de l'écoulement par la paroi laisse supposer que ces deux contributions ne sont autres que la réflexion par la paroi des deux types de redistribution de l'énergie turbulente.

LAUNDER, REECE et RODI ont alors proposé la modélisation:

$$\Phi_{ijw} = \left[C_{1w} \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) + \frac{\partial \overline{U}_m}{\partial x_n} (c_{nj}^{mi} + c_{ni}^{mj}) \right] f \left(\frac{l}{y} \right)$$

qui vient s'ajouter à $\Phi_{ij1} + \Phi_{ij2}$ précédemment développées. c_{nj}^{mi} sont les tenseurs d'ordre 4 décrits dans l'annexe A3.

BRADSHAW <2-42> a montré que l'intégrale de surface devait avoir de l'influence aussi longtemps que la taille des structures qui contiennent l'énergie turbulente était de l'ordre de grandeur de la distance à la paroi. Ceci explique la présence de la fonction f , dans laquelle l désigne une longueur caractéristique de ces structures (y étant la distance à la paroi).

Comme a_{nj}^{mi} , le tenseur d'ordre quatre c_{nj}^{mi} doit vérifier les conditions de l'intégrale qu'il modélise. LAUNDER, REECE et RODI ne retiennent que les propriétés (.23), (.29) et (.30) décrites dans l'annexe A3, bien que les propriétés (29) et (.30) ne sont pas exactes. La relation (.32) n'est pas retenue. A ces conditions, peuvent s'ajouter des conditions d'ordre physique. LAUNDER, REECE et RODI ont utilisé les résultats de mesures expérimentales obtenues dans la zone logarithmique des écoulements pariétaux. Ceux-ci montrent que l'anisotropie entre les contraintes longitudinales et normales est importante et que la proximité de la paroi diminue la contrainte de cisaillement \overline{uv} . Ces mesures mettent aussi en évidence que la corrélation $\overline{w^2}$ n'est pas affectée par la présence de la paroi. Cette dernière remarque permet d'imposer la condition suivante au tenseur c_{nj}^{mi} :

$$c_{13}^{23} = 0.$$

Le tenseur c_{nj}^{mi} est modélisé par la combinaison linéaire la plus générale des contraintes de REYNOLDS, à laquelle on applique ces différentes conditions:

$$\begin{aligned} \Phi_{ijw} = & \left[C_{1w} \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) + C_{2w} (P_{ij} - D_{ij}) \right. \\ & \left. + C_{3w} k \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] f \left(\frac{l}{y} \right) \end{aligned}$$

Avant de déterminer les différentes constantes de ce modèle, il faut définir la fonction $f(l/y)$. LAUNDER, REECE et RODI ont choisi comme longueur caractéristique des structures qui contiennent l'énergie turbulente $k^{3/2}/\epsilon$, et ils ont supposé que f pouvait être prise comme étant la fonction identité. A partir de résultats expérimentaux et des propriétés des écoulements pariétaux, ils proposent:

$$\Phi_{ijw} = \left[0,125 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) + 0,015 (P_{ij} - D_{ij}) \right] \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon y} \quad (7.12)$$

la constante C_{3w} est nulle.

Remarque: Les résultats utilisés, pour déterminer les différentes constantes des effets de paroi sur le terme de redistribution, appartiennent à la région logarithmique de l'écoulement de paroi (région qui se situe à une ordonnée assez éloignée de la paroi).

Dans le cas d'écoulements entre deux parois planes, parallèles et distantes d'une hauteur h (notre cas), il faut tenir compte des effets des deux parois. LAUNDER, REECE et RODI proposent de remplacer la fonction f précédente par:

$$\frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon} \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{h-y} \right] \quad (7.13)$$

SO et YOO <2-27> ont examiné l'influence de cette correction pariétale sur les prédictions des écoulements de POISEUILLE. Leur première constatation fut que les valeurs $C_{1w} = 0,125$ et $C_{2w} = 0,015$ proposées par LAUNDER, REECE et RODI empêchaient leur programme de converger. De telles valeurs ne permettent pas d'équilibrer les équations de transport pour les contraintes normales dans tout l'écoulement. Ces constantes ont alors été diminuées pour permettre la convergence du calcul. Ils ont ainsi obtenu $C_{1w} = 0,05$ et $C_{2w} = 0,006$. Leurs calculs ont montré que, quand les valeurs assignées à ces constantes sont élevées, les prédictions obtenues sont moins bonnes que lorsqu'on néglige l'influence des parois $C_{1w} = C_{2w} = 0$. Toutefois de petites valeurs de ces constantes permettent des prédictions correctes.

GIBSON et LAUNDER <2-34> repartent des travaux de SHIR <2-43> pour développer la modélisation des effets d'une paroi rigide sur la redistribution de l'énergie. SHIR était parti des remarques suivantes: La proximité d'une paroi rigide modifie le champ de pression dans l'écoulement, empêchant aussi le transfert de l'énergie de la direction longitudinale vers la direction perpendiculaire à la paroi ($\overline{w^2}/k$ reste inchangé). En même temps l'amplitude relative de la contrainte de cisaillement diminue. En introduisant \vec{n} , vecteur normal à la paroi, SHIR proposa:

$$\Phi_{ij1w} = C_{1w} \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i} n_k n_j - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j} n_k n_i \right) f \left(\frac{l}{n_i r_i} \right) \quad (7.14)$$

r est le rayon vecteur position par rapport à la paroi solide et l est une longueur caractéristique de la turbulence. SHIR supposait que l'effet de la paroi n'affectait

que le retour à l'isotropie. Mais GIBSON et LAUNDER ont étendu cette expression à la redistribution rapide de l'énergie turbulente:

$$\Phi_{ij2w} = C_{2w} \left(\Phi_{km2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \Phi_{ik2} n_k n_j - \frac{3}{2} \Phi_{jk2} n_k n_i \right) f \left(\frac{l}{n_i r_i} \right) \quad (7.15)$$

GIBSON et RODI utilisent ces formules et posent:

$$\Phi_{ijw} = \Phi_{ij1w} + \Phi_{ij2w}$$

Les valeurs des coefficients $C_{1w} = 0,5$ et $C_{2w} = 0,3$ ont été déterminées à l'aide de mesures dans la zone d'équilibre local de la turbulence pour un écoulement de paroi, en supposant la fonction f égale à 1 dans cette région. GIBSON et RODI proposent la fonction de paroi:

$$f_w \left(\frac{l}{y} \right) = \frac{k^{3/2} (1 - y/h)^2}{a\epsilon h \frac{y}{h}}$$

avec $a = 3,18$ pour que cette fonction de paroi prenne la valeur unité dans la zone logarithmique de l'écoulement. GIBSON et RODI ont en effet remarqué qu'il vaut mieux donner à f une variation plus rapide avec y , que celle proposée par LRR, afin de confiner les effets de la paroi plus près de celle-ci. Pour un écoulement de canal, ils suggèrent de prendre la demi hauteur du canal comme référence et proposent:

$$f_w \left(\frac{l}{y} \right) = \frac{2k^{3/2}}{a\epsilon h} \left[\frac{(1 - 2y/h)^2}{2y/h} + \frac{(2y/h)^2}{1 - 2y/h} \right] \quad (7.16)$$

JONES et MUSONGE <2-29> n'ont pas développé le terme correspondant aux effets d'une paroi solide dans leur modèle de redistribution. Pour respecter la démarche qu'ils ont suivi, on peut appliquer le concept de réflexion de la redistribution par les parois, proposé par LAUNDER, REECE et RODI, au modèle de JONES et MUSONGE. On peut écrire:

$$\Psi_{ijw} = \left[C'_{1w} \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) + \frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} C_{nj}^{mi} \right] f \left(\frac{l}{y} \right)$$

où $f(l/y)$ est, comme dans les modèles précédents, une fonction conditionnant le domaine sur lequel les effets pariétaux se font sentir. Cette redistribution doit vérifier les conditions de contraction et de symétrie suivantes:

$$\sum_i \Psi_{i iw} = 0 \quad \text{et} \quad \Psi_{ijw} = \Psi_{jiw}$$

La modélisation du tenseur C_{nj}^{mi} par la combinaison linéaire la plus générale des contraintes de REYNOLDS qui vérifie ces conditions conduit finalement à:

$$\begin{aligned} \Psi_{ijw} = & \left[C'_{1w} \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) + C'_{2w} \delta_{ij} \overline{u_m u_l} \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_m} \right. \\ & + C'_{3w} \left[\overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} \right] + C'_{4w} k \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \\ & \left. - \left(\frac{2}{3} C'_{2w} + C'_{3w} \right) \left[\overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_i} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U}_k}{\partial x_j} \right] \right] f \left(\frac{l}{y} \right) \end{aligned}$$

Les quatre constantes C'_{1w} , C'_{2w} , C'_{3w} et C'_{4w} doivent être déterminées à l'aide de mesures expérimentales obtenues dans des écoulements confinés par une paroi solide.

Si nous utilisons, comme LAUNDER, REECE et RODI, les résultats obtenus dans la zone logarithmique d'une couche limite pariétale, nous pouvons considérer que la corrélation $\overline{w^2}$ ne subit pas les effets de la paroi. Cette condition impose $C'_{2w} = 0$. L'utilisation de résultats obtenus dans l'écoulement cité ci-dessus permet de déterminer les constantes suivantes: $C'_{1w} = 0$, $C'_{3w} = -0,03$, $C'_{4w} = -0,03$.

La fonction $f(l/y)$ utilisée étant celle proposée par LAUNDER, REECE et RODI. Nous obtenons pour un écoulement de canal:

$$\Psi_{ijw} = \left[0,03 (P_{ij} - D_{ij}) - 0,03 k \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \left[\frac{1}{y} + \frac{1}{h-y} \right] \quad (7.17)$$

Dans la modélisation adoptée ici, les effets des parois sur la redistribution de l'énergie turbulente n'interviennent que par l'intermédiaire du cisaillement moyen de l'écoulement. Le retour à l'isotropie naturel reste inchangé. Ceci est une grande différence par rapport aux autres modèles; surtout que dans les années 70 beaucoup d'auteurs supposaient que la proximité de parois rigides n'affectait que le retour à l'isotropie comme processus de la redistribution.

Comme nous l'avons fait pour la partie principale de la redistribution rapide, nous pouvons comparer les effets des parois sur ce terme pour les écoulements que nous étudions. Le tableau suivant montre pour les trois modèles présentés, plus le modèle de LAUNDER, REECE et RODI (équation (7.12)) les coefficients multiplicateurs

dans la réflexion de la redistribution rapide pour les contraintes normales. En supposant y/h très petit devant l'unité. Quel que soit le modèle considéré, Φ_{ijw} et Ψ_{ijw} se limitent à l'expression:

$$\frac{\overline{uv}}{\overline{w}} \frac{d\overline{U}}{dy} \frac{k^{3/2}}{\epsilon y}$$

Les constantes multiplicatives de ce terme sont:

	$\overline{u^2}$	$\overline{v^2}$	$\overline{w^2}$
SY	-0,012	+0,012	0,000
GR	-0,038	+0,075	-0,038
JM	-0,060	+0,060	0,000
LRR	-0,030	+0,030	0,000



C'est la proposition de GR qui retire le plus d'énergie à la corrélation $\overline{v^2}$. Elle la redistribue en parts égales dans les directions longitudinale et transversale. Les autres modèles favorisent uniquement la production de $\overline{u^2}$ au détriment de $\overline{v^2}$ et laissent $\overline{w^2}$ inchangé. Les constantes proposées par LRR donnent déjà un effet des parois beaucoup plus petit que le modèle de GR. Les modifications apportées par SY à ces constantes diminuent encore cet effet d'un facteur 5 par rapport au modèle de LAUNDER, REECE et RODI.

REMARQUES IMPORTANTES:

La modélisation de la redistribution de l'énergie turbulente fait fortement appel à l'hypothèse d'homogénéité locale de la turbulence. La validité de cette hypothèse est étroitement liée à l'étendue sur laquelle les corrélations spatiales sont significatives (voir les annexes). Pour les écoulements pariétaux, l'hypothèse d'homogénéité locale de la turbulence peut paraître osée.

L'effet des parois solides sur la redistribution de l'énergie turbulente est lié à l'influence des fluctuations de pression pariétales sur l'écoulement (voir les équations (.15) et (.16) de l'annexe A3). On suppose que celles-ci interviennent sur l'étendue totale de la couche limite pariétale. Dans les canaux, ces zones représentent la plus grande partie de l'écoulement.

La modélisation des écoulements de paroi est bâtie en étudiant le terme de redistribution au voisinage d'une seule paroi solide, plane et parallèle à l'écoulement moyen (annexe A3). L'annexe A4 montre la même démarche pour un écoulement de canal. Elle fait apparaître des termes supplémentaires provenant d'une interaction éventuelle entre les deux parois. Interaction qui n'est pas prise en compte dans

les différents modèles proposés. Il est aussi possible de montrer que, selon la nature de l'écoulement (propriétés de symétrie ou d'antisymétrie), ces interactions peuvent soit s'ajouter soit s'annuler. Cette remarque est à rapprocher des différences qui existent entre les écoulements de POISEUILLE et les écoulements de COUETTE.

7.3 Equation de transport pour le taux de dissipation isotrope ϵ :

Pour réaliser les fermetures des équations de REYNOLDS, les trois modèles présentés utilisent soit ϵ : taux de dissipation isotrope de l'énergie turbulente k , soit $\tilde{\epsilon}$: obtenu en retranchant à ϵ une fonction pariétale pour que cette nouvelle grandeur s'annule sur les parois solides. Il faut alors résoudre simultanément aux équations pour la quantité de mouvement et pour les contraintes de REYNOLDS, l'équation de transport pour l'une de ces grandeurs.

Cette équation de transport est appliquée aux écoulements que nous étudions dans le chapitre 6 (équation (6.3)). Une étude des ordres de grandeur et de l'influence des différents termes conduit à l'équation de transport modélisée par l'équation (6.6), quand on utilise l'hypothèse de BOUSSINESQ. Cette équation n'est valable que pour les écoulements fortement turbulents.

SY utilisent cette équation pour déterminer $\tilde{\epsilon}$. L'extension de cette équation jusqu'aux parois solides nécessite certaines corrections et termes supplémentaires décrits dans le chapitre 6 (voir le système d'équations (6.8)). SY sélectionnent la proposition de CHIEN <2-25>:

$$0 = C_{\epsilon 1} \frac{\tilde{\epsilon}}{k} \nu_t \left(\frac{d\bar{U}}{dy} \right)^2 + \frac{d}{dy} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{d\tilde{\epsilon}}{dx_2} \right] - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} + E \quad (7.18)$$

où

$$E = -2\nu \frac{\tilde{\epsilon}}{y^2} \exp \left(-0,5 \frac{yu_\tau}{\nu} \right)$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\epsilon}}$$

$$f_2 = 1 - \frac{2}{9} \exp \left[- \left(\frac{k^2}{6\nu\tilde{\epsilon}} \right)^2 \right]$$

$$f_\mu = f_1 = 1 - \exp \left(-0,0115 \frac{yu_\tau}{\nu} \right)$$

L'étude des modèles $k - \epsilon$ réalisée par MONNIER <1-2> a montré que l'équation proposée par CHIEN était très performante.

Les constantes sont $C_{\epsilon 1} = 1,35$; $C_{\epsilon 2} = 1,8$; $C_{\mu} = 0,09$ et $\sigma_{\epsilon} = 1,3$. La fonction E adoptée par CHIEN est analogue au terme de dissipation pariétal dans l'équation de transport pour l'énergie turbulente k . CHIEN a choisi cette formulation pour imposer à ϵ une croissance quadratique à partir de la paroi.

Les performances de cette équation de transport font que nous l'avons également retenue pour le modèle JM.

GR remarquent que la modélisation de la production de ϵ , proposée par HANJALIC et LAUNDER <2-24>, telle qu'elle est représentée dans l'équation (6.6) ne reproduit pas la création du taux de dissipation isotrope ϵ par interaction de la turbulence en l'absence de gradient de vitesse moyenne. Ils préfèrent retenir l'équation:

$$P_{\epsilon} = -0,47 \frac{\epsilon}{k} \frac{d\bar{U}}{dy} + 3,9 \frac{\epsilon^2}{k} \frac{a_{ij}a_{ij}}{1 + 1,5\sqrt{a_{ij}a_{ij}}} \quad (7.19)$$

P_{ϵ} étant le taux de production de ϵ et $a_{ij} = \left(\frac{\overline{u_i u_j}}{k} - 2/3\delta_{ij}\right)$ est le tenseur d'isotropie. Le second terme assure donc la dissipation dans les écoulements non cisailés mais anisotropes. Les constantes ont été ajustées pour être consistantes avec la modélisation du terme de redistribution de l'énergie. L'approximation retenue pour la diffusion turbulente de ϵ est homogène aux diffusions turbulentes des contraintes de REYNOLDS. Etendue au calcul jusqu'aux parois solides, l'équation de transport pour le taux de dissipation isotrope vrai s'écrit:

$$0 = -0,47 \frac{\epsilon}{k} \frac{d\bar{U}}{dy} + 3,9 \frac{\epsilon \tilde{\epsilon}}{k} \frac{a_{ij}a_{ij}}{1 + 1,5\sqrt{a_{ij}a_{ij}}} + \frac{d}{dy} \left[\left(\nu + C_{\epsilon} \frac{v^2}{k} \right) \frac{d\epsilon}{dy} \right] - C_{\epsilon 2} \frac{\tilde{\epsilon} \epsilon}{k} + E \quad (7.20)$$

où

$$E = C_{\epsilon 3} \nu \frac{k}{\epsilon} \left(\frac{d^2 \bar{U}}{dy^2} \right)^2$$

Dans cette équation qui s'applique aux écoulements que nous étudions, les modifications apportées pour étendre la validité des calculs jusqu'aux parois sont les suivantes: Dans les termes de production et de dissipation, ϵ^2/k , qui tend vers l'infini au voisinage immédiat de la paroi solide, est remplacé par $\tilde{\epsilon}\epsilon/k$. Ceci permet de conserver des valeurs finies de ce terme. $\tilde{\epsilon}$ est le taux de dissipation proposé par LAUNDER et SHARMA <2-26> et obtenu par développement limité à la paroi:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - 2\nu \left(\frac{d\sqrt{k}}{dy} \right)^2$$

La fonction E (production dans les régions où l'écoulement est faiblement turbulent) est celle proposée par HANJALIC et LAUNDER <2-33> (la même forme de correction pariétale est reprise dans le modèle $k - \epsilon$ de LAUNDER et SHARMA). Nous préférons cette fonction à celle de CHIEN pour son origine physique. Contrairement aux équations généralement retenues, aucune fonction d'amortissement n'est utilisée.

La constante $C_{\epsilon 2} = 1,9$ est celle proposée par GIBSON et RODI. $C_{\epsilon} = 0,22$ afin que la diffusion du taux de dissipation isotrope ϵ soit identique aux diffusions turbulentes des autres caractéristiques de l'écoulement. La constante $C_{\epsilon 3} = 0,4$ est optimisée numériquement.

7.4 Extensions des modèles aux régions faiblement turbulentes:

Dans cette partie, nous allons traiter à la fois de l'extension des fermetures des équations de transport pour les contraintes de REYNOLDS aux régions faiblement turbulentes et aux zones pariétales. Pour les écoulements de canaux que nous étudions, ces deux régions sont identiques.

Comme pour les fermetures $k - \epsilon$, pour des questions de convenances numériques, le taux de dissipation isotrope est souvent remplacé par $\tilde{\epsilon}$ qui s'annule à la paroi. Ce choix nécessite alors l'introduction d'un terme supplémentaire dans l'équation de transport pour les tensions de REYNOLDS. Ce terme doit s'annuler loin des parois, et sa valeur pariétale doit contrebalancer la diffusion visqueuse de la contrainte turbulente. La contraction de ce terme correspond au terme D de l'équation (6.7).

SO et YOO utilisent $\tilde{\epsilon}$ dans leurs équations modélisées. Nous avons repris cette grandeur turbulente dans le modèle JM qui est inspiré des fermetures de SY.

GIBSON et RODI utilisent leur modèle avec la grandeur turbulente ϵ jusqu'à la surface libre de l'écoulement qu'ils étudient. Dans le modèle GR, ϵ n'est pas remplacé par $\tilde{\epsilon}$. L'utilisation du taux de dissipation isotrope vrai nécessite, comme nous allons le voir, moins de termes correcteurs dans les équations à résoudre.

7.4.1 La diffusion turbulente:

SO et YOO ont constaté que la diffusion turbulente de leur modèle était trop grande au voisinage des parois solides. Ils proposent de contenir celle-ci à l'aide de la fonction d'amortissement proposée par CHIEN <2- 25>:

$$f_1 = 1 - \exp\left(-0,0115 \frac{y u_\tau}{\nu}\right)$$

(u_τ est la vitesse de frottement pariétale)

Pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression, cette grandeur peut s'annuler. Nous l'avons remplacée par la vitesse de frottement locale:

$$u_\tau = \sqrt{\left| \nu \frac{dU}{dy} - \overline{uv} \right|} \quad (7.21)$$

Cette formulation assure la continuité de la fonction d'amortissement à travers l'écoulement.

La même fonction d'amortissement a été utilisée dans le modèle JM, tandis qu'aucune correction n'a été apportée à la diffusion turbulente dans la fermeture GR.

Les approximations utilisées pour la diffusion turbulente font intervenir le rapport k/ϵ comme échelle de temps pour la turbulence. Le fait de remplacer dans SY et JM ϵ par $\tilde{\epsilon}$, qui s'annule à la paroi, donne au voisinage de celle-ci une échelle de temps beaucoup plus importante. C'est pour limiter cette importance qu'il faut faire intervenir une fonction d'amortissement.

7.4.2 Le taux de dissipation:

Quand le nombre de REYNOLDS turbulent diminue, les échelles caractéristiques des structures dissipatives sont de l'ordre de grandeur des échelles représentant les structures qui contiennent l'énergie. La dissipation est anisotrope. Les résultats obtenus par simulation directe par KIM, MOIN et MOSER <2-1> puis par MANSOUR, KIM et MOIN <2-44> permettent d'établir:

- à $y^+ = 31$:

$$\begin{cases} \frac{\overline{u_1 u_1}}{k} = 1,50 & \frac{\overline{u_2 u_2}}{k} = 0,15 & \frac{\overline{u_3 u_3}}{k} = 0,35 \\ \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon} = 1,49 & \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon} = 0,17 & \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon} = 0,34 \end{cases}$$

- à $y^+ = 80$:

$$\begin{cases} \frac{\overline{u_1 u_1}}{k} = 1,09 & \frac{\overline{u_2 u_2}}{k} = 0,37 & \frac{\overline{u_3 u_3}}{k} = 0,54 \\ \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon} = 1,09 & \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon} = 0,41 & \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon} = 0,50 \end{cases}$$

Les calculs faits par FEIEREISEN et al <2-45> donnent des résultats similaires.

SO et YOO proposent de prendre en compte simultanément les effets à bas nombre de REYNOLDS turbulent et les effets dus à la proximité de la paroi par:

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \tilde{\epsilon} + 2\nu \frac{\delta_{il} \delta_{jm} \overline{u_l u_m}}{(\delta_{2k} x_k)^2} \quad (7.22)$$

Par contraction, le terme ajouté à l'équation (7.6) donne la fonction D proposée par CHIEN <2-25> pour l'équation de transport pour l'énergie turbulente k .

Cette proposition ne nous semble pas suffisante pour représenter l'importance de l'anisotropie du taux de dissipation. En effet, la fonction D , obtenue par développements limités, est uniquement un terme correcteur au voisinage immédiat de la paroi solide.

Pour des nombres de REYNOLDS petits, ROTTA <2-20> propose:

$$\epsilon_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \epsilon \quad (7.23)$$

Remarque: Cette équation, qui est en accord avec les résultats de simulation directe, provient de mesures et de calculs faits dans la région logarithmique des couches limites turbulentes. Sa validité au voisinage immédiat des parois reste à prouver.

HANJALIC et LAUNDER <2-33> utilisent cette formulation combinée à l'équation (7.6). Le passage de l'une à l'autre se fait de façon continue à l'aide d'une fonction du nombre de REYNOLDS turbulent:

$$\frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon} = \frac{2}{3} \left[(1 - f_s) \delta_{ij} + \frac{\overline{u_i u_j}}{\frac{2}{3}k} f_s \right] \quad (7.24)$$

HANJALIC et LAUNDER <2-33> suggèrent:

$$f_s = \frac{1}{1 + \frac{Re_t}{10}}; \quad Re_t = \frac{k^2}{\nu \epsilon} \quad (7.25)$$

Les résultats de simulation directe, mentionnés précédemment, montrent qu'à $y^+ = 80$ ($Re_t = 150$), il faut que la fonction soit encore égale à 1. Ce qui donne plutôt:

$$f'_s = \frac{1}{1 + \frac{Re_t}{500}} \quad (7.26)$$

Le modèle JM utilise $\tilde{\epsilon}$. Il nécessite un terme correcteur au voisinage immédiat des parois. Nous avons retenu la proposition de SO et YOO. L'approximation complète pour le terme de dissipation de la corrélation $\overline{u_i u_j}$, utilisée dans la fermeture JM est:

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \left[(1 - f'_s) \delta_{ij} + \frac{\overline{u_i u_j}}{\frac{2}{3}k} f'_s \right] \tilde{\epsilon} + 2\nu \frac{\delta_{ij} \delta_{jm} \overline{u_l u_m}}{(\delta_{2k} x_k)^2} \quad (7.27)$$

Le modèle GR retient les expressions (7.24) et (7.25). Les résultats obtenus ont montré que l'équation (7.25) convenait très bien à cette fermeture.

7.4.3 La redistribution de l'énergie turbulente:

La modélisation de la redistribution de l'énergie turbulente contient déjà un terme pariétal. Ce terme n'a pas été introduit pour tenir compte du taux de turbulence au voisinage des parois solides, mais pour prendre en considération l'influence des parois sur le champ de pression de l'écoulement.

SY conservent la redistribution telle qu'elle a été proposée par LAUNDER, REECE et RODI. Mais ils constatent que le modèle surestime la contrainte de cisaillement $\overline{u v}$ au voisinage des parois. Ils proposent une fonction d'amortissement sur l'ensemble des termes qui sont homogènes à la production de cette contrainte. Cette fonction vient donc multiplier la production de $\overline{u v}$ mais aussi la redistribution rapide de cette contrainte. Une optimisation numérique leur a permis de déterminer:

$$f_3 = 1 - \exp\left(-0,008 \frac{y u_\tau}{\nu}\right)$$

L'utilisation des modèles JM et GR a mis en évidence le même comportement pariétal. Nous avons adopté le remède proposé par SY. Les fonctions d'amortissement obtenues numériquement sont:

$$f_3 = 1 - \exp\left(-0,011 \frac{y u_\tau}{\nu}\right)$$

pour JM et

$$f_3 = 1 - \exp\left(-0,023 \frac{y u_\tau}{\nu}\right)$$

pour GR.

u_τ est la vitesse de frottement locale.

A ce stade, les équations nécessaires à la fermeture désirée sont entièrement définies.

7.5 CONCLUSIONS:

Dans ce chapitre, nous avons présenté trois possibilités de fermetures des équations de transport pour les tensions de REYNOLDS, notées SY, JM, GR. Les principales différences concernent le terme de redistribution de l'énergie par les fluctuations de pression. Mais ces modèles diffèrent aussi par les autres approximations. Ces fermetures sont complétées par l'équation de transport pour le taux de dissipation isotrope ϵ . Cette équation dans le modèle GR contient un terme de production supplémentaire dont l'influence doit essentiellement se faire sentir pour la prédiction des écoulements intermédiaires (vitesse débitante voisine de la vitesse de la paroi mobile).

Ces trois modèles sont comparés pour les écoulements de POISEUILLE et les écoulements de COUETTE avec gradient de pression dans le chapitre suivant.

Chapitre 8

APPLICATION DE DIFFERENTS MODELES AUX TENSIONS DE REYNOLDS AUX ECOULEMENTS ENVISAGES

8.1 Introduction:

Les trois fermetures, aux second ordre, que nous avons décrites dans le chapitre précédent, sont utilisées pour prédire les écoulements de COUETTE avec gradient de pression. Elles sont notées SY, JM et GR: initiales des auteurs des articles dont sont déduites ces fermetures. Il faut rappeler que les modèles JM et GR, qui n'étaient pas conçus pour le calcul jusqu'aux parois solides ont été complétés par nos soins.

Ces modèles sont comparés aux résultats expérimentaux de EL TELBANY et REYNOLDS <2-7>. Les avantages ou les inconvénients qu'ils apportent par rapport aux fermetures au premier ordre sont aussi évalués. Il faut rappeler qu'il existe certaines discordances entre les prédictions des modèles $k - \epsilon$ et les mesures de EL TELBANY et REYNOLDS, particulièrement pour les écoulements de type POISEUILLE. Une des origines possibles de ces désaccords peut être l'hypothèse de BOUSSINESQ, que les fermetures aux tensions de REYNOLDS n'utilisent pas. Les modèles $k - \epsilon$ prédisent pas le saut d'énergie turbulente observé expérimentalement lors du passage des écoulements de type COUETTE aux écoulements de type POISEUILLE. Cette étude comparative permet d'évaluer l'apport des fermetures au second ordre à la prédiction des écoulements de cellules d'électro-déposition.

8.2 Méthode numérique:

Avant de présenter et de discuter des résultats obtenus, faisons une parenthèse sur la méthode que nous avons choisie pour résoudre numériquement le système d'équations différentielles auquel nous avons abouti (l'équation pour la quantité de mouvement, les quatre équations pour les contraintes de REYNOLDS, et l'équation de transport du taux de dissipation isotrope ϵ). La discrétisation de ces équations est réalisée par différences finies d'ordre 2, pour une résolution par volumes finis sous forme conservative.

Différents algorithmes de résolution ont été testés. Ils allaient d'une résolution simultanée des différentes équations par une méthode matricielle par blocs, permettant un couplage plus ou moins important des équations, à une résolution individuelle de chacune d'entre elles. Ceci nous a permis de nous assurer que les prédictions sont indépendantes de l'algorithme. Nous avons retenu par la suite la résolution individuelle et successive des différentes équations, pour laquelle le temps de calcul est le plus court.

Nous avons aussi étudié l'influence du maillage sur les prédictions des différents écoulements envisagés afin de se placer dans des conditions où cette influence est négligeable. Typiquement, le maillage était de 181 points en y , répartis symétriquement, avec une croissance exponentielle à partir des parois vers le centre du canal. Le temps de calcul durait environ 1 minute sur un ordinateur PC 386 de fréquence d'horloge de 20 MHz et équipé d'un co-processeur arithmétique.

8.3 Prédiction des écoulements de POISEUILLE:

La base de données en écoulements de POISEUILLE est assez riche. L'étude des mesures (chapitre 6) montre deux groupes de résultats pour les grandeurs turbulentes. Seules les mesures de EL TELBANY et REYNOLDS <2-7> et celles de CLARK <2-5>, qui sont représentatives de chacun de ces deux ensembles, sont utilisées dans cette partie.

Les figures (2-10) et (2-11) comparent les trois modèles à l'expérience n°15 de EL TELBANY et REYNOLDS <2-7>. Les modèles JM et GR sont les plus proches des mesures et donnent des profils de $u^+(y^+)$ similaires, mais GR prédit une zone de transition un peu longue. Le modèle SY surestime la vitesse moyenne dans les deux repères présentés. On ne discerne aucune différence dans les prédictions de la contrainte turbulente de cisaillement \overline{uv} . Elles sont toutes trois en parfait accord avec les mesures expérimentales. La figure (2-11) montre les prédictions de l'énergie turbulente et des trois contraintes de REYNOLDS normales. Les trois modèles sont en accord entre eux et sous-estiment l'énergie turbulente dans la totalité de l'écoulement. Cette défaillance est due essentiellement à la composante longitudinale $\overline{u^2}$. Le modèle GR est le plus proche des mesures expérimentales pour l'ensemble

des profils. C'est aussi lui qui donne la meilleure allure pour la corrélation $\overline{v^2}$ au voisinage des parois mais il donne des pics pariétaux d'énergie turbulente beaucoup plus faibles que les deux autres modèles.

Dans la base de données, un groupe de mesures donne un niveau d'énergie turbulente plus bas. La figure (2-12) montre les profils des trois corrélations normales et de l'énergie turbulente, prédits pour une expérience de CLARK dont le nombre de REYNOLDS est voisin de l'expérience n°15. L'accord entre les prédictions et les mesures est nettement meilleur. Les trois modèles surestiment légèrement l'énergie turbulente au centre du canal, et la sous-estiment dans les régions pariétales. Ce défaut de prédiction semble être imputable principalement à la corrélation $\overline{u^2}$. Les modèles SY et JM surestiment $\overline{v^2}$ et $\overline{w^2}$ au voisinage immédiat des parois solides. C'est le modèle GR qui est le plus près des mesures de ces grandeurs mais il prédit un pic pariétal d'énergie turbulente qui semble faible. Ceci est dû essentiellement à une mauvaise description, commune à tous les modèles, de $\overline{u^2}$ près de la paroi.

MONNIER <1-2> a fait les mêmes constatations pour les modèles $k-\epsilon$. Un modèle aux tensions de REYNOLDS n'améliore pas les prédictions des écoulements de POISEUILLE. Il donne toutefois une information supplémentaire sur la répartition de l'énergie turbulente dans les différentes directions.

REMARQUE:

L'hypothèse de BOUSSINESQ est vérifiée pour les écoulements de POISEUILLE.

8.4 Prédiction des écoulements de COUETTE purs:

La figure (2-13) présente les prédictions des trois modèles pour un écoulement de COUETTE pur (expérience n°1 de EL TELBANY et REYNOLDS). Les trois modèles donnent des profils de vitesse \overline{U} très similaires et légèrement trop turbulents. GR est le plus près de l'expérience. Des remarques identiques à celles de la partie précédente peuvent être faites pour les profils de u^+ . GR et JM surestiment tous deux de 4% la vitesse de frottement pariétale obtenue à partir des expériences. Le modèle de SY donne cette valeur à 1%. Comme pour les écoulements de POISEUILLE, il est impossible de discriminer les modèles sur la base de leur prédiction de la contrainte turbulente de cisaillement \overline{uv} .

La figure (2-14) montre les prédictions obtenues pour l'énergie turbulente et les trois corrélations normales. Les trois modèles surestiment le niveau d'énergie turbulente. C'est la fermeture de SO et YOO qui reproduit le mieux les mesures. GR donne de nouveau des pics pariétaux d'énergie turbulente trop faibles. Cette faiblesse est identique pour les trois contraintes normales. A la différence des écoulements de POISEUILLE, la surestimation du niveau de k est ici principalement due à la

corrélation $\overline{v^2}$. Les trois modèles prédisent trop d'énergie turbulente et trop de redistribution de celle-ci dans la direction normale aux parois. C'est de nouveau GR qui donne le profil de $\overline{v^2}$ le plus proche des mesures dans les régions pariétales. Pour les autres corrélations, ce modèle semble sous-estimer la diffusion turbulente.

Les modèles qui prédisaient une redistribution de l'énergie turbulente en accord avec les mesures de CLARK pour l'écoulement de POISEUILLE, donnent pour l'écoulement de COUETTE pur étudié par EL TELBANY et REYNOLDS une répartition trop importante de cette énergie. Ceci est à comparer à la figure (2-11) qui indiquait déjà pour l'écoulement de POISEUILLE de EL TELBANY et REYNOLDS (expérience n° 15) une redistribution trop forte de l'énergie turbulente de la direction longitudinale vers les directions normale et transversale.

Un retour sur la figure (2-8) montre une nette amélioration de la prédiction du niveau d'énergie turbulente d'un écoulement de COUETTE pur au centre du canal par rapport à un modèle $k - \epsilon$. Mais les pics pariétaux d'énergie turbulente sont de la même importance. Les prédictions des profils de vitesse moyenne obtenues avec un modèle aux tensions de REYNOLDS ou un modèles $k - \epsilon$ sont similaires. Les modèles $k - \epsilon$ surestiment également la vitesse de frottement pariétale.

8.5 Prédictions des écoulements de COUETTE avec gradient de pression:

Les seules mesures que nous possédons pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression sont celles de EL TELBANY et REYNOLDS <2-7> et <2-8>. Ces écoulements peuvent être divisés en trois ensembles (figure (1-18)): Les écoulements de type COUETTE regroupent les expériences n° 2,3,4,5 et 6. Les écoulements de type POISEUILLE sont représentés par les expériences n° 11,12,13 et 14. Les mesures n° 7,8,9 et 10 sont considérées comme des écoulements de type intermédiaire. La vitesse débitante de ce dernier type d'écoulement est très voisine de la vitesse de la paroi mobile (les différences relatives sont inférieures à 15%).

Dans la référence <2-27> SO et YOO soulignent la difficulté à faire converger leur modèle. Les constantes dans la modélisation de la réflexion pariétale de la redistribution, proposées par LAUNDER, REECE et RODI <2-32>, ont été nettement diminuées, afin de permettre la convergence de ce modèle pour les écoulements de POISEUILLE en conduite cylindrique. La forme finale qu'ils ont obtenue, et que nous avons retenue, converge uniquement pour les écoulements de type COUETTE et de type POISEUILLE. Pour les cas intermédiaires (expériences n° 7 à 10) le calcul tend vers une solution sans jamais l'atteindre. Comme l'ont fait SO et YOO pour les écoulements de POISEUILLE, un remède possible est de réduire l'importance de la réflexion pariétale de la redistribution de l'énergie (Il faut totalement annuler ce terme pour prédire l'expérience n° 9 de EL TELBANY et REYNOLDS). Le modèle de SO et YOO est donc inadapté au calcul dans les régions faiblement

turbulentes (qui sont très importantes pour ces écoulements). Comme ces auteurs l'ont remarqué, nous avons constaté pour les écoulements de type POISEUILLE et de type COUETTE que la réflexion pariétale de la redistribution de l'énergie turbulente n'apportait pas grand chose à la qualité des prédictions. Dans ce qui suit nous conservons le modèle de SO et YOO tel quel.

8.5.1 Ecoulements de type COUETTE:

Les figures (2-15) et (2-16) montrent les prédictions obtenues par les trois modèles considérés, pour les expériences n° 3 et 6 de EL TELBANY et REYNOLDS. Les grandeurs turbulentes sont rendues sans dimension par u_τ^* avec $u_\tau^{*2} = u_{\tau 1}^2 + u_{\tau 2}^2$

L'expérience n°3 est encore proche d'un écoulement de COUETTE pur. Les trois modèles donnent des prédictions équivalentes des profils de vitesse moyenne et des grandeurs turbulentes. Les profils d'énergie turbulente calculés surestiment les mesures au centre du canal et sous-estiment celles-ci au voisinage de la paroi basse où l'énergie turbulente est élevée. Ce défaut de prédiction est principalement lié à la composante $\overline{u^2}$ du tenseur de REYNOLDS. Comme pour l'écoulement de COUETTE pur, les modèles prédisent une redistribution trop forte de l'énergie turbulente dans les directions normale et transversale de l'écoulement. C'est toujours GR qui donne les pics pariétaux les plus faibles.

Comparé au profil d'énergie turbulente de la figure (2-9), obtenu à l'aide du modèle $k - \epsilon$ de CHIEN <2-25> pour l'expérience n° 4 de EL TELBANY et REYNOLDS, la prédiction d'un modèle aux tensions de REYNOLDS est meilleure dans toute la partie haute du canal.

L'expérience n° 6 est proche des écoulements intermédiaires. La figure (2-16) laisse apparaître de graves défauts de prédictions pour le modèle SY (celui-ci ne converge pas pour les écoulements intermédiaires). Au voisinage de la paroi haute où le gradient de vitesse moyenne est faible, SY donne une évolution du profil de vitesse avec un creux. Ce qui n'est pas physique. JM a tendance à reproduire le même défaut, mais de manière à peine perceptible. C'est le modèle GR qui donne les meilleures prédictions pour le profil de vitesse moyenne. Celles-ci sont proches des résultats obtenus avec les fermetures au premier ordre. Les trois modèles donnent des prédictions équivalentes de la contrainte de cisaillement \overline{uv} (prédictions non représentées). Ils surestiment légèrement les mesures de EL TELBANY et REYNOLDS au voisinage de la paroi haute, où le gradient de vitesse est faible, mais ils sont en parfait accord avec ces mesures dans le reste de l'écoulement.

Les défauts de prédiction du modèle de SO et YOO apparaissent aussi pour les grandeurs turbulentes. Ce modèle prédit des pics pariétaux trop importants quand l'écoulement est faiblement cisailé. Les autres remarques générales sont identiques à celles de l'expérience n° 3. La prédiction de l'énergie turbulente est meilleure qu'avec les modèles de fermeture au premier ordre.

8.5.2 Ecoulements intermédiaires:

Comme nous l'avons signalé plus haut, le modèle proposé par SO et YOO ne converge pas pour ces écoulements.

La figure (2-17) compare les prédictions obtenues avec JM et GR à l'expérience n° 9 de EL TELBANY et REYNOLDS <2-7> ($U_{moy}/V_b = 0,907$). Les résultats obtenus avec les deux modèles sont très proches. Bien que l'écoulement soit encore de type COUETTE ($U_{max} = V_b$), les deux modèles prédisent déjà un écoulement de type POISEUILLE ($U_{max} > V_b$), mais l'écart entre les calculs et les mesures reste petit. Les prédictions surestiment les mesures de l'énergie turbulente dans la majeure partie de l'écoulement, mais la différence est légère et le pic de k sur la paroi basse semble correct. Les deux modèles diffèrent toutefois quant au niveau des corrélations $\overline{u^2}$ et $\overline{w^2}$ contre la paroi haute: GR prédit plus d'énergie turbulente dans ces deux directions que JM. Les remarques que l'on peut faire sur le niveau d'énergie turbulente et sa répartition sur les trois composantes sont identiques à celles des écoulements de type COUETTE.

Un coup d'oeil sur la figure (2-9) montre que les modèles aux tensions de REYNOLDS améliorent légèrement les prédictions de l'énergie turbulente mais donnent un profil de vitesse moyenne moins bon que le modèle $k - \epsilon$ de CHIEN.

8.5.3 Ecoulements de type POISEUILLE:

La figure (2-18) présente les prédictions obtenues à l'aide des trois modèles SY, JM et GR pour l'expérience n° 13 de EL TELBANY et REYNOLDS <2-7>. Les trois modèles surestiment le profil de vitesse moyenne. C'est SY qui est le plus loin des mesures, mais la vitesse moyenne que l'on obtient avec ce modèle n'est supérieure que de 4,7% à celle mesurée. Les prédictions données pour cet écoulement par le modèle $k - \epsilon$ de CHIEN sont meilleures.

Les trois modèles sous-estiment le niveau de l'énergie turbulente alors qu'ils prédisaient un niveau trop fort pour les écoulements de type COUETTE. Comme les modèles d'ordre inférieur, les modèles de fermeture au second ordre ne reproduisent pas le saut d'énergie turbulente mis en évidence par EL TELBANY et REYNOLDS, lors du passage des écoulements de type COUETTE aux écoulements de type POISEUILLE. Ils donnent de plus les mêmes désaccords avec le profil d'énergie turbulente au voisinage du maximum de vitesse. Cette fois, cette discordance ne peut être attribuée à l'hypothèse de BOUSSINESQ. Comme pour l'écoulement de POISEUILLE pur (fig. (2-11)) les modèles sous-estiment l'énergie turbulente et prédisent une répartition trop avantageuse de celle-ci dans les directions normale et transversale de l'écoulement. Il faut rappeler que ces remarques, faites pour les mesures de EL TELBANY et REYNOLDS, ne sont pas vérifiées pour les mesures de CLARK <2-5> (fig. (2-12)).

8.6 COMPARAISONS ENTRE LES PREDICTION D'UN MODELE $k - \epsilon$ ET CELLES D'UN MODELE AUX TENSIONS DE REYNOLDS:

Avant de tirer des conclusions sur les résultats obtenus, et bien que nous l'ayons déjà fait succinctement dans les paragraphes précédents, comparons les prédictions d'un modèle $k - \epsilon$ avec celle d'un modèle de fermeture au second ordre, sur les expériences de EL TELBANY et REYNOLDS.

Le travail de MONNIER <1-2> a montré que le modèle $k - \epsilon$ de CHIEN <2-25> était performant pour prédire les écoulements étudiés. Nous l'avons donc retenu pour cette comparaison.

L'étude précédente montre que les prédictions des modèles aux tensions de REYNOLDS testés sont similaires. Mais le modèle proposé par SO et YOO ne converge pas pour les écoulements intermédiaires (écoulements faiblement cisailés près de l'une des parois du canal). Les modèles JM et GR diffèrent principalement au voisinage immédiat des parois. JM prédit des pics pour les grandeurs turbulentes plus prononcés que GR. Le haut niveau de ces pics est une des caractéristiques du modèle $k - \epsilon$ de CHIEN. Pour cette raison, cette étude comparative se fait sur la base des résultats obtenus avec le modèle JM.

La figure (2-19) présente les prédictions des profils de vitesse moyenne et d'énergie turbulente obtenues avec les deux types de modèles pour les écoulements de POISEUILLE et de COUETTE pur de EL TELBANY et REYNOLDS <2-7>. Les résultats obtenus par calcul sont très similaires. Les deux types de modèles prédisent correctement les profils de vitesse moyenne des deux écoulements considérés. Mais ils sous-estiment tous les deux l'énergie turbulente mesurée par EL TELBANY et REYNOLDS dans l'écoulement de POISEUILLE. Toutefois, ils sont en accord avec les mesures de CLARK <2-5> et de LAUFER <2-11> qui nous semblent plus réalistes. Le modèle aux tensions de REYNOLDS donne un meilleur niveau d'énergie turbulente de l'écoulement de COUETTE pur que le modèle de CHIEN. C'est la seule différence notable entre les prédictions des écoulements envisagés.

La figure (2-20) montre les mêmes profils pour les expériences n° 3, 9 et 13 de EL TELBANY et REYNOLDS, respectivement représentatives des écoulements de type COUETTE, des écoulements intermédiaires et de ceux de type POISEUILLE. Les remarques générales sont identiques à celles du paragraphe précédent. L'amélioration de la prédiction de l'énergie turbulente mise en évidence pour les écoulements de type COUETTE se fait aussi ressentir pour l'expérience n° 9. Cette amélioration se constate principalement au voisinage de la paroi haute, où le cisaillement moyen de l'écoulement est presque nul. Les modèles aux tensions de REYNOLDS n'apportent pas beaucoup quant à la prédiction des écoulements de type POISEUILLE. L'importante différence entre les mesures de EL TELBANY et REYNOLDS et les calculs des modèles de fermeture au premier ordre n'est donc pas attribuable à l'hypothèse

de BOUSSINESQ. L'utilisation d'un modèle aux tensions de REYNOLDS améliore tout de même la forme du profil de vitesse moyenne de ces écoulements.

8.7 CONCLUSIONS:

Dans le chapitre précédent, on a décrit trois modèles de fermeture au second ordre très différents. Les résultats des calculs réalisés montrent que ces différences n'engendrent pas de variations notables des prédictions pour les écoulements étudiés. Ces différences de modélisation portent essentiellement sur le terme de redistribution de l'énergie turbulente, ainsi que sur la répartition entre les différentes contraintes du taux de dissipation isotrope ϵ au voisinage des parois solides.

L'analyse de l'importance de la redistribution, qualifiée de "rapide", faite dans le chapitre précédent suggérait des répartitions de l'énergie turbulente différentes pour les trois modèles. Les résultats obtenus numériquement montrent que le terme, dit de "retour à l'isotropie", s'oppose fortement à cette redistribution (analogue à de la production). Les modèles prédisent tous le trois une répartition de l'énergie turbulente de l'écoulement qui paraît trop isotrope par rapport aux mesures de EL TELBANY et REYNOLDS <2-7>. Pourtant cette répartition est en accord avec les mesures de CLARK <2-5> dans un écoulement de POISEUILLE.

La répartition directionnelle du taux de dissipation isotrope ϵ ne diffère qu'au voisinage des parois pour les trois modèles étudiés. Cette répartition se combine avec le terme de redistribution de l'énergie turbulente, pour prédire l'anisotropie pariétale de la turbulence. Mais cette caractéristique est difficile à évaluer puisque les différentes fermetures ne prédisent pas le même niveau pour l'énergie turbulente dans ces régions. Les modèles présentés semblent donner une répartition pariétale pour k trop isotrope. C'est GR qui prédit le mieux la corrélation $\overline{v^2}$. Il faut ici souligner le fait que ce modèle a été développé pour le calcul des écoulements à surface libre. Pour ces écoulements, au voisinage de la surface libre, l'anisotropie de la turbulence est plus marquée en défaveur de $\overline{v^2}$ que dans le cas d'une surface solide. GIBSON et RODI <2-31> ont essayé de reproduire ce phénomène. Mais, leur modèle sous-estime fortement l'énergie turbulente k . Cette caractéristique se traduit par des pics pariétaux de $\overline{u^2}$ qui paraissent faibles vis à vis des expériences. Bien que SY (pour les écoulements qu'il prédit correctement) et JM diffèrent fortement par la modélisation de la répartition directionnelle de la dissipation, ils donnent des résultats similaires. Les niveaux des pics pariétaux de l'énergie turbulente sont en accord avec les expériences, mais ces modèles surestiment les pics de $\overline{v^2}$ et de $\overline{w^2}$ au détriment de ceux de $\overline{u^2}$. Les trois modèles prédisent une turbulence pariétale trop isotrope.

Le modèle de GIBSON et RODI contient un terme supplémentaire dans l'équation de transport pour ϵ qui devrait le rendre plus performant pour la prédiction des écoulements intermédiaires. Ce terme, qui correspond à la production de ϵ par les

mouvements turbulents, prend, en effet, tout son intérêt dans les régions faiblement cisillées de ces écoulements. Pourtant, JM donne des profils pour les grandeurs turbulentes plus en accord avec les expériences que GR.

Le modèle complet proposé par SO et YOO ne converge pas pour les écoulements intermédiaires. Ce phénomène est dû au fait que la réflexion pariétale de la redistribution favorise trop les pics pariétaux des grandeurs turbulentes, et principalement le niveau de la contrainte de cisaillement $\bar{u}v$. La fonction d'amortissement qu'ils proposent pour l'ensemble des termes de production de cette contrainte ne convient pas aux écoulements intermédiaires. Pour permettre la convergence du modèle pour ces écoulements, il faut soit diminuer les constantes dans l'influence des parois sur la redistribution de l'énergie, soit augmenter l'amortissement pariétal de la contrainte turbulente de cisaillement. Mais le résultat de ces manipulations donne des pics moins prononcés pour toutes les grandeurs turbulentes.

Parmi les trois modèles présentés, GR nous semble le plus intéressant. C'est le modèle le plus simple. Il représente en effet la redistribution de l'énergie turbulente sous une forme simplifiée qui ne retient que les termes principaux de ce mécanisme. Il ne nécessite aussi l'utilisation que d'une seule fonction d'amortissement. C'est enfin lui qui converge le plus rapidement pour tous les écoulements que nous avons étudiés.

Un analyse comparative des prédictions obtenues à l'aide d'un modèle $k - \epsilon$ et d'un modèle aux tensions de REYNOLDS montre que ce deuxième type de modèle, pourtant plus sophistiqué, n'apporte pas énormément d'améliorations dans les prédictions des écoulements étudiés. La littérature montre que les fermetures au second ordre sont surtout avantageuses pour le calcul d'écoulements complexes comme les écoulements dans les chambres de combustion.

Bien sûr, les fermetures au second ordre donnent des informations supplémentaires sur la turbulence. Elles nous informent sur la répartition de son énergie dans les différentes directions. Cette énergie turbulente joue un rôle très important dans le transport diffusif de grandeurs comme la température ou les ions. La connaissance de sa répartition permet donc de déterminer dans quelle direction ce transport diffusif sera prépondérant. Elle permet aussi d'évaluer la juste importance de ce transport dans la direction normale aux parois, direction qui intéresse particulièrement l'électro-déposition. Mais au stade où en est la recherche dans ce domaine, de telles informations sont encore difficiles à prendre correctement en considération.

Comme on l'a constaté dans la première partie de ce mémoire, l'écoulement n'intervient dans l'équation de transport de la concentration que par les termes de convection et de diffusion turbulente. Un modèle de longueur de mélange, qui prédit correctement le profil de vitesse moyenne, et la diffusion turbulente, convient parfaitement à l'utilisation que nous voulons en faire actuellement pour le calcul de la densité de courant limite. Ces modèles donnent aussi avec une bonne précision (<1-2>) les valeurs des vitesses de frottement sur les deux parois du canal. Ces grandeurs caractérisent totalement l'écoulement au voisinage des parois solides.

Les désaccords, mis en évidence par MONNIER <1-2>, entre les mesures expérimentales de EL TELBANY et REYNOLDS et les prédictions des modèles de fermeture au premier ordre persistent malgré l'utilisation des modèles aux tensions de REYNOLDS.

Ces désaccords interviennent essentiellement pour les écoulements de type POISEUILLE. Les prédictions diffèrent notablement des profils de vitesse moyenne et d'énergie turbulente, au voisinage du point où le cisaillement moyen est nul. A la suite des travaux de MONNIER, deux hypothèses possibles étaient retenues pour expliquer ces différences. L'hypothèse de BOUSSINESQ n'étant pas vérifiée pour ces écoulements, son utilisation pouvait être la cause de ces désaccords. L'autre cause peut être un problème d'établissement de l'écoulement.

Les calculs réalisés avec des modèles aux tensions de REYNOLDS rejettent la mise en cause de l'hypothèse de BOUSSINESQ. Cette hypothèse accentue les différences, mais elle n'en n'est pas totalement responsable. La deuxième hypothèse retenue pour justifier les écarts obtenus nous semble être la cause réelle de ceux-ci. En effet, EL TELBANY et REYNOLDS ont placé à l'entrée de leur veine d'expérience une grille afin de déclencher la turbulence pour que l'écoulement s'établisse plus rapidement. Cette turbulence initiale de grille est à peu près homogène. Son temps de décroissance dépend des caractéristiques de la grille utilisée et de l'écoulement réalisé dans la veine d'expérience. Pour l'écoulement de type POISEUILLE, au voisinage du point où le cisaillement moyen est nul, cette turbulence est convectée à la vitesse maximale de l'écoulement. Elle ne subit que très peu de dissipation visqueuse. Le plateau observé pour les grandeurs turbulentes au voisinage de ce point est probablement un résidu de la turbulence générée par la grille.

Des calculs faits à partir des expériences de EL TELBANY et REYNOLDS appuient cette hypothèse. Les différents profils mesurés ont été lissés et interpolés. Injectés dans l'équation de transport pour l'énergie turbulente k (dans laquelle seule la diffusion turbulente est modélisée), ils permettent d'estimer le taux de dissipation isotrope ϵ . Pour les écoulements de type POISEUILLE, le niveau d'énergie turbulente mesuré au voisinage du maximum de vitesse correspond à un taux de dissipation ϵ négatif. Si nous considérons que la diffusion turbulente est correctement estimée dans cette région, l'énergie turbulente mesurée est alors trop élevée. Mais il serait intéressant de vérifier ceci à l'aide de mesures expérimentales complémentaires.

Il existe une autre discordance entre les prédictions obtenues par les modèles de fermeture au premier ordre et l'expérience, qui persiste quand on utilise des fermetures aux tensions de REYNOLDS. Les différents modèles ne reproduisent pas le saut d'énergie turbulente mise en évidence par EL TELBANY et REYNOLDS lors du passage d'un écoulement de type COUETTE à un écoulement de type POISEUILLE. Cette différence de niveau d'énergie peut être attribuée soit à un changement de la nature de la turbulence entre ces deux écoulements, soit à un problème d'établissement des écoulements, ou alors, comme l'a suggéré MONNIER <1-2>, le nombre de REYNOLDS critique nécessaire pour atteindre l'équilibre local

est peut-être plus élevé pour les écoulements de type COUETTE (la modélisation suppose cet équilibre atteint). Là encore, des mesures complémentaires devraient permettre de mieux cerner la cause des écarts constatés.

Remarque: L'hypothèse du changement de la nature de la turbulence entre les écoulements de type COUETTE et ceux de type POISEUILLE montre l'intérêt des remarques faites à la fin de la partie 7.2.3 du chapitre précédent. Ce changement de nature interviendrait dans un terme complémentaire de la redistribution de l'énergie turbulente, par interactions entre les deux parois constituant le canal. Ce changement de nature est mis en évidence par comparaison des simulations directes d'un écoulement de POISEUILLE et d'un écoulement de COUETTE pur <2-46>. Pour un écoulement de COUETTE pur, il apparaît des structures turbulentes dont la hauteur est celle du canal. Ces structures contiennent environ 30% de l'énergie turbulente. L'influence de telles structures doit aussi intervenir sur le taux de dissipation isotrope ϵ . Mais il faut rappeler que les résultats de simulation directe correspondent à des écoulements à bas nombres de REYNOLDS. Ces remarques sont donc à confirmer pour les écoulements que nous étudions.

De nos jours, les efforts de développement des modèles de fermeture portent essentiellement sur les écoulements pariétaux, en particulier par l'intermédiaire des fonctions d'amortissement. Les résultats de simulation directe, qui sont très riches en informations, sont de plus en plus utilisés. Une des possibilités attractives de l'utilisation de ces résultats est une meilleure compréhension de l'équation de transport pour ϵ . Elle devrait déboucher sur l'amélioration de sa modélisation.

Pour le problème industriel qui nous concerne, les modèles de fermeture au premier ordre donnent donc des résultats suffisamment complets et satisfaisants pour l'application que nous voulons en faire. Dans ce qui suit, tous les résultats présentés sont issus du modèle de longueur de mélange développé par MONNIER pour les écoulements dans les cellules.

Chapitre 9

INFLUENCES DES RUGOSITES DE PAROI

9.1 INTRODUCTION

Dans de nombreuses applications pratiques où l'écoulement turbulent est confiné par une paroi solide, la paroi ne peut pas être considérée comme hydrauliquement lisse. La résistance à l'écoulement du fluide, créée par une paroi rugueuse est beaucoup plus grande que celle d'une surface lisse. L'influence de la rugosité sur l'écoulement augmente avec le nombre de REYNOLDS. Dans les cellules d'électro-zingage, la cathode (tôle d'acier laminée) peut être considérée comme hydrauliquement lisse pour les nombres de REYNOLDS rencontrés. Par contre, l'anode, qu'elle soit soluble ou pas, voit son état de surface évoluer au cours du temps. Cette rugosité augmente la perte de charge dans la cellule, déforme les profils de vitesse et donc les caractéristiques de l'écoulement au voisinage de la tôle. Les travaux de JACOBS, rapportés par CEBECI et SMITH <1-8>, montrent à quel point les grandeurs pariétales varient lors du passage d'une couche limite d'une paroi lisse à une paroi rugueuse. NIKURADSE <2-47> a mesuré la perte de charge des conduites cylindriques rugueuses. Les résultats qu'il a obtenus (fig. 2-21a) montrent que la taille des aspérités de paroi et le nombre de REYNOLDS de l'écoulement agissent sur l'influence que peut avoir cette rugosité. La connaissance des lois de frottement sur paroi rugueuse et leur intégration dans un modèle de turbulence est donc d'un grand intérêt pratique. Les remarques faites dans la conclusion du chapitre précédent, et le fait que nous ne disposons pas d'informations sur l'influence de la rugosité sur la turbulence, font que nous avons limité ce travail au modèle de longueur de mélange établi par MONNIER <1-2> pour le calcul des écoulements de COUETTE avec gradient de pression.

9.2 PRISE EN COMPTE DES EFFETS DE RUGOSITE:

Une difficulté rencontrée lors de l'étude de l'influence de la rugosité provient du nombre de paramètres pouvant décrire les irrégularités de paroi. En effet, il existe une grande diversité de formes géométriques pour les irrégularités de surface, et il est évident que la résistance à l'écoulement d'un fluide, induite par ces irrégularités dépend aussi bien de leur densité de distribution sur la surface, que de leur forme ou de leur taille. HOPF <2-48> a mis en évidence deux types de comportement de la loi de frottement sur paroi rugueuse. Dans le cas d'éléments rugueux de taille et de densité de distribution surfacique importantes, la rugosité cause une perte de charge proportionnelle au carré de la vitesse et donne donc un coefficient de frottement indépendant du nombre de REYNOLDS. Le coefficient de frottement ne dépend alors que d'un seul paramètre: la hauteur relative des aspérités (hauteur des aspérités k sur le diamètre hydraulique R de la conduite). Dans le cas d'éléments rugueux de taille petite et ayant une densité de distribution assez espacée (cas des conduites généralement commercialisées), le coefficient de frottement dépend à la fois de la hauteur relative des aspérités (k/R) et du nombre de REYNOLDS. Cependant les travaux de NIKURADSE <2-47> (fig. 2-21a) montrent qu'un même état de rugosité peut à la fois vérifier les deux comportements cités ci-dessus. Il convient donc de déterminer un paramètre unique permettant de qualifier de façon correcte les différentes rugosités qu'il est possible de rencontrer.

9.2.1 Paramètre de représentation de la rugosité de paroi:

Du point de vue physique, on peut penser que le rapport entre la hauteur des aspérités et l'épaisseur de la couche limite doit être un paramètre déterminant. Plus précisément, les différents comportements que l'on peut rencontrer semblent dépendre de l'épaisseur de la sous-couche visqueuse δ_l plutôt que de l'épaisseur de la couche limite. En effet, il apparaît que si les éléments rugueux sont tous contenus dans la sous-couche visqueuse, ceux-ci n'ont aucun effet sur la perte de charge, et la paroi peut être considérée comme lisse.

D'après les résultats obtenus dans le cas de parois lisses, nous avons $\delta_l = cste \nu/u_\tau$, et de ce fait, le paramètre représentant la rugosité hydrodynamique est:

$$\frac{k}{\delta_l} \# \frac{ku_\tau}{\nu} .$$

Ceci est un nombre de REYNOLDS formé avec la dimension k des éléments de rugosité et la vitesse de frottement u_τ . Les travaux de NIKURADSE <2-47> puis ceux de PRANDTL et SCHLICHTING <2-49> ont permis de mettre en évidence

que ce nombre de REYNOLDS était un paramètre essentiel pour caractériser les phénomènes dus aux irrégularités de surface dans les écoulements.

Toutefois, comme nous l'avons vu précédemment, la taille des éléments de rugosité n'est pas le seul paramètre pouvant intervenir sur la structure de l'écoulement. En effet, la densité de distribution de ces éléments ainsi que leur forme peut influencer l'écoulement. Afin de réduire le nombre de paramètres faisant état de la rugosité à un seul, et afin de pouvoir utiliser les résultats expérimentaux de NIKURADSE comme abaque de référence, de nombreux auteurs ont défini expérimentalement une rugosité "grain de sable" équivalente à la surface rugueuse qu'ils étudiaient. Cette rugosité "grain de sable" équivalente donne les mêmes effets de perte de charge que la surface considérée; effets qui peuvent donc être déduits du diagramme de NIKURADSE (fig. 2-21a). Le paramètre représentatif de l'état d'une surface devient alors: k_s (hauteur moyenne des grains de sable équivalents). Le paramètre hydrodynamique caractérisant les effets des irrégularités de surface sur un écoulement devient le nombre de REYNOLDS $k_s u_\tau / \nu$, noté k_s^+ . On peut citer à titre d'exemple:

	k_s (mm)
surface lisse	0
métal ou bois poli	0,5 à 0,2 10^{-2}
feuille d'acier laminé	0,4 10^{-2}
peinture mate appliquée avec soin	0,6 10^{-2}
peinture standard, application moyenne	10^{-2}
peinture standard, application en masse	3 10^{-2}
acier du commerce ou fer forgé	4 10^{-2}
métal galvanisé	15 10^{-2}
acier coulé	25 10^{-2}
bois	18 à 90 10^{-2}
béton	30 à 300 10^{-2}

9.2.2 Effets de la rugosité sur la perte de charge:

La rugosité de type grain de sable est une bonne représentation des différentes irrégularités que peut présenter la surface d'un objet. Examinons les résultats expérimentaux de NIKURADSE (fig. 2-21a), obtenus dans des conduites de section circulaire, dont les parois internes étaient recouvertes avec une densité aussi forte que possible de grains de sable de taille définie, collés sur celles-ci.

Nous pouvons constater qu'en régime laminaire, quelle que soit la rugosité de la conduite, la perte de charge est celle d'une conduite lisse. Les effets de rugosité ne se font pas sentir en écoulement laminaire. Le nombre de REYNOLDS critique

représentant le point de transition laminaire-turbulent est également insensible à la rugosité. Puis, en régime turbulent, chaque conduite de rugosité donnée suit l'évolution suivante: Dans une première étape, le coefficient de perte de charge est indépendant de la rugosité relative. Le comportement est celui d'une conduite lisse et suit la loi de BLASIUS. La conduite peut être considérée comme étant hydrauliquement lisse. Si on augmente le nombre de REYNOLDS, il apparaît une zone intermédiaire où le coefficient de frottement dépend à la fois de la rugosité relative et du nombre de REYNOLDS. Si l'on augmente encore le nombre de REYNOLDS, le coefficient de perte de charge atteint un palier. Il devient indépendant du nombre de REYNOLDS, et ne dépend plus que de la rugosité relative. (Il augmente avec la rugosité relative). L'écoulement a atteint un régime complètement rugueux.

A partir du nombre de REYNOLDS de rugosité k_s^+ défini précédemment, et des résultats expérimentaux, il est possible de déterminer les frontières de ces différents

régimes: $0 < k_s^+ < 5$: régime hydrauliquement lisse.
 $5 < k_s^+ < 70$: régime intermédiaire.
 $70 < k_s^+$: régime hydrauliquement rugueux.

9.2.3 Effets de la rugosité sur la distribution de vitesse:

Les mesures de NIKURADSE <2-47> ont servi de base aux travaux de PRANDTL-SCHLICHTING <2-49>. Ceux-ci ont remarqué que, dans le cas où la rugosité de paroi se fait sentir, le gradient de vitesse moyenne près des parois est beaucoup plus faible que le long d'une paroi lisse mais que, dans les deux cas, la loi de vitesse déficitaire est vérifiée. Cette constatation leur a permis d'affirmer que les effets de rugosité ne se font sentir que dans la région interne de la couche limite.

Ces auteurs ont également montré que, dans la partie turbulente de la zone interne de la couche limite sur paroi rugueuse, la loi logarithmique est similaire à celle obtenue pour une surface lisse:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$$

où la constante C est fonction de k_s^+ .

En effet, quand on représente les profils de vitesse, obtenus expérimentalement à proximité d'une surface rugueuse, en utilisant les variables de paroi ($u^+ = U/u_\tau$; $y^+ = yu_\tau/\nu$), on remarque qu'ils se situent en dessous de la loi pour une paroi lisse et qu'ils sont parallèles à celle-ci. Cette constatation est très bien illustrée par les résultats de ROBERTSON <2-50> dans le cas d'écoulements de tuyaux à parois rugueuses (fig. 2-21b).

PRANDTL et SCHLICHTING <2-49> ont alors proposé la loi suivante:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{k_s} \right) + B$$

dans laquelle B prend différentes valeurs selon le régime d'influence de la rugosité dans lequel l'écoulement se trouve. A partir des résultats expérimentaux de NIKURADSE, ils ont obtenu la loi de variation du paramètre B représentée sur la figure (2-22a). Ceci met en évidence le fait que, dans le cas du régime hydrauliquement rugueux, B est une constante et vaut 8,5.

Dans la partie de l'écoulement où la contrainte turbulente est maximale, que la paroi soit hydrauliquement lisse ou rugueuse, les profils de vitesse moyenne sont similaires. Il en est de même pour la zone externe de la couche limite. Les effets de la rugosité de paroi interviennent donc uniquement au niveau de la sous-couche visqueuse en déformant celle-ci. Cette déformation se traduit par une augmentation du frottement pariétal et donc une translation de la loi de paroi.

9.3 Prise en compte des effets de rugosité de paroi dans un modèle de longueur de mélange.

Les écoulements turbulents sur paroi lisse vérifient des lois empiriques quasi universelles. Dans la sous-couche visqueuse la loi est:

$$U^+ = y^+$$

Dans la région pleinement turbulente de l'écoulement la loi de paroi est:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C$$

dans laquelle κ et C valent approximativement 0,4 et 5.

Cette seconde loi a conduit PRANDTL à formuler son hypothèse de longueur de mélange l . La capacité du modèle de longueur de mélange de PRANDTL à reproduire les lois de paroi souffrait de la lacune suivante: la constante C dans la loi de paroi restait indéterminée. Ce défaut fut résolu en 1956 par VAN DRIEST <2-51> qui ajouta à la formulation de longueur de mélange de PRANDTL une fonction d'amortissement:

$$D = 1 - \exp\left(\frac{-y^+}{A}\right)$$

La constante A permet de définir l'étendue d'action de la fonction d'amortissement. C'est elle qui fixe le niveau de la loi de paroi. L'utilisation de ce terme correcteur pour la longueur de mélange permet de prédire le profil de vitesse entièrement et de façon très satisfaisante. Cette fonction d'amortissement permet de prendre en compte l'anisotropie croissante des fluctuations turbulentes quand on approche de la paroi et reproduit ainsi la sous-couche visqueuse et la zone de transition.

Le fait que la rugosité de paroi agisse sur le profil de vitesse moyenne en déformant la sous couche visqueuse conduit aux remarques suivantes: La longueur de mélange définie au sens de PRANDTL n'est pas influencée par la rugosité de paroi. Ceci est confirmé par les mesures expérimentales de NIKURADSE <2-47> (fig. (2-21a)). C'est la fonction d'amortissement proposée par VAN DRIEST qui doit prendre en compte la rugosité afin de restituer l'influence de celle-ci sur la forme du profil de vitesse.

Ayant pris conscience du rôle important que pouvait jouer la rugosité sur la forme du profil de vitesse d'un écoulement pariétal, VAN DRIEST proposa une adaptation de sa fonction d'amortissement. Cette adaptation consiste à faire varier la constante A avec le nombre de REYNOLDS rugueux k_s^+ . Puisque, plus l'influence de la rugosité a de l'importance sur l'écoulement, plus la sous-couche visqueuse semble être petite, il proposa de diminuer l'étendue de sa fonction d'amortissement en diminuant la valeur assignée à A quand le nombre de REYNOLDS rugueux augmente. Sa proposition permet de prédire correctement les effets de la rugosité mais malheureusement dans une gamme assez limitée. En effet, pour prédire un écoulement pour lequel le nombre de REYNOLDS rugueux vaut 60, la constante d'amortissement A doit tendre vers zéro. De ce fait, au dessus de $k_s^+ = 60$, sa formulation n'est plus capable de décrire les effets de la rugosité sur le profil de vitesse.

Afin de pouvoir étendre le calcul à des nombres de REYNOLDS rugueux plus élevés, différents chercheurs ont proposés des termes complémentaires au modèle de longueur de mélange de PRANDTL-VAN DRIEST. Les termes ajoutés à la longueur de mélange rendent celle-ci non nulle à la paroi. La viscosité turbulente et la contrainte turbulente \overline{uv} ainsi obtenues ne vérifient plus la condition d'adhérence à la paroi. Ce qui rend très contestable les bases physiques de ce type de modèles.

Une autre modélisation est proposée par ROTTA <2-52>. Ce modèle est décrit par CEBECI et SMITH <1-8>. ROTTA suppose que les effets de la rugosité sur le profil de vitesse reviennent à effectuer un saut à travers la sous-couche visqueuse par rapport à un écoulement sur paroi lisse. Le profil de vitesse sur paroi rugueuse peut donc être déduit du profil sur paroi lisse en effectuant un changement de repère comme l'indique la figure (2-22b). Ce changement de repère revient à déplacer la

paroi solide d'une distance Δy vers l'extérieur de l'écoulement et d'une distance ΔU dans la direction opposée à l'écoulement. Il est ensuite possible de démontrer que ce changement de repère est équivalent au remplacement de l'ordonnée y , intervenant dans la formulation de la longueur de mélange, par $y + \Delta y$, où Δy est une fonction de la rugosité grain de sable équivalente:

$$\frac{\Delta y \cdot u_\tau}{\nu} = 0,9 \left[\sqrt{k_s^+} - k_s^+ \exp\left(\frac{-k_s^+}{6}\right) \right] \quad (9.1)$$

L'idée de ROTTA est basée sur le fait qu'au sommet des aspérités la vitesse moyenne dépend fortement des conditions au fond des interstices. Le décalage de la longueur de mélange rend celle-ci non nulle à la paroi. De ce fait, ce modèle ne vérifie pas la condition de nullité de la viscosité turbulente et de la contrainte de cisaillement \overline{uv} à la paroi.

Une autre adaptation est proposée par HAN <2-53>. Celui-ci utilise la loi de paroi pour montrer que la longueur de mélange de PRANDTL $l = K * y$ peut être exprimée en fonction de la vitesse moyenne. En effet, la loi de paroi s'écrit:

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C = \frac{1}{\kappa} \ln (E y^+)$$

De ce fait, dans cette région de l'écoulement, on a:

$$y^+ = \frac{1}{E} \exp(\kappa U^+)$$

Ce qui permet d'obtenir:

$$l^+ = \frac{K}{E} \exp(\kappa U^+)$$

A cette formulation, HAN propose d'ajouter un terme permettant à la fois de jouer le rôle de fonction d'amortissement, et de vérifier la condition d'annulation de la longueur de mélange sur la paroi. Cette condition impose à la contrainte turbulente d'être nulle sur la paroi. HAN <2-53> a proposé différentes formulations pour son modèle. D'après les résultats qu'il a obtenus, voici l'expression qui paraît la plus judicieuse:

$$l^+ = \frac{K}{E} \left[\exp(\kappa U^+) - \exp(-\kappa U^+) \right] \quad (9.2)$$

L'application de son modèle au calcul d'écoulements sur paroi rugueuse est basée sur la remarque suivante: la formulation précédente, appliquée à la région de l'écoulement où la contrainte turbulente est maximale et où la loi de paroi est vérifiée, se simplifie pour donner:

$$l^+ = \frac{K}{E} \exp(\kappa U^+)$$

Dans cette équation le terme dans l'exponentielle représente la pente de la loi de paroi; et le terme devant l'exponentielle est la constante qui fixe le niveau de cette loi. Han <2-53> propose de prendre en compte les effets de rugosité en permettant au coefficient multiplicateur K d'être fonction du nombre de REYNOLDS rugueux k_s^+ . Les prédictions obtenues avec ce type de modèle sont en bon accord avec les différents résultats expérimentaux <2-53>.

9.4 Application aux cellules d'électro-déposition:

MONNIER <1-2> a montré qu'une longueur de mélange de type polynomial à coefficients constants n'est pas apte à prédire correctement les écoulements dans les cellules. Il a donc développé, à partir des caractéristiques de ces différents écoulements, un modèle de longueur de mélange de type polynomial dont les coefficients sont fonction de certaines caractéristiques de l'écoulement considéré. Ce modèle s'écrit:

$$\frac{l}{h/2} = \left[\alpha_0 - \alpha_1 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^4 - \alpha_2 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^6 \right] \left[1 - \exp\left(\frac{-Y}{\nu A^+} \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho}}\right) \right] \quad (9.3)$$

avec

$$Y = \min(y; h - y); \quad A^+ = 30; \quad \frac{\tau}{\rho} = (\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{U}}{\partial y}$$

et

$$\alpha_0 = 0,14 + 0,07 \exp\left(\frac{-|B_x|}{630}\right); \quad B_x = \frac{-h^2}{\mu V_b} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x}$$

$$A = 2,5; \quad \alpha_1 = \frac{0,5}{A} - 3\alpha_0; \quad \alpha_2 = 2\alpha_0 - \frac{0,5}{A}$$

Cette formulation donne des résultats très satisfaisants pour l'ensemble des écoulements étudiés.

Selon les états de surface des électrodes, et selon le type d'écoulement, peuvent intervenir des effets de rugosité de paroi. Il convient donc de qualifier les rugosités relatives et d'inclure les effets qu'elles peuvent avoir sur le profil de vitesse dans le canal. La cathode en acier laminé a une rugosité relative très petite, et de ce fait, elle peut être considérée comme hydrauliquement lisse pour la plupart des écoulements industriels. L'anode, quant à elle, a un état de surface généralement beaucoup plus rugueux. Pour des écoulements avec nombre de REYNOLDS élevé, elle peut créer un régime rugueux. Dans ce cas, le frottement pariétal sur cette électrode sera important. Le fluide ayant plus de facilité à passer dans la région cathodique, le profil de vitesse sera déformé par rapport à un écoulement s'effectuant entre parois hydrauliquement lisses. Une des conséquences de cette rugosité anodique va donc être une élévation de la vitesse de frottement cathodique; paramètre qui influence directement la qualité du dépôt métallique. Il convient donc de pouvoir prendre en compte de façon correcte les effets de rugosités.

9.4.1 Prise en compte des effets de rugosité au sens de ROTTA dans le modèle de longueur de mélange de MONNIER:

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, l'utilisation du modèle de ROTTA <2-52> revient à effectuer une translation Δy dans la formulation de la longueur de mélange, avec Δy donné par la formule (9.1). Ceci a pour effet de prédire un frottement turbulent pariétal non nul ($\overline{uv} \neq 0$ sur la paroi solide). Se pose alors un problème de définition de la vitesse de frottement. En effet, deux solutions sont possibles. Soit on choisit une formulation qui ne tient compte que du frottement pariétal visqueux:

$$u_\tau = \sqrt{\left| \nu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right|_{y=0}} \quad (9.4)$$

Soit on prend également en compte le frottement turbulent:

$$u_\tau = \sqrt{\left| \nu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \overline{uv} \right|_{y=0}} \quad (9.5)$$

Dans le cas où les rugosités des deux parois formant le canal sont différentes; se pose un problème de continuité de la longueur de mélange au centre du canal. Etant donné la faible discontinuité due à Δy par rapport à la taille du maillage dans cette région, ce problème est négligé. En effet, pour un écoulement à la vitesse débitante de 10 m/s, dans un canal de hauteur 5 mm avec un fluide de viscosité cinématique de 10^{-6} m²/s, quelle que soit la définition choisie pour la vitesse de frottement, la

discontinuité sera de l'ordre 10^{-4} devant des termes d'ordre de grandeur unité au centre du canal.

Deux modèles sont proposés. Un premier modèle, noté (1), utilisant la longueur de mélange de MONNIER <1-2> avec le décalage

$$\Delta y = \frac{0,9\nu}{u_\tau} \left[\sqrt{k_s^+} - k_s^+ \exp\left(\frac{-k_s^+}{6}\right) \right] \quad (9.6)$$

où la vitesse de frottement est définie par l'équation (9.4).

Le second modèle, noté (2) utilise la même longueur de mélange avec le décalage

$$\Delta y = \frac{0,92\nu}{u_\tau} \left[\sqrt{k_s^+} - k_s^+ \exp\left(\frac{-k_s^+}{6}\right) \right] \quad (9.7)$$

dans lequel la vitesse de frottement est donnée par l'équation (9.5). Le coefficient multiplicateur de la relation (9.7) doit être augmenté à 0.92 pour éviter une surestimation de la vitesse.

9.4.2 Prise en compte des effets de rugosité au sens de HAN dans le modèle de longueur de mélange de MONNIER:

Dans ces travaux, HAN <2-53> a montré qu'il était facile de prendre en compte les effets de rugosité de paroi dans sa formulation en permettant au coefficient multiplicateur K de varier avec le nombre de REYNOLDS rugueux.

Insérer la proposition de HAN dans le modèle de longueur de mélange de MONNIER peut être fait de la façon suivante: L'équation (9.2) contient une fonction d'amortissement pariétale pour reproduire les effets de la sous-couche visqueuse. Le terme d'amortissement dans le modèle de MONNIER (équation (9.3)) n'est donc plus nécessaire. La formulation de longueur de mélange à utiliser est donc la suivante:

$$\frac{l}{h/2} = \alpha_0 - \alpha_1 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^4 - \alpha_2 \left(1 - \frac{y}{h/2}\right)^6 \quad (9.8)$$

avec

$$y = \frac{\nu K}{u_\tau E} \left[\exp(\kappa U^+) - \exp(-\kappa U^+) \right]; \quad K = f(k_s^+)$$

et

$$\alpha_o = 0,14 + 0,07 \exp\left(\frac{-|B_x|}{630}\right); \quad B_x = \frac{-h^2}{\mu V_b} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x}$$

$$\kappa = 0,4; \quad \alpha_1 = 0,5\kappa - 3\alpha_o; \quad \alpha_2 = 2\alpha_o - 0,5\kappa$$

La vitesse de frottement est donnée par l'équation(9.4).

La variation du coefficient multiplicateur K avec le nombre de REYNOLDS rugueux est donnée dans la référence <2-53> pour la rugosité grain de sable de NIKURADSE, ainsi que pour des états de surface plus couramment rencontrés: ceux dus aux processus de fabrication, à l'érosion,...: rugosité au sens de MOODY <2,54> (fig. (2-23a)) ou de COLEBROOK et WHITE <2-55>. La figure (2-23b) montre l'évolution du coefficient multiplicateur K en fonction des deux types de rugosité. Ces deux types sont en accord pour les nombres de REYNOLDS rugueux supérieurs à 70; cas du régime hydrauliquement rugueux. En dessous de cette valeur, les différences obtenues sur K sont assez importantes. Les mesures faites par MOODY ou COLEBROOK et WHITE ne permettent pas la distinction des différents régimes hydrodynamiques en fonction du nombre de REYNOLDS rugueux. Ceci doit être lié à l'évaluation du nombre de REYNOLDS rugueux pour leurs expériences. En effet, COLEBROOK et WHITE ont utilisé une rugosité faite de grains de sable de tailles mélangées, collés sur les parois des conduites étudiées, afin d'obtenir un état de surface aléatoire proche des états de surface rencontrés dans les conduites commercialisées. Définir la rugosité grain de sable équivalente (taille moyenne des grains) est alors assez difficile. Il est clair que la taille moyenne peut correspondre à un régime hydrauliquement lisse alors que les gros grains vont induire une rugosité hydrodynamique non négligeable.

Pour rester en accord avec ce qui précède, nous allons garder comme paramètre représentant l'état de surface: la rugosité grain de sable équivalente, et nous allons utiliser l'évolution du coefficient multiplicateur K avec le nombre de REYNOLDS rugueux obtenu à partir des mesures de NIKURADSE. La courbe représentée figure (2-23b) peut être formulée de façon approximative par:

$$- \text{ pour } 0 < k_s^+ < 10; \quad K = 0,01125k_s^{+2} - 0,0125k_s^+ + 1$$

$$- \text{ pour } 10 < k_s^+ < 100; \quad K = 5(k_s^+ - 4)/16$$

$$- \text{ pour } 100 < k_s^+; \quad K = 0,3036k_s^+$$

Dans le cas d'un canal formé de deux parois de rugosités différentes, comme pour le modèle de ROTTA, se pose le problème de continuité de la longueur de mélange au centre du canal. En effet, les deux coefficients multiplicateurs sont différents. Ce problème de discontinuité est beaucoup plus important pour le modèle de HAN que pour le modèle de ROTTA. Il n'est pas négligeable. Toutefois, cette discontinuité

aura très peu d'incidence sur le profil de vitesse. En effet, la longueur de mélange n'est plus fonction de la distance à la paroi mais elle est explicitée en fonction de la vitesse moyenne. La résolution numérique de l'équation différentielle pour la vitesse moyenne va donc donner un profil continu au détriment de celui de la longueur de mélange. De plus, nous nous intéressons plus particulièrement aux régions pariétales, régions pour lesquelles ce problème de discontinuité localisé au centre de l'écoulement, aura peu d'influence. Le modèle au sens de HAN est appelé modèle (3).

9.4.3 Résultats:

Pour valider les prédictions des trois modèles présentés, nous les avons testés sur les résultats expérimentaux de NIKURADSE <2-47> (fig. (2-21a)). Il s'agit d'écoulements de POISEUILLE en conduite cylindrique. Le coefficient de perte de charge d'une conduite dépend à la fois de la géométrie de sa section et du nombre de REYNOLDS caractéristique de l'écoulement (<1-4> pp 613). Mais quelle que soit la section de la conduite, l'évolution du coefficient de perte de charge avec le nombre de REYNOLDS est identique (pour un écoulement de POISEUILLE). La géométrie de la section n'influence ce coefficient que par une différence de niveau de celui-ci. Ceci a été vérifié pour les mesures appartenant à notre base de données. Nous avons obtenu un coefficient de perte de charge qui suit la même évolution mais qui est inférieur de 10% à celui d'une conduite cylindrique lisse.

Pour un canal plan de hauteur h , avec l'utilisation de l'hypothèse de BOUSSINESQ, l'équation de quantité de mouvement d'un écoulement de POISEUILLE s'écrit :

$$\frac{d}{dy} \left[(\nu + \nu_t) \frac{d\bar{U}}{dy} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x}$$

Le repère utilisé est défini sur la figure (1-17). L'intégration de cette équation différentielle de la paroi basse à l'ordonnée courante y conduit à:

$$(\nu + \nu_t) \frac{d\bar{U}}{dy} = u_\tau^2 \left(1 - \frac{2y}{h} \right) \quad (9.9)$$

Pour une conduite cylindrique de rayon R à parois lisses, l'équation de quantité de mouvement s'écrit:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r (\nu + \nu_t) \frac{d\bar{U}}{dr} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x}$$

L'abscisse x est toujours dans le sens de l'écoulement. L'ordonnée r est normale à l'axe de la conduite, son origine se situe sur cet axe. L'intégration de cette équation de l'axe à l'ordonnée courante r donne:

$$(\nu + \nu_t) \frac{d\bar{U}}{dr} = -u_\tau^2 \frac{r}{R} \quad (9.10)$$

Le changement de variable $\frac{r}{R} = \left(1 - \frac{2y}{h}\right)$ où $h = 2R$ dans l'équation (9.10) permet de se placer dans le repère cartésien précédent. Ce changement de variable conduit à l'équation (9.9). Le modèle établi par MONNIER convient donc au calcul de l'écoulement de POISEUILLE en conduite cylindrique.

Nous avons constaté que le décalage du niveau du coefficient de perte de charge, entre un canal plan et une canalisation cylindrique, peut être pris en considération dans les modèles qui tiennent compte de la rugosité au sens de ROTTA, en diminuant la constante A^+ (équation (9.3)) de la fonction d'amortissement à 20 (pour les canaux plans, elle vaut 30). Dans le modèle qui tient compte de la rugosité au sens de HAN (équation (9.8)), le niveau du coefficient de perte de charge est obtenu pour les écoulements de conduite cylindrique en fixant la valeur de la constante E à 7,38.

Ces deux changements ont été déterminés à partir des mesures de NIKURADSE, effectuées pour des écoulements en conduites cylindriques lisses (Loi de BLASIUS sur la figure (2-21a)). La confrontation des prédictions que nous avons obtenues à partir des trois modèles présentés avec la loi de BLASIUS a montré que les modèles (1) et (2) dits "de ROTTA" suivent cette loi avec des écarts inférieurs à 1,5%. Le modèle (3) dit "de HAN" s'écarte davantage de la loi de BLASIUS. Les différences peuvent atteindre 5%. Les écarts sont dus à une sous-évaluation du coefficient de perte de charge pour une vitesse débitante donnée. Les différents modèles présentés prédisent assez bien le coefficient de perte de charge des conduites cylindriques lisses. Les modèles au sens de ROTTA, qui sont dans ce cas identiques au modèle de MONNIER, donnent les meilleures prédictions.

Nous avons ensuite testé les trois modèles sur les expériences de NIKURADSE pour différents nombres de REYNOLDS et différentes rugosités "grain de sable". Les écarts relatifs entre les prédictions et les expériences, obtenus sur la vitesse débitante sont représentés dans le tableau suivant:

Conditions expérimentales			écarts relatifs $\Delta U_{moy}/U_{moy}$		
$U_{moy} (m/s)$	$\frac{R}{k_s}$	λ	modèle (1)	modèle (2)	modèle (3)
5	625	0,025	0,006	0,006	0,047
10	14,7	0,061	0,050	0,070	0,069
5	14,7	0,06	0,000	0,064	0,070
2,5	14,7	0,054	0,004	0,0092	0,021
1,5	14,7	0,05	0,0093	0,0093	0,010
10	10	0,0725	0,060	0,100	0,088
5	10	0,0725	0,028	0,086	0,084
2,5	10	0,07	0,0012	0,064	0,064
1,5	10	0,066	0,020	0,033	0,039

Les trois rugosités relatives ($\frac{k_s}{R}$) testées correspondent respectivement à de l'acier laminé, à de l'acier galvanisé et à de l'acier coulé. Les résultats reportés dans ce tableau appartiennent aussi bien au régime rugueux qu'au régime intermédiaire.

Le modèle (1) de ROTTA donne les meilleures prédictions des écoulements de POISEUILLE en conduite cylindrique rugueuse. Les écarts entre les prédictions de la vitesse débitante et les expériences de NIKURADSE <2-47> sont tous inférieurs à 6%. Ils atteignent 10% pour les deux autres modèles. La tendance générale des écarts est une surestimation de la vitesse débitante U_{moy} . Les écarts entre les prédictions et les mesures augmentent avec le nombre de REYNOLDS de l'écoulement et avec la rugosité relative k_s/R . Les prédictions obtenues avec les trois modèles testés montrent qu'ils sont tous les trois aptes au calcul d'écoulements le long d'une paroi rugueuse. Ils peuvent être utilisés pour les cellules d'électro-déposition.

Pour appliquer les modèles aux cellules d'électro-déposition qui ont un canal plan, il faut rétablir le niveau du coefficient de perte de charge λ en fonction du nombre de REYNOLDS de l'écoulement. Pour les modèles (1) et (2) de ROTTA, il suffit de reprendre la constante $A^+ = 30$ déterminée par MONNIER <1-2> pour ces écoulements. Pour le modèle (3) de HAN, une optimisation numérique sur les écoulements de notre base de données conduit à fixer la valeur de E à 9.

Considérons en premier lieu, le cas d'une cellule de type "carte postale". Dans ces cellules, les deux électrodes sont fixes. La cathode est en acier laminé et donc hydrauliquement lisse. L'anode est en plomb et on suppose que son état de surface est équivalent à celui de l'acier galvanisé ($k_s = 0,25 \text{ mm}$). On se place dans le cas d'un canal de hauteur 5 mm; l'écoulement du fluide de viscosité cinématique de $0,55 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ se fait à la vitesse débitante de 5 m/s. La figure (2-24) présente les profils de vitesse moyenne obtenus avec les trois modèles et les compare aux résultats donnés par le modèle de longueur de mélange de MONNIER quand on néglige les effets de la rugosité anodique. Les prédictions obtenues avec les trois

modèles de rugosité sont similaires. Le profil de vitesse se décale vers la cathode sur laquelle le frottement pariétal est plus petit. Il s'ensuit une élévation de la vitesse de frottement sur cette électrode de l'ordre de 10% par rapport au calcul fait en considérant l'anode lisse. Les trois modèles prédisent également une élévation de la perte de charge locale de 68% par rapport à un canal totalement lisse. Les différences entre les prédictions des trois modèles sont petites. Elles sont inférieures à 1% pour la vitesse de frottement cathodique et inférieures à 5% pour la perte de charge totale.

La figure (2-25) montre l'application des modèles de rugosité pour un écoulement de cellule industrielle. Les conditions de fonctionnement de la cellule correspondent à une vitesse de ligne de 120 *m/min*. Le fluide de viscosité cinématique de $0,55 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ circule à la vitesse débitante de 3 *m/s* dans un canal de hauteur 8 *mm* formé par les électrodes. De nouveau, on considère la cathode hydrauliquement lisse et on attribue à l'anode une rugosité équivalente à celle de l'acier galvanisé. On compare les prédictions obtenues avec les trois modèles de rugosité aux calculs réalisés dans une cellule ayant les mêmes conditions de fonctionnement et supposée lisse. La déformation du profil de vitesse moyenne est analogue à celle de la carte postale: plus de débit passe du côté de la cathode. Mais ceci n'induit qu'une élévation de la vitesse de frottement cathodique de l'ordre de 4%. Pourtant, les prédictions indiquent une perte de charge dans le canal qui est de 33% supérieure à celle obtenue en considérant l'anode lisse. De nouveau, les résultats obtenus avec les trois modèles sont très proches. Les écarts sur la vitesse de frottement cathodique sont négligeables; ceux obtenus pour la perte de charge sont inférieurs au pourcent.

L'influence de la rugosité est plus importante dans la carte postale que dans une cellule industrielle. Tenir compte ou négliger les effets de rugosité de l'anode dans une cellule industrielle influence très peu la vitesse de frottement cathodique obtenue par calcul. Les modèles de turbulence utilisés dans les chapitres précédents donnent donc une bonne estimation de cette grandeur. Les résultats obtenus montrent que, comme on l'a supposé, on peut négliger les discontinuités des modèles dans la zone centrale de l'écoulement, quand celui-ci a lieu entre deux parois de rugosités différentes.

9.5 CONCLUSION:

Les états de surface des différents corps solides intervenant dans un écoulement turbulent peuvent avoir une influence importante sur la structure de l'écoulement envisagé. Ceci se fait sentir entre autre par une modification de la forme du profil de vitesse et une élévation du coefficient de frottement pariétal par rapport au cas de solides à surface hydrauliquement lisse. La connaissance des lois de frottement sur les surfaces rugueuses est donc d'un grand intérêt pratique. Etant donné la diversité des états de surface que l'on peut rencontrer, une première étape consiste

à qualifier la rugosité par un paramètre unique. Ceci peut être fait en définissant une rugosité grain de sable équivalente à l'état de surface considéré; puis en formant avec la dimension caractéristique de cette rugosité, un nombre sans dimension: le nombre de REYNOLDS rugueux k_s^+ .

De précédentes études ont montré que ce paramètre convenait très bien pour la description des effets de rugosité dans un écoulement de canal ou sur plaque plane. Elles ont permis l'établissement d'abaques et de lois de frottement empiriques permettant de déterminer le coefficient de frottement pariétal. Elles ont également mis en évidence l'incidence qu'a l'état de surface sur la loi de paroi pour le profil de vitesse. Il s'en est suivi une série de travaux dont le but était de déterminer le profil de vitesse sur paroi rugueuse de façon empirique ou par modélisation de type longueur de mélange. Nous avons choisi deux modèles établis pour les écoulements sur plaque plane rugueuse: celui de ROTTA <2-52> et celui de HAN <2-53>; que nous avons adaptés aux écoulements de conduite cylindrique et aux écoulements de canal plan à paroi mobile. L'adaptation a été faite à partir de la formulation de longueur de mélange de MONNIER <1-2>. Les résultats obtenus avec ces deux modélisations des effets de la rugosité sont corrects, aussi bien pour le profil de vitesse quand on se fixe la perte de charge, que pour le coefficient de perte de charge quand on se fixe la vitesse débitante. Les trois modèles testés sont en accord entre eux. Il faut toutefois signaler des défauts de continuité de la longueur de mélange au centre du canal formé par des parois de rugosités différentes.

Ces différents modèles sont donc aptes à l'évaluation des caractéristiques des différents écoulements que l'on peut rencontrer dans les cellules d'électro-déposition, que les parois soient lisses ou rugueuses. Dans les problèmes généralement rencontrés dans l'industrie, la cathode est une feuille d'acier laminé. Les conditions hydrodynamiques imposées sont telles que l'on peut toujours considérer cette électrode comme étant lisse. Par contre, l'anode peut avoir un état de surface qui la rende hydrauliquement rugueuse. Les effets de cette rugosité anodique vont être une élévation de la perte de charge ainsi qu'une déformation du profil de vitesse par rapport au canal lisse. Cette déformation va induire une vitesse de frottement cathodique plus élevée et donc des conditions électro-chimiques différentes de celles obtenues en négligeant l'influence de la rugosité. En effet, des caractéristiques électro-chimiques comme l'épaisseur de la couche de diffusion ionique, ou la densité de courant limite dépendent directement de la vitesse de frottement cathodique. Il est donc important de pouvoir prendre en compte les effets des états de surface afin d'estimer la répercussion que peuvent avoir ceux-ci sur le dépôt cathodique que l'on désire réaliser.

Part III

**MODELISATION
ELECTROCHIMIQUE.**



Chapitre 10

FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME ELECTROCHIMIQUE

10.1 Introduction:

Les simplifications proposées dans la première partie ont montré que l'on peut résoudre dans un premier temps les équations pour l'écoulement sans prendre en compte les phénomènes électro-chimiques. Il est alors possible, à partir des résultats obtenus, de résoudre l'équation de transport pour l'espèce chimique considérée:

$$U_j \frac{\partial C}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) \quad (10.1)$$

La résolution de cette équation simplifiée permet uniquement de connaître, en fonction de la condition à la paroi, le profil de concentration. Dans le cas de la densité de courant limite de diffusion, la condition sur la cathode est l'annulation de la concentration. Nous avons alors:

$$\delta = \frac{C_\infty}{\left. \frac{\partial C}{\partial x_j} \right|_{y=0}}; \quad J_{lim} = \frac{zFDC_\infty}{\delta}$$

Il est également possible de calculer à partir du profil de concentration l'épaisseur δ_{95} : distance de la cathode à laquelle la concentration vaut 95% de la concentration au loin.

Deux types d'écoulements sont étudiés. Les écoulements de POISEUILLE (écoulements rencontrés dans les cellules de laboratoire) et les écoulements de COUETTE avec gradient de pression (écoulements des cellules industrielles). Les lois de variation obtenues dans ces deux cas permettent de transposer les résultats expérimentaux de laboratoire aux cellules industrielles. Les écoulements sont supposés établis et par droites parallèles entre deux parois formées par les électrodes. On néglige les dégagements gazeux.

Bien que les écoulements rencontrés dans les cellules industrielles soient turbulents, nous nous sommes également intéressés aux cas des écoulements laminaires. Pour ces écoulements, il est possible de comparer les résultats numériques à des solutions analytiques des équations.

10.2 Domaine et procédé de calcul:

Pour résoudre l'équation pour la concentration, nous nous sommes placés dans le cas de deux électrodes planes, parallèles et infinies, distantes d'une hauteur h . Nous avons supposé l'écoulement permanent et établi entre les deux électrodes. La réaction s'effectuant sur la cathode (électrode supérieure).

A l'entrée du domaine de calcul, défini par la zone où se produit l'électrolyse, la concentration est uniforme et égale à la concentration moyenne C_∞ . Nous avons limité le domaine de calcul à une zone de hauteur de l'ordre de $h/10$ à partir de la cathode (l'épaisseur de la couche limite de diffusion étant très petite, cette zone s'est avérée de taille suffisante pour la contenir dans son intégralité). Ceci nous a évité de mailler le centre du canal où, comme nous l'avons vu, tous les termes de l'équation (10.1) s'annulent. Nous avons choisi un maillage à variation exponentielle dans le sens de l'écoulement ainsi que de la cathode vers le centre du canal. L'origine des ordonnées est prise sur la cathode, son axe est dirigé vers l'intérieur du canal. nous avons vérifié l'indépendance des résultats vis à vis du maillage.

Pour chaque écoulement testé, nous avons fait varier les différents paramètres intervenants dans le problème. La figure (3-1) montre les évolutions de δ et δ_{95} à l'abscisse $x = 0,006m$ en fonction de la vitesse de déplacement de la cathode, pour un écoulement laminaire. Les évolutions en fonction des autres paramètres sont similaires. Nous avons donc recherché des lois de variation en puissance.

10.3 Ecoulements laminaires:

10.3.1 Equation pour la quantité de mouvement.

Pour les écoulements laminaires entre deux plaques planes parallèles avec les hypothèses de la lubrification, les équations du mouvement se résument à:

$$\nu \frac{d^2 U}{dy^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x}$$

L'intégration de cette équation par rapport à y conduit à un profil de vitesse parabolique. L'application des conditions suivantes:

- $y = 0$: $U = V_b$

- $y = h$: $U = 0$

- et

$$\int_0^h U dy = h U_q$$

(U_q étant la vitesse débitante)

conduit à:

$$U = 3(V_b - 2U_q) \frac{y^2}{h^2} + 2(3U_q - 2V_b) \frac{y}{h} + V_b \quad (10.2)$$

10.3.2 Equation pour la concentration.

Avec les hypothèses formulées, l'équation pour la concentration se réduit à:

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right)$$

Une analyse des ordres de grandeur des différents termes montre que la diffusion longitudinale peut être négligée. Cette hypothèse a également été vérifiée en résolvant l'équation avec ou sans la diffusion longitudinale.

Pour résoudre cette équation, il est intéressant d'effectuer le changement de variable $\theta = \frac{C_\infty - C}{C_\infty}$; l'équation devient alors:

$$U \frac{\partial \theta}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (10.3)$$

avec les conditions aux frontières suivantes:

$x < 0, \forall y$:	$C = C_\infty; \theta = 0$
$x > 0, y = h$:	$C = C_\infty; \theta = 0$
$x > 0, y = 0$:	$C = 0; \theta = 1$

10.4 Ecoulements turbulents:

10.4.1 Equations pour la quantité de mouvement:

Dans le cas des écoulements envisagés, en régime turbulent, les équations pour la quantité de mouvement se réduisent à:

$$\frac{d}{dy} \left(\nu \frac{d\bar{U}}{dy} \right) - \frac{d}{dy} (\overline{uv}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x}$$

Au voisinage de la cathode, les évolutions des différentes caractéristiques de l'écoulement sont directement reliées à la vitesse de frottement sur la paroi, et donc à la contrainte de cisaillement. Une modélisation de type longueur de mélange permet de prédire correctement ces grandeurs et s'avère suffisante pour l'étude que nous voulons faire. Le modèle retenu est celui proposé par MONNIER <1-2>. Les équations à résoudre sont:

$$\frac{d}{dy} \left[(\nu + \nu_t) \frac{d\bar{U}}{dy} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x}$$

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{d\bar{U}}{dy} \right|$$

avec la formulation pour la longueur de mélange donnée par l'équation (9.3). Les conditions sur les frontières du domaine sont les conditions d'adhérence.

10.4.2 Equation pour la concentration de l'ion zinc.

Par analogie aux résolutions de bilans thermiques en écoulements turbulents, nous pouvons appliquer la décomposition de REYNOLDS: $C = \bar{C} + c$ et $U = \bar{U} + u$. Il vient:

$$\bar{U}_j \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j c})$$

L'application de cette équation aux écoulements entre deux électrodes planes et parallèles avec les hypothèses de la lubrification donne:

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{uc}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{vc})$$

Pour analyser les ordres de grandeur des différents termes, posons:

- L : longueur caractéristique suivant x
 l : longueur caractéristique suivant y
 V : vitesse moyenne caractéristique suivant x
 u' : vitesse turbulente caractéristique suivant x
 v' : vitesse turbulente caractéristique suivant y
 C : concentration moyenne caractéristique
 c' : fluctuations de concentration

L'équation précédente nous donne alors:

$$\underbrace{U \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}} - \frac{VC}{L} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} \right)}_{\underbrace{\frac{DC}{L^2}}_{(a)}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right)}_{\underbrace{\frac{DC}{l^2}}_{(b)}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}c)}_{\underbrace{\frac{c'u'}{L}}_{(c)}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}c)}_{\underbrace{\frac{c'v'}{l}}_{(d)}}$$

Et en supposant $L \gg l$, nous constatons que $(a) \ll (b)$. De plus, comme $v' < u'$, alors $(c) \ll (d)$. Comme pour les écoulements laminaires, nous pouvons négliger les termes de diffusion suivant x (aussi bien la diffusion turbulente que la diffusion laminaire):

$$U \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}c)$$

Une hypothèse sur la corrélation $\bar{v}c$ est nécessaire à ce stade. Les travaux effectués sur les transferts thermiques suggèrent une hypothèse de type gradient semblable à l'hypothèse de BOUSSINESQ:

$$-\bar{v}c = D_t \frac{\partial \bar{C}}{\partial y}$$

D_t est un coefficient de diffusion turbulente à déterminer. Nous pouvons alors supposer que les transferts de masse et de quantité de mouvement sont similaires, que ceux-ci se produisent par mécanisme moléculaire ou turbulent:

$$\nu = DS_c \quad \nu_t = D_t S_t$$

S_c est le nombre de SCHMIDT laminaire d'ordre de grandeur 600; S_t est le nombre de SCHMIDT turbulent et a pour ordre de grandeur l'unité $\langle 1-9 \rangle$. S_t est à déterminer.

En écoulement turbulent, l'équation de transport pour la concentration s'écrit finalement:

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\nu}{S_c} + \frac{\nu_t}{S_t} \right) \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right] \quad (10.4)$$

Soit encore après le changement de variable $\bar{\theta} = \frac{C_\infty - \bar{C}}{C_\infty}$:

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\nu}{S_c} + \frac{\nu_t}{S_t} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} \right]$$

Les conditions sur les frontières du domaine de calcul sont identiques au cas des écoulements laminaires.

Chapitre 11

CALCUL DE LA COUCHE LIMITE DE DIFFUSION DANS LE CAS D'UN ECOULEMENT LAMINAIRE

11.1 Introduction:

La résolution de l'équation de transport d'une espèce ionique dans un écoulement laminaire peut se faire analytiquement et numériquement. Il s'agit donc d'un bon cas test pour valider la procédure de calcul utilisée. Les résultats ainsi obtenus deviennent un outil précieux pour homologuer une méthode expérimentale visant à déterminer la densité de courant limite. En effet, comme nous allons le voir dans le chapitre relatif aux mesures expérimentales, la densité de courant limite est une grandeur difficile à mesurer.

Bien que les écoulements rencontrés dans l'industrie soient toujours turbulents, nous allons tout de même étendre nos calculs aux écoulements de COUETTE laminaires, avec gradient longitudinal de pression. Les résultats obtenus vont permettre de voir s'il est possible de transposer simplement les conditions d'un écoulement de POISEUILLE à un écoulement de COUETTE avec gradient de pression. Cette démarche facilite aussi l'approche pour les écoulements turbulents.

Lors de la simulation numérique, les paramètres que nous avons fait varier indépendamment avaient une dimension pour la commodité des calculs. Ils s'agissait de U_q , V_b , h , ν , D et C_∞ .

11.2 Ecoulements de POISEUILLE laminaires:

La cathode étant immobile ($V_b = 0$ m/s), le profil de vitesse s'écrit:

$$U = 6U_q \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

soit encore, en utilisant la vitesse de frottement u_τ sur la cathode:

$$U = \frac{u_\tau^2}{\nu} y \left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

11.2.1 Résolution analytique:

Si nous supposons que la couche limite de diffusion est très mince (même à des abscisses x élevées), le domaine qui nous intéresse correspond à $y/h \ll 1$. Nous pouvons alors prendre comme approximation du profil de vitesse:

$$U \# \frac{u_\tau^2}{\nu} y \tag{11.1}$$

avec cette approximation et en négligeant la diffusion longitudinale, l'équation à résoudre devient:

$$\frac{u_\tau^2}{\nu} y \frac{d\theta}{dy} = D \frac{d^2\theta}{dy^2}$$

Une approche par combinaison de variables de la forme $\sigma = k^\alpha x^\beta y^\gamma$ où k est une fonction des grandeurs caractéristiques du problème conduit à:

$$\frac{d^2\theta}{d\sigma^2} = \left(\frac{u_\tau^2 \beta y^{3-\gamma}}{\nu D k^\alpha \gamma^2 x^{\beta+1}} \right) \frac{d\theta}{d\sigma}$$

Choisir $k = \frac{u_\tau^2}{9\nu D}$, $\alpha = 1/3$, $\beta = -1/3$ et $\gamma = 1$ simplifie l'équation en

$$\theta''(\sigma) + 3\sigma^2\theta'(\sigma) = 0$$

La résolution de cette équation différentielle totale sur le domaine étudié donne:

$$C(\sigma) = \frac{C_\infty}{\Gamma(4/3)} \int_0^\sigma e^{-\sigma^3} d\sigma \quad \text{avec} \quad \sigma = \left(\frac{u_\tau^2}{9\nu Dx} \right)^{1/3} y \quad \text{et} \quad \Gamma(4/3) = 1,02$$

(Γ est la fonction gamma).

Dériver ce profil de concentration en $y = 0$ permet de calculer l'épaisseur de la couche de diffusion ainsi que la densité de courant limite de diffusion:

$$\delta = 1,82 \left(\frac{\nu Dx}{u_\tau^2} \right)^{1/3} \quad \text{et} \quad J_{lim} = zFC_\infty \left(\frac{u_\tau^2 D^2}{6\nu x} \right)^{1/3} \quad (11.2)$$

11.2.2 Résolution numérique:

La résolution numérique a été faite sans aucune approximation sur le profil de vitesse. Elle a montré qu'il était possible de négliger la diffusion longitudinale.

La validité des résultats obtenus dépend de la précision et de l'indépendance des grandeurs caractéristiques choisies vis à vis du maillage. La précision est obtenue en prenant un maillage suffisamment serré dans la zone étudiée. L'indépendance des résultats vis à vis du maillage peut être vérifiée en examinant l'évolution du profil de concentration au voisinage de la cathode.

Dans cette zone, on peut effectuer des développements limités de la vitesse et de la concentration. Ces développements limités, reportés dans l'équation de transport pour la concentration et identifiés membre à membre, permettent de montrer que l'épaisseur de la couche limite de diffusion calculée est indépendante du maillage, quelle que soit l'abscisse x , si:

$$\left(\frac{u_\tau^2}{36 \cdot \nu \cdot D \cdot \Delta x} \right) \Delta y^3 \ll 1$$

Cette relation permet d'évaluer la taille maximale que doit avoir la première maille contre la cathode, pour être sûr que la densité de courant limite de diffusion soit indépendante du maillage. Exemple: pour $U_q = 0,5 \text{ m/s}$, $h = 0,007 \text{ m}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $D = 0,7 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ et une première maille Δx de $0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, il faut prendre une première maille Δy inférieure à $3,1 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.

Les résultats que nous avons obtenus en fonction des différents paramètres nous ont permis de déduire les lois:

$$\delta = 1,82 \left(\frac{\nu D x}{u_\tau^2} \right)^{1/3} \quad \text{et} \quad \delta_{95} = 2,37 \left(\frac{\nu D x}{u_\tau^2} \right)^{1/3} \quad (11.3)$$

Ce qui permet de relier ces deux grandeurs par la relation $\delta_{95} = 1,3\delta$, et de déduire:

$$J_{lim} = z F C_\infty \left(\frac{u_\tau^2 D^2}{6\nu x} \right)^{1/3} \quad (11.4)$$

Les résultats obtenus numériquement sont en parfait accord avec la résolution analytique. L'approximation faite sur le profil de vitesse était donc tout à fait acceptable.

11.3 Ecoulements de COUETTE laminaires avec gradient de pression:

Dans ce cas la cathode est mobile ($V_b \neq 0$). Le profil de vitesse est donné par:

$$U = 3(V_b - 2U_q) \frac{y^2}{h^2} + 2(3U_q - 2V_b) \frac{y}{h} + V_b$$

Soit encore (en utilisant la vitesse de frottement cathodique):

$$U = - \left(\frac{u_\tau^2}{h\nu} + \frac{V_b}{h^2} \right) y^2 + \frac{u_\tau^2}{\nu} y + V_b$$

11.3.1 Résolution analytique:

Si nous considérons, comme pour la partie précédente $y/h \ll 1$, nous pouvons supposer que la convection au voisinage de la cathode se fait à la vitesse de déplacement de la paroi (que l'écoulement global soit co-courant ou contre-courant). Nous pouvons alors négliger les termes d'ordre supérieur ou égal à 1 dans l'expression de la vitesse locale et prendre en première approximation:

$$U = V_b$$

Remarque: L'ordre de cette approximation est inférieur à celui pris pour l'écoulement de POISEUILLE. Ce qui laisse supposer un résultat différent.

L'équation pour la concentration devient alors:

$$V_b \frac{d\theta}{dx} = D \frac{d^2\theta}{dy^2}$$

dans laquelle, la combinaison de variables $\sigma = k^\alpha x^\beta y^\gamma$ avec $k = \frac{V_b}{4D}$, $\alpha = 1/2$, $\beta = -1/2$ et $\gamma = 1$ donne:

$$\theta''(\sigma) + 2\sigma\theta'(\sigma) = 0$$

L'intégration de cette équation, avec les conditions imposées sur les frontières du domaine de calcul, donne pour solution:

$$C(\sigma) = \frac{C_\infty}{\Gamma(3/2)} \int_0^\sigma e^{-\sigma^2} d\sigma \quad \text{avec} \quad \sigma = \left(\frac{V_b}{4Dx}\right)^{1/2} y \quad \text{et} \quad \Gamma(3/2) = 0,886$$

Nous pouvons en déduire:

$$\delta = 1,77 \left(\frac{Dx}{V_b}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad J_{lim} = \frac{zFC_\infty}{1,77} \left(\frac{V_b D}{x}\right)^{1/3} \quad (11.5)$$

11.3.2 Résolution numérique:

La résolution numérique a été faite sans aucune hypothèse simplificatrice sur le profil de vitesse. Comme dans la partie précédente, l'utilisation de développements limités permet de déterminer l'ordre de grandeur du maillage à prendre suivant y , en fonction du maillage suivant x , pour s'assurer que la densité de courant limite de diffusion calculée soit indépendante du maillage. On obtient la relation entre les mailles suivant x et y :

$$\frac{V_b}{12.D.\Delta x} \Delta y^2 \ll 1$$

Il faut ensuite s'assurer que le maillage choisi est suffisamment fin pour la précision désirée.

Les résultats que nous avons obtenus en fonction des différents paramètres que nous avons fait varier ont permis la construction des lois suivantes:

$$\delta = 1,77 \left(\frac{Dx}{V_b} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \delta_{95} = 2,77 \left(\frac{Dx}{V_b} \right)^{1/2} \quad (11.6)$$

Il en résulte que $\delta_{95} = 1,56\delta$ et que:

$$J_{lim} = \frac{zFC_{\infty}}{1,77} \left(\frac{V_b D}{x} \right)^{1/2} \quad (11.7)$$

Les résultats obtenus numériquement sont de nouveau en parfait accord avec l'approche analytique. L'hypothèse faite sur la simplification du terme de convection pour la concentration, en ne retenant que l'ordre 0, est tout à fait acceptable étant donnée l'épaisseur de la couche limite de diffusion (quelques μm).

11.4 Exploitation des résultats:

Les résultats obtenus numériquement et analytiquement sont en parfait accord pour les écoulements envisagés. Ceci permet de valider la procédure de calcul et de déduire les remarques suivantes:

- En écoulement laminaire, la couche limite de diffusion est très fine. Il est alors possible de ne tenir compte que de la forme du profil de vitesse au voisinage immédiat de la cathode.
- l'écoulement n'intervient que dans les termes de convection de l'équation de transport pour la concentration. Pour un écoulement de POISEUILLE laminaire, la convection est représentée à l'aide de la vitesse de frottement cathodique (qui représente la pente du profil de vitesse sur la paroi). Pour un écoulement de COUETTE laminaire avec gradient longitudinal de pression, c'est la vitesse de déplacement de la paroi mobile qui agit sur la couche de diffusion. La vitesse relative de l'écoulement par rapport à la cathode et donc la vitesse de frottement pariétale n'ont aucune influence sur la densité de courant limite de diffusion pour cet écoulement.
- Pour un écoulement de POISEUILLE laminaire, les paramètres qui agissent sur la densité de courant limite interviennent à la puissance 1/3; alors qu'ils interviennent à la puissance 1/2 pour un écoulement de COUETTE avec gradient de pression. Il est donc impossible de formuler une expression simple permettant la transposition des résultats d'un type d'écoulement à un autre; d'autant plus que la densité de courant limite de diffusion varie avec l'abscisse x tout au long de l'électrode.

- Classiquement, en électrochimie, l'épaisseur de la couche limite de diffusion est représentée par δ . Cette grandeur n'est pas significative de l'épaisseur réelle de la couche limite de diffusion. Elle ne représente que 77% de celle-ci pour un écoulement de POISEUILLE et 64% pour un écoulement de COUETTE avec gradient de pression.

Pour les écoulements de POISEUILLE laminaires, afin de pouvoir comparer les résultats entre eux, il est intéressant d'utiliser le nombre de SHERWOOD défini dans le chapitre 3 de ce document. La loi obtenue, représentée à l'aide de groupements sans dimension, devient:

$$Sh = \frac{10^{-3} J_{lim} h}{z F C_{\infty} D} = 10^{-3} Re^{1/3} Sc^{1/3} \left(\frac{h}{x} \right)^{1/3} \quad \text{où} \quad Re = \frac{U_q h}{\nu}$$

Cette équation est semblable aux expressions que l'on trouve dans la littérature. La mesure de la densité limite nécessite une certaine surface d'analyse qui est généralement prise égale à la surface de l'électrode. De ce fait, l'abscisse x est souvent remplacée par la longueur L de la cathode. PICKET et ONG <1-20> proposent en effet à partir de leurs mesures la loi:

$$Sh = 1,85 Re^{1/3} Sc^{1/3} \left(\frac{d}{L} \right)^{1/3} \quad \text{où} \quad Re = \frac{U_q d}{\nu}$$

d étant le diamètre hydraulique de leur cellule.

WRANGLÉN et NILSSON <1-11> font une résolution analytique qui conduit à une puissance 1/2 plutôt que 1/3 pour le nombre de REYNOLDS, mais leurs calculs utilisent le profil de vitesse d'une couche limite sur plaque plane, profil qui évolue en s'épaississant avec l'abscisse x .

Les différences obtenues sont aussi généralement dues au choix de la longueur caractéristique de la cellule. pour un canal de rapport hauteur sur largeur très petit (notre cas), la distance anode cathode est la longueur à retenir. Pour un canal ayant un rapport hauteur sur largeur d'ordre unité, le diamètre hydraulique paraît plus représentatif.

En fait, ces longueurs caractéristiques conviennent uniquement pour l'étude de l'écoulement. La couche limite de diffusion qui est confinée contre la cathode ne dépend que de la vitesse de frottement et de l'abscisse x . La formulation:

$$Sh_l = \frac{10^{-3} J_{lim} x}{z F C_{\infty} D} = 0,55 \cdot 10^{-3} \left(\frac{u_{\tau} x}{\nu} \right)^{2/3} Sc^{1/3}$$

est plus appropriée et apporte l'avantage d'être vérifiée quelle que soit la géométrie de la cellule électrolytique. La dimension du canal intervient alors par l'intermédiaire de la vitesse de frottement.

Pour les écoulements de COUETTE laminaires avec gradient de pression, la loi sans dimension à utiliser est:

$$Sh_l = \frac{10^{-3} J_{lim} x}{z F C_{\infty} D} = 0,565 \cdot 10^{-3} \left(\frac{V_b x}{\nu} \right)^{1/2} Sc^{1/2}$$

Pour les écoulements de COUETTE laminaires avec gradient de pression, la convection et donc la couche limite de diffusion sont indépendantes de la distance entre l'anode et la cathode.

En écoulement laminaire, la densité de courant limite de diffusion varie avec l'abscisse x . La mesure expérimentale de cette grandeur nécessite une surface d'analyse telle que le résultat obtenu (moyenne sur la surface d'analyse) dépend souvent de la longueur des électrodes. Les effets de bord dus au démarrage de la couche de diffusion font qu'il n'est pas possible de vérifier si les termes de migration dus au champ électrique peuvent réellement être négligés pour un électrolyte fort. Le rapport J/J_{lim} varie avec l'abscisse x : Les écoulements laminaires ont donc peu d'intérêt pour les applications électro-chimiques puisque la structure du dépôt peut évoluer le long de la cathode.

L'analyse numérique faite dans ce chapitre montre que la vitesse caractéristique pour la densité limite de courant est pour un écoulement de POISEUILLE laminaire la vitesse de frottement. Pour un écoulement de COUETTE avec gradient de pression c'est la vitesse de déplacement de la tôle. Il faut alors regarder particulièrement l'influence de ces deux grandeurs pour les écoulements turbulents.

Chapitre 12

ÉCOULEMENTS TURBULENTS

12.1 Introduction:

La résolution de l'équation de transport d'une espèce ionique, dans le cas d'un écoulement turbulent, a un grand intérêt industriel. Elle permet, en effet, de connaître, en fonction du point de fonctionnement de la cellule, la valeur du rapport J/J_{lim} (paramètre conditionnant la structure du dépôt réalisé). Elle permet donc de déterminer les conditions dans lesquelles il faut se placer pour réaliser la structure de dépôt désirée.

Les calculs ont été effectués pour les écoulements de POISEUILLE turbulents et pour les écoulements de COUETTE turbulents avec gradient longitudinal de pression. Ils ont permis de mettre en évidence les paramètres à respecter pour reproduire la même structure de dépôt pour ces deux types d'écoulements. Sur la base des résultats obtenus, il est alors possible de transférer les résultats de cellules de laboratoires aux cellules industrielles quelles que soient leurs géométries respectives.

Dans l'équation de transport pour la concentration, le nombre de SCHMIDT turbulent S_t est une inconnue que nous avons fait varier. NEWMAN <1-18> suggère la valeur 1 pour ce nombre sans dimension. Des résultats analogues obtenus pour le transport de la chaleur situent également sa valeur au voisinage de l'unité. Il est intéressant de déterminer ce paramètre expérimentalement pour un écoulement identique à ceux que nous étudions. C'était le but initial du chapitre suivant.

Avant d'examiner les résultats obtenus dans leur détail, observons les évolutions obtenues pour δ et δ_{95} en fonction de l'abscisse x . Dans le cas des écoulements laminaires, la couche limite de diffusion s'épaissit avec x sur toute la longueur de l'électrode. Pour les écoulements turbulents, la formation de la couche limite de diffusion passe par plusieurs étapes (figure (3-2)).

A sa naissance (domaine 1), elle se situe entièrement dans la sous-couche visqueuse de l'écoulement et subit très peu l'influence de la turbulence qui règne au sein de l'écoulement. De ce fait, dans un premier domaine, la couche limite de diffusion se développe dans un écoulement localement laminaire.

Dans une seconde étape (domaine 2), son épaisseur devient de l'ordre de grandeur de la sous-couche visqueuse. De ce fait, l'effet de la diffusion turbulente commence à se faire sentir. La couche limite de diffusion croît toujours avec l'abscisse x .

Dans un dernier domaine (domaine 3), l'épaisseur de la couche limite de diffusion n'évolue plus avec x . A ce stade, cette épaisseur est supérieure à celle de la sous-couche visqueuse. La diffusion des ions sous l'effet de la turbulence est telle que la zone pariétale subit un approvisionnement en ions qui compense la consommation due au dépôt sur la cathode. Cette consommation est très petite par rapport à la quantité d'ions contenue dans la solution (forte concentration); elle n'est donc pas perçue par la concentration au loin.

Comme pour les écoulements laminaires, deux approches sont proposées: La résolution analytique quand elle est possible et la résolution numérique. Les paramètres que nous avons fait varier lors de la simulation numérique n'étaient pas tous sans dimension. Ces paramètres étaient: h , ν , D , S_t , V_b , C_∞ et $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$ (pour une question de commodité de calcul, la vitesse débitante a été remplacée par ce paramètre représentatif de la perte de charge).

La résolution numérique montre donc trois domaines dans lesquels l'évolution de la couche limite de diffusion se fait de façons différentes. Analytiquement, nous pouvons donc distinguer ces trois évolutions: Nous pouvons considérer un premier domaine dans lequel l'écoulement est laminaire (on néglige la diffusion turbulente). Le deuxième domaine est considéré comme étant une zone de raccordement. Il n'est pas étudié. Dans le troisième domaine, la couche limite est établie. La concentration n'évolue plus avec l'abscisse x .

Outre l'épaisseur, il est également intéressant de connaître la dimension longitudinale de ces différents domaines. Les frontières qui les séparent étant relativement imprécises, nous utiliserons les définitions suivantes:

La longueur du premier domaine est prise comme étant l'abscisse x_0 à partir de laquelle l'écart entre l'épaisseur de la couche limite de diffusion et la loi laminaire atteint 5%.

La frontière entre les domaines 2 et 3 est située à l'abscisse x_1 où l'épaisseur de la couche limite de diffusion vaut 95% de sa valeur dans le troisième domaine (figure (3-2)).

12.2 Écoulements de POISEUILLE turbulents:

La cathode est immobile: $V_b = 0$ m/s. Le modèle de longueur de mélange proposé par MONNIER <1-2> permet la résolution numérique de l'équation de transport pour la quantité de mouvement. Il nous permet donc de calculer les profils de vitesse moyenne et de viscosité turbulente nécessaires à la résolution de l'équation de transport pour la concentration.

12.2.1 Résolution analytique:

La résolution analytique n'est faite que dans les domaines 1 et 3. Le domaine 2 est considéré comme une zone de transition.

a) domaine 1:

D'après les remarques précédentes, nous pouvons négliger l'influence de la turbulence sur l'évolution de la couche limite de diffusion dans le domaine 1. L'équation de transport pour la concentration s'écrit alors:

$$\bar{U} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\nu}{S_c} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right]$$

la couche limite de diffusion se trouve dans la sous-couche visqueuse, le profil de vitesse se réduit à:

$$U^+ = y^+ \quad \text{soit encore} \quad \bar{U} = \frac{u_\tau^2}{\nu} y$$

Nous pouvons utiliser la même résolution que pour les écoulements de POISEUILLE laminaires et en déduire:

$$\delta = 1,82 \left(\frac{\nu^2 x}{u_\tau^2 S_c} \right)^{1/3} \quad \text{et} \quad J_{lim} = z F C_\infty \left(\frac{u_\tau^2 \nu}{6 S_c^2 x} \right)^{1/3} \quad (12.1)$$

b) domaine 3:

Dans le troisième domaine, le profil de concentration est indépendant de l'abscisse x . Nous pouvons donc négliger le terme de convection longitudinale pour la concentration, et écrire:

$$\frac{d}{dy} \left[\left(\frac{\nu}{S_c} + \frac{\nu_t}{S_t} \right) \frac{d\bar{C}}{dy} \right] = 0$$

l'intégration de cette équation donne:

$$\frac{d\bar{C}}{dy} = \frac{K}{\frac{\nu}{S_c} + \frac{\nu_t}{S_t}} \quad \text{avec} \quad K = \frac{\nu}{S_c} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{J_{lim}}{2F}$$

Le profil de concentration, et donc la densité de courant limite de diffusion dépendent directement de la formulation retenue pour la longueur de mélange. La complexité de la loi retenue rend la résolution analytique impossible. On peut toutefois déterminer les paramètres qui agissent directement sur la densité de courant limite de diffusion en utilisant un calcul approché.

Prenons en première approximation (d'après le développement limité de la longueur de mélange):

$$\frac{\nu}{S_c} + \frac{\nu_t}{S_t} = l_0 + l_1 y^4$$

On peut alors résoudre l'équation de transport pour \bar{C} au voisinage immédiat de la cathode:

$$C(y) = \frac{K}{l_1} \left[\frac{1}{4 \left(\frac{l_0}{l_1} \right)^{3/4} \sqrt{2}} \ln \left[\frac{y^2 + \left(\frac{l_0}{l_1} \right)^{1/4} \sqrt{2}y + \left(\frac{l_0}{l_1} \right)^{1/2}}{y^2 - \left(\frac{l_0}{l_1} \right)^{1/4} \sqrt{2}y + \left(\frac{l_0}{l_1} \right)^{1/2}} \right] - \frac{1}{2\sqrt{2} \left(\frac{l_0}{l_1} \right)^{3/4}} \arctan \left[\frac{\left(\frac{l_0}{l_1} \right)^{1/4} \sqrt{2}y}{y^2 - \left(\frac{l_0}{l_1} \right)^{1/2}} \right] \right]$$

$$\text{avec } K = \frac{J_{lim}}{2F}; \quad l_0 = \frac{\nu}{S_c} \quad \text{et} \quad l_1 = \frac{2,37 \cdot 10^{-4} u_T^2}{S_t \nu^3}$$

Le domaine de validité de ce profil empêche l'utilisation de la condition au loin. La constante K reste donc une inconnue du problème. Les expressions ci-dessus montrent que les paramètres déterminants pour la densité de courant limite de diffusion sont les deux nombres de SCHMIDT, la viscosité de la solution et la vitesse de frottement cathodique.

12.2.2 Résolution numérique:

Comme pour les écoulements laminaires, il est possible d'étudier l'influence du maillage sur le résultat obtenu afin de se placer dans des conditions indépendantes du résultat vis à vis du maillage. Cette influence se fait surtout sentir au voisinage du point de naissance de la couche limite de diffusion (domaine 1). Cette zone a le même comportement que l'écoulement de POISEUILLE laminaire. On obtient le même résultat.

Les résultats obtenus nous ont permis d'aboutir aux lois d'évolutions suivantes:

a) domaine 1:

$$\delta = 1,83 \left(\frac{\nu^2 x}{u_\tau^2 S_c} \right)^{1/3} \quad \text{et} \quad \delta_{95} = 2,38 \left(\frac{\nu^2 x}{u_\tau^2 S_c} \right)^{1/3} \quad (12.2)$$

ce qui permet de relier ces deux paramètres par la relation $\delta_{95} = 1,30\delta$ et donne:

$$J_{lim} = zFC_\infty \left(\frac{u_\tau^2 D^2}{6\nu x} \right)^{1/3} \quad (12.3)$$

b) domaine 3:

$$\delta = 10,6 \frac{\nu}{u_\tau} \left(\frac{S_t}{S_c} \right)^{0,26} \quad \text{et} \quad \delta_{95} = 30,7 \frac{\nu}{u_\tau} \left(\frac{S_t}{S_c} \right)^{1/3} \quad (12.4)$$

nous avons alors $\delta_{95} = 2,9 \left(\frac{S_t}{S_c} \right)^{1/14} \delta$ et

$$J_{lim} = 0,10zFC_\infty \frac{u_\tau}{S_c^{0,74} S_t^{0,26}} \quad (12.5)$$

Le domaine 2 est un domaine de jonction.

Les frontières entre les différentes zones définies dans l'introduction de ce chapitre se situent respectivement aux abscisses:

$$x_0 = 108 \frac{\nu}{u_\tau} S_t^{0,78} S_c^{0,21} \quad (12.6)$$

$$x_1 = 284 \frac{\nu}{u_\tau} S_t^{0,78} S_c^{0,21} \quad (12.7)$$

Les résultats obtenus numériquement donnent les mêmes lois de variation pour les caractéristiques de la couche limite dans le premier domaine que celles obtenues analytiquement. Ils permettent donc de valider l'hypothèse que dans cette zone, on peut négliger l'influence de la diffusion turbulente sur la couche de diffusion.

Les paramètres importants pour la couche limite de diffusion dans le troisième domaine, mis en évidence analytiquement, sont aussi ceux qui apparaissent dans les lois obtenues par le calcul numérique. L'utilisation de ces dernières permet de déterminer la constante K inconnue dans la solution analytique:

$$K = 0,09C_{\infty} \frac{u_{\tau}}{S_c^{0,74} S_t^{0,26}}$$

L'exploitation des lois obtenues est faite dans la dernière partie de ce chapitre.

12.3 Ecoulements de COUETTE turbulents avec gradient de pression:

L'évolution observée pour la couche limite de diffusion, quand la paroi (cathode) est en mouvement, est identique à ce qui a été décrit précédemment. Il faut toutefois faire les remarques suivantes:

Si l'écoulement de l'électrolyte est co-courant au déplacement de la cathode, avec une vitesse débitante voisine de V_b , dans une zone étendue au voisinage de la paroi, l'écoulement est peu turbulent (écoulement de type intermédiaire de la figure (1-18)). La croissance de la couche limite de diffusion est alors en tous points identique à celle des écoulements de COUETTE laminaires car celle-ci se situe toujours dans la sous-couche visqueuse. Il s'agit d'un domaine 1 très étendu (il n'y a ni domaine 2 ni domaine 3).

Si la vitesse débitante de l'électrolyte diffère suffisamment de celle de la paroi mobile (qu'elle soit inférieure, supérieure ou à contre-courant), l'écoulement au voisinage de la cathode est cisailé et donc fortement turbulent. La couche limite de diffusion subit alors l'influence de la diffusion turbulente et son évolution passe par les trois étapes citées ci-dessus.

Le comportement de la couche limite de diffusion dépend donc de la vitesse relative de l'écoulement par rapport à la cathode; ou plutôt de la valeur de la vitesse de frottement.

12.3.1 Résolution analytique:

Comme dans la partie précédente, distinguons les différents domaines.

a) domaine 1:

La couche limite de diffusion se situe entièrement dans la sous-couche visqueuse; on peut négliger la diffusion turbulente de la concentration. Les grandeurs recherchées sont des valeurs pariétales. Comme pour les écoulements laminaires, on peut supposer que la convection se fait à la vitesse de déplacement de la cathode, que l'écoulement soit co-courant ou contre-courant à ce déplacement. L'équation à résoudre est identique à celle des écoulements laminaires:

$$V_b \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\nu}{S_c} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} \right]$$

L'épaisseur de la couche de diffusion et la densité de courant limite de diffusion sont alors:

$$\delta = 1,77 \left(\frac{\nu x}{S_c V_b} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad J_{lim} = \frac{zFC_\infty}{1,77} \left(\frac{V_b \nu}{S_c x} \right)^{1/3} \quad (12.8)$$

b) domaine 3:

Comme dans la partie précédente, nous pouvons négliger le terme de convection dans l'équation de transport pour la concentration et rendre ainsi le profil de concentration indépendant de l'abscisse x et de la vitesse de déplacement de la cathode. Le profil de concentration dépend uniquement du gradient transversal de vitesse (et donc de la vitesse de frottement cathodique) par l'intermédiaire de la viscosité turbulente. Nous pouvons reproduire la démarche effectuée pour les écoulements de POISEUILLE turbulents, et montrer que la densité de courant limite de diffusion ne dépend que de ν , S_c , S_t et u_t .

12.3.2 Résolution numérique:

Dans cette partie nous ne nous intéressons qu'au cas des écoulements fortement cisailés. Les écoulements intermédiaires ont un comportement quasi-laminaire et n'offrent aucun intérêt industriel (domaine 1). Nous avons distingué les écoulements co-courants des écoulements contre-courants. Le calcul est mené dans le sens de déplacement de la cathode. Les résultats obtenus ont montré que ces deux types d'écoulements donnent le même comportement pour la couche limite de diffusion. L'influence du maillage est principalement critique au voisinage du point de naissance de la couche limite de diffusion. Le respect de la condition obtenue pour les

écoulements laminaires permet de s'affranchir de toute influence du maillage sur les résultats.

Sur le premier domaine, en fonction des différents paramètres que nous avons fait varier, nous avons obtenu:

$$\delta = 1,77 \left(\frac{\nu x}{V_b S_c} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \delta_{95} = 2,78 \left(\frac{\nu x}{V_b S_c} \right)^{1/2} \quad (12.9)$$

Il en résulte que $\delta_{95} = 1,57\delta$ et que:

$$J_{lim} = \frac{zFC_{\infty}}{1,77} \left(\frac{V_b D}{x} \right)^{1/2} \quad (12.10)$$

La comparaison avec l'équation (12.8) montre qu'il s'agit bien d'un comportement laminaire. Dans le troisième domaine, les calculs permettent de construire les lois:

$$\delta = 10,5 \frac{\nu}{u_{\tau}} \left(\frac{S_t}{S_c} \right)^{0,26} \quad \text{et} \quad \delta_{95} = 28 \frac{\nu}{u_{\tau}} \left(\frac{S_t}{S_c} \right)^{1/3} \quad (12.11)$$

et de déduire $\delta_{95} = 2,67\delta$ et:

$$J_{lim} = 0,10 zFC_{\infty} \frac{u_{\tau}}{S_c^{0,74} S_t^{0,26}} \quad (12.12)$$

Résultats identiques à ceux des écoulements de POISEUILLE turbulents (équations (12.4) et (12.5)).

La convection, créée par le déplacement de la cathode, a tendance à allonger les domaines 1 et 2. La simulation numérique donne:

$$x_0 = 31,4 \frac{\nu V_b}{u_{\tau}^2} S_t^{0,52} S_c^{0,48} \quad (12.13)$$

$$x_1 = 56 \frac{\nu V_b}{u_{\tau}^2} S_t^{0,52} S_c^{0,48} \quad (12.14)$$

Les résultats obtenus numériquement et analytiquement dans le premier domaine sont identiques. Ceux-ci permettent de valider l'hypothèse que l'on a faite pour le domaine 1: la couche limite de diffusion est entièrement contenue dans la sous-couche visqueuse; on peut négliger la diffusion turbulente de la concentration.

Comme pour les écoulements de POISEUILLE turbulents, les résultats numériques confirment la démarche adoptée pour déterminer les grandeurs qui influencent la couche limite de diffusion dans le troisième domaine. Les résultats obtenus sont identiques, que la cathode soit en mouvement ou non.

12.4 Exploitation des résultats obtenus:

Les résultats obtenus nous conduisent à faire les remarques suivantes:

Pour tous les écoulements étudiés, la couche limite de diffusion cathodique est très fine. Il est alors possible de ne tenir compte que des caractéristiques de l'écoulement au voisinage immédiat de l'électrode.

Quel que soit le type d'écoulement envisagé (pourvu que celui-ci soit suffisamment cisailé dans la région cathodique), l'évolution de la couche limite de diffusion passe par trois étapes successives:

- Après sa naissance, elle est entièrement contenue dans la sous-couche visqueuse pariétale et ne subit aucune influence de la turbulence. Sa croissance est donc celle obtenue dans un écoulement laminaire du même type.
- Ensuite, elle devient de l'ordre de grandeur de la sous-couche visqueuse et commence à ressentir les effets de la turbulence tout en continuant de croître. Sa croissance est ralentie.
- Soit $\delta_l = 5\nu/u_\tau (y^+ = 5)$: l'épaisseur de la sous-couche visqueuse. Quand δ_{95} vaut $3(S_t/S_c)^{1/3}\delta_l$ la couche limite de diffusion ne s'épaissit plus. La consommation en ions à la paroi est compensée totalement par les diffusions turbulentes et laminares. Arrivée à cette étape, la densité de courant limite de diffusion est indépendante de l'abscisse x et le rapport J/J_{lim} devient constant.

Dans les deux premiers domaines, le contrôle de la densité de courant limite et donc de la qualité du dépôt n'est pas possible puisque J_{lim} varie. Par contre il est intéressant d'évaluer leurs longueurs pour savoir à partir de quelle abscisse x_1 dans le canal, le contrôle du dépôt peut être fait et savoir sur quelle distance restante il sera réalisé. Prenons la même solution pour une cellule de laboratoire et pour une cellule industrielle: Solution électrolytique à 50 C contenant 1 mole de zinc et 0,87 mole d'acide sulfurique par litre. Nous supposons le nombre de SCHMIDT turbulent $S_t = 1$.

Les caractéristiques pour la cellule de laboratoire: $h = 0,005$ m et $U_q = 3$ m/s donnent des longueurs d'établissement $x_0 = 0,001$ m et $x_1 = 0,0028$ m. Ces distances sont très petites. Pour une électrode de longueur 0,12 m, elles ne représentent que 3% de la longueur totale de l'électrode.

Les caractéristiques retenues pour la cellule industrielle: $h = 0,01$ m, $V_b = 2$ m/s, écoulement contre-courant à la tôle de vitesse débitante $U_q = 1,39$ m/s donnent des longueurs d'établissement $x_0 = 0,036$ m et $x_1 = 0,06$ m. Ces distances sont très petites par rapport à la longueur de 1,9 m du canal d'une demi-cellule.

Les domaines 1 et 2 peuvent donc être négligés quel que soit le type de cellule, à condition que l'électrode soit suffisamment longue.

Quand elle est complètement établie et turbulente, que l'écoulement soit de POISEUILLE ou de COUETTE avec gradient de pression, la couche limite de diffusion dépend des mêmes paramètres. La densité de courant limite de diffusion s'écrit dans les deux cas:

$$J_{lim} = 0,10 z F C_{\infty} \frac{u_{\tau}}{S_c^{0,74} S_t^{0,26}}$$

Ce qui donne sous la forme de relation entre grandeurs sans dimension:

$$Sh = 10^{-4} Re_{u_{\tau}} \left(\frac{S_c}{S_t} \right)^{0,26} \quad \text{avec} \quad Re_{u_{\tau}} = \frac{u_{\tau} d}{\nu}$$

où d est une longueur caractéristique de la couche limite de diffusion.

Comme pour les écoulements laminaires, se pose le problème du choix du paramètre d . Aucune longueur caractéristique de la cellule n'est représentative des phénomènes électro-chimiques sur la cathode. Prendre une longueur géométrique revient donc à imposer la section de la cellule et limite l'étendue des transpositions possibles de résultats. Une telle loi doit donc utiliser une échelle de longueur locale.

L'équation obtenue pour l'épaisseur de la couche limite de diffusion peut s'écrire sans dimension sous la forme:

$$\frac{\delta u_{\tau}}{\nu} = 10,5 \left(\frac{S_t}{S_c} \right)^{0,26} \quad (12.15)$$

Cette formulation est analogue aux équations proposées pour décrire les écoulements pariétaux. Le coefficient de transfert de masse s'exprime de la même façon par:

$$\frac{kt_{lim}}{\nu} = 9,5 S_c^{-0,74} S_t^{-0,26} \quad (12.16)$$

Ces deux lois décrivent parfaitement le comportement de la couche limite de diffusion quelle que soit la géométrie du canal. Si l'on veut exprimer le nombre de SHERWOOD de la même façon, il faut utiliser une échelle de longueur pariétale. L'épaisseur de la sous-couche visqueuse qui conditionne l'état et la dimension de la couche limite de diffusion semble être un bon paramètre. Nous pouvons alors écrire:

$$Sh_l = \frac{10^{-3} J_{lim} \delta_l}{z F C_{\infty} D} = 5 \cdot 10^{-4} \left(\frac{S_t}{S_c} \right)^{0,26} \quad (12.17)$$

Les trois lois de variation (12.15), (12.16) et (12.17) sont donc les formules à adopter si l'on veut transposer les résultats entre cellules, quelles que soient leur géométrie respective. A composition de solution et température identiques, le paramètre de transfert est la vitesse de frottement cathodique u_τ . L'exemple proposé ci-dessus était basé sur le respect de ces conditions de transfert. Pour reproduire dans la cellule industrielle le type de dépôt obtenu dans la cellule de laboratoire, à la vitesse débitante de 3 m/s, et pour la même densité de courant de travail, il faut une vitesse débitante en contre-courant de 1,39 m/s.

Il est intéressant de comparer les lois obtenues avec celles que l'on trouve dans la littérature pour les écoulements de POISEUILLE turbulents (voir le chapitre 3). Il faut alors relier la vitesse de frottement cathodique à la vitesse débitante et à la longueur caractéristique de l'écoulement. Pour un canal rectangulaire de rapport hauteur sur largeur très petit, cette loi s'écrit:

$$u_\tau = 0,18U_q^{7/8} \left(\frac{\nu}{h}\right)^{1/8} \quad (12.18)$$

Pour un canal de rapport hauteur sur largeur voisin de 1 ou cylindrique, la vitesse de frottement n'est pas constante sur la largeur de l'électrode. A partir du coefficient de perte de charge et de la loi de BLASIUS, il est possible de déterminer une vitesse de frottement moyenne sur la section du canal. Celle-ci s'exprime alors en fonction de la vitesse débitante et du diamètre hydraulique d_h par:

$$u_\tau = 0,2U_q^{7/8} \left(\frac{\nu}{d_h}\right)^{1/8} \quad (12.19)$$

Cette loi de variation est homogène à la précédente; la variation de la constante est due à fait qu'ici il s'agit d'une vitesse de frottement moyenne. L'utilisation de ces formulations combinées aux résultats de notre simulation numérique donne:

$$Sh = K Re^{7/8} \left(\frac{S_c}{S_t}\right)^{0,26} \quad (12.20)$$

où K est une constante et $Re = \frac{U_q h}{\nu}$ ou $Re = \frac{U_q d_h}{\nu}$ suivant la section du canal.

La comparaison de l'équation (12.20) avec les différents résultats exposés dans le chapitre 3 montre que toutes ces lois sont très voisines. Les constantes multiplicatives de ces lois dépendent des longueurs retenues pour caractériser le canal. Il n'est donc pas possible de les comparer. On peut, par contre, comparer les valeurs des exposants. Le nombre de SCHMIDT turbulent, constante utilisée lors de nos calculs n'intervient pas dans les lois de la littérature.

De nos jours, les lois généralement retenues comme références sont celles proposées par CHILTON-COLBURN <1-14> et VIELSTICH <1-3>. Les résultats que nous avons obtenus sont plus proches de celle de VIELSTICH quant à l'influence de l'écoulement. Toutefois, ils sont en désaccord avec ces deux propositions pour ce qui concerne l'influence de la nature de la solution. La variation avec le nombre de REYNOLDS que nous avons obtenue est identique à celle du coefficient de frottement pariétal et elle est en parfait accord avec la proposition de DEISSLER <1-19>. L'exposant attribué au nombre de SCHMIDT semble être lié à l'ordre de grandeur de celui-ci. S'inspirer des résultats de transfert de chaleur pour lesquels le nombre de PRANDTL est voisin de l'unité (exposant 1/3) ne serait pas adapté aux solutions électrolytiques pour lesquelles le nombre de SCHMIDT est 100 à 1000 fois plus élevé. L'exposant à retenir serait plutôt 1/4.

12.5 Conclusions:

Les résultats obtenus sont basés sur deux hypothèses simplificatrices: Nous avons négligé les effets du champ électrique (migration des ions) et nous avons supposé que les transferts de matière et de quantité de mouvement étaient similaires. Dans le cas des écoulements turbulents, avec ou sans paroi mobile, la densité de courant limite de diffusion est alors constante (on peut négliger les zones d'établissement). Elle varie avec les caractéristiques de l'écoulement de façon identique au frottement pariétal. Toute transposition d'un type de cellule à un autre, à solution identique, doit donc être faite par reproduction de la vitesse de frottement sur l'électrode. La variation avec le nombre de SCHMIDT S_c se fait à la puissance 1/4 plutôt que 1/3. La valeur de la densité de courant limite de diffusion dépend d'une constante appelée nombre de SCHMIDT turbulent S_t à déterminer. Cette constante de modélisation devrait être voisine de l'unité et intervient à la puissance 1/4 (une erreur de 100% sur sa valeur affecte le résultat de moins de 20%).

A ce stade, seul un recours à l'expérience peut permettre de valider les hypothèses simplificatrices utilisées, et de déterminer le nombre de SCHMIDT turbulent.

Chapitre 13

ETUDE EXPERIMENTALE

13.1 Dispositif expérimental:

L'étude expérimentale décrite dans ce chapitre a été réalisée en collaboration avec le service "Métallurgie-Electrochimie" de l'Université Libre de BRUXELLES et dans ses locaux. Le but de cette étude était de vérifier les lois obtenues par simulation numérique en écoulement turbulent, pour valider les hypothèses simplificatrices utilisées et pour déterminer le nombre de SCHMIDT turbulent.

La cellule utilisée (fig. (3-3)) est de type carte postale (appellation liée aux dimensions des électrodes). Le canal, en polypropylène, avait à l'origine une section de 160 mm sur 5 mm (distance entre les électrodes) pour une longueur de 680 mm. Les déformations au cours du temps, dues à la température et aux différents serrages, font que la distance actuelle entre les électrodes est de 5,8 mm. C'est cette dimension qui sera retenue. Les électrodes immobiles sont affleurantes aux parois du canal et ont une surface de 160 * 125 mm². Elles se situent à 480 mm de l'entrée du canal (à ce niveau, l'écoulement est un écoulement de POISEUILLE établi). L'électrode jouant le rôle de cathode est une tôle d'acier laminée. L'anode est une anode insoluble en plomb-argent. Le courant est amené aux dos des électrodes, par contact à l'aide de plots réglables insérés dans deux flasques. Ceux-ci rendent le montage et le démontage des électrodes très rapides. La solution électrolytique est injectée dans le bas de la cellule dans une chambre d'uniformisation. Après son passage à travers une grille de génération de turbulence, elle est introduite dans le canal par un convergent.

La solution est pompée dans une cuve de 100 litres qu'il est possible de réguler en température. Le débit envoyé dans la cellule se règle à l'aide d'un by-pass et il est mesuré par un débitmètre électromagnétique. La vitesse débitante varie ainsi de 0 à 6 m/s. Afin de s'assurer de l'uniformité de l'écoulement sur la largeur du canal et de sa qualité, la cellule est équipée de 6 prises de pression statique numérotées P_i sur la figure (3-3). Les prises n° 2, 3, 4 et 5 ont permis de vérifier que l'écoulement était uniforme sur la largeur du canal. Les mesures à l'aide des prises numérotées

1, 3 et 6 ont montré que l'écoulement était établi (variation linéaire de la pression motrice avec l'abscisse). Le gradient de pression ainsi obtenu permet de calculer une vitesse débitante en bon accord avec la lecture du débitmètre (fig. (3-4)). Les écarts obtenus à faible vitesse débitante sont attribuables à la fois au modèle utilisé (modèle basé sur des hypothèses de nombres de REYNOLDS élevés) et à la qualité des prises de pression.

Une fois l'écoulement en régime, il est possible de déclencher manuellement l'électrolyse. Son arrêt automatique est programmé par une minuterie. Deux cadrans permettent la mesure de la tension entre électrodes et de la densité de courant de travail. Un intégrateur couplé sur l'ampèremètre effectue la mesure du nombre réel de Coulomb utilisé. Le courant continu est fourni par un redresseur permettant une densité de courant de travail réglable de 0 à 300 A/dm^2 .

13.2 Procédé expérimental et mesures effectuées:

La densité de courant limite de diffusion est une grandeur difficile à mesurer. Différentes méthodes sont proposées dans la littérature <1-15>: par mesure interférométrique, par la méthode de congélation de BRENNER, par mesure directe et par l'emploi d'un traceur. Les deux premières méthodes citées demandent un dispositif expérimental très compliqué et incompatible avec la cellule d'électrolyse utilisée. La méthode directe suppose qu'il n'y ait aucun dégagement gazeux sur la cathode lors de l'électrolyse. Ce n'est pas le cas pour l'ion zinc que nous voulons étudier. De plus, ces trois méthodes ne sont pas applicables pour les solutions concentrées (notre cas). La dernière méthode détermine la densité de courant limite de diffusion d'un ion par co-déposition d'un autre ion (traceur) en concentration beaucoup plus faible. C'est ce procédé que nous avons retenu.

13.2.1 Procédé expérimental:

Un ion métallique présent en faible concentration dans un électrolyte est caractérisé par une densité de courant limite peu élevée. Si un tel ion est ajouté en faible proportion dans l'électrolyte, il se co-déposera à sa densité de courant limite, qui sera elle-même inférieure à la densité de courant de travail. Cette méthode est donc utilisable quelle que soit la densité de courant de travail. Pour que la co-déposition soit possible et pour s'assurer que le traceur se dépose à sa densité de courant limite de diffusion, il faut choisir un métal traceur plus noble (ayant un potentiel plus anodique) que le métal étudié. Il faut aussi s'assurer que le traceur ne perturbe pas la cristallisation du métal étudié et que son sulfate soit parfaitement soluble dans l'électrolyte. Le cadmium et l'argent répondent à ces exigences pour le zinc.

L'écoulement est le même pour les deux ions présents. Si on néglige les effets de la migration, les deux espèces ont des épaisseurs de couche de diffusion dont la

différence est uniquement due à leur nombre de SCHMIDT respectif. Cette méthode de mesure suppose donc que l'épaisseur de la couche de diffusion est indépendante de la densité de courant de travail. Elle ne dépend que de l'ion, de la composition de la solution, de la température et des caractéristiques de l'écoulement. Elle est donc égale à l'épaisseur de la couche de diffusion obtenue dans le chapitre précédent dans le cas de la densité de courant limite. Dès lors, de la connaissance de la densité de courant limite pour le traceur J_{limt} (obtenue par analyse du dépôt réalisé), il est possible de déterminer la densité de courant limite pour le métal étudié J_{limMe} , par le raisonnement suivant:

Soit I_t l'intensité utilisée pour déposer le traceur, pendant le temps θ de l'électrolyse. L'analyse du dépôt permet de connaître le poids P_t de traceur cristallisé. Celui-ci est relié à l'intensité par la relation:

$$I_t \theta = \frac{P_t F}{e_t}$$

e_t est l'équivalent gramme du traceur. La densité de courant utilisée pour déposer le traceur (densité de courant limite de diffusion de celui-ci) sur la surface S de l'électrode est alors:

$$J_{limt} = \frac{P_t F}{e_t \theta S}$$

Les définitions respectives des densités de courant limite:

$$J_{limt} = z_t F \frac{D_t}{\delta_t} C_t$$

$$J_{limMe} = z_{Me} F \frac{D_{Me}}{\delta_{Me}} C_{Me}$$

permettent de déduire la densité de courant limite du métal de celle du traceur:

$$J_{limMe} = \frac{z_{Me}}{z_t} \frac{D_{Me}}{D_t} \frac{C_{Me}}{C_t} \frac{\delta_t}{\delta_{Me}} J_{limt}$$

A ce stade, il est nécessaire de relier les deux épaisseurs de couche de diffusion entre elles. Ceci est généralement fait par l'intermédiaire de la loi de CHILTON-COLBURN et donne:

$$J_{lim Me} = \frac{z_{Me} C_{Me}}{z_t C_t} \left(\frac{D_{Me}}{D_t} \right)^{2/3} J_{lim t}$$

Cette hypothèse n'affecte pas la loi d'évolution de la densité de courant limite avec les caractéristiques de l'écoulement mais induit une erreur sur le niveau de $J_{lim Me}$ dans le cas où le nombre de SCHMIDT n'interviendrait pas à la puissance 1/3.

Le cadmium est un élément très voisin du zinc; leurs coefficients de diffusion moléculaire et donc les nombres de SCHMIDT qui les représentent dans une même solution électrolytique sont identiques. De ce fait, lors de la codéposition, et dans l'hypothèse où la migration n'intervient pas, ces deux espèces ioniques ont la même épaisseur de couche de diffusion: $\delta_{Cd} = \delta_{Zn}$. Nous avons donc choisit d'utiliser ce métal comme traceur plutôt que l'argent afin d'obtenir le bon niveau pour $J_{lim Zn}$. Les densités de courant limite de diffusion sont alors liées par la relation:

$$J_{lim Zn} = \frac{z_{Zn} C_{ZN}}{z_{Cd} C_{Cd}} J_{lim Cd} \quad (13.1)$$

Remarque: L'utilisation de l'argent comme traceur, dans le cas où l'influence du nombre de SCHMIDT se ferait à la puissance 1/4 plutôt que 1/3 (comme le suggère le chapitre précédent), ne crée une différence de niveau pour la densité de courant limite de diffusion du zinc que de l'ordre de 3%.

13.2.2 Mesures réalisées:

Dans cette étude expérimentale nous n'avons étudié que l'influence de l'écoulement. La composition de la solution et la température étaient fixées. Les résultats exposés dans la référence <1-14> montrent que la mesure est fortement influencée par le dégagement d'hydrogène qui se produit lors de l'électrolyse du zinc. La quantité d'hydrogène dégagée étant fonction de la densité de courant de travail <1-3>, nous avons aussi fait varier cette dernière, pour évaluer l'influence de ce gaz sur nos mesures. Enfin, nous avons fait varier la concentration en cadmium pour nous assurer que celui-ci se déposait bien à sa densité de courant limite de diffusion.

La solution étudiée est une solution aqueuse de sulfate de zinc contenant 65 gr/l de zinc et 87 gr/l d'acide sulfurique et maintenue à une température voisine de 50 C. Pour assurer une bonne concordance entre les différentes mesures effectuées, on a conservé la même épaisseur de dépôt pour toutes les expériences (environ 70 gr/m²). Les valeurs retenues pour la densité de courant de travail et le nombre de Coulomb correspondent à la surface totale de la cathode. Les analyses chimiques des dépôts sont aussi des moyennes sur la surface de l'électrode. Ceci revient à négliger les influences des couches limites latérales dans le canal ainsi que la zone

d'établissement de la couche de diffusion sur la cathode (une analyse plus fine, en découpant la cathode en 8 secteurs, a montré que le dépôt était assez uniforme à la fois pour le zinc et le cadmium).

Les mesures ont été effectuées par séries de 15 plaques (cathodes). Les mêmes conditions étaient maintenues pour 3 plaques consécutives pour vérifier la reproductibilité de l'électrolyse. Entre chaque série de 5 conditions différentes, la solution était changée ou analysée. Le processus d'électrolyse d'une plaque était le suivant:

- Préparation de la plaque:

Pré-dégraissage organique au méthanol dénaturé.

Rinçage à l'eau distillée.

Dégraissage basique concentré à 85 C et 10 A/dm².

Rinçage à l'eau distillée.

Décapage et activation de la surface en milieu sulfurique.

Rinçage au méthanol puis séchage rapide à l'air chaud.

Pesage de la plaque.

- Electrolyse:

Mise en place de la cathode dans la cellule.

Etablissement de l'écoulement.

Electrolyse et mesure du débit, de la température, de la densité de courant de travail et du nombre de Coulomb utilisé.

Retrait de la plaque et rinçage immédiat à l'eau déminéralisée.

- Traitements finaux.

Rinçage au méthanol dénaturé et séchage à l'air chaud.

Pesage de la plaque avec dépôt.

Stockage à l'abri de l'humidité.

Les deux pesages servent à déterminer la quantité de métal déposé. Ceci permet d'évaluer le rendement de l'électrolyse et donc la quantité d'hydrogène dégagée. Les poids de dépôt sont de l'ordre de 1,5 gr sur la plaque. La précision de la balance est de $\pm 0,01$ gr (soit $\pm 0,7\%$ de la mesure).

Une fois les 15 plaques réalisées, les dépôts sont dissous par une solution aqueuse d'acide chlorhydrique et mis au trait dans des ballons de 500 ml. Nous avons aussi effectué des pesages avant et après dissolution des dépôts mais les rendements ainsi obtenus sont trop élevés. Ils prennent en compte le poids de fer dissous. Les solutions obtenues sont ensuite diluées afin d'être analysées par absorption atomique (AA).

Deux analyses ont été faites: L'analyse pour le cadmium a été réalisée par méthode directe. Entre chaque échantillon analysé, nous avons mesuré le signal émis par un

blanc (eau déminéralisée) et par une solution étalon contenant 1 *mgr/l* de cadmium. Ceci permettait de tenir compte de la dérive éventuelle de l'analyseur. Nous avons vérifié que la présence de zinc, de fer et d'acide chlorhydrique dans l'échantillon ne perturbait pas le signal ou que la perturbation était négligeable compte tenu de la précision de l'analyseur. L'opération d'analyse était répétée deux fois. L'analyse par absorption atomique pour le zinc est assez imprécise par méthode directe et doit donc être faite par la méthode des ajouts. Le signal pour le zinc est facilement perturbé par la présence de fer et de certains autres éléments. Cette analyse avait pour but de déterminer un rendement de dépôt afin d'évaluer la quantité d'hydrogène émise sur la cathode. L'ordre de précision de la mesure est de l'ordre de grandeur de la quantité recherchée. Les rendements ainsi obtenus n'ont donc pas été retenus et la méthode des ajouts a été remplacée par une méthode directe, de procédure identique à celle utilisée pour le cadmium. Les résultats servent à confirmer ou à infirmer les valeurs obtenues par la pesée ou par l'intégrateur de Coulomb en cas de grands écarts sur les mesures.

Les résultats sont représentés sous la forme de nombres sans dimension: l'écoulement est représenté par son nombre de REYNOLDS: $Re = \frac{U_d h}{\nu}$; la densité de courant limite de travail par $\frac{kt}{u_r}$ où kt est le coefficient de transfert de masse; et la densité de courant limite de diffusion par $\frac{kt_{lim}}{u_r}$ où kt_{lim} est le coefficient de transfert de masse correspondant à ce courant limite. La construction de ces nombres sans dimension engendre un cumul des incertitudes sur les résultats présentés, incertitudes qu'il est important d'évaluer.

Toutes les incertitudes sur les mesures ou calculs ne sont pas représentées sur les graphiques. Les erreurs systématiques sont écartées car elles n'interviennent que sur la loi moyenne et ne peuvent expliquer les dispersions obtenues. Pour un bon nombre de grandeurs mesurées, les incertitudes ne sont pas proportionnelles à la grandeur mesurée. Elles sont alors évaluées avec leur dimension respective.

– Grandeurs caractéristiques de l'écoulement:

Incertitude sur le débit mesuré: $\pm 0,25 \text{ m}^3/h$

Incertitude sur l'écartement des électrodes: $\pm 0,2 \text{ mm}$

Incertitude sur la viscosité cinématique: $\pm 1\%$

Ces incertitudes vont induire une erreur sur la vitesse de frottement allant jusqu'à 12% pour les faibles débits.

– Grandeurs caractéristiques du dépôt:

Incertitude sur l'analyse par absorption atomique: $\pm 5\%$

Incertitude sur les dilutions et étalons: $\pm 1\%$

Incertitude sur la pesée: $\pm 1,5\%$ (du fer est dissous dans la cellule)

Incertitude sur les concentrations dans la solution: $\pm 5\%$

Incertitude sur le temps de l'électrolyse: $\pm 0,25s$

Incertitude sur la surface de la cathode: $\pm 0,3\%$

L'incertitude sur l'intégrateur de Coulomb est négligeable.

Le cumul de toutes ces incertitudes donne, comme le montre le tableau suivant, des erreurs assez importantes. Celles-ci atteignent en effet 30% des grandeurs étudiées. Elles ne mettent cependant pas en cause les évolutions que nous allons mettre en évidence (les erreurs ainsi calculées sont bien supérieures aux dispersions de nos mesures). Leur représentation, qui gêne la lisibilité des graphiques, n'a pas été reportée sur ceux-ci. Le tableau suivant montre, pour une série de plaques pour laquelle nous avons fait varier à la fois la densité de courant de travail et la vitesse débitante de l'écoulement, les grandeurs utilisées dans les lois, ainsi que les incertitudes relatives sur ces grandeurs (u_τ^* sera défini ultérieurement).

$10^4 kt/u_\tau$	$D(kt/u_\tau)$	$10^4 kt_{lim}/u_\tau$	$D(kt_{lim}/u_\tau)$	$10^4 kt_{lim}/u_\tau^*$	$D(kt_{lim}/u_\tau^*)$
3,52	0,179	11,0	0,256	1,56	0,31
2,35	0,162	10,6	0,237	1,87	0,45
5,45	0,180	13,8	0,262	2,34	0,25
3,63	0,162	10,9	0,243	2,61	0,30
8,28	0,181	25,1	0,248	4,16	0,30
5,48	0,162	15,4	0,275	3,46	0,28
9,68	0,181	24,7	0,272	1,69	0,25
6,62	0,163	17,9	0,253	4,58	0,27
3,30	0,178	10,4	0,255	8,38	0,31
5,39	0,181	13,8	0,263	3,19	0,25
3,63	0,161	10,4	0,242	2,75	0,28
8,04	0,180	20,8	0,267	3,92	0,26
5,46	0,163	15,2	0,248	4,02	0,28
9,91	0,180	25,8	0,272	4,51	0,25
6,67	0,163	18,2	0,254	4,51	0,27

Les résultats de simulation numérique permettent d'évaluer l'erreur systématique faite sur la densité de courant limite en négligeant l'établissement de la couche limite de diffusion. L'erreur la plus importante intervient pour la vitesse débitante la plus petite: 4% pour une vitesse de 1 m/s (pour 5 m/s l'erreur représente 0,4% de la mesure). Les mesures réalisées surestiment donc légèrement la densité de courant limite de diffusion mais ne seront pas corrigées.

Les séries de mesures effectuées sont les suivantes: 4 séries ont été réalisées à nombres de REYNOLDS variables et à densité de courant de travail constante ($100 A/dm^2$) afin d'étudier l'influence de l'écoulement sur la densité de courant limite. 5 séries ont été faites à nombres de REYNOLDS constants et à densité de courant de travail variable (de 50 à $150 A/dm^2$). Le but des ces expériences était l'étude de l'influence de kt (coefficient de transfert de masse) et des phénomènes qu'il engendre. Parmi

elles, 3 séries donnent des résultats en désaccord avec la loi d'ensemble. Ce désaccord s'observe par série entière. Il est de l'ordre de 20 à 30% sur le niveau de la densité de courant limite de diffusion, mais aussi sur son évolution. Pour rechercher quelle pouvait être la cause de ces écarts, 8 autres séries ont été réalisées avec des plaques de rugosités différentes ($Ra = 0,7$ et $1,8$) en s'assurant de la qualité de la turbulence de l'écoulement. Dans ces séries nous avons fait varier à la fois le nombre de REYNOLDS de l'écoulement et la densité de courant de travail. Ces nouvelles mesures confirment la loi d'ensemble et montrent que les écarts obtenus ne sont pas dus à l'état de surface de l'électrode ni à la qualité de l'écoulement. La cause est plutôt électro-chimique, ou bien elle est due à la préparation des plaques. Son origine réelle n'a pas pu être mise en évidence. Ces trois séries sont donc écartées comme douteuses.

13.2.3 Exploitation des mesures:

13.2.4 Influence de la concentration en traceur:

Parmi l'ensemble des mesures, trois séries de plaques ont été réalisées avec des concentrations en cadmium différentes, afin de vérifier que celui-ci se déposait bien à son courant limite. La concentration la plus faible correspond aux ordres de grandeur des expériences de WANG et al <1-14>; les deux autres concentrations testées sont respectivement 10 et 30 fois plus élevées. La figure (3-5) montre que les résultats obtenus sont indépendants de la concentration du traceur. Celui-ci se dépose donc à sa densité de courant limite de diffusion. Pour la solution que nous étudions, une concentration en cadmium 1000 fois inférieure à celle du zinc est donc suffisante.

13.2.5 Influences de l'écoulement et de la densité de courant de travail:

L'électro-déposition du zinc s'accompagne d'un dégagement d'hydrogène sur la cathode. Ce dégagement gazeux modifie l'écoulement au voisinage de l'électrode et donc la densité de courant limite de diffusion. WANG et al <1-14> montrent que son influence peut changer la valeur de la densité de courant limite de diffusion de l'ordre de 100% par rapport à une électro-déposition sans dégagement d'hydrogène (cas du cuivre). Ils suggèrent de prendre en compte les effets de l'hydrogène en ajoutant un terme (fonction de la densité de courant utilisée pour son dégagement: $J_{H_2} = \frac{100-\eta}{100} J$) à la loi de CHILTON-COLBURN, et proposent: $kt_{lim} = kt_{limv} + kt_{limg}$ où kt_{limv} est l'influence pure de l'écoulement, et kt_{limg} représente l'action des bulles d'hydrogène. Des mesures faites à densité de courant de travail variable (et donc à J_{H_2} variable) leur ont permis d'établir:

$$kt_{limg} = cste J_{H_2}^{1/2}$$

Cette loi, retranchée au coefficient de transfert de masse total (kt_{lim}), donne une résultante (kt_{limv}) qui est uniquement due à l'écoulement considéré sans bulle, en bon accord avec la loi de CHILTON-COLBURN, et homogène aux mesures effectuées avec du cuivre.

Les trois séries de mesures représentées sur la figure (3-5) ont été obtenues soit en faisant varier la vitesse de l'écoulement (et donc la vitesse de frottement), soit en faisant varier la densité de courant de travail (et donc kt), soit en faisant varier ces deux grandeurs. Les lois d'évolution en fonction du paramètre k/u_τ sont identiques. La figure (3-6) compare les résultats obtenus, toutes séries confondues à $kt = cste$ et nombre de REYNOLDS variable, au résultat de la simulation numérique dans laquelle nous n'avons pas tenu compte du dégagement d'hydrogène et dans laquelle le nombre de SCHMIDT turbulent est pris égal à 1. Les mesures majorent toutes la loi obtenue numériquement. Elles suivent une évolution en fonction du nombre de REYNOLDS (ou de la vitesse de frottement), alors que le calcul donne kt_{lim}/u_τ constant (ce rapport ne dépend que de la nature de la solution et de la température). Quand le nombre de REYNOLDS augmente, les mesures tendent asymptotiquement vers la loi calculée. Les rendements de dépôt obtenus sont pratiquement constants quel que soit le paramètre variant au cours des mesures.

A ces résultats, nous pouvons donner les interprétations suivantes: Quand la densité de courant de travail varie pour un même écoulement, le rendement de dépôt étant constant, la quantité d'hydrogène dégagée augmente. Ce gaz est éjecté de la paroi et contribue à l'agitation turbulente pariétale. L'écoulement vu par la cathode est alors plus turbulent et correspond à un écoulement à vitesse débitante plus élevée. Les bulles d'hydrogène agissent comme si elles augmentaient la vitesse de frottement pariétale. Ceci permet d'expliquer pourquoi les mesures majorent toutes la loi obtenue par le calcul. Quand le nombre de REYNOLDS augmente, à densité de courant de travail constante, le rendement de dépôt, et donc la quantité d'hydrogène dégagée restent pratiquement constants; et la vitesse débitante augmente. Les bulles sont alors décrochées plus rapidement de l'électrode et sont évacuées tout aussi rapidement. Elles ont moins d'effet sur le dépôt. Ceci permet d'expliquer pourquoi les mesures expérimentales tendent asymptotiquement vers la loi numérique quand le nombre de REYNOLDS augmente (figure 3-6).

13.2.6 Représentation des phénomènes mis en évidence:

L'écoulement influence la contribution du dégagement d'hydrogène sur la densité de courant limite de diffusion. Envisager une représentation par sommation de leurs effets respectifs n'est donc pas réaliste.

Le paramètre kt/u_τ permet de prendre en compte les deux contributions d'une manière très simple, mais l'utilisation de cette grandeur restreint considérablement le domaine de validité de la loi ainsi obtenue. En effet, la quantité d'hydrogène dégagée dépend non seulement de la densité de courant de travail, mais aussi du

rendement de dépôt. Ce dernier varie avec la composition de la solution et la température. Dans le cas d'un autre métal (par exemple le cuivre) pour lequel l'électro-déposition n'engendre pas d'hydrogène, le rapport kt/u_τ est non nul, pourtant il ne doit avoir aucune influence. Utiliser ce paramètre limite la loi au cas du zinc, pour une composition de solution voisine de celle que nous avons étudiée, et à température égale.

Il faut donc représenter la contribution qu'à l'hydrogène sur la densité de courant limite par sa densité de courant d'émission J_{H_2} . Comme celle ci est reliée à la densité de courant de travail, par l'intermédiaire du rendement cathodique, elle peut être remplacée par la grandeur:

$$\frac{100 - \eta}{100} kt$$

L'influence de l'écoulement sur la contribution du gaz peut alors être prise en considération par l'utilisation de la variable sans dimension:

$$\frac{100 - \eta}{100} \frac{kt}{u_\tau} \quad (13.2)$$

(augmenter la vitesse de frottement pariétale va diminuer cette grandeur et donc sa contribution à la loi recherchée)

Les effets des bulles étant identiques à ceux qu'aurait un écoulement à vitesse débitante plus élevée, nous proposons de les faire intervenir par l'intermédiaire d'une vitesse de frottement fictive u_τ^* de la forme:

$$u_\tau^* = u_\tau \left[1 + f \left(\frac{100 - \eta}{100} \frac{kt}{u_\tau} \right) \right] \quad (13.3)$$

dans laquelle u_τ est la vitesse de frottement de l'écoulement quand on néglige la présence de bulles.

Afin d'être en accord avec les évolutions observées dans le cas du cuivre et les résultats de notre simulation numérique, la loi recherchée sera de la forme:

$$\frac{kt_{lim}}{u_\tau^*} = g(S_c, S_t)$$

soit encore:

$$\frac{kt_{lim}}{u_r} = g(S_c, S_t) \left[1 + f \left(\frac{100 - \eta kt}{100 u_r} \right) \right] \quad (13.4)$$

La figure (3-7) montre l'évolution du rapport kt_{lim}/u_r avec la variable de la fonction f . La dispersion des mesures est principalement due à l'incertitude sur la densité de courant du dégagement gazeux. Une incertitude de 2% sur le rendement de dépôt entraîne une erreur qui peut atteindre plus de 50% sur la quantité d'hydrogène produite. De tels résultats n'autorisent qu'une régression linéaire qui donne:

$$g(S_c, S_t) = 8,22 \cdot 10^{-4}$$

$$f \left(\frac{100 - \eta kt}{100 u_r} \right) = 25000 \left(\frac{100 - \eta kt}{100 u_r} \right)$$

Pour la solution que nous avons utilisée, les mesures expérimentales permettent de proposer la loi:

$$\frac{kt_{lim}}{u_r^*} = 8,22 \cdot 10^{-4} \quad (13.5)$$

où

$$u_r^* = u_r \left[1 + 25000 \left(\frac{100 - \eta kt}{100 u_r} \right) \right] \quad (13.6)$$

13.3 Conclusions:

Les résultats que nous avons obtenus expérimentalement peuvent être exprimés sous la même forme que ceux obtenus numériquement. Cette étude expérimentale ne fait pas état de la composition de la solution; mais elle prend en compte la contribution qu'à le dégagement d'hydrogène sur la densité de courant limite de diffusion. Influence qui est loin de pouvoir être négligée. Pour un rendement de courant de 100%, le transfert de masse ne dépend que de la vitesse de frottement pariétale. C'est aussi cette grandeur qui permet de décrire un écoulement de paroi, turbulent et établi. Pour l'électrolyse du zinc, le dégagement d'hydrogène contribue à l'agitation de la solution au voisinage de l'électrode et augmente ainsi la limite pour le transfert de masse. L'influence du gaz est prise en compte en considérant que les bulles déforment l'écoulement pariétal en augmentant le cisaillement local.

Les résultats de cette étude expérimentale sont exploités avec les résultats de la simulation numérique dans le chapitre suivant.

Chapitre 14

APPLICATIONS ET CONCLUSIONS DE CETTE PARTIE

14.1 Applications des résultats obtenus:

14.1.1 Confrontation entre la loi expérimentale et le modèle numérique:

Le modèle obtenu par calcul numérique néglige la présence des bulles d'hydrogène au voisinage de la paroi. Il correspond donc à la fonction $g(S_c, S_t)$ du chapitre précédent. L'application de ce modèle à la solution utilisée lors des expériences permet alors de déterminer le nombre de SCHMIDT turbulent. On obtient $S_t^{-0,26} = 1,035$ et donc:

$$S_t = 1,14 \quad (14.1)$$

Le nombre de SCHMIDT turbulent, à utiliser dans la modélisation numérique de l'influence respective de l'écoulement et de la composition de la solution électrolytique, est bien voisin de l'unité. Imposer la valeur 1 à ce nombre sans dimension dans le modèle proposé conduit à un écart inférieur à 4% avec nos mesures.

Cette confrontation de résultats permet soit d'ajouter les effets du dégagement d'hydrogène à la loi obtenue par le calcul, soit d'ajouter l'influence de la composition de la solution dans la loi expérimentale, et de proposer une modélisation complète permettant d'évaluer la densité de courant limite de diffusion:

$$\frac{kt_{lim}}{u_r^*} = 0,95 \cdot 10^{-1} S_c^{-0,74} S_t^{-0,26} \quad (14.2)$$

où

$$u_{\tau}^* = u_{\tau} \left[1 + 25000 \left(\frac{100 - \eta kt}{100 u_{\tau}} \right) \right] \quad (14.3)$$

14.1.2 Application du modèle complet aux mesures:

L'application aux mesures du modèle complet donné par les équations (14.2) et (14.3) est présentée sur la figure (3-8), en fonction du paramètre kt/u_{τ} et avec les mêmes échelles que les figures (3-5) et (3-6). La densité de courant limite de diffusion, dans cette représentation, ne dépend plus de la densité de courant de travail ni de l'écoulement. Cette formulation permet de faire apparaître les influences de la composition de la solution et de la température. L'application du modèle numérique à la solution utilisée en prenant $S_t = 1,14$ figure aussi sur le graphique qui montre son parfait accord avec les mesures réalisées.

Les résultats reportés sur cette figure montrent aussi l'intérêt qu'il y a à augmenter la précision de mesure afin de diminuer l'incertitude sur les lois recherchées. Pour finir, nous constatons que le fait de négliger les effets de la migration, due au champ électrique dans l'équation pour la concentration, est une approximation correcte pour la solution étudiée.

14.1.3 Confrontation du modèle avec d'autres mesures expérimentales

Les mesures expérimentales de laboratoire sont généralement réalisées sur des électrodes très petites et dans des cellules dont la taille est en rapport avec ces électrodes. Ces cellules ne peuvent pas être considérées comme infiniment larges et la vitesse de frottement varie considérablement sur la largeur de l'électrode. Il faut alors évaluer une vitesse de frottement moyenne sur l'électrode avec toutes les erreurs que cette approximation peut entraîner. La vitesse de frottement moyenne retenue correspond au coefficient de perte de charge sur la section de passage (équation (12.19)).

WANG, CHEN, O'KEEFE, DEGREZ et WINAND <1-14> soulignent la difficulté à déterminer une longueur caractéristique de telles cellules qui permette la transposition des résultats entre ces cellules. La figure (3-9) représente les mesures exposées dans leur article sous la forme sans dimension que nous avons adoptée; ainsi que les prédictions du modèle complet pour les mêmes solutions. Les résultats sont représentés en fonction de la vitesse débitante U_q ; le rapport kt/u_{τ} étant inconnu pour la plupart des mesures. Le modèle complet est en accord uniquement avec les mesures reportées sur la figure (3-9c). Il sous-estime la densité de courant limite de toutes les autres mesures pour lesquelles il n'y a pourtant pas de dégagement gazeux. Les niveaux entre les différentes mesures sont aussi en désaccord entre eux. On peut noter que les mesures de la densité de courant limite de diffusion représentées par le

rapport sans dimension kt_{lim}/u_r^* sont bien indépendantes de l'écoulement dans tous les cas.

Les différences de niveaux constatées peuvent provenir des causes suivantes:

- La modélisation exprime la densité de courant limite en fonction de la vitesse de frottement locale. Dans le cas des cellules ayant un rapport largeur sur hauteur très élevé (la hauteur étant la distance entre les électrodes), la vitesse de frottement est pratiquement uniforme sur toute la largeur de l'électrode. La formulation proposée est alors applicable et donne de bons résultats (voir nos mesures). Dans les cellules pour lesquelles ce rapport est plus petit, la densité de courant limite de diffusion et la vitesse de frottement sont des moyennes sur la surface de l'électrode (c'est le cas des mesures reportées figure (3-9)). Ces approximations peuvent induire des erreurs non négligeables.
- Dans le cas des cellules de sections étroites, la longueur des électrodes est généralement petite. PICKETT et ONG <1-20> ont étudié l'influence de cette longueur sur la mesure de la densité de courant limite de diffusion, dans une cellule de section de $40 * 7 \text{ mm}^2$ et pour un écoulement turbulent. Ils ont ainsi montré que l'influence de la longueur des électrodes se faisait ressentir jusqu'à la valeur de 150 mm . A solution et écoulement identiques, une électrode de 10 mm de long donne une densité de courant limite de diffusion qui est supérieure de 77% à la valeur obtenue sur une électrode faisant 150 mm . Pour les électrodes de faible longueur, l'établissement de la couche limite de diffusion ne peut pas être négligé. Pour les expériences que nous avons faites, la longueur des électrodes était de 125 mm . Nous avons montré dans le chapitre précédent que la perturbation due à l'établissement de la couche de diffusion représentait alors moins de 4% de la mesure.
- La référence <1-20> montre aussi l'importance de la position du point d'injection de l'électrolyte dans le canal de la cellule par rapport aux électrodes. Si l'injection est trop proche des électrodes, l'écoulement vu par celles-ci n'est pas établi. Il correspond à un écoulement plus turbulent qu'il n'est prévu. Ceci se fait surtout sentir pour les électrodes courtes et augmente la densité de courant limite de diffusion par rapport aux prédictions. Tenir compte de ce phénomène peut se faire en augmentant l'importance des termes turbulents dans l'équation de transport pour la concentration. Ceci revient à diminuer considérablement le nombre de SCHMIDT turbulent.

Ces différentes remarques montrent combien il est difficile de définir un modèle applicable à toutes les cellules de laboratoire. Le modèle proposé n'est valable que pour une électrode suffisamment grande pour que l'on puisse négliger les phénomènes pariétaux et l'établissement de la couche limite de diffusion turbulente. Il faut aussi que l'écoulement turbulent soit établi. Ces remarques montrent aussi que les incohérences, entre les mesures expérimentales obtenues dans différentes cellules, ne sont pas uniquement dues à un mauvais choix de la longueur caractéristique pour

décrire le transfert de masse; elles peuvent aussi être liées aux tailles respectives des électrodes et à la qualité de l'écoulement de l'électrolyte entrant dans la cellule.

14.2 Conclusions de cette partie:

Les résultats présentés dans cette partie ont montré que les paramètres hydrodynamiques gouvernant le transfert de masse pariétal pour un écoulement turbulent établi sont la vitesse de frottement sur l'électrode et l'épaisseur de la sous-couche visqueuse. Ils ont aussi permis d'élaborer un modèle permettant de déterminer la densité de courant limite de diffusion en fonction de la composition de la solution, des caractéristiques de l'écoulement et du rendement cathodique.

L'utilisation de ce modèle est toutefois restreinte aux cellules ayant des électrodes larges et longues par rapport à la hauteur du canal qui les constitue. Ce modèle n'est applicable qu'aux solutions fortement concentrées avec un support électrolytique abondant, et dans le cas où l'écoulement dans la cellule est établi. La modélisation des effets d'un dégagement gazeux est issue de mesures expérimentales. Lors de celles-ci, les rendements de courant étaient élevés, et la précision des mesures n'a permis qu'une régression linéaire. La formulation proposée ne pourra alors être appliquée qu'aux électrolyses à hauts rendements de courant.

Les cellules d'électrozingages industrielles ainsi que les cellules de laboratoire de type "carte postale", utilisées avec une solution industrielle, répondent à toutes ces conditions. Le modèle proposé est donc applicable à ces deux types de cellules.

A composition de solution, densité de courant de travail et rendement de courant identiques, la transposition des résultats obtenus dans une cellule de laboratoire (carte postale) à une cellule industrielle se fait en respectant la même vitesse de frottement u_τ , que l'écoulement soit co-courant ou contre-courant.

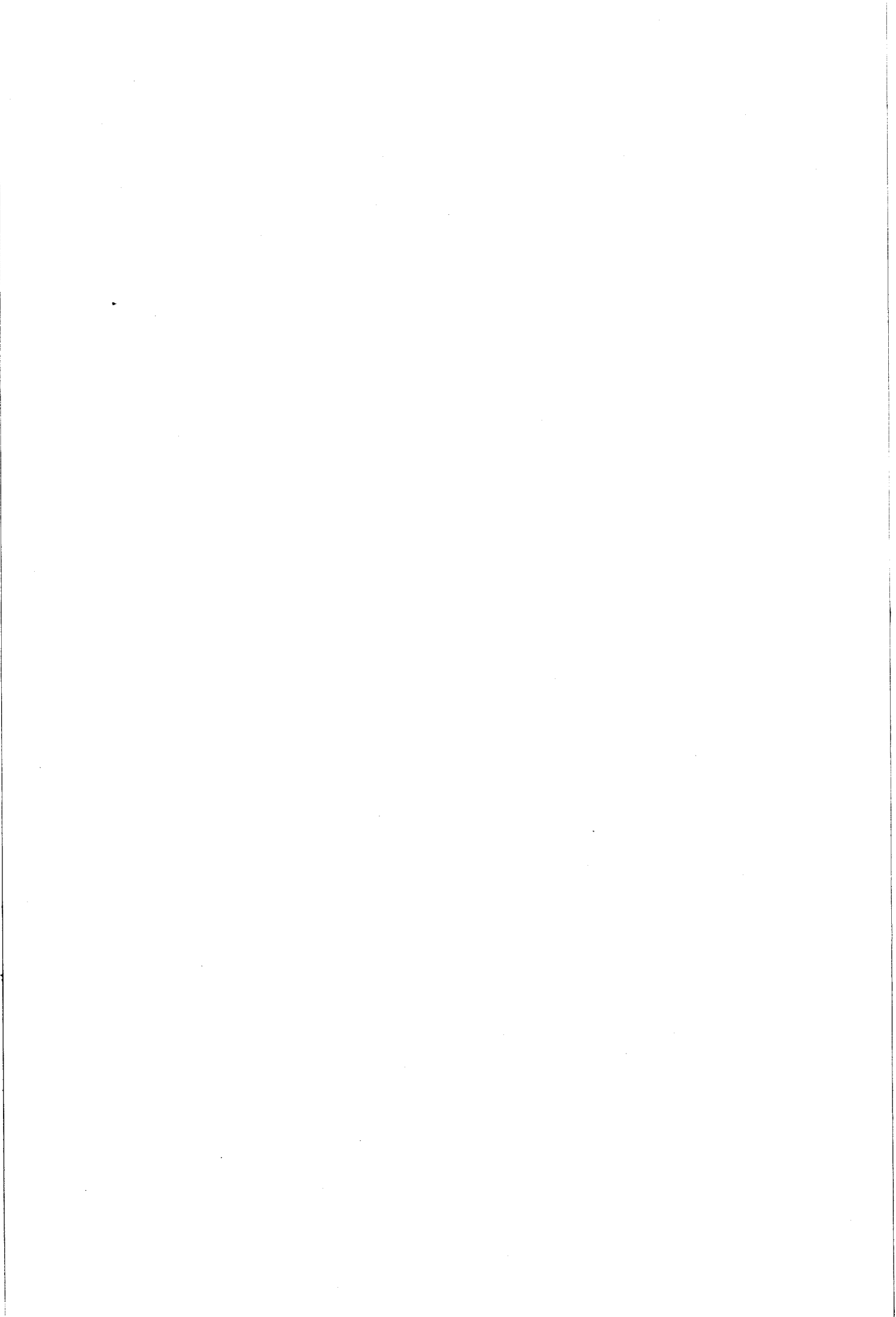
Quand l'une de ces grandeurs varie entre le laboratoire et la cellule industrielle, il faut respecter la règle de similitude pour le paramètre J/J_{lim} (figure (1-16)). Par exemple, l'effet d'une densité de courant de travail plus élevée peut être compensé par une densité de courant limite de diffusion plus élevée. Ceci est obtenu soit en jouant sur la composition de la solution, soit en changeant la température d'électrolyse ou la vitesse de frottement pariétale. Le modèle proposé permet alors d'estimer les modifications à apporter à chacun de ces paramètres pour respecter la similitude.

Deux développements peuvent être envisagés pour le modèle complet. Il serait en effet intéressant de reproduire les expériences cette fois-ci avec du cuivre, afin de ne pas avoir de dégagement d'hydrogène, et d'étudier ainsi l'influence de la composition de la solution et de la température. Ceci permettrait de vérifier plus précisément la loi obtenue numériquement. Il serait aussi intéressant d'affiner la loi représentant l'influence du dégagement gazeux. Deux voies sont possibles: Trouver une méthode qui permette de mesurer le rendement de courant avec plus de précision. Faire des

mesures pour une électrolyse avec un dégagement d'hydrogène plus important afin d'étendre le domaine de validité du modèle.

Part IV

**APPLICATION
INDUSTRIELLE DES
RESULTATS PRECEDENTS ET
CONCEPTION D'UNE
NOUVELLE CELLULE
D'ELECTRO-ZINGAGE.**



Chapitre 15

DEFINITION D'UNE NOUVELLE CELLULE INDUSTRIELLE

15.1 Introduction:

Préalablement à nos travaux sur la cellule carte postale, une étude électro-chimique a été menée dans le but de qualifier la texture cristalline d'un dépôt de zinc, en fonction de la densité de courant de travail et de la vitesse débitante de l'écoulement. Cette étude a été réalisée pour différents types d'électrolyte et notamment la solution utilisée par la société BEAUTOR S.A. L'axe principal donné à cette recherche était de déterminer s'il est possible de réaliser, pour cette solution, un dépôt à croissance mono-orientée dans le plan [0002] de la tôle, et de connaître les conditions d'obtention d'un tel dépôt. Les influences de la pollution de la solution par des éléments comme le fer ou le plomb ont aussi été étudiées.

La structure cristalline du zinc est à base hexagonale (figure 4-1a). La texture mono-orientée dans le plan [0002] correspond à une croissance du dépôt dont les bases hexagonales sont parallèles au plan de la tôle d'acier laminé (figure 4-1b). Actuellement, les dépôts réalisés dans l'industrie n'ont pas de plan de croissance privilégié. Ils ont souvent une surface dendritique. La figure (4-2) compare les images prises au microscope de ces deux types de dépôts.

Réaliser un dépôt mono-orienté apporte de grands avantages par rapport aux dépôts industriels actuels. Un tel dépôt a un aspect visuel uniforme, lisse et brillant. Ce qui est déjà un gage de qualité et une assurance de brillance pour la peinture qui le recouvrira. La figure (4-2) montre la qualité microscopique de sa surface. Le dépôt mono-orienté est régulier et homogène. Il offre donc une résistance à la corrosion accrue. Mais l'avantage principal de la structure mono-orientée est son aptitude à être ultérieurement emboutie. En effet, lors de l'emboutissage d'une tôle, les efforts dus au glissement sont souvent très importants. Les coefficients de frottement sur

les surfaces de la tôle doivent alors être les plus petits possibles. La figure (4-3) compare les coefficients de frottements obtenus pour un dépôt fortement mono-orienté et un dépôt faiblement mono-orienté en fonction de l'effort de serrage. Le test est le suivant: La tôle d'acier, sur laquelle un dépôt est réalisé sur une seule face, est serrée entre deux galets avec un certain effort. On mesure la force nécessaire pour tirer la tôle perpendiculairement aux galets à une vitesse donnée. Le coefficient de frottement est alors le rapport de la force de traction sur la force de serrage. Ce test montre qu'un dépôt fortement mono-orienté a un coefficient de frottement nettement inférieur à celui d'un dépôt dont la structure s'est développée sans direction privilégiée.

Cette étude a montré qu'il était possible de réaliser des revêtements avec un pourcentage très élevé de cristaux orientés dans le plan [0002] pour la solution électrolytique utilisée par la société BEAUTOR S.A. L'obtention de tels dépôts dépend étroitement de la densité de courant de travail et de la vitesse débitante (soit encore du paramètre J/J_{lim}). Les variations du pourcentage de structure mono-orientée avec ces deux grandeurs peuvent être très franches, et l'on passe rapidement d'un dépôt contenant plus de 90% de cette texture à un dépôt en contenant moins de 40%.

15.2 Application des résultats à la conception d'une cellule d'électro-déposition:

15.2.1 Condition de transfert des mesures de laboratoire aux cellules industrielles:

Les résultats numériques et expérimentaux obtenus dans la partie précédente ont montré que pour transposer les résultats issus de mesures dans une cellule de laboratoire de type carte postale à une cellule industrielle, pour une solution et une densité de courant de travail identiques, il faut respecter la même vitesse de frottement fictive u_r^* .

Les rendements de courant obtenus dans ces deux cellules sont très voisins. Nous pouvons alors supposer, en première approximation, que la transposition de résultats d'une cellule à l'autre s'obtient en respectant la même vitesse de frottement u_r sur la cathode.

La reproduction, dans les cellules industrielles de la société BEAUTOR S.A., des dépôts mono-orientés obtenus au cours de l'étude citée dans l'introduction, doit donc se faire par reproduction, à la même densité de courant de travail, de la vitesse de frottement cathodique.

Dans la suite, toutes les valeurs numériques correspondent à la solution utilisée par la société BEAUTOR S.A. supposée à la température de 50 C.

15.2.2 Application de la condition de transfert aux cellules de la société BEAUTOR S.A.:

Dans les cellules utilisées actuellement par la société BEAUTOR S.A., l'électrolyte est injecté au bas de la cellule (figure 1-5) et se répartit de façon inégale de chaque côté de celle-ci. MONNIER <1-2> a étudié cette répartition par voie expérimentale sur une maquette. L'utilisation des résultats qu'il a obtenus montre qu'il n'est pas possible, pour des conditions de fonctionnement acceptables au point de vue productivité de l'installation, de réaliser un dépôt riche en structures mono-orientées simultanément dans les deux demi-canaux constituant la cellule. Soit les vitesses de frottement cathodiques sont très différentes dans les deux canaux et n'appartiennent pas toutes les deux à la plage de réglage désirée, soit le débit à injecter est impossible à obtenir dans les cellules actuelles (dimension des pompes et niveau d'électrolyte trop haut en sortie de cellules).

Remarque: Un niveau ou un jet d'électrolyte trop haut en sortie de cellule entraîne un passage de solution entre la tôle et la virole métallique du tambour. Il se produit alors un zingage de la virole et des coups d'arc qui détériorent la virole et la tôle.

Pour reproduire les effets d'une vitesse débitante de 2 m/s réalisée dans la cellule carte postale (vitesse de frottement cathodique $u_r = 0,104 \text{ m/s}$), dans le demi canal qui fonctionne avec un écoulement contre-courant à la tôle (la vitesse de ligne étant de 90 m/min), il faut injecter un débit total de $150 \text{ m}^3/\text{h}$ dans la cellule. Ce débit d'injection se répartit de chaque côté de la cellule: $47 \text{ m}^3/\text{h}$ passent dans le demi canal, dans lequel l'écoulement est contre-courant au déplacement de la tôle, et réalisent la vitesse de frottement cathodique désirée. $103 \text{ m}^3/\text{h}$ passent dans l'autre demi canal. La vitesse débitante est alors de $1,59 \text{ m/s}$ co-courante à la tôle qui se déplace à $1,5 \text{ m/s}$. La vitesse de frottement dans ce second demi canal n'est que de $0,025 \text{ m/s}$ (la vitesse de frottement désirée étant de $0,104 \text{ m/s}$). L'écoulement vu par la cathode est alors très peu turbulent et ne convient pas à la réalisation d'un dépôt fortement mono-orienté.

Pour reproduire la vitesse de frottement cathodique de $0,104 \text{ m/s}$, dans le demi canal qui fonctionne avec un écoulement co-courant à la cathode, il faut injecter $355 \text{ m}^3/\text{h}$ dans la cellule. Ce débit très élevé donne des hauteurs de jets en sortie de cellule qui atteignent 50 cm . Ce débit et ces hauteurs ne sont pas acceptables dans la conception présente des cellules.

Les cellules actuellement utilisées par la société BEAUTOR S.A. ne permettent pas la réalisation de dépôts de zinc fortement mono-orientés.

15.2.3 Application des résultats obtenus à la conception d'une cellule capable de réaliser des dépôts mono-orientés:

Pour les densités de courant de travail utilisées dans les cellules industrielles, les vitesses de frottement cathodiques qui permettent la réalisation de dépôts mono-

orientés doivent être élevées. Parmi les écoulements qu'il est possible d'obtenir dans les cellules, deux types seulement conviennent. Il s'agit des écoulements contre-courants à la tôle (profil (c) de la figure 1-17) et des écoulements de type POISEUILLE co-courants (profil (a) de la figure 1-18). Comparons les avantages et les inconvénients de ces deux écoulements.

Pour obtenir la même vitesse de frottement sur la cathode, un écoulement co-courant nécessite une vitesse débitante beaucoup plus élevée. Pour reproduire la vitesse de frottement équivalente à une vitesse de 2 m/s dans la carte postale dans une cellule industrielle de hauteur de canal de 8 mm et pour une vitesse de ligne de 90 m/min , il faut $34 \text{ m}^3/\text{h}$ à contre-courant contre $168 \text{ m}^3/\text{h}$ en écoulement co-courant.

Le débit élevé permet une meilleure évacuation des gaz émis sur les électrodes. Il assure ainsi le maintien de la conductivité de la solution à une bonne valeur et un bon renouvellement de la solution. Mais la vitesse débitante élevée induit un jet pouvant atteindre 50 cm en sortie de la cellule. Ce débit élevé nécessite aussi des pompes plus puissantes. La perte de charge dans la cellule et donc la pression à l'injection sont $2,5$ fois plus élevées que pour l'écoulement contre-courant.

Les écoulements contre-courant à la tôle permettent également d'obtenir les vitesses de frottement nécessaires à la réalisation d'un dépôt fortement mono-orienté. Il s'avère qu'ils suffisent au bon renouvellement de la solution, ainsi qu'à l'évacuation des gaz émis sur les électrodes. Ce type d'écoulement a donc été retenu pour définir une nouvelle cellule. Cette solution apportant en plus l'avantage de commencer le dépôt en écoulement établi, la germination de celui-ci se fait alors dans les conditions favorables à une croissance mono-orientée.

15.3 Conception d'une nouvelle cellule industrielle:

15.3.1 Charges à respecter:

Les mesures faites dans la cellule carte postale ont montré qu'il faut à tout prix s'assurer de la qualité de l'écoulement pour réaliser le dépôt mono-orienté désiré. Le canal de la cellule industrielle doit donc avoir la géométrie la plus rigoureuse, et la plus constante possible aussi bien en largeur qu'en longueur.

La vitesse de frottement cathodique doit être la plus uniforme possible sur la largeur de la tôle, et ceci dès l'entrée de l'électrolyte dans la cellule. L'injection de la solution doit donc se faire de manière uniforme sur toute la largeur de la cellule. Il faut par conséquent définir des injecteurs compacts (en raison du manque de place) qui assurent au mieux cette fonction. Leur géométrie doit aussi assurer un refoulement minimum de la solution par entraînement de la tôle à l'entrée dans la cellule.

Les cellules de la société BEAUTOR S.A. doivent fonctionner dans les deux sens de défilement de la tôle afin de pouvoir réaliser des dépôts sur les deux faces de celle-ci. La cellule et son système d'injection-éjection doivent donc être symétriques.

La figure (4-4) montre un schéma de principe d'une cellule dans cette nouvelle conception.

15.3.2 Définition du canal:

L'expérience acquise par la société BEAUTOR S.A. a révélé les avantages multiples de l'utilisation des anodes insolubles <4-1>. Le plomb-argent, qui est un alliage malléable, à température de fusion peu élevée et très résistant à l'acide, convient particulièrement à la réalisation d'anodes. Les réparations se font par apport de cet alliage par gouttes sur le lieu même de production, mais elles nécessitent le démontage complet de la cellule.

Le plomb-argent a deux désavantages principaux. L'oxyde de plomb qui se forme à la surface de l'anode crée une chute de potentiel supplémentaire qui induit une augmentation du coût de l'électrolyse. Le plomb dissous se co-dépôt avec le zinc et dégrade les qualités du dépôt par rapport à un dépôt de zinc pur. Les constructeurs automobiles imposent d'ailleurs des conditions de plus en plus strictes sur la quantité de plomb autorisée dans les dépôts.

Pour s'affranchir des défauts liés à l'utilisation du plomb, les anodes peuvent aujourd'hui être réalisées en titane. Ce métal plus cher, plus difficile à façonner, mais plus résistant que le plomb, offre des durées de vie beaucoup plus longues aux anodes qui rendent son utilisation rentable.

Pour ne plus avoir à démonter totalement les cellules lors de la réfection des anodes, celles-ci sont montées dans des porte-anodes démontables (figure 4-4). Un jeu d'anodes supplémentaire permet l'interchangeabilité de celles-ci et diminue la durée des interventions.

Sur la ligne actuelle, la hauteur moyenne des canaux des cellules est de l'ordre de 10 mm. Cette hauteur est ramenée à 8 mm pour diminuer la chute ohmique de tension et donc le coût de la production.

15.3.3 Définition des injecteurs:

Les deux fonctions que doivent assurer les injecteurs sont réalisées par deux parties distinctes du dispositif: le corps d'injection et le nez d'injection.

Le corps d'injection est le résultat d'une étude réalisée par M. STANISLAS <4-2>. Celui-ci permet de transformer l'écoulement de la conduite cylindrique d'arrivée de l'électrolyte en une lame de fluide plane et perpendiculaire à cette conduite (figure 4-5). L'épaisseur de la lame (1) est voisine de la hauteur du canal de la cellule. Son envergure est égale à la largeur de la cellule. Un dispositif répartiteur, constitué de trous (2) percés directement dans la paroi de la conduite (3) d'amenée de l'électrolyte, assure une répartition uniforme du débit de fluide sur toute l'envergure

de la lame. Cette lame est ensuite amenée au nez d'injection par un canal d'uniformisation (4).

Le nez d'injection dirige la lame de solution dans le canal de la cellule. L'ouverture du canal au niveau des injecteurs doit permettre le passage de tôles épaisses et l'évacuation du débit. Nous avons choisi de conserver la hauteur du canal entre le nez d'injection et le tambour cathodique. Du côté de la cellule où le dispositif fonctionne en injecteur, une partie du débit total est refoulée vers l'extérieur du fait des forces de pression et de l'entraînement par le mouvement de la bande. La géométrie du nez d'injection a été étudiée pour minimiser ce débit de fuite sur la plus grande plage de fonctionnement possible pour la cellule. La description de cette étude fait l'objet du chapitre suivant. Le débit refoulé est évacué au dessus de l'injecteur (figure 4-4). De l'autre côté de la cellule, l'injecteur n'est pas opérationnel. Le débit passant réellement dans la cellule est évacué au dessus de celui-ci. Les deux débits sont collectés et retournés vers le régénérateur.

Le dispositif complet d'injection fait actuellement l'objet d'une demande de brevet.

15.4 Performances de la nouvelle cellule:

Avant de réaliser cette nouvelle cellule à l'échelle industrielle, un prototype à échelle réduite a été inséré dans une ligne pilote. La hauteur du canal est celle d'une cellule industrielle. Les grandeurs électriques ainsi que les débits par unité de largeur sont alors les valeurs industrielles. Le canal étant plus court, les niveaux de pression sont plus bas. La répartition du débit total injecté en un débit de fuite et un débit réel ne correspond donc pas au cas industriel.

La ligne pilote (figure 4-6) est une reproduction à échelle réduite des lignes industrielles. Elle comprend donc une dérouleuse, une zone de préparation de la tôle (décapage, dégraissage), la cellule, une zone de traitements de finition (rinçage, séchage) et une enrouleuse finale. La cellule, ainsi que les différents traitements électrolytiques, sont alimentés en courant continu par des redresseurs. Divers moyens de mesures permettent de connaître au cours du temps les tensions et densités de courant utilisées. La solution électrolytique est pompée dans une cuve de $1 m^3$. 2 débitmètres électromagnétiques placés sur les canalisations mesurent le débit total injecté et le débit de fuite refoulé à l'injection. Les différentes grandeurs mesurées sont enregistrées au cours du temps par un micro ordinateur. Le canal de la cellule est aussi équipé de 30 prises de pression statique réparties en 6 génératrices disposées sur la longueur totale du canal. Les 5 prises de pression de chacune des génératrices permettent de vérifier l'uniformité de l'écoulement tout au long du canal.

Une étude préliminaire, réalisée avec de l'eau et sans la tôle, a permis de qualifier hydrodynamiquement le canal de la cellule. Les mesures réalisées à différents débits et différentes vitesses de rotation du tambour cathodique ont montré les performances

du corps d'injection. L'écoulement est uniforme dès son entrée dans le canal. La figure (4-7a) montre les 30 pressions obtenues dans le cas d'un débit total de $20 \text{ m}^3/\text{h}$ et pour une vitesse à la périphérie du tambour de $82 \text{ m}/\text{min}$. La pression est uniforme sur chaque génératrice, et ceci dès l'entrée dans le canal. La perte de charge calculée à partir des débits mesurés est en accord avec les mesures de pression. La figure (4-7b) compare les gradients de pression mesurés à différents débits injectés, pour une vitesse de tambour correspondant à une vitesse de ligne de $82 \text{ m}/\text{min}$, avec ceux calculés à partir de la valeur du débit réel. Les vitesses de frottement calculées par les modèles de turbulence concordent donc avec les expériences.

Cette étude a aussi mis en évidence la nécessité d'adapter la géométrie du nez d'injection aux caractéristiques de la cellule.

L'accord entre les prédictions des modèles de turbulence et les mesures permet d'élaborer un abaque de transposition entre la carte postale et le prototype par simulation numérique. Le critère de transposition est le respect de la vitesse de frottement cathodique (figure 4-8). L'abaque néglige l'épaisseur de la tôle qui était toujours inférieure à $0,3 \text{ mm}$ lors des expériences.

Cet abaque a été utilisé pour confirmer les conditions d'obtention de dépôts fortement mono-orientés dans une cellule de forme industrielle (prototype). Les résultats obtenus montrent que la condition de transfert est correcte.

15.5 Conclusions:

Les différentes études ont permis de définir une cellule radiale à hydrodynamique contrôlée, et capable de réaliser des dépôts de zinc mono-orientés.

Les modèles de turbulence prédisent correctement les paramètres des écoulements qui influencent directement l'électrolyse. Ils permettent alors d'élaborer des abaques de transposition entre une cellule carte postale, une cellule prototype et une cellule industrielle, si ceux-ci fonctionnent à la même densité de courant de travail et avec la même solution électrolytique.

Les transpositions sont effectuées en négligeant la présence des bulles d'hydrogène. Cette approximation équivaut à supposer que les rendements de courant et l'influence des bulles de gaz sont identiques quelle que soit la cellule considérée.

Chapitre 16

ETUDE EXPERIMENTALE DE L'INFLUENCE DE LA GEOMETRIE DU NEZ D'INJECTION

16.1 Introduction:

Le nez d'injection conduit la lame de solution générée par le corps d'injection vers le canal de la cellule. Le niveau de pression au point d'injection (dû à la perte de charge dans le canal et à l'entraînement de l'électrolyte par la tôle) font qu'une partie non négligeable du débit total injecté est refoulée au dessus de l'injecteur. Il faut alors créer une perte de charge singulière capable de minimiser ce débit de fuite. Le chapitre 7 de la référence <4-3>, relatif à la réunion et la séparation des courants, montre que l'angle et la vitesse d'injection ont beaucoup d'influence sur cette perte de charge.

La géométrie du nez d'injection est représentée sur la figure (4-9). Les deux paramètres géométriques qui influencent la perte de charge par singularité, et donc la quantité de fluide refoulé, sont l'angle α et l'ouverture o . L'angle α dirige la lame de solution. L'ouverture o définit son épaisseur et, pour un débit donné, son énergie cinétique. En fonction de ces deux paramètres et de la vitesse de la bande V_b , le débit total injecté Q_t se scinde en un débit Q_r qui passe dans la cellule et un débit de fuite Q_f . Dans la suite, les indices r sont relatifs au point situé juste en aval du nez d'injection, à l'entrée du canal de la cellule (fig. 4-9). Les indices i correspondent à la sortie du canal d'uniformisation du corps d'injection. Les indices f représentent un point situé à la sortie de la cellule. Ces trois points de repères définissent le domaine dans lequel on évaluera la perte de charge.

L'étude de l'influence de la géométrie du nez d'injection à été réalisée par simulation expérimentale sur la maquette de la référence <1-2>. Celle-ci a été modifiée afin

de simuler la nouvelle cellule industrielle.

Les grandeurs caractéristiques auxquelles nous nous sommes intéressés sont: le pourcentage de débit Q_r/Q_i qui passe réellement dans le canal de la cellule; les pertes de charge par singularité entre les points i et r et les points i et f , respectivement notés ξ_{ir} et ξ_{if} ; la pression \hat{P}_r au point r (proportionnelle à la perte de charge dans le canal); et pour finir, les hauteurs h_1 et h_2 des jets en sorties de cellule correspondant à l'évacuation des deux débits Q_r et Q_f . Ces différentes grandeurs sont étudiées en fonction des conditions de fonctionnement de la cellule et de la géométrie du nez d'injection.

Les différentes pertes de charge et hauteurs de jets sont mesurées afin de faciliter le dimensionnement de la cellule industrielle (épaisseurs de parois et encombrement) et de la pompe d'alimentation. Elles peuvent aussi être un critère de choix pour la géométrie du nez d'injection.

16.2 Règles de similitude:

Pour reproduire à échelle réduite le fonctionnement d'une cellule industrielle, certaines règles de transposition doivent être respectées. Ces règles dépendent des grandeurs que l'on désire évaluer mais aussi de tous les autres paramètres qui peuvent les influencer. La première étape d'une étude par similitude est donc l'inventaire de toutes ces grandeurs.

16.2.1 Inventaire des grandeurs caractéristiques de l'écoulement

Paramètres géométriques:

h : hauteur du canal.

l : largeur de la cellule.

L : longueur de la cellule.

θ : angle que font l'entrée et la sortie du canal avec la verticale.

α : angle d'injection par rapport au canal.

o : ouverture de la fente d'injection.

h_i : hauteur du canal d'uniformisation.

Longueurs mesurées:

h_1 : hauteur verticale du jet d'éjection (sortie du canal).

h_2 : hauteur verticale du jet d'injection (débit de fuite).

Vitesses:

V_b : vitesse de la bande.
 U_r : vitesse débitante dans le canal.
 U_i : vitesse débitante au point i .
 U_f : vitesse débitante de fuite.

Débits:

Q_t : débit total injecté.
 Q_r : débit réel dans le canal de la cellule.
 Q_f : débit de fuite.

Pressions:

\hat{P}_r : pression à l'entrée du canal.
 \hat{P}_f : pression au dessus de l'injecteur (pression atmosphérique).
 \hat{P}_i : pression en sortie du corps d'injection.

Caractéristiques du fluide:

ρ : masse volumique du fluide.
 ν : viscosité cinématique du fluide.

Forces à distance:

g : accélération de la pesanteur.

Remarques: Dans cette étude, l'accélération de la pesanteur intervient car nous avons des écoulements à surface libre (les jets d'injection et d'éjection). La largeur de la cellule a très peu d'influence (les vitesses débitantes sont uniformes sur la largeur de la cellule), on peut donc travailler par unité de largeur.

Dans cette étude par similitude nous avons 22 grandeurs caractéristiques. Hormis les lois que nous recherchons, certains de ces paramètres sont reliés entre-eux.

La conservation du débit s'écrit:

$$Q_t = Q_r + Q_f$$

Les vitesses débitantes sont obtenues par:

$$U_i = \frac{Q_t}{h_i l}$$

$$U_r = \frac{Q_r}{hl}$$

$$U_f = \frac{Q_t}{hl}$$

L'utilisation du théorème de BERNOULLI généralisée permet, pour finir, de montrer que les coefficients de perte de charge sont reliés par la relation:

$$\xi_{if} = \xi_{ir} + \xi_{rf}$$

L'utilisation de ces cinq relations permet de réduire le nombre de grandeurs caractéristiques du problème à 17.

16.2.2 Lois d'évolutions:

On choisit U_r , h et ρ comme grandeurs primaires. L'analyse dimensionnelle permet alors de réduire le nombre de grandeurs caractéristiques à 14 groupements sans dimension. On peut alors exprimer les grandeurs recherchées par similitude à l'aide des paramètres sans dimension qui les influencent.

Loi de variation du pourcentage de débit qui passe réellement dans la cellule:

La répartition de débit est un écoulement dont les surfaces libres correspondent à l'entrée et la sortie de la cellule. Celles-ci étant à la même altitude, la répartition n'est donc pas influencée par la pesanteur:

$$\frac{Q_r}{Q_t} = f_1 \left(\frac{L}{h}, \alpha, \frac{o}{h}, \frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r} \right) \quad (16.1)$$

Loi de variation de la pression \hat{P}_r au point d'injection:

La pression au point r d'injection est donnée par la loi:

$$\frac{\hat{P}_r - P_a}{\frac{1}{2}\rho U_r^2} = f_2 \left(\frac{L}{h}, \frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r} \right) \quad (16.2)$$

Lois de variation des pertes de charges dans le nez d'injection:

L'équation de BERNOULLI généralisée permet d'écrire entre les frontières du domaine défini par les points i , r et f :

$$\hat{P}_i + \frac{1}{2}\rho\alpha_i U_i^2 = \hat{P}_r + \frac{1}{2}\rho\alpha_r U_r^2 + J_{ir}$$

$$\hat{P}_i + \frac{1}{2}\rho\alpha_i U_i^2 = \hat{P}_f + \frac{1}{2}\rho\alpha_f U_f^2 + J_{if}$$

où J_{ir} et J_{if} sont respectivement les pertes de charge entre les sections i et r et les sections i et f , et où

$$\alpha_k = \frac{1}{U_k^3 h_k} \int_0^{h_k} U_k^3(y) dy$$

sont les coefficients d'énergie cinétique relatifs aux différents écoulements dans chacune des sections frontières de hauteur h_k . Ces coefficients expriment l'influence de la forme des profils de vitesse sur l'énergie cinétique exprimée en fonction de la vitesse débitante.

Les modèles de turbulence permettent de calculer les profils de vitesse pour différentes vitesses de paroi mobile, différentes hauteurs de canal, différentes viscosités et différentes vitesses débitantes (co-courantes ou contre-courantes à la paroi mobile). Pour chacun de ces profils, il est alors possible de calculer par intégration numérique le coefficient d'énergie cinétique correspondant. Les calculs montrent que ces coefficients dépendent très peu de la forme des profils de vitesse des écoulements turbulents que nous étudions. Les valeurs obtenues varient autour de la valeur moyenne 1,06, aussi bien pour les écoulements de POISEUILLE que ceux de COUETTE ou de COUETTE avec gradient de pression. Les variations autour de cette valeur moyenne sont inférieures à 5% et sont peut être dues au modèle.

Dans l'étude réalisée, nous prenons $\alpha_i = \alpha_r = \alpha_f = 1$ quelles que soient les variations des autres grandeurs du problème.

La forme sans dimension d'une perte de charge singulière est le coefficient de perte de charge ξ (perte de charge divisée par une énergie cinétique). Celui-ci peut être défini à l'aide de deux vitesses débitantes différentes: U_i ou U_r , afin d'exprimer la perte de charge, soit relativement à l'énergie cinétique amont, soit relativement à l'énergie cinétique résultante. Ces deux possibilités sont retenues. Les lois sont alors:

$$\xi_{ir} = \frac{J_{ir}}{\frac{1}{2}\rho U_i^2} = f_3 \left(\frac{L}{h}, \alpha, \frac{o}{h}, \frac{h_i}{h}, \frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r} \right) \quad (16.3)$$

$$\xi_{ir}^* = \frac{J_{ir}}{\frac{1}{2}\rho U_r^2} = f_3^* \left(\frac{L}{h}, \alpha, \frac{o}{h}, \frac{h_i}{h}, \frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r} \right) \quad (16.4)$$

$$\xi_{if} = \frac{J_{if}}{\frac{1}{2}\rho U_i^2} = f_4 \left(\frac{L}{h}, \alpha, \frac{o}{h}, \frac{h_i}{h}, \frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r} \right) \quad (16.5)$$

$$\xi_{if}^* = \frac{J_{ir}}{\frac{1}{2}\rho U_r^2} = f_4^* \left(\frac{L}{h}, \alpha, \frac{o}{h}, \frac{h_i}{h}, \frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r} \right) \quad (16.6)$$

Lois de variation de la hauteur des jets d'injection et d'éjection:

A la sortie de la cellule, l'écoulement est établi. La forme du profil de vitesse est indépendante des conditions d'injection. Un jet est un écoulement à surface libre. La pesanteur est donc à prendre en compte. La loi est de la forme:

$$\frac{h_1}{h} = f_5 \left(\frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r}, \frac{gh}{U_r^2}, \theta \right) \quad (16.7)$$

L'application du théorème de BERNOULLI entre la naissance et le haut du jet, en supposant que le coefficient d'énergie cinétique vaut 1, permet d'écrire:

$$\frac{gh_1}{U_r^2} = \frac{(\cos \theta)^2}{2} \quad (16.8)$$

θ est l'angle que fait le jet avec la verticale (l'entrée et la sortie du canal de la cellule font le même angle). Il est intéressant de vérifier si les mesures correspondent à cette loi indépendante de la vitesse de déplacement de la tôle.

Le jet à l'injection qui est dû au débit de fuite ne provient pas d'un écoulement établi. La forme du profil de vitesse à la base du jet étant une fonction de la géométrie du nez d'injection, il faut rechercher une loi de la forme:

$$\frac{h_2}{h} = f_6 \left(\frac{L}{h}, \alpha, \theta, \frac{o}{h}, \frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r}, \frac{gh}{U_r^2} \right) \quad (16.9)$$

Il est aussi intéressant de comparer les mesures au résultat de l'application du théorème de BERNOULLI:

$$\frac{gh_2}{U_r^2} = \frac{(\cos \theta)^2}{2} \quad (16.10)$$

Remarque: Le choix de la vitesse U_r , comme grandeur primaire, permet d'exprimer les variables des lois recherchées en fonction des conditions de fonctionnement de la cellule. En effet, le but de la nouvelle cellule est la réalisation de dépôts mono-orientés. Il impose donc la vitesse de frottement cathodique. Pour une composition de solution et une température données, ceci impose la vitesse débitante U_r en fonction de la vitesse de ligne V_b . Ce sont donc ces deux paramètres qu'il faut utiliser pour dimensionner la cellule.

16.2.3 Conditions de similitude entre la maquette et la cellule industrielle:

Une condition nécessaire et suffisante à la réalisation de la similitude est l'égalité des variables sans dimension pour la maquette et la cellule industrielle. Dès lors, les lois de variation obtenues sur la maquette sont applicables à la cellule industrielle.

Les grandeurs relatives à la maquette sont accentuées dans la suite.

Les conditions de similitude qui ne contiennent que des longueurs imposent la similitude géométrique ainsi que le rapport d'échelle r :

$$r = \frac{h'}{h} = \frac{L'}{L} = \frac{l'}{l} = \frac{h'_i}{h_i} = \frac{o'}{o} \quad (16.11)$$

Le respect de la condition ci-dessus permet de remplacer la grandeur primaire U_r par U_i si le besoin s'en fait sentir. En effet, la similitude géométrique fait que le rapport de ces deux vitesses est identique pour la maquette et la cellule industrielle. Ceci permet d'exprimer les pertes de charge dans l'injecteur en fonction d'une grandeur locale U_i plus représentative.

Les règles de similitude imposent deux autres conditions géométriques:

$$\alpha' = \alpha, \quad \theta' = \theta \quad (16.12)$$

Les autres conditions de similitude sont des conditions dynamiques.

La condition qui fait intervenir la viscosité cinématique impose la similitude de REYNOLDS:

$$Re'_r = Re_r \quad (16.13)$$

Le nombre de REYNOLDS $Re_r = \frac{hU_r}{\nu}$ s'écrit aussi:

$$Re_r = \frac{\rho \frac{U_r^2}{h}}{\mu \frac{U_r}{h^2}}$$

Il représente le rapport entre les forces d'inertie de l'écoulement et les forces de viscosité. La similitude de REYNOLDS impose donc le respect de ce rapport de forces.

La condition:

$$\frac{V'_b}{U'_r} = \frac{V_b}{U_r} \quad (16.14)$$

est aussi une similitude de REYNOLDS. Elle impose le respect du rapport des forces d'inerties dues au mouvement de la tôle et des forces d'inertie de l'écoulement. En effet, l'équation (16.14) s'obtient en divisant l'équation (16.13) par:

$$Re'_b = Re_b \quad (16.15)$$

où le nombre de REYNOLDS $Re_b = \frac{hV_b}{\nu}$.

La dernière condition est la similitude de FROUDE:

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F} \quad \text{où} \quad \mathcal{F} = \frac{hg}{U_r^2} \quad (16.16)$$

Le nombre de FROUDE représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces de pesanteur:

$$\mathcal{F} = \frac{\rho \frac{U_r^2}{h}}{\rho g}$$

L'application des règles de similitude dynamique établies ici permet de conserver l'influence respective des différentes contraintes mécaniques exercées localement sur le fluide.

16.3 Application des règles de similitude à la maquette:

Un certain nombre de paramètres de la cellule industrielle sont imposés (exemples: la hauteur du canal, sa longueur, l'angle θ entre les sorties de la cellule et la verticale, la densité et la viscosité du fluide...). Ces paramètres sont fixés également pour la maquette en respectant les règles décrites ci-dessus. En plus de la transposition des lois établies sur la maquette à la cellule industrielle, l'application des règles de similitude sert donc à dimensionner la maquette, à définir le fluide et l'environnement expérimental.

Il ne reste alors qu'un certain nombre de paramètres libres: la vitesse de la tôle, le débit total injecté et la géométrie du nez d'injection que nous avons fait varier.

Dans cette étude nous utilisons la maquette de la référence <1-2> ainsi que son équipement. Nous allons voir que ceci ne permet pas de réaliser la similitude totale. Néanmoins, la plupart des lois obtenues sont directement applicables à la cellule industrielle.

16.3.1 Caractéristiques de la cellule industrielle:

Les dimensions de la nouvelle cellule sont:

Hauteur du canal	$h = 8 \text{ mm}$
Largeur du canal	$l = 1800 \text{ mm}$
Longueur du canal	$L = 3800 \text{ mm}$
Angle des extrémités du canal avec la verticale	$\theta = 30^\circ$

Ces grandeurs seront fixées un peu plus loin pour la maquette par application des règles de similitude.

Un point de fonctionnement de la cellule industrielle est défini par un couple U_r et V_b . Pour assurer la valeur de U_r , il faut alors injecter un certain débit total Q_t qui dépend de l'efficacité du nez d'injection, de la largeur du canal de la cellule et de V_b .



Le domaine de fonctionnement de la nouvelle cellule est défini par la condition d'obtention d'un dépôt fortement mono-orienté. Cette condition se traduit par une relation entre la vitesse débitante U_r et la vitesse de la ligne V_b . Pour couvrir la totalité de ce domaine de fonctionnement, la maquette doit pouvoir simuler les vitesses:

Vitesse de la tôle	$V_b = 0 \text{ à } 120 \text{ m/min}$
Vitesse débitante dans le canal	$U_r = 0 \text{ à } 3 \text{ m/s}$

Le domaine de fonctionnement de la cellule industrielle ne représente qu'une petite portion de cette plage de fonctionnement imposée à la maquette.

16.3.2 Caractéristiques de la maquette:

La maquette est représentée sur la figure (4-10). Ce n'est pas une réplique à échelle réduite d'une cellule radiale mais les différences de géométrie n'ont qu'une faible influence sur son comportement hydrodynamique.

Le tambour cathodique est simulé par une bande en inox de 1,5 mm d'épaisseur et de 500 mm de largeur, soudée sur elle-même à ses extrémités. Cette courroie

est enroulée autour de trois tambours. Le canal de la maquette en inox se compose d'une partie plane de 1,5 m et de deux parties courbes en ses extrémités. La courroie joue le rôle de paroi supérieure mobile. Un patin de glissement en bronze fritté la maintient dans sa partie plane. Le canal est fermé latéralement par deux joints pneumatiques à semelle en téflon. Les deux gros tambours ont un diamètre et une longueur de 500 mm. Ils sont recouverts d'un revêtement de caoutchouc qui augmente l'adhérence de la bande. Ils sont réglables verticalement et horizontalement par rapport aux parties courbes du canal. De la précision de ces réglages dépend la qualité géométrique du canal. Le tambour du côté de l'injection transmet le mouvement à la bande. Il est relié par un accouplement souple à un bloc moteur de 16 KW. Son sens de rotation tend le brin inférieur de la bande. Le tambour du côté de l'éjection est libre en rotation. Le rouleau central a un diamètre de 160 mm. Il assure la tension et le guidage de la courroie. Un injecteur factice est disposé en sortie du canal pour assurer la symétrie géométrique de la maquette. Deux déversoirs placés à chaque extrémité permettent de récupérer les débits Q_r et Q_f .

Etant donné le diamètre des gros tambours, il n'est pas possible de respecter la similitude sur l'angle θ . Les jets d'injection et d'éjection retomberaient sur le dessus de la maquette et ne pourraient pas être récupérés par les déversoirs. L'angle θ' de la maquette vaut donc 15° .

La longueur du canal de la maquette est de 2416 mm. La similitude géométrique est réalisée en tenant compte de la présence d'une tôle d'épaisseur 0,5 mm dans la cellule industrielle. La hauteur du canal de la maquette fait donc 4,75 mm. Le rapport d'échelle est de 0,63.

La largeur du canal de la maquette est de 430 mm. Le rapport d'échelle n'est pas respecté dans cette direction, mais les grandeurs que nous étudions peuvent être exprimées par unité de largeur. L'erreur qui est alors commise est petite (elle est fonction du rapport entre l'épaisseur des couches limites latérales et la largeur du canal).

16.3.3 Equipement de la maquette:

L'installation expérimentale est schématisée sur la figure (4-11). Elle est faite pour fonctionner avec de l'eau.

Une pompe ayant un débit nominal de $80 \text{ m}^3/\text{h}$ aspire le fluide dans une cuve d'une capacité de $1,1 \text{ m}^3$. Le débit Q_t est obtenu en dérivant une partie de ce débit nominal à l'aide de deux vannes formant un by-pass et placées en amont de l'injecteur. Le débit nominal et la puissance de la pompe sont suffisants pour couvrir toute l'étendue des débits désirés.

Le tambour moteur de la bande est accouplé, par l'intermédiaire d'un réducteur à engrenages, à un moteur à courant continu de 16 KW, dont la vitesse de rotation peut varier de 0 à 1500 tours/min. La stabilité de la vitesse de rotation du moteur

est assurée par un asservissement tachymétrique. Cet ensemble moteur-réducteur permet d'obtenir une vitesse de déplacement de la bande comprise entre 0 et 176 *m/min*.

Pour obtenir à la fois la similitude de REYNOLDS et la similitude de FROUDE, il faudrait chauffer l'eau à 110 C, et maintenir la pression extérieure à 1,46 atm. Cette opération n'est pas réalisable. La similitude de FROUDE qui n'intervient que pour les lois donnant la hauteur des jets d'injection et d'éjection n'est pas respectée.

Pour couvrir la plage de vitesse que nous voulons reproduire avec la maquette, la similitude de REYNOLDS impose de maintenir l'eau à au moins 50 C. La cuve de stockage est réglée à cette température à l'aide de six thermo-plongeurs d'une puissance totale de 15 KW.

Les conditions expérimentales font que le nombre de FROUDE de la maquette est près de trois fois plus grand que celui de la cellule industrielle. Les forces de pesanteur étant les mêmes pour les deux échelles, les forces d'inertie sont donc trois fois plus petites sur la cellule industrielle que sur la maquette. Les hauteurs des jets mesurées majorent donc considérablement ce qu'elles devraient être si la similitude totale avait pu être réalisée. Cette majoration est difficilement estimable.

16.3.4 Lois de similitude réalisées:

Le fait d'avoir préalablement défini les dimensions de la cellule industrielle diminue le nombre de paramètres de l'étude. L'utilisation d'une maquette qui n'a pas été définie initialement pour simuler la nouvelle cellule, et qui n'est alors pas en similitude totale, impose certaines restrictions quant à l'utilisation des lois obtenues.

Les lois recherchées sont les suivantes:

$$\frac{Q_r}{Q_t} = f_1 \left(\alpha, \frac{o}{h}, \frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r} \right)$$

$$\frac{\hat{P}_r - P_a}{\frac{1}{2}\rho U_r^2} = f_2 \left(\frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r} \right)$$

$$\xi_{ir} = f_3 \left(\alpha, \frac{o}{h}, \frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r} \right)$$

$$\xi_{ir}^* = f_3^* \left(\alpha, \frac{o}{h}, \frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r} \right)$$

$$\xi_{if} = f_4 \left(\alpha, \frac{o}{h}, \frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r} \right)$$

$$\xi_{if}^* = f_4^* \left(\alpha, \frac{o}{h}, \frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r} \right)$$

Ces six lois sont directement applicables à la cellule industrielle définie précédemment (la similitude est réalisée pour les paramètres qui influencent les grandeurs évaluées). Pour ces lois, les caractéristiques géométriques sont: $L/h = 507$, $h_i/h = 1,26$.

Bien que la hauteur verticale d'un jet libre semble dépendre très peu de l'épaisseur du jet (l'application du théorème de BERNOULLI à un jet exclut même totalement cette dépendance), nous allons rechercher les lois pour les hauteurs des jets d'injection et d'éjection à partir du système de grandeurs primaires (U_r , h , ρ). Les lois recherchées deviennent alors:

$$\frac{h_1}{h} = f_5 \left(\frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r} \right)$$

$$\frac{h_2}{h} = f_6 \left(\frac{V_b}{U_r}, \frac{\nu}{hU_r}, \frac{o}{h}, \alpha \right)$$

Ces lois, appliquées à la cellule industrielle, majorent la réalité (similitude de FROUDE non respectée). Cette majoration est d'autant plus importante que les angles de sortie et d'entrée du canal de la cellule ne sont pas respectés ($\theta' = 15^\circ, \theta = 30^\circ$).

Remarque importante: Les lois de variation de la hauteur des jets d'injection et d'éjection sous cette forme donnent, à vitesse débitante U_r et vitesse de bande V_b constantes, une élévation rapide de la hauteur de ces jets avec la hauteur h du canal. Ceci ne reproduit pas la réalité.

Les paramètres qui varient dans l'étude expérimentale sont donc:

$$\alpha, \quad \frac{o}{h}, \quad Re_r = \frac{U_r h}{\nu}, \quad \frac{V_b}{U_r}$$

(Le débit Q_t et donc la vitesse débitante U_i varient avec ces paramètres)

La détermination de toutes ces lois permet de dimensionner entièrement tout ce qui est en rapport avec l'écoulement de l'électrolyte. Le point de fonctionnement de la cellule fixe la vitesse de la tôle V_b et la vitesse débitante U_r de l'électrolyte dans le canal. La loi f_1 permet alors de définir le nez d'injection qui assure ce point de fonctionnement avec un débit de fuite minime. Ceci fixe aussi le débit total Q_t à injecter. Les fonctions f_3 , f_3^* , f_4 , f_4^* permettent ensuite d'évaluer les pressions dans

le dispositif. Elles sont utiles pour dimensionner les épaisseurs des parois, ainsi que le type de pompe nécessaire pour la cellule. Pour finir, les fonctions f_5 et f_6 évaluent la hauteur des jets d'électrolyte à l'entrée et à la sortie de la cellule. Ces jets sont gênants pour le fonctionnement de la cellule. S'ils sont trop hauts, la solution risque de passer entre la tôle et le tambour derrière leurs points de décollement. Il en résulte alors un zingage de la virole métallique, ainsi que des coups d'arc électrique qui tachent la tôle. La prédiction de leur hauteur permet de prendre les dispositions nécessaires pour empêcher les perturbations qu'ils peuvent causer.

16.4 Mesures réalisées et qualification de la maquette:

Parmi les quatre paramètres sans dimension que l'on fait varier dans cette étude, on peut distinguer les paramètres géométriques α et o/h , qui qualifient le nez d'injection, des paramètres dynamiques, qui représentent le point de fonctionnement de la cellule. Ils permettent d'évaluer la performance ainsi que la plage d'utilisation pour laquelle le nez d'injection est performant.

L'influence de la géométrie interne du nez d'injection a été étudiée en utilisant 16 nez différents. Quatre angles d'injection par rapport à la tangente au canal ont été testés: $\alpha = 15^\circ$; 25° ; 35° et $\alpha = 45^\circ$. Pour chaque angle, quatre rapports d'ouverture ont été essayés: $o/h = 0,31$; $0,42$; $0,53$ et $o/h = 0,63$. La gamme couverte permet d'établir des lois continues pour:

$$5^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$$

$$0,31 \leq o/h \leq 0,63$$

Remarque: Les nez d'injection ont été réalisés en polypropylène. Lors des essais, la température de l'eau (50 C) a libéré les contraintes dans deux nez d'injection d'angle $\alpha = 25^\circ$ qui se sont déformés. Leurs rapports d'ouvertures o/h sont passés respectivement de $0,31$ et $0,53$ à $0,28$ et $0,45$. Ce sont ces nouvelles valeurs qui ont été prises en compte dans l'étude.

Pour chacun des nez, on a fait varier les paramètres dynamiques sur toute leur gamme réalisable. La température de l'eau et la hauteur h du canal étaient fixées pour cette étude. La variation des paramètres dynamiques a été obtenue en imposant la vitesse de la bande d'inox et le débit total injecté. La configuration de l'installation expérimentale ne permet le réglage précis que de ces deux grandeurs.

16.4.1 Mesures réalisées:

Pour chaque point de fonctionnement réalisé, on a mesuré la température du fluide, la vitesse de déplacement de la bande, les débits Q_r et Q_f , la pression statique en

différents points de la maquette, et la hauteur du jet à l'injection. Le jet à l'éjection est indépendant du nez utilisé. Sa mesure n'a été faite que pour un seul nez.

La figure (4-11) schématise en partie l'instrumentation de la maquette.

Les débits ont été mesurés à l'aide de deux débitmètres électromagnétiques placés sur les canalisations de retour à la cuve. Ces appareils fournissent la mesure du débit instantané et émettent une impulsion par litre qui les traverse. Un totaliseur permet de comptabiliser ce nombre de litres durant le temps de l'expérience. Les remous, occasionnés dans la cuve par les trois conduites de retour, créent des fluctuations importantes du débit instantané. Les débits ont donc été déterminés par l'utilisation des indications fournies par les totaliseurs et par la mesure du temps de l'expérience. Une étude préliminaire a montré qu'il fallait un temps d'échantillonnage d'au moins trois minutes pour obtenir une mesure correcte du débit. Cette étude préliminaire a aussi montré que les fluctuations du débit instantané correspondent à des allers et retours dans les débitmètres qui ne comptent que le fluide passant dans un sens. Elles induisent donc une erreur systématique sur la mesure qui doit être retranchée avant l'exploitation des résultats. Cette erreur systématique a été évaluée à $0,043 \text{ m}^3/\text{h}$ sur Q_r et à $0,072 \text{ m}^3/\text{h}$ sur Q_f . Les incertitudes sur les mesures de débit ont été estimées à $0,16 \text{ m}^3/\text{h}$ pour les débits inférieurs à $16 \text{ m}^3/\text{h}$ et à 1% de la mesure au delà de cette valeur.

La vitesse de déplacement de la bande est mesurée directement sur l'arbre du moteur d'entraînement par une dynamo tachymétrique. Un étalonnage préliminaire a permis de graduer l'afficheur relatif à cette mesure directement en m/min . La précision de cette mesure est de 1%.

La température de l'eau est mesurée au centre de la cuve de stockage par une sonde au platine. Sa mesure est très précise. Durant la totalité des mesures, on a laissé la température varier de 49 à 51 C. Ces variations de température sont prises en compte dans l'erreur sur la viscosité. La viscosité du fluide est alors $\nu = 0,556 \cdot 10^{-6} \pm 0,0085 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

La hauteur verticale des jets d'injection et d'éjection a été mesurée à l'aide d'un réglét. Les fluctuations observées conduisent à une précision de 10% sur la mesure.

La maquette est équipée de 92 prises de pression statique. Une prise de pression se situe sur la conduite d'alimentation à l'entrée de l'injecteur (notée P_c sur la figure (4-12)). Une deuxième mesure de la pression est effectuée dans le canal d'uniformisation entre le corps et le nez d'injection (notée P_i). Les 90 autres prises sont percées dans le canal de la maquette comme l'indique la figure (4-12). Ces prises servent à qualifier l'hydrodynamique interne du canal de la maquette. Les prises situées sur une même génératrice permettent de s'assurer de l'uniformité de l'écoulement sur la largeur du canal à l'abscisse considérée. Les prises disposées tout au long du canal permettent de mesurer la variation longitudinale de pression

motrice. Sa linéarité est un gage de la régularité de la hauteur h du canal. La vitesse débitante, qu'il est alors possible de déduire du gradient de pression, peut être comparée aux indications des débitmètres.

La pression P_c est mesurée à l'aide d'un manomètre à aiguille de série industrielle, pouvant mesurer des pressions allant de 0 à 2 *bar*. La précision de cette mesure est de 25 *mbar* (2500 P_a). Cette mesure sert à évaluer la pression que la pompe doit fournir pour alimenter la cellule industrielle.

Les autres pressions ont été mesurées à l'aide d'un multimanomètre à mercure de 36 tubes. La précision de cet appareil est de 1 *mm* de mercure, soit 130 P_a .

Toutes les prises de pression dans le canal n'ont pas été utilisées. Lors d'une étude préliminaire, l'utilisation de deux prises de pression se situant sur la même génératrice après la sortie de l'injecteur (position (2) sur la figure 4-12), a montré que la lame de fluide générée par l'injecteur était symétrique. L'uniformité de l'écoulement est vérifiée à l'aide de sept prises de pression situées juste après le premier canal courbe (figure 4-12). Cette génératrice se situe à environ 137 hauteurs de canal de l'injecteur. La variation de la pression motrice avec l'abscisse est mesurée à l'aide de 28 prises disposées, comme l'indique la figure (4-12), tout au long du canal de la maquette.

Le calcul de la perte de charge dans le nez d'injection nécessite la mesure de la pression juste après le point d'injection. La première prise de pression se situe à 11 hauteurs de canal après le nez d'injection (position (1) sur la figure 4-12). L'écoulement n'est sûrement pas établi en ce point. Afin d'éviter des écarts dus à la longueur d'établissement de l'écoulement, la pression \hat{P}_r est déterminée par l'extrapolation de la régression linéaire sur l'ensemble des autres points de mesure.

Aux incertitudes sur les mesures, énoncées ci-dessus, nous pouvons adjoindre les suivantes: Lors de l'étude préliminaire, on a remarqué que le niveau de pression dans le canal de la maquette ne suffit pas pour plaquer correctement la bande contre le patin de glissement (la bande n'est pas parfaitement plane). La hauteur h du canal varie légèrement avec la pression, et donc avec le point de fonctionnement. Des mesures, à l'aide d'un cathétomètre, ont montré que la hauteur du canal varie de $\pm 0,15$ *mm* autour de sa valeur moyenne de 4,75 *mm* pour l'ensemble des essais réalisés. La dilatation thermique des nez d'injection en polypropylène doit sûrement influencer les mesures; mais les écarts sont difficilement quantifiables.

16.4.2 Qualification de la maquette:

Les mesures de pression dans le canal de la maquette permettent de vérifier la qualité de l'écoulement interne.

a) Uniformité de l'écoulement sur la largeur du canal:

Nous n'avons vérifié l'uniformité de l'écoulement que sur une génératrice transversale située à une distance qui fait environ $1/4$ de la longueur totale du canal ($x/h = 137$). La figure (4-13a) présente les mesures de pression suivant cette génératrice, pour le nez d'injection d'ouverture $o/h = 0,31$ et d'angle d'injection $\alpha = 15^\circ$, pour différentes vitesses de bande et différentes vitesses débitantes. On constate que la pression est constante sur la largeur du canal. La vitesse débitante est donc uniforme dans cette direction. Lors de toute la campagne d'essais, l'écart le plus important que l'on a relevé était de 1 mm de mercure; ce qui correspond à la précision de la mesure.

Remarque: Lors de l'étude préliminaire citée précédemment, les mesures de symétrie de la lame d'injection ont été effectuées à l'aide de deux prises de pression situées à 25 hauteurs de canal du point d'injection (position (2) sur la figure (4-12)), et disposées latéralement à $z/h = 21$ de l'axe de la maquette. Les plus gros écarts relevés étaient inférieurs à 5% de l'amplitude de la mesure. La linéarité du gradient longitudinal de pression motrice, dès cette abscisse, permet de supposer que la vitesse débitante est déjà uniforme dans cette section.

b) Gradient longitudinal de pression:

Les mesures de pression dans la direction de l'écoulement montrent que celle-ci varie linéairement avec l'abscisse x . La figure (4-13b) présente en exemple les gradients de pression obtenus pour le nez d'angle 15° et de rapport d'ouverture 0,31. Elle met en évidence un défaut de linéarité en fin de canal. Ce défaut est dû à un mauvais centrage du tambour libre dans le second canal courbe.

Les régressions linéaires calculées à partir de ces mesures ne coupent pas l'axe des abscisses au même point d'intersection (figure 4-14a). Les différences obtenues sont attribuables à la perte de charge par singularité qui se produit en sortie du canal.

Les vitesses débitantes, calculées par simulation numérique à partir des régressions linéaires sur les mesures de la figure (4-13b), sont comparées aux indications des débitmètres (figure 4-14b). Le plus gros écart est de 17%; mais il est obtenu pour une vitesse débitante de $0,17 \text{ m/s}$. L'écart n'est en réalité que de $0,03 \text{ m/s}$. Les différences entre les calculs et les mesures sont toutes inférieures à $0,2 \text{ m/s}$.

Les mesures de pression dans le canal de la maquette montrent que l'écoulement interne est conforme aux attentes et aux exigences pour la réalisation de dépôts à structure fortement mono-orientée.

c) Limitations de la maquette et des nez d'injection:

Toute la plage de fonctionnement prévue pour la maquette ne peut pas être réalisée pour l'ensemble des nez d'injection. Les domaines des essais pour chacun des nez d'injection sont limités soit par des contraintes liées au nez d'injection lui-même, soit par des contraintes dues à la maquette.

Quatre types de limites ont été mises en évidence:

- Cavitation au niveau de l'injection.
- Blocage de la bande contre le patin de glissement.
- Débit nul dans la maquette.
- Débordement d'un déversoir à cause du jet d'injection ou d'éjection trop haut.

L'apparition de cavitation dans le nez d'injection est une limite très pénalisante. Cette limite est due à une pression trop basse dans l'ouverture de hauteur o du nez d'injection (pression voisine de la pression de vapeur saturante). Elle est essentiellement causée par l'augmentation de la vitesse du fluide dans cette ouverture. Le respect de la similitude de REYNOLDS montre qu'à échelle industrielle la cavitation apparaît pour la même vitesse débitante dans l'ouverture du nez d'injection que pour la maquette. Nous n'avons jamais enregistré de cavitation pour des vitesses inférieures à 8 m/s . Cette limite est valable à la fois pour la maquette et la cellule industrielle. A rapport d'ouverture égal, le nez de la cellule industrielle offre donc un domaine d'utilisation plus étendu que celui de la maquette.

La surface de la bande, dans la partie plane du canal, transforme rapidement les faibles pressions en des efforts importants sur le patin de glissement. L'adhérence du revêtement sur le tambour moteur n'est plus suffisante pour entraîner la bande avec une vitesse régulière dès que la pression atteint un certain seuil. Cette limitation, qui n'existe pas sur la cellule industrielle, nous a surtout empêché de faire des essais à vitesse de bande élevée.

Pour certaines vitesses de bande et certains débits totaux injectés, les nez d'injection sont inaptes à faire passer le moindre débit dans le canal de la cellule. Ce phénomène n'est en fait pas une limitation mais une frontière pour l'efficacité du nez testé. Cette limite du domaine d'utilisation du nez existe aussi à l'échelle industrielle.

La limitation causée par la hauteur des jets d'injection ou d'éjection est propre à la maquette. Sur la cellule industrielle, la hauteur de ces jets, pour un fonctionnement en similitude avec notre étude, est près de trois fois plus petite que les prédictions (cf: paragraphe 16.2.3). La limite industrielle correspond à la différence de hauteur verticale entre le dessus de l'injecteur et le point de décollement entre la tôle et le tambour cathodique.

Toutes ces limitations restreignent fortement l'étendue des essais. La maquette ne permet pas de simuler entièrement la plage prévue (cette plage correspondait à des vitesses sur la cellule industrielle de $0 < V_b < 120 \text{ m/min}$ et $0 < U_r < 3 \text{ m/s}$). Mais, pour certains nez d'injection efficaces, les essais couvrent la totalité du domaine de fonctionnement de la cellule industrielle (domaine établi en fonction de la condition de réalisation d'un dépôt mono-orienté).

Certaines de ces limites définissent aussi un domaine d'utilisation de la cellule. Ce domaine est une fonction de la géométrie du nez d'injection.

La figure (4-15) présente, pour deux nez différents, la transposition à la cellule industrielle des points de fonctionnement réalisés lors des essais, ainsi que les limitations propres à la cellule équipée de ces nez. La limite due à la hauteur de jet à l'injection est la transposition pour la cellule industrielle de la limite mesurée sur la maquette.

Le nez de rapport d'ouverture 0,31 est rapidement pénalisé par le risque de cavitation. Pour le rapport d'ouverture 0,63, cette limite se situe à $245 \text{ m}^3/\text{h}$. Elle est en dehors de la plage prévue. Les zones d'inefficacité totale (débit nul dans le canal), pour les deux nez représentés, sont du même ordre de grandeur. La taille de ces zones diminue avec le rapport d'ouverture et l'angle d'injection.

16.5 Résultats expérimentaux:

Les résultats obtenus au cours de cette étude sont présentés sous la forme de relations algébriques. Celles-ci permettent d'interpoler les mesures et d'extrapoler les lois d'évolution en dehors des domaines des essais. Ces lois interpolent aussi les résultats entre les différentes géométries de nez d'injection testées. Elles doivent donc permettre de déterminer le nez d'injection optimum pour la nouvelle cellule industrielle.

Pour construire les lois recherchées, nous nous sommes limités à l'utilisation de fonctions simples. Le nombre de paramètres variables dans cette similitude rendant la recherche des lois relativement compliquée. Les domaines de validité des lois correspondent aux étendues des mesures effectuées. Comme celles-ci dépendent du nez d'injection considéré, pour les connaître, il faut se reporter aux figures qui présentent les résultats.

Les lois qui sont représentées par des nombres sans dimension sont utilisables à la fois pour la maquette et la cellule industrielle. Pour simplifier les notations, nous n'utiliserons plus les grandeurs accentuées, sauf pour les lois exprimant la hauteur des jets d'injection et d'éjection qui sont propres à la maquette. Bien que ces lois servent pour dimensionner la cellule industrielle, les paramètres sont représentés avec une accentuation.

16.5.1 Fraction de débit passant réellement dans le canal de la cellule:

Lors des essais, nous avons imposé le débit total Q_t et la vitesse de la bande V_b . Les deux paramètres dynamiques Re_r et $\frac{V_b}{U_r}$ variaient alors simultanément. Pour exploiter les mesures, nous avons dû les interpoler afin de créer des valeurs intermédiaires obtenues à nombre de REYNOLDS constant (figure 4-16a).

La figure (4-16b) montre un exemple de points ainsi déterminés. Afin de ne pas compliquer inutilement la modélisation, nous avons séparé les valeurs à vitesse de bande nulle, des autres valeurs (nous n'avons trouvé aucune fonction simple qui permette la modélisation complète de la répartition du débit total avec le paramètre $\frac{V_b}{U_r}$, à nombre de REYNOLDS constant). Sur la ligne industrielle, quand le défilement de la tôle est arrêté, la circulation de l'électrolyte est stoppée, et les cellules sont vidangées et rincées. Il ne faut pas que l'acide contenu dans la solution attaque le dépôt déjà réalisé ou la rugosité imprimée par le SKIN-PASS sur la tôle. Bien que les mesures statiques ($V_b = 0$) ne soient pas d'un intérêt direct pour une cellule industrielle, celles-ci ont tout de même été exploitées.

a) Répartition du débit injecté à $V_b = 0$:

Les évolutions enregistrées ne permettent qu'une représentation linéaire de la répartition du débit total Q_t en débit réel Q_r et débit de fuite Q_f avec le nombre de REYNOLDS Re_r . L'exploitation des résultats a montré que la modélisation suivante convient pour prédire avec une bonne précision la répartition de débit quand la bande n'est pas en mouvement:

$$\frac{Q_r}{Q_t} = a + bRe_r \quad (16.17)$$

$$\text{avec} \quad a = a_1 + a_2 \left(\frac{o}{h}\right)^{a_3}$$

$$\text{où} \begin{cases} a_1 = 0,791 - 13,96\alpha^{-0,9} \\ a_2 = -0,229 + 16,84\alpha^{-1,02} \\ a_3 = -0,015 + 0,021\alpha \end{cases}$$

$$\text{et} \quad 10^5 b = b_1 - b_2 \frac{o}{h}$$

$$\text{où} \begin{cases} b_1 = 0,592 + 11,26\alpha^{-0,9} \\ b_2 = 0,571 + 34,74\alpha^{-1,35} \end{cases}$$

Les figures (4-17) et (4-18) comparent les prédictions de ce modèle avec les mesures. La représentation linéaire convient parfaitement aux évolutions des mesures. Le modèle sous-estime légèrement le débit à injecter pour les nez de rapport d'ouverture $o = 0,42$ et d'angles $\alpha = 35^\circ$ et 45° . Les plus gros écarts entre les prédictions et les mesures ne sont que de l'ordre de 3% du débit total injecté. Ils sont inférieurs aux incertitudes sur les mesures. Dans l'ensemble, le modèle prédit la répartition de débit avec une très bonne précision.

Ces figures montrent aussi les influences de l'angle α et du rapport d'ouverture o/h . Plus le rapport d'ouverture est petit, meilleure est l'efficacité du nez d'injection.

Mais un nez de rapport d'ouverture petit est vite limité en débit par le risque de cavitation. Plus l'angle d'injection par rapport à la tangente au canal de la cellule est grand, moins bonne est l'efficacité du nez d'injection. Mais cette évolution n'est pas très rapide. Nous remarquons aussi que le domaine des essais effectués diminue quand l'angle d'injection augmente. C'est la hauteur du jet à l'injection qui augmente fortement avec cet angle qui limite rapidement le domaine des essais.

b) Répartition du débit injecté dans le cas d'une paroi mobile:

La loi est recherchée à partir des valeurs obtenues par interpolation des mesures. La figure (4-16b) montre de telles valeurs. Ces fichiers de données suggèrent la recherche d'une loi de la forme:

$$\frac{Q_r}{Q_t} = a \left(Re_r, \frac{o}{h}, \alpha \right) - b \left(Re_r, \frac{o}{h}, \alpha \right) \frac{V_b}{U_r}$$

Cette loi définit alors deux fonctions a et b . a est l'abscisse à l'origine. Elle correspond à une valeur fictive de la répartition du débit injecté pour une vitesse de bande nulle. Cette valeur fictive sous-estime les mesures expérimentales et donc l'efficacité du nez d'injection déterminée par la loi précédente. b représente la rapidité avec laquelle le mouvement de la tôle diminue l'efficacité du nez d'injection.

La figure (4-19) montre les évolutions de ces deux fonctions avec le nombre de REYNOLDS Re_r pour les mesures de la figure (4-16). a suit une évolution logarithmique, tandis que b suit une évolution parabolique avec ce paramètre. Ces évolutions dépendent de la géométrie du nez d'injection.

Pour modéliser la répartition du débit total injecté en un débit réel et un débit de fuite, nous avons retenu la loi suivante:

$$\frac{Q_r}{Q_t} = a - b \frac{V_b}{U_r} \tag{16.18}$$

avec $a = a_1 + a_2 \log(Re_r)$

où $a_1 = a_{11} + a_{12} \frac{o}{h} + a_{13} \left(\frac{o}{h} \right)^2$

$$\text{où } \begin{cases} a_{11} = -1,805 - 0,9 \cdot 10^{-2} \alpha \\ a_{12} = 1,449 + 5,548 \cdot 10^{-2} \alpha + 5,725 \cdot 10^{-4} \alpha^2 \\ a_{13} = 0,502 - 6,72 \cdot 10^{-2} \alpha - 6,825 \cdot 10^{-4} \alpha^2 \end{cases}$$

$$\text{et } a_2 = \frac{0,25 - a_1}{3}$$

$$\text{et } b = Re_r (1,53 \cdot 10^{-5} - 3,43 \cdot 10^{-10} Re_r)$$

Les figures (4-20) à (4-23) comparent les mesures expérimentales, toutes vitesses de bande confondues, aux prédictions obtenues par le modèle précédent dans les mêmes conditions de fonctionnement $(\frac{V_h}{U_r}, Re_r)$ et pour chacun des 16 nez testés. Les écarts entre les mesures et les prédictions sont tous inférieurs à 5% du débit total injecté (5% de la pleine échelle). Le modèle permet donc d'estimer avec une bonne précision le débit total à injecter dans un nez d'injection donné pour obtenir la condition de fonctionnement U_r souhaitée en fonction de la vitesse de la tôle. Il faut rappeler que le modèle correspond aux domaines des essais réalisés pour chacun des nez d'injection.

Les figures (4-20) à (4-23) montrent aussi que l'efficacité du nez d'injection diminue quand le rapport d'ouverture o/h et l'angle α augmentent. Le domaine d'utilisation du nez suit la même évolution.

16.5.2 Loi de variation de la pression \hat{P}_r au point d'injection:

La loi recherchée dans cette partie sert à déterminer la pression \hat{P}_r dans le canal de la cellule juste après l'injection. Cette pression qui est indépendante de la géométrie du nez d'injection sert à déterminer la perte de charge singulière créée par cette géométrie. La connaissance de ces deux grandeurs permet ensuite de déterminer la pression dans l'injecteur.

La pression \hat{P}_r est représentée par le nombre sans dimension:

$$\frac{\hat{P}_r - P_a}{\frac{1}{2} \rho U_r^2}$$

Cette grandeur est le coefficient de perte de charge dans le canal de la cellule (le canal étant supposé infiniment large).

Les modèles de turbulence permettent de calculer un profil de vitesse, donc la vitesse débitante correspondante, à partir du gradient longitudinal de pression. Celui-ci est constant pour les canaux que nous étudions. Il est donc proportionnel au coefficient de perte de charge. La longueur de la canalisation est l'un des facteurs de proportionnalité. L'utilisation des modèles de turbulence permet donc d'établir une loi de variation du coefficient de perte de charge dans le canal avec les variables Re_r et $\frac{V_h}{U_r}$. Nous avons obtenu:

$$\frac{\hat{P}_r - P_a}{\frac{1}{2}\rho U_r^2} = \left(\frac{L}{h}\right) \left[0,131 Re_r^{-0,25} + 0,242 Re_r^{-0,28} \left(\frac{V_b}{U_r}\right)^{1,2}\right] \quad (16.19)$$

Cette loi obtenue numériquement peut être comparée aux mesures expérimentales. On peut aussi s'en inspirer pour établir une loi issue des mesures. Celles-ci ont permis de construire la loi:

$$\frac{\hat{P}_r - P_a}{\frac{1}{2}\rho U_r^2} = \left(\frac{L}{h}\right) \left[0,507 Re_r^{-0,39} + 0,176 Re_r^{-0,26} \left(\frac{V_b}{U_r}\right)^{1,24}\right] \quad (16.20)$$

La figure (4-24) compare les lois précédentes à l'ensemble de mesures expérimentales sans distinguer la géométrie du nez testé. Les valeurs qui correspondent à des nombres de REYNOLDS Re_r inférieurs à 3000 ont été ôtées. Les courbes sont des iso- Re_b ; où Re_b est le nombre de REYNOLDS relatif à la vitesse de la bande:

$$Re_b = \frac{V_b h}{\nu}$$

La loi obtenue par simulation numérique est en accord avec les mesures. Néanmoins, les écarts entre les prédictions et les expériences peuvent atteindre 20% de la mesure. Ces différences interviennent essentiellement pour les valeurs du coefficient de perte de charge obtenues à faibles nombres de REYNOLDS Re_r et quand la bande est immobile. La loi construite à partir des expériences prédit le coefficient de perte de charge avec un écart qui est généralement inférieur à 5% de la mesure (pour quelques points particuliers les écarts atteignent 10%).

Les deux lois proposées dans cette partie diffèrent principalement par le terme qui ne contient pas la vitesse de bande (terme qui prédit les essais statiques). Le modèle obtenu numériquement est en accord avec les mesures expérimentales des références <2-5> et <2-7> à <2-15>. La puissance attribuée au nombre de REYNOLDS (0,25) est identique à celle donnée par les lois de perte de charge dans des conduites de sections différentes à celle du canal étudié <1-8>.

Les écarts entre les mesures et les prédictions du modèle numérique sont principalement imputables aux mesures expérimentales. Nous supposons en effet que la hauteur du canal est la même pour tous les essais réalisés. Pourtant nous avons signalé que celle-ci variait avec le niveau de pression dans le canal et donc avec la pression \hat{P}_r . Les équations (16.19) et (16.20) montrent que, pour un essai avec bande immobile, une variation de 2% de la hauteur h induit une variation de 8% de la perte de charge dans le canal. Nous négligeons aussi la perte de charge par singularité qui se produit en sortie du canal de la cellule.

Dans une cellule industrielle, la tôle est parfaitement plaquée contre le tambour cathodique. La loi obtenue numériquement nous semble alors plus appropriée.

16.5.3 Coefficients de pertes de charges relatifs à la géométrie du nez d'injection:

Les lois établies jusqu'à présent permettent d'évaluer, à partir du point de fonctionnement de la cellule (Q_r et V_b), la pression \hat{P}_r à l'injection, et en fonction de la géométrie retenue pour le nez d'injection le débit total Q_i à injecter. Il est à présent intéressant de remonter plus en amont pour connaître la pression \hat{P}_i dans le canal d'uniformisation de l'injecteur (figure 4-9). Ceci permet de dimensionner les épaisseurs des parois.

L'écoulement au point d'injection correspond à une bifurcation du débit Q_i en deux débits Q_r et Q_f . La pression \hat{P}_i peut être représentée par les deux coefficients de pertes de charge relatifs aux écoulements dans les branches d'indices r et f .

Comme nous l'avons vu dans la partie 16.2.2, les pertes de charges par singularité peuvent être exprimées soit relativement à la vitesse débitante U_r dans le canal de la cellule (paramètre imposé par le fonctionnement de la cellule), soit relativement à la vitesse débitante U_i dans le canal d'uniformisation de l'injecteur (condition en amont de la singularité). Les résultats obtenus montrent que, pour une géométrie de nez d'injection donnée, ces pertes de charge par singularité, exprimées en fonction de la vitesse débitante U_i , sont indépendantes des variables $\frac{V_b}{U_r}$ et Re_r . En effet, pour un débit total injecté, augmenter la vitesse de défilement de la bande diminue la vitesse débitante U_r , mais les pertes de charge par singularité restent les mêmes. La figure (4-25) illustre cette particularité pour le nez d'injection de rapport d'ouverture $o/h = 0,42$ et d'angle $\alpha = 35^\circ$. Les mesures sur une même horizontale correspondent au même débit total injecté.

Afin de simplifier le problème, les lois recherchées sont alors les suivantes:

$$\xi_{ir} = f'_3 \left(\alpha, \frac{o}{h}, Re_i \right)$$

$$\xi_{if} = f'_4 \left(\alpha, \frac{o}{h}, Re_i \right)$$

où

$$Re_i = \frac{U_i h_i}{\nu}$$

Remarques:

- Nous avons aussi déterminé les fonctions f_3 , f_3^* , f_4 et f_4^* . Celles-ci sont plus complexes et donnent de moins bonnes prédictions que les lois ci-dessus. Elles ne sont donc pas présentées dans ce travail.

- Les résultats sont présentés sur les figures sous la forme dimensionnelle de la perte de charge pour éviter la dispersion due aux faibles valeurs de $\frac{1}{2}\rho U_i^2$ par rapport au niveau de pression motrice.

a) Coefficient de perte de charge entre les points i et r :

Les mesures réalisées indiquent que ξ_{ir} est indépendant de l'angle d'injection et qu'il diminue quand le rapport d'ouverture o/h augmente. Elles ont permis d'établir la loi:

$$\xi_{ir} = \frac{J_{ir}}{\frac{1}{2}\rho U_i^2} = 0,213 \left(\frac{o}{h}\right)^{-3,31} Re_i^{0,08} \quad (16.21)$$

La figure (4-26) compare les pertes de charge mesurées sur la maquette, pour chacun des rapports d'ouverture testés, avec les évolutions de la perte de charge dérivées de la loi précédente (tous angles confondus). La loi proposée reproduit correctement les niveaux et les variations de la perte de charge avec les paramètres Re_i et o/h . Elle surestime seulement les mesures obtenues pour le nez d'injection de rapport d'ouverture 0,28 et d'angle 25° . L'importance de la dispersion, obtenue pour les nez d'injection de rapport d'ouverture $o/h = 0,63$, provient de l'utilisation d'un manomètre à aiguille de série industrielle pour la mesure de la pression P_i pour certains de ces nez.

Le modèle permet donc de prédire avec une relativement bonne précision le coefficient de perte de charge entre les branches i et r du dispositif d'injection.

b) Coefficient de perte de charge entre les points i et f :

Les pertes de charges par singularité entre les points i et f sont elles aussi indépendantes de l'angle d'injection dans le canal de la cellule. Les mesures ont permis d'établir la loi:

$$\xi_{if} = \frac{J_{if}}{\frac{1}{2}\rho U_i^2} = 0,917 \left(\frac{o}{h}\right)^{-2,27} Re_i^{0,08} \quad (16.22)$$

La figure (4-27) compare les prédictions de ce modèle avec les mesures de la perte de charge entre les points i et f de la maquette pour chacun des rapports d'ouverture réalisés (tous angles confondus). La loi proposée estime correctement la perte de charge en fonction des deux paramètres Re_i et o/h .

Les deux modèles proposés par les équations (16.21) et (16.22) permettent de déterminer les coefficients de perte de charge pour une bifurcation de courant dont la géométrie de raccord entre les trois canaux est présentée par la figure (4-9). La paroi commune aux canaux r et f peut être animée d'un mouvement de translation

uniforme de r vers f . Les modèles ont été établis à partir de mesures pour lesquelles l'angle d'injection α et le rapport d'ouverture o/h variaient respectivement de 15° à 45° , et de 0,28 à 0,63. Ces deux domaines délimitent la plage de validité des modèles.

Les résultats obtenus montrent que les coefficients de perte de charge, exprimés en fonction du débit total injecté Q_t , sont indépendants de l'angle d'injection α et de la vitesse de la bande V_b . Ces deux paramètres conditionnent toutefois la répartition du débit total. Les coefficients de perte de charge augmentent quand le rapport d'ouverture o/h diminue. Leur variation avec la vitesse débitante U_i est identique mais elle est très faible. Les pertes de charge varient pratiquement avec le carré de cette vitesse.

Dans notre application, ces coefficients de perte de charges servent à déterminer la pression motrice \hat{P}_i dans le canal d'uniformisation de l'injecteur. Les deux modèles peuvent alors être utilisés indifféremment.

Remarque: L'énergie cinétique ne représente qu'une faible part de la charge totale et locale de l'écoulement au voisinage du point d'injection. Les lois ci-dessus ne peuvent donc pas servir pour déterminer les vitesses débitantes à partir des niveaux de pression.

16.5.4 Coefficient de perte de charge dans le corps de l'injecteur:

Nous avons aussi profité de la mesure de la pression P_c pour déterminer le coefficient de perte de charge dans le corps de l'injecteur. Ce coefficient est utile pour évaluer la pression P_c à l'entrée de la cellule. La connaissance du niveau de cette pression et du débit total à injecter permet de dimensionner la pompe d'alimentation en électrolyte.

$$\xi_{ci} = \frac{J_{ci}}{\frac{1}{2}\rho U_i^2} = 12,7 \exp\left(-\frac{Re_i}{23535}\right) \quad (16.23)$$

La figure (4-28a) (échelle semi-logarithmique) compare la perte de charge prédite par ce modèle avec l'ensemble des mesures expérimentales sur la maquette. La dispersion des mesures est essentiellement due à la précision de la lecture de la pression P_c (mesures effectuées par un manomètre à aiguille de série industrielle). La figure (4-28b) (échelle logarithmique) montre qu'aucune loi en puissance ne convient aux mesures. La variation à bas nombres de REYNOLDS se fait à une puissance voisine de 0,5. Cette puissance atteint la valeur 2 pour des nombres de REYNOLDS plus élevés. L'exposant 2 correspond à une évolution nulle du coefficient de perte de charge avec le nombre de REYNOLDS Re_i .

Le modèle proposé ci-dessus permet d'estimer le niveau de pression dans la conduite d'alimentation de l'injecteur.

16.5.5 Hauteurs des jets d'injection et d'éjection:

Les hauteurs des jets d'injection et d'éjection sont très pénalisantes quand on désire réaliser une cellule radiale avec une surface anodique la plus grande possible. Il est donc intéressant de pouvoir évaluer les hauteurs de ces jets en fonction des conditions d'utilisation de la cellule pour être certain de ne détériorer ni la tôle ni le dépôt réalisé sur celle-ci.

La similitude de FROUDE n'a pu être respectée lors de cette étude. Les lois établies sont alors propres à la maquette (les variables seront accentuées). Elles sont toutefois utiles pour estimer les hauteurs de jets pour la cellule à échelle industrielle, puisque ces lois majorent dans ce cas la réalité. Cette majoration peut alors être interprétée comme un facteur de sécurité.

a) Hauteur du jet d'éjection:

La hauteur du jet d'éjection est indépendante du dispositif d'injection. Les mesures montrent aussi qu'elle est indépendante du mouvement de la bande. Seul le nombre de REYNOLDS Re_r agit sur elle. Les mesures permettent d'établir:

$$\frac{h_1'}{h'} = 8,5 \cdot 10^{-6} Re_r'^{1,5} \quad (16.24)$$

La figure (4-29a) compare cette loi avec les mesures pour des vitesses de bande V_b' allant de 0 à 2 m/s. La hauteur verticale du jet à l'éjection est bien indépendante du déplacement de la bande (qui est contre-courant au jet). La figure (4-29b) compare l'application du théorème de BERNOULLI au jet avec les mesures. La loi obtenue par l'application de ce théorème surestime considérablement les mesures. Cette constatation est généralement observée pour les jets. En effet, l'application qui est faite ici du théorème de BERNOULLI ne tient compte ni de la dissipation visqueuse au sein du jet, ni de l'épaississement de celui-ci avec l'altitude.

Le modèle proposé à partir des mesures ne respecte pas la similitude de FROUDE et surestime donc les hauteurs des jets pour une cellule industrielle. L'application du théorème de BERNOULLI à un jet surestime également la hauteur du jet d'éjection. Mais cette surestimation est différente de la première. Ces deux méthodes d'évaluation de la hauteur du jet d'éjection peuvent servir à dimensionner le nez d'injection pour la cellule industrielle.

b) Hauteur du jet d'injection:

La base du jet d'injection est très proche du point d'injection. L'écoulement du débit de fuite Q_f' n'est pas établi. La hauteur du jet d'injection dépend alors de l'ensemble des variables de l'étude. Comme pour l'étude de la répartition de débit (partie 16.5.1), la loi est construite à partir de l'interpolation des mesures afin de construire des iso- Re_r' et des iso- $\frac{V_b'}{U_r}$. Nous avons obtenu finalement le modèle:

$$\frac{h'_2}{h'} = a + b \frac{V'_b}{U'_r} \quad (16.25)$$

avec $a = a_1 + a_2 Re_r'^{1,5}$

où $a_1 = a_{11} + a_{12} \frac{o'}{h'}$

dans laquelle $\begin{cases} a_{11} = 1,12 + 7 \cdot 10^{-7} \alpha'^{3,75} \\ a_{12} = 1,77 + 10^{-7} \alpha'^{4,5} \end{cases}$

et $10^6 a_2 = a_{21} 10 \left(a_{22} \frac{o'}{h'} \right)$

dans laquelle $\begin{cases} a_{21} = 0,61 + 1,42 \cdot 10^{-8} \alpha'^{5,15} \\ a_{22} = 1,12 - 4,4 \cdot 10^{-6} \alpha'^{3,114} \end{cases}$

et $b = b_1 Re_r'$

où $b_1 = (-0,3 + 8,68 \cdot 10^{-2} \alpha') + (7,5 - 0,17 \alpha') \frac{o'}{h'}$

Les prédictions obtenues avec ce modèle sont comparées aux mesures sur la figure (4-30), pour quatre nez d'injection choisis arbitrairement. Pour les autres nez d'injection les résultats sont identiques. Les représentations ne distinguent pas la valeur du paramètre $\frac{V'_b}{U'_r}$.

Le modèle permet d'estimer avec une bonne précision la hauteur du jet d'injection pour la maquette. Pour l'ensemble des mesures, les écarts avec les prédictions sont tous inférieurs à $4h'$ (soit $1,9\text{cm}$). Globalement, la hauteur du jet d'injection suit la même évolution que la répartition du débit total avec la géométrie du nez d'injection: Elle augmente avec α et o/h .

L'application de ce modèle à la cellule industrielle permet de dimensionner le système d'évacuation du débit de fuite.

Les mesures effectuées sont toutes supérieures aux prédictions faites en appliquant le théorème de BERNOULLI au jet d'injection. Cette méthode d'évaluation de la hauteur du jet d'injection est à exclure.

16.6 Conclusions:

L'étude expérimentale décrite dans ce chapitre a permis d'établir un ensemble de lois permettant de prédire les caractéristiques principales de l'hydrodynamique interne de la cellule industrielle définie par la figure (4-4). Ces lois ont été établies pour une cellule dans laquelle la tôle est fine (la similitude est basée sur la présence d'une tôle épaisse de 0,5mm). Elles montrent l'influence de la géométrie du nez d'injection sur les caractéristiques hydrodynamiques de la cellule et permettent donc de choisir le nez d'injection qui convient le mieux à celle-ci. Il faut que le nez d'injection retenu permette de couvrir tout le domaine de fonctionnement de la cellule en se référant aux limitations décrites dans la partie 16.4.2.

Le domaine de fonctionnement étant défini par le domaine d'obtention d'un dépôt fortement mono-orienté, la géométrie adoptée pour le nez d'injection doit donc permettre de couvrir la totalité ou la plus grande partie possible de cette zone. Il faut ensuite s'assurer que l'injecteur travaille suffisamment loin de sa limite, due à la cavitation de l'électrolyte, afin d'éviter tout risque de jets cavitants. Il faut aussi s'assurer que les hauteurs des jets d'injection et d'éjection sont inférieures à l'encombrement qui leur est disponible.

Les lois qui donnent les coefficients de perte de charge permettent ensuite d'évaluer tous les niveaux de pression nécessaires au dimensionnement de l'installation.

Chapitre 17

Conclusions de cette partie:

Les résultats du chapitre précédent permettent de compléter la définition de la nouvelle cellule. Mais pour des raisons évidentes, cette application n'est pas présentée dans ce document.

Les résultats de cette étude, associés à d'autres résultats obtenus à R.D.C.S. ou à l'U.L.B., ont permis de définir une nouvelle cellule industrielle de type radiale dans laquelle l'hydro-dynamique interne est parfaitement maîtrisée. Il est alors possible d'imposer à la cellule des conditions de fonctionnement favorables à la réalisation de dépôts dont la structure est organisée (dépôts fortement mono-orientés dans leur plan de croissance). Une telle structure de dépôt donne à la tôle revêtue une très bonne aptitude à être ultérieurement laminée.

Le contrôle de l'hydrodynamique interne a nécessité la définition d'un système d'injection capable de générer l'écoulement recherché. Cet écoulement étant contre-courant du déplacement de la tôle, le système d'injection doit être capable de fournir une charge suffisante pour assurer le passage dans le canal de la cellule de la plus grande portion du débit total injecté. Cette caractéristique a été obtenue en adaptant la géométrie du nez d'injection.

Cette nouvelle cellule garde, évidemment, toutes les caractéristiques intéressantes de la cellule actuellement utilisée en ligne. Elle conserve la même surface d'électrodes. La surface de l'anode représente $2/3$ de la circonférence du tambour cathodique. Elle conserve aussi la capacité à travailler dans les deux sens de rotation. Elle est symétrique et comporte donc deux systèmes d'injection. Cette capacité est nécessaire pour la réalisation de dépôts sur les deux faces d'une tôle en un seul passage dans la ligne d'électro-déposition.

Trois caractéristiques qui ne concernent pas directement l'hydrodynamique interne de la cellule ont été modifiées par rapport à la cellule industrielle. La hauteur moyenne du canal de la cellule est diminué de près de 20%. Ceci permet de réduire la chute ohmique dans la solution. Cette chute ohmique représente près de 80% de la consommation en courant d'une cellule actuelle. Le titane remplace le plomb-argent

des anodes. Plus cher à l'achat, ce métal apporte aux anodes une durée de vie bien plus longue qui rend son usage rentable. Il évite aussi la présence de plomb dans la solution et dans le dépôt. Pour finir, les interventions sur les anodes sont facilitées par l'intégration de celles-ci dans la cellule sous forme de cassettes (figure 4-4).

Cette nouvelle cellule radiale est actuellement l'objet d'une définition mécanique détaillée en vue des possibilités de sa fabrication. Elle devrait être opérationnelle dans la ligne d'électrozingage dans un avenir proche.

Part V

**CONCLUSIONS ET
PERSPECTIVES**

Chapitre 18

CONCLUSIONS

Dans l'introduction de ce document, nous avons montré que les conditions hydrodynamiques dans les cellules d'électro-déposition influençaient la qualité du revêtement, le rendement de dépôt et la vitesse de fonctionnement de la ligne (donc la productivité). Ces trois aspects sont étroitement liés.

Les buts que nous nous étions fixés au début de cette étude étaient:

- l'amélioration de la connaissance des écoulements dans les cellules.
- l'évaluation de l'influence de l'hydrodynamique sur la qualité du dépôt réalisé.
- la synthèse des résultats en notre possession en vue de l'adaptation de la ligne actuelle de la société BEAUTOR S.A. à la réalisation de dépôts de qualité.

Ces trois thèmes font chacun l'objet d'une partie de ce mémoire. Les deux premiers ont un caractère plus fondamental tandis que le dernier est une application des résultats obtenus.

Les travaux de MONNIER <1-2> ont montré que l'hydrodynamique des cellules de type radial, actuellement utilisées par la société BEAUTOR S.A., peut être étudiée en distinguant trois zones: Une zone de répartition du débit injecté et d'établissement des écoulements et deux zones d'écoulement établi de part et d'autre de la cellule. La première zone étant de faible étendue, elle peut être négligée. Les écoulements dans les deux demi-canaux constituant la cellule peuvent être modélisés de façon simple moyennant quelques approximations. Ceci permet de ramener leur étude à celle des écoulements turbulents, établis, et par droites parallèles entre deux plaques planes dont l'une peut être animée d'un mouvement de translation uniforme.

L'étude de ces écoulements qui a été débutée par MONNIER <1-2> à l'aide de modèles simples de turbulence est prolongée dans la première partie du présent mémoire par une étude de différents modèles de fermeture au second ordre et par leur comparaison à une base de données expérimentales existante. Les résultats

obtenus montrent que l'hypothèse de BOUSSINESQ n'est pas la cause principale des discordances observées entre les prédictions à l'aide d'un modèle $k - \epsilon$ et les résultats expérimentaux. Ils mettent en doute les mesures de EL TELBANY et REYNOLDS. L'écoulement dans la section de mesure ne serait pas complètement établi.

Les modèles aux tensions de REYNOLDS permettent de connaître la répartition de l'énergie turbulente contenue dans l'écoulement suivant les trois directions des coordonnées. Cette répartition permet dans le cas d'écoulements complexes de déterminer la contribution exacte de l'agitation turbulente au transport de grandeurs comme la température, la concentration (ou toute autre grandeur). C'est un des avantages de ces modèles par rapport aux fermetures d'ordre inférieur. Pour les écoulements étudiés dans ce mémoire, le transport turbulent de matière se fait principalement dans la direction normale aux parois. Une fermeture au premier ordre, qui donne des prédictions de l'écoulement satisfaisantes, suffit alors pour évaluer de façon correcte ce transport. L'utilisation des modèles aux tensions de REYNOLDS n'apportent pas d'amélioration sensible aux prédictions des écoulements considérés en vue de l'application à l'électro-chimie. Un modèle de longueur de mélange suffit actuellement aux applications en électrochimie industrielle.

D'un point de vue de la mécanique des fluides, il est intéressant de constater que les modèles de fermeture au second ordre améliorent la prédiction du niveau d'énergie turbulente des écoulements de COUETTE et de type COUETTE par rapport à un modèle $k - \epsilon$. Mais cette amélioration se fait au détriment de la prédiction du profil de vitesse. Le cisaillement moyen au centre de l'écoulement est moins bien estimé qu'avec un modèle $k - \epsilon$. Les avantages d'un modèle aux tensions de REYNOLDS se font surtout sentir dans le calcul d'écoulements complexes dans lesquels un modèle $k - \epsilon$, qui considère que la turbulence est isotrope, dévoile toutes ses faiblesses.

La prise en compte de la rugosité de paroi exprimée en "équivalent grain de sable" peut facilement être intégrée dans un modèle de longueur de mélange. Deux applications principales peuvent être faites d'un tel modèle: Il permet de calculer la perte de charge dans une conduite rugueuse. Il permet aussi, pour une cellule d'électro-déposition, d'estimer les caractéristiques de l'écoulement au voisinage de la cathode quand l'anode est rugueuse. Les caractéristiques de l'écoulement au voisinage de la cathode influencent directement la qualité du dépôt réalisé.

Dans la deuxième partie de ce travail, on s'est intéressé au détail des phénomènes électro-chimiques au voisinage de la cathode, à leur liaison avec l'écoulement et au moyen de les prédire. Une méthode numérique permet de calculer le développement de la couche limite de diffusion le long de la cathode. Elle permet également d'évaluer simplement le concours qu'ont l'écoulement, la composition de la solution et la température à la densité de courant limite de diffusion quand on néglige le dégagement de gaz se produisant sur la cathode. Il ressort de ces travaux que l'influence d'un écoulement turbulent peut toujours être représentée par la vitesse de frottement cathodique qu'il produit. Il faut rappeler que cette grandeur permet

de décrire parfaitement toutes les caractéristiques d'un écoulement au voisinage immédiat d'une paroi solide.

Dans le cas de l'électro-déposition du zinc, l'influence qu'a le dégagement d'hydrogène à la cathode sur la densité de courant limite de diffusion peut être interprétée comme une variation locale du cisaillement de l'écoulement. Cette constatation, issue de mesures expérimentales dans une cellule carte postale, confirme la loi de variation pour la densité de courant limite de diffusion obtenue par simulation numérique. Les mesures expérimentales montrent aussi que le nombre de SCHMIDT turbulent utilisé pour modéliser la diffusion turbulente de la concentration, sur la base du concept de longueur de mélange, peut être pris égal à 1.

Les résultats que nous avons obtenus, numériquement et expérimentalement, ne sont en accord avec aucune des lois actuellement utilisées dans la littérature (loi de CHILTON-COLBURN par exemple). Les discordances semblent provenir du fait que ces lois sont bâties par analogie avec les lois régissant les transferts thermiques pour lesquels le nombre de PRANDTL (SCHMIDT) est près de 500 fois plus petit. Les évolutions que nous avons obtenues sont par contre en bon accord avec la proposition de DEISSLER (1944).

Les résultats obtenus montrent aussi qu'aucune longueur représentative des dimensions de la cellule ne convient pour caractériser la couche limite de diffusion en écoulement turbulent. Il apparaît en fait que l'épaisseur de la couche limite de diffusion ne dépend que de l'épaisseur de la sous-couche visqueuse et donc de la vitesse de frottement pariétale. Les phénomènes électro-chimiques, dans le cas de l'électro-déposition, doivent donc être exprimés en fonction de grandeurs pariétales.

La confrontation de nos résultats avec d'autres mesures expérimentales souligne l'intérêt qu'il faut porter à s'assurer que l'écoulement dans la cellule est établi et qu'il a bien les caractéristiques qu'on lui attribue. Il faut aussi s'assurer que les électrodes soient suffisamment grandes pour pouvoir négliger l'établissement de la couche limite de diffusion ainsi que les effets de bord.

Les résultats obtenus permettent d'évaluer la densité de courant limite de diffusion en fonction des caractéristiques de la solution, de l'écoulement et du rendement cathodique. Il est alors possible de calculer le rapport J/J_{lim} caractéristique de la structure du dépôt pour la solution de la société BEAUTOR S.A. L'utilisation de graphes comme celui représenté sur la figure (1-16) permet alors d'estimer le type de dépôt qui sera réalisé. Il serait intéressant de constituer un tel graphe spécifique à l'électro-déposition du zinc en milieu sulfurique.

La troisième partie de ce travail consiste à définir une nouvelle cellule d'électro-déposition, dans laquelle l'hydrodynamique est constante et maîtrisée dans tout le canal de la cellule, en injectant l'électrolyte à l'une des extrémité de son canal. L'écoulement imposé est choisi de façon à reproduire certaines conditions de fonctionnement obtenues dans une étude réalisée par R.D.C.S. et l'U.L.B. Ces conditions

sont celles pour lesquelles on obtient un dépôt dont la structure est principalement orientée dans le plan de la tôle. Ce dépôt, appelé dépôt mono-orienté, offre de grandes aptitudes à être ultérieurement embouti. Cette nouvelle cellule conserve les avantages des cellules radiales de la société BEAUTOR S.A. (réversibilité, surface anodique très grande, régularité du canal de la cellule, anodes insolubles...). La principale innovation apportée à cette cellule du point de vue de l'hydrodynamique concerne le système d'injection de l'électrolyte.

Ce système d'injection se compose de deux parties dont les rôles sont différents. Un corps d'injecteur transforme l'écoulement de la conduite cylindrique d'alimentation en une nappe de fluide turbulente plane, ayant la hauteur du canal et ayant pour envergure la largeur de la cellule. Un nez d'injection conduit la nappe de solution dans le canal de la cellule. Sa géométrie interne a été déterminée expérimentalement pour assurer une bonne efficacité du dispositif sur la plus grande plage possible d'utilisation de la cellule.

La nouvelle cellule doit permettre de réaliser un dépôt mono-orienté à plus de 80% quelle que soit la vitesse de fonctionnement de la ligne et quelles que soient les dimensions de la tôle, tout en injectant un débit total fixé et constant.

Chapitre 19

PERSPECTIVES

Les résultats obtenus dans la deuxième partie ont montré que l'utilisation de modèles aux tensions de REYNOLDS n'améliorent pas sensiblement les prédictions des écoulements étudiés par rapport à la base des données en notre possession.

Les seules mesures expérimentales complètes dont nous disposons pour les écoulements de COUETTE avec gradient longitudinal de pression sont celles de EL TELBANY et REYNOLDS <2-7>. Nos résultats montrent que les différences qui ont été constatées entre les prédictions obtenues par l'utilisation de modèles de fermetures au premier ordre et ces mesures ne sont pas attribuables à l'hypothèse de BOUSSINESQ.

Avant d'essayer de déterminer quels sont les termes modélisés susceptibles de causer de tels écarts, il est intéressant de compléter cette base de données par d'autres mesures. Pour réaliser ceci, une installation a été construite à l'I.M.F.L. Celle-ci permet de réaliser les écoulements étudiés dans un canal de hauteur 30 mm, de largeur 500 mm et de longueur 3 m. La vitesse de la paroi mobile est réglable de 5 à 30 m/s. Une chaîne d'anémométrie à fils chauds simples ou croisés, entièrement automatisée, permet la mesure de la vitesse moyenne, des cinq contraintes principales du tenseur de REYNOLDS et des spectres unidimensionnels. L'installation est en cours de qualification.

Les mesures expérimentales devraient permettre de connaître l'origine des écarts entre les calculs et les mesures de EL TELBANY et REYNOLDS. A l'heure actuelle, différentes hypothèses peuvent être avancées:

- La nature de la turbulence change peut-être entre les écoulements de type COUETTE et les écoulements de type POISEUILLE. Ce changement n'est pas représenté par les modèles utilisés.
- Le nombre de REYNOLDS critique nécessaire pour atteindre l'équilibre local est peut-être plus élevé pour les écoulements de type COUETTE. La modélisation suppose cet équilibre atteint.

- Suivant le cas d'écoulement étudié par EL TELBANY et REYNOLDS, un problème d'établissement de celui-ci se fait peut-être plus ou moins sentir.

La validation de l'une ou l'autre de ces hypothèses devrait permettre de clarifier le problème. Ces mesures expérimentales vont aussi fournir une base de données fiable pour l'amélioration des modèles de turbulence.

Les mesures de la densité de courant limite de diffusion, effectuées dans la troisième partie, ont montré l'influence que pouvaient avoir les bulles d'hydrogène formées sur la cathode. La contribution des bulles de gaz a été modélisée comme un apport de turbulence locale au même titre qu'une augmentation de la vitesse débitante. L'analogie a été faite en considérant que les bulles déformaient le profil de l'écoulement au voisinage de la cathode. Les résultats obtenus ont montré que la présence de ce gaz pouvait influencer la densité de courant limite de diffusion d'un facteur 3. Il est hors de question d'imaginer que la quantité de gaz émise puisse créer une telle perturbation de l'écoulement local. Il est alors intéressant de mieux comprendre le rôle électrochimique de l'hydrogène et l'interaction que ce gaz a avec la couche limite turbulente. Cette étude nécessite des mesures locales très fines. Un projet d'étude en collaboration avec l'Université Libre de Bruxelles concerne ce sujet. La réalisation d'une cellule grand format et transparente aux prises de vues et aux mesures par anémométrie laser devrait permettre une amélioration considérable de la connaissance des phénomènes électrochimiques pariétaux et de leurs interactions avec la couche limite.

Une étude de l'influence de l'écoulement sur la densité de courant limite de diffusion, réalisée dans une cellule carte postale avec du cuivre, devrait permettre de confirmer avec précision la loi que nous avons obtenue numériquement. En effet, pour le cuivre le dégagement d'hydrogène est inexistant. Cette étude permettrait aussi d'évaluer l'influence de la composition de la solution.

Une étude similaire pour un métal dont le rendement cathodique est faible devrait aussi permettre d'étendre la loi proposée pour les électro-dépôts avec dégagement gazeux important. En effet, la loi que nous avons obtenue expérimentalement n'est valable que pour des rendements cathodiques supérieurs à 90%.

Un dernier prolongement peut être proposé aux travaux présentés dans ce mémoire. Il consisterait à étudier, dans le détail, l'influence des différents paramètres électrochimiques sur le type de dépôt réalisé, pour la solution utilisée par la société BEAUTOR S.A. Cette étude déboucherait sur la construction d'un graphique identique à celui de la figure (1-16). Le paramètre J/J_{lim} peut facilement être évalué par la loi que nous avons obtenue. L'influence de l'intensité d'inhibition serait évaluée pour des pollutions de la solution propres à l'exploitation de la ligne d'électro-dépôt de la société BEAUTOR S.A. Un tel graphique permettrait de prédire le type de dépôt réalisé quel que soit le point de fonctionnement et quel que soit l'état de la solution.

.1 ANNEXE A1

L'utilisation de la décomposition de REYNOLDS dans les équations de NAVIER-STOKES permet de scinder le champ total du mouvement en un champ moyen et un champ turbulent et de mettre en évidence les interactions qui existent entre ces deux champs. Les équations pour la quantité de mouvement du champ turbulent, dans le cas d'un écoulement de fluide isovolume, peuvent être mises sous la forme:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \overline{U_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \overline{u_i u_j}) + \mu \Delta u_i$$

(la notation Δ correspond au Laplacien)

On en déduit:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial (\overline{u_i u_j} - u_i u_j)}{\partial x_j} + \nu \Delta u_i - \overline{U_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial t}$$

La divergence de ces équations donne l'équation de POISSON suivante:

$$\frac{1}{\rho} \Delta p = (\overline{u_i u_j} - u_i u_j)_{,ij} - 2 \left(\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (.1)$$

(la sommation se fait sur les indices i et j , pour alléger les équations: $_{,j}$ signifie dérivée partielle par rapport à x_j)

Les dérivées partielles sont commutatives. Il est possible d'écrire une équation de POISSON pour les gradients de fluctuations de pression:

$$\frac{1}{\rho} \Delta \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} \right) = (\overline{u_i u_j} - u_i u_j)_{,ijk} - 2 \left(\frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{,k} \quad (.2)$$

CHOU <2-39> propose de résoudre l'équation (.2) à partir de la formule de GREEN (annexe B partie 2). La solution générale d'une telle équation peut être mise sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} &= \frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \right]' \frac{1}{r} dv \\ &- \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^3}{\partial x_k \partial x_m \partial x_n} (\overline{u_m u_n} - u_m u_n) \right]' \frac{1}{r} dv \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \iint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial p_{,k}}{\partial n} - p_{,k} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right]' ds \end{aligned}$$

sachant que

- Le gradient de pression $\frac{\partial p}{\partial x_k}$ est exprimé en un point M_o de coordonnées (x_i) .
- Les intégrales de volume s'étendent sur tout le domaine (D) de fluide en mouvement.
- La surface (S) délimite ce domaine.
- L'exposant ' indique que le terme est calculé en un point M de coordonnées (x'_i) décrivant tout le domaine (D) ainsi que sa limite (S) .
- \vec{r} est le rayon vecteur représentant la distance entre les points M_o et M .
- $\frac{\partial}{\partial n}$ sont les dérivées normales par rapport à la surface (S) (le vecteur \vec{n} est dirigé vers l'extérieur du domaine).

Dans les intégrales de l'équation précédente, toutes les grandeurs sont exprimées au point M . Elles sont donc indépendantes des coordonnées (x_i) . De ce fait, on peut multiplier cette équation par u_i exprimée en M_o et moyenner le tout par rapport au temps. On obtient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_k} u_i} &= \frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial}{\partial x'_k} \left(\frac{\partial U'_m}{\partial x'_n} \frac{\partial u'_n u_i}{\partial x'_m} \right) \right] \frac{1}{r} dv \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^3}{\partial x'_k \partial x'_m \partial x'_n} (u'_m u'_n u_i) \right] \frac{1}{r} dv \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \iint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial p'_{,k} u_i}{\partial n'} - \overline{p'_{,k} u_i} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds \end{aligned}$$

Soit (ξ) les composantes du rayon vecteur \vec{r} :

$$x'_i = x_i + \xi_i$$

Le point M_o étant un point fixé, nous pouvons remplacer les dérivées par rapport à (x'_i) par des dérivées exprimées en fonction des composantes du rayon vecteur $\vec{r} = \vec{M_o M}$. On obtient finalement:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_k} u_i} |_{M_o} &= \frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\partial U'_m}{\partial \xi_n} \frac{\partial u'_n u_i}{\partial \xi_m} \right) \right] \frac{1}{r} dv \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^3 u'_m u'_n u_i}{\partial \xi_k \partial \xi_m \partial \xi_n} \right] \frac{1}{r} dv \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \iint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial p'_{,k} u_i}{\partial n'} - \overline{p'_{,k} u_i} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds \end{aligned} \quad (.3)$$

Cette équation donne une représentation sous la forme intégrale des termes de redistribution de l'énergie turbulente qui apparaissent dans l'équation de transport des tensions de REYNOLDS utilisée par JONES et MUSONGE <2-29>.

ROTTA <2-20> applique le même procédé à l'équation (.1) (annexe B partie 2). Il obtient ainsi une représentation des fluctuations de pression en un point M_o du domaine de fluide en mouvement:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho}|_{M_o} &= \frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right] \frac{1}{r} dv \\ &- \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} (\overline{u_m u_n} - u_m u_n) \right] \frac{1}{r} dv \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \iint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds \end{aligned}$$

(se reporter à la page précédente pour la signification des différents caractères)

Les termes entre crochets dans les intégrales sont indépendants du point M_o où sont exprimées les fluctuations de pression. Cette équation peut être multipliée par $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ calculée en M_o , et moyennée par rapport au temps. Elle devient:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{p \partial u_i}{\rho \partial x_j}}|_{M_o} &= \frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial \overline{U'_m}}{\partial x'_n} \frac{\partial u'_n}{\partial x'_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \frac{1}{r} dv \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^2 \overline{u'_m u'_n}}{\partial x'_m \partial x'_n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \frac{1}{r} dv \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \iint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - p' \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds \end{aligned} \quad (.4)$$

Cette expression donne une représentation des termes de redistribution de l'énergie turbulente telle qu'elle est formulée dans l'équation pour les tensions de REYNOLDS utilisée par SO et YOO <2-27> et GIBSON et RODI <2-31>.

Remarques:

Les équations (.3) et (.4) ne font intervenir dans leurs membres de droite que des corrélations spatiales. De ce fait:

- Les intégrales de volume ne sont significatives que sur un petit domaine de fluide entourant le point M_o où est évaluée la corrélation.
- De même, les intégrales de surface sont significatives uniquement quand le point M_o est au voisinage de la surface du domaine considéré.

.2 ANNEXE A2:

REDISTRIBUTION DE L'ENERGIE POUR UN ECOULEMENT TURBULENT ISOVOLUME NON CONFINE.

Les écoulements non confinés englobent les écoulements pour lesquels il y a présence d'une paroi solide ou d'une surface libre, mais quand ces surfaces sont suffisamment éloignées du domaine fluide (D) considéré pour ne pas avoir d'influence sur celui-ci. La surface (S) limitant le domaine (D) est alors différente de la paroi solide ou de la surface libre.

Simplification des équations (.3) et (.4):

Pour les écoulements étudiés, nous pouvons prendre comme surface (S) une sphère de centre M_0 et de rayon R . Le vecteur normal \vec{n} à cette surface, dirigé vers l'extérieur, est colinéaire au rayon vecteur \vec{R} . L'intégrale de surface de l'équation (.3) (annexe A1) s'écrit alors:

$$I = \frac{1}{4\pi\rho} \int \int_S \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \overline{p'_{,k} u_i}}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \overline{p'_{,k} u_i} \right] ds$$

L'utilisation du théorème de la moyenne conduit à:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4\pi\rho} \left[\frac{1}{R} \left(4\pi R^2 \frac{\partial \overline{p'_{,k} u_i}}{\partial R} \Big|_{M'} \right) + \frac{1}{R^2} \left(4\pi R^2 \overline{p'_{,k} u_i} \Big|_{M'} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \left[R \frac{\partial \overline{p'_{,k} u_i}}{\partial R} \Big|_{M'} + \overline{p'_{,k} u_i} \Big|_{M'} \right] \end{aligned}$$

M' est un point appartenant à la sphère en question. Si l'on fait tendre R vers l'infini, $I \rightarrow 0$. Il en est de même pour l'intégrale de surface contenue dans l'équation (.4) de l'annexe A1.

La plupart des écoulements entrant dans cette section ont les propriétés suivantes:

- Les dérivées secondes des différentes composantes de la vitesse moyenne sont très petites. Les intégrales de volume des équations (.3) et (.4) ne sont importantes que sur un petit domaine de fluide entourant le point M_0 où est exprimée la redistribution. Nous pouvons considérer les gradients de vitesse moyenne constants sur ce petit volume.

On a alors:

$$\frac{\partial \overline{U'_m}}{\partial x'_n} \equiv \frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} \Big|_{M_0}$$

Ce gradient de vitesse moyenne peut être sorti de l'intégrale.

- Ces écoulements sont quasi homogènes et vérifient relativement bien la propriété:

$$\overline{u_m(x+r)u_i(x)} \equiv \overline{u_m(x)u_i(x-r)}$$

- La turbulence homogène est un cas particulier appartenant à cette famille.

Pour les écoulements turbulents isovolumes et non confinés, les équations (.3) et (.4) de l'annexe A1 se réduisent alors à:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} u_i |_{M_0} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} \iiint_D \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial u'_n u'_i}{\partial \xi_m} \right) \right] \frac{1}{r} dv \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^3 u'_m u'_n u'_i}{\partial \xi_j \partial \xi_m \partial \xi_n} \right] \frac{1}{r} dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} |_{M_0} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} \iiint_D \left[\frac{\partial u'_n}{\partial x'_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \frac{1}{r} dv \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^2 u'_m u'_n}{\partial x'_m \partial x'_n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \frac{1}{r} dv \end{aligned}$$

Soit encore

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} u_i |_{M_0} = \frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} A_{nj}^{mi} + B_{nj}^{mi} \quad (.5)$$

$$\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} |_{M_0} = \frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} a_{nj}^{mi} + b_{nj}^{mi} \quad (.6)$$

Propriétés:

- Pour le cas particulier d'un écoulement avec cisaillement moyen constant et d'une turbulence homogène, les équations (.5) et (.6) sont exactes.

Soit \overline{A} une grandeur turbulente moyenne définie au point M_0 du domaine (D). En turbulence homogène, nous avons:

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial x_j} = 0.$$

Cette propriété, appliquée à $\overline{\frac{p}{\rho}u_i}$ donne:

$$\overline{\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{\frac{u_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j}} = 0.$$

et de ce fait:

$$\frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} [A_{nj}^{mi} + a_{nj}^{mi}] + [B_{nj}^{mi} + b_{nj}^{mi}] = 0.$$

VON KARMAN et HOWARTH ont montré qu'en turbulence homogène, les corrélations spatiales $\overline{u_i(x)u_m(x+r)}$ vérifient la relation:

$$\frac{\overline{\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \frac{\partial u_m(x+r)}{\partial x'_i}}}{\partial x_j \partial x'_i} = - \frac{\overline{\frac{\partial^2 u_i(x)u_m(x+r)}{\partial \xi_j \partial \xi_i}}}{\partial \xi_j \partial \xi_i}$$

ξ_k sont les composantes du rayon vecteur \vec{r} . Ces deux propriétés permettent d'écrire:

$$\begin{aligned} a_{nj}^{mi} = -A_{nj}^{mi} &= -\frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^2 \overline{u'_n u'_i}}{\partial \xi_j \partial \xi_m} \right] \frac{1}{r} dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial u'_n}{\partial \xi_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \frac{1}{r} dv \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} b_{nj}^{mi} = -B_{nj}^{mi} &= -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^3 \overline{u'_m u'_n u'_i}}{\partial \xi_j \partial \xi_m \partial \xi_n} \right] \frac{1}{r} dv \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^2 u'_m u'_n}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \frac{1}{r} dv \end{aligned} \quad (8)$$

Les intégrales de volume des équations (.3) et (.4) ne sont significatives que sur un petit domaine de fluide entourant le point M_o où sont exprimées les corrélations recherchées. Nous pouvons considérer en première approximation que sur ce petit volume de fluide, l'écoulement est à cisaillement constant et à turbulence homogène; et utiliser les propriétés (.7) et (.8).

- L'équation de continuité appliquée au champ turbulent s'écrit:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Il en résulte immédiatement:

$$\sum_i a_{ni}^{mi} = \sum_i A_{ni}^{mi} = 0, \quad \sum_m a_{mj}^{mi} = \sum_m A_{mj}^{mi} = 0 \quad (.9)$$

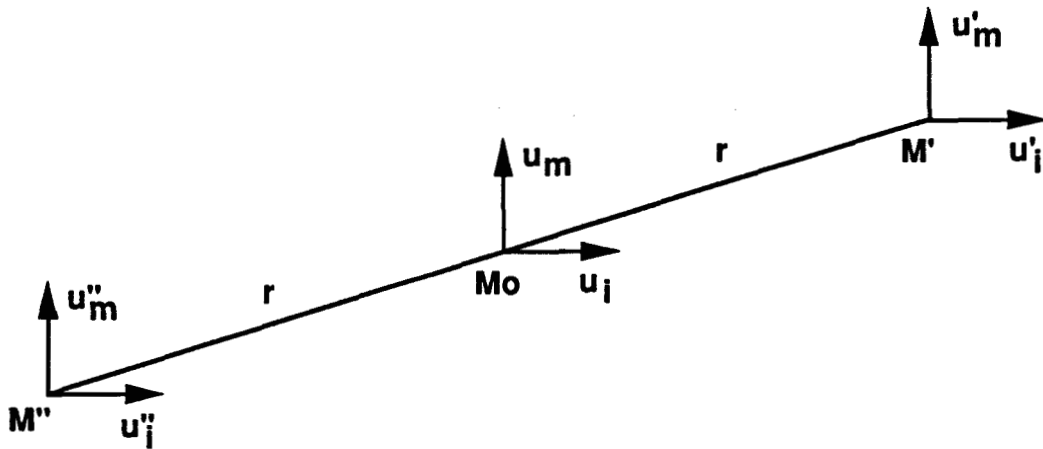
$$\sum_i b_{ni}^{mi} = \sum_i B_{ni}^{mi} = 0, \quad \sum_m b_{mj}^{mi} = \sum_m B_{mj}^{mi} = 0 \quad (.10)$$

– Les équations (.7) et (.8) mettent aussi en évidence les propriétés de symétrie suivantes:

$$a_{nj}^{mi} = a_{nm}^{ji}, \quad A_{nj}^{mi} = A_{nm}^{ji} \quad (.11)$$

$$b_{nj}^{mi} = b_{mj}^{ni}, \quad B_{nj}^{mi} = B_{mj}^{ni} \quad (.12)$$

Comme les écoulements étudiés dans cette annexe sont quasi homogènes, si nous considérons le schéma:



La relation qu'ils vérifient avec une bonne approximation permet d'écrire:

$$\overline{u_i'' u_m} \equiv \overline{u_i u_m'} \quad \text{et} \quad \overline{u_i u_m''} \equiv \overline{u_i' u_m}$$

– Pour les écoulements non confinés, les corrélations spatiales sont pratiquement symétriques par rapport au rayon vecteur \vec{r} et de ce fait:

$$\overline{u_m(x-r)u_i(x)} = \overline{u_m(x+r)u_i(x)}$$

$$\frac{\partial \overline{u_m(x-r)u_i(x)}}{\partial \xi_j} = - \frac{\partial \overline{u_m(x+r)u_i(x)}}{\partial \xi_j}$$

$$\frac{\partial^2 \overline{u_m(x-r)u_i(x)}}{\partial \xi_j \partial \xi_n} = \frac{\partial^2 \overline{u_m(x+r)u_i(x)}}{\partial \xi_j \partial \xi_n}$$

Ces différentes propriétés donnent:

$$a_{nj}^{mi} = a_{ij}^{mn}, A_{nj}^{mi} = A_{ij}^{mn} \quad (.13)$$

- La contraction $m = j$ dans l'équation (.7) donne:

$$\begin{aligned} \sum_j a_{nj}^{ji} &= -\sum_j A_{nj}^{ji} = -\frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\sum_j \frac{\partial^2 \overline{u'_n u_i}}{\partial \xi_j \partial \xi_j} \right] \frac{1}{r} dv \\ &= -\frac{1}{2\pi} \iiint_D \frac{\Delta \overline{u'_n u_i}}{r} dv \end{aligned}$$

L'application de la formule de GREEN au couple de fonctions $U = \overline{u'_n u_i}$ et $\frac{1}{r}$ (annexe B partie 2) permet d'obtenir:

$$\frac{1}{2\pi} \iiint_D \frac{1}{r} \Delta(\overline{u'_n u_i}) dv = -2\overline{u'_n u_i}|_{M_o} + \frac{1}{2\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \overline{u'_n u_i}}{\partial n} - \overline{u'_n u_i} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right] ds$$

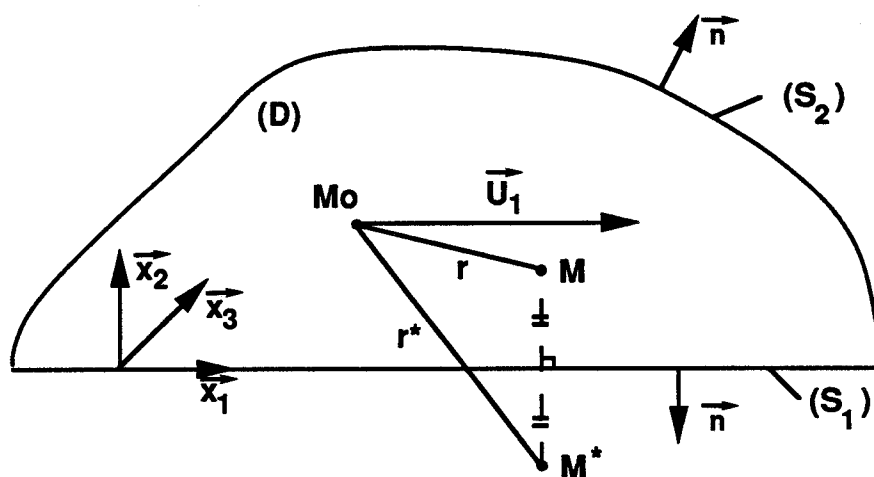
Si nous prenons pour surface (S) la sphère de centre M_o et de rayon R , l'utilisation du théorème de la moyenne montre que l'intégrale de surface est négligeable. Il en résulte:

$$\sum_j a_{nj}^{ji} = -\sum_j A_{nj}^{ji} = 2\overline{u'_n u_i}|_{M_o} \quad (.14)$$

.3 ANNEXE A3:

REDISTRIBUTION DE L'ENERGIE POUR UN ECOULEMENT TURBULENT ISOVOLUME ET CONFINE PAR UNE PAROI SOLIDE, PLANE ET PARALLELE A LA DIRECTION PRINCIPALE DE L'ECOULEMENT MOYEN

Pour ces écoulements, nous pouvons choisir le domaine (D) ainsi que sa surface (S) comme l'indique le schéma suivant:



Sur ce domaine de fluide, les équations (.3) et (.4) deviennent:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_j} u_i} \Big|_{M_o} &= \frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \overline{U'_m}}{\partial \xi_n} \frac{\partial \overline{u'_n u_i}}{\partial \xi_m} \right) \right] \frac{1}{r} dv \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^3 \overline{u'_m u'_n u_i}}{\partial \xi_j \partial \xi_m \partial \xi_n} \right] \frac{1}{r} dv \\
 &+ \frac{1}{4\pi\rho} \iint_{S_1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \overline{p'_{,j} u_i}}{\partial n'} - \overline{p'_{,j} u_i} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds \\
 &+ \frac{1}{4\pi\rho} \iint_{S_2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \overline{p'_{,j} u_i}}{\partial n'} - \overline{p'_{,j} u_i} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds
 \end{aligned} \tag{.15}$$

$$\overline{\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \Big|_{M_o} = \frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial \overline{U'_m}}{\partial x'_n} \frac{\partial \overline{u'_n}}{\partial x'_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \frac{1}{r} dv$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^2 u'_m u'_n}{\partial x'_m \partial x'_n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \frac{1}{r} dv \\
& + \frac{1}{4\pi\rho} \iint_{S_1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - p' \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds \\
& + \frac{1}{4\pi\rho} \iint_{S_2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - p' \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds
\end{aligned} \tag{.16}$$

Simplifications de ces équations:

Comme dans l'annexe précédente, nous pouvons prendre comme surface (S_2) la portion de sphère de centre M_0 et de rayon R . Le rayon R étant très grand. L'utilisation du théorème de la moyenne permet de montrer que les intégrales sur cette surface sont négligeables dans les équations précédentes.

Dans la plupart des écoulements confinés par une paroi solide, plane et parallèle à l'écoulement moyen, seule la contrainte moyenne de cisaillement $\frac{\partial \bar{U}}{\partial x_2}$ est significative. Nous allons toutefois conserver les notations générales qui mettent en évidence certaines propriétés des équations ci-dessus.

Posons M^* symétrique de M par rapport à la surface (S_1). r^* est la distance du point M_0 au point M^* (si le point courant M est sur la paroi solide, il est alors confondu avec le point M^* et $r = r^*$). L'application de la formule de GREEN, établie dans la troisième partie de l'annexe B, aux équations (.1) et (.2), donne

$$\begin{aligned}
& \iiint_D \left[2 \frac{\partial \bar{U}_m}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right]' \frac{1}{r^*} dv - \iiint_D \left[\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} (\bar{u}_m u_n - u_m u_n) \right]' \frac{1}{r^*} dv \\
& = \iint_S \left[-\frac{1}{r^*} \frac{\partial p}{\partial n} + p \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right]' ds \\
& \iiint_D \left[2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{U}_m}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \right]' \frac{1}{r^*} dv \\
& - \iiint_D \left[\frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_m \partial x_n} (\bar{u}_m u_n - u_m u_n) \right]' \frac{1}{r^*} dv \\
& = \iint_S \left[-\frac{1}{r^*} \frac{\partial p_{,j}}{\partial n} + p_{,j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right]' ds
\end{aligned}$$

Rappels:

- Les intégrales de volume s'étendent sur tout le domaine (D) de fluide en mouvement.
- La surface (S) délimite ce domaine.
- L'exposant ' indique que le terme est calculé en un point M de coordonnées (x'_i) décrivant tout le domaine (D) ainsi que sa limite (S).
- r^* est le rayon vecteur représentant la distance entre les points M_o et M^* .
- $\frac{\partial}{\partial n}$ sont les dérivées normales par rapport à la surface (S) (le vecteur \vec{n} est dirigé vers l'extérieur du domaine).

Dans les intégrales des deux équations précédentes, toutes les grandeurs sont exprimées au point M . Elles sont donc indépendantes des coordonnées (x_i) de M_o . De ce fait, nous pouvons multiplier la première équation par $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ et la seconde par u_i exprimées en M_o , et moyenner le tout par rapport au temps. Nous obtenons, après utilisation des propriétés inhérentes à ce type d'écoulement:

$$\begin{aligned} & \iiint_D \left[2 \frac{\partial \overline{U'_m} \partial u'_n \partial u_i}{\partial \xi_n \partial \xi_m \partial x_j} \right] \frac{1}{r^*} dv + \iiint_D \left[\frac{\partial^2 \overline{u'_m u'_n} \partial u_i}{\partial \xi_m \partial \xi_n \partial x_j} \right] \frac{1}{r^*} dv \\ & = \iint_{S_1} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial \overline{p'}}{\partial x'_2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \overline{p'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right] ds \\ & \iiint_D \left[2 \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \overline{U'_m} \partial u'_n u_i}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \right) \right] \frac{1}{r^*} dv + \iiint_D \left[\frac{\partial^3 \overline{u'_m u'_n u_i}}{\partial \xi_m \partial \xi_n \partial \xi_j} \right] \frac{1}{r^*} dv \\ & = \iint_{S_1} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial \overline{p'_{,j} u_i}}{\partial x'_2} - \overline{p'_{,j} u_i} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right] ds \end{aligned}$$

Sur la paroi (S_1), le vecteur \vec{n} (dirigé vers l'extérieur du domaine (D)) est colinéaire mais de sens opposé au vecteur \vec{x}_2 . Cette remarque nous permet de remplacer $\frac{\partial}{\partial n}$ par $-\frac{\partial}{\partial x_2}$.

Puisque sur la surface (S_1), M et M^* sont confondus: $r = r^*$. Les deux intégrales de surface des équations ci-dessus sont identiques aux intégrales sur la même surface des équations (.15) et (.16). Nous pouvons alors effectuer une substitution qui conduit à:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} u_i |_{M_o} & = \frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \overline{U'_m} \partial u'_n u_i}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \right) \right] \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} \right] dv \\ & + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^3 \overline{u'_m u'_n u_i}}{\partial \xi_m \partial \xi_n \partial \xi_j} \right] \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} \right] dv \end{aligned} \quad (.17)$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \Big|_{M_o} &= \frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial U'_m}{\partial \xi_n} \frac{\partial u'_n}{\partial \xi_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} \right] dv \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^2 u'_m u'_n}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} \right] dv \end{aligned} \quad (.18)$$

Les résultats expérimentaux, sur les écoulements étudiés dans cette annexe, montrent que le gradient de vitesse moyenne $\frac{\partial \overline{U}}{\partial x_2}$ varie fortement avec la distance à la paroi x_2 ; d'autant plus que le point considéré est proche de la paroi solide. Néanmoins, puisque les corrélations sous les intégrales de volume sont des corrélations spatiales entre les points M_o et M , on suppose généralement qu'elles ne sont significatives que sur un petit volume de fluide entourant le point M_o . De ce fait, en première approximation, on considère que la contrainte moyenne de cisaillement $\frac{\partial \overline{U}_m}{\partial x_n}$ reste constante sur ce petit domaine. Il s'ensuit:

$$\frac{\partial \overline{U}'_m}{\partial x'_n} = \frac{\partial \overline{U}_m}{\partial x_n} \Big|_{M_o}$$

Avec cette approximation qui est plus contraignante que dans l'annexe précédente, les équations (.17) et (.18) deviennent:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_j}} u_i \Big|_{M_o} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \overline{U}_m}{\partial x_n} \iiint_D \left[\frac{\partial^2 u'_n u'_i}{\partial \xi_m \partial \xi_j} \right] \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} \right] dv \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^3 u'_m u'_n u'_i}{\partial \xi_m \partial \xi_n \partial \xi_j} \right] \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} \right] dv \end{aligned} \quad (.19)$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \Big|_{M_o} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \overline{U}_m}{\partial x_n} \iiint_D \left[\frac{\partial u'_n}{\partial \xi_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} \right] dv \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^2 u'_m u'_n}{\partial \xi_m \partial \xi_n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} \right] dv \end{aligned} \quad (.20)$$

et donc sous forme tensorielle:

$$\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_j}} u_i \Big|_{M_o} = \frac{\partial \overline{U}_m}{\partial x_n} C_{nj}^{mi} + D_{nj}^{mi} \quad (.21)$$

$$\overline{\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \Big|_{M_0} = \frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} c_{nj}^{mi} + d_{nj}^{mi} \quad (.22)$$

CONCLUSION:

Pour les écoulements turbulents, isovolumes et confinés par une paroi solide, plane et parallèle à la direction principale de l'écoulement moyen, les effets de la paroi sur les termes qui nous intéressent peuvent être interprétés comme étant des effets de réflexion sur cette paroi.

Propriétés:

- Il résulte des équations de continuité appliquées au champ turbulent aux points M_0 et M les relations suivantes:

$$\sum_i c_{ni}^{mi} = 0, \quad \sum_m c_{mj}^{mi} = \sum_m C_{mj}^{mi} = 0 \quad (.23)$$

et

$$\sum_i d_{ni}^{mi} = 0, \quad \sum_m d_{mj}^{mi} = \sum_m D_{mj}^{mi} = 0 \quad (.24)$$

- De plus, si nous supposons que sur le petit domaine de fluide autour de M_0 sur lequel les corrélations spatiales sont significatives, nous pouvons considérer la turbulence homogène, nous avons (voir l'annexe précédente):

$$c_{nj}^{mi} = -C_{nj}^{mi} \text{ et } d_{nj}^{mi} = -D_{nj}^{mi} \quad (.25)$$

et de ce fait:

$$\sum_i C_{ni}^{mi} = 0, \quad \sum_i D_{ni}^{mi} = 0 \quad (.26)$$

- Nous pouvons aussi déduire directement des équations (17) et (18) les propriétés de symétrie:

$$C_{nj}^{mi} = C_{nm}^{ji} \quad (.27)$$

$$d_{nj}^{mi} = d_{mj}^{ni}, \quad D_{nj}^{mi} = D_{mj}^{ni} \quad (.28)$$

- De plus, si nous supposons que, sur le petit volume de fluide autour de M_0 , on peut considérer que la turbulence est homogène, nous pouvons utiliser les équations (.25) pour obtenir:

$$c_{nj}^{mi} = c_{nm}^{ji} \quad (.29)$$

- Si, comme dans l'annexe précédente, nous utilisons la relation:

$$\overline{u_m(x+r)u_i(x)} \equiv \overline{u_m(x)u_i(x-r)}$$

et si nous supposons que les corrélations spatiales sont pratiquement symétriques par rapport au rayon vecteur \vec{r} , nous pouvons déduire:

$$c_{nj}^{mi} = c_{ij}^{mn}, \quad C_{nj}^{mi} = C_{ij}^{mn} \quad (.30)$$

- Pour finir, si nous procédons la contraction $m = j$ dans le tenseur C_{nj}^{mi} , celui-ci devient:

$$\begin{aligned} \sum_j C_{nj}^{ji} &= \frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\sum_j \frac{\partial^2 \overline{u'_n u_i}}{\partial \xi_j \partial \xi_j} \right] \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} \right] dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \iiint_D \Delta \overline{u'_n u_i} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} \right] dv \end{aligned}$$

La formule de GREEN, de l'annexe B partie 2, appliquée aux fonctions $U = \overline{u'_n u_i}$ et $\frac{1}{r}$ conduit à:

$$\frac{1}{2\pi} \iiint_D \Delta \overline{u'_n u_i} \frac{1}{r} dv = -2\overline{u_n u_i}|_{M_0} + \frac{1}{2\pi} \iint_{S_1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \overline{u'_n u_i}}{\partial n} - \overline{u'_n u_i} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds$$

La formule de GREEN, de l'annexe B partie 3, appliquée aux fonctions $U = \overline{u'_n u_i}$ et $\frac{1}{r^*}$ conduit à:

$$\frac{1}{2\pi} \iiint_D \Delta \overline{u'_n u_i} \frac{1}{r^*} dv = \frac{1}{2\pi} \iint_{S_1} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial \overline{u'_n u_i}}{\partial n} - \overline{u'_n u_i} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right] ds$$

Sur la surface (S_1) $r = r^*$, la combinaison des deux équations précédentes donne alors:

$$\sum_j C_{nj}^{ji} = \frac{1}{2\pi} \iiint_D \Delta \overline{u'_n u_i} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r^*} \right] dv = -2\overline{u_n u_i}|_{M_0} \quad (.31)$$

Si nous supposons en plus que, localement, la turbulence est homogène, nous pouvons ajouter la condition suivante:

$$\sum_j c_{nj}^{ji} = 2\overline{u_n u_i}|_{M_0} \quad (.32)$$

REMARQUES:

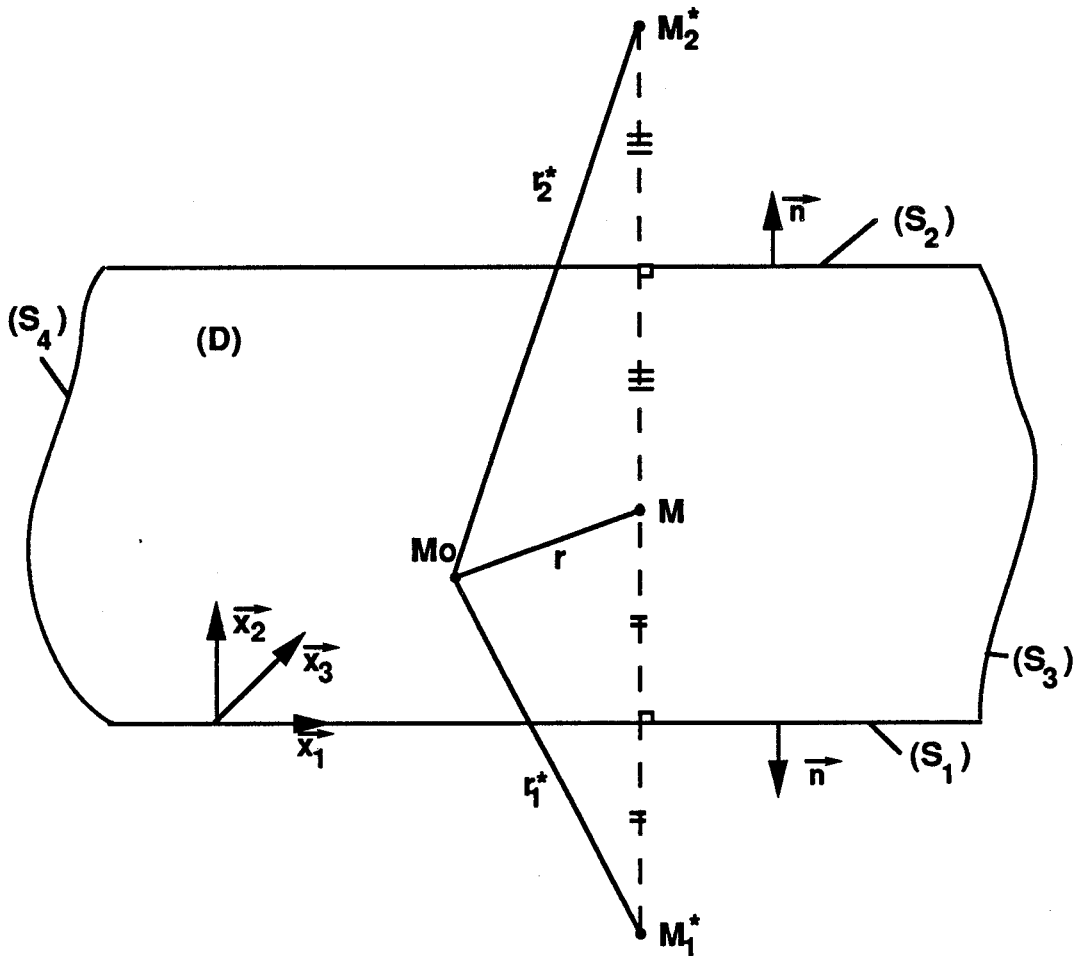
Les propriétés des tenseurs C , D , c et d , obtenues à partir de l'hypothèse d'homogénéité locale de la turbulence, sont plus contraignantes et plus approximatives pour cette partie que pour les écoulements non confinés. En effet, si l'on prend l'exemple d'une couche limite turbulente sur paroi plane, les mesures expérimentales des grandeurs turbulentes montrent que celles-ci sont loin d'être homogènes. Nous pouvons citer le profil d'énergie turbulente qui présente un pic très prononcé près de la paroi.

De la même façon, les relations (.30) sont obtenues moyennant l'hypothèse que, sur un petit volume de fluide, la turbulence est pratiquement homogène et que les corrélations spatiales sont pratiquement symétriques par rapport à leur rayon vecteur. L'utilisation de ces relations doit être strictement limitée aux écoulements simples pour lesquels ces approximations peuvent être faites.

.4 ANNEXE A4:

REDISTRIBUTION DE L'ENERGIE POUR UN ECOULEMENT TURBULENT, ISOVOLUME ENTRE DEUX PAROIS SOLIDES, PLANES ET PARALLELES

Pour ces écoulements, nous pouvons choisir le domaine (D) ainsi que sa surface (S) comme l'indique le schéma suivant:



Comme dans les cas précédents, nous pouvons supposer que les surfaces (S_3) et (S_4) sont suffisamment éloignées du point M_o pour que les intégrales sur celles-ci puissent être négligées. Sur les parois (S_1) et (S_2) , le vecteur \vec{n} (dirigé vers l'extérieur du domaine (D)) est colinéaire au vecteur \vec{x}_2 . Sur (S_1) , \vec{n} et \vec{x}_2 sont opposés, et nous pouvons remplacer $\frac{\partial}{\partial n}$ par $-\frac{\partial}{\partial x_2}$. Sur (S_2) , \vec{n} et \vec{x}_2 sont de même sens, nous pouvons alors remplacer $\frac{\partial}{\partial n}$ par $\frac{\partial}{\partial x_2}$.

Appliquées aux équations (.3) et (.4) de l'annexe A1, ces différentes propriétés conduisent à :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_j}} u_i |_{M_0} &= \frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \overline{U'_m}}{\partial \xi_n} \frac{\partial \overline{u'_n u_i}}{\partial \xi_m} \right) \right] \frac{1}{r} dv \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^3 \overline{u'_m u'_n u_i}}{\partial \xi_j \partial \xi_m \partial \xi_n} \right] \frac{1}{r} dv \\
 &+ \frac{1}{4\pi\rho} \iint_{S_1} \left[-\frac{1}{r} \overline{\frac{\partial p'_j u_i}{\partial x'_2}} + \overline{p'_j u_i} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds \\
 &+ \frac{1}{4\pi\rho} \iint_{S_2} \left[\frac{1}{r} \overline{\frac{\partial p'_j u_i}{\partial x'_2}} - \overline{p'_j u_i} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds
 \end{aligned} \tag{.33}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} |_{M_0} &= \frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial \overline{U'_m}}{\partial x'_n} \frac{\partial \overline{u'_n}}{\partial x'_m} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right] \frac{1}{r} dv \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^2 \overline{u'_m u'_n}}{\partial x'_m \partial x'_n} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right] \frac{1}{r} dv \\
 &+ \frac{1}{4\pi\rho} \iint_{S_1} \left[-\frac{1}{r} \overline{\frac{\partial p'}{\partial x'_2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{p' \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds \\
 &+ \frac{1}{4\pi\rho} \iint_{S_2} \left[\frac{1}{r} \overline{\frac{\partial p'}{\partial x'_2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \overline{p' \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r} \right) \right] ds
 \end{aligned} \tag{.34}$$

Posons M_1^* et M_2^* , respectivement images du point M par rapport aux surfaces (S_1) et (S_2). Nous pouvons alors définir deux distances $r_1^* = \|M_0 \vec{M}_1^*\|$ et $r_2^* = \|M_0 \vec{M}_2^*\|$ qui vérifient les conditions requises pour l'application de la formule de GREEN, établie dans la troisième partie de l'annexe B, aux équations (.1) et (.2). Après utilisation des simplifications inhérentes aux écoulements envisagés, on obtient pour r_1^* :

$$\begin{aligned}
 &\iiint_D \left[2 \frac{\partial \overline{U'_m}}{\partial x_n} \frac{\partial \overline{u_n}}{\partial x_m} \right]' \frac{1}{r_1^*} dv \\
 &- \iiint_D \left[\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} (\overline{u_m u_n} - u_m u_n) \right]' \frac{1}{r_1^*} dv \\
 &=
 \end{aligned}$$

$$\int \int_{S_1} \left[\frac{1}{r_1^*} \frac{\partial p}{\partial x_2'} - p \frac{\partial}{\partial x_2'} \left(\frac{1}{r_1^*} \right) \right]' ds + \int \int_{S_2} \left[-\frac{1}{r_1^*} \frac{\partial p}{\partial x_2'} + p \frac{\partial}{\partial x_2'} \left(\frac{1}{r_1^*} \right) \right]' ds$$

et

$$\begin{aligned} & \int \int \int_D \left[2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right) \right]' \frac{1}{r_1^*} dv \\ & - \int \int \int_D \left[\frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_m \partial x_n} (\overline{u_m u_n} - u_m u_n) \right]' \frac{1}{r_1^*} dv \\ & = \\ & \int \int_{S_1} \left[\frac{1}{r_1^*} \frac{\partial p_{,j}}{\partial x_2'} - p_{,j} \frac{\partial}{\partial x_2'} \left(\frac{1}{r_1^*} \right) \right]' ds + \int \int_{S_2} \left[-\frac{1}{r_1^*} \frac{\partial p_{,j}}{\partial x_2'} + p_{,j} \frac{\partial}{\partial x_2'} \left(\frac{1}{r_1^*} \right) \right]' ds \end{aligned}$$

Pour la distance r_2^* , on obtient exactement les mêmes équations.

Dans les intégrales des équations précédentes, toutes les grandeurs sont exprimées en M de coordonnées (x'_i) . Elles sont donc indépendantes des coordonnées du point M_o . De ce fait, nous pouvons multiplier la première équation par $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, et la seconde équation par u_i exprimées en M_o , et moyenner le tout par le temps. On obtient finalement: Pour la distance r_1^*

$$\begin{aligned} & \int \int \int_D \left[2 \frac{\partial \overline{U'_m} \overline{u'_n} \partial u_i}{\partial \xi_n \partial \xi_m \partial x_j} \right] \frac{1}{r_1^*} dv + \int \int \int_D \left[\frac{\partial^2 \overline{u'_m u'_n} \partial u_i}{\partial \xi_m \partial \xi_n \partial x_j} \right] \frac{1}{r_1^*} dv \\ & = \\ & \int \int_{S_1} \left[\frac{1}{r_1^*} \frac{\partial \overline{p'} \partial u_i}{\partial x_2' \partial x_j} - \overline{p'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_2'} \left(\frac{1}{r_1^*} \right) \right] ds \\ & + \int \int_{S_2} \left[-\frac{1}{r_1^*} \frac{\partial \overline{p'} \partial u_i}{\partial x_2' \partial x_j} + \overline{p'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_2'} \left(\frac{1}{r_1^*} \right) \right] ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int \int \int_D \left[2 \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \overline{U'_m} \partial \overline{u'_n u_i}}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \right) \right] \frac{1}{r_1^*} dv + \int \int \int_D \left[\frac{\partial^3 \overline{u'_m u'_n u_i}}{\partial \xi_m \partial \xi_n \partial \xi_j} \right] \frac{1}{r_1^*} dv \\ & = \\ & \int \int_{S_1} \left[\frac{1}{r_1^*} \frac{\partial \overline{p'_{,j} u_i}}{\partial x_2'} - \overline{p'_{,j} u_i} \frac{\partial}{\partial x_2'} \left(\frac{1}{r_1^*} \right) \right] ds \end{aligned}$$

$$+ \int \int_{S_2} \left[-\frac{1}{r_1^*} \frac{\partial \overline{p'_{,j} u_i}}{\partial x'_2} + \overline{p'_{,j} u_i} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r_1^*} \right) \right] ds$$

Pour la distance r_2^*

$$\begin{aligned} & \int \int \int_D \left[2 \frac{\partial \overline{U'_m} \partial u'_n \partial u_i}{\partial \xi_n \partial \xi_m \partial x_j} \right] \frac{1}{r_2^*} dv + \int \int \int_{(D)} \left[\frac{\partial^2 \overline{u'_m u'_n u_i}}{\partial \xi_m \partial \xi_n \partial x_j} \right] \frac{1}{r_2^*} dv \\ & = \\ & \int \int_{S_1} \left[\frac{1}{r_2^*} \frac{\partial \overline{p'} \partial u_i}{\partial x'_2 \partial x_j} - \overline{p'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r_2^*} \right) \right] ds \\ & + \int \int_{S_2} \left[-\frac{1}{r_2^*} \frac{\partial \overline{p'} \partial u_i}{\partial x'_2 \partial x_j} + \overline{p'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r_2^*} \right) \right] ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int \int \int_D \left[2 \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \overline{U'_m} \partial u'_n u_i}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \right) \right] \frac{1}{r_2^*} dv + \int \int \int_D \left[\frac{\partial^3 \overline{u'_m u'_n u_i}}{\partial \xi_m \partial \xi_n \partial \xi_j} \right] \frac{1}{r_2^*} dv \\ & = \\ & \int \int_{S_1} \left[\frac{1}{r_2^*} \frac{\partial \overline{p'_{,j} u_i}}{\partial x'_2} - \overline{p'_{,j} u_i} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r_2^*} \right) \right] ds \\ & + \int \int_{S_2} \left[-\frac{1}{r_2^*} \frac{\partial \overline{p'_{,j} u_i}}{\partial x'_2} + \overline{p'_{,j} u_i} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r_2^*} \right) \right] dS_2 \end{aligned}$$

Comme nous pouvons le voir sur le schéma, sur (S_1) , M et M_1^* sont confondus. Il s'ensuit $r = r_1^*$. De même sur (S_2) , $r = r_2^*$. Les intégrales de surfaces, soulignées, contenues dans les équations précédentes, sont égales, au signe près, à celles des équations (.33) et (.34). Nous pouvons alors effectuer une substitution qui conduit à:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} u_i |_{M_0} &= \frac{1}{2\pi} \int \int \int_D \left[\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial \overline{U'_m} \partial u'_n u_i}{\partial \xi_n \partial \xi_m} \right) \right] \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1^*} - \frac{1}{r_2^*} \right] dv \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int \int \int_D \left[\frac{\partial^3 \overline{u'_m u'_n u_i}}{\partial \xi_j \partial \xi_m \partial \xi_n} \right] \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1^*} - \frac{1}{r_2^*} \right] dv \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \int \int_{S_1} \left[\frac{1}{r_2^*} \frac{\partial \overline{p'_{,j} u_i}}{\partial x'_2} - \overline{p'_{,j} u_i} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r_2^*} \right) \right] ds \\ &+ \frac{1}{4\pi\rho} \int \int_{S_2} \left[-\frac{1}{r_1^*} \frac{\partial \overline{p'_{,j} u_i}}{\partial x'_2} + \overline{p'_{,j} u_i} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r_1^*} \right) \right] ds \end{aligned} \quad (.35)$$

$$\begin{aligned}
\overline{\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \Big|_{M_o} &= \frac{1}{2\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial U'_m}{\partial x'_n} \frac{\partial u'_n}{\partial x'_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1^*} - \frac{1}{r_2^*} \right] dv \\
&+ \frac{1}{4\pi} \iiint_D \left[\frac{\partial^2 u'_m u'_n}{\partial x'_m \partial x'_n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1^*} - \frac{1}{r_2^*} \right] dv \\
&+ \frac{1}{4\pi\rho} \iint_{S_1} \left[\frac{1}{r_2^*} \frac{\partial p'}{\partial x'_2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - p' \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r_2^*} \right) \right] ds \\
&+ \frac{1}{4\pi\rho} \iint_{S_2} \left[-\frac{1}{r_1^*} \frac{\partial p'}{\partial x'_2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + p' \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x'_2} \left(\frac{1}{r_1^*} \right) \right] ds
\end{aligned} \tag{.36}$$

CONCLUSIONS:

Pour les écoulements turbulents, isovolumes, entre deux parois solides, planes et parallèles, les effets des parois sur la redistribution de l'énergie peuvent être interprétés comme étant la réflexion de cette redistribution par les parois. On aboutit à la même conclusion que dans l'annexe précédente. Mais dans cette partie, apparaissent des intégrales de surface supplémentaires qui représentent les effets qu'ont les parois l'une sur l'autre (par exemple: réflexion de la paroi basse sur la paroi haute). Ces termes sont donc fonction de la distance h : hauteur du canal.

- Si la distance h est très "grande", un point M_o de l'écoulement ne peut pas à la fois ressentir les effets des deux parois simultanément. Une paroi ne peut donc pas ressentir les effets qui se produisent sur l'autre. Les intégrales de surface des équations (.35) et (.36) sont négligeables. On se retrouve dans le cas de l'annexe précédente.
- Si h est "grande", un point M_o de l'écoulement peut ressentir les effets simultanés des deux parois; mais les parois sont suffisamment éloignées pour ne pas interagir l'une sur l'autre. Dans ce cas les intégrales de surface peuvent être négligées, mais les intégrales de volume dépendent de h .
- Finalement, si les deux parois sont très proches, il faut prendre en compte tous les termes contenus dans les équations (.35) et (.36).

Les approximations issues de l'hypothèse d'homogénéité locale ou de quasi homogénéité locale de la turbulence étaient réalistes pour les écoulements non confinés. Elles étaient assez plausibles pour les écoulements le long d'une paroi solide, mais deviennent très discutables quand il y a deux parois proches l'une de l'autre. Néanmoins, pour conserver la modélisation issue des annexes précédentes, nous allons supposer que les gradients de vitesses moyennes sont uniformes sur le domaine dans lequel les intégrales qui les contiennent sont significatives. Nous pouvons alors écrire :

$$\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_j} u_i} |_{M_0} = \frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} E_{nj}^{mi} + F_{nj}^{mi} + G_j^i + H_j^i \quad (.37)$$

$$\overline{\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} |_{M_0} = \frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} e_{nj}^{mi} + f_{nj}^{mi} + g_j^i + h_j^i \quad (.38)$$

Les tenseurs d'ordre 4 dépendent des distances aux deux parois. Ceux d'ordre 2 dépendent de ces distances, mais aussi de la hauteur h du canal plan.

Une analyse des propriétés de ces tenseurs met en évidence que:

Conditions de contraction:

$$\sum_i e_{ni}^{mi} = 0, \quad \sum_m e_{mj}^{mi} = \sum_m E_{mj}^{mi} = 0. \quad (.39)$$

$$\sum_i f_{ni}^{mi} = 0, \quad \sum_m f_{mj}^{mi} = \sum_m F_{mj}^{mi} = 0. \quad (.40)$$

conditions de symétrie:

$$E_{nj}^{mi} = E_{nm}^{ji} \quad (.41)$$

$$f_{nj}^{mi} = f_{mj}^{ni}, \quad F_{nj}^{mi} = F_{mj}^{ni} \quad (.42)$$

Cette analyse montre aussi que selon les propriétés de symétrie ou d'anti-symétrie vérifiées par l'écoulement étudié, les effets des intégrales de surface des équations (.35) et (.36) peuvent soit s'annuler soit s'additionner. Une telle propriété devrait pouvoir être vérifiée à bas REYNOLDS, à l'aide des simulations directes de la turbulence dans des canaux plans. Différentes équipes (<2-1>, <2-2> et <2-32>) effectuent en effet de telles simulations numériques.

.5 ANNEXE B

FORMULE DE GREEN:

Soit (D) un domaine limité par une surface (S) . Soient U et V : 2 fonctions continues, dérivables deux fois et à dérivées continues sur le domaine (D) jusqu'à sa surface (S) .

Soit I l'intégrale suivante:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D \left[\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \right] dv \\ &= \iiint_D \vec{\text{grad}}U * \vec{\text{grad}}V dv \end{aligned}$$

(où dv est l'élément de volume)

comme:

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(U \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) - U \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}$$

alors:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(U \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(U \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] dv \\ &\quad - \iiint_D U \Delta V dv \end{aligned}$$

L'utilisation de la formule d'OSTROGRADSKI permet d'établir:

$$I = \iint_S U \frac{\partial V}{\partial n} ds - \iiint_D U \Delta V dv$$

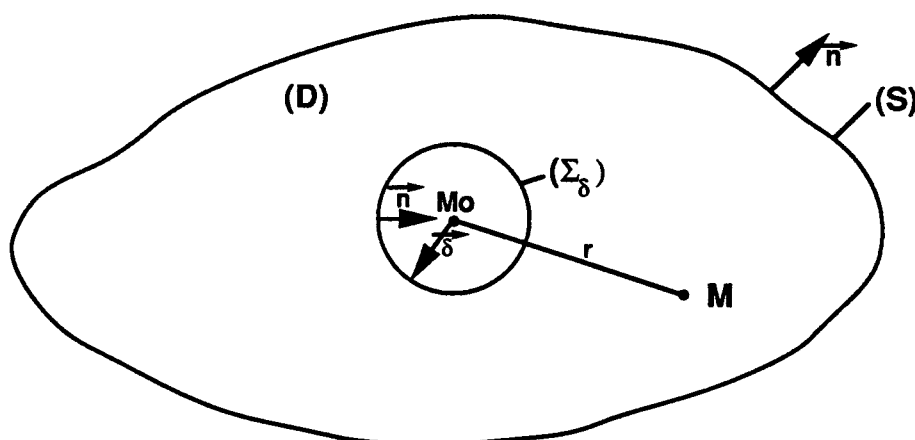
où \vec{n} est le vecteur normal à la surface (S) , orienté vers l'extérieur du volume (D) . L'intégrale de départ I étant commutative pour les fonctions U et V ; on obtient par soustraction la formule de GREEN:

$$\iint_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = \iiint_D (U \Delta V - V \Delta U) dv$$

APPLICATION DE LA FORMULE DE GREEN AU COUPLE DE FONCTIONS U et $1/r$:

Soit (D) un domaine limité par une surface (S) . Soit M_o un point appartenant au domaine (D) . On isole du volume (D) la sphère de centre M_o de rayon δ . On appelle (Σ_δ) sa surface. On définit ainsi le domaine $(D_1) = (D) - \text{sphère}(M_o, \delta)$. La fonction $V = 1/r$ est l'inverse de la distance du point M_o à un point variable M de (D) .

$$r = \|\vec{M_oM}\|$$



Soit U une fonction continue, dérivable deux fois, et à dérivées continues sur le domaine (D) jusqu'à sa surface (S) . Les fonctions U et V vérifient les conditions requises pour l'utilisation de la formule de GREEN sur (D_1) :

$$\begin{aligned} \iiint_{D_1} \left(U \Delta \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \Delta U \right) dv &= \iint_S \left(U \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds \\ &+ \iint_{\Sigma_\delta} \left(U \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma \end{aligned}$$

L'utilisation des propriétés suivantes:

- La fonction $1/r$ est harmonique sur (D_1) . De ce fait son Laplacien est nul (cf: .5.4).

Sur la surface (Σ_δ) , le vecteur normal \vec{n} , dirigé vers l'extérieur de (D_1) , est dirigé vers l'intérieur de la sphère. Sa direction s'oppose donc à celle de r .

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}$$

permet d'écrire la relation:

$$\int \int \int_{D_1} \left(\frac{1}{r} \Delta U \right) dv + \int \int_S \left(U \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds$$

(1)

(2)

$$+ \int \int_{\Sigma_\delta} \frac{U}{r^2} d\sigma - \int \int_{\Sigma_\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = 0$$

(3)

(4)

Si nous faisons, à présent, tendre le rayon δ vers 0; les différents termes ont les limites suivantes:

$$(1) \longrightarrow \int \int \int_D \left(\frac{1}{r} \Delta U \right) dv$$

(2) ne dépend pas de δ et reste donc inchangée.

$$(3) : \int \int_{\Sigma_\delta} \frac{U}{r^2} d\sigma = \int \int_{\Sigma_\delta} \frac{U}{\delta^2} d\sigma = \frac{1}{\delta^2} \int \int_{\Sigma_\delta} U d\sigma$$

Utilisons le Théorème de la Moyenne:

$$\left[\begin{array}{l} \exists \text{ un point } M' \in (\Sigma_\delta) \text{ tel que } \int \int_{\Sigma_\delta} U d\sigma = U(M') S(\Sigma_\delta) \\ \text{où } S(\Sigma_\delta) \text{ est la surface de } (\Sigma_\delta) \\ S(\Sigma_\delta) = 4\pi\delta^2 \end{array} \right.$$

$$\implies (3) = 4\pi U(M')$$

quand δ tend vers 0, alors M' tend vers M_0

$$\implies (3) \longrightarrow 4\pi U(M_0)$$

de la même façon:

$$(4) = - \int \int_{\Sigma_\delta} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = - \frac{1}{\delta} \int \int_{\Sigma_\delta} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma$$

l'utilisation du Théorème de la Moyenne permet d'établir que, quand $\delta \rightarrow 0$,

$$\Rightarrow (4) \rightarrow 4\pi\delta \frac{\partial U}{\partial n}|_{(M_0)}$$

or $\frac{\partial U}{\partial n}$ reste bornée $\forall M_0 \in (D)$ puisque U est continue, deux fois dérivable et à dérivées continues sur (D) . De ce fait, $(4) \rightarrow 0$.

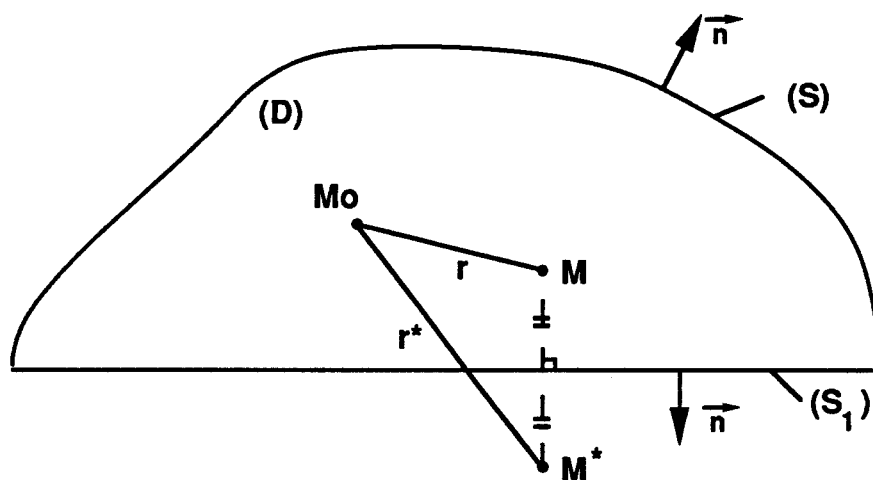
On en déduit que pour toute fonction U continue, deux fois dérivable et à dérivées continues sur un domaine (D) jusqu'à sa frontière (S) :

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \right] ds$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{1}{r} \Delta U dv$$

APPLICATION DE LA FORMULE DE GREEN AU COUPLE DE FONCTIONS U et $1/r^*$:

Soient un domaine (D) et sa frontière (S) définis comme suit:



La surface (S_1) étant plane.

Soit un point $M_0 \in (D) - (S)$, fixé. Soit M , un point parcourant $(D) + (S)$, et M^* son symétrique par rapport à la surface (S_1) . Pour tout point M , nous pouvons définir deux distances:

$$r = \|M_0 \vec{M}\| \text{ et } r^* = \|M_0 \vec{M}^*\|$$

Comme: $M_0 \in (D) - (S)$ alors $r^* > 0$. De plus, pour $M \in (S_1)$, $r = r^*$

Posons $V = 1/r^*$. Soit U une fonction continue, dérivable deux fois, et à dérivées continues sur (D) . Les fonctions U et V vérifient les conditions requises pour l'utilisation de la formule de GREEN sur (D) . Nous pouvons écrire:

$$\iiint_D \left(U \Delta \left(\frac{1}{r^*} \right) - \frac{1}{r^*} \Delta U \right) dv = \iint_S \left(U \frac{\partial \left(\frac{1}{r^*} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds$$

Comme r^* est une distance, elle vérifie l'équation de LAPLACE (cf .5.4):

$$\Delta \left(\frac{1}{r^*} \right) = 0.$$

La formule de GREEN se simplifie dans ce cas précis à:

$$-\iiint_D \left(\frac{1}{r^*} \Delta U \right) dv = \iint_S \left(U \frac{\partial \left(\frac{1}{r^*} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r^*} \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds$$

APPLICATION DE LA FORMULE DE LAPLACE AUX DISTANCES:

L'équation de LAPLACE $\Delta U = 0$., en coordonnées sphériques de centre M_0 , s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) = 0.$$

avec:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

soit encore:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} \right) = 0$$

Si nous cherchons uniquement les solutions de cette équation qui ne dépendent que du rayon vecteur, il faut considérer que $\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0$. En reportant ceci dans notre équation, nous obtenons:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0$$

D'où:

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires.

Si nous choisissons $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$, nous obtenons:

$$U = \frac{1}{r}$$

Il s'ensuit:

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$$

De la même façon, la distance r^* de la partie précédente peut servir de base à la construction d'un repère de coordonnées sphériques. Il résulte alors de l'expression de l'équation de LAPLACE dans ce repère:

$$\Delta \left(\frac{1}{r^*} \right) = 0$$

REFERENCE

- <1-1> DEGREGZ M.:
"Contribution à l'étude de l'électro-déposition du cuivre
à haute densité de courant."
Thèse de Doctorat, Université Libre de Bruxelles, 1981.
- <1-2> MONNIER J.C.:
"Hydrodynamique des écoulements turbulents
dans les cellules d'électro-déposition."
Thèse de Doctorat, UST Lille Flandres Artois, 1989.
- <1-3> WEYMEERSCH A., WINAND R. et RENARD L.:
"Zinc electro-deposition at high current densities."
Part 1: Electrochemical study.
Part 2: Characteristics of deposits.
Plating et Surface Finishing, April 1981.
- <1-4> SCHLICHTING H.:
"Boundary layer theory."
Mc Graw Hill Book Company, 1968.
- <1-4> BURTON R.A., CARPER H.J.:
"An experimental study of anular flows with
applications in turbulent film lubrication."
J. of Lubrification Technology, ASME, pp 381-391, July 1967.
- <1-6> HUSSAIN A.K.M.F., REYNOLDS W.C.:
"Measurements in fully developed turbulent channel flow."
J. of fluids Engineering, vol. 97, pp 568-580, december 1975.
- <1-7> DEISSLER R.G.:
"Analysis of turbulent heat transfert and flow
in the intrance regions of smooth passages."
Comittee for Aeronautics, Report n° 3016, 1953.
- <1-8> CEBECY T., SMITH A.M.O.:
"Analysis of turbulent boundary layers."
Applied mathematics and mechanics, vol. 15,
ACADEMIC PRESS, pp 93.
- <1-9> NEWMAN J.:
"Electochemical systems."
PRENTICE-HALL, 1973.

- <1-10>HUGHES, GAYLORD:
"Basic equations of engineering science."
Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill Company, 1964.
- <1-11>WRANGLER G., NILSSON O.:
"Mass transfer under forced laminar and turbulent convection
at horizontal plane plate electrodes."
Electrochimica Acta, vol. 7, pp 121-137, 1962.
- <1-12>ACRIVOS A.:
"Solution of the laminar boundary layer energy equation at
high PRANDTL numbers."
The Physics of fluids, vol. 3, pp 657-658, 1960.
- <1-13>PARRISH W.R., NEWMAN J.:
"Current distribution on a plane electrode below the limiting current."
J. Electrochem. Soc.: Electrochemical science, vol. 116, n° 2,
pp 169-172, february 1969.
- <1-14>WANG H.M., CHEN S.F., O'KEEFE T.J., DEGREGZ M., WINAND R.:
"Evaluation of mass transport in copper and zinc
electro-deposition using tracer methods."
Journal of Applied Electrochemistry, vol. 19, pp 174- 182, 1989.
- <1-15>DEGREZ M., WINAND R.:
"Contribution à la mise au point de la méthode de mesure des densités
de courant limite de diffusion par co-déposition d'un traceur.
Cas particulier du cuivre."
METALLURGIE XIX, 1/2, pp 21-28, 1979.
- <1-16>COLE A.F.W., GORDON A.R.:
Journal Phys. Chem., vol. 40, pp 733, 1936.
- <1-17>WINAND R.:
"High current density electrocrystallization."
Proceedings of the International Conference on Zinc and Zinc Alloy
Coated Steel Sheet (GALVATECH), 1989, Tokyo,
The Iron and Steel Institute of Japan.
- <1-18>NEWMAN J.:
"Engineering design of electrochemical systems."
Industrial and Engineering Chemistry, vol. 60, n°4, pp 12-27, april 1968.
- <1-19>IBL N.:

- "Optimization of copper refining."
Electrochimica Acta, vol. 22, pp 465-477, 1977.
- <1-20> PICKETT D.J., ONG K.L.:
"The influence of hydrodynamic and mass transfer entrance effects on the operation of a parallel plate electrolytic cell."
Electrochimica Acta, vol. 19, pp 875-882, 1974.
- <1-21> YAKHOT V.:
"REYNOLDS number scaling of turbulent diffusivity in wall flows."
Phys. Fluids, vol. 31, n°4, pp 709-710, april 1988.
- <2-1> KIM J., MOIN P. and MOSER R.:
"Turbulence statistics in fully developed channel flow at low REYNOLDS number."
J. Fluid Mech., vol. 177, pp 133-166, 1987.
- <2-2> DANG K., DESCHAMPS V.:
"Simulations numériques d'écoulements turbulents de canal plan."
AGARD, Paper reprinted from conference proceedings n° 438, 1988.
- <2-3> PINELLI A., BENOCCI C.:
"Large eddy simulation of a fully turbulent plane channel flow."
Technical Note 171, V.K.I., 1989.
- <2-4> HORIUTI K.:
"Numerical simulation of turbulent channel flow at low and high REYNOLDS numbers."
Proc. 2nd Int. Symp. on Transport Phenomena in turbulent flows.
Tokyo, Oct 25-29, 1987.
- <2-5> CLARK J.A.:
"A study of incompressible turbulent boundary layers in channel flow."
J. of Basic Engineering ASME, vol. 90, pp 455-468, 1968.
- <2-6> COMTE-BELLOT G.:
"Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles."
Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'air, n°419, 1965.
- <2-7> EL TELBANY M.M.M., REYNOLDS A.J.:
"Velocity distributions in plane turbulent channel flows."
J. of Fluid Mech., vol. 100, n°1, pp 1-29, 1980.
- <2-8> EL TELBANY M.M.M., REYNOLDS A.J.:
"Turbulence in plane channel flows."

- J. of Fluid Mech., vol. 111, pp 283-318, 1981.
- <2-9> EL TELBANY M.M.M., REYNOLDS A.J.:
 "The structure of turbulent plane COUETTE flow."
 J. of Fluid Engineering ASME, vol. 104, pp 367-372, 1982.
- <2-10> EL TELBANY M.M.M.:
 "Generalized turbulent channel flow."
 Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy
 in the Mechanical Engineering Department, Brunel University.
- <2-11> LAUFER J.:
 "Some recent measurements in a two-dimensional turbulent channel."
 J. of Aeronautical Science, vol. 17, n°5, pp 277-287, 1950.
- <2-12> LAUFER J.:
 "Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel."
 NACA Report n°1053, 1951.
- <2-13> LEUTHEUSSER H.J., CHU V.H.:
 "Experiments on plane COUETTE flow."
 Journal of Hydraulics Division, vol. 97 HY9, pp 1269- 1284, 1971.
- <2-14> REICHARDT H.O.:
 "Über die geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen
 turbulenten Couettestromung."
 Z Angew Math Mech, pp s26-s29, 1956.
- <2-15> REICHARDT H.O.:
 "Gesetzmassigkeiten der geradlinigen turbulenten Couettestromung."
 Mitteilungen aus dem, MAX PLANCK Institut für Stromungsforschung,
 and der Aerodynamischen Versuchsanstalt, Goettingen, n°22, 1959.
- <2-16> ROBERTSON J.M., JOHNSON F.:
 "Turbulence structure in plane COUETTE flow."
 J. of Engineering Mech Division, vol. 96 EM6, pp 1171-1182, 1970.
- <2-17> CHAMPAGNE F.H., HARRIS V.G., CORRSIN S.:
 "Experiments on nearly homogeneous shear flow."
 J. Fluid Mech., vol. 41, pp 81, 1970.
- <2-18> HUEY L.J., WILLIAMSON J.W.:
 "Plane turbulent COUETTE flow with zero net flow."
 J. of Applied Mechanics ASME, pp 885-890, 1974.

- <2-19>SPALDING D.B.:
 "Monograph on turbulent boundary layer."
 Tech Rept n° TWF/TN/33, Imperial College Mech, Engng Dept, 1967.
- <2-20>ROTTA J.C.:
 "Statistische theorie nichthomogener turbulenz."
 Zeitsh, Fur Physik, vol 129, pp 547-572, 1951.
- <2-21>TENNEKES H., LUMLEY J.L.:
 "A first course in turbulence."
 MIT press cambridge MASSACHUSETTS, 1976.
- <2-22>JONES W.P.:
 "Turbulence models for computational fluid dynamics."
 Lecture Notes, Imperial College of Science, Technology
 and Medecine, Lecture TM 5, 20-22 September 1989.
- <2-23>RODI W.:
 "On the equation governing the rate of turbulent energy dissipation."
 Tech Rept n° TM/TN/14, Imperial College Mech, Engng Dept.
- <2-24>HANJALIC K., LAUNDER B.E.:
 "A REYNOLDS stress model of turbulence and its
 applications to thin shear flows."
 J. Fluid. Mech., vol 52, n°4, pp 609-628, 1972.
- <2-25>CHIEN K.Y.:
 "Predictions of channel and boundary layer flows with a low REYNOLDS
 number turbulence model."
 AIAA Journal, vol 20, n°1, pp 33-38, 1982.
- <2-26>LAUNDER BE, SHARMA B.I.:
 "Application of the energie-dissipation model of turbulence to
 the calculation near a spinning disc."
 Letters in heat and mass transfer, vol 1, pp 131-138, 1974.
- <2-27>SO R.M.C., YOO G.J.:
 "On the modeling of low REYNOLDS number turbulence"
 NASA contractor report 3994 (1986).
- <2-28>SO R.M.C., YOO G.J.:
 "Low REYNOLDS number modeling of turbulent flows with
 and without wall transpiration."
 AIAA Journal, vol 25, n°12, pp 1556-1564, 1987.

- <2-29>JONES W.P., MUSONGE P.:
"Closure of the REYNOLDS-stress and scalar flux equation."
The Physics of fluids, vol 31, n°12, pp 3589-3604, 1988.
- <2-30>JONES W.P., PASCAU A.:
"Calculation of confined swirling flows with a second moment closure."
J. Fluids Engineering, vol. 111, pp 248-255, 1989.
- <2-31>GIBSON M.M., RODI W.:
"Simulation of free surface effects on turbulence with
a REYNOLDS stress model."
Journal of Hydraulic Research, vol. 27, n°2, pp 233-244, 1989.
- <2-32>LAUNDER B.E., REECE G.J. et RODI W.:
"Progress in the development of a REYNOLDS-stress turbulence closure"
J. Fluid. Mech., vol 68, pp 537-566, 1976.
- <2-33>HANJALIC K., LAUNDER B.E.:
"Contribution towards a REYNOLDS stress closure for
lows-REYNOLDS number turbulence"
J. Fluid. Mech., vol 74, n°4, pp 593-610, 1976.
- <2-34>GIBSON M.M., LAUNDER B.E.:
"Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer."
J. Fluid Mech., vol 86, part 3, pp 491-511, 1978.
- <2-35>SHIR C.C.:
"A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows
in the idealized planetary boundary layer."
Journal of Atmospheric Science, vol 30, pp 1327-1339, 1973.
- <2-36>LUMLEY J.L.:
"Pressure-strain correlation"
The Physics of Fluids, vol 18, pp 750, 1975.
- <2-37>DALY B.J., HARLOW F.H.:
"Transport equations in turbulence."
The Physics of Fluids, vol 13, n°11, pp 2634-2649, 1970.
- <2-38>WEINSTOCK J., BURK S.:
"Theoretical pressure-strain term, experimental comparison
and resistance to large anisotropy."
J. Fluid Mech., vol 154, pp 429, 1985.
- <2-39>CHOU P.Y.:

"On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation"
 Quart. Appl Math., vol 3, pp 38, 1945.

<2-40>TAVOULARIS S. et CORRSIN S.:

"Experiments in a nearly homogeneous shear flow with a uniform mean temperature gradient"
 J. Fluid. Mech., vol 104, pp 311-348, 1981.

<2-41>IRWIN H.P.A.:

"Measurements in a self-preserving plane wall-jet in a positive pressure gradient"
 J. Fluid. Mech., vol 61, p 33, 1973.

<2-42>BRADSHAW P.:

"The strategy of calculation methods for complex turbulent flows"
 Imperial College, Aero. Rep. n° 73-05, 1973.

<2-43>SHIR C.C.:

"A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows in the idealized planetary boundary layer."
 Journal of Atmospheric Science, vol 30, pp 1327-1339, 1973.

<2-44>MANSOUR N.N., KIM J., MOIN P.:

"REYNOLDS stress and dissipation rate budgets in a turbulent channel flow."
 J. Fluid Mech., vol 194, pp 15-44, 1988.

<2-45>FEIEREISEN W.J., SHIRANI E., FERZIGER J.H., REYNOLDS W.C.:

"Direct simulation of homogeneous turbulent shear flows on Illiac IV computer:
 Applications to compressible and incompressible modelling"
 Turbulent Shear Flows, vol 3, p 309, Springer 1982.
 (ed. L.J.S. BRADBURY, F.DURST, B.E. LAUNDER,
 F.W. SCHMIDT et J.H. WHITELAW)

<2-46>MOON J.L., KIM J.:

"The structure of turbulence in a simulated plane COUETTE flow"
 8th symposium on turbulent shear flows, Technical University of Munich,
 part 5-3, september 1991.

<2-47>NIKURADSE J.:

"Stromungsgesetze in rauhen rohren."
 Forsch. Arb. Ing. Wes. n°361 1933.

- <2-48>HOPF I.:
"Die Messung der hydraulischen Rauigkeit."
ZAMM 3, pp 329-339, 1923.
- <2-49>PRANDTL L., SCHLICHTING H.:
"Das widerstandsgesetz rauher platten."
Werft, Reederei, Hafen 1-4, 1934.
- <2-50>ROBERTSON J.M.:
"Turbulent flow in rough pipes."
Ind. and Engr. Chem. Fundamentals, vol. 7, pp 253, 1968.
- <2-51>VAN DRIEST E.:
"On turbulent flow near a wall."
J. Aero. Sci., vol. 23, pp 1007, 1956.
- <2-52>ROTTA J.:
"Turbulent boundary layers in incompressible flows."
Progress in Aero. Sci., vol. 2, pp 1, 1962.
- <2-53>HAN L.S.:
"Turbulent flow over rough surface."
Department of Mechanical Engineering,
The Ohio State University Columbus, Ohio 43210.
- <2-54>MOODY L.F.:
"Friction factors for pipe flow."
Trans. ASME, vol. 66, pp 671, 1984.
- <2-55>COLEBROOK C.F., WHITE C.M.:
"Experiments with fluid friction in roughened pipes."
Proc. Roy. Soc. of London, A161, pp 367, 1937.
- <4-1> JORDA M.:
"Comportement des tôles revêtues d'une couche de zinc allié."
Matériaux et techniques, Avril-Mai 1985.
- <4-2> STANISLAS M.:
Communication privée, I.M.F.L, 1987.
- <4-3> IDEL'CIK I.E.:
"Memento des pertes de charges."
Collection de la Direction des Etudes et Recherches
d'Electricité de France. Editions EYROLLES.

FIGURES

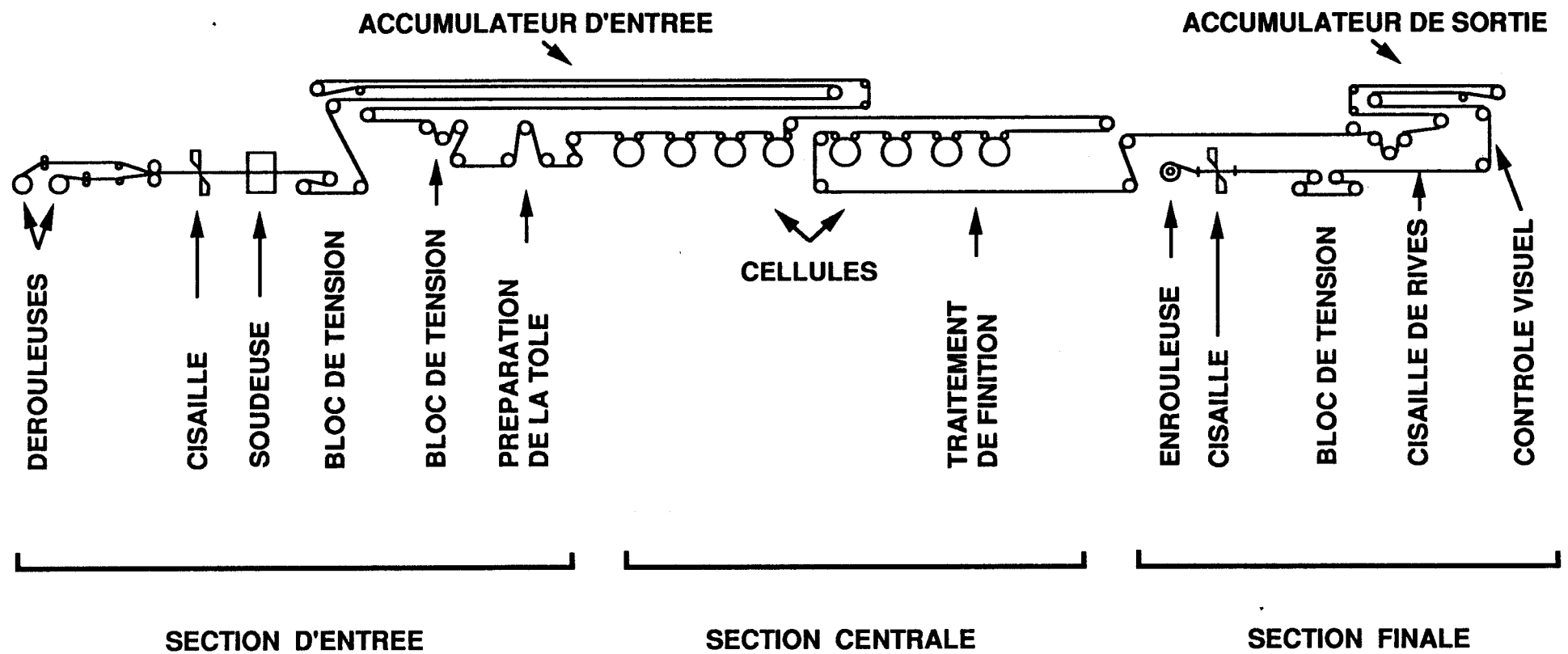


Figure 1-1: Schéma de la ligne d'électrozingage de la société BEAUTOR S.A.

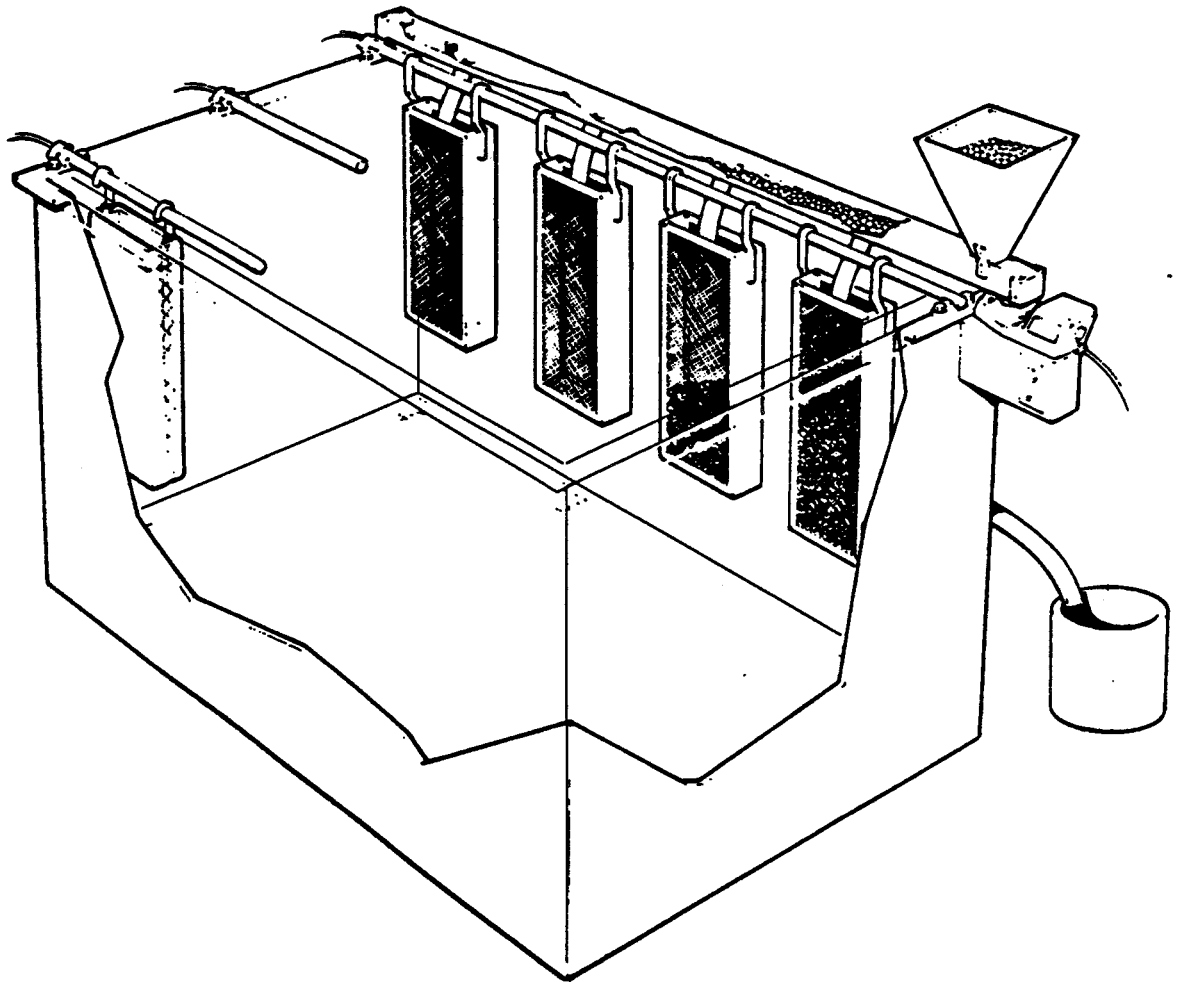
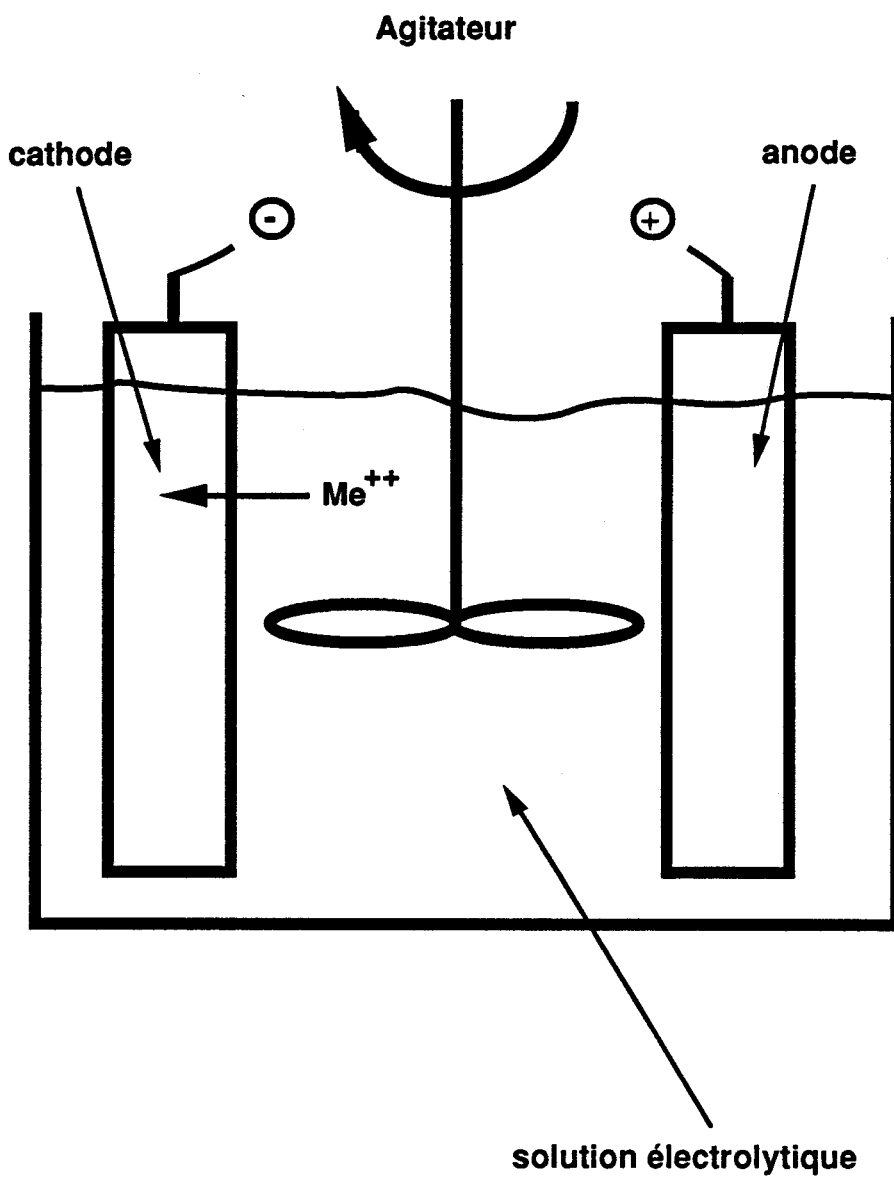


Figure 1-2 : Cellule d'électro-déposition à anodes solubles



Me^{++} : Métal à déposer

Figure 1-3: Cellule d'électro-déposition de type "bac".

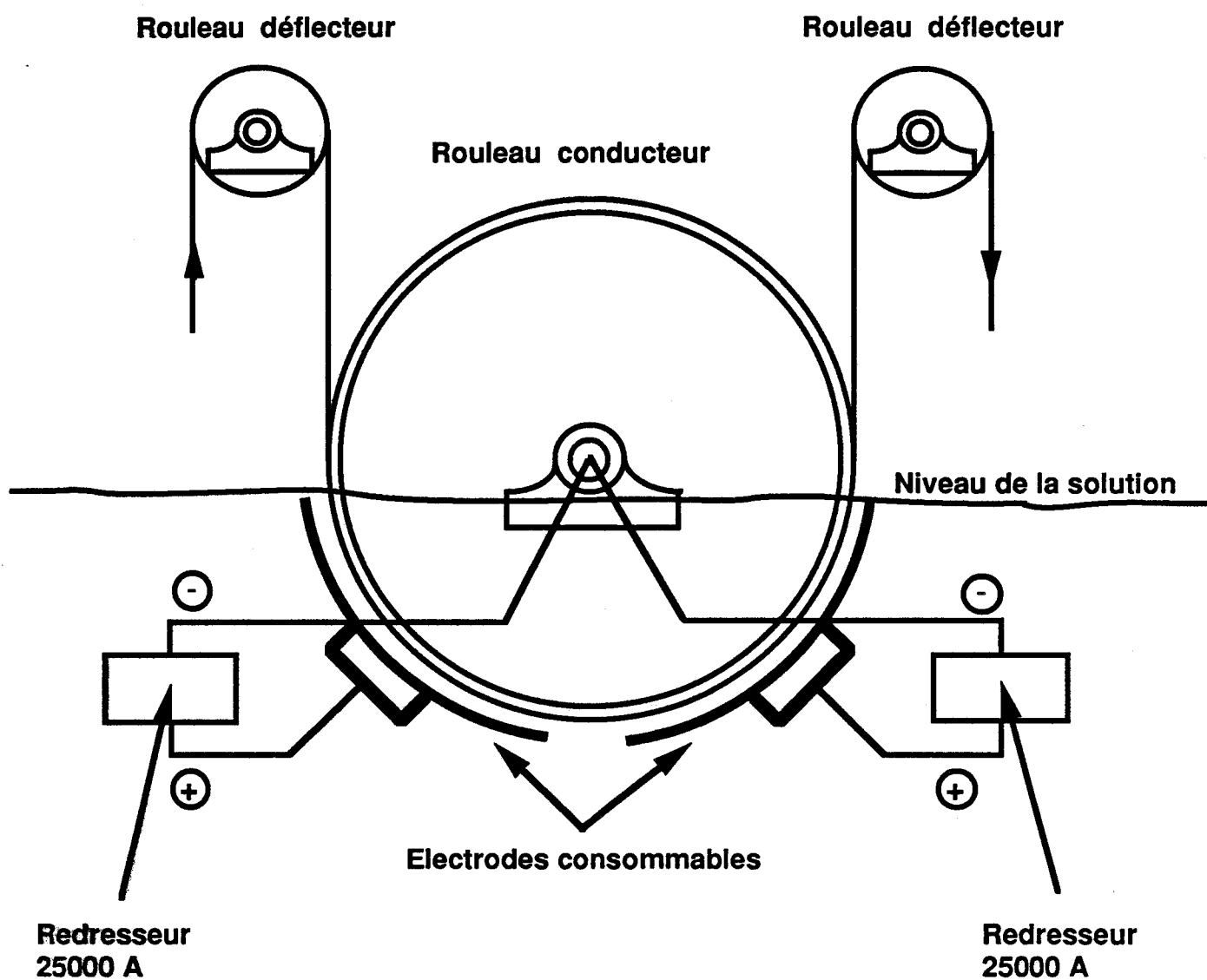


Figure 1-4 : Cellule d'électro-déposition à cathode mobile
(Extrait de Galvano-Organo-Traitements de Surface)

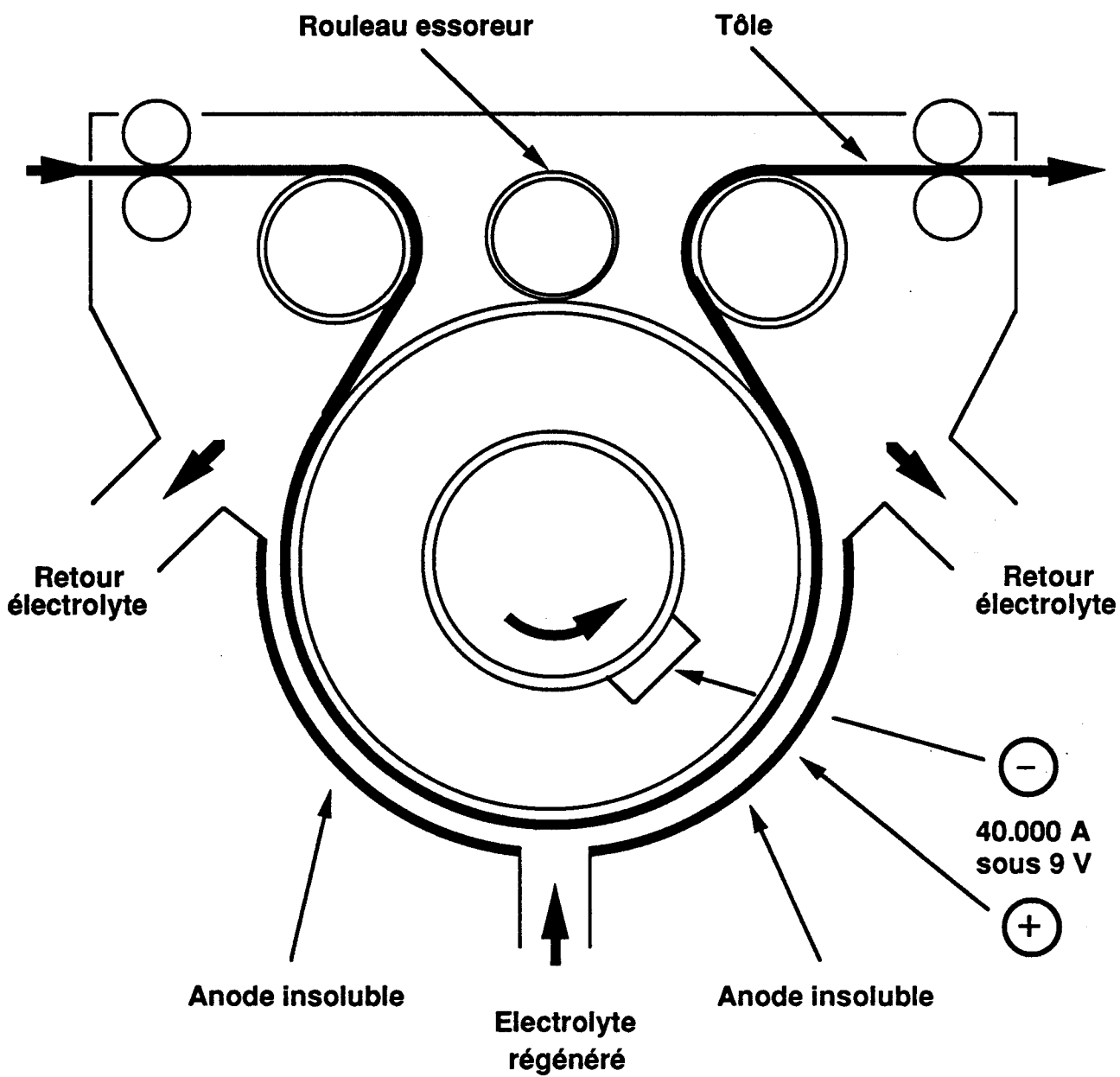


Figure 1-5 : Cellule d'électrozingage de type "radial-cell"

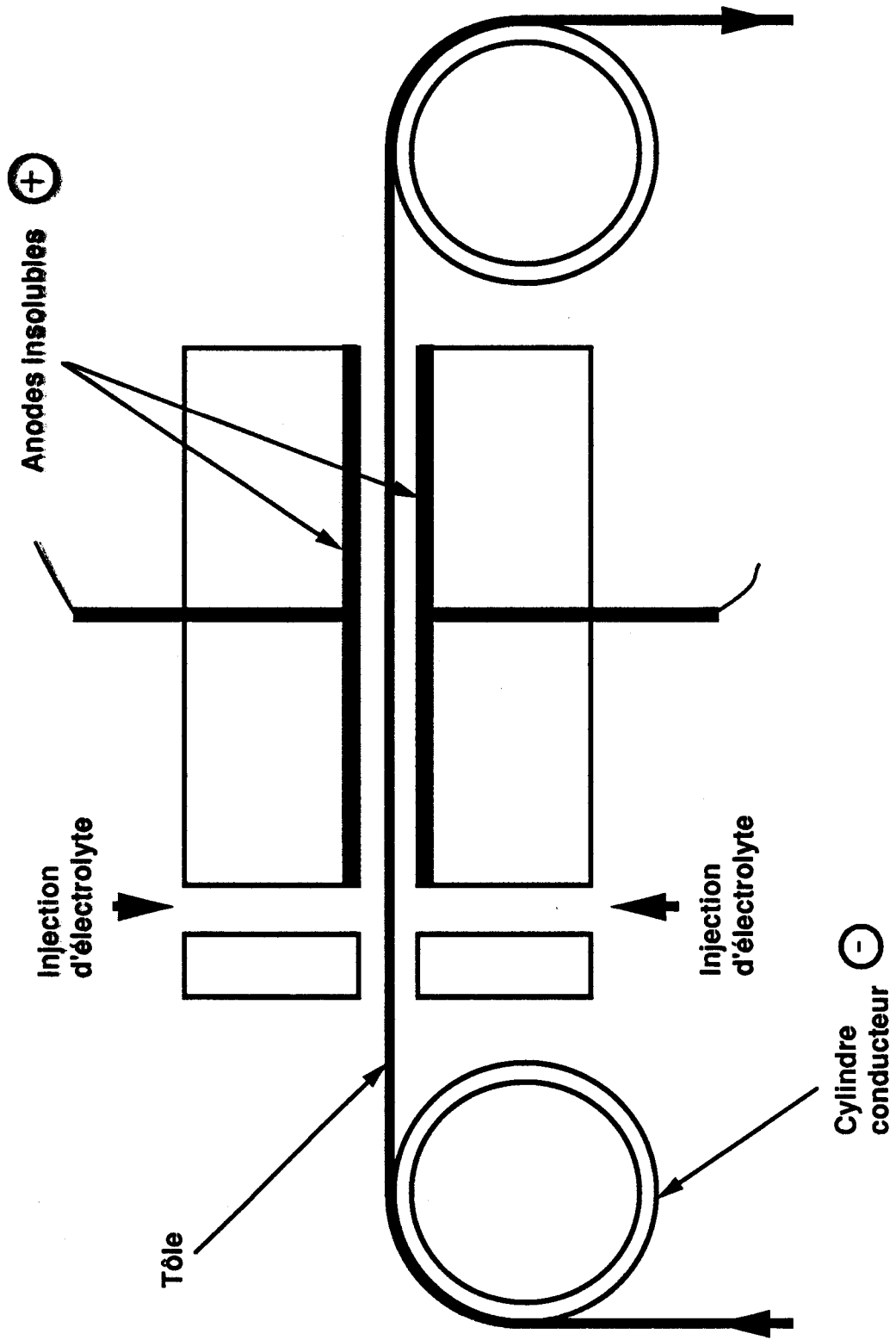


Figure 1-6 : Cellule d'électro-déposition horizontale.

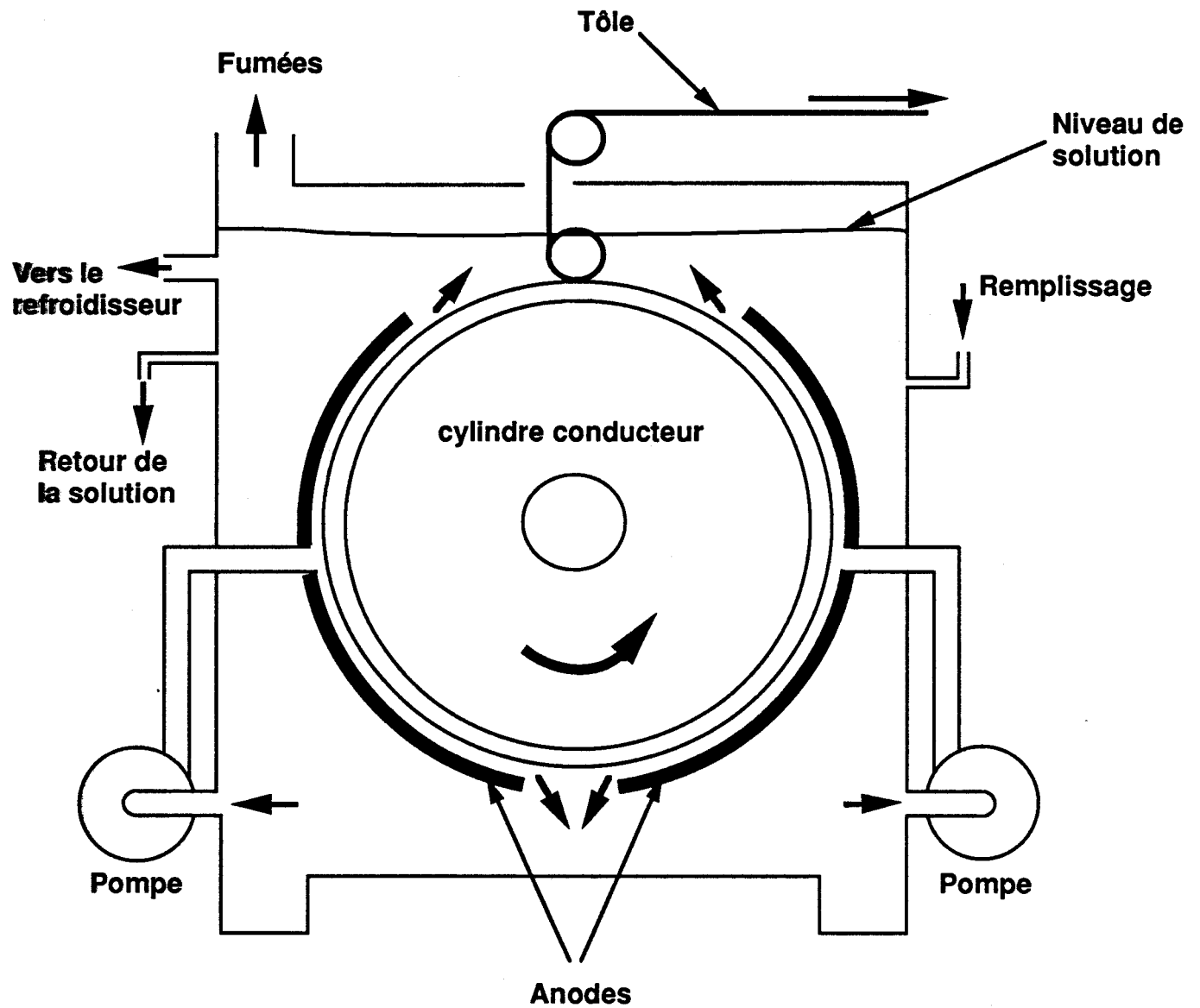


Figure 1-7 : Cellule à tambour rotatif pour l'électro-extraction d'un métal sous forme d'une bande continue. Extrait de la référence <1-1>.

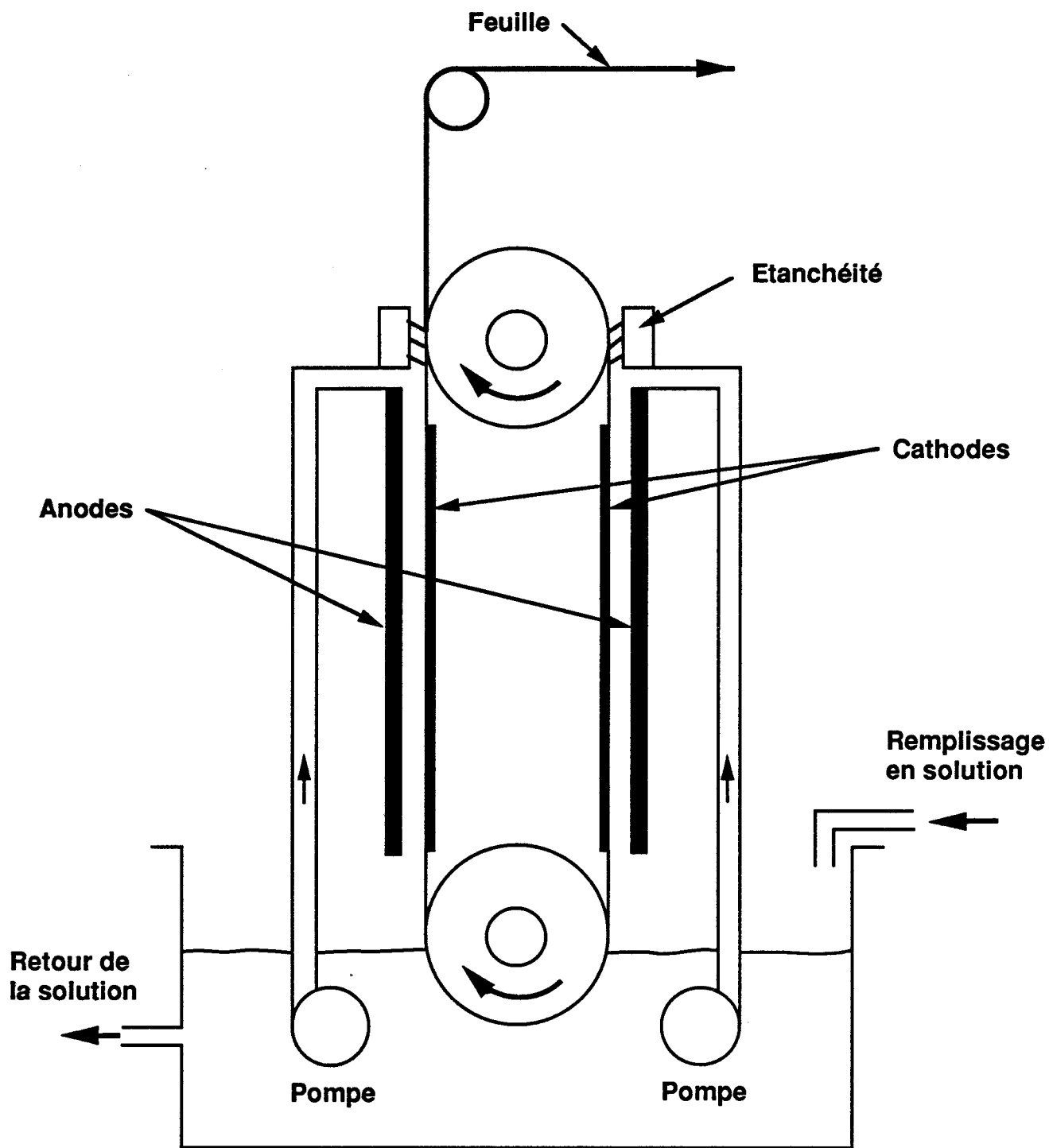
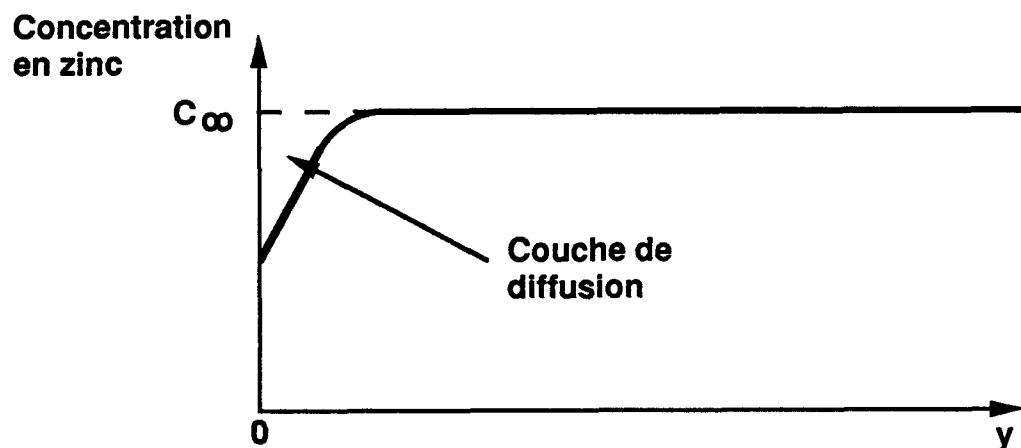
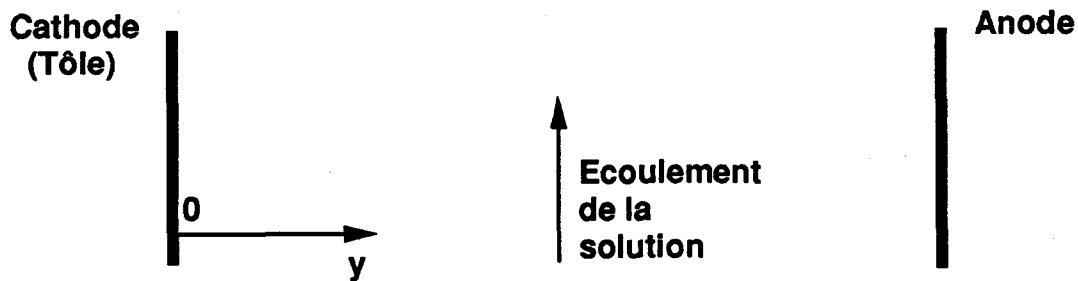
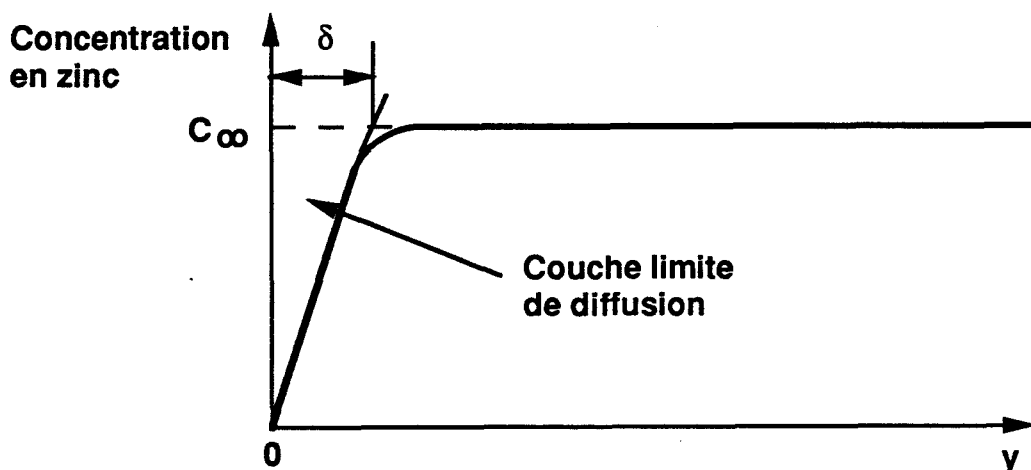


Figure 1-8 : Cellule à courroie mobile pour l'électro-extraction d'un métal sous la forme d'une bande continue. Extrait de la référence <1-1>.



a) Cas industriel



b) Cas de la densité de courant limite de diffusion

Figure 1-9 : Profil de contraction en métal au voisinage de la cathode

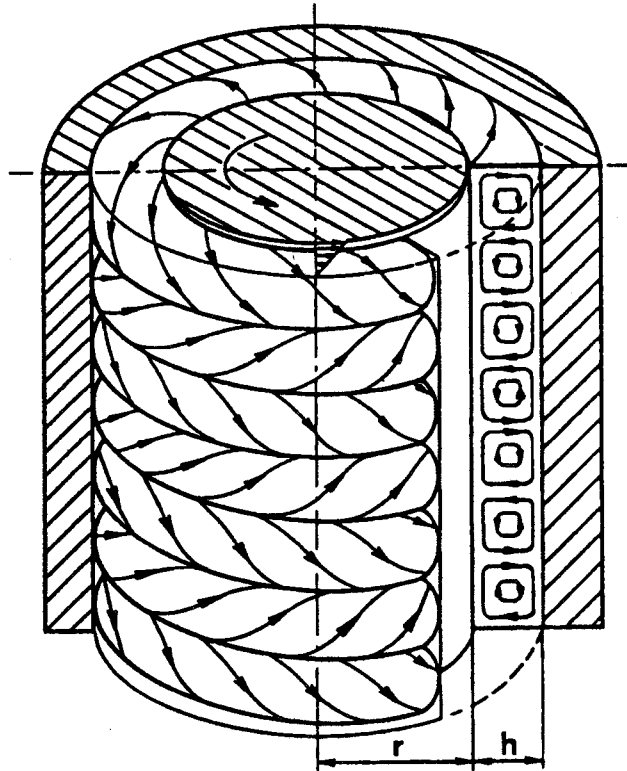


Figure 1-10a : Ecoulement laminaire avec tourbillons de DE TAYLOR.
 Extrait de la référence <1-4>.

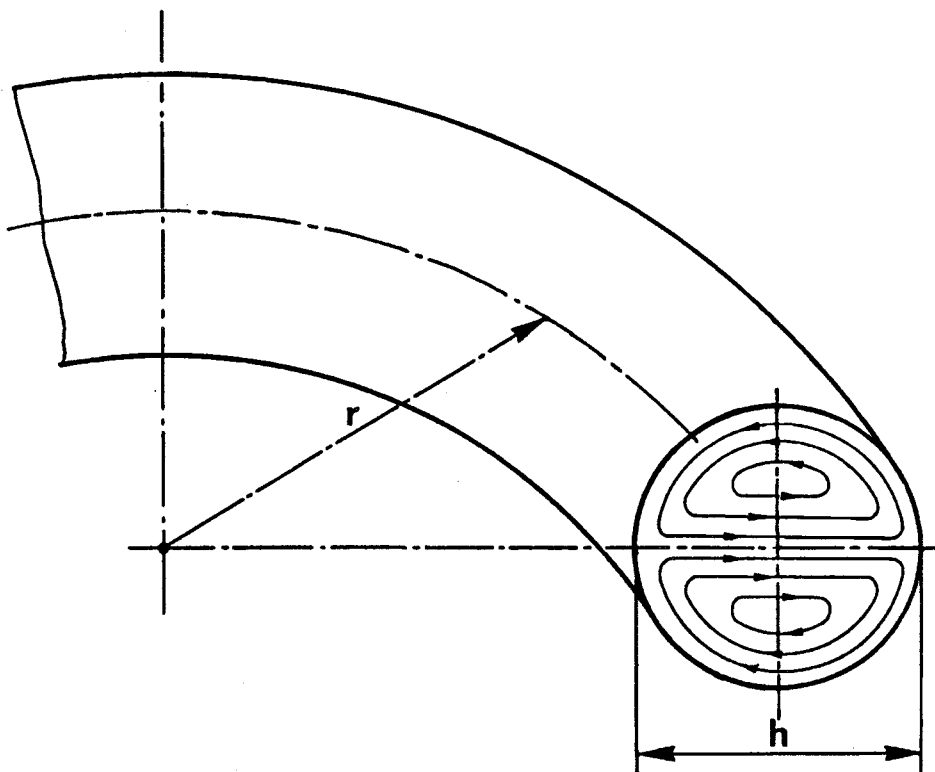
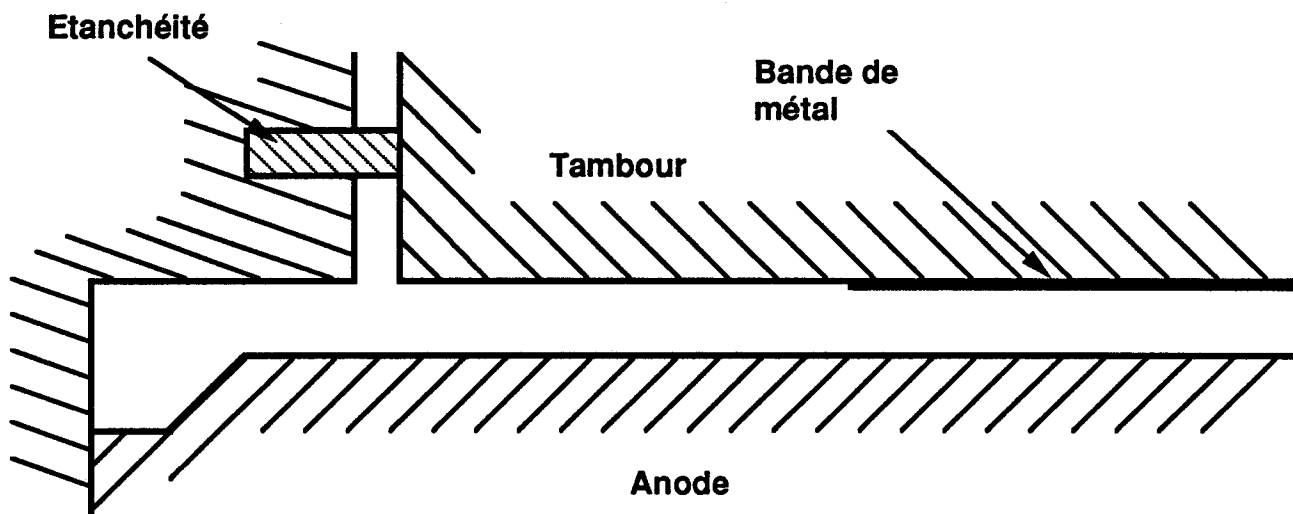
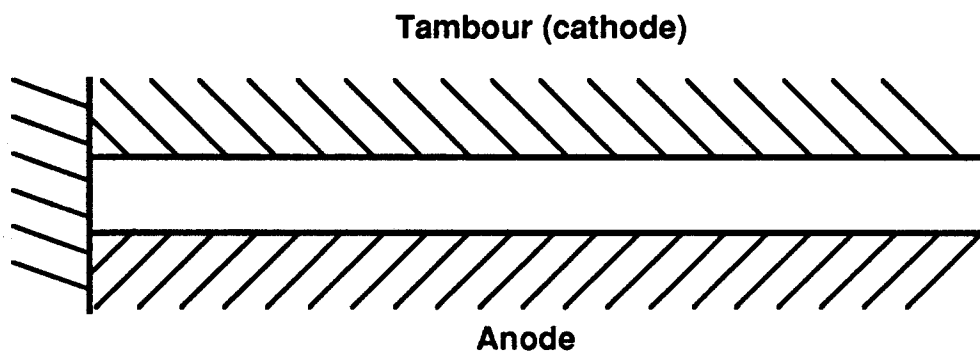


Figure 1-10b : Ecoulement laminaire avec tourbillons au sein d'un tube cintré

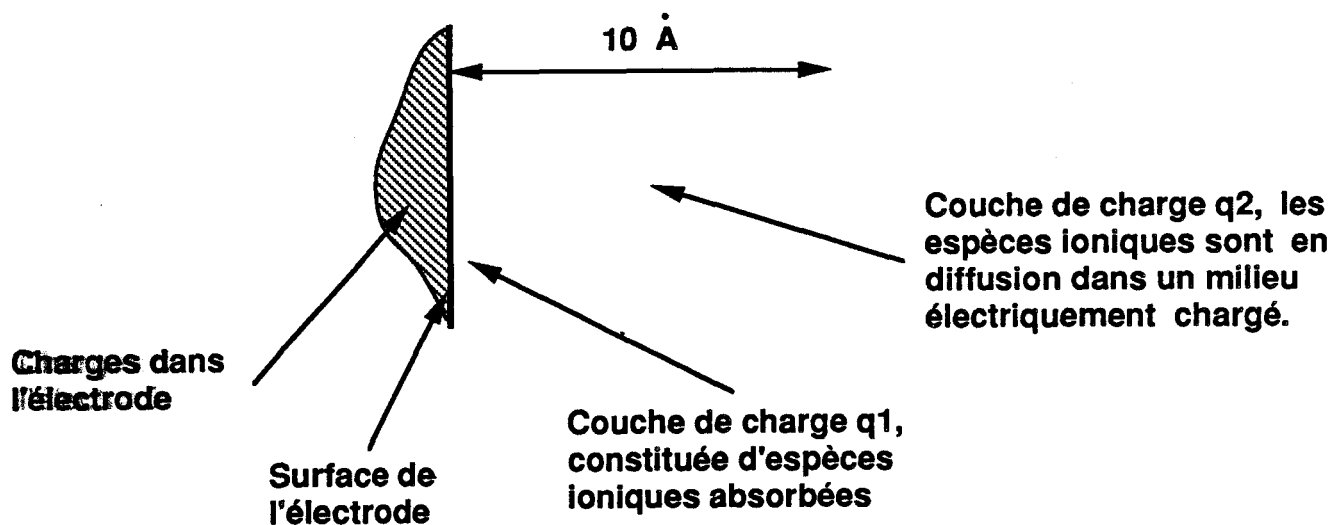


a) Section de passage d'une cellule de type "radial"

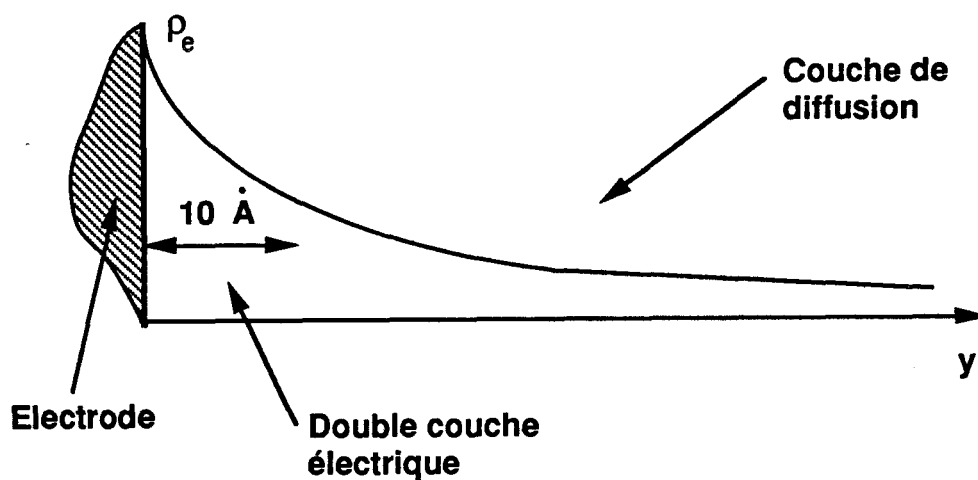


b) Simplification de la section de passage du canal fluide.

Figure 1-11 : Section de passage du canal fluide d'une cellule radiale.



a) Structure de la double couche électrique (extrait de la référence <1-9>)



b) Répartition de la densité de charges électriques au voisinage d'une électrode. (extrait de la référence <1-9>).

Figure 1-12 : Propriétés électrochimiques au voisinage immédiat de la cathode.

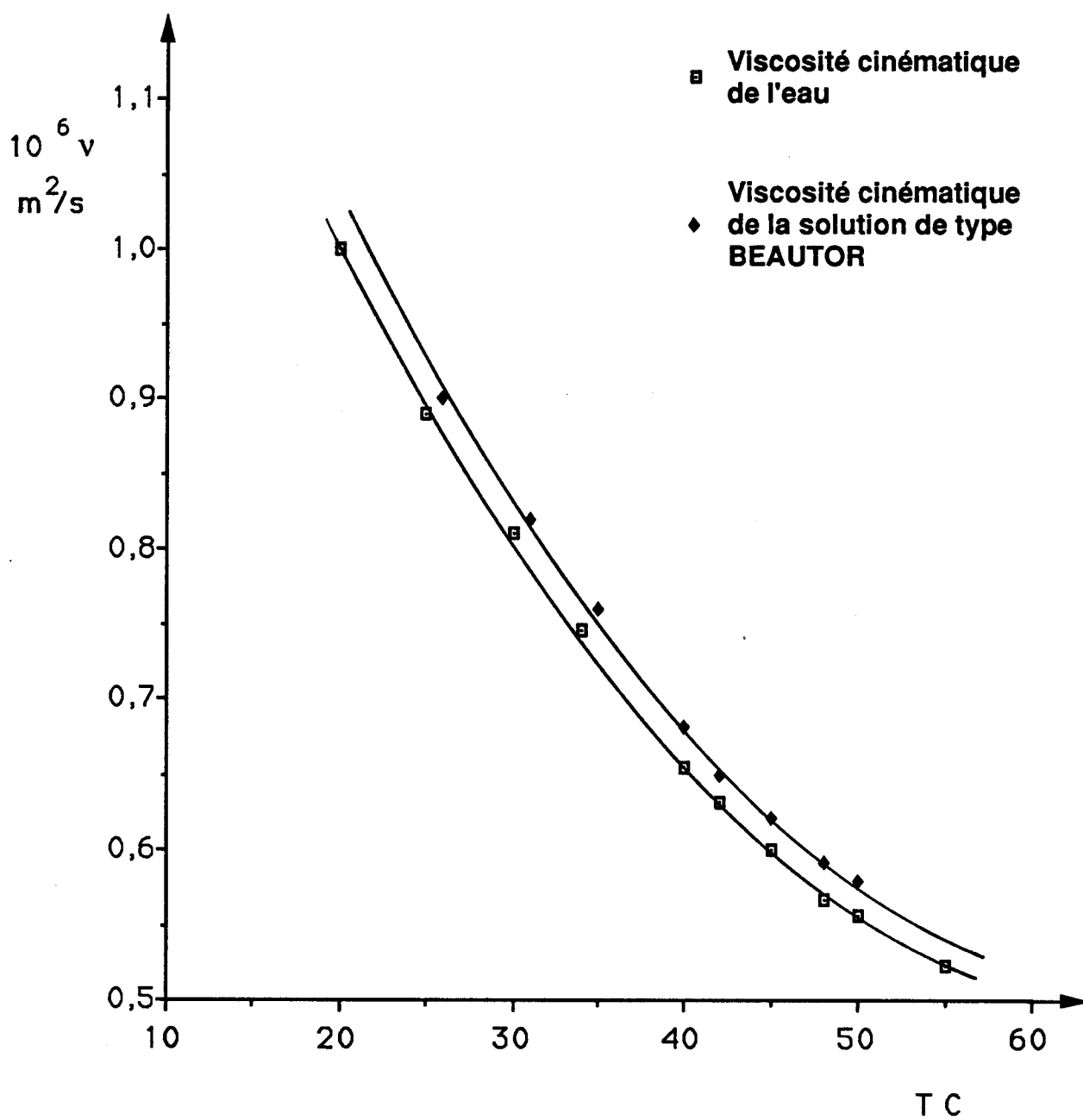


FIGURE 1-13 : Variation de la viscosité cinématique de la solution avec la température.

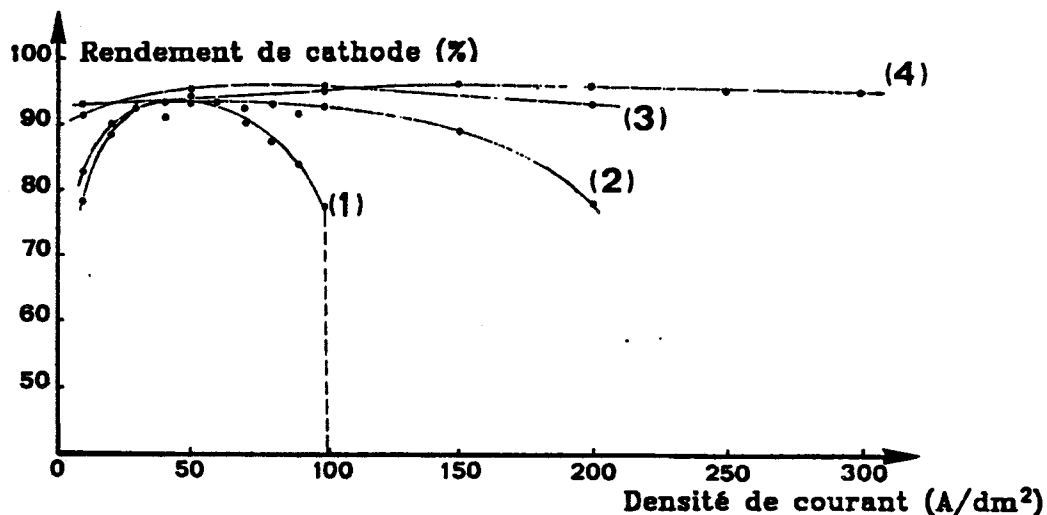
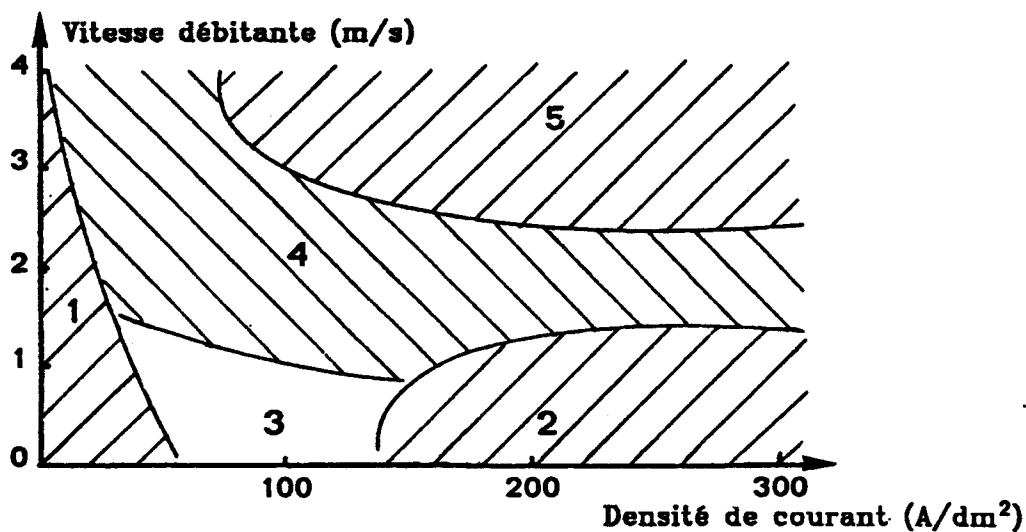


Figure 1-15a : Rendement cathodique en fonction de la densité de courant, pour différentes vitesses débitantes. ((1): 0,7 m/s; (2): 1,4 m/s; (3): 3 m/s; (4): 4 m/s). Extrait de la référence <1-3>.



- 1: Revêtement non uniforme
- 2: Revêtement blanc de mauvaise qualité
- 3: Revêtement uniforme très poreux
- 4: Revêtement homogène plutôt rugueux
- 5: Revêtement macroscopiquement uniforme

Figure 1-15b : Qualité macroscopique du revêtement de zinc en fonction de la densité de courant et de la vitesse débitante . Extrait de la référence <1-3>

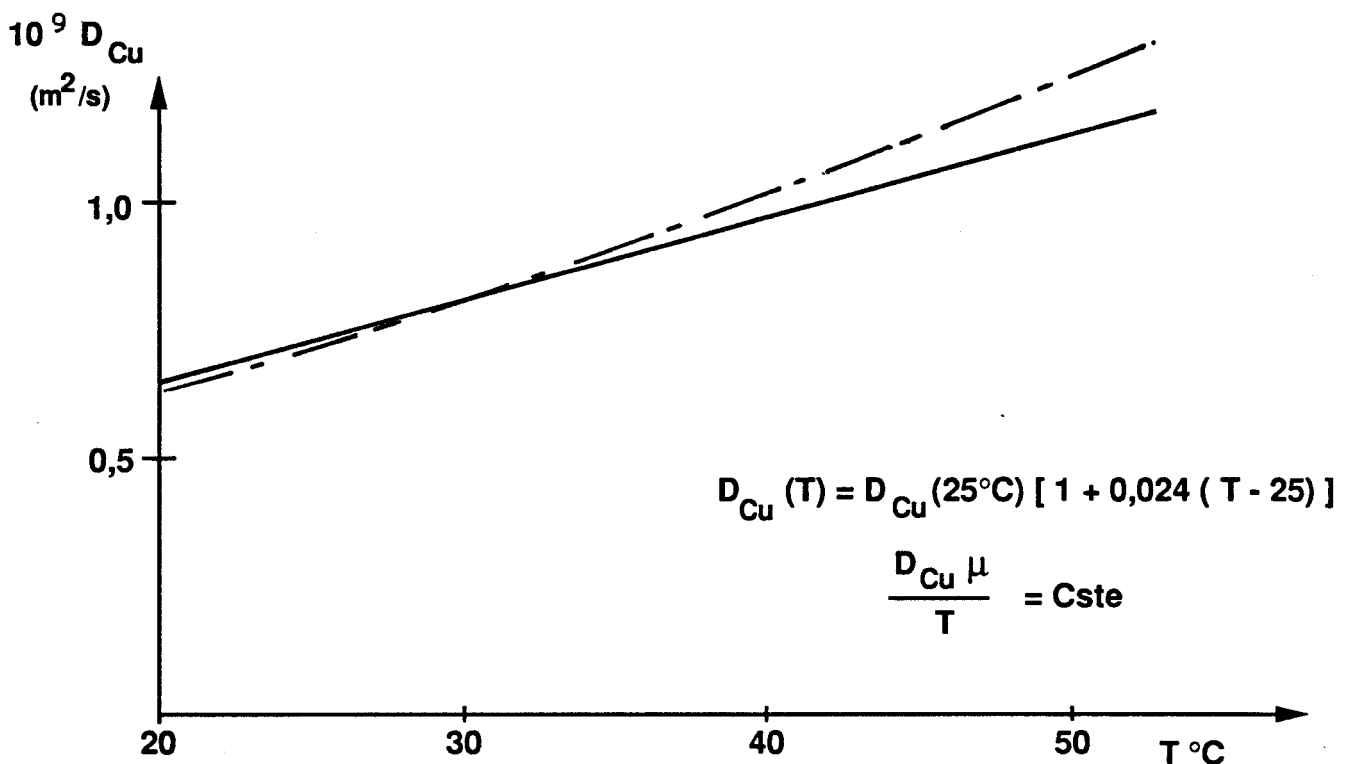
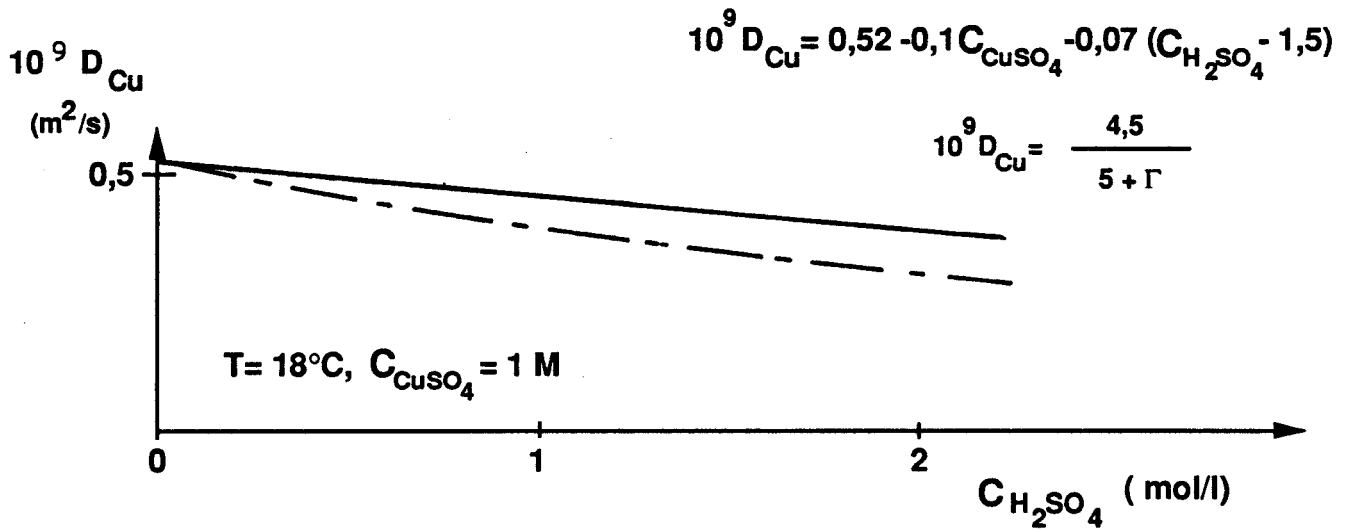
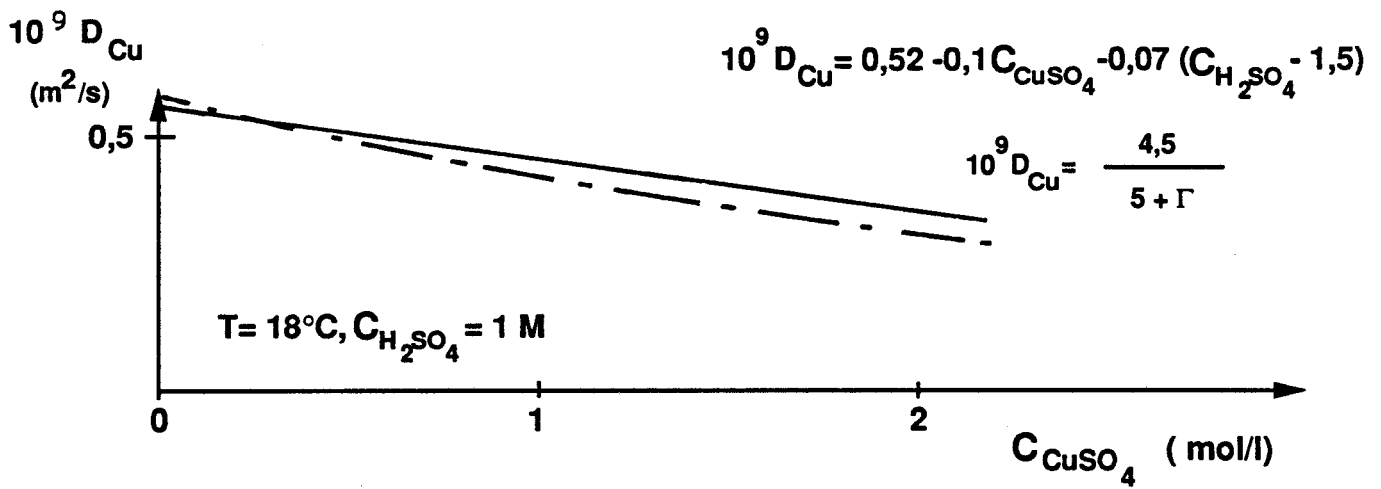
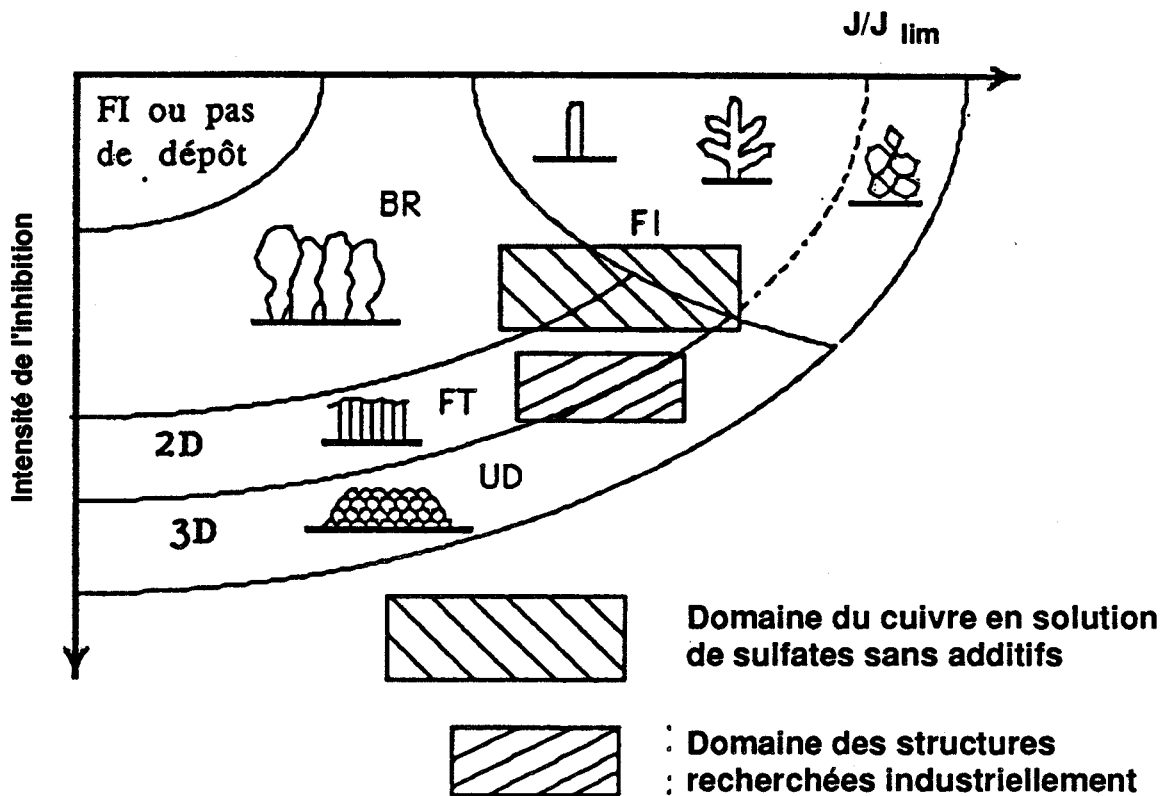


Figure 1-14 : Variation du coefficient de diffusion avec la température et la composition de la solution.



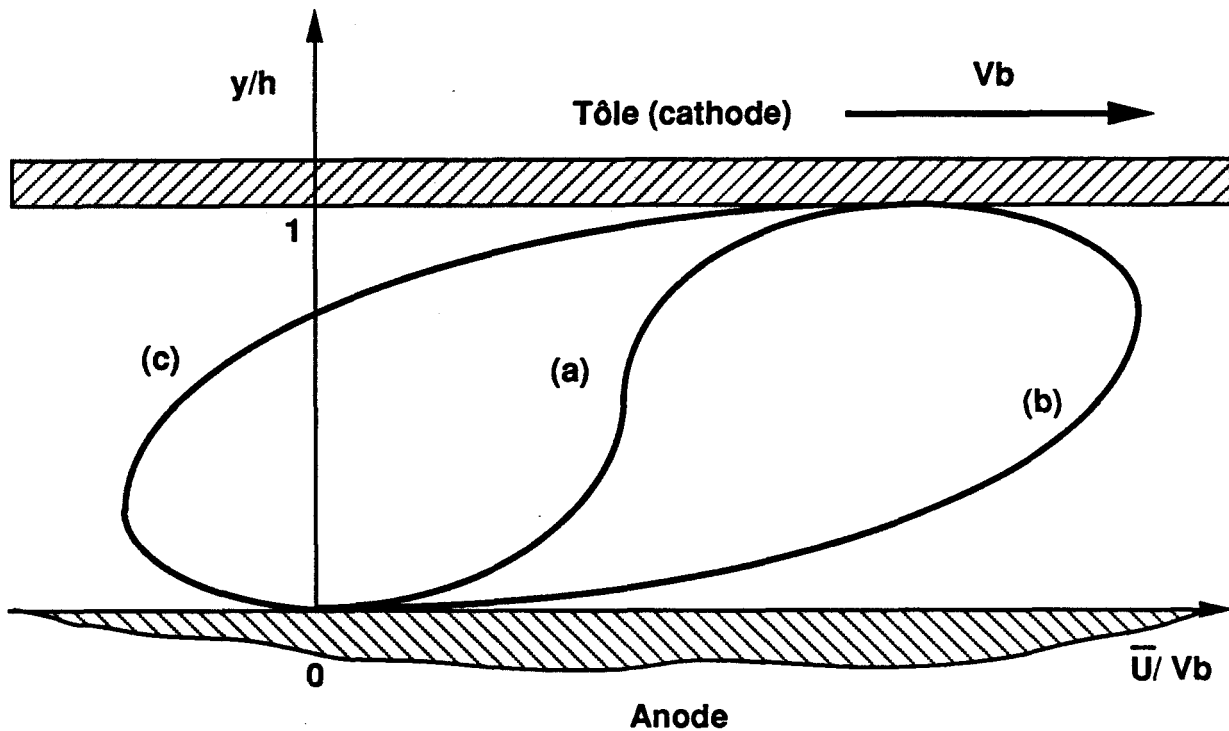
F.I. : Field oriented crystals type (dendrites ou poudre cristalline non adhérente)

B.R. : Basis reproduction type (dépôt cohérent; la taille des grains et la rugosité de surface augmentent avec l'épaisseur du dépôt)

F.T. : Field oriented texture type (dépôt cohérent; grains de petite taille, à peu près constants à travers tout le dépôt)

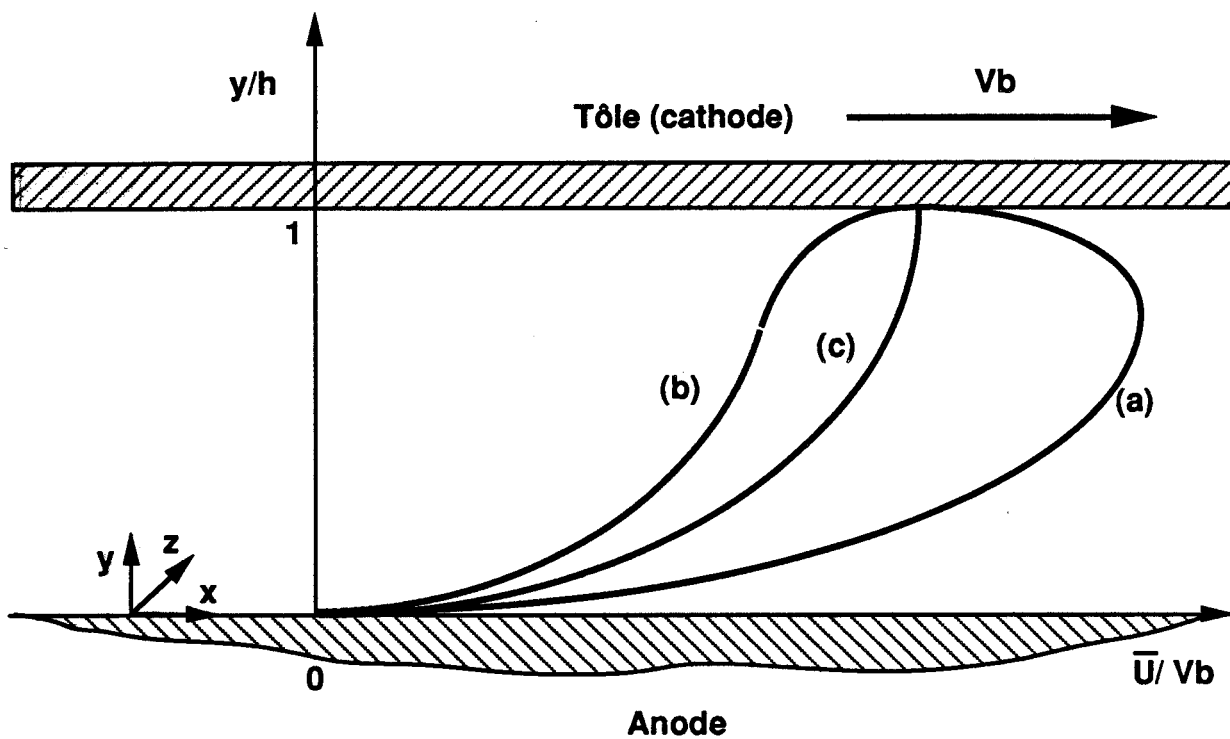
U.D. : Unoriented dispersed type (dépôt cohérent; grains de petite taille; différents cristaux à travers l'épaisseur du dépôt)

Figure 1-16 : Champs de stabilité des principales structures de dépôt. Extrait de la référence <1-17>.



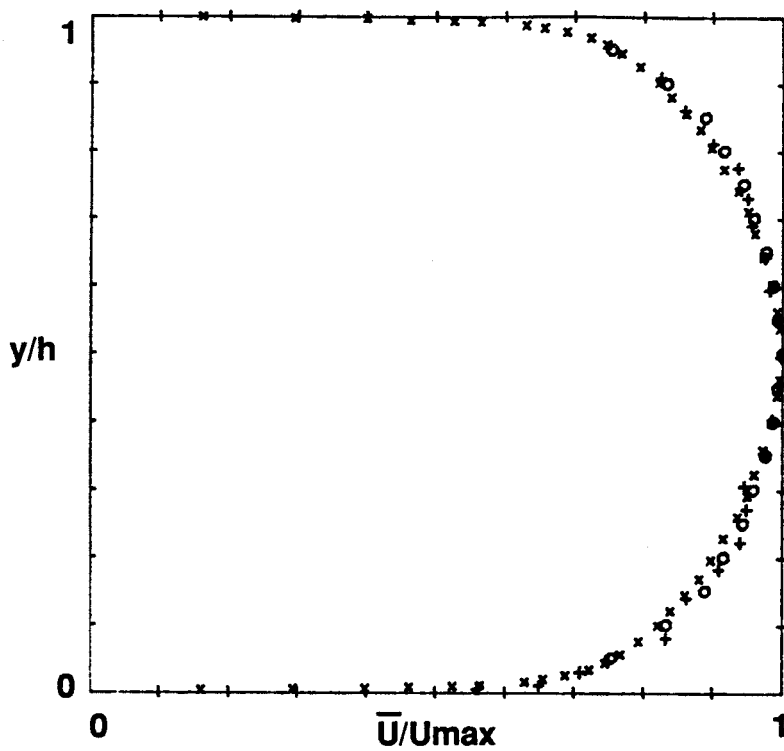
- (a) Gradient de pression nul
- (b) Gradient de pression favorable
- (c) Gradient de pression adverse

Figure 1-17 : Evolution du profil de vitesse en fonction du gradient de pression



- (a) Type POISEUILLE
- (b) Type COUETTE
- (c) Type intermédiaire

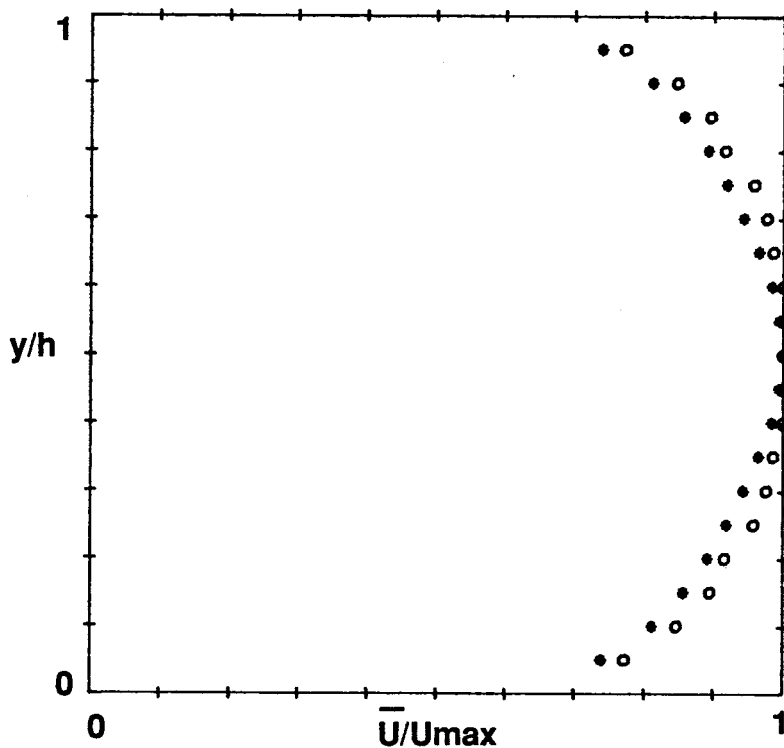
Figure 1-18 : Evolution du profil de vitesse moyenne en fonction de la vitesse débitante.



Remax = 71040 : EL TELBANY & REYNOLDS <2-7>

Remax = 61600 : LAUFER <2-11>

Remax = 64600 : HUSSAIN & REYNOLDS <1-6>



* Remax = 126000 : COMTE-BELLOT <2-6>

○ Remax = 123200 : LAUFER <2-11>

Figure 2-1 : Profils de vitesse moyenne pour les écoulements de POISEUILLE.

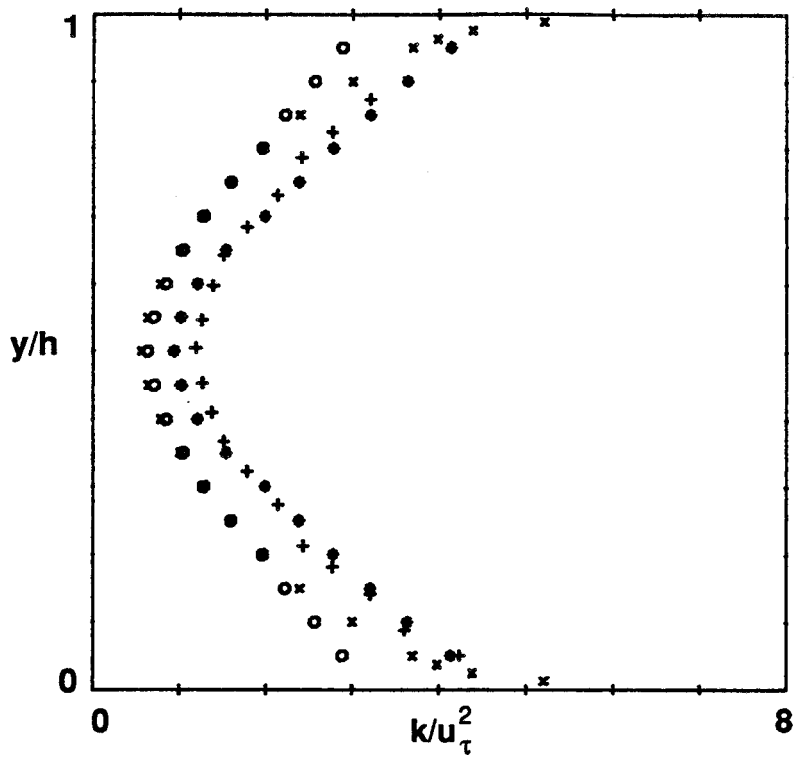


Figure 2-2a : Profils d'énergie turbulente pour les écoulements de POISEUILLE

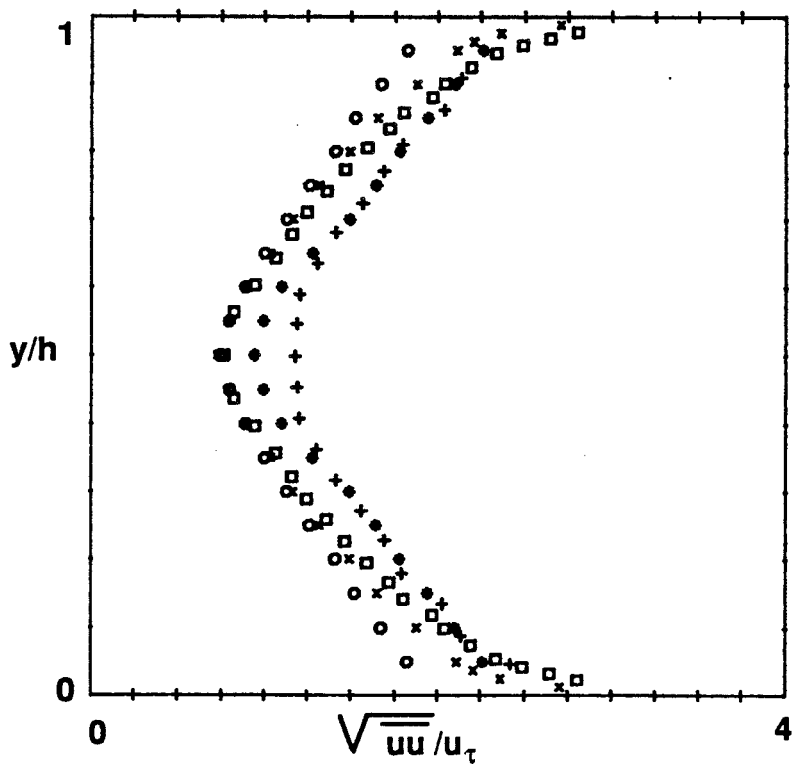


Figure 2-2b : Profils de \overline{uu} pour les écoulements de POISEUILLE

+ Remax = 71040 : EL TELBANY & REYNOLDS <2-7>

* Remax = 126000 : COMTE-BELLOT <2-6>

○ Remax = 61600 : LAUFER <2-11>

× Remax = 55200 : CLARK <2-5>

□ Remax = 64600 : HUSSAIN & REYNOLDS <1-6>

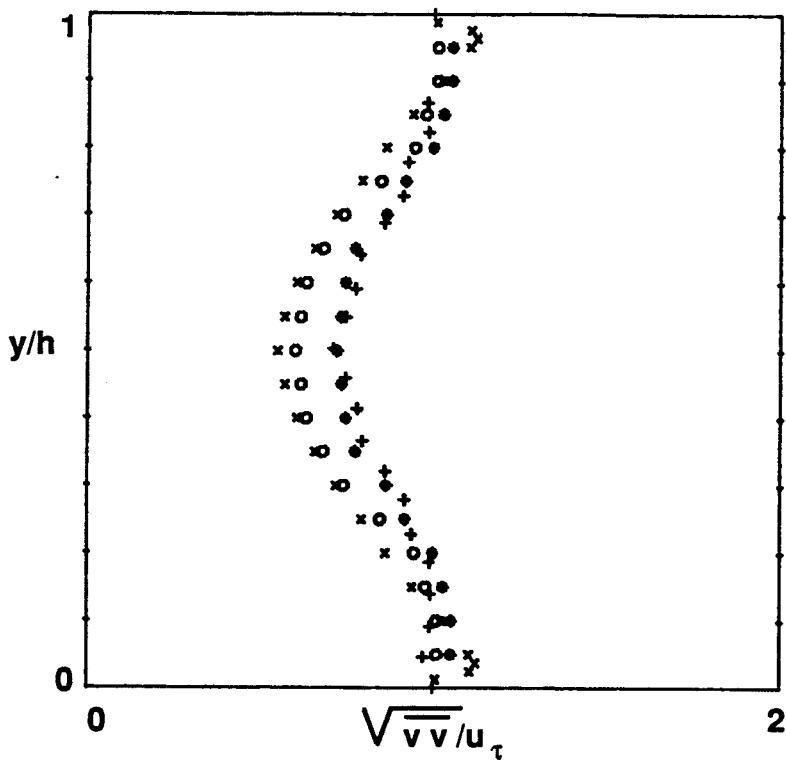


Figure 2-2c : Profils de $\sqrt{\overline{v v}}$ pour les écoulements de POISEUILLE

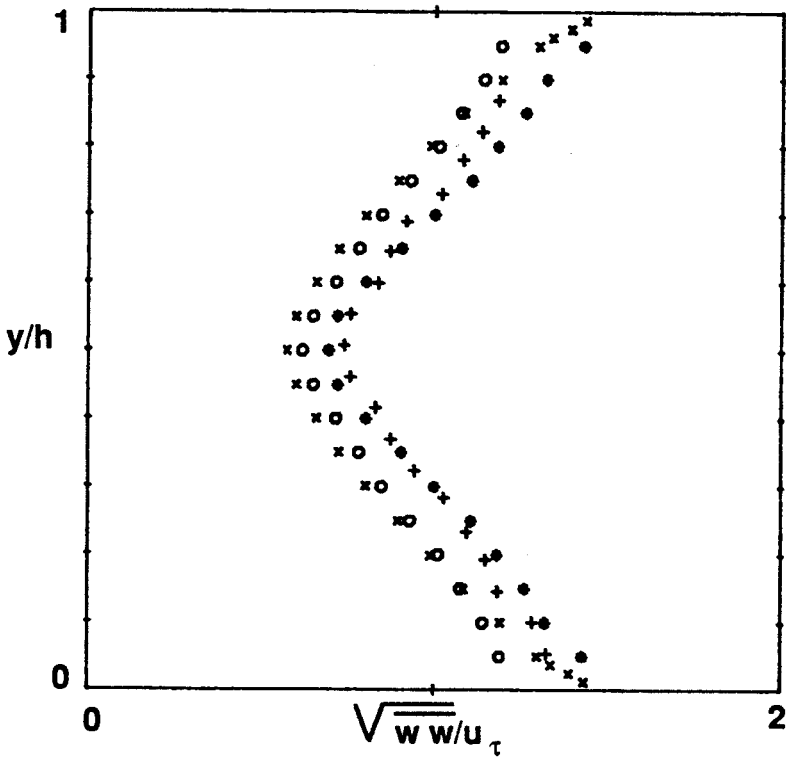


Figure 2-2d : Profils de $\sqrt{\overline{w w}}$ pour les écoulements de POISEUILLE

+ Remax = 71040 : EL TELBANY & REYNOLDS <2-7>
 ○ Remax = 61600 : LAUFER <2-11>

* Remax = 126000 : COMTE-BELLOT <2-6>
 × Remax = 55200 : CLARK <2-5>

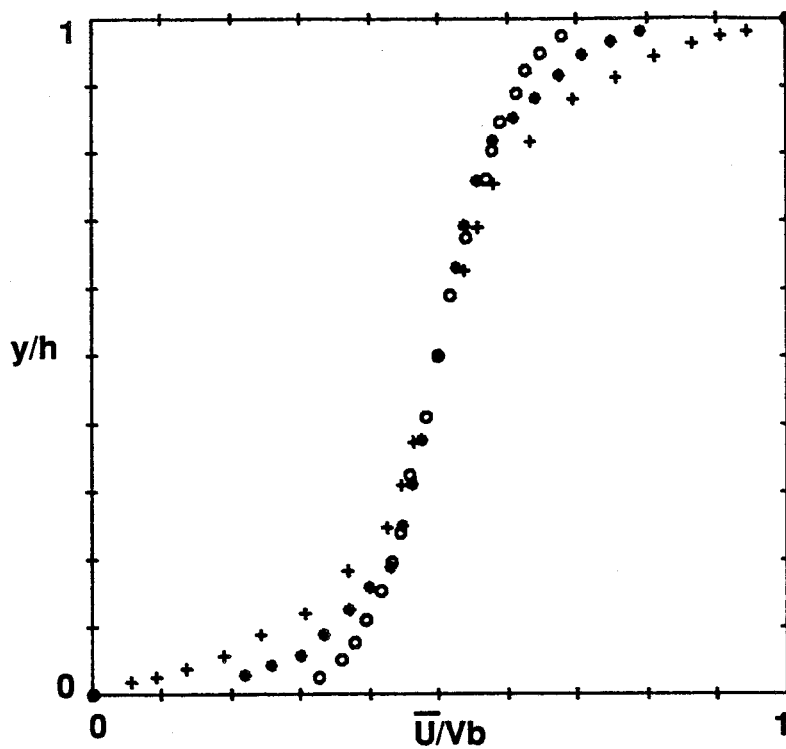


Figure 2-3a :

- + Reb = 5800 : REICHARDT <2-14>
- * Reb = 36000 : REICHARDT <2-14>
- o Reb = 68000 : REICHARDT <2-14>

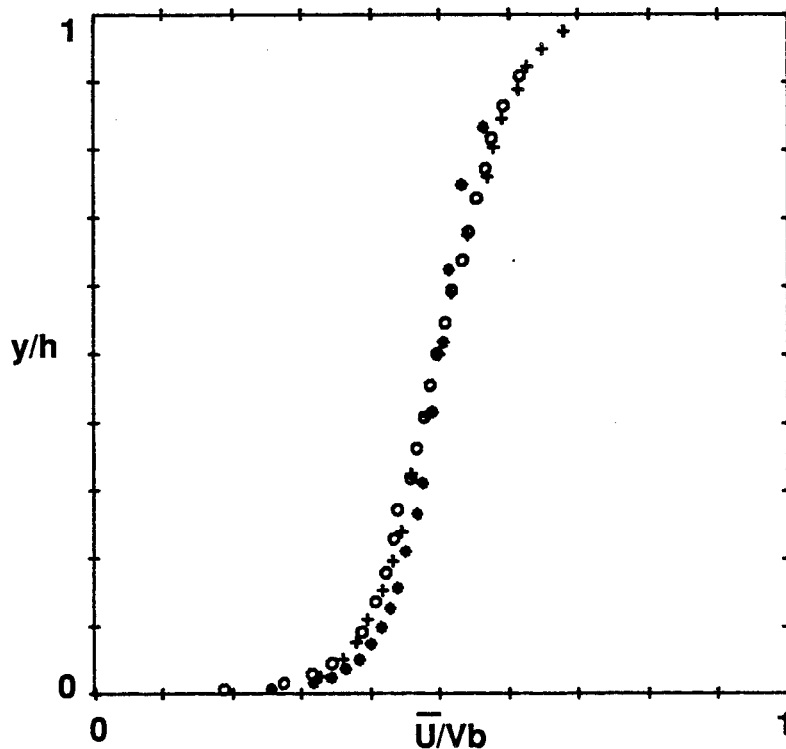
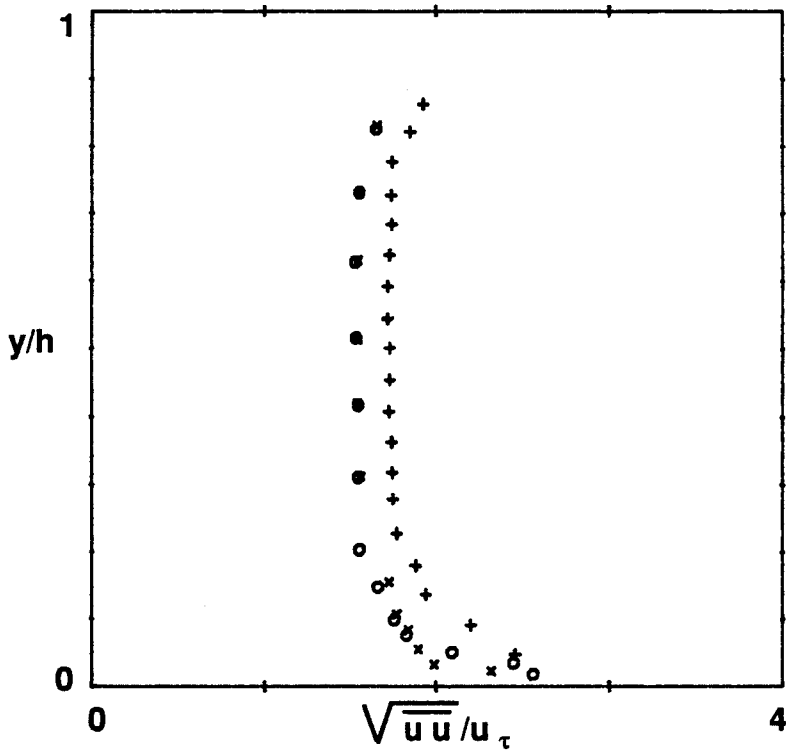


Figure 2-3b :

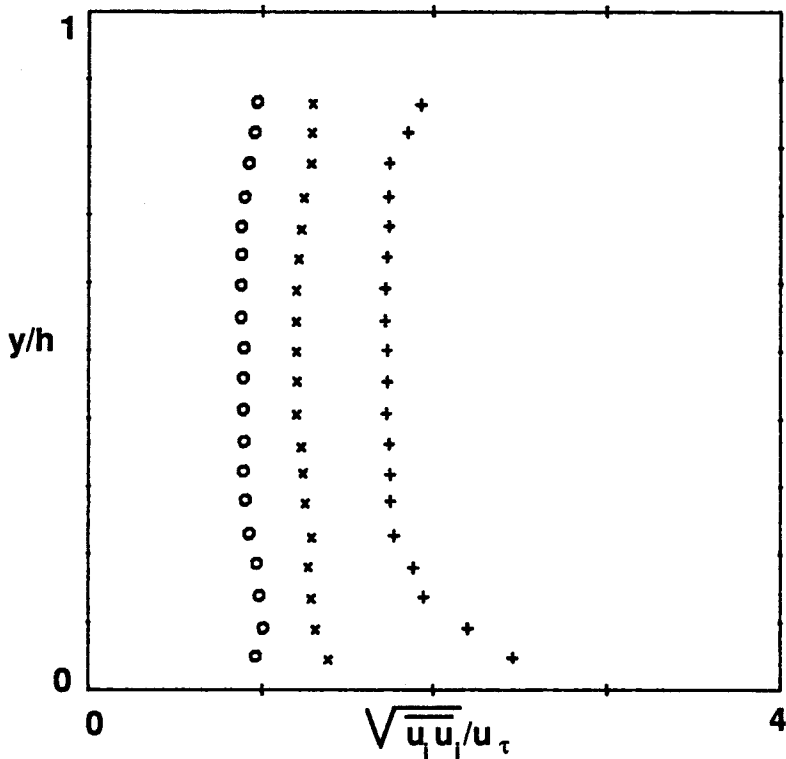
- + Reb = 68000 : REICHARDT <2-14>
- * Reb = 66000 : ROBERTSON & JOHNSON <2-16>
- o Reb = 57010 : EL TELBANY & REYNOLDS <2-7>

Figure 2-3 : Profils de vitesse moyenne pour les écoulements de COUETTE purs



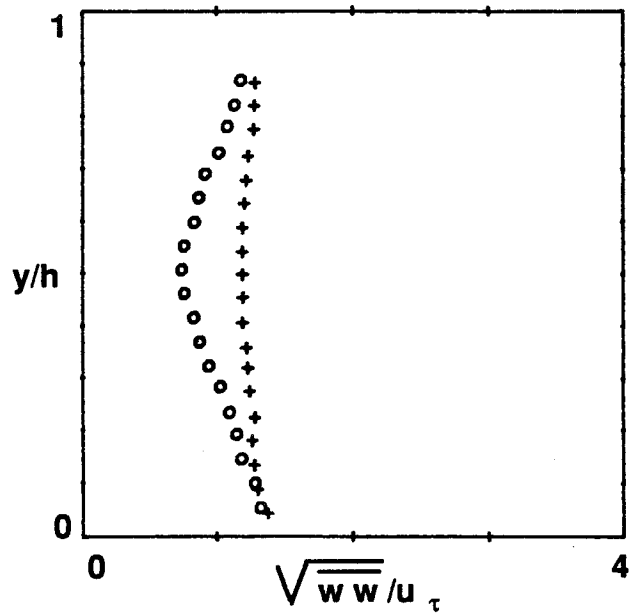
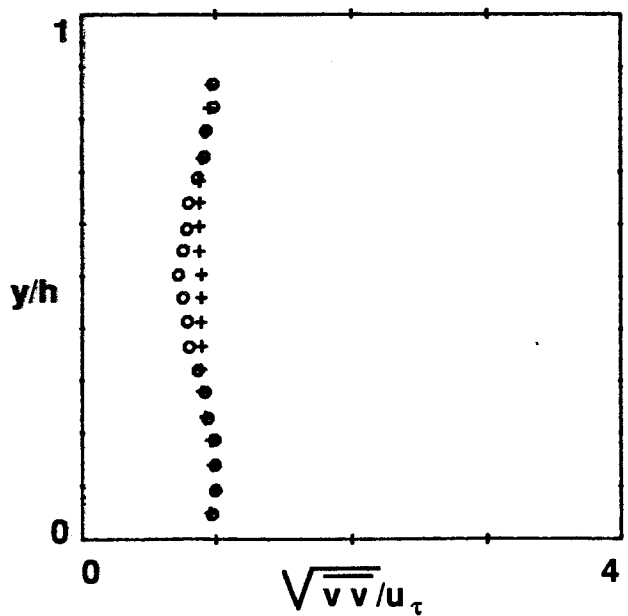
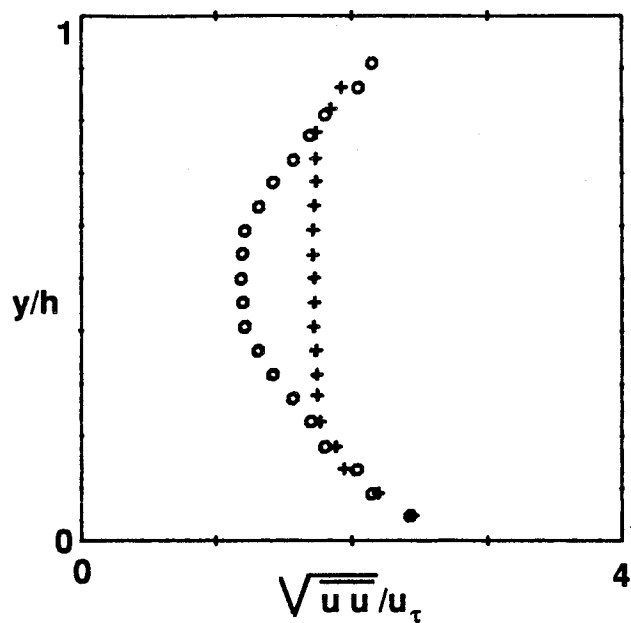
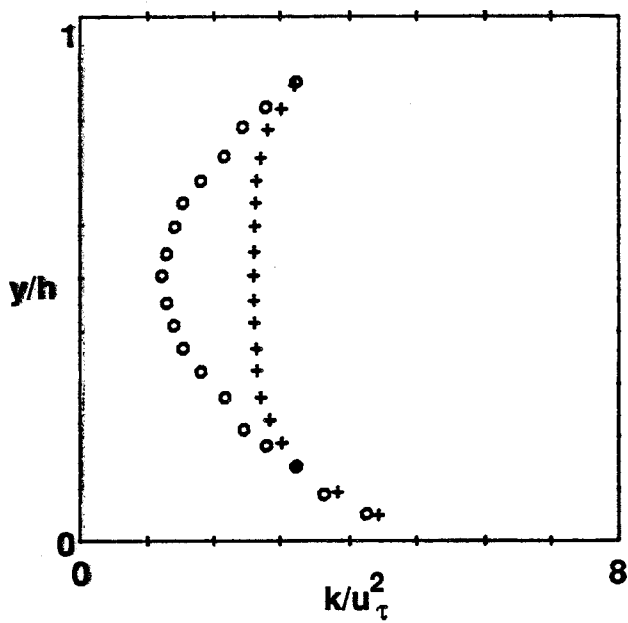
- + Reb = 57010 : EL TELBANY & REYNOLDS <2-7>
- o Reb = 28200 : ROBERTSON & JOHNSON <2-16>
- x Reb = 66000 : ROBERTSON & JOHNSON <2-16>

Figure 2-4a : Profil de $\overline{u u}$ pour les écoulements de COUETTE purs



- + $\sqrt{\overline{u u}} / u_\tau$
- o $\sqrt{\overline{v v}} / u_\tau$ Reb = 57010 : EL TELBANY & REYNOLDS <2-7>
- x $\sqrt{\overline{w w}} / u_\tau$

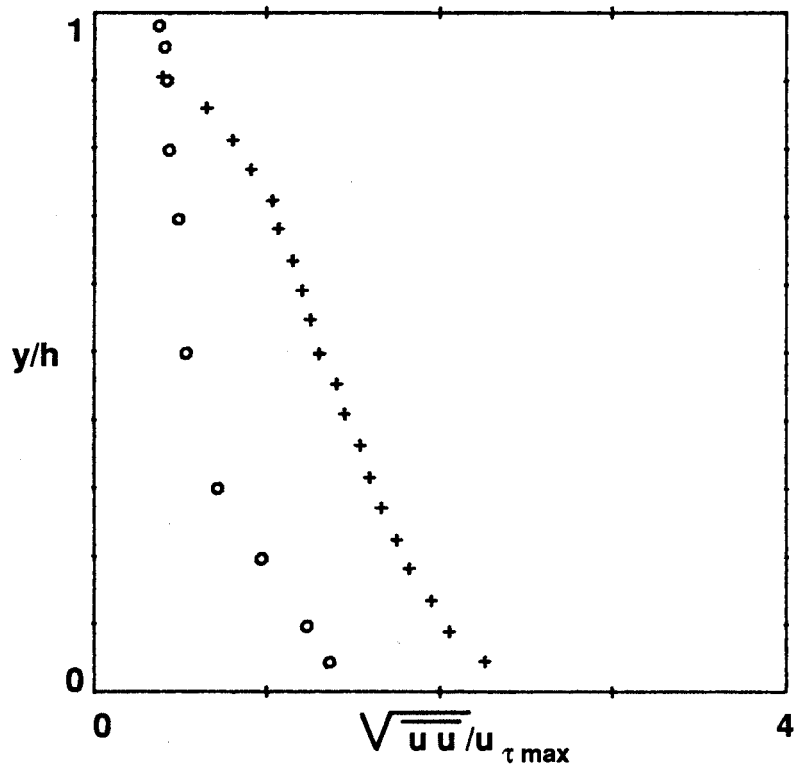
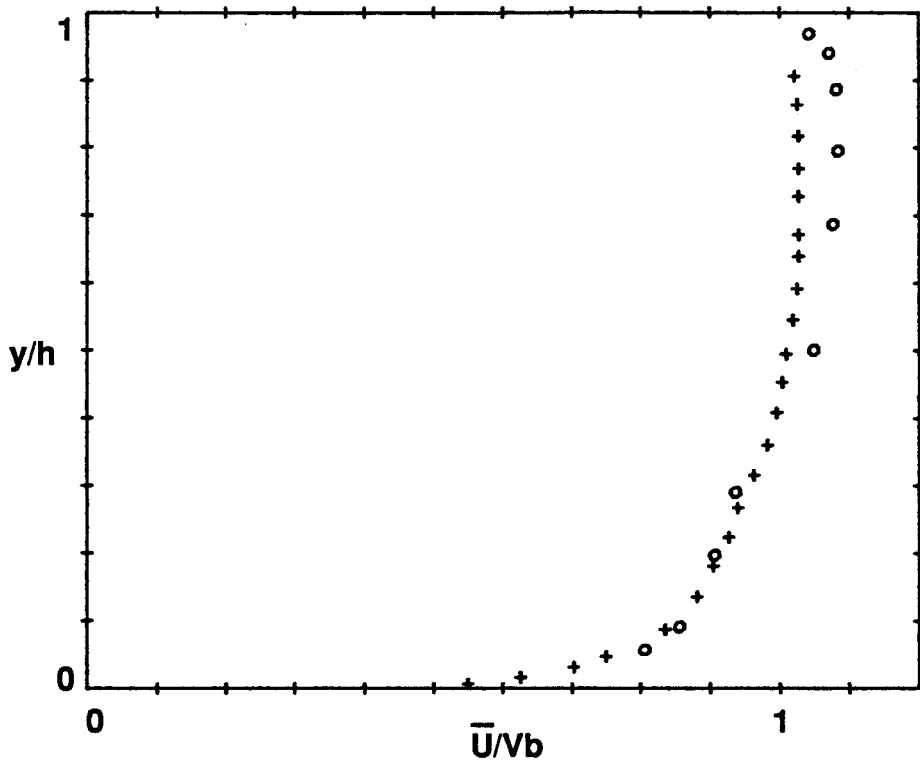
Figure 2-4b : Profils des corrélations normales pour les écoulements de COUETTE purs



+ $Re_b = 57010$: Ecoulement de COUETTE pur <2-7>

o $Re_{max} = 71040$: Ecoulement de POISEUILLE <2-7>

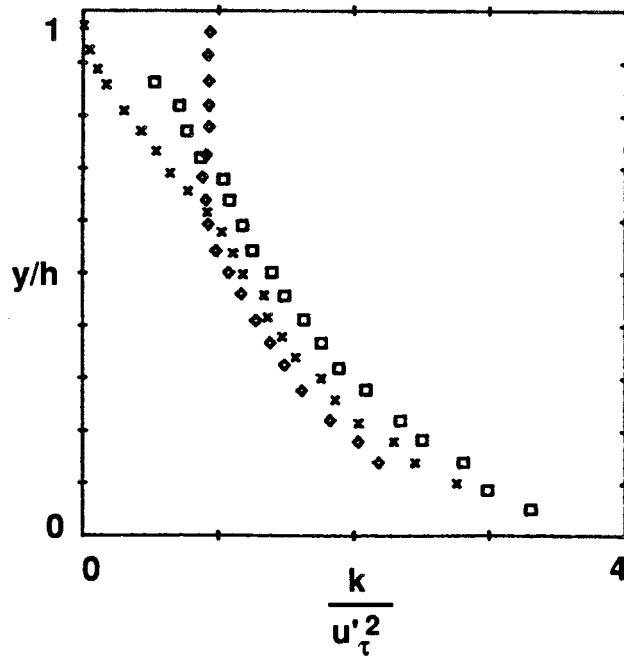
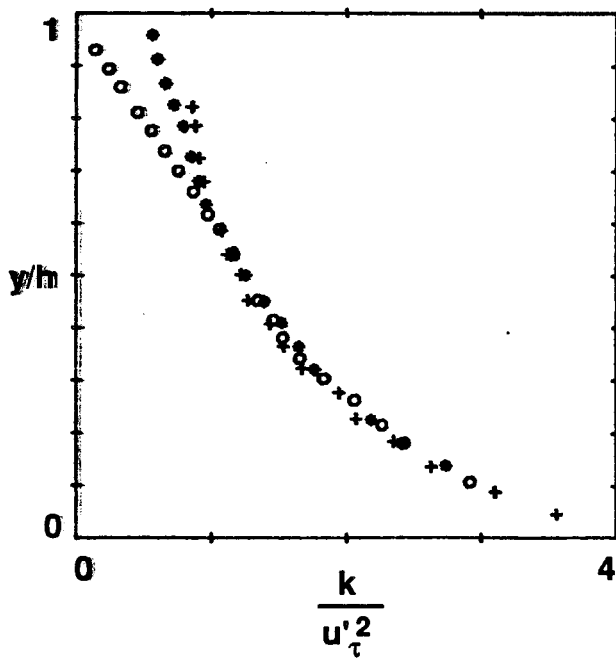
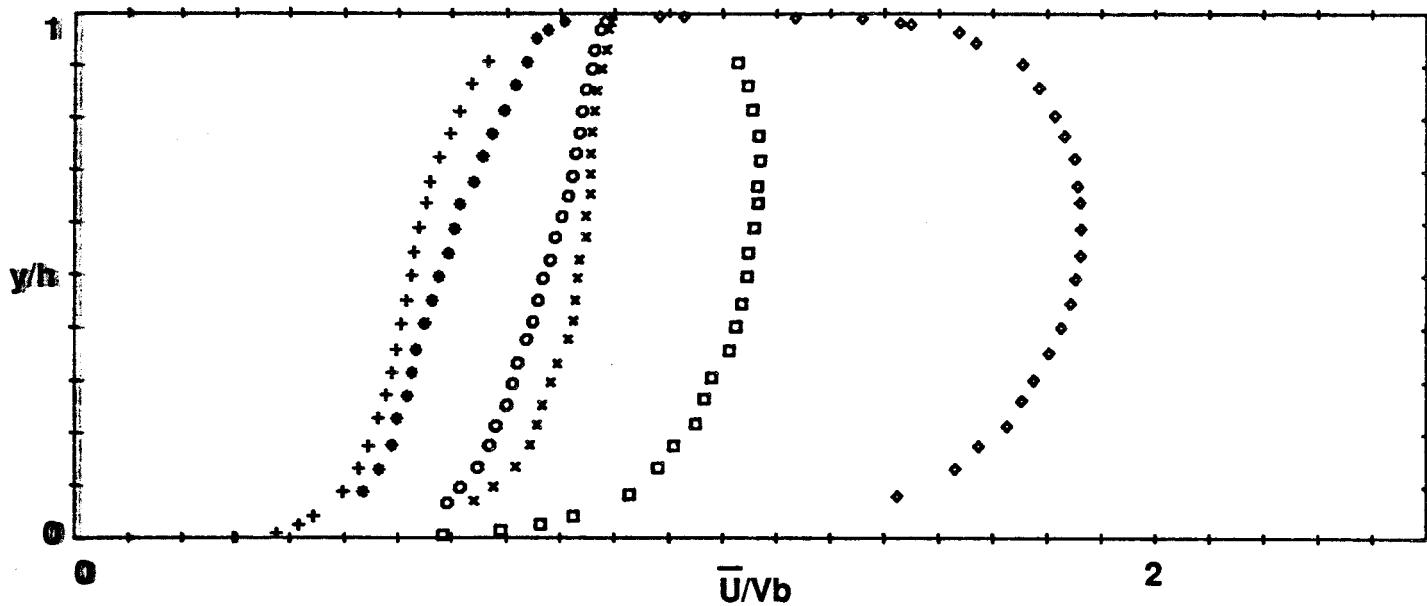
Figure 2-5: Profils de k , $\overline{u u}$, $\overline{v v}$ et $\overline{w w}$ pour les écoulements COUETTE purs et de POISEUILLE



○ $Re_b = 54000, Re_{max} = 58590$: HUEY & WILLIAMSON <2-18>

+ $Re_b = 57010, Re_{max} = 58830$: EL TELBANY & REYNOLDS<2-7>

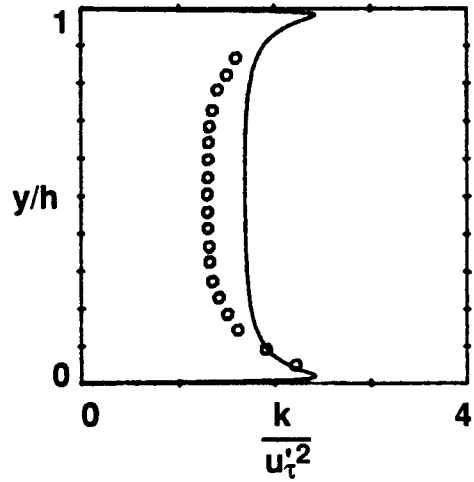
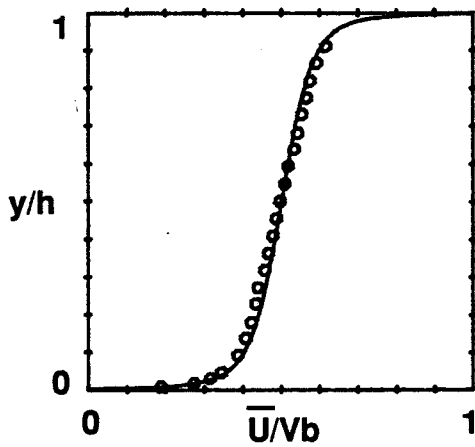
Figure 2-6 : Profils de vitesse moyenne et de $\overline{u'u'}$ pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression



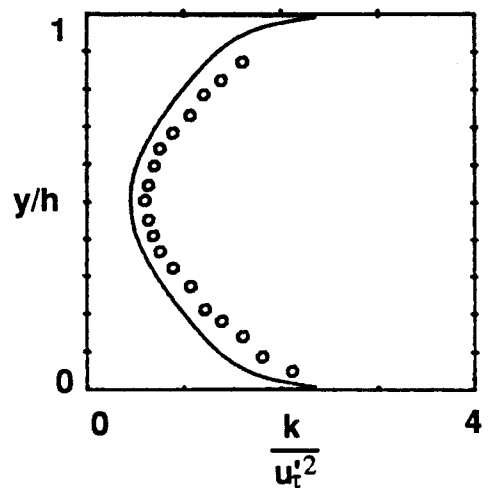
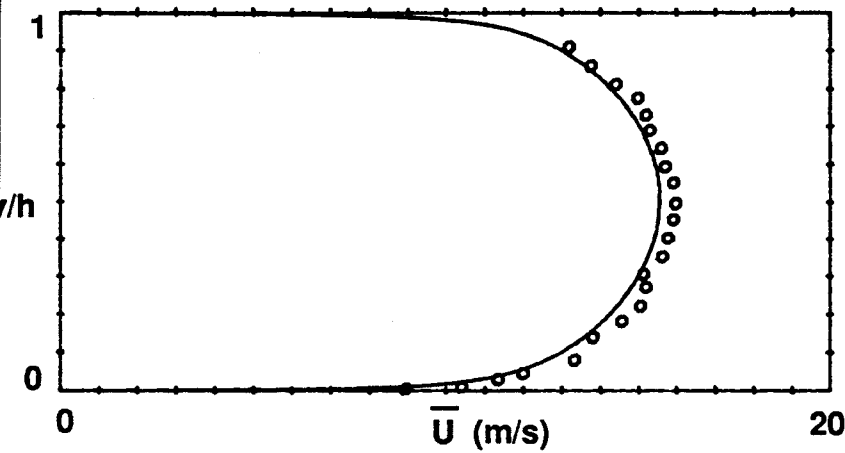
- + Expérience n°3
- * Expérience n°5
- Expérience n°7
- × Expérience n°9
- Expérience n°11
- ◇ Expérience n°13

: EL TELBANY & REYNOLDS<2-7>

Figure 2-7 : Profils de vitesse et d'énergie turbulente pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression

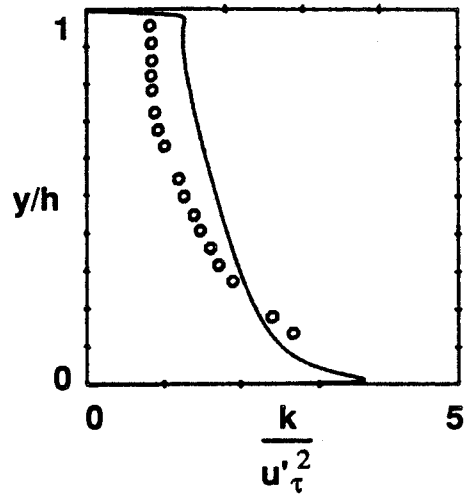
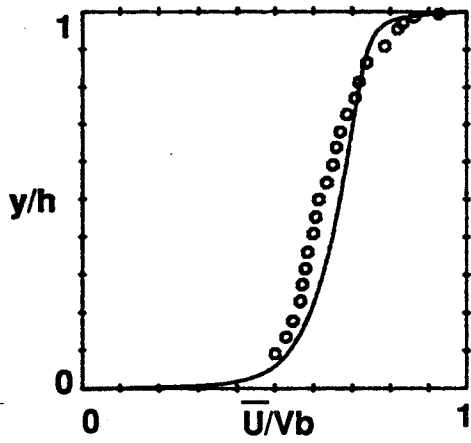


○ Expériences n° 1 : EL TELBANY & REYNOLDS<2-7>

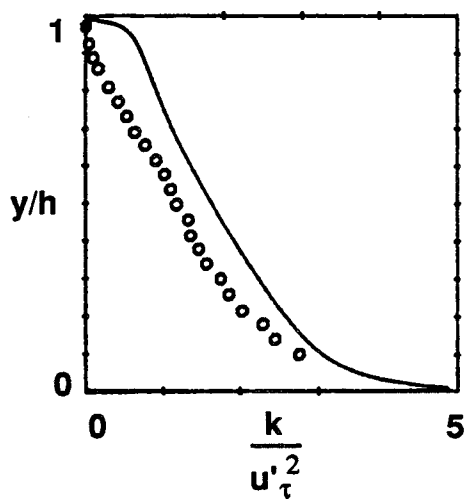
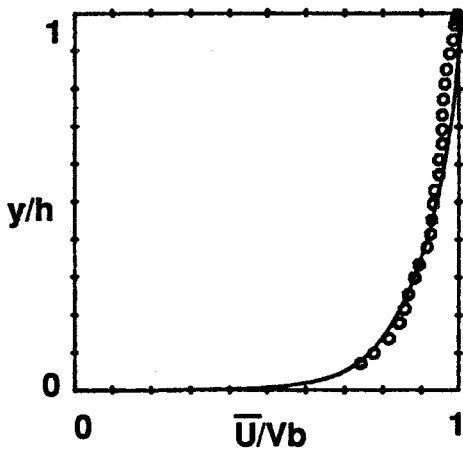


○ Expériences n° 15 : EL TELBANY & REYNOLDS<2-7>

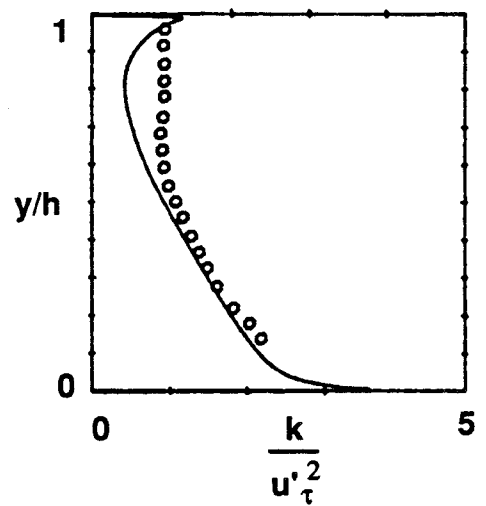
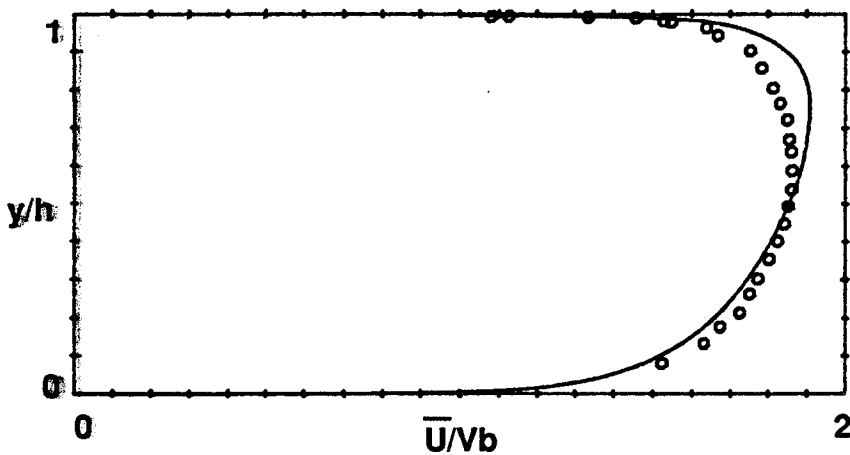
Figure 2-8 : Modèle à deux équations de transport de CHIEN <2-25>. Profils de vitesse et d'énergie turbulente pour les écoulements de COUETTE purs et de POISEUILLE.



Expériences n° 4 : EL TELBANY & REYNOLDS<2-7>

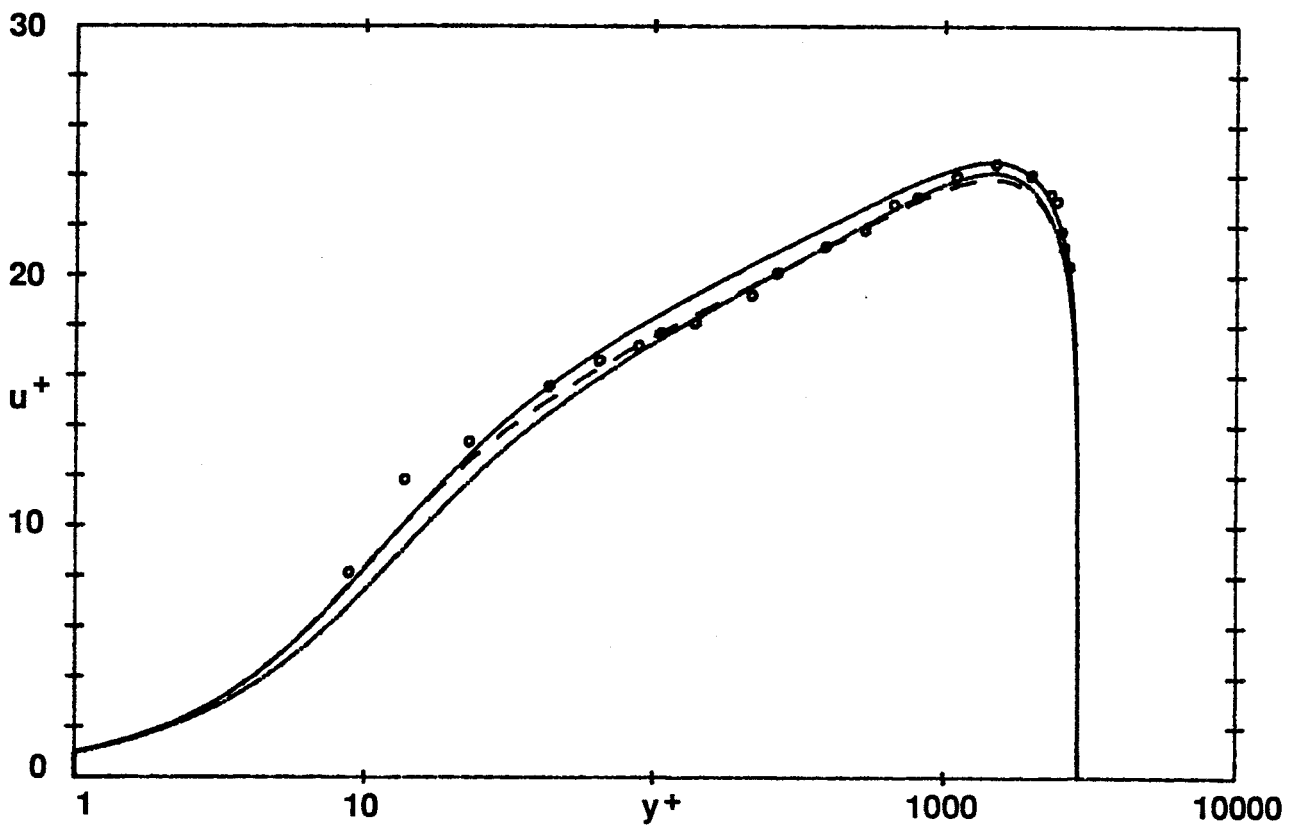
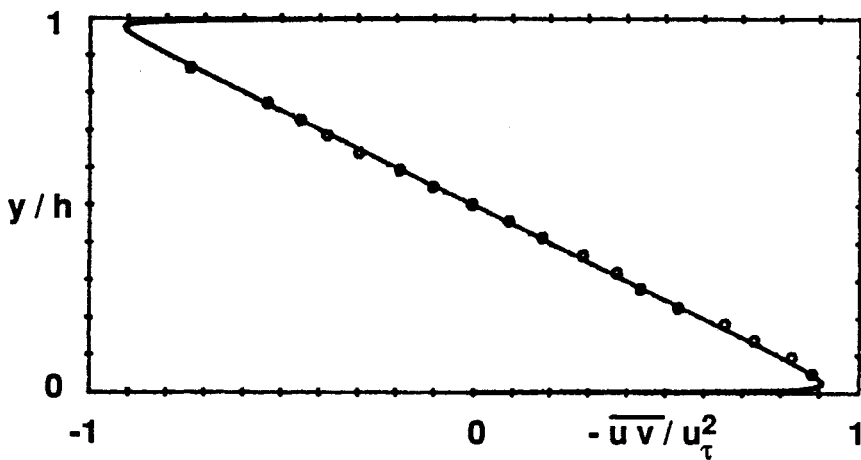
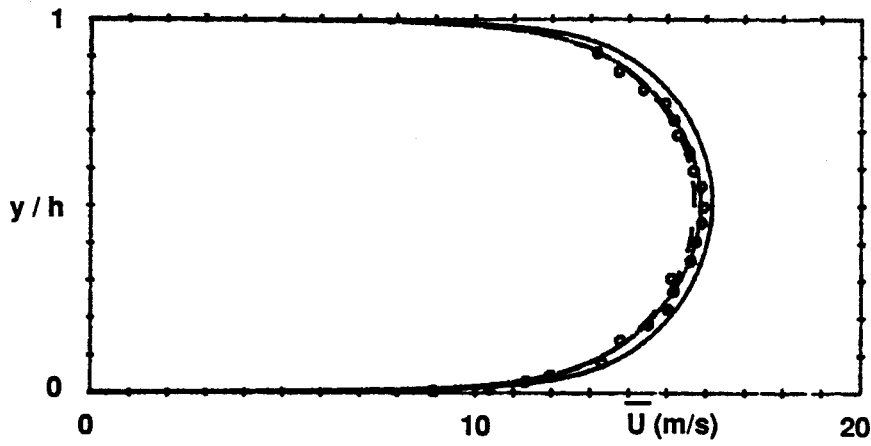


Expériences n° 9 : EL TELBANY & REYNOLDS<2-7>



Expériences n° 13 : EL TELBANY & REYNOLDS<2-7>

Figure 2-9: Modèle à deux équations de transport de CHEN <2-25>. Profils de vitesse et d'énergie turbulente pour les écoulements de COUETTE avec gradient de pression.

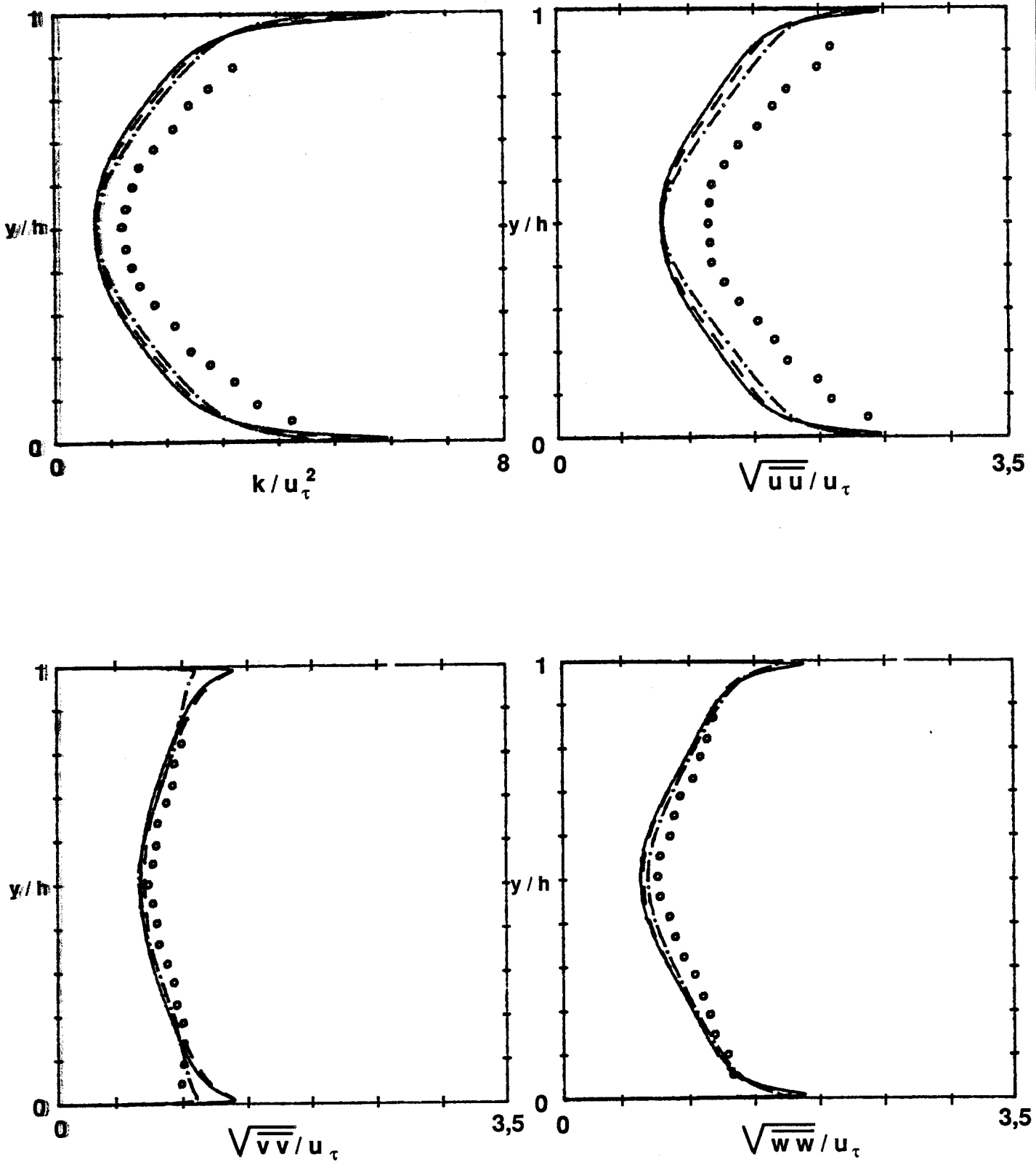


— SY - - - - JM - - - - GR

Remax = 71040: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-7>, < 2-8 >

Figure 2-10: Modèles aux tensions de REYNOLDS

Prédictions des profils de vitesse moyenne et du \overline{uv} d'un écoulement de POISEUILLE

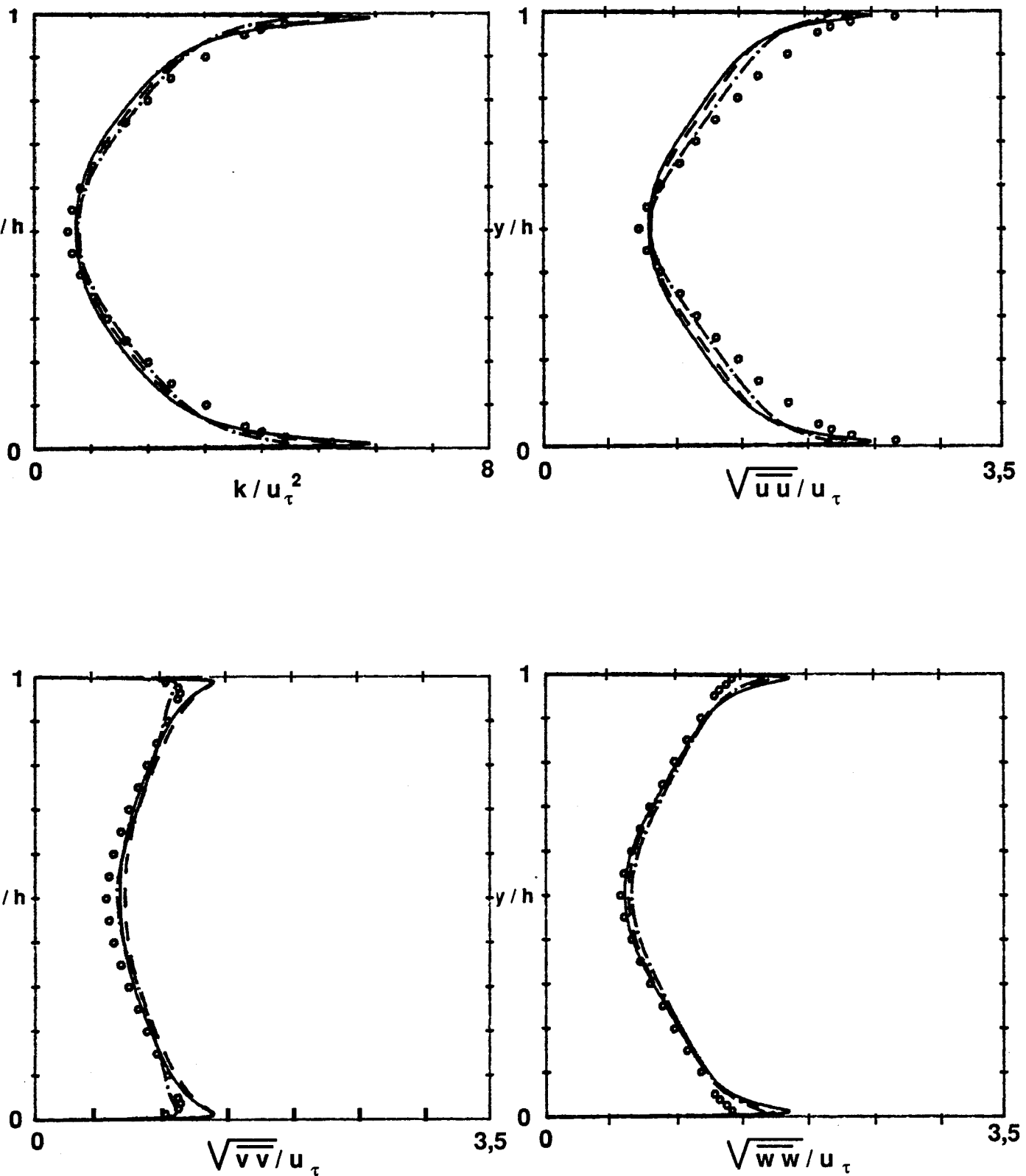


— SY - - - - JM - · - · - GR

Remax = 71040: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-7>, < 2-8 >

Figure 2-11: Modèles aux tensions de REYNOLDS

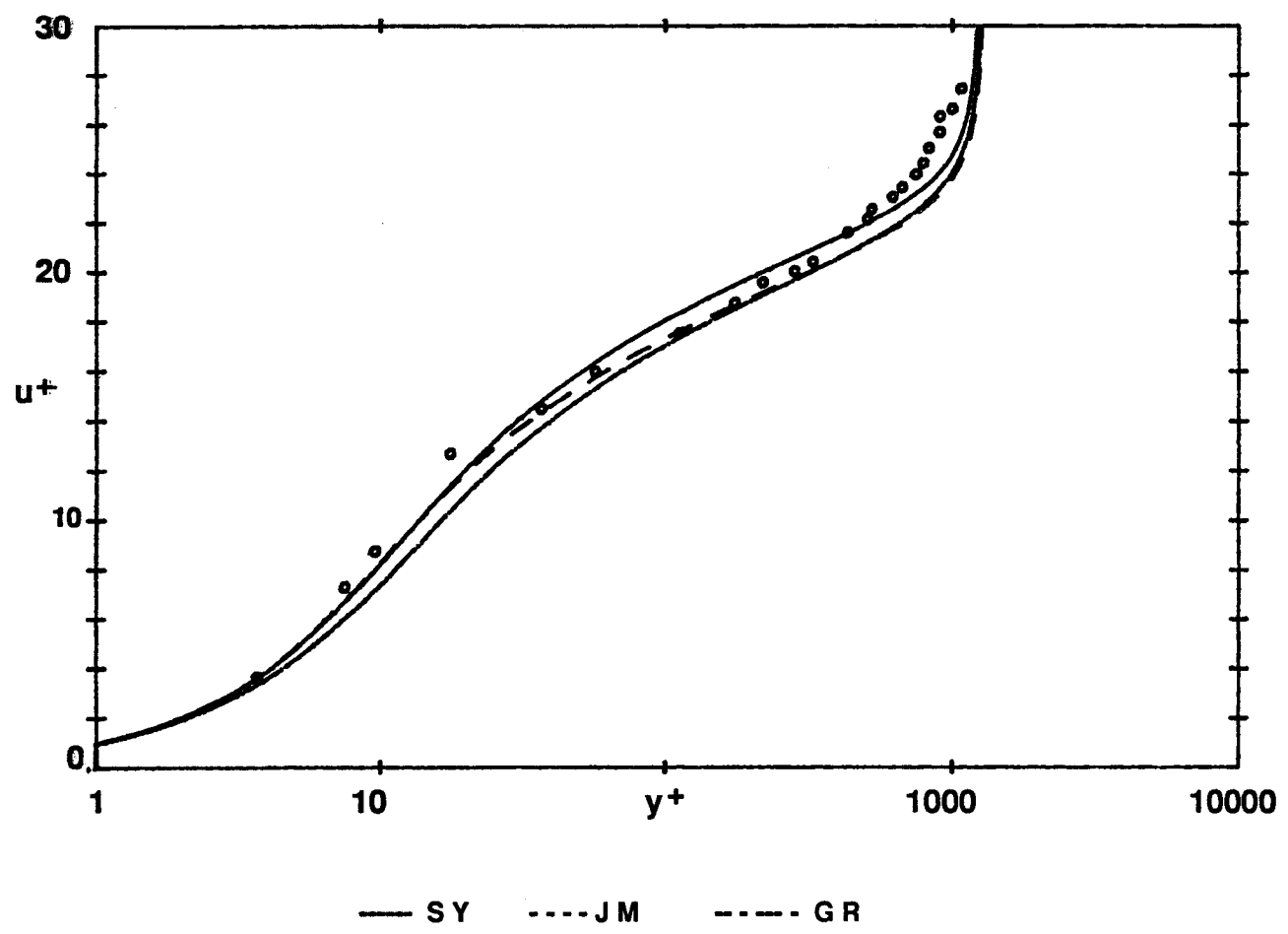
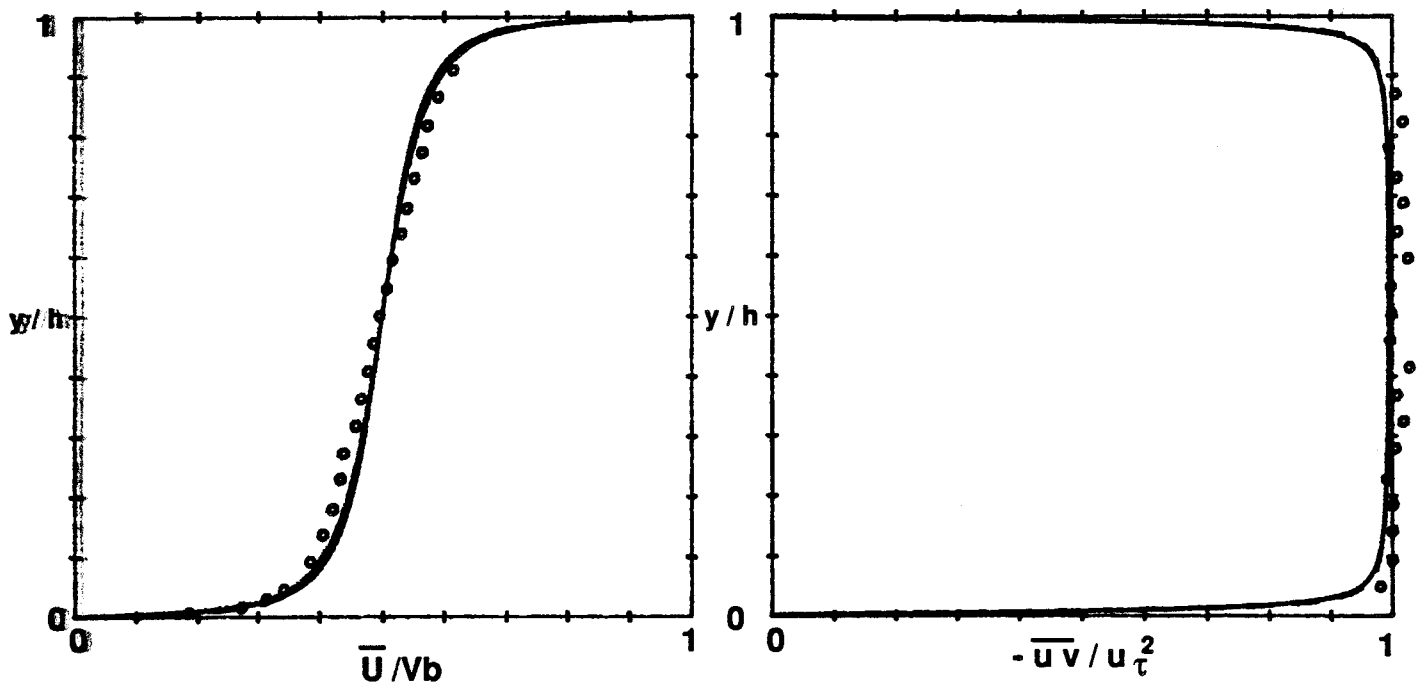
Prédictions des profils de k , \overline{uu} , \overline{vv} et \overline{ww} de
EL TELBANY et REYNOLDS en écoulement de POISEUILLE



— SY JM - - - - GR

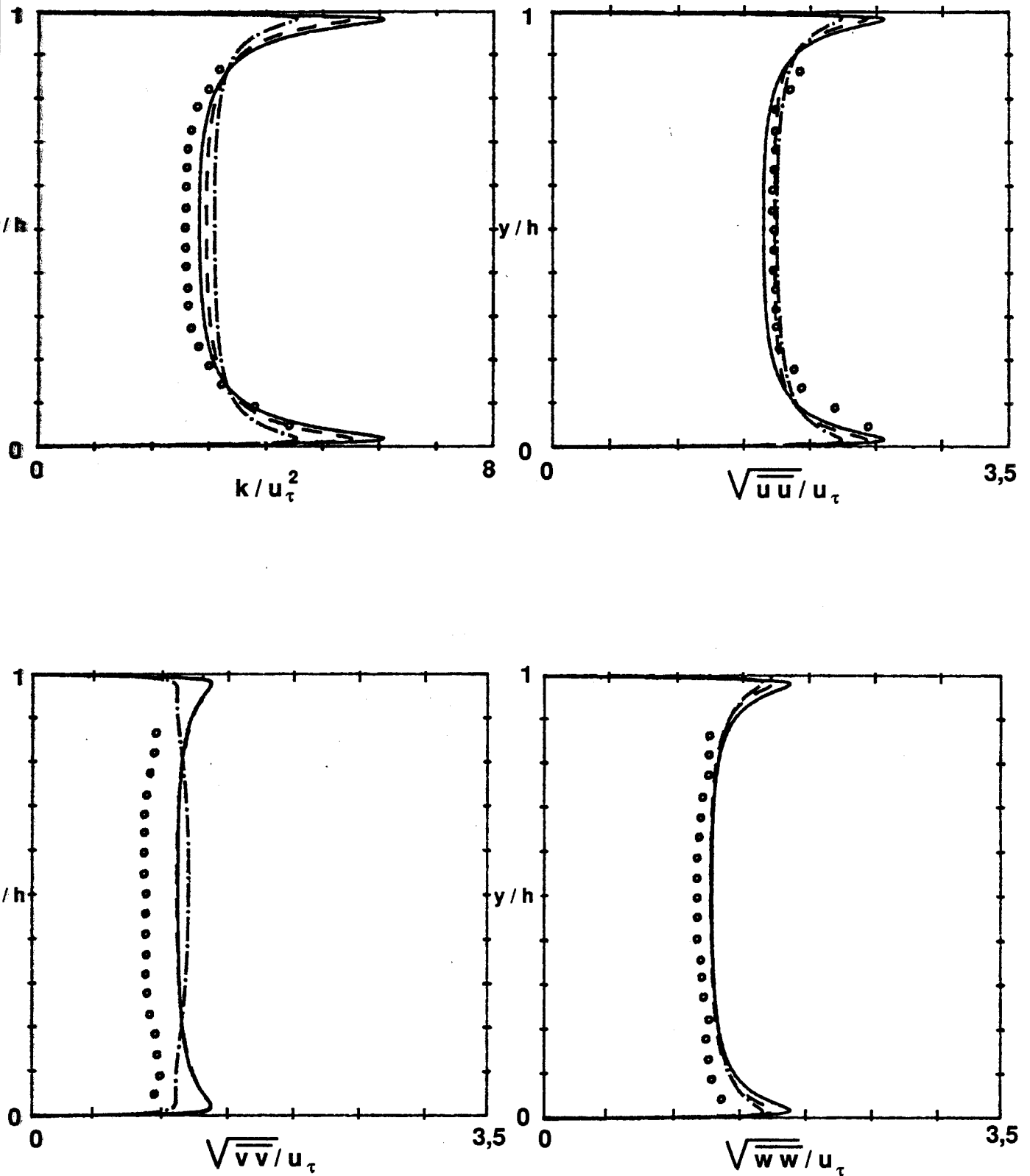
Remax = 55200: CLARK< 2-5>

Figure 2-12: Modèles aux tensions de REYNOLDS
 Prédiction des profils de k , \overline{uu} , \overline{vv} et \overline{ww} de
 CLARK en écoulement de POISEUILLE



Remax = 57010: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-7>, < 2-8 >

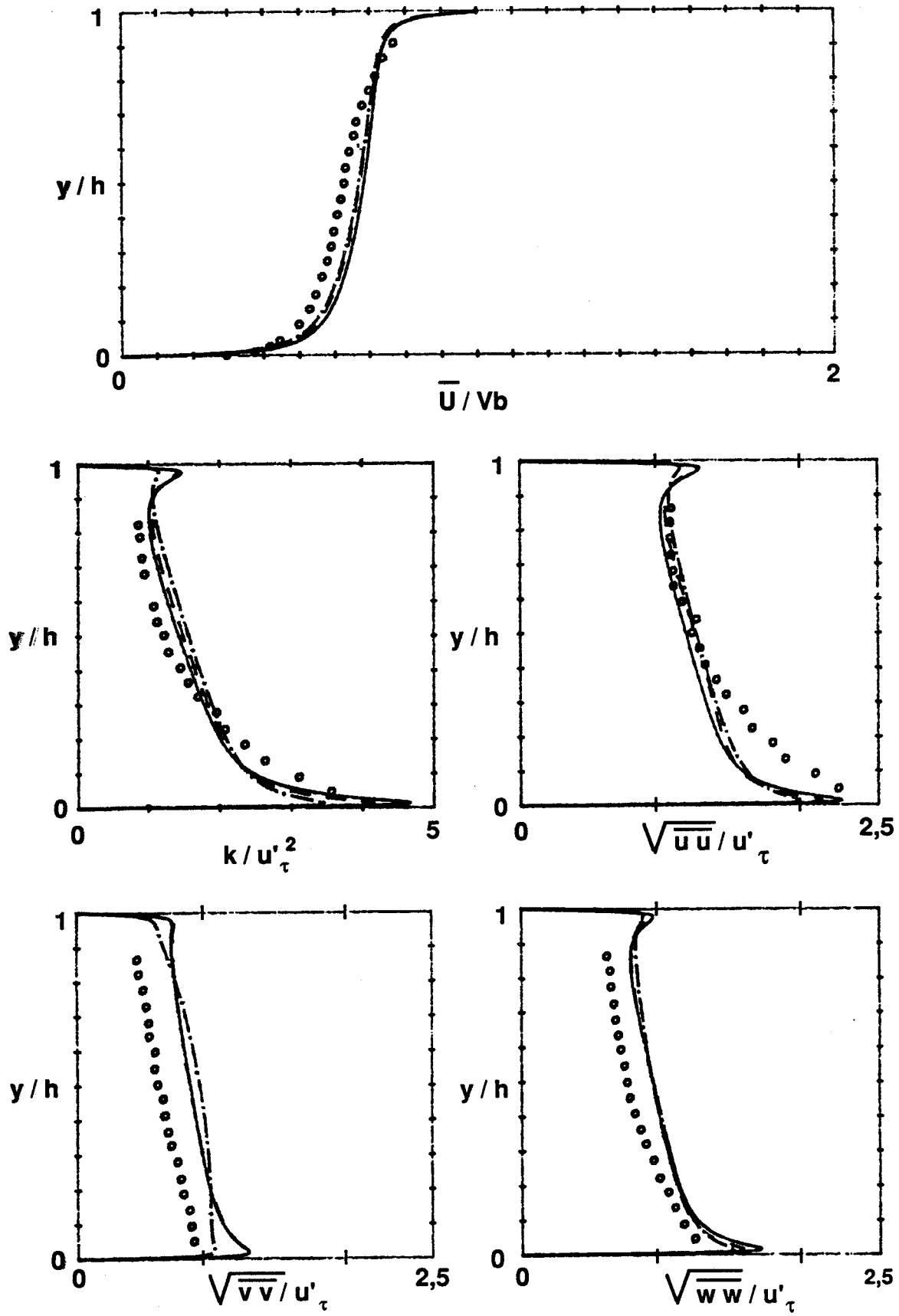
Figure 2-13: Modèles aux tensions de REYNOLDS
Prédictions des profils de vitesse moyenne et de $\bar{u}v$ d'un écoulement de COUETTE



— SY ···· JM - - - - GR

Remax = 57010: EL TELBANY & REYNOLDS< 2-7>

Figure 2-14: Modèles aux tensions de REYNOLDS
Prédictions des profils de k , \overline{uu} , \overline{vv} et \overline{ww} de
EL TELBANY & REYNOLDS en écoulement de COUETTE

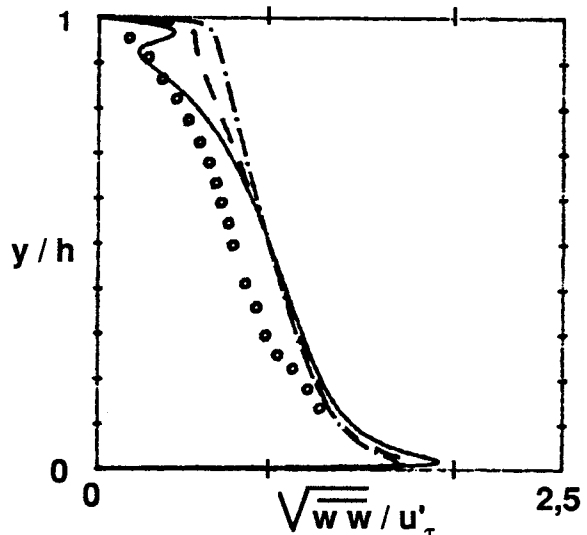
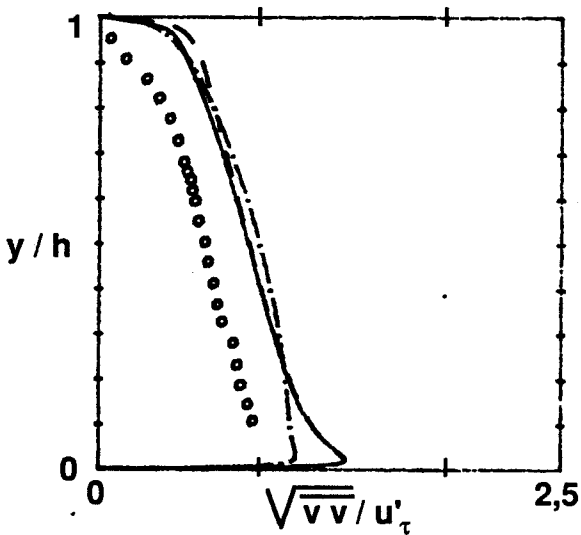
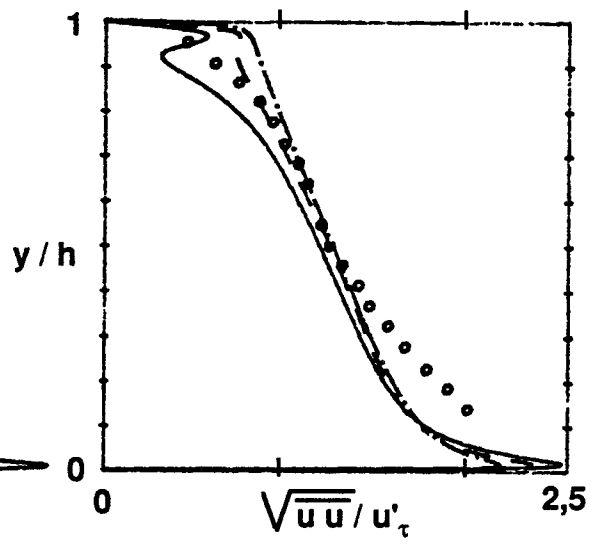
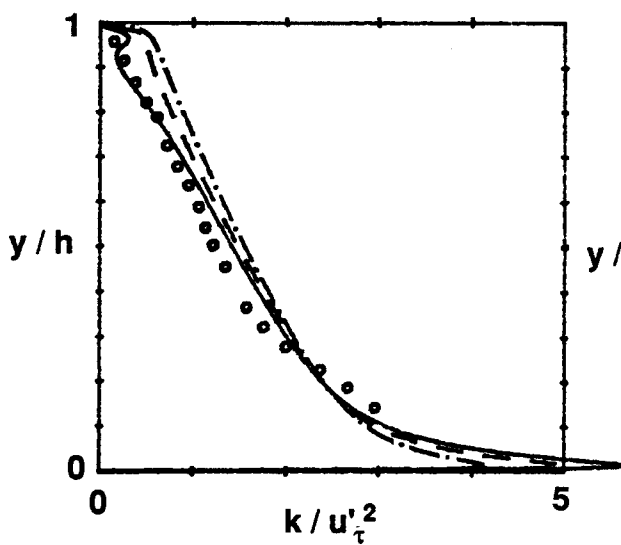
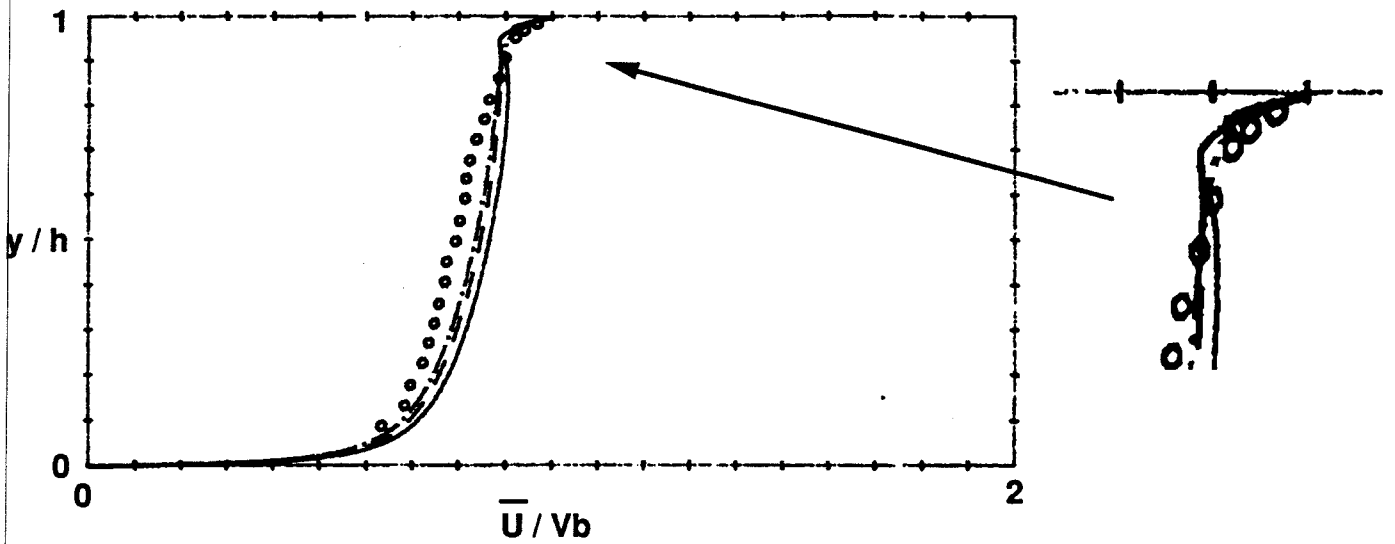


— SY - - - - JM - · - · - GR

Remax = 57010: EL TELBANY & REYNOLDS< 2-7>

Figure 2-15: Modèles aux tensions de REYNOLDS

Prédictions de l'expérience n°3 de EL TELBANY & REYNOLDS

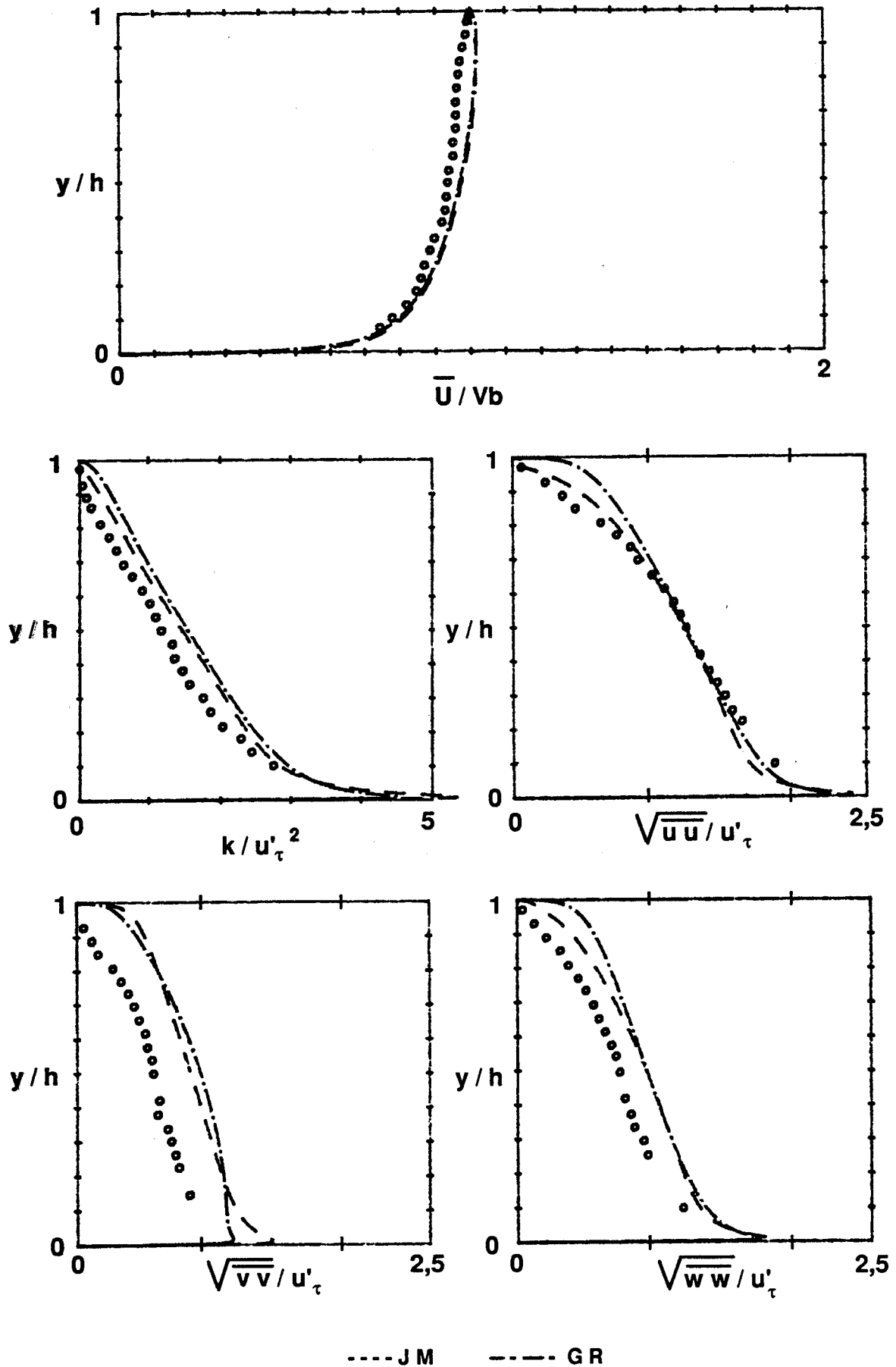


— SY - - - - JM - - - - GR

Remax = 38140: EL TELBANY & REYNOLDS < 2-7 >

Figure 2-16: Modèles aux tensions de REYNOLDS

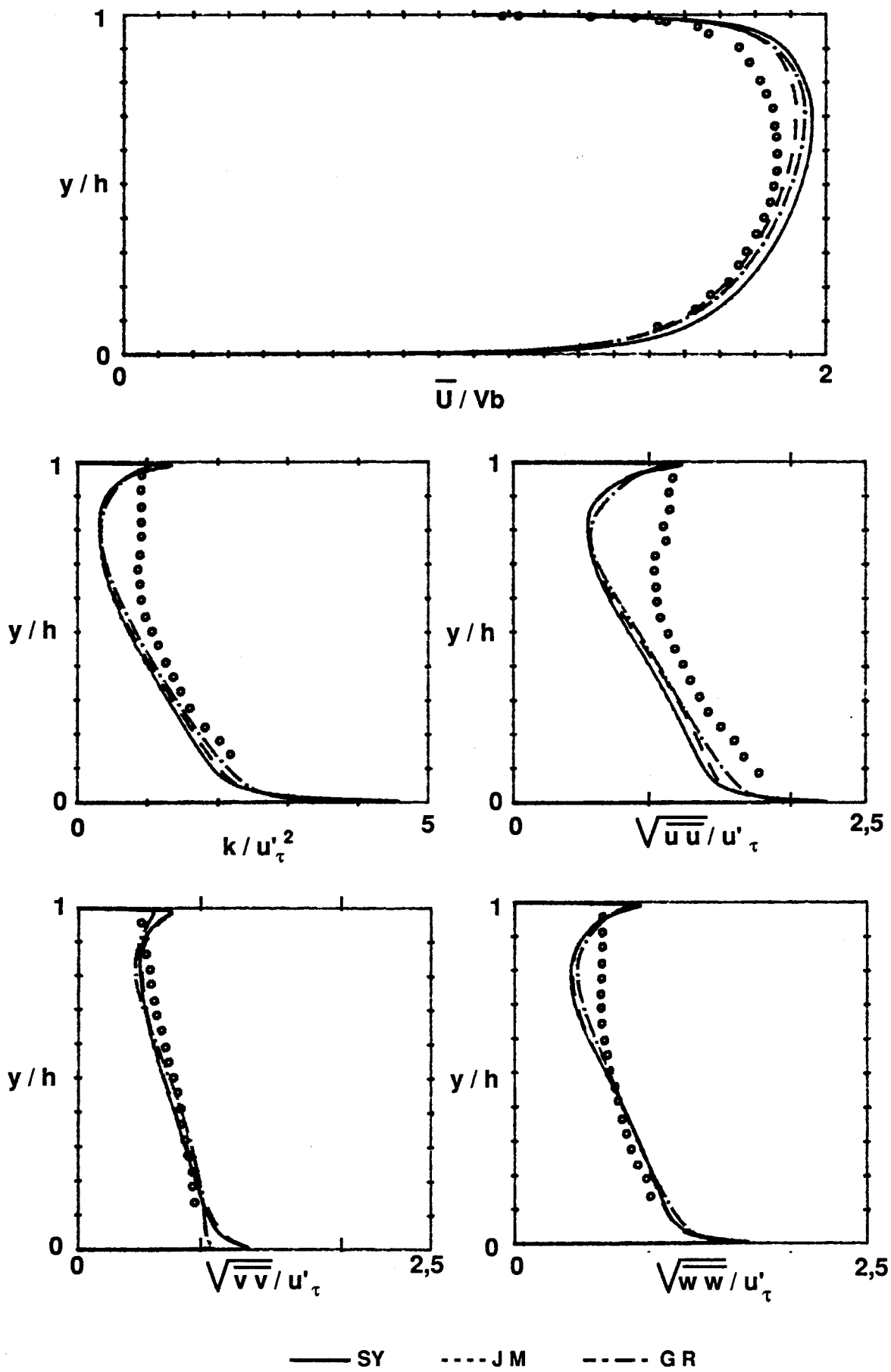
Prédictions de l'expérience n°6 de EL TELBANY & REYNOLDS



Remax = 58360: EL TELBANY & REYNOLDS< 2-7>

Figure 2-17: Modèles aux tensions de REYNOLDS

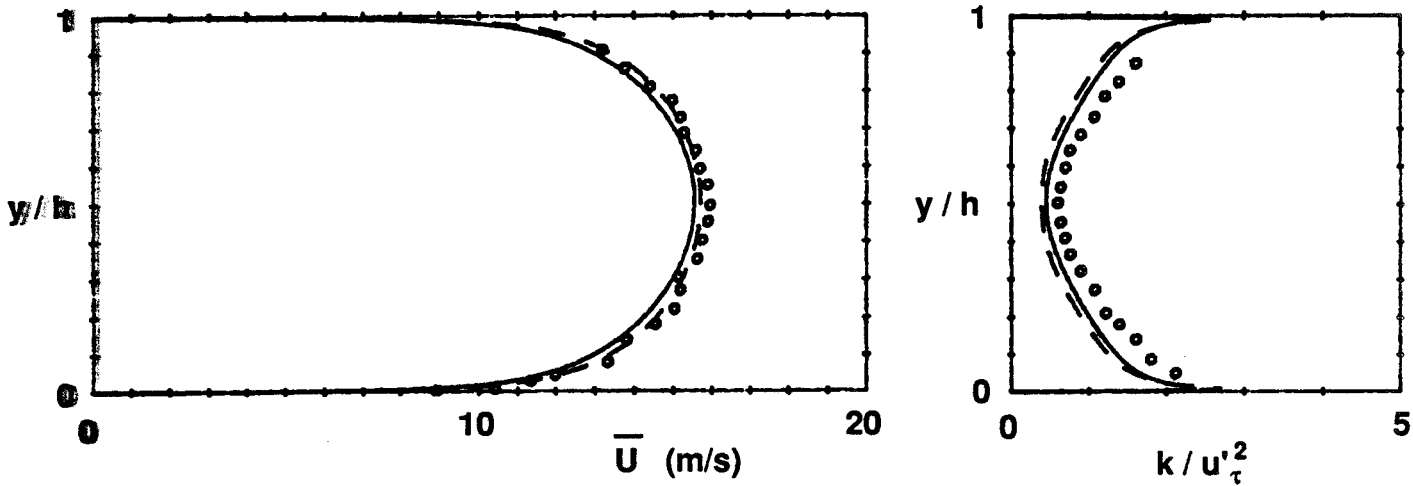
Prédictions de l'expérience n°9 de EL TELBANY & REYNOLDS



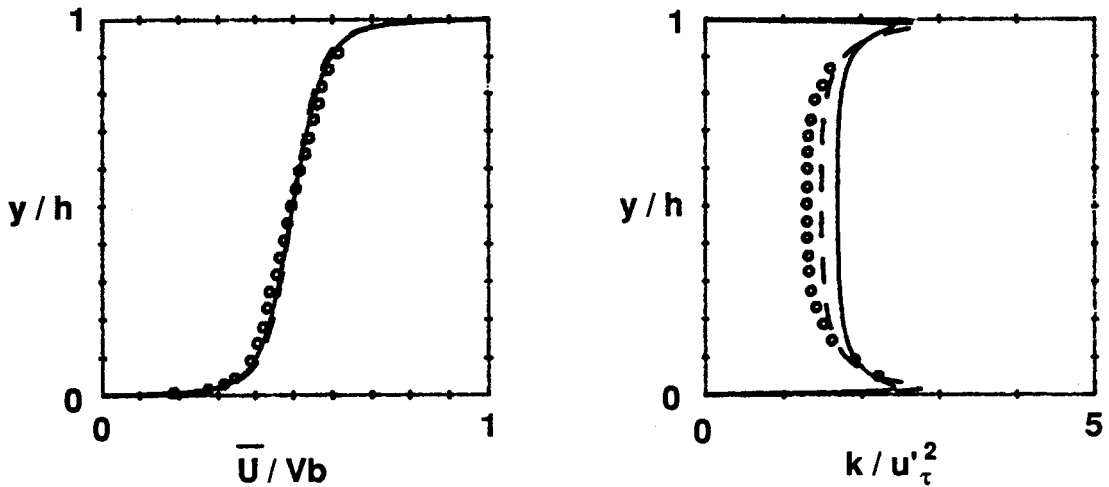
Remax = 106610: EL TELBANY & REYNOLDS< 2-7>

Figure 2-18: Modèles aux tensions de REYNOLDS

Prédictions de l'expérience n°13 de EL TELBANY & REYNOLDS



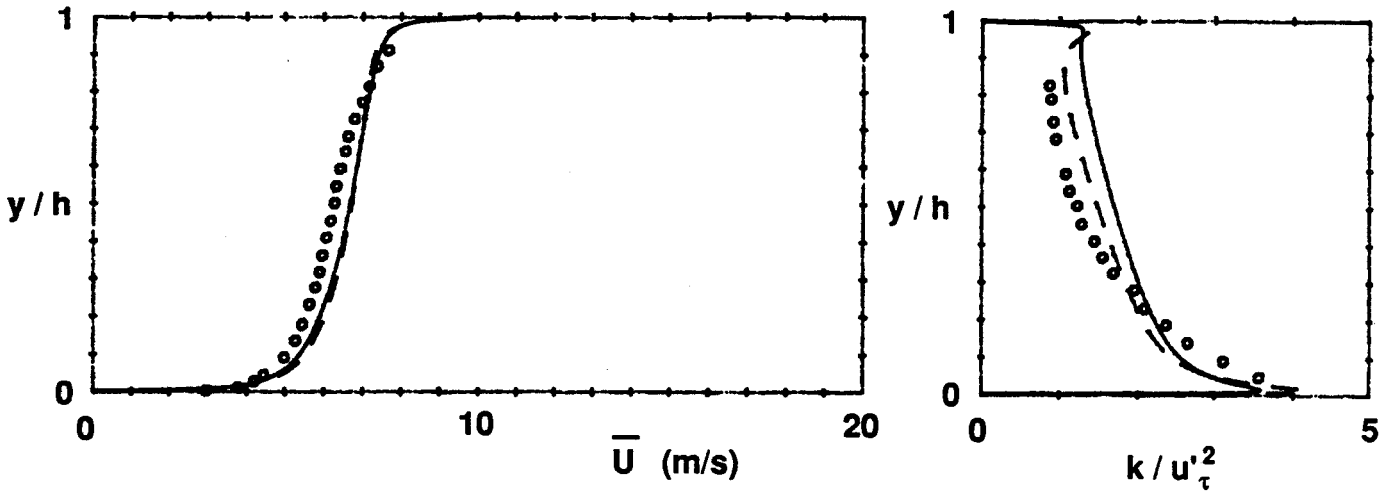
o Expérience n°15 de EL TELBANY & REYNOLDS <2-7>: Ecoulement de POISEUILLE



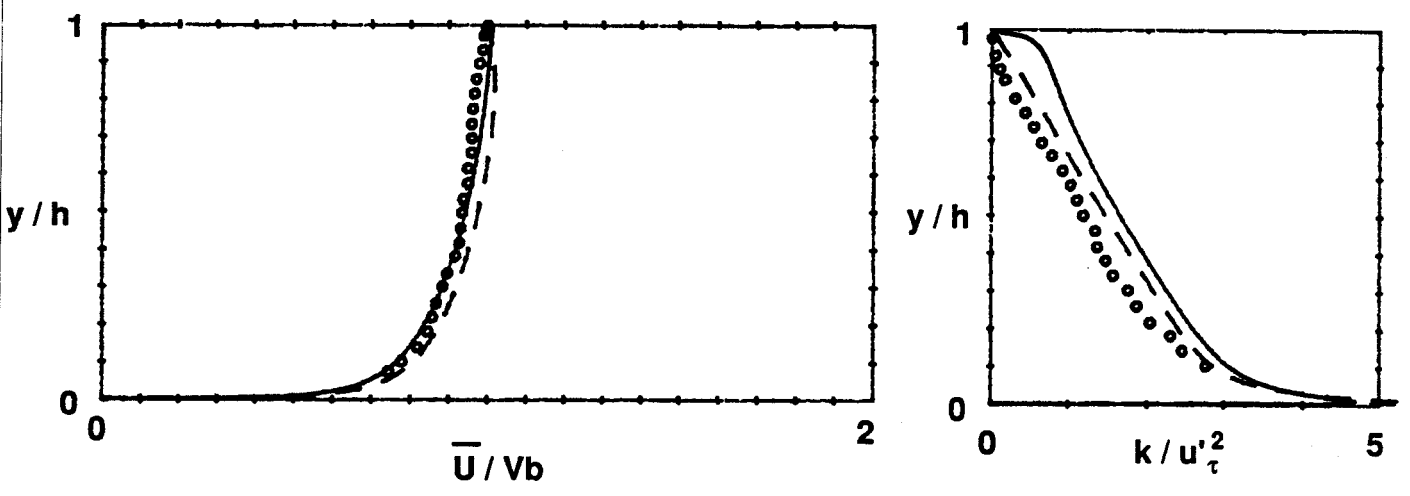
o Expérience n°15 de EL TELBANY & REYNOLDS <2-7>: Ecoulement de COUETTE pur

— modèle de CHIEN - - - - J M

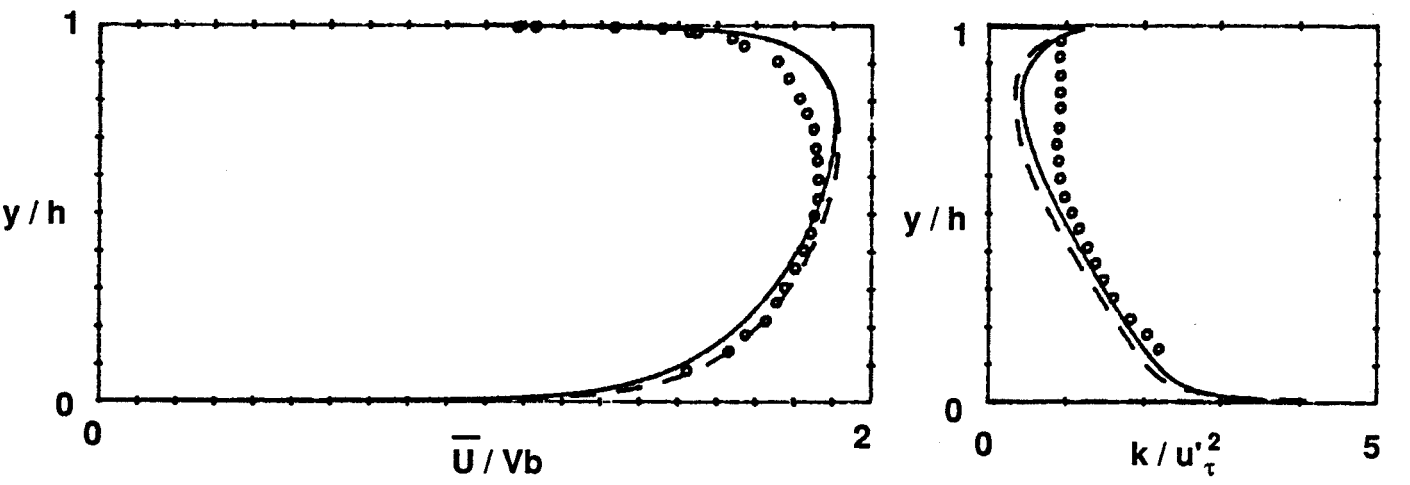
Figure 2-19: Comparaison entre deux modèles de turbulence:
Prédictions des écoulements de POISEUILLE et de COUETTE purs



o Expérience n°3 de EL TELBANY & REYNOLDS <2-7>: Ecoulement de type COUETTE



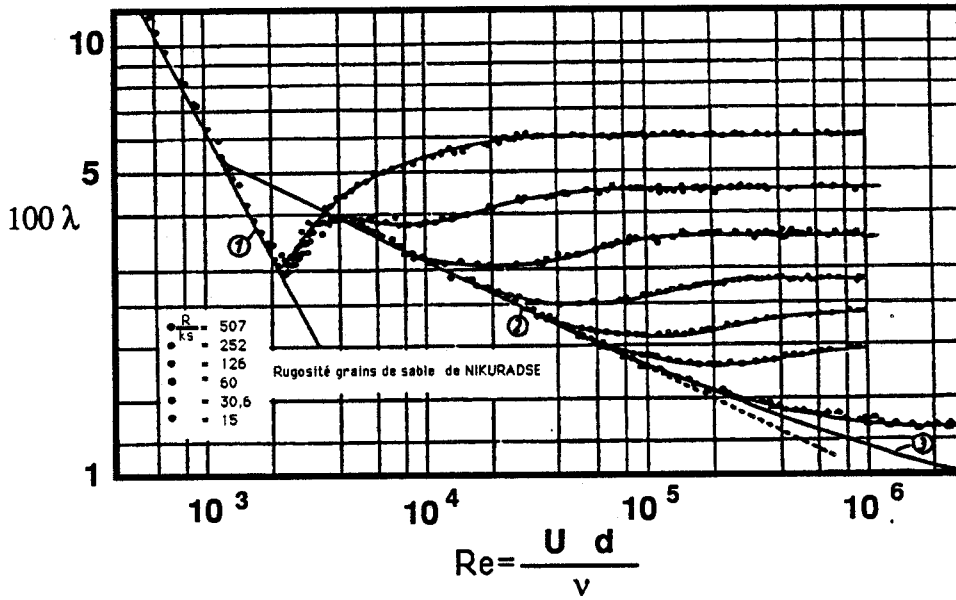
o Expérience n°9 de EL TELBANY & REYNOLDS <2-7>: Ecoulement intermédiaire



o Expérience n°13 de EL TELBANY & REYNOLDS <2-7>: Ecoulement de type POISEUILLE

— modèle de CHIEN - - - - J M

Figure 2-20: Comparaison entre deux modèles de turbulence:
Prédictions des écoulements de COUETTE avec gradient de pression



1 : écoulement laminaire

2: écoulement turbulent sur paroi lisse:
Loi de BLASUIS.

figure 2-21a: Influence de la rugosité sur le coefficient de perte de charge.
Extrait de la référence <1-8>.

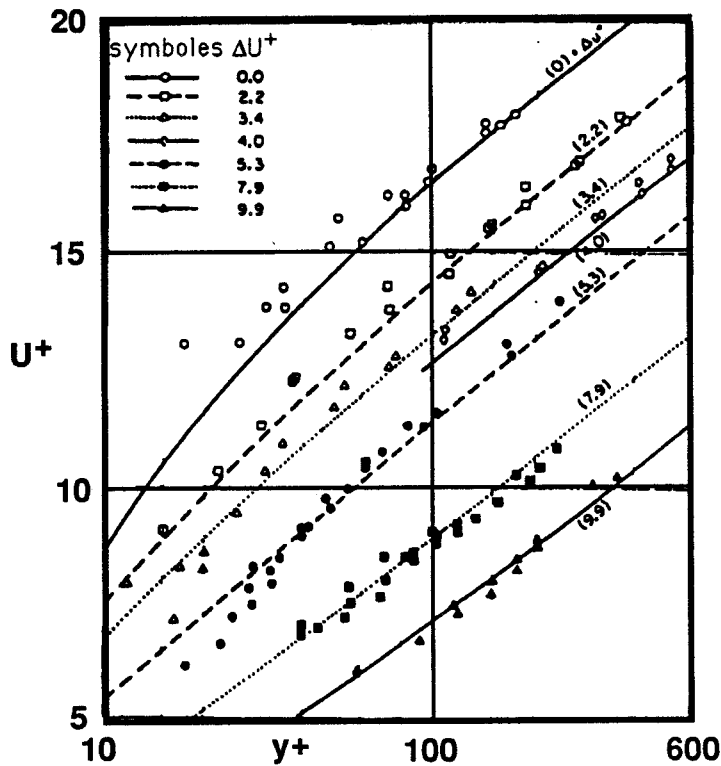


Figure 2-21b: Influence de la rugosité de paroi sur la loi logarithmique.
Extrait de la référence <2-53>

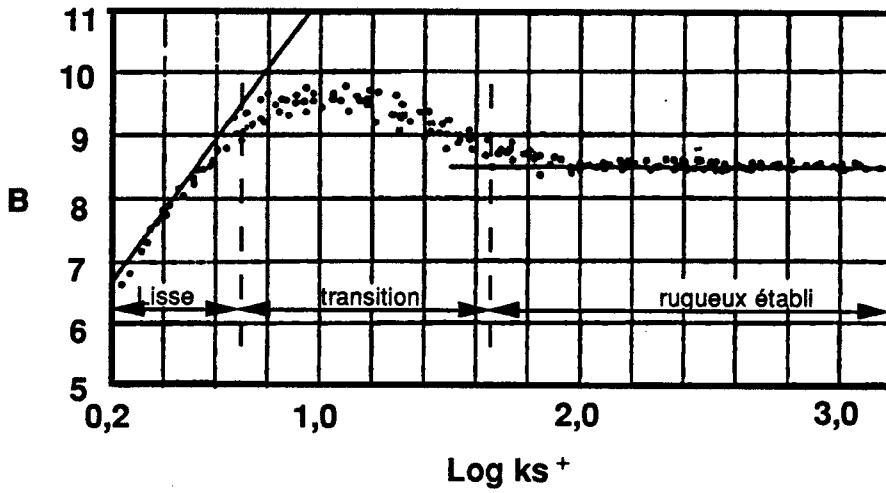


Figure 2- 22a: Variation de la fonction B avec le nombre de REYNOLDS ks^+
Extrait de la référence <1-8>

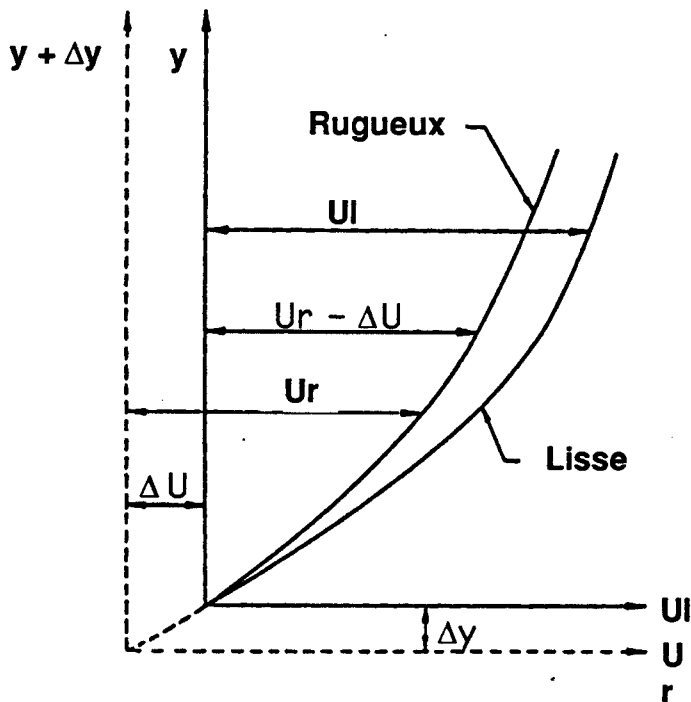


Figure 2-22b: Changement de repère représentant les effets de la rugosité

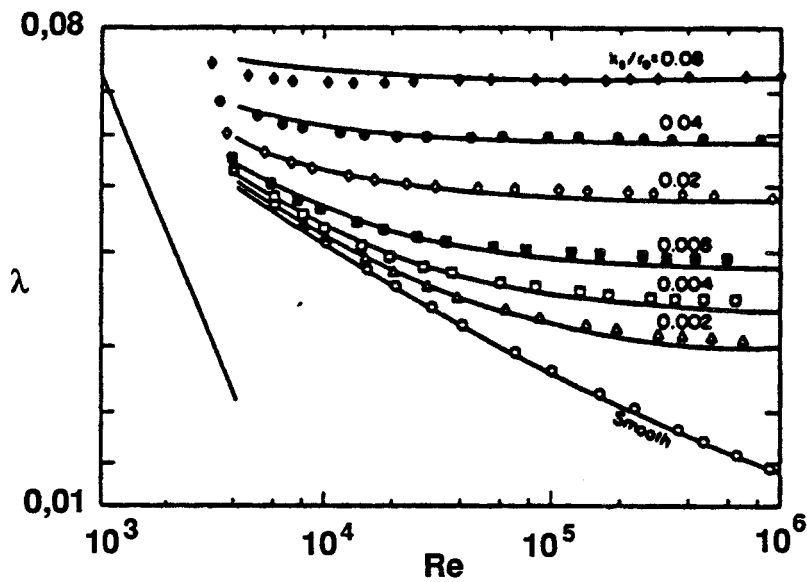


Figure 2-23a: Influence de la rugosité sur le coefficient de perte de charge. Rugosité au sens de MOODY.
Extrait de la référence <2- 53>

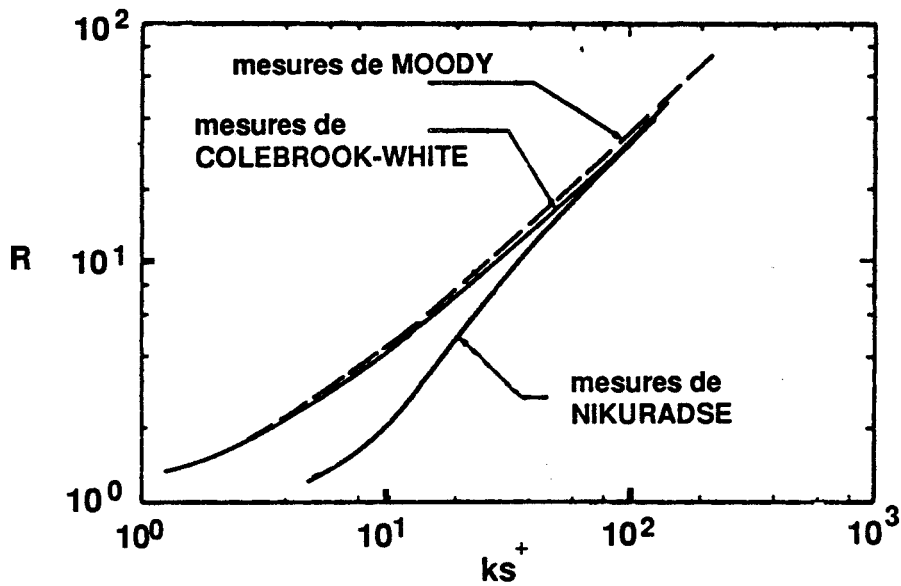
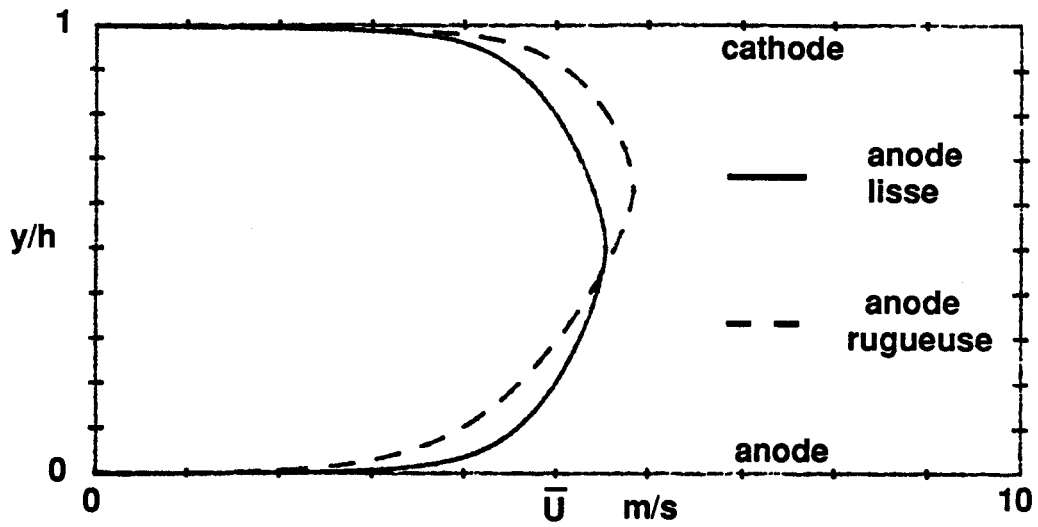
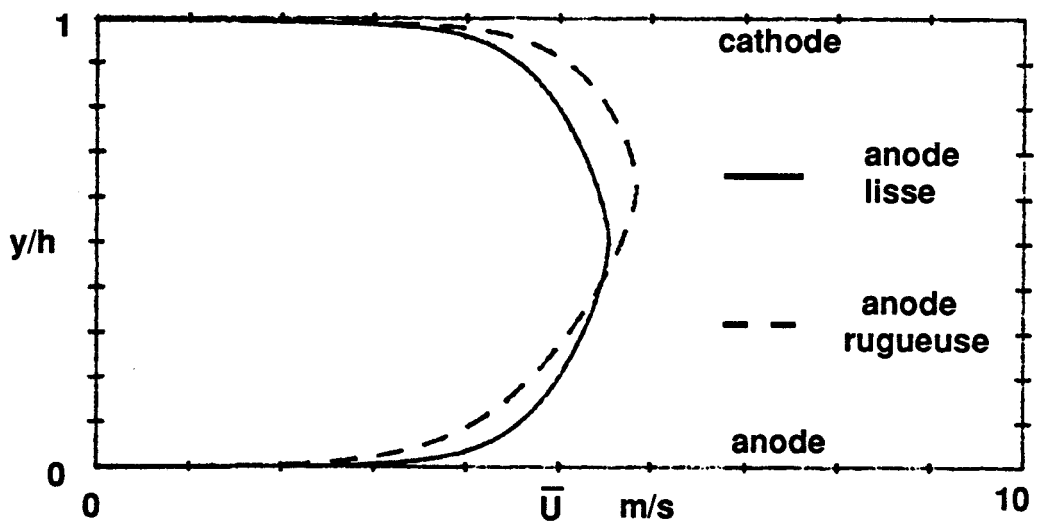


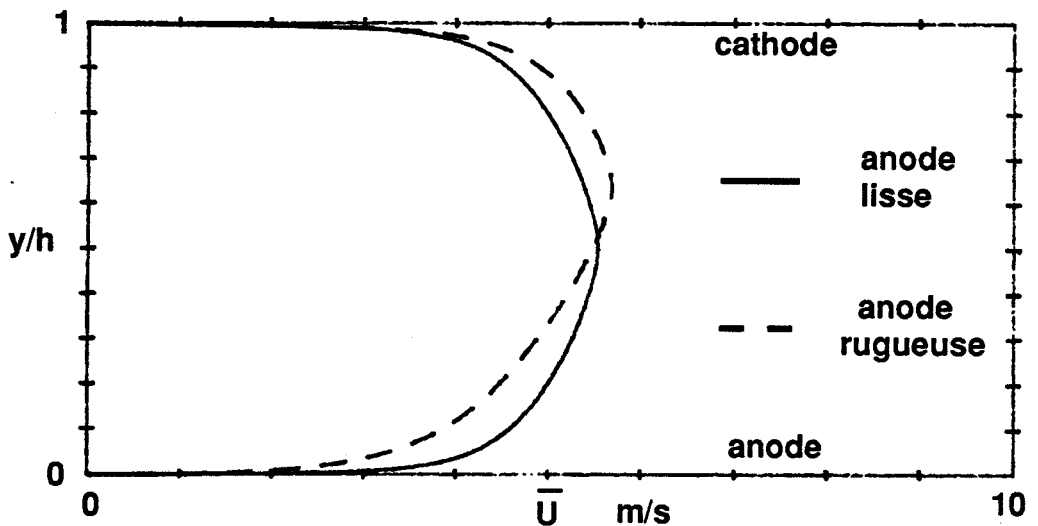
Figure 2-23b: Variation du facteur d'amplification R avec le nombre de REYNOLDS ks^+ . Extrait de la référence <2-53>.



a) Modèle (1) de ROTTA <2-52>

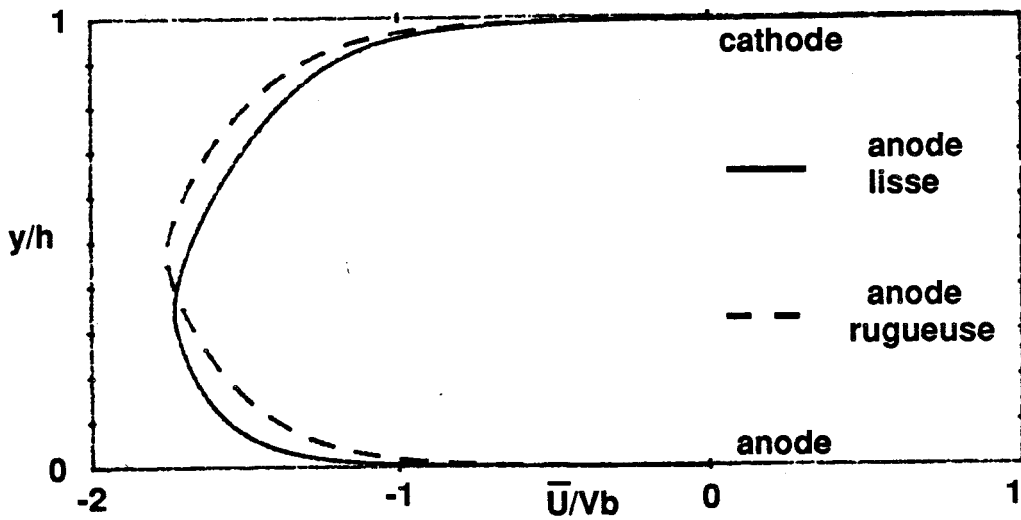


a) Modèle (2) de ROTTA <2-52>

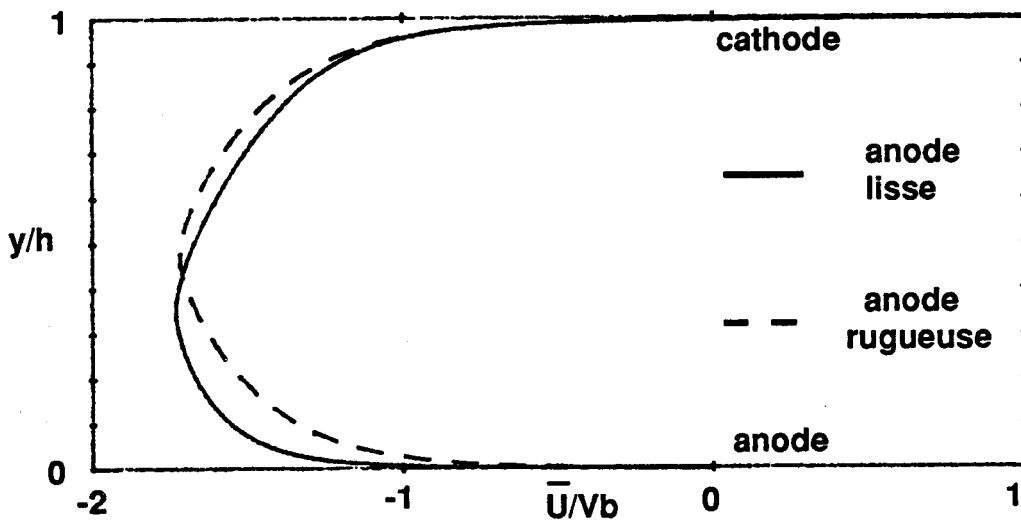


a) Modèle (3) de HAN <2-53>

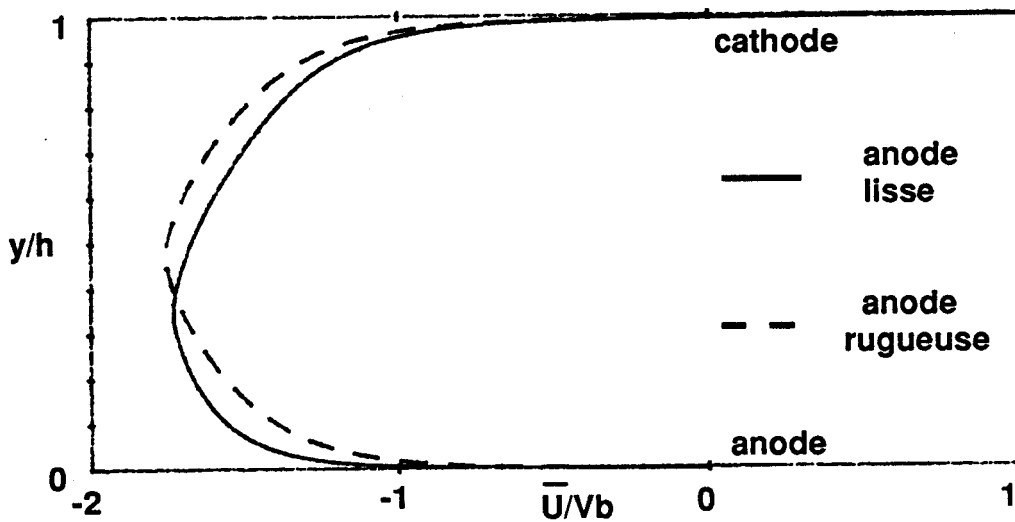
Figure 2- 24: Influence de la rugosité anodique sur un écoulement de cellule de type carte postale.



a) Modèle (1) de ROTTA <2-52>

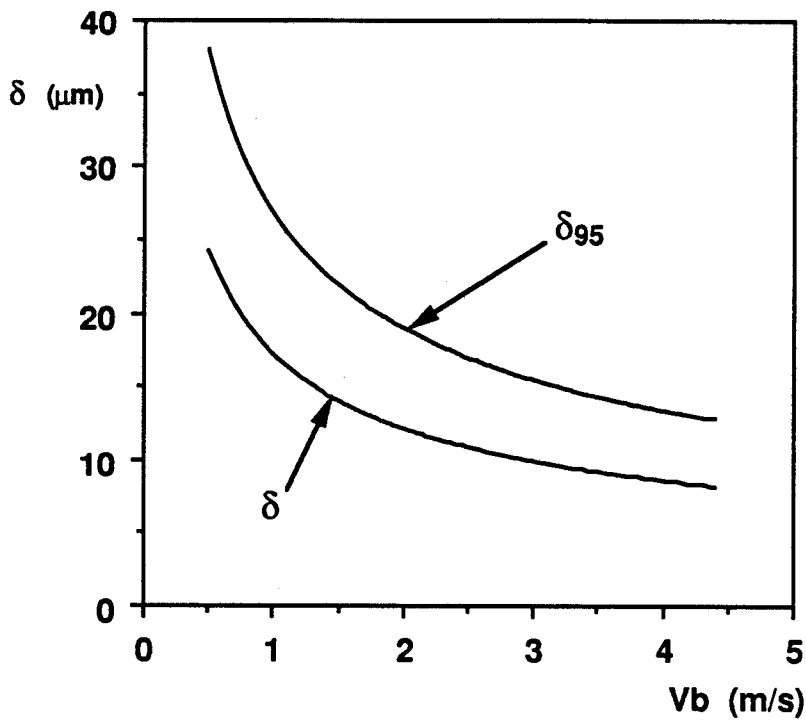


a) Modèle (2) de ROTTA <2-52>

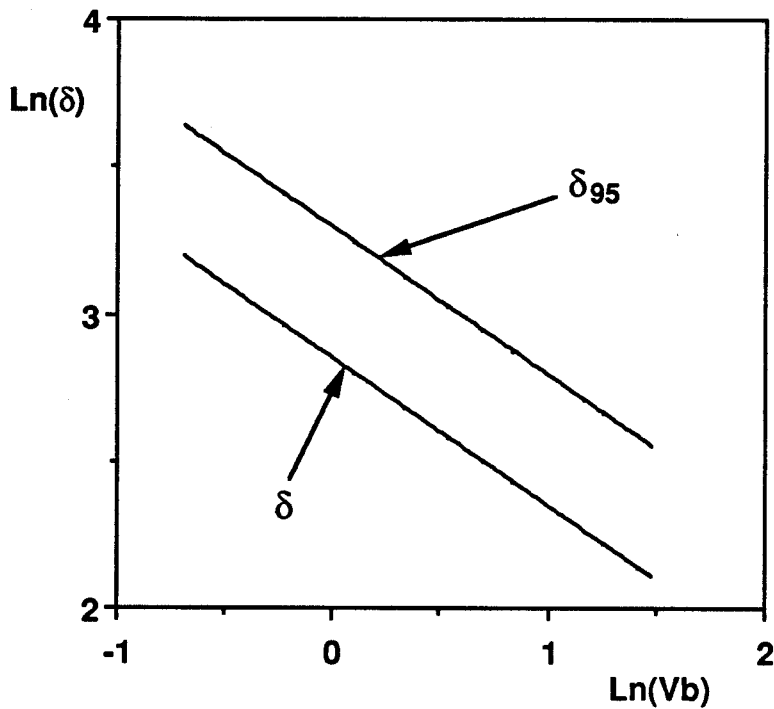


a) Modèle (3) de HAN <2-53>

Figure 2- 25: Influence de la rugosité anodique sur un écoulement de cellule d'électro-zingage.

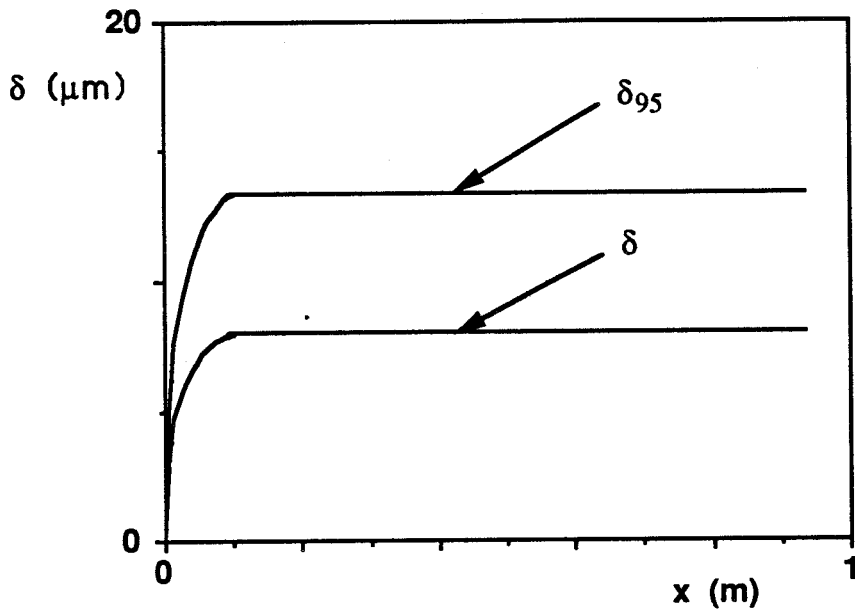


a) échelle linéaire.

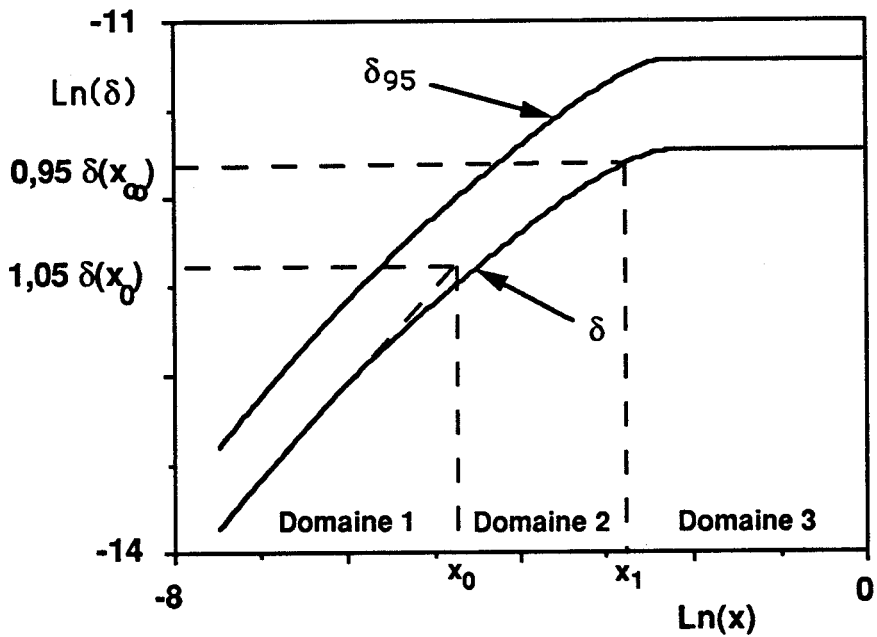


b) échelle logarithmique.

Figure 3-1: Variation de l'épaisseur de la couche limite de diffusion avec la vitesse de déplacement de la cathode pour un écoulement de type COUETTE laminaire.



a) échelle linéaire.



b) échelle logarithmique.

Figure 3-2: Evolution de la couche limite de diffusion avec l'abscisse x .
Ecoulement de COUETTE turbulent contre-courant.

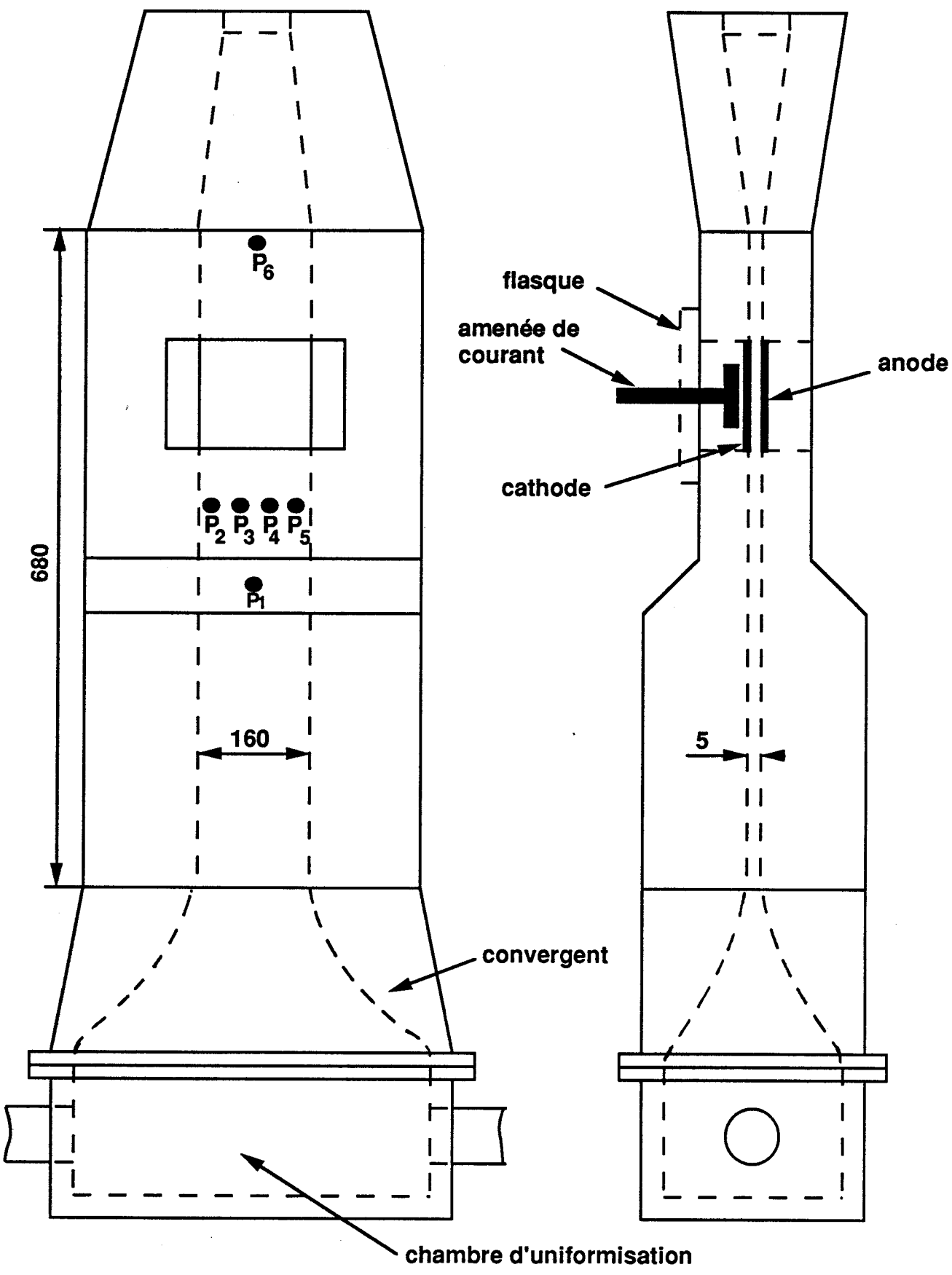


Figure 3-3: Installation expérimentale: Cellule de type carte postale

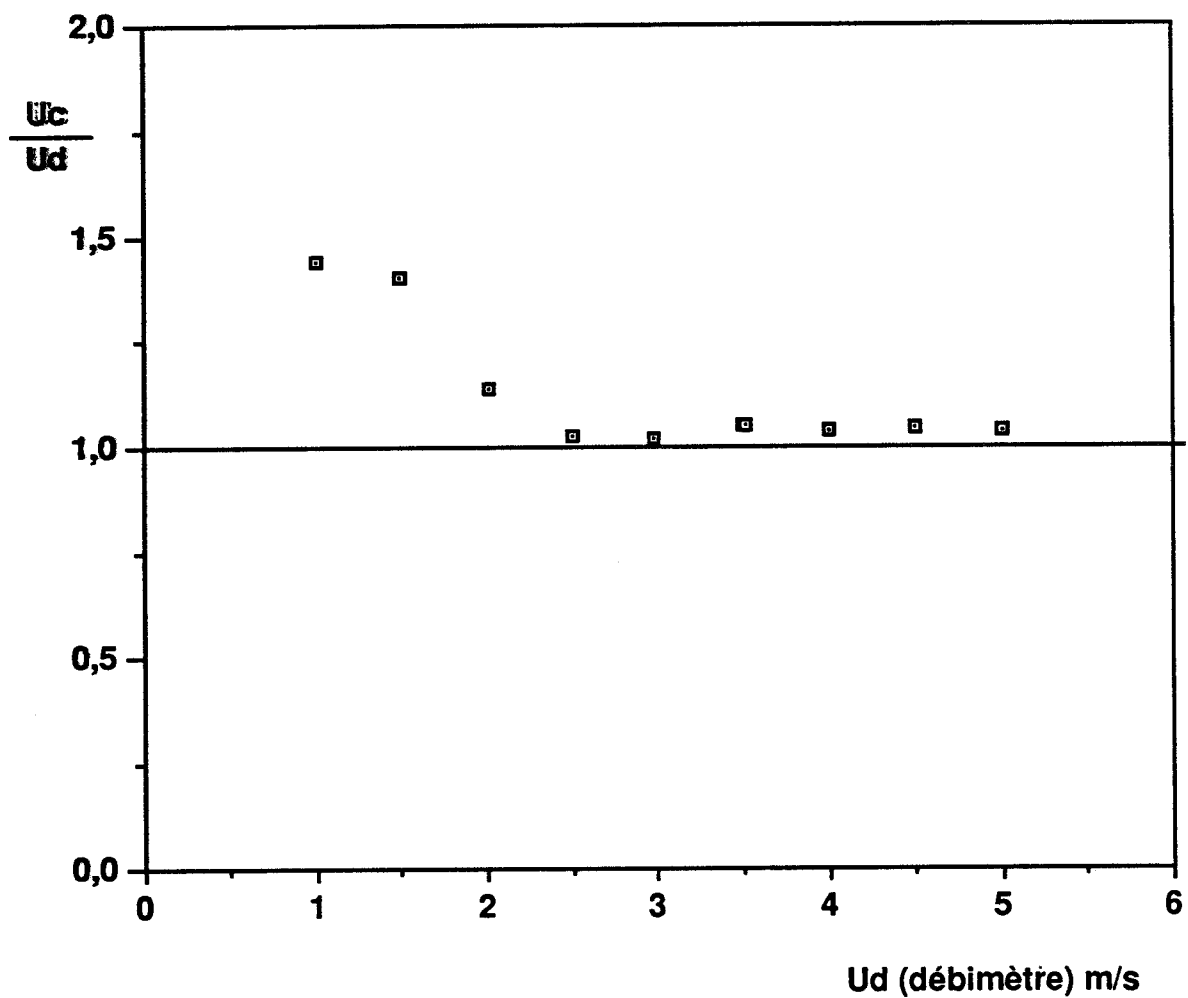
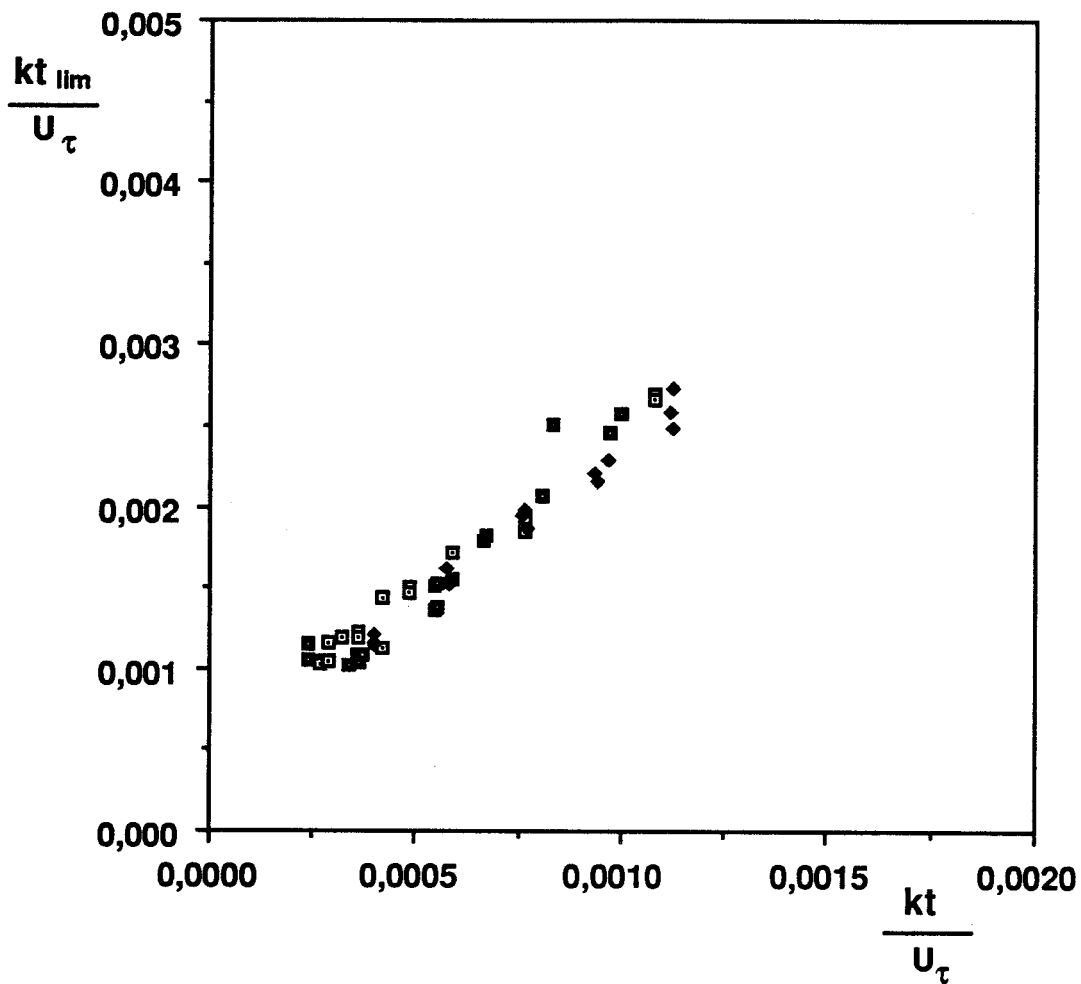


Figure 3-4: Evolution du rapport: vitesse débitante calculée sur vitesse débitante mesurée. Ecoulement dans la cellule de type carte postale.



	kt=cste	U_{τ} =cste	C_{Zn}	C_{Cd}	$C_{H_2SO_4}$
		X	1009	0,085	879
	X		1009	0,952	912
			979	2,92	998

figure 3-5: Influence de la concentration en traceur sur la densité de courant limite de diffusion mesurée.

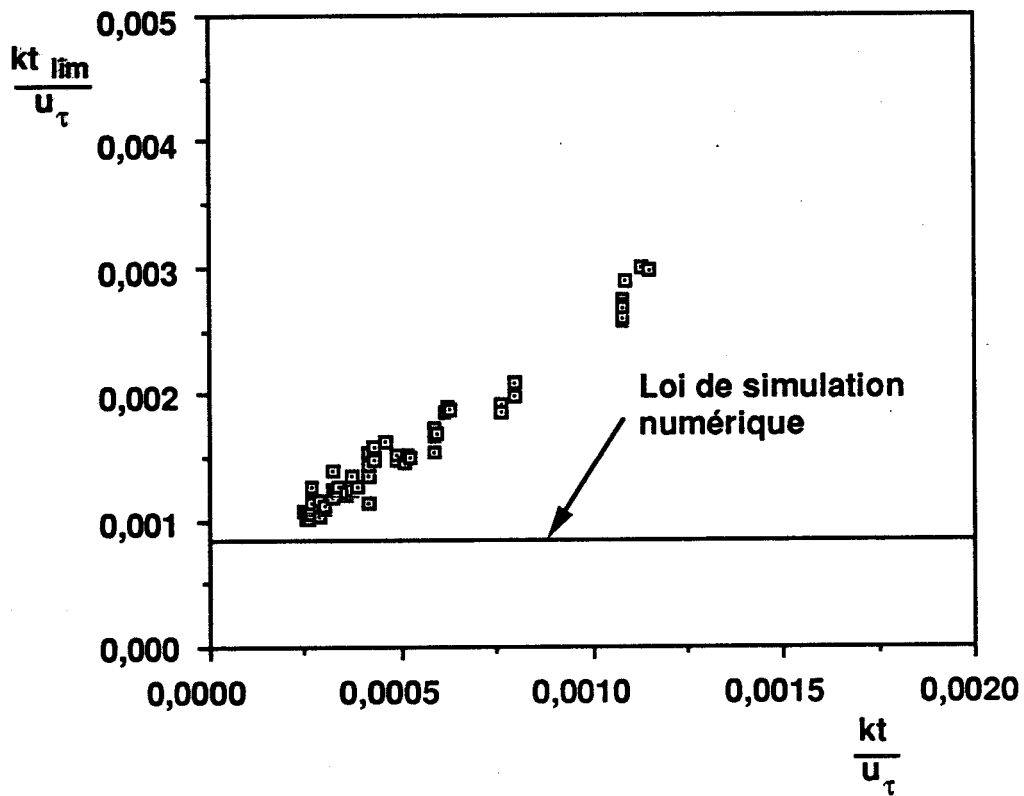
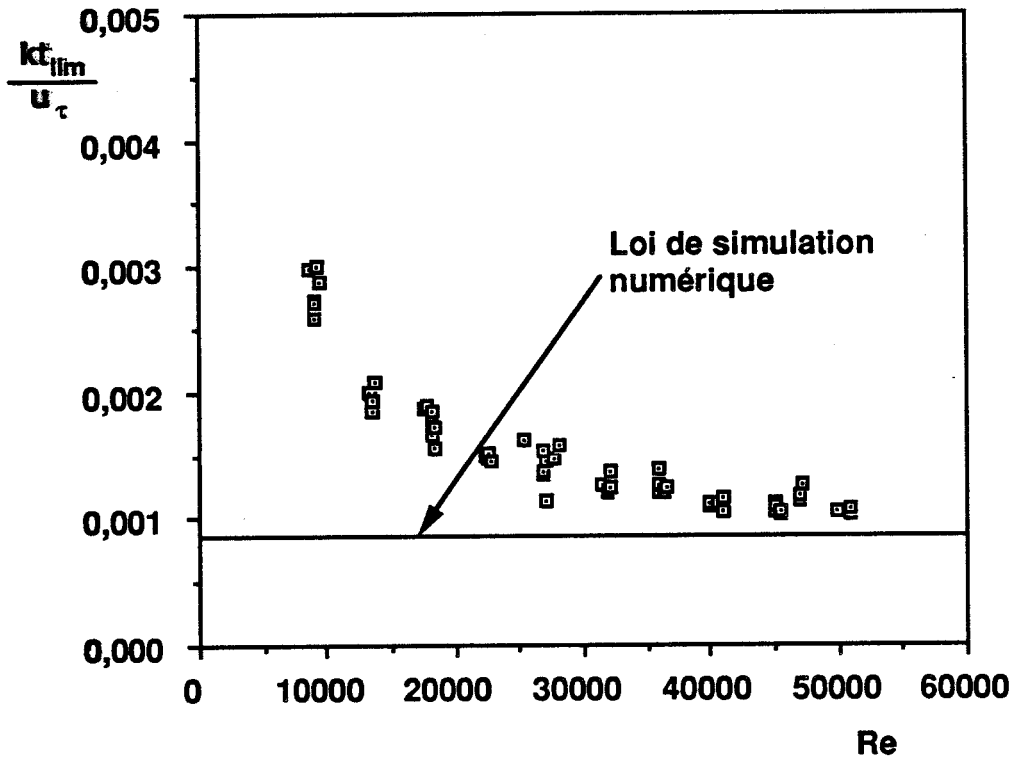


Figure 3-6: Comparaison entre les mesures brutes et la simulation numérique: Influence de l'écoulement.

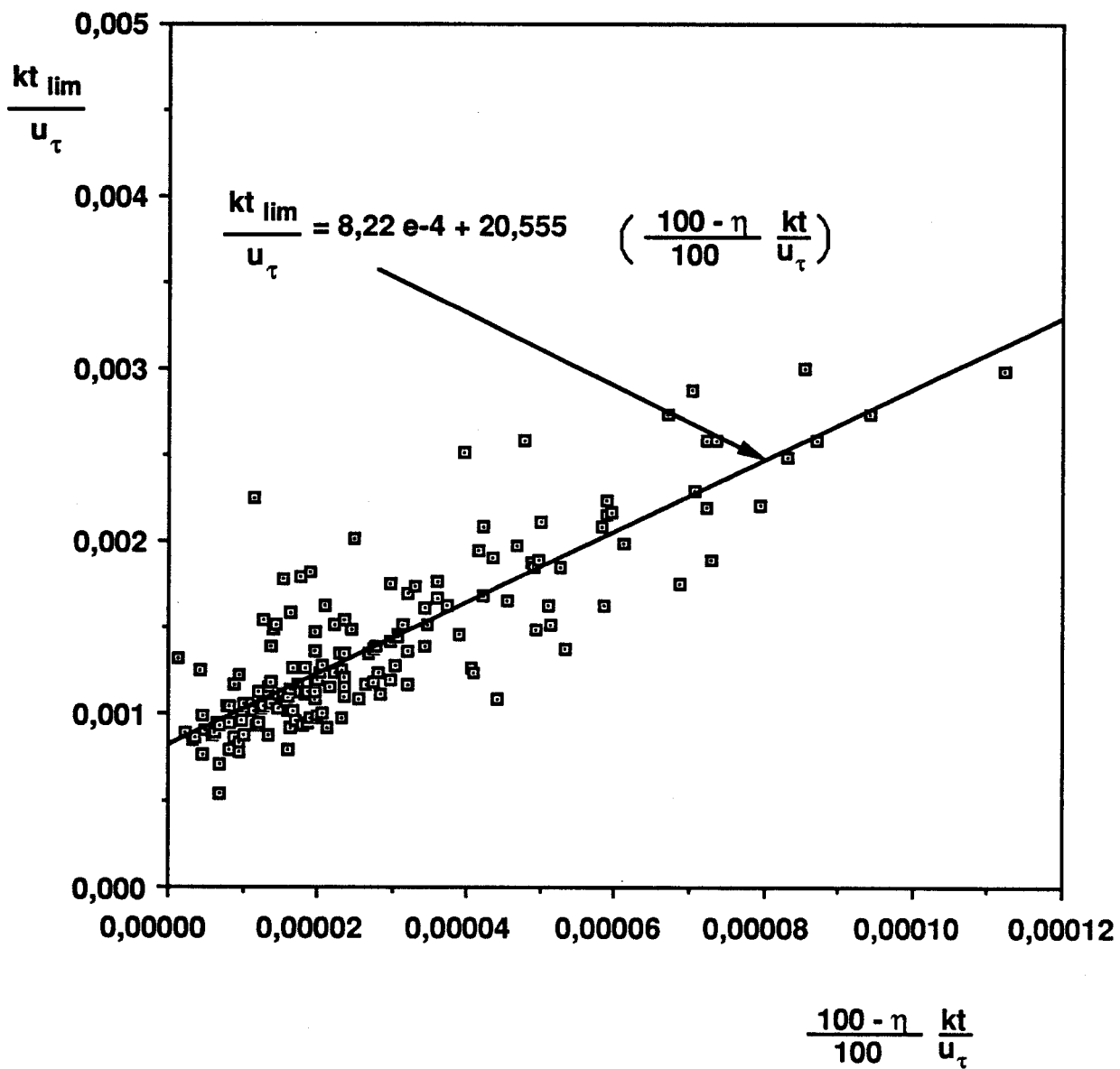
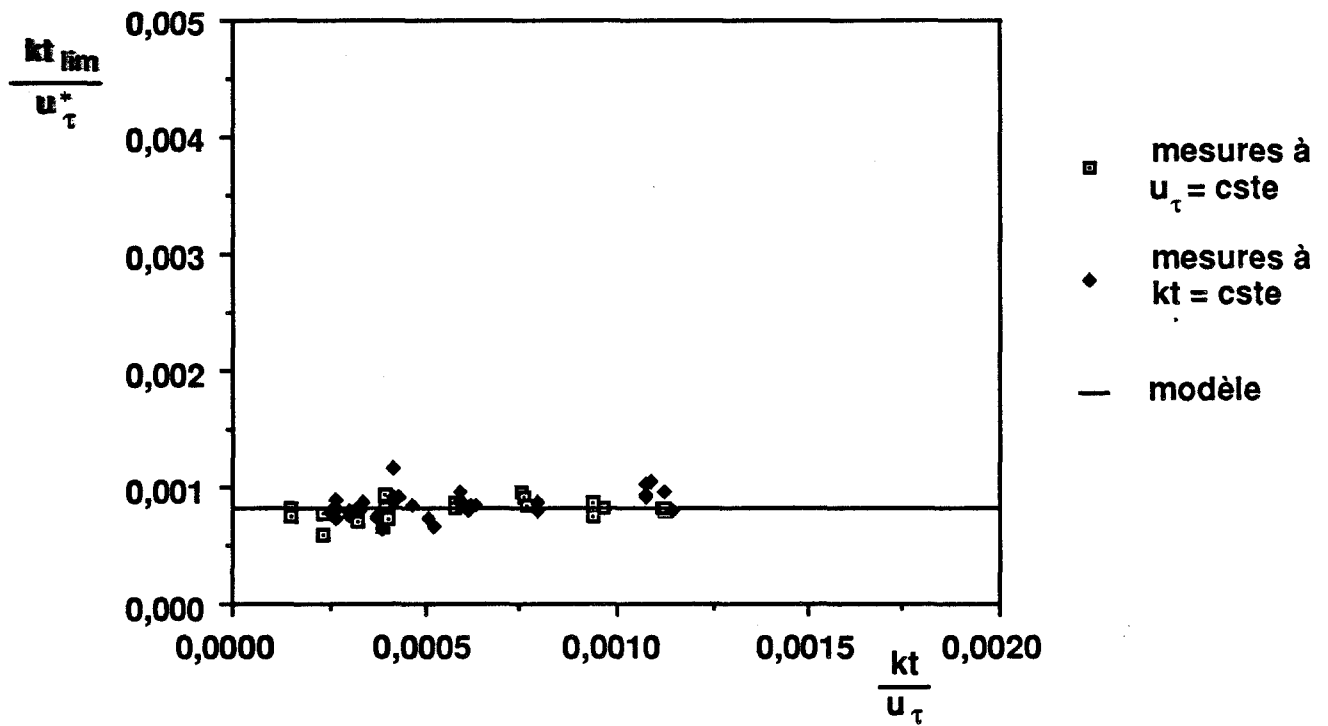
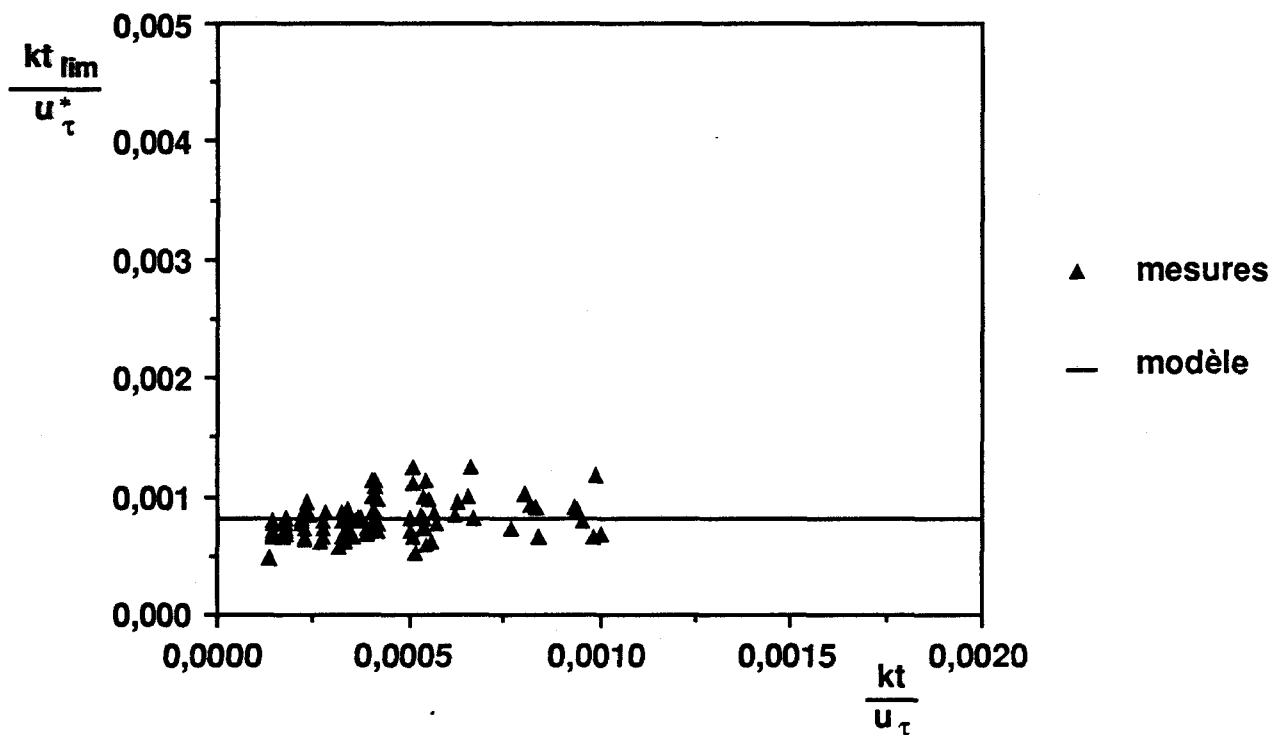


figure 3-7: Influence du dégagement d'hydrogène sur la densité de courant limite de diffusion.

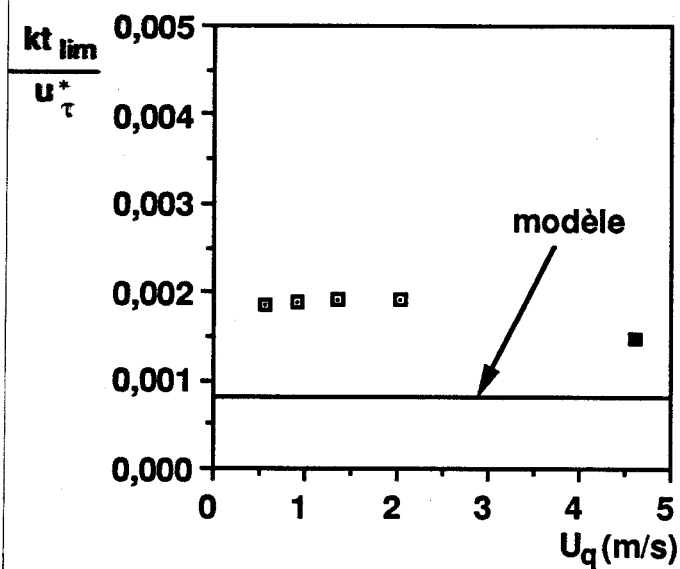


a) séries à densités de courant ou vitesses débitantes variables.

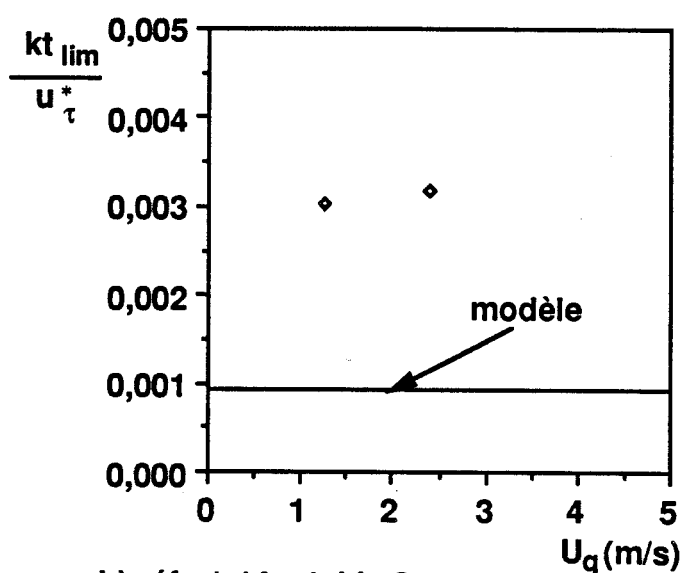


b) séries à densités de courant et vitesses débitantes variables.

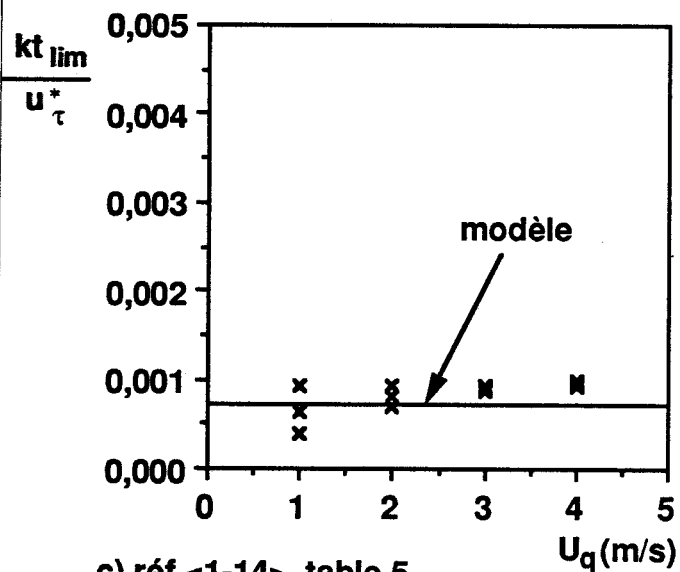
Figure 3-8: Application du modèle complet aux mesures expérimentales.



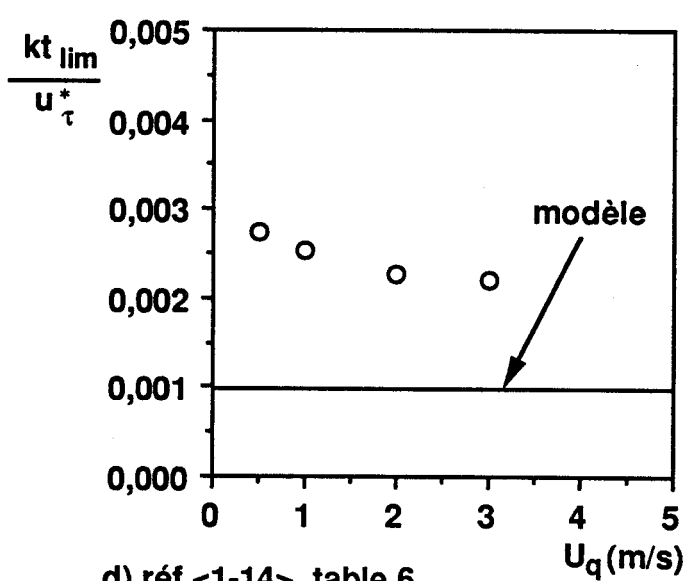
a) réf <1-14>, table 2



b) réf <1-14>, table 3



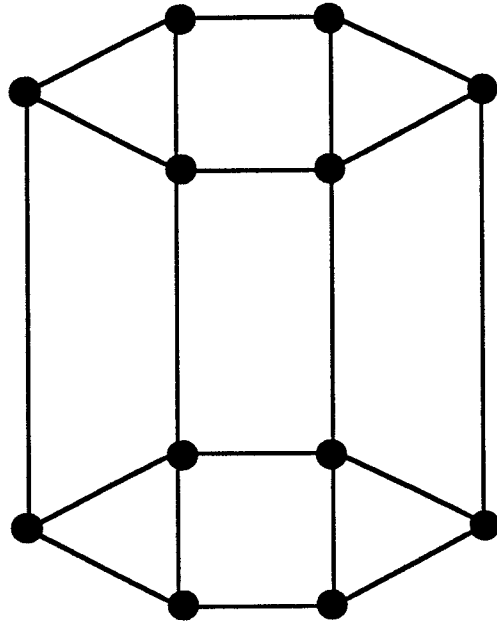
c) réf <1-14>, table 5



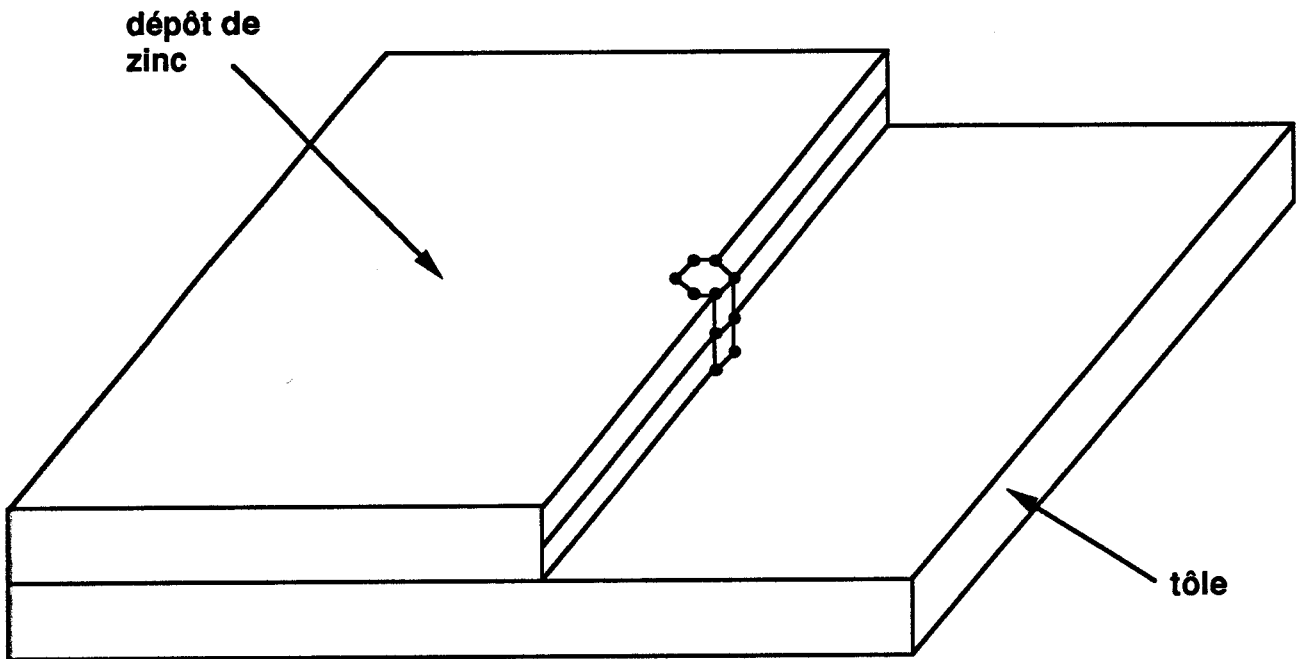
d) réf <1-14>, table 6

figure	métal	traceur	section du canal mm ²	remarques
a)	cuivre	argent	□ 16 x 15 ■ 18 x 6	pas d'hydrogène
b)	cuivre	argent	200 x 15	pas d'hydrogène
c)	zinc	cadmium	18 x 6	dégagement d'hydrogène
d)	zinc		18 x 6	mesures par la méthode potentiodynamique

figure 3-9: Application du modèle complet aux mesures de la référence <1-14>.



a) Structure cristalline du zinc.



b) Croissance mono-orientée du zinc dans le plan [0002].

figure 4-1: Structure cristalline du zinc et croissance mono-orientée.



a) dépôt industriel. (grossissement de 5000).



b) dépôt de structure mono-orientée. (grossissement de 5000).

figure 4-2: Comparaison entre les structures microscopiques d'un dépôt industriel et d'un dépôt mono-orienté.

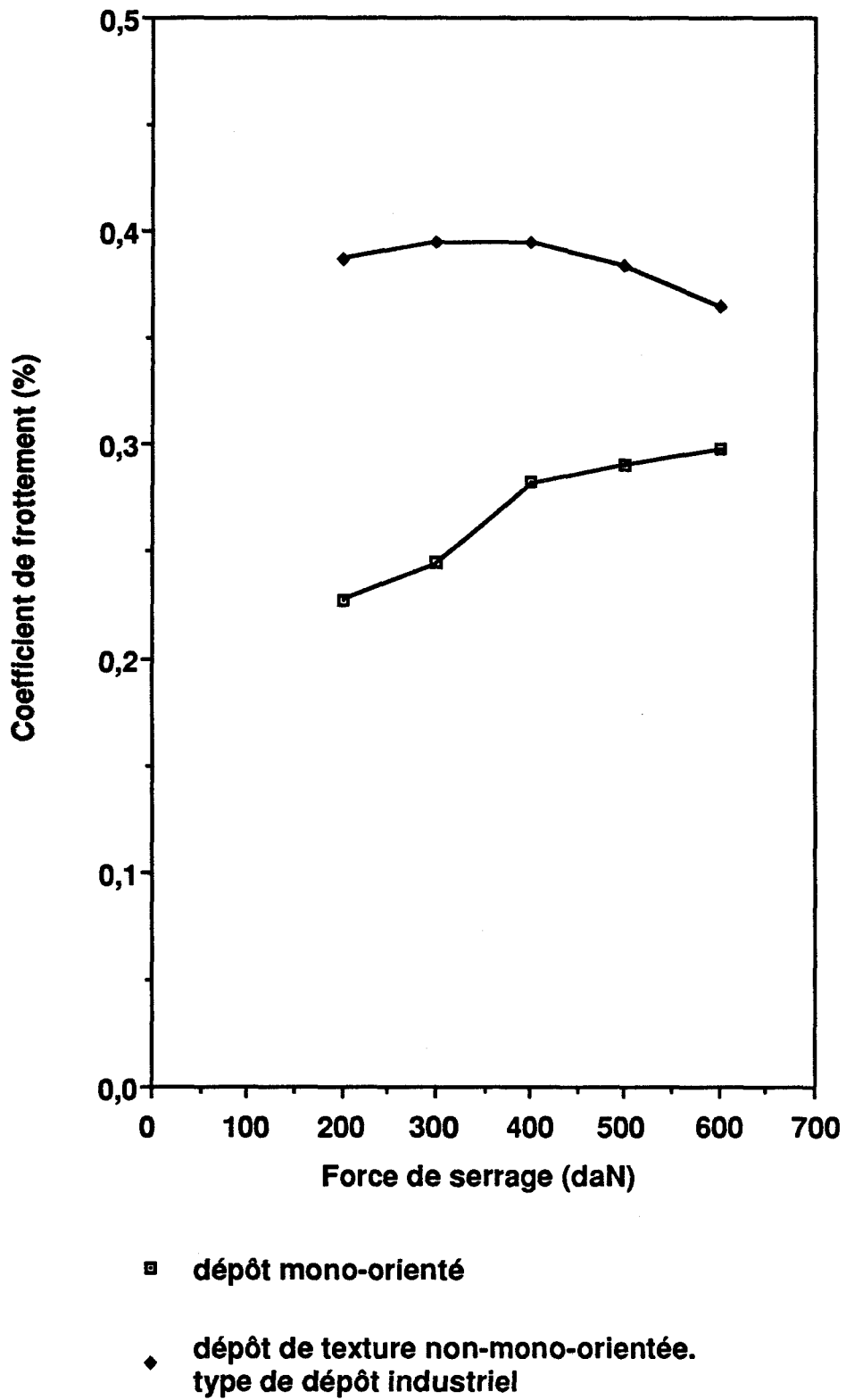


Figure 4-3: Influence de la structure du dépôt sur le coefficient de frottement.

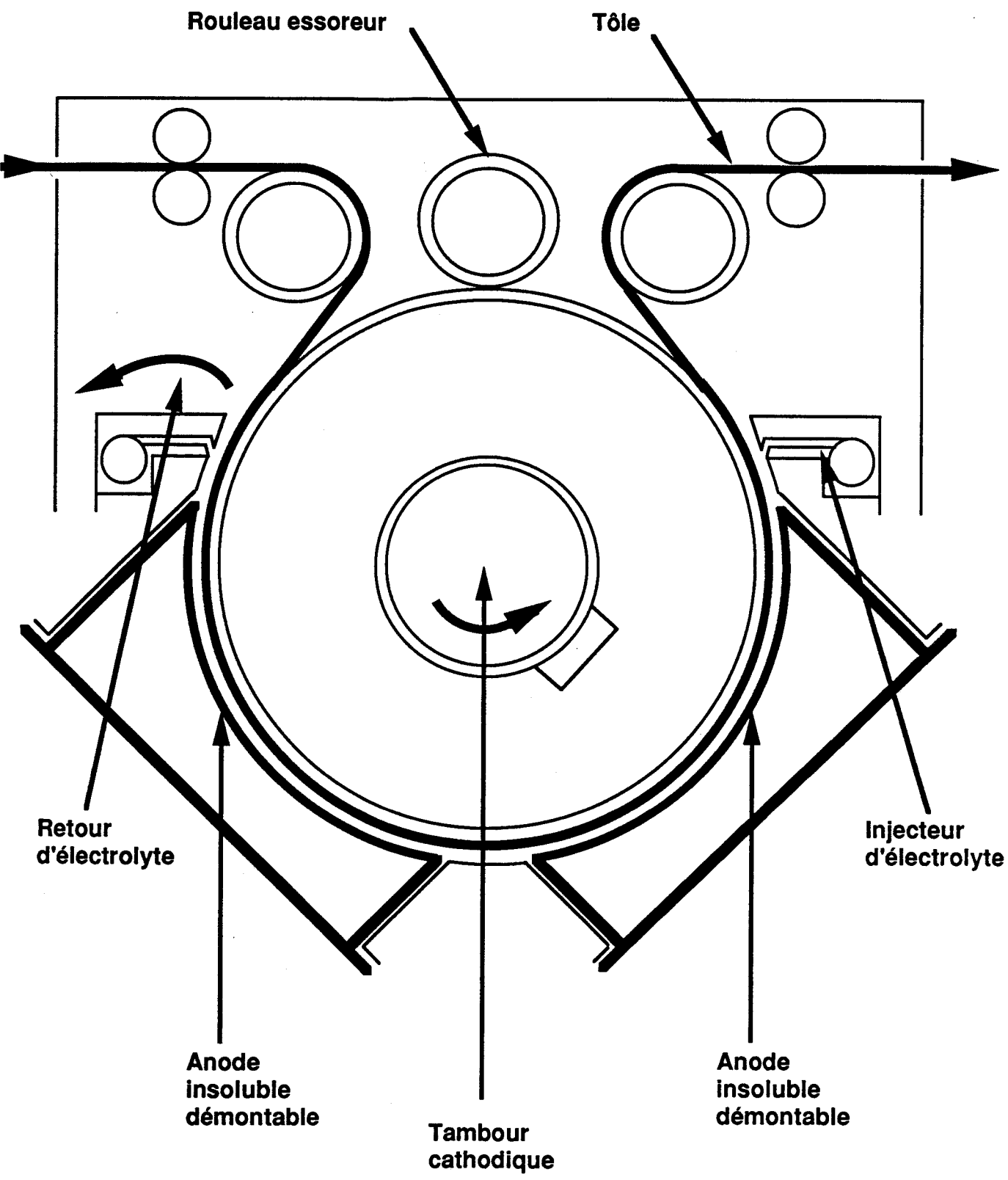


Figure 4-4: Schéma de principe d'une nouvelle cellule d'électrozingage à hydrodynamique contrôlée.

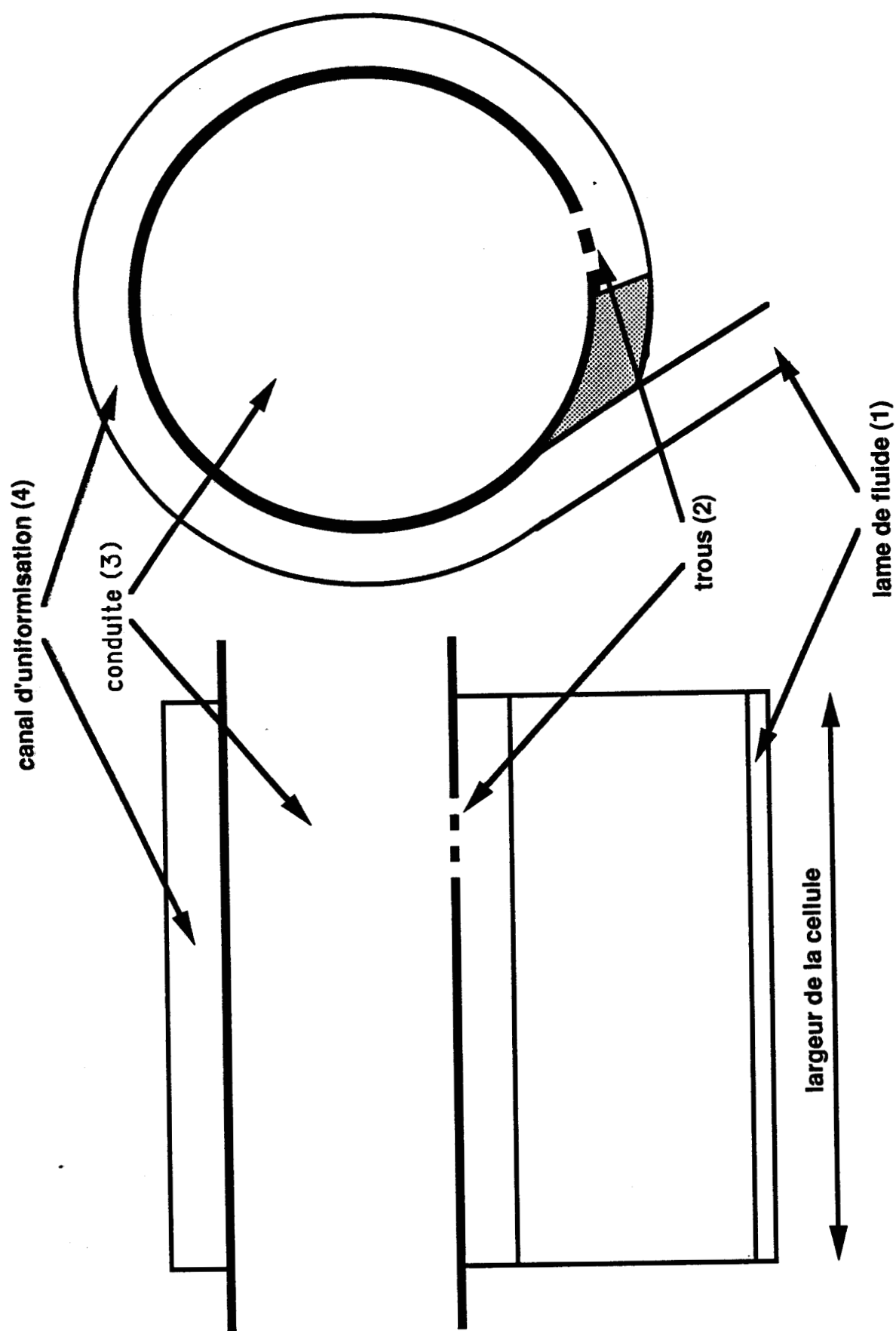


Figure 4-5: Description du corps d'injection

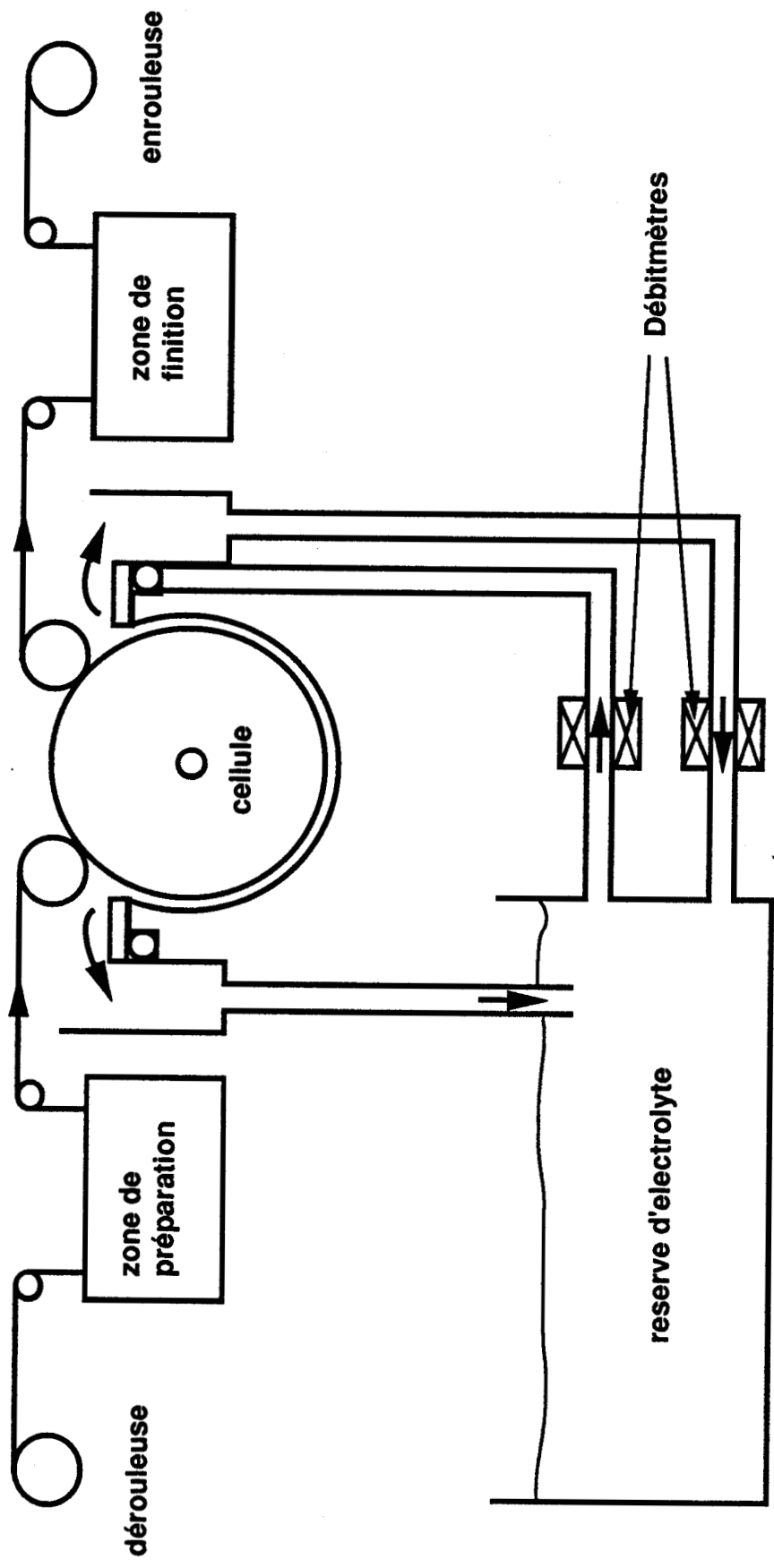
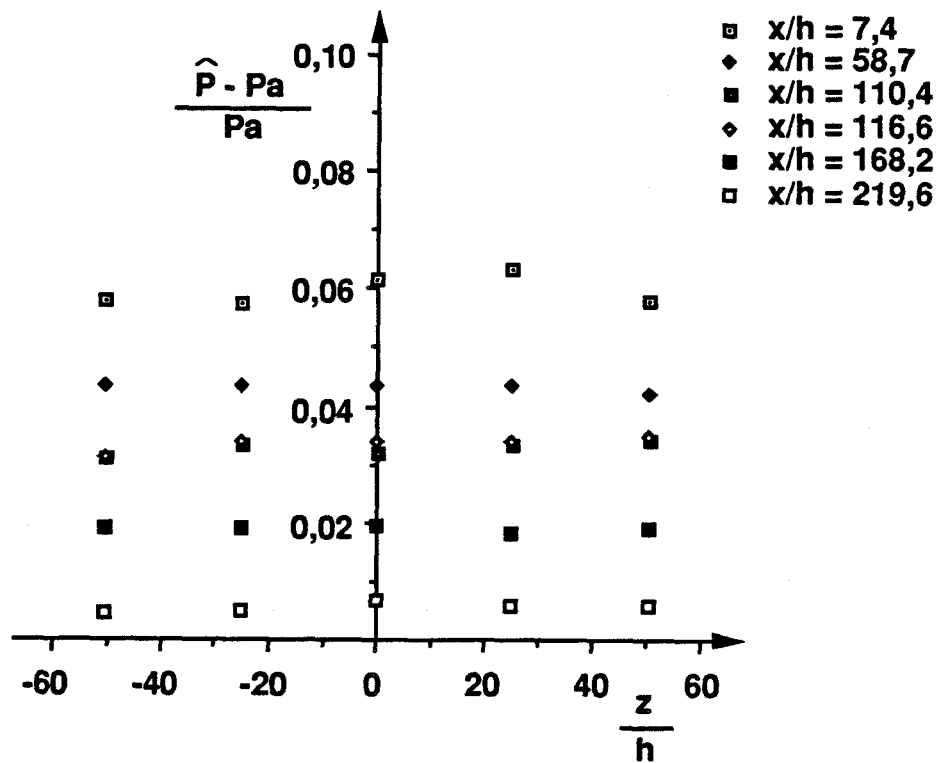
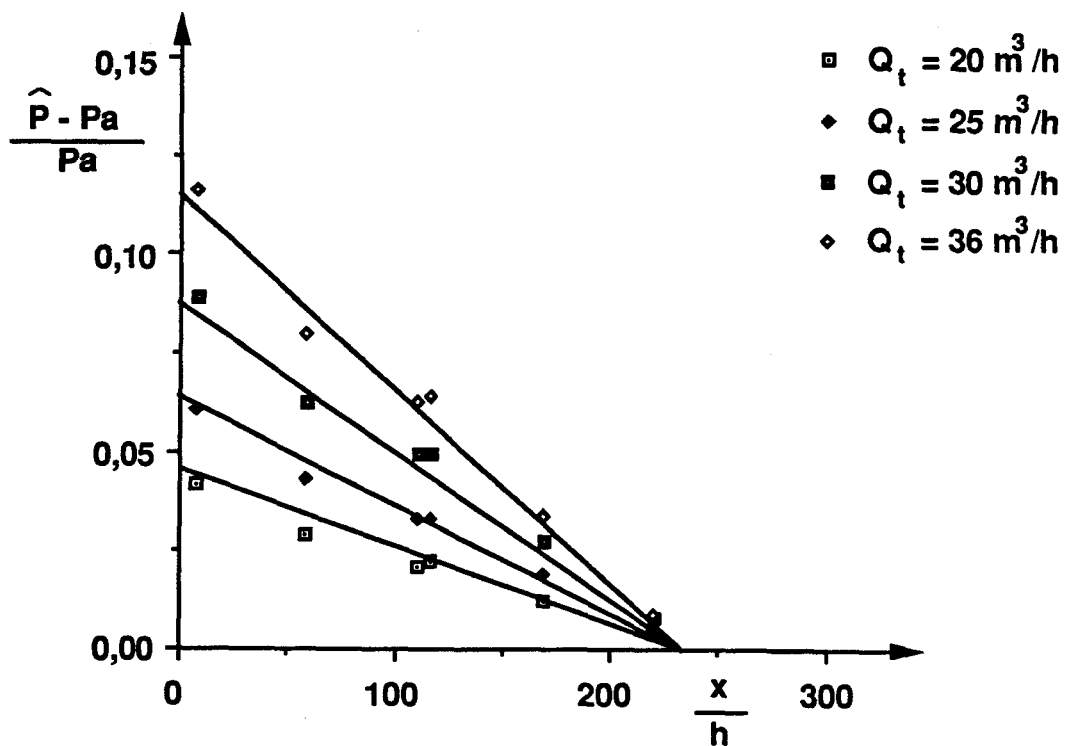


Figure 4-6: Description de la ligne pilote



a) Uniformité latérale des pressions; $V_b = 82 \text{ m/min}$, $Q_t = 20^3 \text{ m}^3/\text{h}$.



b) Evolution de la pression avec l'abscisse x ; $V_b = 82 \text{ m/min}$.

Figure 4-7: Qualification hydrodynamique du prototype de la cellule radiale.

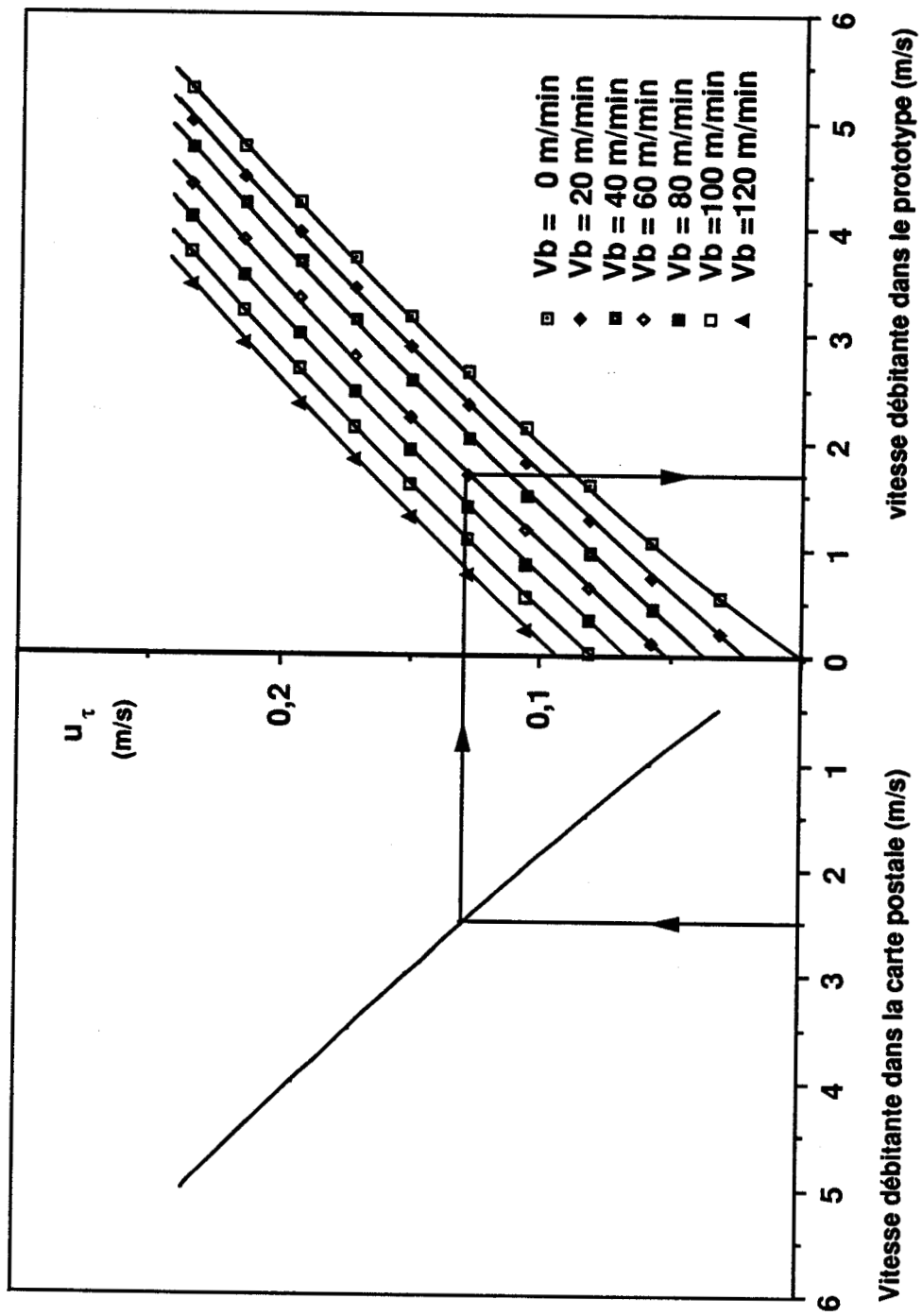


Figure 4-8: Abaque de transposition carte postale-prototype

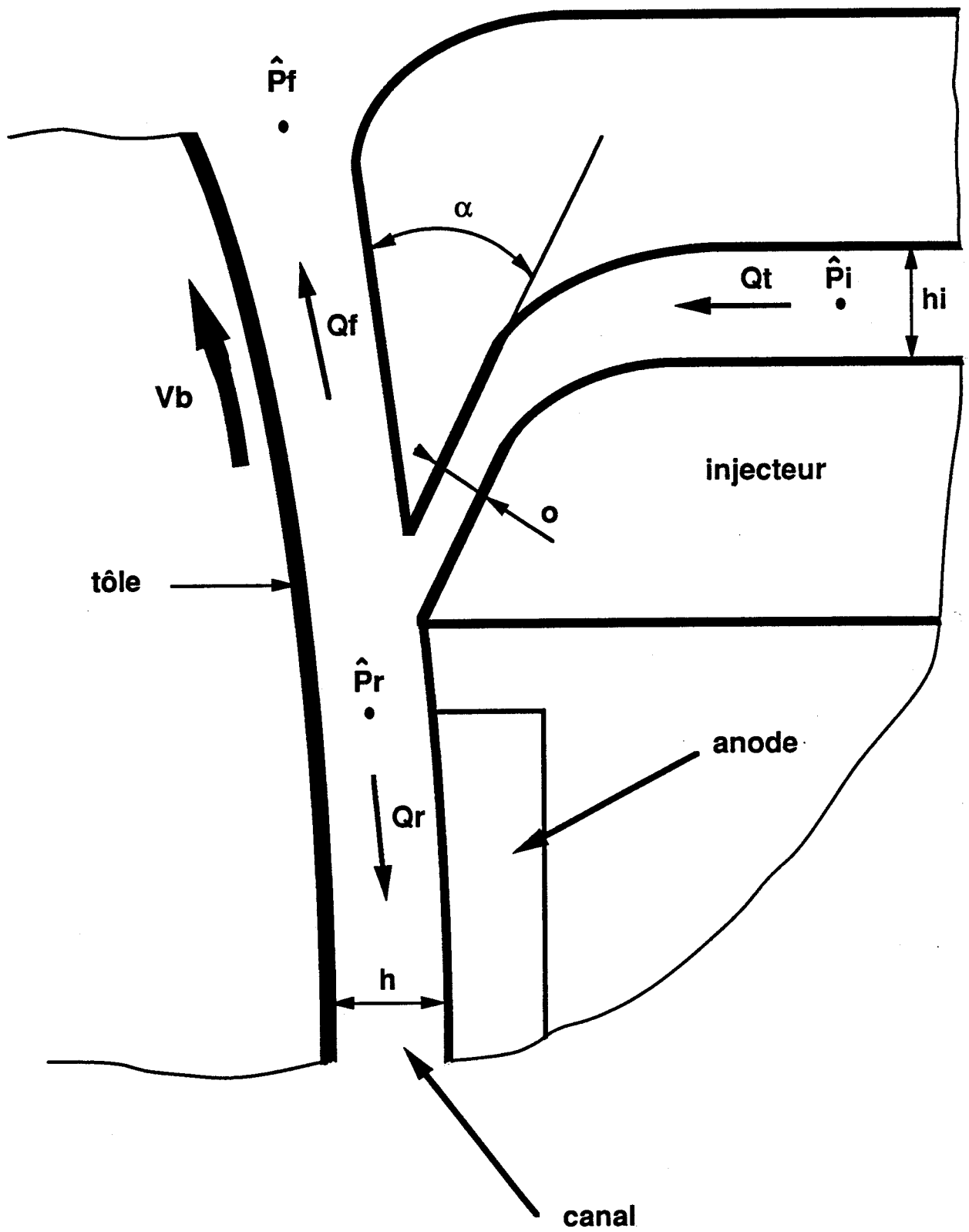


Figure 4-9: Géométrie du nez d'injection.

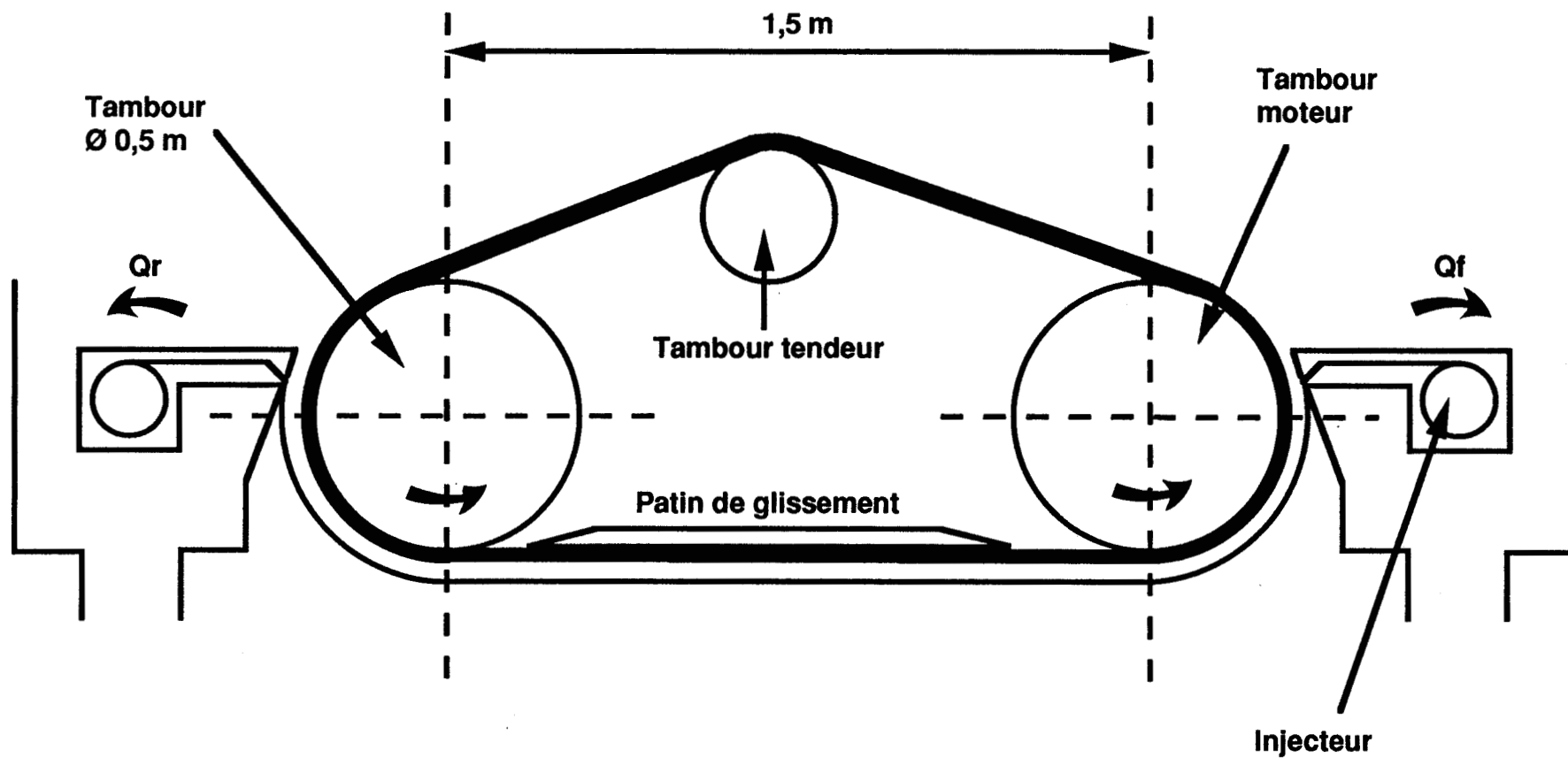


Figure 4-10: Schéma de la maquette

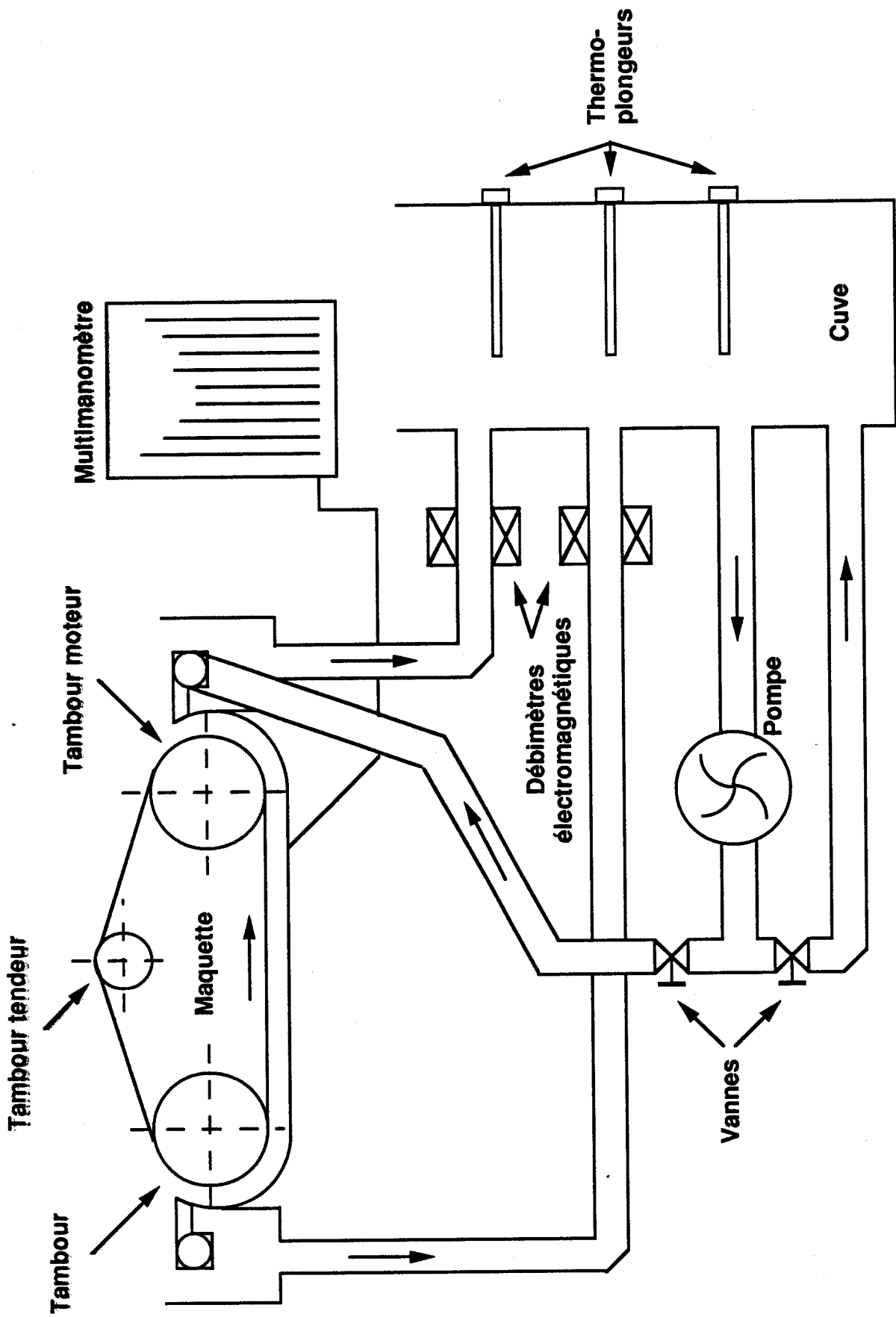


Figure 4-11: Installation expérimentale.

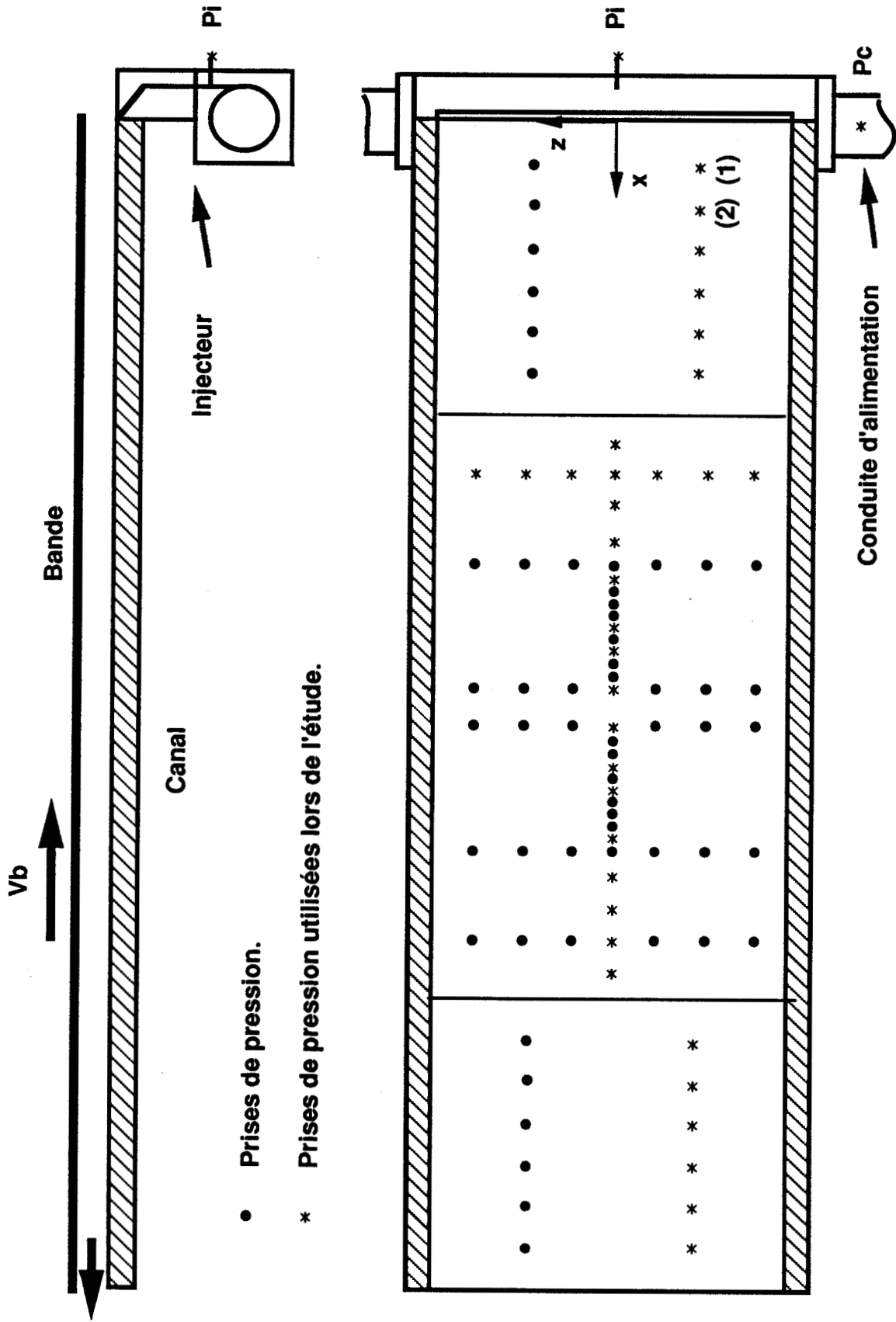
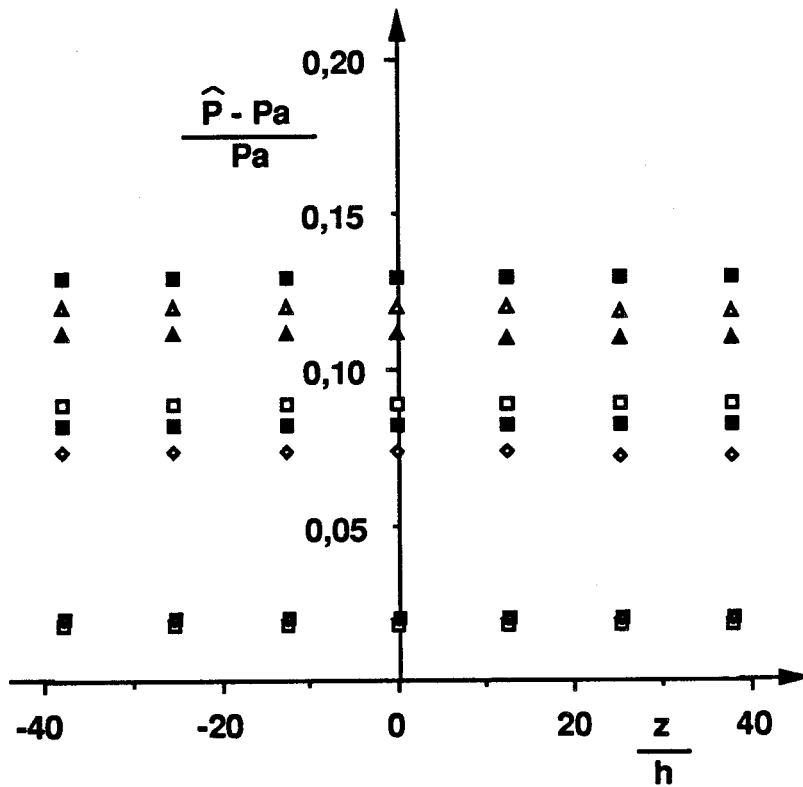
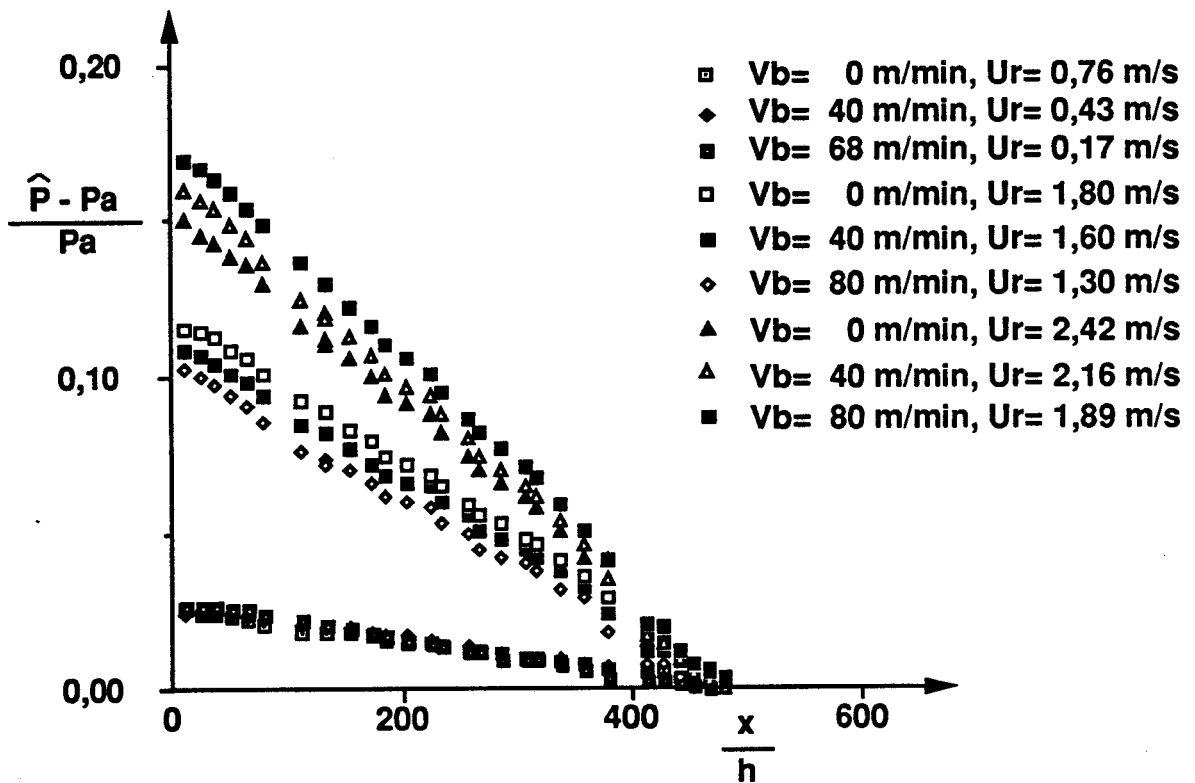


Figure 4-12: Instrumentation de la maquette en prises de pression statique.

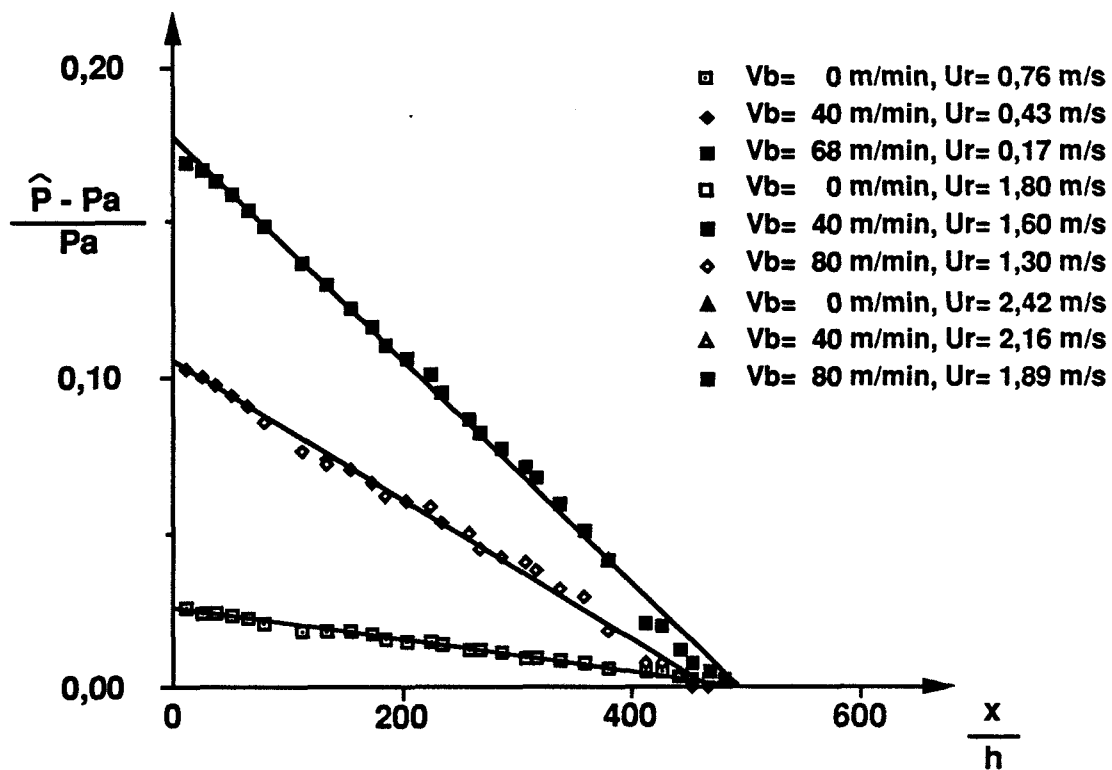


a) Uniformité latérale des pressions.

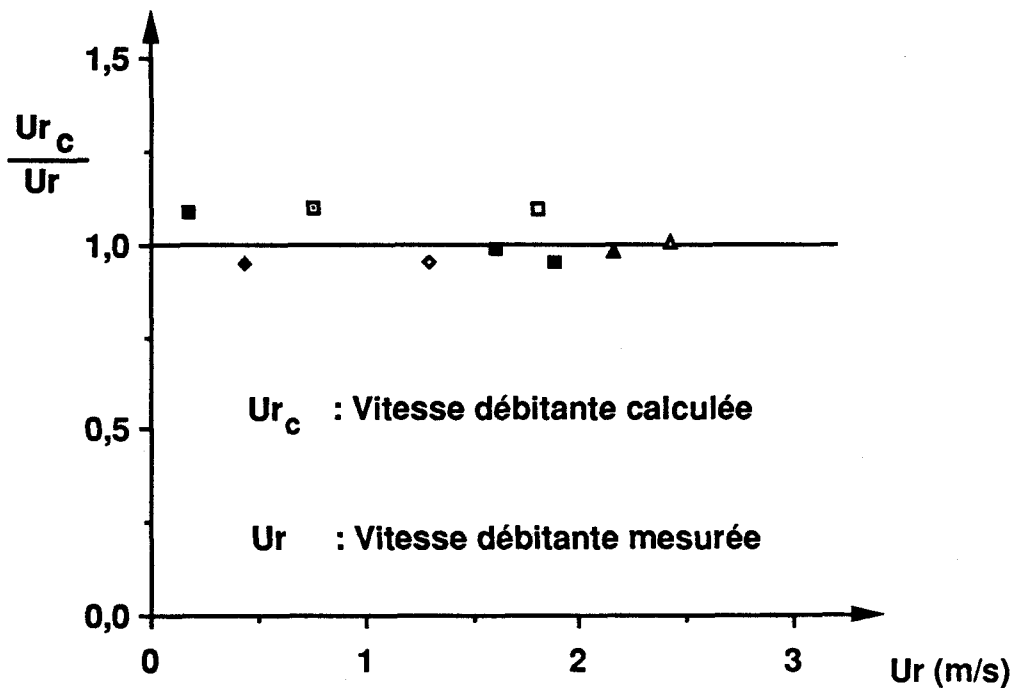


b) Evolution de la pression avec l'abscisse x.

Figure 4-13: Qualification hydrodynamique de la maquette. Nez d'injection d'angle $\alpha = 15^\circ$ et de rapport d'ouverture $o/h = 0,31$.

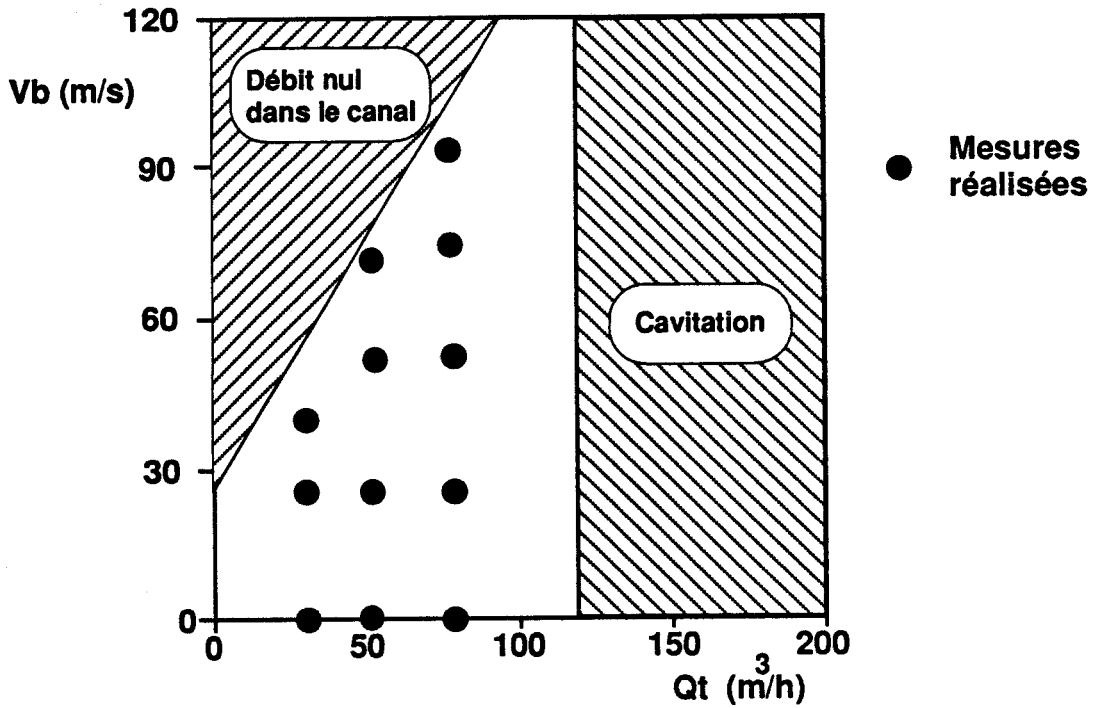


a) Gradients de pression. Régressions linéaires

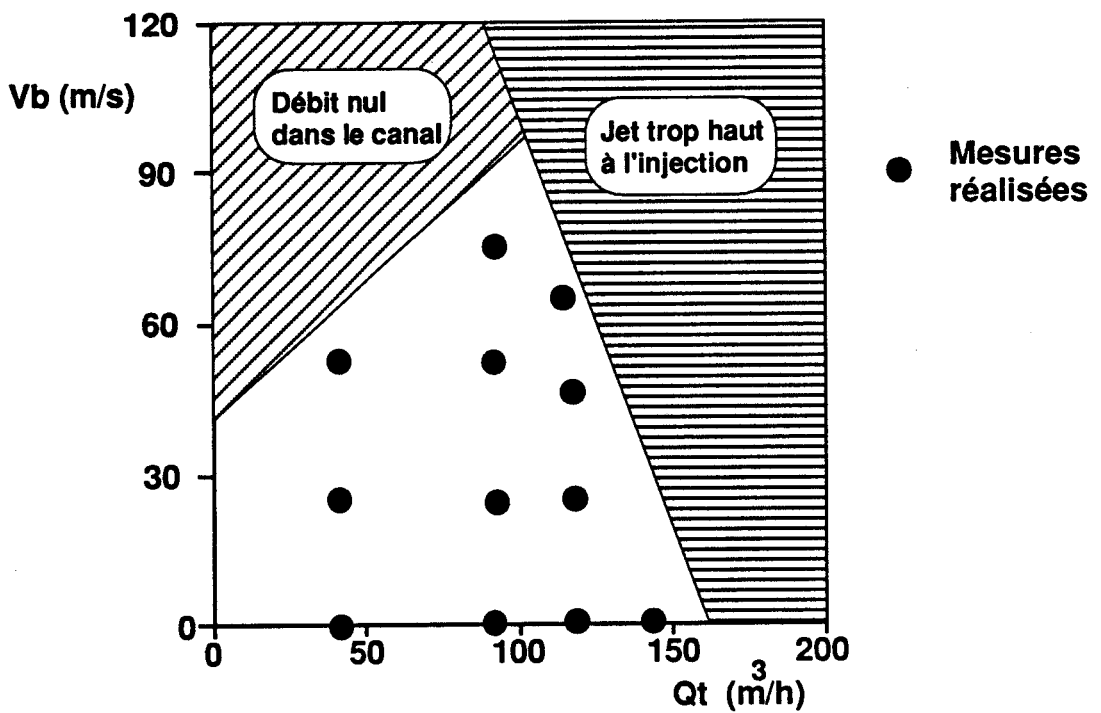


b) Confrontation entre les mesures et le calcul des vitesses débitantes.

Figure 4-14: Exploitation des mesures des gradients de pression. Nez d'injection d'angle $\alpha = 15^\circ$ et de rapport d'ouverture $o/h = 0,31$.

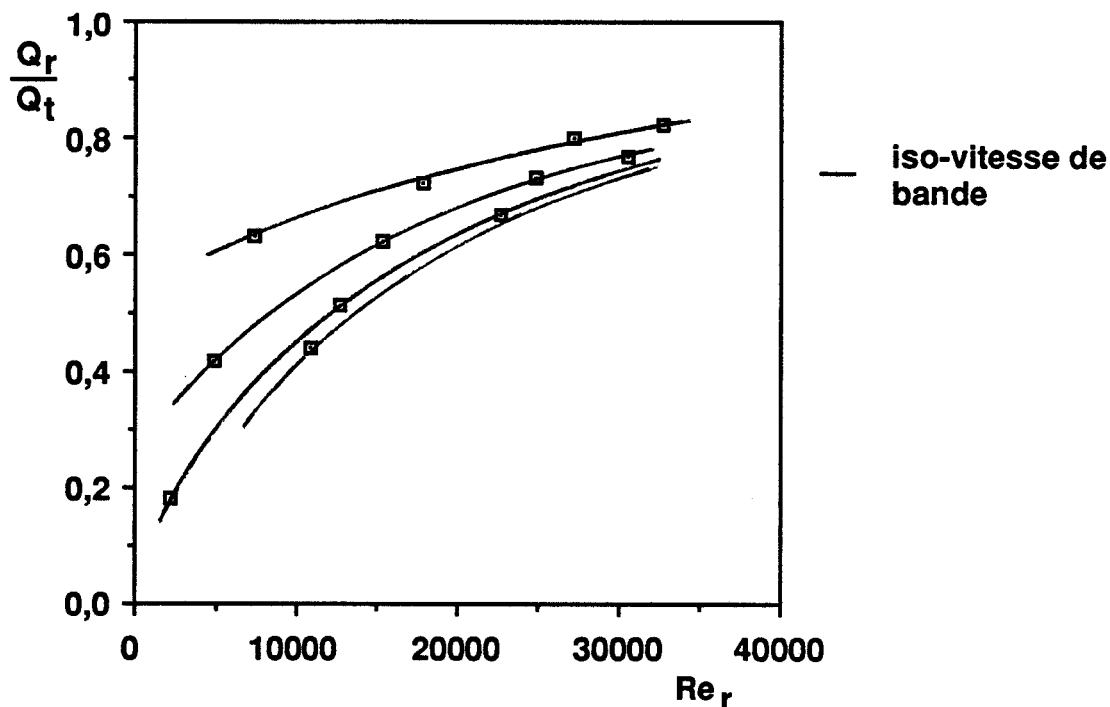


a) Nez d'injection d'angle $\alpha=45^\circ$ et de rapport d'ouverture $o/h=0,31$

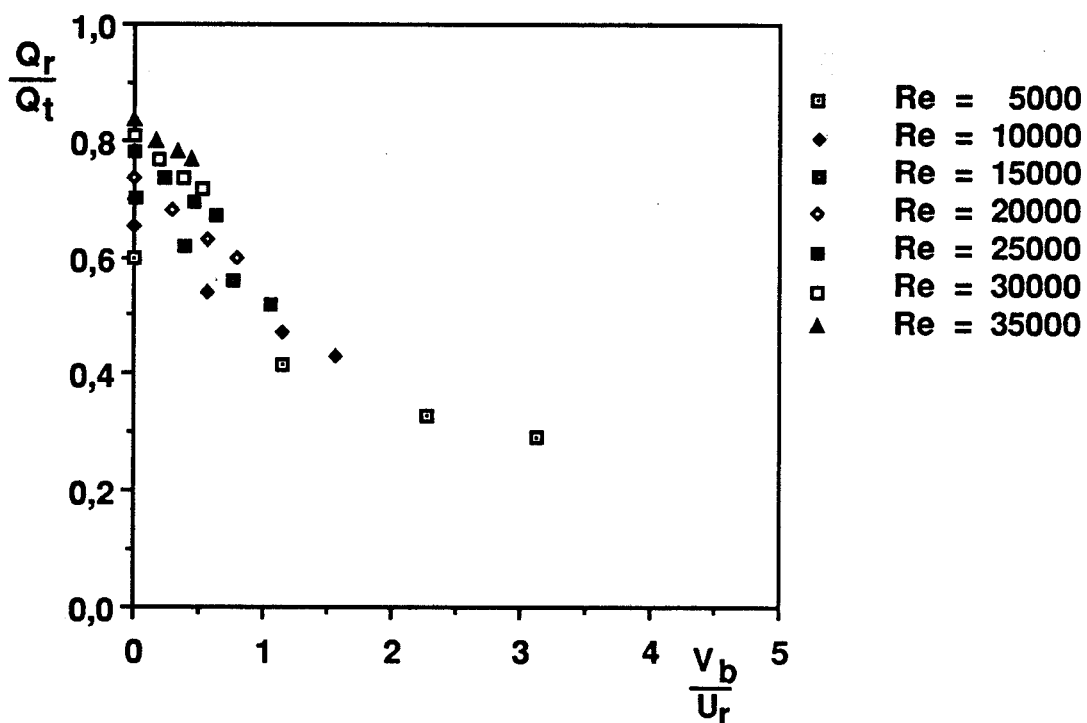


b) Nez d'injection d'angle $\alpha=15^\circ$ et de rapport d'ouverture $o/h=0,63$

Figure 4-15: Domaine de fonctionnement de la cellule industrielle pour deux nez d'injection différents.

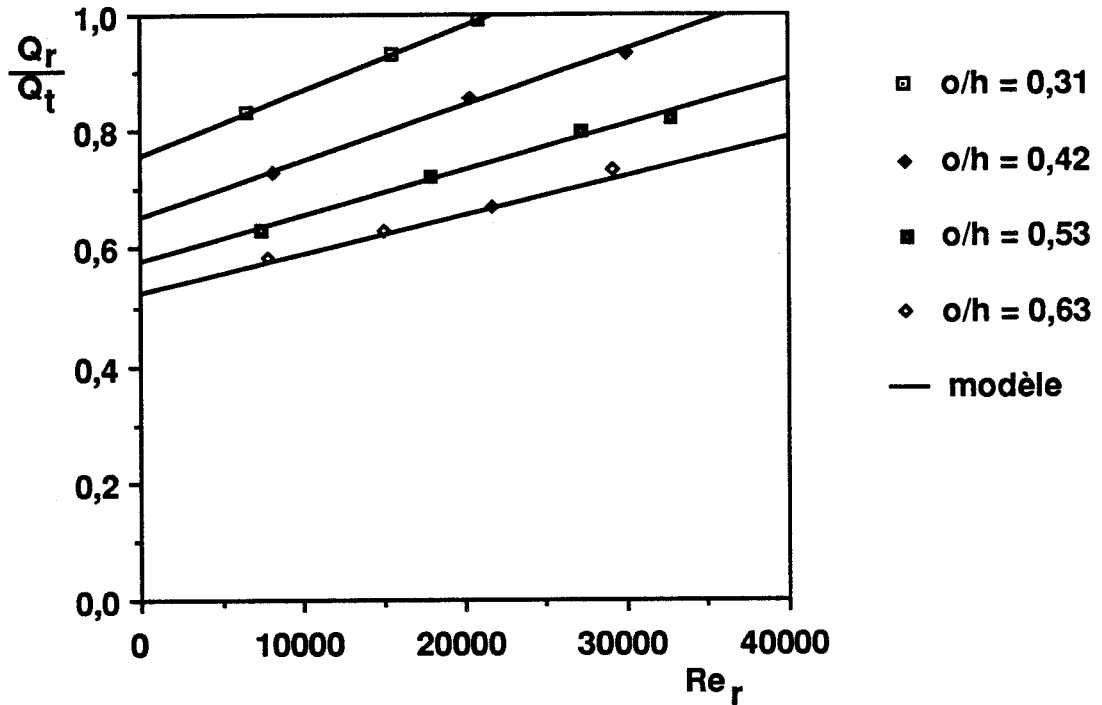


a) Variation de la répartition du débit total avec le nombre de REYNOLDS

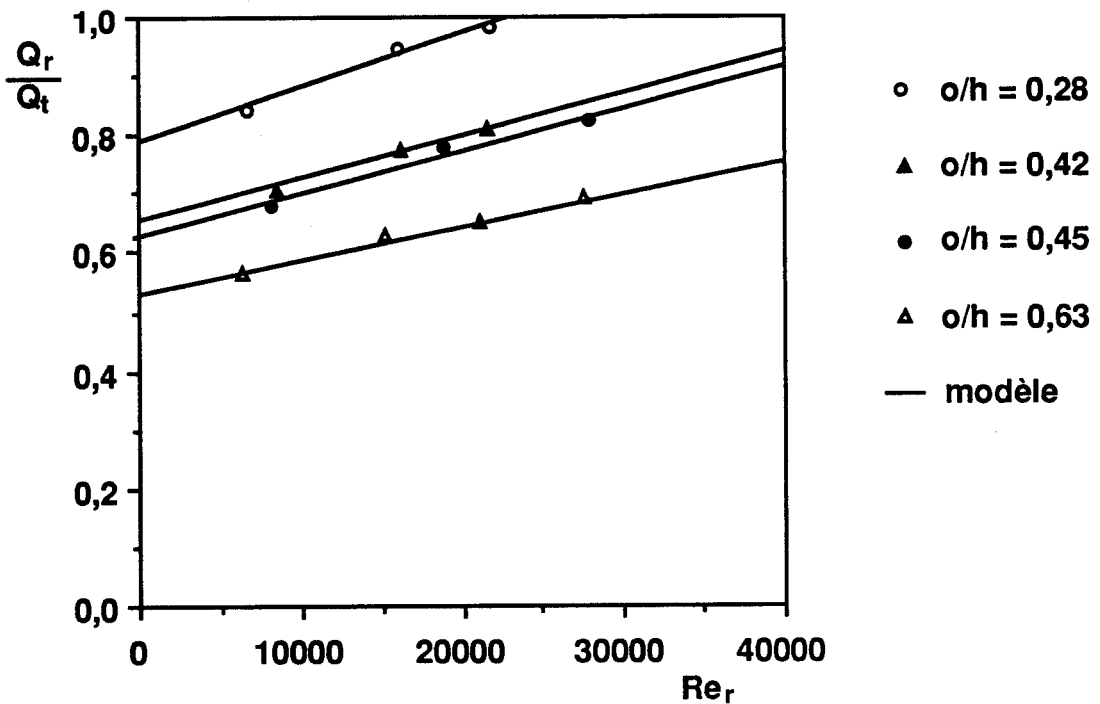


b) Variation de la repartition du débit total à nombre de REYNOLDS constant.

Figure 4-16: Répartition du débit injecté en fonction des paramètres dynamiques. Nez d'injection d'angle $\alpha=15^\circ$ et de rapport d'ouverture $\sigma/h=0,53$

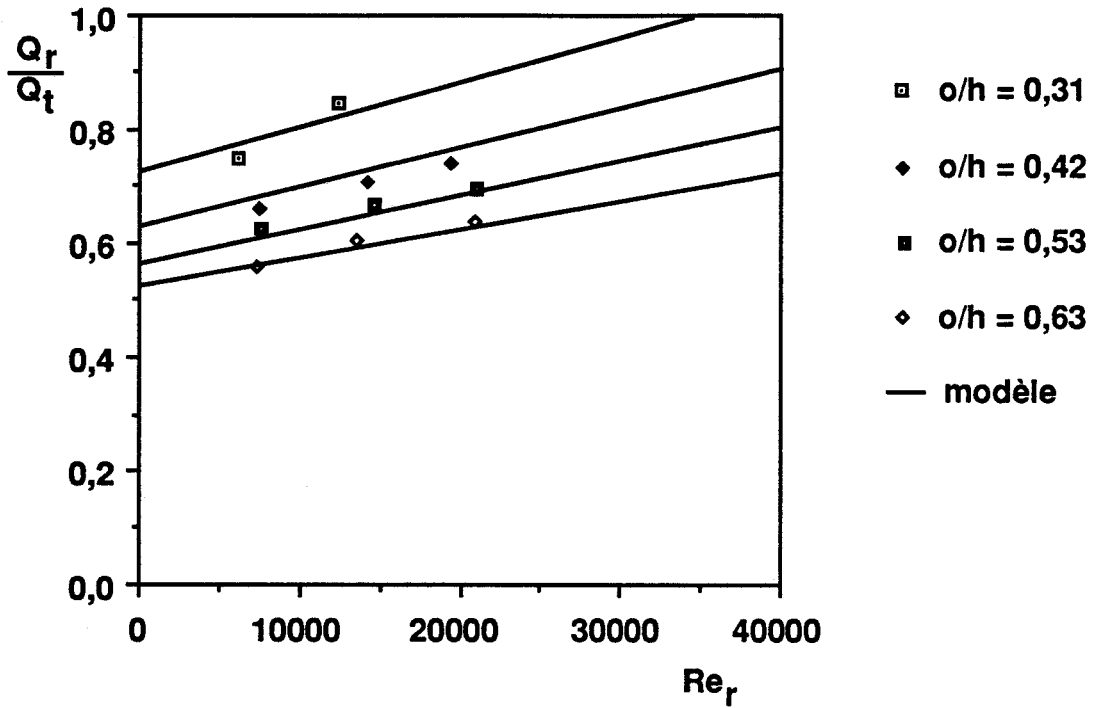


a) Nez d'injection d'angle $\alpha = 15^\circ$.

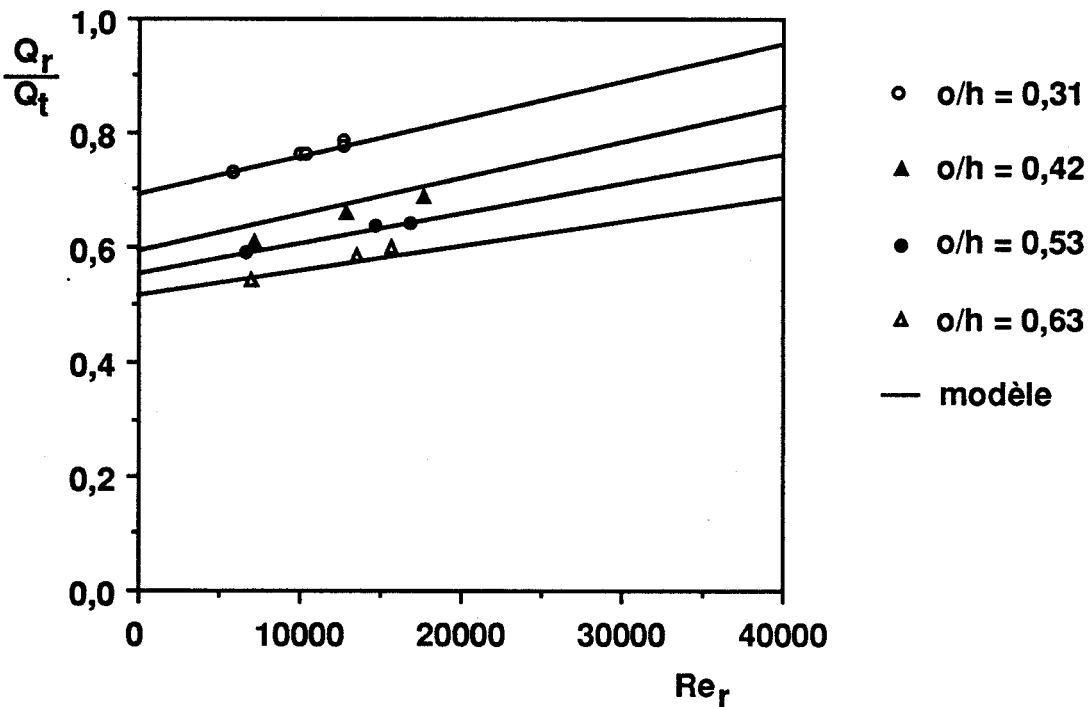


b) Nez d'injection d'angle $\alpha = 25^\circ$.

Figure 4-17: Répartition du débit total injecté pour les nez d'angle 15° et 25° . Confrontation entre le modèle et les expériences.

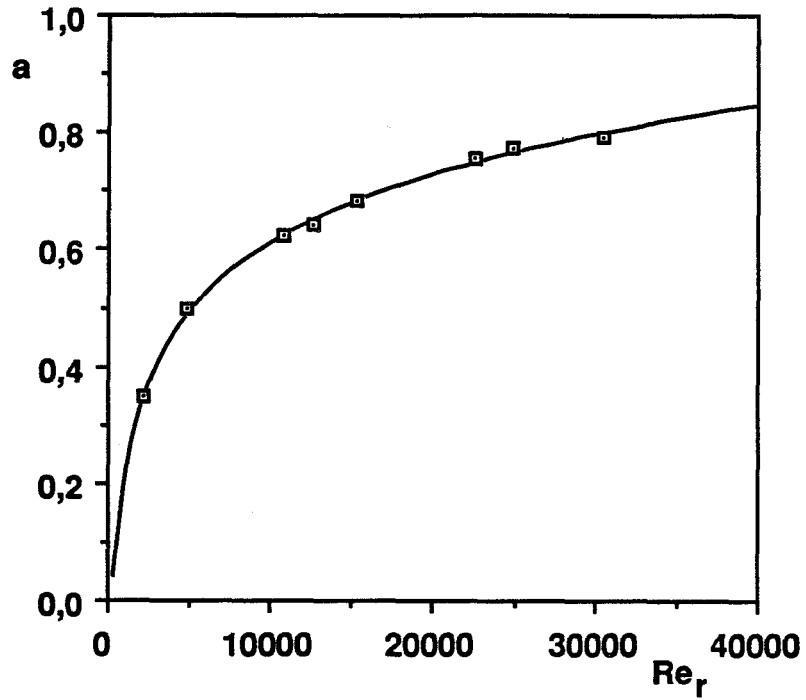


a) Nez d'injection d'angle $\alpha = 35^\circ$.

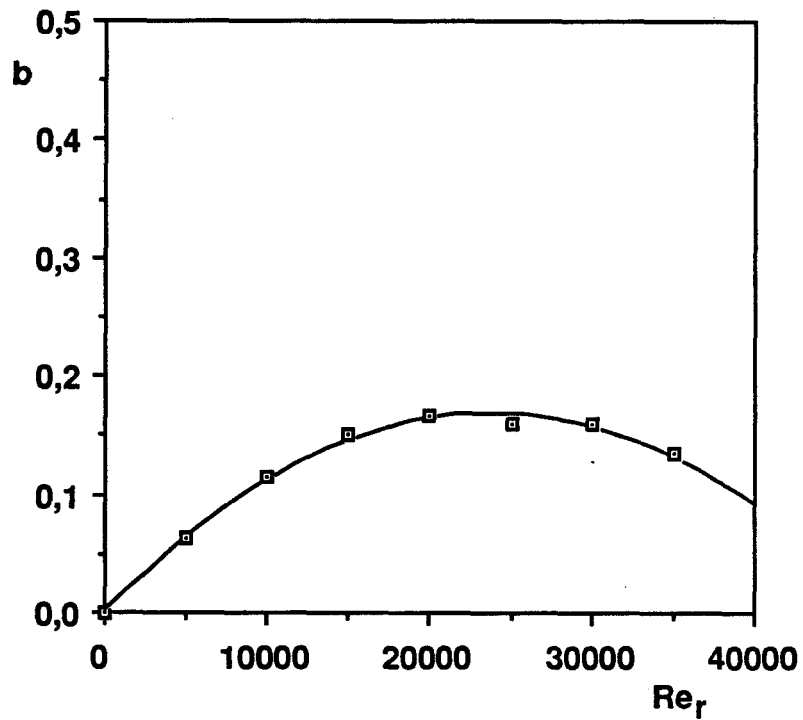


b) Nez d'injection d'angle $\alpha = 45^\circ$.

Figure 4-18: Répartition du débit total injecté pour les nez d'angle 35° et 45° . Confrontation entre le modèle et les expériences.

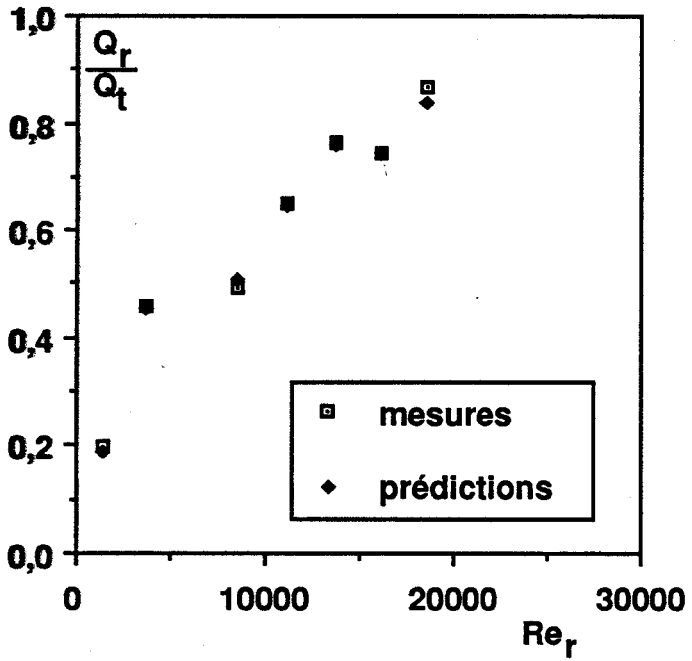


a) évolution de la variable a avec le nombre de REYNOLDS

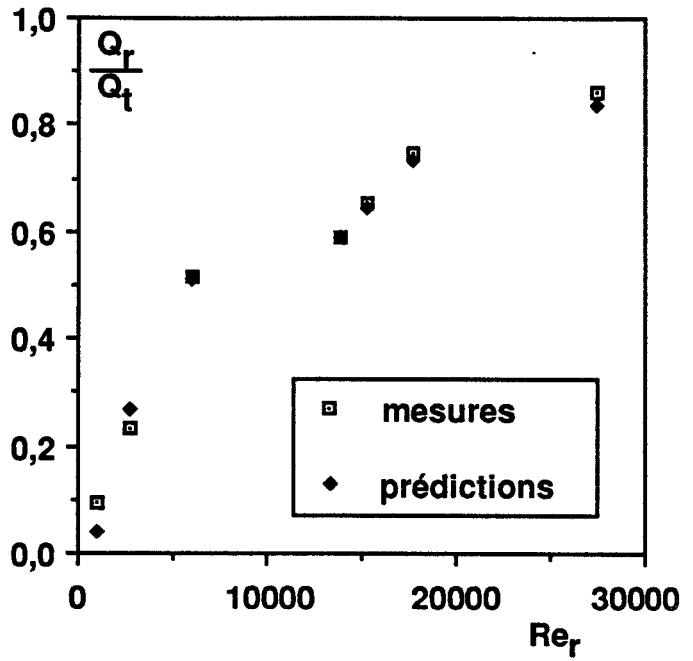


b) évolution de la variable b avec le nombre de REYNOLDS

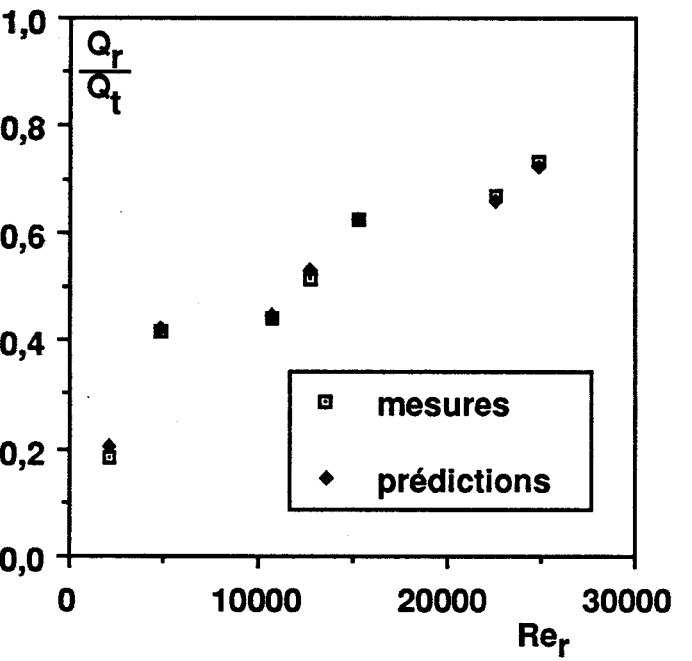
Figure 4-19: Répartition du débit total injecté. Bande en mouvement. Nez d'injection d'angle $\alpha = 15^\circ$ et d'ouverture $o/h = 0,53$.



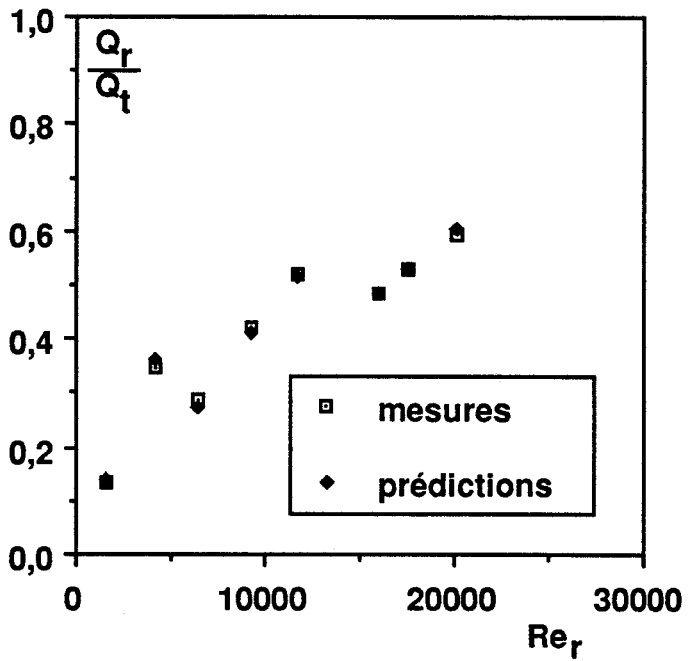
a) $o/h = 0,31$



b) $o/h = 0,42$

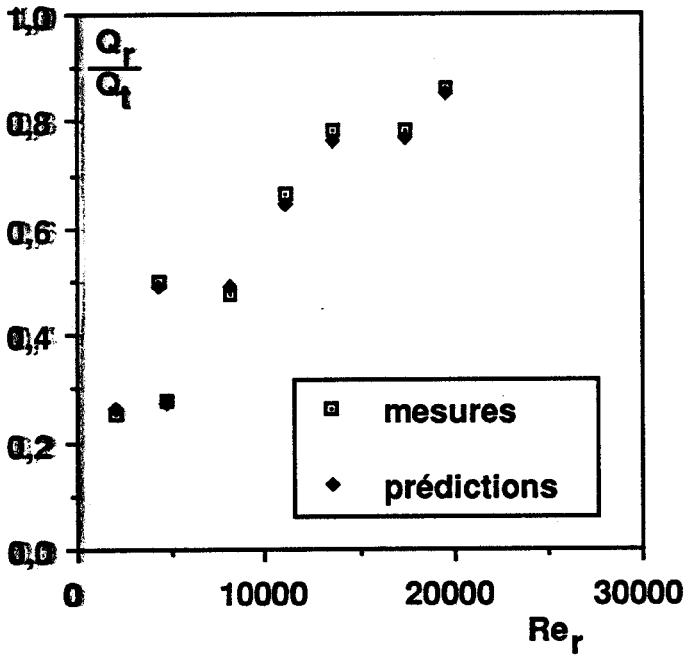


c) $o/h = 0,53$

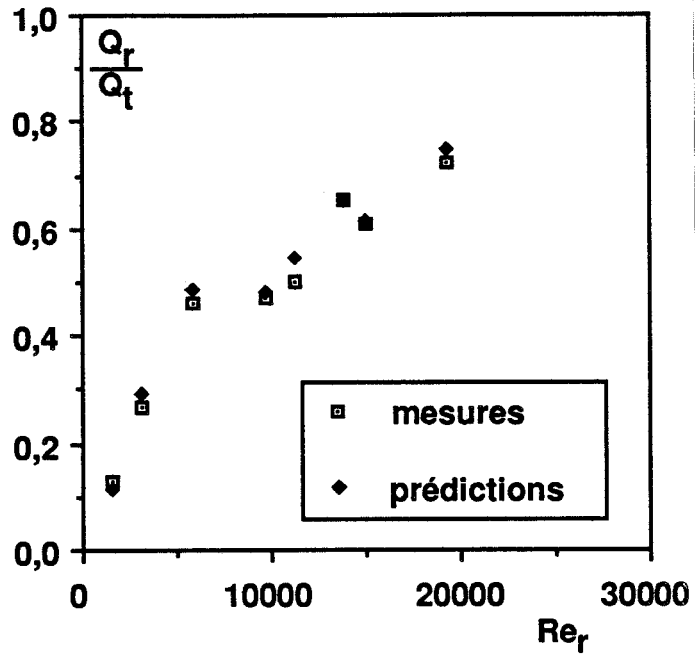


d) $o/h = 0,63$

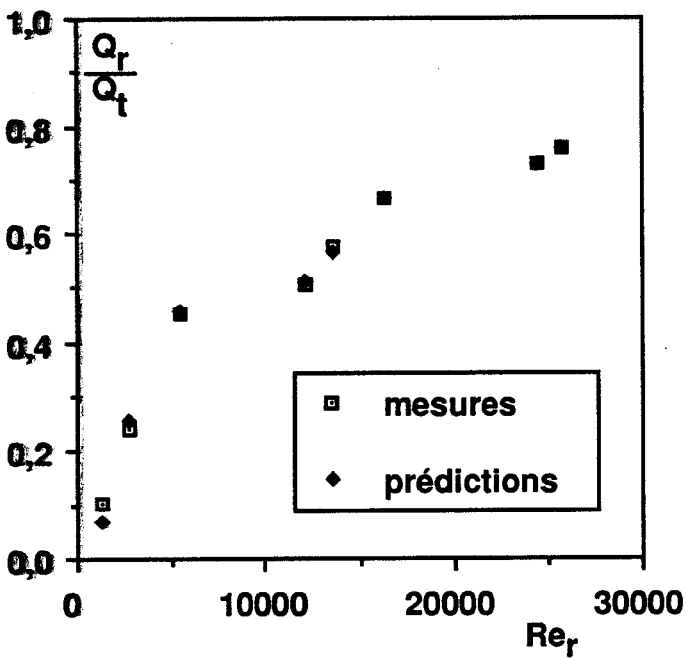
Figure 4-20: Répartition du débit total injecté pour les nez d'angle $\alpha = 15^\circ$. Bande en mouvement.



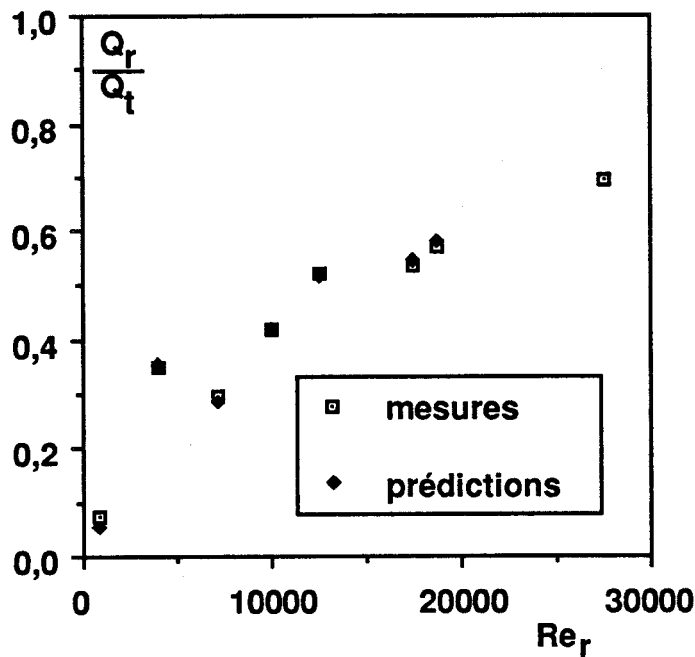
a) $o/h = 0,28$



b) $o/h = 0,42$

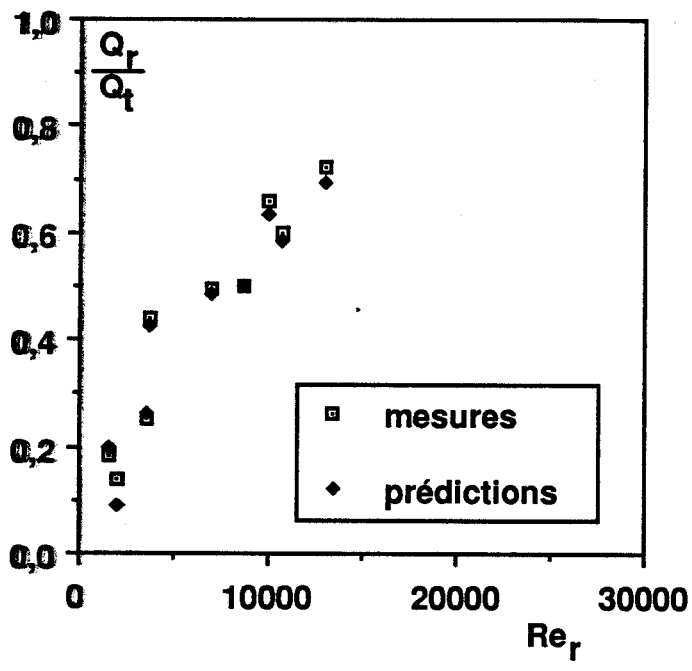


c) $o/h = 0,45$

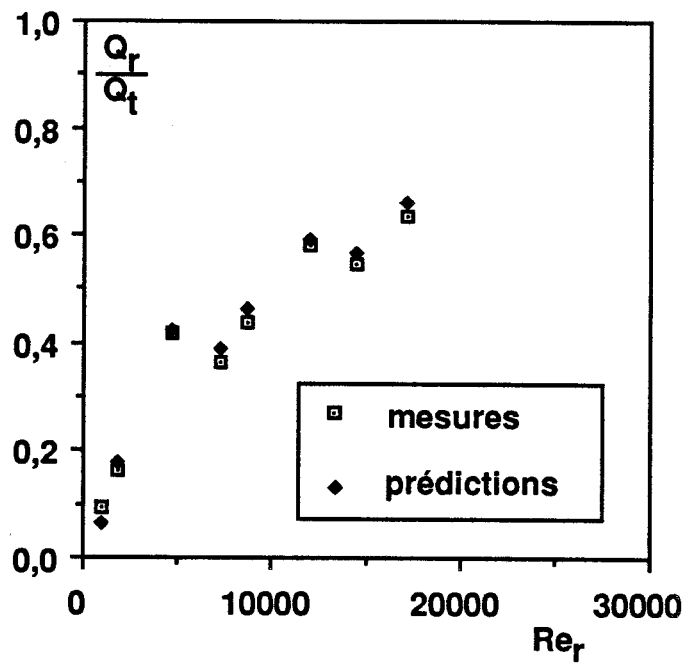


d) $o/h = 0,63$

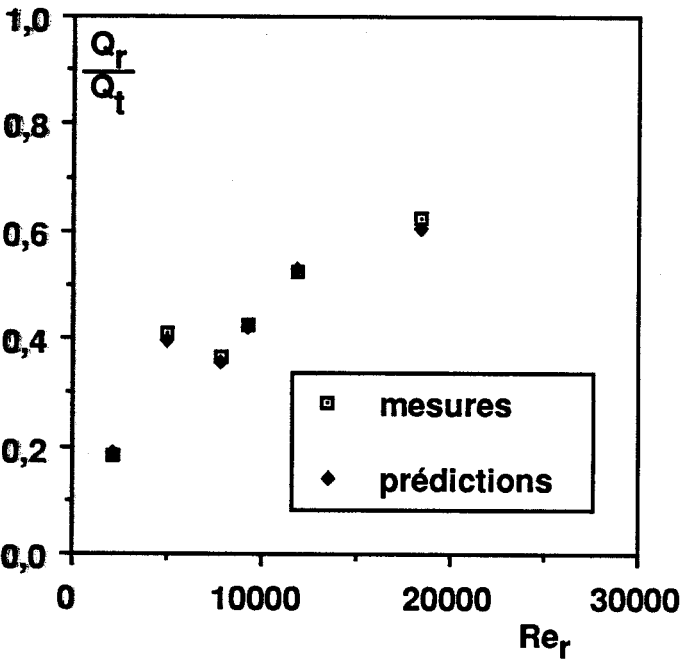
Figure 4-21: Répartition du débit total injecté pour les nez d'angle $\alpha = 25^\circ$. Bande en mouvement.



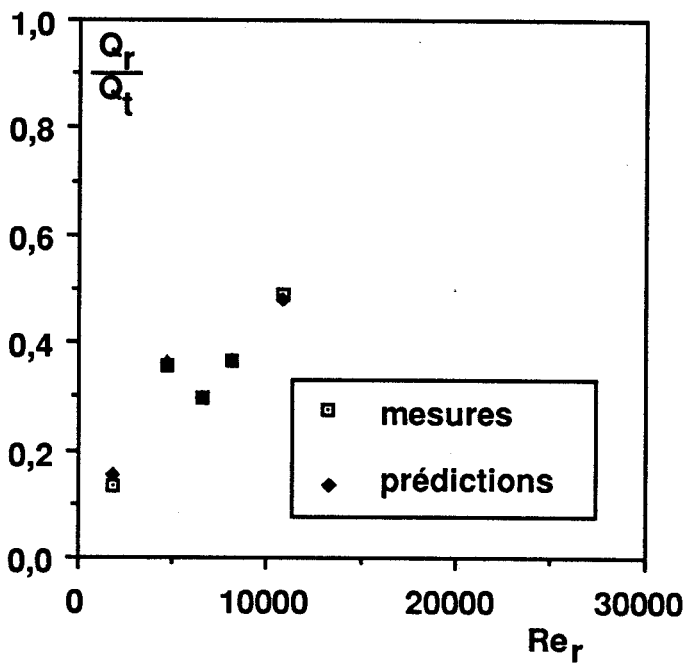
a) $o/h = 0,31$



b) $o/h = 0,42$

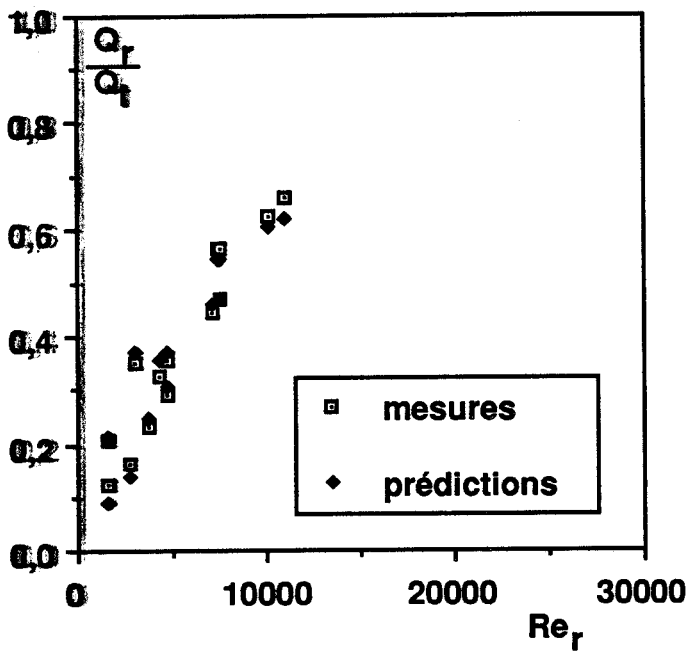


c) $o/h = 0,53$

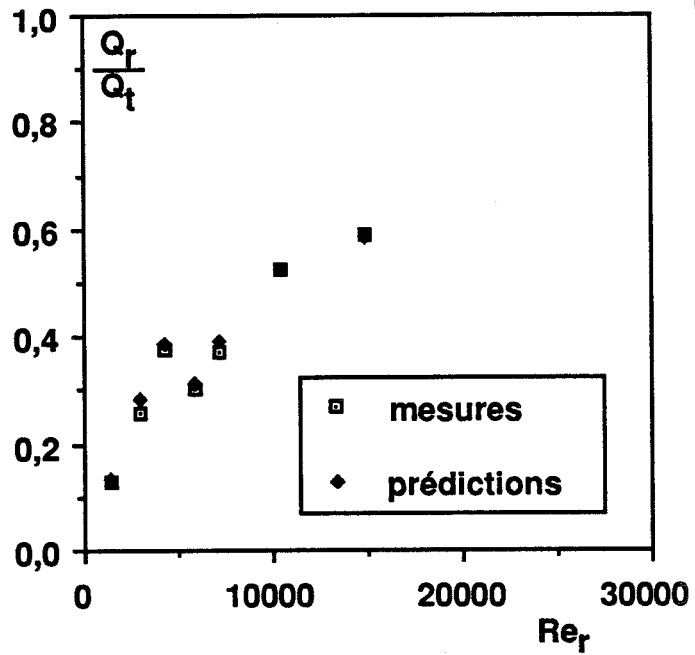


d) $o/h = 0,63$

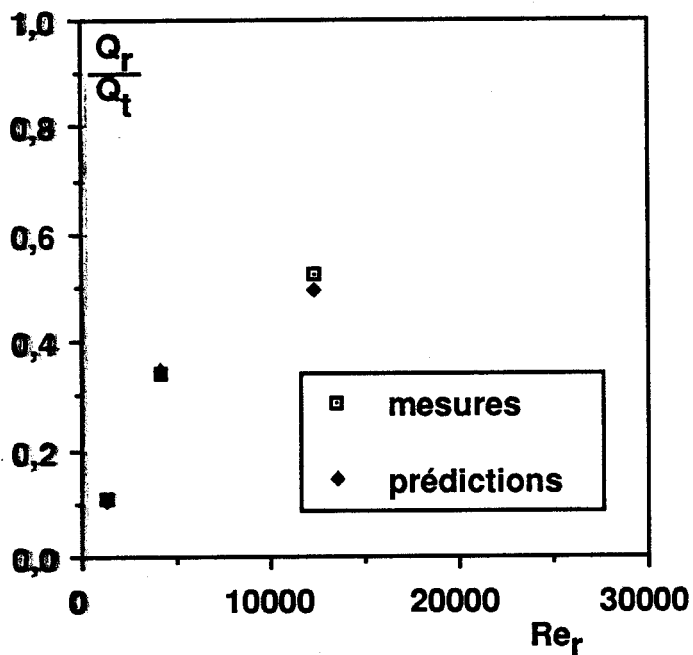
Figure 4-22: Répartition du débit total injecté pour les nez d'angle $\alpha = 35^\circ$. Bande en mouvement.



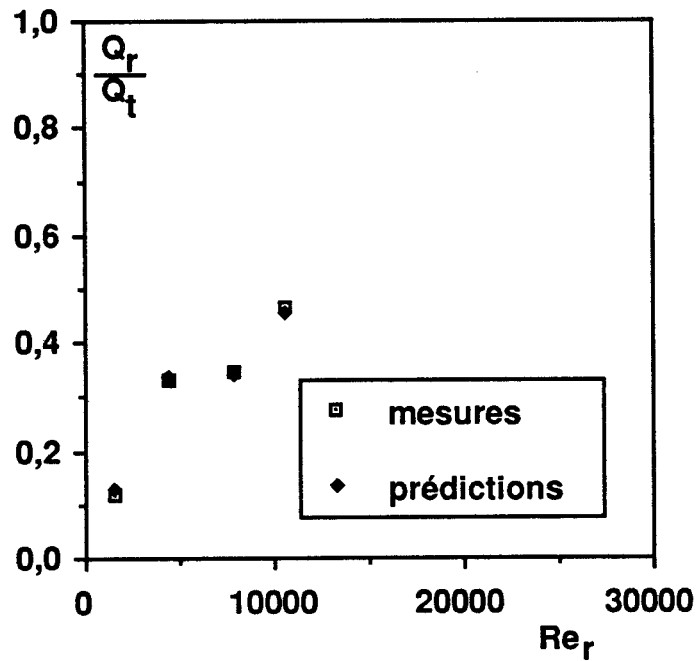
a) $o/h = 0,31$



b) $o/h = 0,42$

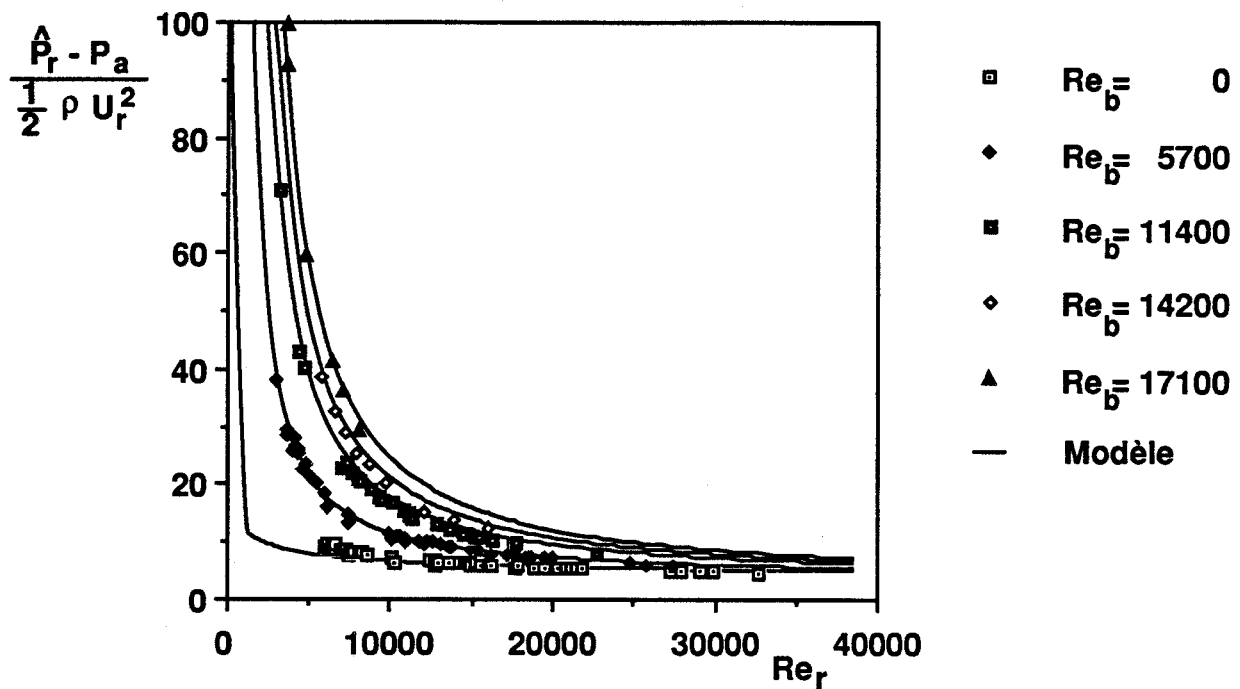


c) $o/h = 0,53$

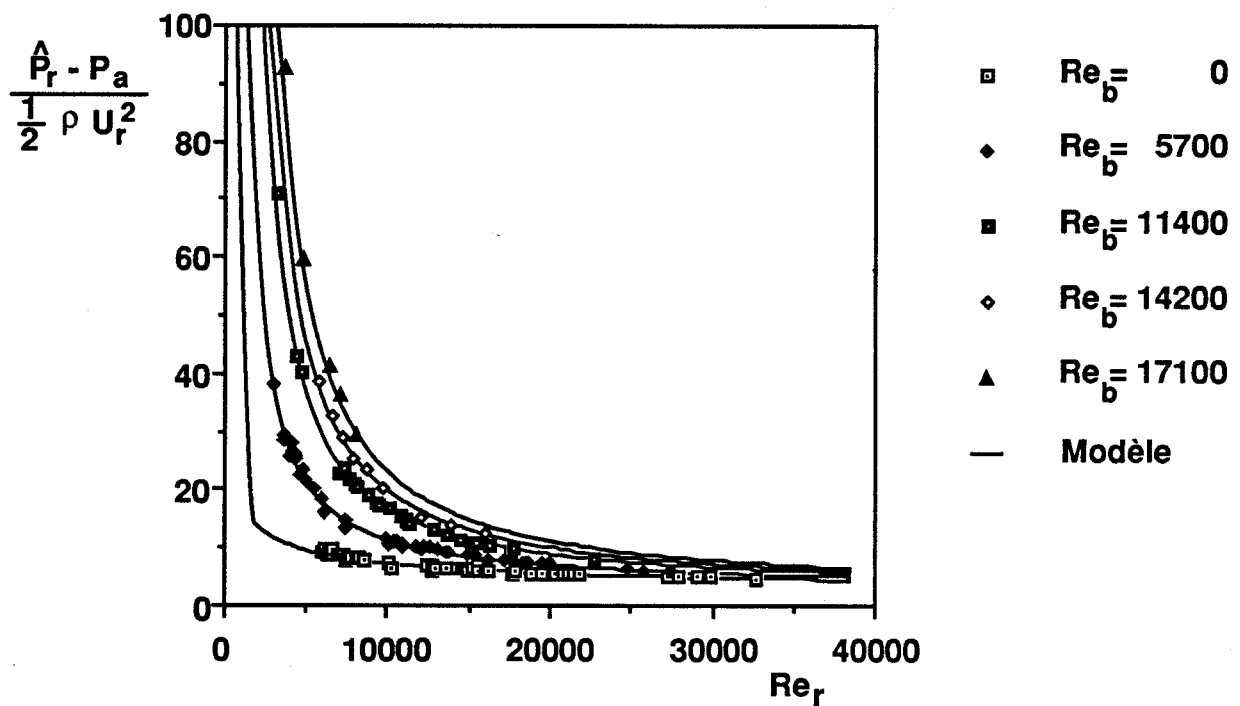


d) $o/h = 0,63$

Figure 4-23: Répartition du débit total injecté pour les nez d'angle $\alpha = 45^\circ$. Bande en mouvement.

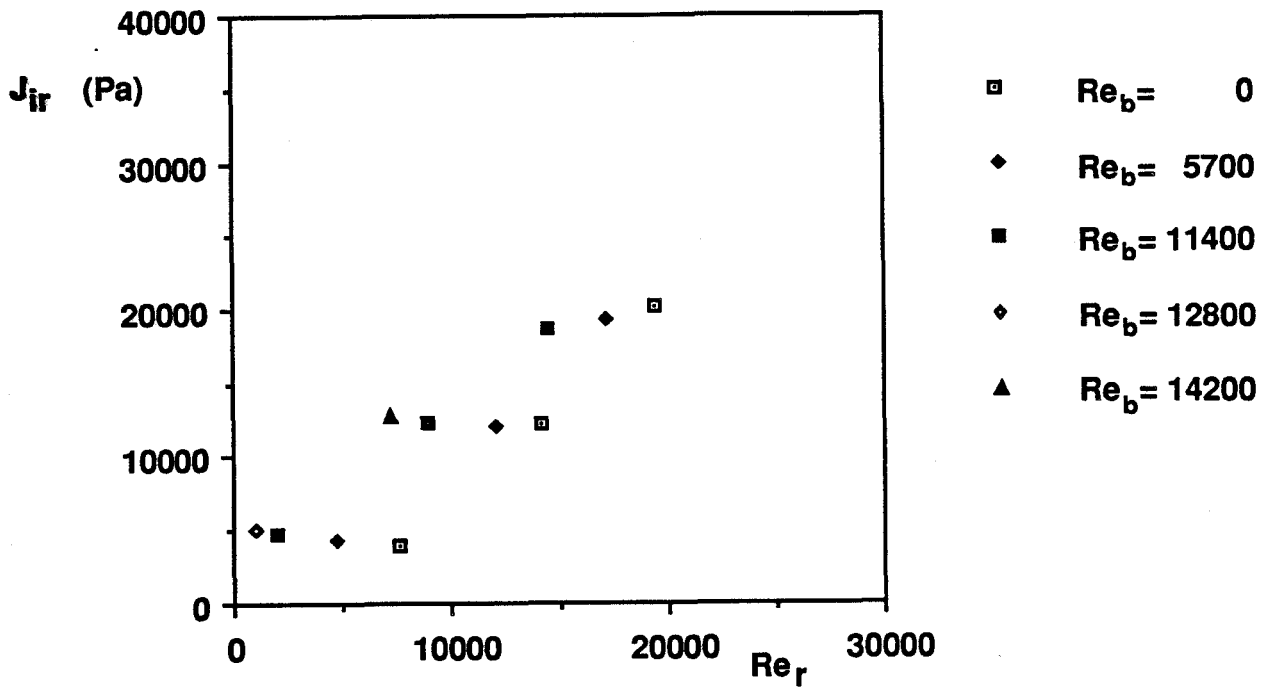


a) Modèle obtenu numériquement.

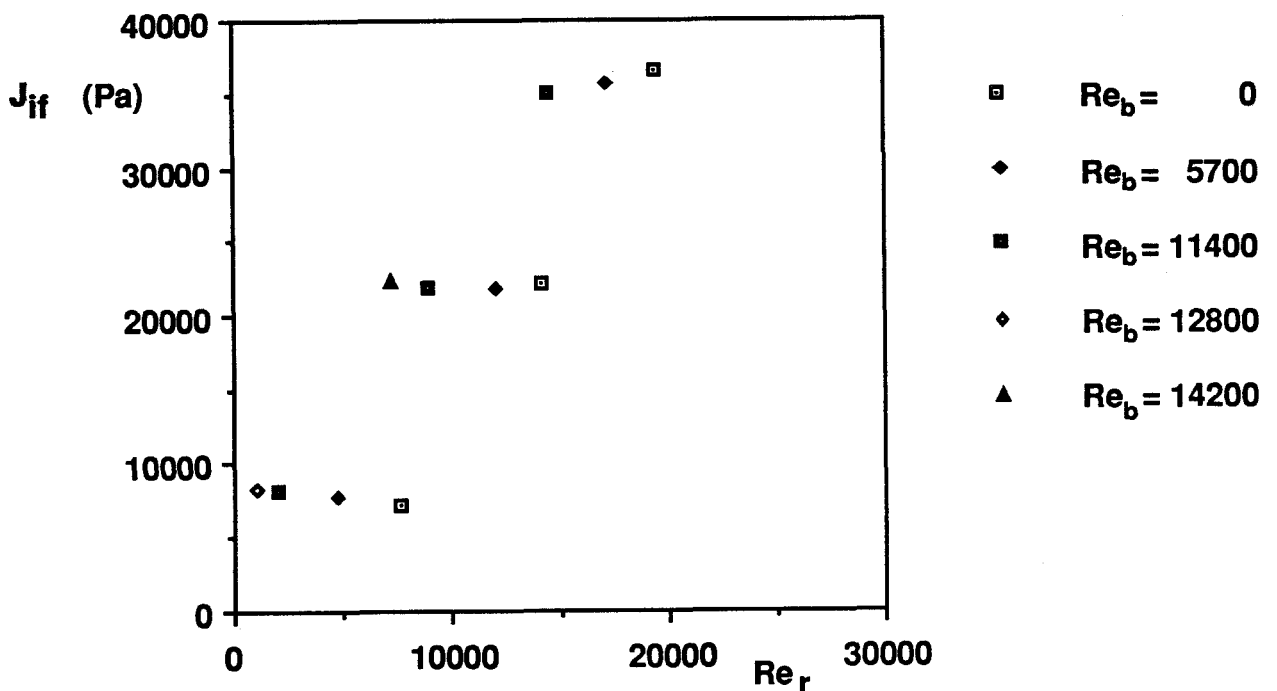


b) Modèle déterminé à partir des mesures expérimentales

Figure 4-24: Evolution du coefficient de perte de charge totale dans le canal de la cellule.

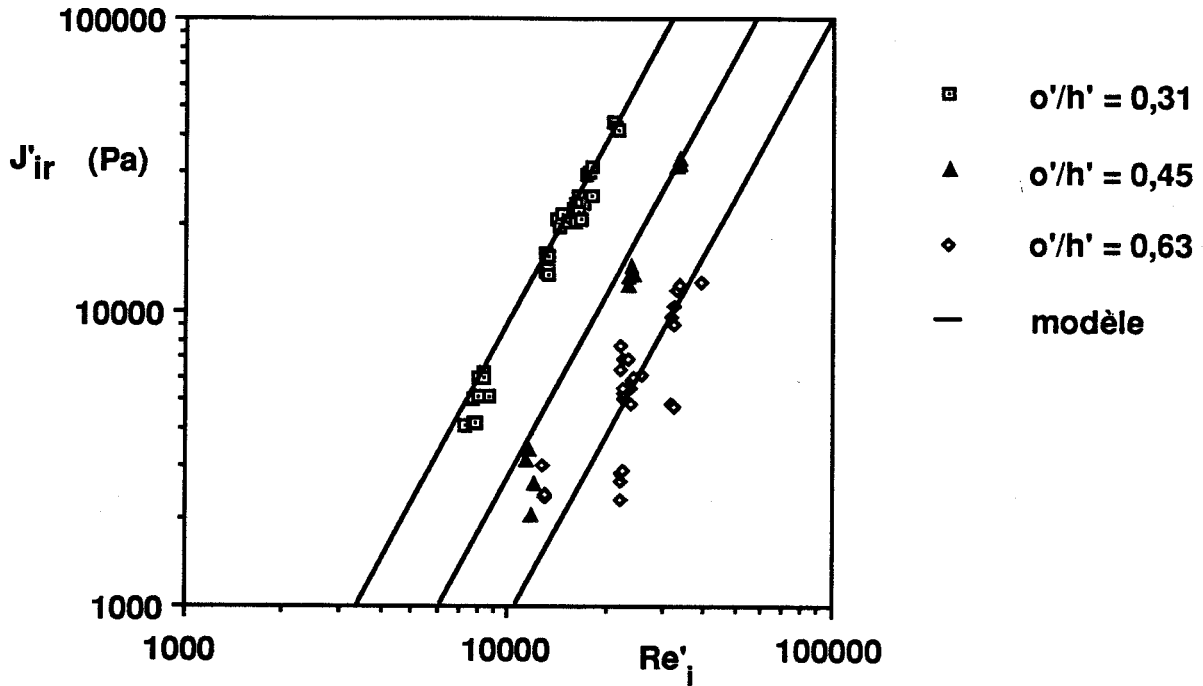


a) Pertes de charge entre les points i et r.

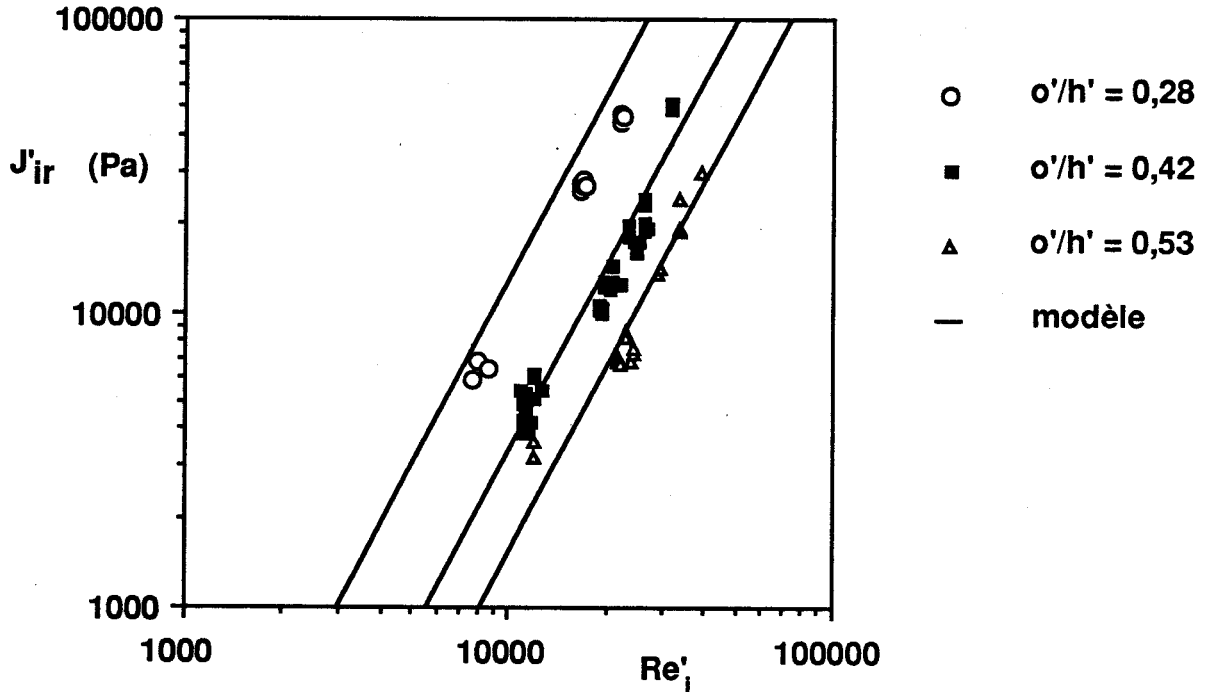


b) Pertes de charge entre les points i et f.

Figure 4-25: Evolutions des pertes de charges par singularité au point d'injection en fonction de Re_r et de Re_b . Nez d'injection de rapport d'ouverture $o/h=0,42$ et d'angle $\alpha=15$.

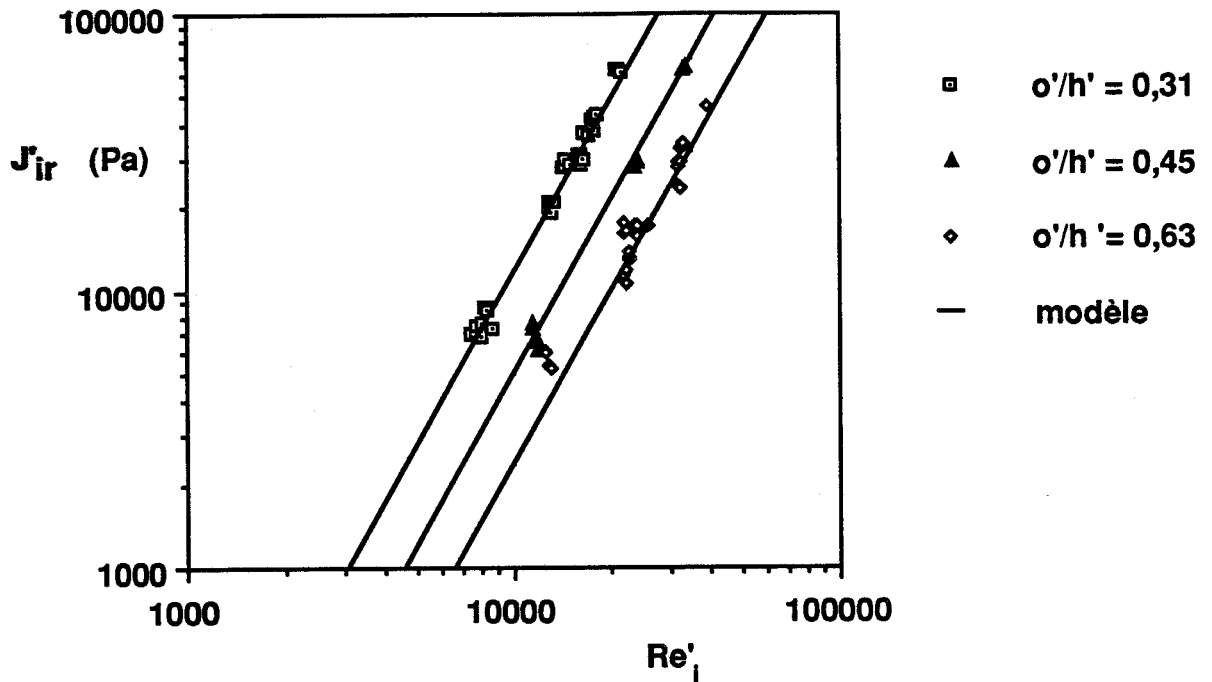


a) Pertes de charge dans les nez d'injection de rapports d'ouverture 0,31 ; 0,45 ; 0,63.

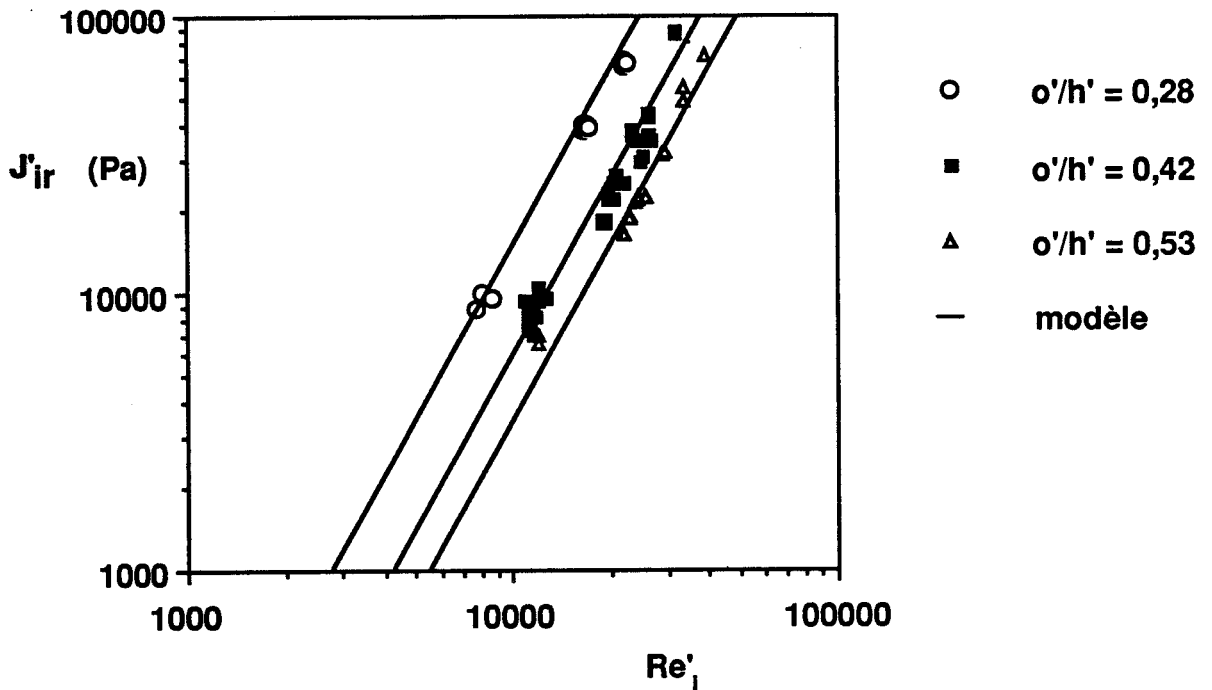


b) Pertes de charge dans les nez d'injection de rapports d'ouverture 0,28 ; 0,42 ; 0,53.

Figure 4-26: Pertes de charge entre les points i et r de la maquette . Tous angles confondus.

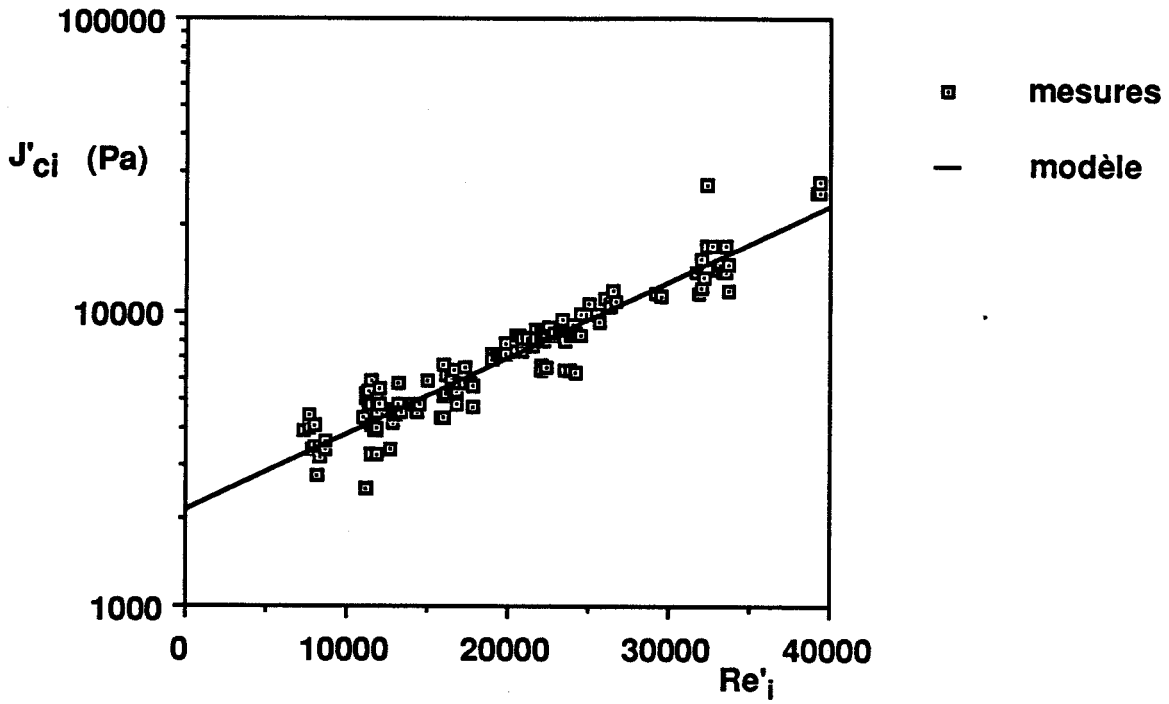


a) Pertes de charge dans les nez d'injection de rapports d'ouverture 0,31 ; 0,45 ; 0,63.

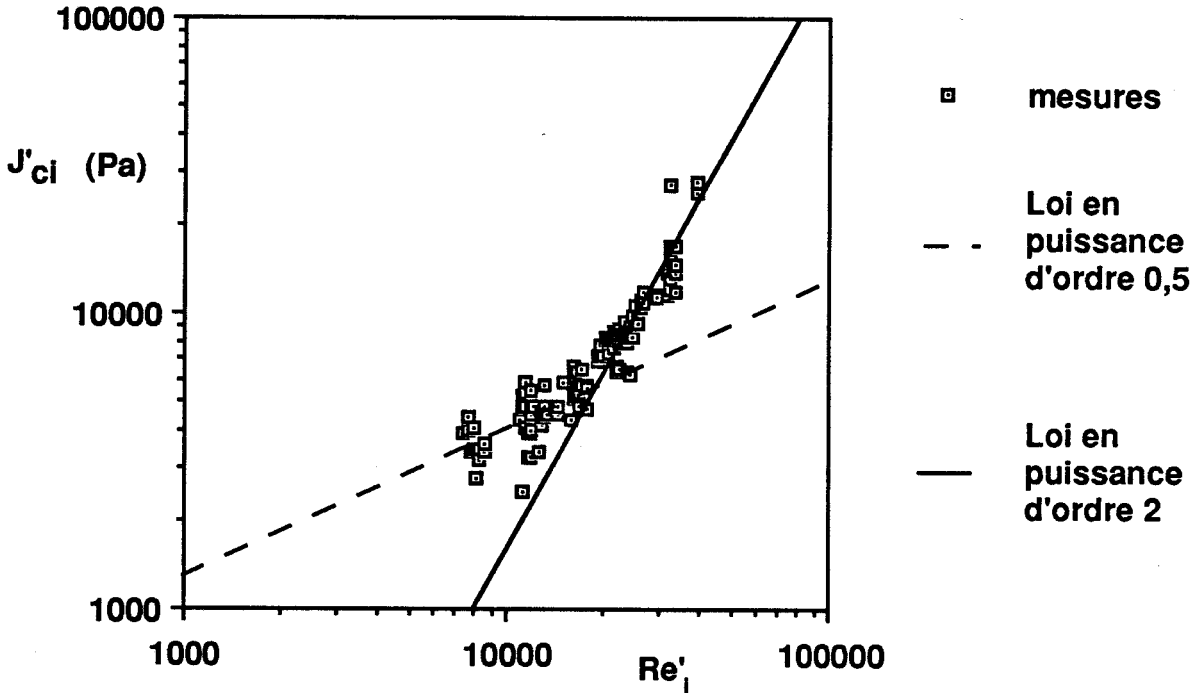


b) Pertes de charge dans les nez d'injection de rapports d'ouverture 0,28 ; 0,42 ; 0,53.

Figure 4-27: Pertes de charge entre les points i et f de la maquette . Tous angles confondus.

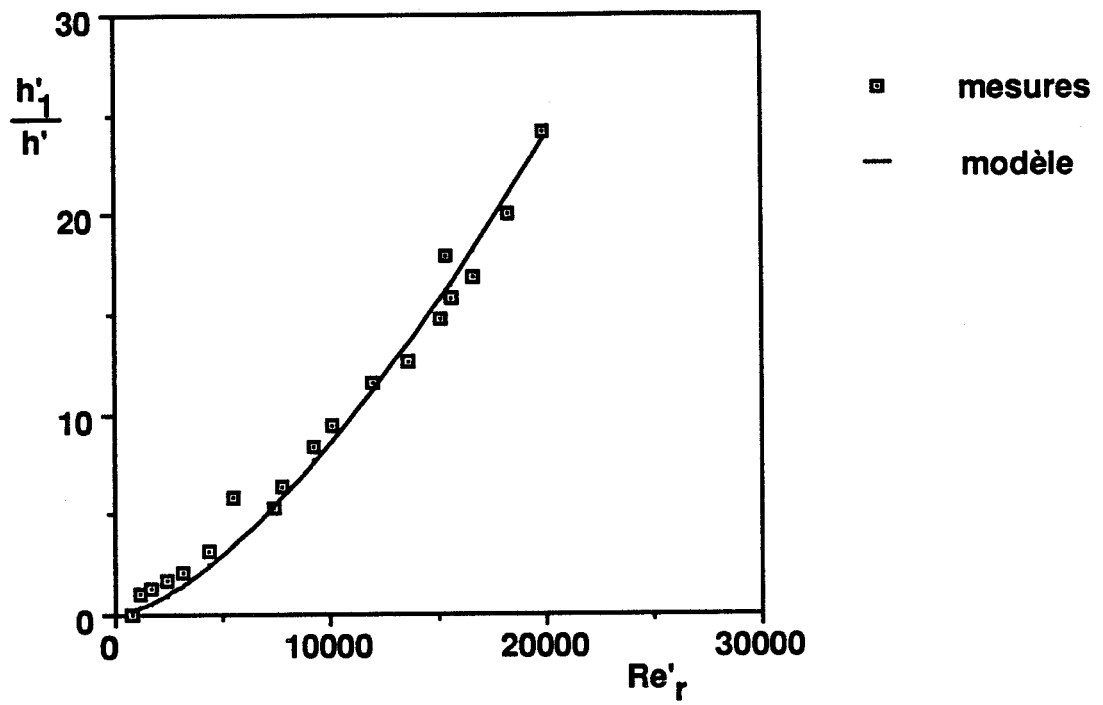


a) Echelle semi-logarithmique.

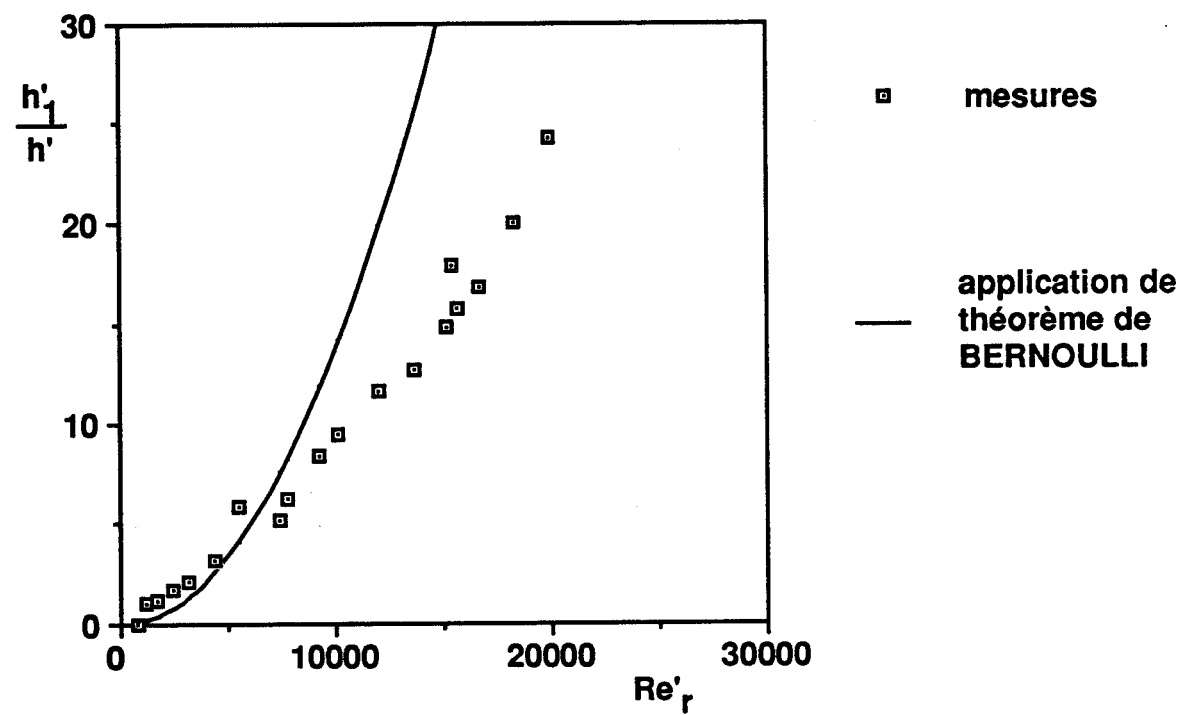


b) Echelle logarithmique

Figure 4-28: Pertes de charge entre les points c et i dans le corps de l'injecteur de la maquette . Toutes mesures confondues.

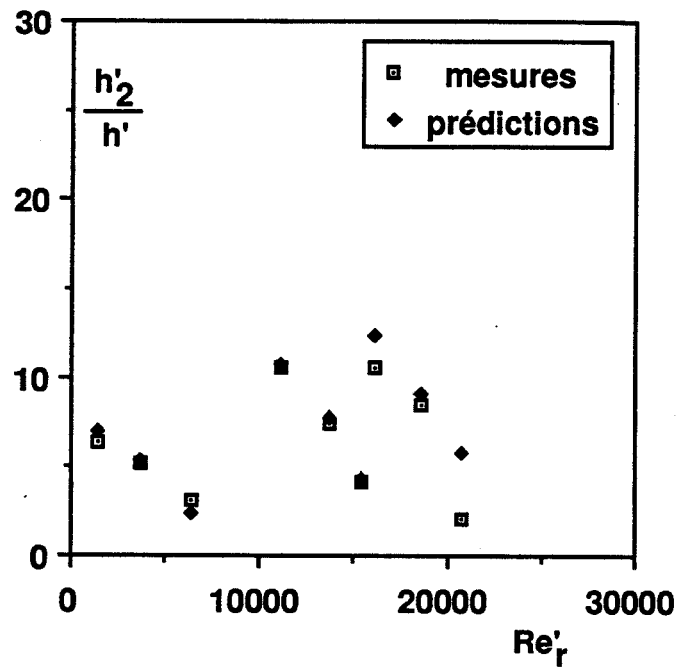


a) Application du modèle proposé.

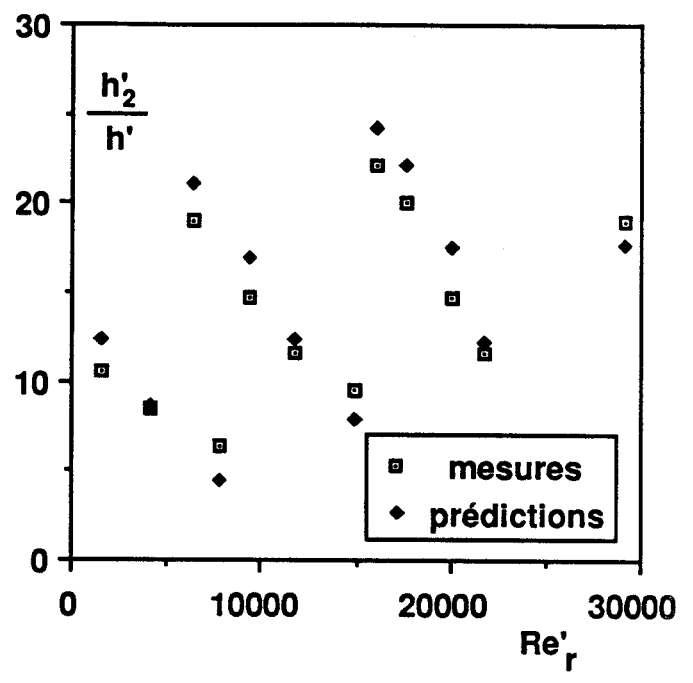


b) Application du théorème de BERNOULLI.

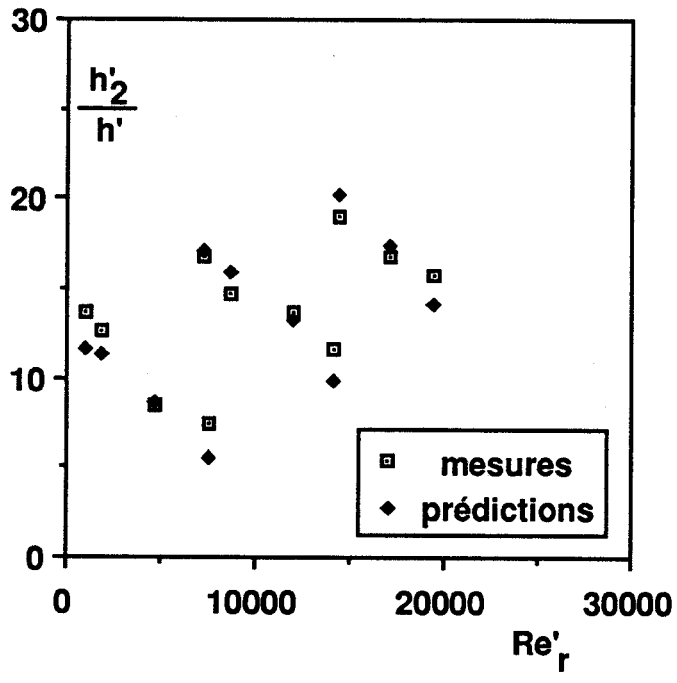
Figure 4-29: Hauteur verticale du jet d'ejection de l'électrolyte.



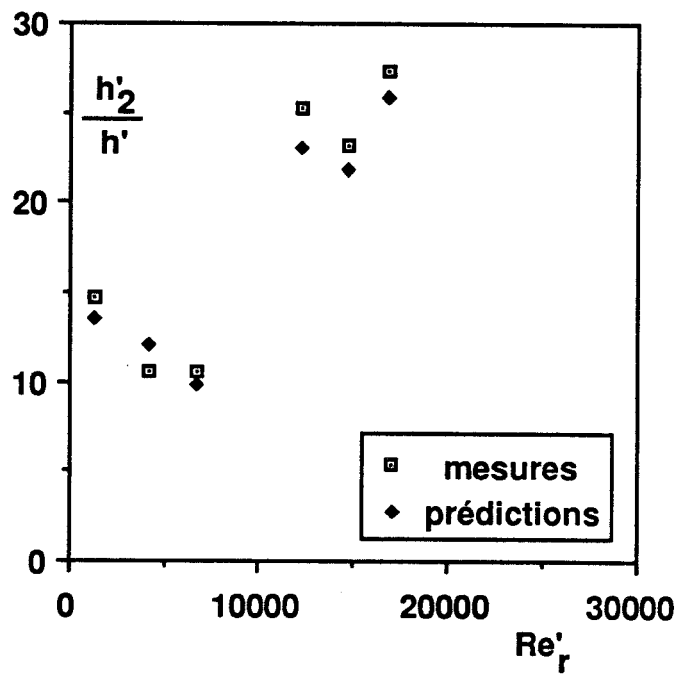
a) $o'/h' = 0,28 \quad \alpha' = 15^\circ$.



b) $o'/h' = 0,63 \quad \alpha' = 15^\circ$.



c) $o'/h' = 0,42 \quad \alpha' = 35^\circ$.



d) $o'/h' = 0,53 \quad \alpha' = 45^\circ$.

Figure 4-30: Hauteur verticale du jet d'injection d'électrolyte pour quatre nez d'injection arbitraires.

