

**USTL**

FLANDRES ARTOIS

66 779  
**LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE  
ET D'OPTIMISATION**

50376  
1991  
306

n° d'ordre : 770



50376  
1991  
306

**THESE**

Nouveau régime

présentée à  
l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR en MATHEMATIQUES APPLIQUEES**  
par

**Salim TALEB**

**INCIDENCE DU PARAMETRAGE  
SUR LE CONTROLE DES COURBES RATIONNELLES**

soutenu le 12 septembre 1991 devant la commission d'examen

Membres du jury

Président :	C. BREZINSKI
Rapporteurs :	A. LE MEHAUTE P. SABLONNIERE
Membres :	P. L. ... M. G. ...
Directeur de thèse :	J. C. ...

Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation, UFR IEEA - M3, USTL Flandres-Artois,  
59655 Villeneuve d'Ascq - Cedex - FRANCE.

UNIVERSITE DES SCIENCES  
ET TECHNIQUES DE LILLE  
FLANDRES ARTOIS

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M.H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT  
ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER,  
DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF,  
LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL,  
PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PAREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES  
DE LILLE FLANDRES ARTOIS

M. A. DUBRULLE.

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCOQ Denis	Probabilités
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. BREZINSKI Claude	Analyse Numérique

M. BRIDOUX Michel  
 M. CELET Paul  
 M. CHAMLEY Hervé  
 M. COEURE Gérard  
 M. CORDONNIER Vincent  
 M. DAUCHET Max  
 M. DEBOURSE Jean-Pierre  
 M. DHAINAUT André  
 M. DOUKHAN Jean-Claude  
 M. DYMENT Arthur  
 M. ESCAIG Bertrand  
 M. FAURE Robert  
 M. FOCT Jacques  
 M. FRONTIER Serge  
 M. GRANELLE Jean-Jacques  
 M. GRUSON Laurent  
 M. GUILLAUME Jean  
 M. HECTOR Joseph  
 M. LABLACHE-COMBIER Alain  
 M. LACOSTE Louis  
 M. LAVEINE Jean-Pierre  
 M. LEHMANN Daniel  
 Mme LENOBLE Jacqueline  
 M. LEROY Jean-Marie  
 M. LHOMME Jean  
 M. LOMBARD Jacques  
 M. LOUCHEUX Claude  
 M. LUCQUIN Michel  
 M. MACKE Bruno  
 M. MIGEON Michel  
 M. PAQUET Jacques  
 M. PETIT Francis  
 M. POUZET Pierre  
 M. PROUVOST Jean  
 M. RACZY Ladislas  
 M. SALMER Georges  
 M. SCHAMPS Joel  
 M. SEQUIER Guy  
 M. SIMON Michel  
 Melle SPIK Geneviève  
 M. STANKIEWICZ François  
 M. TILLIEU Jacques  
 M. TOULOTTE Jean-Marc  
 M. VIDAL Pierre  
 M. ZEYTOUNIAN Radyadour

2  
 Chimie-Physique  
 Géologie Générale  
 Géotechnique  
 Analyse  
 Informatique  
 Informatique  
 Gestion des Entreprises  
 Biologie Animale  
 Physique du Solide  
 Mécanique  
 Physique du Solide  
 Mécanique  
 Métallurgie  
 Ecologie Numérique  
 Sciences Economiques  
 Algèbre  
 Microbiologie  
 Géométrie  
 Chimie Organique  
 Biologie Végétale  
 Paléontologie  
 Géométrie  
 Physique Atomique et Moléculaire  
 Spectrochimie  
 Chimie Organique Biologique  
 Sociologie  
 Chimie Physique  
 Chimie Physique  
 Physique Moléculaire et Rayonnements Atmosph.  
 E.U.D.I.L.  
 Géologie Générale  
 Chimie Organique  
 Modélisation - calcul Scientifique  
 Minéralogie  
 Electronique  
 Electronique  
 Spectroscopie Moléculaire  
 Electrotechnique  
 Sociologie  
 Biochimie  
 Sciences Economiques  
 Physique Théorique  
 Automatique  
 Automatique  
 Mécanique

#### PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ALLAMANDO Etienne  
 M. ANDRIES Jean-Claude  
 M. ANTOINE Philippe  
 M. BART André  
 M. BASSERY Louis

Composants Electroniques  
 Biologie des organismes  
 Analyse  
 Biologie animale  
 Génie des Procédés et Réactions Chimiques

Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. BERTRAND Hugues	Sciences Economiques et Sociales
M. BERZIN Robert	Analyse
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie Végétale
M. BOIS Pierre	Mécanique
M. BOISSIER Daniel	Génie Civil
M. BOIVIN Jean-Claude	Spectroscopie
M. BOUQUELET Stéphane	Biologie Appliquée aux enzymes
M. BOUQUIN Henri	Gestion
M. BRASSELET Jean-Paul	Géométrie et Topologie
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CATTEAU Jean-Pierre	Chimie Organique
M. CAYATTE Jean-Louis	Sciences Economiques
M. CHAPOTON Alain	Electronique
M. CHARET Pierre	Biochimie Structurale
M. CHIVE Maurice	Composants Electroniques Optiques
M. COMYN Gérard	Informatique Théorique
M. COQUERY Jean-Marie	Psychophysiologie
M. CORIAT Benjamin	Sciences Economiques et Sociales
Mme CORSIN Paule	Paléontologie
M. CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
M. COUTURIER Daniel	Chimie Organique
M. CRAMPON Norbert	Tectonique Géodynamique
M. CROSNIER Yves	Electronique
M. CURGY Jean-Jacques	Biologie
Melle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DEJAEGER Roger	Electrochimie et Cinétique
M. DELAHAYE Jean-Paul	Informatique
M. DELORME Pierre	Physiologie Animale
M. DELORME Robert	Sciences Economiques
M. DEMUNTER Paul	Sociologie
M. DENEL Jacques	Informatique
M. DE PARIS Jean Claude	Analyse
M. DEPRES Gilbert	Physique du Solide - Cristallographie
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
Melle DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité Chimique
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie Animale
M. DHAMELINCOURT Paul	Chimie Physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie Hertzienne
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie Hertzienne
M. DUBUS Jean-Paul	Spectrométrie des Solides
M. DUPONT Christophe	Vie de la firme (I.A.E.)
Mme EVRARD Micheline	Génie des procédés et réactions chimiques
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FAUQUAMBERGUE Renaud	Composants électroniques

M. FONTAINE Hubert  
 M. FOUQUART Yves  
 M. FOURNET Bernard  
 M. GAMBLIN André  
 M. GLORIEUX Pierre  
 M. GOBLOT Rémi  
 M. GOSELIN Gabriel  
 M. GOUDMAND Pierre  
 M. GOURIEROUX Christian  
 M. GREGORY Pierre  
 M. GREMY Jean-Paul  
 M. GREVET Patrice  
 M. GRIMBLOT Jean  
 M. GUILBAULT Pierre  
 M. HENRY Jean-Pierre  
 M. HERMAN Maurice  
 M. HOUDART René  
 M. JACOB Gérard  
 M. JACOB Pierre  
 M. Jean Raymond  
 M. JOFFRE Patrick  
 M. JOURNAL Gérard  
 M. KREMBEL Jean  
 M. LANGRAND Claude  
 M. LATTEUX Michel  
 Mme LECLERCQ Ginette  
 M. LEFEBVRE Jacques  
 M. LEFEBVRE Christian  
 Melle LEGRAND Denise  
 Melle LEGRAND Solange  
 M. LEGRAND Pierre  
 Mme LEHMANN Josiane  
 M. LEMAIRE Jean  
 M. LE MAROIS Henri  
 M. LEROY Yves  
 M. LESENNE Jacques  
 M. LHENAFF René  
 M. LOCQUENEUX Robert  
 M. LOSFELD Joseph  
 M. LOUAGE Francis  
 M. MAHIEU Jean-Marie  
 M. MAIZIERES Christian  
 M. MAURISSON Patrick  
 M. MESMACQUE Gérard  
 M. MESSELYN Jean  
 M. MONTEL Marc  
 M. MORCELLET Michel  
 M. MORTREUX André  
 Mme MOUNIER Yvonne  
 Mme MOUYART-TASSIN Annie Françoise  
 M. NICOLE Jacques  
 M. NOTELET Francis  
 M. PARSY Fernand

4

Dynamique des cristaux  
 Optique atmosphérique  
 Biochimie Structurale  
 Géographie urbaine, industrielle et démog.  
 Physique moléculaire et rayonnements Atmos.  
 Algèbre  
 Sociologie  
 Chimie Physique  
 Probabilités et Statistiques  
 I.A.E.  
 Sociologie  
 Sciences Economiques  
 Chimie Organique  
 Physiologie animale  
 Génie Mécanique  
 Physique spatiale  
 Physique atomique  
 Informatique  
 Probabilités et Statistiques  
 Biologie des populations végétales  
 Vie de la firme (I.A.E.)  
 Spectroscopie hertzienne  
 Biochimie  
 Probabilités et statistiques  
 Informatique  
 Catalyse  
 Physique  
 Pétrologie  
 Algèbre  
 Algèbre  
 Chimie  
 Analyse  
 Spectroscopie hertzienne  
 Vie de la firme (I.A.E.)  
 Composants électroniques  
 Systèmes électroniques  
 Géographie  
 Physique théorique  
 Informatique  
 Electronique  
 Optique-Physique atomique  
 Automatique  
 Sciences Economiques et Sociales  
 Génie Mécanique  
 Physique atomique et moléculaire  
 Physique du solide  
 Chimie Organique  
 Chimie Organique  
 Physiologie des structures contractiles  
 Informatique  
 Spectrochimie  
 Systèmes électroniques  
 Mécanique

M. PECQUE Marcel  
M. PERROT Pierre  
M. STEEN Jean-Pierre

5  
Chimie organique  
Chimie appliquée  
Informatique

*à mes Parents.*

Je remercie vivement Monsieur C. Brezinski, Professeur à l'Université de Lille 1, qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur J.C. Fiorot, Professeur à l'ENSIMEV, Université de Valenciennes, d'avoir suivi mon travail avec un grand intérêt et une disponibilité sans pareille ; le temps qu'il m'a consacré et la qualité de ses conseils ont été pour moi d'une aide très précieuse.

Je suis très honoré de la présence de Messieurs P. Sablonnière, Professeur à l'INSA de Rennes, A. Le Méhauté, Professeur à l'Université de Lille 1, qui ont accepté de s'intéresser à ce travail et de le juger.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs P. Jeannin, Professeur à l'UFR de Calais, Université de Lille 1, H. Gaudier, Professeur à l'IUT de Valenciennes, pour avoir accepté de participer à ce jury.

Je tiens à remercier Monsieur H. Glanc, pour la rapidité et le soin avec lequel il a imprimé cette thèse.

## SOMMAIRE.

Introduction générale.	1
<b>chap . I : Cadre général.</b>	
. §1. Espace $\hat{\mathcal{E}}$ de vecteurs massiques.	3
. 1.1. Notations générales.	3
. 1.2. Vecteurs Massiques.	3
. 1.3. Projections.	4
. §2. Courbes (BR).	5
. §3. Effet d'une application projective sur une courbe (BR).	6
. §4. Algorithme de De Casteljaou.	7
<b>chap . II : Changements de paramètre affine et homographique.</b>	
. §1. Introduction.	9
. §2. Changement de paramètre affine.	9
. §3. Changement de paramètre homographique.	18
. 3.1. Cas d'une courbe (BR).	18
. 3.2. Etude de cas particuliers.	21
. 3.3. Cas d'une courbe (BP)..	28
<b>chap . III : Changement de paramètre quadratique rationnel .</b>	
. §1. Introduction.	33
. §2. Polynômes réciproques.	33
. §3. Le changement quadratique rationnel $\Phi$ .	36
. §4. Effet du changement $\Phi$ sur une courbe (BR).	36
. §5. Effet du changement $\Phi$ sur une courbe (BP).	46
<b>chap . IV : Etude des cubiques rationnelles sous forme (BR).</b>	
. §1. Introduction.	49
. §2. Les cubiques rationnelles comme courbes (BR).	50
. 2.1. Cubique canonique.	50
. 2.2. Cubique (BR).	51
. 2.3. Expression du polygone massique $\omega$ en fonction d'une matrice de $T$ .	53
. 2.4. Rang du polygone et formes dégénérées.	56
. 2.5. Changements de paramètre d'une cubique (BR).	58
. 2.5.1. Changement de paramètre homographique.	59
. 2.5.2. Changement de paramètre quadratique.	60

.	2.6. Nature d'une cubique.	60
.	§3. Cubique (BR) gauche.	64
.	§4. Cubique (BR) plane.	66
.	4.1. Cubiques (BR) de référence.	66
.	4.2. Caractérisation des cubiques (BR) planes.	71
.	4.3. Caractérisation des cubiques (BP) planes.	76
	<b>chap . V : Aspect pratique.</b>	
.	§1. Introduction.	79
.	§2. Algorithmes de calcul de courbes (BP) et (BR).	79
.	§3. Proc édures de changements de paramètre.	80
.	§3. Transformations projective et affine du plan.	92
	<b>Bibliographie.</b>	<b>97</b>

## INTRODUCTION GENERALE.

Les courbes et surfaces rationnelles ont fait l'objet d'une étude de J.C. Fiorot et P. Jeannin [FJ86,FJ87,FJ88,FJ89] en vue d'une nouvelle représentation.

Cette nouvelle représentation permet le stockage de toute courbe ou surface rationnelle à l'aide d'un nombre fini de *vecteurs massiques* ainsi que la manipulation de telles courbes et surfaces à des fins informatiques ou industrielles : CAO, CFAO,... Rappelons qu'un vecteur massique est un point pondéré ou un vecteur pur de l'espace dans lequel est plongée la courbe ou la surface. Exprimées en fonction de vecteurs massiques via les polynômes de Bernstein, les courbes et surfaces rationnelles sont appelées respectivement courbes B-Rationnelles, (BR) en abrégé, et Surfaces B-Rationnelles, (SBR) en abrégé.

Le présent travail se place dans le cadre précédent, c'est une contribution à l'étude des courbes rationnelles mises sous forme (BR). Il présente deux aspects :

Le premier concerne les changements de paramètre et leur effet sur le polygone massique d'une courbe (BR). L'intérêt de ces changements de paramètre réside dans les applications suivantes : effectuer un paramétrage *standard* sur  $[0, 1]$ , améliorer la précision du tracé, modifier les vecteurs massiques sans modifier la courbe, tracer la courbe complémentaire, avoir une représentation (BR) de la totalité d'une courbe rationnelle ou polynomiale, etc...

Du fait de son invariance sous une transformation rationnelle du paramètre, la représentation (BR) joue un rôle important dans ce travail.

De façon explicite, le problème est le suivant:

soit  $C: I \rightarrow \mathbb{R}^m$  une courbe (BR) et  $f: [0, 1] \rightarrow I$  une transformation du paramètre, trouver la forme (BR) de la composée  $C \circ f$ .

Il est clair que le fait d'avoir  $f$  biunivoque est nécessaire pour que la reparamétrisation soit propre, c'est à dire qu'à chaque point du support de la courbe correspond une seule valeur du paramètre. Cette condition de biunicité sera exigée pour chaque cas.

Les algorithmes qui sont fournis ont pour données un polygone massique ainsi qu'une fonction représentant le changement de paramètre. Les calculs internes se font dans la base de Bernstein, et le résultat est donné sous forme d'un nouveau polygone massique.

L'utilisation de la base de Bernstein à toutes les étapes de l'algorithme (entrée, calculs, sortie) est motivée par une raison de stabilité numérique. Farouki and Rajan [FR87,FR88] ayant montré que d'un point de vue algorithmique, la base de Bernstein est numériquement plus stable que la base

canonique, et qu'il est donc inapproprié de faire des conversions de bases avec tout ce que cela engendre comme erreurs numériques.

Dans le chapitre II, le changement de paramètre  $f$  est choisi successivement affine puis homographique. La caractéristique de ces deux changements est qu'ils gardent inchangée la longueur du polygone massique : si  $\omega$  est un polygone de longueur  $n$ , nous avons  $BR[\omega] \circ f = BR[\theta]$  avec  $\theta$  un polygone de longueur  $n$ .

Le chapitre III traite du changement quadratique rationnel. Il permet de paramétrer sur  $[0, 1]$  une courbe dont le paramètre décrivait  $\mathbb{R}$  tout entier. La différence avec les changements précédents est le fait que le polygone  $\theta$  obtenu est de longueur  $2n$ . Mais bien que la longueur de la (BR) soit doublée, la complexité ne change pas en raison de la mise en évidence d'une symétrie dans le polygone. Cette symétrie est qualifiée de  $\delta$ -réciprocité.

Dans chacun de ces trois cas, l'incidence du changement de paramètre s'écrit sous forme matricielle, ce qui donne une relation linéaire entre le polygone massique  $\omega$  et  $\theta$ .

Le second aspect de ce travail porte sur l'étude des cubiques rationnelles mises sous forme (BR). C'est l'objet du chapitre IV.

Nous verrons que la donnée de quatre vecteurs massiques  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$  permet de déterminer des propriétés de la cubique  $BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3]$ .

Etudier le rang du polygone massique  $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  revient à établir si la cubique  $BR[\omega]$  est une cubique *non-dégénérée* ou non.

La nature d'une cubique  $BR[\omega]$  est précisée en fonction des masses des vecteurs massiques  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ , et  $\omega_3$ .

L'accent sera mis sur une classification des cubiques rationnelles planes d'après le type de la combinaison linéaire reliant  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ , et  $\omega_3$ . Le cas particulier des cubiques planes polynomiales est également traité.

Ce travail est complété au chapitre V par un catalogue de procédures écrits en pseudo-code et portant sur les deux aspects ci-dessus. Les procédures sont illustrées par de nombreux exemples graphiques.

## Chap. I : CADRE GENERAL.

Nous rappelons les notations et quelques résultats de l'ouvrage de J.C. Fiorot et P. Jeannin [FJ89] et de [FJ86,FJ87,FJ88].

### §1. Espace $\hat{\mathcal{E}}$ des vecteurs massiques.

#### 1. Notations générales.

Considérons deux espaces affines réels  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  de dimensions respectives  $N$  et  $N + 1$  tel que  $\mathcal{E}$  soit un hyperplan affine de  $\mathcal{F}$ .

Dans la pratique,  $\mathcal{E}$  est le plan ou l'espace réel. Notons  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{F}}$  les espaces vectoriels associés respectifs de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ .  $\vec{\mathcal{E}}$  est un hyperplan vectoriel de  $\vec{\mathcal{F}}$ .

Les complétés projectifs de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont notés respectivement  $\hat{\mathcal{E}}$  et  $\hat{\mathcal{F}}$ .

#### 2. Vecteurs massiques.

Soit  $\Omega$  un point de  $\mathcal{F}$  n'appartenant pas à  $\mathcal{E}$ .

Un vecteur massique  $\theta$  est défini comme étant un point pondéré  $(P; \beta) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}^*$  ou un vecteur pur  $\vec{U} \in \vec{\mathcal{E}}$ .

L'espace  $\hat{\mathcal{E}}$  des vecteurs massiques est  $(\mathcal{E} \times \mathbb{R}^*) \cup \vec{\mathcal{E}}$ .

Soit l'application  $\hat{\Omega}$  telle que

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}: \hat{\mathcal{E}} &\rightarrow \hat{\mathcal{F}} \\ \vec{U} &\rightarrow \vec{U} && \text{si } \vec{U} \in \vec{\mathcal{E}} \\ (P; \beta) &\rightarrow \beta \overrightarrow{\Omega P} && \text{si } (P; \beta) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

$\hat{\mathcal{E}}$  est muni des deux opérations suivantes :

- une addition  $\oplus$  telle que  $\theta \oplus \theta' = \hat{\Omega}^{-1}(\hat{\Omega}(\theta) + \hat{\Omega}(\theta'))$ ,  $\forall \theta, \theta' \in \hat{\mathcal{E}}$ .
- une multiplication externe  $*$  telle que  $\lambda * \theta = \hat{\Omega}^{-1}(\lambda \cdot \hat{\Omega}(\theta))$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \theta \in \hat{\mathcal{E}}$ .

Ces opérations sont explicitées par le résultat ci-dessous.

**Proposition.** [FJ89, Prop. 1.2.1.6, p.18].

Soient  $\theta$  et  $\theta' \in \hat{\mathcal{E}}$ ;  $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ , alors :

- si  $\theta = (P; \alpha)$  et  $\theta' = (Q; \beta)$  sont des points pondérés :
  - $\theta \oplus \theta' = (P; \alpha) \oplus (Q; \beta) = \left(\frac{\alpha P + \beta Q}{\alpha + \beta}; \alpha + \beta\right)$  pour  $\alpha + \beta \neq 0$ .
  - $\theta \oplus \theta' = (P; \alpha) \oplus (Q; \beta) = \alpha \overrightarrow{QP} = \beta \overrightarrow{PQ}$  pour  $\alpha + \beta = 0$ .
- si  $\theta = (P; \alpha)$  est un point pondéré et  $\theta' = \vec{V}$  est un vecteur :

$$\theta \oplus \theta' = (P; \alpha) \oplus \vec{V} = (P + (\frac{1}{\alpha})\vec{V}; \alpha).$$

- si  $\theta = \vec{U}$  et  $\theta' = \vec{V}$  sont des vecteurs :

$$\theta \oplus \theta' = \vec{U} \oplus \vec{V} = \vec{U} + \vec{V}.$$

- si  $\theta = (P; \alpha)$  est un point pondéré :

$$\lambda * \theta = \lambda * (P; \alpha) = (P; \lambda\alpha).$$

- si  $\theta = \vec{U}$  est un vecteur :

$$\lambda * \theta = \lambda * \vec{U} = \lambda\vec{U}.$$

**Proposition.** [FJ89, Prop. 1.2.1.5, p.17].

$(\hat{\mathcal{E}}, \oplus, *)$  est un espace vectoriel réel.

L'application  $\hat{\Omega}: \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}$  est un isomorphisme linéaire.

$$\dim \hat{\mathcal{E}} = \dim \vec{\mathcal{F}}.$$

L'application  $\chi$  telle que

$$\begin{array}{rcl} \chi: \hat{\mathcal{E}} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (P; \beta) & \rightarrow & \beta \\ \vec{U} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

est appelée la masse.  $\chi(\theta)$  est la masse du vecteur massique  $\theta$ .

La masse est une forme linéaire, cf. [FJ89, Prop. 1.2.2.8, p.24].

### 3. Projections.

**Définition. Projection conique.**

$\Pi\Omega$  désigne la projection conique de sommet  $\Omega$  i.e., l'application

$$\Pi\Omega: \begin{array}{rcl} \vec{\mathcal{F}} - \{\vec{0}\} & \rightarrow & \tilde{\mathcal{E}} \\ \vec{v} & \rightarrow & m \end{array}$$

tel que  $\vec{\Omega m}$  soit colinéaire à  $\vec{v}$ .

**Proposition** [FJ89, Prop. 1.2.2.1, p.19].

Nous avons les propriétés suivantes :

- $\Pi\Omega$  est une surjection de  $\vec{\mathcal{F}} - \{\vec{0}\}$  sur  $\tilde{\mathcal{E}}$ .
- si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  et  $\vec{v} \in \vec{\mathcal{F}} - \{\vec{0}\}$  :  $\Pi\Omega(\lambda\vec{v}) = \Pi\Omega(\vec{v})$ .

**Définition. Projection naturelle.**

$\Pi$  désigne la projection naturelle de  $\hat{\mathcal{E}}$  sur  $\tilde{\mathcal{E}}$  i.e., l'application

$$\Pi: \begin{array}{rcl} \hat{\mathcal{E}} & \rightarrow & \tilde{\mathcal{E}} \\ (P; \beta) & \rightarrow & P \\ \vec{U} & \rightarrow & (\vec{U})_{\infty}. \end{array}$$

**Proposition** [FJ89, Prop. 1.2.2.3, p.20].

Nous avons les propriétés suivantes :

- $\Pi = \Pi\Omega \circ \hat{\Omega}$ .
- $\Pi$  est une surjection de  $\hat{\mathcal{E}} - \vec{0}$  sur  $\tilde{\mathcal{E}}$ .
- si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  et  $\theta \in \hat{\mathcal{E}} - \vec{0}$  :  $\Pi(\lambda * \theta) = \Pi(\theta)$ .

## §2. Les courbes (BR).

Les polynômes de Bernstein de degré  $n$  relatifs à l'intervalle  $[0, 1]$  s'écrivent

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

où  $t \in \mathbb{R}$ .

Ils forment une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Une courbe Bézier [BE68, BE77] polynomiale de degré  $n$  est définie par

$$t \in [0, 1] \rightarrow \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i,$$

avec  $P_0, P_1, \dots, P_n$  des points de  $\mathcal{E}$ . Le  $(n+1)$ -uplet  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  est appelé polygone de contrôle.

Plus généralement, une courbe Bézier polynomiale est notée  $BP[P_0, P_1, \dots, P_n]$  ou plus brièvement  $BP[P]$ .

La courbe paramétrée

$$t \in \mathcal{J} \rightarrow \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i,$$

étant notée par  $BP[P; \mathcal{J}]$ .

Toute courbe polynomiale de  $\mathcal{E}$  est une courbe (BP) et réciproquement.

**Définition [FJ89, Déf. 2.2.2.1, p.39].**

*La courbe paramétrée*

$$t \in \mathcal{J} \rightarrow \Pi \left( \sum_{i=0}^n B_i^n(t) * \theta_i \right)$$

où  $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$  est un  $(n+1)$ -uplet de vecteurs massiques de  $\hat{\mathcal{E}}$  non tous nuls est appelée courbe B-rationnelle, ou courbe (BR) en abrégé.

$\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$  est appelé polygone massique de contrôle.

Une courbe (BR) est notée  $BR[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n; t \in \mathcal{J}]$  ou plus brièvement  $BR[\theta; \mathcal{J}]$ .

La longueur de la courbe  $BR[\theta; \mathcal{J}]$  est  $n$ . Par extension, nous dirons que  $\theta$  est un polygone de longueur  $n$ .

Explicitons cette définition, notons  $I = \{i/\theta_i = (P_i, \beta_i) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}^*\}$  et  $\bar{I} = \{i/\theta_i = \vec{U}_i \in \vec{\mathcal{E}}\}$  tel que  $I \cup \bar{I} = \{0, 1, \dots, n\}$ , nous aurons alors

$$BR[\theta](t) = \Pi \left( \sum_{i \in I} B_i^n(t) * (P_i; \beta_i) \oplus \sum_{i \in \bar{I}} B_i^n(t) * \vec{U}_i \right)$$

et dans le cas où  $\sum_{i \in I} \beta_i B_i^n(t) \neq 0$

$$BR[\theta](t) = \frac{\sum_{i \in I} \beta_i P_i B_i^n(t)}{\sum_{i \in I} \beta_i B_i^n(t)} + \frac{\sum_{i \in I} \bar{U}_i B_i^n(t)}{\sum_{i \in I} \beta_i B_i^n(t)}$$

**Proposition [FJ89, Prop. 2.2.2.2, p.44].**

Toute courbe rationnelle de  $\mathcal{E}$  est une courbe (BR) et réciproquement.

**Définition.** Support d'une courbe (BR).

Soit  $\theta$  un polygone massique de longueur  $n$ . Le support de la courbe  $BR[\theta; \mathcal{J}]$  (noté  $|BR[\theta; \mathcal{J}]|$ ) désigne l'ensemble suivant :

$$\{P \in \tilde{\mathcal{E}} / \exists t \in \mathcal{J} \text{ tel que } P = BR[\theta](t)\}$$

### §3. Effet d'une application projective sur une courbe (BR).

**Définition.** Repère projectif.

Soit  $N$  la dimension de l'espace  $\mathcal{E}$ . Un repère projectif de  $\tilde{\mathcal{E}}$  est un  $(N+2)$ -uplet de points de  $\tilde{\mathcal{E}}$  dont  $(N+1)$  quelconques ne sont pas dans un même hyperplan de  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

Ainsi si  $\mathcal{E}$  est un plan affine, un repère projectif de  $\tilde{\mathcal{E}}$  est constitué de quatre points dont trois ne sont pas alignés. Si  $\mathcal{E}$  est l'espace affine réel, un repère projectif de  $\tilde{\mathcal{E}}$  est constitué de cinq points dont quatre ne sont pas coplanaires.

Il existe une unique transformation projective qui envoie un premier repère projectif sur un second repère projectif. Une transformation projective transforme une droite en une droite et conserve le contact.

Une transformation affine de  $\tilde{\mathcal{E}}$  est une transformation projective particulière laissant globalement invariant l'hyperplan de l'infini.

Il existe une unique transformation affine qui envoie un premier repère barycentrique i.e., un simplexe de  $\mathcal{E}$  sur un second repère barycentrique.

Soient  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  deux espaces affines réels, comme au paragraphe 1, nous associons à  $\mathcal{E}_1$  (resp. à  $\mathcal{E}_2$ ) les espaces  $\vec{\mathcal{E}}_1, \tilde{\mathcal{E}}_1, \hat{\mathcal{E}}_1, \mathcal{F}_1, \vec{\mathcal{F}}_1$  et les applications  $\hat{\Omega}_1, \Pi\Omega_1, \Pi_1$  (resp. les espaces  $\vec{\mathcal{E}}_2, \tilde{\mathcal{E}}_2, \hat{\mathcal{E}}_2, \mathcal{F}_2, \vec{\mathcal{F}}_2$  et les applications  $\hat{\Omega}_2, \Pi\Omega_2, \Pi_2$ ).

**Définition.** Application projective. [FJ89, déf. 1.2.3.1, p.24].

a) Une application linéaire  $\vec{T}: \vec{\mathcal{F}}_1 \rightarrow \vec{\mathcal{F}}_2$  induit une application projective

$$T: \tilde{\mathcal{E}}_1 - \Pi\Omega_1(\text{Ker } \vec{T}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_2.$$

( $T$  est dite application projective induite par  $\vec{T}$ ).

b) Soit  $\hat{T} = \hat{\Omega}_2^{-1} \circ \vec{T} \circ \hat{\Omega}_1$  la transmuée de  $\vec{T}$  par les isomorphismes  $\hat{\Omega}_1^{-1}$  et  $\hat{\Omega}_2^{-1}$ . L'application linéaire  $\hat{T}$  induit l'application projective  $T$

Remarquons que  $\Pi\Omega_1(Ker\vec{T}) = \Pi_1(Ker\hat{T})$ .

**Proposition.** [FJ89, Prop. 1.2.3.2, p.24].

- a) Les applications  $T$  et  $\vec{T}$  sont liées par la relation  $\Pi\Omega_2 \circ \vec{T} = T \circ \Pi\Omega_1$  sur  $\vec{\mathcal{F}}_1 - Ker\vec{T}$ .
- b) Les applications  $T$  et  $\hat{T}$  sont liées par la relation  $\Pi_2 \circ \hat{T} = T \circ \Pi_1$  sur  $\hat{\mathcal{E}}_1 - Ker\hat{T}$ .
- c) les relations a) et b) sont équivalentes.

**Proposition.** [FJ89, Prop. 2.5.1., p.65].

Soit une courbe  $(BR)$  de  $\mathcal{E}_1 : BR[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n; [0, 1]]$  et  $T$  une application projective de  $\tilde{\mathcal{E}}_1$  dans  $\tilde{\mathcal{E}}_2$  induite par l'application linéaire  $\hat{T}$  de  $\hat{\mathcal{E}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_2$ . Alors

$$T(BR[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n](t)) = BR[\hat{T}(\theta_0), \hat{T}(\theta_1), \dots, \hat{T}(\theta_n)](t).$$

Les deux membres n'étant définis que dans le cas où  $BR[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n](t)$  n'est pas dans  $\Pi_1(Ker(\hat{T}))$ .

**Proposition.** [FJ89, Prop. 1.2.2.2, p.20] [FJ89, Prop. 1.2.2.6, p.23].

Soient  $\vec{T}$  une transformation linéaire de  $\hat{\mathcal{E}}$ ,  $\hat{T}$  la transmuée de  $\vec{T}$  par  $\hat{\Omega}$ ,  $T$  la transformation projective de  $\tilde{\mathcal{E}}$  induite par  $\vec{T}$ . Alors :

- a)  $T \circ \Pi\Omega = \Pi\Omega \circ \vec{T}$ .
- b)  $T \circ \Pi = \Pi \circ \hat{T}$ .
- c) les relations a) et b) sont équivalentes.

#### §4. Algorithme de De Casteljaou.

L'algorithme de De Casteljaou [DC59, DC63] est l'un des plus utilisés en géométrie algorithmique.

Il permet de calculer le point courant d'une courbe  $BP[M_0, \dots, M_n](t)$  où  $M_0, M_1, \dots$ , et  $M_n$  sont des points d'un espace affine, qui peut être  $\mathcal{E}$ ,  $\hat{\mathcal{E}}$  ou  $\mathcal{F}$ .

**Algorithme DeCasteljau** $(M_0, M_1, \dots, M_n; t)$ .

```

Données: Polygone $[M_0, M_1, \dots, M_n]$ 
paramètre  $t$ ;
Pour  $i := 0$  jusqu'à  $n$  faire
     $M_i^{(0)} := M_i$ ;
Pour  $i := 1$  jusqu'à  $n$  faire
    Pour  $j := 0$  jusqu'à  $n - i$  faire
         $M_j^{(i)} := (1 - t) \cdot M_j^{(i-1)} + t \cdot M_{j+1}^{(i-1)}$ ;
Résultat  $BP[M](t) = M_0^n$ 

```

Parmi les propriétés de cet algorithme, nous rappelons le résultat suivant.

**Proposition.** [FJ89, p.88].

Soit  $t_0$  un réel,  $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$  étant des vecteurs massiques, nous avons

$$BR[\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n](t_0 t) = BR[\sigma_0^0, \sigma_0^1, \dots, \sigma_0^n](t)$$

$$BR[\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n](t_0 + (1 - t_0)t) = BR[\sigma_0^n, \sigma_1^{n-1}, \dots, \sigma_n^0](t)$$

les  $\sigma_i^j$  étant les vecteurs massiques fournis par l'algorithme DeCasteljau( $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n; t_0$ ).

## Chap. II : CHANGEMENTS DE PARAMETRE AFFINE ET HOMOGRAPHIQUE D'UNE COURBE (BR).

### §1. Introduction.

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'incidence des changements de paramètre affine et homographique sur le polygone massique  $\omega$  d'une courbe  $BR[\omega]$ . Ces deux changements de paramètre ont en commun de laisser inchangée la longueur [Chap.I,§2] d'une courbe (BR).

Le paragraphe 2 traite de l'effet du changement de paramètre affine sur le polygone massique  $\omega$ . Nous établissons une relation matricielle linéaire entre  $\omega$  et le nouveau polygone massique  $\theta$ .

Le paragraphe 3 a pour objet le changement de paramètre homographique. L'incidence se traduit également par une relation matricielle reliant  $\omega$  et  $\theta$ . Deux applications sont traitées : définition d'un nouveau polygone massique d'une courbe (BR) pour le même intervalle de variation du paramètre, représentation sous forme (BR) de la courbe complémentaire d'une courbe (BR).

Nous appliquons ces résultats au cas particulier d'une courbe (BP). Dans ce cas, le changement de paramètre homographique fournit une courbe (BR).

### §2. Changement de paramètre affine.

Soit l'application affine

$$\begin{array}{lcl} a: [0, 1] & \rightarrow & I \\ u & \rightarrow & \alpha + u(\beta - \alpha) \end{array} \quad (1)$$

avec  $\alpha < \beta$ , et  $I$  l'intervalle  $[\alpha, \beta]$ . Etudions le changement de paramètre affine d'une courbe (BR).

#### **Proposition 2.1. Méthode directe.**

Soit une courbe  $BR[\omega; [\alpha, \beta]]$  définie par  $n + 1$  vecteurs massiques  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ ; la composition de cette courbe avec la transformation  $a$  donne  $BR[\omega] \circ a = BR[\theta]$  avec les nouveaux vecteurs massiques

$$\theta_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{m=0}^{n-\ell} B_m^{n-\ell}(\alpha) B_j^{\ell}(\beta) * \omega_{m+j}, \quad \ell = 0, 1, \dots, n; \quad (2)$$

et nous avons l'égalité des supports :

$$\left| BR[\theta; [0, 1]] \right| = \left| BR[\omega; [\alpha, \beta]] \right|.$$

**Preuve:**

D'après (1), le changement  $t = a(u)$  implique que

$$t = \alpha(1-u) + \beta u \quad \text{et} \quad 1-t = (1-\alpha)(1-u) + (1-\beta)u, \quad (3a)$$

d'où par utilisation de la formule du Binôme de Newton

$$t^i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \alpha^{i-j} (1-u)^{i-j} \beta^j u^j, \quad (3b)$$

$$(1-t)^{n-i} = \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (1-\alpha)^{n-i-k} (1-u)^{n-i-k} (1-\beta)^k u^k.$$

Par définition  $BR[\omega](t) = \Pi(BP[\omega](t))$  avec

$$BP[\omega](t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} * \omega_i, \quad (4)$$

En utilisant (3b), (4) devient :

$$\begin{aligned} BP[\omega] \circ a(u) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{i} \\ &\quad \binom{i}{j} \alpha^{i-j} (1-u)^{i-j} \beta^j u^j \cdot \\ &\quad \binom{n-i}{k} (1-\alpha)^{n-i-k} (1-u)^{n-i-k} (1-\beta)^k u^k * \omega_i \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{i}{j} \binom{n-i}{k} \cdot \\ &\quad \alpha^{i-j} (1-\alpha)^{n-i-k} \cdot \\ &\quad \beta^j (1-\beta)^k u^{k+j} (1-u)^{n-j-k} * \omega_i, \end{aligned}$$

d'où en remarquant que

$$\binom{n}{i} \binom{i}{j} \binom{n-i}{k} = \binom{n-j-k}{i-j} \binom{j+k}{j} \binom{n}{j+k},$$

et en passant aux polynômes de Bernstein, on trouve

$$\begin{aligned} BP[\omega] \circ a(u) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-j-k}{i-j} \alpha^{i-j} (1-\alpha)^{n-i-k} \cdot \\ &\quad \binom{j+k}{j} \beta^j (1-\beta)^k \cdot \\ &\quad \binom{n}{j+k} u^{j+k} (1-u)^{n-j-k} * \omega_i \quad (5) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{n-i} B_{i-j}^{n-k-j}(\alpha) B_j^{j+k}(\beta) B_{j+k}^n(u) * \omega_i \end{aligned}$$

La triple somme  $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{n-i}$  devient

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n \sum_{k=0}^{n-i} \quad \text{par resommation suivant les deux premiers indices } i \text{ et } j,$$

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{n-j} \sum_{i=n-k}^j \quad \text{par resommation suivant les deux derniers indices } i \text{ et } k,$$

$$\sum_{j=0}^n \sum_{\ell=j}^n \sum_{i=j}^{n-\ell+j} \quad \text{par le changement d'indices } \ell = j + k,$$

$$\sum_{\ell=0}^n \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{i=j}^{n-\ell+j} \quad \text{par resommation suivant les deux premiers indices } \ell \text{ et } j,$$

$$\sum_{\ell=0}^n \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{m=0}^{n-\ell} \quad \text{par le changement d'indices } m = i - j.$$

D'où en définitive

$$\begin{aligned} BP[\omega] \circ a(u) &= \sum_{\ell=0}^n \left( \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{m=0}^{n-\ell} B_m^{n-\ell}(\alpha) B_j^{\ell}(\beta) * \omega_{j+m} \right) * B_{\ell}^n(u) \\ &= \sum_{\ell=0}^n \theta_{\ell} * B_{\ell}^n(u), \end{aligned} \quad (6)$$

avec  $\{\theta_{\ell}\}_{\ell=0, \dots, n}$  les vecteurs massiques explicités en (2).

Lorsque  $u$  parcourt  $[0, 1]$ , le paramètre  $t = a(u)$  parcourt  $[\alpha, \beta]$  et puisque  $BR[\theta](u) = BR[\omega] \circ a(u)$ , les supports des deux courbes  $BR[\omega; [\alpha, \beta]]$  et  $BR[\theta; [0, 1]]$  sont identiques. ■

La double somme  $\sum_{j=0}^{\ell} \sum_{m=0}^{n-\ell}$  s'écrit après le changement d'indices  $k = j + m$

$$\sum_{j=0}^{\ell} \sum_{k=j}^{n-\ell+j} . \quad (6a)$$

Par resommation, (6a) devient

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=\max(0, k-n+\ell)}^{\min(\ell, k)} . \quad (6b)$$

Nous en déduisons que les équations (2) s'écrivent sous forme matricielle

$$\theta = A \cdot \omega \quad (6c)$$

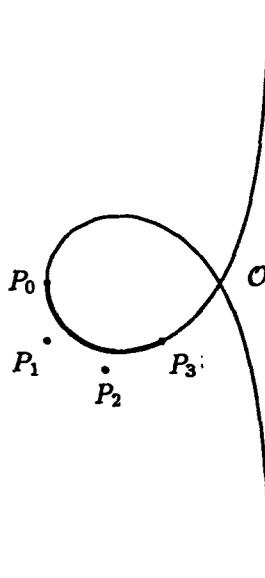


fig 2.1. Trisectrice de MacLaurin.

avec  $A$  la matrice d'éléments

$$A_{\ell,k} = \sum_{j=\max(0,k-n+\ell)}^{\min(\ell,k)} B_{k-j}^{n-\ell}(\alpha) B_j^{\ell}(\beta) \quad (6d)$$

où  $\ell = 0, \dots, n$  et  $k = 0, \dots, n$ .

D'où le résultat suivant

**Corollaire 2.2.**

Etant donné une courbe  $BR[\omega]$  et l'application affine  $a$  définie en (1), alors  $BR[\omega] \circ a = BR[\theta]$  où  $\theta$  est donné par (6c).

**Exemple 2.1.**

La trisectrice de MacLaurin est une courbe rationnelle représentée par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2-3}{t^2+1} \\ y(t) = t \frac{t^2-3}{t^2+1} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sa représentation (BR) s'écrit

$$BR[\omega](t) = \frac{B_0^3(t)P_0 + B_1^3(t)P_1 + \frac{4}{3}B_2^3(t)P_2 + 2B_3^3(t)P_3}{B_0^3(t) + B_1^3(t) + \frac{4}{3}B_2^3(t) + 2B_3^3(t)},$$

où  $\omega$  est le polygone massique

$$\begin{array}{lll} \omega_0 = (P_0; 1) & \text{avec} & P_0 = (-3, 0), \\ \omega_1 = (P_1; 1) & \text{avec} & P_1 = (-3, -1), \\ \omega_2 = (P_2; \frac{4}{3}) & \text{avec} & P_2 = (-2, -\frac{3}{2}), \\ \omega_3 = (P_3; 2) & \text{avec} & P_3 = (-1, -1). \end{array}$$

Le polygone massique est tel que lorsque  $t$  parcourt  $[0, 1]$ , nous obtenons l'arc  $P_0P_3$  (figure 2.1).

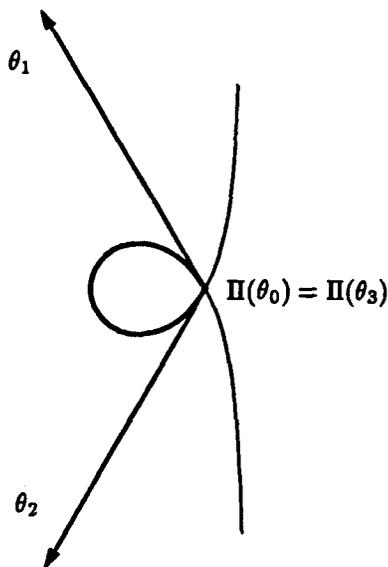


fig 2.2. Trisectrice de MacLaurin.

La boucle  $\mathcal{O}P_0P_3\mathcal{O}$  est obtenue pour la valeur du paramètre parcourant  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ . Nous voulons déterminer une autre représentation (BR) de cette courbe de manière à ce que la boucle soit donnée pour un paramètre décrivant  $[0, 1]$ . Pour cela, d'après la proposition précédente, nous effectuons le changement affine  $t = a(u)$  avec  $a(u) = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}u$ , d'où

$$BR[\omega] \circ a(u) = BR[\theta](u),$$

avec les nouveaux vecteurs massiques (figure 2.2) :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \sum_{m=0}^3 B_m^3(\alpha) * \omega_m = (0, 0; 4), \\ \theta_1 &= \sum_{j=0}^1 \sum_{m=0}^2 B_m^2(\alpha) B_j^1(\beta) * \omega_{m+j} = (-4, 6.9282), \\ \theta_2 &= \sum_{j=0}^2 \sum_{m=0}^1 B_m^1(\alpha) B_j^2(\beta) * \omega_{m+j} = (-4, -6.9282), \\ \theta_3 &= \sum_{j=0}^3 B_j^3(\beta) * \omega_j = (0, 0; 4) \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

La boucle est donc définie

- a) pour  $t \in [-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$  avec le polygone  $\omega$ .
- b) pour  $u \in [0, 1]$  avec le polygone  $\theta$ .

D'où l'égalité des supports

$$\left| BR[\omega; [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]] \right| = \left| BR[\theta; [0, 1]] \right|.$$

Dans la pratique, on va se servir d'une méthode plus rapide et moins coûteuse en opérations numériques.

**Proposition 2.3. Méthode en deux étapes.**

On se donne  $n + 1$  vecteurs massiques  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$  et 2 valeurs  $\alpha, \beta$  : le changement de paramètres  $t = a(u)$  s'effectue en 2 étapes,

1<sup>er</sup> cas :  $\beta \neq 0$  :

$$(i) \quad BR[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n] \circ a(u) = BR[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n] \left( \frac{\alpha}{\beta} + u \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right)$$

avec  $\tau_0 = \omega_0^0, \tau_1 = \omega_0^1, \dots, \tau_n = \omega_0^n$  où  $\{\omega_i^j\}_{i=0, \dots, n-j}^{j=0, \dots, n}$  sont les vecteurs massiques fournis par *DeCasteljau*( $\omega_0, \dots, \omega_n; \beta$ ).

$$(ii) \quad BR[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n] \left( \frac{\alpha}{\beta} + u \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right) = BR[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n](u)$$

avec  $\theta_0 = \tau_0^n, \theta_1 = \tau_1^{n-1}, \dots, \theta_n = \tau_n^0$  où  $\{\tau_i^j\}_{i=0, \dots, n-j}^{j=0, \dots, n}$  sont les vecteurs massiques fournis par *DeCasteljau*( $\tau_0, \dots, \tau_n; \frac{\alpha}{\beta}$ ).

2<sup>nd</sup> cas :  $\beta = 0$  :

$$(i) \quad BR[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n] \circ a(u) = BR[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n] \left( \frac{\alpha}{\beta} + u \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right)$$

avec  $\tau_0 = \omega_0^0, \tau_1 = \omega_0^1, \dots, \tau_n = \omega_0^n$  où  $\{\omega_i^j\}_{i=0, \dots, n-j}^{j=0, \dots, n}$  sont les vecteurs massiques fournis par *DeCasteljau*( $\omega_0, \dots, \omega_n; \alpha$ ).

$$(ii) \quad BR[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n] (1 - u) = BR[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n](u)$$

avec  $\theta_0 = \tau_n, \theta_1 = \tau_{n-1}, \dots, \theta_n = \tau_0$ .

(Résultat)  $BR[\omega] \circ a(u) = BR[\theta](u)$  avec  $u \in [0, 1]$ .

**Preuve:**

Dans le cas  $\beta \neq 0$ , il suffit d'utiliser la proposition [FJ89, p.88 et chap.I, §4], en prenant

- (i) dans la première étape :  $\sigma = \omega$  et  $t_0 = \beta$ ,
- (ii) et dans la seconde étape :  $\sigma = \tau$  et  $t_0 = \frac{\alpha}{\beta}$ .

Dans le cas  $\beta = 0$ ,

- (i) la première étape consiste à utiliser la proposition [FJ89, p.88 et chap.I, §4], en prenant  $\sigma = \omega$  et  $t_0 = \alpha$ ,
- (ii) la seconde étape vient du fait que  $BR[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n](1 - u) = BR[\tau_n, \tau_{n-1}, \dots, \tau_0](u)$ . ■

**Exemple 2.2.**

Revenons à la trisectrice de Maclaurin : la première étape de la méthode consiste à faire *DeCasteljau*( $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3; \sqrt{3}$ ), et à extraire la diagonale descendante :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= (-3, 0; 1), \\ \tau_1 &= (-3, -1.7320; 1), \\ \tau_2 &= (-1, -1.732; 2), \\ \tau_3 &= (0, 0; 4) \quad . \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} BR[\omega] \circ a(u) &= BR[\omega](-\sqrt{3} + 2\sqrt{3}u) \\ &= BR[\tau](-1 + 2u), \end{aligned}$$

et

$$\left| BR[\omega; [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]] \right| = \left| BR[\tau; [-1, 1]] \right| .$$

La seconde étape fournit les vecteurs massiques  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ , et  $\theta_3$  que nous avons explicités en (7); ils sont donnés par la diagonale montante de DeCasteljau( $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n; -1$ ).

Finalement

$$BR[\omega](-\sqrt{3} + 2\sqrt{3}u) = BR[\tau](-1 + 2u) = BR[\theta](u)$$

et

$$\left| BR[\omega; [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]] \right| = \left| BR[\theta; [0, 1]] \right| .$$

Ces deux étapes sont illustrées par les figures 2.3.

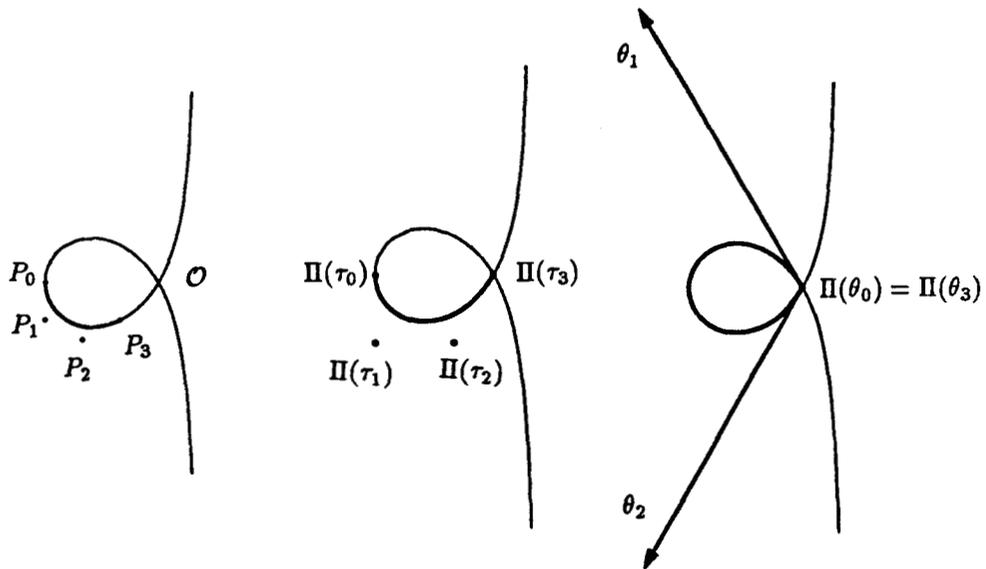


fig 2.3 Trisectrice de MacLaurin.

Dans le cas particulier des courbes Bézier, cette méthode est citée dans [FA88, p.77].

**Exemple 2.3.**

La *Cubique de Tschirnausen* appelée aussi *trisectrice du Catalan* ou *cubique de l'Hospital*, a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = 3(t^2 - 3) \\ y(t) = t(t^2 - 3) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

qui s'écrit aussi dans la base de Bernstein

$$\begin{cases} x(t) = -9B_0^3(t) - 9B_1^3(t) - 8B_2^3(t) - 6B_3^3(t) \\ y(t) = -B_1^3(t) - 2B_2^3(t) - 2B_3^3(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

D'où sa représentation Bézier

$$BP[P](t) = B_0^3(t)P_0 + B_1^3(t)P_1 + B_2^3(t)P_2 + B_3^3(t)P_3,$$

avec les quatre points de contrôle

$$\begin{aligned} P_0 &= (-9, 0), \\ P_1 &= (-9, -1), \\ P_2 &= (-8, -2), \\ P_3 &= (-6, -2). \end{aligned} \tag{8}$$

Dans la représentation ci-dessus, la boucle est décrite lorsque  $t$  varie dans l'intervalle  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ , nous voulons la décrire avec un paramètre variant dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Pour ce faire, nous effectuons le changement affine  $t = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}u$  en utilisant la méthode de la proposition 2.3,

(i) *DeCasteljau*( $P_0, P_1, P_2, P_3; \sqrt{3}$ ) donne un premier polygone de contrôle (la première diagonale descendante) constitué des points

$$\begin{aligned} Q_0 &= (-9, 0), \\ Q_1 &= (-9, -1.7320), \\ Q_2 &= (-6, -3.4641), \\ Q_3 &= (0, 0), \end{aligned}$$

tel que

$$\begin{aligned} BP[P] \circ a(u) &= BP[P](-\sqrt{3} + 2\sqrt{3}u) \\ &= BP[Q](-1 + 2u) \end{aligned}$$

et

$$\left| BP[P; [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]] \right| = \left| BP[Q; [-1, 1]] \right|.$$

(ii) *DeCasteljau*( $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3; -1$ ) donne un second polygone de contrôle (la diagonale montante) constitué des points

$$\begin{aligned} R_0 &= (0, 0), \\ R_1 &= (-12, 6.9282), \\ R_2 &= (-12, -6.9282), \\ R_3 &= (0, 0), \end{aligned}$$

tel que

$$BP[P](-\sqrt{3} + 2\sqrt{3}u) = BP[Q](-1 + 2u) = BP[R](u),$$

et

$$\left| BP[P; [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]] \right| = \left| BP[R; [0, 1]] \right|.$$

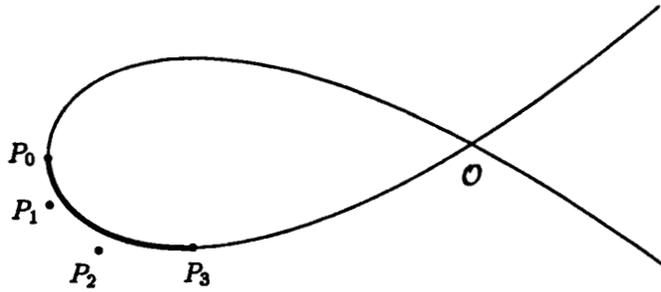


fig 2.4.a. Cubique de Tschirnausen : polygone  $P$ .

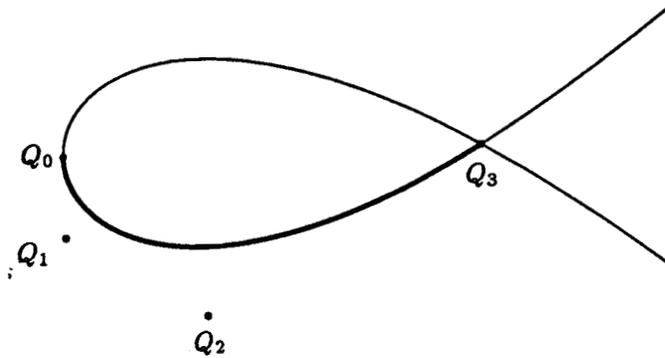
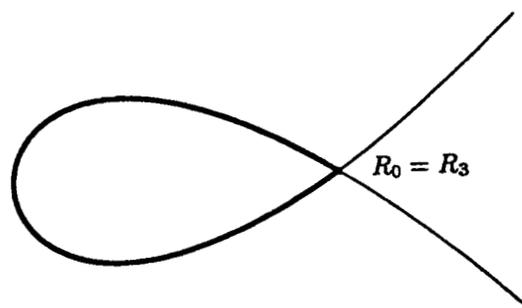


fig 2.4.b. Cubique de Tschirnausen : polygone  $Q$ .

•  $R_1$



•  $R_2$

fig 2.4.c. Cubique de Tschirnausen : polygone  $R$ .

Ces deux étapes sont illustrées par les figures 2.4.

### §3. Changement de paramètre homographique.

#### 3.1. Cas d'une courbe (BR).

Soit l'application homographique régulière

$$h: [0, 1] \rightarrow I$$

$$u \rightarrow \frac{\alpha(1-u) + \beta u}{\gamma(1-u) + \delta u} \quad (9)$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  vérifient  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ , et  $I$  est l'intervalle  $h([0, 1])$ . Suivant les valeurs prises par les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$ , et  $\delta$ , l'intervalle  $I$  peut prendre différentes formes, par exemple

- pour  $\alpha = 0, \beta = 4, \gamma = 1$ , et  $\delta = 2$ ,  $I$  est l'intervalle  $[0, 2]$ .
- pour  $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 0$ , et  $\delta = 1$ ,  $I$  est l'intervalle  $] -\infty, 0]$ .
- pour  $\alpha = \sqrt{3}, \beta = \sqrt{3}, \gamma = 1$ , et  $\delta = -1$ ,  $I$  est l'union d'intervalles  $] -\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty[$ .

#### Theorème 2.4.

Soit une courbe  $BR[\omega; I]$  définie par  $n+1$  vecteurs massiques  $\omega_0, \dots, \omega_n$ ; la composition de cette courbe avec  $h$  donne  $BR[\omega] \circ h = BR[\theta]$  où le polygone massique  $\theta$  est alors :

$$\theta_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{m=0}^{n-\ell} \binom{\ell}{j} \binom{n-\ell}{m} \alpha^m \beta^j \gamma^{n-\ell-m} \delta^{\ell-j} * \Delta^{j+m} \omega_0, \quad \ell = 0, 1, \dots, n; \quad (10)$$

et la courbe  $BR[\theta; [0, 1]]$  a même support que la courbe  $BR[\omega; I]$ .

#### Preuve:

Par définition d'une courbe (BR):  $BR[\omega](t) = \Pi(BP[\omega](t))$  où le terme entre parenthèses dans le second membre s'écrit après passage dans la base canonique

$$BP[\omega](t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i * \Delta^i \omega_0. \quad (11)$$

On remplace  $t$  par  $h(u)$  dans (11), et on réduit au même dénominateur,

$$\begin{aligned} BP[\omega] \circ h(u) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (h(u))^i * \Delta^i \omega_0 \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{(\alpha(1-u) + \beta u)^i}{(\gamma(1-u) + \delta u)^i} * \Delta^i \omega_0 \\ &= \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (\alpha(1-u) + \beta u)^i (\gamma(1-u) + \delta u)^{n-i} * \Delta^i \omega_0}{(\gamma(1-u) + \delta u)^n} \end{aligned}$$

En appliquant la formule du binôme, on trouve

$$BP[\omega] \circ h(u) =$$

$$\frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{i}{j} \binom{n-i}{k} \alpha^{i-j} \beta^j \gamma^{n-i-k} \delta^k u^{j+k} (1-u)^{n-j-k} * \Delta^i \omega_0}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \gamma^{n-i} \delta^i u^i (1-u)^{n-i}}$$

En remarquant que

$$\binom{n}{i} \binom{i}{j} \binom{n-i}{k} = \binom{n}{j+k} \binom{j+k}{j} \binom{n-j-k}{i-j},$$

et en remplaçant  $\binom{n}{j+k} u^{j+k} (1-u)^{n-j-k}$  par la notation  $B_{j+k}^n(u)$ , on obtient

$$BP[\omega] \circ h(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{j+k}{j} \binom{n-j-k}{i-j} \alpha^{i-j} \beta^j \gamma^{n-i-k} \delta^k B_{j+k}^n(u) * \Delta^i \omega_0}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \gamma^{n-i} \delta^i u^i (1-u)^{n-i}} \quad (12)$$

En faisant la sommation de manière différente, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{n-i} &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n \sum_{k=0}^{n-i} \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{n-j} \sum_{i=j}^{n-k}, \end{aligned}$$

posons  $\ell = j + k$ , il vient

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{n-j} \sum_{i=j}^{n-k} = \sum_{j=0}^n \sum_{\ell=0}^n \sum_{i=j}^{n-k},$$

puis posons  $m = i - j$ , il vient

$$\sum_{\ell=0}^n \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{m=0}^{n-\ell}.$$

D'où

$$BP[\omega] \circ h(u) = \frac{\sum_{\ell=0}^n B_{\ell}^n(u) \theta_{\ell}}{\sum_{\ell=0}^n \gamma^{n-\ell} \delta^{\ell} B_{\ell}^n(u) * \delta^{\ell}} \quad (13)$$

où les vecteurs massiques  $\theta_{\ell}$  sont donnés par (10).

Finalement d'après les propriétés de la projection  $\Pi$

$$\begin{aligned} BR[\omega] \circ h(u) &= \Pi(BP[\omega] \circ h(u)) \\ &= \Pi\left(\frac{\sum_{\ell=0}^n B_{\ell}^n(u) * \theta_{\ell}}{\sum_{\ell=0}^n \gamma^{n-\ell} \delta^{\ell} B_{\ell}^n(u)}\right) \\ &= \Pi\left(\sum_{\ell=0}^n B_{\ell}^n(u) * \theta_{\ell}\right) \\ &= BR[\theta](u). \end{aligned}$$

Lorsque  $u$  parcourt  $[0, 1]$ ,  $t$  parcourt  $I$  et les supports des deux courbes  $BR[\omega; I]$  et  $BR[\theta; [0, 1]]$  sont les mêmes. ■

En utilisant (6a) et (6b), les équations (10) s'écrivent sous forme matricielle

$$\theta = H \cdot \Delta \omega \quad (13a)$$

avec  $H$  la matrice d'éléments

$$H_{\ell, k} = \sum_{j=\max(0, k-n+\ell)}^{\min(k, \ell)} \binom{\ell}{j} \binom{n-\ell}{k-j} \alpha^{k-j} \beta^j \gamma^{n-\ell-k+j} \delta^{\ell-j}$$

où  $\ell = 0, \dots, n$  et  $k = 0, \dots, n$ .

En notant  $\Delta$  la matrice triangulaire  $(c_{i,j})_{i=0, \dots, n}^{j=0, \dots, n}$  avec :

$$c_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} & \text{si } 0 \leq j \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(13a) devient

$$\theta = H \cdot \Delta \cdot \omega. \quad (13b)$$

D'où le résultat suivant

### Corollaire 2.5.

Etant données une courbe  $BR[\omega]$  et l'application homographique  $h$  définie en (9), alors  $BR[\omega] \circ h = BR[\theta]$  où  $\theta$  est donné par (13a) ou (13b).

### Exemple 2.4.

Considérons le *folium de Descartes*, dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sa forme (BR) est définie par le polygone massique (figure 2.5) :

$$\begin{array}{llll} \omega_0 & = (P_0; 1) & \text{avec} & P_0 = (0, 0), \\ \omega_1 & = (P_1; 1) & \text{avec} & P_1 = (1, 0), \\ \omega_2 & = (P_2; 1) & \text{avec} & P_2 = (2, 1), \\ \omega_3 & = (P_3; 2) & \text{avec} & P_3 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right); \end{array}$$

elle s'écrit alors

$$BR[\omega](t) = \frac{B_0^3(t)P_0 + B_1^3(t)P_1 + B_2^3(t)P_2 + 2B_3^3(t)P_3}{B_0^3(t) + B_1^3(t) + B_2^3(t) + 2B_3^3(t)}$$

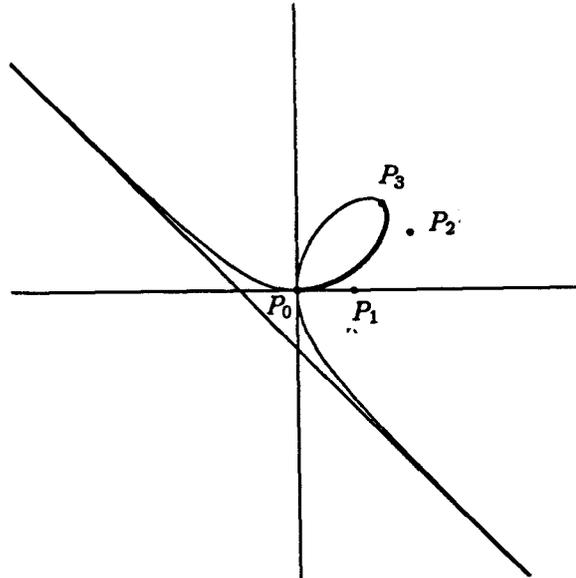


fig 2.5. Folium de Descartes.

La courbe présente une asymptote pour  $t = -1$ ; l'image de  $] -\infty, -1[$  est la partie de la courbe qui se trouve dans le quatrième quadrant, et l'image de  $] -1, +\infty[$  est la partie de la courbe qui se trouve dans le premier et second quadrant. Nous voulons représenter deux morceaux de la courbe :

$$\begin{aligned} BR[\omega](t) & \text{ pour } -\infty < t \leq -2, \text{ et} \\ BR[\omega](t) & \text{ pour } -0.5 \leq t < \infty, \end{aligned}$$

par une seule forme  $BR[\theta; [0, 1]]$ . Le changement homographique

$$t = h(u) = \frac{2(1-u) - 0.5u}{-(1-u) + u}$$

répond à la question, i.e.,  $h([0, 1])$  est la réunion des deux intervalles ci-dessus. En utilisant la proposition précédente, nous obtenons le polygone massique

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \left(\frac{6}{7}, -\frac{12}{7}; 7\right), \\ \theta_1 &= \left(-\frac{9}{2}, 6; -1\right), \\ \theta_2 &= \left(-6, \frac{9}{2}; -\right), \\ \theta_3 &= \left(-\frac{12}{7}, \frac{12}{14}; \frac{7}{8}\right). \end{aligned}$$

La figure 2.6 illustre ce changement.

### 3.2. Etude de cas particuliers.

Considérons les applications homographiques de la forme

$$\bar{h}(u) = \frac{\delta u}{\gamma(1-u) + \delta u}$$

avec  $\gamma\delta \neq 0$ . Remarquons que

- si  $\gamma\delta > 0$  :  $\bar{h}([0, 1]) = [0, 1]$ .
- si  $\gamma\delta < 0$  :  $\bar{h}([0, 1]) = \overline{\mathbb{R}} \setminus ]0, 1[$ .

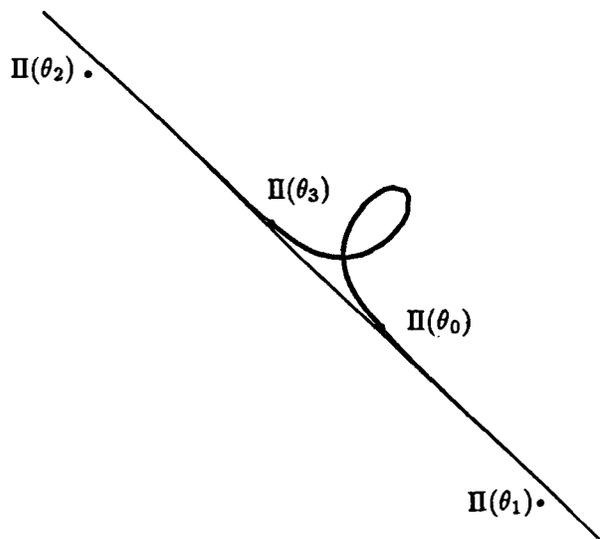


fig 2.6. Folium de Descartes.

**Proposition 2.6.**

Soit une courbe  $BR[\omega; [0, 1]]$  définie par  $n + 1$  vecteurs massiques  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ ; alors  $BR[\omega] \circ \bar{h} = BR[\theta]$  où le polygone massique  $\theta$  est défini par

$$\theta_\ell = \gamma^{n-\ell} \delta^\ell * \omega_\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, n.$$

De plus

$$\left| BR[\omega; \bar{h}([0, 1])] \right| = \left| BR[\theta; [0, 1]] \right|.$$

**Preuve:**

D'après la forme de l'application  $\bar{h}$  ci-dessus, la formule (10) utilisée avec  $\alpha = 0$  et  $\beta = \delta$  donne

$$\begin{aligned} \theta_\ell &= \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \gamma^{n-\ell} \delta^j \delta^{\ell-j} * \Delta^j \omega_0 \\ &= \gamma^{n-\ell} \delta^\ell \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} * \Delta^j \omega_0. \end{aligned} \tag{14}$$

Par récurrence, montrons que

$$\sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} * \Delta^j \omega_0 = \omega_\ell.$$

Pour  $\ell = 0$ ,  $\Delta^0 \omega_0 = \omega_0$ ;  
supposons que pour  $i = 0, 1, \dots, \ell - 1$

$$\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} * \Delta^j \omega_0 = \omega_i, \tag{15}$$

alors puisque

$$\Delta^\ell \omega_0 = \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} \omega_j,$$

on obtient en isolant  $\omega_\ell$  :

$$\omega_\ell = \Delta^\ell \omega_0 - \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^{\ell-j} \binom{\ell}{j} \omega_j,$$

d'où en utilisant l'hypothèse de récurrence (15)

$$\begin{aligned} \omega_\ell &= \Delta^\ell \omega_0 + \sum_{j=0}^{\ell-1} \sum_{k=0}^j (-1)^{\ell-1-j} \binom{\ell}{j} \binom{j}{k} \Delta^k \omega_0 \\ &= \Delta^\ell \omega_0 + \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{j=k}^{\ell-1} (-1)^{\ell-1-j} \binom{\ell}{j} \binom{j}{k} \Delta^k \omega_0, \end{aligned}$$

il ne reste plus qu'à montrer que

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^{\ell-1} (-1)^{\ell-1-j} \binom{\ell}{j} \binom{j}{k} &= \binom{\ell}{k} \sum_{j=k}^{\ell-1} (-1)^{\ell-1-j} \binom{\ell-k}{j-k} \\ &= \binom{\ell}{k} \sum_{m=0}^{\ell-1-k} (-1)^{\ell-1-m-k} \binom{\ell-k}{m} \\ &= \binom{\ell}{k} (1 - (1-1)^{\ell-k}) \\ &= \binom{\ell}{k}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \omega_\ell &= \Delta^\ell \omega_0 + \sum_{k=0}^{\ell-1} \binom{\ell}{k} \Delta^k \omega_0 \\ &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} \Delta^k \omega_0, \end{aligned}$$

et l'équation (14) devient

$$\theta_\ell = \gamma^{n-\ell} \delta^\ell * \omega_\ell.$$

Pour conclure, il suffit de remplacer  $I$  par  $\bar{h}([0, 1])$  dans la proposition 2.4. ■

**Corollaire 2.7.**

Soit une courbe Bézier  $BP[P; [0, 1]]$  de degré  $n$ ; alors avec les notations de la proposition 2.6, nous avons

$$BP[P] \circ \bar{h} = BR[\theta]$$

avec  $\theta_\ell = (P_\ell; \gamma^{n-\ell}\delta^\ell)$  pour  $\ell = 0, 1, \dots, n$ .

De plus

$$\left| BP[P; \bar{h}([0, 1])] \right| = \left| BR[\theta; [0, 1]] \right|.$$

**Preuve:**

Nous savons que  $BP[P] = BR[\omega]$  où le polygone massique  $\omega$  est constitué des points pondérés  $(P_\ell; 1)$  pour  $\ell = 0, 1, \dots, n$ .

Il suffit d'appliquer la proposition 2.6, en composant la courbe  $BR[\omega; [0, 1]]$  avec  $\bar{h}$ . ■

**Corollaire 2.8.**

Avec les notations précédentes et  $\gamma\delta > 0$ , nous obtenons de plus

$$\left| BR[\omega; [0, 1]] \right| = \left| BR[\theta; [0, 1]] \right|,$$

avec  $\theta_\ell = \gamma^{n-\ell}\delta^\ell * \omega_\ell$  pour  $\ell = 0, 1, \dots, n$ , i.e., le support de la courbe  $BR[\omega; [0, 1]]$  est globalement invariant si on remplace  $\omega$  par  $\theta$ .

**Preuve:**

Il suffit d'utiliser la proposition 2.6 en remarquant que si  $\gamma\delta > 0$ , alors  $\bar{h}([0, 1]) = [0, 1]$ . ■

**Remarque 2.9.**

Dans le cas d'une courbe (BR) dont le polygone massique est constitué uniquement de points pondérés (courbes Bézier rationnelles), nous retrouvons un résultat connu [PA85] [FA89] : les équations

$$\theta_\ell = \gamma^{n-\ell}\delta^\ell * \omega_\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, n \quad ,$$

équivalentes aux équations

$$\begin{aligned} \Pi(\theta_\ell) &= \Pi(\omega_\ell) \\ \chi(\theta_\ell) &= \gamma^{n-\ell}\delta^\ell \chi(\omega_\ell) \end{aligned} \quad \text{pour } \ell = 0, 1, \dots, n \quad ,$$

montrent qu'on ne modifie aucunement le support d'une telle courbe en remplaçant les masses  $\chi(\omega_\ell)$  par  $\gamma^{n-\ell}\delta^\ell \chi(\omega_\ell)$  avec  $\gamma\delta > 0$ .

**Exemple 2.5.**

Prenons la courbe (BR) de longueur 2 (un arc d'ellipse) :  $BR[\omega]$  avec

$$\begin{aligned} \omega_0 &= (0, 1; 1), \\ \omega_1 &= (4, 0; 1.5), \\ \omega_2 &= (0, -1; 9). \end{aligned}$$

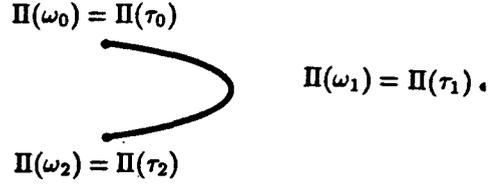


fig 2.7. Arc d'ellipse.

Effectuons le changement  $\bar{h}$  avec des coefficients  $\gamma = 1$  et  $\delta = 1/3$ , nous obtenons le polygone massique  $\tau$  tel que  $\chi(\tau_2) = 1$  :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= (0, 1; 1), \\ \tau_1 &= (4, 0; 0.5), \\ \tau_2 &= (0, -1; 1), \end{aligned} \tag{16}$$

et  $BR[\omega; [0, 1]]$  et  $BR[\tau; [0, 1]]$  ont le même support (figure 2.7).

**Corollaire 2.10.**

Soit une courbe Bézier  $BP[P; [0, 1]]$  de degré  $n$ ; alors avec les notations du corollaire 2.7 et  $\gamma\delta > 0$ , nous avons de plus

$$\left| BP[P; [0, 1]] \right| = \left| BR[\theta; [0, 1]] \right|.$$

**Preuve:**

Pour  $\gamma\delta > 0$ , nous avons  $\bar{h}([0, 1]) = [0, 1]$ . Le résultat énoncé provient d'une simple application du corollaire 2.7. ■

**Définition 2.11.**

On appelle complémentaire d'une courbe  $BR[\omega; I]$ , la courbe  $BR[\omega; I^c]$  où  $I^c = \overline{\mathbb{R}} \setminus I$  est le complémentaire de  $I$  dans la droite projective réelle.

**Corollaire 2.12.**

Avec les notations de la proposition 2.6 et  $\gamma\delta < 0$ , nous obtenons

$$\left| BR[\omega; \overline{\mathbb{R}} \setminus [0, 1]] \right| = \left| BR[\theta; [0, 1]] \right|,$$

avec  $\theta_\ell = \gamma^{n-\ell}\delta^\ell * \omega_\ell$  pour  $\ell = 0, 1, \dots, n$ , i.e., le support de la courbe complémentaire de  $BR[\omega; [0, 1]]$  est le support de  $BR[\theta; [0, 1]]$ .

**Preuve:**

Il suffit d'appliquer la proposition 2.6 et la définition 2.11 en remarquant que si  $\gamma\delta < 0$ , alors  $\overline{h}[0, 1] = \overline{\mathbb{R}} \setminus ]0, 1[$ . ■

**Remarque 2.13.**

En prenant  $\gamma = 1$ ,  $\delta = -1$  (resp.  $\gamma = -1$ ,  $\delta = 1$ ), les vecteurs massiques du polygone  $\theta$  s'écrivent simplement

$$\theta_\ell = (-1)^\ell * \omega_\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, n,$$

$$(\text{resp. } \theta_\ell = (-1)^{n-\ell} * \omega_\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, n),$$

et l'égalité des supports devient

$$\begin{aligned} \left| BR[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \overline{\mathbb{R}} \setminus ]0, 1[ \right| &= \left| BR[\omega_0, \Theta\omega_1, \dots, (-1)^n * \omega_n; [0, 1]] \right| \\ &= \left| BR[(-1)^n * \omega_0, (-1)^{n-1} * \omega_1, \dots, \omega_n; [0, 1]] \right|; \end{aligned}$$

si  $n$  est pair, il y a identité des deux derniers polygones massiques.

**Corollaire 2.14.**

La courbe complémentaire d'une courbe Bézier  $BP[P; [0, 1]]$  de degré  $n$  est représentée par une courbe rationnelle paramétrée sur  $[0, 1]$  :  $BR[\theta; [0, 1]]$  avec

$$\theta_\ell = (P_\ell; \gamma^{n-\ell}\delta^\ell) \quad \text{pour } \ell = 0, 1, \dots, n;$$

$\gamma$  et  $\delta$  étant deux réels tel que  $\gamma\delta < 0$ .

**Preuve:**

Si  $\gamma\delta < 0$ ,  $\overline{h}([0, 1])$  est le complémentaire de l'intervalle  $[0, 1]$ . Il suffit alors d'appliquer le corollaire 2.7. ■

**Exemple 2.6.**

Revenons à l'arc d'ellipse, représenté par  $BR[\tau; [0, 1]]$  et défini dans l'exemple 2.5 par le polygone (16). Par définition, sa courbe complémentaire est  $BR[\tau; \overline{\mathbb{R}} \setminus ]0, 1[$ . L'application du corollaire 2.12 avec  $\gamma = -1$  et  $\delta = 1$  donne la courbe  $BR[\theta; [0, 1]]$  avec

$$\begin{aligned} \theta_0 &= (0, 1; 1), \\ \theta_1 &= (4, 0; -0.5), \\ \theta_2 &= (0, -1; 1). \end{aligned}$$

qui a le même support que  $BR[\tau; \overline{\mathbb{R}} \setminus ]0, 1[$ .

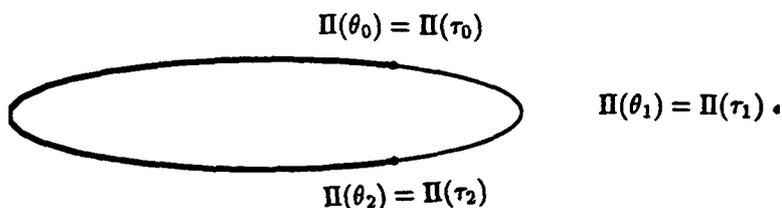


fig 2.8. Courbe complémentaire d'un arc d'ellipse.

Les deux courbes  $BR[\tau; [0, 1]]$  et  $BR[\theta; [0, 1]]$  sont illustrées dans la figure 2.8.

**Exemple 2.7.**

Soit une quartique donnée sous forme (BR) :

$$BR[\omega](u) = \frac{B_0^4(u)P_0 + B_1^4(u)P_1 + 2B_2^4(u)P_2 + 4B_3^4(u)P_3 + 8B_4^4(u)P_4}{B_0^4(u) + B_1^4(u) + 2B_2^4(u) + 4B_3^4(u) + 8B_4^4(u)}$$

avec  $u \in [0, 1]$ , définie par le polygone massique :

$\omega_0 = (P_0; 1)$	avec	$P_0 = (1, 0),$
$\omega_1 = (P_1; 1)$	avec	$P_1 = (1, \frac{1}{2}),$
$\omega_2 = (P_2; 2)$	avec	$P_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$
$\omega_3 = (P_3; 4)$	avec	$P_3 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}),$
$\omega_4 = (P_4; 8)$	avec	$P_4 = (0, 0).$

En utilisant la remarque 2.13, la courbe complémentaire de  $BR[\omega; [0, 1]]$  est représentée par

$$BR[\theta](v) = \frac{B_0^4(v)P_0 - B_1^4(v)P_1 + 2B_2^4(v)P_2 - 4B_3^4(v)P_3 + 8B_4^4(v)P_4}{B_0^4(v) - B_1^4(v) + 2B_2^4(v) - 4B_3^4(v) + 8B_4^4(v)}$$

avec  $v \in [0, 1]$ ,  $\theta$  étant le polygone massique :

$\theta_0 = (P_0; 1)$	avec	$P_0 = (1, 0),$
$\theta_1 = (P_1; -1)$	avec	$P_1 = (1, \frac{1}{2}),$
$\theta_2 = (P_2; 2)$	avec	$P_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$
$\theta_3 = (P_3; -4)$	avec	$P_3 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}),$
$\theta_4 = (P_4; 8)$	avec	$P_4 = (0, 0).$

La réunion des supports des deux courbes  $BR[\theta; [0, 1]]$  et  $BR[\omega; [0, 1]]$  est la *lemniscate de Bernoulli* (figure 2.9).

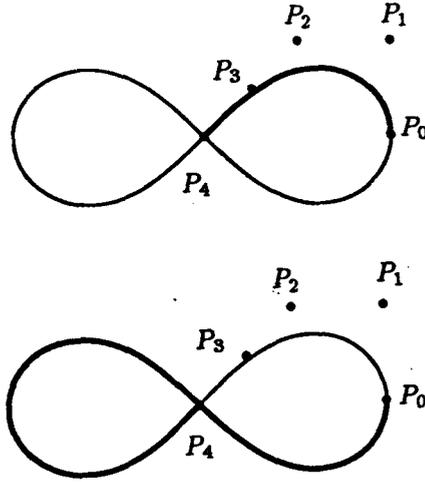


fig 2.9. Lemniscate de Bernoulli.

### 3.3. Cas d'une courbe (BP).

#### Proposition 2.15.

Soit la courbe  $BP[M; I]$  définie par  $n+1$  points de contrôle  $M_0, \dots, M_n$ ; la composition de cette courbe avec  $h$  donne  $BP[M] \circ h(u) = BR[\theta](u)$  où

- si  $\gamma \neq 0$  et  $\delta \neq 0$  :  $\theta$  est un polygone constitué de points pondérés

$$\theta_\ell = \left( \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{\ell}{j} \binom{n-\ell}{m} \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^m \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^j \Delta^{j+m} M_0; \gamma^{n-\ell} \delta^\ell \right), \quad \ell = 0, \dots, n.$$

- si  $\gamma = 0$  et  $\delta \neq 0$  :  $\theta$  est un polygone constitué de  $n$  vecteurs purs

$$\theta_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \alpha^{n-\ell} \beta^j \delta^{\ell-j} \Delta^{n-\ell+j} M_0, \quad \ell = 0, 1, \dots, n-1$$

et d'un unique point pondéré

$$\theta_n = \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^j \Delta^j M_0; \delta^n \right).$$

- si  $\gamma \neq 0$  et  $\delta = 0$  :  $\theta$  est un polygone constitué d'un unique point pondéré

$$\theta_0 = \left( \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^m \Delta^m M_0; \gamma^n \right)$$

et de  $n$  vecteurs purs

$$\theta_\ell = \sum_{m=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{m} \alpha^m \beta^\ell \gamma^{n-\ell-m} \Delta^{\ell+m} M_0, \quad \ell = 1, 2, \dots, n.$$

**Preuve:**

Dans le cas 1), d'après la linéarité de  $\chi$ , il vient de la formule (10) que

$$\chi(\theta_\ell) = \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{m=0}^{n-\ell} \binom{\ell}{j} \binom{n-\ell}{m} \alpha^m \beta^j \gamma^{n-\ell-m} \delta^{\ell-j} \chi(\Delta^{j+m} \omega_0),$$

où  $\omega_i = (M_i; 1)$  pour  $i = 0, 1, \dots, n$ , donc

$$\chi(\Delta^{j+m} \omega_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j+m = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} \chi(\theta_\ell) &= \gamma^{n-\ell} \delta^\ell \chi(\omega_0) \\ &= \gamma^{n-\ell} \delta^\ell \quad \ell = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \theta_\ell &= \left( \frac{\sum_{j=0}^{\ell} \sum_{m=0}^{n-\ell} \binom{\ell}{j} \binom{n-\ell}{m} \alpha^m \beta^j \gamma^{n-\ell-m} \delta^{\ell-j} \Delta^{j+m} M_0}{\gamma^{n-\ell} \delta^\ell}; \gamma^{n-\ell} \delta^\ell \right) \\ &= \left( \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{\ell}{j} \binom{n-\ell}{k} \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^m \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^j \Delta^{j+k} M_0; \gamma^{n-\ell} \delta^\ell \right). \end{aligned}$$

Dans le cas 2), lorsque  $\gamma = 0$  et  $\delta \neq 0$ , il est clair que la seule et unique masse non nulle est celle de  $\theta_n$  puisque

$$\begin{aligned} \chi(\theta_\ell) &= \gamma^{n-\ell} \delta^\ell = 0, \quad \ell = 0, 1, \dots, n-1, \\ \chi(\theta_n) &= \delta^n. \end{aligned}$$

On a un seul point pondéré

$$\begin{aligned} \theta_n &= \left( \frac{\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \beta^j \delta^{n-j} \Delta^j M_0}{\delta^n}; \delta^n \right) \\ &= \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{\beta}{\delta}\right)^j \Delta^j M_0; \delta^n \right) \end{aligned}$$

et  $n$  vecteurs purs

$$\theta_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \alpha^{n-\ell} \beta^j \delta^{\ell-j} \Delta^{n-\ell+j} M_0, \quad \ell = 0, 1, \dots, n-1.$$

Le cas 3) se traite comme le cas 2). ■

**Exemple 2.8.**

Reprenons l'exemple 2.3 de la cubique polynomiale de Tschirnausen. Nous désirons obtenir l'arc infini correspondant aux valeurs de  $t \in [0, \infty[$  pour un paramètre parcourant le segment  $[0, 1]$  (ou tout segment fini). Pour cela, prenons un changement homographique de paramètre  $h$  avec  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$  et  $\delta = 0$ . Ce qui donne le polygone massique (figure 2.10)

$$\theta_0 = (-9, 0; 1),$$

$$\theta_1 = (0, -1),$$

$$\theta_2 = (1, 0),$$

$$\theta_3 = (0, 1).$$

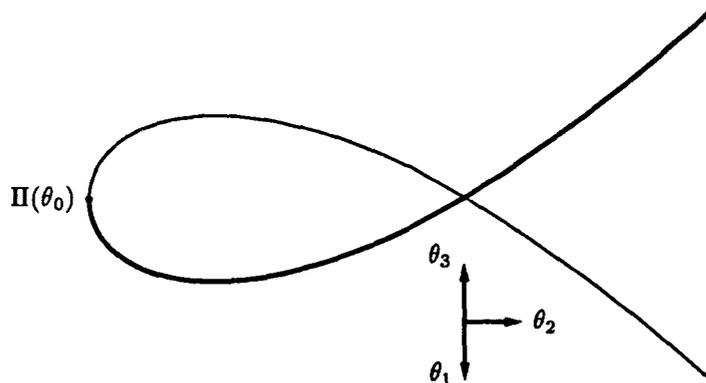


fig 2.10. Cubique de Tschirnausen.

**Proposition 2.16.**

Soient  $\gamma$  et  $\delta$  deux réels non simultanément nuls, et soit une courbe  $BR[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n]$  avec

$$\chi(\theta_\ell) = \gamma^{n-\ell} \delta^\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, n;$$

alors cette courbe est en fait polynomiale.

**Preuve:**

1) dans le cas où  $\gamma \neq 0$  et  $\delta \neq 0$  : le polygone  $\theta$  est constitué des points pondérés  $\theta_\ell = (P_\ell; \gamma^{n-\ell} \delta^\ell)$  pour  $\ell = 0, 1, \dots, n$ .  $\theta$  est semblable au polygone du corollaire 2.7. En composant la courbe  $BR[\theta]$  avec l'application homographique

$$h^{-1}(t) = \frac{\gamma t}{\delta(1-t) + \gamma t},$$

nous avons d'après la proposition 2.6 :  $BR[\theta] \circ h^{-1} = BR[\omega]$  avec

$$\omega_\ell = \delta^{n-\ell} \gamma^\ell * \theta_\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, n.$$

D'où

$$\begin{aligned} \chi(\omega_\ell) &= \gamma^\ell \delta^{n-\ell} \chi(\theta_\ell) \\ &= (\gamma\delta)^n \end{aligned} \quad \ell = 0, 1, \dots, n.$$

Les masses des vecteurs massiques  $\omega_\ell$  étant toutes égales, alors  $BR[\theta] \circ h^{-1} = BR[\omega] = BP[P]$  avec  $P$  le polygone de contrôle  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ .

2) dans le cas où  $\gamma = 0$  et  $\delta \neq 0$  : le polygone  $\theta$  est constitué du point pondéré

$$\theta_n = (P_n; \delta^n)$$

et des vecteurs purs

$$\theta_\ell = \vec{U}_\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, n.$$

La composition de la courbe  $BR[\theta]$  avec

$$\begin{aligned} h^{-1}(t) &= \frac{1}{\delta t} \\ &= \frac{(1-t) + t}{\delta t} \end{aligned}$$

donne par application du théorème 2.4

$$\omega_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} \delta^{\ell-j} * \Delta^{n-\ell+j} \theta_0 \quad \ell = 0, 1, \dots, n.$$

Du fait que  $\theta_n$  est le seul point pondéré, nous avons

$$\chi(\Delta^{n-\ell+j} \theta_0) = \begin{cases} \delta^n & \text{si } \ell = j \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on en déduit que les masses

$$\begin{aligned} \chi(\omega_\ell) &= \chi(\Delta^n \theta_0) \\ &= \delta^n \end{aligned} \quad \ell = 0, 1, \dots, n$$

ne dépendent pas de  $\ell$ .

Les masses des  $\omega_\ell$  étant toutes égales, alors  $BR[\theta] \circ h^{-1} = BP[Q]$  avec les points de contrôle

$$Q_\ell = \Pi(\omega_\ell), \quad \ell = 0, 1, \dots, n.$$

3) le cas où  $\gamma \neq 0$  et  $\delta = 0$  se traite comme le cas 2). Il suffit d'utiliser

$$h^{-1}(t) = \frac{1}{\gamma(1-t)}$$

dans le théorème 2.4. ■

**Exemple 2.9.**

Considérons une courbe  $BR[\theta]$  définie par les quatre points pondérés

$$\begin{aligned}\theta_0 &= (-9, 0; 1), \\ \theta_1 &= (-9, -1; 2), \\ \theta_2 &= (-8, -2; 4), \\ \theta_3 &= (-6, -2; 8).\end{aligned}$$

Remarquons tout d'abord que les masses des  $\theta_\ell$  vérifient

$$\chi(\omega_\ell) = (1)^{3-\ell} \cdot 2^\ell \quad \text{pour } \ell = 0, 1, 2, 3.$$

Par application de la proposition 2.16, on trouve la forme (BP) définie par les quatre points de contrôle ci-dessous

$$\begin{aligned}P_0 &= (-9, 0), \\ P_1 &= (-9, -1), \\ P_2 &= (-8, -2), \\ P_3 &= (-6, -2).\end{aligned}$$

Ce n'est autre que le polygone de contrôle (8) définissant la cubique de Tschirnausen.

## Chap. III : CHANGEMENT DE PARAMETRE QUADRATIQUE D'UNE COURBE (BR).

### §1. Introduction.

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'incidence du changement de paramètre quadratique sur le polygone massique d'une courbe (BR), ainsi que sur le polygone de contrôle d'une courbe (BP).

Dans le paragraphe 2, nous étendons aux polynômes la notion classique d'équation réciproque.

Au paragraphe 3, nous mettons en évidence un lien entre le changement quadratique rationnel  $\Phi$  et une propriété dite de  $\delta$ -réciprocité.

Le paragraphe 4 traite de l'effet du changement  $\Phi$  sur le polygone massique d'une courbe (BR). Nous explicitons la relation linéaire entre le polygone massique  $\omega$  et  $\theta$ .

Dans le paragraphe 5, nous appliquons le changement  $\Phi$  à une courbe polynomiale (BP), et nous spécifions le polygone massique obtenu. Cela nous permet de dire qu'une courbe (BR), vérifiant certaines conditions particulières, est en fait une courbe polynomiale.

### §2. Polynômes réciproques.

Rappelons la définition suivante [CH81, p.241], [RD74, Tome 1, p.273] :

#### Définition 3.1.

Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$  n'admettant pas 0 comme racine; l'équation algébrique  $P(x) = 0$  est dite *réciproque relativement à la base canonique* si et seulement si le polynôme  $Q$  tel que  $Q(x) = x^n P(\frac{1}{x})$  est proportionnel à  $P$ .

Par extension, le polynôme  $P$  est dit *réciproque relativement à la base canonique*.

#### Proposition 3.2. Rappel.

Avec les notations de la définition précédente,  $P$  est un polynôme réciproque relativement à la base canonique si et seulement si  $P = Q$  ou  $P = -Q$ .

#### Preuve:

Soit  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ , avec  $a_0, a_n \neq 0$ . Le polynôme  $Q$  s'écrit  $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ .

Pour que  $P$  et  $Q$  soient proportionnels, il faut et il suffit qu'il existe  $\rho \in \mathbb{R}^*$  tel que pour tout  $0 \leq k \leq n$  on ait  $a_k = \rho a_{n-k}$ . Les deux égalités  $a_0 = \rho a_n$  et  $a_n = \rho a_0$  impliquent  $\rho^2 = 1$ .

Il y a donc deux types de polynômes réciproques relativement à la base canonique :

- $\rho = +1$  : nous avons  $P = Q$ , et pour  $0 \leq k \leq n$ ,  $a_{n-k} = a_k$ . Le polynôme  $P$  est dit réciproque de première espèce relativement à la base canonique.
- $\rho = -1$  : nous avons  $P = -Q$ , et pour  $0 \leq k \leq n$ ,  $a_{n-k} = -a_k$ . Le polynôme  $P$  est dit réciproque de seconde espèce relativement à la base canonique.

La condition suffisante est évidente. ■

### Définition 3.3.

Un polynôme  $P$  de degré  $n$  est dit réciproque relativement à la base de Bernstein si et seulement si  $P$  est proportionnel à  $Q$  où  $Q(t) = P(1-t)$ .

### Proposition 3.4.

Avec les notations de la définition 3.3,  $P$  est un polynôme réciproque relativement à la base de Bernstein si et seulement si  $P = Q$  ou  $P = -Q$ .

**Preuve:**

Soit  $P(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ . Le polynôme  $Q$  s'écrit  $Q(t) = \sum_{i=0}^n b_{n-i} B_i^n(t)$ .

Pour que  $P$  et  $Q$  soient proportionnels, il faut et il suffit qu'il existe  $\rho \in \mathbb{R}^*$  tel que

$$\begin{aligned} b_0 &= \rho b_n, \\ b_1 &= \rho b_{n-1}, \\ &\vdots \\ b_{n-1} &= \rho b_1 \\ b_n &= \rho b_0. \end{aligned}$$

Les égalités ci-dessus impliquent  $\rho^2 = 1$ .

Il y a donc deux types de polynômes réciproques relativement à la base de Bernstein :

- $\rho = +1$  : nous avons  $P = Q$ , et pour  $0 \leq k \leq n$ ,  $b_{n-k} = b_k$ . Le polynôme  $P$  est dit réciproque de première espèce relativement à la base de Bernstein.
- $\rho = -1$  : nous avons  $P = -Q$ , et pour  $0 \leq k \leq n$ ,  $b_{n-k} = -b_k$ . Le polynôme  $P$  est dit réciproque de seconde espèce relativement à la base de Bernstein.

La condition suffisante est évidente. ■

### Proposition 3.5.

Soit  $P$  un polynôme de degré  $m$  réciproque relativement à la base de Bernstein; si  $P(\frac{1}{2})$  est non-nul, alors résoudre  $P(t) = 0$  revient à résoudre une équation polynomiale de degré  $[\frac{m}{2}]$ , où  $[\frac{m}{2}]$  désigne la partie entière de  $\frac{m}{2}$

**Preuve:**

Comme  $P(\frac{1}{2}) = \rho P(\frac{1}{2})$ , cela implique que  $P$  est réciproque de première espèce relativement à la base de Bernstein.

- Supposons  $m = 2n$ , alors  $P(t) = \sum_{i=0}^{2n} b_i B_i^{2n}(t)$  s'écrit

$$\begin{aligned} P(t) &= b_0 B_0^{2n} + b_1 B_1^{2n} + \dots + b_{2n} B_{2n}^{2n} \\ &= b_0 (B_0^{2n} + B_{2n}^{2n}) + \dots + b_{n-1} (B_{n-1}^{2n} + B_{n+1}^{2n}) + b_n B_n^{2n}. \end{aligned}$$

En divisant  $P(t)$  par  $B_n^{2n}(t)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{P(t)}{B_n^{2n}(t)} &= b_0 \frac{\binom{2n}{0}}{\binom{2n}{n}} \left( \left( \frac{1-t}{t} \right)^n + \left( \frac{t}{1-t} \right)^n \right) + \\ &\quad b_1 \frac{\binom{2n}{1}}{\binom{2n}{n}} \left( \left( \frac{1-t}{t} \right)^{n-1} + \left( \frac{t}{1-t} \right)^{n-1} \right) + \\ &\quad \dots + \\ &\quad b_{n-1} \frac{\binom{2n}{n-1}}{\binom{2n}{n}} \left( \left( \frac{1-t}{t} \right) + \left( \frac{t}{1-t} \right) \right) + b_n \\ &= b_0 \frac{\binom{2n}{0}}{\binom{2n}{n}} \cdot S_n + b_1 \frac{\binom{2n}{1}}{\binom{2n}{n}} \cdot S_{n-1} + \dots + b_{n-1} \frac{\binom{2n}{n-1}}{\binom{2n}{n}} \cdot S_1 + b_n \end{aligned}$$

avec  $S_p = \left( \left( \frac{1-t}{t} \right)^p + \left( \frac{t}{1-t} \right)^p \right)$ .

Or en posant  $s = \frac{1-t}{t} + \frac{t}{1-t}$ , on vérifie pour  $p \geq 1$  que

$$S_{p+1} = S_p \cdot s - S_{p-1},$$

i.e.,  $S_p$  est un polynôme de degré  $p$  en  $s$ , et par suite  $\frac{P(t)}{B_n^{2n}(t)}$  est un polynôme de degré  $n$  en  $s$ .

- Dans le cas où  $m = 2n + 1$ , on a

$$\begin{aligned} \Delta^{2n+1} b_0 &= \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^{2n+1-i} \binom{2n+1}{i} b_i \\ &= b_{2n+1} - \binom{2n+1}{1} b_{2n} + \dots + \binom{2n+1}{1} b_1 - b_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui nous ramène au cas précédent par diminution du degré, d'où le résultat énoncé. ■

Dans le développement ci-dessus,  $s$  est une fonction quadratique rationnelle de  $t$ .

### §3. Le changement quadratique rationnel $\Phi$ .

La transformation quadratique rationnelle

$$\begin{aligned} \Phi: [0, 1] &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ u &\rightarrow \frac{\alpha B_0^2(u) + \beta B_1^2(u) + \gamma B_2^2(u)}{B_1^2(u)} \end{aligned}$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des réels tel que  $\alpha\gamma < 0$  a été introduite dans [FJ89, p.54] pour réaliser une bijection de  $]0, 1[$  sur  $\mathbb{R}$ .  $\Phi$  est croissante si  $\alpha < 0$  et décroissante si  $\alpha > 0$ .

Dans la suite de ce chapitre, nous prolongerons  $\Phi$  en  $u = 0$  et  $u = 1$  en posant  $\Phi(0) = \Phi(1) = \infty$ .

Nous montrerons que  $\Phi$  est liée à une propriété dite de  $\delta$ -réciprocité introduite ci-après.

#### Définition 3.4.

Soit  $\delta \in \mathbb{R}$ ; soit  $(b_0, b_1, \dots, b_{2n})$  une suite quelconque de scalaires, points, vecteurs massiques, ... elle est dite  $\delta$ -réciproque si et seulement si  $b_{2n-i} = \delta^{n-i} b_i$  pour  $0 \leq i \leq n$ .

Par extension, nous dirons qu'une courbe (BR) de longueur paire est  $\delta$ -réciproque lorsque son polygone massique de contrôle est  $\delta$ -réciproque.

Dans le cas où  $\delta = 1$ , nous retrouvons la réciprocité de première espèce de la proposition 3.4.

### §4. Effet du changement $\Phi$ sur une courbe (BR).

#### Proposition 3.6.

La composition d'une courbe  $BR[\omega]$  de longueur  $n$  avec  $\Phi$  donne une courbe  $BR[\theta]$   $\delta$ -réciproque de longueur  $2n$ , avec  $\delta = \frac{\gamma}{\alpha}$ .

De plus les deux courbes  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  et  $BR[\theta; [0, 1]]$  ont le même support.

**Preuve:** La démonstration se fait en 3 étapes.

1) Nous montrons tout d'abord par récurrence que le numérateur de  $t^i$  où  $t = \Phi(u)$  est un polynôme  $\delta$ -réciproque :

Posons

$$t = \frac{\alpha_0^{[1]} B_0^2(u) + \alpha_1^{[1]} B_1^2(u) + \alpha_2^{[1]} B_2^2(u)}{B_1^2(u)}$$

avec  $\alpha_0^{[1]} = \alpha$ ,  $\alpha_1^{[1]} = \beta$  et  $\alpha_2^{[1]} = \gamma$ ; il est évident que  $\alpha_2^{[1]} = \delta \alpha_0^{[1]}$ .

Supposons qu'à l'ordre  $i-1$  :

$$t^{i-1} = \frac{\sum_{j=0}^{2i-2} \alpha_j^{[i-1]} B_j^{2i-2}(u)}{B_{i-1}^{2i-2}(u)}$$

avec  $\{\alpha_j^{[i-1]}\}_{j=0, \dots, 2i-2}$  un ensemble  $\delta$ -réciproque.

Alors en utilisant la convention  $\alpha_0^{[0]} = 1$  et  $\alpha_j^{[i-1]} = 0$  pour  $j < 0$  ou  $j > 2i - 2$ , nous avons à l'ordre  $i$  :  $t^i = t^{i-1}\Phi(u)$  avec au numérateur

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=0}^{2i} \frac{\binom{2i-2}{j}}{\binom{2i}{j}} \alpha \alpha_j^{[i-1]} B_j^{2i}(u) + \\
 & \sum_{j=0}^{2i-1} 2 \frac{\binom{2i-2}{j}}{\binom{2i}{j+1}} \beta \alpha_j^{[i-1]} B_{j+1}^{2i}(u) + \\
 & \sum_{j=0}^{2i-2} \frac{\binom{2i-2}{j}}{\binom{2i}{j+2}} \gamma \alpha_j^{[i-1]} B_{j+2}^{2i}(u) \\
 = & \frac{1}{(2i)(2i-1)} \left( \sum_{j=0}^{2i} (2i-j)(2i-j-1) \alpha \alpha_j^{[i-1]} B_j^{2i}(u) + \right. \\
 & \sum_{j=0}^{2i-1} 2(j+1)(2i-j-1) \beta \alpha_j^{[i-1]} B_{j+1}^{2i}(u) + \\
 & \left. \sum_{j=0}^{2i-2} (j+1)(j+2) \gamma \alpha_j^{[i-1]} B_{j+2}^{2i}(u) \right), \tag{4}
 \end{aligned}$$

et au dénominateur

$$B_{i-1}^{2i-2}(u) B_1^{2i}(u) = \frac{i}{2i-1} B_i^{2i}(u) .$$

En simplifiant le terme  $(2i-1)$  et en additionnant les différentes sommes dans (4), on trouve

$$t^i = \frac{\sum_{j=0}^{2i} \alpha_j^{[i]} B_j^{2i}(u)}{B_i^{2i}(u)} \tag{5}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \alpha_0^{[i]} &= \frac{2i-1}{i} \alpha \alpha_0^{[i-1]}, \\
 \alpha_1^{[i]} &= \frac{1}{2i^2} \left( (2i-1)(2i-2) \alpha \alpha_1^{[i-1]} + 2(2i-1) \beta \alpha_0^{[i-1]} \right), \\
 \alpha_j^{[i]} &= \frac{1}{2i^2} \left( (2i-j)(2i-j-1) \alpha \alpha_j^{[i-1]} + 2j(2i-j) \beta \alpha_{j-1}^{[i-1]} \right. \\
 & \quad \left. + j(j-1) \gamma \alpha_{j-2}^{[i-1]} \right), \quad 2 \leq j \leq 2i-2, \\
 \alpha_{2i-1}^{[i]} &= \frac{1}{2i^2} \left( 2(2i-1) \beta \alpha_{2i-2}^{[i-1]} + (2i-1)(2i-2) \gamma \alpha_{2i-3}^{[i-1]} \right), \\
 \alpha_{2i}^{[i]} &= \frac{2i-1}{i} \gamma \alpha_{2i-2}^{[i-1]} .
 \end{aligned} \tag{6}$$

Puisque l'ensemble  $\{\alpha_j^{[i-1]}\}_{j=0,\dots,2i-2}$  est  $\delta$ -réciproque, on déduit des équations (6) que

$$\begin{aligned}\alpha_{2i}^{[i]} &= \frac{2i-1}{i} \gamma \delta^{i-1} \alpha_0^{[i-1]} \\ &= \delta^i \alpha_0^{[i]}, \\ \alpha_{2i-1}^{[i]} &= \frac{1}{2i^2} \left( 2(2i-1) \beta \delta^{i-1} \alpha_0^{[i-1]} + (2i-1)(2i-2) \gamma \delta^{i-2} \alpha_1^{[i-1]} \right) \\ &= \delta^{i-1} \alpha_1^{[i]} \\ \alpha_{2i-j}^{[i]} &= \frac{1}{2i^2} \left( j(j-1) \alpha \alpha_{2i-j}^{[i-1]} + 2j(2i-j) \beta \alpha_{2i-j-1}^{[i-1]} \right. \\ &\quad \left. + (2i-j)(2i-j-1) \gamma \alpha_{2i-j-2}^{[i-1]} \right) \\ &= \delta^{i-j} \alpha_j^{[i]}, \quad 2 \leq j \leq i,\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que l'ensemble  $\{\alpha_j^{[i]}\}_{j=0,\dots,2i}$  est  $\delta$ -réciproque.

2) Considérons un polynôme Bézier  $P(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$ , il s'écrit dans la base canonique :

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i b_0 \cdot t^i. \quad (7)$$

En utilisant (5), (7) devient par réduction au même dénominateur

$$\begin{aligned}P(\Phi(u)) &= \frac{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i b_0 \sum_{j=0}^{2i} \alpha_j^{[i]} B_j^{2i}(u) B_{n-i}^{2n-2i}(u)}{B_i^{2i}(u) B_{n-i}^{2n-2i}(u)} \\ &= \frac{1}{B_n^{2n}(u)} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{2i} \frac{\binom{n+j-i}{j} \binom{n+i-j}{n-i}}{\binom{n}{i}} \Delta^i b_0 \alpha_j^{[i]} \cdot B_{n+j-i}^{2n}(u).\end{aligned} \quad (8)$$

Il résulte du changement d'indices  $k = n + j - i$  et d'une sommation différente dans (8) que

$$\begin{aligned}P(\Phi(u)) &= \frac{1}{B_n^{2n}(u)} \sum_{i=0}^n \Delta^i b_0 \sum_{k=n-i}^{n+i} \frac{\binom{k}{k+i-n} \binom{2n-k}{n-i}}{\binom{n}{i}} \alpha_{k+i-n}^{[i]} \cdot B_k^{2n}(u) \\ &= \frac{1}{B_n^{2n}(u)} \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=\max(n-k, k-n)}^n \Delta^i b_0 \frac{\binom{k}{k+i-n} \binom{2n-k}{n-i}}{\binom{n}{i}} \alpha_{k+i-n}^{[i]} \cdot B_k^{2n}(u) \\ &= \frac{1}{B_n^{2n}(u)} \sum_{k=0}^{2n} \tilde{b}_k \cdot B_k^{2n}(u)\end{aligned}$$

avec

$$\tilde{b}_k = \sum_{i=0}^n \mu_{k,i} \Delta^i b_0 \quad (8')$$

où les coefficients  $\mu_{k,i}$  sont donnés par

$$\mu_{k,i} = \begin{cases} \frac{\binom{k+i-n}{n-i} \binom{2n-k}{n-i}}{\binom{n}{i}} \alpha_{k+i-n}^{[i]} & \text{pour } i = \max(n-k, k-n), \dots, n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9)$$

L'ensemble  $\{\alpha_j^{[i]}\}_{j=0,\dots,2i}$  étant  $\delta$ -réciproque, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \mu_{2n-k,i} &= \frac{\binom{2n-k}{n-k+i} \binom{k}{n-i}}{\binom{n}{i}} \alpha_{(2i)-(k+i-n)}^{[i]} \\ &= \frac{\binom{k}{k+i-n} \binom{2n-k}{n-i}}{\binom{n}{i}} \delta^{n-k} \alpha_{k+i-n}^{[i]} \\ &= \delta^{n-k} \mu_{k,i}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad k = n-i, \dots, n+i. \end{aligned}$$

Comme  $\mu_{k,i} = 0$  si  $i = 0, 1, \dots, n$  et  $k = 0, \dots, n-i-1, n+i+1, \dots, n$ , pour  $i$  fixé ( $0 \leq i \leq n$ ) l'ensemble  $\{\mu_{k,i}\}_{k=0,1,\dots,2n}$  est  $\delta$ -réciproque. D'après (8'), l'ensemble  $\{\tilde{b}_k\}_{k=0,\dots,2n}$  est également  $\delta$ -réciproque :

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{2n-k} &= \sum_{i=0}^n \mu_{2n-k,i} \Delta^i b_0 \\ &= \sum_{i=0}^n \delta^{n-k} \mu_{k,i} \Delta^i b_0 \\ &= \delta^{n-k} \tilde{b}_k, \quad k = 0, \dots, 2n. \end{aligned}$$

3) D'après ce qui précède, la courbe Bézier  $\sum_{i=0}^n B_i^n(\Phi(u)) * \omega_i$  s'écrit

$$BP[\omega] \circ \Phi(u) = \frac{1}{B_n^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} B_k^{2n}(u) * \theta_k \quad (10)$$

avec

$$\theta_k = \sum_{i=0}^n \mu_{k,i} * \Delta^i \omega_0 \quad (11)$$

où les  $\mu_{k,i}$  sont exprimés en (9). De même que  $\{\tilde{b}_k\}_{k=0,\dots,2n}$ , le polygone massique  $\{\theta_k\}_{k=0,\dots,2n}$  est un ensemble  $\delta$ -réciproque. Et en conclusion,

$$\begin{aligned} BR[\omega](\Phi(u)) &= \Pi(BP[\omega] \circ \Phi(u)) \\ &= \Pi\left(\frac{1}{B_n^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} B_k^{2n}(u) * \theta_k\right) \\ &= \Pi\left(\sum_{k=0}^{2n} B_k^{2n}(u) * \theta_k\right) \\ &= BR[\theta](u). \end{aligned}$$

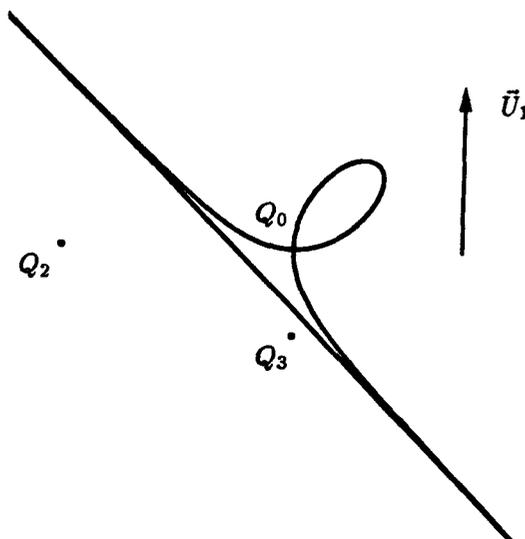


fig 3.1. Folium de Descartes.

Lorsque  $u$  parcourt  $[0, 1]$ , le paramètre  $t$  parcourt  $\overline{\mathbb{R}}$ , et le point  $BR[\omega](t)$  (resp.  $BR[\theta](u)$ ) décrit la courbe dans sa totalité; on en déduit l'égalité des supports des deux courbes  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  et  $BR[\theta; [0, 1]]$ . ■

### Exemple 3.1.

Considérons de nouveau le folium de Descartes (cf. exemple 2.4), cette courbe est représentée paramétriquement par  $M(t)$  de coordonnées homogènes

$$\begin{aligned} X(t) &= 3t, \\ Y(t) &= 3t^2, \\ Z(t) &= 1 + t^3. \end{aligned}$$

Dans le tableau suivant, ces coordonnées sont exprimées dans la base de Bernstein  $(B_i^3)_{i=0,1,2,3}$ .

	$X(t)$	$Y(t)$	$Z(t)$
$B_0^3(t)$	0	0	1
$B_1^3(t)$	1	0	1
$B_2^3(t)$	2	1	1
$B_3^3(t)$	3	3	2

Une fois le changement quadratique rationnel effectué,  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  s'écrivent au facteur multiplicatif  $1/B_3^6(u)$  près dans la base de Bernstein d'ordre 6,

	$X(\Phi(u))$	$Y(\Phi(u))$	$Z(\Phi(u))$
$B_0^6(u)$	0	0	$\frac{5\alpha^3}{2}$
$B_1^6(u)$	0	$\frac{5\alpha^2}{2}$	$\frac{5\alpha^2\beta}{2}$
$B_2^6(u)$	$2\alpha$	$4\alpha\beta$	$2\alpha\beta^2 + 0.5\alpha^2\gamma$
$B_3^6(u)$	$3\beta$	$3\beta^2 + 1.5\alpha\gamma$	$1 + \beta^3 + 1.5\alpha\beta\gamma$
$B_4^6(u)$	$2\gamma$	$4\gamma\beta$	$2\gamma\beta^2 + 0.5\alpha\gamma^2$
$B_5^6(u)$	0	$\frac{5\gamma^2}{2}$	$\frac{5\gamma^2\beta}{2}$
$B_6^6(u)$	0	0	$\frac{5\gamma^3}{2}$

Les coefficients de chaque colonne forment un ensemble  $\delta$ -réciproque, et le polygone massique issu de ces données est aussi  $\delta$ -réciproque. Ainsi pour le choix  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 0$  et  $\gamma = 1$ , i.e.,  $\delta = -1$ , le folium de Descartes est une courbe (BR) de longueur 6 (figure 3.1) de la forme

$$BR[\theta](t) = \frac{-2.5B_0^6(u)Q_0 + 0.5B_2^6(u)Q_2 + B_3^6(u)Q_3 - 0.5B_4^6(u)Q_2 + 2.5B_6^6(u)Q_0}{-2.5B_0^6(u) + 0.5B_2^6(u) + B_3^6(u) - 0.5B_4^6(u) + 2.5B_6^6(u)} + \frac{B_1^6(u) + B_5^6(u)}{-2.5B_0^6(u) + 0.5B_2^6(u) + B_3^6(u) - 0.5B_4^6(u) + 2.5B_6^6(u)} \cdot \vec{U}_1$$

déterminée par le polygone massique

$$\begin{aligned} \theta_0 &= (Q_0; -\frac{5}{2}) & \text{avec} & & Q_0 &= (0, 0), \\ \theta_1 &= \vec{U}_1 & \text{avec} & & \vec{U}_1 &= (0, \frac{5}{2}), \\ \theta_2 &= (Q_2; 0.5) & \text{avec} & & Q_2 &= (-4, 0), \\ \theta_3 &= (Q_3; 1) & \text{avec} & & Q_3 &= (0, -1.5), \\ \theta_4 &= \ominus\theta_2, & \theta_5 &= \theta_1, & \theta_6 &= \ominus\theta_0. \end{aligned}$$

Dans [FJ89, p.58 et p.59] le folium de Descartes est donné pour le choix de paramètres  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  et  $\gamma = -1$ .

**Proposition 3.7.**

Toute courbe  $BR[\theta; [0, 1]]$   $\delta$ -réciproque de longueur  $2n$  peut s'écrire sous la forme d'une courbe  $BR[\omega]$  de longueur  $n$ .

**Preuve:**

On se donne  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  tel que  $\frac{\gamma}{\alpha} = \delta, \beta$  quelconque. Les équations (11) s'écrivent sous la forme matricielle

$$\theta = \mu \cdot \Delta \cdot \omega \quad (12)$$

où

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_{0,n} \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_{1,n-1} & \mu_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mu_{n-1,1} & \cdots & \mu_{n-1,n-1} & \mu_{n-1,n} \\ 1 & \mu_{n,1} & \cdots & \mu_{n,n-1} & \mu_{n,n} \\ 0 & \delta\mu_{n-1,1} & \cdots & \delta\mu_{n-1,n-1} & \delta\mu_{n-1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta^{n-1}\mu_{1,n-1} & \delta^{n-1}\mu_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta^n\mu_{0,n} \end{pmatrix}$$

est une matrice à  $2n + 1$  lignes et  $n + 1$  colonnes, les lignes de  $\omega$  (resp.  $\mu$  et  $\theta$ ) sont numérotées de 0 à  $n$  (resp. 0 à  $2n$ ).

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{2n} \end{pmatrix} \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

et  $\Delta$  est la matrice triangulaire  $(c_{i,j})_{i=0,\dots,n}^{j=0,\dots,n}$  avec :

$$c_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} & \text{si } 0 \leq j \leq i, 0 \leq i \leq n. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons  $\mu_{[i,j]}$  (resp.  $\theta_{[i,j]}$ ) la matrice obtenue en se restreignant aux lignes  $i$  à  $j$  inclus de la matrice  $\mu$  (resp.  $\theta$ ).

Du fait de la propriété de  $\delta$ -réciprocité, nous avons les relations matricielles

$$\begin{aligned} \theta_{[n,2n]} &= D \cdot \theta_{[0,n]}, \\ \mu_{[n,2n]} &= D \cdot \mu_{[0,n]} \end{aligned}$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \delta & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \delta^n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons que si  $\omega$  est solution du système matriciel

$$\theta_{[0.n]} = \mu_{[0.n]} \cdot \Delta \cdot \omega \quad (13)$$

où

$$\theta_{[0.n]} = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} \quad \mu_{[0.n]} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mu_{0,n} \\ 0 & \cdots & \mu_{1,n-1} & \mu_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n,0} & \cdots & \mu_{n,n-1} & \mu_{n,n} \end{pmatrix},$$

alors  $\omega$  est également solution du système

$$\theta_{[n.2n]} = \mu_{[n.2n]} \cdot \Delta \cdot \omega \quad (13')$$

où

$$\theta_{[n.2n]} = \begin{pmatrix} \theta_n \\ \theta_{n+1} \\ \vdots \\ \theta_{2n} \end{pmatrix} \quad \mu_{[n.2n]} = \begin{pmatrix} \mu_{n,0} & \cdots & \mu_{n,n-1} & \mu_{n,n} \\ 0 & \cdots & \delta \mu_{n-1,n-1} & \delta \mu_{n-1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \delta^n \mu_{0,n} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que :

- Le déterminant de  $\mu_{[0.n]}$ ,

$$\begin{aligned} |\mu_{[0.n]}| &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=0}^n \mu_{n-i,i} \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=0}^n \frac{\binom{n+i}{n-i}}{\binom{n}{i}} \alpha_0^{[i]} \\ &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=0}^n \binom{n+i}{n} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^i \end{aligned}$$

est non-nul puisque  $\alpha \neq 0$ ,

- Le déterminant de  $\Delta$  est égal à 1,

La matrice  $\mu_{[0.n]}$  est inversible. La résolution de l'égalité (13) se fait en 2 étapes :

(i) Résolution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mu_{0,n} \\ 0 & \cdots & \mu_{1,n-1} & \mu_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n,0} & \cdots & \mu_{n,n-1} & \mu_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \Delta^1 \omega_0 \\ \vdots \\ \Delta^n \omega_0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

D'où

$$\Delta^n \omega_0 = \frac{1}{\mu_{0,n}} * \theta_0,$$

$$\Delta^{n-i} \omega_0 = \frac{1}{\mu_{i,n-i}} * \left( \theta_i - \sum_{j=1}^i \mu_{i,n-i+j} \Delta^{n-i+j} \omega_0 \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(ii) Puis résolution du système linéaire triangulaire

$$\begin{pmatrix} \omega_0 \\ \Delta^1 \omega_0 \\ \vdots \\ \Delta^n \omega_0 \end{pmatrix} = \Delta \cdot \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}.$$

D'où le résultat final

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_0, \\ \omega_1 &= \Delta \omega_0 \oplus \omega_0, \\ \omega_i &= \Delta^i \omega_0 \oplus \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1-j} \binom{i}{j} * \omega_j, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### Exemple 3.2.

Considérons une courbe rationnelle d'Agnesi, d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(u) = \frac{2u-1}{2u(1-u)} \\ y(u) = \frac{4u^2(1-u)^2}{4u^4-8u^3+8u^2-4u+1} \end{cases} \quad u \in [0, 1].$$

Sa forme (BR) est

$$BR[\theta](u) = \frac{\frac{1}{3}Q_1B_1^6(u) + \frac{1}{5}Q_3B_3^6(u) + \frac{1}{3}Q_1B_5^6(u)}{\frac{1}{3}B_1^6(u) + \frac{1}{5}B_3^6(u) + \frac{1}{3}B_5^6(u)} + \frac{\vec{V}_0B_0^6(u) + \vec{V}_2B_2^6(u) - \vec{V}_2B_4^6(u) - \vec{V}_0B_6^6(u)}{\frac{1}{3}B_1^6(u) + \frac{1}{5}B_3^6(u) + \frac{1}{3}B_5^6(u)}$$

produite par les vecteurs massiques (figure 3.2)

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \vec{V}_0 & \text{avec} & \quad \vec{V}_0 = (-1, 0), \\ \theta_1 &= (Q_1; \frac{1}{3}) & \text{avec} & \quad Q_1 = (0, 0), \\ \theta_2 &= \vec{V}_2 & \text{avec} & \quad \vec{V}_2 = (-\frac{1}{15}, 0), \\ \theta_3 &= (Q_3; \frac{1}{5}) & \text{avec} & \quad Q_3 = (0, 2), \\ \theta_4 &= \ominus \theta_2, & \theta_5 &= \theta_1, & \theta_6 &= \ominus \theta_0. \end{aligned}$$

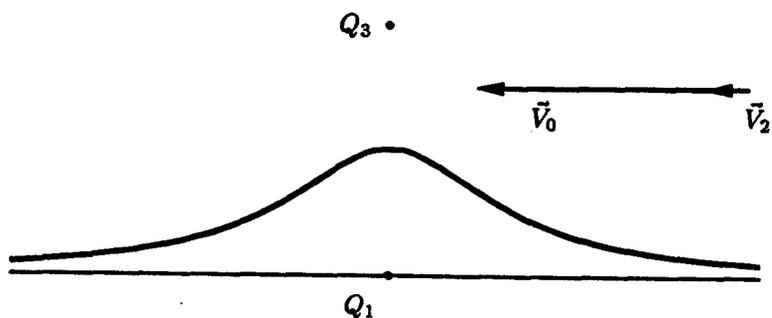


fig 3.3. Courbe d'Agnesi.

Le polygone massique ci-dessus est  $\delta$ -réciproque avec  $\delta = -1$ . Nous appliquons la proposition 3.7 avec le choix  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 0$  et  $\gamma = 1$ . La courbe d' Agnesi (figure 3.3) est alors déterminée par le polygone

$$\begin{aligned} \omega_0 &= (P_0; 1) && \text{avec} && P_0 = (0, 1), \\ \omega_1 &= (P_1; 1) && \text{avec} && P_1 = \left(\frac{1}{3}, 1\right), \\ \omega_2 &= \left(P_2; \frac{4}{3}\right) && \text{avec} && P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \\ \omega_3 &= (P_3; 2) && \text{avec} && P_3 = \left(1, \frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

et s'écrit sous la forme (BR) comme

$$BR[\omega](t) = \frac{P_0 B_0^3(t) + P_1 B_1^3(t) + \frac{4}{3} P_2 B_2^3(t) + 2 P_3 B_3^3(t)}{B_0^3(t) + B_1^3(t) + \frac{4}{3} B_2^3(t) + 2 B_3^3(t)}$$

avec  $t \in \overline{\mathbb{R}}$ .

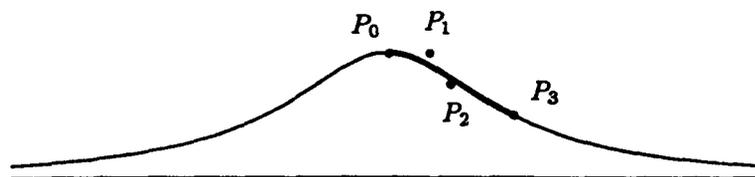


fig 3.2. Courbe d'Agnesi.

### §5. Effet du changement $\Phi$ sur une courbe polynomiale.

#### Proposition 3.8.

La composition d'une courbe  $BP[M]$  de degré  $n$  avec  $\Phi$  donne une courbe  $BR[\theta]$  de longueur  $2n$  tel que

1.  $\theta$  est un polygone massique  $\delta$ -réciproque.
2.  $\theta$  est constitué de  $2n$  vecteurs purs et de l'unique point pondéré  $\theta_n$ .
3. pour  $\alpha\gamma < 0$ , les deux courbes  $BP[M; \overline{\mathbb{R}}]$  et  $BR[\theta; [0, 1]]$  ont le même support.

Réciproquement, toute courbe  $BR[\theta; [0, 1]]$  de longueur  $2n$  vérifiant les conditions 1 et 2 peut s'écrire sous forme polynomiale de degré  $n$ .

#### Preuve:

En utilisant les parties 1) et 2) de la démonstration de la proposition 3.6, nous avons

$$BP[M] \circ \Phi(u) = \frac{1}{B_n^{2n}(u)} \sum_{k=0}^{2n} B_k^{2n}(u) \cdot V_k \quad (15)$$

avec

$$V_k = \sum_{i=0}^n \mu_{k,i} \cdot \Delta^i M_0 \quad (16)$$

où les coefficients  $\mu_{k,i}$  sont exprimés en (9).

L'expression (15) n'est autre que la représentation d'une courbe (BR). Ecrivons (15) sous la forme

$$\frac{B_n^{2n}(u) \cdot V_n}{B_n^{2n}(u)} + \frac{\sum_{k \neq n, k=0}^{2n} B_k^{2n}(u) \cdot V_k}{B_n^{2n}(u)},$$

d'où nous déduisons le polygone massique

$$\theta_k = \begin{cases} (M_0 + \sum_{i=1}^n \mu_{n,i} \Delta^i M_0; 1) & \text{pour } k = n, \\ \sum_{i=\max(n-k, k-n)}^n \mu_{k,i} \Delta^i M_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La réciproque est un cas particulier de la proposition 3.7. La première étape de la résolution du système linéaire (14) donne les vecteurs massiques  $\Delta^n \omega_0, \Delta^{n-1} \omega_0, \dots, \omega_0$  dont les masses sont :

$$\begin{aligned} \chi(\Delta^n \omega_0) &= 0, \\ \chi(\Delta^{n-1} \omega_0) &= 0, \\ &\vdots \\ \chi(\Delta \omega_0) &= 0, \\ \chi(\omega_0) &= 1. \end{aligned}$$

La seconde étape donne un polygone  $\omega$  de points pondérés tel que

$$\begin{aligned} \chi(\omega_0) &\neq 0, \\ \chi(\omega_1) &= \chi(\omega_0), \\ &\vdots \\ \chi(\omega_n) &= \chi(\omega_{n-1}), \end{aligned}$$

ce qui implique que la courbe  $BR[\omega]$  est une courbe polynomiale :

$$BR[\omega](t) = BP[P](t)$$

avec le polygone de contrôle  $P$  constitué des points  $P_\ell = \Pi(\omega_\ell)$  pour  $\ell = 0, 1, \dots, n$ . ■

**Exemple 3.3.**

Nous effectuons un changement de paramètre quadratique de la cubique de Tschirnausen (exemple 2.3, p.15). De même que dans les deux exemples précédents, nous mettons dans un tableau les coefficients des polynômes de la base de Bernstein d'ordre 6 :

	num. de x	num. de y	dénom.
$B_0^6(u)$	0	$\frac{5\alpha^3}{2}$	0
$B_1^6(u)$	$\frac{5\alpha^2}{2}$	$\frac{5\alpha^2\beta}{2}$	0
$B_2^6(u)$	$4\alpha\beta$	$-2\alpha + 2\alpha\beta^2 + 0.5\alpha^2\gamma$	0
$B_3^6(u)$	$-9 + 3\beta^2 + 1.5\alpha\gamma$	$-3\beta + \beta^3 + 1.5\alpha\beta\gamma$	1
...	<i><math>\delta</math>-réciprocité</i>		

Nous en déduisons la forme (BR) :

$$BR[\theta] \circ \Phi(u) = Q_3 +$$

$$\frac{B_0^6(u)\vec{U}_0 + B_1^6(u)\vec{U}_1 + B_2^6(u)\vec{U}_2 + B_4^6(u)\vec{U}_2 + B_5^6(u)\vec{U}_1 + B_6^6(u)\vec{U}_0}{B_3^6(u)}$$

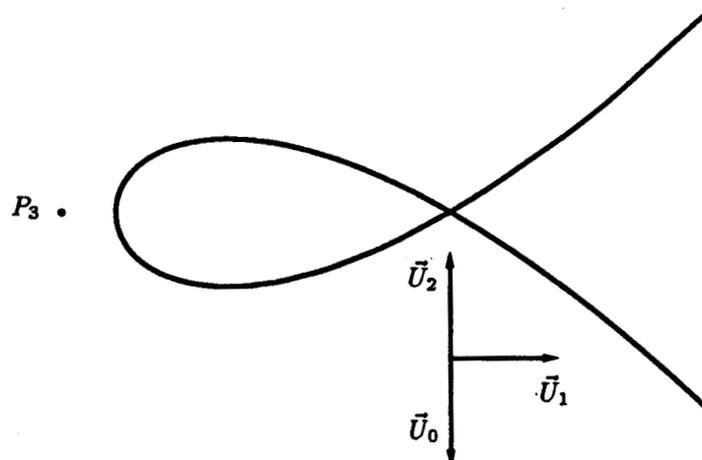


fig 3.4. Cubique de Tschirnausen.

déterminée par le polygone massique

$$\begin{array}{lll}
 \theta_0 = \vec{U}_0 & \text{avec} & \vec{U}_0 = (0, -2.5), \\
 \theta_1 = \vec{U}_1 & \text{avec} & \vec{U}_1 = (2.5, 0), \\
 \theta_2 = \vec{U}_2 & \text{avec} & \vec{U}_2 = (0, 2.5), \\
 \theta_3 = (Q_3; 1) & \text{avec} & P_3 = (-10.5, 0), \\
 \theta_4 = \ominus\theta_2, & \theta_5 = \theta_1, & \theta_6 = \ominus\theta_0,
 \end{array}$$

où on voit bien que l'unique point pondéré est  $\theta_3$ .

## CHAP. IV : ETUDE DES CUBIQUES RATIONNELLES MISES SOUS FORME (BR).

### §1. Introduction.

Ce chapitre porte sur l'étude des cubiques rationnelles mises sous forme (BR). Nous verrons que la donnée d'un polygone massique de longueur 3  $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  permet de déterminer des propriétés de la cubique  $BR[\omega]$

Nous utiliserons le fait qu'une cubique rationnelle plane est la transformée de la cubique canonique par une application projective, et qu'une cubique gauche est la transformée de la cubique canonique par une transformation projective.

Ce chapitre est composé de trois parties.

La première contient des propriétés communes aux cubiques rationnelles mises sous forme (BR) du plan et de l'espace.

Nous exprimons certains contacts de la courbe  $BR[\omega; t \in \overline{\mathbb{R}}]$  en fonction des vecteurs massiques  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$ .

Nous explicitons la relation existante entre une matrice  $P$  de l'application projective  $T$  et le polygone massique  $\omega$ .

L'étude du rang du polygone massique de contrôle  $\omega$  permet d'établir si la cubique  $BR[\omega]$  est une cubique *non-dégénérée* ou non.

L'incidence des changements rationnels de paramètre sur le polygone  $\omega$  est exprimée sous forme de système matriciel.

La nature des cubiques est précisée uniquement en fonction des masses des vecteurs massiques du polygone  $\omega$ .

La deuxième partie traite des cubiques gauches. Une caractérisation des cubiques gauches est proposée, où nous montrons que la donnée d'une base  $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  de vecteurs massiques détermine une cubique  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  gauche, et que réciproquement toute cubique gauche admet un paramétrage de cette forme.

Dans la troisième partie, une classification des cubiques (BR) planes est réalisée suivant le type de la combinaison linéaire reliant les quatre vecteurs massiques. Comme cas particulier, une classification des cubiques (BP) planes est faite.

## §2. Les Cubiques rationnelles comme courbes (BR).

### 1. Cubique canonique.

Dans l'espace affine muni d'un repère  $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , la courbe cubique gauche  $(c_c)$  d'équations paramétriques

$$x(t) = t^3, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t, \quad (1)$$

est appelée *cubique canonique*.

Cette courbe gauche polynomiale a comme représentation Bézier la courbe  $BP[M_0, M_1, M_2, M_3; \overline{\mathbb{R}}]$  avec  $M_0, M_1, M_2$ , et  $M_3$  les quatre points de contrôle à distance finie suivants

$$\begin{aligned} M_0 &= \mathcal{O}, \\ M_1 &= \mathcal{O} + \frac{1}{3}\vec{k}, \\ M_2 &= \mathcal{O} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}, \\ M_3 &= \mathcal{O} + \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}. \end{aligned} \quad (2)$$

On déduit des propriétés d'une courbe Bézier que

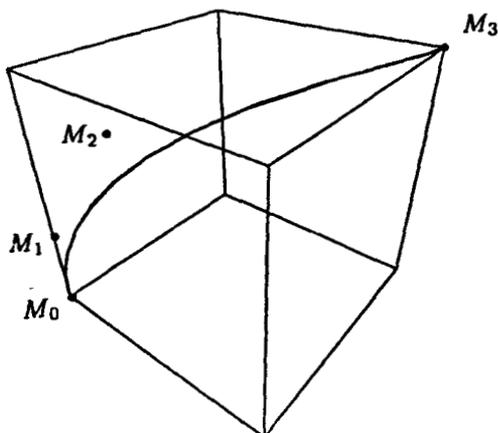
1.  $(c_c)$  est tangente en  $M_0$  à la droite  $(M_0M_1)$  (resp.  $(c_c)$  est tangente en  $M_3$  à la droite  $(M_2M_3)$ ).
2.
  - $(c_c)$  passe en  $t = \frac{1}{2}$  par le point

$$\begin{aligned} BP[M](1/2) &= \frac{1}{2} \left( \frac{M_0 + 3M_1}{4} + \frac{3M_2 + M_3}{4} \right) \\ &= \mathcal{O} + \frac{1}{8}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} \end{aligned}$$

- $(c_c)$  passe en  $t = \frac{1}{3}$  par le point

$$\begin{aligned} BP[M](1/3) &= \frac{1}{27} (8M_0 + 12M_1 + 6M_2 + M_3) \\ &= \mathcal{O} + \frac{1}{27}\vec{i} + \frac{1}{9}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k} \end{aligned}$$

- La direction asymptotique est  $BP[M](\infty) = (\vec{i})_\infty$ .
3. L'intersection du plan osculateur en  $M_0$  avec la tangente en  $M_3$  se fait au point  $M_2$ . De même, l'intersection du plan osculateur en  $M_3$  avec la tangente en  $M_0$  se fait au point  $M_1$ .
  4. L'ensemble  $\{M_0, M_1, M_2, M_3, BP[M](\infty)\}$  forme un repère projectif.



#### 4.1. Cubique canonique.

### 2. Cubique (BR).

Nous savons que toute cubique rationnelle ( $c$ ), gauche ou plane, est l'image par une application projective  $T$  de la cubique canonique ( $c_c$ ).

Soit l'application linéaire

$$\hat{T}: \hat{\mathcal{E}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{E}}_2$$

induisant l'application projective

$$T: \tilde{\mathcal{E}}_1 - \Pi_1(\text{Ker}\hat{T}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_2,$$

telle que  $T(c_c) = c$ .

$\mathcal{E}_1$  étant l'espace réel affine  $\mathbb{R}^3$ ,

$\mathcal{E}_2$  étant le plan  $\mathbb{R}^2$  (resp. l'espace  $\mathbb{R}^3$ ) si la cubique ( $c$ ) est plane (resp. gauche).

Les deux applications  $T$  et  $\hat{T}$  sont liées par la relation

$$T \circ \Pi_1 = \Pi_2 \circ \hat{T},$$

sur  $\hat{\mathcal{E}}_1 - \text{Ker}\hat{T}$ , où  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  désignent les projections naturelles :

$$\Pi_1: \hat{\mathcal{E}}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_1,$$

$$\Pi_2: \hat{\mathcal{E}}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_2,$$

cf. [FJ89, Prop. 1.2.3.2, p.2 et Chap.I, §3].

#### Proposition 4.1.

Toute cubique rationnelle ( $c$ ) s'écrit sous forme (BR) :

$$BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3](t) \quad \text{avec } t \in \overline{\mathbb{R}},$$

et vérifie les propriétés suivantes

1. (c) est tangente en  $\Pi_2(\omega_0)$  à la droite  $(\Pi_2(\omega_0)\Pi_2(\omega_1))$  si  $\Pi_2(\omega_0) \neq \Pi_2(\omega_1)$ , (resp. (c) est tangente en  $\Pi_2(\omega_3)$  à la droite  $(\Pi_2(\omega_2)\Pi_2(\omega_3))$  si  $\Pi_2(\omega_2) \neq \Pi_2(\omega_3)$ ).
2. (c) passe en  $t = \frac{1}{2}$ ,  $t = \frac{1}{3}$ , et  $t = \infty$  par les points

- $\mathcal{S} = \Pi_2 \left( \frac{1}{2} * \frac{\omega_0 \oplus 3 * \omega_1}{4} \oplus \frac{1}{2} * \frac{3 * \omega_2 \oplus \omega_3}{4} \right)$ ,
- $\mathcal{T} = \Pi_2 \left( \frac{1}{27} (8 * \omega_0 \oplus 12 * \omega_1 \oplus 6 * \omega_2 \oplus \omega_3) \right)$ , et
- $\mathcal{R} = \Pi_2 (\omega_3 \ominus 3 * \omega_2 \oplus 3 * \omega_1 \ominus \omega_0)$ .

**Preuve:**

Ecrivons  $(c_c)$  sous forme (BR) :  $BR[(M_0; 1), (M_1; 1), (M_2; 1), (M_3; 1); \overline{\mathbb{R}}]$ .  
D'après [FJ89, Prop. 2.5.1., p.65 et Chap. I, §3] nous avons

$$\begin{aligned} T(BP[M](t)) &= T(BR[(M_0; 1), (M_1; 1), (M_2; 1), (M_3; 1)](t)) \\ &= BR[\hat{T}(M_0; 1), \hat{T}(M_1; 1), \hat{T}(M_2; 1), \hat{T}(M_3; 1)](t) \quad (3) \\ &= BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3](t) \end{aligned}$$

avec  $\omega_0 = \hat{T}(M_0; 1)$ ,  $\omega_1 = \hat{T}(M_1; 1)$ ,  $\omega_2 = \hat{T}(M_2; 1)$ , et  $\omega_3 = \hat{T}(M_3; 1)$ .  
Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} T(M_i) &= T \circ \Pi_1(M_i; 1) \\ &= \Pi_2 \circ \hat{T}(M_i; 1) = \Pi_2(\omega_i) \end{aligned} \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (4)$$

L'application projective conservant les contacts, la courbe (c) est tangente en  $T(M_0)$  (resp.  $T(M_3)$ ) à la droite  $(T(M_0)T(M_1))$  (resp.  $(T(M_3)T(M_2))$ ), ce qui d'après (4) nous donne la propriété 1.

La cubique (c) passe par le point

$$\begin{aligned} T(BP[M](1/2)) &= T \circ \Pi_1(BP[(M_0; 0), (M_0; 1), (M_0; 2), (M_0; 3)](1/2)) \\ &= T \circ \Pi_1 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{(M_0; 1) + 3(M_1; 1)}{4} + \frac{3(M_2; 1) + (M_3; 1)}{4} \right) \right) \\ &= \Pi_2 \circ \hat{T} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{(M_0; 1) + 3(M_1; 1)}{4} + \frac{3(M_2; 1) + (M_3; 1)}{4} \right) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

D'après (4) et puisque  $\hat{T}$  est une application linéaire, (5) devient

$$T(BP[M](1/2)) = \mathcal{S}.$$

De façon analogue, nous calculons  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{R}$  comme images respectives par  $T$  des points  $BP[M](\frac{1}{3})$  et  $BP[M](\infty)$ . Ce qui termine 2. ■

**Proposition 4.2.**

Avec les notations de la proposition précédente, si  $T$  est une transformation projective de l'espace, nous avons en plus des propriétés 1, 2

3.  $\Pi_1(\omega_1)$  est le point d'intersection du plan osculateur en  $\Pi_1(\omega_3)$  avec la tangente en  $\Pi_1(\omega_0)$  (resp.  $\Pi_1(\omega_2)$  est le point d'intersection du plan osculateur en  $\Pi_1(\omega_0)$  avec la tangente en  $\Pi_1(\omega_3)$ ).

4. l'ensemble  $\{\Pi_1(\omega_0), \Pi_1(\omega_1), \Pi_1(\omega_2), \Pi_1(\omega_3), BR[\omega](\infty)\}$  forme un repère projectif.

**Preuve:**

$T$  étant une transformation projective,  $\mathcal{E}_2$  est de dimension 3 et les démonstrations précédentes se simplifient puisque  $\Pi_1 = \Pi_2$ .

$T$  conserve les plans osculateurs. Par suite, L'intersection du plan osculateur en  $T(M_0)$  avec la tangente en  $T(M_3)$  se fait au point  $T(M_2)$ . De même, l'intersection du plan osculateur en  $T(M_3)$  avec la tangente en  $T(M_0)$  se fait au point  $T(M_1)$ . L'égalité (4) permet de conclure.

L'ensemble  $\{T(M_0), T(M_1), T(M_2), T(M_3), T(BP[M](\infty))\}$  forme un repère projectif. La propriété 4 est une conséquence de (4). ■

**3. Expression du polygone massique  $\omega$  en fonction d'une matrice de  $T$ .**

Soit l'application linéaire

$$\vec{T}: \vec{\mathcal{F}}_1 \rightarrow \vec{\mathcal{F}}_2$$

induisant l'application projective  $T$  qui transforme  $(c_c)$  en  $(c)$ .

$\mathcal{F}_1$  étant identifié à l'espace  $\mathbb{R}^4$ ,

$\mathcal{F}_2$  étant identifié à l'espace  $\mathbb{R}^3$  (resp.  $\mathbb{R}^4$ ) si la cubique  $(c)$  est plane (resp. gauche).

Les espaces  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont munis d'un repère cartésien.

Nous noterons indifféremment une origine dans les espaces  $\mathcal{E}_1$  et  $\mathcal{E}_2$  par  $\mathcal{O}$ .

De façon explicite, notons  $P$  une matrice de l'application linéaire  $\vec{T}$  sous la forme

$$P = (ABCD), \quad (6)$$

où  $A, B, C$  et  $D$  désignent les vecteurs-colonnes de la matrice  $P$ ;  $A, B, C$ , et  $D \in \vec{\mathcal{F}}_2$ .

Soit  $a, b, c$  et  $d$ , les éléments de la dernière ligne de la matrice  $P$ . Posons

$$A = \begin{pmatrix} \vec{A} \\ a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \vec{B} \\ b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \vec{C} \\ c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ d \end{pmatrix},$$

avec  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  et  $\vec{D}$  les vecteurs de  $\vec{\mathcal{E}}_2$ .

D'après [FJ89, déf. 1.2.3.1, p.24 et Chap.I, §3], la transmuée de  $\vec{T}$  par les isomorphismes

$$\begin{aligned}\hat{\Omega}_1: \hat{\mathcal{E}}_1 &\rightarrow \vec{\mathcal{F}}_1, \\ \hat{\Omega}_2: \hat{\mathcal{E}}_2 &\rightarrow \vec{\mathcal{F}}_2,\end{aligned}$$

s'écrit  $\hat{T} = \hat{\Omega}_2^{-1} \circ \vec{T} \circ \hat{\Omega}_1$ .

**Proposition 4.3.**

Soit  $T$  une application projective dont une matrice est  $P = (ABCD)$ . La cubique  $BR[\omega]$ , image par  $T$  de la cubique canonique  $(c_c)$ , a pour polygone massique :

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \hat{\Omega}_2^{-1}(D) \\ &= \begin{cases} \vec{D} & \text{si } d = 0, \\ [\mathcal{O} + \frac{1}{3}\vec{D}; d] & \text{sinon;} \end{cases} \\ \omega_1 &= \hat{\Omega}_2^{-1}\left(\frac{C+3D}{3}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3}(\vec{C} + 3\vec{D}) & \text{si } c + 3d = 0, \\ [\mathcal{O} + \frac{\vec{C}+3\vec{D}}{(c+3d)}; \frac{1}{3}(c+3d)] & \text{sinon;} \end{cases} \\ \omega_2 &= \hat{\Omega}_2^{-1}\left(\frac{B+2C+3D}{3}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3}(\vec{B} + 2\vec{C} + 3\vec{D}) & \text{si } b + 2c + 3d = 0, \\ [\mathcal{O} + \frac{\vec{B}+2\vec{C}+3\vec{D}}{b+2c+3d}; \frac{b+2c+3d}{3}] & \text{sinon;} \end{cases} \\ \omega_3 &= \hat{\Omega}_2^{-1}(A+B+C+D) \\ &= \begin{cases} \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} & \text{si } a + b + c + d = 0, \\ [\mathcal{O} + \frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}}{a+b+c+d}; a+b+c+d] & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

**Preuve:**

Avec les notations précédentes, il suffit de calculer les vecteurs massiques

$$\begin{aligned}\omega_i &= \hat{T}(M_i; 1) \\ &= \hat{\Omega}_2^{-1} \circ \vec{T} \circ \hat{\Omega}_1(M_i; 1) \\ &= \hat{\Omega}_2^{-1} \circ \vec{T}(\overline{\hat{\Omega}_1 M_i}), \quad i = 0, 1, 2, 3\end{aligned}$$

en utilisant explicitement la matrice (6). ■

**Corollaire 4.4.**

Toute courbe cubique  $BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3; \overline{\mathbb{R}}]$  est image de la cubique canonique par une application projective  $T$  dont une matrice  $P = (ABCD)$  est

composée des colonnes

$$\begin{aligned}
 D &= \hat{\Omega}_2(\omega_0), \\
 C &= 3\hat{\Omega}_2(\omega_1) - 3D \\
 &= \hat{\Omega}_2(3\Delta\omega_0), \\
 B &= 3\hat{\Omega}_2(\omega_2) - 2C - 3D \\
 &= \hat{\Omega}_2(3\Delta^2\omega_0), \\
 A &= \hat{\Omega}_2(\omega_3) - B - C - D \\
 &= \hat{\Omega}_2(\Delta^3\omega_0).
 \end{aligned} \tag{7}$$

**Preuve:**

D'après la partie directe  $\omega_i = \hat{\Omega}_2^{-1} \circ \vec{T}(\overline{\Omega_1 M_i})$ , pour  $i = 0, 1, 2, 3$ . ■

Les masses des vecteurs massiques  $\omega_i$  ne dépendent que des éléments de la dernière ligne de la matrice de l'application projective (ABCD).

**Corollaire 4.5.**

Lorsque les valeurs  $a, b, c$  sont nulles et  $d \neq 0$ , alors  $BR[\omega](t) = BP[P_0, P_1, P_2, P_3](t)$  avec

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \mathcal{O} + \frac{1}{d} \cdot \vec{D}, \\
 P_1 &= \mathcal{O} + \frac{1}{d} \cdot (\vec{C} + 3\vec{D}), \\
 P_2 &= \mathcal{O} + \frac{1}{d} \cdot (\vec{B} + 2\vec{C} + 3\vec{D}), \\
 P_3 &= \mathcal{O} + \frac{1}{d} \cdot (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}).
 \end{aligned} \tag{8}$$

**Preuve:**

Lorsque  $a, b$  et  $c$  sont nuls, les masses des  $\omega_i$  sont égales

$$\chi(\omega_0) = \chi(\omega_1) = \chi(\omega_2) = \chi(\omega_3) = d.$$

Puisque  $d$  est non-nul, le polygone massique  $\omega$  se réduit à un polygone de points de contrôle  $P_i$ , et la courbe (BR) représente une cubique polynomiale. Ce que nous savons, puisque dans ce cas,  $T$  est une application affine. ■

**Corollaire 4.6.**

Avec les notations précédentes; le polygone massique  $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  est constitué uniquement de points pondérés de masses positives si et seulement si

$$\begin{aligned}
 d &> 0, \\
 c &> -3d, \\
 b &> -2c - 3d, \\
 a &> -b - c - d.
 \end{aligned} \tag{9}$$

**Preuve:**

En utilisant la proposition 4.3, la relation entre le polygone massique  $\omega$  et une matrice  $P$  de l'application projective implique des relations entre les masses et les coefficients  $a, b, c$  et  $d$ .

$$\begin{aligned}\chi(\omega_0) &= d, \\ \chi(\omega_1) &= \frac{c + 3d}{3}, \\ \chi(\omega_2) &= \frac{b + 2c + 3d}{3}, \\ \chi(\omega_3) &= a + b + c + d.\end{aligned}$$

Il est alors facile de conclure. ■

**Corollaire 4.7.**

*S'il existe des valeurs réelles  $\gamma$  et  $\delta$  non simultanément nulles telles que*

$$\begin{aligned}d &= \gamma^3, \\ c &= \gamma^2(\delta - 3\gamma), \\ b &= \gamma(\delta^2 - 2\gamma\delta + 3\gamma^2), \\ a &= \delta^3 - \gamma\delta^2 + \gamma^2\delta - \gamma^3.\end{aligned}\tag{10}$$

*Alors la cubique  $BR[\omega]$  est en fait une cubique polynomiale.*

**Preuve:**

Les masses des vecteurs massiques  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$  vérifient  $\chi(\omega_\ell) = \gamma^{3-\ell}\delta^\ell$  pour  $\ell = 0, 1, 2, 3$ . Il suffit d'appliquer la proposition 2.16 pour une courbe de longueur 3. ■

**4. Rang du polygone massique et formes dégénérées.****Proposition 4.8.**

*Soit  $\omega$  un polygone de longueur 3 et de rang 1, alors le support de la courbe  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est un point.*

**Preuve:**

Le polygone  $\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  étant de rang 1, tout vecteur massique  $\omega_i$  est proportionnel à  $\omega_0$  :  $\omega_i = \lambda_i * \omega_0$  pour  $i = 0, 1, 2, 3$ .

$\forall t \in \overline{\mathbb{R}}$  :

$$\begin{aligned}BR[\omega](t) &= \Pi \left( \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) * \omega_i \right) \\ &= \Pi \left( \sum_{i=0}^3 \lambda_i B_i^3(t) * \omega_0 \right) \\ &= \Pi \left( \omega_0 * \sum_{i=0}^3 \lambda_i B_i^3(t) \right) \\ &= \Pi(\omega_0). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Proposition 4.9.**

Soit  $\omega$  un polygone de longueur 3 et de rang 2, alors le support de la courbe  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est contenu dans une droite.

**Preuve:**

Notons  $\omega_a$  et  $\omega_b$  deux vecteurs massiques linéairement indépendants tel que les vecteurs du polygone  $\omega$  soient engendrés par ces deux vecteurs massiques :

$$\omega_i = \lambda_i * \omega_a \oplus \mu_i * \omega_b, \quad i = 0, 1, 2, 3;$$

il vient que tout point de la courbe  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  s'écrit,

$$\begin{aligned} BR[\omega](t) &= \Pi \left( \sum_{i=0}^3 B_i^3(t) * \omega_i \right) \\ &= \Pi \left( \omega_a * \sum_{i=0}^3 \lambda_i B_i^3(t) \oplus \omega_b * \sum_{i=0}^3 \mu_i B_i^3(t) \right) \\ &= \Pi (\omega_a * \lambda(t) \oplus \omega_b * \mu(t)) \end{aligned}$$

avec  $\lambda(t)$  et  $\mu(t)$  des polynômes de degré 3 en  $t$ . En utilisant [FJ89, Prop. 1.2.1.6, p. 18 et Chap.I, §1], il est facile de voir que le  $\Pi$ -projeté de la combinaison linéaire de deux vecteurs massiques appartient à la droite affine passant par les points  $\Pi(\omega_a)$  et  $\Pi(\omega_b)$ . ■

**Proposition 4.10.**

Soit  $\omega$  un polygone de longueur 3 et de rang 3, le support de la courbe  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est une conique propre si et seulement s'il existe  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  tel que

$$\beta^3 * \omega_3 \oplus 3\alpha\beta^2 * \omega_2 \oplus 3\alpha^2\beta * \omega_1 \oplus \alpha^3 * \omega_0 = \vec{0}. \quad (11)$$

**Preuve:**

1) Soit  $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  tel que  $t_0 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$  (resp.  $1 - t_0 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ ).

L'hypothèse (11) est équivalente à

$$BP[\omega](t_0) = t_0^3 * \omega_3 \oplus 3t_0^2(1-t_0) * \omega_2 \oplus 3t_0(1-t_0)^2 * \omega_1 \oplus (1-t_0)^3 * \omega_0 = \vec{0} \quad (12)$$

i.e.,  $t_0$  est un zéro du polynôme  $BP[\omega](t)$ .

Par conséquent, il existe trois vecteurs massiques linéairement indépendants  $\theta_0, \theta_1$  et  $\theta_2$  vérifiant

$$\begin{aligned} \omega_0 &= -t_0 * \theta_0, \\ \omega_1 &= \frac{(1-t_0) * \theta_0 \oplus 2t_0 * \theta_1}{3}, \\ \omega_2 &= \frac{2(1-t_0) * \theta_1 \oplus t_0 * \theta_2}{3}, \\ \omega_3 &= (1-t_0) * \theta_2, \end{aligned} \quad (13)$$

tel que

$$BP[\omega](t) = (t - t_0) * BP[\theta](t),$$

et

$$BR[\omega](t) = BR[\theta](t).$$

Le support de  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est donc une conique propre.

2) Soit  $\omega$  un polygone de longueur 3 et de rang 3 tel que le support de courbe  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est une conique propre. Montrons que la courbe au-dessus  $BP[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  admet un zéro.

Soient  $x = a(t)$ ,  $y = b(t)$  et  $z = c(t)$  les coordonnées homogènes du point courant de  $BR[\omega]$  avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  des polynômes de degré  $\leq 3$ .

Raisonnons par l'absurde

- (i) Si  $a$ ,  $b$  et  $c$  n'ont pas de racines communes, ils sont premiers entre eux et le support de la courbe  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est une cubique.
- (ii) Si  $a$ ,  $b$  et  $c$  admettent une racine complexe  $z$  commune, alors le polynôme réel  $(t - z)(t - \bar{z})$  est facteur commun aux trois polynômes  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Par projection le support de la courbe  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est une droite et  $\omega$  serait de rang 2.
- (iii) Si  $a$ ,  $b$  et  $c$  ont plus d'une racine réelle commune, le support de la courbe  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est une droite ou un point.

Par suite, les trois polynômes  $a$ ,  $b$  et  $c$  ont une unique racine réelle commune  $t_0$ , d'où

$$\begin{aligned} a(t) &= (t - t_0)a_1(t) \\ b(t) &= (t - t_0)b_1(t) \\ c(t) &= (t - t_0)c_1(t) \end{aligned}$$

avec  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$  des polynômes de degré  $\leq 2$ .

La courbe  $(a_1, b_1, c_1)$  définit une conique qui s'écrit sous forme (BR) :  $BR[\theta]$  avec  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  des vecteurs massiques linéairement indépendants tel que :

$$BP[\omega](t) = (t - t_0)BP[\theta](t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Après calcul, on vérifie que  $\omega$  est le polygone massique de longueur 3 défini en (13).

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  tel que  $\frac{\beta}{\alpha+\beta} = t_0$ , l'égalité (11) vient du fait que le polynôme  $BP[\omega](t) = (t - t_0)BR[\theta](t)$  s'annule pour  $t = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ . ■

Dans la suite de ce chapitre, nous appelons cubiques (BR) planes non-dégénérées les cubiques (BR) dont le polygone massique de rang 3 ne vérifie pas (11).

## 5. Changement de paramètre d'une cubique (BR).

### 5.1. Changement de paramètre homographique.

Considérons une application homographique

$$h: u \rightarrow \frac{\alpha(1-u) + \beta u}{\gamma(1-u) + \delta u}$$

tel que  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ .

Si nous nous référons aux notations du paragraphe II.3, nous avons

$$BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3] \circ h(u) = BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3](u)$$

avec  $u \in [0, 1]$ . Les vecteurs massiques  $\theta_\ell$ , où  $\ell = 0, 1, 2, 3$  sont donnés par la formule (2.10)

$$\theta_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{m=0}^{3-\ell} \binom{\ell}{j} \binom{3-\ell}{m} \alpha^m \beta^j \gamma^{3-\ell-m} \delta^{\ell-j} * \Delta^{j+m} \omega_0, \quad \ell = 0, 1, 2, 3. \quad (14)$$

Sous forme matricielle, les relations (14) s'écrivent d'après (II.13a)

$$\theta = H \cdot \Delta \omega \quad (15)$$

avec

$$H = \begin{pmatrix} \gamma^3 & 3\alpha\gamma^2 & 3\alpha^2\gamma & \alpha^3 \\ \gamma^2\delta & 2\alpha\gamma\delta + \beta\gamma^2 & 2\alpha\beta\gamma + \alpha^2\delta & \alpha^2\beta \\ \gamma\delta^2 & 2\beta\gamma\delta + \alpha\delta^2 & 2\alpha\beta\delta + \beta^2\gamma & \alpha\beta^2 \\ \delta^3 & 3\beta\delta^2 & 3\beta^2\delta & \beta^3 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \Delta \omega = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \Delta \omega_0 \\ \Delta^2 \omega_0 \\ \Delta^3 \omega_0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la matrice  $\Delta$  définie dans le paragraphe II.3, (15) devient

$$\theta = H \cdot \Delta \cdot \omega \quad (16)$$

avec

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Dans le cas particulier où l'application homographique est de la forme

$$\bar{h}(u) = \frac{\delta u}{\gamma(1-u) + \delta u},$$

la matrice  $H$  est triangulaire inférieure :

$$H = \begin{pmatrix} \gamma^3 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma^2\delta & \gamma^2\delta & 0 & 0 \\ \gamma\delta^2 & 2\gamma\delta^2 & \gamma\delta^2 & 0 \\ \delta^3 & 3\delta^3 & 3\delta^3 & \delta^3 \end{pmatrix}.$$

Alors le système linéaire (16) devient

$$\theta = \mathbf{H} \cdot \omega \quad (18)$$

avec la matrice diagonale

$$\mathbf{H} = H \cdot \Delta = \begin{pmatrix} \gamma^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\delta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^3 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

D'où la proposition suivante

**Proposition 4.11.**

Etant donnés  $BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3]$  et la transformation homographique  $h$  ci-dessus, alors  $BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3] \circ h = BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3]$  où  $\theta$  est donné par (16). Si  $h = \bar{h}$ , nous avons  $\theta_\ell = \gamma^{3-\ell} \delta^\ell * \omega_\ell$  pour  $\ell = 0, 1, 2, 3$ .

**5.2. Changement du paramètre quadratique .**

D'après la proposition 3.6, nous avons

$$BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3] \circ \Phi(u) = BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \delta\theta_2, \delta^2\theta_1, \delta^3\theta_0](u)$$

avec  $\delta = \frac{\gamma}{\alpha} < 0$ . Les vecteurs massiques  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$  et  $\theta_3$  sont donnés par le système matriciel (III.12)

$$\theta = \mu \cdot \Delta \cdot \omega. \quad (20)$$

Posons  $\mathbf{Q} = \mu \cdot \Delta$ , il vient

$$\theta = \mathbf{Q} \cdot \omega \quad (21)$$

avec  $\mathbf{Q}$  la matrice  $4 \times 4$  suivante

$$\left( \begin{array}{cccc} \frac{-5\alpha^3}{2} & \frac{15\alpha^3}{2} & \frac{-15\alpha^3}{2} & \frac{5\alpha^3}{2} \\ \frac{-5\alpha^2(-1+\beta)}{2} & \frac{5\alpha^2(-2+3\beta)}{2} & \frac{-5\alpha^2(-1+3\beta)}{2} & \frac{5\alpha^2\beta}{2} \\ -2\alpha + 4\alpha\beta - & 2\alpha - 8\alpha\beta + & 4\alpha\beta - 6\alpha\beta^2 - & 2\alpha\beta^2 + \\ 2\alpha\beta^2 - 0.5\alpha^2\gamma & 6\alpha\beta^2 + 1.5\alpha^2\gamma & 1.5\alpha^2\gamma & 0.5\alpha^2\gamma \\ 1. - 3\beta + 3\beta^2 - & 3\beta - 6\beta^2 + 3\beta^3 - & 3\beta^2 - 3\beta^3 + & \beta^3 + \\ \beta^3 + 1.5\alpha\gamma - 1.5\alpha\beta\gamma & 3.\alpha\gamma + 4.5\alpha\beta\gamma & 1.5\alpha\gamma - 4.5\alpha\beta\gamma & 1.5\alpha\beta\gamma \end{array} \right) \quad (22)$$

D'où la proposition suivante

**Proposition 4.12.**

Etant donnés  $BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3]$  et une transformation quadratique  $\Phi$ , alors  $BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3] \circ \Phi = BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \delta\theta_2, \delta^2\theta_1, \delta^3\theta_0]$  où le polygone  $\theta$  est donné par (21).

**6. Nature d'une cubique (BR).****Proposition 4.13. Nature d'une cubique (BR) paramétrée sur  $\overline{\mathbb{R}}$ .**

Soit une cubique  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  gauche ou plane non-dégénérée, posons  $D = 3A^2 - 4B$  avec

$$\begin{aligned} A &= \chi(\omega_1)\chi(\omega_2) + \chi(\omega_0)\chi(\omega_3) \\ B &= \chi(\omega_0)\chi(\omega_2)^3 + \chi(\omega_0)^2\chi(\omega_3)^2 + \chi(\omega_1)^3\chi(\omega_3), \end{aligned}$$

alors si

- $D > 0$  :  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est une hyperbole cubique,  
 $D = 0$  :  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est une parabole hyperbolique cubique,  
 $D < 0$  :  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est une ellipse cubique.

**Preuve:**

On déduit la nature d'une cubique gauche (resp. cubique plane) d'après les intersections avec le plan à l'infini (resp. droite à l'infini) [WO13, p.38].

Posons  $\beta_i = \chi(\omega_i)$  pour  $i = 0, 1, 2, 3$ . Remarquons que l'une au moins des masses  $\beta_i$  est non nulle.

1) Supposons  $\Delta^3 \beta_0 = \beta_3 - 3\beta_2 + 3\beta_1 - \beta_0 \neq 0$  :

Dans ce cas le dénominateur de  $BR[\theta](t)$  est le polynôme de degré 3 :  $\beta_0(1-t)^3 + 3\beta_1 t(1-t)^2 + 3\beta_2 t^2(1-t) + \beta_3 t^3$  dont le discriminant au coefficient positif près  $4(\Delta^3 \beta_0)^4$  est

$$\begin{aligned}
 D &= +3\beta_1^2 \beta_2^2 - 4\beta_0 \beta_2^3 - 4\beta_1^3 \beta_3 + 6\beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3 - \beta_0^2 \beta_3^2 \\
 &= 3(\beta_1 \beta_2 + \beta_0 \beta_3)^2 - 4(\beta_0 \beta_2^3 + \beta_0^2 \beta_3^2 + \beta_1^3 \beta_3)
 \end{aligned} \tag{26}$$

$D$  nous permet de déterminer le nombre des points à l'infini. Cela nous donne un moyen de classifier la cubique (BR) en termes géométriques

- (i) si  $D$  est positif, la courbe a trois asymptotes réelles.  $BR[\omega]$  est une hyperbole cubique.
- (ii) si  $D$  est nulle :
- dans l'espace, la courbe est tangente au plan de l'infini, soit (c) a un point parabolique (racine double) et une asymptote réelle, soit que le plan de l'infini est osculateur (racine triple), dans le plan, la courbe est tangente à la droite de l'infini, divers cas sont possibles (point parabolique, deux asymptotes parallèles).  $BR[\omega]$  est une parabole hyperbolique cubique.
- (iii) si  $D$  est négatif, la courbe a une seule asymptote réelle.  $BR[\omega]$  est une ellipse cubique.

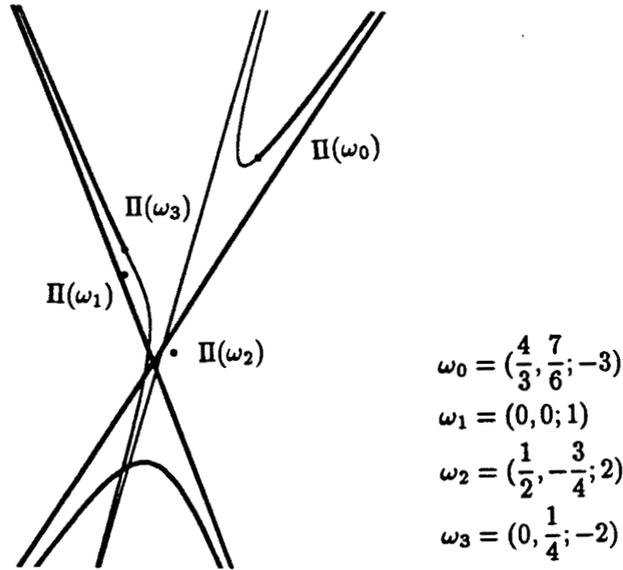
2) si le dénominateur est quadratique : nous avons  $\Delta^3 \beta_0 = 0$  et  $\Delta^2 \beta_0 \neq 0$ . Il en résulte que  $\Delta^3 \omega_0 \in \overrightarrow{\mathcal{E}} - \{\overrightarrow{0}\}$ , comme  $BR[\omega](\infty) = \Pi(\Delta^3 \omega_0)$ ,  $BR[\omega](\infty) = (\Delta^3 \omega_0)_\infty$ . Le dénominateur de  $BR[\omega]$  se réduit à

$$3\Delta^2 \beta_0 \cdot t^2 + 3\Delta \beta_0 \cdot t + \beta_0.$$

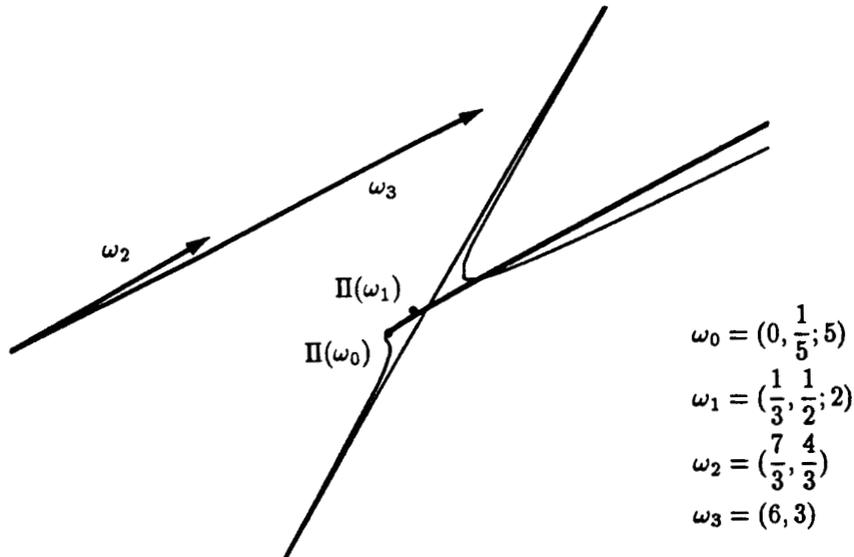
Le discriminant de cette forme quadratique est

$$\begin{aligned}
 D_1 &= 9(\Delta \beta_0)^2 - 12\beta_0 \cdot \Delta^2 \beta_0 \\
 &= 9(\beta_1 - \beta_0)^2 - 12\beta_0(\beta_2 - 2\beta_1 + \beta_0)
 \end{aligned}$$

- (i) si  $D_1 > 0$ , il existe deux autres asymptotes.  $BR[\omega]$  est une hyperbole cubique.



4.2. hyperbole cubique.



4.3 parabole hyperbolique cubique.

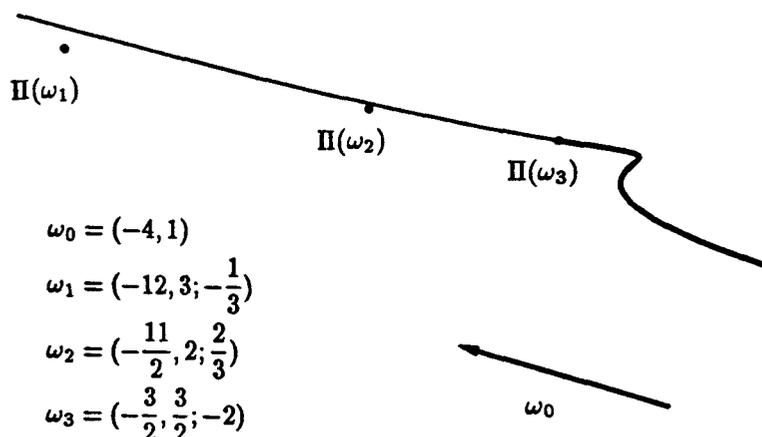
- (ii) si  $D_1 = 0$ , la courbe est tangente au plan ou à la droite de l'infini et a une asymptote réelle.  $BR[\omega]$  est une *parabole hyperbolique cubique*.
- (ii) si  $D_1 < 0$ , la courbe  $BR[\omega]$  est une *ellipse cubique*.
- D'autre part, nous avons la relation

$$D = 3(\Delta^2 \beta_0)^2 \cdot D_1, \quad (27)$$

i.e.,  $D$  et  $D_1$  ont le même signe.

3) si le dénominateur  $D$  est linéaire :  $\Delta^3 \beta_0 = 0$ ,  $\Delta^2 \beta_0 = 0$  et  $\Delta \beta_0 \neq 0$  pour  $t = \infty$ , la courbe admet une direction parabolique à l'infini. Le dénominateur se réduit à

$$3t(\beta_1 - \beta_0) + \beta_0.$$



#### 4.4 ellipse cubique.

Nous avons une asymptote réelle pour  $t = \frac{\beta_0}{3(\beta_0 - \beta_1)}$ .  $BR[\omega]$  est une parabole hyperbolique cubique.

D'autre part,  $\Delta^2 \beta_0 = 0$  implique  $D = 0$  d'après (27).

4) si le dénominateur se réduit à une constante, la cubique est une courbe polynomiale.  $BR[\omega](t)$  est tangente au plan de l'infini pour  $t = \infty$ , c'est une parabole cubique. ■

Si on utilise la forme particulière où  $\chi(\omega_0) = \chi(\omega_3) = 1$  (nous pouvons toujours nous y ramener en utilisant le corollaire 2.8, page 23), le discriminant (26) devient

$$D = 3(1 + \beta_1 \beta_2)^2 - 4(1 + \beta_1^3 + \beta_2^3). \quad (28)$$

En divisant le plan des paramètres  $\beta_1$  et  $\beta_2$  en plusieurs régions suivant le signe du discriminant (28), nous obtenons la figure 4.5.

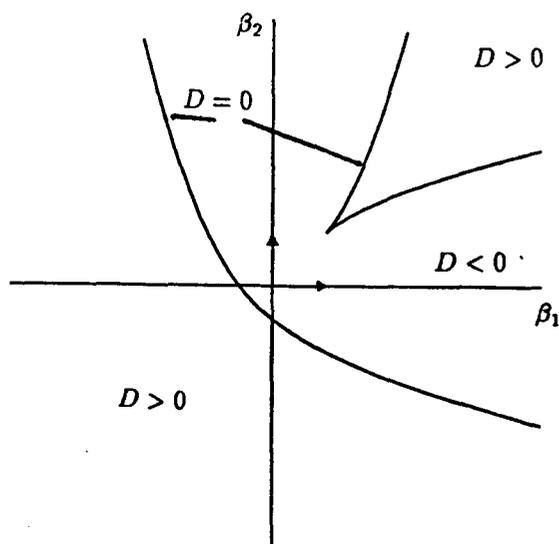
En particulier, sur la première bissectrice  $\beta_1 = \beta_2$ , le discriminant (28) devient

$$\begin{aligned} D &= 3\beta_1^4 - 8\beta_1^3 + 6\beta_1^2 - 1 \\ &= (\beta_1 - 1)^3(3\beta_1 + 1) \end{aligned}$$

et s'annule en  $\beta_1 = 1$  et  $\beta_1 = -1/3$ .

Forrest [FO80] a introduit une représentation particulière de la cubique gauche dépendante de deux paramètres de forme  $\sigma$  et  $\tau$ . Sa forme (BR) est :  $BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3]$  avec

$$\begin{aligned} \chi(\omega_0) &= 1, \\ \chi(\omega_1) &= \frac{2\sigma}{3(1 - \sigma - \tau)}, \\ \chi(\omega_2) &= \frac{2\tau}{3(1 - \sigma - \tau)}, \\ \chi(\omega_3) &= 1. \end{aligned}$$

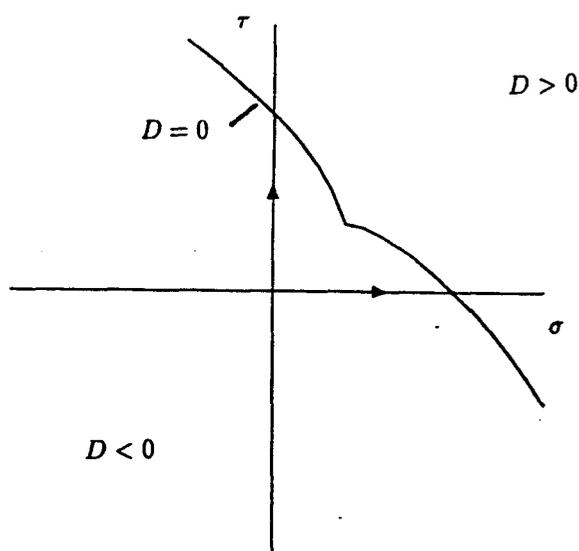


#### 4.5 Nature de la cubique $BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3]$ suivant $\beta_1$ et $\beta_2$ .

Le discriminant (28) devient alors

$$D = \frac{(4(\sigma + \tau) - 3)^3 + (3 + 2(\sigma + \tau))^2(\sigma - \tau)^2 - (27 - (\sigma - \tau)^2)(\sigma - \tau)^2}{27(1 - \sigma - \tau)^4}.$$

De façon analogue, en découpant le plan  $(\sigma, \tau)$  en plusieurs régions suivant le signe de  $D$ , nous obtenons la figure 4.6.



4.6 Nature de la cubique donnée par Forrest.

### §3. Cubique (BR) gauche.

$\mathcal{E}$  est dans tout ce paragraphe l'espace réel affine  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition 4.14. Identité de deux cubiques sous forme (BR).**

Soient  $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  et  $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  deux bases de  $\hat{\mathcal{E}}$ ; l'égalité

$$BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3](t) = BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3](t)$$

pour tout  $t \in \overline{\mathbb{R}}$ , implique la proportionnalité des deux bases et réciproquement.

**Preuve:**

Soient  $M_0, M_1, M_2$  et  $M_3$  les quatre points de contrôle de la cubique canonique définis en (2). Ce sont des points non-coplanaires et à distance finie de l'espace  $\mathcal{E}$ .

Notons  $\hat{T}_1$  la transformation de  $\hat{\mathcal{E}}$  tel que  $\hat{T}_1(M_i; 1) = \theta_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ ; et de la même manière notons  $\hat{T}_2$  la transformation de  $\hat{\mathcal{E}}$  tel que  $\hat{T}_2(M_i; 1) = \omega_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Designons par  $T_1$  et  $T_2$  les transformations projectives de  $\hat{\mathcal{E}}$  induites respectivement par  $\hat{T}_1$  et  $\hat{T}_2$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} T_1(BP[M_0, M_1, M_2, M_3](t)) &= BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3](t), \\ T_2(BP[M_0, M_1, M_2, M_3](t)) &= BR[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3](t). \end{aligned} \quad (29)$$

En faisant successivement:  $t = 0$ ,  $t = \frac{1}{3}$ ,  $t = \frac{1}{2}$ ,  $t = 1$  et  $t = \infty$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} T_1(M_0) &= T_2(M_0), \\ T_1\left(BP[M](\frac{1}{3})\right) &= T_2\left(BP[M](\frac{1}{3})\right), \\ T_1\left(BP[M](\frac{1}{2})\right) &= T_2\left(BP[M](\frac{1}{2})\right), \\ T_1(M_3) &= T_2(M_3), \\ T_1(BP[M](\infty)) &= T_2(BP[M](\infty)). \end{aligned} \quad (30)$$

L'ensemble  $\{M_0, BP[M](\frac{1}{3}), BP[M](\frac{1}{2}), M_3, BP[M](\infty)\}$  forme un repère projectif.  $T_1$  et  $T_2$  coïncidant aux cinq points d'un repère projectif sont donc égales.  $\hat{T}_1$  et  $\hat{T}_2$  induisant la même transformation projective, il en résulte que  $\hat{T}_2 = \lambda \hat{T}_1$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  et par suite

$$\omega_i = \lambda * \theta_i, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

La réciproque est immédiate. ■

**Proposition 4.15. Caractérisation d'une cubique gauche.**

Soit  $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  une base de  $\hat{\mathcal{E}}$ , le support de la courbe  $BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3; \overline{\mathbb{R}}]$  est une cubique gauche de l'espace.

Réciproquement, toute cubique gauche de l'espace est le support d'une courbe  $BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3; \overline{\mathbb{R}}]$  où  $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  constitue une base de  $\hat{\mathcal{E}}$ .

**Preuve:**

Il existe une transformation linéaire unique  $\hat{T}: \hat{\mathcal{E}} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}$  telle que  $\hat{T}(M_i; 1) = \theta_i$ , pour  $i = 0, 1, 2, 3$ . La transformation projective induite  $T$  de  $\hat{\mathcal{E}}$  transforme la cubique gauche  $BR[(M_0; 1), (M_1; 1), (M_2; 1), (M_3; 1); \overline{\mathbb{R}}]$  en  $BR[\theta; \overline{\mathbb{R}}]$  qui est donc une cubique gauche.

Soit (c) une cubique gauche, c'est

$$\begin{aligned} T(BP[M_0, M_1, M_2, M_3]) &= T(BR[(M_0; 1), (M_1; 1), (M_2; 1), (M_3; 1)]) \\ &= BR[\hat{T}(M_0; 1), \hat{T}(M_1; 1), \hat{T}(M_2; 1), \hat{T}(M_3; 1)] \\ &= BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3] \end{aligned}$$

en posant  $\theta_i = \hat{T}(M_i; 1)$  pour  $i = 0, 1, 2, 3$ . ■

**Corollaire 4.16.**

Soit  $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  une base de  $\hat{\mathcal{E}}$ . Le support de la courbe  $BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \delta\theta_2, \delta^2\theta_1, \delta^3\theta_0; [0, 1]]$  avec  $\delta < 0$  est une cubique gauche de l'espace  $\mathcal{E}$ .

Réciproquement, toute cubique gauche de l'espace est le support d'une courbe  $BR[\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \delta\theta_2, \delta^2\theta_1, \delta^3\theta_0; [0, 1]]$  où  $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  est une base de  $\hat{\mathcal{E}}$ .

**Preuve:**

D'après la proposition précédente, la donnée d'une base  $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  détermine une cubique gauche  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  et réciproquement toute cubique gauche admet un paramétrage de cette forme. Le changement quadratique du paramètre vu en §5.2, page 59, permet alors de conclure. ■

**§4. Cubique (BR) plane.**

Dans ce paragraphe, nous ne considérons que des cubiques planes non-dégénérées i.e., cubiques planes de  $\mathcal{E}$  (où  $\mathcal{E}$  désigne le plan réel affine) dont le polygone massique est de rang 3 et ne vérifie pas (11).

**1. Cubiques (BR) de référence.**

Soit  $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  un polygone massique de rang 3, il existe des réels  $a, b, c$  et  $d$  non tous nuls tel que

$$a * \omega_0 \oplus b * \omega_1 \oplus c * \omega_2 \oplus d * \omega_3 = \vec{0}. \quad (32)$$

Du fait des relations (7) entre les vecteurs massiques  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$ , et les vecteurs-colonnes de la matrice de  $T$ , (32) est équivalente à la relation dans  $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} a \cdot D + b \cdot \frac{C + 3D}{3} + c \cdot \frac{B + 2C + 3D}{3} + d \cdot (A + B + C + D) &= \vec{0} \\ \iff d \cdot A + \frac{c + 3d}{3} \cdot B + \frac{b + 2c + 3d}{3} \cdot C + (a + b + c + d) \cdot D &= \vec{0} \end{aligned} \quad (33)$$

Nous déduisons donc une relation entre les vecteurs-colonnes  $A, B, C$  et  $D$  à partir d'une relation entre les vecteurs massiques  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$ , et réciproquement.

Etudions les relations (32) et (33) suivant les valeurs prises par les coefficients  $d, c, b$ , et  $a$ ;

1)  $d$  est non-nul :

- $c, b, a$  sont tous nuls : Le vecteur massique  $\omega_3$  n'est autre que le vecteur nul  $\vec{0}$ .  $BR[\omega]$  dégénère en une conique.
- $c, b, a$  non tous nuls : Le vecteur massique  $\omega_3$  (resp. le vecteur colonne  $A$ ) dépend linéairement de  $\omega_0, \omega_1$  et  $\omega_2$  (resp. de  $B, C$ , et  $D$ ) :

$$\omega_3 = \ominus \frac{a}{d} * \omega_0 \ominus \frac{b}{d} * \omega_1 \ominus \frac{c}{d} * \omega_2,$$

$$A = -\frac{c+3d}{3d} \cdot B - \frac{b+2c+3d}{3d} \cdot C - \frac{a+b+c+d}{d} \cdot D.$$

Puisque le rang de  $\omega$  est 3, l'ensemble  $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$  ( resp. l'ensemble  $\{B, C, D\}$  ) forme un système libre.

2)  $d$  est nul et  $c$  est non-nul,  $b$  et  $a$  quelconques : Le vecteur massique  $\omega_2$  (resp. le vecteur colonne  $B$ ) dépend linéairement de  $\omega_0$  et  $\omega_1$  (resp. de  $C$  et  $D$ ) :

$$\omega_2 = \ominus \frac{a}{c} * \omega_0 \ominus \frac{b}{c} * \omega_1$$

$$B = -\frac{b+2c}{c} \cdot C - \frac{3(a+b+c)}{c} \cdot D$$

En conséquence l'ensemble  $\{\omega_0, \omega_1, \omega_3\}$  (resp. l'ensemble  $\{A, C, D\}$  ) est un système libre.

3)  $d$  et  $c$  sont nuls,  $b$  est non nul, et  $a$  est quelconque : Le vecteur massique  $\omega_1$  (resp. le vecteur colonne  $C$ ) dépend linéairement de  $\omega_0$  (resp. de  $D$ ) :

$$\omega_1 = \ominus \frac{a}{b} * \omega_0,$$

$$C = -\frac{3(a+b)}{b} \cdot D.$$

En conséquence l'ensemble  $\{\omega_0, \omega_2, \omega_3\}$  ( resp. l'ensemble  $\{A, B, D\}$  ) est un système libre.

4)  $d, c$  et  $b$  sont nuls et  $a$  est non-nul : Le vecteur massique  $\omega_0$  n'est autre que le vecteur nul  $\vec{0}$ .  $BR[\omega]$  est une conique.

#### Définition 4.18.

Soient  $x, y$  et  $z$  des réels. Nous appelons cubiques (BR) planes de référence, les trois cubiques (BR) suivantes :

1) première cubique (BR) de référence :  $BR[\omega_{x,y,z}^{[1]}]$  où le polygone  $\omega_{x,y,z}^{[1]}$  est constitué des vecteurs massiques linéairement indépendants

$$\omega_0^{[1]} = \vec{i}, \quad \omega_1^{[1]} = \vec{j}, \quad \omega_2^{[1]} = (\mathcal{O}_2; 1),$$

et du vecteur massique

$$\omega_3^{[1]} = x * \omega_0^{[1]} + y * \omega_1^{[1]} + z * \omega_2^{[1]}.$$

2) seconde cubique (BR) de référence :  $BR[\omega_{x,y}^{[2]}]$  où le polygone  $\omega_{x,y}^{[2]}$  est constitué des vecteurs massiques linéairement indépendants

$$\omega_0^{[2]} = \vec{i}, \quad \omega_1^{[2]} = \vec{j}, \quad \omega_3^{[2]} = (\mathcal{O}_2; 1),$$

et du vecteur massique

$$\omega_2^{[2]} = x * \omega_0^{[2]} + y * \omega_1^{[2]}.$$

3) troisième cubique (BR) de référence :  $BR[\omega_x^{[3]}]$  où le polygone  $\omega_x^{[3]}$  est constitué des vecteurs massiques linéairement indépendants

$$\omega_0^{[3]} = \vec{i}, \quad \omega_2^{[3]} = \vec{j}, \quad \omega_3^{[3]} = (\mathcal{O}_2; 1),$$

et du vecteur massique

$$\omega_1^{[3]} = x * \omega_0^{[3]}.$$

#### Remarque 4.19.

En utilisant le corollaire 4.4, nous trouvons que les matrices des applications projectives  $T$  associées aux cubiques (BR) planes de référence sont les suivantes

1) première cubique (BR) de référence :

$$P^{[1]} = (A^{[1]} B^{[1]} C^{[1]} D^{[1]}) = \begin{pmatrix} -1 + x & 3 & -3 & 1 \\ 3 + y & -6 & 3 & 0 \\ -3 + z & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $B^{[1]}, C^{[1]}$  et  $D^{[1]}$  sont des vecteurs non-liés.

2) seconde cubique (BR) de référence :

$$P^{[2]} = (A^{[2]} B^{[2]} C^{[2]} D^{[2]}) = \begin{pmatrix} -1 - 3x & 3 + 3x & -3 & 1 \\ 3 - 3y & -6 + 3y & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $A^{[2]}, C^{[2]}$  et  $D^{[2]}$  sont des vecteurs non-liés.

3) troisième cubique (BR) de référence :

$$P^{[3]} = (A^{[3]} B^{[3]} C^{[3]} D^{[3]}) = \begin{pmatrix} -1 + 3x & 3 - 6x & -3 + 3x & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $A^{[3]}, B^{[3]}$  et  $D^{[3]}$  sont des vecteurs non-liés.

**Proposition 4.20.**

Toute cubique plane non-dégénérée  $BR[\omega]$  est la transformée projective plane d'une cubique (BR) de référence.

**Preuve:**

Soit  $T$  l'application projective de matrice  $P = (ABCD)$ , tel que  $BR[\omega]$  est image de la cubique canonique.  $BR[\omega]$  étant une cubique plane non-dégénérée,  $\omega$  est un polygone massique de longueur 3 et de rang 3 ne vérifiant pas (11).

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des réels tel que

$$a * \omega_0 \oplus b * \omega_1 \oplus c * \omega_2 \oplus d * \omega_3 = \vec{0}. \quad (34)$$

Discutons les différents cas qui suivent :

1)  $d \neq 0, c, b, a$  non tous nuls :

Comme  $\{B, C, D\}$  et  $\{B^{[1]}, C^{[1]}, D^{[1]}\}$  forment deux systèmes libres de  $\vec{\mathbb{R}}^3$ , il existe une unique transformation linéaire

$$\vec{T}_p: \vec{\mathbb{R}}^3 \rightarrow \vec{\mathbb{R}}^3$$

de matrice  $P_p$  régulière tel que

$$(BCD) = P_p \cdot (B^{[1]}C^{[1]}D^{[1]}).$$

Notons  $\hat{T}_p = \hat{\Omega}_2^{-1} \circ \vec{T}_p \circ \hat{\Omega}_2$  la transformation transmuée de  $\vec{T}_p$  par l'isomorphisme

$$\hat{\Omega}_2: \hat{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \vec{\mathbb{R}}^3.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \hat{T}_p(\omega_0^{[1]}) &= \hat{T}_p \circ \hat{\Omega}_2^{-1}(D^{[1]}) \\ &= \hat{\Omega}_2^{-1} \circ \vec{T}_p(D^{[1]}) \\ &= \hat{\Omega}_2^{-1}(D) = \omega_0. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \hat{T}_p(\omega_1^{[1]}) &= \omega_1, \\ \hat{T}_p(\omega_2^{[1]}) &= \omega_2, \\ \hat{T}_p(\omega_3^{[1]}) &= x * \omega_0 \oplus y * \omega_1 \oplus z * \omega_2. \end{aligned} \quad (35)$$

En prenant  $x = -\frac{a}{d}, y = -\frac{b}{d}$  et  $z = -\frac{c}{d}$ , (35) devient

$$\hat{T}_p(\omega_3^{[1]}) = \ominus \frac{a}{d} * \omega_0 \ominus \frac{b}{d} * \omega_1 \ominus \frac{c}{d} * \omega_2.$$

D'où d'après (34),

$$\hat{T}_p(\omega_3^{[1]}) = \omega_3.$$

En conclusion, pour  $d \neq 0$ ,  $BR[\omega]$  est la transformée projective par  $T_p$  de la cubique  $BR[\omega_{-\frac{a}{d}, -\frac{b}{d}, -\frac{c}{d}}^{[1]}]$ .

2)  $d = 0$  et  $c \neq 0$  :

En procédant comme dans 1, notons  $\vec{T}_p$  l'unique transformation linéaire tel que

$$\vec{T}_p(A^{[2]}) = A, \quad \vec{T}_p(C^{[2]}) = C, \quad \vec{T}_p(D^{[2]}) = D.$$

Soit  $\hat{T}_p = \hat{\Omega}_2^{-1} \circ \vec{T}_p \circ \hat{\Omega}_2$  la transformation transmuée de  $\vec{T}_p$  par l'isomorphisme  $\hat{\Omega}_2$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} \hat{T}_p(\omega_0^{[2]}) &= \hat{T}_p \circ \hat{\Omega}_2^{-1}(D^{[2]}) \\ &= \hat{\Omega}_2^{-1} \circ \vec{T}_p(D^{[2]}) \\ &= \hat{\Omega}_2^{-1}(D) \\ &= \omega_0. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \hat{T}_p(\omega_1^{[2]}) &= \omega_1 \\ \hat{T}_p(\omega_2^{[2]}) &= \hat{T}_p(x * \omega_0^{[2]} + y * \omega_1^{[2]}) \\ &= x * \omega_0 + y * \omega_1. \end{aligned}$$

En prenant  $x = \frac{-a}{c}$  et  $y = \frac{-b}{c}$ , il vient

$$\hat{T}_p(\omega_2^{[2]}) = \omega_2.$$

Cette égalité implique

$$\begin{aligned} \hat{T}_p \circ \hat{\Omega}_2^{-1} \left( \frac{B^{[2]} + 2C^{[2]} + 3D^{[2]}}{3} \right) &= \hat{\Omega}_2^{-1} \circ \vec{T}_p \left( \frac{B^{[2]} + 2C^{[2]} + 3D^{[2]}}{3} \right) \\ &= \hat{\Omega}_2^{-1} \left( \frac{\vec{T}_p(B^{[2]}) + 2C + 3D}{3} \right) \\ &= \hat{\Omega}_2^{-1} \left( \frac{B + 2C + 3D}{3} \right). \end{aligned}$$

D'où par identification,  $\vec{T}_p(B^{[2]}) = B$ .

Il vient après calcul que  $\hat{T}_p(\omega_3^{[2]}) = \omega_3$ .

En conclusion, pour  $d = 0$  et  $c \neq 0$ ,  $BR[\omega]$  est la transformée projective par  $T_p$  de la cubique  $BR[\omega_{-\frac{a}{c}, -\frac{b}{c}}^{[2]}]$ .

3)  $d = 0 = c$  et  $b \neq 0$  :

Soit  $\vec{T}_p$  l'unique transformation linéaire tel que

$$\vec{T}_p(A^{[3]}) = A, \quad \vec{T}_p(B^{[3]}) = B, \quad \vec{T}_p(D^{[3]}) = D.$$

Soit  $\hat{T}_p = \hat{\Omega}_2^{-1} \circ \overrightarrow{T}_p \circ \hat{\Omega}_2$ .  
Après calcul, il vient

$$\begin{aligned}\hat{T}_p(\omega_0^{[3]}) &= \omega_0, \\ \hat{T}_p(\omega_1^{[3]}) &= x * \omega_0.\end{aligned}$$

En prenant  $x = -\frac{a}{b}$ , nous avons

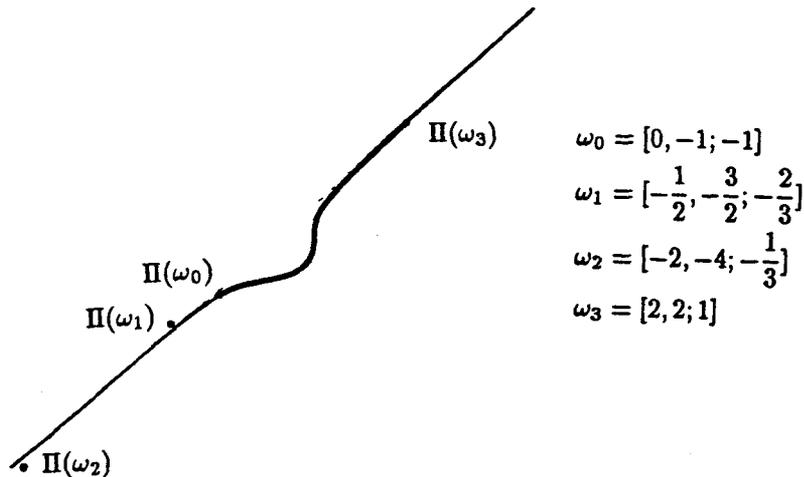
$$\begin{aligned}\hat{T}_p(\omega_1^{[3]}) &= -\frac{a}{b} * \omega_0 = \omega_1, \\ \overrightarrow{T}_p(C^{[3]}) &= C,\end{aligned}$$

et donc

$$\hat{T}_p(\omega_2^{[3]}) = \omega_2, \quad \hat{T}_p(\omega_3^{[3]}) = \omega_3.$$

En conclusion, pour  $d = 0 = c$  et  $b \neq 0$ ,  $BR[\omega]$  est la transformée projective par  $T_p$  de la cubique  $BR[\omega_{-\frac{a}{b}}]$ .

## 2. Caractérisation des cubiques (BR) planes.



### 4.7.a. Exemple de cubique anodale.

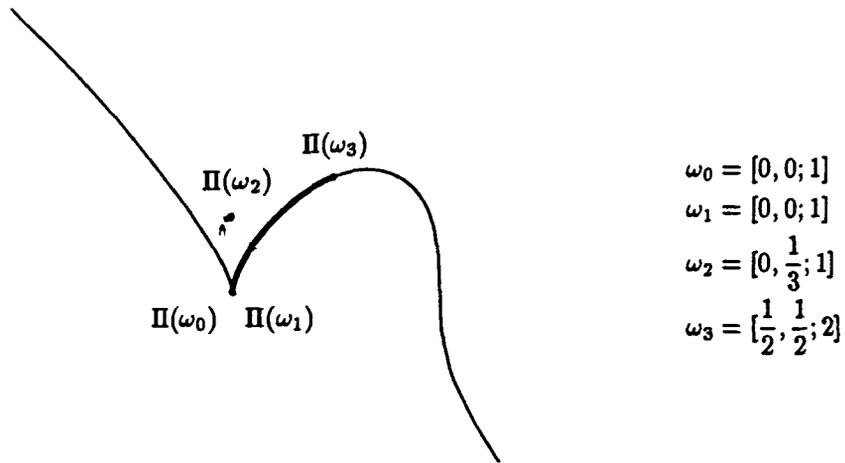
Rappelons le résultat suivant :

**Proposition . [PA87].**

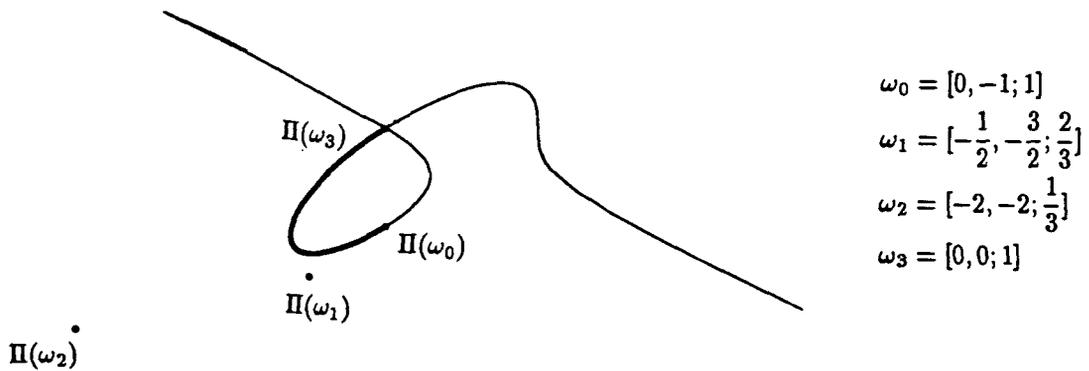
Soit  $P = (ABCD)$  une matrice de l'application projective  $T$ . Soit  $(c)$  une cubique plane non-dégénérée, image par  $T$  de la cubique canonique. Alors la courbe  $(c)$  est anodale (resp. cuspidale, nodale) si  $Disc < 0$  (resp.  $Disc = 0$ ,  $Disc > 0$ ) où  $Disc = B^2 - 4A \cdot C$  avec

$$\begin{aligned}A &= |ABD|^2 - |ACD| \cdot |ABC|, \\ B &= |BCD| \cdot |ABC| - |ACD| \cdot |ABD|, \\ C &= |ACD|^2 - |BCD| \cdot |ABD|.\end{aligned}$$

La notation  $||$  étant celle du déterminant.



4.7.b. Exemple de cubique cuspidale.



4.7.c. Exemple de cubique nodale.

**Lemme 4.21.**

Soient  $x, y$  et  $z \in \mathbb{R}$ . La cubique de référence  $BR[\omega^{[i]}]$  est anodale (resp. cuspidale, nodale) si  $Disc_i < 0$  (resp.  $Disc_i = 0$ ,  $Disc_i > 0$ ) où

$$Disc_i = \begin{cases} 27x^2 - 4y^3 + 18xyz - y^2z^2 + 4xz^3 & \text{si } i = 1, \\ -4x - y^2 & \text{si } i = 2, \\ 0 & \text{si } i = 3. \end{cases}$$

**Preuve:**

Il suffit d'appliquer la proposition précédente en prenant successivement comme matrice de l'application projective  $P^{[1]}$ ,  $P^{[2]}$  puis  $P^{[3]}$ .

**Proposition 4.22. Caractérisation des cubiques planes non-dégénérées.** Soient  $a, b, c$  et  $d$  des scalaires réels. Soit la cubique plane non-

dégénérée  $BR[\omega]$  tel que les vecteurs massiques du polygone  $\omega$  vérifient

$$a * \omega_0 + b * \omega_1 + c * \omega_2 + d * \omega_3 = \vec{0}.$$

Alors  $BR[\omega]$  est une cubique anodale (resp. cuspidale, nodale) si  $Disc < 0$  (resp.  $Disc = 0$ ,  $Disc > 0$ ) où

$$Disc = 4b^3d + 27a^2d^2 - 18abcd - b^2c^2 + 4ac^3.$$

### Preuve:

Rappelons tout d'abord que les cubiques anodales (resp. cuspidales, nodales) du plan sont projectivement identiques.

La cubique  $BR[\omega]$  est anodale (resp. cuspidale, nodale) si elle est la transformée projective du plan d'une cubique de référence anodale (resp. cuspidale, nodale).

1) si  $d \neq 0$  :

$BR[\omega]$  est la transformée de  $BR[\omega_{-\frac{1}{d}, -\frac{1}{d}, -\frac{1}{d}}^{[1]}]$ . Nous avons

$$Disc_1 = \frac{1}{d^4}(4b^3d + 27a^2d^2 - 18abcd - b^2c^2 + 4ac^3). \quad (36)$$

(36) est égal à  $Disc$  au facteur  $\frac{1}{d^4}$  près.

2) si  $d = 0$  et  $c \neq 0$  :

$BR[\omega]$  est la transformée de  $BR[\omega_{-\frac{1}{c}, -\frac{1}{c}}^{[2]}]$ . Après calcul, on trouve

$$Disc_2 = \frac{1}{c^2}(4ac - b^2). \quad (37)$$

Lorsque  $d = 0$  et  $c \neq 0$ ,  $Disc$  est égal à  $Disc_2$  au facteur  $\frac{1}{c^2}$  près.

3) si  $d = 0 = c$  et  $b \neq 0$  :

$BR[\omega]$  est la transformée de  $BR[\omega_{-\frac{1}{b}}^{[3]}]$ . Or avec ce choix,  $Disc$  est nul. ■

### Exemple 4.1.

Rappelons que la forme (BR) du folium de Descartes est définie par les quatre vecteurs massiques

$$\omega_0 = (0, 0; 1),$$

$$\omega_1 = (1, 0; 1),$$

$$\omega_2 = (2, 1; 1),$$

$$\omega_3 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2\right).$$

Ces vecteurs massiques sont liés par la relation

$$-2 * \omega_0 \oplus 3 * \omega_1 \ominus 3 * \omega_2 \oplus \omega_3 = \vec{0}.$$

Le calcul donne  $Disc = 27 > 0$ , ce qui correspond à une cubique nodale.

De plus, suivant la proposition 4.20, le folium est la courbe transformée projective plane de la cubique de référence  $BR[\omega_{2, -3, 3}^{[1]}]$ .

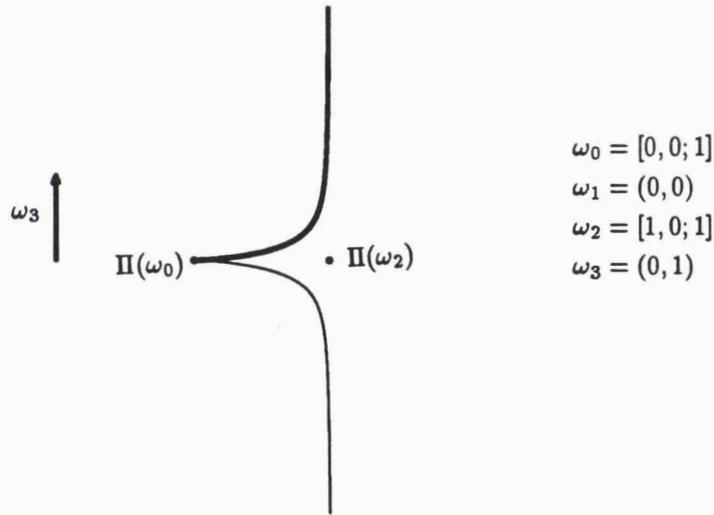


fig. 4.8. podaire d'une parabole pour  $m = 0$ .

#### Exemple 4.2.

Reprenons l'exemple de la cubique d'Agnesi, cf. paragraphe III.4. Les vecteurs massiques

$$\begin{aligned}\omega_0 &= (0, 2; 1), \\ \omega_1 &= (0.6665, 2; 1), \\ \omega_2 &= (1, 1.5; 1.3334), \\ \omega_3 &= (2, 1; 2),\end{aligned}$$

qui déterminent la représentation (BR) de la cubique d'Agnesi vérifient la relation linéaire suivante

$$2 * \omega_0 \ominus 3 * \omega_2 \oplus \omega_3 = \vec{0}.$$

Le calcul donne  $Disc = -108 < 0$ . Ce qui correspond bien à la cubique anodale de la figure 3.3.

#### Exemple 4.3.

La podaire d'une parabole est une courbe rationnelle. Considérons la podaire d'une parabole dont la forme (BR) est définie par les vecteurs massiques suivants :

$$\begin{aligned}\omega_0 &= (-m, 0; 1), \\ \omega_1 &= (0, -m), \\ \omega_2 &= (1, 0; 1), \\ \omega_3 &= (0, 1).\end{aligned}$$

Lorsque  $m = 0$ ,  $\omega_1$  est un vecteur nul. Pour tout  $b \neq 0$ , il vient

$$0 * \omega_0 \oplus b * \omega_1 = \vec{0}.$$

D'où  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est la transformée projective plane de la cubique (BR) de référence  $BR[\omega_0^{[3]}]$ . Nous en déduisons que  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est une cubique cuspidale.

Quand  $m \neq 0$  : La combinaison linéaire reliant les vecteurs massiques est

$$\omega_1 \oplus m\omega_3 = \vec{0}.$$

Suivant le signe de  $m$ ,  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est une cubique anodale ( $m < 0$ ) ou une cubique nodale ( $m > 0$ ).

De plus,  $BR[\omega; \overline{\mathbb{R}}]$  est la transformée projective plane de la cubique de référence  $BR[\omega_0, -\frac{1}{m}, 0]$ .

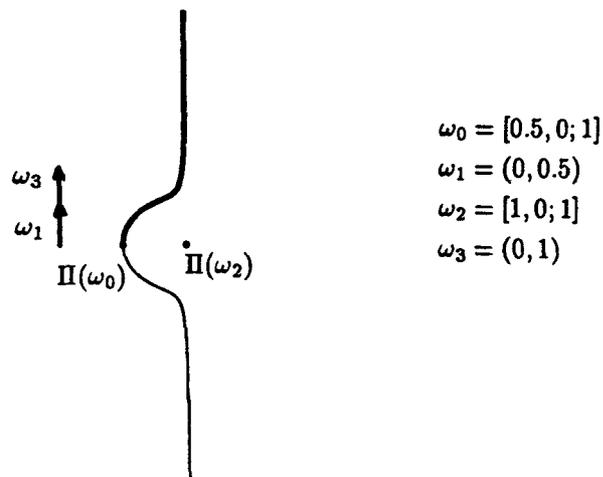


fig. 4.9. podaire d'une parabole pour  $m = -0.5$ .

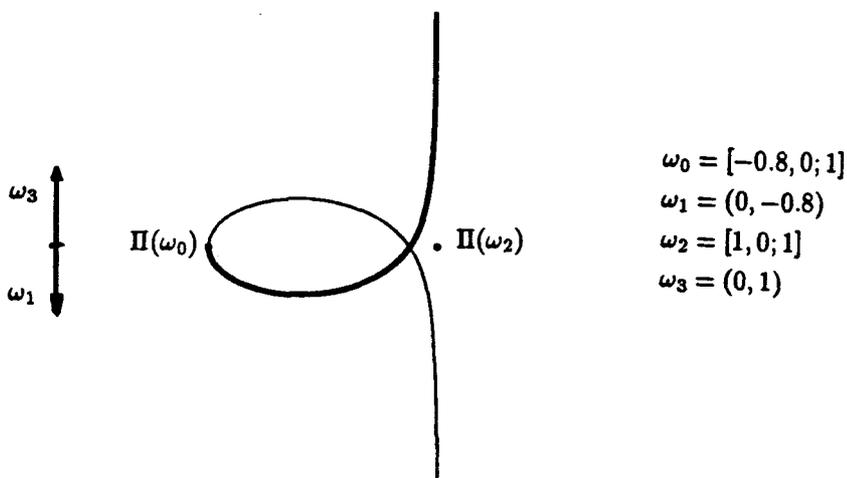


fig. 4.10. podaire d'une parabole pour  $m = 0.8$ .

### 3. Caractérisation des cubiques (BP) planes.

De la même manière que dans le cas des courbes (BR), nous introduisons trois cubiques (BP) particulières :

#### Définition 4.23.

Soient  $x$  et  $y$  des réels. Nous appelons cubiques (BP) planes de référence, les trois cubiques (BP) suivantes :

- 1) première cubique (BP) de référence :  $BP[M_{x,y}^{[1]}]$  où le polygone  $M_{x,y}^{[1]}$  est constitué de trois points de contrôle non colinéaires

$$\begin{aligned} M_0^{[1]} &= \mathcal{O} &&= (0, 0), \\ M_1^{[1]} &= \mathcal{O} + \vec{j} &&= (0, 1), \\ M_2^{[1]} &= \mathcal{O} + \vec{i} + \vec{j} &&= (1, 1), \end{aligned}$$

et du point

$$M_3^{[1]} = \mathcal{O} + x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y).$$

- 2) seconde cubique (BP) de référence :  $BP[M_y^{[2]}]$  où le polygone  $M_y^{[2]}$  est constitué de trois points de contrôle non colinéaires

$$\begin{aligned} M_0^{[2]} &= \mathcal{O} &&= (0, 0), \\ M_1^{[2]} &= \mathcal{O} + \vec{j} &&= (0, 1), \\ M_3^{[2]} &= \mathcal{O} + \vec{i} + \vec{j} &&= (1, 1), \end{aligned}$$

et du point

$$M_2^{[2]} = \mathcal{O} + y\vec{j} = (0, y).$$

- 3) troisième cubique (BP) de référence :  $BP[M^{[3]}]$  où le polygone  $M^{[3]}$  est constitué de trois points de contrôle non colinéaires

$$\begin{aligned} M_0^{[3]} &= \mathcal{O} &&= (0, 0), \\ M_2^{[3]} &= \mathcal{O} + \vec{j} &&= (0, 1), \\ M_3^{[3]} &= \mathcal{O} + \vec{i} + \vec{j} &&= (1, 1), \end{aligned}$$

et du point

$$M_1^{[3]} = M_0^{[3]} = (0, 0).$$

#### Proposition 4.25.

Toute cubique plane non-dégénérée  $BP[M; \overline{\mathbb{R}}]$  est la transformée affine plane d'une cubique (BP) de référence.

#### Preuve:

- 1) Supposons que les points  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$  ne soient pas alignés. L'ensemble  $(M_0, M_1, M_2)$  forme un repère barycentrique du plan. Il existe une unique transformation affine  $\mathcal{A}$  du plan qui transforme le repère  $(M_0^{[1]}, M_1^{[1]}, M_2^{[1]})$  en  $(M_0, M_1, M_2)$ . Soient  $X$  et  $Y$  les coordonnées de  $M_3$

dans le repère  $(M_0, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_0M_1})$ , alors  $BP[M; \overline{\mathbb{R}}]$  est la transformée affine de la courbe de référence  $BP[M_{X,Y}^{[1]}; \overline{\mathbb{R}}]$ .

- 2) Supposons que les points  $M_0, M_1$  et  $M_2$  soient alignés tel que  $M_0$  et  $M_1$  soient distincts. L'ensemble  $(M_0, M_1, M_3)$  forme un repère barycentrique du plan. Il existe une unique transformation affine  $\mathcal{A}$  du plan qui transforme le repère  $(M_0^{[2]}, M_1^{[2]}, M_3^{[2]})$  en  $(M_0, M_1, M_3)$ . Soit  $Y$  la coordonnée de  $M_2$  dans le repère de la droite  $(M_0, \overrightarrow{M_0M_1})$ , alors  $BP[M; \overline{\mathbb{R}}]$  est la transformée affine de la courbe de référence  $BP[M^{[2]}; \overline{\mathbb{R}}]$ .
- 3) Supposons que les points  $M_0$  et  $M_1$  soient confondus. L'ensemble  $(M_0, M_2, M_3)$  forme un repère barycentrique du plan. Il existe une unique transformation affine  $\mathcal{A}$  du plan qui transforme le repère  $(M_1^{[3]}, M_2^{[3]}, M_3^{[3]})$  en  $(M_1, M_2, M_3)$ .  $BP[M; \overline{\mathbb{R}}]$  est l'image par une application affine de  $BP[M^{[3]}; \overline{\mathbb{R}}]$ .

**Lemme 4.26.**

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . La cubique de référence  $BP[M_{x,y}^{[i]}]$  est anodale (resp. cuspidale, nodale) si  $Disc_i < 0$  (resp.  $Disc_i = 0, Disc_i > 0$ ) où

$$Disc_i = \begin{cases} -(y - \frac{3+2x-x^2}{4})(y+x-3)^2 & \text{si } i = 1, \\ -(y-2)^2 & \text{si } i = 2, \\ 0 & \text{si } i = 3. \end{cases}$$

**Preuve:**

Notons  $\omega_i^{[j]} = (M_i^{[j]}; 1)$  pour  $i = 0, 1, 2, 3$  et  $j = 1, 2, 3$ . les vecteurs massiques  $\omega_i^{[j]}$  vérifient la relation linéaire

$$\begin{cases} (y-1) * \omega_0^{[1]} \oplus (x-y) * \omega_1^{[1]} \ominus x * \omega_2^{[1]} \oplus \omega_3^{[1]} = \overrightarrow{0} & \text{pour } j = 1, \\ (1-y) * \omega_0^{[2]} \oplus y * \omega_1^{[2]} \ominus \omega_2^{[2]} = \overrightarrow{0} & \text{pour } j = 2, \\ \omega_0^{[3]} \ominus \omega_1^{[3]} = \overrightarrow{0} & \text{pour } j = 3. \end{cases}$$

Il suffit d'appliquer la proposition 4.22. ■

**Proposition 4.27.**

Soit la cubique plane  $BP[M]$  tel que  $\Delta^3 M_0 \neq 0$ . Alors  $BP[M]$  est anodale (resp. cuspidale, nodale) si  $Disc_i < 0$  (resp.  $Disc_i = 0, Disc_i > 0$ ) où

- 1) Lorsque  $M_0, M_1$  et  $M_2$  sont non-colinéaires :

$Disc = -(Y - \frac{3+2X-X^2}{4})(Y+X-3)^2$  avec  $X, Y$  les coordonnées de  $M_3$  dans le repère du plan  $(M_0, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_0M_1})$ .

- 2) Lorsque  $M_0, M_1$  et  $M_2$  sont colinéaires :

$Disc = -(Y-2)^2$  avec  $Y$  la coordonnée de  $M_2$  dans le repère de la droite  $(M_0, \overrightarrow{M_0M_1})$ .

- 3) Lorsque  $M_0$  et  $M_1$  sont confondus :

$Disc = 0$ .

**Preuve:**

Par une transformation affine appropriée, nous revenons à la cubique (BP) de référence correspondante. Le Lemme 4.26 permet de conclure.

**Exemple 4.4.**

Soit une cubique donnée sous forme  $BP[P_0, P_1, P_2, P_3; \overline{\mathbb{R}}]$  avec

$$P_0 = (0, 0),$$

$$P_1 = (0, 0),$$

$$P_2 = (1, 0),$$

$$P_3 = (3, 2).$$

Les points de contrôle  $P_0$  et  $P_1$  étant confondus, on sait d'après la proposition 4.27 que  $BP[P; \overline{\mathbb{R}}]$  est une courbe cuspidale.

D'après la proposition 4.25,  $BP[P; \overline{\mathbb{R}}]$  est la transformée affine de la troisième cubique (BP) de référence  $BP[M^{[3]}; \overline{\mathbb{R}}]$ .

En géométrie classique,  $BP[P; \overline{\mathbb{R}}]$  est une *parabole semi-cubique*.

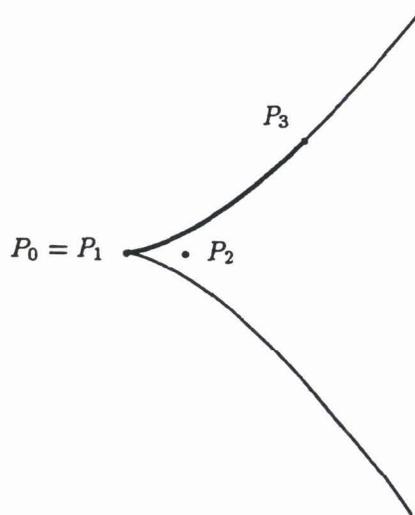


fig 4.11. Parabole semi-cubique.

**Exemple 4.5.**

Rappelons que les quatre points de contrôle qui déterminent la cubique de Tschirnausen sont

$$P_0 = [-9, 0; 1], \quad P_1 = [-9, -1; 1], \quad P_2 = [-8, -2; 1], \quad P_3 = [-6, -2; 1].$$

Dans le repère  $(P_0, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_0P_1})$ , le point  $P_3$  s'écrit  $P_0 + X \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + Y \cdot \overrightarrow{P_0P_1}$  avec  $X = 3$  et  $Y = -1$ .

D'après la proposition 4.27, nous avons  $Disc = 1 > 0$ . Ce qui correspond bien à la figure 2.4.

## Chap. V : Aspect Pratique.

### §1. Introduction.

Le paragraphe 1 rappelle l'algorithme de De Casteljaou et les deux algorithmes , ALBR1 et ALBR2 , qu'il induit dans le cadre des courbes (BR).

Le deuxième paragraphe explicite les algorithmes développés dans le chapitre II et III. chaque procédure est illustrée par plusieurs exemples.

Le dernier paragraphe a trait aux transformations projectives et à leur cas particuliers, les transformations affines. Les exemples porteront sur des cubiques planes.

### §2. Algorithmes de calcul d'une courbe (BR).

Nous rappelons comment l'algorithme de De Casteljaou induit deux algorithmes de calcul d'une courbe (BR).

1) De\_Casteljaou  $[M_0, M_1, \dots, M_n; t]$ .

**Description :**

Calcule le point courant de la courbe polynomiale  $BP[M]$ .

**Arguments :**

polygone de contrôle  $(M_0, M_1, \dots, M_n)$ ,  
paramètre  $t$ .

**Valeur retournée :**

$BP[M_0, M_1, \dots, M_n](t)$ .

**Algorithme :**

Pour  $i := 0$  jusqu'à  $n$

$M_i^0 := M_i$ ;

Pour  $i := 1$  jusqu'à  $n$

Pour  $j := 0$  jusqu'à  $n - i$

$M_j^i := (1 - t) \cdot M_j^{i-1} + t \cdot M_{j+1}^{i-1}$ ;

Résultat  $BP[M](t) = M_0^n$

**Références :** [DC59,DC63,BF84].

2) Dans le premier algorithme induit, les calculs se font pour l'essentiel dans l'espace  $\mathcal{F}$ .

ALBR1  $[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n; t]$ .

**Description :**

Calcule le point courant de la courbe rationnelle  $BR[\theta]$ .

**Arguments :**

polygone massique  $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  
paramètre  $t$ .

**Valeur retournée :**

$BR[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n](t)$ .

**Procédures utilisées :**

DeCasteljau.

**Algorithme :**

Pour  $i := 0$  jusqu'à  $n$   
 calculer  $R_i$  tel que  $\overrightarrow{\Omega R_i} := \hat{\Omega}(\theta_i)$ ;  
 Faire De\_Casteljau  $(R_0, R_1, \dots, R_n; t)$ ;  
 Résultat  $BR[\theta](t) = \Pi\Omega(R_0^n)$ .

**Références :** [FJ89,p.77].

3) Dans le second algorithme, les caculs se font dans  $\hat{\mathcal{E}}$ . La  $\Pi$ -projection termine l'algorithme.

**ALBR2**  $[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n; t]$ .**Description :**Calcule le point courant  $BR[\theta](t)$ .**Arguments :**

polygone massique  $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  
 paramètre  $t$ .

**Valeur retournée :** $BR[\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n](t)$ .**Algorithme :**

Pour  $i := 0$  jusqu'à  $n$   
 $\theta_i^{(0)} := \theta_i$ ;  
 Pour  $i := 1$  jusqu'à  $n$   
 Pour  $j := 0$  jusqu'à  $n - i$   
 $\theta_j^{(i)} := (1 - t) * \theta_j^{(i-1)} \oplus t * \theta_{j+1}^{(i-1)}$ ;  
 Résultat  $BR[\theta](t) = \Pi(\theta_0^n)$ .

**Références :** [FJ89,p.83].**§3. Procédures de changement de paramètre.**

Ce paragraphe est divisé en trois parties, chacune relative à l'un des changements de paramètre vus dans les chapitres II et III.

**1. Changement  $a$ .****Fonction :**  $A[\alpha, \beta; n]$ .**Description :**

donne la matrice  $A$  [Chap.II,§2, p.12] liée au changement de paramètre affine.

**Arguments :**

deux valeurs réelles  $\alpha$  et  $\beta$  non simultanément nulles,  
 un entier  $n$ .

**Valeur retournée :**Une matrice de dimensions  $n \times n$ .

**Algorithme :**

Pour  $\ell := 0$  jusqu'à  $n$

  Pour  $k := 0$  jusqu'à  $n$

    Pour  $j := \max(0, k - n + \ell)$  jusqu'à  $\min(k, \ell)$

      Faire  $A_{\ell,k} := A_{\ell,k} + \binom{n-\ell}{k-j} \binom{\ell}{j} (1-\alpha)^{n-\ell-k+j} \alpha^{k-j} (1-\beta)^{\ell-j} \beta^j$ ;

Résultat : Matrice  $A$ .

**Exemples :** Explicitons quelques matrices :

Pour  $n = 2$  :

$$A = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^2 & 2(1-\alpha)\alpha & \alpha^2 \\ (1-\alpha)(1-\beta) & \alpha(1-\beta) + (1-\alpha)\beta & \alpha\beta \\ (1-\beta)^2 & 2(1-\beta)\beta & \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Pour  $n = 3$  :

$$A = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^3 & 3(1-\alpha)^2\alpha & 3(1-\alpha)\alpha^2 & \alpha^3 \\ (1-\alpha)^2(1-\beta) & 2(1-\alpha)\alpha(1-\beta) + (1-\alpha)^2\beta & \alpha^2(1-\beta) + 2(1-\alpha)\alpha\beta & \alpha^2\beta \\ (1-\alpha)(1-\beta)^2 & \alpha(1-\beta)^2 + 2(1-\alpha)(1-\beta)\beta & 2\alpha(1-\beta)\beta + (1-\alpha)\beta^2 & \alpha\beta^2 \\ (1-\beta)^3 & 3(1-\beta)^2\beta & 3(1-\beta)\beta^2 & \beta^3 \end{pmatrix}.$$

**Fonction : Changement\_Affine**  $[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \alpha, \beta]$ .**Description :**

donne le polygone massique de la courbe  $BR[\omega]$  o  $a$  où  $a$  est la fonction affine  $a(u) = \alpha(1-u) + \beta u$  avec  $u \in \mathbb{R}$ . Le calcul se fait en deux étapes [Chap. II, §1, p.13].

**Arguments :**

polygone massique  $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ ,  
deux coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ .

**Valeur retournée :**

nouveau polygone massique  $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$

**Algorithme :**

Faire DeCasteljau  $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \beta)$ ;

Pour  $i := 0$  jusqu'à  $n$

$\tau_i := \omega_0^i$ ;

Faire DeCasteljau  $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n; \frac{\alpha}{\beta})$ ;

Pour  $i := 0$  jusqu'à  $n$

$\theta_i := \tau_i^{n-i}$ ;

Résultat  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ .

**Procédure utilisée :** De\_Casteljau.

**Exemples :**

1) La fonction **Changement\_Affine** appliquée au polygone massique de longueur 4

$$\begin{aligned}\omega_0 &= (1, 0; 1), \\ \omega_1 &= (1, \frac{1}{2}; 1), \\ \omega_2 &= (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}; \frac{4}{3}), \\ \omega_3 &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2), \\ \omega_4 &= (0, 0; 4).\end{aligned}$$

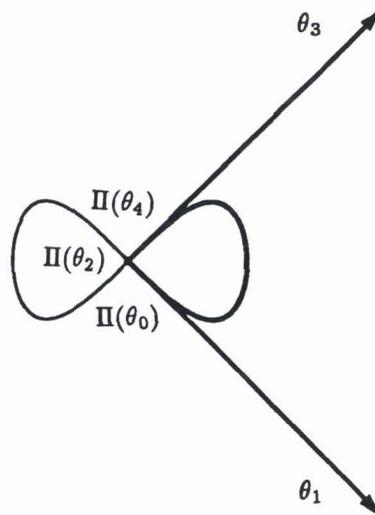
avec  $\alpha = -1$  et  $\beta = 1$  donne un polygone massique  $\theta$  constitué des points pondérés suivants

$$\begin{aligned}\theta_0 &= (0, 0; 4.), \\ \theta_1 &= (2., -2.), \\ \theta_2 &= (0, 0; 1.3333), \\ \theta_3 &= (2., 2.), \\ \theta_4 &= (0, 0; 4.)\end{aligned}\tag{1}$$

tel que

$$\left| BR[\omega; [-1, 1]] \right| = \left| BR[\theta; [0, 1]] \right|$$

La courbe associée à  $\theta$  est illustrée par la figure 5.1.



**fig.5.1.** Courbe en forme de huit.

2) La *piriforme* est une quartique. Sa forme (BR) est définie par le poly-

gone massique :

$$\omega_0 = (1, 1; 1),$$

$$\omega_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 1\right),$$

$$\omega_2 = \left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right),$$

$$\omega_3 = (2, 1; 2),$$

$$\omega_4 = (2, 0; 4).$$

**Changement\_Affine**  $[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_4; -1, 1]$  fournit le polygone suivant :

$$\theta_0 = (0, 0; 4),$$

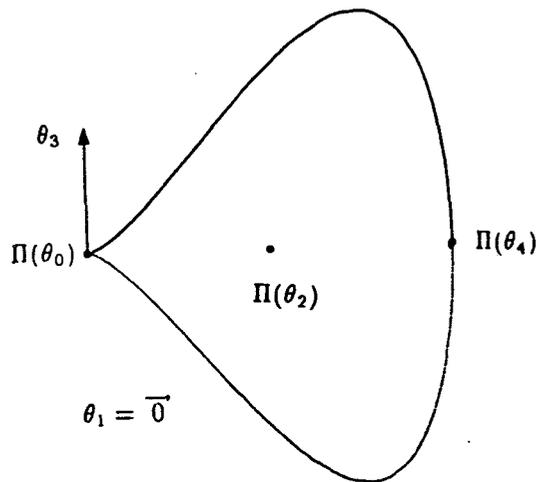
$$\theta_1 = (0, 0),$$

$$\theta_2 = (1, 0; 1.333),$$

$$\theta_3 = (0, 4),$$

$$\theta_4 = (2, 0; 4).$$

Lorsque le paramètre décrit  $[0, 1]$ , le point  $BR[\theta](t)$  décrit la courbe illustrée en gras dans la figure 5.2.



**fig.5.2.** Piriforme.

3) Considérons le polygone massique de longueur 6 :

$$\omega_0 = (3, 0; 1),$$

$$\omega_1 = (3, 1; 1),$$

$$\omega_2 = \left(\frac{16}{5}, 2\right),$$

$$\omega_3 = \left(-\frac{9}{5}, -\frac{9}{5}; -2\right),$$

$$\omega_4 = \left(-1, -\frac{8}{5}; -4\right),$$

$$\omega_5 = (-1, -3; -4),$$

$$\omega_6 = (0, 24).$$

La procédure **Changement\_Affine** appliquée à  $\omega$  avec  $\alpha = -1$  et  $\beta = 1$  engendre le polygone massique  $\theta$  :

$$\begin{aligned}\theta_0 &= (0, -24), & \theta_1 &= (-1., 0; -8), \\ \theta_2 &= (0, -1.6), & \theta_3 &= (0.6, 0; 8.), \\ \theta_4 &= (0, 1.6), & \theta_5 &= (-1., 0; -8.), \\ \theta_6 &= (0, 24).\end{aligned}$$

Remarquons que le polygone massique ci-dessus est  $\delta$ -réciproque avec  $\delta = -1$ ; la courbe illustrée dans la figure 5.3 est en fait une hyperbole cubique.

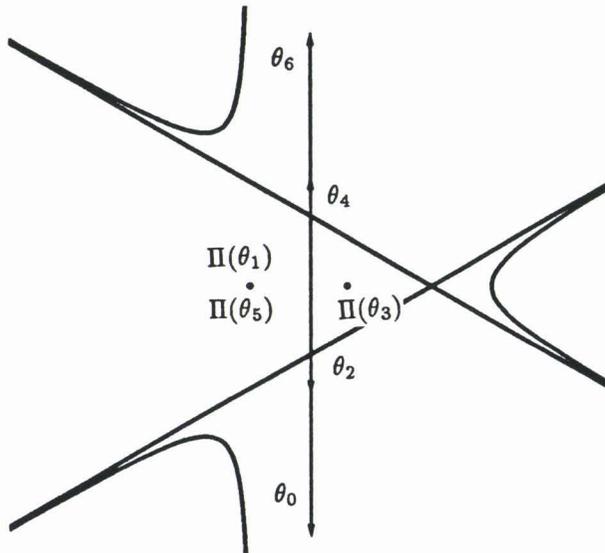


fig.5.3. Hyperbole cubique.

## 2. Changement $h$ .

**Fonction :**  $H [\alpha, \beta, \gamma, \delta; n]$ .

**Description :**

donne la matrice  $H$  [Chap.II,§3, p.19] liée au changement de paramètre homographique  $h$  tel que  $h(u) = \frac{\alpha(1-u)+\beta u}{\gamma(1-u)+\delta u}$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ .

**Arguments :**

quatre valeurs réelles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  tel que  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ,  
longueur  $n$ .

**Valeur retournée :**

Matrice  $n \times n$ .

**Algorithme :**

Pour  $\ell := 0$  jusqu'à  $n$

  Pour  $k := 0$  jusqu'à  $n$

    Pour  $j := \max(0, k - n + \ell)$  jusqu'à  $\min(k, \ell)$

      Faire  $H_{\ell,k} := H_{\ell,k} + \binom{\ell}{j} \binom{n-\ell}{k-j} \alpha^{k-j} \beta^j \gamma^{n-\ell-k+j} \delta^{\ell-j}$  ;

Résultat : Matrice  $H$ .

**Exemples :**Pour  $n = 2$  :

$$H = \begin{pmatrix} \gamma^2 & 2\alpha\gamma & \alpha^2 \\ \delta\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & \alpha\beta \\ \delta^2 & 2\beta\delta & \beta^2 \end{pmatrix}.$$

Pour  $n = 3$  :

$$H = \begin{pmatrix} \gamma^3 & 3\alpha\gamma^2 & 3\alpha^2\gamma & \alpha^3 \\ \delta\gamma^2 & 2\alpha\delta\gamma + \beta\gamma^2 & \alpha^2\delta + 2\alpha\beta\gamma & \alpha^2\beta \\ \delta^2\gamma & \alpha\delta^2 + 2\beta\delta\gamma & 2\alpha\beta\delta + \beta^2\gamma & \alpha\beta^2 \\ \delta^3 & 3\beta\delta^2 & 3\beta^2\delta & \beta^3 \end{pmatrix}.$$

Pour  $n = 4$  :

$$H = \begin{pmatrix} \gamma^4 & 4\alpha\gamma^3 & 6\alpha^2\gamma^2 & 4\alpha^3\gamma & \alpha^4 \\ \delta\gamma^3 & 3\alpha\delta\gamma^2 + \beta\gamma^3 & 3\alpha^2\delta\gamma + 3\alpha\beta\gamma^2 & \alpha^3\delta + 3\alpha^2\beta\gamma & \alpha^3\beta \\ \delta^2\gamma^2 & 2\alpha\delta^2\gamma + 2\beta\delta\gamma^2 & \alpha^2\delta^2 + 4\alpha\beta\delta\gamma + \beta^2\gamma^2 & 2\alpha^2\beta\delta + 2\alpha\beta^2\gamma & \alpha^2\beta^2 \\ \delta^3\gamma & \alpha\delta^3 + 3\beta\delta^2\gamma & 3\alpha\beta\delta^2 + 3\beta^2\delta\gamma & 3\alpha\beta^2\delta + \beta^3\gamma & \alpha\beta^3 \\ \delta^4 & 4\beta\delta^3 & 6\beta^2\delta^2 & 4\beta^3\delta & \beta^4 \end{pmatrix}.$$

**Fonction : Changement\_Homographique**  $[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \alpha, \beta, \gamma, \delta]$ .**Description :**

donne le polygone massique  $\theta$  de la courbe  $BR[\theta] = BR[\omega] \circ h$  où  $h$  est le fonction homographique  $h(u) = \frac{\alpha(1-u) + \beta u}{\gamma(1-u) + \delta u}$ .

**Arguments :**polygone massique de contrôle  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ ,quatre valeurs réelles  $\alpha, \beta, \gamma$ , et  $\delta$  tel que  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ .**Valeur retournée :** nouveau polygone massique  $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$ **Algorithme :**Pour  $i := 0$  jusqu'à  $n$ Calculer  $\Delta^i(\omega_0)$ ;Pour  $i := 0$  jusqu'à  $n$  $\theta_i := 0$ Calculer  $H[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ ;Faire Produit\_Matriciel :  $\theta := H \cdot \Delta\omega$ ;Résultat Polygone massique  $\theta$ **Procédures utilisées :** Difference\_Finie, Produit\_Matriciel.**Exemples :**

1) La fonction **Changement\_Homographique** appliquée au polygone massique de longueur 8 suivant

$$\begin{aligned}\omega_0 &= (10, -2; 1), & \omega_1 &= (10, 0; 1), \\ \omega_2 &= \left(\frac{15}{2}, \frac{7}{2}; \frac{8}{7}\right), & \omega_3 &= \left(4, \frac{38}{5}; \frac{10}{7}\right), \\ \omega_4 &= \left(\frac{30}{17}, 10; \frac{68}{35}\right), & \omega_5 &= \left(2, \frac{48}{5}; \frac{20}{7}\right), \\ \omega_6 &= \left(\frac{7}{2}, \frac{15}{2}; \frac{32}{7}\right), & \omega_7 &= (4, 6; 8), \\ \omega_8 &= (2, 6; 16).\end{aligned}$$

avec  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1/\sqrt{2}$ ,  $\gamma = 1$ , et  $\delta = 1/\sqrt{2}$  donne  $\theta$  :

$$\begin{aligned}\theta_0 &= (10, -2; 1), & \theta_1 &= (10, 0; 0.7071), \\ \theta_2 &= (7.5, 3.5; 0.5714), & \theta_3 &= (4, 7.6005; 0.5051), \\ \theta_4 &= (1.76467, 10; 0.4857), & \theta_5 &= (2, 9.6; 0.5), \\ \theta_6 &= (3.5, 7.5; 0.5714), & \theta_7 &= (4, 6; 0.7071), \\ \theta_8 &= (2, 6; 1).\end{aligned}$$

Ce changement a servi à rendre égales à 1 les masses du premier et du dernier vecteur massique.

Sur la figure 5.4, nous avons tracé en gras la courbe  $BR[\theta]$  décrite pour  $t \in [0, 1]$ . le reste de la courbe étant le complémentaire  $BR[\theta; \overline{\mathbb{R}} \setminus [0, 1]]$ . Les masses étant strictement positives, la courbe appartient à l'enveloppe convexe des points  $\Pi(\theta_i)$ ,  $i = 0, 1 \dots, 8$ .

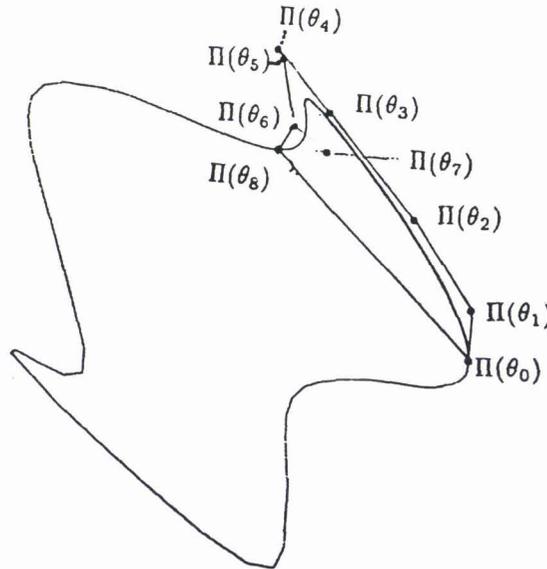


fig.5.4

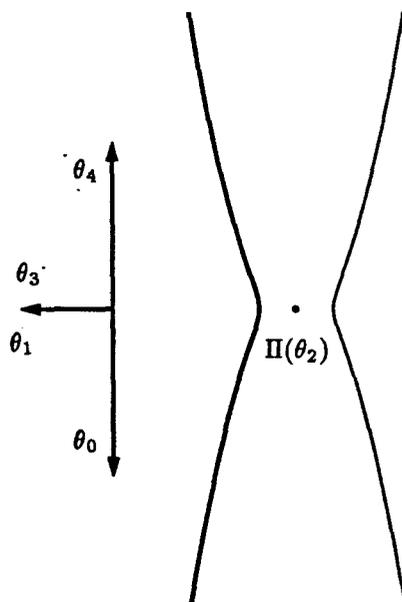
2) Considérons le polygone massique  $\omega$  définissant le *Kampyle d'Euodorus*

$$\begin{aligned}\omega_0 &= (1, 0; 1), \\ \omega_1 &= \left(1, \frac{1}{2}; 1\right), \\ \omega_2 &= \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right), \\ \omega_3 &= (1, 2), \\ \omega_4 &= (0, 4).\end{aligned}$$

**Changement Homographique**  $[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; 1, 1, -1, 1]$  fournit le polygone  $\theta$  suivant

$$\begin{aligned}\theta_0 &= (0, -4), \\ \theta_1 &= (-2, 0), \\ \theta_2 &= (0, 0; \frac{8}{3}), \\ \theta_3 &= (-2, 0), \\ \theta_4 &= (0, 4).\end{aligned}$$

La courbe  $BR[\omega; [-1, 1]]$  est tracée en trait clair dans la figure 5.5. Nous avons représenté sur la même figure sa courbe complémentaire  $BR[\theta; [0, 1]]$  en trait gras.



**fig.5.5.** Kampyle d'Eudoxus.

3) La procédure **Changement Homographique** appliquée au polygone massique

$$\begin{aligned}\omega_0 &= (1, 0), \\ \omega_1 &= (2, 1; \frac{1}{2}), \\ \omega_2 &= (\frac{2}{3}, 1; 1), \\ \omega_3 &= (0, \frac{1}{2}; 2), \\ \omega_4 &= (0, 0; 4),\end{aligned}$$

avec  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = -1$  et  $\delta = 1$  donne  $\theta$  :

$$\theta_0 = (0, 0; -4),$$

$$\theta_1 = (0, 2),$$

$$\theta_2 = \left(\frac{8}{3}, 0\right),$$

$$\theta_3 = (0, -2),$$

$$\theta_4 = (0, 0; 4).$$

La courbe  $BR[\theta; [0, 1]]$  est représentée dans la figure 5.6 en trait gras.  $BR[\theta]$  est connue sous le nom de courbe de Kappa.

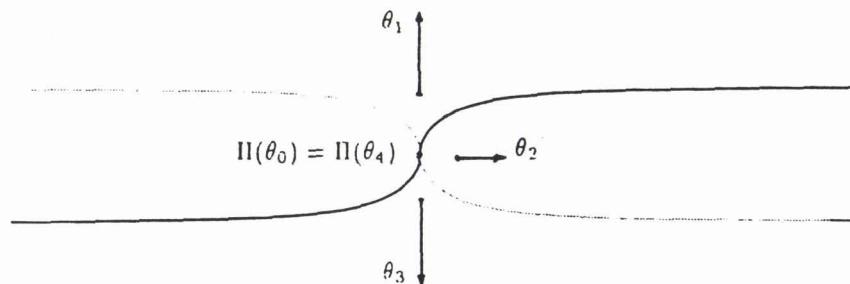


fig.5.6 Courbe de Kappa.

### 3. Changement $\Phi$ .

**Fonction :**  $\mu [\alpha, \beta, \gamma]$ .

**Description :**

donne la matrice liée au changement du paramètre quadratique rationnel

$$\Phi(u) = \frac{\alpha B_0^2(u) + \beta B_1^2(u) + \gamma B_2^2(u)}{B_1^2(u)}, \text{ [Chap. III, §3, p.41].}$$

**Arguments :**

longueur  $n$ ,

trois valeurs réelles  $\alpha, \beta$ , et  $\gamma$  tel que  $\alpha\gamma < 0$ .

**Valeur retournée :**

Matrice  $\mu$  de dimensions  $n \times n$ .

**Algorithme :**

Initialisation ;

$$\alpha_0^{[0]} := 1 ;$$

$$\alpha_0^{[1]} := \alpha, \alpha_1^{[1]} := \beta, \alpha_2^{[1]} := \gamma ;$$

Pour  $i := 0$  jusqu'à  $n$ Pour  $j := -2$  jusqu'à  $i + 2$ 

$$\alpha_j^{[i]} := 0 ;$$

calcul des coefficients  $\alpha_j^{[i]}$  ;Pour  $i := 0$  jusqu'à  $n$ Pour  $j := 0$  jusqu'à  $i$ 

$$\alpha_j^{[i]} := \frac{1}{2i^2} \left( (2i - j)(2i - j - 1)\alpha_j^{[i-1]} + \right. \\ \left. 2j(2i - j)\beta\alpha_{j-1}^{[i-1]} + \right. \\ \left. j(j - 1)\gamma\alpha_{j-2}^{[i-1]} \right) ;$$

calcul des coefficients  $\mu_{k,i}$  ;Pour  $k := 0$  jusqu'à  $n$ Pour  $i := \max(n - k, k - n)$  jusqu'à  $n$ 

$$\mu_{k,i} := \frac{\binom{k}{k+i-n} \binom{2n-k}{n-i}}{\binom{n}{i}} \alpha_{k+i-n}^{[i]} ;$$

Résultat : Matrice  $\mu$ **Exemples :** Nous explicitons quelques matrices :Pour  $n = 2$  :

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3\alpha^2}{2} \\ 0 & \frac{3\alpha}{2} & \frac{3\alpha\beta}{2} \\ 1. & 2\beta & \beta^2 + 0.5\alpha\gamma \end{pmatrix}$$

Pour  $n = 3$  :

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{5\alpha^3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5\alpha^2}{2} & \frac{5\alpha^2\beta}{2} \\ 0 & 2\alpha & 4\alpha\beta & 2\alpha\beta^2 + 0.5\alpha^2\gamma \\ 1. & 3\beta & 3\beta^2 + 1.5\alpha\gamma & \beta^3 + 1.5\alpha\beta\gamma \end{pmatrix}$$

Pour  $n = 4$  :

$$\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35\alpha^4}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{35\alpha^3}{8} & \frac{35\alpha^3\beta}{8} \\ 0 & 0 & \frac{15\alpha^2}{4} & \frac{15\alpha^2\beta}{2} & \frac{15\alpha^2\beta^2}{4} + 0.625\alpha^3\gamma \\ 0 & \frac{5\alpha}{2} & \frac{15\alpha\beta}{2} & \frac{15\alpha\beta^2}{2} + 1.875\alpha^2\gamma & \frac{5\alpha\beta^3}{2} + 1.875\alpha^2\beta\gamma \\ 1. & 4\beta & 6\beta^2 + 3.\alpha\gamma & 4\beta^3 + 6.\alpha\beta\gamma & \beta^4 + 3.\alpha\beta^2\gamma + 0.375\alpha^2\gamma^2 \end{pmatrix}$$

**Fonction :** Changement\_Quadratique  $[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \alpha, \beta, \gamma]$ .**Description :**

donne le polygone massique d'une courbe (BR) sur laquelle on effectue le changement quadratique.

**Arguments :**

polygone massique de contrôle  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ ,  
trois coefficients réels  $\alpha, \beta$ , et  $\gamma$  tel que  $\alpha\gamma < 0$ .

**Valeur retournée :**

nouveau polygone massique  $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{2n})$

**Algorithme :**

Pour  $i := 0$  jusqu'à  $n$   
    Calculer  $\Delta^i(\omega_0)$ ;  
Pour  $i := 0$  jusqu'à  $n$   
     $\theta_i := 0$   
    Pour  $j := i$  jusqu'à  $n$   
         $\theta_i := \theta_i \oplus \mu_{i,j} * \Delta^j \omega_0$  ;  
Pour  $i := n + 1$  jusqu'à  $2n$   
     $\theta_i := \delta^{i-n} * \theta_{2n-i}$ ;  
Résultat :  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{2n}$

**Procédures utilisées :** Difference\_Finie.

**Exemples:**

1) La parabole semi-cubique est représentée sous forme (BP) par :

$$BP[P](t) = B_0^3(u)P_0 + B_1^3(u)P_1 + B_2^3(u)P_2 + B_3^3(u)P_3$$

avec

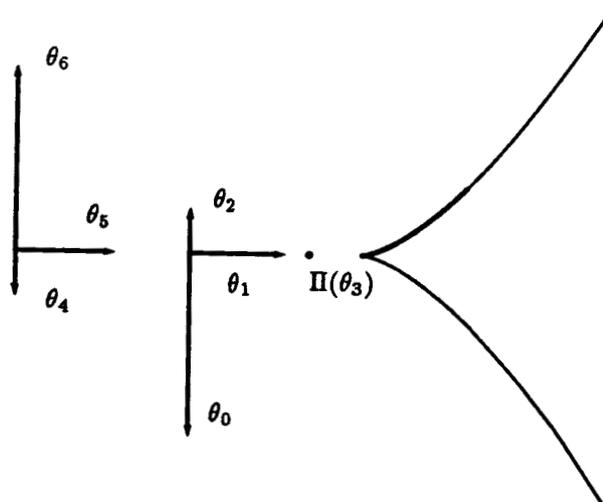
$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1, 0), \quad P_3 = (3, 2).$$

**Changement\_Quadratique**  $[(P_0; 1), (P_1; 1), (P_2; 1), (P_3; 1); -1, 0, 1]$  gé-  
nère le polygone massique  $\delta$ -réciproque avec  $\delta = -1$  qui suit

$$\begin{array}{ll} \theta_0 = \vec{U}_0 & \text{avec} \quad \vec{U}_0 = (0, -5), \\ \theta_1 = \vec{U}_1 & \text{avec} \quad \vec{U}_1 = (\frac{5}{2}, 0), \\ \theta_2 = \vec{U}_2 & \text{avec} \quad \vec{U}_2 = (0, 1), \\ \theta_3 = (P_3; 1) & \text{avec} \quad P_3 = (-1.5, 0), \\ \theta_4 = \vec{U}_4 & \text{avec} \quad \vec{U}_4 = (0, -1), \\ \theta_5 = \vec{U}_5 & \text{avec} \quad \vec{U}_5 = (\frac{5}{2}, 0), \\ \theta_6 = \vec{U}_3 & \text{avec} \quad \vec{U}_6 = (0, 5). \end{array}$$

$\theta$  détermine la courbe (figure 5.7)

$$BR[\theta](t) = P_3 + \frac{B_0^6(u)\vec{U}_0 + B_1^6(u)\vec{U}_1 + B_2^6(u)\vec{U}_2 + B_4^6(u)\vec{U}_4 + B_5^6(u)\vec{U}_5 + B_6^6(u)\vec{U}_6}{B_3^6(u)}.$$



5.7 Parabole semi-cubique.

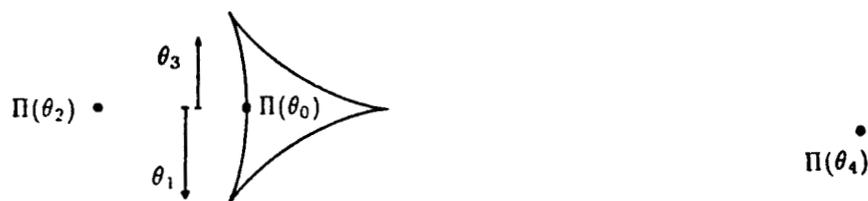


fig.5.8. Deltoide.

2) Considérons le polygone massique de la *deltoide* :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= (3, 0; 1) \\ \omega_1 &= (3, 0; 1) \\ \omega_2 &= \left(\frac{3}{2}, 0; \frac{4}{3}\right) \\ \omega_3 &= (0, 1; 2) \\ \omega_4 &= (-1, 2; 4) \end{aligned}$$

Changement\_Quadratique  $[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; -1, 0, 1]$  génère le polygone

$\theta$  de longueur 8 dont les cinq premiers vecteurs massiques sont :

$$\theta_0 = (-1, 0; \frac{35}{8})$$

$$\theta_1 = (0, -\frac{35}{4})$$

$$\theta_2 = (-5., 0; 0.625)$$

$$\theta_3 = (0, 3.75)$$

$$\theta_4 = (15., 0; 0.375)$$

les quatre derniers vecteurs massiques s'obtenant par  $\delta$ -réciprocité. La figure 5.8 illustre cet exemple.

3) Soit  $\omega$  le polygone massique d'une courbe de Lissajous :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= (\frac{9\sqrt{2}}{2}, 0; 1), & \omega_1 &= (\frac{45\sqrt{2}}{8}, 8; 1), & \omega_2 &= (\frac{99\sqrt{2}}{16}, 14; \frac{8}{7}), \\ \omega_3 &= (\frac{261\sqrt{2}}{40}, \frac{56}{5}; \frac{10}{7}), & \omega_4 &= (\frac{225\sqrt{2}}{34}, 0; \frac{68}{35}), & \omega_5 &= (\frac{261\sqrt{2}}{40}, -\frac{56}{5}; \frac{20}{7}), \\ \omega_6 &= (\frac{99\sqrt{2}}{16}, -14; \frac{32}{7}), & \omega_7 &= (\frac{45\sqrt{2}}{8}, -8; 8), & \omega_8 &= (\frac{9\sqrt{2}}{2}, 0; 16). \end{aligned}$$

**Changement\_Quadratique** $[\omega; -1, 0, 1]$  fournit le polygone massique  $\theta$  de longueur 16 dont les 9 premiers vecteurs massiques sont :

$$\theta_0 = (-6.36364, 0.; 50.27),$$

$$\theta_1 = (-79.98, 402.2),$$

$$\theta_2 = (0., 0.; 3.352),$$

$$\theta_3 = (-11.43, -402.2),$$

$$\theta_4 = (4.54616, 0.; 0.7734),$$

$$\theta_5 = (-2.637, 402.2),$$

$$\theta_6 = (7.27247, 0.; 0.3516),$$

$$\theta_7 = (-0.5593, -402.2),$$

$$\theta_8 = (8.18215, 0.; 0.2734).$$

La courbe  $BR[\theta; [0, 1]]$  et le polygone  $\theta$  sont représentés dans la figure 5.9.

#### §4. Transformation projective du plan.

**Fonction : Transformation\_Projective**  $[\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; P']$ .

**Description :**

donne le polygone massique  $\theta$ , image par  $\hat{T}$  du polygone  $\omega$ .

**Arguments :**

$P'$  est une matrice  $3 \times 3$ .

**Valeur retournée :**

polygone  $\theta$  de longueur  $n$ .

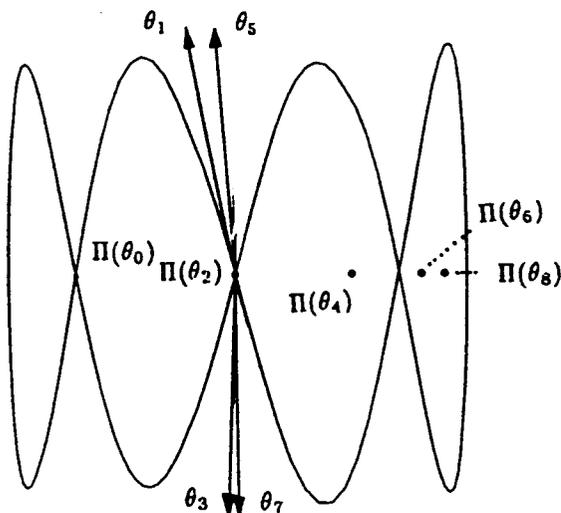


fig.5.9. Courbe de Lissajous.

**Algorithme :**

Pour  $i := 0$  jusqu'à  $n$   
 calculer  $V_i := \hat{\Omega}(\omega_i)$ ;  
 Faire  $\theta_i := \hat{\Omega}^{-1}(P' \cdot V_i)$ ;  
 Résultat :  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ .

**Exemples.**

1) Considérons la transformation projective plane  $T$  dont une matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$T$  transforme la cubique de référence  $BR[\omega_{x,y,z}^{[1]}]$  en une cubique  $BR[\theta]$   
 où

$$\theta_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2\right),$$

$$\theta_1 = (-2, 0; 1),$$

$$\theta_2 = (0, 2; 1),$$

$$\theta_3 = \begin{cases} (x - 2y, x + 2z) & \text{si } 2x + y + z = 0 \\ \left(\frac{x-2y}{2x+y+z}, \frac{x+2z}{2x+y+z}; 2x + y + z\right) & \text{si } 2x + y + z \neq 0 \end{cases}$$

- Pour le choix  $x = 0, y = 1$  et  $z = 0$  :  $BR[\theta]$  est déterminée par les vecteurs massiques

$$\theta_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2\right), \quad \theta_1 = (-2, 0; 1), \quad \theta_2 = (0, 2; 1), \quad \theta_3 = (-2, 0; 1).$$

Comme  $Disc = -4$ , nous savons que c'est une cubique anodale.  $BR[\theta]$  est illustrée par la figure 5.10.

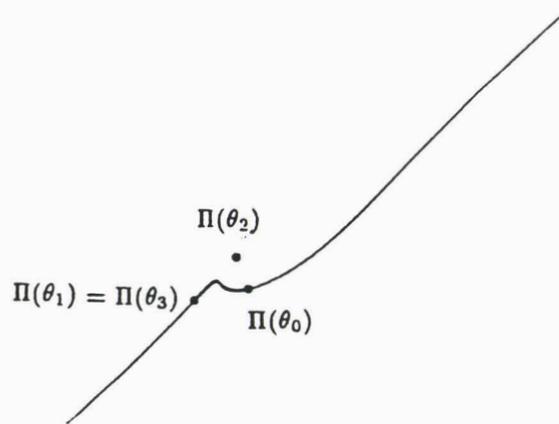


fig.5.10.

- Pour  $x = 1, y = -1$  et  $z = 1$  : nous trouvons  $Disc = 16$ . La courbe  $BR[\theta]$  avec

$$\theta_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2\right), \quad \theta_1 = (-2, 0; 1), \quad \theta_2 = (0, 2; 1), \quad \theta_3 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2\right)$$

est une cubique nodale, cf. figure 5.11.

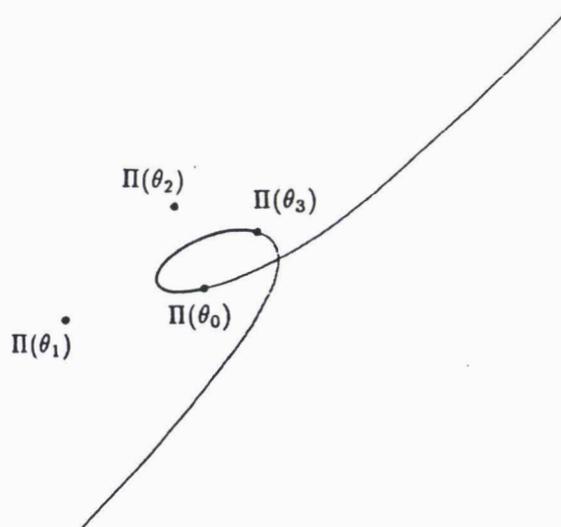


fig.5.11.

2) Soit une transformation affine de matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'image par une telle transformation affine de la cubique de référence  $BP[M_{x,y}^{[1]}]$  donne une courbe  $BP[P_0, P_1, P_2, P_3]$  avec

$$\begin{aligned} P_0 &= (1, 3), \\ P_1 &= (2, 3), \\ P_2 &= (4, 1), \\ P_3 &= (1 + 2x + y, 3 - 2x). \end{aligned}$$

- Pour  $x = 1$  et  $y = 1.5$  :  $BP[P]$  avec

$$P_0 = (1, 3), \quad P_1 = (2, 3), \quad P_2 = (4, 1), \quad P_3 = (4.5, 1),$$

est la transformée affine de la cubique anodale  $BP[M_{1,1.5}^{[1]}]$  (figure 5.12).

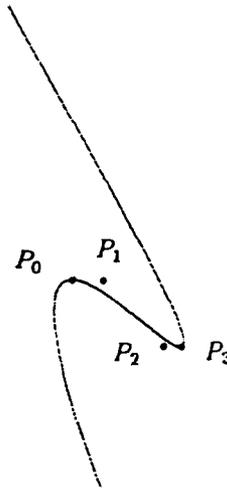
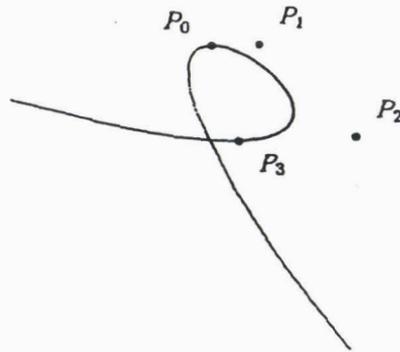


fig.5.12.

- Pour  $x = 1$  et  $y = -1.5$  :  $BP[M_{1,-1.5}^{[1]}]$  est une cubique nodale. La courbe  $BP[P]$  avec

$$P_0 = (1, 3), \quad P_1 = (2, 3), \quad P_2 = (4, 1), \quad P_3 = (1.5, 1).$$

est également une cubique nodale. Cet exemple est illustré par la figure 5.13.

**fig.5.13.**

## BIBLIOGRAPHIE.

- [BE68]. **P. Bézier** (1968), Procédé de définition numérique des courbes et surfaces non mathématiques, *Système Unisurf*, Automatismes, 13.
- [BE77]. **P. Bézier** (1977), Essais de définition numérique des courbes et surfaces expérimentales, Thèse d'état, Université de Paris VI.
- [BF84]. **W. Boehm, G. Farin and J. Kahmann** (1984), A survey of curve and surface methods, *Computer-Aided Geom. Design*, 1, p.1-60.
- [BO82]. **W. Boehm** (1982), On cubics : A survey, *Comput. Graph. Image Proc.* 19, p.201-226.
- [CH81]. **L. Chambadal** (1981), *Dictionnaire de Mathématiques*, Hachette, Paris.
- [DC59]. **F. De Casteljaou** (1959), *Outillage, méthode de calcul*, André Citroën Automobiles, S.A., Paris.
- [DC63]. **F. De Casteljaou** (1963), *Courbes et surfaces à pôles*, André Citroën Automobiles, S.A., Paris.
- [FA88]. **G. Farin** (1988), *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, New York.
- [FA89]. **G. Farin** (1989), Rational Curves and Surfaces, in *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, T. Lyche and L.L. Schumaker (eds.), pp. 215-238, Academic Press, Boston.
- [FJ86]. **J.C. Fiorot and P. Jeannin** (1986), Courbes Bézier rationnelles, *XIX<sup>ème</sup> Congrès d'Analyse Numérique*, Port-Barcarés, France, 26-30 Mai 1986.
- [FJ87]. **J.C. Fiorot and P. Jeannin** (1987), Nouvelle description et calcul des courbes rationnelles à l'aide de points et vecteurs de contrôle, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 305, Série I, 1987, 435-440.
- [FJ88]. **J.C. Fiorot and P. Jeannin** (1988), Surfaces rationnelles sur un carré contrôlées par des points pondérés et des vecteurs, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 306, Série I, 1988, p.87-92.
- [FJ89]. **J.C. Fiorot and P. Jeannin** (1989), *Courbes et Surfaces Rationnelles. Applications à la CAO*, RMA 12, Masson, Paris.
- [FO80]. **A.R. Forrest** (1980), The twisted cubic curve : A computer aided geometric design approach. *Comput. Aided Design* 12, p. 165-172.
- [FP79]. **I. Faux and M. Pratt** (1979), *Computational geometry for design and manufacture*. Ellis Horwood, Chichester, Sussex.
- [FR87]. **Farouki, R.T. and Rajan, V.T.** (1987), On the Numerical condition of polynomials in Bernstein Form, *Computer-Aided Geom. Design* 4 (3), p.191-216.

- [FR88]. **Farouki, R.T. and Rajan, V.T.** (1988), Algorithms for polynomials in Bernstein form, *Computer-Aided Geom. Design* 5, p.1-26.
- [FT90]. **J.C. Fiorot and S. Taleb** (1990), Reparametrizations of Polynomial and Rational Curves, *International Conference on Curves and Surfaces*, Chamonix, 21-27 June 1990, *Curves and Surfaces*, P.J. Laurent, A. Le Méhauté and L. Schumaker (eds.), p. 181-184, Academic Press, 1991.
- [RD74]. **E. Ramis, C. Deschamps and J. Odoux** (1974), *Cours de Mathématiques spéciales*, Tome 1, Paris, Masson, p. 294.
- [PA85]. **R.R. Patterson** (1985), Projective transformations of the parameter of a Bernstein-Bézier curve, *ACM Trans. Graphics* 4, p.276-290.
- [PA88]. **R.R. Patterson** (1988), Parametric cubics as algebraic curves, *Computer-Aided Geom. Design* 5, p.139-159.
- [SD89]. **M.C. Stone and T.D. DeRose** (1989), A geometric characterization of parametric cubic curves, *ACM Trans. on Graphics*, Vol. 8 (3), p.147-163.
- [SK52]. **J.G. Semple and G.T. Kneebone** (1952), *Algebraic Projective Geometry*, Oxford University Press.
- [SL83]. **B. Su and D. Liu** (1983), An affine invariant and its application in computational geometry, *Scientia Scinica (Series A)* 24, 3, p.259-267.
- [WA81]. **C. Y. Wang** (1981), Shape classification of the parametric cubic curve and parametric B-spline cubic curve. *Comput. Aided Design* 13, 4, p.199-206.
- [WO13]. **P.W. Wood** (1913), *The twisted cubic curve*, Cambridge Tracts in Mathematics and Physics, No 14, Cambridge UP, UK.



Ce travail est un apport à l'étude des courbes B-Rationnelles, (BR) en abrégé.

Il présente deux aspects :

Le premier concerne l'incidence des changements de paramètre affine, homographique et quadratique sur le polygone massique de contrôle d'une courbe (BR). Le but est d'obtenir des courbes paramétrées de manière standard sur  $[0,1]$ .

Des algorithmes simples fournissent les nouveaux vecteurs massiques en fonction des anciens.

Dans les deux premiers cas, la longueur de la (BR) est inchangée. Dans le troisième cas, bien que la longueur de la (BR) soit doublée, la complexité ne change pas, car le polygone massique de contrôle présente une symétrie qualifiée de delta-réciprocité.

Des exemples de calcul de nouveaux polygones massiques illustrent cette étude.

Ces résultats sont appliqués aux courbes Bézier, cas particulier descourbes (BR). Dans ce cas, le changement de paramètre rationnel fournit une courbe (BR).

Le deuxième aspect a pour objet d'une part la mise sous forme (BR) de cubiques rationnelles et d'autre part l'étude de certaines de leurs propriétés à partir de leur polygone massique.

L'accent est mis sur une classification des cubiques planes rationnelles en terme de vecteurs massiques.

Mots clés : Courbes B-rationnelles, Polynômes de Bernstein, Cubiques rationnelles, Changements de paramètre.

This development contributes at the study of B-Rational curves, (BR) in short.

Two aspects are presented.

The first describes incidence of affine, homographic and quadratic reparametrisation on the control mass polygon of a (BR) curve. The aim of this work is to have, in a standard way (BR) curves with parameter belonging to the unit interval  $[0,1]$ .

Simple algorithms are provided, which express new mass vectors in terms of previous one.

In the affine and homographic cases, length of the (BR) is unchanged. In the quadratic case, despite the length of the (BR) increases twofold, complexity is still the same since the masspolygon show a symmetry called delta-reciprocity.

Calculation of new mass polygons is illustrated by many examples.

As a particular case of (BR) curves, Bézier curves are reparametrised. Then, rational change of parameter yields to a (BR) curve.

The second aspect is related to the (BR) form of rational cubics.

Proprieties of (BR) cubics are studied in terms of mass vectors, and the emphasis is on shape classification of rational plane cubics based upon mass polygon.

Keywords : B-rational curves, Bernstein Polynomials, Rational cubics, reparametrizations.