USTL
FLANDRES ARTOIS

LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE
ET D'OPTIMISATION

n° d'ordre : 765

THESE

présentée à
l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en MATHEMATIQUES APPLIQUEES
par

Shao-Hua WANG

F-ACCELERATION
ET TRANSFORMATIONS DIAGONALES

soutenue le 12 septembre 1991 devant la commission d'examen

Membres du jury

Président :	C. BREZINSKI
Rapporteurs :	B. GERMAIN-BONNE
	A. CUYT
Examinateurs :	J. VAN ISEGHEM

Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation, UFR IEEA - M3, USTL Flandres-Artois,
59655 Villeneuve d'Ascq - Cedex - FRANCE.

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNIQUES DE LILLE
FLANDRES ARTOIS

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M.H. LEFEBVRE, M. PARREAU.

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PAREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS.

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

M. A. DUBRULLE.

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. TRIDOT Gabriel	Chimie Appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean-Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCQ Denis	Probabilitéss
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. BREZINSKI Claude	Analyse Numérique

M. BRIDOUX Michel	Chimie-Physique
M. CELET Paul	Géologie Générale
M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. DAUCHET Max	Informatique
M. DEBOURSE Jean-Pierre	Gestion des Entreprises
M. DHAINAUT André	Biologie Animale
M. DOUKHAN Jean-Claude	Physique du Solide
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du Solide
M. FAURE Robert	Mécanique
M. FOCT Jacques	Métallurgie
M. FRONTIER Serge	Ecologie Numérique
M. GRANELLE Jean-Jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. LABLACHE-COMBIER Alain	Chimie Organique
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LAVEINE Jean-Pierre	Paléontologie
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique Atomique et Moléculaire
M. LEROY Jean-Marie	Spectrochimie
M. LHOMME Jean	Chimie Organique Biologique
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. LOUCHEUX Claude	Chimie Physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie Physique
M. MACKE Bruno	Physique Moléculaire et Rayonnements Atmosph.
M. MIGEON Michel	E.U.D.I.L.
M. PAQUET Jacques	Géologie Générale
M. PETIT Francis	Chimie Organique
M. POUZET Pierre	Modélisation - calcul Scientifique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHAMPS Joel	Spectroscopie Moléculaire
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. SIMON Michel	Sociologie
Melle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. TILLIEU Jacques	Physique Théorique
M. TOULOTTE Jean-Marc	Automatique
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ALLAMANDO Etienne	Composants Electroniques
M. ANDRIES Jean-Claude	Biologie des organismes
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BART André	Biologie animale
M. BASSERY Louis	Génie des Procédés et Réactions Chimiques

Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BELLET Jean	Physique Atomique et Moléculaire
M. BERTRAND Hugues	Sciences Economiques et Sociales
M. BERZIN Robert	Analyse
M.BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie Végétale
M. BOIS Pierre	Mécanique
M. BOISSIER Daniel	Génie Civil
M. BOIVIN Jean-Claude	Spectroscopie
M. BOUQUELET Stéphane	Biologie Appliquée aux enzymes
M. BOUQUIN Henri	Gestion
M. BRASSELET Jean-Paul	Géométrie et Topologie
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CAPURON Alfred	Biologie Animale
M. CATTEAU Jean-Pierre	Chimie Organique
M. CAYATTE Jean-Louis	Sciences Economiques
M. CHAPOTON Alain	Electronique
M. CHARET Pierre	Biochimie Structurale
M. CHIVE Maurice	Composants Electroniques Optiques
M. COMYN Gérard	Informatique Théorique
M. COQUERY Jean-Marie	Psychophysiologie
M. CORIAT Benjamin	Sciences Economiques et Sociales
Mme CORSIN Paule	Paléontologie
M. CORTOIS Jean	Physique Nucléaire et Corpusculaire
M. COUTURIER Daniel	Chimie Organique
M. CRAMPON Norbert	Tectolique Géodynamique
M. CROSNIER Yves	Electronique
M. CURGY Jean-Jacques	Biologie
Melle DACHARRY Monique	Géographie
M. DEBRABANT Pierre	Géologie Appliquée
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DEJAEGER Roger	Electrochimie et Cinétique
M. DELAHAYE Jean-Paul	Informatique
M. DELORME Pierre	Physioliogie Animale
M. DELORME Robert	Sciences Economiques
M. DEMUNTER Paul	Sociologie
M. DENEL Jacques	Informatique
M. DE PARIS Jean Claude	Analyse
M. DEPREZ Gilbert	Physique du Solide - Cristallographie
M. DERIEUX Jean-Claude	Microbiologie
Melle DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité Chimique
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie Minérale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie Animale
M. DHAMELINCOURT Paul	Chimie Physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie Hertzienne
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie Hertzienne
M. DUBUS Jean-Paul	Spectrométrie des Solides
M. DUPONT Christophe	Vie de la firme (I.A.E.)
Mme EVRARD Micheline	Génie des procédés et réactions chimiques
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FAUQUAMBERGUE Renaud	Composants électroniques

M. FONTAINE Hubert	Dynamique des cristaux
M. FOUQUART Yves	Optique atmosphérique
M. FOURNET Bernard	Biochimie Sturcturale
M. GAMBLIN André	Géographie urbaine, industrielle et démog.
M. GLORIEUX Pierre	Physique moléculaire et rayonnements Atmos.
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie Physique
M. GOURIEROUX Christian	Probabilités et Statistiques
M. GREGORY Pierre	I.A.E.
M. GREMY Jean-Paul	Sociologie
M. GREVET Patrice	Sciences Economiques
M. GRIMBLOT Jean	Chimie Organique
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie animale
M. HENRY Jean-Pierre	Génie Mécanique
M. HERMAN Maurice	Physique spatiale
M. HOUDART René	Physique atomique
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JACOB Pierre	Probabilités et Statistiques
M. Jean Raymond	Biologie des populations végétales
M. JOFFRE Patrick	Vie de la firme (I.A.E.)
M. JOURNEL Gérard	Spectroscopie hertzienne
M. KREMBEL Jean	Biochimie
M. LANGRAND Claude	Probabilités et statistiques
M. LATTEUX Michel	Informatique
Mme LECLERCQ Ginette	Catalyse
M. LEFEBVRE Jacques	Physique
M. LEFEBVRE Christian	Pétrologie
Melle LEGRAND Denise	Algèbre
Melle LEGRAND Solange	Algèbre
M. LEGRAND Pierre	Chimie
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LEMAIRE Jean	Spectroscopie hertzienne
M. LE MAROIS Henri	Vie de la firme (I.A.E.)
M. LEROY Yves	Composants électroniques
M. LESENNE Jacques	Systèmes électroniques
M. LHENAFF René	Géographie
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU Jean-Marie	Optique-Physique atomique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MAURISSON Patrick	Sciences Economiques et Sociales
M. MESMACQUE Gérard	Génie Mécanique
M. MESSELYN Jean	Physique atomique et moléculaire
M. MONTEL Marc	Physique du solide
M. MORCELLET Michel	Chimie Organique
M. MORTREUX André	Chimie Organique
Mme MOUNIER Yvonne	Physiologie des structures contractiles
Mme MOUYART-TASSIN Annie Françoise	Informatique
M. NICOLE Jacques	Spectrochimie
M. NOTELET Francis	Systèmes électroniques
M. PARSY Fernand	Mécanique

M. PECQUE Marcel	Chimie organique
M. PERROT Pierre	Chimie appliquée
M. STEEN Jean-Pierre	Informatique

REMERCIEMENTS

Claude Brezinski a choisi le sujet de ma thèse. Ses articles sur l'accélération de la convergence constituaient pour moi le premier contact sérieux avec cette matière passionante. Sa philosophie, ses conseils, ses méthodes et ses encouragements m'ont été des plus précieux. Ce fut un grand honneur pour moi de pouvoir connaître et apprécier ce grand mathématicien. Je le remercie chaleureusement d'avoir guidé mon travail.

Je suis très reconnaissant à Monsieur B. Germain-Bonne d'avoir voulu s'intéresser à ce travail et de le juger. Sa chaleur humaine ses conseils judicieux m'ont beaucoup aidé pour la préparation de ma thèse.

Ma profonde gratitude va à Madame Annie Cuyt, directeur de Recherches Wilrijk Belgique, d'avoir voulu juger ce travail et pour sa participation au jury.

Je voudrais remercier Madame Jeannette Van Iseghem, professeur USTL Flandres-Artois, qui a bien voulu juger ce travail et participer au jury.

ABSTRACT

This report is devoted to F-acceleration, a new concept for the acceleration of converging sequences, and to the study of some diagonal transformations.

The F-acceleration is based on the fonction $D(n)$:

$$D(n) = p(n) - n$$

$$p(n) = \begin{cases} \min\{N \,/\, N \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m > N, |S_m - S| < |t_m - S|\}, & t_n \neq S \\ +\infty, & t_n = S \end{cases}$$

This thesis contains :

a) The study of F-acceleration ; this study proved the possibiLity to improve the convergence of sequences which beLong to some non-accelerable sets, and the impossibiLity to find a normaL transformation to improve the convergence of every sequence for a remanent monotonic set ;

b) The study of the fonction $D(n)$, in the case of Linear and Logarithmic convergence, for Aitken's Δ^2-process, the Θ-algorithm and some quasi-Linear transformations ;

c) The study of C-transformations and the iteration of C-transformation.

d) a theorem of convergence for diagonaL transformations.

KEY WORD.

Convergence acceleration, Logarithmic convergence, Linear convergence, diagonaL transformation, quasi-Linear transformation, iteration, F-acceleration, Aitken's Δ^2-process, Θ-aLgorithm.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Dans le cadre de l'accélération de la convergence, le concept d'accélération de la convergence a été très utile dans de nombreuses applications. Des méthodes pour accélérer la convergence ont été étudiées et beaucoup de résultats théoriques ont été obtenus.

Mais à cause de la limitation de ce concept, nous avons les problèmes suivants :

a) Dans certains cas, les méthodes d'accélération de la convergence ne nous aident pas beaucoup. En 1988, L. Jacobsen a donné quelques exemples, et elle dit : le nom d'accélération de la convergence peut-être " deceptive " [3].

b) Il n'est pas facile dans certains cas d'accélérer la convergence des suites. Il est même prouvé qu'il peut-être impossible de trouver un algorithme universel [4]. Parce que l'accélération de convergence demande trop, en 1989, C. Brezinski a proposé un nouveau concept : la contraction d'une transformation de suites, [12].

c) Quand une suite est accélérée par un procédé, on ne sait pas combien la convergence de cette suite est quantitativement améliorée par ce procédé. On sait que le but de l'accélération de la convergence est de trouver une bonne approximation à la limite inconnue le plus vite (moins chers) possible. Puisque certains ensembles de suites ne sont pas accélérables, on a deux possibilités :

- rechercher des sous-ensembles accélérables
- affaiblir la notion d'accélération.

Le premier point de vue a été étudié par divers auteurs. Le second point de vue est nouveau et il est abordé ici pour la première fois. Dans ce but là, nous allons proposer un nouveau concept, la F-accélération. Nous allons proposer une fonction très importante, $D(n)$. Avec $D(n)$, nous pourrons vérifier quantitativement si un procédé est efficace (ou utile) dans les applications.

Le chapitre I est une présentation de F-accélération. Les chapitres II et III sont consacrés à l'étude des familles F-accélérables et non F-accélérables. On a prouvé que LOG 2 est F_∞-accélérable. On a construit un procédé pour améliorer la convergence de chaque suite dans l'ensemble LOG^+1. On a prouvé que la famille remanent au sens monotone est non F-accélérable.
Au chapitre IV, on a étudié la fonction $D(n)$, dans le cas de la convergence linéaire et logarithmique, pour le procédé Δ^2- d'Aitken, le Θ_ algorithme, et certaines transformations quasi_linéaires. Avec la fonction $D(n)$, on a comparé quantitativement certaines transformations de suites.
Le chapitre V est consacré à l'étude de la transformation qui possède la propriété $\lim_{n \to \infty} \frac{D(n)}{n} = \infty$.
Le chapitre VI est consacré à l'étude de C-transformation et itération de C-transformations.

NOTATION

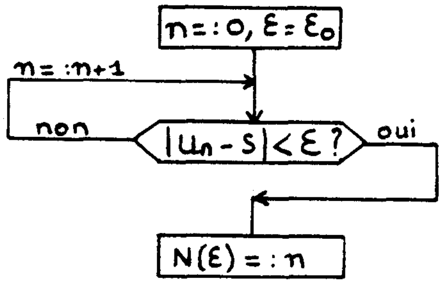
$\mathbb{N}$:	Ensemble des entiers positifs ou nuls
$\mathbb{N}^* =:$	$\mathbb{N} - \{0\}$
$\mathbb{R}$:	Corps des nombres réels
$\mathbb{R}^* =:$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\mathbb{R}^{*+} =:$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$\mathbb{E}$:	Ensemble quelconque
$\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$:	Ensemble des suites (infinies) d'éléments de $\mathbb{E}$
$\mathrm{Conv}(\mathbb{E})$:	Ensemble des suites convergentes de $\mathbb{E}$
$\mathrm{Conv}^*(\mathbb{E})$:	Ensemble des suites convergentes de $\mathbb{E}$ dont tous les termes sont différents de leur limite à partir d'un certain rang.
$\mathrm{Conv}_0(\mathbb{E})$:	Ensemble des suites $(S_n) \in \mathrm{CONV}(\mathbb{E})$ telles que $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 0$

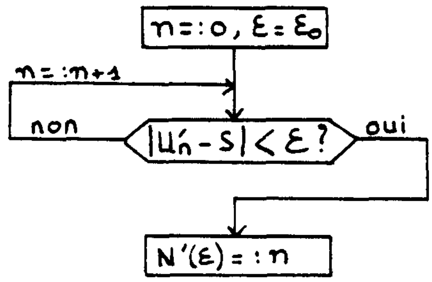
Chapitre 1

F-ACCÉLÉRATION

I. LES PROPRIETES DE LA FONCTION $N(\varepsilon)$

On sait que, pour une suite $(S_n) \in \mathrm{conv}(\mathbb{R})$, le but de l'accélération de la convergence est de trouver une bonne approximation de la limite le plus vite (moins cher) possible.
On suppose que les suites (U_n) et (U'_n) sont monotones et tendent vers S.
On se donne $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^{*+}$ et l'on considère le procédé :





Pour calculer U_n et U'_n, on suppose qu'il faut un coût W_n et W_n' respectivement.
On pose $W = \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)} W_n$, $W' = \sum_{n=0}^{N'(\varepsilon)} W'_n$.
Si l'on espère que la suite (U'_n) converge vers la limite S plus vite que la suite (U_n), il faut que W' soit plus petit que W.
Si $W'_n = W_n$, alors il faut que $N'(\varepsilon)$ soit plus petit que $N(\varepsilon)$.
Donc selon le but recherché, on peut donner la définition suivante.

<u>Définition 1.1</u> : Soit les suites $(U_n) \in \mathrm{conv}(\mathbb{R})$ et $(U'_n) \in \mathrm{conv}(\mathbb{R})$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} U'_n = S$. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, on pose :

$$N(\varepsilon) = \min \{ N \in \mathbb{N} \; / \; \forall m > N, \; |U_m - S| < \varepsilon, \; m \in \mathbb{N} \}.$$
$$N'(\varepsilon) = \min \{ N \in \mathbb{N} \; / \; \forall m > N, \; |U'_m - S| < \varepsilon, \; m \in \mathbb{N} \}.$$

$\overline{D}(\varepsilon) = N(\varepsilon) - N'(\varepsilon)$.

a) Si $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \overline{D}(\varepsilon) = +\infty$, on dit que la suite (u_n) est F_∞^- améliorable par la suite (u'_n) ;

b) S'il existe une constance $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^{*+}$, et un rang $K \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall\ \varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, $\overline{D}(\varepsilon) \geqslant K$, on dit que la suite (u_n) est F_K^- améliorable par la suite (u'_n) ;

c) Si $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, il existe $\varepsilon_0 < \varepsilon$, $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^{*+}$, tel que $\overline{D}(\varepsilon_0) \leqslant 0$; on dit que la suite (u_n) est non F^- améliorable par la suite (u'_n) .

__Remarque :__

a) On sait que $N(\varepsilon)$ est la limite inférieure de l'ensemble suivant $\{ N \in \mathbb{N}\ /\ \forall m > N\ ,\ m \in \mathbb{N}\ ,\ |u_m - S| < \varepsilon \}$
Puisque $\lim_{n \to \infty} u_n = S$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, donc cet ensemble est non-vide et $N(\varepsilon)$ est bien défini . En effet , à tout ε positif donné on peut faire correspondre de manière unique un entier $N(\varepsilon)$, ce qui permet de définir la fonction $N(\varepsilon)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

b) Supposons que T soit une transformation des suites telle que $T: (u_n) \to (u'_n)$.
Si $\overline{D}(\varepsilon)$ est trop petit (ou (u_n) est non F améliorable par (u'_n)) , même si T accélère la convergence de (u_n) T ne nous aide pas beaucoup .
C'est ce que L. Jacobson disait dans [3] " the name convergence acceleration may be deceptive."
Si $\overline{D}(\varepsilon)$ est assez grand (ou (u_n) est F_∞^- améliorable par (u'_n)) , même si T n'accélère pas la convergence de (u_n) , T est une transformation très efficace .

Donc $\bar{D}(\varepsilon)$ est une fonction très importante. On peut dire qu'elle est la pierre de touche pour vérifier si une transformation de suites est vraiment efficace.

c) Si la suite (u_n) est $F_{\bar{k_1}}$ améliorable par la suite (u'_n) et $k_1 \geqslant k_2$, $k_2 \in \mathbb{N}^*$, alors (u_n) est $F_{\bar{k_2}}$ améliorable par (u'_n)

<u>Propriété 1.1</u> : Soit la suite $(u_n) \in \mathrm{CONV}(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = S$, $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, $N(\varepsilon) = \min\left\{ N \in \mathbb{N} \mid \forall\, m > N,\ m \in \mathbb{N},\ |u_m - S| < \varepsilon \right\}$
On a les propriétés suivantes :

a) $|u_j - S| \begin{cases} < \varepsilon & \forall\, j > N(\varepsilon) \\ \geqslant \varepsilon & j = N(\varepsilon) \end{cases}$

b) Si $k \in \mathbb{N}$ et si $|u_k - S| \geqslant \varepsilon$
alors $N(\varepsilon) \geqslant k$.

c) Si $k \in \mathbb{N}$ et si $\forall\, j > k$, $|u_j - S| < \varepsilon$
alors $N(\varepsilon) \leqslant k$

d) Si $k \in \mathbb{N}$ et si $\forall\, j > k$, $|u_j - S| < \varepsilon_j$ $|u_k - S| \geqslant \varepsilon$
alors $N(\varepsilon) = k$

e) Si la suite $(|u_n - S|)$ est monotone
alors $|u_j - S| \begin{cases} < \varepsilon & \forall\, j > N(\varepsilon) \\ \geqslant \varepsilon & \forall\, j \leqslant N(\varepsilon) \end{cases}$

Démonstration :

a) . Puisque $N(\varepsilon) \in \{N \in \mathbb{N} \mid \forall m > N,\ m \in \mathbb{N},\ |u_m - s| < \varepsilon\}$
donc $\forall j > N(\varepsilon)$, $|u_j - s| < \varepsilon$.

. $|u_{N(\varepsilon)} - s|$ ne peut-être strictement inférieure à ε , sinon on aurait $N(\varepsilon) - 1 \in \{N \in \mathbb{N} \mid \forall m > N,\ m \in \mathbb{N},\ |u_m - s| < \varepsilon\}$ ce qui est contradictoire avec la définition de $N(\varepsilon)$.

Les démonstrations de b) , c) , d) , e) sont évidentes .

Propriété 1.2 : $N(\varepsilon)$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Démonstration :

Supposons que $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^{*+}$, $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$.
Selon la propriété 1.1 , on a alors $|u_{N(\varepsilon_2)} - s| \geqslant \varepsilon_2$.
Puisque $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2$, donc $|u_{N(\varepsilon_2)} - s| \geqslant \varepsilon_1$.
Selon la propriété 1.1 , on a alors $N(\varepsilon_1) \geqslant N(\varepsilon_2)$.

Propriété 1.3 : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} N(\varepsilon) = +\infty$ si et seulement si il existe une suite $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante et qui tend vers $+\infty$, telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{n_k} \neq s$

on pose $\varepsilon_k = |u_{n_k} - s|$, alors $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$.
Selon la propriété 1.1 , on a alors : $N(\varepsilon_k) \geqslant n_k$.
Puisque $\lim\limits_{k \to \infty} n_k = +\infty$,
on a : $\lim\limits_{k \to \infty} N(\varepsilon_k) = +\infty$.
Puisque $N(\varepsilon)$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$
on a : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} N(\varepsilon) = +\infty$

<u>Propriété 1.4</u> : Soit $(u_n) \in \text{conv}(\mathbb{R})$, $(u'_n) \in \text{conv}(\mathbb{R})$, $(u''_n) \in \text{conv}(\mathbb{R})$. $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} u'_n = \lim_{n\to\infty} u''_n = S$, si (u_n) est F_{k_1}- améliorable par (u'_n), et (u'_n) est F_{k_2}- améliorable par (u''_n), alors la suite (u_n) est $F_{k_1+k_2}$- améliorable par (u''_n).

<u>Démonstration</u> :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, posons :

$$N(\varepsilon) = \min \{ N \in \mathbb{N} \mid \forall m > N ,\ |u_m - S| < \varepsilon \}$$
$$N'(\varepsilon) = \min \{ N \in \mathbb{N} \mid \forall m > N ,\ |u'_m - S| < \varepsilon \}$$
$$N''(\varepsilon) = \min \{ N \in \mathbb{N} \mid \forall m > N ,\ |u''_m - S| < \varepsilon \}$$

Puisque (u_n) est F_{k_1}- améliorable par (u'_n), alors il existe $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^{*+}$ telle que : $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, $\forall \varepsilon < \varepsilon_1$, $\overline{D}(\varepsilon) = N(\varepsilon) - N'(\varepsilon) \geqslant k_1$.

Puisque (u'_n) est F_{k_2}- améliorable par (u''_n), alors il existe $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que : $\forall \varepsilon < \varepsilon_2$, $\overline{D}'(\varepsilon) = N'(\varepsilon) - N''(\varepsilon) \geqslant k_2$.

Posons $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

On a : $\overline{D}''(\varepsilon) = N(\varepsilon) - N''(\varepsilon)$

$= N(\varepsilon) - N'(\varepsilon) + N'(\varepsilon) - N''(\varepsilon) \geqslant k_1 + k_2 \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0$

$\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ et donc (u_n) est $F_{k_1+k_2}$- améliorable par (u''_n).

II. UN THEOREME D'EQUIVALENCE.

On voit que $\overline{D}(\varepsilon)$ est une fonction très importante, mais $\overline{D}(\varepsilon)$ est définie sur $\mathbb{R}^{*+}$. Le rapport entre la suite (u_n) et la suite (u'_n) n'est pas très clair. Nous allons donner un théorème d'équivalence.

Considérons les suites $(\mathcal{U}_n) \in conv(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{U}'_n) \in conv(\mathbb{R})$ $\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n = \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}'_n = S$. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$p(n) = \begin{cases} \min\{N \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N},\ m > N,\ |\mathcal{U}_m - S| < |\mathcal{U}'_n - S|\} & \text{si } \mathcal{U}'_n \neq S \\ +\infty, & \text{si } \mathcal{U}'_n = S \end{cases}$$

$$D(n) = p(n) - n.$$

<u>Propriété 1.5</u> : Si $\mathcal{U}'_n \neq S$, alors $D(n) \geqslant \overline{D}(|\mathcal{U}'_n - S|)$

<u>Démonstration</u> :

Posons $\varepsilon_n = |\mathcal{U}'_n - S|$.

Puisque $\mathcal{U}'_n \neq S$, on a : $\varepsilon_n \neq 0$ et $\varepsilon_n \in \mathbb{R}^{*+}$.

Puisque $\overline{D}(\varepsilon_n) = N(\varepsilon_n) - N'(\varepsilon_n)$

où $N'(\varepsilon_n) = \min\{N \in \mathbb{N} \mid \forall m > N,\ |\mathcal{U}_m - S| < \varepsilon_n\}$

alors, selon la propriété 1.1, on a : $N'(\varepsilon_n) \geqslant n$.

et donc $\overline{D}(\varepsilon_n) = N(\varepsilon_n) - N'(\varepsilon_n) \leqslant N(\varepsilon_n) - n = D(n)$.

<u>Théorème 1.1</u> : Soit $(\mathcal{U}_n) \in conv^*(\mathbb{R})$, $(\mathcal{U}'_n) \in conv(\mathbb{R})$ et $\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n = \lim_{n\to\infty} \mathcal{U}'_n = S$

a) $(\mathcal{U}_n)$ est F_∞- améliorable par $(\mathcal{U}'_n)$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} D(n) = +\infty$.

b) $(\mathcal{U}_n)$ est F_{K^*}- améliorable par $(\mathcal{U}'_n)$ (où $K^* \in \mathbb{N}^*$) si et seulement si il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N$, $D(n) \geqslant K^*$.

<u>Démonstration</u> :

a) • Supposons que la suite $(\mathcal{U}_n)$ soit F_∞- améliorable par la suite $(\mathcal{U}'_n)$.

Nous allons montrer que $\lim_{n\to\infty} D(n) = +\infty$.

Considérons la suite $(\mathcal{U}'_n)$, nous la divisons en deux sous-suites

$$\mathcal{U}'_n = \begin{cases} \mathcal{U}'_{l_k} & \text{si } n = l_k \ , \ \mathcal{U}'_n = S \\ \mathcal{U}'_{m_k} & \text{si } n = m_k \ , \ \mathcal{U}'_n \neq S \end{cases}$$

On a $D(n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n = l_k \\ D(m_k) & \text{si } n = m_k \end{cases}$

Puisque la suite $(m_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante,
alors ou bien $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = +\infty$, ou bien il existe un rang $M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $m_k < M$.

<u>Cas 1</u> : $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = +\infty$

Puisque $(\mathcal{U}_n)$ est F_∞-améliorable par $(\mathcal{U}'_n)$
On a $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \overline{D}(\varepsilon) = +\infty$

Puisque $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = +\infty$

Posons $\varepsilon_k = |\mathcal{U}_{m_k} - S|$.
On a $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ et $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^{*+}$.
alors $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{D}(\varepsilon_k) = +\infty$.

Selon la propriété 1.5, on a : $D(k) \geqslant \overline{D}(\varepsilon_k)$.
Puisque $\lim\limits_{k\to\infty} \overline{D}(\varepsilon_k) = +\infty$

on a : $\lim\limits_{k\to\infty} D(k) = +\infty$.

<u>Cas 2</u> : Supposons que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $m_k < M$.
On a alors : $\forall\, n > M$, $n = l_k$.
Donc $\forall\, n > M$, $D(n) = +\infty$.

- Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} D(n) = +\infty$.

Nous allons montrer que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est F_∞-améliorable par la suite $(\mathcal{U}'_n)$.

Considérons la suite $(\mathcal{U}'_n)$.
Puisque $\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}'_n = S$,
Donc ou bien il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $\mathcal{U}'_n = S$
ou bien il existe une suite $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante qui tend vers $+\infty$
telle que $\mathcal{U}'_{n_k} \neq S$. $k \in \mathbb{N}$.

Cas 1 : Il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n > N$, $\mathcal{U}'_n = S$.
Puisque $(\mathcal{U}_n) \in \text{conv}^*(\mathbb{R})$, selon la propriété 1.3,
On a : $\lim_{\varepsilon\to 0^+} N(\varepsilon) = +\infty$.
Puisque $\forall n > N$, $\mathcal{U}'_n = S$,
on a : $\forall n > N$, $N'(\varepsilon) \leq N$.
alors $\overline{D}(\varepsilon) = N(\varepsilon) - N'(\varepsilon) \geq N(\varepsilon) - N$.
Donc $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \overline{D}(\varepsilon) = +\infty$.

Cas 2 : Il existe une suite $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante et tendant vers $+\infty$ telle que $\mathcal{U}'_{n_k} \neq S$, $k \in \mathbb{N}$
on a : $(\mathcal{U}_n) \in \text{conv}^*(\mathbb{R})$.
Supposons que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \overline{D}(\varepsilon) \neq +\infty$.
Par cette hypothèse, on peut toujours trouver un rang $M \in \mathbb{N}$ et une suite (ε_k), $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^{*+}$, $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$, tels que
$\overline{D}(\varepsilon_k) = N(\varepsilon_k) - N'(\varepsilon_k) < M$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Selon la propriété 1.1, on a : $|\mathcal{U}'_{N'(\varepsilon_k)} - S| \geq \varepsilon_k$.
Selon la propriété 1.2 on a : $N(|\mathcal{U}'_{N'(\varepsilon_k)} - S|) \leq N(\varepsilon_k)$
Puisque $p(N'(\varepsilon_k)) = N(|\mathcal{U}'_{N'(\varepsilon_k)} - S|)$,

$$\begin{aligned} \text{on a : } D(N'(\varepsilon_k)) &= p(N'(\varepsilon_k)) - N'(\varepsilon_k) \\ &= N(|\mathcal{U}'_{N'(\varepsilon_k)} - S|) - N'(\varepsilon_k) \\ &\leq N(\varepsilon_k) - N'(\varepsilon_k) = \overline{D}(\varepsilon_k) < M. \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Puisque $(\mathcal{U}'_n) \in \text{conv}^*(\mathbb{R})$,
on a : $\lim_{\varepsilon \to 0^+} N'(\varepsilon) = +\infty$.
Puisque $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$,
on a : $\lim_{k \to \infty} N'(\varepsilon_k) = +\infty$
C'est-à-dire que $\lim_{k \to \infty} D(N'(\varepsilon_k)) \neq +\infty$
Cela est contradictoire, donc notre hypothèse est fausse
et $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \bar{D}(\varepsilon) = +\infty$.

b) • Supposons que la suite $(\mathcal{U}_n)$ soit F_{k^*}-améliorable par une suite $(\mathcal{U}'_n)$ (où $k^* \in \mathbb{N}^*$).
Nous allons montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n > N$, $D(n) \geq k^*$.
Considérons la suite $(\mathcal{U}'_n)$, nous la divisons en deux parties.

$$\mathcal{U}'_n = \begin{cases} \mathcal{U}'_{l_k} & \text{si } n = l_k, \ \mathcal{U}'_n = S \\ \mathcal{U}'_{m_k} & \text{si } n = m_k, \ \mathcal{U}'_n \neq S. \end{cases}$$

On a : $$D(n) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n = l_k \\ D(m_k) & \text{si } n = m_k. \end{cases}$$

Cas 1 : Il existe un rang $M \in \mathbb{N}$, tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $m_k < M$.
alors : $\forall n > M \quad n = l_k$.
donc $D(n) = +\infty \quad \forall n > M$.

Cas 2 : La suite (m_k) est croissante et tend vers $+\infty$.
alors $\lim_{k \to \infty} \mathcal{U}'_{m_k} = S$,
puisque $(\mathcal{U}_n)$ est F_{k^*}-améliorable par $(\mathcal{U}'_n)$.
Alors il existe une constante $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^{*+}$ telle que
$\forall \varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ $\bar{D}(\varepsilon) \geq k^*$.

Puisque $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{U}'_{m_k} = S$,

Donc il existe un rang $K_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall k > k_0$,

$|\mathcal{U}'_{m_k} - S| < \varepsilon_0$

on a : $\overline{D}(|\mathcal{U}'_{m_k} - S|) \geqslant k^*$.

Posons $N = m_{k_0}$

on a : $\forall n > N$

$$D(n) = \begin{cases} +\infty & n = l_k \\ D(m_k) \geqslant \overline{D}\left(|\mathcal{U}'_{m_k} - S|\right) \geqslant k^* & n = m_k. \end{cases}$$

- Supposons qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n > N$, $D(n) \geqslant k^*$.

Nous allons montrer qu'il existe une constante $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^{*+}$, telle que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ $\overline{D}(\varepsilon) \geqslant k^*$.

Considérons la suite $(\mathcal{U}'_n)$, ou bien $(\mathcal{U}'_n) \in \text{conv}^*(\mathbb{R})$ ou bien il existe un rang $N' \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n > N'$, $\mathcal{U}'_n = S$.

<u>Cas 1</u> : Il existe un rang $N' \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n > N'$, $\mathcal{U}'_n = S$

donc $\forall n > N'$ $\quad N'(\varepsilon) \leqslant N'$

puisque $(\mathcal{U}_n) \in \text{conv}^*(\mathbb{R})$

on a : $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} N(\varepsilon) = +\infty$.

On a : $\overline{D}(\varepsilon) = N(\varepsilon) - N'(\varepsilon) \geqslant N(\varepsilon) - N'$

donc $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \overline{D}(\varepsilon) = +\infty$.

Donc il existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, $\varepsilon < \varepsilon_0$

$\overline{D}(\varepsilon) \geqslant k^*$.

<u>Cas 2</u> : $(\mathcal{U}'_n) \in \text{conv}^*(\mathbb{R})$

Supposons que $(\mathcal{U}_n)$ n'est pas F_{k^*}-améliorable par $(\mathcal{U}'_n)$.

D'après cette hypothèse, on peut toujours trouver une suite $(\varepsilon_n) \in \mathrm{conv}_0(\mathbb{R}^{*+})$, telle que $\overline{D}(\varepsilon_n) < k^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Selon la propriété 1.1, on a $|u'_{N'(\varepsilon_n)} - S| \geqslant \varepsilon_n$.

Selon la propriété 1.2, on a alors $N(|u'_{N'(\varepsilon_n)} - S|) \leqslant N(\varepsilon_n)$

puisque $p(N'(\varepsilon_n)) = N(|u'_{N'(\varepsilon_n)} - S|)$

on a : $D(N'(\varepsilon_n)) = p(N'(\varepsilon_n)) - N'(\varepsilon_n) \leqslant N(\varepsilon_n) - N'(\varepsilon_n)$

donc $D(N'(\varepsilon_n)) \leqslant \overline{D}(\varepsilon_n) < k^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$

puisque $(u'_n) \in \mathrm{conv}^*(\mathbb{R})$

on a : $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} N'(\varepsilon) = +\infty$

puisque $(\varepsilon_n) \in \mathrm{conv}_0(\mathbb{R}^{*+})$

on a : $\lim\limits_{n \to \infty} N'(\varepsilon_n) = +\infty$

Cela est contradictoire avec $(N \in \mathbb{N}, \forall n > N, D(n) > k^*)$ et donc notre hypothèse que (u_n) n'est pas F_{k^*}-améliorable par (u'_n) est fausse.

REMARQUE :

Ce théorème nous permet de considérer une fonction $D(n)$ sur $\mathbb{N}$ au lieu d'une fonction $\overline{D}(\varepsilon)$ sur $\mathbb{R}^{*+}$. On peut donner une explication pour $D(n)$. Si la suite $(|u_n - S|)$ est monotone, pour arriver à la même précision que $|u'_n - S|$ (on suppose $u'_n \neq S$) il faut calculer la suite (u_n) jusqu'au terme $u_{n+D(n)}$.

III. DEFINITION DE LA F-ACCELERATION.

Définition 1.2 : Soit $\mathcal{S} \subset \mathrm{conv}(\mathbb{R})$, T une transformation de suites sur $\mathcal{S}$. On dit que T est une transformation normale sur $\mathcal{S}$, s'il existe des fonctions (f_n), $f_n : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, telles que : $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$

$$t_j = f_j(S_0, S_1, \dots, S_j) \quad , \quad j = 0, 1, 2, \dots$$
$$T : (S_n) \longrightarrow (t_n)$$

Si T est une transformation normale sur $\mathcal{S}$, $(u_n^{(1)}) \in \mathcal{S}$, $(u_n^{(2)}) \in \mathcal{S}$, et $T : (u_n^{(1)}) \longrightarrow (t_n^{(1)})$, $T(u_n^{(2)}) \rightarrow (t_n^{(2)})$, si $\forall n \leqslant M$, $(M \in \mathbb{N})$ $u_n^{(1)} = u_n^{(2)}$ on a : $t_n^{(1)} = t_n^{(2)}$. $\forall n \leqslant M$.

Définition 1.3 : Soit $\mathcal{S} \subset \mathrm{conv}(\mathbb{R})$, T une transformation de suites sur $\mathcal{S}$. On dit que T est régulière sur $\mathcal{S}$, si $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$ $T : (S_n) \longrightarrow (t_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$ existe $= \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Définition 1.4 : Soit $\mathcal{S} \subset \mathrm{conv}(\mathbb{R})$, T une transformation de suites sur $\mathcal{S}$. On dit que :

a) $\mathcal{S}$ est F_∞-accélérable par T, si $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $T : (S_n) \rightarrow (t_n)$, la suite (S_n) est F_∞-améliorable par la suite (t_n).

b) $\mathcal{S}$ est F_k-accélérable par T, $(k \in \mathbb{N}^*)$, si $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $T : (S_n) \rightarrow (t_n)$, (S_n) est F_k-améliorable par (t_n).

c) $\mathcal{S}$ est F-accélérable par T, si $\mathcal{S}$ est F_∞-accélérable par T, ou bien que $\mathcal{S}$ est F_k-accélérable par T.

Propriété 1.6 : Soit $\mathcal{S} \subset \mathrm{conv}(\mathbb{R})$. T une transformation de suites sur $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}$ est F-accélérable par T, alors T est régulière sur $\mathcal{S}$.

Démonstration :

Considérons que la suite $(S_n) \in \mathcal{S}$ et $T : (S_n) \to (t_n)$.

Divisons la suite (t_n) en deux sous-suites :

$$t_n = \begin{cases} t_{l_k} = S & \text{si } n = l_k \,,\ t_n = S \\ t_{m_k} & \text{si } n = m_k \,,\ t_n \neq S \end{cases}$$

Cas 1 : Il existe un rang $M \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall k \in \mathbb{N}, M_k < M$.

On a alors : $\forall n > M$. $t_n = S$.

donc $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = S$

Cas 2 : $\lim\limits_{k \to \infty} m_k = +\infty$

Puisque $\mathcal{S}$ est F-accélérable par T,

donc (S_n) est au moins F_1-accélérable par (t_n).

On a alors : il existe un rang $N' \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n > N'$

$D(n) = p(n) - n \geq 1$.

Puisque $\lim\limits_{k \to \infty} m_k = +\infty$,

donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall k > k_0$. $m_k > N'$.

On a alors $\forall k > k_0$, $D(m_k) = p(m_k) - m_k \geq 1$.

Donc $\forall k > k_0$, $P(m_k) \geq m_k + 1$.

Puisque $t_{m_k} \neq S$,

on a : $p(m_k) = \min \{ N \in \mathbb{N} \mid \forall m > N, |S_m - S| < |t_{m_k} - S| \}$.

Selon la propriété 1.1 : on a alors : $|S_{p(m_k)} - S| \geq |t_{m_k} - S|$.

Puisque $\lim\limits_{k \to \infty} p(m_k) = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ donc $\lim\limits_{k \to \infty} t_{m_k} = S$.

Définition 1.5 : Soit $\mathcal{S} \subset \mathrm{CONV}(\mathbb{R})$, on dit que

a) $\mathcal{S}$ est F_∞-accélérable, s'il existe une transformation normale T sur $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S}$ est F_∞-accélérable par T.

b) $\mathcal{S}$ est F_k-accélérable $(k \in \mathbb{N}^*)$, s'il existe une transformation normale sur $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S}$ est F_k-accélérable par T.

c) $\mathcal{S}$ est F - accélérable, si $\mathcal{S}$ est F_∞- accélérable ou bien que $\mathcal{S}$ est F_k- accélérable ($k \in \mathbb{N}^*$)

Exemple 1 :

Soit $(A_n) \in conv_0(\mathbb{R}^{*+})$, $\mathcal{S}$ est l'ensemble de suites

$$\mathcal{S} = \left\{ (S_n) \in conv(\mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N},\ \Delta s_n \neq 0,\ \varepsilon_n = 1 - \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S},\ 0 < \varepsilon_n < A_n,\ 0 < \frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} < 1 \right\}$$

T est une transformation de suites sur $\mathcal{S}$, $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$. $T : (S_n) \to (t_n)$.

$t_n = S_{n-1} + \Delta S_{n-1} / A_{n-1} \qquad \forall n \geq 1.$

alors $\mathcal{S}$ est F_∞- accélérable par T.

Démonstration :

Supposons que la suite $(S_n) \in \mathcal{S}$.

Cas 1 : $\Delta S_0 > 0$.

- Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$. $0 < \Delta s_{n+1} / \Delta s_n < 1$,
  On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta s_n > 0$. et $\Delta S_0 > \Delta S_1 > \Delta S_2 > \dots > \Delta s_n > \Delta s_{n+1} > \dots > 0$
- Puisque $S_{n+1} = S_n + \Delta s_n > S_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
  donc (S_n) est strictement croissante et tend vers S.
- Puisque $\varepsilon_n = 1 - (S_{n+1} - S)/(S_n - S)$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
  on a : $S = S_n + \dfrac{\Delta s_n}{\varepsilon_n}$.

  Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon_n \leq A_n$,
  donc $S = S_n + \dfrac{\Delta s_n}{\varepsilon_n} \geq S_n + \dfrac{\Delta s_n}{A_n}$

  On a : $\forall n \in \mathbb{N}$. $S \geq t_{n+1}$.

  Posons $p(n) = \begin{cases} \min \{ N \in \mathbb{N} \mid \forall m > N, |S_m - S| < |t_n - S| \} & \text{si } t_n \neq S \\ +\infty & \text{si } t_n = S. \end{cases}$

  Si $t_n = S$, alors $p(n) = +\infty$ donc $D(n) = +\infty$

  Si $t_n \neq S$. selon la propriété 1.1.

  On a alors $|S_{p(n)+1} - S| < |t_n - S|$.

Puisque $|S_{p(n)+1} - S| = S - S_{p(n)+1}$

$$= S - [\Delta S_{n+D(n)} + \cdots + \Delta S_{n-1} + S_{n-1}]$$

$$\geqslant S - \left((D(n)+3)\,\Delta S_{n-1} + S_{n-1}\right)$$

$$|t_n - S| = S - t_n = S - \left(\frac{\Delta S_{n-1}}{A_{n-1}} + S_{n-1}\right)$$

On a : $S - \left((D(n)+3)\,\Delta S_{n-1} + S_{n-1}\right) < S - \left(\frac{\Delta S_{n-1}}{A_{n-1}} + S_{n-1}\right)$

On a alors : $(D(n)+3)\,\Delta S_{n-1} > \Delta S_{n-1}/A_{n-1}$

et $D(n) > \frac{1}{A_{n-1}} - 3 \qquad \forall n \geqslant 2$

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$ et $A_n \in \mathbb{R}^{*+}$.

On a : $\lim\limits_{n\to\infty} D(n) = +\infty$.

Cas 2 : $\Delta S_0 < 0$, nous avons presque la même démonstration qu'au cas 1.

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} D(n) = +\infty$.

REMARQUE : Si $\mathcal{S}$ est défini comme suit : $(A_n) \in \mathrm{conv}_0(\mathbb{R}^{*+})$

$\mathcal{S} = \Big\{ (S_n) \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}) \mid$ il existe un rang N, tel que $\forall n > N$,

a) $\Delta S_n \neq 0$, $0 < \Delta S_n / \Delta S_{n-1} < 1$

b) $\varepsilon_n = 1 - \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S}$, $0 < \varepsilon_n \leqslant A_n \Big\}$.

alors $\mathcal{S}$ est aussi F_∞- accélérable.

Exemple 2 :

$\mathcal{S} = \left\{ (S_n) \in \mathrm{conv}(\mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1,\ \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = 1 - \frac{1}{n} \right\}$

$\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $T : (S_n) \to (t_n)$, $t_n = S_{n-2} - (\Delta S_{n-2})^2 / \Delta^2 S_{n-2} \quad n \geqslant 2$.

alors $\mathcal{S}$ est F_∞- accelerable par T, et $D(n) \geqslant n \quad (\forall n \geqslant 4)$

Démonstration :

Supposons $(S_n) \in \mathcal{S}$. Posons $\lambda_n = \frac{1}{n}$, $\mu_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \geq 1$

On a alors : $(S_{n+1} - S)/(S_n - S) = 1 - \lambda_n$, $\lambda_{n+1}/\lambda_n = 1 - \mu_n$

Donc $\Delta S_n = -\lambda_n (S_n - S)$

$$\Delta^2 S_n = \Delta S_{n+1} - \Delta S_n = -\lambda_{n+1}(S_{n+1} - S) + \lambda(S_n - S)$$
$$= \left(-\lambda_{n+1}(1-\lambda_n) + \lambda_n\right)(S_n - S).$$

On a alors : $\dfrac{t_{n+2} - S}{S_n - S} = \dfrac{1}{S_n - S}\left[S_n - S - \dfrac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}\right]$

$$= 1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1} + \mu_n} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right).$$

Selon la propriété 1.1, on a alors :

$$|S_{n+D(n)+1} - S| \leq |t_n - S|.$$

Puisque $|t_n - S| = \left|\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n-2)}\right)(S_{n-2} - S)\right|$

$$|S_{n+D(n)+1} - S| = \left|\left(1 - \frac{1}{n+D(n)}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)(S_{n-2} - S)\right|$$
$$= \left|\frac{n-3}{n+D(n)}\right| \, |S_{n-2} - S|$$

On a : $\left|\dfrac{n-3}{n+D(n)}\right| < \left|\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(n-2)}\right|$.

On a alors : $\forall n \geq 4 \quad D(n) > n$.

IV RAPPORT ENTRE F-ACCELERATION ET ACCELERATION

On dit que la suite $(\mu'_n) \in \text{conv}(\mathbb{R})$ converge plus vite vers sa limite S que la suite (μ_n), si $\lim\limits_{n\to\infty} (\mu'_n - S)/(\mu_n - S) = 0$.

Le concept d'accélération de la convergence est fondé sur cette définition. On dit que $\mathcal{S} \subset \text{conv}(\mathbb{R})$ est accélérable, s'il existe une transformation normale T, telle que $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $T : (S_n) \to (t_n)$, (t_n) converge plus vite que (S_n).

Théorème 1.2 :

Soit $\mathcal{S} \subset \mathrm{conv}(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$, un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que : $\forall n > n_0$, $\left|(S_{n+1}-S)/(S_n-S)\right| \geqslant \lambda$

Si $\mathcal{S}$ est accélérable, alors $\mathcal{S}$ est F_∞-accélérable.

Démonstration :

- Supposons que $\mathcal{S}$ soit accélérable, alors il existe une transformation normale T sur $\mathcal{S}$, telle que : $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$,
  $T : (S_n) \to (t_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} (t_n - S)/(S_n - S) = 0$.

  Nous allons montrer que $\mathcal{S}$ est F_∞ - accélérable par T.

- Supposons que $\mathcal{S}$ ne soit pas F_∞ - accélérable par T.
  D'après cette hypothèse, il existe une suite $(S_n) \in \mathcal{S}$, telle que :

  $\lim\limits_{n\to\infty} D(n) \neq +\infty$

  avec : $D(n) = \begin{cases} \min\left\{N \in \mathbb{N} \mid \forall m > N,\ m \in \mathbb{N},\ |S_m - S| < |t_n - S|\right\} & \text{si } t_n \neq S \\ +\infty & \text{si } t_n = S \end{cases}$

  Donc on peut toujours trouver un rang $M \in \mathbb{N}$, une suite $(m_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, (m_k) croissante et tendant vers $+\infty$, tels que : $\forall k \in \mathbb{N}$,

  $D(m_k) < M$.

  On a alors : $D(m_k) = P(m_k) - m_k < M$.

  Donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(m_k) < m_k + M$.

  Selon la propriété 1.1, on a alors : $|S_{m_k+M} - S| < |t_{m_k} - S|$

- Puisque $(S_n) \in \mathcal{S}$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que : $\forall n > n_0$, $S_n \neq S$ et $\left|(S_{n+1}-S)/(S_n-S)\right| \geqslant \lambda$.

  Puisque $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = +\infty$.

  Donc il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall k > k_0$, $m_k > n_0$.

On a alors : $\forall\, k > k_0$

$$\frac{|S_{m_k+M} - S|}{|S_{m_k} - S|} = \frac{|S_{m_k+M} - S|}{|S_{m_k+M-1} - S|} \cdots \frac{|S_{m_k+1} - S|}{|S_{m_k} - S|} \geqslant \lambda^M .$$

- Puisque $\forall\, k > k_0$, $|S_{m_k+M} - S| < |t_{m_k} - S|$
  On a : $\lambda^M |S_{m_k} - S| \leqslant |S_{m_k+M} - S| < |t_{m_k} - S|$, $\forall\, k > k_0$
  Et donc $|(t_{m_k} - S)/(S_{m_k} - S)| \geqslant \lambda^M \quad \forall\, k > k_0$.
  Puisque $\lim_{k\to\infty} m_k = +\infty$
  Cela est contradictoire avec $\lim_{n\to\infty} (t_n - S)/(S_n - S) = 0$ et donc notre hypothèse que $\mathcal{S}$ n'est pas F_∞-accélérable par T est fausse.

REMARQUE :

Dans ce théorème, La condition : $(S_{n+1} - S)/(S_n - S) \geqslant \lambda > 0$ n'est pas nécessaire, mais " Si $\mathcal{S}$ est accélérable par T, alors $\mathcal{S}$ est F_∞ - accélérable par T " est fausse.

Voici un exemple :

Posons : $S_n = 1/n^n$, $T : (S_n) \to (t_n)$, $t_n = S_n/n \quad \forall\, n \geqslant 1$.
Puisque $\lim_{n\to\infty} (t_n - 0)/(S_n - 0) = \lim_{n\to\infty} (S_n/n - 0)/S_n = 0$
Donc La suite (S_n) est accélérable par la transformation T.
D'un autre côté, puisque $\forall\, j > n$, $j \in \mathbb{N}$, $S_j - 0 > t_n - 0$
Donc $p(n) = \min\{N \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, m > N,\ |S_m - 0| < |t_n - 0|\} \leqslant n$

$D(n) = p(n) - n \leqslant 0 \qquad \forall\, n > 1,\ n \in \mathbb{N}$

Donc la suite (S_n) n'est pas F - accélérable par T.
Dans ce cas, on ne peut pas simplement dire que le concept de F-accélération est plus fort que le concept d'accélération de La convergence, en effet, La transformation T, dans ce cas ne nous aide pas beaucoup.

Théorème 1.3 :

Soit $\mathcal{S} \subset \text{conv}(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$, $\beta \in \mathbb{R}^{*+}$, $0 < \alpha \leqslant \beta < 1$, et un rang $N \in \mathbb{N}$, tels que : $\forall n > N$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leqslant (S_{n+1} - S)/(S_n - S) \leqslant \beta$.
alors $\mathcal{S}$ est accélérable si et seulement si $\mathcal{S}$ est F_∞-accélérable.

Démonstration :

a) Supposons que $\mathcal{S}$ soit accélérable.
Puisque $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$, $0 < \alpha < 1$, un rang N, tels que $\forall n > N$, $(S_{n+1} - S)/(S_n - S) \geqslant \alpha$.
Donc selon le théorème 1.2, $\mathcal{S}$ est F_∞-accélérable.

b) Supposons que $\mathcal{S}$ soit F_∞-accélérable
Il existe une transformation normale T, telle que $\mathcal{S}$ est F_∞-accélérable par T.
Nous allons montrer que $\mathcal{S}$ est aussi accélérable par T.
Donc $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $T : (S_n) \to (t_n)$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$p(n) = \begin{cases} \min\{N \in \mathbb{N} \mid \forall m > N,\ |S_m - S| < |t_n - S|\} & \text{si } t_n \neq S \\ +\infty & \text{si } t_n = S \end{cases}$$

$$D(n) = p(n) - n.$$

On a alors $\lim_{n\to\infty} D(n) = +\infty$

- $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$, $\beta \in \mathbb{R}^{*+}$, $0 < \alpha \leqslant \beta < 1$ tels que : $\forall n > N$, $n \in \mathbb{N}$, $S_n \neq S$ et $\alpha \leqslant \dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S} \leqslant \beta$
- Considérons la suite (t_n), nous la divisons en deux parties :

$$t_n = \begin{cases} t_{l_k} & \text{si } n = l_k,\ t_n = S \\ t_{m_k} & \text{si } n = m_k,\ t_n \neq S. \end{cases}$$

Considérons la suite $(l_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Si $l_k > N$,

Puisque $S_{l_k} \neq S$, $t_{l_k} = S$,

On a : $(t_{l_k} - S)/(S_{l_k} - S) = 0$.

Considérons la suite $(m_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

<u>Cas 1</u> : il existe un rang $M \in \mathbb{N}$, tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $m_k < M$.

Alors : $\forall n > M$, $t_n = S$.

Et donc $\lim\limits_{n \to \infty} (t_n - S)/(S_n - S) = 0$

<u>Cas 2</u> : $\lim\limits_{k \to \infty} m_k = +\infty$

Puisque $t_{m_k} \neq S$

On a $p(m_k) = \min\{N \in \mathbb{N} \mid \forall m > N, |S_m - S| < |t_{m_k} - S|\}$

Selon la propriété 1.1, on a alors :

$|S_{p(m_k)} - S| \geqslant |t_{m_k} - S|$

Puisque $\lim\limits_{k \to \infty} m_k = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to \infty} D(n) = +\infty$

Donc il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall k > k_0$, $m_k > N$, et $D(m_k) \geqslant 1$.

On a : $\forall k > k_0$, $S_{m_k} \neq S$ et $D(m_k) \geqslant 1$.

alors : $|S_{p(m_k)} - S| = |S_{m_k + D(m_k)} - S|$

$$= \frac{|S_{m_k + D(m_k)} - S|}{|S_{m_k + D(m_k) - 1} - S|} \cdots \frac{|S_{m_k + 1} - S|}{|S_{m_k} - S|} \cdot |S_{m_k} - S|$$

$$\leqslant \beta^{D(m_k)} \cdot |S_{m_k} - S|.$$

Puisque $|S_{p(m_k)} - S| \geqslant |t_{m_k} - S|$

et $|S_{m_k} - S| \neq 0$. $\forall k > k_0$

On a : $\dfrac{|t_{m_k} - S|}{|S_{m_k} - S|} \leqslant \beta^{D(m_k)} \qquad \forall k > k_0$.

Puisque $0 < \beta < 1$

On a : $\lim_{n \to \infty} \beta^n = 0$.

Puisque $\lim_{n \to \infty} D(n) = +\infty$ et $\lim_{k \to \infty} m_k = +\infty$

On a $\lim_{k \to \infty} \beta^{D(m_k)} = 0$.

Alors : $\lim_{k \to \infty} \dfrac{|t_{m_k} - S|}{|S_{m_k} - S|} = 0$

Dans le cas 1 et le cas 2, on a $\lim_{n \to \infty} \dfrac{|t_n - S|}{|S_n - S|} = 0$ et donc $\mathcal{S}$ est accélérable par T

Exemple a) Lin $\subset$ conv($\mathbb{R}$) est défini par :

$$\begin{cases} \forall (S_n) \in \text{Lin}, \text{ il existe } a \in \mathbb{R}^{*+}, \ 0 < |a| \leq 1, \ a \neq 1 \text{ tel que} \\ \lim_{n \to \infty} (S_{n+1} - S)/(S_n - S) = a \end{cases}$$

alors Lin est F_∞ - accélérable.

Démonstration :

On sait que Lin est accélérable. $\forall (S_n) \in$ Lin, il existe $a \in \mathbb{R}^{*+}$. $|a| > 0$ tel que $\lim_{n \to \infty} \dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = a$.

Donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n > N$ $\left|\dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S}\right| > \dfrac{|a|}{2} > 0$.

Selon le théorème 1.2, biensûr, on pourrait aussi utiliser le théorème 1.3 Lin est F_∞ - accélérable.

Exemple b) Soit $(\varepsilon_n) \in \text{conv}_0(\mathbb{R}^{*+})$

posons que $\mathcal{S} = \left\{(X_n) \in \text{conv}(\mathbb{R}) \mid \exists N, \forall n > N, x_n - x \neq 0, \left|\dfrac{X_n - X}{X_{n-1} - X} + 1\right| < 2\varepsilon_n\right\}$

alors $\mathcal{S}$ est F_∞ - accélérable.

Démonstration :

On sait que $\mathcal{S}$ est accélérable par la transformation normale définie par : $t_n = (X_n + X_{n+1})/2$. $T : (S_n) \to (t_n)$

en effet, $\left|(t_n - X)/(X_n - X)\right| = \left|\dfrac{X_n - X + X_{n-1} - X}{2(X_n - X)}\right| \leqslant \varepsilon_n$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_n - X}{X_n - X} = 0$

D'un autre côté, $\forall (X_n) \in \mathcal{S}$,

puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \left|(X_n - X)/(X_{n-1} - X)\right| = 1$,

donc il existe un rang N, tel que : $\forall n > N$, $\left|\dfrac{X_n - X}{X_{n-1} - X}\right| > \dfrac{1}{2}$.

Selon le théorème 1.2, $\mathcal{S}$ est donc F_∞-accélérable.

V RAPPORT ENTRE F-ACCELERATION ET CONTRACTION.

A cause de la limitation du concept d'accélération de la convergence, en 1989, C. BREZINSKI a proposé un nouveau concept, la contraction des transformations de suites.

Soit $\mathcal{S} \subset \mathrm{conv}(\mathbb{R})$, on dit que T est une contraction sur $\mathcal{S}$, si $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $T: (S_n) \to (t_n)$, il existe $k_1 \in \mathbb{R}$, $k_2 \in \mathbb{R}$, $-1 < k_1 \leqslant k_2 < 1$, et il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tels que : $\forall n > N$, $k_1 \leqslant |t_n - s| / |S_n - s| \leqslant k_2$

Théorème 1.4.

Soit $\mathcal{S} \subset \mathrm{log}$, si T est une contraction sur $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}$ est F_∞-accélérable par T.

Démonstration :

Supposons que $\mathcal{S}$ ne soit pas F_∞-accélérable par T,
D'après cette hypothèse, on peut trouver une suite $(S_n) \in \mathcal{S}$, $T: (S_n) \to (t_n)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} D(n) \neq +\infty$.

avec $p(n) = \begin{cases} \min\{N \in \mathbb{N} \,/\, \forall m > N,\ |S_m - S| < |t_m - S|\} & \text{si } t_m \neq S. \\ +\infty, & \text{si } t_m = S \end{cases}$

$D(n) = p(n) - n.$

Donc il existe une suite $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante et tendant vers $+\infty$, il existe un rang $M \in \mathbb{N}^*$, tels que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $D(n_k) < M$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $D(n_k) = p(n_k) - n_k < M$ et $p(n_k) < n_k + M$.

Selon la propriété 1.1, on a alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $|S_{n_{k+M}} - S| < |t_{n_k} - S|$

- Par l'hypothèse que T est une contraction sur $\mathcal{S}$.
  alors il existe une constante $a \in \mathbb{R}^{*+}$, $0 < a < 1$, et un rang $N \in \mathbb{N}$, tels que : $\forall n > N$ $|t_n - S| / |S_n - S| < a$.
  on a : $\forall n > N$, $|t_n - S| < a|S_n - S|$.
  Puisque $\lim\limits_{k \to \infty} n_k = +\infty$,
  donc il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall k > k_0$, $n_k > N$
  On a : $|t_{n_k} - S| < a|S_{n_k} - S|$, $\forall k > k_0$.

- Alors : $|S_{n_{k+M}} - S| < |t_{n_k} - S| < a|S_{n_k} - S|$ $\forall k > k_0$,
  et donc $|S_{n_{k+M}} - S| < a|S_{n_k} - S|$ $\forall k > k_0$.

- Puisque $(S_n) \in \text{Log}$, on pose $\lambda_n = 1 - (S_{n+1} - S)/(S_n - S)$
  On a : $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$ et il existe un rang N', $\forall n > N'$, $S_n \neq S$.
  Alors : $S_{n_{k+M}} - S = |(1 - \lambda_{n_{k+M-1}}) \cdots (1 - \lambda_{n_k})|\, |S_{n_k} - S|$
  Donc $|(1 - \lambda_{n_{k+M-1}}) \cdots (1 - \lambda_{n_k})|\, |S_{n_k} - S| < a|S_{n_k} - S|$, $\forall k > k_0$.

- Il existe un rang $k^*(> k_0)$ tel que $\forall k > k^*$, $n_k > N'$.
  Donc $\forall k > k^*$ $|S_{n_k} - S| \neq 0$.
  On a alors : $\forall k > k^*$ $|(1 - \lambda_{n_{k+M-1}}) \cdots (1 - \lambda_{n_k})| < a$
  Puisque $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$ et $\lim\limits_{k \to \infty} n_k = +\infty$ et M indépendant de k.

On a : $\lim_{k \to \infty} (1 - \lambda_{m_k + M - 1}) \cdots (1 - \lambda_{m_k}) = 1$

Cela est contradictoire avec $a < 1$.

Donc notre hypothèse que $\mathcal{S}$ n'est pas F_∞-accélérable par T est fausse.

Théorème 1.5 :

Soit $\mathcal{S} \subset \text{conv}(\mathbb{R})$, T une transformation sur $\mathcal{S}$. S'il existe une suite $(S_n) \in \mathcal{S}$, $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$, $a \in \mathbb{R}^{*+}$, $0 < \lambda < 1$, un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$\forall n > N$, $|(S_{n+1} - S)/(S_n - S)| \leqslant \lambda$, $|(t_n - S)/(S_n - S)| \geqslant a$, $S_n \neq S$,

alors $\mathcal{S}$ n'est pas F_∞-accélérable par T.

Démonstration :

Supposons que $(S_n) \in \mathcal{S}$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{*+}$, $0 < \lambda < 1$, $a \in \mathbb{R}^{*+}$, $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$\forall n > N$, $S_n \neq S$, $|(S_{n+1} - S)/(S_n - S)| \leqslant \lambda$, $|(t_n - S)/(S_n - S)| \geqslant a$.

alors la suite $(|S_n - S|)$ est décroissante à partir du rang N.

Puisque $\lim_{n \to \infty} \lambda^n = 0$,

donc il existe un rang $M \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n \geqslant M$, $\lambda^n < a$.

On a alors : $\forall n > N$,

$$|S_{n+M+1} - S| = \frac{|S_{n+M+1} - S|}{|S_{n+M} - S|} \cdots \frac{|S_{n+1} - S|}{|S_n - S|} \cdot |S_n - S|$$

$$\leqslant \lambda^M |S_n - S| < a\, |S_n - S| .$$

Puisque $\forall n > N$, $|t_n - S| \geqslant a\,|S_n - S|$,

On a : $\forall n > N$ $|S_{n+M+1} - S| < |t_n - S|$.

Puisque la suite $S_n - S$ décroissante à partir du rang N

On a : $|S_j - S| < |t_n - S| \quad \forall j > n + M$.

et $p(n) = \min \{ N \in \mathbb{N} \mid \forall m > N, \ |S_m - S| < |t_n - S| \}$
$\leqslant n + M$.

$\forall n > N$, $D(n) = p(n) - n \leqslant M$. Donc $\lim_{n \to \infty} D(n) \neq +\infty$.

Chapitre 2

LES FAMILLES F-ACCÉLÉRABLES

I QUELQUES ENSEMBLES CONNUS.

Dans le chapitre 1, nous avons déjà présenté quelques familles F_∞-accélérables, mais elles sont accelérables (ou contractables). Dans ce qui suit, nous allons présenter un certain nombre de familles de suites F_∞ - accélérables qui ne sont pas accélérables (ou contractables).

Quels ensembles de suites sont non-accélérables (ou contractables) ? En 1982, J. P. DELAHAYE et B. GERMAIN-BONNE ont proposé un concept, la rémanence [4]. Ils ont montré que les ensembles rémanent (au sens général ou au sens restreint) sont non-accé-lérables.

Nous rappellons cette définition, on dit que $\mathcal{S}$ possède la propriété de rémanence générale si

a) il existe une suite $(X^n) \subset \text{conv}^*(\mathbb{R})$ de Limite X, telle que :

1) il existe $(X_n^0) \in \mathcal{S}$, telle que $(X_n^0) \longrightarrow X^0$

2) pour tout $m_0 \geqslant 0$, il existe $P_0 > m_0$ et $(X'_m) \in \mathcal{S}$, tels que : $(X'_m) \longrightarrow X'$, et $\forall m \leqslant P_0$, $X'_m = X^0_m$.

3) pour tout $m_1 > P_0$, il existe $P_1 > m_1$ et $(X^2_m) \in \mathcal{S}$, tels que : $(X^2_m) \longrightarrow X^2$, et $\forall m \leqslant P_1$, $X^2_m = X'_m$.

⋮

(k+1)) pour tout $m_{k-1} > P_{k-2}$, il existe $P_{k-1} > m_{k-1}$ et $(X^k_m) \in \mathcal{S}$ tels que : $(X^k_m) \longrightarrow X^k$, et $\forall m \leqslant P_{k-1}$, $X^k_m = X^{k-1}_m$.

⋮

b) $(X^0_0, X^0_1, \ldots, X^0_{P_0}\ X^1_{P_0+1}, \ldots X^2_{P_1} \ldots X^k_{P_{k-1}+1}, X^k_{P_{k-1}+2}, \ldots X^k_{P_k} \ldots) \in \mathcal{S}$.

Nous avons remarqué que pour un ensemble remanent, il existe des suites qui convergent très lentement.
On dit : "elles convergent trop lentement pour pouvoir être accélé-
-rées ".
Mais puisqu'elles convergent trop lentement, on doit justement les " accélérer ", et donc on ne peut pas arrêter l'étude de ces ensembles.
Nous posons une question : " Est-ce qu'ensemble rémanent n'est pas F_∞ - accélérable ? ". Dans les études suivantes, nous allons répondre à cette question.

D'abord, nous rappellons quelques ensembles connus.

Log est défini par :

$$Log = \left\{ (S_n) \in CONV^*(\mathbb{R}) \;/\; \frac{S_{n+1}-S}{S_n - S} = 1 - \lambda_n \,,\, \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0 \right\}$$

LOGSF, cet ensemble a été défini par Smith et Ford [9]

$$LOGSF = \left\{ (S_n) \in CONV^*(\mathbb{R}) / \lim_{n\to\infty} \Delta S_{n+1}/\Delta S_n = 1 \right\}$$

Nous rappellons les ensembles que Christine KOWALEWSKI a définis dans [10].

$$LOG\,1 = \left\{ (S_n) \in Log \;/\; \lambda_n = 1 - \frac{S_{n+1}-S}{S_n-S} \,,\, \exists N \in \mathbb{N} \,,\, \forall n > N \,,\, \lambda_n > 0 \right\}$$

$$LOG\,2 = \left\{ (S_n) \in LOG\,1 \;/\; (\lambda_n) \in LOG\,1 \right\}$$

$$LOG\,3 = \left\{ (S_n) \in LOG\,2 \;/\; (\lambda_n) \in LOG\,2 \right\}$$

$$\vdots$$

$$LOG\,N = \left\{ (S_n) \in LOG(N-1) \;/\; (\lambda_n) \in LOG(N-1) \right\} \quad (N > 1)$$

$$LOG = \bigcap LOG\,N \quad , N \in \mathbb{N}^* .$$

$$\varphi \in \mathbb{R} \,,\; 0 < \varphi < 1 \;,\; L\varphi = \left\{ (S_n) \in Log \,\middle|\, \lim \left(\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} - 1 \right) \Big/ \left(\frac{\Delta\varphi_{n+1}}{\Delta\varphi_n} - 1 \right) = \varphi \right\}$$

où $\varphi_n = S_n - S$.

On définira LOG_1^+ par :

$LOG_1^+ = \{(S_n) \in Log \mid (\lambda_n)$ est strictement décroissante, à partir d'un certain rang$\}$

On rappelle quelques propriétés de ces ensembles :

a) $LOGSF \subset LOG1 \subset Log$

b) $LOG \subset \dots \subset LOG(N+1) \subset LOGN \subset \dots \subset LOG2 \subset LOG1 \subset Log$.

c) J. P DELAHAYE et B. GERMAIN-BONNE ont montré que LOGSF n'était pas accélérable [4]. E. Kowalewski a montré que $LOG2 \cap (\cup L\varphi)$ $\varphi \in [0, t]$, $(t \in (0,1))$ est rémanent donc qu'il n'était pas accélérable [10].

d) On ne sait pas si l'ensemble LOG est accélérable.

__Propriété 2.1__ : $LOG2 \subset LOG^+1 \subset LOG1$, $LOG2 \subset LOGSF$.

__Démonstration__ :

a) Si $(S_n) \in LOG2$, alors on a : $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$,

et il existe un rang N, tel que $\forall n > N$, $1 > \lambda_n > 0$, $1 > \mu_n > 0$.

où $\lambda_n = 1 - (S_{n+1}-S)/(S_n - S)$, $\mu_n = 1 - \lambda_{n+1}/\lambda_n$.

Puisque $\forall n > N$, $|\lambda_{n+1}| = |1 - \mu_n|\,|\lambda_n| < |\lambda_n|$,

donc la suite $(|\lambda_n|)$ est décroissante strictement à partir du rang N.

Puisque $\forall n > N$, $|\lambda_n| = \lambda_n$,

on a : $(S_n) \in LOG^+1$.

Puisque $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{-\lambda_{n+1}(S_{n+1}-S)}{-\lambda_n(S_n - S)} = 1$

On a : $(S_n) \in LOGSF$.

b) Si $(S_n) \in LOG^+1$,

il existe un rang N, tel que la suite (λ_n) est décroissante strictement à partir du rang N.

Puisque $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$

donc λ_n ne peut être inférieur (ou égal) à zéro $(\forall n > N)$,

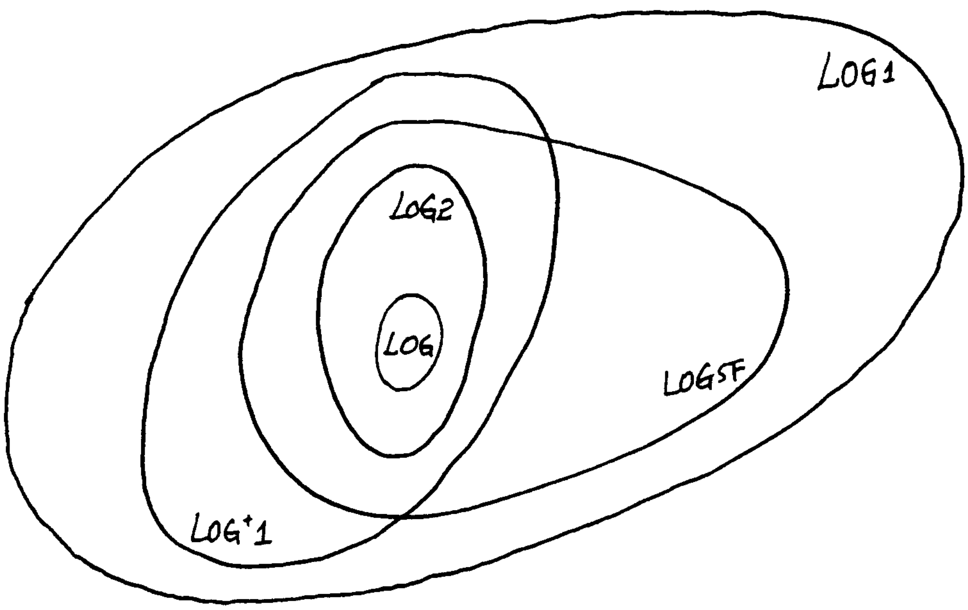
sinon, puisque (λ_n) décroissante à partir du rang N.

on aurait $0 \geq \lambda_n > \lambda_{n+1} > \dots$ $(n > N)$, c'est-à-dire

que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n \neq 0$, ce qui est contradictoire.

donc $\lambda_n > 0$, $\forall n > N$

donc $(S_n) \in LOG\,1$.



II L'ENSEMBLE LOG 2 EST F_∞-ACCELERABLE

Lemme 2.1 :

Soit $\mathcal{S} \subset LOG^+1$, et T une transformation NORMALE sur $\mathcal{S}$, $(S_n) \in \mathcal{S}$, $T : (S_n) \to (t_n)$.

On pose : $A_n = 1 - (t_n - s)/(s_n - s)$, $\lambda_n = 1 - (s_{n+1} - s)/(s_n - s)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si : $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $\exists N$ tel que $\forall n > N$: $0 < A_n < 1$

et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{\lambda_n} = +\infty$

alors $\mathcal{S}$ est F_∞-accélérable par T.

Démonstration :

Supposons que $\mathcal{S}$ ne soit pas F_∞-accélérable par T.

D'aprés cette hypothèse, il existe une suite $(S_n) \in \mathcal{S}$ telle que :

$\lim\limits_{n\to\infty} D(n) \neq +\infty$

avec $p(n) = \begin{cases} \min\{N \in \mathbb{N} \,/\, \forall m > N,\ |S_m - S| < |t_n - S|\} & \text{si } t_n \neq s \\ +\infty & \text{si } t_n = s \end{cases}$

$$D(n) = p(n) - n$$

Donc on peut trouver une suite $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante et tendant vers $+\infty$, et un rang $M \in \mathbb{N}$, tels que : $D(n_k) < M$, $\forall k \in \mathbb{N}$

- Puisque $(S_n) \in \mathcal{S} \subset LOG^+1$,

  donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n > N$,

  $S_n \neq S$, et $0 < \lambda_n < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, (λ_n) décroissante strictement à partir du rang N.

  Puisque M indépendant de n,

  on a : $\forall n > N$,

  a) $0 < (1 - \lambda_{n+M-1})(1 - \lambda_{n+M-2}) \cdots (1 - \lambda_n) < 1$

  b) $1 - (\lambda_{n+M-1}) \cdots (1 - \lambda_n) = 1 - M\lambda_n + o(\lambda_n)$

Donc il existe un rang N' $(N'>N)$ tel que $\forall n > N'$

a) $0 < 1-(M+1)\lambda_n < 1$

b) $0 < 1-(\lambda_{n+M-1})\cdots(1-\lambda_n)-(1-(M+1)\lambda_n) < 1$.

• Puisque $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$

donc il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall k > k_0$, $n_k > N'$.

Donc :

a) $0 < 1-(M+1)\lambda_{n_k} < 1$

b) $0 < (1-\lambda_{n_k+M-1})\cdots(1-\lambda_{n_k})-(1-(M+1)\lambda_{n_k}) < 1$.

• Puisque $\forall k \in \mathbb{N}$, $D(n_k) < M$

On a : $\forall k \in \mathbb{N}$ $P(n_k) < n_k + M$.

Selon la propriété 1.1,

on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $|S_{n_k+M}-S| < |t_{n_k}-S|$.

Puisque $|S_{n_k+M}-S| = |(1-\lambda_{n_k+M-1})\cdots(1-\lambda_{n_k})|\ |S_{n_k}-S|$,

et $|t_{n_k}-S| = |(1-A_{n_k})|\ |S_{n_k}-S|$.

On a : $\forall k > k_0$ $k \in \mathbb{N}$, $(0 < A_{n_k} < 1)$

$$|S_{n_k+M}-S| \geq (1-(M+1)\lambda_{n_k})\ |S_{n_k}-S|$$

$$|t_{n_k}-S| = (1-A_{n_k})\ |S_{n_k}-S|.$$

Puisque $|S_{n_k}-S| \neq 0$.

On a : $1-(M+1)\lambda_{n_k} < 1-A_{n_k}$.

et $\dfrac{A_{n_k}}{\lambda_{n_k}} < M+1$ $\qquad \forall k > k_0 \quad k \in \mathbb{N}$.

Cela est contradictoire avec $\left(\lim_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{\lambda_n} = +\infty\right)$

Donc notre hypothèse que S n'est pas F_∞-accélérable par T est fausse.

Théorème 2.1 :

L'ensemble LOG 2 est F_∞-accélérable par le procédé Δ^2- d'Aitken.

Démonstration :

Soit $(S_n) \in$ LOG 2, posons $\lambda_n = 1 - (S_{n+1} - S)/(S_n - S)$,

$\mu_n = 1 - \lambda_{n+1}/\lambda_n$.

Donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n > N$, $n \in \mathbb{N}$,

a) $0 < \lambda_n < 1$, $0 < \mu_n < 1$.

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \mu_n = 0$.

Supposons que T soit le procédé Δ^2- d'Aitken, $T : (S_n) \longrightarrow (t_n)$

$$t_n = S_n - (\Delta S_n)^2 / \Delta^2 S_n$$

Puisque
$$\Delta S_n = -\lambda_n (S_n - S),$$
$$\Delta S_{n+1} = -\lambda_{n+1}(1-\lambda_n)(S_n - S),$$
$$\Delta^2 S_{n+1} = (-\lambda_{n+1}(1-\lambda_n) + \lambda_n)(S_n - S),$$

On a :
$$\frac{t_n - S}{S_n - S} = \frac{1}{S_n - S}\left(S_n - S - \frac{(-\lambda_n (S_n - S))^2}{(-\lambda_{n+1}(1-\lambda_n) + \lambda_n)(S_n - S)}\right)$$
$$= 1 - \frac{\lambda_n}{-\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}(1-\lambda_n) + 1}.$$

Puisque $\lambda_{n+1}/\lambda_n = 1 - \mu_n$.

On a : $-\lambda_{n+1}/\lambda_n \cdot (1-\lambda_n) + 1 = \lambda_{n+1} + \mu_n$.

et $\dfrac{t_n - S}{S_n - S} = 1 - \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1} + \mu_n}$.

On pose $A_n = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1} + \mu_n}$.

Alors :

a) $\forall n > N$, puisque $\lambda_n > 0$, $\mu_n > 0$, on a : $A_n > 0$

b) $\forall n > N$, puisque $0 < \lambda_n < 1$, $0 < \mu_n < 1$.

et $\lambda_{n+1} + \mu_n - \lambda_n = \Delta\lambda_n + \mu_n = -\mu_n\lambda_n + \mu_n = \mu_n(1-\lambda_n) > 0$
donc $A_n < 1 \quad \forall n > N$.

c) puisque $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$

on a : $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{\lambda_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1}+\mu_n} = +\infty$

Donc selon le Lemme 2.1, LOG 2 est F_∞-accélérable par le procédé Δ^2- d'Aitken.

Lemme 2.2 :

Soit $S \subset LOG^+1$, T une transformation sur S, s'il existe une suite $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante et tendant vers $+\infty$ telle que si l'on pose $A_{n_k} = 1 - \frac{t_{n_k} - s}{s_{n_k} - s}$

$$p(n_k) = \begin{cases} \min\{N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N,\ |s_n - s| < |t_{n_k} - s|\} & t_{n_k} \neq s \\ +\infty & \text{si } t_{n_k} = s. \end{cases}$$

$D(n_k) = p(n_k) - n_k$.

a) $0 < A_{n_k} < 1 \quad , \forall k \in \mathbb{N}$

b) $\lim_{k\to\infty} \frac{A_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = +\infty$

Alors on a : $\lim_{k\to\infty} D(n_k) = +\infty$.

Démonstration :

La démonstration de ce lemme est tout simplement comme celle du lemme 2.1.

Remarque :

En 1983, C. BREZINSKI, J. P DELAHAYE et B. GERMAIN-BONNE ont proposé une méthode pour accélérer une suite en accélérant une sous-suite. Il a dit que cette idée était très efficace.
Selon le Lemme 2.2, on peut aussi construire des procédés pour améliorer la convergence des suites en améliorant la convergence de sous-suites.

III L'ENSEMBLE LOG$^+1$

Nous donnons une définition équivalente de LOG$^+1$:

$$LOG^+1 = \left\{ (S_n) \in Log \;\; \lambda_n = 1 - \frac{S_{n+1}-S}{S_n - S},\; \mu_n = 1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n},\; \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0,\; \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \;\; 0 < \mu_n < 1 \right\}$$

<u>Théorème 2.2</u> :

Il existe une transformation normale T sur LOG$^+1$ et il existe une suite $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante et tendant vers $+\infty$, telles que :

$$\lim_{k\to\infty} D(n_k) = +\infty$$

Pour démontrer ce théorème, on va utiliser les Lemmes suivants.

<u>Lemme 2.3</u> :

Si $(S_n) \in$ LOG$^+1$, on pose $\lambda_n = 1 - \dfrac{S_{n+1}-S}{S_n - S}$

Alors il existe une suite $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante et tendant vers $+\infty$, telle que : $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_{k+1}}}{\lambda_{n_k}} = 1$.

<u>Démonstration</u> :

Supposons $(S_n) \in$ LOG$^+1$ et que $\forall n > N$, $\lambda_n > 0$, et la suite (λ_n) strictement décroissante à partir du rang N.

On a alors : $\forall n > N$, $S_n \neq S$, $\quad 0 < \lambda_{n+1}/\lambda_n < 1$.

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$

il existe un rang N' $(N' > N)$, tel que : $\forall n > N'$, $0 < \lambda_n < 1$.

- Considérons la limite $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$

  puisque $\forall n > N'$, $\quad 0 < \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} < 1$

  on a : $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ existe $= l$, $\quad 0 \leq l \leq 1$

a) Supposons que $0 \leq l < 1$

D'après cette hypothèse on peut trouver une constante $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ et un rang N^* $(N^* > N')$ tels que : $\forall n > N^*$, $0 < \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} < a$

on a alors : $\forall n > N^*$, $0 < \lambda_n < a^{n-N^*}\lambda_{N^*}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} a^{n-N^*} \cdot \lambda_{N^*}/n^2 = 0$.

il existe un rang $\overline{N} \in \mathbb{N}$, $(\overline{N} > N^*)$ tel que : $\forall n > \overline{N}$, $0 < a^{n-N^*}\lambda_{N^*} < \frac{1}{n^2}$

on a alors : $\forall n > \overline{N}$

$$|S_{n+\overline{N}+1} - S| = |(1-\lambda_{n+\overline{N}})\dots(1-\lambda_{\overline{N}})|\ |S_{\overline{N}} - S|$$

On pose $p_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{\overline{N}^2}\right)$, $n > \overline{N}$.

Puisque $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge et $\frac{1}{n^2} > 0$

$$p(n) \text{ converge et } \lim_{n\to\infty} p_n \neq 0.$$

On pose $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$

on a alors : $\forall n > \overline{N}$, $|S_{n+\overline{N}+1} - S| \geq p\,|S_{\overline{N}} - S|$

où $p \neq 0$, $S_{\overline{N}} \neq S$

Cela est contradictoire avec $\left(\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S\right)$

Donc notre hypothèse que $0 \leq l < 1$ est fausse

donc $l = 1$

b) Puisque $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$

Donc il existe une suite $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante et tendant vers $+\infty$, telle que $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{n_k+1}/\lambda_{n_k} = 1$

Lemme 2.4 :

Soit $(S_n) \in LOG^+1$, et $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante et tendant vers $+\infty$, alors : $\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}} = 1$ si et seulement si

$$\lim_{k\to\infty} (\Delta S_{n_k+1})/\Delta S_{n_k} = 1$$

Démonstration :

Puisque $(S_n) \in LOG^+1$.

Donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n > N$, $\lambda_n > 0$, $\Delta S_n \neq 0$.

Puisque $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$

donc il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall k > k_0 \quad n_k > N$.

On a alors : $\frac{\Delta S_{n_k+1}}{\Delta S_{n_k}} = \frac{S_{n_k+1} - S}{S_{n_k} - S} \cdot \frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}}$.

Puisque $\lim_{k\to\infty} \frac{S_{n_k+1} - S}{S_{n_k} - S} = 1$

donc $\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}} = 1$ si et seulement si $\lim_{k\to\infty} \frac{\Delta S_{n_k+1}}{\Delta S_{n_k}} = 1$

Lemme 2.5 :

Soit $(S_n) \in LOG^+1$, alors il existe une suite $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, telle que :

a) $\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$

b) $\lim_{k\to\infty} \frac{\Delta S_{n_k+1}}{\Delta S_{n_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}} = 1$

où $\lambda_{n_k} = 1 - (S_{n_k+1} - S)/(S_{n_k} - S)$

Démonstration :

Soit $(S_n) \in LOG^+1$. On choisit $(U_n) \in \text{conv}_0(\mathbb{R}^{*+})$ (par exemple $V_n = \frac{1}{n}$). On considère le procédé suivant :

pas 0

$i = 0$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} V_1, & \text{si } 1 - \Delta S_1/\Delta S_0 = 0 \\ \min\left\{V_1, \left|1 - \Delta S_1/\Delta S_0\right|\right\} & \text{si } 1 - \dfrac{\Delta S_1}{\Delta S_0} \neq 0 \end{cases}$$

pas 1

$i = i + 1$

$$\left|\frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i} - 1\right| < \varepsilon_1 \ ?$$

NON — oui

On pose $m_1 = i$, calcule $\Delta S_{m_1+1}/\Delta S_{m_1}$

on pose
$$\varepsilon_2 = \begin{cases} V_2, & \text{si } 1 - \Delta S_{m_1+1}/\Delta S_{m_1} = 0 \\ \min\left\{V_2, \left|1 - \Delta S_{m_1+1}/\Delta S_{m_1}\right|\right\}, & \text{si } 1 - \dfrac{\Delta S_{m_1+1}}{\Delta S_{m_1}} \neq 0 \end{cases}$$

pas 2

$i = i + 1$

$$\left|\frac{\Delta S_{i+1}}{\Delta S_i} - 1\right| < \varepsilon_2 \ ?$$

NON — oui

On pose $m_2 = i$, calcule $\Delta S_{m_2+1}/\Delta S_{m_2}$

on pose
$$\varepsilon_3 = \begin{cases} V_3, & \text{si } 1 - \Delta S_{m_2+1}/\Delta S_{m_2} = 0 \\ \min\left\{V_3, \left|1 - \Delta S_{m_2+1}/\Delta S_{m_2}\right|\right\} & \text{si } 1 - \dfrac{\Delta S_{m_2+1}}{\Delta S_{m_2}} \neq 0 \end{cases}$$

pas k

On pose $m_k = i$, calcule $\Delta S_{m_k+1}/\Delta S_{m_k}$

on pose
$$\varepsilon_{k+1} = \begin{cases} V_{k+1}, & \text{si } 1 - \Delta S_{m_k+1}/\Delta S_{m_k} = 0 \\ \min\left\{V_{k+1}, \left|1 - \dfrac{\Delta S_{m_k+1}}{\Delta S_{m_k}}\right|\right\} & \text{si } 1 - \dfrac{\Delta S_{m_k+1}}{\Delta S_{m_k}} \neq 0 \end{cases}$$

- Supposons que $(S_n) \in LOG^+1$.
  Nous allons montrer que notre procédé peut continuer jusqu'à infini.
  Considérons la suite $\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$ et la suite $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$.
  Puisque $(S_n) \in LOG^+1$, d'après le Lemme 2.3,
  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\frac{\Delta S_{n_0+1}}{\Delta S_{n_0}} - 1\right| < \varepsilon$
  Donc notre procédé peut continuer jusqu'à infini.

- Supposons que nous obtenions la suite (n_k) selon notre procédé.
  Puisque $n_{k+1} \geqslant n_k + 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
  Donc la suite (n_k) est croissante et tendant vers $+\infty$

- Selon notre procédé,
  On a : $\left|\frac{\Delta S_{n_k+1}}{\Delta S_{n_k}} - 1\right| < V_{n_k}$, où $(V_n) \in conv_0(\mathbb{R}^{*+})$
  Donc $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\Delta S_{n_k+1}}{\Delta S_{n_k}} = 1$
  Selon Lemme 2.4,
  on a alors : $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}} = 1$

Démonstration du théorème 2.2 :

a) En utilisant le procédé donné dans Lemme 2.5, on peut obtenir une suite $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante et tendant vers $+\infty$, telle que :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}} = 1 \qquad \left(\text{où } \lambda_n = 1 - (S_{n+1}-S)/(S_n - S)\right)$$

b) Soit T le procédé Δ^2 d'Aitken.
$\forall (S_n) \in LOG^+1$, $T : (S_n) \to (t_n)$, $t_n = S_n - (\Delta S_n)^2 / \Delta^2 S_n$

On pose $p(n) = \begin{cases} \min \{ N \in \mathbb{N} \mid \forall m > N, |S_m - S| < |t_n - S| \} & t_n \neq S \\ +\infty & t_n = S \end{cases}$

$$D(n) = p(n) - n$$

On va montrer que $\lim_{k \to \infty} D(n_k) = +\infty$

c) On pose $A_{n_k} = 1 - \frac{A_{n_k} - S}{S_{n_k} - S}$, $\mu_{n_k} = 1 - \frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}}$.

On a alors $A_{n_k} = \lambda_{n_k} / (\lambda_{n_k+1} + \mu_{n_k})$.

Puisque $(S_n) \in LOG^+1$

donc il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall k > k_0$

$0 < \lambda_{n_k} < 1$, $0 < \mu_{n_k} < 1$.

Puisque $\lim_{k \to \infty} \frac{\lambda_{n_k+1}}{\lambda_{n_k}} = 1$, on a : $\lim_{k \to \infty} \mu_{n_k} = 0$

- Considérons la suite (A_{n_k}).

Puisque $\forall k > k_0$, $1 > \lambda_{n_k} > 0$, $1 > \mu_{n_k} > 0$

On a : $A_{n_k} > 0$, $\forall k > k_0$.

Puisque $\lambda_{n_k+1} + \mu_{n_k} - \lambda_{n_k} = \mu_{n_k}(1 - \lambda_{n_k}) > 0$

On a : $A_{n_k} < 1$, $\forall k > k_0$.

Puisque $\lim_{k \to \infty} \lambda_{n_k} = \lim_{k \to \infty} \mu_{n_k} = 0$ on a : $\lim_{k \to \infty} \frac{A_{n_k}}{\lambda_{n_k}} = +\infty$

D'après le Lemme 2.2 , on a alors : $\lim_{k \to \infty} D(n_k) = +\infty$

IV L'ENSEMBLE LOG SF

Théorème 2.3 :

$\forall L \in \mathbb{N}^*$ LOG SF est F_L - accélérable.

Démonstration :

- Soit la transformation normale suivante :

$\forall (S_n) \in LOGSF$, $T : (S_n) \longrightarrow (t_n)$

$$t_n = \begin{cases} S_{n-2} - (\Delta S_{n-2})^2 / \Delta^2 S_{n-2} & \text{si } \left| \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{\Delta S_{n-1}}{\Delta S_{n-2}}\right)} \right| \leqslant 2M, \; n > 2 \\ S_{n-1} + 2M \cdot \Delta S_{n-1} & \text{si } \left| \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{\Delta S_{n-1}}{\Delta S_{n-2}}\right)} \right| > 2M \end{cases}$$

$\left(\text{où l'on choisit } M \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } \dfrac{\ln(3/2)}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{4M}\right)} > L + 3\right)$

- On pose $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4M}$.

$$p(n) = \begin{cases} \min\{N \in \mathbb{N} \mid \forall m > N, \; |S_m - S| < |t_n - S|\} & \text{si } t_n \neq S. \\ +\infty & \text{si } t_n = S \end{cases}$$

$D(n) = p(n) - n$

- Puisque $(S_n) \in LOGSF$,

Donc il existe un rang N, tel que $\forall n > N$, $n \in \mathbb{N}$,

→ $\left| \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1 \right| < \varepsilon_0$,

→ la suite (S_n) est strictement monotone à partir du rang N.

- Cas 1 : $S(n)$ est strictement croissante à partir du rang N

On a alors : $\forall n > N$, $S_n < S_{n+1} < \cdots < S$, $\Delta S_n > 0$.

Puisque $\forall n > N$, $\left| \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1 \right| < \varepsilon_0$,

On a : $\forall n > N$, $1 - \varepsilon_0 < \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} < 1 + \varepsilon_0$.

On a alors : $\forall n > N$, $\Delta S_{n+1} > (1 - \varepsilon_0) \Delta S_n$; $\Delta S_{n+1} < (1 + \varepsilon_0) \Delta S_n$

et $\Delta S_{n+j} > (1 - \varepsilon_0)^j \Delta S_n$; $\Delta S_{n+j} < (1 + \varepsilon_0)^j \Delta S_n$,

$j \in \mathbb{N}$.

Puisque $0 < 1-\varepsilon_0 < 1$, $\lim_{n\to\infty} (1-\varepsilon_0)^n = 0$,
donc il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que : $\forall k \geq k_0$,
$(1-\varepsilon_0)^k < \frac{1}{2}$.
On a alors : $\forall n > N$.

$$\begin{aligned} S_{n+k_0} &= S_n + \Delta S_n + \cdots + \Delta S_{n+k_0+1} \\ &\geq S_n + \Delta S_n + \cdots + (1-\varepsilon_0)^{k_0-1} \Delta S_n \\ &= S_n + \frac{1-(1-\varepsilon_0)^{k_0}}{\varepsilon_0} \Delta S_n \\ &\geq S_n + \frac{1}{2\varepsilon_0} \Delta S_n \\ &= S_n + 2M\Delta S_n \geq t_{n+1}. \end{aligned}$$

Puisque $\forall n > N$, $S > t_n$, $S > S_n$,
selon la propriété 1.1, on a alors, $|S_{p(n)+1} - S| < |t_n - S|$.

Puisque $\forall n > N$, $|S_{p(n)+1} - S| = S - S_{p(n)+1}$, $|t_n - S| = S - t_n$,

on a alors : $S - S_{p(n)+1} < S - t_n$
et $S_{p(n)+1} > t_n$.

Puisque $\forall n > N$, $S_{p(n)+1} = S_{n-1} + \Delta S_{n-1} + \cdots \Delta S_{n+D(n)}$

$$\begin{aligned} &\leq S_{n-1} + \Delta S_{n-1} + (1+\varepsilon_0)\Delta S_{n-1} + \cdots + (1+\varepsilon_0)^{D(n)+2}\Delta S_{n-1} \\ &= S_{n-1} + \frac{(1+\varepsilon_0)^{D(n)+3} - 1}{\varepsilon_0} \Delta S_{n-1}, \end{aligned}$$

et $t_n = S_{n-1} + 2M\Delta S_{n-1}$.

On a : $\dfrac{(1+\varepsilon_0)^{D(n)+3} - 1}{\varepsilon_0} > 2M \quad \forall n > N$

et $D(n) > \dfrac{\ln(3/2)}{\ln(1+\varepsilon_0)} - 3 > L \quad \forall n > N$

(où $\varepsilon_0 = 1/4M$)

- Cas 2 : (S_n) est strictement décroissante à partir du rang N.
  En ce cas, on peut démontrer que $D(n) > L \quad \forall n > N$
  comme dans le cas 1.

V L'ENSEMBLE LOG α.

Définition 2.1 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$, $0 < \alpha < 1$, LOG α désigne l'ensemble des suites (S_n), telles que :

a) $(S_n) \in \mathrm{LOG}^+ 1$

b) L'ensemble $\left\{ \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \,\middle|\, \lambda_n \neq 0 \,,\, n \in \mathbb{N} \right\}$ n'a que deux points d'accumulation, α et 1

c) $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}, \exists\, N \in \mathbb{N}$, tels que : $\alpha + \varepsilon < 1$, $\forall n > N$

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \leqslant \alpha \\ \text{ou } \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqslant \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

Propriété 2.2 :

L'ensemble LOG α n'est pas vide.

Démonstration :

On va construire une suite (S_n), telle que : $(S_n) \in \mathrm{LOG}\,\alpha$.

$S_0 = 1$

$S_{n+1} = (1 - \lambda_n)\, S_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$(\lambda_n) = (a_{1,0}\ \ a_{1,1}\ , \dots, a_{1,m_1}\ , a_{2,m_1}\ , a_{2,1}\ , \dots , a_{2,m_2}\ , \dots$$
$$a_{n,m_{n-1}}\ , a_{n,m_{n-1}+1}\ , \dots , a_{n,m_n}\ , \dots)$$

où : $a_{n,0} = \alpha^n$, $m_i \in \mathbb{N}$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} m_0 = 0 \\ m_i = \left[\frac{1}{\alpha i}\right] + 1 \end{cases}$

$M \in \mathbb{N}$, et $M > \frac{\alpha}{1-\alpha}$, $\quad a_{n,j} = \alpha^n \cdot \left(1 + \frac{1}{M+j}\right)$, $m_{n-1} \leqslant j \leqslant m_n$, $n = 1, 2, \dots$

- $\exists\, N \in \mathbb{N}$, $N > 0$, $\delta > 0$, tels que, $\forall n > N$ $\displaystyle\sum_{j=m_{n-1}}^{m_n} a_{n,j} \geq \delta$

  On a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$

  Puisque $\lambda_n > 0$, $\forall n \geqslant 1$.

  On a : $\displaystyle\prod_{j=1}^{\infty} (1 - \lambda_j) = 0$

  On a alors : $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - \lambda_j) = 0$

- Puisque $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$, et $a_{n.j} = \alpha^n\left(1+\frac{1}{M+j}\right) \leqslant 2\alpha^n$

On a : $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$

- Considérons la suite (λ_n). On va démontrer que (λ_n) est strictement décroissante.

a) $a_{n,0} = \alpha^n$, $a_{n+1,0} = \alpha^{n+1}$

puisque $0 < \alpha < 1$ donc $a_{n,0} > a_{n+1,0}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) $a_{n,j} = \alpha^n\left(1+\frac{1}{M+j}\right) > \alpha^n\left(1+\frac{1}{M+j+1}\right) = a_{n\,j+1}$.

$m_{n-1} \leqslant j \leqslant m_n - 1$.

c) $a_{n,0} - a_{n+1,j} = \alpha^n - \alpha^{n+1}\left(1+\frac{1}{M+j}\right)$

$$= \alpha^n\left[1-\left(\alpha+\frac{\alpha}{M+j}\right)\right] \qquad \left(M > \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$$

$$> \alpha^n\left[1-\left(\alpha+\frac{\alpha}{\frac{\alpha}{1-\alpha}+j}\right)\right] > 0$$

Donc $a_{n,0} > a_{n+1,j}$ $\quad m_n \leqslant j \leqslant m_{n+1}$.

La suite (λ_n) est strictement décroissante.

Donc $(S_n) \in LOG^+1$.

- Considérons la suite $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$. Il n'y a que deux cas :

Cas 1 : $\frac{\lambda_{m_k+1}}{\lambda_{m_k}} = \frac{a_{n+1,0}}{a_{n,m_n}} = \frac{\alpha^{n+1}\left(1+\frac{1}{M+m_n}\right)}{\alpha^n\left(1+\frac{1}{M+m_n}\right)} = \alpha$

Puisque : $m_n > 1/\alpha^n$.

on a : $\lim_{n\to\infty} m_n = +\infty$

et donc $\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{m_k+1}}{\lambda_{m_k}} = \alpha$

Cas 2 : $\frac{\lambda_{m_k+1}}{\lambda_{m_k}} = \frac{a_{n,j+1}}{a_{n,j}} = \frac{\alpha^n\left(1+\frac{1}{m+j+1}\right)}{\alpha^n\left(1+\frac{1}{M+j}\right)}$, $m_{n-1} \leqslant j \leqslant m_n$

On a : $\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_{m_k+1}}{\lambda_{m_k}} = 1$

Et donc l'ensemble $\left\{ \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ n'a que deux points d'accumulation. α et 1.

Il est évident qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, telle que : pour n assez grand $\begin{cases} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \leqslant \alpha \\ \text{ou } \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geqslant \alpha + \varepsilon \end{cases}$

Donc $(S_n) \in LOG\,\alpha$.

Théorème 2.4 :

L'ensemble $LOG\,\alpha \cup LOG\,2$ est F_∞- accélérable par le procédé suivant : $\forall (S_n) \in LOG\,2 \cup LOG\,\alpha$, $T : (S_n) \to (t_n)$

$$t_n = \begin{cases} S_n & \text{si } \Delta S_n = 0 \\ S_n - \dfrac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n} \cdot \dfrac{(1-\alpha)^2 . \alpha^2}{\left| \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - \alpha \right|} & \text{si } \Delta S_n \neq 0 . \end{cases}$$

DÉMONSTRATION :

Supposons que $(S_n) \in LOG\,2 \cup LOG\,\alpha$.

Posons que : $\lambda_n = 1 - (S_{n+1} - S)/(S_n - S)$, $A_n = 1 - (t_n - S)/(S_n - S)$

$$p(n) = \begin{cases} \min\{N \in \mathbb{N} / \forall m > N ,\ |S_m - S| < |t_n - S| \} & \text{si } t_n \neq S \\ +\infty & \text{si } t_n = S \end{cases}$$

$D(n) = p(n) - n$, $\mu_n = 1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$

Nous allons montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n > N$

a) $0 < A_n < 1$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{A_n}{\lambda_n} = +\infty$

Puisque $\Delta S_n = -\lambda_n (S_n - S)$, $\Delta S_{n+1} = -\lambda_{n+1}(1 - \lambda_n)(S_n - S)$

donc $A_n = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1} + \mu_n} \cdot \dfrac{(1-\alpha)^2 \alpha^2}{|(1-\alpha) - (\lambda_{n+1} + \mu_n)|}$

- Puisque $(S_n) \in LOG\,2 \cup LOG\,\alpha \subset LOG^+1$.
  donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n > N$
  - $\to$ $0 < \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} < 1$, $\lambda_n > 0$
  - $\to$ $0 < \mu_n < 1$

• Cas 1 : $(S_n) \in LoG_\alpha$

Considérons la suite $\left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right)$, nous pouvons la diviser en deux sous-suites :

$$\left(\frac{\lambda_{m_k+1}}{\lambda_{m_k}}\right) \to \alpha \quad \text{et} \quad \left(\frac{\lambda_{l_k+1}}{\lambda_{l_k}}\right) \to 1$$

et $\exists\ \delta > 0$, tel que : $\frac{\lambda_{m_k+1}}{\lambda_{m_k}} \leqslant \alpha$, et $\frac{\lambda_{l_k+1}}{\lambda_{l_k}} > \alpha + \delta$ pour k assez grand.

a) Considérons la suite (A_{m_k})

• Puisque $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\lambda_{m_k+1}}{\lambda_{m_k}} = \alpha$ et $\frac{\lambda_{m_k+1}}{\lambda_{m_k}} \leqslant \alpha$.

donc $\lim\limits_{k\to\infty} u_{m_k} = 1-\alpha$

et $u_{m_k} \geqslant 1-\alpha$

on a : $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{(1-\alpha)^2}{\lambda_{m_k+1} + u_{m_k}} = 1-\alpha$

et donc il existe un rang k, tel que $\forall k > k_1$,

$0 < \frac{(1-\alpha)^2}{\lambda_{m_{k+1}} + u_{m_k}} < 1$

• Considérons $\left|(1-\alpha) - (\lambda_{m_{k+1}} + u_{m_k})\right|$ (k est assez grand).

Puisque $\lambda_{m_k+1} = \lambda_{m_k}(1-u_{m_k})$

On a : $\left|1-\alpha-(\lambda_{m_{k+1}} + u_{m_k})\right| = \left|u_{m_k} - (1-\alpha) + \lambda_{m_k}(1-u_{m_k})\right|$.

Puisque $u_{m_k} \geqslant 1-\alpha$, $0 < u_{m_k} < 1$, $\lambda_{m_k} > 0$

donc $\left|(1-\alpha) - (\lambda_{m_{k+1}} + u_{m_k})\right| = (u_{m_k} - (1-\alpha)) + \lambda_{m_k}(1-u_{m_k})$

$\geqslant \lambda_{m_k}(1-u_{m_k})$.

Puisque $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\alpha^2 \cdot \lambda_{m_k}}{\lambda_{m_k}(1-u_{m_k})} = \alpha$ $\quad \left(\lim\limits_{k\to\infty} u_{m_k} = 1-\alpha\right)$

Donc il existe un rang k_2 tel que : $\forall k > k_2$,

$0 < \frac{\alpha^2 \cdot \lambda_{m_k}}{\lambda_{m_k}(1-u_{m_k})} < 1$

• On pose $k^* = \max(k_1, k_2)$, $\forall k > k^*$.

$$0 < A_{m_k} = \frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{m_{k+1}} + \mu_{m_k}} \cdot \frac{(1-\alpha)^2 \cdot \alpha^2}{|(1-\alpha) - (\lambda_{m_{k+1}} + \mu_{m_k})|} = \frac{(1-\alpha)^2}{\lambda_{m_{k+1}} + \mu_{m_k}} \cdot \frac{\alpha^2 \lambda_{m_k}}{\mu_{m_k} - (1-\alpha) + \lambda_{m_{k+1}}}$$

$$\leqslant \frac{(1-\alpha)^2}{\lambda_{m_{k+1}} + \mu_{m_k}} \cdot \frac{\alpha^2 \lambda_{m_k}}{\lambda_{m_k}(1 - \mu_{m_k})}$$

$$< 1$$

- $$\lim_{k \to \infty} \frac{m_k}{\lambda_{m_k}} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{(1-\alpha)^2}{\lambda_{m_{k+1}} + \mu_{m_k}} \cdot \frac{\alpha^2}{\lambda_{m_k}(1-\mu_{m_k})} \right) = +\infty .$$

b) Considérons la suite (A_{ℓ_k}).

- Il existe un rang k_3 $\forall\, k > k_3$ $1 > \mu_{\ell_k} > 0$, $1 > \lambda_{\ell_k} > 0$

Puisque $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{(1-\alpha)^2 \alpha^2}{|(1-\alpha) - (\lambda_{\ell_{k+1}} + \mu_{\ell_k})|} = (1-\alpha)\alpha^2$

Donc il existe un rang k_4 , $\forall\, k > k_4$, $\left| \dfrac{(1-\alpha)^2 \alpha^2}{(1-\alpha) - (\lambda_{\ell_{k+1}} + \mu_{\ell_k})} \right| < 1$

- Puisque $\lambda_{\ell_{k+1}} + \mu_{\ell_k} - \lambda_{\ell_k} = \mu_{\ell_k}(1 - \lambda_{\ell_k}) > 0$

on a : $0 < \dfrac{\lambda_{\ell_k}}{\lambda_{\ell_{k+1}} + \mu_{\ell_k}} < 1$

- On pose $k_0 = \max(k_3, k_4)$

Alors : $\forall\, k > k_0$.

$$0 < A_{\ell_k} = \frac{(1-\alpha)^2 \alpha^2}{|(1-\alpha) - (\lambda_{\ell_{k+1}} + \mu_{\ell_k})|} \cdot \frac{\lambda_{\ell_k}}{\lambda_{\ell_{k+1}} + \mu_{\ell_k}} < 1$$

- $$\lim_{k \to \infty} \frac{A_{\ell_k}}{\lambda_{\ell_k}} = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{(1-\alpha)^2 \alpha^2}{|(1-\alpha) - (\lambda_{\ell_{k+1}} + \mu_{\ell_k})|} \cdot \frac{1}{\lambda_{\ell_{k+1}} + \mu_{\ell_k}} \right) = +\infty$$

Donc selon a). b). on peut trouver un rang N^*, tel que $\forall\, n > N^*$

a) $0 < A_n < 1$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{A_n}{\lambda_n} = +\infty$

et selon le Lemme 2.1 , $\lim\limits_{n \to \infty} D(n) = +\infty$.

- <u>Cas 2</u> : $S_m \in LOG2$ et $(S_m) \notin LOG\alpha$.

  Nous avons presque la même démonstration que dans le cas 1 .

Etude expérimentale :

Nous allons étudier la fonction $D(n)$ proposée dans les chapitres précédents. Les tests numériques concerneront le procédé Δ^2-d'Aitken, le θ-algorithme, l'ε-algorithme et la U-transformation. Nous allons utiliser le procédé présenté dans le lemme 2.5. Les résultats numériques nous montrent que ce procédé est très efficace

Exemple 1 :

$$\begin{cases} e_{n+1} = e_n(1-\lambda_n), \quad \lambda_1 = 0{,}5, \quad e_n = s_n - s \\ \lambda_{2n} = \lambda_{2n-1}(1-\lambda_{2n-1}^2) \\ \lambda_{2n+1} = \lambda_{2n}(1-\lambda_{2n}), \quad n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

Cette suite appartient à LOG 2. Selon le théorème 2.1, elle est F_∞-améliorée par le Δ^2-d'Aitken.

	Δ^2	$\theta 2$	$U2$	$\varepsilon 4$		Δ^2	$\theta 2$	$U2$	$\varepsilon 4$
n	$D(n+2)$	$D(n+3)$	$D(n+3)$	$D(n+4)$	n	$D(n+2)$	$D(n+3)$	$D(n+3)$	$D(n+4)$
11	46	1	1	14	31	162	1	1	7
12	7	-3	-3	7	32	17	-3	-3	18
13	56	1	1	16	33	175	1	1	39
14	8	-3	-3	9	34	18	-3	-3	17
15	66	1	1	19	35	189	1	1	41
16	9	-3	-3	10	36	18	-3	-3	20
17	77	1	1	21	37	203	1	1	43
18	10	-3	-3	11	38	19	-3	-3	21
19	88	1	1	23	39	218	1	1	45
20	11	-3	-3	12	40	20	-3	-3	22
21	99	1	1	26	41	232	1	1	47
22	12	-3	-3	13	42	21	-3	-3	23
23	111	1	1	28	43	247	1	1	50
24	13	-3	-3	14	44	22	-3	-3	24
25	123	1	1	30	45	263	1	1	52
26	14	-3	-3	15	46	23	-3	-3	25
27	136	1	1	32	47	278	1	1	54
28	15	-3	-3	16	48	24	-3	-3	25
29	148	1	1	34	49	294	1	1	56
30	16	-3	-3	17	50	25	-3	-3	26

Exemple 2 : $\begin{cases} e_{n+1} = e_n\,(1-\lambda_n)\,, & e_n = S_n - S\,, \quad S=0\,,\quad e_1 = 1 \\ \lambda_{2n} = 1/(n+1) & \lambda_1 = 0{,}5 \\ \lambda_{2n+1} = \lambda_{2n} + \lambda_{2n}^2\,, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$

puisque $\mu_{2n} = 1 - \dfrac{\lambda_{2n+1}}{\lambda_{2n}} = -\lambda_{2n}^2 < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

donc cette suite n'appartient pas à LOG 2.

Puisque $\quad 1 - A_{2n} = 1 - \lambda_{2n} / (\lambda_{2n+1} + \mu_{2n}) \to 0$

$\qquad\qquad 1 - A_{2n+1} = 1 - \lambda_{2n+1} / (\lambda_{2n+2} + \mu_{2n+1}) \to 1/2$

cette suite est F_∞ – améliorée par le Δ^2 – d'Aitken.

	Δ^2	$\theta 2$	$u2$	$\varepsilon 4$		$\Delta 2$	$\theta 2$	$u2$	$\varepsilon 4$
n	$D(n+2)$	$D(n+3)$	$D(n+3)$	$D(n+4)$	n	$D(n+2)$	$D(n+3)$	$D(n+3)$	$D(n+4)$
11	4	-2	-2	-5	31	12	-2	-2	1
12	18	0	0	30	32	99	0	0	41
13	5	-2	-2	-5	33	13	-2	-2	1
14	24	0	0	29	34	109	0	0	43
15	5	-2	-2	-4	35	14	-2	-2	2
16	31	0	0	29	36	120	0	0	44
17	6	-2	-2	-4	37	15	-2	-2	3
18	38	0	0	30	38	131	0	0	46
19	7	-2	-2	-3	39	15	-2	-2	3
20	45	0	0	31	40	142	0	0	48
21	8	-2	-2	-3	41	16	-2	-2	4
22	53	0	0	32	42	154	0	0	50
23	9	-2	-2	-2	43	17	-2	-2	5
24	61	0	0	34	44	166	0	0	52
25	10	-2	-2	1	45	18	-2	-2	6
26	70	0	0	36	46	178	0	0	54
27	10	-2	-2	-1	47	19	-2	-2	6
28	79	0	0	37	48	191	0	0	56
29	11	-2	-2	0	49	20	-2	-2	7
30	89	0	0	39	50	204	0	0	58

Exemple 3 :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}5\,(1+x_n)\,x_n \\ x_0 = 0{,}5 \end{cases}$$

$$y_{n+1} = 1/n + 1/n^2 \qquad n = 1, 2, \cdots$$

La suite (x_n) est accélérée par le procédé Δ^2- d'Aitken.
La suite (y_n) n'est pas accélérée par le procédé Δ^2- d'Aitken, mais cette suite est F_∞ - améliorée par le Δ^2- d'Aitken.
On va comparer les fonctions $D(n)$ dans ce cas.

x_n		
n	$D(n+2)$	$D(n+2)/n+2$
11	8	0.727
12	9	0.750
13	10	0.769
14	11	0.786
15	12	0.800
16	13	0.813
17	14	0.824
18	15	0.833
19	16	0.842
20	17	0.850
22	19	0.867
24	21	0.875
26	23	0.885
28	25	0.893
30	27	0.900
32	29	0.906
34	31	0.912
36	33	0.917
38	35	0.921
40	37	0.925
50	47	0.940

y_n		
n	$D(n+2)$	$D(n+2)/n+2$
11	10	0.909
12	11	0.917
13	12	0.923
14	13	0.929
15	14	0.933
16	15	0.938
17	16	0.941
18	17	0.944
19	18	0.947
20	19	0.950
22	21	0.955
24	23	0.958
26	25	0.962
28	27	0.964
30	29	0.967
32	31	0.969
34	33	0.971
36	35	0.972
38	37	0.974
40	39	0.975
50	49	0.980

Selon le procédé proposé dans le lemme 2.5, dans certain cas nous pouvons construire une sous-suite (S_{n_k}) de la suite (S_n) telle que : (S_{n_k}) est F_∞-améliorée par un certain algorithme, par exemple, si la suite (S_n) appartient à LoG^+1, alors (S_{n_k}) est F_∞-améliorée par le procédé Δ^2-d'Aitken $\left(D(n_k) \to +\infty\right)$. Les résultats numériques montrent que ce procédé est très efficace. On appellera procédé SAS.

En effet, selon le lemme 2.1, si l'on peut trouver une sous-suite (S_{n_k}) de la suite (S_n) telle que :

1) $(\lambda_{n_k}) \in \mathrm{CONV}_0(\mathbb{R})$, $(\mu_{n_k}) \in \mathrm{CONV}_0(\mathbb{R})$

2) $\lambda_{n_k} > 0$, $\quad \lambda_{n_k+1} + \mu_{n_k} \geqslant 0$,

$0 < \lambda_{n_k} / (\lambda_{n_k+1} + \mu_{n_k}) < 1$, pour k assez grand.

(où $\lambda_n = 1 - (S_{n+1}-S)/(S_n - S)$, $\mu_n = 1 - \lambda_{n+1}/\lambda_n$

alors (S_{n_k}) est F-améliorée par le procédé Δ^2-d'Aitken, c'est-à-dire que $D(n_k) \to +\infty$.

Exemple 4 : $\quad e_{n+1} = e_n(1-\lambda_n), \quad e_n = S_n - S, \quad n = 0, 1, \cdots$

$$\begin{cases} \lambda_{4n} = 1/(n+1) \\ \lambda_{4n+1} = \lambda_{4n}\,(1-\lambda_{4n}) \\ \lambda_{4n+2} = \lambda_{4n+1}\,(1-\lambda_{4n+1}^2) \\ \lambda_{4n+3} = 1/\sqrt{n+2} \end{cases} , \qquad n = 1, 2, \cdots$$

$\lambda_0 = 0{,}1$, $\quad \lambda_1 = 0{,}5$, $\quad \lambda_2 = 0{,}33$, $\quad \lambda_3 = 0{,}421$.

On va voir que le procédé Δ^2-d'Aitken, l'ε-algorithme, le θ-algorithme et la U-transformation ne peuvent pas améliorer la convergence de cette suite.

	Δ^2	$\theta 2$	$U2$	$\varepsilon 4$		Δ^2	$\theta 2$	$U2$	$\varepsilon 4$
$n+2$	$D(n+2)$	$D(n+3)$	$D(n+3)$	$D(n+4)$	$n+2$	$D(n+2)$	$D(n+3)$	$D(n+3)$	$D(n+4)$
11	5	-1	-1	-1	51	21	-1	-1	24
12	-2	-1	-1	-5	52	-2	-1	-1	-5
13	1	-6	-6	2	53	1	-2	-2	-18
14	2	-2	-2	-1	54	6	-3	-3	4
15	5	-1	-1	0	55	25	-1	-1	27
16	-2	-1	-1	-5	56	-2	-1	-1	-5
17	1	-2	-2	-2	57	1	-2	-2	-19
18	2	-3	-3	0	58	6	-3	-3	4
19	8	-1	-1	3	59	25	-1	-1	31
20	-2	-1	-1	-5	60	-2	-1	-1	-5
21	1	-2	-2	-3	61	1	-2	-2	-21
22	2	-3	-3	0	62	6	-3	-3	4
23	9	-1	-1	5	63	29	-1	-1	33
24	-2	-1	-1	-5	64	-2	-1	-1	-5
25	1	-2	-2	-6	65	1	-2	-2	-23
26	2	-3	-3	1	66	6	-3	-3	4
27	11	-1	-1	7	67	29	-1	-1	35
28	-2	-1	-1	-5	68	-2	-1	-1	-5
29	1	-2	-2	-7	69	1	-2	-2	-23
30	2	-3	-3	2	70	6	-3	-3	5
31	13	-1	-1	11	71	32	-1	-1	39
32	-2	-1	-1	-5	72	-2	-1	-1	-5
33	1	-2	-2	-9	73	1	-2	-2	-26
34	3	-3	-3	2	74	6	-3	-3	5
35	15	-1	-1	13	75	33	-1	-1	41
36	-2	-1	-1	-5	76	-2	-1	-1	-5
37	1	-2	-2	-11	77	1	-2	-2	-27
38	3	-3	-3	3	78	6	-3	-3	6
39	17	-1	-1	15	79	35	-1	-1	43
40	-2	-1	-1	-5	80	-2	-1	-1	-5
41	1	-2	-2	-12	81	1	-2	-2	-29
42	4	-3	-3	4	82	6	-3	-3	6
43	18	-1	-1	19	83	37	-1	-1	47
44	-2	-1	-1	-15	84	-2	-1	-1	-5
45	1	-2	-2	-15	85	1	-2	-2	-31
46	5	-3	-3	4	86	6	-3	-3	7
47	21	-1	-1	22	87	38	-1	-1	50
48	-2	-1	-1	-5	88	-2	-1	-1	-5
49	1	-2	-2	-15	89	1	-2	-2	-32
50	5	-3	-3	4	90	7	-3	-3	7

Selon le procédé SAS, nous avons le résultat numérique suivant :

		Δ^2
K	n_K	$D(n_K+2)$
1	1	1
2	2	-3
3	5	3
4	13	5
5	17	8
6	22	9
7	25	11
8	29	13
9	33	15
10	37	17
11	41	18
12	45	21
13	49	21
14	53	25
15	57	25
16	61	29
17	65	29
18	69	32
19	73	33
20	77	37
21	81	37
22	85	38
23	89	41
24	93	41
25	97	44

		Δ^2
K	n_K	$D(n_K+2)$
26	101	45
27	105	47
28	109	49
29	113	50
30	117	53
31	121	53
32	125	56
33	129	57
34	133	58
35	137	61
36	141	61
37	145	64
38	149	65
39	153	66
40	157	69
41	161	69
42	165	72
43	169	73
44	173	73
45	177	77
46	181	77
47	185	79
48	189	81
49	193	81
50	197	85

Selon ce tableau, on voit que

$$D(n_K+2)/n_K > 1/3 \quad , \qquad K \leq 50$$

Où $\quad D(n_K+2) = P(n_K+2) - (n_K+2)$

$$P(n_K+2) = \begin{cases} \min\{N \mid N \in \mathbb{N},\ \forall m > N,\ |s_m - s| < |t_{n_K} - s|,\} & t_{n_K} \neq s \\ +\infty, \quad t_{n_K} = s \end{cases}$$

$$t_{n_K} = s_{n_K} - (\Delta s_{n_K})^2 / \Delta^2 s_{n_K} .$$

<u>Exemple 5</u> : $s_{n+1} = s_n(1-s_n)/(1+s_n)$, $s_0 = 0.5$

procédé SAS

K	n_K	Δ^2 $D(n_K+2)$	K	n_K	Δ^2 $D(n_K+2)$
6	9	14	18	32	49
7	10	15	19	34	52
8	12	19	20	36	55
9	14	22	21	38	58
10	16	25	22	40	61
11	18	28	23	42	64
12	20	31	24	44	67
13	22	34	25	46	70
14	24	37			
15	26	40	26	48	73
16	28	43			76
17	30	46	27	50	79

<u>Exemples 6</u> : $s_{n+1} = s_n/(1+s_n)$, $s_0 = 1$

procédé SAS

K	n_K	Δ^2 $D(n_K+2)$	K	n_K	Δ^2 $D(n_K+2)$
6	10	15	20	37	56
7	11	17	21	39	59
8	13	20	22	41	62
9	15	23	23	44	67
10	18	28	24	46	69
11	20	30	25	47	71
12	21	32	26	50	75
13	23	35	27	51	77
14	25	38	28	54	81
15	27	41	29	55	83
16	29	44	30	57	86
17	31	47	31	59	89
18	34	51	32	62	94
19	35	53	33	64	97

Chapitre 3

Les Familles non F-Accélérables

I THEOREME DE NON F-ACCELERABILITE

Quand un ensemble de suites est non-accélérable, on ne perd pas l'espoir de trouver une transformation NORMALE pour améliorer sa convergence. Mais quand un ensemble de suites est non F - accélérable, au sens pratique, on peut abandonner cet espoir. "Est-ce qu'il existe un ensemble de suites non-F-accélérable ?". La réponse est oui. On démontrera ce résultat en utilisant la technique de la rémanence au sens monotone (R.M).

__Définition 3.1__

Soit $\mathcal{S} \subset \text{conv}(\mathbb{R})$, on dit que $\mathcal{S}$ est rémanent au sens monotone, si $\mathcal{S}$ vérifie la condition suivante :

a) Il existe une suite $(X^n) \in \text{CONV}(\mathbb{R})$, strictement monotone.

b) Il existe : $(X_n^0) \in \mathcal{S}$, $(X_n^1) \in \mathcal{S}$, ..., $(X_n^i) \in \mathcal{S}$, ...

$X_n^0 \to X^0$, $X_n^1 \to X^1$, ... $X_n^i \to X^i$, ... telles que :

0) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p_0 \geq n_0$, $(X_0^0, \ldots, X_{p_0}^0, X_{p_0+1}^1, \ldots, X_n^1, \ldots) \in \mathcal{S}$

1) $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, $(n_1 > p_0)$, $\forall p_1 \geq n_1$

$(X_0^0, \ldots, X_{p_1}^1, X_{p_1+1}^2, \ldots, X_n^2 \ldots) \in \mathcal{S}$

2) $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$, $(n_2 > p_1)$, $\forall p_2 \geq n_2$

$(X_0^0, \ldots, X_{p_0}^0, X_{p_0+1}^1, \ldots, X_{p_1}^1, X_{p_1+1}^2, \ldots, X_{p_2}^2, X_{p_2+1}^3, \ldots, X_n^3 \ldots) \in \mathcal{S}$

⋮

c) $(X_0^0, \ldots, X_{p_0}^0, X_{p_0+1}^1, \ldots, X_{p_1}^1, \ldots, X_{p_{k-1}+1}^k, \ldots, X_{p_k}^k, \ldots) \in \mathcal{S}$

__Propriété 3.1__ :

Si $\mathcal{S}$ est rémanent au sens monotone alors $\mathcal{S}$ est rémanent au sens restreint.

La démonstration de cette propriété est évidente.

Théorème 3.1 :

Si la famille de suites $\mathbb{S} \subset \text{conv}(\mathbb{R})$ est rémanente au sens monotone, alors $\mathbb{S}$ est non F-accélérable.

Démonstration :

Supposons que $\mathbb{S}$ soit F-accélérable.
D'après cette hypothèse, il existe une transformation normale T sur $\mathbb{S}$, telle que $\mathbb{S}$ F-accélérable par T.
Selon la propriété 1.6, T est régulière sur $\mathbb{S}$.

- Parce que $\mathbb{S}$ est rémanent au sens monotone donc il existe une suite $(X^n) \in \text{conv}(\mathbb{R})$ strictement monotone et $(X_m^0) \in \mathbb{S}$, $X_m^0 \to X^0, \dots, (X_m^i) \in \mathbb{S}$, $X_m^i \to X^i, \dots$ telles que:

A)

0) $\exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall p_0 \geqslant m_0, (X_0^0, \dots, X_{p_0}^0, X_{p_0+1}^1, \dots, X_m^1 \dots) \in \mathbb{S}$.

1) $\exists m_1 \in \mathbb{N}, (m_1 > p_0), \forall p_1 \geqslant m_1$
$$(X_0^0, \dots, X_{p_0}^0, X_{p_0+1}^1, \dots, X_{p_1}^1, X_{p_1+1}^2, \dots, X_m^2, \dots) \in \mathbb{S}.$$

$\vdots$

k) $\exists m_k \in \mathbb{N}, (m_k > p_{k-1}), \forall p_k \geqslant m_k$
$$(X_0^0, \dots, X_{p_0}^0, \dots, X_{p_{k-1}+1}^k, \dots, X_{p_k}^k, X_{p_k+1}^{k+1}, \dots, X_m^{k+1}, \dots) \in \mathbb{S}.$$

$\vdots$

B) $(X_0^0, \dots, X_{p_0}^0, X_{p_0+1}^1, \dots, X_{p_1}^1, \dots, X_{p_{k-1}+1}^k, \dots, X_{p_k}^k, \dots) \in \mathbb{S}$

- Puisque la suite (X^n) est strictement monotone, donc, ou bien (X^n) est strictement croissante, ou bien strictement décroissante

Cas 1 : (X^n) est strictement croissante et tendant vers X.

$X_0 < X_1 < X_2 < \dots < X_i < X_{i+1} < \dots < X$.

(Dans la démonstration suivante, on va trouver une suite $(y_n) \in \mathbb{S}$, telle que $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, D(n) \leqslant 0$, donc contradictoire avec notre hypothèse que $\mathbb{S}$ est F-accélérable.

On peut trouver une suite (m_k) strictement croissante telle qu'elle vérifie la condition suivante :

$\forall n > m_0 \;,\; |X_n^0 - X^0| < \frac{1}{4} |X^1 - X^0|$

$\forall n > m_1 \;,\; |X_n^1 - X^1| < \min\left\{ \frac{1}{4}(X^2 - X^1), \frac{1}{4}(X^1 - X^0) \right\}$

$\vdots$

$\forall n > m_k \;,\; |X_n^k - X^k| < \min\left\{ \frac{1}{4}(X^{k+1} - X^k), \frac{1}{4}(X^k - X^{k-1}) \right\}$

$\vdots$

• 0) Posons $(y_n^0) = (X_0^0, \dots, X_m^0, \dots)$
Puisque $(y_n^0) \in \mathcal{S}$ et $y_n^0 \to X^0$,
On a : $T : (y_n^0) \to (t_n^0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^0 = X^0$,
et donc il existe un rang m_0^* , $(m_0^* > m_0)$ tel que :
$\forall n \geqslant m_0^* \; |t_n^0 - X^0| < \frac{1}{4}(X^1 - X^0)$ et
$\forall p_0 \geqslant m_0^*$, $(x_0^0, x_1^0, \dots, x_{p_0}^0, x_{p_0+1}^1, \dots) \in \mathcal{S}$

• 1) Posons $(y_n^1) = (X_0^0, \dots, X_{m_0^*}^0, X_{m_0^*+1}^1, \dots X_m^1, \dots)$.
Puisque $(y_n^1) \in \mathcal{S}$, et $y_n^1 \to X^1$
Donc il existe un rang m_1^* , $(m_1^* > \max(m_1, m_0^*))$ tel que :
$\forall n \geqslant m_1^*$, $|t_n^1 - X^1| < \min\left\{ \frac{1}{4}(X^2 - X^1), \frac{1}{4}(X^1 - X^0) \right\}$
et $\forall p_1 \geqslant m_1^*$, $(x_0^0, x_1^0, \dots, x_{m_0^*}^0, x_{m_0^*+1}^1, \dots, x_{p_0}^1, x_{p_1+1}^2, \dots) \in \mathcal{S}$

• 2) Posons $(y_n^2) = (X_0^0, \dots, X_{m_0^*}^0, X_{m_0^*+1}^1, \dots, X_{m_1^*}^1, X_{m_1^*+1}^2, \dots, X_m^2 \dots)$.
Puisque $(y_n^2) \in \mathcal{S}$ et $y_n^2 \to X^2$
On a : $T : (y_n^2) \to (t_n^2)$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^2 = X^2$
Alors il existe un rang m_2^* , $(m_2^* > \max(m_2, m_1^*))$,
tel que $\forall n \geqslant m_2^*$, $|t_n^2 - X^2| < \min\left\{ \frac{1}{4}(X^3 - X^2), \frac{1}{4}(X^2 - X^1) \right\}$
et $\forall p_2 \geqslant m_2^*$, $(x_0^0, \dots, x_{m_0^*}^0, x_{m_0^*+1}^1, \dots x_{m_1^*}^1, x_{m_1^*+1}^2 \dots$
$\dots x_{p_2}^2, x_{p_2+1}^3, \dots) \in \mathcal{S}$

$\vdots$

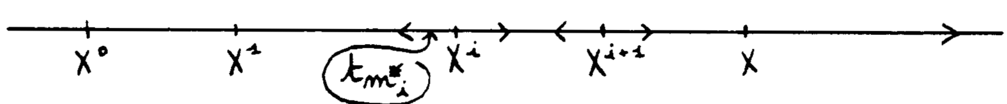
• k) Posons $(y_n^k) = (X_0^0, \dots, X_{m_0^*}^0, \dots, X_{m_{k-1}^*+1}^k, \dots, X_n^k, \dots)$
Puisque $(y_n^k) \in \mathbb{S}$, et $y_n^k \to X^k$
On a : $T : (y_n^k) \longrightarrow (t_n^k)$, $\lim\limits_{n \to \infty} t_n^k = X^k$
Alors il existe un rang m_k^* , $(m_k^* > \max(m_k, m_{k-1}^*))$
tel que : $\forall n > m_k^*$, $|t_n^k - X^k| < \min\left\{\frac{X^{k+1} - X^k}{4}, \frac{X^k - X^{k-1}}{4}\right\}$
et $\forall p_k \geqslant m_k^*$, $(X_0^0, \dots, X_{m_0^*}^0, \dots, X_{m_{k-1}^*+1}^k, \dots, X_{p_k}^k, X_{p_k+1}^{k+1}, \dots) \in \mathbb{S}$

• Posons $(y_n) = (X_0^0, \dots, X_{m_0^*}^0, X_{m_0^*+1}^1, \dots, X_{m_1^*}^1, \dots, X_{m_{k-1}^*+1}^k, \dots, X_{m_k^*}^k, \dots)$
$T : (y_n) \to (t_n)$. $(y_n) \in \mathbb{S}$, et $y_n \to X$

$$p(n) = \begin{cases} \min\{N \in \mathbb{N} \,/\, \forall m > N , \ |y_m - X| < |t_n - X|\} & \text{si } t_n \neq X \\ +\infty & \text{si } t_n = X \end{cases}$$

$D(n) = p(n) - n$

• Considérons $(D(m_i^*))$. Puisque T est une transforma-
-tion normale, donc $t_{m_i^*} = t_{m_i^*}^i$,
on a : $|t_{m_i^*} - X_i| < \min\left\{\frac{X^{i+1} - X^i}{4}, \frac{X^i - X^{i-1}}{4}\right\}$



donc $\forall n > m_i^*$, $|t_{m_i^*} - X| > |y_n - X|$
et donc $p(m_i^*) \leqslant m_i^*$, $D(m_i^*) \leqslant 0$ $\quad i \in \mathbb{N}$
cela est contradictoire avec notre hypothèse.

<u>Cas 2</u> . (X^n) est strictement décroissante, tendant vers X
on a presque la même démonstration que dans le cas 1.

II L'ENSEMBLE Log

Nous rappellons la définition de l'ensemble Log

$$\text{Log} = \left\{ (S_n) \in \text{Conv}(\mathbb{R}) \Big/ \frac{S_{n+1}-S}{S_n - S} = 1 - \lambda_n \ , \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0 \right\}$$

__Théorème 3.2__ :

L'ensemble des suites Log est non - F - accélérable.

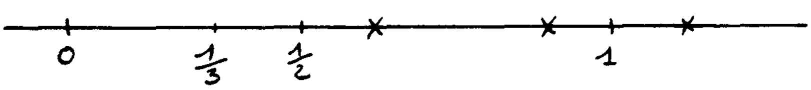
__Démonstration__ :

On va montrer ce théorème en utilisant la technique de la remanence au sens monotone

On choisit les mêmes suites (X^n) et (X_m^n) $(m = 1, 2, \dots)$ que celles dans l'article [4].

On va montrer que Log est rémanent au sens monotone.

On pose $X^n = \frac{1}{n+1}$ et $X_m^n = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)$



La suite (X^n) est strictement décroissante et tend vers 0.

$(X_m^n) \in$ Log et $X_m^n \to X^n$, $m \to +\infty$.

0) On pose $m_0 = 1$, $\forall p_0 \geq m_0$, $(X_0^0, \dots, X_{p_0}^0, X_{p_0+1}^1, \dots) \in$ Log

1) Puisque $\lim_{m\to\infty} X_m^1 = \frac{1}{2}$

donc il existe $m_1 > m_0$, $\forall m \geq m_1$, $X_m^1 < 1$,

et donc $\forall p_1 \geq m_1$, $(X_0^0, \dots, X_{p_0+1}^1, \dots, X_{p_1}^1, X_{p_1+1}^2, \dots) \in$ Log

$\vdots$

k) Puisque $\lim_{m\to\infty} X_m^k = \frac{1}{k+1}$

donc il existe $m_k > m_{k-1}$, $\forall n \geq m_k$, $X_m^k < \frac{1}{k}$.

et donc $\forall p_k \geq m_k$, $(X_0^0, \dots, X_{p_0+1}^1, \dots, X_{p_{k-1}+1}^k, \dots, X_{p_k}^k, X_{p_k+1}^{k+1} \dots) \in$ Log

On pose $(y_n) = (X_0^0, \dots, X_{P_0}^0, X_{P_0+1}^1, \dots, X_{P_1}^1, \dots, X_{P_{k-1}+1}^k, \dots, X_{P_k}^k, \dots)$

On va montrer que $(y_n) \in Log$.

$$y_n = \begin{cases} X_n & n \leqslant p_0 \\ X_{P_i}^i = \dfrac{1}{i+1}\left(1 + \dfrac{1}{P_i+1}\right) & n = P_i \\ X_{P_i+j}^{i+1} = \dfrac{1}{i+2}\left(1 + \dfrac{1}{P_i+j+1}\right) & n = P_i + j \qquad 0 < j < P_{i+1} - P_i \end{cases}$$

- Puisque $P_{i+1} \geqslant P_i + 1$
  donc $\lim\limits_{i \to +\infty} P_i = +\infty$
  et $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = 0$

- $$\frac{y_{n+1} - 0}{y_n - 0} = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{i+2}\left(1 + \frac{1}{P_i+2}\right)}{\frac{1}{i+1}\left(1 + \frac{1}{P_i+1}\right)} & n = P_i \\[2ex] \dfrac{\frac{1}{i+1}\left(1 + \frac{1}{P_{i-1}+j+2}\right)}{\frac{1}{i+1}\left(1 + \frac{1}{P_{i-1}+j+1}\right)} & n = P_{i-1} + j \\ & 0 < j < P_i - P_{i-1} \end{cases}$$

  donc $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{y_{n+1} - 0}{y_n - 0} = 1$.

  on a alors $(y_n) \in Log$

  c'est-à-dire que Log est rémanent au sens monotone

  et d'après le théorème 3.1, Log est non-F-accélérable.

Chapitre 4

LA FONCTION D(N)

I INTRODUCTION

On sait que le but de l'accélération de la convergence (ou de la F-accélération) est de trouver une bonne approximation d'une limite inconnue le plus vite (moins cher) possible.
On se donne un ensemble $\mathbb{S} \subset \text{CONV}(\mathbb{R})$, et une transformation T sur $\mathbb{S}$, $\forall (S_m) \in \mathbb{S}$, $T : (S_m) \to (t_m)$. Si la convergence de la suite (S_m) est améliorée par la transformation T, on peut poser une question : « Combien la convergence de la suite (S_m) est-elle quantitativement améliorée par T ? ».
On donne deux transformations de suites sur $\mathbb{S}$, T_1, T_2.
Si l'on dit que T_1 est meilleure que T_2, on peut aussi poser une question : « Combien T_1 est-elle quantitativement meilleure que T_2 ? ».

Ces questions nécessitent de connaître la variation de la fonction $D(m)$. Dans les études suivantes, on essayera de donner quelques estimations pour la fonction $D(m)$.

<u>Définition 4.1</u> :

$\text{Lin}^{(k)}$ designe l'ensemble des suites (S_m), telles que :
$\forall (S_m) \in \text{Lin}^{(k)}$, $(S_m) \in \text{CONV}(\mathbb{R})$, et il existe $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$
tel que $S_{m+1} - S = \sum_{j=1}^{k} a_j (S_m - S)^j + o((S_m - S)^k)$
où $k \in \mathbb{N}^*$, $0 < |a_1| < 1$.

<u>Définition 4.2</u> :

$\text{Lin}^{(\infty)}$ désigne l'ensemble des suites (S_m), telles que :

a) $\lim_{m \to \infty} S_m$ existe $= S$

b) Il existe $(a_m) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $m_0 \in \mathbb{N}$, tels que :
$\forall m > m_0$, $S_{m+1} - S = \sum_{j=1}^{\infty} a_j (S_m - S)^j$.
où $0 < |a_1| < 1$, et $\overline{\lim_{m \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$

Définition 4.3 :

$Log^{(k)}$ ($k \in \mathbb{N}$) désigne l'ensemble des suites (S_n) telles que :

a) $Log^{(k)} \subset CONV(\mathbb{R})$

b) $\forall (S_n) \in Log^{(k)}$, il existe $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n > n_0$, $S_{n+1} - S = \sum_{j=1}^{k} a_j (S_n - S)^j + o((S_n - S)^k)$ où $a_1 = 1$

Définition 4.4 :

$Log^{(\infty)}$ désigne l'ensemble des suites (S_n), telles que :

a) $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe $= S$

b) Il existe $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$, tels que :

$\forall n > n_0$, $S_{n+1} - S = \sum_{j=1}^{\infty} a_1 (S_n - S)^j$

où $a_1 = 1$, et $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$

REMARQUE : $Log = Log^{(1)}$

$Lin = Lin^{(1)} \cup \left\{ (S_n) \in CONV(\mathbb{R}) \,/\, \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} \to -1 \right\}$

II D(n), CAS DE LA CONVERGENCE LINÉAIRE

Théorème 4.1 :

Soit $\mathbb{S} \subset Lin^{(1)}$, T une transformation de suites sur $\mathbb{S}$, $\forall (S_n) \in \mathbb{S}$, $T : (S_n) \to (t_n)$, on pose :

$$p(n) = \begin{cases} \min\{N \in \mathbb{N} / \ \forall m > N, \ |S_m - S| < |t_n - S|\} & \text{si } t_n \neq S \\ +\infty & \text{si } t_n = S \end{cases}$$

$D(n) = p(n) - n$.

s'il existe $L \in \mathbb{N}^*$, tel que : $\lim_{n\to\infty} \frac{t_n - S}{(S_n - S)^{L+1}}$ existe $\neq 0$

alors : $\lim_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n} = L$

Démonstration :

On pose $C_n = \dfrac{t_n - S}{(S_n - S)^{L+1}}$, $C = \lim\limits_{n\to\infty} C_n$.

On a alors : $t_n - S = C_n (S_n - S)^{L+1}$.

- Puisque $c \neq 0$, et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{n+1}-S}{S_n - S} = a$ $\quad 0 < |a| < 1$

  donc il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n > N_1$, $n \in \mathbb{N}$

  $\rightarrow$ $C_n \neq 0$, $S_n \neq S$, $\left|(S_{n+1}-S)/(S_n - S)\right| < 1$,

  $\rightarrow$ $t_n - S = C_n(S_n - S)^{L+1} \neq 0$,

  $\rightarrow$ $|C_n (S_n - S)^{L+1}| < |S_n - S|$

  On a alors : $\forall n > N_1$

  $p(n) = \min\{ N \in \mathbb{N} \,/\, \forall m > N, |S_m - S| < |t_n - S| \} \geqslant n$

- On pose : $\varepsilon_{n+j} = \dfrac{S_{n+j} - S}{S_{n+j-1} - S} - a$, $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 0$, $n > N_1$.

  puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_{n+j} = 0$

  donc il existe un rang N_2 $(N_2 > N_1)$ tel que : $\forall n > N_2$,

  $\rightarrow$ $|\varepsilon_n| < |a|/4$

  $\rightarrow$ $|a + \varepsilon_{n+j}| < 1$

  Dans la démonstration suivante, on suppose toujours que $n > N_2$.

- Selon la propriété 1.1 ,

  $|S_{n+D(n)+1} - S| < |t_n - S|$

  $|S_{n+D(n)} - S| \geqslant |t_n - S|$

- $S_{n+D(n)} - S = (a + \varepsilon_{n+D(n)}) \cdots (a + \varepsilon_{n+1})(S_n - S)$

  $S_{n+D(n)+1} - S = (a + \varepsilon_{n+D(n)+1}) \cdots (a + \varepsilon_{n+1})(S_n - S)$

  $t_n - S = C_n (S_n - S)^{L+1}$.

On a alors les inégalités :

$$- \quad |(a+\varepsilon_{m+D(m)+1})\cdots(a+\varepsilon_{m+1})|\ |S_m - S| < |C_m (S_m - S)^{L+1}| .$$

$$- \quad |(a+\varepsilon_{m+D(m)})\cdots(a+\varepsilon_{m+1})|\ |S_m - S| \geqslant |C_m (S_m - S)^{L+1}| .$$

Puisque $S_m \neq S$

Donc : $|(a+\varepsilon_{m+D(m)+1})\cdots(a+\varepsilon_{m+1})| < |C_m (S_m - S)^{L}|$

$|(a+\varepsilon_{m+D(m)})\cdots(a+\varepsilon_{m+1})| \geqslant |C_m (S_m - S)^{L}|$

- On peut toujours trouver $\delta_{m,D(m)} \in \mathbb{R}$, et $\delta_{m,D(m)+1} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\rightarrow \quad (a+\varepsilon_{m+D(m)+1})\cdots(a+\varepsilon_{m+1}) = (a+\delta_{m,D(m)+1})^{D(m)+1}$$

$$\rightarrow \quad (a+\varepsilon_{m+D(m)})\cdots(a+\varepsilon_{m+1}) = (a+\delta_{m,D(m)})^{D(m)}$$

$$\min\{\varepsilon_{m+1},\dots,\varepsilon_{m+D(m)}\} \leqslant \delta_{m,D(m)} \leqslant \max\{\varepsilon_{m+1},\dots,\varepsilon_{m+D(m)}\}$$

$$\min\{\varepsilon_{m+1},\dots,\varepsilon_{m+D(m)+1}\} \leqslant \delta_{m,D(m)+1} \leqslant \max\{\varepsilon_{m+1},\dots,\varepsilon_{m+D(m)+1}\}$$

Puisque $\lim\limits_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$

donc $\lim\limits_{m\to\infty} \delta_{m,D(m)} = \lim\limits_{m\to\infty} \delta_{m,D(m)+1} = 0$

et $|(a+\delta_{m,D(m)+1})^{D(m)+1}| < |C_m (S_m - S)^{L}|$

$|(a+\delta_{m,D(m)})^{D(m)}| \geqslant |C_m (S_m - S)^{L}|$

- Puisque : $0 < |a+\delta_{m,D(m)}| < 1$; $0 < |a+\delta_{m,D(m)+1}| < 1$,

donc : $\ln|a+\delta_{m,D(m)+1}| < 0$, $\ln|a+\delta_{m,D(m)}| < 0$.

on a alors : . $D(m) > \dfrac{\ln|C_m (S_m - S)^{L}|}{\ln|a+\delta_{m,D(m)+1}|} - 1$,

. $D(m) \leqslant \dfrac{\ln|C_m (S_m - S)^{L}|}{\ln|a+\delta_{m,D(m)}|}$

- On pose : $X_m = \ln|C_m (S_m - S)^{L}| / \ln|a+\delta_{m,D(m)+1}| - 1$

$y_m = \ln|C_m (S_m - S)^{L}| / \ln|a+\delta_{m,D(m)}|$

on a alors : $X_m < D(m) \leqslant y_m$

- Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{s_{n+1}-s}{s_n-s}\right| = a$, $0<|a|<1$, et $|s_n-s|\neq 0$,
  donc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|s_n-s|} = |a|$

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\ln|C_n|}{n} + L\ln\sqrt[n]{|s_n-s|}\right)\Big/\ln|a+\delta_{n,D(n)+1}|\right]-\frac{1}{n}$$
  $$= L\ln|a|/\ln|a|$$
  $$= L,$$
  et $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{n} = L$

  Donc : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{D(n)}{n} = L$

Propriété 4.1 :

Soit $\mathcal{S}\subset Lin^{(1)}$. Soit T une transformation sur $\mathcal{S}$,
$\forall (s_n)\in\mathcal{S}$, $T:(s_n)\longrightarrow(t_n)$, soit $L\in\mathbb{N}^*$,
on pose : $C_n = (t_n-s)/(s_n-s)^{L+1}$
si $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|} = 1$
alors $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{D(n)}{n} = L$

Démonstration :

Dans la démonstration du théorème 4.1, on peut remplacer la condition : $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$ existe $\neq 0$ par la condition $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}$

Propriété 4.2 :

Soit $\mathcal{S}\subset Lin^{(1)}$, T une transformation sur $\mathcal{S}$, s'il existe une suite $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et un rang $n_0\in\mathbb{N}^*$, tels que :
$\forall n > n_0$, $t_n - s = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j(s_n-s)^j$; où $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$

alors ;

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{D(n)}{n} = L$, si $\begin{cases}(s_n)\in conv^*(\mathbb{R})\\ a_j = 0,\ \forall j\leqslant L,\ \text{et}\ a_{L+1}\neq 0\end{cases}$

b) $\forall n > n_0$, $D(n) = +\infty$ si $a_j = 0$, $\forall j\geqslant 1$.
$(t_n = s)$

Démonstration

a) Puisque $a_1 = a_2 = \dots = a_L = 0$, $a_{L+1} \neq 0$.
donc $t_n - S = a_{L+1}(S_n - S)^{L+1} + \sum_{j=L+2}^{\infty} a_j (S_n - S)^j$; $n > n_0$

$$\frac{t_n - S}{(S_n - S)^{L+1}} = a_{L+1} + (S_n - S)\sum_{j=L+2}^{\infty} a_j (S_n - S)^{j-L-2}$$

• Considérons la fonction : $g(x) = \sum_{j=L+2}^{\infty} a_j X^{j-L-2}$

puisque $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \neq +\infty$

donc il existe $r \in \mathbb{R}^{*+}$, tel que : g est continue dans $[-r, r]$.

Donc $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) < +\infty$.

Puisque $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

donc $\lim_{n\to\infty} (S_n - S)\, g(S_n - S) = 0$.

On a alors $\lim_{n\to\infty} (S_n - S) \sum_{j=L+2}^{\infty} a_j (S_n - S)^{(j-L-2)} = 0$.

Donc $\lim_{n\to\infty} \frac{t_n - S}{(S_n - S)^{L+1}} = a_{L+1} \neq 0$

Selon le théorème 4.1 , on a alors : $\lim_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n} = L$

b) Si $a_j = 0$, $j = 1, 2, \dots$.
On a alors $t_n - S = 0$,
donc $p(n) = +\infty$
et $D(n) = p(n) - n = +\infty \quad \forall n > n_0$.

III TRANSFORMATION QUASI_LINEAIRE DE SUITES

On sait que les transformations quasi-linéaires de suites sont très importantes dans le cadre de l'accélération de la convergence. En 1988 , C. BREZINSKI a étudié les transformations quasi-linéaires de suites pour accélérer la convergence des suites .

En effet, Le procédé Δ^2- d'Aitken, le Θ-algorithme, l'ε-algorithme, la u-transformation, etc, sont tous des transformations quasi-linéaires. Donc il est important de savoir comment la fonction $D(n)$ varie en ce cas.

Définition 4.5 :

Soit $F : \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que F est quasi-linéaire sur $D \subset \mathbb{R}^{k+1}$, si $\forall (u_0, u_1, \ldots, u_k) \in D$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $F(au_0+b, au_1+b, \ldots, au_k+b) = aF(u_0, u_1, \ldots, u_k) + b$

On définira l'ensemble A_k par :

$$A_k = \{(1, a, a^2, \ldots, a^k) / a \in \mathbb{R},\ 0 < |a| \leq 1,\ a \neq 1\}$$

Propriété 4.3 :

Soit $F(u_0, u_1, \ldots, u_k)$ quasi-linéaire sur l'ensemble Lin et vérifiant :

a) $\forall (u_0, u_1, \ldots, u_k) \in A_k$, $F(u_0, u_1, \ldots, u_k) = 0$

b) $F(u_0, u_1, \ldots, u_k)$ est continue sur A_k.

alors : $\forall (S_n) \in \text{Lin}$

$$\lim_{n \to \infty} \left(F(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+k}) - S\right) / (S_n - S) = 0$$

Démonstration :

Supposons que $(S_n) \in \text{Lin}$, et $\lim \dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = a$, $0 < |a| \leq 1$, $a \neq 1$

puisque F est quasi-linéaire sur Lin

donc $\dfrac{F(S_n, S_{n+1}, \ldots, S_{n+k}) - S}{S_n - S} = F\left(1, \dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S}, \ldots, \dfrac{S_{n+k} - S}{S_n - S}\right)$

puisque $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{S_{n+j} - S}{S_n - S} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{S_{n+j} - S}{S_{n+j-1} - S} \cdots \dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = a^j$, $j = 1, \ldots, k$.

puisque $F(u_0, u_1, \ldots, u_k)$ est continue sur A_k

donc $\lim\limits_{n \to \infty} \left(F(S_n, \ldots, S_{n+k}) - S\right) / (S_n - S) = F(1, a, \ldots, a^k) = 0$

Théorème 4.2 :

Soit $F(u_0, u_1, \dots, u_k)$ quasi-linéaire sur Lin, et vérifiant :

a) $\forall (u_0, u_1, \dots, u_k) \in A_k$, $F(u_0, u_1, \dots, u_k) = 0$

b) $\forall\, \mathbf{a} = (1, a, a^2, \dots, a^k) \in A_k$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, tel que : $F(u_0, \dots, u_k)$ est infiniment différentiable sur $\mathbb{B}(\mathbf{a}, \varepsilon)$. où $\mathbb{B}(\mathbf{a}, \varepsilon) = \{(1, u_1, \dots, u_k) / \ |u_j - a^j| < \varepsilon ,\ j = 1, 2, \dots, k\}$

c) $\forall (u_0, u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{B}(\mathbf{a}, \varepsilon)$, $u_j = a^j + h_j \quad j = 1, \dots, k$

$$F(u_0, u_1, \dots, u_k) = F(1, a+h_1, \dots, a^k + h_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + h_k \frac{\partial}{\partial u_k} \right) F(\mathbf{a})$$

Si $t_{n+k} = F(S_n, S_{n+1}, \dots, S_{n+k})$, on a pour $(S_n) \in \mathrm{Lin}^{(\infty)}$:

ou bien il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n > n_0$, $t_n = S$,

ou bien il existe $L \in \mathbb{N}^*$, tel que : $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{D(n)}{n} = L$

Pour démontrer ce théorème, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 4.1 :

Soit $(a_j^{(k)})$ une suite double. Si $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j^{(k)}| \right)$ converge

alors $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j^{(k)} \right)$ converge et $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_j^{(k)} \right)$ converge et leur sommes sont égales.

Lemme 4.2 :

Soit la suite (a_n) vérifiant $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$ alors il existe $r \in \mathbb{R}^{*+}$, et une suite $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|b_n|} < +\infty$ tels que :

$$h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$$

$$g(x) = h(h(x))$$

La fonction $h(x)$ et la fonction $g(x)$ sont bien définies et infiniment différentiables sur $(-r, r)$ et $g(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j x^j$.

__Lemme 4.3__ :

Soient $g_1(x)=\sum_{j=1}^{\infty} a_j X^j$, $g_2(x)=\sum_{j=1}^{\infty} b_j X^j$ définies sur $(-r,r)$, $(r\in\mathbb{R}^{*+})$.

alors il existe une suite (C_m) telle que $\forall x\in(-r,r)$, $\sum_{j=1}^{\infty} c_j X^j$ converge et $g_1(x)\cdot g_2(x)=\sum_{j=1}^{\infty} C_j\ X^j$.

__Démonstration du théorème 4.2__ :

Supposons que $(S_m)\in \mathrm{Lin}^{(\infty)}$

Alors : il existe un rang $m_0\in\mathbb{N}$, et une suite $(a_m)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<+\infty$, $0<|a_1|<1$, tels que : $\forall n>m_0$,

$S_{m+1}-S=\sum_{j=1}^{\infty} a_j\,(S_m-S)^j$.

On alors : $\dfrac{S_{m+j}-S}{S_m-S}=a_1^j+h_j(S_m-S)$, $j=1,2,\dots,k$.

où $\lim\limits_{n\to\infty} h_j(S_m-S)=0$ $\quad j=1,2,\dots,k$

- Considérons la fonction $F(u_0,u_1,\dots,u_k)$.
  Puisque $0<|a_1|<1$, donc $\mathfrak{a}_1=(1,a_1,\dots a_1^k)\in\mathbb{A}_k$ et il existe une constante $\varepsilon\in\mathbb{R}^{*+}$, telle que :

  $\forall\ (u_0,\dots,u_k)\in\mathbb{B}(\mathfrak{a}_1,\varepsilon)$, $(u_j=a^j+\overline{h}_j\ ,\ |\overline{h}_j|<\varepsilon)$
  $F(u_0,\dots,u_k)\in\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\overline{h}_1\frac{\partial}{\partial u_1}+\dots+h_k\frac{\partial}{\partial u_k}\right)^j F(\mathfrak{a}_1)$.

- Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} h_j(S_n-S)=0$, $j=1,\dots,k$

  donc il existe un rang n' $(n'>\max(m_0,n^*))$

  tel que : $\forall n>n'$, $|h_j\ (S_n-S)|<\varepsilon$, $j=1,2,\dots,k$.

  Donc : $\dfrac{F(S_n,\dots,S_{n+k})-S}{S_n-S}=F\left(1,\dfrac{S_{n+1}-S}{S_n-S},\dots,\dfrac{S_{n+k}-S}{S_n-S}\right)$

  $=F\left(1,a_1+h_1(S_1-S),\dots,a_1^k+h_k(S_n-S)\right)$

  $=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(h_1(S_n-S)\frac{\partial}{\partial u_1}+\dots+h_k(S_n-S)\frac{\partial}{\partial u_k}\right)^j F(\mathfrak{a}_1)$.

On pose $z_j(n)=\dfrac{1}{j!}\left(h_1(S_n-S)\dfrac{\partial}{\partial u_1}+\dots+h_k(S_n-S)\dfrac{\partial}{\partial u_k}\right)^j F(\mathfrak{a}_1)$.

Puisque $h_j(S_n-S)=\sum_{i=2}^{\infty} a_i^j\,(S_n-S)^{i-1}$ $\quad j=1,\dots,k$.

selon le lemme 4.3, il existe une suite $(c_n^{(j)})$, telle que:

$$z_j(n) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(j)} (S_n - S)^i$$

- On pose : $g(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots$

$$g_2(x) = g(g(x)), \dots, g_k(x) = g(g_{k-1}(x))$$
$$h_1^*(x) = g(x), \quad h_2^*(x) = g(x) \cdot g_2(x) \quad \dots$$
$$h_k^*(x) = h_{k-1}^*(x) \cdot g_k(x).$$

Puisque $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$, selon le Lemme 4.2 et Lemme 4.3, alors il existe une constante $r \in \mathbb{R}^{*+}$, et $(a_n^{(j)}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $j = 1, \dots, k$.

$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n^{(j)}|} < +\infty$, telles que : $\forall x \in (-r, r)$

$$h_j^*(x) = a_1^{(j)} + a_2^{(j)} x + \dots \qquad j = 1, 2, \dots, k$$

- Puisque $\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (S_n) \in \mathrm{CONV}^*(\mathbb{R})$

donc il existe un rang n^* $(n^* > n_0) \in \mathbb{N}$, tel que :

$\forall n > n^* \qquad S_n - S \in (-r, r)$, et $S_n \neq S$.

Donc $\forall n > n^*$,

$$\frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = g(S_n - S) = h_1^*(S_n - S)$$

$$\frac{S_{n+2} - S}{S_n - S} = \frac{S_{n+2} - S}{S_{n+1} - S} \cdot \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = g(g(S_n - S)) \cdot g(S_n - S) = h_2^*(S_n - S)$$

$$\vdots$$

$$\frac{S_{n+k} - S}{S_n - S} = h_k^*(S_n - S)$$

- Puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{S_{n+j} - S}{S_n - S} = a_1^j \qquad j = 1, 2, \dots, k$

donc $a_1^{(j)} = a_1^j \qquad j = 1, 2, \dots, k$.

on pose $h_j(x) = h_j^*(x) - a_1^j$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Selon le lemme 4.1, on a alors :

$$\left[F(s_n,\dots,s_{n+k})-s\right]/(s_n-s) = \sum_{j=1}^{\infty} z_j(n)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(j)}(s_n-s)^i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_i^{(j)}(s_n-s)^i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} c_i^{(j)}\right)(s_n-s)^i .$$

On pose $b_i = \sum_{j=1}^{\infty} c_i^{(j)}$

on a alors : $\forall n > n'$

$$\frac{F(s_n,\dots,s_{n+k})-s}{s_n-s} = b_1(s_n-s)+b_2(s_n-s)^2+\dots$$

$\left(\text{où } \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|} < +\infty\right)$.

On pose : $t_{n+k} = F(s_n, s_{n+1},\dots,s_{n+k})$.

on a alors : $t_{n+k}-s = b_1(s_n-s)^2+\dots$

Selon la propriété 4.2, on a alors :

soit il existe un rang $N\in\mathbb{N}$, tel que $\forall n > N$, $t_n = s$

soit il existe un rang $L\in\mathbb{N}^*$, tel que $\lim_{n\to\infty}\frac{D(n)}{n} = L$

IV QUELQUES PROCEDES CONNUS.

1/ Procédé Δ^2- d'AITKEN.

$\forall (s_n)\in \text{CONV}^*(\mathbb{R})$, $T:(s_n)\longrightarrow(t_n)$, $t_{n+2} = s_n - (\Delta s_n)^2/\Delta^2 s_n$

On a alors : $F(u_0,u_1,u_2) = u_0 - (u_1-u_0)^2/(u_2-2u_1+u_0)$

On va démontrer que la fonction $F(u_0,u_1,u_2)$ vérifie les conditions a), b), c) dans le théorème 4.2.

a) $\forall (u_0,u_1,u_2)\in A_2$, $(u_0,u_1,u_2)=(1,a,a^2)$, $0<|a|\leqslant 1$ $a\neq 1$

$F(1,a,a^2) = 1-(a-1)^2/(a^2-2a+1) = 0$

b) $\forall\, \mathfrak{a} = (1, a, a^2) \in \mathbb{A}_2$, $0 < |a| \leqslant 1$, $a \neq 1$

Si l'on peut trouver $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, tel que , $\forall (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{B}(\mathfrak{a}, \varepsilon)$,
$u_2 - 2u_1 + u_0 \neq 0$, alors $F(u_0, u_1, u_2)$ est infiniment différentiable sur $\mathbb{B}(\mathfrak{a}, \varepsilon)$

On pose : $\varepsilon = (a-1)^2/8$, puisque $0 < |a| \leqslant 1$, $a \neq 1$,
donc $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$.

$\mathbb{B}(\mathfrak{a}, \varepsilon) = \{(u_0, u_1, u_2) /\ u_0 = 1 \ , |u_j - a^j| < \varepsilon,\ j = 1, 2.\}$

$\forall (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{B}(\mathfrak{a}, \varepsilon)$, $u_j = a^j + h_j$ $\quad j = 1, 2.$

$$\begin{aligned} |u_2 - 2u_1 + u_0| &= |a^2 + h_2 - 2(a + h_1) + 1| = |(a-1)^2 + h_2 - 2h_1| \\ &\geqslant (a-1)^2 - (|h_2| + 2|h_1|) \\ &\geqslant (a-1)^2 - 3\varepsilon = (a-1)^2 - 3 \cdot \frac{(a-1)^2}{8} > 0 \end{aligned}$$

Donc la fonction $F(u_0, u_1, u_2)$ est infiniment indifférentiable sur $\mathbb{B}(\mathfrak{a}, \varepsilon)$

c) $\forall (u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{B}(\mathfrak{a}, \varepsilon)$, $u_0 = 1$, $u_1 = a + h_1$, $u_2 = a^2 + h_2$,
$|h_j| < \varepsilon$, $j = 1, 2$.

On va montrer que $F(u_0, u_1, u_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial u_2}\right)^j F(\mathfrak{a})$

Puisque $F(u_0, u_1, u_2)$ est infiniment indifférenciable sur $\mathbb{B}(\mathfrak{a}, \varepsilon)$,
donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta_n \in \mathbb{R}^*$, $-1 < \theta_n < 1$ tel que :

$$F(1, a + h_1, a^2 + h_2) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial u_2}\right)^j F(\mathfrak{a}) + \frac{1}{n!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial u_2}\right)^n F(1, a + \theta_n h_1, a^2 + \theta_n h_2).$$

On pose : $f(x, y) = \dfrac{(x-1)^2}{y - 2x + 1}$

$x_0 = a + \theta_n h_1$, $y_0 = a^2 + \theta_n h_2$, $b = \frac{1}{2}(y+1)$

$R_n(x, y) = \frac{1}{n!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y)$

Alors , il faut montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x_0, y_0) = 0$.

On considère la fonction $f(x, y) = (x-1)^2/(y - 2x + 1)$

$$j \geqslant 1\,, \qquad \frac{\partial^j f}{\partial y^j} = (-1)^j j!\ \frac{(X-1)^2}{(y-2X+1)^{j+1}}$$

$$(y-2X+1)^{j+1} = \left(-2\left(X-\frac{1}{2}(y+1)\right)\right)^{j+1}$$

$$= (-1)^{j+1}\cdot 2^{j+1}\cdot (X-b)^{j+1} \qquad \left(b = \frac{1}{2}(y+1)\right)$$

$$(X-1)^2 = (X-b+b-1)^2$$

$$= (X-b)^2 + 2(b-1)(X-b) + (b-1)^2$$

donc : $\dfrac{\partial^j f}{\partial y^j} = (-1)^j j!\ \cdot \dfrac{(X-b)^2 + 2(b-1)(X-b) + (b-1)^2}{(-1)^{j+1}\cdot 2^{j+1}\cdot (X-b)^{j+1}}$

$$\forall j \geqslant 1\,, \frac{\partial^j f}{\partial y^j} = -\frac{j!}{2^{j+1}}\left(\frac{1}{(X-b)^{j-1}} + \frac{2(b-1)}{(X-b)^j} + \frac{(b-1)^2}{(X-b)^{j+1}}\right)$$

On pose : $g_{1,j}(X,Y) = -\dfrac{j!}{2^{j+1}}\cdot\dfrac{1}{(X-b)^{j-1}} \qquad j \geqslant 1$

$$g_{2,j}(X,Y) = -\frac{2(b-1)\,j!}{2^{j+1}}\cdot\frac{1}{(X-b)^j} \qquad j \geqslant 1$$

$$g_{3,j}(X,Y) = -\frac{(b-1)^2 j!}{2^{j+1}}\cdot\frac{1}{(X-b)^{j+1}} \qquad j \geqslant 1$$

On a alors : $\dfrac{\partial^j f}{\partial y^j} = g_{1j}(X,Y) + g_{2,j}(X,Y) + g_{3,j}(X,Y) \qquad j \geqslant 1$

$$\forall j \geqslant 2\,, \frac{\partial^{n-j} g_{1,j}(X,Y)}{\partial X^{n-j}} = -\frac{j!}{2^{j+1}}\cdot\frac{(-1)^{n-j}\cdot(j-1)\cdot j\cdots(j-1+n-j-1)}{(X-b)^{j-1+n-j}}$$

$$= \frac{(-1)^{n-j+1}}{2^{j+1}}\cdot\frac{(j-1)\cdot j\cdot(n-2)!}{(X-b)^{n-1}}$$

$$= \frac{n!}{(X-b)^{n-1}}\cdot\frac{(-1)^{n-j+1}(j-1)\,j}{2^{j+1}\,(n-1)\cdot n}$$

$$\forall j \geqslant 1\,, \frac{\partial^{n-j} g_{2,j}(X,Y)}{\partial X^{n-j}} = -\frac{j!\cdot 2\cdot(b-1)}{2^{j+1}}\cdot\frac{(-1)^{n-j}\,j\ldots(j+n-j-1)}{(X-b)^{j+n-j}}$$

$$= \frac{2(b-1)\,n!}{(X-b)^n}\cdot\frac{(-1)^{n-j+1}\,j}{2^{j+1}\cdot n}$$

$$\frac{\partial^{n-j} g_{3,j}(X,Y)}{\partial X^{n-j}} = -\frac{(b-1)^2 j!}{2^{j+1}}\cdot\frac{(-1)^{n-j}(j+1)\cdots(j+1+n-j-1)}{(X-b)^{j+1+n-j}}$$

$$= \frac{(b-1)^2\,n!}{(X-b)^n}\cdot\frac{(-1)^{n-j+1}}{2^{j+1}}$$

On pose : $j \geqslant 2$, $\varphi_{1,j}(X,Y) = \dfrac{\partial^{m-j} g_{1,j}(X,Y)}{\partial X^{m-j}}$.

$$j \geqslant 1,\ \varphi_{2,j}(X,Y) = \frac{\partial^{m-j} g_{2,j}(X,Y)}{\partial X^{m-j}}$$

$$j \geqslant 1,\ \varphi_{3,j}(X,Y) = \frac{\partial^{m-j} g_{3,j}(X,Y)}{\partial X^{m-j}}$$

- $$\begin{aligned} R_m(X,Y) &= \frac{1}{m!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial X^{j}} + h_2 \frac{\partial}{\partial Y}\right)^m f(X,Y) \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m} C_m^j \cdot h_2^j \cdot h_1^{m-j} \cdot \frac{\partial^m f}{\partial X^{m-j}\partial Y^j}. \\ &= \frac{1}{m!}\left[h_1^m \frac{\partial^m f}{\partial X^m} + m \cdot h_2 h_1^{m-1} \frac{\partial^m f}{\partial X^{m-1}\partial Y} \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{j=2}^{m} C_m^j h_2^j h_1^{m-j} \cdot \frac{\partial^m f}{\partial X^{m-j}\partial Y^j}\right] \end{aligned}$$

où $\dfrac{\partial^m f}{\partial X^{m-1}\partial Y} = \varphi_{2,1}(X,Y) + \varphi_{3,1}(X,Y)$

$j \geqslant 2$, $\dfrac{\partial^m f}{\partial X^{m-j}\partial Y^j} = \varphi_{1,j}(X,Y) + \varphi_{2,j}(X,Y) + \varphi_{3,j}(X,Y)$.

Donc $$\begin{aligned} R_m(X,Y) &= \frac{1}{m!}\left[h_1^m \frac{\partial^m f}{\partial X^m} + m \cdot h_2 \cdot h_1^{m-1} \cdot (\varphi_{2,1} + \varphi_{3,1}) \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{j=2}^{m} C_m^j h_2^j h_1^{m-j} (\varphi_{1,j} + \varphi_{2,j} + \varphi_{3,j})\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_m(X,Y) &= \frac{1}{m!}\sum_{j=2}^{m} C_m^j h_2^j h_1^{m-j} \varphi_{1,j} \\ &+ \frac{1}{m!}\sum_{j=1}^{m} C_m^j h_2^j h_1^{m-j} \varphi_{2,j} \\ &+ \frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m} C_m^j h_2^j h_1^{m-j} \varphi_{3,j} \end{aligned}$$

- Puisque : $C_{m-2}^{j-2} = C_m^j \cdot \dfrac{(j-1)j}{m(m-1)}$ $\quad j \geqslant 2$.

$$C_{m-1}^{j-1} = C_m^j \cdot \frac{j}{m} \qquad j \geqslant 1.$$

donc : $$\begin{aligned} &\frac{1}{m!}\sum_{j=2}^{m} C_m^j h_2^j h_1^{m-j} \varphi_{1,j} \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{j=2}^{m} C_m^j \cdot h_2^j \cdot h_1^{m-j} \cdot \frac{m!}{(X-b)^{m-1}} \cdot \frac{(-1)^{m-j+1}(j-1)j}{2^{j+1}(m-1)m} \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{j=2}^{m} C_{m-2}^{j-2} \cdot h_2^j \cdot h_1^{m-j} \cdot \frac{m!(-1)^{m-j+1}}{2^{j+1}} \cdot \frac{1}{(X-b)^{m-1}} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{m} C_{m-2}^{j-2} \cdot \left(\frac{h_2}{2}\right)^j \cdot (-h_1)^{m-j} \cdot \frac{1}{(X-b)^{m-1}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m-2} C_{m-2}^{i}\left(\frac{h_2}{2}\right)^{i+2}\cdot\left(-h_1\right)^{m-(i+2)}\cdot\frac{1}{(X-b)^{m-1}}$$
$$= -\frac{(h_2)^2}{8}\cdot\sum_{i=0}^{m-2} C_{m-2}^{i}\left(\frac{h_2}{2}\right)^{i}\left(-h_1\right)^{m-2-i}\cdot\frac{1}{(X-b)^{m-1}}$$
$$= -\frac{(h_2)^2}{8}\left(\frac{h_2}{2}-h_1\right)^{m-2}\cdot\frac{1}{(X-b)^{m-1}}.$$
$$= -\frac{(h_2)^2}{8(X-b)}\left(\frac{\frac{h_2}{2}-h_1}{X-b}\right)^{m-2}.$$

Puisque : $|h_j| < \varepsilon = \dfrac{(a-1)^2}{8}$

$$\begin{aligned}|X_0-b_0| &= \frac{1}{2}\left|Y_0-2X_0+1\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|a^2+\theta_m h_2-2(a+\theta_m h_1)+1\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|(a-1)^2+\theta_m h_2-2\theta_m h_1\right| \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left((a-1)^2-|\theta_m||h_2|-2|\theta_m||h_1|\right) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left((a-1)^2-3\varepsilon\right)\geqslant\frac{1}{4}(a-1)^2=2\varepsilon\end{aligned}$$

donc $\left|\dfrac{\frac{h_2}{2}-h_1}{X_0-b_0}\right| \leqslant \dfrac{\left|\frac{h_2}{2}\right|+|h_1|}{|X_0-b_0|} \leqslant \dfrac{\frac{3}{2}\cdot\varepsilon}{2\varepsilon} = \dfrac{3}{4}$.

on a alors $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\dfrac{\frac{h_2}{2}-h_1}{x-b}\right)^{m-2} = 0$

donc $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{m!}\sum\limits_{j=2}^{m} C_m^j h_2^j h_1^{m-j}\varphi_{1,j}(X_0,Y_0) = 0$.

- On peut aussi montrer que :

  $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{m!}\sum\limits_{j=1}^{m} C_m^j h_2^j h_1^{m-j}\varphi_{2,j}(X_0,Y_0) = 0$

  et $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{m!}\sum\limits_{j=0}^{m} C_m^j h_2^j h_1^{m-j}\varphi_{3,j}(X_0,Y_0) = 0$

- Donc $\lim\limits_{m\to\infty} R_m(X_0,Y_0) = 0$

  C'est-à-dire que : $\forall(u_0,u_1,u_2)\in\mathbb{B}(a,\varepsilon)$

  $u_0 = 1,\ u_j = a^j + h_j,\quad j = 1,2,$

  $|h_j| < \varepsilon,\ j = 1,2,\quad \varepsilon = (a-1)^2/8 \neq 0$.

$$F(u_0,u_1,u_2) = F(1, a+h_1, a^2+h_2)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}\left(h_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial u_2}\right)^j F(a)$$

Donc la troisième condition du théorème 2.4 est vérifiée.

2) Θ_2 - algorithm

$\forall (S_n) \in \text{CONV}^*(\mathbb{R})$, $\Theta_2 : (S_n) \longrightarrow (t_n)$.

$t_{n+3} = S_{n+1} + \Delta^2 S_{n+1}\, \Delta S_n\, \Delta S_{n+1} / (\Delta^2 S_{n+1}\, \Delta S_n - \Delta^2 S_n\, \Delta S_{n+2})$

On a alors : $F(u_0,u_1,u_2,u_3) = u_1 + \dfrac{(u_3-2u_2+u_1)(u_1-u_0)(u_2-u_1)}{(u_3-2u_2+u_1)(u_1-u_0)-(u_2-2u_1+u_0)(u_3-u_2)}$

a). $\forall (1,a,a^2,a^3) \in A_3$, $0<|a|\leq 1$, $a \neq 1$.

$$F(1,a,a^2,a^3) = a + \frac{(a^3-2a^2+a)(a-1)(a^2-a)}{(a^3-2a^2+a)(a-1)-(a^2-2a+1)(a^3-a^2)}$$
$$= 0$$

b). On pose $\varepsilon = |a(1-a)^4| / 40$.

$\mathbb{B}(a,\varepsilon) = \{(1,u_1,u_2,u_3) / \ |u_j - a^j| < \varepsilon,\ j=1,2,3\}$

$\forall (u_0,u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{B}(a,\varepsilon)$. $u_j = a^j + h_j$, $j=1,2,3$.

$$|(u_3-2u_2+u_1)(u_1-u_0)-(u_2-2u_1+u_0)(u_3-u_2)|$$
$$= |(a^3+h_3-2(a^2+h_2)+a+h_1)(a+h_1-1)$$
$$-(a^2+h_2-2(a+h_1)+1)(a^3+h_3-(a^2+h_2))|$$
$$= |(a^3-2a^2+a+h_3-2h_2+h_1)(a-1+h_1)$$
$$-(a^2-2a+1+h_2-2h_1)(a^3-a^2+h_3-h_2)|$$
$$= |a(a-1)^3+(h_3-2h_2+h_1)(a-1)+h_1(a^3-2a+a+h_3-2h_2+h_1)$$
$$-(a^2(a-1)^3+(h_2-2h_1)(a^3-a^2)+(h_3-h_2)(a^2-2a+1+h_2-2h_1))|$$
$$\geq |a(a-1)^4| - 4\varepsilon - 8\varepsilon - 6\varepsilon - 14\varepsilon$$
$$= |a(a-1)^4| - 22\varepsilon > \frac{1}{4}|a(a-1)^4| > 0$$

Donc la fonction $F(u_0,u_1,u_2,u_3)$ est infiniment indifférenciable sur $\mathbb{B}(a,\varepsilon)$

c) Pour montrer que la fonction $F(u_0, u_1, u_2, u_3)$ vérifie la troisième condition dans le théorème 4.2, en effet, $F(u_0, u_1, u_2, u_3)$ est une fonction rationale, elle est analytique sur $B(a, \varepsilon)$. donc $\forall (u_0, u_1, u_2, u_3) \in B(a, \varepsilon)$,
$u_j = a^j + h_j \quad , j = 1, 2, 3 \quad ,$
on a : $F(u_0, u_1, u_2, u_3) = F(1, a + h_1, a^2 + h_2, a^3 + h_3)$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + h_3 \frac{\partial}{\partial u_3} \right)^j F(a)$$

3) On peut aussi considérer l'ε-algorithm, et la u-trans-formation.

Remarque : Si $F(u_0, u_1, \dots, u_k)$ est quasi-linéaire sur Lin, on pose $t_{n+k} = F(S_n, \dots, S_{n+k})$, $\forall (S_n) \in$ Lin, si $F(u_0, \dots, u_k)$ vérifie les conditions a) b) c) dans le théorème 4.2, on sait que :

$\forall \ (S_n) \in \text{Lin}^{(\infty)}$,
ou bien il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n > n_0$, $t_n = S$
ou bien il existe $L \in \mathbb{N}^*$, tel que $\lim_{n \to \infty} \frac{D(n)}{n} = L$

Alors, on peut poser une question : « Est-ce qu'il existe un procédé T, tel que : $\forall (S_n) \in \text{Lin}^{(\infty)}$,
$\lim_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n} = +\infty$? »

V D(n), CAS DE LA CONVERGENCE LOGARITHMIQUE.

Théorème 4.3 :
Soit $\mathcal{S} \subset \text{LOG}^+1$, T une transformation de suites sur $\mathcal{S}$,
$\forall \ (S_n) \in \mathcal{S}$, $T : (S_n) \to (t_n)$,
on pose : $C_n = (t_n - S)/(S_n - S)$, $\lambda_n = 1 - (S_{n+1} - S)/(S_n - S)$

S'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, une constante $\beta \in \mathbb{R}^{*+}$, $0 < \beta < 1$, tels que : $\forall n > N$, $0 < |C_n| < \beta$.
Alors : il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n > n_0$
$$D(n) \geq \ln_{|C_n|} / \ln_{(1-\lambda_n)} \geq \frac{\ln \beta}{\ln(1-\lambda_n)}$$

Démonstration :

Supposons que $(S_n) \in \mathcal{S}$, et $\forall n > N$, $0 < C_n < \beta$.
Puisque $(S_n) \in \mathcal{S} \subset LOG^+1$,
donc il existe un rang $n' \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n > n'$

- $0 < \lambda_n < 1$, (λ_n) décroissante strictement à partir de n'
- $S_n \neq S$.
- $|(t_n - S)/(S_{n+1} - S)| < 1$.

On a alors : $\forall n > n'$, $D(n) \geq 1$.
selon la propriété 1.1, $|S_{n+D(n)+1} - S| < |t_n - S|$
$$|S_{n+D(n)+1} - S| = |(1-\lambda_{n+D(n)}) \cdots (1-\lambda_n)(S_n - S)| \geq (1-\lambda_n)^{D(n)+1}(S_n - S)$$
$$|t_n - S| = |C_n|\,|S_n - S|$$
puisque $S_n \neq S$
donc $(1-\lambda_n)^{D(n)+1} < |C_n| < \beta < 1$.
puisque $0 < 1 - \lambda_n < 1$,
donc $D(n) + 1 > \dfrac{\ln |C_n|}{\ln |1-\lambda_n|} \geq \dfrac{\ln \beta}{\ln(1-\lambda_n)}$
et donc $\forall n > n'$, $D(n) \geq \ln |C_n| / \ln(1-\lambda_n) \geq \ln \beta / \ln(1-\lambda_n)$

Propriété 4.4 :

Soit $\mathcal{S} \subset LOG^+1$, T une transformation sur $\mathcal{S}$, $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $T : (S_n) \longrightarrow (t_n)$, on pose : $C_n = (t_n - S)/(S_n - S)$

s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, et $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}^{*+}$, $0 < \beta < 1$, tels que :
$\forall n > n_0$, $0 < |C_n| < \beta$ et $0 < \lambda_n < k/n$,
alors, $\forall n > n' = \max(n_0, k)$. $D(n) \geq \dfrac{1}{|C_n|}(n-k) - n \geq \dfrac{1}{\beta}(n-k) - n$

Démonstration :

Supposons que $(S_n) \in \mathcal{S}$, et $\forall n > n_0$, $0 < |C_n| < \beta$, $0 < \lambda_n < k/n$

Selon la propriété 1.1, $|S_{n+D(n)+1} - S| < |t_n - S|$,

$$|S_{n+D(n)+1} - S| = |(1-\lambda_{n+D(n)}) \cdots (1-\lambda_n)(S_n - S)|$$
$$\geqslant \left|\left(1 - \frac{k}{n+D(n)}\right) \cdots \left(1 - \frac{k}{n}\right)(S_n - S)\right|$$
$$= \left|\frac{n-k}{n+D(n)}\right| |S_n - S| .$$

Puisque $\forall n > n'$, $|S_{n+j} - S| = |(1-\lambda_{j-1+n}) \cdots (1-\lambda_n)(S_n - S)| < |S_n - S|$

donc $D(n) \geqslant 1$.

on a alors : $|S_{n+D(n)+1} - S| = \frac{n-k}{n+D(n)} |S_n - S|$

$$\frac{n-k}{n+D(n)} < |C_n| < \beta$$

on a alors $D(n) > \frac{n-k}{|C_n|} - n \geqslant \frac{1}{\beta}(n-k) - n$

et donc $\forall n > n'$, $D(n) \geqslant \frac{n-k}{|C_n|} - n \geqslant \frac{1}{\beta}(n-k) - n$

Propriété 4.5 :

Soit $\mathcal{S} \subset LOG^+1$, T une transformation sur $\mathcal{S}$, $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $T : (S_n) \rightarrow (t_n)$, on pose : $C_n = \frac{t_n - S}{S_n - S}$, s'il existe $n \in \mathbb{N}$, et $\beta \in \mathbb{R}^{*+}$, $k \in \mathbb{R}^{*+}$, $0 < \beta < 1$, tels que :

$\forall n > n_0$, $0 < |C_n| < \beta$, et $1 > \lambda_n > \frac{k}{n}$.

Alors : $\forall n > n' = \max(n_0, k)$, $D(n) \leqslant \frac{n-k}{|C_n|} - n + 1$

Démonstration :

Supposons que $(S_n) \in \mathcal{S}$, et $\forall n > n_0$, $0 < |C_n| < \beta$, $1 > \lambda_n > \frac{k}{n}$.

$\forall n > n'$, $|t_n - S| = |C_n| \, |S_n - S| < |S_n - S|$.

Puisque $\forall j \geqslant$, $|S_{n+j} - S| = |(1-\lambda_{n+j-1}) \cdots (1-\lambda_n)(S_n - S)|$
$$< |S_n - S|$$

donc $\forall n > n'$, $D(n) \geqslant 1$

Selon la propriété 1.1, $|S_{n+D(n)}-S| \geqslant |t_n - S|$

$$|S_{n+D(n)}-S| \leqslant \frac{n-k}{n+D(n)-1}\,|S_n - S|$$

donc : $\dfrac{n-k}{n+D(n)-1} \geqslant |C_n|$, et $D(n) \leqslant \dfrac{n-k}{|C_n|} - n + 1$

<u>REMARQUE</u> : Dans le théorème 4.3 , on a l'inégalité :
$D(n) \geqslant \ln\beta / \ln(1-\lambda_n)$. en pratique , on ne connait pas la suite (λ_n) , donc il faut donner une estimation pour cette suite .

Selon le lemme 2.5 , on peut obtenir une sous-suite $\dfrac{\Delta S_{n_k+1}}{\Delta S_{n_k}}$ de la suite $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}$, telle que :

- $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\Delta S_{n_k+1}}{\Delta S_{n_k}} = 1$
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\quad 0 < \dfrac{\Delta S_{n_k+1}}{\Delta S_{n_k}} < 1$.

On sait que $\dfrac{\Delta S_{n_k+1}}{\Delta S_{n_k}} = (1-\lambda_{n_k})\cdot(1-\mu_{n_k})$

Puisque $(S_n) \in LoG^+1$, donc $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k} = 0$ et il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > k_0$, $0 < \mu_{n_k} < 1$, et $0 < \lambda_{n_k} < 1$

on a alors : $\dfrac{\Delta S_{n_k+1}}{\Delta S_{n_k}} = (1-\lambda_{n_k})(1-\mu_{n_k}) < 1 - \lambda_{n_k}$

donc : $0 < \lambda_{n_k} < 1 - \dfrac{\Delta S_{n_k+1}}{\Delta S_{n_k}} \qquad \forall k > k_0$

Donc $\forall\, k > k_0$, $(n_k > n_0)$, $D(n_k) \geqslant \ln\beta / \ln\left(\dfrac{\Delta S_{n_k+1}}{\Delta S_{n_k}}\right)$

VI COMPARAISON DES TRANSFORMATIONS DES SUITES

On sait que, avec la fonction $D(n)$, on peut savoir combien une suite (S_n) est améliorée par une transformation de suites. On peut aussi utiliser la fonction $D(n)$ pour comparer deux transformations de suites. Avec des expériences pratiques, SMITH et FORD ont comparé certains procédés, algorithmes et transformations [13], [9]. Par exemple, ils disaient que, pour les suites à convergence logarithmique, le Θ-algorithme et la u-transformation sont les meilleures choix. Dans les études suivantes, on va comparer quantitativement des transformations de suites.

__Théorème 4.4__ :

Soit $\mathcal{S} \subset Lin^{(1)}$, et T_1, T_2 deux transformations sur $\mathcal{S}$,
$\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $T_1 : (S_n) \longrightarrow (t_n^{(1)})$, $T_2 : (S_n) \longrightarrow (t_n^{(2)})$.
S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $L \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_j \leqslant \beta_j$
$j = 1, 2$. tels que : $\forall n > n_0$,

$$C_n^{(1)} = \frac{t_n^{(1)} - S}{(S_n - S)^{L+1}} \quad , \quad \beta_1 > |C_n^{(1)}| > \alpha_1 > 0$$

$$C_n^{(2)} = \frac{t_n^{(2)} - S}{(S_n - S)^{L+1}} \quad , \quad \beta_2 > |C_n^{(2)}| > \alpha_2 > 0$$

Alors, $\overline{\lim_{n\to\infty}} |D^{(1)}(n) - D^{(2)}(n)| < +\infty$

__Démonstration__ :

Supposons qu'il existe une suite $(S_n) \in \mathcal{S}$, telle que :
$\overline{\lim_{n\to\infty}} |D^{(1)}(n) - D^{(2)}(n)| = +\infty$.
D'après cette hypothèse, on peut trouver une suite $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante et tendant vers $+\infty$, telle que :

ou bien $\lim_{k\to\infty} (D^{(1)}(n_k) - D^{(2)}(n_k)) = +\infty$

ou bien $\lim_{k\to\infty} (D^{1}(n_k) - D^{(2)}(n_k)) = -\infty$.

Cas 1 :

$\lim\limits_{k\to\infty} \left(D^{(1)}(m_k) - D^{(2)}(m_k)\right) = +\infty$

selon la propriété 1.1, on a alors :

- $|S_{m_k + D^{(1)}(m_k)} - S| \geqslant |t^{(1)}_{m_k} - S|$
- $|S_{m_k + D^{(2)}(m_k)+1} - S| < |t^{(2)}_{m_k} - S|$

Puisque $(S_n) \in Lin^{(1)}$, $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{S_{m+1}-S}{S_m - S} = a \quad 0<|a|<1$,

il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall m > N$,

$$S_m \neq S \quad , \quad \frac{S_{m+1}-S}{S_m-S} < \frac{1+|a|}{2} < 1 \; .$$

Puisque $t^{(1)}_m - S = \left|\frac{C^{(1)}_m}{C^{(2)}_m}\right| \, |t^{(2)}_m - S|$

donc $|S_{m_k + D^{(1)}(m_k)} - S| \geqslant \left|\frac{C^{(1)}_{m_k}}{C^{(2)}_{m_k}}\right| \, |t^{(2)}_{m_k} - S|$

$$|S_{m_k+D^{(1)}(m_k)} - S| = \left|\frac{S_{m_k+D^{(1)}(m_k)} - S}{S_{m_k+D^{(1)}(m_k)+1} - S}\right| \cdots \left|\frac{S_{m_k+D^{(2)}(m_k)+2} - S}{S_{m_k+D^{2}(m_k)+1} - S}\right| \cdot |S_{m_k+D^{(2)}(m_k)+1} - S|$$

$$\leqslant \left[\frac{1+|a|}{2}\right]^{(D^{(1)}(m_k) - D^{2}(m_k) - 1)} . \, |S_{m_k+D^{(2)}(m_k)+1} - S|$$

on a alors, $\forall m > N$, $k > k_0$ $\left(\forall k > k_0,\ D^{(1)}_{(m_k)} - D^{(2)}_{(m_k)} > 3\right)$

$$\left[\frac{1+|a|}{2}\right]^{(D^{(1)}(m_k) - D^{(2)}(m_k) - 1)} \geqslant \left|\frac{C^{(1)}_{m_k}}{C^{(2)}_{m_k}}\right| \geqslant \frac{\alpha_1}{\beta_2} > 0$$

puisque $0 < (1+|a|)/2 < 1$

donc $\lim\limits_{m\to\infty} \left(\frac{1+|a|}{2}\right)^m = 0$

selon notre hypothèse que $\lim D^{(1)}(m_k) - D^{(2)}(m_k) = +\infty$

on a alors : $0 \geqslant \frac{\alpha_1}{\beta_2}$

ce qui est contradictoire avec $\frac{\alpha_1}{\beta_2} > 0$, donc notre hypothèse est fausse.

Cas 2 :

$\lim\limits_{k\to\infty} \left(D^{(1)}(m_k) - D^{(2)}(m_k)\right) = -\infty$. On va avoir la même contradiction, donc $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \left|D^{(1)}(m) - D^{(2)}(m)\right| < +\infty$

Théorème 4.5 :

Soit $\mathcal{S} \subset Log$, T_1, T_2 deux transformations sur $\mathcal{S}$,

$T_1 : (S_n) \to (t_n^{(1)})$, $T_2 : (S_n) \to (t_n^{(2)})$

on pose : $C_n^{(1)} = \dfrac{t_n^{(1)} - S}{(S_n - S)^L}$, $C_n^{(2)} = \dfrac{t_n^{(2)} - S}{(S_n - S)^L}$, $L \in \mathbb{N}^*$

s'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_j \leq \beta_j < 1$, $j = 1, 2$. et $\alpha_1 > \beta_2$, tels que : $\forall n > N$

$$\alpha_j \leq |C_n^{(j)}| \leq \beta_j \qquad j = 1, 2$$

alors : $\lim\limits_{n\to\infty} \left(D^{(2)}(n) - D^{(1)}(n)\right) = +\infty$.

Démonstration :

Supposons qu'il existe une suite $(S_n) \in \mathcal{S}$, telle que :

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(D^{(2)}(n) - D^{(1)}(n)\right) \neq \infty$

D'après cette hypothèse, il existe une suite $(n_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $n_k \to +\infty$ et $M \in \mathbb{N}^*$ tels que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $D^{(2)}(n_k) - D^{(1)}(n_k) < M$

Selon la propriété 1.1 ,

- $\left|S_{D^{(2)}(n_k)+n_k+1} - S\right| < |t_{n_k}^{(2)} - S| = \left|\dfrac{C_{n_k}^{(2)}}{C_{n_k}^{(1)}}\right| \, |t_{n_k}^{(1)} - S| \leq \dfrac{\beta_2}{\alpha_1} \, |t_{n_k}^{(1)} - S|$
- $\left|S_{D^{(1)}(n_k)+n_k} - S\right| \geq |t_{n_k}^{(1)} - S|$

alors : $\left|S_{D^{(2)}(n_k)+n_k+1} - S\right| \leq \dfrac{\beta_2}{\alpha_1} \cdot \left|S_{D^{(1)}(n_k)+n_k} - S\right|$

d'où : $\dfrac{|S_{D^{(1)}(n_k)+n_k} - S|}{|S_{D^{(2)}(n_k)+n_k+1} - S|} \geq \dfrac{\alpha_1}{\beta_2} > 1$

Puisque $\forall n > N$, $|t_{n_k}^{(2)} - S| = |C_n^{(2)}| \, |(S_n - S)^L| \leq \beta_2 \, |(S_n - S)^L|$

$$\leq \alpha_1 \, |(S_n - S)^L| \leq |C_n^{(1)} (S_n - S)^L|$$
$$= |t_{n_k}^{(1)} - S|$$

donc $D^{(2)}(n_k) \geq D^{(1)}(n_k)$.

Puisque $D^{(2)}_{(n_k)} < M + D^{(1)}_{(n_k)}$, et $(S_n) \in Log$

on a alors $\lim_{k\to\infty} \frac{|S_{D^{(1)}(n_k)+n_k} - S|}{|S_{D^{(1)}(n_k)+n_k+1} - S|} = 1$, donc $1 \geq \frac{\alpha_1}{\beta_2}$

ce qui est contradictoire avec $\frac{\alpha_1}{\beta_2} > 1$,

donc notre hypothèse est fausse.

<u>REMARQUE</u> : Si $(S_n) \in$ Log , si $\lim_{n\to\infty} \frac{t_n^{(1)} - S}{S_n - S} = C_1$, $\lim_{n\to\infty} \frac{t_n^{(2)} - S}{S_n - S} = C_2$

si $0 < C_1 < C_2 < 1$. Selon le théorème 4.5, on sait que la suite $(t_n^{(1)})$ nous aide beaucoup plus que la suite $(t_n^{(2)})$.

Nous rappellons quelques procédés :

- Lewin U transformation : $T_{k,n} = \frac{\Delta^k(n^{k-1} s_n / R_n)}{\Delta^2(n^{k-1}/R_n)}$

  si $R_n = n . \Delta S_n$ _ U-transformation.

- Θ - algorithm : $\Theta_{-1}^n = 0$, $\Theta_0^n = S_n$.

$$\Theta_{2k+1}^{(n)} = \Theta_{2k-1}^{(n)} + 1/\Delta\Theta_{2k}^{(n)} .$$

$$\Theta_{2k+2}^{(n)} = \Theta_{2k}^{(n+1)} + \Delta\Theta_{2k}^{(n+1)} . \Delta\Theta_{2k+1}^{(n+1)} / \Delta^2\Theta_{2k+1}^{(n)} .$$

- $\mathcal{E}$ - algorithm : $\mathcal{E}_{-1}^n = 0$, $\mathcal{E}_0^n = S_n$

$$\mathcal{E}_k^{(n)} = \mathcal{E}_{k-2}^{(n+1)} + 1/\Delta\mathcal{E}_{k-1}^{(n)}$$

- Procédé du Δ^2- d'Aithen : $T_2^{(n)} = S_n - (\Delta S_n)^2/\Delta^2 S_n$.

$$T_4^{(n)} = T_2^{(n)} - (\Delta T_2^{(n)})^2/\Delta^2 T_2^{(n)}$$

Définissons les ensembles $\mathbb{L}_{a,b}$, et $\mathbb{L}$.

$a \in \mathbb{R}^{*+}$, $b \in \mathbb{R}^{*+}$ et $a^2 \geq b$,

$$\mathbb{L}_{a,b} = \left\{ (S_n) \in LOG^+1 \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{\lambda_n} = a \ , \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta U_n}{\lambda_n^2} = -b \right\}$$

où $\lambda_n = 1 - \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S}$, $U_n = 1 - \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$.

$$\mathbb{L} = \bigcup_{\substack{a \in \mathbb{R}^{*+},\, b \in \mathbb{R}^{*+} \\ a^2 \geq b \\ a > 0}} \mathbb{L}_{a,b}$$

Propriété 4.6 :

Soit $(S_n) \in \mathbb{L}$, si $(S_n) \in \mathbb{L}_{a,b}$

alors on a :

1) $$\lim_{n \to \infty} \frac{\theta_n^{(2)} - S}{S_n - S} = \frac{a^2 - b}{a^2 - b + a + 1}$$

2) $$\lim_{n \to \infty} \frac{T_{2,n} - S}{S_n - S} = \frac{a^2 - b}{a^2 - b + a + 1}$$

3) $$\lim_{n \to \infty} \frac{T_2^{(n)} - S}{S_n - S} = \frac{a}{a + 1}$$

Démonstration :

1) Supposons : $(S_n) \in \mathbb{L}$, $\dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = 1 - \lambda_n$.

$$\theta_2^{(n)} S_n = S_{n+1} + \frac{\Delta^2 S_{n+1}\, \Delta S_n\, \Delta S_{n+1}}{\Delta^2 S_{n+1}\, \Delta S_n - \Delta^2 S_n\, \Delta S_{n+2}}$$

On a :

$$\Delta S_n = -\lambda_n (S_n - S).$$

$$\Delta S_{n+1} = -\lambda_{n+1} (S_{n+1} - S) = -\lambda_{n+1} (1 - \lambda_n)(S_n - S).$$

$$\Delta S_{n+2} = -\lambda_{n+2} (S_{n+2} - S) = -\lambda_{n+2} (1 - \lambda_n)(S_n - S)(1 - \lambda_{n+1}).$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 S_n &= \Delta S_{n+1} - \Delta S_n \\ &= -\lambda_{n+1} (1 - \lambda_n)(S_n - S) + \lambda_n (S_n - S) \\ &= (\lambda_n - \lambda_{n+1} + \lambda_n \lambda_{n+1})(S_n - S). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 S_{n+1} &= \Delta S_{n+2} - \Delta S_{n+1} \\ &= -\lambda_{n+2} (1 - \lambda_n)(1 - \lambda_{n+1}) + \lambda_{n+1} (1 - \lambda_n)(S_n - S) \\ &= (1 - \lambda_n)(\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2} + \lambda_{n+1} \lambda_{n+2})(S_n - S). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 S_{n+1} \cdot \Delta S_n \cdot \Delta S_{n+1} &= \\ (1 - \lambda_n)(\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2} + \lambda_{n+1} \lambda_{n+2})(S_n - S) & [-\lambda_n (S_n - S)][-\lambda_{n+1}(1 - \lambda_n)(S_n - S)] \\ &= \lambda_n \lambda_{n+1} (1 - \lambda_n)^2 (\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2} + \lambda_{n+1} \lambda_{n+2})(S_n - S)^3. \end{aligned}$$

$$\Delta^2 S_{n+1}\,\Delta S_n - \Delta^2 S_n\,\Delta S_{n+2} =$$

$$(1-\lambda_n)(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2}+\lambda_{n+1}\lambda_{n+2})(S_n-S)\,.\,[-\lambda_n(S_n-S)] -$$
$$(\lambda_n-\lambda_{n+1}+\lambda_n\,.\,\lambda_{n+1})(S_n-S)[-\lambda_{n+2}(1-\lambda_n)(1-\lambda_{n+1})(S_n-S)]$$

$$=$$

$$\Big[-\lambda_n(1-\lambda_n)(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2}+\lambda_{n+1}\lambda_{n+2})+\lambda_{n+2}(1-\lambda_n)(1-\lambda_{n+1})\,.$$
$$(\lambda_n-\lambda_{n+1}+\lambda_n\lambda_{n+1})\Big]\,(S_n-S)^2\,.$$

$$=$$

$$\lambda_n\lambda_{n+1}(1-\lambda_n)\Big[\frac{\lambda_{n+2}}{\lambda_{n+1}}(1-\lambda_{n+1})\Big(1-\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}+\lambda_{n+1}\Big) -$$
$$\Big(1-\frac{\lambda_{n+2}}{\lambda_{n+1}}+\lambda_{n+2}\Big)\Big]\,(S_n-S)^2$$

$$=$$

$$\lambda_n\lambda_{n+1}(1-\lambda_n)\Big[(1-\mu_{n+1})(1-\lambda_{n+1})(\mu_n+\lambda_{n+1}) -$$
$$(\mu_{n+1}+\lambda_{n+2})\Big]\,(S_n-S)^2$$

$$=$$

$$\lambda_n\lambda_{n+1}(1-\lambda_n)\Big[-\Delta\mu_n-\Delta\lambda_{n+1}-(\mu_{n+1}+\lambda_{n+1})(\mu_n+\lambda_{n+1})$$
$$+\lambda_{n+1}\mu_{n+1}(\lambda_{n+1}+\mu_n)\Big]\,(S_n-S)^2.$$

On a alors :

$$\frac{\theta_2^{(n)}S_n-S}{S_n-S} = 1-\lambda_n+\frac{(1-\lambda_n)(\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2}+\lambda_{n+1}\lambda_{n+2})}{-\Delta\mu_n-\Delta\lambda_{n+1}-(\mu_{n+1}+\lambda_{n+1})(\mu_n+\lambda_{n+1})+\lambda_{n+1}\mu_{n+1}(\lambda_{n+1}+\mu_n)}$$

puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\Delta\mu_n}{\lambda_n^2} = -b$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mu_n}{\lambda_n} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = \lim\limits_{n\to\infty}\mu_n = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda_{n+1}-\lambda_{n+2}}{\lambda_n^2} \longrightarrow a \\[2mm] \dfrac{\mu_{n+1}}{\lambda_n} \longrightarrow a \end{cases}$$

on a : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\theta_2^{(n)}S_n-S}{S_n-S} = 1+\dfrac{a+1}{b+a-(a+1)^2}$

$$= \frac{a^2-b}{a^2+a+1-b}$$

2) $$T_{2,m} S_m = \frac{\Delta^2(m.S_m/R_m)}{\Delta^2(m/R_m)}$$

$$= \left(\frac{S_m}{\Delta S_m} - 2\frac{S_{m+1}}{\Delta S_{m+1}} + \frac{S_{m+2}}{\Delta S_{m+2}}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\Delta S_m} - \frac{2}{\Delta S_{m+1}} + \frac{1}{\Delta S_{m+2}}\right)$$

$$= \frac{S_m \frac{\Delta S_{m+2}}{\Delta S_m} - 2 S_{m+1} \frac{\Delta S_{m+2}}{\Delta S_{m+1}} + S_{m+2}}{\frac{\Delta S_{m+2}}{\Delta S_m} - 2\frac{\Delta S_{m+2}}{\Delta S_{m+1}} + 1}$$

$$\frac{T_{2,m} S_m - S}{S_m - S} = \frac{\frac{(S_m - S)}{(S_m - S)}\frac{\Delta S_{m+2}}{\Delta S_m} - 2\frac{(S_{m+1}-S)}{(S_m-S)}\frac{\Delta S_{m+2}}{\Delta S_{m+1}} + \frac{S_{m+2}-S}{S_m - S}}{\frac{\Delta S_{m+2}}{\Delta S_m} - 2\frac{\Delta S_{m+2}}{\Delta S_{m+1}} + 1}$$

$$= \frac{\frac{\lambda_{m+2}}{\lambda_m}(1-\lambda_m)(1-\lambda_{m+1}) - 2(1-\lambda_m)\cdot(1-\lambda_{m+1})\cdot\frac{\lambda_{m+2}}{\lambda_{m+1}} + (1-\lambda_m)(1-\lambda_{m+1})}{\frac{\lambda_{m+2}}{\lambda_m}(1-\lambda_m)(1-\lambda_{m+1}) - 2\frac{\lambda_{m+2}}{\lambda_{m+1}}(1-\lambda_{m+1}) + 1}$$

$$= 1 + \frac{2\lambda_m(1-\lambda_{m+1})\frac{\lambda_{m+2}}{\lambda_{m+1}} - \lambda_m - \lambda_{m+1} + \lambda_m\lambda_{m+1}}{\frac{\lambda_{m+2}}{\lambda_m}(1-\lambda_m)(1-\lambda_{m+1}) - 2\frac{\lambda_{m+2}}{\lambda_{m+1}}(1-\lambda_{m+1}) + 1}$$

$$= 1 + \lambda_m \cdot \frac{2\frac{\lambda_{m+2}}{\lambda_{m+1}}(1-\lambda_{m+1}) - 1 - \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} + \lambda_{m+1}}{\frac{\lambda_{m+2}}{\lambda_m}(1-\lambda_m)(1-\lambda_{m+1}) - 2\frac{\lambda_{m+2}}{\lambda_{m+1}}(1-\lambda_{m+1}) + 1}$$

$$= 1 - \lambda_m \cdot \frac{-2(1-\mu_{m+1})(1-\lambda_{m+1}) + 1 + (1-\mu_m) - \lambda_{m+1}}{(1-\mu_{m+1})(1-\mu_m)(1-\lambda_m)(1-\lambda_{m+1}) - 2(1-\mu_{m+1})(1-\lambda_{m+1}) + 1}$$

$$= 1 - \lambda_m \cdot \frac{\Delta\mu_m + \mu_{m+1} + \lambda_{m+1} - 2\mu_{m+1}\lambda_{m+1}}{(1-\mu_{m+1})(1-\mu_m)(1-\lambda_m)(1-\lambda_{m+1}) - 2(1-\mu_{m+1})(1-\lambda_{m+1}) + 1}$$

$$(1-\mu_{m+1})(1-\mu_m)(1-\lambda_m)(1-\lambda_{m+1})$$
$$= (1-\mu_m-\mu_{m+1}+\mu_m\mu_{m+1})(1-\lambda_m-\lambda_{m+1}+\lambda_m\lambda_{m+1})$$
$$= (1-\mu_m-\mu_{m+1})(1-\lambda_m-\lambda_{m+1}) + \lambda_m\lambda_{m+1}(1-\mu_m-\mu_{m+1}) + \mu_m\mu_{m+1}(1-\lambda_m-\lambda_{m+1}) + \mu_m\mu_{m+1}\lambda_m\lambda_{m+1}$$
$$= 1-\mu_m-\mu_{m+1}-\lambda_m-\lambda_{m+1} + (\mu_m+\mu_{m+1})(\lambda_m+\lambda_{m+1}) + \lambda_m\lambda_{m+1} - \lambda_m\lambda_{m+1}(\mu_m+\mu_{m+1}) + \mu_m\mu_{m+1} - \mu_m\mu_{m+1}(\lambda_m+\lambda_{m+1}) + \mu_m\mu_{m+1}\lambda_m\lambda_{m+1}$$
$$= 1-\mu_m-\mu_{m+1}-\lambda_m-\lambda_{m+1} + (\mu_m+\mu_{m+1})(\lambda_m+\lambda_{m+1}) + \lambda_m\lambda_{m+1} + \mu_m\mu_{m+1} - \lambda_m\lambda_{m+1}(\mu_m+\mu_{m+1}) - \mu_m\mu_{m+1}(\lambda_m+\lambda_{m+1}) + \mu_m\mu_{m+1}\lambda_m\lambda_{m+1}$$

$$= 1 - u_n - u_{n+1} - \lambda_n - \lambda_{n+1} + (u_n + u_{n+1})(\lambda_n + \lambda_{n+1}) + \lambda_n \lambda_{n+1} + u_n u_{n+1} + \mathbb{R}_n$$

où $\lim_{n\to\infty} \mathbb{R}_n / \lambda_n^2 = 0$

$$\frac{T_{2,n} S_n - S}{S_n - S} = 1 - \lambda_n \frac{\Delta u_n + u_{n+1} + \lambda_{n+1} - 2 u_{n+1} \lambda_{n+1}}{\Delta u_n + \Delta \lambda_n + (u_n + u_{n+1})(\lambda_n + \lambda_{n+1}) + \lambda_n \lambda_{n+1} + u_n u_{n+1} - 2 u_{n+1} \lambda_{n+1} + \mathbb{R}_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_{2,n} S_n - S}{S_n - S} = 1 - \frac{a+1}{-b - a + 4a + 1 + a^2 - 2a}$$

$$= 1 - \frac{a+1}{a^2 + a + 1 - b}$$

$$= \frac{a^2 - b}{a^2 + a + 1 - b}$$

3) $T_2^{(n)} = S_n - (\Delta S_n)^2 / \Delta^2 S_n$

$$T_2^{(n)} - S = \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1} + u_n}\right)(S_n - S)$$

puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$, et $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\lambda_n} = a$

donc $\lim_{n\to\infty} \frac{T_2^{(n)} - S}{(S_n - S)} = \frac{a}{1+a}$

Propriété 4.7 :

Soit $(S_n) \in Log^{[4]}$.

Si $S_{n+1} - S = \sum_{j=1}^{4} a_j (S_n - S)^j + ((S_n - S)^4)$, $a_2 \neq 0$ $(S_n) \in CONV^*(\mathbb{R})$

Alors on a :

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_n^{(2)} - S}{S_n - S} = 0$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{T_{2,n} - S}{S_n - S} = 0$

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{T_2^{(n)} - S}{S_n - S} = \frac{1}{2}$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_4^{(n)} - S}{S_n - S} = \frac{1}{3}$

5) $\lim_{n\to\infty} \frac{T_4^{(n)} - S}{S_n - S} = \frac{1}{4}$

Démonstration :

On suppose que la suite $(S_n) \in Log^{[4]}$,

$$S_{n+1} - S = \sum_{j=1}^{4} a_j (S_n - S)^j + o\left((S_n-S)^4\right), \quad a_1 = 1, \quad \begin{matrix} a_2 \neq 0 \\ S_n \neq S \end{matrix}.$$

on a alors : $\lambda_n = -\left[a_2(S_n-S) + a_3(S_n-S)^2 + a_4(S_n-S)^3 + o\left((S_n-S)^3\right)\right]$

$$\mu_n = -\left[a_2(S_n-S) + b_3(S_n-S)^2 + o\left((S_n-S)^2\right)\right]$$

puisque $a_2 \neq 0$ et $S_n \neq S$, $\Delta\mu_n = -a_2^2 (S_n-S)^2 + o\left((S_n-S)^2\right)$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mu_n}{\lambda_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta\mu_n}{\lambda_n^2} = -1$

selon la propriété 4.6, on a alors :

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\theta_n^{(2)} - S}{S_n - S} = \dfrac{a^2 - b}{a^2 - b + a + 1} = 0 \qquad (a = 1,\ b = 1)$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_{2,n} - S}{S_n - S} = \dfrac{a^2 - b}{a^2 - b + a + 1} = 0 \qquad (a = 1,\ b = 1)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T_2^{(n)} - S}{S_n - S} = \dfrac{a}{1 + a} = \dfrac{1}{2} \qquad (a = 1)$

On va démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_4^{(n)} - S}{S_n - S} = \dfrac{1}{3}$, et $\lim \dfrac{T_4^{(n)} - S}{S_n - S} = \dfrac{1}{4}$

$$\varepsilon_4^{(n)} = \varepsilon_2^{(n+1)} + 1/\Delta\varepsilon_3^{(n)}$$

$$\varepsilon_3^{(n)} = \varepsilon_1^{(n+1)} + 1/\Delta\varepsilon_2^{(n)}$$

$$\varepsilon_2^{(n)} = \varepsilon_0^{(n+1)} + 1/\Delta\varepsilon_1^{(n)}$$

$$\varepsilon_1^{(n)} = \varepsilon_{-1}^{(n+1)} + 1/\Delta\varepsilon_0^{(n)}$$

$$\varepsilon_0^{(n)} = S_n, \quad \varepsilon_{-1}^{(n)} = 0$$

Evidemment : $\varepsilon_2^n = T_2^n = S_n - \dfrac{(\Delta S_n)^2}{\Delta^2 S_n}$

notons :
$$\left\| \begin{array}{l} R_n = \dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S}, \\[2ex] P_n = \dfrac{\varepsilon_2^n - S}{S_n - S}, \\[2ex] \theta_n = R_n P_{n+1} - P_n \end{array} \right.$$

$\forall (S_n) \in \mathfrak{S}$, on note :

$$S_{n+1} - S = S_n - S - a_2(S_n-S)^2 - a_3(S_n-S)^3 - a_3(S_n-S)^4 + o\left((S_n-S)^4\right) \quad (a_2 \neq 0)$$

Alors on a : $$\left.\begin{array}{|l} R_m = 1 - a_2(S_m-S) - a_3(S_m-S)^2 - a_4\left((S_m-S)^3\right) + o\left((S_m-S)^3\right) \\ P_m = \frac{1}{2} + \varphi_1(S_m-S) + \varphi_2(S_m-S)^2 + o\left((S_m-S)^2\right) \\ \theta_m = -\frac{a_2}{2}(S_m-S) + C_2(S_m-S)^2 + o\left((S_m-S)^2\right). \end{array}\right\} \quad (5\_1)$$

Maintenant on va démontrer (5_1).

notons : $\frac{S_{m+1}-S}{S_m-S} = 1-\lambda_m$, $\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} = 1-\mu_m$

on a alors :

$$\lambda_m = a_2(S_m-S) + a_3(S_m-S)^2 + a_4(S_m-S)^3 + o\left((S_m-S)^3\right)$$

$$\lambda_{m+1} = a_2\left[(S_m-S) - a_2(S_m-S)^2 - a_3(S_m-S)^3 - \dots\right] + a_3\left[(S_m-S) - a_2(S_m-S)^2 - \dots\right]^2 + \dots$$

$$= a_2(S_m-S) + (a_3-a_2^2)(S_m-S)^2 + (a_4 - 3a_2a_3)(S_m-S)^3 + o\left((S_m+S)^3\right)$$

$$\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} = 1 - a_2(S_m-S) - b_3(S_m-S)^2 + o\left((S_m-S)^2\right)$$

on a : $$\mu_m = a_2(S_m-S) + b_3(S_m-S)^2 + o\left((S_m-S)^2\right)$$

$$P_m = \frac{\varepsilon_2^m - S}{S_m - S} = 1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}+\mu_m}$$

$$= 1 - \frac{a_2(S_m-S) + a_3(S_m-S)^2 + a_4(S_m-S)^3 + \dots}{\left[a_2(S_m-S) + (a_3-a_2^2)(S_m-S)^2 + \dots\right] + \left[a_2(S_m-S) + b_3(S_m-S)^2 + \dots\right]}$$

$$= \frac{1}{2} + \varphi_1(S_m-S) + \varphi_2(S_m-S)^2 + o\left((S_m-S)^2\right)$$

$$P_{m+1} = \frac{1}{2} + \varphi_1(S_{m+1}-S) + \varphi_2(S_{m+1}-S)^2 + o\left((S_m-S)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \varphi_1\left[(S_m-S) - a_2(S_m-S)^2 - a_3(S_m-S)^3 - \dots\right] + \varphi_2\left[(S_m-S) - a_2(S_m-S)^2 - \dots\right]^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \varphi_1(S_m-S) + (\varphi_2 - a_2\varphi_1)(S_m-S)^2 + o\left((S_m-S)^2\right).$$

$$R_m P_{m+1} = \left(1 - a_2(S_m-S) - a_3(S_m-S)^2 - a_4(S_m-S)^3 - \dots\right)\left(\frac{1}{2} + \varphi_1(S_m-S) + (\varphi_2 - a_2\varphi_1)(S_m-S)^2 + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\varphi_1 - \frac{a_2}{2}\right)(S_m-S) + \left(\varphi_2 - 2\varphi_1 a_2 - \frac{1}{2}a_3\right)(S_m-S)^2 + o\left((S_m-S)^2\right)$$

$$\theta_m = R_m P_{m+1} - P_m$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \left(\varphi_1 - \frac{a_2}{2}\right)(S_m-S) + \dots\right] - \left[\frac{1}{2} + \varphi_1(S_m-S) + \varphi_2(S_m-S)^2 + \dots\right]$$

$$= -\frac{a_2}{2}(S_m-S) + C_2(S_m-S)^2 + o\left((S_m-S)^2\right)$$

On va démontrer $\dfrac{\varepsilon_4^{(m)}-S}{S_m-S} \longrightarrow \dfrac{1}{3}$

$$\varepsilon_4^{(m)} = \varepsilon_2^{(m+1)} + 1 \Big/ \left[\Delta\left(\frac{1}{\Delta S_{m+1}}\right) + \Delta\left(\frac{1}{\Delta \varepsilon_2^{(m)}}\right)\right]$$

$$\frac{\varepsilon_4^{(m)}-S}{S_{m+1}-S} = \frac{\varepsilon_2^{(m+1)}-S}{S_{m+1}-S} + \frac{1}{(S_{m+1}-S)\,\Delta\left(\frac{1}{\Delta S_{m+1}}\right) + (S_{m+1}-S)\,\Delta\left(\frac{1}{\Delta \varepsilon_2^{(m)}}\right)}$$

$$\begin{aligned}
(S_{m+1}-S)\,\Delta\left(\frac{1}{\Delta S_{m+1}}\right) &= (S_{m+1}-S)\left(\frac{1}{\Delta S_{m+2}} - \frac{1}{\Delta S_{m+1}}\right) \\
&= \frac{1}{\frac{\Delta S_{m+2}}{S_{m+1}-S}} - \frac{1}{\frac{\Delta S_{m+1}}{S_{m+1}-S}} \\
&= \frac{1}{\frac{(S_{m+3}-S)}{S_{m+1}-S} - \frac{(S_{m+2}-S)}{S_{m+1}-S}} - \frac{1}{\frac{(S_{m+2}-S)}{S_{m+1}-S} - \frac{(S_{m+1}-S)}{S_{m+1}-S}} \\
&= \frac{1}{R_{m+2}R_{m+1}-R_{m+1}} - \frac{1}{R_{m+1}-1} \\
&= \frac{2R_{m+1}-R_{m+1}R_{m+2}-1}{R_{m+1}(R_{m+2}-1)(R_{m+1}-1)}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{m+1} &= 1 - a_2(S_m-S) - (a_3-a_2^2)(S_m-S)^2 + \dots + o((S_m-S)^3) \\
R_{m+2} &= 1 - a_2(S_{m+1}-S) - (a_3-a_2^2)(S_{m+1}-S)^2 + \dots + o((S_m-S)^3) \\
&= 1 - a_2\left[(S_m-S) - a_2(S_m-S)^2 + \dots\right] - (a_3-a_2^2)\left[(S_m-S) - a_2(S_m-S)^2 + \dots\right]^2 \\
&= 1 - a_2(S_m-S) - \left[(a_3-a_2^2) - a_2^2\right](S_m-S)^2 + \dots + o((S_m-S)^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{m+1}R_{m+2} &= \left[1 - a_2(S_m-S) - (a_3-a_2^2)(S_m-S)^2 + \dots\right]\left[1 - a_2(S_m-S) - \right. \\
&\qquad\qquad \left. (a_3-2a_2^2)(S_m-S)^2 + \dots\right] \\
&= 1 - 2a_2(S_m-S) + \left[-(a_3-a_2^2) - (a_3-2a_2^2) + a_2^2\right](S_m-S)^2 + \dots \\
&\qquad + o((S_m-S)^3) \\
&= 1 - 2a_2(S_m-S) - \left[2(a_3-a_2^2) - 2a_2^2\right](S_m-S)^2 + \dots + o((S_m-S)^3)
\end{aligned}$$

$$2R_{m+1} - R_{m+1}R_{m+2} - 1 = -2a_2^2(S_m-S)^2 + \dots + o((S_m-S)^3)$$

$$\begin{aligned}
(R_{m+2}-1)(R_{m+1}-1) &= \left[-a_2(S_{m+2}-S) - a_3(S_{m+1}-S)^2 - \dots\right]\cdot \\
&\qquad \left[-a_2(S_{m+1}-S)^1 - a_3(S_{m+1}-S)^2 - \dots\right] \\
&= a_2^2(S_m-S)^2 + \dots + o((S_m-S)^3)
\end{aligned}$$

alors $\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-S)\,\Delta\left(\frac{1}{\Delta S_{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2R_{n+1}-R_{n+1}R_{n+2}-1}{R_{n+1}(R_{n+1}-1)(R_{n+2}-1)}$

$$= -2 .$$

$$(S_{n+1}-S)\,\Delta\left(\frac{1}{\Delta\varepsilon_2^{(n)}}\right) = (S_{n+1}-S)\left(\frac{1}{\Delta\varepsilon_2^{(n+1)}} - \frac{1}{\Delta\varepsilon_2^{(n)}}\right)$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\Delta\varepsilon_2^{(n+1)}}{S_{n+1}-S}} - \frac{1}{\dfrac{\Delta\varepsilon_2^{n}}{S_{n+1}-S}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{(\varepsilon_2^{(n+2)}-S)}{S_{n+1}-S} - \dfrac{(\varepsilon_2^{(n+1)}-S)}{S_{n+1}-S}} - \frac{1}{\dfrac{\varepsilon_2^{(n+1)}-S}{S_{n+1}-S} - \dfrac{\varepsilon_2^{(n)}-S}{S_{n+1}-S}}$$

$$= \frac{1}{P_{n+2}\cdot R_{n+1}-P_{n+1}} - \frac{1}{P_{n+1}-\dfrac{P_n}{R_n}}$$

$$= \frac{1}{P_{n+2}\cdot R_{n+1}-P_{n+1}} - \frac{R_n}{P_{n+1}R_n-P_n}$$

$$= \frac{1}{\theta_{n+1}} - \frac{R_n}{\theta_n}$$

$$= \frac{\theta_n - R_n\theta_{n+1}}{\theta_n\theta_{n+1}}$$

$$\theta_{n+1} = -\frac{a_2}{2}(S_{n+1}-S) + C_2(S_{n+1}-S)^2 + o((S_n-S)^2)$$

$$= -\frac{a_2}{2}\left[(S_n-S) - a_2(S_n-S)^2\right] + C_2\left[(S_n-S)-a_2(S_n-S)^2\right]^2 + o((S_n-S)^2)$$

$$= -\frac{a_2}{2}(S_n-S) + \left(C_2+\frac{a_2^2}{2}\right)(S_n-S)^2 + o((S_n-S)^2)$$

$$= -\frac{a_2}{2}(S_n-S) + g_2(S_n-S)^2 + o((S_n-S)^2)\,,\quad \text{où } g_2 = C_2+\frac{a_2^2}{2}\,.$$

$$\theta_n\theta_{n+1} = \left[-\frac{a_2}{2}(S_n-S) + C_2(S_n-S)^2+\dots\right]\left[-\frac{a_2}{2}(S_n-S) + g_2(S_n-S)^2+\dots\right]$$

$$= \frac{a_2^2}{4}(S_n-S)^2 + R_3(S_n-S)^3 + o((S_n-S)^3)$$

$$R_n\theta_{n+1} = \left[1-a_2(S_n-S)-a_3(S_n-S)^2\dots\right]\left[-\frac{a_2}{2}(S_n-S)+g_2(S_n-S)^2+\dots\right]$$

$$= -\frac{a_2}{2}(S_n-S) + \left(g_2+\frac{a_2^2}{2}\right)(S_n-S)^2 + o((S_n-S)^2)$$

$$\theta_n - R_n\theta_{n+1} = \left(C_2-g_2-\frac{a_2^2}{2}\right)(S_n-S)^2 + o((S_n-S)^2)$$

$$= -a_2^2(S_n-S)^2 + o((S_n-S)^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_n - R_n\,\theta_{n+1}}{\theta_n\,\theta_{n+1}} = -4$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_4^{(n)} - S}{S_n - S} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_4^{(n)} - S}{S_{n+1} - S} \cdot \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_4^{(n)} - S}{S_{n+1} - S}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_2^{(n+1)} - S}{S_{n+1} - S} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(S_{n+1}-S)\,\Delta\left(\frac{1}{\Delta S_{n+1}}\right) + (S_{n+1}-S)\,\Delta\left(\frac{1}{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}\right)} .$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{-2-4} = \frac{1}{3} .$$

<u>On va démontrer $\dfrac{T_4^{(n)} - S}{S_n - S} \to \dfrac{1}{4}$</u>

$$T_4^{(n)} = T_2^{(n)} - \frac{\left(\Delta T_2^{(n)}\right)^2}{\Delta^2 T_2^{(n)}} = \varepsilon_2^{(n)} - \frac{\left(\Delta \varepsilon_2^{(n)}\right)^2}{\Delta^2 \varepsilon_2^{(n)}}$$

$$\frac{T_4^{(n)} - S}{S_n - S} = \frac{\varepsilon_2^{(n)} - S}{S_n - S} - \frac{\dfrac{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}{S_n - S}}{\dfrac{\Delta^2 \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}}$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}{S_n - S} = \frac{\varepsilon_2^{(n+1)} - \varepsilon_2^{(n)}}{S_n - S} = \frac{\varepsilon_2^{(n+1)} - S}{S_n - S} - \frac{\varepsilon_2^{(n)} - S}{S_n - S} = P_{n+1}\,R_n - P_n = Q_n .$$

$$\frac{\Delta^2 \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta \varepsilon_2^{(n)}} = \frac{\Delta \varepsilon_2^{(n+1)} - \Delta \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta \varepsilon_2^{(n)}} = \frac{\Delta \varepsilon_2^{(n+1)}}{\Delta \varepsilon_2^{(n)}} - 1$$

$$= \frac{\left(\varepsilon_2^{(n+2)} - S\right) - \left(\varepsilon_2^{(n+1)} - S\right)}{\left(\varepsilon_2^{(n+1)} - S\right) - \left(\varepsilon_2^{(n)} - S\right)} - 1$$

$$= \frac{\left(\varepsilon_2^{(n+2)} - S\right)/(S_n - S) - \left(\varepsilon_2^{(n+1)} - S\right)/(S_n - S)}{\left(\varepsilon_2^{(n+1)} - S\right)/(S_n - S) - \left(\varepsilon_2^{(n)} - S\right)/(S_n - S)} - 1$$

$$\frac{\Delta^2 \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta \varepsilon_2^{(n)}} = \frac{P_{n+2}\,R_{n+1}\,R_n - P_{n+1}\,R_n}{P_{n+1}\,R_n - P_n} - 1 .$$

$$= \frac{R_n\left(P_{n+2}\,R_{n+1} - P_{n+1}\right)}{P_{n+1}\,R_n - P_n} - 1$$

$$= \frac{R_n\,\theta_{n+1}}{\theta_n} - 1 = \frac{R_n\,\theta_{n+1} - \theta_n}{\theta_n}$$

$$\frac{\dfrac{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}{s_n - s}}{\dfrac{\Delta^2 \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}} = \frac{\theta_n}{\dfrac{R_n \theta_{n+1} - \theta_n}{\theta_n}} = \frac{\theta_n^2}{R_n \theta_{n+1} - \theta_n} = \frac{\frac{a_2^2}{4}(s_n - s)^2 + \dots}{a^2 (s_n - s)^2 + \dots}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{T_4^{(n)} - s}{s_n - s} = \lim_{n \to \infty} \frac{\varepsilon_2^{(n)} - s}{s_n - s} - \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}{s_n - s}}{\dfrac{\Delta^2 \varepsilon_2^{(n)}}{\Delta \varepsilon_2^{(n)}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} .$$

Etude expérimentale.

exemple 1 : $S_{n+1} = 0.9\,(1+S_n)\,S_n$, $S_0 = 0.2$.

on considere le procédé d'overholt

$$V_n^{(0)} = S_n \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$V_n^{(k+1)} = \frac{(\Delta S_{n+k})^{k+1}\, V_{n+1}^{(k)} - (\Delta S_{n+k+1})^{k+1} \cdot V_n^{(k)}}{(\Delta S_{n+k})^{k+1} - (\Delta S_{n+k+1})^{k+1}} \qquad n, k = 0, 1, \cdots$$

n	$V_n^{(1)}$ $D(n)/n$	$V_n^{(2)}$	$V_n^{(3)}$	$V_n^{(4)}$	$V_n^{(5)}$	$V_n^{(6)}$	$V_n^{(7)}$
10	2.25	2.80	3.57	5.36	4.87	6.82	6.22
11	2.23	2.71	3.60	5.83	4.94	7.00	6.21
12	2.21	2.66	3.56	7.23	4.94	6.36	6.25
13	2.20	2.56	3.58	5.42	4.94	6.10	6.28
14	2.18	2.52	3.61	5.00	5.00	5.95	6.31
15	2.17	2.50	3.63	4.68	5.00	5.86	6.39
16	2.16	2.41	3.60	4.44	5.04	5.82	6.41
17	2.15	2.40	3.61	4.36	5.08	5.79	6.48
18	2.15	2.38	3.63	4.30	5.08	5.76	6.50
19	2.14	2.36	3.66	4.28	5.12	5.76	6.55
20	2.13	2.34	3.68	4.18	5.15	5.74	6.60
21	2.13	2.33	3.68	4.17	5.18	5.75	6.69
22	2.12	2.32	3.69	4.16	5.21	5.75	6.66
23	2.12	2.30	3.70	4.12	5.24	5.73	6.77
24	2.11	2.29	3.71	4.11	2.26	5.74	6.88
25	2.11	2.28	3.72	4.11	5.29	5.75	7.12
26	2.10	2.27	3.73	4.10	5.31	5.78	
27	2.10	2.26	3.74	4.10	5.33	5.76	
28	2.10	2.25	3.75	4.10	5.35	5.74	
29	2.09	2.25	3.79	4.09	5.37	5.80	
30	2.09	2.24	3.76	4.09	5.38	5.70	
31	2.09	2.23	3.77	4.09	5.40	5.81	
32	2.08	2.22	3.78	4.08	5.42	5.76	
33	2.08	2.22	3.78	4.06	5.43	5.70	
34	2.08	2.21	3.79	4.05	5.45	5.95	
35	2.08	2.21	3.80	4.05	5.43		
36	2.07	2.20	3.80	4.05	5.47		
37	2.07	2.20	3.81	4.04	5.62		

Exemple 2 : $\quad s_{n+1} = e^{-s_n} \quad s_0 = 0.5, \quad s^* = 0.5671432904097840\cdots$

$(T^{(k)})$ itération du procédé Δ^2- d'Aitken, $\quad T^{(k)} : (s_n) \to (t_n^{(k)})$

$$t_n^{(0)} = s_n, \quad n = 0, 1, \cdots; \qquad t_n^{(k+1)} = t_n^{(k)} - (\Delta t_n^{(k)})^2 / \Delta^2 t_n^{(k)}.$$

n	$T^{(1)}$ $D(n)/n$	$T^{(2)}$ $D(n)/n$	$T^{(3)}$ $D(n)/n$	$T^{(4)}$ $D(n)/n$
4	2.00			
5	1.83	3.20		
6	1.66	3.13		
7	1.62	3.00	3.71	
8	1.50	2.84	3.62	
9	1.47	2.75	3.55	4.33
10	1.40	2.70	3.50	4.20
11	1.36	2.60	3.45	4.21
12	1.33	2.50	3.41	4.27
13	1.29	2.45	3.46	4.00
14	1.28	2.42	3.28	
15	1.26	2.38	3.13	
16	1.25	2.37		
17	1.24	2.35		
18	1.22	2.33		
19	1.21	2.29		
20	1.20	2.10		
21	1.19			
22	1.18			
23	1.17			
24	1.16			
25	1.16			
26	1.15			
27	1.15			
28	1.14			
29	1.13			
30	1.11			
31	1.03			

Chapitre 5

Construction d'un procédé d'accé-lération de la convergence qui possède la propriété

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D(n)}{n} = +\infty .$$

INTRODUCTION

Avec le concept de F-accélération présenté au chapitre I, nous pouvons approfondir une étude sur des transformations de suites. A partir de La fonction $D(n)$ mentionnée au chapitre I, nous pouvons poser une question suivante :

$\mathcal{S} \subset Lin^{(1)}$, " Est-ce qu'il existe une transformation normale définie sur $\mathcal{S}$ telle que $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{D(n)}{n} = +\infty$? ".

Pour répondre à cette question, nous définissons d'abord une transformation de suites qui est basée sur L'itération d'une méthode d'accélération de La convergence. Nous étudierons les propriétés de cette transformation. Nous donnerons ensuite une condition suffisante pour que La transformation possède La propriété $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{D(n)}{n} = +\infty$.
Nous construirons deux procédés d'accélération de La convergence sur deux sous-ensembles de $Ln^{(1)}$. Enfin pour La transformation qui est construite par L'itération du procédé Δ^2-d'Aitken, nous donnerons un théorème sur le temps de calcul de ce procédé.

I_1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉ.

Définition 5.1 :

Soit $\mathcal{S} \subset conv^*(\mathbb{R})$, soit T une transformation définie sur $\mathcal{S}$, $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $T : (S_n) \longrightarrow (t_n)$, soit $l \in \mathbb{R}^+$, $l \geqslant 1$.

On dit que T accélère la suite (S_n) avec le degré l

si : $\begin{cases} 1) \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{t_n - S}{(S_n - S)^l} = 0 \\ 2) \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{t_n - S}{(S_n - S)^{l+\alpha}} \neq 0 \end{cases}$

On dit que T accélère l'ensemble $\mathcal{S}$ avec le degré l

si : 1) Il existe une suite $(S_n) \in \mathcal{S}$, telle que (S_n) est accélérée par T avec le degré l.
2) $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, (S_n) est accélérée par T avec le degré au moins l.

On dit que T accélère la suite (S_n) avec le degré $+\infty$

si : $\forall l \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{t_n - S}{(S_n - S)^l} = 0$

On dit que T accélère l'ensemble $\mathcal{S}$ avec le degré $+\infty$

si : $\forall l \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{S}$ est accéléré par T avec le degré au moins l.

Définition 5.2 :

Soit $\mathcal{S} \subset conv^*(\mathbb{R})$, $l \in \mathbb{R}^+$, $l \geqslant 1$,

On dit que $\mathcal{S}$ est accélérable avec le degré l

si : 1) Il existe une transformation normale définie sur $\mathcal{S}$, telle qu'elle accélère avec le degré l.
2) Pour toute transformation normale définie sur $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ est accéléré avec le degré l au plus.

On dit que $\mathcal{S}$ est accélérable avec le degré $+\infty$,
si $\forall\, l \in \mathbb{R}^+$, il existe une transformation normale définie sur $\mathcal{S}$, telle que $\mathcal{S}$ est accéléré avec le degré au moins l.

On rappelle une définition de [19].

Définition 5.3 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $-1 < \alpha \leq 1$, $\mathcal{S}\,\mathcal{U}(\alpha)$ désigne l'ensemble de suites (S_n) telles que :

1) $(S_n) \in CONV^*(\mathbb{R})$
2) Il existe une suite $(u_n) \in conv_0^*(\mathbb{R})$ vérifiant :

   2.1) $u_{n+1} = \phi(u_n)$ pour n assez grand.
   $\phi(x)$ est une fonction analytique dans un voisinage de zéro.

   2.2) $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$.

3) Il existe une suite $(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et une constante $P \in \mathbb{R}$, $-1 < p < 1$ telles que :

$$\frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = P + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\, u_n^j \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Les ensembles $\mathcal{S}\mathcal{U}$, $\mathcal{S}\mathcal{U}\,Lin$, $\mathcal{S}\mathcal{U}\,LOG$ sont défini comme suit :

$$\mathcal{S}\mathcal{U}\,LOG = \mathcal{S}\mathcal{U}(1)$$

$$\mathcal{S}\mathcal{U}\,Lin = \bigcup_{\substack{\alpha \in \mathbb{R},\\ 0 < |\alpha| < 1}} \mathcal{S}\mathcal{U}(\alpha)$$

$$\mathcal{S}\mathcal{U} = \mathcal{S}\mathcal{U}\,LOG \ \cup\ \mathcal{S}\mathcal{U}\,Lin .$$

Proposition 5.1 : L'ensemble $Lin^{(1)}$ est accélérable avec le degré 1.
L'ensemble $\mathcal{S}\mathcal{U}$ est accélérable avec le degré $+\infty$.

Démonstration :

1). Selon la démonstration du théorème 4 dans [I] [pp 241], on sait que $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$, il n'existe aucune transformation normale accélérant avec le degré H_α toutes les suites de $Lin^{(1)}$.

- ajouté au fait que le procédé Δ^2- d'Aitken peut accélérer Lin avec le degré 1.

Donc Lin est accélérable avec le degré 1.

2) - Selon [19]

on sait que, par l'itération du procédé Δ^2- d'Aitken, $\forall \ell \in \mathbb{R}^+$ on peut construire une transformation normale définie sur $\mathcal{S}\mathcal{U}$, telle que $\mathcal{S}\mathcal{U}$ est accéléré avec le degré au moins ℓ.

Donc $\mathcal{S}\mathcal{U}$ est accélérable avec le degré $+\infty$.

Proposition 5.2 : Soit la suite $(S_n) \in \text{CONV}(\mathbb{R})$,

si : $\begin{cases} 1) \text{ Il existe une suite } (u_n) \in \text{CONV}_0^*(\mathbb{R}) \text{ telle que} \\ \quad u_{n+1} = \phi(u_n) \text{ pour } n \text{ assez grand.} \\ \quad \phi(x) \text{ est une fonction analytique dans un voisinage de} \\ \quad \text{zéro}, \quad \phi(0) = 0, \quad 0 < |\phi'(0)| < 1 \\ 2) \text{ Il existe une suite } (\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ telle que :} \\ \quad S_n - S = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j u_n^j \text{ pour } n \text{ assez grand} \end{cases}$

alors : $\begin{cases} \text{ou bien } S_n = S \text{ pour } n \text{ assez grand} \\ \text{ou bien la suite } (S_n) \in \mathcal{S}\mathcal{U}\,Lin. \end{cases}$

Démonstration :

Cas 1 : si $\alpha_n = 0$, $\forall n \geq 0$, alors $S_n = S$ pour n assez grand.

Cas 2 : Il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, $\alpha_m \neq 0$.

Puisque la suite $(u_n) \in \text{conv}_0^*(\mathbb{R})$

donc : $\begin{cases} 1) \ u_n \neq 0 \\ 2) \ \alpha_m + \alpha_{m+1} u_n + \alpha_{m+2} u_n^2 + \dots \neq 0 \text{ pour } n \text{ assez grand.} \end{cases}$

On note $g(x) = \sum_{j=m}^{\infty} \alpha_m \, u_m^{j-m}$

alors : $\begin{cases} 1) & g(x) \text{ est une fonction ànalytique dans un voisinage de zéro.} \\ 2) & g(0) \neq 0 \end{cases}$

puisque La fonction $\phi(x)$ est analytique aussi dans un voisinage de 0,

on note : $f(x) = \left(\frac{\phi(x)}{x}\right)^m \cdot \frac{g(\phi(x))}{g(x)}$

alors : $f(x)$ est analytique dans un voisinage de zéro.
iL existe $p \in \mathbb{R}$, $(\beta_m) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, tels que :
$\frac{S_{m+1} - S}{S_m - S} = f(u_m) = p + \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \, u_m^j$ pour m assez grand.

puisque $\lim_{x \to 0} \frac{g(\phi(x))}{g(x)} = 1$, et $\lim_{x \to 0} \frac{\phi(x)}{x} = \phi'(0)$, $0 < |\phi'(0)| < 1$

donc $p = \phi'(0)$, $0 < |p| < 1$

et donc la suite $(S_m) \in \mathcal{S}\mathcal{U}Lin$.

Proposition 5.3 : $Lin^{(\infty)} \subset \mathcal{S}\mathcal{U}Lin$.

Démonstration :

On suppose que La suite $(S_m) \in Lin^{(\infty)}$,
Alors iL existe une suite $(\alpha_m) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle que $S_{m+1} - S = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (S_m - S)^j$.
pour m assez grand, où $0 < |\alpha_1| < 1$
On note $\phi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \, x^j$, $u_m = S_m - S$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

alors : $\begin{cases} 1) & u_{m+1} = \phi(u_m) \text{ pour } m \text{ assez grand.} \\ 2) & \phi(x) \text{ analytique dans un voisinage de zéro.} \\ & \phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = \alpha_1. \end{cases}$

Selon La proposition 5.2, on a : $(S_m) \in \mathcal{S}\mathcal{U}Lin$.

<u>Proposition 5.4</u> : Soit $\mathcal{S} \subset Lin^{(1)}$, soit T une transformation normale définie sur $\mathcal{S}$. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que, $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n} = +\infty$, est que $\mathcal{S}$ soit accéléré par T avec le degré $+\infty$.

<u>Démonstration</u> :

1) On suppose que $\mathcal{S}$ est accéléré par T avec le degré $+\infty$.
On va démontrer que : $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n} = +\infty$.

Soit $(S_n) \in \mathcal{S}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}-S}{S_n - S} = a$, $0 < |a| < 1$ $T : (S_n) \to (t_n)$,

$t_n = f_n(S_0, S_1, \dots, S_n)$

$$p(n) = \begin{cases} \min\{N \mid N \in \mathbb{N},\ \forall m > N,\ |S_m - S| < |t_n - S|\}, & t_n \neq S \\ +\infty, & t_n = S \end{cases}$$

$D(n) = p(n) - n$.

- $\forall M \in \mathbb{N}$, on va démontrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n > N$, $\frac{D(n)}{n} \geq M$.

  Puisque la suite (S_n) est accélérée par T avec le degré $+\infty$ donc, pour $M \in \mathbb{N}$, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n - S}{(S_n-S)^{M+3}} = 0$

  On note $C_n = (t_n - S)/(S_n-S)^{M+3}$.

- Si $n^* \in \mathbb{N}$, $C_{n^*} = 0$, alors $D(n^*) = +\infty$ donc $\frac{D(n^*)}{n^*} \geq M$

- Si $n \in \mathbb{N}$, $C_n \neq 0$, alors on se reporte à la démonstration du théorème 4.1. On peut avoir l'égalité suivante :

  $$\frac{D(n)}{n} \geq (M+2)\frac{\ln|C_n \cdot (S_n - S)|}{n \ln|a+\delta_n|} - 1 \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

  où $0 < |a| < 1$, $0 < |a+\delta_n| < 1$, et $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$

  donc on a : $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{D(n)}{n} \geq M+1$

  alors il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n > N$, $\frac{D(n)}{n} \geq M$.

2) • $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n} = +\infty$

On va démontrer que $\mathcal{S}$ est accéléré par T avec le degré $+\infty$.
On suppose que $\mathcal{S}$ n'est pas accéléré par T avec le degré $+\infty$.
D'après cette hypothèse, on peut trouver une suite $(S_n) \in \mathcal{S}$, telle que : (S_n) n'est pas accéléré par T avec le degré $+\infty$.
c'est-à-dire qu'il existe un nombre $\ell \in \mathbb{R}^+$ $(\ell \geq 1)$, tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n - s}{(S_n - s)^\ell} \neq 0$$

• Alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}^+$ et une sous-suite de (S_n) telles que : $\begin{cases} 1) & (S_{n_k}) : \quad S_{n_k} \neq s \ , \quad k = 1,2,\ldots \\ 2) & \left|\frac{t_{n_k} - s}{(S_{n_k} - s)^\ell}\right| \geq c \ , \quad k = 1,2,\ldots \end{cases}$

On note $C_{n_k} = \left|(t_{n_k} - s)/(S_{n_k} - s)^\ell\right| \qquad k = 1,2,\ldots$

On se reporte à la démonstration du théorème 4.1, et on remplace C_{n_k} par C_n. On a l'inéquation suivante :

$$\frac{D(n_k)}{n_k} \leq \frac{\ln \left|C_{n_k} (S_{n_k} - s)^{(\ell-1)}\right|}{n_k \cdot \ln \left|a + \delta_{n_k}\right|} \quad \text{pour } k \text{ assez grand.}$$

où $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_{n_k} = 0$, $|C_{n_k}| \geq c$, $k = 1,2,\ldots$, et $0 < |a + \delta_{n_k}| < 1$ pour k assez grand.

Puisque :

1) $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|S_{n_k} - s|} = a$,
(on suppose que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{S_{n+1} - s}{S_n - s} = a$, $0 < |a| < 1$)

2) $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{c} = 1$

3) $\lim\limits_{k\to\infty} a + \delta_{n_k} = a$

donc $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{D(n_k)}{n_k} \leq \ell - 1$

ceci implique que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n} \neq +\infty$

Donc notre hypothèse est fausse.

REMARQUE : Selon cette hypothèse, on sait que une condition nécessaire pour que $\forall (S_n) \in Lin^{(1)}$, transformation normale T accélère (S_n) avec la propriété : $\lim_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n} = +\infty$, est que l'ensemble $\mathcal{S}$ soit accélérable avec le degré $+\infty$.

I-2 Une Transformation et un Théorème.

On sait qu'une transformation de suites est effectivement utilisable en analyse numérique si le $n^{ième}$ terme de la suite transformée ne dépend que d'un nombre fini de termes de la suite initiale. On peut donc étudier des transformations de suites plus générales, par exemple : $T : (S_n) \to (t_n)$ $\quad (S_n) \in \mathcal{S}$.

$$(*) \begin{cases} t_n = f_n\left(S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots, S_{n+k(n)}\right) & n = 0, 1, \ldots \\ \text{où } (k(n)) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}. \end{cases}$$

bien que ses transformations ne soient pas normales.

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble accélérable avec le degré $+\infty$, soit la suite $(q_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, soit $(T^{(k)})$ une suite de transformations définie comme $(*)$ sur $\mathcal{S}$,

$$\begin{cases} \forall (S_n) \in \mathcal{S},\ T^{(k)} : (S_n) \longrightarrow (t_n^{(k)}) \quad , \forall k \geqslant 0, \\ \text{telles que } \mathcal{S} \text{ est accéléré par } T^{(k)} \text{ avec le degré au moins } q_k. \end{cases}$$

Soit la suite $(N_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante. On définit une transformation de suites T comme suit :

$$\begin{cases} \forall (S_n) \in \mathcal{S},\ T : (S_n) \to (t_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \\ (t_n) = \left(t_0^{(1)}, t_1^{(1)}, \ldots t_{n_2}^{(1)}, t_{n_2+1}^{(2)}, \ldots, t_{n_3}^{(2)}, t_{n_3+1}^{(3)}, \ldots, t_{n_4}^{(3)}, \ldots\right) \end{cases}$$

Lemme 5.1 :

Soit $\mathcal{S} \subset conv^*(\mathbb{R})$, soit T^* une transformation de suites définie sur $\mathcal{S}$. $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$,

$T^*: (S_n) \to (t_n^*)$, $t_n^* = f_n^*(s_0, s_1, \dots, s_{n+k_n})$, $n = 0, 1, \dots$

On note :

$$P^*(n) = \begin{cases} \min\{N \in \mathbb{N} / N \in \mathbb{N}, \forall m > N, |S_m - S| < |t_n^* - S|\} & t_n^* \neq S \\ +\infty & t_n^* = S \end{cases}$$

si : $\begin{cases} 1) \text{ La suite } (k_n) \text{ croissante, et } \dfrac{k_n}{n} = O(1) \\ 2) \lim\limits_{n\to\infty} P^*(n)/n = +\infty . \end{cases}$

alors on peut construire une transformation normale définie sur $\mathcal{S}$ telle que : $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$,

$T : (S_n) \to (t_n)$, $t_n = f_n(s_0, s_1, \dots, s_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$\begin{cases} 1) \ t_{n+k_n} = t^*_{n+k_n} & n = 0, 1, 2, \dots \\ 2) \ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{D(n)}{n} = +\infty \end{cases}$, ($\mathcal{S}$ est accéléré par T avec le degré $+\infty$).

Démonstration :

Puisque la suite (k_n) croissante, donc la suite $(k_n + n)$ croissante strictement.

$\forall j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant k_0$, il existe un seul entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n + k_n \leqslant j < n+1 + k_{n+1}$.

On définit une transformation normale sur $\mathcal{S}$ comme suit :

$\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, $T : (S_j) \to (t_j)$

$$t_j = \begin{cases} S_j , & j < k_0 \\ t_n^* , & n + k_n \leqslant j < n+1 + k_{n+1} \end{cases}$$

On note :

$$P(j) = \begin{cases} \min\{N / N \in \mathbb{N}, \forall m > N, |S_m - S| < |t_j - S|\} & t_j \neq S . \\ +\infty & t_j = S \end{cases}$$

$$D(j) = P(j) - j \qquad j = 0, 1, 2, \dots .$$

Selon la définition de la suite (t_j)

$\forall j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant k_0$, $n + k_n \leqslant j < n+1 + k_{n+1}$

On a alors : $P(j) = P^*(n)$.

Donc $\frac{D(j)}{j} = \frac{p(j)-j}{j} = \frac{P^*(m)}{j} - 1 \geqslant \frac{P^*(m)}{m+1+k_{m+1}} - 1$

puisque $\frac{k_m}{m} = O(1)$, donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}^+$.

telle que $\frac{k_m}{m} \leqslant c$, pour m assez grand.

donc $\frac{D(j)}{(j)} \geqslant \frac{P^*(m)}{m+1+cm} - 1 = \frac{P^*(m)}{m} \cdot \frac{1}{1+c+\frac{1}{m}} - 1$

pour m assez grand.

puisque $\lim_{m\to\infty} \frac{P^*(m)}{m} = +\infty$

donc $\lim_{m\to\infty} \frac{D(j)}{j} = +\infty$.

Remarque : Selon la démonstration de lemme 1, on peut obtenir le résultat suivant :

si $\lim_{m\to\infty} \frac{P^*(m)}{m} = c^*$, $c^* > 1+c$

alors $\lim_{j\to\infty} \frac{D(j)}{j} \geqslant \frac{c^*-1-c}{1+c} > 0$

Théorème 5.1 :

Soit l'ensemble $\mathcal{S} \subset Lin^{(1)}$, soit $(T^{(k)})$ une suite de transformations définies sur $\mathcal{S}$ (comme $(*)$) et soit la suite $(S_m) \in \mathcal{S}$,

$T^{(k)} : (S_m) \to (t_m^{(k)})$.

Soit la suite $(q_k) \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, ... (1)

soit la suite $(N_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante.

S'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\frac{t_m^{(k)} - S}{(S_m - S)^{q_k}} \leqslant 1 \quad \forall k \geqslant k_0$

$\forall m \geqslant N_k$ ... (2)

alors on définit une transformation de suites par :

$T : (S_m) \to (t_m)$, $(t_m) = (t_0^{(1)}, \dots, t_{N_2}^{(1)}, t_{N_2+1}^{(2)}, \dots, t_{N_3}^{(2)}, t_{N_3+1}^{(3)}, \dots, t_{N_4}^{(3)}, \dots)$

et l'on a : $\lim_{m\to\infty} \frac{P^*(m)}{m} = +\infty$.

Démonstration :

On suppose que la suite $(S_m) \in \mathcal{S} \subset Lin^{(1)}$, $\lim_{m\to\infty} \frac{S_{m+1} - S}{S_m - S} = a$,

$0 < |a| < 1$.

On note : $D^*(n) = p^*(n) - n \quad , \forall n \geq 0 .$

$$C_n^{(k)} = |t_n^{(k)} - s| / |(S_n - s)\, q_k| \qquad k \geq 0 \ , \ n \geq 0 .$$

Selon la condition (2), il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$|C_n^{(k)}| \leq 1 \quad , \ k \geq k_0 \ , \ n \geq N_k .$$

si $C_n^{(k)} = 0$, alors $p^*(n) = +\infty$.

donc on considère seulement le cas $C_n^{(k)} \neq 0$.

- Puisque (N_k) strictement croissante,

  donc $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un seul entier $k \in \mathbb{N}$, tel que :

  $1 + N_k \leq n < N_{k+1}$

  selon la définition de la suite (t_n),

  on a $t_n = t_n^k$.

  On se reporte à la démonstration du théorème 4.1,

  on a :

  $$D^*(n) \geq (q_k - 1) \cdot \frac{\ln \sqrt[n]{|(S_n - s)|}}{\ln |a + \delta_n|} + \frac{\ln \sqrt[n]{C_n^k}}{\ln |a + \delta_n|}$$

  pour n assez grand

  où $0 < C_n^k < 1$, $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ et $0 < |a + \delta_n| < 1$

  puisque $\lim_{k\to\infty} q_k = +\infty$

  donc $\lim_{n\to\infty} \dfrac{D^*(n)}{n} = +\infty$

Proposition 5.5 : Soit la suite $(S_n) \in Lin^{(h)}$, soit $(T^{(k)})$ une suite de transformations définies sur (S_n),

$T^{(k)} : (S_n) \longrightarrow (t_n^{(k)}) \quad , \ k \geq 0 \ , \ t_n^{(0)} = S_n \ , \ \forall n \geq 0 .$

$t_n^{(k)} = f_n^{(k)} (s_0, s_1, \dots, s_{n+m_k}) \qquad \forall k \geq 1 \ , \forall n \geq 0 .$

Soit $(q_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, tendant vers $+\infty$,

soit $(N_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante

s'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\left|(t_n^{(k)} - s) / (S_n - s)\, q_k\right| \leq 1 \quad \forall k > k_0$
$\forall n > N_k$

Si $\frac{m_k}{k} = O(1)$

alors il existe une transformation normale $T : (S_n) \longrightarrow (t_n)$
telle que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{D(n)}{n} = +\infty$.

Démonstration :

- Selon le théorème 5.1, on peut construire une transformation T^* définie sur la suite (S_n) , $T^* : (S_n) \to (t_n^*)$.
  $(t_n^*) = t_0^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots, t_{N_2}^{(1)}, t_{N_2+1}^{(2)}, \dots, t_{N_3}^{(2)}, t_{N_3+1}^{(3)}, \dots, t_{N_4}^{(3)}, \dots)$
  telle que : $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{P^*(n)}{n} = +\infty$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_2$, il existe un seul entier $k \in \mathbb{N}$,
  tel que : $N_k + 1 \leqslant n \leqslant N_{k+1}$.
- donc $t_n^* = t_n^{(k)} = f_n^{(k)}(S_0, S_1, \dots, S_{n+m_k})$
  puisque la suite $(N_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est strictement croissante,
  donc $N_k \geqslant k$
- puisque $\frac{m_k}{k} = O(1)$, donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}^+$,
  telle que $m_k \leqslant c.k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- donc $\frac{m_k}{n} \leqslant \frac{c.k}{n} \leqslant \frac{c.N_k}{n} \leqslant \frac{c.N_k}{N_k+1} < c$, pour $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant N_2$
- donc selon le lemme 5.1 , il existe une transformation normale définie sur (S_n) , telle que : $\lim\limits_{n \to 0} \frac{D(n)}{n} = +\infty$

Proposition 5.6. Soit la suite $(u_n) \in CONV_0^*(\mathbb{R})$, soit la suite $(S_n) \in Lin^{(1)}$, soit $(T^{(k)})$ une suite de transformations définie sur (S_n) , $T^{(k)} : (S_n) \to (t_n^{(k)})$ $k \geqslant 0$.
Soit la suite $(q_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et $\lim\limits_{k \to \infty} q_k = +\infty$
soit la suite $(N_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, strictement croissante .

S'il existe un rang $K_0 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\left|(t_n^{(k)} - S) / (S_n - S) u_n^{q_k}\right| \leqslant 1 \quad , \quad \forall k \geqslant k_0 \quad , \forall n \geqslant N_k$$

alors on construit une transformation définie sur (S_n),

$$T : (S_n) \to (t_n)$$

$$(t_n) = (t_0^{(1)}, \dots, t_{N_2}^{(1)}, t_{N_2+1}^{(2)}, \dots, t_{N_3}^{(2)}, t_{N_3+1}^{(3)}, \dots, t_{N_4}^{(3)}, \dots)$$

et l'on a :

$$\begin{cases} 1) \text{ si : la suite } (u_n) \in Lin^{(1)}, \text{ alors } \lim_{n\to\infty} \dfrac{D^*(n)}{n} = +\infty \\ 2) \text{ si : la suite } (u_n) \in Log, \text{ alors } \lim_{n\to\infty} \dfrac{D^*(n)}{\ln \frac{1}{|u_n|}} = +\infty . \end{cases}$$

où $D^*(n) = P^*(n) - n$, $\forall n \geqslant 0$.

Démonstration:

Cas 1 - Il suffit de se reporter à la démonstration du théorème 4.1, et de remplacer $|S_n - S|$ par $|u_n|$ pour démontrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D^*(n)}{n} = +\infty$$

Cas 2 - $(u_n) \in Log$.

puisque $(u_n) \in conv_0^*(\mathbb{R})$, et $(S_n) \in Lin^{(1)}$, $\left(\frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} \to a\right)$, donc il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n > N$, $0 < |u_n| < 1$, $S_n \neq S$ et

$$0 < \left|\frac{S_{n+1} - S}{S_n - S}\right| < 1,$$

on suppose que : $k > k_0$ et $N_{k+1} \leqslant n \leqslant N_{k+1}$,

alors : $t_n = t_n^{(k)}$, et $\left|(t_n^{(k)} - S)/(S_n - S) u_n^{q_k}\right| \leqslant 1$.

Puisque : $|S_{n+D^*(n)+1} - S| < |t_n - S|$

et $|S_{n+D^*(n)+1} - S| = \left|(a + \delta_n)^{D^*(n)+1}\right| |S_n - S|$

où $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, $0 < |a + \delta_n| < 1$ pour n assez grand

donc : $D^*(n) \geqslant q_k \dfrac{\ln u_n}{\ln |a + \delta_n|} - 1$.

Puisque : $\lim_{k\to\infty} q_k = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$

donc $\lim_{n\to\infty} \dfrac{D^*(n)}{n} = +\infty$.

Soit $\mathcal{S}$ accélérable avec le degré $+\infty$.

Si l'on connait déjà une suite de transformation $(T^{(k)})$ telles que $T^{(k)}$ accélère $\mathcal{S}$ avec le degré au moins q_k, ((q_k) est connue aussi, par exemple : $q_k = k+1-\alpha$, $0<\alpha<1$, $T^{(k)}$ est l'itération du procédé Δ^2- d'Aitken sur l'ensemble $\mathcal{S}\mathcal{U}$).

Soit la suite $(S_n) \in \mathcal{S}$, alors il existe un seul problème pour construire une transformation sur (S_n), telle que :
$\lim_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n} = +\infty$: c'est la détermination de la suite (N_k).
(voir théorème 5.1).

Si l'on peut construire une suite de suites $(\ell_n^{(k)})$ telle que :

1) $\ell_n^{(k)}$ ne dépend que d'un nombre fini de termes de la suite initiale.
2) k - fixé, $\lim_{n\to\infty} \ell_k^{(k)} < 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$
3) il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que :
$$\left|\frac{t_n^{(k)} - s}{(S_n - s)^{q_k}}\right| \leqslant \ell_n^{(k)} \qquad \forall k \geqslant 0, \forall n \geqslant N$$

alors on peut trouver une suite (N_k) telle que :
$$\ell_{N_k}^{(k)} \leqslant 1 \qquad , k = 1, 2, \dots .$$

Si k - fixé, $(\ell_n^{(k)})$ est décroissante.
alors $\forall n > N_k$, $\left|\frac{t_n^{(k)} - s}{(S_n - s)^{q_k}}\right| \leqslant \ell_n^{(k)} \leqslant \ell_{N_k}^{(k)} \leqslant 1$

si k - fixé, $\left((t_n^{(k)} - s)/(S_n - s)^{q_k}\right)$ est décroissante,
alors on a : $\forall n > N_k$, $\left|(t_n^{(k)} - s)/(S_n - s)^{q_k}\right| \leqslant 1$.

Dans le cas plus général, on va utiliser le procédé de la section 4 pour déterminer la suite (N_k).

I - 3 PREMIER PROCÉDÉ.

Soit la suite $(\lambda_n) \in \text{conv}_0^*(\mathbb{R}^+)$ connue, décroissante, $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > \cdots > 0$, et $\lambda_1 < \frac{1}{2}$, on considère l'ensemble des suites défini par :

$$\mathcal{S} = \Big\{ (S_n) \in \text{conv}^*(\mathbb{R}) \,/\, \text{il existe une suite } (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ a_n \geqslant 0\ \forall n \geqslant 0,$$
$$a_1 = 1,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge et } S_n - S = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j^n \Big\}.$$

On va montrer que $\mathcal{S}$ est accélérable avec le degré $+\infty$, et donner un procédé tel que $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$, on a $\lim_{n \to \infty} \frac{P^*(n)}{n} = +\infty$.

Soit $(S_n) \in \mathcal{S}$, soit $(T^{(k)})$ une suite de transformations définies par :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} T^{(0)} : (S_n) \to (t_n^{(0)}),\quad t_n^{(0)} = S_n \quad \forall n \geqslant 0. \\ T^{(1)} : (S_n) \to (t_n^{(1)}),\quad t_n^{(1)} = -\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1} t_n^{(0)} + \frac{1}{1-\lambda_1} t_{n+1}^{(0)}, \quad \forall n \geqslant 0 \\ \vdots \\ T^{(k)} : (S_n) \to (t_n^{(k)}),\quad t_n^{(k)} = -\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} t_n^{(k-1)} + \frac{1}{1-\lambda_k} t_{n+1}^{(k-1)}, \quad \forall n \geqslant 0 \\ \qquad\qquad \forall k \geqslant 1. \\ \vdots \end{array} \right.$$

<u>LEMME 5.2</u> : $\mathcal{S} \subset \text{Lin}^{(1)}$

<u>Démonstration</u> :

On suppose que la suite $(S_n) \in \mathcal{S}$.

alors : $S_n - S = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j^n \qquad a_1 = 1$.

Puisque $\lambda_j > 0$, $a_j \geqslant 0$, $\forall j \geqslant 1$ et $a_1 = 1$

donc $S_n - S \neq 0$.

et donc $\frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j^{n+1} \Big/ \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j^n = \lambda_1 \cdot \frac{1 + \sum_{j=2}^{\infty} a_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{n+1}}{1 + \sum_{j=2}^{\infty} a_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^n}$.

Puisque $0 \leq \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1 \quad \forall j \geq 2.$

et $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n \to 0 \ , \quad n \to \infty$

donc $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=2}^{\infty} a_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^n = 0$.

et donc $\lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S)/(S_n - S) = \lambda_1$ donc $(S_n) \in Lin^{(1)}$.

Lemme 5.3 :

Il existe une constante $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_1 < \alpha < 1$ et une suite $(q_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante et tendant vers $+\infty$,

telles que : 1) $0 \leq \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1^{q_k}} \leq \alpha \quad \forall k \in \mathbb{N}$,

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{t_n^{(k)} - S}{(S_n - S)^{q_k}} = 0$

Démonstration :

Selon les transformations (*), on a alors :

$t_n^{(0)} - S = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(0)} \lambda_j^n$.

$t_n^{(1)} - S = \sum_{j=2}^{\infty} a_j^{(1)} \lambda_j^n$.

$t_n^{(2)} - S = \sum_{j=3}^{\infty} a_j^{(2)} \lambda_j^n$

⋮

$t_n^{(k)} - S = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^{(k)} \lambda_j^n \quad , \quad \forall k \geq 1 \ , \forall n \geq 0.$

où $a_j^{(k)} = \frac{\lambda_j - \lambda_k}{1 - \lambda_k} \cdot a_j^{(k-1)}$ $\qquad k = 1, 2, \dots$

$j = k+1, k+2, \dots$

$a_j^{(0)} = a_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots$

- On choisit $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < \alpha < \lambda_1$ et $q_k = \frac{\ln \frac{\lambda_{k+1}}{\alpha}}{\ln \lambda_1}$

on alors $0 < \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda^{q_k}} = \alpha$. et $\lim_{k\to\infty} q_k = +\infty$.

- Puisque $0 < \lambda_j < \frac{1}{2}$ $\quad \forall j \geq 1$.

  donc $\left|(\lambda_j - \lambda_k)/(1-\lambda_k)\right| \leq 1 \quad , \forall k \geq 1 , \forall j \geq k+1$.

  et donc $\left|a_j^{(k)}\right| \leq \left|\frac{\lambda_j - \lambda_k}{1-\lambda_k}\right| \left|a_j^{(k-1)}\right| \leq \left|a_j^{(k-1)}\right| \leq \cdots \leq a_j \quad \forall k \geq 1$

  on note : $C = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$. $\qquad \forall j \geq k+1$.

- Puisque $t_n^{(k)} - s = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^{(k)} \lambda_j^{(n)} \qquad k \geq 1$.

  donc $\frac{t_n^{(k)} - s}{(s_n - s)^{q_k}} = \frac{\left|\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^{(k)} \lambda_j^{(n)}\right|}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j^{n}\right)^{q_k}} \leq \frac{\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \lambda_j^{(n)}}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j^{(n)}\right)^{q_k}}$

$$\leq \frac{\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \cdot \lambda_{k+1}^{n}}{\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \lambda_j^{n}\right)^{q_k}} \leq \frac{\lambda_{k+1}^{n}}{\lambda_1^{n q_k}} \cdot C = \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1^{q_k}}\right)^{n} \cdot C \; .$$

Puisque $0 < \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1^{q_k}} \leq \alpha < 1$, donc $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1^{q_k}}\right)^n = 0$.

donc $\lim_{n \to \infty} \left|\frac{t_n^{(k)} - s}{(s_n - s)^{q_k}}\right| = 0$.

<u>Lemme 5.4</u> :

La suite $\left(\left|\frac{t_n^{(k)} - s}{(s_n - s)^{q_k}}\right|_n\right)$ est décroissante $(k \geq 1)$ à partir d'un certain rang N.

<u>Démonstration</u> :

$$\left|\frac{(t_{n+1}^{(k)} - s)/(s_{n+1} - s)^{q_k}}{(t_n^{(k)} - s)/(s_n - s)^{q_k}}\right| = \frac{\left|\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^{(k)} \lambda_j^{(n+1)} \Big/ \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j^{(n+1)}\right)^{q_k}\right|}{\left|\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^{(k)} \lambda_j^{n} \Big/ \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j^{n}\right)^{q_k}\right|}$$

$$= \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1^{q_k}} \cdot \frac{\left|\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^{(k)} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_{k+1}}\right)^{n+1}\right| \cdot \left|\left(1 + \sum_{j=2}^{\infty} a_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{n}\right)^{q_k}\right|}{\left|\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^{(k)} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_{k+1}}\right)^{n}\right| \cdot \left|\left(1 + \sum_{j=2}^{\infty} a_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{n+1}\right)^{q_k}\right|}$$

$$0 \leqslant \left[\frac{1+\sum_{j=2}^{\infty} a_j \cdot\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^n}{1+\sum_{j=2}^{\infty} a_j \cdot\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{n+1}}\right]^{q_k} \leqslant \left[1+\sum_{j=2}^{\infty} a_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^n\right]^{q_k} \leqslant \left[1+c\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\right]^{q_k}$$

$$\leqslant \left[1+c\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\right]^n \quad \text{pour } n \geqslant q_k .$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} \left(1+c\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\right)^n = 1$

donc il existe un rang N, tel que : $\forall n > N$, $\left(1+c\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n\right)^n < \frac{1}{\alpha}$

et donc $\forall n > N^* = \max(q_k, N)$,

on a alors : $$0 < \left[\frac{1+\sum_{j=2}^{\infty} a_j\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^n}{1+\sum_{j=2}^{\infty} a_j\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{n+1}}\right]^{q_k} < \frac{1}{\alpha}$$

$$0 < \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1^{q_k}} \leqslant \alpha$$

$$0 < \left|\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^{(k)} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_{k+1}}\right)^{n+1}\right| \Big/ \left|\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^{(k)} \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_{k+1}}\right)^{n}\right| < 1 .$$

Donc $0 < \left|\left(\frac{t_{n+1}^{(k)} - S}{(S_{n+1}-S)^{q_k}}\right)\right| \Big/ \left|\frac{t_n^{(k)}-S}{(S_n-S)^{q_k}}\right| \leqslant 1$

et donc la suite $\left(\left|\left(\frac{t_n^{(k)}-S}{(S_n-S)^{q_k}}\right)_n\right|\right)$ est décroissante à partir du rang N^*.

Lemme 5.5 :

Soit la suite $(S_n) \in \mathcal{S}$. Alors on a : $\forall n \geqslant 0$,

1) $|\Delta S_n| \leqslant |S_n - S| \qquad \forall n \geqslant 0.$

2) $|\Delta t_n^{(k)}| \geqslant |t_n^{(k)} - S|\,(1-\lambda_{k+1})$, et $|\Delta t_n^{(k)}| \leqslant |t_n^{(k)} - S|$

3) $0 \leqslant \left|\frac{t_n^{(k)}-S}{(S_n-S)^{q_k}}\right| \leqslant \frac{1}{1-\lambda_{k+1}} \cdot \frac{|\Delta t_n^{(k)}|}{|\Delta S_n|^{q_k}} \qquad \forall k \geqslant 1,\ \forall n \geqslant 0.$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta t_n^{(k)}}{(S_n-S)^{q_k}} = 0$

5) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\Delta S_n|} = \lambda_1$

Démonstration :

1) $|\Delta S_n| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j^n (1-\lambda_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} a_j \lambda_j^n = |S_n - S|.$

2) $|\Delta t_n^{(k)}| = \left|\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^{(k)} \cdot \lambda_j^{(n)} (1-\lambda_j)\right| = \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j^{(k)}| \cdot \lambda_j^{(n)} \cdot (1-\lambda_j)$

$|\Delta t_n^{(k)}| \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j^{(k)}| \cdot \lambda_j^{(n)} = \left|\sum_{j=k+1}^{\infty} a_j^{(k)} \cdot \lambda_j^{(n)}\right| = |t_n^{(k)} - s|$

$|\Delta t_n^{(k)}| \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} |a_j^{(k)}| \cdot \lambda_j^{(n)} \cdot (1-\lambda_{k+1}) = (1-\lambda_{k+1})\, |t_n^{(k)} - s|$

3) Selon 1), 2) on a alors :

$$\left|\frac{t_n^{(k)} - s}{(S_n - S)^{q_k}}\right| \leqslant \frac{|\Delta t_n^{(k)}|}{1-\lambda_{k+1}} \cdot \frac{1}{(|\Delta S_n|)^{q_k}}$$

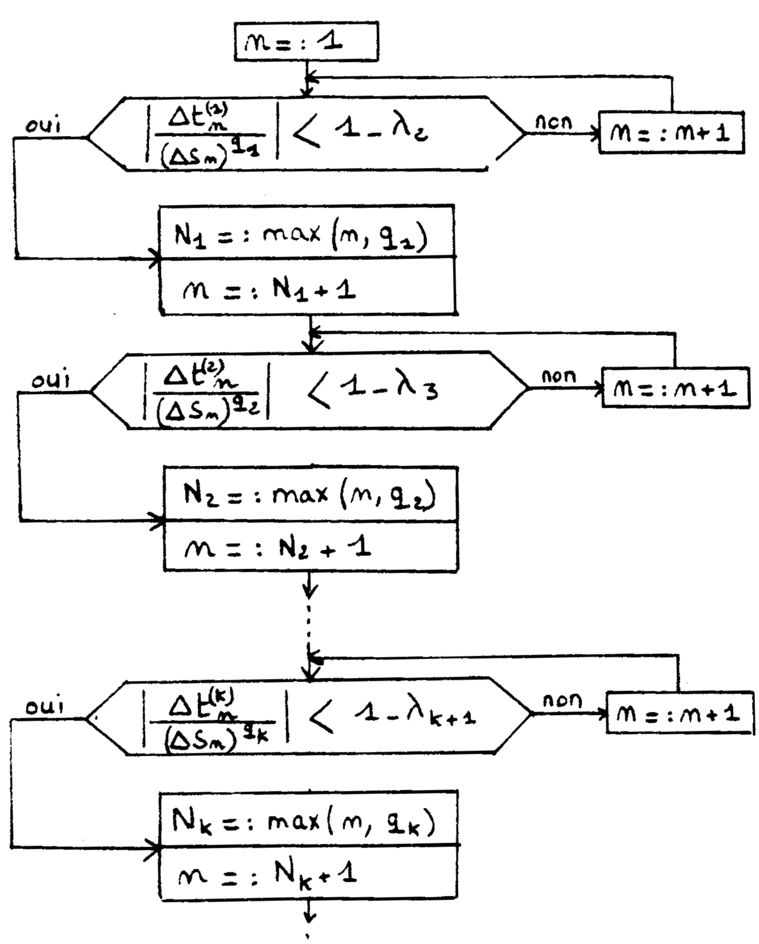
4) et 5) sont évidents. ($a_j^{(k)}$, $j = k+1, \dots$, garde le même signe).

Lemme 5.6 :

On peut obtenir la suite (N_k) par le procédé suivant.

0) choisir $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $\lambda_1 < \alpha < 1$, $q_k = \dfrac{\ln \frac{\lambda_{k+1}}{\alpha}}{\ln \lambda_1}$, $k = 1, 2, \dots$

1)



Démonstration :

Il suffit de démontrer que : $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta t_n^{(k)}}{(\Delta S_n)^{q_k}} = 0 \quad , \forall k \geq 1$

Selon les lemmes 5.4 , 5.5 on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta t_n^{(k)}}{(\Delta S_n)^{q_k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}^{(k)} - s}{(\Delta S_n)^{q_k}} - \lim_{n\to\infty} \frac{t_n^{(k)} - s}{(\Delta S_n)^{q_k}} = 0$$

Puisque $0 < \lambda_k < 1 \quad , \quad \forall k \geq 1$ donc $0 < 1 - \lambda_k < 1$

donc pour n assez grand , $\left| \frac{\Delta t_n^{(k)}}{(\Delta S_n)^{q_k}} \right| < 1 - \lambda_k$

Théorème 5.2 :

Soit $(S_n) \in \mathcal{S}$, soit (N_k) une suite définie par le lemme 5.6 .

On considère la transformation $T : (S_n) \to (t_n)$, $(t_n^{(k)})$ définie par $(*)$.

$$t_n = \left(t_0^{(1)}, \ldots, t_{N_2}^{(1)}, t_{N_2+1}^{(2)}, \ldots, t_{N_3}^{(2)}, t_{N_3+1}^{(3)}, \ldots \right)$$

et l'on note : $p^*(n) = \begin{cases} \min \{ N / N \in \mathbb{N}, \forall m > N , |S_m - s| < |t_n - s| \} & t_n \neq s \\ +\infty & t_n = s \end{cases}$

Alors on a : $\lim_{n\to\infty} \frac{p^*(n)}{n} = +\infty$

Démonstration :

1) $t_n^{(k)} = f_n^{(k)}(S_0, \ldots, S_{n+m_k}) \quad , \quad k \geq 1$.

ou $m_k = k$

2) (q_k) tendant vers $+\infty$.

3) (N_k) strictement croissante et tendant vers $+\infty$.

Selon les lemmes 5.5 , 5.6 on a alors :

$$0 \leq \left| \frac{t_{N_k}^{(k)} - s}{(S_{N_k} - s)^{q_k}} \right| \leq \left| \frac{\Delta t_{N_k}^{(k)}}{(1 - \lambda_{k+1})(\Delta S_{N_k})^{q_k}} \right| \leq 1 \quad , \forall k \geq 1$$

Selon le lemme 5.4 , la suite $\left(\left| \frac{t_n^{(k)} - s}{(S_n - s)^{q_k}} \right| \right)_n$ est décroissante à partir du rang N^* .

Donc $\forall n > N^*$, $\left| \frac{t_n^{(k)} - s}{(S_n - s)^{q_k}} \right| \leq 1$

Selon le théorème 5.1 , on a $\lim_{n\to\infty} \frac{p^*(n)}{n} = +\infty$.

I - 4 DEUXIÈME PROCÉDÉ.

Soit $\mathcal{S}$ ensemble suivant :

$\mathcal{S} = Lin^{(\infty)} \cap TO$ (TO est l'ensemble des suites totalement oscillantes).

Soit $(T^{(k)})$ une suite de transformations sur $\mathcal{S}$, $\forall (S_m) \in \mathcal{S}$.

$$T^{(k)} : (S_m) \longrightarrow (t_m^{(k)}) \quad , \quad t_m^{(k)} = \varepsilon_{2k}^{(m)} \qquad k \geq 1 , \; m \geq 0 .$$

$$\left(\varepsilon_{k+1}^{(m)} - \varepsilon_{k-1}^{(m+1)}\right) \cdot \left(\varepsilon_k^{(m+1)} - \varepsilon_k^{(m)}\right) = 1 \qquad k \geq 0 , \; m \geq 0 .$$

$$\varepsilon_{-1}^{(m)} = 0 \quad , \quad \varepsilon_0^{(m)} = S_m \qquad m \geq 0 .$$

Lemme 5.7 :

Soit $(S_m) \in Lin^{(\infty)}$

alors $\varepsilon_{2k}^{(m)} - S = b_{P_k}^{(k)} (S_m - S)^{P_k} + \dots$ pour m assez grand.

où si $b_{P_k} \neq 0$, alors $P_k > P_{k-1} > \dots > P_1 > P_0 = 1$, $k \in \mathbb{N}$.

(on suppose que $b_{P_{k+j}}^{(k)} = 0$; $j = 1, 2, \dots$, si $b_{P_k}^{(k)} = 0$)

Démonstration :

Voir la démonstration de la proposition 4.3 (chapitre V).

On rappelle le lemme dans [20] (pp 67).

Lemme 5.8 :

Si on applique l'ε-algorithme à la suite $(S_m) \in TO$

alors $(-1)^m \varepsilon_{2k}^{(m)} \geq 0$, $m, k = 0, 1, 2, \dots$

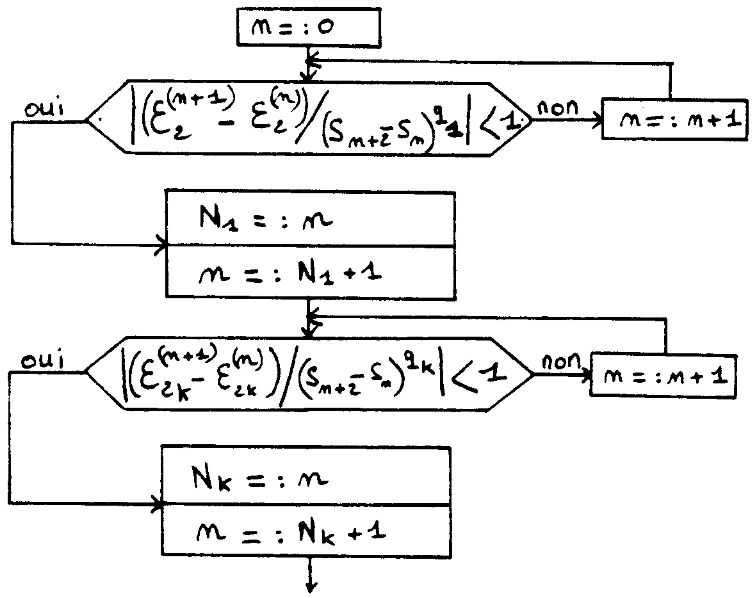
Lemme 5.9 :

Soit $(S_m) \in \mathcal{S}$

on peut obtenir la suite (N_k) par le procédé suivant :

0) choisir $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $0 < \alpha < 1$, $q_k = k + 1 - \alpha$.

1)



Démonstration :

Selon le Lemme 5.7, on a $\varepsilon_{2k}^{(n)} - S = b_{p_k}^{(k)} (S_n - S)^{p_k} + \cdots$,

si $b_{p_k}^{(k)} \neq 0$, alors : $p_k > p_{k-1} > \cdots > p_1 > p_0 = 1$

donc $p_k \geq k+1$, $q_k = k+1-\alpha$, $0 < \alpha < 1$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_{2k}^{(n)} - S}{(S_n - S)^{q_k}} = 0$

puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_{n+2} - S_n}{S_n - S} = a_1^2 - 1 \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta \varepsilon_{2k}^{(n)}}{(S_n - S)^{q_k}} = 0$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta \varepsilon_{2k}^{(n)}}{(S_{n+2} - S_n)^{q_k}} = 0$

donc pour n assez grand, on a $\left| \dfrac{\Delta \varepsilon_{2k}^{(n)}}{(S_{n+2} - S_n)^{q_k}} \right| \leq 1$

donc ce procédé peut continuer,
on peut obtenir la suite (N_k).

Théorème 5.3 :

Soit la suite $(S_n) \in \mathcal{S}$, soit (N_k) définie par le lemme 5.9.
On considère la transformation : $T : (S_n) \to (t_n)$

$(t_n) = (t_0^{(1)}, \ldots, t_{N_2}^{(1)}, t_{N_2+1}^{(2)}, \ldots, t_{N_3}^{(2)}, t_{N_3+1}^{(3)}, \ldots, t_{N_k+1}^{(k)}, \ldots)$

on note : $p^*(N_k) = \begin{cases} \min\{N / N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |S_n - S| < |t_n - S|\} & t_n \neq S \\ +\infty & t_n = S \end{cases}$

alors $\lim\limits_{k\to\infty} P^*(N_k)/N_k = +\infty$.

<u>Démonstration</u> :

Il faut simplement démontrer que : $\left|\dfrac{\varepsilon_{2k}^{(N_k)} - S}{(S_{N_k}-S)^{q_k}}\right| \leqslant 1$.

puisque $(S_n) \in TO$, selon le lemme 5.8,

on a : $(-1)^n \varepsilon_{2k}^{(n)} \geqslant 0$.

donc $\left|\varepsilon_{2k}^{(N_k)} - S\right| < \left|\Delta\varepsilon_{2k}^{(N_k)}\right|$ et $\left|S_{N_k}-S\right| > \left|S_{N_k+2}-S_{N_k}\right|$

on a alors : $\left|\dfrac{\varepsilon_{2k}^{(N_k)} - S}{(S_{N_k}-S)^{q_k}}\right| \leqslant \left|\dfrac{\Delta\varepsilon_{2k}^{(N_k)}}{(S_{N_k+2}-S_{N_k})^{q_k}}\right|$.

selon le lemme 5.9, on a : $\left|\dfrac{\Delta\varepsilon_{2k}^{(N_k)}}{(S_{N_k+2}-S_{N_k})^{q_k}}\right| \leqslant 1$

et donc $\left|\dfrac{\varepsilon_{2k}^{(N_k)} - S}{(S_{N_k}-S)^{q_k}}\right| \leqslant 1$, $\forall k \geqslant 1$

Selon cette inégalité, il suffit de se reporter à la démonstration du théorème 5.1, et de remplacer $|S_n - S|$ par $|S_{N_k}-S|$ pour démontrer que : $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{P^*(N_k)}{N_k} = +\infty$.

II - DÉTERMINATION DE LA SUITE (N_k).

La suite $(N_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est très importante. On va donner un procédé pour la déterminer. On présente ce procédé sur un exemple :

Soit $(S_n) \in Lin^{(-\infty)}$, soit $(T^{(k)})$ l'itération du Δ^2- Aitken

$T^{(k)} : (S_n) \to (t_n^{(k)})$. $\quad t_n^{(0)} = S_n, \forall n \geqslant 0$

$$t_n^{(k+1)} = t_n^{(k)} - \frac{(\Delta T_n^{(k)})^2}{\Delta^2 T_n^{(k)}}, \quad \forall k \geqslant 1, \forall n \geqslant 0.$$

on note $q_k = k+1-\alpha$, $0<\alpha<1$

alors, k- fixé, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_n^{(k)} - S}{(S_n-S)^{q_k}} = 0$ (voir la proposition 4.2, chapitre V).

On suppose que $L_n^{(k)} \in \mathbb{R}^+$ dépend d'un nombre fini de termes de $(t_m^{(k)})$ et satisfait la condition suivante :

1) $L_m^{(k)} \geqslant \left| \dfrac{t_m^{(k)} - S}{(S_m - S)^{q_k}} \right| \qquad \forall m \geqslant 0, \ \forall k \geqslant 0$

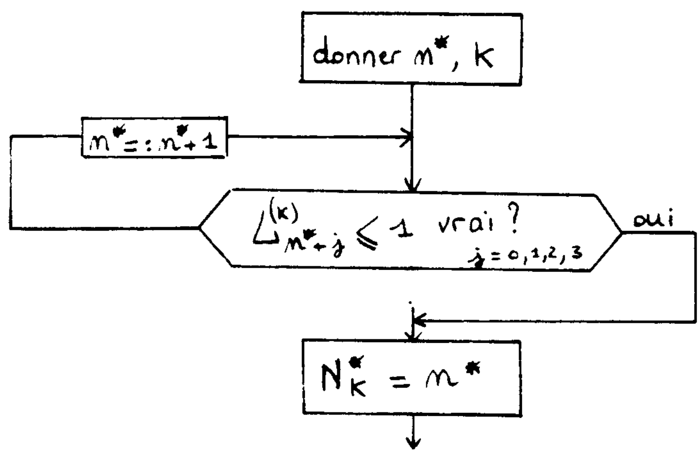
2) $\underline{\lim}_{m\to\infty} L_m^k < 1 \ , \forall k \in \mathbb{N}$

On sait que pour le procédé 1 , $L_m^{(k)} = \left| \dfrac{\Delta t_{N_k}^{(k)}}{(1-\lambda_{k+1})(\Delta S_{N_k})^{q_k}} \right|$

et pour le procédé 2 , $L_m^{(k)} = \left| \dfrac{\Delta \varepsilon_{2k}^{(N_k)}}{(S_{N_k+2} - S_{N_k})^{q_k}} \right|$.

On considère le procédé suivant :

$(**) =$



On trouve d'abord un rang N_k^* tel que $L_{N^*}^{(k)} \leqslant 1$ soit vrai, ensuite on vérifie si $(L_m^{(k)} \leqslant 1)$ est vrai $\forall m > N_k^*$.
S'il existe un rang m^* $(m^* > N_k^*)$ tel que $L_{m^*}^{(k)} \leqslant 1$ est faux, alors on corrige N_k^* . Après plusieurs fois, on peut obtenir un rang N_k, tel que $\forall m > N_k$, $L_m^{(k)} \leqslant 1$ est vrai.

Étape 0) $k=1$, $m^* = 0$, Goto $(**)$

Étape 1) $[N_1^*]$, $k =: 2$, $m^* =: N_1^* + 1$, Goto $(**)$, Goto étape 2)

Étape 2) $[N_1^*, N_2^*]$.

a.1) $L_i^1 \leqslant 1$ VRAi $i = N^*, N_1^*+1, \dots, N_2^*+3+2$

$k = 3$, $m^* = N_2^* + 1$, Goto $(**)$, Goto étape 3) .

a-2) $L^{(1)}_{i^*} \leqslant 1$ FAUX , $i^* > N_1 + 1$.

$k = 1$, $m^* = i^* + 1$, Goto $(**)$, Goto Étape 1)

Étape 3) $[N_1^*, N_2^*, N_3^*]$

a-1,2) $L^{(1)}_{i} \leqslant 1$ VRAI, $i = N_2^*, \dots, N_3^* + 3 + 2 \times 2$.

a-2,1) $L^{(2)}_{i} \leqslant 1$ VRAI $i = N_2^*, \dots, N_3^* + 3 + 2 \times 2$.

$k = 4$, $m^* = N_3^* + 1$, Goto $(**)$, Goto 4)

a-2,2) $L^{(2)}_{i^*} \leqslant 1$ FAUX , $i^* > N_2^*$

$k = 2$, $m^* = i^* + 1$, Goto $(**)$, Goto 2)

a-1,1) $L^{(1)}_{i^*} \leqslant 1$ FAUX, $i^* > N_2^*$

$k = 2$, $m^* = i^* + 1$ Goto $(**)$, Goto 1).

Étape 4) $[N_1^*, N_2^*, N_3^*, N_4^*]$

a-1,1) $L^{(1)}_{i^*} \leqslant 1$ FAUX , $i^* > N_3^*$

$k = 1$, $N^* = i^* + 1$, Goto $(**)$, Goto 1).

a-1,2) $L^{(1)}_{i} \leqslant 1$ VRAI , $i = N_3^*, N_3^* + 1, \dots, N_4^* + 3 + 2 \times 3$.

a-2,1) $L^{(2)}_{i^*} \leqslant 1$ FAUX

$k = 2$, $m^* = i^* + 1$, Goto $(**)$, Goto 2)

a-2,2) $L^{(2)}_{i} \leqslant 1$ VRAI , $i = N_3^*, N_3^* + 1, \dots, N_4^* + 3 + 2 \times 2$.

a-3,1) $L^{(3)}_{i^*} \leqslant 1$ FAUX, $i^* > N_3^*$.

$k = 3$, $m^* = i^* + 1$, Goto $(**)$, Goto 3)

a-3,2) $L^{(3)}_{i} \leqslant 1$ VRAI , $i = N_3^*, \dots, N_4^* + 3 + 2$

$k = 5$, $m^* = N_4^* + 1$, Goto $(**)$, Goto 5).

Étape $l+1$) $[N_1^*, \dots, N_{l+1}^*]$

a-1,1) $L^{(1)}_{i^*} \leqslant 1$ FAUX , $i^* > N_l^*$

$k = 1$, $m^* = N_l^* + 1$, Goto $(**)$, Goto 1).

a-1,2) $L^{(1)}_{i} \leqslant 1$ VRAI , $i = N_l^*, \dots, N_{l+1}^* + 3 + 2.l$.

a-2,1) $L^{(2)}_{i^*} \leqslant 1$ FAUX, $i^* > N_l^*$

$k = 2$, $m^* = i^* + 1$, Goto $(**)$, Goto 2)

a-2,2) $L^{(2)}_{i} \leqslant 1$ VRAI, $i = N_l^*, \dots, N_{l+1}^* + 3 + 2(l-1)$

$$\begin{cases} a\text{-}3,1)\ L^{(3)}_{i^*} \leqslant 1 \text{ FAUX},\ i^* > N^*_\ell \\ \qquad k=3,\ n^*=i^*+1,\ \text{Goto } (**),\ \text{Goto } 3) \\ a\text{-}3,2)\ L^{(3)}_{i} \leqslant 1 \text{ VRAI},\ i=N^*_\ell,\dots,N^*_{\ell+1}+3+2(\ell-2) \end{cases}$$

$\vdots$

$$\begin{cases} a\text{-}\ell,1)\ L^{(\ell)}_{i^*} \leqslant 1 \text{ FAUX},\ i^* > N^*_\ell \\ \qquad k=\ell,\ n^*=i^*+1,\ \text{Goto } (**),\ \text{Goto } \ell) \\ a\text{-}\ell,2)\ L^{(\ell)}_{i} \leqslant 1 \text{ VRAI},\ i=N^*_\ell,\dots,N^*_{\ell+1}+3+2\times 1 \end{cases}$$

$k=\ell+2,\ n^*=N^*_\ell+1,\ \text{Goto } (**),\ \text{Goto } \ell+2)$.

Étape $\ell+2)$ $[N^*_1, N^*_2, \dots, N^*_{\ell+1}, N^*_{\ell+2}]$

$\vdots$

Pour k-fixé, on suppose qu'on obtient N^*_k après l'étape ℓ (où ℓ est assez grand), alors $\forall n > N^*_k$, on a : $\left|\dfrac{t^{(k)}_n - s}{(S_n-s)^{q_k}}\right| \leqslant 1$

III - THÉORÈME SUR LE TEMPS DE CALCUL D'UN PROCÉDÉ

On sait que le but de la construction d'une méthode d'accélération de la convergence est de diminuer le temps de calcul. Quand une méthode est une suite de transformations, à part le calcul des termes S_n, il faut considérer le volume de calcul du procédé lui-même. On étudie ce problème par un exemple.

On suppose que $(T^{(k)})$ l'itération du procédé Δ^2- d'Aitken définie sur $Lin^{(\infty)}$. Soit $(S_n) \in Lin^{(\infty)}$, $T^{(k)} : (S_n) \to (t^{(k)}_n)$, $k \geqslant 0$.

$t^{(0)}_n = S_n$, $\forall n \geqslant 0$

$$(*) \quad t^{(k+1)}_n = t^{(k)}_n - (\Delta t^{(k)}_n)^2 / \Delta^2 (t^{(k)}_n) \qquad k \geqslant 0,\ n \geqslant 0.$$

soit $q_k = k+1-\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0<\alpha<1$ $\quad k=0,1,2,\dots$

soit $(N_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que :

$$\left|\frac{t^{(k)}_n - s}{(S_n-s)^{q_k}}\right| \leqslant 1 \quad , \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{array}{cccccc}
S_0 & t_0^{(1)} & & & & \\
S_1 & \vdots & & & & \\
 & t_{N_1}^{(1)} & & & & \\
\vdots & & t_{N_1+1}^{(2)} & & & \\
 & \vdots & \vdots & t_{N_2+1}^{(3)} & & \\
 & t_{N_2}^{(1)} & & \vdots & \ddots \; t_{N_{k-2}+1}^{(k-1)} & \\
 & & t_{N_2}^{(2)} & & \vdots & t_{N_{k-1}+1}^{(k)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & t_{N_3}^{(3)} & \ddots \; t_{N_{k-1}}^{(k-1)} & \vdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
S_{N_k+2k} & t^{(1)}_{N_k+2(k-1)} & t^{(2)}_{N_2+2(k-2)} & t^{(3)}_{N_3+2(k-3)} & t^{(k-1)}_{N_k+2} & t^{(k)}_{N_k}
\end{array}$$

Pour obtenir la valeur du terme $t_{N_k}^{(k)}$ $(k>1)$, il faut connaître les termes suivants :

0) S_m, $m = 0, 1, 2, \ldots, N_k + 2k$
1) $t_m^{(1)}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, N_k + 2(k-1)$
2) $t_m^{(2)}$, $m = N_1 + 1, \ldots, N_k + 2(k-2)$
3) $t_m^{(3)}$, $m = N_2 + 1, \ldots, N_k + 2(k-3)$

$\vdots$

k) $t_m^{(k)}$, $m = N_{k-1} + 1, \ldots, N_k$.

$\vdots$

<u>On note</u> :

$\mathcal{U}$ = Le nombre d'opérations pour obtenir la valeur $t_m^{(\ell+1)}$ à partir de la colonne $(t_m^{(\ell)})$.

Selon la formule $t_m^{(\ell+1)} = t_m^{(\ell)} - (\Delta t_m^{(\ell)})^2 / \Delta^2 (t_m^{(\ell)})$.

(on sait que $\mathcal{U}$ contient au moins 4 additions et 2 multiplications).

$S\mathcal{U}_k$ = Le nombre d'opérations pour obtenir les valeurs $S_0, S_1, \ldots, S_k$, $k \in \mathbb{N}$.

$T\mathcal{U}_{N_k}$ = Le nombre d'opérations pour obtenir la valeur du terme $t_{N_k}^{(k)}$.

On a alors :

$$T\mathcal{U}_{N_k} = S\mathcal{U}_{N_k} + 2k + (N_k + 2(k-1)+1)\,\mathcal{U} + (N_k + 2(k-2) - N_1)\,\mathcal{U} + \cdots + (N_k - N_{k-1})\,\mathcal{U}$$

$$= S\mathcal{U}_{N_k} + 2k + \left[k \cdot N_k + (k-1)k - \sum_{j=1}^{k-1} N_j\right] \mathcal{U}$$

Lemme 5.10 :

Soit la suite $(S_m) \in Lin^{(1)}$, soit $(T^{(k)})$ une suite de transformations définie sur (S_m). $T^{(k)} : (S_m) \to (t_m^{(k)})$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, $q_k = k+1-\alpha$, $k \in \mathbb{N}$.

Soit la suite $(N_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante,

si : $\left| \dfrac{t_{N_k}^{(k)} - s}{(S_{N_k} - s)^{q_k}} \right| \leqslant 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$

alors on note :

$$P^*(N_k) = \begin{cases} \min\{N \,/\, N \in \mathbb{N}, \forall m \geqslant N, |S_m - s| < |t_{N_k}^{(k)} - s|\}, & t_{N_k}^{(k)} \neq s \\ +\infty & t_{N_k}^{(k)} = s \end{cases}$$

$$D^*(N_k) = P^*(N_k) - N_k. \qquad k \in \mathbb{N}.$$

on a : $\displaystyle \lim_{m\to\infty} \frac{D^*(N_k)}{k \cdot N_k} \geqslant 1$.

Démonstration :

$\forall k \in \mathbb{N}$, si $t_{N_k}^{(k)} = s$, alors $D^*(N_k) = +\infty$, donc $\dfrac{D^*(N_k)}{k \cdot N_k} = +\infty$.

si $t_{N_k}^{(k)} \neq s$, alors $D^*(N_k) \neq +\infty$.

puisque la suite $(S_m) \in Lin^{(1)}$ $\left(\lim_{m\to\infty} \dfrac{S_{m+1}-s}{S_m - s} = a,\ 0 < |a| < 1 \right)$

on note : $C_{N_k} = \left| (t_{N_k}^{(k)} - s) / (S_{N_k} - s)^{q_k} \right| \qquad C_{N_k} \neq 0,\ C_{N_k} < 1$

on se reporte à la démonstration du théorème 4.1.

on a alors :

$$\frac{D^*(N_k)}{N_k} \geqslant \frac{(q_k - 1)\ln \sqrt[N_k]{|S_{N_k} - s|}}{\ln |a + \delta_{N_k}|} + \frac{\ln \sqrt[N_k]{C_{N_k}}}{\ln |a + \delta_{N_k}|} - 1$$

où $0 < |a + \delta_{N_k}| < 1$, $\lim_{k\to\infty} \delta_{N_k} = 0$, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[N_k]{|S_{N_k} - s|} = \ln |a|$

pour k assez grand.

puisque $\lim_{k\to\infty}\left[\dfrac{(q_k-1)\ln\sqrt[N_k]{|S_{N_k}-S|}}{k.\ln|a+\delta_{N_k}|}+\dfrac{1}{k}\dfrac{\ln\sqrt[N_k]{C_{N_k}}}{\ln|a+\delta_{N_k}|}\right]=1$

donc $\lim_{k\to\infty}\dfrac{D^*(N_k)}{k.N_k}\geqslant 1$.

On sait que si (S_n) est monotone, pour obtenir la même précision que le terme $t^{(k)}_{N_k}$, il faut calculer La suite (S_n) jusqu'au terme $S_{p^*(N_k)}$. Donc nous devons considérer La difference :

$$S\mathcal{U}_{p^*(N_k)}-T\mathcal{U}_{N_k}$$

pour savoir si le procédé est vraiment efficace pour cette suite.

On suppose qu'il faut au moins $l.\mathcal{U}$ opérations pour obtenir chaque terme de La suite (S_n). (où $l\in\mathbb{R}^+$), alors on a : $S\mathcal{U}_k\geqslant(k+1).l.\mathcal{U}$.

donc $S\mathcal{U}_{p^*(N_k)}-T\mathcal{U}_{N_k}\geqslant$

$$(N_k+D^*(N_k)+1).l.\mathcal{U}-\left[(N_k+2k).l.\mathcal{U}+\left(k.N_k+k(k-1)-\sum_{j=1}^{k-1}N_j\right)\mathcal{U}\right]$$

$$=\left(D^*(N_k).l+l-2.k.l-k.N_k-k(k-1)+\sum_{j=1}^{k-1}N_j\right).\mathcal{U}$$

$$=\left[\left((l.D^*(N_k)-k.N_k)+l-2k.l-k(k-1)\right)+\sum_{j=1}^{k-1}N_j\right].\mathcal{U}$$

Théorème 5.4 :

Soit La suite $(S_n)\in Lin^{(1)}$, soit $(T^{(k)})$ L'itération du procédé Δ^2- d'Aitken, soit $\alpha\in\mathbb{R}$, $0<\alpha<1$, $q_k=k+1-\alpha$.

On suppose qu'il faut au moins $l.\mathcal{U}$ opérations pour obtenir chaque terme de La suite (S_n), et $l>3/2$.

Soit $(N_k)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante,

si $\left|\dfrac{t^{(k)}_{N_k}-S}{(S_{N_k}-S)^{q_k}}\right|\leqslant 1$, $\forall k\in\mathbb{N}$,

alors $\lim_{k\to\infty}\dfrac{S\mathcal{U}_{p^*(N_k)}-T\mathcal{U}_{N_k}}{k.N_k.\mathcal{U}}\geqslant l-3/2>0$

Démonstration :

Puisque La suite (N_j) est strictement croissante, donc $N_j \geqslant j$, $j \in \mathbb{N}$, on a alors $\sum_{j=1}^{k-1} N_j \geqslant \sum_{j=1}^{k-1} j = \frac{k}{2}(k-1)$

et donc $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{\ell - 2.k.\ell - k(k-1) + \sum_{j=1}^{k-1} N_j}{k.N_k} \geqslant -\frac{1}{2}$

Selon le lemme 5.10 , on a alors $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{D^*(N_k)}{k.N_k} \geqslant 1$

$$
\begin{aligned}
\text{donc } & \lim_{k \to \infty} \frac{S\mathcal{U}p^*(N_k) - T\mathcal{U}_{N_k}}{k.N_k.\mathcal{U}} \\
&= \lim_{k \to \infty} \frac{\left\{ \left(\ell.D^*(N_k) - k.N_k\right) + \ell - 2k.\ell - k(k-1) + \sum_{j=1}^{k-1} N_j \right\} \mathcal{U}}{k.N_k.\mathcal{U}} \\
&= \lim_{k \to \infty} \left[\left(\ell.\frac{D^*(N_k)}{k.N_k} - 1 \right) + \frac{\left(\ell - 2k.\ell - (k-1)k + \sum_{j=1}^{k-1} N_j\right)}{k.N_k} \right] \\
&\geqslant \lim_{k \to \infty} \left(\ell.\frac{D^*(N_k)}{k.N_k} - 1 \right) + \lim_{k \to \infty} \frac{\ell - 2k.\ell - (k-1)k + \sum_{j=1}^{k-1} N_j}{k.N_k} \\
&= \ell - \frac{3}{2} > 0
\end{aligned}
$$

Etude expérimentale

Exemple : $S_n = \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^3 + \cdots$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

Selon le premier procédé, on a :

$q_K = K - 0.5$

K	n_K	$D(n_K)$	$D(n_K)/n_K$
1			
2			
3	2	4	2.00
4	3	11	3.66
5	4	21	5.25
6	5	34	6.80
7	6	50	8.33
8	7	62	8.85

$q_K = K - 0.9$

K	n_K	$D(n_K)$	$D(n_K)/n_K$
1	2	2	1.00
2	3	0	0.00
3	4	6	1.50
4	5	15	3.00
5	6	27	4.50
6	7	42	6.00
7	8	60	7.50
8	18	982	54.55

Etude expérimentale :

on va pratique le deuxieme procédé aux problems suivants

Exemple 1 : $s_{n+1} = e^{-s_n}$, $s_1 = 0.1$, $s^* = 0.5671432904097840\cdots$

K	n_K	$D(n_K)$	$D(n_K)/n_K$
1	2	5	2.50
2	3	12	4.00
3	4	24	6.00
4	5	40	8.00

Exemple 2 : $s_{n+1} = 0.5(1 - s_n^2)s_n$, $s_1 = 0.2$

K	n_K	$D(n_K)$	$D(n_K)/n_K$
1	2	5	2.5
2	3	18	6.0
3	4	38	9.5
4	5	58	11.5
5	6	60	10.0
6	7	66	9.4
7	8	63	7.8

Exemple 3 : $s_{n+1} = 0.6^n + 0.9^n/n$ $n = 1, 2, \cdots$, $s_1 = 1.3$

K	n_K	$D(n_K)$	$D(n_K)/n_K$
1	2	8	4.00
2	3	9	3.00
3	4	19	4.75
4	5	30	6.00

Exemple 4 : $S_{n+1} = 0.5\, S_n (1 - S_n) \qquad S_1 = 0.5$

K	n_K	$D(n_K)$	$D(n_K)/n_K$
1	2	2	1.00
2	3	10	3.33
3	4	20	5.00
4	5	35	7.00
5	6	53	8.83
6	7	62	8.85
7	8	63	7.87

Chapitre 6

Itération de méthode d'accéléra-tion de la convergence.

INTRODUCTION

L'itération d'algorithme d'accélération de la convergence est très important dans le cadre de l'accélération de la convergence, particulièrement pour la construction d'une transformation possèdant la propriété $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{D(n)}{n} = +\infty$. (voir chapitre V).
Donc elle nécessite une étude théorique plus profonde.

Ce chapitre est consacré principalement à deux problèmes : celui de l'accélération de la convergence sur chaque colonne $\left((t_n^{(k)}), k\text{- fixé}\right.$, pour obtenir la suite $\left.(q_k)\right)$; celui de la convergence sur chaque diagonale $\left((t_n^{(k)}), n\text{- fixé}\right)$.

Dans la première partie de ce chapitre, nous commençons par présenter une C-transformation définie sur l'ensemble $Lin^{(1)}$. En effet, le θ-algorithme, l'ε-algorithme, etc sont des itérations de C-transformation. Ensuite nous donnerons un théorème d'accélération de la convergence sur chaque colonne.

Dans la deuxième partie, nous donnerons des théorèmes de la convergence sur chaque diagonale. Nous améliorons quelques algorithmes d'accélération de la convergence (θ-algorithme, itération du procédé Δ^2-d'Aitken, etc) afin qu'ils possèdent la propriété de la convergence sur chaque diagonale sans perdre leur propriété sur chaque colonne.

I_1 FORMULE GÉNÉRALE ET THÉORÈME.

Définition 6.1

Soit l'ensemble $\mathcal{S} \subset conv(\mathbb{R})$, soit T une transformation définie sur $\mathcal{S}$, soit $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, si $\forall (S_n) \in \mathcal{S}$,
$T : (S_n) \to (t_n)$,
$t_n = C_0((S_n),n) S_n + C_1((S_n),n) S_{n+1} + \cdots + C_k((S_n),n) S_{n+k}$.

1) $\sum_{j=0}^{k} C_j((S_n),n) = 1$, $\forall n \geq 0$

2) $\lim_{n\to\infty} C_j((S_n),n)$ existe $= c_j$, $j = 0,1,2,\ldots,k$.

alors on dit que T est une C-transformation définie sur $\mathcal{S}$.

Evidemment, $\sum_{j=0}^{k} c_j = 1$. Pour simplifier la notation, on note $C_{j,n} = C_j((S_n),n)$; $C_j((S_n),n)$ est une fonction définie sur $\mathcal{S} \times \mathbb{N}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{S} \subset Lin^{(M)}$, $M \in \mathbb{N}$ $(M > 1)$, soit $k \in \mathbb{N}$, $k < M$
soit $(S_n) \in \mathcal{S}$, quand n est assez grand, on a les développements :

$$
(*) \begin{cases}
S_{n+1} - S = a_1(S_n - S) + a_2(S_n - S)^2 + \cdots + a_M(S_n - S)^M + o((S_n - S)^M) \\
\quad \text{où } a_1 \in \mathbb{R},\ 0 < |a_1| < 1. \\
S_{n+2} - S = d_{2,1}(S_n - S) + d_{2,2}(S_n - S)^2 + \cdots + d_{2,M}(S_n - S)^M + o((S_n - S)^M). \\
\vdots \\
S_{n+k} - S = d_{k,1}(S_n - S) + d_{k,2}(S_n - S)^2 + \cdots + d_{k,M}(S_n - S)^M + o((S_n - S)^M)
\end{cases}
$$

où $d_{j,1} = a_1^j$ $\quad j = 1,2,3,\ldots,k$
et $d_{j,i}$ est définie par $a_1, a_2, \ldots, a_i$ $\quad ; i = 1,2,\ldots,M$.

On considère la somme suivante :

$$
(**) \begin{cases}
c_0(S_n - S) + c_1(S_{n+1} - S) + \cdots + c_k(S_{n+k} - S) \\
= (c_0 + d_{1,1}c_1 + d_{2,1}c_2 + \cdots + d_{k,1}c_k)(S_n - S) \\
\quad + (d_{1,2}c_1 + d_{2,2}c_2 + \cdots + d_{k,2}c_k)(S_n - S)^2 \\
\quad + \cdots \\
\quad + (d_{1,k}c_1 + d_{2,k}c_2 + \cdots + d_{k,k}c_k)(S_n - S)^k + o((S_n - S)^k)
\end{cases}
$$

On construit le système suivant :

$$(***)\begin{cases} X_0 + X_1 + X_2 + \cdots + X_k = 1 \\ X_0 + d_{1,1} X_1 + d_{2,1} X_2 + \cdots + d_{k,1} X_k = 0 \\ \quad d_{1,2} X_1 + d_{2,2} X_2 + \cdots + d_{k,2} X_k = 0 \\ \quad \vdots \\ \quad d_{1,k} X_1 + a_{2,k} X_2 + \cdots + d_{k,k} X_k = 0 \end{cases} \quad \text{où } d_{i,1} = a^i_1$$

$i = 1, \ldots, k$.

On note $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & d_{1,1} & \cdots & d_{k,1} \\ 0 & d_{1,2} & \cdots & d_{k,2} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & d_{1,k} & \cdots & d_{k,k} \end{bmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix}$.

Théorème 6.1 :

Soit la suite $(S_n) \in Lin^{(M)}$, soit $k \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{N}$, $k < M$
soit T une C-transformation définie sur (S_n),
$T : (S_n) \longrightarrow (t_n)$, $t_n = \sum_{j=0}^{k} C_{j,n} S_{n+j}$.
si $C_{j,n} = C_j + o((S_n - S)^k)$
alors une condition nécessaire et suffisante pour
$t_n - S = o((S_n - S)^{k+1})$ est que $(C_0, C_1, \ldots, C_k)$
soit solution du système $AX = B$.

Démonstration :

① On suppose que $(C_0, C_1, \ldots, C_k)$ est solution de $AX = B$.
Selon (**), on a alors :

$$C_0 (S_n - S) + C_1 (S_{n+1} - S) + \cdots + C_k (S_{n+k} - S) = o((S_n - S)^{k+1})$$

donc $t_n - S = \sum_{j=0}^{k} C_{j,n} (S_{n+j} - S) = \sum_{j=0}^{k} (C_j + o((S_n - S)^k)) (S_{n+j} - S)$

$$= \sum_{j=0}^{k} C_j (S_{n+j} - S) + o((S_n - S)^{k+1})$$

$$= o((S_n - S)^{k+1}).$$

② On suppose que $t_n - s = o\left((s_n - s)^{k+1}\right)$,

puisque $c_{j,n} = c_j + o\left((s_n - s)^k\right)$

donc on a $t_n - s = \sum_{j=0}^{k} c_j (s_{n+j} - s) + o\left((s_n - s)^k\right) = o\left((s_n - s)^k\right)$.

donc $\sum_{j=0}^{k} c_j (s_{n+j} - s) = o\left((s_n - s)^k\right)$.

puisque $(s_n) \in Lin^{(M)}$, donc pour n assez grand,

on a le développement (*), et $s_n \neq s$

selon (**), on a $\sum_{j=0}^{k} c_j = 1$, $\sum_{j=1}^{k} a_{j,i} c_j = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$.

$c_0 + a_1 c_1 + \dots + a_k c_k = 0$.

donc $(c_0, c_1, \dots, c_k)$ est une solution de l'équation $AX = B$.

PROPOSITION 6.1 :

IL existe au moins une solution pour le système $AX = B$.

Démonstration :

On va trouver une solution.

Soit $(s_n) \in Lin^{(M)}$, $s_{n+1} - s = a_1 (s_n - s) + a_2 (s_n - s)^2 + \dots + a_k (s_n - s)^k + o\left((s_n - s)^{k+1}\right)$.

on construit le procédé suivant :

$$t_n^{(1)} = c_0^{(1)} + c_1^{(1)} s_{n+1}, \dots, t_n^{(i+1)} = c_0^{(i+1)} t_n^{(i)} + c_1^{(i+1)} t_{n+1}^{(i)},$$

$0 \leq i \leq k-1$

où $c_0^{(i)} = -a_1^i / (1 - a_1^i)$, $c_1^{(i)} = 1 / (1 - a_1^i)$, $i = 0, 1, \dots, k-1$.

on sait que $t_n^{(k)} = c_0 s_n + c_1 s_{n+1} + \dots + c_k s_{n+k}$.

où $\sum_{j=0}^{k} c_j = 1$, et $t_n^{(k)} - s = o\left((s_n - s)^{k+1}\right)$ selon le théorème 6.1

$(c_0, c_1, \dots, c_k)$ est une solution de l'équation $AX = B$.

Selon la proposition 6.1, on sait que c_j $(j = 0, 1, \dots, k)$ est déterminé par $(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Toutes les C-transformations d'accélération définies sur (s_n) soient construites par approximation de c_j $(j = 0, 1, 2, \dots, k)$.

Donc on peut obtenir différentes C-transformations d'accélération par différentes approximations des c_j $(j = 0, 1, \dots, k)$

On sait que la matrice A est définie par $(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

On note $\mathbb{A} = \mathbb{A}(a_1, a_2, \dots, a_k)$.
Si l'on remplace a_j par son approximation $a_{j,n}$, on peut obtenir une approximation de la matrice $\mathbb{A}$.
$\overline{\mathbb{A}} = \mathbb{A}(a_{1,n}, \dots, a_{k,n})$

<u>Proposition 6.2</u> :

Si $0 < |a_{1,n}| < 1$, alors il existe au moins une solution pour le système : $\mathbb{A}(a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{k,n}) X = \mathbb{B}$.

<u>Proposition 6.3</u> :

Soit la suite $(S_n) \in Lin^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$,
$S_{n+1} - S = a_1(S_n - S) + a_2(S_n - S)^2 + \dots + a_k(S_n - S)^k + o((S_n - S)^k)$.
Soit T une C-transformation définie sur (S_n) comme suit :
$T : (S_n) \to (t_n)$, $t_n = C_{0,n} S_n + C_{1,n} S_{n+1} + \dots + C_{k,n} S_{n+k}$.
où $(C_{0,n}, \dots, C_{k,n})$ est une solution de l'équation :
$\mathbb{A}(a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{k,n}) \cdot X = \mathbb{B}$. (pour n assez grand).
Si $a_{j,n} = a_j + o((S_n - S)^{k-j})$, $j = 1, 2, \dots, k$.
alors $t_n - S = o((S_n - S)^k)$

<u>Démonstration</u>:

Puisque $(S_n) \in Lin^{(k)}$

$$S_{n+1} - S = a_1(S_n - S) + a_2(S_n - S)^2 + \dots + a_k(S_n - S)^k + o((S_n - S)^k).$$

donc

$$S_{n+1} - S = (a_{1,n} + o((S_n - S)^{k-1}))(S_n - S) + \dots + (a_{k,n} + o((S_n - S)^0))(S_n - S)^k + o((S_n - S)^k).$$

$$= a_{1,n}(S_n - S) + \dots + a_{k,n}(S_n - S)^k + o((S_n - S)^k).$$

$$S_{n+2} - S = a_{1,n+1}(S_{n+1} - S) + \dots + a_{k,n+1}(S_{n+1} - S)^k + o((S_{n+1} - S)^k).$$

$$= [a_{1,n} + o((S_n - S)^{k-1})](S_{n+1} - S) + \dots + [a_{k,n} + o((S_n - S)^0)](S_{n+1} - S)^k + o((S_{n+1} - S)^k).$$

$$= a_{1,n}(S_{n+1} - S) + \dots + a_{k,n}(S_{n+1} - S)^k + o((S_n - S)^k).$$

$$= \alpha_{1,1}(S_n - S) + \dots + \alpha_{2,k}(S_n - S)^k + o((S_n - S)^k).$$

$\vdots$

$$S_{m+k} - S = a_{1,m}(S_{m+k} - S) + \cdots + a_{k,m}(S_{m+k} - S)^k + o((S_m - S)^k)$$
$$= \alpha_{k,1}(S_m - S) + \cdots + \alpha_{k,k}(S_m - S)^k + o((S_m - S)^k).$$

où $\alpha_{i,j}$ défini par $a_{1,m}, \ldots, a_{k,m}$.

On considère la somme suivante :

$$c_{0,m}(S_m - S) + c_{1,m}(S_{m+1} - S) + \cdots + c_{k,m}(S_{m+k} - S)$$
$$= (c_{0,m} + c_{1,m}\alpha_{1,1} + c_{2,m}\alpha_{2,1} + \cdots + c_{k,m}\alpha_{k,1})(S_m - S)$$
$$+ (c_{1,m}\alpha_{1,2} + c_{2,m}\alpha_{2,2} + \cdots + c_{k,m}\alpha_{k,2})(S_m - S)^2$$
$$+ \cdots$$
$$+ (c_{1,m}\alpha_{1,k} + c_{2,m}\alpha_{2,k} + \cdots + c_{k,m}\alpha_{k,k})(S_m - S)^k$$
$$+ o((S_m - S)^k).$$

(où $\alpha_{j,1} = a_{j,m}$, $j = 1, 2, \ldots, k$).

Si $(c_{0,m}, c_{1,m}, \ldots, c_{k,m})$ est une solution de l'équation

$$\mathbb{A}(a_{1,m}, a_{2,m}, \ldots, a_{k,m}) \cdot X = \mathbb{B}$$

alors on a : $c_{0,m}(S_m - S) + \cdots + c_{k,m}(S_{m+k} - S) = o((S_m - S)^k)$

donc $t_m - S = o((S_m - S)^k)$.

I.2 FORMULE DANS UN CAS PARTICULIER.

__Proposition 6.4__ :

Soit la suite $(S_m) \in Lin^{(1)}$, $S_{m+1} - S = a_1(S_m - S) + o((S_m - S))$

soit T une transformation définie sur (S_m) comme suit :

$T : (S_m) \to (t_m)$, $t_m = c_{0,m} \cdot S_m + c_{1,m} \cdot S_{m+1}$ $\quad m \geq 0$.

où $c_{0,m} = -a_{1,m} / (1 - a_{1,m})$, $c_{1,m} = 1 / (1 - a_{1,m})$

si $a_{1,m} = a_1 + o(1)$

alors $t_m - S = o((S_m - S))$

On prend $k = 1$. Selon le théorème 6.1 et les propositions 6.1 et 6.2, on peut montrer cette proposition.

Proposition 6.1 :

Soit la suite $(S_n) \in Lin^{(1)}$, $p \in \mathbb{N}$.

Si $a_{1,n} = \dfrac{\Delta S_{n+p}}{\Delta S_{n+p-1}}$ alors $a_{1,n} = a_1 + o(1)$.

En particulier, si $p=1$, on peut obtenir le procédé de Δ^2- d'Aitken.

Proposition 6.2 :

Soit la suite $(S_n) \in Lin^{(1)}$, $p \in \mathbb{N}$.

Si la suite $(|S_{n+1} - S_n|)$ est décroissante,

et si $a_{1,n} = \sqrt[n+p]{|S_{n+1} - S_n|}$

alors $a_{1,n} = a_1 + o(1)$.

Proposition 6.5 :

Soit la suite $(S_n) \in Lin^{(3)}$

$$S_{n+1} - S = a_1 (S_n - s) + a_2 (S_n - s)^2 + o((S_n - s)).$$

Soit T une C-transformation définie sur (S_n) comme suit :

$$T : (S_n) \to (t_n) \quad , \quad t_n = c_{0,n} S_n + c_{1,n} S_{n+1} + c_{2,n} S_{n+2} \quad n \geqslant 0$$

où

$$(*) \begin{cases} c_{1,n} = -a_{1,n} / (1 - a_{1,n})^2 \\ c_{2,n} = 1/(1 + a_{1,n})(1 - a_{1,n})^2 \\ c_{0,n} = 1 - c_{1,n} - c_{2,n} \end{cases}$$

Si $a_{1,n} = a_1 + O((S_n - s))$

alors $t_n - S = o((S_n - s)^2)$.

On prend $k=2$, on considère l'équation $\mathbb{A}(a_{1,n}, a_{2,n}) \cdot X = \mathbb{B}$ on peut obtenir une solution comme $(*)$. En effet, si $a_2 = 0$, on peut choisir $c_2 \in \mathbb{R}$.

$$(**) \begin{cases} c_{0,n} = (a_{1,n} - a_{1,n} c_2 + c_2 a_{1,n}^2) / (a_{1,n} - 1) \\ c_{1,n} = (c_2 - c_2 \cdot a_{1,n}^2 - 1) / (a_{1,n} - 1) \\ c_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

tel que la transformation définie par $(**)$ possède la propriété $t_n - S = o((S_n - s)^3)$.

Proposition 6.3 :

Soit la suite $(S_n) \in Lin^{(2)}$,

on note $X_{n+j} = \Delta S_{n+j+1} / \Delta S_{n+j}$ $\quad j = 0,1$.

si $a_{1,n} = \left(1 + X_n - \sqrt{(1+X_n)^2 - 4X_{n+1}}\right)/2$

alors $a_{1,n} = a_1 + o\left((S_n - s)\right)$.

Pour la démonstration (voir théorème 6.2)

Proposition 6.6 :

Soit la suite $(S_n) \in Lin^{(3)}$

$S_{n+1} - S = a_1(S_n - S) + a_2(S_n - S)^2 + a_3(S_n - S)^3 + o\left((S_n - S)^3\right)$

soit T une C-transformation définie sur (S_n) comme suit :

$T : (S_n) \to (t_n)$,

$t_n = c_{0,n} S_n + c_{1,n} S_{n+1} + c_{2,n} S_{n+2} + c_{3,n} S_{n+3}$.

où $c_{j,n}$ est défini comme suit :

on note : $D = a_{1,n}(a_{1,n}^3 - 1) / \left(a_{1,n} \cdot a_{3,n}(a_{1,n} - 1) + 2a_{2,n}^2\right)$

Cas 1 - $D \neq 0$, $c_{3,n} = b_3 / D$

$c_{2,n} = b_2 - (a_{1,n}^2 + a_{1,n} + 1) \cdot c_{3,n}$

$c_{1,n} = b_1 - a_{1,n} \cdot c_{2,n}$

$c_{0,n} = 1 - (c_{1,n} + c_{2,n} + c_{3,n})$

$b_1 = -1/(a_{1,n} - 1)$

$b_2 = b_1\left(1 + 1/(a_{1,n}^2 - 1)^2\right)$

$b_3 = -a_{3,n} b_2 + (b_2 - b_1)(2a_{1,n} a_{2,n}^2 + a_{1,n}^3 a_{3,n})$

Cas 2 - $D = 0$, $c_{2,n} = b - (a_{1,n}^2 + a_{1,n} + 1) \cdot c_{3,n}$

$c_{1,n} = -a_{1,n}^2 b - a_{1,n} c_{2,n}$

$c_{0,n} = 1 - (a_{1,n} + c_{2,n} + c_{3,n})$

$b = 1/(a_{1,n} - 1)(a_{1,n}^2 - 1)$ $\quad c_{3,n} \in \mathbb{R}$.

Si : $\begin{cases} a_{1,n} = a_1 + o\left((S_n - s)^2\right) \\ a_{2,n} = a_2 + o\left((S_n - s)\right) \\ a_{3,n} = a_3 + o(1) \end{cases}$ alors : $t_n - S = o\left((S_n - s)^3\right)$

Exemples Numeriques :

On considere le procédé suivant :

$$T : (s_n) \to (t_n)$$

$$t_n = c_{0,n}\, s_{n+1} + c_{1,n}\, s_{n+2} + c_{2,n}\, s_{n+3} \quad , \quad n \geq 0$$

où $c_{0,n} = 1 - c_{1,n} - c_{2,n}$

$$\begin{cases} c_{1,n} = -a_{1,n} \,/\, (1 - a_{1,n})^2 \\ c_{2,n} = 1 / ((1 + a_{1,n})(1 - a_{1,n})^2) \\ x_{n+j} = \Delta s_{n+j} \,/\, \Delta s_{n+j-1} \quad , \quad j = 1, 2 \\ a_{1,n} = 0{,}5 \left(1 + x_{n+1} - \sqrt{(1 + x_{n+1})^2 - 4\, x_{n+2}}\right) \end{cases}$$

On appelle ce procédé CT2.

1) Soit (s_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} s_{n+1} = 0.5\, s_n \,(1 + 0{,}5\, s_n + s_n^2) \\ s_0 = 0{,}5 \end{cases}$$

$$S = 0.$$

On obtien :

$n+3$	CT2, t_n	ε_4^{n}	θ_2^{n}
11	0,19 D -5	-0,97 D -5	0.39 D -5
12	0,48 D -6	-0,24 D -5	0,96 D -6
13	0,120 D -6	-0,60 D -6	0.241 D-6
14	0,30 D -7	-0,15 D -6	0.60 D -7
15	0,75 D -8	-0,37 D -7	0.15 D -7
16	0,18 D -8	-0,93 D -8	0,37 D -8
17	0,49 D -9	-0,23 D -8	0,93 D -9
18	0,11 D -9	-0,58 D -9	0,29 D -9
19	0,29 D -10	-0,146 D -9	0,58 D -10

I.3 Estimation des coefficients.

Soit la suite $(S_n) \in \text{conv}(\mathbb{R})$, et $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. On suppose que $(S_n - S)$ peut se développer comme suit :

$$S_n - S = a_1\, g_1(n) + a_2\, g_2(n) + \cdots \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

où (a_j) est inconnue.

Si l'on possède des informations suffisantes sur $(g_i(n))$, on peut donner une estimation des valeurs (a_j). $j = 1, 2, \ldots$.

Dans [23], A.C. MATOS a donné une approximation de a_j en utilisant la base $(g_i(n))$. En effet, si $(S_n) \in \text{Lin}^{(M)}$ $(M \in \mathbb{N})$, on peut estimer (a_j) tout simplement en utilisant un nombre fini de termes de la suite initiale.

D'abord, on rappelle le lemme suivant :

<u>Lemme 6.1</u> :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction analytique dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = f(x_0)$, et $f'(x_0) \neq 0$, alors il existe un voisinage de y_0 (on note $D_\varepsilon(y_0)$) tel que :

$$x = f^{-1}(y) = g(y) \quad \text{est analytique dans } D_\varepsilon(y_0)$$

et $x_0 = g(y_0)$.

<u>Lemme 6.2</u> :

Soit $a \in \mathbb{R}$, $0 < |a| < 1$, $m \in \mathbb{N}$, soit $y = P_m(x) = x^m(a-x) - (a-x)$ un polynôme défini sur $\mathbb{R}$,

alors il existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que : $\forall y \in \mathbb{R}$, $|y| < \varepsilon_0$

$$x = P_m^{-1}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j\, y^j \quad \text{et} \quad x(0) = a.$$

<u>Démonstration</u> :

$$y = P_m(x) = x^m(a-x) - (a-x), \quad y(a) = 0$$

puisque $0 < |a| < 1$ donc

$$y'(a) = m\, a^{m-1}(a-a) - a^m + 1 = 1 - a^m \neq 0.$$

Selon le Lemme 6.1, il existe $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$, tel que $\forall y \in \mathbb{R}$,
$|y| < \varepsilon_0$, $x = P_m^{-1}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j y^j$ et $x(0) = a$

Théorème 6.2 :

Soit $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $m < M$, soit la suite $(S_n) \in \mathrm{Lin}^{(M)}$.
$S_{n+1} - S = a_1 (S_n - S) + a_2 (S_n - S)^2 + \dots + a_M (S_n - S)^M + o((S_n - S)^M)$
pour n assez grand.
Soit $(r_m(n))$ une suite qui converge vers a_1, et
$r_m(n) = a_1 + b_m (S_n - S)^m + \dots + b_M (S_n - S)^M + o((S_n - S)^M)$.
On note : $P_m(x, n) = x^m (r_m(n) - x) - (r_m(n+1) - x)$
alors, l'équation $P_m(x, n) = 0$ possède une racine $r_{m+1}(n)$,
telle que $r_{m+1}(n) = a_1 + b^*_{m+1} (S_n - S)^{m+1} + \dots + b^*_M (S_n - S)^M + o((S_n - S)^M)$.

Démonstration :

1) D'abord, on va montrer que l'équation $P_m(x) = 0$ possède une racine, telle que $r_{m+1}(n) = a_1 + b^*_1 (S_n - S) + b^*_2 (S_n - S)^2 + \dots +$
$b^*_M (S_n - S)^M + o((S_n - S)^M)$.
Puisque $r_m(n) = a_1 + b_m (S_n - S)^m + \dots + b_M (S_n - S)^M + o((S_n - S)^M)$.
donc $r_m(n+1) = a_1 + b'_m (S_n - S)^m + \dots + b'_M (S_n - S)^M + o((S_n - S)^M)$.
On note : $\varepsilon(n) = r_m(n) - r_m(n+1)$.
Alors $\varepsilon(n) = \overline{b}_m (S_n - S)^m + \dots + \overline{b}_M (S_n - S)^M + o((S_n - S)^M)$.
et donc $P_m(x, n) = x^m (r_m(n) - x) - (r_m(n) - x) + \varepsilon(n)$.
On considère la fonction $y = x^m (r_m(n) - x) - (r_m(n) - x)$.
Selon le lemme 6.2, il existe un voisinage de zéro, tel que dans ce voisinage, $x = x(y) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j y^j$ et $x(0) = r_m(n)$.
Donc
$$x(\varepsilon(n)) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_n^j = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_n^j = r_m(n) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_n^j.$$

et donc $P_m(x, n) = x^m (r_m(n) - x) - (r_m(n+1) - x) = 0$ et il existe une racine :
$r_{m+1}(n) = a_1 + b^*_1 (S_n - S) + \dots + b^*_m (S_n - S)^M + o((S_n - S)^M)$.

2) On va démontrer que $b_j^* = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$.

On sait que :

$$P_m\left(r_{m+1}(n), n\right) = r_{m+1}^m(n)\left(r_m(n) - r_{m+1}(n)\right) - \left(r_m(n+1) - r_{m+1}(n)\right) = 0 .$$

Alors, $r_{m+1}^m(n) \cdot r_m(n) - r_{m+1}^{m+1}(n) - r_m(n+1) + r_{m+1}(n) = 0$.

$$\left[a_1 + b_1^*(s_n - s) + \dots + b_m^*(s_n-s)^m + \dots + o\left((s_n-s)^M\right)\right]^m \cdot \left[a_1 + b_m(s_n-s)^m + \dots + o\left((s_n-s)^M\right)\right]$$
$$- \left[a_1 + b_1^*(s_n-s) + \dots + b_m^*(s_n-s)^m + o\left((s_n-s)^m\right)\right]^{m+1}$$
$$- \left[a_1 + b_m'(s_n-s)^m + \dots + o\left((s_n-s)^M\right)\right] + \left[a_1 + b_1^*(s_n-s) + \dots + o\left((s_n-s)^M\right)\right] = 0 .$$

Alors :

$$\left[a_1 + b_1^*(s_n-s) + \dots + b_M^*(s_n-s)^M\right]^m \cdot \left[a_1 + b_m(s_n-s)^m\right]$$
$$- \left[a_1 + b_1^*(s_n-s) + \dots + b_m^*(s_n-s)^m\right]^{m+1}$$
$$- b_m'(s_n-s)^m + b_1^*(s_n-s) + \dots + b_m^*(s_n-s)^m = o\left((s_n-s)^m\right) .$$

On développe la gauche comme suit :

$$h_1(s_n-s) + h_2(s_n-s)^2 + \dots + h_m(s_n-s)^m + \dots + o\left((s_n-s)^M\right) .$$

On a alors $h_1 = h_2 = \dots = h_m = 0$.

Puisque $h_1 = (m-1)a_1^m \cdot b_1^* - m \cdot a_1^m \cdot b_1^* + b_1^*$
$= b_1^*(1 - a_1^m)$ $\qquad (a_1 \neq 1)$

donc $b_1^* = 0$.

Puisque $h_2 = (m-1) \cdot a_1^m \cdot b_2^* - m\, a_1^m \cdot b_2^* + b_2^*$
$= b_2^*(1 - a_1^m)$ $\qquad (a_1 \neq 1)$

donc $b_2^* = 0$

$\vdots$

Puisque $h_m = a_1^m b_m - a_1^m b_m^* - b_m' + b_m^*$
et $b_m' = a_1^m b_m$, $|a_1| \neq 1$.

donc $b_m^* = 0$.

et donc $r_{m+1}(n) = a_1 + b_{m+1}^*(s_n-s)^{m+1} + \dots + b_M^*(s_n-s)^M + o\left((s_n-s)^M\right)$.

Si l'on connait une estimation de a_1, on peut donner des approximations des a_j , $j = 2, 3, \dots$ facilement.

Théorème 6.3 :

Soit la suite $(S_n) \in Lin^{(M)}$, $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $m < M$.

Soit $a_{1,n} = a_1 + o\left((S_n - S)^M\right)$,

soit $r_{m,j}(n) = a_j + b_m (S_n - S)^m + \cdots + o\left((S_n - S)^M\right)$. $\quad j = 2, 3, \ldots$

on note : $r_{m+1,j}(n) = \dfrac{a_{1,n}^m \, r_{m,j}(n) - r_m(n+1)}{a_{1,n}^m - 1}$

alors : $r_{m+1,j}(n) = a_j + b^*_{m+1} (S_n - S)^{m+1} + \cdots + o\left((S_n - S)^M\right)$.

Démonstration :

$(S_n) \in Lin^{(M)}$,

$S_{n+1} - S = a_1 (S_n - S) + a_2 (S_n - S)^2 + \cdots + o\left((S_n - S)^M\right)$ pour n assez grand.

On a alors $r_{m,j}(n+1) = a_j + b_m (S_{n+1} - S)^m + \cdots + o\left((S_n - S)^M\right)$

$$= a_j + b_m a_1^m (S_n - S)^m + \cdots + o\left((S_n - S)^M\right).$$

donc $a_{1,n}^m \, r_{m,j}(n) - r_{m,j}(n+1)$

$$= (a_{1,n}^m - 1) a_j + b^*_{m+1} (S_n - S)^{m+1} + \cdots + o\left((S_n - S)^M\right).$$

et donc $r_{m+1,j}(n) = a_j + b^*_{m+1} (S_n - S)^{m+1} + \cdots + o\left((S_n - S)^M\right)$.

Remarque : Soit $(S_n) \in Lin^{(\infty)}$. $S_{n+1} - S = a_1 (S_n - S) + a_2 (S_n - S)^2 + \cdots$

on a alors $r_1(n) = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = a_1 + b_1 (S_n - S) + b_2 (S_n - S)^2 + \cdots$

pour n assez grand.

Selon le théorème 6.2, on peut obtenir une approximation de a_1, en utilisant un nombre fini de termes de la suite (S_n).

On suppose que : $a_{1,n} = a_1 + o\left((S_n - S)^m\right)$ $\quad m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

on note : $y_{1,2}(n) = \left(\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - a_{1,n}\right) \Big/ \left[\dfrac{(1 + a_{1,n})}{(a_{1,n} - 1)} \cdot \Delta S_n\right]$

alors : $y_{1,2}(n) = a_2 + b_1 (S_n - S) + b_2 (S_n - S)^2 + \cdots + o\left((S_n - S)^m\right)$.

Preuve : $\dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \dfrac{(a_1 - 1)(S_{n+1} - S) + a_2 (S_{n+1} - S)^2 + \cdots}{(a_1 - 1)(S_n - S) + a_2 (S_n - S)^2 + \cdots}$

$$= \frac{(a_1 - 1)\left(a_1 (S_n - S) + a_2 (S_n - S)^2 \cdots\right) + a_2 \left(a_1 (S_n - S) + a_2 (S_n - S)^2 + \cdots\right)^2 + \cdots}{(a_1 - 1)(S_n - S) + a_2 (S_n - S)^2 + \cdots}$$

$$= \frac{(a_1-1)a_1(s_n-s)+\left[(a_1-1)a_2(s_n-s)^2+a_1^2a_2(s_n-s)^2\right]+\cdots}{(a_1-1)(s_n-s)+a_2(s_n-s)^2+\cdots}$$

$$= a_1 + \frac{((a_1-1)a_2+a_1^2a_2-a_1a_2)(s_n-s)^2+\cdots}{(a_1-1)(s_n-s)+a_2(s_n-s)^2+\cdots}$$

$$= a_1 + a_2(1+a_1)(s_n-s)+\cdots$$

donc $\left(\frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} - a_1\right) \Big/ (1+a_1) = a_2(s_n-s)+\cdots$

et donc $\left(\frac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} - a_1\right) \Big/ \left(\frac{1+a_1}{a_1-1}\Delta s_n\right) = \frac{a_2(s_n-s)+\cdots}{(s_n-s)+\cdots}$

$$= a_2 + b_1(s_n-s)+\cdots$$

Puisque $a_{1,n} = a_1 + o((s_n-s)^m)$

donc $y_{1,2}(n) = a_2 + b_1^*(s_n-s)+\cdots+o((s_n-s)^m)$.

Selon le théorème 6.3, on peut obtenir des approximations de a_2 plus précises.

Le procédé d'Overholt est construit selon une estimation de a_1.

I.4 ITÉRATION DE C-TRANSFORMATION.

On va montrer que le Θ-algorithme, l'ε-algorithme, le procédé d'overholt, l'itération du procédé Δ^2-d'Aitken, l'itération de λ-transformation etc. sont des itérations de C-transformations. On commence par un théorème de convergence.

Théorème 6.4 :

Soit la suite $(S_n) \in \mathcal{SL}$, $\left(\frac{S_{n+1}-S}{S_n-S} = \rho + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j u_n^j\right.$ avec $(u_n) \in \text{CONV}_0^*(\mathbb{R}^+)$, pour n assez grand, $\rho \in \mathbb{R}$, $0<|\rho|<1$, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to a$, $0<|a|\leqslant 1$, $u_{n+1} = \phi(u_n)$, $\left.\phi(x) \text{ une fonction analytique}\right)$, soit $(T^{(k)})$ une suite de C-transformations définie sur (S_n) comme suit :

$$T^{(0)} : (S_n) \to (t_n^{(0)}) \quad , \quad t_n^{(0)} = S_n \qquad \forall n \geqslant 0 .$$

$$T^{(k+1)} : (t_n^{(k)}) \to (t_n^{(k+1)}) ,$$

$$t_n^{(k+1)} = C_{0,n}^{(k+1)} \, t_n^{(k)} + C_{1,n}^{(k+1)} \, t_{n+1}^{(k)} \qquad k \geqslant 0 ; n \geqslant 0 .$$

où 1) $C_{0,n}^{(k+1)} + C_{1,n}^{(k+1)} = 1 \quad \forall k \geqslant 0, \forall n \geqslant 0 .$

2) $C_{0,n}^{(k+1)} = - a_n^{(k)} / (1 - a_n^{(k)})$

$a_n^{(k)} = a^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \, u_n^j$ pour n assez grand. $\forall k \geqslant 0$.

Si : 1) $\dfrac{t_n^{(k)} - s}{S_n - S} = b_{p_k}^{(k)} u_n^{p_k} + b_{p_{k+1}}^{(k)} u_n^{p_{k+1}} + \cdots$

où $p_j \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k \qquad p_k > p_{k-1} > \cdots > p_1 > p_0 = 0 .$

$b_{p_j}^{(j)} \neq 0 \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, k .$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\Delta t_{n+1}^{(k)}}{\Delta t_n^{(k)}} = a^{(k)}$

alors : $\dfrac{t_n^{(k+1)} - s}{S_n - S} = b_{p_{k+1}}^{(k+1)} u_n^{p_{k+1}} + \cdots \qquad p_{k+1} > p_k$

Avant de donner la démonstration, on rappelle le lemme suivant, [21].

Lemme 6.3 :

Soient $f(x)$, $P(x)$ des fonctions analytiques dans un domaine $D(0)$ (un voisinage de zéro). Soit $Q(x) \neq 0$, $\forall x \in D(0), x \neq 0$ alors il existe $k \in \mathbb{N}$ et $(a_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, k$. tels que $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{b_k}{x^k} + \cdots + \dfrac{b_1}{x} + b_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j$.

si $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe $= b$,

alors $b_j = 0$, $j = 1, 2, 3, \ldots, k \quad$ et $b_0 = b$.

Démonstration du théorème 6.4 :

On considère la suite $(t_n^{(k)})$.

Puisque 1) $t_m^{(k)} - s = b_{p_k}^{(k)} (s_m - s)^{p_k} + \cdots$ pour m assez grand.

2) $\lim_{m\to\infty} \Delta t_{m+1}^{(k)} / \Delta t_m^{(k)} = a^{(k)}$

donc $\lim_{m\to\infty} \dfrac{t_{m+1}^{(k)} - s}{t_m^{(k)} - s} = a^{(k)}$

et donc $(t_m^{(k)}) \in Lin^{(1)}$

Puisque $t_m^{(k+1)} = -\dfrac{a_m^{(k)}}{1-a_m^{(k)}}\, t_m^{(k)} + \dfrac{1}{1-a_m^{(k)}}\, t_{m+1}^{(k)}$ et $\lim_{m\to\infty} a_m^{(k)} = a^{(k)}$

selon la proposition 6.4, on a alors $t_m^{(k+1)} - s = o\left((t_m^{(k)} - s)\right)$.

Puisque $a_m^{(k)} = a^{(k)} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\, u_m^j$,

selon le lemme 6.3, on a alors : $\dfrac{t_m^{(k+1)} - s}{t_m^{(k)} - s} = \sum_{j=1}^{\infty} b_j^* \cdot u_m^j$.

donc $\dfrac{t_m^{(k+1)} - s}{s_m - s} = b_{p_{k+1}}^{(k+1)}\, u_m^{p_{k+1}} + \cdots$ où $p_{k+1} \geqslant p_k + 1$.

Proposition 6.7 :

Soit la suite $(s_m) \in Lin^{(\infty)}$, $\lim_{m\to\infty} \dfrac{s_{m+1} - s}{s_m - s} = \rho$, $0 < |\rho| < 1$

Soit $(T^{(k)})$ le procédé d'Overholt défini sur (s_m) comme suit :

$T^{(0)} : (s_m) \to (t_m^{(0)})$, $t_m^{(0)} = s_m$, $\forall m \geqslant 0$.

$T^{(k+1)} : (t_m^{(k)}) \to (t_m^{(k+1)})$,

$$t_m^{(k+1)} = C_{0,m}^{(k+1)}\, t_m^{(k)} + C_{1,m}^{(k+1)}\, t_{m+1}^{(k)}$$

où $C_{0,m}^{(k+1)} = -a_m^{(k)} / (1 - a_m^{(k)})$, $C_{1,m}^{(k+1)} = 1 - C_{0,m}^{(k+1)}$

$$a_m^{(k)} = (\Delta s_{m+k+1})^{k+1} / (\Delta s_{m+k})^{k+1}$$

alors : 1) $T^{(k)}$ est une C-transformation

2) $t_m^{(1)} - s = b_{p_1}^{(1)} (s_m - s)^{p_1} + \cdots$ où $p_1 \geqslant 2$.

3) Si $t_m^{(k)} - s = b_{p_k}^{(k)} (s_m - s)^{p_k} + \cdots$ où $b_{p_k}^{(k)} \neq 0$, $p_k \geqslant k+1$

alors $t_m^{(k+1)} - s = b_{p_{k+1}}^{(k+1)} (s_m - s)^{p_{k+1}} + \cdots$, $p_{k+1} \geqslant p_k + 1$.

Démonstration :

1) Puisque la suite $(s_m) \in Lin^{(\infty)}$, et $\dfrac{s_{m+1} - s}{s_m - s} \to \rho$. $0 < |\rho| < 1$

donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} = \rho$

k - fixé, on a alors $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\Delta S_{n+k+1}}{\Delta S_{n+k}}\right)^{k+1} = \rho^{k+1}$

selon la définition de $T^{(k)}$, donc $T^{(k)}$ est une C-transformation.

2) $k=1$ ($T^{(1)}$ est Δ^2- d'Aitken procédé).
Selon la proposition 6.4 et le lemme 6.3 on a :
$t_n^{(1)} - s = b_{p_1}^{(1)} (S_n - s)^{p_1} + \dots$, $\quad p_1 \geqslant 2$.

3) On suppose que : $t_n^{(k)} - s = b_{p_k}^{(k)} (S_n - s)^{p_k} + \dots$, $b_{p_k}^{(k)} \neq 0$, $p_k \geqslant k+1$, $p_k \in \mathbb{N}$.
alors $\lim_{n\to 0} \frac{t_{n+1}^{(k)} - s}{t_n^{(k)} - s} = \rho^{p_k}$.

<u>Cas 1</u> : $p_k > k+1$ puisque $p_k \in \mathbb{N}$, donc $p_k \geqslant k+2$.
On a alors $t_{n+1}^{(k+1)} - s = b_{p_{k+1}}^{(k+1)} (S_n - s)^{p_{k+1}} + \dots$, $p_{k+1} \geqslant k+2$, et $p_{k+1} \geqslant p_k$.

<u>Cas 2</u> : $p_k = k+1$.
$$a_n^{(k)} = \left(\frac{\Delta S_{n+k+1}}{\Delta S_{n+k}}\right)^{k+1} = \rho^{k+1} + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j (S_n - s)^j$$
Selon le théorème 6.4, on a alors :
$t_n^{(k+1)} - s = b_{p_{k+1}}^{(k+1)} (S_n - s)^{p_{k+1}} + \dots$ où $p_{k+1} \geqslant p_k + 1$
puisque $p_k = k+1$ donc $p_{k+1} \geqslant k+2$.

<u>REMARQUE</u>

1) Le procédé d'Overholt ne peut pas accélérer notablement l'ensemble $\mathcal{S}\mathcal{U}$. On suppose que $(S_n) \in \mathcal{S}\mathcal{U}$,
$\frac{S_{n+1} - s}{S_n - s} = \rho + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j u_n^j$, $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \to a$
On suppose que $\frac{t_n^{(k)} - s}{S_n - s} = b_{p_k}^{(k)} u_n^{p_k} + \dots$, $p_k \neq 0$ $p_k \in \mathbb{N}$, $b_{p_k}^{(k)} \neq 0$
On sait que $\lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}^{(k)} - s}{t_n^{(k)} - s} = \rho \cdot a^{p_k}$ et $\lim_{n\to\infty} a_n^{(k)} = \rho^{k+1}$

Si $\forall\, l \in \mathbb{N}$, $a^l \neq \rho$,
alors $\rho^{k+1} \neq \rho \cdot a^{p_k}$.
c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_n^{(k+1)}-s}{t_n^{(k)}-s} \neq 0$

2) Soit la suite $(S_n) \in Lin^{(\infty)}$. Soit $(T^{(k)})$ le procédé d'Overholt.
Selon la proposition 6.4 on a alors :

$$t_n^{(k)} - s = b_{p_k}^{(k)} (S_n - S)^{p_k} + b_{p_k+1}^{(k)} (S_n - S)^{p_k+1} + \cdots$$

Cas 1 : Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que $t_n^{(k_0)} = s$.
pour n assez grand.

Cas 2 : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $t_n^{(k)} \neq s$.
Suppose que $b_{p_k}^{(k)} \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots$,
alors $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\min \{ p_i - i \mid i \in \mathbb{N}, i > k \} = 1$

Proposition 6.8 :

Soit la suite $(S_n) \in \mathcal{S}\mathcal{U}$, $\dfrac{S_{n+1}-S}{S_n - S} = \rho + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cdot u_n^j$,
$(u_n) \in \operatorname{conv}_0^*(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a$, $a \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}$,
$0 < |a| \leq 1$, $0 < |\rho| < 1$.

Soit $(T^{(k)})$ l'itération du Δ^2-Aitken définie sur (S_n) comme suit : $T^{(0)} : (S_n) \longrightarrow (t_n^{(0)})$, $t_n^{(0)} = S_n \quad \forall n \geq 0$.

$$T^{(k+1)} : (t_n^{(k)}) \longrightarrow (t_n^{(k+1)})$$

$$t_n^{(k+1)} = c_{0,n}^{(k+1)}\, t_n^{(k)} + c_{1,n}^{(k+1)}\, t_{n+1}^{(k)} .$$

où $c_{0,n}^{(k+1)} = -a_n^{(k)} / (1 - a_n^{(k)})$

$$c_{1,n}^{(k+1)} = -1 - c_{0,n}^{(k+1)}$$

$$a_n^{(k)} = \Delta t_{n+1}^{(k)} / \Delta t_n^{(k)},$$

alors : 1) $\dfrac{t_n^{(1)}-s}{S_n - S} = b_{p_1}^{(1)} u_n^{p_1} + b_{p_1+1}^{(1)} u_n^{p_1+1} + \cdots$, $p_1 \geq 1$.

2) Si $\dfrac{t_n^{(k)}-s}{S_n - S} = b_{p_k}^{(k)} u_n^{p_k} + \cdots$, $b_{p_k}^{(k)} \neq 0$ $p_k \in \mathbb{N}$.

alors $T^{(k+1)}$ est une C-transformation et

$$\frac{t_n^{(k+1)}-s}{S_n - S} = b_{p_{k+1}}^{(k+1)} u_n^{p_{k+1}} + \cdots, \quad p_{k+1} \geq p_k + 1 .$$

Démonstration :

① $T^{(1)}$ est le procédé Δ^2- d'Aitken.

Puisque $a_n^{(0)} = \dfrac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \to \rho$ selon la propriété 6.4

donc $\dfrac{t_n^{(1)} - s}{S_n - S} = o(1)$, selon le lemme 6.3,

on a alors $\dfrac{t^{(1)} - s}{S_n - S} = b_{P_1}^{(1)} u_n^{P_1} + b_{P_1+1}^{(1)} u_n^{P_1+1} + \cdots$

② On suppose que : $\dfrac{t_n^{(k)} - s}{S_n - S} = b_{P_k}^{(k)} u_n^{P_k} + \cdots$, $b_{P_k}^{(k)} \neq 0$.

on a alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{n+1}^{(k)} - S}{S_n - S} = \rho \cdot a^{P_k}$.

donc $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\Delta t_{n+1}^{(k)}}{\Delta t_n^{(k)}} = \rho \cdot a^{P_k}$

donc $T^{(k+1)}$ est une C-transformation.

Selon le théorème 6.4

on a alors $\dfrac{t_n^{(k+1)} - s}{S_n - S} = b_{P_{k+1}}^{(k+1)} u_n^{P_{k+1}} + \cdots$, $P_{k+1} \geqslant P_k + 1$.

Remarque : ① On suppose que $b_{P_k}^{(k)} \neq 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

alors (P_k) est une suite strictement croissante.

$(P_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ donc $(P_k - k)$ est croissante.

② S'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n > n_0$,

$\Delta t_n^{(k_0)} = 0$ alors $t_n^{(k_0)} = s$, pour n assez grand.

Proposition 6.9 :

Soit la suite $(S_n) \in \mathcal{S}u$, $\dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \rho + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j u_n^j$

$(u_n) \in \text{conv}_c^*(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a$, $a \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{R}$

$0 < |a| \leqslant 1$, $0 < |\rho| < 1$.

soit $(T^{(k)})$ l'ε-algorithme défini sur (S_n) comme suit :

$$\varepsilon_{-1}^{(n)} = 0 \ , \ \varepsilon_0^{(n)} = S_n \ , \ \left(\varepsilon_{k+1}^{(n)} - \varepsilon_{k-1}^{(n+1)}\right)\left(\varepsilon_k^{(n+1)} - \varepsilon_k^{(n)}\right) = 1 .$$

$$\forall n \geq 0\ ,\ k \geq 0\ ,$$

$$T^{(k)} : (S_n) \to (t_n^{(k)})\ ,\quad t_n^{(k)} = \varepsilon_{2k}^{(n)}\ .\quad k \geq 0\ ,\ n \geq 0\ .$$

Si : $\dfrac{t_n^{(j)} - S}{S_n - S} = b_{p_j}^{(j)}\, \mathcal{U}_n^{p_j} + \cdots \qquad j = 1, 2, \ldots, k$

$$p_k > p_{k-1} > \cdots > p_1 > 1\ ,\qquad b_{p_j}^{(j)} \neq 0\ ,$$

alors : 1) $T^{(k+1)}$ est une C-transformation

2) $\dfrac{t_n^{(k+1)} - S}{S_n - S} = b_{p_{k+1}}^{(k+1)}\, \mathcal{U}_n^{p_{k+1}} + \cdots \qquad p_{k+1} > p_k\ .$

Démonstration :

On note $C_{0,n}^{(k+1)} = -a_n^{(k)} / (1 - a_n^{(k)})\ ,\quad C_{1,n}^{(k+1)} = 1 - C_{0,n}^{(k+1)}$

$$a_n^{(k)} = 1 / (1 + \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}\, \Delta_{2k+1}^{(n)}) \qquad \forall k \geq 0\ ,\ n \geq 0\ .$$

alors $t_n^{(k+1)} = \varepsilon_{2k+2}^{(n)} = \varepsilon_{2k}^{(n+1)} + \dfrac{1}{\Delta\varepsilon_{2k+1}^{n}} = C_{0,n}^{(k+1)}\, \varepsilon_{2k}^{(n)} + C_{1,n}^{(k+1)}\, \varepsilon_{2k}^{(n+1)}$

$$= C_{0,n}^{(k+1)}\, t_n^{(k)} + C_{1,n}^{(k+1)}\, t_{n+1}^{(k)}\ .$$

On suppose que : $\dfrac{t_n^{(j)} - S}{(S_n - S)} = b_{p_j}^{(j)}\, \mathcal{U}_n^{p_j} + \cdots\ ,\quad b_{p_j}^{(j)} \neq 0$

$j = 1, 2, \ldots, k\ .$

$$p_k > p_{k-1} > \cdots > p_1 > 0\ .$$

- <u>On va démontrer que $\lim_{n\to\infty} a_n^{(k)} = p \cdot a^{p_k}$.</u>

Puisque $\varepsilon_{2k+1}^{(n)} = \varepsilon_{2(k-1)+1}^{(n+1)} + 1/\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}$

donc $\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \cdot \Delta\varepsilon_{2k+1)}^{(n)} = \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \left[\Delta\left(\dfrac{1}{\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}}\right) + \Delta\left(\dfrac{1}{\Delta\varepsilon_{2(k-1)}^{(n+1)}}\right) + \cdots + \Delta\left(\dfrac{1}{\Delta\varepsilon_{0}^{(n+k)}}\right) \right]$

$$\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \cdot \Delta\left(\frac{1}{\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}}\right) = \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \left[\frac{1}{\Delta\varepsilon_{2k}^{(n+1)}} - \frac{1}{\Delta\varepsilon_{2k}^{n}} \right]$$

$$= \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \cdot \frac{\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} - \Delta\varepsilon_{2k}^{(n+1)}}{\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \cdot \Delta\varepsilon_{2k}^{(n+1)}}$$

$$= \frac{\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}}{\Delta\varepsilon_{2k}^{(n+1)}} - 1\ .$$

Puisque $\dfrac{t_n^{(k)} - S}{S_n - S} = b_{p_k}^{(k)} u_n^{p_k} + \cdots$, $b_{p_k}^{(k)} \neq 0$.

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{n+1}^{(k)} - S}{t_n^{(k)} - S} = \rho \cdot a^{p_k}$.

et donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta \varepsilon_{2k}^{(n+1)}}{\Delta \varepsilon_{2k}^{(n)}} = \rho \cdot a^{p_k}$.

On considère la limite : $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \cdot \Delta\left(\dfrac{1}{\Delta \varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j)}}\right)$

$j = 1, 2, \ldots, k$.

Puisque $\Delta \varepsilon_{2k}^{(n)} \cdot \Delta \dfrac{1}{\Delta \varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j)}} = \dfrac{\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \left(\Delta \varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j)} - \Delta \varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j+1)}\right)}{\Delta\varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j)} \cdot \Delta\varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j+1)}}$

$$= \frac{\Delta \varepsilon_{2k}^{(n)}}{\Delta \varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j+1)}} \cdot \left(1 - \frac{\Delta \varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j+1)}}{\Delta \varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j)}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta \varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j+1)}}{\Delta \varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j)}} = \rho \cdot a^{(k-j)} \neq 1 .$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta \varepsilon_{2k}^{(n)}}{\Delta\varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}}{\varepsilon_{2k}^{(n)} - S} \cdot \frac{\varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j+1)} - S}{\Delta\varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j+1)}} \cdot \frac{\varepsilon_{2k}^{(n)} - S}{\varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j+1)} - S} .$$

On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta\varepsilon_{2k}^{(n)}}{\varepsilon_{2k}^{(n)} - S} = \rho \cdot a^{p_k} - 1 \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta \varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j+1)}}{\varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j+1)} - S} = \rho \cdot a^{p_{k-j}} - 1 \neq 0 .$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{2k}^{(n)} - S}{\varepsilon_{2(k-j)}^{(n)} - S} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{p_k}^{(k)} u_n^{p_k} + \cdots}{b_{p_{k-j}}^{(k-j)} u_n^{p_{k-j}} + \cdots} = 0$$

$j = 1, 2, \ldots, k$.

On a alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta \varepsilon_{2k}^{(n)}}{\Delta \varepsilon_{2(k-j)}^{(n+j+1)}} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta \varepsilon_{2k}^{(n)} \cdot \Delta \varepsilon_{2k+1}^{(n)}$

$$= \lim_{n\to\infty} \Delta \varepsilon_{2k}^{(n)} \cdot \left[\Delta\left(\frac{1}{\Delta \varepsilon_{2k}^{(n)}}\right) + \Delta\left(\frac{1}{\Delta\varepsilon_{2(k-1)}^{(n+1)}}\right) + \cdots + \Delta\left(\frac{1}{\Delta\varepsilon_{0}^{(n)}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\rho \cdot a^{p_k}} - 1 .$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(k)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1 + \Delta\varepsilon_{2k}^{(n)} \Delta\varepsilon_{2k+1}^{(n)}}\right) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\rho \cdot a^{p_k}} - 1} = \rho \cdot a^{p_k}$

et donc $T^{(k+1)}$ est une c-transformation.

. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_{n+1}^{(k)} - S}{t_n^{(k)} - S} = \rho . a^{p_k}$, selon le théorème 6.4,

on a alors : $\dfrac{t_n^{(k+1)} - S}{S_n - S} = b_{p_{k+1}}^{(k+1)} u_n^{p_{k+1}} + \dots$, $p_{k+1} \geqslant p_k + 1$.

Proposition 6.10 :

Soit la suite $(S_n) \in \mathcal{S}u$, $\dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \rho + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j u_n^j$,

$(u_n) \in \mathrm{conv}_0^*(\mathbb{R}^+)$, $\rho \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a$, $a \in \mathbb{R}$, $0 < |a| \leqslant 1$

$0 < |\rho| < 1$.

Soit $(T^{(k)})$ le θ-algorithme défini sur (S_n) comme suit :

$$\theta_{-1}^{(n)} = 0 \ , \quad \theta_0^{(n)} = S_n \qquad n \geqslant 0 .$$

$$\theta_{2k+2}^{(n)} = \theta_{2k}^{(n+1)} - \frac{\Delta \theta_{2k}^{(n+1)}}{\Delta D_{2k+1}^{(n)}} . D_{2k+1}^{(n)}$$

$$D_k^{(n)} = 1 / \Delta \theta_k^{(n)} \qquad , \quad n \geqslant 0 \quad , \quad k \geqslant 0 .$$

$$\theta_{2k+1}^{(n)} = \theta_{2k-1}^{(n+1)} + 1/\Delta \theta_{2k}^{(n)}$$

$T^{(k)} : (S_n) \longrightarrow (t_n^{(k)})$, $\quad t_n^{(k)} = \theta_{2k}^{(n)}$ $\qquad$, $k \geqslant 0$, $n \geqslant 0$.

Si $\dfrac{t_n^{(j)} - S}{S_n - S} = b_{p_j}^{(j)} u_n^{p_j} + \dots$ $\qquad j = 1, 2, \dots, k$.

$p_k > p_{k-1} > \dots > p_1 > 1$, $\quad b_{p_j}^{(j)} \neq 0$.

alors

1) $T^{(k+1)}$ est une c-transformation.

2) $\dfrac{t_n^{(k+1)} - S}{S_n - S} = b_{p_{k+1}}^{(k+1)} u_n^{p_{k+1}} + \dots$ $\qquad p_{k+1} > p_k$.

Démonstration :

On note $C_{0,n}^{(k+1)} = -a_n^{(k)} / (1 - a_n^{(k)})$, $\quad C_{1,n}^{(k+1)} = 1 - C_{0,n}^{(k+1)}$

$$C_{0,n}^{(k+1)} = \frac{\Delta \theta_{2k}^{(n+1)}}{\Delta \theta_{2k}^{(n)}} . \frac{D_{2k+1}^{(n)}}{\Delta D_{2k+1}^{(n)}} .$$

alors : $t_n^{(k+1)} = \theta_{2k+2}^{(n)} = C_{0,n}^{(k+1)} \theta_{2k}^{(n)} + C_{1,n}^{(k+1)} \theta_{2k}^{(n+1)}$

$$= C_{0,n}^{(k+1)} t_n^{(k)} + C_{1,n}^{(k+1)} t_{n+1}^{(k)} .$$

• On va démontrer que : $\lim\limits_{n\to\infty} C_{0,n}^{(k+1)} = \dfrac{-p.a^{p_k}}{1-p.a^{p_k}}$.

Puisque $\dfrac{\theta_{2k}^{(n)}-S}{S_n-S} = b_{p_k}^{(k)}\, u_n^{p_k} + \cdots \quad , \; b_{p_k}^{(k)} \neq 0$.

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta\theta_{2k}^{(n+1)}}{\Delta\theta_{2k}^{(n)}} = p\cdot a^{p_k}$.

on considère $D_{2k+1}^{(n)} / \Delta D_{2k+1}^{(n)}$

$$D_{2k+1}^{(n)} / \Delta D_{2k+1}^{(n)} = 1 \Big/ \left(D_{2k+1}^{(n+1)} / D_{2k+1}^{(n)} - 1 \right)$$

$$D_{2k+1}^{(n)} = \frac{1}{\Delta\theta_{2k+1}^{(n)}}$$

$$\theta_{2k+1}^{(n)} = \theta_{2(k-1)+1}^{(n+1)} + \frac{1}{\Delta\theta_{2k}^{(n)}} = \theta_{2k-1}^{(n+1)} + D_{2k}^{(n)}$$

$$\Delta\theta_{2k+1}^{(n)} = \Delta D_{2k}^{(n)} + \Delta D_{2k-2}^{(n+1)} + \cdots + \Delta D_0^{(n+k)}.$$

$$D_{2k+1}^{(n+1)} / D_{2k+1}^{(n)} = \frac{\Delta D_{2k}^{(n)} + \Delta D_{2k-2}^{(n+1)} + \cdots + \Delta D_0^{(n+k)}}{\Delta D_{2k}^{(n+1)} + \Delta D_{2k-2}^{(n+2)} + \cdots + \Delta D_0^{(n+k+1)}}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{\Delta D_{2k-2}^{(n+1)}}{\Delta D_{2k}^{(n)}} + \cdots + \dfrac{\Delta D_0^{(n+k)}}{\Delta D_{2k}^{(n)}}}{\dfrac{\Delta D_{2k}^{(n+1)}}{\Delta D_{2k}^{(n)}} + \dfrac{\Delta D_{2k-2}^{(n+2)}}{\Delta D_{2k}^{(n)}} + \cdots + \dfrac{\Delta D_0^{(n+k+1)}}{\Delta D_{2k}^{(n)}}}$$

$$\frac{\Delta D_{2k}^{(n+1)}}{\Delta D_{2k}^{(n)}} = \frac{\Delta\left(\dfrac{1}{\Delta\theta_{2k}^{(n+1)}}\right)}{\Delta\left(\dfrac{1}{\Delta\theta_{2k}^{(n)}}\right)} = \frac{\dfrac{1}{\Delta\theta_{2k}^{(n+2)}} - \dfrac{1}{\Delta\theta_{2k}^{(n+1)}}}{\dfrac{1}{\Delta\theta_{2k}^{(n+1)}} - \dfrac{1}{\Delta\theta_{2k}^{(n)}}}$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta\theta_{2k}^{(n+1)} - \Delta\theta_{2k}^{(n+2)}}{\Delta\theta_{2k}^{(n+1)}\Delta\theta_{2k}^{(n+2)}}}{\dfrac{\Delta\theta_{2k}^{(n)} - \Delta\theta_{2k}^{(n+1)}}{\Delta\theta_{2k}^{(n)}\cdot\Delta\theta_{2k}^{(n+1)}}} = \frac{\dfrac{\Delta\theta_{2k}^{(n+1)}}{\Delta\theta_{2k}^{(n+2)}} - 1}{1 - \dfrac{\Delta\theta_{2k}^{(n+1)}}{\Delta\theta_{2k}^{(n)}}}$$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Delta D_{2k}^{(n+1)}}{\Delta D_{2k}^{(n)}} = \dfrac{\dfrac{1}{p.a^{p_k}} - 1}{1 - p.a^{p_k}} = \dfrac{1}{p.a^{p_k}}$.

$$\frac{\Delta D_{2(k-j)}^{(n+j)}}{\Delta D_{2k}^{(n)}} = \frac{\Delta\left(\dfrac{1}{\Delta\theta_{2k-2j}^{(n+1)}}\right)}{\Delta\left(\dfrac{1}{\Delta\theta_{2k}^{(n)}}\right)} = \frac{\Delta\theta_{2k}^{(n+1)}}{\Delta\theta_{2(k-j)}^{n+j+1}} \cdot \frac{\left(1 - \dfrac{\Delta\theta_{2(k-j)}^{(n+j+1)}}{\Delta\theta_{2(k-j)}^{(n+j)}}\right)}{\left(1 - \dfrac{\Delta\theta_{2k}^{(n+1)}}{\Delta\theta_{2k}^{(n)}}\right)}$$

$j = 1, 2, \ldots, k$.

Puisque $\dfrac{\theta_{2j}^{n}-S}{S_n-S} = b_{p_j}^{(j)}\, u_n^{p_j} + \cdots,\quad p_k > p_{k-1} > \cdots,\quad b_{p_j}^{j} \neq 0.$
$j = 1,2,\ldots,k.$

donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\theta_{2k}^{(n+1)}}{\Delta\theta_{2(k-j)}^{(n+j+1)}} = 0 \qquad j=1,2,\ldots,k.$

donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta D_{2(k-j)}^{(n+j)}}{\Delta D_{2k}^{(n)}} = 0 \qquad j=1,2,\ldots,k$

donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{D_{2k+1}^{(n+1)}}{D_{2k+1}^{(n)}} = \frac{1+0+\cdots+0}{\frac{1}{\rho.a^{p_k}}+0+\cdots+0} = \rho\cdot a^{p_k}.$

donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{D_{2k+1}^{(n)}}{\Delta D_{2k+1}^{(n)}} = \frac{1}{\rho.a^{p_k}-1}$

donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} C_{0,n}^{(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta\theta_{2k}^{(n+1)}}{\Delta\theta_{2k}^{(n)}}\cdot\frac{D_{2k+1}^{(n)}}{\Delta D_{2k+1}^{(n)}} = \frac{-\rho.a^{p_k}}{1-\rho\cdot a^{p_k}}$

$a_n^{(k)} = -\,C_{0,n}^{(k+1)}/\left(1-C_{0,n}^{(k+1)}\right) \qquad , \quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n^{(k)} = \rho\cdot a^{p_k}$

. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}^{(k)}-S}{t_n^{(k)}-S} = \rho\cdot a^{p_k}$

selon le théorème 6.4 , on a alors :

$\dfrac{t_n^{(k+1)}-S}{S_n-S} = b_{p_{k+1}}^{(k+1)}\, u_n^{p_{k+1}} + \cdots, \qquad p_{k+1} > p_k.$

II CONVERGENCE D'ITÉRATION D'ALGORITHME DE LA CONVERGENCE SUR CHAQUE DIAGONALE.

Maintenant nous nous interessons au problème de la convergence sur chaque diagonale. On sait que beaucoup d'algorithmes peuvent être exprimés par une itération de c-transformation, $(t_n^{(k)})$, $k\geq 0$, $n\geq 0$. Les théories sur chaque colonne (k-fixé, $t_n^{(k)}$) sont déjà bien étudiées et plusieurs expériences numériques ont été faites [16], [17], [18]

[19], [24], [14], etc. mais rarement sur les diagonales.

Dans [20], Brezinski a désigné " Le procédé d'Overholt n'a pas encore été étudié plus à fond. En particulier, il n'y a pas de théorème de convergence de $(t_n^{(k)})$, n - fixé ". Cependant, la convergence sur les diagonales nécessite une étude théorique plus profonde et c'est l'objet de ce paragraphe.

Nous commencerons par donner deux théorèmes de convergence sur chaque diagonale. Nous étudierons ensuite les possibilités d'amélioration des algorithmes courants, tels qu'ils possèdent la propriété de la convergence sur chaque diagonale et sans perdre leur propriété sur chaque colonne. Après avoir donné quelques exemples numériques, nous donnerons des théorèmes de convergence plus généraux sur chaque diagonale.

II - 1 Théorème de convergence sur les diagonales.

Soit l'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathrm{conv}^*(\mathbb{R})$, la suite $(S_n) \in \mathcal{S}$, soit $p \in \mathbb{N}$.
Soit $(T^{(k)})$ une suite de C-transformations définie sur (S_n),
$T^{(k)} : (S_n) \rightarrow (t_n^{(k)})$ $\quad t_n^{(0)} = S_n \quad n \geqslant 0$.

$$t_n^{(k+1)} = C_{0,n}^{(k+1)} t_n^{(k)} + C_{1,n}^{(k+1)} t_{n+1}^{(k)} + \cdots + C_{p,n}^{(k+1)} t_{n+p}^{(k)} \qquad k \geqslant 0, \; n \geqslant 0$$

$$\text{où} \quad \sum_{j=0}^{\infty} C_{j,n}^{(k+1)} = 1 \quad \forall n \geqslant 0,\ k \geqslant 0.$$

Théorème 6.5 :

Soit $\mathcal{S} \subset \mathrm{conv}^*(\mathbb{R})$, soit la suite $(S_n) \in \mathcal{S}$; $\lim_{n \to \infty} S_n = S$,
soit $(T^{(k)})$ une suite de C-transformations définie sur (S_n).
$T^{(k)} : (S_n) \rightarrow (t_n^{(k)}) \quad k \geqslant 0,\ n \geqslant 0$

$$t_m^{(0)} = S_m \qquad m \geq 0$$
$$t_m^{(k+1)} = C_{0,m}^{(k+1)}\, t_m^{(k)} + C_{1,m}^{(k+1)}\, t_{m+1}^{(k)} \qquad \forall m \geq 0,\ k \geq 0.$$

S'il existe une constante $c \in \mathbb{R}^+$, $0 < c < 1$, telle que :

$$0 < C_{0,m}^{k} < c \qquad \forall k \geq 0,\ m \geq 0.$$

alors $\forall m_0 \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k \to \infty} t_{m_0}^{(k)} = S$.

Démonstration :

On note $\varepsilon_m^{(k)} = t_m^{(k)} - S \qquad k \geq 0,\ m \geq 0$; où $\varepsilon_m^{(0)} = S_m - S$,

Puisque $\lim\limits_{m \to \infty} S_m = S$ donc $\lim\limits_{m \to \infty} \varepsilon_m^{(0)} = 0$.

Puisque $T^{(k+1)}$ est une C-transformation

donc $C_{0,m}^{(k+1)} + C_{1,m}^{(k+1)} = 1$.

On a alors : $t_m^{(k+1)} - S = C_{0,m}^{(k+1)}\, t_m^{(k)} + C_{1,m}^{(k+1)}\, t_{m+1}^{(k+1)} - S$

$$\varepsilon_m^{(k+1)} = C_{0,m}^{(k+1)}\, \varepsilon_m^{(k)} + C_{1,m}^{(k+1)}\, \varepsilon_{m+1}^{(k)}, \quad \forall k \geq 0,\ \forall m \geq 0.$$

<u>Maintenant on va démontrer que $\lim\limits_{k \to 0} \varepsilon_{n_0}^{(k)} = 0$, n_0-fixé.</u>

On va d'abord montrer que $(\varepsilon_{m_0}^{(k)})$ possède la propriété suivante :

$$(*) \begin{cases} \varepsilon_{n_0}^{(k)} = a_{k,0}\, \varepsilon_{n_0} + a_{k,1}\, \varepsilon_{m_0+1} + \cdots + a_{k,k}\, \varepsilon_{m_0+k} \\ \sum\limits_{j=0}^{k} a_{k,j} = 1 \\ a_{k,j} \geq 0, \quad j \leq k \\ a_{k,j} \leq k^j . c^{k-j} \end{cases}$$

- $k = 1$,

$$\begin{cases} \varepsilon_{m_0}^{(1)} = a_{1,0}\, \varepsilon_{m_0}^{(0)} + a_{1,1}\, \varepsilon_{m_0+1}^{(0)} = C_{0,m_0}^{(1)}\, \varepsilon_{m_0}^{(0)} + C_{1,m_0}^{(1)}\, \varepsilon_{m_0+1}^{(0)}. \\ \sum\limits_{j=0}^{1} a_{1,j} = C_{0,m_0}^{(1)} + C_{1,m_0}^{(1)} = 1 \\ a_{1,0} = C_{0,m_0}^{(1)} \geq 0, \quad \text{puisque } 0 < C_{0,m_0}^{(1)} < c < 1 \text{ donc :} \\ a_{1,1} = C_{1,m_0}^{(1)} = 1 - C_{0,m_0}^{(1)} \geq 0. \\ a_{1,0} = C_{0,m_0}^{(1)} \leq c = 1^0 . c^{1-0} \\ a_{1,1} = C_{1,m_0}^{(1)} \leq 1 = 1^1 . c^{1-1} \end{cases}$$

donc $k=1$, $(*)$ est vrai.
On suppose que $k=\ell$, $(*)$ est vrai, on va montrer que $k=\ell+1$, $(*)$ est vrai aussi.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{m_0}^{(\ell+1)} &= C_{0,m_0}^{(\ell+1)}\ \varepsilon_{m_0}^{(\ell)} + C_{1,m_0}^{(\ell+1)}\ \varepsilon_{m_0+1}^{(\ell)} \\
&= C_{0,m_0}^{(\ell+1)}\left(a_{\ell,0}\varepsilon_{m_0} + a_{\ell,1}\varepsilon_{m_0,1} + \cdots + a_{\ell,\ell}\varepsilon_{m_0,\ell}\right) \\
&\quad + C_{1,m_0}^{(\ell+1)}\left(a_{\ell,0}\varepsilon_{m_0+1} + a_{\ell,1}\varepsilon_{m_0+2} + \cdots + a_{\ell,\ell}\varepsilon_{m_0,\ell+1}\right) \\
&= a_{\ell+1,0}\ \varepsilon_{m_0} + a_{\ell+1,1}\ \varepsilon_{m_0+1} + \cdots + a_{\ell+1,\ell+1}\ \varepsilon_{m_0+\ell+1}
\end{aligned}$$

où
$$a_{\ell+1,0} = C_{0,m_0}^{(\ell+1)}\ a_{\ell,0}$$
$$a_{\ell+1,\ell+1} = C_{1,m_0}^{(\ell+1)}\ a_{\ell,\ell}$$

$$a_{\ell+1,j} = C_{0,m_0}^{(\ell+1)}\cdot a_{\ell,j} + C_{1,m_0}^{(\ell+1)}\cdot a_{\ell,j-1} \qquad j=1,2,\ldots,l$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\ell+1} a_{\ell+1,j} &= a_{\ell+1,0} + a_{\ell+1,\ell+1} + \sum_{j=1}^{\ell} a_{\ell+1,j} \\
&= C_{0,m_0}^{(\ell+1)}\ a_{\ell,0} + C_{1,m_0}^{(\ell+1)}\ a_{\ell,\ell} + \sum_{j=1}^{\ell}\left(C_{0,m_0}^{(\ell+1)} a_{\ell,j} + C_{1,m_0}^{(\ell+1)} a_{\ell,j-1}\right) \\
&= C_{0,m_0}^{(\ell+1)}\cdot\sum_{j=0}^{\ell} a_{\ell,j} + C_{1,m_0}^{(\ell+1)}\cdot\sum_{j=0}^{\ell} a_{\ell,j} \\
&= C_{0,m_0}^{(\ell+1)} + C_{1,m_0}^{(\ell+1)} = 1
\end{aligned}$$

évidemment, $a_{\ell+1,j} \geqslant 0$, $j=0,1,2,\ldots,\ell+1$.

$$\left\{\begin{aligned}
a_{\ell+1,0} &= C_{0,m_0}^{(\ell+1)}\cdot a_{\ell,0} \leqslant c\cdot a_{\ell,0} \leqslant c\cdot \ell^0\cdot c^{\ell-0} = c^{\ell+1} \\
a_{\ell+1,\ell+1} &= C_{1,m_0}^{(\ell+1)}\ a_{\ell,\ell} \leqslant a_{\ell,\ell} \leqslant \ell^{\ell}\cdot c^{\ell-\ell} = \ell^{\ell} \leqslant (\ell+1)^{\ell+1}. \\
a_{\ell+1,j} &= C_{0,m_0}^{(\ell+1)}\ a_{\ell,j} + C_{1,m_0}^{(\ell+1)}\ a_{\ell,j-1}
\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant c\cdot\ell^{j} c^{\ell-j} + \ell^{j-1}\cdot c \\
&= \ell^{j}\cdot c^{\ell+1-j} + \ell^{j-1} c^{\ell+1-j} \\
&= (1+\ell)^{j} c^{\ell+1-j}\left[\left(\frac{\ell}{\ell+1}\right)^{j} + \left(\frac{\ell}{\ell+1}\right)^{j-1}\cdot\frac{1}{\ell+1}\right] \\
&\leqslant (1+\ell)^{j} c^{\ell+1-j} \qquad\qquad j=1,2,\ldots,\ell.
\end{aligned}$$

donc $k=\ell+1$, $(*)$ est vrai aussi.

. Puisque $\lim\limits_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$, donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$:

$\begin{cases} \text{il existe une constante } M\in\mathbb{R}, \text{ telle que } \forall m \geq 0, \ |\varepsilon_m| < M \\ \text{il existe un rang } N\in\mathbb{N}, \text{ tel que } \forall m \geq N, \ |\varepsilon_m| < \varepsilon/2 . \end{cases}$

pour N-fixé, on a $\lim\limits_{k\to\infty} M . c^{k-N} . k^N . N = 0$, $(0<c<1)$.

donc pour $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall k > k_0$ $(k_0 > N)$, $|M . c^k . k^N . N| < \varepsilon/2$.

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_{m_0}^{(k)}| &= |a_{k,0}\,\varepsilon_{m_0} + a_{k,1}\,\varepsilon_{m_0+1} + \cdots + a_{k,N}\,\varepsilon_{m_0+N} + \cdots + a_{k,k}\,\varepsilon_{m_0+k}| \\
&\leqslant |a_{k,0}\,\varepsilon_{m_0} + \cdots + a_{k,N-1}\,\varepsilon_{m_0+N-1}| \\
&\quad + |a_{k,N}\,\varepsilon_{m_0+N} + \cdots + a_{k,k}\,\varepsilon_{m_0+\varepsilon}| \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{N-1} . a_{k,j} . M + \sum_{j=N}^{k} a_{k,j} . \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{N-1} . k^j . c^{k-j} . M + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{N-1} . k^N . c^{k-N} . M + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant N . k^N . c^{k-N} . M + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_{m_0}^{(k)} = 0$,

donc $\lim\limits_{k\to\infty} t_{m_0}^{(k)} = 0$.

<u>REMARQUE</u> : Dans ce théorème on peut remplacer la condition

$0 < c_{0,m}^{(k)} < c \quad \forall k \geq 0, \forall m \geq 0$ par la condition suivante :

il existe un rang $N\in\mathbb{N}$, tel que $\forall k > N$, $\forall m \geq 0$,

$0 < c_{0,m}^{(k)} < c$.

Puisque N-fixé, $\lim\limits_{m\to\infty} \varepsilon_m^{(N)} = 0$

alors, dans la démonstration du théorème 6.5, si l'on remplace $\varepsilon_m^{(0)}$ par $\varepsilon_m^{(N)}$, on peut obtenir $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_{m_0}^{(k)} = 0$.

Théorème 6.6 :

Soit $\mathcal{S} \subset \text{conv}^*(\mathbb{R})$, La suite $(S_m) \in \mathcal{S}$, $\lim_{m\to\infty} S_m = S$,

Soit $(T^{(k)})$ une suite de C-transformations définie sur (S_m) :

$$T^{(k)} : (S_m) \to (t_m^{(k)}) \qquad \forall k \geq 0, \forall m \geq 0.$$

$$t_m^{(0)} = S_m \qquad \forall m \geq 0$$

$$t_m^{(k+1)} = C_{0,m}^{(k+1)} \, t_m^{(k)} + C_{1,m}^{(k+1)} \, t_{m+1}^{(k)} \quad , \qquad \forall m \geq 0, \forall k \geq 0.$$

$m_0 \in \mathbb{N}$, m_0 - fixé.

Si 1) $|C_{0,m}^{(i)}| \leq C_0^{(i)} \qquad \forall m \geq m_0 \qquad i = 1, 2, \ldots$

2) $\sum_{i=0}^{\infty} C_0^{(i)}$ converge

3) il existe une constante $c \in \mathbb{R}^+$, $c \leq 1$ telle que :

$|C_0^{(i)}| < c/2 \qquad i = 1, 2, \ldots,$

alors on a $\lim_{k\to\infty} t_{m_0}^{(k)} = S$.

Démonstration :

On note $\varepsilon_m^{(k)} = t_m^{(k)} - S$, $\varepsilon_m^{(0)} = S_m - S$

alors $\varepsilon_{m_0}^{(k+1)} = C_{0,m_0}^{(k+1)} \, \varepsilon_{m_0}^{(k)} + C_{1,m_0}^{(k+1)} \, \varepsilon_{m_0+1}^{(k)}$

- Puisque $\sum_{i=1}^{\infty} C_0^{(i)}$ converge

donc $\prod_{i=0}^{\infty} (1 + 2 . C_0^{(i)})$ converge $\qquad (C_0^{(0)} = 1)$

on note $M = \prod_{i=0}^{\infty} (1 + 2 C_0^{(i)})$ alors $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$.

- On va démontrer que $(\varepsilon_m^{(k)})$ possède la propriété suivante :

$$(*) \begin{cases} \varepsilon_m^{(k)} = a_{k,m}^{(n)} \varepsilon_{m_0} + a_{k,1}^{(n)} \varepsilon_{m+1} + \cdots + a_{k,k}^{(n)} \varepsilon_{m+k} \\ \sum_{j=0}^{k} |a_{k,j}^{(m)}| \leq \prod_{i=0}^{k} (1 + 2 C_0^{(j)}) \qquad \forall m \geq m_0 \\ |a_{k,j}^{(n)}| \leq k^j . c^{k-j} . (1 + c) \qquad \forall m \geq m_0 \end{cases}$$

$\forall k \geq 1$.

$k=1$,

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_{m_0}^{(1)} = a_{1,0}(m_0)\,\varepsilon_{m_0} + a_{1,1}(m_0)\,\varepsilon_{m_0+1} \\ \quad \text{où } a_{1,0} = C_{0,m_0}^{(1)} \quad , \quad a_{1,1} = C_{1,m_0}^{(1)} \\ \text{puisque } C_{0,m_0}^{(1)} + C_{1,m_0}^{(1)} = 1 \\ \text{donc } \sum_{j=1}^{1} |a_{1,j}| = |a_{1,0}| + |a_{1,1}| = |C_{0,m_0}^{(1)}| + |C_{1,m_0}^{(1)}| \\ \qquad\qquad \leqslant 1 + 2\,|C_{0,m_0}^{(1)}| \\ |a_{1,0}| = |C_{0,m_0}^{(1)}| \leqslant c = 1^0 . c^{1-0} \\ |a_{1,1}| = |C_{1,m_0}^{(1)}| \leqslant 1 + c \end{array}\right.$$

donc $k=1$, $(*)$ est vrai.

On suppose que pour $k=\ell$, $(*)$ est vrai et on va montrer que $k=\ell+1$, $(*)$ est vrai aussi.

. $$\varepsilon_{m_0}^{(\ell+1)} = C_{0,m_0}^{(\ell+1)}\,\varepsilon_{m_0}^{(\ell)} + C_{1,m_0}^{(\ell+1)}\,\varepsilon_{m_0+1}^{(\ell)}$$
$$= C_{0,m_0}^{(\ell+1)}\left(a_{\ell,0}(m_0).\varepsilon_{m_0} + a_{\ell,1}(m_0).\varepsilon_{m_0+1} + \cdots + a_{\ell,\ell}(m_0)\,\varepsilon_{m_0+\ell}\right)$$
$$+ C_{1,m_0}^{(\ell+1)}\left(a_{\ell,0}(m_0+1)\,\varepsilon_{m_0+1} + \cdots + a_{\ell,\ell}(m_0+1).\varepsilon_{m_0+\ell+1}\right)$$
$$= a_{\ell+1,0}(m_0)\,\varepsilon_{m_0} + a_{\ell+1,1}(m_0)\,\varepsilon_{m_0+1} + \cdots + a_{\ell+1,\ell+1}(m_0)\,\varepsilon_{m_0+\ell+1}.$$

$$a_{\ell+1,0}(m_0) = C_{0,m_0}^{(\ell+1)}\,a_{\ell,0}(m_0)$$
$$a_{\ell+1,\ell+1}(m_0) = C_{1,m_0}^{(\ell+1)}\,a_{\ell,\ell}(m_0+1)$$
$$a_{\ell+1,j}(m_0) = C_{0,m_0}^{(\ell+1)}a_{\ell,j}(m_0) + C_{1,m_0}^{(\ell+1)}\,a_{\ell,j-1}(m_0+1) \quad , j = 1,2,\ldots,\ell.$$

$$\sum_{j=0}^{\ell+1} |a_{\ell+1,j}(m_0)| = |C_{0,m_0}^{(\ell+1)}| \sum_{j=0}^{\ell} |a_{\ell,j}(m_0)| + |C_{1,m_0}^{(\ell+1)}| \sum_{j=0}^{\ell} |a_{\ell,j}(m_0+1)|$$
$$\leqslant \left(|C_{0,m_0}^{(\ell+1)}| + |C_{1,m_0}^{(\ell+1)}|\right) \prod_{j=0}^{\ell} \left(1+2\,C_0^{(j)}\right)$$
$$\leqslant \prod_{j=0}^{\ell+1} \left(1+2\,C_0^{(j)}\right)$$

$$|a_{\ell+1,0}(n)| \leqslant |C_0^{(\ell+1)}|\,\ell^0 . c^{\ell-0}(1+c) \leqslant (\ell+1)^0 . c^{\ell+1-0}(1+c) \quad , \forall n \geqslant n_0$$

$$|a_{\ell+1,\ell+1}(n)| \leqslant |C_{1,n}^{(\ell+1)}| . \ell^{\ell} . c^{\ell-\ell} . (1+c) \leqslant (\ell+1)^{\ell+1} . c^{\ell+1-(\ell+1)} . (1+c) \quad ,$$
$$\forall n \geqslant n_0$$

$$|a_{\ell+1,j}(m)| \leqslant |C_{0,m}^{(\ell+1)}| \cdot |a_{\ell,j}(m)| + |C_{1,m}^{(\ell+1)}| \cdot |a_{\ell,j-1}(m)|$$

$$\leqslant \frac{c}{2} \cdot \ell^{j} \cdot c^{\ell-j}(1+c) + |C_{1,m}^{\ell+1}|\, c^{\ell-j+1} \cdot \ell^{j-1} \cdot (1+c)$$

$$= \frac{1}{2}(1+c)\, c^{\ell+1-j}\,(\ell+1)^{j}\left[\left(\frac{\ell}{\ell+1}\right)^{j} + \left(\frac{\ell}{\ell+1}\right)^{j} \cdot \frac{1}{\ell}\,|C_{1,m}^{(\ell+1)}|\right]$$

$$\leqslant (1+c)\, c^{\ell+1-j}(\ell+1)^{j}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{\ell+1}\right)^{j} + \left(\frac{\ell}{\ell+1}\right)^{j} \cdot \frac{1}{\ell}\left(1+\frac{c}{2}\right)\right]$$

$$\leqslant (1+c)\, c^{\ell+1-j}(\ell+1)^{j} \quad , \forall m \geqslant m_0 \, , \ j = 1,2,\dots,\ell.$$

donc $k = \ell+1$, (*) est vrai aussi.

- Puisque $\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$, donc $\forall \varepsilon > 0$, il existe une constante $M^* \in \mathbb{R}$, un rang N, tels que $\forall m \geqslant 0$, $|\varepsilon_m| \leqslant M$ et $\forall m \geqslant N$, $\varepsilon_m < \frac{\varepsilon}{2M^*}$ pour N-fixé, puisque $\lim_{k\to\infty} c^{k-N} \cdot k^{N} \cdot N = 0$.

  Donc il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$, $(k_0 > N)$ tel que :

  $\forall k > k_0$, $|c^{k-N} \cdot k^{N} \cdot N| < \varepsilon / 2(1+c)M^*$.

  Donc $\forall k > k_0$,

$$|\varepsilon_{m_0}^{(k)}| = |a_{k,0}(m_0) \cdot \varepsilon_{m_0} + \dots + a_{k,N}(m_0)\,\varepsilon_{m_0+N} + \dots + a_{k,k}(m_0)\,\varepsilon_{m_0+k}|$$

$$\leqslant |a_{k,0}(m_0) \cdot \varepsilon_{m_0} + \dots + a_{k,N-1}(m_0)\,\varepsilon_{n_0+N-1}|$$

$$+ |a_{k,N}(m_0)\,\varepsilon_{m_0+N} + \dots + a_{k,k}(m_0)\,\varepsilon_{m_0+k}|$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{N-1} |a_{k,j}(m_0)| \cdot M^* + \sum_{j=N}^{k} |a_{k,j}(m_0)| \cdot \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{N-1} (1+c) \cdot c^{k-j} \cdot k^{j} \cdot M^* + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\leqslant N \cdot c^{(k-N)} \cdot k^{N} \cdot (1+c) \cdot M^* + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \varepsilon$$

donc $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_{m_0}^{(k)} = 0$.

<u>Remarque</u> : 1) On a la même remarque que pour le théorème 6.5. On peut remplacer dans ce théorème la condition :

$|C_0^{(i)}| < c/2 \qquad i = 1,2,\dots$ par la condition suivante :

il existe un rang $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall i \geqslant N$, $|c_0^{(i)}| < c/2$.

puisque $\lim\limits_{m\to\infty} \varepsilon_m^{(N)} = 0$, N-fixé.

Puisque $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_0^{(i)}$ converge

donc $\lim\limits_{i\to\infty} c_0^{(i)} = 0$

c'est à dire pour i assez grand, on a $|c_0^{(i)}| < c/2$ et donc La troisième condition dans ce theorème peut être enlevée.

2) La condition ($\sum\limits_{j=0}^{\infty} c_0^{(j)}$ converge) est une condition suffisante, mais ce n'est pas une condition nécessaire.

<u>Proposition 6.11</u> :

Soit La suite $(S_m) \in Lin^{(1)}$, $\lim\limits_{m\to\infty} S_m = S$, $\Delta S_m \neq \Delta S_{m+1}$

$\Delta S_m \neq 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{S_{m+1}-S}{S_m - S} = a$, $a \in \mathbb{R}$, $0<|a|<1$,

Soit $(T^{(k)})$ le procédé d'Overholt. $T^{(k)} : (S_m) \to (t_m^{(k)})$

$$t_m^{(0)} = S_m \quad , \quad \forall m \geqslant 0$$
$$t_m^{(k+1)} = C_{0,m}^{(k+1)}\, t_m^{(k)} + C_{1,m}^{(k+1)}\, t_{m+1}^{(k)} \qquad \forall k \geqslant 0,\ m \geqslant 0.$$
$$C_{1,m}^{(k+1)} = 1\Big/\left(1 - \left(\frac{\Delta S_{m+k+1}}{\Delta S_{m+k}}\right)^{k+1}\right) \quad , \quad C_{0,m}^{(k+1)} = 1 - C_{1,m}^{(k+1)}$$
$$\forall m \geqslant 0,\ \forall k \geqslant 0.$$

alors : $\forall m_0 \in \mathbb{N}$, m_0-fixé $\lim\limits_{k\to\infty} t_{m_0}^{(k)} = S$.

<u>Démonstration</u> :

puisque $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{S_{m+1}-S}{S_m - S} = a$, $\quad 0<|a|<1$

donc $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\Delta S_{m+1}}{\Delta S_m} = a$

il existe une constante $c \in \mathbb{R}$, $0<c<1$ et un rang $N \in \mathbb{N}$, tels que $\forall n > N$, $0 < \left|\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n}\right| < C < 1$.

Donc $\forall k > N$, $\left|C_{o,n}^{(k+1)}\right| \leqslant \frac{C^{k+1}}{1-C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

puisque $\lim\limits_{k\to\infty} c^k = 0$.

Donc il existe un rang $k_o \in \mathbb{N}$, tel que $\forall k > k_o$,
$|C_{o,n}^{(k)}| < c/2$ puisque $\sum\limits_{k=N}^{\infty} \frac{c^{k+1}}{1-C}$ converge.

selon le théorème 6.6 et la remarque,

on a $\lim\limits_{k\to\infty} t_{n_o}^{(k)} = S$, $n_o \in \mathbb{N}$, n_o- fixé.

Proposition 6.12 :

Soit $(S_n) \in Lin^{(\infty)}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_{n+1}-S}{S_n-S} = \rho$, $0 < |\rho| < 1$,

soit $(T^{(k)})$ une suite de λ-transformations définie sur (S_n)

$T^{(k)} : (S_n) \to (t_n^{(k)})$, $t_n^{(0)} = S_n$,

$$t_n^{(k+1)} = \frac{-\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}\, t_n^{(k)} + \frac{1}{1-\rho^{k+1}}\, t_{n+1}^{(k)}$$

alors $\forall n_o \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_{n_o}^{(k)} = S$.

II. 2 Amélioration d'algorithme d'accélération

Proposition 6.13 :

Soit la suite $(S_n) \in \mathcal{S}\mathcal{U}$,

$(\mathcal{U}_n) \in conv_o^*(\mathbb{R}^+)$, $\frac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} \to a$, soit $(T^{(k)})$ l'itération du Δ^2- d'Aitken .

$T^{(k)} : (S_n) \to (t_n^{(k)})$, $t_n^{(0)} = S_n$, $n \geqslant 0$.

$$t_n^{(k+1)} = t_n^{(k)} - (\Delta t_n^{(k)})^2 / \Delta^2(t_n^{(k)}) \qquad \Delta t_n^{(k)} \neq 0 \quad \forall n \geqslant 0$$
$$t_n^{(k)} \neq S \quad \forall k \geqslant 0.$$

Si 1) $-1 < \rho < 0$, $a > 0$ $\frac{S_{n+1}-S}{S_n-S} = \rho + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mathcal{U}_n^{j}$

2) $-1 < \rho < 0$, $a < 0$ $\frac{S_{n+1}-S}{S_n-S} = \rho + \alpha_2 \mathcal{U}_n^2 + \alpha_4 \mathcal{U}_n^4 + \alpha_5 \mathcal{U}_n^5 + \dots$

3) $0 < \rho < 1$, $a < 0$, $\frac{S_{m+1}-S}{S_m - S} = \rho + \alpha_1 u_m + \alpha_3 u_m^3 + \dots$

on considère le procédé suivant :

Étape 1/- Choisir $\alpha \in \mathbb{R}$, $-1 < \alpha < 0$, $|\alpha| > |\rho|$,

Étape 2/- $\bar{t}_m^{(1)} = \begin{cases} t_m^{(1)} & \text{, si } \alpha < \frac{\Delta t_{m+1}^{(0)}}{\Delta t_m^{(0)}} < 0 \text{ est vrai} \\ -\frac{\alpha}{1-\alpha} t_m^{(0)} + \frac{1}{1-\alpha} t_{m+1}^{(0)} , & \text{si } \alpha < \frac{\Delta t_{m+1}^{(0)}}{\Delta t_m^{(0)}} < 0 \text{ est faux.} \end{cases}$

⋮

Étape k+1/- $\bar{t}_m^{(k+1)} = \begin{cases} \bar{t}_m^{(k)} - (\Delta \bar{t}_m^{(k)})^2 / \Delta^2(\bar{t}_m^{(k)}) & \text{, si } \alpha < \frac{\Delta \bar{t}_{m+1}^{(k)}}{\Delta \bar{t}_m^{(k)}} < 0 \text{ est vrai} \\ -\frac{\alpha}{1-\alpha} \bar{t}_m^{(k)} + \frac{1}{1-\alpha} \bar{t}_{m+1}^{(k)} & \text{, si } \alpha < \frac{\Delta \bar{t}_{m+1}^{(k)}}{\Delta \bar{t}_m^{(k)}} < 0 \text{ est faux.} \end{cases}$

⋮

alors : 1)- k-Fixé $\lim_{m \to \infty} \frac{\bar{t}_m^{(k)} - S}{t_m^{(k)} - S} = 1$

2)- m-Fixé , $\lim_{k \to \infty} \bar{t}_m^{(k)} = S$.

Démonstration :

On note $\bar{t}_m^{(k+1)} = \bar{C}_{0,m}^{(k+1)} \bar{t}_m^{(k)} + \bar{C}_{1,m}^{(k+1)} \bar{t}_{m+1}^{(k)}$, $\forall k \geq 0$, $\forall m \geq 0$.

alors $0 \leq \bar{C}_{0,m}^{(k+1)} \leq \frac{\alpha}{1+|\alpha|}$ $\forall m \geq 0$, $\forall k \geq 0$.

selon le théorème 6.5 , on alors $\lim_{k \to \infty} \bar{t}_m^{(k)} = S$. m-Fixé.

. Puisque $(S_m) \in \mathcal{S}\mathcal{U}$, selon La proposition 6.8, et La condition $t_m^{(k)} \neq S$ $\forall k \geq 0, m \geq 0$, on a alors :

Cas 1 -

$-1 < \rho < 0$, $a > 0$. $\frac{S_{m+1}-S}{S_m - S} = \rho + \alpha_1 u_m + \alpha_2 u_m^2 + \dots$

$\frac{t_m^{(j)} - S}{S_m - S} = b_{p_j}^{(j)} u_m^{p_j} + \dots$ $b_{p_j}^{(j)} \neq 0$, $j = 1, 2, \dots$

$\lim_{m \to \infty} \frac{\Delta t_{m+1}^{(j)}}{\Delta t_m^{(j)}} = \rho a^{p_j}$, $\alpha < \rho a^{p_j} < 0$.

Cas 2.

$-1 < \rho < 0$, $a < 0$, $\frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \rho + \alpha_2 u_n^2 + \alpha_4 u_n^4 + \cdots$

$\frac{t_n^{(j)} - S}{S_n - S} = b_{p_j}^{(j)} u_n^{p_j} + b_{p_j+2}^{(j)} u_n^{p_j+2} + \cdots \qquad j = 1, 2, \ldots$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta t_{n+1}^{(j)}}{\Delta t_n^{(j)}} = \rho . a^{p_j}$ $\qquad p_j$ est un nombre pair.

donc $\alpha < \rho . a^{p_j} < 0$.

Cas 3.

$0 < \rho < 1$, $a < 0$, $\frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \rho + \alpha_1 u_n + \alpha_3 u_n^3 + \cdots$

$\frac{t_n^{(j)} - S}{S_n - S} = b_{p_j}^{(j)} u_n^{p_j} + b_{p_j+2}^{(j)} u_n^{p_j+2} + \cdots \qquad j = 1, 2, \ldots$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta t_{n+1}^{(j)}}{\Delta t_n^{(j)}} = \rho . a^{p_j}$, $\quad p_j$ est un nombre impair.

donc $\alpha < \rho . a^{p_j} < 0$.

k - fixé pour n assez grand, on a alors :

$$\alpha < \frac{\Delta t_{n+1}^{(j)}}{\Delta t_n^{(j)}} < 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, k .$$

donc $\bar{t}_n^{(k)} = t_n^{(k)}$ pour n assez grand

puisque $t_n^{(k)} \neq S$

donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{t}_n^{(k)} - S}{t_n^{(k)} - S} = 1$.

REMARQUE:

Pour l'ε-algorithm, le θ-algorithm, etc. on peut obtenir les mêmes résultats. Plus généralement, on suppose que $(T^{(k)})$ est une suite de c-transformations sur la suite (S_n).

$T^{(k)} : (S_n) \to (t_n^{(k)})$, $\quad t_n^{(0)} = S_n \quad \forall n \geq 0$.

$$t_n^{(k+1)} = c_{0,n}^{(k+1)} t_n^{(k)} + c_{1,n}^{(k+1)} t_{n+1}^{(k)} . \quad \forall k \geq 0, \forall n \geq 0 .$$

$C_{o,n}^{(k+1)}$ est définie par la suite $(t_n^{(k)})$

donc on peut noter comme suit : $C_o^{(k+1)}\left((t_n^{(k)})_n\right)$

On suppose qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < 1$, telle que :

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} C_o^{(k+1)}\left((t_n^{(k)})_n\right) = C_o^{(k+1)}$, $\quad 0 < C_o^{(k+1)} < c$.

on peut définir le procédé suivant :

Etape 1) - $\bar{t}_n^{(1)} = \begin{cases} t_n^{(1)} & \text{si } 0 < C_o^{(1)}\left((t_n^{(0)}),n\right) < c \text{ est VRAI} \\ c.t_n^{(0)} + (1-c)\,t_{n+1}^{(0)} & \text{si } 0 < C_o^{(1)}\left((t_n^{(0)}),n\right) < c \text{ est FAUX} \end{cases}$

⋮

Etape k+1) - $\begin{cases} \bar{t}_n^{(k+1)} = C_o^{(k)}\left((\bar{t}_n^{(k)}),n\right) t_n^{(k)} + C_1^{(k)}\left((\bar{t}_n^{(k)}),n\right) t_{n+1}^{(k)}, \\ \qquad \text{si } 0 < C_o^{(k)}\left((\bar{t}_n^{(k)}),n\right) < c \text{ est VRAI} \\ c\,t_n^{(k)} + (1-c)\,t_{n+1}^{(k)}, \\ \qquad \text{si } 0 < C_o^{(k)}\left((\bar{t}_n^{(k)}),n\right) < c \text{ est FAUX}. \end{cases}$

alors on a :

1) $\lim_{k\to\infty} \bar{t}_n^{(k)} = S \qquad n$ - fixé

2) pour n assez grand, $\bar{t}_n^{(k)} = t_n^{(k)}$.

Proposition 6.14 :

Soit la suite $(S_n) \in \mathcal{S}\mathcal{U}Lin$, $\dfrac{S_{n+1}-S}{S_n-S} = p + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\, \mathcal{U}_n^j$

$p \in \mathbb{R}$, $1 > p > 0$, $(\mathcal{U}_n) \in \text{CONV}_o^*(\mathbb{R}^+)$, $\dfrac{\mathcal{U}_{n+1}}{\mathcal{U}_n} \to a$, $0 < a < 1$,

Soit $(T^{(k)})$ l'itération du Δ^2- d'aithen.

$T^{(k)} : (S_n) \to (t_n^{(k)})$, $\forall k \geq 0$, $\forall n \geq 0$.

On construit un procédé :

Etape 1) - Choisir la suite $(d_k) \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$, telle que

1) $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ converge

2) $p.a^k < \alpha_k \qquad k = 1, 2, \ldots$

Étape 2)- $\bar{t}_n^{(1)} = \begin{cases} t_n^{(1)} & \text{, si } \left(0 < \Delta t_{n+1}^{(0)}/\Delta t_n^{(0)} < \alpha_0\right) \text{ est vrai} \\ -\dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\, t_n^{(0)} + \dfrac{1}{1-\alpha_0}\, t_{n+1}^{(0)} , & \text{si } \left(0 < \Delta t_{n+1}^{(0)}/\Delta t_n^{(0)} < \alpha_0\right) \text{ est faux.} \end{cases}$

$\vdots$

Étape k+1)- $\bar{t}_n^{(k+1)} = \begin{cases} \bar{t}_n^{(k)} - (\Delta \bar{t}_n^{(k)})^2/\Delta^2 \bar{t}_n^{(k)} , & \text{si } \left(0 < \dfrac{\Delta \bar{t}_{n+1}^{(k)}}{\Delta \bar{t}_n^{(k)}} < \alpha_k\right) \text{ est vrai} \\ -\dfrac{\alpha_k}{1-\alpha_k}\, \bar{t}_n^{(k)} + \dfrac{1}{1-\alpha_k}\, \bar{t}_{n+1}^{(k)} , & \text{si } \left(0 < \Delta \bar{t}_{n+1}^{(k)}/\Delta \bar{t}_n^{(k)} < \alpha_k\right) \text{ est faux.} \end{cases}$

$\vdots$

alors 1) n-fixé $\lim_{k\to\infty} \bar{t}_n^{(k)} = s$

2) k-fixé, si $t_n^{(k)} \neq s$, $\forall n \geq 0$, $\forall k \geq 0$

alors $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\bar{t}_n^{(k)} - s}{t_n^{(k)} - s} = 1$.

Démonstration :

1) On note $\bar{t}_n^{(k+1)} = \bar{C}_{0,n}^{(k+1)}\, \bar{t}_n^{(k)} + \bar{C}_{1,n}^{(k+1)}\, \bar{t}_{n+1}^{(k)}$ $\forall k \geq 0, \forall n \geq 0$

alors $|\bar{C}_{0,n}^{(k+1)}| \leq \alpha_k$ $\forall n \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

puisque $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ converge, selon le théorème 6.6, on a alors :

$\lim_{k\to\infty} \bar{t}_n^{(k)} = s$, ($n$-fixé)

2) Selon la proposition 6.8,

si $t_n^{(j)} \neq s$ $(n \geq 0, j \geq 1)$,

on a alors : $\lim_{n\to 0} \left(\Delta t_{n+1}^{(j)}/\Delta t_n^{(j)}\right) = p \cdot a^{p_j}$ $p_j \geq j$, $j = 1, 2, \ldots$

k-fixé, puisque $p \cdot a^{p_j} \leq p \cdot a^j < \alpha_j$ $j = 1, 2, \ldots$

donc pour n assez grand, $0 < \Delta t_{n+1}^{(j)}/\Delta t_n^{(j)} < \alpha_j$ $j = 1, 2, \ldots, k$.

donc $\bar{t}_n^{(k)} = t_n^{(k)}$, pour n assez grand

et donc $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\bar{t}_n^{(k)} - s}{t_n^{(k)} - s} = 1$

II.3 2ème théorème de convergence sur les lignes.

Théorème 6.7

Soit $\mathcal{S} \subset \mathrm{conv}(\mathbb{R})$, la suite $(S_n) \in \mathcal{S}$, soit $(T^{(k)})$ une suite C-transformations définie sur $\mathcal{S}$

$$T^{(k)} : (S_n) \to (t_n^{(k)}) \quad , \quad t_n^{(0)} = S \quad \forall n \geq 0$$

$$t_n^{(k+1)} = C_{0,n}^{(k+1)} t_n^{(k)} + C_{1,n}^{(k+1)} t_{n+1}^{(k)} + C_{2,n}^{(k+1)} t_{n+2}^{(k)} \quad \forall k \geq 0, \quad \forall n \geq 1$$

S'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$, $0 < c < 1/3$, pour $n_0 \in \mathbb{N}$, telle que $0 \leq C_{0,n}^{(k)} < c$, $0 \leq C_{j,n}^{(k)} < 1$, $\forall k \geq n_0$, $n \geq n_0$, $j = 1,2$

alors, n_0-fixé, $\lim_{k \to \infty} t_{n_0}^{(k)} = S$.

Démonstration :

On note $\varepsilon_n^{(k)} = t_n^{(k)} - S$, $\varepsilon_n^{(0)} = S_n - S$

on a alors $\varepsilon_{n_0}^{(k+1)} = C_{0,n_0}^{(k+1)} \varepsilon_{n_0}^{(k)} + C_{1,n_0}^{(k+1)} \varepsilon_{n_0+1}^{(k)} + C_{2,n_0}^{(k+1)} \varepsilon_{n_0+2}^{(k)}$

Nous allons démontrer que $\lim_{k \to 0} \varepsilon_{n_0}^{(k)} = 0$.

- D'abord on va démontrer que $(\varepsilon_{n_0}^{(k)})$ possède la propriété suivante :

$$(*) \begin{cases} \varepsilon_{n_0}^{(k)} = a_{k,0}(n_0)\,\varepsilon_{n_0} + a_{k,1}(n_0)\,\varepsilon_{n_0+1} + \cdots + a_{k,k}(n_0)\,\varepsilon_{n_0+k} + \cdots + a_{k,2k}(n_0)\,\varepsilon_{n_0+2k}. \\ \sum_{j=0}^{2k} a_{k,j}(n) = 1 \qquad \forall n \geq n_0 \\ 0 \leq a_{k,j}(n) \leq 1 \quad , \ k = 1,2,\ldots, \quad j \leq 2k \ , \forall n \geq n_0. \\ a_{k,j}(n) \leq c^{k-j} \cdot 3^k \qquad j \leq k \ , \forall n \geq n_0. \end{cases}$$

$k = 1$, $\varepsilon_{n_0}^{(1)} = a_{1,0}(n_0)\,\varepsilon_{n_0} + a_{1,1}(n_0)\,\varepsilon_{n_0+1} + a_{1,2}(n_0)\,\varepsilon_{n_0+2}$

$a_{1,j}(n_0) = C_{j,n_0}^{(1)}$, $j = 0,1,2$.

$\sum_{j=0}^{2} a_{1,j}(n_0) = \sum_{j=0}^{2} C_{j,n_0}^{(1)} = 1$, $0 \leq a_{1,j} \leq 1$, $j = 0,1,2$.

$a_{1,0}(n) = C_{0,n}^{(1)} \leq c \leq 3!\, c^{1-0}$, $\forall n \geq n_0$.

$a_{1,1}(n) = C^{(1)}_{1,n} \leqslant 1 \leqslant 3!\ c^{1-1} \quad , \forall n \geqslant n_0 .$

donc (✱) est VRAI pour $k=1$.

On suppose que (✱) est VRAI pour $k=\ell$, on va démontrer que (✱) est encore VRAI pour $k=\ell+1$.

$$\varepsilon^{(\ell+1)}_{n_0} = C^{(\ell+1)}_{0,n_0} \cdot \varepsilon^{(\ell)}_{n_0} + C^{(\ell+1)}_{1,n_0} \cdot \varepsilon^{(\ell)}_{n_0+1} + C^{(\ell+1)}_{2,n_0} \cdot \varepsilon^{(\ell)}_{n_0+1} .$$

$$= a_{\ell+1,0}(n_0) \cdot \varepsilon^{(\ell)}_{n_0} + \dots + a_{\ell+1,2(\ell+1)}(n_0) \cdot \varepsilon_{n_0+2(\ell+1)}$$

où $a_{\ell+1,0}(n) = C^{(\ell+1)}_{0,n} \cdot a_{\ell,0}(n)$

$$a_{\ell+1,1}(n) = C^{(\ell+1)}_{1,n} \cdot a_{\ell,0}(n+1) + C^{(\ell+1)}_{0,n} \cdot a_{\ell,1}(n)$$

$$a_{\ell+1,2\ell+1}(n) = C^{(\ell+1)}_{2,n} \cdot a_{\ell,2\ell-1}(n+2) + C^{(\ell+1)}_{1,n} \cdot a_{\ell,2\ell}(n+1)$$

$$a_{\ell+1,2\ell+2}(n) = C^{(\ell+1)}_{2,n} \cdot a_{\ell,2\ell}(n+2)$$

$$a_{\ell+1,j}(n) = C^{(\ell+1)}_{0,n} \cdot a_{\ell,j}(n) + C^{(\ell+1)}_{1,n} \cdot a_{\ell,j-1}(n+1) + C^{(\ell+1)}_{2,n} \cdot a_{\ell,j-2}(n+2)$$

$$j = 2, 3, \dots, 2\ell .$$

Puisque $\sum_{j=0}^{2\ell} a_{\ell,j}(n) = 1 \quad , \forall n \geqslant n_0$

et $\sum_{j=0}^{2} C^{(\ell+1)}_{j,n} = 1 \quad , \forall n \geqslant n_0$

donc $\sum_{j=0}^{2\ell+2} a_{\ell+1,j}(n) = 1 \quad , \forall n \geqslant n_0$

Puisque $0 \leqslant a_{\ell,j}(n) \leqslant 1$, $j \leqslant 2\ell$, $\forall n \geqslant n_0$

et $0 \leqslant C^{(\ell+1)}_{j,n} \leqslant 1 \quad , j = 0,1,2, \quad \forall n \geqslant n_0$

donc $0 \leqslant a_{\ell+1,j}(n) \leqslant 1 \quad , \quad j \leqslant 2\ell+2, \quad \forall n \geqslant n_0 .$

$$a_{\ell+1,j}(n) = C^{(\ell+1)}_{0,n}\ a_{\ell,j}(n) + C^{(\ell+1)}_{1,n}\ a_{\ell,j-1}(n) + C^{(\ell+1)}_{2,n}\ a_{\ell,j-2}(n)$$

$$\leqslant c \cdot c^{\ell-j} \cdot 3^{\ell} + 1 \cdot c^{\ell-(j-1)} \cdot 3^{\ell} + 1 \cdot c^{\ell-(j-2)} \cdot 3^{\ell}$$

$$\leqslant c^{\ell+1-j} \cdot (1+1+c)\, 3^{\ell}$$

$$\leqslant c^{\ell+1-j} \cdot 3^{\ell+1} \qquad \forall n \geqslant n_0 \ . \ j = 2,3,\dots,\ell+1 .$$

$$a_{\ell+1,0}(n) = C^{(\ell+1)}_{0,n}\ a_{\ell,0}(n)$$
$$\leqslant c.\,c^{\ell-0}.\,3^{\ell} \leqslant c^{\ell+1}.\,3^{\ell+1} \quad \forall n \geqslant n_0 .$$

$$a_{\ell+1,1}(n) = C^{(\ell+1)}_{1,n}.\,a_{\ell,0}(n+1) + C^{(\ell+1)}_{0,n}.\,a_{\ell,1}(n)$$
$$\leqslant 1.\,c^{\ell-0}.\,3^{\ell} + c\,.\,c^{\ell-1}.\,3^{\ell}$$
$$< c^{\ell}.\,3^{\ell+1} \qquad \forall n \geqslant n_0$$

donc $(*)$ est vrai aussi pour $k = \ell+1$.
et donc $(*)$ est vrai.

. $\forall\, \varepsilon > 0$,
puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$
donc il existe une constante $M^* > 0$, un rang $N \in \mathbb{N}$, tels que
$\forall n \geqslant 0$, $|\varepsilon_n| < M^*$, et $\forall n \geqslant N$, $|\varepsilon_n| < \varepsilon/2$.
Pour N- fixé, on a $\lim\limits_{k\to\infty} c^{k-N}\, 3^k\,(N+1) = 0$ $\quad (0 < c < 1/3)$
donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, $(k_0 > N)$ tel que :
$\forall\, k > k_0$, $\quad c^{k-N}.\,3^k.\,(N+1) < \varepsilon/2M^*$.
$\forall\, k > k_0$,

$$|\varepsilon^{(k)}_{n_0}| = |a_{k,0}(n_0)\,\varepsilon_{n_0} + \dots + a_{k,N}(n_0)\,\varepsilon_{n_0+N} + \dots + a_{k,2k}(n_0)\,\varepsilon_{n_0+2k}|$$
$$\leqslant |a_{k,0}(n_0)\,\varepsilon_{n_0} + \dots + a_{k,N}\,\varepsilon_{n_0+N}|$$
$$+ |a_{k,N+1}(n_0)\,\varepsilon_{n_0+N+1} + \dots + a_{k,2k}(n_0)\,\varepsilon_{n_0+2k}|$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{N} .\, c^{k-j}.\,3^k.\,M^* + \sum_{j=N+1}^{2k} a_{k,j}(n_0)\,.\,\varepsilon/2$$
$$\leqslant (N+1)\,c^{k-N}.\,3^k.\,M^* + \varepsilon/2 < \varepsilon .$$

donc $\lim\limits_{k\to 0} \varepsilon^{(k)}_{n_0} = 0$.

Théorème 6.8 :

Soit $\mathcal{S} \subset \mathrm{conv}(\mathbb{R})$, soit la suite $(S_n) \in \mathcal{S}$.

Soit $(T^{(k)})$ une suite de C-transformations définie sur $\mathcal{S}$ comme suit :

$$T^{(k)} : (S_n) \to (t_n^{(k)}) \quad , \quad t_n^{(0)} = S_n \quad \forall n \geqslant 0 .$$

$$t_n^{(k+1)} = C_{0,n}^{(k+1)}\, t_n^{(k)} + C_{1,n}^{(k+1)}\, t_{n+1}^{(k)} + C_{2,n}^{(k+1)}\, t_{n+2}^{(k)} \quad \forall k \geqslant 0, \ \forall n \geqslant 0.$$

$n_0 \in \mathbb{N}$.

Si : 1) $|C_{j,n}^{(k)}| \leqslant C_j^{(k)} \quad \forall n \geqslant n_0 , \ j = 0,1$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} (C_0^{(k)} + C_1^{(k)})$ converge

3) $C_j^{(k)} < C < 1/3 \qquad j = 0,1, \qquad k = 1,2,\dots$

alors $\lim_{k\to\infty} t_{n_0}^{(k)} = S$

Démonstration :

On note $\varepsilon_n^{(k)} = t_n^{(k)} - S \quad , \quad \varepsilon_n^{(0)} = S_n - S$

alors $\varepsilon_n^{(k+1)} = C_{0,n}^{(k+1)}\, \varepsilon_n^{(k)} + C_{1,n}^{(k+1)}\, \varepsilon_{n+1}^{(k)} + C_{2,n}^{(k+1)}\, \varepsilon_{n+2}^{(k)}$

on va montrer que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_{n_0}^{(k+1)} = 0$

Puisque $\sum_{k=1}^{\infty} (C_0^{(k)} + C_1^{(k)})$ converge

donc $\prod_{k=1}^{\infty} \left[2(C_0^{(k)} + C_1^{(k)}) + 1\right]$ converge, on note M.

• D'abord, on va démontrer que $(\varepsilon_n^{(k)})$ possède la propriété suivante :

$$* \begin{cases} \varepsilon_n^{(k)} = a_{k,0}(n)\, \varepsilon_n + a_{k,1}(n)\, \varepsilon_{n+1} + \dots + a_{k,2k}(n)\, \varepsilon_{n+2k} \\ \sum_{j=0}^{2k} |a_{k,j}(n)| \leqslant \prod_{j=1}^{k} \left[1 + 2\,(C_0^{(j)} + C_1^{(j)})\right] \quad , \ \forall n \geqslant n_0 \\ |a_{k,j}(n)| \leqslant C^{(k-j)}\, 3^k \qquad , (j \leqslant k) \end{cases}$$

$k = 1, \quad \varepsilon_n^{(1)} = C_{0,n}^{(1)}\, \varepsilon_n + C_{1,n}^{(1)}\, \varepsilon_{n+1} + C_{2,n}^{(1)}\, \varepsilon_{n+2}$

$a_{1,j}(n) = C_{j,n}^{(1)} \qquad j = 0,1,2 .$

$$\sum_{j=0}^{2} |a_{1,j}(n)| \leqslant |C_{0,n}^{(1)}| + |C_{1,n}^{(1)}| + |1 - (C_{0,n}^{(1)} + C_{1,n}^{(1)})|$$
$$\leqslant 1 + 2\,(C_0^{(1)} + C_1^{(1)}) \qquad \forall n \geqslant n_0$$
$$|a_{1,0}(n)| = |C_{0,n}^{(1)}| \leqslant c \leqslant c^{1-0}.3^1 \qquad \forall n \geqslant n_0$$
$$|a_{1,1}(n)| = |C_{1,n}^{(1)}| \leqslant 1/3 \leqslant c^{1-0}.3^1 \qquad \forall n \geqslant n_0.$$

donc $(*)$ est VRAI pour $k = 1$.

On suppose que $(*)$ est VRAI pour $k = \ell$, on va montrer que $(*)$ est encore VRAI pour $k = \ell + 1$.

$$\varepsilon_n^{(\ell+1)} = C_{0,n}^{(\ell+1)} \varepsilon_n^{(\ell)} + C_{1,n}^{(\ell+1)} \varepsilon_{n+1}^{(\ell)} + C_{2,n}^{(\ell+1)} \varepsilon_{n+2}^{(\ell)}$$
$$= a_{\ell+1,0}(n)\,\varepsilon_n + \dots + a_{\ell+1,2\ell+2}(n)\,\varepsilon_{n+2\ell+2}$$

où $a_{\ell+1,0}(n) = C_{0,n}^{(\ell+1)}\, a_{\ell,0}(n)$

$$a_{\ell+1,1}(n) = C_{1,n}^{(\ell+1)}\, a_{\ell,0}(n+1) + C_{0,n}^{(\ell+1)}\, a_{\ell,1}(n)$$
$$a_{\ell+1,2\ell+1}(n) = C_{2,n}^{(\ell+1)}\, a_{\ell,2\ell-1}(n+2) + C_{1,n}^{(\ell+1)}\, a_{\ell,2\ell}(n+1)$$
$$a_{\ell+1,2\ell+2}(n) = C_{2,n}^{(\ell+1)}\, a_{\ell,2\ell}(n+2)$$
$$a_{\ell+1,j}(n) = C_{0,n}^{(\ell+1)}\, a_{\ell,j}(n) + C_{1,n}^{(\ell+1)}\, a_{\ell,j-1}(n+1) + C_{2,n}^{(\ell+1)}\, a_{\ell,j-2}(n+2)$$
$$j = 2, 3, \dots, 2\ell.$$

$$\sum_{j=0}^{2\ell+2} |a_{\ell+1,j}| \leqslant \prod_{j=1}^{\ell} \left[1 + 2\left(C_0^{(j)} + C_1^{(j)}\right)\right] \cdot \left[\, |C_{0,n}^{(\ell+1)}| + |C_{1,n}^{(\ell+1)}| + |C_{2,n}^{(\ell+1)}| \,\right]$$
$$\leqslant \prod_{j=1}^{\ell+1} \left[1 + 2\,(C_0^{(j)} + C_1^{(j)})\right] \qquad , \forall n \geqslant n_0.$$

$$|a_{\ell+1,j}(n)| \leqslant |C_{0,n}^{(\ell+1)}|.|a_{\ell,j}(n)| + |C_{1,n}^{(\ell+1)}|.|a_{\ell,j-1}(n+1)| + |C_{2,n}^{(\ell+1)}|.|a_{\ell,j-2}(n+2)|$$
$$\leqslant c.c^{\ell-j}.3^\ell + |C_{1,n}^{(\ell+1)}|.\,c^{\ell-j+1}.3^\ell + |C_{2,n}^{(\ell+1)}|.\,c^{\ell-j+2}.3^\ell$$
$$= c^{\ell+1-j}.3^\ell \left[\frac{1}{3} + \frac{|C_{1,n}^{(\ell+1)}|}{3} + \frac{c\cdot|C_{2,n}^{(\ell+1)}|}{3}\right]$$
$$\leqslant c^{\ell+1-j}.3^\ell \qquad , \forall n \geqslant n_0 \qquad 2 \leqslant j \leqslant \ell$$

$$|a_{\ell+1,0}(n)| \leqslant |C_{0,n}^{(\ell+1)}|\ |a_{\ell,0}(n)|$$
$$\leqslant c\,.\,c^{\ell-0}.3^{\ell} \leqslant c^{\ell+1}.3^{\ell+1} \quad \forall n \geqslant n_0 .$$
$$|a_{\ell+1,1}(n)| \leqslant |C_{1,n}^{(\ell+1)}|\ |a_{\ell,0}(n+1)| + |C_{0,n}^{(\ell+1)}|\ |a_{\ell,1}(n)|$$
$$\leqslant |C_{1,n}^{(\ell+1)}|\,.\,c^{\ell-0}.3^{\ell} + c\,.\,c^{\ell-1}.3^{\ell}$$
$$= c^{\ell+1-1}.3^{\ell+1}\left[|C_{1,n}^{(\ell+1)}|\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right]$$
$$\leqslant c^{\ell}.3^{\ell+1} \quad ,\forall n \geqslant n_0$$

donc (✱) est vrAi aussi pour $k=\ell+1$.
et donc (✱) est vrai.

. $\forall\, \varepsilon > 0$
puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$
donc il existe une constante $M^* > 0$, un rang $N \in \mathbb{N}$, tels que
$\forall n \geqslant 0, \quad |\varepsilon_n| < M^*$, et $\forall n \geqslant N, \quad |\varepsilon_n| < \varepsilon/2M$

$$\text{où} : M = \prod_{j=1}^{\infty}\left[1+2\ \left(C_0^{(j)} + C_1^{(j)}\right)\right]$$

pour N- fixé, puisque $0 < c < 1/3$
donc $\lim\limits_{k\to\infty} c^{k-N}.3^k.(N+1) = 0$
donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, $(k_0 > N)$ tel que $\forall k > k_0$,
$c^{k-N}.3^k.(N+1) < \varepsilon/2$.

$\forall k > k_0$
$$|\varepsilon_{n_0}^{(k)}| = |a_{k,0}(n_0)\,\varepsilon_{n_0} + \dots + a_{k,2k}(n_0)\,\varepsilon_{n_0+2k}|$$
$$= |a_{k,0}(n_0)\,\varepsilon_{n_0} + \dots + a_{k,N}(n_0)\,\varepsilon_{n_0+N}|$$
$$+ |a_{k,N+1}(n_0)\,\varepsilon_{n_0+N+1} + \dots + a_{k,2k}(n_0)\,\varepsilon_{n_0+2k}(n_0)|$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{N} c^{k-j}.3^k.M^* + \sum_{j=N+1}^{2k} a_{k,j}(n_0).\ \varepsilon/2M .$$
$$\leqslant (N+1)\,.\,c^{k-N}\,3^k.M^* + M\,.\,\varepsilon/2M$$
$$< \varepsilon .$$

donc $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_{n_0}^{(k)} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to \infty} t_{n_0}^{(k)} = s$.

Remarque :

k_0 - fixé .

Puisque $T^{(k)}$ est une c-transformation sur (S_n).

On a alors $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n^{(k_0)} = 0$.

alors on peut enlever La troisième condition dans ce théorème .

Puisque $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(c_0^{(j)} + c_1^{(j)} \right)$ converge pour k assez grand,

on a $0 < c_j^k < c < 1/3$.

Etude experimentale :

On suppose que $(T^{(k)})$ est une série de C-transformation sur (S_n). $T^{(k)} : (S_n) \to (t_n^{(k)})$, $t_n^{(0)} = S_n$

$$t_n^{(k+1)} = C_{0,n}^{(k+1)} t_n^{(k)} + C_{1,n}^{(k+1)} t_{n+1}^{(k)}, \qquad n, \ k = 0, 1, 2, \cdots$$

Si $C_{0,n}^{(k+1)}$, $C_{1,n}^{(k+1)}$ ne satisfait pas les conditions des théoremes 6·5 et 6·6, alors on ne sait pas si l'on a:

$$\lim_{k\to\infty} t_n^{(k)} = s \qquad (n\text{- fix})$$

Exemple 1. $S_{n+1} = S_n\left(b + e^{1/(10+n)} - 1\right)$, $S_0 = 0.2$,

On considere la c-transformation :

$$T^{(k)} : \ (S_n) \to (t_n^{(k)}).$$

$$t_n^{(k+1)} = -\frac{b}{1-b}\, t_n^{(k)} + \frac{1}{1-b}\, t_{n+1}^{(k)}, \qquad n \geq 0, \ k \geq 0,$$

On sait que k-fixé, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{t_n^{(k+1)} - s}{t_n^{(k)} - s} = 0$.

$b = 0.9$, $C_{0,n}^{(k+1)} = -\frac{0.9}{1-0.9} = -9$, $C_{0,n}^{(k+1)}$ ne satisfait les conditions des théoremes 6·5. et 6·6. on va voir que $t_n^{k} \not\to s$, as $k \to \infty$.

K	$t_1^{(K)}$	$S(K+1)$	$t_{50}^{(K)}$	$S(K+50)$
1	0,869 D 0	0,98 D +0	0,59 D -2	0.33 D -1
5	-0.840 D -1	0,88 D +0	-0.13 D -5	0,23 D -1
10	0.154 D +2	0,69 D +0	0.12 D -5	0,14 D -1
15	-0.209 D +5	0,51 D +0	-0.14 D +1	0,94 D -2
20	0.519 D +9	0,37 D +0	0,56 D +7	0,60 D -2
25	-0.118 D +16	0,25 D +0	-0.14 D +14	0.38 D -2
30	0.381 D +22	0.17 D +0	0,25 D +20	0.23 D -2
35	-0.711 D +28	0.11 D +0	-0,25 D +25	0.14 D -2
40	0.476 D +34	0,77 D -1	-0,44 D +32	0.93 D -3
45	0.990 D +40	0.50 D -1	0.46 D +38	0,58 D -3
50	-0.376 D +47	0,33 D -1	-0,15 D +44	0.36 D -3

$b=-0,2$, $\quad C_{0,n}^{(k+1)} = \frac{0,2}{1-0,2} = 0,25$, $\quad C_{1,n}^{(k+1)} = 0,75$. $\quad C_{0,n}^{(k+1)}, C_{1,n}^{(k+1)}$ satisfait les conditions des théoreme 6.5, donc $t_n^{(k)} \to S$ as $k \to \infty$.

k	$t_1^{(k)}$	$S(k+1)$
1	0,724 D -1	-0,113 D+0
5	0,444 D -5	-0,303 D-4
10	0,641 D -10	0,198 D -8
15	0.161 D-14	-0.191 D-12
20	0.566 D-19	0,232 D-16
25	0,246 D-23	-0,330 D-20
30	0.125 D-27	0,527 D-24
35	0,714 D-32	-0,916 D-28
40	0,421 D-36	0,170 D-31
45	-0,846 D-41	-0,333 D-35

Le procédé d'Overholt, si $0<|b|<1$, alors $(S_n) \in Lin^{(1)}$, selon la proposition 6.11, on a : $\lim_{k\to\infty} V_n^{(k)} = s$.

$b=0,9$

k	$t_{50}^{(k)}$	$S(k+50)$
1	-0,132 D -2	0,330 D -1
5	-0,789 D - 4	0,232 D -1
10	-0,246 D-4	0,149 D-1
15	-0,110 D-4	0,949 D-2
20	-0,559 D-5	0,602 D-2
25	-0,302 D-5	0,380 D-2
30	-0,168 D-5	0,239 D-2
35	-0,941 D-6	0,149 D-2
40	-0,548 D-6	0,936 D-3

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J.P. DELAHAYE. "Théorie des transformations de suites en analyse numérique et application" Thèse d'état, Lille I, 1982.

[2] B. GERMAIN_BONNE. "Transformation des suites" RIRO, (1973), 84, 90.

[3] L. JACOBSEN. "Remarks to a definition of convergence acceleration illustrated by means of continued fraction $K(a_1/1)$ where $a_n \to 0$." J. Comput. Appl. Math. 21, 1988, 100_110

[4] J.P DELAHAYE, B. GERMAIN_BONNE B. "The set of Logarithmically convergent sequences can not be accelerated" SIAM J. Numer. Anal. 19 (1982), 840_844.

[5] C. BREZINSKI "Quasi_Linear extrapolation processes"

[6] D. LEVIN. "Development of non_Linear transformation for improving convergence of sequence" Internat. J. comput. Math. 3. (1973), 371_388.

[7] C. BREZINSKI. "Accélération de suites à convergence Logarithmique" C.R. Acad. Sci. Paris Sér A_B 273. (1971), 727_730.

[8] C. BREZINSKI, J.P. DELAHAYE, B. GERMAIN_BONNE. "Convergence acceleration by extraction of Linear sequence" Siam J. Numer. Anal., 20 (1983), 1099_1105.

[9] D. A. SMITH et W. F. FORD, " Acceleration of Linear and Logarithmic convergence " Siam J. Numer. Anal., 16 (1979), 223 _ 239

[10] C. KOWALEWSKI. " Possibilités d'accélération de La convergence Logarithmique " Thèse 3ᵉ cycle, Univ. de Lille I. 1984

[11] C. BREZINSKI. " Convergence acceleration methods : the past decade " J. Comput. Appl. Math. 12-13, (1985), 19 _ 36.

[12] C. BREZINSKI. " Contraction properties of sequence trans_ _formations " Num. Math. 54, (1989), 565 _ 574.

[13] D. A. SMITH et W. F. FORD. " Numerical comparisons of non Linear convergence accelerators " Math. Comp. 38, (1982), 481 _ 499.

[14] C. BREZINSKI. " Algorithm d'accélération de La convergence. Etude numérique " Technips 1978.

[15] C. BREZINSKI. " A general extrapolation algorithme " Num. Math. 35, (1980), 175 _ 187.

[16] A. C. AITHEN. " On bernoulli's numerical solution of algebraic equation " Proceeding of Royal Society of Edinburgh. Vol 46, (1926), 289 _ 305.

[17] S. Lubkin. " A method of summing infinite series " J. of Research of N.B.S, Vol 48 N°3 (1952), 226 _ 254

[18] D. SHANKS, " Non Linear transformations of divergent and slowly convergent sequences " J. Math. Phys. 34 (1955), 1-42.

[19] M. KATEB, " Itération d'algorithmes d'accélération de la convergence " thèse Lille I, 1983.

[20] C. BREZINSKI, " Accélération de la convergence en analyse numérique " publication. cours de D.E.A. Juillet 1973.

[21] G. Valiron, " Théorie des Fonctions " Masson P.P 165-166

[22] P. WYNN, " Transformation de séries à l'aide de l'ε-algorithme " C.R.A.S (1975). A 275 p1351.

[23] A.C. MATOS, " Construction de méthodes d'extrapolation à partir de développements asymptotiques " thèse. Lille I 1989.

[24] P. HILLON, " Méthode d'Aitken itérée pour suites oscillantes d'approximation " C.R. Acad. Sc Paris. A. 280 (1975).

[25] B. GERMAIN-BONNE, " Estimation de la limite de suites et Formalisation de procédés d'accélération de convergence ", Thèse d'Etat, Lille (1978).

[26] J. WIMP, " Sequence transformations and their application " Academic press, New York (1981)

[27] C. BREZINSKI, "Error control in convergence acceleration processes". IMA J. Numer. 3 (1983), 65-80

[28] C. BREZINSKI, "Composite sequence transformations". Numer. Math., 46 (1985) 311-321

[29] C. BREZINSKI, "Comparaison de suites convergentes" R.I.R.O. R-2 (1971) 95-99.

[30] T. HÅVIE, "Generalized neveille type extrapolation Schemes" BIT 19 (1979) 204-213.

[31] A. Sidi, "Convergence properties of some non linear Sequence transformations" MAth. Comp. 33 (1979) 315-326

[32] A. SIDI, "Analysis of convergence of the T-transformation for power series" MAth. Comp. 35 (1980) 833-850.

[33] K.J. OVERHOLT, "Extended Aitken acceleration." B.I.T, 5 (1965) 122-132.