

755450

N° d'ordre: 754

# THESE

Présentée à l'Université des Sciences et Techniques de Lille  
Flandres Artois

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE**  
Spécialité : MECANIQUE

par

**Brahim OULD SIDI FALL**

**MODELISATION DES PROBLEMES DE  
CONDUCTION DE CHALEUR PAR LA METHODE  
DES ELEMENTS DE FRONTIERE. APPLICATION A  
LA SOLIDIFICATION EN FONDERIE.**

Soutenue le 12 Juillet 1991 devant la commission d'examen.

Membres du jury :	Mr J-P. BARRAND	Directeur de thèse
	Mr B. DESMET	Rapporteur
	Mr P. MICHEAU	Rapporteur
	Mr G. CAIGNAERT	Examineur
	Mr R. PASQUETTI	Examineur
	Mr W. HLADKY	Examineur

## AVANT-PROPOS

L'étude développée dans ce mémoire a été effectuée au Laboratoire de Mécanique de l'ENSAM, CER de Lille.

Monsieur le Professeur J-P. BARRAND, Directeur de ce Laboratoire a été à l'origine de cette thèse. Sans les conseils qu'il m'a prodigués lors de nos discussions, ce travail n'aurait pas été mené à son terme. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance et de mes plus sincères remerciements pour m'avoir efficacement guidé tout le long de cette recherche.

Monsieur le Professeur P. MICHEAU, Directeur du Laboratoire de Mécanique de Lille et Monsieur le Professeur B. DESMET, Directeur du Laboratoire de Conception des Systèmes Mécaniques et Energétiques de l'Université de Valenciennes ont bien voulu être les rapporteurs de ce mémoire. Je les remercie très vivement pour leur attention vigilante.

Je me permets de souligner l'honneur que me fait Monsieur le Professeur R. PASQUETTI, Directeur de Recherche au Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Nice, de participer à ce jury et de juger mon travail.

J'exprime ma gratitude toute particulière à Monsieur G. CAIGNEART Professeur, Directeur de Recherche à l'ENSAM, CER de Lille, pour le profit que j'ai pu retirer de nos discussions tout au début de cette étude.

Je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à Monsieur D. HEINÉ, Directeur de la Société "LA FRANÇAISE DE MECANIQUE" pour le financement qu'il a bien voulu accorder pour permettre la poursuite de ce travail.

Je suis reconnaissant à Monsieur W. HLADKY, Responsable des Etudes en CAO de Fonderie à la Société "LA FRANÇAISE DE MECANIQUE" pour l'intérêt qu'il a bien voulu manifester à l'égard de mes travaux et pour sa participation à ce jury.

Mesdames M. VANDAELE et I. DERUDDER du secrétariat du CITI <sup>1</sup>, ont réalisé la composition de ce mémoire avec une compétence qui ne s'est jamais démentie. Je les remercie pour leur patience et leur gentillesse.

Il me faut remercier tous mes collègues du Laboratoire de Mécanique de l'ENSAM, CER de Lille, pour le climat d'amitié cordiale qu'ils ont su entretenir au sein de leur équipe.

---

<sup>1</sup> C.I.T.I. : CENTRE INTERUNIVERSITAIRE DE TRAITEMENT DE L'INFORMATION ( Lille)

*à mes parents,*

*à Françoise,*

*à mes amis.*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Concepts de base de la méthode des éléments de frontière (MEFR)</b>	<b>7</b>
1.1	Solution approchée . . . . .	8
1.2	Fonction poids . . . . .	9
1.3	Fonctions résiduelles . . . . .	10
1.4	Méthodes de résidus pondérés . . . . .	10
1.5	Choix de la fonction poids $T^*$ . . . . .	12
1.6	Problèmes de diffusion thermique stationnaire . . . . .	13
1.6.1	Equation de Poisson . . . . .	13
1.6.2	Solution fondamentale . . . . .	14
1.6.3	Formulation intégrale directe . . . . .	16
1.6.4	Formulation numérique: discrétisation . . . . .	17
1.6.5	Calcul des coefficients des matrices S et P . . . . .	21
1.6.6	Conditions aux limites mixtes . . . . .	23
1.6.7	Méthode des sous-domaines . . . . .	24
1.6.8	Diffusion non linéaire . . . . .	27
1.7	Problèmes tridimensionnels stationnaires . . . . .	29
1.8	Problèmes à plusieurs frontières . . . . .	31
1.9	Validation du code de calcul stationnaire . . . . .	33
1.9.1	Cylindre de longueur infinie, de section circulaire (rayon R) . . . . .	33
1.9.2	Plaque plane . . . . .	38
1.9.3	Piston . . . . .	44
1.9.4	Turbine . . . . .	44
<b>2</b>	<b>Problèmes de diffusion thermique instationnaire</b>	<b>49</b>
2.1	Equation homogène de diffusion instationnaire . . . . .	50
2.1.1	Equation intégrale . . . . .	51
2.1.2	Discrétisation de l'équation intégrale . . . . .	55

2.1.3	Fonctions d'interpolation constantes . . . . .	57
2.1.4	Calcul des coefficients des matrices S et P . . . . .	59
2.1.5	Evaluation de l'intégrale sur le domaine . . . . .	65
2.1.6	Température en un point interne . . . . .	70
2.1.7	Conditions aux limites mixtes . . . . .	71
2.2	Equation de diffusion non homogène linéaire . . . . .	72
2.3	Diffusion thermique non homogène non linéaire . . . . .	73
2.3.1	Transformation de Kirchhoff . . . . .	74
2.3.2	Conditions aux limites . . . . .	74
2.3.3	Variation de la conductivité thermique . . . . .	76
2.4	Problèmes tridimensionnels instationnaires . . . . .	76
2.5	Validation du code de calcul instationnaire . . . . .	81
2.5.1	Plaque plane . . . . .	81
2.5.2	Mur ( $\ell \times L$ ) à température initiale $T_0$ nulle avec une répartition mixte de température et de flux . . . . .	89
<b>3</b>	<b>Application à la solidification en fonderie</b>	<b>93</b>
3.1	Résumé . . . . .	93
3.2	Introduction . . . . .	94
3.3	Méthode du suivi d'interface . . . . .	96
3.3.1	Formulation mathématique . . . . .	97
3.3.2	Formulation intégrale . . . . .	99
3.3.3	Formulation numérique: discrétisation . . . . .	103
3.4	Méthode de redressement de température . . . . .	108
3.4.1	Formulation mathématique . . . . .	108
3.4.2	Formulation numérique: discrétisation . . . . .	111
3.4.3	Fonctions d'interpolation de temps constantes . . . . .	112
3.4.4	Fonctions d'interpolation de temps variables linéairement . . . . .	113
3.4.5	Méthode de redressement de température . . . . .	119
3.5	Conclusion partielle . . . . .	121
3.6	Applications . . . . .	123
3.6.1	Courbes de refroidissement . . . . .	123
3.6.2	Influence du maillage . . . . .	124
3.6.3	Influence du choix des fonctions d'interpolation temporelles . . . . .	124
3.6.4	Influence du coefficient de transfert . . . . .	124
3.6.5	Influence du pas de temps . . . . .	124

3.6.6	Courbes isothermes . . . . .	133
<b>4</b>	<b>Annexes</b>	<b>140</b>
4.1	Annexe A . . . . .	140
4.2	Annexe B . . . . .	143
4.3	Annexe C . . . . .	147

## Introduction

Le développement extraordinaire qu'ont connu les ordinateurs au cours des trois dernières décennies a permis l'élaboration de codes de calculs numériques efficaces pour résoudre les problèmes difficiles que rencontrent les ingénieurs dans des domaines aussi variés que la mécanique des fluides, le calcul des structures, la thermique, l'élasticité, la plasticité, l'interaction fluide-structure, les vibrations, l'électrostatique, etc...

Ces codes de calculs sont pour la plupart basés essentiellement sur les applications des méthodes numériques classiques, la méthode des éléments finis (MEF), la méthode des différences finies (MDF) et les méthodes des équations intégrales, en particulier la méthode des éléments de frontière (MEFR).

Dans les techniques dites purement de domaine telles que la MDF et la MEF, la région concernée par l'analyse est subdivisée en petits éléments géométriques et une série de noeuds est définie à l'intérieur et à la surface de cette région.

La MDF offre un avantage pour ce qui est de la simplicité de la formulation numérique et de la préparation des données.

La MEF est reconnue comme un outil général de résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles rencontrés dans la pratique par l'ingénieur. Néanmoins, cette méthode présente un certain nombre de limitations :

- malgré le développement de programmes automatiques, la préparation des données demeure une tâche longue et fastidieuse ;
- les temps de calculs nécessaires pour obtenir un résultat sont dans la plupart des cas importants ;
- l'exploitation des résultats nécessite en général une grande expérience de la part de l'utilisateur ;
- la méthode s'adapte mal à l'étude des problèmes caractérisés par des domaines s'étendant à l'infini ;

- les codes de calculs d'éléments finis sont en général peu flexibles et difficiles à intégrer de façon efficace aux systèmes de CAO existants ;
- les codes sont en général difficiles à lire et doivent être utilisés fréquemment afin que leur performance soit maintenue.

La MEFR apparaît comme une technique capable de répondre à certaines insuffisances de la MEF. C'est pourquoi, plusieurs études sont entreprises actuellement pour contribuer à son développement industriel. Les travaux déjà publiés concernant la MEFR couvrent presque toutes les spécialités des sciences de l'ingénieur et montrent l'aptitude de la méthode à résoudre un grand nombre de problèmes pratiques. Comme la MEF, la MEFR peut être appliquée au traitement des géométries complexes. En particulier la MEFR s'avère plus efficace que la MEF dans l'analyse de certains problèmes où le domaine étudié est infini ou semi infini (constructions navales, pipe-lines, fondations, plates-formes de forage dans les milieux sous-marins, etc).

La caractéristique principale de la MEFR est qu'elle ne nécessite en général que la discrétisation de la surface et non celle du volume occupé par le système étudié. De ce fait, les codes d'éléments de frontière peuvent être reliés facilement aux systèmes de CAO. Cet avantage est important car la conception d'une pièce mécanique implique une série de modifications difficiles à entreprendre en utilisant par exemple une méthode telle que la MEF qui nécessite le remaillage du volume à chaque étape du processus. Dans la MEFR, du fait qu'une pièce mécanique est définie uniquement par sa frontière, la dimension du problème est réduite d'une unité. Un problème à trois dimensions d'espace est ainsi ramené à un problème à deux dimensions d'espace, ce qui simplifie la préparation des données, diminue les temps de calcul et facilite l'interprétation des résultats.

Ces possibilités montrent que la MEFR est un outil idéal pour la CAO, ce qui constitue la principale raison qui motive le développement actuel de cette méthode.

Les éléments utilisés dans la MEFR pour mailler le contour du domaine étudié sont variés [13,25]. Les procédés mis au point dans le cadre des applications de la MEF ont largement contribué au développement de la MEFR. En fait, la MEFR résulte d'une combinaison de la MEF et des méthodes des équations intégrales. Cependant, une des particularités de la MEFR est d'offrir aussi la possibilité d'utiliser des éléments discontinus. Les éléments discontinus permettent d'exploiter efficacement les symétries



inhérentes à certains problèmes car ils évitent de mailler dans les plans de symétrie. De plus, contrairement à la MEF qui exige un maillage affiné pour déterminer les solutions cherchées avec une bonne précision, dans la MEFR on peut appliquer un maillage grossier et obtenir dans la plupart des cas des résultats très précis. Le tableau suivant récapitule les principales différences entre la MEFR et la MEF.

## COMPARAISON MEF-MEFR

	MEFR	MEF
Choix du maillage (type, taille)	Mailles de frontière (possibilité de maillage grossier)	Mailles de frontière et de domaine (maillage affiné)
Lien avec un système de CAO	Simple	Difficile (3 D)
Construction et utilisation d'un modèle	Accessibles aux non spécialistes	Nécessitent de l'expérience
Précision	Peut être obtenue avec un maillage grossier	Nécessite des mailles affinées
Temps CPU et occupation mémoire	Raisonnables	Souvent trop élevés (maillage, données, assemblage)
Modèles industriels	Peu de codes disponibles	Grande quantité de codes disponibles
Analyse des milieux non linéaires	Nécessite le calcul des fonctions de Green	Adaptée à la plupart des cas
Domaines infinis ou semi-infinis	Adaptée	mal adaptée

Dans son principe, la méthode des éléments de frontière consiste à transformer les équations aux dérivées partielles qui gouvernent le problème en une équation intégrale qui lie les inconnues du problème et certaines de leurs dérivées aux fonctions connues en surface par les conditions aux limites.

Dans le traitement numérique, on calcule d'abord les inconnues en surface en résolvant un système d'équations, par exemple en utilisant la technique d'élimination de Gauss. Ensuite une relation algébrique permet de déterminer les inconnues en tout point à l'intérieur du domaine considéré. Cette possibilité permet d'entreprendre des

investigations locales à l'intérieur de la pièce étudiée sans mailler la zone considérée (les points internes étant définis uniquement par leurs coordonnées). Notons que pour les problèmes non linéaires le système obtenu se résout en utilisant un processus itératif comme dans la MEF ou dans la MDF.

D'une manière générale, les matrices obtenues dans un calcul d'éléments de frontière sont denses et non symétriques, ce qui peut engendrer des difficultés lorsque la taille des problèmes traités est importante. Les gros ordinateurs actuels permettent d'éviter ces inconvénients car ils sont capables de traiter efficacement les matrices denses et l'ensemble des opérations qui caractérisent la MEF.

On peut également éviter les problèmes dus au traitement des matrices denses d'une taille élevée en utilisant la méthode des sous-régions [13].

Nous avons développé une formulation générale de la MEF applicable à l'analyse des problèmes thermiques stationnaires et instationnaires.

Nous avons insisté tout particulièrement sur la modélisation par la MEF du problème important de la solidification en moules de fonderie.

Seule la formulation directe de la MEF a été appliquée car elle utilise directement les données physiques du problème.

Nous avons développé les deux techniques qui permettent d'analyser la solidification lorsque la MEF est appliquée. Ces techniques utilisent deux approches différentes : une approche de "suivi d'interface" et une approche dite à domaine fixe.

Dans la technique du suivi d'interface on s'intéresse à la détermination précise de la position du front de solidification au cours du temps. Dans la technique à domaine fixe le problème est formulé de manière à rendre implicite la position du front de séparation liquide-solide. Cette dernière technique est particulièrement efficace dans les problèmes où l'on s'intéresse plus à la détermination du champ de température qu'au suivi très précis du front de solidification .

Les travaux publiés se rapportant à l'analyse par la MEF du problème de Stefan

(problème de solidification/fusion) sont relativement peu nombreux et sont essentiellement limités à des problèmes à une dimension d'espace.

Une analyse complète de ces travaux est présentée dans une étude récente par Sarler, Alujevic et Kuhn [2].

Le programme numérique que nous avons développé permet de traiter certains problèmes stationnaires et instationnaires. Dans tous les cas étudiés, nous n'avons utilisé que des éléments de frontière constants dans l'espace .

Les coefficients des matrices ont été évalués en utilisant la méthode d'intégration numérique de Gauss en dehors des singularités (coefficients non diagonaux). Les coefficients diagonaux pour lesquels des singularités se présentent ont été déterminés en prenant les intégrales sur le contour dans le sens de la valeur principale de Cauchy.

Dans le cas des problèmes instationnaires les intégrales sur le temps ont été effectuées analytiquement et nous avons proposé une démarche systématique qui permet de déterminer a priori le pas de temps critique en dessous duquel la méthode risque de diverger. Il est évident que ce pas de temps dépend de la taille des éléments choisis et de la machine utilisée pour effectuer les calculs.

Dans le cas de l'analyse de la solidification nous avons introduit la méthode de redressement de température [6] pour prendre en considération les effets de la chaleur latente dégagée durant le processus.

Dans le chapitre 1 sont rappelés les concepts de base de la MEFR et son application à l'étude des problèmes de diffusion thermique stationnaire.

Le chapitre 2 est consacré à l'analyse des problèmes instationnaires et à la détermination du pas de temps approprié lorsque la MEFR est appliquée.

Enfin, dans le chapitre 3, nous avons développé les différentes formulations utilisées pour analyser la solidification par la MEFR et appliqué la technique de redressement de température .

Nous avons proposé un certain nombre d'exemples d'applications permettant d'évaluer l'efficacité de la MEFR et dans la plupart des cas, les résultats obtenus sont confrontés à des solutions analytiques ou à des solutions données par d'autres auteurs. Les résultats des premières applications du code de calcul à la solidification sont également présentés.

# Chapitre 1

Concepts de base de la méthode des éléments  
de frontière (MEFR)

# Chapitre 1

## Concepts de base de la méthode des éléments de frontière (MEFR)

Dans ce chapitre nous présentons les caractéristiques de base de la MEFR.

La formulation que nous avons utilisée est basée sur la technique générale des résidus pondérés. Pour établir cette formulation nous avons suivi la démarche suivante :

- Application du théorème de Green et utilisation des solutions fondamentales comme fonctions poids pour transformer les équations aux dérivées partielles qui représentent le problème physique en une équation où ne figurent que des intégrales sur la surface du domaine concerné par l'analyse.
- Discrétisation des équations intégrales de la même façon que dans la Méthode des Éléments Finis (MEF), sauf que dans la MEFR les noeuds qui caractérisent le maillage sont définis uniquement sur la surface du domaine.
- Prise en considération des conditions aux limites pour ramener l'ensemble des équations discrétisées à un système qui peut être résolu par une méthode directe pour déterminer les inconnues de surface.
- Calcul des inconnues en un nombre de points internes arbitrairement choisis en fonction des valeurs des variables de frontière.
- Mise au point d'un code de calcul numérique permettant de traiter un certain nombre de problèmes concrets de manière à évaluer les possibilités de la méthode.

## 1.1 Solution approchée

Considérons le problème physique représenté par l'équation :

$$L(T_{ex}) = b \quad \text{dans } \Omega \quad (1.1)$$

et les conditions aux limites ;

$$E(T_{ex}) = u \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (1.2)$$

$$N(T_{ex}) = q \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (1.3)$$

- $L()$  est un opérateur différentiel supposé linéaire ;
- $T_{ex}$  est une fonction scalaire, solution exacte du problème physique ;
- $b$  est une fonction scalaire donnée ;
- $E()$  et  $N()$  sont des opérateurs différentiels qui définissent les conditions aux limites du problème physique ;
- $u$  et  $q$  sont des fonctions connues ;
- le domaine  $\Omega$  dans lequel s'applique l'équation (1.1) est défini dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x_i)$  et est limité par sa frontière  $\Gamma$  :

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (\text{Figure 1.1}) \quad (1.4)$$

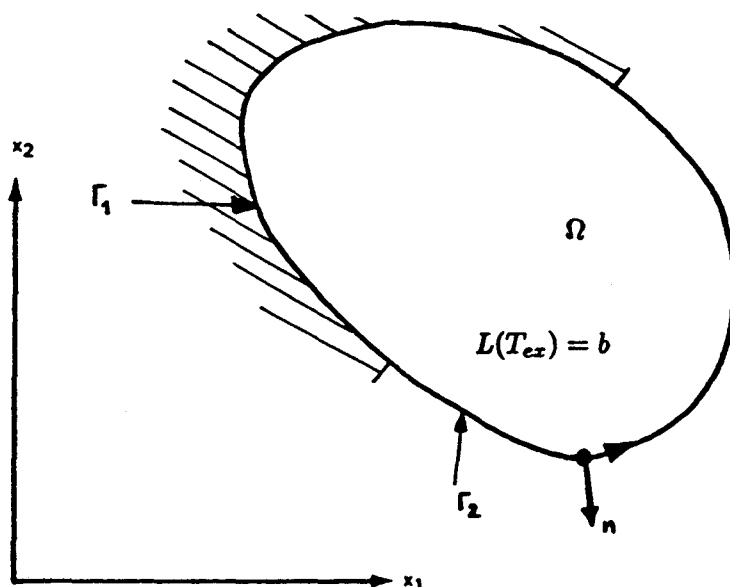


Figure 1.1 : Définition du domaine étudié

Dans la plupart des cas pratiques qui intéressent l'ingénieur, la solution exacte d'un problème défini par des équations du type ( 1.1 ) , ( 1.2 ) et ( 1.3 ) ne peut être obtenue. On utilise alors une technique numérique pour trouver une solution approchée  $T$ . Dans la MEF, comme dans la MEF, la solution approchée est souvent représentée par un développement en série de fonctions de la forme :

$$T = \eta_1 \varphi_1 + \eta_2 \varphi_2 + \dots + \quad (1.5)$$

Les  $\eta_i$  sont des coefficients inconnus à déterminer. Les  $\varphi_i$  forment un ensemble de fonctions linéairement indépendantes connues.

Les valeurs de la fonction  $T$  et de ses dérivées aux noeuds du maillage sont appelées "valeurs nodales".

Dans notre démarche, nous avons associé aux coefficients généralisés  $\eta_i$  les valeurs nodales. Dans ce cas, la fonction d'approximation  $T$  devient :

$$T = T_1 \varphi_1 + T_2 \varphi_2 + \dots + = \sum_{i=1}^N T_i \varphi_i \quad (1.6)$$

Comme dans la MEF, les  $\varphi_i$  sont les fonctions d'interpolation. Les  $T_i$  sont les valeurs nodales du champ de fonction  $T$  ou de ses dérivées, plus généralement d'une variable physique quelconque liée directement à  $T$  ou à ses dérivées.

## 1.2 Fonction poids

Dans la méthode directe des éléments de frontière, la fonction poids joue un rôle particulier dans la formulation intégrale. Pour établir cette formulation intégrale, nous avons introduit le produit scalaire :

$$\langle L(T_{ex}), T^* \rangle = \int_{\Omega} L(T_{ex}) T^* d\Omega \quad (1.7)$$

La fonction  $T^*$  est supposée de classe suffisante pour que le produit scalaire ( 1.7 ) puisse être intégré par parties successives de manière à diminuer l'ordre de dérivation de la fonction  $T_{ex}$ .



L'intégration par parties successives du produit scalaire (1.7) conduit généralement [13, 21, 22] à une expression du type :

$$\int_{\Omega} L(T_{ex})T^* d\Omega = \int_{\Omega} T_{ex}L^*(T^*)d\Omega + \int_{\Gamma}[E^*N(T_{ex}) - N^*E(T_{ex})]d\Gamma \quad (1.8)$$

Le second membre de l'équation ( 1.8 ) est appelé forme transposée du produit scalaire ( 1.7 ).

- $E^*( )$ ,  $N^*( )$  sont des opérateurs différentiels dus aux intégrations par parties successives ;
- $L^*( )$  est l'opérateur adjoint formel de l'opérateur  $L( )$ .

La fonction poids  $T^*$  est choisie de manière à éliminer l'intégrale sur le domaine qui apparaît dans la forme transposée du produit scalaire ( 1.7 ).

### 1.3 Fonctions résiduelles

L'introduction de la fonction d'approximation  $T$  (1.6) fait que les équations (1.1) , (1.2) et (1.3) ne peuvent être satisfaites identiquement sur le domaine  $\Omega$  et sur sa frontière  $\Gamma$ . Nous pouvons alors définir les fonctions résiduelles suivantes :

$$R_{\Omega} = L(T) - b \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (1.9)$$

$$R_{\Gamma_1} = E(T) - u \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \quad (1.10)$$

$$R_{\Gamma_2} = N(T) - q \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \quad (1.11)$$

### 1.4 Méthodes de résidus pondérés

Dans les méthodes numériques habituellement utilisées en mécanique, les fonctions résiduelles sont annulées en des points particuliers ou sur des portions du domaine  $\Omega$  ou de sa frontière  $\Gamma$ .

En particulier la méthode des résidus pondérés consiste à effectuer une distribution des fonctions résiduelles pour les minimiser.

Il existe trois approches numériques fondées sur la technique générale des résidus pondérés. Ces différentes approches dépendent des conditions imposées a priori à la fonction

d'approximation  $T$ . En général, nous avons :

- (i) Une approche numérique où l'on impose à la fonction d'approximation  $T$  de satisfaire identiquement les conditions aux limites ( 1.2 ), ( 1.3 ) et pas nécessairement l'équation ( 1.1 ), ce qui se traduit par :

$$R_{\Omega} \neq 0 \quad (1.12)$$

$$R_{\Gamma_1} \equiv 0 \quad (1.13)$$

$$R_{\Gamma_2} \equiv 0 \quad (1.14)$$

Cette approche est utilisée en éléments finis.

- (ii) Une approche où l'on impose à la fonction  $T$  de satisfaire identiquement l'équation (1.1) et pas nécessairement les conditions aux limites (1.2) , (1.3) , ce qui se traduit par :

$$R_{\Omega} \equiv 0 \quad (1.15)$$

$$R_{\Gamma_1} \neq 0 \quad (1.16)$$

$$R_{\Gamma_2} \neq 0 \quad (1.17)$$

Cette approche correspond aux méthodes dites des équations intégrales , en particulier la MEFR.

- (iii) Une approche où la fonction  $T$  ne satisfait ni l'équation (1.1) ni les conditions aux limites (1.2) et (1.3) du problème. Cette approche utilise les méthodes dites mixtes.

Supposons maintenant que les fonctions  $\varphi_i$  choisies pour définir la solution approchée  $T$  satisfassent identiquement l'équation (1.1) ce qui permet de minimiser la fonction résiduelle  $R_{\Omega}$ . Pour cela effectuons la distribution de ce résidu sur tout le domaine :

$$\int_{\Omega} [L(T) - b]T^* d\Omega = 0 \quad (1.18)$$

L'équation (1.18) est le point de départ de la formulation intégrale de la MEFR.

## 1.5 Choix de la fonction poids $T^*$

Dans la MEFR, la fonction poids  $T^*$  est choisie de manière à réduire d'une unité la dimension du problème : le but recherché est que dans l'équation intégrale finale ne doivent apparaître que des intégrales sur le contour  $\Gamma$ .

Pour obtenir cette réduction, deux choix pour la fonction poids  $T^*$  sont possibles [13] :

- On choisit la solution de l'équation

$$L(T^*) = \Delta$$

lorsque l'opérateur  $L( )$  est auto\_adjoint ou la solution de l'équation

$$L^*(T^*) = \Delta$$

si  $L( )$  est non auto\_adjoint.

$\Delta$  est la fonction de distribution de Dirac.

- On choisit comme fonction poids  $T^*$ , la solution de l'équation homogène

$$L(T^*) = 0$$

associée à l'équation ( 1.1 ) si  $L( )$  est auto\_adjoint ou la solution de l'équation

$$L^*(T^*) = 0$$

pour un opérateur non auto\_adjoint.

Dans la démarche suivie nous avons choisi comme fonctions poids, des fonctions de Green qui vérifient certaines propriétés que nous préciserons.

## 1.6 Problèmes de diffusion thermique stationnaire

Dans cette section, nous présentons une formulation de l'équation intégrale qui est à la base de la méthode directe des éléments de frontière.

La formulation intégrale indirecte de la MEFR qui introduit des densités de sources formelles qui n'ont pas de relation avec la physique du problème [13, 16], ne sera pas abordée.

La formulation directe de la MEFR peut être établie à partir de considérations basées sur une technique de résidus pondérés, sur le théorème de réciprocité et la troisième identité de Green ou sur des principes fondamentaux tel que le principe des travaux virtuels [13, 20, 25].

Dans cette étude nous avons utilisé la technique des résidus pondérés car elle est générale et donc susceptible de permettre l'extension de la MEFR à la résolution de problèmes d'équations aux dérivées partielles complexes telle que la modélisation numérique de la solidification en moules de fonderie qui fera l'objet du troisième chapitre. De plus, la technique des résidus pondérés est plus accessible aux ingénieurs que les autres techniques utilisées qui font appel à des concepts purement mathématiques. Enfin, elle rend possible le couplage de la MEFR avec les méthodes numériques classiques, MEF et MDF [13, 16].

### 1.6.1 Equation de Poisson

Considérons le cas de l'équation de Poisson en conduction de chaleur dans un domaine  $\Omega$  à 2 ou 3 dimensions d'espace, linéaire, homogène, isotrope, de conductivité thermique  $K$  et de frontière  $\Gamma$ , (*Figure 1.2*).

$$\nabla^2 T_{ex} = b \quad \text{dans } \Omega \quad (1.19)$$

avec des conditions aux limites essentielles de type Dirichlet

$$T_{ex} = \bar{T} \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (1.20)$$

et des conditions aux limites naturelles de type Neumann

$$q_{ex} = -K \frac{\partial T_{ex}}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (1.21)$$

- $\mathbf{n}$  est la normale unitaire à la frontière du domaine  $\Omega$  ;
- $\bar{T}$ ,  $\bar{q}$  sont des valeurs imposées de la température et du flux sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  respectivement ;
- $\nabla^2$  est l'opérateur laplacien en coordonnées cartésiennes  $(x_i)$ .

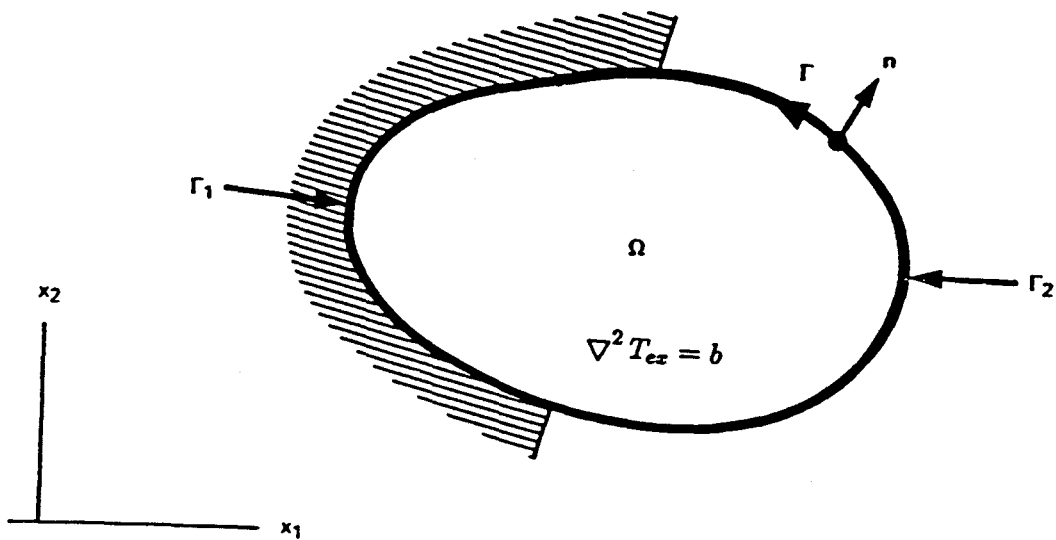


Figure 1.2: Domaine considéré

### 1.6.2 Solution fondamentale

Nous allons prendre comme fonction poids  $T^*$  la solution fondamentale du laplacien. Cette solution [13, 16, 21, 22] est une fonction singulière de deux points qui représente la température générée par une source ponctuelle fictive, unitaire, concentrée au point  $\mathbf{s}$ . L'effet de cette source se propage du point  $\mathbf{s}$  à l'infini, en particulier vers tout point  $\mathbf{x}$  du domaine  $\Omega$ , (Figure 1.3).

$T^*$  est la solution de l'équation :

$$\nabla^2 T^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = -\Delta(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \quad (1.22)$$

La fonction de distribution de Dirac  $\Delta$  vérifie les propriétés suivantes :

$$\Delta(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{si } \mathbf{s} \neq \mathbf{x} \quad (1.23)$$

$$\Delta (s, x) = \infty \text{ si } s = x \tag{1.24}$$

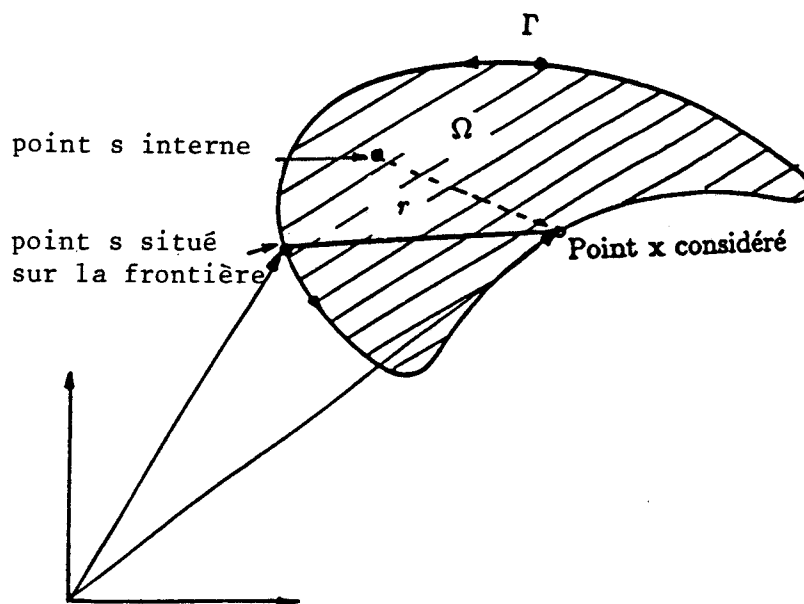
$$\int_{\Omega} T(x) \Delta (s, x) d\Omega = T(s) \tag{1.25}$$

La fonction  $T^*$  solution de l'équation (1.22) est la fonction de Green définie par :

$$T^*(s, x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(s, x)} \text{ en } \mathbf{2D} \tag{1.26}$$

$$T^*(s, x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r(s, x)} \text{ en } \mathbf{3D} \tag{1.27}$$

$r = |s - x|$  est la distance euclidienne (*Figure 1.3*) entre le point  $s$  (fixe) et le point considéré  $x$  (variable) sur le contour  $\Gamma$ .



**Figure 1.3 :** Définition du point  $s$  et du point  $x$  de  $\Gamma$  en 2D

Pour l'opérateur laplacien en thermique stationnaire, la fonction  $T^*$  dérive alors d'un potentiel newtonien dans le cas des problèmes tridimensionnels (**3D**) et d'un potentiel logarithmique pour les problèmes bidimensionnels (**2D**).

### 1.6.3 Formulation intégrale directe

Le point de départ de cette formulation est l'intégrale du résidu pondéré (1.18). D'après le théorème de Green :

$$\int_{\Omega} [(\nabla^2 T)T^* - (\nabla^2 T^*)T] d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial T}{\partial n} T^* - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (1.28)$$

l'intégrale du résidu pondéré ( 1.18 ) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla^2 T - b) T^* d\Omega &= \\ \int_{\Omega} (\nabla^2 T^*) T d\Omega + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial T}{\partial n} T^* - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d\Gamma - \int_{\Omega} b T^* d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

Des propriétés de la solution fondamentale  $T^*$  et de la fonction  $\Delta$  de Dirac nous pouvons déduire de l'équation (1.29) l'expression suivante :

$$T(\mathbf{s}) = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial T}{\partial n} T^* - \frac{\partial T^*}{\partial n} T \right) d\Gamma - \int_{\Omega} b T^* d\Omega \quad (1.30)$$

Dans l'équation (1.30), il apparaît une intégrale sur le domaine  $\Omega$  si le terme  $b$  n'est pas nul.

Bien que cette intégrale n'introduise pas d'inconnue supplémentaire au problème, elle diminue cependant l'efficacité de la méthode .

En effet, dans certains cas complexes l'intégrale sur le domaine ne peut être évitée et une discrétisation du domaine en cellules internes est nécessaire (*Figure 1.9*).

Notons que dans le cas d'une source de chaleur interne ponctuelle ou uniformément répartie dans le domaine, l'intégrale sur le domaine peut être transformée en une intégrale de frontière équivalente [13, 25].

L'équation (1.30) permet de déterminer le champ de température en tout point  $\mathbf{s}$  à l'intérieur du domaine lorsque toutes les inconnues à la frontière sont calculées.

Lorsque le point  $\mathbf{s}$  se trouve sur la frontière  $\Gamma$ , l'équation (1.30) n'est plus valable. On démontre [13] qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$C(\mathbf{s})T(\mathbf{s}) = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial T}{\partial n} T^* - \frac{\partial T^*}{\partial n} T \right) d\Gamma - \int_{\Omega} b T^* d\Omega \quad (1.31)$$

où le coefficient  $C(\mathbf{s})$ , appelé terme libre est défini par :

$$C(\mathbf{s}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{s} \in \Omega, \mathbf{s} \notin \Gamma \\ \frac{\phi}{2\pi} & \text{si } \mathbf{s} \in \Gamma \end{cases}$$

$\phi$  désigne la portion d'angle solide sous lequel du point  $\mathbf{s}$  on voit le domaine  $\Omega$ .

L'équation (1.31) est l'équation fondamentale de la méthode des éléments de frontière : elle est le point de départ de la formulation numérique de la MEF.

#### 1.6.4 Formulation numérique : discrétisation

Dans la MEF tous les types d'éléments utilisés dans la MEF peuvent servir pour discrétiser l'intérieur du domaine et sa frontière.

La MEF offre la possibilité d'introduire des éléments constants et des éléments discontinus [13, 16].

Pour des raisons d'efficacité, on utilise souvent dans les codes d'éléments de frontière des éléments constants [13] pour représenter la surface du domaine. En effet les éléments constants facilitent le calcul des intégrales curvilignes qui interviennent dans la formulation numérique de la MEF [13, 25]. Une présentation d'un certain nombre de ces éléments, qui forment les éléments de base de la MEF et la généralisation de la construction de nouveaux types d'éléments sont proposées dans les références [13, 25].

L'approche que nous avons utilisée est basée uniquement sur l'utilisation d'éléments de type constant.

L'avantage principal de ces éléments réside dans la simplicité avec laquelle ils permettent la mise au point des codes de calculs d'éléments de frontière. De plus leur utilisation minimise les temps CPU.



Supposons maintenant pour simplifier que le terme de sources  $b$  dans l'équation (1.19) soit nul. Cette simplification ne restreint pas la généralité de la formulation intégrale de la MEFM [13,25].

Dans ce cas, l'équation fondamentale de la MEFM devient :

$$C(\mathbf{s})T(\mathbf{s}) = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial T}{\partial n} T^* - \frac{\partial T^*}{\partial n} T \right) d\Gamma \quad (1.32)$$

Discretisons maintenant la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$  supposé bidimensionnel en  $N$  éléments constants dont  $N_1$  sur  $\Gamma_1$  et  $N_2$  sur  $\Gamma_2$ ,  $N_1 + N_2 = N$ .

Les valeurs de la fonction d'approximation  $T$  et de sa dérivée normale  $\frac{\partial T}{\partial n}$  seront supposées constantes sur chaque petit élément et égales à leur valeur respective au noeud milieu de l'élément.

La forme discrétisée de l'équation (1.32) peut alors s'écrire pour tout point  $i$  donné sous la forme :

$$C_i T_i = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} \left( T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (1.33)$$

Notons que pour les éléments constants, la frontière du domaine est représentée par un contour régulier au voisinage de chacun des noeuds du maillage ; par conséquent la portion d'angle solide  $\phi$  sous lequel du point  $i$  on voit le domaine est  $\pi$ .

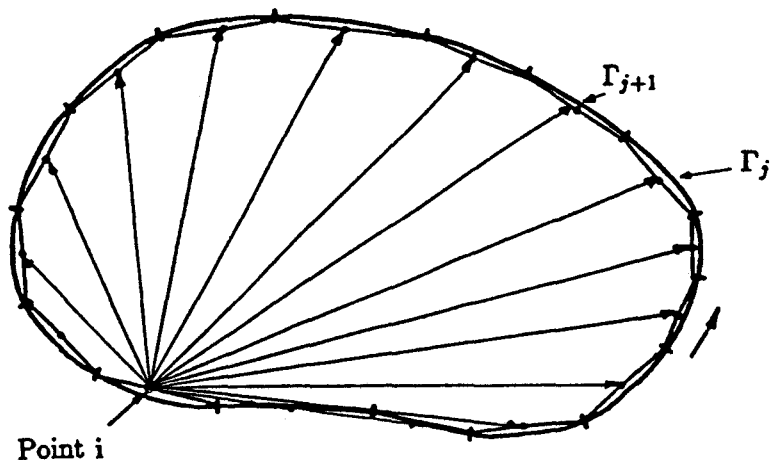
Le terme libre devient alors :

$$C_i = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Comme les valeurs nodales sont supposées constantes sur chacun des éléments  $\Gamma_j$  qui représentent le contour, on peut les sortir des intégrales et nous obtenons l'équation :

$$\frac{T_i}{2} + \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T^*}{\partial n} d\Gamma \right) T_j = \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma \right) \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_j \quad (1.34)$$

Les indices  $i$  et  $j$  désignent respectivement le point  $i$  (point d'application de la solution fondamentale  $T^*$ ) et l'élément  $\Gamma_j$  sur lequel on effectue les intégrations (*Figure 1.4*).



**Figure 1.4 :** Relation entre la solution fondamentale au point  $i$  et les éléments de frontière  $\Gamma_j$

Posons :

$$\frac{\partial T}{\partial n} = q$$

Nous pouvons maintenant écrire l'équation (1.34) sous la forme discrète,

$$\sum_{j=1}^N P_{ij} T_j = \sum_{j=1}^N S_{ij} q_j \quad (1.35)$$

où

$$S_{ij} = \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma \quad (1.36)$$

et

$$P_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T^*}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad (1.37)$$

$\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

L'ensemble des équations (1.35) peut s'écrire sous la forme matricielle,

$$[\mathbf{P}]\{\mathbf{T}\} = [\mathbf{S}]\{\mathbf{Q}\} \quad (1.38)$$

$\mathbf{P}$  et  $\mathbf{S}$  sont deux matrices  $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ,  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{Q}$  sont des vecteurs de dimension  $\mathbf{N}$  contenant les valeurs des températures et des flux respectivement, sur le contour  $\Gamma$ .

Dans le cas de conditions aux limites du type (1.20), (1.21),  $N_1$  valeurs de  $T$  et  $N_2$  valeurs de  $q$  sont connues sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  respectivement avec  $N_1 + N_2 = N$ .

Il reste donc à déterminer  $N$  inconnues sur le contour  $\Gamma$  en résolvant le système d'équations (1.38).

Après l'introduction des conditions aux limites dans le système d'équations (1.38), nous pouvons le réorganiser sous la forme suivante :

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{B}\} \quad (1.39)$$

$\mathbf{X}$  est un vecteur contenant les inconnues  $T$  et  $q$  aux noeuds du maillage.  $\mathbf{B}$  est un vecteur connu, défini à partir des conditions aux limites du problème.

Notons que dans le système (1.39), les inconnues sont en général mixtes : elles peuvent contenir des températures et des flux et pas uniquement des températures.

La résolution numérique par la MEFR du problème physique défini par l'équation (1.19) et les conditions aux limites (1.20), (1.21) comprend les étapes suivantes :

1. Résoudre par une méthode directe (méthode d'élimination de Gauss par exemple) le système d'équations (1.39) pour déterminer les inconnues surfaciques (températures et flux).
2. Calculer en tout point  $i$  interne au domaine, arbitrairement choisi, la température en fonction des valeurs surfaciques déjà calculées de la température et du flux. Les valeurs des températures internes sont obtenues par la formule suivante :

$$T_i = \sum_{j=1}^N \overline{S}_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N \overline{P}_{ij} T_j \quad (1.40)$$

Les coefficients des matrices  $\overline{\mathbf{S}}$  et  $\overline{\mathbf{P}}$  sont calculés de la même façon que pour les matrices  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{P}$  sauf que la solution fondamentale  $T^*$  s'applique maintenant au point interne  $i$ .

### 1.6.5 Calcul des coefficients des matrices $\mathbf{S}$ et $\mathbf{P}$

Les intégrales (1.36) et (1.37) peuvent être évaluées en utilisant une formule d'intégration numérique par exemple la méthode de quadrature de Gauss dans le cas où les indices  $i$  et  $j$  sont différents.

Dans le cas où  $i = j$ , la présence de la singularité due à la solution fondamentale  $T^*$  définie par les équations (1.26) et (1.27), nécessite en général l'utilisation de formules d'intégration d'ordre élevé pour calculer les intégrales [13].

Dans le cas particulier des éléments constants, les coefficients  $S_{ii}$  et  $P_{ii}$  peuvent être déterminés analytiquement.

Pour évaluer ces coefficients, nous effectuerons les intégrations sur des éléments constants de référence. Un élément constant de référence est caractérisé par la variable intrinsèque  $\eta$  en 2D. Alors que l'élément constant physique est défini par l'abscisse curviligne  $x$  (Figure 1.5).

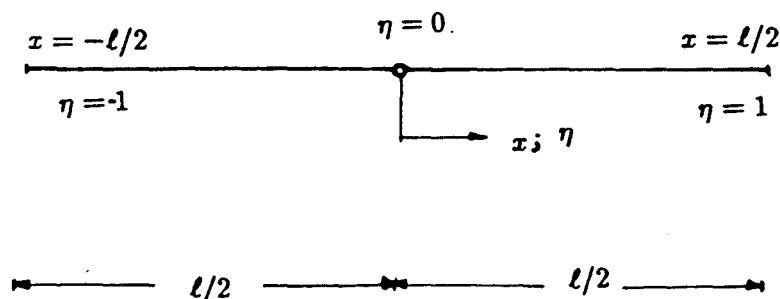


Figure 1.5: Élément constant physique, élément constant de référence

En 2D nous avons :

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r} \right) \\ \frac{\partial T^*}{\partial n} &= \frac{\partial T^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\partial T^*}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_i} \frac{\partial T^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \equiv 0 \quad (1.42)$$

et

$$P_{ii} = \frac{1}{2} \quad (1.43)$$

L'intégrale (1.42) est nulle du fait que la normale  $\mathbf{n}$  au noeud  $i$  est toujours perpendiculaire à l'élément constant  $\Gamma_i$ .

Le coefficient  $S_{ii}$  ( $1 \leq i \leq N$ ) est défini par :

$$S_{ii} = \int_{\Gamma_i} T^* d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} \ln \left( \frac{1}{r} \right) d\Gamma \quad (1.44)$$

L'intégrale précédente est effectuée sur un élément constant physique ( $d\Gamma = dr$ ).

Le passage d'un élément réel à un élément de référence ou de calcul s'exprime par le changement de coordonnées :

$$r = |x| = \left| \frac{\eta \ell}{2} \right| \quad (1.45)$$

où  $\ell$  est la longueur de l'élément considéré. Si nous considérons la symétrie de l'élément de référence (cf. *figure 1.5*) , nous pouvons écrire l'équation (1.44) sous la forme :

$$S_{ii} = \frac{\ell_i}{2\pi} \int_0^1 \ln \left( \frac{2}{\eta \ell_i} \right) d\eta = \frac{\ell_i}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{2}{\ell_i} \right) + \int_0^1 \ln \left( \frac{1}{\eta} \right) d\eta \right] \quad (1.46)$$

ou encore :

$$S_{ii} = \frac{\ell_i}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{2}{\ell_i} \right) + 1 \right] \quad (1.47)$$

Pour  $i \neq j$  nous avons utilisé les formules de quadrature de Gauss qui donnent :

$$S_{ij} = \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma = |J| \int_{-1}^{+1} T^*(\eta) d\eta = \frac{\ell_j}{2} \sum_{k=1}^{NPG} (T^*)_k w_k \quad (1.48)$$

$$P_{ij} = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T^*}{\partial n} d\Gamma = |J| \int_{-1}^{+1} T^*(\eta) d\eta = \frac{\ell_j}{2} \sum_{k=1}^{NPG} \left( \frac{\partial T^*}{\partial n} \right)_k w_k \quad (1.49)$$

où :

- $k$  désigne un point de Gauss situé sur  $\Gamma_j$  et  $w_k$  le poids correspondant.
- $|J| = \ell_j/2$  est le jacobien dû au passage de l'élément réel à l'élément de référence.
- NPG est le nombre de points de Gauss utilisés.

### 1.6.6 Conditions aux limites mixtes

Il est important de montrer comment d'autres conditions aux limites, souvent rencontrées dans la pratique, peuvent être incorporées dans la formulation de la MEFR.

Considérons le cas où les conditions aux limites sont de type Fourier :

$$eT + dq = f \quad (1.50)$$

L'équation (1.50) est une relation linéaire entre la densité de flux  $q$  et la température  $T$ .

Les fonctions  $e, d$  et  $f$  ne dépendent que de la position du point et non de la température.

Si  $d \neq 0$ , l'expression suivante est valable aux noeuds où les conditions aux limites (1.50) sont appliquées :

$$q = F - ET \quad (1.51)$$

avec :

$$\begin{aligned} F &= \frac{f}{d} \\ E &= \frac{e}{d} \end{aligned} \quad (1.52)$$

En reportant l'équation (1.51) dans l'équation (1.38), nous obtenons le système d'équations, équivalent au système (1.38) suivant :

$$[P + ES] \{T\} = F [S] \{I\} \quad (1.53)$$

$I$  est un vecteur dont toutes les composantes sont égales à l'unité.

Plus simplement, l'équation (1.53) peut s'écrire :

$$[\overline{A}] \{X\} = \{\overline{B}\} \quad (1.54)$$

La résolution du système (1.54) donne les valeurs des températures aux noeuds du maillage ; les densités de flux surfacique sont ensuite calculées en utilisant la relation (1.51). La température en un point interne est obtenue par une relation du type (1.40).

### 1.6.7 Méthode des sous-domaines

Lorsque le problème étudié est caractérisé par une région homogène par morceaux, la formulation intégrale de la MEFR s'applique à chacune des sous-régions. Le système d'équations final pour tout le domaine est ensuite obtenu par assemblage des équations définies sur chacun des sous-domaines. Cependant, il convient de définir correctement les conditions de compatibilité et d'équilibre des températures et des densités de flux entre les interfaces.

Considérons le cas des deux sous-domaines définis par la figure 1.6.

Sur le sous-domaine  $\Omega_1$ , nous définissons :

$T_1, Q_1$  : Température et densité de flux sur la portion de frontière  $\Gamma_1$   
 $T_I^1, Q_I^1$  : Température et densité de flux à l'interface  $I$ .

Et, sur l'autre sous-domaine  $\Omega_2$  :

$T_2, Q_2$  : Température et densité de flux sur la portion de frontière  $\Gamma_2$   
 $T_I^2, Q_I^2$  : Température et densité de flux à l'interface  $I$ .

Le système d'équations (1.38) correspondant à  $\Omega_1$  peut s'écrire sous la forme :

$$[P^1 P_I^1] \begin{Bmatrix} T^1 \\ T_I^1 \end{Bmatrix} = [S^1 S_I^1] \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q_I^1 \end{Bmatrix} \quad (1.55)$$

De même pour le sous-domaine  $\Omega_2$ , nous pouvons écrire :

$$[P^2 P_I^2] \begin{Bmatrix} T^2 \\ T_I^2 \end{Bmatrix} = [S^2 S_I^2] \begin{Bmatrix} Q^2 \\ Q_I^2 \end{Bmatrix} \quad (1.56)$$

Exprimons maintenant les conditions d'équilibre et de compatibilité à l'interface  $I$  :

$$T_I^1 = T_I^2 \quad (1.57)$$

et

$$Q_I^1 = -Q_I^2 \quad (1.58)$$

ou encore

$$T_I = T_I^1 = T_I^2 \quad (1.59)$$

$$Q_I = Q_I^1 = -Q_I^2 \quad (1.60)$$

En reportant ces conditions dans les équations (1.55) et (1.56), nous obtenons pour tout le domaine  $\Omega$ , le système :

$$\begin{bmatrix} P^1 & P_I^1 & 0 \\ 0 & P_I^2 & P^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T^1 \\ T_I \\ T^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S^1 & S_I^1 & 0 \\ 0 & -S_I^2 & S^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q_I \\ Q^2 \end{Bmatrix} \quad (1.61)$$

Comme  $T_I$  et  $Q_I$  sont en général inconnus à l'interface  $I$ , nous pouvons alors écrire le système final (1.61) sous la forme :



$$\begin{bmatrix} P^1 & P_I^1 & -S_I^1 & 0 \\ 0 & P_I^2 & S_I^2 & P^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T^1 \\ T_I \\ Q_I \\ T^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S^1 & 0 \\ 0 & S^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{Bmatrix} \quad (1.62)$$

Pour des conditions aux limites données, le système (1.62) peut être résolu par une méthode directe. La démarche qui nous a permis d'aboutir au système d'équations (1.62) peut s'étendre aux problèmes où il existe plus de deux sous-domaines. Dans ce cas, la matrice du système est encore une matrice bande, ce qui facilite le traitement numérique.

L'utilisation de la méthode des sous-domaines est particulièrement intéressante dans l'analyse des problèmes tridimensionnels multidomaines.

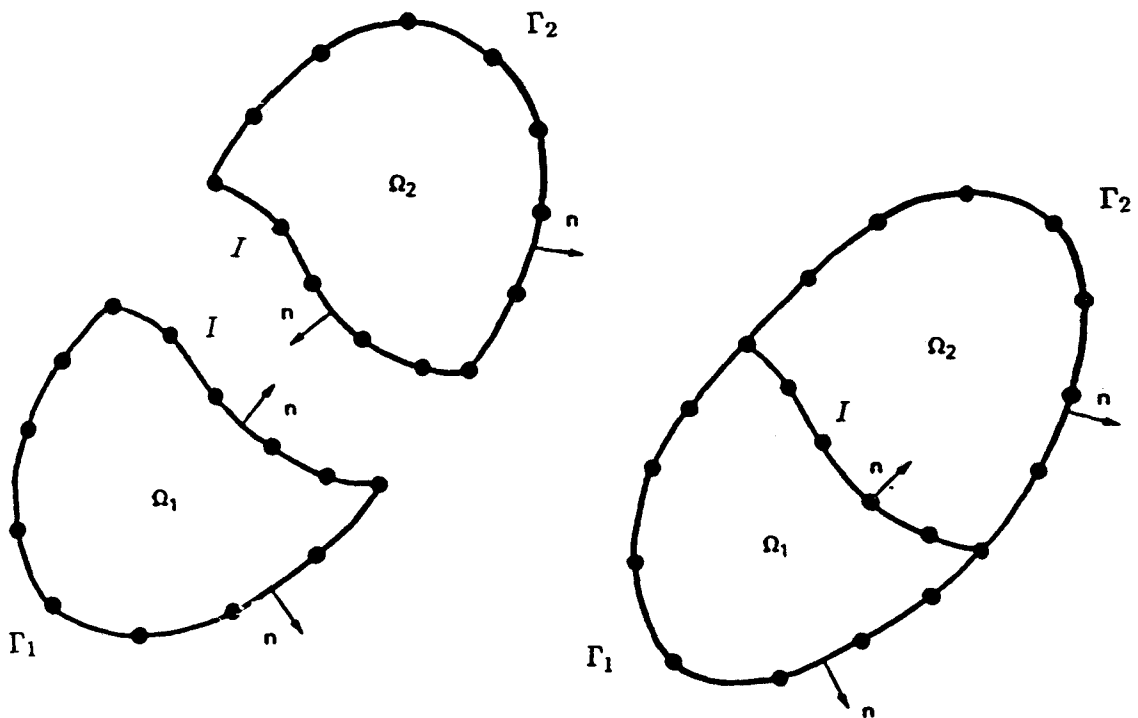


Figure 1.6 : Domaine divisé en deux sous-domaines

### 1.6.8 Diffusion non linéaire

Dans la plupart des applications pratiques, la conductivité thermique est une fonction de la température :

$$K = K(T) \quad (1.63)$$

Dans ces conditions, l'équation de transfert (1.19) devient :

$$\operatorname{div} (K \vec{\operatorname{grad}} T) = \bar{b} \quad (1.64)$$

qui s'écrit aussi :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( K \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( K \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( K \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) = \bar{b} \quad (1.65)$$

soit :

$$K \nabla^2 T + \frac{dK}{dT} \left\{ \left( \frac{\partial T}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^2 \right\} = \bar{b} \quad (1.66)$$

ou encore :

$$K \nabla^2 T = - \frac{dK}{dT} \left\{ \left( \frac{\partial T}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^2 \right\} + \bar{b} \quad (1.67)$$

L'équation (1.67) montre le caractère non linéaire du problème dû au fait que  $K = K(T)$ .

Il est évident que la MEFR ne peut pas s'appliquer directement à l'équation (1.67) car il n'existe pas une solution fondamentale connue pour cette équation.

Pour pouvoir résoudre l'équation (1.67) par la MEFR, on peut utiliser la transformation de Kirchhoff pour la linéariser.

Introduisons alors une nouvelle variable  $\theta(T)$  telle que :

$$\frac{d\theta}{dT} = \frac{K(T)}{K_0} \quad (1.68)$$

et :

$$\nabla^2 \theta = \frac{d\theta}{dT} \nabla^2 T \quad (1.69)$$

Ce qui conduit sous forme intégrale à :

$$\theta(T) = \frac{1}{K_0} \int_{T_0}^T K(T) dT \quad (1.70)$$

L'équation (1.70) est appelée transformation de Kirchhoff, où  $T_0$  est une température arbitraire de référence.  $K_0$  est la valeur de  $K$  lorsque  $T = T_0$ .

Des équations (1.68) et (1.69) on peut déduire que :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{K}{K_0} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (1.71)$$

L'équation (1.65) peut maintenant s'écrire sous la forme :

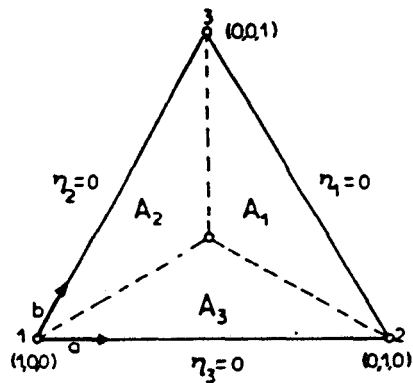
$$\nabla^2 \theta = \frac{\bar{b}}{K_0} \quad (1.72)$$

L'équation (1.72) est de la forme (1.19). Les solutions obtenues dans le cas d'une conductivité thermique  $K$  constante peuvent donc être utilisées pour l'équation (1.72) en remplaçant  $T$  par  $\theta$ . La fonction inverse  $\theta^{-1}$  permet ensuite de calculer le champ de température correspondant aux valeurs de  $\theta$  obtenues.

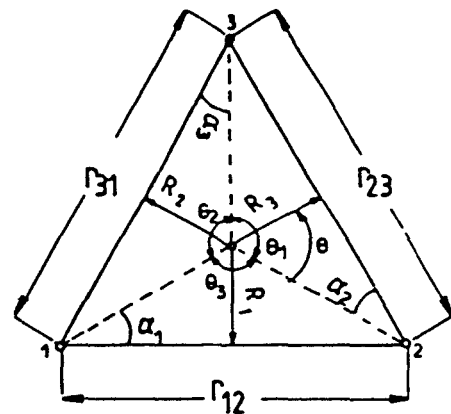
Notons cependant que le système d'équations final est linéaire pourvu que les conditions aux limites associées soient de type essentiel (1.20) ou naturel (1.21). Pour les conditions aux limites de type Fourier (1.50), l'utilisation de la transformation de Kirchhoff introduit des non linéarités et le système d'équations qui résulte de la MEFR devient également non linéaire. La résolution d'un tel système nécessite un traitement itératif.

### 1.7 Problèmes tridimensionnels stationnaires

Pour les problèmes tridimensionnels, la frontière du domaine est une surface. Dans cette section, nous ne discuterons que le cas où la surface est représentée par des éléments triangulaires constants. A un élément triangulaire constant physique, on associe souvent un élément triangulaire de référence caractérisé par le système de coordonnées intrinsèques  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  . (figure 1.7).



Cellule triangulaire de référence



Cellule triangulaire physique

Figure 1.7: Définition d'un élément triangulaire constant

Le passage d'une intégrale sur un élément triangulaire réel à une intégrale sur un élément de référence s'exprime par l'équation :

$$d \Gamma_j = |J_j| d\eta_1 d\eta_2 \tag{1.73}$$

$|J_j|$  est le jacobien égal au double de l'aire de l'élément triangulaire  $\Gamma_j$ .

Dans le cas des éléments triangulaires, la normale  $\mathbf{n}$  qui intervient dans le calcul :

$$\frac{\partial T^*}{\partial n} = \vec{\text{grad}} T^* \cdot \mathbf{n} \tag{1.74}$$

est déterminée par le produit vectoriel :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (1.75)$$

Les vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont définis sur la figure 1.7.

Pour les problèmes tridimensionnels, les matrices  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{S}$ , dans le cas des éléments triangulaires constants sont calculées de la façon suivante :

Pour les éléments non diagonaux, on utilise la méthode de quadrature de Hammer (cf. annexe A) :

- $i \neq j$  :

$$P_{ij} = 2A_j d_{ij} \sum_{k=1}^{NPG} \frac{1}{r_{ij,k}^3} w_k \quad (1.76)$$

$$S_{ij} = 2A_j \sum_{k=1}^{NPG} \frac{1}{r_{ij,k}} w_k \quad (1.77)$$

- $i = j$

$$P_{ii} = \frac{1}{2} \quad (1.78)$$

Les éléments  $S_{ii}$  sont évalués analytiquement en utilisant les coordonnées polaires (cf. figure 1.7) :

$$S_{ii} = \frac{2}{3} A_i \left\{ \frac{1}{r_{23}} \ln \left( \frac{\operatorname{tg}[(\theta_1 + \alpha_2)/2]}{\operatorname{tg}[\alpha_2/2]} \right) + \frac{1}{r_{31}} \ln \left( \frac{\operatorname{tg}[(\theta_2 + \alpha_3)/2]}{\operatorname{tg}[\alpha_3/2]} \right) + \frac{1}{r_{12}} \ln \left( \frac{\operatorname{tg}[(\theta_3 + \alpha_1)/2]}{\operatorname{tg}[\alpha_1/2]} \right) \right\} \quad (1.79)$$

où :

- $A_j$  est l'aire de l'élément triangulaire considéré.  
Les angles  $\alpha_i, \theta_i$  et les distances  $r_{12}, r_{23}$  et  $r_{31}$  sont indiqués sur la figure 1.7.
- $d_{ij}$  est la distance perpendiculaire à partir du point  $i$  au plan passant par l'élément triangulaire.

## 1.8 Problèmes à plusieurs frontières

Dans la pratique, les problèmes étudiés peuvent être caractérisés par plus d'une seule surface comme le montre la figure 1.8, avec des frontières internes et externes. En identifiant le sens de la normale, on peut différencier les frontières internes des frontières externes. Dans le cas des problèmes bidimensionnels, nous avons adopté une numérotation dans le sens trigonométrique indirect pour les noeuds définis sur une frontière interne et le sens direct pour les noeuds définis sur une frontière externe. En procédant ainsi, la normale  $\mathbf{n}$  est correctement définie sur chaque frontière. Le code de calcul que nous avons développé permet de traiter des problèmes multisurfaces.

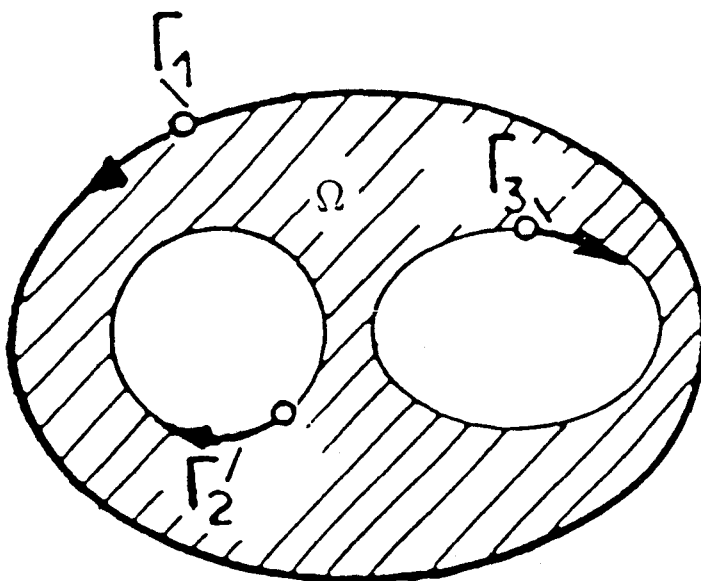


Figure 1.8 : Domaine à plus d'une frontière

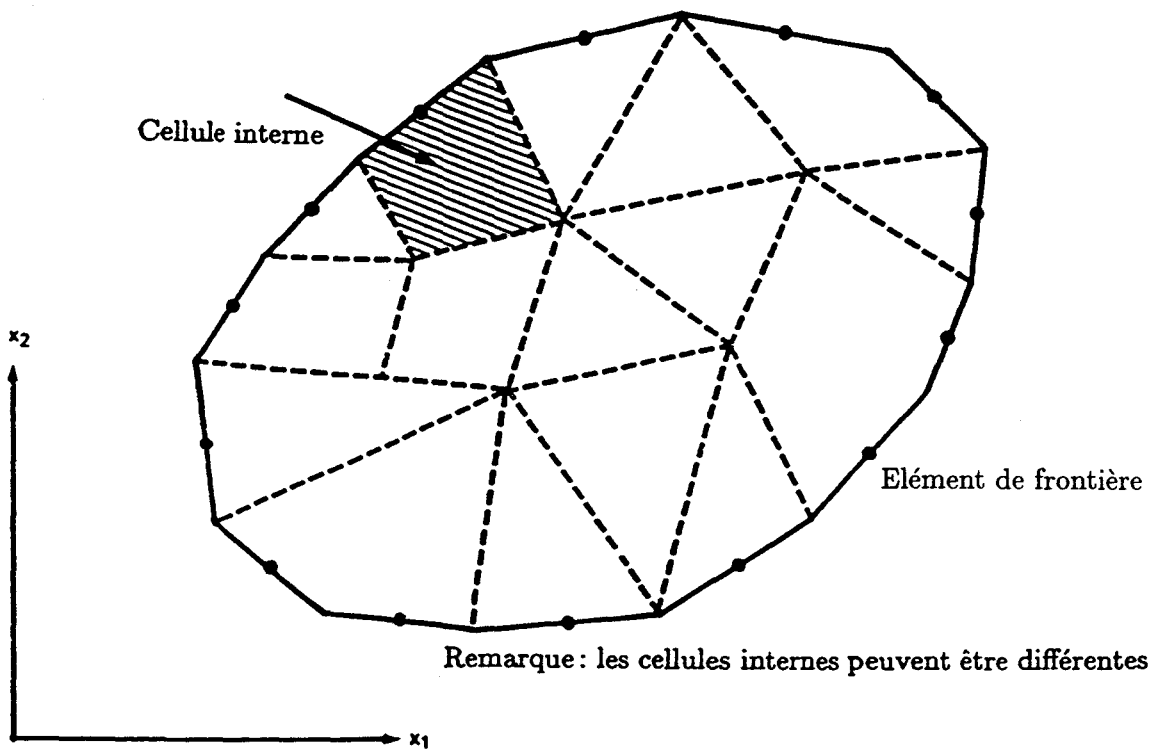


Figure 1.9 : Discrétisation en éléments de frontière et cellules internes

## 1.9 Validation du code de calcul stationnaire

### 1.9.1 Cylindre de longueur infinie, de section circulaire (rayon R)

Conditions aux limites:

$$\begin{cases} T = T_1 \text{ sur } \Gamma_1, \pi < \theta < 2\pi, r = R \\ T = T_2 \text{ sur } \Gamma_2, 0 < \theta < \pi, r = R \end{cases}$$

Changement de variables:

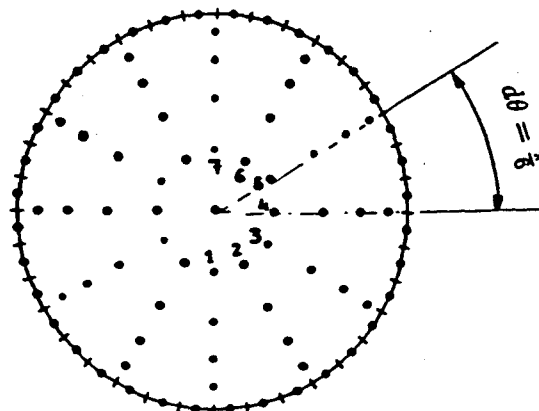
$$\begin{cases} \bar{T} = \frac{T-T_1}{T_2-T_1}, (T_2 \neq T_1) \\ \bar{r} = \frac{r}{R} \end{cases}$$

En régime stationnaire, la solution analytique est la série de Fourier [13]:

$$\begin{cases} \bar{T} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (\bar{r})^n \sin n \theta \\ n = 1, 3, 5... \end{cases}$$

Application

- $\bar{r} = 0,5$
- points internes tels que  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, d\theta = \frac{\pi}{6}$
- la figure ci-dessous indique le maillage et les points internes retenus, numérotés de 1 à 7.



Maillage et points internes



### Résultats:

- Les figures A.1.1 et A.1.2 indiquent l'influence du maillage (Nombre  $N$ , d'éléments constants utilisés). On remarque que pour une discrétisation grossière ( $N = 24$ ), la solution numérique est excellente.
- La figure A.1.3 montre l'influence du nombre de points de Gauss utilisés pour évaluer les intégrales sur le contour (cf. équations 1.48, 1.49). On constate que deux points de Gauss ( $NPG = 2$ ) suffisent pour obtenir la précision cherchée.
- Les figures A.1.4 et A.1.5 montrent la distribution surfacique du gradient normal de flux ( $q = \frac{\partial T}{\partial n}$ ). Notons que la solution analytique ne peut pas rendre compte de la singularité de ce gradient, alors que la solution numérique le permet.
- Précisons que dans le cas d'une section circulaire, il n'est pas nécessaire de créer une carte de coordonnées des noeuds de frontière. Il suffit de prendre des éléments constants de même longueur et de définir la position du premier noeud; le programme détermine automatiquement les positions des autres noeuds si l'on effectue le parcours dans le sens trigonométrique direct.

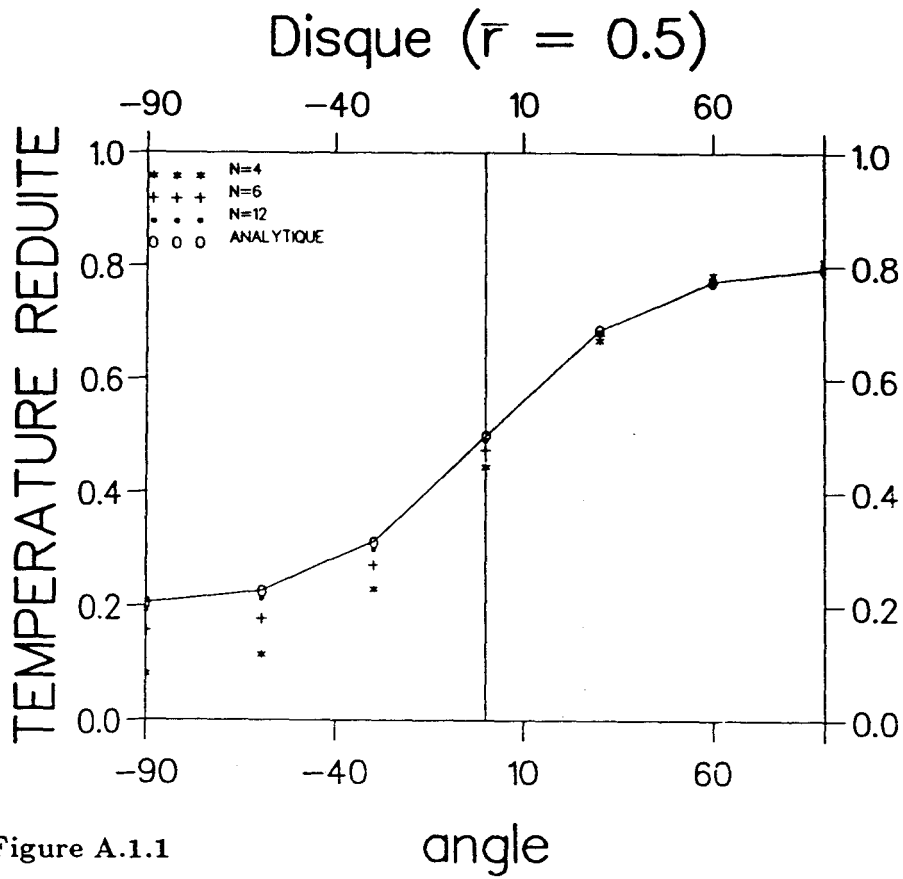


Figure A.1.1

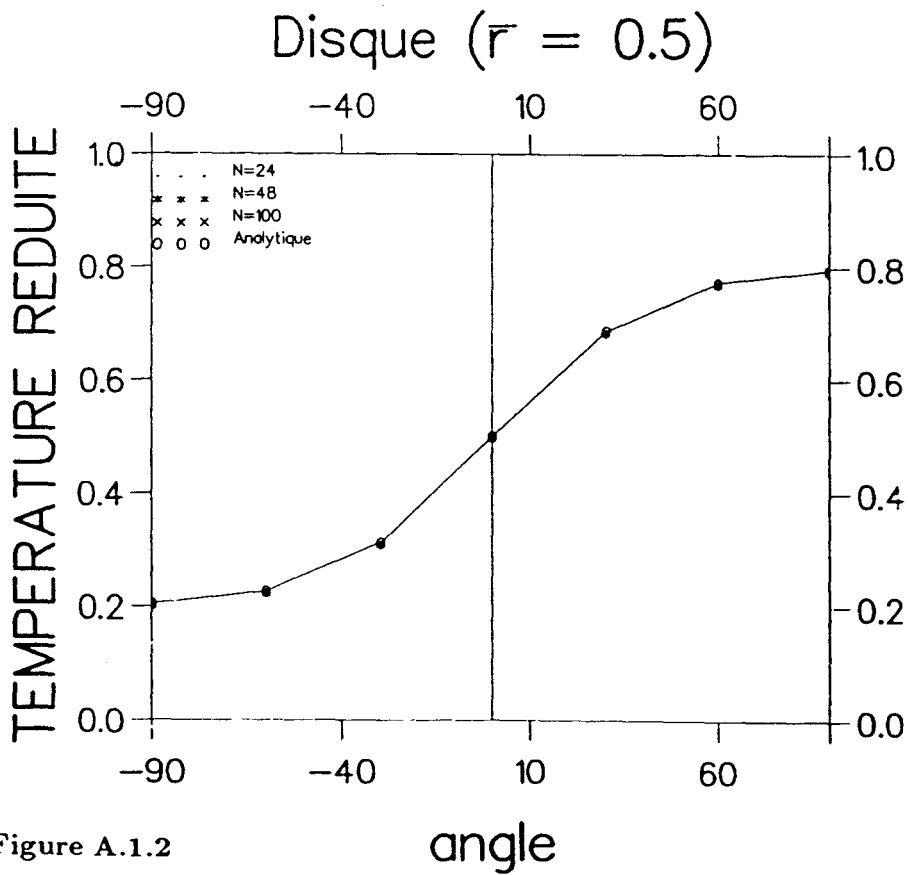


Figure A.1.2

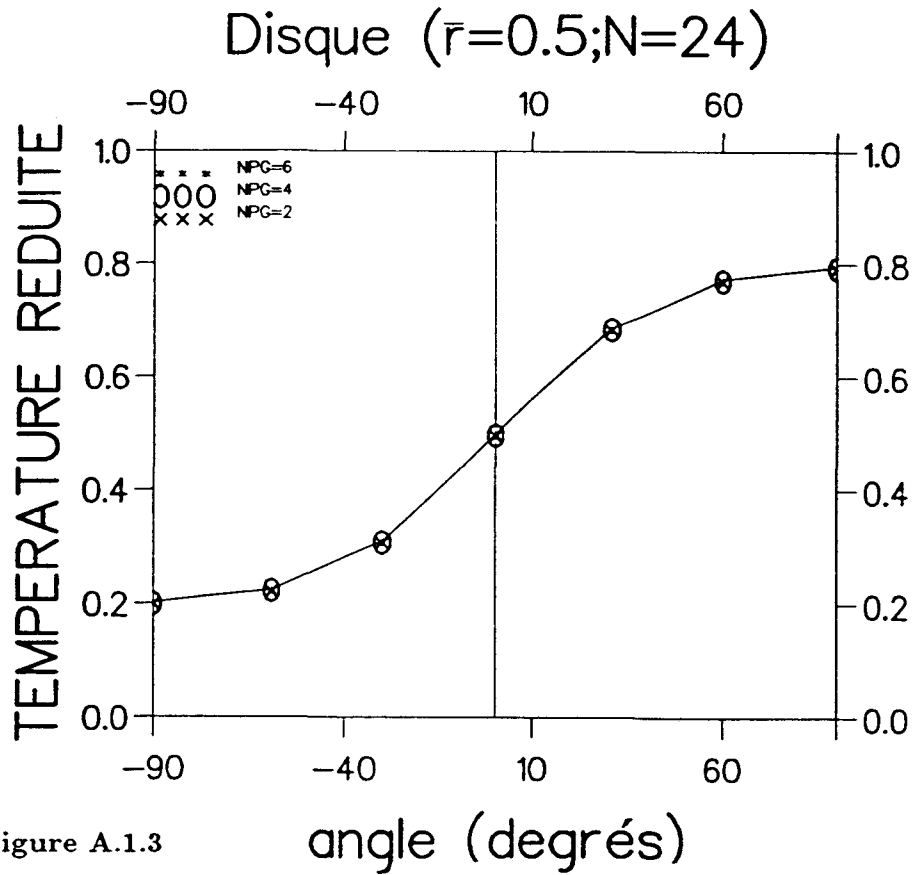


Figure A.1.3

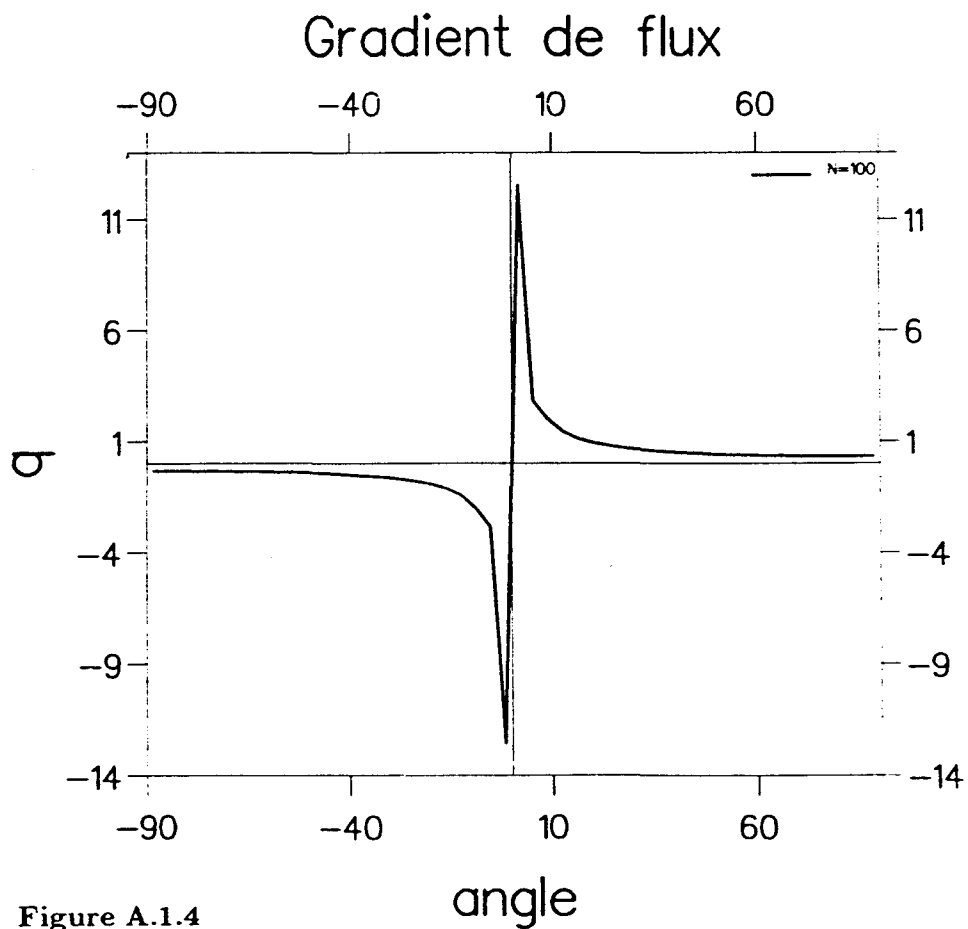


Figure A.1.4

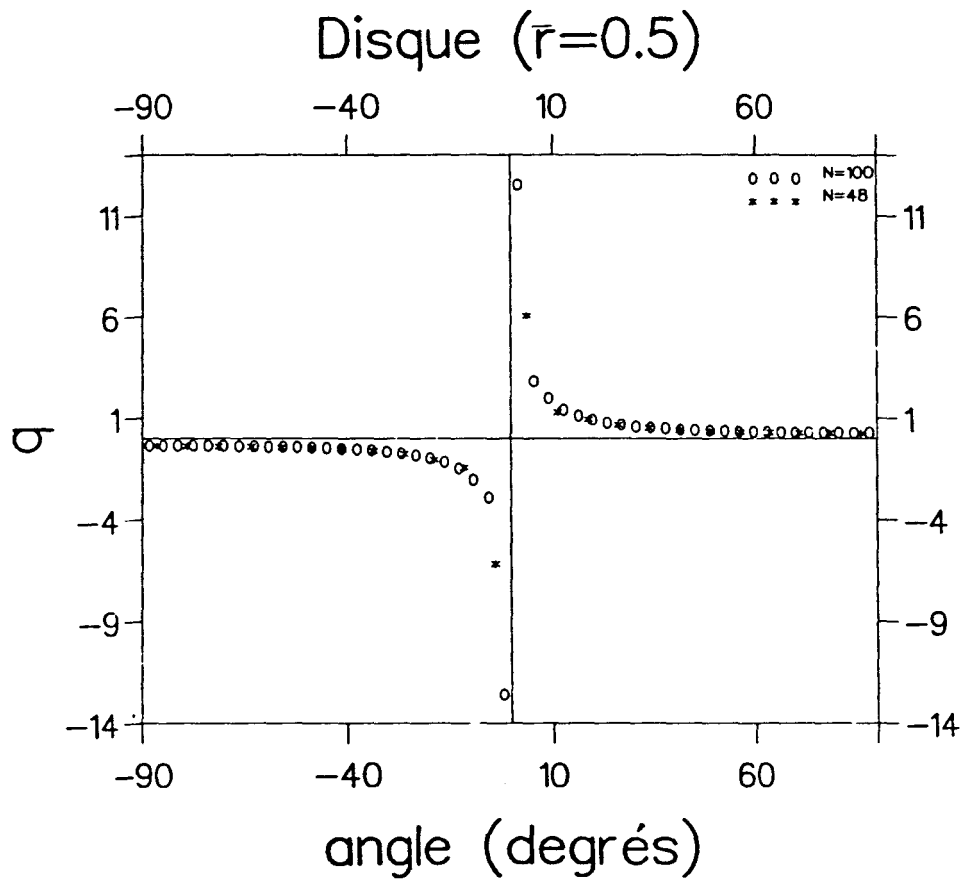


Figure A.1.5

### 1.9.2 Plaque plane

Considérons le cas d'une plaque plane ( $\ell \times L$ ), telle que  $0 \leq x \leq \ell$  et  $0 \leq y \leq L$ .

#### Conditions aux limites - 1

$$\begin{cases} T = V, & y = 0, & 0 < x < \ell, & (V, \text{température non nulle}) \\ T = 0, & x = 0, & 0 < y < L \\ T = 0, & y = L, & 0 < x < \ell \\ T = 0, & x = \ell, & 0 < y < L \end{cases}$$

En régime stationnaire, la solution analytique est [26, p. 167] :

$$T(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin \left[ \frac{(2n+1)\pi x}{\ell} \right] \operatorname{sh} \left[ \frac{(L-y)(2n+1)\pi}{\ell} \right] / \operatorname{ch} \left[ \frac{(2n+1)\pi L}{\ell} \right]$$

#### Application

- $\ell = 0,1 \text{ | (m)}$
- $L = 0,1 \text{ | (m)}$
- $V = 100 \text{ | (}^\circ\text{C)}$

Les figures A.1.6, A.1.7 et A.1.8 présentent la distribution de la température en fonction de  $y$  pour différentes valeurs de  $x$  :

- $x = \ell / 4$
- $x = \ell / 2$
- $x = 3\ell / 4$

Le contour a été discrétisé en 24 éléments constants.

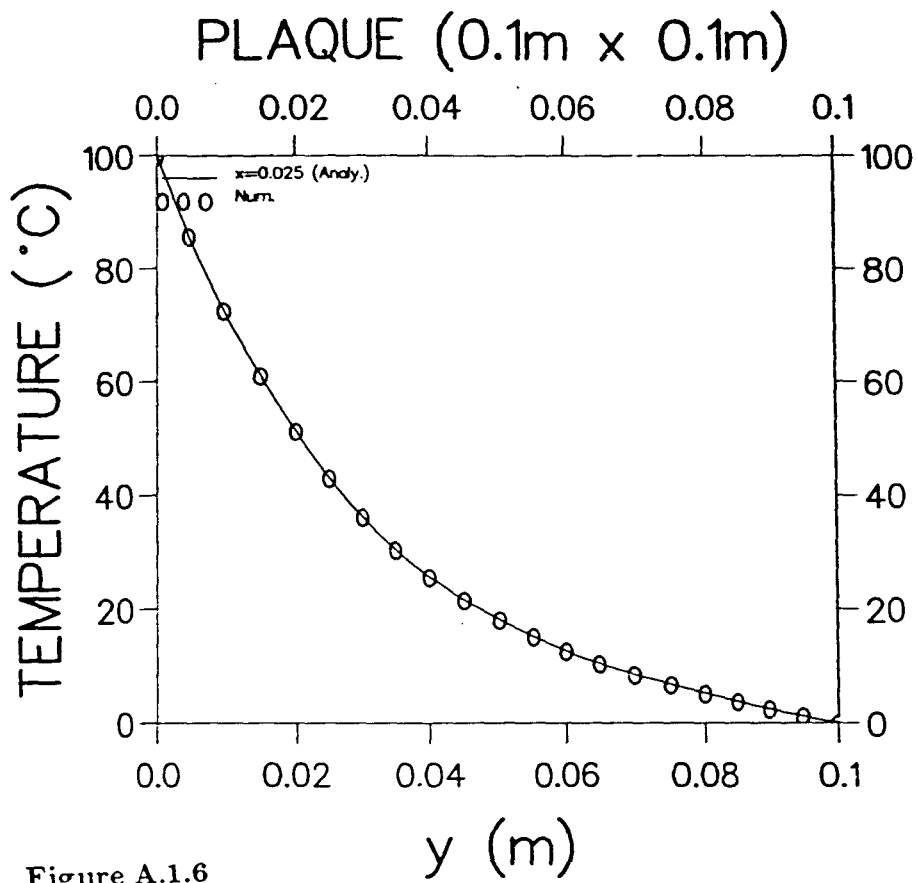


Figure A.1.6

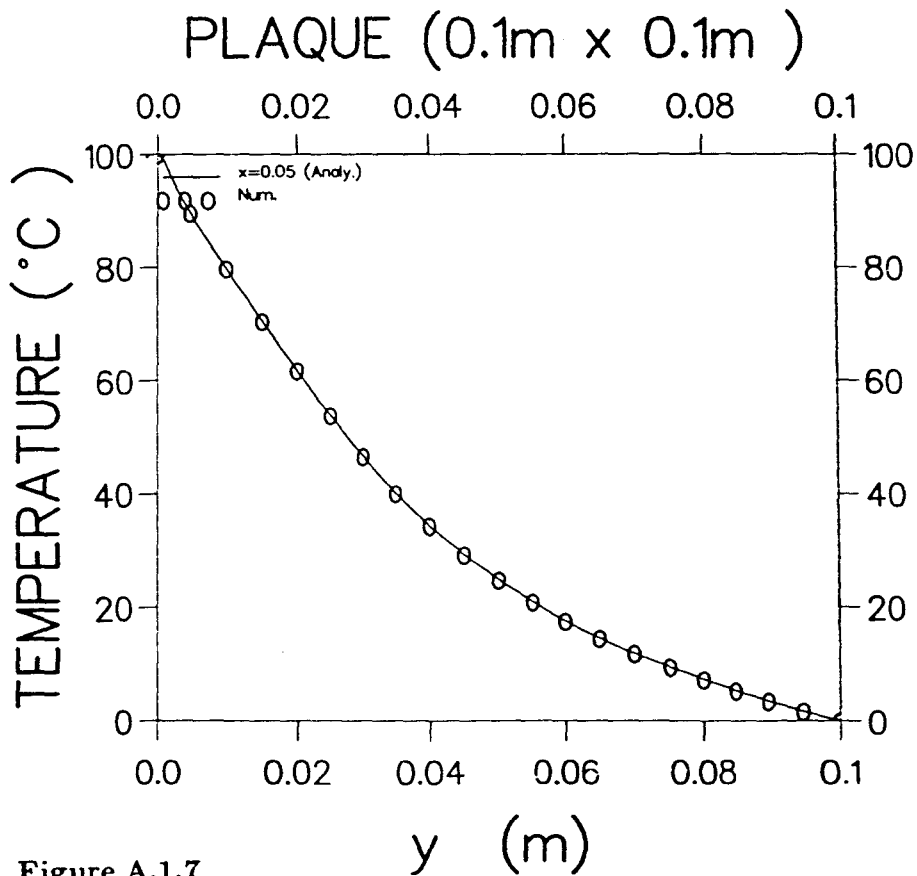


Figure A.1.7

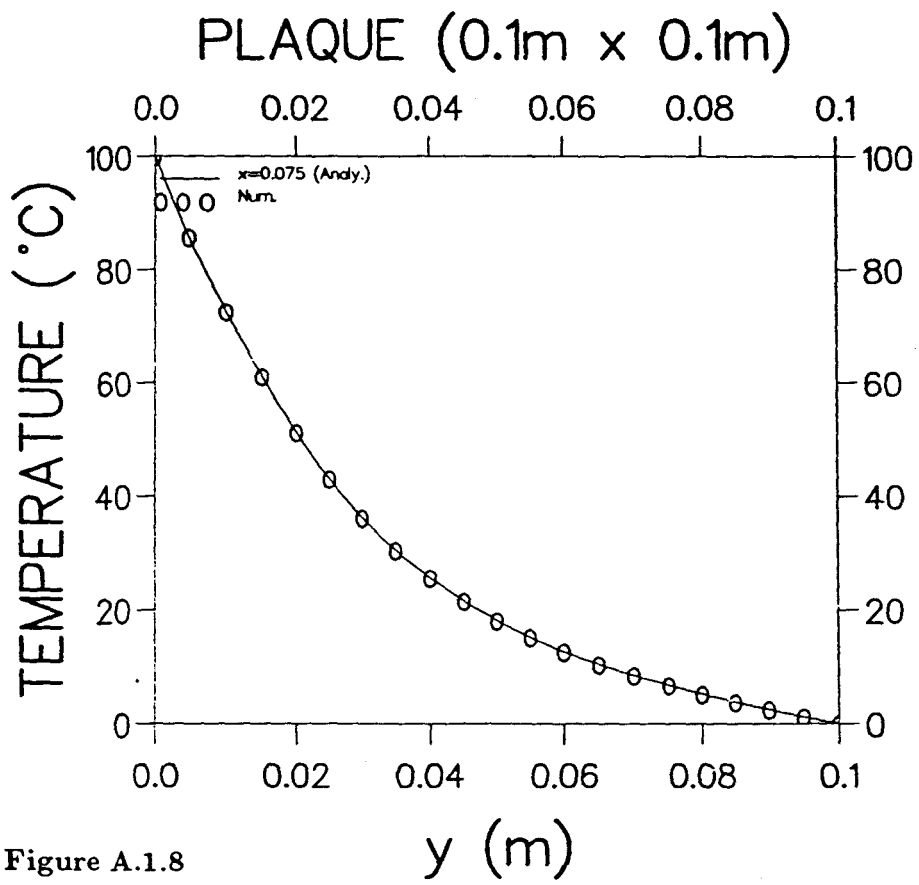


Figure A.1.8

**A.2.2 Conditions aux limites - 2**

$$\left\{ \begin{array}{ll} T = V, & y = 0, \quad 0 < x < \ell, \text{ (V, température non nulle)} \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0, & x = 0, \quad 0 < y < L \\ \frac{\partial T}{\partial x} = 0, & y = L, \quad 0 < x < \ell \\ \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{H}{K} T = 0, & x = \ell, \quad 0 < y < L \end{array} \right.$$

En régime stationnaire, la solution analytique est [26, p. 168] :

$$T = 2Vh \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha_n x) \operatorname{ch}[\alpha_n(L - y)]}{[(\alpha_n^2 + h^2)\ell + h] \cos(\alpha_n \ell) \operatorname{ch}(\alpha_n L)}$$

où les  $\alpha_n$  sont les solutions positives de l'équation :  $\alpha \operatorname{tg}(\alpha \ell) = \frac{H}{K} = h$

- H est le coefficient de transfert | ( $W.m^{-2}.K^{-1}$ )
- K est la conductivité thermique | ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ )

**Application**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \ell & = 0.05 \text{ | (m)} \\ L & = 0.1 \text{ | (m)} \\ K & = 372 \text{ | (W.m}^{-1}.K^{-1}) \\ H & = 10 \text{ | (W.m}^{-2}.K^{-1}) \end{array} \right.$$

Les figures A.1.9, A.1.10 et A.1.11 représentent respectivement la distribution de température en fonction de  $y$  pour  $x = 0$ ,  $x = \ell / 2$  et  $x = \ell$ .

Le contour a été représenté par 24 éléments constants.



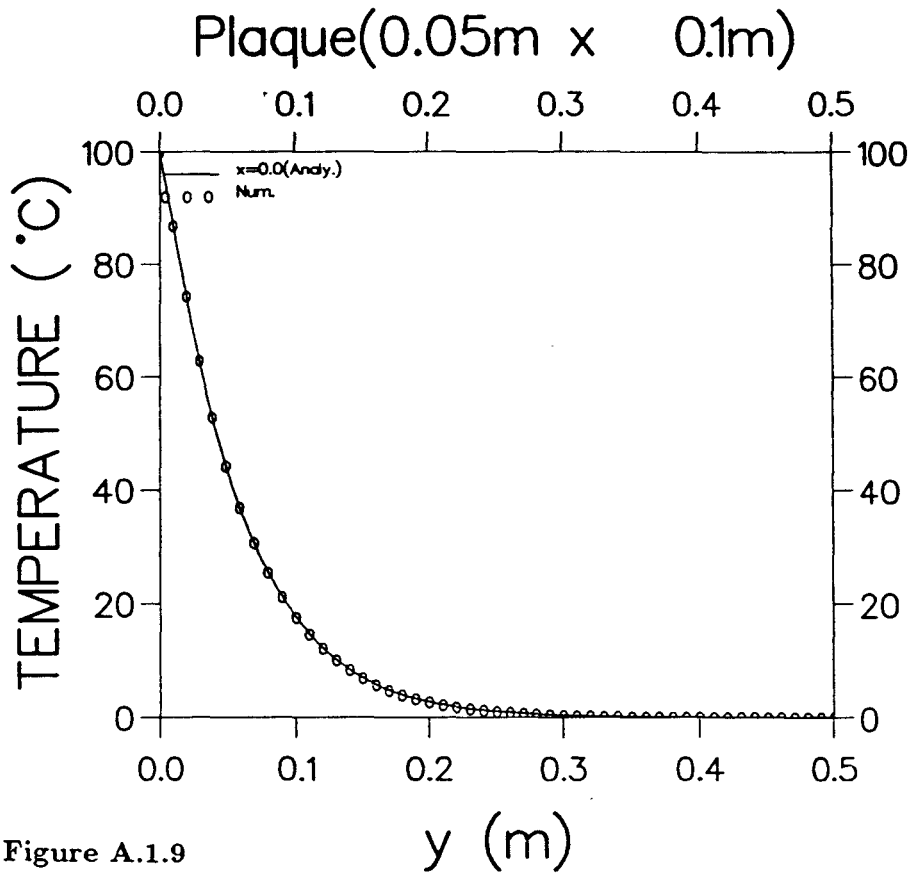


Figure A.1.9

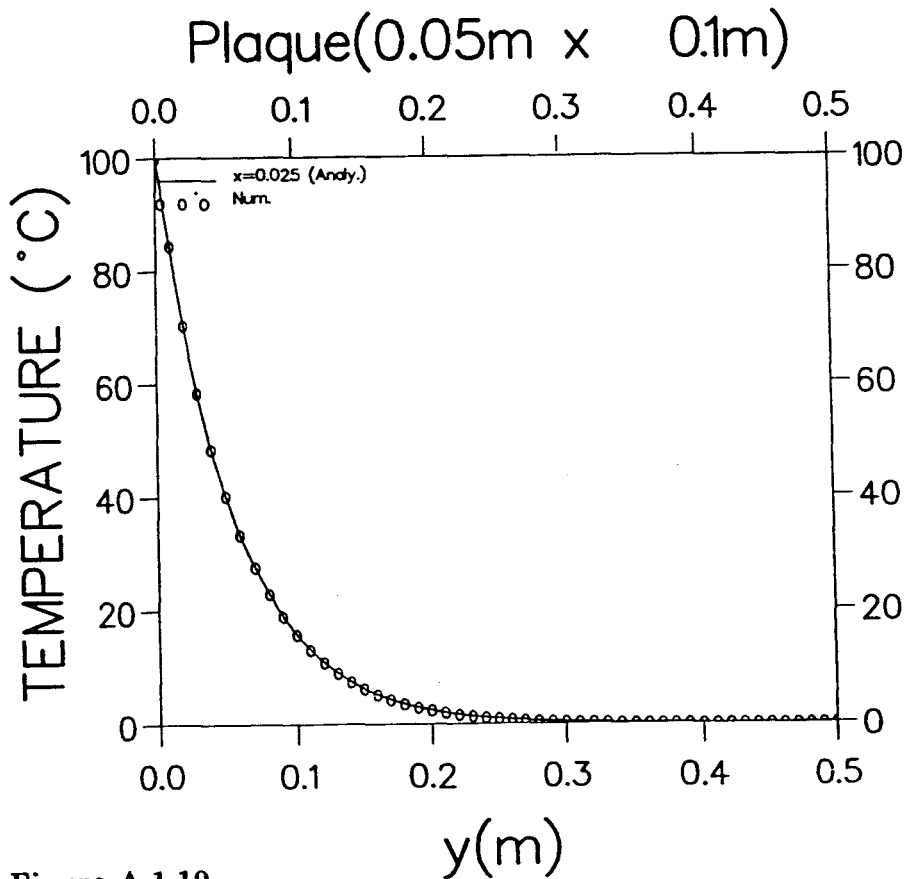


Figure A.1.10

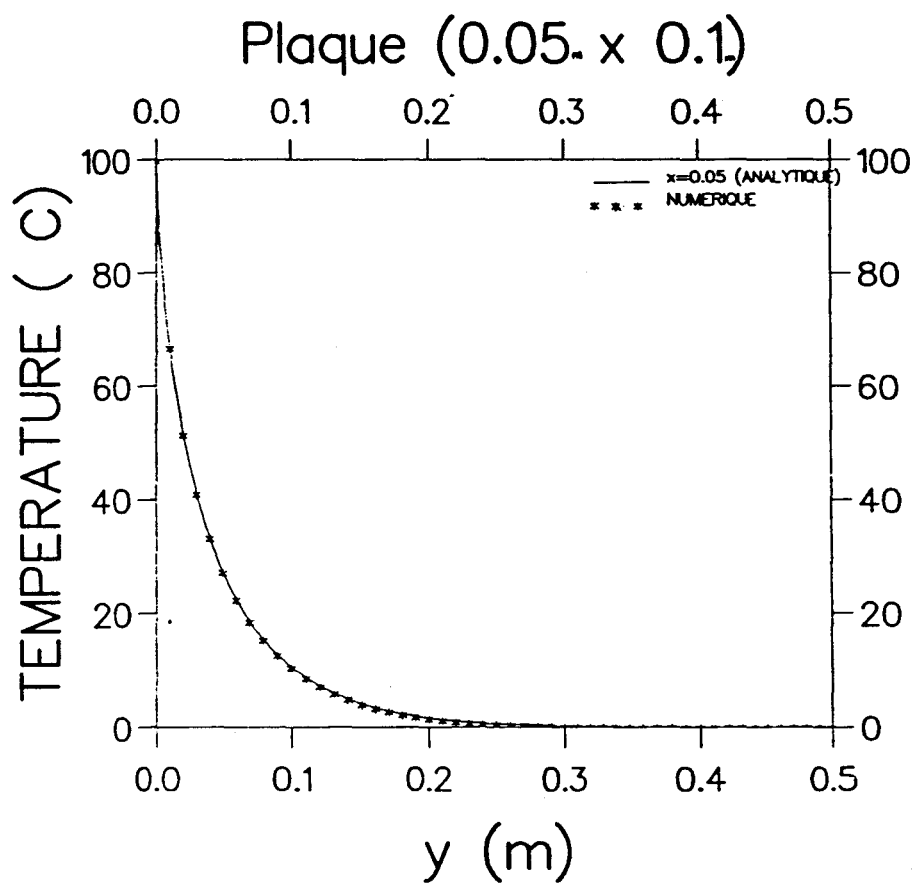


Figure A.1.11

### 1.9.3 Piston

- La figure A.1.12 représente un piston avec une répartition mixte de température et de gradient normal de flux sur le contour.
- La figure A.1.13 indique le maillage de la MEFR qui a été retenu (65 éléments constants).
- La figure A.1.14 présente le maillage MEF [14].
- Notre solution est comparée avec celle de J.L. Wearing, M.A. Sheikh et S. Noroozi [14], sur la figure A.1.15.

### 1.9.4 Turbine

La figure A.1.16 représente une turbine avec une répartition mixte de température et de gradient normal de flux sur le contour.

De la même façon que pour le piston, nous montrons les maillages MEFR (figure A.1.17) et le maillage MEF [14] (figure A.1.18). La figure (A.1.19) montre la comparaison des résultats avec ceux de J.L. Wearing, M.A. Sheikh et S. Noroozi [14].

Avant de clore cette section, rappelons que les solutions que nous venons de présenter pour lesquelles nous nous sommes placés dans l'hypothèse de conductivité thermique constante, peuvent être utilisées dans le cas où le problème est non linéaire,  $K = K(T)$ , (cf. équation 1.72).

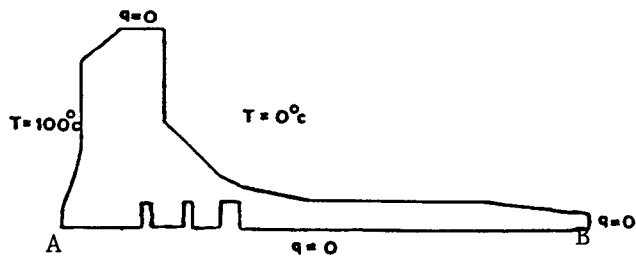


Figure A.1.12 : Conditions aux limites

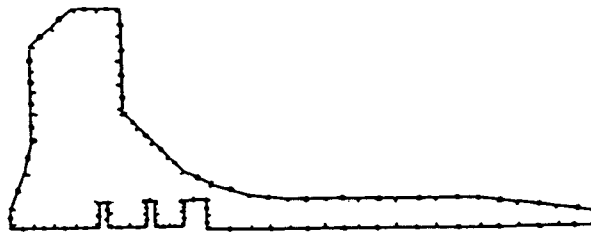


Figure A.1.13 : Maillage MEFR

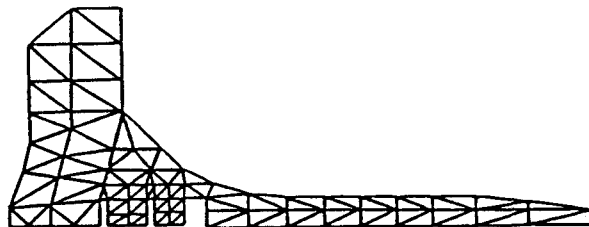


Figure A.1.14 : Maillage MEF

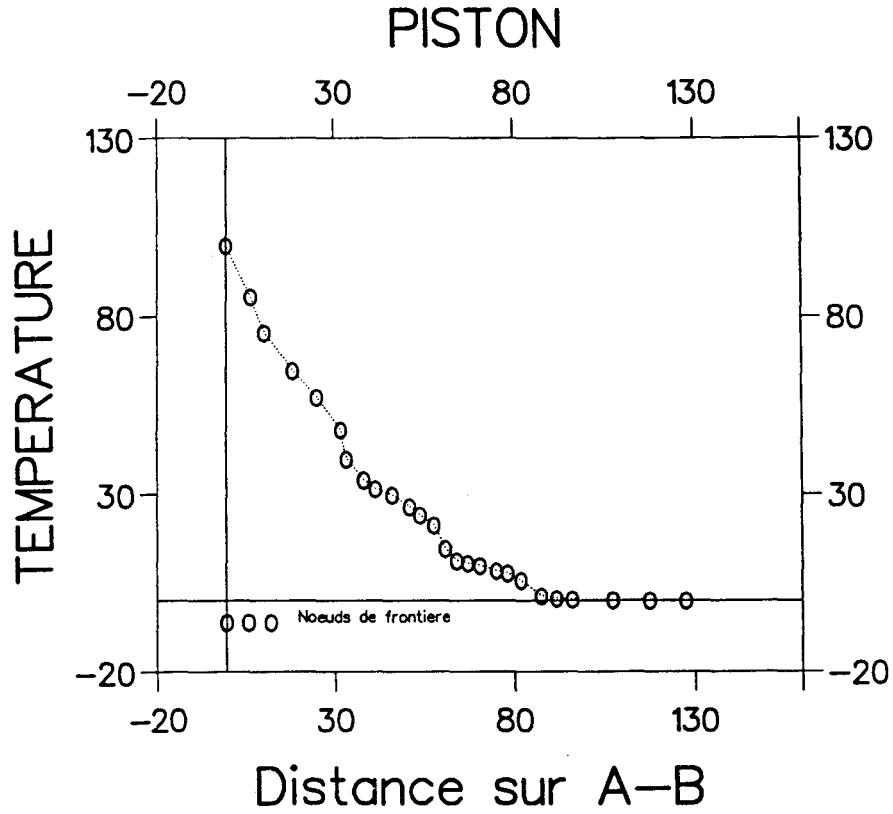
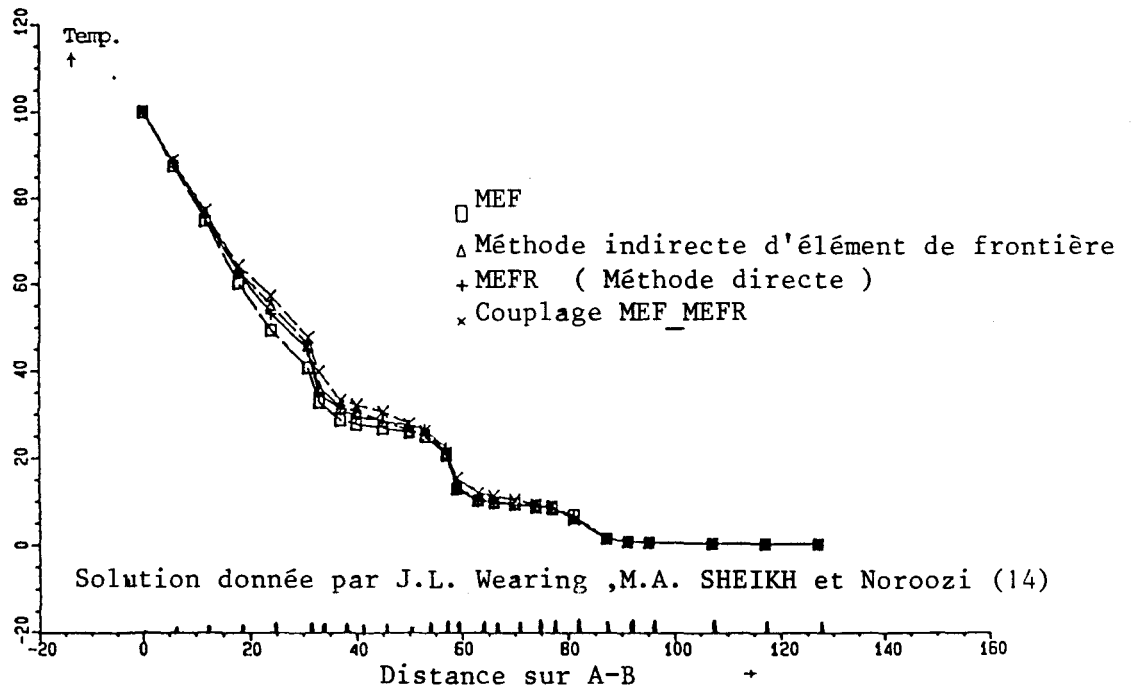


Figure A.1.15



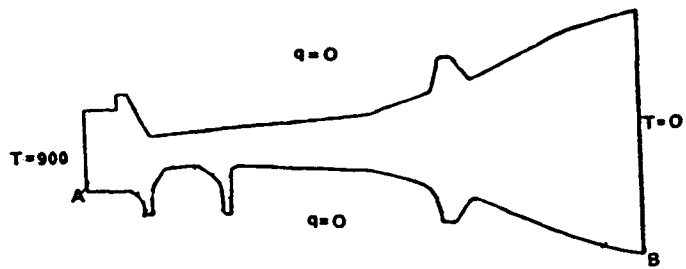


Figure A.1.16 : Conditions aux limites

Figure A.1.17 : MAILLAGE MEFR

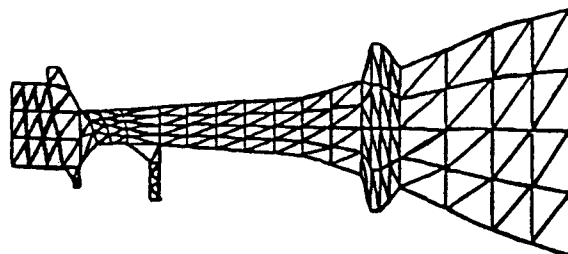
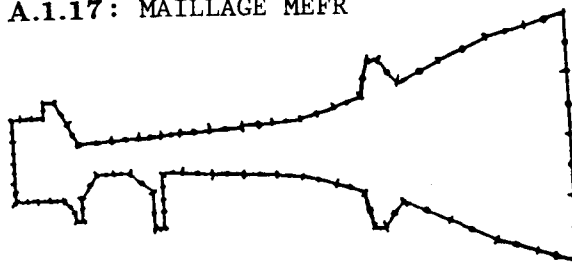


Figure A.1.18 : MAILLAGE MEF

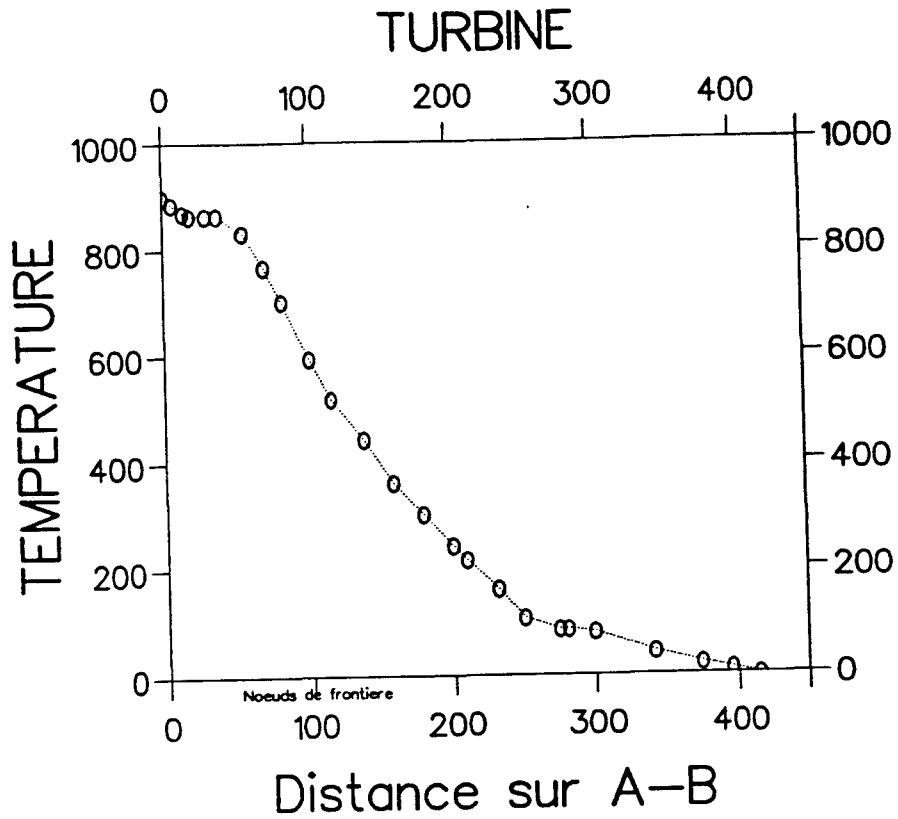
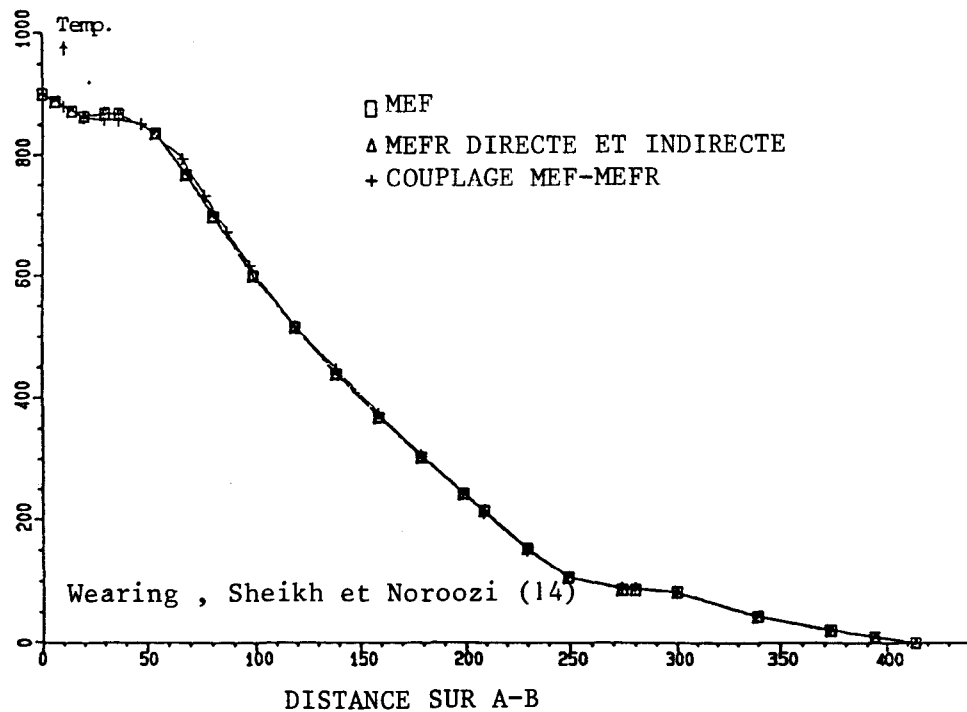


Figure A.1.19



## Chapitre 2

### Problèmes de diffusion thermique instationnaire



## Chapitre 2

# Problèmes de diffusion thermique instationnaire

La formulation développée dans ce chapitre montre comment la MEFR peut être appliquée à la résolution des problèmes thermiques gouvernés par l'équation de conduction de Fourier en régime instationnaire.

Deux schémas d'itérations dans l'espace temps, relatifs à cette formulation sont présentés et il est montré que lorsque les intégrales temporelles sont prises sur un intervalle dont la borne inférieure est toujours l'instant initial, la discrétisation du domaine en petites cellules internes peut en général être évitée.

La discussion du cas non linéaire, dans lequel la conductivité thermique dépend de la température est envisagée.

Une étude permettant de définir la limite inférieure du pas de temps lorsque la MEFR est appliquée à l'analyse des problèmes transitoires de conduction de chaleur, est proposée.

Enfin, des exemples d'application sont donnés et les résultats numériques obtenus sont comparés à des solutions analytiques.

## 2.1 Equation homogène de diffusion instationnaire

L'analyse mathématique qui suit est basée sur les hypothèses suivantes :

- Le domaine considéré  $\Omega$  est occupé par une substance pure de diffusivité thermique  $a = K/\rho c$ , constante.
- Il n'y a pas de sources volumiques de chaleur à l'intérieur du domaine.
- Toutes les frontières du domaine sont supposées fixes.

Sous ces hypothèses, l'équation de diffusion s'écrit :

$$\nabla^2 T(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1)$$

Considérons les conditions aux limites

$$T(\mathbf{x}, t) = \bar{T} \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (2.2)$$

$$-K \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial n(\mathbf{x})} = \bar{q} \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (2.3)$$

( $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  est la frontière du domaine  $\Omega$ )

et la condition initiale :

$$T(\mathbf{x}, t) = T_0(\mathbf{x}, t_0) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.4)$$

A l'opérateur,

$$L(\cdot) = \nabla^2(\cdot) - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t}(\cdot)$$

est associée [13] la fonction de Green,

$$T^* (\mathbf{x}, t_F, \mathbf{s}, t) = \frac{\exp[-r^2/4a(t_F - t)]}{[4\pi a(t_F - t)]^{z/2}} H (t_F - t) \quad (2.5)$$

$T^*$  est la solution de l'équation

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} + a \nabla^2 T^* (\mathbf{x}, t_F, \mathbf{s}, t) = -\Delta (\mathbf{s}, \mathbf{x}) \Delta (t_F, t) \quad (2.6)$$

où  $\Delta$  est la fonction delta de distribution de Dirac qui vérifie la propriété :

$$\int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} T(\mathbf{x}, t) \Delta(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \Delta(t_F, t) d\Omega = T(\mathbf{s}, t_F) \quad (2.7)$$

- $H$  est la fonction de Heaviside, introduite pour insister sur le fait que la fonction de Green  $T^*$  est nulle lorsque  $t_F - t < 0$ . Cette condition est connue sous l'appellation de condition de causalité [13, 21, 22, 26].
- $z$  est la dimension spatiale du problème,  $z = 3$  pour les problèmes tridimensionnels,  $z = 2$  pour les problèmes bidimensionnels.
- $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$  ou  $(s_1, s_2, s_3)$  est la position du point d'application de la fonction de Green.
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  ou  $(x_1, x_2, x_3)$  est la position d'un point considéré du domaine  $\Omega$  ou de sa frontière  $\Gamma$ .
- $r = |\mathbf{x} - \mathbf{s}|$  est la distance euclidienne entre le point  $\mathbf{s}$  et le point considéré  $\mathbf{x}$ .

### 2.1.1 Equation intégrale

Considérons l'intervalle de temps  $[t_0, t_F]$  pendant lequel nous étudierons le transfert de chaleur à l'intérieur du domaine  $\Omega$ .

Pour établir l'équation intégrale associée à l'équation (2.1), nous allons utiliser comme dans le chapitre précédent une technique de résidu pondéré.

Pour tout instant  $t \in [t_0, t_F]$  multiplions l'équation (2.1) par la fonction de Green  $T^*$  définie par les équations (2.5), (2.6), (2.7) et intégrons sur l'espace et sur le temps. Nous obtenons l'équation :

$$\int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} \left( \nabla^2 T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \right) T^* d\Omega = 0 \quad (2.8)$$

Le théorème de Green permet d'écrire :

$$\int_{\Omega} dt \left( T^* \nabla^2 T - T \nabla^2 T^* \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2.9)$$

où :

$\partial/\partial n$  désigne la dérivation suivant la normale unitaire sortante à la frontière  $\Gamma$ . Cette normale unitaire  $\mathbf{n}$  est définie, précisons-le, au point de coordonnées cartésiennes  $(x_i)$ .

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.10)$$

De l'équation (2.9), nous pouvons déduire :

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 T) T^* d\Omega = \int_{\Omega} \left( T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} T \nabla^2 T^* d\Omega \quad (2.11)$$

L'équation (2.8) peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_F} dt \left\{ \int_{\Gamma} \left( T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} T (\nabla^2 T^*) d\Omega \right\} \\ - \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} T^* d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ecrivons la dernière intégrale de l'équation (2.12) sous la forme :

$$- \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} \frac{1}{a} T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = - \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (T^* T) - T \frac{\partial T^*}{\partial t} \right] d\Omega \quad (2.13)$$

ou encore

$$- \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} \frac{1}{a} T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} \frac{1}{a} T \frac{\partial T^*}{\partial t} d\Omega - \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} (T^* T) d\Omega \quad (2.14)$$

Après intégration par rapport au temps, la dernière intégrale dans l'équation (2.14) donne :

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} (T^* T) d\Omega &= - \frac{1}{a} \int_{t_0}^{t_F} dt \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{\Omega} (T^* T) d\Omega \right] \\ &= \frac{1}{a} \left( \int_{\Omega} (T^* T)_{t=t_0} d\Omega - \int_{\Omega} (T^* T)_{t=t_F} d\Omega \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

L'équation (2.14) peut maintenant s'écrire :

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} \frac{1}{a} T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega &= \\ - \int_{t_0}^{t_F} dt \frac{1}{a} T \frac{\partial T^*}{\partial t} d\Omega + \frac{1}{a} \left[ \int_{\Omega} (T^* T)_{t=t_0} d\Omega - \int_{\Omega} (T^* T)_{t=t_F} d\Omega \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

En reportant le second membre de l'équation (2.16) dans l'équation (2.12), nous obtenons après multiplication par la diffusivité  $a$ , l'expression :

$$\begin{aligned} a \int_{t_0}^{t_F} dt \left[ \int_{\Gamma} \left( T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} T \left( \frac{\partial T^*}{\partial t} + a \nabla^2 T^* \right) d\Omega \right] \\ + \left( \int_{\Omega} (T^* T)_{t=t_0} d\Omega - \int_{\Omega} (T^* T)_{t=t_F} d\Omega \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

D'après l'équation (2.6), nous pouvons écrire :

$$\int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} T \left( \frac{\partial T^*}{\partial t} + a \nabla^2 T^* \right) d\Omega = \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} - T(\mathbf{x}, t) \Delta(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \Delta(t_F, t) d\Omega \quad (2.18)$$

et de l'équation (2.7), il découle :

$$\int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} -T(\mathbf{x}, t) \Delta(\mathbf{s}, \mathbf{x}) \Delta(t_F, t) d\Omega = -T(\mathbf{s}, t_F) \quad (2.19)$$

Le terme  $\int_{\Omega(t_F)} T^* T d\Omega$  dans l'équation (2.17) est nul ; en effet, lorsque  $t = t_F$ , la fonction de Dirac  $\Delta(t_F, t)$  présente une singularité (pic de la fonction delta de Dirac). Pour lever cette indétermination, ajoutons à  $t_F$  une quantité  $\varepsilon$  très petite positive. Or, nous savons d'après la condition de causalité que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} T^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}, t_F, t_F + \varepsilon) T(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.20)$$

En considérant les équations (2.19) et (2.20), nous pouvons déduire à partir de l'équation (2.17) l'expression suivante :

$$T(\mathbf{s}, t_F) = a \int_{t_0}^{t_F} dt \left[ \int_{\Gamma} \left( T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d\Gamma \right] + \int_{\Omega} T^*(t_0) T_0 d\Omega \quad (2.21)$$

L'équation (2.21) est valable pour tout point  $\mathbf{s}$  situé à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . Pour un point  $\mathbf{s}$  quelconque, cette équation devient [13] :

$$C(\mathbf{s}) T(\mathbf{s}, t_F) = a \int_{t_0}^{t_F} dt \left[ \int_{\Gamma} \left( T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d\Gamma \right] + \int_{\Omega} T^*(t_0) T_0 d\Omega \quad (2.22)$$

Interprétons maintenant les termes qui apparaissent dans l'équation (2.22) :

- l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_F} dt \left[ \int_{\Gamma} \left( T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d\Gamma \right] \quad (2.23)$$

représente la contribution des conditions aux limites du problème.

- l'intégrale

$$\int_{\Omega} T^*(\mathbf{s}, \mathbf{x}, t_F, t_0) T(\mathbf{x}, t_0) d\Omega \quad (2.24)$$

représente la contribution de la condition initiale.

- Comme pour les problèmes de diffusion thermique stationnaire, le terme libre  $C(\mathbf{s})$  dépend de la position du point  $\mathbf{s}$  et la nature de la frontière au voisinage de ce point.

La valeur du coefficient  $C(\mathbf{s})$  est :

$$C(\mathbf{s}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{pour un point } \mathbf{s} \text{ interne} \\ \frac{\phi}{2\pi} & \text{pour un point } \mathbf{s} \text{ sur la frontière.} \end{array} \right\}$$

Comme pour le modèle stationnaire,  $\phi$  désigne la portion d'angle solide sous lequel du point  $\mathbf{s}$  on voit le domaine  $\Omega$ .

L'équation (2.22) est la version de l'équation fondamentale de la MEFR associée aux problèmes de diffusion thermique transitoire.

### 2.1.2 Discrétisation de l'équation intégrale

Pour obtenir une solution numérique à l'équation (2.22) par la MEFR, nous avons besoin de discrétiser la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$  en une série d'éléments. La modélisation de la géométrie de ces éléments s'effectue de la même façon que dans la MEF. Pour les mêmes raisons que celles que nous avons précisées dans le précédent chapitre, nous ne considérons que des éléments de frontière constants. Du fait que la solution fondamentale  $T^*$  définie par l'équation (2.5) dépend elle-même du temps, il n'est pas nécessaire dans la MEFR de proposer une méthode matricielle comme pour les formulations implicites.

Les fonctions  $T$  et  $\frac{\partial T}{\partial n}$  dans l'équation (2.22) étant dépendantes du temps, il est nécessaire d'introduire des fonctions d'interpolation de temps et d'espace pour les représenter. Sur chaque élément, nous pouvons écrire :

$$T = \varphi^T \psi \mathbf{T}^{nd} \tag{2.25}$$

$$q = \frac{\partial T}{\partial n} = \varphi^T \psi \mathbf{q}^{nd} \tag{2.26}$$

où les  $\varphi_i$  et les  $\psi_i$  sont des fonctions d'interpolation d'espace et de temps respectivement.

Les développements concernant les différentes fonctions  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  utilisées sont présentés dans la partie annexe B.

$\mathbf{T}^{nd}$  et  $\mathbf{q}^{nd}$  sont des vecteurs contenant les valeurs nodales de la température et du flux sur l'élément frontière considéré.

Du fait que les inconnues dépendent maintenant de la dimension temps, un schéma itératif dans le temps doit être introduit pour résoudre l'équation (2.22). Dans la MEFR, on peut utiliser deux schémas différents d'itérations dans le temps :

- Un premier schéma, que nous désignerons par "schéma I", où l'on traite chaque étape de temps  $t$  comme un nouveau problème. De même que dans les problèmes stationnaires, on calcule d'abord les inconnues à la surface du domaine. Ensuite, les valeurs de la température et de sa dérivée normale sont déterminées en un nombre suffisant de points internes dans le but de les utiliser comme pseudo-valeurs initiales dans le traitement de l'étape suivante  $t + dt$ . Le schéma I est simple à mettre en oeuvre sur le plan numérique et ne nécessite pas un encombrement mémoire important. Cependant dans ce schéma, il est nécessaire de subdiviser l'intérieur du domaine en petites cellules. Précisons que cette subdivision n'introduit pas d'inconnues supplémentaires au problème. Les cellules internes dues à la discrétisation du domaine servent uniquement à évaluer les intégrations numériques.
- Un deuxième schéma, que nous désignons par "schéma II" utilise un processus d'intégration sur le temps qui se réfère toujours à l'instant initial  $t_0$ . Dans la plupart des cas pratiques, la température initiale est uniforme à l'intérieur du domaine concerné par l'analyse. Dans ce cas, l'utilisation du schéma II permet comme nous le montrerons de ramener l'étude du problème à la recherche d'une solution uniquement de surface ; ce qui permet d'éviter la discrétisation du domaine en cellules internes.

La complexité du schéma II réside dans l'encombrement mémoire qu'il nécessite lorsque le nombre de pas de temps utilisés est grand. Pour contourner cette difficulté nous avons limité la largeur de l'intervalle d'intégration temporelle à une valeur suffisamment élevée. Cette valeur est évidemment liée au problème étudié.

Discrétisons la frontière  $\Gamma$  du domaine en  $N$  éléments de frontière, l'intérieur du domaine en  $L$  cellules internes et la dimension temps en  $F$  intervalles de temps.



En reportant les équations (2.25) et (2.26) dans l'équation (2.22), nous obtenons l'équation discrète suivante :

Schéma I :

$$C_i T_i^F = a \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{F-1}}^{t_F} T^* \psi dt d\Gamma \right) \mathbf{q}^{nd} - a \sum_{j=1}^N \left( \int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{F-1}}^{t_F} \frac{\partial T^*}{\partial n} \psi dt d\Gamma \right) \mathbf{T}^{nd} + \sum_{m=1}^L \int_{\Omega_m} T^* T^{F-1} d\Omega \quad (2.27)$$

Schéma II :

$$C_i T_i^F = a \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F \left( \int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* \psi dt d\Gamma \right) \mathbf{q}^{nd} - a \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F \left( \int_{\Gamma_j} \varphi^T \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{\partial T^*}{\partial n} \psi dt d\Gamma \right) \mathbf{T}^{nd} + \sum_{m=1}^L \int_{\Omega_m} T^* T_0 d\Omega \quad (2.28)$$

### 2.1.3 Fonctions d'interpolation constantes

Du fait que la température  $T$  et sa dérivée normale  $\frac{\partial T}{\partial n}$  varient en général beaucoup plus lentement que  $T^*$  et  $\frac{\partial T^*}{\partial n}$  en fonction du temps, une approximation raisonnable consiste à les supposer constantes sur chaque petit intervalle de temps, ce qui revient à prendre les fonctions  $\psi_i$  identiquement égales à l'unité. Nous ne développerons dans ce chapitre que le cas où les fonctions d'interpolation relatives au temps sont constantes et égales à l'unité.

Dans le cas d'éléments constants, les fonctions  $\varphi_i$  d'interpolation d'espace sont égales à l'unité [13]. On peut alors prendre comme fonctions d'approximation les valeurs nodales sur chaque élément de frontière.

Dans ces conditions, l'équation (2.27) conduit pour chaque noeud  $i$  de frontière à l'équation :

$$\sum_{j=1}^N S_{ij,F} T_j^F = \sum_{j=1}^N P_{ij,F} Q_j^F + \sum_{m=1}^L M_m^{F-1} T_m^{F-1} \quad (2.29)$$

ou encore sous forme simplifiée,

$$[\mathbf{S}_F] \{\mathbf{T}^F\} = [\mathbf{P}_F] [\mathbf{Q}^F] + [\mathbf{M}^{F-1}] \{\mathbf{T}^{F-1}\} \quad (2.30)$$

Pour le schéma itératif II, l'équation équivalente est :

$$\sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F S_{ij,fF} T_j^f = \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F P_{ij,fF} Q_j^f + \sum_{m=1}^L M_m^F T_m^0 \quad (2.31)$$

qui peut s'écrire sous la forme simplifiée :

$$[\mathbf{S}_{fF}] \{\mathbf{T}^f\} = [\mathbf{P}_{fF}] \{\mathbf{Q}^f\} + [\mathbf{M}^F] \{\mathbf{T}^0\} \quad (2.32)$$

Les matrices  $M^F$  et  $M^{F-1}$  sont fonctions des différences de temps  $t_F - t_0, t_F - t_{F-1}$  respectivement. Ces matrices résultent des intégrations sur les cellules internes.

Les vecteurs  $\{\mathbf{T}^F\}, \{\mathbf{T}^f\}, \{\mathbf{Q}^F\}, \{\mathbf{Q}^f\}, \{\mathbf{T}^0\}$  contiennent les valeurs de la température et du flux aux noeuds de frontière aux instants  $t_F, t_f, t_0$  considérés.

Les coefficients des matrices  $S_{fF}$  et  $P_{fF}$  sont déterminés par les formules suivantes :

$$S_{ij,fF} = a \int_{\Gamma_j} d\Gamma \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{\partial T^*}{\partial n} dt + C_i \delta_{fF} \delta_{ij} \quad (2.33)$$

$$P_{ij,fF} = a \int_{\Gamma_j} d\Gamma \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt \quad (2.34)$$

$\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

Notons que dans l'équation (2.32) les inconnues du problème sont calculées à l'instant  $t = t_F$ . Les vecteurs  $\{\mathbf{T}^f\}$  et  $\{\mathbf{Q}^f\}$  aux instants antérieurs à

$t_F$  ( $f = 1, 2, \dots, F - 1$ ) sont connus à partir des calculs effectués aux itérations précédentes.

Pour le schéma I, les coefficients des matrices  $S_F$  et  $P_F$  sont déterminés à partir d'expressions du même type que (2.33) et (2.34) dans lesquelles  $f = F$ , soit :

$$S_{ij,F} = a \int_{\Gamma_j} d\Gamma \int_{t_{F-1}}^{t_F} \frac{\partial T^*}{\partial n} dt + C_i \delta_{ij} \delta_{fF} \quad (2.35)$$

$$P_{ij,F} = a \int_{\Gamma_j} d\Gamma \int_{t_{F-1}}^{t_F} T^* dt \quad (2.36)$$

#### 2.1.4 Calcul des coefficients des matrices S et P

Pour les problèmes bidimensionnels, la solution fondamentale et sa dérivée normale sont données par l'expression (2.5) dans laquelle  $z = 2$ ,

$$T^* = \frac{1}{4\pi a(t_F - t)} \exp \left[ -\frac{r^2}{4a(t_F - t)} \right] H(t_F - t) \quad (2.37)$$

et

$$q^* = \frac{\partial T^*}{\partial n} = \frac{\partial T^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{d}{8\pi a^2(t_F - t)^2} \exp \left[ -\frac{r^2}{4a(t_F - t)} \right] H(t_F - t) \quad (2.38)$$

où :

$$d = [x_1(\mathbf{s}) - x_1(\mathbf{x})] n_1(\mathbf{x}) + [x_2(\mathbf{s}) - x_2(\mathbf{x})] n_2(\mathbf{x})$$

- $\mathbf{s}$  désigne la position du point d'application de la solution fondamentale;
- $\mathbf{x}$  représente le point considéré de la frontière  $\Gamma$ ;
- $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = [n_1(\mathbf{x}), n_2(\mathbf{x})]$  est la normale unitaire à la frontière  $\Gamma$  au point défini par le vecteur  $\mathbf{x}$ .

Les intégrations par rapport au temps dans les équations (2.33) et (2.34) peuvent être effectuées analytiquement.

L'intégrale en  $\frac{\partial T^*}{\partial n}$  donne :

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{\partial T^*}{\partial n} dt = \frac{d}{2\pi ar^2} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{r^2}{4a(t_F - t)^2} \exp \left[ -\frac{r^2}{4a(t_F - t)} \right] dt \quad (2.39)$$

Pour évaluer la dernière intégrale dans l'équation (2.39), posons :

$$z_f = \frac{r^2}{4a(t_F - t_f)}$$

le changement de variable précédent conduit à l'équation :

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{\partial T^*}{\partial n} dt = \frac{d}{2\pi ar^2} [\exp(-z_{f-1}) - \exp(-z_f)] \quad (2.40)$$

L'intégrale en  $T^*$  donne :

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt = \frac{1}{\pi r^2} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{r^2}{4a(t_F - t_f)} \exp \left[ \frac{-r^2}{4a(t_F - t_f)} \right] dt \quad (2.41)$$

Effectuons le changement de variable  $X = \frac{r^2}{4a(t_F - t)}$  pour évaluer la dernière intégrale dans l'équation (2.41) ce qui nous donne :

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt = \frac{1}{4\pi a} \int_{z_{f-1}}^{z_f} \frac{e^{-X}}{X} dX = \frac{1}{4\pi a} \left( \int_{z_{f-1}}^{\infty} \frac{e^{-X}}{X} dX - \int_{z_f}^{\infty} \frac{e^{-X}}{X} dX \right) \quad (2.42)$$

or la fonction exponentielle intégrale est définie par :

$$E(X) = \int_X^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (2.43)$$

Les deux dernières intégrales dans l'équation (2.42) donnent alors :

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt = \frac{1}{4\pi a} [E(z_{f-1}) - E(z_f)] \quad (2.44)$$

Un développement en séries de la fonction exponentielle intégrale est [13] :

$$E(X) = -C - \ln(X) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{X^n}{nn!}, \quad (X > 0) \quad (2.45)$$

où  $C$  est la constante d'Euler. Ce développement fait intervenir la factorielle du nombre  $n$  ; il ne peut donc être calculé que pour un nombre fini de termes,  $N_{max}$  représentant l'infini ( $1 \leq n \leq N_{max}$ ).

Notons que dans les équations (2.40) et (2.44) ,  $E(z_F) = \exp(-z_F) = 0$ .

En reportant les équations (2.40) et (2.44) dans les équations (2.33) et (2.34) respectivement, nous obtenons :

$$S_{ij, fF} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_j} \frac{d_{ij}}{r_{ij}^2} [\exp(-z_{f-1}) - \exp(-z_f)] d\Gamma + C_i \delta_{fF} \delta_{ij} \quad (2.46)$$

$$P_{ij, fF} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} [E(z_{f-1}) - E(z_f)] d\Gamma \quad (2.47)$$

Il reste maintenant à évaluer les intégrales sur l'espace.

Les intégrales dans les équations (2.46) et (2.47) peuvent être évaluées en utilisant la méthode de Gauss pour les coefficients non diagonaux des matrices ( $i \neq j$ ).

Mais lorsque  $i = j$ , le rayon  $r$  est nul et le terme diagonal  $P_{i, fF}$  devient singulier. Pour lever cette singularité, l'intégrale (2.47) est prise en valeur principale de Cauchy.

En tenant compte des équations (2.40), (2.44) et (2.45), l'utilisation de la méthode de quadrature de Gauss donne pour les coefficients non diagonaux des matrices  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{P}$  les relations suivantes :

$$S_{ij, fF} = \frac{|J|}{2\pi} \sum_{k=1}^{NPG} \left\{ \frac{d_{ij}}{r_{ij}^2} [\exp(-z_{f-1}) - \exp(-z_f)] \right\}_k \cdot w_k \quad (2.48)$$

et

$$P_{ij, fF} = \frac{|J|}{4\pi} \sum_{k=1}^{NPG} \left\{ \ln \left( \frac{t_F - t_{f-1}}{t_F - t_f} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z_{f-1}^n}{nn!} \left[ 1 - \left( \frac{t_F - t_{f-1}}{t_F - t_f} \right)^n \right] \right\}_k \cdot w_k \quad (2.49)$$

- $|J|$  est le jacobien dû au passage d'un élément de frontière réel à un élément de référence tel que :

$$d\Gamma = |J| d\eta = \frac{l_j}{2} d\eta \quad (2.50)$$

- $d_{ij}$  est la distance perpendiculaire à partir du point  $i$  au plan passant par l'élément.
- NPG est le nombre de points de Gauss et  $w_k$  est le facteur de pondération lié au point de Gauss  $k$ .

Habituellement, six points de Gauss permettent d'obtenir une précision suffisante. Pour des raisons d'efficacité dans le calcul numérique, nous avons adopté une méthode d'intégration sélective pour les éléments localisés loin des singularités. Les calculs ont montré que cette méthode ne nécessite que deux ou quatre points de Gauss pour obtenir une bonne précision. Le principe de cette technique consiste à n'utiliser que deux points de Gauss pour des éléments situés loin des sources.

Les termes diagonaux de type  $P_{ii,FF}$  sont déterminés en se référant à la figure 2.1.

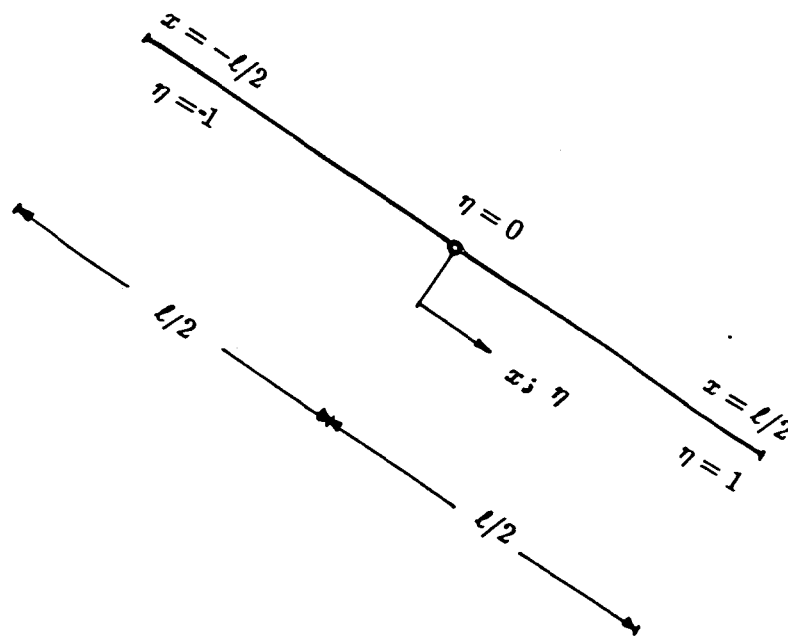


Figure 2.1 : Définitions pour les intégrations analytiques

Lorsque  $f = F$ , l'équation (2.47) définie sur l'élément  $i$  s'écrit :

$$P_{ii,FF} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_i} E(z_{F-1}) d\Gamma \quad (2.51)$$

Pour lever l'indétermination due à la singularité logarithmique, l'intégrale dans l'équation (2.51) est effectuée sur l'élément de référence caractérisé par la variable intrinsèque  $\eta$ . Le calcul de cette intégrale donne :

$$P_{ii,FF} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\ell_{i/2}}^{\ell_{i/2}} E\left(\frac{x^2}{4a \Delta t_F}\right) dx = \frac{\ell_i}{8\pi} \int_{-1}^{+1} E(\beta\eta^2) d\eta \quad (2.52)$$

où

$$\beta = \frac{\ell_i^2}{16a\Delta t_F} ; \Delta t_F = t_F - t_{F-1} ; \eta = \frac{x}{\ell/2}$$

En utilisant le développement en séries (2.45) de la fonction exponentielle intégrale, la dernière intégrale dans l'équation (2.52) conduit à l'expression :

$$P_{ii,FF} = \frac{\ell_i}{4\pi} \left[ 2 - C - \ln(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\beta^n}{n(2n+1)n!} \right] \quad (2.53)$$

Remarquons que la série qui apparaît dans l'équation (2.53) converge rapidement pour une valeur de  $\beta$  petite, ce qui correspond à un pas de temps  $\Delta t_F$  relativement élevé.

Mais pour des pas de temps petits de l'ordre de  $10^{-2}$ , les calculs ont montré que la série diverge. Pour contourner cette difficulté, l'intégrale (2.51) a été effectuée analytiquement sur un segment de longueur  $\ell_s$  ( $\ell_s \ll \ell_i$ ) près de la singularité. L'intégrale sur le reste de l'élément a été calculée en utilisant la méthode de quadrature de Gauss. Cependant, les calculs ont montré que le nombre de termes utilisés pour assurer la convergence de la série (2.53) dépend fortement du choix du pas de temps. La longueur  $\ell_s$  du segment sur lequel l'intégration analytique est effectuée doit nécessairement vérifier l'inégalité,

$$\frac{\ell_s^2}{16a\Delta t_F} \leq 1 \quad (2.54)$$

ou encore

$$l_s \leq 4 (a \Delta t_F)^{1/2} \leq l_i \quad (2.55)$$

Si on adopte un pas de temps constant dans le traitement numérique et pour une valeur de  $l_s$  fixée, la limite inférieure de ce pas de temps est déterminée par :

$$\Delta t_c = \frac{l_s^2}{16a} \quad (2.56)$$

Les coefficients  $P_{ii,fF}$  où  $f \neq F$  sont obtenus par une somme d'intégrales de type (2.52).

Le calcul de ces coefficients donne [28] :

$$P_{ii,fF} = \frac{l_i}{4\pi} \left\{ \ln \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \beta_1^n \frac{[1 - (\frac{\beta_2}{\beta_1})^n]}{n(2n+1)n!} \right\} \quad (2.57)$$

$$(f \neq F)$$

où

$$\beta_1 = \frac{l_i^2}{4a(t_F - t_{f-1})} ; \beta_2 = \frac{l_i^2}{4a(t_F - t_f)}$$

Pour les éléments de frontière isoparamétriques constants ou linéaires, les coefficients  $S_{ii,fF}$  sont identiquement nuls du fait de l'orthogonalité des vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{n}$  qui rend nulle la distance  $d_{ii}$  (cf. équation 2.38). Nous avons alors :

$$S_{ii,fF} \equiv 0 \text{ pour } (f \neq F) \quad (2.58)$$

$$S_{ii,fF} \equiv \frac{1}{2} \text{ pour } (f = F) \quad (2.59)$$

A partir des équations (2.46) et (2.47) nous pouvons démontrer aisément que pour un pas de temps constant nous avons :



$$S_{ij,11} = S_{ij,FF} \quad (F \geq 2) \quad (2.60)$$

$$P_{ij,11} = P_{ij,FF} \quad (F \geq 2) \quad (2.61)$$

$$S_{ij,12} = S_{ij,(F-1)F} \quad (F \geq 3) \quad (2.62)$$

$$P_{ij,12} = P_{ij,(F-1)F} \quad (F \geq 3) \quad (2.63)$$

Deux nouvelles matrices  $S_{ij,1F}$  et  $P_{ij,1F}$  doivent donc être calculées à chaque étape  $t_F$ . Le calcul de ces deux nouvelles matrices est nécessaire pour mettre à jour le vecteur second membre du système d'équations linéaires final. La matrice  $\mathbf{A}$  du système obtenue à partir de l'équation (2.30) ou (2.32) après réorganisation des inconnues reste constante au cours du temps et peut donc être inversée une fois pour toute pour être utilisée dans le processus itératif.

Le vecteur  $\{\mathbf{X}^F\}$  des inconnues est alors obtenu à chaque instant  $t_F$  par une équation du type :

$$\{\mathbf{X}^F\} = [\mathbf{A}]^{-1} \{\mathbf{B}^F\} \quad (2.64)$$

Le vecteur  $\{\mathbf{B}^F\}$  est calculé à partir des résultats des étapes précédentes et des conditions aux limites à l'instant  $t_F$ .

### 2.1.5 Evaluation de l'intégrale sur le domaine

Les trois cas de figures suivantes peuvent se présenter :

1 - Cas où la température initiale est harmonique.

Lorsque  $T_0$  est une fonction harmonique, l'intégrale sur le domaine qui apparaît dans l'équation (2.22) peut être transformée en une intégrale sur la surface équivalente.

Le théorème de Green permet d'écrire :

$$\int_{\Omega} T_0 \nabla^2 V^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left( T_0 \frac{\partial V^*}{\partial n} - V^* \frac{\partial T_0}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2.65)$$

Nous cherchons à transformer l'intégrale

$$\int_{\Omega} T^* T_o d \Omega \quad (2.66)$$

en une intégrale sur la frontière équivalente. Pour cela, nous avons à déterminer une fonction  $U^*$  telle que :

$$\nabla^2 U^* = T^* \quad (2.67)$$

Cette fonction  $U^*$  est donnée par :

$$U^* = \int \frac{1}{r} \left( \int r T^* dr \right) dr = \frac{1}{4\pi} E \left[ \frac{r^2}{4a(t_F - t)} \right] \quad (2.68)$$

D'après l'équation (2.65), nous pouvons écrire :

$$\int_{\Omega} T^* T_o d \Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{d}{r^2} \exp \left[ -\frac{r^2}{4a(t_F - t_o)} \right] T_o - \frac{1}{2} E \left[ \frac{r^2}{4a(t_F - t_o)} \right] q_o \right\} d \Gamma \quad (2.69)$$

où :

$$q_o = \frac{\partial T_o}{\partial n}$$

L'intégrale (2.69) peut être évaluée numériquement en utilisant la méthode de quadrature de Gauss en dehors des singularités. Les termes dans lesquels des singularités apparaissent doivent être calculés analytiquement comme nous l'avons montré dans la section précédente.

## 2 - Cas où la température initiale est uniforme dans $\Omega$ .

Dans la plupart des cas pratiques, la température initiale peut être supposée uniforme dans tout le domaine. Dans ce cas, nous pouvons effectuer le changement de variable

$$\hat{T} = T - T_o \quad (2.70)$$

Ce qui revient à prendre  $T_o$  comme origine des températures.

En adoptant le changement de variable (2.70), dans l'équation fondamentale (2.22), l'intégrale sur le domaine s'annule et nous obtenons une équation du type :

$$C(\mathbf{s}) T(\mathbf{s}, t_F) = a \int_{t_0}^{t_F} dt \left[ \int_{\Gamma} \left( T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d\Gamma \right] \quad (2.71)$$

Dans le cas où la température initiale est non uniforme, on démontre [25] que si la condition initiale correspond à un régime stationnaire établi, on peut ramener l'étude du problème à une formulation uniquement de frontière du même type que (2.71).

### 3 - Calcul de l'intégrale sur le domaine.

Dans le cas où le problème ne peut pas être réduit à une formulation uniquement de frontière, la discrétisation du domaine en cellules internes devient nécessaire. Précisons que ces cellules internes n'introduisent pas d'inconnues supplémentaires au problème et que les intégrales qu'elles entraînent peuvent être évaluées en utilisant les formules de quadrature de Hammer [13].

L'intégrale sur le domaine qui apparaît dans l'équation (2.28) est

$$\int_{\Omega_m} T^* T_0 d\Omega = \frac{1}{4\pi a (t_F - t_0)} \int_{\Omega_m} T_0 \exp \left[ -\frac{r^2}{4a (t_F - t_0)} \right] d\Omega \quad (2.72)$$

L'évaluation de l'intégrale (2.72) par les formules de quadrature de Hammer [13] donne pour chaque cellule interne les coefficients :

$$M_{ij}^F = \frac{1}{4\pi a (t_F - t_0)} \exp \left[ -\frac{r_{ij}^2}{4a (t_F - t_0)} \right] |J|_j \omega_j \quad (2.73)$$

où  $|J|$  est le jacobien dû au passage d'une cellule réelle à une cellule de référence et  $\omega_j$  est le facteur de pondération de quadrature de Hammer.

Lorsque le schéma  $I$  est adopté, les coefficients de la matrice  $M^{F-1}$  sont déterminés à partir de l'équation :

$$M_{ij}^{F-1} = \frac{1}{4\pi a dt} \left[ \exp\left(-\frac{r_{ij}^2}{4adt}\right) \right] |J|_j \omega_j \quad (2.74)$$

Les schémas I et II donnent en général des résultats de précisions égales. Cependant, le choix d'un pas de temps approprié est fondamental pour obtenir une convergence correcte des calculs. En effet, lorsque le pas de temps  $\Delta t$  tend vers 0, la limite de la solution fondamentale est une fonction delta de Dirac et donc des problèmes de convergence numérique de la solution peuvent apparaître (*Figure 2.2*).

Notons que le code de calcul que nous avons développé nous a permis de mettre en évidence le fait que le choix du pas de temps approprié dépend des paramètres thermo-physiques du matériau étudié et de la machine utilisée comme l'ont montré des études antérieures [6, 14, 17].

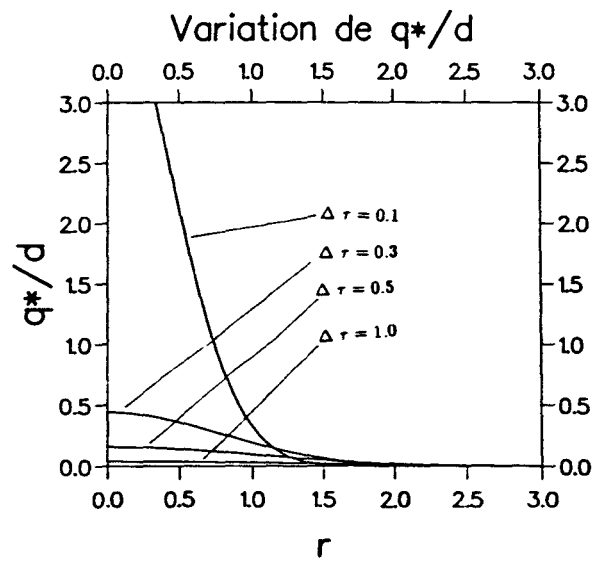
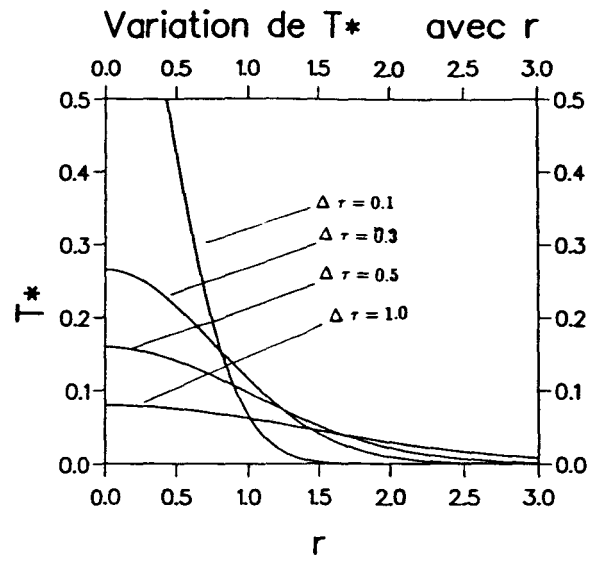


Figure 2.2: Comportement de  $T^*$  et  $Q^*/d$  en fonction de  $a \cdot (t_F - t) = \Delta \tau$

### 2.1.6 Température en un point interne

La différence principale entre les deux schémas itératifs I et II que nous avons présentés réside dans la façon avec laquelle la valeur de la température qui intervient dans l'intégrale sur la domaine est prise en considération.

Dans le schéma I, les valeurs de la température sont calculées en des points internes quelconques à la fin de chaque étape pour servir dans l'étape suivante comme pseudo-valeurs initiales. Dans le schéma II, on effectue une sommation d'intégrales sur la frontière où on se réfère toujours à l'instant initial.

Pour le schéma I au démarrage du processus, à l'instant initial  $t = t_0$ , la température est définie partout dans le domaine par la fonction  $T_0(\mathbf{x}, t_0)$ . Le domaine est discrétisé en  $L$  cellules par exemple triangulaires et un certain nombre de noeuds internes est défini (cf *Figure 1.9*). Précisons que si l'on adopte un pas de temps constant, le schéma I nous conduit à une équation du type (2.64) dans laquelle, d'après les conditions aux limites (2.2) et (2.3), la moitié des températures  $T$  et la moitié des dérivées normales  $\frac{\partial T}{\partial n}$  sont connues. La résolution de l'équation (2.64) permet alors de déterminer le reste des valeurs de frontière à l'instant  $t_0 + dt$  qui correspond à la première itération ( $F=1$ ). A la fin de l'étape 1, les températures aux noeuds internes préalablement définis sont calculées dans le but d'être utilisées dans l'étape suivante ( $F=2$ ) comme valeurs initiales. Le processus est ainsi répété autant de fois que le nécessite l'analyse du problème. Les températures aux noeuds internes sont déterminées à partir de l'équation

$$\{\bar{\mathbf{T}}^F\} = [\bar{\mathbf{P}}_F] \{\mathbf{Q}^F\} - [\bar{\mathbf{S}}_F] \{\mathbf{T}^F\} + [\bar{\mathbf{M}}^{F-1}] \{\bar{\mathbf{T}}^{F-1}\} \quad (2.75)$$

où

$\{\bar{\mathbf{T}}^F\}$  est le vecteur contenant les valeurs des températures aux noeuds internes à l'instant courant  $t_F$ .

$\{\bar{\mathbf{T}}^{F-1}\}$  est le vecteur contenant les valeurs calculées à l'instant précédent  $t_{F-1}$ .

Les vecteurs  $\{\mathbf{T}^F\}$  et  $\{\mathbf{Q}^F\}$  contiennent les valeurs de la température et de sa dérivée normale aux noeuds de frontière respectivement, calculées en résolvant une équation du type (2.64).

Le calcul des matrices  $\bar{\mathbf{P}}_F, \bar{\mathbf{S}}_F, \bar{\mathbf{M}}^{F-1}$  s'effectue de la même façon que celui des matrices  $\mathbf{P}_F, \mathbf{S}_F, \mathbf{M}^{F-1}$ , sauf que la solution fondamentale est définie maintenant au point interne considéré.

Remarquons que pour un pas de temps constant, les matrices  $\bar{\mathbf{P}}_F, \bar{\mathbf{S}}_F, \bar{\mathbf{M}}^{F-1}$  sont constantes et doivent être calculées une fois pour toute et stockées pour être utilisées

dans le processus itératif.

Pour le schéma II, l'équation équivalente à l'équation (2.75) pour le calcul des valeurs de la température aux points internes dans le cas où l'intégrale sur le domaine est nulle peut s'écrire sous la forme :

$$\{\bar{\mathbf{T}}^F\} = \sum_{f=1}^F [\bar{\mathbf{P}}_{fF}] \{\mathbf{Q}^f\} - \sum_{f=1}^F [\bar{\mathbf{S}}_{fF}] \{\mathbf{T}^f\} \quad (2.76)$$

Les matrices  $\bar{\mathbf{P}}_{fF}$  et  $\bar{\mathbf{S}}_{fF}$  se calculent de la même façon que les matrices  $\mathbf{P}_{fF}$  et  $\mathbf{S}_{fF}$  sauf que la solution fondamentale est définie aux noeuds internes.

### 2.1.7 Conditions aux limites mixtes

Supposons que toute la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$  concerné par l'analyse est soumise à une condition aux limites de type loi de Newton :

$$q(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial n(\mathbf{x})} = \frac{H}{K} [T_m - T(\mathbf{x}, t)] \text{ sur } \Gamma \quad (2.77)$$

où

- $H$  est le coefficient surfacique de transfert | ( $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$ )
- $K$  est la conductivité thermique dans le domaine  $\Omega$  | ( $\text{W}/\text{mK}$ )
- $T(\mathbf{x}, t)$  est la température en un point de la frontière  $\Gamma$  à l'instant  $t$  | ( $\text{K}$ )
- $T_m$  est la température du milieu extérieur environnant | ( $\text{K}$ ).

Nous avons retenu le schéma II dans lequel on se réfère toujours à l'instant  $t_0$ . Supposons pour simplifier que la température initiale est nulle dans tout le domaine. Sous cette hypothèse, l'intégrale sur le domaine due à la contribution de la condition initiale s'élimine. En reportant l'équation (2.77) dans le système d'équation (2.32) et en tenant compte du fait que les températures et les flux en chaque noeud aux instants antérieurs à  $t_F$  sont connus, nous obtenons un système de la forme :

$$\left[ \mathbf{S}_{FF} + \frac{H}{K} \mathbf{P}_{FF} \right] \{\mathbf{T}^F\} = \{\mathbf{B}^F\} \quad (2.78)$$

Le vecteur  $\{\mathbf{B}^F\}$  est évalué à partir des conditions aux limites à l'instant  $t_F$  et des

valeurs de la température et du flux calculées aux instants précédents.

Le système d'équation (2.78) peut s'écrire sous la forme plus simple :

$$[A] \{T^F\} = \{B^F\} \quad (t = t_F) \quad (2.79)$$

Remarquons que si l'on utilise un pas de temps constant, la matrice A reste constante au cours du traitement; seul le vecteur  $\{B^F\}$  doit être mis à jour à chaque étape de temps.

L'équation (2.79) permet de déterminer la température en tous les noeuds de frontière. La dérivée normale aux noeuds de frontière peut ensuite être calculée en utilisant l'équation (2.77). Les températures aux points internes sont déterminées par des équations algébriques du type (2.76).

## 2.2 Equation de diffusion non homogène linéaire

Reprenons l'équation (2.1) avec les hypothèses que nous avons précisées. Supposons de plus que de la chaleur est produite en tout point du domaine  $\Omega$  à raison de  $A(\mathbf{x}, t)$  par unité de temps et par unité de volume. Dans ces conditions, l'équation de diffusion non homogène s'écrit :

$$\nabla^2 T(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = -\frac{A}{K}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (2.80)$$

Insistons sur le fait que la fonction de Green, solution fondamentale de l'équation (2.80) est identique à la fonction définie par l'équation (2.5).

Un raisonnement similaire à celui qui nous a permis d'établir l'équation (2.22) conduit à l'équation intégrale suivante associée à l'équation (2.80) :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{s}) T(\mathbf{s}, t_F) = & a \int_{t_0}^{t_F} dt \left[ \int_{\Gamma} \left( T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d\Gamma \right] \\ & + \int_{\Omega} T^*(t_0) T_0 d\Omega + a \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} b T^* d\Omega \end{aligned} \quad (2.81)$$

Le terme libre  $\mathbf{C}$  prend les mêmes valeurs que celles que nous avons déjà précisées.

Dans l'équation (2.81), l'intégrale  $a \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} b T^* d\Omega$  représente la contribution du terme de sources.



La présence d'une intégrale due au terme de sources implique la discrétisation du domaine en petites cellules internes. La modélisation de cette discrétisation obéit en général aux mêmes règles que celles qui s'appliquent dans la méthode des éléments finis. La discrétisation du domaine en cellules internes diminue l'efficacité de la méthode des éléments de frontière. Notons que dans le cas d'une source de chaleur ponctuelle ou uniforme dans le domaine, l'intégrale de volume peut être supprimée de l'équation (2.81), [25, 27].

### 2.3 Diffusion thermique non homogène non linéaire

Lorsque les propriétés thermophysiques du matériau étudié ne dépendent pas de la température, la résolution d'un problème instationnaire de diffusion de chaleur par la méthode des éléments de frontière ne présente pas beaucoup de difficultés. Par contre l'analyse devient complexe lorsque ces propriétés dépendent de la température. En effet, dans ce cas l'équation de transfert est non linéaire et il n'y a pas de solution fondamentale connue pour transformer l'intégrale sur le domaine (cf. équation 2.8). Supposons que la conductivité thermique est une fonction de la température,  $K = K(T)$ . Sous cette hypothèse, l'équation de diffusion s'écrit :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div} \left( K \vec{\text{grad}} T \right) = A \quad (2.82)$$

où A représente la densité de source volumique par unité de temps.

L'équation (2.82) peut s'écrire sous la forme :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - K \nabla^2 T - \frac{dK}{dT} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = A \quad (2.83)$$

ou encore :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - K \nabla^2 T = \frac{dK}{dT} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] + A \quad (2.84)$$

L'équation (2.84) montre le caractère non linéaire du problème lorsque  $K = K(T)$ . Cette situation peut se présenter dans le cas où les températures sont relativement élevées pour un matériau donné [26].

Pour pouvoir résoudre l'équation (2.82) par la méthode des éléments de frontière, il

est nécessaire de la linéariser. Pour cela, nous pouvons utiliser comme dans le modèle stationnaire la transformation de Kirchhoff.

### 2.3.1 Transformation de Kirchhoff

En introduisant une nouvelle variable  $\theta [T(\mathbf{x}, t)]$  telle que :

$$\frac{d\theta}{dT} = \frac{K(T)}{K_0} \quad (2.85)$$

avec la même démarche que celle que nous avons suivie dans le cas stationnaire, l'équation (2.82) s'écrit en fonction  $\theta$  sous la forme :

$$\nabla^2 \theta - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{A}{K_0} \quad (2.86)$$

où  $A$  et  $a$  sont maintenant des fonctions de la nouvelle variable  $\theta$ .

### 2.3.2 Conditions aux limites

A l'équation (2.86) associons les conditions aux limites suivantes :

$$T = \bar{T} \text{ sur } \Gamma_1 \quad (2.87)$$

$$q = \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{Q} \text{ sur } \Gamma_2 \quad (2.88)$$

$$q = \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{H}{K} [T_m - T] \text{ sur } \Gamma_3 \quad (2.89)$$

$\bar{T}$  et  $\bar{Q}$  sont respectivement une température et un gradient normal de flux imposés sur les portions de frontière  $\Gamma_1, \Gamma_2$ . L'équation (2.89) représente une loi de Newton.

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  sont trois parties disjointes de la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$  (*Figure 2.3*).

Ecrivons les conditions aux limites (2.87), (2.88) et (2.89) en fonction de la variable  $\theta$ .

Introduisons la fonction  $\Psi$  définie par (cf. équation 1.70) :

$$\Psi = K_0 \theta = \int_{T_0}^T K(T) dT$$

Nous obtenons :

$$(2.87) \Leftrightarrow (\Psi = \bar{\Psi}) \text{ sur } \Gamma_1 \quad (2.90)$$

$$(2.88) \Leftrightarrow \left( \frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{\bar{Q}}{K} \right) \text{ sur } \Gamma_2 \quad (2.91)$$

$$(2.89) \Leftrightarrow \left( \frac{\partial \Psi}{\partial n} = \frac{H}{K^2} [T_m - \theta^{-1} (\Psi/K_0)] \right) \text{ sur } \Gamma_3 \quad (2.92)$$

L'équation (2.92) est non linéaire car  $\theta^{-1}$  est l'inverse de la transformation de Kirchhoff définie par :

$$\theta^{-1} \left( \frac{\Psi}{K_0} \right) = T \quad (2.93)$$

En fonction de  $\Psi$ , l'équation (2.86) devient :

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{a(\Psi/K_0)} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -A \quad (2.94)$$

Dans la plupart des cas pratiques, les variations de la diffusivité  $a$ , en fonction de la température sont moins importantes que les variations de la conductivité thermique  $K$  en fonction de la température [26]. Plusieurs auteurs adoptent une approximation qui consiste à supposer la diffusivité  $a$  constante dans l'équation (2.94) [26]. Sous cette hypothèse, l'équation (2.94) est de la même forme que l'équation (2.80) si l'on suppose que le terme de source  $A$  est indépendant de la température.

Dans ces conditions, l'équation intégrale associée à l'équation (2.94) est :

$$\begin{aligned} C(s) \Psi(s, t_F) = & \\ a \int_{t_0}^{t_F} dt \left\{ \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} T^* \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_3} \frac{H}{K^2} \left[ T_m - \theta^{-1} \left( \frac{\Psi}{K_0} \right) \right] T^* d\Gamma - \right. & \\ & \left. \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \Psi \frac{\partial T^*}{\partial n} d\Gamma \right\} + & \\ a \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} A T^* d\Omega + \int_{\Omega} T^* \Psi_0 d\Omega & \quad (2.95) \end{aligned}$$

où  $\Psi_0$  désigne la valeur de  $\Psi$  à l'instant initial  $t_0$ . La résolution de l'équation (2.95) donne les valeurs de  $\Psi = K_0 \theta$  sur le contour.

Rappelons que la fonction  $\theta$  est définie par l'expression :

$$\theta = \frac{1}{K_0} \int_{T_0}^T K(T) dT = \frac{\Psi}{K_0} \quad (2.96)$$

Connaissant  $\theta$ , on peut aisément déterminer la température  $T$  en tous les noeuds frontière à partir de l'équation (2.93).

Insistons sur le fait que la présence d'une condition aux limites du type (2.89) impose un traitement itératif du système qui résulte de la discrétisation en éléments de frontière. En effet, le système final que l'on obtient est non linéaire.

### 2.3.3 Variation de la conductivité thermique

Généralement, la conductivité  $K$  n'est pas constante pour un matériau donné mais elle dépend de la température.

Cependant, pour un matériau donné on peut négliger la variation de la diffusivité en fonction de la température tant qu'on est en dessous d'un seuil critique de température qui dépend de ce matériau [26].

Plusieurs lois de variations de  $K$  en fonction de la température  $T$  sont proposées dans la littérature [13]. Ces lois résultent principalement de l'expérience. La loi linéaire  $K = K_0(1 + \beta T)$  donne en général des résultats satisfaisants [26]. Le coefficient négatif  $\beta$  dépend du matériau.

## 2.4 Problèmes tridimensionnels instationnaires

Dans le cas des problèmes tridimensionnels, la solution fondamentale  $T^*$  et sa dérivée normale le long d'une frontière  $\Gamma$  sont définies respectivement par (cf. équation 2.5) :

$$T^*(\mathbf{x}, t_F, \mathbf{s}, t) = \frac{\exp[-r^2/4a(t_F - t)]}{[4\pi a(t_F - t)]^{3/2}} H(t_F - t) \quad (2.97)$$

et

$$\frac{\partial T^*}{\partial n}(\mathbf{x}, t_F, \mathbf{s}, t) = d \frac{\exp[-r^2/4a(t_F - t)]}{16\pi^{3/2}[a(t_F - t)]^{5/2}} H(t_F - t) \quad (2.98)$$

La distance  $d$  dans l'équation (2.98) est définie par :

$$d = (\mathbf{s} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = (s_1 - x_1) n_1 + (s_2 - x_2) n_2 + (s_3 - x_3) n_3$$

où  $\mathbf{n} (n_1, n_2, n_3)$  est le vecteur normal unitaire au point  $\mathbf{x} (x_1, x_2, x_3)$  à la frontière  $\Gamma$  considérée.

Une procédure similaire à celle qui a été utilisée dans le cas des problèmes bidimensionnels permet d'aboutir à une équation du type (2.22) pour les problèmes tridimensionnels. Les calculs des intégrales temporelles sur l'intervalle  $[t_{f-1}, t_f]$ , (2.39) et (2.41) donnent en 3D les expressions suivantes :

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{\partial T^*}{\partial n} dt = \frac{d}{2\pi^{3/2}ar^3} \left[ \Gamma \left( \frac{3}{2}, z_{f-1} \right) - \Gamma \left( \frac{3}{2}, z_f \right) \right] \quad (2.99)$$

$$\int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt = \frac{1}{4\pi^{3/2}ar} \left[ \Gamma \left( \frac{1}{2}, z_{f-1} \right) - \Gamma \left( \frac{1}{2}, z_f \right) \right] \quad (2.100)$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma.

Tous les types d'éléments utilisés dans la MEF pour modéliser une surface peuvent être appliqués dans la MEF3D pour définir les frontières du domaine concerné. En particulier, si une intégrale de domaine due à la contribution de la condition initiale ou à la présence de sources volumiques de chaleur est nécessaire, des cellules tridimensionnelles doivent être employées pour définir l'intérieur du domaine [13].

Lorsque l'intégrale sur le domaine peut être évitée pour une des raisons que nous avons déjà évoquées, les éléments utilisés en 3D, pour représenter le domaine étudié sont uniquement des éléments surfaciques qui couvrent la frontière.

Cette possibilité est très utile en CAO car le traitement numérique ne fait intervenir que des mailles de surface, ce qui simplifie considérablement l'analyse.

Habituellement, deux types d'éléments surfaciques sont utilisés : les éléments triangulaires et les éléments quadrilatéraux. Ces éléments peuvent être plans ou curvilignes.

En 3D, les fonctions d'approximation des inconnues du problème peuvent être choisies constantes sur chaque élément, variables linéairement ou d'ordre supérieur. En particulier, les éléments curvilignes (*figure 2.3*) permettent une définition très précise

de la frontière, c'est pourquoi nous allons les décrire brièvement. Dans l'étude de ces éléments, on a besoin de définir le passage du système global de coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$  au système de coordonnées intrinsèques  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  lié à l'élément. Pour la fonction d'approximation  $T$  par exemple, les dérivées qui interviennent sont définies par la transformation :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial T}{\partial \eta_3} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

où  $J$  est la matrice jacobienne définie par :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_3} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_3} \end{bmatrix}$$

Cette transformation s'applique pour toutes les inconnues du problème. Le passage du système de coordonnées  $(x_i)$  au système de coordonnées  $(\eta_i)$  dans les intégrales s'exprime par :

$$d \Omega = dx_1 dx_2 dx_3 = |J| d\eta_1 \eta_2 \eta_3$$

et

$$d \Gamma = dx_1 dx_2 = |J_r| d\eta_1 \eta_2$$

où  $|J_r|$  est le jacobien réduit, module du vecteur  $\mathbf{n}$  normal à l'élément défini par :

$$\mathbf{n} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta_3}, \frac{\partial x_2}{\partial \eta_3}, \frac{\partial x_3}{\partial \eta_3} \right)$$

où

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial \eta_3} = \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} = \gamma_1 \\ \frac{\partial x_2}{\partial \eta_3} = \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} = \gamma_2 \\ \frac{\partial x_3}{\partial \eta_3} = \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} = \gamma_3 \end{cases}$$

donc :

$$|J_r| = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2}$$

Ces relations peuvent être utilisés pour calculer les intégrales de frontière du type :

$$\int_{\Gamma} T^* \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma \text{ ou } \int_{\Gamma} T \frac{\partial T^*}{\partial n} d\Gamma$$

qui deviennent respectivement :

$$\int_{\Gamma_n} T^* \frac{\partial T}{\partial n} |J_r| d\eta_1 d\eta_2 ; \int_{\Gamma_n} T \frac{\partial T^*}{\partial n} |J_r| d\eta_1 d\eta_2$$

Une grande variété d'éléments quadrilatéraux ou triangulaires peuvent être ainsi construits [13,25]. En particulier, les éléments quadrilatéraux de type constant donnent en général d'excellents résultats lorsqu'ils sont utilisés avec des points de collocation. La table de l'annexe C montre quelques-uns de ces éléments.

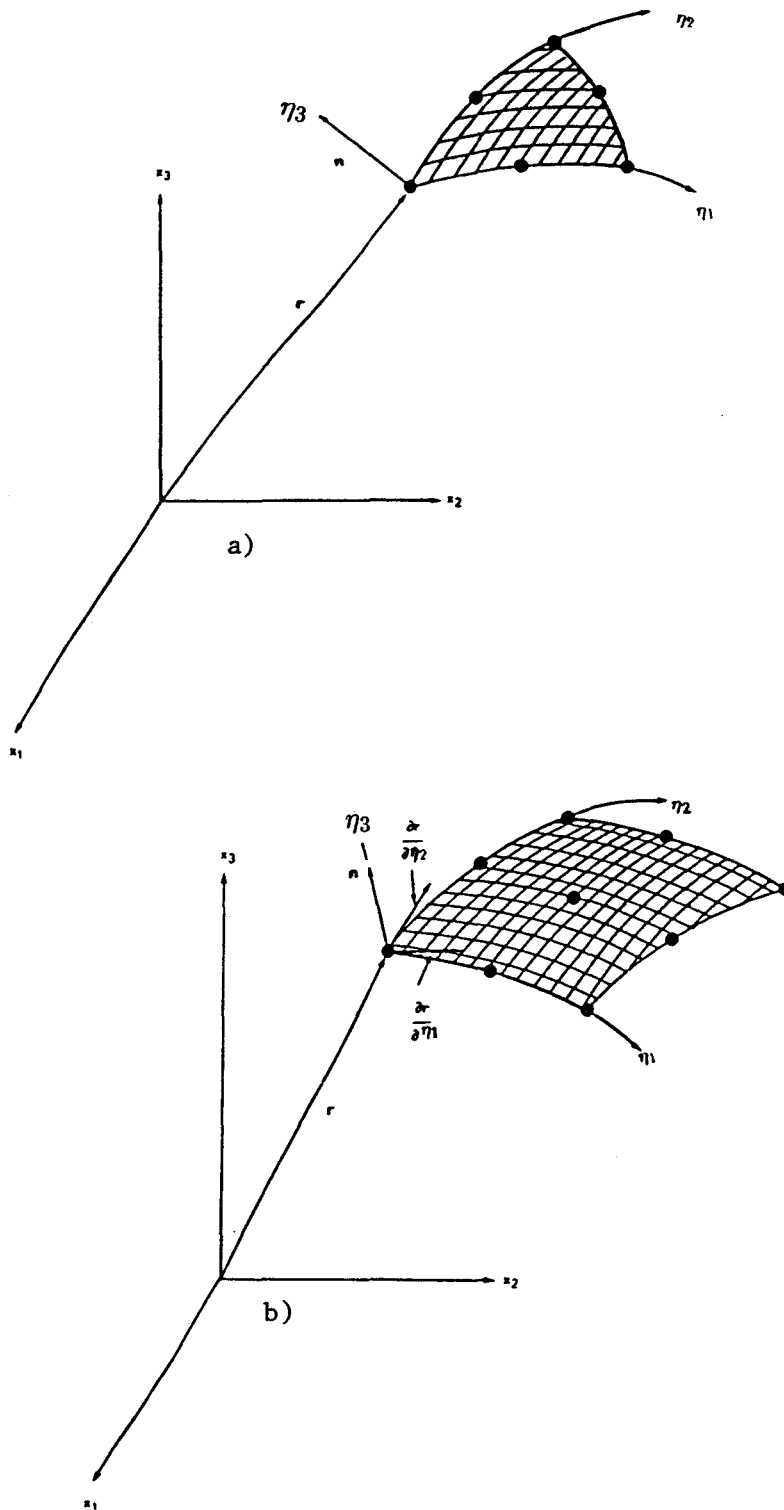


Figure 2.3: a) Élément triangulaire curviligne pour les problèmes tridimensionnels.  
 b) Élément quadrilatéral curviligne pour les problèmes tridimensionnels.



## 2.5 Validation du code de calcul instationnaire

### 2.5.1 Plaque plane

Pièce de longueur infinie de section carée (côté  $\ell$ ) constante, à température initiale  $T_0$  non nulle, avec pertes convectives sur les quatre côtés dans un milieu à température  $T_a$  non nulle.

$$\begin{cases} T_0 = \text{constante} \\ \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{H}{K}(T_a - T) \text{ sur le contour } \Gamma \\ T_a = \text{constante (température du milieu environnant)} \end{cases}$$

En régime instationnaire, la solution analytique est [28]:

$$T = T_0 + (T_a - T_0)(1 - \theta_a)$$

avec

$$\theta_a = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_i \cos(2\alpha_n \frac{x}{\ell}) \exp(-\alpha_n^2 \tau)}{[B_i(B_i + 1) + \alpha_n^2] \cos \alpha_n} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_i \cos(2\alpha_n \frac{y}{\ell}) \exp(-\alpha_n^2 \tau)}{[B_i(B_i + 1) + \alpha_n^2] \cos \alpha_n} \right\}$$

où :

- $\tau = \frac{4at}{\ell^2}$  est le nombre de Fourier.
- $B_i = \frac{\ell}{2} \frac{H}{K}$  est le nombre de Biot.
- $\alpha_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  sont les solutions positives de l'équation  $\alpha_n \operatorname{tg} \alpha_n = B_i$ .

Dans l'analyse de cet exemple d'application, nous nous sommes intéressés à l'étude de la stabilité de la matrice A du système formé à partir des équations (2.78) et (2.79). En adoptant un pas de temps constant, cette matrice reste constante au cours du temps. Cependant, la stabilité des calculs dépend du nombre de termes  $N_{\max}$ , utilisé pour évaluer la somme qui apparaît dans l'expression (2.45).

Le développement en série de la fonction exponentielle intégrale (2.45) intervient dans le calcul des coefficients de la matrice A avec l'argument  $X = \frac{x^2}{4dt}$  (cf. équations

2.46, 2.47 avec  $f = F$ ).

Pour une diffusivité thermique  $a$  et un pas de temps  $dt$  fixés, la série (2.45) peut diverger pour de grandes valeurs de  $X$ , ce qui correspond à  $X = \frac{r^2_{max}}{4dt}$ ; où  $r_{max}$  désigne la distance maximale entre le point d'application de la solution fondamentale et un point de la frontière  $\Gamma$ , de position différente.

Pour analyser la convergence de la méthode, nous avons représenté les variations, en fonction de  $\frac{r^2_{max}}{4dt}$ , de l'expression :

$$\Delta E_i = \frac{E_i - E_{iref}}{E_{iref}}$$

où :

- $E_{iref}$  correspond aux valeurs de  $E[\frac{(r_{max})^2}{4dt}]$ , calculées avec  $N_{max} = 50$ , pour lesquelles les calculs convergent correctement.
- $E_i$  correspond aux valeurs de  $E[\frac{(r_{max})^2}{4dt}]$ , pour  $N_{max}$  tel que  $5 \leq N_{max} \leq 100$  et  $N_{max} \neq 50$ .

Les figures A.2.1 à A.2.10 représentent les variations de  $\Delta E_i \times 10^5$  en fonction de  $\frac{(r_{max})^2}{4dt}$ , ( $dt = 0,01$  s,  $a = 0,71 \cdot 10^{-5} m^2/s$ ).

Nous constatons que pour des valeurs de  $X$  telles que  $X \leq 5$ , cinq termes ( $N_{max} = 5$ ), suffisent pour assurer la convergence et la stabilité de la méthode. Pour des valeurs de  $X$  telles que  $X > 5$ , cinquante termes au moins ( $N_{max} = 50$ ) sont nécessaires pour que les calculs restent stables et que la méthode converge correctement.

Ce comportement s'explique par le fait que pour des valeurs de  $X > 5$ ,  $E(X)$  tend vers 0 (figure A.2.11), par conséquent des quantités très petites interviennent dans les calculs, ce qui provoque des instabilités.

Remarquons qu'en rapportant les distances à une longueur suffisamment grande de manière à avoir toujours  $X \leq 5$ , on peut effectuer les calculs avec  $N_{max} = 5$  (cf. [13]) et obtenir la précision cherchée.

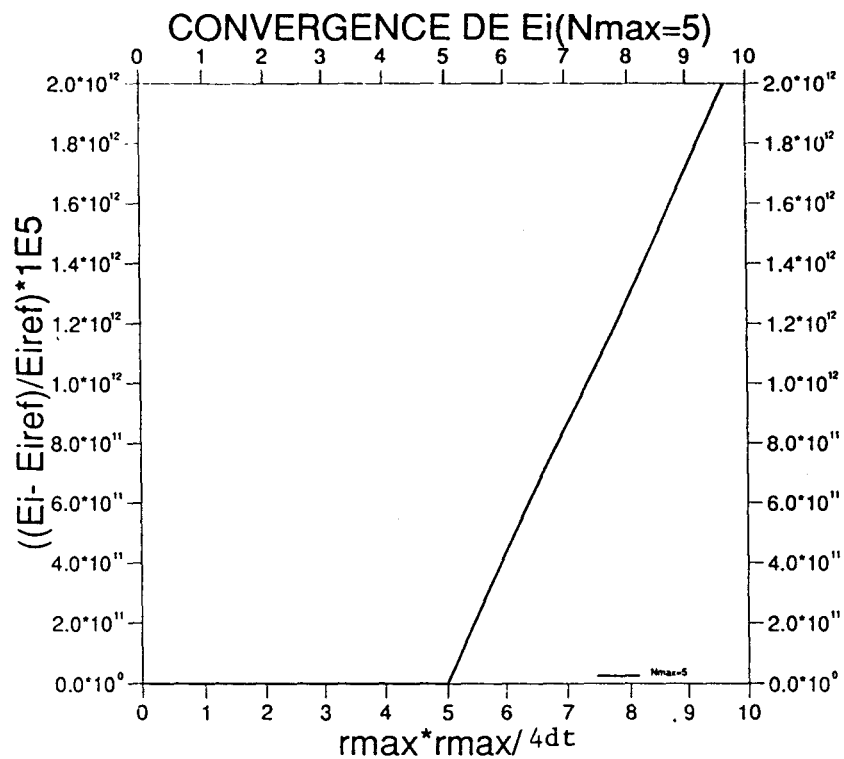


Figure A.2.1

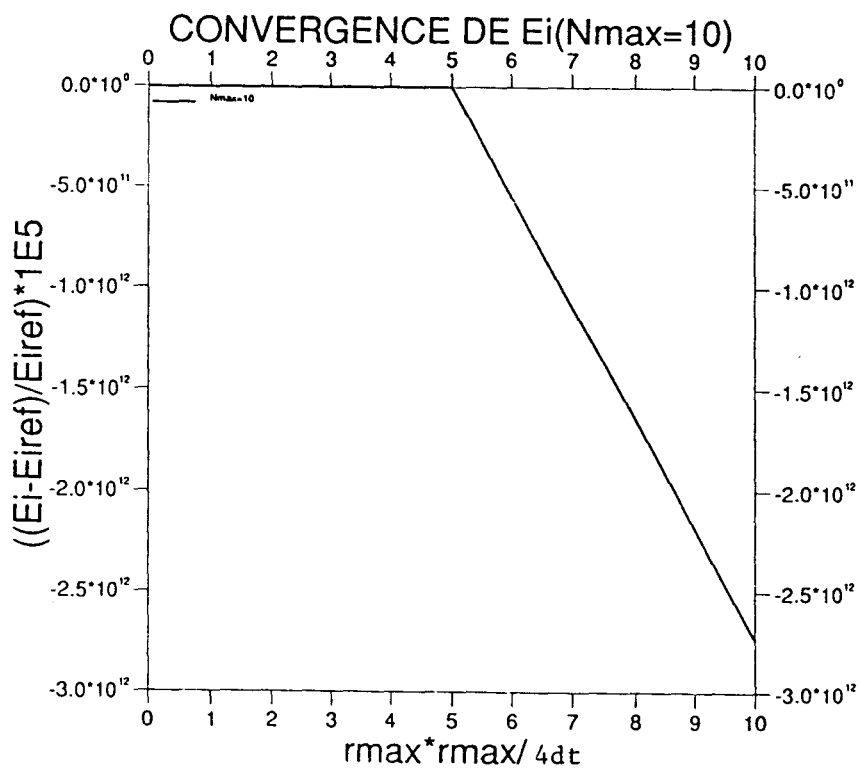


Figure A.2.2

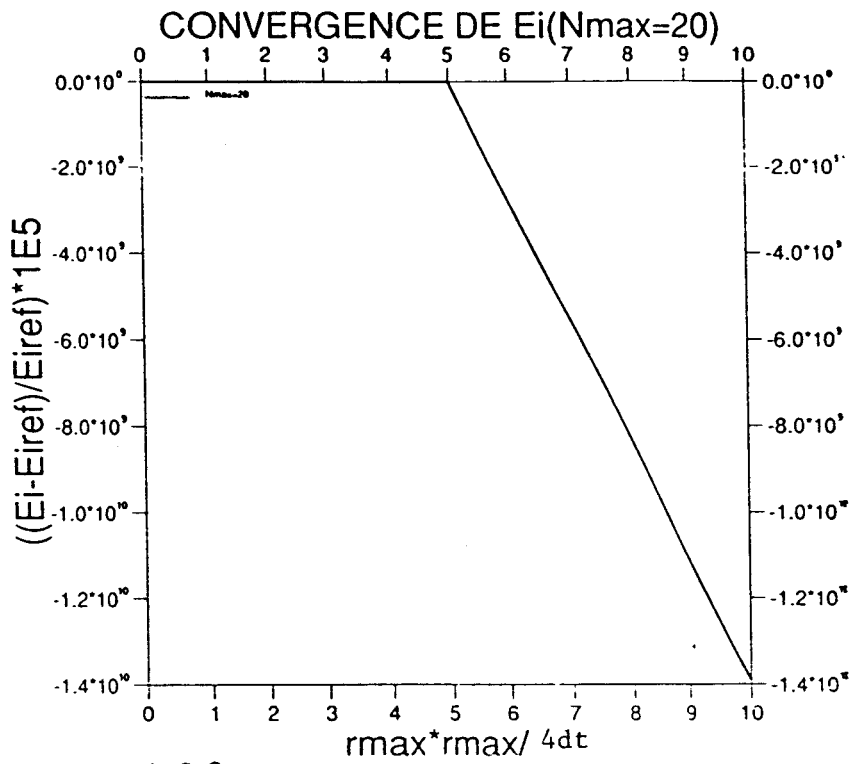


Figure A.2.3

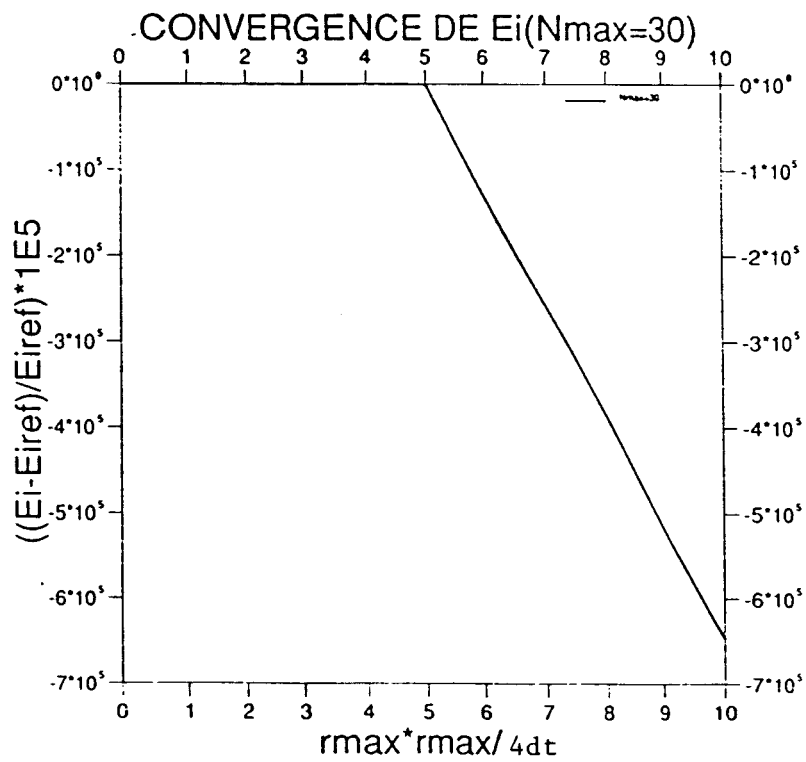


Figure A.2.4

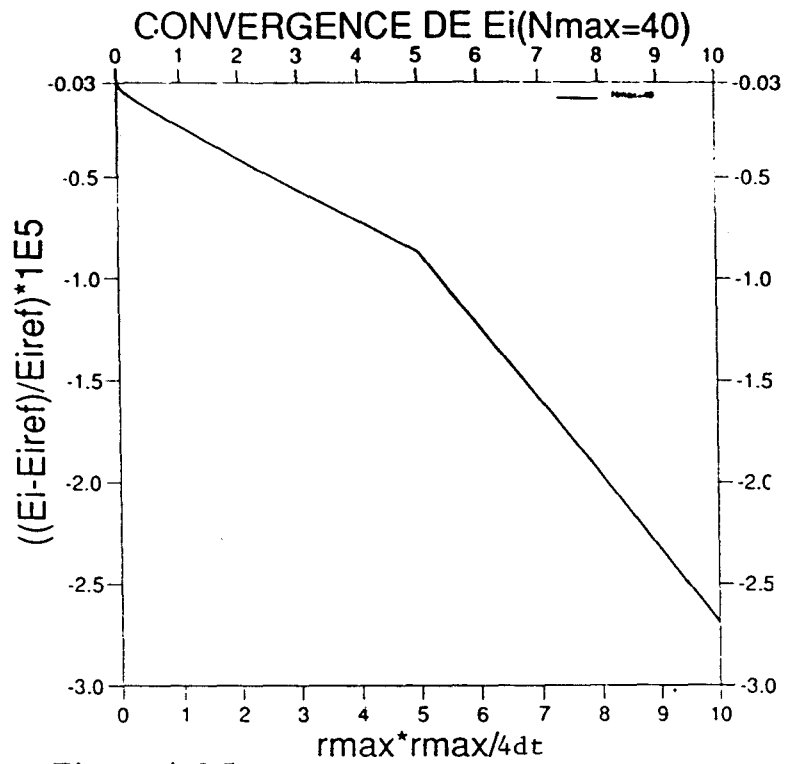


Figure A.2.5

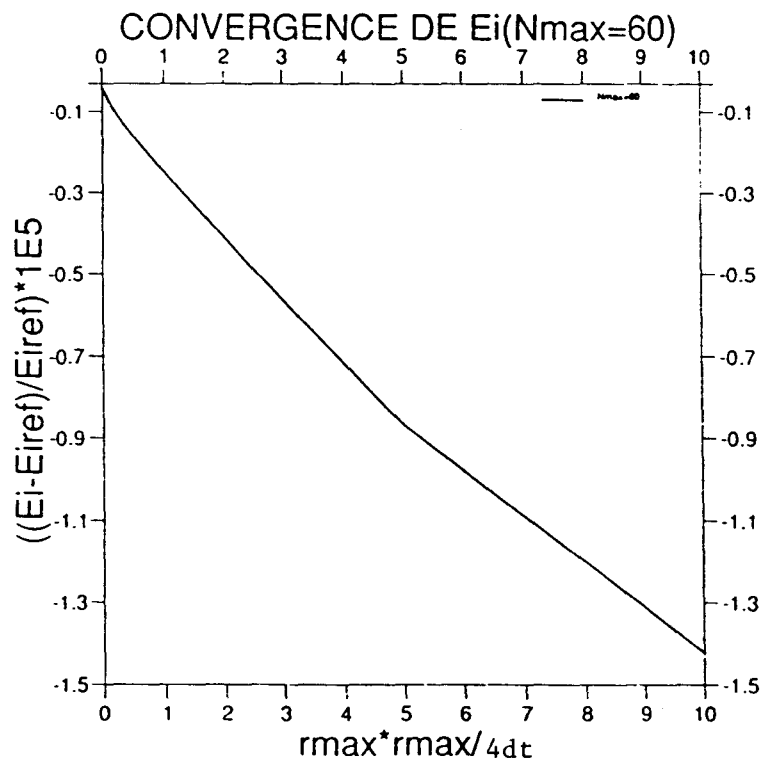


Figure A.2.6

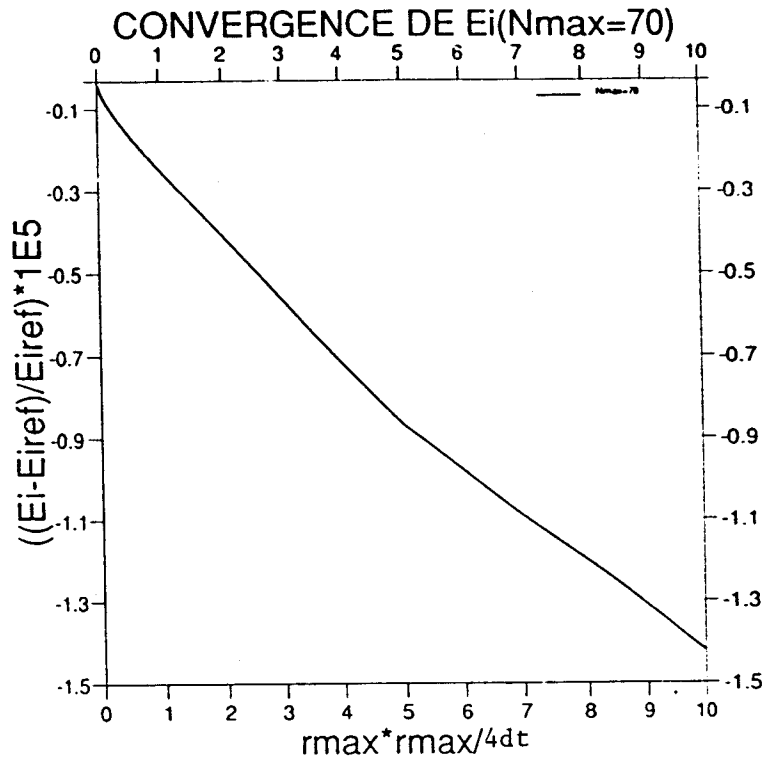


Figure A.2.7

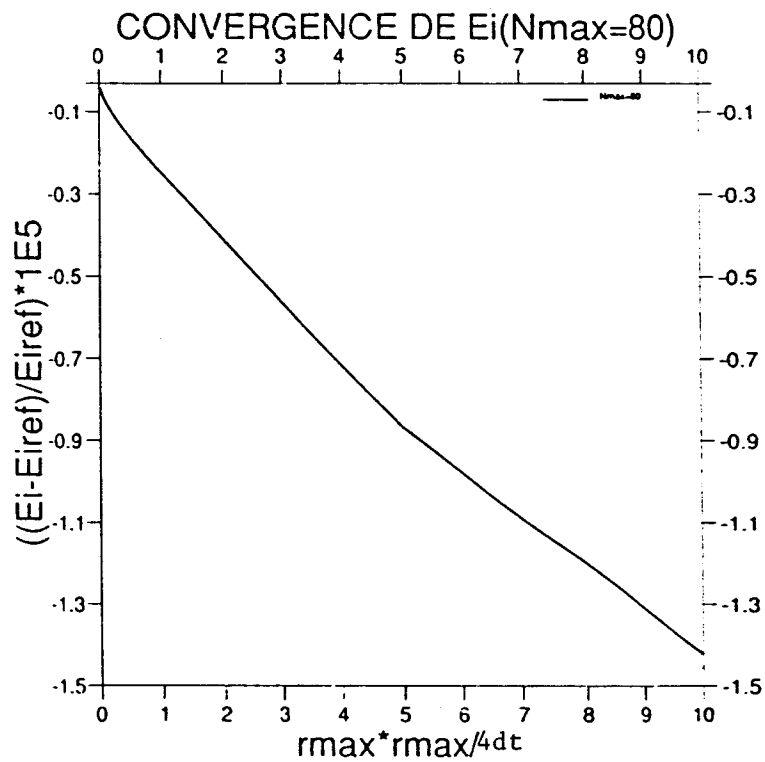


Figure A.2.8

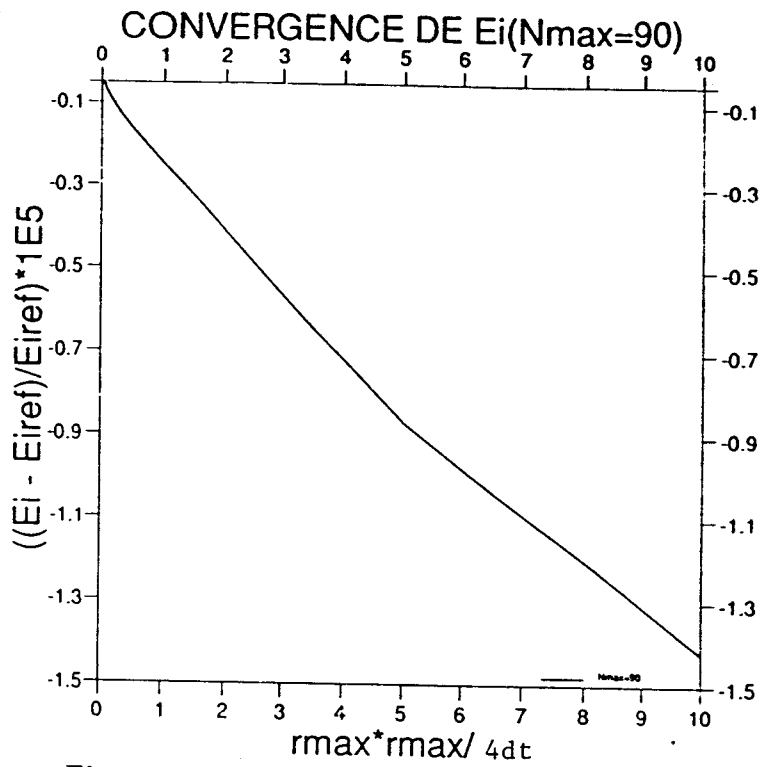


Figure A.2.9

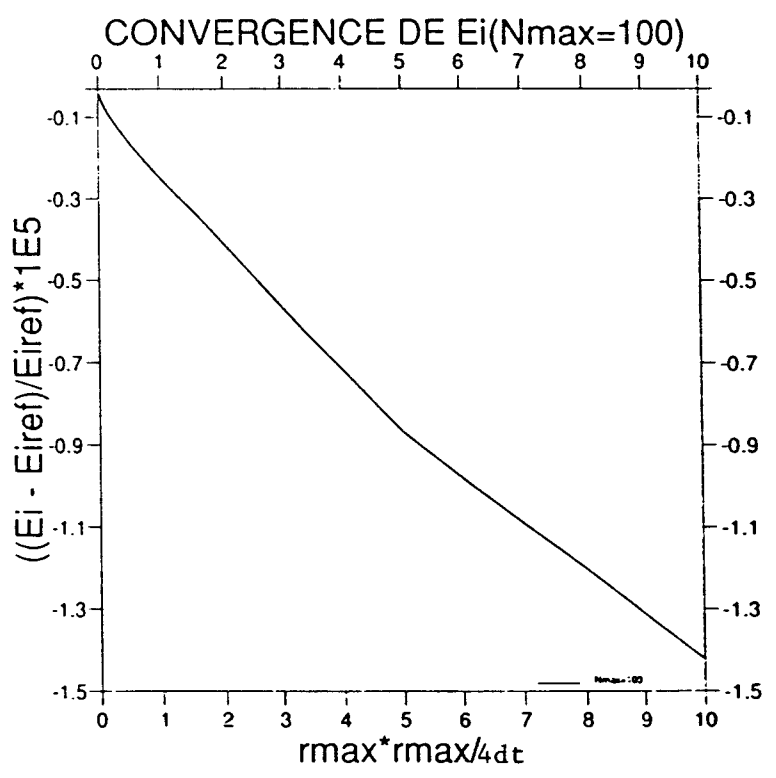


Figure A.2.10

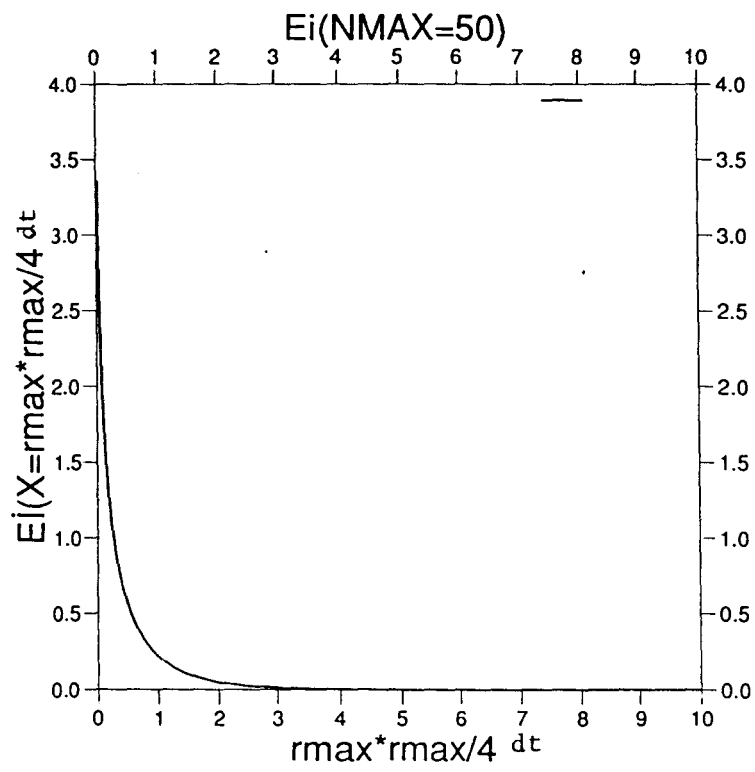


Figure A.2.11



**Application**

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell = 0.05 \text{ | (m)} \\ dt = 0.01 \text{ | (s)} \\ a = 0.71 \cdot 10^{-5} \text{ | (m}^2 \cdot \text{s}^{-1}) \\ T_o = 100 \text{ | (}^\circ \text{C)} \end{array} \right.$$

La figure A.2.12 présente l'évolution de la température du centre de la section pour différentes valeurs du coefficient de transfert  $\frac{H}{K}$ . Le contour a été discrétisé en 60 éléments constants.

**2.5.2 Mur ( $\ell \times L$ ) à température initiale  $T_o$  nulle avec une répartition mixte de température et de flux**

**Conditions aux limites**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial x} = q_o, \quad x = \ell, \quad 0 < y < L \\ T = 0, \quad x = 0, \quad 0 < y < L \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad y = L, \quad 0 < x < \ell \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad 0 < x < \ell \end{array} \right.$$

**Application [25]**

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell = 0.08 \text{ | (m)} \\ L = 0.5 \text{ | (m)} \\ K = 372 \text{ | (W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}) \\ a = 1.116410^{-4} \text{ | (m}^2 \cdot \text{s}^{-1}) \\ q_o = 10^5 \text{ | (W} \cdot \text{m}^{-2}) \end{array} \right.$$

Les figures A.2.13 et A.2.14 présentent l'évolution en fonction du temps des températures en  $(x = \ell/2, y = L/2)$  ;  $(x = \ell, y = L/2)$  respectivement. La figure A.2.15 montre l'évolution en fonction du temps du flux surfacique en  $(x = 0, y = L/2)$ . Les solutions numériques sont comparées avec la solution analytique correspondante [26, p. 113]. Le contour a été discrétisé en 60 éléments constants.

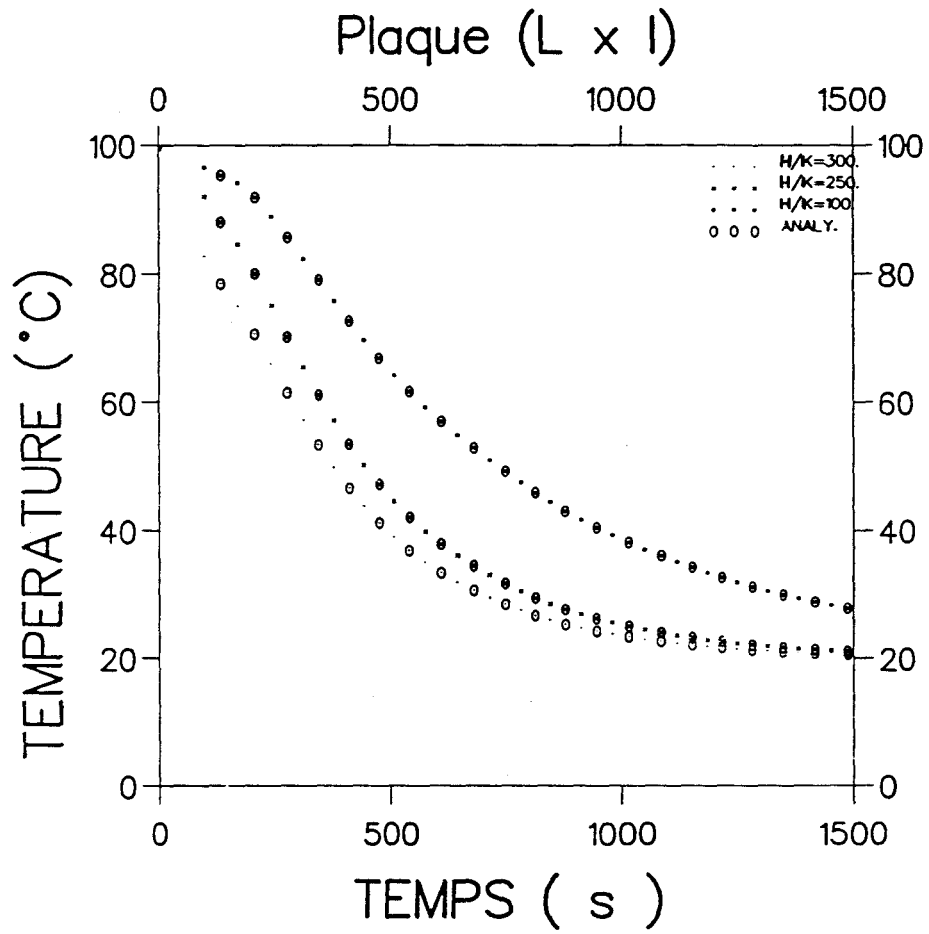


Figure A.2.12

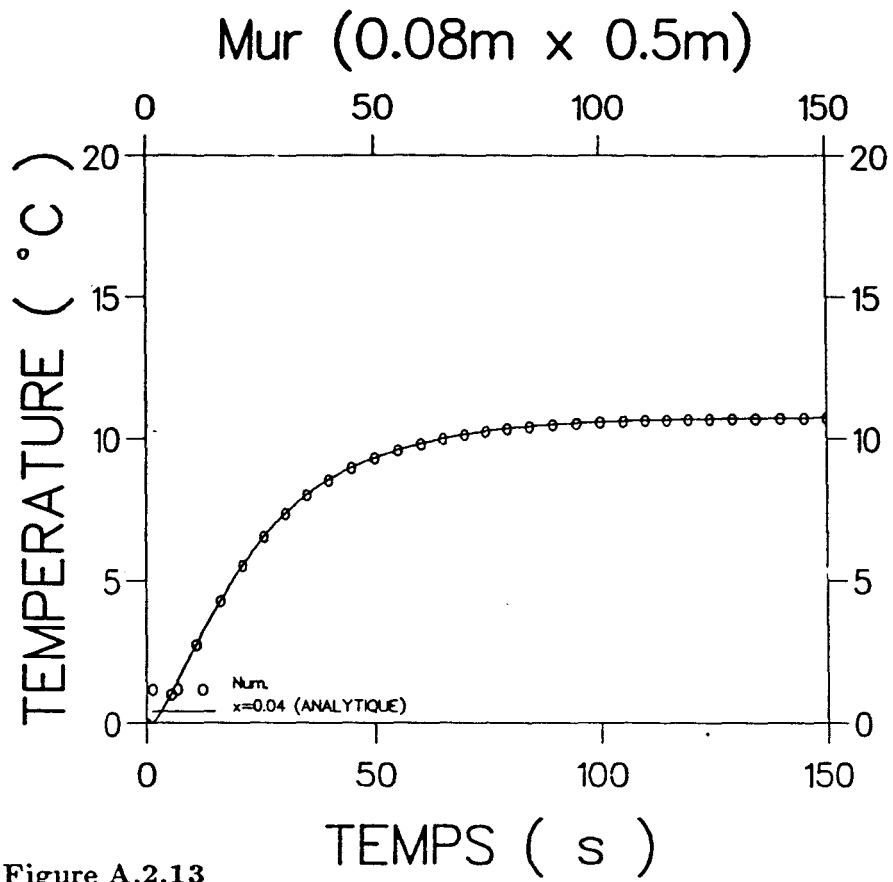


Figure A.2.13

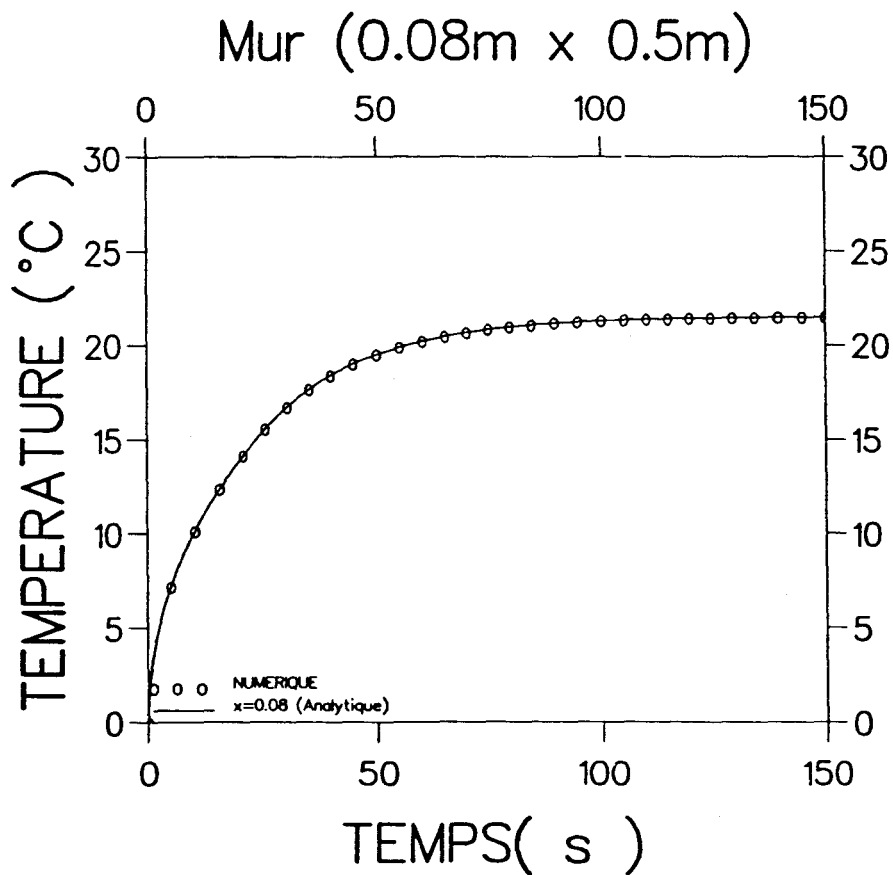


Figure A.2.14

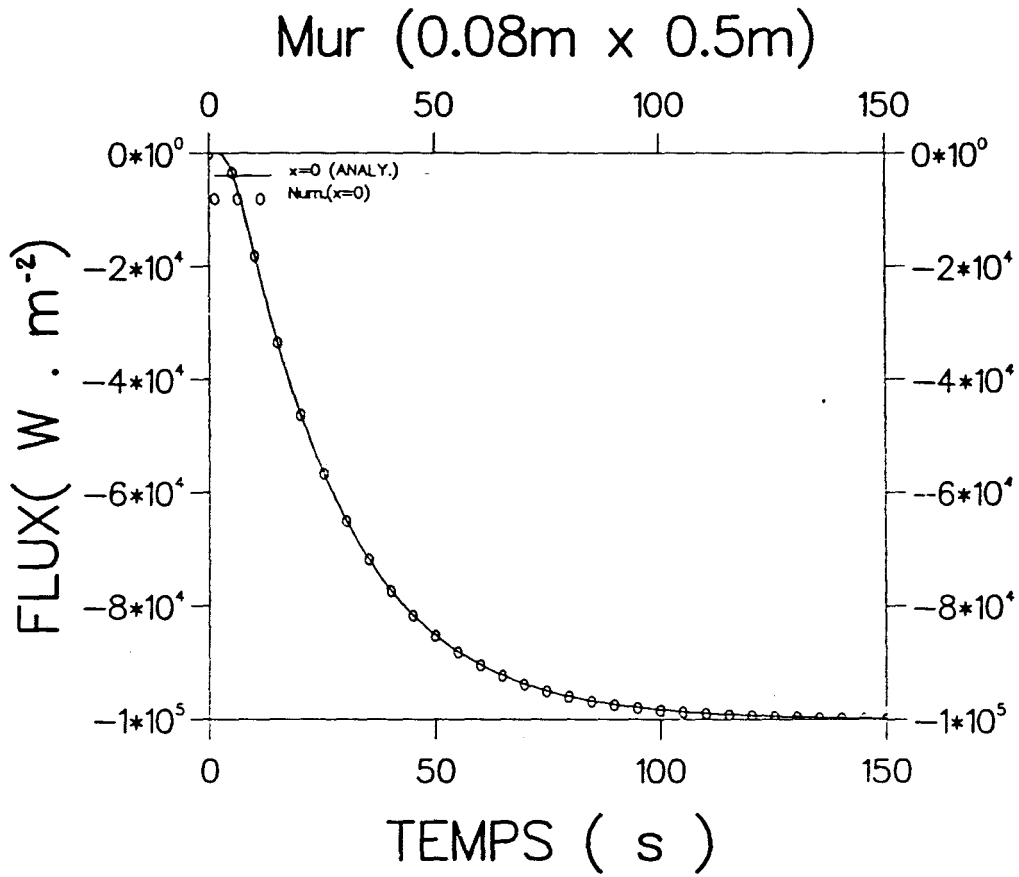


Figure A.2.15

## Chapitre 3

Application à la solidification en fonderie

## Chapitre 3

# Application à la solidification en fonderie

### 3.1 Résumé

Dans ce chapitre, la méthode des éléments de frontière est appliquée pour modéliser le processus de solidification en moules de fonderie.

La formulation utilisée présente la spécificité très attrayante de ne nécessiter que le maillage des frontières des domaines occupés par le métal et le moule.

La technique du suivi d'interface est développée et ses insuffisances sont mises en évidence.

Pour contourner le problème posé par le suivi d'interface, une technique de redressement de température est adjointe à la MEFR pour prendre en considération les effets de la chaleur latente due au changement de phase.

Les premiers tests du code de calcul que nous avons développé, sont présentés et les résultats obtenus sont confrontés aux solutions données par d'autres auteurs.

## 3.2 Introduction

Les problèmes de solidification et fusion plus connus sous l'appellation "problème de Stefan" sont souvent rencontrés dans la pratique. Ils trouvent des applications par exemple dans la production ou fusion de la glace, la solidification/fusion des métaux en fonderie, la congélation des produits alimentaires et dans bien d'autres processus soit synthétiques soit naturels.

Généralement, ces problèmes nécessitent une analyse instationnaire complexe et impliquent des géométries bidimensionnelles ou tridimensionnelles. Le modèle mathématique qui les représente est non linéaire du fait que durant le processus de solidification/fusion une quantité de chaleur est libérée ou absorbée sous forme de chaleur latente à travers la zone de transition. Enfin, les conditions aux limites inhérentes à ces problèmes compliquent davantage leur analyse numérique.

Par l'intérêt industriel qu'il suscite, le problème de solidification/fusion fait actuellement l'objet de nombreuses recherches scientifiques basées sur diverses techniques expérimentales ou théoriques.

Dans ce chapitre, une modélisation par la méthode des éléments de frontière du problème de solidification en moules de fonderie est proposée. La résolution d'un tel problème par la méthode des éléments finis ou par celle des différences finies nécessite la discrétisation en petits éléments géométriques de l'intérieur et de la frontière de chacune des régions (pièce et moule) concernées par l'analyse. Cette discrétisation implique souvent des efforts importants quant à la préparation des données et conduit à des temps de calcul coûteux. De plus, elle rend difficile l'adaptation de façon efficace du code de calcul à un système de CAO existant, en particulier dans le cas complexe des géométries tridimensionnelles.

Pour contourner les difficultés dues au maillage de l'intérieur du domaine, des investigations fondées sur la MEFR ont été entreprises par différentes équipes de chercheurs [1,2,5,6,7] pour tenter de simuler le processus de solidification. En effet, comme nous l'avons déjà précisé, dans la MEFR, seule, en général, la surface du domaine étudié est discrétisée. La démarche à suivre consiste à réduire le problème à la recherche d'une solution uniquement aux frontières : on calcule d'abord les inconnues aux noeuds de frontière, ensuite et seulement si cela est nécessaire, la solution en tout point interne

peut être obtenue en fonction des valeurs déjà calculées aux noeuds de contrôle à la frontière. Cette réduction est obtenue grâce à l'application du théorème de Green et à l'utilisation de solutions fondamentales.

Les stratégies des diverses méthodes discrètes d'approximation qui permettent de modéliser le processus de solidification sont basées essentiellement sur deux approches numériques différentes : la technique du suivi de l'interface solide-liquide et les techniques dites à domaine fixe.

Dans le premier type d'approche numérique, les phases solide et liquide sont considérées comme deux milieux différents et les effets de la chaleur latente n'interviennent qu'au niveau du bilan thermique de l'interface. Cette technique permet de suivre de façon précise l'interface solide-liquide dans le cas de la solidification d'une substance pure. Cependant, elle présente l'inconvénient de nécessiter un calcul de type prédiction-correction pour déterminer la vitesse et la position du front de solidification [1]. En effet, les équations et les conditions aux limites ne donnent aucune information sur la valeur de la célérité avec laquelle se déplace l'interface. L'utilisation d'un schéma de type prédiction-correction entraîne la modification de la matrice du système d'équations à chaque incrément du temps dans les calculs [1, 2]. De plus, la technique du suivi d'interface exige un démarrage des calculs par une autre méthode [1,2]. Ces inconvénients sont pénalisants en ce qui concerne la flexibilité des codes de calcul et les temps CPU, par conséquent ils limitent l'intérêt de l'utilisation de cette technique dans les applications industrielles.

Dans la seconde approche, les phases solide et liquide sont considérées comme un seul domaine. L'avantage de cette approche est qu'elle est plus simple du point de vue numérique que la précédente et surtout efficace pour traiter les problèmes où l'on s'intéresse plus à la distribution de température qu'au suivi très précis de l'interface solide-liquide. De plus, elle permet l'extension de l'application de la méthode des éléments de frontière à l'analyse de la solidification des alliages qui se caractérisent en général par l'existence d'une zone pâteuse et non d'un front de solidification bien défini [12]. Dans cette approche, la chaleur latente libérée pendant la solidification est considérée comme une densité de sources de chaleur interne. Pour prendre en considération les effets de chaleur latente, l'adjonction de la méthode de redressement de température à la MEF a été proposée par Hong, Umeda et Kimura [6]. Cette démarche s'explique



par le fait que lorsque les effets de la chaleur latente interviennent dans l'équation qui régit le problème comme sources volumiques de chaleur, il n'y a pas de solutions fondamentales (fonctions de Green) connues qui permettent de traiter directement le problème par la MEFR. L'introduction de la méthode de redressement de température permet de résoudre ce problème.

Les figures 3.1 et 3.2 illustrent les deux approches numériques utilisées pour modéliser la solidification.

Dans la section 3.3 de ce chapitre nous présentons une formulation de la méthode du suivi d'interface et nous mettons en évidence les inconvénients qui limitent son utilisation dans les applications industrielles.

La section 3.4 est consacrée au développement du principe de la méthode de redressement de température, "TEMPERATURE RECOVERY METHOD" [6].

Enfin dans la section 3.5 sont présentés les résultats des premiers tests, concernant l'application de la méthode de redressement de température aux problèmes de solidification, réalisés à l'aide du programme que nous avons développé.

### 3.3 Méthode du suivi d'interface

Dans le problème de solidification en moules de fonderie, le transfert de chaleur est un processus complexe qui peut impliquer divers mécanismes : conduction, convection, etc . . .

La méthode du suivi d'interface consiste à considérer que le changement de phase s'effectue à travers une surface infiniment mince, de façon instantanée, complète [1,2,4,5,7] et que les phases solide et liquide occupent mutuellement des régions séparées par cette surface de transition.

Pour simplifier la description mathématique du problème, nous supposons qu'il n'y a pas de convection dans le liquide. Nous considérons de plus qu'il n'y a pas de source de chaleur autre que la chaleur latente libérée durant la solidification à travers l'interface solide-liquide.

Dans ces conditions, le problème peut être représenté dans chacune des régions

concernées par l'analyse (liquide, solide et moule) par la loi classique de conduction de Fourier.

### 3.3.1 Formulation mathématique

Nous supposons dans cette partie que chacune des régions concernées par l'analyse est homogène, isotrope, linéaire, de diffusivité  $a$  constante dans le temps et dans l'espace :

$$a_\alpha = \left( \frac{K}{\rho c} \right)_\alpha = cte$$

Sous cette hypothèse, l'équation de conduction de Fourier s'écrit :

$$\nabla^2 T(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{a_\alpha} \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

Dans chaque domaine  $\Omega_\alpha$ , avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = l : \text{liquide} \\ \alpha = s : \text{solide} \\ \alpha = mo : \text{moule} \end{array} \right.$$

et

- $T(\mathbf{x}, t)$  est la température au point  $(x_1, x_2, x_3)$  à l'instant  $t$
- $a$  la diffusivité thermique
- $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3^2}$  est l'opérateur Laplacien.

Le traitement du domaine  $\Omega_{mo}$  se fait comme dans le chapitre 2 car il n'y a pas de changement de phase dans cette région. Nous ne développerons donc ici que les formulations relatives aux domaines  $\Omega_\ell$  (liquide) et  $\Omega_s$  (solide).

En se référant à la *figure* (3.1), considérons les conditions aux limites et initiales suivantes associées aux équations (3.1) ( $\alpha = \ell$  et  $\alpha = s$ ).

Conditions initiales :

$$T(\mathbf{x}, t = 0) \equiv T_0 \equiv \text{constante dans } \Omega_\ell (t = 0) \quad (3.2)$$

$$\Omega_s = \{ \emptyset \} \text{ à } t = 0 \quad (3.3)$$

Conditions à l'interface solide-moule  $\Gamma_{sm}$  :

$$T(\mathbf{x}, t) = T_{sm}(\mathbf{x}, t) \text{ sur } \Gamma_{sm1}, t > 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} \equiv q(\mathbf{x}, t) = q_{sm}(\mathbf{x}, t) \text{ sur } \Gamma_{sm2}, t > 0 \quad (3.5)$$

$$\Gamma_{sm} = \Gamma_{sm1} + \Gamma_{sm2} \quad (3.6)$$

$T_{sm}$  et  $\mathbf{q}_{sm}$  sont une température et un flux qui dépendent en général du temps. Pour compléter la description mathématique du problème, des conditions appropriées à l'interface solide-liquide  $\Gamma_{sl}$  sont nécessaires. Ces conditions s'expriment en écrivant (3.7) que la température à l'interface  $\Gamma_{sl}$  est égale à la température de fusion  $T_f$  du métal et (3.8) que le gain de chaleur (flux de chaleur normale qui entre à travers l'interface moins le flux de chaleur normal qui en sort) par unité de temps est égal à la chaleur latente nécessaire à solidifier la portion de liquide balayée par cette interface par unité de temps.

$$T_s = T_l = T_f \text{ sur } \Gamma_{sl} \quad (3.7)$$

$$\rho_s L \frac{dX_i}{dt} \cdot n_{si} = K_s \frac{\partial T}{\partial n_s} - K_l \frac{\partial T}{\partial n_l} \text{ sur } \Gamma_{sl} \quad (3.8)$$

En général :

$$\rho_s \neq \rho_l ; K_s \neq K_l \quad (3.9)$$

où :

- $\rho_s$  est la masse volumique du milieu solide ;
- $L$  est la chaleur latente libérée durant la solidification ;
- $K_l$  est la conductivité thermique du milieu liquide ;
- $K_s$  est la conductivité thermique du milieu solide ;

- $X_i$  sont les composantes du vecteur position  $\vec{R}(t) = X_k \vec{i}_k$  d'un point de l'interface solide-liquide  $\Gamma_{s\ell}$ , ( $k = 1, 2, 3$ );
- $\frac{\partial}{\partial n_s}$ ,  $\frac{\partial}{\partial n_\ell}$  représentent la dérivée dans le sens de la normale  $\mathbf{n}_s$  (solide) et  $\mathbf{n}_\ell$  (liquide) respectivement.

Sous les hypothèses que nous venons de préciser, les équations (3.1) à (3.8) constituent la formulation mathématique dans les régions  $\Omega_s$  et  $\Omega_\ell$  du problème de solidification.

La difficulté principale de ce problème résulte de la présence d'une frontière mobile  $\Gamma_{s\ell}$ . La position de cette frontière doit être déterminée à tout instant ce qui implique l'utilisation d'un maillage variable avec le temps sur cette surface.

### 3.3.2 Formulation intégrale

Le point de départ de cette formulation est le résidu pondéré (2.8) introduit dans le chapitre 2 :

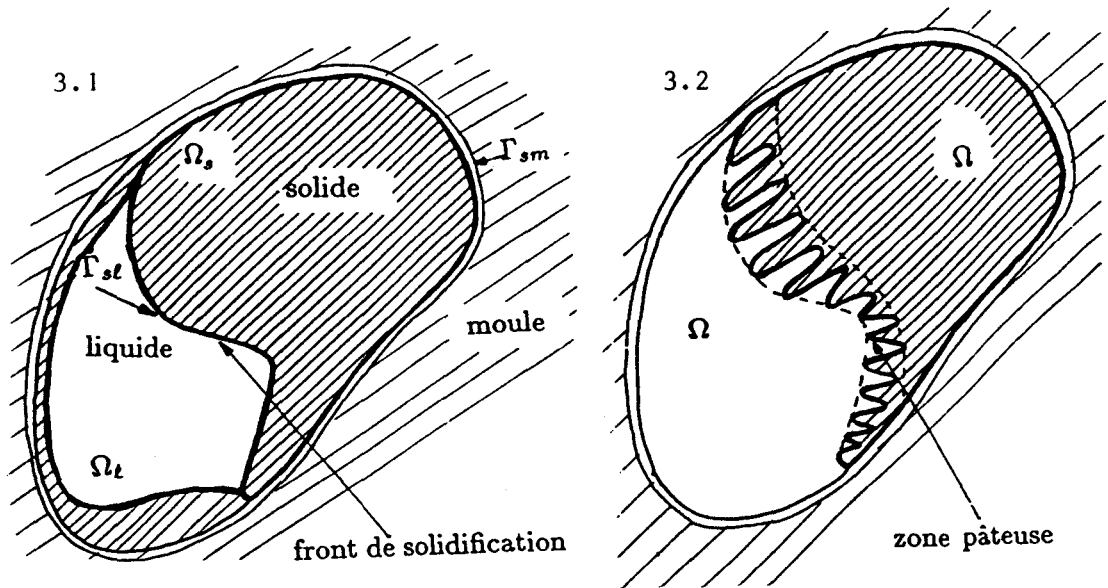
$$\int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega_\alpha(t)} \left( \nabla^2 T - \frac{1}{a_\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \right) T^* d\Omega \equiv 0 \quad (3.10)$$

avec :

$$\alpha = \ell \quad \text{ou} \quad \alpha = s$$

$T^*$  est la fonction de Green définie par les équations (2.5), (2.6) et (2.7). Dans l'équation (3.10), le domaine  $\Omega_\alpha$  dépend du temps, c'est principalement ce qui distingue cette formulation de celle qui a été présentée dans le chapitre 2.

Le but est de transformer l'intégrale sur le domaine dans l'équation (3.10) en une intégrale sur la frontière équivalente. Le domaine  $\Omega_\alpha$  est défini par la *figure 3.1*.



Figures 3.1 - 3.2: Schémas des deux approches numériques utilisées pour modéliser la solidification par la MEFR.

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_{sm} + \Gamma_{sl} \quad \text{pour le solide} \quad (3.11)$$

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_{sl} \quad \text{pour le liquide} \quad (3.12)$$

En appliquant le théorème de Green, nous pouvons écrire :

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega_\alpha(t)} \left( \nabla^2 T \right) T^* d \Omega = \int_{t_0}^{t_F} dt \left\{ \int_{\Gamma_\alpha} \left( T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d \Gamma + \int_{\Omega_\alpha(t)} T \nabla^2 T^* d \Omega \right\} \quad (3.13)$$

Considérons maintenant l'intégrale :

$$I_2 = \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega_\alpha} - \frac{1}{a_\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} T^* d \Omega \quad (3.14)$$

L'intégrale  $I_2$  peut se mettre sous la forme :

$$I_2 = \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega_\alpha(t)} -\frac{1}{a_\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (T^* T) - T \frac{\partial T^*}{\partial t} \right] d\Omega \quad (3.15)$$

L'équation (3.10) s'écrit :

$$I_1 + I_2 \equiv 0 \quad (3.16)$$

Contrairement à la formulation que nous avons présentée au chapitre 2, dans laquelle le domaine d'intégration est fixe dans le temps, nous ne pouvons pas effectuer une intégration par parties dans l'expression (3.16), du fait que les bornes d'intégration dépendent du temps.

Pour résoudre ce problème, nous pouvons utiliser le théorème de dérivation par rapport au temps d'une intégrale prise sur un domaine que l'on suit dans son mouvement. Pour une phase  $\Omega_\alpha$  de frontière  $\Gamma_\alpha$ , ce théorème s'écrit [5] :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_\alpha(t)} g d\Omega \right) = \int_{\Omega_\alpha(t)} \frac{\partial g}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma_\alpha(t)} g \frac{dS}{dt} d\Gamma \quad (3.17)$$

où :  $g$  est une fonction quelconque intégrable et différentiable sur le domaine  $\Omega_\alpha$  et  $\frac{dS}{dt}$  le module de la vitesse normale de déplacement de la frontière  $\Gamma_\alpha$ . Dans la suite, nous désignerons par  $V_n$  ce module.

Posons :

$$g = T^* T \quad (3.18)$$

D'après (3.17), nous pouvons écrire l'équation (3.15) sous la forme :

$$-a_\alpha I_2 = \int_{t_0}^{t_F} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega_\alpha(t)} (T^* T) d\Omega \right] - \int_{\Gamma_\alpha} T^* T V_n d\Gamma - \int_{\Omega_\alpha(t)} T \frac{\partial T^*}{\partial t} d\Omega \right\} dt \quad (3.19)$$

or

$$\int_{t_0}^{t_F} dt \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega_\alpha(t)} (T^* T) d\Omega \right] = \int_{\Omega_\alpha(t_F)} T^* T d\Omega - \int_{\Omega_\alpha(t_0)} T^* T d\Omega \quad (3.20)$$

et d'après le principe de causalité (cf. équation 2.20), nous avons :

$$\int_{\Omega_\alpha(t_F)} T^* T d\Omega \equiv 0 \quad (3.21)$$

L'équation (3.19) peut alors s'écrire sous la forme finale :

$$I_2 = \frac{1}{a_\alpha} \int_{t_0}^{t_F}$$

$$\left[ \int_{\Omega_\alpha(t_0)} (T^* T) d\Omega + \int_{\Gamma_\alpha} (T^* T) V_n d\Gamma + \int_{\Omega_\alpha(t)} \left( T \frac{\partial T^*}{\partial t} \right) d\Omega \right] dt \quad (3.22)$$

En additionnant les équations (3.13) et (3.22) et en prenant en considération les équations (2.6) et (2.7), nous obtenons après multiplication par la diffusivité  $a$  l'équation intégrale suivante :

$$\begin{aligned} & - T(\mathbf{s}, t_F) + \\ & a_\alpha \left[ \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Gamma_\alpha} \left( T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} + \frac{1}{a_\alpha} T^* T V_n \right) d\Gamma \right] \\ & + \int_{\Omega_\alpha(t_0)} T^* T d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

où :  $\mathbf{s}$  désigne la position du point d'application de la solution fondamentale à l'intérieur du domaine  $\Omega_\alpha$ .

Lorsque nous déplaçons le point  $\mathbf{s}$  à la frontière, l'équation (3.23) devient [13] :

$$\begin{aligned}
 C(s) T(s, t_F) = & \\
 a_\alpha \left[ \int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Gamma_\alpha} \left( T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} + \frac{1}{a_\alpha} T^* T V_n \right) d\Gamma \right] & \\
 + \int_{\Omega_\alpha(t_0)} T^* T d\Omega & \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Le terme libre  $C(s)$  prend les mêmes valeurs que celles que nous avons définies dans le chapitre 2.

L'équation (3.24) est l'équation intégrale associée à l'équation (3.1) lorsque le domaine considéré varie avec le temps.

Remarquons que, pour une frontière ou une portion de frontière fixe, nous avons  $V_n \equiv 0$  et nous retrouvons l'équation intégrale (2.22) valable pour un problème de diffusion instationnaire dans un domaine à frontière fixe.

L'intégrale sur le domaine  $\Omega_\alpha(t_0)$  dans l'équation (3.24) peut être évitée si l'on se trouve dans un des cas développés dans le chapitre 2 (cf. section 2.1.5). Lorsque cette intégrale sur le domaine ne peut pas être supprimée, la formulation du problème par la méthode des éléments de frontière nécessite la discrétisation du domaine  $\Omega_\alpha$  en cellules internes. Bien que cette discrétisation n'introduise pas d'inconnues supplémentaires, elle présente néanmoins certaines difficultés. En effet, il faut remailler l'intérieur et l'extérieur de chacune des phases solide et liquide à chaque instant dans le traitement numérique car les limites de ces deux régions varient avec le temps. Cet inconvénient rend difficile l'utilisation de la méthode dans un système de CAO et augmente considérablement le temps de calcul.

### 3.3.3 Formulation numérique en 2 D : discrétisation

La stratégie consiste à représenter les inconnues du problème par des fonctions d'interpolation d'espace et de temps convenables. L'interface solide-liquide est une inconnue du problème dont la position doit être mise à jour continuellement dans le temps, ce qui fait que les fonctions d'interpolation d'espace dépendent du temps sur cette frontière.

Formellement, les variables du problème peuvent s'écrire :



$$T(\mathbf{x}, t) = \varphi^T \psi \mathbf{T}^N \quad (3.25)$$

$$q(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial T}{\partial n}(\mathbf{x}, t) = \varphi^T \psi \mathbf{q}^N \quad (3.26)$$

où :  $\varphi$  et  $\psi$  sont respectivement les fonctions d'interpolation d'espace et de temps sur un élément. Les vecteurs  $\mathbf{T}^N$  et  $\mathbf{q}^N$  contiennent les valeurs modales de la température et du flux respectivement.

Dans le cas où les températures et les flux sont supposés variables linéairement dans le temps et dans l'espace, on définit les fonctions  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  par les relations :

$$\varphi_1 = 1 - \frac{s(t)}{\Delta s(t)}, \quad \varphi_2 = \frac{s(t)}{\Delta s(t)} \quad (3.27)$$

$$\psi_1 = \frac{(t_f - t)}{\Delta t_f}, \quad \psi_2 = \frac{(t - t_{f-1})}{\Delta t_f} \quad (3.28)$$

- où :
- $s(t)$  est l'abscisse curviligne comptée à l'instant  $t$  à partir du premier noeud de l'élément linéaire considéré ;
  - $\Delta s(t)$  est la longueur à l'instant  $t$  de l'élément linéaire considéré ;
  - $\Delta t_f = t_f - t_{f-1}$  est le pas de temps entre les instants  $t_{f-1}$  et  $t_f$

Subdivisons les frontières  $\Gamma_{sm}$  et  $\Gamma_{sl}$  en  $N_1$  et  $N_2$  éléments linéaires [13] respectivement. Rappelons que  $\Gamma_{sl}$  varie au cours du temps. Donc les mailles de l'interface solide-liquide dépendent également du temps [ $N_2 = N_2(t)$ ].

D'après l'équation (3.2), par une translation de  $-T_0$  sur la température, ce qui revient à prendre  $T_0$  comme température de référence, nous pouvons éliminer dans l'équation (3.24) l'intégrale sur le domaine. Notons que cette démarche n'est nécessaire que pour  $\Omega_\ell$  du fait de la condition (3.3).

Dans ce cas, les formes discrètes de l'équation (3.24) pour chacune des deux phases  $\Omega_s$  et  $\Omega_\ell$  sont les suivantes :

- Dans la phase solide pour des points situés sur l'interface solide-liquide  $\Gamma_{sl}$ ,  $T = T_f$  et l'équation discrète s'écrit :

$$\begin{aligned}
 C.T_f &= a_s \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^{N_1} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \int_{\Gamma_{sm,j}} \left[ T_s^* q_{sm} - \frac{\partial T_s^*}{\partial n_s} T_{sm} \right] d\Gamma dt \\
 &+ a_s \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^{N_2(t)} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \int_{\Gamma_{s\ell,j}} \left[ T_s^* \left( q_s + \frac{T_f}{a_s} V_n \right) - \frac{\partial T_s^*}{\partial n_s} T_f \right] d\Gamma dt \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

( $T_f$  est la température de fusion).

- Dans la phase solide pour des points situés sur la frontière solide-moule  $\Gamma_{sm}$ , on a la même relation :

$$\begin{aligned}
 C.T_{sm}^F &= a_s \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^{N_1} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \int_{\Gamma_{sm,j}} \left[ T_s^* q_{sm} - \frac{\partial T_s^*}{\partial n_s} T_{sm} \right] d\Gamma dt \\
 &+ a_s \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^{N_2(t)} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \int_{\Gamma_{s\ell,j}} \left[ T_s^* \left( q_s + \frac{T_f}{a_s} V_n \right) - \frac{\partial T_s^*}{\partial n_s} T_f \right] d\Gamma dt \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

- Dans la phase liquide, les points  $s$  sont situés sur la frontière  $\Gamma_{s\ell}$  (pour cette phase, il y a une seule frontière). Dans ce cas, puisqu'à l'instant initial  $\Omega_\ell$  n'est pas vide, nous effectuons le changement de variable

$$\hat{T} = T - T_0 \quad (3.31)$$

ce qui permet d'éviter l'intégrale sur le domaine qui apparaît dans l'équation (3.24), nous obtenons alors l'équation discrète :

$$\begin{aligned}
 C. (T_f - T_0) &= \\
 a_\ell \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^{N_2(t)} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \int_{\Gamma_{s\ell,j}} \left[ T_\ell^* \left( -q_\ell - \frac{T_f - T_0}{a_\ell} V_n \right) - \frac{\partial T_\ell^*}{\partial n_\ell} (T_f - T_0) \right] d\Gamma & \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

Dans les équations (3.30) et (3.32) les gradients normaux de flux sont définis par :

$$q_s \equiv \frac{\partial T_s}{\partial n_s} \quad (3.33)$$

$$q_\ell \equiv \frac{\partial T_\ell}{\partial n_s} \equiv - \frac{\partial T_\ell}{\partial n_\ell}, \quad (n_s \equiv -n_\ell) \quad (3.34)$$

et les fonctions de Green  $T_s^*$  et  $T_\ell^*$  dépendent des propriétés thermophysiques de la phase solide et de la phase liquide respectivement.

Aux équations (3.29), (3.30) et (3.32), il faut ajouter l'équation (3.8) que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\rho_s LV_n = K_s q_s - K_\ell q_\ell \quad (3.35)$$

$$\text{avec } V_n = \frac{dX_i}{dt} \cdot n_{s,i}$$

Dans la zone occupée par le moule, nous pouvons écrire les équations suivantes, pour lesquelles nous avons considéré un changement de variable du type (3.31) :

\* Sur la frontière solide-moule,  $\Gamma_{sm}$

$$\begin{aligned} C \cdot T_{ms}^F &= a_m \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^{N_1} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \int_{\Gamma_{sm,j}} \left[ T_m^* q_{ms} - \frac{\partial T_m^*}{\partial n_m} T_{ms} \right] d\Gamma dt \\ &+ a_m \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^{N_3} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \int_{\Gamma_{ex}} \left[ T_m^* q_{ex} - \frac{\partial T_m^*}{\partial n_m} T_{ex} \right] d\Gamma dt \end{aligned} \quad (3.36)$$

- où :
- $T_{ex}$  et  $q_{ex}$  sont respectivement la température et le gradient du flux à la frontière extérieure du moule ;
  - $T_{ms}$  et  $q_{ms}$  sont la température et le gradient normal du flux, côté moule, à la frontière solide-moule,  $\Gamma_{sm}$  ;
  - $\Gamma_{ex}$  est la frontière extérieure du moule.
  - $N_3$  est le nombre d'éléments sur la frontière extérieure du moule.

\* sur la frontière extérieure du moule,  $\Gamma_{ex}$ , nous aurons également :

$$\begin{aligned}
 C \cdot T_{ex}^F &= a_m \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^{N_1} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \int_{\Gamma_{sm,j}} \left[ T_m^* q_{ms} - \frac{\partial T_m^*}{\partial n_m} T_{ms} \right] d\Gamma dt \\
 &+ a_m \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^{N_3} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \int_{\Gamma_{ex}} \left[ T_m^* q_{ex} - \frac{\partial T_m^*}{\partial n_m} T_{ex} \right] d\Gamma dt \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Les équations (3.29), (3.30), (3.32), (3.36) et (3.37) constituent la formulation intégrale du problème de solidification lorsque la MEFR est appliquée en utilisant la technique du suivi d'interface. Dans le cas général, pour pouvoir résoudre ces équations, il est nécessaire d'ajouter à celles-ci l'équation (3.35) qui définit l'échange de chaleur à travers l'interface solide-liquide. Cette équation fait intervenir la vitesse normale  $V_n$  des noeuds à la frontière solide-liquide qui est une inconnue du problème.

Si l'on considère l'approximation sur un élément des fonctions (3.25) et (3.26), dans lesquelles les fonctions  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  sont définies par les relations (3.27) et (3.28), en désignant par 1 et 2 les indices relatifs aux deux noeuds de chaque élément linéaire, les gradients normaux de flux  $q_s$  et  $q_\ell$  peuvent être définis à l'instant  $t_f (f \geq 1)$  par :

$$q_s = \varphi_1 \psi_1 q_{s,1}^{f-1} + \varphi_2 \psi_1 q_{s,2}^{f-1} + \varphi_1 \psi_2 q_{s,1}^f + \varphi_2 \psi_2 q_{s,2}^f \quad (3.38)$$

et

$$q_\ell = \varphi_1 \psi_1 q_{\ell,1}^{f-1} + \varphi_2 \psi_1 q_{\ell,2}^{f-1} + \varphi_1 \psi_2 q_{\ell,1}^f + \varphi_2 \psi_2 q_{\ell,2}^f \quad (3.39)$$

Le principe de la méthode du suivi d'interface consiste à remplacer les inconnues du problème par des relations du type (3.38), (3.39) dans les équations (3.29), (3.30), (3.32), (3.36) et (3.37) et de les regrouper sous forme d'un système d'équations qui doit être résolu en utilisant un processus itératif de type prédiction-correction, car la vitesse et le maillage du front de solidification varient avec le temps.

Notons aussi que le traitement numérique nécessite de travailler avec des éléments au moins du premier ordre (linéaires) pour pouvoir mieux contrôler les déplacements des noeuds, cette démarche est pénalisante du point de vue temps de calcul. Enfin, le démarrage du processus par une autre méthode, telle que la méthode enthalpique [1] est nécessaire.

Ces inconvénients font que l'application de la MEFR avec suivi de l'interface est complexe et nécessite des calculs très fastidieux, notamment dans le cas de l'analyse de problèmes tridimensionnels.

Pour contourner les inconvénients posés par le suivi d'interface, le traitement du problème de solidification par la MEFR s'effectue par adjonction d'une technique de redressement de température [6].

L'originalité de la démarche que nous proposons, consiste à ne pas mailler l'intérieur du domaine, ce qui permet de faciliter un lien éventuel du code de calcul avec un système de CAO existant et son intégration à un problème de calcul général. De plus, la technique de redressement de température permet de réduire le temps de calcul et peut être facilement étendue à l'analyse de problèmes tridimensionnels car elle n'introduit pas dans la formulation mathématique une condition sur l'interface solide-liquide.

### 3.4 Méthode de redressement de température

L'approche utilisée consiste à considérer la chaleur latente libérée pendant la solidification comme une densité de sources internes. Les phases solide et liquide sont maintenant traitées comme une seule région [6, 12, 15]. De ce fait, le système étudié n'est plus composé que de deux régions (pièce et moule) et les équations d'équilibre et de comptabilité à l'interface n'interviennent plus de façon explicite dans la formulation mathématique du problème (cf. *figure 3.2*). Du fait que l'équation du problème contient un terme de sources dû au dégagement de chaleur latente durant le processus, le problème ne peut pas être traité directement par la MEFR.

#### 3.4.1 Formulation mathématique

Dans l'analyse mathématique qui suit, nous supposons que le matériau étudié est à propriétés thermophysiques constantes dans l'espace et dans le temps. De plus, nous admettons qu'au cours de la solidification, la conduction est le mode de transfert de chaleur prépondérant et qu'en particulier, on néglige les courants convectifs dans la région liquide. La validité de cette hypothèse est largement discutée dans les références [3,23].

Sous ces hypothèses, l'équation de conduction pour la solidification dérive [5,6,12] de l'équation générale :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - K \nabla^2 T = \rho L_s S_s \text{ dans } \Omega_p \quad (3.40)$$

où :

- $\rho$  est la masse volumique (kg/m<sup>3</sup>)
- $T$  est la température (K)
- $c$  est la chaleur massique (J/kgK)
- $t$  est le temps (s)
- $\nabla^2$  est l'opérateur laplacien en coordonnées d'espace ( $x_i$ ) (K/m<sup>2</sup>)
- $K$  est la conductivité thermique (W/mK)
- $L_s$  est la chaleur latente (J/kg)
- $S_s$  est le taux de production de solide dû au changement de phase (s<sup>-1</sup>)
- $\Omega_p$  est le domaine occupé par la pièce (solide + liquide) définie dans le système de coordonnées ( $x_i$ ).

En général, la modélisation du terme  $S_s$  est complexe [5,6,12]. Cependant, une simplification se présente lorsque la zone solidifiée est immobile et la fraction de solide formée durant le processus de solidification notée  $f_s$  ne dépend que de la température. Dans ces conditions, le taux de production de solide  $S_s$  peut s'écrire [5, 6, 12] :

$$S_s = \frac{\partial f_s}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.41)$$

En prenant en considération l'équation [3.41], l'équation (1) devient alors :

$$\rho \left( c - L_s \frac{\partial f_s}{\partial T} \right) \frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T \text{ dans } \Omega_p \quad (3.42)$$

Posons :

$$C_E = c - L_s \frac{\partial f_s}{\partial T} \quad (3.43)$$

L'équation (3.42) peut alors maintenant s'écrire sous la forme :

$$\rho C_E \frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T \text{ dans } \Omega_p \quad (3.44)$$

La quantité  $C_E$  qui apparaît dans l'équation (3.44) a les dimensions d'une chaleur massique. En général,  $C_E$  est une fonction de la fraction de solide ou de la température ce qui complique le traitement par la méthode des éléments de frontière de l'équation (3.44). En effet, puisque  $C_E$  varie localement au cours du temps, le calcul de la solution fondamentale à chaque itération devient nécessaire. En d'autres termes, la fonction  $T^*$  définie dans le chapitre 2 n'est plus valable car le terme  $\frac{K}{\rho C_E}$  homogène à une diffusivité est variable et doit être calculé à chaque pas de temps en fonction de la température ou de la fraction de solide  $f_s$ . Ce calcul implique un traitement itératif qui augmente considérablement les temps CPU car le système final obtenu n'est pas linéaire.

La méthode de redressement de température permet de répondre à cette limitation de la MEF. Le principe de la technique de redressement de température revient à transformer la chaleur latente libérée durant la solidification entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  en une variation de température  $\Delta T$  équivalente. La démarche consiste à calculer d'abord la température en un point donné sans prendre en considération les effets de la chaleur latente dans l'équation (3.40). Ce calcul est effectué en utilisant la méthode des éléments de frontière. Ensuite, la température ainsi calculée par la MEF est corrigée par la technique de redressement de température pour prendre en compte l'effet de la chaleur latente.

Le point de départ de la démarche suivie est l'équation :

$$a \nabla^2 T - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \text{ dans } \Omega_p \quad (3.45)$$

où :

$$a = \frac{K}{\rho c} \text{ est la diffusivité thermique}$$

### **Conditions aux limites :**

Pour généraliser la formulation utilisée supposons que sur le contour  $\Gamma_\alpha$  ( $\alpha = p$  : pièce,  $\alpha = m$  : moule) de chacune des deux régions concernées par l'analyse soit divisée en trois parties disjointes  $\Gamma_1, \Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  respectivement associées aux trois types de conditions aux limites rencontrées dans la pratique :

• **type 1 :**

Condition essentielle de type Dirichlet

$$T(\mathbf{x}, t) = \bar{T}(\mathbf{x}, t) \text{ sur } \Gamma_1 \quad (3.46)$$

• **type 2 :**

Condition naturelle de type Neumann

$$q(\mathbf{x}, t) = -K \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial n} = \bar{q}(\mathbf{x}, t) \text{ sur } \Gamma_2 \quad (3.47)$$

• **type 3 :**

Condition mixte de type Fourier

$$\frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial n} = a + b T(\mathbf{x}, t) \text{ sur } \Gamma_3 \quad (3.48)$$

**Condition initiale :**

Nous nous plaçons dans l'hypothèse de condition initiale uniforme dans chacune des deux régions concernée par l'analyse. En adoptant donc le schéma II décrit au chapitre 2 dans lequel l'intégration sur le temps se réfère toujours à l'instant initial  $t_0$  (cf. section 2.1.2), nous obtenons dans chaque domaine une équation intégrale de la forme (2.22) où l'intégrale sur le domaine s'annule si nous prenons la température initiale comme origine de températures (cf. 2.70).

**3.4.2 Formulation numérique : discrétisation**

Dans le cas d'une équation du type (3.45), compte tenu de l'hypothèse faite sur la condition initiale et des développements que nous avons présentés au chapitre 2, l'équation fondamentale intégrale (2.22) associée s'écrit :

$$C(\mathbf{s}) T(\mathbf{s}, t_F) = a \int_{t_0}^{t_F} dt \left[ \int_{\Gamma} \left( T^* \frac{\partial T}{\partial n} - T \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) d\Gamma \right] \quad (3.49)$$

Pour obtenir une solution numérique à l'équation (3.49) par la MEF, il est nécessaire de discrétiser la frontière  $\Gamma_{p-m}$  en une série d'éléments géométriques. Notons qu'il n'est pas nécessaire de mailler l'intérieur de la pièce car l'intégrale dans l'équation (3.49) est prise uniquement sur la frontière. Le problème est ainsi réduit à la recherche



d'une solution à la frontière. Cette solution permet ensuite de calculer les inconnues en des points internes arbitrairement choisis, définis uniquement par leurs coordonnées.

En général, la modélisation des éléments géométriques dans la MEFR, s'effectue de la même façon que dans la MEF [13, 32]. Dans la démarche que nous avons utilisée, nous n'avons appliqué que des éléments isoparamétriques constants [13] en raison de leur simplicité.

Dans l'équation (3.49), la fonction  $T^*$  est la fonction de Green solution fondamentale de l'équation (3.45), définie au chapitre 2 par les équations (2.5) et (2.6).

Supposons maintenant que la frontière  $\Gamma_{p-m}$  est divisé en  $N$  éléments et le temps est subdivisé en  $F$  intervalles de temps non nécessairement égaux. Sous cette hypothèse, l'équation intégrale fondamentale (3.49) discrétisée dans l'espace et dans le temps est :

$$\begin{aligned} C_i T_i^F + a \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^N \int_{t_{f-1}}^{t_f} dt \int_{\Gamma_j} T \frac{\partial T^*}{\partial n} d\Gamma \\ = a \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^N \int_{t_{f-1}}^{t_f} dt \int_{\Gamma_j} T^* \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.50)$$

### 3.4.3 Fonctions d'interpolation de temps constantes

En nous plaçant dans l'hypothèse où le pas de temps  $\Delta t_f = t_f - t_{f-1}$  est suffisamment petit pour que l'approximation  $T$  et  $\frac{\partial T}{\partial n}$  constants sur un pas de temps soit possible [6, 13], l'équation intégrale (3.50) peut alors s'écrire sous la forme (cf. chapitre 2).

$$\sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F S_{ij,fF} T_j^f = \sum_{j=1}^N \sum_{f=1}^F P_{ij,fF} Q_j^f \quad (3.51)$$

où nous avons posé :

$$Q_j = \frac{\partial T_j}{\partial n}$$

Les coefficients des matrices  $S_{fF}$  et  $P_{fF}$  se calculent de la même façon que dans le chapitre 2 (cf. section 2.1.4).

$$S_{ij,fF} = a \int_{\Gamma_j} d\Gamma \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{\partial T^*}{\partial n} dt + C_i \delta_{fF} \delta_{ij} \quad (3.52)$$

et

$$P_{ij,fF} = a \int_{\Gamma_j} d\Gamma \int_{t_{f-1}}^{t_f} T^* dt \quad (3.53)$$

Nous nous sommes placés dans l'hypothèse où la condition imposée à la frontière pièce-moule est une loi du type 3 [6,15] définie sur chaque élément  $\Gamma_j$  de  $\Gamma_{p-m}$  à tout instant par :

$$Q_j = \frac{\partial T}{\partial n} = q_j = \frac{H_j}{K_p} (T_m - \mathbf{T}) \text{ sur } \Gamma_{p-m} \quad (3.54)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_j \text{ est un coefficient de transfert } | (W/m^2K) \\ T_m \text{ est la température sur } \Gamma_{p-m} \text{ côté moule } | (K) \\ \mathbf{T} \text{ est la température sur } \Gamma_{p-m} \text{ côté pièce } | (K) \\ K_p \text{ est la conductivité thermique de la pièce } | (W/mK) \end{array} \right.$$

L'équation (3.51) est à résoudre pour l'instant  $t = t_F$  (les températures et les flux aux instants antérieurs à  $t_F$  ont été calculés dans les étapes précédentes).

Deux équations similaires à l'équation (3.51) sont à considérer dans la région occupée par le moule qui est constituée de deux frontières. Le système final qu'on obtient est de la forme (2.64). En effet, l'application de la méthode des sous-régions (cf. section 1.6.7) permet de traiter simultanément les deux régions par la MEF. Seulement la méthode de redressement de température que nous développerons dans la suite n'est utilisée que dans le domaine  $\Omega_p$  car dans le moule il n'y a pas de changement de phase.

#### 3.4.4 Fonctions d'interpolation de temps variables linéairement

En considérant l'hypothèse d'éléments spatialement constants et linéaires dans le temps [13], la température et le gradient normal du flux s'expriment par :

$$T = \psi_1 T^{f-1} + \psi_2 T^f \quad (3.55)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = Q = \psi_1 Q^{f-1} + \psi_2 Q^f \quad (3.56)$$

où :

$$\psi_1 = \frac{t_f - t}{\Delta t_f}, \quad \psi_2 = \frac{t - t_{f-1}}{\Delta t_f}; \quad \Delta t_f = t_f - t_{f-1} \quad (3.57)$$

Sous cette hypothèse, l'équation intégrale fondamentale (3.49) discrétisée s'écrit pour l'instant  $t_F$  sous la forme :

$$\begin{aligned} C_i T_i^F + a \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^N \int_{t_{f-1}}^{t_f} \left[ \frac{T_j^{f-1}(t_f - t) + T_j^f(t - t_{f-1})}{\Delta t_f} \right] \int_{\Gamma_j} \frac{\partial T^*}{\partial n} d\Gamma dt \\ = a \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^N \int_{t_{f-1}}^{t_f} \left[ \frac{Q_j^{f-1}(t_f - t) + Q_j^f(t - t_{f-1})}{\Delta t_f} \right] \int_{\Gamma_j} T^* d\Gamma dt \end{aligned} \quad (3.58)$$

ou encore sous forme matricielle, pour tous les noeuds de frontière :

$$\sum_{f=1}^F \left( S_{fF}^1 T^{f-1} + S_{fF}^2 T^f \right) = \sum_{f=1}^F \left( P_{fF}^1 Q^{f-1} + P_{fF}^2 Q^f \right) \quad (3.59)$$

où les coefficients des matrices indiquées sont définis par :

$$S_{fF,ij}^1 = \frac{a}{\Delta t_f} \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} (t_f - t) \frac{\partial T^*}{\partial n} dt d\Gamma \quad (3.60)$$

$$S_{fF,ij}^2 = \frac{a}{\Delta t_f} \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} (t - t_{f-1}) \frac{\partial T^*}{\partial n} dt d\Gamma + C_i \delta_{fF} \delta_{ij} \quad (3.61)$$

et

$$P_{fF,ij}^1 = \frac{a}{\Delta t_f} \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} (t_f - t) T^* dt d\Gamma \quad (3.62)$$

$$P_{fF,ij}^2 = \frac{a}{\Delta t_f} \int_{\Gamma_j} \int_{t_{f-1}}^{t_f} (t - t_{f-1}) T^* dt d\Gamma \quad (3.63)$$

**A - Calcul des coefficients des matrices  $S^1, S^2, P^1$  et  $P^2$**

Dans les formules (3.60) à (3.63), on reconnaît des intégrales sur l'espace temps qui ont la même forme (à un coefficient près) que les intégrales (2.39) et (2.41) calculées au chapitre 2. Il reste donc à effectuer le calcul des termes définis par :

$$I_1 = \varepsilon \int_{t_{f-1}}^{t_f} t \frac{\partial T^*}{\partial n} dt \quad (3.64)$$

et

$$I_2 = \varepsilon \int_{t_{f-1}}^{t_f} t T^* dt \quad (3.65)$$

où :

$$\varepsilon = \pm 1 \quad (3.66)$$

**B - Calcul des intégrales  $I_1$  et  $I_2$**

$$I_1 = \varepsilon \int_{t_{f-1}}^{t_f} t \frac{\partial T^*}{\partial n} dt = \frac{\varepsilon d}{2\pi a} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{t}{4a(t_F - t)^2} \exp \left[ \frac{-r^2}{4a(t_F - t)} \right] dt \quad (3.67)$$

En posant :

$$x = \frac{r^2}{4a(t_F - t)} , \quad z_f = \frac{r^2}{4a(t_F - t_f)} \quad (3.68)$$

et en considérant la définition de l'exponentielle intégrale (cf. équation 2.43), le calcul de l'intégrale (3.67) conduit successivement à :

$$I_1 = \frac{\varepsilon d}{2\pi a} \left[ \frac{t_F}{r^2} \int_{z_{f-1}}^{z_f} e^{-x} dx - \frac{1}{4a} \int_{z_{f-1}}^{z_f} \frac{e^{-x}}{x} dx \right] \quad (3.69)$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon d}{2\pi a} \left\{ \frac{t_F}{r^2} [ \exp(-z_{f-1}) - \exp(-z_f) ] - \frac{1}{4a} [E(z_{f-1}) - E(z_f)] \right\} \quad (3.70)$$

Pour l'intégrale  $I_2$  nous obtenons:

$$I_2 = \varepsilon \int_{t_{f-1}}^{t_f} t T^* dt \quad (3.71)$$

$$I_2 = \varepsilon \int_{t_{f-1}}^{t_f} t T^* dt = \frac{\varepsilon}{4\pi a} \int_{t_{f-1}}^{t_f} \frac{t}{(t_F - t)} \exp \left[ \frac{-t^2}{4a(t_F - t)} \right] dt \quad (3.72)$$

Avec le changement de variables (3.68), l'intégrale (3.72) donne:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{4\pi a} \left[ t_F \int_{z_{f-1}}^{z_f} \frac{e^{-x}}{x} dx - \frac{r^2}{4a} \int_{z_{f-1}}^{z_f} \frac{e^{-x}}{x^2} dx \right] \quad (3.73)$$

Dans le second membre de cette équation apparaît l'expression:

$$\int_{z_{f-1}}^{z_f} \frac{e^{-x}}{x^2} dx = \Gamma(-1, z_{f-1}) - \Gamma(-1, z_f) \quad (3.74)$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma incomplète définie par:

$$\Gamma(-n, z) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[ E(z) - e^{-z} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i i!}{z^{i+1}} \right] \quad (3.75)$$

L'équation (3.73) conduit alors à l'expression :

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{4\pi a} \left\{ t_F [E(z_{f-1}) - E(z_f)] - \frac{r^2}{4a} [\Gamma(-1, z_{f-1}) - \Gamma(-1, z_f)] \right\} \quad (3.76)$$

Connaissant le développement en série (2.45) de la fonction exponentielle intégrale, nous pouvons aisément calculer l'expression (3.76).

Les intégrales sur le temps dans les formules (3.60) à (3.63) sont donc calculées à partir de combinaisons linéaires d'expressions de type (2.40), (2.44), (3.70) et (3.76). Les intégrales sur l'espace sont calculées en utilisant les formules de quadrature de Gauss appliquées aux fonctions qui résultent des intégrations temporelles.

### C - Résolution du système d'équations

Dans le système (3.59), les températures et les flux en chaque noeud aux instants antérieurs à  $t_F$  sont connus. Le système résolu à l'instant  $t_F$  est alors de la forme :

$$[S_{FF}^2] \{T^F\} - [P_{FF}^2] \{Q^F\} = \{B^F\} \quad (3.77)$$

L'équation (3.77) est écrite pour tous les noeuds. Le vecteur  $B^F$  dépend des calculs effectués aux étapes qui précèdent l'instant  $t_F$  :

$F = 1$

$$B^1 = P_{11}^1 Q^0 - S_{11}^1 T^0 \quad (3.78)$$

$F \geq 2$

$$B^F = - \sum_{f=1}^{F-1} (S_{fF}^1 T^{f-1} + S_{fF}^2 T^f) - S_{FF}^1 T^{F-1} + \sum_{f=1}^{F-1} (P_{fF}^1 Q^{f-1} + P_{fF}^2 Q^f) + P_{FF}^1 Q^{F-1} \quad (3.79)$$

Notons qu'il est nécessaire que les conditions initiales de flux soient connues pour pouvoir démarrer le processus itératif (cf. équation 3.78). Lorsque les valeurs initiales de densité de flux sont inconnues, les calculs doivent être démarrés par une autre méthode que la MEFR [1,2,13].

#### D - Prise en considération des conditions aux limites

Pour une frontière sur laquelle les conditions aux limites sont du type (3.46) ou (3.47), le système obtenu est de la forme (3.77).

Dans le cas de conditions aux limites de type Fourier dépendantes du temps, nous avons en chaque noeud  $i$  :

$$Q_i^F = a + b T_i^F \quad (3.80)$$

En reportant l'équation (3.80) dans (3.77), nous obtenons un système d'équations de la forme :

$$[S_{FF}^2 - b P_{FF}^2] \{T^F\} = \{B_F^*\} \quad (3.81)$$

Le vecteur second membre  $\{B_F^*\}$  est défini par :

$$B_F^* = \underline{B}^F + a P_{FF}^2 \cdot \{I\} \quad (3.82)$$

où :

- $\underline{B}^F$  est un vecteur calculé à partir d'équations de type (3.78) et (3.79) dans lesquelles le flux est exprimé en fonction de la température à partir de l'équation (3.80).
- $I$  est un vecteur dont toutes les composantes sont égales à l'unité.

#### E - Température en un point interne

A la fin de chaque itération, la température en un point interne donné est calculée à partir d'une expression de la forme :

$$T_i^F = \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^N (\bar{P}_{fF,ij}^1 Q^{f-1} + \bar{P}_{fF,ij}^2 Q^f) - \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^N (\bar{S}_{fF,ij}^1 T^{f-1} + \bar{S}_{fF,ij}^2 T^f) \quad (3.83)$$

Les matrices  $\bar{P}^1, \bar{P}^2, \bar{S}^1, \bar{S}^2$  se calculent de la même façon que les matrices  $P^1, P^2, S^1, S^2$  sauf que la solution fondamentale est maintenant appliquée au point interne  $i$ .

### 3.4.5 Méthode de redressement de température

Dans cette méthode [6], pour un élément de volume  $\Delta V$ , la chaleur latente libérée durant la solidification pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  est définie par :

$$\Delta Q = \rho C \Delta V \Delta T = \rho L \Delta V \Delta f_s \quad (3.84)$$

où  $\Delta f_s$  est la variation de la fraction de solide formée pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ .

La fraction de solide représente le rapport du volume de solide formé au volume total de l'élément considéré.

La variation de température équivalente est :

$$\Delta T = \frac{L}{C} \Delta f_s \quad (3.85)$$

Le principe de la méthode de redressement de température consiste à calculer d'abord le champ de température sans prendre en considération les effets de la chaleur latente (eq. 3.40) avec  $S_s = 0$ . Ce calcul est effectué par la méthode des éléments de frontière (eq. 3.77 et 3.83). Les températures ainsi calculées sont ensuite corrigées par la méthode de redressement. Ceci correspond en fait à une méthode à pas fractionnaires.

#### Marche à suivre [6] :

Désignons par  $T_1$  la température corrigée à l'instant  $t$ . Pour calculer la température  $T_2$  à l'instant  $t + \Delta t$ , nous considérons les étapes I et II indiquées sur la figure 3.3.



**Etape I :**

Dans cette étape, l'analyse ne prend pas en considération les effets de la chaleur latente (eq. 3.45).

La température  $T_2'$  obtenue en résolvant l'équation (3.45) par la MEFR est inférieure à la température supposée réelle  $T_2$  car les effets de la chaleur latente ne sont pas pris en considération.

**Etape II :**

Dans cette étape, les effets de la chaleur latente sont pris en considération et on applique la méthode de redressement de température .

En écrivant que la quantité de chaleur libérée pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  est la même dans les étapes I et II, nous pouvons déterminer aisément la valeur de la température  $T_2$ .

La figure (3.3) montre les trois cas possibles qui conduisent aux équations suivantes :

**Cas 1 :**

$$\int_{T_1}^{T_2} \rho C dT - \int_{T_1}^{T_2} \rho L \left( \frac{\partial f_s}{\partial T} \right) dT = \int_{T_1}^{T_2'} \rho C dT \quad (3.86)$$

**Cas 2 :**

$$\int_{T_{liq}}^{T_2} \rho C dT - \int_{T_{liq}}^{T_2} \rho L \left( \frac{\partial f_s}{\partial T} \right) dT = \int_{T_{liq}}^{T_2'} \rho C dT \quad (3.87)$$

**Cas 3 :**

$$\int_{T_1}^{T_2} \rho C dT - \int_{T_1}^{T_{sol}} \rho L \left( \frac{\partial f_s}{\partial T} \right) dT = \int_{T_1}^{T_2'} \rho C dT \quad (3.88)$$

- $T_{liq}$  est la température du point de fusion du métal (liquidus),
- $T_{sol}$  est la température de solidification (solidus).

En se plaçant dans l'hypothèse de chaleur latente linéaire dans le métal, la fraction de solide peut être déterminée à partir de l'expression :

$$- L \frac{\partial f_s}{\partial T} = \frac{L}{(T_{liq} - T_{sol})} \quad (3.89)$$

Les équations (3.77), (3.83), (3.86), (3.87), (3.88) et (3.89) constituent la formulation numérique relative à la pièce, du problème de solidification lorsque la MEFR est associée à la méthode de redressement de température.

### 3.5 Conclusion partielle

La méthode du suivi d'interface est inefficace pour résoudre le problème de solidification par la MEFR. En effet, lorsque la MEFR est appliquée, le suivi d'interface nécessite un démarrage du processus qui ne peut être assuré par cette méthode. De plus, la zone de transition solide-liquide peut se morceler (cf. *figure 3.4*), ce qui complique davantage l'analyse, en particulier dans le cas des problèmes tridimensionnels.

La technique dite de redressement de température permet de répondre à cette limitation de la MEFR car elle donne la possibilité de générer des cartes de températures à tout instant à l'intérieur de la pièce étudiée, de façon simple et indépendamment de la géométrie du problème. Ainsi, en choisissant un nombre suffisant de points internes, on peut déterminer la position du front de solidification par un tracé de courbes isothermes.

La méthode de redressement des températures peut être appliquée à l'analyse de problèmes thermiques incluant des non-linéarités. En effet, dans l'hypothèse de diffusivité thermique constante [26], on peut prendre en compte les non-linéarités en utilisant la transformation de Kirchhoff.

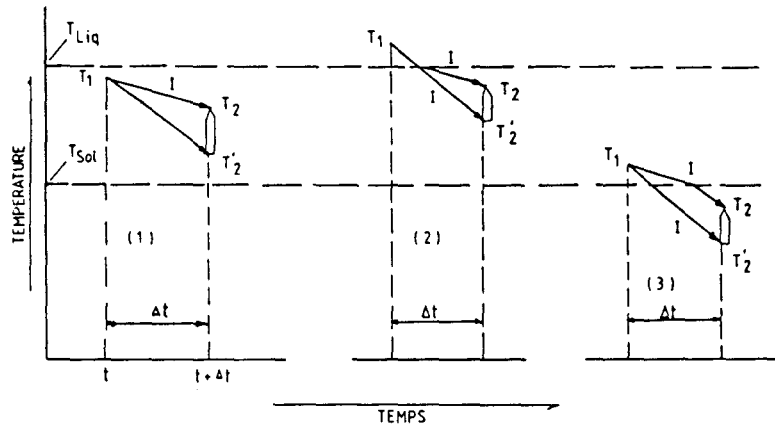
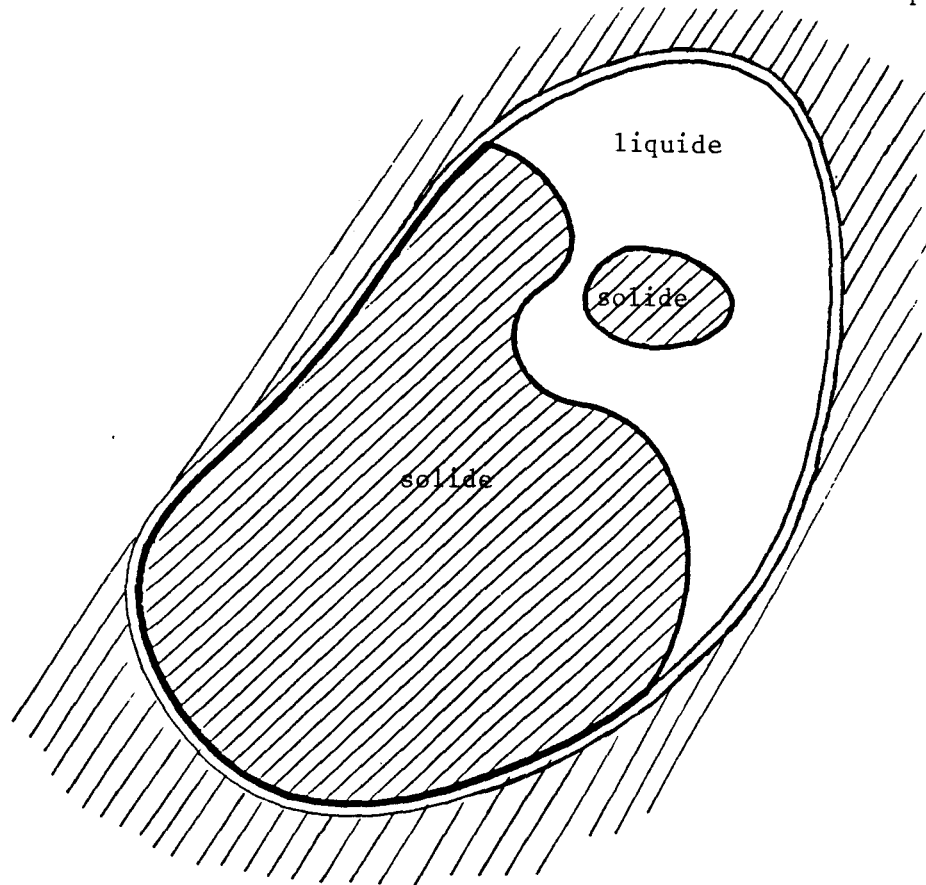


Figure 3.3 : Représentation schématique de la méthode de redressement de température

Figure 3.4 : Morcellement de la frontière solide-liquide



## 3.6 Applications

### 3.6.1 Courbes de refroidissement

Les exemples d'application qui suivent concernent une pièce de section droite carrée [6] (4 cm × 4 cm) et une pièce de section droite en équerre.

Les figures A.3.1 et A.3.2 permettent de comparer les résultats que nous avons obtenus avec ceux d'autres auteurs [6]. Elles représentent les courbes de refroidissement des points indiqués sur la section carrée.

Les propriétés thermomécaniques utilisées dans les calculs sont les suivantes [6] :

#### - Pièces en acier

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = 7500 \text{ | } (Kg/m^3) \\ C = 628 \text{ | } (J/KgK) \\ K = 33,5 \text{ | } (W/mK) \\ a = 0,71 \cdot 10^{-5} \text{ | } (m^2 \cdot s^{-1}) \\ T_{liq} = 1793 \text{ | } (K) \\ T_{sol} = 1763 \text{ | } (K) \\ T_o = 1873 \text{ | } (K) \end{array} \right.$$

#### - Moules en sable (10 cm × 10cm)

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = 1650 \text{ | } (Kg/m^3) \\ C = 838 \text{ | } (J/KgK) \\ K = 1,26 \text{ | } (W/mK) \\ a = 0,95 \cdot 10^{-5} \text{ | } (m^2 \cdot s^{-1}) \\ T_{liq} = 1793 \text{ | } (K) \\ T_{sol} = 1763 \text{ | } (K) \\ T_o = 293 \text{ | } (K) \end{array} \right.$$

### - Interface Acier-Sable

$$H = 8380W/m^2K$$

Les figures A.3.3 et A.3.4 présentent les courbes de refroidissement de deux points internes de la pièce de section en équerre.

#### 3.6.2 Influence du maillage

Les figures A.3.5, A.3.6 et A.3.7 montrent l'influence du maillage. Les écarts ne sont pas trop importants entre un maillage grossier (20 éléments) et un maillage fin (80 éléments). Les courbes de refroidissement qui sont présentées, sont relatives au point interne de contrôle 2 de la pièce en équerre.

#### 3.6.3 Influence du choix des fonctions d'interpolation temporelles

Pour 80 éléments de frontière constants, nous avons représenté sur la figure A.3.8, la courbe du refroidissement en fonction du temps du point de contrôle 2 de la pièce en équerre pour une variation constante et une variation linéaire de la température en fonction du temps.

#### 3.6.4 Influence du coefficient de transfert

Les figures A.3.9 à A.3.12 montrent l'influence du coefficient de transfert  $\frac{H}{K}$  pour le point de contrôle 2 de la pièce de section carrée. Le refroidissement s'effectue d'autant plus vite que  $\frac{H}{K}$  est grand. Le nombre d'éléments de frontière utilisés dans le test est de 80 éléments.

#### 3.6.5 Influence du pas de temps

Les figures A.3.13 à A.3.15 montrent l'influence du pas de temps. Précisons comme nous l'avons montré au chapitre 2 que la limite inférieure de ce pas de temps dépend de la taille des éléments choisis, de la machine utilisée et des paramètres thermomécaniques du problème. Nous avons obtenu des résultats stables avec des pas de temps de 0.01 s à 0.025 s.

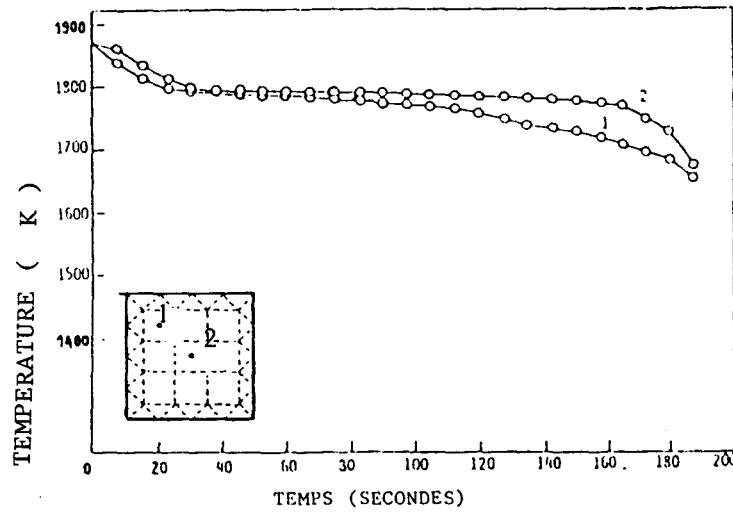


Figure A.3.1 : Solution donnée par HONG C.P.( 6 ).  
 (Fonctions d'interpolation constantes sur chaque petit intervalle de temps)

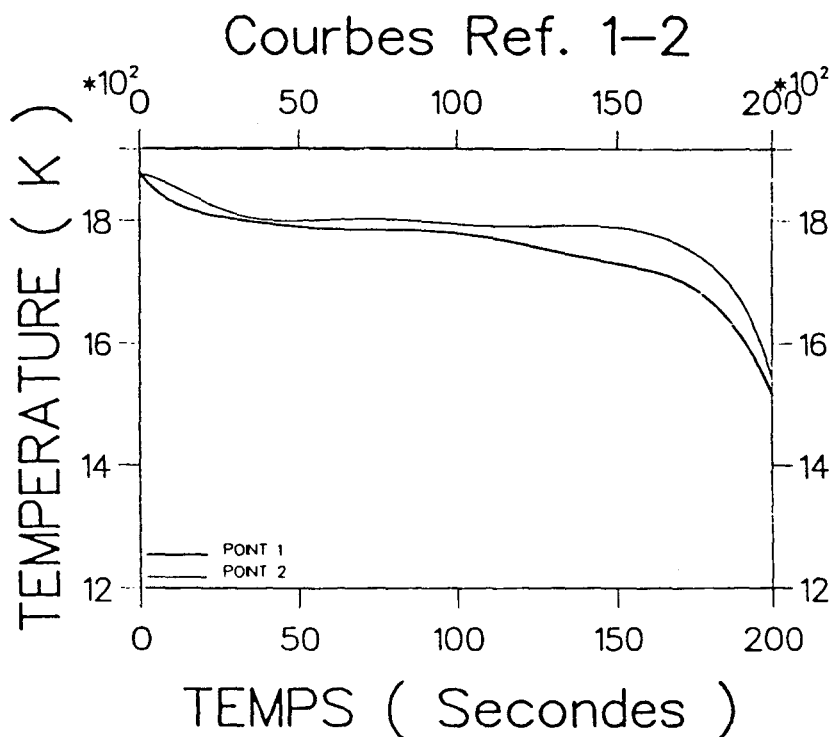


Figure A.3.2 : Solution que nous obtenons pour la pièce de section carrée.  
 (T est supposée constante sur chaque petit intervalle de temps)

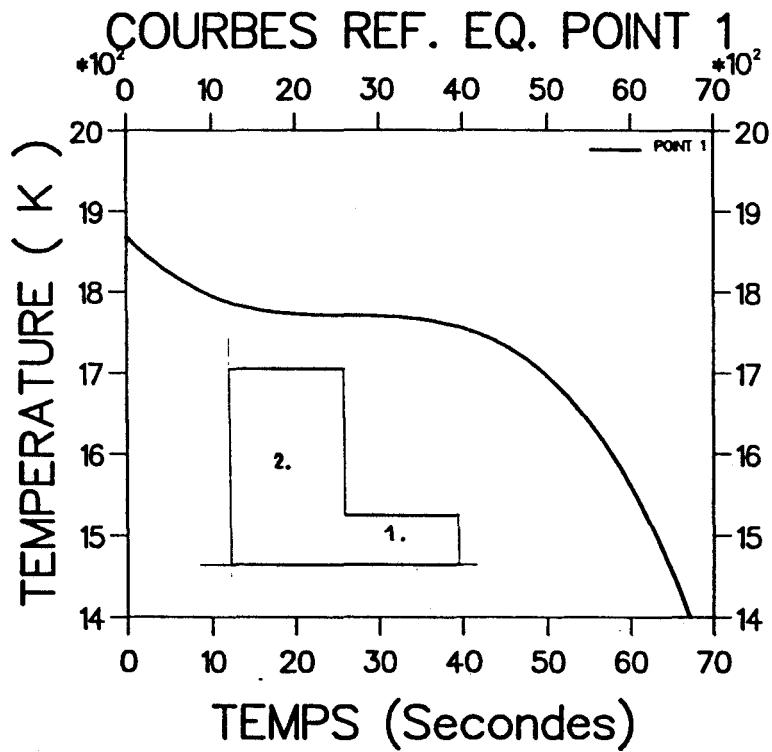
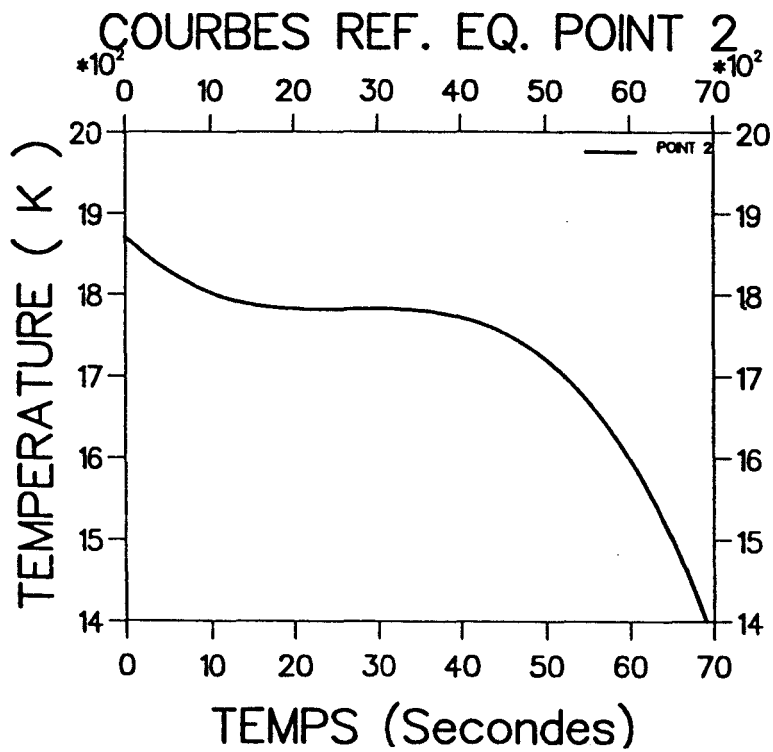


Figure A.3.3 : Contrôle du refroidissement du point 1 de la pièce en équerre ( T variant linéairement par rapport au temps )



F

Figure A.3.4 : Contrôle du refroidissement du point 2 de la pièce de section en équerre pour une variation linéaire de T par rapport au temps.

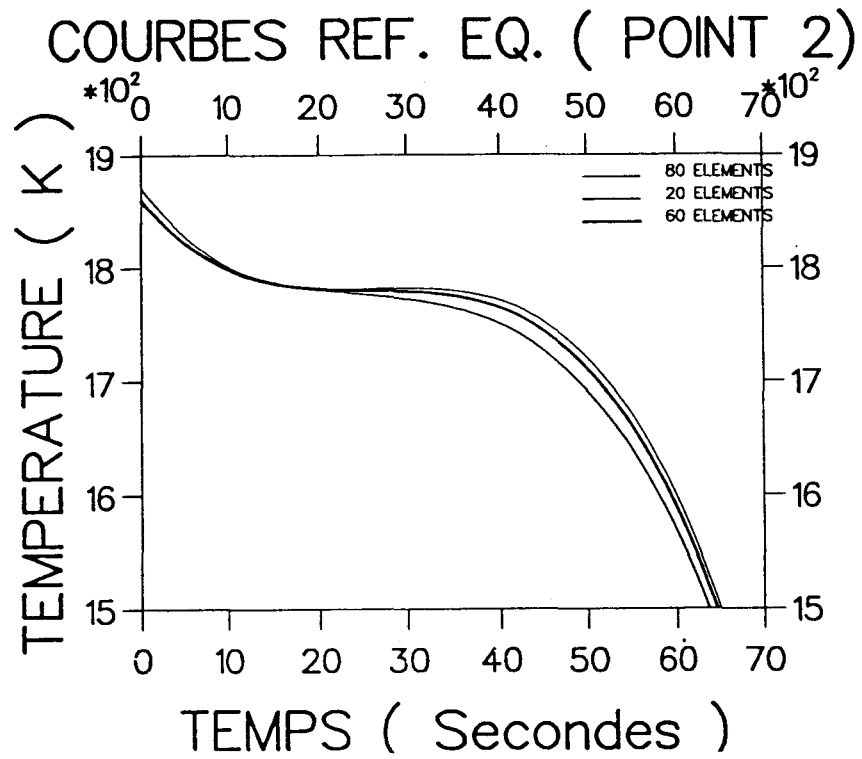


Figure A.3.5 : Contrôle du refroidissement du point 2 de la pièce de section en équerre en fonction du nombre d'éléments de frontière.

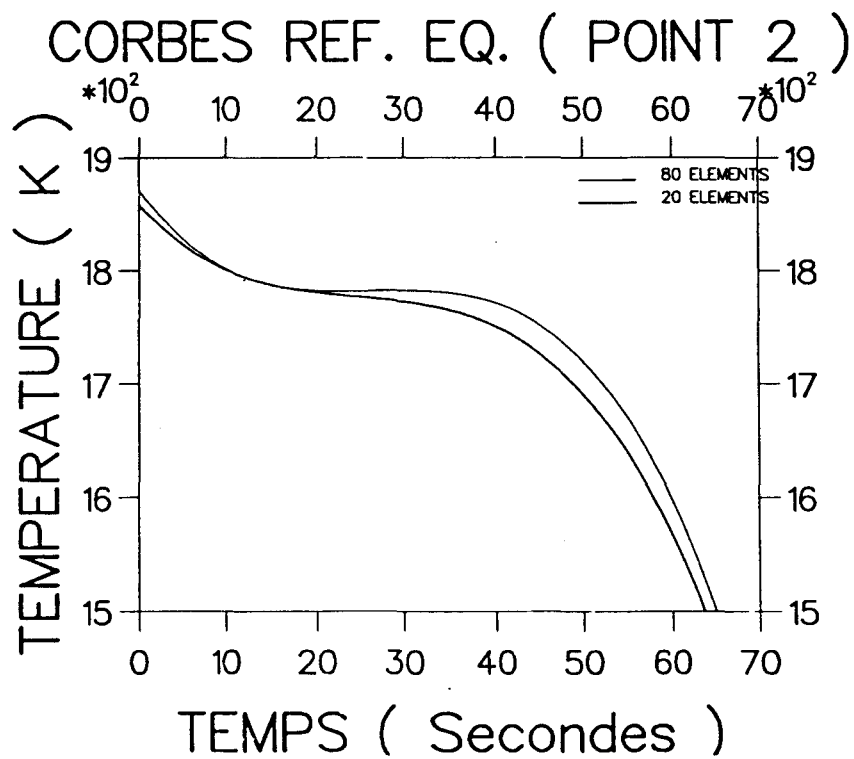


Figure A.3.6 : Refroidissement du point 2 de la pièce de section en équerre en fonction du nombre d'éléments de frontière



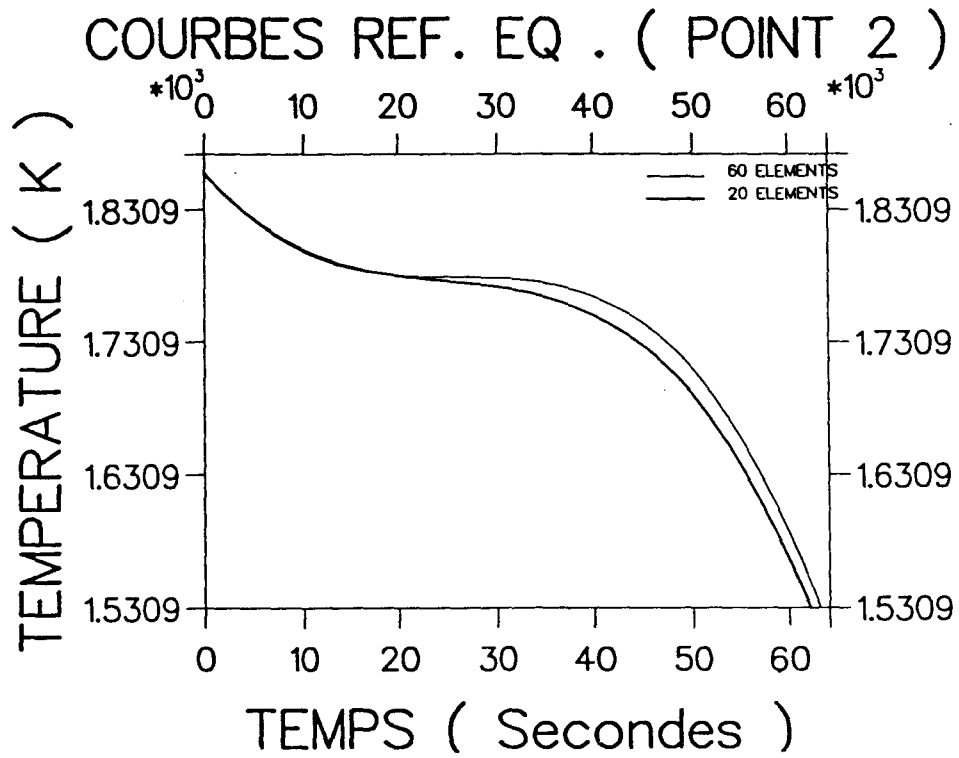


Figure A.3.7 : Refroidissement du point 2 de la pièce de section en équerre en fonction du nombre N.

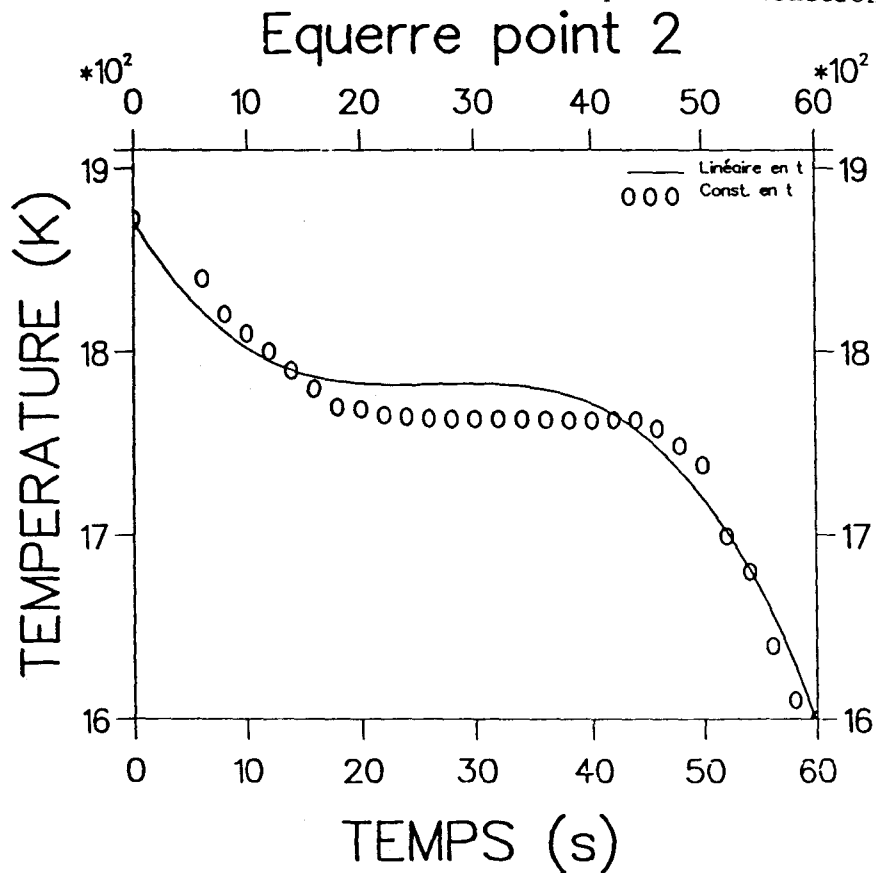


Figure A.3.8 : Refroidissement du point 2 de la pièce de section en équerre en fonction de la variation de T par rapport au temps.

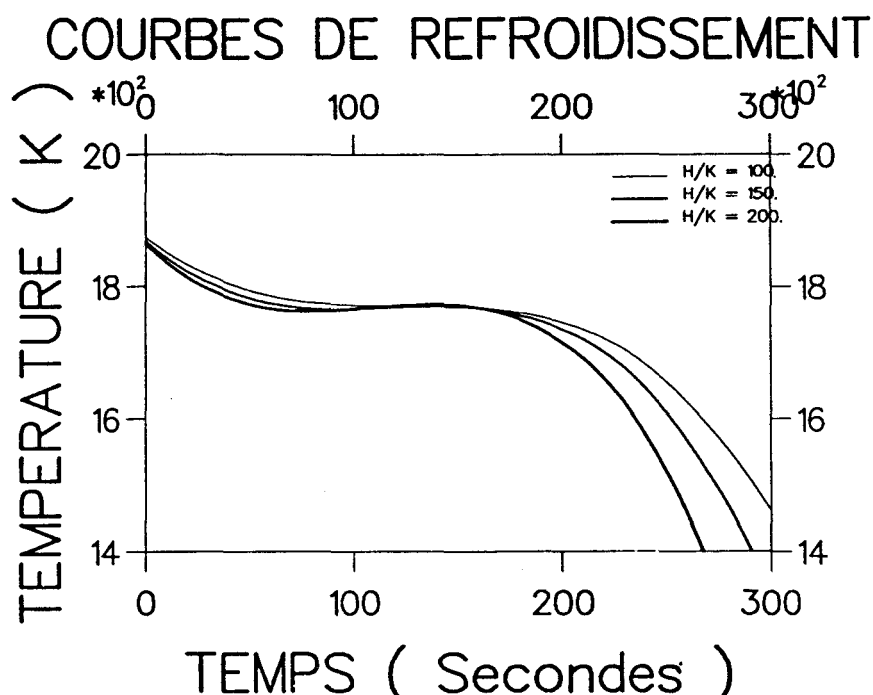


Figure A.3.9 : Influence de la variation du coefficient de transfert H/K sur le refroidissement du point 2 de la pièce de section carrée

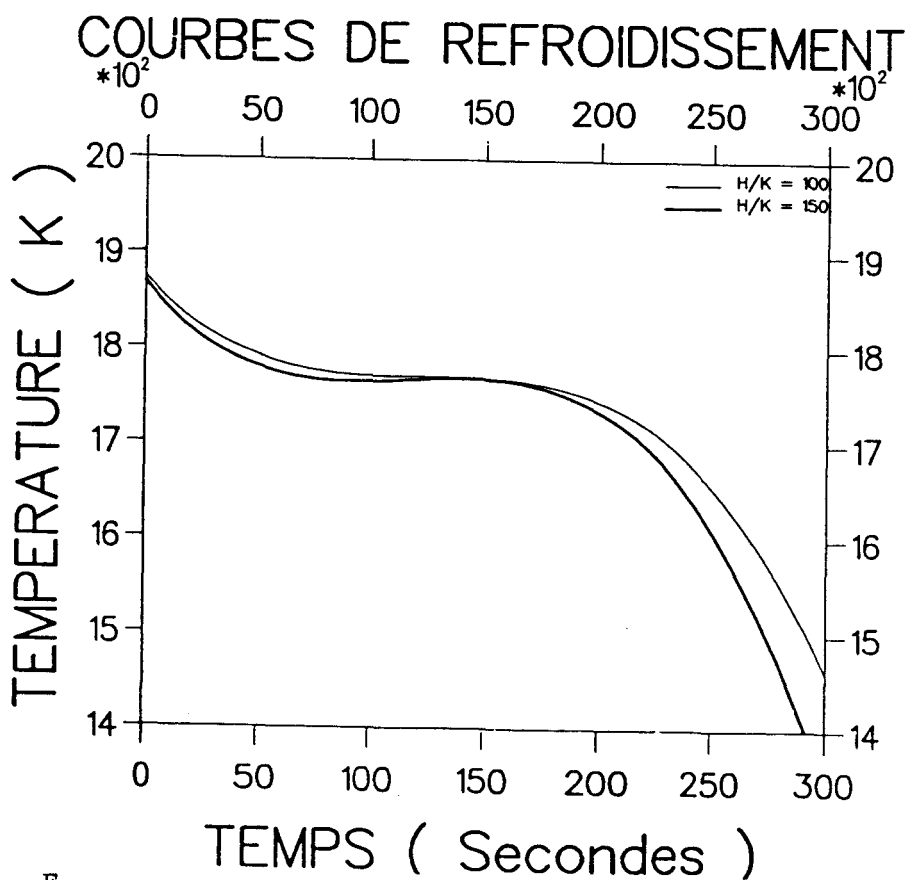


Figure A.3.10 Refroidissement du point 2 de la pièce de section carrée en fonction du coefficient de transfert H/K

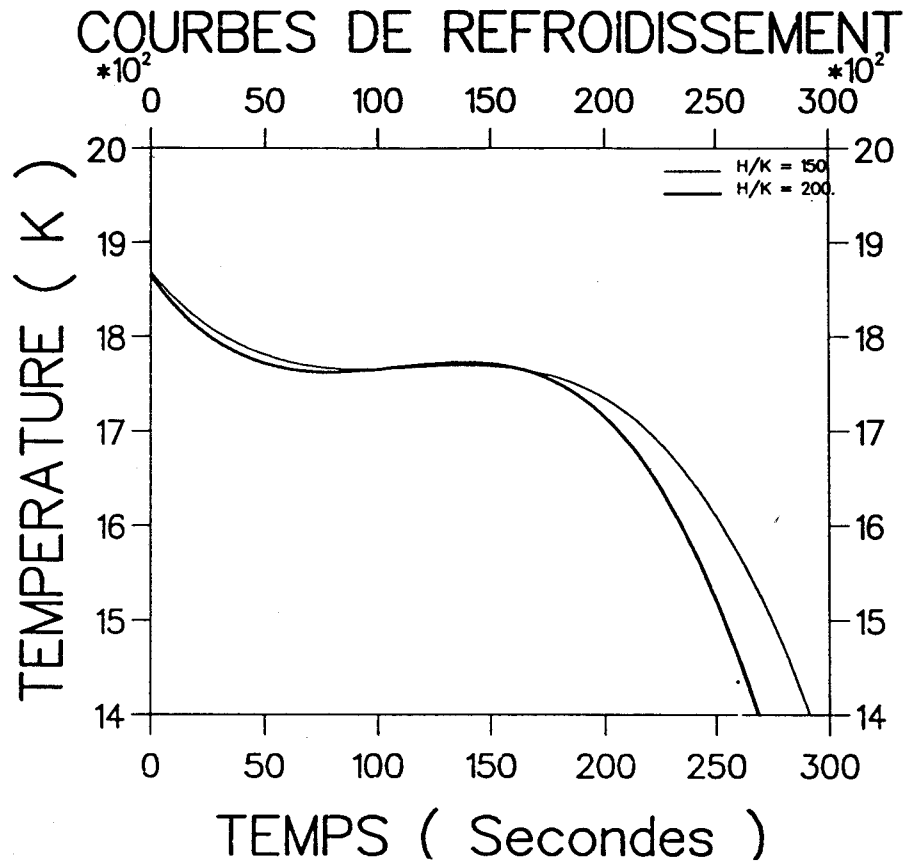


Figure A.3.11 : Refroidissement du point 2 de la section carrée en fonction de H/K

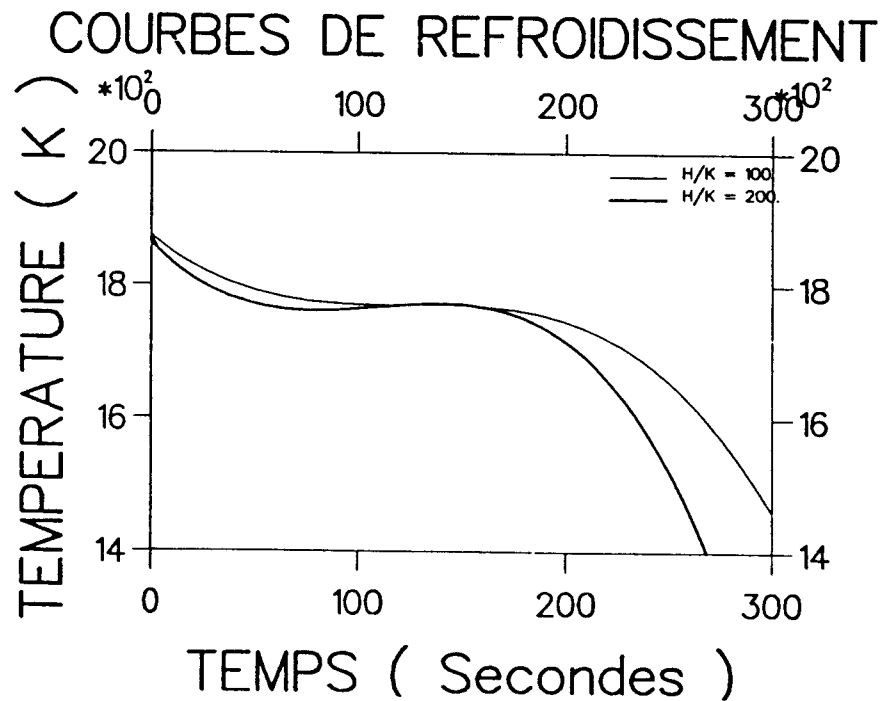


Figure A.3.12 : Refroidissement du point 2 de la pièce de section carrée en fonction du coefficient de transfert H/K

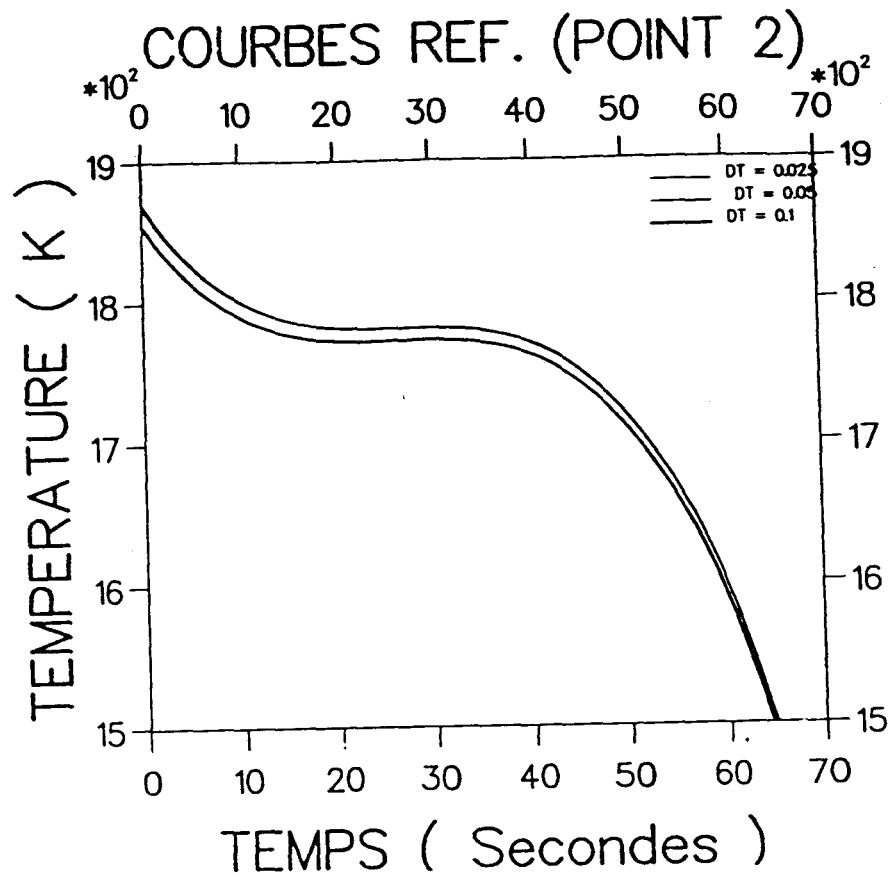


Figure A.3.13 : Influence du choix du pas de temps  
( point 2 de la section en équerre )

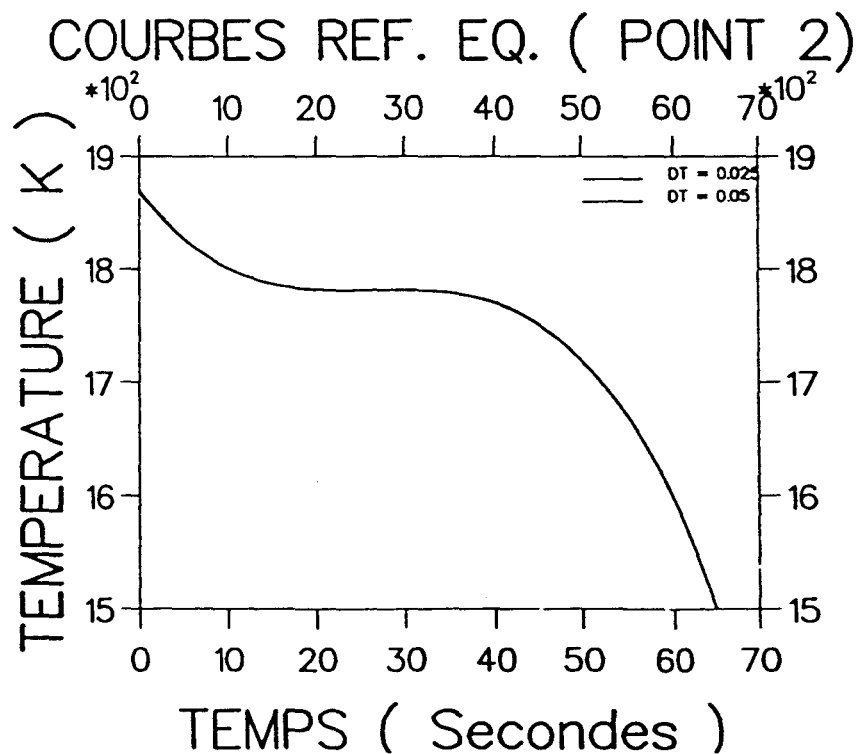


Figure A.3.14 : Influence du pas de temps  
( point 2 de la pièce de section en équerre )

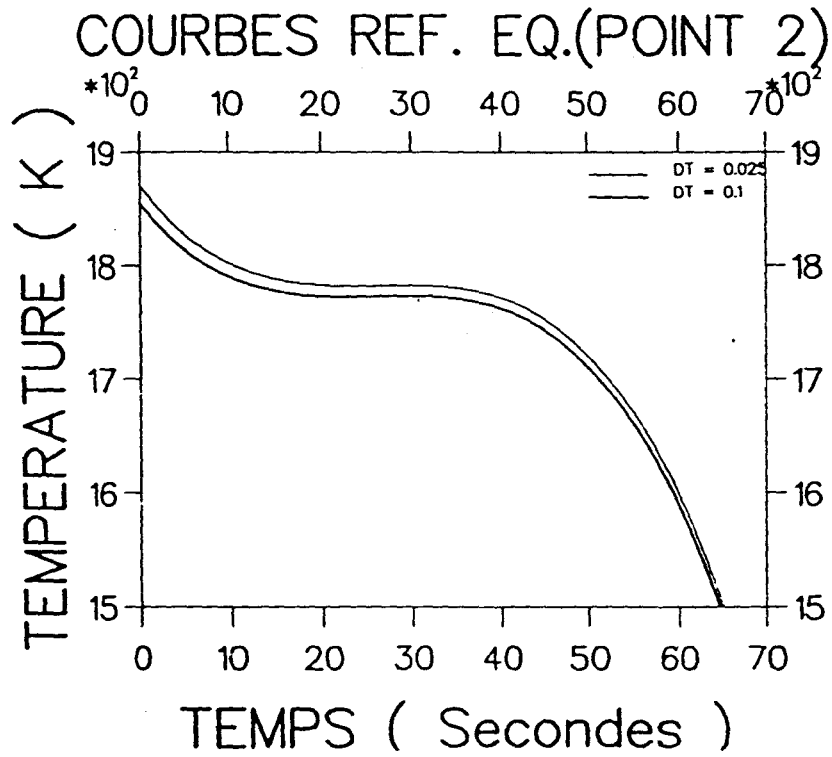


Figure A.3.15 : Influence du pas de temps  
(point 2 de la pièce de section en équerre)

### 3.6.6 Courbes isothermes

Nous présentons deux exemples numériques permettant d'analyser le refroidissement de deux pièces non symétriques (figures 3.6.1 et 3.6.2) ; avec les points de contrôles indiqués.

Les figures A.3.16 et A.3.17 montrent l'évolution en fonction du temps, du refroidissement de quelques points de contrôle dans chacune des deux pièces.

Les figures A.3.18 et A.3.19 montrent les courbes isothermes dans les plans de sections droites des pièces à l'échelle 1 à  $t = 2000$  s après la coulée pour la pièce 1 et à  $t = 1500$  s pour la pièce 2. Le tracé des isothermes permet ainsi de repérer pas à pas la position du front de solidification.

Les paramètres thermomécaniques utilisés dans les calculs sont les suivants :

#### - Pièces en acier

$$\left\{ \begin{array}{l} K = 30 \quad | \quad (W/mK) \\ C = 800 \quad | \quad (J/Kg/K) \\ \rho = 6500 \quad | \quad (Kg/m^3) \\ L = 27 \quad | \quad (KJ/Kg) \\ T_{liq} = 1520 \quad | \quad (^{\circ}C) \\ T_{sol} = 1490 \quad | \quad (^{\circ}C) \\ T_o = 1600 \quad | \quad (^{\circ}C) \end{array} \right.$$

#### - Moules en sable

$$\left\{ \begin{array}{l} K = 2 \quad | \quad (W/mK) \\ C = 1000 \quad | \quad (J/Kg/K) \\ \rho = 1500 \quad | \quad (Kg/m^3) \\ L = 27 \quad | \quad (KJ/m^3) \\ T_o = 20 \quad | \quad (^{\circ}C) \end{array} \right.$$

- Interface sable-acier

$$H = 100 \text{ | (KJ/m}^2\text{/}^\circ\text{C)}$$

Chacune des deux pièces a été discrétisée en 100 éléments constants et le pas de temps utilisé est :

$$dt = 0.02s$$

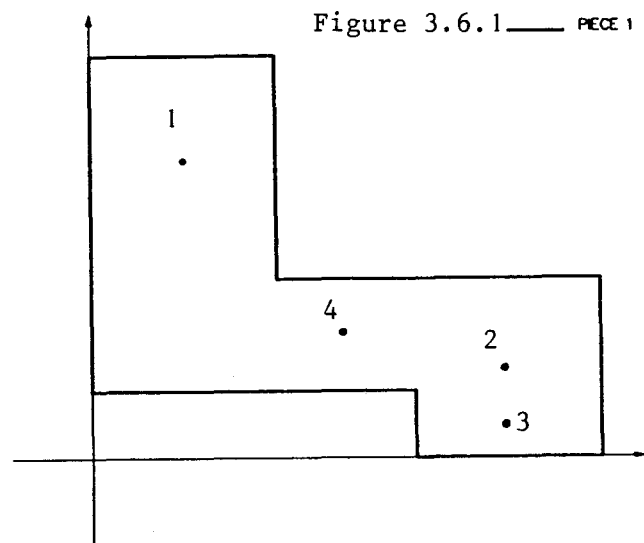
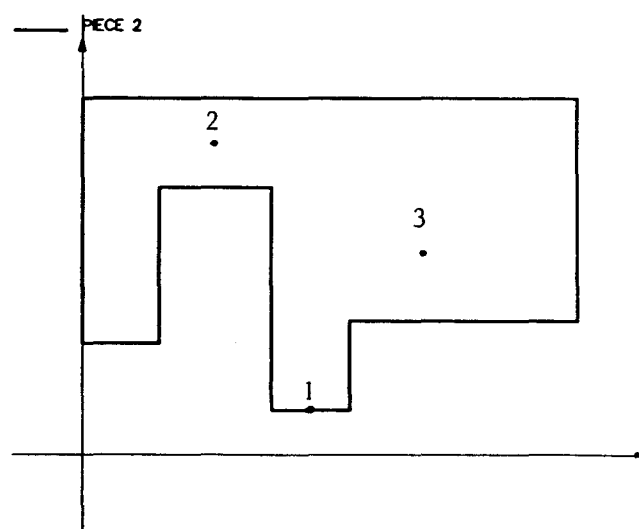


Figure 3.6.2 — PECE 2



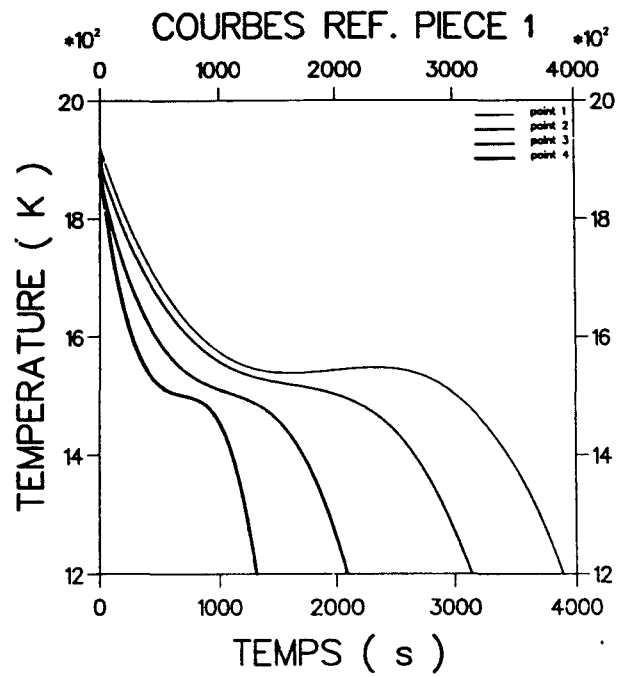


Figure A.3.16 : Courbes de refroidissement des points 1,2,3 et 4 de la pièce 1.

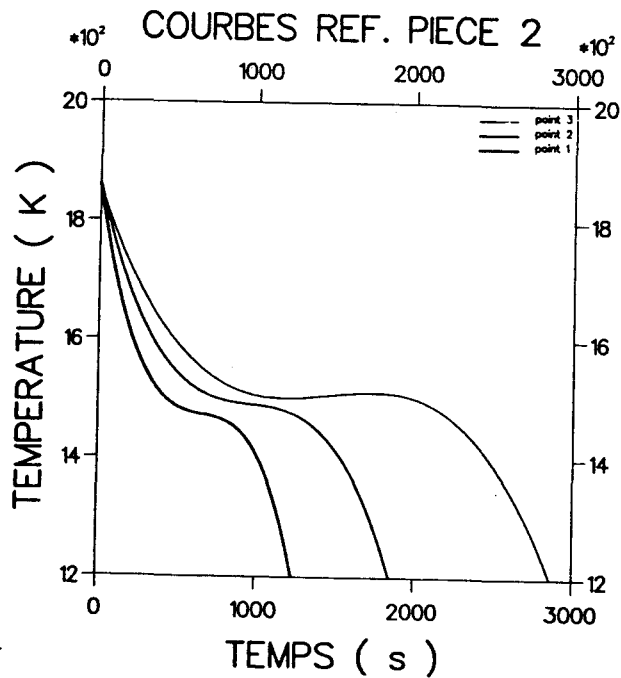


Figure A.3.17 : Courbes de refroidissement des points 3, 1 et 2 de la pièce 2.



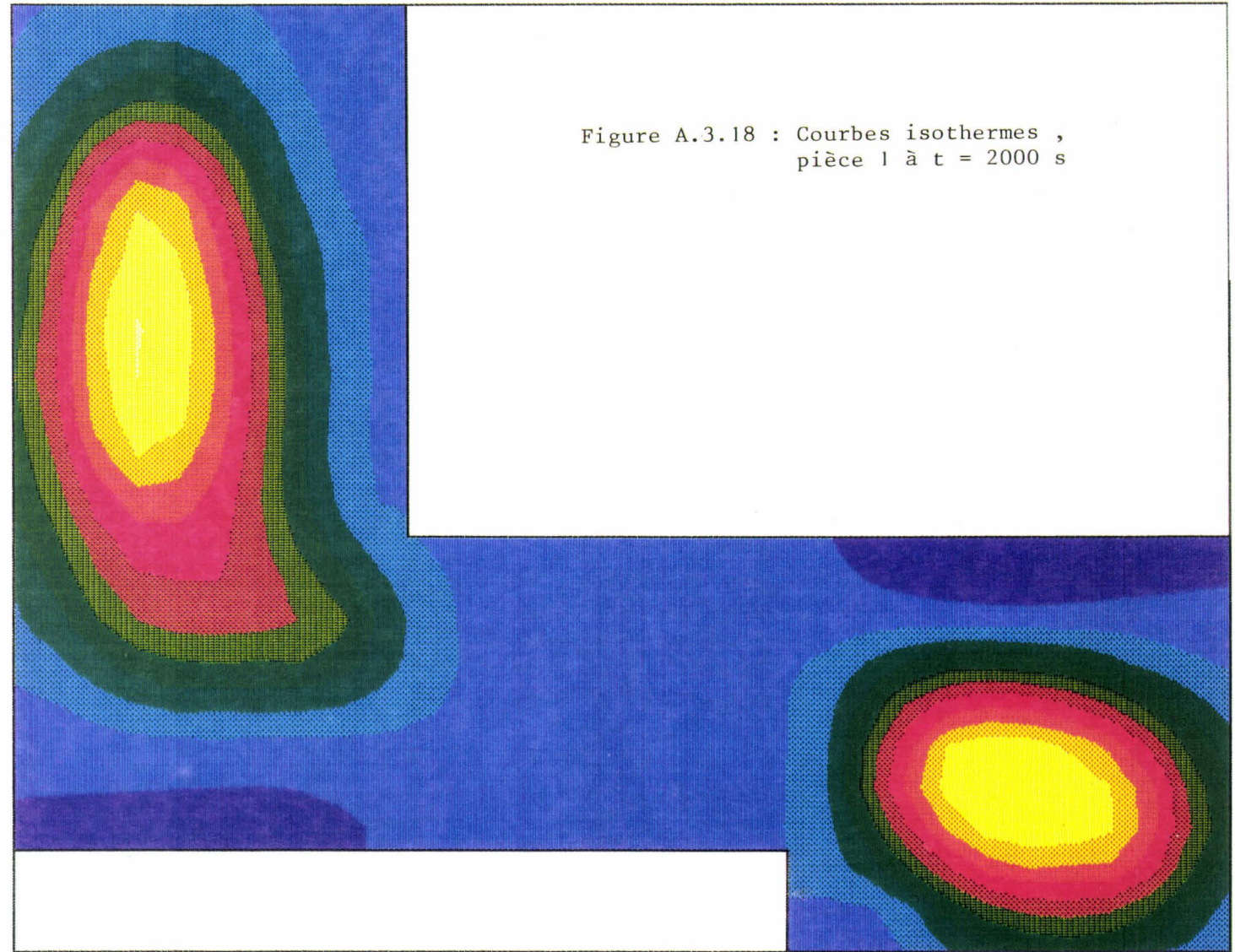
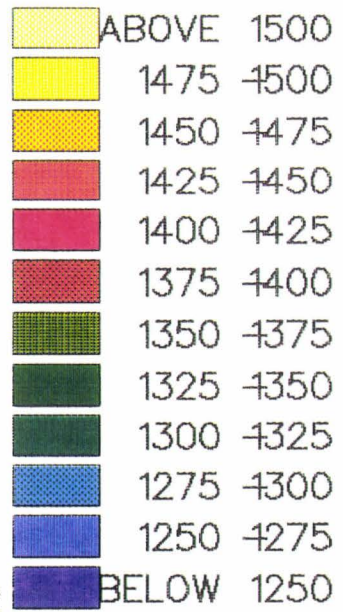
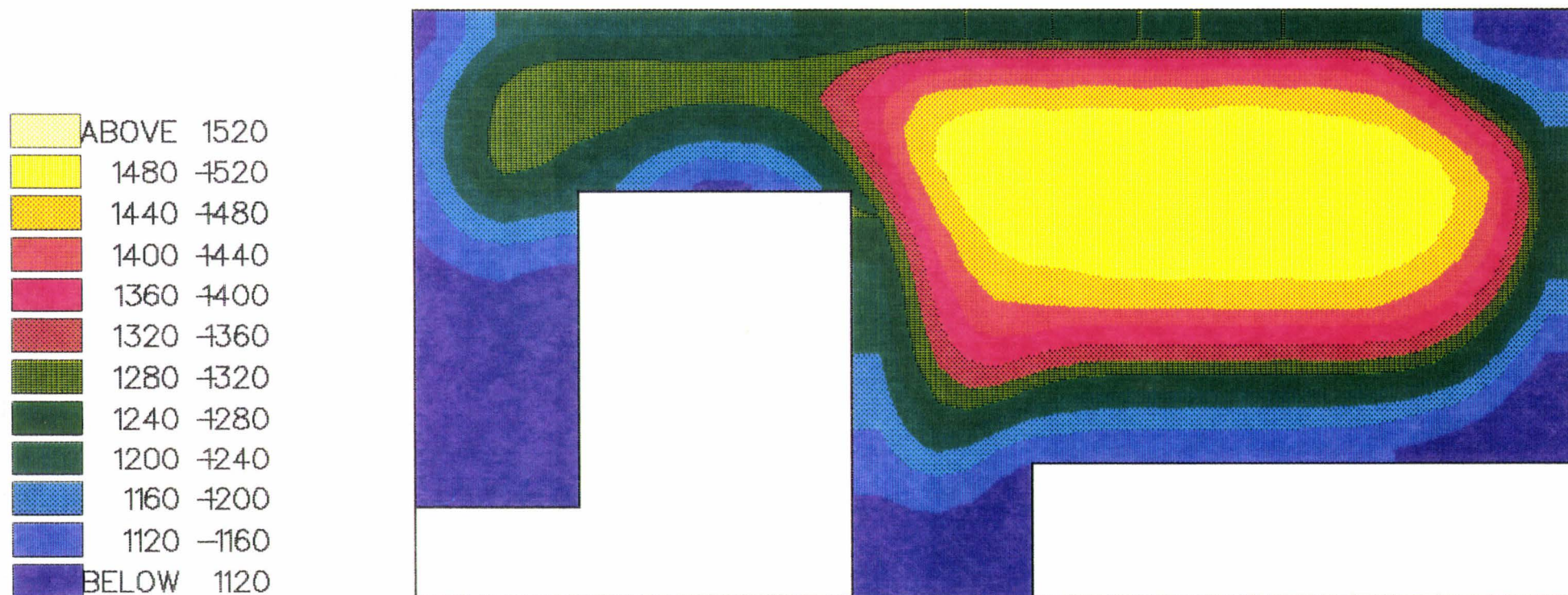


Figure A.3.19 : Courbes isothermes , pièce 2 à  $t = 1500$  s



## Conclusion

La méthode des éléments de frontière (MEFR) est un puissant outil de calcul numérique pour analyser les processus de diffusion thermique. En particulier, les problèmes linéaires peuvent être résolus de façon efficace et précise en utilisant les éléments de frontière. Cependant, dans la modélisation de certains problèmes instationnaires de diffusion de chaleur, tel que le problème de Stefan, le besoin de définir des cellules internes pour calculer les intégrales sur le domaine affecte l'efficacité de la méthode et limite l'intérêt de son utilisation dans des applications industrielles.

L'avenir de la MEFR comme méthode générale d'analyse et de dimensionnement des composants mécaniques repose sur la recherche de moyens mathématiques qui permettent de traiter efficacement les intégrales sur le domaine qui apparaissent dans la formulation.

Plusieurs projets de recherches ont été conduits pour étudier les possibilités de transformation des intégrales de volume en intégrales de surface équivalentes. Des investigations qui ont été menées, deux approches numériques différentes ont été retenues [17, 19, 19] : Ce sont essentiellement des méthodes mixtes combinant la MDF et la MEFR. Bien que ces deux approches conduisent dans la plupart des cas à une formulation qui utilise des éléments uniquement de frontière, il semble qu'elles soient moins précises que l'approche basée sur l'utilisation des solutions fondamentales dépendantes du temps que nous avons appliquée dans cette étude. En effet, dans l'étude des problèmes instationnaires, ces deux approches introduisent des fonctions poids indépendantes du temps ce qui implique inévitablement une perte de précision des résultats numériques [19].

Lorsque les cellules internes peuvent être évitées, la MEFR se présente comme une technique idéale de CAO, principalement parce qu'elle permet facilement, dans ce cas, de générer les données nécessaires pour résoudre un problème et effectuer les séries de modifications utiles pour obtenir dans des temps raisonnables le modèle optimal.

Le programme numérique que nous avons développé nous a permis de mettre en évidence quelques-unes des principales possibilités et limitations de la MEFR :

- Aptitude à la résolution des problèmes thermiques linéaires stationnaires et instationnaires.
- Utilisation uniquement de mailles de frontière pour définir le domaine étudié.
- Possibilité d'étudier des domaines infinis et des domaines à plusieurs régions.
- Difficulté à traiter des problèmes thermiques non linéaires pour lesquels la transformation de Kirchhoff n'est pas valable.
- Possibilité de dissocier les intégrations temporelles des intégrations sur l'espace.
- Possibilité de calcul des températures en des points internes définis uniquement par leurs coordonnées.

La technique de redressement de température introduite dans l'analyse de la solidification nous semble être une voie prometteuse pour résoudre ce problème complexe par la MEFR. Il convient maintenant d'étudier l'extension de cette technique aux problèmes tridimensionnels et d'envisager en même temps le lien du code de calcul avec un système de CAO existant en vue de permettre effectivement son utilisation dans des applications industrielles.

Plusieurs autres aspects importants de la MEFR ont été délibérément omis dans la rédaction de ce mémoire pour éviter toute confusion (convergence pour les problèmes thermiques, couplage de la MEFR avec les méthodes classiques, MEF et MDF, etc . . .). En particulier, dans l'analyse des problèmes transitoires, le choix d'un pas de temps approprié est important pour assurer la convergence et la stabilité des calculs.

## Chapitre 4

## Annexes

# Chapitre 4

## Annexes

### 4.1 Annexe A

#### Formule de Hammer

Les intégrations numériques sur une cellule triangulaire peuvent être évaluées en fonctions des coordonnées intrinsèques  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , définies au chapitre 2, par des formules du type :

$$I_1 = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-\eta_2} f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) d\eta_1 \right] d\eta_2 \cong \sum_{i=1}^n f(\eta_1^i, \eta_2^i, \eta_3^i) w_i$$

(i = 1, 2, 3).

- $n$  est le nombre de points d'intégration choisis sur la cellule triangulaire.
- Les coordonnées triangulaires  $\eta_j^i$  ( $j = 1, 2, 3$ ) des points d'intégration et les poids correspondants  $w_i$  sont dus à Hammer [13] (cf. figure An.1).

Les formules de Hammer du type  $I_1$  sont utilisées dans les problèmes tridimensionnels lorsque la surface est représentée par des cellules bidimensionnelles triangulaires. Elles sont aussi utilisées dans les problèmes bidimensionnels lorsque les intégrales sur le domaine sont nécessaires.

La table A.1 présente les coordonnées et poids correspondants dans le cas d'une cellule triangulaire linéaire ( $n = 1$ ), quadratique ( $n = 2$ ) et cubique ( $n = 4$ ).

Table A.1

$n$	$i$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$w_i$
1	1	1/3	1/3	1/3	1
2	1	1/2	1/2	0	1/3
	2	0	1/2	1/2	1/3
	3	1/2	0	1/2	1/3
4	1	1/3	1/3	1/3	-9/16
	2	3/5	1/5	1/5	25/48
	3	1/5	3/5	1/5	25/48
	4	1/5	1/5	3/5	25/48

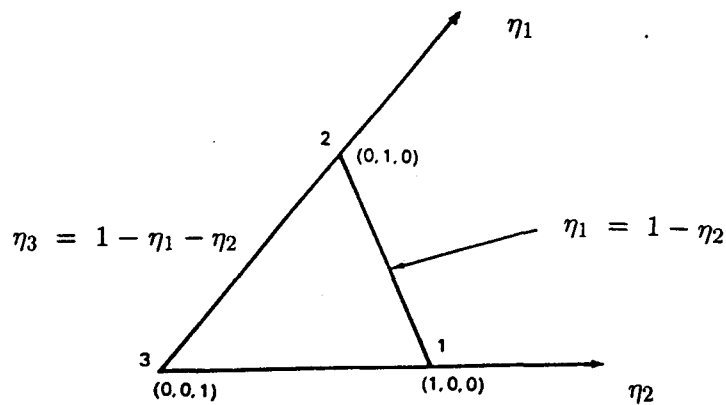


Figure An.1 : Coordonnées intrinsèques triangulaires

Les expressions du type  $I_1$  sont souvent combinées aux formules de quadratures de Gauss unidimensionnelles définies par :

$$I_2 = \int_{-1}^{+1} f(\eta_i) d\eta = \sum_{i=1}^n f(\eta_i) w_i + E_n$$

où  $n$  est le nombre de points d'intégration de Gauss,  $\eta_i$  est l'abscisse curviligne du point d'intégration  $i$ ,  $w_i$  est le facteur de pondération associé et  $E_n$  est l'erreur résiduelle.

$$E_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4 d^{2n} f(\eta)}{(2n+1)[(2n!)]^3 d\eta^{2n}} ; -1 < \eta < 1$$

Les valeurs de  $\eta_i$  et des  $w_i$  correspondants sont présentées dans la table A.2 pour  $n = 2, 3, 4, 5$  et  $6$ .

Table A.2

$\pm \eta_i$	$w_i$
$n = 2$	
0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
$n = 3$	
0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88888
0.77459 66692 41483	0.55555 55555 55555
$n = 4$	
0.33998 10435 84856	0.65214 51548 62546
0.86113 63115 94053	0.34785 48451 37454
$n = 5$	
0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889
0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366
0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189
$n = 6$	
0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691
0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139
0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170



## 4.2 Annexe B

### Fonctions d'interpolation

#### B.1 Fonctions d'interpolation d'espace

##### B.1.1 Variation linéaire sur un élément de frontière

Dans ce cas, les éléments choisis sont de type linéaire (2 noeuds). Les deux fonctions d'interpolation associées sont :

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} (1 - \eta) ; \varphi_2 = \frac{1}{2} (1 + \eta)$$

avec

$$\eta = \frac{x}{\ell/2}$$

où  $\ell$  est la longueur de l'élément considéré et  $x$  l'abscisse curviligne liée à l'élément réel (cf. figure B.1).

Dans ce cas, la fonction d'approximation  $T$  (cf. chapitre 1) est représentée par :

$$T = T_1 \varphi_1 + T_2 \varphi_2$$

les  $T_i$  étant les valeurs nodales de la fonction  $T$ .

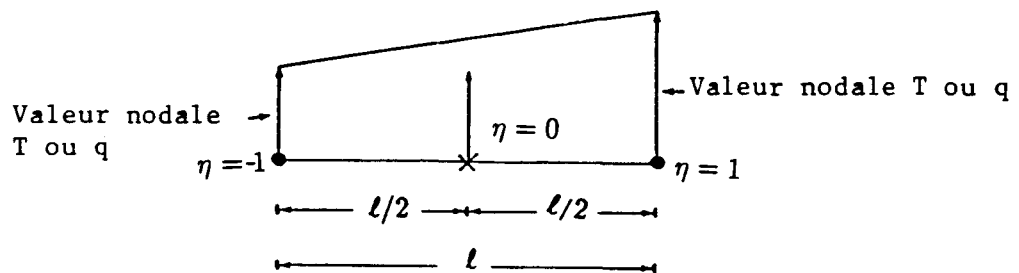


Figure B.1 : Définition d'un élément linéaire.

Remarquons que dans l'utilisation des éléments linéaires, il peut se poser le problème du traitement des coins (noeud double commun à deux éléments). Dans ce cas, la MEFM permet d'utiliser des éléments linéaires discontinus (cf. figure B.2).

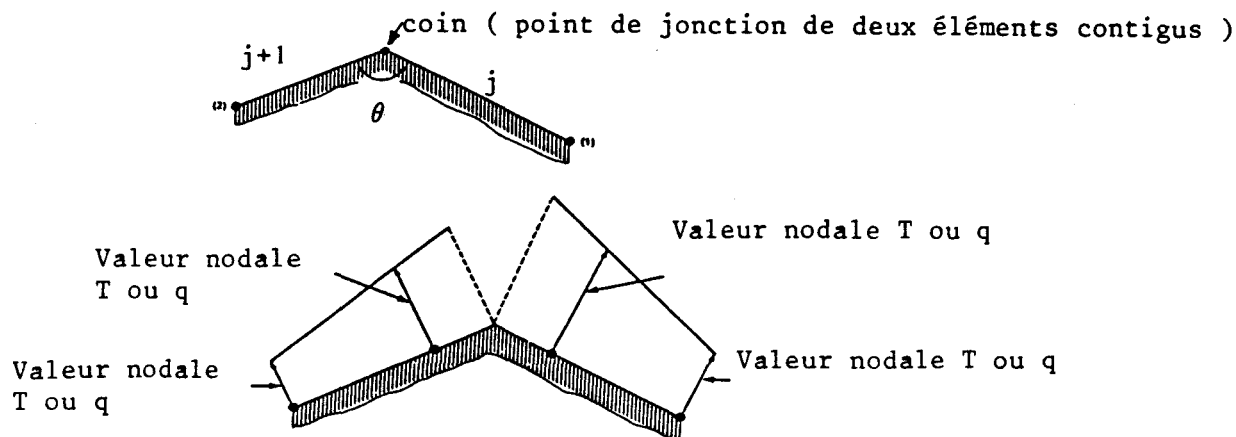


Figure B.2: Traitement des coins (éléments discontinus)

### B.1.2 Variation quadratique sur un élément de frontière

Dans ce cas, les éléments utilisés sont du type quadratique (3 noeuds) et les trois fonctions d'interpolation utilisées sont :

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \eta (\eta - 1) ; \varphi_2 = (1 - \eta)(1 + \eta) ; \varphi_3 = \frac{1}{2} \eta (1 + \eta)$$

La fonction d'approximation  $T$  est représentée par :

$$T = T_1 \varphi_1 + T_2 \varphi_2 + T_3 \varphi_3$$

avec le tableau suivant définissant la valeur de la variable intrinsèque  $\eta$  en chacun des trois noeuds.

Noeud	$\eta$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$
1	-1	1	0	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1

### B.1.3 Variation cubique sur un élément de frontière

Dans ce cas, on utilise généralement des éléments cubiques à quatre noeuds. Les fonctions d'approximation sont définies par :

$$T = T_1 \varphi_1 + T_2 \varphi_2 + T_3 \varphi_3 + T_4 \varphi_4$$

où

$$\varphi_1 = \frac{1}{16} (1 - \eta) [-10 + 9(\eta^2 + 1)]$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{16} (1 + \eta) [-10 + 9(\eta^2 + 1)]$$

$$\varphi_3 = \frac{9}{16} (1 - \eta^2)(1 - 3\eta)$$

$$\varphi_4 = \frac{9}{16} (1 - \eta^2)(1 + 3\eta)$$

avec le tableau suivant définissant la valeur de la variable intrinsèque  $\eta$  en chacun des quatre noeuds,

Noeud	$\eta$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$
1	-1	1	0	0	0
3	-1/3	0	1	0	0
4	1/3	0	0	1	0
2	1	0	0	0	1

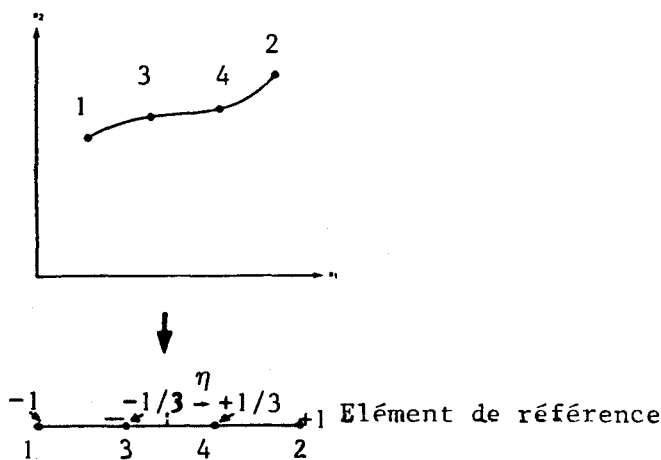


Figure B.4 : Éléments cubiques à 4 noeuds

## B.2 Fonctions d'interpolation temporelles

Dans l'étude des problèmes transitoirs aux fonctions d'interpolation dans l'espace définies en B.1, on associe des fonctions d'interpolation dépendantes du temps (cf. équations 2.25 et 2.26).

### B.2.1 Fonctions d'interpolation quadratiques

Dans la MEFr, en plus des fonctions d'interpolation temporelles linéaires (cf. chapitre 3), on peut utiliser aussi des fonctions d'interpolation quadratiques définies par [13]:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= 2\bar{t}^2 - 3\bar{t} + 1 \\ \psi_2 &= 4\bar{t}(1 - \bar{t}) \\ \psi_3 &= \bar{t}(2\bar{t} - 1)\end{aligned}$$

où

$$\bar{t} = \frac{(t - t_{f-1})}{t_f - t_{f-1}}$$

Les stations de temps utilisées dans les calculs sont dans ce cas :

$$t_{f-1}, t_{f-1/2} \text{ et } t_f$$

avec

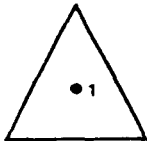
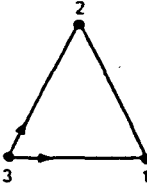
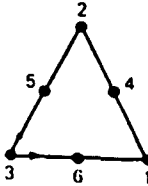
$$t_{f-1/2} = (t_{f-1} + t_f)/2$$

Notons que l'introduction de fonctions d'interpolation dans le temps d'ordre élevé ( $\geq 3$ ) augmente le nombre d'inconnues dans les systèmes d'équations qui en résultent [13]. Par conséquent, les calculs préliminaires à la résolution de ces systèmes deviennent trop fastidieux ce qui limite l'intérêt de l'utilisation de la MEFr avec des fonctions d'interpolation d'ordre supérieur.

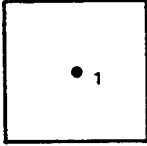
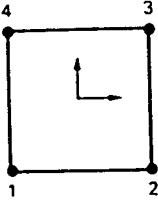
## 4.3 Annexe C

Tables de quelques éléments triangulaires et quadrilatéraux

Table des éléments de frontière triangulaires pour les problèmes 3D

ELEMENTS TRIANGULAIRES	
<u>Constant</u> (ordre zéro)	
	
fonction d'interpolation: $\varphi_1 = 1$	
<u>Linéaire</u> (premier ordre)	
	
fonctions d'interpolation: 3	
$\varphi_1 = \eta_1$ ; $\varphi_2 = \eta_2$ ; $\varphi_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2 = \eta_3$ ; $\eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2$	
<u>Quadratique</u> (second ordre)	
	
fonctions d'interpolation:	
$\varphi_1 = \eta_1(2\eta_1 - 1)$ ; $\varphi_2 = \eta_2(2\eta_2 - 1)$ ; $\varphi_3 = \eta_3(2\eta_3 - 1)$	
$\varphi_4 = 4 \eta_1 \eta_2$ ; $\varphi_5 = 4 \eta_2 \eta_3$ ; $\varphi_6 = 4 \eta_3 \eta_1$	

## Table des éléments de frontière quadrilatéraux pour les problèmes 3D

ELEMENTS QUADRILATERAUX	
<u>Constant</u> (ordre zéro)	
	
fonction d'interpolation: $\varphi_1 = 1$	
<u>Bilinéaire</u>	
	
fonctions d'interpolation:	
$\varphi_1 = \frac{1}{4}(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)$ ; $\varphi_2 = \frac{1}{4}(1 + \eta_1)(1 - \eta_2)$ $\varphi_3 = \frac{1}{4}(1 + \eta_1)(1 + \eta_2)$ ; $\varphi_4 = \frac{1}{4}(1 - \eta_1)(1 + \eta_2)$	

# Bibliographie

- [1] ZABARAS N., MUKHERJEE S.  
An analysis of solidification problems by the boundary element method,  
Int. J. of Numerical Methods in Engineering Vol. 24 (1987), pp. 1879-1900
- [2] SARLER B., ALUJEVIC A., KUHN G.  
Treatment of Multi-dimensional Stefan Problems by the Alternating Phase Truncation  
Boundary Element Method. Proceedings of the International Boundary Element  
Symposium, Nice, France, 15-17 Mai 1990
- [3] LAZARIDIS A.  
A Numerical Solution of Multidimensional Solidification (or Melting) Problem,  
Thesis, Columbia University(1969)
- [4] CRANK J.  
Free and Moving Boundary Problems,  
Clarendon Press, Oxford, (1984)
- [5] O'NEIL K.  
Boundary integral equation solution of moving boundary phase change problems,  
Int. J. of Numerical Methods in Engineering Vol.19 (1983), pp. 1825-1850
- [6] HONG C.P., UMEDA T., KIMURA Y.  
Numerical Models for Casting Solidification. Application of the boundary element  
method to solidification problems,  
Met. Trans. B. Vol. 15B Mars (1984) pp . 91-107

- [7] BANARJEE P.K., SHAW R.P.  
Boundary element formulation for Melting and Solidification problems,  
Developments in Boundary Element Methods-2, Applied Science Publishers  
London and New Jersey (1982)
- [8] BEN MARIEM J., ALI HAMDI M.  
A New Numerical Method for Fluid-Structure Interaction Problems,  
Proceeding of the eleventh International Conference on Boundary Element  
Methods, Cambridge, USA, Août 1989
- [9] CHUANG Y. K., SZEKELY J.  
On the use of Green's functions for solving melting and solidification problems,  
Int. J. Heat Mass Trans., pp. 1285-1294 (1971)
- [10] CHUANG Y. K., SZEKELY J.  
The use of Green's functions for solving melting and solidification problems in  
cylindrical coordinates system,  
Int. J. Heat Mass Trans., pp. 1171-1174 (1972)
- [11] BANARJEE P.K., SHAW R.P.  
An analysis of solidification problems by the boundary element method,  
Int.J. of Numerical methods in Engineering. Vol.24 (1982), pp. 1879-1900
- [12] DESBIOLLES J.L., DROUX J.J., HOADLEY A.F., RAPPAZ J., RAPPAZ M.  
Modelling of Solidification Process, INME symposium  
numerical methods in engineering EPFL Lausanne, Septembre 1989
- [13] BREBBIA C.A., TELLES J., WROBEL L.  
Boundary Element Techniques Theorie and Application in Engineering,  
Springer Verlag(1984)
- [14] BREBBIA C.A., CONNOR J.J. (Editors)  
Advances in Boundary Elements. Vol.2 Field and Fluid Flow Solutions  
CMP, Spriger-Verlag 1989



- [15] DHATT G., SONG R., BEN CHEIKH A.  
Direct Enthalpy Method for Solidification Calculation, INME symposium  
numerical methods in engineering EPFL Lausanne, Septembre 1989
- [16] BESKOS D.E.  
Boundary Element Methods in Mechanics  
Elsevier Science Publishers B.U (1987)
- [17] NOWAK A.J.  
The Multiple Reciprocity Methods of Solving Transient Heat Conduction  
Problems.  
Proceeding of the eleventh International Conference on Boundary Element  
Methods, Cambridge, Usa, Août 1989
- [18] LOEFFER C.F., MANSUR W.J.  
Dual Reciprocity Boundary Elements Formulation for Transient Elastic Wave  
Propagation Analysis in Infinite Domains.  
Proceeding of the eleventh International Conference on Boundary Element  
Methods, Cambridge, Usa, Août 1989
- [19] WROBEL L.C., TELLES J.C.F.  
A Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for axisymmetric Diffusion Pro-  
blems  
Boundary Elements VIII Conference 1986
- [20] BEZINE G.  
Application de la méthode des équations intégrales à la résolution des problèmes  
de flexion de plaques minces,  
Thèse de docteur ès sciences physiques, Université de Poitiers (Octobre 1982)
- [21] GREENBERG M.D.  
Application of Green's functions in Science and Engineering,  
Printice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1971
- [22] MORSE P. M., FESHBACH H.  
Methods of Theoretical Physics.  
Mc GRAW-Hill. New York, 1953

- [23] DELAUNAY D.  
Etude du couplage convection naturelle.conduction avec changement de phase.  
Application au stockage périodique de l'énergie,  
Thèse de doctorat d'état, Université de Nantes, U.E.R. de physiques (Mars 1985)
- [24] KIKUTA M., TOGOH H.  
A Boundary Element Method for Nonlinear Transient Heat Conduction Problems,  
Boundary Element VIII Conference, Springer-Verlag, 1986
- [25] CARUSO A.  
Application de la méthode des éléments de frontières à la modélisation des  
transferts de chaleur par diffusion thermique,  
Thèse de doctorat de l'Université de Provence (Juin 1988)
- [26] CARSLAW H.S., JAEGER J.C.  
Conduction of Heat in Solids  
Oxford Science Publications, 1980
- [27] PASQUETTI R., LE NILIOT C.  
Direct and Inverse Potentiel Problem ,  
Proceedings of the International Boundary Element Symposium, Nice, France, 15-  
17 May 1990, CMP Southampton Boston
- [28] OULD SIDI FALL B., BARRAND J.P.  
Solution of Transient Heat Conduction Problem by a BE Code Involving Only  
Boundary Integrals.  
Proceedings of the International Boundary Element Symposium , Nice, France,  
15-17 May 1990, CMP Southampton Boston
- [29] PASQUETTI R.  
A Boundary Element Software for the Numerical Integration of the Heat Conduc-  
tion Equation,  
INME symposium: numerical methods in engineering EPFL Lausanne,  
Septembre 1989

- [30] BREBBIA C. A., CHAUDOUET-MIRANDA A. (Edts)  
Boundary Elements in Mechanical and Electrical Engineering,  
CMP Springer-Verlag, 1990
- [31] DOMINGUEZ J., BREBBIA C.A.  
Boundary Elements An Introductory Course  
CMP, Southampton Boston, 1989
- [32] ZIENKIEWICZ O.C.  
La méthode des éléments finis appliquée à l'art de l'Ingénieur,  
Ediscience 1973