USTL

FLANDRES ARTOIS

LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE
ET D'OPTIMISATION

n° d'ordre : 680

THESE

Nouveau régime

présentée à
l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en MATHEMATIQUES APPLIQUEES
par

Fatma JEEAWOCK-ZEDEK

INTERPOLATION PAR DES SPLINES QUADRATIQUES SUR UN DOMAINE TRIANGULE DU PLAN

soutenue le 31 janvier 1991 devant la commission d'examen

Membres du jury

Président :	C. BREZINSKI
Rapporteurs :	J.C. FIOROT
	A. LE METHAUTE
Membre :	P. SABLONNIERE

Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation, UFR IEEA - M3, USTL Flandres-Artois,
59655 Villeneuve d'Ascq - Cedex - FRANCE.

Ce document représente un ensemble de travaux.
Il inclut:

- La thèse de doctorat 3ième cycle intitulée : Interpolation sur un domaine carré par des splines quadratiques à deux variables.

- Un premier article : Interpolation de Lagrange par des splines quadratiques sur un quadrilatère de R^2.

- Un second article : Operator norm bounds and error bounds for quadratic splines on a type-2 triangulation.

N° d'ordre : 1282

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

(Mathématiques appliquées)

par

Fatma ZEDEK

INTERPOLATION SUR UN DOMAINE CARRE PAR DES SPLINES QUADRATIQUES A DEUX VARIABLES

Thèse soutenue le Mercredi 26 Juin 1985 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :		
	P. POUZET	Président
	P. SABLONNIERE	Rapporteur
	R. ARCANGELI	Examinateurs
	C. BREZINSKI	

Je tiens à remercier vivement Monsieur le Professeur P. POUZET, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury de cette thèse.

Je suis très reconnaissante envers Monsieur P. SABLONNIERE qui m'a fait bénéficier de son aide constante et de ses conseils généreux au cours de la préparation de ce travail.

Il m'est agréable d'exprimer mes remerciements à Monsieur le Professeur C. BREZINSKI, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail et le juger.

Monsieur R. ARCANGELI, Professeur à l'Université de Pau, me fait l'honneur d'examiner ce travail. Qu'il en soit remercié.

Je remercie également Madame A. REMY, Messieurs P. VAN INGELANDT et Y. TINEL, pour l'aide qu'ils m'ont attribuée en programmation.

Que soient remerciés sincèrement Madame F. TAILLY et M. H. GLANC qui, avec célérité, soin et compétence, ont assuré la réalisation matérielle de cette thèse.

Vu le nombre, je m'excuse de ne pas citer tous ceux qui ont, de près comme de loin, participé à l'élaboration de ce travail.

TABLES DES MATIÈRES.

-

INTRODUCTION.

Les splines quadratiques à deux variables sont les surfaces différentiables et polynômiales par morceaux les plus simples. Ce sont en effet des fonctions de $C^1(\Omega)$ *(*Ω *domaine polygonal du plan), dont la restriction à chaque triangle* T *d'une triangulation de* Ω *est un élément de* P_2*, espace des polynômes à deux variables de degré total inférieur ou égal à 2.*
Chaque polynôme P *se développe dans la base de Bernstein :*

$$P(\lambda) = \sum_{0 \leq i+j \leq 2} a_{ij} \, \beta_{ij} \, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *étant les coordonnées barycentriques de* T.

$$\beta_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{2!}{i!j!(2-i-j)!} \, \lambda_1^i \, \lambda_2^j \, \lambda_3^{2-i-j}$$

Les a_{ij} *sont appelés B-coefficients de* P.
Toutes ces notions sont développées par P. Sablonnière dans [10].

Ainsi le calcul de la spline se ramène à celui de ses B-coefficients. Dans notre étude, nous choisissons comme domaine Ω*, un carré de* $\mathbb{R}^2$.

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques rappels concernant l'interpolation de Lagrange par des Splines quadratiques sur un intervalle de $\mathbb{R}^2$ *(ces résultats seront utilisés au chapitre 3), et l'élément fini quadratique de Powel-Sabin, avec le calcul des fonctions de base du procédé d'interpolation correspondant.*

Dans le deuxième chapitre, nous faisons une étude de la majoration de la norme L_p, *de la fonction de ses dérivées premières et secondes, dans le cas de l'interpolation d'Hermite par des splines quadratiques sur un domaine subdivisé en triangle de Powell-Sabin.*

Nous nous basons dans cette étude sur des résultats donnés par R. Arcangeli et J.L. Gout dans [1].
L'étude est faite d'abord sur un triangle de référence, puis dans la deuxième partie du chapitre, nous montrons que les majorations obtenues se généralisent à D *; en utilisant les résultats donnés par P. Sablonnière dans [9].*

Le troisième chapitre concerne l'interpolation de Lagrange en des points répartis de façon assez régulière sur Ω. *Nous donnons deux algorithmes très simples correspondant à deux choix des points d'interpolation et permettant le calcul des B-coefficients de la spline, ainsi que ceux des fonctions de base. Ce calcul permet de trouver un majorant* M *et un minorant* m *de la norme* L_∞ *de l'opérateur d'interpolation ; et par conséquent, une majoration de l'erreur d'interpolation. Nous montrons que cette dernière est en* $O(h^\alpha)$, *avec* α *au moins égal à 2. A la fin de ce chapitre nous donnons deux programmes : un programme concernant le calcul des B-coefficients des fonctions de base ; ainsi que celui de* m *et* M, *et un programme concernant le calcul de l'interpolant spline, de l'erreur d'interpolation et de l'ordre de convergence. Nous donnons aussi des courbes de niveau de certaines fonctions et de leurs interpolants.*

On sait que la construction de l'interpolant d'Hermite vu au chapitre 1, nécessite la connaissance des dérivées partielles premières aux points d'interpolation. Or, en pratique, cette condition n'est pas toujours satisfaite ; il faut donc approcher les valeurs de ces dérivées : cela fait l'objet du quatrième et dernier chapitre.

Nous proposons deux méthodes d'approximation : la première méthode utilise la minimisation de l'expression

$$E = \iint_{\Omega} \{(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2})^2 + 2(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}) + (\frac{\partial^2 S}{\partial y^2})^2\} \ dx\, dy.$$

qui représente une valeur approchée de l'énergie de flexion d'une plaque mince. Dans ce cas, les calculs numériques montrent que l'erreur sur la fonction est en $O(h^2)$ *seulement.*

La deuxième méthode consiste à estimer les dérivées partielles au moyen de splines cubiques à une variable définies sur les parallèles aux côtés de Ω *: cette méthode est beaucoup plus satisfaisante car l'erreur sur la fonction est en* $O(h^3)$. *Et à la fin de ce chapitre, on compare ces résultats avec ceux obtenus par Le Méhauté dans [7], au moyen des splines plaques minces locales.*
Dans ce dernier cas l'erreur sur la fonction est en $O(h^3)$ *également.*

CHAPITRE 1.

QUELQUES RESULTATS FONDAMENTAUX

SUR

LES SPLINES QUADRATIQUES.

I - INTRODUCTION.

Ce chapitre regroupe certains résultats fondamentaux dont on se sert dans les chapitres suivants, notamment l'interpolation par des splines quadratiques sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et un triangle de $\mathbb{R}^2$.

II - INTERPOLATION DE LAGRANGE SUR UN INTERVALLE DE $\mathbb{R}$, PAR DES SPLINES QUADRATIQUES.

Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\Delta = \{a = t_o < \ldots < t_N = b\}$ une subdivision uniforme de I.
Soit :

$$\text{et} \qquad \left.\begin{aligned} & h_i = t_{i+1} - t_i \\ & t^*_{i+1} = t_{i+1/2} = t_i + \frac{1}{2} h_i \end{aligned}\right\} \text{ pour } 0 \le i \le N-1$$

Avec :

$$\begin{cases} t^*_o = t_o \\ t^*_{N+1} = t_N \end{cases}$$

pour $0 \le i \le N-1$, on définit :

$P_2([t_i, t_{i+1}])$: {fonctions polynomiales du second degré définies sur $[t_i, t_{i+1}]$}

$P^1_2([a,b], \Delta)$: $\{s \in C^1([a,b])$; tel que $S/[t_i, t_{i+1}] \in P_2([t_i, t_{i+1}])$, $0 \le i \le N-1\}$

$C^{-1}(\{a,b\})$: {fonctions définie et bornées sur $[a,b]$}.

Alors le problème suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Chercher } S \in P^1_2([a,b], \Delta) \text{ tq} \\ & \qquad S(t^*_i) = f(t^*_i) = f^*_i \\ & \qquad (\text{pour } f \in C^{-1}([a,b])) \end{aligned}$$

admet une solution et une seule. (Pour la démonstration voir [6]).

S peut s'écrire dans la base de Bernstein de $P_2^1([t_i, t_{i+1}])$ $(0 \leq i \leq N-1)$ de la manière suivante :

$$S(x) = a_{2i}\, \beta_0 + a_{2i+1}\, \beta_1 + a_{2i+2}\, \beta_2$$

avec

$$\begin{cases} \beta_0(x) = (1-x)^2 \\ \beta_1(x) = 2x(1-x) \\ \beta_2(x) = x^2 \end{cases}$$

Définition 1.

Les a_j ; $2i \leq j \leq 2i+2$ *pour* $0 \leq i \leq N-1$, *sont appelés coefficients-Bézier ou les* B-*coefficients de* S. (Pour cette notion voir [10]).

Exemple.

On représente les B-coefficients pour N = 4.

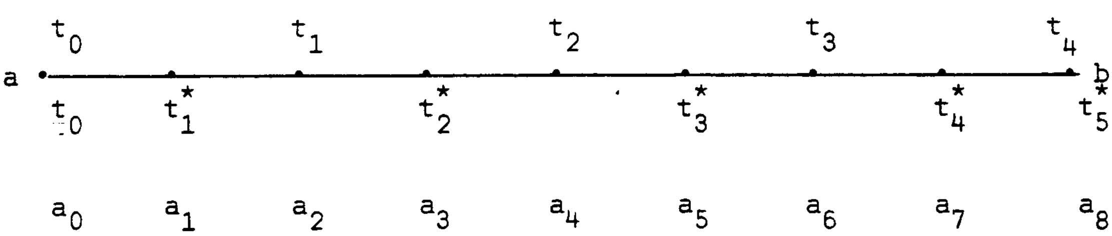


Fig. 1. Représentation des B-coefficients a_i, $0 \leq i \leq 8$; *de* $S \in P_2^1([a,b])$.

Proposition 1.

Les B-*coefficients indiqués sur la figure précédente (Fig. 1), se calculent en résolvant le système suivant :*

$$
(S1)\quad \begin{cases}
6a_2 + a_4 & = -f_o^* + 4f_1^* + 4f_2^* \\
a_{2i-2} + 6a_{2i} + a_{2i+2} & = 4f_i^* + 4f_{i+1}^* \\
 & \quad (\text{pour } 2 \le i \le N-2) \\
a_{2N-4} + 6a_{2N-2} & = 4f_{N-1}^* + 4f_N^* - f_{N+1}^*
\end{cases}
$$

puis en calculant :

$$
(S2)\quad \{ \quad a_{2i+1} = 2f_{i+1}^* - (a_{2i} + a_{2i+2})/2 \text{ pour } 0 \le i \le N-1
$$

avec

$$
\begin{cases}
a_o = f_o^* \\
a_{2N} = f_{N+1}^*
\end{cases}
$$

Pour la démonstration voir [10] .

III - Splines définies sur un domaine triangulé de $\mathbb{R}^2$:

A - Notions préliminaires.

Soit Ω un domaine polygonal de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{T}$ une triangulation de Ω.

Soit $T \in \mathcal{T}$, $T = (A_1A_2A_3)$ et $M \in T$.

Définition 2.

On appelle coordonnées barycentriques de M, *la solution* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *du système :*

$$
\begin{cases}
\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = M \\
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1
\end{cases}
$$

Avec $0 \leq \lambda_i \leq 1$ *pour* $1 \leq i \leq 3$.

Soit :

$P_2(T)$: {fonctions polynomiales du second degré définies sur T}

$P_2^1(\Omega,C)$: $\{S \in C^1(\Omega)$ tq $S/T \in P_2(T),\ \forall T \in \mathcal{T}\}$

Définition 3.

$S \in P_2^1(\Omega,C)$, *est appelée Spline quadratique* C^1 *définie sur* Ω

S/T peut s'écrire dans la base de Bernstein de $P_2(T)$ de la manière suivante :

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{0\leq i+j\leq 2} a_{ij}\ \beta_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Avec :

$$\beta_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{2!}{i!j!(2-i-j)!}\ \lambda_1^i\ \lambda_2^j\ \lambda_3^{(2-i-j)}$$

(pour $0 \leq i+j \leq 2$).

$\{\beta_{ij}\}_{0\leq i+j\leq 2}$ est la base de Bernstein. $\{a_{ij}\}_{0\leq i+j\leq 2}$ sont les B-coefficients de S. (Voir figure 2).

Propriété 1.

Les $\{\beta_{ij}\}_{0\leq i+j\leq 2}$ *vérifient la propriété suivante :*

$$\begin{cases} \beta_{ij}(\lambda) \geq 0 \\ \sum_{0\leq i+j\leq 2} \beta_{ij}(\lambda) = 1 \end{cases}$$

Considérons les points : $A_{ij} \in \partial T$ = bord de T, de coordonnées barycentriques :

$$(i/2\ ;\ \gamma/2\ ;\ (2-i-j)/2) \text{ pour } 0 \leq i+j \leq 2.$$

Définition 4.

L'ensemble des points $\tilde{a}_{ij} = (A_{ij}, a_{ij})$, *est appelé* B-*réseau ou* B-*polyèdre, sur le triangle* T, *du polynôme :*

$$P(\lambda) = \sum_{0 \le i+j \le 2} a_{ij}\, \beta_{ij}(\lambda)$$

(voir Fig. 2).

Définition 5.

On appelle triangle quadratique l'ensemble des points $(\lambda, P(\lambda))$; *c'est à dire le graphe de* $P \in P_2(T)$.

Propriété 2.

On vérifie que :

$$\begin{cases} \lambda = \sum_{0 \le i+j \le 2} A_{ij}\, \beta_{ij}(\lambda) \\ \\ P(\lambda) = \sum_{0 \le i+j \le 2} a_{ij}\, \beta_{ij}(\lambda) \end{cases}$$

Remarque 1.

1°) - Les relations données dans les propriétés (1) et (2) indiquent que les points $(\lambda, p(\lambda))$, du graphe de P, appartiennent à l'enveloppe convexe des points $\tilde{a}_{ij} = (A_{ij}, a_{ij})$.

2°) - Les figures suivantes éclaircissent la notion de B-coefficients.

$\mathbb{P}_2$

Polynôme quadratique dans la base de Bernstein :

$$P(\lambda) = a_{00}\,\lambda_0^2 + 2a_{10}\lambda_0\lambda_1 + 2a_{01}\lambda_0\lambda_2$$
$$+ a_{20}\,\lambda_1^2 + 2a_{11}\lambda_1\lambda_2 + a_{02}\lambda_2^2$$

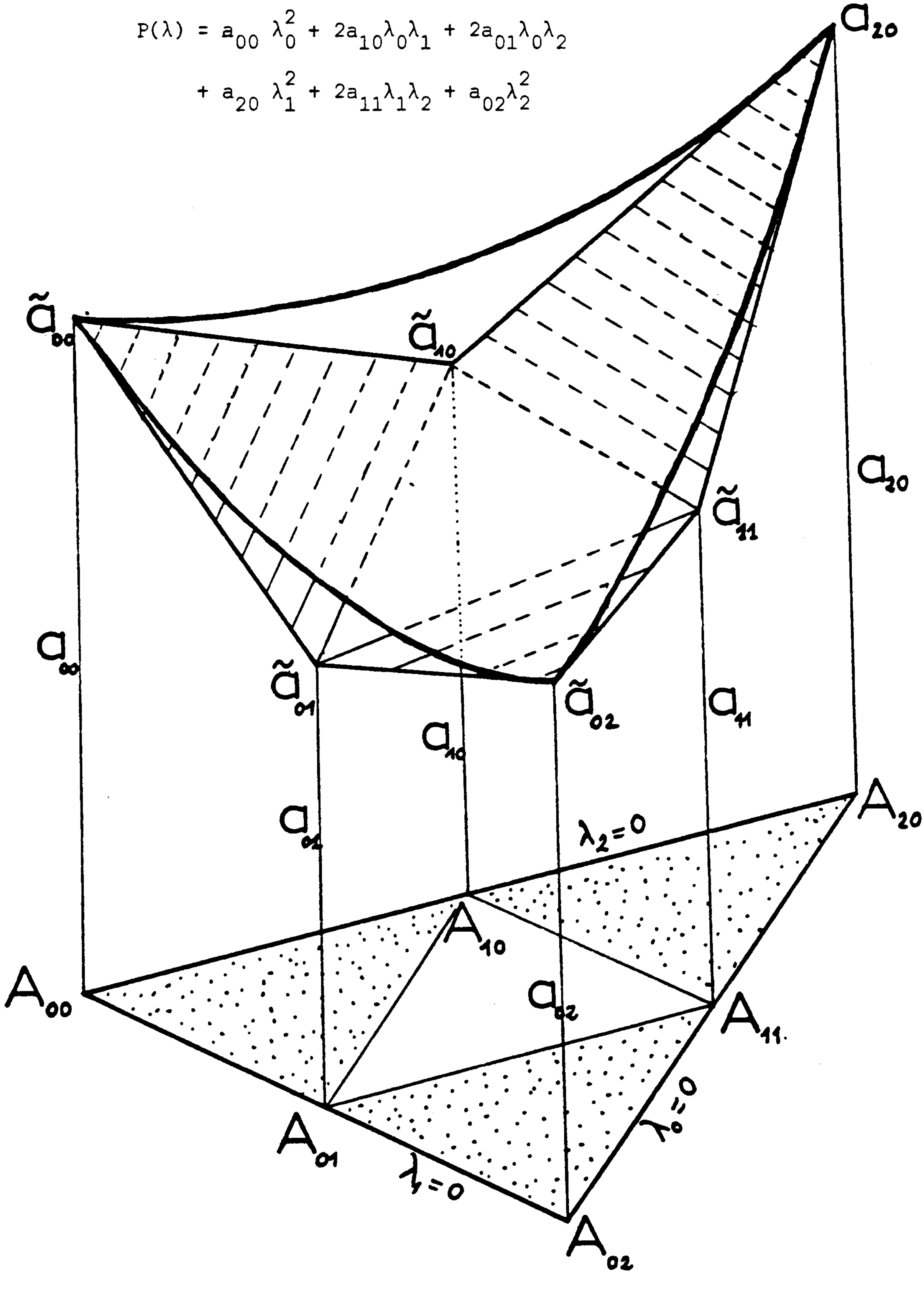


Figure 2. Réseau Bézier = $\{\tilde{a}_{ij}\}$

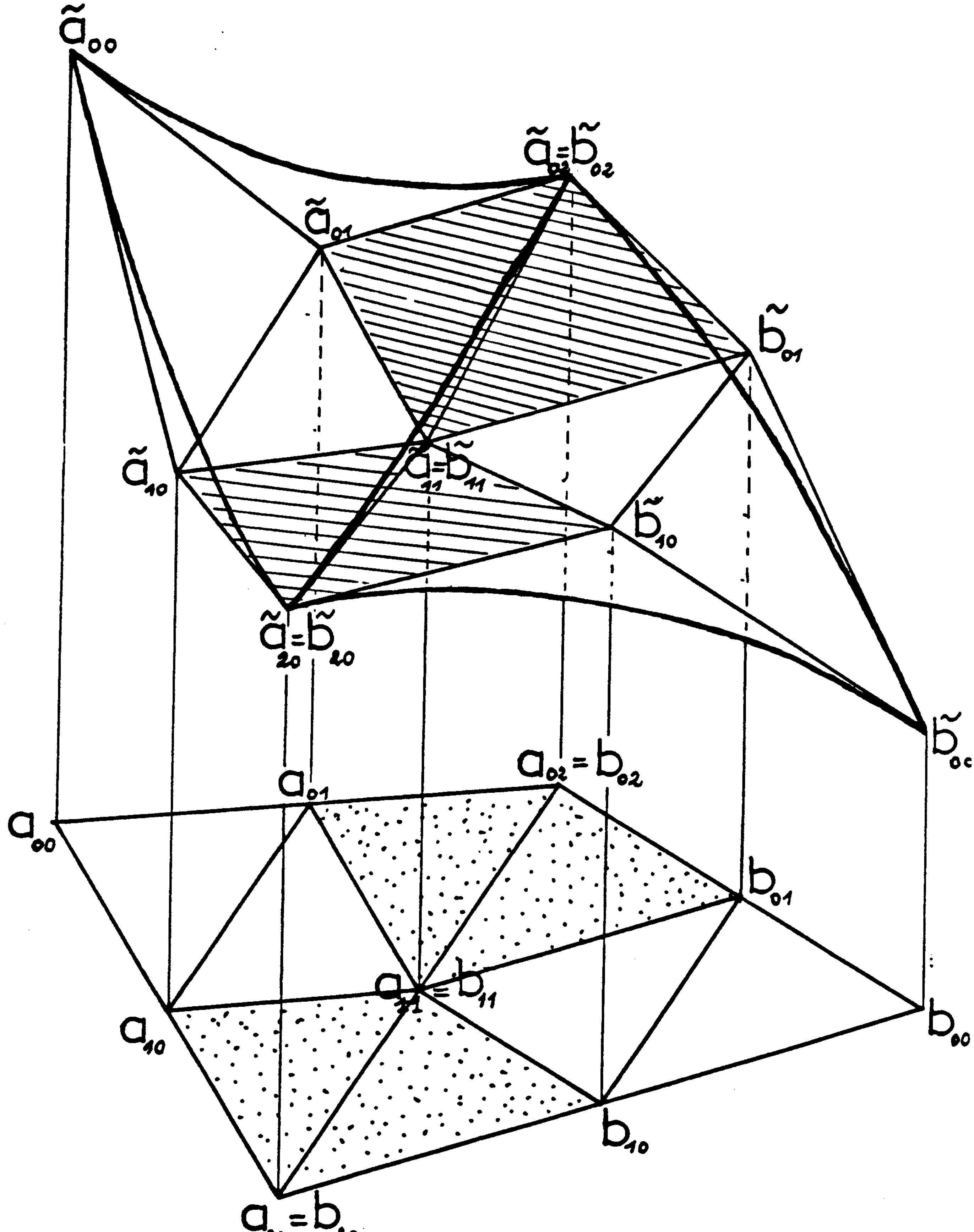


Figure 3.

Réseaux Bézier { Représentation / Continuité C^1

B - Raccordement C^1 de deux triangles quadratiques.

Etant donné deux triangles $T_1 = (A_1A_2A_3)$ et $T_2 = (A_1A_2A'_3)$, inclus dans Ω, on sait d'après ce qui précède que la spline S s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} P_1(\lambda) = \sum\limits_{o\le i+j\le 2} a_{ij}\ \beta_{ij}(\lambda) & \text{sur } T_1 \\ P_2(\mu) = \sum\limits_{o\le i+j\le 2} b_{ij}\ \beta_{ij}(\mu) & \text{sur } T_2. \end{cases}$$

La figure précédente représente le raccordement C^1 le long de $[A_1A_2]$ des deux triangles quadratiques

$$\{(\lambda,\ P_1(\lambda))\ ;\ \lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3) \text{ avec } o \le \lambda_i \le 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1\}$$

$$\{(\mu,\ P_2(\mu))\ ;\ \mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3) \text{ avec } o \le \mu_i \le 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{3} \mu_i = 1\}$$

Remarque 2.

Le calcul de S revient à celui de ses B-coefficients. Et pour faciliter ce dernier, par la suite, on considère la projection du B-réseau dans le plan ; on obtient ainsi la figure suivante :

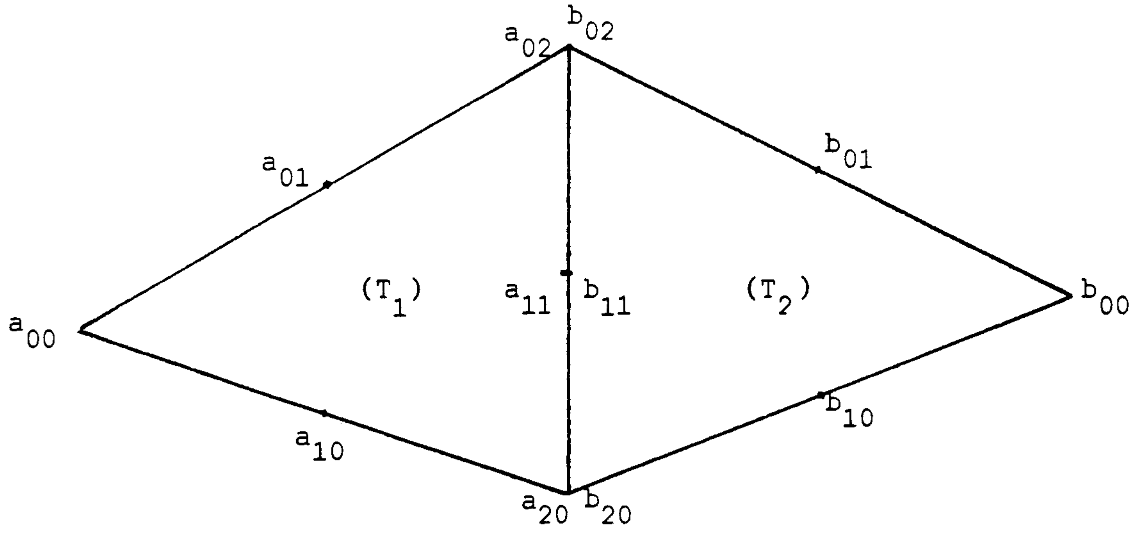


Fig. 4. Projection du B-réseau de deux triangles quadratiques dans le plan.

Dans la suite, tous les B-coefficients seront représentés par leurs projections.

Proposition 2.

La continuité C^1 *entre les deux triangles quadratiques précédents, le long de* $[A_1A_2]$, *se traduit par le fait que les points* $\tilde{a}_{20}$; $\tilde{a}_{11}$; $\tilde{a}_{10}$; *et* $\tilde{b}_{10}$ *d'une part ; et les points* $\tilde{a}_{20}$; $\tilde{a}_{11}$; $\tilde{a}_{10}$ *et* $\tilde{b}_{10}$ *d'autre part sont coplanaires.*
Se de plus : A_3, A_1 *et* $\overline{A}'_3$ *sont alignés avec* $A'_3A_1 = K\, A_3A_1$ *cette continuité se traduit par :*

$$(1+K)\; a_{20} = b_{10} + K\; a_{10}$$

$$(1+K)\; a_{11} = b_{01} + K\; a_{01}$$

Pour la démonstration de cette proposition voir [10]

C) - Application : Problème de Powell-Sabin.

1°) - *Position du problème.*

Dans ce paragraphe on a :

$$\Omega = \text{triangle } T = A_1A_2A_3.$$

La triangulation T subdivise Ω, ($\Omega = T$), en 6 triangles t_i, appelés micro-triangles, comme le montre la figure suivante :

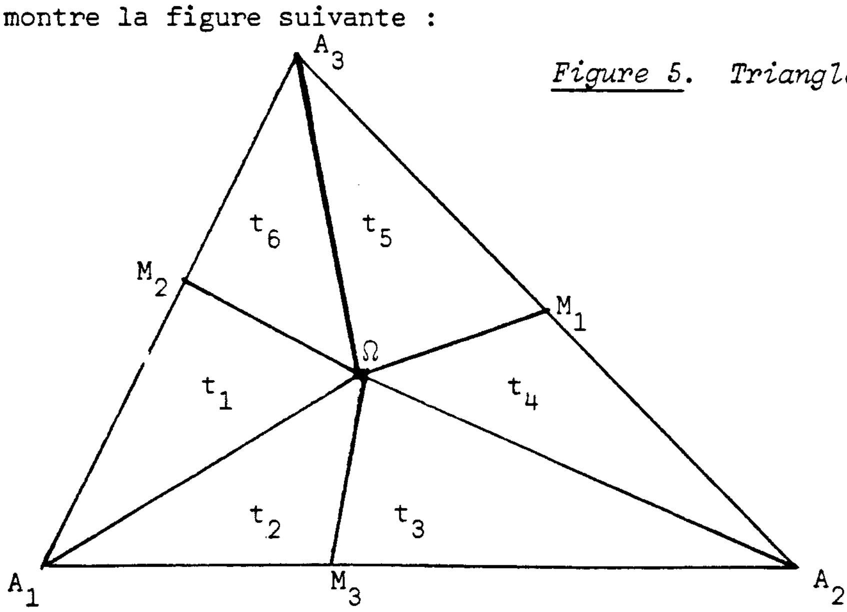


Figure 5. Triangle de Powell-Sabin.

On a :

$$\begin{cases} \Omega = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3 \\ M_1 = (1-\alpha_1)\ A_2 + \alpha_1 A_3 \\ M_2 = \alpha_2 A_1 + (1-\alpha_2)A_3 & \text{pour } 0 < \alpha_i < 1 \\ M_3 = (1-\alpha_3)A_1 + \alpha_3 A_2 \end{cases}$$

On définit :

$P_2(t_i)$: {fonctions polynomiales du second degré définies sur t_i}
(pour $1 \leq i \leq 6$)

et

$P_2^1(T)$: $\{S \in C^1(T) \text{ tq } S / t_i \in P_2(t_i)\ ;\ 1 \leq i \leq 6\}$

Le problème à résoudre est le suivant : Etant donné $f \in C^1(\Omega)$, $\exists ?\ S \in P_2^1(\Omega)$ tq :

$$\begin{cases} S(A_i) = f(A_i) \\ \dfrac{\partial S}{\partial x}(A_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(A_i) & \text{pour } 1 \leq i \leq 3 \\ \dfrac{\partial S}{\partial y}(A_i) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(A_i) \end{cases}$$

On démontre dans [10], qu'il existe S unique, $S \in P_2^1(\Omega, C)$; vérifiant ces conditions.

2) - *Fonctions de base du procédé d'interpolation.*

Les fonctions de base sont appelés ϕ_i, X_i, et ψ_i pour $1 \leq i \leq 3$ et vérifient :

$$\left\{\begin{array}{lll}
\phi_i(A_i) = 1 & \dfrac{\partial\phi_i}{\partial\lambda_{i+1}}(A_i) = 0 & \dfrac{\partial\phi_i}{\partial\lambda_{i+2}}(A_i) = 0 \\[2ex]
X_i(A_i) = 0 & \dfrac{\partial X_i}{\partial\lambda_{i+1}}(A_i) = 1 & \dfrac{\partial X_i}{\partial\lambda_{i+2}}(A_i) = 0 \\[2ex]
\psi_i(A_i) = 0 & \dfrac{\partial\psi_i}{\partial\lambda_{i+1}}(A_i) = 0 & \dfrac{\partial\psi_i}{\partial\lambda_{i+2}}(A_i) = 1
\end{array}\right.$$

Les fonctions ϕ_i, X_i et ψ_i, ainsi que leurs dérivés partielles premières étant nulles aux points A_{i+1}, A_{i+2}. Avec la convention :

$$A_j = A_{j-3} \text{ pour } j \geq 4$$

3°) - *Opérateur d'interpolation et interpolant.*

Appelons π l'opérateur d'interpolation, c'est à dire l'application

$$\begin{array}{rcl}
\pi : C^1(T) & \longrightarrow & P_2^1(T) \\
f & \longrightarrow & \pi f = S
\end{array}$$

πf étant définie de la manière suivante :

$$\pi f = \sum_{i=1}^{3} f(A_i)\,\phi_i + \sum_{i=1}^{3} Df(A_i).\overrightarrow{A_iA_{i+1}}X_i + \sum_{i=1}^{3} Df(A_i).\overrightarrow{A_iA_{i+2}}\psi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{3} f(A_i)\,\phi_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial\lambda_{i+1}}(A_i)\,X_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial\lambda_{i+2}}(A_i)\,\psi_i$$

4°) - *Résultat préliminaire.*

Définition 6.

On appelle λ_{ij} $(1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 3)$, *les coordonnées barycentriques relatives au triangle* t_i.

i \ j	1	2	3
1	$\lambda_1 - \left[\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{\alpha_2\,\omega_3}{\omega_{2(1-\alpha_2)}}\right]\lambda_2 - \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\;\lambda_3$	$\frac{\lambda_2}{\omega_2}$	$-\frac{\omega_3}{\omega_{2(1-\alpha_2)}}\;\lambda_2 + \frac{1}{1+\alpha_2}\lambda_3$
2	$\lambda_1 - \left[\frac{1-\alpha_3}{\alpha_3}\lambda_2 + \left[\frac{\omega_{2(1-\alpha_3)}}{\omega_3\alpha_3}\right] - \frac{\omega_1}{\omega_3}\;\lambda_3\right]$	$\frac{1}{\alpha_3}\lambda_2 - \frac{\omega_2}{\alpha_3\omega_3}\lambda_3$	$\frac{\lambda_3}{\omega_3}$
3	$-\frac{\alpha_3}{1-\alpha_3}\lambda_1 + \lambda_2 + \left[\frac{\omega_1\alpha_3}{\omega_{3(1-\alpha_3)}} - \frac{\omega_2}{\omega_3}\right]\lambda_3$	$\frac{\lambda_3}{\omega_3}$	$\frac{1}{1-\alpha_3}\lambda_1 - \frac{\omega_1}{\omega_{3(1-\alpha_3)}}\lambda_3$
4	$\left[\frac{\omega_{3(1-\alpha_1)}}{\omega_1\alpha_1} - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right]\lambda_1 + \lambda_2 - \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1}\;\lambda_3+\lambda_3$	$\frac{1}{\alpha_1}\lambda_3 - \frac{\omega_3}{\omega_1\alpha_1}\lambda_1$	$\frac{\lambda_1}{\omega_1}$
5	$\left[\frac{\omega_2\alpha_1}{\omega_{0(1-\alpha_1)}} - \frac{\omega_3}{\omega_1}\right]\lambda_1 - \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}\lambda_2 + \lambda_3$	$\frac{\lambda_1}{\omega_1}$	$\frac{1}{1-\alpha_1}\lambda_2 - \frac{\omega_2}{\omega_{1(1-\alpha_1)}}\lambda_1$
6	$-\frac{1-\alpha_2}{\alpha_2}\lambda_1 + \left[\frac{\omega_{1(1-\alpha_2)}}{\omega_2\alpha_2} - \frac{\omega_3}{\omega_2}\right]\lambda_2 + \lambda_3$	$\frac{1}{\alpha_2}\lambda_1 - \frac{\omega_1}{\alpha_2\omega_2}\lambda_2$	$\frac{\lambda_2}{\omega_2}$

<u>TABLEAU</u> 1. *Expression des* (λ_{ij}) $\begin{smallmatrix}1 \le i \le 6\\ 1 \le j \le 3\end{smallmatrix}$ *en fonction des* λ_k *pour* $1 \le k \le 3$.

Lemme 1.

Le tableau précédent représente le calcul des coordonnées barycentriques relatives aux micro-triangles t_i *; en fonction de celles relatives au macro-triangle* T.

Démonstration du lemme 1.

En se référant à la figure 5, on a pour $M \in t_1$, par exemple

(1)

$$M = \lambda_{11} A_1 + \lambda_{12}\Omega + \lambda_{13} M_2$$

or

$$\begin{cases} \Omega = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3 \\ M_2 = \alpha_2 A_1 + (1 - \alpha_2) A_3 \end{cases}$$

En remplaçant dans (1) on a :

(1')

$$M = \lambda_{11}A_1 + \lambda_{12} (\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3) + \lambda_{13}(\alpha_2 A_1 + (1-\alpha_2)A_3)$$

d'autre part, M s'écrit en fonction des sommets de T de la manière suivante :

(2) $$M = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$$

En comparant les expressions (1') et (2), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_{11} + \omega_1 \lambda_{12} + \alpha_2 \lambda_{13} \\ \lambda_2 = \omega_2 \lambda_{12} \\ \lambda_3 = \omega_3 \lambda_{12} + (1 - \alpha_2) \lambda_{13} \end{cases}$$

En résolvant ce système on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_{12} = \dfrac{\lambda_2}{\omega_2} \\[2ex] \lambda_{13} = - \dfrac{\omega_2}{\omega_2(1-\alpha_2)} \lambda_2 + \dfrac{1}{1-\alpha_2} \lambda_3 \\[2ex] \lambda_{11} = \lambda_2 - \left[\dfrac{\omega_1}{\omega_2} - \dfrac{\alpha_2 \omega_3}{\omega_2(1-\alpha_2)} \right] \lambda_2 - \dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_2} \lambda_3 \end{cases}$$

On fait le même raisonnement pour le calcul des coordonnées barycentriques relatives aux autres micro-triangles t_i $(2 \le i \le 6)$.

5°) - *Calcul des B-coefficients de la spline d'interpolation.*

Représentons d'abord la projection du B-réseau dans le plan

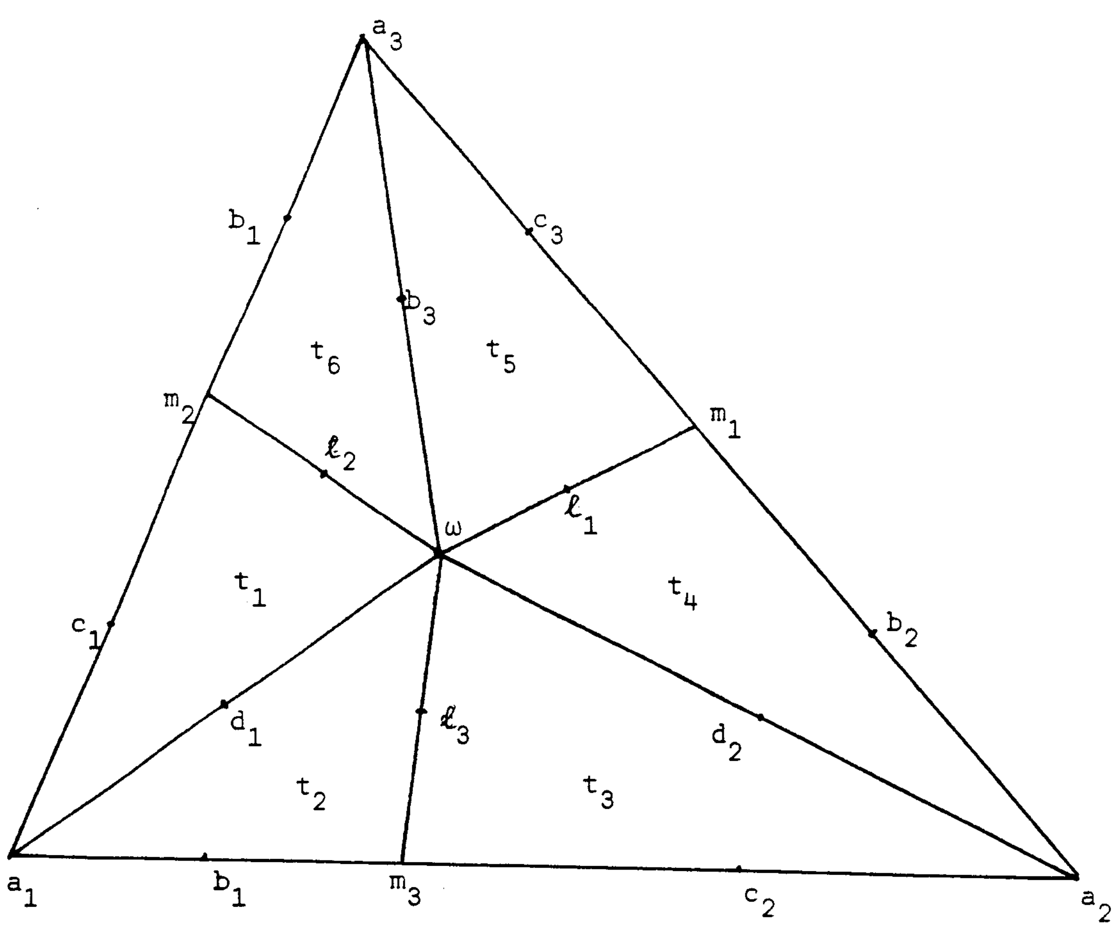


Figure 6.

Remarque 3.

Pour le calcul des B-coefficients de la spline on se base sur le raccordement C^1 de deux triangles quadratiques.

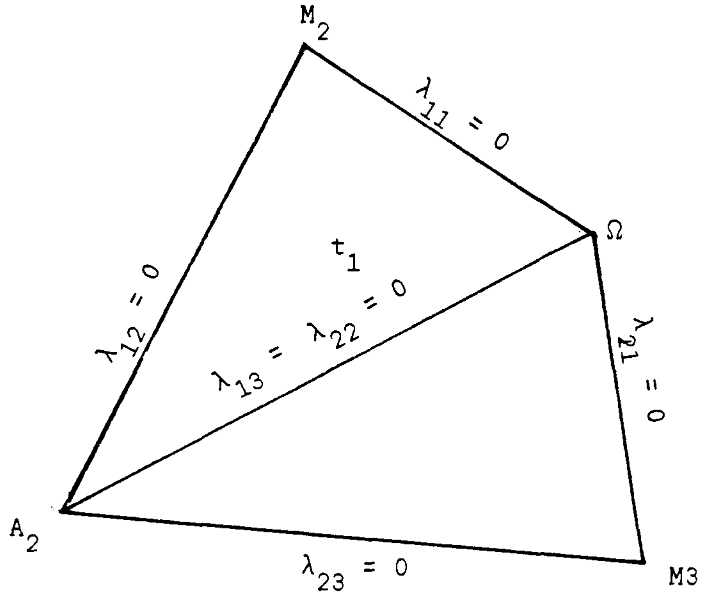


Fig. 7. Représentation des micro-triangles t_1 *et* t_2 *et des coordonnées barycentriques correspondantes.*

Les coordonnées barycentriques relatives à t_1 et t_2 sont respectivement $(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13})$ et $(\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23})$.

En s'inspirant de la figure 6, on peut écrire la spline S, dans la base de Bernstein de $P_2(t_1)$ et $P_2(t_2)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} S(\lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{13}) = a_1\lambda_{11}^2+\omega\lambda_{12}^2+m_2\lambda_{13}^2+2(d_1\lambda_{11}\lambda_{12}+e_2\lambda_{12}\lambda_{13}+C_1\lambda_{11}\lambda_{13}) (\text{Sur } t_1) \\ \\ S(\lambda_{21},\lambda_{22},\lambda_{23}) = a_1\lambda_{21}^2+m_3\lambda_{22}^2+\omega\lambda_{23}^2+2(b_1\lambda_{21}\lambda_{22}+e_3\lambda_{22}\lambda_{23}+d_1\lambda_{21}\lambda_{23}) (\text{Sur } t_2) \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} \lambda_{11} = 1 - \lambda_{12} - \lambda_{13} \\ \\ \lambda_{21} = 1 - \lambda_{21} - \lambda_{23} \end{cases}$$

d'où en remplaçant dans les deux expressions, on a :

$$g(\lambda_{12}, \lambda_{13}) = a_1(1 - \lambda_{12} - \lambda_{13})^2 + \omega\lambda_{12}^2 + m_2\,\lambda_{13}^2$$
$$+ 2d_1\,(1 - \lambda_{12} - \lambda_{13})\,\lambda_{12} + 2e_2\,\lambda_{12}\,\lambda_{13}$$
$$+ 2c_1\,\lambda_{13}(1 - \lambda_{12} - \lambda_{13})$$

et

$$g(\lambda_{22}, \lambda_{23}) = a_1(1 - \lambda_{22} - \lambda_{23})^2 + m_3\,\lambda_{22}^2 + \omega\lambda_{23}^2$$
$$+ 2b_1(1 - \lambda_{22} - \lambda_{23})\,\lambda_{22} + 2e_3\,\lambda_{22}\,\lambda_{23}$$
$$+ 2d_1(1 - \lambda_{22} - \lambda_{23})\,\lambda_{23}$$

Posons :

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial g}{\partial \lambda_2}(A_1) \\ q_1 = \dfrac{\partial g}{\partial \lambda_3}(A_1) \end{cases}$$

on a :

$$P_1 = \frac{\partial g}{\partial \lambda_2}(A_1)\ \frac{\partial g}{\partial \lambda_{22}}(A_1).\ \frac{\partial \lambda_{22}}{\partial \lambda_2}(A_1) + \frac{\partial g}{\partial \lambda_{23}}(A_1).\ \frac{\partial \lambda_{23}}{\partial \lambda_2}(A_1)$$

d'où :

$$\boxed{P_1 = \frac{\partial g}{\partial \lambda_2}(A_1) = \frac{1}{\alpha_3}\ \frac{\partial g}{\partial \lambda_{22}}(A_1)} \qquad \text{(Voir TAB. 1)}$$

De la même manière on trouve :

$$\boxed{q_1 = \frac{\partial g}{\partial \lambda_3}(A_1) = \frac{1}{1-\alpha_2}\ \frac{\partial g}{\partial \lambda_{13}}(A_1)}$$

Aussi on a :

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_{12}}(A_1) = \frac{\partial g}{\partial \lambda_2}(A_1).\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \lambda_{12}}(A_1) + \frac{\partial g}{\partial \lambda_3}(A_1)\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial \lambda_{12}}(A_1) = \omega_2\,P_1 + \omega_3\,q_1$$

Or après le calcul on trouve :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial \lambda_{22}} (A_1) = 2(b_1 - a_1) \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial \lambda_{12}} (A_1) = 2(d_1 - a_1) \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial \lambda_{13}} (A_1) = 2(c_1 - a_1) \end{cases}$$

On a ainsi à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\alpha_3} (b_1 - a_1) = p_1 \\[2ex] \dfrac{2}{1-\alpha_2} (c_1 - a_1) = q_1 \\[2ex] 2(d_1 - a_1) = \omega_2 p_1 + \omega_3 q_1 \end{cases}$$

On obtient, comme solution :

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + \frac{1}{2} \alpha_3 \, p_1 \\[1ex] c_1 = a_1 + \frac{1}{2} (1-\alpha_2) q_1 \\[1ex] d_1 = a_1 + \frac{1}{2} (\omega_2 p_1 + \omega_3 q_1) \end{cases}$$

Aussi en posant

$$\begin{cases} a_2 = f(A_2) \\ p_2 = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_3}(A_2) \\ q_2 = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_1}(A_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_3 = f(A_3) \\ p_3 = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_1}(A_3) \\ q_3 = \dfrac{\partial f}{\partial \lambda_2}(A_3) \end{cases}$$

Et en raisonnant de la même façon que précédemment, on trouve des valeurs analogues pour b_i, c_i, d_i $(i = 2,3)$, et en appliquant les résultats donnés dans [8], on a :

$$\begin{cases} m_1 = (1-\alpha_1)\, b_2 + \alpha_1 c_3 \\ e_1 = (1-\alpha_1)\, d_3 + \alpha_1 d_2 \\ \omega = \omega_1 d_1 + \omega_2 d_2 + \omega_3 d_3 \end{cases}$$

Remarque 4.

Les résultats précédents permettent donc d'obtenir directement les B-coefficients des fonctions de base du procédé d'interpolation, qui sont regroupés dans le tableau suivant :

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	X_1	X_2	X_3	ψ_1	ψ_2	ψ_3
a_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
b_1	1	0	0	$1/2\ \omega_3$	0	0	0	0	0
c_1	1	0	0	0	0	0	$\frac{1-\alpha_2}{2}$	0	0
d_1	1	0	0	$1/2\ \omega_2$	0	0	$\omega_{3/2}$	0	0
a_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
b_2	0	1	0	0	$1/2\ \alpha_1$	0	0	0	0
c_2	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{1-\alpha_3}{2}$	0
d_2	0	1	0	0	$1/2\ \omega_3$	0	0	$\omega_{1/2}$	0
a_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0
b_3	0	0	1	0	0	$1/2\ \alpha_2$	0	0	0
c_3	0	0	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}(1-\alpha_1)$
d_3	0	0	1	0	0	$1/2\omega_1$	0	0	$\frac{1}{2}\ \omega_2$
m_1	0	$1-\alpha_1$	α_1	0	$\frac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{2}$	0	0	0	$\frac{\alpha_1(1-\alpha_1)}{2}$
m_2	α_2	0	$1-\alpha_2$	0	0	$\frac{\alpha_2(1-\alpha_2)}{2}$	$\frac{\alpha_2(1-\alpha_2)}{2}$	0	0
m_3	$1-\alpha_3$	α_3	0	$\frac{\alpha_3(1-\alpha_3)}{2}$	0	0	0	$\frac{\alpha_3(1-\alpha_3)}{2}$	0
e_1	0	$1-\alpha_1$	α_1	0	$\frac{\omega_3(1-\alpha_1)}{2}$	$\frac{\omega_1\alpha_1}{2}$	0	$\frac{\omega_1(1-\alpha_1)}{2}$	$\frac{\omega_2\alpha_1}{2}$
e_2	α_2	0	$1-\alpha_2$	$\frac{\alpha_2\omega_2}{2}$	0	$\frac{\omega_1(1-\alpha_2)}{2}$	$\frac{\alpha_2\omega_3}{2}$	0	$\frac{\omega_2(1-\alpha_1)}{2}$
e_3	$1-\alpha_3$	α_3	0	$\frac{(1-\alpha_3)\omega_2}{2}$	$\frac{\alpha_3\omega_3}{2}$	0	$\frac{\omega_3(1-\alpha_3)}{2}$	$\frac{\alpha_3\omega_1}{2}$	0
ω	ω_1	ω_2	ω_3	$\frac{\omega_1\omega_2}{2}$	$\frac{\omega_2\omega_3}{2}$	$\frac{\omega_1\omega_3}{2}$	$\frac{\omega_1\omega_3}{2}$	$\frac{\omega_1\omega_2}{2}$	$\frac{\omega_2\omega_3}{2}$

TABLEAU 2. B-coefficients des fonctions de base du procédé d'interpolation.

CHAPITRE II

ETUDE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION D'HERMITE

PAR

DES SPLINES QUADRATIQUES C^1.

I - INTRODUCTION.

Considérons un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$, subdivisé par une triangulation $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ est régulière, c'est à dire qu'il existe $\alpha \geq 1$ tel que :

$$-\forall T \in \mathcal{T},\ T \subset \mathcal{D},$$

on a :

$$1 \leq \frac{h}{2\rho} \leq \alpha$$

(h et ρ sont les diamètres respectifs des cercles circonscrit à T et inscrit dans T).

Ce chapitre concerne l'étude de l'erreur pour l'interpolant d'Hermite défini au chapitre I.

On commence l'étude sur l'un des triangles T de la subdivision $\mathcal{T}$. Dans la deuxième partie, on montre que les résultats se généralisant au domaine $\mathcal{D}$, et ce, en se basant sur les résultats donnés par P. Sablonnière dans [9].

Etant donné $m \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, x_2)$; $x \in \mathbb{R}^2$, $p \in \mathbb{R}$, $T \in \mathcal{T}$; on définit :

$$W^{m,p}(T) : \{(\text{classes de) fonctions } f \text{ tq } f \in L^p(T) \text{ et } \partial^\beta f \in L^p(T) \text{ pour } |\beta| \leq m\}$$

avec

$$\partial^\beta f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\beta_2}$$

avec

$$\begin{cases} \beta = (\beta_1, \beta_2) \\ |\beta| = \beta_1 + \beta_2 \end{cases}$$

On définit aussi pour $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \leq m$

$$||D^{\ell}f(x)|| = \sup_{||\xi_i|| = 1} |D^{\ell}f(x)\ (\xi_1,\dots,\xi_{\ell})|$$

($\xi_i \in \mathbb{R}^2$ pour $1 \leq i \leq \ell$)
On munit $W^{m,p}(T)$, des semi-normes suivantes :

$$|f|_{\ell,p,T} = \left(\int_T ||D^{\ell}f(x)||^p \, dx \right)^{1/p} \ ; \ 0 \leq \ell \leq m$$

Avec la modification habituelle quand p tend vers l'infini.

II - ETUDE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION SUR UN TRIANGLE $T \in \mathcal{T}$, $T \subset \mathcal{D}$:

Soit $T = A_1A_2A_3$, subdivisé en 6 micro-triangles t_i.
Soit $f \in W^{m,p}(T)$ et $a = \frac{h}{2\rho}$.

On a vu au chapitre I que l'interpolant d'Hermite de f, aux points A_i $(1 \leq i \leq 3)$, s'écrit de la manière suivante :

$$\pi f = S = \sum_{i=1}^{3} f(A_i)\phi_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial \lambda_{i+1}} (A_i)\ X_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial \lambda_{i+2}} (A_i)\psi_i$$

Avec toujours la convention d'indices :

$$A_j = A_{j-3} \text{ pour } j \geq 4.$$

Remarque 1.

Dans cette étude, on se base sur les résultats donnés par GOUT dans [4]. Pour $\ \ > 1$, π opérateur d'interpolation et h le diamètre du cercle circonscrit à T, on a les résultats suivants, avec les notations du chapitre I (§ III.C).

Théorème 1.

$$|f-\pi f|_{0,p,T} \le \frac{6p^2-5p}{6(3p-2)(p-1)} \quad h^3 \; |f|_{3,p,T}$$

Théorème 2.

$$|f-\pi f|_{1,p,T} \le 6pa \; \{\sum_{i=1}^{3} (\frac{N_i}{3p-2} + \frac{D_i}{p-1})\} \; h^2 \; |f|_{3,p,T}$$

avec :

$$N_i = \text{Max}\;(1 \;;\; \frac{|\alpha_{i+1}-\omega_i|}{\omega_{i+1}} \;;\; \frac{|1-\alpha_{i+2}-\omega_i|}{\omega_{i+2}})$$

$$D_i = \text{Max}(\frac{|(1-\alpha_{i+2})\omega_{i+1} - \omega_i\;\alpha_{i+2}|}{\omega_{i+2}},\; 1)$$

Théorème 3.

$$|f-\pi f|_{2,p,T} \le 108\; p\; M\; a^2 \quad \frac{4p-3}{(3p-2)(p-1)} \quad h\; |f|_{3,p,T}$$

Avec :

$$M = \max_{1\le i\le 3} \; (\frac{\omega_i}{\omega_{i+1}^2})$$

Pour la démonstration du théorème 1, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 1.

Pour $r = 0,1$; *et avec les mêmes hypothèses que précédemment, on a :*

$$(\int_T (\max_{1\le i\le 3} \; ||J_r(f,\, A_i)(x)||)^p)^{1/p} \le \frac{p}{(3-r)p-2} \; h^{3-r} \; |f|_{3,p,T}$$

Avec :

$$J_r(f,A_i)(x) = \int_0^1 (1-t)^{2-r} \; D^3f(x+t(A_i-x)).(A_i-x)^{3-r}dt$$

Pour la démonstration de ce lemme cf. [1]

Lemme 2.

ϕ_i, X_i, ψ_i *étant les fonctions de base du procédé d'interpolation, on a les résultats suivants :*

$$\begin{cases} \phi_i \geq 0 \; ; \; X_i \geq 0 \quad \psi_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{3} \phi_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 1 \\ \sum_{i=1}^{3} (X_i+\psi_i)(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \end{cases}$$

Démonstration.

La démonstration est évidente ; en effet il suffit d'écrire localement chaque fonction de base dans la base de Bernstein (voir ch. I) ; les B-coefficients de la somme sont alors les sommes des B-coefficients des fonctions de base du procédé.

Lemme 3.

$$|(f-\pi f)(x)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} |J_o(f, A_i)(x)| \; \phi_i(x)$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} |J_1(f,A_i)(x).\overrightarrow{A_iA_{i+1}}| \; X_i(x)$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} |J_1(f,A_i)(x).\overrightarrow{A_iA_{i+2}}| \; \psi_i(x)$$

Pour la démonstration de ce lemme cf. [4].

Démonstration du théorème 1.

En utilisant le lemme précédent et en majorant les normes par le Max, on a :

$$|(f-\pi f)(x)| \leq \frac{1}{2} \underset{1\leq i\leq 3}{\mathrm{Max}} |J_0(f,A_i)(x)| \sum_{i=1}^{3} \phi_i(x)$$

$$+ h \underset{1\leq i\leq 3}{\mathrm{Max}} ||J_1(f, A_i)(x)|| \sum_{i=1}^{3} X_i(x)$$

$$+ h \underset{1\leq i\leq 3}{\mathrm{Max}} ||J_1(f, A_i)(x)|| \sum_{i=1}^{3} \psi_I(x)$$

(car $||A_iA_{i+j}|| \leq h$ pour $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 2$).

Et en utilisant le lemme 2, on a :

$$|(f-\pi f)(x)| \leq \frac{1}{2} \underset{1\leq i\leq 3}{\mathrm{Max}} |J_0(f, A_i)(x)| + \frac{h}{3} \underset{1\leq i\leq 3}{\mathrm{Max}} ||J_1(f,A_i)(x)||$$

En effet :

$$\underset{x\in T}{\mathrm{Max}} (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3)(x) = 1/3.$$

En passant à la norme L_p et en appliquant le lemme 1, on a :

$$|f-\pi f|_{o,p,T} \leq 1/2 \left[\int_T \left(\underset{1\leq i\leq 3}{\mathrm{Max}} ||J_0(f, A_i)(x)| \right)^p\right]^{1/p}$$

$$+ \frac{h}{3} \left[\int_T \left(\underset{1\leq i\leq 3}{\mathrm{Max}} ||J_1(f, A_i)(x)| \right)^p\right]^{1/p}$$

$$\leq \frac{p}{2(3p-2)} h^3 |f|_{3,p,T} + \frac{h}{3} \frac{p}{2p-2} h^2 |f|_{3,p,T}$$

d'où

$$|f-\pi f|_{0,p,T} \leq \frac{p(6p-5)}{6(p-1)(3p-2)} h^3 |f|_{3,p,T}.$$

C.Q.F.D.

Pour la démonstration du théorème 2, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 4.

Soit $f_i = \phi_i$ (X_i *ou* ψ_i ; $1 \le i \le 3$).

Posons

$$P_i(x) = f_i(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x)) ;$$

On a pour $m = 0, 1, 2$

$$||D^m P_i(x)|| \le (\max_{1 \le j \le 3} ||D\lambda_j||)^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x))|$$

$$\le (\frac{1}{\rho})^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |\partial^\alpha f_i(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x))|$$

Pour la démonstration de ce lemme cf. [1].

Le tableau suivants représentent les dérivés partielles premières et secondes des fonctions de base. Il suffit de donner les résultats pour ϕ_1 et X_1. ϕ_i ($i = 2,3$) et X_i ; ψ_i (pour $1 \le i \le 3$) ont des formules respectivement analogues à celles de ϕ_1 et X_1.

	$\frac{\partial \phi_1}{\partial \lambda_1}$	$\frac{\partial \phi_1}{\partial \lambda_2}$	$\frac{\partial \phi_1}{\partial \lambda_3}$
t_1	$2(\lambda_{11}+\lambda_{12}+\lambda_{13})$	$2\lambda_{11}+2\,\frac{\alpha_2-\omega_1}{\omega_2}\,\lambda_{13}$	$2\lambda_{11}$
t_2	$2(\lambda_{21}+\lambda_{22}+\lambda_{23})$	$2\lambda_{21}$	$2\lambda_{21}+2\,\frac{1-\alpha_3-\omega_1}{\omega_3}\,\lambda_{22}$
t_3	$2(\lambda_{33}+\lambda_{32})$	0	$2\,\frac{1-\alpha_3-\omega_1}{\omega_3}\,\lambda_{33}$
t_4	$2\lambda_{43}$	0	0
t_5	$2\lambda_{52}$	0	0
t_6	$2(\lambda_{62}+\lambda_{63})$	$\frac{2(\alpha_1-\omega_1)}{\omega_2}\,\lambda_{62}$	0

Tableau 1. Représentant les dérivées partielles de ϕ_1 par rapport aux cordonnées barycentriques λ_1, λ_2, λ_3.

	$\frac{\partial X_1}{\partial \lambda_1}$	$\frac{\partial X_1}{\partial \lambda_2}$	$\frac{\partial X_1}{\partial \lambda_3}$
t_1	$\omega_2 \lambda_{12}$	$\lambda_{11} + \alpha_2 \lambda_{13}$	0
t_2	$\omega_2 \lambda_{23} + \alpha_3 \lambda_{22}$	λ_{21}	$\frac{(1-\alpha_3)\omega_2 - \omega_1 \alpha_3}{\omega_3} \lambda_{22}$
t_3	$\alpha_3 \lambda_{33} + \omega_3 \lambda_{32}$	0	$\frac{(1-\alpha_3)\omega_2 - \omega_1 \alpha_3}{3} \lambda_{33}$
t_4	$\omega_2 \lambda_{43}$	0	0
t_5	$\omega_2 \lambda_{52}$	0	0
t_6	$\omega_2 \lambda_{63}$	$\alpha_2 \lambda_{62}$	0

Tableau 2. Représentant les dérivées partielles de X_1 par rapport aux coordonnées barycentriques λ_1, λ_2, λ_2 de T.

	$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \lambda_1^2}$	$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \lambda_2^2}$	$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \lambda_3^2}$
t_1	2	$2\ [\frac{\omega_3\alpha_2}{\omega_2(1-\alpha_2)} - \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{\alpha_2-\omega_1}{\omega_2}\ \ \frac{\omega_3}{\omega_2(1-\alpha_2)}]$	$-\ \frac{2\alpha_2}{1-\alpha_2}$
t_2	2	$-\ 2\ \frac{(1-\alpha_3)}{\alpha_3}$	$2\ [\frac{\omega_2(1-\alpha_3)}{\omega_3\alpha_3} - \frac{\omega_1}{\omega_3} - \frac{1-\alpha_3-\omega_1}{\omega_3}\ \ \frac{\omega_2}{\alpha_3\omega_3}\ ]$
t_3	$\frac{2}{1-\alpha_3}$	0	$-\ 2\ \frac{1\ -\ \alpha_3\ -\ \omega_1}{\omega_3} \times \frac{\omega_1}{\omega_3(1\ -\ \alpha_3)}$
t_4	$\frac{2}{\omega_1}$	0	0
t_5	$\frac{2}{\omega_1}$	0	0
t_6	$\frac{2}{\alpha_2}$	$-2\ \frac{(\alpha_2-\omega_1)}{\omega_2} \times \frac{\omega_1}{\alpha_2\omega_2}$	0

<u>*Tableau 3*</u>*. Représentant les dérivées partielles* $\frac{\partial^2 \phi i}{\partial \lambda_i^2}$; $1 \le i \le 3$.

	$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}$	$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_3}$	$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}$
t_1	2	$2(\frac{\omega_3 \alpha_2}{\omega_2(1-\alpha_2)} - \frac{\omega_1}{\omega_2})$	2
t_2	2	$2[\frac{\omega_2(1-\alpha_3)}{\omega_3 \alpha_3} - \frac{\omega_1}{\omega_3}]$	2
t_3	0	0	$\frac{2(-\omega_1+1-\alpha_3)}{\omega_3(1-\alpha_3)}$
t_4	$\frac{2}{\omega_1}$	0	0
t_5	0	0	0
t_6	$2[\frac{-\omega_1+\alpha_2}{\omega_2 \alpha_2}]$	0	0

<u>*Tableau 4.*</u> *Représentant les dérivées partielles* $\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}$, $i \neq j$; $1 \leq i, j \leq 3$

	$\frac{\partial^2 X_1}{\partial \lambda_1^2}$	$\frac{\partial^2 X_1}{\partial \lambda_2^2}$	$\frac{\partial^2 X_1}{\partial \lambda_3^2}$
t_1	0	$-\frac{\omega_1}{\omega_2}$	0
t_2	0	$-\frac{1-\alpha_3}{\alpha_3}$	$-\frac{\omega_2}{\alpha_3\omega_3}\,\frac{(1-\alpha_3)\omega_2-\omega_1\alpha_3}{\omega_3}$
t_3	$\frac{\alpha_3}{1-\alpha_3}$	0	$-\frac{\omega_1}{\omega_3(1-\alpha_3)}\,\frac{(1-\alpha_3)\omega_2-\omega_1\omega_3}{\omega_3}$
t_4	$\frac{\omega_2}{\omega_1}$	0	0
t_5	$\frac{2}{1}$	0	0
t_6	0	$-\frac{\omega_1}{\omega_2}$	0

Tableau 5. Représentant les dérivées partielles $\frac{\partial^2 X_1}{\partial \lambda_i^2}$; $1 \le i \le 3$.

	$\frac{\partial^2 X_1}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}$	$\frac{\partial^2 X_1}{\partial\lambda_2\partial\lambda_3}$	$\frac{\partial^2 X_1}{\partial\lambda_1\partial\lambda_3}$
t_1	1	0	0
t_2	0	$\frac{1}{\alpha_3} \times \frac{(1-\alpha_3)\omega_2-\omega_1\alpha_3}{\omega_3}$	0
t_3	0	0	$\frac{1}{1-\alpha_3} \times \frac{(1-\alpha_3)\ \omega_2-\omega_1\alpha_3}{\omega_3}$
t_4	0	0	0
t_5	0	0	0
t_6	1	0	0

Tableau 6. Représentant les dérivées partielles $\frac{\partial^2 X_1}{\partial\lambda_i\partial\lambda_j}$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 3$.

Lemme 5.

ϕ_i, X_i et ψ_i ; $1 \leq i \leq 3$; étant toujours les fonctions de base, on a les majorations suivantes :

$$|\phi_i|_{1,\infty,T} \leq \frac{6}{\rho} \text{ Max } \left(1 \; ; \; \frac{|\alpha_{i+1}-\omega_i|}{\omega_{i+1}} \; ; \; \frac{|1-\alpha_{i+2}-\omega_i|}{\omega_{i+2}}\right)$$

$$|X_i|_{1,\infty,T} \leq \frac{3}{\rho} \text{ Max } \left(1 \; ; \; \frac{|(1-\alpha_{i+2})\omega_{i+1}-\omega_i\alpha_{i+2}|}{\omega_{i+2}}\right)$$

ρ étant toujours le diamètre du cercle inscrit dans T (pour $|\psi_i|_{1,\infty,T}$, on trouve une majoration équivalente à celle de $|X_i|_{1,\infty,T}$).

Démonstration.

D'après le lemme 4, et pour $1 \leq i \leq 3$, on a :

$$|\phi_i|_{1,\infty,T} \leq \frac{1}{\rho} \left(\left|\frac{\partial \phi_i}{\partial \lambda_1}\right| + \left|\frac{\partial \phi_i}{\partial \lambda_2}\right| + \left|\frac{\partial \phi_i}{\partial \lambda_3}\right|\right)$$

$$\overset{(1)}{\leq} \frac{3}{\rho} \max_{1\leq j\leq 3} \left|\frac{\partial \phi_i}{\partial \lambda_j}\right|$$

Or en considérant les expressions des $\frac{\partial \phi_i}{\partial \lambda_j}$ $(1 \leq i, j \leq 3)$; on constate que :

$$\sup_{x\in T} \max_{1\leq j\leq 3} \left|\frac{\partial \lambda_i(\lambda(x))}{\partial \lambda_j}\right| \overset{(2)}{\leq} 2 \text{ Max } \left(1 \; ; \; \frac{|\alpha_{i+1}-\omega_i|}{\omega_{i+1}} \; ; \; \frac{|1-\alpha_{i+2}-\omega_i|}{\omega_{i+2}}\right)$$

Les inégalités (1) et (2), donnent :

$$|\phi_i|_{1,\infty,T} \leq \frac{6}{\rho} \text{ Max } \left(1 \; ; \; \frac{|\alpha_{i+1}-\omega_i|}{\omega_{i+1}} \; ; \; \frac{|1-\alpha_{i+2}-\omega_i|}{\omega_{i+2}}\right)$$

Même raisonnement pour $|X_i|_{1,\infty,T}$.

Lemme 6.

Avec toutes les hypothèses posées au début on a :

pour m = 1,2 :

$$|f-\pi f|_{m,p,T} \leq \{\frac{1}{2}\,\frac{p}{3p-2}\sum_{i=1}^{3} |\phi_i|_{m,\infty,T} + \frac{p}{2(p-1)}\sum_{i=1}^{3} (|X_i|_{m,\infty,T} + |\psi_i|_{m,\infty,T})\}$$

$$\times\, h^3\, |f|_{3,p,T}.$$

Pour la démonstration de ce lemme cf. [4].

Démonstration du théorème 2.

En appliquant le lemme 6, pour m = 1, on a :

$$|f-\pi f|_{1,p,T} \leq \frac{1}{2}\,\frac{p}{3p-2}\,(\sum_{i=1}^{3} |\phi_i|_{1,\infty,T})\, h^3\, |f|_{3,p,T}$$

$$+ \frac{p}{2(p-1)}\,(\sum_{i=1}^{3} (|\psi_i|_{1,\infty,T} + |X_i|_{1,\infty,T}))h^3\, |f|_{3,p,T}$$

En utilisant le lemme 5, on a :

$$|\dot{\pi} f- f|_{1,\ ,T} \quad \frac{6p}{3p-2}\,(\frac{h}{2\rho})\,[N_1+N_2+N_3]\, h^2\, |f|_{3,p,T}$$

$$+ \frac{6p}{p-1}\,(\frac{h}{2\rho})\,[D_1+D_2+D_3]\, h^2\, |f|_{3,p,T}$$

Avec

$$\left.\begin{array}{l} N_i = \text{Max}\left(1 \; ; \; \dfrac{|\alpha_{i+1}-\omega_i|}{\omega_{i+1}} \; ; \; \dfrac{|1-\alpha_{i+2}-\omega_i|}{\omega_{i+2}}\right) \\ \\ D_i = \text{Max}\left(1 \; ; \; \dfrac{|(1-\alpha_{i+2})\,\omega_{i+2} - \omega_i\alpha_{i+2}|}{\omega_{i+2}}\right) \end{array}\right\} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 3$$

On a donc

$$|f-\pi f|_{1,p,T} \leq 6pa \left[\sum_{i=1}^{3} \frac{N_i}{3p-2} + \frac{D_i}{P-1}\right] h^2 \, |f|_{3,p,T}$$

C.Q.F.D.

Pour la démonstration du théorème 3, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 7.

ϕ_i, X_i et ψ_i étant toujours les fonctions de base et λ_i, les coordonnées barycentriques $(1 \leq i \leq 3)$ *on a :*

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial\phi_i}{\partial\lambda_k\partial\lambda_\ell}\right| \leq 2M \\ \\ \left|\dfrac{\partial f_i}{\partial\lambda_k\partial\lambda_\ell}\right| \leq M_i \end{array}\right\} \quad 1 \leq i,\, k,\ell \leq 3 \qquad f_i = X_i \text{ ou } \psi_i.$$

et

Avec

$$M_i = \text{Max}\left(\frac{1}{\omega_j^2(1-\alpha_j)} \; ; \; \frac{1}{\omega_j^2\alpha_j}\right).$$

Démonstration.

Il suffit de considérer les expressions donnés dans les tableaux précédents et d'utiliser le fait que α_i et ω_i sont inférieurs ou égaux à 1.

Lemme 8.

Pour $1 \le i \le 3$, *on a* :

$$|\phi_i|_{2,\infty,T} \le \frac{18}{\rho^2} M$$

$$|f_i|_{2,\infty,T} \quad \frac{9}{\rho^2} M \quad (\textit{avec } f_i = \psi_i \textit{ ou } X_i)$$

Démonstration.

En appliquant le lemme 4 on a :

$$|\phi_i|_{2,\infty,T} \le \frac{1}{\rho^2} \sum_{|\alpha|=2} \frac{2!}{\alpha!} |\partial^\alpha \phi_i(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \lambda_3(x))|$$

$$\le \frac{1}{\rho^2} \{ |\frac{\partial^2 \phi i}{\partial \lambda_1^2}| + |\frac{\partial^2 \phi i}{\partial \lambda_2^2}| + |\frac{\partial^2 \phi i}{\partial \lambda_3^2}|$$

$$+ 2 |\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}| + |\frac{\partial^2 \phi i}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_3}| + |\frac{\partial^2 \phi i}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_3}|)$$

$$\le \frac{18}{\rho^2} M \text{ (d'après le lemme 8).}$$

(On fait le même raisonnement pour $f = \psi_i$ ou X_i)

Démonstration du théorème 3.

D'après le lemme 6, pour $m = 2$; on a :

$$|f-\pi f|_{2,p,T} \le \frac{1}{2} \frac{p}{3p-2} \sum_{i=1}^{3} |\phi_i|_{2,\infty,T} h^3 |f|_{3,p,T}$$

$$+ \frac{p}{2(p-1)} \left(\sum_{i=1}^{3} (|X_i|_{2,\infty,T} + |\psi_i|_{2,\infty,T}) \right) h^3 |f|_{3,p,T}$$

$$\le \left\{ \frac{108\ Mp}{3p-2} + \frac{108\ Mp}{p-1} \right\} \frac{h^2}{4\rho^2} \cdot h\ |f|_{3,p,T}$$

(d'après le lemme 8).

Avec

$$M = \operatorname*{Max}_{i} \left(\frac{\omega_i}{\omega_{i+1}^2}\right)$$

d'où après calcul, on a :

$$|f-\pi f|_{2,p,T} \leq 108 \, Mp \, a^2 \left[\frac{4p-3}{(3p-2)(p-1)} \right] h \, |f|_{3,p,T}$$

C.Q.F.D.

III - GÉNÉRALISATION : ETUDE DE L'ERREUR D'INTERPOLATION SUR LE DOMAINE D TRIANGULE.

On démontre que les majorations précédentes sont valables dans D, triangulé par $\mathcal{T}$ (qui est régulière). On se base dans cette étude sur les résultats donnés par P. Sablonnière dans [9].

1°) - Notions préliminaires.

Toujours dans $\mathbb{R}^2$, on considère le triangle $\hat{T}$, appelé triangle de référence, de sommets

$\hat{A}_1 = (0, 0)$; $\hat{A}_2 = (1,0)$; $\hat{A}_3 = (0,1)$ (voir figure 1).

et $\hat{\Omega}_T$ le centre du cercle inscrit dans $\hat{T}$.

Soit $T \in \mathcal{T}$, $T = (A_1A_2A_3)$.

Soit F_T la transformation affine telle que :

$$F_T(\hat{A}_i) = A_i \text{ pour } 1 \leq i \leq 3.$$

P. Sablonnière a démontré dans [9], que les points $\hat{\Omega}_T = F_T^{-1}(\Omega_T)$ varient dans un compact de $\hat{T}$, quand T varie dans $\mathcal{T}$.

On appelle ce compact K_α (relativement à α choisi au début du chapitre).

En se référant à la figure 1, on remarque que $\hat{\Omega}_T$ a comme coordonnées cartésiennes (ω_2, ω_3).

En effet :

$$\hat{\Omega}_T = \omega_1\hat{A}_1 + \omega_2\hat{A}_2 + \omega_3\hat{A}_3 = (\omega_2,\omega_2)$$

d'où

$$k_1(\alpha) \leq \omega_i \leq k_2(\alpha) \qquad (1 \leq i \leq 3)$$

et

$$x^* \leq \alpha_i \leq 1 - x^* \qquad (\text{pour } 1 \leq i \leq 3).$$

Avec

$$k_1(\alpha) = (2\alpha+1-2\ \sqrt{\alpha(\alpha-1)})/(8\alpha+1)$$

$$K_2(\alpha) = (2\alpha + 1 + 2\sqrt{\alpha(\alpha-1})/(8\alpha+1)$$

$$x^*(\alpha) = (1 - \sqrt{1-\beta^2}) / 2$$

$$\beta = (\sqrt{8\alpha+1}+1)/4\alpha.$$

(pour ces résultats voir [9]).

<u>Remarque 2</u>.

Les théorèmes 1', 2', 3' sont des généralisations respectives des théorèmes 1, 2, 3.

Théorème 1'.

Avec les mêmes hypothèses que dans le paragraphe précédent, et aussi en posant :

$$H = \underset{T \in \mathcal{T}}{\mathrm{Max}}\; h_T \;;$$

On a :

$$|f-\pi f|_{0,p,D} \le \frac{6p^2-5p}{6(3p-2)(p-1)}\; H^3\; |f|_{3,p,D}$$

Théorème 2'.

$$|f-\pi f|_{1,p,D} \le 18\alpha p\, \frac{1}{k_1(\alpha)} \left(\frac{A(\alpha)}{3p-2} + \frac{B(\alpha)}{p-1}\right) H^2\; |f|_{3,p,D}$$

Avec

$$A(\alpha) = |1 - k_1(\alpha) - x^*(\alpha)|$$

$$B(\alpha) = \mathrm{Max}\, \left(|(1-x^*(\alpha))\, k_2(\alpha) - k_1(\alpha).x^*(\alpha)| \;;\; (k_2(\alpha)-k_1(\alpha))\, x^*(\alpha)\right).$$

Théorème 3'.

$$|f-\pi f|_{2,p,D} \le \frac{108\;\alpha^2\; k_2(\alpha)}{k_1^2(\alpha)} \left[\frac{4p-3}{(3p-2)(p-1)}\right] H\; |f|_{3,p,D}.$$

Démonstration du théorème 1'.

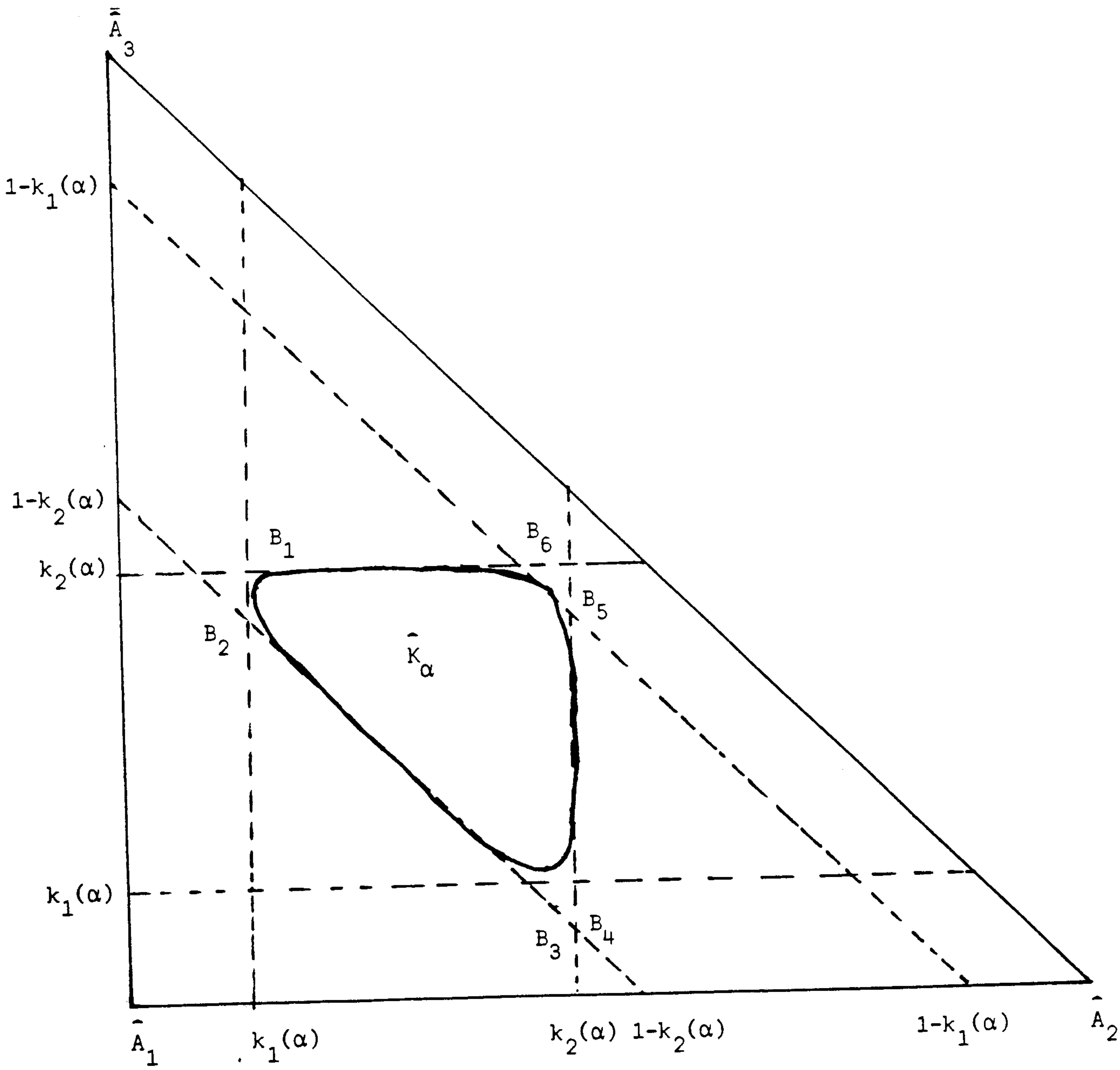
Il suffit de reprendre le résultat du théorème 1 et d'utiliser le fait que $h_T \le H$, $\forall T \in \mathcal{T}$.

Pour les démonstration du théorème 2', on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 10.

α_i, ω_i (*pour* $1 \le i \le 3$) ; $k_1(\alpha)$; $k_2(\alpha)$; $x^*(\alpha)$; *étant donnés précédemment, on a le résultat :*

$$\left.\begin{array}{l} |\alpha_{i+1} - \omega_i| \le A(\alpha) \\ \\ |\omega_i(1-\alpha_{i+1}) - \omega_{i+2}\,\alpha_{i+1}| \le B(\alpha) \end{array}\right\} \text{pour } 1 \le i \le 3.$$



Avec

$$\begin{cases} A(\alpha) = |1-k_1(\alpha) - x^*(\alpha)| \\ B(\alpha) = \text{Max }(|(1-x^*(\alpha))\, k_2(\alpha) - k_1(\alpha)\, x^*(\alpha) \;;\; (k_2(\alpha) - k_1(\alpha))\, x^*(\alpha)) \end{cases}$$

Démonstration.

La démonstration de ce lemme est évidente, il suffit d'utiliser le fait que :

$$k_1(\alpha) \leq \omega_i \leq k_2(\alpha) \qquad (\text{pour } 1 \leq i \leq 3)$$

et

$$x^*(\alpha) \leq \alpha_i \leq 1-x^*(\alpha) \qquad (1 \leq i \leq 3)$$

Démonstration du théorème 2'.

En reprenant le théorème 2, on a : $\forall T \in \mathcal{T}$

$$|f-\pi f|_{1,p,T} \leq 6pa \left\{ \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{N_i}{3p-2} + \frac{D_i}{p-1}\right)\right\} h_T^2\, |f|_{3,p,T}$$

Avec :

$$\left.\begin{array}{l} N_i = \text{Max }\left(1 \;;\; \dfrac{|\alpha_{i+1}-\omega_i|}{\omega_{i+1}} \;;\; \dfrac{|1-\alpha_{i+2}-\omega_i|}{\omega_{i+2}}\right) \\ \\ D_i = \text{Max }\left(1 \;;\; \dfrac{|(1-\alpha_{i+2})\omega_{i+1} - \omega_i\alpha_{i+2}|}{\omega_{i+2}}\right) \end{array}\right\} \quad 1 \leq i \leq 3$$

Or d'après le lemme 9

$$|\alpha_{i+1} - \omega_i| \leq A(\alpha)$$

et

$$|1-\alpha_{i+2} - \omega_i| \leq A(\alpha)$$

de même $\omega_i \geq k_1(\alpha)$ et $|(1-\alpha_{i+2})\, \omega_{i+1} - \omega_i \alpha_{i+2}| \leq B(\alpha)$.

On a donc :

$$\begin{cases} N_i \leq \dfrac{A(\alpha)}{k_1(\alpha)} \\[2ex] D_i \leq \dfrac{B(\alpha)}{k_1(\alpha)} \end{cases}$$

Par conséquent on a :

$$|f-\pi f|_{1,p,T} \leq 6pa \cdot \frac{3}{k_1(\alpha)} \left(\frac{A(\alpha)}{3p-2} + \frac{B(\alpha)}{P-1}\right)\} \; h_T^2 |f|_{3,p,T}$$

Or ceci est vrai $\forall T \in \mathcal{T}$, et $a \leq \alpha$; donc

$$|f-\pi f|_{1,p,D} \leq 18 \; p\alpha\{ \frac{4p-3}{(p-1)(3p-2)} + \frac{1}{1-2k_2(\alpha)} \left(\frac{A(\alpha)}{3P-2} + \frac{B(\alpha)}{P-1}\right)\} \; H^2 \; |f|_{3,p,D}$$

C.Q.F.D.

Démonstration du théorème 3'.

En reprenant le théorème 3, on a $\forall T \in \mathcal{T}$

$$|f-\pi f|_{2,p,T} \leq 108 \; PM \; a^2 \; \frac{4p-3}{(3p-2)(p-1)} \; h_T \; |f|_{3,p,T}$$

avec

$$M = \mathrm{Max} \left(\frac{\omega_i}{\omega_{i+1}^2} \; , \; \frac{\omega_i}{\omega_{i+1}^2}\right)$$

On vérifie que :

$$M \leq \frac{k_2(\alpha)}{k_1^2(\alpha)}$$

De même on a :

$$a = \frac{h}{2\rho} \leq \alpha$$

En remplaçant, on a donc

$$|f-\pi f|_{2,p,D} \leq \frac{108P\alpha^2}{k_1^2(\alpha)x^*(\alpha)} \times \frac{4P-3}{(3P-2)(P-1)} H\ |f|_{3,p,D}$$

C.Q.F.D.

IV - Exemple numériques.

On choisit par exemple : $\alpha = 1$.

Théorème 1'.

Pour $p = 2$, *on a :*

$$|f-\pi f|_{0,2,D} \leq \frac{7}{12}\ H^3 |f|_{3,2,D}$$

Pour $p = \infty$; *on a :*

$$|f-\pi f|_{0,\infty,D} \leq 1/3\ H^3 |f|_{3,\infty,D}$$

Théorème 2'.

Pour P = 2, *on a* :

$$|f-\pi f|_{1,2,D} \leq 9/2\ H^2\ |f|_{3,2,D}$$

Pour P = ∞, *on a* :

$$|f-\pi f|_{1,\infty,D} \leq 3\ H^2 |f|_{3,\infty,D}.$$

Théorème 3'.

Pour P = 2, *on a*

$$|f-\pi f|_{2,2,D} \leq 810\ \ H|f|_{3,2,D}$$

pour P = ∞, *on a* :

$$|f-\pi f|_{2,\infty,D} \leq 432\ H|f|_{3,\infty,D}$$

CHAPITRE III

INTERPOLATION DE LAGRANGE

SUR UN DOMAINE CARRE TRIANGULE.

I - Introduction et Notations.

Soit Ω un domaine carré de $\mathbb{R}^2$, et T une triangulation régulière de Ω (voir Fig. 1 et 2).

Soient :

$C^{-1}(\Omega)$: {fonctions bornées sur Ω}

A_i $(1 \leq i \leq N_o)$: points choisis convenablement sur Ω

$P_2^1(\Omega, C)$: {splines quadratiques C^1 sur Ω, muni de la triangulation T}

N_o : dimension de $P_2^1(\Omega, C)$.

Dans ce chapitre on résoud le problème suivant :

Etant donné $f \in C^{-1}(\Omega)$, on montre qu'il existe S unique, appartenant à $P_2^1(\Omega, T)$ tel que

$$S(A_i) = f(A_i) \quad 1 \leq i \leq N_o.$$

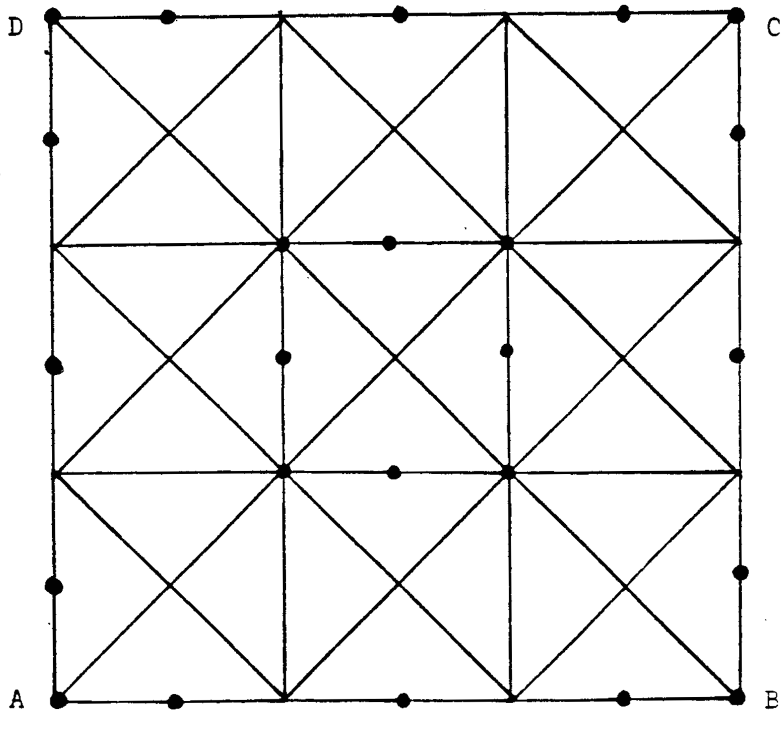
On résoud le problème dans deux cas de figure $\Omega = Q_N^*$ et $\Omega = Q_N$, qui sont deux domaines carrés, mais qui diffèrent par le choix des points d'interpolation.

II - Choix des points d'interpolation.

1 - Sur Q_n^* :

Figure 1.

Choix des points d'interpolation sur Q_3^*.



$\forall N \quad Q_N^* \subset Q_{N+2}^*$.

Les côtés étant subdivisés en N segments égaux, on choisit comme points d'interpolation, les 4 sommets du carré et les milieux des segments déterminés par la subdivision.

2 - Sur Q_N :

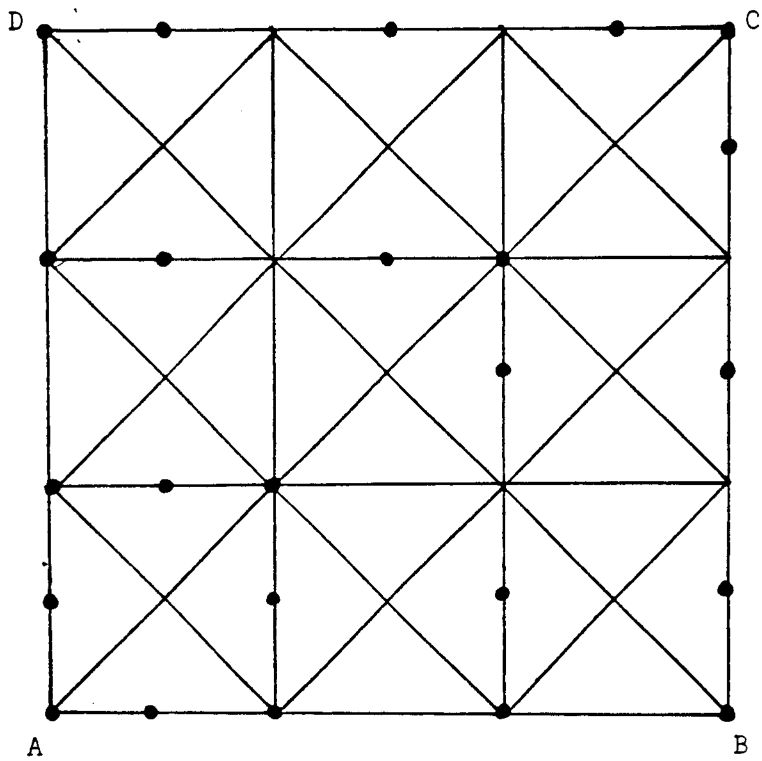


Fig. 2 : Choix des points d'interpolation sur Q_3.

$\forall N, \ Q_N \subset Q_{N+1}$.

De la même façon que précédemment les côtés du carré sont subdivisés en N segments.

De plus sur les côtés BC et CD le choix des points d'interpolation est le même.

Par contre sur les côtés AD et AB, le passage de Q_N à Q_{N+1} se fait en prenant B et D comme nouveaux points d'interpolation.

Remarque 1.

On montrera par la suite que le nombre de points choisis correspond bien à la dimension de $P_2^1(\Omega,C)$

III - CALCUL DE LA SPLINE D'INTERPOLATION.

Théorème 1.

Pour $\Omega = Q_N^*$ *(respectivement* Q_N*),* f *fonction donnée appartenant à* $C^{-1}(\Omega)$*, il existe une spline et une seule appartenant à* $P_2^1(\Omega,T)$ *interpolant* f *aux points* A_i, $1 \le i \le N$.

A) - NOTIONS PRELIMINAIRES.

On sait d'après le chapitre I, que la spline S peut s'écrire sur T, dans la base de Bernstein de $P_2(T)$, de la manière suivante :

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad : \quad \sum_{0\le i+j\le 2} a_{ij}\ \beta_{ij}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

avec

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$: coordonnées barycentriques relatives à T

$\{\beta_{ij}\}_{o\le i+j\le 2}$: base de Bernstein

$\{a_{ij}\}_{o\le i+j\le 2}$: B-coefficients de S.

Ainsi pour calculer la spline, il suffit de calculer ses B-coefficients. Pour ce calcul, on utilise la proposition 1, concernant le raccordement C^1, donnée dans le chapitre I, avec K = 1, comme le montre la figure suivante.

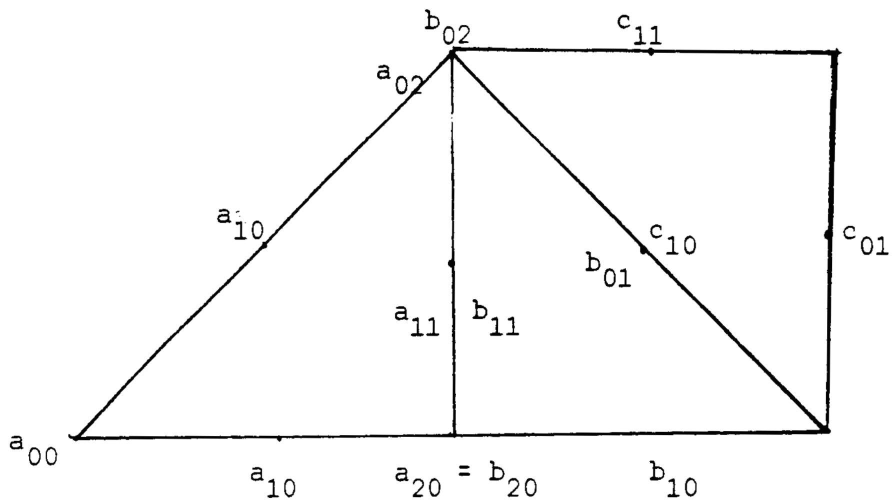


Fig. 3 : Projection du B-réseau dans le cas où les triangles sont rectangles isocèles.

On a :

$$\begin{cases} a_{20} = b_{20} = (a_{10} + b_{10})/2 \\ b_{02} + b_{01} = b_{11} + c_{11} \end{cases}$$

B) - INTERPOLATION DE LAGRANGE SUR Q_N^*.

Le raisonnement est le suivant. Pour $N > 2$, $N \in \mathbb{N}$, on suppose qu'on connait les B-coefficients de S sur Q_{N-2}, et on donnera un algorithme de passage de Q_{N-2}^* à Q_N^*.

Algorithme de passage de Q_{N-2}^* à Q_N^*, $N \geq 2$.

Le calcul des B-coefficients de S correspondant aux bords de Q_N, conduit à un problème d'interpolation à une dimension (sur un intervalle de $\mathbb{R}$).

Ce calcul se fait à l'aide de la résolution du système tridiagonal (S_1) et (S_2) donnés au chapitre I paragraphe I.

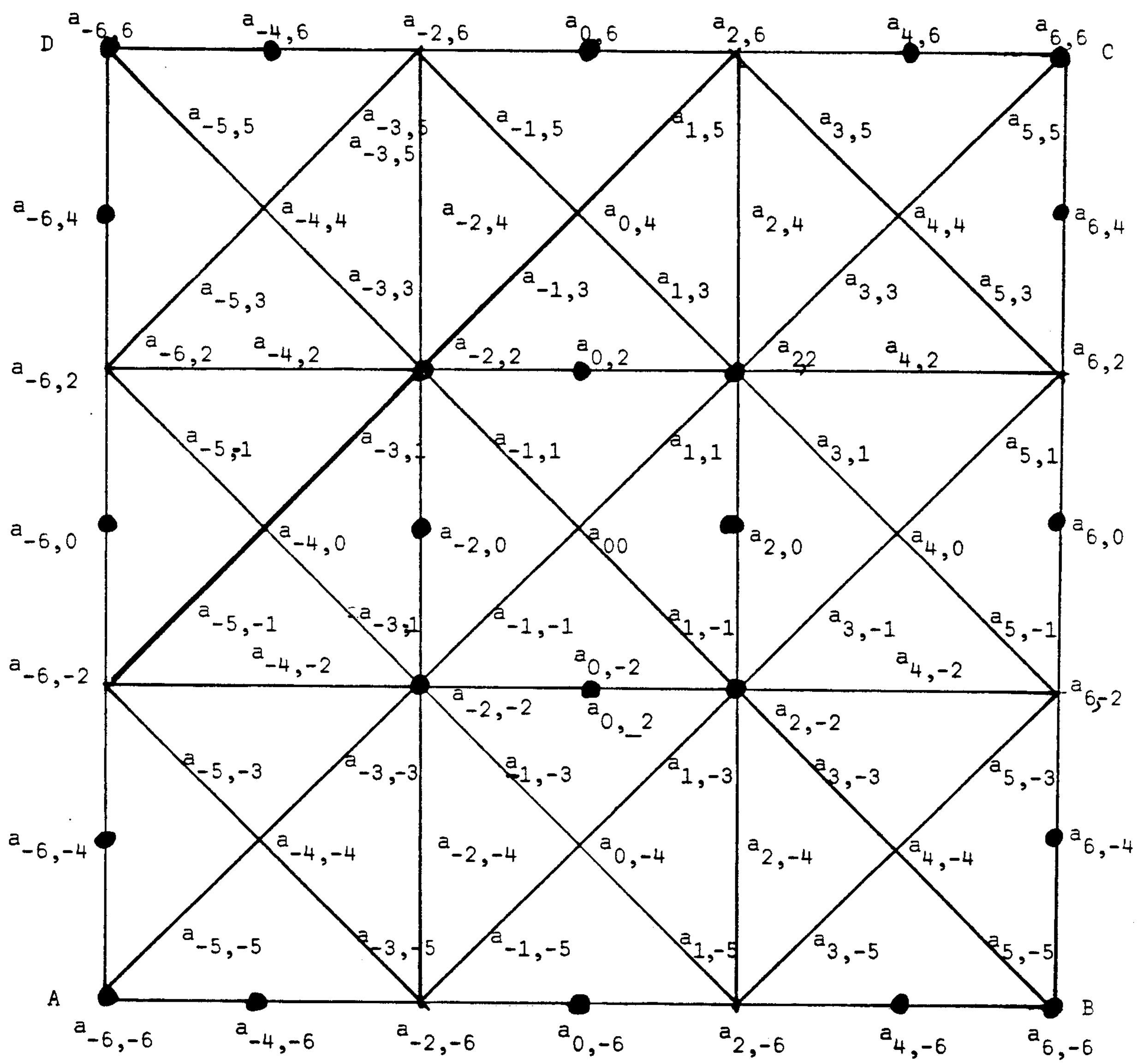


Figure 4. Représentation des B-coefficients de S *dans* Q_5^*.

Les petits carrés sont appelés Q_{ij}, relativement à la numérotation du B-coefficient central.
Pour $P \in [-(N-1)/2, (N-3)/2]$, $p \in \mathbb{N}$ on a

a) Sur [AB]

$$i = 4p \qquad j = -2(N-1)$$

$$a_{i+2,j} = 2\, a_{i+2,j+2} - a_{i+2,j+4}$$

b) Sur [BC]

$$i = 2(N-1) \qquad j = 4p$$

$$a_{i,j+2} = 2a_{i-2,j+2} - a_{i-4,j+2}.$$

c) Sur [CD]

$$i = 4p \qquad j = 2(N-1)$$

$$a_{i+2,j} = 2a_{i+2,j-2} - a_{i+2,j-4}$$

d) Sur [DA]

$$i = -2(N-1) \qquad j = 4p$$

$$a_{i,j+2} = 2a_{i+2,j+2} - a_{i+4,j+2}$$

Et pour les B-coefficients correspondants à l'intérieur des carrés $Q^{*}_{i,j}$, on applique la proposition 1 du chapitre 1, et on les calcule à l'aide de l'algorithme suivant appelé $G_{i,j}$.

$$\begin{cases} a_{i-1,j-1} = (a_{i,j-2} + a_{i-2,j})/2 \\ a_{i+1,j-1} = (a_{i,j-2} + a_{i+2,j})/2 \\ a_{i+1,j+1} = (a_{i+2,j} + a_{i,j+2})/2 \\ a_{i-1,j+1} = (a_{i,j+2} + a_{i-2,j})/2 \\ a_{i,j} \quad\;\; = (a_{i-1,j+1} + a_{i+1,j-1})/2 \end{cases}$$

C) - INTERPOLATION DE LAGRANGE SUR Q_N.

On fait un raisonnement analogue au précédent.

On suppose que les B-coefficients sont calculés à l'ordre N, on donnera un algorithme de passage du cas N-1 au cas N (N > 1).

Algorithme de passage de Q_{N-1} à Q_N, $N > 1$.

Les B-coefficients correspondant à [BC] et [CD], sont calculés à l'aide de la résolution des systèmes (S_1) et (S_2) donnés dans le chapitre I.

Pour

$$\begin{cases} i = 4N-1 \\ j = 4p-1 \quad \text{avec} \quad 1 \leq p \leq N-1. \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} a_{i,1} = 2a_{i-2,1} - a_{i-4,1}. \\ a_{1,i} = 2a_{1,i-2} - a_{1,i-4}. \\ a_{i,j+2} = 2a_{i-2,j+2} - a_{i-4,j+2}. \\ a_{j+2,i} = 2a_{j+2,i-2} - a_{j+2,i-4}. \end{cases}$$

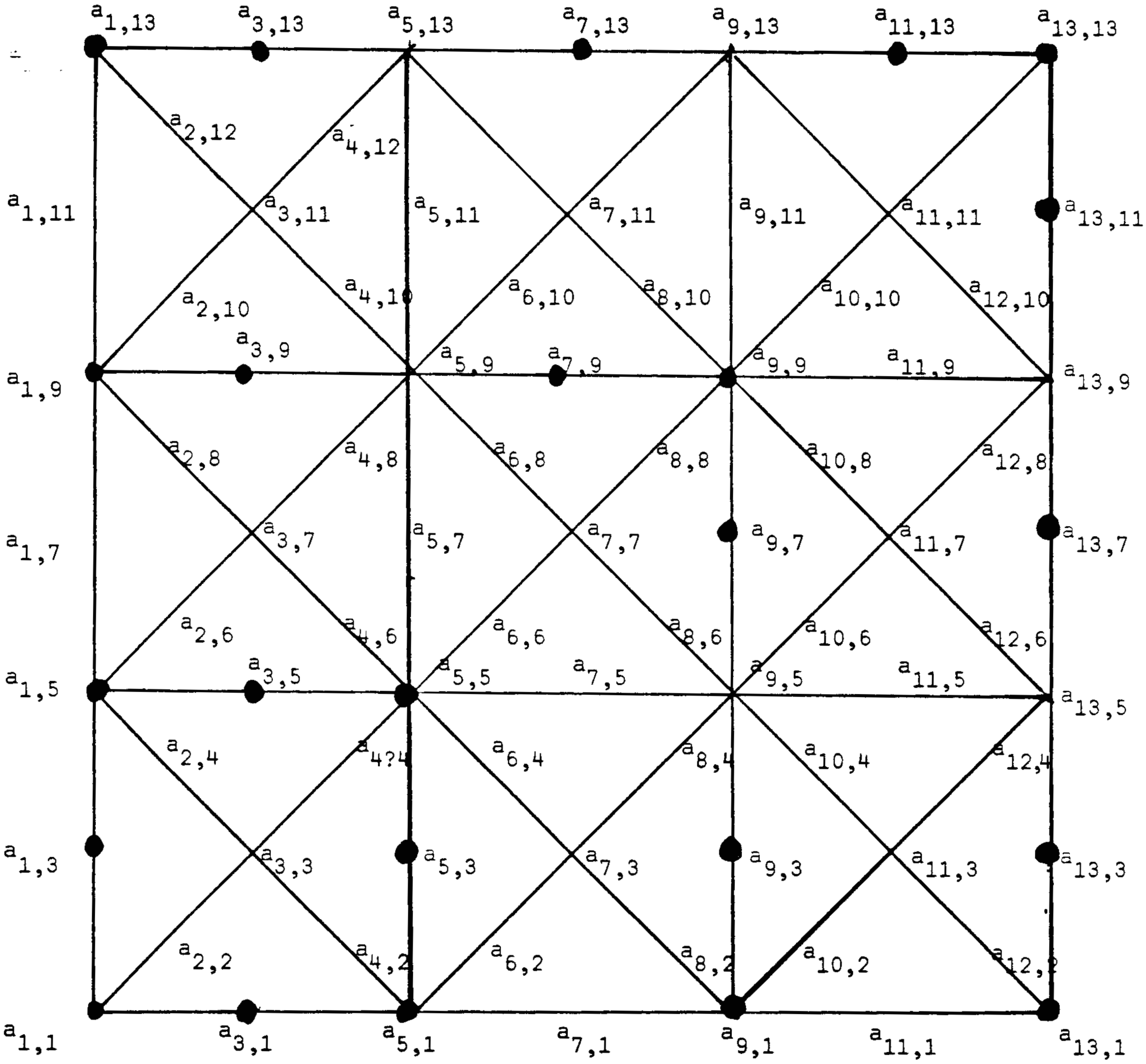


Figure 5. Représentation des B-coefficients de S sur Q_3.

Et pour les B-coefficients internes à chaque carré Q_{ij}, il suffit d'appliquer l'algorithme $G_{i,j}$.

EXEMPLES D'APPLICATION.

1°) - Passage de Q_3^* à Q_5^* : (Voir fig. 5).

Notre hypothèse est la suivante :

Les B-coefficients appartenant à Q_3^* sont connus, ceux appartenant aux bords de Q_5^*, c'est à dire :

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{-10,j+2} & \text{avec} & j = 4p & -2 \le p \le 2 \\ a_{i+2,10} & \text{avec} & i = 4p & -2 \le p \le 2 \\ a_{10,j-2} & \text{avec} & j = 4p & -2 \le p \le 2 \\ a_{i-2,-10} & \text{avec} & i = 4p & -2 \le p \le 2 \end{array}\right.$$

sont calculés par la résolution du système (S_1) donné précédemment.

De même :

$$\left\{\begin{array}{llll} a_{-10,j} & \text{avec} & j = 4p & -2 \le p \le 2 \\ a_{i,10} & \text{avec} & i = 4p & -2 \le p \le 2 \\ a_{10,j} & \text{avec} & j = -4p & -2 \le p \le 2 \\ a_{i,-10} & \text{avec} & i = -4p & -2 \le p \le 2 \end{array}\right.$$

sont calculés par la résolution du système (S_2).

Et pour :

a) $j = -8$ $\quad i = 4p-2 \quad (-2 \leq p \leq 1)$

$$a_{i+2,-8} = 2a_{i+2,-6} - a_{i+2,-4}.$$

b) $i = 8$ $\quad j = 4p \quad (-2 \leq p \leq 1)$

$$a_{8,j+2} = 2a_{6,j+2} - a_{4,j+2}$$

c) $j = 8$ $\quad i = 4p \quad (-2 \leq p \leq 1)$

$$a_{i+2,8} = 2a_{i+2,6} - a_{i+2,4}$$

d) $i = -8$ $\quad j = 4p \quad (-2 \leq p \leq 1)$

$$a_{-8,j+2} = 2a_{-6,j+2} - a_{-4,j+2}$$

Les B-coefficients appartenant à l'intérieur des carrés $Q^*_{-8,-8}$; $Q^*_{-8,-4}$; $Q^*_{-8,0}$; $Q^*_{-8,4}$; $Q^*_{-8,8}$; $Q^*_{-4,8}$; $Q^*_{0,8}$; $Q^*_{4,8}$; $Q^*_{8,8}$; $Q^*_{8,4}$; $Q^*_{8,0}$; $Q^*_{8,-4}$; $Q^*_{8,-8}$; $Q^*_{4,-8}$; $Q^*_{0,-8}$; $Q^*_{-4,-8}$ sont calculés par l'algorithme $G_{i,j}$.

Par exemple dans le carré $Q^*_{-8,-8}$, on a :

$$\begin{cases} a_{-9,-9} = (a_{-10,-8} + a_{-8,-10})/2. \\ a_{-7,-9} = (a_{-8,-10} + a_{-6,-8})/2. \\ a_{-9,-7} = (a_{-10,-8} + a_{-8,-6})/2. \\ a_{-7,-7} = (a_{-8,-6} + a_{-6,-8})/2. \\ a_{-8,-8} = (a_{-9,-7} + a_{-7,-9})/2. \end{cases}$$

2°) Algorithme de passage de Q_2 à Q_3 . (Voir Fig. 6)

Les B-coefficients $a_{13,1}$; $a_{13,3}$; $a_{13,5}$; $a_{13,7}$; $a_{13,7}$; $a_{13,9}$; $a_{13,11}$; $a_{13,13}$; $a_{11,13}$; $a_{9,13}$; $a_{7,13}$; $a_{5,13}$; $a_{3,13}$; $a_{1,13}$.

Sont calculés à l'aide de la résolution des systèmes (S_1) et (S_2)

$$\begin{cases} a_{11,1} = 2a_{9,1} - a_{7,1} \\ a_{1,11} = 2a_{1,9} - a_{1,7} \\ a_{11,5} = 2a_{9,5} - a_{7,5} \\ a_{5,11} = 2a_{5,9} - a_{5,7} \\ a_{11,7} = 2a_{9,7} - a_{7,7} \\ a_{7,11} = 2a_{7,9} - a_{7,7} \end{cases}$$

Il reste donc à calculer le B-coefficients internes aux carrés suivants :

$$Q_{11,3} \; ; \; Q_{11,7} \; ; \; Q_{11,11} \; ; \; Q_{7,11} \; ; \; Q_{3,11}$$

Il suffit d'utiliser $G_{i,j}$ par exemple sur $Q_{11,3}$ on a :

$$\begin{cases} a_{10,2} = (a_{11,1} + a_{9,3})/2 \\ a_{12,2} = (a_{11,1} + a_{13,3})/2 \\ a_{10,3} = (a_{11,5} + a_{9,3})/2 \\ a_{12,4} = (a_{13,3} + a_{11,5})/2 \\ a_{11,3} = (a_{10,4} + a_{12,6})/2 \end{cases}$$

D) - FONCTIONS DE BASE DU PROCEDE D'INTERPOLATION.

Proposition 1.

La dimension de $P_2^1(\Omega,C)$ ($\Omega = Q_N^*$ *ou* Q_N) *est* $N_o = (N+2)^2 - 1$.

(Pour la démonstration voir [11]).

Définition 1.

Les points d'interpolation étant les points I, *avec* $1 \leq I \leq N_o$, *les fonctions de base sont appelés* L_k *avec* $1 \leq k \leq N_o$ *et vérifient :*

$$L_k(I) = \delta_{Ik}.$$

δ_{Ik} $(1 \leq I, k \leq N_o)$ *étant le symbole de Kroncker.*

Remarque 2.

Dans le programme donnée à la fin de ce chapitre, les points d'interpolation sont numérotés de la manière suivante.

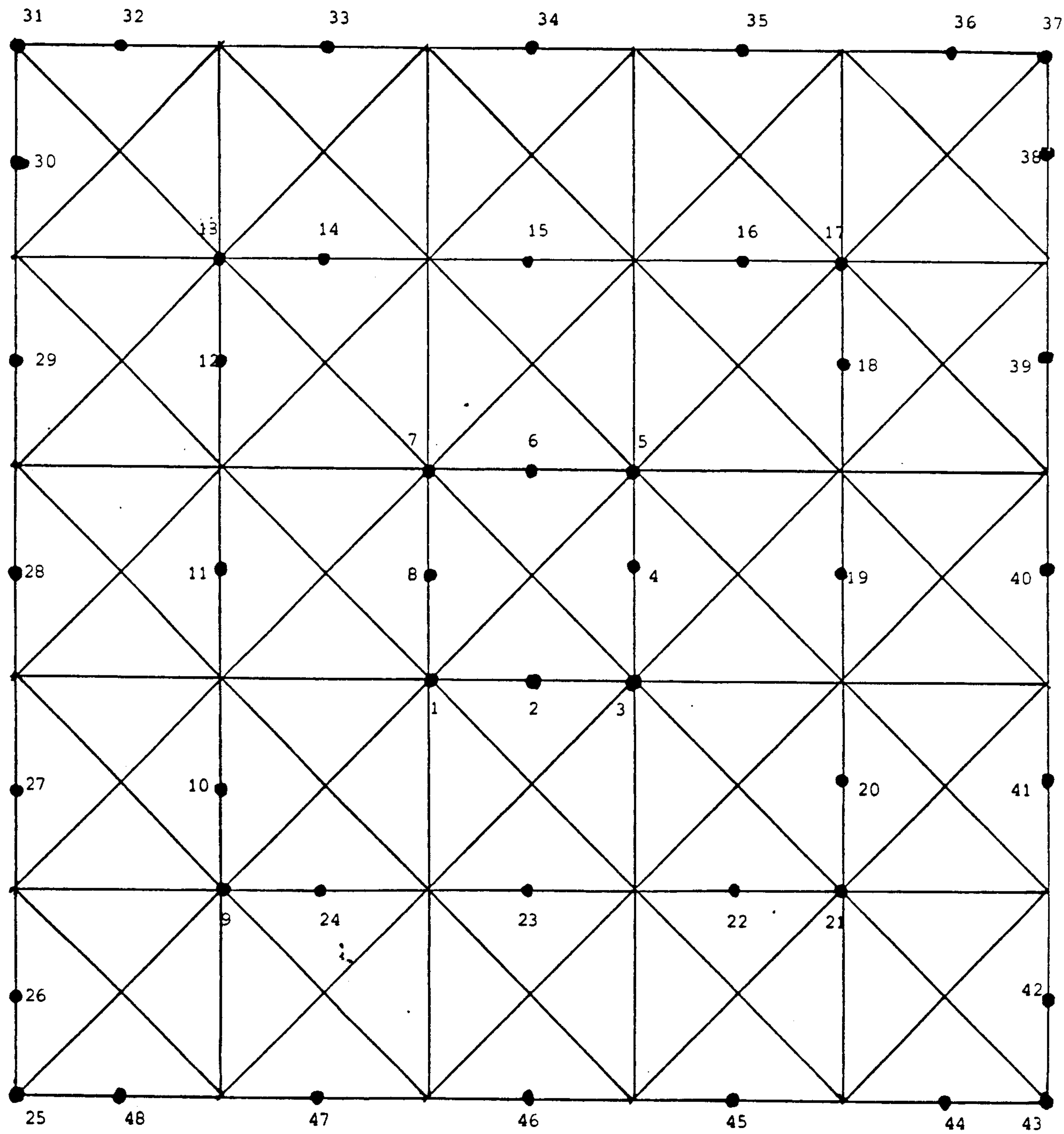


Figure 6. Numérotation des points d'interpolation.

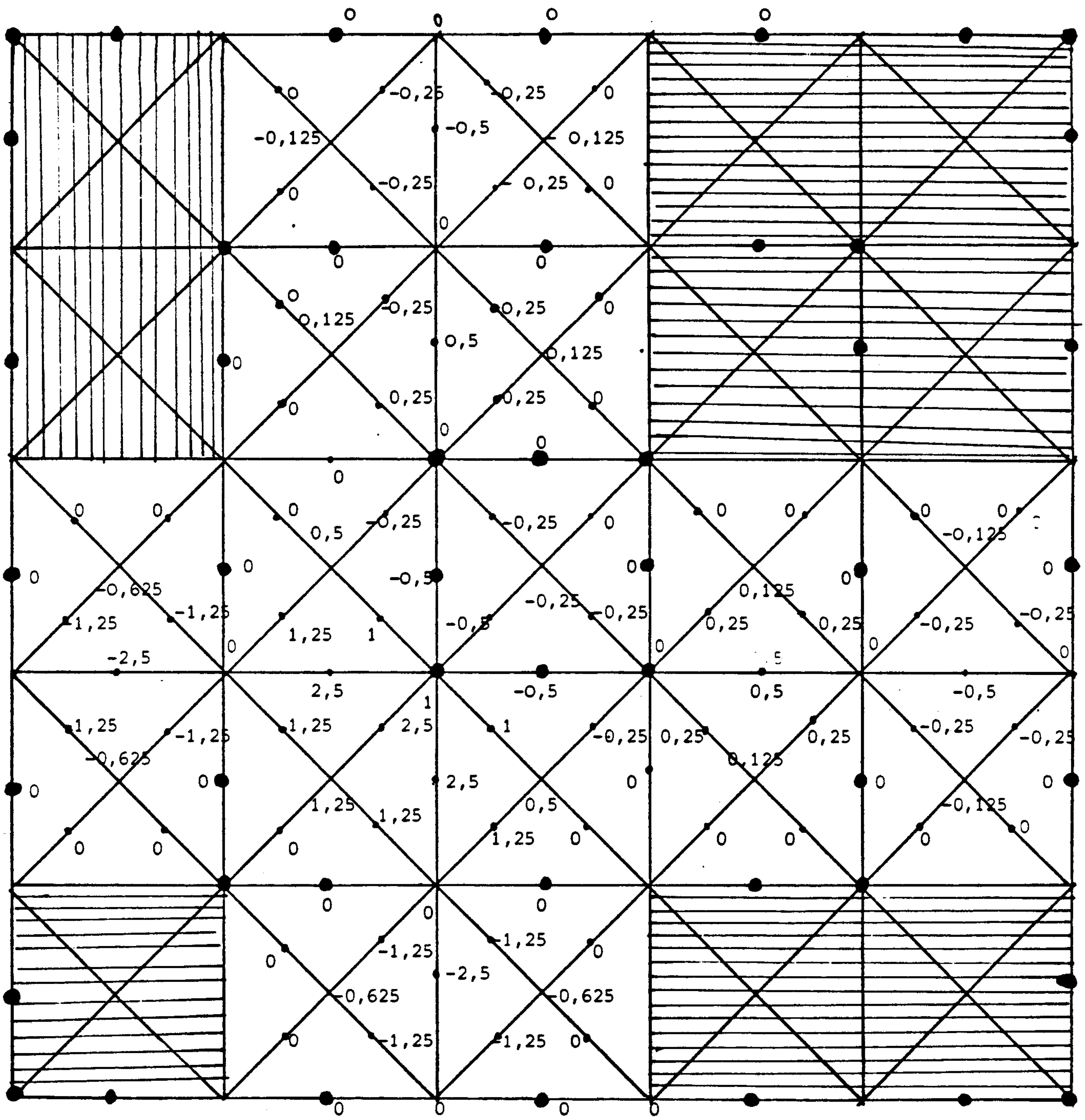


Figure 7. Représentation des B-coefficients de L_1 dans le cas où $\Omega = Q_5^*$.

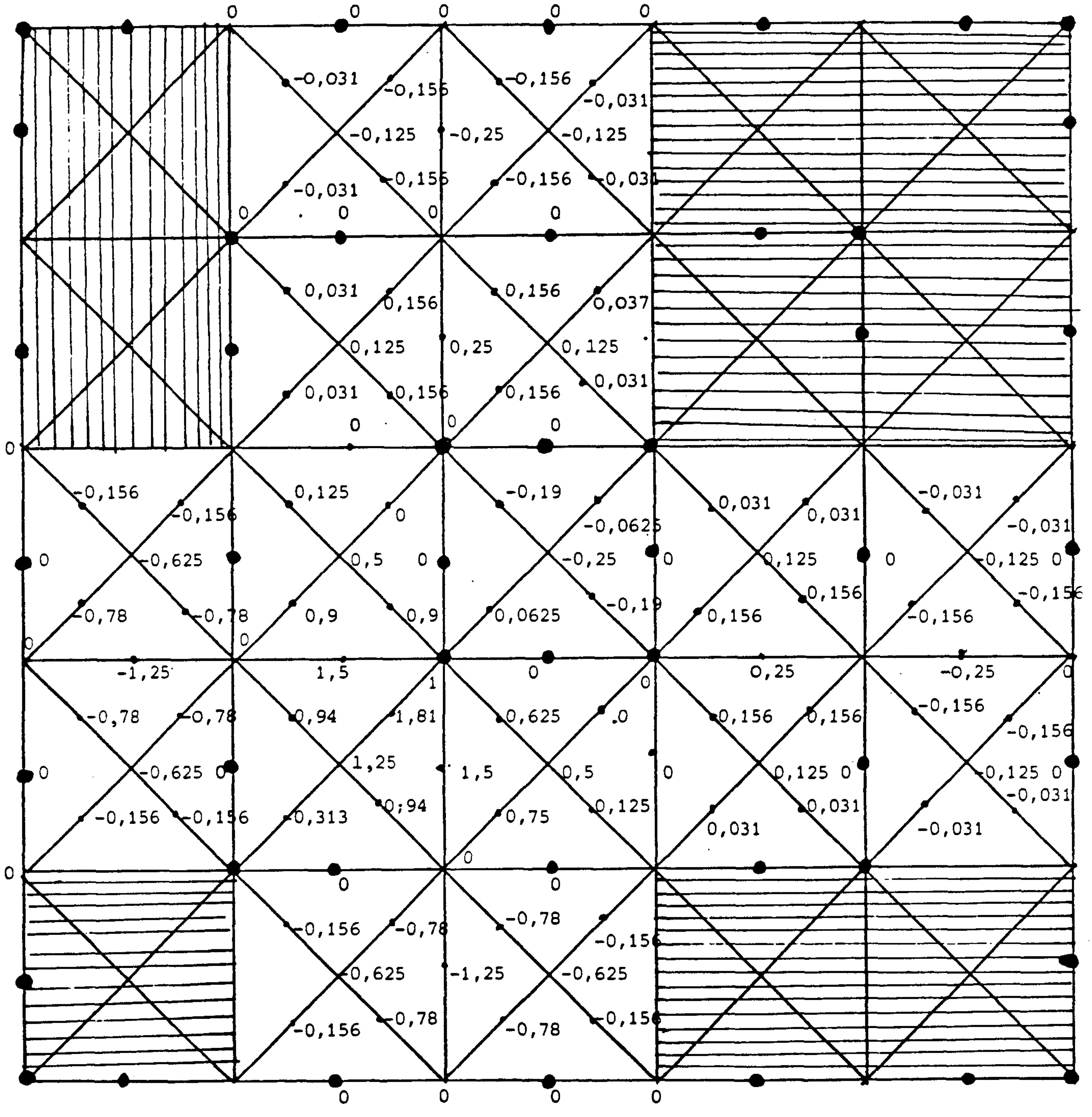
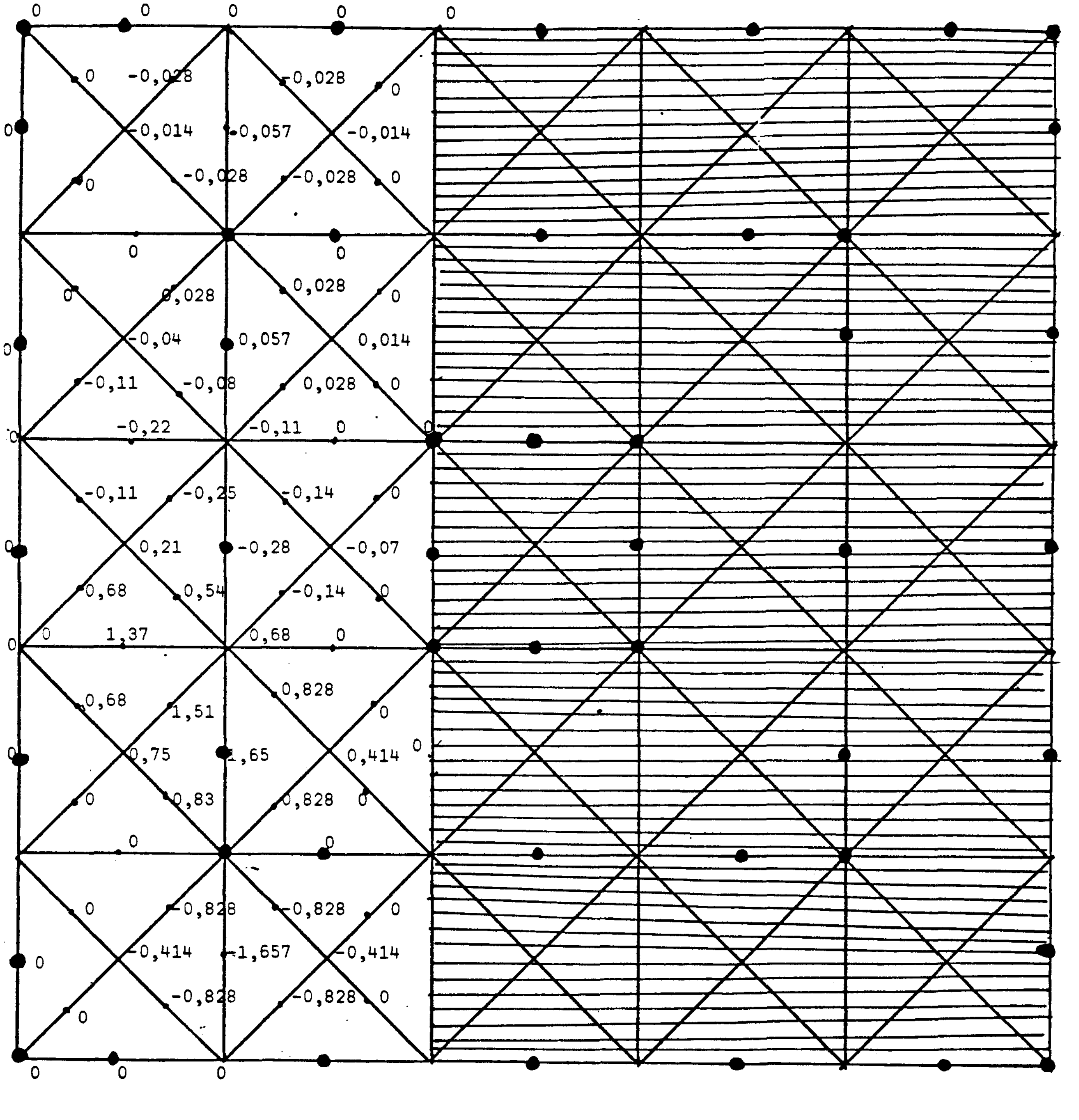
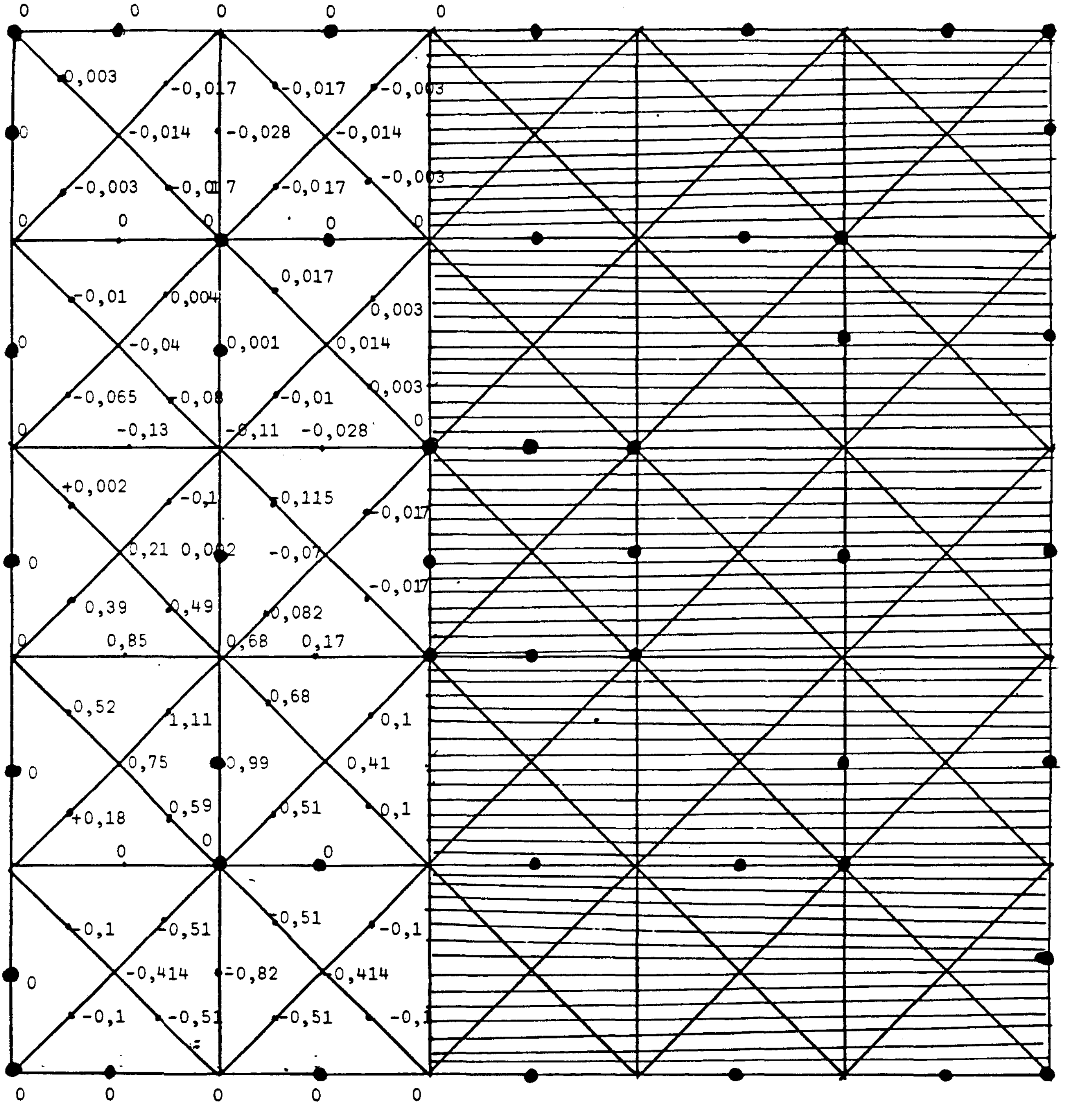


Figure 8. Représentation de quelques valeurs de L_1 dans le cas où $\Omega = Q_5^*$.



<u>Figure 9</u> : *Représentation des B-coefficients de L_{10} dans le cas ou $\Omega = Q_5^*$.*



<u>Figure</u> 10. Représentation de quelques valeurs de L_{10} *dans le cas où* $\Omega = Q_5^*$.

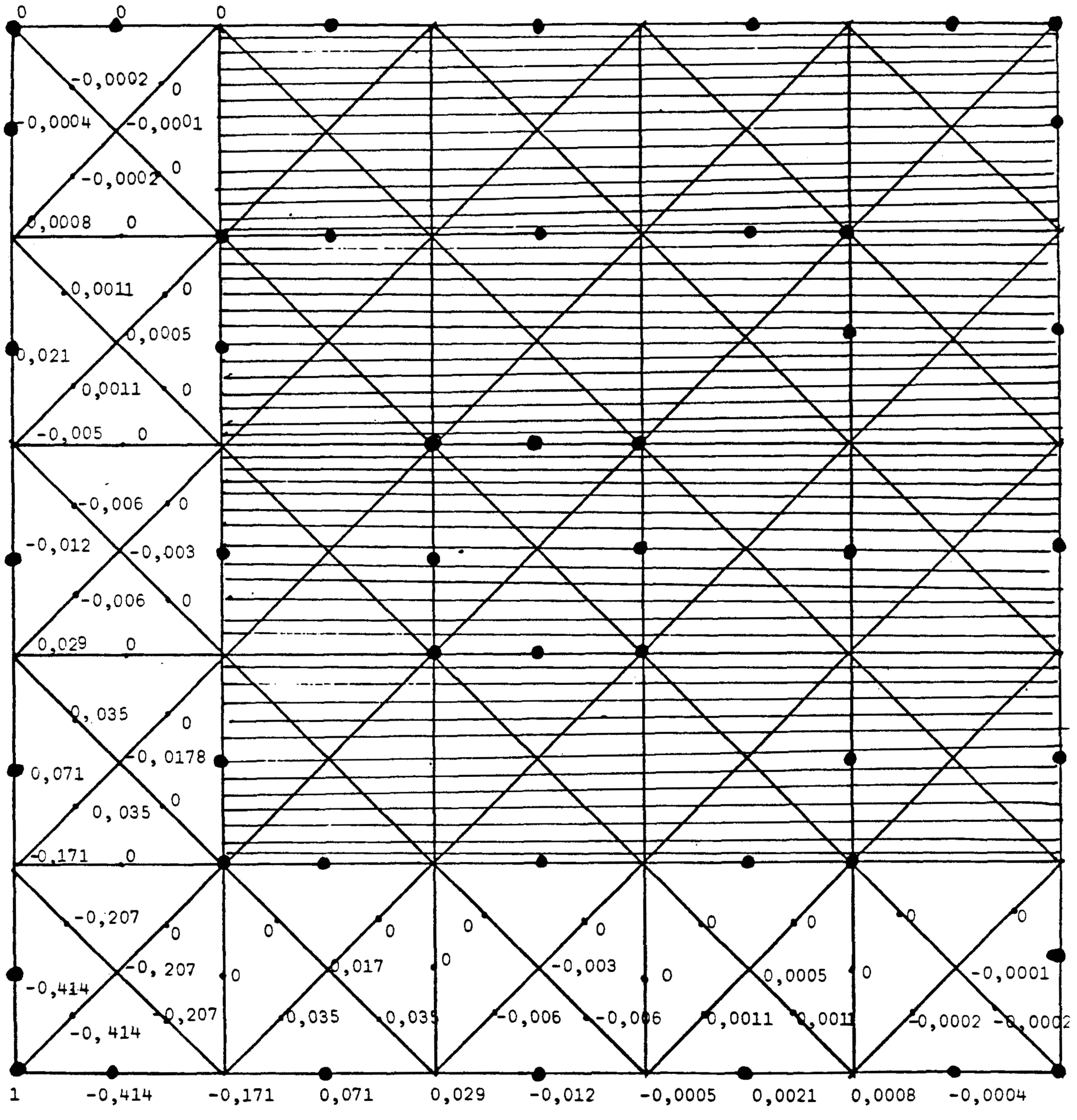


Figure 11. Représentation des B-coefficients de L_{25} *dans le cas où* $\Omega = Q_5^*$.

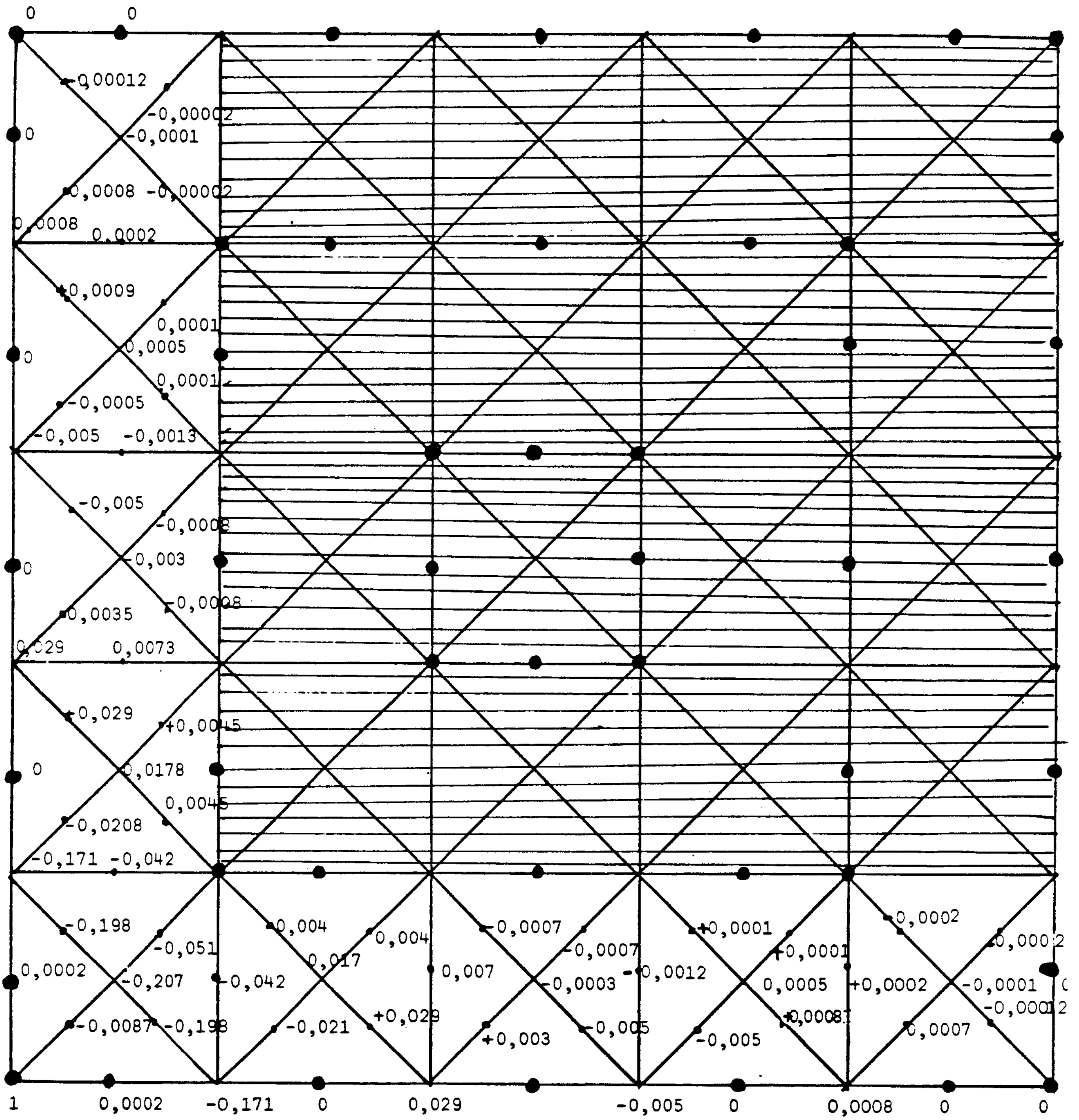
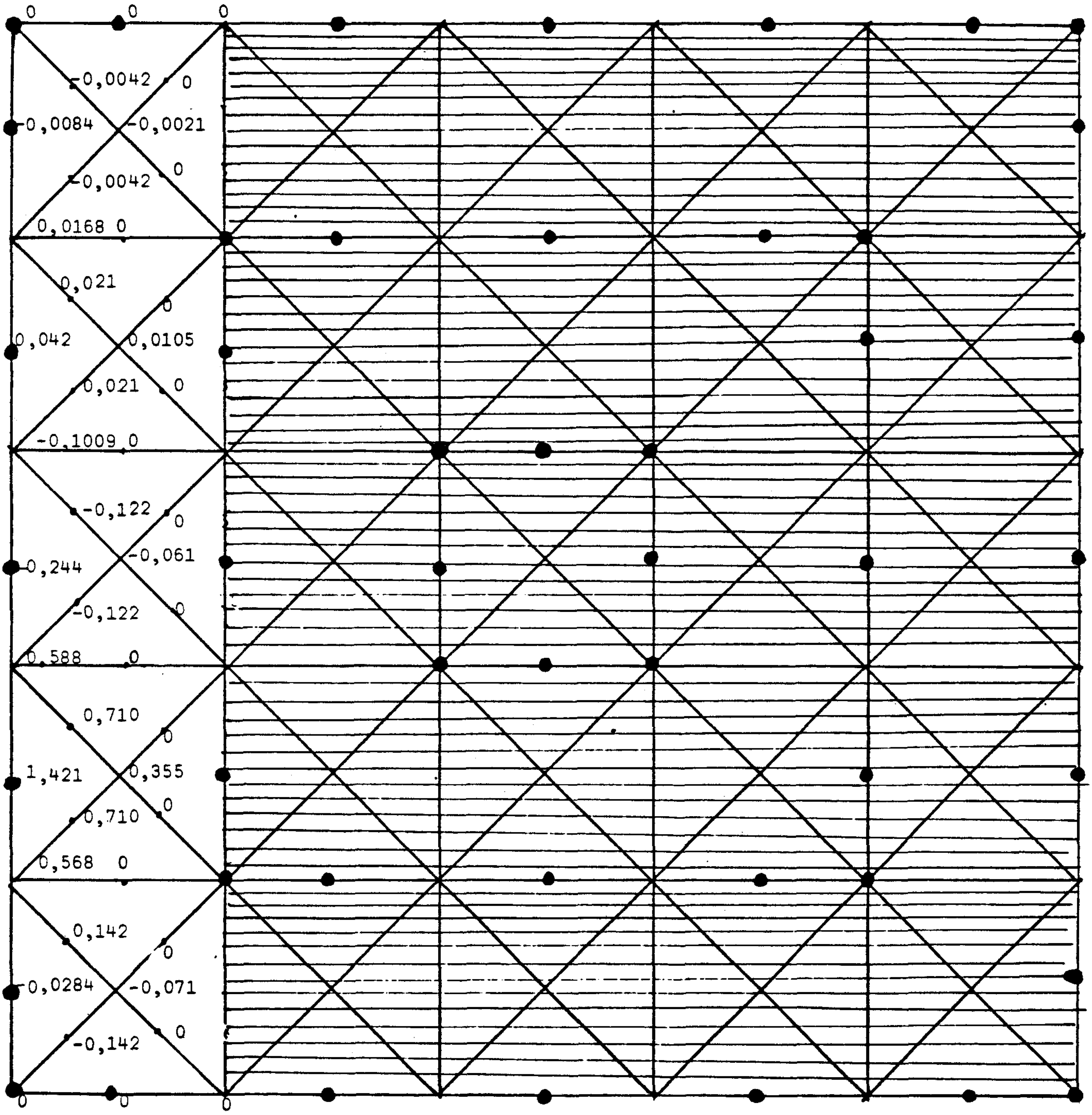


Figure 12. Représentation de quelques valeurs de L_{25} *dans le cas où* $\Omega = Q_5^*$.



<u>Figure 13</u>. Représentation des B-coefficients de L_{27} dans le cas où $\Omega = Q_5^*$.

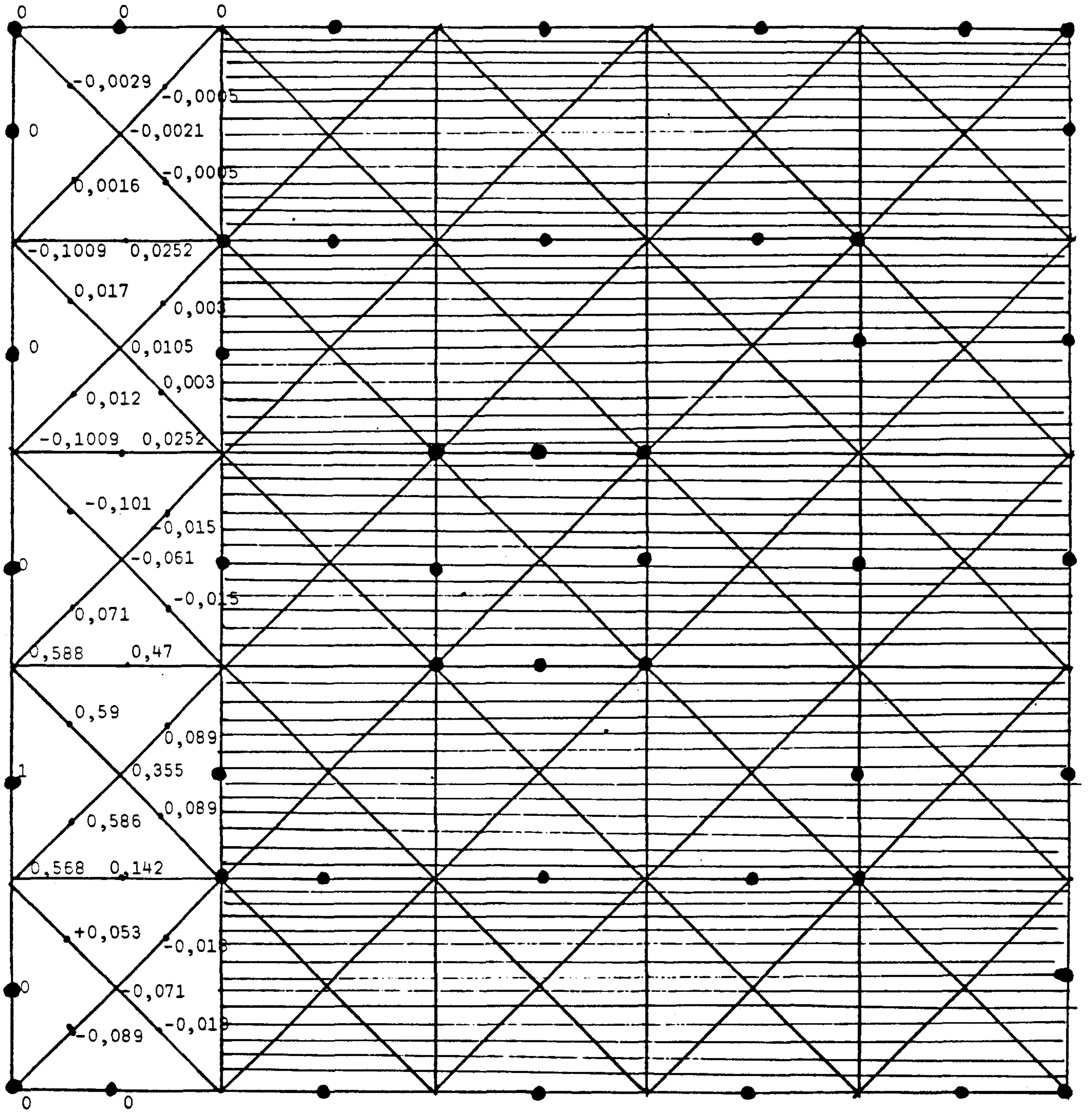
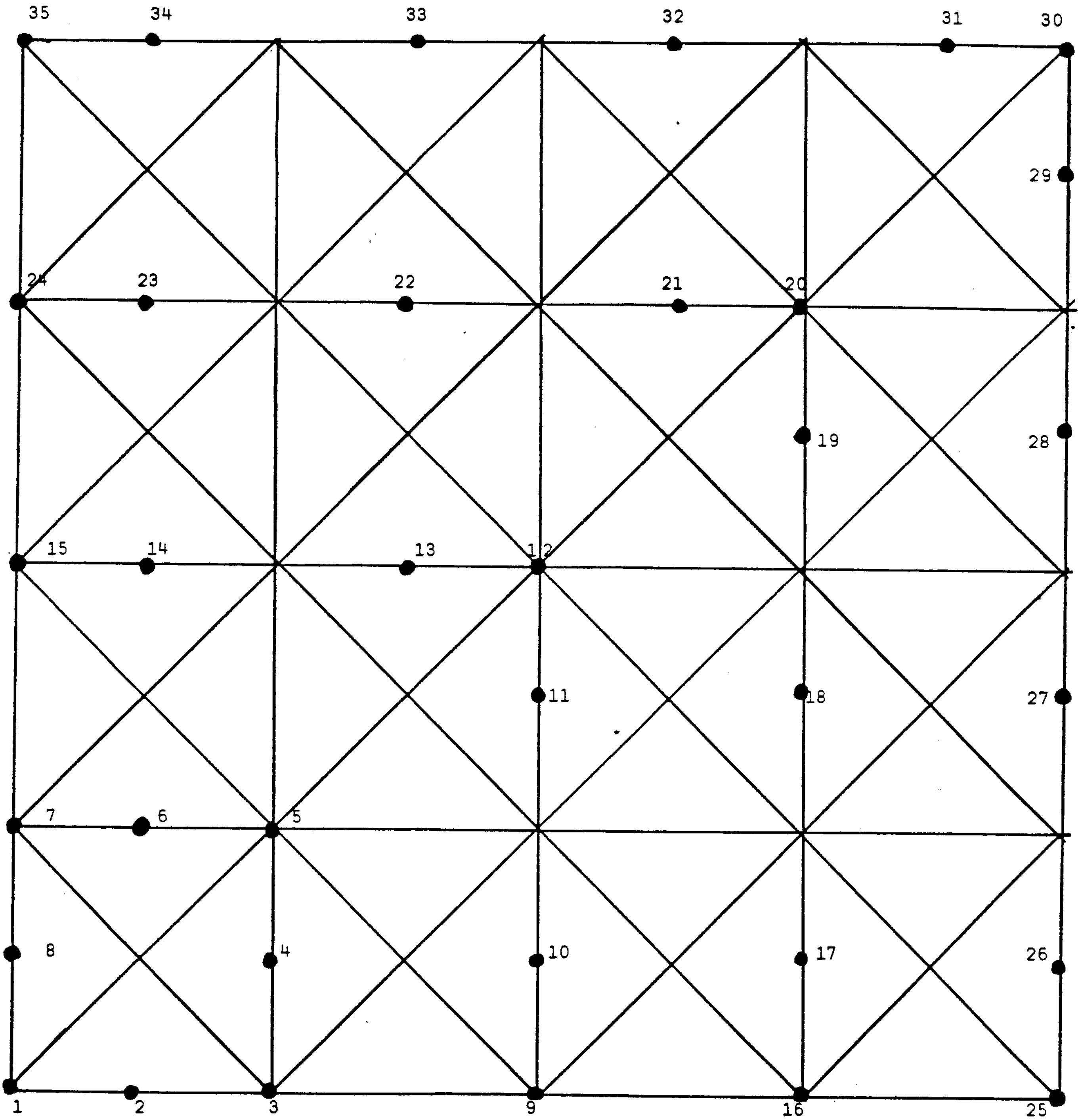
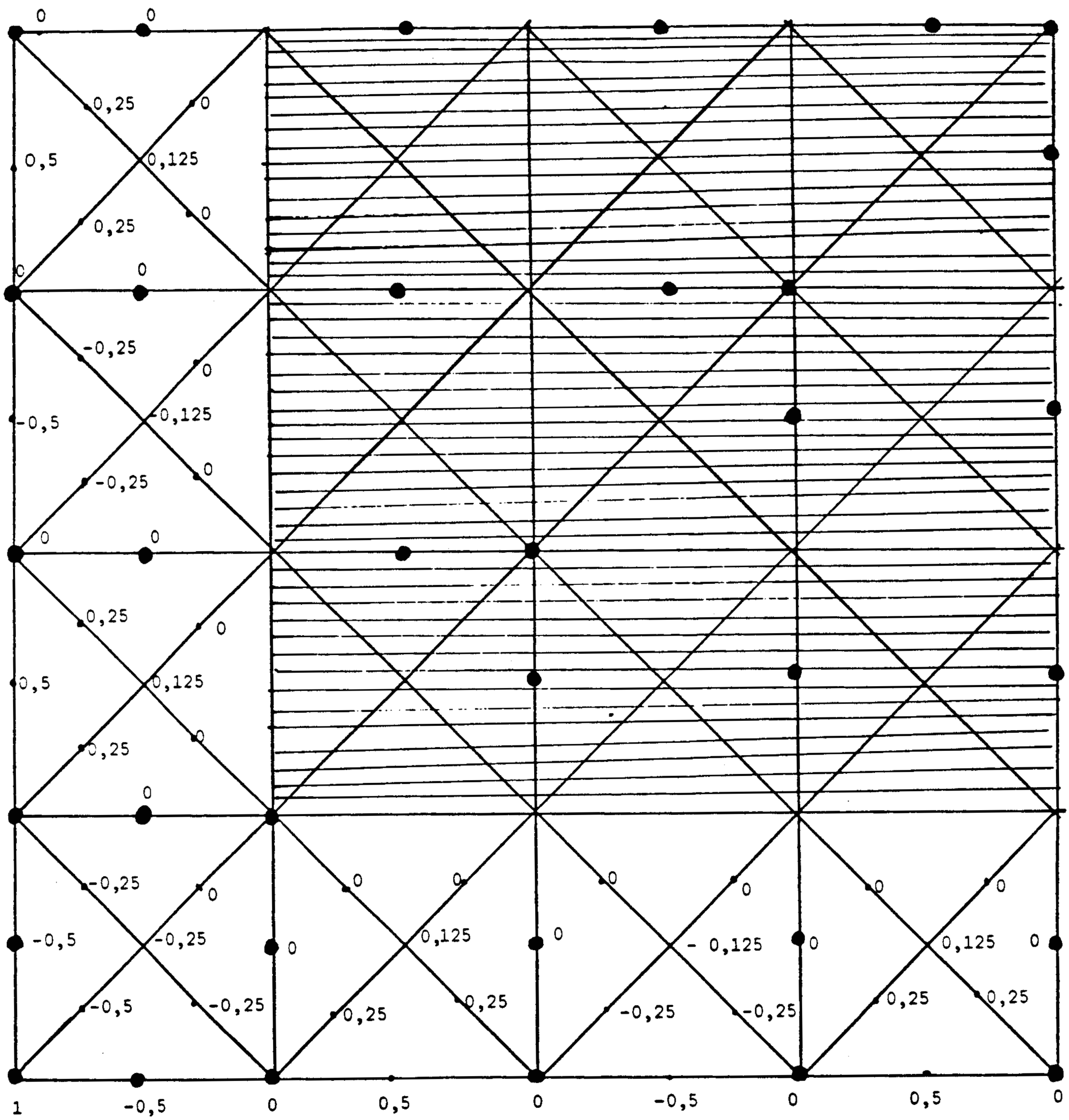


Figure 14. Représentation de quelques valeurs de L_{27} *dans le cas où* $\Omega = Q_5^*$.



<u>*Figure*</u> *15. Numérotation des points d'interpolation dans le cas où* $\Omega = Q_4$.



<u>Figure 16</u>. Représentation des B-coefficients de L1 dans le cas où $\Omega = Q_4$.

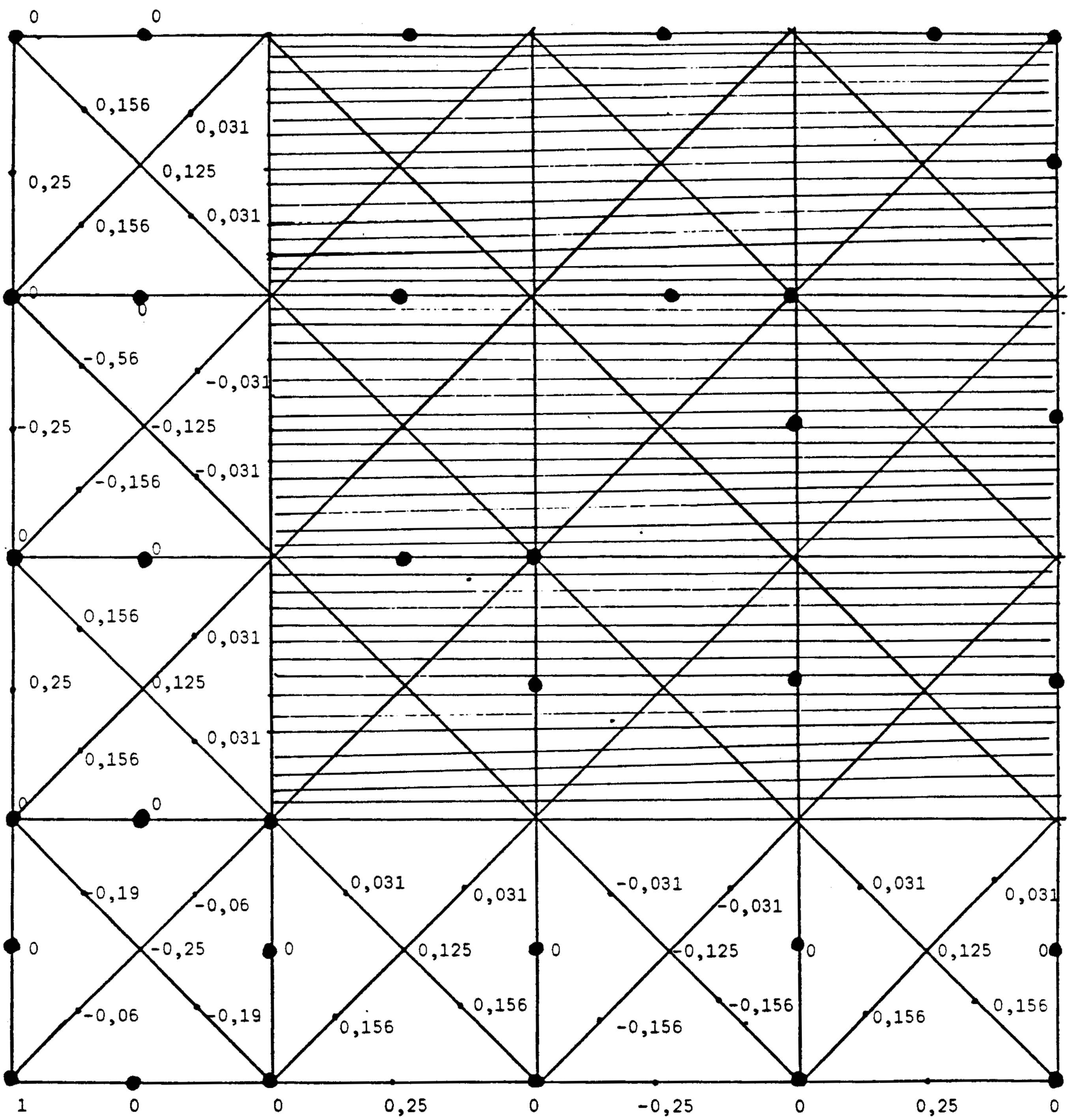


Figure 17. Représentation de quelques valeurs de L_1 *dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

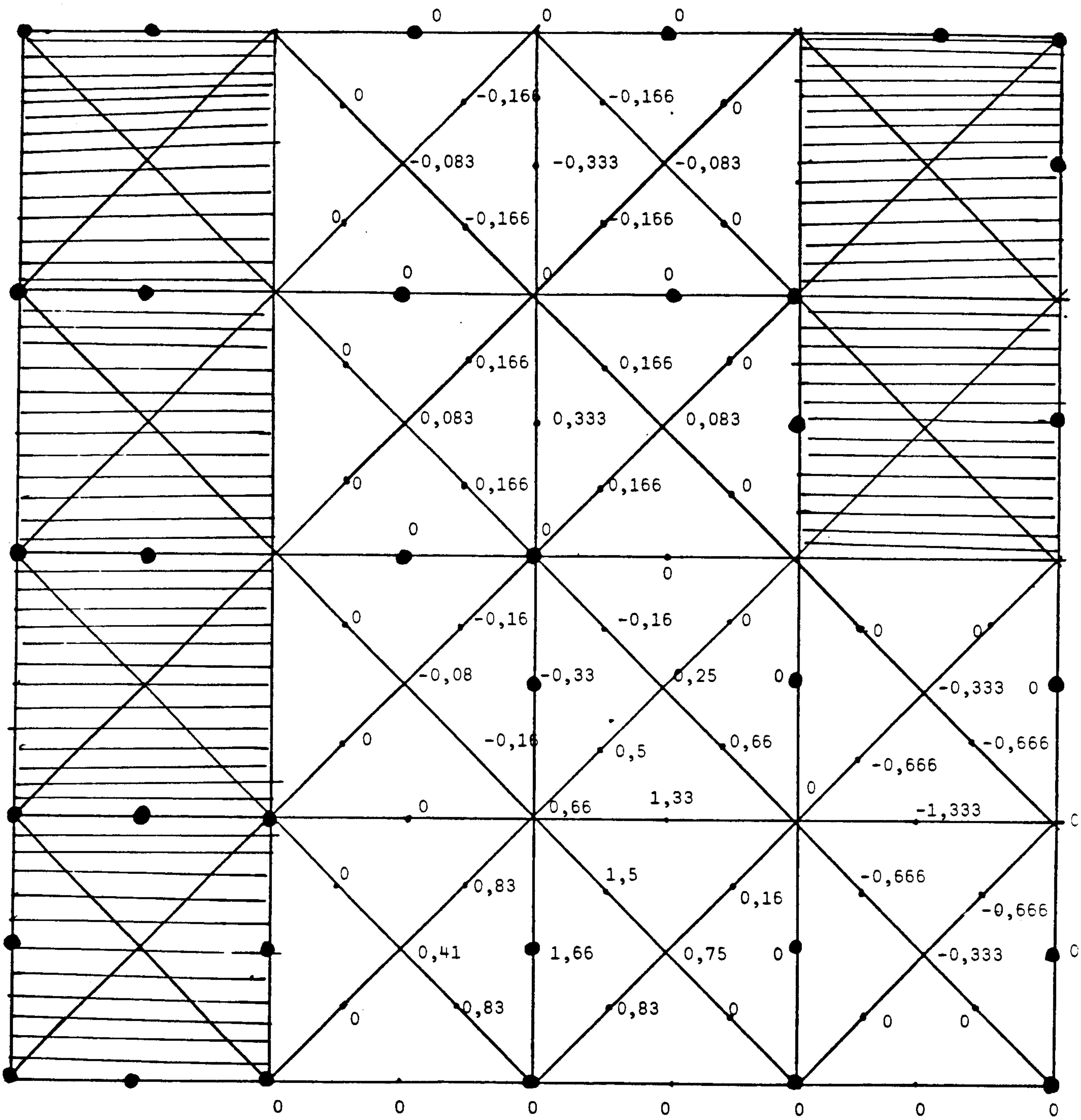


Figure 18. Représentation des B-coefficients de L_{10} *dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

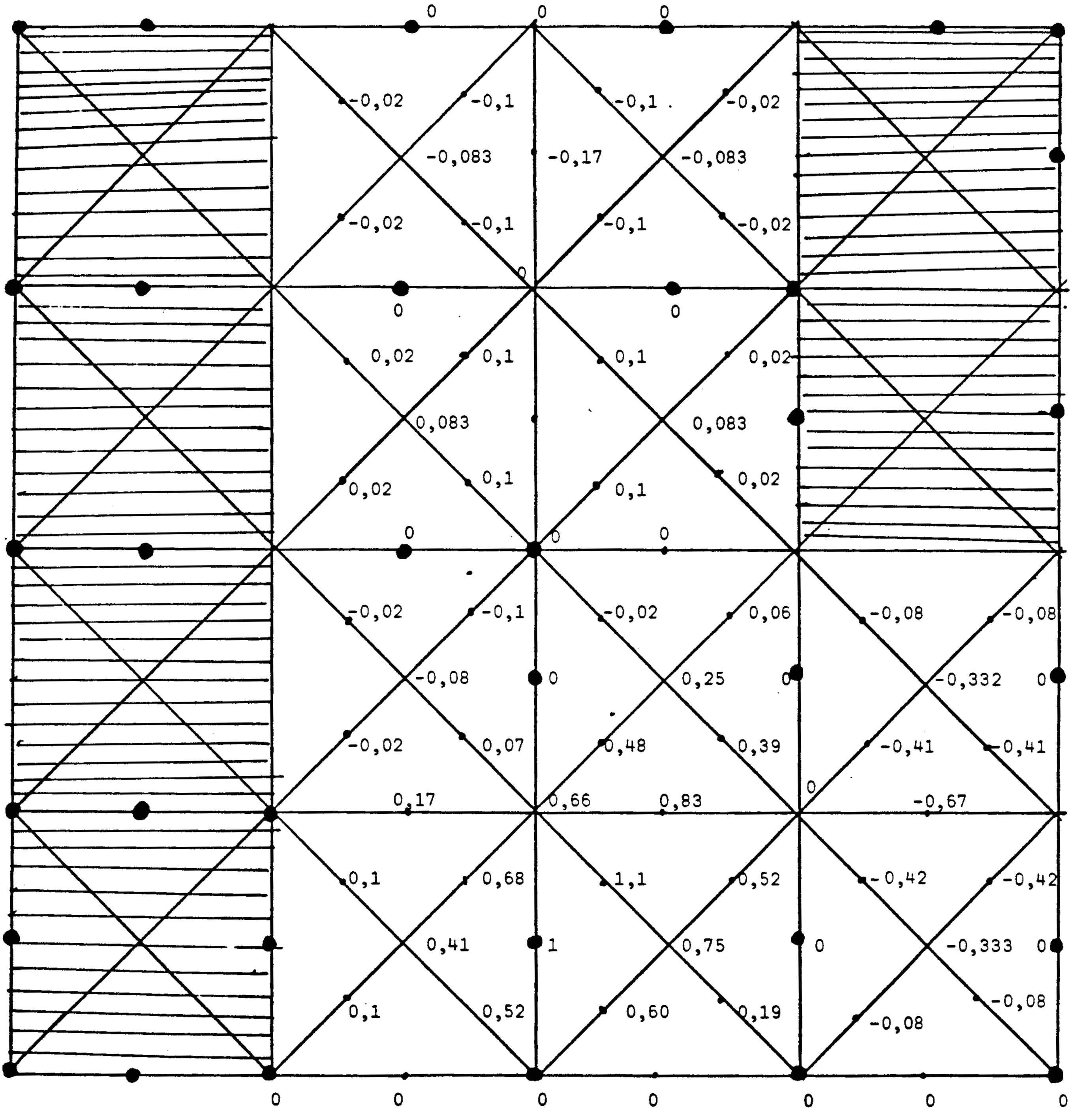


Figure 19. *Représentation de quelques valeurs de* L_{10} *dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

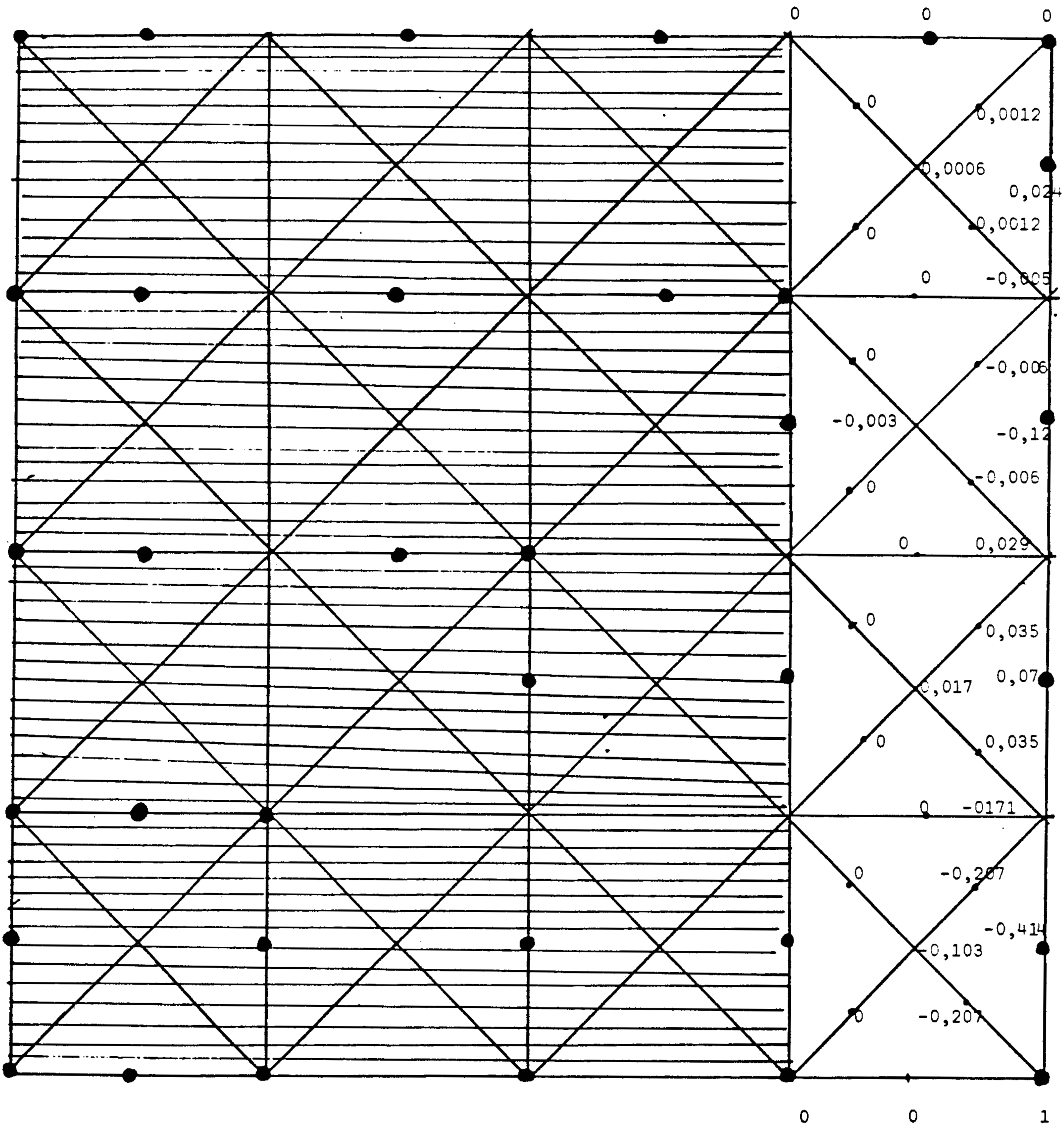


Figure 20. Représentation des B-coefficients de L_{25} *dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

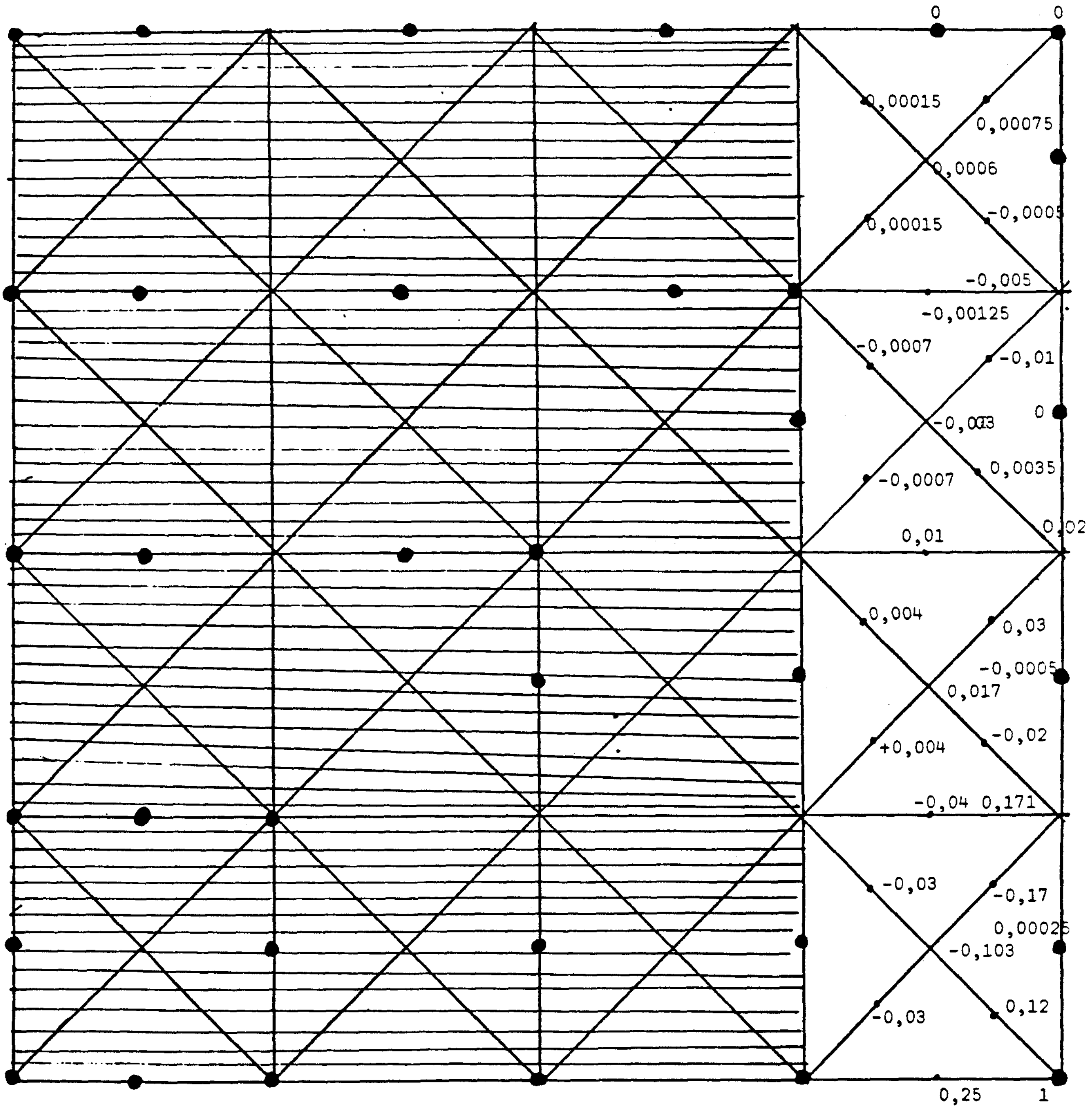


Figure 21. Représentation de quelques valeurs de L_{25} *dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

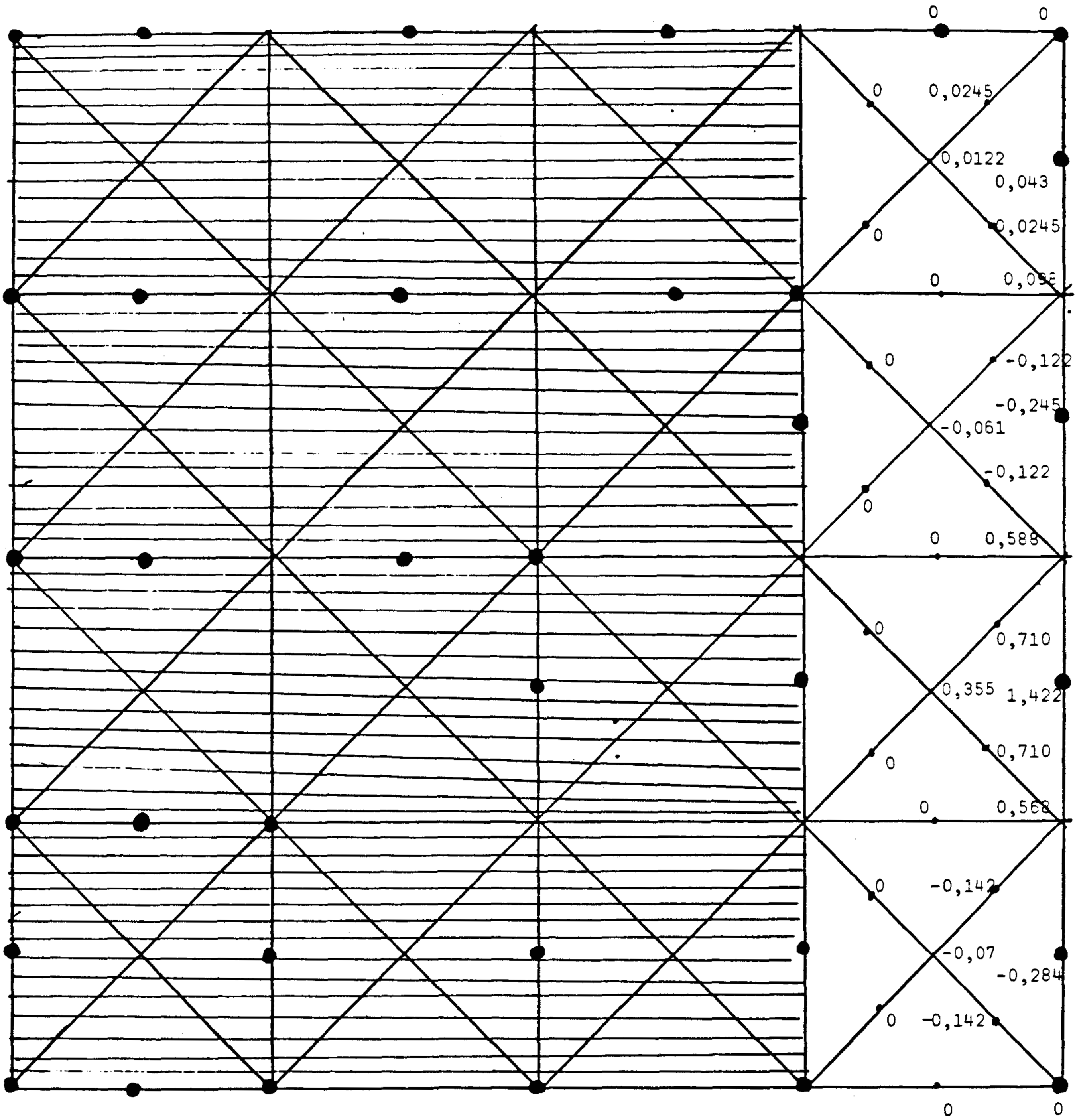


Figure 22. Représentation des B-coefficients de L_{27} *dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

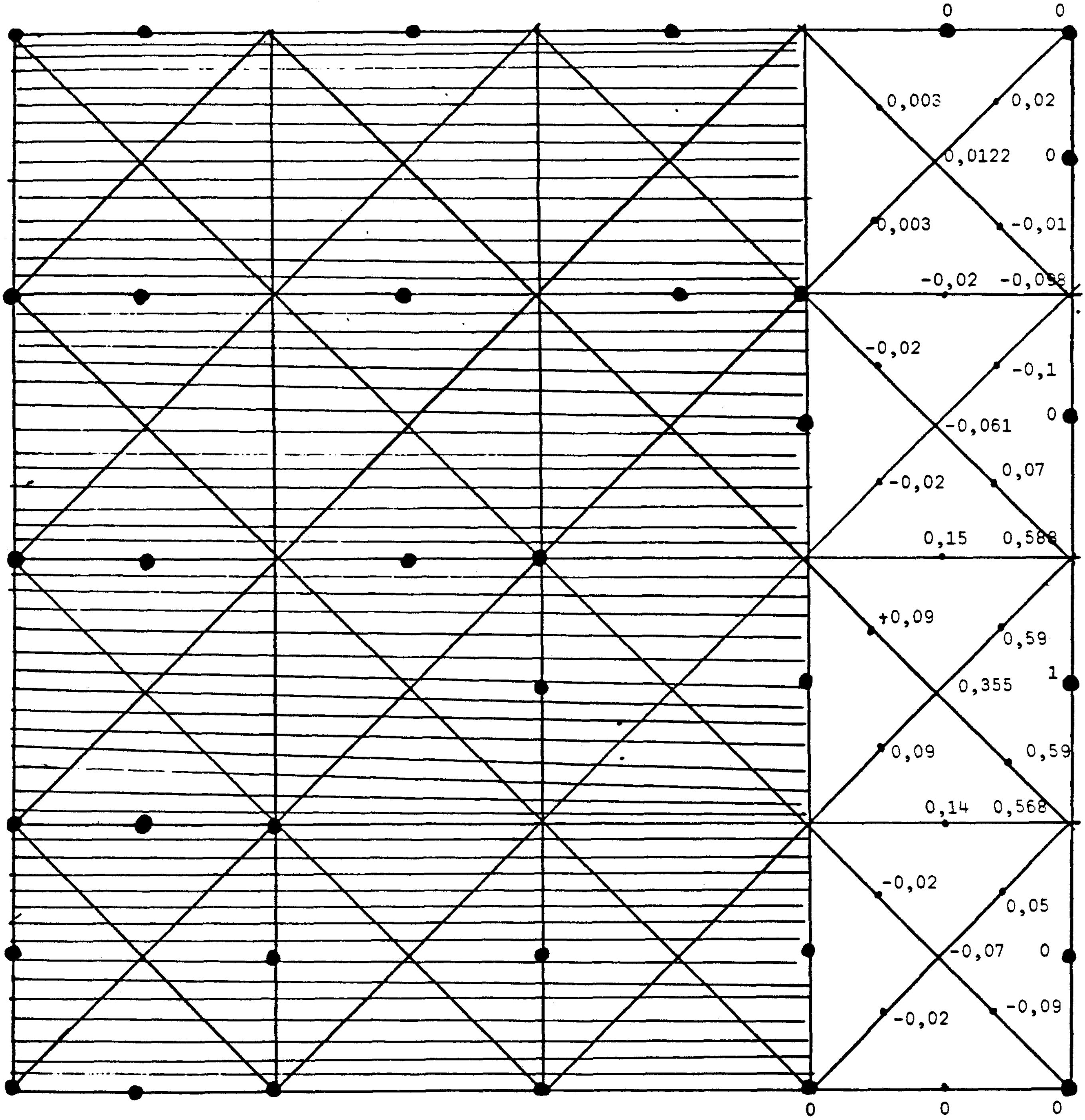


Figure 23. *Représentation de quelques valeurs de* L_{27} *dans le cas où* $\Omega = Q_4$.

IV - Résultats pratiques sur la majoration de la norme de l'opérateur d'interpolation.

1 - Notions préliminaires.

On considère la fonction de Lebesgue définie ainsi :

$$\Lambda_N(x,y) = \sum_{k=1}^{N_o} |L_k(x,y)|$$

Soit π_N l'opérateur d'interpolation défini par

$$\pi_N : \begin{array}{ccc} C^{-1}(\Omega) & \longrightarrow & P_2^1(\Omega,T) \\ f & \longrightarrow & \pi_N(f) = S. \end{array}$$

on sait que :

$$||\pi_N|| = \sup_{||f||\leq 1} ||\pi_N f|| = \operatorname{Sup}_{(x,y)\in\Omega} \sum_{k=1}^{N_o} |L_k(x,y)| = ||\Lambda_N||_{\infty,\Omega}$$

On choisit un certain nombre de points $(x_\ell, y_\ell) \in \Omega$, par exemple, sur chaque micro-triangle, les points de coordonnées barycentriques (w_1, w_2, w_3) où :

$$\begin{cases} W_1 = M_1/M & & 0 \leq M_1 \leq M \\ & M \in \mathbb{N} \ \text{ avec} & \\ W_2 = M_2/M & & 0 \leq M_2 \leq M-M_1 \end{cases}$$

et donc

$$1 \leq \ell \leq M_o = \frac{(M+1)(M+2)}{2}$$

<u>*Proposition 2.*</u>

Soit :

$$m = \sup_{(x_\ell,y_\ell)\in\Omega} \sum_{k=1}^{N_o} |L_k(x_\ell,y_\ell)|$$

$$M = \sup_{T\in T} \sup_{o\leq i+j\leq 2} \sum_{k=1}^{N_o} |a_{ij}^k|$$

les $\{a_{ij}^k\}_{0 \le i+j \le 2}$ *étant les B-coefficients de* L_k *pour* $1 \le k \le N_0$.

On a alors le résultat suivant :

$$\boxed{m \le ||\pi_N|| \le M}$$

Démonstration.

La première inégalité est évidente, on démontre la deuxième

$$||\pi_N|| = ||\Lambda_N||_{\infty,\Omega} = \sup_{(x,y)} \sum_{k=1}^{N_0} L_k(x,y)$$

Or dans chaque triangle $T \in \mathcal{T}$, $T \subset \Omega$, on a :

$$L_k(x,y) = \sum_{0 \le i+j \le 2} a_{ij}^k \, \beta_{ij}(x,y)$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{N_0} |L_k(x,y)| \le \sum_{k=1}^{N_0} \sum_{0 \le i+j \le 2} |a_{ij}^k| \, \beta_{ij}(x,y)$$

$$\le \sum_{0 \le i+j \le 2} \beta_{ij}(x,y) \sum_{k=1}^{N_0} |a_{ij}^k|$$

avec

$$\beta_{ij}(x,y) = \frac{2!}{i!j!(2-i-j)!} \lambda_1^i(x,y) \, \lambda_2^j(x,y) \, \lambda_3(x,y)$$

or

$$\sum_{0 \le i+j \le 2} \beta_{ij}(x,y) = 1$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{N_0} |L_k(x,y)| \le \sup_{0 \le i+j \le 2} \sum_{k=1}^{N_0} |a_{ij}^k|$$

d'où

$$||\pi_N|| \leq \sup_{T\in\mathcal{T}} \sup_{0\leq i+j\leq 2} \sum_{k=1}^{N_o} |a_{ij}^k| = M$$

C.Q.F.D.

On donne deux graphes et un tableau qui représentent les variations de M et m en fonction de N.

Un programme sera donné à la fin de ce chapitre pour le calcul de M et m.

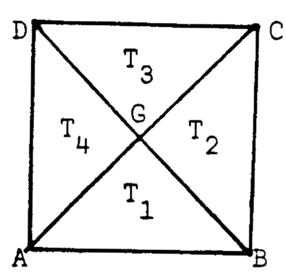
2 - Calcul explicite de l'erreur d'interpolation et de l'ordre de convergence.

Quelques explications concernant le programme ODCI : (donné à la fin de ce chapitre avec $\Omega = Q_N^*$).

Ce programme consiste à calculer la spline interpolant une fonction f donnée, l'erreur d'interpolation E_N et l'ordre de convergence.

a) - *Calcul de l'erreur.*

Soit $Q_{i_oj_o}^*$ l'un des petits carrés inclus dans Q_N^* (ou $Q_{i_oj_o} \subset Q_N$)



Considérons le triangle T1 par exemple :
Soit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les coordonnées barycentrique de $Z \in T_1$.
D'après les notations des B-coefficients donnés au début de ce chapitre, la spline $S \in SP_2(\Omega)$ s'écrit de la manière suivante :

$$SP1(\lambda) = a_{i_o-2,j_o-2}\,\lambda_1^2 + a_{i_o+2,j_o-2}\,\lambda_2^2 + a_{i_oj_o}\,\lambda_3^2.$$

$$+ 2a_{i_o-1,j_o-1}\,\lambda_1\lambda_3 + 2a_{i_o,j_o+2}\,\lambda_1\lambda_2.$$

$$+ 2a_{i_o+1,j_o-1}\,\lambda_2\lambda_3.$$

N	Q_N^*		Q_N	
	m	M	m	M
1	3	3	3	3
2			4,04	5
3	3,981	5	4,972	8,333
4			6,518	11,476
5	4,838	8,143	8,061	14,574
6			9,604	17,664
7	6,306	11,131	11,141	20,753
8			12,692	23,841
9	7,765	14,066	14,237	26,929
10			15,780	30,017
11	9,226	16,991	17,325	33,106
12			18,869	36,194
13	10,688	19,914	20,413	39,282
14			21,957	42,370
15	12,149	22,836	23,501	45,459
16			25,046	48,546
17	13,610	25,759	26,589	51,635
18			28,134	57,723
19	15,071	28,681		

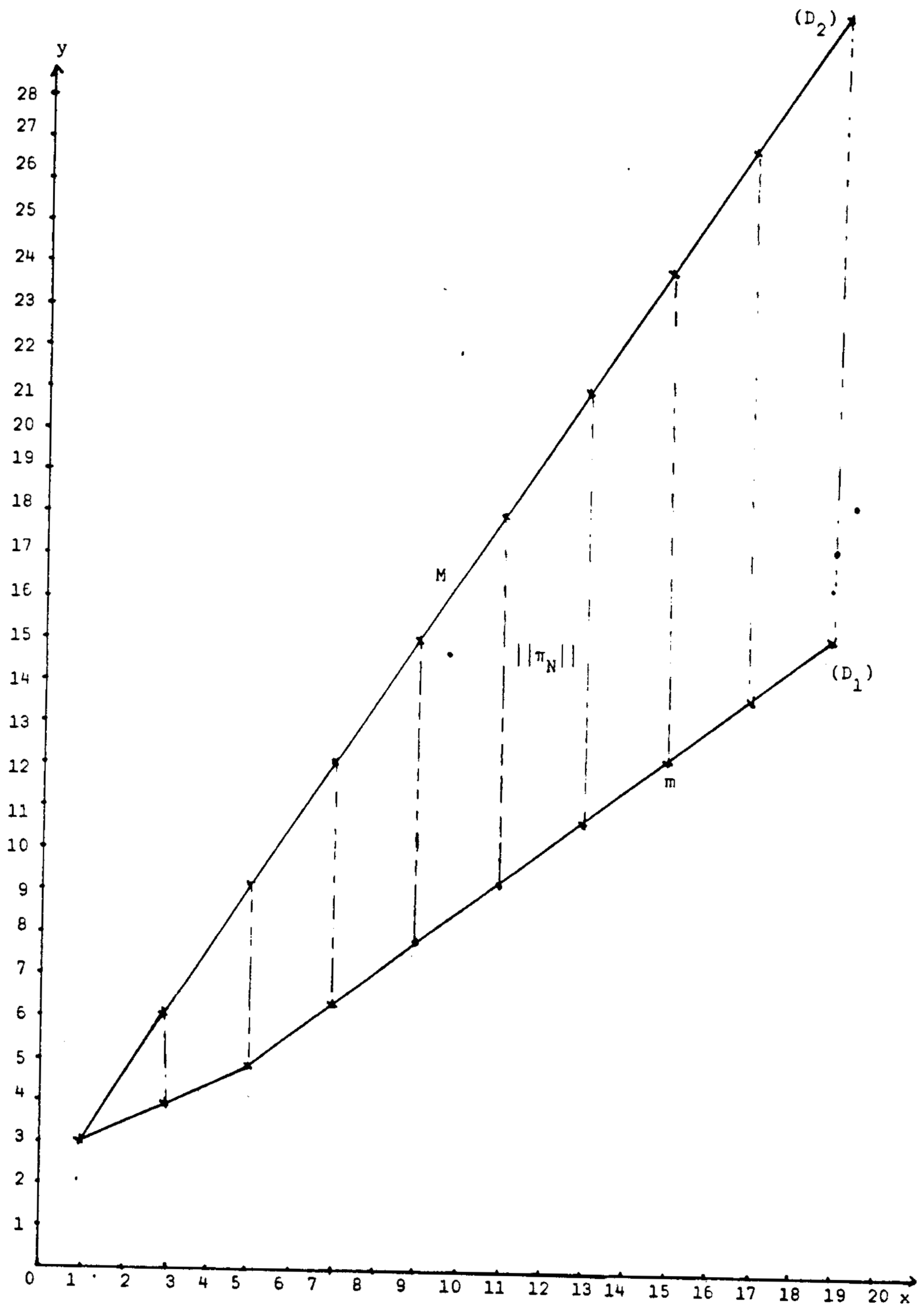


Figure 24. Représentation de la variation de m *et* M *en fonction de* N *dans le cas où* $\Omega = Q_N^*$.

$$\begin{cases} \text{pente de } D_1 = 0{,}73 \\ \text{pente de } D_2 = 1{,}46 \end{cases}$$

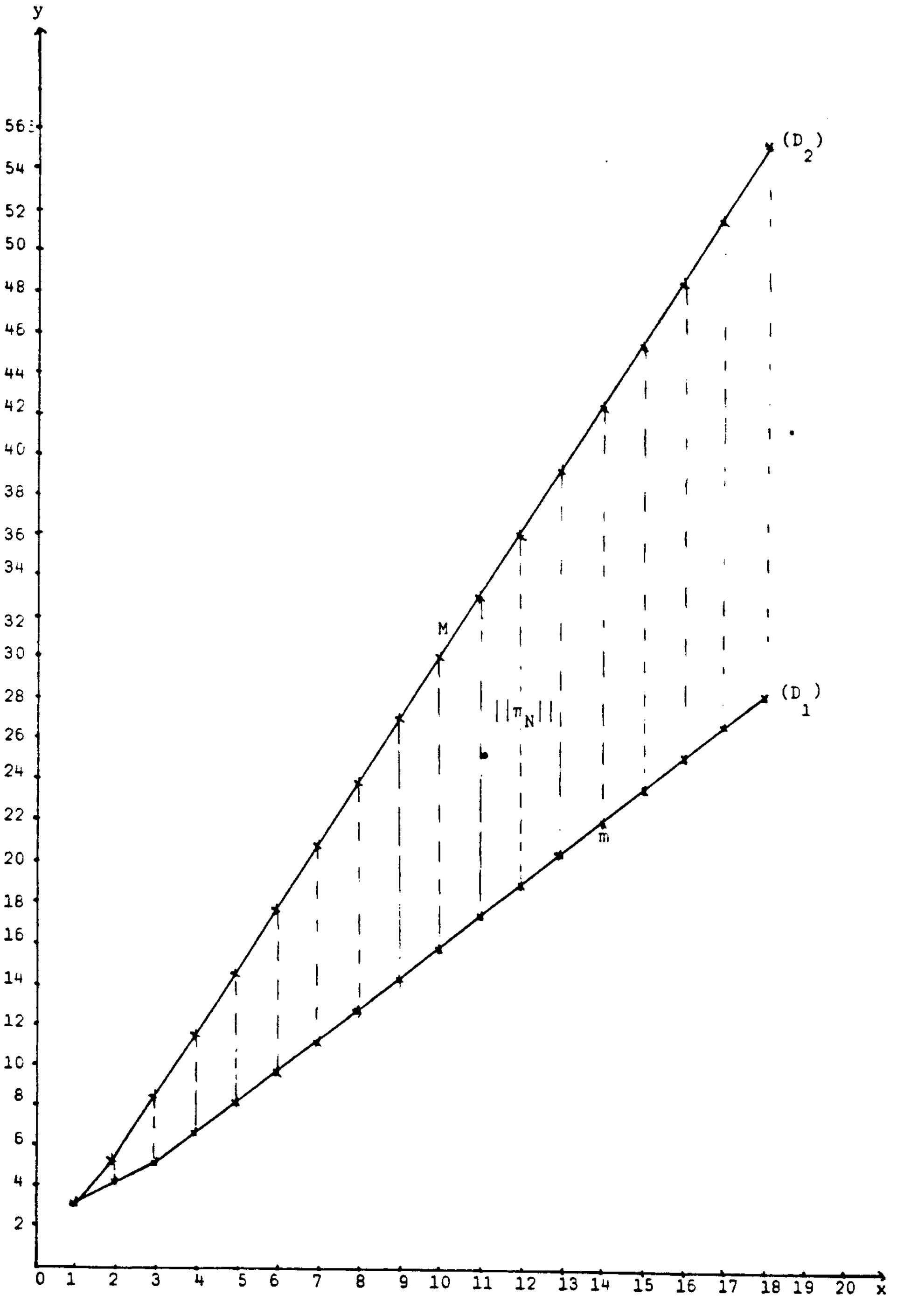


Figure 25. *Représentation de* M *et* m *dans le cas où* $Q_N = \Omega$ *(variation avec* N*).*

$\begin{cases} \text{pente de } D_1 = 1{,}54 \\ \text{pente de } D_2 = 3{,}08 \end{cases}$

On a des expressions analogues de S sur T_i $(2 \leq i \leq 4)$
On considère les points (x_l, y_l) $1 \leq l \leq M_o$ choisis précédemment.

Appelons (w_1^l, w_2^l, w_3^l) les coordonnées barycentriques correspondantes.
On a donc :

$$\begin{cases} x_l = w_1^l\, x_A + w_2^l\, x_B + w_3^l\, x_G \\ y_l = w_1^l\, y_A + w_2^l\, y_B + w_3^l\, y_G \end{cases}$$

Soit

$$g(w_1^l, w_2^l, w_3^l) = f(x_l, y_l)$$

et

$$H_{i,j,l}^l = |(g-Sp_1)(w_1^l, w_2^l, w_3^l)|$$

$$E_N = \sup_{i,j,k,l} H_{i,j,k}^l \text{ avec } \begin{cases} 1 \leq i,j \leq N \\ 1 \leq k \leq 4 \\ 1 \leq l \leq M_o \end{cases}$$

E_N est donc une valeur approchée de l'erreur d'interpolation sur Q_N^* (respectivement Q_N).

b) - Notion d'ordre de convergence.

Soit Q_1 le carré de côtés égaux à 1.
On considère deux subdivision respectives des côtés de ce carré, de pas $h_N = 1/N$ et $h_{N'} = \frac{1}{N'}$.
L'erreur d'interpolation E_N est proportionnelle à h_N^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
On écrit :

$$E_N \underset{\sim}{\sim} K\, h_N^\alpha$$

$$E_{N'} \underset{\sim}{\sim} K\, h_{N'}^\alpha$$

$$K = \text{constante}$$

d'où

$$\text{Log}\,(E_N/E_{N'}) \underset{\sim}{\sim} \alpha \text{Log}(h_N/h_{N'})$$

Définition 2.

L'ordre de convergence calculé est :

$$\boxed{\alpha = \text{Log } (E_N/E_{N'}) \ / \ \text{Log } (N'/N)}$$

c) - *Quelques résultats numériques.*

Les résultats suivants permettent de voir l'évolution de l'erreur et de l'ordre de convergence en fonction de N, pour quelques exemple de fonctions, et pour $\Omega = Q_N^*$ et Q_N

$$E^{-r} = 10^{-r} \quad r \in \mathbb{N}$$

pour

$$\begin{cases} f = \text{Log}(2+x+y) \\ \Omega = Q_N^* = [-0.5 \ ; +0.5] \times [-0,5;+0.5] \end{cases}$$

	E_N	$E_{N'} : E_{2N+1}$	α
1	93307 E - 07	4775 E - 07	2,7
3	4775 E - 07	435 E - 07	2,82
5	1150 E - 07	115 E - 07	2,91
7	435 E - 07	46 E - 07	2,96
9	208 E - 07	23 E - 07	2,96
11	115 E - 07	13 E - 07	2,97
13	70 E - 07	8 E - 07	2,97
15	46 E - 07	5 E - 07	2,99
17	31 E - 07	4 E - 07	3
19	23 E - 07	3 E - 07	3

pour

$$\begin{cases} f = \text{Log}\,(1+x+y) \\ \Omega = Q_N = [0,1] \times [0,1] \end{cases}$$

N	E_N	$E_{N'} = E_{2N-1}$	α
1	90850 E - 07	17661 E - 07	2,38
2	17661 E - 07	2662 E - 07	2,74
3	5984 E - 07	815 E - 07	2,89
4	2662 E - 07	345 E - 07	2,96
5	1395 E - 07	176 E - 07	3
6	815 E - 07	101 E - 07	3,02
7	515 E - 07	63 E - 07	3,02
8	345 E - 07	42 E - 07	3,04
9	242 E - 07	29 E - 07	3,04
10	176 E - 07	21 E - 07	3,05
11	132 E - 07	16 E - 07	3,05
12	101 E - 07	12 E - 07	3,05
13	79 E - 07	9 E - 07	3,05
14	63 E - 07	8 E - 07	3,05
15	51 E - 07	6 E - 07	3,05
16	42 E - 07	5 E - 07	3,05
17	35 E - 07	4 E - 07	3,05
18	29 E - 07	3,5 E - 07	3,05
19	25 E - 07	3 E - 07	3,05
20	21 E - 07	2,6 E - 07	3,05

Pour

$$\begin{cases} f = x^2 y \\ \Omega = Q_N^* = [-0.5, +0.5] \times [-0.5, +0.5] \end{cases}$$

N	EN	$E_{N'} = E_{2N+1}$	α
1	29514 E - 06	1093 E - 06	3
3	1093 E - 06	861 E - 06	2,99
5	236 E - 06	222 E - 06	2,99
7	86 E - 06	87 E - 06	3,01
9	40,5 E - 06	43 E - 06	2,99
11	22,6 E - 06	24 E - 06	3
13	13,4 E - 06	15 E - 06	3
15	8,7 E - 06	1 E - 06	2,99
17	6 E - 06	0,7 E - 06	3
19	4,5 E - 06	0,5 E - 06	2,99

Pour

$$\begin{cases} f = x^2 y \\ \Omega = Q_N = [0,1] \times [0,1] \end{cases}$$

N	E_N	$E_{N'} = E_{2N}$	α
1	306250 E - 07	38281 E - 07	3,01
2	38281 E - 07	4785 E - 07	3,01
3	11343 E - 07	1418 E - 07	3,01
4	4785 E - 07	598 E - 07	3,01
5	2450 E - 07	306 E - 07	3,01
6	1420 E - 07	177 E - 07	3,01
7	893 E - 07	112 E - 07	3,01
8	598 E - 07	74 E - 07	3,01
9	420 E - 07	53 E - 07	3,01
10	306 E - 07	38 E - 07	3,01
11	230 E - 07	28 E - 07	3,01
12	177 E - 07	22 E - 07	3,01
13	140 E - 07	17 E - 07	3,01
14	111 E - 07	14 E - 07	3,01
15	90 E - 07	11 E - 07	3,01
16	74 E - 07	9 E - 07	3,01
17	62 E - 07	8 E - 07	3,01
18	52 E - 07	7 E - 07	3,01
19	45 E - 07	6 E - 07	3,01
20	38 E - 07	5 E - 07	3,01

$$\begin{cases} f = \sin(\pi(x+y)) \\ \Omega = Q_N^* = [-0.5, +0.5] \times [-0.5, +0.5] \end{cases}$$

N	E_N	$E_{N'} = E_{2N+1}$	α
1	522147 E - 07	169961 E - 07	1,07
3	169961 E - 07	8971 E - 07	3,46
5	29543 E - 07	2035 E - 07	3,39
7	8971 E - 07	762 E - 07	3,25
9	3902 E - 07	366 E - 07	3,16
11	2035 E - 07	204 E - 07	3,11
13	1194 E - 07	125 E - 07	3,1
15	762 E - 07	82 E - 07	3,05
17	517 E - 07	57 E - 07	3,07
19	366 E - 07	41 E - 07	3,04

$$\begin{cases} f = \mathrm{Sin}\,(\pi(x+y)) \\ \Omega = [0,1] \times [0,1] \end{cases}$$

N	E_N	$E_{N'} = E_{2N}$	α
1	522147 E - 07	974729 E - 07	- 0,9
2	974729 E - 07	93392 E - 07	3,40
3	279067 E - 07	20822 E - 07	3,76
4	93392 E - 07	7317 E - 07	3,69
5	37579 E - 07	3372 E - 07	3,49
6	20822 E - 07	1885 E - 07	3,48
7	11198 E - 07	1145 E - 07	3,30
8	7317 E - 07	744 E - 07	3,31
9	4691 E - 07	512 E - 07	3,21
10	3372 E - 07	367 E - 07	3,21
11	2447 E - 07	272 E - 07	3,18
12	1885 E - 07	207 E - 07	3,20
13	1438 E - 07	161 E - 07	3,17
14	1145 E - 07	128 E - 07	3,18
15	906 E - 07	103 E - 07	3,15
16	746 E - 07	84 E - 07	3,17
17	610 E - 07	70 E - 07	3,14
18	512 E - 07	58 E - 07	3,16
19	428 E - 07	49 E - 07	3,14
20	367 E - 07	42 E - 07	3,14

$$\begin{cases} f = 1/1.1+x+y \\ \Omega = Q_N^* = [-0.5,\ 0.5] \times [-0.5,\ 0.5] \end{cases}$$

N	E_N	$E_{N'} = E_{2N+1}$	α
1	263,04714 E - 02	101,99787 E - 02	0,86
3	101,99787 E - 02	28,5177 E - 02	1,49
5	50,07872 E - 02	12,7284 E - 02	1,73
7	28,5177 E - 02	6,6484 E - 02	1,92
9	18,54113 E - 02	3,9294 E - 02	2,07
11	12,7284 E - 02	2,5072 E - 02	2,19
13	9,0618 E - 02	1,69 E - 02	2,3
15	6,6483 E - 02	1,19 E - 02	2,36
17	5,047 E - 02	0,866 E - 02	2,44
19	3,9294 E - 02	0,649 E - 02	2,5

$$\begin{cases} f = 1/0.1+x+y \\ \Omega = Q_N = [0,1] \times [0,1] \end{cases}$$

N	E_N	$E_{N'} = E_{2N}$	α
1	272,72727 E - 02	142,85714 E - 02	0,94
2	142,85714 E - 02	74,19189 E - 02	0,95
3	98,52285 E - 02	44,85514 E - 02	1,14
4	74,19189 E - 02	28,9574 E - 02	1,36
5	57,14286 E - 02	19,64912 E - 02	1,55
6	44,85514 E - 02	13,86767 E - 02	1,70
7	35,78678 E - 02	10,10485 E - 02	1,83
8	28,9574 E - 02	7,56076 E - 02	1,95
9	23,7231 E - 02	5,79212 E - 02	2,04
10	19,64912 E - 02	4,53571 E - 02	2,12
11	16,43477 E - 02	3,61142 E - 02	2,20
12	13,86767 E - 02	2,91759 E - 02	2,26
13	11,79497 E - 02	2,38747 E - 02	2,32
14	10,10485 E - 02	1,97604 E - 02	2,37
15	8,71429 E - 02	1,65226 E - 02	2,41
16	7,56076 E - 02	1,39424 E - 02	2,45
17	6,59663 E - 02	1,18631 E - 02	2,49
18	5,79212 E - 02	1,01703 E - 02	2,52
19	5,11416 E - 02	0,87792 E - 02	2,55
20	4,53571 E - 02	0,76263 E - 02	2,58

Les résultats numériques précédents montrent que l'ordre de convergence tend vers 3, quand N augmente. Il semble donc que l'erreur d'interpolation pourrait être en $O(h^3)$ avec $h = 1/N$.

3 - Etude théorique de l'erreur d'interpolation.

<u>*Proposition 3.*</u>

Soit $\hat{\Omega} = [-h/2, 1+h/2]$; *et soit* $f \in C^3(\hat{\Omega})$. *L'erreur d'interpolation est en* $O(h^\alpha)$; *avec* α *au moins égal à 2.*

Démonstration.

Soit $f \in C^3(\hat{\Omega})$, et S la spline quadratique interpolant f aux points I, $(1 \leq I \leq N_o)$, appartenant à Q_N^* (ou Q_N).
C'est à dire que $\pi_N f = S$.
D'après ce qui précède, Ω est subdivisé en petits carrés appelés Q_{ij} (ou Q_{ij}^*) avec $1 \leq i, j \leq N$.

Soit i_o, j_o tq $1 \leq i_o, j_o \leq N$, appelons C_{i_o,j_o} le centre du carré Q_{i_o,j_o}.

Soit $\hat{Q}_{i_o,j_o}$ le carré de centre C_{i_o,j_o} et de côtés 2 h et $S_2 f$ le quasi-interpolant défini par P. Sablonnière [10]

$$S_2 f(x,y) = \sum_{i,j} (f(c_{ij}) - \frac{1}{8} h^2 \Delta f(c_{ij}))\, M_{ij}$$

avec

Δf = Laplacien de f

M_{ij} = B-spline centrée au point c_{ij}

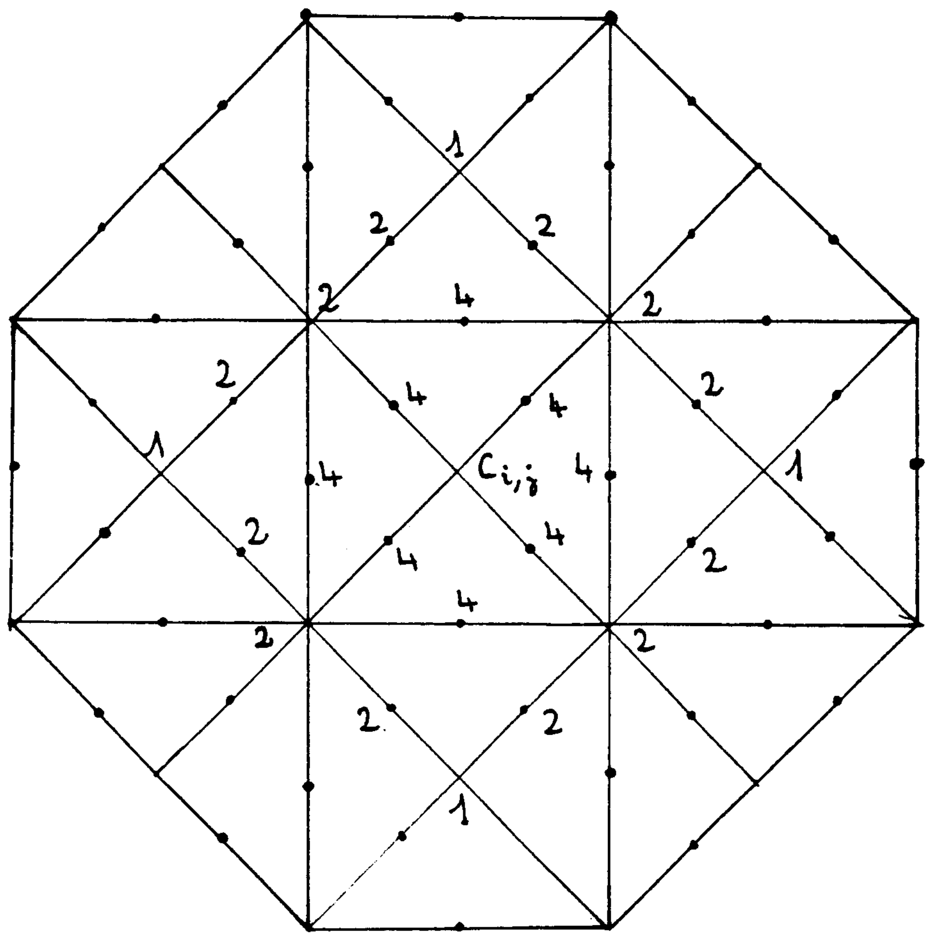


Figure 25. *B-spline de* $S_P(2,1)$ *(Normalisation : diviser par 8, voir [10]).*

P. Sablonnière donne dans [10] le résultat suivant :

(1) $$\boxed{\|S_2 f - f\|_{\infty, Q_{i_o,j_o}} \leq \{ \frac{\sqrt{3}}{27} M_3 (c_{i_o,j_o}) + \frac{31}{24} \hat{\omega}_3^1(h)\} h^3}$$

avec

$$\begin{cases} M_3(c_{i_o,j_o}) = \underset{k+\ell=3}{\text{Max}} \{\partial^{k\ell} f(c_{i_o,j_o})\} \\ \hat{\omega}_3(h) = \underset{k+\ell=3}{\text{Max}} \hat{\bar{\omega}}(\partial^{k\ell} f,h) \\ \hat{\omega}(\partial^{k,\ell} f,h) = \sup\limits_{\substack{\|x_1-x_2\|\leq h \\ x_1,\ x_2 \in \hat{Q}_{i_o,j_o}}} |\partial^{k,\ell} f(x_1) - \partial^{k,\ell} f(x_2)| \\ \qquad = \text{module de continuité de } \partial^{k\ell} f \end{cases}$$

d'où on a :

$$M_3(c_{i_o,j_o}) \leq |f|_{3,\infty, \hat{Q}_{i_o,j_o}}$$

et

$$\hat{\omega}_3(h) \leq |f|_{3,\infty, \hat{Q}_{i_o,j_o}}$$

et donc

(2) $$\boxed{\|S_2 f - f\|_{\infty, Q_{i_o,\gamma_o}} \leq Ch^3 |f|_{3,\infty,\hat{Q}_{i_o,j_o}}}$$

Or ceci est vrai $\forall i_o, j_o$; on peut généraliser le résultat au domaine $\hat{\Omega}$, c'est à dire

(3) $$\boxed{\|S_2 f - f\|_{\infty, \Omega} \leq Ch^3 \ |f|_{3,\infty,\hat{\Omega}}}$$

S_2 étant une spline quadratique, on a donc

$$\pi_N S_2 = S_2.$$

On peut donc s'écrire :

$$f - S = f - \pi_N f - S_2 f + \pi_N S_2 f$$

d'où

$$||f-S||_{\infty,\Omega} \leq ||f-S_2 f||_{\infty,\Omega} + ||\pi_N(f-S_2 f)||_{\infty,\Omega}$$

$$\leq (1 + ||\pi_N||)\ ||f-S_2 f||_{\infty,\Omega}$$

d'où d'après (3), on a :

$$\boxed{||f-S||_{\infty,\Omega} \leq C\ (1 + ||\pi_N||)\ h^3 |f|_{3,\infty,\hat{\Omega}}} \tag{4}$$

Mais les résultats numériques précédents montrent qu'il existe C_1 et C_2 tels que :

$$||\pi_N|| \leq C_1 N + C_2 = \frac{C_1}{h} + C_2$$

En remplaçant dans (4) on a :

$$\boxed{||f-S||_{\infty,\Omega} \leq (C_1' h^2 + C_2' h^3)\ |f|_{3,\infty,\hat{\Omega}}}$$

C.Q.F.D.

V - Quelques généralisations.

On choisit les exemples suivants comme généralisation des cas précédents.

1ère exemple.

$$\begin{cases} f = x + 2y - 1 \\ \Omega = Q_N^* \text{ (ou } Q_N) \end{cases}$$

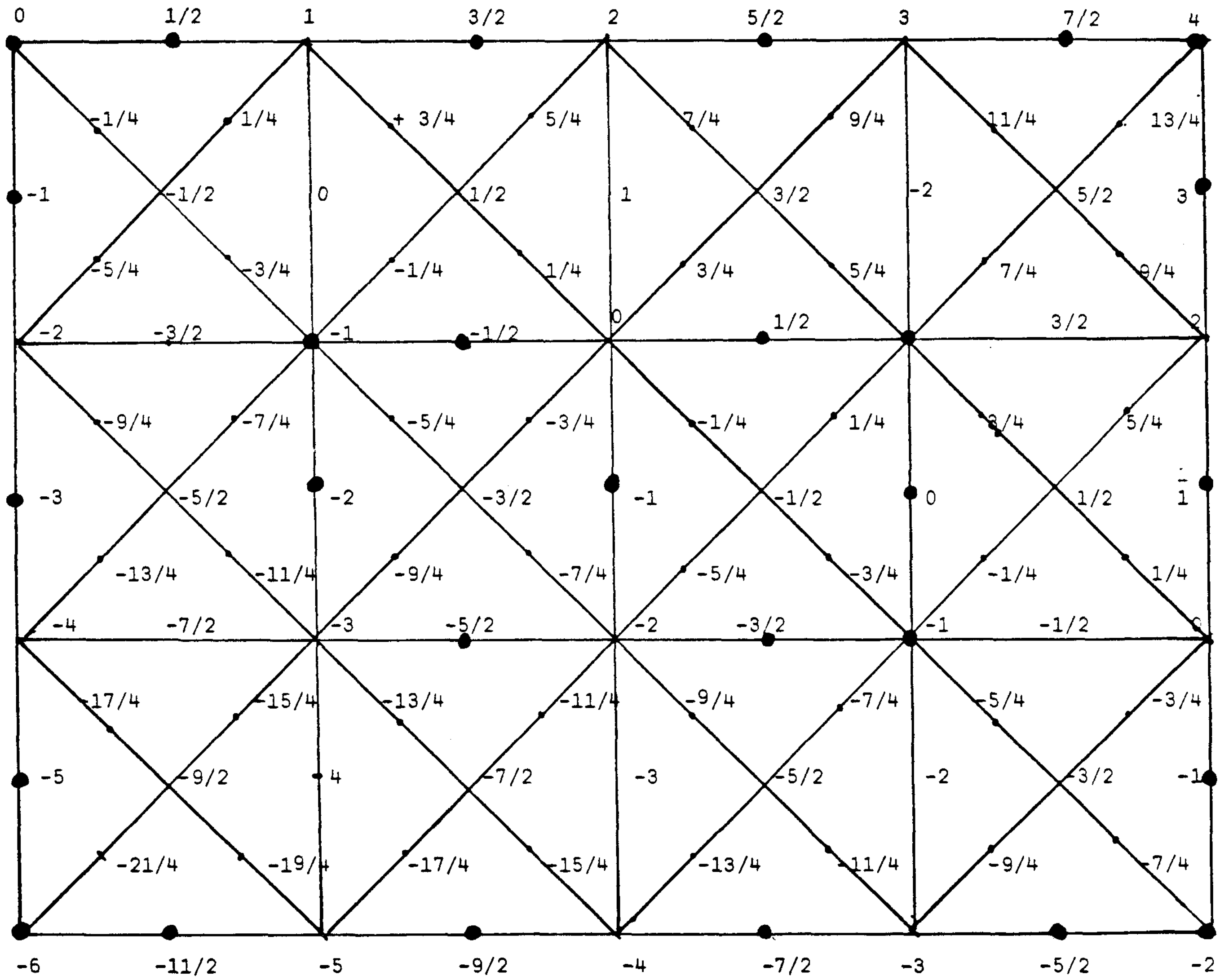


Figure 26. Représentation des B-coefficients de S *interpolant de* f.

2ème exemple.

$$f = x^2 + y$$

(avec un autre cas de figure)

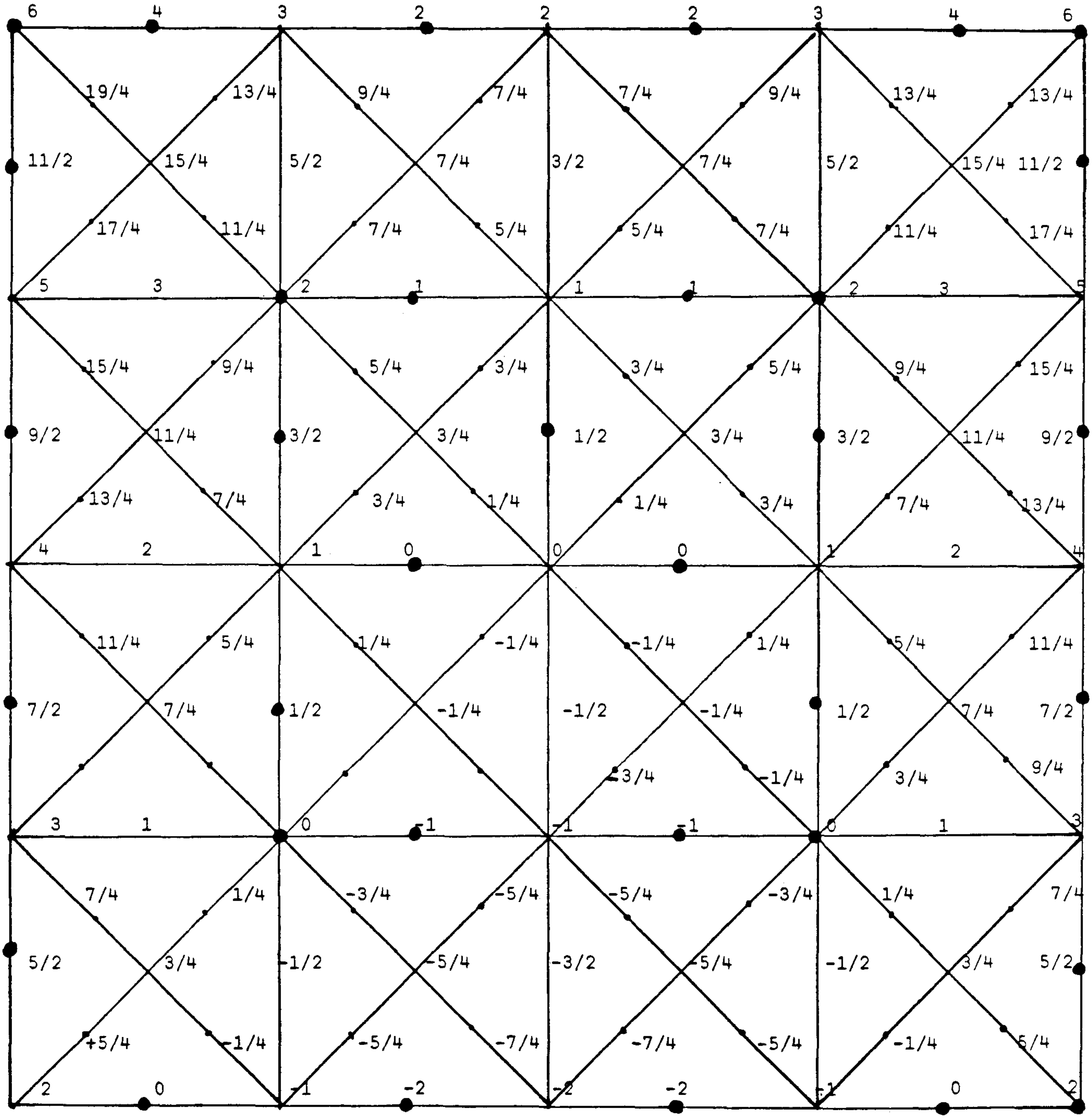


Figure 27. Représentation des B-coefficients de S interpolant de f.

3ième exemple.

$$f = 3x + 2y$$

(avec un autre cas de figure).

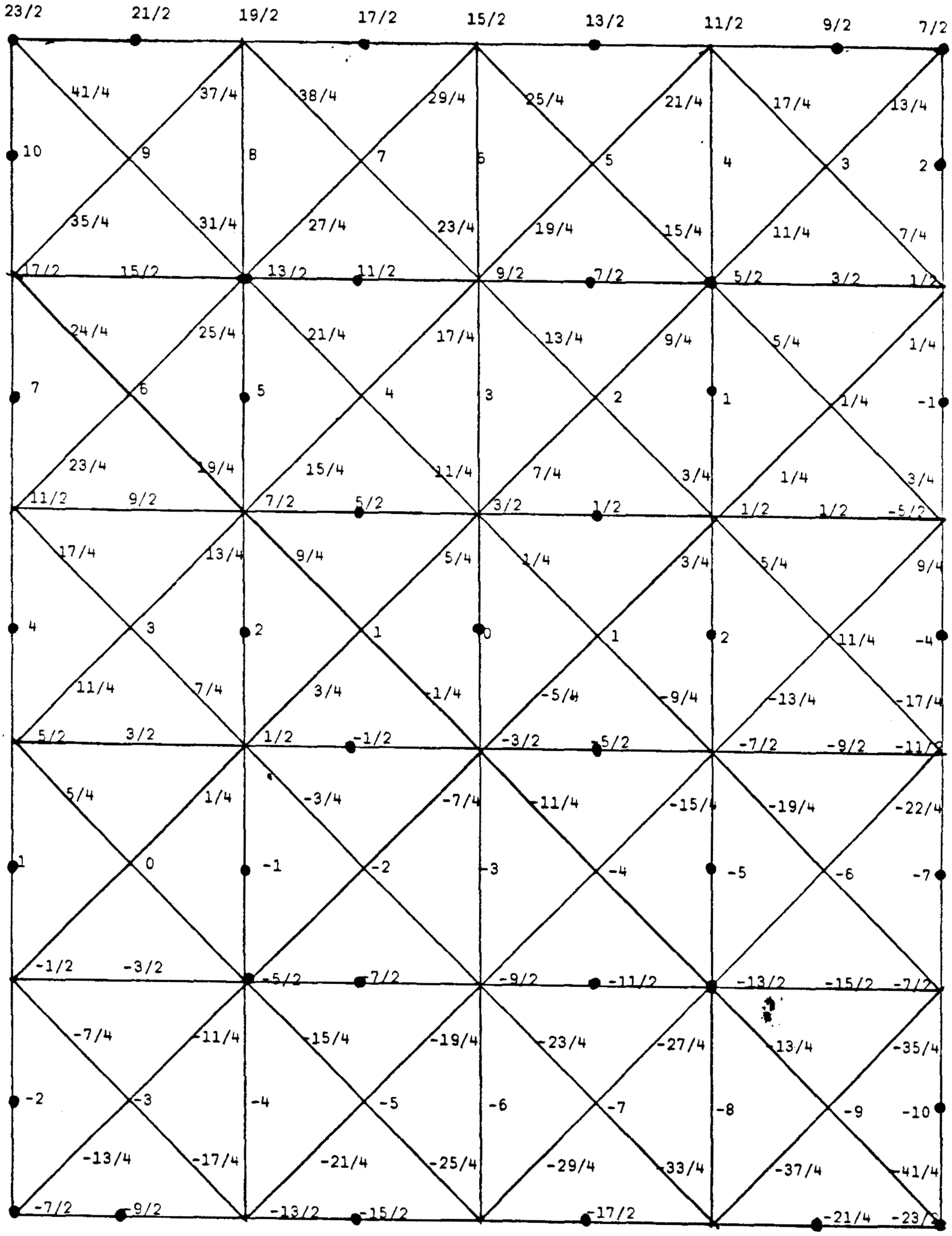
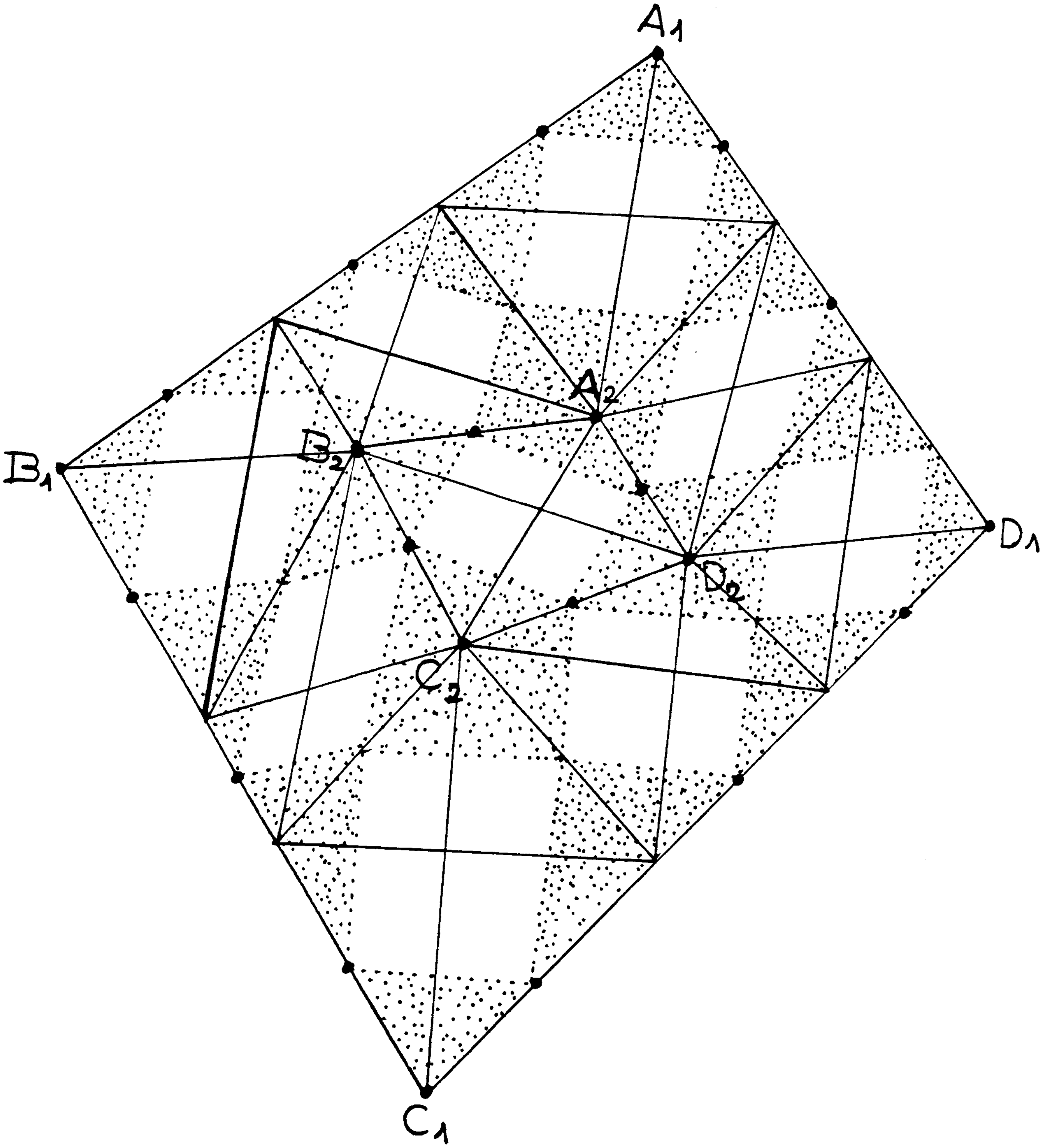


Figure 28. Représentation des B-coefficients de S interpolant f.

On peut généraliser l'étude précédente, en prenant pour Ω, un quadrilatère quelconque, et en choisissant les points d'interpolation de la manière suivante :



Dans ce cas, on procède de la même manière que précédemment.
On cherche d'abord les B-coefficients correspondants aux bords de $Q_N^*(Q_N)$; et ce, en résolvant les systèmes (S1) et (S2) donnés au début de ce chapitre.
Le passage de Q_N à Q_{N+2}, se fait à l'aide de la technique des plaques (pour cette notion voir [10]).

PROGRAMME 1 = ODCI

```
C INTERPCLATICN DE LAGRANGE PAR DES SALINES GLADRATIGUES
C  CN PRENC LN DCMAINE CARRE (-C.5,+C.5))*(-0.5,0.5)
C CN CHCISIT SLR LES CCTES DE CE CARRE LNE SUBDIVISICN DE PAS HN=1,N
C AVEC N IMPAIR
C  CN CETINT LNE SLITE CRCISSANTE CE CARRES
C  ILS SCNT APPELES G'N TEL GUE G'N EST INCLL CANS G'(N+1) PCUR TOLT N
C CN CALCLLE L'ERRELR C'INTERPCLATION PCLR TOLT N ET PAR SUITE
C CN CALCLLF L'CRDRE CE CCNVERGENCE ALPHA=LOG(EN/E(N+1))/LOG(HN/H(N+1))
C EN ETANT L'ERRELR C'INTERPCLATICN CCRRESPONDANT A LA SLBDIVISICN DE PAS HN
C DECLARATICN
      INTEGER H,C,P1,P2,P3,P4,P5,PP,PN
      DIMENSICN A(21,21),X(5C),Y(5C)
      DIMENSICN F1(10),G(1C),H1(10),E(1C)
C  CN TRAITE LE CAS N=1 A PART
      DC 2C K=1,8
      REAC(105,15)X(K),Y(K)
  20  CCNTINUE
  15  FCRMAT(2F8.2)
C  INTERPCLATICN SLR LE CARRE G1
      CALL S0(A,3,X,Y)
C  B-CCEFF. INTERNES
      CALL S4(A,3,3)
C FIN DE L'INTERPCLATICN SLR G1
      N1=3
C CALCUL DE L'ERRELR
      CALL S5(A,0,0,1,E)
      E1=E
      WRITE(10C,99)
  99  FCRMAT('L ERRELR D INTRPCLATION SLR G1 EST')
      WRITE(10C,79)E1
      DC 554 PP=2,21
      N=2*Pp-1
C CALCUL DES PCINTS D'INTERPCLATICN SUR G1
      X(1)=-0,5/FLCAT(N)
      Y(1)=-0,5/FLCAT(N)
      X(2)=-0,5/FLCAT(N)
      Y(2)=0
      X(3)=-0,5/FLCAT(N)
      Y(3)=0,5/FLCAT(N)
      X(4)=0
      Y(4)=0,5/FLCAT(N)
      X(5)=0,5/FLOAT(N)
      Y(5)=0,5/FLCAT(N)
      X(6)=0,5/FLCAT(N)
      Y(6)=0
      X(7)=0,5/FLCAT(N)
      Y(7)=-0,5/FLCAT(N)
      X(8)=0
      Y(8)=-0,5/FLCAT(N)
C FIN DE CETTE LECTURE
C  INTERPCLATICN SLR LE CARRE (0,0)
```

```
      N1=2*N+1
      CALL S0(A,N1,X,Y)
C  FIN DE CE CALCUL
C E COEFFICIENTS INTERNES
      CALL S4(A,N1,N1)
C CALCUL DE L'ERREUR SUR (0,0)
      CALL S5(A,0.,0.,N,E)
      E2=E
C CALCUL DES POINTS D'INTERPOLATION SUR LES AUTRES CARRES
      IF(N.EQ.1) GO TO 554
      N2=(N-1)/2
      DO 57 PN=1,N2
      P=2*PN+1
      P1=P*P
      P2=P1+P+1
      P3=P2+P+1
      P4=P3+P+1
      P5=(P+2)*(P+2)-1
      X(P1)=(-0.5-PN)/FLOAT(N)
      Y(P1)=X(P1)
      X(P1+1)=X(P1)
      Y(P1+1)=Y(P1)+0.5/FLOAT(N)
      DO 51 K=P1+2,P2-1
      X(K)=X(K-1)
      Y(K)=Y(K-1)+1./FLOAT(N)
 51   CONTINUE
      X(P2)=X(P2-1)
      Y(P2)=Y(P2-1)+0.5/FLOAT(N)
      X(P2+1)=X(P2)+0.5/FLOAT(N)
      Y(P2+1)=Y(P2)
      DO 52 K=P2+2,P3-1
      X(K)=X(K-1)+1./FLOAT(N)
      Y(K)=Y(K-1)
 52   CONTINUE
      X(P3)=X(P3-1)+0.5/FLOAT(N)
      Y(P3)=Y(P3-1)
      X(P3+1)=X(P3)
      Y(P3+1)=Y(P3)-0.5/FLOAT(N)
      DO 53 K=P3+2,P4-1
      X(K)=X(K-1)
      Y(K)=Y(K-1)-1./FLOAT(N)
 53   CONTINUE
      X(P4)=X(P4-1)
      Y(P4)=Y(P4-1)-0.5/FLOAT(N)
      X(P4+1)=X(P4)-0.5/FLOAT(N)
      Y(P4+1)=Y(P4)
      DO 54 K=P4+2,P5
      X(K)=X(K-1)-1./FLOAT(N)
      Y(K)=Y(K-1)
 54   CONTINUE
      X(P5+1)=X(P1)
```

```
      Y(P5+1)=Y(P1)
C FIN DE LA LECTURE DES POINTS D'INTERPOLATION SUR QP
C ON CHERCHE D'ABORD LES B-COEFFICIENTS APPARTENANT AUX BORDS DE QP
C ON FAIT APPEL AUX SOUS PROGRAMME S2 PERMETTANT LE CALCUL DE CERTAINS DE CE
C B-COEFFICIENTS
C COTE (A,B) C'EST A DIRE SEGMENT D'EXTREMITES(-4PN,-4PN)ET(-4PN,4PN)
      I=-4*PN
      A(I-2+N1,I-2+N1)=F(X(P1),Y(P1))
      A(I-2+N1,-I+2+N1)=F(X(P2),Y(P2))
      LP=P-1
      H1(1)=3./2.
      G(1)=1./4
      IF(LP.EQ.2)GO TO 66
      DO 60 K=2,LP-1
      F1(K)=1./4
      H1(K)=3./2.
      G(K)=1./4
 60   CONTINUE
 66   F1(LP)=1./4.
      H1(LP)=3./2.
      CALL S2(LP,P1,F1,G,H1,X,Y,B)
      DO 413 J=1,P-1
      J1=4*J-2*P
      A(I-2+N1,J1+N1)=B(J)
      A(I-2+N1,J1-2+N1)=2*F(X(P1+J),Y(P1+J))-(A(I-2+N1,J1+N1)+A(I-2+N1,
     SJ1-4+N1))/2
C  RESTE DES B-COEFF. AUX BORDS DU CARRE (I,J1+2)
      CALL S1(A,I+N1,J1+N1,2,0,4,0)
 413  CONTINUE
      A(I-2+N1,-I+N1)=2*F(X(P1+P),Y(P1+P))-(A(I-2+N1,-I+2+N1)+
     SA(I-2+N1,-I-2+N1))/2
C FIN DU CALCUL DES B-COEFF. LE LONG DE (A,B)
C B-COEFF.LE LONG DE (B,C) C'EST A DIRE(-4PN,4PN),(4PN,4PN))
      J=4*PN
      A(J+2+N1,J+2+N1)=F(X(P3),Y(P3))
      DO 61 K=2,LP
      H1(K)=3./2.
 61   CONTINUE
      CALL S2(LP,P2,F1,G,H1,X,Y,B)
      DO 411 I=1,P-1
      I1=4*I-2*P
      A(I1+N1,J+2+N1)=B(I)
      A(I1-2+N1,J+2+N1)=2*F(X(P2+I),Y(P2+I))-(A(I1+N1,J+2+N1)+
     SA(I1-4+N1,J+2+N1))/2
C   RESTE DES B-COEFF. AUX BORDS DU CARRE (I1+2,J)
      CALL S1(A,I1+N1,J+N1,0,-2,0,-4)
 411  CONTINUE
      A(J+N1,J+2+N1)=2*F(X(P2+P),Y(P2+P))-(A(J-2+N1,J+2+N1)+
     SA(J+2+N1,J+2+N1))/2
C FIN DU CALCUL DES B-COEFF.LE LONG DE (B,C)
C B-COEFFICIENTS APPARTENANT A (C,D) C'EST A DIRE(4PN,4PN),(4PN,-4PN))
```

```
      I=4*PN
      A(I+2+N1,-I-2+N1)=F(X(P4),Y(P4))
      DO 62 K=2,LP
      H1(K)=3./2.
 62   CONTINUE
      CALL S2(LP,P3,P1,G,H1,X,Y,B)
      DO 414 J=1,P-1
      J1=-4*J+2*P
      A(I+2+N1,J1+N1)=B(J)
      A(I+2+N1,J1+2+N1)=2*F(X(P3+J),Y(P3+J))-(A(I+2+N1,J1+4+N1)+
     SA(I+2+N1,J1+N1))/2
C  RESTE DES B-COEFF. SUR LE CARRE (I,J1-2)
      CALL S1(A,I+N1,J1+N1,-2,0,-4,0)
 414  CONTINUE
      A(I+2+N1,-I+N1)=2*F(X(P3+P),Y(P3+P))-(A(I+2+N1,-I+2+N1)+
     SA(I+2+N1,-I-2+N1))/2
C FIN DU CALCUL DES B-COEFFICIENTS APPARTENANT A (C,D)
C B-COEFF APPARTENANT A DA C'EST A DIRE ((4PN,-4PN),(-4PN,-4PN))
      J=-4*PN
      DO 64 K=2,LP
      H1(K)=3./2.
 64   CONTINUE
      CALL S2(LP,P4,P1,G,H1,X,Y,B)
      DO 415 I=1,P-1
      I1=-4*I+2*P
      A(I1+N1,J-2+N1)=B(I)
      A(I1+2+N1,J-2+N1)=2*F(X(P4+I),Y(P4+I))-(A(I1+4+N1,J-2+N1)+
     SA(I1+N1,J-2+N1))/2
C  RESTE DES B-COEFF. SUR LE CARRE (I1-2,J)
      CALL S1(A,I1+N1,J+N1,0,2,0,4)
 415  CONTINUE
      A(J+N1,J-2+N1)=2*F(X(P4+P),Y(P4+P))-(A(J+2+N1,J-2+N1)+
     SA(J-2+N1,J-2+N1))/2
C FIN DU CALCUL
C FIN DU CALCUL DES B-COEFF.APPARTENANT AUX BORDS DE TOUS LES CARRES
C  CONTENUS DANS GP
C PASSAGE AUX COEFFICIENTS INTERNES
C  CARRES LELONG DE (A,B)
      CALL S3(A,-PN,-PN,-PN,PN,N1,N,E2)
C  CARRES LELONG DE (B,C)
      CALL S3(A,1-PN,PN,PN,PN,N1,N,E2)
C  CARRES LELONG DE (C,D)
      CALL S3(A,PN,PN,-PN,PN-1,N1,N,E2)
C  CARRES LELONG DE (D,A)
      CALL S3(A,1-PN,PN-1,-PN,-PN,N1,N,E2)
 57   CONTINUE
      WRITE(108,80)N
  80  FORMAT('L ERREUR D INTERPOLATION POUR N=',I3,'EST')
      WRITE(108,79)E2
C CALCUL DE L'ORDRE DE CONVERGENCE
      ALPHA=LOG(E1/E2)/LOG(FLOAT(N)/FLOAT(N-2))
```

```
      WRITE(108,81)N
 81   FORMAT('L ORDRE DE CONVERGENCE POUR N=',I3,'EST')
      WRITE(108,79)ALPHA
 79   FORMAT(F18.12)
      E1=E2
554   CONTINUE
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE SO(A,N1,X,Y)
      DIMENSION A(21,21),X(50),Y(50)
C  INTERPOLATION SUR LE CARRE (0,0)
      A(N1-2,N1-2)=F(X(1),Y(1))
      A(N1-2,N1+2)=F(X(3),Y(3))
      A(N1-2,N1)=2*F(X(2),Y(2))-(A(N1-2,N1-2)+A(N1-2,N1+2))/2
      A(N1+2,N1+2)=F(X(5),Y(5))
      A(N1,N1+2)=2*F(X(4),Y(4))-(A(N1-2,N1+2)+A(N1+2,N1+2))/2
      A(N1+2,N1-2)=F(X(7),Y(7))
      A(N1+2,N1)=2*F(X(6),Y(6))-(A(N1+2,N1+2)+A(N1+2,N1-2))/2
      A(N1,N1-2)=2*F(X(8),Y(8))-(A(N1+2,N1-2)+A(N1-2,N1-2))/2
C  FIN DU PROGRAMME SO
      RETURN
      END
```

```
      SLBRCUTINE S1(A,I,J,K1,K2,K3,K4)
C   DECLARATICN
      DIMENSICN A(21,21)
      A(I,J)=2*A(I+K1,J+K2)-A(I+K3,J+K4)
C   FIN DL SOLS PRCGRAMME S1
      RETLRN
      END
```

```
      SUBROUTINE S2(L,R,F1,G,H1,X,Y,B)
C     DECLARATION
      INTEGER R
      DIMENSION F1(10),G(10),H1(10),B(10),D(10)
      DIMENSION X(50),Y(50)
      REAL M
C     RESOLUTION D'UN SYSTEME DE L'EQUATIONS A L'INCONNUES
C     PAR LA METHODE DE GAUSS
      D(1)=F(X(R+2),Y(R+2))+F(X(R+1),Y(R+1))-F(X(R),Y(R))/4
      IF(L.LT.3)GO TO 110
      DO 35 I=2,L-1
      D(I)=F(X(R+I+1),Y(R+I+1))+F(X(R+I),Y(R+I))
   35 CONTINUE
  110 D(L)=F(X(L+R+1),Y(L+R+1))+F(X(L+R),Y(L+R))-F(X(L+R+2),Y(L+R+2))/4
      DO 612 K=2,L
      M=F1(K)/H1(K-1)
      H1(K)=H1(K)-M*G(K-1)
      D(K)=D(K)-M*D(K-1)
  612 CONTINUE
      B(L)=D(L)/H1(L)
      DO 613 K=L-1,1,-1
      B(K)=(D(K)-G(K)*B(K+1))/H1(K)
  613 CONTINUE
C     FIN DU SOUS PROGRAMME S2
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S3(A,L1,L2,L3,L4,N1,N,E2)
C  CALCUL DE L'ERREUR D'INTERPOLATION SUR LE CARRE (I,J)
C DECLARATION
      DIMENSION A(21,21)
      DO 644 I1=L1+N1,L2+N1
      I=4*(I1-N1)
      DO 645 J1=L3+N1,L4+N1
      J=4*(J1-N1)
      CALL S4(A,I+N1,J+N1)
      CALL S5(A,I,J,N,E)
      IF (E2.GE.E)GO TO 645
      E2=E
  645 CONTINUE
  644 CONTINUE
C FIN DU SOUS PROGRAMME S3
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S4(A,I,J)
C     DECLARATION
      DIMENSION A(21,21)
      A(I-1,J-1)=(A(I-2,J)+A(I,J-2))/2
      A(I+1,J-1)=(A(I,J-2)+A(I+2,J))/2
      A(I+1,J+1)=(A(I,J+2)+A(I+2,J))/2
      A(I-1,J+1)=(A(I,J+2)+A(I-2,J))/2
      A(I,J)=(A(I-1,J+1)+A(I+1,J-1))/2
C     FIN DU SOUS PROGRAMME S4
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S5(A,I,J,N,E)
      DIMENSION A(21,21)
      XA=(FLOAT(I)/4.-0.5)/FLOAT(N)
      YA=(FLOAT(J)/4.-0.5)/FLOAT(N)
      XB=(FLOAT(I)/4.+0.5)/FLOAT(N)
      YB=(FLOAT(J)/4.-0.5)/FLOAT(N)
      XG=I/FLOAT(4*N)
      YG=J/FLOAT(4*N)
      N1=2*N+1
      M=6
      E=0.
      DO 198 N11=1,M+1
      M1=N11-1
      W1=M1/FLOAT(M)
      DO 199 N2=1,M-M1+1
      M2=N2-1
      W2=M2/FLOAT(M)
      W3=1-W1-W2
C     POUR Z APPARTENANT A T1 ON A
      CALL S6(A,W1,W2,W3,XA,XB,XG,YA,YB,YG,I+N1,J+N1,-2,-2,+2,-2,-1,-1,
     S+1,-1,0,-2,H)
      IF(H.LE.E)GO TO 141
      E=H
C PLACONS NOUS SUR T2
  141 XC=(FLOAT(I)/4.+0.5)/FLOAT(N)
      YC=(FLOAT(J)/4.+0.5)/FLOAT(N)
      CALL S6(A,W1,W2,W3,XB,XC,XG,YB,YC,YG,I+N1,J+N1,+2,-2,+2,+2,+1,-1,
     S+1,+1,+2,0,H)
      IF(H.LE.E)GO TO 142
      E=H
C ON SE PACE SUR T3
C  SUR T3
  142 XD=(FLOAT(I)/4.-0.5)/FLOAT(N)
      YD=(FLOAT(J)/4.+0.5)/FLOAT(N)
      CALL S6(A,W1,W2,W3,XC,XD,XG,YC,YD,YG,I+N1,J+N1,+2,+2,-2,+2,+1,+1,
     S-1,+1,0,+2,H)
      IF(H.LE.E)GO TO 143
      E=H
C PLACONS NOUS SUR T4
C POUR APPARTENANT A T4 ON A
  143 CALL S6(A,W1,W2,W3,XD,XA,XG,YD,YA,YG,I+N1,J+N1,-2,+2,-2,-2,-1,+1,
     S-1,-1,-2,0,H)
      IF(H.LE.E)GO TO 199
      E=H
  199 CONTINUE
  198 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBRCUTINE S6(A,W1,W2,W3,X1,X2,X3,Y1,Y2,Y3,I,J,K1,K2,K3,K4,K5,K6,
     SK7,K8,K9,K10,H)
C   DECLARATION
      DIMENSION A(21,21)
      XZ=W1*X1+W2*X2+W3*X3
      YZ=W1*Y1+W2*Y2+W3*Y3
      SF=A(I+K1,J+K2)*W1*W1+A(I+K3,J+K4)*W2*W2+A(I,J)*W3*W3+2*A(I+K5,
     SJ+K6)*W1*W3+2*A(I+K7,J+K8)*W2*W3+2*A(I+K9,J+K10)*W1*W2
      H=ABS(SF-F(XZ,YZ))
C   FIN DU PROGRAMME S6
      RETURN
      END
```

```
REAL FUNCTION F(C,D)
F=C*C*D
RETURN
END
```

PROGRAMME 2 = FLG

```
C  INTERPOLATION DE LAGRANGE PAR DES SPLINES QUADRATIQUES SUR UN DOMAINE
C  CARRE TRIANGULE
C LE DOMAINE CONSIDERE EST APPELE QN DE COTE N
C  LES COTES DE CE CARRE SONT SUBDIVISES EN N SEGMENTS,SI BIEN QU'ON OBTIENT
C  DES CARRES DE COTES 1 INCLUS DANS QN
C POUR TOUT P INFERIEUR OU EGAL A N ON CHERCHE UN MAJORANT MJ ET UN MINORANT MN
C DE LA NORME DE L'OPERATEUR D'INTERPOLATION SUR LE BLOC QP-Q(P-1)
C  CELA PERMETTRA DE VOIR LA VARIATION DE LA NORME DE L'OPERATEUR
C EN FONCTION DE N
C LINTERPOLATION POUR CHACUNE DES FONCTIONS DE BASE SE FAIT SUR Q(P-1)
C P SUPERIEUR A 1 ET INFERIEUR OU EGAL A N
C L'ALGORITHME 2 PERMET LE PASSAGE DE Q(P-1) A QP
C   DECLARATION
      INTEGER P,Q,PP,Q1,PQ,P1,P2,P3
      REAL MJ,MN
      DIMENSION A1(13,120),B1(13,120),A(13,13),B(6),G(6),H1(6),E1(6)
      DIMENSION C(24)
C A1 ET B1 REPRESENTENT LES TABLEAUX DANS LESQUELS ON PLACE LES B-COEFFICIENTS
C DES FONCTIONS DE BASE ,POUR CALCULER MN ET MJ
C LES ELEMENTS DE A REPRESENTENT LES B-COEFFICIENTS D'UNE FONCTION DONNEE
C B,G,H1,E1 SONT LES MATRICES QUI INTERVIENNENT DANS LA RESOLUTION
C DU SYSTEME DE GAUSS EB=D,E EST FORMEE DES BLOCS (E1,G,H1)
C CETTE RESOLUTION SE FAIT DANS LE PROGRAMME S2
C C TABLEAU DES FONCTIONS DE BASE
C LE DIMENSSIONNEMENT DE CES TABLEAUX EST DONNE POUR N=3
C   ORDRE DE LECTURE
      READ(105,20)N
   20 FORMAT(I3)
C       INTERPOLATION SUR Q1
C       L REPRESENTE L'INDICE DES FONCTIONS DE LAGRANGE
C      K REPRESENTE L'INDICE DES POINTS D'2NTERPOLATION
      DO 88 L=1,8
      DO 89 K=1,8
      IF(K.EQ.L) GO TO 6
      C(K)=0.
      GO TO 89
    6 C(K)=1.
   89 CONTINUE
C      ON FAIT L'INTERPOLATION SUR Q1 POUR LA FONCTION F=C(L)
C      C(L) ETANT LA LIEME FONCTION DE LAGRANGE
      A(1,1)=C(1)
      A(5,1)=C(3)
      A(3,1)=2*C(2)-(A(1,1)+A(5,1))/2
      A(5,5)=C(5)
      A(5,3)=2*C(4)-(A(5,5)+A(5,1))/2
      A(1,5)=C(7)
      A(3,5)=2*C(6)-(A(5,5)+A(1,5))/2
      A(1,3)=2*C(8)-(A(1,1)+A(1,5))/2
      CALL S4(A,3)
C      FIN DE L'INTERPOLATION SUR Q1
C      IL FAUDRAIT DONC PLACER CES ELEMENTS DANS LE TABLEAU A1
```

```
      CALL S5(U,A,3,3,A1)
   88 CONTINUE
C     LES B-COEFFICIENTS DES PREMIERES FONCTIONS DE LAGRANGE
C     APPARTENANT A Q1,SONT DONC PLACES DANS A1
C     IL RESTE A FAIRE LA SOMME DE LEURS VALEURS ABSOLUES
C     POUR TROUVER MJ
      MJ=0.
      DO 504 K=1,13
      S=0.
      DO 505 L=1,8
      S=S+ABS(A1(K,L))
  505 CONTINUE
      IF(S.LE.MJ) GO TO 504
      MJ=S
  504 CONTINUE
C CALCUL DE MN
      CALL S7(A1,1,8,MN)
C     PASSAGE A L'INTERPOLATION POUR P QUELCONQUE
      DO 999 P=2,N
      I=4*P-1
C     ON CHERCHE D'ABORD LES B-COEFFICIENTS SUR
C     (QP-Q(P-1)),DES PREMIERES FONCTIONS DE LAGRANGE
C     C'EST A DIRE LES FONCTIONS DU CARRE Q(P-1)
      PP=(P+1)*(P+1)-1
      P1=(P+1)*(P+1)
      P2=(P+2)*(P+2)-1
      P3=(P+1)*(P+2)
      DO 901 L=1,PP
      A(I+2,I+2)=0.
C     LES B-COEFFICIENTS DE CES FONCTIONS DE LAGRANGE
C     APPARTENANT AUX DEUX COTES DU CARRE QP, SONT
C     EN PRINCIPE NULS
      PQ=2*P
      DO 96 Q1=1,PQ
      J1=2*(Q1-1)+1
      A(I+2,J1)=0.
      A(J1,I+2)=0.
   96 CONTINUE
      A(I,1)=2*A1(3,L)-A1(2,L)
      IF(P.NE.2)GO TO 22
      A(1,I)=2*A1(11,L)-A1(6,L)
      GO TO 23
   22 LP=PP+L
      A(1,I)=2*A1(11,LP)-A1(6,LP)
C  B-COEFF. INTERNES
      DO 998 Q=1,P-2
      J=4*Q-1
      K2=PP*(2*Q-2)+L
      K3=PP*(2*Q-1)+L
      CALL S0(A,A1,B1,P,Q,I,J,P2,L,K2,K3,1)
C  FIN DE CE CALCUL
```

```
  568 CONTINUE
  23  Q=P-1
      J=4*Q-1
      K4=PP*(2*Q-2)+L
      CALL S3(A,A1,B1,P,Q,I,J,P2,L,K4,K4,1)
C     B-COEFFICIENTS SUR LE CARRE(I,I)
      CALL S4(A,I)
C     FIN DE CE CALCUL
C     PLACEMENT DES B-COEFFICIENTS DU CARRE(I,I)
      K=2*(P-1)*P2+L
      CALL S5(K,A,I,I,E1)
C     FIN DE CE PLACEMENT
  901 CONTINUE
C     PASSAGE AU CALCUL DES B-COEFFICIENTS DES NOUVELLES
C     FONCTIONS DE LAGRANGE
      DO 997 L=P1,P2
      DO 998 K=P1,P2
      IF(K.EQ.L) GO TO 18
      C(K)=0
      GO TO 998
   18 C(K)=1
  998 CONTINUE
C     CALCUL DES B-COEFFICIENTS SUIVANT LES AXES
      A(I+2,1)=C(P1)
      A(1,I+2)=C(P2)
      A(I+2,I+2)=C(P3)
      A(I,1)=0.
      A(1,I) 0.
C     CALCUL DES B-COEFFICENTS SUIVANT LES DEUX AUTRES COTES DU CARRE
C     FAIRE APPEL AU SOUS-PROGRAMME S2
      IF(P.NE.2)GO TO 55
      A(9,5)=2*(C(11)+C(10)-C(9)/4-C(12)/4)/3
      A(5,9)=2*(C(13)+C(14)-C(15)/4-C(12)/4)/3
      GO TO 156
  55  LP=P-1
      H1(1)=3./2.
      G(1)=1./4.
      IF(LP.EQ.2)GO TO 66
      DO 60 K=2,LP-1
      E1(K)=1./4.
      H1(K)=3./2.
      G(K)=1./4.
   60 CONTINUE
  66  E1(LP)=1./4.
      H1(LP)=3./2.
      CALL S2(LP,P1,E1,G,H1,C,B)
      I2=(I-3)/4
      DO 413 J=1,I2
      J1=4*J+1
      A(I+2,J1)=B(J)
  413 CONTINUE
```

```
      DO 61 K=4,LP
      H1(K)=3./2.
   61 CONTINUE
      CALL S2(LP,P3,E1,G,H1,C,B)
      DO 411 J=1,I2
      J1=4*J+1
      J2=P-J
      A(J1,I+2)=B(J2)
  411 CONTINUE
C     RESTE DES B-COEFFICIENTS SUR DES SEGMENTS
 156  DO 712 G=1,P
      J=4*G-1
      A(I+2,J)=2*C(P1+G)-(A(I+2,J-2)+A(I+2,J+2))/2
      A(J,I+2)=2*C(P2-G)-(A(J-2,I+2)+A(J+2,I+2))/2
C     FIN DU CALCUL DE CES B-COEFFICIENTS
  712 CONTINUE
C     RESTE A CALCULER LES B-COEFFICIENTS INTERNES
      DO 713 G=1,P-1
      J=4*G-1
      CALL S0(A,A1,B1,P,G,I,J,P2,L,K1,K2,O)
C  FIN DE CE CALCUL
  713 CONTINUE
C     CALCUL DES B-COEFFICIENTS SUR LE CARRE(I,I)
      CALL S4(A,I)
C     FIN DE CE CALCUL
C     RESTE A PLACER CES B-COEFFICIENTS DANS B1
      K=2*(P-1)*P2+L
      CALL S5(K,A,I,I,B1)
C     FIN DE CE PLACEMENT
  997 CONTINUE
C     RECHERCHE DE LA SOMME DES VALEURS ABSOLUES DES B-COEFFICIENTS
C     POUR TROUVER UN MAJORANT MJ DANS LE BLOC (QP-Q(P-1))
      MN=0
      MJ=0.
      DO 615 I1=1,PQ-1
      J1=I1*P2
      DO 416 K=1,13
      S=0.
      DO 417 L=J1-P2+1,J1
      A1(K,L)=B1(K,L)
      S=S+ABS(A1(K,L))
  417 CONTINUE
      IF(S.LE.MJ)GO TO 416
      MJ=S
  416 CONTINUE
      CALL S7(A1,J1-P2+1,J1,SN)
      IF(SN.LE.MN)GO TO 615
      MN=SN
  615 CONTINUE
C      ON OBTIENT AINSI UN MAJORANT DANS LE BLOC QP-Q(P-1))
  999 CONTINUE
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE S0(A,A1,B1,P,Q,I,J,P2,L,K1,K2,R)
C CE SOUS PROGRAMME PERMET LE CALCUL DES B-COEFFICINTS APPARTENANT AUX
C  BORDS DE CHAQUE CARRE (I,J)
C IL FAIT APPEL AUX SOUS-PROGRAMMES S1 ET S3 QUI PERMETTENT LE CALCUL DES B-COEF
C  INTERNES AUX CARRES (I,J) ET (J,I) RESPECTIVEMENT,I DIFFERENT DE J
C  DECLARATION
      INTEGER P,Q,P2
      DIMENSION A(13,13),A1(13,120),B1(13,120)
      IF(R.EQ.0)GO TO 1
C     B-COEFFICIENTS SUR LA CARRE(I,J)
      A(I-2,J)=A1(8,K1)
      A(I-2,J+2)=A1(13,K1)
      A(I-3,J+1)=A1(10,K1)
      A(I-2,J-2)=A1(3,K1)
      GO TO 2
C     FIN DU CALCUL DES B-COEFFICIENTS SUR LE CARRE(I,J)
C     CALCUL DES B-COEFFICIENTS APPARTENANT AU CARRE(J,I)
  1   A(I-2,J)=0
      A(I-2,J+2)=0
      A(I-3,J+1)=0
      A(I-2,J-2)=0
  2   CALL S1(A,I,J)
C  ON LES PLACE DANS B1
      K=(2*Q-2)*P2+L
      CALL S5(K,A,I,J,B1)
C     FIN DU PLACEMENT DES B-COEFFICIENTS DU CARRE(I,J)
      IF(R.EQ.0)GO TO 3
      A(J+1,I-3)=A1(10,K2)
      A(J,I-2)=A1(12,K2)
      A(J+2,I-2)=A1(13,K2)
      A(J-2,I-2)=A1(11,K2)
      GO TO 4
  3   A(J,I-2)=0
      A(J+2,I-2)=0
      A(J-2,I-2)=0
      A(J+1,I-3)=0
  4   CALL S3(A,J,I)
C     FIN DE CE CALCUL
C     ON LES PLACE DANS B1
      K=P2*(2*Q-1)+L
      CALL S5(K,A,J,I,B1)
C     FIN DE CE PLACEMENT
C  FIN DU SOUS PROGRAMME S0
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S1(A,I,J)
C     DECLARATION
      DIMENSION A(13,13)
C     A(I-1,J-1),A(I,J-2),A(I+2,J-2),A(I+2,J),A(I+2,J+2)
C     A(I-2,J),A(I-2,J+2) SONT CONNUS
      A(I-1,J-1)=(A(I-2,J)+A(I,J-2))/2
      A(I+1,J-1)=(A(I,J-2)+A(I+2,J))/2
      A(I-1,J+1)=A(I-2,J+2)+A(I-2,J)-A(I-3,J+1)
      A(I,J+2)=2*A(I-1,J+1)-A(I-2,J)
      A(I+1,J+1)=(A(I,J+2)+A(I+2,J))/2
      A(I,J)=(A(I-1,J+1)+A(I+1,J-1))/2
C     FIN DU PROGRAMME S1
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S2(P,R,E1,G,H1,C,B)
C  RESOLUTION D'UN SYSTEME DE L  EQUATIONS A P INCONNUES
C  PAR LA METHODE DE GAUSS
C  DECLARATION
      INTEGER R,P
      DIMENSION E1(6),D(6),G(6),H1(6),B(6),C(24)
      REAL M
      D(1)=C(R+2)+C(R+1)-C(R)/4
      IF(P.LT.3)GO TO 110
      DO 35 I=2,P-1
      D(I)=C(R+I+1)+C(R+I)
 35   CONTINUE
 110  D(P)=C(P+R+1)+C(P+R)-C(P+R+2)/4
      DO 612 K=2,P
      M=E1(K)/H1(K-1)
      H1(K)=H1(K)-M*G(K-1)
      D(K)=D(K)-M*D(K-1)
  612 CONTINUE
      B(P)=D(P)/H1(P)
      DO 613 K=L-1,1,-1
      B(K)=(D(K)-G(K)*B(K+1))/H1(K)
  613 CONTINUE
C  FIN DU SOUS PROGRAMME S2
      RETURN
      END
```

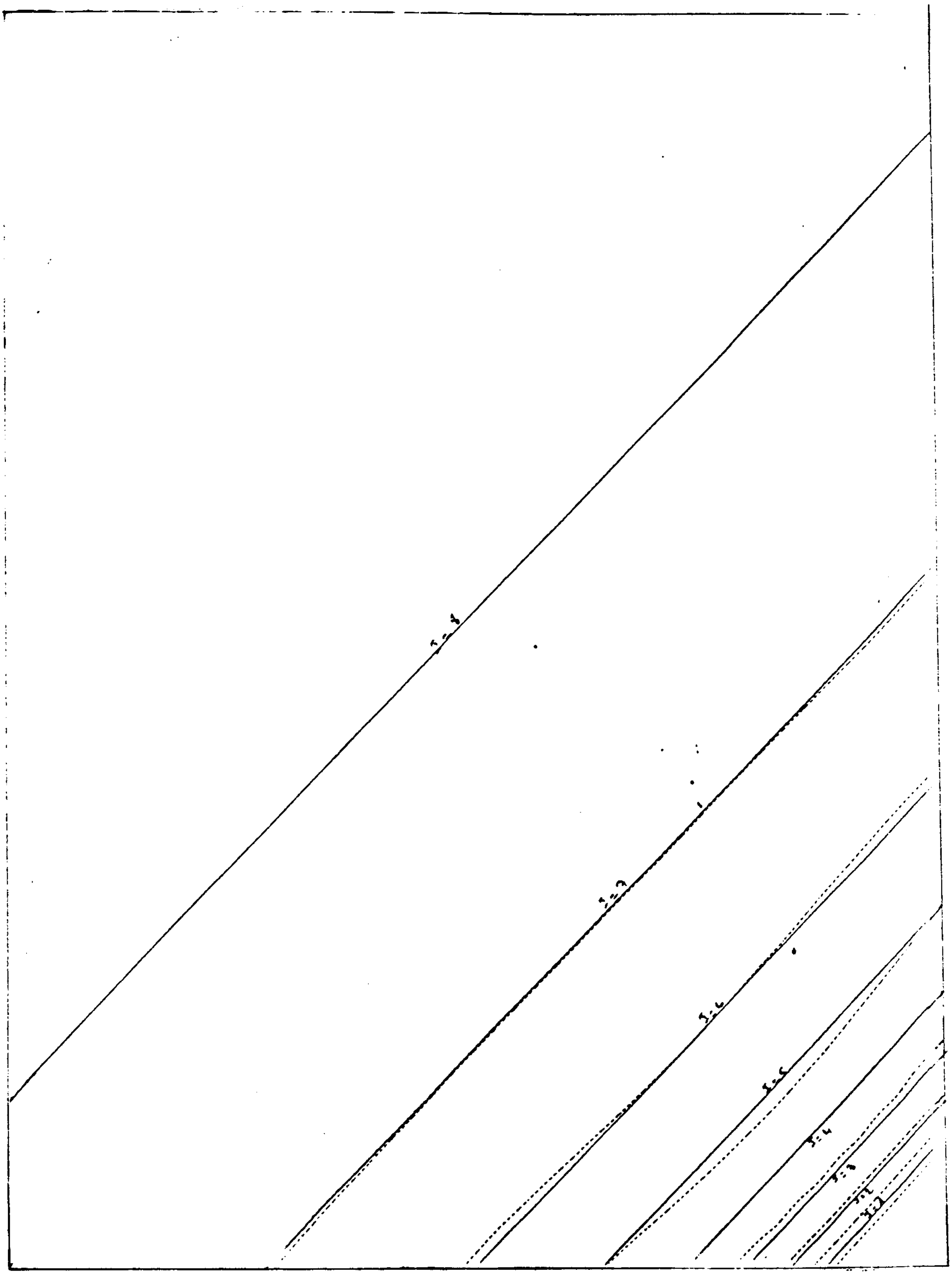
```
      SUBROUTINE S3(A,J,I)
C     DECLARATION
      DIMENSION A(13,13)
C     A(J-1,I-1),A(J-2,I),A(J-2,I+2),A(J,I+2),A(J+2,I+2)
C     A(J,I-2),A(J+2,I-2) CONNUS
      A(J-1,I-1)=(A(J,I-2)+A(J-2,I))/2
      A(J-1,I+1)=(A(J-2,I)+A(J,I+2))/2
      A(J+1,I-1)=A(J+2,I-2)+A(J,I-2)-A(J+1,I-3)
      A(J+2,I)=2*A(J+1,I-1)-A(J,I-2)
      A(J+1,I+1)=(A(J+2,I)+A(J,I+2))/2
      A(J,I)=(A(J+1,I-1)+A(J-1,I+1))/2
C     FIN DU PROGRAMME S3
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S4(A,I)
      DIMENSION A(13,13)
C CALCUL DES B-COEFF. INTERNES AU CARRE (I,I)
      A(I-1,I-1)=(A(I-2,I)+A(I,I-2))/2
      A(I+1,I-1)=(A(I,I-2)+A(I+2,I))/2
      A(I+1,I+1)=(A(I,I+2)+A(I+2,I))/2
      A(I-1,I+1)=(A(I,I+2)+A(I-2,I))/2
      A(I,I)=(A(I-1,I+1)+A(I+1,I-1))/2
C  FIN DU SOUS PROGAMME S4
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S5(K,A,I,J,A1)
C     SOUS PROGRAMME PERMETTANT LE RANGEMENT DANS A1 DES
C     B-COEFFICIENTS DE LA LIEME FONCTION DE LAGRANGE
C     CES B-COEFFICIENTS APPARTENANT AU CARRE(I,J)
C      DECLARATION
      DIMENSION A(13,13),A1(13,120)
      A1(1,K)=A(I-2,J-2)
      A1(2,K)=A(I,J-2)
      A1(3,K)=A(I+2,J-2)
      A1(4,K)=A(I-1,J-1)
      A1(5,K)=A(I+1,J-1)
      A1(6,K)=A(I-2,J)
      A1(7,K)=A(I,J)
      A1(8,K)=A(I+2,J)
      A1(9,K)=A(I-1,J+1)
      A1(10,K)=A(I+1,J+1)
      A1(11,K)=A(I-2,J+2)
      A1(12,K)=A(I,J+2)
      A1(13,K)=A(I+2,J+2)
C     FIN DE CE PLACEMENT
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE S6(A1,L,W1,W2,W3,K1,K2,K3,K4,K5,K6,SL)
C   SOUS PROGAMME PERMETTANT LE CALCUL DE LA VALEUR D'UNE SPLINE EN UN POINT
C   DECLARATION
      DIMENSION A1(13,120)
      SR=A1(K1,L)*W1*W1+A1(K2,L)*W2*W2+A1(K3,L)*W3*W3+2*A1(K4,L)*W1*W2+
     S2*A1(K5,L)*W2*W3+2*A1(K6,L)*W1*W3
      SL=ABS(SR)
C   FIN DU SOUS PROGRAMME S6
      RETURN
      END
```

```
      SLBRCUTINE S7(A1,L1,L2,SN)
C  SCUS PRCGRAMME PERMETTANT LE CALCUL DL MAXIMUM DES VALEURS DE LA SOMME DES
C  FONCTION DE LAGRANGE EN UN CERTAIN NOMBRE DE PCINTS DANS L'UN DES  PETITS
C  CARRES INCLUS DANS CP
C  DECLARATION
      DIMENSION A1(13,140)
      REAL MN
      M=10
      SN=0
      DO 198 N1=1,M+1
      M1=N1-1
      W1=M1/FLOAT(M)
      DO 199 N2=1,M-M1+1
      M2=N2-1
      W2=M2/FLOAT(M)
      W3=1-W1-W2
      SF=0
      DO 314 L=L1,L2
C  SUR T1
      CALL S6(A1,L,W1,W2,W3,1,3,7,2,5,4,SL)
      SF=SF+SL
  314 CONTINUE
      IF(SF.LE.SN)GO TO 141
      SN=SF
  141 SF=0
      DO 315 L=L1,L2
      CALL S6(A1,L,W1,W2,W3,3,13,7,8,10,5,SL)
      SF=SF+SL
  315 CONTINUE
      IF(SF.LE.SN)GO TO 142
      SN=SF
  142 SF=0
      DO 316 L=L1,L2
      CALL S6(A1,L,W1,W2,W3,13,11,7,12,9,10,SL)
      SF=SF+SL
  316 CONTINUE
      IF(SF.LE.SN)GO TO 143
      SN=SF
  143 SF=0
      DO 317 L=L1,L2
      CALL S6(A1,L,W1,W2,W3,11,1,7,6,4,9,SL)
      SF=SF+SL
  317 CONTINUE
      IF(SF.LE.SN)GO TO 199
      SN=SF
  199 CONTINUE
  198 CONTINUE
C  FIN DL SCUS PROGRAMME S7
      RETURN
      END
```



Courbes de Niveaux dans le cas où

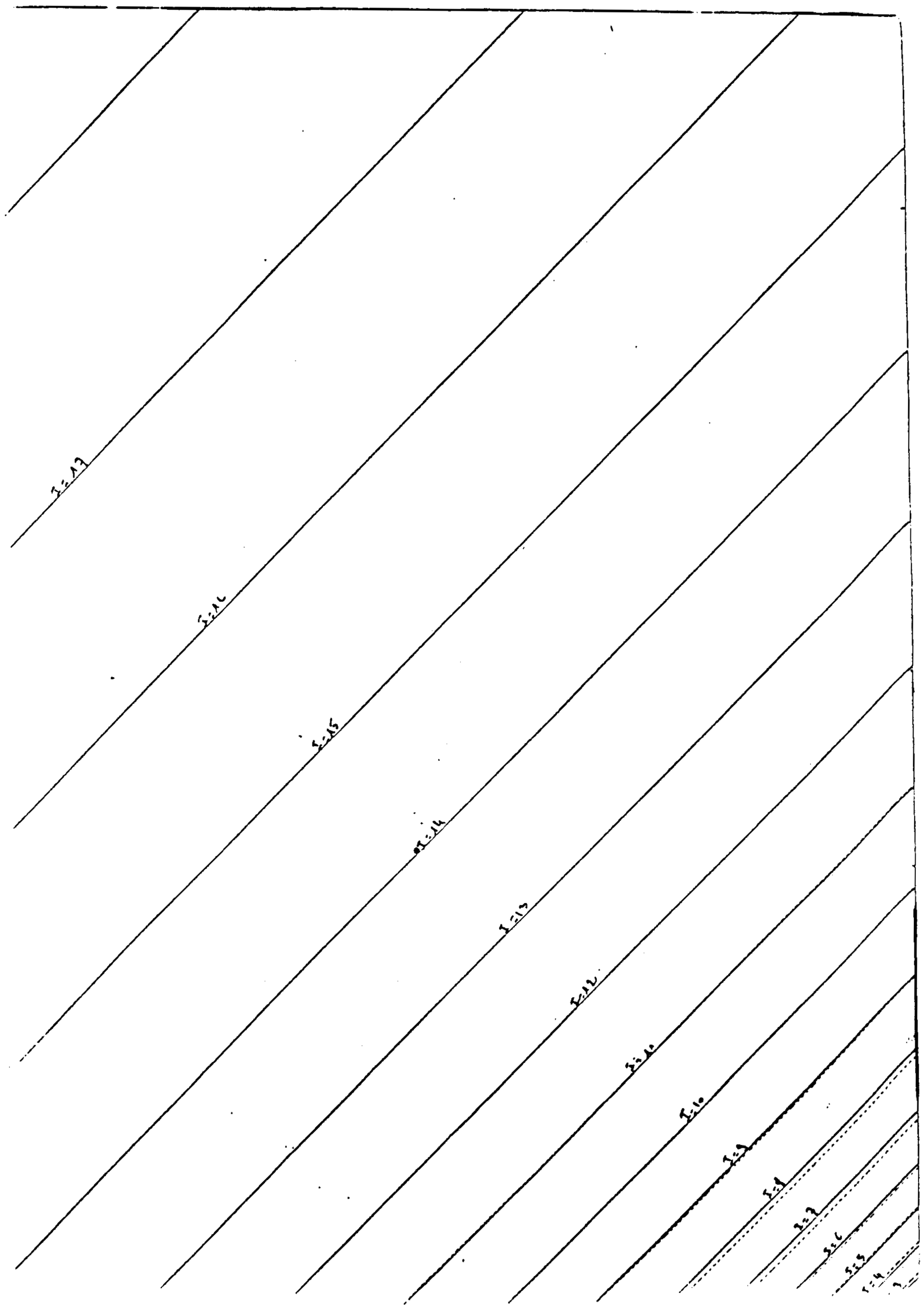
$\Omega = [-0.5, +0.5] \times [-0.5, +0.5]$

Fonctions en traits pleins, interpolant en pointillés.

$f = \dfrac{1}{1{,}1+x+y}$

Altitude $H = (10-J)/2$

Avec $1 \le I \le 8.$



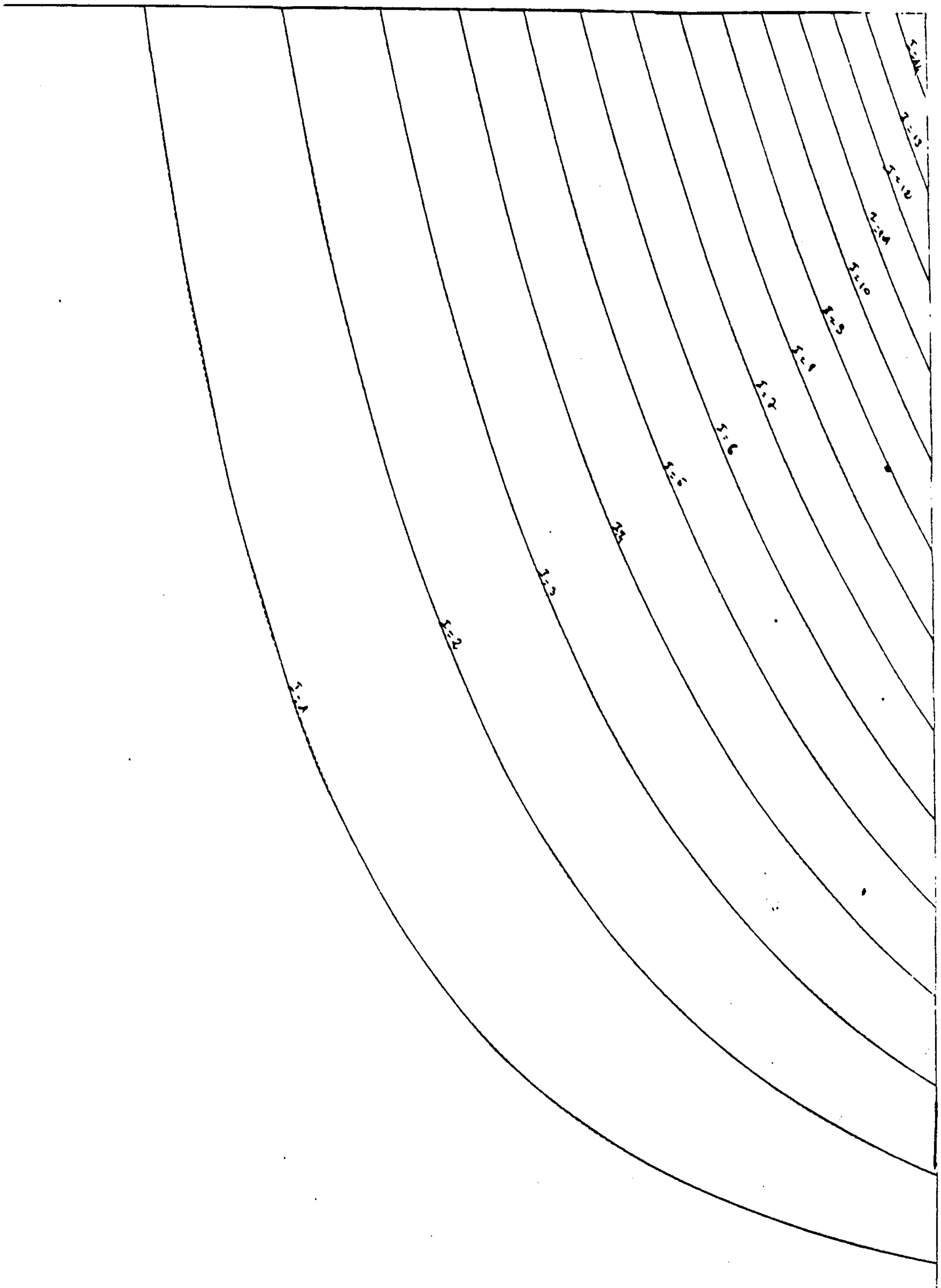
Courbes de Niveau dans le cas où F = Log (1.1+x+y)

(Fonction en traits pleins, Spline en pointillés)

Altitude H = (I-15)/6

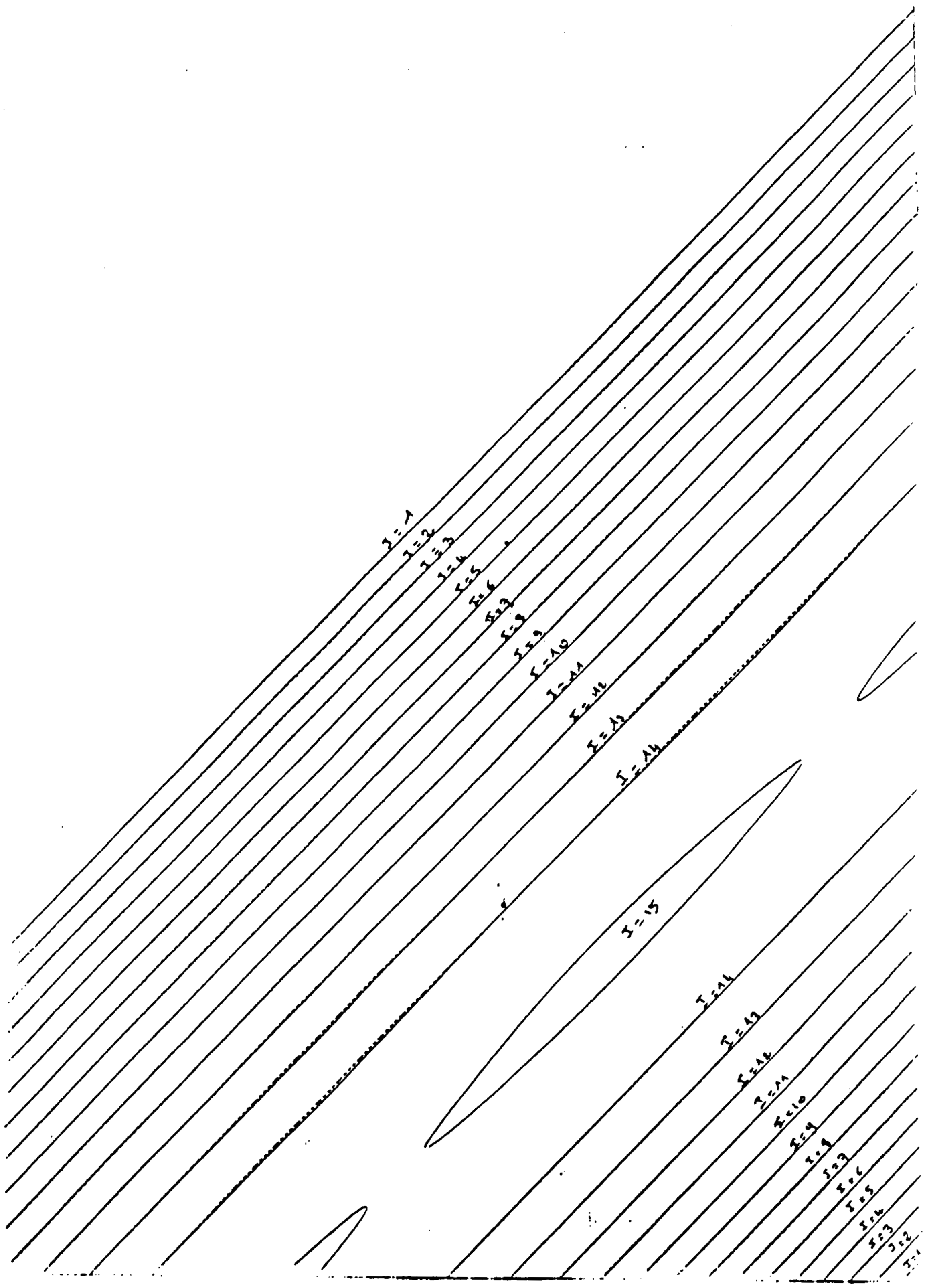
Avec

$1 \leq I \leq 18$



Courbes de Niveaux dans le cas où

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega = [0,1] \times [0,1] \\ F = x^3 y \\ \textit{(fonction en traits pleins, interpolant en pointillés)} \\ \textit{Altitude } H = I/15. \\ \textit{Avec} \quad 1 \le I \le 14. \end{array}\right.$$



Courbes de Niveau dans le cas où

$\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$F = \mathrm{Sin}\ (\pi(n+y))$

Fonction en pointillé, Spline en traits pleins.

Altitude H = I/15

Avec $1 \le I \le 15$

CHAPITRE IV

ESTIMATION DES DERIVEES PARTIELLES
PAR
MINIMISATION DE L'ENERGIE DE FLEXION D'UNE PLAQUE MINCE.

I - INTRODUCTION ET NOTATIONS.

On considère dans $\mathbb{R}^2$, un domaine carré appelé $Q_N (N \geq 1)$. Les côtés de ce carré sont subdivisés en N segments égaux.
Les petits carrés obtenus sont subdivisés chacun en deux triangles comme l'indique la figure 1. Chacun de ces triangles est appelé macro-triangle et est subdivisé en six micro-triangles t_i. Les sommets des petits carrés sont appelés $A_{ij} (1 \leq i, j \leq N+1)$.

1°) - Position du problème.

Etant donné une fonction $f \in C^1(Q_N)$, on pose :

$$f_{ij} = f(A_{ij}) \quad (1 \leq i,j \leq N+1).$$

On cherche à interpoler f aux points A_{ij}, en utilisant les triangles de Powell-Sabin (voir chapitre 1) c'est à dire on cherche $S \in P_2^1(\Omega)$ (voir explications) tels que :

$$\mathbb{P} \begin{cases} S(A_{ij}) = f(A_{ij}) = f_{i,j} & \\ \dfrac{\partial s}{\partial x}(A_{ij}) = \tilde{p}_{ij} \sim \dfrac{\partial f}{\partial x}(A_{ij}) & \text{pour } 1 \leq i, j \leq N+1 \\ \dfrac{\partial s}{\partial y}(A_{ij}) = \tilde{q}_{ij} \sim \dfrac{\partial f}{\partial y}(A_{ij}) & \end{cases}$$

Où $\tilde{P}_{ij}$ et $\tilde{q}_{ij}$ sont des estimations des dérivées partielles.
Dans ce chapitre, on se propose d'estimer ces dernières en minimisant l'expression :

$$E = \iint_{QN} \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)^2 \right] dxdy$$

qui est une approximation de l'énergie de flexion d'une plaque mince.

2°) Quelques explications.

Posons $h = 1/N$.
Soit $\mathcal{C}$ la subdivision de Q_N en micro-triangles, appelés $t_{k\ell}$, $1 \leq k \leq N^2$ et

$1 \leq \ell \leq 6$ on définit :

$$P_2^1(Q_N) = \{\text{fonction } s \in C^1(Q_N) \text{ tq } S/t_{k\ell} \in P_2(t_{k\ell}),\ 1 \leq k \leq N^2 \text{ et } 1 \leq \ell \leq 6\}$$

D'après le chapitre 1, en utilisant les triangles de Powell-Sabin, on démontre qu'il existe S unique vérifiant le problème $\mathbb{P}$.
Posons aussi, pour simplifier l'écriture :

$$G = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}\right)^2.$$

Remarque 1.

Avant de commencer notre étude, donnons une figure représentant la subdivision de Q_N (pour $N = 2$).

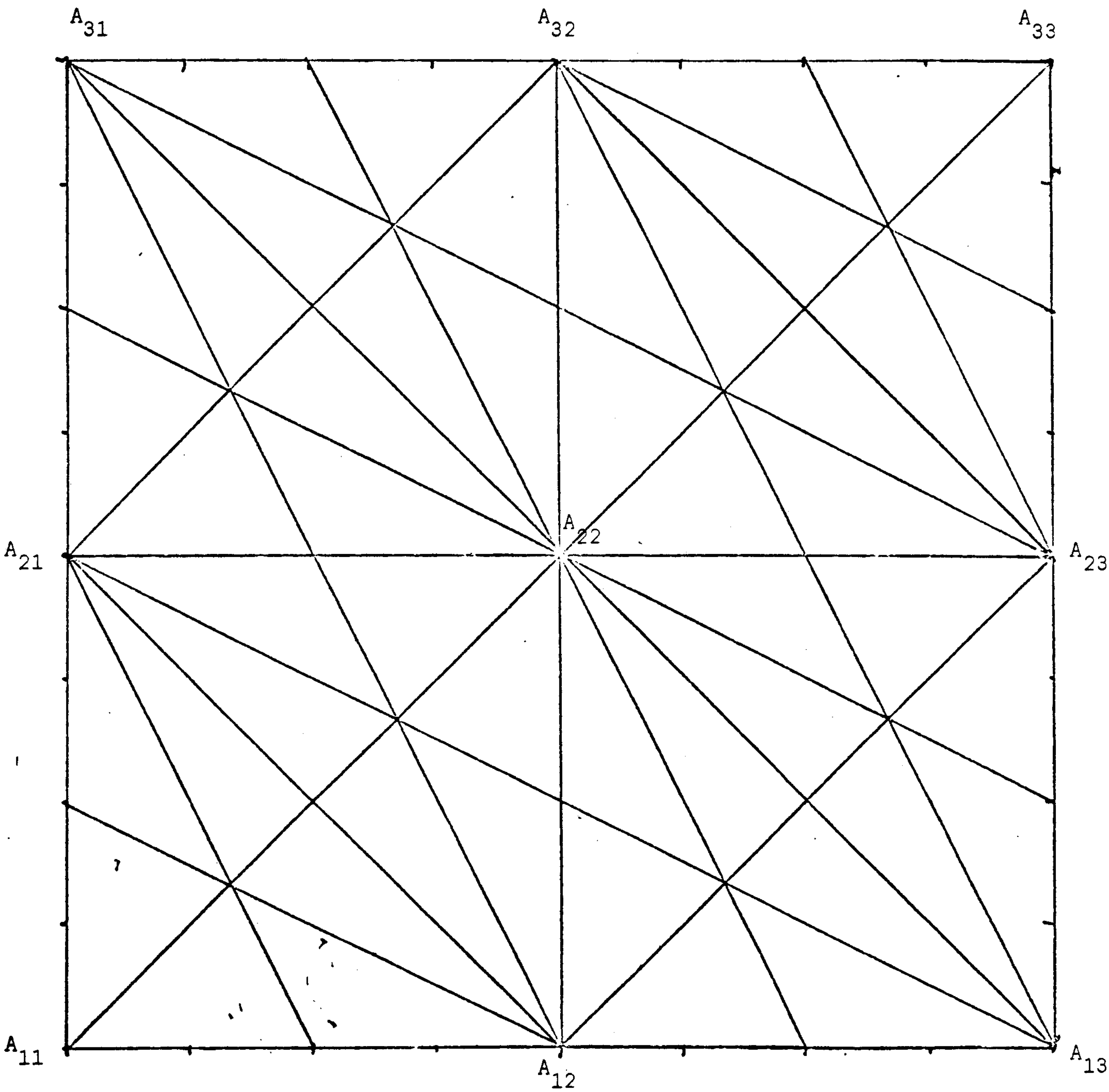


Figure 1. Domaine Q_2 *subdivisé par* C.

II - CALCUL DE L'EXPRESSION DE L'ÉNERGIE.

1°) - Calcul de la spline.

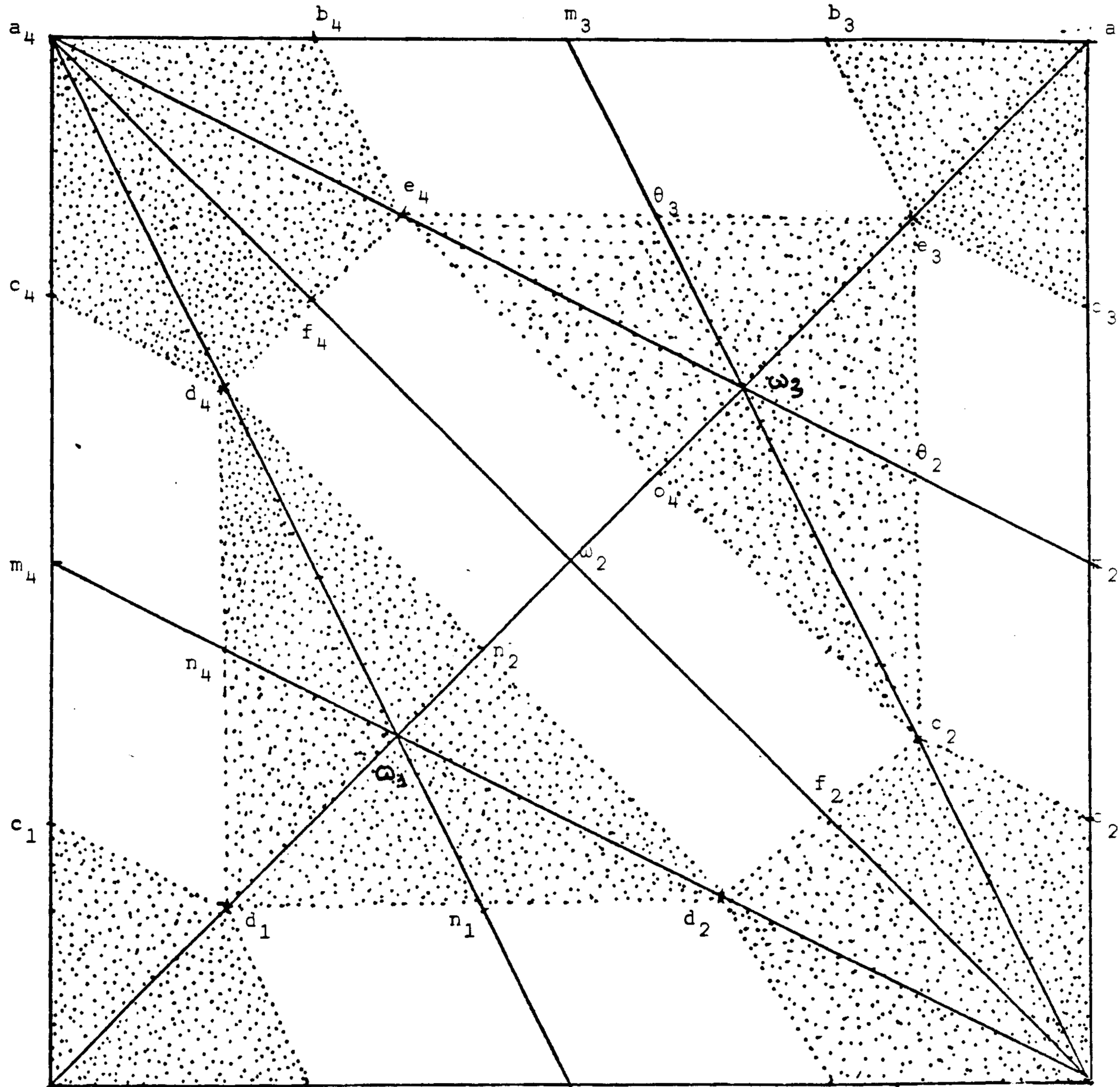


Figure 2. Projection du B-réseau sur l'un des carrés du domaine (Q_{ij}).
Avec la mise en évidence des plaques de raccordement C^1.

Pour calculer la spline S, il suffit de calculer ses B-coefficients indiquées sur la figure 2.

En posant :

$$\begin{cases} a_1 = f_{i,j} \\ a_2 = f_{i,j+1} \\ a_3 = f_{i+1,j+1} \\ a_4 = f_{i+1,j} \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1 = \tilde{P}_{i,j} \\ r_2 = \tilde{P}_{i,j+1} \\ r_3 = \tilde{P}_{i+1,j+1} \\ r_4 = \tilde{P}_{i+1,j} \end{cases} \qquad \begin{cases} s_1 = \tilde{q}_{i,j} \\ s_2 = \tilde{q}_{i,j+1} \\ s_3 = \tilde{q}_{i+1,j+1} \\ s_4 = \tilde{q}_{i+1,j} \end{cases}$$

On trouve les résultats suivants (voir chapitre 1).

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + \frac{h}{4} r_1 \\ b_2 = a_2 - \frac{h}{4} r_2 \\ b_3 = a_3 - \frac{h}{4} r_3 \\ b_4 = a_4 + \frac{h}{4} r_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = a_1 + \frac{h}{4} s_1 \\ c_2 = a_2 + \frac{h}{4} s_2 \\ c_3 = a_3 - \frac{h}{4} s_3 \\ c_4 = a_4 - \frac{h}{4} s_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = a_1 + \frac{h}{6} (r_1+s_1) \\ d_2 = a_2 + \frac{h}{6} (s_2-2r_2) \\ d_4 = a_4 + \frac{h}{6} (r_4-2s_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_2 = a_3 + \frac{h}{6} (2s_2-r_2) \\ e_3 = a_3 - \frac{h}{6} (r_3+s_3) \\ e_4 = a_4 + \frac{h}{6} (2r_4-s_4) \end{cases}$$

On en déduit les autres B-coefficients :

$$\begin{cases} m_1 = (b_1+b_2)/2 \\ m_2 = (c_2+c_3)/2 \\ m_3 = (b_3+b_4)/2 \\ m_4 = (c_1+c_4)/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1 = (d_1+d_2)/2 \\ n_2 = (d_2+d_4)/2 \\ n_4 = (d_1+d_4)/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_2 = (e_2+e_3)/2 \\ \theta_3 = (e_3+e_4)/2 \\ \theta_4 = (e_2+e_4)/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2 = (d_2+e_2)/2 \\ f_4 = (e_4+d_4)/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_1 = (d_1 + d_2 + d_4)/3 \\ \omega_2 = (n_2+\theta_4)/2 = (f_2+f_4)/2 \\ \omega_3 = (e_2+e_3+e_4)/3 \end{cases}$$

Les B-coefficients calculés, permettent donc d'avoir l'expression de S sur chacun des micro-triangles, et par conséquent sur tout le domaine Q_N.

Explication du calcul de S sur l'un des micro-triangles.

Sur $(A_1\ M, \Omega_1)$ par exemple : sur ce triangle S s'écrit :

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = a_1\lambda_1^2 + m_1\lambda_2^2 + \omega_1\lambda_3^2 + 2b_1\lambda_1\lambda_2 + 2n_1\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_1\lambda_3$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ étant les cordonnées barycentriques de ce triangle avec

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\frac{2}{h}x - \frac{1}{h}y + 1 \\ \lambda_2 = \frac{2}{h}(x-y) \\ \lambda_3 = \frac{3}{h}\ y \end{cases}$$

2) - Calcul des dérivées partielles de la spline.

On sait que pour exprimer l'énergie, on doit calculer les dérivées partielles secondes de la spline.
On a donc :

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial \lambda_2} \cdot \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial \lambda_3} \cdot \frac{\partial \lambda_3}{\partial x}$$

$$= (2\omega_1\lambda_1 + 2b_1\lambda_2)(-\frac{2}{h}) + (2m_1\lambda_2 + 2b_1\lambda_1)(\frac{2}{h})$$

$$= \frac{4}{h}[\lambda_1(b_1-a_1) + \lambda_2(m_1-b_1)].$$

Posons :

$$\frac{\partial s}{\partial x} = S_1'$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial S_1'}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \frac{\partial S_1'}{\partial \lambda_2} \cdot \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + \frac{\partial S_1'}{\partial \lambda_3} \cdot \frac{\partial \lambda_3}{\partial x}$$

$$= \frac{8(a_1-2b_1+m_1)}{h^2} = \frac{1}{h^2}(-4a_1 + 4a_2 - 3hr_1 - hr_2)$$

Le tableau suivant représente les dérivées partielles secondes sur chacun des trois micro-triangles $(A_1M_1\Omega_1)$, $(M_1\ A_2\ \Omega_1)$, $(\Omega_1\ A_2\ \Omega_2)$.
Les expressions de ces dérivées sur les autres micro-triangles S'en déduisent par symétrie.

	$t_1 = (A_1 M_1 \Omega_1)$	$t_2 = (M_1 A_2 \Omega_1)$	$t_3 = (\Omega_1 A_2 \Omega_2)$
$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$	$\frac{1}{h^2}(-4a_1+4a_2-3hr_1-hr_2)$	$\frac{1}{h^2}(4a_1-4a_2+hr_1+3hr_2)$	$\frac{1}{h^2}(6a_1-4a_2-2a_4$ $+ hr_1+hs_1+3hr_2+hs_4)$
$\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y}$	$\frac{1}{h^2}(-2a_1+2a_2-hr_1-hs_1$ $- hr_2+hs_2)$	$\frac{1}{h^2}(2a_1-2a_2+hr_1-hs_1$ $+ hr_2-hs_2)$	$\frac{1}{h^2}(6a_1-2a_2-4a_4+hr_1$ $+ hs_1+hr_2+hs_2+2hs_4)$
$\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$	$\frac{1}{h^2}(-4a_1-2a_2+6a_4$ $-3hs_1+hr_2-hs_2$ $+hr_4-2hs_4)$	$\frac{1}{h^2}(-2a_1-4a_2+6a_4$ $+ hr_1-3hs_1+2hr_2$ $- hs_2+hr_4-2hs_4)$	$\frac{1}{h^2}(6a_1-4a_2-2a_4$ $+hr_1+hs_1+2hr_2$ $-hs_2+hr_4+2hs_4)$

3°) - Expression de l'énergie au voisinage d'un point A_{ij} de Q_N.

La figure suivante représente un point A_{ij} du domaine, avec la mise en évidence des macro-triangles qui le contiennent. Evidemment sur les bords, il y a un, deux ou trois triangles qui contiennent A_{ij}, suivant les cas.

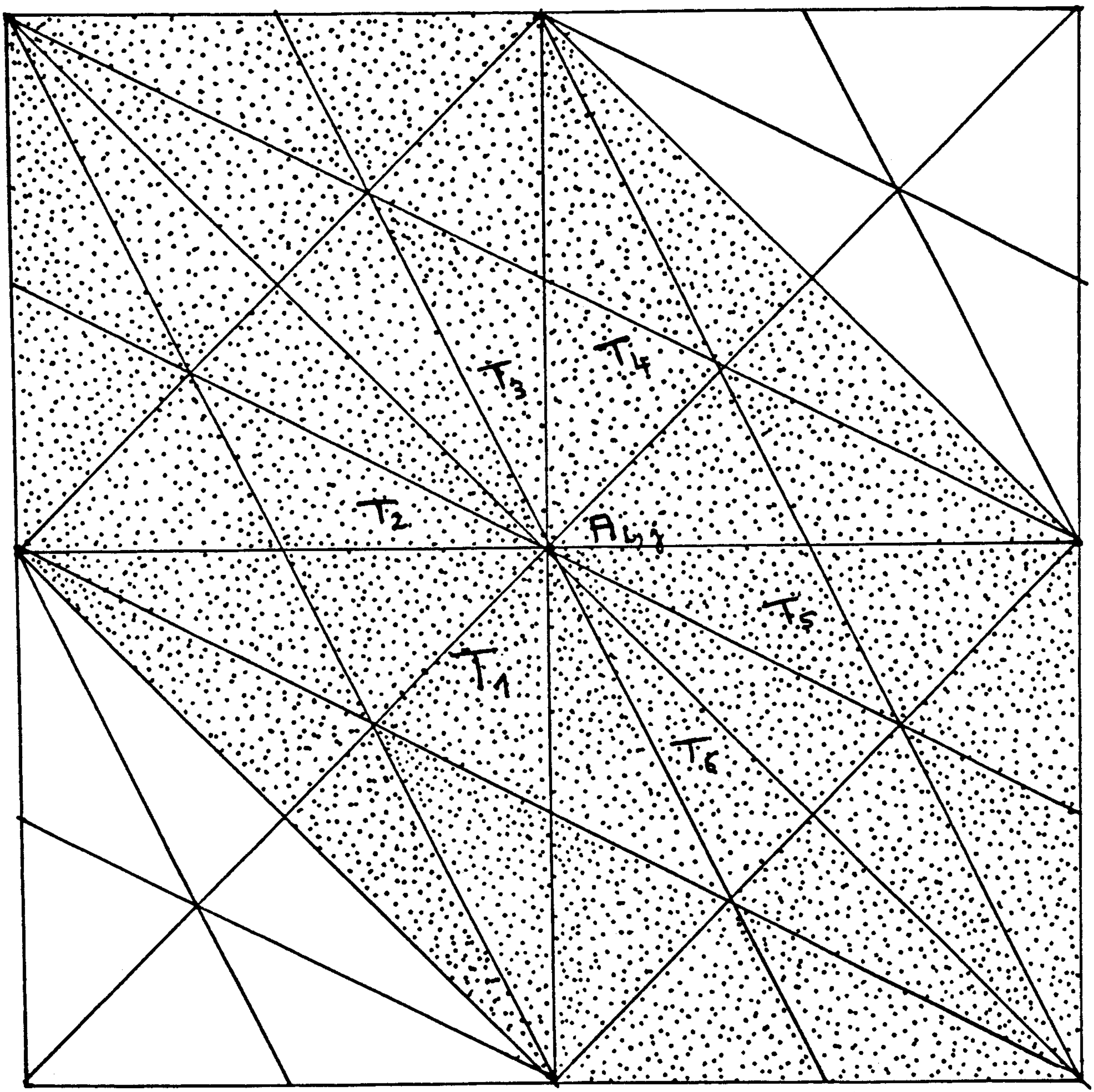


Figure 3. Représentation d'un point A_{ij} du domaine avec les macro-triangles T_i $(1 \leq i \leq 6)$ qui le contiennent.

On a posé précédemment

$$E = \iint_{QN} G(x,y)\, dxdy = \sum_{k,\ell} \iint_{t_{k,\ell}} G_{k,\ell}(x,y)\, dx\, dy$$

avec

$$G_{k,\ell} = G/t_{k,\ell} \text{ pour } 1 \leq k \leq 2N^2 \text{ et } 1 \leq \ell \leq 6$$

d'où

$$E = \sum_{k,\ell} \text{mes } t_{k,\ell}\, G_{k,\ell} = \frac{h^2}{12} \sum_{k,\ell} G_{k,\ell}$$

Pour minimiser E, il suffit donc de considérer

$$\boxed{E' = \sum_{k,\ell} G_{k,\ell}}$$

On considère maintenant le point A_{ij} donné sur la figure précédente (Fig. 3).
On pose :

$$S_k = S/T_k \quad 1 \leq k \leq 6$$

(Les T_k étant les macro-triangles qui contiennent ce point A_{ij}).

Soit

$$E'_{ij} = \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{\partial^2 S_k}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 S_k}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 S_k}{\partial y^2}\right)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \sum_{\ell=1}^{6} G_{k,\ell}$$

Remarque 2.

Pour A_{ij} $(1 \leq i, j \leq N')$ appartenant à $\underset{\sim}{Q}_N$, l'expression de $E'_{i,j}$ est exactement la partie de celle de G, contenant $\tilde{p}_{ij}$ et $\tilde{q}_{ij}$. Or le problème qu'on se pose, est celui de minimiser l'énergie E, on pourrait donc considérer le système

$$(S) \begin{cases} \dfrac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{ij}} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{ij}} = 0 \end{cases} \qquad 1 \leq i,j \leq N'$$

On arrive ainsi au problème suivant :

Trouver

$$(\tilde{p}_{ij}, \tilde{q}_{ij})_{1 \leq i,\, j \leq N+1}$$

solution du système (S).

Donnons d'abord quelques résultats :

Exemple.

Pour $N = 5$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{22}} = {} & h^2(448\,\tilde{p}_{22} - 32\,\tilde{q}_{22} + 20\,\tilde{p}_{12} - 4\tilde{q}_{12} + 152\tilde{p}_{21} \\ & - 4\,\tilde{q}_{21} + 44\,\tilde{p}_{31} + 8\,\tilde{q}_{31} + 20\,\tilde{p}_{32} - 4\,\tilde{q}_{32} \\ & + 152\,\tilde{p}_{23} - 4\,\tilde{q}_{23} + 44\,\tilde{p}_{13} + 8\,\tilde{q}_{13}) \\ & + h(24\,a_{12} + 400\,a_{21} + 40\,a_{31} - 24\,a_{32} - 400\,a_{23} - 40\,a_{13}). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{22}} = h^2 (-32\ \tilde{p}_{22} + 448\ \tilde{q}_{22} - 4\ \tilde{p}_{12} + 152\ \tilde{q}_{12} - 4\ \tilde{p}_{21} + 20\ \tilde{q}_{21}$$

$$+ 8\ \tilde{p}_{31} + 44\ \tilde{q}_{31} - 4\ \tilde{p}_{32} + 152\ \tilde{q}_{32} - 4\ \tilde{p}_{23} + 20\ \tilde{q}_{23}$$

$$+ 8\ \tilde{p}_{13} + 44\ \tilde{q}_{13}).$$

$$+ h(400\ a_{12} + 24\ a_{21} - 40\ a_{31} - 400\ a_{32} - 24\ a_{23} + 40\ a_{13}).$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{11}} = h^2(90\ \tilde{p}_{11} + 4\ \tilde{q}_{11} + 76\ \tilde{p}_{12} - 10\ \tilde{q}_{12} + 10\ \tilde{p}_{21} + 6\ \tilde{q}_{21})$$

$$+ h(176\ a_{11} - 176\ a_{12})$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{11}} = h^2(4\ \tilde{p}_{11} + 90\ \tilde{q}_{11} + 6\ \tilde{p}_{12} + 10\ \tilde{q}_{12} - 10\ \tilde{p}_{21} + 76\ \tilde{q}_{21})$$

$$+ h(176\ a_{11} - \underline{176\ a_{21}}).$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{12}} = h^2\{76\ \tilde{p}_{11} + 6\ \tilde{q}_{11} + 20\ \tilde{p}_{22} - 4\ \tilde{q}_{22} + 224\ \tilde{p}_{12}$$

$$- 16\ \tilde{q}_{12} + 44\ \tilde{p}_{21} + 8\ \tilde{q}_{21} + 76\ \tilde{p}_{13} - 10\ \tilde{q}_{13}\}$$

$$+ h\{224\ a_{11} - 24\ a_{22} - 64\ a_{12} + 40\ a_{21} - 176\ a_{13}\}$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{12}} = h^2\{-10\ \tilde{p}_{11} + 10\ \tilde{q}_{11} - 4\ \tilde{p}_{22} + 152\ \tilde{q}_{22} - 16\ \tilde{p}_{12} + 224\ \tilde{q}_{12}$$

$$+ 8\ \tilde{p}_{21} + 44\ \tilde{q}_{21} + 6\ \tilde{p}_{13} + 10\ \tilde{q}_{13}\}$$

$$+ h\{24\ a_{11} - 400\ a_{22} + 416\ a_{12} - 40\ a_{21}\}$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{21}} = h^2\{10\ \tilde{p}_{11} - 10\ \tilde{q}_{11} + 152\ \tilde{p}_{22} - 4\ \tilde{q}_{22} + 44\ \tilde{p}_{12} + 8\ \tilde{q}_{12}$$

$$+ 224\ \tilde{p}_{21} - 16\ \tilde{q}_{21} + 10\ \tilde{p}_{31} + 6\ \tilde{q}_{31}\}$$

$$+ h\{24\ a_{11} - 400\ a_{22} - 40\ a_{12} + 416\ a_{21}\}.$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{21}} = h^2\{6\ \tilde{p}_{11} + 76\ \tilde{q}_{11} - 4\ \tilde{p}_{22} + 20\ \tilde{q}_{22} + 8\ \tilde{p}_{12} + 44\ \tilde{q}_{12}$$

$$- 16\ \tilde{p}_{21} + 224\ \tilde{q}_{21} - 10\ \tilde{p}_{31} + 76\ \tilde{q}_{31}\}$$

$$+h\{\ -24\ a_{22} + 224\ a_{11} + 40\ a_{12} - 64\ a_{21} - 176\ a_{31}\ \}$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{16}} = h^2\{44\ \tilde{p}_{25} + 8\ \tilde{q}_{25} + 10\ \tilde{p}_{26} - 10\ \tilde{q}_{26} + 134\ \tilde{p}_{16} - 20\ \tilde{q}_{16}$$

$$+ 76\ \tilde{p}_{15} + 6\ \tilde{q}_{15}\}$$

$$+ h\{40\ a_{25} - 24\ a_{26} - 240\ a_{16} + 224\ a_{15}\}$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{16}} = h^2\{8\ \tilde{p}_{25} + 44\ \tilde{q}_{25} + 6\ \tilde{p}_{26} + 76\ \tilde{q}_{26} - 20\ \tilde{p}_{16} + 134\ \tilde{q}_{16}$$

$$- 10\ \tilde{p}_{15} + 10\ \tilde{q}_{15}\} + h\ \{-40a_{25} - 224a_{26} + 240a_{16} + 24a_{15}\}.$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{61}} = h^2\{44\ \tilde{p}_{52} + 8\ \tilde{q}_{52} + 76\ \tilde{p}_{62} + 6\ \tilde{q}_{62} + 134\ \tilde{p}_{61} - 20\ \tilde{q}_{61}$$

$$+ 10\ \tilde{p}_{51} - 10\ \tilde{q}_{51}\}$$

$$+ h\{-40\ a_{52} - 224\ a_{62} + 240\ a_{41} + 24\ a_{51}\}$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{61}} = h^2\{8\ \tilde{p}_{52} + 44\ \tilde{q}_{52} - 10\ \tilde{p}_{62} + 10\ \tilde{q}_{62} - 20\ \tilde{p}_{61} + 134\ \tilde{q}_{61}$$

$$+ 6\ \tilde{p}_{51} + 76\ \tilde{q}_{51}\}$$

$$+ h\{40\ a_{52} - 24\ a_{62} - 240\ a_{61} + 224\ a_{51}\}.$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{p}_{66}} = h^2\{10\ \tilde{p}_{56} + 6\ \tilde{q}_{56} + 90\ \tilde{p}_{66} + 4\ \tilde{q}_{66}$$

$$+ 76\ \tilde{p}_{65} - 10\ \tilde{q}_{65}\}$$

$$+ h\{- 176\ a_{66} + 176\ a_{65}\}$$

$$\frac{\partial E'}{\partial \tilde{q}_{66}} = h^2\{-10\ \tilde{p}_{56} + 76\ \tilde{q}_{56} + 4\ \tilde{p}_{66} + 90\ \tilde{q}_{66}$$

$$+ 6\ \tilde{p}_{65} + 10\ \tilde{q}_{65}\}$$

$$+ h\{176\ a_{56} - 176\ a_{66}\}.$$

III - RÉSOLUTION DU SYSTÈME.

Les calculs précédents montrent que le système (S) estéquivalent au système :

$(S') : AX = B.$

$X = (X_1, X_2, \dots, X_{N'})$ $N' = N+1$

$B = (B_1, B_2, \dots, B_{N'})$

$X_i = (p_{i1} ; q_{i1} ; p_{i2} ; q_{i2} ; \dots, p_{iN'} ; q_{iN'})$

$B_i = (B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{i,2N'})$

1°) - Représentation de la matrice A.

$$A = \begin{bmatrix} D_o & E & & & & \\ E^T & D_1 & E & & & \\ & E^T & D_1 & E & & \\ & & & & & \\ & & & E^T & D_1 & E \\ & & & & E^T & D_2 \end{bmatrix}$$

A est d'ordre $(2N'^2, 2N'^2)$ et triadiagonale par blocs.

Les D_i $(0 \le i \le 2)$, étant aussi tridiagonales par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} C_o & F_1 & & & & \\ F_1^T & C_1 & F_1 & & & \\ & F_1^T & C_1 & F_1 & & \\ & & & & & \\ & & & F_1^T & C_1 & F_1 \\ & & & & F_1^T & C_2 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} C_1 & F_2 & & & & & \\ F_2 & 2C_1 & F_2 & & & & \\ & F_2 & 2C_1 & F_2 & & & \\ & & & & & & \\ & & & & F_2 & 2C_1 & F_2 \\ & & & & & F_2 & 2C_1 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} C_2 & F_1^T & & & & \\ F_1 & C_1 & F_1^T & & & \\ & F_1 & C_1 & F_1^T & & \\ & & & & & \\ & & & F_1 & C_1 & F_1^T \\ & & & & F_1 & C_1 \end{bmatrix}$$

avec

$$C_0 = \begin{bmatrix} 90 & 4 \\ 4 & 90 \end{bmatrix} \quad ; \quad C_1 = \begin{bmatrix} 224 & -16 \\ -16 & 224 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 134 & -20 \\ -20 & 134 \end{bmatrix} \quad ;$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 76 & -10 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} \quad ; \qquad F_2 = \begin{bmatrix} 152 & -4 \\ -4 & 20 \end{bmatrix}$$

et

$$E = \left[\begin{array}{ccccc} E_1 & & & & \\ E_2 & E_3 & & & \\ & E_2 & E_3 & & \\ & & & & \\ & & & E_2 & E_3 \\ & & & & E_1^T \end{array}\right]$$

avec

$$E_1 = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ -10 & 76 \end{bmatrix} \quad ; \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 44 & 8 \\ 8 & 44 \end{bmatrix}$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 152 \end{bmatrix} \quad ;$$

2°) - Représentation du vecteur B, $2^{\text{ième}}$ membre du système.

En développant B suivant les f_{ij} $(1 \leq i, j \leq N')$ on obtient la forme suivante : (Tridiagonale par Blocs).

$$B = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & & & & \\ L_1 & L_2 & L_3 & & & \\ & L_1 & L_2 & L_3 & & \\ & & & & & \\ & & & L_1 & L_2 & L_3 \\ & & & & H_1 & H_2 \end{bmatrix}$$

avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 176 & -176 & & & & & & \\ 176 & 0 & & & & & & \\ 224 & -64 & -176 & & & & & \\ 24 & 416 & 0 & & & & & \\ & 224 & -64 & -176 & & & & \\ & 24 & 416 & 0 & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & 224 & -64 & -176 \\ & & & & & 24 & 416 & 0 \\ & & & & & & 224 & -240 \\ & & & & & & 24 & 240 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & \\ -176 & 0 & & & \\ 40 & -24 & & & \\ -40 & -400 & & & \\ & 40 & -24 & & \\ & -40 & -400 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & 40 & -24 \\ & & & -40 & -224 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 24 & -40 & & & \\ 224 & 40 & & & \\ & & & & \\ & 24 & -40 & & \\ & 400 & 40 & & \\ & & & & \\ & & 24 & -40 & \\ & & 400 & 40 & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 24 & -40 \\ & & & & 400 & 40 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 176 \end{bmatrix}$$

$$
L_2 = \begin{bmatrix}
416 & -400 & & & & & \\
-64 & -24 & & & & & \\
400 & 0 & -400 & & & & \\
24 & 0 & -24 & & & & \\
 & 400 & 0 & -400 & & & \\
 & 24 & 0 & -24 & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & 400 & 0 & -400 \\
 & & & & 24 & 0 & -24 \\
 & & & & & 400 & -416 \\
 & & & & & 24 & 64
\end{bmatrix}
$$

$$
L_3 = \begin{bmatrix}
0 & 0 & & & & \\
-176 & 0 & & & & \\
40 & -24 & & & & \\
-40 & -400 & & & & \\
 & 40 & -24 & & & \\
 & -40 & -400 & & & \\
 & & & & & \\
 & & & 40 & -24 & \\
 & & & -40 & -400 & \\
 & & & & 40 & -24 \\
 & & & & -40 & -224
\end{bmatrix}
$$

$$
H_1 = \begin{bmatrix}
24 & -40 & & & \\
224 & 40 & & & \\
 & 24 & -40 & & \\
 & 400 & 40 & & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & & 24 & -40 \\
 & & & 400 & 40 \\
 & & & 0 & 0 \\
 & & & 0 & 176
\end{bmatrix}
$$

$$
H_2 = \begin{bmatrix}
240 & -224 & & & & \\
-240 & -{-}24 & & & & \\
176 & 64 & -224 & & & \\
0 & -416 & -24 & & & \\
 & 176 & 64 & -224 & & & \\
 & 0 & -416 & -24 & & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & 176 & 64 & -224 \\
 & & & & 0 & -416 & -24 \\
 & & & & & 176 & -176 \\
 & & & & & 0 & -176
\end{bmatrix}
$$

3°) - Recherche de la solution du système.

A et B étant développés précédemment, le système (S') peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} D_0 & E & & & & \\ E^T & D_1 & E & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & \\ & & & E^T & D_1 & E \\ & & & & E^T & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \\ X_{2N'-1} \\ X_{2N'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ \\ B_{2N'-1} \\ B_{2N'} \end{bmatrix}$$

Avec $N' = N+1$.

Pour la résolution du système (S'), on utilise la méthode S.S.O.R. (Successive Semi-Over Relaxation) par bloc.

L'algorithme est le suivant :

$$\begin{cases} M_\omega \, x^{(K+1/2)} = N_\omega \, x^{(K)} + \omega B & (1) \\ M_\omega \, x^{(K+1)} = N_\omega^T \, x^{(K+1/2)} + \omega B & (2) \end{cases}$$

($\omega \in [1,2;2]$ voir [5]).

Avec

$$\begin{cases} M_\omega^T = D + \omega u \\ N_\omega^T = (1-\omega)D - \omega L. \end{cases}$$

et

$$D = \begin{bmatrix} D_0 & & & & & \\ & D_1 & & & & \\ & & D_1 & & & \\ & & & D_1 & & \\ & & & & D_1 & \\ & & & 0 & & D_2 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} 0 & E & & & \\ & & E & & \\ & & & & E \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ E^T & & & \\ & & & \\ & & E^T & 0 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$M_{\omega}^{T} = \begin{bmatrix} D_0 & \omega E & & & \\ & D_1 & \omega E & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & D_1 & \omega E \\ & & & & D_2 \end{bmatrix} .$$

$$N_{\omega}^{T} = \begin{bmatrix} (1-\omega)\, D_0 & & & & \\ -\, \omega E^{T} & (1-\omega)\, D_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -\, \omega E^{T} & (1-\omega) D_1 & 0 \\ & & & -\;\; E^{T} & (1-\omega)\, D_2 \end{bmatrix}$$

(1) peut donc s'écrire :

$$
\begin{bmatrix}
D_0 & & & & \\
\omega E^T & D_1 & & & \\
 & & & & \\
 & & \omega E^T & D_1 & \\
 & & & \omega E^T & D_2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
X_1^{(K+\frac{1}{2})} \\
X_2^{(K+\frac{1}{2})} \\
\\
X_{N'-1}^{(K+\frac{1}{2})} \\
X_{N'}^{(K+\frac{1}{2})}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
(1-\omega)\,D_0 & -\omega E & & & \\
 & (1-\omega)D_1 & -\omega E & & \\
 & & & & \\
 & & & (1-\omega)D_1 & -\omega E \\
 & & & & (1-\omega)D_2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
X_1^{(K)} \\
X_2^{(K)} \\
\\
X_{N'-1}^{(K)} \\
X_{N'}^{(K)}
\end{bmatrix}
+\omega
\begin{bmatrix}
B_1 \\
B_2 \\
\\
B_{N'-1} \\
B_{N'}
\end{bmatrix}
$$

$$M\omega\, x^{(k+1/2)} = N\omega\, x^{(K)} + \omega B.$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} D_0 X_1^{(K+1/2)} = (1-\omega)\ D_0\ X_1^{(K)} - \omega E\ X_2^{(k)} + \omega B_1 \\ \omega E^T\ X_1^{(K+1/2)} + D_1 X_2^{(K+1/2)} = (1-\omega)\ D_1 X_2^{(K)} - \omega E\ X_3^{(K)} + \omega B_2 \\ \\ \omega E^T\ X_{N'-1}^{(K+1/2)} + D_2\ X_{N'}^{(K+1/2)} = (1-\omega)\ D_2\ X_N^{(K)} + \omega B_{N'} \end{cases}$$

Soit :

$$(1) \quad \begin{cases} D_0\ X_1^{(K+1/2)} = (1-\omega)\ D_0\ X_1^{(K)} - \omega(EX_2^{(K)} - B_1) \\ D_1\ X_i^{(K+1/2)} = (1-\omega)\ D_1\ X_i^{(K)} - \ (EX_{i+1}^{(K)} + E^T X_{i-1}^{(K+1/2)} - B_i) \\ \qquad \text{pour } 2 \leq i \leq N'-1 \\ D_2\ X_{N'}^{(K+1/2)} = (1-\omega)\ D_2\ X_{N'}^{(K)} - \omega(E^T\ X_{N'-1}^{(K+1/2)} - B_{N'}) \end{cases}$$

et pour (2) on trouve :

$$(2) \quad \begin{cases} D_2\ X_{N'}^{(K+1)} = (1-\omega)\ D_2\ X_N^{(K+1/2)} - \omega(E^T\ X_{N'-1}^{(K+1/2)} - B_{N'}) \\ D_1\ X_i^{(K+1)} = (1-\omega)\ D_1\ X_i^{(K+1/2)} - \omega(E^T\ X_{i-1}^{(K+1/2)} + EX_{i+1}^{(K+1)} - B_i) \\ \qquad N'-1 \leq i \leq 2 \\ D_0\ X_1^{(K+1)} = (1-\omega)\ D_0\ X_1^{(K+1/2)} - \omega(EX_2^{(K+1)} - B_1) \end{cases}$$

Chacun des systèmes (1) à (2) est forme de sous-systèmes $S_{k\ell}$ avec $1 \leq k \leq 2$ et $1 \leq \ell \leq 2N'$.

Pour résoudre chacun des systèmes $S_{k\ell}$, on utilise la décomposition L.U. (voir [5]).

Considérons

$$D_r \, X_s^{K+1/2} = H_s .$$

avec

$$\begin{cases} r = 0, 1, 2 \\ 1 \leq s \leq N' \end{cases}$$

Posons pour simplifier

$$X_s^{(K+1/2)} = Z = (Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_{N'})$$

$$H_s = H = (H_1, H_2, \dots, H_{N'})$$

On a :

$$D_r = \begin{bmatrix} C_0 & G & & & \\ G^T & C_1 & G & & \\ & & & & \\ & & G^T & C_1 & G \\ & & & G^T & C_2 \end{bmatrix}$$

On a alors la décomposition :

$$
\begin{bmatrix}
C_0 & G & & & \\
G^T & C_1 & G & & \\
 & & & & \\
 & & G^T & C_1 & G \\
 & & & G^T & C_2
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
I & & & \\
L_2 & I & & \\
 & & & \\
 & & L_n & I
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_1 & G & & \\
 & U_2 & G & \\
 & & & G \\
 & & & U_n
\end{bmatrix}
$$

ce qui conduit à l'algorithme suivant (voir [5]).

$$\begin{cases} u_1 = C_0 \\ L_i U_{i-1} = G^T \text{ pour } i = 2,\dots,N' \\ \text{(ce qui donne } L_i) \\ U_i = D_i - L_i G \end{cases}$$

Remarque 3.

Cette décomposition existe si $U_1,\dots,U_{N'-1}$.
Sont non singulières (voir [4]). Ceci est assuré si les matrices d'ordre k (k=1, N'-1)

$$D_r^k = \begin{bmatrix} C_0 & G & & & \\ G^T & C_1 & G & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C_1 & G \\ & & & G^T & C_1 \end{bmatrix}$$

sont non singulières.
Or ceci est vérifié dans notre cas en effet

$$\det D_r^k = \det C_0 \times (\det C_1)^{k-1} \neq 0.$$

Le vecteur L s'obtient donc en résolvant les systèmes :

(1) $\quad Y_i = H_i - L_i Y_{i-1} \quad$ pour $1 \leq i \leq N'$ avec $L_1 Y_0 \equiv 0$

(2) $\quad U_i Z_i = Y_i - G Y_{i+1} \quad$ pour $i = N',\dots,1$ avec $G Z_{n+1} \equiv 0$

Et donc :

$$\boxed{Z_i = U_i^{-1}[Y_i - GY_{i+1}]}$$

Remarque 4.

$$\begin{cases} Y_i = (Y_i^1, Y_i^2) & \text{pour } 1 \leq i \leq N' \ (N' = N+1) \\ Z_i = (Z_i^1, Z_i^2) & \end{cases}$$

ce qui détermine le vecteur :

$$X_s^{(K+1/2)} = (x_{1,s}^{(K+1/2)}, x_{2,s}^{(K+1/2)}, \ldots, x_{2N',s}^{(K+1/2)})$$

$$= (Z_{11}, Z_{12}, Z_{21}, Z_{22}, \ldots, Z_{N'_1}, Z_{N'_2})$$

Ce calcul est fait pour s = 1, N' ; ce qui détermine complétement le vecteur

$$X^{(K+1/2)} = (X_1^{(K+1/2)}, \ldots, X_{2N'^2}^{(K+1/2)})$$

Pour la résolution du système (2), on procède de la même manière.

4°) - Vecteur initial et test d'arrêt.

On sait que le vecteur X, cherché, a comme coordonnées, des valeurs proches de ceux de :

$$\bar{X} = \{(P_{ij}, Q_{ij})\ 1 \leq i,j \leq N\} \quad (N' = N+1)$$

avec

$$\begin{cases} P_{ij} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(A_{ij}) \\ q_{ij} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(A_{ij}) \end{cases}$$

f étant la fonction donnée au début.

Sur X° le vecteur initial :

$$X^{\circ} = \{(\overset{\circ}{p}_{ij}, \overset{\circ}{q}_{ij})\ 1 \leq i, j \leq N'\}$$

$\overset{\circ}{p}_{ij}$ et $\overset{\circ}{q}_{ij}$ étant les différences divisées de premier ordre calculées au point A_{ij}.

soit ε donné, très petit.
On considère deux vecteurs successifs appelés $X^{(K)}$ et $X^{(K+1)}$ $(K \in \mathbb{N})$.
On arrête l'algorithme quand :

$$\frac{||X^{(K+1)} - X^{(K)}||_{\infty}}{||X^{(K)}||_{\infty}} \leq \varepsilon$$

IV - Quelques résultats pratiques.

1°) - Exemple d'application.

Considérons la fonction :

$$f(x,y) = \mathrm{Log}(1+x+y)$$

et soit

$$Q_N = [0,1] \times [0,1]$$

f est définie et continument dérivable sur Q_N.
Soit :

$$E \simeq \sup_{i,j} \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(A_{ij}) - \tilde{p}_{ij}\right| \ ; \ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(A_{ij}) - \tilde{q}_{ij}\right| \right) = M$$

Le tableau suivant représente la variation de l'erreur en fonction de N, en prenant $\omega = 1,5$.

α est l'ordre de convergence (pour cette notion voir chapitre I).

N	E	α
3	$0{,}10456966\ 10^{-1}$	
		1,302
5	$0{,}51409087\ 10^{-1}$	
		1,253
7	$0{,}337193007\ 10^{-1}$	
		1,204
9	$0{,}249127933\ 10^{-1}$	
		1,17
11	$0{,}197035274\ 10^{-1}$	
		1,143
13	$0{,}162787468\ 10^{-1}$	
		1,124
15	$0{,}138609135\ 10^{-1}$	
		1,109
17	$0{,}120648107\ 10^{-1}$	
		1,087
19	$0{,}106788169\ 10^{-1}$	

2°) Estimation de l'erreur : comparaison de trois méthodes.

a) - Utilisation des splines cubiques.

Soit j_o fixé, $1 \leq j_o \leq N+1$ et soit S_1 la spline cubique interpolant f aux points A_{ij_o} ; $1 \leq i \leq N+1$ avec la méthode N A K de De Boor (voir [3]).
Dans ce cas :

$$p_{ij_0} = S_1'(A, j_o) \text{ pour } 1 \leq i \leq N+1.$$

De la même manière, pour i_o fixé, on considère la spline S_2 interpolant f aux points A_{i_oj} ; $1 \leq j \leq N+1$.
Dans ce cas

$$\tilde{q}_{i_oj} = S_2'(A_{i_oj}) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq N+1.$$

Soit :

$$M(h) = \sup_{i,j} (|p_{ij} - \tilde{p}_{ij}|, |q_{ij} - \tilde{q}_{ij}|).$$

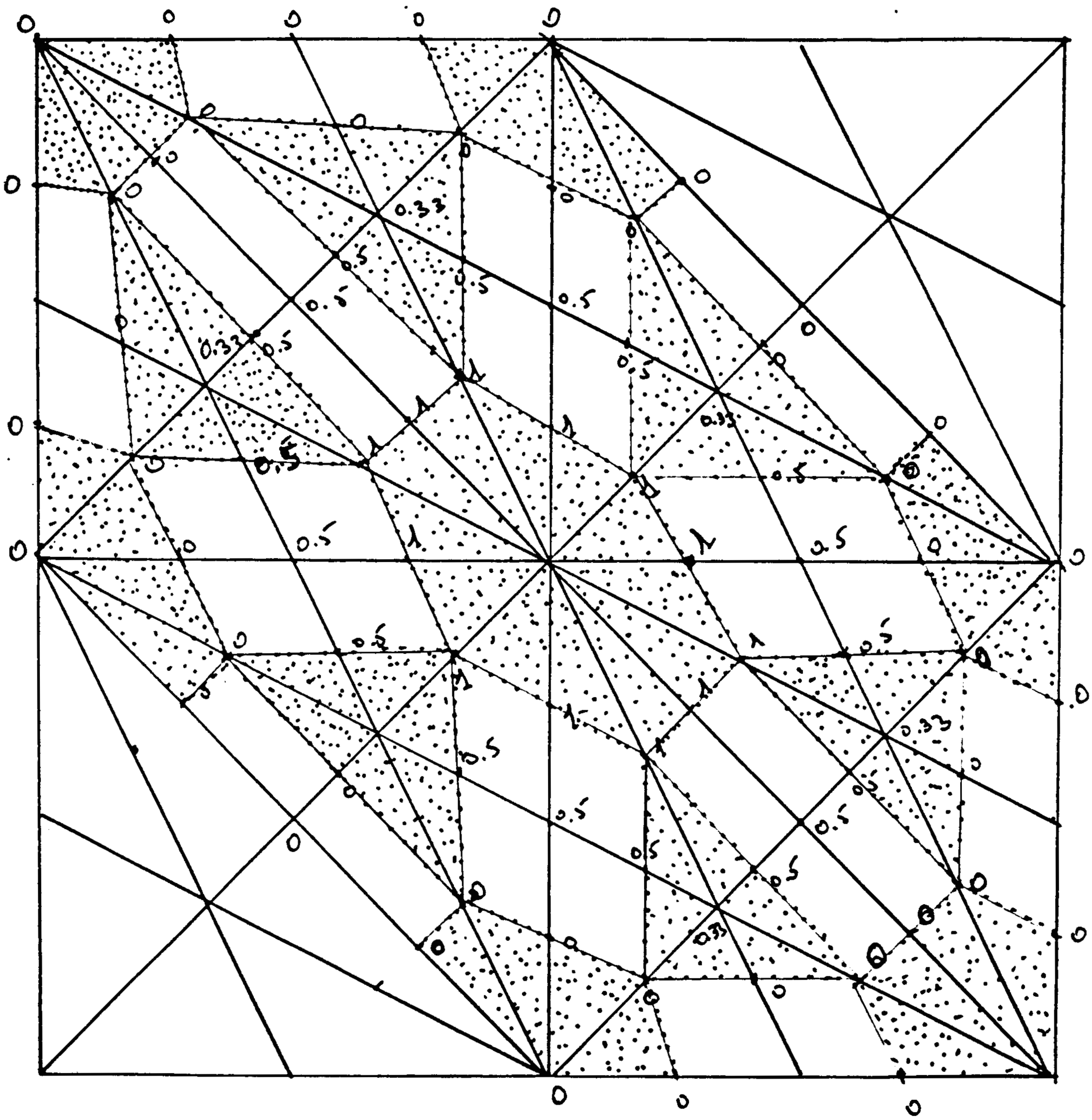
D'après les résultats donnés dans [3], $M(h) = O(h^2)$ pour $f \in C^3$.

Soit S l'interpolant d'Hermite de f au sens de Powell-Sabin, en considérant les dérivées partielles premières exactes p_{ij} et q_{ij} ; et $\tilde{S}$ l'interpolant d'Hermite de f, en considérant les dérivées partielles approchées $\tilde{p}_{ij}$ et $\tilde{q}_{ij}$.
Alors on a :

$$S = \sum_{i,j} f_{ij}\, \phi_{ij} + \sum_{i,j} p_{ij}\, X_{ij} + \sum_{i,j} q_{ij}\, \psi_{ij}$$

$$\tilde{S} = \sum_{i,j} f_{ij}\, \phi_{ij} + \sum_{i,j} \tilde{p}_{ij}\, X_{ij} + \sum_{i,j} \tilde{q}_{ij}\, \psi_{ij}.$$

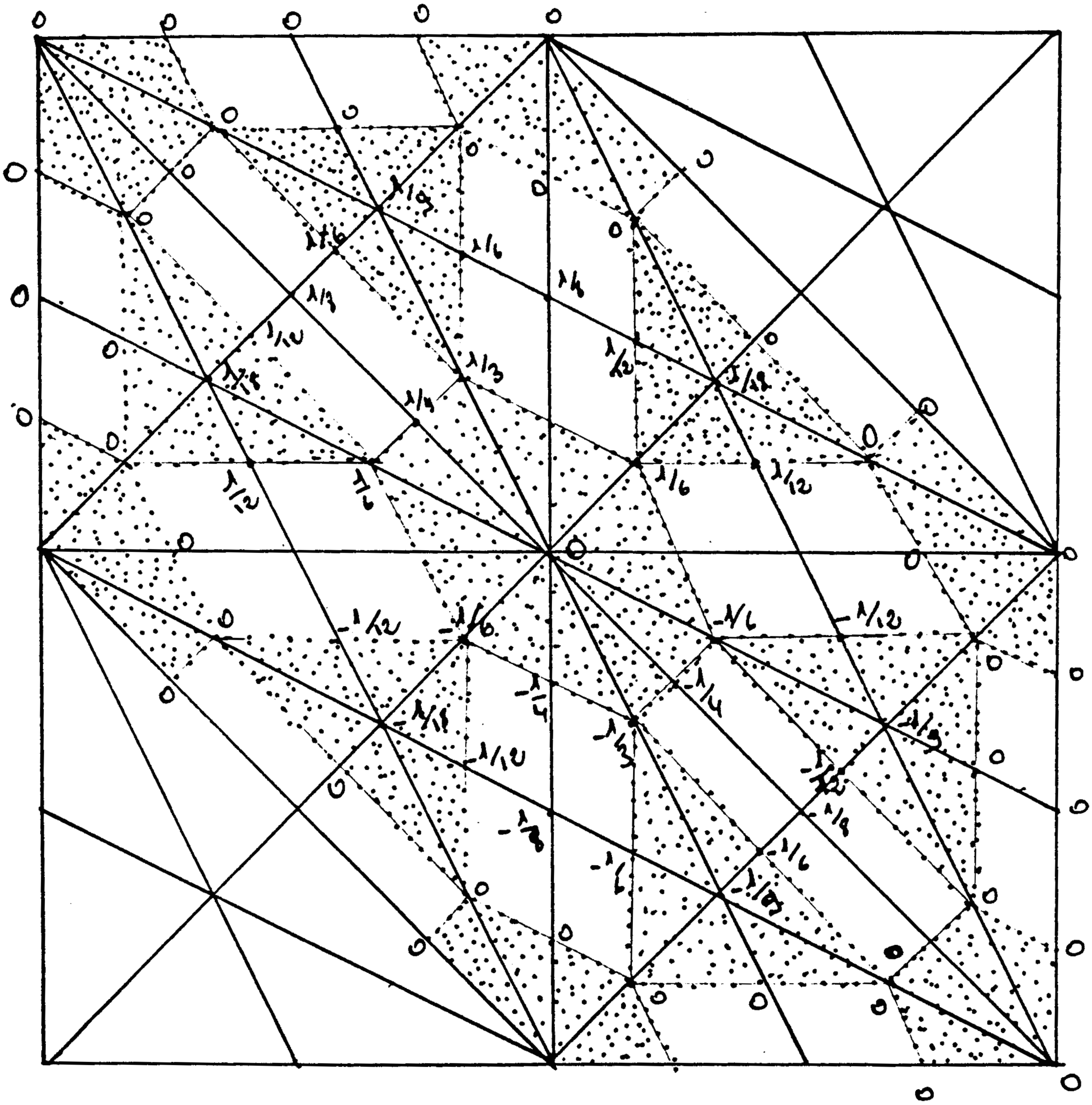
ϕ_{ij}, X_{ij} et ψ_{ij} étant les fonctions de base.



<u>Figure</u> *4. Fonction de base* ϕ_{ij} *(support hexagonal)*

$$\begin{cases} \phi_{ij}(A_{i,j}) = 1 \\ \partial_{10}\, \phi_{ij}(A_{ij}) = \partial_{01}\phi_{ij}(A_{ij}) = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \phi_{ij} = \partial_{10}\phi_{ij} = \\ \partial_{01}\phi_{ij} = 0 \end{matrix}$$

aux autres points $A_{i',j'}$



<u>*Figure*</u> 5. *Fonction de base* $\psi_{ij}(h)$.

$$\left.\begin{array}{l} \psi_{ij} = \partial_{10}\, \psi_{ij} = 0 \\[2ex] \partial_{01}\, \psi_{ij} = 1 \end{array}\right\} \quad \textit{au centre du support.}$$

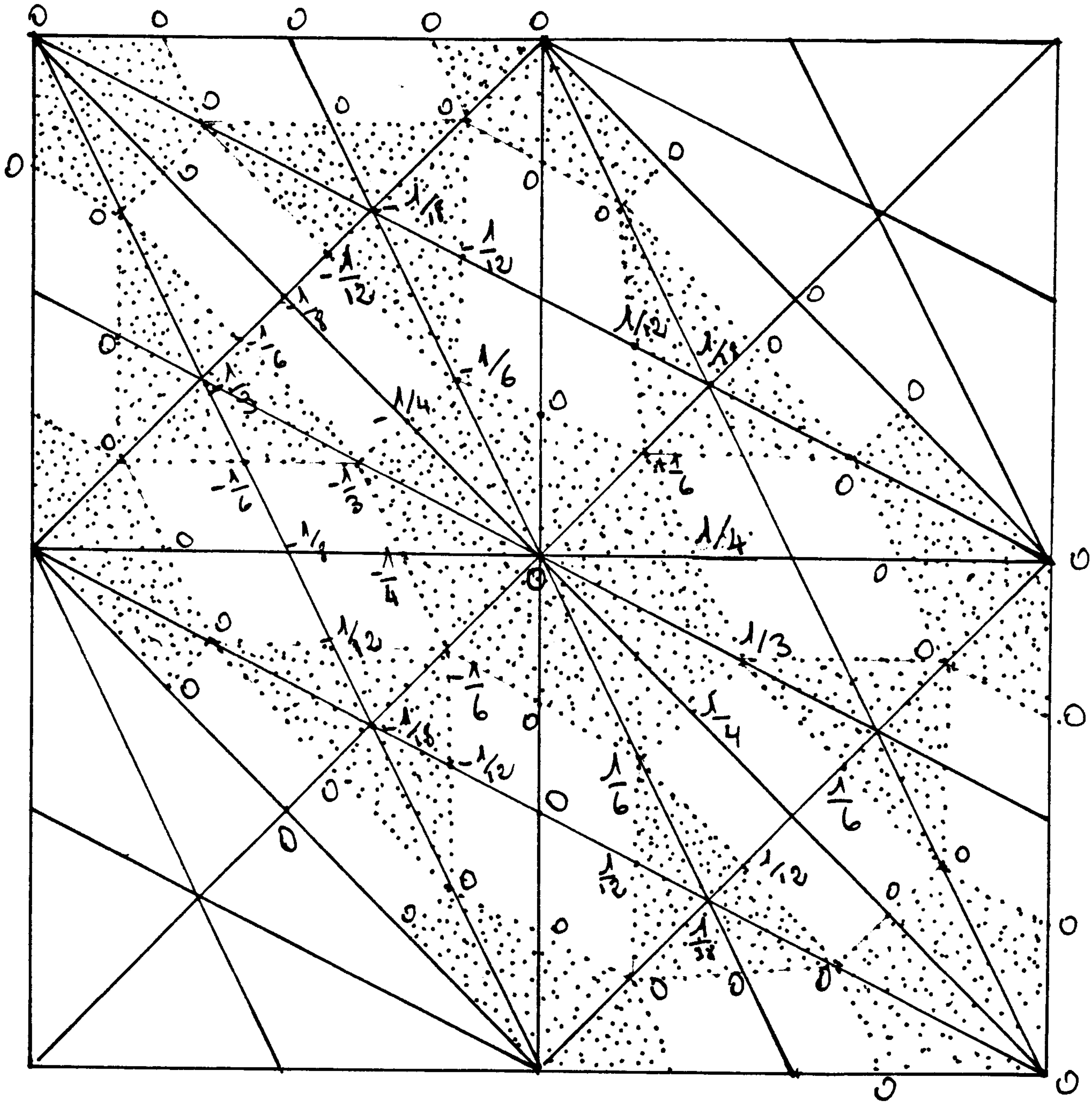


Figure 6. *Fonction de base* X_{ij}/h

$$\left.\begin{array}{l} X_{ij} = \partial_{01} X_{ij} = 0 \\ \\ \partial_{10} X_{ij} = 1 \end{array}\right\} \quad \textit{au centre du support.}$$

On a :

$$||f-\tilde{S}||_\infty \leq ||f-S||_\infty + ||S-\tilde{S}||_\infty$$

Or d'après les résultats du premier chapitre

$$||f-S||_\infty = O(h^3)$$

$$||S-\tilde{S}|| \leq \sum_{i,j} |p_{ij} - \tilde{p}_{ij}| \; ||X_{ij}||_\infty + \sum_{i,j} |q_{ij} - \tilde{q}_{ij}| \; ||\psi_{ij}||_\infty$$

$$\leq \sup_{i,j} (|p_{ij} - \tilde{p}_{ij}| \; ; |q_{ij} - \tilde{q}_{ij}|) \sum_{i,j} (||X_{ij}|| \; + ||\psi_{ij}||_\infty)$$

$$= M(h) \sum_{i,j} (||X_{ij}||_\infty + ||\psi_{ij}||_\infty)$$

P. Sablonnière a démontré que :

$$\sum_{i,j} (||X_{ij}||_\infty + ||\psi_{ij}||_\infty) = O(h).$$

Par conséquent

$$\boxed{||f-\tilde{S}||_\infty = O(h^3)}$$

b) - Utilisation des splines plaques minces locales.

Le problème est le suivant :

Etant donné un point $A_{i_o,j_o} \in \Omega$. On considère Ω_{i_o,j_o} la réunion de tous les triangles contenant A_{i_o,j_o} et $f^{A_{i_o,j_o}}$ la spline plaque mince interpolant f aux points A_{ij} avec $A_{ij} \in {}^{o}\Omega_{i_o,j_o}$.

On approche la dérivée $\partial^{\alpha} f$ ($\alpha = (0,1)$ ou $(1,0)$) par la dérivée correspondante de $f^{A_{i_o,j_o}}$ calculée au point A_{i_o,j_o}.

Autrement dit dans ce cas

$$\begin{cases} \tilde{p}_{i_o,j_o} = \dfrac{\partial}{\partial x} f^{A_{i_o,j_o}} (A_{i_o,j_o}) \\ \\ \tilde{q}_{i_o,j_o} = \dfrac{\partial}{\partial y} f^{A_{i_o,j_o}} (A_{i_o,j_o}) \end{cases}$$

Le Mehauté a démontré dans [7] que

$$M(h) = O(h^2)$$

et par conséquent

$$\boxed{||f - \tilde{S}||_\infty = O(h^3)}$$

c) - *Méthode de minimisation de l'énergie.*

On a vu que :

$$||S-\tilde{S}|| \leq M(h) \times O(h)$$

Les résultats numériques précédents montrent que dans ce cas :

$$M(h) = O(h)$$

et par conséquent

$$\boxed{||f - \tilde{S}||_\infty = O(h^2)}$$

d) - *Conclusion.*

L'erreur d'interpolation de la fonction f est nettement meilleure dans le cas des splines cubiques et splines plaques minces locales.

Mais la méthode de minimisation de l'énergie peut se généraliser à une triangulation quelconque contrairement à celle des splines cubiques.

RÉFÉRENCES.

[1] R. ARCANGELI et J.L. GOUT
"Sur l'évaluation de l'erreur d'interpolation de Lagrange dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$".
RAIRO Analyse Numérique, Vol. 3, Mars 1976, p. 5-27.

[2] P.G. CIARLET et WAGSHAL C.
"Multipoint Taylor Formulas and applications to finite element Method".
Numer. Math. 17, p. 84-100 (1971).

[3] DE BOOR C.
"A practical guide to splines".
Applied Mathematical Sciences, Volume 27.

[4] GOUT J.L.
"Estimation de l'erreur d'interpolation d'Hermite dans $\mathbb{R}^n$".
Numer.Math. 28 (1977), p. 407-429.

[5] GENE H. GOLUB, CHARLES F. VAN LOAN
"Matrix Computation".
North Oxford Academic (1983).

[6] KAMMERER REDDIEN and VARGA
"Quadratic interpolatory splines".
Numer.Math. 22, (1974), p. 241-259.

[7] LE MEHAUTE
"Interpolation et approximation par des fonctions polynomiales par morceaux dans $\mathbb{R}^n$".
Thèse de Doctorat ès Sciences, Université de Rennes, juin 1984.

[8] P. SABLONNIERE

"Interpolation d'Hermite par des surfaces de classe C^1 quadratiques par morceaux".

Publication ANO 16, Laboratoire d'Analyse Numérique, Lille 1, Nov. 1979.
Les Méthodes Numériques de l'Ingénieur (GAMNI), Paris - 1980 pp 175-185.

[9] P. SABLONNIERE

"Error Bounds for Hermite interpolation by quadratic Splines, on an α triangulation".

Publication ANO 123, Laboratoire d'Analyse Numérique, Lille 1, Fevrier 1984.
Soumis à IMA Journal of Numerical Analysis.

[10] P. SABLONNIERE

"Bases de Bernstein et approximants Splines".

Thèse de Doctorat ès Sciences, Université de Lille 1, Juin 1982.

[11] L.L. SCHUMAKER

"On the dimension of spaces of piecewise polynomials in two variables".

in "Multivariate approximation theory", W. Schempp, K. Zeller eds - ISNM 51, Birkhäuser Verlag, Basel (1979).

[12] P. SABLONNIERE

"Bernstein-Bézier Methods for the construction of bivariate spline approximants".

Computer Aided Geometric Design 2 (1985), p. 29-36.

INTERPOLATION DE LAGRANGE PAR DES SPLINES QUADRATIQUES SUR UN QUADRILATERE DE $\mathbb{R}^2$

Fatma Zedek

Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois
Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation
Bât M3
59655 Villeneuve d'Ascq - Cedex

Résumé

Le but de ce travail est la résolution d'un problème d'interpolation de Lagrange par des splines quadratiques sur une triangulation τ d'un quadrilatère Q de $\mathbb{R}^2$. Des résultats concernant des estimations de la norme de l'opérateur et de l'erreur d'interpolation sont donnés dans le cas où Q est un carré.

Abstract

The aim of this paper is to solve a Lagrange interpolation problem by quadratic splines on a triangular partition τ of a quadrilateral Q in $\mathbb{R}^2$. Some results concerning the norm of the interpolation operator and error estimates are given in the case when Q is a square.

Keywords. Lagrange interpolation , quadratic splines.

I - Introduction.

Pour des raisons pratiques et théoriques, les surfaces polynômiales par morceaux sont largement utilisées dans les constructions géométriques assistées par ordinateur. Les plus simples sont les surfaces splines quadratiques C^1 (fonctions polynômiales par morceaux de degré 2 et de classe C^1).

Etant donné un quadrilatère Q de $\mathbb{R}^2$; on le munit de la triangulation τ suivante :

Q est une réunion de quadrilatères emboités (appelés macro-quadrilatères) subdivisés en micro-quadrilatères, chacun d'eux étant à son tour subdivisé en quatre triangles par le tracé de ses diagonales. Les points d'interpolation sont les sommets des macro-quadrilatères, les milieux des segments déterminés par τ sur leurs frontières et quelques points choisis convenablement à l'intérieur du quadrilatère central (cf. figures 1, 3 et 4).

Au paragraphe II, on rappelle quelques résultats sur la représentation locale des splines quadratiques à une et deux variables dans la base de Bernstein et sur l'interpolation à une variable.

Au paragraphe III, on explicite le calcul de l'interpolant en construisant sa représentation associée à chaque triangle de τ. Dans [8] G. Heindl traite également un problème d'interpolation par des splines quadratiques C^1, mais en faisant une interpolation d'Hermite aux sommets d'une triangulation donnée. Dans la plupart des cas, le problème est traité localement, mais dans ce travail, l'algorithme proposé traite le problème globalement.

Au paragraphe IV, on donne un encadrement de la norme de l'opérateur d'interpolation.

Au paragraphe V, on étudie le cas particulier où Q est un carré de $\mathbb{R}^2$ muni d'une triangulation régulière (cf. Fig. 5). Il faut remarquer que dans le cas d'un domaine rectangulaire, on peut construire une base de l'espace des splines quadratiques au moyen de B-splines (cf. Chui et Renhong [2]) mais que ceci n'est pas possible dans le cas d'un domaine plus général comme celui que nous étudions dans cet article. On précise les résultats sur la norme de l'opérateur, on donne une majoration de l'erreur d'interpolation ainsi que des exemples numériques.

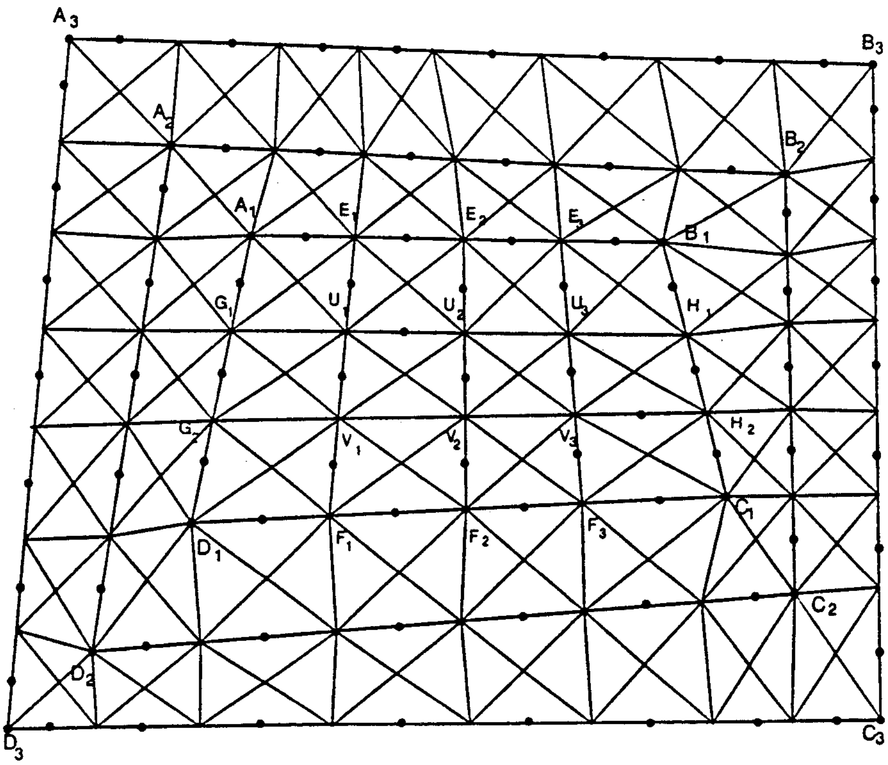


Fig. 1 : Triangulation τ de Q et points d'interpolation . On a 3 macro-quadrilatères emboités $(A_iB_iC_iD_i)$, i = 1, 2, 3.

II - Rappels sur les splines quadratiques.

1°) <u>Interpolation de Lagrange à une variable.</u>

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b\}$ une subdivision de I et $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ pour i = 0,...,N-1. Soit : $t_0^* = t_0$; $t_i^* = (t_i + t_{i-1})/2$ (i = 1,...,N) et $t_{N+1}^* = t_N$. Pour i = 0,... ,N-1 on désigne par $P_2(I_i)$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 définis sur I_i et par $P_2^1(I)$ l'ensemble des fonctions s de classe C^1 telles que $s|I_i$ appartienne à $P_2(I_i)$.
Le problème d'interpolation est le suivant : étant donné une fonction f définie sur I, on pose $f(t_i^*) = f_i$ (i = 0,...,N+1) et on cherche $s \in P_2^1(I)$ tel que $s(t_i^*) = f_i$.
Considérons alors la base de Bernstein : $\phi_j(t) = \binom{2}{j} t^j(1-t)^{2-j}$ (j = 0,1,2).

Sur I_i, s s'écrit : $s(t) = \sum_{j=0}^{2} b_{2i+j}\, \phi_j\left(\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)$.

Les coefficients b_{2i+j} (i = 0,...,N-1 et j = 0,1,2) sont appelés B-coefficients de s.

Lemme 1.

Les B-coefficients d'indices pairs sont solutions du système suivant :

$$\begin{aligned} 6b_2+b_4 &= -f_o + 4f_1 + 4f_2 \\ b_{2i-2}+6b_{2i}+b_{2i+2} &= 4f_i + 4f_{i+1} \qquad (2 \le i \le N-2) \\ b_{2N-4} + 6b_{2N-2} &= 4f_{N-1}+4f_N-f_{N+1} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$b_{2i+1} = 2f_{i+1} - (b_{2i} + b_{2i+2})/2$ pour $0 \le i \le N-1$, avec $b_o = f_o$ et $b_{2N}= f_{N+1}$.

Preuve : voir [9] et [12].

Lemme 2.

Soit $f \in C([a,b])$ vérifiant $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \le 1$; alors les B-coefficients de son interpolant spline vérifient :
$|b_o| \le 1$; $|b_{2N}| \le 1$, $|b_1| \le 3.5$, $|b_{2N-1}| \le 3.5$, $|b_{2i}| \le 2$ $(i = 1,\dots,N-1)$, et
$|b_{2i+1}| \le 4$ $(i = 1,\dots,N-2)$.

Preuve.

D'après le développement de s dans la base de Bernstein on a :

$$s(t_i) = b_{2i} \text{ pour } i = 0,\dots,N$$

or $\qquad b_o = f_o$ et $b_{2N} = f_{N+1}$ (Lemme 1)

d'où $\qquad |b_o| \le 1$ et $|b_{2N}| \le 1$.

D'autre part $\|s\| \le 2$ (cf.[9]) donc $|b_{2i}| \le 2$ pour $i = 1,\dots,N-1$. et

$$|b_{2i+1}| \le 2\|f\| + (|b_{2i}| + |b_{2i+2}|)/2 \qquad (i = 0 \dots N-1)$$

d'où : $\qquad |b_1| \le 3.5$, $|b_{2N-1}| \le 3.5$

et $\qquad |b_{2i+1}| \le 4$ pour $i = 1,\dots,N-2$.

2°) Coordonnées barycentriques et base de Bernstein dans un triangle de τ.

Pour $T \in \tau$, on note $P_2(T)$ l'ensemble des polynômes à 2 variables, de degré total au plus égal à 2, définis sur T, et $P_2^1(Q)$ l'ensemble des fonctions $s \in C^1(Q)$ telles que $s|T \in P_2(T)$ pour tout $T \in \tau$ (splines quadratiques).

Soit T_1 le triangle $A_1A_2A_3$ et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les coordonnées barycentriques dans T_1 de $X \in \mathbb{R}^2$.

i.e. les solutions de :

$$X = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$$
$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

et $\{\phi_i(\lambda)\}_{1 \leq i \leq 6} = \{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, 2\lambda_1\lambda_2, 2\lambda_2\lambda_3, 2\lambda_1\lambda_3\}$ la base de Bernstein de $P_2(T_1)$

(Ces fonctions vérifient : $\phi_i(\lambda) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{6} \phi_i(\lambda) = 1$). (Voir [4, 12]).

Soit $p_1 \in P_2(T_1)$. Ecrivons p_1 dans cette base

$$p_1(X) = p_1(\lambda) = \sum_{i=1}^{6} a_i \, \phi_i(\lambda) \qquad (1)$$

En désignant par A_i ($4 \leq i \leq 6$) les milieux des côtés de T_1 (cf. fig. 2), on vérifie aisément que :

$$X = \sum_{i=1}^{6} A_i \, \phi_i(\lambda) \qquad (2)$$

<u>*Définition 1.*</u>

Les coefficients a_i ($i = 1,\ldots,6$) sont appelés B-coefficients de p_1. L'ensemble des points $\tilde{A}_i = (A_i, a_i) \in \mathbb{R}^3$ est appelé B-réseau de p_1. Le graphe de p_1 sur T_1 est appelé triangle quadratique.

Les égalités (1) et (2) précédentes signifient que le point $(X, P_1(X))$ appartient à l'enveloppe convexe du B-réseau.

3° <u>Raccordement C^1 de 2 triangles quadratiques.</u>

Soit T_2 le triangle $A_1A_2A_3'$ de τ ayant $A_1 A_2$ comme côté commun avec T_1 et soient a_i et a_i' ($1 \leq i \leq 6$) les B-coefficients respectifs de $p_1 \in P_2(T_1)$ et $p_2 \in P_2(T_2)$.

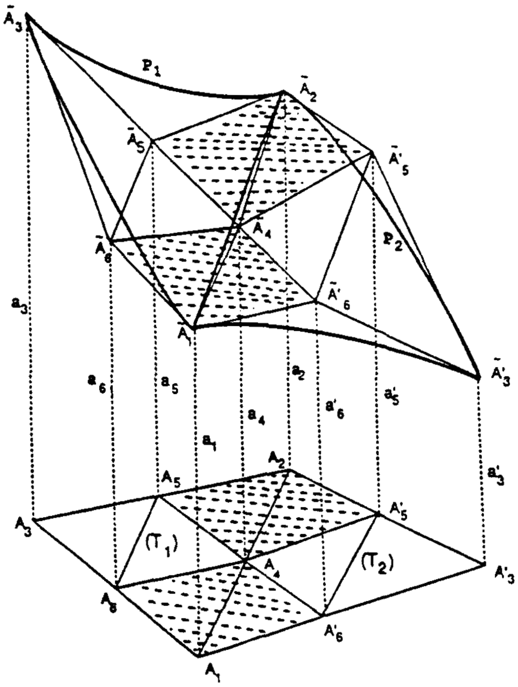


Fig. 2 : Raccordement C^1 *de 2 triangles quadratiques.*

Théorème 1.

Si $A'_3 = \lambda'_1 A_1 + \lambda'_2 A_2 + \lambda'_3 A_3$, le raccordement de p_1 et p_2 le long de A_1A_2 se traduit par :

1°) $a'_1 = a_1$; $a'_2 = a_2$ et $a'_4 = a_4$ pour la continuité C^0

2°) $\left.\begin{aligned} a'_5 &= \lambda'_1 a_4 + \lambda'_2 a_2 + \lambda'_3 a_5 \\ a'_6 &= \lambda'_1 a_1 + \lambda'_2 a_4 + \lambda'_3 a_6 \end{aligned}\right\}$ pour la continuité C^1.

Corollaire 1.

Si de plus A_1, A_3 et A'_3 sont alignés, avec $A'_3A_1 = k.A_3A_1$ alors la continuité C^1 se traduit par :

$$(1+k)\ a_1 = a'_6 + k.a_6$$
$$(1+k)\ a_4 = a'_5 + k.a_5.$$

Preuve. Voir [4, 12]

Remarques.

a) A'_5 et A'_6 étant les milieux respectifs de $A_2A'_3$ et $A_1A'_3$ on pose $\tilde{A}'_i = (A'_i, a'_i)$ (i = 5 ; 6) ; le théorème 1 signifie que d'une part $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_6$, $\tilde{A}_4$ et $\tilde{A}'_6$ et d'autre part $\tilde{A}_4$, $\tilde{A}_5$, $\tilde{A}_2$, et $\tilde{A}'_5$ sont coplanaires.

b) Dans la suite de l'exposé le B-réseau d'un polynôme est projeté sur le plan de base : sur les figures , on écrit les B-coefficients à la place des projections des points du B-réseau.

III - Interpolation par des splines quadratiques sur Q.

1°) Description de τ et choix des points d'interpolation.

Soit Q un quadrilatère de $\mathbb{R}^2$; I, n et n' des entiers naturels fixés. Pour la triangulation τ, on procéde ainsi : en partant du bord de Q on trace des quadrilatères emboités, appelés macro-quadrilatères et notés Q_i ($i = 1,...,I$) : Q_1 est le quadrilatère central et Q_I coïncide avec Q (cf. fig. 1 où $I = 3$). Les régions $(Q_i \backslash Q_{i-1})$ ($i = 2,...,I$) sont des couronnes de micro-quadrilatères. A l'intérieur de Q_1 les segments E_iF_i ($i = 1,...,n-1$) et G_iH_i ($i = 1,...,n'-1$) déterminent n' rangées de n micro-quadrilatères chacune (cf. fig. 1, 3, 4).
Dans la région $(Q_2 \backslash Q_1)$ on trace tous les micro-quadrilatères ayant chacun deux sommets sur la frontière de Q_1 (i.e un côté commun avec un micro-quadrilatère de Q_1) ; et dont les deux autres sommets se trouvent sur la frontière de Q_2.

La même construction se répète dans $(Q_i \backslash Q_{i-1})$ ($i = 3,...,I$) ; chaque micro-quadrilatère est subdivisé en 4 triangles par ses diagonales.

Pour $i = 1,...,I$ les points d'interpolation choisis sur la frontière de Q_i sont ses sommets et les milieux des segments déterminés par τ (cf. fig 1). A l'intérieur de Q_1 ce sont les milieux des côtés des micro-quadrilatères ayant comme supports E_iF_i ($i = 1,...,n-1$) et un point au milieu de l'un des côtés portés par les segments G_iH_i ($i = 1,...,n'-1$). (cf. figures 1, 3 et 4).

Théorème 2.

Etant donné une fonction f définie sur Q, il existe une spline unique $s \in P_2^1(Q)$ interpolant f aux points choisis.

Preuve.

La démonstration se fait en explicitant les B-coefficients de s sur chaque triangle T inclu dans Q.

Ce calcul se fait sur chacun des macro-quadrilatères emboités en partant de Q_1.

2°)Interpolation sur le quadrilatère central Q_1.

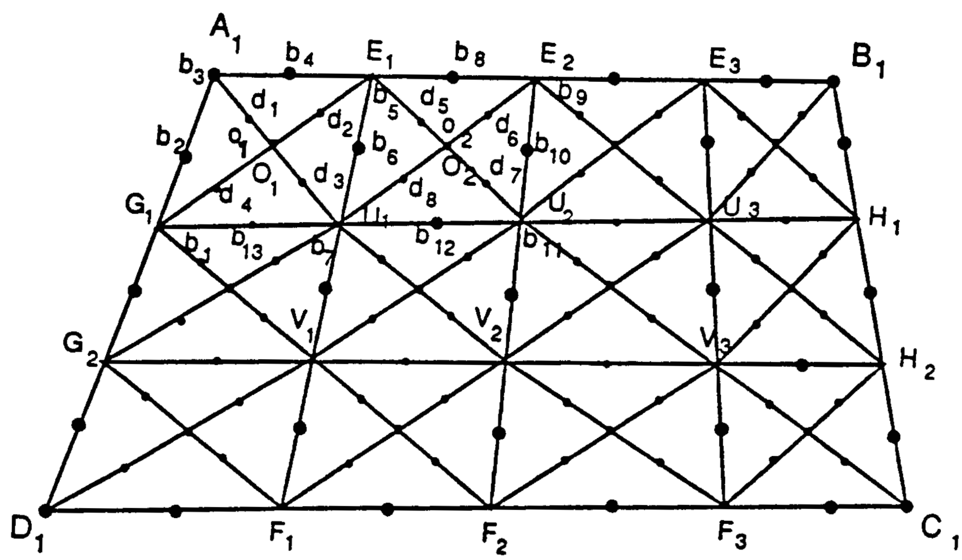


Fig. 3. Représentation des points d'interpolation et des B-coefficients sur Q_1 (cas où n = 4 ; n' = 3).

Les sommets des triangles sont représentés par des lettres majuscules et les B-coefficients par des lettres minuscules. Pour la clarté de la figure on ne nomme que certains B-coefficients, les autres sont soit confondus avec les points d'interpolation (•), soit représentés par des petits points (.).

Algorithme.

L'application du lemme 1 aux côtés de Q_1, à E_iF_i ($i = 1,\dots,n-1$) et aux côtés des micro-quadrilatères, ayant comme supports G_iH_i ($i = 1,\dots,n'-1$) et contenant un point d'interpolation (sur la figure 3, U_1U_2 et V_3H_2) donne les B-coefficients correspondant à ces segments, donc en particulier b_i($i = 1,\dots,12$).

Le calcul des autres B-coefficients nécessite le lemme suivant :

Lemme 3.

a) Le calcul des B-coefficients sur la frontière d'un micro-quadrilatère détermine de manière unique la spline sur ce dernier.

b) Si de plus, ces B-coefficients sont majorés par une constante K, alors la norme uniforme de la spline est majorée par K sur ce micro-quadrilatère.

Preuve.

a) Considérons un micro-quadrilatère dont tous les B-coefficients de la frontière sont connus par exemple $E_1E_2U_2U_1$.
Pour déterminer la spline sur ce micro-quadrilatère il suffit de déterminer son expression sur chacun des triangles inclus dans ce dernier. Ce qui revient à déterminer les B-coefficients d_i ($i = 5,...,8$) et o_2 (cf. II. 2°).
Posons :

$$\frac{O_2E_1}{O_2U_2} = k_2 \quad \text{et} \quad \frac{O_2E_2}{O_2U_1} = k'_2$$

D'après le corollaire 1 on a :

$$d_5 = (b_8 + k'_2.b_6) / (1 + k'_2)$$
$$d_6 = (b_8 + k_2.b_{10}) / (1 + k_2)$$
$$d_7 = (b_{10} + k'_2.b_{12}) / (1 + k'_2)$$
$$d_8 = (b_6 + k_2.b_{12}) / (1 + k_2)$$
$$o_2 = (d_5 + k_2.d_7) / (1 + k_2) = (d_6 + k'_2.d_8)/(1+k'_2)$$

b) Les formules précédentes montrent que les B-coefficients internes sont majorés par K ; ainsi en utilisant les propriétés de la base de Bernstein sur chacun des triangles, on en déduit immédiatement le résultat.

Pour déterminer les B-coefficients appartenant à la frontière de chacun des micro-quadrilatères, il reste à calculer ceux qui correspondent à G_iH_i ($i = 1 \ldots n'-1$) et qui ne coïncident pas avec un point d'interpolation. On explicite le calcul de b_{13}, les autres B-coefficients sont obtenus de manière analogue.

Posons $O_1 = \lambda_1E_1 + \lambda_2O_2 + \lambda_3U_1$ et $\dfrac{O_1E_1}{O_1G_1} = k'_1$.

D'après le théorème 1 on a :

$$d_3 = \lambda_1b_6 + \lambda_2d_8 + \lambda_3b_7.$$

D'après le corollaire 1 on a :

$$b_{13} = ((1 + k'_1)d_3 - b_6)/k'_1$$

Les autres B-coefficients sont obtenus à l'aide du lemme 3 ; ce qui détermine complètement les B-coefficients dans Q_1.

3°) Interpolation sur Q_i ($2 \leq i \leq I$).

Les B-coefficients correspondant aux côtés de tous les macro-quadrilatères Q_i s'obtiennent par application du lemme 1. Pour la méthode de calcul des autres B-coefficients, on se limite à la région ($Q_2 \backslash Q_1$), le calcul étant semblable dans ($Q_i \backslash Q_{i-1}$) ($i = 3,...,I$).

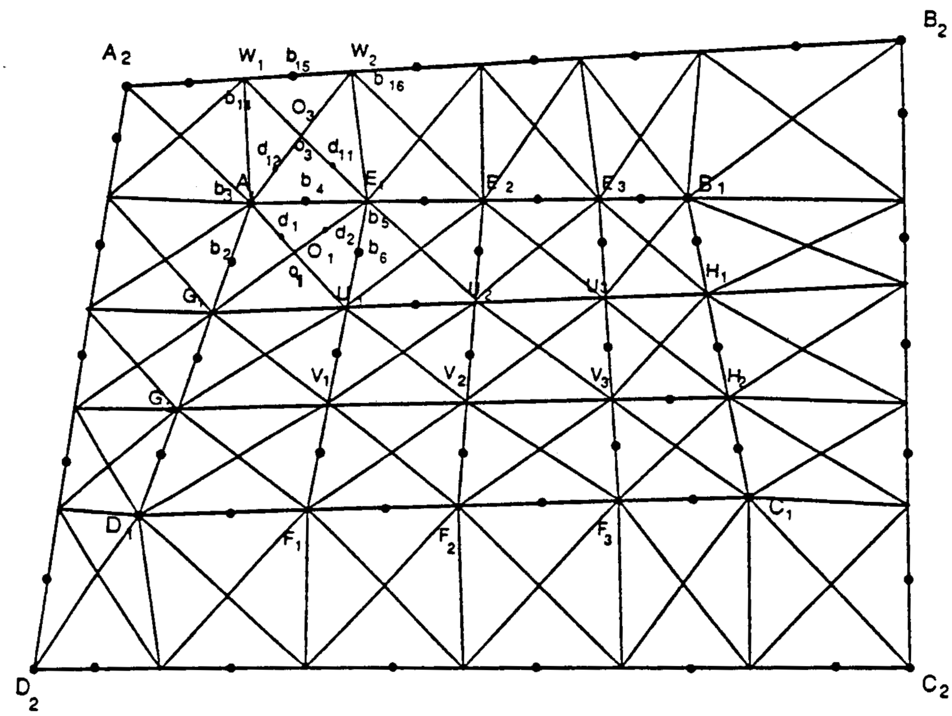


Fig. 4 : Représentation de quelques B-coefficients sur Q_2.

Dans le micro-quadrilatère $W_1W_2E_1A_1$ les B-coefficients b_i ($i = 3,4,5$) sont calculés précédemment (interpolation sur Q_1), les b_i ($i = 14,15,16$) sont obtenus par application du lemme 1 à A_2B_2.

Posons :

$$O_3 = \mu_1 A_1 + \mu_2 E_1 + \mu_3 O_1.$$

D'après le théorème 1 on a :

$$d_{11} = \mu_1 b_4 + \mu_2 b_5 + \mu_3 d_2$$
$$d_{12} = \mu_1 b_3 + \mu_2 b_4 + \mu_3 d_1.$$

Pour calculer le reste des B-coefficients dans $W_1W_2E_1A_1$ on reprend le calcul fait dans $A_1E_1U_1G_1$.

En faisant le même raisonnement dans tous les autres micro-quadrilatères de $(Q_2 \setminus Q_1)$ on détermine complètement les B-coefficients dans Q_2.

L'existence et l'unicité des B-coefficients sur Q_i pour tout i ($i = 1,\dots,I$) entraîne celles de s sur Q tout entier. Ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Corollaire 2.

Si τ détermine N_1 segments sur deux côtés opposés de Q et N_2 segments sur les deux autres côtés, alors la dimension de $P_2^1(Q)$ est :

$$N_o = (N_1+2)\,(N_2+2)-1$$

Preuve.

C'est une conséquence immédiate du théorème 2. La spline s est déterminée par interpolation de Lagrange avec $N_o = (N_1+2)\,(N_2+2)-1$ points d'interpolation.

IV - Norme de l'opérateur d'interpolation.

Définition 2.

a) on appelle Π l'opérateur qui à f associe son interpolant $\Pi(f)$ appartenant à $P_2^1(Q)$.

b) N_0 étant la dimension de $P_2^1(Q)$, on appelle $\{L_k\}_{1\leq k\leq N_0}$ les fonctions de base de Lagrange i.e. tq. $L_k(X_j) = \delta_{kj}$, où les $\{X_j\}_{1\leq j\leq N_0}$ sont les points d'interpolation et δ_{kj} le symbole de Kronecker. On note $\wedge_{N_0}(X) = \sum_{k=1}^{N_0} |L_k(X)|$, $X \in Q$, la fonction de Lebesgue associée.

Pour toute fonction f définie sur Q, on note : $\|f\|_Q = \sup_{X\in Q} |f(X)|$.

Lemme 4.

En posant :

$$\|\Pi\| = \sup\{\Pi(f)(X),\ \|f\|_Q\leq 1,\ X \in Q\} \text{ et } \|\wedge_{N_0}\|_Q = \sup_{X\in Q} |\wedge_{N_0}(X)|$$

on a alors :

$$\|\Pi\| = \|\wedge_{N_0}\|_Q.$$

Preuve.

$$\|\Pi\| = \sup_{\|f\|_Q\leq 1} \|\Pi f\|_Q = \sup_{\substack{X\in Q\\ \|f\|_Q\leq 1}} \left|\sum_{k=1}^{N_0} L_k(X)\ f(X_k)\right| \leq \sup_{X\in Q} \sum_{k=1}^{N_0} |L_k(X)| = \|\wedge_{N_0}\|_Q$$

D'autre part, pour un $X_0 \in Q$ tel que $\wedge_{N_0}(X_0) = \|\wedge_{N_0}\|_Q$ et une fonction g définie sur Q par :

$$g(X_k) = \text{signe } L_k(X_0) \qquad (\text{pour } k = 1,\dots,N_0)$$

$$|g(X)| \leq 1 \qquad \text{pour } X \neq X_k$$

On obtient :

$$\|\wedge_{N_0}\|_Q = \sum_{k=1}^{N_0} |L_k(X_0)| = \left|\sum_{k=1}^{N_0} L_k(X_0) g(X_k)\right|$$

$$\leq \sup_{\|f\|_Q\leq 1} \left|\sum_{k=1}^{N_0} L_k(X_0) f(X_k)\right| \leq \sup_{\substack{\|f\|_Q\leq 1\\ X\in Q}} \left|\sum_{k=1}^{N_0} L_k(X)\ f(X_k)\right| = \|\Pi\|$$

d'où l'égalité.

Soit r un entier naturel fixé. Sur chaque triangle T de Q on considère les points $X_{r_1 r_2}(T)$ de coordonnées barycentriques

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= r_1/r & & 0 \le r_1 \le r \\ \lambda_2 &= r_2/r & \text{pour} & \\ \lambda_3 &= 1-\lambda_1-\lambda_2 & & 0 \le r_2 \le r-r_1 \end{aligned}$$

Appelons $E_r(T)$ l'ensemble de ces points et $\chi_r = \bigcup_{T \in \tau} E_r(T)$. Pour tout $T \in \tau$, on a : Card $E_r(T) = (r+1)(r+2)/2$.

Théorème 3.

Pour $k = 1,\dots,N_0$ et $T \in \tau$, on désigne par $\{a_i^k(T),\ i = 1\dots6\}$ les B-coefficients de L_k sur T.

En posant :

$$m_r = \text{Sup}\ \{\wedge_{N_0}(X),\ X \in \chi_r\}$$

$$M = \text{Sup}\{\sum_{k=1}^{N_0} |a_i^k(T)|,\ 1 \le i \le 6\ ;\ T \in \tau\}$$

on a alors :

$$m_r \le \|\Pi\| \le M$$

Preuve.

La minoration étant évidente car $\|\Pi\| = \|\wedge_{N_0}\|_Q$ (lemme 4), il suffit de démontrer la majoration.

Soit $T \in \tau$ et $X \in T$ de coordonnées barycentrique $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ relativement à T.

Ecrivons L_k dans la base de Bernstein de T :

$$L_k(X) = \sum_{i=1}^{6} a_i^k(T)\ \phi_i(\lambda) \text{ d'où}$$

$$\sum_{k=1}^{N_0} |L_k(X)| \le \sum_{i=1}^{6} \phi_i(\lambda)\ \underset{1 \le i \le 6}{\text{Sup}} \sum_{k=1}^{N_0} |a_i^k(T)|.$$

or $\sum_{i=1}^{6} \phi_i(\lambda) = 1$ (cf. II.2) d'où en passant aux Sup :

$$\sup_{T\in\tau}\ \sup_{X\in T}\sum_{k=1}^{N_o}|L_k(X)| \leq \sup_{T\in\tau}\ \sup_{1\leq i\leq 6}\sum_{k=1}^{N_o}|a_i^k(T)|$$

Ainsi

$$\|\Pi\| \leq M.$$

V - Norme et erreur d'interpolation dans le cas où Q est un carré.

Soit N un entier naturel impair, Q est alors formé de N^2 micro-carrés tous identiques au carré central Q^1 (cf. fig. 5). Pour plus de commodité dans la suite, on choisit Q^N comme nouvelle notation de Q ; (les côtés de Q étant subdivisés en N segments égaux) et Π_N l'opérateur d'interpolation associé. De la même manière on appelle Q^n ($1 \leq n \leq N$, n impair) les différents macro-carrés inclus dans Q^N : leurs côtés étant subdivisés en n segments égaux. (Q^1 étant le micro-carré central).

1°) Majoration de $\|\Pi_N\|$.

Théorème 4.

a) $\|\Pi_1\| = 3$

b) $\|\Pi_N\| \leq 2N-1$ pour N impair, $N \geq 3$.

Preuve.

a) Soit f fonction définie sur Q^1 telle que $\|f\|_{Q^1} \leq 1$ appelons f_i ($1 \leq i \leq 8$) les valeurs de f aux points confondus avec b_i ($1\leq i \leq 8$) (cf. Fig. 5) ; d'après le lemme 1 on a :

$b_i = f_i$ (i impair) d'où $|b_i| \leq 1$ et $b_i = 2f_i - (b_{i-1} + b_{i+1})/2$ (i pair) d'où $|b_i| \leq 3$ ($b_9 = b_1$).

Ainsi d'après le lemme 3

$$\|\Pi_1(f)\|_{Q^1} \leq 3.$$

Montrons que cette norme est égale à 3.

Soit f fonction définie sur Q^1 vérifiant $f_i = -1$ (i impair) et $f_i = 1$ (i pair).

On a alors $b_i = -1$ (i impair)

$b_i = 3$ (i pair).

En utilisant le corollaire 1, on obtient les autres B-coefficients de l'interpolant s dans Q^1.

L'expression de l'interpolant dans chacun des triangles de Q^1 est donc

$s(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 3\lambda_3^2 + 3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$ d'où $s(0, 0, 1) = 3$.

Par conséquent :

$$\|\Pi_1(f)\|_{Q^1} = \|s\|_{Q^1} = 3.$$

b) Pour les majorations dans les autres micro-carrés, vu la symétrie de la figure, et d'après le lemme 3, il suffit de majorer les B-coefficients sur les bords de $B_1 B'_1 C'_1 C_1$ (fig. 5) ; l'algorithme du paragraphe III donne :

$m_3 = 2b_3 - b_2$ d'où $|m_3| \leq 2|b_3| + |b_2| \leq 5$ (1)

Les majorants des B-coefficients sur les bords de Q^n ($3 \leq n \leq N$, n impair) sont donnés par le lemme 2 d'où en particulier

$$|m_4| \leq 2.$$

On obtient des majorations analogues pour m'_3 et m'_4. Les plus grands majorants se trouvent donc sur les axes (X_iY_i). ($i = 1,...,4$). Vu la symétrie de la figure, il suffit de considérer (X_1Y_1) par exemple . Les B-coefficients de cet axe vérifient

$m_n = 2m_{m-1} - m_{n-2}$ ($n \geq 5$, n impair ; voir algorithme) or $|m_{n-1}| \leq 2$ (lemme 2) d'où

$$|m_n| \leq 4 + |m_{n-2}| \qquad (2)$$

On déduit alors de (1) et (2)

$$|m_n| \leq 2n\text{-}1 \text{ (pour } n \geq 3, \quad n \text{ impair)}$$

et d'après le lemme 3 on conclut : $\|\Pi_N\| \leq 2N\text{-}1$.

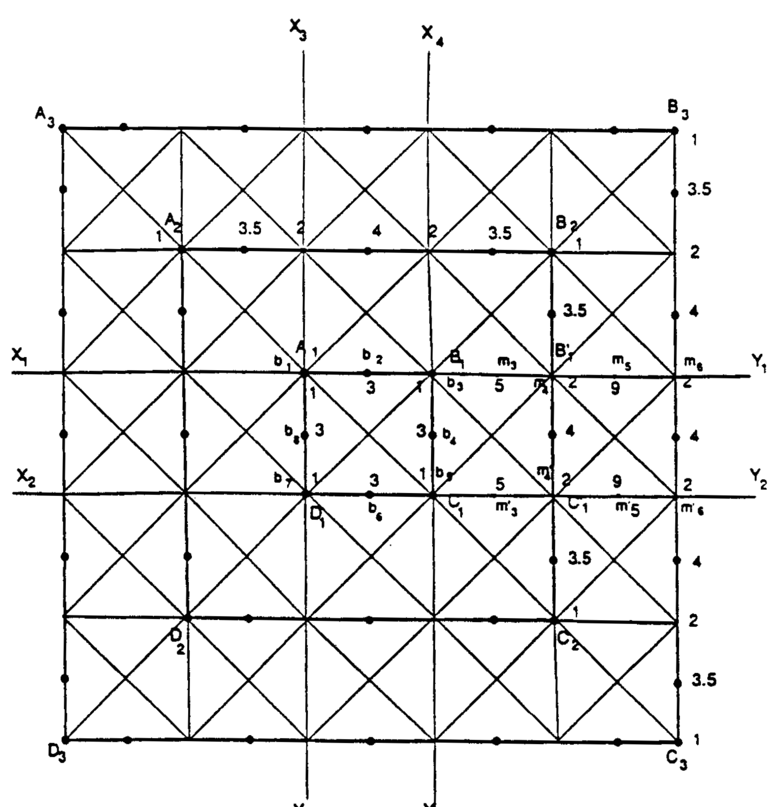


Fig. 5. Représentation de quelques majorants des B-coefficients dans Q^5.

2°) Erreur d'interpolation.

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on note $D^{kl} f(x,y) = \dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k y^l} f(x,y)$

Théorème 5.

N étant le nombre de segments égaux déterminés par τ sur les côtés de $Q^N = [a,b]^2$, on pose $h = 1/N$ et $\hat{Q}^N = [a-h/2,\ b+h/2]^2$. Si $f \in C^3(\hat{Q}^N)$ alors :

$$\|f-\Pi_N(f)\|_{Q^N} \leq (c_1 M_3 + c_2\, \hat{\omega}_{3,N}).h^2$$

avec :

$$c_1 = \frac{2\sqrt{3}}{27}\ ;\ c_2 = \frac{31}{12}\ ;\ M_3 = \underset{k+l=3}{\mathrm{Max}} \|D^{kl} f\|_{\hat{Q}^N}$$

$$\hat{\omega}_{3,N} = \underset{k+l=3}{\mathrm{Max}} \ \underset{\substack{\|X_1-X_2\| \leq h \\ X_1, X_2 \in \hat{Q}^N}}{\mathrm{Sup}} |D^{kl} f(X_1) - D^{kl} f(X_2)|$$

Preuve.

Supposons pour simplifier que Q^N est centré à l'origine. Soit $f \in C^3(\hat{Q}^N)$. Notons C_{ij} les micro-carrés de côté h inclus dans Q^N, centrés en $O_{ij} = (ih, jh)$ avec $-(N-1)/2 \leq i,j \leq (N-1)/2$; et $\hat{C}_{ij}$ les carrés centrés en O_{ij} et de côtés 2h. Dans [12] P. Sablonnière définit le quasi-interpolant :

$$S_2 f = \sum_{i,j} [f(O_{ij}) - \frac{1}{8} h^2 \Delta f(O_{ij})].M_{ij}$$

(ou Δf est le laplacien de f et M_{ij} la B-spline quadratique centrée en O_{ij}) et montre que

$$\|S_2 f - f\|_{C_{ij}} \leq (\frac{\sqrt{3}}{27} M_3\ (O_{ij}) + \frac{31}{24} \hat{\omega}_3^{i,j}\ ) . h^3$$

où

$$M_3(O_{ij}) = \underset{k+l=3}{\mathrm{Max}} |D^{kl} f(O_{ij})| \text{ et } \hat{\omega}_3^{i,j} = \underset{k+l=3}{\mathrm{Max}} \ \underset{\substack{\|X_1-X_2\| \leq h \\ X_1, X_2 \in \hat{C}_{ij}}}{\mathrm{Sup}} |D^{kl} f(X_1) - D^{kl} f(X_2)|$$

d'où en posant

$$\hat{\omega}_{3,N} = \underset{k+l=3}{\mathrm{Max}} \ \underset{\substack{\|X_1-X_2\| \leq h \\ X_1, X_2 \in \hat{Q}^N}}{\mathrm{Sup}} |D^{kl} f(X_1) - D^{kl} f(X_2)|$$

$$M_3 = \underset{k+l=3}{\mathrm{Max}} \|D^{kl} f\|_{\hat{Q}^N}\ ;\ c'_1 = \frac{\sqrt{3}}{27} \text{ et } c'_2 = \frac{31}{24}$$

On a :

$$\|S_2f-f\|_{Q^N} \leq (c'_1\ M_3 + c'_2\ \hat{\omega}_{3,N}).h^3 \qquad (1)$$

D'autre part S_2f étant une spline quadratique alors $\Pi_N(S_2f) = S_2f$ d'où

$$\Pi_N(f)-f = \Pi_N(f)-\Pi_N(S_2f) + S_2f - f$$

d'où

$$\|\Pi_N f-f\|_Q^N \leq (1 + \|\Pi_N\|)\ \|S_2f-f\|_Q^N \qquad (2)$$

Le théorème 4 donne

$$\|\Pi_N\| \leq 2N-1 \qquad \text{i.e. } \|\Pi_N\| \leq 2/h - 1 \qquad (3)$$

Les égalités (1) ; (2) et (3) donnent

$$\|\Pi_N f - f\|_Q^N \leq [c_1M_3 + c_2\hat{\omega}_{3,N}].h^2$$

avec $\qquad c_i = 2c'_i \qquad (i = 1;2)$

VI - Résultats numériques.

1°) Opérateur d'interpolation Π_N:

Les résultats numériques suivants représentent la variation de m_r et M en fonction de N. Les valeurs de m_r sont calculés avec $r = 10$ (cf. Théorème 3) on a ainsi 66 points dans chaque triangle.

N	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
m_r	3	3.98	4.84	6.31	7.76	9.23	10.69	12.15	13.61	15.07
M	3	5	8.14	11.13	14.07	16.99	19.91	22.84	25.76	28.68

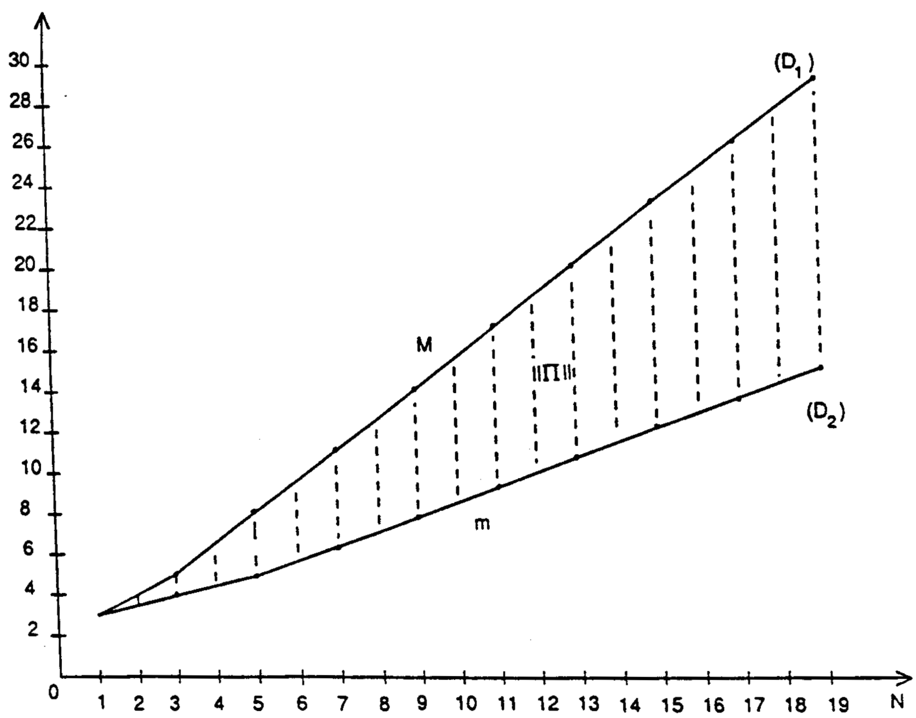


Fig. 6. Variation de m_r *et* M *en fonction de* N.

D'après le théorème 3, la norme de l'opérateur se trouve dans la partie hachurée du plan, limitée par les droites D_1 et D_2
i.e. $0.73\ N + 1.16 \leq \|\Pi_N\| \leq 1.47\ N + 0.9$

2°) Erreur d'interpolation et ordre de convergence.

Appelons e_N l'erreur d'interpolation sur Q^N. Dans les exemples suivants on prend $Q^N = [-0.5, 0.5]^2$ et $e_N = \sup\limits_{X \in \chi_r} |f(X) - \Pi_N f(X)|$ avec $r = 10$. On désigne par α l'ordre de convergence calculé de la manière suivante :

$$\alpha = \mathrm{Ln}(e_N/e_{N'})/\mathrm{Ln}(N'/N) \text{ où } N' = 2N+1.$$

Les tableaux suivants représentent la variation de e_N et α en fonction de N

N	$f(x,y) = Ln(2+x+y)$		
	e_N	$e_{N'}$	α
1	$9.33\ 10^{-3}$	$4.77\ 10^{-4}$	2.7
3	$4.77\ 10^{-4}$	$4.35\ 10^{-5}$	2.82
5	$1.15\ 10^{-4}$	$1.15\ 10^{-5}$	2.91
7	$4.35\ 10^{-5}$	$4.6\ 10^{-6}$	2.96
9	$2.08\ 10^{-5}$	$2.3\ 10^{-6}$	2.97
11	$1.15\ 10^{-5}$	$1.3\ 10^{-6}$	2.97
13	$7\ 10^{-6}$	$8\ 10^{-7}$	2.99
15	$4.6\ 10^{-6}$	$5\ 10^{-7}$	3.00
17	$3.1\ 10^{-6}$	$4\ 10^{-7}$	3.00
19	$2.3\ 10^{-6}$	$3\ 10^{-7}$	3.00

N	$f(x,y) = x^2y$		
	e_N	$e_{N'}$	α
1	$2.95\ 10^{-2}$	$1.09\ 10^{-3}$	3.00
3	$1.09\ 10^{-3}$	$8.61\ 10^{-5}$	2.99
5	$2.36\ 10^{-4}$	$2.26\ 10^{-5}$	2.99
7	$8.61\ 10^{-5}$	$8.7\ 10^{-6}$	3.01
9	$4.05\ 10^{-5}$	$4.5\ 10^{-6}$	2.99
11	$2.26\ 10^{-5}$	$2.4\ 10^{-6}$	3.00
13	$1.34\ 10^{-5}$	$1.5\ 10^{-6}$	3.00
15	$8.7\ 10^{-6}$	$1.0\ 10^{-6}$	2.99
17	$6\ 10^{-6}$	$7\ 10^{-7}$	3.00
19	$4.5\ 10^{-6}$	$5\ 10^{-7}$	2.99

N	$f(x,y) = \sin(\pi(x+y))$		
	e_N	$e_{N'}$	α
1	$5.22\ 10^{-2}$	$1.69\ 10^{-2}$	1.07
3	$1.69\ 10^{-2}$	$8.97\ 10^{-4}$	3.46
5	$2.95\ 10^{-3}$	$2.03\ 10^{-4}$	3.39
7	$8.97\ 10^{-4}$	$7.62\ 10^{-5}$	3.25
9	$3.9\ 10^{-4}$	$3.66\ 10^{-5}$	3.16
11	$2.03\ 10^{-4}$	$2.04\ 10^{-5}$	3.11
13	$1.19\ 10^{-4}$	$1.25\ 10^{-5}$	3.10
15	$7.62\ 10^{-5}$	$8.2\ 10^{-6}$	3.05
17	$5.17\ 10^{-5}$	$5.7\ 10^{-6}$	3.07
19	$3.66\ 10^{-5}$	$4.1\ 10^{-6}$	3.04

N	$f(x,y) = 1/(1.1+x+y)$		
	e_N	$e_{N'}$	α
1	2.63	1.02	0.86
3	1.02	$2.85\ 10^{-1}$	1.49
5	$5\ 10^{-1}$	$1.27\ 10^{-1}$	1.73
7	$2.85\ 10^{-1}$	$6.65\ 10^{-2}$	1.92
9	$1.85\ 10^{-1}$	$3.92\ 10^{-2}$	2.07
11	$1.27\ 10^{-1}$	$2.51\ 10^{-2}$	2.19
13	$9.06\ 10^{-2}$	$1.69\ 10^{-2}$	2.30
15	$6.65\ 10^{-2}$	$1.19\ 10^{-2}$	2.36
17	$5.05\ 10^{-2}$	$8.66\ 10^{-3}$	2.44
19	$3.92\ 10^{-2}$	$6.49\ 10^{-3}$	2.50

Conclusion générale.

La simplicité de l'algorithme est un point important de ce travail. En effet sur les côtés des macro-quadrilatères le calcul des B-coefficients se fait uniquement par interpolation à une variable (résolution d'un système tridiagonal).

Les B-coefficients se trouvant à l'intérieur de chaque micro-quadrilatère sont calculés à l'aide d'opérations élémentaires.

Notons que ce calcul se généralise naturellement au cas où les points d'interpolation ne coïncident pas forcément avec les milieux des segments portés par la frontière des macro-quadrilatères, mais se trouvent à une distance inférieure à $(\sqrt{2}-1)/2$ de ces derniers ([3]).

Il est à remarquer que dans le cas où Q est un carré, les résultats numériques donnent une meilleure majoration de la norme de l'opérateur d'interpolation ($\|\Pi_N\| \leq 1.47\ N + 0.9$ au lieu de $\|\Pi_N\| \leq 2N-1$) ; d'autre part ils semblent indiquer que l'erreur d'interpolation serait en $O(h^3)$. Le tracé très voisin des courbes de niveau de quelques fonctions et de leurs interpolants laisse penser que l'erreur est suffisamment faible en pratique ([15]).

Références.

1. Chui C.K., *Bivariate quadratic splines on criss cross triangulations*, Proc. First Army Conf. dans Appl. Math. Comp. 1 (1984), 877-882.
2. Chui C.K. and Renhong W., *On a bivariate B-spline basis*, Scientia Sinica (Series A) Vol. 27 n° 11 (1984), 1129-1142.
3. Demko S., *Interpolation by quadratic splines*, J. Approx. Theory 23 (1978), 392-400.
4. Farin G., *Triangular Bernstein-Bézier patches*, Computer Aided Geometric Design 3 (1986), 83-127.
5. Farin G., *Piecewise triangular* C^1 *surface strips*, Computer Aided Design 18 (1) (1986), 45-47.
6. Farin G., *Curves and surfaces for computer aided geometric design*, Academic Press, New-York (1988).
7. Franke R., Schumaker L.L., *A bibliography of multivariate approximation*, dans Topics in Multivariate Approximation, C.K. Chui, L.L. Schumaker and F.I. Utreras ed., Academic Press, New-York (1987), 275-335.
8. Heindl G., *Interpolation and approximation by piecewise quadratic* C^1 *functions of two variables*., I.S.N.M. 51, Birkhauser Verlag, Basel (1979), 146-161.
9. Kammerer W.J. , Reddien W., Varga R.S., *Quadratic interpolatory splines*., Numer. Math. 22 (1974), 241-259.
10. Powell M.J.D., *Piecewise quadratic surface fitting for contour plotting* Software for Numerical Mathematics', D.J. Evans Ed. Academic Press, New-York (1974), 253-272.

11. Powell M.J.D. and Sabin M.A., *Piecewise quadratic approximations on triangles*, dans ACM trans. Math. Software 3 (1972), 316-325.
12. Sablonnière P., *Bases de Bernstein et approximants splines*, Thèse de Doctorat ès-sciences, Université de Lille (Juin 1982).
13. Sablonnière P., *Interpolation by quadratic splines on triangles and squares*, Computers in Industry3 (1982), 45-52.
14. Sablonnière P., *Bernstein-Bézier methods for the construction of bivariate spline approximant*, Computer Aided Geometric Design 2 (1985), 29-36.
15. Zedek F., *Interpolation sur un domaine carré par des splines quadratiques à 2 variables*, Thèse de Doctorat 3ème cycle, Université de Lille (1985).
16. Zwart P.B., *Multivariate splines with non degenerate partitions*, dans SIAM J. Num. Analy. 10 (1973), 665-673.

Operator norm and error bounds for interpolating quadratic splines on a non-uniform type-2 triangulation of a rectangular domain

F. Jeeawock-Zedek
Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres-Artois
Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation
UFR IEEA-M3
59650 Villeneuve d'Ascq-Cedex

June 11, 1991

Abstract

The aim of this paper is to give upper bounds of the norm of the operator and associated error for a Lagrange interpolation problem by C^1 quadratic splines.The domain is rectangular and the type-2 triangulation is non-uniform.Moreover the location of data points allows a very simple computation of the interpolant.

Keywords: B-splines, B-coefficients, interpolation operator, quasi-interpolant, quadratic spline.

1 Introduction

Let $\mathcal{T}$ be a non-uniform type-2 triangulation of a rectangular domain Q of $\mathbb{R}^2$.In [11] we showed the existence and unicity of a quadratic spline C^1 interpolating a given function f at points chosen suitably in a quadrilateral domain of the plane:the rectangle Q (see fig.1) is then a particular case.Results concerning the norm of the interpolation operator and error estimates were developed in [11;12] for a square domain with a uniform triangulation.In this paper we extend these results to the case of a rectangle Q with a non-uniform triangulation. We show that the computation of upper bounds of the interpolation operator norm gives an evaluation of the error which depends only on H (the maximum length of the subdivision segments),on ρ (the minimum length,see 2.1) and on the smoothness of f. In all that follows we use the Bézier representation (i.e. on each $T \in \mathcal{T}$,the interpolant is expressed in terms of the Bernstein basis (see e.g. [7;8]).

In section 2, we recall the interpolation problem as well as some preliminaries.

In section 3,we give an upper bound of the norm of the interpolation operator .

In section 4, we give an upper bound of the interpolation error by using the properties of a quadratic quasi-interpolant using the B-splines given by C.K. Chui and R.H. Wang in [2;9] and by P. Sablonnière in [8].This work is based on ideas developed by P. Sablonnière in [7,chap.VI] in the case of a uniform triangulation.

2 Notations and interpolation problem

2.1 Notations

Let $Q = [a, b] \otimes [c, d]$ be a rectangle of the plane and N a fixed odd natural integer.The vertical and horizontal lines $x - x_i = 0$ and $y - y_j = 0$ for $1 \leq i, j \leq N - 1$ where $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ and $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{N-1} < y_N = d$ subdivide Q into N^2 rectangles $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \otimes [y_{j-1}, y_j]$ for $1 \leq i, j \leq N$.Each R_{ij} is subdivided into four triangles by its diagonals.We call $\mathcal{T}$ this triangular partition (see fig.1).Let $Q_1 = A_1B_1C_1D_1$ be the central rectangle,supposed centered at the origin (in fig.1 $Q_1 = R_{22}$).The nested rectangles $A_iB_iC_iD_i$ for $2 \leq i \leq (N + 1)/2$ having their edges subdivided into n segments are denoted by Q_n for $3 \leq n \leq N$,n odd ($Q_N = Q$).

For $1 \leq i, j \leq N$,we set:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} h_i &=& x_i - x_{i-1} &;& A_i &=& h_i/(h_i + h_{i+1}) &;& A'_i &=& 1 - A_i \\ k_j &=& y_j - y_{j-1} &;& B_j &=& k_j/(k_j + k_{j+1}) &;& B'_j &=& 1 - B_j \\ H &=& \max\limits_{i,j}(h_i, k_j) &;& h &=& \min\limits_{i,j}(h_i, k_j) &;& \rho &=& \dfrac{H}{h} \quad (\rho > 1) \end{array}$$

For all $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ and all domain $D \subset \mathbb{R}^2$,we denote $\|X\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\|X\|_1 = |x| + |y|$,$\|f\|_D = Sup\{|f(X)|, X \in D\}$.

For k and l two natural integers, monomials are denoted by $e_{kl}(x, y) = x^k y^l$. Given a differentiable function f ,the k^{th} derivative at a point X_0 applied to a set of k vectors $(X_1, \cdots, X_k)$ is denoted by $D^k f(X_0).(X_1, \cdots, X_k)$. In case when $X_i = X (1 \leq i \leq k)$,we use for brevity the notation $D^k f(X_0).(X)^k$

Finally partial derivatives are denoted by $\partial_{kl} f(x, y) = \dfrac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}(x, y)$

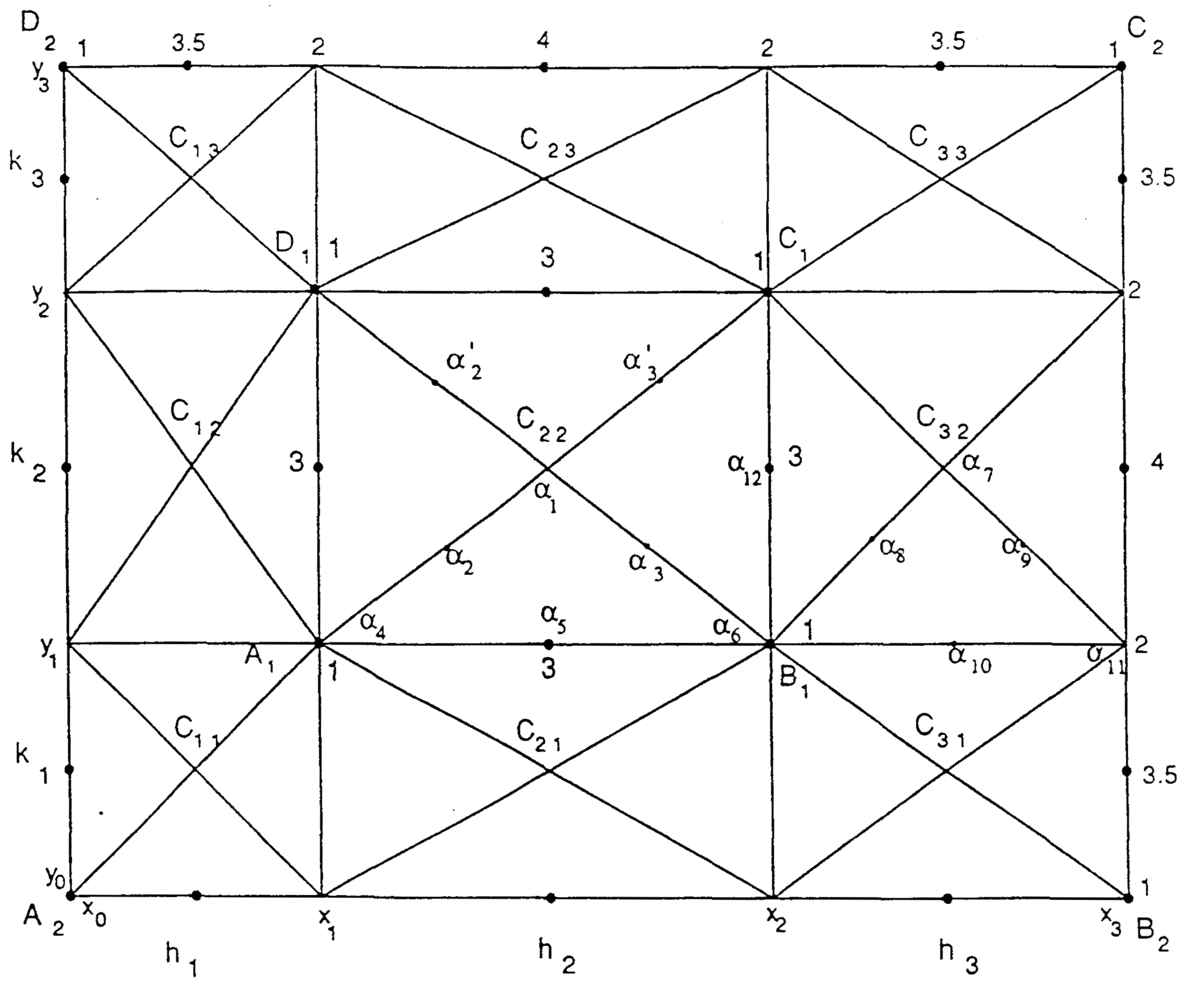


Figure 1: Triangulation $\mathcal{T}$ of Q_3 (Representation of interpolation points and some B-coefficients α_i for $1 \leq i \leq 12$ and α'_i for i=2,3 of the interpolant. The given values represent upper-bounds of the B-coefficients lying on the edges of the rectangles Q_n in case $\|f\|_{Q_N} \leq 1$).

2.2 The Lagrange interpolation problem

2.2.1 Univariate case

Let $I = [a, b]$ be an interval of R, $\Delta = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ be a subdivision of I and $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ for $0 \leq i \leq n-1$ .Set $x_0^* = x_0, x_i^* = (x_{i-1} + x_i)/2$ for $1 \leq i \leq n$ and $x_{n+1}^* = x_n$.Let $P_2^1(I) = \{s \in C^1(I) : s|I_i \in P_2(I_i)$ for $0 \leq i \leq n-1\}$where $P_2(I_i)$ is the space of polynomials of degree at most 2 defined on I_i.Given a function f defined on I ,we set $f(x_i^*) = f_i$.It is well known (see[6;7]) that there exists a unique quadratic spline $s \in P_2^1(I)$ verifying $s(x_i^*) = f_i$ for $0 \leq i \leq n+1$.

s may be expressed in terms of the Bernstein basis on I_i for $0 \leq i \leq n-1$ as:

$s(x) = \sum_{j=0}^{2} b_{2i+j}\varphi_j\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)$ where $\varphi_j(x) = \binom{2}{j} x^j(1-x)^{2-j}$,

$\{b_i, 0 \leq i \leq 2n\}$ are the B-coefficients of s on the whole interval I.

Lemma 1 . *The B-coefficients b_{2i} for $1 \leq i \leq n-1$ are solutions of the following tridiagonal linear system which is strictly row diagonally dominant :*

$$\begin{cases} 6b_2 + b_4 & = & -f_0 + 4f_1 + 4f_2 \\ b_{2i-2} + 6b_{2i} + b_{2i+2} & = & 4f_i + 4f_{i+1} \quad 2 \leq i \leq n-2 \\ b_{2n-4} + 6b_{2n-2} & = & 4f_{n-1} + 4f_n - f_{n+1} \end{cases}$$

and we deduce: $b_{2i+1} = 2f_{i+1} - (b_{2i} + b_{2i+2})/2$ for $0 \leq i \leq n-1$ *where* $b_0 = f_0$ *and* $b_{2n} = f_{n+1}$

*Proof.*See [7]

2.2.2 Bivariate case

Let $P_2^1(Q) : \{s \in C^1(Q) : s|T \in P_2(T) \text{ for all } T \in \mathcal{T}\}$ where $P_2(T)$ is the space of bivariate polynomials of total degree at most 2. For all $T \in \mathcal{T}$,every polynomial $p \in P_2(T)$ may be expressed in terms of the Bernstein basis with respect to the barycentric coordinates $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ in T:

$$p(\lambda) = \sum_{i=1}^{6} a_i(T)\varphi_i(\lambda)$$

where $\varphi_i(\lambda) = \lambda_i^2$ for $1 \leq i \leq 3$,$\varphi_4(\lambda) = 2\lambda_1\lambda_2$, $\varphi_5(\lambda) = 2\lambda_2\lambda_3$, $\varphi_6(\lambda) = 2\lambda_1\lambda_3$
The $a_i(T)$ for $1 \leq i \leq 6$ are called B-coefficients of p on T.

The chosen interpolation points are the vertices of Q_n and the midpoints of segments lying on the edges of Q_n for $1 \leq n \leq N$.

Theorem 1 . *For a given function f defined on Q,there exists a unique quadratic spline $s \in P_2^1(Q)$ interpolating f at the chosen points.*

Proof. For more details see [11] where the interpolant is calculated on any quadrilateral.However we give some indications: using interpolation by univariate splines,we first compute the B-coefficients of s on the edges of Q_n for $1 \leq n \leq N$;the other B-coefficients in Q_1 and $(Q_n \backslash Q_{n-2})$ for $3 \leq n \leq N$,are obtained by application of C^1-continuity theorems(see e.g. [5;7;8]).

Lemma 2 . *Let R_{22} and R_{32} be two adjacent rectangles (see fig.1);let (μ_1, μ_2, μ_3) denote the barycentric coordinates of the vertex C_{32} with respect to $B_1C_{22}C_1$ ie.:*

$$C_{32} = \mu_1 B_1 + \mu_2 C_{22} + \mu_3 C_1$$

then we have:
$\mu_1 = \mu_3 = (1 + h_3/h_2)/2$, $\mu_2 = -h_3/h_2$
therefore:
$|\mu_1| = |\mu_3| \leq (1+\rho)/2$, $|\mu_2| \leq \rho$

Using C^1-continuity theorems (see [5;7;11]) we have the following:

Lemma 3 . *The B-coefficients α_i of s represented on fig.1 verify:*

$$\begin{aligned} \alpha_8 &= \mu_1\alpha_6 + \mu_2\alpha_3 + \mu_3\alpha_{12} \\ \alpha_3 &= (\alpha_5 + \alpha_{12})/2 \\ \alpha_8 &= (\alpha_{10} + \alpha_{12})/2 \\ \alpha_{10} &= \mu_2\alpha_5 + 2\mu_1\alpha_6 \end{aligned}$$

3 Norm of the interpolation operator

Definition 1 . *We call* Π_N *the interpolation operator on* Q_N *defined by* $\Pi_N f = s$ *where* s *is the interpolant of* f.*Let* $||\Pi_N|| = Sup\{||\Pi_N f||_{Q_N},\ ||f||_{Q_N} \leq 1\}$

For $1 \leq n \leq N$,we denote by $b_i^n (0 \leq i \leq 2n)$ (see univariate case) the B-coefficients of s on some edge Γ_N of Q_n.

Lemma 4 . *For* f *such that* $||f||_{Q_N} \leq 1$ *we have :*

$$|b_0^1| \leq 1 \ ; \ |b_1^1| \leq 3 \ ; \ |b_2^1| \leq 1$$

and for $3 \leq n \leq N$

$$|b_0^n| \leq 1 \ ; \ |b_1^n| \leq 3.5 \ ; \ |b_{2n-1}^n| \leq 3.5 \ ; \ |b_{2n}^n| \leq 1$$

$$|b_{2i}^n| \leq 2 \quad \text{for } 1 \leq i \leq n-1$$

$$|b_{2i+1}^n| \leq 4 \quad \text{for } 1 \leq i \leq n-2$$

Proof. From interpolation on a segment (see univariate case) we have the following results on the edges of $Q_n (1 \leq n \leq N)$

$$b_{2i}^n = s(x_i) \quad \text{for } 0 \leq i \leq n \tag{1}$$

Kammerer, Reddien and Varga show in [6] that

$$||s||_{\Gamma_N} \leq 2 \tag{2}$$

Using the fact that $||f||_{Q_n} \leq 1$,we obtain the result from (1),(2) and lemma 1.

Lemma 5 . *Using the previous notations we have:*

$$||\Pi_N f|| \leq \max\{a_i(T), 1 \leq i \leq 6, T \in \mathcal{T}\}$$

where $a_i(T)$ *are the B-coefficients of* $\Pi_N f$ *on* T.

*Proof.*On all $T \in \mathcal{T}$,Π_N can be expressed as $\Pi_N f(\lambda) = \sum_{i=1}^{6} a_i(T)\varphi_i(\lambda)$. The result follows from

$$|\Pi_N f(\lambda)| \leq \max_{1 \leq i \leq 6} |a_i(T)| \sum_{i=1}^{6} \varphi_i(\lambda) = \max_{1 \leq i \leq 6} |a_i(T)|$$

Theorem 2 .*ρ being defined previously (see 2.1) we have* $||\Pi_1|| = 3$ *and for* $N \geq 3$

i)$||\Pi_N|| \leq 4\dfrac{\rho^{\frac{N+1}{2}} - 1}{\rho - 1} - 1 \quad \text{if } \rho > 1$

ii)$||\Pi_N|| \leq 2N - 1 \qquad \text{if } \rho = 1$

Proof. Let f be some function verifying $||f||_{Q_N} \leq 1$. For $1 \leq n \leq N$, we call m_n the max of absolute values of all B-coefficients of $\Pi_n f$ on Q_n. Lemma 5 gives:

$$||\Pi_n f|| \leq m_n \tag{3}$$

a) α_i for $1 \leq i \leq 12$ and α'_i for $i = 2,3$ being the B-coefficients of s represented on figure 1, lemma 4 gives bound of B-coefficients on the edges of Q_1 ,particularly:

$$|\alpha_i| \leq 1 \quad \text{for } i = 4,6$$

and

$$|\alpha_i| \leq 3 \quad \text{for } i = 5,12$$

Thus from lemma 3,we have:

$$|\alpha_3| \leq 3$$

and by symmetry we have:

$$|\alpha_2| \leq 3$$

and

$$|\alpha'_i| \leq 3 \quad \text{for } i = 2,3$$

The same proceeding gives:

$$|\alpha_1| \leq 3$$

then we deduce

$$m_1 \leq 3 \tag{4}$$

Using the definition of the operator norm we deduce from (3) and (4)

$$||\Pi_1|| \leq 3 \tag{5}$$

If f takes the values -1 at the vertices of Q_1 and 1 at the midpoints of its edges,univariate interpolation gives:

$$\alpha_4 = \alpha_6 = -1$$

$$\alpha_5 = \alpha_{12} = 3$$

Lemma 3 gives:

$$\alpha_3 = 3$$

and the same proceeding gives:

$$\alpha_i = 3 \quad \text{for } i = 1,2$$

Thus s may be expressed on T as:

$$s(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 3\lambda_3^2 + 6(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$$

and

$$s(0,0,1) = 3 \tag{6}$$

Relations (5) and (6) give:

$$||\Pi_1|| = 3$$

b)Lemma 4 gives upper-bounds of the B-coefficients lying on the edges of Q_n. The proceeding used in Q_1 may be generalized to all the rectangles $R_{ij} \subset (Q_n \backslash Q_{n-2})$ for $3 \leq n \leq N$.
We give some details in R_{32} for example:
Lemmas 2 and 3 give:

$$|\alpha_{10}| \leq \rho|\alpha_5| + (1+\rho)|\alpha_6|$$

The computation of all B-coefficients on Q_3 gives:

$$m_3 \leq \rho m_1 + (1+\rho)|\alpha_6|$$

Thus

$$m_3 \leq 4\rho + 1 \tag{7}$$

And a similar relation on Q_5:

$$m_5 \leq \rho m_3 + (1+\rho)|\alpha_{11}|$$

Thus

$$m_5 \leq \rho m_3 + 2(1+\rho)$$

Then we obtain the recurrence relation:

$$m_n \leq \rho m_{n-2} + 2\rho + 2 \quad \text{for } 5 \leq n \leq N \tag{8}$$

Setting $N = 2k+1$,inequalities (7) and (8) give:

$$m_N \leq 4\rho(\rho^{k-1} + \rho^{k-2} + \cdots + 1) + 2 - \rho^{k-1}$$

If $\rho = 1$

$$m_N \leq 2N - 1$$

(which is the result already given in [11])
If $\rho > 1$

$$1 + m_N \leq 4\frac{\rho^{k+1} - 1}{\rho - 1}$$

then we deduce:

$$\|\Pi_N\| \leq 4\frac{\rho^{\frac{N+1}{2}} - 1}{\rho - 1} - 1 \quad \text{q.e.d.}$$

4 Interpolation error

4.1 Definition and properties of a quadratic quasi-interpolant

For $(x,y) \in Q_N$ and $f \in C^2(Q_N)$,we define the quasi-interpolant:

$$S_2 f(x,y) = \sum_{1 \leq i,j \leq N} \left[f(C_{ij}) - \frac{1}{8} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C_{ij}) - \frac{1}{8} k_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C_{ij}) \right] M_{ij}(x,y)$$

For $1 \leq i,j \leq N, C_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ is the midpoint of the rectangle R_{ij} and M_{ij} is the quadratic B-spline centered at C_{ij}(its B-coefficients are given in fig.2)(see[2,8]). This quasi-interpolant is a generalization of the one described by P. Sablonnière in [7].

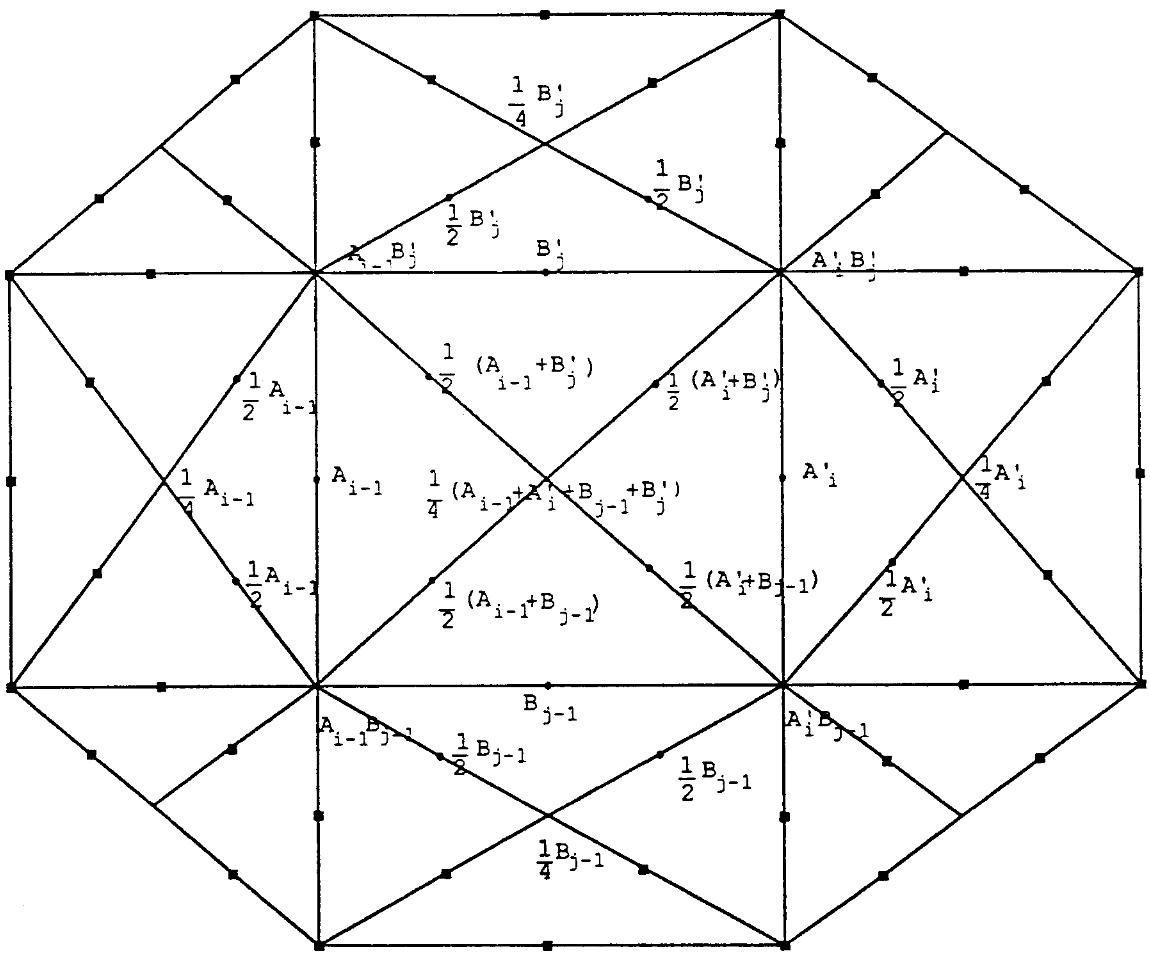


Figure 2: B-coefficients of the quadratic B-spline M_{ij} centered at C_{ij} (values at square dots are zero)

The following table represent the B-coefficients $\alpha_i (1 \leq i \leq 6)$ on $T = C_{22}A_1B_1$ (see fig.1) of B-splines M_{ij} for $1 \leq i, j \leq 3$,of some monomials e_{kl} and $S_2 e_{kl}$.

B-coeff / Fonction	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
M_{11}	0	0	0	$A'_1 B'_1$	0	0
M_{21}	$\frac{1}{4} B'_1$	$\frac{1}{2} B'_1$	$\frac{1}{2} B'_1$	$A_1 B'_1$	B'_1	$A'_2 B'_1$
M_{31}	0	0	0	0	0	$A_2 B'_1$
M_{12}	$\frac{1}{4} A'_1$	$\frac{1}{2} A'_1$	0	$A'_1 B_1$	0	0
M_{22}	$\frac{1}{4}(A_1 + A'_2 + B_1 + B'_2)$	$\frac{1}{2}(A_1 + B_1)$	$\frac{1}{2}(A'_2 + B_1)$	$A_1 B_1$	B_1	$A'_2 B_1$
M_{32}	$\frac{1}{4} A_2$	0	$\frac{1}{2} A_2$	0	0	$A_2 B_1$
M_{13}	0	0	0	0	0	0
M_{23}	$\frac{1}{4} B_2$	0	0	0	0	0
M_{33}	0	0	0	0	0	0
e_{20} $(S_2 e_{20})$	0	0	0	$\frac{1}{4} h_2^2$	$\frac{1}{4} h_2^2$	$\frac{1}{4} h_2^2$
e_{11} $(S_2 . e_{11})$	0	0	0	$\frac{1}{4} h_2 k_2$	0	$-\frac{1}{4} h_2 k_2$
e_{30}	0	$\frac{1}{32} h_2^3$	$-\frac{1}{32} h_2^3$	$-\frac{1}{8} h_2^3$	0	$\frac{1}{8} h_2^3$
$S_2 e_{30}$	$\frac{h_2}{16}(h_1^2 - h_1 h_2 + h_2 h_3 - h_3^2)$	$\frac{h_2}{16}(2h_1^2 - 2h_1 h_2 - h_2^2)$	$\frac{h_2}{16}(h_2^2 + 2h_2 h_3 - 2h_3^2)$	$-\frac{h_2}{8}(-2h_1^2 + 2h_1 h_2 + h_2^2)$	0	$\frac{h_2}{8}(h_2^2 + 2h_2 h_3 - 2h_3^2)$
e_{12}	0	$\frac{1}{32} h_2 k_2^2$	$-\frac{1}{32} h_2 k_2^2$	$-\frac{1}{8} h_2 k_2^2$	0	$\frac{1}{8} h_2 k_2^2$
$S_2 e_{12}$	0	$\frac{1}{16} h_2 k_2^2$	$-\frac{1}{16} h_2 k_2^2$	$-\frac{1}{8} h_2 k_2^2$	0	$\frac{1}{8} h_2 k_2^2$

Table of B-coefficients

Theorem 3 . *The quasi-interpolant S_2 is exact on the space P_2 i.e. $S_2p = p$ for all $p \in P_2$;furthermore we have*

$$||S_2e_{kl} - e_{kl}||_{Q_1} \leq mH^3$$

where

$$m = \begin{cases} \frac{7}{32} & \text{if} \quad (k,l) = (0,3) \quad \text{or} \quad (3,0) \\ \\ \frac{1}{32} & \text{if} \quad (k,l) = (2,1) \quad \text{or} \quad (1,2) \end{cases}$$

Proof. We first prove that S_2 is exact on P_1.In the following, we denote S_2e_{kl} by $S_2[x^k]$ (resp. $S_2[y^l]$) if $l = 0$ (resp.if $k = 0$).
Let $T \in \mathcal{T}$;for all polynomial p let $\{\alpha_i(p), 1 \leq i \leq 6\}$ be the B-coefficents of p on T.To show that S_2 reproduces P_1,we just have to prove that

$$\alpha_i(S_2e_{kl}) = \alpha_i(e_{kl}) \quad \text{for } 1 \leq i \leq 6 \quad \text{and } k + l = 1 \quad \text{on all } T \in \mathcal{T}$$

We detail the calculation of $\alpha_1(S_2e_{10})$ on $T = C_{22}A_1B_1$ (see fig.1 for notations) for example:

$$\alpha_1(S_2e_{10}) = \sum_{1 \leq i,j \leq 3} e_{10}(C_{ij})\alpha_1(M_{ij})$$

Replacing $\alpha_1(M_{ij})$ by its value for $1 \leq i,j \leq 3$ (see table of B-coefficients) we have:

$$\alpha_1(S_2e_{10}) = \alpha_1(e_{10}) = 0$$

A similar calculation is done for all α_i,on all $T \subset Q_1$ and we obtain $S_2[x] = x$ for all $x \in R_{22}$.
We can extend the result to every R_{ij} for $1 \leq i,j \leq N$ because for $X = (x,y) \in R_{22}$ we have:

$$S_2e_{10}(x + a, y) = S_2[x + a] = \sum_{1 \leq i,j \leq N} e_{10}(C_{ij})M_{ij}(x,y) + a \sum_{1 \leq i,j \leq N} M_{ij}(x,y) = x + a$$

We do the same for $y + b$. Then S_2 reproduces P_1.
Using the same method we prove that:

$$\alpha_i(S_2e_{kl}) = \alpha_i(e_{kl}) \quad \text{for } 1 \leq i \leq 6 \quad \text{and } k + l = 2 \quad \text{on all } T \subset Q_1$$

and we deduce that $S_2[x^2] = x^2$ for $x \in R_{22}$. This result can be extended to every R_{ij} for $1 \leq i,j \leq N$ since

$$S_2e_{kl} = e_{kl} \quad \text{for } k + l = 1$$

we have

$$S_2[(x + a)^2] = S_2[x^2] + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

We do the same for $(y + b)^2$ and $(x + a)(y + b)$ and we conclude that S_2 is exact on P_2.

As for the effect on P_3,we give some details for e_{30},the proceeding being the same for e_{03}, e_{12} and e_{21}.
According to lemma 5,to bound $||S_2e_{kl} - e_{kl}||_T$ for $k + l = 3$,we just have to bound the quantities:

$$\overline{\alpha}_i = |\alpha_i(S_2e_{kl}) - \alpha_i(e_{kl})| \quad \text{for } 1 \leq i \leq 6$$

For example:

$$\begin{aligned}\alpha_1(S_2e_{30}) &= \sum_{1\le i,j\le 3}\left[e_{30}(C_{ij})-\frac{3}{4}h_i^2e_{10}(C_{ij})\right]\alpha_1(M_{ij})\\ &= \sum_{1\le i,j\le 3}\left[x_{ij}^3-\frac{3}{4}h_i^2x_{ij}\right]\alpha_1(M_{ij})\end{aligned}$$

Using the table of B-coefficients we have:

$$\overline{\alpha}_1 \le \frac{H^3}{8}$$

Similarly we obtain bounds for $\overline{\alpha}_i(e_{30})$ for $2\le i\le 6$.
and we deduce:

$$Max\{\overline{\alpha}_i(e_{30}),\ 1\le i\le 6\ \} \le \frac{7}{32}H^3$$

Thus

$$||S_2e_{30}-e_{30}||_T \le \frac{7}{32}H^3$$

This result is true for all $T\subset Q_1$,in consequence we have:

$$||S_2e_{30}-e_{30}||_{Q_1} \le \frac{7}{32}H^3$$

By symmetry we have also

$$||S_2e_{03}-e_{03}||_{Q_1} \le \frac{7}{32}H^3$$

And by using the same method we obtain finally:

$$||S_2e_{kl}-e_{kl}||_{Q_1} \le \frac{1}{32}H^3 \text{ for } (k,l)=(2,1) \text{ or } (1,2)$$

4.2 Error bounds for the quasi-interpolant S_2 and the Lagrange interpolant

Theorem 4 . *Let $\hat{Q}_1 = C_{11}C_{13}C_{33}C_{31}$ be the rectangle defined by:*

$$\hat{Q}_1 = [-(h_1+h_2)/2,(h_1+h_2)/2]\otimes[-(k_1+k_2)/2,(k_1+k_2)/2] \quad \text{,containing } Q_1$$

We have for $f\in C^3(\hat{Q}_1)$

$$||S_2f-f||_{Q_1} \le \{c_1M_3(C_{22})+c_2\hat{\omega}_3(H)\}\,H^3$$

where

$$c_1 = 5/48\ ,c_2 = 17/4$$

$$M_3(C_{22}) = \max\{|\partial_{kl}f(C_{22})|\ ,k+l=3\ \}$$

$$\hat{\omega}_3(H) = Sup\left\{|\partial_{kl}f(X_1)-\partial_{kl}f(X_2)|;||X_1-X_2||\le H,X_1 \text{ and } X_2\in\hat{Q}_1;k+l=3\right\}$$

(maximum modulus of continuity of the $\partial_{kl}f$ on $\hat{Q}_1$)

Proof. Let us recall that for $X \in T$ we have:

$$S_2 f(X) = \sum_{1 \le i,j \le 3} \left[f(C_{ij}) - \frac{1}{8} h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C_{ij}) - \frac{1}{8} k_j^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C_{ij}) \right] M_{ij}(X)$$

Since $f \in C^3(\hat{Q}_1)$ we can write the following Taylor formulas:

$$f(X) = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} D^k f(C_{22}).(X - C_{22})^k + \frac{1}{6} \left[D^3 f(\tilde{X}) - D^3 f(C_{22}) \right] .(X - C_{22})^3$$

with $\tilde{X} \in]C_{22}, X[$.
The same formula holds by replacing X by C_{ij} and $\tilde{X}$ by $\tilde{C}_{ij}$ for $1 \le i,j \le 3, (i,j) \ne (2,2)$.
We have also:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C_{ij}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C_{22}) + D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C_{22}).(C_{ij} - C_{22}) + \left[D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{C}_{ij}) - D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C_{22}) \right] .(C_{ij} - C_{22})$$

with $\hat{C}_{ij} \in]C_{22}, C_{ij}[$.
A similar formula holds for $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C_{ij})$ with $\hat{C}'_{ij} \in]C_{22}, C_{ij}[$.
Set:

$$W(X) = \frac{1}{6} D^3 f(C_{22}).(X - C_{22})^3$$

Since we have for $(k,l) = (2,0)$ or $(0,2)$

$$\partial_{kl} W(X) = D\partial_{kl} f(C_{22}).(X - C_{22})$$

we can write

$$\begin{aligned} S_2 W(X) &= \sum_{1 \le i,j \le 3} \left[\frac{1}{6} D^3 f(C_{22}).(C_{ij} - C_{22})^3 \right. \\ &- \frac{1}{8} h_i^2 D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C_{22}).(C_{ij} - C_{22}) \\ &- \left. \frac{1}{8} k_j^2 D \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C_{22}).(C_{ij} - C_{22}) \right] M_{ij}(X) \end{aligned}$$

On the other hand we have:

$$\begin{aligned} W(X) &= \frac{1}{6} \sum_{k+l=3} \binom{3}{k} \partial_{kl} f(C_{22})(x - x_{22})^k (y - y_{22})^l \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k+l=3} \binom{3}{k} \partial_{kl} f(C_{22}) e_{kl}(X - C_{22}) \end{aligned}$$

Thus

$$S_2 W(X) - W(X) = \frac{1}{6} \sum_{k+l=3} \binom{3}{k} \partial_{kl} f(C_{22}) \left\{ S_2 e_{kl} - e_{kl} \right\} (X - C_{22})$$

Setting

$$M_3(C_{22}) = \max\{|\partial_{kl}f(C_{22})|, k+l=3\}$$

we obtain:

$$||S_2W - W||_T \leq \frac{1}{6}M_3(C_{22}) \sum_{k+l=3} \binom{3}{k} ||S_2e_{kl} - e_{kl}||_T$$

According to theorem 3 and the previous formulas we deduce the following bound:

$$\begin{aligned}
|S_2f(X) - f(X)| \quad \leq \quad & \frac{5}{48}M_3(C_{22})H^3 + \frac{1}{6}|[D^3f(\tilde{X}) - D^3f(C_{22})].(X - C_{22})^3| \\
+ \quad & \sum_{1\leq i,j\leq 3} \{\frac{1}{6}|[D^3f(\tilde{C}_{ij}) - D^3f(C_{22})].(C_{ij} - C_{22})^3| \\
+ \quad & \frac{h_i^2}{8}|[D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{C}_{ij}) - D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C_{22})].(C_{ij} - C_{22})| \\
+ \quad & \frac{k_j^2}{8}|[D\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\hat{C}'_{ij}) - D\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C_{22})].(C_{ij} - C_{22})|\} M_{ij}(X)
\end{aligned}$$

For simplification we can write:

$$\begin{aligned}
|S_2f(X) - f(X)| \quad & \leq \frac{5}{48}M_3(C_{22})H^3 + \frac{1}{6}\left|\left[D^3f(\tilde{X}) - D^3f(C_{22})\right].(X - C_{22})^3\right| \\
& \qquad + \sum_{1\leq i,j\leq 3} \beta_{ij}M_{ij}(X)
\end{aligned}$$

We set

$\delta ij = ||C_{ij} - C_{22}||$ and $\hat{\omega}_3(\delta_{ij}) = \sup\left\{|\partial_{kl}f(X) - \partial_{kl}f(C_{22})|\,;||X - C_{22}|| \leq \delta_{ij}, X \in \hat{Q}_1; k+l=3\right\}$

Let us bound β_{ij}:

$$\begin{aligned}
& \left|\left[D^3f(\tilde{C}_{ij}) - D^3f(C_{22})\right].(C_{ij} - C_{22})^3\right| = \\
& |\sum_{k+l=3} \binom{3}{k} \left[\partial_{kl}f(\tilde{C}_{ij}) - \partial_{kl}f(C_{22})\right].(x_{ij} - x_{22})^k(y_{ij} - y_{22})^l| \\
& \leq \hat{\omega}_3(\delta_{ij}) \sum_{k+l=3} \binom{3}{k} |x_{ij} - x_{22}|^k|y_{ij} - y_{22}|^l \\
& \leq \hat{\omega}_3(\delta_{ij})||C_{ij} - C_{22}||_1^3
\end{aligned}$$

Similarly we demonstrate that

$$|[D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{C}_{ij}) - D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C_{22})].(C_{ij} - C_{22})| \leq \hat{\omega}_3(\delta_{ij})||C_{ij} - C_{22}||_1$$

and the same bound holds for $D\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Thus

$$\beta_{ij} \leq \hat{\omega}_3(\delta_{ij})\left\{\frac{1}{6}||C_{ij} - C_{22}||_1^3 + \frac{1}{4}H^2||C_{ij} - C_{22}||_1\right\}$$

We can verify that
a)for $(i,j) \in \{(1,2);(2,1);(3,2);(2,3)\}$, we have

$$\beta_{ij} \leq \frac{5}{12} H^3 \hat{\omega}_3(H)$$

b)for $(i,j) \in \{(1,1);(3,1);(1,3);(3,3)\}$,we have

$$\beta_{ij} \leq \frac{11}{3} H^3 \hat{\omega}_3(H)$$

Denoting $\{\alpha_i, 1 \leq i \leq 6\}$the B-coefficients of $\sum_{ij} \beta_{ij} M_{ij}$ on T,we prove after calculation that:

$$\max\{\alpha_i \ , \ 1 \leq i \leq 6\} \leq \frac{49}{12} H^3 \hat{\omega}_3(H)$$

Since

$$|[D^3 f(\tilde{X}) - D^3 f(C_{22})].(X - C_{22})^3| \leq H^3 \hat{\omega}_3(H)$$

We finally obtain :

$$||S_2 f - f||_T \leq \left\{ \frac{5}{48} M_3(C_{22}) + \frac{17}{4} \hat{\omega}_3(H) \right\} H^3$$

This result being valid on all $T \subset Q_1$,we obtain the same bound for $||S_2 f - f||_{Q_1}$,thus completing the proof of theorem 4.

Corollary 1 . *Let $\hat{Q}_N$ be the rectangle containing Q_N defined by:*

$$\hat{Q}_N = \left[a - \frac{H}{2}, b + \frac{H}{2}\right] \otimes \left[c - \frac{H}{2}, d + \frac{H}{2}\right]$$

Setting:

$$\begin{aligned} M_3 &= Max\{||\partial_{kl} f||_{\hat{Q}_N} \ , \ k + l = 3\} \\ \hat{\omega}_{3,N} &= Sup\{|\partial_{kl} f(X_1) - \partial_{kl} f(X_2)|; ||X_1 - X_2|| \leq H, \ X_1 \text{ and } X_2 \in \hat{Q}_N; k + l = 3\} \end{aligned}$$

We have for $f \in C^3(\hat{Q}_N)$

$$||S_2 f - f||_{Q_N} \leq \{c_1 M_3 + c_2 \hat{\omega}_{3,N}\} H^3$$

Proof. We know that S_2 is exact in the whole domain Q_N (see theorem 3);according to the hypotheses of corollary 1, we prove that the result given in theorem 4 on $Q_1 = R_{22}$ can be extended to every rectangle R_{ij} for $1 \leq i,j \leq N$ (the proof is similar to that of theorem 4).

Theorem 5 . *For $f \in C^3(\hat{Q}_N)$ we have:*

$$||\Pi_N f - f||_{Q_N} \leq 4 \frac{\rho^{\frac{N+1}{2}} - 1}{\rho - 1} \{c_1 M_3 + c_2 \hat{\omega}_{3,N}\} H^3 \quad \text{if } \rho > 1$$

and

$$||\Pi_N f - f||_{Q_N} \leq \{c'_1 M_3 + c'_2 \hat{\omega}_{3,N}\} H^2 \qquad \text{if } \rho = 1$$

with

$$c_1' = \frac{2\sqrt{3}}{27} \quad \text{and} \quad c_2' = \frac{31}{12}$$

Proof. Since $S_2 f$is a quadratic spline we have :

$$\Pi_N(S_2 f) = S_2 f$$

thus

$$\|\Pi_N f - f\|_{Q_N} \le (1 + \|\Pi_N\|)\|S_2 f - f\|_{Q_N}$$

Using theorem 2 and the previous corollary,we deduce the result for $\rho > 1$. For $\rho = 1$ see [11].

References

[1] Chui C.K.,Bivariate quadratic splines on criss-cross triangulation,Proc.Army Conf. in Appl.Math. Comp. 1(1984),877–882.

[2] Chui C.K. and Wang R.H.,Concerning C^1 B-splines on triangulations of non-uniform rectangular partition, J. Approx. Theory and its Appl. 1 No 1(1984),11–18.

[3] Chui C.K.,Diamond H. and Raphael L.A.,Interpolation by multivariate splines,Math.of Comp.51,No 183 (1988),203–218.

[4] Chui C.K.,Multivariate splines,SIAM,Philadelphia (1988).

[5] Farin G.,Curves and surfaces for computer aided geometric design,Academic Press,New-York (1988).

[6] Kammerer W.J.,Reddien W. and Varga R.S.,Quadratic interpolatory splines,Numer. Math. 22 (1974),241–259.

[7] Sablonnière P.,Bases de Bernstein et approximants splines,thèse de doctorat,Université de Lille (1982).

[8] Sablonnière P.,Bernstein-Bézier methods for the construction of bivariate spline approximant,Computer Aided Geometric Design 2 (1985),29–36.

[9] Wang R.H.,The dimension and basis of spaces of multivariate splines,J. of Comp.and Appl. Math. 12&13 (1985),163–177.

[10] Zedek F.,Interpolation sur un domaine carré par des splines quadratiques à deux variables thèse de doctorat 3ème cycle,Université de Lille (1985).

[11] Zedek F.,Interpolation de Lagrange par des splines quadratiques sur un quadrilatère de R^2,J. of Mathematical Modelling and Numerical Analysis (to appear).

[12] Zedek F.,Lagrange interpolation by quadratic splines on a quadrilateral domain of R^2,Proceedings of Chamonix-Mont-Blanc Conference on Curves and Surfaces,June 21–27 1990,eds. P.J. Laurent, A. Le Méhauté and L.L. Schumaker, Academic Press,New-York (to appear).