55376
1991
1

55376
1991
1

n° d'ordre: 668

Thèse de Doctorat

de l'Université des Sciences et Techniques de
Lille-Flandres-Artois

Mathématiques

Mention : Mécanique Céleste

présentée par

BIBLIOTHÈQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

Alain Vienne

sujet

Théorie Analytique des Satellites de Saturne

Soutenue le 29 *Janvier* 1991, *devant le jury composé de*

Mme	I. Stellmacher	Présidente du jury
MM.	L. Duriez	Directeur de thèse
	J.E. Arlot	Rapporteur
	F. Mignard	Rapporteur
	J. Denel	
	M. Rapaport	
	J.H. Lieske	Invité

SCD LILLE 1
D 030 254692 6

55376
1991
1

55376
1991
1

n° d'ordre: 668

Thèse de Doctorat

de l'Université des Sciences et Techniques de
Lille-Flandres-Artois

Mathématiques

Mention : Mécanique Céleste

BIBLIOTHEQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

présentée par

Alain Vienne

sujet

Théorie Analytique des Satellites de Saturne

Soutenue le 29 *Janvier* 1991, *devant le jury composé de*

Mme	I. Stellmacher	Présidente du jury
MM.	L. Duriez	Directeur de thèse
	J.E. Arlot	Rapporteur
	F. Mignard	Rapporteur
	J. Denel	
	M. Rapaport	
	J.H. Lieske	Invité

D 030 146607 2

à mon frère Jean-Marc,

Remerciements.

Je tiens d'abord à remercier tout particulièrement Monsieur Luc Duriez qui a suivi avec attention mon travail durant ces trois années. Sa disponibilité et ses nombreux conseils toujours judicieux m'ont permis de préparer cette thèse dans de très bonnes conditions.

Je remercie aussi Messieurs Jean-Eudes Arlot et François Mignard pour avoir accepté aimablement de juger cette thèse. Mes remerciements vont également à Madame Irène Stellmacher qui a accepté si volontiers de présider ce jury.

J'adresse encore mes remerciements à Messieurs Jacques Denel et Michel Rapaport pour s'être intéressés à mon travail et pour avoir accepté de faire partie du jury.

Ma reconnaissance va aussi à Monsieur Jay H. Lieske pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de juger mon travail.

J'exprime encore ma gratitude à Monsieur Jean Chapront pour l'attention qu'il a bien voulu me porter, Monsieur Jacques Laskar à qui je dois de nombreuses discussions et de nombreux outils de travail (notamment TRIP et MFT) et Monsieur Jean-Louis Simon pour avoir pu utiliser JASON84 et son programme d'analyse de Fourier des seconds membres des équations de Lagrange.

Enfin, je remercie aussi Madame Ballenghien pour son soutien et la vie qu'elle donne à l'Observatoire de Lille. Je remercie encore pour leur soutien moral toute ma famille et particulièrement, pour sa compréhension, Nathalie.

Table des matières.

1. Introduction. 5

2. Equations du mouvement et méthode générale de résolution. 12

2.1 Equations du mouvement. 12

2.2 Développement des équations. 15

2.3 Principe général de l'intégration. 17

2.4 Construction pratique des équations du mouvement. 20

3. Perturbations à courtes périodes. 22

3.1 Intégration des courtes périodes. 22

3.1.1 Méthode. 22

3.1.2 Analyse de la méthode. 23

3.2 Sélection des inégalités du premier ordre et convergence en degré. . . . 26

3.2.1 Perturbations du premier ordre par analyse harmonique. 26

3.2.2 Convergence des développements en degré. 28

3.3 Liste des inégalités à courtes périodes. 29

3.4 Inégalités dépendant de trois longitudes moyennes. 37

3.5 Calcul de l'ordre 3 en J_2 39

4. Le système critique. 40

4.1 Construction et structure des équations. 40

4.2 Eléments propres. 43

4.3 Traitement des résonances. 45

4.4 Perturbations constantes. 47

4.5 Système critique centré. 49

4.6 Approche analytique de la solution du système critique centré 50

4.6.1 Méthode générale. 50

4.6.2 Noyau intégrable des équations relatives à Encelade, Dioné, Rhéa, Titan et Japet. 51

4.6.3 Noyau intégrable des équations relatives à Mimas et Téthys. . . 56

4.7 Approche numérique de la solution du système critique centré. 58

4.7.1 Séparation des équations en deux blocs. 58

4.7.2 Intégration numérique. 59

4.7.3 Analyse spectrale. 62
4.7.4 Dérivées partielles de la solution. 67

5. Résultats. 70
5.1 Solution du système critique pour Mimas, Encelade, Téthys et Dioné. . 70
5.1.1 Solution nominale. 70
5.1.2 Variations de la solution nominale. 74
5.1.3 Pentes résiduelles dans les solutions q_{oi}. 76
5.1.4 Test de validité de la représentation linéaire. 77
5.2 Solution du système critique pour Rhéa, Titan et Japet. 79
5.2.1 Termes séculaires de JASON84. 80
5.2.2 Indentification des termes. 80
5.2.3 Précision obtenue pour la solution nominale. 82
5.2.4 Solution nominale. 84
5.2.5 Variations de la solution nominale. 85
5.2.6 Pentes résiduelles dans les q_{oi}. 86

6. Conclusion. 88

Bibliographie 91

Tableaux 94

Figures 143

1. Introduction.

C'est durant l'année 1655, plus de 40 ans après la découverte par Galilée des principaux satellites de Jupiter, que Huygens découvrit Titan, le plus gros des satellites de Saturne. Ce fut ensuite Cassini, célèbre par ses études sur les anneaux de Saturne, qui découvrit Japet, un satellite éloigné de Saturne, situé à environ 60 rayons équatoriaux de la planète. Il nota que ce satellite a une orbite inclinée d'environ 15° sur le plan des anneaux. Cassini fut aussi l'auteur de la découverte de Rhéa en 1672, puis de Dioné et de Téthys en 1684. Deux petits satellites très proches de Saturne, Mimas et Encelade, furent encore découverts un siècle plus tard (1789) par W. Herschel, mais il fallut attendre les années 1830 pour que J. Herschel, fils de W. Herschel, remarque que le moyen mouvement de Mimas est presque exactement le double de celui de Téthys et qu'une commensurabilité similaire existe entre les satellites Encelade et Dioné. Enfin le petit satellite Hypérion fut découvert par Bond et Lassel en 1848 qui se révéla être en résonance 3 : 4 avec Titan. Les huit principaux satellites de Saturne sont ainsi ordonnés par distances croissantes à Saturne : Mimas, Encelade, Téthys, Dioné, Rhéa, Titan, Hypérion et Japet. Désormais ces satellites seront numérotés de 1 à 8, conformément à cette liste. Ces satellites furent observés de façon assidue surtout vers la fin du XIXe siècle, époque à laquelle on doit les premières tentatives de représentation de leurs mouvements. Les théories de ces satellites ont été construites par divers auteurs et par couples de satellites. Voyons comment se présentent les théories actuelles.

Pour le couple Mimas-Téthys, O. Struve (1898) remarque d'abord que la longitude moyenne de Mimas oscille lentement avec une grande amplitude (environ 43°). Il interprète ces oscillations comme un effet de résonance entre Mimas et Téthys, la quantité $2\lambda_1 - 4\lambda_3 + \Omega_1 + \Omega_3$ manifestant une libration de 95° d'amplitude autour de la valeur 0, avec une période d'environ 70 ans (λ est la longitude moyenne, et Ω la longitude du noeud de l'orbite sur l'équateur de Saturne). Pour que cette résonance se maintienne, il faut que les inclinaisons des deux orbites sur le plan de l'équateur soient assez fortes (elles valent $1°,5$ et $1°,1$). Quant aux excentricités, elles sont trouvées égales à $0,019$ pour Mimas et quasiment zéro pour Téthys. Depuis la première représentation donnée par Struve (1898), la forme de la théorie de Mimas et de Téthys, est restée très simple, étant réduite à un mouvement képlérien, affecté d'une précession constante des noeuds

et des péricentres, et d'une inégalité $\Delta\lambda$ dans la longitude moyenne, de la forme :

$$\Delta\lambda_1 = -43^\circ,57 \sin \dot{\omega}_1(t - t_o) + -0^\circ,72 \sin 3\dot{\omega}_1(t - t_o) + -0^\circ,02 \sin 5\dot{\omega}_1(t - t_o)$$

$$\Delta\lambda_3 = 2^\circ,063 \sin \dot{\omega}_1(t - t_o) + 0^\circ,034 \sin 3\dot{\omega}_1(t - t_o) + 0^\circ,001 \sin 5\dot{\omega}_1(t - t_o)$$

où $\dot{\omega}_1$ est la fréquence de la libration associée à une période d'environ 70 ans. Les amplitudes sont celles déterminées par Dourneau (1987). Cependant, Jefferys et Ries (1979), Stellmacher (1982) ont signalé quelques termes à longues périodes dans les longitudes moyennes, mais qui n'ont jamais été pris en compte dans l'établissement d'éphémérides.

O. Struve en 1898 puis G. Struve en 1930, étudient le couple Encelade-Dioné. Ce couple est en résonance 1 : 2; ils observent que la quantité $\lambda_2 - 2\lambda_4 + \varpi_2$ oscille autour de la valeur zéro avec une petite amplitude. L'excentricité d'Encelade est alors forcée par la résonance à une valeur constante ($\sim 0,005$) et le péricentre ϖ_2 doit tourner avec la vitesse $2N_4 - N_2$ où N_2 et N_4 sont les moyens mouvements moyens d'Encelade et de Dioné. L'effet de la résonance dans la longitude moyenne, est une libration de la forme :

$$\Delta\lambda = p \sin(\omega_{o2} + \dot{\omega}_2 t) + q \sin(\phi_{o4} + \dot{\phi}_4 t)$$

où $\dot{\omega}_2$ est la fréquence de la libration dont la période vaut environ 11 ans, et où $\dot{\phi}_4$ est la fréquence du terme forcé par l'excentricité de Dioné ($\sim 0,002$), dont la période vaut environ 4 ans. Les amplitudes p et q valent respectivement 15 et 13 minutes de degré dans la longitude moyenne d'Encelade, $1,3$ et $1,0$ dans celle de Dioné. Les théories actuelles tiennent compte, en plus de $\Delta\lambda$, du mouvement de précession du péricentre de Dioné (période $11,7$ ans). Les inclinaisons sur le plan de l'équateur sont de l'ordre de la minute de degré. Les théories actuelles tiennent compte de la précession des plans d'orbite sur le plan équatorial (périodes $2,4$ et $11,9$ ans).

Les variables des théories de ces quatre premiers satellites sont définies par rapport au plan de l'équateur de Saturne, lui-même repéré par rapport à l'écliptique et l'équinoxe moyen 1950. Les quatre satellites suivants sont eux repérés directement par rapport à ce dernier plan :

Rhéa (G. Struve, 1933) n'est pas en résonance avec un autre corps. Cependant, son excentricité a une partie forcée par Titan plus importante que sa partie libre. Plus précisément la variation de $e \exp \sqrt{-1}\varpi$ dans le plan complexe est décomposée en deux mouvements circulaires uniformes :

$$e \cos \varpi = 0,001 \cos \varpi_\pi + 0,0003 \cos \varpi_o$$

$$e \sin \varpi = 0,001 \sin \varpi_\pi + 0,0003 \sin \varpi_o$$

La fréquence $\dot{\varpi}_\pi$ correspond au mouvement de précession du péricentre de Titan (période 700 ans), et $\dot{\varpi}_o$ correspondant à la partie libre, a une période d'environ 35 ans. Vu le rapport d'amplitude, le péricentre de Rhéa oscille autour de celui de Titan. C'est pourquoi ce phénomène est quelquefois qualifié de "résonance séculaire". Les théories actuelles prennent aussi en compte un terme forcé par Titan dans le mouvement de précession du plan de l'orbite de Rhéa (ce plan est incliné d'une vingtaine de minutes de degré sur le plan de l'équateur). Aucune autre perturbation n'a jusqu'à ce jour été prise en compte.

La théorie actuelle de Titan a été élaborée récemment par Sinclair (1977). L'excentricité de Titan vaut 0.029. Mis à part celle d' Hypérion, c'est l'une des plus élévées du système de Saturne. C'est d'ailleurs à cause de cette valeur élevée que l'excentricité de Rhéa est forcée comme on l'a vue. L'inclinaison du plan de l'orbite de Titan sur l'équateur est relativement modeste puisqu'elle vaut une vingtaine de minutes de degré. Les mouvements de précession du noeud et du péricentre s'effectuent avec une période de 700 ans environ. Quelques termes dus aux perturbations solaires interviennent dans les expressions de ses éléments elliptiques (à l'exception du demi-grand axe).

Le mouvement d'Hypérion (Woltjer, 1928; Taylor, 1984) est trop complexe pour pouvoir être développé ici, même partiellement. Signalons simplement, que la résonance 3 : 4 avec Titan est due à la petite valeur de la combinaison $3N_6 - 4N_7$ de leurs moyens mouvements moyens. Cette résonance force l'excentricité à une valeur très importante (0.104) et l'argument $3\lambda_6 - 4\lambda_7 + \varpi_7$ oscille autour de la valeur 180° avec une grande amplitude. Le deuxième terme de libration provient de l'oscillation de ϖ_7 forcée par l'excentricité de Titan. De plus, il existe aussi de nombreux termes importants à courtes périodes (Taylor et al, 1987; Vienne et Duriez,1991). Enfin, Hypérion est suffisamment éloigné de Saturne (25 rayons équatoriaux) pour ressentir fortement les pertubations solaires.

La théorie de Japet a elle aussi été élaborée par Sinclair (1974), puis complétée par Rapaport (1978) et Harper & al (1988). La dynamique de ce satellite est dominée par l'inclinaison de son orbite sur le plan des anneaux forcée par le Soleil à une valeur assez élevée ($\sim$ 15°), par les perturbations solaires elles-mêmes et par la relative proximité de Titan. De fait, les théories actuelles tiennent compte, au moins en partie, de ces fortes perturbations quelquefois sous forme de polynômes du temps (qui contiennent les mouvements de précession du noeud et du péricentre dont la période vaut environ 3000 ans). L'excentricité de Japet est de 0,028. Signalons enfin la grande inégalité

$\lambda_6 - 5\lambda_8$ entre Titan et Japet dont la période vaut environ 9 ans.

Afin de publier des éphémérides, Kozai (1957) puis Rapaport (1977) ont repris ces théories de Mimas, d'Encelade, de Téthys, de Dioné, de Rhéa et de Titan, ajustant leurs constantes aux observations disponibles. Ce travail a été refait récemment par Dourneau (1987), et par Taylor et Shen (1988), qui ont à nouveau ajusté les constantes de ces satellites, ainsi qu'Hypérion et Japet.

Cependant, comparativement aux meilleures théories des satellites galiléens de Jupiter et des satellites d'Uranus, la précision de ces représentations est encore relativement mauvaise, elle est en effet de :

- $\sim$ 200 km pour les satellites galiléens de Jupiter (Lieske, 1980; Arlot, 1982)
- $\sim$ 1400 km ($0'',2$ géocentrique) pour les satellites de Saturne sauf Hypérion et Japet ($0'',25$) (Dourneau, 1987; Taylor et Shen, 1988)
- $\sim$ 100 km pour les satellites d'Uranus (Laskar et Jacobson, 1987)

Or, les observations terrestres peuvent atteindre la précision de $0'',05$ géocentrique correspondant à environ 350 kilomètres sur les positions des satellites. De plus, une exploration spatiale du système de Saturne est prévue vers l'an 2000 (mission CASSINI) par une sonde qui se satellisera autour de Saturne et qui fera des observations des satellites avec une précision probable de quelques kilomètres. Il est donc nécessaire de réaliser d'importants progrès dans la connaissance des mouvements des satellites de Saturne.

Il semble que la principale raison de la mauvaise précision des théories actuelles provient de leur inconsistance. En effet, on a vu que les satellites de Saturne n'ont pas été traités tous ensemble, mais couple par couple probablement pour séparer les problèmes posés par les diverses résonances existant entre plusieurs couples de satellites. Chaque problème requérant une solution spécifique, ils ont été étudiés séparément par divers auteurs, utilisant des systèmes de variables différents, des systèmes de références différents et des systèmes de constantes différents, avec plus ou moins de précision. Malgré les travaux de Dourneau pour unifier le système de référence pour tous ces satellites, il semble difficile de réduire les (O-C) des théories actuelles parce que certaines sont trop sommaires, ou qu'elles dépendent de valeurs de constantes incompatibles entre elles.

Afin de réaliser des progrés significatifs, il est nécessaire de reconsidérer ces problèmes, en traitant ces satellites ensemble et non couple par couple, et en prenant en

compte de nombreuses perturbations qui ont été jusqu'à maintenant négligées. Le but de ce travail est d'obtenir une nouvelle théorie analytique, générale à l'ensemble des satellites, représentée par un seul jeu de variables et de paramètres, dans un système de référence unique. Nous voulons construire cette représentation des mouvements avec une précision interne de quelques kilomètres, qui soit compatible avec les futures observations. Cette représentation doit être analytique afin de la relier facilement aux paramètres du système (aplatissement de Saturne, masses, constantes du mouvement), et permettant ainsi un ajustement de la théorie aux observations.

La méthode que nous avons appliquée est une extension de la théorie générale planétaire construite par Duriez (1979) et Laskar (1984). Cette méthode a déjà montré son efficacité, dans la construction par Laskar et Jacobson (1987) de GUST86, une théorie analytique du mouvement des satellites d'Uranus. Cependant, ce système de satellites est plus simple que celui de Saturne puisqu'il ne contient pas de résonance. Dans le cas de deux satellites en résonance, Duriez (1982) a proposé une extension de sa théorie générale planétaire qui transforme les termes résonnants en des termes autonomes identiques aux termes séculaires auquels ils peuvent être associés dans un système critique. Un noyau intégrable peut être extrait de ce système qui permet de décrire les interactions des termes séculaires avec la résonance. Nous présentons ici une nouvelle extension capable de considérer le cas où il y a plusieurs résonances entre différents couples de satellites, comme c'est le cas dans le système de Saturne.

Nous présentons d'abord les équations du mouvement des satellites de Saturne et les techniques utilisées pour les construire. Cependant, ces techniques tombent en défaut lorsqu'on cherche à développer la fonction perturbatrice du couple Titan-Hypérion, et notamment $1/\Delta$, l'inverse de leur distance. Le problème vient de la très mauvaise convergence du développement classique de $1/\Delta$ en coefficients de Laplace, due à la forte excentricité d'Hypérion (~ 0.104), et au rapport très élevé des grands axes de Titan et Hypérion ($\alpha_{67} \sim 0.845$) : avec ces valeurs, les orbites de Titan et d'Hypérion sont presque sécantes et c'est en fait grâce à la résonance 3 : 4 qu'Hypérion et Titan évitent toujours de se trouver en même temps aux points où leurs orbites se coupent presque. Ce couple exige donc un traitement particulier (Duriez, 1990; Vienne & Duriez 1990) qui n'est pas considéré dans ce travail. L'absence de solution pour ce couple ne concerne d'ailleurs qu'Hypérion, car heureusement, sa masse étant très petite, ce satellite n'a qu'une influence mineure sur Titan (estimée à quelques kilomètres). Donc, seule la théorie d'Hypérion ne sera pas effectivement construite ici. Cependant, l'influence d'Hypérion sur les satellites autres que Titan a été considérée dans leurs équations, et

cela a permis de vérifier qu'elle était négligeable pour ces satellites.

La méthode générale de résolution est basée sur deux principes : le premier est une séparation formelle de la solution en une partie dite critique qui décrit l'évolution à long terme du système, et d'une partie à courtes périodes; le deuxième principe est une résolution ordre par ordre par rapport à un petit paramètre qui représente ici la masse des satellites perturbateurs ou l'un des coefficients d'aplatissement de Saturne. De ces deux principes, on déduit une séparation identique des équations en un système d'équations pour les perturbations à courtes périodes, et un autre (appelé système critique), pour les perturbations à longues périodes. La construction de ces deux systèmes est menée ordre par ordre de la façon suivante :

Nous résolvons d'abord le système à courtes périodes d'ordre un. Sa solution, $\Delta_1 V$, est une fonction explicite de la solution V_o du système critique, mais une caractéristique importante de la méthode réside dans le fait que, pour intégrer les perturbations à courtes périodes, nous n'avons pas besoin de connaître V_o. La solution $\Delta_1 V$ permet alors de construire le système critique au second ordre ainsi que le système à courtes périodes du second ordre, qu'on intègre et qui permet de construire l'ordre suivant, et ainsi de suite... Ainsi, la résolution des termes à courtes périodes est une étape importante dans la construction du système critique d'ordre deux. Notre souci a été de rechercher de manière exhaustive tous les termes à courtes périodes qui influent significativement dans la solution. Nous verrons que pour cela, une analyse harmonique rapide des seconds membres des équations de Lagrange permet de repérer toutes les perturbations supérieures à un seuil donné (on a choisi $0,1$ km), pour ensuite ne développer analytiquement que ces perturbations; elle permet aussi de contrôler la convergence de ces développements. Nous présentons toutes celles qui sont supérieures à 10 kilomètres (Tableaux 6 et 7).

La construction du système critique a aussi été réalisée de manière exhaustive, et de façon à assurer une précision interne de l'ordre du kilomètre; on effectue alors plusieurs changements de variables successifs ayant pour but de concentrer la partie prépondérante du système critique en un système autonome. Pour chacune de ces transformations, nous avons pris soin de maintenir la précision interne au niveau du kilomètre. Un noyau intégrable peut ensuite être extrait du système autonome. Sa résolution permet de retrouver les principales caractéristiques du mouvement des satellites de Saturne telles qu'on les observe dans les théories actuelles. Cependant, pour maintenir la précision obtenue lors de la construction du système critique (et lors de

ces transformations), nous avons préféré résoudre numériquement ce système. En effet, ne contenant pas de courtes périodes, son intégration numérique est réalisable sur une longue durée (plusieurs siècles) avec un pas d'intégration relativement grand (quelques jours). Cette solution discrète a été ensuite transformée en une solution formelle par des techniques d'analyse de Fourier. Cette solution dépend bien sûr des valeurs données aux paramètres physiques et aux constantes d'intégration. Les variations de cette solution par rapport aux paramètres physiques et aux constantes d'intégration ont été obtenues en intégrant de la même façon les équations aux variations. L'ensemble de cette solution et de ses variations linéaires forme ce que nous pouvons appeler Représentation Linéaire du mouvement des satellites de Saturne, donnée dans les Tableaux 14 à 23 (Mimas, Encelade, Téthys et Dioné), et dans les Tableaux 27 à 34 (Rhéa, Titan et Japet).

Dans l'analyse de ces résultats, nous montrons que de nombreuses perturbations importantes qui n'ont jamais été considérées jusqu'ici, existent. Nous attirons l'attention sur certaines d'entre elles, surtout dans les solutions de Mimas et de Japet. Par comparaison à l'intégration numérique initiale, la précision de la représentation linéaire peut être estimée à quelques kilomètres sauf pour Japet (nous n'avons pu obtenir pour lui une précision meilleure que 100 kilomètres sur 100 ans). Cette précision montre que la représentation linéaire obtenue est directement utilisable pour effectuer un ajustement sur les observations, dont on pense pouvoir tirer des éphémérides ayant la même précision.

2. Equations du mouvement et méthode générale de résolution.

2.1 Equations du mouvement.

Le repère utilisé est un repère saturnicentrique, de directions fixes. Deux de ces directions sont choisies, dans le plan équatorial de Saturne pour une époque fixée (choisie égale à J1980), la direction origine étant le noeud de ce plan sur l'écliptique moyen J2000. Pour rapporter le mouvement des satellites dans le système J2000, il suffira de tenir compte de l'inclinaison et de la longitude du noeud du plan équatorial sur cet écliptique et par rapport à l'équinoxe moyen J2000 (c'est-à-dire respectivement 28°,0752 et 169°,5084). Chaque satellite, ainsi que le Soleil, est de cette façon repéré par des éléments elliptiques osculateurs, notés de façon classique: a, e, i, Ω, ϖ and ϵ. Le moyen mouvement osculateur n est relié à a par la troisième loi de Képler :

$$n^2 a^3 = GM_s(1 + m/M_s) \tag{2.1}$$

où G la constante de gravitation, M_s la masse de Saturne et m la masse du satellite.

Nous allons développer le mouvement de chaque satellite au voisinage d'un mouvement circulaire uniforme dont le moyen mouvement N est celui qu'on observe (alors appelé moyen mouvement moyen), et dont on déduit le rayon A par la même troisième loi de Képler $N^2A^3 = n^2a^3$. C'est pourquoi nous préférons utiliser les variables p, q, z, ζ, déjà introduites dans le cadre d'une théorie générale planétaire par Duriez (1977) et Laskar (1984), et qui représentent des écarts entre le mouvement réel et ce mouvement circulaire. Elles sont définies par :

$$\begin{aligned}
&a = A(1+p)^{-2/3} \iff n = N(1+p) \\
&\lambda = \int n\,dt + \epsilon = Nt - \imath q \qquad \text{avec} \qquad \imath = \sqrt{-1} \\
&z = e \exp \imath \varpi \\
&\zeta = \sin\frac{i}{2} \exp \imath \Omega
\end{aligned} \tag{2.2}$$

La variable p est réelle, q est imaginaire, z et ζ sont complexes et leurs conjuguées seront notées $\bar{z}$ et $\bar{\zeta}$.

En dérivant par rapport au temps l'expression de la longitude moyenne, nous avons :

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \frac{d\epsilon}{dt} = N - \imath \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = \imath\,(Np + \frac{d\epsilon}{dt}) \tag{2.3}$$

Il est alors avantageux de séparer la variable osculatrice p en deux parties:

$$p = p_o + \delta p \tag{2.4}$$

où p_o est une constante ajustée de façon à ne pas avoir de terme constant dans l'équation $\frac{dq}{dt}$, car de cette façon N sera bien le moyen mouvement moyen, c'est-à-dire la partie linéaire du temps dans la longitude moyenne. D'après (2.3), p_o est donné par l'équation :

$$Np_o + < d\epsilon/dt > = 0 \tag{2.5}$$

où l'on a noté $< x >$ la valeur moyenne de x :

$$< x > = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt$$

La constante p_o représente ici ce qu'on appelle la perturbation constante du demi-grand axe. Il est donc préférable, dès que l'on connait au moins une approximation de p_o, de se placer au voisinage du demi-grand axe constant perturbé, et de ne considérer comme variable que la partie δp de p. Nous avons alors :

$$n = N(1 + p_o)\left(1 + \frac{\delta p}{1 + p_o}\right) \tag{2.6}$$

c'est-à-dire :

$$n = \overline{N}(1 + \tilde{p}) \qquad \text{avec} \qquad \overline{N} = N(1 + p_o) \qquad \text{et} \qquad \tilde{p} = \delta p/(1 + p_o)$$

Ainsi, $\overline{N}$ est la partie constante du moyen mouvement osculateur. Définissant $\overline{A} = A(1 + p_o)^{-2/3}$, nous avons encore :

$$\overline{N}^2 \overline{A}^3 = GM_s(1 + m/M_s) \qquad \text{et} \qquad a = \overline{A}(1 + \tilde{p})^{-2/3}$$

$\overline{A}$ est ainsi très proche de la partie constante (ou la valeur moyenne) du demi-grand axe osculateur. Désormais, nous utiliserons la variable $\tilde{p}$ au lieu de p, car elle a l'avantage (comme la variable q) de ne comporter que des variations périodiques. Une (petite) partie constante peut néammoins subsister dans $\tilde{p}$, soit parce que p_o n'est pas encore déterminé avec toute la précision souhaitée, soit parce qu'on veut se laisser la possibilité d'ajuster la valeur du moyen mouvement moyen.

On trouvera dans le Tableau 1, la valeur connue actuellement des moyens mouvements moyens, des masses et des paramètres physiques du système de Saturne. On y trouve aussi pour chaque satellite des valeurs de p_o et du $\overline{A}$ correspondant. Au départ, les constantes p_o ne sont pas connues; les valeurs données sont celles issues d'un calcul de $< d\epsilon/dt >$ limité au degré 3 dans l'excentricité forcée d'Encelade et au degré 0 dans les autres excentricités et inclinaisons (on verra le calcul complet de p_o en §4.4). Ce calcul préliminaire est effectué par approximations successives en partant de $p_{oi} = 0$. En fait, deux itérations suffisent pour assurer une précision relative de 10^{-4}. Les itérations convergent vers les mêmes valeurs en partant des valeurs de p_{oi} déduites des demi-grands axes issus des observations (Duriez et Vienne, 1991).

Les variations des éléments osculateurs sont données, pour chaque satellite, par les équations de Lagrange suivantes (Duriez, 1979, 1982):

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{p}}{dt} &= \frac{-3\imath}{\overline{N}\overline{A}^2}(1+\tilde{p})^{4/3}\frac{\partial R}{\partial q} \\
\frac{dq}{dt} &= \imath(Np_o + \overline{N}\tilde{p}) \\
&+ \frac{\imath(1+\tilde{p})^{1/3}}{\overline{N}\overline{A}^2}\left[3(1+\tilde{p})\frac{\partial R}{\partial \tilde{p}} + \phi\psi\left(z\frac{\partial R}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial R}{\partial \bar{z}}\right) + \frac{1}{2\phi}\left(\zeta\frac{\partial R}{\partial \zeta} + \bar{\zeta}\frac{\partial R}{\partial \bar{\zeta}}\right)\right] \\
\frac{dz}{dt} &= \frac{\imath(1+\tilde{p})^{1/3}}{\overline{N}\overline{A}^2}\left[2\phi\frac{\partial R}{\partial \bar{z}} - \phi\psi z\frac{\partial R}{\partial q} + \frac{z}{2\phi}\left(\zeta\frac{\partial R}{\partial \zeta} + \bar{\zeta}\frac{\partial R}{\partial \bar{\zeta}}\right)\right] \\
\frac{d\zeta}{dt} &= \frac{\imath(1+\tilde{p})^{1/3}}{2\phi\,\overline{N}\overline{A}^2}\left[\frac{\partial R}{\partial \bar{\zeta}} - \zeta\frac{\partial R}{\partial q} + \zeta\left(-z\frac{\partial R}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial R}{\partial \bar{z}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

où l'on a noté $\phi = \sqrt{1 - z\bar{z}}$ et $\psi = 1/(1+\phi)$. Dans ces équations, R est la fonction perturbatrice qui, si les équations (2.7) sont relatives au satellite i (noté S_i), s'écrit :

$$R_i = \sum_{\substack{1\leq j\leq 9\\ j\neq i}} R_{ij} + \sum_{n\geq 2} F_{in} \qquad (1 \leq i \leq 8) \tag{2.8}$$

Chaque terme R_{ij} représente la perturbation de S_i par S_j :

$$R_{ij} = G\,m_j\left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3}\right) \tag{2.9}$$

où $\mathbf{r}_i$ est le rayon vecteur saturnicentrique du satellite S_i, r_i son module et Δ_{ij} la distance de S_i à S_j. Chaque terme F_{in} représente la perturbation de S_i par le terme d'aplatissement de Saturne, dépendant du coefficient J_n (en pratique seuls J_2, J_4 et J_6 sont considérés, cf. Tableau 1) :

$$F_{in} = -\frac{G\,M_s}{r_i}J_n\left(\frac{a_s}{r_i}\right)^n P_n(\sin\varphi_i) \tag{2.10}$$

où a_s est le rayon équatorial de Saturne, φ_i la latitude de S_i par rapport au plan équatorial, et P_n le polynôme de Legendre d'ordre n. Nous devons donc repérer le plan de l'équateur de Saturne par rapport au système de référence: Soit i_s et Ω_s l'inclinaison et le noeud de ce plan; on définit la variable complexe: $\zeta_s = \sin\frac{i_s}{2}\exp\imath\,\Omega_s$, et le mouvement de précession de la planète peut être donné par les variations de cette variable :

$$\frac{d\zeta_s}{dt} \approx \sum_{\substack{1\leq i\leq 9\\ n\geq 2}} \frac{\imath}{2G_s}\frac{\partial F_{in}}{\partial\bar{\zeta}_s} \tag{2.11}$$

Cette équation, où G_s est le moment angulaire de Saturne, est une approximation car elle représente seulement le mouvement à long terme et suppose la planète rigide; une démonstration de cette équation peut être trouvée par exemple dans Ferraz-Mello (1979).

2.2 Développement des équations.

Le système différentiel des variables $\tilde{p}_i$, q_i, z_i and ζ_i peut s'écrire sous la forme suivante, pour $i = 1$ à 8 :

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{p}_i}{dt} &= \imath\, L_i^{(\tilde{p})}(\tilde{p},q,z,\zeta,\bar{z},\bar{\zeta},t)\\
\frac{dq_i}{dt} &= \imath\,(N_i p_{oi} + \overline{N}_i\tilde{p}_i) + \imath\, L_i^{(q)}(\tilde{p},q,z,\zeta,\bar{z},\bar{\zeta},t)\\
\frac{dz_i}{dt} &= \imath\, L_i^{(z)}(\tilde{p},q,z,\zeta,\bar{z},\bar{\zeta},t)\\
\frac{d\zeta_i}{dt} &= \imath\, L_i^{(\zeta)}(\tilde{p},q,z,\zeta,\bar{z},\bar{\zeta},t)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

L'équation pour la variable ζ_s a la même forme que la dernière équation de (2.12).

Le temps t apparait dans les fonctions $L_i^{(e)}$; cela provient de l'évaluation des positions dans la fonction perturbatrice, en fonction des mouvements képlériens osculateurs: Nous développons chaque R_i en série de Poisson du temps t et de toutes les variables ($\tilde{p}$, q, z, $\bar{z}$, ζ, $\bar{\zeta}$), en utilisant les techniques décrites par Duriez (1977, 1979, 1989) et Laskar (1985). Plus précisément, chaque partie $L_{R_{ij}}^{(e)}$ dans l'équation e de (2.12) limitée à la partie R_{ij} de R_i, est une série de Poisson analytique, de la forme:

$$\begin{aligned}
L_{R_{ij}}^{(e)}(\tilde{p},q,z,\zeta,\bar{z},\bar{\zeta},t) = \frac{\overline{N}_i m_j}{M_s(1+m_i/M_s)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{\{g,n,\nu,\bar{n},\bar{\nu}\}} C_{(g,n,\nu,\bar{n},\bar{\nu},l)}^{(e)}(\alpha_{ij}) \times\\
\times\, \tilde{p}_i^{g_i}\,\bar{z}_i^{\bar{n}_i}\,\bar{\zeta}_i^{\bar{\nu}_i}\,z_i^{n_i}\,\zeta_i^{\nu_i}\,\tilde{p}_j^{g_j}\,\bar{z}_j^{\bar{n}_j}\,\bar{\zeta}_j^{\bar{\nu}_j}\,z_j^{n_j}\,\zeta_j^{\nu_j}\;\exp\left(k_i q_i + k_j q_j + \imath\,(k_i N_i + k_j N_j)\,t\right)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

où les $C_{(g,n,\nu,\bar{n},\bar{\nu},l)}^{(e)}(\alpha_{ij})$ sont des coefficients numériques dépendant des $\alpha_{ij} = \frac{\min(\overline{A}_i,\,\overline{A}_j)}{\max(\overline{A}_i,\,\overline{A}_j)}$; ils sont calculés pour les valeurs courantes de $\overline{A}_i$ et $\overline{A}_j$, c'est-à-dire avec les valeurs

courantes de p_{oi} et p_{oj}. Les exposants $g_i, g_j, n_i, n_j, \nu_i, \nu_j, \bar{n}_i, \bar{n}_j, \bar{\nu}_i$ et $\bar{\nu}_j$ sont des entiers positifs ou nuls, tandis que l, k_i et k_j sont des entiers relatifs vérifiant les relations de d'Alembert :

$$\begin{aligned} k_i &= \bar{n}_i - n_i + \bar{\nu}_i - \nu_i - l + \tau(e) \\ k_j &= \bar{n}_j - n_j + \bar{\nu}_j - \nu_l + l \end{aligned}$$

soit encore :

$$k_i + k_j = \bar{n}_i - n_i + \bar{\nu}_i - \nu_i + \bar{n}_j - n_j + \bar{\nu}_j - \nu_j + \tau(e) \tag{2.14}$$

où $\tau(\tilde{p}) = \tau(q) = 0$, $\tau(z) = \tau(\zeta) = 1$ et $\tau(\bar{z}) = \tau(\bar{\zeta}) = -1$. On dit pour chaque terme du développement (2.13) qu'il est :

. de degré $n_i + n_j + \nu_i + \nu_j + \bar{n}_i + \bar{n}_j + \bar{\nu}_i + \bar{\nu}_j$ (exposants des variables en excentricités et inclinaisons)

. de grade $g_i + g_j$ (exposants des variables $\tilde{p}$)

. de caractéristique $C_I = k_i + k_j$

Les termes ayant le même argument $(k_i N_i + k_j N_j)\, t$, appartiennent à une même classe de termes appelée inégalité. C_I est la caractéristique de l'inégalité. On distingue aussi pour chaque terme la caractéristique du monôme C_M (Laskar, 1985) :

$$C_M = \sum_i (\bar{n}_i - n_i + \bar{\nu}_i - \nu_i)$$

La propriété de d'Alembert (2.14) s'écrit alors :

$$C_I = C_M + \tau(e) \tag{2.15}$$

Le développement d'une inégalité de caractéristique C_I dans l'équation (e) commence donc au degré $|C_I - \tau(e)|$ en excentricités et inclinaisons.

La partie F_{in} relative à l'aplatissement de Saturne est de la même façon développée en série de Poisson (Duriez, 1989) :

$$\begin{aligned} L^{(e)}_{F_{in}}(\tilde{p}, q, z, \zeta, \bar{z}, \bar{\zeta}, t) = &- \frac{\overline{N}_i}{1 + m_i/M_s} J_n \left(\frac{a_s}{\overline{A}_i}\right)^n \sum_{\{g,n,\nu,\bar{n},\bar{\nu}\}} C^{(e)}_{(g,n,\nu,\bar{n},\bar{\nu})} \times \\ &\times \tilde{p}_i^{g_i} \bar{z}_i^{\bar{n}_i} \bar{\zeta}_i^{\bar{\nu}_i} z_i^{n_i} \zeta_i^{\nu_i} \bar{\zeta}_s^{\bar{\nu}_s} \zeta_s^{\nu_s} \exp(k_i q_i + \imath\, k_i N_i\, t) \end{aligned} \tag{2.16}$$

où les exposants vérifient:

$$k_i = \bar{n}_i + \bar{\nu}_i - n_i - \nu_i + \tau(e) \qquad \text{et} \qquad 0 = \bar{\nu}_s - \nu_s$$

Enfin, le second membre de l'équation (2.11) est développé sous la forme:

$$L^{(\zeta_s)}(\tilde{p}, q, z, \zeta, \bar{z}, \bar{\zeta}, t) = - \sum_{\substack{1 \leq i \leq 9 \\ n \geq 2}} \frac{\overline{N}_i^2}{\gamma_s N_s (1 + m_i/M_s)} J_n \left(\frac{a_s}{\overline{A}_i} \right)^{n-2} \times$$
$$\times \sum_{\{g,n,\nu,\bar{n},\bar{\nu}\}} C^{(\zeta_s)}_{(g,n,\nu,\bar{n},\bar{\nu})} \tilde{p}_i^{g_i} \bar{z}_i^{\bar{n}_i} \bar{\zeta}_i^{\bar{\nu}_i} z_i^{n_i} \zeta_i^{\nu_i} \bar{\zeta}_s^{\bar{\nu}_s} \zeta_s^{\nu_s} \exp(k_i q_i + \imath\, k_i N_i\, t) \tag{2.17}$$

où les exposants vérifient encore la relation de d'Alembert:

$$k_i = \bar{n}_i + \bar{\nu}_i - n_i - \nu_i \qquad \text{et} \qquad 0 = \bar{\nu}_s - \nu_s + 1$$

γ_s est le rapport $I_s/M_s a_s^2$ où I_s est le moment d'inertie de Saturne autour de son axe de rotation, et N_s est la vitesse de rotation de la planète sur elle-même (cf Tableau 1).

On peut remarquer que chaque terme du développement $L_i^{(e)}$ contient en facteur un petit paramètre, qui est :

soit m_i/M_s pour les perturbations mutuelles

soit le coefficient J_n pour les termes d'aplatissement

soit $(N_9/N_i)^2$ pour les perturbations solaires

Nous désignerons toutes ces quantités par la notation commune ε. Les développements des seconds membres des équations de Lagrange sont donc d'ordre 1 par rapport à ϵ. Il faut cependant remarquer que le petit paramètre J_2 est bien plus important que tous les autres facteurs.

En pratique, ces développements sont construits jusqu'à un degré donné en excentricités et inclinaisons, en utilisant les techniques décrites par Duriez (1979). Le logiciel qu'il a développé, peut pour une inégalité donnée dans une équation donnée, calculer tous les termes de son développement jusqu'au degré 9. Heureusement, comme l'on verra au chapitre 3, il sera rarement nécessaire d'atteindre ce degré.

2.3 Principe général de l'intégration.

Rassemblons les 50 variables $\left((\tilde{p}_i,\ q_i,\ z_i,\ \bar{z}_i,\ \zeta_i,\ \bar{\zeta}_i)_{i=1\cdots 8},\ \zeta_s,\ \bar{\zeta}_s\right)$ dans un vecteur V. Le système différentiel (2.12) peut alors se noter de manière plus compacte :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \varepsilon \Lambda(V, t) \\ &= \{\varepsilon \Lambda(V, t)\} + \langle \varepsilon \Lambda(V, t) \rangle \end{aligned} \tag{2.18}$$

où ε indique que les équations sont du premier ordre (nous verrons plus tard que les termes $N_i p_{oi} + \overline{N}_i \tilde{p}_i$ dans (2.12), sont aussi des petites quantités du premier ordre). Dans $\varepsilon\Lambda(V,t)$, le temps t apparaît seulement dans les arguments qui définissent les inégalités [comme par exemple $\imath\,(\sum_i k_i N_i)t$]. On a séparé dans (2.18) les inégalités de cette façon :

$\langle\varepsilon\Lambda(V,t)\rangle$ est la partie dite critique, rassemblant les inégalités dont les fréquences $\sum_i k_i N_i$ sont bien plus petites que les moyens mouvements des satellites

$\{\varepsilon\Lambda(V,t)\}$ est la partie dite à courtes périodes, rassemblant les autres termes

Plus précisément, dans le sytème de Saturne, les inégalités critiques sont :

a – les termes séculaires, pour lesquel tous les k_i sont nuls,

b – les termes solaires, de fréquence N_9,

c – les termes caractérisant les résonances, c'est-à-dire de fréquence $N_1 - 2N_3$ (résonance Mimas-Téthys), $N_2 - 2N_4$ (résonance Dioné-Encelade) and $3N_6 - 4N_7$ (résonance Titan-Hypérion),

d – les termes résultant d'un produit quelconque de termes du type a-b-c.

De ces définitions on peut donc déduire, que le produit de deux termes critiques est un terme critique, le produit d'un terme critique par un terme à courte période est un terme à courte période, tandis que le produit de deux termes à courtes périodes peut être soit critique, soit à courte période.

Avec les moyens mouvements moyens du Tableau 1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} N_1 - 2N_3 &= +0^\circ\!,59867\mathrm{j}^{-1} &= 0,001567\ N_1 \\ N_2 - 2N_4 &= -0^\circ\!,33796\mathrm{j}^{-1} &= -0,001286\ N_2 \\ 3N_6 - 4N_7 &= +0^\circ\!,05118\mathrm{j}^{-1} &= 0,002267\ N_6 \end{aligned}$$

Les inégalités correspondantes sont critiques car, non seulement, leurs fréquences $|k_i N_i + k_j N_j|$ sont très petites (plus petites que $\sqrt{\varepsilon} N_i$) mais surtout elles sont du même ordre de grandeur que les mouvements séculaires des péricentres et des noeuds des satellites correspondants, justifiant que ces termes soient traités avec les termes séculaires; plus précisément la partie constante des quantités $2N_1 - 4N_3 + \dot{\Omega}_1 + \dot{\Omega}_3$, $N_2 - 2N_4 + \dot{\varpi}_2$ et $3N_6 - 4N_7 + \dot{\varpi}_7$ est nulle (résonance stricte), la combinaison correspondante des longitudes oscille autour d'une valeur constante (libration). Un critère équivalent, qui sera explicité au chapitre suivant, est de dire qu'une inégalité est considérée comme critique si la méthode d'intégration des inégalités à courtes périodes ne lui convient pas.

De ce point vue, les termes solaires sont critiques, tandis que ceux composant l'inégalité $\lambda_6 - 5\lambda_8$ de fréquence $-0^\circ,11277\mathrm{j}^{-1}$ sont considérés à courtes périodes car les mouvements des péricentres et des noeuds de Titan et de Japet qui affectent cette inégalité ont des fréquences bien plus petites. Le Tableau 2 du chapitre 3 illustre ce critère de séparation entre termes critiques et termes à courtes périodes.

Pour intégrer (2.18), nous cherchons une solution $V(t)$ sous la forme:

$$V(t) = V_0(t) + \varepsilon\Delta V(V_0, t) \tag{2.19}$$

V_0 et ΔV représentent respectivement $(\tilde{p}_{oi},\, q_{oi},\, z_{oi},\, \bar{z}_{oi},\, \zeta_{oi},\, \bar{\zeta}_{oi})_{i=1\cdots 8}$ et $(\Delta\tilde{p}_i,\, \Delta q_i,\, \Delta z_i,\, \Delta\bar{z}_i,\, \Delta\zeta_i,\, \Delta\bar{\zeta}_i)_{i=1\cdots 8}$. Nous verrons que $V_0(t)$ représente le mouvement à long terme du sytème et dépend explicitement des constantes d'intégration (d'ordre zéro); $V_0(t)$ sera donc d'ordre zéro au moins en ε. Par contre, $\varepsilon\Delta V(V_0, t)$ représentera de petites oscillations autour de V_0 et sera d'ordre un au moins en ε. On peut donc développer $\varepsilon\Lambda(V, t)$ en séries de Taylor au voisinage de la solution V_0 :

$$\begin{aligned}\varepsilon\Lambda(V,t) = \varepsilon\Lambda(V_0,t) &+ \left[\frac{\partial\varepsilon\Lambda(V,t)}{\partial V}\right]_{V=V_0} \cdot \varepsilon\Delta V(V_0,t) \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\varepsilon\Lambda(V,t)}{\partial V^2}\right]_{V=V_0} \cdot (\varepsilon\Delta V(V_0,t))^2 + \ldots\end{aligned} \tag{2.20}$$

Dérivons l'expression (2.19) :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV_0}{dt} + \frac{\partial\varepsilon\Delta V(V_0,t)}{\partial V_0}\cdot\frac{dV_0}{dt} + \frac{\partial\varepsilon\Delta V(V_0,t)}{\partial t} \tag{2.21}$$

et identifions V_0 à la solution du système critique, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\frac{dV_0}{dt} = \langle\varepsilon\Lambda(V_0,t)\rangle &+ \left\langle\frac{\partial\varepsilon\Lambda(V_0,t)}{\partial V_0}\cdot\varepsilon\Delta V(V_0,t)\right\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\left\langle\frac{\partial^2\varepsilon\Lambda(V_0,t)}{\partial V_0^2}\cdot(\varepsilon\Delta V(V_0,t))^2\right\rangle + \ldots\end{aligned} \tag{2.22}$$

Les courtes périodes $\varepsilon\Delta V(V_0, t)$ sont alors données par les termes restants :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varepsilon\Delta V(V_0,t)}{\partial t} = \{\varepsilon\Lambda(V_0,t)\} &+ \left\{\frac{\partial\varepsilon\Lambda(V_0,t)}{\partial V_0}\cdot\varepsilon\Delta V(V_0,t)\right\} \\ &+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\varepsilon\Lambda(V_0,t)}{\partial V_0^2}\cdot(\varepsilon\Delta V(V_0,t))^2\right\} + \ldots - \frac{\partial\varepsilon\Delta V(V_0,t)}{\partial V_0}\cdot\frac{dV_0}{dt}\end{aligned} \tag{2.23}$$

Le premier principe d'intégration que nous venons de voir est une séparation entre la partie critique et la partie à courtes périodes. Dans le même temps l'intégration se

fait selon le deuxième principe qui est une résolution ordre par ordre en ε . En effet, supposons que $\varepsilon\Delta V$ se développe en puissance de ε, sous la forme :

$$\varepsilon\Delta V = \varepsilon\,\Delta_1 V + \varepsilon^2\,\Delta_2 V + \ldots \tag{2.24}$$

On obtient alors :

$$\varepsilon\,\frac{\partial\Delta_1 V}{\partial t} = \varepsilon\,\{\Lambda(V_0,t)\} \tag{2.25a}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\,\frac{\partial\Delta_2 V}{\partial t} &= -\,\varepsilon^2\,\frac{\partial\Delta_1 V(V_0,t)}{\partial V_0}\cdot\langle\Lambda(V_0,t)\rangle \\ &\quad + \varepsilon^2\left\{\frac{\partial\Lambda(V_0,t)}{\partial V_0}\cdot\Delta_1 V(V_0,t)\right\}\end{aligned} \tag{2.25b}$$

etc...

La partie à courtes périodes peut donc s'intégrer ordre par ordre indépendamment de l'intégration de la partie critique. De plus, si on connait la solution $\epsilon\Delta V$ à un ordre k, en la reportant dans les seconds membres des équations (2.22), on obtient le système critique construit jusqu'à l'ordre $k+1$

Remarque. Cette séparation en deux sous-systèmes rend possible la recherche d'une solution particulière pour le système à courtes périodes. Ainsi, aucune constante d'intégration ne sera ajoutée dans $\Delta V(V_0,t)$; les constantes d'intégration de la solution générale seront introduites seulement dans $V_0(t)$, lors de l'intégration du système critique.

2.4 *Construction pratique des équations du mouvement.*

Pour construire les développements des équations, nous utilisons plusieurs outils :

En premier lieu, dans le cas de faibles excentricités et inclinaisons, c'est-à-dire pour tous les satellites (sauf Hypérion lorsqu'il est perturbé par Titan), le développement des seconds membres des équations (2.12) est obtenu par les techniques décrites dans Duriez (1979). Le logiciel FORTRAN correspondant a été revu et est maintenant capable de fournir les expressions formelles (2.13), (2.16) et (2.17) jusqu'au degré 9 en excentricités et inclinaisons, et au degré 2 dans les variables $\tilde{p}_i$. Le calcul de ces développements n'est pas fait d'un seul coup, mais est fractionné inégalité par inégalité : on désigne chaque inégalité que l'on veut développer (donnée par les entiers k_i et k_j) dans une équation donnée (par son index σ et par les indices i et j des corps perturbé et perturbant), et on indique le degré maximum souhaité pour le développement (≤ 9). Ainsi, on

peut ne calculer que les inégalités utiles. On verra plus loin, à propos des termes à courtes périodes, comment nous avons défini les critères pour retenir les inégalités à courtes périodes utiles, et pour fixer le degré maximum auquel il faut les développer. Au contraire, les inégalités critiques (séculaires, résonnantes et solaires) ont été développées complètement, au degré 6.

Pour le calcul des équations à l'ordre 2, il faut exprimer les produits $\left\langle \frac{\partial \varepsilon \Lambda}{\partial V_0} \cdot \varepsilon \Delta V \right\rangle$ dans (2.22) et $\left\{ \frac{\partial \varepsilon \Lambda}{\partial V_0} \cdot \varepsilon \Delta V \right\} - \frac{\partial \varepsilon \Delta V}{\partial V_0} \cdot \frac{dV_0}{dt}$ dans (2.23). Nous avons utilisé pour cela le logiciel développé par Laskar (1985). La technique est la même qu'à l'ordre 1. On désigne l'équation et l'inégalité voulue ainsi que le degré maximum; le logiciel effectuera tous les produits conduisant au résultat cherché : En principe, il y a une infinité de produits d'inégalités à effectuer pour trouver une inégalité donnée; le logiciel permet d'isoler les produits significatifs dans le résultat et d'en estimer la précision.

Pour le calcul de l'ordre 3 en J_2 et pour manipuler les équations développées par les techniques précédentes aux ordres 1 et 2, nous avons utilisé un manipulateur de formule, TRIP, mis au point par Laskar (1989). C'est un outil, développé en langage C, qui manipule des séries trigonométriques complexes, à coefficients polynomiaux, à nombre arbitraire de variables complexes ou réelles. Il permet principalement d'effectuer le produits de ces séries, la sustitution par une série d'une variable dans une série, la dérivation et l'intégration par rapport à n'importe quelle variable. Au contraire des manipulateurs généraux, les coefficients numériques sont en double précision, et non sous forme rationnelle. Mais son principal intérêt est de permettre des troncatures très sophistiquées sur le degré d'une ou de plusieurs variables, ainsi que sur l'ordre de grandeur des coefficients, ces modes de troncature étant effectifs à l'intérieur des produits ou substitutions. Ainsi, à la demande, on peut calculer directement un produit tronqué, sans avoir à calculer d'abord le produit complet puis à tronquer le résultat. Ceci permet, lors du calcul d'un produit tronqué, une grande économie de mémoire.

3. Perturbations à courtes périodes.

3.1 Intégration des courtes périodes.

3.1.1 Méthode.

L'intégration des équations (2.23) ou (2.25) est effectuée facilement terme par terme et ordre par ordre. En effet, partant des expressions (2.13) ou (2.16), on obtient à tout ordre k, des équations (2.23) mises ainsi sous forme scalaire :

$$\frac{\partial \Delta_k \sigma_j}{\partial t} = \imath \, \overline{N}_j \sum_{\{k_i\}} T^{(k,\sigma)}_{\{k_i\}}(V_0) \exp \imath \, (\Sigma_i k_i N_i t) \qquad \text{pour} \quad \sigma = \tilde{p},\, z \text{ or } \zeta$$

et

$$\frac{\partial \Delta_k q_j}{\partial t} = \imath \, \overline{N}_j \, \Delta_k \tilde{p}_j + \imath \, \overline{N}_j \sum_{\{k_i\}} T^{(k,q)}_{\{k_i\}}(V_0) \exp \imath \, (\Sigma_i k_i N_i t) \qquad \text{pour} \quad \sigma = q$$

Chaque coefficient $T^{(k,\sigma)}_{k_i}(V_0)$ est une fonction analytique des variables $(\tilde{p}_{oi},\, q_{oi},\, z_{oi},\, \bar{z}_{oi},\, \zeta_{oi},\, \bar{\zeta}_{oi})_{i=1\cdots 8}$ présentes dans V_0, et n'est donc pas fonction explicite de t. On obtient donc :

$$\Delta_k \sigma_j = \sum_{\{k_i\}} \frac{\overline{N}_j \, T^{(k,\sigma)}_{\{k_i\}}(V_0)}{\Sigma_i k_i N_i} \exp \imath \, (\Sigma_i k_i N_i t) \tag{3.1}$$

Nous pourrions ajouter une constante ou toute fonction de V_0 à cette solution mais nous ne le ferons pas de façon qu'au second ordre, le produit $\dfrac{\partial \Delta_1 V(V_0,t)}{\partial V_0} \cdot \langle \Lambda(V_0,t) \rangle$ dans (2.25b) n'engendre que des termes à courtes périodes. Nous verrons d'ailleurs plus loin (en §3.1.2) quelle interprétation on peut donner à ce produit.

Pour les équations relatives à $\Delta_k q_j$, il faut intégrer aussi $\imath \overline{N}_j \Delta_k \tilde{p}_j$, ce qui ajoute aux termes de la forme (3.1), les termes suivants :

$$\Delta_k q_j = \sum_{\{k_i\}} \frac{\overline{N}_j^2 \, T^{(k,p)}_{\{k_i\}}(V_0)}{(\Sigma_i k_i N_i)^2} \exp \imath \, (\Sigma_i k_i N_i t)$$

Ces formules permettent de calculer d'abord $\Delta_1 V$ dans (2.25a), puis, substituant sa valeur dans (2.25b), on peut intégrer le second ordre, et ainsi de suite pour les ordres

supérieurs. Cela suppose seulement que l'intégration conserve l'ordre en ε. On est bien dans cette hypothèse puisque par construction $\Delta_k V$ ne contient pas de terme critique. Il n'y a donc pas de problème pour identifier l'ordre de chaque terme.

Avec une solution ainsi obtenue à l'ordre k, nous pouvons donc construire le système critique (2.22) jusqu'à l'ordre $k+1$. De plus les termes à courtes périodes restant des fonctions explicites de V_0, il n'est pas nécessaire de connaître une solution V_0 du système critique pour obtenir la solution du système à courtes périodes. C'est d'ailleurs ce que nous allons illustrer dans le paragraphe suivant.

3.1.2 Analyse de la méthode.

Cette façon d'intégrer les termes périodiques est classique dans le cadre de théories générales planétaires, mais l'est moins dans celui des théories de satellites. Pour en comprendre la raison, prenons l'exemple d'un terme à courte période d'ordre un :

$$C(\alpha_{ij})\,\tilde{p}_{oi}^{g_i}\,\bar{z}_{oi}^{\bar{n}_i}\,\bar{\zeta}_{oi}^{\bar{\nu}_i}\,z_{oi}^{n_i}\,\zeta_{oi}^{\nu_i}\,\tilde{p}_{oj}^{g_j}\,\bar{z}_{oj}^{\bar{n}_j}\,\bar{\zeta}_{oj}^{\bar{\nu}_j}\,z_{oj}^{n_j}\,\zeta_{oj}^{\nu_j}\,\exp\left[k_i q_{oi} + k_j q_{oj} + \imath\,(k_i N_i + k_j N_j)t\right]$$

En utilisant les relations (2.2) et notant $\gamma = \sin(i/2)$, ce terme est équivalent à :

$$\begin{aligned} &C(\alpha_{ij})\,\tilde{p}_{oi}^{g_i}\,e_i^{n_i+\bar{n}_i}\,\gamma_i^{\nu_i+\bar{\nu}_i}\,\tilde{p}_{oj}^{g_j}\,e_j^{n_j+\bar{n}_j}\,\gamma_j^{\nu_j+\bar{\nu}_j}\,\exp(k_i q_{oi} + k_j q_{oj}) \times \\ &\times \exp \imath\left[(k_i N_i + k_j N_j)t + (n_i - \bar{n}_i)\varpi_i + (n_j - \bar{n}_j)\varpi_j + (\nu_i - \bar{\nu}_i)\Omega_i + (\nu_j - \bar{\nu}_j)\Omega_j\right] \end{aligned}$$

Dans les théories classiques de satellites, un tel terme est intégré en divisant son coefficient par sa fréquence $k_i N_i + k_j N_j + (n_i - \bar{n}_i)\dot{\varpi}_i + (n_j - \bar{n}_j)\dot{\varpi}_j + (\nu_i - \bar{\nu}_i)\dot{\Omega}_i + (\nu_j - \bar{\nu}_j)\dot{\Omega}_j$. Celle-ci dépend des mouvements séculaires des péricentres et des noeuds, qui doivent donc être supposés connus. En fait, dans notre méthode, nous n'avons pas besoin de connaître ces mouvements séculaires, mais nous en tenons compte implicitement par l'intégration ordre par ordre. En effet, dès le second ordre, nous utilisons les informations concernant ces mouvements qui sont contenues dans le produit $\dfrac{\partial \varepsilon \Delta_1 V(V_0,t)}{\partial V_0}\cdot\langle \varepsilon \Lambda(V_0,t)\rangle$. On peut le mettre en évidence sur des équations simplifiées (comparables à celles concernant les excentricités et les péricentres), et dans lesquelles le système critique est réduit à sa partie linéaire diagonalisée :

$$\frac{dz_i}{dt} = \imath\,\varepsilon\Big(\omega_i z_i + \sum C^{(i)}_{k_j,n_j,\bar{n}_j}\prod(z_{oj}^{n_j}\,\bar{z}_{oj}^{\bar{n}_j})\exp[\imath\,\Sigma\,(k_j N_j)t]\Big) \qquad \text{pour} \qquad i = 1\cdots n$$

Dans cette expression, tous les termes périodiques sont supposés à courtes périodes.

Avec $z_i = z_{oi} + \varepsilon\Delta z_i(V_0,t)$ et $V_0 = (z_{oj}, \bar{z}_{oj})_{j=1,n}$, on sépare les deux équations :

$$\frac{dz_{oi}}{dt} = \imath\,\varepsilon\,\omega_i z_{oi} \qquad \text{(la partie séculaire)}$$

$$\frac{\partial\varepsilon\Delta z_i}{\partial t} + \frac{\partial\varepsilon\Delta z_i(V_0,t)}{\partial V_0}\cdot\frac{dV_0}{dt} = \imath\,\varepsilon\sum C^{(i)}_{k_j,n_j,\bar{n}_j}\prod(z_{oj}^{n_j}\bar{z}_{oj}^{\bar{n}_j})\exp[\imath\,\Sigma\,(k_jN_j)t] + o(\varepsilon^2)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Delta z_i}{\partial t} + \imath\sum_j\left(\frac{\partial\Delta z_i}{\partial z_{oj}}\cdot\varepsilon\omega_j z_{oj} - \frac{\partial\Delta z_i}{\partial\bar{z}_{oj}}\cdot\varepsilon\omega_j\bar{z}_{oj}\right) = \\ \imath\sum C^{(i)}_{k_j,n_j,\bar{n}_j}\prod(z_{oj}^{n_j}\bar{z}_{oj}^{\bar{n}_j})\exp[\imath\,\Sigma\,(k_jN_j)t] + o(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{3.2}$$

Cette équation se résoud exactement par :

$$\Delta z_i = \sum\frac{C_{k,n,\bar{n}}\prod(z_{oj}^{n_j}\bar{z}_{oj}^{\bar{n}_j})}{\Sigma\,[k_jN_j + (n_j-\bar{n}_j)\varepsilon\omega_j]}\exp[\imath\,\Sigma\,(k_jN_j)t] + o(\varepsilon^2) \tag{3.3}$$

Si, comme en (2.25a) et (2.25b), nous écrivons les équations pour $\varepsilon\Delta z_i$ éclaté en divers ordres : $\varepsilon\Delta z_i = \varepsilon\Delta_1 z_i + \varepsilon^2\Delta_2 z_i + \cdots$, nous obtenons, d'abord au premier ordre :

$$\frac{\partial\Delta_1 z_i}{\partial t} = \imath\sum C^{(i)}_{k_j,n_j,\bar{n}_j}\prod(z_{oj}^{n_j}\bar{z}_{oj}^{\bar{n}_j})\exp[\imath\,\Sigma\,(k_jN_j)t]$$

soit

$$\Delta_1 z_i = \sum\frac{C^{(i)}_{k_j,n_j,\bar{n}_j}\prod(z_{oj}^{n_j}\bar{z}_{oj}^{\bar{n}_j})}{\Sigma\,(k_jN_j)}\exp[\imath\,\Sigma\,(k_jN_j)t] \tag{3.4}$$

puis pour le second ordre :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varepsilon\Delta_2 z_i}{\partial t} &= \sum_j\left(-\imath\frac{\partial\Delta_1 z_i}{\partial z_{oj}}\cdot\varepsilon\omega_j z_{oj} + \imath\frac{\partial\Delta_1 z_i}{\partial\bar{z}_{oj}}\cdot\varepsilon\omega_j\bar{z}_{oj}\right) + o(\varepsilon^2)\\ &= -\imath\sum\frac{C^{(i)}_{k_j,n_j,\bar{n}_j}\prod(z_{oj}^{n_j}\bar{z}_{oj}^{\bar{n}_j})\times\Sigma\,(n_j-\bar{n}_j)\epsilon\omega_j}{\Sigma\,(k_jN_j)}\exp[\imath\,\Sigma\,(k_jN_j)t] + o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

soit

$$\varepsilon\Delta_2 z_i = -\sum\frac{C^{(i)}_{k_j,n_j,\bar{n}_j}\prod(z_{oj}^{n_j}\bar{z}_{oj}^{\bar{n}_j})\times\Sigma\,(n_j-\bar{n}_j)\epsilon\omega_j}{[\Sigma\,(k_jN_j)]^2}\exp[\imath\,\Sigma\,(k_jN_j)t] + o(\varepsilon^2) \tag{3.5}$$

Il apparait alors que la somme $\Delta_1 z + \varepsilon\Delta_2 z$ est le début du développement (3.3), dans lequel chaque terme $\frac{1}{\Sigma\,[k_jN_j+(n_j-\bar{n}_j)\epsilon\omega_j]}$ est développé en: $\left(\frac{1}{\Sigma\,(k_jN_j)}\right)\left(1-\frac{\Sigma\,(n_j-\bar{n}_j)\epsilon\omega_j}{\Sigma\,(k_jN_j)}\right)$. Bien sûr, un tel développement n'est valable que si la combinaison $\Sigma\,(n_j-\bar{n}_j)\epsilon\omega_j$ est bien plus petite que $\Sigma\,(k_jN_j)$, ce qui est vrai pour les courtes périodes et seulement pour elles.

On peut illustrer ceci sur quelques exemples d'inégalités présentés dans le Tableau 2. L'évaluation de l'amplitude d'une inégalité y est faite de deux façons, selon la formule (3.4) au premier ordre (colonne Ordre 1), puis selon la formule (3.3) (colonne Ordre 1 + diviseur "complet"). Les vitesses des noeuds et des péricentres nécessaires à cette évaluation sont celles issues des théories actuelles, ces vitesses sont données dans la formule (3.11) de ce chapitre.

La première inégalité, $(-\lambda_5 + 2\lambda_6)$ dans la solution de z de Rhéa, peut être considérée à courte période, car l'influence de la vitesse des péricentres et des noeuds est si faible qu'elle n'apparait pas à la précision donnée dans le Tableau. Par contre pour l'inégalité solaire $2\lambda_9$ dans la solution en z d'Hypérion, les deux méthodes donnent des différences notables qui s'expliquent ainsi : les termes de plus bas degré de cette inégalité sont de degré un (propriété de d'Alembert) et contiennent en particulier la variable z_{o7} d'Hypérion qui a un module important (environ 0.10), mais qui a surtout son argument (péricentre) tournant avec une période d'environ 19 ans, très comparable à celle de l'inégalité solaire (15 ans). On voit donc ici pourquoi les inégalités purement solaires sont critiques dans le cas d'Hypérion, elles semblent cependant moins "critiques" dans le cas de Japet. Enfin, concernant la grande inégalité $(-\lambda_6 + 5\lambda_8)$ qui a une assez longue période (8.7 ans), on peut la considérer comme celles à courtes périodes parce que les périodes des péricentres et des noeuds qui peuvent l'affecter sont beaucoup plus longues (environ 700 ans pour Titan et 3000 ans pour Japet).

Cependant il importe de voir que dans la méthode "à diviseur complet" schématisé par le système (3.2), la solution exacte (3.3) existe uniquement parce que le système critique était réduit à une partie linéaire diagonale. Un tel système peut résulter de la diagonalisation du système initial, c'est-à-dire de la recherche des valeurs propres et des modes propres (utilisant par exemple la technique de normalisation de Birkhoff pour tenir compte aussi des termes non linéaires, cf. Laskar (1984)). Dans ce cas, les variables z_{oi} de l'équation (3.2) représentent plutôt les modes propres qui sont les nouvelles variables résultant de cette diagonalisation; cependant, cela impose d'exprimer aussi le coefficient des termes à courtes périodes dans (3.2) en fonction de ces nouvelles variables, et donc une manipulation très lourde des séries correspondantes. Il est donc préférable d'utiliser la seconde méthode (illustrée en (3.4) et (3.5)) d'autant plus que la résolution du système critique n'a alors pas besoin d'être connue pour intégrer les termes à courtes périodes. La validité de cette méthode vient de ce qu'on a évité le problème des petits diviseurs dans les termes à courtes périodes, rejetant celui-ci dans le système critique; ainsi, tous les diviseurs utilisés pour intégrer les termes périodiques ne sont

que très peu modifiés par les mouvements de précession des noeuds et des péricentres.

3.2 Sélection des inégalités du premier ordre et convergence en degré.

Nous avons vu que le logiciel utilisé pour développer les équations de Lagrange est très souple d'emploi puisqu'il procède inégalité par inégalité, permettant de sélectionner une inégalité $\Sigma_i k_i \lambda_i$ quelconque et de donner son développement sous la forme :

$$\sum_{\{k_i\}} T_{\{k_i\}}(p, z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta}) \exp i\,(\Sigma_i k_i \lambda_i)$$

où l'amplitude $T_{\{k_i\}}$ de l'inégalité est une série entière de $\tilde{p}$, z, $\bar{z}$, ζ et $\bar{\zeta}$, tronquée au degré souhaité (≤ 9). Aussi pour éviter de calculer des inégalités négligeables, ou au contraire, d'en oublier certaines, il est important de connaître à l'avance quelles sont les inégalités significatives pour une précision donnée. Pour cela, nous avons utilisé une méthode de perturbations semi-numérique (gardant l'analyticité par rapport aux variables λ_i seulement) qui permet de sélectionner les inégalités d'après leur amplitude, ne retenant que celles dépassant un certain seuil. De plus cette méthode est suffisamment précise pour que l'on puisse comparer ses résultats avec les développements analytiques que nous savons construire degré par degré, permettant de contrôler la convergence de ces développements.

3.2.1 Perturbations du premier ordre par analyse harmonique.

Nous avons utilisé un programme de perturbations semi-numériques réalisé par Simon (1985) pour l'étude du problème planétaire (Simon et Francou, 1982). Il effectue l'analyse de Fourier des équations de Lagrange par rapport aux deux longitudes moyennes λ et λ' d'un couple de planètes, donnant le développement de chaque équation, sous forme d'une série de Fourier des deux variables λ et λ' à coefficients numériques dépendant des valeurs données aux demi-grands axes, excentricités, inclinaisons, longitudes des noeuds et des péricentres: nous avons choisi ces valeurs égales à celles données pour ces satellites à un instant t_0 arbitraire, par la théorie que Dourneau a ajustée (1987). L'intégration des séries de Fourier obtenues est alors effectuée exactement comme dans la formule (3.1) c'est-à-dire en considérant chaque inégalité (même critique ou solaire) comme étant à courte période. Il faut cependant remarquer que les amplitudes des inégalités calculées de cette façon sont des évaluations instantanées (en t_0), ne tenant pas compte des variations à long terme des variables z et ζ. Nous avons

vérifié que ces variations restent petites en effectuant plusieurs analyses de Fourier pour plusieurs t_0 répartis sur un siècle. Mais l'important est de noter ici que la liste des inégalités supérieures à une certaine précision est très stable quand t_0 varie, car c'est cette liste d'inégalités qui est utilisée par nos programmes de développements analytiques, pour ne construire ainsi que les inégalités significatives à une précision donnée.

Tous les couples de satellites ont ainsi été analysés. Cependant, il est apparu que le couple Titan-Hypérion est très mal représenté par cette méthode, confirmant les résultats de Duriez (1988). Ainsi, pour ce couple, il a été nécessaire de concevoir une méthode spécifique afin de calculer leurs inégalités à courtes périodes, et qui est présentée dans Vienne & Duriez (1991). Cette méthode spécifique, propre à traiter les cas de résonance, a permis de vérifier que son application aux deux autres couples de satellites en résonance (Mimas-Téthys et Encelade-Dioné), donne des termes à courtes périodes très proches de ceux obtenus par l'analyse de Simon, montrant ainsi que, pour ces satellites, les librations dûes aux résonances affectent très peu les termes à courtes périodes.

En ce qui concerne les inégalités périodiques provenant des perturbations par l'aplatissement de Saturne, il n'est pas nécessaire de déterminer quelles sont celles qu'il faut calculer. Elles sont peu nombreuses, n'étant que les multiples $k\lambda$ de la longitude moyenne du satellite considéré; en effet, comme le facteur k correspond à des développements de degré k au moins en excentricités et inclinaisons, et qu'on limite le degré, le nombre de ces inégalités et le nombre de termes de leur développement, sont très limités et il est apparu plus simple de développer complètement toutes ces inégalités jusqu'au degré six, prenant en compte toutes les contributions en J_2, J_4 et J_6.

Enfin, pour rechercher les inégalités solaires significatives pour chaque satellite, nous avons utilisé le même programme de Simon, le Soleil perturbateur étant alors considéré comme un satellite lointain. La liste d'inégalités résultante a servi de guide pour notre logiciel de développements analytiques.

Remarque. Le programme d'analyse de Fourier nécessite de fixer deux entiers suffisamment grands $2P+1$ et $2P'+1$, égaux aux nombres de valeurs de λ et λ' discrétisées en vue de l'analyse. En fait l'analyse est faite par rapport aux variables suivantes :

$$\theta_1 = \bar{\lambda}' - \bar{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \theta_2 = \bar{\lambda}' \tag{3.6}$$

où $\bar{\lambda} = \epsilon + Nt$ and $\bar{\lambda}' = \epsilon' + N't$. De l'expression des coefficients de Laplace et de la propriété de d'Alembert dans le développement de la fonction perturbatrice, on

peut montrer que le coefficient correspondant à l'argument $i_1\theta_1 + i_2\theta_2$ a en facteur $\alpha^{|i_1|} \times \beta^{|i_2|}$ où α est le rapport des demi-grands axes et β de l'ordre des excentricités et des inclinaisons. L'ordre de grandeur connu de ces quantités permet de fixer les bornes de la série de Fourier suivant le couple de satellites considérés: La valeur de α permet de limiter $|i_1|$ à un entier P choisi, et celle de β de limiter $|i_2|$ à un certain P'. En fait, pour simplifier, nous avons adopté des mêmes valeurs (suffisamment grandes) pour tous les couples de satellites :

$$P = 64 \qquad \text{et} \qquad P' = 20 \tag{3.7}$$

Pour assurer une précision interne d'environ 10 km, nous avons retenu toutes les inégalités d'amplitude supérieure à 0.1 km dans chaque variable et pour chaque couple de satellites (sauf Titan-Hypérion). Le nombre d'inégalités alors obtenu n'est pas très élevé (984). Nous ne donnerons pas cette liste ici, mais seulement sa distribution par variable et par couple (Tableau 3). Dans ce Tableau, on vérifie que Titan et le Soleil sont bien les corps les plus perturbateurs : Les perturbations solaires concernent surtout Japet, Hypérion et Titan et les perturbations dues à Titan concernent principalement Japet et Rhéa. La liste des inégalités d'amplitudes supérieures à 10 km, réduite alors à 91 inégalités, est cependant disponible dans les Tableaux 6*a* à 6*d* qui seront commentés en §3.3.

3.2.2 Convergence des développements en degré.

Le programme de calcul du développement analytique des équations de Lagrange permet d'atteindre le degré 9 dans les développements de la forme (2.13). Ayant ainsi les monômes constituant le développement d'une inégalité, on peut calculer la contribution des termes de même degré lors de l'évaluation de son amplitude, et comparer les sommes partielles successives à la valeur fournie par la méthode de Simon.

La convergence des développements est mise en évidence par cette comparaison. Par exemple, le Tableau 4 présente, pour Rhéa perturbé par Titan, les inégalités d'amplitude supérieure à 10 km calculées par les deux méthodes. La convergence est manifeste, et la précision de 0.1 km est même le plus souvent obtenue avec les seuls termes de plus bas degré.

La rapidité de cette convergence, c'est-à-dire, le degré nécessaire pour atteindre la précision souhaitée, est illustrée dans le Tableau 5 pour une précision de 10 mètres, en prenant comme référence la valeur des amplitudes obtenues par l'analyse harmonique.

On y trouve pour Rhéa et Japet perturbés par les autres satellites, le nombre d'inégalités dont l'amplitude, calculée par les développements analytiques jusqu'à un degré donné, a une précision meilleure que 10 mètres.

Des résultats analogues ont été obtenus pour les autres satellites, dont nous tirons les remarques suivantes :

Les mouvements de Mimas, Encelade, Théthys, Dioné et Rhéa nécessitent, pour leurs perturbations mutuelles et pour celles dûes à Titan, des développements poussés jusqu'au degré 3. Pour leurs perturbations solaires, il est nécessaire d'aller jusqu'au degré 5.

Titan et Japet sont peu perturbés par les cinq premiers satellites. Si on en tient compte, le degré 2 pour Titan et le degré 4 pour Japet suffisent. Leurs perturbations mutuelles et solaires sont bien représentées en adoptant le degré maximum 6.

De manière générale, dès que Japet ou le Soleil interviennent dans les équations, un degré relativement élevé est nécessaire car ces deux corps se meuvent dans des plans fortement inclinés l'un sur l'autre, ou sur l'équateur de Saturne. Il suffit donc, dans tous les cas, de développer les inégalités utiles au degré 6 pour être assuré d'une précision de 10 mètres.

3.3 Liste des inégalités à courtes périodes.

Chaque inégalité à courte période $\sum_i k_i\lambda_i$ sélectionnée par l'analyse harmonique dans une variable σ a été développée analytiquement par nos programmes, d'abord à l'ordre 1 et au degré 6 en excentricités et inclinaisons. Suivant les règles de d'Alembert, (2.15), le développement d'une inégalité de caractéristique $C_I = \sum_i k_i$, est de degré $|C_I - \tau(\sigma)|$ au moins dans l'équation σ ($\tau = 0$ pour les équations p et q, et $\tau = 1$ pour z et ζ); nous avons développé ces inégalités à l'ordre 2 des masses ou des produits d'une masse par J_2, J_4 ou J_6, jusqu'au degré $|C_I - \tau(\sigma)| + 2$ en excentricités et inclinaisons. De la même façon, nous avons développé au degré 6 toutes les inégalités à courtes périodes d'ordre 1 en J_2, J_4 et J_6, d'ordre 2 en J_2^2, J_2J_4, J_2J_6, J_4^2, J_4J_6 et J_6^2, et d'ordre 3 en J_2^3 (au degré 1 seulement). Pour chaque inégalité $\sum_i k_i\lambda_i$, ces développements sont de la forme suivante, dans la partie à courtes périodes de la solution $\Delta\sigma$:

$$\Delta\sigma = \left[\sum_{\{g,n,\bar{n},\nu,\bar{\nu}\}} \varepsilon\, C_{\{g,n,\bar{n},\nu,\bar{\nu}\}} \prod_i \left(\tilde{p}_{oi}^{g_i} z_{oi}^{n_i} \bar{z}_{oi}^{\bar{n}_i} \zeta_{oi}^{\nu_i} \tilde{\zeta}_{oi}^{\bar{\nu}_i}\right) \right] \exp\left(\imath \sum_i k_i\lambda_{oi}\right) \qquad (3.8)$$

où ε désigne le paramètre physique en facteur (masses, ou J_i, ou l'un de leurs produits) et $\lambda_{oi} = N_i t - \imath\, q_{oi}$; les quantités $\tilde{p}_o$, q_o, z_o, ζ_o et leurs conjuguées $\bar{z}_o$ et $\bar{\zeta}_o$ représentent la solution du système critique. Comme on l'a vu en §3.1.1, l'intégration de ces termes à courtes périodes ne fait intervenir que le diviseur $\sum_i k_i N_i$, sans avoir besoin de connaître la solution du système critique. Le degré g_i des variables $\tilde{p}_{oi}$ est ici zéro ou un, et zéro aux ordres supérieurs. Ces variables nous permettront de répercuter les éventuelles petites corrections à apporter dans les constantes p_{oi}: Rappelons en effet que les coefficients C dans (3.8) sont numériques et dépendent des valeurs de $\overline{A}_i$, elles-mêmes fonctions des p_{oi} (donnés dans le Tableau 1).

D'après (3.8), l'amplitude de chaque inégalité se présente sous forme d'une somme de nombreux termes, chacun lentement variable avec le temps tout comme les solutions $\tilde{p}_o$, q_o, z_o, ζ_o du système critique. Il aurait été trop long de donner ces développements complets. Nous aurions pu les réduire à un nombre en calculant leur amplitude à un instant donné, simplement en y remplaçant les z_{oi} et ζ_{oi} par leur valeur calculée à partir des théories existantes (Dourneau 1987 par exemple). Nous avons choisi une présentation intermédiaire : Considérant que la représentation des mouvements donnée par Dourneau caractérise l'essentiel de la solution du système critique, avec l'avantage d'être déjà ajustée aux observations sur plus d'un siècle, nous avons adopté provisoirement cette représentation pour voir quelle est l'influence de la solution du système critique sur l'amplitude des termes à courtes périodes. Dans cette représentation, seules les longitudes des noeuds et des péricentres dépendent vraiment du temps, tandis que les excentricités et inclinaisons sont quasi constantes. Nous avons donc remplacé dans (3.8) les variables z_{oi} et ζ_{oi} par des expressions semi-numériques où tous les angles de type longitude restent explicites, les amplitudes étant numériques et prises chez Dourneau. Ces expressions ont la forme générale :

$$z_{oi} = \sum_j e^*_{ij} \exp \imath\, \varpi^*_j \qquad \text{et} \qquad \zeta_{oi} = \sum_j \gamma^*_{ij} \exp \imath\, \Omega^*_j \tag{3.9}$$

Et plus précisément, nous avons adopté :

$$
\begin{aligned}
z_{o1} &= 0,018988 \exp \imath\, \varpi_1^* \\
z_{o2} &= 0,004840 \exp \imath\, \varpi_2^* \\
z_{o3} &= 0,001018 \exp \imath\, \varpi_3^* \\
z_{o4} &= 0,002155 \exp \imath\, \varpi_4^* \\
z_{o5} &= 0,000999 \exp \imath\, \varpi_6^* + 0,000265 \exp \imath\, \varpi_5^* \\
z_{o6} &= 0,029089 \exp \imath\, \varpi_6^* \\
z_{o8} &= 0,028288 \exp \imath\, \varpi_8^* \\
z_{o9} &= 0,055617 \exp \imath\, \varpi_9 \\
\zeta_{o1} &= 0,013639 \exp \imath\, \Omega_1^* \\
\zeta_{o2} &= 0,000229 \exp \imath\, \Omega_2^* \\
\zeta_{o3} &= 0,009578 \exp \imath\, \Omega_3^* \\
\zeta_{o4} &= 0,000121 \exp \imath\, \Omega_4^* \\
\zeta_{o5} &= 0,003027 \exp \imath\, \Omega_5^* + 0,000168 \exp \imath\, \Omega_6^* \\
\zeta_{o6} &= 0,002583 \exp \imath\, \Omega_6^* \\
\zeta_{o8} &= 0,132264 \exp \imath\, \Omega_8^* \\
\zeta_{o9} &= 0,231382 \exp \imath\, \Omega_9
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Les arguments sont donnés ci-dessous, avec t exprimé en années à partir de J1980 ($t =$ (jour Julien $-2444240)/365,25$):

$$
\begin{aligned}
\varpi_1^* &= 365^\circ,549\ t - 8^\circ,575 & \Omega_1^* &= -365^\circ,072\ t - 125^\circ,156 \\
\varpi_2^* &= 123^\circ,44121\ t - 177^\circ,223 & \Omega_2^* &= -151^\circ,95\ t + 69^\circ,493 \\
\varpi_3^* &= 72^\circ,29\ t - 94^\circ,381 & \Omega_3^* &= -72^\circ,2441\ t - 133^\circ,743 \\
\varpi_4^* &= 30^\circ,820\ t - 77^\circ,047 & \Omega_4^* &= -30^\circ,27\ t - 163^\circ,859 \\
\varpi_5^* &= 10^\circ,057\ t + 6^\circ,577 & \Omega_5^* &= -10^\circ,057\ t - 16^\circ,500 \\
\varpi_6^* &= 0^\circ,5118\ t + 153^\circ,840 & \Omega_6^* &= -0^\circ,5118\ t + 187^\circ,127 \\
\varpi_8^* &= (0^\circ,1171\ t) - 161^\circ,279 & \Omega_8^* &= (-0^\circ,03919\ t) - 145^\circ,929 \\
\varpi_9 &= 0^\circ,0196\ t + 103^\circ,671 & \Omega_9 &= -0^\circ,00877\ t - 175^\circ,411
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Dans ces expressions, les longitudes des noeuds et des péricentres sont mesurées dans le plan équatorial de Saturne, à partir du noeud de ce plan dans l'écliptique moyen J2000.

Les expressions (3.10) et (3.11) représentent la partie significative des variations séculaire de z et ζ données par Dourneau, sauf pour Japet. Pour ce satellite, il faut plutôt considérer les expressions données pour z_{o8} et ζ_{o8} comme des valeurs instantanées calculées pour la date J1980 (C'est pourquoi nous avons mis entre parenthèses la partie en t de ϖ_8^* et Ω_8^* dans (3.11)). En effet, Dourneau a représenté les variations séculaires de e_8, i_8, ϖ_8 et Ω_8 sous forme de polynôme du temps, et non comme nous, sous forme d'expressions à longues périodes, nous avons donc préféré calculer l'amplitude des inégalités à courtes périodes pour e_8 et i_8 fixés, évaluées en J1980. Pour utiliser les variations de ϖ_8^* et Ω_8^* données en (3.11), il conviendrait de tenir compte aussi des lentes variations de e_8 et de i_8. Cependant, comme ces variations sont très lentes, les valeurs des amplitudes des inégalités à courtes périodes dépendant de λ_8, sont valables pour de nombreuses années autour de J1980, et d'ailleurs nous préciserons plus loin comment ces amplitudes varient. Enfin, dans les ζ_{oi} relatifs à Rhéa et Titan, nous avons ignoré

les termes qui caractérisent la faible inclinaison du plan Laplacien sur le plan équatorial, ainsi que les termes solaires qui sont très petits. Nous avons vérifié qu'ils n'avaient pas d'influence sur les amplitudes des termes à courtes périodes à la précision des 10 km.

Ainsi, les Tableaux 6a à 6d donnent toutes les inégalités dont l'amplitude dépasse 10 km, exprimées en fonction des longitudes moyennes et des angles ϖ_i^* et Ω_i^* (les périodes données tiennent compte de la combinaison correspondante des vitesses angulaires prises dans (3.11) et dans le Tableau 1). Ces amplitudes tiennent compte des contributions d'ordre 1 et d'ordre 2 en paramètres physiques (masses, $J_2, \cdots$). Cependant, nous donnons dans les deux dernières colonnes de chaque Tableau, la contribution principale obtenue à l'ordre 1, avec le facteur correspondant exprimé en fonction des paramètres physiques et des amplitudes e_{ij}^* et γ_{ij}^* (nous avons ici simplifié e_{ii}^* et γ_{ii}^* en e_i^* et γ_i^* respectivement). Donc, la différence éventuelle constatée entre l'amplitude donnée et la contribution principale représente la contribution d'ordre 2. Il s'avère que l'ordre 2 est toujours très petit, mais, pour la plupart des inégalités, il n'est pas négligeable à la précision de 0.1 km; bien plus, pour les plus gros termes, l'influence de l'ordre 2 peut atteindre plusieurs kilomètres. Par ailleurs, la donnée de la contribution principale d'ordre 1 devrait permettre de corriger les amplitudes s'il s'avérait que certains e_{ij}^* ou γ_{ij}^* devraient changer. Enfin, puisque ces termes à courtes périodes sont calculés à partir de l'ajustement de Dourneau, cette liste de termes est utilisable dès maintenant pour améliorer éventuellement cet ajustement. En effet, dans les Tableaux 6a à 6d, nous avons signalé avec un astérisque, celles des inégalités à courtes périodes déjà présentes dans la représentation de Dourneau, et ainsi on constate que les théories existantes ne contiennent pas de termes à courtes périodes (sauf pour Japet); les nouveaux termes ainsi mis en évidence sont parfois loin d'être négligeables surtout pour Japet. Remarquons cependant que la grande inégalité $\lambda_6 - 5\lambda_8$ dans Japet, n'a pas été prise en compte par Dourneau, mais est incluse dans le travail de Harper *et al.*(1988). De même, les inégalités en λ_i dans Δz_i (Tableau 6a) sont implicitement présentes dans les théories actuelles, cachées dans la définition des constantes d'intégration, comme on le montre dans la remarque qui termine ce paragraphe.

Il convient maintenant d'examiner l'influence des variations de z_{o8} et ζ_{o8} sur les amplitudes des termes à courtes périodes dans la solution de Japet. Pour cela, nous avons calculé une première approximation de la solution du système critique pour Rhéa, Titan et Japet, réduisant ce système à sa partie linéaire, mais tenant compte des influences directes des autres satellites, du Soleil et des termes d'aplatissement. Ce système linéarisé est calculé jusqu'à l'ordre 2 des masses et des coefficients d'aplatissement. Il

représente finalement le système de Laplace Lagrange pour ces trois satellites. Nous en avons recherché une solution donnant la même valeur que la représentation de Dourneau en J1980. Nous avons ainsi obtenu (en conservant les termes supérieurs à 10^{-6}):

$$
\begin{aligned}
z_{o5} &= 0,000973 \exp \imath\, \varpi_6^\bullet + 0,000246 \exp \imath\, \varpi_5^\bullet + 0,000001 \exp \imath\, \varpi_8^\bullet \\
z_{o6} &= 0,029051 \exp \imath\, \varpi_6^\bullet + 0,000037 \exp \imath\, \varpi_8^\bullet \\
z_{o8} &= 0,029695 \exp \imath\, \varpi_8^\bullet - 0,001390 \exp \imath\, \varpi_6^\bullet \\
\zeta_{o5} &= 0,000431 \exp \imath\, \Omega_0^\bullet + 0,003009 \exp \imath\, \Omega_5^\bullet + 0,000175 \exp \imath\, \Omega_6^\bullet + 0,000002 \exp \imath\, \Omega_8^\bullet \\
\zeta_{o6} &= 0,006255 \exp \imath\, \Omega_0^\bullet + 0,003310 \exp \imath\, \Omega_6^\bullet + 0,000184 \exp \imath\, \Omega_8^\bullet - 0,000003 \exp \imath\, \Omega_5^\bullet \\
\zeta_{o8} &= 0,128795 \exp \imath\, \Omega_0^\bullet + 0,066545 \exp \imath\, \Omega_8^\bullet - 0,000363 \exp \imath\, \Omega_6^\bullet
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

où les arguments sont donnés par les expressions suivantes, avec t compté en années depuis J1980 :

$$
\begin{aligned}
\varpi_5^\bullet &= 10^\circ,05863\ t + 7^\circ,841 \\
\varpi_6^\bullet &= 0^\circ,51560\ t + 153^\circ,627 \\
\varpi_8^\bullet &= 0^\circ,12294\ t - 163^\circ,179 \\
\Omega_0^\bullet &= 0^\circ,0\ t - 175^\circ,411 \\
\Omega_5^\bullet &= -10^\circ,05461\ t + 152^\circ,207 \\
\Omega_6^\bullet &= -0^\circ,52092\ t - 1^\circ,713 \\
\Omega_8^\bullet &= -0^\circ,12270\ t - 73^\circ,058
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

En comparant avec (3.10), on remarque que les z_{oi} et ζ_{oi} sont maintenant donnés par une somme de plusieurs termes qui varient avec des périodes diverses, et que ζ_{o6} et ζ_{o8} comportent maintenant un terme principal constant (dépendant de $\Omega_0^\bullet$) qui représente le plan Laplacien de chaque satellite. Alors, la substitution de (3.12) dans le développement des inégalités à courtes périodes de Japet entraîne l'éclatement de chacune des inégalités données dans les Tableaux 6b à 6d, en plusieurs termes. Le Tableau 7 illustre cette substitution. On y présente seulement les quatre plus grandes inégalités dans $\Delta\lambda_8$. En comparant avec le Tableau 6c, on voit bien que le nombre de termes a augmenté, surtout pour la grande inégalité $\lambda_6 - 5\lambda_8$. Parce que la solution (3.12) est mise sous forme quasi périodique, les amplitudes exprimées dans le Tableau 7 sont valables sur une très longue durée, mais pour un usage sur une période de temps courte, il peut être plus pratique de développer les z_{oi} et ζ_{oi} (3.12) en puissances du temps au voisinage de l'époque voulue. Alors, les inégalités périodiques sont transformées

en termes mixtes; par exemple, nous donnons ci-dessous le développement des quatre inégalités présentées dans le Tableau 7, exprimé sous forme de termes mixtes, avec T compté en siècles à partir de J1980 (T = (jour Julien − 2444240)/36525):

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_8 \times \overline{A}_8 = {} & (2595,61 - 4,48\ T - 0,10\ T^2)\sin(\lambda_6 - \lambda_8) \\
& + (-485,70 - 2,42\ T - 0,06\ T^2)\sin(2\lambda_8 - 2\lambda_9) \\
& + (27,41 + 21,24\ T - 0,53\ T^2)\cos(2\lambda_8 - 2\lambda_9) \qquad (3.14) \\
& + (-313,20 + 47,64\ T + 36,66\ T^2 - 34,07\ T^3 + 12,24\ T^4 - 1,86\ T^5)\sin(\lambda_6 - 5\lambda_8) \\
& + (272,95 - 33,77\ T + 103,54\ T^2 - 5,25\ T^3 - 6,16\ T^4 + 5,92\ T^5)\cos(\lambda_6 - 5\lambda_8) \\
& + (92,76 - 4,45\ T - 2,66\ T^2 - 0,15\ T^3)\sin(\lambda_6) \\
& + (-27,61 - 20,86\ T + 0,64\ T^2 + 0,37\ T^3)\cos(\lambda_6)
\end{aligned}$$

Cette expression représente le développement des termes donnés dans le Tableau 7, auxquels on a ajouté tous les termes plus grands que 0.1 km. Elle montre que même en quelques dizaines d'années, les variations d'amplitude peuvent être importantes (au niveau des 10 km et surtout pour la grande inégalité).

Il ne nous a pas paru utile de donner les autres termes à courtes périodes de Japet sous la même forme que dans le Tableau 7 ou dans l'expression (3.14), car la solution (3.12) utilisée dans la substitution des z_{oi} et ζ_{oi} est encore préliminaire. Par exemple, on verra plus loin, lors de la résolution du système critique, que les parties non linéaires de ce système modifient sensiblement les vitesses du noeud et du péricentre de Japet, qui deviennent respectivement $-0^\circ,11030$ an^{-1} et $0^\circ,11145$ an^{-1}. Une expression définitive des termes à courtes périodes pourra être calculée lorsque la solution complète du système critique aura été ajustée au moins une première fois aux observations.

Remarque.

Dans le Tableau 6a, on remarque quelques inégalités importantes à courtes périodes dans les éléments des satellites intérieurs (elles sont repérées par un astérique dans Δz_i). Ces inégalités proviennent essentiellement du coefficient J_2 de l'aplatissement de Saturne. Pour un satellite donné, notons l'inégalité correspondante :

$$\Delta z = c \exp \imath\, \lambda \qquad (3.15)$$

Cette inégalité commence au degré 0 (propriété de d'Alembert). Elle est particulière dans le sens que la déformation de l'orbite képlérienne (due à Δz) se fait à la même

vitesse que le satellite lui-même. Cette particularité peut laisser croire que celui-ci se déplace sur une orbite elliptique fixe. C'est ce qui est considéré dans le cadre des théories actuelles puisque cette courte période n'est pas prise en compte sous la forme donnée en (3.15) mais absorbée dans la détermination des deux constantes d'intégration, l'une reliée au demi-grand axe (a_1), l'autre reliée à l'excentricité (e_1). Cette façon de faire amène deux questions:

. A quelle niveau de précision cette approximation est-elle valable ?

. Quel lien y a-t-il entre les éléments osculateurs, les éléments moyens et les éléments a_1 et e_1 ?

Pour tenter d'y répondre, considérons un satellite se déplaçant sur une orbite définie par :

$$a_0 \qquad \text{et} \qquad z = e \exp \imath \varpi = z_0 + \Delta z \tag{3.16}$$

(l'inclinaison est supposée nulle).

La loi du mouvement sur cette orbite est donnée par la longitude moyenne λ (la loi donnée par λ peut contenir d'autres perturbations comme les librations observées dans Mimas-Téthys et Encelade-Dioné).

Supposons que l'on veuille, comme cela est fait dans les théories actuelles, représenter le mouvement de ce satellite par une orbite elliptique fixe définie par a_1, z_1 et la même loi du mouvement donnée par λ. Posons :

l la longitude vraie

r le module du rayon vecteur

$X = e \exp \imath M$ avec M l'anomalie moyenne

Les développements classiques du problème des deux corps peuvent s'écrire en série de poisson de X :

$$\imath (l - \lambda) = X - \bar{X} + \frac{5}{8} X^2 - \frac{5}{8} \bar{X}^2 + o(e^2) \tag{3.17}$$

$$\frac{r}{a} = 1 - \frac{X + \bar{X}}{2} + o(e) \tag{3.18}$$

Avec le fait que :

$$X = \bar{z} \exp \imath \lambda \tag{3.19}$$

on obtient facilement que :

$$\begin{aligned} \exp \imath l = & -\frac{1}{8} z^2 \exp -\imath \lambda \qquad - z \\ & + (1 - z\bar{z}) \exp \imath \lambda + \bar{z} \exp 2\imath \lambda \\ & + \frac{9}{8} \bar{z}^2 \exp 3\imath \lambda + o(e^2) \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\frac{r}{a} = 1 - \frac{\bar{z}}{2} \exp \imath \lambda + \frac{z}{2} \exp -\imath \lambda + o(e) \tag{3.21}$$

En considérant que c est de degré 0 (propriété de d'Alembert), on identifie au degré 1 les deux expressions de $\exp \imath l$ tirées de (3.20), obtenues en remplaçant z par z_1, puis z par $z_0 + c \exp \imath \lambda$. Nous trouvons alors la relation simple entre z_0 et z_1 :

$$z_1 = z_0 \left(1 + \frac{5}{4} c\right) \qquad \text{ce qui donne} \qquad e_1 = e_0 \left(1 + \frac{5}{4} c\right) \tag{3.22}$$

L'erreur sur $\exp \imath l$ est de l'ordre du carré de l'excentricité. En identifiant de la même façon les deux expressions de r/a issues de (3.21), nous trouvons :

$$a_1 = a_0 (1 - c) \tag{3.23}$$

L'identification est faite au degré 0, ce qui signifie que l'erreur sur r/a est de l'ordre de l'excentricité.

En posant $r = a + \Delta r$, et en tronquant ses développements au degré 1, Tisserand (1896) avait trouvé :

$$\frac{\langle \Delta r \rangle}{a} = -c \tag{3.24}$$

Si on compare cette formule avec (3.23), les quantités a_1 et $\langle r \rangle$ s'identifient. Cependant, les formules (3.23) et (3.24) ne sont pas tout à fait équivalentes, puisque la première est seulement issue d'un point de vue cinématique du problème, tandis que la deuxième (Tisserand) est issue des équations du mouvement. Quant à la relation (3.22), il est nécessaire de prendre en compte le degré 2 pour la mettre en évidence, ce que n'a pas fait Tisserand.

Il remarque néanmoins, que la partie constante de la fonction pertubatrice donne dans l'expression de $\frac{d\epsilon}{dt}$:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = 2cn \tag{3.25}$$

Le coefficient c est ici limité à sa partie principale de degré 0 pour qu'il puisse s'identifier au coefficient du terme à courte période donnée en (3.15). Si le moyen mouvement osculateur n est réduit à sa partie constante $\langle n \rangle$, l'intégration de (3.25) donne dans la longitude moyenne :

$$\langle \lambda \rangle = (1 + 2c) \langle n \rangle t + \epsilon_0 \tag{3.26}$$

d'où le moyen mouvement moyen N est :

$$N = (1 + 2c) \langle n \rangle \tag{3.27}$$

Puisque les observations donnent N, il en déduit un demi-grand axe A par la troisième loi de Képler. Tisserand considère alors ce A comme étant le demi-grand axe moyen perturbé, et la perturbation constante du rayon vecteur devient :

$$\langle r \rangle = \langle a \rangle - \langle a \rangle c \approx A \left(1 + \frac{1}{3}c\right) \tag{3.28}$$

Le point de vue de Sinclair (1977) est différent. Pour lui les observations donnent N et le "demi-grand axe observé" a_{obs}, il en déduit $\langle a \rangle$ et $\langle n \rangle$ (parties constantes du demi-grand axe osculateur et du moyen mouvement osculateur) par l'égalité (3.27) et par :

$$a_{obs} = \langle a \rangle (1 - c) \tag{3.29}$$

D'après l'expression (3.23), cela signifie que le "demi-grand axe observé" a_{obs} est a_1.

Taylor et Shen (1988) comparent les demi-grands axes déterminés par l'observation et ceux "calculés par la troisième loi de Képler", en fait par la formule (3.28). Il y a donc ambiguïté entre d'une part a_{obs} (ou a_1) et d'autre part la distance moyenne $\langle r \rangle$. L'échec de cette comparaison est peut-être dû en partie à cette ambiguïté.

En ce qui concerne la théorie présentée ici, où la courte période (3.15) est prise en compte explicitement, ces considérations sont utiles uniquement lorsque l'on veut utiliser les constantes d'intégration de ces théories pour les appliquer à la nôtre. Nous avons alors calculé la valeur de c pour chaque satellite. Ces valeurs sont données dans le Tableau 6a dans chaque solution Δz_i, elles dépendent donc des perturbations de tous les corps et pas seulement du J_2. Pour obtenir la valeur correcte e_0 de l'excentricité, nous avons appliqué la formule (3.22) à la valeur de e_1 issue de l'ajustement de Dourneau. Les valeurs des excentricités données en (3.10) tiennent compte de ces corrections, sauf pour l'excentricité de Japet car les éléments e_8 et ϖ_8 dans les théories actuelles contiennent déjà l'inégalité λ_8 sous forme explicite. Quant aux demi-grands axes issus des observations, nous ne les avons pas utilisés à cause de l'ambiguïté de leur interprétation. Nous avons utilisé ceux du Tableau 1 (voir aussi §2.1).

3.4 Inégalités dépendant de trois longitudes moyennes.

Les inégalités vues jusqu'ici sont toutes des combinaisons de deux longitudes moyennes au plus; on les trouve d'abord à l'ordre 1, dans les perturbations mutuelles de 2 satellites. Des inégalités dépendant de trois longitudes moyennes arrivent à partir de l'ordre 2, résultant du produit suivant qu'on trouve dans l'équation (2.23) :

$$\left\{ \frac{\partial \varepsilon \Lambda(V_0, t)}{\partial V_0} \cdot \varepsilon \Delta V(V_0, t) \right\} \tag{3.30}$$

En effet, on y fait le produit des séries solutions d'ordre 1 (comportant des inégalités de la forme $k\lambda_1 + k_2\lambda_2$) par les séries obtenues après dérivation partielle du second membre de l'équation considérée (comportant des inégalités de la forme $k'\lambda_1 + k_3\lambda_3$).

Par analogie avec ce que l'on sait de ces sortes d'inégalités "à trois satellites" dans la théorie des planètes, on peut penser que ces inégalités d'ordre 2 n'ont une amplitude sensible que si leur période est assez longue (engendrant donc des petits diviseurs lors de leur intégration). Nous possédons les outils permettant de développer n'importe quelle inégalité d'ordre 2 "à 2 ou à 3 satellites". Il faut seulement savoir quelle inégalité développer ainsi à l'ordre 2 et donc les sélectionner au préalable, comme on a dû le faire pour l'ordre 1.

Pour cela, nous avons exploré systématiquement toutes les combinaisons $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3$ pour rechercher celles dont la période est supérieure à 100 jours, mais tenant compte aussi de la masse des satellites concernés, de la propriété de d'Alembert (degré minimal du développement égal à $c = |k_1 + k_2 + k_3|$), et des rapports des demi grands axes des trois satellites.

Nous avons limité la recherche de k_1, k_2 et k_3 aux entiers compris entre -20 et $+20$, avec un degré inférieur à 5 et une période de l'inégalité supérieure à 100 jours. Les inégalités retenues sont celles dont le facteur F suivant est supérieur a 10^{-7} :

$$F = m' \cdot m'' \cdot (ei)^c \cdot \alpha' \cdot \alpha'' \cdot (\frac{N}{D})^2 \tag{3.31}$$

où

m' et m'' sont les masses des corps perturbateurs
α' et α'' sont les rapports des demi-grands axes
N est le moyen mouvement du satellite perturbé
D est le diviseur (combinaison entière de trois longitudes moyennes)
ei est le maximum des excentricités et inclinaisons
c est la caractéristique de l'inégalité

Après calcul des inégalités ainsi sélectionnées et à la troncature de 100 mètres, il n'est resté qu'une inégalité : $7\lambda_2 - 10\lambda_3 + 3\lambda_6$ de période 2883 jours (7.9 ans), qui produit, dans les longitudes moyennes d'Encelade et de Téthys, les inégalités suivantes (exprimées en km) :

$$\overline{A}_2 \times \Delta\lambda_2 = -8,74 \sin i\,(7\lambda_2 - 10\lambda_3 + 3\lambda_6 - 1^\circ,3) \tag{3.32}$$

$$\overline{A}_3 \times \Delta\lambda_3 = +1,92 \sin i\,(7\lambda_2 - 10\lambda_3 + 3\lambda_6 - 1^\circ,3) \tag{3.33}$$

On peut penser que c'est là la plus grande inégalité "à trois satellites", et que ce type de termes a donc une influence pratiquement négligeable sur la solution.

3.5 Calcul de l'ordre 3 en J_2 .

Ce calcul est justifié par le fait que le coefficient J_2 de Saturne est très important, au point d'avoir observé, lors des calculs de l'ordre 2, que les perturbations en J_2^2 et en $J_2 J_4$ sont comparables à celles du premier ordre en J_4 et en J_6 respectivement. Il est alors probable que les termes en J_2^3 soient eux aussi comparables aux termes en J_6. Pour ce calcul, nous avons utilisé le manipulateur TRIP, construisant d'abord une solution d'ordre 1 en J_2 jusqu'au degré 3, puis l'ordre 2 en J_2^2 jusqu'au degré 2 et enfin l'ordre 3 en J_2^3 au degré 1. A la précision de 10 m, nous avons obtenu ces deux seuls termes périodiques dans la variable z de Mimas et d'Encelade (exprimés en km) :

$$\overline{A}_1 \times \ \Delta z_1 = 0,060 \exp \imath \, \lambda_1$$

$$\overline{A}_2 \times \ \Delta z_2 = 0,017 \exp \imath \, \lambda_2$$

Ces termes périodiques sont négligeables, mais le calcul de l'ordre 3 en J_2 a permis de trouver aussi les termes séculaires en J_2^3 dans les variables z et ζ. Par exemple, ces termes séculaires ont pour effet de déplacer le péricentre de Mimas de 190 km en un an, ce qui n'est pas tout à fait négligeable.

4. Le système critique.

4.1 Construction et structure des équations.

Changeant de notation : $U = V_0$, le système critique (2.22) s'écrit sous la forme condensée suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \Lambda^*(U,t) \\ &= \varepsilon S(U,-) + \varepsilon R(U,t) + \varepsilon L(U,t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

U est le vecteur à 50 composantes, tout comme V :

$$U = \left((\tilde{p}_{oi},\ q_{oi},\ z_{oi},\ \bar{z}_{oi},\ \zeta_{oi},\ \bar{\zeta}_{oi})_{i=1\cdots 8},\ \zeta_s,\ \bar{\zeta}_s\right)$$

Ce système est formellement similaire au système initial (2.18), mais maintenant le second membre est formé de termes séculaires $\varepsilon S(U,-)$, de termes résonnants $\varepsilon R(U,t)$ et de termes à longues périodes $\varepsilon L(U,t)$; ces longues périodes sont ici les termes solaires, dans lesquels t représente les variables du Soleil supposées connues.

Plus précisément, avec $U = (P,\ Q,\ X,\ \bar{X})$ où $P = (\tilde{p}_{oi})_{i=1..8}$, $Q = (q_{oi})_{i=1..8}$ et $X = (x_i)_{i=1..17}$ où $(x_i = z_{oi},\ x_{i+8} = \zeta_{oi})_{i=1..8}$ et $x_{17} = \zeta_s$, l'équation (4.1) prend la forme suivante, au premier ordre en ϵ :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \sum_{k\geq 1} \varepsilon\, R_k^{(P)}(P,Q,X,\bar{X},t) \\ \frac{dQ}{dt} &= \mathrm{N}P_o + \bar{\mathrm{N}}P + \varepsilon\, S_0^{(Q)}(P) + \sum_{k\geq 1} \varepsilon\, S_{2k}^{(Q)}(P,X,\bar{X}) \\ &\quad + \sum_{k\geq 1} \varepsilon\, R_k^{(Q)}(P,Q,X,\bar{X},t) + \sum_{k\geq 1} \varepsilon\, L_k^{(Q)}(P,Q,X,\bar{X},t) \\ \frac{dX}{dt} &= \varepsilon\, \mathbf{A}(P)\,X + \sum_{k\geq 1} \varepsilon\, S_{2k+1}^{(X)}(P,X,\bar{X}) \\ &\quad + \varepsilon\, R_0^{(X)}(P,Q,t) + \sum_{k\geq 1} \varepsilon\, R_k^{(X)}(P,Q,X,\bar{X},t) + \sum_{k\geq 0} \varepsilon\, L_k^{(X)}(P,Q,X,\bar{X},t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dans dQ/dt, P_o représente le vecteur constant : $(p_{oi})_{i=1..8}$, tandis que N et $\bar{\mathrm{N}}$ sont des matrices diagonales d'éléments : $\mathrm{N}_{ii} = \imath N_i$ et $\bar{\mathrm{N}}_{ii} = \imath \bar{N}_i$. L'indice k dans les parties R_k, S_k et L_k indique le degré total en $(X,\ \bar{X})$ des termes présents dans leur développement. Nous avons fait ressortir quelques termes importants de plus bas degré:

$S_0^{(Q)}(P)$, $R_0^{(X)}(P,Q,t)$ et $S_1^{(X)}(P,X) = \mathbf{A}(P)X$ où $\mathbf{A}(P)$ est une matrice dont chaque élément est un développement suivant les puissances de $\tilde{p}_{oi}$. Nous avons aussi indiqué que tous les termes dans R, S et L dépendent de P; en fait, tous ces termes sont des développements en puissances de $\tilde{p}_{oi}$ commençant au grade zéro. Dans les parties résonnantes, les termes dépendent en même temps de Q et de t par l'intermédiaire $\lambda = Nt - \imath\, q$. Pour la même raison, dans la partie à longues périodes, quand un terme dépend de Q, il dépend aussi de t, mais certains termes peuvent dépendre seulement de t quand ils proviennent de la substitution du mouvement du Soleil. Quelques détails supplémentaires à propos du premier ordre peuvent être utiles :

Dans les équations $d\tilde{p}_{o1}/dt$, dq_{o1}/dt, dx_1/dt, dx_9/dt (correspondant à Mimas) et $d\tilde{p}_{o3}/dt$, dq_{o3}/dt, dx_3/dt, dx_{11}/dt (correspondant à Téthys), la partie résonnante contient uniquement les harmoniques de l'inégalité $(\lambda_1 - 2\lambda_3)$ et dépend ainsi des variables de ces deux satellites seulement. Il en est de même pour les couples Encelade-Dioné (avec l'inégalité $(\lambda_2 - 2\lambda_4)$) et Titan-Hypérion (avec l'inégalité $(3\lambda_6 - 4\lambda_7)$). Par contre, les équations relatives à Rhéa et à Japet n'ont pas de partie résonnante (toujours au premier ordre), ainsi que l'équation dx_{17}/dt relative au mouvement séculaire de l'équateur de Saturne.

Dans chaque équation dq_{oi}/dt ou dx_i/dt, la partie séculaire dépend de toutes les variables de tous les satellites (à l'exception bien sûr des variables q_{oi} et du temps). Il est important de remarquer que parmi les termes séculaires, ceux dépendant de J_2 sont prépondérants, et même ceux en J_4 sont souvent plus importants que les termes issus des perturbations mutuelles, au moins pour les satellites intérieurs. La matrice $A(P)$ (termes séculaires de degré un) sera, de ce fait, proche d'une matrice diagonale (voir le paragraphe §4-2)

Enfin, la partie solaire des équations d'un satellite S_i dépend des variables de ce satellite et des variables solaires avant leur sustitution par leur expression fonction du temps provenant d'une théorie du mouvement héliocentrique de Saturne. Nous avons utilisé pour cela JASON84, (Simon & Bretagnon, 1984); les termes solaires sont importants, surtout pour les satellites extérieurs.

Aux ordres supérieurs en ε, chacune des trois parties R_k, S_k et L_k pourra être présente dans chaque équation, et dépendre alors de toutes les variables de tous les satellites. Cependant, au second ordre, dans dP/dt, il n'y aura toujours pas de termes séculaires (théorème de Poisson).

En pratique, nous avons calculé le premier ordre complet jusqu'au degré 6 en (X, $\overline{X}$), le second ordre jusqu'au degré 4, et le plus bas degré pour le troisième ordre en J_2. Cependant nous n'avons pas retenu tous les termes calculés car leur nombre aurait été si important qu'il n'aurait pas permis leur manipulation par TRIP, et parce qu'en fait bon nombre d'entre eux ne participent pas à la précision que l'on s'est fixée (une dizaine de kilomètres). Pour comparaison, Laskar (1984) dans son étude de la dynamique des huit planètes du système solaire, a obtenu un système autonome de plus de 150 000 termes pour la seule inégalité séculaire dans les variables z et ζ (développement à l'ordre 2, au degré 5, au grade 0). Le système critique des satellites de Saturne est plus complexe puisqu'il comprend en plus les inégalités résonnantes et celles à longues périodes, et puisqu'il concerne aussi les variables $\tilde{p}$ et q. Pour tronquer les seconds membres du système critique tout en assurant la précision souhaitée, il est nécessaire de pouvoir estimer l'influence sur la solution de chacun des termes calculés. Cette estimation est plus délicate que dans le cas des inégalités à courtes périodes (voir le chapitre 3) car on ne peut a priori intégrer chacun des termes séparément. On le fera toutefois afin d'obtenir au moins un ordre de grandeur. Soit un terme du système critique (4.2) :

$$C(\alpha_{ij})\,\tilde{p}_{oi}^{g_i}\,\bar{z}_{oi}^{\bar{n}_i}\,\bar{\zeta}_{oi}^{\bar{\nu}_i}\,z_{oi}^{n_i}\,\zeta_{oi}^{\nu_i}\,\tilde{p}_{oj}^{g_j}\,\bar{z}_{oj}^{\bar{n}_j}\,\bar{\zeta}_{oj}^{\bar{\nu}_j}\,z_{oj}^{n_j}\,\zeta_{oj}^{\nu_j}\,\exp\left[k_i q_{oi} + k_j q_{oj} + \imath\,(k_i N_i + k_j N_j)t\right] \qquad (4.3)$$

A l'ordre 2, les termes sont du même type, faisant éventuellement intervenir les variables de trois satellites. En utilisant les relations (2.2) et en posant $\gamma = \sin(i/2)$, ce terme est équivalent à :

$$C(\alpha_{ij})\,\tilde{p}_{oi}^{g_i}\,e_i^{n_i+\bar{n}_i}\,\gamma_i^{\nu_i+\bar{\nu}_i}\,\tilde{p}_{oj}^{g_j}\,e_j^{n_j+\bar{n}_j}\,\gamma_j^{\nu_j+\bar{\nu}_j}\,\exp(k_i q_{oi} + k_j q_{oj}) \times$$
$$\times \exp \imath\left[(k_i N_i + k_j N_j)t + (n_i - \bar{n}_i)\varpi_i + (n_j - \bar{n}_j)\varpi_j + (\nu_i - \bar{\nu}_i)\Omega_i + (\nu_j - \bar{\nu}_j)\Omega_j\right]$$

On considère alors la combinaison :

$$k_i N_i + k_j N_j + (n_i - \bar{n}_i)\dot{\varpi}_i + (n_j - \bar{n}_j)\dot{\varpi}_j + (\nu_i - \bar{\nu}_i)\dot{\Omega}_i + (\nu_j - \bar{\nu}_j)\dot{\Omega}_j - \tau(\sigma)\dot{\psi} \qquad (4.4)$$

avec $\tau(\sigma)$ défini en (2.14), et où $\psi = \varpi_i$ si le terme concerne l'équation pour la variable z_i et $\psi = \Omega_i$ pour la variable ζ_i. Ce terme est alors intégré en utilisant la combinaison (4.4) comme diviseur et en utilisant pour $\dot{\varpi}_i$ et $\dot{\Omega}_i$ les valeurs de Dourneau (qui sont données dans la formule (3.11) du chapitre 3). L'amplitude est aussi évaluée en majorant les $\tilde{p}_{oi}$, les e_i et les γ_i, avec les valeurs données dans le Tableau 8. Dans le cas d'un diviseur nul, l'intégration est effectuée de manière séculaire, c'est-à-dire en regardant l'effet de ce terme au bout d'un temps T. Pour les séries relatives aux variables $\tilde{p}$, on effectue une double intégration, pour tenir compte de la partie $\overline{N}\tilde{p}$ des équations pour les variables q.

Cette estimation est faite par analogie avec la méthode de normalisation de Birkhov : dans les variables z et ζ, les termes résonnants (au sens de Birkhov, c'est-à-dire de diviseur nul) modifient les fréquences fondamentales du système linéaire; l'intégration séculaire effectuée pour ces termes revient donc à évaluer l'effet de cette modification au bout du temps T; les autres termes apportent simplement de nouvelles perturbations périodiques.

La valeur des masses et des coefficients d'aplatissement est toujours incluse numériquement dans chaque coefficient des développements mais on conserve analytiquement la trace de ces paramètres physiques. Ainsi, avant toute manipulation de ces séries, nous avons effectué le changement de paramètres suivant :

$$m_i = m_{io}(1 + \Delta m_i) \qquad J_n = J_{no}(1 + \Delta J_n) \tag{4.5}$$

où les m_{io} et J_{no} sont les valeurs "nominales" connues des paramètres physiques (cf. Tableau 1). De cette façon, les équations comprennent deux parties : une partie nominale et une partie analytique; cette dernière est toutefois limitée au degré 1 par rapport à $\Delta m_1, \cdots, \Delta m_9$, ΔJ_2, ΔJ_4 et ΔJ_6. Dans l'estimation des termes critiques, nous avons utilisé les valeurs de Δm_i et de ΔJ_i données dans le Tableau 8. Ces valeurs, ainsi que celles des excentricités et inclinaisons sont des maximuns évalués, et quelquefois surestimés, grâce aux incertitudes données par Dourneau sur les paramètres correspondants. A la troncature du kilomètre et avec une durée T égale à un siècle, le nombre total de termes du système critique est ainsi réduit à environ 3300. Cette façon de tronquer les séries sera encore appliquée lors des transformations ultérieures (§4.2, §4.3 et §4.4), utilisant les mêmes valeurs maximales (Tableau 8), mais modifiant éventuellement les vitesses séculaires lorsque le changement de variables effectué les affectent (§4.3).

4.2 Eléments propres.

Pour résoudre le système critique (4.1), nous effectuons un premier changement de variables qui met la partie linéaire $\mathbf{A}(P)X$ des équations dX/dt sous forme diagonale. Nous définissons ainsi :

$$\begin{aligned} X \mapsto Y &= (y_i)_{i=1,17} \\ X &= \mathbf{M}(P)Y \end{aligned} \tag{4.6}$$

où $\mathbf{M}(P)$ est la matrice des vecteurs propres de $\mathbf{A}(P)$. Ainsi, l'équation (4.2) pour X

est remplacée par l'équation suivante pour Y :

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \varepsilon\,\mathbf{D}(P)\,Y + \sum_{k\geq 1} \varepsilon\, S_{2k+1}^{*(Y)}(P,Y,\overline{Y}) \\ &+ \varepsilon\, R_0^{*(Y)}(P,Q,t) + \sum_{k\geq 1} \varepsilon\, R_k^{*(Y)}(P,Q,Y,\overline{Y},t) + \sum_{k\geq 0} \varepsilon\, L_k^{*(Y)}(P,Q,Y,\overline{Y},t)\end{aligned} \tag{4.7}$$

où $\mathbf{D}(P)$ est la matrice diagonale des valeurs propres (imaginaires pures) de $\mathbf{A}(P)$. Les autres termes proviennent de leur correspondant dans dX/dt, par exemple :

$$S_{2k+1}^{*(Y)}(P,Y,\overline{Y}) = \mathbf{M}^{-1}(P)\, S_{2k+1}^{(X)}(P,\mathbf{M}(P)Y,\mathbf{M}(P)\overline{Y})$$

Dans les autres équations, X est bien sûr aussi remplacé par $\mathbf{M}(P)Y$. Il est important de remarquer que tous les termes qui dépendaient initialement des variables de deux satellites seulement, dépendent maintenant de tous les y_i. Cela rend en principe les développements plus volumineux, mais les nouvelles équations seront plus faciles à résoudre et en fait, à cause des termes en J_2, qui rendent la diagonale de $\mathbf{A}(P)$ prépondérante sur le reste, le changement de X en Y est presque une identité et de nombreux termes ainsi générés seront détectés comme étant négligeables.

Les variables y_i sont appelées "éléments propres", et par analogie avec les éléments elliptiques, nous suivons les notations de J. Laskar (1990) en écrivant :

$$Y = (y_i) = (z_j^*, \zeta_j^*) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} z_j^* = e_j^* \exp \imath\, \varpi_j^* \\ \zeta_j^* = \sin(i_j^*/2) \exp \imath\, \Omega_j^* \end{cases}$$

suivant que les y_i sont relatifs à des excentricités ou à des inclinaisons.

Nous avons effectué ce changement de variables de façon analytique en calculant les valeurs propres et les vecteurs propres sous forme d'un développement en puissances de P. En fait, puisque les valeurs propres et les vecteurs propres sont aussi des fonctions des paramètres physiques, $\mathbf{M}(P)Y$ dans (4.6) devrait être remplacé par $\mathbf{M}(P, m_1, \cdots, m_9, J_2, J_4, J_6)Y$, et effectivement, nous avons calculé $\mathbf{M}(P)Y$ comme une fonction explicite des paramètres physiques et de P, développée autour de leur valeur nominale en fonction de $\Delta m_1, \cdots, \Delta m_9$, ΔJ_2, ΔJ_4 et ΔJ_6; ainsi, il sera possible de les ajuster facilement ultérieurement. Pour ce calcul analytique des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice $\mathbf{M}$, nous avons utilisé le logiciel mis au point par Duriez (1983).

La partie nominale de la matrice $\mathbf{M}(P)$ est donnée dans les Tableaux 9a et 9b. Les lignes correspondantes à Hypérion ne peuvent être utilisées puisque le couple Titan-Hypérion n'a pas été considéré de manière satisfaisante. L'importance du terme en z_6^*

dans la variable z_5 correspond à la partie de l'excentricité de Rhéa forcée par Titan, il en est de même dans les variables z_8 et ζ_8. Pour le reste, on peut voir que la matrice $\mathrm{M}(P)$ est très proche d'une matrice unité (cela est dû à la prédominance de J_2 sur les autres facteurs perturbants) et ainsi, les nombreux termes engendrés par les parties hors diagonale, lors de la transformation de X en Y (effectuée avec l'aide du manipulateur TRIP), sont le plus souvent négligeables : Avec une troncature au kilomètre, le nombre total de termes que contient finalement le système critique écrit en variables Y est d'environ 3500.

4.3 Traitement des résonances.

Nous effectuons un deuxième changement de variables qui a pour but de transformer les termes résonnants en des termes autonomes. Pour cela, nous définissons la transformation $Y \mapsto W = (w_i)_{i=1..17}$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
w_1 &= y_1 \exp \imath\,(\lambda_1 - 2\lambda_3) & w_9 &= y_9 \exp \imath\,(\lambda_1 - 2\lambda_3)\\
w_2 &= y_2 \exp \imath\,(\lambda_2 - 2\lambda_4) & w_{10} &= y_{10} \exp \imath\,(\lambda_2 - 2\lambda_4)\\
w_3 &= y_3 \exp \imath\,(\lambda_1 - 2\lambda_3) & w_{11} &= y_{11} \exp \imath\,(\lambda_1 - 2\lambda_3)\\
w_4 &= y_4 \exp \imath\,(\lambda_2 - 2\lambda_4) & w_{12} &= y_{12} \exp \imath\,(\lambda_2 - 2\lambda_4)\\
w_5 &= y_5 & w_{13} &= y_{13}\\
w_6 &= y_6 \exp \imath\,(3\lambda_6 - 4\lambda_7) & w_{14} &= y_{14} \exp \imath\,(3\lambda_6 - 4\lambda_7)\\
w_7 &= y_7 \exp \imath\,(3\lambda_6 - 4\lambda_7) & w_{15} &= y_{15} \exp \imath\,(3\lambda_6 - 4\lambda_7)\\
w_8 &= y_8 & w_{16} &= y_{16}\\
& & w_{17} &= y_{17}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

où

$$\imath\,(\lambda_1 - 2\lambda_3) = u_1 + \imath\,\nu_1 t \qquad \imath\,(\lambda_2 - 2\lambda_4) = u_2 + \imath\,\nu_2 t \qquad \imath\,(3\lambda_6 - 4\lambda_7) = u_3 + \imath\,\nu_3 t$$

avec

$$\begin{aligned}
u_1 &= q_{o1} - 2q_{o3} & \nu_1 &= N_1 - 2N_3\\
u_2 &= q_{o2} - 2q_{o4} & \nu_2 &= N_2 - 2N_4\\
u_3 &= 3q_{o6} - 4q_{o7} & \nu_3 &= 3N_6 - 4N_7
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Il faut se rappeler que pour $i \geq 9$, les y_i sont relatifs aux inclinaisons.

Si la transformation (4.8) n'est pas une identité, l'équation dy_i/dt doit maintenant être remplacée par :

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{dy_i}{dt} \exp(u_i + \imath\,\nu_i t) + w_i \frac{du_i}{dt} + \imath\, w_i \nu_i \tag{4.10}$$

Comme cela est montré dans Duriez (1982), quand le système critique ne dépend que d'une résonance, un tel changement de variables (dépendant du temps) transforme le système critique en un système autonome: les termes résonnants ne dépendent plus du temps et des variables q_{oi}, les termes séculaires restant autonomes. Ici, puisque le système critique dépend de trois résonances et de termes solaires, il ne sera pas complétement réduit en un système autonome. La partie séculaire linéaire dans dY/dt reste autonome (car elle est diagonale), mais il n'en sera pas ainsi pour les termes de degré supérieur et dans les parties résonnantes ou à longues périodes des équations. Par exemple, dans $d\tilde{p}_1/dt$, on trouve le terme résonnant : $a\, z_{o1} \exp \imath\,(\lambda_1 - 2\lambda_3)$, qui est d'abord transformé par la matrice $\mathbf{M}(P)$ en :

$$a \sum_j m_{1j} y_j \exp \imath\,(\lambda_1 - 2\lambda_3)$$

puis par la transformation (4.8) en :

$$\begin{aligned} a\,(m_{11}\, w_1 + m_{13}\, w_3 + (m_{12}\, w_2 \;&+ m_{14}\, w_4) \exp[u_1 - u_2 + \imath\,(\nu_1 - \nu_2)t] \\ &+ (m_{15}\, w_5 \;+ m_{18}\, w_8) \exp[u_1 + \imath\, \nu_1 t] \\ &+ (m_{16}\, w_6 \;+ m_{17}\, w_7) \exp[u_1 - u_3 + \imath\,(\nu_1 - \nu_3)t]) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Comme le coefficient m_{11} est bien plus grand que les autres m_{1j}, les termes autonomes (en w_1 et w_3) peuvent être considérés comme partie principale, et les autres termes, dépendant du temps, comme des perturbations qui d'ailleurs disparaissent à la troncature du kilomètre. De même, dans chaque équation, les termes solaires à longues périodes restent dépendants du temps.

Il est important de remarquer que dans dY/dt (équation (4.7)), le terme résonnant de degré zéro : $\varepsilon\, R_0^{*(Y)}(P, Q, t)$, est transformé en un terme autonome, c'est-à-dire en une fonction de P seulement. Les termes résonnants de degré un (par exemple $a\, \bar{y}_1 \exp \imath\,(2\lambda_1 - 4\lambda_3)$ dans dy_1/dt) donnent des termes autonomes ou non autonomes mais, comme dans (4.11), la partie autonome est prédominante.

Pour résumer, dans tous les cas, la transformation (4.8) génère deux types de termes: les termes autonomes que nous noterons A et les termes dépendant du temps que nous noterons T, mais les premiers sont prédominants sur les seconds. Les équations prennent alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \varepsilon A^{(P)}(P, W, \overline{W}) + \varepsilon T^{(P)}(P, W, \overline{W}, Q, t) \\ \frac{dQ}{dt} &= \mathrm{N} P_o + \overline{\mathrm{N}} P + \varepsilon A^{(Q)}(P, W, \overline{W}) + \varepsilon T^{(Q)}(P, W, \overline{W}, Q, t) \\ \frac{dW}{dt} &= \varepsilon A^{(W)}(P, W, \overline{W}) + \varepsilon T^{(W)}(P, W, \overline{W}, Q, t) \end{aligned} \tag{4.12}$$

4.4 Perturbations constantes.

Les seconds membres des équations (4.12) sont des développements dans lesquels les coefficients sont calculés pour les valeurs courantes des demi-grands axes $\overline{A}_i$, correspondant aux valeurs courantes des p_{oi} comme cela est expliqué dans le chapitre 2. Comme nous voulons que N_i soit le moyen mouvement moyen du satellite S_i, nous devons chercher la partie constante $\langle P \rangle$ de P (qui est aussi une constante d'intégration de dP/dt) de façon à ce que la valeur moyenne de dQ/dt soit nulle, c'est-à-dire :

$$\mathbf{N}P_o + \overline{\mathbf{N}} \langle P \rangle + \left\langle \varepsilon A^{(Q)}(P, W, \overline{W}) \right\rangle + \left\langle \varepsilon T^{(Q)}(P, W, \overline{W}, Q, t) \right\rangle = 0 \tag{4.13}$$

Dans le même temps, les équations donnant dW/dt ont un terme de degré zéro en W issu des résonances (plus précisement issu de $\varepsilon\, R_0^{*(Y)}(P, Q, t)$ et donc, au premier ordre, ces équations concernent les variables des satellites en résonance); ce terme, étant fonction de P, pourrait produire un terme constant si $\langle P \rangle$ remplaçait P. En intégrant W, il produirait un terme linéaire en t, ce qui est contraire à l'hypothèse d'existence d'une solution quasi-périodique. Si une telle solution existe, un choix convenable de $\langle W \rangle$ (valeur moyenne de W), doit permettre d'annuler ce terme constant, ou plus exactement d'annuler la valeur moyenne de dW/dt. Pour cela, il suffit de chercher une solution constante $\langle P \rangle$ et $\langle W \rangle$ à l'équation (4.13) et à cette seconde équation :

$$\left\langle \varepsilon A^{(W)}(P, W, \overline{W}) \right\rangle + \left\langle \varepsilon T^{(W)}(P, W, \overline{W}, Q, t) \right\rangle = 0 \tag{4.14}$$

Les constantes formant $\langle W \rangle$ seront les " excentricités forcées", forcées par les résonances. Cela revient à effectuer le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} P &= \langle P \rangle + \mathcal{P} \\ W &= \langle W \rangle + \mathcal{W} \end{aligned} \tag{4.15}$$

où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{W}$ seront des solutions particulières des équations dP/dt et dW/dt sans constantes additives. Les éléments du vecteur $\mathcal{W}$ sont notés : $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i)_{i=1..17}$. Pour résoudre (4.13) et (4.14), on substitue $\langle P \rangle + \mathcal{P}$ pour P et $\langle W \rangle + \mathcal{W}$ pour W, où $\langle P \rangle$ et $\langle W \rangle$ sont à déterminer.

Dans un premier temps, les solutions de $\mathcal{P}$, Q et $\mathcal{W}$ n'étant pas encore connues, nous calculons une première approximation de $\langle P \rangle$ et $\langle W \rangle$ à partir des équations réduites à leur partie autonome; les équations correspondantes peuvent être représentées par le schéma de calcul suivant :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= -\overline{\mathbf{N}}^{-1} \left[\varepsilon A^{(Q)}(\langle P \rangle, \langle W \rangle, \langle \overline{W} \rangle) + \mathbf{N}P_o \right] \\ \langle W \rangle &= -\mathbf{L}^{-1} \left[\varepsilon (A^{(W)}(\langle P \rangle, \langle W \rangle, \langle \overline{W} \rangle) - \mathbf{L} \langle W \rangle \right] \end{aligned} \tag{4.16}$$

où $\mathbf{L}$ est la matrice de la partie linéaire en W dans $A(W)$. Bien sûr, pour les équations dw_i/dt qui n'ont pas de terme constant, on trouve $\langle w_i \rangle = 0$ (équations en inclinaison par exemple). Puisque P est réel, la première équation (4.16) est réelle, nous pouvons donc chercher une solution réelle pour $\langle W \rangle$ et poser $\langle \overline{W} \rangle = \langle W \rangle$. L'équation (4.15) est alors résolue facilement par itérations (par la méthode du point fixe, commençant avec $\langle P \rangle = \langle W \rangle = 0$).

De cette solution, on tire une nouvelle approximation des constantes p_{oi} par la relation :

$$p_{oi} := p_{oi} + \langle \tilde{p}_{oi} \rangle (1 + p_{oi})$$

On détermine alors de nouvelles valeurs des $\overline{A}_i$ $(= A_i(1+p_{oi})^{-2/3})$, puis on recalcule tous les développements avec ces nouveaux $\overline{A}_i$. Ce processus d'approximations successives converge très vite, commençant par exemple avec $\langle P \rangle = \langle W \rangle = 0$, deux itérations suffisent pour obtenir une précision relative de 10^{-4} sur les p_{oi}.

Ces nouvelles valeurs des p_{oi} sont données dans le Tableau 10, avec leur dépendance vis-à-vis des paramètres physiques. On y voit notamment l'importance du J_2 dans chacun des p_{oi}. On remarque que ces nouvelles valeurs ont peu changé par rapport à celles données dans le Tableau 1 qui provenaient d'un calcul où A^Q et A^W étaient limités au degré 0 (sauf dans les équations d'Encelade, limitées au degré 3).

Le Tableau 11 donne de même la valeur des excentricités forcées $\langle W \rangle$. Ces valeurs ne sont pas directement comparables aux excentricités observées puisque ce sont seulement des excentricités forcées. Elles sont d'ailleurs très petites et il peut même être surprenant d'obtenir des excentricités forcées dans les mouvements de Mimas et Téthys sachant que la résonance Mimas-Téthys est du type "inclinaison". En fait, ces excentricités forcées sont simplement bien plus petites que les excentricités libres, et n'ayant jamais été recherchées en tant que telles jusqu'ici dans les théories, elles ont sûrement été absorbées avec les excentricités libres dans les excentricités obtenues par ajustement sur les observations. Par contre, l'excentricité forcée d'Encelade est très proche de celle déterminée par les observations (0.00485 d'après Dourneau, 1987). En anticipant sur la présentation de la solution du système critique complet, la prédominance de l'excentricité forcée sur l'excentricité libre apparaît dans le mouvement d'Encelade comme une libration de la variable w_2 autour de $\langle w_2 \rangle$ (voir Figure 1). Quant aux dérivées partielles de ces valeurs par rapport aux paramètres physiques, elles montrent une forte dépendance vis-à-vis du J_2, mais aussi vis-à-vis de la masse du corps avec lequel le satellite concerné est en résonance.

Les valeurs des Tableaux 10 et 11, sont sûrement très proches de leur valeur définitive, mais sont cependant provisoires puisque de légères modifications pourront encore intervenir quand, les solutions en $\mathcal{P}$, Q et $\mathcal{W}$ étant connues, on pourra reprendre les équations exactes (4.13) et (4.14). Indiquons aussi que les résultats donnés dans ces Tableaux sont issus d'un système critique développé jusqu'au degré 6 à l'ordre 1, au degré 4 à l'ordre 2 avec des termes d'ordre 3 en J_2 (J_2^3) jusqu'au degré 1.

Pour faire ce calcul nous avons utilisé le manipulateur TRIP : Des développements des équations (4.12) on extrait les équations (4.13) et (4.14), puis on les résoud par itérations. Ces équations étant linéaires par rapport aux paramètres $\Delta m_1, \cdots, \Delta m_9$, ΔJ_2, ΔJ_4 et ΔJ_6, il est facile d'obtenir les dérivées partielles premières de $\langle \tilde{p}_i \rangle$ et $\langle w_i \rangle$ par rapport à ces mêmes paramètres.

4.5 Système critique centré.

Retranchant des équations (4.12) les parties correspondantes aux équations (4.13) et (4.14), on obtient le système suivant en $\mathcal{P}$, Q et $\mathcal{W}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{P}}{dt} &= \varepsilon A^{(\mathcal{P})}(\mathcal{P}, \mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}) + \varepsilon T^{(\mathcal{P})}(\mathcal{P}, \mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}, Q, t) \\
\frac{dQ}{dt} &= \overline{\mathrm{N}}\mathcal{P} + \varepsilon A^{(Q)}(\mathcal{P}, \mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}) + \varepsilon T^{(Q)}(\mathcal{P}, \mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}, Q, t) \\
\frac{d\mathcal{W}}{dt} &= \varepsilon A^{(\mathcal{W})}(\mathcal{P}, \mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}) + \varepsilon T^{(\mathcal{W})}(\mathcal{P}, \mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}, Q, t)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Ces équations sont maintenant formellement identiques à celles données en (4.12) pour P, Q et W, mais tous les termes constants ont été éliminés des seconds membres. Les coefficients des termes en A et T sont maintenant des fonctions implicites des constantes $\langle P \rangle$ et $\langle W \rangle$ que l'on vient de calculer.

Après troncature au kilomètre, ce système comprend 3252 termes dont la répartition dans chacune des variables est donnée dans le Tableau 13a. Les équations relatives aux quatre premiers satellites contiennent 1327 termes dont 1259 ne font intervenir que les variables relatives à ces quatre satellites, et celles relatives à Rhéa, Titan et Japet 1540 termes dont 1535 ne font intervenir que les variables relatives à ces trois satellites.

4.6.1 Méthode générale.

Il est possible d'étudier ces équations de manière analytique. En effet, les changements de variables successifs ont eu pour effet de concentrer la partie prépondérante du système critique dans les termes autonomes (en A), les autres termes (en T) pouvant être considérés comme des perturbations. De cette partie autonome, on peut extraire un noyau intégrable (que l'on note $\langle\langle A \rangle\rangle$) qui soit suffisamment complet pour donner une solution décrivant les principales caractéristiques des résonances, en particulier les librations. Des différences fondamentales existent entre ce système intégrable et le système séculaire classique de Laplace-Lagrange que l'on trouve dans les problèmes non résonnants. Dans ce dernier, on a $dP/dt = 0$ et dX/dt contient des termes de degré impair seulement, alors qu'ici, $d\mathcal{P}/dt$ est non nul et que dans toutes les équations, le degré des termes autonomes est supérieur ou égal à 1 par rapport à l'ensemble des variables ($\mathcal{P}$, $\mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}$); ceci résulte de la présence de tous les harmoniques des inégalités fondamentales résonnantes, dont le degré est quelconque. On aura donc ici une solution en $\mathcal{P}$, recherchée sous forme quasi-périodique à longues périodes, qui pourra amener par double intégration, des termes de grande amplitude en longitude, quelquefois sous forme de librations.

Afin de résoudre formellement les équations (4.17), nous séparons $\mathcal{P}$, Q et $\mathcal{W}$ en deux parties :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \delta\mathcal{P} \qquad Q = Q_0 + \delta Q \qquad \mathcal{W} = \mathcal{W}_0 + \delta\mathcal{W} \tag{4.18}$$

de façon à pouvoir extraire des équations un noyau intégrable :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_0}{dt} &= \left\langle\left\langle \varepsilon A^{(\mathcal{P})}(\mathcal{P}_0, \mathcal{W}_0, \overline{\mathcal{W}}_0)\right\rangle\right\rangle \\ \frac{d\mathcal{W}_0}{dt} &= \left\langle\left\langle \varepsilon A^{(\mathcal{W})}(\mathcal{P}_0, \mathcal{W}_0, \overline{\mathcal{W}}_0)\right\rangle\right\rangle \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\frac{dQ_0}{dt} = \overline{\mathrm{N}}\mathcal{P}_0 + \varepsilon A^{(Q)}(\mathcal{P}_0, \mathcal{W}_0, \overline{\mathcal{W}}_0) \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta\mathcal{P})}{dt} &= \varepsilon T^{(\mathcal{P})}(\mathcal{P}_0, \mathcal{W}_0, \overline{\mathcal{W}}_0, Q_0, t) \\ &+ \left(\varepsilon T^{(\mathcal{P})}(\mathcal{P}, \mathcal{W}, \overline{\mathcal{W}}, Q, t) - \varepsilon T^{(\mathcal{P})}(\mathcal{P}_0, \mathcal{W}_0, \overline{\mathcal{W}}_0, Q_0, t)\right) \end{aligned}$$

$$+\left(\varepsilon A^{(\mathcal{P})}(\mathcal{P},\mathcal{W},\overline{\mathcal{W}},Q,t)-\left\langle\left\langle\varepsilon A^{(\mathcal{P})}(\mathcal{P}_0,\mathcal{W}_0,\overline{\mathcal{W}}_0,Q_0,t)\right\rangle\right\rangle\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{d(\delta\mathcal{W})}{dt} &= \varepsilon T^{(\mathcal{W})}(\mathcal{P}_0,\mathcal{W}_0,\overline{\mathcal{W}}_0,Q_0,t)\\ &+\left(\varepsilon T^{(\mathcal{W})}(\mathcal{P},\mathcal{W},\overline{\mathcal{W}},Q,t)-\varepsilon T^{(\mathcal{W})}(\mathcal{P}_0,\mathcal{W}_0,\overline{\mathcal{W}}_0,Q_0,t)\right)\\ &+\left(\varepsilon A^{(\mathcal{W})}(\mathcal{P},\mathcal{W},\overline{\mathcal{W}},Q,t)-\left\langle\left\langle\varepsilon A^{(\mathcal{W})}(\mathcal{P}_0,\mathcal{W}_0,\overline{\mathcal{W}}_0,Q_0,t)\right\rangle\right\rangle\right)\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\frac{d(\delta Q)}{dt} &= \overline{\mathrm{N}}\,\delta\mathcal{P}+\varepsilon T^{(Q)}(\mathcal{P}_0,\mathcal{W}_0,\overline{\mathcal{W}}_0)\\ &+\left(\varepsilon T^{(Q)}(\mathcal{P},\mathcal{W},\overline{\mathcal{W}},Q,t)-\varepsilon T^{(Q)}(\mathcal{P}_0,\mathcal{W}_0,\overline{\mathcal{W}}_0,Q_0,t)\right)\\ &+\left(\varepsilon A^{(Q)}(\mathcal{P},\mathcal{W},\overline{\mathcal{W}},Q,t)-\varepsilon A^{(Q)}(\mathcal{P}_0,\mathcal{W}_0,\overline{\mathcal{W}}_0,Q_0,t)\right)\end{aligned} \tag{4.22}$$

On cherche pour les équations (4.19) des solutions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{W}_0$ sous forme quasi périodique de t; reportées dans (4.20), on trouvera Q_0 par quadrature. Reportées également dans les deux premières lignes de chaque équation (4.21) et (4.22), on trouvera de même une première approximation de $\delta\mathcal{P}$, $\delta\mathcal{W}$ et δQ par quadratures. Ensuite, tenant compte de ces solutions, la dernière ligne de ces équations pourra être développée au voisinage de $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{W}_0$ et Q_0 en série de Taylor engendrant de nouveaux termes quasi-périodiques, mais aussi des termes constants. En effet, il faut se rappeler (cf §4.4) que des termes constants peuvent encore apparaître car les constantes $\langle P\rangle$ et $\langle W\rangle$ ont été calculées à partir d'équations réduites à leur partie autonome. Avec la solution $\mathcal{P}=\mathcal{P}_0+\delta\mathcal{P}$, $Q=Q_0+\delta Q$ et $\mathcal{W}=\mathcal{W}_0+\delta\mathcal{W}$ ainsi obtenue, on pourra reprendre la résolution de (4.12), conduisant à une nouvelle détermination des constantes $\langle P\rangle$ et $\langle W\rangle$, puis d'une nouvelle solution de (4.17), et ainsi de suite. En fait, cette procédure est simplement indicative et n'a pas été développée complétement pour l'instant car, il est préférable de connaître à l'avance les grandes lignes du comportement de la solution afin d'être sûr de ne pas tomber sur une impossibilité à résoudre. En effet, pour le problème planétaire, les résonances séculaires ont contraint Laskar (1984) à abandonner la recherche d'une solution analytique, au profit d'une solution obtenue par intégration numérique. C'est aussi ce que nous ferons (en §4.7), mais avant cela, on peut quand même analyser les noyaux intégrables et leur solution.

4.6.2 Noyau intégrable des équations relatives à Encelade, Dioné, Rhéa, Titan et Japet.

En limitant le système (4.17) à sa partie linéaire, on construit en fait un noyau intégrable qui, pour les variables correspondant à Encelade, Dioné, Rhéa, Titan, Japet

et le Soleil (en inclinaison), donne des équations de la forme :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\mathcal{P}_0\\ \mathcal{W}_0\\ \overline{\mathcal{W}}_0\end{pmatrix} = \imath\begin{pmatrix}0 & A & -A\\ B & C & D\\ -B & -D & -C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathcal{P}_0\\ \mathcal{W}_0\\ \overline{\mathcal{W}}_0\end{pmatrix} \tag{4.23}$$

les vecteurs $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{W}_0$ concernent ici les cinq satellites cités. Comme dans le cas d'un système séculaire, ce système peut être séparé en deux sous-systèmes, l'un relié aux excentricités, l'autre aux inclinaisons. Ce système est diagonalisable avec cinq des valeurs propres nulles, et les vingt autres imaginaires pures et opposées deux à deux. Elles sont notées $\pm\imath\dot{\omega}_2$, $\pm\imath\,\dot{\phi}_4$, $\pm\imath\,\dot{\phi}_5$, $\pm\imath\,\dot{\phi}_6$ et $\pm\imath\,\dot{\phi}_8$ pour les valeurs propres de la partie relative aux excentricités, et notées $\pm\imath\,\dot{\Phi}_2$, $\pm\imath\,\dot{\Phi}_4$, $\pm\imath\,\dot{\Phi}_5$, $\pm\imath\,\dot{\Phi}_6$ et $\pm\imath\,\dot{\Phi}_8$ pour les valeurs propres de la partie relative aux inclinaisons. Ces fréquences sont données dans le Tableau 12 où nous donnons aussi pour comparaison, les pulsations obtenues par analyse de Fourier de l'intégration numérique de ce système, étendu toutefois aux termes de degré 3, puis à ceux de degré 6 et enfin aux termes solaires des perturbations de Rhéa, de Titan et de Japet. Dans tous les cas, chaque terme a été calculé jusqu'à l'ordre 2. Cette comparaison montre que le système linéarisé représente déjà bien le système complet, sauf pour Japet. L'extension du noyau intégrable à des termes non linéaires (et intégration par la méthode de normalisation de Birkhov) pourra donc se faire apparemment avec seulement les termes de degré 3 pour Encelade et Dioné, mais à cause du Soleil et de l'inclinaison assez élevé de l'orbite de Japet, il faudra aller au moins au degré 6 pour Rhéa, Titan et Japet. La comparaison de ces résultats avec les pulsations correspondantes déterminées par Dourneau (1987) à partir des observations montre aussi que le système d'équations construit représente assez bien la dynamique de ces satellites. Pour Japet, nous n'avons pas de comparaison avec Dourneau car la représentation qu'il utilise (polynôme en t) n'est pas compatible avec la nôtre (cf. §3.3). La fréquence de la libration d'Encelade-Dioné est également bien représentée par le système linéarisé, car pour ce couple l'amplitude de la libration est très petite. Ce n'est pas le cas pour les autres satellites, Mimas, Téthys et Hypérion qui sont soumis à une libration de grande amplitude. Pour eux, l'approximation linéaire est insuffisante et réclame donc un traitement spécial. Par exemple, en ce qui concerne le couple Mimas-Téthys, il est nécessaire de considérer une équation du type de celle du pendule (voir §4.6.3).

La solution obtenue est donc une solution fonction des constantes d'intégration $\mathcal{P}_{00}$ et $\mathcal{W}_{00}$:

$$\begin{pmatrix}\mathcal{P}_0\\ \mathcal{W}_0\\ \overline{\mathcal{W}}_0\end{pmatrix} = \mathbf{P}\begin{pmatrix}I & 0 & 0\\ 0 & \exp\imath\,(Ut) & 0\\ 0 & 0 & \exp\imath\,(-Ut)\end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix}\mathcal{P}_{00}\\ \mathcal{W}_{00}\\ \overline{\mathcal{W}}_{00}\end{pmatrix} \tag{4.24}$$

où $\mathbf{P}$ est la matrice des vecteurs propres et U la matrice diagonale des valeurs propres positives. Pour éviter de nouveaux termes constants dans la solution, les 5 constantes $\mathcal{P}_{00}$ sont ajustées de façon à éliminer les 5 premières composantes de $\mathbf{P}^{-1}\begin{pmatrix}\mathcal{P}_{00}\\ \mathcal{W}_{00}\\ \overline{\mathcal{W}}_{00}\end{pmatrix}$. Les autres constantes, $\mathcal{W}_{00}$, sont les excentricités et inclinaisons propres (ou libres); elles sont ajustées sur les "observations" représentées pour nous par la solution de Dourneau. Nous n'avons pas à corriger l'excentricité de Dioné de la valeur correspondant à sa partie forcée, car cette dernière est inférieure à la précision à laquelle l'excentricité libre est connue. Au contraire, dans le cas d'Encelade, l'excentricité libre est presque négligeable vis-à-vis de l'excentricité forcée par la résonance, comme on le voit sur la Figure 1. Cependant, la négliger reviendrait à annuler $\mathcal{W}_{002}$ (excentricité libre d'Encelade) dans l'expression (4.24). Or la valeur propre correspondante est celle de la libration (appelée $\dot{\omega}_2$ dans le Tableau 12); les termes associés à $\mathcal{W}_{002}$ de fréquence $\dot{\omega}_2$ seraient alors absents de la solution $\begin{pmatrix}\mathcal{P}_0\\ \mathcal{W}_0\\ \overline{\mathcal{W}}_0\end{pmatrix}$ et donc aussi de l'expression de Q_0 (obtenue ensuite par quadrature). Cela serait incompatible avec les observations puisque l'expression de libration dans la longitude d'Encelade est, d'après Dourneau (1987) :

$$\Delta\lambda_2 = p_2 \sin(\omega_{o2} + \dot{\omega}_2 t) + q_2 \sin(\phi_{o4} + \dot{\phi}_4 t) \tag{4.25}$$

avec

$$\begin{array}{ll} p_2 = +0,00448 \pm 0,00029 & \omega_{o2} = 133^\circ,8 \pm 5,6 \\ q_2 = -0,00364 \pm 0,00021 & \phi_{o4} = 100^\circ,4 \pm 2,8 \end{array}$$

Cela signifie que la résonance Encelade-Dioné est principalement observée dans la longitude moyenne sous forme de libration, mais en réalité, cette libration a sa "source" dans les variables $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{W}_0$ où elle n'est pas observée (à la précision des observations). C'est pourquoi, il est plus judicieux d'utiliser la relation (4.25) pour ajuster la constante $\mathcal{W}_{002}$. Il suffit pour cela de supposer que cette relation provient uniquement de la partie $\overline{\mathbf{N}}\mathcal{P}_0$ de l'équation (4.20) relative à Encelade. Ainsi on en déduit une approximation de l'expression de la solution $\mathcal{P}_0$ que l'on "devrait" observer. A l'aide de (4.24), on peut alors déduire les deux constantes (reliées à $\mathcal{W}_{002}$) qui nous manquaient.

La solution obtenue concernant le couple Encelade-Dioné (réduite aux termes plus grands que un kilomètre) est alors :

$$\mathcal{W}_{o2} = 0,0001138 \exp \imath\, \omega_2$$

$$\mathcal{W}_{o4} = 0,0021642 \exp \imath\, \phi_4$$

$$\mathcal{W}_{o10} = 0,0002287 \exp \imath\, \Phi_2$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}_{o12} &= 0,0001213 \exp \imath\, \Phi_4 \\
\Delta\lambda_{o2} &= +0,0044970 \sin \omega_2 - 0,0033067 \sin \phi_4 \\
\Delta\lambda_{o4} &= -0,0003763 \sin \omega_2 + 0,0002833 \sin \phi_4
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

où, avec t compté en années à partir de J1980,

$$
\begin{aligned}
\omega_2 &= 32^\circ,742\ t + 133^\circ,763 \\
\phi_4 &= -92^\circ,637\ t + 101^\circ,294 \\
\Phi_2 &= -275^\circ,765\ t - 113^\circ,319 \\
\Phi_4 &= -154^\circ,223\ t + 13^\circ,335
\end{aligned}
$$

On voit donc que l'on a retrouvé avec une bonne précision la libration dans la longitude d'Encelade. Dans celle de Dioné, les amplitudes données par Dourneau valent respectivement $-0,00038 \pm 0.00012$ et $0,00030 \pm 0,00010$, ce qui est encore en accord avec nos résultats. Une légère différence subsiste quand même dans l'amplitude du deuxième terme des longitudes moyennes. Ce terme est forcé par l'excentricité de Dioné, et ces amplitudes dépendent donc fortement de sa valeur. Pour obtenir les amplitudes trouvées par Dourneau, l'excentricité de Dioné devrait valoir environ $0,0024$; mais cette valeur n'appartient pas à l'intervalle de confiance donné par Dourneau ($0,002157 \pm 0,000055$). Il semble donc que ces amplitudes soient surestimées, ou bien que l'excentricité de Dioné soit sous-évaluée. Pour lever cette indétermination, il serait nécessaire, lors de l'ajustement aux observations, de tenir compte de cette contrainte; celle-ci sera explicitement donnée dans le chapitre suivant, utilisant les dérivées partielles de la solution par rapport aux paramètres physiques et aux conditions initiales. Enfin, l'excentricité libre d'Encelade, absente des théories actuelles, est trouvée petite mais non négligeable puisqu'elle apporte une perturbation de 27 kilomètres d'amplitude.

La solution concernant Rhéa, Titan et Japet a déjà été donnée (en variables z_{oi} et ζ_{oi}) en (3.12) où elle a été utilisée pour mettre en évidence les variations d'amplitude des inégalités à courtes périodes dans la solution de Japet. Sa comparaison avec la solution de Dourneau issue des observations n'est pas aisée surtout à cause de l'incompatibilité de la représentation du mouvement de Japet. La valeur propre nulle (dans $\Omega_0^\bullet$) est en fait associée au Soleil dont le plan de l'orbite n'est quasiment pas perturbé par les satellites; elle a pour effet d'introduire un terme constant dans les solutions relatives aux inclinaisons. Pour chaque satellite, ce terme représente l'axe d'un plan fixe autour duquel tourne le plan de l'orbite. Dans le cas du système solaire, ce plan fixe est le

même pour chaque planète, c'est le plan invariable du système. Pour pouvoir mettre en évidence le plan invariable de notre système, il faut non seulement considérer le soleil comme un satellite extérieur, mais aussi le mouvement du plan équatorial. L'équation correspondante est donnée en (2.11) et (2.17). En limitant le système initial (2.18) aux termes séculaires de degré 1, on obtient le système classique de Laplace-Lagrange. On ne donne ici que la solution obtenue du mouvement du plan de l'orbite de Japet, du Soleil et du plan équatorial :

$$\begin{aligned}
\zeta_{o8} &= 0,231383 \exp \imath\, \Omega_0^* + 0,102665 \exp \imath\, \Omega_E^* - 0,000349 \exp \imath\, \Omega_6^* + 0,066502 \exp \imath\, \Omega_8^* \\
\zeta_{o9} &= 0,2313825415 \exp \imath\, \Omega_0^* - 0,0000000007 \exp \imath\, \Omega_E^* \qquad (4.27) \\
\zeta_{oE} &= 0,231383 \exp \imath\, \Omega_0^* + 0,231421 \exp \imath\, \Omega_E^* - 0,000036 \exp \imath\, \Omega_6^* - 0,000011 \exp \imath\, \Omega_8^*
\end{aligned}$$

où, avec t compté en années à partir de J1980,

$$\begin{aligned}
\Omega_0^* &= +0^\circ,0000000\ t - 175^\circ,412 \\
\Omega_E^* &= -0^\circ,0002166\ t + 4^\circ,584 \\
\Omega_6^* &= -0^\circ,5208414\ t - 1^\circ,404 \\
\Omega_8^* &= -0^\circ,1227287\ t - 73^\circ,367
\end{aligned}$$

Les autres termes de ces solutions sont nuls à la précision indiquée. On a d'ailleurs mis quelques décimales supplémentaires à la "solution" ζ_{o9} du Soleil, pour faire apparaître la perturbation dûe au globe de Saturne (elle représente environ un kilomètre sur la position du Soleil compte tenu de la distance de Saturne au Soleil); les termes non donnés dans (4.27) représentent des perturbations inférieures à 50 centimètres. Le plan de l'orbite du Soleil apparaît donc constant et peut représenter le plan invariant du système Soleil-Saturne-satellites supposé isolé dans l'espace. Notons que la perturbation séculaire de 50 000 ans du plan de l'orbite de Saturne (par Jupiter essentiellement) n'est pas prise en compte ici. Dans cette approximation, il est important de noter aussi que le plan équatorial est animé d'un mouvement de précession avec une période d'environ 1.7 millions d'années. Le terme constant de la solution (3.12) apparaît ici comme la valeur actuelle de la somme de deux termes, l'un constant relié au plan invariant, l'autre représentant un plan tournant autour du premier en 1.7 millions d'années. A cause de la très longue période en jeu, la dérive du terme constant dans la solution (3.12) est très faible (par exemple, moins de 100 km au bout d'un siècle dans l'inclinaison de Japet). C'est pourquoi, dans la suite, nous avons préféré négliger ce mouvement du pôle de Saturne. Si toutefois, il était nécessaire d'en tenir compte, il suffirait d'ajouter la petite partie correspondante, linéaire en t, dans le terme "constant".

4.6.3 Noyau intégrable des équations relatives à Mimas et Téthys.

Les particularités de la résonance Mimas-Téthys ne peuvent pas être mises en évidence sur la partie linéaire des équations comme cela vient d'être fait pour Encelade-Dioné. En effet, pour ce couple, la résonance se manifeste par une oscillation de grande amplitude ($\sim 95°$) et très lente (période: 70 ans) de l'argument $\phi = 2\lambda_1 - 4\lambda_3 + \Omega_1^* + \Omega_3^*$ autour de la valeur zéro. La caractéristique de cet argument étant 2, les termes de son développement sont au moins de degré 2 en inclinaisons. Désignons donc plus particulièrement par Z la quantité suivante :

$$Z = \mathcal{W}_9 \mathcal{W}_{11} = \gamma_1 \gamma_3 \exp \imath \, \phi \tag{4.28}$$

Puisque chacune des équations relatives à $\mathcal{W}_9$ et $\mathcal{W}_{11}$ fait intervenir la partie $\frac{dq_{o1}}{dt} - 2\frac{dq_{o3}}{dt}$ et que la partie principale de $\frac{dq_{oi}}{dt}$ est $\imath \overline{N}_i \tilde{p}_i$, il est judicieux de considérer aussi la variable u suivante :

$$u = \overline{N}_1 \tilde{p}_1 - 2\overline{N}_3 \tilde{p}_3 \tag{4.29}$$

La libration de la variable Z peut être mise en évidence en écrivant les équations relatives à u et Z, limitées à leur partie intégrable :

$$\begin{gathered} \frac{dZ}{dt} = +2\imath \, uZ \qquad \text{et} \qquad \frac{d\overline{Z}}{dt} = -2\imath \, u\overline{Z} \\ \frac{du}{dt} = \imath \, c(Z - \overline{Z}) \end{gathered} \tag{4.30}$$

où c est un coefficient numérique qui, dans le cas présent est positif. On en déduit alors deux intégrales premières :

$$Z\overline{Z} = \gamma_1 \gamma_3 = \text{constante} \qquad \text{et} \qquad u^2 - c(Z + \overline{Z}) = I_2$$

Les équations (4.30) se réduisent donc à un seul degré de liberté qu'on étudie dans l'argument ϕ. L'équation obtenue est alors simplement celle du pendule :

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = 2h^2(\cos\phi - \cos\phi_o) \tag{4.31}$$

où h et ϕ_o dépendent du coefficient c et des deux intégrales premières par :

$$\begin{aligned} h^2 &= 4\gamma_1\gamma_3 c \\ I_2 &= -\frac{h^2 \cos\phi_o}{2} \end{aligned}$$

La constante ϕ_o représente l'amplitude de la libration dans la variable ϕ; les observations (Dourneau, 1987) indiquent que ϕ_o est égal à $95^\circ,392 \pm 0,32$. L'expression analytique de la partie principale du coefficient c peut être trouvée dans les travaux sur le problème Mimas-Téthys, de H. Struve (1898), Tisserand (1894), G. Struve (1930), de Rapaport (1977) et de Stellmacher (1982). Nous avons, pour notre part, utilisé la valeur issue de nos séries ($c = 1,6347866\ 10^{-4}$ rad/jour dans les équations (4.17)). L'équation (4.31) se résoud à l'aide des intégrales elliptiques. Des formulaires correspondants (Whittaker et Watson, 1952; Abramowitz et Stegun, 1964), nous avons déduit les développements de $\cos\phi$ et de $\sin\phi$ en série de Fourier d'un argument ω_1 dont les coefficients dépendent d'un petit paramètre q. La fréquence $\dot{\omega}_1$ de cet argument est la fréquence de la libration et le paramètre q dépend de son amplitude ϕ_o. En posant :

$$\mathcal{G} = \sqrt{q} \exp \imath \omega_1 \tag{4.32}$$

on peut rassembler les développements de $\cos\phi$ et de $\sin\phi$ en un développement de la forme :

$$Z = \gamma_1 \gamma_3 \left(b_o + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (\mathcal{G}^k + (-1)^k \overline{\mathcal{G}}^k) \right) \tag{4.33}$$

où :

$$b_o = \frac{2E - K}{K} \qquad b_k = \frac{\pi^2 k}{K^2(1-(-q)^k)}$$

K et E étant respectivement les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce. Dans le cadre de cette approximation, la variable Z subit des variations périodiques du seul argument ω_1.

En utilisant la valeur de l'amplitude donnée plus haut, $\gamma_1 = 0,013639$ et $\gamma_3 = 0,009578$, on a obtenu :

$$\dot{\omega}_1 = 5^\circ,067/an$$
$$q = 0,0493$$

La valeur trouvée pour la constante q ($\sqrt{q} \approx 0,22$) indique que la convergence du développement (4.33) est relativement lente. Quant à $\dot{\omega}_1$, les observations en donnent une valeur égale à $5,095 \pm 0,014$, la différence est donc significative. On verra en fait au chapitre suivant que l'amplitude et la fréquence de la libration, fortement liées par l'équation du pendule, sont très sensibles à des faibles variations des conditions initiales et des paramètres physiques. En les modifiant légèrement, nous avons pu

retrouver les valeurs issues des observations. La Figure 2 illustre ce que nous avons trouvé lors de l'intégration numérique du système complet montrant ainsi l'effet des autres termes non considérés ici. Elle représente les variations de Z sur une durée de 1230 ans, et on retrouve bien l'allure d'un mouvement régi par l'équation du pendule, justifiant l'hypothèse faite que cette équation représente la partie principale de la résonance Mimas-Téthys. On peut toutefois remarquer l'épaisseur non nulle du croissant, qui indique que $\gamma_1\gamma_3$ n'est plus strictement une intégrale première et que cette quantité subit au moins une variation de fréquence $\dot{\omega}_1$.

4.7 Approche numérique de la solution du système critique centré.

Cela consiste à intégrer numériquement les équations (4.17). Elles sont bien plus faciles à intégrer que les équations initiales puisque tous les termes à courtes périodes en ont été retirés, permettant une intégration numérique sur une longue durée (plusieurs siècles) avec un pas d'intégration relativement grand (quelques jours). Une telle méthode a déjà été appliquée dans le cadre d'une théorie planétaire (Laskar, 1985). Cette solution numérique est alors transformée en solution analytique (ou formelle) par des techniques d'analyse de Fourier. Les variations de cette solution par rapport aux paramètres physiques et aux constantes d'intégration sont obtenues en intégrant de la même façon (numériquement) les équations aux variations. Nous allons décrire ici la méthode utilisée, les résultats obtenus seront commentés au chapitre suivant.

4.7.1 Séparation des équations en deux blocs.

Tout d'abord, nous avons séparé le système des 7 satellites (Hypérion n'est pas considéré ici) en deux blocs : l'un relatif aux quatre premiers satellites, l'autre relatif à Rhéa, Titan et Japet. En effet, ces deux sous-systèmes ont des caractéristiques très différentes. Le premier, contrairement au deuxième, est dominé par les résonances Mimas-Téthys et Encelade-Dioné; en conséquence, les équations relatives aux variables $\tilde{p}$ existent seulement dans le bloc des satellites intérieurs. Par ailleurs, le bloc relatif à Rhéa, Titan et Japet est bien plus perturbé par le Soleil que les quatre premiers satellites. Enfin, les fréquences fondamentales du Tableau 12 montrent que les échelles de temps sont très différentes. Avec cette séparation en deux blocs, d'une part, il sera possible d'utiliser un pas et une durée d'intégration appropriés à chacun d'eux, et d'autre part, les perturbations solaires pourront être, dans un premier temps, négligées dans le mouvement des quatre premiers satellites.

Cette séparation a aussi pour conséquence d'écarter provisoirement les termes "hors-blocs", c'est-à-dire ceux dépendant des variables des trois satellites extérieurs pour les équations relatives à Mimas, Encelade, Téthys et Dioné et ceux des quatre satellites inférieurs pour les équations relatives à Rhéa, Titan et Japet.

Les termes ainsi écartés sont petits et peu nombreux. Le Tableau 13b donne leur nombre dans chaque équation, ainsi que l'ordre de grandeur (en kilomètre) du plus grand d'entre eux (évalué lors de la sélection des termes faite en construisant le système critique à la précision du kilomètre et utilisant les valeurs majorées donnée dans le Tableau 8, cf. §4.1). Ces termes ne sont sans doute pas négligeables, mais pourront être pris en compte ultérieurement en y substituant la solution des deux blocs diagonaux.

Il est important de remarquer que cette séparation en deux sous-systèmes ne signifie pas que l'on a négligé l'influence d'un groupe de satellites sur l'autre, mais que chaque sous-système ne dépend que des variables $(\tilde{p}_{oi}, \mathcal{W}_i)$ des satellites du groupe correspondant. Chaque sous-système dépend au contraire de l'ensemble des paramètres physiques du système, et ainsi un terme d'un bloc donné peut être en facteur de la masse d'un satellite de l'autre bloc. D'ailleurs, l'influence mutuelle des deux groupes de satellites est déjà incluse dans les équations dès la transformation (4.6) de X en Y, et pourra se manifester de nouveau lors du retour aux variables X.

4.7.2 Intégration numérique.

L'intégration numérique a été réalisée avec une méthode d'Adams de prédiction-correction d'ordre 10. La phase de démarrage est effectuée avec une méthode de Runge Kutta d'ordre 4 et un pas d'intégration 10 fois plus petit que dans la méthode d'Adams.

Pour le système des quatre satellites intérieurs, on a vérifié qu'un pas d'intégration de 4 jours suffisait (la différence avec une intégration faite avec un pas de 2 jours sur une durée d'un siècle est au plus de 10^{-4} kilomètre). L'intégration a été effectuée sur 12 siècles afin de mettre en évidence non seulement la période de la libration Mimas-Téthys (70 ans), mais aussi certaines périodes encore plus longues (jusque 800 ans !) que Duriez (1990) a détectées dans ce couple grâce à une méthode de développement synthétique des équations de Lagrange. On veut aussi mettre en évidence les plus hautes fréquences; l'analyse des développement analytiques que nous intégrons numériquement, montre que la plus haute fréquence à attendre est issue du monôme $\overline{\mathcal{W}}_1^2$ dont la période est 112 jours. On a donc adopté un pas de sortie de 40 jours, c'est-à-dire que l'on a effectué

une sauvegarde des résultats tous les 10 pas d'intégration. Ainsi, l'analyse de Fourier que l'on effectuera ensuite permettra de détecter des termes de période supérieurs à 80 jours.

Pour le système Rhéa-Titan-Japet on peut adopter un pas d'intégration beaucoup plus long (100 jours), mais le problème est plus compliqué car il faut tenir compte du mouvement du Soleil et substituer une représentation de son mouvement dans les seconds membres des équations. Nous avons utilisé à cet effet JASON84, qui est une représentation héliocentrique du mouvement de Saturne (Simon & Bretagnon, 1984) [cette représentation est elle-même calculée à partir de TOP82 (Simon, 1983)]. JASON84 comprend 6 groupes de séries correspondant aux 6 variables elliptiques. Chaque groupe de séries est divisé en une série purement périodique et un certain nombre de séries de Poisson de degré p par rapport au temps. Un terme de la série est ainsi de la forme :

$$t^p \; (C \cos i\mu t + S \sin i\mu t) \qquad (p \leq 10)$$

où i est un entier, t le temps en milliers d'années à partir de J2000 et μ la fréquence fondamentale des séries :

$$\mu = 0.359\ 536\ 201\ 909\ 4506 \qquad \text{radian/milliers d'années}$$

La représentation dont nous disposons est limitée aux termes qui dépassent 5 10^{-6} radians ou UA au bout de 6000 ans. Cette durée correspond à l'intervalle de validité qui était initialement prévu pour les utilisateurs de JASON84. Toutefois, Simon a comparé cette représentation à une intégration numérique des quatre grosses planètes sur des intervalles de 1000 , 3000, 6000 et 9000 ans. Les plus gros écarts obtenus entre la représentation et l'intégration numérique sont respectivement de 13, 19, 34 et 63 secondes de degré. Cela semble bien suffisant pour nous, même pour la durée la plus longue. De plus en utilisant cette solution sur 9000 ans, il sera possible de détecter correctement les périodes d'environ 3000 ans présentes dans la solution de Japet (voir Tableau 12).

Cependant, JASON84 est rapportée à l'écliptique et l'équinoxe moyens J2000; il faudra donc la rapporter au plan équatorial de Saturne puisque nos variables sont définies par rapport à ce plan. Par ailleurs, elle comprend au total 591 termes. Pour gagner en efficacité, on peut chercher à diminuer ce nombre de termes par une troncature plus sévère sur les coefficients, mais en fait, le temps passé à évaluer les séries

de JASON84 est faible, comparé à celui que l'on passe dans l'évaluation des seconds membres des équations (1535 monômes). Cependant, si on adoptait une troncature à 10^{-4} (au lieu de 5 10^{-6} initialement), la représentation ne comprendrait plus que 100 termes, mais on observerait sur 2000 ans, un écart de 200 kilomètres dans la longitude moyenne de Japet, par rapport à une intégration utilisant les 591 termes.

En fait, un autre problème surgit, car parmi ces 591 termes, certains ont des périodes très courtes : il s'agit essentiellement de termes synodiques issus des perturbations de Saturne par Vénus et par la Terre, de périodes respectives $0,63$ et $1,04$ ans. Or pour ne pas destabiliser l'intégrateur, il est nécessaire d'utiliser un pas d'intégration au moins 20 fois plus petit que la plus petite période présente dans le système. Avec ces termes synodiques, on perd l'avantage de pouvoir utiliser un pas de 100 jours et le calcul en est fortement ralenti. Mais la solution injectée subissant aussi l'intégration des équations, il est raisonnable de penser que ce sont les termes de basses fréquences de JASON84 qui influeront le plus sur la précision. Nous avons donc retenu dans JASON84 tous les termes dont la fréquence est plus basse que 3000 μ . Cette limite correspond aussi à la plus haute fréquence mise en évidence dans les séries à intégrer (correspondant à l'inégalité $5\lambda_9$, de période 6 ans). La différence observée avec une intégration où tous les termes ont été retenus, est de 3 km sur 100 ans et de 5 km sur 1000 ans dans la longitude moyenne de Japet. Le pas d'intégration adopté est alors de 100 jours; la différence avec une intégration numérique effectuée avec un pas de 35 jours est au plus de 2 10^{-6} km sur 1000 ans. Avec un pas de sortie de 800 jours ($2,2$ ans) il sera possible, lors de l'analyse de Fourier des résultats de l'intégration, de détecter des termes de période plus grande que 1600 jours.

Les conditions initiales (à J1980) sont tirées des solutions obtenues lors de la résolution analytique (§4.6) elles-mêmes issues de l'ajustement de Dourneau (1987). Toutefois pour le couple Mimas-Téthys, cela conduit à une période de la libration de 85 ans et une amplitude de 127° ce qui est loin des valeurs issues des observations (respectivement 70.65 ans et 95°.39). Ce phénomène traduit l'extrême sensibilité de cette résonance aux conditions initiales (voir les dérivées partielles au chapitre suivant). Nous avons fait varier la condition initiale sur la variable $\tilde{p}_1$ de -9 10^{-6} (en comparaison, l'amplitude de la libration sur cette variable est de 3 10^{-5}). Cette modification permet d'obtenir une période de 71.1 ans et une amplitude de 95°.9. De plus, pour pouvoir mettre en évidence les termes contenant l'excentricité de Téthys, celle-ci n'a pas été prise nulle comme dans Dourneau mais égale à 0.00102 qui est la valeur donnée par Sinclair (1977). Ces conditions initiales n'ont pas bien sûr un caractère définitif car

elles devront être ajustées (avec les paramètres physiques) sur les observations. Le but ici est simplement d'avoir une solution nominale suffisamment proche des solutions déjà ajustées.

4.7.3 Analyse spectrale.

Nous voulons maintenant donner un certain caractère analytique à la solution issue de l'intégration numérique. Les deux buts principaux de cette étape sont : d'une part, d'obtenir une représentation sous forme suffisamment compacte pour être aisément manipulable, tout en maintenant la précision obtenue dans l'intégration numérique; d'autre part, d'exprimer clairement les constantes de la solution (amplitudes, phases et fréquences des termes, parties constantes...). Ceci facilitera le calcul des variations de la solution par rapport aux paramètres physiques et aux constantes d'intégration que l'on fera ensuite. Pour cela, on utilise les techniques de l'analyse de Fourier.

Plusieurs auteurs se sont déjà intéressés à ces techniques pour des problèmes similaires concernant la dynamique du système solaire (Applegate et al., 1986; Carpino et al., 1987; Laskar, 1988, 1990). De manière générale, ils ont cherché une résolution en fréquence aussi bonne que possible afin de mettre en évidence la stabilité (ou l'instabilité) du système solaire, partant pour cela d'intégrations numériques sur des durées les plus longues possible. Ce n'est pas le but recherché ici pour les satellites de Saturne. Mais la durée des intégrations numériques que nous avons effectuées dans le système de Saturne (quelques milliers d'années) n'est pas non plus comparable, toutes proportions gardées, aux durées de plusieurs centaines de millions d'années considérées par ces auteurs pour les planètes. De plus, notre système est plus complexe car il n'est pas limité aux inégalités séculaires. Notre méthode d'analyse utilise directement le logiciel MFT de Laskar dont voici les caractéristiques :

On suppose d'abord que chaque série temporelle issue d'une intégration numérique de durée T admet une représentation sous forme quasi-périodique :

$$h(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k \exp \imath (\nu_k t) \tag{4.34}$$

où A_k est complexe, ν_k est réel et N est le nombre de termes qu'admet la représentation. A_k et ν_k sont les paramètres à déterminer. Une transformée de Fourier rapide (FFT) de la série temporelle est d'abord effectuée, afin de trouver à quelle fréquence ν_a l'amplitude est la plus grande. Cette fréquence ν_a n'est pas très précise, puisqu'elle est un multiple

entier de la fréquence fondamentale $\nu_o = 2\pi/T$. Elle indique seulement qu'une raie spectrale existe dans son voisinage. On affine ensuite la recherche du maximum de cette raie spectrale en déterminant par dichotomie la valeur ν_1 de ν qui maximise l'intégrale suivante dans le voisinage de ν_a :

$$H(\nu) = \int h(t) \exp \imath\,(-\nu t)\, dt \tag{4.35}$$

on s'est fixé pour cela une précision de sortie de $0,0000002$ seconde de degré par an. A la fréquence ν_1 obtenue, correspond une raie dont l'amplitude complexe $A_1(= H(\nu_1))$ est ainsi calculée. Le terme correspondant, $A_1 \exp \imath\,(\nu_1 t)$ est alors soustrait de la série temporelle initiale et on recommence avec la nouvelle série temporelle pour trouver le terme suivant à la fréquence ν_2. Cependant, pour utiliser (4.35), il convient que la base de fonctions $(\exp \imath\,(\nu_k t))$ utilisée dans la représentation (4.34) soit orthogonale. Il est donc nécessaire d'orthogonaliser la base de fonctions au fur et à mesure qu'on trouve une nouvelle raie spectrale. On utilise pour cela la méthode de Gram-Schmidt. Il y a deux critères d'arrêt de la procédure MFT : d'abord le dépassement du nombre maximum de raies spectrales à calculer (qui dimensionne les tableaux du programme correspondant), ensuite la limite de résolution en fréquence. En effet, la théorie du signal indique qu'on ne peut pas séparer deux fréquences plus proches que 2 fois la fréquence fondamentale ν_o ($= 2\pi/T$, T étant la longueur temporelle des données). Donc le deuxième critère d'arrêt de la procédure intervient dès qu'une nouvelle fréquence est trouvée voisine d'une fréquence déjà déterminée, à une distance inférieure à $2\nu_o$.

Cette méthode permet une très bonne résolution en fréquences. Cependant, on n'a pas toujours obtenu de cette façon toute la précision souhaitée. Par exemple, avec les deux tests d'arrêt décrits, la solution obtenue pour la longitude moyenne de Mimas (voir Tableau 14b) est limitée à ses deux premiers termes. En effet, le premier terme trouvé a une très forte amplitude (43°, le suivant étant plutôt de l'ordre de quelques minutes de degré); à la recherche de la troisième raie, l'analyse détecte en fait le pic résiduel du premier terme. Le deuxième test d'arrêt (écart en fréquence inférieur à $2\nu_o$, noté EF2) est alors vérifié et il n'est donc pas possible de déterminer les termes suivants.

Pour pouvoir continuer, nous avons modifié la méthode en incluant à l'algorithme MFT deux procédures supplémentaires.

La première est un ajustement par moindres carrés de la représentation obtenue à la série temporelle initiale; plus précisément, on recherche quelles corrections des fréquences, des amplitudes et des phases minimisent au sens des moindres carrés les

résidus entre la série temporelle et la fonction $h(t)$. Cet ajustement est fait en linéarisant la représentation par rapport aux paramètres à corriger. Si les corrections apportées sont faibles, cette linéarisation suffit, ce qui peut être vérifié en réitérant l'ajustement. La méthode des moindres carrés permet en outre un contrôle supplémentaire par l'intermédiaire de la matrice de corrélation. Le test correspondant (noté C) consiste à noter quelle est la paire de termes concernée par le plus grand coefficient de corrélation trouvé lors d'un ajustement : si celui-ci est plus grand qu'une valeur maximale fixée, on rejette le dernier terme déterminé de la paire. A l'issue de cette procédure, la base de fonctions est orthogonalisée comme dans MFT.

La deuxième procédure supplémentaire consiste simplement à masquer une partie du spectre afin de ne rechercher de nouvelles raies que sur la partie non masquée, ou "autorisée".

Le passage d'une procédure à l'autre est fait à l'aide de quatre tests fondamentaux. Les deux premiers que l'on a déjà vus sont ceux notés EF2 et C. Le troisième correspond au même test EF2 mais est fait au niveau ν_o; il est alors noté EF1. Le dernier (noté RM) controle la linéarité effectuée lors de l'ajustement par moindres carrés; on calcule l'écart relatif sur le résidu maximum entre deux ajustements consécutifs, le test est vérifié si cet écart dépasse 5%.

Le schéma de l'analyse est alors le suivant :

On effectue la procédure MFT tant que le test EF2 n'est pas vérifié. Dans le cas contraire, on ajuste deux fois par moindres carrés la série obtenue; l'ajustement est réitéré tant que le test RM est vérifié. Si les tests EF1 ou C sont vérifiés, on rejette dans la paire de termes incriminée par l'un des deux tests celui qui a été déterminé en dernier. Le terme rejeté est masqué, la largeur de la zone interdite dans le spectre est de deux fois la fréquence fondamentale ν_o. La procédure des moindres carrés est alors reprise de la même façon. On revient ensuite à la procédure MFT; si le test EF2 est encore vérifié, il est inutile de refaire un ajustement par moindres carrés car cela vient d'être fait. Deux alternatives se présentent alors selon que le test EF1 est vérifié ou non : soit on teste le nouveau terme déterminé par MFT en l'incluant dans l'ajustement (sa distance en fréquence avec un autre terme de la série est donc comprise entre ν_o et $2\nu_o$), soit il est rejeté et masqué. Si par contre le test EF2 n'est pas vérifié à l'issue de MFT, on retourne à la configuration initiale en reprenant tout le schéma que l'on vient de décrire, c'est-à-dire en effectuant de nouveau la procédure MFT.

La relative complexité de ce schéma est dûe à la priorité que l'on a donnée à MFT. C'est sur elle que s'appuie toute l'analyse, la méthode des moindres carrés n'est utilisée que lorsque MFT "échoue". De plus, on a toléré que des termes soit séparés de moins de deux fois la fréquence fondamentale, des essais ayant montré que cela était possible compte tenu du contrôle effectué par le test C. Cependant, ces sortes de termes interviennent uniquement lorsque MFT et la procédure d'ajustement ont été effectués, ils ne sont intégrés à la méthode qu'en dernier recours pour éviter de devoir masquer la partie correspondante du spectre. En effet, l'utilisation d'un masque signifie que l'on renonce à améliorer la représentation de la solution au voisinage de la zone interdite; la méthode atteint alors ses limites, le résidu maximum ne diminuant que faiblement dans la suite de l'analyse. Enfin, une remarque concernant le test C sur les coefficients de corrélation est nécessaire. Ce test est fortement lié à EF1 puisque chacun d'eux est un indicateur de la séparation des termes. Cependant, chacun de ces tests est nécessaire au contrôle de l'analyse car ils se rapportent chacun à deux méthodes différentes, l'un à MFT, l'autre à la méthode des moindres carrés. De plus, lorsque deux termes sont très corrélés, les ajustements consécutifs (il y en a au moins deux) peuvent diverger vers deux autres termes, éventuellement séparés de plus d'une fois la fréquence fondamentale. Dans ce cas le test EF1 ne détecte pas la divergence car il s'applique sur la série résultat, et seul le test C permet de rejeter l'ajustement.

La série temporelle qu'on analyse peut être une solution q_o. Il est probable dans ce cas que la représentation contienne une pente résiduelle et une constante à l'origine. Cette pente traduit, comme cela a été expliqué en §4.4, l'influence des solutions de $\mathcal{P}$, Q et $\mathcal{W}$ sur la détermination des constantes $\langle P \rangle$ et $\langle W \rangle$. La représentation $h(t)$ n'a donc pas exactement la forme donnée en (4.34). Dans le cas des solutions q_o, le schéma a donc été modifié pour déterminer à chaque pas de l'analyse de Fourier, la droite des moindres carrés qui passe à travers les résidus. Cette détermination s'affine donc au fur et à mesure de la progression de l'analyse. De plus, la pente et la constante à l'origine sont intégrées à l'ajustement général et donc incluses dans les tests EF1, EF2 et C (la droite est considérée comme un terme supplémentaire de fréquence nulle). De la même manière, on a déterminé la partie constante dans la solution des autres variables. Cette détermination s'effectue aussi à chaque pas, mais simplement en prenant dans le spectre la valeur correspondant à la fréquence nulle.

Nous allons illustrer sur l'exemple de la longitude moyenne de Mimas (q_{o1}, voir Tableau 14b), comment s'est effectuée l'analyse de la solution, le test C étant fixé à 65% :

. Les deux premiers termes ont été déterminés par MFT.

. Au troisième passage, MFT détecte un pic à $0,53\ \nu_o$ du premier terme.

. Les deux termes sont ajustés par moindres carrés avec la pente et la constante à l'origine. Deux ajustements suffisent. Le résidu maximum est de 3330 km et le coefficient maximum de corrélation entre les termes est de 3%.

. La procédure MFT est reprise. Les termes 3 à 8 sont détectés

. MFT détecte ensuite un pic à $0,64\ \nu_o$ du premier terme.

. Deux ajustements sont effectués. Le résidu est de 485 km et le coefficient de corrélation maximum de 15%.

. MFT détecte les termes 9 à 12 puis un pic à $1.68\ \nu_o$ du troisième terme.

. Deux ajustements des 12 premiers termes et de la droite donnent un résidu de 353 km pour une corrélation maximum de 15%.

. MFT détecte encore le pic à $1,68\ \nu_o$ du troisième terme.

. Ce nouveau terme est inclus dans l'ajustement. Le résidu obtenu est de 304 km. Le coefficient de corrélation maximum est de 34 % et le nouveau terme est distant du troisième de $1,70\ \nu_o$. Ce terme est donc accepté.

. MFT détecte le quatorzième terme.

. $\cdots$ et ainsi de suite jusqu'au 35ième terme où le résidu est tombé à 40 kilomètres.

Il faut maintenant préciser sur quel critère la procédure est arrêtée. L'idéal est de le faire lorsque le résidu est plus petit qu'une précision donnée. Sinon, le nombre maximum de termes définit un deuxième test d'arrêt. On a vu que ce nombre était nécessaire à la procédure MFT pour dimensionner les tableaux; il est aussi nécessaire pour la procédure des moindres carrés car le nombre de paramètres à ajuster doit être un ordre de grandeur inférieur au nombre de points utilisé (11232 points pour les satellites intérieurs et 4212 pour le système Rhéa-Titan-Japet). Un troisième test a été prévu quoique l'exécution ne l'ait jamais utilisé, qui consiste à arrêter la procédure lorsque le nombre de masques placés atteint le nombre de termes déterminés.

Notons enfin que les solutions des différentes variables et satellites sont d'abord analysées séparément. L'analyse globale des résultats correspondants permet ensuite de reconnaître des fréquences communes et leurs combinaisons.

4.7.4 Dérivées partielles de la solution.

La représentation obtenue définit les paramètres dont dépend chaque solution, ce sont : le terme constant, éventuellement la pente résiduelle et, pour chacun des termes, l'amplitude, la fréquence et la phase. Ils subiront des variations lorsque les conditions initiales, les masses et les coefficients d'aplatissement seront éventuellement changés. Il convient donc maintenant de mesurer ces variations au voisinage de la solution nominale en calculant les dérivées partielles premières de la solution par rapport aux conditions initiales et aux paramètres physiques. L'intégration des équations aux variations est effectuée de la même manière que pour l'intégration nominale. L'analyse des solutions obtenues pourrait se faire aussi par la méthode décrite au paragraphe précédent. Cependant cette procédure est relativement longue car le nombre de variations à effectuer (égal à 50) est élevé. Les variations étant supposées faibles, les intégrations sont faites sur une durée plus courte (un siècle pour les satellites intérieurs et 2000 ans pour les satellites extérieurs). La restitution de l'analycité est faite, en partant de la forme obtenue pour la solution nominale, par ajustement des termes un à un en commençant par celui de plus grande amplitude.

Plus précisément, on définit d'abord un niveau de troncature correspondant au résidu maximum entre la série temporelle nominale et sa représentation. Puis, pour chaque condition initiale et pour chaque paramètre physique, on définit une variation Δ. On définit aussi la variation maximum autorisée ($\Delta_{\max}$) pour ce même paramètre. Cette variation maximum représentera l'intervalle sur lequel les variations sont possibles et sur lequel on estimera la précision de la représentation linéaire. Deux intégrations numériques sont effectuées l'une correspondant à une variation $-\Delta$, l'autre à $+\Delta$. On compare ensuite les résultats de chacune de ces intégrations avec la solution nominale. Si le résidu entre la série temporelle issue de l'une de ces deux intégrations et la représentation de la solution nominale, est inférieur au niveau de troncature défini, on estime qu'il n'est pas possible de calculer de dérivées partielles, elles sont alors considérées nulles pour ce paramètre. Sinon, pour chaque terme issu de la solution nominale dont l'amplitude est supérieure à 10 fois le niveau de troncature défini, un ajustement est effectué. La convergence des ajustements successifs est controlée par les tests C et RM définis au paragraphe précédent. Cependant, si une divergence ou une mauvaise convergence est observée lors de l'ajustement d'un terme, cela signifie que les variations sont trop importantes, il faut donc modifier Δ en conséquence. L'ajustement est effectué terme après terme (en allant du plus grand jusqu'au plus petit) car la durée plus courte de l'intégration numérique empêche de faire un ajustement global. De fait, cette

analyse n'est pas strictement équivalente à celle effectuée lors de la détermination de la solution nominale. Pour que les écarts mesurés ne soient pas affectés par l'utilisation de deux méthodes à priori non équivalentes, la solution nominale a été réajustée de la même façon et sur la même durée. Elle constitue alors la nouvelle référence pour le calcul des dérivées partielles.

On possède alors une estimation des dérivées partielles à droite et à gauche pour l'amplitude, la phase et la fréquence de chacun des termes analysés. La différence entre ces deux déterminations est un indicateur de la précision obtenue. Bien sûr, cette différence peut être simplement dûe à ce que la dérivée partielle d'ordre deux n'est pas négligeable. Cependant, il n'est pas avantageux d'utiliser cette information et ceci pour au moins trois raisons :

. Les séries utilisées lors de l'intégration numérique, ont été construites à l'ordre un par rapport à $\Delta m_1 \cdots \Delta m_9$, ΔJ_2, ΔJ_4, ΔJ_6.

. Cette information correspond à un élément diagonal de la matrice jacobienne de l'élément dérivé. Il manquerait alors tous les éléments non diagonaux et les calculer augmenterait considérablement le volume des calculs.

. Des essais ont montré que dans cette différence entre les deux évaluations, il est difficile de faire la part entre ce qui est dû à la non-linéarité et ce qui est dû à la méthode.

C'est pourquoi, cette différence est interprétée comme étant la précision obtenue sur le calcul de la dérivée partielle première.

Les écarts que l'on a calculés avec l'incrément Δ sont rapportés à la valeur $\Delta_{\max}$. Cela permet de négliger les dérivées dont l'effet au bout d'un temps correspondant à la durée de l'intégration est plus petit que le niveau de troncature défini.

Enfin, nous avons comparé la représentation linéaire calculée pour la valeur $\Delta_{\max}$ du paramètre, à une intégration numérique tenant compte du changement de valeur de ce paramètre. Ainsi, il est possible d'estimer la précision de la représentation linéaire que constitue la solution nominale et l'ensemble de ses dérivées partielles premières.

La précision de ce calcul est limitée par celle de la représentation de la solution nominale (niveau de troncature) et par l'incrément Δ utilisé. Si Δ est trop petit, les écarts risquent d'être au dessous du niveau de troncature et on ne les détectera pas. Inversement, il ne faut pas choisir Δ trop grand pour rester dans un domaine où les variations sont linéaires. De ce point de vue, le test effectué avec $\Delta_{\max}$, permet d'estimer

la longueur de ce domaine. Les valeurs de Δ et $\Delta_{\mathbf{max}}$ utilisées sont données dans les Tableaux 24 et 35.

5. Résultats.

Les résultats que nous allons présenter ici concernent la solution du système critique (4.17) et ses variations par rapport aux paramètres physiques et aux conditions initiales. Rappelons que ce système concerne les variables $\mathcal{P}$, Q et $\mathcal{W}$ et a été intégré en le séparant en deux parties : l'une relative aux satellites Mimas, Encelade, Téthys et Dioné et l'autre aux satellites Rhéa, Titan et Japet.

5.1 Solution du système critique pour Mimas, Encelade, Téthys et Dioné.

La solution issue de l'intégration numérique a été analysée selon la méthode décrite au chapitre précédent, le nombre maximum de termes recherchés étant de 35. Seule l'analyse de la longitude moyenne de Mimas a nécessité d'aller jusqu'à ce nombre, alors que pour les autres variables, l'analyse s'est arrêtée par le niveau de troncature, fixé à 0.5 km. Les résidus obtenus entre les résultats de l'intégration numérique et sa représentation sous forme de séries quasi-périodiques sont donnés dans les Figures 3 à 6. On constate que la précision obtenue se situe au niveau du kilomètre sauf pour la longitude moyenne de Mimas dont le résidu maximum atteint environ 40 kilomètres, ce qui est encore acceptable. D'ailleurs, dans cette variable, il ne semble pas qu'en augmentant encore le nombre de termes on puisse atteindre la précison obtenue dans les autres variables, car le dernier terme détecté a une amplitude de 5 kilomètres seulement.

5.1.1 Solution nominale.

Nous entendons par solution nominale, la solution issue de l'intégration numérique effectuée pour des valeurs fixées des paramètres physiques et des conditions initiales fixées et au voisinage desquelles nous avons ensuite calculé les dérivées partielles de la solution. Nous avons tout d'abord utilisé les valeurs données dans le Tableau 1 et en §4.6.2, mais, comme on le verra plus loin en §5.1.4, les dérivées partielles obtenues ont permis d'ajuster quelques-unes de ces valeurs afin que la solution soit plus proche des théories actuelles supposées représenter les observations. Les valeurs modifiées (m_2, m_3, m_4 ,J_2 et $\tilde{p}_{o1}$) sont données en deuxième ligne du Tableau 26a. Ces valeurs ont servi de base à une nouvelle intégration numérique, fournissant une nouvelle solution nominale, présentée dans les Tableaux 14 à 17 sous forme de séries de termes périodiques. Les

deux solutions nominales sont très peu différentes l'une de l'autre et la première a servi à calculer les dérivées partielles premières.

Comme on le voit dans ces Tableaux, nous avons essayé, pour chaque terme détecté par l'analyse spectrale, d'identifier sa fréquence comme combinaison entière d'un certain nombre de fréquences fondamentales correspondant aux arguments principaux trouvés dans chaque solution : en effet le passage aux modes propres puis la transformation (4.8) qui rend autonome les termes résonnants ont pour effet d'isoler dans chaque solution, une fréquence propre du système, associée au terme prépondérant de cette solution. Nous avons donc désigné les arguments de ces termes principaux de la façon suivante :

. ϕ_1 pour le péricentre de Mimas.

. Φ_1 pour le noeud de Mimas.

. ω_2 pour l'argument de la libration Encelade-Dioné. Cet argument remplace celui correspondant au péricentre d'Encelade puisque sa fréquence est nulle (dans le "repère tournant" (voir aussi le Tableau 12).

. Φ_2 pour le noeud d'Encelade.

. ϕ_3 pour le péricentre de Téthys.

. ω_1 pour l'argument de la libration Mimas-Téthys. Cette argument remplace Φ_3 correspondant au noeud de Téthys puisque $\dot{\Phi}_1 + \dot{\Phi}_3 = 0$.

. ϕ_4 pour le péricentre de Dioné.

. Φ_4 pour le noeud de Dioné.

Ce sont les arguments fondamentaux de la solution.

Mis à part deux termes non identifiés dans la longitude moyenne de Mimas (le 28e et le 33e), il n'y a eu aucun problème pour identifier les combinaisons de fréquence. Cette identification doit satisfaire deux contraintes : l'une sur la fréquence du terme, l'autre sur sa phase, fréquence et phase devant être obtenues par la même combinaison entière des fréquences et des phases des arguments fondamentaux. De cette manière, nous n'avons relevé aucune ambiguïté, et la combinaison proposée est de loin la meilleure possible.

Tous ces résultats sont présentés dans les Tableaux 14 à 17. Les variables absentes ($\tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ et $\tilde{p}_4$) ont des variations inférieures à un kilomètre. De même, si le terme constant est absent d'une série, c'est qu'il a été trouvé négligeable. Nous avons enfin indiqué d'un astérisque les termes qui sont considérés dans les théories actuelles.

Une première remarque s'impose : Vu l'identification des termes le système des quatre satellites intérieurs est, de fait, séparable en deux blocs, chaque bloc correspondant à un couple résonnant, dont les séries ne dépendent que des arguments associés à ce couple (mais cela ne veut pas dire que les séries relatives à un couple ne sont pas affectées par l'autre couple comme on le verra plus loin avec les dérivées partielles de ces séries par rapport aux paramètres physiques et aux conditions initiales).

La solution du couple Encelade-Dioné est très peu volumineuse. Cela confirme le fait, déjà indiqué au chapitre précédent lors de la résolution analytique, que la solution du système linéarisé est déjà bien représentative de la dynamique de ces deux satellites. Cela est dû à la petitesse des amplitudes des termes induits par la résonance. On voit en effet que les termes nouveaux qui apparaissent, sont de l'ordre du kilomètre (7.4 km au plus, pour le terme d'argument $2\phi_4$ dans la longitude moyenne d'Encelade). Concernant l'excentricité d'Encelade, on rappelle que l'on doit encore ajouter la partie forcée qui seule, est prise en compte dans les théories actuelles (Tableau 11 et Figure 1).

La solution du couple Mimas-Téthys est bien différente. Elle comporte davantage de termes dont beaucoup sont loin d'être négligeables. Certains de ces termes ont déjà été signalés dans les longitudes moyennes de ces satellites par de précédents travaux : les termes à très longues périodes (termes n° 3, 4, 5 et 9 dans q_{o1}) et le terme d'argument ϕ_1 ont été détectés par Duriez (1990); ce dernier terme a aussi été mis en évidence par Jefferys et Ries (1979) ainsi que les termes d'argument $\phi_1 - \omega_1$ et $\phi_1 + \omega_1$; enfin, Stellmacher (1982) a étudié la libration Mimas-Téthys et a ainsi montré qu'en tenant compte d'un terme complémentaire dans l'équation de la libration, on pouvait mettre en évidence le terme d'argument $2\omega_1$ dans les longitudes moyennes des satellites.

Il est important de remarquer que les fréquences ϕ_1, ϕ_3 et Φ_1 correspondent à des périodes de l'ordre de l'année. Or, de nombreux termes dans les longitudes moyennes de Mimas et de Téthys, ont des périodes plus longues que 100 ans (jusqu'à 700 ans). Ce sont donc, à l'échelle de notre système, de très longues périodes voire même des résonances séculaires. C'est là, un nouvel aspect de la dynamique de ce couple qu'il faudra prendre en compte pour comprendre son évolution à très long terme. La sensibilité de ces termes aux conditions initiales que nous avons observée lors du calcul des dérivées partielles (§5.1.2) confirme cet aspect. L'étude de ces résonances séculaires et leur éventuel caractère chaotique dépasse le cadre de ce travail dont le but est seulement de construire une théorie capable de fournir des éphémérides.

Un argument attire toutefois notre attention : $2\Phi_1 + \phi_3$ (de période 200 ans). Il

est présent de nombreuses fois dans les deux longitudes moyennes par l'intermédiaire de combinaisons avec des multiples de l'argument de la libration ω_1. Il est d'ailleurs présent de la même manière dans les séries des autres variables, il suffit pour cela de retirer l'argument fondamental correspondant à la solution pour le faire apparaître. Il faut remarquer que cet argument contient le péricentre de Téthys, ce qui signifie que les amplitudes des termes correspondants dépendent de la valeur donnée à son excentricité. Celle que l'on a prise en tant que condition initiale est tirée de Sinclair (1977), mais les autres auteurs considèrent généralement l'orbite de Téthys circulaire. Il est donc souhaitable d'accéder à une valeur beaucoup plus précise de l'excentricité de Téthys afin de mieux cerner l'influence de l'argument $2\Phi_1 + \phi_3$. Comme il apparaît finalement que l'excentricité de Téthys a davantage d'influence sur les longues périodes de la longitude moyenne de Mimas que dans la solution de Téthys elle-même, une bonne détermination de ces termes dans la longitude de Mimas pourrait servir à la détermination de l'excentricité de Téthys.

L'absence, dans les théories actuelles, des termes à longues périodes que nous avons mis en évidence dans la longitude moyenne de Mimas, peut avoir une conséquence indirecte. Certains auteurs soupçonnent une accélération en longitude de l'ordre de 2 degrés par siècle^2 (Kozai, 1957; Dourneau, 1987). Une accélération en longitude s'explique généralement par des effets de marées que nous n'avons pas modélisés dans le cadre de ce travail. Schématiquement, le bourrelet de marée sur Saturne engendré par un de ses satellites, modifie le potentiel extérieur; l'orbite du satellite est alors perturbée en retour par cette modification. Ces effets sont très faibles, mais cumulables dans le temps. C'est donc un facteur essentiel de l'évolution à très longues périodes. Cependant, les études réalisées sur ce sujet (Dermott et al, 1988; Sarlat, 1990) indiquent une accélération d'au plus 5 centièmes de degré par siècles^2 dans la longitude moyenne de Mimas, ce qui est beaucoup plus faible que la valeur déduite des observations. D'ailleurs, en ce qui concerne les satellites de Jupiter, les estimations effectuées par Lieske (1987) indiquent des accélérations encore plus petites, de l'ordre de 5 millièmes de degré par siècle^2. Il est donc légitime de se demander si la valeur élevée trouvée dans la longitude de Mimas n'a pas une autre origine. Dans ce but, nous avons ajusté une parabole sur la série représentant la longitude moyenne de Mimas en enlevant les termes repérés par un astérisque, c'est-à-dire en prenant uniquement les termes non considérés par les théories actuelles. Cet ajustement, illustré par la Figure 7, a été effectué sur la durée correspondante au siècle d'observations utilisées par Dourneau. Nous avons trouvé une "accélération" de 2 degrés par siècle^2. Mais il est facile de voir d'après la Figure qu'un

ajustement sur une autre durée aurait donné une toute autre valeur. D'ailleurs, nous avons fait différents essais d'ajustement en faisant varier non seulement la durée, mais aussi les paramètres ajustés (comme par exemple les amplitudes de la libration); dans tous les cas le coefficient en t^2 trouvé est de l'ordre du degré par siècle^2 (quelquefois négatif). Bien sûr aucun de ces essais ne correspond réellement aux ajustements réalisés par Kozai ou Dourneau, car les observations qu'ils ont utilisées sont entachées d'erreurs et pas nécessairement réparties uniformément dans le temps. Il est cependant clair que la prise en compte des termes à longues périodes de la longitude moyenne de Mimas est indispensable à une bonne détermination d'une éventuelle accélération dans la longitude de Mimas, que l'on pourra alors interpréter comme issue des forces de marées. Comme on l'a remarqué précédemment, les plus gros de ces termes dépendent de l'excentricité de Téthys. On voit donc là une raison supplémentaire de déterminer précisément sa valeur.

Remarquons enfin que la forme des solutions obtenues pour $\mathcal{W}_9$ et de $\mathcal{W}_{11}$ (relatives aux inclinaisons de Mimas et de Téthys, Tableaux 14d et 16c) permet d'obtenir une expression de $Z = \mathcal{W}_9\mathcal{W}_{11}$ qui a la même forme que le développement (4.33) issu de l'équation du pendule. Les différences entre ces deux expressions sont justement celles qui expliquent que le module de Z n'est plus exactement une intégrale première (épaisseur du croissant de la Figure 2).

5.1.2 Variations de la solution nominale.

Les dérivées partielles de la solution nominale sont données dans les Tableaux 18 à 23. Pour toutes les valeurs données dans ces Tableaux, le nombre de décimales conservées dépend de la précision obtenue, c'est-à-dire qu'on a trouvé égales, à la dernière décimale près, les deux évaluations de ces dérivées, l'une à droite et l'autre à gauche. Pour évaluer ces deux dérivées, on a simplement fait varier chaque paramètre d'une valeur $+\Delta$ et $-\Delta$; les valeurs $\pm\Delta$ sont données en colonne 2 dans les Tableaux 24a et 24b. On dispose aussi d'un autre indicateur pour la précision globale de la représentation linéaire de la théorie constituée par la solution nominale et ses dérivées partielles. Il est donné aussi dans les Tableaux 24 qui concernent la comparaison sur un siècle entre l'intégration numérique et sa représentation nominale ou sa représentation linéaire. La ligne 1 donne le résultat de cette comparaison pour la solution nominale et les lignes suivantes pour la représentation linéaire. Plus précisément, ces écarts sont obtenus en comparant la représentation linéaire calculée pour la valeur $\Delta_{\max}$ de chaque paramètre,

à une intégration numérique tenant compte du changement de valeur de ce paramètre. Ces écarts dépendent donc fortement de la valeur du $\Delta_{\max}$ utilisé, généralement surestimé. Cependant pour Ω_2^*, Ω_4^*, ϖ_3^* et e_3^*, $\Delta_{\max}$ a été sous-évalué afin de rester dans les limites de l'approximation linéaire. Pour les conditions initiales Ω_2^* et Ω_4^*, cela ne pose pas de réel problème car leur influence est limitée respectivement à Φ_2 et à Φ_4, auxquels ils peuvent être identifiés. Pour l'excentricité de Téthys, la valeur nulle est singulière et l'intervalle où sont autorisées les variations n'atteint pas cette valeur. De manière générale, les précisions indiquées dans les Tableaux 24a et 24b n'ont de valeurs que pour une variation du paramètre à l'intérieur de l'intervalle défini par $\Delta_{\max}$. En dehors de cet intervalle, il serait préférable de recalculer ces dérivées partielles et de se rapprocher de la valeur souhaitée par approximations successives. Inversement, si la variation du paramètre est plus faible que celle définie par $\Delta_{\max}$, on peut s'attendre à ce que le résidu diminue d'autant (au moins en ordre de grandeur et dans la limite de la précision nominale).

Les variations par rapport aux conditions initiales q_{oi} ne sont pas données dans les Tableaux car elles ne concernent bien sûr que la longitude moyenne à l'origine. C'est-à-dire que la dérivée partielle de l'amplitude du terme n° 0 de la solution de $q_{oi}(t)$ par rapport à $q_{oi}(0)$ vaut un !

Le couple Encelade-Dioné possède une très bonne représentation linéaire. Seuls les effets de l'excentricité et du péricentre de Dioné sur la longitude moyenne d'Encelade, ne sont pas complètement inclus dans cette représentation : les résidus, pour une variation $\Delta_{\max}$ de ces paramètres, peuvent atteindre 684 kilomètres. Les intervalles $[e_{o4} - \Delta_{\max}(e_4)\ ,\ e_{o4} + \Delta_{\max}(e_4)]$ et $[\varpi_{o4} - \Delta_{\max}(\varpi_4)\ ,\ \varpi_{o4} + \Delta_{\max}(\varpi_4)]$ ont été choisis de manière à inclure la détermination de ces paramètres faite par Sinclair (1977); cependant, les valeurs obtenues par Sinclair sont significativement éloignées de celles trouvées par d'autres auteurs (cités par Dourneau, 1987). On peut donc s'attendre à ce que ces paramètres n'atteignent pas ces valeurs extrêmes.

Les dérivées partielles de la solution du couple Mimas-Téthys indiquent une nette sensibilité aux conditions initiales et aux paramètres physiques. Par exemple, une modification de la masse de Téthys de 2% (cette masse est connue à environ 3% près) suffit à modifier la valeur du premier terme de 10 000 kilomètres (évaluation au bout de 100 ans). Cette sensibilité se manifeste aussi par le fait que pour des valeurs maximales de certains paramètres (J_2, e_1^* et dans une moindre mesure m_3, J_4, $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_3$), on n'a pas atteint le même niveau de précision pour la solution nominale. Néanmoins, la

représentation linéaire de cette solution est utilisable pour un ajustement aux observations. Cela permettra d'accéder à une meilleure valeur des paramètres insuffisamment connus, et éventuellement, en réitérant le calcul des dérivées partielles, d'améliorer la représentation de la solution.

5.1.3 Pentes résiduelles dans les solutions q_{oi}.

La détermination des perturbations constantes (voir les Tableaux 10 et 11 du chapitre précédent) a été effectuée de manière à éliminer les termes constants dans les équations $\frac{dW}{dt}$ et $\frac{dQ_o}{dt}$. A ce stade du calcul, les solutions de $\mathcal{P}$, Q et $\mathcal{W}$ n'étant pas encore connues, on a utilisé les équations approchées (4.16). Cela signifie que les solutions de $\mathcal{P}$, Q et $\mathcal{W}$ peuvent modifier encore légérement ces constantes. Et en effet, on observe des pentes résiduelles dans les solutions relatives aux longitudes moyennes. Elles sont données dans le Tableau 25 avec leurs dérivées partielles. Si on suppose que les paramètres $\Delta\tilde{p}_i$ dans ce Tableau sont des constantes qui viendront simplement modifier les p_{oi} (les $\Delta\tilde{p}_i$ sont en réalité des conditions initiales), il est possible d'annuler ces pentes en résolvant les deux systèmes de deux équations à deux inconnues correspondants. On trouve alors :

$$\Delta\tilde{p}_1 = +7.13\ 10^{-5}$$
$$\Delta\tilde{p}_2 = -8.10\ 10^{-8}$$
$$\Delta\tilde{p}_3 = -4.30\ 10^{-6}$$
$$\Delta\tilde{p}_4 = +1.49\ 10^{-8}$$

Les valeurs trouvées pour le système Encelade-Dioné sont très faibles. Celles concernant Mimas-Téthys sont beaucoups plus importantes mais ne représentent sur leurs demi-grands axes que des perturbations de 9 et 0.8 km respectivement. En fait, les valeurs de ces paramètres représentent des variations des conditions initiales des variables $\tilde{p}_{oi}$ et non pas leur partie constante. On ne peut donc pas les utiliser directement pour corriger les constantes p_{oi}. Elles doivent être interprétées simplement comme des ordres de grandeurs qui permettent de comprendre la signification de ces pentes résiduelles.

Il est important de revenir sur la signification des constantes p_{oi}. Dans la mesure où nous avons supposé que les moyens mouvements moyens N_i étaient parfaitement connus, ces constantes ne sont pas arbitraires. Dans ce sens, les pentes résiduelles et leurs dérivées partielles doivent être considérées comme des contraintes supplémentaires.

Par exemple, la première colonne du Tableau 25 se lira :

$$-0.004407 + 0.00231\Delta m_1 + \cdots + 0.000918\Delta J_6 + 197.6\Delta\tilde{p}_1 + \cdots = 0$$

Or, les quatre moyens mouvements moyens ne sont pas indépendants puisqu'ils vérifient les relations $2N_1 - 4N_3 + \dot{\Omega}_1^* + \dot{\Omega}_3^* = 0$ et $N_2 - 2N_4 + \dot{\varpi}_2^* = 0$. On peut donc s'attendre à ce que ces 4 contraintes ne soient pas complétement indépendantes ou que, tout au moins, elles soient mal conditionnées. Cela est net pour Mimas-Téthys, le déterminant du système résolu plus haut, vaut environ -0.02 (par rapport à des coefficients de l'ordre de l'unité). Cela signifie que 2 des 16 conditions initiales ne sont pas arbitraires. Ces conditions initiales ont déjà été introduites dans la théorie dès le début du calcul par l'intermédiaire des moyens mouvements moyens. Le fait que ces deux paramètres soient surabondants, explique que l'on trouve dans les Tableaux 18 à 23, des dérivées partielles par rapport à $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_3$ quasiment opposées, et de même pour celles relatives à $\tilde{p}_2$ et $\tilde{p}_4$. Ainsi, pour chaque couple de satellites résonnants, lorsqu'on donne des variations égales à $\tilde{p}_{o1}$ et $\tilde{p}_{o3}$ (ou à $\tilde{p}_{o2}$ et $\tilde{p}_{o4}$), la solution du système change peu sauf en ce qui concerne les pentes résiduelles pour lesquelles les dérivées partielles sont différentes. Pour le couple Mimas-Téthys par exemple, cela découle de la définition de la variable u donnée en (4.29). Une variation $\Delta\tilde{p}_{13}$ dans $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_3$ donne une variation $(\overline{N}_1 - 2\overline{N}_3)\ \Delta\tilde{p}_{13}$ dans u. Or $\overline{N}_1 - 2\overline{N}_3$ est d'un ordre de grandeur plus petit que $\overline{N}_1$ ou $\overline{N}_3$ (par rapport à ε). On peut donc dire que les dérivées partielles par rapport à $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_3$ sont opposées à ε près.

Enfin, notons que lors d'un ajustement aux observations, les moyens mouvements moyens devront aussi être éventuellement corrigés. Le Tableau 25 est dans ce cas utilisable, il suffit pour cela d'ajouter à la pente résiduelle un paramètre correspondant à l'écart au moyen mouvement moyen de référence (Tableau 1).

5.1.4 Test de validité de la représentation linéaire.

La précision des dérivées partielles obtenues a été évaluée de deux manières. D'une part on a évalué cette dérivée à droite et à gauche, et d'autre part on a comparé la représentation linéaire pour la valeur $\Delta_{\max}$ de chaque paramètre à une intégration numérique tenant compte du changement de valeur de ce paramètre. Cependant, chacune de ces comparaisons est faite dans la seule direction du paramètre qu'on a fait varier. Il est donc intéressant, surtout pour Mimas-Téthys, de faire varier simultanément plusieurs paramètres et de comparer la solution issue d'une deuxième

intégration numérique avec celle donnée par la représentation linéaire. Cette comparaison constitue la première partie du test de validité de la représentation linéaire.

Par ailleurs, l'intégration numérique a d'abord été effectuée avec les valeurs des paramètres physiques données dans le Tableau 1 et pour les conditions initiales décrites en §4.6.2. Certaines des grandeurs déterminées par l'analyse harmonique de cette intégration, ont été trouvées en dehors de l'intervalle de confiance obtenu pour ces quantités par d'autres auteurs. Ces grandeurs sont principalement l'amplitude et la fréquence de la libration Mimas-Téthys, le mouvement du péricentre de Mimas et la fréquence de la libration Dioné-Encelade. Un test de validité des dérivées partielles pourra consister à ajuster la représentation linéaire sur les solutions existantes (Dourneau), en déterminant des corrections plausibles pour les paramètres physiques et les conditions initiales.

Pour cela, nous nous sommes fixé quelques conditions issues des observations. Ces conditions sont les valeurs de A_1, A_2, A_3, $\dot{\omega}_1$, $\dot{\phi}_1$, $\dot{\omega}_2$ et $\dot{\Phi}_1$ déduites des observations et données par Dourneau (sauf pour $\dot{\omega}_2$ où nous avons pris une valeur intermédiaire entre les déterminations de Dourneau et de Kozai). Les constantes A_1, A_2 et A_3 représentent ici respectivement les amplitudes du plus gros terme (libration) dans la longitude moyenne de Mimas, d'Encelade et de Dioné. Nous nous sommes donné ensuite la liste des quelques paramètres physiques ou conditions initiales qui soient susceptibles d'influer sur les conditions. Ce sont m_2, m_3, m_4, J_2 et $\tilde{p}_{o1}$. A l'aide des dérivées partielles, nous avons résolu ce système en utilisant la procédure des moindres carrés. Il est clair que nous utilisons cette procédure uniquement parce que nous avons plus d'équations que d'inconnues. Cette résolution ne constitue donc pas un ajustement dans lequel le nombre de conditions est très supérieur au nombre de paramètres à déterminer. Pour cette raison, il ne faut pas interpréter les résultats correspondants comme une réelle détermination des paramètres, mais simplement comme un test d'utilisation des dérivées partielles. Pour effectuer un ajustement au sens propre du terme, il faudrait qu'il soit fait directement sur les observations, ou sur une intégration numérique déjà ajustée, mais nous n'en disposons pas encore.

Les résultats sont présentés dans les Tableaux 26a et 26b. Partant des valeurs de A_1, A_2, A_3, $\dot{\omega}_1$, $\dot{\phi}_1$, $\dot{\omega}_2$ et $\dot{\Phi}_1$, obtenues par analyse harmonique de la première intégration numérique (ligne "AH1"), on a ajusté les masses, le J_2 et la condition initiale sur $\tilde{p}_1$, sur les valeurs données dans la ligne "conditions". La ligne "RL" donne les valeurs fournies par la représentation linéaire utilisant les corrections trouvées pour les masses, J_2 et $\tilde{p}_1$. La ligne "AH2" donne, en comparaison, les valeurs obtenues à l'issue de l'analyse d'une

deuxième intégration numérique tenant compte de ces changements de masses, du J_2 et de $\tilde{p}_1$. On donne enfin les déterminations de ces quantités faites par Dourneau et Kozai. Les valeurs de départ des paramètres physiques à ajuster sont celles déjà données dans le Tableau 1 et rappelées dans le Tableau 26a. On a donné, pour comparaison, les valeurs correspondantes déterminées par Kozai (1957), Dourneau (1987), et Campbell et Anderson (1989). La valeur UAI du J_2 de Saturne est aussi donnée pour mémoire, et est exprimée en tenant compte d'un rayon équatorial de 60300 km, comme pour l'évaluation de Campbell et Anderson.

On peut remarquer que la solution obtenue avec les nouveaux paramètres (RL ou AH2) est significativement plus proche (que AH1) de celle issue des observations (lignes Dourneau et Kozai) et que les paramètres physiques ajustés restent très cohérents avec les autres déterminations. Le paramètre J_2 a peu évolué, on reste donc très près de la détermination de Campbell et Anderson. Cependant, l'ajustement de ce paramètre a été nécessaire pour corriger certaines conditions du système Mimas-Téthys. C'est là encore un aspect de la grande sensibilité de ce système. Si, lors d'un ajustement aux observations, les effets des différents paramètres et conditions initiales sont bien séparés, on peut espérer ainsi accéder à une bonne connaissance de ces paramètres. La condition initiale sur $\tilde{p}_1$ a, quant à elle, évolué significativement. On a obtenu une variation égale à 70% du $\Delta_{\max}$ correspondant (Tableau 24b). En interpolant les écarts donnés dans ce Tableau, on peut alors s'attendre dans la longitude moyenne de Mimas, à un écart de 580 km environ (0.7×825) entre la représentation linéaire et la solution issue de la deuxième intégration numérique. En regardant les deux lignes correspondantes du Tableau 26b (RL et AH2), on remarque en effet des modifications sensibles pour les valeurs de A_1 et $\dot{\omega}_1$ qui représentent 250 km environ pour chacun d'eux. Les valeurs de $\dot{\phi}_1$ et de $\dot{\Phi}_1$ donnent des écarts de 50 et 25 kilomètres respectivement, tandis que les autres modifcations donnent des écarts négligeables.

Ce test permet de penser que la solution donnée dans ce chapitre (solution nominale et ses dérivées partielles), sera directement utilisable pour un ajustement aux observations dont on pourra tirer des éphémérides précises pour les quatre premiers satellites de Saturne.

5.2 Solution du système critique pour Rhéa, Titan et Japet.

Nous avons intégré et analysé de la même façon le système Rhéa-Titan-Japet. Les séries de la solution obtenue sont présentées dans les Tableaux 27 à 29. Nous avons déjà

signalé qu'à la différence des satellites intérieurs, ce système n'est pas autonome à cause de l'introduction du mouvement donné du Soleil dans les équations. Cette particularité a créé des problèmes supplémentaires que nous allons préciser.

5.2.1 Termes séculaires de JASON84.

Le principal problème réside dans l'incompatibilité entre les termes séculaires présents dans la solution JASON84 et l'hypothèse faite de l'existence d'une solution quasi-périodique pour les satellites de Saturne. On sait bien sûr que ces termes séculaires sont le début d'un développement en polynôme du temps de termes périodiques à très longues périodes. Les périodes de ces termes (entre 50 000 ans et 2 10^6 ans) apparaissent encore plus longues à l'échelle d'un système de satellites. Pour obtenir une solution sous forme quasi-périodique, il faudrait utiliser une représentation du mouvement du Soleil qui soit elle-même quasi-périodique, mais il serait quasiment impossible d'intégrer numériquement le système sur une durée de l'ordre du million d'années.

Une solution issue d'une intégration numérique sur une durée plus courte ne peut donc être qu'une représentation mixte. Cependant, sur une durée de l'ordre du siècle, les effets des termes séculaires solaires sont faibles. La Figure 8 en donne l'illustration dans la longitude moyenne de Japet. Elle montre la différence obtenue entre deux intégrations numériques effectuées sur 9200 ans, l'une ayant inclus les termes séculaires de JASON84, l'autre les ayant exclus. Sur 92 siècles, ces effets sont évidemments importants, mais sur les 2 siècles centrés sur J1980, ils sont réduits à 80 kilomètres au plus. Dans les autres variables de ce satellite et sur la même durée, les écarts observés ne dépassent pas 30 kilomètres. Pour Titan, l'écart sur deux siècles n'est que 8 km dans sa longitude moyenne. L'influence des termes séculaires n'est donc pas tout à fait négligeable sur le mouvement de Japet, mais on peut la négliger dans un premier temps, et c'est ce que nous avons fait. Cela nous a permis de trouver une forme quasi-périodique pour la solution présentée dans les Tableaux 27 à 29. Si la précision l'exigeait, on pourrait en tenir compte, par exemple, en transformant sous forme de termes mixtes la représentation quasi-périodique obtenue (c'est-à-dire en recherchant l'amplitude des termes périodiques sous forme de polynômes du temps).

5.2.2 Identification des termes.

Un autre problème, dû à l'introduction du mouvement du Soleil dans les équations,

se pose pour reconnaître les combinaisons entières des arguments fondamentaux. Puisque le système n'est pas résonnant, les arguments fondamentaux sont simplement :

. ϕ_5 pour le péricentre de Rhéa.

. Φ_5 pour le noeud de Rhéa.

. ϕ_6 pour le péricentre de Titan.

. Φ_6 pour le noeud de Titan.

. ϕ_8 pour le péricentre de Japet.

. Φ_8 pour le noeud de Japet.

Ces arguments ne diffèrent des arguments propres ϖ_i^* et Ω_i^* que par l'influence des termes non linéaires des équations. Ces différences sont faibles sauf pour Japet et ont déjà été montrées dans le Tableau 12. Ces arguments sont propres au système, mais le Soleil en introduit trois autres (λ_9, ϖ_9, et Ω_9) dont les deux derniers ont une fréquence nulle si on ignore leurs variations séculaires. Par exemple, nous avons relevé dans l'équation relative à la variable q_{o8} (longitude moyenne de Japet), ces quelques termes de degré 1 et 3 de l'inégalité en λ_9 :

$$\left(-,642\ z_9 + 2,9\ z_9 w_{16}\overline{w}_{16} -,73\ z_9 w_8 \overline{w}_8 + 3,9\ z_9 \zeta_9 \overline{\zeta}_9 +,64\ \overline{z}_9 \zeta_9^2 -,72\ z_9^2 \overline{z}_9\right)\ \exp -\imath\ \lambda_9$$

$$\left(-,642\ \overline{z}_9 + 2,9\ \overline{z}_9 w_{16}\overline{w}_{16} -,73\ \overline{z}_9 w_8 \overline{w}_8 + 3,9\ \overline{z}_9 \zeta_9 \overline{\zeta}_9 +,64\ z_9 \overline{\zeta}_9^{\,2} -,72\ z_9 \overline{z}_9^{\,2}\right)\ \exp +\imath\ \lambda_9$$

(Cet extrait est donné au facteur $\imath\, 10^{-5}$ rad/jour près), et on rappelle que la variable w_8 est relative à l'excentricité et au péricentre de Japet et w_{16} à son inclinaison et à son noeud. Si, pour simplifier le propos, on suppose que e_8^* et γ_8^* sont constants et si on néglige les variations périodiques de z_9 et ζ_9, tous ces termes ont la même fréquence N_9 (moyen mouvement moyen du Soleil) mais des phases différentes. Il en est de même après leur intégration, et l'analyse harmonique les détecte sous la forme d'un seul terme (terme n° 2 dans le Tableau 29a). La fréquence est bien identifiée à N_9, mais la phase n'est pas celle de λ_9. Ceci rend plus difficile l'identification des arguments qui ne peut plus s'appuyer sur l'identification des phases comme dans le cas des satellites intérieurs. De plus, pour identifier les arguments, il faut aussi prendre en compte les fréquences correspondant aux multiples de μ que la solution JASON84 a introduits. Les seules que nous ayons détectées avec certitude sont :

. 19μ correspondant à la grande inégalité entre Jupiter et Saturne : $-2\ \lambda_J\ +\ 5\lambda_9$.

. 880μ correspondant à l'inégalité synodique entre Jupiter et Saturne : $\lambda_J\ -\ \lambda_9$.

. 287μ correspondant à l'inégalité $\lambda_J\ -\ 2\lambda_9$.

Notons que ces trois arguments sont présents dans les six séries représentant la solution JASON84, sauf celui en 287μ, absent des séries relatives à l'inclinaison et au noeud du Soleil. Quand ces arguments interviennent significativement dans la solution des satellites, on peut les détecter par leur fréquence, mais il est difficile d'en reconnaître la phase (il faudrait pour cela connaître la provenance exacte de la perturbation). Pour toutes ces raisons, l'identification que nous avons proposée pour la plupart des termes de la solution nominale, n'est valable que pour la fréquence du terme. Peu de doute subsiste en ce qui concerne l'identification des plus gros termes mais les phases calculées à partir de l'identification d'une certaine combinaison des fréquences, peuvent être différentes de celles données par l'analyse. Cependant, il est quelquefois possible de préciser cette phase. Par exemple, pour l'inégalité en λ_9 (donnée ci-dessus jusqu'au degré 3), la phase est principalement celle du terme de degré 1. Dans ce cas, pour une meilleure identification de ce terme, il faudrait dire que son argument est plutôt $\lambda_9 - \varpi_9$ (anomalie moyenne du Soleil) à des termes de degré 3 près. Pour information, nous donnons les phases suivantes, évaluées à la date J1980 et issues de JASON84 :

pour	λ_9 :	$176^\circ,31$
pour	ϖ_9 :	$106^\circ,79$
pour	Ω_9 :	$184^\circ,57$

5.2.3 Précision obtenue pour la solution nominale.

Le nombre maximum de termes à rechercher par l'analyse harmonique a été fixé a 35. Ce nombre n'a jamais été atteint car on avait obtenu avant cela la précision souhaitée (pour Rhéa et Titan), ou bien (pour Japet), il n'a pas été possible de poursuivre efficacement l'analyse harmonique au delà de 22, 22 et 27 termes, respectivement dans q_{o8}, $\mathcal{W}_8$ et $\mathcal{W}_{16}$.

Les résidus obtenus entre les résultats de l'intégration numérique et sa représentation sous forme de séries quasi-périodiques sont donnés dans les Figures 9 à 11 pour une durée de 2000 ans. Dans la solution des satellites Rhéa et Titan, les résidus obtenus sont de l'ordre de quelques kilomètres (jusqu'à 14 km dans la longitude moyenne de Titan). Par contre, dans la solution de Japet, les résidus atteignent la centaine de kilomètres dans $\mathcal{W}_8$ et dans $\mathcal{W}_{16}$, et 340 km dans q_{o8}. Néanmoins, on voit qu'on peut obtenir des résidus de moins de 100 km, sur une durée de 100 ans. Cette précision est nettement moins bonne que pour les autres satellites, mais il faut remarquer que 100 kilomètres dans le système de Saturne représente un angle géocentrique de $0'',015$. Nous n'avons pas réussi

à diminuer ces résidus, car lors de l'analyse, la procédure MFT a détecté de nombreux pics résiduels trop voisins de termes trouvés auparavant. A l'aide de la procédure des moindres carrés nous avons pu progresser dans l'analyse mais sans toujours réduire ces pics résiduels à un niveau acceptable pour la précision souhaitée. Dans ce cas, comme cela a été expliqué au chapitre précédent, nous avons dû masquer la partie du spectre correspondante, pour pouvoir détecter d'autres termes plus petits. Dès lors, il est clair qu'on ne peut plus espérer diminuer les résidus de manière significative puisqu'on a laissé de côté des pics résiduels encore relativement importants et qui ne contribuent donc pas à la solution nominale obtenue.

Remarquons que, dans le cas de la longitude moyenne de Japet, nous avons testé la méthode d'analyse en effectuant une deuxième analyse spectrale mais cette fois sur la série temporelle issue de la série quasi-périodique trouvée (Tableau 29a). Nous avons retrouvé ainsi tous les termes de cette série (les résidus entre ces deux séries atteignent seulement 70 mètres). Les pics résiduels, qui limitent la précision, sont donc issus de termes que la méthode n'a pu déterminer et non des termes déjà déterminés.

Ces pics résiduels peuvent s'expliquer par l'existence de très longues périodes dont la fréquence est plus petite que la fréquence fondamentale ν_o (dépendant de la durée de l'intégration numérique). Par exemple, il pourrait y avoir interférence entre termes dont les fréquences sont les suivantes (en degré par an) :

$$\dot{\phi}_6 - \dot{\phi}_8 = 0,40076$$
$$\dot{\Phi}_8 - \dot{\Phi}_6 = 0,40138$$
$$19\ \mu = 0,39140$$

Le terme d'argument $\Phi_8 - \Phi_6$ est déjà présent dans les équations relatives à la longitude moyenne de chacun des trois satellites. L'argument $\phi_6 - \phi_8$ est aussi présent dans celles relatives aux longitudes moyennes de Titan et de Japet. De plus la présence de la fréquence 19μ est probable dans la solution de ces longitudes moyennes, puisque nous l'avons détectée sous forme de combinaisons entières de λ_9 et de 19μ. Ainsi, on peut dire qu'au voisinage de la fréquence $0,4$ degré par an, il existe un groupe de pics que nous n'avons pas réussi à séparer. Il serait nécessaire d'effectuer une intégration sur une durée d'au moins 80 000 ans pour séparer la fréquence 19μ des deux autres, et de 600 000 ans pour séparer celle relative aux excentricités de celle relative aux inclinaisons. On serait alors confronté aux problèmes posés par la manipulation d'une très grande quantité de points issus de l'intégration. Mais on a vu que sur de telles durées, les termes séculaires de JASON84 ne sont plus représentatifs !

Signalons encore que pour les fréquences que nous avons dû masquer à cause de pics résiduels trop importants, nous avons tenté de représenter les termes correspondants sous une forme mixte. L'amplitude est alors recherchée sous forme d'un polynôme du temps, tandis que la fréquence est fixée à la valeur trouvée lors de l'analyse spectrale. Puisque l'on doit déterminer plusieurs polynômes qui restent simultanément en facteur d'une fonctions périodique de t, il n'est pas possible d'effectuer une simple interpolation polynômiale comme cela a été fait par Laskar (1984) lorsqu'il a cherché à représenter sous forme de polynômes du temps, l'ensemble de la solution à très longues périodes du système séculaire des planètes. Une recherche par moindres carrés est possible, mais, limitée par la durée de l'intégration, on ne peut pas atteindre des puissances élevées du temps sans augmenter les coefficients de corrélation. Par exemple, en ajustant des polynômes de degré 2, les coefficients de corrélation entre les coefficients atteignent déjà 75% sans que les résidus diminuent de manière significative. Le problème de la représentation mixte reste donc entier.

5.2.4 Solution nominale.

Les théories actuelles du mouvement des satellites de Rhéa, Titan et Japet sont issues du développement de la fonction perturbatrice en inclinaisons mutuelles et non pas, comme nous, fait en rapportant tous les plans d'orbite à un plan fixe. Il est donc difficile de comparer directement ces théories à notre solution. On peut néanmoins indiquer les inégalités que ces théories ont prises en compte. Ainsi, chez Dourneau, l'inégalité $2\lambda_9$ apparaît dans toutes les variables (sauf bien entendu dans le demi-grand axe) de Titan et de Japet. Celle en λ_9 est aussi présente dans leurs longitudes moyennes, dans l'excentricité et dans l'inclinaison de Japet. Enfin, dans cette dernière variable, les inégalités $3\lambda_9$ et $4\lambda_9$ existent aussi. Rappelons cependant, que les théories actuelles représentent une partie de l'excentricité et de l'inclinaison de Japet sous forme de polynômes du temps (cf. §3.3).

La solution de Rhéa donnée dans les Tableaux 27a à 27c montre que les termes perturbateurs sont peu nombreux. Néanmoins, il existe dans la longitude moyenne de Rhéa (où aucune perturbation n'est prise en compte jusqu'à présent), des termes à longues périodes non négligeables (respectivement 3200 et 700 ans). Remarquons que le dernier terme de la série relative à l'excentricité de Rhéa, a pour argument ϕ_6. Ce terme représente une correction de la solution de Laplace-Lagrange donnée en (3.12), qui est dûe aux termes non linéaires. Des termes semblables sont présents dans les solutions de

Titan et Japet. La présence de la fréquence μ dans la longitude moyenne indique que les perturbations indirectes de Jupiter sont déjà sensibles sur ce satellite.

Les effets indirects de Jupiter sont aussi visibles dans la solution de Titan et surtout dans celle de Japet. Si on exclut le terme n°7 de la solution q_{o8} dont l'identification est incertaine, cette influence peut atteindre au moins 150 kilomètres dans la longitude moyenne de Japet. Quant à l'influence directe de Jupiter sur le mouvement des satellites de Saturne (qui n'a pas été modélisée ici), on peut penser qu'elle est au moins 200 fois plus faible que l'effet direct du Soleil. En effet, Jupiter a une masse 1000 fois plus faible que celle du Soleil mais est 2,2 fois plus près de Saturne que celui-ci lors des conjonctions.

Remarquons enfin, que le premier terme de la longitude moyenne de Japet a une amplitude de 11° (Figure 12). Il est issu du monôme $\overline{\zeta_9} w_{16}$ et de son conjugué, dans le terme séculaire de l'équation relative à q_{o8}. Ce terme de grande amplitude n'a jamais été considéré jusqu'ici. Compte tenu de sa période (3200 ans), la partie linéaire du développement de ce terme est de l'ordre de 10^{-4} radian par an au voisinage de J1980. Elle est donc absorbée dans la détermination du moyen mouvement moyen. Cependant la partie en t^2 qui est ainsi négligée dans les théories actuelles, atteint 12 300 km au bout de 100 ans !

5.2.5 Variations de la solution nominale.

Les dérivées partielles de la solution nominale sont données dans les Tableaux 30 à 34. Comme pour les satellites intérieurs, le nombre de décimales données tient compte de la précision obtenue. Les masses de Titan et du Soleil sont les paramètres physiques les plus influents sur ce système. Mais ces masses étant bien connues (les variations maximales que nous supposons possibles sont respectivement 0.5% et 0.1%), leurs éventuelles corrections auront peu d'effet sur la solution à longues périodes de Rhéa-Titan-Japet. Quant aux variations par rapport aux conditions initiales d'un satellite, on peut remarquer qu'elles concernent principalement les variables de ce satellite. Seule la solution q_{o5} (longitude moyenne de Rhéa) est sensible aussi aux conditions initiales de Titan.

Cependant, le système Rhéa-Titan-Japet est perturbé en grande partie par un corps extérieur au système (le Soleil) dont le mouvement est supposé connu. Nous n'avons donc pas cherché les variations de la solution nominale par rapport au mouvement du Soleil. C'est pourquoi aussi, il y a peu de dérivées partielles relativement au nombre

de termes de la solution, mais, même en ce qui concerne Japet, ces dérivées partielles suffisent à maintenir la précision obtenue pour la solution nominale.

La précision de la représentation linéaire pour une variation $\Delta_{\max}$ de chacun des paramètres, a été estimée, comme pour le système des satellites intérieurs, mais sur 2000 ans correspondant à la durée de l'intégration des équations aux variations. Cette précision est donnée dans le Tableau 35 pour chacun des paramètres, avec la valeur de l'incrément $\pm\Delta$ qui a servi à calculer numériquement les dérivées partielles et celle de $\Delta_{\max}$. On rappelle que les précisions indiquées dans le Tableau 35 sont valables uniquement pour une variation du paramètre à l'intérieur de l'intervalle défini par $\Delta_{\max}$ et qu'elles devraient être à priori plus petites pour des variations du paramètre plus faibles que $\Delta_{\max}$.

5.2.6 Pentes résiduelles dans les q_{oi}.

Pour les mêmes raisons que dans le cas des satellites intérieurs, il reste une pente résiduelle dans chacune des variables q_{oi}, données dans le Tableau 36. Ici cependant, le problème est plus simple puisque le système ne contient pas d'inégalité résonnante. A l'ordre un, les variables $\tilde{p}_{oi}$ ne présentent aucune variation. A l'ordre deux, il n'y a toujours pas d'inégalité séculaire (théorème de Poisson), mais il peut y avoir des inégalités correspondant aux résonances des satellites intérieurs. En fait, à cause des troncatures effectuées, nous n'avons trouvé aucune de ces inégalités. Dans ce cadre, les variables $\tilde{p}_{o5}$, $\tilde{p}_{o6}$ et $\tilde{p}_{o8}$ sont des constantes. De plus, les dérivées partielles par rapport à ces constantes de la solution de Rhéa, de Titan et de Japet sont trouvées toutes négligeables à la troncature du kilomètre, sauf bien sûr dans le terme linéaire des variables q_{oi} (à cause de la partie en $\overline{N}_i\tilde{p}_{oi}$ conformément à l'équation (2.7)). Comme on le voit dans le Tableau 36, cette partie linéaire en t est égale, en rad/an, à :

$$\begin{array}{lll} -0,00001592 + 508,477\ \tilde{p}_{o5} & \text{dans} & q_{o5} \\ +0,00011506 + 143,948\ \tilde{p}_{o6} & \text{dans} & q_{o6} \\ -0,00015150 + \ \ 28,934\ \tilde{p}_{o8} & \text{dans} & q_{o8} \end{array}$$

En ajustant ces $\tilde{p}_{oi}$ pour annuler les pentes résiduelles, on trouve des corrections correspondant sur le demi-grand axe, à 11 mètres pour Rhéa, à 650 mètres pour Titan et à 12.4 kilomètres pour Japet. Toutefois pour ce dernier satellite, il faut tenir compte aussi du terme principal de q_{o8}, qui, comme on l'a vu, avec sa période de 3200 ans, est non négligeable pour la détermination du moyen mouvement moyen (apport de 10^{-4}

rad/an). Lors des comparaisons aux observations, les expressions issues du Tableau 36 serviront à ajuster les moyens mouvements moyens en tenant compte aussi des termes périodiques que nous avons déterminés dans les longitudes moyennes.

6. Conclusion.

Nous avons obtenu une représentation du mouvement de Mimas, d'Encelade, de Téthys, de Dioné, de Rhéa, de Titan et de Japet sous la forme d'une solution nominale et d'un ensemble de dérivées partielles premières par rapport aux paramètres physiques et aux conditions initiales. Cette solution est relative aux variables du système critique centré. Pour revenir aux variables elliptiques classiques il suffira d'effectuer les transformations successives explicites suivantes :

. $\mathcal{P} \mapsto P = \langle P \rangle + \mathcal{P}$, et $\mathcal{W} \mapsto W = \langle W \rangle + \mathcal{W}$ où $\langle P \rangle$ et $\langle W \rangle$ sont les perturbations constantes données dans les Tableaux 10 et 11.

. $W \mapsto Y$, par la transformation inverse de (4.8).

. $Y \mapsto X$, la matrice principale de ce changement de variables linéaire étant donnée dans les Tableaux 9a et 9b.

Cette dernière transformation permet d'exprimer la solution dans les variables $V_o = \tilde{p}_{oi}, q_{oi}, z_{oi}, \bar{z}_{oi}, \zeta_{oi}, \bar{\zeta}_{oi}$, qui représentent la partie à longues périodes de la dynamique des satellites de Saturne. Quant à la partie à courtes périodes, sa solution dépend explicitement de V_o. Les perturbations à courtes périodes ont été données dans les Tableaux 6 et 7, et ont été calculées avec une solution préliminaire V_o issue des théories actuelles ou du système critique linéarisé. Il suffira donc de reprendre ce calcul avec la solution du système critique complet. Cependant, cela représentera un progrés réel seulement quand cette solution aura été ajustée aux observations.

La précision de la représentation linéaire de la solution à longues périodes est estimée à quelques kilomètres pour tous les satellites sauf pour Japet (100 km sur 100 ans). Dans la solution à courtes périodes, nous avons retenu tous les termes qui produisent une perturbation supérieure à $0,1$ km (limitant ici la présentation à ceux qui sont supérieurs à 10 km). De manière générale, nous nous sommes efforcés de maintenir tout au long du calcul, la précision interne de quelques kilomètres en contrôlant la convergence des développements utilisés et en effectuant des troncatures appropriées. Par ailleurs, une caractéristique importante de la méthode est de considérer tous les satellites ensemble grâce à un seul jeu de variables et de paramètres et à un système de référence unique. Enfin, nous avons voulu obtenir une représentation analytique (représentation linéaire) car beaucoup de paramètres ou constantes d'intégration sont encore mal connus.

Seule la solution de Japet n'a pas une précision interne au niveau du kilomètre. Nous ne sommes pas parvenus à diminuer les résidus entre les résultats de l'intégration numérique et la représentation de sa solution, à un niveau plus bas que 100 km pour une durée de 100 ans. Il semble que cela soit dû à la présence de termes à très longues périodes que nous n'avons pas mis en évidence dans la solution de Japet. Il serait sans doute intéressant d'essayer d'obtenir une solution du mouvement de Japet par une méthode plus analytique, par exemple, en substituant dans les équations du système critique centré, une représentation du mouvement du Soleil, et la solution des satellites dont on dispose maintenant (en première approximation), puis, en intégrant les séries obtenues. Toutes ces manipulations pourraient se faire à l'aide du manipulateur TRIP en ayant soin toutefois d'effectuer des troncatures numériques adéquates pour éviter d'avoir à manipuler une multitude de termes négligeables. La représentation du Soleil à substituer pourrait être de deux sortes : soit, issue d'une théorie générale (sous forme quasi-périodique) de manière à mettre en évidence dans la solution de Japet tous les termes périodiques significatifs; soit, une solution mixte du type JASON84, la solution étant alors obtenue également sous forme mixte. Notons que si cette manière de faire était efficace, elle permettrait de prendre en compte les termes séculaires du Soleil. D'ailleurs, comme les équations du système critique relatives aux longitudes moyennes peuvent s'intégrer par simple quadrature, il suffirait d'y substituer formellement la solution obtenue pour les autres variables (qui semble plus précise) pour les intégrer analytiquement. On peut penser que cela réduirait notablement les résidus, d'autant que les termes séculaires du Soleil qui seraient maintenant pris en compte, interviennent à la précision des 100 km sur 100 ans.

De nouveaux termes importants ont été mis en évidence dans les solutions de Rhéa, Titan et Japet. Ce sont principalement les termes dûs aux mouvements de précession de l'orbite de Japet (donc de période 3200 ans) et certains termes issus de la solution JASON84 du Soleil. Ces derniers termes sont d'ailleurs des perturbations indirectes de Jupiter.

D'autre part, nous avons vu l'importance de connaître précisément l'excentricité de Téthys, car elle intervient directement dans les très longues périodes (jusqu'à 700 ans) trouvées dans les longitudes de Mimas et de Téthys. Dans le cas de Mimas, on a vu comment ces longues périodes pourraient être confondues avec une "accélération" en longitude. L'étude de ces éventuelles résonances séculaires mérite, de toute façon, d'être plus approndie.

Enfin, le travail important qui consiste à comparer la théorie aux observations permettra de fournir des éphémérides compatibles avec la précision des observations terrestres (jusque 350 km actuellement), et ainsi d'accéder à une meilleure connaissance des paramètres qui sont encore mal connus actuellement. Même pour Japet, on peut espérer réaliser ainsi des progrés significatifs. De toutes façons, les théories de Mimas, d'Encelade, de Dioné, de Téthys, de Rhéa et de Titan présentées ici, semblent déjà suffisamment précises pour être utilisables dans le cadre de la mission CASSINI qui se prépare.

Bibliographie

Abramowitz, M., Stegun, I.A.: 1964, 'Handbook of Mathematical Functions', Applied Mathematical Series, vol. 55 (Dover Publications, New York).

Applegate,J.H., Douglas M.R., Gürsel Y., Sussman G.J, Wisdom J.: 1986, 'The Outer Solar System for 200 Million Years', *Astron. J.* **1566,** 176–194.

Arlot,J.E.: 1982, 'New constants for the Sampson-Lieske theory of the galilean satellites of Jupiter', *Astron. Astrophys.* **107,** 305–310.

Campbell, J.K., Anderson, J.D.: 1989, 'Gravity field of the saturnian system from Pioneer and Voyager tracking data', *Astron. J.* **1600,** 1485–1495.

Carpino, M., Milani A., Nobili A.M.: 1987, 'Long-term numerical integrations and synthetic theories for the motion of the outer planets', *Astron. Astrophys.* **181,** 182–194.

Chapront, J., Bretagnon, P., Mehl, M.: 1975, 'Un formulaire pour le calcul des perturbations d'ordre élevé dans les problèmes planétaires', *Celest. Mech.* **11,** 379–399.

Chugunov, I.G.: 1983, 'New system of orbital elements of Saturn's satellites.' *Ann. Pis'ma Astron. Zh.* **9,** 508-512

Dermott S.F., Malhotra R., Murray C.D.: 1988, 'Dynamics of the Uranian and Saturnian satellite systems : A chaotic route to melting Miranda ?', *soumis à Icarus.*

Dourneau, G.: 1987, 'Observations et études du mouvement des huit premiers satellites de Saturne', *Thèse, Bordeaux.*

Duriez, L.: 1977, 'Théorie générale en variables elliptiques: Développement des équations', *Astron. Astrophys.* **54,** 93–112.

Duriez, L.: 1979, 'Approche d'une Théorie Générale Planétaire en variables elliptiques héliocentriques', *Thèse, Lille.*

Duriez L.: 1982, 'Théorie générale planétaire étendue au cas de la résonance, et application au système des satellites galiléens de Jupiter'. *Celest. Mech.* **26,** 231–255.

Duriez L.: 1983, 'Les paramètres dans une théorie générale planétaire'. *5ième Colloque du G.S. 5 (Paris), Octobre 1983*, ed. Y. Requieme (Observatoire de Bordeaux), p15–19

Duriez, L.: 1988, 'Développement de la fonction perturbatrice des problèmes planétaires à forte excentricité', *Astron. Astrophys.* **194,** 309–318.

Duriez, L.: 1989, 'Développement de la fonction perturbatrice', *Ecole de Goutelas 1989.* ed. Benest D. and Froeschle C. (Observatoire de Nice).

Duriez, L.: 1990, 'Librations de grande amplitude dans le système de satellites de Saturne', dans 'Nouveaux développements en planétologie dynamique' 105-114, *2ième Table Ronde de Planétologie Dynamique, Vars, Mars 1990.* ed. Benest D. and Froeschle C. (Observatoire de Nice).

Duriez, L., Vienne, A.: 1991, 'A general theory of motion for the eight major satellites of Saturn. I: Equations and method of resolution', accepté à *Astron. Astrophys.* .

Ferraz-Mello, S.: 1979, 'Dynamics of the galilean satellites', Sao Paulo University Press.

Harper, D., Taylor, D.B., Sinclair, A.T., Kaixian, S.: 1988, 'The theory of motion of Iapetus', *Astron. Astrophys.* **191,** 381–384.

Kozai, Y.: 1957, 'On the astronomical constants of Saturnian satellites System', *Ann. Tokyo Astron. Obs.*, V, 73.

Kozai, Y.: 1957, 'Titan and Rhea, Saturnian satellites', *Ann. Tokyo Astron. Obs.*, V107.

Jefferys, W.H., Ries, L.M.: 1979, 'Theory of Mimas and Tethys', *Astron. J.* **1486,** 1778–1782.

Laskar, J.: 1984, 'Théorie générale planétaire : éléments orbitaux des planètes sur un million d'années', *Thèse de troisième cycle, Observatoire de Paris.*

Laskar, J.: 1985, 'Accurate methods in general planetary theory', *Astron. Astrophys.* **144,** 133–146.

Laskar, J.: 1986, 'Secular terms of classical planetary theories using the results of general theory', *Astron. Astrophys.* **157,** 59–70.

Laskar, J., Jacobson, R.A.: 1987, 'GUST86: An analytical ephemeris of the Uranian satellites', *Astron. Astrophys.* **188,** 212–224.

Laskar, J.: 1988, 'Secular evolution of the solar system over 10 million years', *Astron. Astrophys.* **198,** 341–362.

Laskar, J.: 1989, 'Manipulations de séries', *Ecole de Goutelas 1989.* ed. Benest D. and Froeschle C. (Observatoire de Nice).

Laskar, J.: 1990, 'The chaotic motion of the solar system: A numerical estimate of the size of the chaotic zones', *Icarus*,**88** 266-291.

Lieske, J.H.: 1980, 'Improved ephemerides of the galilean satellites' *Astron. Astrophys.* **82,** 340–348.

Lieske, J.H.: 1987, 'Galilean Satellite evolution : Observational evidence for secular changes in mean motions' *Astron. Astrophys.* **176,** 146–158.

Morrison, D., Torrence, V.J., Shoemaker, E.M., Soderblom, L.A.,Thomas, P., Veverka, J., Smith, B.A.: 1984, 'Satellites of Saturn: geological perspectives' in 'Saturn', ed. Gehrels T. and Matthews M.S., Arizona Press

Rapaport, M.: 1977, 'Contribution à l'étude dynamique des satellites de Saturne', *Thèse, Bordeaux.*

Rapaport, M.: 1978, 'On the Theory of the motion of Iapetus', *Astron. Astrophys.* **62,** 235–238.

Sarlat, J.M.: 1990, 'Perturbations des éléments orbitaux d'un satellite sous l'effet des marées', *Stage de D.E.A., Observatoire de Paris.*

Simon, J.L., Francou G.: 1982, 'Amélioration des théories de Jupiter et Saturne par analyse harmonique', *Astron. Astrophys.* **114,** 125–130.

Simon, J.L.: 1983, 'Théorie du mouvement des 4 grosses planètes. Solution TOP82', *Astron. Astrophys.* **120,** 197–202.

Simon, J.L., Bretagnon, P.: 1984, 'Théorie du mouvement de Jupiter et Saturne sur un intervalle de temps de 6000 ans. Solution JASON84', *Astron. Astrophys.* **138,** 169–178.

Simon, J.L.: 1985, 'Perturbations du premier ordre et dérivées premières des équations du mouvement pour un couple de planètes: Formulaire et programmes de calcul', *Notes scientifiques et techniques du Bureau des Longitudes* S005

Sinclair, A.T.: 1974, 'A theory of the motion of Iapetus', *Monthly Notices Roy. Astrom. Soc.* **169**, 591-605.

Sinclair, A.T.: 1977, 'The orbits of Tethys, Dione, Rhea, Titan and Iapetus', *Monthly Notices Roy. Astrom. Soc.* **180**, 447-459.

Stellmacher I.: 1982, 'Orbites périodiques de satellites II. Libration de type Mimas-Téthys'. *Celest. Mech.* **28,** 381–400.

Struve, G.: 1930, 'Neue Untersuchengen in Saturnsystem IV' *Veröffentl Univ. Berlin-Babelsberg*, VI.

Struve, G.: 1933, 'Neue Untersuchengen in Saturnsystem VI' *Veröffentl Univ. Berlin-Babelsberg*, VI.

Struve, O.: 1898, *Pub. de l'Observatoire Central Nicolas, St Petersbourg*, **XI.**

Taylor, D.B.: 1984, 'A comparison of the theory of the motion of Hyperion with observations made during 1967-1982', *Astron. Astrophys.* **141,** 151–158.

Taylor, D.B., Sinclair, A.T., Message, P.J.: 1987, 'Corrections to the theory of the orbit of Saturn's satellite Hyperion', *Astron. Astrophys.* **181,** 383–390.

Taylor, D.B., Shen K.H.: 1988, 'Analysis of astrometric observations from 1967 to 1983 of the major satellites of Saturn', *Astron. Astrophys.* **200,** 269–278.

Tisserand, F.: 1896, 'Traité de Mécanique Céleste. Vol. IV', *Gauthier-Villars.*

Vienne, A.: 1990, 'Théorie analytique des satellites de Saturne', dans 'Nouveaux développements en planétologie dynamique' 133-142, *2ième Table Ronde de Planétologie Dynamique, Vars, Mars 1990.* ed. Benest D. and Froeschle C. (Observatoire de Nice).

Vienne, A., Duriez, L.: 1991, 'A general theory of motion for the eight major satellites of Saturn. II: the short period terms', accepté à *Astron. Astrophys.*

Whittaker,E.T. et Watson G.N.: 1952, 'A course of Modern Analysis', *Cambridge University Press.*

Woltjer, J.: 1928, 'The motion of Hyperion', *Ann. Sterw. Leiden.*, **XVI**, 3.

Tableau 1. Constantes utilisées dans la théorie analytique des satellites de Saturne. Les moyens mouvements moyens N et les masses relatives m/M_s sont ceux donnés par Dourneau (1987), à l'exception de la masse de Rhéa et de Titan, tirées de Morrison *et al.*(1984). La masse d'Hypérion est encore inconnue; la valeur donnée ici est estimée à partir de ces dimensions (en km: 205 × 130 × 110, Morrison *et al.*, 1984) et en supposant une densité de 1.4 g cm^{-3} (valeur moyenne des autres petits satellites). Le moyen mouvement moyen N du Soleil correspond à celui du mouvement héliocentrique de Saturne donné par Simon dans TOP82 (1983). La masse du Soleil provient de celle de l'IAU (3498.5 M_s), à laquelle on a retiré la masse totale des autres satellites. Les constantes p_o sont des valeurs issues d'un calcul limité au degré 3 dans l'excentricité forcée d'Encelade et au degré 0 dans les autres excentricités et inclinaisons; ce sont donc des valeurs préliminaires qui seront très légérement modifiées par la suite (voir tableau 90). Les données concernant le globe de Saturne proviennent de Campbell et Anderson (1989): $J_2 = 0.016298$, $J_4 = -0.000915$ et $J_6 = -0.000103$, pour un rayon équatorial de: $a_s = 60\ 330$ km et $I_s/M_s a_s^2 = 0.22$.

n°	corps	N (deg.j^{-1})	$\overline{A}$ (10^6 km)	$p_o \times 10^3$	$m/M_s \times 10^6$
1	Mimas	381.994497	0.1860087	−5.18966	0.0648
2	Encelade	262.7319002	0.2383971	−3.14231	0.206
3	Téthys	190.69791226	0.2949582	−2.04486	1.088
4	Dioné	131.53493193	0.3776284	−1.24307	1.954
5	Rhéa	79.69004720	0.5272026	−0.62637	4.40
6	Titan	22.57697855	1.2218767	−0.13391	236.64
7	Hypérion	16.91993829	1.4814204	−0.73393	0.03
8	Japet	4.53795125	3.5615232	−0.49562	3.7
9	Soleil	0.033459655	1429.394122	−2.51863	3499.368×10^6
10	globe de Saturne	842.92683	0.060330		1.0×10^6

Tableau 2. Illustration de l'influence de la vitesse des noeuds et des péricentres sur l'intégration des inégalités périodiques: la première évaluation (ordre 1) utilise un diviseur qui est simplement la combinaison des moyens mouvements moyens, et la seconde (diviseur complet) tient compte des vitesses séculaires des noeuds et des péricentres, dans le diviseur de chaque terme du développement de l'inégalité (diviseur différent pour chaque terme). Dans les deux cas, l'évaluation de l'amplitude reste une évaluation instantanée, calculée pour la valeur des longitudes des noeuds et des péricentres à cet instant (J1980). Dans z_7, la différence est notable car la vitesse angulaire du péricentre d'Hypérion est du même ordre de grandeur que le moyen mouvement du Soleil. Cela justifie que l'on considère les termes solaires comme critiques et non comme des termes périodiques analogues aux termes à courtes périodes. Dans λ_8 au contraire, la différence est faible, justifiant le choix fait de considérer l'inégalité $\lambda_6 - 5\lambda_8$ comme analogue aux termes à courte période.

variable	inégalité	période (jours)	amplitude (km) ordre 1	ordre 1 + diviseur complet
z_5	$-\lambda_5 + 2\lambda_6$	10.4	58.262	58.262
z_7	$2\lambda_9$	5379.6	570.217	381.303
z_8	$2\lambda_9$	5379.6	1325.709	1332.410
λ_8	$\lambda_6 - 5\lambda_8$	3192.1	441.874	441.064

Tableau 3. Nombre d'inégalités à courtes périodes qui donnent des termes supérieurs à 0.1 km dans les variables a, λ, z et ζ des satellites de Saturne, et provenant de perturbations mutuelles des autres satellites ou du Soleil (indice 9).

satellite		satellite perturbant								
perturbé	variable	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	a	.	1	1	1	–	1	–	–	–
	λ	.	6	5	4	1	2	–	–	–
	z	.	3	1	2	1	2	–	–	–
2	a	–	.	12	4	1	2	–	–	–
	λ	3	.	17	5	3	5	–	–	–
	z	2	.	13	4	3	6	–	–	–
3	a	–	4	.	11	4	4	–	–	–
	λ	–	8	.	15	6	8	–	–	–
	z	–	7	.	15	5	7	–	–	–
4	a	–	1	10	.	10	6	–	–	–
	λ	–	2	13	.	14	12	–	–	–
	z	–	3	12	.	17	13	–	–	–
	ζ	–	–	–	.	1	–	–	–	–
5	a	1	1	3	8	.	21	–	–	1
	λ	1	1	3	10	.	26	–	–	1
	z	–	3	5	11	.	28	–	–	1
	ζ	–	–	–	–	.	2	–	–	–
6	a	1	1	3	3	6	.	–	1	7
	λ	1	1	2	3	7	.	–	5	9
	z	2	3	3	5	9	.	–	6	8
	ζ	–	–	–	–	–	.	–	–	2
7	a	1	2	4	5	9	–	.	5	15
	λ	1	2	3	4	11	–	.	11	17
	z	2	3	7	8	13	–	.	9	12
	ζ	–	–	–	–	–	–	.	2	7
8	a	1	3	4	4	6	32	1	.	22
	λ	1	2	4	5	6	37	1	.	24
	z	3	3	8	8	8	39	3	.	25
	ζ	–	2	2	3	3	21	–	.	16

Tableau 4. Inégalités périodiques d'amplitude supérieure à 10 km dans la solution de Rhéa perturbé par Titan (variables a_5, λ_5 et $e_5 \cos \varpi_5$), calculées à partir de nos développements analytiques (DA) (poussés à des degrés croissants en excentricités et inclinaisons) et par l'analyse harmonique de Simon (AH) (sans limitation sur le degré). Ceci donne une bonne illustration de la convergence de ces développements.

variable	inégalité	degré	$A \times \cos$ (en km)		$A \times \sin$ (en km)	
			DA	AH	DA	AH
a_5	$2\lambda_5 - 2\lambda_6$	0	22.841678		−0.000000	
		2	22.799603	22.799509	−0.028100	−0.028049
		4	22.799515		−0.028049	
λ_5	$2\lambda_5 - 2\lambda_6$	0	0.000000		−48.850189	
		2	−0.056702	−0.056651	−48.790489	−48.791612
		4	−0.056648		−48.791548	
λ_5	$\lambda_5 - \lambda_6$	0	0.000000		−27.582945	
		2	−0.017277	−0.017351	−27.680325	−27.682541
		4	−0.017349		−27.682420	
λ_5	$3\lambda_5 - 3\lambda_6$	0	0.000000		−14.543894	
		2	−0.025146	−0.025065	−14.490090	−14.490457
		4	−0.025063		−14.490438	
$e_5 \cos \varpi_5$	$\lambda_5 - 2\lambda_6$	0	58.422749		0.000000	
		2	58.299813	58.299417	−0.102276	−0.102235
		4	58.299441		−0.102234	
$e_5 \cos \varpi_5$	$\lambda_5 - 3\lambda_6$	1	15.380361		7.995527	
		3	15.365277	15.365140	7.958894	7.958844
		5	15.365148		7.958848	
$e_5 \cos \varpi_5$	λ_6	0	−17.149401		0.000000	
		2	−17.169381	−17.168914	−0.033653	−0.033827
		4	−17.168946		−0.033823	
$e_5 \cos \varpi_5$	$2\lambda_5 - 3\lambda_6$	0	11.823429		0.000000	
		2	11.765434	11.765376	−0.029234	−0.029142
		4	11.765381		−0.029142	

Tableau 5. Nombre des inégalités qui sont déterminées, à un degré donné, avec une précision meilleure que 10 m dans les solutions de Rhéa et de Japet (toutes variables confondues): En développant les inégalités périodiques à des degrés de plus en plus élevés, leur amplitude converge vers la valeur fournie par l'analyse harmonique. Ce Tableau indique donc à partir de quel degré la précision de 10 m est atteinte pour l'ensemble des inégalités associées à chaque couple de satellite.

Rhéa	degré								
perturbé par	0	1	2	3	4	5	6	7	total
Mimas	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Encelade	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Téthys	11	11	11	11	11	11	11	11	11
Dioné	25	27	29	29	29	29	29	29	29
Titan	11	45	72	76	76	77	77	77	77
Soleil	0	0	1	2	3	3	3	3	3
global	54	90	120	125	126	127	127	127	127

Japet	degré								
perturbé par	0	1	2	3	4	5	6	7	total
Mimas	1	1	5	5	5	5	5	5	5
Encelade	1	5	10	10	10	10	10	10	10
Téthys	1	5	7	13	18	18	18	18	18
Dioné	0	5	9	15	20	20	20	20	20
Rhéa	0	5	7	16	23	23	23	23	23
Titan	0	0	5	36	75	106	124	126	129
Soleil	0	0	0	7	33	64	80	86	87
global	3	21	43	102	184	246	280	288	292

Tableau 6a. Termes à courtes périodes plus grands que 10 km dans les solutions de Mimas, Encelade, Téthys, Dioné, Rhéa, Titan et Hypérion. Pour Δa_i, les séries sont supposées exprimées en cosinus des arguments, pour $\Delta\lambda_i$ en sinus, et pour Δz_i, en exponentielles complexes. Pour obtenir ces termes, les variables z_{oi} et ζ_{oi} (dans le développement (3.8) de chaque inégalité) ont été remplacées par les expressions (3.10). Les termes marqués d'un astérisque sont implicitement présents dans les théories actuelles (Dourneau, 1987, Taylor et Shen, 1988) (voir la remarque 1 dans §3.3). Les amplitudes sont exprimées en kilomètres, les solutions $\Delta\lambda_i$ et Δz_i étant multipliées par le demi-grand axe $\overline{A}_i$ du satellite concerné (donné dans le Tableau 1). Une période négative correspond à une valeur négative de la pulsation de l'argument.

variable	argument	amplitude (km)	période (jours)	contribution principale amplitude	facteur
Δa_1	$\lambda_1 - \varpi_1^*$	18.3	0.945	18.1	$J_2 e_1^*$
$\Delta\lambda_1$ ($\times \overline{A}_1$)	$\lambda_1 - \varpi_1^*$	32.0	0.945	31.7	$J_2 e_1^*$
Δz_1 ($\times \overline{A}_1$)	λ_1	480.5 *	0.942	475.6	J_2
	$2\lambda_1 - \varpi_1^*$	13.7	0.472	13.5	$J_2 e_1^*$
Δz_2 ($\times \overline{A}_2$)	λ_2	374.4 *	1.370	372.1	J_2
Δz_3 ($\times \overline{A}_3$)	λ_3	302.1 *	1.888	300.9	J_2
	$-2\lambda_3 + 3\lambda_4$	−14.8	27.254	−14.6	m_4
$\Delta\lambda_4$ ($\times \overline{A}_4$)	$2\lambda_4 - 2\lambda_5$	−10.3	3.472	−10.2	m_5
	$\lambda_4 - \lambda_5$	−10.1	6.944	−10.1	m_5
Δz_4 ($\times \overline{A}_4$)	λ_4	235.9 *	2.737	235.3	J_2
	$-2\lambda_3 + 3\lambda_4$	11.1	27.254	11.0	m_3
Δa_5	$2\lambda_5 - 2\lambda_6$	22.8	3.152	22.8	m_6
$\Delta\lambda_5$ ($\times \overline{A}_5$)	$2\lambda_5 - 2\lambda_6$	−48.7	3.152	−48.7	m_6
	$\lambda_5 - \lambda_6$	−27.6	6.303	−27.6	m_6
	$3\lambda_5 - 3\lambda_6$	−14.4	2.101	−14.5	m_6
Δz_5 ($\times \overline{A}_5$)	λ_5	168.9 *	4.518	168.7	J_2
	$-\lambda_5 + 2\lambda_6$	58.2	−10.424	58.3	m_6
	$-\lambda_5 + 3\lambda_6 - \varpi_6^*$	17.7	−30.099	17.8	$m_6 e_{56}^*$
	λ_6	−17.2	15.945	−17.2	m_6
	$-2\lambda_5 + 3\lambda_6$	11.7	−3.928	11.8	m_6
Δa_6	$\lambda_5 - \lambda_6$	20.9	6.303	20.9	m_5
	$\lambda_4 - \lambda_6$	10.0	3.304	10.0	m_4
$\Delta\lambda_6$ ($\times \overline{A}_6$)	$\lambda_5 - \lambda_6$	14.8	6.303	14.8	m_5
Δz_6 ($\times \overline{A}_6$)	λ_6	72.9 *	15.945	72.9	J_2
	λ_5	12.3	4.518	12.3	m_5
Δa_7	$\lambda_5 - \lambda_7$	26.3	5.735	26.3	m_5
	$\lambda_7 - \varpi_7^*$	12.6	21.213	12.6	$J_2 e_7^*$
	$\lambda_4 - \lambda_7$	12.9	3.141	12.8	m_4
$\Delta\lambda_7$ ($\times \overline{A}_7$)	$\lambda_7 - \varpi_7^*$	22.0	21.213	22.1	$J_2 e_7^*$
	$\lambda_5 - \lambda_7$	19.8	5.735	19.8	m_5
	$2\lambda_7 - 2\lambda_9$	−13.1	10.659	−13.2	m_9
	$\lambda_4 - \lambda_7$	10.7	3.141	10.7	m_4
Δz_7 ($\times \overline{A}_7$)	λ_7	61.0 *	21.277	61.0	J_2
	λ_5	16.4	4.518	16.3	m_5
	$-\lambda_7 + 2\lambda_9$	11.4	−21.361	11.4	m_9

BU LILLE

Tableau 6b. Termes à courtes périodes plus grands que 10 km dans la solution Δa_8 (demi-grand axe de Japet). Les termes marqués d'un astérisque correspondent aux inégalités à courtes périodes présentes dans les théories actuelles (Dourneau, 1987, Taylor et Shen, 1988). Pour obtenir ces termes, les variables z_{oi} et ζ_{oi} (dans le développement (3.8) de chaque inégalité) ont été remplacées par les expressions (3.10). La solution est supposée exprimée en cosinus des arguments.

variable	argument	amplitude (km)	période (jours)	contribution principale amplitude	facteur
Δa_8	$\lambda_6 - \lambda_8$	3387.7 *	19.957	3386.7	m_6
	$2\lambda_8 - 2\lambda_9$	249.4 *	39.960	249.3	m_9
	$2\lambda_8 - 2\lambda_9 - \Omega_8^* + \Omega_9$	31.7 *	39.960	31.7	$m_9\gamma_8^*\gamma_9$
	$\lambda_6 - 2\lambda_8 + \varpi_8^*$	110.8	26.664	110.7	$m_6 e_8^*$
	$2\lambda_6 - \lambda_8 - \varpi_6^*$	90.5	8.864	90.4	$m_6 e_6^*$
	$\lambda_5 - \lambda_8$	84.7	4.790	84.6	m_5
	$2\lambda_8 - 3\lambda_9 + \varpi_9$	48.8	40.109	48.8	$m_9 e_9$
	$\lambda_4 - \lambda_8$	43.4	2.835	43.4	m_4
	$\lambda_6 + \lambda_8 - 2\Omega_8^*$	−39.7	13.277	−39.7	$m_6\gamma_8^{*2}$
	$\lambda_8 - \varpi_8^*$	51.8	79.336	51.8	$m_6 e_8^*$
	$\lambda_8 - \varpi_6^*$	−26.4	79.356	−26.4	$m_6 e_6^*$
	$2\lambda_6 - 2\lambda_8$	−37.9	9.978	−37.4	m_6
	$\lambda_3 - \lambda_8$	27.1	1.934	27.0	m_3
	$3\lambda_6 - 3\lambda_8$	−10.4	6.652	−10.4	m_6

Tableau 6c. Termes à courtes périodes plus grands que 10 km dans la solution $\Delta\lambda_8$ (longitude moyenne de Japet). Les termes marqués d'un astérisque correspondent aux inégalités à courtes périodes présentes dans les théories actuelles (Dourneau, 1987, Taylor et Shen, 1988). Taylor et Shen tiennent aussi compte de la grande inégalité, $\lambda_6 - 5\lambda_8$, mais leur développement n'est pas directement comparable au nôtre car il est construit en fonction de l'inclinaison mutuelle des deux orbites et non, comme nous, en fonction des deux inclinaisons. Pour obtenir ces termes, les variables z_{oi} et ζ_{oi} (dans le développement (3.8) de chaque inégalité) ont été remplacées par les expressions (3.10). La solution est supposée exprimée en sinus des arguments.

variable ($\times \bar{A}_8$)	argument	amplitude (km)	période (jours)	contribution principale amplitude	facteur
$\Delta\lambda_8$	$\lambda_6 - \lambda_8$	2595.3 *	19.957	2596.0	m_6
	$2\lambda_8 - 2\lambda_9$	−439.9 *	39.960	−440.0	m_9
	$2\lambda_8 - 2\lambda_9 - \Omega_8^* + \Omega_9$	−51.8	39.959	−51.8	$m_9\gamma_8^*\gamma_9$
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_8^* + 2\Omega_8^*$	424.5	−3189.838	426.9	$m_6 e_8^{*2}\gamma_8^{*2}$
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \varpi_6^* + \varpi_8^* + 2\Omega_8^*$	−282.9	−3222.312	−277.8	$m_6 e_6^* e_8^* \gamma_8^{*2}$
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 4\Omega_8^*$	193.8	−3156.169	197.6	$m_6\gamma_8^{*4}$
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \varpi_6^* + 3\varpi_8^*$	−67.4	−3257.414	−65.3	$m_6 e_6^* e_8^{*3}$
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_6^* + 2\Omega_8^*$	48.2	−3255.453	46.2	$m_6 e_6^{*2}\gamma_8^{*2}$
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_6^* + 2\varpi_8^*$	41.9	−3291.285	39.6	$m_6 e_6^{*2} e_8^{*2}$
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_8^* + \Omega_6^* + \Omega_8^*$	−15.7	−3159.187	−16.2	$m_6 e_8^{*2}\gamma_6^*\gamma_8^*$
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \Omega_6^* + 3\Omega_8^*$	−14.5	−3126.159	−15.1	$m_6\gamma_6^*\gamma_8^{*3}$
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 3\varpi_6^* + \varpi_8^*$	−11.4	−3325.869	−10.5	$m_6 e_6^{*3} e_8^*$
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \varpi_6^* + \varpi_8^* + \Omega_6^* + \Omega_8^*$	10.4	−3191.036	10.5	$m_6 e_6^* e_8^* \gamma_6^*\gamma_8^*$
	$\lambda_6 - \varpi_8^*$	−90.4	15.946	−90.4	$m_6 e_8^*$
	$2\lambda_8 - 3\lambda_9 + \varpi_9$	−86.2	40.109	−86.2	$m_9 e_9$
	$2\lambda_8 - 3\lambda_9 + \varpi_9 - \Omega_8^* + \Omega_9$	−10.1	40.108	−10.1	$m_9 e_9\gamma_8^*\gamma_9$
	$2\lambda_6 - \lambda_8 - \varpi_6^*$	78.7	8.864	78.7	$m_6 e_6^*$
	$\lambda_5 - \lambda_8$	78.6	4.790	78.6	m_5
	$\lambda_8 - 2\lambda_9 + \varpi_8^*$	70.2	80.513	70.3	$m_9 e_8^*$
	$2\lambda_6 - 2\lambda_8$	63.9	9.978	64.1	m_6
	$\lambda_4 - \lambda_8$	41.6	2.835	41.6	m_4
	$\lambda_3 - \lambda_8$	26.4	1.934	26.3	m_3
	$\lambda_6 + \lambda_8 - 2\Omega_8^*$	37.6	13.277	37.6	$m_6\gamma_8^{*2}$
	$\lambda_8 - \varpi_6^*$	−16.3	79.356	−16.3	$m_6 e_6^*$
	$\lambda_8 - \varpi_8^*$	11.3	79.336	11.3	$m_9 e_8^*$
	$2\lambda_8 - 2\Omega_8^*$	−10.4	39.663	−10.4	$m_9\gamma_8^{*2}$
	$2\lambda_8 - 2\Omega_9$	−49.9	39.665	−49.9	$m_9\gamma_9^2$
	$2\lambda_8 - \Omega_8^* - \Omega_9$	49.0	39.664	49.0	$m_9\gamma_8^*\gamma_9$
	$3\lambda_6 - 3\lambda_8$	15.3	6.652	15.3	m_6
	$\lambda_6 - 2\lambda_8 + \varpi_8^*$	21.8	26.664	21.8	$m_6 e_8^*$
	$\lambda_6 - 2\lambda_8 + \varpi_6^*$	−18.1	26.662	−18.1	$m_6 e_6^*$
	$\lambda_8 - 3\lambda_9 + \varpi_8^* + \varpi_9$	13.8	81.120	13.8	$m_9 e_8^* e_9$
	$2\lambda_8 - \lambda_9 - \varpi_9$	12.3	39.812	12.3	$m_9 e_9$
	$2\lambda_8 - 4\lambda_9 + 2\varpi_9$	−11.7	40.259	−11.7	$m_9 e_9^2$

Tableau 6d. Termes à courtes périodes plus grands que 10 km dans les solutions Δz_8 (excentricité et longitude du péricentre de Japet) et $\Delta\zeta_8$ (inclinaison et longitude du noeud de Japet). Les termes marqués d'un astérisque correspondent aux inégalités à courtes périodes présentes dans les théories actuelles (Dourneau, 1987, Taylor et Shen, 1988). Pour obtenir ces termes, les variables z_{oi} et ζ_{oi} (dans le développement (3.8) de chaque inégalité) ont été remplacées par les expressions (3.10). La solution est supposée exprimée en exponentielles complexes des arguments.

variable ($\times \overline{A}_8$)	argument	amplitude (km)	période (jours)	contribution principale amplitude	facteur
Δz_8	λ_6	2120.9 *	15.945	2120.6	m_6
	$-\lambda_6 + 2\lambda_8$	977.2 *	−26.665	977.2	m_6
	λ_8	915.5 *	79.331	914.5	m_6
	λ_8	−60.3 *	79.331	−60.4	m_9
	$\lambda_8 - \Omega_8^* + \Omega_9$	−14.8	79.325	−14.8	$m_9\gamma_8^*\gamma_9$
	$\lambda_8 + \Omega_8^* - \Omega_9$	−14.8	79.337	−14.8	$m_9\gamma_8^*\gamma_9$
	λ_8	22.4	79.331	22.4	J_2
	λ_8	15.9	79.331	15.9	m_5
	$-\lambda_8 + 2\lambda_9$	377.0 *	−80.518	377.2	m_9
	$-\lambda_8 + 2\lambda_9 + \Omega_8^* - \Omega_9$	47.9	−80.513	47.9	$m_9\gamma_8^*\gamma_9$
	$-\lambda_8 + 3\lambda_9 - \varpi_9$	74.0	−81.125	74.1	$m_9 e_9$
	$2\lambda_6 - \varpi_6^*$	61.6	7.973	61.6	m_6
	λ_5	60.1	4.518	60.0	m_5
	$-\lambda_6 + 5\lambda_8 - \varpi_8^* - 2\Omega_8^*$	50.7	3181.921	50.9	$m_6 e_8^* \gamma_8^{*2}$
	$-\lambda_6 + 5\lambda_8 - \varpi_6^* - 2\Omega_8^*$	−16.7	3214.233	−16.5	$m_6 e_6^* \gamma_8^{*2}$
	$-\lambda_6 + 5\lambda_8 - \varpi_6^* - 2\varpi_8^*$	−11.8	3249.158	−11.6	$m_6 e_6^* e_8^{*2}$
	$-\lambda_6 + 3\lambda_8 - \varpi_8^*$	45.8	−40.163	45.8	$m_6 e_8^*$
	$-\lambda_6 + 3\lambda_8 - \varpi_6^*$	11.8	−40.158	11.8	$m_6 e_6^*$
	$-\lambda_8 + \Omega_8^* + \Omega_9$	−45.1	−79.325	−45.1	$m_9\gamma_8^*\gamma_9$
	$-\lambda_8 + 2\Omega_9$	42.6	−79.331	42.6	$m_9\gamma_9^2$
	$-\lambda_8 + 2\Omega_8^*$	10.4	−79.320	10.4	$m_9\gamma_8^{*2}$
	$3\lambda_8 - 2\lambda_9$	41.4	26.574	41.3	m_9
	$-\lambda_6 + 2\Omega_8^*$	−38.1	−15.945	−38.1	$m_6\gamma_8^{*2}$
	$-\lambda_6 + \lambda_8 + \varpi_8^*$	−36.6	−19.957	−36.6	$m_6 e_8^*$
	$-2\lambda_6 + 3\lambda_8$	−37.8	−11.414	−37.7	m_6
	$-2\lambda_6 + 2\lambda_8 + \varpi_6^*$	24.7	−9.979	24.7	$m_6 e_6^*$
	λ_4	31.5	2.737	31.4	m_4
	$2\lambda_8 - \varpi_8^*$	27.0	39.667	27.0	$m_6 e_8^*$
	$2\lambda_8 - \varpi_6^*$	−13.6	39.672	−13.6	$m_6 e_6^*$
	$-\lambda_5 + 2\lambda_8$	22.3	−5.098	22.3	m_5
	$\lambda_6 - \lambda_8 + \varpi_8^*$	12.6	19.956	12.6	$m_6 e_8^*$
	$-\lambda_4 + 2\lambda_8$	11.2	−2.940	11.2	m_4
	$-\lambda_8 + \lambda_9 + \varpi_9$	−10.5	−79.920	−10.5	$m_9 e_9^*$
	$-\lambda_8 + 4\lambda_9 - 2\varpi_9$	10.1	−81.742	10.1	$m_9 e_9^2$
$\Delta\zeta_8$	$-\lambda_6 + \lambda_8 + \Omega_8^*$	−111.8 *	−19.956	−111.8	$m_6\gamma_8^*$
	$\lambda_6 + \lambda_8 - \Omega_8^*$	−74.4 *	13.277	−74.4	$m_6\gamma_8^*$

Tableau 7. Termes à courtes périodes les plus importants dans $\Delta\lambda_8$. Pour obtenir ces termes, les variables z_{oi} et ζ_{oi} (dans le développement (3.8) de chaque inégalité) ont été remplacées par les expressions (3.12), solutions du système séculaire linéarisé correspondant aux satellites Rhéa, Titan, Japet et au Soleil. On ne donne ici que les contributions supérieures à 10 km.

variable ($\times \overline{A}_8$)	argument	amplitude (km)	période (jours)
$\Delta\lambda_8$	$\lambda_6 - \lambda_8$	2591.8	19.9567
	$\lambda_6 - \lambda_8 - \Omega_0^* + \Omega_8^*$	−10.7	19.9571
	$\lambda_6 - \lambda_8 + \Omega_0^* - \Omega_8^*$	−10.7	19.9563
	$2\lambda_8 - 2\lambda_9$	−437.3	39.9601
	$2\lambda_8 - 2\lambda_9 - \Omega_0^* + \Omega_9^*$	−49.9	39.9601
	$2\lambda_8 - 2\lambda_9 - \Omega_8^* + \Omega_9^*$	−25.4	39.9586
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 - \varpi_6^* + \varpi_8^* + 3\Omega_0^* + \Omega_8^*$	−12.2	−3152.675
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \Omega_0^* + 3\Omega_8^*$	78.9	−3163.846
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\Omega_0^* + 2\Omega_8^*$	249.3	−3173.215
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 3\Omega_0^* + \Omega_8^*$	328.6	−3182.639
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 4\Omega_0^*$	151.7	−3192.119
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_8^* + 2\Omega_8^*$	98.5	−3192.156
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_8^* + \Omega_0^* + \Omega_8^*$	428.6	−3201.693
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_8^* + 2\Omega_0^*$	418.4	−3211.287
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_8^* + 3\Omega_0^* - \Omega_8^*$	−17.3	−3220.939
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \varpi_6^* + \varpi_8^* + 2\Omega_8^*$	−57.5	−3222.878
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \varpi_6^* + \varpi_8^* + \Omega_0^* + \Omega_8^*$	−264.5	−3232.600
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \varpi_6^* + \varpi_8^* + 2\Omega_0^*$	−258.8	−3242.381
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \varpi_6^* + \varpi_8^* + 3\Omega_0^* - \Omega_8^*$	15.2	−3252.221
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + \varpi_6^* + 3\varpi_8^*$	−76.5	−3262.160
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_6^* + \Omega_0^* + \Omega_8^*$	41.6	−3264.109
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_6^* + 2\Omega_0^*$	40.8	−3274.082
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 2\varpi_6^* + 2\varpi_8^*$	44.9	−3294.251
	$\lambda_6 - 5\lambda_8 + 3\varpi_6^* + \varpi_8^*$	−11.4	−3326.980
	$\lambda_6 - \varpi_8^*$	−94.8	15.946

Tableau 8. Valeurs maximales admises pour les paramètres Δm_i et ΔJ_i, et pour les variables e_i, γ_i et $\tilde{p}_i$. Les Δm_i et ΔJ_i représentent des écarts relatifs aux valeurs nominales m_{i0} et J_{i0} données dans le Tableau 1, c'est-à-dire respectivement: $m_i = m_{i0}(1 + \Delta m_i)$ et $J_i = J_{i0}(1 + \Delta J_i)$. Pour ces paramètres, les valeurs données représentent une majoration assez pessimiste des incertitudes qui affectent les masses m_i et les coefficients J_i. On a trouvé ces incertitudes dans les résultats publiés des théories actuelles (Dourneau, 1987, ou Taylor et Shen, 1987), issus de leur comparaison avec les observations. Pour les e_i et γ_i, les valeurs données sont des majorations des valeurs des excentricités et inclinaisons publiées dans les théories actuelles et tenant compte des incertitudes sur leur détermination. Quant aux valeurs des $\tilde{p}_i$, ils représentent une majoration des variations possibles de ces variables. Toutes ces valeurs sont uniquement utilisées pour évaluer numériquement les termes des développements en vue de leur troncature, les termes trouvés inférieurs à la précision voulue étant alors éliminés.

paramètre	valeur	variable	valeur	variable	valeur
Δm_1	0.05	e_1	0.04	γ_1	0.016
Δm_2	0.5	e_2	0.01	γ_2	0.0006
Δm_3	0.05	e_3	0.002	γ_3	0.015
Δm_4	0.05	e_4	0.0044	γ_4	0.0002
Δm_5	0.05	e_5	0.002	γ_5	0.004
Δm_6	0.0005	e_6	0.04	γ_6	0.004
Δm_7	1	e_7	0.13	γ_7	0.01
Δm_8	1	e_8	0.04	γ_8	0.15
Δm_9	0.0001	e_9	0.055	γ_9	0.24
ΔJ_2	0.001			γ_{10}	0.0001
ΔJ_4	0.05	$\tilde{p}_{i\ (i\neq 7)}$	$5.\ 10^{-4}$		
ΔJ_6	1	$\tilde{p}_7$	$1.\ 10^{-2}$		

Tableau 9a. Matrice M des vecteurs propres, relative aux excentricités.

	z_1^*	z_2^*	z_3^*	z_4^*	z_5^*	z_6^*	z_7^*	z_8^*
z_1	1.000000000	.000250940	.000187209	.000073575	.000032131	.000048349	.000000004	.000000071
z_2	−.000069896	1.000000000	.003528826	.000576445	.000178993	.000224610	.000000017	.000000327
z_3	−.000008961	−.000601443	1.000000000	.006261033	.000913863	.000847888	.000000064	.000001226
z_4	−.000001830	−.000046922	−.003084927	1.000000000	.009223208	.004034304	.000000295	.000005738
z_5	−.000000439	−.000005846	−.000160579	−.003468091	1.000000000	.033501384	.000002273	.000045608
z_6	−.000000253	−.000000777	−.000005097	−.000022373	−.000419750	1.000000000	−.000000046	.001259077
(z_7)	−.000000275	−.000000798	−.000004353	−.000012496	−.000159828	−.000046377	1.000000000	.005916292
z_8	−.000000422	−.000001185	−.000005626	−.000008993	−.000017955	−.047887508	−.000041337	1.000000000

Tableau 9b. Matrice M des vecteurs propres, relative aux inclinaisons.

	ζ_1^*	ζ_2^*	ζ_3^*	ζ_4^*	ζ_5^*	ζ_6^*	ζ_7^*	ζ_8^*
ζ_1	1.000000000	.000284152	.000251761	.000123283	.000073753	.000253922	.000000024	.000000910
ζ_2	−.000079007	1.000000000	.003872524	.000772631	.000323993	.000920763	.000000085	.000003280
ζ_3	−.000011878	−.000659685	1.000000000	.007019376	.001358112	.002814022	.000000255	.000009933
ζ_4	−.000002831	−.000062557	−.003457145	1.000000000	.011011128	.010510500	.000000925	.000036416
ζ_5	−.000000631	−.000009787	−.000237024	−.004138245	1.000000000	.064103717	.000005188	.000211325
ζ_6	−.000000026	−.000000339	−.000006007	−.000045056	−.000784524	1.000000000	−.000000226	.002983565
(ζ_7)	−.000000013	−.000000169	−.000002942	−.000021430	−.000341318	−.000099903	1.000000000	.011631007
ζ_8	−.000000001	−.000000007	−.000000125	−.000000830	−.000009162	−.111649982	−.000080915	1.000000000

Tableau 10. Valeurs des constantes p_{oi} ($\times 10^3$) et dépendance de celles-ci vis-à-vis des paramètres physiques. Il faut lire ce Tableau de la façon suivante, par exemple: $p_{o1} \times 10^3 = -5.19687 - 5.14225\Delta J_2 - 0.03814\Delta J_4 + \cdots$ etc. Ces valeurs ont été calculées analytiquement en résolvant l'équation (4.16), déterminant en même temps les excentricités forcées $\langle w_i \rangle$ données dans le Tableau 11. La dernière ligne du Tableau donne en outre la contribution du terme en J_2^2 dans le calcul des p_{oi}, ceci pour illustrer le fait qu'elle est, comme ici, généralement très comparable à celle du terme en J_4.

paramètres	p_{o1}	p_{o2}	p_{o3}	p_{o4}	p_{o5}	p_{o6}	p_{o8}
	−5.19687	−3.14706	−2.04795	−1.24504	−0.62741	−0.13419	−0.49593
ΔJ_2	−5.14225	−3.12934	−2.04522	−1.24786	−0.64023	−0.11917	−0.01403
ΔJ_4	−0.03814	−0.01410	−0.00602	−0.00224	−0.00059	−0.00002	0.00000
ΔJ_6	−0.00053	−0.00012	−0.00003	−0.00001	0.00000	0.00000	0.00000
Δm_1	0.00000	−0.00027	−0.00019	−0.00016	−0.00014	−0.00013	−0.00013
Δm_2	0.00027	0.00000	−0.00096	−0.00060	−0.00049	−0.00042	−0.00041
Δm_3	0.00047	0.00184	0.00000	−0.00459	−0.00290	−0.00228	−0.00219
Δm_4	0.00031	0.00054	0.00263	0.00001	−0.00686	−0.00421	−0.00394
Δm_5	0.00022	0.00052	0.00117	0.00359	0.00000	−0.01030	−0.00895
Δm_6	0.00085	0.00182	0.00354	0.00779	0.02388	0.00000	−0.52016
Δm_7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	−0.00009
Δm_8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00017	0.00000
Δm_9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00218	0.05404
(J_2^2)	−0.04254	−0.01583	−0.00677	−0.00252	−0.00066	−0.00002	−0.00000

Tableau 11. Valeurs des excentricités forcées $\langle w_i \rangle$ ($\times 10^3$) (Eq. 4.16), et dépendance de celles-ci vis-à-vis des paramètres physiques. Il faut lire ce Tableau de la façon suivante, par exemple: $\langle w_1 \rangle \times 10^3 = 0.19433 - 0.11933\Delta J_2 - 0.00177\Delta J_4 + \cdots$ etc. Les dérivées par rapport à Δm_7, Δm_8 et Δm_9 sont nulles à la précision du Tableau.

paramètres	$\langle w_1 \rangle$	$\langle w_2 \rangle$	$\langle w_3 \rangle$	$\langle w_4 \rangle$
	0.19433	4.78327	−0.00657	0.04371
ΔJ_2	−0.11933	−24.32616	0.00161	0.02714
ΔJ_4	−0.00177	−0.21959	0.00001	0.00017
ΔJ_6	−0.00004	−0.00278	0.00000	0.00000
Δm_1	0.00000	−0.00273	0.00000	0.00000
Δm_2	−0.00002	0.00087	0.00000	0.04371
Δm_3	0.19431	−0.05096	0.00000	0.00010
Δm_4	−0.00001	4.70138	0.00001	−0.00251
Δm_5	−0.00001	−0.00724	0.00000	0.00011
Δm_6	0.00000	−0.00003	0.00000	0.00000

Tableau 12. Pulsations des éléments propres d'Encelade, de Dioné, de Rhéa, de Titan et de Japet exprimées en degré par an. On donne les valeurs obtenues à partir des valeurs propres du système linéaire (4.23) (Solution analytique), et celles résultant de l'analyse de Fourier de trois intégrations numériques, et enfin celles tirées des observations (Dourneau). Pour Encelade-Dioné le changement de variable (4.8) a eu pour effet de décaler les fréquences fondamentales de la valeur $\nu = -N_2 + 2N_4 = 123.44123$ deg.an^{-1} qui représente le petit "diviseur" de la résonance; ainsi, pour $i = 2$ et 4, $\dot{\phi}_i$ est proche de $\dot{\varpi}_i^* - \nu$ et $\dot{\Phi}_i$ de $\dot{\Omega}_i^* - \nu$. La pulsation $\dot{\phi}_2$ de l'argument critique $\lambda_2 - 2\lambda_4 + \varpi_2$ est nulle et cet argument oscille autour de la valeur zéro avec la fréquence $\dot{\omega}_2$. Quant au système Rhéa-Titan-Japet, les fréquences $\dot{\phi}_i$ et $\dot{\Phi}_i$ (pour $i = 5$, 6 et 8) ne diffèrent de $\dot{\varpi}_i^*$ et $\dot{\Omega}_i^*$ que par l'influence des termes non linéaires.

solution:	Analytique	Intégration numérique			Dourneau (1987)	
degré:	1	3	6	6 + Soleil		
$\dot{\omega}_2$	32.742	32.762	32.762	32.762	32.39	±0.13
$\dot{\phi}_2$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	
$\dot{\phi}_4$	−92.637	−92.627	−92.627	−92.627	−92.621	±0.054
$\dot{\phi}_5$	10.059	10.061	10.060	10.058	10.057	±0.018
$\dot{\phi}_6$	0.5156	0.5180	0.5161	0.5122	0.5118	±0.0035
$\dot{\phi}_8$	0.1229	0.1025	0.1035	0.1114	—	
$\dot{\Phi}_2$	−275.765	−275.773	−275.773	−275.773	−275.71	±0.66
$\dot{\Phi}_4$	−154.223	−154.216	−154.216	−154.216	−153.71	±0.77
$\dot{\Phi}_5$	−10.055	−10.056	−10.056	−10.054	−10.057	±0.018
$\dot{\Phi}_6$	−0.521	−0.5172	−0.5159	−0.5117	−0.5118	±0.0035
$\dot{\Phi}_8$	−0.1227	−0.1173	−0.1174	−0.1103	—	

Tableau 13a. Nombre de termes obtenu dans chaque équation (4.17), après troncature au kilomètre. Ce système d'équations est celui du système critique centré.

satellite	$\frac{dP}{dt}$	$\frac{dQ}{dt}$	$\frac{d\mathcal{W}}{dt}_{exc}$	$\frac{d\mathcal{W}}{dt}_{inc}$
Mimas	314	74	48	41
Encelade	182	70	46	14
Téthys	174	56	25	45
Dioné	136	62	28	12
Rhéa	-	67	19	21
Titan	-	99	70	62
(Hypérion)	-	191	93	101
Japet	-	539	360	303

Tableau 13b. Termes non considérés dans l'intégration numérique du système critique. Pour chaque variable, on donne leur nombre et l'ordre de grandeur du plus grand d'entre eux (en km), évalué lors de la sélection des termes qu'on a faite pour construire le système critique à une précision donnée (avec les valeurs majorées données dans le Tableau 8). Ces termes ne sont sans doute pas négligeables, mais ont été écartés provisoirement pour pouvoir séparer le système des satellites en deux sous-systèmes, et ainsi pouvoir utiliser un pas d'intégration adapté à chacun d'eux. Ainsi, pour les équations relatives à Mimas, Encelade, Téthys et Dioné, les termes écartés sont des termes solaires et d'autres dépendant des variables des quatre satellites extérieurs, et pour les équations relatives à Rhéa, Titan, Hypérion et Japet ce sont les termes dépendant des variables des quatre premiers satellites; cependant, dans l'intégration numérique du sous-système Rhéa-Titan-Japet, les termes dépendant des variables d'Hypérion n'ont pas non plus été considérés.

équation relative à	nombre de termes	ordre de grandeur (km)	équation relative à	nombre de termes	ordre de grandeur (km)
$\tilde{p}_1$	2	2.	$\tilde{p}_5$	0	–
q_{o1}	6	4.	q_{o5}	2	6.
$\mathcal{W}_1$	4	15.	$\mathcal{W}_5$	0	–
$\mathcal{W}_9$	5	20.	$\mathcal{W}_{13}$	0	–
$\tilde{p}_2$	6	34.	$\tilde{p}_6$	0	–
q_{o2}	4	5.	q_{o6}	1	12.
$\mathcal{W}_2$	0	–	$\mathcal{W}_6$	0	–
$\mathcal{W}_{10}$	1	25.	$\mathcal{W}_{14}$	0	–
$\tilde{p}_3$	0	–	$\tilde{p}_7$	0	–
q_{o3}	8	9.	q_{o7}	2	21.
$\mathcal{W}_3$	2	1.	$\mathcal{W}_7$	0	–
$\mathcal{W}_{11}$	6	30.	$\mathcal{W}_{15}$	0	–
$\tilde{p}_4$	4	5.	$\tilde{p}_8$	0	–
q_{o4}	12	17.	q_{o8}	1	28.
$\mathcal{W}_4$	4	9.	$\mathcal{W}_8$	0	–
$\mathcal{W}_{12}$	4	40.	$\mathcal{W}_{16}$	1	42.

Tableau 14a. Solution relative à la variable $\tilde{p}_{o1}$ (moyen mouvement de Mimas). La série est en cosinus.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification	amplitude (km)
1	.0000276	39.063	70.636	.0889517	ω_1	3.42
2	.0000093	121.119	.616	10.1976842	ϕ_1	1.16
3	−.0000043	81.237	.622	10.1087548	$\phi_1 - \omega_1$	−.54

Tableau 14b. Solution relative à la variable q_{o1} (longitude moyenne de Mimas). La série est en sinus.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification	amplitude (km)
0	.1699965	90.000		.0000000		
1	.7590872	39.059	70.636	.0889514	ω_1	141196.85*
2	.0123864	117.182	23.545	.2668535	$3\omega_1$	2303.97*
3	.0065470	82.656	109.536	.0573619	$2\Phi_1 + \phi_3 + \omega_1$	1217.79
4	−.0045180	355.641	52.127	.1205358	$-2\Phi_1 - \phi_3 + \omega_1$	−840.38
5	−.0033787	316.370	198.892	.0315910	$-2\Phi_1 - \phi_3$	−628.46
6	.0022836	120.914	.616	10.1976787	ϕ_1	424.77
7	−.0010628	81.967	.622	10.1087233	$\phi_1 - \omega_1$	−197.69
8	.0010251	159.860	.611	10.2866323	$\phi_1 + \omega_1$	190.68
9	.0007200	78.160	35.319	.1778996	$2\omega_1$	133.93
10	.0003448	194.921	14.127	.4447679	$5\omega_1$	64.13*
11	−.0003589	121.530	42.939	.1463284	$2\Phi_1 + \phi_3 + 2\omega_1$	−66.76
12	.0002581	160.115	26.704	.2352905	$2\Phi_1 + \phi_3 + 3\omega_1$	48.02
13	−.0002675	182.113	95.194	.0660042	$\phi_1 + 4\Phi_1 + \omega_1$	−49.75
14	−.0002713	74.615	21.056	.2983993	$-2\Phi_1 - \phi_3 + 3\omega_1$	−50.46
15	−.0002318	305.305	78.410	.0801324	$-\phi_1 - 2\Phi_1 + \phi_3 + \omega_1$	−43.11
16	.0002088	198.749	.606	10.3755884	$\phi_1 + 2\omega_1$	38.84
17	.0002142	134.122	64.292	.0977283	$\phi_1 + 2\Phi_1 - \phi_3 + \omega_1$	39.84
18	.0001874	264.170	56.288	.1116266	$-\phi_1 - 4\Phi_1 + \omega_1$	34.86
19	.0002226	42.817	.627	10.0197819	$\phi_1 - 2\omega_1$	41.41
20	−.0001748	34.206	1.237	5.0786712	ϕ_3	−32.52
21	.0001498	36.490	30.005	.2094067	$-2\Phi_1 - \phi_3 + 2\omega_1$	27.87
22	.0001272	311.729	1.251	5.0212896	$-2\Phi_1 - \omega_1$	23.67
23	.0001649	93.402	710.788	.0088397	$\phi_1 + 2\Phi_1 - \phi_3$	30.68
24	−.0001162	29.993	1.208	5.1991894	$-2\Phi_1 + \omega_1$	−21.61
25	.0000821	354.000	1.259	4.9897741	$\phi_3 - \omega_1$	15.28
26	.0000868	48.421	155.305	.0404572	$\phi_1 - 2\phi_3$	16.14
27	−.0000785	71.754	1.216	5.1676901	$\phi_3 + \omega_1$	−14.59
28	−.0000655	348.762	256.986	.0244495		−12.18
29	−.0000486	4.232	.633	9.9308592	$\phi_1 - 3\omega_1$	−9.03
30	.0000439	237.319	.600	10.4645594	$\phi_1 + 3\omega_1$	8.16
31	.0000349	160.888	17.666	.3556583	$4\omega_1$	6.49
32	−.0000370	341.477	128.684	.0488266	$-\phi_1 + 2\phi_3 + \omega_1$	−6.88
33	.0000242	249.853	40.786	.1540520		4.49
34	.0000302	350.474	1.230	5.1102790	$-2\Phi_1$	5.62
35	−.0000291	198.366	19.373	.3243287	$2\Phi_1 + \phi_3 + 4\omega_1$	−5.41

Tableau 14c. Solution relative à la variable W_1 (excentricité et péricentre de Mimas). La série est en exponentielle complexe.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification	amplitude (km)
0	.0000286	179.841		.0000000		
1	.0159709	120.915	.616	10.1976777	ϕ_1	2970.73*
2	−.0073246	81.850	.622	10.1087266	$\phi_1 - \omega_1$	−1362.44
3	.0073182	159.979	.611	10.2866287	$\phi_1 + \omega_1$	1361.25
4	.0015257	199.043	.606	10.3755799	$\phi_1 + 2\omega_1$	283.79
5	.0015132	42.785	.627	10.0197755	$\phi_1 - 2\omega_1$	281.47
6	−.0003273	3.712	.633	9.9308247	$\phi_1 - 3\omega_1$	−60.89
7	.0003328	238.083	.600	10.4645312	$\phi_1 + 3\omega_1$	61.91
8	.0000723	277.067	.595	10.5534913	$\phi_1 + 4\omega_1$	13.45
9	.0000707	325.151	.638	9.8418589	$\phi_1 - 4\omega_1$	13.15
10	.0000767	203.242	.613	10.2550541	$\phi_1 + 2\Phi_1 + \phi_3 + \omega_1$	14.27
11	−.0000597	116.467	.609	10.3182110	$\phi_1 - 2\Phi_1 - \phi_3 + \omega_1$	−11.10
12	−.0000466	38.758	.620	10.1402922	$\phi_1 - 2\Phi_1 - \phi_3 - \omega_1$	−8.66
13	.0000313	124.269	.624	10.0771822	$\phi_1 + 2\Phi_1 + \phi_3 - \omega_1$	5.81
14	−.0000375	76.524	.614	10.2292908	$\phi_1 - 2\Phi_1 - \phi_3$	−6.98
15	.0000258	242.009	.607	10.3440095	$\phi_1 + 2\Phi_1 + \phi_3 + 2\omega_1$	4.80
16	.0000266	359.684	.625	10.0513394	$\phi_1 - 2\Phi_1 - \phi_3 - 2\omega_1$	4.94
17	.0000211	165.334	.618	10.1660560	$\phi_1 + 2\Phi_1 + \phi_3$	3.93
18	.0000163	280.909	.307	20.4843057	$2\phi_1 + \omega_1$	3.04
19	−.0000198	155.840	.604	10.4071552	$\phi_1 - 2\Phi_1 - \phi_3 + 2\omega_1$	−3.68
20	−.0000169	85.281	.629	9.9882266	$\phi_1 + 2\Phi_1 + \phi_3 - 2\omega_1$	−3.13
21	−.0000166	202.653	.309	20.3064075	$2\phi_1 - \omega_1$	−3.09
22	−.0000152	285.703	.644	9.7529159	$\phi_1 - 5\omega_1$	−2.83
23	.0000119	241.963	.308	20.3953655	$2\phi_1$	2.21
24	.0000157	314.943	.590	10.6424696	$\phi_1 + 5\omega_1$	2.92
25	.0000077	164.637	.311	20.2174520	$2\phi_1 - 2\omega_1$	1.43
26	−.0000086	320.401	.631	9.9623966	$\phi_1 - 2\Phi_1 - \phi_3 - 3\omega_1$	−1.61
27	.0000064	49.179	.635	9.8991987	$\phi_1 + 2\Phi_1 + \phi_3 - 3\omega_1$	1.18
28	.0000074	319.536	.305	20.5732781	$2\phi_1 + 2\omega_1$	1.38
29	−.0000066	197.336	.599	10.4960400	$\phi_1 - 2\Phi_1 - \phi_3 + 3\omega_1$	−1.22
30	.0000072	280.554	.602	10.4329696	$\phi_1 + 2\Phi_1 + \phi_3 + 3\omega_1$	1.34
31	.0000034	354.610	.585	10.7313971	$\phi_1 + 6\omega_1$	.64
32	.0000032	247.481	.650	9.6639286	$\phi_1 - 6\omega_1$	.60
33	−.0000042	238.311	−.616	−10.1976841	$-\phi_1$	−.79

Tableau 14d. Solution relative à la variable $\mathcal{W}_9$ (inclinaison et noeud de Mimas). La série est en exponentielle complexe.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification	amplitude (km)
1	.0113546	4.415	−2.459	−2.5551208	Φ_1	2112.06*
2	.0051899	43.479	−2.548	−2.4661697	$\Phi_1 + \omega_1$	965.36
3	−.0051084	325.350	−2.376	−2.6440719	$\Phi_1 - \omega_1$	−950.20
4	.0010461	286.286	−2.299	−2.7330230	$\Phi_1 - 2\omega_1$	194.59
5	.0010709	82.542	−2.643	−2.3772186	$\Phi_1 + 2\omega_1$	199.19
6	.0002330	121.575	−2.746	−2.2882670	$\Phi_1 + 3\omega_1$	43.35
7	−.0002258	247.206	−2.227	−2.8219736	$\Phi_1 - 3\omega_1$	−41.99
8	.0000541	86.722	−2.516	−2.4977439	$3\Phi_1 + \phi_3 + \omega_1$	10.07
9	.0000486	208.633	−2.158	−2.9109386	$\Phi_1 - 4\omega_1$	9.04
10	−.0000421	359.987	−2.581	−2.4345883	$-\Phi_1 - \phi_3 + \omega_1$	−7.82
11	.0000505	160.588	−2.857	−2.1993082	$\Phi_1 + 4\omega_1$	9.39
12	−.0000265	319.980	−2.490	−2.5235064	$-\Phi_1 - \phi_3$	−4.93
13	−.0000322	282.258	−2.405	−2.6125065	$-\Phi_1 - \phi_3 - \omega_1$	−5.99
14	.0000219	7.792	−2.348	−2.6756172	$3\Phi_1 + \phi_3 - \omega_1$	4.08
15	.0000184	243.249	−2.326	−2.7014607	$-\Phi_1 - \phi_3 - 2\omega_1$	3.42
16	−.0000200	243.410	−.493	−12.7528012	$-\phi_1 + \Phi_1$	−3.71
17	.0000181	125.452	−2.608	−2.4087880	$3\Phi_1 + \phi_3 + 2\omega_1$	3.36
18	−.0000138	39.366	−2.679	−2.3456424	$-\Phi_1 - \phi_3 + 2\omega_1$	−2.57
19	−.0000114	84.540	.832	7.5536176	$\phi_1 + \Phi_1 - \omega_1$	−2.13
20	.0000146	48.783	−2.429	−2.5867411	$3\Phi_1 + \phi_3$	2.72
21	.0000109	198.629	−2.977	−2.1103285	$\Phi_1 + 5\omega_1$	2.03
22	−.0000117	328.778	−2.273	−2.7645730	$3\Phi_1 + \phi_3 - 2\omega_1$	−2.17
23	−.0000104	169.215	−2.094	−2.9998775	$\Phi_1 - 5\omega_1$	−1.94
24	.0000115	164.312	.813	7.7315103	$\phi_1 + \Phi_1 + \omega_1$	2.14
25	.0000084	125.827	.822	7.6425557	$\phi_1 + \Phi_1$	1.57
26	.0000052	202.829	.803	7.8204834	$\phi_1 + \Phi_1 + 2\omega_1$	.97
27	−.0000060	203.874	−2.252	−2.7904009	$-\Phi_1 - \phi_3 - 3\omega_1$	−1.11
28	.0000050	163.977	−2.708	−2.3198254	$3\Phi_1 + \phi_3 + 3\omega_1$	.93
29	.0000053	46.624	.842	7.4646967	$\phi_1 + \Phi_1 - 2\omega_1$	.99
30	−.0000046	81.452	−2.784	−2.2567771	$-\Phi_1 - \phi_3 + 3\omega_1$	−.85
31	.0000044	293.241	−2.202	−2.8536173	$3\Phi_1 + \phi_3 - 3\omega_1$	.82

Tableau 15a. Solution relative à la variable q_{o2} (longitude moyenne d'Encelade). La série est en sinus.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification	amplitude (km)
0	.7989782	90.000		.0000000		
1	.0044700	134.090	11.048	.5687263	ω_2	1065.65*
2	.0032218	258.713	3.886	1.6168767	$-\phi_4$	768.06*
3	.0000311	157.450	1.943	3.2337527	$-2\phi_4$	7.42
4	−.0000037	32.809	2.875	2.1856027	$\omega_2 - \phi_4$	−.88

Tableau 15b. Solution relative à la variable $\mathcal{W}_2$ (excentricité et péricentre d'Encelade). La série est en exponentielle complexe.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification	amplitude (km)
1	.0001144	134.088	11.048	.5687263	ω_2	27.28
2	−.0000072	225.889	−11.048	−.5687257	$-\omega_2$	−1.72
3	−.0000073	258.740	3.886	1.6168760	$-\phi_4$	−1.73
4	−.0000067	101.286	−3.886	−1.6168766	ϕ_4	−1.61

Tableau 15c. Solution relative à la variable $\mathcal{W}_{10}$ (inclinaison et noeud d'Encelade). La série est en exponentielle complexe.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification	amplitude (km)
1	.0002286	246.688	−1.306	−4.8126720	Φ_2	54.51*

Tableau 16a. Solution relative à la variable q_{o3} (longitude moyenne de Téthys). La série est en sinus.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification	amplitude (km)
0	5.2396141	90.000		.0000000		
1	−.0355750	39.059	70.636	.0889514	ω_1	−10493.14*
2	−.0005805	117.186	23.545	.2668534	$3\omega_1$	−171.23*
3	−.0003086	82.651	109.537	.0573611	$2\Phi_1 + \phi_3 + \omega_1$	−91.03
4	.0002113	355.635	52.127	.1205359	$-2\Phi_1 - \phi_3 + \omega_1$	62.33
5	.0001625	316.186	198.846	.0315983	$-2\Phi_1 - \phi_3$	47.94
6	−.0001054	120.902	.616	10.1976791	ϕ_1	−31.08
7	.0000492	81.991	.622	10.1087229	$\phi_1 - \omega_1$	14.50
8	−.0000474	159.890	.611	10.2866313	$\phi_1 + \omega_1$	−13.99
9	.0000462	95.455	716.659	.0087673	$\phi_1 + 2\Phi_1 - \phi_3$	13.63
10	−.0000337	78.268	35.319	.1779002	$2\omega_1$	−9.95
11	−.0000161	194.950	14.127	.4447663	$5\omega_1$	−4.76*
12	.0000168	121.784	42.936	.1463377	$2\Phi_1 + \phi_3 + 2\omega_1$	4.97
13	−.0000121	160.199	26.704	.2352860	$2\Phi_1 + \phi_3 + 3\omega_1$	−3.58
14	.0000127	182.466	95.195	.0660031	$\phi_1 + 4\Phi_1 + \omega_1$	3.74
15	.0000114	304.607	78.393	.0801497	$-\phi_1 - 2\Phi_1 + \phi_3 + \omega_1$	3.36
16	.0000127	74.075	21.055	.2984135	$-2\Phi_1 - \phi_3 + 3\omega_1$	3.75
17	−.0000097	198.902	.606	10.3755897	$\phi_1 + 2\omega_1$	−2.87
18	−.0000097	133.647	64.286	.0977385	$\phi_1 + 2\Phi_1 - \phi_3 + \omega_1$	−2.85
19	−.0000087	264.725	56.293	.1116156	$-\phi_1 - 4\Phi_1 + \omega_1$	−2.58
20	−.0000104	42.766	.627	10.0197830	$\phi_1 - 2\omega_1$	−3.06
21	.0000080	32.932	1.237	5.0787060	ϕ_3	2.37
22	−.0000103	209.522	270.886	.0231949	$-\phi_1 - 4\Phi_1$	−3.04
23	−.0000070	36.876	30.006	.2093999	$-2\Phi_1 - \phi_3 + 2\omega_1$	−2.05
24	−.0000060	312.160	1.251	5.0212972	$-2\Phi_1 - \omega_1$	−1.77
25	.0000055	30.074	1.208	5.1992009	$-2\Phi_1 + \omega_1$	1.62
26	−.0000037	356.635	1.259	4.9896861	$\phi_3 - \omega_1$	−1.10
27	−.0000038	50.672	156.080	.0402562	$\phi_1 - 2\phi_3$	−1.11
28	.0000036	73.021	1.216	5.1676304	$\phi_3 + \omega_1$	1.06
29	.0000022	359.755	.633	9.9308908	$\phi_1 - 3\omega_1$	.65

Tableau 16b. Solution relative à la variable $\mathcal{W}_3$ (excentricité et péricentre de Téthys). La série est en exponentielle complexe.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification	amplitude (km)
1	.0008513	34.657	1.237	5.0786557	ϕ_3	251.09(*)
2	−.0003885	355.636	1.259	4.9897034	$\phi_3 - \omega_1$	−114.59
3	.0003882	73.723	1.216	5.1676067	$\phi_3 + \omega_1$	114.50
4	.0000806	112.555	1.195	5.2565646	$\phi_3 + 2\omega_1$	23.77
5	.0000799	316.721	1.282	4.9007481	$\phi_3 - 2\omega_1$	23.58
6	−.0000173	277.651	1.306	4.8117972	$\phi_3 - 3\omega_1$	−5.10
7	.0000176	151.472	1.175	5.3455184	$\phi_3 + 3\omega_1$	5.18
8	−.0000040	315.129	1.251	5.0212025	$-2\Phi_1 - \omega_1$	−1.19
9	.0000038	190.351	1.156	5.4344886	$\phi_3 + 4\omega_1$	1.12
10	.0000037	239.118	1.330	4.7228404	$\phi_3 - 4\omega_1$	1.10
11	.0000041	117.213	1.223	5.1360237	$2\Phi_1 + 2\phi_3 + \omega_1$	1.19
12	−.0000025	35.457	1.209	5.1990595	$-2\Phi_1 + \omega_1$	−.73

Tableau 16c. Solution relative à la variable $\mathcal{W}_{11}$ (inclinaison et noeud de Téthys). La série est en exponentielle complexe.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification	amplitude (km)
1	.0079916	355.587	2.459	2.5551207	$-\Phi_1$	2357.17*
2	−.0036456	316.522	2.548	2.4661696	$-\Phi_1 - \omega_1$	−1075.31
3	.0036482	34.651	2.376	2.6440718	$-\Phi_1 + \omega_1$	1076.06
4	.0007575	73.714	2.299	2.7330229	$-\Phi_1 + 2\omega_1$	223.43
5	.0007502	277.458	2.643	2.3772185	$-\Phi_1 - 2\omega_1$	221.28
6	−.0001621	238.378	2.746	2.2882679	$-\Phi_1 - 3\omega_1$	−47.82
7	.0001651	112.747	2.227	2.8219744	$-\Phi_1 + 3\omega_1$	48.69
8	.0000358	151.763	2.158	2.9109332	$-\Phi_1 + 4\omega_1$	10.57
9	−.0000297	351.156	2.348	2.6756533	$-3\Phi_1 - \phi_3 + \omega_1$	−8.77
10	.0000383	77.897	2.405	2.6124975	$\Phi_1 + \phi_3 + \omega_1$	11.29
11	.0000350	199.802	2.857	2.1993030	$-\Phi_1 - 4\omega_1$	10.31
12	−.0000232	273.423	2.516	2.4977353	$-3\Phi_1 - \phi_3 - \omega_1$	−6.84
13	−.0000188	311.152	2.429	2.5867351	$-3\Phi_1 - \phi_3$	−5.54
14	−.0000142	234.584	−.822	−7.6425598	$-\phi_1 - \Phi_1$	−4.18
15	.0000128	116.629	2.326	2.7014534	$\Phi_1 + \phi_3 + 2\omega_1$	3.79
16	.0000155	358.960	2.581	2.4346244	$\Phi_1 + \phi_3 - \omega_1$	4.58
17	.0000106	39.954	2.490	2.5235007	$\Phi_1 + \phi_3$	3.12
18	.0000132	234.414	2.608	2.4087811	$-3\Phi_1 - \phi_3 - 2\omega_1$	3.89
19	−.0000098	30.536	2.273	2.7645991	$-3\Phi_1 - \phi_3 + 2\omega_1$	−2.90
20	.0000081	155.483	.489	12.8417518	$\phi_1 - \Phi_1 + \omega_1$	2.40
21	−.0000083	319.944	2.679	2.3456685	$\Phi_1 + \phi_3 - 2\omega_1$	−2.46
22	−.0000081	75.712	.496	12.6638592	$\phi_1 - \Phi_1 - \omega_1$	−2.40
23	−.0000075	160.402	2.977	2.1103639	$-\Phi_1 - 5\omega_1$	−2.22
24	.0000078	189.790	2.094	2.9999133	$-\Phi_1 + 5\omega_1$	2.29
25	.0000059	117.003	.493	12.7527972	$\phi_1 - \Phi_1$	1.75
26	−.0000043	195.054	2.708	2.3198406	$-3\Phi_1 - \phi_3 - 3\omega_1$	−1.27
27	.0000038	37.810	.500	12.5749377	$\phi_1 - \Phi_1 - 2\omega_1$	1.13
28	.0000036	155.145	2.252	2.7904163	$\Phi_1 + \phi_3 + 3\omega_1$	1.05
29	.0000031	284.443	2.784	2.2566232	$\Phi_1 + \phi_3 - 3\omega_1$	.93
30	.0000037	193.992	.486	12.9307251	$\phi_1 - \Phi_1 + 2\omega_1$	1.08
31	−.0000033	72.627	2.202	2.8534641	$-3\Phi_1 - \phi_3 + 3\omega_1$	−.96

Tableau 17a. Solution relative à la variable q_{o4} (longitude moyenne de Dioné). La série est en sinus.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification	amplitude (km)
0	1.9947591	90.000		.0000000		
1	−.0003229	134.090	11.048	.5687263	ω_2	−121.94*
2	−.0002325	258.713	3.886	1.6168767	$-\phi_4$	−87.81*
3	−.0000023	157.439	1.943	3.2337532	$-2\phi_4$	−.87

Tableau 17b. Solution relative à la variable $\mathcal{W}_4$ (excentricité et péricentre de Dioné). La série est en exponentielle complexe.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification	amplitude (km)
0	.0000040	359.999		.0000000		
1	.0021634	101.287	−3.886	−1.6168766	ϕ_4	816.95*
2	−.0000055	327.195	−2.875	−2.1856029	$-\omega_2+\phi_4$	−2.09
3	.0000055	235.374	−5.995	−1.0481503	$\omega_2+\phi_4$	2.09
4	−.0000040	202.573	−1.943	−3.2337533	$2\phi_4$	−1.51

Tableau 17c. Solution relative à la variable $\mathcal{W}_{12}$ (inclinaison et noeud de Dioné). La série est en exponentielle complexe.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification	amplitude (km)
1	.0001213	13.335	−2.334	−2.6915761	Φ_4	45.81*

Tableau 18. Fréquences fondamentales du système Mimas-Encelade-Téthys-Dioné, et leurs dérivées partielles par rapport aux paramètres (paramètres physiques et conditions initiales). Le nombre de décimales indiquées tient compte de la précision obtenue (c'est-à-dire qu'on a trouvé égales, à la dernière décimale près, les deux évaluations de ces dérivées à droite et à gauche). Les points dans ce tableau indiquent que les dérivées correspondantes n'ont pas été détectées. Les paramètres Δm_6, Δm_7, Δm_8 et Δm_9 n'intervenant pas dans les équations relatives aux quatre premiers satellites, n'apparaissent donc pas dans ce Tableau.

paramètres	fréquences (en rad/an)							
	$\dot{\phi}_1$	$\dot{\Phi}_1$	$\dot{\omega}_2$	$\dot{\Phi}_2$	$\dot{\phi}_3$	$\dot{\omega}_1$	$\dot{\phi}_4$	$\dot{\Phi}_4$
	10.1976777	−2.5551208	0.5687263	−4.8126720	5.0786557	0.0889514	−1.6168766	−2.6915761
Δm_1	−0.00065	−0.000679	.	.	.	0.00365	.	.
Δm_2	0.00209	.	0.008803	.	.	0.00039	.	.
Δm_3	−0.0052	−0.00816	.	.	.	0.0372	.	.
Δm_4	0.003603	0.002092	0.052769	.	.	0.00107	.	.
Δm_5	0.00139	.	0.000774	.	.	0.00035	0.004046	.
ΔJ_2	10.0	−2.849	2.3431	.	4.84	1.57	0.515514	.
ΔJ_4	0.143	−0.04783	0.02110	.	0.055	0.0213	.	.
ΔJ_6	0.002937	−0.001046	.	.	.	0.000430	.	.
$\Delta\tilde{p}_1 \times 10^{-3}$	0.178	0.182	.	.	0.2	−1.015	.	.
Δe_1^*	0.9314	−0.111	.	.	0.4	−0.822	.	.
$\Delta\varpi_1^*$	0.00198	0.0011	.	.	.	−0.0063	.	.
$\Delta\gamma_1^*$	−2.55	−0.69	.	.	−1.1	4.72	.	.
$\Delta\Omega_1^*$	0.00378	0.004868	.	.	0.0038	−0.0180	.	.
$\Delta\tilde{p}_2 \times 10^{-3}$	.	.	1.045	.	.	.	1.32767	.
Δe_2^*	.	.	11.9	13.88	.	.	13.92	13.92
$\Delta\varpi_2^*$	.	.	0.001640	.	.	.	.	.
$\Delta\gamma_2^*$	.	.	.	0.002	.	.	.	.
$\Delta\tilde{p}_3 \times 10^{-3}$	−0.154	−0.188	.	.	.	1.013	.	.
Δe_3^*	−0.071	−0.069	.	.	0.31	−0.3923	.	.
$\Delta\varpi_3^*$	−0.000049	−0.000054	.	.	0.00084	0.00046	.	.
$\Delta\gamma_3^*$	−1.01	−1.02	.	.	−1.2	5.07	.	.
$\Delta\Omega_3^*$	0.00358	0.00380	.	.	.	−0.0171	.	.
$\Delta\tilde{p}_4 \times 10^{-3}$	.	.	−1.040	.	.	.	−1.32603	.
Δe_4^*	.	.	0.205	.	.	.	0.57	.
$\Delta\varpi_4^*$	.	.	0.00378	0.00504	.	.	0.00506	0.00506
$\Delta\gamma_4^*$	.	.	.	.	.	.	.	−0.01488

Tableau 19. Phases des arguments fondamentaux du système Mimas-Encelade-Téthys-Dioné, et leurs dérivées partielles par rapport aux paramètres (paramètres physiques et conditions initiales). Le nombre de décimales indiquées tient compte de la précision obtenue (c'est-à-dire qu'on a trouvé égales, à la dernière décimale près, les deux évaluations de ces dérivées à droite et à gauche). Les points dans ce tableau indiquent que les dérivées correspondantes n'ont pas été détectées. Les paramètres Δm_6, Δm_7, Δm_8 et Δm_9 n'intervenant pas dans les équations relatives aux quatre premiers satellites, n'apparaissent donc pas dans ce Tableau.

paramètres	Phases des arguments fondamentaux (en radian)							
	ϕ_1	Φ_1	ω_2	Φ_2	ϕ_3	ω_1	ϕ_4	Φ_4
	2.11036	0.077056	2.34031	4.30552	0.60488	3.82330	1.76779	0.232739
Δm_1	0.02409	0.0235	.	.	.	0.013	.	.
Δm_2	−0.00288	.	−0.0353	.	.	0.012	.	.
Δm_3	0.248	0.2486	.	.	.	0.211	.	.
Δm_4	−0.00773	−0.0062	−0.172	.	.	0.037	.	.
Δm_5	−0.00256	.	−0.0027	.	.	0.012	0.000051	.
ΔJ_2	−12.	0.73	−0.21	.	−6.	42.6	0.0351	.
ΔJ_4	−0.16	0.025	0.00004	.	−0.06	0.562	.	.
ΔJ_6	−0.0032	0.00063	.	.	.	0.0112	.	.
$\Delta \tilde{p}_1 \times 10^{-3}$	0.98	1.07	.	.	0.	−27.6	.	.
Δe_1^*	8.875	1.317	.	.	0.	−23.0	.	.
$\Delta \varpi_1^*$	0.952	0.0060	.	.	.	−0.17	.	.
$\Delta \gamma_1^*$	20.	30.	.	.	18.	64.	.	.
$\Delta \Omega_1^*$	−0.569	0.385	.	.	−0.57	0.209	.	.
$\Delta \tilde{p}_2 \times 10^{-3}$	.	.	−83.6	.	.	.	0.109307	.
Δe_2^*	.	.	−1098.	−36.12	.	.	−36.19	−36.22
$\Delta \varpi_2^*$	.	.	0.8702	.	.	.	.	.
$\Delta \gamma_2^*$	.	.	.	−1.9413	.	.	.	.
$\Delta \Omega_2^*$	.	.	.	0.99517	.	.	.	.
$\Delta \tilde{p}_3 \times 10^{-3}$	−1.01	−1.06	.	.	.	27.6	.	.
Δe_3^*	3.74	3.74	.	.	164.	−13.1	.	.
$\Delta \varpi_3^*$	−0.0017	−0.0017	.	.	0.94	0.021	.	.
$\Delta \gamma_3^*$	28.	27.	.	.	27.	46.	.	.
$\Delta \Omega_3^*$	−0.568	−0.561	.	.	.	0.217	.	.
$\Delta \tilde{p}_4 \times 10^{-3}$	.	.	83.2	.	.	.	−0.108901	.
Δe_4^*	.	.	−17.51	.	.	.	1.66	.
$\Delta \varpi_4^*$	.	.	−0.2072	−0.00062	.	.	0.9989	−0.00059
$\Delta \gamma_4^*$	.	.	.	.	.	.	.	−3.058
$\Delta \Omega_4^*$	.	.	.	.	.	.	.	0.99517

Tableau 20a. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution q_{o1}, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 14b.

paramètres	solution q_{o1} : termes n°						
	0	1	2	3	4	5	6
	0.1699965	0.7590872	0.0123864	0.0065470	−0.0045180	−0.0033787	0.0022836
Δm_1	0.0424	−0.0576	−0.0010	−0.0098	−0.0010		
Δm_2	−0.0005	−0.0078	−0.0004	−0.0012	−0.0004	−0.00004	−0.0000320
Δm_3	−0.033	0.0974	−0.002	−0.0624	0.010	0.0010	0.002388
Δm_4	−0.0022	−0.0236	−0.0012	−0.0034			
Δm_5	−0.0006	−0.0076					
ΔJ_2	−1.422	−29.750	−1.70	−4.68	−1.34	−0.100	−0.17050
ΔJ_4	−0.0166	−0.3980	−0.0230	−0.06358	−0.0186	−0.0012	−0.0024802
ΔJ_6	−0.0003	−0.00796	−0.00046	−0.00128			
$\Delta\tilde{p}_1(\times 10^{-3})$	0.92	19.284	1.10	3.0380	0.88	0.064	
Δe_1^*	0.80	15.990	0.90	2.482	0.72	0.054	0.0702
$\Delta\varpi_1^*$	0.0057	0.120	0.0070	0.0190	0.0054	0.00038	
$\Delta\gamma_1^*$	−0.8	−30.22	−2.06	−10.4	−0.8		0.11590
$\Delta\Omega_1^*$	−0.4598	0.3880	0.0232	0.0510	0.0060		
$\Delta\tilde{p}_3(\times 10^{-3})$	−0.92	−19.244	−1.10	−3.0320	−0.86	−0.064	
Δe_3^*	3.727	3.68	0.02	0.91350	−0.04	0.054	
$\Delta\varpi_3^*$	0.0003	−0.0124	−0.00068	−0.00148	−0.000312	−0.000100	
$\Delta\gamma_3^*$	0.1	−11.20	−1.10	−10.0	0.2	0.052	
$\Delta\Omega_3^*$	−0.4622	0.3790	0.0226	0.0486	0.0050		

Tableau 20b. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution $\mathcal{W}_1$, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 14c.

paramètres	solution $\mathcal{W}_1$: termes n°						
	1	2	3	4	5	6	7
	0.0159709	−0.0073246	0.0073182	0.0015257	0.0015132	−0.0003273	0.0003328
Δm_1	0.00016	0.00027	0.000222	0.000104	−0.000088		
Δm_2	−0.00021	0.00004	−0.000062	−0.000029	−0.000037		−0.000028
Δm_3	0.0013	0.00274	0.00236	0.00109	−0.00089	−0.000266	0.000228
Δm_4	−0.00027	0.00019	−0.000159		−0.000122		
Δm_5	−0.00012	0.00006	−0.000053				
ΔJ_2	−1.150	0.11	−0.259	−0.126	−0.13	0.004	−0.129
ΔJ_4	−0.01676	0.00124	−0.00356	−0.00176	−0.00170	0.000034	−0.00182
ΔJ_6	−0.000346	0.000023	−0.000072		−0.000034		
$\Delta\tilde{p}_1(\times 10^{-3})$	−0.245	−0.252	0.0835	0.0384	0.1098	−0.0198	0.01221
Δe_1^*	0.507	−0.589	0.4179	0.096	0.1806	−0.0328	0.0078
$\Delta\varpi_1^*$	−0.0045	−0.0015	0.0003	0.0001	0.00063	−0.00023	−0.00016
$\Delta\gamma_1^*$	0.800	0.70	0.0677	0.034	−0.267	0.018	0.016
$\Delta\Omega_1^*$	−0.00288	−0.00425	0.00255	0.00108	0.001996	−0.000350	0.000407
$\Delta\tilde{p}_3(\times 10^{-3})$	0.241	0.251	−0.0836	−0.0384	−0.1095	0.0197	−0.01245
Δe_3^*	−0.052	−0.0646	0.0022	−0.0025	0.03159		0.00232
$\Delta\varpi_3^*$	0.000144	0.000145	−0.0000664	−0.0000206	−0.000074		−0.0000137
$\Delta\gamma_3^*$	0.391	0.52	0.207	0.096	−0.190	−0.014	0.019
$\Delta\Omega_3^*$	−0.00273	−0.00409	0.00254	0.00105	0.001950		

Tableau 20c. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution $\mathcal{W}_9$, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 14d.

paramètres	solution $\mathcal{W}_9$: termes n°						
	1	2	3	4	5	6	7
	0.0113546	0.0051899	−0.0051084	0.0010461	0.0010709	0.0002330	−0.0002258
Δm_1	0.00011	−0.0001875	−0.00016	0.0000741	−0.000060		
Δm_3	0.00119	−0.001966	−0.00163	0.0007640	−0.00063	0.000176	−0.000182
Δm_4	−0.00003	−0.0001642	0.00010		−0.000089		
ΔJ_2	0.535	−0.322	0.0674	−0.029	−0.1251	−0.026	−0.0059
ΔJ_4	0.00817	−0.004516	0.00081	−0.00035	−0.00170	−0.00037	−0.000157
ΔJ_6	0.000173	−0.0000923	0.000015				
$\Delta\tilde{p}_1(\times 10^{-3})$	−0.173	0.1774	−0.058	0.0263	0.0768	0.0137	−0.0086
Δe_1^*	−0.116	0.1411	−0.051	0.02319	0.0627	0.0109	−0.00913
$\Delta\varpi_1^*$	−0.00108	0.00110	−0.00037	0.00017	0.00048	0.00009	−0.000054
$\Delta\gamma_1^*$	1.196	−0.100	−0.3881	0.0842	−0.096	0.005	−0.003
$\Delta\Omega_1^*$	−0.00410	0.002963	−0.001652	0.000644	0.001357	0.000312	−0.000122
$\Delta\tilde{p}_3(\times 10^{-3})$	0.173	−0.1772	0.058	−0.0262	−0.0766	−0.0137	0.0085
Δe_3^*	−0.0367	0.04528	−0.0013	−0.0018	0.0222		−0.00160
$\Delta\varpi_3^*$	0.000102	−0.000102	0.0000462	−0.0000140	−0.000052		
$\Delta\gamma_3^*$	0.268	−0.365	−0.141	0.0664	−0.133	0.009	−0.013
$\Delta\Omega_3^*$	−0.00193	0.00290	−0.001780	0.000726	0.001368		

Tableau 21a. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution q_{o2}, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 15a.

paramètres	solution q_{o2} : termes n° 0	1	2
	0.7989782	0.0044700	0.0032218
Δm_2	0.0000041	−0.000140	0.0000168
Δm_4	−0.0002401	0.003542	0.0029818
Δm_5		−0.0000178	0.0000172
ΔJ_2	0.02893	−0.03816	0.00212
ΔJ_4	0.0002514	−0.000340	0.0000070
$\Delta \tilde{p}_2(\times 10^{-3})$	0.01941	−0.38020	0.00642
Δe_2^*	−28.77	35.22	0.066926
$\Delta \varpi_2^*$	0.002681	0.000068	
$\Delta \gamma_2^*$	−0.00019		
$\Delta \gamma_3^*$	−0.000039		
$\Delta \tilde{p}_4(\times 10^{-3})$	−0.01932	0.37848	−0.00640
Δe_4^*	1.49039	−0.1246	1.52426
$\Delta \varpi_4^*$	−0.00062	−0.001118	0.00002

Tableau 21b. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution $\mathcal{W}_2$, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 15b.

paramètres	solution $\mathcal{W}_2$: termes n° 1	2
	0.0001144	−0.0000072
Δe_2^*	0.1335	−0.89779

Tableau 21c. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution $\mathcal{W}_{10}$, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 15c.

paramètres	solution $\mathcal{W}_{10}$: terme n° 1
	0.0002286
Δe_2^*	0.000
$\Delta \gamma_2^*$	0.9999727
$\Delta \Omega_2^*$	0.00000
$\Delta \varpi_4^*$	0.0000000

Tableau 22a. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution q_{o3}, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 16a.

paramètres	solution q_{o3} : termes n°					
	0	1	2	3	4	5
	5.2396141	−0.0355750	−0.0005805	−0.0003086	0.0002113	0.0001625
Δm_1	0.02070	−0.03056	−0.00042	−0.001430	−0.000914	−0.000080
Δm_2	0.00002	0.000370	0.00002	0.000056	0.00002	0.000002
Δm_3	−0.0211	0.02870	0.00052	0.00484	0.00052	0.00004
Δm_4	0.00010	0.001112		0.000156		
Δm_5	0.00003	0.000356				
ΔJ_2	0.06783	1.4056	0.080	0.2214	0.064	0.0046
ΔJ_4	0.00079	0.018804	0.00108	0.003004	0.00088	0.000056
ΔJ_6	0.000015	0.000376				
$\Delta\tilde{p}_1(\times 10^{-3})$	−0.044	−0.9112	−0.052	−0.14352	−0.042	−0.0030
Δe_1^*	−0.039	−0.7540	−0.042	−0.1172	−0.034	−0.0026
$\Delta\varpi_1^*$	−0.00027	−0.0056	−0.00032	−0.00090	−0.000252	−0.0000182
$\Delta\gamma_1^*$	0.04	1.428	0.098	0.50	0.04	
$\Delta\Omega_1^*$	0.02173	−0.01834	−0.001096	−0.00242	−0.00028	
$\Delta\tilde{p}_3(\times 10^{-3})$	0.044	0.9094	0.052	0.14324	0.042	0.0030
Δe_3^*	−0.1711	−0.1768	−0.0006	−0.04354	0.0020	−0.0026
$\Delta\varpi_3^*$	−0.00001	0.000586	0.000032	0.000070	0.0000148	0.0000046
$\Delta\gamma_3^*$	0.00	0.528	0.052	0.48	0.00	−0.0024
$\Delta\Omega_3^*$	0.021839	−0.01792	−0.001072	−0.002294		

Tableau 22b. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution $\mathcal{W}_3$, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 16b.

paramètres	solution $\mathcal{W}_3$: termes n°		
	1	2	3
	0.0008513	−0.0003885	0.0003882
ΔJ_2	−0.021	0.014	−0.0103
ΔJ_4	−0.00020	0.00020	−0.00013
$\Delta\tilde{p}_1(\times 10^{-3})$	−0.013	−0.013	0.0046
Δe_1^*	−0.013	−0.011	0.0037
$\Delta\varpi_1^*$		−0.000084	0.000029
$\Delta\gamma_1^*$	0.031	0.035	0.0021
$\Delta\Omega_1^*$	−0.00015	−0.00023	0.000137
Δe_3^*	0.822	−0.363	0.3563
$\Delta\varpi_3^*$	−0.00015	0.00001	−0.00001
$\Delta\gamma_3^*$	0.022	0.028	0.0107

Tableau 22c. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution $\mathcal{W}_{11}$, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 16c.

paramètres	solution $\mathcal{W}_{11}$: termes n°						
	1	2	3	4	5	6	7
	0.0079916	−0.0036456	0.0036482	0.0007575	0.0007502	−0.0001621	0.0001651
Δm_1	0.00008	−0.000021	−0.0000460	−0.000021	0.0000484		
Δm_3	0.00078	−0.000213	−0.000477	−0.000212	0.000506	−0.000078	0.000264
Δm_4	0.00031	0.000046	−0.0000973		−0.0000174		
ΔJ_2	−0.003	0.1812	−0.15131	−0.0761	−0.0417	0.0259	0.0016
ΔJ_4	−0.00073	0.002642	−0.002074	−0.001033	−0.000593	0.000386	0.000045
ΔJ_6	−0.000021	0.0000549	−0.0000420	−0.0000208			
$\Delta \tilde{p}_1 (\times 10^{-3})$	−0.121	−0.078465	0.0906	0.04582	0.021305	−0.00902	0.0033
Δe_1^*	−0.119	−0.05911	0.0736	0.0374	0.0169494	−0.00636	0.0035
$\Delta \varpi_1^*$	−0.00076	−0.00049	0.00057	0.00029	0.000134	−0.000057	0.000021
$\Delta \gamma_1^*$	0.289	0.112	−0.192	−0.095	0.0049	0.0087	0.0148
$\Delta \Omega_1^*$	−0.00143	−0.00183	0.001664	0.000886	0.0005323	−0.0002003	0.000092
$\Delta \tilde{p}_3 (\times 10^{-3})$	0.121	0.078451	−0.0904	−0.04574	−0.021283	0.00903	−0.0033
Δe_3^*	−0.0254	−0.01682	0.021182	0.01289	0.00004	−0.00243	
$\Delta \varpi_3^*$	0.000071	0.000053	−0.000054	−0.000032	−0.0000119		
$\Delta \gamma_3^*$	1.013	−0.3437	0.208	0.021	0.106	−0.0111	0.0366
$\Delta \Omega_3^*$	−0.00283	−0.0015889	0.0015042	0.0008135	0.0004143		

Tableau 23a. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution q_{o4}, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 17a.

paramètres	solution q_{o4} : termes n°		
	0	1	2
	1.9947591	−0.0003229	−0.0002325
Δm_2	0.0000001	−0.0003618	−0.0002804
Δm_4	−0.0000160	0.000078	−0.0000070
ΔJ_2	−0.00241	0.00318	−0.000178
$\Delta \tilde{p}_2(\times 10^{-3})$	−0.001623	0.03170	−0.000540
Δe_2^*	2.399	−2.936	−0.006
$\Delta \varpi_2^*$	−0.0002236		
$\Delta \gamma_3^*$	0.0000063		
$\Delta \tilde{p}_4(\times 10^{-3})$	0.001617	−0.03156	0.000540
Δe_4^*	−0.12476	0.01040	−0.1275444
$\Delta \varpi_4^*$	0.000052	0.0000932	−0.000002
$\Delta \gamma_4^*$	−0.0000005		

Tableau 23b. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution $\mathcal{W}_4$, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 17b.

paramètres	solution $\mathcal{W}_4$: terme n° 1
	0.0021634
Δm_5	−0.0000001
ΔJ_2	−0.00002
$\Delta \tilde{p}_2(\times 10^{-3})$	−0.00003
Δe_2^*	−0.0010
$\Delta \tilde{p}_4(\times 10^{-3})$	0.00003
Δe_4^*	0.9999
$\Delta \varpi_4^*$	0.00000

Tableau 23c. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution $\mathcal{W}_{12}$, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 17c.

paramètres	solution $\mathcal{W}_{12}$: terme n° 1
	0.0001213
Δe_2^*	0.000
$\Delta \varpi_4^*$	0.0000000
$\Delta \gamma_4^*$	0.9999719
$\Delta \Omega_4^*$	0.00000

Tableau 24a. La ligne 1 donne les écarts maxima observés sur 1 siècle entre l'intégration numérique du système Mimas-Encelade-Thétys-Dioné, et sa représentation fournie par l'analyse harmonique (solution nominale). Les lignes suivantes donnent les écarts maxima sur 1 siècle, entre l'intégration numérique et la représentation linéaire de la théorie (exprimée par les dérivées partielles d'ordre 1 de la solution au voisinage de la solution nominale). Plus précisément, ces écarts sont obtenus en comparant la représentation linéaire calculée pour la valeur $\Delta_{\max}$ de chaque paramètre, à une intégration numérique tenant compte du changement de valeur de ce paramètre. Quant à la valeur $\pm\Delta$ donnée en colonne 2, elle représente, pour chaque paramètre, l'incrément qui a servi pour calculer numériquement la dérivée partielle d'ordre 1, à droite et à gauche, par rapport à ce paramètre.

	paramètres		solutions (écarts, en km)											
	$\pm\Delta$	$\Delta_{\max}$	q_{o1}	$\mathcal{W}_1$	$\mathcal{W}_9$	q_{o2}	$\mathcal{W}_2$	$\mathcal{W}_{10}$	q_{o3}	$\mathcal{W}_3$	$\mathcal{W}_{11}$	q_{o4}	$\mathcal{W}_4$	$\mathcal{W}_{12}$
			40.	3.	2.5	0.5	0.2	0.5	3.	2.	2.3	0.2	0.07	0.4
Δm_1	$5.\ 10^{-3}$	$5.\ 10^{-2}$	47.	12.	7.5	3.5	0.2	0.5	19.	7.	9.2	0.4	0.07	0.4
Δm_2	$5.\ 10^{-3}$	$5.\ 10^{-1}$	77.	44.	65.	19.	12.	1.4	7.	24.	55.	67.	22.	1.2
Δm_3	$1.\ 10^{-3}$	$5.\ 10^{-2}$	617.	119.	90.	34.	0.8	1.8	106.	52.	77.	17.	10.	0.4
Δm_4	$5.\ 10^{-3}$	$5.\ 10^{-2}$	69.	10.	6.2	21.	7.3	0.5	7.	11.	6.8	0.9	9.5	0.7
Δm_5	$5.\ 10^{-3}$	$5.\ 10^{-2}$	54.	7.	8.1	1.6	0.3	0.5	4.	4.	13.	2.5	0.2	1.2
ΔJ_2	$5.\ 10^{-5}$	$1.\ 10^{-3}$	1571.	414.	204.	2.4	6.7	14.	141.	29.	133.	0.4	0.9	2.6
ΔJ_4	$2.\ 10^{-3}$	$5.\ 10^{-2}$	840.	300.	143.	0.8	3.1	6.3	80.	19.	89.	23.	7.4	0.4
ΔJ_6	$2.\ 10^{-2}$	$1.\ 10^{-1}$	55.	15.	7.0	5.8	0.3	0.6	6.	4.	5.2	1.4	0.1	0.4

Tableau 24b. La ligne 1 donne les écarts maxima observés sur 1 siècle entre l'intégration numérique du système Mimas-Encelade-Thétys-Dioné, et sa représentation fournie par l'analyse harmonique (solution nominale). Les lignes suivantes donnent les écarts maxima sur 1 siècle, entre l'intégration numérique et la représentation linéaire de la théorie (exprimée par les dérivées partielles d'ordre 1 de la solution au voisinage de la solution nominale). Plus précisément, ces écarts sont obtenus en comparant la représentation linéaire calculée pour la valeur Δ_{max} de chaque paramètre, à une intégration numérique tenant compte du changement de valeur de ce paramètre. Quant à la valeur $\pm\Delta$ donnée en colonne 2, elle représente, pour chaque paramètre, l'incrément qui a servi pour calculer numériquement la dérivée partielle d'ordre 1, à droite et à gauche, par rapport à ce paramètre.

paramètres			solutions (écarts, en km)											
	$\pm\Delta$	Δ_{max}	q_{o1}	$\mathcal{W}_1$	$\mathcal{W}_9$	q_{o2}	$\mathcal{W}_2$	$\mathcal{W}_{10}$	q_{o3}	$\mathcal{W}_3$	$\mathcal{W}_{11}$	q_{o4}	$\mathcal{W}_4$	$\mathcal{W}_{12}$
			40.	3.	2.5	0.5	0.2	0.5	3.	2.	2.3	0.2	0.07	0.4
$\Delta\tilde{p}_1 \times 10^{-3}$	$5.\ 10^{-5}$	$1.\ 10^{-3}$	825.	57.	41.	0.6	0.2	0.5	62.	14.	47.	0.2	0.07	0.4
Δe_1^*	$5.\ 10^{-5}$	$1.6\ 10^{-3}$	2156.	151.	69.	1.6	0.2	0.5	159.	18.	64.	7.3	0.07	0.4
$\Delta\varpi_1^*$	$4.5\ 10^{-2}$	$4.5\ 10^{-2}$	247.	44.	18.	0.5	0.2	0.5	18.	5.	20.	0.2	0.07	0.4
$\Delta\gamma_1^*$	$6.\ 10^{-5}$	$3.\ 10^{-4}$	413.	128.	66.	4.3	0.2	0.5	44.	14.	72.	0.3	0.07	0.4
$\Delta\Omega_1^*$	$1.\ 10^{-2}$	$2.6\ 10^{-2}$	183.	25.	23.	0.5	0.2	0.5	14.	5.	20.	0.2	0.07	0.4
$\Delta\tilde{p}_2 \times 10^{-3}$	$1.\ 10^{-5}$	$5.\ 10^{-4}$	40.	3.	2.5	8.8	2.9	3.9	3.	2.	2.3	1.2	0.5	3.3
Δe_2^*	$5.\ 10^{-5}$	$5.\ 10^{-5}$	40.	3.	2.5	41.	1.0	0.6	3.	2.	2.3	5.5	1.9	0.5
$\Delta\varpi_2^*$	$3.4\ 10^{-3}$	$3.4\ 10^{-3}$	40.	3.	2.5	0.9	0.3	0.5	3.	2.	2.3	0.7	0.6	0.4
$\Delta\gamma_2^*$	$1.\ 10^{-4}$	$1.\ 10^{-4}$	40.	3.	2.5	7.4	0.2	0.7	3.	2.	2.3	1.3	0.2	0.4
$\Delta\Omega_2^*$	0.17	0.17	40.	3.	2.5	0.5	0.2	1.0	3.	2.	2.3	0.2	0.07	0.4
$\Delta\tilde{p}_3 \times 10^{-3}$	$5.\ 10^{-5}$	$1.\ 10^{-3}$	775.	101.	75.	0.8	0.2	0.5	56.	2.	72.	0.4	0.07	0.4
Δe_3^*	$1.\ 10^{-4}$	$5.\ 10^{-4}$	108.	13.	8.9	1.8	0.2	0.5	34.	67.	11.	1.2	0.07	0.4
$\Delta\varpi_3^*$	0.17	0.17	122.	9.	6.7	0.5	0.2	0.5	10.	12.	8.2	0.2	0.07	0.4
$\Delta\gamma_3^*$	$5.\ 10^{-5}$	$3.\ 10^{-4}$	373.	106.	77.	0.9	0.2	0.5	74.	14.	56.	0.5	0.13	0.4
$\Delta\Omega_3^*$	$8.\ 10^{-3}$	$8.\ 10^{-3}$	53.	10.	7.1	0.5	0.2	0.5	4.	5.	7.7	0.2	0.07	0.4
$\Delta\tilde{p}_4 \times 10^{-3}$	$1.\ 10^{-5}$	$5.\ 10^{-4}$	40.	3.	2.5	8.3	3.0	3.7	3.	2.	2.3	1.3	0.05	3.2
Δe_4^*	$1.\ 10^{-4}$	$6.\ 10^{-4}$	40.	3.	2.5	183.	2.2	2.3	6.	2.	2.3	2.4	3.9	2.0
$\Delta\varpi_4^*$	$5.\ 10^{-2}$	0.2	40.	3.	2.5	684.	4.4	0.6	3.	2.	2.3	92.	18.	0.5
$\Delta\gamma_4^*$	$4.\ 10^{-5}$	$4.\ 10^{-5}$	40.	3.	2.5	0.5	0.2	0.5	3.	2.	2.3	0.6	0.07	0.6
$\Delta\Omega_4^*$	0.17	0.17	40.	3.	2.5	0.5	0.2	0.5	3.	2.	2.3	0.2	0.07	0.8

Tableau 25. Pentes résiduelles dans les solutions q_{o1}, q_{o2}, q_{o3} et q_{o4} (ligne 1) et dérivées partielles de ces pentes par rapport aux paramètres (lignes suivantes).

paramètres	solutions (pentes, en rad/an)			
	q_{o1}	q_{o2}	q_{o3}	q_{o4}
	−0.004407	0.000107	−0.002809	−0.000010
Δm_1	0.00231	.	0.001157	.
Δm_2	0.00092	−0.0000855	−0.0000468	−0.0002384
Δm_3	−0.00198	.	−0.00115	.
Δm_4	0.00275	0.002197	−0.0001159	0.0000414
Δm_5	0.00088	.	−0.0000398	.
ΔJ_2	3.44528	−0.006717	−0.1648477	0.0005708
ΔJ_4	0.04598	−0.0000624	−0.002197	.
ΔJ_6	0.000918	.	−0.0000438	.
$\Delta\tilde{p}_1(\times 10^{-3})$	0.1976	.	0.10656	.
Δe_1^*	0.291	.	0.02780	.
$\Delta\varpi_1^*$	−0.00010	.	0.0000013	.
$\Delta\gamma_1^*$	−0.39	.	−0.0982	.
$\Delta\Omega_1^*$	0.00007	.	−0.0000053	.
$\Delta\tilde{p}_2(\times 10^{-3})$	.	1.37936	.	0.0252254
Δe_2^*	.	11.87	.	−0.994
$\Delta\varpi_2^*$	.	0.001683	.	−0.0001410
$\Delta\gamma_2^*$	.	−0.014	.	.
$\Delta\tilde{p}_3(\times 10^{-3})$	2.2497	.	1.11267	.
Δe_3^*	−0.100	.	0.0194	.
$\Delta\varpi_3^*$	0.00002	.	−0.000061	.
$\Delta\gamma_3^*$	−0.66	0.00511	−0.3037	−0.001835
$\Delta\Omega_3^*$	0.000058	.	−0.0000006	.
$\Delta\tilde{p}_4(\times 10^{-3})$	.	0.30117	.	0.8148297
Δe_4^*	.	0.492	.	−0.033888
$\Delta\varpi_4^*$	.	0.00433	.	−0.000366
$\Delta\gamma_4^*$	.	.	.	−0.0018

Test de validité de la représentation linéaire pour son usage dans l'ajustement de la théorie à des observations.

Tableau 26a. Valeurs des masses d'Encelade, de Téthys, de Dioné, du coefficient d'aplatissement J2, et de la condition initiale $\tilde{p}_{o1}$ ajustées en imposant à quelques constantes de la théorie (précisées dans le Tableau 26b), une valeur fixée proche des valeurs données par les théories actuelles (Kozai 1957, Dourneau 1987). Les valeurs de départ sont celles déjà données dans le Tableau 1. La valeur UAI du J_2 de Saturne est aussi donnée pour mémoire, et est exprimée en tenant compte d'un rayon équatorial de 60300 km, comme pour l'évaluation de Campbell et Anderson (1989).

	m_2	m_3	m_4	J_2	$\tilde{p}_{o1} \times 10^3$
valeur de départ	0.206	1.088	1.954	0.016298	0.0121
valeur ajustée	0.1743	1.097	1.909	0.016294	0.0114
Dourneau	0.206	1.088	1.954	–	
	±0.055	±0.031	±0.058		
Kozai	0.148	1.095	2.039	–	
	±0.041	±0.015	±0.036		
Campbell et Anderson	–	1.186	–	0.016298	
		±0.264		±0.000010	
U.A.I. (1976)	–	–	–	0.01627	

Tableau 26b. Constantes de la théorie choisies pour l'ajustement des masses et du J_2. Les constantes A_1, A_2 et A_3 représentent ici respectivement les amplitudes du plus gros terme (libration) dans la longitude moyenne de Mimas, d'Encelade et de Dioné. Partant des valeurs de A_1, A_2, A_3, $\dot{\omega}_1$, $\dot{\phi}_1$, $\dot{\omega}_2$ et $\dot{\Phi}_1$, obtenues par analyse harmonique de la première intégration numérique (ligne "AH1"), on a ajusté les masses, le J_2 et la condition initiale $\tilde{p}_{o1}$ sur des valeurs données (ligne "conditions"), utilisant pour cela les dérivées partielles de ces quantités par rapport à ces paramètres. La ligne "RL" donne les valeurs fournies par la représentation linéaire utilisant les nouvelles valeurs des paramètres. La ligne "AH2" donne, en comparaison, les valeurs obtenues à l'issue d'une deuxième intégration numérique tenant compte de ces changements de masses, deJ_2 et de la condition initiale $\tilde{p}_{o1}$. On donne enfin les déterminations de ces quantités faites par d'autres auteurs.

	A_1 (deg)	$\dot{\omega}_1$ (deg/an)	$\dot{\phi}_1$ (deg/an)	A_2 (min)	A_3 (min)	$\dot{\omega}_2$ (deg/an)	$\dot{\Phi}_1$ (deg/an)
AH1	43.79	5.062	584.436	15.55	1.30	32.76	146.427
conditions	43.57	5.095	584.214	15.40	1.29	32.50	146.415
RL	43.57	5.095	584.274	15.38	1.11	32.58	146.391
AH2	43.49	5.096	584.284	15.37	1.11	32.58	146.398
Dourneau (1987)	43.57	5.095	584.214	15.4	1.29	32.39	146.418
	±0.13	±0.014	±0.061	±1.	±0.42	±0.13	±0.03
Kozai (1957)	43.41	5.062	584.233	15.38	0.88	32.73	146.403
	±0.12	±0.011	±0.036	±0.88	±0.25	±0.14	±0.05

Tableau 27a. Solution relative à la variable q_{o5} (longitude moyenne de Rhéa). La série est en sinus.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification proposée	amplitude (km)
0	6.2214451	90.000		.0000000		
1	−.0004632	75.766	3263.100	.0019255	$-\Phi_8$	−244.21
2	−.0002635	13.177	703.472	.0089317	$-\Phi_6$	−138.92
3	.0000615	210.089	35.805	.1754843	$-\Phi_5$	32.41
4	.0000639	164.150	14.729	.4265982	$2\lambda_9$	33.69
5	.0000469	252.650	29.457	.2132991	λ_9	24.75
6	.0000177	297.736	351.309	.0178851	$2\phi_6$	9.34
7	−.0000183	193.985	37.727	.1665451	$-\Phi_5+\Phi_6$	−9.65
8	.0000095	42.687	166.200	.0378050	$\Phi_5+\lambda_9$	4.99
9	.0000087	236.819	9.819	.6398959	$3\lambda_9$	4.59
10	.0000045	241.921	906.041	.0069348	$19\mu\ /\ -\Phi_6+\Phi_8$	2.35
11	−.0000035	158.333	1749.731	.0035909	$-2\Phi_8$	−1.83
12	.0000017	61.013	30.433	.2064581	$\lambda_9-19\mu$	.91
13	−.0000017	135.791	36.202	.1735580	$-\Phi_5+\Phi_8$	−.89
14	.0000012	179.562	56.936	.1103553	$2\lambda_9-880\mu$	.64

Tableau 27b. Solution relative à la variable $\mathcal{W}_5$ (excentricité et péricentre de Rhéa). La série est en exponentielle complexe.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification proposée	amplitude (km)
0	.0000002	139.172		.0000000		
1	.0002371	8.787	35.791	.1755497	ϕ_5	124.99
2	.0000048	19.648	15.044	.4176579	$-\phi_6+2\lambda_9$	2.50
3	.0000021	153.765	702.679	.0089418	ϕ_6	1.12

Tableau 27c. Solution relative à la variable $\mathcal{W}_{13}$ (inclinaison et noeud de Rhéa). La série est en exponentielle complexe.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification proposée	amplitude (km)
0	.0000595	184.578		.0000000		
1	.0031969	154.504	−35.805	−.1754840	Φ_5	1685.41
2	.0000229	292.034	−29.457	−.2132979	$-\lambda_9$	12.08
3	.0000200	348.738	14.729	.4265981	$2\lambda_9$	10.55
4	.0000026	257.206	29.457	.2132983	λ_9	1.35
5	.0000026	20.417	−14.729	−.4265978	$-2\lambda_9$	1.35
6	.0000028	61.334	9.819	.6398960	$3\lambda_9$	1.50

Tableau 28a. Solution relative à la variable q_{o6} (longitude moyenne de Titan). La série est en sinus.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification proposée	amplitude (km)
0	4.9372680	90.000		.0000000		
1	−.0014863	76.061	3262.544	.0019259	$-\Phi_8$	−1816.05
2	.0005092	13.214	703.733	.0089284	$-\Phi_6$	622.16
3	.0001840	253.966	29.457	.2132995	λ_9	224.82
4	.0002065	164.777	14.729	.4265988	$2\lambda_9$	252.26
5	.0000321	138.716	914.850	.0068680	19μ / $\phi_6 - \phi_8$ / $-\Phi_6 + \Phi_8$	39.16
6	−.0000278	299.512	351.618	.0178694	$2\phi_6$	−34.00
7	.0000291	236.833	9.819	.6398965	$3\lambda_9$	35.56
8	−.0000099	153.512	1793.000	.0035043	$-2\Phi_8$	−12.05
9	.0000063	63.002	30.433	.2064606	$\lambda_9 - 19\mu$	7.73
10	.0000037	179.461	56.928	.1103711	$2\lambda_9 - 880\mu$	4.49
11	.0000033	226.272	15.373	.4087114	$-2\phi_6 + 2\lambda_9$	4.08
12	.0000039	177.781	14.427	.4355271	$-\Phi_6 + 2\lambda_9$	4.79
13	.0000031	308.879	7.364	.8531951	$4\lambda_9$	3.76
14	.0000039	154.236	60.876	.1032132	287μ	4.76
15	.0000027	1.020	14.968	.4197635	$2\lambda_9 - 19\mu$	3.26
16	.0000029	150.001	14.496	.4334377	$2\lambda_9 + 19\mu$	3.57
17	.0000018	337.924	19.852	.3165024	880μ	2.21
18	.0000010	219.100	28.536	.2201829	$\lambda_9 + 19\mu$	1.24

Tableau 28b. Solution relative à la variable $\mathcal{W}_6$ (excentricité et péricentre de Titan). La série est en exponentielle complexe.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification proposée	amplitude (km)
0	.0000034	116.146		.0000000		
1	.0290566	153.666	702.839	.0089397	ϕ_6	35503.55
2	−.0001940	215.495	−702.841	−.0089397	$-\phi_6$	−237.09
3	.0000745	199.649	15.044	.4176590	$-\phi_6 + 2\lambda_9$	91.01
4	.0000241	229.452	578.308	.0108648	$\phi_6 - \Phi_8$	29.41
5	−.0000240	77.668	895.941	.0070129	$\phi_6 + \Phi_8$	−29.38
6	.0000119	15.935	3224.607	.0019485	ϕ_8	14.50
7	.0000096	272.244	9.958	.6309570	$-\phi_6 + 3\lambda_9$	11.73
8	.0000063	302.411	30.746	.2043588	$-\phi_6 + \lambda_9$	7.76
9	.0000058	139.906	−578.374	−.0108635	$-\phi_6 + \Phi_8$	7.08
10	.0000051	273.036	1622.414	.0038727	$\phi_8 - \Phi_8$	6.18
11	−.0000029	10.663	−3204.657	−.0019606	$-\phi_8$	−3.56
12	.0000026	349.512	−15.044	−.4176581	$\phi_6 - 2\lambda_9$	3.18
13	.0000022	22.503	−351.559	−.0178724	$-\phi_6 + \Phi_6$	2.71
14	.0000018	260.973	−30.746	−.2043586	$\phi_6 - \lambda_9$	2.25
15	.0000018	225.921	28.272	.2222384	$\phi_6 + \lambda_9$	2.22
16	.0000014	217.278	61.945	.1014314		1.70
17	.0000021	137.880	14.426	.4355374	$\phi_6 + 2\lambda_9$	2.57
18	.0000016	278.195	−1632.148	−.0038496	$-\phi_8 + \Phi_8$	1.90
19	.0000013	356.524	29.456	.2133080	λ_9	1.64
20	−.0000013	64.801	−491.270	−.0127897	$-\phi_6 + 2\Phi_8$	−1.59
21	.0000013	322.894	−28.272	−.2222379	$-\phi_6 - \lambda_9$	1.61
22	.0000011	34.986	15.294	.4108289		1.29
23	−.0000010	5.831	14.802	.4244861		−1.26
24	.0000011	344.899	7.442	.8442548	$-\phi_6 + 4\lambda_9$	1.31
25	.0000005	305.119	492.370	.0127611	$\phi_6 - 2\Phi_8$	.57

Tableau 28c. Solution relative à la variable $\mathcal{W}_{14}$ (inclinaison et noeud de Titan). La série est en exponentielle complexe.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification proposée	amplitude (km)
0	.0052493	184.579		.0000000		
1	.0021717	351.530	−703.559	−.0089306	Φ_6	2653.59
2	.0001117	348.599	14.729	.4265987	$2\lambda_9$	136.53
3	−.0000343	288.937	−3260.864	−.0019268	Φ_8	−41.91
4	.0000190	291.921	−29.457	−.2132992	$-\lambda_9$	23.25
5	.0000111	218.564	−914.467	−.0068709	-19μ	13.54
6	.0000114	246.247	29.457	.2132993	λ_9	13.87
7	.0000149	61.335	9.819	.6398966	$3\lambda_9$	18.17
8	−.0000086	80.341	3262.346	.0019260	$-\Phi_8$	−10.45
9	.0000093	213.516	−1632.700	−.0038483	$2\Phi_8$	11.40
10	.0000061	17.693	−14.729	−.4265982	$-2\lambda_9$	7.42
11	.0000037	303.183	351.431	.0178789	$2\phi_6$	4.53
12	.0000030	15.168	704.375	.0089202	$-\Phi_6$	3.70
13	.0000025	277.426	−579.283	−.0108465	$\Phi_6 + \Phi_8$	3.05
14	.0000018	7.868	56.932	.1103631	$2\lambda_9 - 880\mu$	2.17
15	.0000016	133.942	7.364	.8531948	$4\lambda_9$	1.99
16	.0000015	190.773	911.214	.0068954	19μ	1.86
17	.0000016	183.419	14.968	.4197673	$2\lambda_9 - 19\mu$	1.97
18	.0000016	334.182	14.496	.4334298	$2\lambda_9 + 19\mu$	1.92
19	.0000012	1.504	14.427	.4355295	$-\Phi_6 + 2\lambda_9$	1.41
20	.0000007	113.934	−30.433	−.2064608	$-\lambda_9 + 19\mu$	.84
21	.0000009	307.820	−9.819	−.6398973	$-3\lambda_9$	1.08
22	.0000006	64.337	30.432	.2064671	$\lambda_9 - 19\mu$	.73
23	.0000005	242.796	14.662	.4285262	$-\Phi_8 + 2\lambda_9$	.57

Tableau 29a. Solution relative à la variable q_{o8} (longitude moyenne de Japet). La série est en sinus.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification proposée	amplitude (km)
0	.1674348	90.000		.0000000		
1	.1928555	75.558	3263.758	.0019251	$-\Phi_8$	686859.41
2	.0011258	252.911	29.457	.2132998	λ_9	4009.59
3	.0011890	153.110	1628.747	.0038577	$-2\Phi_8$	4234.53
4	−.0007466	15.470	702.785	.0089404	$-\Phi_6$	−2659.18
5	.0003004	239.655	14.662	.4285238	$-\Phi_8 + 2\lambda_9$	1069.99
6	.0002400	167.668	14.729	.4265991	$2\lambda_9$	854.93
7	.0001785	223.291	908.004	.0069198	19μ / $\phi_6 - \phi_8$ / $-\Phi_6 + \Phi_8$	635.89
8	.0000739	315.313	14.597	.4304470	$-2\Phi_8 + 2\lambda_9$	263.33
9	.0000528	356.302	29.725	.2113789	$\Phi_8 + \lambda_9$	188.16
10	.0000403	62.796	30.434	.2064559	$\lambda_9 - 19\mu$	143.49
11	.0000359	139.576	29.193	.2152278	$-\Phi_8 + \lambda_9$	127.72
12	.0000408	216.372	579.877	.0108354		145.19
13	.0000381	312.253	9.790	.6418182	$-\Phi_8 + 3\lambda_9$	135.76
14	.0000362	35.395	490.030	.0128220		128.94
15	.0000349	238.299	9.819	.6398993	$3\lambda_9$	124.31
16	.0000238	185.596	60.845	.1032652	287μ	84.67
17	−.0000215	10.457	313.717	.0200282		−76.53
18	.0000202	306.111	347.041	.0181050	$2\phi_6$	72.07
19	.0000160	142.421	14.864	.4227159	$-2\phi_8 + 2\lambda_9$	57.09
20	.0000131	336.536	19.852	.3165039	880μ	46.80
21	.0000099	26.889	9.760	.6437637	$-2\Phi_8 + 3\lambda_9$	35.18
22	.0000075	234.190	28.535	.2201925	$\lambda_9 + 19\mu$	26.57

Tableau 29b. Solution relative à la variable $\mathcal{W}_8$ (excentricité et péricentre de Japet). La série est en exponentielle complexe.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification proposée	amplitude (km)
0	.0003060	312.547		.0000000		
1	.0282676	196.053	3230.301	.0019451	ϕ_8	100675.85
2	.0009188	353.514	−3232.542	−.0019437	$-\phi_8$	3272.46
3	.0007196	277.582	−1622.090	−.0038735	$-\phi_8+\Phi_8$	2562.86
4	.0003911	153.635	702.651	.0089421	ϕ_6	1392.92
5	.0004152	271.809	1624.716	.0038673	$\phi_8-\Phi_8$	1478.70
6	.0003789	157.294	14.796	.4246534	$-\phi_8+2\lambda_9$	1349.56
7	−.0002003	77.003	894.733	.0070224	$\phi_6+\Phi_8$	−713.44
8	.0001900	201.542	−1084.294	−.0057947	$-\phi_8+2\Phi_8$	676.64
9	−.0001223	229.579	578.344	.0108641	$\phi_6-\Phi_8$	−435.71
10	.0000920	214.550	−703.244	−.0089346	$-\phi_6$	327.56
11	−.0000693	139.489	−578.248	−.0108659	$-\phi_6+\Phi_8$	−246.75
12	.0000489	230.042	9.849	.6379532	$-\phi_8+3\lambda_9$	174.15
13	.0000208	67.258	−490.524	−.0128091	$-\phi_6+2\Phi_8$	74.18
14	.0000204	262.710	29.729	.2113520	$-\phi_8+\lambda_9$	72.63
15	.0000160	357.207	29.458	.2132957	λ_9	56.82
16	.0000134	266.386	29.191	.2152438	$\phi_8+\lambda_9$	47.84
17	.0000145	11.881	15.042	.4177113	$-\phi_6+2\lambda_9$	51.48
18	.0000129	302.968	−29.729	−.2113484	$\phi_8-\lambda_9$	45.87
19	.0000107	.201	14.661	.4285545	$-\Phi_8+2\lambda_9$	37.94
20	.0000113	262.106	14.864	.4227246	$-2\phi_8+2\lambda_9$	40.26
21	.0000066	66.486	14.596	.4304721	$\phi_8-\Phi_8+2\lambda_9$	23.49
22	.0000050	302.910	7.381	.8512487	$-\phi_8+4\lambda_9$	17.96

Tableau 29c. Solution relative à la variable $\mathcal{W}_{16}$ (inclinaison et noeud de Japet). La série est en exponentielle complexe.

n°	amplitude (rad)	phase (deg)	période (ans)	fréquence (rad/an)	identification proposée	amplitude (km)
0	.1325499	184.580		.0000000		
1	.0679070	288.999	−3263.778	−.0019251	Φ_8	241852.45
2	.0006883	80.101	3262.935	.0019256	$-\Phi_8$	2451.35
3	.0002766	348.656	14.729	.4265992	$2\lambda_9$	985.07
4	.0001817	64.344	14.662	.4285238	$-\Phi_8 + 2\lambda_9$	647.10
5	.0000471	291.812	−29.457	−.2132981	$-\lambda_9$	167.64
6	.0000388	351.069	−704.641	−.0089169	Φ_6	138.13
7	.0000467	209.957	−1632.946	−.0038478	$2\Phi_8$	166.48
8	.0000314	247.653	29.457	.2132988	λ_9	111.73
9	.0000283	216.316	−29.194	−.2152232	$\Phi_8 - \lambda_9$	100.89
10	.0000287	64.768	1619.025	.0038808	$\phi_8 - \Phi_8$	102.33
11	.0000354	61.429	9.819	.6398974	$3\lambda_9$	126.10
12	.0000283	182.190	29.725	.2113745	$\Phi_8 + \lambda_9$	100.78
13	.0000235	137.055	9.790	.6418225	$-\Phi_8 + 3\lambda_9$	83.65
14	.0000192	95.511	1068.814	.0058787	$2\phi_8 - \Phi_8$	68.23
15	−.0000136	270.131	−579.209	−.0108479	$\Phi_6 + \Phi_8$	−48.55
16	.0000130	351.465	−904.921	−.0069434	-19μ	46.36
17	.0000099	173.180	29.194	.2152242	$-\Phi_8 + \lambda_9$	35.26
18	−.0000107	301.661	351.333	.0178838	$2\phi_6$	−38.25
19	−.0000095	24.760	705.519	.0089058	$-\Phi_6$	−33.90
20	−.0000066	157.999	577.126	.0108870	$\phi_6 + \phi_8$	−23.38
21	.0000059	128.157	−1146.474	−.0054804	$-3\phi_8$	21.11
22	.0000051	19.087	317.631	.0197814	$2\phi_6 - \Phi_8$	18.08
23	.0000047	229.016	−14.597	−.4304543	$2\Phi_8 - 2\lambda_9$	16.74
24	.0000050	300.747	−14.663	−.4285201	$\Phi_8 - 2\lambda_9$	17.82
25	.0000035	136.608	7.364	.8532118	$4\lambda_9$	12.45
26	.0000039	338.211	14.496	.4334350	$2\lambda_9 + 19\mu$	14.01
27	.0000039	186.808	14.968	.4197747	$2\lambda_9 - 19\mu$	13.73

Tableau 30. Fréquences des arguments fondamentaux du système Rhéa-Titan-Japet, et leurs dérivées partielles par rapport aux paramètres (paramètres physiques et conditions initiales). Le nombre de décimales données tient compte de la précision obtenue (c'est-à-dire qu'on a trouvé égales, à la dernière décimale près, les deux évaluations de ces dérivées à droite et à gauche). Les points dans ce tableau indiquent que les dérivées correspondantes n'ont pas été détectées. Les paramètres Δm_1 et ΔJ_6 n'intervenant pas dans les équations relatives à Rhéa, Titan et Japet, n'apparaissent donc pas dans ce Tableau.

paramètres	fréquences (en rad/an)					
	$\dot{\phi}_5$	$\dot{\Phi}_5$	$\dot{\phi}_6$	$\dot{\Phi}_6$	$\dot{\phi}_8$	$\dot{\Phi}_8$
	0.1755497	−0.1754840	0.0089397	−0.0089306	0.0019451	−0.0019251
Δm_2	.	−0.00002452	0.00000087	.	.	.
Δm_3	0.00026266	−0.00026239	0.00000737	.	.	.
Δm_4	0.00151433	−0.00148648	0.00002345	.	.	.
Δm_5	.	.	0.0001250	−0.0001255	.	.
Δm_6	.	−0.0106538	.	.	.	−0.00018
Δm_7	.	.	.	.	.	.
Δm_8	.	.	0.0000138	−0.000005	.	.
Δm_9	.	.	.	.	.	.
ΔJ_2	0.1626790	−0.1625235	0.008295	−0.00830	.	−0.000052
ΔJ_4	0.00029919	−0.00029904	.	.	.	.
Δe_5^*	0.0000950	.	.	.	.	.
$\Delta \varpi_5^*$	0.00000000	.	.	.	.	.
$\Delta \gamma_5^*$	.	0.002435	.	.	.	.
$\Delta \Omega_5^*$	.	−0.00000010	.	.	.	.
Δe_6^*	.	.	0.00151	.	.	.
$\Delta \varpi_6^*$	.	.	−0.00000039	.	.	.
$\Delta \gamma_6^*$	.	.	.	0.0063	.	.
$\Delta \Omega_6^*$	.	.	.	−0.000008	.	.
Δe_8^*	.	.	.	.	0.022	.
$\Delta \varpi_8^*$	.	.	.	.	−0.00003	.
$\Delta \gamma_8^*$	.	.	.	.	.	−0.0024
$\Delta \Omega_8^*$	.	.	.	.	.	−0.00117

Tableau 31. Phases des arguments fondamentaux du système Rhéa-Titan-Japet, et leurs dérivées partielles par rapport aux paramètres (paramètres physiques et conditions initiales). Le nombre de décimales données tient compte de la précision obtenue (c'est-à-dire qu'on a trouvé égales, à la dernière décimale près, les deux évaluations de ces dérivées à droite et à gauche). Les points dans ce tableau indiquent que les dérivées correspondantes n'ont pas été détectées. Les paramètres Δm_1 et ΔJ_6 n'intervenant pas dans les équations relatives à Rhéa, Titan et Japet, n'apparaisent donc pas dans ce Tableau.

paramètres	Phases des arguments fondamentaux (en radians)					
	ϕ_5	Φ_5	ϕ_6	Φ_6	ϕ_8	Φ_8
	0.15336	2.69660	2.68198	6.13536	3.42177	5.04398
Δm_2	.	−0.00000286	0.00003	.	.	.
Δm_3	0.0000289	−0.0000307	0.00023	.	.	.
Δm_4	0.002424	−0.000173	0.00072	.	.	.
Δm_5	.	.	0.0038	−0.012	.	.
Δm_6	.	0.00124	.	.	.	−0.8
Δm_7	.	.	.	.	.	.
Δm_8	.	.	0.0014	−0.031	.	.
Δm_9	.	.	.	.	.	.
ΔJ_2	0.015	0.019	0.253	−0.78	.	−0.30
ΔJ_4	0.0000365	0.000035	.	.	.	.
Δe_5^*	37.3104	.	.	.	.	.
$\Delta \varpi_5^*$	1.0040	.	.	.	.	.
$\Delta \gamma_5^*$	.	3.6654	.	.	.	.
$\Delta \Omega_5^*$	.	1.00394	.	.	.	.
Δe_6^*	.	.	−0.49	.	.	.
$\Delta \varpi_6^*$	.	.	0.994436	.	.	.
$\Delta \gamma_6^*$	.	.	.	−185.6	.	.
$\Delta \Omega_6^*$	.	.	.	−1.296	.	.
Δe_8^*	.	.	.	.	−21.	.
$\Delta \varpi_8^*$	.	.	.	.	0.80	.
$\Delta \gamma_8^*$	.	.	.	.	.	−8.2
$\Delta \Omega_8^*$	.	.	.	.	.	1.61

Tableau 32a. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution q_{o5}, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 27a.

paramètres	solution q_{o5} : termes n°		
	0	1	2
	6.2214451	−0.0004632	−0.0002635
Δm_4	0.00000		
Δm_5	0.00000		
Δm_8	−0.00011	−0.000028	
ΔJ_2	0.0002		
Δe_5^*	0.01		
$\Delta \gamma_5^*$	0.01		
$\Delta \Omega_5^*$	−0.00004		
Δe_6^*	0.00		
$\Delta \varpi_6^*$	−0.00001		
$\Delta \gamma_6^*$	0.035	−0.010	−0.0958
$\Delta \Omega_6^*$	0.00038	0.000030	0.000102

Tableau 32b. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution $\mathcal{W}_5$, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 27b.

paramètres	solution $\mathcal{W}_5$: terme n° 1
	0.0002371
Δm_3	0.0000000
Δm_4	0.00000
ΔJ_2	−0.0000050
ΔJ_4	0.0000000
Δe_5^*	1.0000617
$\Delta \varpi_5^*$	0.00000

Tableau 32c. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution $\mathcal{W}_{13}$, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 27c.

paramètres	solution $\mathcal{W}_{13}$: terme n° 1
	0.0031969
Δm_2	0.0000000
Δm_3	0.0000002
Δm_4	0.0000010
Δm_6	0.0000074
ΔJ_2	0.000112
ΔJ_4	0.0000002
$\Delta \gamma_5^*$	0.9999215
$\Delta \Omega_5^*$	−0.00004

Tableau 33a. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution q_{o6}, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 28a.

paramètres	solution q_{o6} : termes n°		
	0	1	2
	4.9372680	−0.0014863	0.0005092
Δm_5	0.0000		
Δm_8	−0.0004	−0.00010	0.000020
ΔJ_2	0.000		
Δe_6^*	0.0		
$\Delta \varpi_6^*$	0.0000		
$\Delta \gamma_6^*$	−0.06	0.020	−0.184
$\Delta \Omega_6^*$	−0.00067	−0.000056	0.000188

Tableau 33b. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution $\mathcal{W}_6$, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 28b.

paramètres	solution $\mathcal{W}_6$: termes n°	
	1	2
	0.0290566	−0.0001940
Δm_2	0.0000002	
Δm_3	0.0000014	
Δm_4	0.0000044	
Δm_5	0.0000236	−0.0000005
Δm_8	0.0000070	−0.0000102
ΔJ_2	0.00157	−0.000032
Δe_6^*	0.9989	
$\Delta \varpi_6^*$	0.0002	−0.000007

Tableau 33c. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution $\mathcal{W}_{14}$, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 28c.

paramètres	solution $\mathcal{W}_{14}$: termes n°	
	0	1
	0.0052493	0.0021717
Δm_5	−0.0000770	−0.0000734
Δm_8	−0.0001545	−0.0001044
ΔJ_2	−0.0050782	−0.004851
$\Delta \gamma_6^*$		−0.9159
$\Delta \Omega_6^*$		0.00120

Tableau 34a. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution q_{o8}, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 29a.

paramètres	solution q_{o8} : termes n°		
	0	1	3
	0.1674348	0.192855	0.0011890
Δm_5	−0.0005	0.000	
Δm_6	−0.13	−0.02	
Δm_8	0.0001	0.0000	
ΔJ_2	−0.048	−0.004	
$\Delta\gamma_6^*$		0.02	
$\Delta\Omega_6^*$	0.0009	−0.00006	
$\Delta\gamma_8^*$	−1.7	−0.08	0.04
$\Delta\Omega_8^*$	0.16	0.018	

Tableau 34b. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution $\mathcal{W}_8$, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 29b.

paramètres	solution $\mathcal{W}_8$: termes n°			
	0	1	2	3
	0.0003060	0.0282676	0.0009188	0.0007196
Δe_8^*	0.47	−0.76	0.05	
$\Delta\varpi_8^*$	−0.0010	0.0009	0.00258	0.00111

Tableau 34c. Dérivées partielles des amplitudes des premiers termes de la solution $\mathcal{W}_{16}$, par rapport aux paramètres. On rappelle, en ligne 1, la valeur de ces amplitudes tirée du Tableau 29c.

paramètres	solution $\mathcal{W}_{16}$: termes n°	
	0	1
	0.1325499	0.0679070
Δm_6	−0.067	0.001
ΔJ_2	−0.00255	−0.0002
$\Delta\gamma_8^*$		0.20
$\Delta\Omega_8^*$	0.0585	0.097

Tableau 35. La ligne 1 donne les écarts maxima observés sur 2000 ans entre l'intégration numérique du système Rhéa-Titan-Japet, et sa représentation fournie par l'analyse harmonique (solution nominale). Les lignes suivantes donnent les écarts maxima sur 2000 ans, entre l'intégration numérique et la représentation linéaire de la théorie (exprimée par les dérivées partielles d'ordre 1 de la solution au voisinage de la solution nominale). Plus précisément, ces écarts sont obtenus en comparant la représentation linéaire calculée pour la valeur $\Delta_{\max}$ de chaque paramètre, à une intégration numérique tenant compte du changement de valeur de ce paramètre. Quant à la valeur $\pm\Delta$ donnée en colonne 2, elle représente, pour chaque paramètre, l'incrément qui a servi pour calculer numériquement la dérivée partielle d'ordre 1, à droite et à gauche, par rapport à ce paramètre.

	paramètres		solutions (écarts, en km)								
	$\pm\Delta$	$\Delta_{\max}$	q_{o5}	$\mathcal{W}_5$	$\mathcal{W}_{13}$	q_{o6}	$\mathcal{W}_6$	$\mathcal{W}_{14}$	q_{o8}	$\mathcal{W}_8$	$\mathcal{W}_{16}$
			3.2	0.4	1.2	14.	2.8	3.9	340.	190.	85.
Δm_2	0.1	0.5	3.8	3.3	1.2	14.	3.0	3.9	368.	189.	85.
Δm_3	$5.\ 10^{-2}$	$5.\ 10^{-2}$	3.9	0.4	1.2	14.	3.0	3.9	341.	189.	85.
Δm_4	$5.\ 10^{-2}$	$5.\ 10^{-2}$	8.4	0.4	1.2	14.	3.3	3.9	360.	189.	93.
Δm_5	$1.\ 10^{-2}$	$5.\ 10^{-2}$	3.7	0.5	1.2	18.	10.	4.0	372.	209.	181.
Δm_6	$1.\ 10^{-4}$	$5.\ 10^{-4}$	15.	0.4	1.2	14.	2.8	3.9	446.	226.	122.
Δm_7	0.5	0.5	3.1	0.4	1.2	14.	2.8	3.9	445.	202.	137.
Δm_8	$1.\ 10^{-2}$	0.1	3.4	0.4	1.2	22.	6.6	8.0	338.	191.	162.
Δm_9	$1.\ 10^{-4}$	$1.\ 10^{-4}$	3.2	0.4	1.2	14.	2.8	3.9	435.	197.	106.
ΔJ_2	$1.\ 10^{-3}$	$1.\ 10^{-3}$	16.	0.5	1.2	19.	13.	4.2	407.	225.	104.
ΔJ_4	$5.\ 10^{-2}$	$5.\ 10^{-2}$	4.0	0.4	1.2	14.	2.8	3.9	340.	190.	85.
Δe_5^*	$2.\ 10^{-5}$	$4.\ 10^{-5}$	4.1	0.4	1.2	14.	2.8	3.9	340.	190.	85.
$\Delta \varpi_5^*$	0.17	0.17	3.2	2.2	1.2	14.	2.8	3.9	340.	190.	85.
$\Delta \gamma_5^*$	$2.5\ 10^{-5}$	$1.\ 10^{-4}$	24.	0.6	1.2	14.	2.8	3.9	340.	190.	85.
$\Delta \Omega_5^*$	$1.5\ 10^{-2}$	$9.\ 10^{-2}$	6.7	0.4	7.8	14.	2.8	3.9	340.	190.	85.
Δe_6^*	$2.\ 10^{-5}$	$1.2\ 10^{-4}$	3.2	0.4	1.8	14.	4.3	4.0	453.	195.	84.
$\Delta \varpi_6^*$	$1.8\ 10^{-2}$	$1.8\ 10^{-2}$	3.2	0.5	1.2	14.	10.	3.9	344.	208.	81.
$\Delta \gamma_6^*$	$1.\ 10^{-4}$	$1.\ 10^{-4}$	7.3	0.4	1.2	25.	3.6	5.1	251.	185.	92.
$\Delta \Omega_6^*$	$3.\ 10^{-2}$	$5.\ 10^{-2}$	8.7	0.4	1.2	29.	3.6	9.2	459.	198.	100.
Δe_8^*	$5.\ 10^{-5}$	$4.\ 10^{-4}$	3.0	0.4	1.2	14.	3.1	3.9	394.	530.	115.
$\Delta \varpi_8^*$	$9.\ 10^{-3}$	$9.\ 10^{-3}$	3.3	0.4	1.2	14.	2.8	3.9	376.	261.	87.
$\Delta \gamma_8^*$	$3.\ 10^{-5}$	$6.\ 10^{-5}$	3.3	0.4	1.2	14.	2.8	3.9	435.	199.	134.
$\Delta \Omega_8^*$	$5.\ 10^{-4}$	$5.\ 10^{-4}$	4.0	0.4	1.2	18.	2.7	4.0	391.	224.	158.

Tableau 36. Pentes résiduelles dans les solutions q_{o5}, q_{o6} et q_{o8} (ligne 1) et dérivées partielles de ces pentes par rapport aux paramètres (lignes suivantes).

paramètres	solutions (pentes, en rad/an)		
	q_{o5}	q_{o6}	q_{o8}
	−0.00001592	0.00011506	−0.00015150
Δm_4	−0.0000005	.	.
Δm_5	−00000001	0.0000007	0.0000004
Δm_6	.	.	0.00005
Δm_8	0.0000018	0.0000053	0.0000007
Δm_9	.	0.000103	.
ΔJ_2	−0.0000328	0.0000371	0.000037
$\Delta\tilde{p}_5(\times 10^{-3})$	0.508477	.	.
Δe_5^*	0.000266	.	.
$\Delta\gamma_5^*$	−0.01429	.	.
$\Delta\Omega_5^*$	0.0000005	.	.
$\Delta\tilde{p}_6(\times 10^{-3})$	.	0.143948	.
Δe_6^*	−0.001655	0.00178	.
$\Delta\varpi_6^*$	−0.0000004	0.0000004	.
$\Delta\gamma_6^*$	−0.000400	0.00050	.
$\Delta\Omega_6^*$	0.0000005	−0.0000007	0.0000005
$\Delta\tilde{p}_8(\times 10^{-3})$	.	.	0.028934
Δe_8^*	.	.	0.0001
$\Delta\gamma_8^*$	.	.	−0.0009
$\Delta\Omega_8^*$	.	.	−0.00059

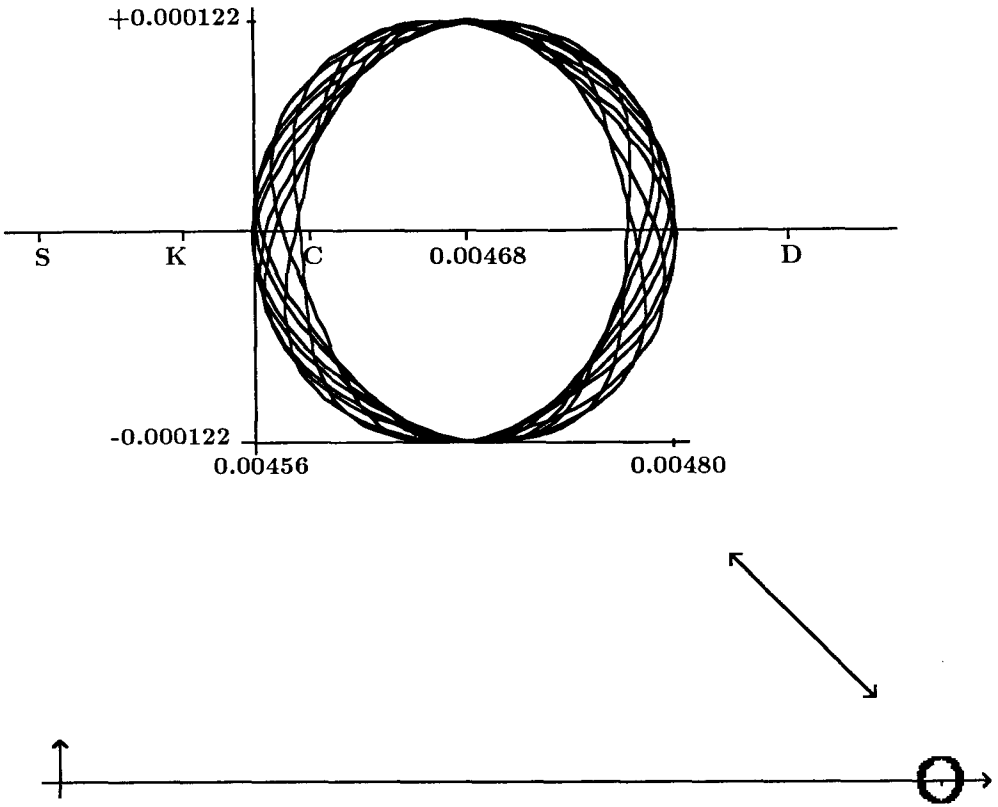

Figure 1 : Résonance Encelade-Dioné dans la variable $w_2 = z_2^* \exp \sqrt{-1}\,(\lambda_2 - 2\lambda_4)$ sur 100 ans. Pour comparaison, les points S, K, C et D représentent les déterminations de l'excentricité d'Encelade faites par Struve (1933), Kozai (1957), Chugunov (1983) et Dourneau (1987) respectivement.

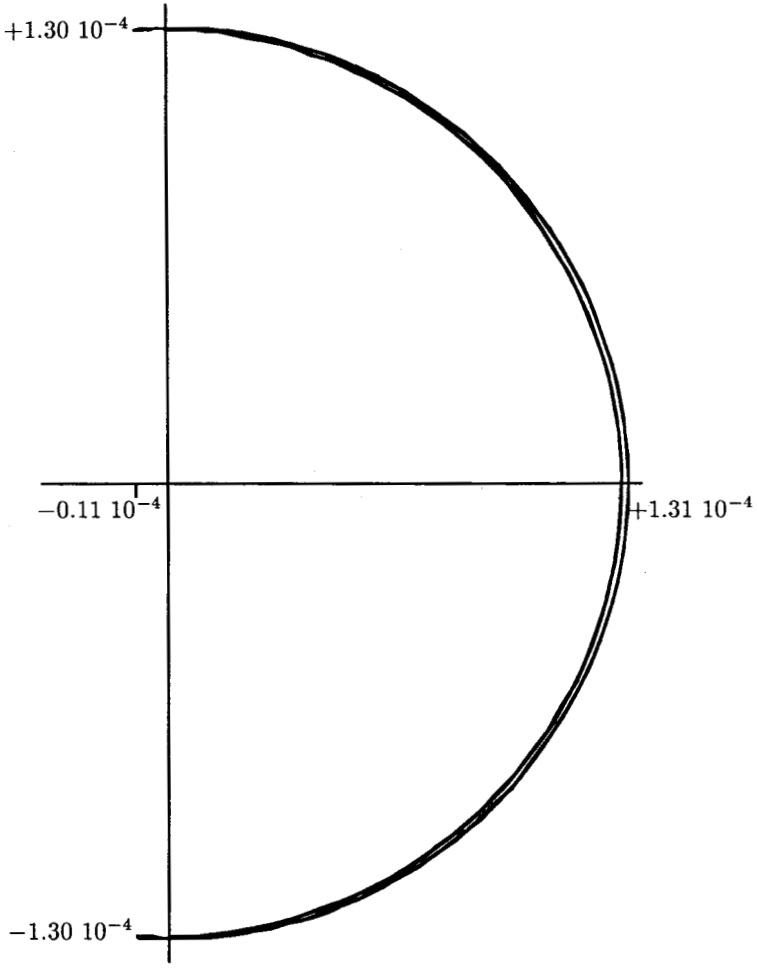

Figure 2 : Libration Mimas-Téthys (de période 70 ans) dans la variable $Z = \mathcal{W}_9\mathcal{W}_{11} = \zeta_1^*\zeta_3^* \exp\sqrt{-1}\,(2\lambda_1 - 4\lambda_3)$ sur 1230 ans.

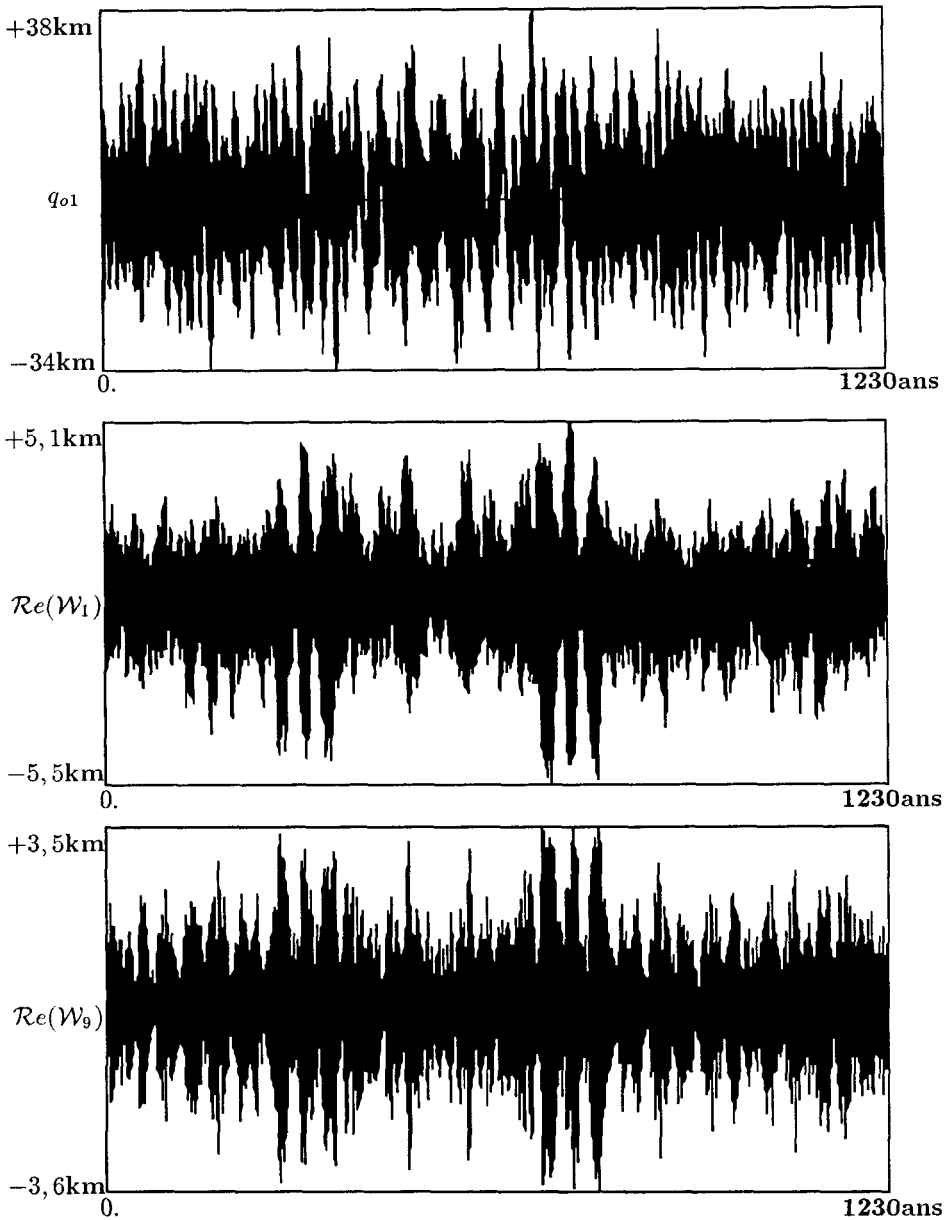

Figure 3 : Résidus obtenus sur 1230 ans entre les résultats de l'intégration numérique et sa représentation sous forme de séries quasi-périodiques, dans les variables relatives à Mimas.

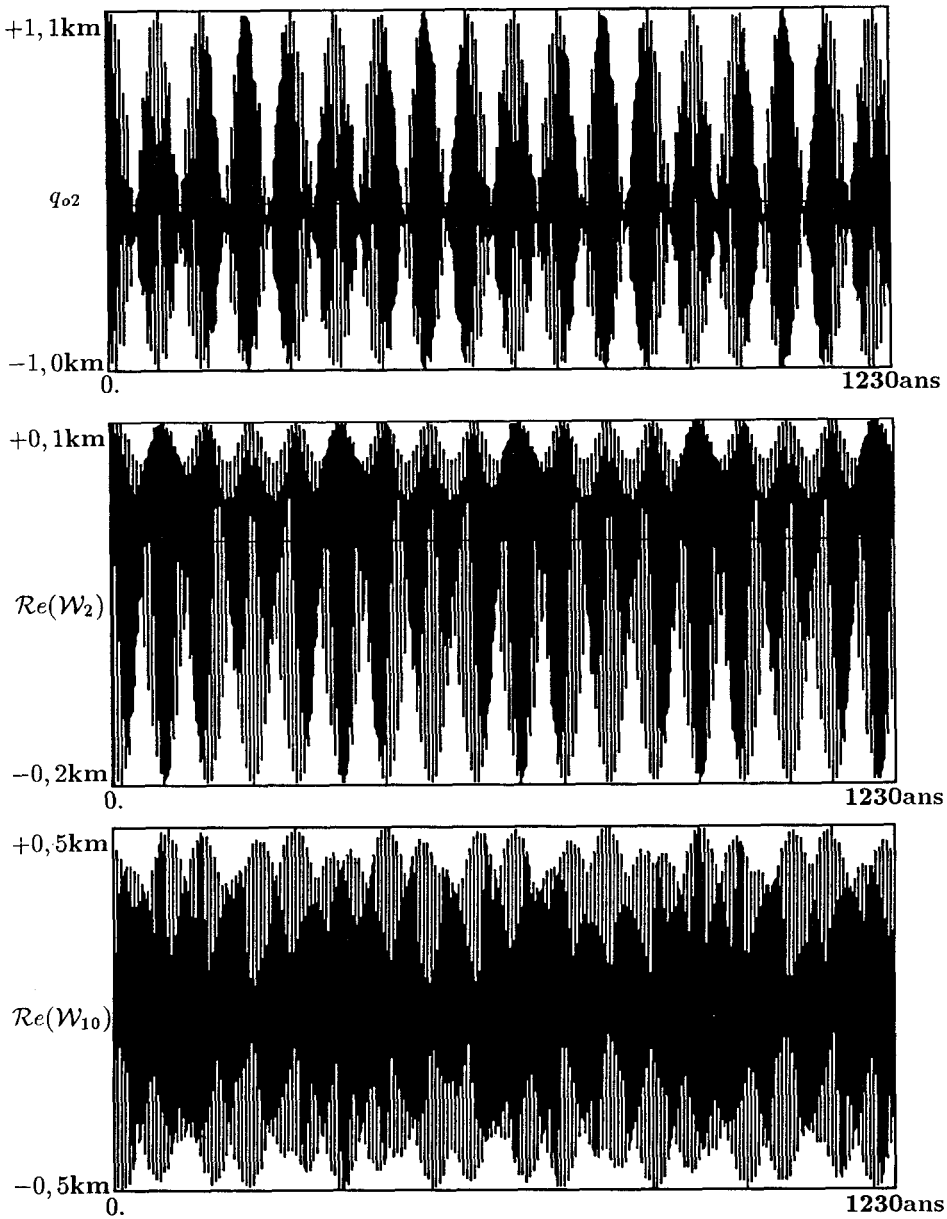

Figure 4 : Résidus obtenus sur 1230 ans entre les résultats de l'intégration numérique et sa représentation sous forme de séries quasi-périodiques, dans les variables relatives à Encelade.

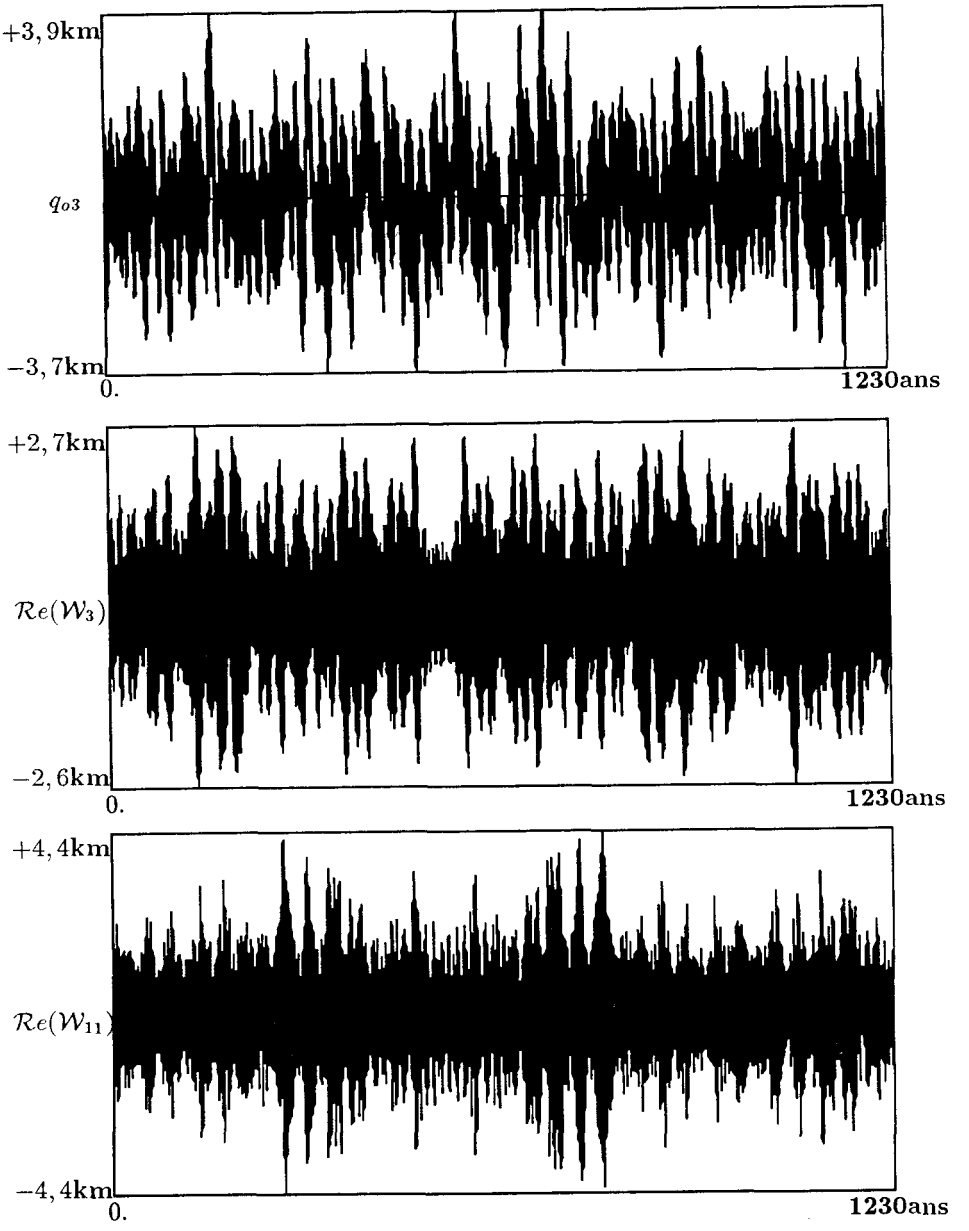

Figure 5 : Résidus obtenus sur 1230 ans entre les résultats de l'intégration numérique et sa représentation sous forme de séries quasi-périodiques, dans les variables relatives à Téthys.

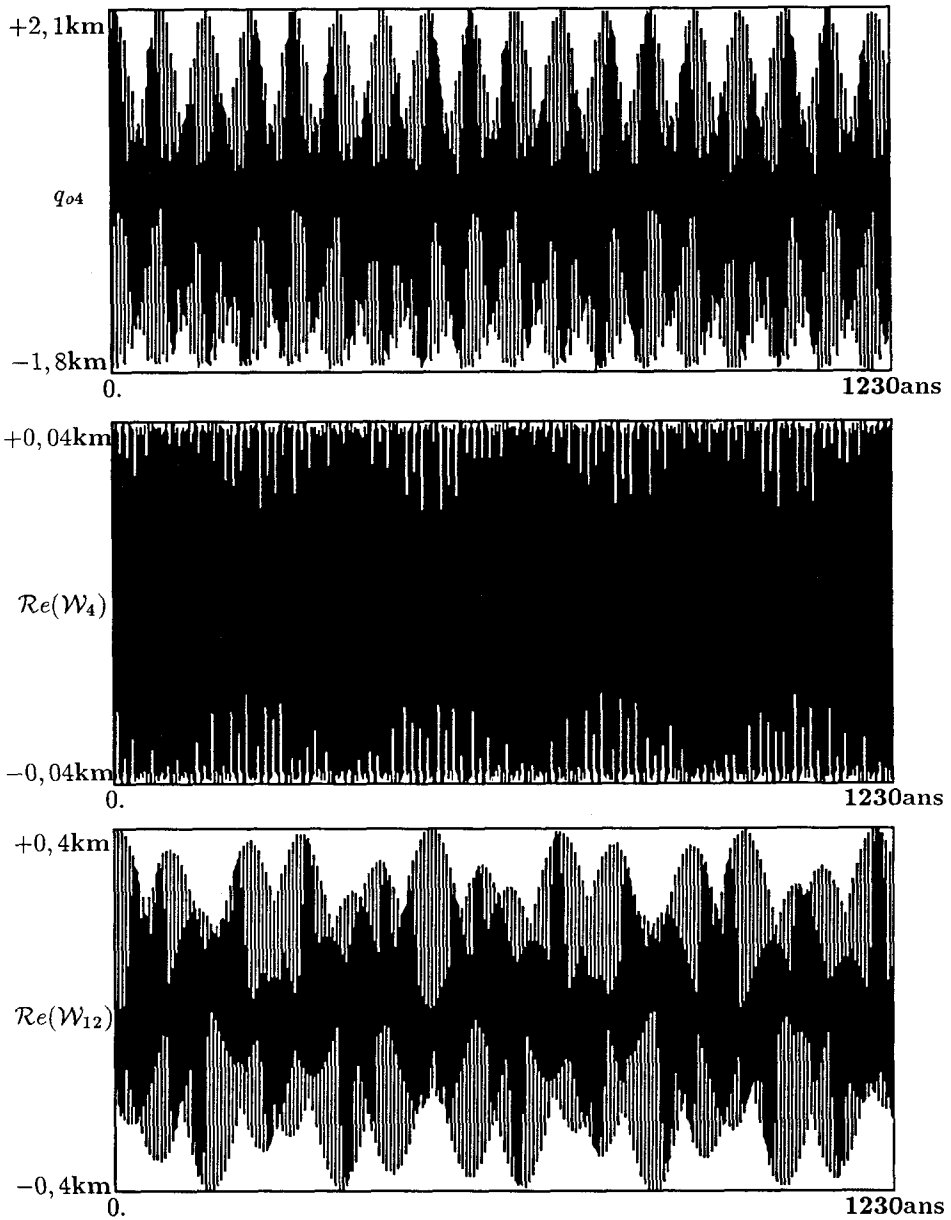

Figure 6 : Résidus obtenus sur 1230 ans entre les résultats de l'intégration numérique et sa représentation sous forme de séries quasi-périodiques, dans les variables relatives à Dioné.

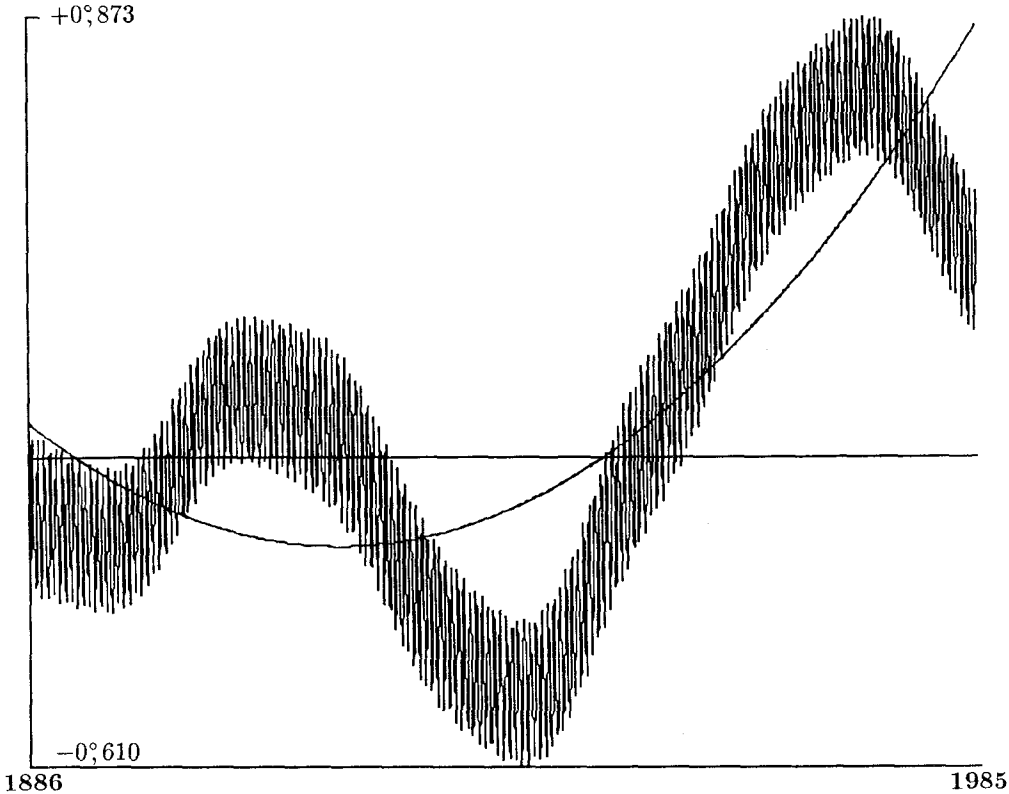

Figure 7 : "Accélération" dans la longitude moyenne de Mimas de $2,33 \pm ,11$ degré par siècle^2, obtenue en ajustant une parabole sur la courbe représentant la somme des termes non considérés dans les théories actuelles. Les plus gros de ces termes dépendent de l'excentricité de Téthys qui a été prise égale à $0,00102$ (Sinclair, 1977).

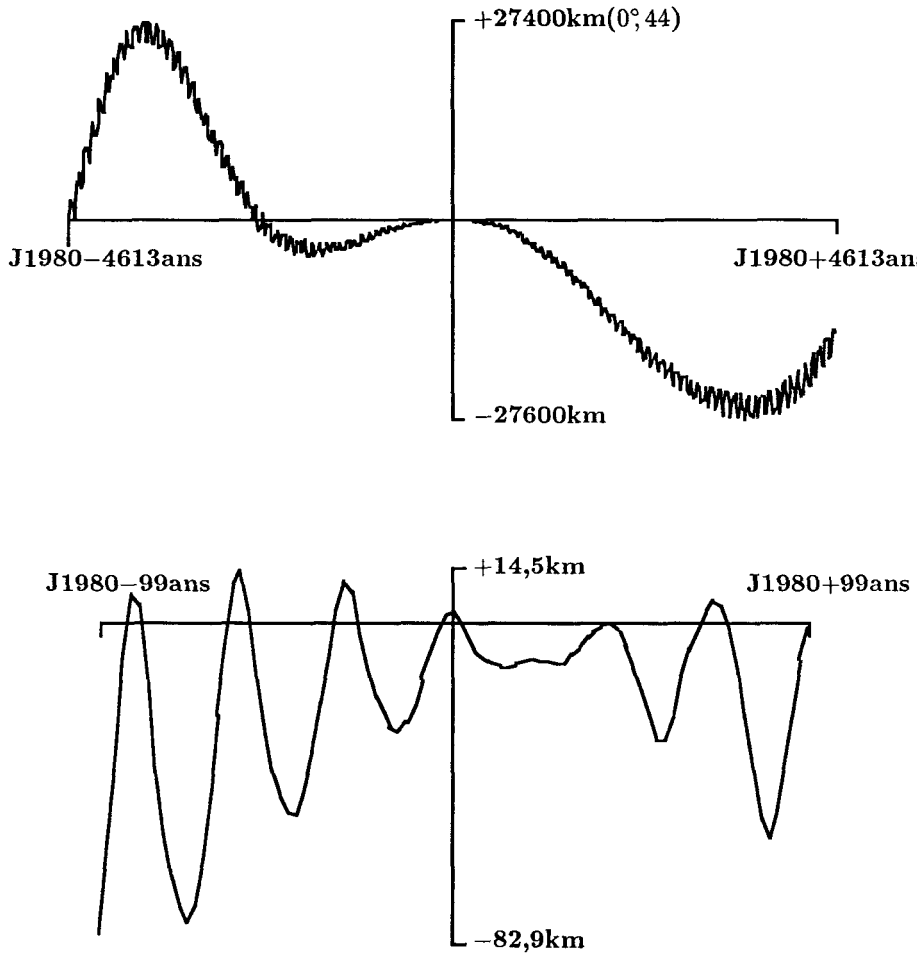

Figure 8 : Effet des termes séculaires du Soleil (JASON84) sur la solution de la longitude moyenne de Japet. La courbe représente la différence entre les résultats d'une intégration numérique effectuée sans ces termes séculaires et ceux issus d'une autre intégration effectuée avec ces termes.

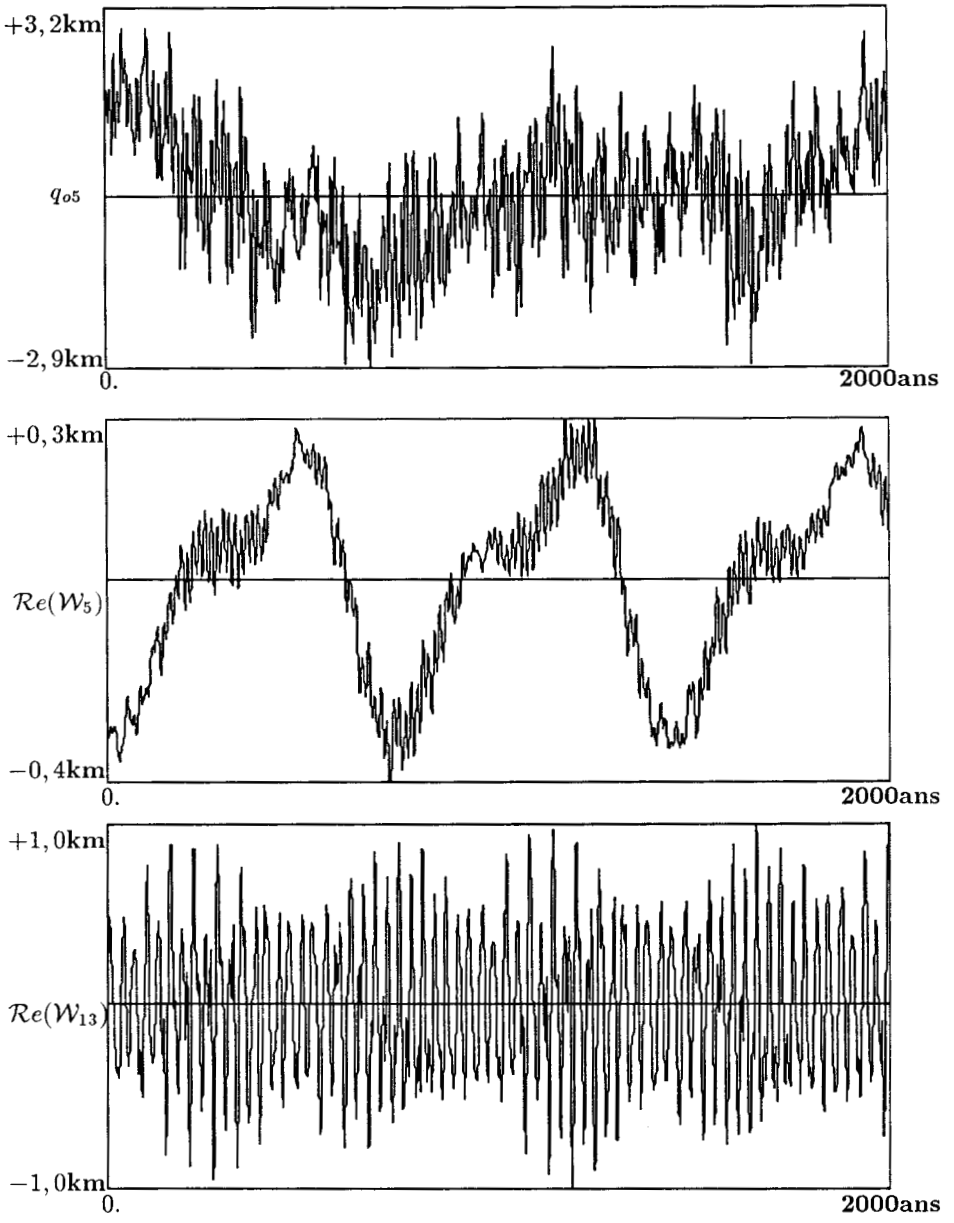

Figure 9 : Résidus obtenus sur 2000 ans entre les résultats de l'intégration numérique et sa représentation sous forme de séries quasi-périodiques, dans les variables relatives à Rhéa.

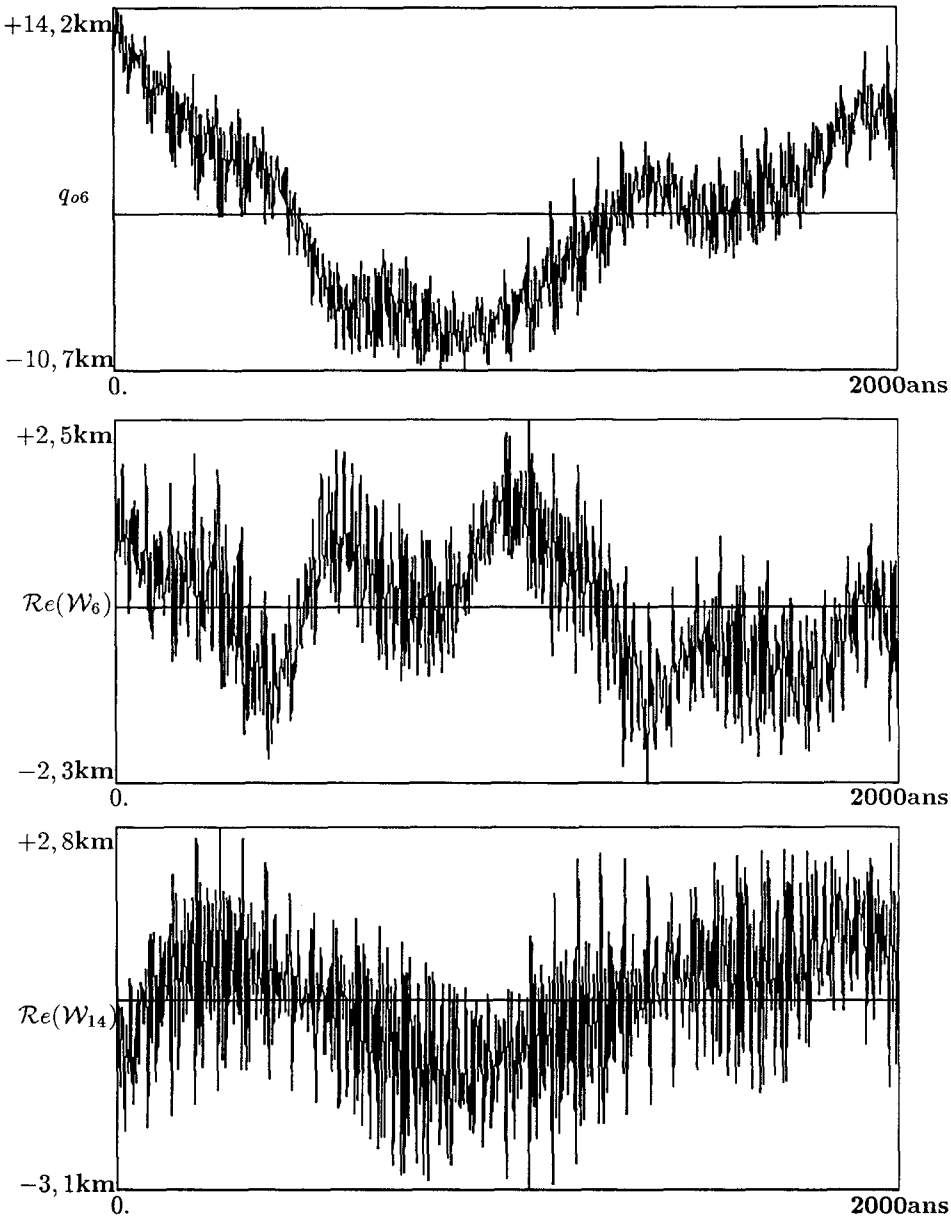

Figure 10 : Résidus obtenus sur 2000 ans entre les résultats de l'intégration numérique et sa représentation sous forme de séries quasi-périodiques, dans les variables relatives à Titan.

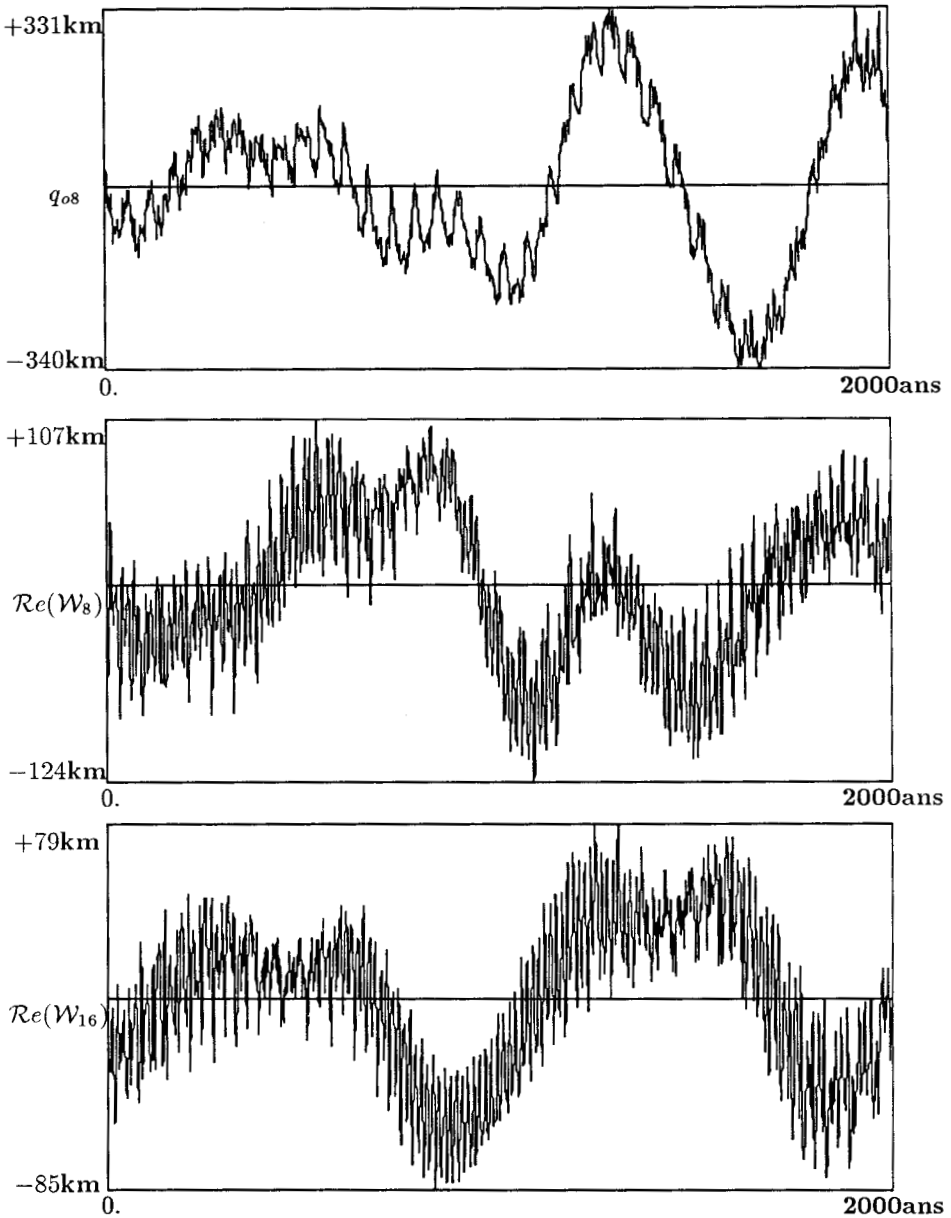

Figure 11 : Résidus obtenus sur 2000 ans entre les résultats de l'intégration numérique et sa représentation sous forme de séries quasi-périodiques dans les variables relatives à Japet.

BIBLIOTHÈQUE INTERUNIVERSITAIRE
SECTION DE SCIENCES
LILLE

04405741 5

RÉSUMÉ

Nous présentons une nouvelle méthode pour construire une théorie analytique du mouvement des satellites de Saturne. C'est une extension des méthodes déjà utilisées par Duriez (1979) et Laskar (1984) pour construire une théorie générale planétaire, utilisant le même formalisme et pouvant maintenant prendre en compte les diverses résonances du système de Saturne. Le but est d'obtenir des représentations très précises des mouvements qui soient compatibles avec les futures observations spatiales. Le modèle a donc été construit de manière complètement analytique par rapport aux paramètres physiques et aux constantes d'intégration, en s'efforçant de maintenir tout au long du calcul une précision interne de quelques kilomètres. La solution présentée ici concerne les satellites suivants : Mimas, Encelade, Téthys, Dioné, Rhéa, Titan et Japet. La précision interne de la solution présentée est estimée à quelques kilomètres pour tous les satellites sauf pour Japet (100 km sur 100 ans). Des nouveaux termes importants dûs à la précession de l'orbite de Japet, ainsi que des termes issus de perturbations indirectes de Jupiter, ont été mis en évidence dans les solutions de Rhéa, de Titan et de Japet. Les solutions obtenues pour Mimas et Téthys suggèrent l'existence de résonances séculaires ; les termes correspondants dépendent fortement de la valeur de l'excentricité de Téthys.

MOTS CLÉS :

Satellites de Saturne - Théorie de satellites - Mécanique céleste - Fonction perturbatrice - Développements formels