

55376  
1991  
13



55376  
1991  
13

N° d'ordre : 812

## THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Abdelhak ABOUQATEB

### **Isomorphisme de Thom-Gysin sur les variétés stratifiées**

*Soutenue le 12 décembre 1991 devant la Commission d'Examen :*

Président : D. TANRÉ, Professeur, Université de Lille Flandres Artois

Directeur de thèse : D. LEHMANN, Professeur, Université de Montpellier II

Rapporteurs : A. EL KACIMI ALAOUI, Professeur, Université de Valenciennes

F. PELLETIER, Professeur, Université de Savoie (Chambéry)

D. TROTMAN, Professeur, Université d'Aix-Marseille I

Membres : F. LESCURE, Professeur, Université Lille Flandres Artois

*A mes parents*

Je voudrais exprimer ma plus sincère et chaleureuse gratitude à D. LEHMANN. C'est avec beaucoup de compétence et de gentillesse qu'il a m'a guidé et épaulé au cours de ce travail. Il n'aura ménagé ni son temps ni son ardeur et aura toujours su répondre à mes interrogations et dissiper mes doutes. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je suis très reconnaissant à A. EL KACIMI d'avoir voulu s'intéresser à ce travail et de le juger. Je tiens à lui exprimer mes sincères remerciements pour les discussions intéressantes que nous avons eues.

Je suis également très reconnaissant envers F. PELLETIER et D. TROTMAN, qui ont bien voulu s'intéresser à mon travail, de le juger, et me faire l'honneur de leur présence au sein du jury.

D. TANRÉ, Directeur de l'U.R.A, me fait l'honneur d'accepter la présidence de cette thèse, qu'il me soit permis de lui exprimer ma profonde gratitude.

Mes remerciements vont aussi à F. LESCURE qui a accepté de participer au jury.

Je tiens à exprimer mes vifs et sincères remerciements à F. GOMEZ d'avoir bien voulu juger et me faire des commentaires sur le manuscrit.

Mes remerciements vont également à Mme Evrard pour avoir assuré avec soin la frappe de ce manuscrit, ainsi qu'au service de l'imprimerie de l'U.F.R. de Mathématiques.

## TABLE DES MATIÈRES

### Introduction.

### I. Isomorphisme de Thom et théorème de De Rham sur les variétés stratifiées.

0. Introduction.	2
1. Notations.	3
2. Définitions.	3
3. Cohomologie et stratification.	6
4. Intégration (Théorème de De Rham).	8
5. Homomorphisme de Poincaré.	11
6. Réalisation de l'inverse de "l'isomorphisme de Thom-Gysin".	11
7. Relation avec la dualité d'Alexander.	17
8. Réalisation de "l'isomorphisme de Thom-Gysin" en codimension paire.	20
9. Appendice.	21
A. Etude du cas lisse.	21
a. Cas d'un fibré vectoriel.	21
b. Comparaison avec autre réalisation de l'isomorphisme de Thom.	25
B. Théorème de Stokes et de Fubini.	27

### II. Résidus de Baum-Cheeger

0. Introduction.	30
1. Rappels (actions de groupes de Lie sur les fibrés vectoriels).	31
2. Lemme technique (existence d'une connexion spéciale).	32
3. Formule de résidus et actions de groupes de Lie compacts.	34

<b>Bibliographie.</b>	<b>45</b>
-----------------------	-----------

## INTRODUCTION

Pour certaines classes de variétés singulières stratifiées,  $W = \coprod_i V_i$ , plongées dans une variété ambiante lisse  $V$ , on donne une factorisation du morphisme  $H^*(\bar{V}_i) \rightarrow H^{*+\nu_i}(V, V - \bar{V}_i)$  de Thom-Gysin associé à chaque strate  $V_i$  de codimension  $\nu_i$ , à travers certains espaces de cohomologie relative, factorisation donnant un isomorphisme (qui coïncide avec celui de Thom-Gysin si  $\bar{V}_i$  est lisse). En outre, on exhibera dans le même contexte un théorème de De Rham généralisé. Ceci fera l'objet de la partie principale de ce texte.

La clé de ce travail, à savoir l'utilisation du complexe de Mayer-Vietoris pour la réalisation de l'isomorphisme de Thom-Gysin dans le cas lisse, nous permettra d'autre part d'illustrer une méthode d'aborder, voir de résoudre certains problèmes résiduels et ceci en évitant le choix de partition de l'unité dans les calculs. En effet, le problème étudié dans ce second chapitre sera celui des résidus de Baum-Cheeger, problème résolu dans d'autres cas particuliers par F. Gomez et N. Alamo, (cf. [B.C],[G],[AG]).

# I. ISOMORPHISME DE THOM ET THÉORÈME DE DE RHAM

## SUR LES VARIÉTÉS STRATIFIÉES

### 0. Introduction

Etant donné une sous variété différentiable fermée  $W$ , d'une variété différentiable  $V$ , telle que le fibré normal de  $W$  dans  $V$  soit orientable, on connaît l'isomorphisme de Thom :  $H^*(W) \rightarrow H^{*+\nu}(V, V - W)$ , ( $\nu = \dim V - \dim W$ ). En appendice, on en donnera une nouvelle démonstration, et on exhibera notamment une nouvelle réalisation de l'inverse de cet isomorphisme, et ceci dans le cadre de l'intégration sur le complexe de Mayer-Vietoris associé à un voisinage tubulaire de la sous variété  $W$  de  $V$ . C'est l'outil essentiel qui permettra d'aborder l'étude du cas singulier, but principal de ce chapitre.

Notamment, si  $V$  est compacte orientée on aura un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & & H^*(V, V - W) \\
 & \swarrow & \cong \downarrow \text{Alexander} \\
 H^*(f) & & \\
 \swarrow & & \\
 H^{*-\nu}(W) & \xrightarrow[\text{Poincaré}]{\cong} & H_{N-*}(W)
 \end{array}$$

Dans le cas où  $W$  n'est pas lisse, il existe toujours (cf. [Br]) un homomorphisme de Poincaré, et un homomorphisme de Thom-Gysin qui se correspondent par l'isomorphisme d'Alexander, mais qui ne sont en général plus des isomorphismes.

A partir d'une stratification différentiable  $W = \coprod_i V_i$  de  $W$ , nous allons construire, pour chaque strate  $V_i$  un diagramme commutatif de complexes, induisant en cohomologie le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 H^*(V, (V - \bar{V}_i) \cup U(\partial\bar{V}_i)) & \longrightarrow & H^*(V, V - \bar{V}_i) & \longrightarrow & H^*(V, V - W) \\
 H^*(f^i) \downarrow \cong & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
 H^{*-\nu_i}(\bar{V}_i, \partial\bar{V}_i) \rightarrow H^{*-\nu_i}(\bar{V}_i) & \longrightarrow & H_{N-*}(\bar{V}_i) & \longrightarrow & H_{N-*}(W)
 \end{array}$$

(avec  $N = \dim V = \dim V_i + \nu_i$ ,  $\partial\bar{V}_i = \bar{V}_i - V_i$ )

$U(\partial\bar{V}_i)$  désigne un voisinage ouvert de  $\partial\bar{V}_i$  dans  $V$ , ayant même type d'homotopie que  $\partial\bar{V}_i$ .

Les différents espaces de cohomologie, ou d'homologie figurant ci-dessus, sont ceux de la cohomologie ou de l'homologie singulière réelle).

La réalisation de l'isomorphisme  $H(f^!)$  fera l'objet du paragraphe 6.

Dans les paragraphes 3 et 4, on définira une algèbre différentielle graduée (non commutative), inspirée de [L4], permettant de réaliser la cohomologie singulière réelle de certaines variétés singulières en termes "d'hyperformes différentielles", et par suite énoncer et démontrer un "théorème de De Rham".

## 1. Notations

On désignera par  $\Omega^*$  le foncteur de de Rham associant à toute variété différentiable, l'algèbre différentielle graduée des formes différentielles  $C^\infty$ .

Un fibré localement trivial,  $C^\infty$ , orienté,  $E \xrightarrow{\pi} B$ , de fibre  $F$ , sera souvent désigné par :  $(E, \pi, B, F)$ .

On note  $\Omega_F^*(E)$ , l'algèbre des formes différentielles à support "compact dans la direction de la fibre" ([GHV<sub>I</sub>]).

On note :  $f_F : \Omega_F^*(E) \rightarrow \Omega^{*-r}(B)$ , (où  $r = \dim F$ ) l'opérateur d'intégration le long de la fibre ([Bo]), satisfaisant, dans le cas où l'espace total  $E$  est sans bord, à l'égalité

$$\int_F \circ d = (-1)^r d \circ \int_F .$$

Dans le cas où la fibre  $F$  est contractile et que la variété  $E$  est sans bord, l'application linéaire induite en cohomologie,  $H(f_F), H_F^*(E) \rightarrow H^{*-r}(B)$ , est un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués de degré  $-r$  (cf. [GHV<sub>I</sub>]).

## 2. Définitions

*a - Variétés stratifiées de Thom-Mather.*

On appellera ainsi les données  $(V, W, \mathcal{S})$

- d'une variété  $V$  de classe  $C^\infty$  (sans bord),

- d'un sous-ensemble fermé  $W$  de  $V$ ,

– d’une partition  $W = \coprod_{i \in \mathcal{S}} V_i$  en sous variétés différentiables propres  $V_i$  de  $V$ , (appelées les strates de  $W$ ), satisfaisant aux axiomes suivants :

(i) Cette partition est localement finie.

(ii) Elle vérifie la condition de frontière :  $(V_j \cap \bar{V}_i \neq \emptyset) \Rightarrow (V_j \subset \bar{V}_i)$ . Chaque strate  $V_i$  sera supposée munie d’un voisinage tubulaire  $(U_i, \pi_i, V_i)$  (On appelle ainsi les données :

– d’un voisinage ouvert  $U_i$  de  $V_i$  dans  $V$ ,

– d’une métrique riemannienne sur  $N_i$ , fibré normal de  $V_i$  dans  $V$ ,

– d’un difféomorphisme de  $N_i$  sur  $U_i$ , échangeant la section nulle de  $N_i$  et l’inclusion naturelle de  $V_i$  dans  $U_i$ ;  $\pi_i : U_i \rightarrow V_i$  désignant la “rétraction locale” correspondante à la projection du fibré  $N_i \rightarrow V_i$  par ce difféomorphisme).

(iii)  $V_i \cap U_j \neq \emptyset \Leftrightarrow V_j \subset \bar{V}_i$

(iv)  $V_i \cap U_j \neq \emptyset \Leftrightarrow V_j \subset \bar{V}_i$  ou  $V_i \subset \bar{V}_j$ , (la relation  $V_j \subset \bar{V}_i$  est alors une relation d’ordre que l’on notera  $j \leq i$ )

(v) les inclusions :  $\bar{V}_i \hookrightarrow \cup_{j \leq i} U_j$ ,  $(\bar{V}_i - V_i) \hookrightarrow \cup_{j < i} U_j$ ,  $W \hookrightarrow \cup_{j \in \mathcal{S}} U_j$  et  $\partial W \hookrightarrow \cup_{j \in \partial \mathcal{S}} U_j$  (où  $\partial \mathcal{S} = \{j \in \mathcal{S} / j \text{ est non maximal}\}$  et  $\partial W = \coprod_{i \in \partial \mathcal{S}} V_i$ ), induisent toutes des isomorphismes en cohomologie.

(vi) Pour tout  $i \in \mathcal{S}$ , l’espace total du fibré en disques ouverts de rayon 1 associé au fibré vectoriel riemannien  $U_i \xrightarrow{\pi_i} V_i$ , contient une variété à bord  $X_i$ , de même dimension que  $V$  et vérifiant :

$$(*) \quad \forall i \in \mathcal{S}, V_i \subset \overset{\circ}{X}_i = X_i - \partial X_i \subset X_i \subset U_i,$$

(\*\*) la famille  $(\partial X_i)_{i \in \mathcal{S}}$  des hypersurfaces  $\partial X_i$  de  $V$  est à croisements normaux : pour tout multiindice formé d’éléments de  $\mathcal{S}$ ,  $I = (i_0 > i_1 > \dots > i_p)$ , l’intersection  $\bigcap_{\alpha=0}^p \partial X_{i_\alpha}$  est une sous variété ( $C^\infty$  par morceaux) de  $V$ , de dimension  $\dim V - 1 - p$ .

(vii) Pour tout  $i, j \in \mathcal{S}$ , ( $i > j$ ), on a :

(\*) la condition de contrôle :  $\pi_j(\pi_i(z)) = \pi_j(z)$  pour tout  $z \in U_i \cap U_j$

(\*\*)  $\pi_i^{-1}(V_i \cap U_j) \subset U_j$

**Remarques.** La condition (vi) n’est utilisée qu’à partir du paragraphe 4. La condition (vii) implique la propriété suivante :

Pour tout multiindice, formé d'éléments de  $\mathcal{S}$ ,  $I = i_0 > i_1 > \dots > i_p$ , la restriction à  $V_I = V_{i_0} \cap \bigcap_{\alpha=0}^p U_{i_\alpha}$ , de la fibration  $U_{i_0} \xrightarrow{\pi_{i_0}} V_{i_0}$ , a pour espace total :  $U_I = \bigcap_{\alpha=0}^p U_{i_\alpha}$ , (en particulier  $\pi_i^{-1}(V_i \cap U_j) = U_{ij}$  chaque fois que  $i > j$ ), on conjecture qu'elle est vérifiée pour toute stratification de Thom-Mather au sens usuel, elle l'est en tout cas lorsque  $(V, W)$  est une stratification de Whitney.

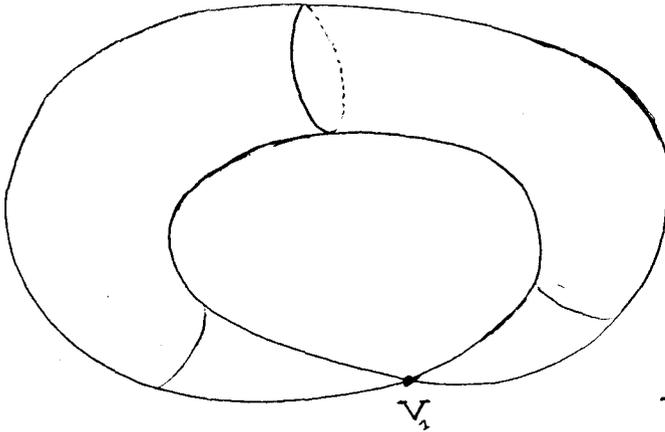
**Exemple (Fig).**

$$V = \mathbf{R}^3, \quad W = \text{Tore pincé}, \quad \mathcal{S} = \{1, 2\}.$$

$W$  est l'espace topologique quotient  $S \times [0, 1] / \mathcal{R}$ , où  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence définie par :

$$(e^{i\theta}, t) \mathcal{R} (e^{i\theta}, t) \quad \text{si } t \in ]0, 1[.$$

$$(1, 0) \mathcal{R} (e^{i\theta}, 0) \mathcal{R} (e^{i\theta}, 1) \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbf{R}.$$



$$W = \bar{V}_2 = V_1 \amalg V_2$$

$$V = \mathbf{R}^3.$$

### b. Profondeur de la stratification

On appelle profondeur de la variété stratifiée  $(V, W, \mathcal{S})$ , l'entier  $\text{Prof}(V, W, \mathcal{S}) = \sup\{p, \text{il existe une chaîne de strates } V_{i_0} > V_{i_1} > \dots > V_{i_p}\}$

**Remarques :** En partant de  $(V, W, \mathcal{S})$  une variété stratifiée de Thom-Mather,  $(V, \partial W, \partial \mathcal{S})$  et  $(V, \bar{V}_i, \mathcal{S}_i)$  sont alors automatiquement munies de la même structure. (avec  $\mathcal{S}_i = \{j \in \mathcal{S} / j \leq i\}$ ). Et on a :

$$(*) \quad \text{Prof}(V, \partial W, \partial \mathcal{S}) < \text{Prof}(V, W, \mathcal{S})$$

(\*\*)  $\text{Prof}(V, \bar{V}_i, \mathcal{S}_i) = 0$  si et seulement si  $V_i$  est une strate fermée

### 3. Cohomologie et stratification.

Soit  $(V, W, \mathcal{S})$  une variété stratifiée de Thom-Mather. On appellera “complexe de de Rham singulier” et l’on notera  $(\Omega_{DR, \mathcal{S}}^*(W), D)$  l’algèbre différentielle graduée suivante (non commutative, si  $W$  n’est pas lisse) :

Un élément  $\lambda \in (\Omega_{DR, \mathcal{S}}^k(W), D)$  est une famille  $\lambda = (\lambda_I)_{I \in N(\mathcal{S})}$  de formes différentielles  $\lambda_I \in \Omega^{k-|I|}(V_I)$ , ou  $N(\mathcal{S})$  est l’ensemble des multiindices  $I = (i_0 > i_1 > \dots > i_p)$  de  $\mathcal{S}$ ,  $|I| = p$  si  $I = (i_0 > i_1 > \dots > i_p)$ . On appellera un tel  $\lambda$  une “hyperforme différentielle”. Sa différentielle  $D\lambda$  est définie par :

$$(D\lambda)_I = (-1)^{|I|} d_{DR} \lambda_I + \sum_{r=1}^p (-1)^r (\lambda_{I-i_r|V_I}) + \pi_{i_1}^* (\lambda_{I-i_0}|_{V_I})$$

On vérifie alors sans peine que  $D$  est une différentielle, et qu’elle est une dérivation pour la structure d’algèbre  $\Omega_{DR, \mathcal{S}}^k(W) \times \Omega_{DR, \mathcal{S}}^l(W) \rightarrow \Omega_{DR, \mathcal{S}}^{k+l}(W)$  définie par :

$$(\lambda \cup \mu)_{i_0 i_1 \dots i_p} = \sum_{r=0}^p (-1)^{(k-r)(p-r)} (\lambda_{i_0 i_1 \dots i_r | V_I}) \wedge (\pi_{i_r}^* (\mu_{i_r i_{r+1} \dots i_p} | V_I))$$

Désignons d’autre part par  $\mathcal{R}^*(\mathcal{U})$  le complexe total de Čech-de Rham associé au recouvrement  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in \mathcal{S}}$ , ([BT]). Et considérons l’injection

$$\iota_W : \Omega_{DR, \mathcal{S}}^*(W) \hookrightarrow \mathcal{R}^*(\mathcal{U})$$

définie par :  $\iota_W(\lambda) = \mu = (\mu_I)_{I \in N(\mathcal{S})}$ , avec  $\mu_I = \pi_{i_0}^* \lambda_I$  pour  $I = (i_0 > i_1 > \dots > i_p)$ .

Il est facile de vérifier que  $\iota_W$  commute aux différentielles et que c’est un homomorphisme d’algèbres graduées.

#### Proposition.

$$H^*(\iota_W) : H^*(\Omega_{DR, \mathcal{S}}^*(W)) \rightarrow H^*(\mathcal{R}^*(\mathcal{U}))$$

est un isomorphisme d’algèbres graduées.

**Démonstration :** Notons  $\mathcal{R}^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\partial)$  le noyau de la projection naturelle  $\mathcal{R}^*(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{R}^*(\mathcal{U}^\partial)$ , ( $\mathcal{U}^\partial$  désigne le recouvrement  $(U_i)_{i \in \partial \mathcal{S}}$ ).

Remarquons que la projection naturelle  $\Omega_{DR,s}^*(W) \rightarrow \Omega_{DR,s}^*(\partial W)$  est aussi surjective, et notons  $\mathcal{R}^*(W, \partial W)$  son noyau.

On en déduit un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{R}^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\partial) & \longrightarrow & \mathcal{R}^*(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{R}^*(\mathcal{U}^\partial) & \longrightarrow & 0 \\
& & \uparrow \iota_{W, \partial W} & & \uparrow \iota_W & & \uparrow \iota_{\partial W} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{R}^*(W, \partial W) & \longrightarrow & \Omega_{DR,s}^*(W) & \longrightarrow & \Omega_{DR,s}^*(\partial W) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

( $\iota_{W, \partial W}$  désignant la restriction de  $\iota_W$ ).

**Lemme.**  $\iota_{W, \partial W}$  induit un isomorphisme d'algèbres en cohomologie.

**Démonstration du lemme.** Remarquons d'abord que  $\mathcal{R}^*(W, \partial W)$  est l'espace des familles :  $\lambda = (\lambda_I)_{I=(i_0 > i_1 > \dots > i_p)}$  telles que :

- (i)  $i_0$  est maximal dans  $\mathcal{S}$ ,
- (ii)  $\lambda_1 \in \Omega^{*-p}(V_I)$ ,

avec la différentielle

$$(D\lambda)_I = (-1)^{|I|} d_{DR}(\lambda_I) + \sum_{r=1}^p (-1)^r (\lambda_{I-i_r}|_{V_I}).$$

Si on désigne par  $\rho$  l'application naturelle de restriction  $\rho : \mathcal{R}^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\partial) \rightarrow \mathcal{R}^*(W, \partial W)$ , définie par :  $\rho(\mu) = \lambda = (\lambda_I)_I$  avec  $\lambda_I = \mu_I|_{V_I}$  ( $\mu_I$  étant un élément de  $\Omega^{*-|I|}(U_I)$ ); on constate facilement que  $\rho$  commute aux différentielles, et que  $\rho \circ \iota_{W, \partial W} = \text{id}_{\mathcal{R}^*(W, \partial W)}$ . On en déduit

$$H^*(\rho) \circ H^*(\iota_{W, \partial W}) = \text{id}_{H^*(\mathcal{R}^*(W, \partial W))}$$

Il reste à vérifier que  $H^*(\iota_{W, \partial W}) \circ H^*(\rho) = \text{id}_{H^*(\mathcal{R}^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\partial))}$ ; pour cela, on va construire un opérateur d'homotopie  $K : \mathcal{R}^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\partial) \rightarrow \mathcal{R}^{*-1}(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\partial)$  tel que :

$$\iota_{W, \partial W} \circ \rho - \text{id}_{\mathcal{R}^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\partial)} = D \circ K + K \circ D$$

Pour tout  $i_0$  élément maximal de  $\mathcal{S}$ , et pour tout  $I = (i_0 > i_1 > \dots > i_p)$ , il existe un opérateur d'homotopie naturel, lié à la rétraction par déformation de  $U_{i_0}$  sur  $V_{i_0}$ ,  $K_I : \Omega^*(U_I) \rightarrow \Omega^{*-1}(U_I)$ , qui vérifie  $\pi_{i_0}^*(\mu_I|_{V_I}) - \mu_I = (d_{DR} \circ K_I + K_I \circ d_{DR})(\mu_I)$ , et tel que pour tout  $r = 1, \dots, p$  on ait :

$$K_I(\mu_{I-i_r}|_{U_I}) = (K_{I-i_r}(\mu_{I-i_r}))|_{U_I}$$

On considère ensuite l'opérateur,  $K : R^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\partial) \rightarrow R^{*-1}(\mathcal{U}, \mathcal{U}^\partial)$ , défini par :

$$(K \cdot \mu)_I = (-1)^{|I|} K_I \cdot \mu_I .$$

Il répond à la question.

Ceci achève la démonstration du lemme.

Pour terminer la preuve de la proposition, il suffit d'utiliser un argument de récurrence sur la profondeur de la stratification et le lemme des cinq. (le démarrage de la récurrence ramène l'étude au cas lisse, ce qui est trivial).

### Corollaire

a. La cohomologie du complexe  $(\Omega_{DR,s}^*(W), D)$  s'identifie naturellement avec la cohomologie singulière réelle de  $W$  :

$$H^*(\Omega_{DR,s}^*(W), D) \cong H^*(W, \mathbf{R})$$

b. La cohomologie du noyau  $\mathcal{R}^*(W, \partial W)$  de la projection naturelle  $\Omega_{DR,s}^*(W) \rightarrow \Omega_{DR,s}^*(\partial W)$  s'identifie naturellement à  $H^*(W, \partial W)$ , de sorte que l'inclusion de  $\mathcal{R}^*(W, \partial W)$  dans  $\Omega_{DR,s}^*(W)$  induit par passage à la cohomologie, l'application naturelle  $H^*(W, \partial W) \rightarrow H^*(W)$

## 4. Intégration (Théorème de De Rham)

Dans ce paragraphe, on suppose :

(viii)  $W$  possède un recouvrement par des ouverts contractiles, dont toute intersection finie est également contractiles (c'est notamment le cas si  $W$  est triangulable ; voir par exemple [Lo], [V<sub>2</sub>]).

Notons  $\Sigma_*^\natural(V)$  le complexe des chaînes singulières  $C^\infty$  de  $V$ , qui sont transverses au "système d'alvéoles"  $(R_I)_{I \in N(\mathcal{S})}$  défini comme dans [L3] à l'aide des hypersurfaces  $X_i$  de la condition (vi), (pour plus de renseignements sur les systèmes d'alvéoles voir [L5]), et posons :

$$\Sigma_*^\natural(W) = \Sigma_*(W) \cap \Sigma_*^\natural(V)$$

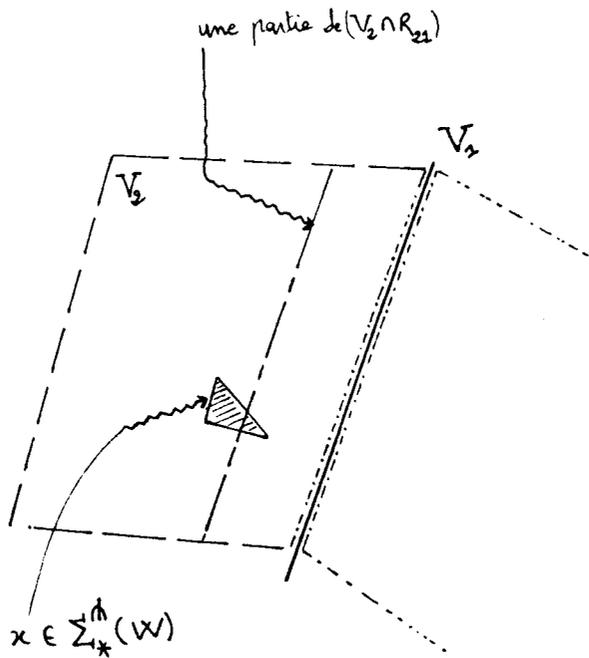
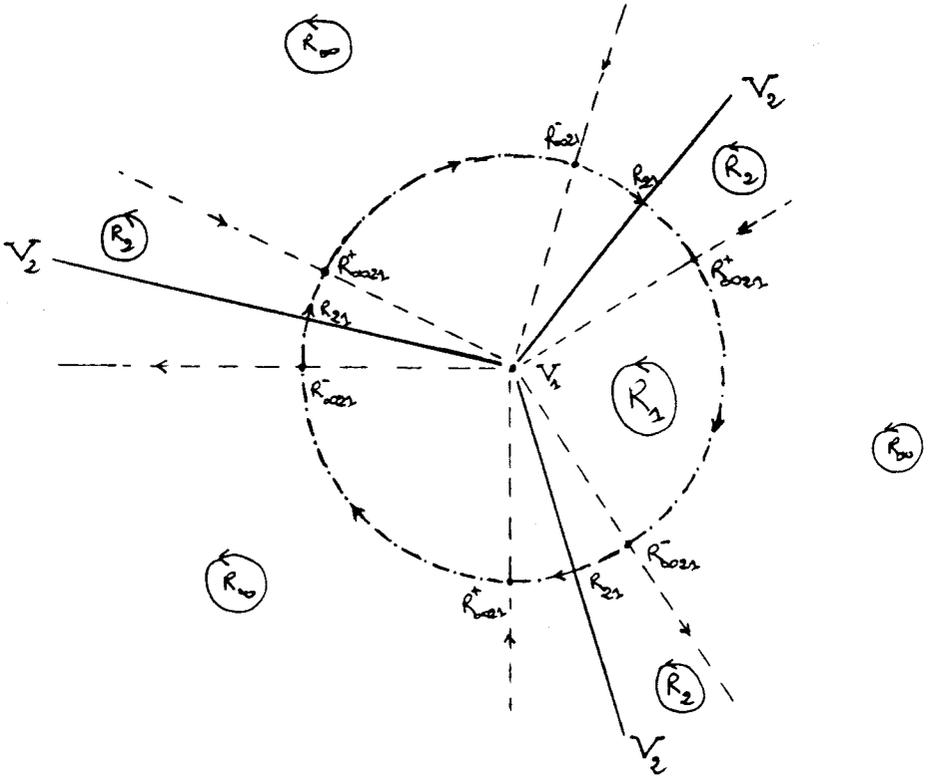
Le même raisonnement que celui fait dans [L3] (page 21) permet d'établir la proposition suivante

**Proposition** *L'inclusion  $\Sigma_*^{\text{h}}(W) \hookrightarrow \Sigma_*(W)$  induit un isomorphisme en homologie (donc en cohomologie à coefficients réels).*

On définit ensuite l'intégrale d'une hyperforme différentielle  $\lambda \in \Omega_{DR,s}^*(W)$  sur un "simplexe transverse"  $x \in \Sigma_*^{\text{h}}(W)$  par la formule :

$$\int_x \lambda = \sum_{I \in N(\mathcal{S})} (-1)^{|I|(N-|x|)} \int_{x \cap R_I} \pi_I^* \lambda_I$$

(où  $N = \dim V$ , et  $\pi_I^* \lambda_I = \pi_{i_0}^* \lambda_I$  pour  $I = (i_0 > i_1 > \dots > i_p)$ ).



**Théorème** L'application  $\lambda \mapsto \int_x \lambda$  de  $\Omega_{DR,s}^*(W)$  dans l'algèbre  $C_{\mathfrak{h}}^*(W, \mathbf{R})$  des cochaines à coefficients réels sur  $\Sigma_*^{\mathfrak{h}}(W)$

- vérifie la formule de Stokes :  $\int_x (D\lambda) = \int_{\partial x} \lambda$ ,
- coïncide avec l'intégration de de Rham lorsque  $W$  est lisse,
- induit un isomorphisme d'algèbres en cohomologie.

**Démonstration** : Il suffit de remarquer que l'application  $\lambda \mapsto \int_x \lambda$  n'est autre que la composée  $f \circ \mathcal{I} \circ \iota_W$ , où :

$$\iota_W : \Omega_{DR,s}^*(W) \hookrightarrow \mathcal{R}^*(\mathcal{U})$$

(cf. §.3),  $\mathcal{I} : \mathcal{R}^*(\mathcal{U}) \rightarrow C_{\mathfrak{h}}^*(U, \mathbf{R})$  désigne l'intégration dans le complexe de Čech - DeRham (cf. [L3], avec  $U = \cup_{i \in \mathcal{S}} U_i$ ) et  $f : C_{\mathfrak{h}}^*(U, \mathbf{R}) \rightarrow C_{\mathfrak{h}}^*(W, \mathbf{R})$  est l'application naturelle de restriction.

## 5. Homomorphisme de Poincaré

Soit  $i$  tel  $\bar{V}_i$  soit compacte et satisfasse à l'axiome (viii), ce qui nous permet d'identifier  $H_k(\bar{V}_i, \mathbf{R})$  avec  $\text{Hom}(H^k(\bar{V}_i, \mathbf{R}); \mathbf{R})$ . On suppose aussi :

- (ix)  $\bar{V}_i$  est un cycle singulier fermé transverse, de dimension  $n_i$  ( $n_i = \dim V_i$ ).

En composant la multiplication  $\Omega_{DR,s}^{n_i-k}(\bar{V}_i) \times \Omega_{DR,s}^k(\bar{V}_i) \rightarrow \Omega_{DR,s}^{n_i}(\bar{V}_i)$ , avec l'intégration  $\int_{\bar{V}_i} : \Omega_{DR,s}^{n_i}(\bar{V}_i) \rightarrow \mathbf{R}$ , on obtient une forme bilinéaire  $\Omega_{DR,s}^{n_i-k}(\bar{V}_i) \times \Omega_{DR,s}^k(\bar{V}_i) \rightarrow \mathbf{R}$ , qui permet de réaliser l'homomorphisme de Poincaré  $P_{\bar{V}_i} : H^{n_i-k}(\bar{V}_i) \rightarrow H_k(\bar{V}_i)$ . Celui-ci n'est en général pas un isomorphisme si  $\bar{V}_i$  n'est pas lisse.

## 6. Réalisation de l'inverse de "l'isomorphisme de Thom-Gysin".

Supposons désormais orienté le fibré normal à  $V_i$  dans  $V$ . On se propose dans ce paragraphe de définir un opérateur

$$f^i : Q^*(V, (V - \bar{V}_i) \cup U_{j < i} U_j) \rightarrow Q^{*- \nu_i}(\bar{V}_i, \partial \bar{V}_i), (\nu_i = \dim V - \dim V_i),$$

qui permettra de réaliser l'isomorphisme  $H^*(f^i) : H^*(V, (V - \bar{V}_i) \cup U_{j < i} U_j) \rightarrow H^{*- \nu_i}(\bar{V}_i, \partial \bar{V}_i)$ , évoqué dans l'introduction.

### A. Notations, rappels et constatations.

Soit  $(V, W, \mathcal{S})$  une variété stratifiée de Thom-Mather.

On pose  $U_\infty = V - W$  et  $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \amalg \{\infty\}$ . Pour  $i \in \mathcal{S}$ , on note :

$$\mathcal{S}_i = \{j \in \mathcal{S} / j \leq i\}$$

$$\hat{\mathcal{U}} = (U_j)_{j \in \hat{\mathcal{S}}} \quad \text{c'est un recouvrement ouvert de } V$$

$$\mathcal{U} = (U_j)_{j \in \mathcal{S}} \quad \text{c'est un recouvrement ouvert de } \bigcup_{j \in \mathcal{S}} U_j$$

$$\bar{V}_i = (U_j)_{j \leq i} \quad \text{c'est un recouvrement ouvert de } \bar{V}_i$$

$$\bar{V}'_i = (U_j)_{j \text{ non } \leq i} \quad \text{c'est un recouvrement ouvert de } V - \bar{V}_i$$

$$\check{U}_i = (U_j)_{j \in (\hat{\mathcal{S}} - \{i\})} \quad \text{c'est un recouvrement ouvert de } \check{U}_i = (V - \bar{V}_i) \cup \bigcup_{j < i} U_j$$

le noyau  $\mathcal{R}^*(\hat{\mathcal{U}}, \check{U}_i)$  de la projection naturelle  $\mathcal{R}^*(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{R}^*(\check{U}_i)$ , (qui s'identifie à l'espace des familles  $\mu = (\mu_I)_{I=(i_0 > i_1 \dots > i_p)}$ , telles que :

$$\begin{aligned} \mu_I &\in \Omega^{*-p}(U_I) \\ \mu_I &= 0 \quad \text{si } I \not\leq i, \end{aligned}$$

avec la différentielle  $(\check{D}_i \mu)_I = (-1)^{|I|} d_{DR} \mu_I + \sum_{r=0}^p (-1)^r (\mu_{I-i_r} |_{U_I})$ , a pour cohomologie  $H^*(V, \check{U}_i)$ , de telle façon que l'injection canonique de  $\mathcal{R}^*(\hat{\mathcal{U}}, \check{U}_i)$  dans  $\mathcal{R}^*(\hat{\mathcal{U}}, V - \bar{V}_i)$ , induit par passage à la cohomologie, l'application canonique :  $H^*(V, \check{U}_i) \rightarrow H^*(V, V - \bar{V}_i)$  induite par l'inclusion de  $V - \bar{V}_i$  dans  $\check{U}_i$ .

a) Désignons par  $(MV^*\{U_i, \check{U}_i, \check{d}_i\})$  le complexe de Mayer-Vietoris associé au recouvrement ouvert de  $V$  par  $\{U_i, \check{U}_i\}$  :

$$MV^*\{U_i, \check{U}_i\} = \Omega^*(\check{U}_i) \oplus \Omega^*(U_i) \oplus \Omega^{*-1}(\check{U}_i \cap U_i)$$

avec  $\check{d}_i(\alpha, \beta, \xi) = (d\alpha, d\beta, -d\xi + \beta - \alpha)$ .

Une injection naturelle  $\iota_i : MV^*\{U_i, \check{U}_i\} \hookrightarrow \mathcal{R}^*(\hat{\mathcal{U}})$  est donnée par :  $\iota_i(\alpha, \beta, \xi) = \mu = (\mu_I)_{I \in N(\hat{\mathcal{S}})}$  avec

$$\begin{aligned} \mu_{i_0} &= \begin{cases} \alpha & \text{si } i_0 \neq i \\ \beta & \text{si } i_0 = i \end{cases} \\ \mu_{i_0 i} &= \xi \quad \text{si } i_0 > i \\ \mu_{i i_0} &= -\xi \quad \text{si } i < i_0 \\ \mu_{i_0 i_1} &= 0 \quad \text{si } i \notin \{i_0, i_1\} \\ \mu_I &= 0 \quad \text{si } |I| \geq 2 \end{aligned}$$

On vérifie facilement que  $\iota_i$  commute aux différentielles, elle induit par conséquent un isomorphisme en cohomologie par application du théorème d'A. Weil ([B.T]).

La restriction  $\tilde{\iota}_i$  de  $\iota_i$  au sous complexe :

$$\begin{cases} Q^*(V, \check{U}_i) = \Omega^*(U_i) \oplus \Omega^{*-1}(\check{U}_i \cap U_i) \\ \check{d}_i(\beta, \xi) = (d\beta, -d\xi + \beta) \end{cases}$$

permet de réaliser un diagramme commutatif à colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q^*(V, \check{U}_i) & \xrightarrow{\tilde{\iota}_i} & \mathcal{R}^*(\hat{U}, \check{U}_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ MV^*\{U_i, \check{U}_i\} & \xrightarrow{\tilde{\iota}_i} & \mathcal{R}^*(\hat{U}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^*(\check{U}_i) & \longrightarrow & \mathcal{R}^*(\check{U}_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

On en déduit que  $\tilde{\iota}_i$  induit un isomorphisme  $H^*(Q^*(V, \check{U}_i)) \rightarrow H^*(V, \check{U}_i)$  en cohomologie.

**b)** D'autre part, rappelons le complexe relatif  $R^*(\bar{V}_i, \partial\bar{V}_i)$  associée à la variété stratifiée  $(V, \bar{V}_i, \mathcal{S}_i)$  (cf. § 3). (c'est l'espace des familles  $\lambda = (\lambda_I)_{I=(i>i_1>\dots>i_p)}$  telles que  $\lambda_I \in \Omega^{*-p}(V_I)$ , avec la différentielle :  $(D_i\lambda)_I = (-1)^{|I|}d_{DR}\lambda_I + \sum_{r=1}^p (-1)^r(\lambda_{I-i_r|V_r})$ .)

On définit par ailleurs le complexe différentiel suivant :

$$\begin{cases} Q^*(\bar{V}_i, \partial\bar{V}_i) = \Omega^*(V_i) \oplus \Omega^{*-1}(V_i \cap \cup_{j<i} U_j) \\ d_i(u, v) = (du, -dv - u) \end{cases}$$

et l'inclusion  $b_i : Q^*(\bar{V}_i, \partial\bar{V}_i) \hookrightarrow R^*(\bar{V}_i, \partial\bar{V}_i)$  donnée par

$$\begin{aligned} b_i(u, v) &= \lambda, & \lambda_i &= u \\ & & \lambda_{i i_1} &= v \quad \text{si } i > i_1, \\ & & \lambda_I &= 0 \quad \text{si } |I| \geq 2. \end{aligned}$$

$b_i$  commute aux différentielles, et induit donc par passage à la cohomologie une application  $H^*(b_i) : H^*(Q^*(\bar{V}_i, \partial\bar{V}_i)) \rightarrow H^*(\bar{V}_i, \partial\bar{V}_i)$

**Lemme.**  $H^*(b_i)$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués.

**Preuve :** Notons  $\mathcal{R}^*(\mathcal{U}^i)$  le complexe total de Čech-de Rham associé à  $\mathcal{U}^i = (W_j)_{j \in \partial\mathcal{S}^i}$  : recouvrement ouvert de  $V_i \cap (\cup_{j < i} U_j)$ , (où  $W_j = V_i \cap U_j$  et  $\partial\mathcal{S}^i = \{j \in \mathcal{S} \mid j < i\}$ ), c'est l'espace des familles  $\lambda = (\lambda_I)_{i=(i_0 > i_1 > \dots > i_p)}$  ( $\lambda_I \in \Omega^{*-p}(W_I)$ , avec  $W_I = W_{i_0} \cap W_{i_1} \cap \dots \cap W_{i_p} = V_i \cap U_I = V_{(i_0 > i_1 > \dots > i_p)}$ ) avec la différentielle

$$(D^i \lambda)_I = (-1)^{|I|} d_{DR} \lambda_I + \sum_{r=0}^p (-1)^r (\lambda_{I - i_r | W_{i_r}})$$

On a alors une injection naturelle  $f : \mathcal{R}^{*-1}(\mathcal{U}^i) \rightarrow R^*(\bar{V}_i, \partial\bar{V}_i)$ , définie par

$$(f(\lambda))_{(i_0 > i_1 > \dots > i_p)} = \lambda_{(i_0 > i_1 > \dots > i_p)}$$

D'où l'existence d'un diagramme commutatif à colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^{*-1}(V_i \cap \cup_{j < i} U_j) & \xrightarrow{\varepsilon_i} & R^{*-1}(\mathcal{U}^i) \\ \downarrow k & & \downarrow f \\ Q^*(\bar{V}_i, \partial\bar{V}_i) & \xrightarrow{b_i} & R^*(\bar{V}_i, \partial\bar{V}_i) \\ \downarrow & & \downarrow g \\ \Omega^*(V_i) & \xrightarrow{\text{id}} & \Omega^*(V_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

où

$g$  est la projection canonique  $\lambda \mapsto \lambda_i$ ,

$k$  est l'injection  $v \mapsto (0, v)$ ,

et

$\varepsilon_i$  est l'inclusion :

$$(\varepsilon_i v)_{i_0} = v|_{W_{i_0}}, \quad (\varepsilon_i v)_I = 0 \text{ pour } |I| > 0.$$

La preuve du lemme s'achève par application du lemme des cinq.

**c) Remarque :** Pour  $i \in \mathcal{S}$  on a  $\check{U}_i \cap U_i = (U_i \setminus V_i) \cup (U_{j < i} U_{ij})$ .

En effet, rappelons d'abord que  $\check{U}_i = U_{j \in \hat{\mathcal{S}} \setminus \{i\}} U_j$ .

D'où, puisque :

$$\hat{\mathcal{S}} \setminus \{i\} = \{j \in \hat{\mathcal{S}} / j > i\} \cup \{j \in \hat{\mathcal{S}} / j < i\} \cup \{j \in \hat{\mathcal{S}} / j \text{ non comparable à } i\},$$

on en déduit que  $\check{U}_i \cap U_i = U_{j \in \hat{\mathcal{S}} \setminus \{i\}} U_{ij} = (U_{j > i} U_{ij}) \cup (U_{j < i} U_{ij})$ .

Vérifions ensuite que  $U_i \setminus V_i = U_{j > i} U_{ij}$  : pour tout  $j > i$  on a  $U_{ij} \cap V_i = U_i \cap U_j \cap V_i = U_j \cap V_i = \emptyset$  d'où

$$U_{ij} \subset (U_i \setminus V_i),$$

inversement soit  $x \in (U_i \setminus V_i)$ , alors : si  $x \notin W$ , ceci implique que  $x \in (U_i - W) = U_{\infty i} \subset U_{j > i} U_{ij}$  et si  $x \in W$ , il existe alors  $j \neq i / x \in V_j$ , d'où  $U_i \cap V_j \neq \emptyset$ , et par suite  $j > i$  et  $x \in U_{ij}$ .

## B. Théorème.

**(\*) Définition :** On définit un opérateur linéaire gradué

$$f^i : Q^*(V, \check{U}_i) \rightarrow Q^{*- \nu_i}(\bar{V}_i, \partial \bar{V}_i),$$

en posant :

$$f^i(\beta, \xi) = \left( \int_{D^{\nu_i}} \beta|_{\tau_i} - \int_{S^{\nu_i-1}} \xi|_{\partial \tau_i}, (-1)^{\nu_i-1} \int_{D^{\nu_i}} \xi|_{U_{j < i} \tau_{ij}} \right)$$

où

$$\tau_{ij} = \tau_i \cap U_j,$$

$\tau_i$  étant l'espace total du fibré en disques fermés, associé au fibré vectoriel riemannien  $(U_i, \pi_i, V_i, \mathbf{R}^{\nu_i})$

$\partial \tau_i$  c'est l'espace total du fibré en sphères, associé.

$D^{\nu_i}$  désigne le disque unité fermé de  $\mathbf{R}^{\nu_i}$

$S^{\nu_i-1}$  désigne la sphère unité de  $\mathbf{R}^{\nu_i}$

On vérifie, par application du théorème de Stokes (cf. [Bo], ou Appendice B.) que l'opérateur  $f^i$  induit un homomorphisme d'espace vectoriels gradués :

$$H^*(\tilde{f}^i) : H^*(V, (V - \bar{V}_i) \cup \cup_{j < i} U_j) \rightarrow H^{*- \nu_i}(\bar{V}_i, \partial \bar{V}_i),$$

(\*\*) **Enoncé du Théorème.**  $H^*(f^i)$  est un isomorphisme

**Démonstration :** On introduit le complexe intermédiaire suivant :

$$\tilde{Q}^*(V, \tilde{U}_i) = \Omega^*(U_i) \oplus \Omega^{*-1}(U_i - V_i) \oplus \Omega^{*-1}(\cup_{j < i} U_{ij}) \oplus \Omega^{*-2}((U_i - V_i) \cap (\cup_{j < i} U_{ij}))$$

muni de la différentielle

$$\tilde{d}_i(\beta, \xi, \gamma, \alpha) = (d\beta, -d\xi + \beta, -d\gamma - \beta, d\alpha + \gamma + \xi).$$

Une inclusion  $h_i : Q^*(V, \tilde{U}_i) \hookrightarrow \tilde{Q}^*(V, \tilde{U}_i)$  est donnée par :  $h_i(\beta, \xi) = (\beta, \xi, -\xi, 0)$ ; elle induit en cohomologie un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués par application du lemme des cinq. On prolonge ensuite l'opérateur  $f^i$  au complexe  $\tilde{Q}^*(V, \tilde{U}_i)$ , en posant :

$$\tilde{f}^i(\beta, \xi, \gamma, \alpha) = \left( \int_{D^{\nu_i}} \beta|_{\tau_i} - \int_{S^{\nu_i-1}} \xi|_{\partial \tau_i}, (-1)^{\nu_i} \left( \int_{D^{\nu_i}} \gamma|_{\cup_{j < i} \tau_{ij}} + \int_{S^{\nu_i-1}} \alpha|_{\cup_{j < i} \partial \tau_{ij}} \right) \right)$$

Remarquons d'abord que l'écriture a bien un sens puisque :

$$\cup_{j < i} \partial \tau_{ij} = (\cup_{j < i} (\partial \tau_i \cap U_j)) \subset (\partial \tau_i \cap \cup_{j < i} U_j) \subset ((U_i \setminus V_i) \cap \cup_{j < i} U_{ij}).$$

On vérifie que cette application induit un homomorphisme d'espaces vectoriels  $H^*(\tilde{f}^i) : H^*(\tilde{Q}^*(V, \tilde{U}_i)) \rightarrow H^{*- \nu_i}(\bar{V}_i, \partial \bar{V}_i)$ , et qui satisfait :  $H^*(\tilde{f}^i) \circ H^*(h_i) = H^*(f^i)$ .

Il suffit donc, pour achever la démonstration du théorème, d'établir que  $H^*(\tilde{f}^i)$  est bijective.

Pour cela, on considère le diagramme commutatif suivant à colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Omega^{*-1}(U_{j<i}U_{ij}) \oplus \Omega^{*-2}((U_i \setminus V_i) \cap U_{j<i}U_{ij}) & \xrightarrow{f_i^{(2)}} & \Omega^{*-\nu_i-1}(V_i \cap U_{j<i}U_{ij}) \\
 \downarrow f & & \downarrow h \\
 \tilde{Q}^*(V, \tilde{U}_i) & \xrightarrow{\hat{f}^i} & Q^{*-\nu_i}(\bar{V}_i, \partial\bar{V}_i) \\
 \downarrow g & & \downarrow k \\
 \Omega^*(U_i) \oplus \Omega^{*-1}(U_i \setminus V_i) & \xrightarrow{f_i^{(1)}} & \Omega^{*-\nu_i}(V_i) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

où  $f_i^{(1)}$  et  $f_i^{(2)}$  sont les opérateurs “d’intégration le long de la fibre” introduits dans le cas lisse (cf. Appendice A.), et associés respectivement aux fibrations :

$$U_i \xrightarrow{\pi_i} V_i \text{ et } \cup_{j<i} U_{ij} \xrightarrow{\pi_i} V_{ij} .$$

$f$  est l’injection  $(\gamma, \alpha) \mapsto (0, 0, \gamma, -\alpha)$

$g$  est la projection  $(\beta, \xi, \gamma, \alpha) \mapsto (\beta, \xi)$

$h : v \mapsto (-1)^{\nu_i} v$

$k : (u, v) \mapsto u$ .

La démonstration du théorème s’achève par application du lemme des cinq grâce à la réalisation de l’isomorphisme de Thom-Gysin dans le cas lisse (cf. Appendice).

## 7. Relation avec la dualité d’Alexander.

Désormais, la variété ambiante  $V$  est supposée compacte, orientée, de dimension  $N$ , et  $\bar{V}_i$  satisfait aux axiomes (viii) et (ix), ( $i$  étant fixé dans  $\mathcal{S}$ ).

La réalisation de la dualité de Poincaré pour  $V$ , dans le complexe de Čech-de Rham  $\mathcal{R}^*(\hat{\mathcal{U}})$ , a permis de construire un opérateur

$$AL_W : \mathcal{R}^*(\hat{\mathcal{U}}, V - W) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{R}^{N-*}(\mathcal{U}), \mathbf{R})$$

$(\langle AL_W(\lambda), p(\beta) \rangle = \int_V \lambda \cup \beta$  où  $p$  désigne la projection naturelle  $\mathcal{R}^{N-*}(\hat{U}) \rightarrow \mathcal{R}^{N-*}(\mathcal{U})$ ), qui par passage à la cohomologie induit l'isomorphisme d'Alexander  $[AL_W] : H^*(V, V - W) \rightarrow H_{N-*}(W)$ .

A l'aide de l'inclusion  $\iota_W : \Omega_{DR,s}^{N-*}(W) \hookrightarrow R^{N-*}(\mathcal{U})$ , construite au paragraphe 3., on en déduit une réalisation de l'homomorphisme d'Alexander encore noté  $AL_W : \mathcal{R}^*(\hat{U}, W - W) \rightarrow \text{Hom}(\Omega_{DR,s}^{N-*}(W); \mathbf{R})$ .

En particulier on a un diagramme commutatif naturel :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^*(\hat{U}, V - \bar{V}_i) & \longrightarrow & \mathcal{R}^*(\hat{U}, V - W) \\ \downarrow AL_{\bar{V}_i} & & \downarrow AL_W \end{array}$$

$$\text{Hom}(\Omega_{DR,s}^{N-*}(\bar{V}_i); \mathbf{R}) \longrightarrow \text{Hom}(\Omega_{DR,s}^{N-*}(W); \mathbf{R})$$

qui par passage à la cohomologie, donne lieu au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^*(V, V - \bar{V}_i) & \longrightarrow & H^*(V, V - W) \\ \downarrow [AL_{\bar{V}_i}] \cong & & \cong \downarrow [AL_W] \\ H_{N-*}(\bar{V}_i) & \longrightarrow & H_{N-*}(W) \end{array}$$

défini naturellement à partir des inclusions :  $\bar{V}_i \hookrightarrow W$  et  $V - W \hookrightarrow V - \bar{V}_i$ .

Supposons ensuite que le "système d'alvéoles"  $(R_j)_{j \in \mathcal{S}}$  vérifie :

(x)  $\pi : R_i \rightarrow V_i \cap R_i$  est un fibré localement trivial ( $C^\infty$  par morceaux), dont la restriction à chaque  $V_i \cap R_I$  ( $I = (i > i_1 > \dots > i_p)$ ,  $I \in N(\mathcal{S})$ ) s'identifie à un fibré :  $R_I \xrightarrow{\pi_i} V_i \cap R_I$ .

**Théorème a.** *Le diagramme suivant d'espaces vectoriels gradués est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} Q_i^*(V, \check{U}_i) & \xrightarrow{\varepsilon_i} & R^*(\hat{U}, V - \bar{V}_i) \\ \downarrow f^i & & \downarrow AL_{\bar{V}_i} \\ Q^{*- \nu_i}(\bar{V}_i, \partial \bar{V}_i) & \xrightarrow[b_i]{} \Omega_{DR,s}^{n_i - *}(\bar{V}_i) \xrightarrow{P_{\bar{V}_i}} & \text{Hom}(\Omega_{DR,s}^{N-*}(\bar{V}_i); \mathbf{R}) \end{array}$$

(où  $\varepsilon_i$  et  $b_i$  sont définis de façon naturelle).

b. Il induit en cohomologie le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} H^*(V, (V - \bar{V}_i) \cup \cup_{j < i} U_j) & \longrightarrow & H^*(V, V - \bar{V}_i) \\ \downarrow H^*(f^i) \cong & & \cong \downarrow [AL_{\bar{V}_i}] \\ H^{*- \nu_i}(\bar{V}_i, \partial \bar{V}_i) \rightarrow H^{*- \nu_i}(\bar{V}_i) & \xrightarrow{[P_{\bar{V}_i}]} & H_{N-*}(\bar{V}_i) \end{array}$$

(les flèches non précisées sont définies de façon naturelle).

**Démonstration :** Il s'agit d'établir que pour  $(\beta, \xi) \in Q^k(V, \check{U}_i)$  et  $\Psi \in \Omega_{DR, s}^{N-k}(\check{V}_i)$ , on a :

$$\langle P_{\check{V}_i} \circ b_i \circ \int^i (\beta, \xi), \Psi \rangle = \langle AL_{\check{V}_i} \circ \varepsilon_i(\beta, \xi), \Psi \rangle$$

(avec  $\langle P_{\check{V}_i}(\lambda), \beta \rangle = \int_{\check{V}_i} \lambda \cup \beta$ ,

$$\varepsilon_i(\beta, \xi) = \mu, \quad \left[ \begin{array}{l} \mu_i = \beta, \\ \mu_j = 0 \quad \text{si } j \neq i, \\ \mu_{i_0 i} = \xi \quad \text{si } i_0 > i, \\ \mu_{ii_1} = -\xi \quad \text{si } i > i_1, \\ \mu_I = 0 \quad \text{ailleurs.} \end{array} \right.$$

et

$$b_i(u, v) = \lambda, \quad \left[ \begin{array}{l} \lambda_i = u, \\ \lambda_{ii_1} = v \quad \text{si } i > i_1, \\ \lambda_I = 0 \quad \text{ailleurs} \end{array} \right)$$

Tout calcul fait, on trouve :

$$\begin{aligned} \langle P_{\check{V}_i} \circ b_i \circ \int^i (\beta, \xi), \Psi \rangle &= \int_{V_i \cap R_i} u \wedge \Psi_i + \sum_{p \geq 1} \sum_{\substack{i_1 > \dots > i_p \\ i_1 < i}} (-1)^{p \cdot \nu_i} \cdot \int_{V_i \cap R_{ii_1 \dots i_p}} \\ &\quad [(-1)^{(k-\nu_i)p} \pi_i^* u \wedge \pi_i^* \Psi_{ii_1 \dots i_p} \\ &\quad + (-1)^{(k-\nu_i-1)(p-1)} \pi_i^* v \wedge \pi_i^* (\pi_{i_1}^* \Psi_{i_1 \dots i_p})] \end{aligned}$$

(avec  $u = f_{D^{\nu_i}} \beta|_{\tau_i} - f_{S^{\nu_i-1}} \xi|_{\partial \tau_i}$  et  $v = (-1)^{\nu_i+1} f_{D^{\nu_i}} \xi|_{\cup_{j < i} \tau_{ij}}$ )

$$\begin{aligned} \langle AL_{\check{V}_i} \circ \varepsilon_i(\beta, \xi), \Psi \rangle &= \int_{r_i} \beta \wedge \pi_i^* \Psi_i + \sum_{j > i} \int_{R_{ji}} \xi \wedge \pi_i^* \Psi_i \\ &\quad + \sum_{p \geq 1} \sum_{\substack{i_1 > \dots > i_p \\ i_1 < i}} \left( \int_{R_{ii_1 \dots i_p}} [(-1)^{kp} \beta \wedge \pi_i^* \Psi_{ii_1 \dots i_p} \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{(k-1)(p-1)+1} \xi \wedge \pi_i^* (\pi_{i_1}^* \Psi_{i_1 \dots i_p}) \right] \\ &\quad + \sum_{j > i} \int_{R_{jii_1 \dots i_p}} (-1)^{(k-1)p} \xi \wedge \pi_i^* \Psi_{ii_1 \dots i_p} \end{aligned}$$

L'identification des deux termes concernés s'effectue par application du théorème de Fubini (cf. Appendice) en remarquant que le bord fibré du fibré localement trivial  $R_I \xrightarrow{\pi_i} V_i \cap R_I$  est donné par la formule :

$$\partial_{\pi_i} R_{ii_1 \dots i_p} = (-1)^{p+1} \sum_{\substack{j > i \\ j \in \mathcal{S}}} R_{jii_1 \dots i_p} .$$

## 8. Réalisation de "l'isomorphisme de Thom-Gysin"

### en codimension paire.

Dans ce paragraphe, on suppose que  $\nu_i$  est paire ( $\nu_i = 2m_i$ ).

Désignons par  $\eta_i$  la restriction à  $U_i - V_i$  du fibré tangent vertical  $\ker(d\pi_i)$ . Il s'identifie canoniquement au fibré image réciproque de  $U_i \xrightarrow{\pi_i} V_i$  par l'application  $\tilde{\pi}_i = \pi_i|_{U_i - V_i}$ . Le fibré  $\eta_i$  possède une section canonique partout non nulle, notée  $L_i$ , appelé "champ de vecteurs transversal", et définie par le groupe à 1 paramètre  $(t, z) \mapsto e^t \cdot z$  de  $\mathbf{R} \times (U_i - V_i)$  dans  $(U_i - V_i)$ , (le produit externe provient de la structure vectorielle existante sur les fibres de  $U_i$ ).

En outre, après avoir muni ce fibré vectoriel de la métrique riemannienne image réciproque de celle existante sur  $U_i \xrightarrow{\pi_i} V_i$ , on peut le munir de deux connexions riemanniennes :

(\*)  $\omega_i = \tilde{\pi}_i^* \bar{\omega}_i$ , connexion image réciproque d'une connexion  $\bar{\omega}_i$  choisie sur  $U_i \xrightarrow{\pi_i} V_i$ ,

(\*\*)  $\omega_i^{L_i}$ , connexion riemannienne préservant le champ de vecteurs transversal normalisé  $\frac{L_i}{\|L_i\|}$ .

Considérons l'homomorphisme de complexes

$$\tau_i \cup (\cdot) : Q_i^{*- \nu_i}(\bar{V}_i, \partial \bar{V}_i) \rightarrow \tilde{Q}_i^*(V, \check{U}_i)$$

(où

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_i^*(V, \check{U}_i) &= \Omega^*(U_i) \oplus \Omega^{*-1}(U_i - V_i) \oplus \Omega^{*-1}(\cup_{j < i} U_{ij}) \\ &\oplus \Omega^{*-2}((U_i - V_i) \cap (\cup_{j < i} U_{ij})) \end{aligned}$$

muni de la différentielle

$$\tilde{d}_i(\beta, \xi, \gamma, \alpha) = (d\beta, -d\xi + \beta, -d\gamma - \beta, d\alpha + \gamma + \xi) ;$$

défini par :

$$\begin{aligned}\tau_i \cup (u, v) = & (\Delta_{\omega_i}(\chi_{m_i}) \wedge \pi_i^* u, \Delta_{\omega_i \omega_i^{L_i}}(\chi_{m_i}) \wedge \pi_i^* u, \\ & \Delta_{\omega_i}(\chi_{m_i}) \wedge \pi_i^* v, -\Delta_{\omega_i \omega_i^{L_i}}(\chi_{m_i}) \wedge \pi_i^* v).\end{aligned}$$

( $\Delta_{\omega_i}$  désigne l'homomorphisme de Chern-Weil associé au fibré vectoriel riemannien  $\eta_i$ ,

$\Delta_{\omega_i \omega_i^{L_i}}$  désigne l'opérateur différence de Bott associé au couple de connexions  $\{\omega_i, \omega_i^{L_i}\}$ ,

$\chi_{m_i}$  est le pfaffien défini sur l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques  $s \circ (v_i)$ ).

**Proposition.** *L'application  $\tau_i \cup (\cdot)$  induit, en cohomologie, l'isomorphisme inverse de  $H^*(f^i)$ .*

## 9. Appendice.

### A. Etude du cas lisse.

**a. Cas d'un fibré vectoriel.** Soit  $(E, \pi, B, \mathbf{R}^r)$  un fibré vectoriel réel  $C^\infty$  orienté. On considère l'algèbre différentielle graduée  $(R^*(E, E-B), D)$  définie par :  $R^*(E, E-B) = \Omega^*(E) \oplus \Omega^{*-1}(E-B)$  avec la différentielle  $D(\beta, \xi) = (d\beta, -d\xi + \beta)$  et le produit  $(\beta, \xi) \cup (\beta', \xi') = (\beta \wedge \beta', \xi \wedge \xi')$ .

(la base  $B$  étant identifiée à son image par la section nulle).

On rappelle que (cf [L<sub>3</sub>]) la cohomologie de cette algèbre différentielle s'identifie naturellement à  $H^*(E, E-B; \mathbf{R})$ .

Munissons le fibré vectoriel  $(E, \pi, B, \mathbf{R}^r)$  d'une métrique riemannienne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , et posons :

$$\begin{aligned}\mathring{\tau}_\varepsilon &= \{z \in E, \langle z, z \rangle < \varepsilon\}, & \varepsilon \in ]0, +\infty[. \\ \partial\tau_\varepsilon &= \{z \in E, \langle z, z \rangle = \varepsilon\} \\ \text{et } \tau_\varepsilon &= \{z \in E, \langle z, z \rangle \leq \varepsilon\}\end{aligned}$$

Ce sont respectivement les espaces totaux de fibrés  $C^\infty$  localement triviaux, canoniquement orientés :

$$(\mathring{\tau}_\varepsilon, \pi, B, \mathring{D}_\varepsilon), (\partial\tau_\varepsilon, \pi, B, \partial D_\varepsilon) \text{ et } (\tau_\varepsilon, \pi, B, D_\varepsilon).$$

( $D_\varepsilon$  désigne le disque fermé de  $\mathbf{R}^r$ , centré en zéro et de rayon  $\varepsilon$ ,  $\mathring{D}_\varepsilon$  son intérieur, et  $\partial D_\varepsilon$  sa frontière).

Pour  $\varepsilon = 1$ , on pose :

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_1, \quad D^r = D_1 \\ \partial\tau &= \partial\tau_1 \text{ et } S^{r-1} = \partial D_1.\end{aligned}$$

on définit ensuite une "intégration le long de la fibre" :

$$\int : R^*(E, E - B) \rightarrow \Omega^{*-r}(B)$$

c'est l'application linéaire homogène de degré  $-r$ , définie par :

$$\int(\beta, \xi) = \int_{D^r} \beta - \int_{S^{r-1}} \xi$$

**Lemme :** *L'application linéaire  $\int$  satisfait l'égalité :  $\int \circ D = (-1)^r d \circ \int$ , et induit donc, par passage à la cohomologie, une application linéaire*

$$H(\int) : H^*(E, E - B) \rightarrow H^{*-r}(B),$$

homogène de degré  $-r$ .

**Preuve :** La démonstration découle immédiatement du théorème de Stokes (Appendice B.) :

$$\int_{D^r} (d\beta) + (-1)^{r+1} d(\int_{D^r} \beta) = \int_{S^{r-1}} \beta, \text{ pour tout } \beta \in \Omega^*(E).$$

**Théorème :** *(Isomorphisme de Thom)*

$$H(\int) \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.}$$

**Démonstration.**

*1er cas :*  $B$  est un point.

On identifie alors  $E$  à  $\mathbf{R}^r$  et  $B$  à son origine,  $B = \{0\}$ .

On sait que :

$$H^k(\mathbf{R}^r, \mathbf{R}^r - \{0\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < r \\ \mathbf{R} & \text{si } k = r. \end{cases}$$

et

$$H^k(\{0\}) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus, il est facile de voir que dans ce cas, l'application  $H^k(f) : H^k(\mathbf{R}^r, \mathbf{R}^r - \{0\}) \rightarrow H^{k-r}(\{0\})$  s'identifie à l'application nulle, sauf pour  $k = r$ .

on en déduit qu'il suffit de montrer que l'application  $H^r(f) : H^r(\mathbf{R}^r, \mathbf{R}^r - \{0\}) \rightarrow \mathbf{R}$  est surjective :

Puisque  $(\mathbf{R}^r - \{0\})$  se rétracte par déformations sur la sphère unité  $S^{r-1}$ , on en déduit l'existence d'une forme différentielle  $\xi \in \Omega^{r-1}(\mathbf{R}^r - \{0\})$  telle que :  $\int_{S^{r-1}} \xi = 1$ .

Autrement dit  $H^r(f)[(0, -\xi)] = 1$ . Ceci achève la démonstration du 1er cas.

2ème cas :  $B = \mathbf{R}^n$ .

Le fibré  $(E, \pi, B, \mathbf{R}^r)$  s'identifie alors au fibré trivial :  $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r, \pi, \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^r)$  où  $\pi$  est la projection canonique.

L'injection  $i : \mathbf{R}^r \hookrightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r$ ,  $i(z) = (0, z)$ , induit de façon naturelle un homomorphisme différentiel  $[i^*] : R^*(E, E - \{0\}) \rightarrow R^*(\mathbf{R}^r, \mathbf{R}^r - \{0\})$ , (où :  $E - \{0\} = \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^r - \{0\})$ ), tel que

Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^*(E - \{0\}) & \xrightarrow{\iota} & R^*(E, E - \{0\}) & \xrightarrow{p} & \Omega^*(E) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow i^* & & \downarrow [i^*] & & \downarrow i^* & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^*(\mathbf{R}^r - \{0\}) & \longrightarrow & R^*(\mathbf{R}^r, \mathbf{R}^r - \{0\}) & \longrightarrow & \Omega^*(\mathbf{R}^r) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(avec :  $\iota(\xi) = (0, \xi)$  et  $p(\beta, \xi) = \beta$ )

Les autres flèches sont définies de manière analogue.

Le lemme des cinq permet d'en déduire que  $[i^*]$  induit un isomorphisme en cohomologie.

D'autre part, on vérifie aisément la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} R^*(\mathbf{R}^r, \mathbf{R}^r - \{0\}) & \xleftarrow{[i^*]} & R^*(E, E - \{0\}) \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \Omega^{*-r}(\{0\}) & \xleftarrow{i^*} & \Omega^{*-r}(\mathbf{R}^n) \end{array}$$

le symbole  $f$  désigne "l'intégration le long de la fibre" associé au fibré trivial :  $\mathbf{R}^r \rightarrow \{0\}$ .

On en déduit, d'après le premier cas, que  $f$  induit un isomorphisme en cohomologie. Ceci achève l'étude du 2ème cas.

**Lemme 1 :** Soit  $\{U, V\}$  un recouvrement ouvert de  $B$ . La suite exacte de Mayer-Vietoris (cf. [G.H.VI]) :

$$0 \rightarrow \Omega^*(E) \rightarrow \Omega^*(E|_U) \oplus \Omega^*(E|_V) \rightarrow \Omega^*(E|_{U \cap V}) \rightarrow 0$$

permet alors de construire une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow C^* \rightarrow C_U^* \oplus C_V^* \rightarrow C_{U \cap V}^* \rightarrow 0.$$

où :  $C^* = R^*(E, E - B)$ , et  $C_\theta^* = R^*(E|_\theta, E|_\theta - \theta)$  pour tout ouvert  $\theta$  de  $B$ . De plus, on a un diagramme commutatif naturel :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^* & \longrightarrow & C_U^* \oplus C_V^* & \longrightarrow & C_{U \cap V}^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f \oplus f & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{*-r}(B) & \longrightarrow & \Omega^{*-r}(U) \oplus \Omega^{*-r}(V) & \longrightarrow & \Omega^{*-r}(U \cap V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

**Lemme 2 :** Supposons  $(U_\alpha)_\alpha$  une partition par des ouverts de  $B : B = \coprod_\alpha U_\alpha$ .

Le diagramme suivant est alors commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R^*(E, E - B) & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & \Pi_\alpha R^*(E|_{U_\alpha}, E|_{U_\alpha} - U_\alpha) \\ f \downarrow & & \downarrow \Pi_\alpha f \\ \Omega^{*-r}(B) & \xrightarrow[\cong]{\psi} & \Pi_\alpha \Omega^{*-r}(U_\alpha) \end{array}$$

( $\varphi$  et  $\psi$  étant les morphismes de restrictions).

La preuve des lemmes 1 et 2 se déduit de la naturalité de l'intégration le long de la fibre.

La démonstration du théorème se déduit de la même manière que celle faite dans ([GH.VI] page 352 et page 197).

Il nous reste à montrer que l'isomorphisme précédent coïncide avec l'inverse de celui de Thom.

**b) Comparaison avec autre réalisation de l'isomorphisme de Thom.**

Soit  $(E, \pi, B, \mathbf{R}^r)$  un fibré vectoriel réel  $C^\infty$ , orienté, riemannien.

On définit l'algèbre différentielle graduée :

$$R^*(E, E - \tau_{1/2}) = \Omega^*(E) \oplus \Omega^{*-1}(E - \tau_{1/2})$$

muni de la différentielle

$$D(\beta, \xi) = (d\beta, -d\xi + \beta)$$

et du produit

$$(\beta, \xi) \cup (\beta', \xi') = (\beta \wedge \beta', \xi \wedge \xi').$$

Il est facile de remarquer puisque  $E - \tau_{1/2}$  se rétracte par déformations sur  $\partial\tau$ , que l'homomorphisme de restriction de  $R^*(E, E - B)$  vers  $R^*(E, E - \tau_{1/2})$ , induit un isomorphisme d'algèbre en cohomologie.

L'intégration le long de la fibre du paragraphe 1. se prolonge trivialement au complexe  $R^*(E, E - \tau_{1/2})$ . On définit ensuite, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1/2[$ , une injection naturelle,  $j_\varepsilon : \Omega_{D_\varepsilon}^*(\hat{\tau}_\varepsilon) \hookrightarrow R^*(E, E - \tau_{1/2})$ , en posant :  $j_\varepsilon(\beta) = (\beta, 0)$ . (le premier facteur désigne l'extention naturelle de  $\beta$  par zéro)

On remarque que  $j_\varepsilon$ , commute aux différentielles, et que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{D_\varepsilon}^*(\hat{\tau}_\varepsilon) & \xrightarrow{j_\varepsilon} & R^*(E, E, -\tau_{1/2}) \\ \downarrow f_{D_\varepsilon} & & \downarrow f \\ & & \Omega^{*-r}(B) \end{array}$$

On en déduit, en particulier, que l'application  $j_\varepsilon$ , induit un isomorphisme

d'algèbres en cohomologie et qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 H_{D_\varepsilon}^*(\tilde{\tau}_\varepsilon) & \xrightarrow[\cong]{H(j_\varepsilon)} & H^*(E, E - B) \\
 \searrow \cong & & \swarrow \cong \\
 H(f_{D_\varepsilon}) & \cong & H(f) \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & & H^{*-r}(B)
 \end{array}$$

c) **Cas général** : Soient  $V$  une variété différentielle,  $W$  une sous-variété fermée de  $V$ , dont le fibré normale  $(\mathcal{N}(W), \pi, W, \mathbf{R}^\nu)$  est orientable. ( $\nu = \dim V - \dim W$ ).

En utilisant l'existence d'un voisinage tubulaire de  $W$ , on en déduit que  $H^*(R^*(\mathcal{N}(W), \mathcal{N}(W) - W))$  s'identifie à  $H^*(V, V - W; \mathbf{R})$ , de telle façon que l'inverse de l'isomorphisme de Thom :  $H^*(V, V - W; \mathbf{R}) \xrightarrow{\cong} H^{*-\nu}(W; \mathbf{R})$ , est induit par l'application  $f : (\beta, \xi) \mapsto f_{D^r} \beta - f_{S^{r-1}} \xi$ .

### Comparaison :

Sous les hypothèses de a), soit  $(U, \pi, W)$  un voisinage tubulaire de  $W$  dans  $V$  ( $U$  étant identifié à l'espace total du fibre normal  $\mathcal{N}(W)$ , de telle façon que l'injection naturelle de  $W$  dans  $U$  s'identifie avec la section nulle du fibré vectoriel).

On désigne par  $MV(\mathcal{U})^*$  le complexe de Mayer-vietoris associé au recouvrement ouvert de  $V : \mathcal{U} = \{V - \tau_{1/2}, U\}$ ,

$$MV(\mathcal{U})^* = \Omega^*(V - \tau_{1/2}) \oplus \Omega^*(U) \oplus \Omega^{*-1}(U - \tau_{1/2}),$$

avec la différentielle

$$D(\alpha, \beta, \xi) = d\alpha, d\beta, -d\xi + \beta - \alpha,$$

et la structure d'algèbre

$$(\alpha, \beta, \xi) \cup (\alpha', \beta', \xi') = (\alpha \wedge \alpha', \beta \wedge \beta', \xi \wedge \beta' + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge \xi').$$

On rappelle que l'injection canonique,  $\delta_0 : \Omega^*(V) \hookrightarrow MV(\mathcal{U})^*$ ,  $\delta_0 \Phi = (\Phi|_{V - \tau_{1/2}}, \Phi|_U, 0)$ , induit un isomorphisme d'algèbre en cohomologie,  $H^*(\delta_0) : H^*(V) \xrightarrow{\cong} H^*(MV(\mathcal{U})^*)$ .

Notons  $\iota$  l'injection  $R^*(U, U - \tau_{1/2}) \hookrightarrow MV(\mathcal{U})^*$ ,  $\iota(\beta, \xi) = (0, \beta, \xi)$ .

$\iota$  commute aux différentielles, et induit donc un homomorphisme d'algèbres en cohomologie,  $H^*(\iota) : H^*(V, V - W; \mathbf{R}) \rightarrow H^*(MV(\mathcal{U})^*)$ .

En respectant les notations du paragraphe 2., on démontre :

**Proposition.** *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_{D_\varepsilon}^{N-k}(\overset{\circ}{\tau}_\varepsilon) & \xrightarrow{e} & H^{N-k}(V) \\
 & \swarrow & & & \downarrow \cong \\
 H(f_{D_\varepsilon}) & \cong & & & \\
 H^{n-k}(W) & \xleftarrow[\cong]{H(f)} & H^{N-k}(V, V-W, \mathbf{R}) & \xrightarrow{H(i)} & H^{N-k}(MV(\mathcal{U})^*)
 \end{array}$$

( $e$  désigne l'extention naturelle, et  $\varepsilon \in ]0, 1/2[$ )

**Remarques.**

1) Etant donnée une sous-variété  $W$  d'une variété différentiable  $V$  dont le fibré normal est orientable. Par composition de l'isomorphisme de Thom :  $H^*(W; \mathbf{R}) \xrightarrow{\cong} H^{*+\nu}(V, V-W; \mathbf{R})$ , ( $\nu = \dim V - \dim W$ ), avec l'application naturelle :  $H^{*+\nu}(V, V-W, \mathbf{R}) \rightarrow H^{*+\nu}(V; \mathbf{R})$ , on aura une flèche naturelle :  $H^*(W; \mathbf{R}) \rightarrow H^{*+\nu}(V; \mathbf{R})$

Dans certains problèmes géométriques de type "résidus" (consistant par exemple, à localiser, ou à calculer certains invariants topologiques de la variété ambiante  $V$ ), cette flèche est utilisée pour lire certaines formules où "le lieu singulier" est lisse.

La proposition précédente nous donne deux réalisations de cette flèche, et ceci via le choix de voisinages tubulaires. L'utilisation du complexe de Mayer-Vietoris a l'avantage d'éviter, dans certains cas, le choix de partition de l'unité dans les calculs. Ceci sera illustré dans le chapitre II.

2)

**Corollaire.** *Si la classe de cohomologie  $[w]$  d'une forme différentielle fermée  $w \in \Omega_{DR}^*(V)$ , coïncide avec la classe de cohomologie d'une hyperforme fermée  $(0, \beta, \xi) \in MV(\mathcal{U})^*$ . Alors :  $[w]$  possède un représentant dans n'importe quel voisinage de  $W$  dans  $V$  ; autrement dit  $[w]$  possède un résidu sur  $W$ , ou encore  $[w]$  se localise au voisinage de  $W$ .*

## B. Théorème de Stokes et de Fubini

On se propose, dans ce paragraphe, de donner sans démonstration, une version plus générale du théorème usuel de Stokes et de Fubini ([Bo]).

Soient  $V$  une variété différentiable ;  $E$  et  $B$  deux variétés à bords, compactes,  $C^\infty$  par morceaux ( $[C]$ ), orientées, plongées dans  $V$ .

Soit  $\xi = (E, \pi, B, F)$  un fibré  $C^\infty$  localement trivial orienté, tel que l'orientation produit local (cf. [GH.VI]) induite par celle du fibré  $\xi$  et de la base  $B$ , coïncide avec l'orientation initiale de  $E$ .

La restriction  $\xi|_{\partial B}$  du fibré  $\xi$  au bord  $\partial B$ , de  $B$ , est un fibré  $C^\infty$  localement trivial orienté, de fibre  $F$  (soit  $\xi|_{\partial B} = (E|_{\partial B}, \pi, \partial B, F)$ ). Ceci permet de munir l'espace total  $E|_{\partial B}$  de l'orientation produit local.

D'autre part, on vérifie facilement que la réunion des bords des fibres du fibré  $\xi : \cup_{x \in B} \partial \pi^{-1}(x)$ , est munie d'une structure de variété à bord  $C^\infty$  par morceaux, de dimension égale à celle de  $\partial E$ , et munie d'une orientation naturelle induite par celle de  $E$ .

**Définition** On note  $\partial_\pi E = \cup_{x \in B} \partial \pi^{-1}(x)$ , cette variété et on l'appelle le bord fibré associé au fibré  $C^\infty$  localement trivial  $\xi = (E, \pi, B, F)$ .

On démontre que  $\partial_\pi E$  est l'espace total d'un fibré  $C^\infty$  localement trivial, de fibre  $\partial F$ ,  $(\partial_\pi E, \pi, B, \partial F)$ , orienté, tel que l'orientation produit local induite sur  $\partial_\pi E$ , coïncide avec celle induite par  $E$ .

**Lemme :** En tant que variétés orientées comme ci-dessus, on a la décomposition suivante du bord de l'espace total  $E$  :

$$\partial E = \partial_\pi E + (-1)^r (E|_{\partial B}).$$

(où la multiplication par  $(-1)^r$  signifie orientation égale, ou opposée, selon la parité de  $r = \dim F$ ).

**Théorème :** Pour tout fibré  $\xi = (E, \pi, B, F)$  comme ci-dessus, il existe un opérateur canonique :

$$\int_F : \Omega^*(E) \rightarrow \Omega^{*-r}(B),$$

qui vaut zéro pour  $* < r$ , et qui est tel que :

$$(*) \quad \int_F \circ d + (-1)^{r+1} d \circ \int_F = \int_{\partial F} \circ j^*,$$

( $j^* : \Omega^*(E) \rightarrow \Omega^*(\partial_\pi E)$ , étant l'homomorphisme de restriction naturelle); [STOKES].

$$(**) \quad \int_E \Psi \wedge \pi^* \varphi = \int_B \left( \int_F \Psi \right) \wedge \varphi,$$

pour tout  $\Psi \in \Omega^k(E)$ , et  $\varphi \in \Omega^l(B)$ , ( $k + l = \dim E$ ); [FUBINI].

## II. Résidus de Baum-Cheeger

### O. Introduction

1. Rappels (Actions de groupes de Lie sur les fibrés vectoriels).
2. Lemme technique (existence d'une connexion spéciale).
3. Formule de résidus et actions de groupes de Lie compacts. (situation légèrement voisine de celles traitées dans [B.C.] [G], mais étudiée par une technique utilisant le complexe de Mayer-Vietoris).

## O. INTRODUCTION

Etant donné  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$  un fibré vectoriel sur lequel opère différentialement à gauche un groupe de Lie compact  $G$ , tel que l'action de  $G$  sur  $V$  soit quasi-libre (c'est-à-dire tous les groupes d'isotropie sont discrets), il est bien connu que les classes caractéristiques de dimension supérieure ou égale à  $\dim V - \dim G + 1$  d'un tel fibré sont nulles ; ceci étant dû à l'existence d'une connexion spéciale (dite "de Baum-Cheeger").

Ce théorème d'annulation donne naissance à un problème de résidus :

Décrire, quand l'action n'est plus quasi-libre, la localisation des classes caractéristiques de dimension supérieure ou égale à  $\dim V - \dim G + 1$  d'un  $G$ -fibré vectoriel  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ , autour du lieu singulier  $\Sigma_G$  qui est l'ensemble des points de  $V$  où le groupe d'isotropie n'est pas discret.

Ce problème a été résolu par Baum-Cheeger lorsque  $g = S^1$ , puis par F. Gomez, N. Alamo (sous certaines conditions) lorsque  $G$  est un tore.

Ce qu'on se propose de faire c'est d'étudier la situation suivante :  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$  un  $K \times T^r$ -fibré vectoriel (où  $K$  est un compact connexe, et  $T^r$  le tore réel de dimension  $r$ ) tel que :

(i)  $K$  opère quasi-librement sur  $V$

(ii) il existe un vecteur non nul  $h_0 \in \mathbf{R}^r$ , ( $\mathbf{R}^r =$  l'algèbre de Lie de  $T^r$ ), dont le champ de vecteurs fondamental associé  $X_{h_0}$  est transverse aux orbites de l'action de  $K$  sur ( $V -$  zéro ( $X_{h_0}$ ))

L'étude de ce cas permettra d'illustrer la réalisation de l'isomorphisme de Thom à l'aide du complexe de Mayer-Vietoris (cf. Appendice page 26). La méthode utilisée aura notamment pour intérêt d'éviter le choix de partition de l'unité dans les calculs.

## 1. Rappels sur les actions de groupe de Lie sur les fibrés

vectoriels ( $[GHV_{II}]$  [ $\mathbf{G}$ ]).

### a. Définitions.

Soit  $G$  un groupe de Lie opérant différenciablement à gauche sur un fibré vectoriel  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$ . Un tel fibré s'appellera  $G$ -fibré vectoriel

On notera  $\Gamma(\xi)$  le  $C^\infty(V)$ -module des sections de  $\xi$ .

Pour  $g \in G$ ,  $\sigma \in \Gamma(\xi)$ , on définit  $g \cdot \sigma \in \Gamma(\xi)$  en posant :

$$(g \cdot \sigma)(x) = g\sigma(g^{-1}x) \text{ pour } x \in V.$$

Pour tout  $h$  élément de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ , on désignera par  $\theta_h^\xi : \Gamma(\xi) \rightarrow \Gamma(\xi)$ , l'opérateur défini par :

$$(\theta_h^\xi \sigma)(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((\exp th) \cdot \sigma)(x), \text{ pour } x \in V.$$

S'il n'y a pas de confusion possible, cet opérateur sera noté  $\theta_h$ .

Le champ de vecteurs fondamental sur  $V$  associé à  $h \in \mathfrak{g}$ , sera désigné par  $-X_h$ , soit

$$(X_h)_x = -\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp th)x, \text{ pour } x \in V.$$

L'action de  $G$  sur  $V$  sera dite *quasi-libre* si en tout point  $x \in V$ , le groupe d'isotropie  $G_x = \{g \in G | gx = x\}$  est un sous-groupe discret de  $G$ .

### b. Propriétés (rappels) :

1.  $\theta_h(f\sigma) = (X_h f)\sigma + f(\theta_h \sigma)$ , pour tout  $h \in \mathfrak{g}$ ,  $\sigma \in \Gamma(\xi)$ , et  $f \in C^\infty(V)$ .

2. Pour tout  $h, k \in \mathfrak{g}$ , on a

i)  $\theta_{[h,k]} = \theta_h \circ \theta_k - \theta_k \circ \theta_h$ , pour tout  $h, k \in \mathfrak{g}$ .

ii)  $X_{[h,k]} = [X_h, X_k]$

3. Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une métrique riemannienne  $G$ -invariante sur  $\xi$ . Alors

$$X_h \cdot \langle \sigma, \tau \rangle = \langle \theta_h \sigma, \tau \rangle + \langle \sigma, \theta_h \tau \rangle, \text{ pour tout } \sigma, \tau \in \Gamma(\xi).$$

4. i)  $\nabla$  est une connexion riemannienne si et seulement si  $X \cdot \langle \sigma, \tau \rangle = \langle \nabla_X \sigma, \tau \rangle + \langle \sigma, \nabla_X \tau \rangle$ , pour tout  $\sigma, \tau \in \Gamma(\xi)$ , et  $X \in \mathfrak{X}(V) = \Gamma(TV)$ .

ii) Si  $\nabla$  est  $G$ -invariante, alors on a :

$$\theta_h \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \theta_h = \nabla_{[X_h, Y]}, \text{ pour tout } Y \in \mathfrak{X}(V).$$

5. Pour tout  $\nabla$  connexion linéaire sur  $\xi$ , et  $h \in \mathfrak{g}$ , on définit l'opérateur  $S_h = \theta_h - \nabla_{X_h}$ , on a alors :

i)  $S_h \in \text{Hom}_{C^\infty(V)}(\Gamma(\xi))$ , et par suite définit une section du fibré des endomorphismes de  $\xi$ . Soit  $S_h \in \Gamma(\text{End}\xi)$ .

ii) Si la connexion  $\nabla$  préserve une métrique riemannienne  $G$ -invariante  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , alors  $S_h$  est antisymétrique.

iii) Si  $\nabla$  est  $G$ -invariante, de courbure  $R$ , alors

$$\nabla S_h = i(X_h)R.$$

## 2. Lemme technique (existence d'une connexion spéciale).

**a. Lemme :** Soit  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$  un  $G$ -fibré vectoriel (où  $G$  est connexe) tel que l'action de  $G$  sur  $V$  soit quasi-libre.

On suppose l'existence sur  $\xi$  :

- d'une métrique riemannienne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $G$ -invariante,

- d'une connexion  $G$ -invariante  $\nabla$ , préservant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , telle que  $\nabla_{X_h} = \theta_h \forall h \in \mathfrak{g}$ ,

$\mathfrak{g}$ ,

- d'une section  $\sigma$  de  $\xi$ , partout non nulle, telle que  $\theta_h \sigma = 0 \forall h \in \mathfrak{g}$ .

Il existe alors sur  $\xi$  une connexion  $G$ -invariante  $\nabla^\circ$ , préservant la métrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , telle que :

$$\nabla_{X_h}^\circ = \theta_h \quad \forall h \in \mathfrak{g}$$

et  $\nabla^\circ(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}) = 0$ , (où  $\|\sigma\| = \sqrt{\langle \sigma, \sigma \rangle}$ ).

### Démonstration du lemme :

$G$  étant connexe et  $\theta_h \sigma = 0$  pour tout  $h \in \mathfrak{g}$ , on en déduit que la section  $\sigma$  est  $G$ -équivariante, et par suite le sous fibré vectoriel trivial de rang 1  $\mathcal{L} = (L \xrightarrow{\pi} V)$  (où  $L = \coprod_{x \in V} L_x$ ,  $L_x = \{t\sigma(x)/t \in \mathbf{R}\}$ ) est  $G$ -stable.

D'où l'existence d'un fibré vectoriel  $\xi_0 = (E_0 \xrightarrow{\pi} V)$  supplémentaire orthogonal relatif à la métrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , qui est  $G$ -stable, soit

$$\xi = \xi_0 \oplus \mathcal{L}$$

On désignera alors par  $p : \Gamma(\xi) \rightarrow \Gamma(\xi_0)$  l'opérateur de projection associé à cette décomposition.

Définissons ensuite  $\nabla^\circ$  connexion linéaire sur  $\xi$ , en posant :  $\nabla_X^\circ \tau = p(\nabla_X^\circ \tau)$  pour  $X \in \mathfrak{X}(V)$  et  $\tau \in \Gamma(\xi_0)$ ; et  $\nabla_X^\circ(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}) = 0$ .

On vérifie facilement que  $\nabla^\circ$  préserve la métrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Montrer ensuite que  $\nabla^\circ$  est  $G$ -invariante revient à vérifier les deux propositions suivantes :

$$\text{i) } \theta_h(\nabla_Y^\circ \tau) - \nabla_Y^\circ(\theta_h \tau) = \nabla_{[X_h, Y]}^\circ \tau, \text{ pour tout}$$

$$h \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{X}(V) \text{ et } \tau \in \Gamma(\xi_0),$$

$$\text{ii) } \theta_h(\nabla_Y^\circ(\frac{\sigma}{\|\sigma\|})) - \nabla_Y^\circ(\theta_h \frac{\sigma}{\|\sigma\|}) = \nabla_{[X_h, Y]}^\circ(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}),$$

La première proposition est satisfaite puisque  $\nabla$  est  $G$ -invariante et que l'opérateur  $\theta_h$  commute avec  $p$  ( $\xi_0$  et  $\mathcal{L}$  sont  $G$ -stables).

Pour affirmer ii) il suffit de montrer que  $\theta_h(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}) = 0$  pour tout  $h \in \mathfrak{g}$ ; Or  $\theta_h(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}) = (X_h \cdot (\frac{1}{\|\sigma\|}))\sigma$  (car  $\theta_h \sigma = 0$ ) d'où

$$\theta_h(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}) = -\frac{1}{2\|\sigma\|^3}((X_h \cdot \langle \sigma, \sigma \rangle)\sigma) = 0$$

(car  $\nabla$  préserve la métrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , et  $\nabla_{X_h} \sigma = \theta_h \sigma = 0$ ).

**Remarque :** L'utilisation de ce lemme se verra au paragraphe suivant 3 (page 59).

**b. Corollaire :** Soit  $\xi = E \xrightarrow{\pi} V$  un  $G$ -fibré vectoriel (où  $G$  est compact connexe), tel que l'action de  $G$  sur  $V$  soit quasi-libre.

On suppose l'existence d'une section  $\sigma \in \Gamma(\xi)$  partout non nulle et  $G$ -équivalente.

Alors il existe une métrique riemannienne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $G$ -invariante sur  $\xi$ , et une connexion riemannienne  $\nabla$ ,  $G$ -invariante, telles que :  $\nabla(\frac{\sigma}{\|\sigma\|}) = 0$  et  $\nabla_{X_h} = \theta_h$  pour tout  $h \in \mathfrak{g}$ .

### c. Exemple :

Soit  $G$  un groupe de Lie compact opérant différenciablement sur une variété différentiable  $V$  ; et soit  $W$  une sous-variété fermée de  $V$ , qui est  $G$ -stable.

Il existe alors ([Bre]) un voisinage tubulaire  $G$ -stable de  $W$  dans  $V$ , noté  $(U, \pi, W)$  (on appelle ainsi les données :

- d'un voisinage ouvert  $G$ -stable  $U$  de  $W$  dans  $V$ ,
- d'une métrique riemannienne  $G$ -invariante sur  $\mathcal{N}(W)$  fibré normal de  $W$  dans  $V$
- d'un difféomorphisme  $G$ -équivariant de  $\mathcal{N}(W)$  sur  $U$ , échangeant la section nulle de  $\mathcal{N}(W)$  et l'inclusion naturelle de  $W$  dans  $U$ ,  $\pi : U \rightarrow W$  désignant la "rétraction locale" correspondant à la projection du fibré  $\mathcal{N}(W) \rightarrow W$  par ce difféomorphisme).

Désignons par  $\eta$  la restriction à  $U - W$  du fibré tangent vertical  $\ker(d\pi)$ .

$\eta$  est un  $G$ -fibré vectoriel possédant une section partout non nulle et  $G$ -équivariante. En effet, soit  $Z$  le champ de vecteurs transversal défini par le groupe à 1 paramètre  $(t, z) \mapsto e^t \cdot z$  de  $\mathbf{R} \times (U - W)$  dans  $(U - W)$ , (le produit externe provient de la structure vectorielle existante sur les fibres de  $U$ ).  $Z$  définit une section de  $\eta$  partout non nulle, qui est  $G$ -équivariante, puisque pour tout  $g \in G$  et  $z \in (U - W)$  on a :

$$Z_{gz} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (e^t(g \cdot z)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (g \cdot (e^t z)) = g \cdot Z_z .$$

### 3. Formule de résidus et actions de groupes de Lie compacts.

Soient  $K$  un groupe de Lie compact connexe de dimension  $s$ ,  $T^r = \mathbf{R}^r / \mathbf{Z}^r$  le tore réel de dimension  $r$ ,  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$  un  $K \times T^r$ -fibré vectoriel, tels que :

- (i)  $K$  opère quasi-librement sur  $V$ .
- (ii) il existe un vecteur non nul  $h_0 \in \mathbf{R}^r$ , ( $\mathbf{R}^r =$  l'algèbre de Lie de  $T^r$ ), dont le champ de vecteurs fondamental associé  $X_{h_0}$  est transverse aux orbites de l'action de  $K$  sur  $(V - \text{Zéro}(X_{h_0}))$ .

#### Remarque 1:

Dans cette situation on démontre le théorème ci-dessous, qui lorsque  $K$  est le groupe unité on retrouve le résultat de Baum-Cheeger [B-C].

**Remarque 2 :**

Les données ci-dessus sont aussi équivalentes à la donnée d'un  $K \times T^q$ -fibré vectoriel  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$  tel que :

(i)  $K$  groupe de Lie compact connexe opérant quasi-librement sur  $V$ ,

(ii)'  $\dim(K \times T^q)_x < q$ , pour tout  $x \in V - V^{T^q}$  ( $V^{T^q}$  étant le lieu des points fixes par l'action du tore  $T^q$ ).

En effet, soit  $h_0 \in \mathbf{R}^q$  tel que  $\{\exp th_0/t \in \mathbf{R}\}$  soit dense dans  $T^q$ . Alors  $\text{Zéro}(X_{h_0}) = V^{T^q}$  et  $X_{h_0}$  est transverse aux orbites de  $K$  dans  $V - V^{T^q}$ ; puisque si  $X_{h_0}$  est tangent en  $x$  à l'orbite  $K \cdot x$ , il en sera ainsi en tout point  $y$  de  $K \cdot x$ , et par suite la courbe  $t \mapsto \exp(th_0) \cdot x$  est contenue dans  $K \cdot x$ , d'où  $T^q \cdot x \subset K \cdot x$ , ce qui implique  $(K \times T^q) \cdot x = K \cdot x$ ; Or  $\dim(K \cdot x) = \dim K$ , on obtient alors  $\dim(K \times T^q)_x = q$  ce qui contredit (ii)'.

Réciproquement, l'hypothèse (ii) implique l'existence d'un sous tore  $T^q$  de  $T^r$  tel que  $\{\exp th_0/t \in \mathbf{R}\}$  soit dense dans  $T^q$ , et  $X_{h_0}$  est transverse aux orbites de  $K$  sur  $V - V^{T^q}$ . On a alors  $\dim(K \times T^q)_x < q$  pour tout  $x \in V - V^{T^q}$ ; en effet, l'action de  $K$  sur  $V$  étant quasi-libre, on en déduit que pour  $x \in V - V^{T^q}$  on a  $\dim(K \times T^q)_x \leq q$ , supposons que  $\dim(K \times T^q)_x = q$  alors  $\dim(K \times T^q) \cdot x = \dim K \cdot x$ , d'où  $(K \times T^q) \cdot x = K \cdot x$ , en particulier  $T^q \cdot x \subset K \cdot x$ , ce qui contredit le fait que  $X_{h_0}$  est transverse à  $K \cdot x$ .

**Rappels :** Soit  $V$  une variété différentiable orientée, sur laquelle un tore  $H$  opère différenciablement. Il est bien connu que chaque composante connexe du lieu des points fixes  $V^H$  est munie d'une structure de sous variété fermée orientée différentiable. (Il suffit, pour le voir, de penser à l'utilisation de cartes géodésiques associées à une métrique riemannienne  $H$ -invariante sur  $V$ , ou plus généralement le modèle de Koszul. Ils permettent en effet de décrire l'action à partir de représentations linéaires de groupes, respectivement au voisinage d'un point ou au voisinage d'une orbite.)

De plus, on peut vérifier que la codimension de telles sous-variétés est paire, et ceci en exhibant pour tout  $x$  élément de  $V^H$ , un automorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel normal en  $x$  à la composante connexe de  $V^H$  contenant ce point.

**Théorème :** Soit  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$  un  $K \times T^r$ -fibré vectoriel comme ci-dessus (où

$V$  est supposée orientée, non nécessairement compacte, de dimension  $N$ ). Alors

a) Les classes caractéristiques du fibré  $\xi$  de dimension supérieure ou égale à  $(N - s + 1)$  sont nulles.

b) Les classes caractéristiques de dimension égale à  $(N - s)$  ont un résidu sur  $\text{Zéro}(X_{h_0})$ .

c) Si  $\varphi(\xi) \in H^{2\ell}(V)$  désigne une classe caractéristique du fibré vectoriel  $\xi$ , de dimension  $2\ell = N - s$ , alors

$$\varphi(\xi) = \sum_{i \in I} T_i^* \left[ \left( \frac{\varphi^{h_0}(\xi_i)}{\chi_{m_i}^{h_0}(\mathcal{N}_i)} \right)_{2\ell - 2m_i} \right]$$

(avec :

-  $\text{Zéro}(X_{h_0}) = \coprod_{i \in I} W_i$ ,  $W_i$  composante connexe de  $\text{Zéro}(X_{h_0})$  de dimension égale à  $N - 2m_i$ .

-  $(\beta)_{2\ell - 2m_i}$  désigne la composante de degré  $2\ell - 2m_i$  de la forme différentielle fermée  $\beta$ .

-  $[(\beta)_{2\ell - 2m_i}]$  désigne la classe de cohomologie de ce cocycle.

-  $T_i^* : H^{*-2m_i}(W_i) \rightarrow H^*(V)$  est la composée de l'isomorphisme de Thom  $H^{*-2m_i}(W_i) \rightarrow H^*(V, V - W_i)$  et de la flèche naturelle  $H^*(V, V - W_i) \rightarrow H^*(V)$ .

-  $\varphi^{h_0}(\xi_i)$  désigne l'homomorphisme de Chern-Weil généralisé (cf. [G]) associé au  $T^r$ -fibré vectoriel  $\xi_i = \text{restriction de } \xi \text{ à } W_i$ .

-  $\chi_{m_i}$  est le polynôme pfaffien défini sur l'algèbre de Lie des matrices anti-symétriques  $so(2m_i)$ .

-  $\mathcal{N}_i = \text{le fibré vectoriel normal de } W_i \text{ dans } V$ .)

### Démonstration :

a) se déduit immédiatement de (i).

Posons  $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k} \oplus \{t h_0 / t \in \mathbf{R}\}$ , c'est une sous algèbre de Lie de  $\mathfrak{k} \oplus \mathbf{R}^r = \text{algèbre de Lie de } K \times T^r$ .  $\mathfrak{k}_0$  engendre donc un groupe de Lie connexe  $K_0$  immergé dans  $K \times T^r$  de dimension égale à  $s + 1$ .

Pour tout  $x \in V$ , on vérifie aisément que

$$\dim(K_0)_x = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in V - \text{Zéro}(X_{h_0}) \\ 1 & \text{si } x \in \text{Zéro}(X_{h_0}) \end{cases}$$

L'action de  $K_0$  sur le fibré  $\xi$  étant induite par celle de  $K \times T^r$ , on en déduit l'existence de métriques et connexions invariantes par  $K_0$  sur  $\xi$ . Et par suite, les classes caractéristiques de  $\xi$  de dimension  $N - \dim K_0 + 1 = N - s$  se localisent sur  $\text{Zéro}(X_{h_0})$  c'est-à-dire on a b).

c) La décomposition de  $\text{Zéro}(X_{h_0})$  en composantes connexes s'écrit :

$\text{Zéro}(X_{h_0}) = \coprod_{i \in I} W_i$ , (chaque  $W_i$  est une sous variété connexe, orientée, fermée dans  $V$ , de codimension  $2m_i$ ).

On remarque que  $\text{Zéro}(X_{h_0})$  est  $K \times T^r$ -stable, et que chaque composante connexe  $W_i$  l'est aussi puisque  $K \times T^r$  est connexe. Désormais, on pose :  $G = K \times T^r$ .

Pour tout  $i \in I$ , on désignera par  $(U_i, \pi_i, W_i)$  un  $G$ -voisinage tubulaire de  $W_i$  dans  $V$ , (On appelle ainsi les données :

- d'un voisinage ouvert  $G$ -stable  $U_i$  de  $W_i$  dans  $V$ ,
- d'une métrique riemannienne  $G$ -invariante sur  $N_i$ , fibré normal de  $W_i$  dans  $V$ ,
- d'un difféomorphisme  $G$ -équivariant de  $N_i$  sur  $U_i$ , échangeant la section nulle de  $N_i$  et l'inclusion naturelle de  $W_i$  dans  $U_i$ ,  $\pi_i : U_i \rightarrow W_i$  désignant la "rétraction locale" correspondant à la projection du fibré  $N_i \rightarrow W_i$  par ce difféomorphisme).

On suppose que les ouverts  $U_i$  sont disjoints deux à deux. (De tels données existent toujours dès lors que  $G$  est compact et  $W_i$   $G$ -stable, voir [Bre]).

On a ainsi un recouvrement naturel de  $V$  par deux ouverts  $G$ -stables :  $\mathcal{U} = \{U^\circ, U^1\}$  avec

$$U^\circ = V - \text{Zéro}(X_{h_0})$$

$$U^1 = \coprod_{i \in I} U_i$$

On rappelle (cf. [L<sub>2</sub>]) le complexe de Mayer-Vietoris associé à ce recouvrement ; il est donné par :  $MV(\mathcal{U})^* = \Omega^*(U^\circ) \oplus \Omega^*(U^1) \oplus \Omega^{*-1}(U^{\circ 1})$ ,  $U^{\circ 1} = U^\circ \cap U^1$ .

[=  $\Omega^*(V - \text{Zéro}(X_{h_0})) \oplus (\oplus_{i \in I} \Omega^*(U_i)) \oplus (\oplus_{i \in I} \Omega^{*-1}(U_i - W_i))$ ] avec la différentielle

$$D(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_{\circ 1}) = (d\lambda_0, d\lambda_1, -d\lambda_{\circ 1} + \lambda_1 - \lambda_0)$$

( $d$  désignant la différentielle de de Rham). il permet de réaliser la cohomologie singulière réelle de  $V$ . Un élément de  $MV(\mathcal{U})^*$  sera appelé "hyperforme de degré  $*$ ", relativement au recouvrement  $\mathcal{U}$ .

Notons  $I^*0(q)$  l'algèbre des polynômes sur l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques  $so(q)$ , invariants par la représentation adjointe  $adO(q)$ , (où  $q = \text{rang} \xi$ ), graduée en dimension paire.

Pour tout couple de connexions  $\{\nabla^\circ, \nabla^1\}$  :

$\nabla^\circ$  connexion riemannienne sur le fibré vectoriel riemannien

$$\xi^\circ = (E|_{U^\circ} \xrightarrow{\pi} U^\circ)$$

$\nabla^1$  connexion riemannienne sur le fibré vectoriel riemannien

$$\xi^1 = (E|_{U^1} \xrightarrow{\pi} U^1),$$

on désignera par

$$\mu_{\omega^\circ \omega^1} : I^*O(q) \rightarrow ZMV(\mathcal{U})^*$$

l'homomorphisme de Chern-Weil associé : A tout polynôme  $\varphi \in I^{2\ell}O(q)$  de degré  $\ell$ , correspond la  $2\ell$ -hyerforme fermée

$$\mu_{\omega^\circ \omega^1}(\varphi) = (\Delta_{\omega^\circ}(\varphi), \Delta_{\omega^1}(\varphi), \Delta_{\omega^\circ \omega^1}(\varphi))$$

(où  $\Delta_{\omega^\alpha}$  désigne l'homomorphisme de Chern-Weil usuel, ( $\alpha = 0, 1$ )).

$\Delta_{\omega^\circ \omega^1}$  c'est l'opérateur différence de Bott associé au couple de connexions  $\{\nabla^\circ, \nabla^1\}$ , (cf. [Bo]); Il satisfait  $d \circ \Delta_{\omega^\circ \omega^1} = \Delta_{\omega^1} - \Delta_{\omega^\circ}$ .

La classe de cohomologie  $[\mu_{\omega^\circ \omega^1}(\varphi)] \in H^{2\ell}(V)$  est indépendante du choix du couple  $(\nabla^\circ, \nabla^1)$ , et permet de définir la classe caractéristique  $\varphi(\xi) \in H^{2\ell}(V)$  du fibré vectoriel  $\xi$  associée au polynôme  $\varphi$ .

S'il est possible de choisir  $\nabla^\circ$  comme  $\varphi$ -connexion (c'est-à-dire  $\Delta_{\omega^\circ}(\varphi) = 0$ ), alors (cf. Appendice, page 26) on aura :

$$\varphi(\xi) = \sum_{i \in I} T_i^* \left[ \left( \int_{D^{2m_i}} \Delta_{\omega^1}(\varphi) - \int_{S^{2m_i-1}} \Delta_{\omega^\circ \omega^1}(\varphi) \right) \right],$$

(-

$$\begin{array}{ccc}
 H^{*-2m_i}(W_i) & \xrightarrow{T_i^*} & H^*(V) \\
 \searrow \text{Thom} \cong & & \nearrow \\
 & & H^*(V, V - W_i)
 \end{array}$$

-  $f_{D^{m_i}}$  désigne l'opérateur d'intégration le long de la fibre associé au fibré en disques fermés du fibré vectoriel riemannien  $(U_i \xrightarrow{\pi_i} W_i)$ ,

-  $f_{S^{m_i-1}}$  l'opérateur associé au fibré en sphères du fibré vectoriel riemannien  $(U_i \xrightarrow{\pi_i} W_i)$ .

Ainsi pour résoudre la question c), il suffit de faire un choix judicieux des connexions  $\nabla^0$  et  $\nabla^1$  de façon que :

$$(*) \quad \Delta_{\omega^0}(\varphi) = 0$$

$$(**) \quad \left[ \int_{D^{m_i}} \Delta_{\omega^1}(\varphi) - \int_{S^{m_i-1}} \Delta_{\omega^0 \omega^1}(\varphi) \right] = \left[ \left( \frac{\varphi^{h_0}(\xi_i)}{\chi_{m_i}^{h_0}(\mathcal{N}_i)} \right)_{2\ell-2m_i} \right]$$

pour tout  $i \in I$  c'est ce qu'on va établir.

Pour tout  $i \in I$ , on se donne désormais un isomorphisme  $G$ -équivariant

$$\phi_i : \xi_{U_i} \xrightarrow{\cong} \pi_i^1(\xi_i)$$

(où  $\xi_{U_i} = (E|_{U_i} \xrightarrow{\pi} U_i)$ ,  $\xi_i = \xi|_{W_i}$ ), tel que, par restriction des deux membres de l'isomorphisme à  $\xi_i$  on obtienne l'identité.

Munissons ensuite le fibré vectoriel  $\xi = (E \xrightarrow{\pi} V)$  d'une métrique riemannienne  $G$ -invariante  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , dont la restriction à  $\xi_{U_i}$  coïncide, via l'isomorphisme  $\phi_i$ , avec l'image réciproque par  $\pi_i$  de sa restriction à  $\xi_i$ . (ce qui est possible : un argument de partition  $G$ -invariante de l'unité le montre).

Munissons  $\xi$  d'une connexion riemannienne  $G$ -invariante  $\nabla^1$ , dont la restriction à  $\xi_{U_i}$  coïncide, via l'isomorphisme  $\phi_i$ , avec l'image réciproque par  $\pi_i$  de sa restriction à  $\xi_i$ , et telle que  $\nabla_{X_k}^1 = \theta_k$  pour tout  $k \in \mathfrak{k}$ .

Choisissons d'autre part une métrique riemannienne  $G$ -invariante  $\ll \gg$  sur le fibré tangent à  $U^\circ$ , telle que  $X_{h_0}$  soit orthogonal à  $X_k$  pour tout  $k \in \mathfrak{k}$ , et définissons  $\alpha \in \Omega^1(U^\circ)$  par :

$$\alpha(X) = \frac{\ll X, X_{h_0} \gg}{\ll X_{h_0}, X_{h_0} \gg} \quad \text{pour } X \in \mathfrak{X}(U^\circ).$$

Désignons par  $\nabla^\circ$  la connexion linéaire sur  $\xi^\circ = (E|_{U^\circ} \xrightarrow{\pi} U^\circ)$  définie par :  $\nabla^\circ = \nabla^1 + \alpha \otimes S_{h_0}^1$  ; (où  $S_{h_0}^1 = \theta_{h_0} - \nabla_{X_{h_0}}^1$ ) (c'est-à-dire pour  $X \in \mathfrak{X}(U^\circ)$ , et  $\sigma \in \Gamma(\xi^\circ)$  on a  $\nabla_X^\circ \sigma = \nabla_X^1 \sigma + \alpha(X)(\theta_{h_0} \sigma - \nabla_{X_{h_0}}^1 \sigma)$ .)

-  $\nabla^\circ$  préserve la métrique  $\langle \cdot \rangle$  : pour  $X \in \mathfrak{X}(U^\circ)$ ,  $\sigma, \tau \in \Gamma(\xi^\circ)$  on a l'égalité

$$X \cdot \langle \sigma, \tau \rangle = \langle \nabla_X^\circ \sigma, \tau \rangle + \langle \sigma, \nabla_X^\circ \tau \rangle$$

en effet, si  $X$  est orthogonal à  $X_{h_0}$  alors  $\nabla_X^\circ = \nabla_X^1$  et l'égalité est vérifiée puisque  $\nabla^1$  est riemannienne. Et pour  $X = X_{h_0}$ , l'égalité est encore satisfaite puisque  $\nabla_{X_{h_0}}^\circ = \theta_{h_0}$  et la métrique  $\langle \cdot \rangle$  est  $G$ -invariante.

-  $\nabla^\circ$  est  $G$ -invariante : pour  $h \in \mathfrak{g}$ ,  $X \in \mathfrak{X}(U^\circ)$  on a

$$[\theta_h, \nabla_X^\circ] = \nabla_{[X_h, X]}^\circ \quad (\varepsilon)$$

en effet, si  $X$  est orthogonal à  $X_{h_0}$  alors  $[X_h, X]$  l'est aussi puisque la métrique  $\langle \cdot \rangle$  est  $G$ -invariante et  $[X_h, X_{h_0}]$  est nul, d'où  $\nabla_{[X_h, X]}^\circ = \nabla_{[X_h, X]}^1$  et  $\nabla_X^\circ = \nabla_X^1$  et par suite  $(\varepsilon)$  en découle puisque  $\nabla^\circ$  est  $G$ -invariante. Et pour  $X = X_{h_0}$ , l'égalité  $(\varepsilon)$  est encore satisfaite puisque  $h_0$  appartient au centre de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

-  $\nabla^\circ$  est une  $\varphi$ -connexion :  $\nabla^\circ$  étant  $G$ -invariante, on en déduit que  $\nabla^\circ(\theta_h - \nabla_{X_h}^\circ) = i(X_h)R^\circ$  pour tout  $h \in \mathfrak{g}$  ( $R^\circ$  désigne la courbure de  $\nabla^\circ$ ) d'où  $i(X_{h_0})R^\circ = 0$  et  $i(X_h)R^\circ = 0$  pour tout  $h \in \mathfrak{k}$ , ceci implique que  $i(X_{h_0})\Delta_{\omega^\circ}(\varphi) = 0$  et  $i(X_k)\Delta_{\omega^\circ}(\varphi) = 0$  pour tout  $k \in \mathfrak{k}$ ,

On en déduit que  $\Delta_{\omega^\circ}(\varphi) = 0$  (puisque  $\dim \Delta_{\omega^\circ}(\varphi) = \dim V - \dim \mathfrak{k}$ ).

D'autre part, étant donnée la naturalité de l'homomorphisme de Chern-Weil, la restrictio de la forme différentielle  $\Delta_{\omega^\circ}(\varphi)$  à  $U_i$ ,  $i \in I$ , coïncide avec l'image réciproque par  $\pi_i$  de sa restriction à  $W_i$ . On en déduit que  $\int_{D^{2m_i}} \Delta_{\omega^i}(\varphi) = 0$  pour tout  $i \in I$ .

Ainsi le problème revient à démontrer :

$$\left[ \int_{S^{2m_i-1}} (-\Delta_{\omega^\circ \omega^i}(\varphi)) \right] = \left[ \left( \frac{\varphi^{h_0}(\xi_i)}{\chi_{m_i}^{h_0}(\mathcal{N}_i)} \right)_{2\ell-2m_i} \right],$$

pour tout  $i \in I$ .

Or

$$-\Delta_{\omega^\circ \omega^i}(\varphi) = \int_{[0,1]} \varphi(\tilde{R}, \tilde{R}, \dots, \tilde{R})$$

$\tilde{R}$  désignant la courbure de la connexion  $\tilde{\nabla} = t\nabla^\circ + (1-t)\nabla^1$  définie sur le fibré vectoriel

$$\xi_{(U_i - W_i)} \times [0, 1] = (E_{|_{(U_i - W_i)}} \times [0, 1] \xrightarrow{\pi \times id} (U_i - W_i) \times [0, 1]) ;$$

$$\tilde{\nabla} = \nabla^1 + t(\nabla^\circ - \nabla^1) = \nabla^1 + t\alpha \otimes S_{h_0}^1$$

d'où  $\tilde{R} = R^1 + d(t\alpha) \otimes S_{h_0}^1$  (car  $\nabla^1 S_{h_0}^1 = i(X_{h_0})R^1 = i(X_{h_0})\pi_1^* \tilde{R}^1$ ).

$\tilde{R}^1$  étant la courbure de la connexion  $\tilde{\nabla}^1 =$  restriction de  $\nabla^1$  à  $W_i$  et par suite  $\nabla^1 S_{h_0}^1 = 0$  puisque  $X_{h_0}$  est projetable sur 0.)

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} \varphi(\tilde{R}, \tilde{R}, \dots, \tilde{R}) &= \int_{[0,1]} \left( \sum_{j=0}^{\ell} \mathcal{C}_\ell^j \varphi \underbrace{(R^1, \dots, R^1)}_j \underbrace{(S_{h_0}^1, \dots, S_{h_0}^1)}_{\ell-j} \wedge (dt \wedge \alpha + t \cdot d\alpha)^{\ell-j} \right) \\ &= \int_{[0,1]} \left( \sum_{j=0}^{\ell} \mathcal{C}_\ell^j \varphi \underbrace{(R^1, \dots, R^1)}_j \underbrace{(S_{h_0}^1, \dots, S_{h_0}^1)}_{\ell-j} \wedge (l-j) dt \wedge \alpha \wedge (t \cdot d\alpha)^{\ell-j-1} \right) \\ &= \int_{[0,1]} \left( \sum_{j=0}^{\ell} \mathcal{C}_\ell^j (\ell-j) t^{\ell-j-1} dt \wedge \underbrace{(\varphi(R^1, \dots, R^1))}_j \underbrace{(S_{h_0}^1, \dots, S_{h_0}^1)}_{\ell-j} \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{\ell-j-1} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\ell} \mathcal{C}_\ell^j \varphi \underbrace{(R^1, \dots, R^1)}_j \underbrace{(S_{h_0}^1, \dots, S_{h_0}^1)}_{\ell-j} \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{\ell-j-1} \end{aligned}$$

autrement dit,  $-\Delta_{\omega^\circ \omega_1}(\varphi)$  est la composante de degré  $(2\ell - 1)$  de la forme différentielle hétérogène

$$\varphi(R^1 + S_{h_0}^1, \dots, R^1 + S_{h_0}^1) \wedge \left( \frac{\alpha}{1 - d\alpha} \right)$$

c'est-à-dire

$$-\Delta_{\omega^\circ \omega_1}(\varphi) = (\varphi(R^1 + S_{h_0}^1) \wedge \left( \frac{\alpha}{1 - d\alpha} \right))_{2\ell-1} .$$

L'opérateur  $S_{h_0}^1$  en tant que section du fibré vectoriel des endomorphismes de  $\xi_{U_i}$  coïncide, via l'isomorphisme  $\phi_i$ , avec l'image réciproque par  $\pi_i$  de sa restriction  $\tilde{S}_{h_0}^1$  au fibré des endomorphismes de  $\xi_i$ , en effet : les deux sections  $S_{h_0}^1$  et  $\pi^* \tilde{S}_{h_0}^1$  coïncident en-dessus de  $W_i$ , de plus on a

$$\nabla^1 S_{h_0}^1 = i(X_{h_0})R^1 = 0 \quad \text{sur } U_i ,$$

et  $\nabla^1(\pi_i^* \bar{S}_{h_0}^1) = \pi_i^* \bar{\nabla}^1 \cdot \pi_i^* \bar{S}_{h_0}^1 = \pi_i^*(\bar{\nabla}^1 \bar{S}_{h_0}^1) = \pi_i^*(0) = 0$  ( $\bar{\nabla}^1$  désignant la restriction de  $\nabla^1$  à  $W_i$ ). Le transport par parallélisme induit par la connexion  $\nabla^1$  implique que les deux sections coïcident partout.

Finalement, on peut écrire :

$$-\Delta_{\omega^0 \omega^1}(\varphi) = \left( \left( \frac{\alpha}{1-d\alpha} \right) \wedge \pi_i^* \varphi (\bar{R}^1 + \bar{S}_{h_0}^1) \right)_{2\ell-1} \quad (E)$$

d'où

$$\begin{aligned} \left[ \int_{S^{2m_i-1}} (-\Delta_{\omega^0 \omega^1}(\varphi)) \right] &= \left[ \left( \varphi (\bar{R}^1 + \bar{S}_{h_0}^1) \wedge \left( \int_{S^{2m_i-1}} \frac{\alpha}{1-d\alpha} \right) \right)_{2\ell-2m_i} \right] \\ &= \left( \varphi^{h_0}(\xi_i) \cdot \left[ \int_{S^{2m_i-1}} \left( \frac{\alpha}{1-d\alpha} \right) \right] \right)_{2\ell-2m_i} \end{aligned}$$

**Remarque :** La forme différentielle  $\int_{S^{2m_i-1}} \frac{\alpha}{1-d\alpha}$  est fermée, en effet  $i(X_{h_0})d\alpha = 0$  car  $\alpha$  est  $G$ -invariante et  $i(X_{h_0})\alpha = 1$ , d'où  $\int_{S^{2m_i-1}} \frac{d\alpha}{1-d\alpha} = 0$  puisque le champ de vecteur  $X_{h_0}$  est tangent aux fibres de  $(U_i \xrightarrow{\pi_i} W_i)$ , et partout non nul sur  $U_i - W_i$ .

**Lemme : (F. Gomez [G])**

$$\left[ \int_{S^{2m_i-1}} \frac{\alpha}{1-d\alpha} \right] = \frac{1}{\mathfrak{X}_{m_i}(R^{\mathcal{N}_i} + \theta_{h_0}^{\mathcal{N}_i})},$$

$R^{\mathcal{N}_i}$  désignant la courbure d'une connexion riemannienne  $G$ -invariante sur  $\mathcal{N}_i =$  fibré normal à  $W_i$  dans  $V$ . ( $\theta_{h_0}^{\mathcal{N}_i}$  est section du fibré des endomorphismes antisymétriques de  $\mathcal{N}_i$ , puisque le tore engendré par  $h_0$  opère trivialement sur  $W_i$ ).

La démonstration ci-dessous est un peu plus simple que celle de [G].

■ Il s'agit d'établir l'égalité suivante :

$$\left[ \int_{S^{2m_i-1}} \left( \frac{\alpha}{1-d\alpha} \wedge \pi_i^* \chi_{m_i}(R^{\mathcal{N}_i} + \theta_{h_0}^{\mathcal{N}_i}) \right) \right] = 1.$$

ou encore les 2 identités suivantes :

- i)  $\left[ \int_{S^{2m_i-1}} \left( \frac{\alpha}{1-d\alpha} \wedge \pi_i^* \chi_{m_i}(R^{\mathcal{N}_i} + \theta_{h_0}^{\mathcal{N}_i}) \right)_{2m_i-1} \right] = 1,$
- ii)  $\left[ \int_{S^{2m_i-1}} \left( \frac{\alpha}{1-d\alpha} \wedge \pi_i^* \chi_{m_i}(R^{\mathcal{N}_i} + \theta_{h_0}^{\mathcal{N}_i}) \right)_{2j+1} \right] = 0,$  pour tout  $j \geq m_i$ .

Désignons par  $\eta_i$  la restriction à  $U_i - W_i$  du fibré tangent vertical  $\ker(d\pi_i)$ . Il s'identifie canoniquement au fibré image réciproque de  $\mathcal{N}_i$  par l'application

$\hat{\pi}_i = \pi_{i|(U_i - W_i)}$ .  $\eta_i$  est un  $G$ -fibré vectoriel possédant  $Z_i$  (= champ de vecteurs transversal) comme section partout non nulle et  $G$  équivariante, (cf. §.2.). Après avoir muni ce  $G$  fibré vectoriel de la métrique riemannienne image réciproque de celle existant sur  $N_i$ , on peut le munir de 3 connexions riemanniennes  $G$ -invariante.

(\*)  $\nabla^i = \hat{\pi}_i^* \nabla^{\mathcal{N}_i}$ , connexion image réciproque d'une connexion riemannienne  $G$ -invariante  $\nabla^{\mathcal{N}_i}$  choisie sur  $\mathcal{N}_i$ ,

$$(**) \nabla^{i_0} = \nabla^i + \alpha \otimes S_{h_0}^i, \text{ avec } S_{h_0}^i = \theta_{h_0}^{\eta_i} - \nabla_{X_{h_0}}^i,$$

(\*\*\*)  $\nabla^{Z_i}$ , connexion riemannienne  $G$ -invariante préservant le champ de vecteurs transversal normalisé  $\frac{Z_i}{|Z_i|}$ , telle que  $\nabla_{X_{h_0}}^{Z_i} = \theta_{h_0}^{\eta_i}$ , (ce dernier choix est possible car  $K_0$  opère quasi-librement sur  $U_i - W_i$ , cf. Lemme de la page 44).

En désignant par  $\Delta_{\omega^i \omega^{i_0}}$  (resp.  $\Delta_{\omega^{i_0} \omega^{Z_i}}$  et  $\Delta_{\omega^{Z_i} \omega^i}$ ) l'opérateur différence de R. Bott associé au couple de connexions  $\{\nabla^i, \nabla^{i_0}\}$  (resp.  $\{\nabla^{i_0}, \nabla^{Z_i}\}$  et  $\{\nabla^{Z_i}, \nabla^i\}$ ), on a :  $\Delta_{\omega^i \omega^{i_0}}(\chi_{m_i}) + \Delta_{\omega^{i_0} \omega^{Z_i}}(\chi_{m_i}) + \Delta_{\omega^{Z_i} \omega^i}(\chi_{m_i})$  est un cobord, d'où

$$\left[ \int_{S^{2m_i-1}} (\Delta_{\omega^i \omega^{i_0}}(\chi_{m_i}) + \Delta_{\omega^{i_0} \omega^{Z_i}}(\chi_{m_i}) + \Delta_{\omega^{Z_i} \omega^i}(\chi_{m_i})) \right] = 0,$$

or d'après le théorème de Gauss-Bonnet-Chern ( $[GHV_{II}]$ ) on a :

$$\int_{S^{2m_i-1}} \Delta_{\omega^{i_0} \omega^{Z_i}}(\chi_{m_i}) = 1.$$

D'autre part, le même calcul qui nous a permis de déduire la formule (E), nous permet d'affirmer que :

$$\Delta_{\omega^i \omega^{i_0}}(\chi_{m_i}) = \left( \frac{\alpha}{1 - d\alpha} \wedge \pi_i^*(\chi_{m_i}(R^{\mathcal{N}_i} + \theta_{h_0}^{\mathcal{N}_i})) \right)_{2m_i-1}$$

Pour établir i), il suffit donc de montrer que :

$$\int_{S^{2m_i-1}} \Delta_{\omega^{i_0} \omega^{Z_i}}(\chi_{m_i}) = 0,$$

en effet

$$\Delta_{\omega^{i_0} \omega^{Z_i}}(\chi_{m_i}) = \int_{[0,1]} \chi_{m_i} \underbrace{(\tilde{R}, \dots, \tilde{R})}_{m_i}.$$

$\tilde{R}$  désignant la courbure de la connexion  $\tilde{\nabla} = t\nabla^{i_0} + (1-t)\nabla^{Z_i}$  définie sur le fibré vectoriel  $p^{-1}(\eta_i) =$  fibré image réciproque de  $\eta_i$  par la projection naturelle  $p : (U_i - W_i) \times [0, 1] \rightarrow U_i - W_i$ .

En munissant la variété  $(U_i - W_i) \times [0, 1]$  de l'action  $g \cdot (x, t) = (g \cdot x, t)$  pour  $g \in G$ ,  $x \in (U_i - W_i)$ , et  $t \in [0, 1]$ , et le fibré  $p^{-1}(\eta_i)$  de l'action image réciproque ; on en déduit que la projection  $p$  devient  $G$ -équivariante et la connexion  $\tilde{\nabla}$  devient  $G$ -invariante et préservant la métrique image réciproque. De plus, on a :  $\tilde{\nabla}_{X_{h_0}} = \theta(h_0)$  car  $\nabla_{X_{h_0}}^{i_0} = \theta_{h_0}$  et  $\nabla_{X_{h_0}}^{z_i} = \theta_{h_0}$ , d'où  $i(X_{h_0})\tilde{R} = 0$  et par suite  $i(X_{h_0})\chi_{m_i}(\tilde{R}) = 0$  et  $i(X_{h_0})\Delta_{\omega^{i_0}\omega^{z_i}}(\chi_{m_i}) = 0$  (car  $i(X_{h_0}) \circ f_{[0,1]} = f_{[0,1]} \circ i(X_{h_0})$ ).

Le champ de vecteurs  $X_{h_0}$  étant tangent aux fibres de la fibration  $(U_i - W_i) \xrightarrow{\pi_i} W_i$ , partout non nul sur  $U_i - W_i$ , on en déduit que  $f_{S^{2m_i-1}} \Delta_{\omega^{i_0}\omega^{z_i}}(\chi_{m_i}) = 0$ .

Il reste à vérifier ii).

La courbure  $R^{i_0}$  de la connexion  $\nabla^{i_0}$  est donnée par :

$$R^{i_0} = R^i + d\alpha \otimes S_{h_0}^i$$

$$\text{d'où } \chi_{m_i}(R^{i_0}) = (\chi_{m_i}(R^i + S_{h_0}^i) \wedge \frac{1}{1-d\alpha})_{2m_i}$$

et par suite

$$\chi_{m_i}(R^{i_0}) \wedge \frac{\alpha}{1-d\alpha} = \sum_{j \geq m_i} \left( \frac{\alpha}{1-d\alpha} \wedge \pi_i^*(\chi_{m_i}(R^{N_i} + \theta_{h_0}^{N_i})) \right)_{2j+1}$$

ainsi ii) est équivalente à

$$\left[ \int_{S^{2m_i-1}} (\Delta_{\omega^{i_0}}(\chi_{m_i}) \wedge \frac{\alpha}{1-d\alpha}) \right] = 0,$$

or

$$\Delta_{\omega^{i_0}}(\chi_{m_i}) = d\Delta_{\omega^{i_0}\omega^{z_i}}(\chi_{m_i})$$

d'où

$$\left[ \int_{S^{2m_i-1}} (\Delta_{\omega^{i_0}}(\chi_{m_i}) \wedge \frac{\alpha}{1-d\alpha}) \right] = \left[ \int_{S^{2m_i-1}} (\Delta_{\omega^{i_0}\omega^{z_i}}(\chi_{m_i}) \wedge \frac{d\alpha}{1-d\alpha}) \right],$$

d'autre part, puisque  $i(X_{h_0})(\Delta_{\omega^{i_0}\omega^{z_i}}(\chi_{m_i})) = 0$  et  $i(X_{h_0})d\alpha = 0$ , on en déduit que le second membre de l'égalité ci-dessus est nul.

Ceci achève la démonstration du lemme.

## BIBLIOGRAPHIE

- [A] A. Abouqateb : Isomorphisme de Thom et Théorème de De Rham sur les variétés stratifiées. *C.R. Acad. Sci. Paris, t. 313, Série I, p. 611-614, 1991.*
- [A.G] N. Alamo et F. Gomez : Smooth toral actions on principal bundles and characteristic classes. *Lecture Notes in Math. 1410, 1-26. 1989.*
- [Ba] K. Bekka : Sur les propriétés topologiques et métriques des espaces stratifiés. *Thèse Orsay, 1988).*
- [Bo] R. Bott : Lectures on characteristic classes and foliations, *Notes by Laurence Conlon, Springer, Lecture Notes in Math. n° 279, 1972.*
- [Br] J.P. Brasselet : Définition combinatoire des homomorphismes de Poincaré, Alexander et Thom, pour une pseudo-variété. *Astérisque 82-83, 1981, Exposé n° 5, 71-92.*
- [Bre] G.E. Bredon : Introduction to compact transformation Groups. *Academic Press, New York (1972).*
- [B.C] P. Baum et J. Cheeger : Infinitesimal isometries and Pontryagin numbers, *Topology (8) (1969), 173-193.*
- [B.T] R. Bott et L.W. Tu : Differential forms in algebraic topology. *Graduate texts in Mathematics, Springer, 1982.*
- [C] J. Cerf : Topologie de certains espaces de plongements, *Bull. Soc. Math. France 89 (1961), 227-380.*
- [E.N] A. El Kacimi Alaoui et M. Nicolau : On the topological invariance of the basic cohomology, (*Préprint*).
- [G] F. Gomez : A residue formula for characteristic classes, *Topology 21 (I), (1982), 101-124.*

- [Go] M.R. Goresky : Triangulation of stratified objets, *Poc. Amer. Math. Soc.*, 72 (1978), 193-200.
- [G.F.G] I.M. Gelfand, D.B. Fuks et A.M. Cabrielov : The Gauss-Bonnet theorem and the Atiyah-Patodi-Singer fonctionnals for the characteristic classes of foliations, *Topology* 15, 1976, p. 165-188.
- [G.H.VI] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone : Connections,curvature, and cohomology. Vol. I. *Academic Press* 1972.
- [G.H.VII] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone : Connections,curvature, and cohomology. Vol. II. *Academic Press* 1973.
- [H] G. Hochschild : The structure of Lie groups. *San Francisco London Amsterdam : Holden-Day* 1965.
- [J] F.E.A. Johnson : Triangulation of stratified sets and singular varieties, *Trans. Amer. Maths. Soc.* 275 (1983), 333-343.
- [L<sub>1</sub>] D. Lehmann : Intégration sur les variétés stratifiées et théorème de Gauss-Bonnet pour les variétés stratifiées. *C.R.Ac. Sci. Paris, t. 307, Série I, p. 603-606, et 671-673 (1988)*.
- [L<sub>2</sub>] D. Lchmann : Classes caractéristiques résiduelles. *Differential Geometry and its applications. Proc. Conf., Aug. 27. sep. 2, 1989, Brno, Czechoslovakia. World Scientific, Singapore, 1990, 85-108.*
- [L<sub>3</sub>] D. Lehmann : Variétés stratifiées  $C^\infty$ -Integration de Čech-de Rham et théorie de Chern-Weil. *Geometry and Topology of submanifolds, II. Poc. Conf., 30 May - 3 June, 1988, Avignon, France World Scientific, 1990.*
- [L<sub>4</sub>] D. Lehmann : Complexes de Verona et de Guelfand-Fuks-Gabrielov. (*notes manuscrites non publiées*).
- [L<sub>5</sub>] D. Lehmann : Systèmes d'alvéoles et intégration sur le complexe de Čech-De Rham. *IRMA - Volume 23, n° VI, 1991.*
- [Lo] Lojasiewicz : Triangulation of semi-analytic sets. *Ann. Scuola Superiore di Pisa, Serie III, Vol. 17, Fasc. 4 (1964)*.
- [M] R. MacPherson : Chern classes for singular algebraic varieties. *Annales of Math.* 100, 1973, p. 422-432.
- [Ma] J.N. Mather : Notes on topological stability, *Mimeographed Notes, Harward,*

1970.

- [S] M.H. Schwartz : Champs radiaux et préradiaux. *Public. internes de l'Université de Lille, Vol. 3, 1986.*
- [S(J)] J. Schwartz : De Rham's Theorem for arbitrary spaces. *Amer. J. Math. (1955) 77, 29-44.*
- [Sp] E.H. Spanier : Algebraic topology, *McGraw Hill (1966).*
- [T] R. Thom : Ensembles et morphismes stratifiés. *Bul. AMS. 75 (1969) pp. 240-284.*
- [Tr] D.J.A. Trotman : Geometric versions of whitney regularity for smooth stratifications. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 12, 1972, p. 453-463.*
- [V<sub>1</sub>] A. Verona : Le théorème de de Rham pour les prestratifications abstraites, *C.R.Ac. Sc. Paris, t. 273, p. 886-889, (1971)*
- [V<sub>2</sub>] A. Verona : Stratified Mapping-structure and triangulability. *Lecture Notes in Math. 1102, Springer-Verlag 1984.*



## Résumé

Dans ce travail, nous établissons l'analogue de l'isomorphisme de Thom-Gysin pour certaines classes de variétés singulières stratifiées  $W$  plongées dans une variété ambiante lisse  $V$ .

Dans ce même contexte, nous démontrons un théorème de de Rham généralisé.

Dans le cas lisse (point de départ de cette étude), nous réalisons l'isomorphisme de Thom-Gysin usuel en utilisant le complexe de Čech-de Rham associé au recouvrement ouvert  $\{V - W, U\}$ , où  $U$  est un voisinage ouvert de  $W$ .

Une seconde partie de ce travail est consacrée à l'étude des classes caractéristiques des fibrés vectoriels  $E \rightarrow V$  munis d'une action quasi-libre d'un groupe de Lie compact. Nous nous sommes posé la question de savoir dans quelle mesure on peut généraliser les résultats de Baum-Cheeger et de F. Gomez, pour obtenir une formule de résidus pour les classes caractéristiques de dimension égale à  $\dim V - \dim K$ . Nous avons alors donné des conditions satisfaisantes pour la localisation de ces classes caractéristiques, et explicité cette localisation.

**Mots clés :** Stratifications, Structure de Thom Mather, Intégration suivant la fibre, Isomorphisme de Thom, Action de groupe, Classes caractéristiques, Résidus.