

55376
1991
15

N° d'ordre : 809

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Abdelmalek OUAHAB



**Contribution
à la théorie spectrale généralisée
dans les espaces de Banach**

Soutenue le 29 novembre 1991 devant la Commission d'Examen :

Président : Gérard CŒURÉ, Université de Lille

Rapporteurs : Robin HARTE, Université de Cork (Irlande)

Jean-Philippe LABROUSSE, Université de Nice

Examineurs : Philippe ANTOINE, Université de Lille

Anne DUVAL, Université de Lille

Mostapha MBEKHTA, Université de Lille

SCD LILLE 1



D 030 254747 3

01000
1000

CA



D 030 173823 0

55376
1991
15

N° d'ordre : 809

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Abdelmalek OUAHAB



Contribution à la théorie spectrale généralisée dans les espaces de Banach

Soutenue le 29 novembre 1991 devant la Commission d'Examen :

Président : Gérard CŒURÉ, Université de Lille

Rapporteurs : Robin HARTE, Université de Cork (Irlande)

Jean-Philippe LABROUSSE, Université de Nice

Examineurs : Philippe ANTOINE, Université de Lille

Anne DUVAL, Université de Lille

Mostapha MBKHTA, Université de Lille

22 22
1991
71

Je remercie en premier lieu Gérard Cœuré qui me fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance à Mostafa Mbekfita qui a suivi avec beaucoup d'intérêt l'évolution de ce travail; ses conseils et suggestions ont été précieux et ses encouragements m'ont beaucoup aidé pour l'aboutissement de cette thèse.

Je remercie tout particulièrement Robin Harte et Jean-Philippe Labrousse qui se sont intéressés à ce travail et y ont rapporté des remarques et commentaires suggestifs.

Mes remerciements vont également à Anne Duval et Philippe Antoine qui ont accepté d'examiner mon travail et me faire l'honneur de participer au jury de cette thèse.

Je tiens à remercier toute l'équipe d'Analyse et, en particulier, Raymonde Bérat qui m'a aidé à dactylographier cette thèse et m'a toujours accueilli avec beaucoup de gentillesse.

Je remercie également le personnel de reprographie de l'U.F.R. de Mathématiques.

** * **

SOMMAIRE

0. Introduction	2-8
I. Première partie	
§ 1. Préliminaires	9-12
§ 2. Opérateur s -régulier	13-15
§ 3. Cœur d'un opérateur	16-18
§ 4. Espace $H_0(A)$	19-20
II. Deuxième partie	
§ 1. Propriétés des opérateurs s -réguliers	21-25
§ 2. Opérateurs à image fermée	27-30
§ 3. Domaine s -régulier d'un opérateur	31-37
§ 4. Théorème de l'application spectrale	38-43
§ 5. Perturbation du spectre singulier	44-48
III. Troisième partie	
Continuité de certains sous espaces dans le domaine quasi-Fredholm	50-55
– Annexe	56-58
– Références	59-60

Introduction

Il est clair que la notion “d’inversibilité” est la base de la théorie spectrale classique. Plusieurs auteurs ont développé des théories consistant à remplacer cette notion “d’inversibilité” par une notion plus faible. Par exemple, l’inversibilité à droite ou à gauche modulo les opérateurs compacts, le résolvant généralisé analytique,... ont conduit aux spectres essentiel de Fredholm, semi-Fredholm, spectre généralisé,...

En 1958, T. Kato a montré (cf. [11, Théorème 4]) que si A est un opérateur fermé dans un espace de Banach et semi-Fredholm, alors il existe X_1, X_0 deux sous-espaces fermés de X tels que

- a) $X = X_1 \oplus X_0$
 - b) $X_0 \subset D(A)$, $A(X_0) \subset X_0$ et $A_0 = A|_{X_0}$ est nilpotent
 - c) $A(X_1 \cap D(A)) \subset X_1$ et si on note $A_1 = (A|_{X_1})$ alors $R(A_1)$ est fermé
- et $\forall n \geq 1, N(A_1^n) \subset R(A_1)$.

Où $N(A)$ et $R(A)$ désignent respectivement le noyau et l’image de A . Un opérateur qui vérifie la condition (c) sera dit s-régulier. La décomposition précédente $A = A_1 \oplus A_0$ est dite décomposition de Kato.

Récemment, T.T. West [24] a donné une démonstration plus simple de cette remarquable propriété des opérateurs semi-Fredholm.

En 1980, J.P. Labrousse [13], a caractérisé tous les opérateurs qui admettent une décomposition de Kato dans le cas Hilbertien (opérateur quasi-Fredholm). Le théorème du “séparation spectrale” implique que $0 \in \sigma(A)$ est isolé si et seulement si A admet une décomposition de la forme $A = A_1 \oplus A_0$ où A_1 est inversible et A_0 est quasi-nilpotent; alors la décomposition de Kato peut être vue comme un résultat de “séparation spectrale”, pour un spectre “généralisé” où A_1 est s-régulier au lieu d’être inversible.

En 1989, M. Mbekhta [16], a développé une “théorie spectrale généralisé” pour les opérateurs fermés dans un espace de Hilbert, consistant à remplacer la notion “d’inversibilité” par celle du “résolvant généralisé analytique”. Plus précisément, si X est un espace de Hilbert et A est un opérateur fermé dans X , on dira que A admet un résolvant généralisé dans $U \subset \mathbb{C}$, si $\forall \lambda \in U$, il existe $\text{Rg}(A, \lambda)$ opérateur

borné de X dans $D(A)$ vérifiant :

$$(A - \lambda I)Rg(A, \lambda)(A - \lambda I) = (A - \lambda I),$$

$$Rg(A, \lambda)(A - \lambda I)Rg(A, \lambda) = Rg(A, \lambda).$$

Notons alors $reg(A)$, l'ensemble régulier de A , défini par:

$$reg(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} ; A \text{ admette un résolvant généralisé analytique dans un voisinage } U \text{ de } \lambda\},$$

et $\sigma_g(A) = \mathbb{C} \setminus reg(A)$ le spectre généralisé de A , alors $\sigma_g(A)$ possède plusieurs propriétés du spectre classique (cf. [15],[16]). Toujours dans le cas Hilbertien (cf. [15, théorème 2.6]), on montre que " $0 \notin \sigma_g(A)$ si et seulement si $\forall n \geq 0$, $N(A^n) \subset R(A)$ et A admet un résolvant généralisé en zéro si et seulement si $\forall n \geq 0$, $N(A^n) \subset R(A)$ et $R(A)$ est fermé".

Ce dernier résultat montre que si A admet une décomposition de Kato alors zéro n'est pas un point d'accumulation de $\sigma_g(A)$. Donc si $0 \in \sigma_g(A)$ alors il est isolé.

Dans ce travail, nous donnons une extension de la notion du spectre généralisé défini plus haut, au cas des opérateurs fermés dans un espace de Banach. Commençons par donner deux remarques:

I) Contrairement au cas Hilbertien, la notion de "résolvant généralisé" est trop forte, car pour que l'opérateur A admette un résolvant généralisé en λ il faut et il suffit que $R(A - \lambda I)$ et $N(A - \lambda I)$ soient fermés et admettent respectivement un complément topologique (voir [4]).

II) Si on note

$$\sigma_f(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; R(A - \lambda I) \text{ n'est pas fermé}\},$$

("spectre" défini par Goldberg [7, définition VI.7.1]), alors $\sigma_f(A)$ ne possède pas les propriétés du spectre classique, par exemple:

- (i) $\sigma_f(A)$ peut être vide même si A est borné, c'est le cas par exemple pour $A = 0$.
- (ii) $\sigma_f(A)$ peut ne pas être fermé, car il existe (voir annexe) un opérateur à image fermée tel que si $0 < |\lambda| \leq 1$ alors $R(A - \lambda I)$ n'est pas fermé.

(iii) le théorème de l'application spectrale n'est pas vérifié pour $\sigma_f(A)$.

Soit $P(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^2$, $X = l^2$ et A défini par:

$$A(x_1, \dots, x_n, \dots) = (0, x_1, 0, \frac{x_3}{3}, 0, \frac{x_5}{5}, \dots)$$

alors $R(A)$ n'est pas fermé, mais par contre $A^2 = 0$ a une image fermée ce qui implique que $0 \notin \sigma_f(P(A))$ et $0 \in P(\sigma_f(A))$, c'est à dire $P(\sigma_f(A)) \not\subseteq \sigma_f(P(A))$. Il existe de même un opérateur A (voir annexe) tel que A a une image fermée et que l'image de A^2 ne soit pas fermée, d'où $0 \in \sigma_f(P(A))$ mais $0 \notin P(\sigma_f(A))$, c'est à dire $\sigma_f(P(A)) \not\subseteq P(\sigma_f(A))$.

(iv) $\sigma_f(A)$ n'est pas stable si on perturbe A par des opérateurs quasi-nilpotents commutant avec A . Si par exemple, $A = 0$ et N est l'opérateur nilpotent défini dans (iii), alors $0 \in \sigma_f(A + N)$ mais par contre $0 \notin \sigma_f(A)$.

Maintenant, pour un opérateur A fermé dans un espace de Banach, notons

$$s\text{-reg}(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} ; A - \lambda I \text{ est s-régulier}\}.$$

Nous obtenons alors un nouveau spectre que nous appellerons spectre singulier, complément de $s\text{-reg}(A)$ dans $\mathbf{C}$, noté $\sigma_s(A)$ contenu dans le spectre classique $\sigma(A)$ et qui contient la frontière de ce dernier et possède plusieurs propriétés de $\sigma(A)$. Il coïncide avec $\sigma_g(A)$ dans le cas Hilbertien.

En outre, $\sigma_f(A) \subseteq \sigma_s(A)$ et nous montrons que la différence entre $\sigma_s(A)$ et $\sigma_f(A)$ est au plus dénombrable, d'autre part nous montrons que $\sigma_s(A)$ est au plus dénombrable si et seulement si $\sigma(A)$ est au plus dénombrable, et dans ce cas, on a $\sigma_s(A) = \sigma(A)$.

Notons $S\text{-Reg}(X) = \{A \in B(X) ; 0 \notin \sigma_s(A)\}$, où X est un espace de Banach.

$$\text{Alors } \text{Inv}(X) = \{A \in B(X) ; 0 \notin \sigma(A)\} \subseteq S\text{-Reg}(X).$$

Nous remarquons par un exemple que $S\text{-Reg}(A)$ n'est pas un ouvert, contrairement au groupe des inversibles $\text{Inv}(A)$. Cependant, nous montrons qu'il reste stable par certaines "petites" perturbations.

Dans tout ce qui suit X désigne un espace de Banach complexe, A un opérateur fermé dans X , de domaine $D(A)$ et on notera $N(A)$ et $R(A)$ respectivement le noyau et l'image de A . Ce travail comporte trois parties.

Première partie

Dans le premier paragraphe, nous rappelons la définition de la conorme d'un opérateur et de la métrique du gap, et nous donnons quelques rappels et résultats dont on aura besoin dans la suite du travail.

Dans le deuxième paragraphe, nous introduisons la notion d'opérateur semi-régulier (noté s-régulier) défini par:

A est s-régulier si $R(A)$ est fermé et $\forall n \geq 0, N(A^n) \subseteq R(A)$.

On note

$$s\text{-reg}(A) = \{\lambda \in \mathbf{C}; A - \lambda I \text{ est s-régulier}\}$$

et $\sigma_s(A)$, le spectre singulier de A , est par définition le complément de $s\text{-reg}(A)$ dans $\mathbf{C}$; on a évidemment $\rho(A) \subseteq s\text{-reg}(A)$ ce qui implique que $\sigma_s(A) \subseteq \sigma(A)$.

En outre nous donnons une liste non exhaustive d'exemples d'opérateurs s-régulier déjà étudiés par différents auteurs ([8],[10],[11],[13],[14],[15] et [22]). Nous montrons, (proposition 2.3) que si $D(A)$ est dense dans X , alors $\sigma_s(A^*) = \overline{\sigma_s(A)}$ (le complexe conjugué) où A^* est l'opérateur adjoint de A .

Dans le troisième paragraphe, nous donnons une définition du Cœur d'un opérateur fermé, notion introduite par P. Saphar [23] pour les opérateurs bornés, noté $Co(A)$ le plus grand sous-espace M de X tel que

$$A(M \cap D(A)) = M.$$

Dans le cas des opérateurs s-réguliers, $Co(A) = \bigcap_{j \geq 0} R(A^j)$ et $Co(A)$ est fermé.

Nous terminons cette première partie, paragraphe 4, par l'étude de la partie quasi-nilpotente de A , noté $H_0(A)$, définie par

$$H_0(A) = \{x \in D^\infty(A) ; \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n x\|^{1/n} = 0\},$$

où $D^\infty(A) = \bigcap_{n \geq 0} D(A^n)$. Dans le cas des opérateurs s-réguliers nous montrons que :

$$\overline{H_0(A)} = \overline{\bigcup_{j \geq 0} N(A^j)},$$

et qu'il existe une dualité (voir proposition 4.4) entre $Co(A)$ et $H_0(A)$ dans le cas où $D(A)$ est dense dans X , ce qui se traduit par:

$$\overline{H_0(A^*)} = Co(A)^\perp \text{ et } \overline{H_0(A)} = {}^\perp Co(A^*).$$

Deuxième partie

Cette partie est consacrée à l'étude de l'ensemble $s\text{-reg}(A)$ défini plus haut. Dans le premier paragraphe, nous démontrons (Théorème 1.5) que les opérateurs s -régulier sont stables par des petites perturbations du type λI , $\lambda \in \mathbf{C}$, qui sont des perturbations fondamentales pour l'étude du spectre d'un opérateur. Il en résulte que $s\text{-reg}(A)$ est un ouvert et, par conséquent, que $\sigma_s(A)$ est un fermé de $\mathbf{C}$. Nous montrons enfin que si A est s -régulier alors l'application $\lambda \mapsto c(A - \lambda I)$ est continue dans $\{\lambda \in \mathbf{C} ; |\lambda| < c(A)\}$ où $c(A)$ dénote la conorme de A .

Dans le deuxième paragraphe nous étudions l'ensemble des points $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que l'image de $(A - \lambda I)$ soit fermée (rappelons que l'image de $(A - \lambda I)$ est fermée si et seulement si sa conorme est strictement positive, cf. [7],[11],[12]). Pour tout $\gamma > 0$, notons $\Gamma_\gamma = \{\lambda \in \mathbf{C} ; c(A - \lambda I) \geq \gamma\}$. Alors nous montrons (cf. théorème 2.2) que $\forall \gamma > 0$, Γ_γ est fermé et que $\Gamma'_\gamma \subseteq s\text{-reg}(A)$, où Γ'_γ désigne l'ensemble des points d'accumulations de Γ_γ .

Dans le troisième paragraphe, nous donnons plusieurs caractérisations de points de $\mathbf{C}$ n'appartenant pas à $\sigma_s(A)$ (cf. théorème 3.1). Le corollaire 3.4 montre que $\sigma_s(A)$ contient la frontière du spectre de A . Nous démontrons ainsi le résultat suivant " $\sigma_s(A)$ est au plus dénombrable si et seulement si $\sigma(A)$ est au plus dénombrable", et dans ce cas, on a $\sigma_s(A) = \sigma(A)$. Il en résulte que si A est borné alors $\sigma_s(A) \neq \emptyset$. D'autre part, nous montrons que la différence entre $\sigma_s(A)$ et $\sigma_f(A)$ est au plus dénombrable, et nous en déduisons que si $\sigma_f(A)$ est au plus dénombrable alors $\sigma_s(A) = \sigma(A)$ est au plus dénombrable (voir corollaire 3.6). Ce dernier corollaire est une généralisation des résultats d'Apostol [1, théorème 1 et corollaire] (cf. remarque 3.7). Nous montrons enfin dans le cas où $D(A)$ est dense dans X que les applications $\lambda \mapsto Co(A - \lambda I)$ et $\lambda \mapsto \overline{H_0(A - \lambda I)}$ sont constantes sur la composante connexe Ω_0 contenant 0 de $s\text{-reg}(A)$ (cf. corollaire 3.2) et que $Co(A) = \bigcap_{j \geq 1} R(A - \lambda_j)$ et $\overline{H_0(A)} = clm\{N(A - \lambda_j)\}_{j \geq 1}$ où " $clm\{E\}$ " désigne l'adhérence du sous-espace engendré par E et $\{\lambda_j\}_{j \geq 1}$ est une suite de points de Ω_0 , tous distincts, convergeant vers 0 (corollaire 3.3).

Dans le quatrième paragraphe nous montrons (théorèmes 4.5 et 4.7) que le théorème de l'application spectrale reste vrai pour le spectre singulier. Plus précisément, nous montrons que si A est fermé avec $\rho(A) \neq \emptyset$ et si P est un

polynome dans $\mathbf{C}$, alors $P(\sigma_s(A)) = \sigma_s(P(A))$. D'autre part si A est borné et si f est une fonction analytique au voisinage de $\sigma(A)$, alors $f(\sigma_s(A)) = \sigma_s(f(A))$.

Dans le dernier paragraphe nous montrons par un exemple que $S\text{-Reg}(X)$ n'est pas un ouvert de l'ensemble $B(X)$ des opérateurs bornés dans X où $S\text{-Reg}(X)$ est définie par:

$$S\text{-Reg}(X) = \{A \in B(X) ; A \text{ est s-régulier}\},$$

mais nous montrons que les opérateurs s-réguliers sont stables par certaines "petites" perturbations (voir théorèmes 2.6 et 2.7). D'autre part on montre que $\sigma_s(A + Q) = \sigma_s(A)$ où Q est un opérateur quasi-nilpotent commutant avec A .

Troisième partie

Dans cette partie, nous définissons les opérateurs quasi-Fredholm dans le cas des espaces de Banach par:

On dira qu'un opérateur fermé A dans un espace de Banach X est quasi-Fredholm (et on notera $A \in q\phi$) s'il existe M, N deux sous-espaces fermés de X tels que:

- a) $X = M \oplus N$
- b) $A(M \cap D(A)) \subset M$ et $0 \in s\text{-reg}(A|_M)$
- c) $N \subset D(A)$, $A(N) \subset N$ et $A|_N$ est nilpotent.

Cette définition a été motivée par le résultat de T. Kato qui montre qu'un opérateur semi-Fredholm est un opérateur quasi-Fredholm (cf. [11, théorème 4.]). J-P. Labrousse a étudié et caractérisé les opérateurs quasi-Fredholm dans le cas des espaces de Hilbert, et (M, N) est appelé décomposition de Kato associée à A . Nous montrons que

$$\rho_{q\phi}(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} ; A - \lambda I \text{ est quasi-Fredholm}\}$$

est un ouvert de $\mathbf{C}$, et que dans le cas où $D(A)$ est dense dans X que les applications

$$\begin{aligned} \lambda &\longmapsto Co(A - \lambda I) + H_0(A - \lambda I) \\ \text{et} \quad \lambda &\longmapsto Co(A - \lambda I) \cap \overline{H_0(A - \lambda I)} \end{aligned}$$

sont localement constantes dans le domaine quasi-Fredholm de A .

PREMIÈRE PARTIE

§ 1. Préliminaires

Soit X un espace de Banach complexe et A un opérateur fermé de domaine $D(A)$ et d'image $R(A)$ dans X . Notons $N(A)$ le noyau de A .

Notons $c(A)$, la conorme de A , définie par :

$$c(A) = \inf \left\{ \frac{\|Au\|}{d(u, N(A))} ; u \in D(A) \setminus N(A) \right\}$$

où $d(u, N(A))$ est la distance de u à $N(A)$.

Alors :

$$\begin{aligned} c(A) &= \inf \{ \|Au\| ; u \in D(A) \text{ et } d(u, N(A)) = 1 \} \\ &= \inf \left\{ \frac{\|Au\|}{d(u, N(A))} ; u \in D(A) \text{ et } d(u, N(A)) \geq \alpha \|u\| \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \right\} \\ &= \sup \{ c ; \|Au\| \geq cd(u, N(A)) \text{ et } u \in D(A) \setminus N(A) \} . \end{aligned}$$

Proposition 1.1 (cf. [7], [11] et [12]) *Soit A un opérateur fermé, alors :*

- i) $c(A) > 0$ si et seulement si $R(A)$ est fermé ;
- ii) si $D(A)$ est dense dans X alors $c(A) = c(A^*)$.

Pour M, N deux sous-espaces fermés de X , posons

$$\delta(M, N) = \sup \{ d(u, N) ; u \in M \text{ et } \|u\| \leq 1 \}$$

et
$$g(M, N) = \max \{ \delta(M, N) ; \delta(N, M) \} .$$

Alors g est une métrique (dite métrique du gap) sur $G(X)$, l'ensemble des sous-espaces fermés de X . $G(X)$ muni de cette métrique est complet (voir [11], [12]).

Lemme 1.2 *Soit A un opérateur fermé et $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, alors :*

- i) $c(A - \lambda I) \delta(N(A - \mu I), N(A - \lambda I)) \leq |\mu - \lambda|$.
- ii) $\min(c(A - \lambda I) ; c(A - \mu I)) g(N(A - \lambda I), N(A - \mu I)) \leq |\mu - \lambda|$.

Démonstration:

i) Si $\lambda = \mu$ alors le résultat est évident. Supposons que $\lambda \neq \mu$ et soit $u \in N(A - \mu I)$ alors $u \notin N(A - \lambda I)$ (car $N(A - \lambda I) \cap N(A - \mu I) = \{0\}$ dès que $\lambda \neq \mu$) et on a :

$$c(A - \lambda I)d(u, N(A - \lambda I)) \leq \|(A - \lambda I)u\| = \|(A - \lambda I)u - (A - \mu I)u\| = |\lambda - \mu| \|u\|$$

d'où $c(A - \lambda I) \sup\{d(u, N(A - \lambda I)) ; u \in N(A - \mu I) \text{ et } \|u\| \leq 1\} \leq |\lambda - \mu|$
 c'est-à-dire $c(A - \lambda I)\delta(N(A - \mu I), N(A - \lambda I)) \leq |\mu - \lambda|$.

ii) se démontre en interchangeant λ et μ . ■

Proposition 1.3. Soit A un opérateur fermé et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tel que $g = g(N(A - \lambda I), N(A - \mu I)) < \frac{1}{2}$. Alors :

$$|c(A - \lambda I) - c(A - \mu I)| \leq 3|\lambda - \mu|[1 - 2g]^{-1}.$$

Démonstration:

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $2g < \varepsilon < 1$, alors $0 < \varepsilon - 2g < 1$ et $c(A - \lambda I) = \inf\{\frac{\|(A - \lambda I)u\|}{d(u, N(A - \lambda I))} ; u \in D(A) \text{ et } d(u, N(A - \lambda I)) \geq (1 - (\varepsilon - 2g))\|u\|\}$.

Montrons que si $u \in D(A)$ alors :

$$d(u, N(A - \mu I)) \geq (1 - (\varepsilon - 2g))\|u\| \Rightarrow d(u, N(A - \mu I)) \geq (1 - \varepsilon)\|u\| \quad (1)$$

En effet, supposons que $u \neq 0$ ne vérifie pas la conclusion de (1), alors $d(u, N(A - \mu I)) < (1 - \varepsilon)\|u\|$. Soit $v \in N(A - \lambda I)$ et $w \in N(A - \mu I)$ alors :

$$d(u, N(A - \lambda I)) \leq \|u - w\| + \|w - v\|.$$

En prenant l'inf. sur $v \in N(A - \lambda I)$, on obtient :

$$\begin{aligned} d(u, N(A - \lambda I)) &\leq \|u - w\| + d(w, N(A - \lambda I)) \\ &\leq \|u - w\| + \delta(N(A - \mu I), N(A - \lambda I)) \cdot \|w\| \\ &\leq \|u - w\| + g\|w\| \\ &\leq (1 + g)\|u - w\| + g\|u\|. \end{aligned}$$

Si maintenant on prend l'inf. sur $w \in N(A - \mu I)$, on trouve :

$$\begin{aligned} d(u, N(A - \lambda I)) &\leq (1 + g)d(u, N(A - \mu I)) + g\|u\| \\ &< (1 + g)(1 - \varepsilon)\|u\| + g\|u\| = [(1 + g)(1 - \varepsilon) + g]\|u\| \\ &< (1 - \varepsilon + 2g)\|u\|. \end{aligned}$$

D'où $d(u, N(A - \lambda I)) < (1 - (\varepsilon - 2g))\|u\|$, ce qui établit (1).

Montrons maintenant que

$$c(A - \lambda I) \geq (1 - \varepsilon)c(A - \mu I) - |\lambda - \mu| \quad (2)$$

En utilisant (1) et l'inégalité $\|u\| \geq d(u, N(A - \lambda I))$, on obtient :

$$\begin{aligned} c(A - \lambda I) &\geq \inf \left\{ \frac{\|(A - \lambda I)u\|}{\|u\|} ; u \in D(A) \text{ et } d(u, N(A - \mu I)) \geq (1 - \varepsilon)\|u\| \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \frac{\|(A - \mu I)u\|}{\|u\|} ; u \in D(A) \text{ et } d(u, N(A - \mu I)) \geq (1 - \varepsilon)\|u\| \right\} - |\lambda - \mu| \\ &\geq (1 - \varepsilon) \inf \left\{ \frac{\|(A - \mu I)u\|}{d(u, N(A - \mu I))} ; u \in D(A) \text{ et } d(u, N(A - \mu I)) \geq (1 - \varepsilon)\|u\| \right\} \\ &\quad - |\lambda - \mu|. \end{aligned}$$

D'où $c(A - \lambda I) \geq (1 - \varepsilon)c(A - \mu I) - |\lambda - \mu|$ et (2) est démontré.

En interchangeant les rôles de λ et μ dans (2), on obtient :

$$c(A - \mu I) \geq (1 - \varepsilon)c(A - \lambda I) - |\lambda - \mu|. \quad (3)$$

(2) et (3) impliquent que :

$$\varepsilon c(A - \lambda I) + |\lambda - \mu| \geq (1 - \varepsilon)[c(A - \mu I) - c(A - \lambda I)]$$

et
$$\varepsilon c(A - \lambda I) + |\lambda - \mu| \geq c(A - \lambda I) - c(A - \mu I).$$

D'où, on en déduit que :

$$(1 - \varepsilon)|c(A - \lambda I) - c(A - \mu I)| \leq \varepsilon c(A - \lambda I) + |\lambda - \mu|.$$

En interchangeant encore les rôles de λ et μ dans la dernière inégalité, on trouve :

$$(1 - \varepsilon)|c(A - \lambda I) - c(A - \mu I)| \leq \varepsilon \min\{c(A - \lambda I) ; c(A - \mu I)\} + |\lambda - \mu|.$$

Finalement, en faisant tendre ε vers $2g$ et en utilisant le lemme 1.2 ii), on achève la démonstration de la proposition. ■

On aura besoin aussi des lemmes suivants du à Kato.

Lemme 1.4. [11, Lemme 3.3.1] *Soit A un opérateur fermé avec $R(A)$ fermé et M un sous-espace de X . Alors $A(M)$ est fermé si $N(A) + M$ est fermé.*

Lemme 1.5. [12, Lemme 2.2, chap 4] *Pour M et N deux sous-espaces fermés de X et $u \in X$ on a :*

$$(1 + \delta(M, N))d(u, M) \geq d(u, N) - \|u\|\delta(M, N).$$

Lemme 1.6. [11, Lemme 2.1.4] *Soient M et N deux sous-espaces fermés de X . Pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe un $v_0 \equiv x \pmod{M}$ tel que*

$$d(v_0, N) \geq (1 - \varepsilon)[1 - \delta(N, M)][1 + \delta(N, M)]^{-1}\|v_0\|.$$

§ 2. Opérateur s-régulier.

Tout d'abord un résultat algébrique.

Lemme 2.1. *Soit A un opérateur dans un espace vectoriel, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\forall m \geq 0, N(A) \subseteq R(A^m),$
- (ii) $\forall n \geq 0, N(A^n) \subseteq R(A),$
- (iii) $\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, N(A^n) \subseteq R(A^m),$
- (iv) $\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, N(A^n) = A^m(N(A^{n+m})).$

Démonstration:

(i) $\Rightarrow$ (ii) par induction sur n ;

pour $n = 0$ c'est évident,

pour $n = 1$ c'est une conséquence immédiate de (i).

Supposons que (ii) est démontré pour $n = k$, et soit $u \in N(A^{k+1}) \Rightarrow A^k u \in N(A) \subseteq R(A^{k+1})$ (i). Donc il existe $v \in N(A^{k+2})$ tel que: $A^k u = A^{k+1} v$. D'où $u = Av + w$ où $w \in N(A^k) \subseteq R(A)$ (par hypothèse d'induction). Donc $u \in R(A)$ c'est à dire $N(A^{k+1}) \subseteq R(A)$, ce qui établit (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) par induction sur m :

Pour $m = 0$ et $m = 1$ d'après (ii) on a (iii) $\forall n \in \mathbb{N}$.

Supposons que (iii) est démontré pour $m = k$ et n quelconque dans $\mathbb{N}$.

Soit $u \in N(A^n)$ avec $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors (ii) implique qu'il existe $v \in N(A^{n+1})$ tel que $Av = u$ et comme par hypothèse d'induction $N(A^{n+1}) \subseteq R(A^k)$ on voit que $v \in R(A^k)$ ce qui implique que $u \in R(A^{k+1})$ ce qui établit (iii)

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Il suffit de montrer que $\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, N(A^n) \subset A^m(N(A^{n+m}))$.

Soit $u \in N(A^n) \subseteq R(A^m)$ alors $u = A^m v$. Or, $u \in N(A^n) \Rightarrow 0 = A^n u = A^{n+m} v$ d'où $v \in N(A^{n+m})$. Et par conséquent, (iv) est démontré.

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Il suffit de prendre $n = 1$ dans (iv). Alors

$$\forall m \geq 0, N(A) = A^m(N(A^{m+1})) \subset R(A^m) . \quad \blacksquare$$

Définition 2.2. Soit A un opérateur fermé dans un espace de Banach tel que $R(A)$ soit fermé. Alors A est dit *semi-régulier* (et on note A *s-régulier*) si A vérifie l'une des conditions équivalentes du lemme 2.1.

Exemples d'opérateur s-régulier.

- 1) A est surjectif.
- 2) A est injectif à image fermé.
- 3) A est un opérateur de Kato (cf. [11]) c'est-à-dire $\nu(A; I) = \infty$ (notation de Kato) et que $R(A)$ fermé. Alors $\nu(A; I) = \infty \Leftrightarrow \forall n \geq 0, N(A^n) \subseteq R(A)$.
- 4) A est un opérateur de Saphar (cf. [22]), c'est-à-dire en utilisant les termes de Saphar, tel que A soit parfait et régulier.
- 5) A est un opérateur de Kaashoek c'est-à-dire A a la propriété $P(I, 0)$ (cf. [10]).
- 6) A est un opérateur de Goldman et Karatekowskii [8].
- 7) A est un opérateur de Labrousse (cf. [13]), c'est-à-dire quasi-Fredholm de degré zéro.
- 8) A est régulier (cf. [15], [16]).

Soit A un opérateur fermé avec $D(A)$ dense dans X , notons alors $A^* : X^* \rightarrow X^*$ l'opérateur adjoint de A . Il est bien connu que (voir, par exemple [7]).

$$\begin{aligned}
 & N(A)^\perp = \overline{R(A^*)} \quad \text{et} \quad {}^\perp N(A^*) = \overline{R(A)} \\
 \text{où} \quad & N(A)^\perp = \{f \in X^*; \forall u \in N(A), f(u) = 0\} \\
 \text{et} \quad & {}^\perp N(A^*) = \{u \in X; \forall f \in N(A^*), f(u) = 0\}
 \end{aligned}$$

Proposition 2.3. Soit A un opérateur fermé avec domaine dense dans X . Alors, A s-régulier $\Rightarrow A^*$ s-régulier.

$$\text{En plus, } \forall n \geq 0, N(A^n)^\perp = R(A^{**}); {}^\perp N(A^{**}) = R(A^n).$$

Démonstration:

Montrons par induction que $\forall n \in \mathbb{N}, N(A^n)^\perp \subseteq R(A^{**})$. Pour $n = 0$ c'est évident. En outre, $R(A)$ fermé $\Leftrightarrow R(A^*)$ fermé (voir Proposition 1.1), d'où $N(A)^\perp = R(A^*)$. Donc l'inclusion est encore vraie pour $n = 1$. Supposons la

établie pour $n \geq 1$ et soit $f \in N(A^{n+1})^\perp$ alors $f \in N(A^n)^\perp$. Par hypothèse d'induction $\exists g \in D(A^{*n})$ tel que $f = A^{*n}g$. D'où $\forall w \in N(A^{n+1})$, $0 = f(w) = (A^{*n})g(w)$ et $g(A^n w) = 0$, ce qui entraîne que $g \perp R(A^n) \cap N(A) = N(A)$. Par conséquent, $g \in N(A)^\perp = R(A^*)$ et donc $f \in R(A^{*n+1})$ ce qui montre l'inclusion $N(A^n)^\perp \subset R(A^{*n})$ pour tout $n \geq 0$. Et comme l'autre inclusion est toujours vérifiée, on a $\forall n \geq 0$, $N(A^n)^\perp = R(A^{*n})$. Par ailleurs, A s-régulier implique $\forall n, m \geq 0$, $N(A^n) \subseteq R(A^m)$. D'où $R(A^m)^\perp \subseteq N(A^n)^\perp = R(A^{*n})$ et, par conséquent, $N(A^{*m}) \subseteq R(A^{*n})$. Ce qui montre que A^* est s-régulier.

Le reste de la démonstration se fait de la même façon que plus haut. ■

§ 3. Cœur d'un opérateur

La notion du Cœur d'un opérateur a été introduite par P. Saphar [23] dans le cas des opérateurs bornés, on donne ici une définition dans le cas des opérateurs fermés.

Définition 3.1. Soit A un opérateur fermé dans X . On appelle cœur de A et on le note $Co(A)$, le plus grand (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel M de X tel que: $A(M \cap D(A)) = M$.

Exemple : Si A est surjectif alors $Co(A) = X$

Proposition 3.2 Soit A un opérateur fermé dans X de domaine $D(A)$. Alors:

$$Co(A) = \{u \in X ; \forall n > 0, \exists v_n \in D(A) \text{ tels que } u = v_0 \text{ et } Av_{n+1} = v_n\}.$$

Démonstration:

On pose :

$$M = \{u \in X ; \forall n > 0, \exists v_n \in D(A) \text{ tels que } u = v_0 \text{ et } Av_{n+1} = v_n\}.$$

Et montrons que $M \subseteq Co(A)$ c'est à dire $A(M \cap D(A)) = M$.

Tout d'abord montrons que $A(M \cap D(A)) \subseteq M$.

Soit $u \in M \cap D(A)$, alors $\forall n > 0$, il existe v_n dans $D(A)$ posons $w_n = v_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $w_0 = Au$. $v_n \in D(A) \Rightarrow w_{n+1} \in D(A)$ et $w_n = v_{n-1} = Av_n = Aw_{n+1}$ donc $Aw_{n+1} = w_n$ et $w_0 = Au$ ce qui implique que $Au \in M$ et alors $A(M \cap D(A)) \subseteq M$.

Réciproquement : Soit $u \in M$ alors $\forall n > 0$, $\exists v_n \in D(A)$ tels que $v_0 = u$ et $Av_{n+1} = v_n$. Donc $u = v_0 = Av_1$ et par conséquent il suffit de montrer que $v_1 \in M$, pour cela posons $w_0 = v_1$ et $w_n = v_{n+1}$ pour $n \geq 1$, on a $w_n = v_{n+1} = Av_{n+2} = Aw_{n+1}$ et $w_0 = v_1$ donc $\forall n \geq 0$ il existe w_n dans $D(A)$ tels que $v_1 = w_0$ et $Aw_{n+1} = w_n$ d'où $v_1 \in M \cap D(A)$ et $u = Av_1 \Rightarrow M \subseteq A(M \cap D(A))$.

Montrons maintenant que $Co(A) \subseteq M$; du fait que $A(Co(A) \cap D(A)) = Co(A)$ on a:

$$u \in Co(A) \Rightarrow \exists v_1 \in Co(A) \bigcap D(A) \text{ tel que } u = Av_1$$

Et $v_1 \in Co(A) \Rightarrow \exists v_2 \in Co(A) \bigcap D(A)$ tel que $v_1 = Av_2$.

Donc on construit une suite $v_n \in D(A)$ telle que $v_0 = u$ et $Av_{n+1} = v_n$. D'où $u \in M$ et donc $Co(A) \subseteq M$ et par conséquent $M = Co(A)$.

Lemme 3.3. A *s-régulier* $\Rightarrow Co(A) = \bigcap_{j \geq 0} R(A^j)$.

Démonstration:

Il suffit de montrer que $\bigcap_{j \geq 0} R(A^j) \subset A(\bigcap_{j \geq 0} R(A^j) \cap D(A))$.

Soit $u \in \bigcap_{j \geq 0} R(A^j) \subset R(A)$, alors il existe $v \in D(A)$ tel que $u = Av$.

Montrons que $\forall j \geq 0, v \in R(A^j)$. En effet $u \in R(A^{j+1}) \Rightarrow \exists v_j \in D(A^{j+1})$ tel que $u = A^{j+1}v_j$. Donc $Av = A^{j+1}v_j$ d'où $v - A^jv_j \in N(A) \subseteq R(A^j)$ ce qui montre que $v \in R(A^j)$ et, par conséquent, $\forall j \geq 0, v \in R(A^j)$ ou encore $v \in \bigcap_{j \geq 0} R(A^j) \cap D(A)$ et le lemme est démontré. ■

Lemme 3.4 Soit A *s-régulier* alors :

$$\forall n \geq 0, \quad c(A^n) \geq c(A)^n.$$

Démonstration:

Par induction sur n ,

Pour $n = 0$ et $n = 1$ c'est évident. Supposons que c'est vrai pour n et soit $u \in D(A^{n+1})$ alors

$$\forall v \in N(A^{n+1}), d(u, N(A^{n+1})) = d(u - v, N(A^{n+1})) \leq d(u - v, N(A)).$$

En outre, A *s-régulier* implique que $A^n(N(A^{n+1})) = N(A)$. D'où

$$\begin{aligned} d(A^n u, N(A)) &= \inf \{ \|A^n(u - v)\| ; v \in N(A^{n+1}) \} \\ &\geq c(A^n) \inf \{ d(u - v, N(A^n)) ; v \in N(A^{n+1}) \} \\ &\geq c(A^n) d(u, N(A^{n+1})). \end{aligned}$$

Donc $\|A^{n+1}u\| \geq c(A) d(A^n u, N(A)) \geq c(A) \cdot c(A^n) d(u, N(A^{n+1}))$.

Par conséquent, en utilisant l'hypothèse d'induction, on trouve $c(A^{n+1}) \geq c(A) \cdot c(A)^n = c(A)^{n+1}$. ■

Remarques:

- (1) Si A est fermé et s -régulier avec domaine dense alors $\forall n > 0$ A^n est un opérateur fermé avec domaine dense. En effet, on utilise la proposition 2.3, le lemme 3.4 et [7, théorème IV.1.7]
- (2) Il existe des opérateurs fermés dont le carré n'est pas fermé (voir annexe).

Corollaire 3.5. *Soit A s -régulier alors $\text{Co}(A)$ est fermé.*

Démonstration:

Conséquence immédiate des lemmes 3.3 et 3.4 ■

§ 4. Espace $H_0(A)$.

Définition 4.1. Soit A un opérateur fermé; on note $H_0(A)$, la partie quasi-nilpotente de A , définie par :

$$H_0(A) = \{x \in D^\infty(A) ; \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n x\|^{1/n} = 0\},$$

où $D^\infty(A) = \cap_{n \geq 0} D(A^n)$.

Lemme 4.2. Soit A un opérateur fermé. Alors :

- 1) $\forall j \geq 0, N(A^j) \subset H_0(A)$;
- 2) $x \in H_0(A) \Leftrightarrow Ax \in H_0(A)$;
- 3) $H_0(A) = X \Leftrightarrow A$ quasi-nilpotent (i.e. $\sigma(A) = \{0\}$)

Démonstration:

1) et 2) faciles à vérifier.

3) $(\Rightarrow)$: $X = H_0(A) \subset D(A)$ et A fermé impliquent que A est borné (théorème du graphe fermé). D'autre part, $\forall x \in X = H_0(A)$, la série $\sum_{j \geq 0} \lambda^{-j-1} A^j x$ converge $\forall \lambda \neq 0$. Or, $(A - \lambda)(-\sum_{j \geq 0} \lambda^{-j-1} A^j x) = x$.

D'où $\forall \lambda \neq 0, R(A - \lambda) = X$. En outre, on vérifie facilement que $\forall \lambda \neq 0, N(A - \lambda) \cap H_0(A) = \{0\}$. Par conséquent, $A - \lambda$ est inversible $\forall \lambda \neq 0$ et donc $\sigma(A) = \{0\}$.

$(\Leftarrow)$: Si A est quasi-nilpotent alors $\|A^n\|^{1/n} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Donc $\forall x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n x\|^{1/n} = 0$. ■

Proposition 4.3. Si A est s-régulier alors

$$\overline{H_0(A)} = \overline{\cup_{j \geq 0} N(A^j)}.$$

Démonstration:

D'après le lemme 4.2(1), il suffit de montrer que $\overline{H_0(A)} \subset \overline{\cup_{j \geq 0} N(A^j)}$. Supposons que $x \notin \overline{\cup_{j \geq 0} N(A^j)}$ alors $d(x, \cup_{j \geq 0} N(A^j)) = \alpha > 0$. Montrons que $x \notin H_0(A)$. Sinon on aurait :

$$\forall n \geq 0, \|A^n x\| \geq c(A^n) d(x, N(A^n)) \geq \alpha \cdot c(A^n) \geq \alpha \cdot c(A)^n$$

(Pour la dernière inégalité voir lemme 3.4)

D'où, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n x\|^{1/n} \geq c(A) > 0$. ■

Proposition 4.4 *Soit A un opérateur fermé, s-régulier. Alors :*

1) $\overline{H_0(A)} \subset Co(A) = \cap_{j \geq 0} R(A^j)$ est fermé.

2) Si $\overline{D(A)} = X$, alors

$$\overline{H_0(A^*)} = Co(A)^\perp \text{ et } \overline{H_0(A)} = {}^\perp Co(A^*)$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad Co(A)^\perp &= \{f \in X^* ; f(x) = 0 \quad \forall x \in Co(A)\} \\ {}^\perp Co(A^*) &= \{x \in X ; f(x) = 0 \quad \forall f \in Co(A^*)\}. \end{aligned}$$

Démonstration:

1) A est s-régulier donc d'après le lemme 3.3 et le corollaire 3.5 on a: $Co(A) = \cap_{j \geq 0} R(A^j)$ est fermé. d'autre part: $\forall n \geq 0$ et $\forall j \geq 0$; $N(A^n) \subseteq R(A^j)$, ce qui implique que $\bigcup_{n \geq 0} N(A^n) \subseteq Co(A)$; et la proposition 4.3 donne $\overline{H_0(A)} \subset Co(A)$.

2) Soit $u \in H_0(A)$ et $f \in Co(A^*)$, puisque A est s-régulier on a d'après la proposition 2.3 que A^* est s-régulier et par conséquent la restriction de A^* à $Co(A^*)$ est surjective, alors il existe $a > 0$ et $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $D(A^*)$ tels que:

$$(1) \quad g_0 = f \text{ et } A^* g_{n+1} = g_n \text{ et}$$

$$(2) \quad \|g_n\| \leq a^n \|f\|.$$

Or (1) $\Rightarrow f = A^{*n} g_n \quad \forall n \geq 0$. D'où,

$$f(u) = A^{*n} g_n(u) = g_n(A^n(u)), \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow |f(u)| \leq \|A^n(u)\| \|g_n\|.$$

De (2) on a: $|f(u)| \leq a^n \|f\| \|A^n u\|$. Or $u \in H_0(A) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n u\|^{1/n} = 0$.

Donc $\forall \varepsilon > 0 ; \exists N \in \mathbb{N} ; \forall n > N \Rightarrow |f(u)| < \varepsilon^n a^n \|f\|$.

D'où, si $\varepsilon < 1/a$, alors $f(u) = 0$ et $u \in {}^\perp Co(A^*)$.

Réciproquement:

A étant s-régulier, la proposition 2.3 implique que:

$$N(A^j)^\perp = R(A^{*j}), \quad \forall j \geq 0, \text{ or } \forall j \geq 0 \quad N(A^j) \subset H_0(A) \implies H_0(A)^\perp \subset N(A^j)^\perp, \\ \text{d'où } H_0(A)^\perp \subset Co(A^*).$$

Et par suite ${}^\perp Co(A^*) \subset \overline{H_0(A)}$.

Le reste de la démonstration se fait comme plus haut en utilisant la symétrie entre A et A^* . ■

DEUXIÈME PARTIE

§ 1. Propriétés des opérateurs s-réguliers

Théorème 1.1. *Soit A un opérateur fermé avec $R(A)$ fermé. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) A s-régulier;
- ii) $\forall u \in N(A)$, il existe f fonction analytique dans un voisinage U de zéro à valeurs dans X telle que $f(0) = u$ et $f(\lambda) \in N(A - \lambda I)$ pour tout $\lambda \in U$.

Démonstration:

i) $\Rightarrow$ ii) : Puisque $\text{Co}(A)$ est fermé (Corollaire I.3.5), considérons $A_0 : \text{Co}(A) \rightarrow \text{Co}(A)$, la restriction de A à $\text{Co}(A)$. Alors A_0 est surjectif. Donc il existe $a > 0$ tel que $\forall u \in \text{Co}(A)$, il existe $\{u_n\}_{n \geq 1} \subseteq D(A)$ tel que $u_0 = u$, $Au_{n+1} = u_n$ et $\|u_n\| \leq a^n \|u\|$.

Soit $U = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| < a^{-1}\}$ et $\forall \lambda \in U$, posons $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n$ alors f est analytique dans U .

Soit maintenant $u \in N(A) \subseteq \text{Co}(A)$ alors on peut définir $\{u_n\}_{n \geq 1}$, U et f comme plus haut. Il est clair que $f(0) = u_0 = u \in N(A)$. En outre, $\forall \lambda \in U$, $(A - \lambda I)f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n Au_n - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} u_n$.

Or, $u_0 = u \in N(A) \Rightarrow Au_0 = 0$.

Donc $(A - \lambda I)f(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} u_n = 0$, ce qui prouve que $f(\lambda) \in N(A - \lambda I)$.

ii) $\Rightarrow$ i) : Il suffit de montrer que $\forall n \geq 0$, $N(A) \subseteq R(A^n)$. Soit $u \in N(A)$ et U , f comme dans ii).

$$\text{Si } \lambda \neq 0 \text{ alors } f(\lambda) \in N(A - \lambda I) \subseteq R(A^n), \forall n \geq 0. \quad (1)$$

Or, f est analytique, donc continue en zéro, d'où $f(\lambda) \rightarrow f(0) = u$ quand $\lambda \rightarrow 0$.

En utilisant (1), on voit que $u \in \overline{R(A^n)}$ et, par conséquent.

$$\forall n \geq 0, N(A) \subseteq \overline{R(A^n)}. \quad (2)$$

Montrons par induction sur n que $R(A^n)$ est fermé. Pour $n = 1$, $R(A)$ est fermé par hypothèse. Supposons que $R(A^n)$ est fermé, alors d'après (2),

$N(A) + R(A^n) = R(A^n)$ est fermé. En utilisant le lemme I.1.4, on en déduit que $R(A^{n+1})$ est fermé, ce qui achève la démonstration du théorème.

Lemme 1.2. *Soit A un opérateur fermé. Alors : A injectif à image fermée (resp. surjectif) si et seulement si $A - \lambda I$ injectif à image fermée (resp. surjectif) pour tout $|\lambda| < c(A)$.*

Démonstration:

“Si” : c’est évident.

“Seulement si” : A fermé implique que $X_0 = D(A)$ muni de la norme du graphe est un espace de Banach. Ainsi $A \in B(X_0, X)$. Supposons que A est injectif à image fermée, alors $\forall u \in X_0$,

$$\|(A - \lambda I)u\| \geq \|Au\| - |\lambda| \|u\| \geq (c(A) - |\lambda|) \|u\|.$$

D’où $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| < c(A)$, $A - \lambda I$ est injectif à image fermée. Le cas A surjectif se démontre par passage à l’adjoint, $A^* : X^* \rightarrow X_0^*$. ■

Lemme 1.3. *Soit A un opérateur fermé, s -régulier alors $\forall \lambda \in \mathbf{C}$,*

$$c(A - \lambda I) \geq c(A) - 3|\lambda|.$$

Démonstration:

Si $Co(A) = \{0\}$ ou $Co(A) = X$, alors le résultat se déduit du lemme précédent. Soit $u \in Co(A) = A(Co(A) \cap D(A))$, alors $\exists v \in Co(A) \cap D(A)$ tel que $u = Av$ avec $d(v, N(A)) \leq \frac{\|Av\|}{c(A)} = \frac{\|u\|}{c(A)}$. Soit $\varepsilon > 0$, alors on peut choisir $w \in N(A)$ tel que $\|v - w\| \leq \frac{\|u\|}{(1-\varepsilon)c(A)}$.

Posons $u_1 = v - w$ et $c_\varepsilon(A) = (1 - \varepsilon)c(A)$ alors $u_1 \in D(A) \cap Co(A)$, $Au_1 = u$ et $\|u_1\| \leq c_\varepsilon(A)^{-1} \|u\|$. Puisque $u_1 \in Co(A)$, on peut répéter le même procédé. D’où $\exists u_n \in Co(A) \cap D(A)$ tel que $u_0 = u$, $Au_{n+1} = u_n$ et $\|u_n\| \leq c_\varepsilon(A)^{-n} \|u\|$.

Comme dans la démonstration du théorème 1.2, on définit $f : \{|\lambda| < c_\varepsilon(A)\} \rightarrow X$, par $f(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n u_n$, alors $f(0) = u$ et $f(\lambda) \in N(A - \lambda I)$ pour $|\lambda| < c_\varepsilon(A)$.

$$\text{Alors } \|u - f(\lambda)\| = \left\| \sum_{n \geq 1} \lambda^n u_n \right\| \leq \frac{|\lambda|}{c_\varepsilon(A) - |\lambda|}.$$

D’où on en déduit que $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| < c_\varepsilon(A)$,

$$\delta(N(A), N(A - \lambda I)) \leq \frac{|\lambda|}{c_\varepsilon(A) - |\lambda|} = \frac{|\lambda|}{(1 - \varepsilon)c(A) - |\lambda|}.$$

Et comme ε est arbitraire, on obtient :

$$\delta = \delta(N(A), N(A - \lambda I)) \leq \frac{|\lambda|}{c(A) - |\lambda|} \text{ dès que } |\lambda| < c(A). \quad (1)$$

Soit maintenant $v \in D(A)$, $\varepsilon > 0$ et soit $v_0 = v - w$ où $w \in N(A)$, comme dans le lemme I.1.6 on a :

$$d(v_0, N(A)) \geq \frac{1 - \delta}{1 + \delta} (1 - \varepsilon) \|v_0\|.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)v\| &= \|(A - \lambda I)v_0\| \geq \|Av_0\| - |\lambda| \|v_0\| \\ &\geq c(A) \cdot d(v_0, N(A - \lambda I)) - |\lambda| \|v_0\| \\ &\geq c(A) \cdot \frac{1 - \delta}{1 + \delta} (1 - \varepsilon) \|v_0\| - |\lambda| \|v_0\|. \end{aligned}$$

D'où en utilisant (1), on obtient :

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)v\| &\geq [(1 - \varepsilon)(c(A) - 2|\lambda|) - |\lambda|] \|v_0\| \\ &\geq [(1 - \varepsilon)(c(A) - 2|\lambda|) - |\lambda|] \|v - w\| \\ &\geq [(1 - \varepsilon)(c(A) - 2|\lambda|) - |\lambda|] d(v, N(A - \lambda I)). \end{aligned}$$

D'où $c(A(\lambda - I)) \geq (1 - \varepsilon)(c(A) - 2|\lambda|) - |\lambda|$

et comme ε est arbitraire, on trouve

$$c(A - \lambda I) \geq c(A) - 3|\lambda|$$

et le lemme est démontré.

Théorème 1.4. *Soit A fermé, s -régulier alors $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| < c(A)$, $A - \lambda I$ est s -régulier.*

Démonstration:

Soit $A_0 : Co(A) \rightarrow Co(A)$, la restriction de A à $Co(A)$. D'après le corollaire I.3.5, $Co(A)$ est fermé. En utilisant le lemme 1.2, A_0 étant surjectif, on en déduit que $|\lambda| < c(A_0) \Rightarrow R(A_0 - \lambda I) = Co(A)$. D'où $(A - \lambda I)(D(A) \cap Co(A)) = Co(A)$ pour tout $|\lambda| < c(A_0)$. D'autre part, $N(A) \subseteq Co(A)$ implique $c(A_0) \geq c(A)$. Par conséquent,

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| < c(A), \quad Co(A) \subseteq Co(A - \lambda I). \quad (1)$$

Par ailleurs, $\forall \lambda \neq 0$, $N(A - \lambda I) \subseteq Co(A)$. Donc, en utilisant (1), on voit que $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| < c(A)$, $N(A - \lambda I) \subseteq Co(A - \lambda I)$ et, par conséquent, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| < c(A)$, $\forall n \geq 0$, $N(A - \lambda I) \subseteq R(A - \lambda I)^n$.

Il reste à montrer que $R(A - \lambda I)$ est fermé pour tout $|\lambda| < c(A)$. D'après le lemme 1.2, on peut supposer $Co(A) \neq \{0\}$ et $Co(A) \neq X$. Notons $\bar{X} = X/Co(A)$ et soit $\bar{A} : \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ défini par $\forall \bar{u} \in D(\bar{A}), \bar{A}\bar{u} = \overline{Au}$. Il est clair que $\bar{A}$ est linéaire et fermé. Montrons que $N(\bar{A}) = \{0\}$, en effet si $\bar{u} \in N(\bar{A})$ alors $\bar{A}\bar{u} = 0 \Rightarrow \overline{Au} = 0$ d'où $Au \in Co(A)$, ce qui implique $u \in Co(A)$ et donc $\bar{u} = 0$. Par ailleurs, remarquons que $c(\bar{A}) \geq c(A)$. En effet, soit $u \in D(A)$ et $u_0 \in Co(A) \cap D(A)$, alors

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\| &= d(u, Co(A)) = d(u - u_0, Co(A)) \leq d(u - u_0, N(A)) \\ &\leq \frac{1}{c(A)} \cdot \|A(u - u_0)\| \end{aligned}$$

d'où
$$\|\bar{u}\| \leq \frac{1}{c(A)} \cdot \|Au - Au_0\| :$$

or, $A(Co(A) \cap D(A)) = Co(A)$ d'où $\|u\| \leq \frac{1}{c(A)} \|Au\|$, ce qui montre que $c(\bar{A}) \geq c(A)$ et, par conséquent, $R(\bar{A})$ est fermé. D'autre part, on a montré plus haut que pour tout $|\lambda| < c(A)$, $(A - \lambda I)(Co(A) \cap D(A)) = Co(A)$ et comme $N(A - \lambda I) \subseteq Co(A)$, on en déduit que l'opérateur $(\bar{A} - \lambda \bar{I}) = A - \lambda I$ est injectif et $\bar{u} \in R(\bar{A} - \lambda \bar{I}) \Leftrightarrow u \in R(A - \lambda I)$.

En outre, $\bar{A}$ est injectif à image fermée donc d'après le lemme 1.2, $R(\bar{A} - \lambda \bar{I})$ est fermé pour tout $|\lambda| < c(\bar{A})$ et donc pour tout $|\lambda| < c(A)$.

Montrons maintenant que $R(A - \lambda I)$ est fermé pour tout $|\lambda| < c(A)$. Soit $\{u_n\} \subseteq R(A - \lambda I)$ tel que $u_n \rightarrow u \in X$. Alors $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ (puisque $\|\bar{u}\| \leq \|u\|$) et $\bar{u}_n \in R(\bar{A} - \lambda \bar{I})$. Or, $R(\bar{A} - \lambda \bar{I})$ est fermé pour tout $|\lambda| < c(A)$ d'où $\bar{u} \in R(\bar{A} - \lambda \bar{I})$ et, par conséquent, $u \in R(A - \lambda I)$ pour tout $|\lambda| < c(A)$. Ce qui montre que $\forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < c(A)$, $R(A - \lambda I)$ est fermé d'où la démonstration du théorème. ■

Proposition 1.5. *Soit A fermé, s -régulier alors*
 $|\lambda| < c(A) \Rightarrow Co(A - \lambda I) = Co(A).$

Démonstration:

On a vu dans la démonstration du théorème 1.4.(1) que $\forall \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| < c(A),$
 $Co(A) \subset Co(A - \lambda I).$

Inversement, soit $|\mu| < \frac{1}{4}c(A)$ alors $A - \mu I$ est s -régulier (voir théorème 1.4.).
D'où, $|\lambda - \mu| < c(A - \mu I)$ implique $Co(A - \mu I) \subseteq Co(A - \lambda I).$ D'autre part,
en utilisant le lemme 1.3, on voit que $c(A - \mu I) \geq c(A) - 3|\mu| > |\mu|$ et, par
conséquent, $Co(A - \mu I) \subseteq Co(A).$ Donc, on a montré que si $|\mu| < \frac{1}{4}c(A),$ alors
 $Co(A - \mu I) = Co(A).$ En utilisant le théorème 1.4 on en déduit le résultat. ■

Corollaire 1.6. *Soit A fermé, s -régulier alors l'application $\lambda \mapsto c(A - \lambda I)$ est
continue dans $\{\lambda \in \mathbf{C} ; |\lambda| < c(A)\}.$*

Démonstration:

$\forall \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| < c(A) \Rightarrow A - \lambda I$ est s -régulier. En utilisant encore le lemme 1.3,
on voit que si $|\lambda| < c(A)$ et $|\mu| < c(A)$ alors

$$|c(A - \lambda I) - c(A - \mu I)| \leq 3|\lambda - \mu|$$

■

§ 2. Opérateurs à image fermée.

Soit A un opérateur fermé et $\gamma > 0$, notons

$$\Gamma_\gamma = \{\lambda \in \mathbf{C} ; c(A - \lambda I) \geq \gamma\}.$$

Alors, d'après la proposition I.1.1,

$$\bigcup_{\gamma > 0} \Gamma_\gamma = \{\lambda \in \mathbf{C} ; R(A - \lambda I) \text{ est fermé}\}.$$

Lemme 2.1.

- (i) $\gamma_1 \geq \gamma_2 \Rightarrow \Gamma_{\gamma_2} \subset \Gamma_{\gamma_1}$.
- (ii) $\forall \gamma > 0$, l'application $\lambda \mapsto N(A - \lambda I)$ est continue de Γ_γ dans $G(X)$.

démonstration:

- (i) évident.
- (ii) On utilise le lemme I.1.2 (ii). ■

Théorème 2.2.

- i) $\forall \gamma > 0$, Γ_γ est fermé.
- ii) Soit $\gamma > 0$, alors : $\lambda_0 \in \Gamma'_\gamma \Rightarrow A - \lambda_0 I$ est s -régulier. où Γ'_γ est l'ensemble dérivé de Γ_γ (c'est-à-dire l'ensemble des points d'accumulation de Γ_γ).

Démonstration:

i) Soit $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subseteq \Gamma_\gamma$ tel que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. Montrons que $\lambda_0 \in \Gamma_\gamma$. Soit λ_n et λ_m dans Γ_γ , alors le lemme I.1.2 ii) implique que :

$$g(N(A - \lambda_n I), N(A - \lambda_m I)) \leq \frac{1}{\gamma} |\lambda_n - \lambda_m| \quad (1)$$

D'où la suite $\{N(A - \lambda_n I)\}_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $G(X)$, donc convergente. Soit $M = \lim_{n \rightarrow \infty} N(A - \lambda_n I)$.

D'après le lemme I.1.2 (i), on a

$$\delta(N(A - \lambda_0 I), N(A - \lambda_n I)) \leq \frac{1}{\gamma} |\lambda_n - \lambda_0| \quad (2)$$

Utilisant, maintenant Lemme I.1.5 pour $N(A - \lambda_n I), M$ et $u \in N(A - \lambda_0 I)$ alors :

$$d(u, M) \leq [1 + \delta(N(A - \lambda_n I), M)]d(u, N(A - \lambda_n I)) + \|u\|\delta(N(A - \lambda_n I), M) .$$

On prenant le sup. sur $u \in N(A - \lambda_0 I)$ avec $\|u\| \leq 1$ dans la dernière inégalité, on trouve

$$\begin{aligned} \delta(N(A - \lambda_0 I), M) &\leq [1 + \delta(N(A - \lambda_n I), M)]\delta(N(A - \lambda_0 I), N(A - \lambda_n I)) \\ &\quad + \delta(N(A - \lambda_n I), M) . \end{aligned}$$

Et, en utilisant (2), on obtient

$$\delta(N(A - \lambda_0 I), M) \leq [1 + g(N(A - \lambda_n I), M)]\frac{1}{\gamma}|\lambda_n - \lambda_0| + g(N(A - \lambda_n I), M) .$$

Finalement, en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$ dans cette dernière inégalité, on trouve $\delta(N(A - \lambda_0 I), M) = 0$ c'est-à-dire que $N(A - \lambda_0 I) \subseteq M$.

D'autre part, soit $u \in M$ alors

$$d(u, N(A - \lambda_n I)) \leq g(M, N(A - \lambda_n I)) \rightarrow 0$$

d'où $\exists w_n \in N(A - \lambda_n I)$ tel que $w_n \rightarrow u$.

Posons $u_n = u - w_n$ alors $u_n \rightarrow 0$ et $u - u_n \in N(A - \lambda_n I)$.

En outre,

$$\begin{aligned} (A - \lambda_0 I)u_n &= (A - \lambda_0 I)u - (A - \lambda_0 I)(u - u_n) \\ &= (A - \lambda_0 I)u - (A - \lambda_n I + \lambda_n I - \lambda_0 I)(u - u_n) \\ &= (A - \lambda_0 I)u - (\lambda_n - \lambda_0)(u - u_n) \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n - \lambda_0)(u - u_n) = 0$ donc $(A - \lambda_0 I)u_n \rightarrow (A - \lambda_0 I)u$ et $u_n \rightarrow 0$.

Et comme l'opérateur $A - \lambda_0 I$ est fermé, on en déduit que $(A - \lambda_0 I)u = 0$ et, par conséquent, $M \subseteq N(A - \lambda_0 I)$. Donc $N(A - \lambda_0 I) = M = \lim_{n \rightarrow \infty} (N(A - \lambda_n I))$.

Par ailleurs, en passant à la limite dans (1) quand $m \rightarrow \infty$, on obtient :

$$g(N(A - \lambda_0 I), N(A - \lambda_n I)) \leq \frac{1}{\gamma}|\lambda_n - \lambda_0| . \quad (3)$$

Par conséquent, $\exists N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \geq N, \quad g_n = g(N(A - \lambda_0 I), N(A - \lambda_n I)) < \frac{1}{2} .$$

En utilisant la proposition I.1.3, on obtient :

$$|c(A - \lambda_0 I) - c(A - \lambda_n I)| \leq 3|\lambda_n - \lambda_0|[1 - 2g_n]^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad c(A - \lambda_0 I) &\geq c(A - \lambda_n I) - 3|\lambda_n - \lambda_0|[1 - 2g_n]^{-1} \\ &\geq \gamma - 3|\lambda_n - \lambda_0|[1 - 2g_n]^{-1}. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on obtient $c(A - \lambda_0 I) \geq \gamma$ c'est-à-dire que $\lambda_0 \in \Gamma_\gamma$ ce qui montre que Γ_γ est fermé.

ii) Soit $\lambda_0 \in \Gamma'_\gamma$ et $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset \Gamma_\gamma$ tels que $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$. Alors, d'après i), $\lambda_0 \in \Gamma_\gamma$ d'où $R(A - \lambda_0 I)$ est fermé. Par ailleurs, remarquons que $\forall \lambda \neq \lambda_0$, $N(A - \lambda I) \subseteq R(A - \lambda_0 I)^m$ pour tout $m \in \mathbf{N}$.

En particulier, on a $N(A - \lambda_n I) \subseteq R(A - \lambda_0 I)^m \quad \forall m \in \mathbf{N}$. Soit $u \in N(A - \lambda_0 I)$ avec $\|u\| \leq 1$ et soit $m \in \mathbf{N}$ fixé. Alors

$$\begin{aligned} d(u, R(A - \lambda_0 I)^m) &\leq d(u, N(A - \lambda_n I)) \\ &\leq g(N(A - \lambda_0 I), N(A - \lambda_n I)). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (3), on obtient :

$$d(u, R(A - \lambda_0 I)^m) \leq \frac{1}{\gamma} |\lambda_n - \lambda_0|.$$

D'où, en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on en déduit que $u \in \overline{R(A - \lambda_0 I)^m}$ et, par conséquent :

$$N(A - \lambda_0 I) \subseteq \overline{R(A - \lambda_0 I)^m} \quad (4)$$

Montrons maintenant que $R(A - \lambda_0 I)^m$ est fermé pour tout $m \in \mathbf{N}$. Par induction sur m , pour $m = 0$, c'est évident et le cas $m = 1$ se déduit de i). Supposons que $R(A - \lambda_0 I)^m$ est fermé. Alors (4) implique que $N(A - \lambda_0 I) + R(A - \lambda_0 I)^m = R(A - \lambda_0 I)^m$ est fermé. En utilisant le lemme I.1.4, on voit que $R(A - \lambda_0 I)^{m+1}$ est fermé. Par conséquent, $\forall m \geq 0$, $R(A - \lambda_0 I)^m$ est fermé, ce qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire 2.3. *L'application $\lambda \mapsto c(A - \lambda I)$ est semi-continue supérieurement de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{R}^+$.*

Démonstration:

Supposons le corollaire faux. Alors $\exists \lambda_0 \in \mathbf{C}$ et $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists \lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ et $c(A - \lambda I) \geq c(A - \lambda_0 I) + \varepsilon$.

Donc $\exists \varepsilon > 0$ tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\exists \lambda_n \in \mathbf{C}$ avec $|\lambda_n - \lambda_0| < \frac{1}{n}$ et $c(A - \lambda_n I) \geq c(A - \lambda_0 I) + \varepsilon > 0$. Mais alors d'après le théorème précédent $c(A - \lambda_0 I) \geq c(A - \lambda_0 I) + \varepsilon$, contradiction.

§ 3. Domaine s-régulier d'un opérateur.

Soit A un opérateur fermé dans un espace de Banach X .

Notons $\text{s-reg}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} ; A - \lambda I \text{ s-régulier}\}$.

Il est clair que $\rho(A) \subset \text{s-reg}(A)$, où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A . Soit $\sigma_S(A)$, le spectre singulier de A , par définition c'est le complément dans $\mathbb{C}$ de $\text{s-reg}(A)$.

Remarque :

- 1) $\sigma_S(A) \subseteq \sigma(A)$;
- 2) $\sigma_S(A)$ est fermé (puisque $\text{s-reg}(A)$ est ouvert voir Théorème 1.4).
- 3) Si $D(A)$ est dense alors $\sigma_S(A^*) = \overline{\sigma_S(A)}$ complexe conjugué (voir Proposition I.2.3).
- 4) Si X est un espace de Hilbert alors $\sigma_S(A) = \sigma_g(A)$ où $\sigma_g(A)$ est le spectre généralisé de A , étudié par M.Mbekhta (voir [15] et [16]).

Théorème 3.1. *Soit A un opérateur fermé et $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tels que $R(A - \lambda_0 I)$ soit fermé. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) $\lambda_0 \in \text{s-reg}(A)$;
- 2) L'application $\lambda \mapsto \text{Co}(A - \lambda I)$ est constante au voisinage de λ_0 ;
- 3) Il existe $\lambda \neq \lambda_0$ tel que $\text{Co}(A - \lambda I) = \text{Co}(A - \lambda_0 I)$;
- 4) $\forall u \in N(A - \lambda_0 I)$, il existe f fonction analytique dans un voisinage U de λ_0 à valeurs dans X tel que $f(\lambda_0) = u$ et $\forall \lambda \in U ; f(\lambda) \in N(A - \lambda I)$;
- 5) L'application $\lambda \mapsto c(A - \lambda I)$ est continue en λ_0 ;
- 6) $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} c(A - \lambda I) > 0$;
- 7) $\lambda_0 \in \cup_{\gamma > 0} \Gamma'_\gamma$ où Γ'_γ est l'ensemble dérivé de Γ_γ ;
- 8) L'application $\lambda \mapsto N(A - \lambda I)$ est continue en λ_0 .

Si, en plus, $D(A)$ est dense dans X , alors les conditions suivantes sont équivalentes aux conditions précédentes

- 9) L'application $\lambda \mapsto c(A - \lambda I)^*$ est continue en λ_0 .
- 10) L'application $\lambda \mapsto N(A - \lambda I)^*$ est continue en λ_0 .

11) L'application $\lambda \mapsto R(A - \lambda I)$ est continue en λ_0 , $R(A - \lambda I)$ étant fermé dans un voisinage de λ_0 .

Démonstration:

Sans perte de généralité, on peut supposer $\lambda_0 = 0$.

1) $\Rightarrow$ 2) : voir Proposition 1.5.

2) $\Rightarrow$ 3) : C'est évident.

3) $\Rightarrow$ 1) : Il est facile de voir que si $\lambda \neq 0$ alors $(A - \lambda I)(N(A)) = N(A)$. D'où $N(A) \subseteq \text{Co}(A - \lambda I)$. Or, par hypothèse $\text{Co}(A - \lambda I) = \text{Co}(A)$. Donc $N(A) \subseteq \text{Co}(A) \subseteq R(A^n) \quad \forall n \geq 0$. Par conséquent 1) est démontré. 1) $\Leftrightarrow$ 4) : voir Théorème 1.1.

1) $\Rightarrow$ 5) : voir Corollaire 1.6.

5) $\Rightarrow$ 6) : $\lim_{\lambda \rightarrow 0} c(A - \lambda I) = c(A) > 0$ puisque $R(A)$ est fermé.

6) $\Rightarrow$ 7) : Supposons que $\lim_{\lambda \rightarrow 0} c(A - \lambda I) = \ell > 0$ alors pour $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$ il existe $\delta > 0$ tel que $|\lambda| < \delta \Rightarrow c(A - \lambda I) \geq \frac{\ell}{2}$. D'où, on déduit que $0 \in \Gamma'_{\frac{\ell}{2}}$.

7) $\Rightarrow$ 1) : voir Théorème 2.2 (ii).

5) $\Rightarrow$ 8) : $c(A) > 0$ et la continuité de l'application $\lambda \mapsto c(A - \lambda I)$ en zéro impliquent l'existence d'un voisinage U de zéro tels que $\forall \lambda \in U, c(A - \lambda I) \geq \frac{c(A)}{2}$. En utilisant le lemme I.1.2 (ii), on obtient :

$$\forall \lambda, \mu \in U, \quad g(N(A - \lambda I), N(A - \mu I)) \leq \frac{2}{c(A)} |\lambda - \mu|.$$

Ce qui prouve 8).

8) $\Rightarrow$ 1) : Il est facile de voir que si $\lambda \neq 0$ alors $N(A - \lambda I) \subseteq R(A^n) \quad \forall n \geq 0$. Soit $u \in N(A)$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\forall \lambda \neq 0$,

$$d(u, R(A^n)) \leq d(u, N(A - \lambda I)) \leq \delta(N(A), N(A - \lambda I)) \|u\|,$$

d'où $d(u, R(A^n)) \leq g(N(A), N(A - \lambda I)) \|u\|$.

En utilisant la continuité de l'application $\lambda \mapsto N(A - \lambda I)$ en zéro, on en déduit que $u \in \overline{R(A^n)} \quad \forall n \geq 0$. Montrons maintenant que $\forall n \geq 0, R(A^n)$ est fermé. Par induction sur n , pour $n = 0$, c'est évident. Pour $n = 1$, $R(A)$ est fermé par hypothèse.

Supposons que $R(A^n)$ est fermé. On vient de voir que $N(A) \subseteq \overline{R(A^n)} = R(A^n)$ d'où $N(A) + R(A^n) = R(A^n)$ est fermé. En utilisant le lemme I.1.4, on en déduit que $R(A^{n+1})$ est fermé. Ce qui termine la démonstration de la première partie du théorème.

Supposons maintenant que $D(A)$ est dense dans X . Remarquons que si $R(A - \lambda I)$ est fermé alors (cf. [12, Théorème 2.9., ch. IV]) :

$$g(R(A), R(A - \lambda I)) = g(R(A)^\perp, R(A - \lambda I)^\perp) = g(N(A^*), N(A - \lambda I)^*) .$$

D'autre part, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $c(A - \lambda I) = c(A - \lambda I)^*$ (cf. Proposition I.1.1). A partir de ces remarques, il est facile de conclure, par exemple, que :

$$5) \Leftrightarrow 9) \Leftrightarrow 10) \Leftrightarrow 11) . \quad \blacksquare$$

Remarque : Le théorème 4.1 généralise les résultats du [16, Théorème 2.1] aux cas des espaces de Banach

Lemme 3.2. *Soit A un opérateur fermé avec $\overline{D(A)} = X$. Alors les applications $\lambda \mapsto Co(A - \lambda I)$ et $\lambda \mapsto \overline{H_0(A - \lambda I)}$ sont constantes dans chaque composante connexe de $s\text{-reg}(A)$.*

Démonstration:

(i) Soit $\lambda_0 \in s\text{-reg}(A)$ alors d'après la proposition 1.5 on a:

$$\forall \lambda \in \mathbf{C} \text{ tel que } |\lambda - \lambda_0| < c(A) \text{ on a: } Co(A - \lambda I) = Co(A - \lambda_0 I)$$

. Or $s\text{-reg}(A)$ est un ouvert de $\mathbf{C}$ donc ce résultat s'étend de proche en proche à toute la composante connexe Ω_0 contenant λ_0

(ii) $\lambda_0 \in s\text{-reg}(A)$ donc d'après la proposition I.2.3 on a: $(A - \lambda_0 I)^*$ est s -régulier. Et d'après (i) on a alors:

$$\begin{aligned} Co(A - \lambda I)^* &= Co(A - \lambda_0 I)^* \quad \forall \lambda \in \Omega_0 \\ \implies {}^\perp Co(A - \lambda I)^* &= {}^\perp Co(A - \lambda_0 I)^* \quad \forall \lambda \in \Omega_0 \end{aligned}$$

et d'après la proposition I.4.4.(2) on déduit que:

$$\overline{H_0(A - \lambda I)} = \overline{H_0(A - \lambda_0 I)} \quad \forall \lambda \in \Omega_0. \quad \blacksquare$$

Proposition 3.3. *Soit A un opérateur fermé avec $\overline{D(A)} = X$. Soient $\lambda_0 \in s\text{-reg}(A)$ et $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ une suite de points tous distincts de la composante connexe de $s\text{-reg}(A)$ contenant λ_0 et convergente vers λ_0 . Alors*

$$a) \text{Co}(A - \lambda_0 I) = \cap_{i \geq 1} R(A - \lambda_i I);$$

b) $\overline{H_0(A - \lambda_0 I)} = \text{clm}\{N(A - \lambda_i I)\}_{i \geq 1}$ où “ $\text{clm}\{E\}$ ” désigne l'adhérence du sous-espace engendré par E .

Démonstration:

a) Remarquons que la proposition précédente implique que $\text{Co}(A - \lambda_0 I) \subseteq \cap_{i \geq 1} R(A - \lambda_i I)$.

Inversement, notons d'abord qu'on peut supposer qu'aucun des λ_i n'est égal à λ_0 , sinon on extrait de $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$ une sous-suite $\{\lambda_{i'}\}_{i' \geq 1}$ où $\lambda_{i'} \neq \lambda_0 \ \forall i' \geq 1$. Montrons qu'alors

$$\cap_{i \geq 1} R(A - \lambda_i I) = \cap_{i' \geq 1} R(A - \lambda_{i'} I). \quad (1)$$

En effet, il est clair que

$$\cap_{i \geq 1} R(A - \lambda_i I) \subseteq \cap_{i' \geq 1} R(A - \lambda_{i'} I).$$

Réciproquement, soit $x \in \cap_{i' \geq 1} R(A - \lambda_{i'} I)$ alors

$$d(x, R(A - \lambda_0 I)) \leq g(R(A - \lambda_{i'} I), R(A - \lambda_0 I)) \cdot \|x\|, \quad \forall i' \geq 1.$$

En utilisant le Théorème 3.1.(11) et puisque $\lambda_{i'} \rightarrow \lambda_0$, on voit que $x \in \overline{R(A - \lambda_0 I)} = R(A - \lambda_0 I)$, d'où l'égalité (1).

Soit maintenant $x \in \cap_{i \geq 1} R(A - \lambda_i I)$ avec $\lambda_i \neq \lambda_0$ pour tout $i \geq 1$. On vient de voir que $x \in R(A - \lambda_0 I)$. D'où $\exists v \in D(A)$ tel que $x = (A - \lambda_0 I)v$. Par ailleurs, $\forall i \geq 1$, $x = (A - \lambda_i I)v + (\lambda_i - \lambda_0)v$ et comme $\forall i \geq 1$, $x \in R(A - \lambda_i I)$, on en déduit que $\forall i \geq 1$, $(\lambda_i - \lambda_0)v \in R(A - \lambda_i I)$ et donc $(\lambda_i - \lambda_0)v \in \cap_{i \geq 1} R(A - \lambda_i I)$. Or, $\lambda_i \neq \lambda_0$ d'où $v \in [\cap_{i \geq 1} R(A - \lambda_i I)] \cap D(A)$ et, par conséquent, $(A - \lambda_0 I)[\cap_{i \geq 1} R(A - \lambda_i I) \cap D(A)] = \cap_{i \geq 1} R(A - \lambda_i I)$ ce qui entraîne l'inclusion $\cap_{i \geq 1} R(A - \lambda_i I) \subseteq \text{Co}(A - \lambda_0 I)$ et a) est démontré.

b) D'après le corollaire précédent (ii) on a :

$$\overline{H_0(A - \lambda_i I)} = \overline{H_0(A - \lambda_0 I)}; \quad \forall i \geq 1.$$

Par conséquent $N(A - \lambda_i I) \subseteq \overline{H_0(A - \lambda_0 I)} \forall i \geq 1$. D'où $clm\{N(A - \lambda_i I)\}_{i \geq 1} \subseteq \overline{H_0(A - \lambda_0 I)}$.

Inversement: Soit $f \in clm\{N(A - \lambda_i I)\}_{i \geq 1}^\perp$, en particulier $f \in N(A - \lambda_i I)^\perp$ pour tout $i \geq 1$ et de la Proposition I.2.3 on a: $f \in R(A - \lambda_i I)^* \forall i \geq 1$ d'où $f \in \bigcap_{i \geq 1} R(A - \lambda_i I)^*$ et d'après (a) on a alors:

$$clm\{N(A - \lambda_i I)\}_{i \geq 1}^\perp \subseteq Co(A - \lambda_0 I)^*$$

Or $\overline{H_0(A - \lambda_0 I)} = {}^\perp Co(A - \lambda_0 I)^* \subseteq clm\{N(A - \lambda_i I)\}_{i \geq 1}$ et (b) est démontré. ■

Lemme 3.4 *Soit A un opérateur fermé, alors $\forall \mu \in \mathbf{C}$ $\lim_{\lambda \rightarrow \mu} c(A - \lambda I)$ existe*

Démonstration:

Si $\mu \in \bigcup_{\gamma > 0} \Gamma'_\gamma$ alors d'après le théorème 3.1. on a: $\lim_{\lambda \rightarrow \mu} c(A - \lambda I)$ existe.

Soit $\mu \notin \bigcup_{\gamma > 0} \Gamma'_\gamma$ et montrons que $\lim_{\lambda \rightarrow \mu} c(A - \lambda I) = 0$ sinon

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists \lambda \in \mathbf{C} \text{ tel que } 0 < |\lambda - \mu| < \varepsilon \text{ et } c(A - \lambda I) > \varepsilon.$$

Donc $\exists \lambda_i \in \Gamma_\varepsilon$ qui converge vers μ et par conséquent $\mu \in \Gamma'_\varepsilon$ d'où la contradiction. ■

Corollaire 3.5. *Soit A un opérateur fermé avec $\rho(A) \neq \emptyset$ alors :*

- i) $\partial\sigma(A) \subseteq \sigma_s(A)$, où $\partial\sigma(A)$ denote la frontière de $\sigma(A)$;
- ii) Soit G une composante connexe de $s\text{-reg}(A)$ alors :

$$G \cap \rho(A) \neq \emptyset \Rightarrow G \subseteq \rho(A) ;$$

iii) $\sigma_s(A) = \{\mu \in \mathbf{C} ; \lim_{\lambda \rightarrow \mu} c(A - \lambda I) = 0\}$;

iv) $\sigma_s(A)$ est au plus dénombrable si et seulement si $\sigma(A)$ l'est.

Et, dans ce cas, on a : $\sigma_S(A) = \sigma(A)$.

v) Si A est borné alors $\sigma_s(A) \neq \emptyset$:

vi) $\forall \gamma > 0$, $\sigma_s(A) \cap \Gamma_\gamma$ ne possède aucun point d'accumulation. En particulier si c'est un ensemble borné, il est fini.

Démonstration:

(i) Montrons que $\partial\sigma(A) \cap s\text{-reg}(A) = \emptyset$. Soit $\mu \in \partial\sigma(A) \cap s\text{-reg}(A)$, alors $\exists\{\lambda_i\}_{i \geq 1} \subseteq \rho(A)$ tel que λ_i converge vers μ d'après les théorèmes 3.1.(8) et 3.1.(11) on a:

$$N(A - \mu I) = \lim_{\lambda_i \rightarrow \mu} N(A - \lambda_i I) = \{0\}.$$

Et

$$R(A - \mu I) = \lim_{\lambda_i \rightarrow \mu} R(A - \lambda_i I) = X.$$

Donc $\mu \in \rho(A)$, d'où la contradiction car $\partial\sigma(A) \subseteq \sigma(A)$.

(ii) Soit $\lambda_0 \in G \cap \rho(A)$, donc en particulier $\lambda_0 \in \rho(A)$ et alors $(A - \lambda I)$ est surjectif et par suite $Co(A - \lambda_0 I) = X$. Or d'après le lemme 3.2. $Co(A - \lambda I)$ est constant dans G d'où $Co(A - \lambda I) = X$ pour tout λ dans G , et alors $(A - \lambda I)$ est surjectif $\forall \lambda \in G$.

Puisque $A - \lambda_0 I$ est inversible alors $\overline{H_O(A - \lambda_0 I)} = H_0(A - \lambda_0 I) = \{0\}$. Or d'après le lemme 3.2. $\overline{H_0(A - \lambda I)}$ est constant dans G , d'où $H_0(A - \lambda I) = \overline{H_0(A - \lambda_0 I)} = \{0\}$ pour tout λ dans G , et alors $(A - \lambda I)$ est injectif $\forall \lambda \in G$.

(iii) $\mu \in \sigma_s(A) \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \mu} c(A - \lambda I) = 0$, d'après le théorème 3.1.(6) et le lemme 3.4 .

(iv) Si $\sigma_s(A)$ est au plus dénombrable alors $s\text{-reg}(A)$ est connexe et puisque $\rho(A) \neq \emptyset$, (ii) implique que $s\text{-reg}(A) = \rho(A)$. D'où on en déduit que $\sigma(A) = \sigma_s(A)$.

La réciproque est évidente.

(v) C'est une conséquence de (i)

(vi) Soit λ_0 un point d'accumulation de $\sigma_s(A) \cap \Gamma_\gamma$ alors il existe une suite λ_n dans $\sigma_s(A) \cap \Gamma_\gamma$ tel que λ_n converge vers λ_0 alors $\lambda_0 \in \Gamma'_\gamma$ et d'après le théorème 2.2.(ii) on a $\lambda_0 \in s\text{-reg}(A)$, ce qui contredit le fait que $\sigma_s(A)$ est fermé. ■

Notons $\rho_f(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} : R(A - \lambda I) \text{ est fermé}\}$ et $\sigma_f(A) = \mathbf{C} \setminus \rho_f(A)$.

Il est clair que $\sigma_f(A) \subseteq \sigma_s(A)$.

Corollaire 3.6. *Soit A un opérateur fermé avec $\rho(A) \neq \emptyset$, alors :*

- i) $\sigma_s(A) \cap \rho_f(A)$ est au plus dénombrable.
- ii) $\sigma_f(A)$ au plus dénombrable si et seulement si $\sigma_s(A)$ l'est.

Et, dans ce cas, on a : $\sigma_s(A) = \sigma(A)$ est au plus dénombrable.

Démonstration:

(i) On remarque que $\rho_f(A) = \bigcup_{n \geq 1} \Gamma_{1/n}$ et alors on a: $\sigma_s(A) \cap \rho_f(A) = \bigcup_{n \geq 1} \sigma_s(A) \cap \Gamma_{1/n}$ et d'après le corollaire 3.5.(vi) on a $\sigma_s(A) \cap \Gamma_{1/n}$ est au plus dénombrable. Donc $\sigma_s(A) \cap \rho_f(A)$ est une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.

(ii) $\sigma_f(A) \subseteq \sigma_s(A) \implies \sigma_s(A) = \sigma_f(A) \cup \sigma_s(A) \cap \rho_f(A)$, or $\sigma_s(A) \cap \rho_f(A)$ est au plus dénombrable (i) et le corollaire 3.5.(iv) permet de conclure que $\sigma_s(A) = \sigma(A)$, d'où $\sigma(A)$ est au plus dénombrable.

La réciproque est évidente. ■

Remarque 3.7. Ce dernier corollaire généralise les résultats d'Apostol [1, Théorème 1 et Corollaire].

Tout d'abord rappelons ces deux résultats :

Théorème 1 *Soit A un opérateur borné dans un espace de Hilbert X alors*

$$\partial\sigma(A) \cap \sigma_{c,r.}(A)$$

est au plus dénombrable.

Où $\sigma_{c,r.}(A) = \{\lambda \in \sigma(A) ; R(A - \lambda I) \text{ est fermé}\}.$

Corollaire *Soit A un opérateur borné dans un espace de Hilbert X tel que $\sigma_{c,r.}(A) = \sigma(A)$ est au plus dénombrable.*

En effet : $\sigma_{c,r.}(A) \subset \rho_f(A).$

D'autre part, $\partial\sigma(A) \subseteq \sigma_s(A)$ (corollaire 3.5.(i)). D'où $\sigma_{c,r.}(A) \cap \partial\sigma(A) \subseteq \sigma_s(A) \cap \rho_f(A)$ au plus dénombrable (cf. (i) du corollaire 3.6). Ainsi on retrouve le théorème 1 [1].

Par ailleurs, $\sigma_{c,r.}(A) = \sigma(A) \implies \sigma_f(A) = \emptyset$. En utilisant le corollaire 3.6.(ii), on retrouve le corollaire d'Apostol [1].

§ 4. Théorème de l'application spectrale pour le spectre singulier:

Soit A un opérateur fermé dans un espace de Banach X , on suppose que $\rho(A) \neq \emptyset$ de sorte que, si P est un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, alors $P(A)$ est un opérateur fermé voir [6,p.602]

Lemme 4.1 Soit $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes tous distincts et $n \in \mathbb{N}^*$ alors:

$$R\left(\prod_{k=1}^n (A - \lambda_k I)^m\right) = \cap_{k=1}^n R(A - \lambda_k I)^m.$$

Démonstration:

" $\subseteq$ " est évidente.

Montrons l'inclusion inverse par induction sur n . Pour $n = 1$ c'est évident, supposons que l'inclusion soit vraie à l'ordre n et soit $u \in \cap_{k=1}^{n+1} R(A - \lambda_k I)^m$, en particulier $u \in R(A - \lambda_{n+1} I)^m$ donc $\exists v \in D(A^m)$ tel que $u = (A - \lambda_{n+1} I)^m v$. Soit $k \in \mathbb{N}$ $1 \leq k \leq n$ alors:

$$\begin{aligned} u &= (A - \lambda_k I + (\lambda_k - \lambda_{n+1}) I)^m v \\ &= \sum_{j=0}^m C_m^j (A - \lambda_k I)^j (\lambda_k - \lambda_{n+1})^{m-j} v \\ &= (\lambda_k - \lambda_{n+1})^m v + \sum_{j=1}^m C_m^j (A - \lambda_k I)^j (\lambda_k - \lambda_{n+1})^{m-j} v \end{aligned}$$

et comme $u \in R(A - \lambda_k I)^m$, on voit facilement que $v \in R(A - \lambda_k I)^m$ et ceci pour $1 \leq k \leq n$ donc $v \in \cap_{k=1}^n R(A - \lambda_k I)^m = R(\prod_{k=1}^n (A - \lambda_k I)^m)$ et par hypothèse d'induction et comme $u = (A - \lambda_{n+1} I)^m v$ on en déduit que $u \in R(\prod_{k=1}^{n+1} (A - \lambda_k I)^m)$ ce qui prouve le lemme. •

Lemme 4.2 Soit $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes tous distincts et $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\sum_{k=1}^n N(A - \lambda_k I) = N\left(\prod_{k=1}^n (A - \lambda_k I)\right)$$

Démonstration:

" $\subseteq$ " est évident.

Montrons l'inclusion par induction sur n . Pour $n = 1$ c'est évident, supposons que c'est vrai à l'ordre n et soit $u \in N(\prod_{k=1}^{n+1} (A - \lambda_k I))$, ce qui implique que

$(A - \lambda_{n+1}I)u \in N(\prod_{k=1}^n (A - \lambda_k I))$. Par hypothèse d'induction $\exists v_k \in N(A - \lambda_k I)$ pour $1 \leq k \leq n$ tel que

$$(A - \lambda_{n+1}I)u = \sum_{k=1}^n v_k$$

Posons $w_k = \frac{v_k}{\lambda_k - \lambda_{n+1}}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $w_{n+1} = u - \sum_{k=1}^n v_k$. On a $w_k \in N(A - \lambda_k I)$ pour $k = 1, \dots, n$. Montrons que $w_{n+1} \in N(A - \lambda_{n+1}I)$, remarquons que pour $1 \leq k \leq n$

$$(A - \lambda_{n+1}I)w_k = [(A - \lambda_k I) + (\lambda_k - \lambda_{n+1})I] \frac{v_k}{\lambda_k - \lambda_{n+1}} = v_k$$

d'où

$$(A - \lambda_{n+1}I)w_{n+1} = (A - \lambda_{n+1}I)u - \sum_{k=1}^n (A - \lambda_{n+1}I)w_k = \sum_{k=1}^n v_k - \sum_{k=1}^n v_k = 0$$

Donc $w_{n+1} \in N(A - \lambda_{n+1}I)$ et $u = \sum_{k=1}^n w_k$ où $w_k \in N(A - \lambda_k I)$ avec $1 \leq k \leq n+1$ ce qui achève la démonstration du lemme •

Lemme 4.3 Soient A et S dans $B(X)$ avec $AS = SA$ alors

$$AS \text{ s-régulier} \implies A, S \text{ sont s-réguliers}$$

Démonstration:

Montrons que si AS est s-régulier alors A est s-régulier. Soit $u_n \in R(A)$ tel que $u_n \rightarrow u \in X$, alors il existe $v_n \in X$ tel que $u_n = Av_n \rightarrow u$. Alors $Su_n = SAV_n \rightarrow Su \in R(SA)$ et donc $\exists w \in X$ tel que $Su = SAw$ ce qui implique que

$$u - Aw \in N(S) \subseteq N(AS) \subseteq R(AS) \subseteq R(A)$$

D'où $u - Aw \in R(A)$ et par conséquent $u \in R(A)$ et donc $R(A)$ est fermé.

D'autre par $\forall n \geq 0$,

$$N(A^n) \subseteq N(S^n A^n) = N((AS)^n) \subseteq R(AS) \subseteq R(A)$$

d'où A est s-régulier.. et avec le même raisonnement on montre que S est s-régulier •

Proposition 4.4 *Soit A un opérateur fermé avec $\rho(A) \neq \emptyset$ et $P(\lambda) = \alpha \prod_{k=1}^n (\lambda - \lambda_k)$ avec $\alpha \neq 0$. Alors*

$$P(A) \text{ est s-régulier} \iff \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \text{s-reg}(A)$$

Démonstration:

On supposera que $\alpha = 1$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \text{s-reg}(A)$. En particulier $R(A - \lambda_k I)$ est fermé pour tout $1 \leq k \leq n$ et le lemme 4.1 implique que $R(P(A))$ est fermé comme intersection de fermés. Montrons que $\forall n \geq 0 \ N(P(A)) \subseteq R(P(A)^m)$. Le lemme 4.2 implique que

$$N(P(A)) = \sum_{k=1}^n N(A - \lambda_k I)$$

et comme $\lambda_k \in \text{s-reg}(A)$, on en déduit que $\forall m \geq 0$:

$$N(A - \lambda_k I) \subseteq R(A - \lambda_k I)^m.$$

En outre si $\mu \neq \lambda_k$ alors $(A - \mu I)(N(A - \lambda_k I)) = N(A - \lambda_k I)$, donc pour $1 \leq k \leq n$ on a:

$$\sum_{k=1}^n N(A - \lambda_k I) \subseteq \cap_{k=1}^n R(A - \lambda_k I)^m.$$

D'où $\forall n \geq 0 \ N(P(A)) \subseteq R(P(A)^m)$.

$\Rightarrow$ Supposons que $P(A)$ est s-régulier alors des lemmes 4.1 et 4.2 on déduit que $\forall m \geq 0$

$$\sum_{k=1}^n N(A - \lambda_k I) \subseteq \cap_{k=1}^n R(A - \lambda_k I)^m$$

Donc pour $1 \leq k \leq n$, $\forall m \geq 0$, $N(A - \lambda_k I) \subseteq R(A - \lambda_k I)^m$

Il reste à montrer que $R(A - \lambda_k I)$ est fermé pour tout $1 \leq k \leq n$.

Soit $k \in [1, n]$ fixé, alors $P(A) = (A - \lambda_k I) \prod_{k \neq j=1}^n (A - \lambda_j I)$. Le polynôme $\prod_{k \neq j=1}^n (\lambda - \lambda_j)$ est de degré $n - 1$. Soit $\beta \in \rho(A) \neq \emptyset$ et $S = (A - \beta I)^{-1}$. Posons

$$B_{n-1} = \prod_{k \neq j=1}^n (A - \lambda_j I) = \prod_{k \neq j=1}^n (A - \beta I + (\beta - \lambda_j) I) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j (A - \beta I)^j$$

où $c_j \in \mathbf{C}$.

Donc $B_{n-1} = c_0 I + \dots + c_{n-1}(A - \beta I)^{n-1}$. Remarquons que

$$B_{n-1} S^{n-1} = \{c_0 S_{n-1} + \dots + c_{n-1} I\} \in B(X)$$

montrons maintenant que $R(A - \lambda_k I)$ est fermé.

Soit $u_j \in R(A - \lambda_k I)$ tel que $u_j \rightarrow u \in X$. $u_j \in R(A - \lambda_k I)$ implique qu'il existe $v_j \in D(A)$ tel que $u_j = (A - \lambda_k I)v_j$. Or,

$$B_{n-1} S^{n-1} \in B(X) \implies B_{n-1} S^{n-1} u_j \rightarrow B_{n-1} S^{n-1} u$$

Puisque

$$B_{n-1} S^{n-1} u_j = B_{n-1} S^{n-1} (A - \lambda_k I) v_j$$

$$= B_{n-1} (A - \lambda_k I) S^{n-1} v_j = P(A) S^{n-1} v_j \in R(P(A))$$

qui est fermé par hypothèse. Alors $B_{n-1} S^{n-1} u \in R(P(A))$, par conséquent $\exists w \in D(A^n)$ tel que

$$B_{n-1} S^{n-1} u = P(A) w = B_{n-1} (A - \lambda_k I) w.$$

Ce qui implique que $S^{n-1} u - (A - \lambda_k I) w \in N(B_{n-1})$.

Or $N(B_{n-1}) \subseteq N(P(A)) \subseteq R(P(A)) \subseteq R(A - \lambda_k I)$. Donc $S^{n-1} u - (A - \lambda_k I) w \in R(A - \lambda_k I)$ d'où $S^{n-1} u \in R(A - \lambda_k I)$ et finalement $u \in R(A - \lambda_k I)$ et par conséquent $R(A - \lambda_k I)$ est fermé •

Theorème 4.5 *Soit A un opérateur fermé dans un espace de Banach X tel que $\rho(A) \neq \emptyset$. Si P est un polynôme dans $\mathbf{C}$ alors*

$$P(\sigma_s(A)) = \sigma_s(P(A)).$$

Démonstration:

Soit $\mu \in \mathbf{C}$ fixé et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines du polynôme $P(\lambda) - \mu$ alors

$$P(A) - \mu I = \alpha (A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_n I) \text{ avec } \alpha \neq 0$$

(le cas $\alpha = 0$ étant évident). Si $\mu \in \sigma_s P(A)$ c'est à dire que $P(A) - \mu I$ n'est pas s-régulier, alors d'après la proposition 4.4, il existe au moins λ_k tel que $A - \lambda_k I$

n'est pas s-régulier. Donc si $\mu \in \sigma_s(P(A))$ alors $\exists \lambda_k \in \sigma_s(A)$ racine du polynôme $P(\lambda) - \mu$ avec $P(\lambda_k) = \mu$. Cela montre que $\sigma_s(P(A)) \subseteq P(\sigma_s(A))$

Réciproquement: Supposons qu'un des $\lambda_k \in \sigma_s(A)$, alors d'après la proposition 4.4 on déduit que $P(A) - \mu I$ n'est pas s-régulier donc $\mu \in \sigma_s(P(A))$, d'où: $P(\sigma_s(A)) \subseteq \sigma_s(P(A))$ •

Corollaire 4.6 Soit A un opérateur fermé avec $\rho(A) \neq \emptyset$ et P un polynôme sur $\mathbb{C}$ n'ayant pas de racine dans $\sigma_s(A)$, Alors $P(A)$ est s-régulier.

Theorème 4.7 Soit A un opérateur borné et f une fonction analytique au voisinage de $\sigma(A)$, alors:

$$f(\sigma_s(A)) = \sigma_s(f(A))$$

Démonstration:

Soit $\mu \in \sigma_s(A)$, on définit la fonction g dans le domaine d'analyticité de f par:

$$g(\lambda) = \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} \text{ si } \lambda \neq \mu$$

et

$$g(\mu) = f'(\mu)$$

Par le calcul fonctionnel (cf. Dunford [6]) on a

$$f(A) - f(\mu I) = (A - \mu I)g(A)$$

avec $g(A)$ commute avec A . En appliquant le lemme 4.3, on en déduit que si $A - \mu I$ n'est pas s-régulier alors $f(A) - f(\mu I)$ n'est pas s-régulier, ou encore si $\mu \in \sigma_s(A)$ alors $f(\mu) \in \sigma_s(f(A))$ donc $f(\sigma_s(A)) \subseteq \sigma_s(f(A))$.

Réciproquement: si $\mu \notin f(\sigma_s(A))$ alors $\forall \lambda \in \sigma_s(A)$, $f(\lambda) - \mu \neq 0$. Posons $g(\lambda) = f(\lambda) - \mu$. Si $g(\lambda) \neq 0$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$ alors $g(A)$ est inversible donc $f(A) - \mu I$ est inversible donc $\mu \notin \sigma(f(A))$, par conséquent $\mu \notin \sigma_s(f(A))$. Si $g(\lambda)$ admet des zéros dans $\sigma(A)$, $g(\lambda)$ étant analytique dans le compact $\sigma(A)$, alors ils sont en nombre fini, soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Donc $g(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} h(\lambda)$ où α_i est l'ordre de multiplicité de λ_i est $h(\lambda) \neq 0$, $\forall \lambda \in \sigma(A)$.

$$g(\lambda) \neq 0, \forall \lambda \in \sigma_s(A) \implies P(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

n'a pas de racine dans $\sigma_s(A)$, et d'après la corollaire 4.6, $P(A)$ est s-regulier.

D'autre part $h(\lambda) \neq 0 \ \forall \lambda \in \sigma(A)$ implique que $h(A)$ est inversible. Par conséquent $g(A)$ est s-régulier comme produit d'un s-régulier par un inversible commutant entre eux. Donc $\mu \notin \sigma_s(f(A))$, ce qui achève la démonstration du théorème •

§ 5. Perturbation du spectre singulier

Soit $S\text{-Reg}(X) = \{A \in B(X) ; A \text{ est } s\text{-régulier.}\}$

Montrons, par un exemple, que $S\text{-Reg}(X)$ n'est pas ouvert dans $B(X)$.

Soit

$$\begin{aligned} X^{(\infty)} &= l_2 \oplus l_2 \oplus \cdots \oplus l_2, \\ X &= X^{(\infty)} \oplus X^{(\infty)} \end{aligned}$$

et $A = S^{(\infty)} \oplus S^{*(\infty)} \in B(X)$ où $S^{(\infty)} = S \oplus \cdots \oplus S$ et $Se_n = e_{n+1}$, $n \geq 0$ avec $\{e_n\}_{n \geq 0}$ la base canonique de l_2 .

Soit $\mathbf{D}$ le disque unité.

Alors

(1) $\forall \lambda \in \mathbf{D}$;

$S^{(\infty)} - \lambda I$ est semi-Fredholm (inversible à gauche) avec $\text{ind}(S^{(\infty)}) = -\infty$.

$S^{*(\infty)} - \lambda I$ est semi-Fredholm (inversible à droite) avec $\text{ind}(S^{(\infty)}) = +\infty$.

(2) $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \overline{\mathbf{D}}$ et $\sigma_S(A) = \partial\mathbf{D}$ où $\partial\mathbf{D}$ est la frontière de $\mathbf{D}$.

D'où $A \in S\text{Reg}(X)$.

Soit maintenant $\Gamma \subseteq \mathbf{D}$, dénombrable et dense dans $\mathbf{D}$, $\Gamma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant [5, Théorème 8.1], il existe K_ε compact avec $\|K_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ tel que $T = A + K_\varepsilon$ soit bitriangulaire avec diagonale Γ . Alors $P_{N(T-\lambda I)} = 0$ si $\lambda \notin \Gamma$ et $P_{N(T-\lambda_n I)} \neq 0 \quad \forall \lambda_n \in \Gamma \subseteq \sigma_p(T)$.

Donc l'application $\lambda \mapsto P_{N(T-\lambda I)}$ n'est pas continue dans $\mathbf{D}$, en particulier $T \notin S\text{-Reg}(X)$.

Remarque :

(1) Cet exemple montre que $S\text{-Reg}(X)$ n'est pas stable par des "petites" perturbations, même quand celles-ci sont compactes et même quand X est un espace de Hilbert.

(2) De même, l'exemple précédent montre que $S\text{-Reg}(X) \cap SF(X)$ n'est pas ouvert, où $SF(X)$ désigne l'ensemble des opérateurs semi-Fredholm.

Dans ce paragraphe, nous montrons que les opérateurs s -réguliers restent stable par certaines "petites" perturbations.

Définition 5.1 Soit $A \in B(X)$, s -régulier, on dira que l'opérateur $T \in B(X)$ est A s -régulier si $\exists M$ sous-espace fermé de X tel que

$$N(A) \subset M = A(M) \quad \text{et} \quad T(M) \subset M.$$

Remarque :

(1) Dans le cas où X est un Hilbert (voir [16, § 4]).

(2) si $TA = AT$ alors T est A s -régulier.

En effet, posons $M = Co(A)$. Alors il suffit de montrer que $T(Co(A)) \subset Co(A)$. $A(T(Co(A))) = T(A(Co(A))) = T(Co(A))$. D'où $T(Co(A)) \subset Co(A)$.

(3) si A est borné inférieurement ou surjectif alors $\forall T \in B(X)$, T est A s -régulier. En effet, si $R(A) = X$ (respectivement $N(A) = \{0\}$ et $R(A)$ fermé) on posera $M = X$ (resp. $M = \{0\}$).

Lemme 5.2 Soit $A \in B(X)$, s -régulier et M un sous-espace fermé de X tel que $N(A) \subset M = A(M)$. Alors

$$\overline{H_0(A)} \subset M \subset Co(A).$$

Démonstration:

Montrons par induction que $\forall n > 0$, $N(A^n) \subset M$. Pour $n = 1$, par hypothèse, on a $N(A) \subset M$. Supposons que $N(A^n) \subset M$ et soit $x \in N(A^{n+1})$, alors $A^n x \in N(A) \subset M = A^{n+1}(M)$. Donc $\exists y \in M$ tel que $A^n x = A^{n+1}y$ et $x - Ay \in N(A^n) \subset M$. Or, $Ay \in M$. Donc $x \in M$. Par conséquent, $\forall n > 0$, $N(A^n) \subset M$ d'où $\overline{\bigcup_{n>0} N(A^n)} \subset M$. La proposition I.4.3. permet de conclure la première inclusion. La seconde inclusion se déduit de la définition de $Co(A)$. ■

Lemme 5.3 Soit $A \in B(X)$, s -régulier. Alors on a

- a) $A(\overline{H_0(A)}) = \overline{H_0(A)}$;
- b) $c(\hat{A}) \geq c(A)$ où $\hat{A} : \hat{X} = X/\overline{H_0(A)} \rightarrow \hat{X}$.

Démonstration:

(a) Remarquons d'abord que $A(H_0(A)) = H_0(A)$. En effet, il suffit de montrer que $H_0(A) \subset A(H_0(A))$. Soit $x \in H_0(A) \subset Co(A)$, alors $x = Ay$. D'après le

lemme I.4.1(2), $y \in H_0(A)$. D'autre part, d'après le lemme I.1.4, $A(\overline{H_0(A)})$ est fermé (car $N(A) \subseteq \overline{H_0(A)}$). D'où $\overline{H_0(A)} = \overline{A(H_0(A))} \subseteq A(\overline{H_0(A)}) \subseteq \overline{H_0(A)}$. Ce qui établit (a).

(b) Soit $x \in X$ et $y \in \overline{H_0(A)}$. Alors

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\| &= d(x, \overline{H_0(A)}) = d(x+y, \overline{H_0(A)}) \\ &\leq d(x+y, N(A)) \leq \frac{1}{c(A)} \|Ax + Ay\|. \end{aligned}$$

En utilisant (a), on obtient $c(\hat{A}) \geq c(A)$. ■

Lemme 5.4 *Soit $A \in B(X)$, borné inférieurement (resp. surjectif). Alors $\|A - T\| < c(A) \implies T$ est borné inférieurement (resp. surjectif).*

Démonstration:

Supposons que A est borné inférieurement

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|(T - A)x + Ax\| \geq \|Ax\| - \|(A - T)x\| \\ &\geq c(A) \cdot \|x\| - \|A - T\| \cdot \|x\| \geq (c(A) - \|A - T\|) \|x\| \end{aligned}$$

d'où T est injectif et

$$c(T) \geq c(A) - \|A - T\|. \quad (1)$$

Le cas surjectif s'obtient par dualité, en remarquant que $c(A) = c(A^*)$ et $\|A\| = \|A^*\|$. ■

Théorème 5.5 *Soit $A \in B(X)$, s -régulier. Soit $T \in B(X)$ avec $\|A - T\| < c(A)$, alors : T est A - s -régulier $\implies T$ est s -régulier.*

Démonstration:

D'après la définition de T est " A s -régulier", il existe M sous-espace fermé de X . Si $M = \{0\}$ ou $M = X$ alors A borné inférieurement ou A surjectif. Le lemme 5.4 permet de conclure. Supposons que $M \neq \{0\}$ et $M \neq X$. Soit A_M et T_M respectivement la restriction de A et T à M . Puisque $A(M) = M$, A_M est surjectif. Encore le lemme 5.4 montre que si $\|A_M - T_M\| < c(A_M)$ alors T_M est surjectif. Et comme, $\|A_M - T_M\| \leq \|A - T\|$ et $c(A_M) \geq c(A)$, il s'ensuit que si $\|A - T\| < c(A)$ alors $T(M) = M$ et par suite

$$M \subset Co(T). \quad (1)$$

Par ailleurs, soit $\hat{X} = X/\overline{H_0(A)}$ et $\hat{A}, \hat{T} : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$. Alors $\hat{A}$ est borné inférieurement (car $N(A) \subset \overline{H_0(A)} \subset R(A)$). Donc, si $\|\hat{A} - \hat{T}\| < c(\hat{A})$ alors $\hat{T}$ est borné inférieurement (cf. Lemme 5.4).

Il s'ensuit que $H_0(\hat{T}) = \{\hat{0}\} \subset \hat{X}$. Or, $x \in H_0(T) \implies \hat{x} \in H_0(\hat{T})$. ($\|\hat{T}\hat{x}\| \leq \|Tx\|$). Donc, $H_0(T) \subset \overline{H_0(A)}$ et, par suite

$$\overline{H_0(T)} \subset \overline{H_0(A)}.$$

Puisque $\|\hat{A} - \hat{T}\| \leq \|A - T\|$ et $c(\hat{A}) \geq c(A)$ (cf. Lemme 2.3 b)), on en déduit que

$$\|A - T\| < c(A) \implies \overline{H_0(T)} \subset \overline{H_0(A)}. \quad (2)$$

D'après (1) et (2), on a :

$$\overline{H_0(T)} \subset \overline{H_0(A)} \subset M \subset Co(T).$$

Finalement, $R(T)$ est fermé car $R(\hat{T})$ est fermé dans $\hat{X}$ et $\overline{H_0(A)} \subset Co(T) \subseteq R(T)$. Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Corollaire 5.6 *Soit $A \in B(X)$, s -régulier. Soit $S \in B(X)$ avec $\|S\| < c(A)$ alors :*
 S est A s -régulier $\implies A - S$ est s -régulier.

Démonstration:

On pose $T = A - S$, alors $\|T\| = \|A - S\| < c(A)$ et il est facile de voir que T est A s -régulier, donc en utilisant le Théorème 5.5 on a $T = A - S$ est s -régulier. ■

Corollaire 5.7 *Soit $A \in B(X)$, s -régulier $\exists \varepsilon > 0$ tel que si $\|A - T\| < \varepsilon$ et T est A s -régulier. Alors :*

- 1) $\overline{H_0(T)} = \overline{H_0(A)}$.
- 2) $Co(T) = Co(A)$.

Démonstration:

D'après la formule (2) de la démonstration du théorème précédent avec $\varepsilon = \frac{c(A)}{2}$, il suffit de montrer que $\overline{H_0(A)} \subseteq \overline{H_0(T)}$. Avec les mêmes notations que la démonstration du théorème précédent, et en utilisant l'inégalité (1) du lemme 5.4, on voit que

$$c(\hat{T}) \geq c(\hat{A}) - \|\hat{A} - \hat{T}\|.$$

Donc si $\|A - T\| < \frac{c(A)}{2}$ alors $c(\hat{T}) > \frac{c(A)}{2}$.

D'où $\|\hat{A} - \hat{T}\| \leq \|A - T\| < \frac{c(A)}{2} < c(\hat{T})$. Donc, en remplaçant A par T et T par A , dans la démonstration de la formule (2) du théorème précédent, on conclut que $\overline{H_0(A)} \subseteq \overline{H_0(T)}$ et 1) est démontré.

2) s'obtient par dualité, (voir Proposition I.4.4.(2)). ■

Théorème 5.8 *Si $A \in B(X)$ et Q quasi-nilpotent commute avec A alors :*
 $\sigma_s(A + Q) = \sigma_s(A)$.

Démonstration:

Montrons que si $A + Q$ est s -régulier alors A est s -régulier. Supposons que $A + Q$ est s -régulier et posons $c = c(A + Q) > 0$. Alors $\forall n > 0$, $(A + Q)^n$ est s -régulier (cf. Théorème 4.5.)

D'autre part,

$$(A + Q)^n = AS_n + Q^n. \quad (1)$$

Q étant quasi-nilpotent, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\|Q^N\| < c^N$. En utilisant (1), on obtient :

$$\|(A + Q)^N - AS_N\| = \|Q_N\| < c^N \leq c((A + Q)^N).$$

(Pour la dernière inégalité voir Lemme I.3.3). Or, $(A + Q)^N$ commute avec AS_N . D'où, en utilisant le théorème 5.5, il s'ensuit que AS_N est s -régulier. Puisque A commute avec S_N , le lemme 4.3. implique que A est s -régulier.

D'où, on en déduit que $s\text{-reg}(A + Q) \subseteq s\text{-reg}(A)$ et, par conséquent

$$\sigma_s(A) \subseteq \sigma_s(A + Q). \quad (2)$$

Pour l'autre inclusion, il suffit de remplacer A par $A + Q$ et Q par $-Q$ dans (2). Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

TROISIÈME PARTIE

§ 1. Opérateur quasi-Fredholm dans un espace de Banach.

Définition 1.1 Soit A un opérateur fermé dans un espace de Banach X . On dira que A est quasi-Fredholm (et on notera $A \in q\Phi$) si $\exists M, N$ deux sous-espaces fermés de X tels que :

- a) $X = M \oplus N$
- b) $A(M \cap D(A)) \subset M$ et $0 \in s\text{-reg}(A|_M)$
- c) $N \subset D(A)$, $A(N) \subset N$ et $A|_N$ est nilpotent.

Remarque : Le couple (M, N) est appelé décomposition de Kato associée à A .

Exemples :

(1) L'exemple qui a motivé cette définition est celui des opérateurs semi-Fredholm. En effet, T. Kato [11, Théorème 4] a montré que les opérateurs semi-Fredholm sont quasi-Fredholm.

(2) Si $N = \{0\}$ (i.e. $M = X$), on retrouve les opérateurs s -réguliers.

(3) Si $M = \{0\}$ ($N = X$), on retrouve les opérateurs nilpotents.

(4) Si X est un espace de Hilbert, on retrouve les opérateurs quasi-Fredholm définis par J.P. Labrousse (voir [13]). D'ailleurs dans [13, page 197], on trouve une longue liste d'exemples d'opérateurs quasi-Fredholm.

Théorème 1.2 Soit A un opérateur fermé à domaine dense dans X , si $A \in q\Phi$ alors $A^* \in q\Phi$.

Démonstration:

Soit (M, N) une décomposition de Kato associée à A . Montrons que $(N^\perp, M^\perp)$ est une décomposition de Kato associée à A^* .

Soit P_M (respectivement P_N) la projection sur M (respectivement sur N) suivant la décomposition $X = M \oplus N$ alors [12, théorème 4.8, chap IV] implique que $X^* = N^\perp \oplus M^\perp$ et $(P_M)^*$ (respectivement $(P_N)^*$) est une projection sur $N^\perp$ (respectivement sur $M^\perp$), en effet:

$$M^* = P_M^* X^* = N(I - P_M^*) = R(I - P_M)^{\perp} = N^{\perp}.$$

$$\text{Et } N^* = P_N^* X^* = (I - P_M^*) X^* = R(I - P_M^*) = N(P_M^*) = R(P_M)^* = M^{\perp}.$$

montrons que $A|_M$ est à domaine dense dans M , en effet:

Il suffit de montrer que $M \subseteq \overline{D(A) \cap M}$, soit $x \in M$ alors il existe une suite (x_n) dans $D(A)$ qui converge vers x . Donc $P_M(x_n)$ converge vers $P_M(x) = x \in M$ et puisque $P_M(D(A)) \subseteq D(A)$, $P_M(x_n) \in D(A) \cap M$. Par conséquent $x \in \overline{D(A) \cap M}$ ce qui implique que $A|_M$ est à domaine dense dans M .

Montrons que $M^\perp \subseteq D(A^*)$:

Soit $f \in M^\perp$ et $u \in D(A)$ alors $P_M(u) \in D(A)$, et donc $f(Au) = f(AP_M u) + f(AP_N u)$. Or, $AP_M u \in M$ et comme $f \in M^\perp$, $f(AP_M u) = 0$. D'autre part $N \subseteq D(A)$ alors AP_N est borné. Il s'ensuit que:

$$|f(Au)| \leq \|AP_N\| \|u\| \|f\|$$

et alors on en déduit que $f \in D(A^*)$.

Du fait que $A(M \cap D(A)) \subseteq M$ et $A(N) \subseteq N$ alors $A^*(N^\perp \cap D(A^*)) \subseteq N^\perp$ et $A^*(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

Montrons maintenant que $(A|_M)^* = A^*_{|N^\perp}$ et $(A|_N)^* = A^*_{|M^\perp}$, en effet:

Soit $f \in X^*$ et $u \in X$

$$\begin{aligned} (P_{M^\perp} f)(u) &= (P_{M^\perp} f)(P_M u + P_N u) = (P_{M^\perp} f)(P_N u) \\ &= (I - P_{N^\perp})f(P_N u) = f(P_N u) = (P_N)^* f(u). \end{aligned}$$

On a alors $P_{M^\perp} = (P_N)^*$, et par suite on a :

$$\begin{aligned} (A|_N)^* &= (AP_N)^* = (P_N A P_N)^* = (P_N)^* A^* (P_N)^* \\ &= A^* (P_N)^* = A^* P_{M^\perp} = A^*_{|M^\perp}. \end{aligned}$$

Et de la même manière on démontre l'autre égalité.

D'autre part $A|_M$ est s-régulier et à domaine dense dans M donc d'après la proposition I.2.3, $(A|_M)^* = A^*_{|N^\perp}$ est s-régulier.

Il reste à montrer que $(A^*_{|M^\perp})$ est nilpotent. Puisque $(A|_N)^* = A^*_{|M^\perp}$ et $A|_N$ est nilpotent, alors on en déduit que $(A|_M)^*$.

Donc $(N^\perp, M^\perp)$ est une décomposition de Kato associée à A^* et par suite $A^* \in q\Phi$.

Lemme 1.3 Soit $A \in q\phi$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, $A - \lambda I$ est s -régulier.

Démonstration:

Soit $A \in q\phi$ et (M, N) une décomposition de Kato associée à A . Il est clair que $\forall \lambda \neq 0$, $N(A - \lambda I) \subset Co(A) \subset M$. D'autre part, $A|_M$ s -régulier implique il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| < \varepsilon$, $(A - \lambda I)|_M$ est s -régulier et $Co(A - \lambda I|_M) = Co(A|_M) = Co(A)$. D'où, $N(A - \lambda I) \subset Co(A - \lambda I|_M) \subset Co(A - \lambda I)$.

Il reste à montrer que $R(A - \lambda I)$ est fermé pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $0 < |\lambda| < \varepsilon$. En effet, $A|_N$ nilpotent implique que $\forall \lambda \neq 0$, $(A - \lambda I)|_N$ est inversible. Donc $N = (A - \lambda I)(N) \subset R(A - \lambda I)$ et $R(A - \lambda I) = R(A - \lambda I|_M) \oplus N$.

Ce qui montre que $R(A - \lambda I)$ est fermé $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, comme somme d'un fermé de M et de N . ■

Notons $\rho_{q\phi}(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} ; (A - \lambda I) \in q\phi\}$ (alors $s\text{-reg}(A) \subset \rho_{q\phi}(A)$) et $\rho_{q\phi}^s = \rho_{q\phi}(A) \setminus s\text{-reg}(A)$.

Corollaire 1.4

- (a) $\rho_{q\phi}(A)$ est un ouvert de $\mathbf{C}$.
- (b) $\rho_{q\phi}^s(A)$ est dénombrable et n'admet pas de points d'accumulations dans $\rho_{q\phi}(A)$.
- (c) $\rho_{q\phi}^s(A) \subseteq \sigma_p(A)$ (l'ensemble des valeurs propres de A).

Corollaire 1.5 Soit A un opérateur fermé. Alors

- a) $s\text{-reg}(A) = \{\lambda \in \rho_{q\phi}(A) ; N(A - \lambda I) \subseteq \text{clm}\{N(A - \mu I)\}_{\mu \neq \lambda}\}$;
- b) $s\text{-reg}(A) = \{\lambda \in \rho_{q\phi}(A) ; \cap_{\mu \in s\text{-reg}(A)} Co(A - \mu I) \subseteq Co(A - \lambda I)\}$.

Démonstration:

a) L'inclusion " $\subseteq$ " se déduit du Théorème II.3.1(8). Inversement, si $A - \lambda I$ est quasi-Fredholm et (M, N) une décomposition de Kato associée à $A - \lambda I$, alors $Co(A - \lambda I) = Co(A - \lambda I|_M) = \cap_{n \geq 0} R(A - \lambda I)^n$ est fermé. En outre, $\forall \mu \neq \lambda$, $N(A - \mu I) \subset Co(A - \lambda I)$.

Donc $N(A - \lambda I) \subset \text{clm}\{N(A - \mu I)\}_{\lambda \neq \mu} \subset Co(A - \lambda I) \subset R(A - \lambda I)^n \quad \forall n \geq 0$.

D'où, d'après le Lemme I.2.1, on a $\forall m, n > 0$, $N(A - \lambda I)^m \subset R(A - \lambda I)^n$. Donc $N \subset Co(A - \lambda I) \subset M$, par conséquent $N = \{0\}$ et $\lambda \in s\text{-reg}(A)$.

b) L'inclusion " $\subseteq$ " est évidente. Montrons l'autre inclusion. Soit $A - \lambda I$ quasi-Fredholm et (M, N) une décomposition de Kato associée à $A - \lambda I$. Supposons que $\lambda \notin s\text{-régulier}$, alors $N \neq \{0\}$. $(A - \lambda I)|_N$ étant nilpotent, on a $\forall \mu \neq \lambda$, $N \subset Co(A - \mu I)$. D'où $N \subseteq \cap_{\mu \in s\text{-reg}(A)} Co(A - \mu I) \subseteq Co(A - \lambda I) \subseteq M$. Par conséquent, $N = \{0\}$ contradiction. Donc $\lambda \in s\text{-reg}(A)$. ■

Théorème 1.6 Soit A un opérateur fermé avec $D(A)$ dense dans X , quasi-Fredholm. Alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| < \varepsilon$, on a :

$$\text{i) } Co(A - \lambda I) + H_0(A - \lambda I) = Co(A) + H_0(A);$$

$$\text{ii) } Co(A - \lambda I) \cap \overline{H_0(A - \lambda I)} = Co(A) \cap \overline{H_0(A)}.$$

Démonstration:

Soit (M, N) une décomposition de Kato associée à A . Montrons que

$$H_0(A) \cap M = H_0(A) \cap Co(A). \quad (1)$$

En effet, $Co(A) \subseteq M$ et $H_0(A|_M) \subseteq Co(A)$ (car $A|_M$ est s -régulier). Donc

$$\begin{aligned} H_0(A) \cap Co(A) &= H_0(A) \cap M \cap Co(A) = \\ H_0(A|_M) \cap Co(A) &= H_0(A|_M) = H_0(A) \cap M. \end{aligned}$$

Montrons que

$$Co(A) + H_0(A) = Co(A) \oplus N. \quad (2)$$

En effet, $\exists d \in N$ tel que $N \subseteq N(A^d) \subseteq H_0(A)$. Donc $Co(A) + N \subseteq Co(A) + H_0(A)$. L'autre inclusion, d'après (1), on a

$$H_0(A) = H_0(A) \cap M + N = H_0(A) \cap Co(A) + N \subseteq Co(A) + N.$$

D'où $H_0(A) + Co(A) \subseteq Co(A) \oplus N$ et (2) est démontré.

D'autre part, d'après le Lemme 1.3, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, $A - \lambda$ est s -régulier. Donc $H_0(A - \lambda I) \subseteq Co(A - \lambda I)$ si $0 < |\lambda| < \varepsilon$. En outre, $A|_N$ nilpotent implique que $\forall \lambda \neq 0$, $(A - \lambda I)(N) = N$. Donc $N \subset Co(A - \lambda I)$. Par conséquent, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, on a

$$\begin{aligned} H_0(A - \lambda I) + Co(A - \lambda I) &= Co(A - \lambda I) = Co(A - \lambda I) \cap M + N \\ &= Co(A - \lambda I|_M) + N = Co(A) + N = Co(A) + H_0(A). \end{aligned}$$

Ce qui établit i).

ii) Montrons d'abord que $\forall \lambda \in \mathbf{C}$,

$$\overline{H_0(A - \lambda I)} \cap M = \overline{H_0(A - \lambda I) \cap M}. \quad (3)$$

En effet, il suffit de montrer que $\overline{H_0(A - \lambda I)} \cap M \subset \overline{H_0(A - \lambda I) \cap M}$. Soit $x \in \overline{H_0(A - \lambda I)} \cap M$ alors $\exists x_n \in H_0(A - \lambda I)$ tel que $x_n \rightarrow x$. Soit P_M la projection sur M suivant la décomposition $X = M \oplus N$. Alors $P_M x_n \rightarrow P_M x = x$. Or, il est clair que $P_M x_n \in H_0(A) \cap M$. Par conséquent, $x \in \overline{H_0(A - \lambda I) \cap M}$. En outre, d'après le lemme 1.3, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $0 < |\lambda| < \varepsilon$, $A - \lambda$ est s -régulier. Donc

$$\overline{H_0(A - \lambda I)} = \bigcup_{j \geq 0} \overline{N(A - \lambda)^j} \subset Co(A) \subset M. \quad (4)$$

Finalement, en utilisant (3) et (4), on voit que $\forall \lambda \in \mathbf{C}$, $0 < |\lambda| < \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \overline{H_0(A)} \cap Co(A) &= \overline{H_0(A)} \cap M \cap Co(A) = \overline{H_0(A) \cap M} \cap Co(A) \\ &= \overline{H_0(A|_M)} = \overline{H_0(A - \lambda I|_M)} \\ &= \overline{H_0(A - \lambda I) \cap M} \cap Co(A - \lambda I) \\ &= \overline{H_0(A - \lambda I)} \cap Co(A - \lambda I). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Corollaire 1.7 *Soit A un opérateur fermé avec $D(A)$ dense dans X . Alors, les applications*

$$\lambda \mapsto Co(A - \lambda I) + H_0(A - \lambda I)$$

et

$$\lambda \mapsto Co(A - \lambda I) \cap \overline{H_0(A - \lambda I)}$$

sont constantes dans chaque composante connexe du domaine quasi-Fredholm $(\rho_{q\phi}(A))$ de A .

Corollaire 1.8 *Soit Ω une composante connexe de $\rho_{q\phi}(A)$ et $\Omega^r = \Omega \cap s\text{-reg}(A)$ et $\Omega^s = \Omega \cap \rho_{q\phi}^s(A)$. Alors $\forall \mu \in \Omega^s$ et $\forall \lambda \in \Omega^r$,*

$$Co(A - \mu I) + H_0(A - \mu I) = Co(A - \lambda I) = \bigcap_{\omega \in \Omega^r} R(A - \omega I)$$

$$\text{et} \quad Co(A - \mu I) \cap \overline{H_0(A - \mu I)} = \overline{H_0(A - \lambda I)} = \text{clim}\{N(A - \omega I)\}_{\omega \in \Omega^r}.$$

Remarque :

1) $\forall \lambda \in \rho_{q\phi}(A)$, $Co(A - \lambda I) + H_0(A - \lambda I) = Co(A - \lambda I) + \overline{H_0(A - \lambda I)}$ est fermé dans X . En effet, soit (M, N) une décomposition de Kato associée à $A - \lambda$.

Alors $Co(A - \lambda) + H_0(A - \lambda I) = Co(A - \lambda I) \oplus N$, (voir (2) de la démonstration du Théorème 1.6). Or, $Co(A - \lambda I) \oplus N$ est fermé comme somme de fermé de M et de N .

2) Les résultats de ce paragraphe généralisent ceux de [22], aux cas des domaines quasi-Fredholm pour des opérateurs fermés avec domaines denses dans X .

ANNEXE

1) Cet exemple consiste à montrer que $\sigma_f(P(T)) \not\subset P(\sigma_f(T))$ où P est un polynôme. Par exemple soit $P(\lambda) = \lambda^2$ et T défini comme suit. (voir [3])

Soit A un opérateur dans X tel que $A^2 = 0$ et $R(A)$ est fermé. Soit B un opérateur compact tel que ABA n'est pas de rang fini.

par exemple: dans $X = \ell_2$ on pose

$$Ac_k = c_{2k} \text{ si } k \text{ impair}$$

$$Ac_k = 0 \text{ si } k \text{ pair}$$

et

$$Bc_k = \frac{c_{k+1}}{k^2}$$

ou $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ est la base canonique: alors

$$ABAc_k = \frac{c_{4k+2}}{k^2}$$

Soit $\lambda \in \rho(B)$ où $\rho(B)$ est l'ensemble résolvant de B , c.à.d

$$\rho(B) = \{\lambda \in \mathbf{C} : B - \lambda I \text{ est inversible}\}$$

et on pose

$$T = A(\lambda I - B)$$

alors

$$R(T) \text{ est fermé}$$

mais

$$T^2 = -ABA(\lambda I - B) \text{ n'est pas d'image fermé}$$

car $R(T^2) = R(ABA)$, qui n'est pas fermé.

2) Cet exemple consiste à montrer que $\sigma_f(T)$ n'est pas fermé. (voir [3])

Soit A un opérateur borné dans X tel que $\forall |\lambda| \leq 1$, $R(A - \lambda I)$ n'est pas fermé.

par exemple: $X = L^2(\mathbf{D})$ où $\mathbf{D} = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq 1\}$ et

$$(Af)(t) = tf(t)$$

soit $Y = X \times X$ muni de la norme $\|(x; y)\| = \|x\| + \|y\|$, et soit $T \in B(Y)$ défini par

$$T(x, y) = (0, x + Ay)$$

alors

$$R(T) = \{0\} \times X \text{ donc fermé}$$

Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $0 < |\lambda| \leq 1$, montrons que

$$R(T - \lambda I) \text{ n'est pas fermé}$$

En effet soit $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ dans X tel que $(A - \lambda I)x_n \rightarrow y$ avec $y \notin R(A - \lambda I)$, donc $\forall x \in X$ on a:

$$(T - \lambda I)(x, x_n) = (-\lambda x, x + (A - \lambda I)x_n) \rightarrow (-\lambda x, x + y)$$

Supposons que

$$(-\lambda x, x + y) \in R(T - \lambda I)$$

alors $\exists (x_0, y_0) \in X$ tel que

$$(T - \lambda I)(x_0, y_0) = (-\lambda x, x + y)$$

$$\implies x_0 = x \text{ et } y = (A - \lambda I)y_0$$

$$\implies y \in R(A - \lambda I) \text{ contradiction}$$

3) Cet exemple consiste à montrer que si A est un opérateur fermé dans X alors en général A^n n'est pas fermé (Voir [11, page 293])

Soit A un opérateur fermé dans X tel que son carré ne l'est pas.

par exemple: dans $X = \ell_2(\mathbf{Z})$ pose

$$A \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n} e_n + \sum_{n=1}^{\infty} n x_{2n-1} e_{1-n}$$

où $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ est la base canonique.

$$D(A) = \{x \in \ell_2(\mathbf{Z}) : \sum_n n^2 |x_{2n-1}|^2 < \infty\}$$

En particulier

$$Ac_n = 0 \text{ si } n = 0, -1, -2, \dots$$

$$Ac_1 = c_0, Ac_3 = 2c_{-1}, Ac_5 = 3c_{-2}, \dots$$

$$Ac_2 = c_1, Ac_4 = c_2, Ac_6 = c_3, \dots$$

Soit N , X_1 et X_2 les sous-espaces fermés de X engendrés respectivement par

$$\{c_0, c_{-1}, c_{-2}, \dots\}, \{c_1, c_3, c_5, \dots\}, \{c_2, c_4, c_6, \dots\}$$

Alors $X = N \oplus X_1 \oplus X_2$ et $N(A) = N$; et

$$AX_1 = N, AX_2 = X_1 \oplus X_2, A(X_1 \oplus X_2) = X$$

et alors la restriction de A à $X_1 \oplus X_2$ est bornée inférieurement avec conorme $c(A) = 1$, avec domaine X . Donc A est fermé, d'image fermée avec $c(A) = 1$. Alors $N(A^2)$ n'est pas fermé: en effet

$$N(A^2) = N \oplus (X_1 \cap D(A))$$

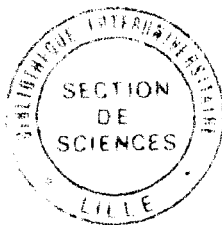
qui n'est pas fermé car $X_1 \cap D(A)$ n'est pas fermé.

Références

- [1] **Apostol, C.** *On the closed range in the spectrum of operators*; Rev. Math. Pures et Appl., 21, 8, (1976), 971-975
- [2] **Atkinson, F.V.** *On relatively regular operators*; Acta. Sci. Math. Szeged 15, 5, (1953), 38-56
- [3] **Caradus, S.R.** *Mapping properties of relatively regular operators*; Proc. Amer. Math. Soc. 47 (1975), 409-412
- [4] **Caradus, S.R.** *Generalized inverses and operator theory*; Queen's papers in pure and applied Mathematics, N°50, (1978), Kingston, Ontario
- [5] **Davidson, K.R. & Herrero, D.A.** *The Jordan form of a bitriangular operator*; J. Funct. Anal. 94 (1990), 27-73
- [6] **Dunford, N. & Schwartz, J.** *Linear operators, Part 1*; Wiley Inter-science, New York (1971)
- [7] **Goldberg, S.** *Unbounded linear operators*; N.Y., Mc Graw Hill, New York (1966)
- [8] **Goldman, M.A. & Karatchowskii, S.N.** *On the stability of closed linear operators*; Soviet-math. Dokl 14 (1973), 502-505
- [9] **Harte, R.E.** *Invertibility and singularity for bounded linear operators*; Dekker New York (1988)
- [10] **Kaashoek, M.A.** *Stability theorems for closed linear operators*; Indag Math 27 (1965) 452-466
- [11] **Kato, T.** *Perturbation theory for nullity deficiency and other quantities of linear operators*; J. Anal. Math. 6 (1958), 261-322
- [12] **Kato, T.** *Perturbation theory for linear operators*; Springer Verlag (1966)
- [13] **Labrousse, J.P.** *Les opérateurs quasi-Fredholm une généralisation des opérateurs semi-Fredholm*; Rend. Circ. Math. Palermo (2), 29 (1980), 161-258

- [14] Mbekhta, M. *Généralisation de la décomposition de Kato aux opérateurs paranormaux et spectraux*; Thèse de 3ème cycle, Université de Nice, (1984)
- [15] Mbekhta, M. *Généralisation de la décomposition de Kato...*; Glasgow Math.J. (1987), 159-175
- [16] Mbekhta, M. *Résolvant généralisé et théorie spectrale*; J. Operator Theory 21 (1989), 69-105
- [17] Mbekhta, M. *Théorie spectrale généralisée et opérateur pseudo-fredholm*; Thèse d'état Université Mohamed V, Rabat (1988)
- [18] Mbekhta, M. & Ouahab, A. *Opérateur s-régulier dans un Banach et théorie spectrale*; Pub. IRMA Lille, Vol. 22, No XII (1990)
- [19] Mbekhta, M. & Ouahab, A. *Perturbation des opérateurs s-régulier et continuité de certains sous-espaces dans le domaine quasi-Fredholm*; Pub. IRMA Lille, Vol. 24, N°X (1991)
- [20] Mbekhta, M. & Ouahab, A. *Contribution à la théorie spectrale généralisée dans les espaces de Banach*; C.R. Acad. Sci. Paris, t. 313, Série I (1991), 833-836
- [21] Nashed, M.Z. *Generalized inverses and applications*; Academic Press, (1976)
- [22] O'Searcoid, M. & West, T.T. *Continuity of the generalized Kernel and range of semi-Fredholm operators*; Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1989), 105-113
- [23] Saphar, P. *Contribution à l'étude des applications linéaires dans un espace de Banach*; Bul. Soc. Math. France 92 (1964), 363-384
- [24] West, T.T. *Removing the jump-Kato's decomposition*; Rocky Mountain Journal of Math. 20 (1990), 603-612





Résumé :

Il est bien connu que la théorie spectrale classique est basée sur la notion "d'inversibilité". Plusieurs théories ont été développées consistant à remplacer cette "inversibilité" par une notion plus faible (exemples : inversibilité modulo les opérateurs compacts, inverse généralisé) qui ont conduit aux spectres essentiel de Fredholm, semi-Fredholm et spectre généralisé.

Dans ce travail, on développe une théorie spectrale "généralisée" pour les opérateurs fermés dans un espace de Banach, où la notion d'inversibilité est remplacée par celle de la "semi-régularité". On dira que l'opérateur A est semi-régulier (s -régulier) si $R(A)$ est fermée et pour tout $n \geq 0$, $N(A^n) \subset R(A)$.

Notons, $\sigma_s(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ n'est pas } s\text{-régulier}\}$, le "spectre singulier" de A . Alors $\sigma_s(A)$ est fermé, inclus dans le spectre $\sigma(A)$ de A et contient la frontière de ce dernier. Nous montrons que $\sigma_s(A)$ possède aussi certaines propriétés de $\sigma(A)$.

Notons $S\text{-Reg}(X) = \{A \in B(X); 0 \notin \sigma_s(A)\}$, où X est un espace de Banach. Alors

$$\text{Inv}(X) = \{A \in B(X); 0 \notin \sigma(A)\} \subset S\text{-Reg}(X).$$

Nous remarquons par un exemple que $S\text{-Reg}(X)$ n'est pas ouvert, contrairement au groupe multiplicatif $\text{Inv}(X)$. Cependant, nous montrons qu'il reste stable par certaines "petites" perturbations.

D'autre part, on s'intéresse aux opérateurs de la forme $A = A_1 \oplus A_0$, où A_1 est s -régulier et A_0 est nilpotent, (opérateur quasi-Fredholm). T. Kato a montré que les opérateurs semi-Fredholm admettent une telle décomposition. Dans ce travail, nous donnons plusieurs propriétés de ces opérateurs.

Mots clés : Opérateurs, s -régulier, semi-Fredholm, quasi-Fredholm, spectre singulier, conorme d'un opérateur