

55376
1991
5

55376
1991
5

N° d'ordre : 1444

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE I

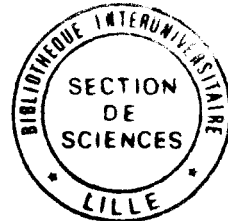
pour obtenir le titre de

Docteur de 3ème cycle

Spécialité : Mécanique des Fluides

par

Abdeljebbar SLIMANI



CONTRIBUTIONS A L'ETUDE DES ECOULEMENTS
EN TURBOMACHINES

Soutenue le 28 Juin 1991 devant la commission d'examen

Membre du jury :

Président : M. BUISINE, Professeur à l'USTL1 (LILLE)
Rapporteur : M. CAIGNAERT, Professeur à l'ENSAM de LILLE
Examineurs : M. MICHEAU, Professeur à l'USTL 1
M. NAJI, Maître de Conférence à l'USTL1



D 030 066120 1

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements à Monsieur D.BUISINE, Professeur à l'Université de LILLE 1, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant la présidence du jury et pour l'intérêt avec lequel il a suivi ces travaux et les précieux conseils qu'il m'a donné tout au long de cette étude; à Monsieur G.CAIGNAERT, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers (ENSAM) de LILLE qui a accepté la tâche de rapporteur, pour les conseils qu'il m'a prodigué lors de nos discussions; ainsi qu'à Monsieur P.MICHEAU, Professeur à l'Université de LILLE 1, et à Monsieur H.NAJI, Maître de conférence à l'Ecole Universitaire D'Ingénieurs de LILLE (EUDIL) qui ont voulu examiner ce travail.

Je ne terminerai pas cet avant-propos sans exprimer mes remerciements à mes amis et à toutes les personnes qui ont participé à la réalisation matérielle de ce travail.

TABLE DES MATIERES

Chapitre I : INTRODUCTION

1. Historique
2. Modèles S1-S2
 - 2.1 Fonction de courant
 - 2.2 Ecoulements secondaires
 - 2.3 Prise en compte des pertes
3. Méthodes paraboliques (fluide visqueux)
4. Modèles visqueux et non visqueux
5. Etude expérimentale
6. Objectifs

Chapitre II : ANALYSE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX CONCERNANT LE PHENOMENE DE RECIRCULATION A L'ENTREE

1. Introduction
2. Analyse des résultats de SEN
3. Simulation
4. Mise en équation
5. Résultats et Discussion
 - 5.1 Cas test du système posé
 - 5.2 Cas avec la condition de stationnarité
 - 5.3 Comparaison des débits
6. Conclusion

Chapitre III : MISE EN EQUATION ET DISCRETISATION

1. Introduction
2. Equations locales

3. Fonction de courant
4. Système de coordonnées
5. Discrétisation - Maillage

- 5.1 Maillage
- 5.2 Domaine de contrôle
- 5.3 Discrétisation

- 5.3.1 Ecriture de l'opérateur gradient
- 5.3.2 Produit scalaire de deux gradients
- 5.3.3 Produit vectoriel de deux gradients
- 5.3.4 Discrétisation

6. Quelques résultats sur la discrétisation

- 6.1 Test sur un maillage régulier
- 6.2 Test sur un exemple de maillage déformé
- 6.3 Test sur un méridien

7. Conclusion

Chapitre IV : LES PERTES

1. Introduction
2. Description du vecteur vitesse
3. Sommation des équations de NAVIER-STOKES

- 3.1 Equation de continuité

- 3.1.1 Dans la zone visqueuse 1
- 3.1.2 Dans la zone saine
- 3.1.3 Dans la zone visqueuse 2

- 3.2 Equation de quantité de mouvement méridienne

- 3.2.1 Dans la zone visqueuse 1
 - 3.2.2 Dans la zone saine
 - 3.2.3 Dans la zone visqueuse 2
 - 3.2.4 Equation globale méridienne sommée
- 3.3 Equation de quantité de mouvement circonférentielle
- 3.3.1 Dans la zone visqueuse 1
 - 3.3.2 Dans la zone saine
 - 3.3.3 Dans la zone visqueuse 2
 - 3.3.4 Equation globale circonférentielle sommée
4. Introduction des grandeurs moyennes
- 4.1 Dans l'équation de continuité
 - 4.2 Dans l'équation de quantité de mouvement méridienne
 - 4.3 Dans la composante circonférentielle
 - 4.4 Elimination de la pression
5. Evaluation des termes fluctuants
6. Equations de VON-KARMAN avec des termes de courbures
- 6.1 Introduction
 - 6.2 Equation de continuité
 - 6.3 Equation de quantité de mouvement
 - 6.4 Evaluation de la pression dans la couche limite
 - 6.5 Sommation des équations de NAVIER-STOKES
 - 6.5.1 Cas de faibles courbures
 - 6.5.2 Cas de fortes courbures
7. Conclusion

Chapitre V : CONCLUSION GENERALE

ANNEXE 1

ANNEXE 2

BIBLIOGRAPHIE

NOTATIONS

ALFA	:	intervalle de temps
β	:	angle entre l'axe de la sonde et la direction \vec{e}_0 .
\vec{C}	:	tenseur de courbures.
Co	:	trace du tenseur \vec{C} .
δn	:	épaisseur totale de la couche limite.
$\delta n_1 \quad \delta n_2$:	épaisseurs totales de la couche limite relatives aux deux zones visqueuses 1 et 2.
$\delta n_{11} \quad \delta n_{12}$:	épaisseurs de déplacement normales relatives aux deux zones visqueuses 1 et 2.
$\delta n_{21} \quad \delta n_{22}$:	épaisseurs de déplacement transversales relatives aux deux zones visqueuses 1 et 2.
I	:	rothalpie
P	:	pression
ψ	:	fonction de courant
Q	:	débit
Qn	:	débit nominal
R	:	rayon de la conduite d'aspiration

s : entropie
 $\vec{\tau}$: tenseur de contraintes
 \vec{V} : vitesse absolue.
 \vec{W} : vitesse relative
 \vec{w} : vitesse de rotation
 \vec{W}_{rz} : vitesse relative méridienne dans le plan (\vec{e}_r, \vec{e}_z)
 W_θ : composante circonférentielle de la vitesse relative
 P_1, P_2, P_3 : pressions moyennes relatives aux trous 1, 2, 3.
 V_{N11}, V_{N21} : vitesses normales au trou 1 pour écoulements 1 et 2.
 V_{N12}, V_{N22} : vitesses normales au trou 2 pour écoulements 1 et 2.
 V_{N13}, V_{N23} : vitesses normales au trou 3 pour écoulements 1 et 2.
 V_{Z1}, V_{Z2} : vitesses axiales des écoulements 1 et 2.
 $V_{\theta 1}, V_{\theta 2}$: vitesses circonférentielles des écoulements 1 et 2
 (r, θ, z) : coordonnées cylindriques
 (x, y, n) : coordonnées curvilignes liées à l'aubage
 m : coordonnée méridienne
 l : coordonnée transversale

CHAPITRE I

INTRODUCTION

1. - HISTORIQUE

L'amélioration des performances hydrauliques d'une turbomachine passe par la connaissance de l'écoulement qui la traverse. Cet écoulement a un caractère tridimensionnel, instationnaire visqueux. La modélisation d'un tel écoulement est encore délicate et difficile à réaliser dans son ensemble.

Depuis fort longtemps, ce problème a préoccupé les industriels et les chercheurs. Une turbomachine étant avant tout un aubage tournant, c'est sur cet aspect (aspect grille d'aubes) que le problème a été abordé. En 1948, STANITZ a été le premier à résoudre une équation de l'écoulement entre deux aubes d'une turbomachine de géométrie simple. La grille d'aubes plane, point de départ de la modélisation des turbomachines axiales, a fait l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales.

Dans le même temps, pour utiliser les résultats obtenus

sur les grilles d'aubes, et tenir compte de l'interdépendance des représentations planes des écoulements aubes à aubes voisins, il était nécessaire de décrire la structure moyenne temporelle et circonférencielle de l'écoulement global. Plusieurs schémas d'écoulements moyens ont été élaborés, ils ont été à l'origine du développement de méthodes de calcul diverses VEUILLOT J.P /1/.

Le calcul de l'écoulement moyen bidimensionnel a permis en particulier de déterminer la géométrie des nappes de courant supposées de révolution ainsi que les caractéristiques moyennes du fluide dans les organes de la turbomachine.

L'intersection de ces nappes avec la roue conduit alors au concept de grilles d'aubes non planes et débouche sur le calcul de l'écoulement aube à aube, à caractère encore bidimensionnel, mais plongé dans l'espace à trois dimensions.

En parallèle avec ces recherches, surtout vers les années cinquante et soixante, on a vu le développement de nouvelles méthodes de calcul des écoulements potentiels (parfaits) bidimensionnels et incompressibles, appelées méthodes des singularités. Elles partent de la même idée que la théorie des profils minces, connue sous le nom de la théorie de PRANDTL. Elles ont été, dans un premier temps, appliquées au problème aube à aube, puis par la suite appliquées au problème tridimensionnel. Leur avantage essentiel est de ramener le problème tridimensionnel en un problème réduit aux seules conditions aux limites.

Avec les modèles essentiellement basés sur l'hypothèse d'un fluide non visqueux et non turbulent, il était nécessaire d'introduire artificiellement l'effet majeur que sont les pertes. Ces pertes étaient naturellement prises en compte avec l'utilisation de résultats expérimentaux de grilles d'aubes. Avec l'introduction des modèles, leur prise en compte devient plus

difficile.

Pour tenir compte de ces pertes dans les turbomachines, des formulations semi-empiriques ont été développées. L'approche de LIEBLEIN fait une hypothèse sur le processus de perte : irréversibilité du frottement dans les couches limites d'une part et du mélange à l'aval de l'aube d'autre part. Il a pu évaluer les pertes en fonction des couches limites. Parallèlement, avec l'introduction du facteur de diffusion, on a été en mesure de prendre en compte de façon cohérente tous les ralentissements (aube à aube et méridien) qui contribuent à l'augmentation des pertes.

A la même période, une théorie de l'écoulement secondaire, qui est en fait l'écoulement transverse par rapport à la direction globale du canal, était développée pour mieux rendre compte de la structure tridimensionnelle des écoulements rotationnels. Son but était, d'une part, d'évaluer les pertes associées à cet effet, qui sont aussi des pertes par mélange, et d'autre part, de mieux prédire la déviation réalisée par les roues.

C'est seulement en 1952, que WU /2/ a élaboré une théorie générale sur l'étude des écoulements tridimensionnels, compressibles dans les turbomachines de type axiales, radiales et mixte. Cette théorie intègre à la fois les idées d'écoulement aube à aube, d'écoulement méridien et d'écoulement secondaire. Il s'agit d'une mise en équation du problème qui aurait dû déboucher sur un calcul réellement tridimensionnel. Du fait de difficultés rencontrées dans la mise en oeuvre du modèle dont les causes étaient mal connues, cette théorie a été couramment utilisée dans sa version quasi-tridimensionnelle, où on impose une condition cinématique : l'axisymétrie des surfaces de courant aube à aube. Cette méthode quasi-tridimensionnelle permet le calcul global correct des machines axiales et radiales bien

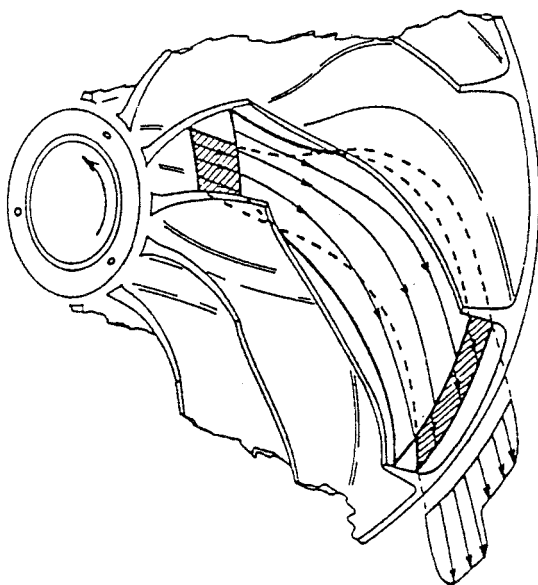
dessinées et fonctionnant au voisinage du débit nominal. Mais elle reste proche des techniques antérieures à la théorie de WU.

Par la suite, plusieurs travaux sont allés dans le sens d'une meilleure approche tridimensionnelle : écoulement secondaire, prise en compte des effets visqueux ...etc. Ces travaux font plus ou moins références à la théorie de WU. Nous proposons une revue des principaux modèles partant de la technique S1-S2.

2. - MODELES S1-S2

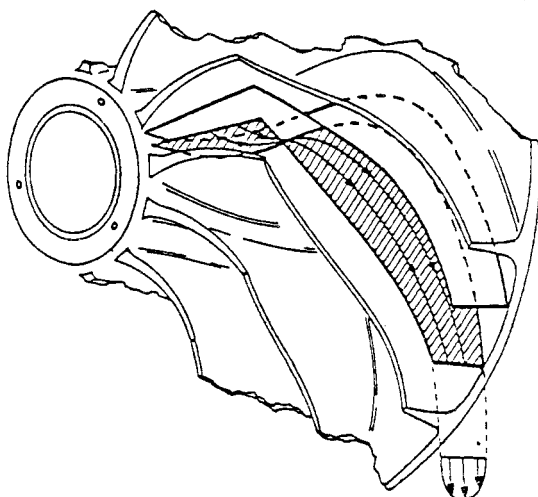
2.1 - Fonction de courant

L'idée est de décomposer l'écoulement tridimensionnel en deux écoulements bidimensionnels couplés. Les deux familles de surfaces de courant pourraient être quelconques pour des problèmes tels que celui de l'écoulement dans un tuyau où on pourrait prendre des surfaces qui dépendent de la forme de la conduite. En turbomachine, on choisit des surfaces auxquelles correspondent deux écoulements : le premier est connu sous le nom d'écoulement aube à aube. Il s'effectue sur une surface de courant appelée S1 (fig 1a), qui est sensiblement parallèle aux parois de l'arbre (ou de carter). Le second s'appelle écoulement méridien. Il s'effectue sur une surface de courant appelée S2 (fig 1b), qui est sensiblement parallèle à l'aubage de la machine.



S1
Surface

FIG 1a : Surface S1 (surface aube à aube)



S2
Surface

FIG 1b : Surface S2 (surface arbre-carter)

Pour obtenir les équations qui régissent les deux problèmes, la théorie de WU utilise deux projections de l'équation d'EULER perpendiculairement aux lignes de courant. Sur chaque surface de courant, la vitesse relative est exprimée à partir des variations de l'autre fonction de courant ou plus précisément, à partir du produit vectoriel du gradient de la fonction de courant par la normale à l'une des surfaces.

Deux équations sont ainsi disponibles. L'une, sur S1, régit l'écoulement de grille et sa déviation. L'autre, sur S2, régit l'écoulement méridien.

Cette méthode S1-S2 permet un important gain d'espace mémoire par rapport à la méthode totalement tridimensionnelle du fait de cette décomposition du problème en problèmes bidimensionnels de taille considérablement plus petite. Mais cette décomposition met en oeuvre le couplage des deux problèmes; couplage à la fois local par les équations et global par les conditions aux limites. Le processus de couplage se réalise avec une méthode itérative, où les deux problèmes sont alternativement traités. Il est donc assujéti à une condition de stabilité.

Des tentatives, pour coupler les deux calculs, ont été testées par : NOVAK et HEARSEY /3/, KATSANIS /4/ ..., où chaque auteur, confronté à ce problème de couplage, met en cause soit le couplage local, soit la discrétisation, et propose un modèle.

Le modèle le plus répandu a été évoqué plus haut. Il résout le problème de stabilité avec une hypothèse d'axisymétrie des surfaces de courant de type S1, C'est le modèle quasi-tridimensionnel. Cette hypothèse contrarie évidemment le développement tridimensionnel du champ, ce qui est d'autant plus perceptible que la charge est importante.

Cette hypothèse a pour inconvénient majeur de limiter

le champ d'application du modèle. En effet, pour des débits très inférieurs au débit nominal, les effets tridimensionnels deviennent prépondérants et le modèle n'est plus apte à prendre ces effets en compte. Par contre au voisinage du débit nominal et pour un aubage bien dessiné et moins chargé, le modèle quasi-tridimensionnel donne des résultats corrects. Cela vient du fait que l'axisymétrie est bien respectée par le champ réel.

Pour lever l'hypothèse d'axisymétrie locale, KRIMERMAN et ADLER /5/ ont développé un modèle basé sur l'idée que les difficultés étaient en partie au moins dûes à la discrétisation. Ils ont levé localement cette hypothèse et ont traité le problème de vrille. L'inconvénient de leur modèle est qu'ils supposent que l'écoulement est redevenu uniforme à l'aval de la roue. Ceci a pour effet d'empêcher le développement d'effets secondaires à la sortie du domaine de calcul. Cependant, ils ont effectivement fait avancer les résultats de calcul vers un schéma plus réaliste, notamment dans la roue, où on constate l'amorce d'un effet secondaire.

Cette amélioration est cependant très insuffisante. En effet, l'analyse des résultats expérimentaux et numériques réellement tridimensionnels, SALVAGE /6/ et MOORE /7/, montre qu'il existe un écoulement secondaire beaucoup plus important que dans /5/. Il correspond à une structure très complexe qui se développe dans le plan transversal (perpendiculaire à la direction principale de l'écoulement). L'amplitude de ce phénomène devient très importante lorsqu'on est dans le cas des canaux interaubes très longs, vrillés et alimentés par une forte vorticité relative. HORLOCK /8/ propose une étude théorique sur la détermination de cette vorticité secondaire.

2.2 - Écoulements secondaires

On peut différencier deux sortes d'écoulements

secondaires dans les turbomachines :

- Ceux qui proviennent du transport (non visqueux) de la vorticité relative on les appelle : écoulements secondaires non visqueux.

Dans les modèles classiques stationnaires utilisés pour le calcul de l'écoulement dans un canal interaubes, ce type d'effets secondaires ne peut être mis en évidence du fait des hypothèses utilisées: axisymétrie de la surface de courant S1, pour la technique de WU, ou axisymétrie à l'aval pour KRIMERMAN et ADLER.

-Ceux qui résultent de l'effet du gradient de pression et des forces d'inertie d'entraînement sur les couches visqueuses, (ou turbulentes) on les appelle : écoulements secondaires visqueux.

Le premier type d'écoulement secondaire apparaît lié au problème de stabilité notamment par le fait que le processus itératif de couplage des deux écoulements ne détermine pas totalement la solution dans le plan de sortie et par suite dans tout l'écoulement. Le problème mathématique de la stabilité du couplage a été traité par D.BUISINE /9/. Il a rendu le couplage libre au moyen de conditions aux limites d'entrée et de sortie bien choisies. Il a mis au point des moyens qui rendent la technique S1-S2 effectivement tridimensionnelle, ce qui a permis d'élargir le champ d'application du modèle tridimensionnel par rapport au modèle quasi-tridimensionnel.

Le second type (visqueux), qui met en jeu des forces et des conditions aux limites différentes, a été traité par BOSMAN /10/, VICTOROV /11/... Ils ont eu l'idée de traiter séparément le problème de l'écoulement secondaire sous la forme d'un troisième problème sur une surface S3, qui est sensiblement une

section du canal aube à aube (fig 2). Cependant, il n'y a pas nécessité, du point de vue mathématique, à résoudre ce problème en chaque point du domaine. Il y a en effet redondance et risque a priori de l'apparition de problèmes de compatibilité. Cependant, cette redondance locale a permis d'améliorer la représentation de l'écoulement.

Cette idée, associée au concept de couche limite, a d'ailleurs donné lieu au développement des méthodes dites paraboliques que nous développerions par la suite.

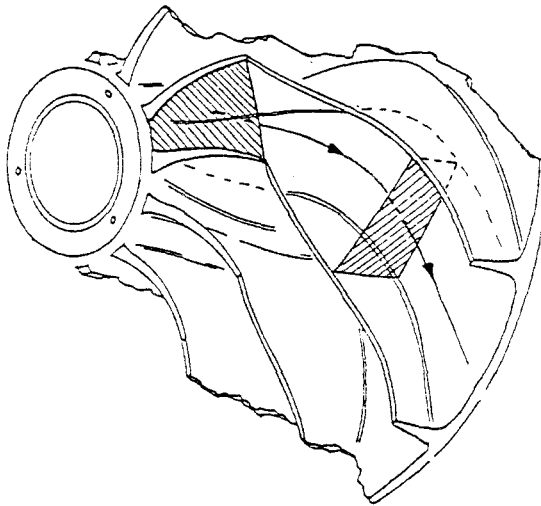


FIG 2 : Surface S3

2.3 - Prise en compte des pertes

Pour tenir compte de l'effet de la viscosité dans le calcul de l'écoulement autour d'une grille d'aubes, l'approche classique consiste à réaliser le calcul en deux étapes : on traite d'abord le problème avec la théorie des fluides parfaits, puis, on procède à une correction en utilisant les résultats obtenus à partir du modèle de couche limite.

Le concept de couche limite a évidemment été utilisé en turbomachines. L'hypothèse correspondante consiste à supposer que les effets de viscosité ne sont sensibles que dans une couche d'épaisseur limitée le long des parois des profils, et que la pression et les forces d'inerties sont uniformes dans l'épaisseur.

Le modèle ainsi proposé simplifie énormément le problème qui est alors supposé non visqueux hors du voisinage immédiat des parois. En pratique sa validité paraît assurée dans la mesure où les gradients de vitesse et de température suivant une direction perpendiculaire à la direction de l'écoulement, restent faibles. Reste cependant à évaluer l'état des couches limites, soumises aux forces d'inertie d'entraînement, et donc incluant les effets secondaires pariétaux.

Les effets des couches limites peuvent être introduits en prenant en compte les effets de déplacement des lignes de courant ainsi que les pertes locales autour des profils (écoulement à travers une grille d'aubes par exemple) ou globalement à l'aide des coefficients de blocage et de pertes (étude de l'écoulement dans un plan méridien).

Il existe deux types de méthodes qui sont couramment utilisées pour le calcul des couches limites tridimensionnelles. Les méthodes locales qui donnent une description plus fine de la

couche limite et les méthodes globales (ou intégrales) qui utilisent les équations de couche limite intégrées et qui sont plus simples à mettre en oeuvre. Dans la deuxième approche, le profil de vitesse de couche limite tridimensionnelle peut être décomposé en deux profils de vitesses dans deux directions différentes (fig 3) :

- Un profil de vitesse longitudinale dans la direction de l'écoulement extérieur.

- Un second profil de vitesse transversale dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. (effet secondaire pariétal). Mais cette dernière méthode pose le problème de fermeture ou de couplage qui a été très difficile à réaliser dans certains cas où il faut tenir compte de l'effet de courbure de paroi ou de rotation COUSTEIX /12/, AUPOIX et COUSTEIX /13/.

Les relations de fermeture sont obtenues à partir de familles de profils de vitesses longitudinales et transversales et il est très généralement admis que l'écoulement longitudinal se comporte comme un écoulement bidimensionnel.

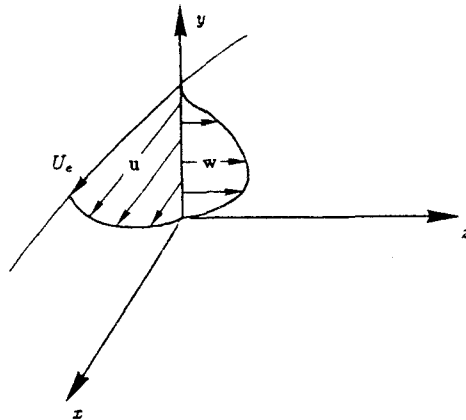


FIG 3 : Couches limites tridimensionnelles
- u vitesse longitudinale
- w vitesse transversale

3. - METHODES PARABOLIQUES (fluide visqueux)

Les méthodes paraboliques sont basées sur l'hypothèse que la variation des différentes grandeurs physiques dans la direction axiale de l'écoulement a une contribution faible sur les termes visqueux.

Ces méthodes utilisent les hypothèses suivantes : en général le décollement est exclu, ce qui évite la prise en compte de l'écoulement de retour, et les termes visqueux sont simplifiés par la suppression de la diffusion visqueuse dans la direction axiale de l'écoulement. (ce sont les dérivées secondes par rapport à la direction principale de l'écoulement qui sont éliminées)

Ces méthodes exigent un système de coordonnées défini à partir de la direction de l'écoulement principal.

On a , donc , une coordonnée axiale pour l'écoulement principal et deux coordonnées transversales qui définissent les plans transverses, plans perpendiculaires aux lignes de courant.

Les équations de NAVIER-STOKES peuvent être intégrées pas à pas dans la direction axiale de l'écoulement, grâce aux dérivées premières des grandeurs physiques par rapport à cette direction.

Les variables physiques sont décomposées en champ de base et en corrections visqueuses et non visqueuses, dans le plan transversal. Cette décomposition a pour but de corriger ces variables pour satisfaire l'équation de continuité. Cette méthode présente des analogies certaines avec d'une part les modèles de couches limites tridimensionnelles (dépendance axiale), et turbulentes (descriptions transverses).

Beaucoup de travaux sur les méthodes paraboliques ont été publiés. On trouve les travaux de : SPALDING et PATANKAR /14/, PATANKAR /15/, SPEZIALE /16/, BRILEY /17/...etc.

La méthode proposée par BRILEY traite l'écoulement dans les coins et explique l'interaction entre les régions visqueuses et non visqueuses. Il utilise les équations tridimensionnelles visqueuses qui sont résolues par intégration dans la direction de l'écoulement principal.

En terme général, la procédure se fait de la façon suivante :

- * $u(n+1)$ est calculée à partir de l'équation de quantité de mouvement projetée suivant la direction axiale, avec $p(n+1)$, qui est la pression, déterminée pour assurer la conservation du débit.

- * Premières approximations de $v(n+1)$ et $w(n+1)$, composantes transversales du vecteur vitesse, sont calculées à partir des deux autres composantes de l'équation de quantité de mouvement. Petites corrections de v et w calculées pour que $v(n+1)$ et $w(n+1)$ vérifient l'équation de continuité.

- * $p(n+1)$ est calculée à partir de l'équation de POISSON, construite à partir des composantes transversales de l'équation de quantité de mouvement et de l'équation de continuité.

4. - MODELES VISQUEUX ET NON VISQUEUX

Dans les travaux de LEBOEUF /18/, on trouve l'association de trois techniques :

-Calcul de l'écoulement bidimensionnel sur une surface de type S2, surface méridienne, cet écoulement est moyenné par rapport à la coordonnée circonférentielle.

-Calcul de couches limites bidimensionnelles sur S2 (couche limite d'arbre et de carter).

-calcul de l'écoulement secondaire visqueux sur une surface de type S3 analogue par certains points aux méthodes paraboliques.

Ce travail est basé sur la possibilité de découpler les équations de NAVIER-STOKES par l'utilisation du gradient de pression longitudinale obtenu à partir d'un autre schéma non visqueux. Les effets elliptiques sont pris en compte dans les directions transversales.

Pour éviter l'utilisation des équations de l'écoulement visqueux tridimensionnel, LEBOEUF a utilisé deux séries de problèmes bidimensionnels. Cette méthode a un rapport avec l'approximation quasi-tridimensionnelle des équations d'EULER du modèle de WU. Dans le cas traité, LEBOEUF considère que l'écoulement est défini dans tout le domaine vérifiant les équations d'EULER. Cet écoulement se fait sur une surface méridienne moyenne S2m sur laquelle sont écrites les équations de NAVIER-STOKES. Dans la pratique, la moyenne se fait par rapport à la coordonnée circonférentielle. Cette procédure est très similaire à celle utilisée par HIRSH et WARZEE /19/ quand il a défini l'approximation des équations de NAVIER-STOKES tridimensionnelles dans le plan méridien. Une conséquence directe de cette moyenne est que le traitement des équations est réalisé dans le plan méridien.

Les effets de courbure et de blocage sont pris en compte dans une équation supplémentaire relative à l'écoulement

non visqueux. Et les effets de coin et de sillage sont exclus de ce modèle.

LEBOEUF suppose que la composante de la vitesse longitudinale, suivant la direction principale de l'écoulement non visqueux, peut être décrite avec l'aide des modèles de couches limites bidimensionnelles suivant la normale. Il utilise une loi analytique qui introduit seulement deux paramètres pour décrire la vitesse longitudinale. Des équations intégrales sont utilisées pour calculer ces paramètres.

LEBOEUF définit une surface S3 par les normales à la direction principale de l'écoulement. Dans les directions transversales, les composantes de la vitesse sont déduites à partir de la composante longitudinale de la vorticité. L'avantage principal de cette formulation est d'éviter l'utilisation explicite du gradient de pression statique. L'avantage majeur de l'utilisation des surfaces S2m et S3 est de permettre de couvrir tous les principaux effets tourbillonnaires.

Dans les surfaces S3, les effets de vorticité sont pris en compte, et dans les surfaces S2m, ce sont tous les effets visqueux et turbulents qui sont calculés.

Pour réaliser le calcul complet de l'écoulement visqueux, il est possible de faire des calculs sur S2m et S3. Ceci génère des instabilités. Pour remédier à ce problème, LEBOEUF propose l'utilisation d'une formulation des équations de NAVIER-STOKES parabolis es sur S2m. Cela impose l'élimination des termes de diffusion visqueuse dans le sens de l'écoulement.

5. - ETUDE EXPERIMENTALE

Le développement des méthodes expérimentales (anémométrie à fil chaud, utilisation des sondes directionnelles,

vélocimétrie laser ...) a permis à l'expérimentateur de comprendre certains phénomènes qui apparaissent dans trois zones différentes à l'entrée de la roue (amont), à la sortie (aval) et dans la roue.

Dans ces zones, les vitesses subissent des variations importantes en fonction de la variation du débit. Ceci provoque l'apparition de beaucoup de phénomènes complexes.

Le phénomène de recirculation a été visualisé à l'entrée et à la sortie de la roue pour des débits inférieurs au débit nominal.

Une étude bibliographique et expérimentale a été faite par SEN /20/ où il conclut que l'apparition de l'écoulement de retour est lié au décollement de l'écoulement tridimensionnel sur le côté dépression de l'aube près du carter. Il ajoute que les trois principaux mécanismes qui apparaissent décisifs et importants à l'égard du décollement de l'écoulement et de son développement sont :

- les écoulements secondaires.
- l'effet de rotation et l'effet de courbure des lignes de courant sur la structure de la turbulence.
- le ralentissement de l'écoulement dont l'intensité est décrite par le facteur de diffusion.

Donc le phénomène de recirculation est un phénomène purement et complètement tridimensionnel et visqueux tout au moins à l'origine.

MAROUFI /21/ s'est intéressé à ce phénomène dans la zone commune entre la sortie d'une roue d'une pompe centrifuge et

l'entrée d'un diffuseur, et aussi à l'entrée. Il en résulte que le débit critique de recirculation en sortie de roue est plus grand que celui mesuré à l'entrée. Cependant, les phénomènes sont beaucoup plus difficiles à définir avec précision à la sortie immédiate de la roue compte tenu des perturbations causées par le passage des aubes au droit du point d'observation et du caractère instationnaire de l'écoulement qui en résulte.

TANAKA /22/, sur une pompe semi-axiale, a pu mettre en évidence la recirculation à l'entrée et à la sortie de la roue.

Les résultats de TANAKA confirment ce qui a été obtenu par les autres auteurs à l'entrée de la roue. A la sortie, cette recirculation se développe uniquement sur l'arbre, par contre MAROUFI a montré que pour des débits inférieurs au débit nominal, on assiste au développement de cette poche dans la zone commune entre la sortie de la roue et l'entrée du diffuseur même sur le carter. Et ce phénomène a tendance à avancer vers la sortie de la roue en fonction de la variation du débit.

On constate que les modèles cités auparavant ne rendent pas compte de tous les phénomènes complexes qui sont localisés dans les roues des turbomachines. Un certain nombre de questions restent posées concernant : le phénomène de décrochage, les pertes, la recirculation ...

6. - LES OBJECTIFS

Nous allons nous intéresser, d'une part au calcul de l'écoulement au point nominal et aux fortes charges près des points critiques. Ce qui justifie les centres d'intérêt qui sont d'une part les écoulements secondaires de type non visqueux qui peuvent conduire au décrochage, d'autre part, de type visqueux qui peuvent conduire aussi au décrochage et au phénomène de recirculation.

Ce phénomène de recirculation sera analysé d'une façon fine à partir des résultats disponibles de SEN. Cette analyse sera faite dans le but d'en tirer dans la mesure du possible des renseignements précis sur la structure de l'écoulement dans la zone recirculée et sur le rôle des couches limites dans l'aubage.

Ensuite, nous apportons une contribution à la modélisation de l'écoulement non visqueux qui pourra être associé à des couches limites tridimensionnelles dans les roues en proposant une discrétisation avec des exemples tests pour la valider.

Dans la dernière partie, en supposant résolu le calcul de cet écoulement, nous essayons de voir comment pourrions-nous prendre en compte les pertes dans un modèle plus global.

CHAPITRE II

ANALYSE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX CONCERNANT LE PHENOMENE DE RECIRCULATION A L'ENTREE

1. - Introduction

Des études expérimentales approfondies sont nécessaires pour compléter nos connaissances sur le caractère réel de l'écoulement dans les roues des turbomachines.

Un grand progrès a été marqué dans le champ expérimental par le développement des techniques de mesures. Il a permis aux expérimentateurs d'appréhender plus finement des phénomènes complexes tels que : recirculation, décrochage, écoulements secondaires...

Malgré ce progrès, il existe toujours des phénomènes dont la maîtrise complète échappe encore aux chercheurs. La recirculation qui est caractérisée par l'inversion de la composante débitante de la vitesse de l'écoulement à l'entrée et à la sortie de la roue à des débits inférieurs au débit critique, est l'un de ces phénomènes.

Plusieurs résultats expérimentaux sur l'apparition et le développement de la recirculation à l'entrée et à la sortie de la roue ont été publiés. On trouve les travaux de SEN /20/, MAROUFI /21/, TANAKA /22/, SCHIAVELLO /23/, MOORE /24/...

MAROUFI a procédé à des visualisations pour mettre en évidence la recirculation. Ces visualisations ont été réalisées à l'entrée de la roue en utilisant des fils de laine. Il a constaté que pour des débits importants, les fils prennent une direction axiale. Et en réduisant le débit, un changement brutal de comportement des fils les plus proches de la roue apparaît. Ces fils se mettent à osciller et à prendre une direction sensiblement tangentielle dans le sens de rotation de la roue avec une faible composante axiale dirigée vers l'entrée de la conduite d'aspiration.

D'après SEN, aux débits importants, l'écoulement dans la conduite d'aspiration à l'entrée de la roue est quasiment monodimensionnel. Cette structure monodimensionnelle peut être détruite en réduisant le débit (fig 4). Par conséquent, il y a formation d'une poche de recirculation dont le volume croît, au fur et à mesure que le débit diminue, et qui a tendance à réduire la section d'entrée efficace de la roue. Ceci permet l'augmentation de la vitesse débitante et une meilleure adaptation au bord d'attaque dans la zone centrale de la roue. Ici, comme dans le décrochage, on a affaire semble-t-il à un phénomène qui réorganise l'écoulement de façon à "décharger" certaines zones de la roue.

On peut dire qu'aux faibles débits, l'écoulement n'est plus uniforme à l'entrée et devient tridimensionnel du fait à la fois des trois composantes et de la dépendance des trois coordonnées, et aussi le cas échéant, de son caractère instationnaire. L'une des questions qui restent posées sur la

structure de l'écoulement dans cette zone recirculée concerne son degré d'organisation par rapport aux fluctuations dues à la turbulence, sa stationnarité et les conclusions à en tirer pour la modélisation. Une autre question serait d'établir un lien entre ce phénomène et le décollement dans la roue.

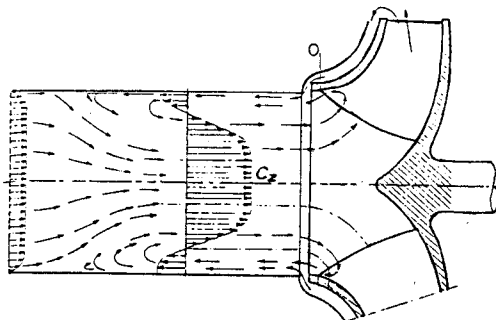


FIG 4 : Schématisation du phénomène de recirculation à l'entrée d'une roue de turbomachine

2. - Analyse des résultats de SEN

Les résultats de SEN sont ceux, qui à notre connaissance donnent en plus d'informations utilisables sur la structure de l'écoulement à l'amont de la roue. Car bien que la notion de temps ait été perdue, les résultats expérimentaux, du fait de la technique utilisée, portent quelques informations sur les fluctuations de cet écoulement.

Ces résultats concernent trois positions axiales en amont de la roue (fig 5). Ils sont obtenus au moyen d'une sonde directionnelle à cinq prises de pression disposées en croix, sachant que l'angle entre chaque trou et le trou central (ou frontal) est de 45° . (fig 6)

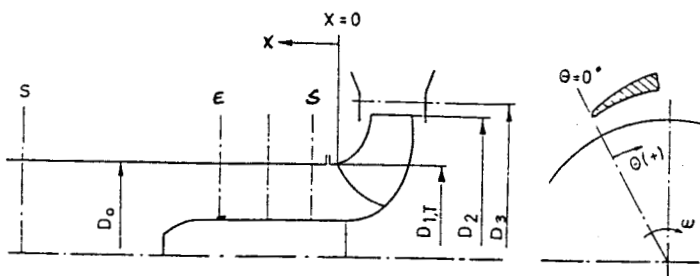


FIG 5 : Différentes positions axiales

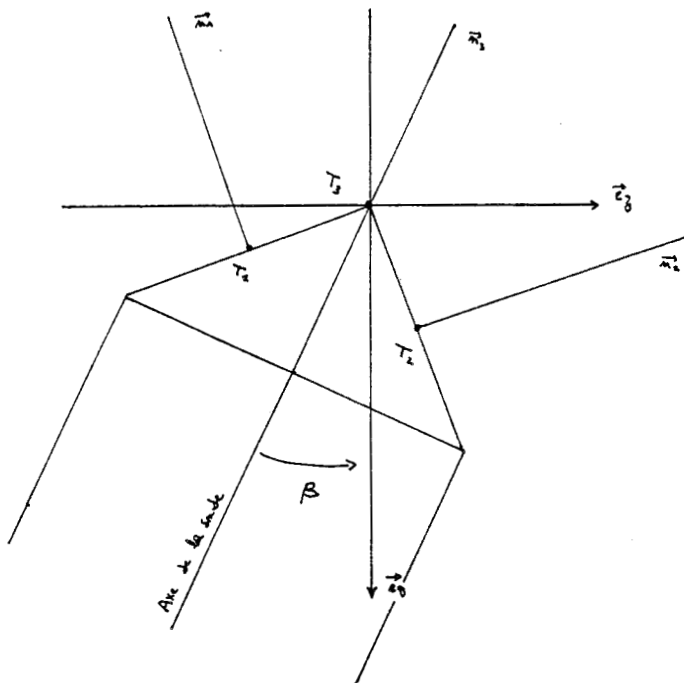


FIG 6 : Schéma simplifié d'une sonde

Pour chaque point de mesure, la sonde est orientée autour de son axe de façon à annuler la différence de pression entre le côté gauche et le côté droit. Cette méthode est bien connue sous le nom 'méthode de zéro'.

Partant des résultats de SEN pour une configuration donnée et pour un débit partiel donné, nous avons montré, en les injectant dans les équations locales (équation de continuité en particulier) qu'ils ne les satisfont pas, et en premier lieu l'équation de continuité avec notamment des écarts de l'ordre de 5 % sur le débit total.

Nous avons calculé les débits aux deux stations (entrée et sortie) à partir des résultats de SEN à débit nominal ($Q/Q_n = 1.02$) et à débit partiel ($Q/Q_n = 0.43$). Nous présentons un tableau de comparaison de ces débits calculés avec ceux du débitmètre.

! Q/Qn	! STATION	! STATION	! DEBIT-	! ECART	! ECART	! ECART
!	! (E)	! (S)	! METRE	! E - S	! E - D	! S - D
! 0.43	! 0.040	! 0.044	! 0.0463	! 10.0	! 15.75	! 5.23
! 1.02	! 0.097	! 0.096	! 0.1099	! 1.04	! 13.29	! 14.48

Nous constatons qu'à 1.02 fois le débit nominal, les résultats donnés par la sonde sont cohérents entre eux. L'écart en pourcentage entre le débit à la station E et le débit à la station S est de l'ordre de 1.04 %. Tandis qu'à 0.43 fois le débit nominal, l'écart mesuré par la sonde est plus important. Il est de l'ordre de 10 %. Cette dernière différence ne peut pas être imputée aux erreurs de relevé qu'on a pu faire. Nous sommes

donc amenés à poser la question suivante, à quoi est due cette différence.

En réponse à cette question, nous supposons que l'hypothèse d'axisymétrie n'est plus valable dans la zone recirculée et que les conditions de fonctionnement de la sonde ne sont pas satisfaites.

Pour évaluer la sensibilité de la sonde des fluctuations et en même temps tenter de montrer l'existence de ces fluctuations, nous allons développer un modèle d'écoulement instationnaire et de sonde.

3. - Simulation

Dans notre simulation, nous supposons que les écarts constatés sont dus à une erreur de moyenne dans le temps. Pour montrer ceci, on a formulé deux hypothèses : l'une concerne l'écoulement, l'autre la sonde.

L'écoulement est supposé partagé en deux écoulements stationnaires, axisymétriques par morceaux séparés par une interface de glissement.

Pour le modèle de sonde, nous considérons une sonde à trois trous sensibles uniquement aux vitesses axiales et circonférentielles (la vitesse radiale perçue par les autres trous est supposée avoir une influence négligeable).

Nous supposons que la sonde perçoit des impulsions pendant un intervalle de temps ALFA pour l'écoulement 1 et $(1 - \text{ALFA})$ pour l'écoulement 2. Nous supposons en plus que la sonde traverse les interfaces des écoulements 1 et 2 instantanément, qu'elle n'est pas sensible aux variations statiques et qu'elle perçoit sur chaque trou des impulsions

relatives sous forme :

$$\int_0^1 p \, dt = 1/2 \int_0^1 \rho V_n^2 \, dt = \text{ALFA } p_1 + (1 - \text{ALFA}) p_2$$

avec V_n la composante normale de la vitesse pour le trou considéré.

Nous supposons que les trous perçoivent cette impulsion d'une façon indépendante les uns des autres, nous supposons aussi que lorsque le trou est à l'abri de la sonde, l'impulsion est nulle (le trou ne mesure pas la dépression de culot).

4. - Mise en équations

Dans ce problème, nous avons cinq inconnues qui sont :

- deux composantes de la vitesse absolue de l'écoulement 1 projetée dans le plan (\vec{e}_0, \vec{e}_z) .

- deux autres composantes de la vitesse absolue de l'écoulement 2 projetée dans le même plan que la première.

- la cinquième qui est la dernière inconnue correspond à l'intervalle de temps ALFA.

Les équations sont d'abord celles de la sonde, puis celles qui traduisent les contraintes imposées et qui permettent de fermer le système.

Equations relatives à la sonde

Une équation qui provient de la différence de pression entre le trou gauche et le trou droit, prise égale à zéro :

$$P_1 - P_2 = 0$$

où P1 est la pression moyenne perçue au trou 1 pendant un intervalle de temps ALFA pour l'écoulement 1, et (1-ALFA) pour l'écoulement 2. La même chose pour la pression P2 au trou 2.

Une équation construite à partir de la courbe d'étalonnage de la sonde utilisée par SEN, sachant que le coefficient d'étalonnage est égal à 1.65 (rapport de la pression dynamique du trou frontal et de la pression dynamique de l'un des trous latéraux) lorsque la sonde est parallèle à l'écoulement.

Manquant d'informations sur ce coefficient d'étalonnage, nous étions obligés de faire nos calculs pour deux cas différents:

- Premier cas où ce coefficient est égal au rapport de P3 par P1.

$$P3 - 1.65 \times P1 = 0$$

- Second cas où ce coefficient d'étalonnage est égal au rapport de P3 par (P3 - P1).

$$P3 - 1.65 \times (P3 - P1) = 0$$

Nous n'avons pas trouvé de solutions pour celui-ci. Donc c'est le premier cas qui est conservé.

Une troisième équation relative au trou frontal, supposé percevoir la pression dynamique donnée par SEN :

$$P3 - P_0 = 0$$

avec $P_0 = \rho \cdot 0.5 (VZ^2 + V\theta^2)$ où VZ et V θ sont les valeurs déduites des mesures de SEN.

Equations relatives à l'écoulement 1 et 2

Pour fermer le système, nous imposons dans un premier temps la vitesse axiale $VZ1$ de l'écoulement 1 et la vitesse circonférentielle $V\theta 2$ de l'écoulement 2 afin de tester ce dernier, où $VZ1$ et $V\theta 2$ sont des paramètres que nous allons faire varier.

Le système suivant :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} P1 - P2 = 0 \\ P3 - 1.65 \times P1 = 0 \\ P3 - P_0 = 0 \\ \text{donnée de } VZ1 \\ \text{donnée de } V\theta 2 \end{array} \right.$$

est un système non linéaire que nous résolvons par la méthode itérative de NEWTON-RAPHSON.

L'écriture du système I en fonction de $VZ1$, $V\theta 1$, $VZ2$, $V\theta 2$ et ALFA est dans l'annexe 1.

5. - Résultats et Discussion

5.1 - Cas test du système posé

Un premier calcul a été fait à partir du système (I). Il a été effectué pour différentes positions axiales en balayant différentes positions radiales partant de l'arbre jusqu'au

carter. Les résultats obtenus sont présentés, en fonction de VZM et VØM, (qui sont respectivement les vitesses moyennes axiale et circonférentielle) sous forme de tracés des iso ALFA. Ces tests ont été effectués pour un VZ1 fixé et un VØ2 qui varie. (voir figures 7, 8, 9 et 10)

Nous constatons que ces résultats restent sur une courbe unique (dans un voisinage autour du point de SEN), nous constatons aussi que la vitesse mesurée de SEN se trouve sur cette courbe, ce qui tend à montrer que sous les contraintes et sous les hypothèses précédentes dûes aux mesures de SEN, la sonde ne peut avoir perçu une vitesse moyenne de composantes totalement arbitraires. Pour vérifier l'équation de continuité, nous n'aurions donc, qu'une composante de vitesse libre, soit la composante axiale soit la composante circonférentielle.

5.2 - Avec la condition de stationnarité

Jusqu'à présent, le choix de VZ1 et de VØ2 était arbitraire. Pour lever en partie cette indétermination, nous supposons que près de la roue, la structure de l'écoulement tourne en bloc avec la roue, ce qui se traduit par une hypothèse de stationnarité, et une équation de glissement de l'écoulement 1 sur l'écoulement 2. Cette équation remplace la cinquième équation du système (I) et s'écrit sous la forme :

$$WZ1 \cdot WØ2 - WZ2 \cdot WØ1 = 0$$

En parallèle, nous avons injecté une seconde condition qui traduit le glissement de l'écoulement 2 dans la roue par l'équation suivante :

$$VØ2 - U2 + VZ2 \cdot \cotg(\beta) = 0$$

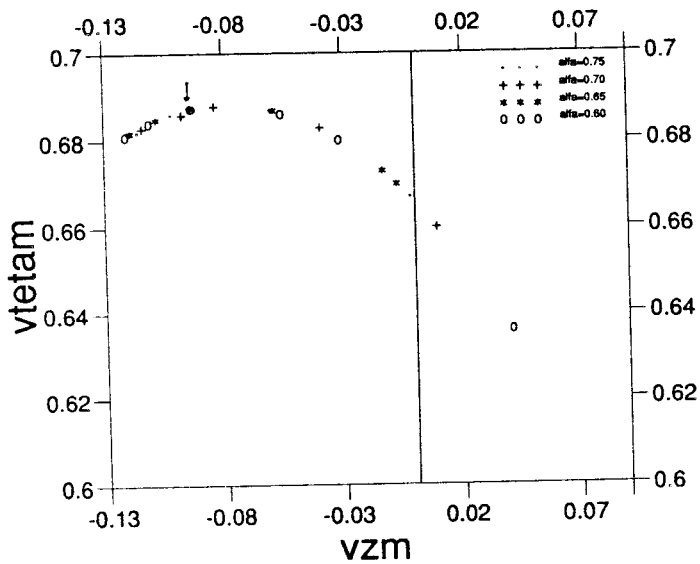
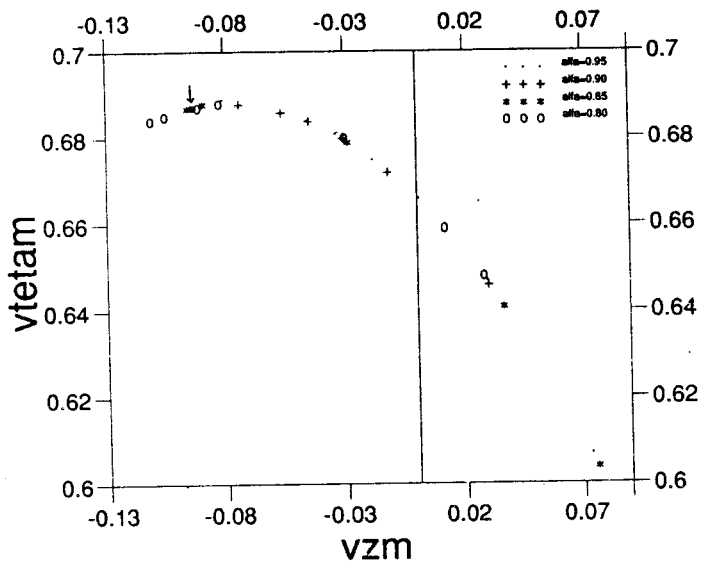


FIG 7 : 1ère position axiale-1ère position radiale
 avec ↓ vecteur vitesse de SEN
 $VZ = -0.095$ et $V\theta = 0.687$

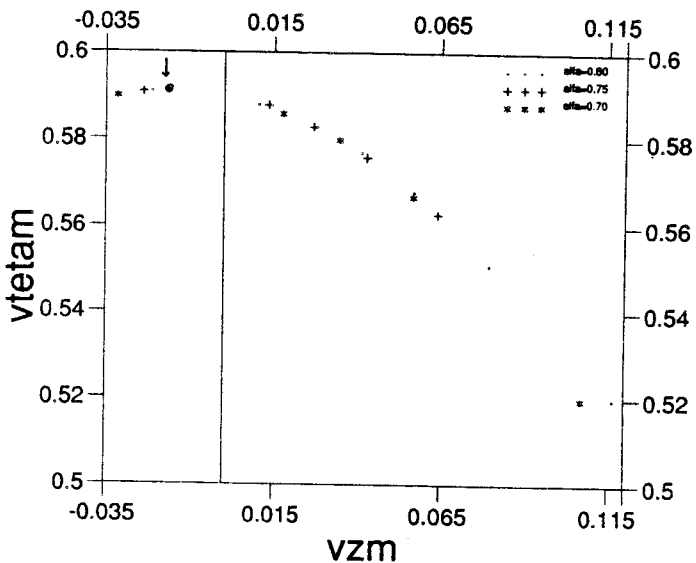
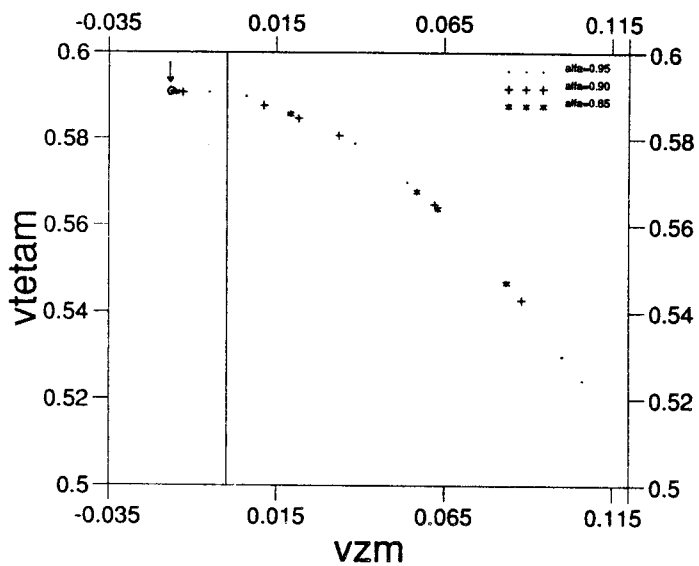


FIG 8 : 1ère position axiale-2ème position radiale
avec \hat{e} vecteur vitesse de SEN
VZ = -0.017 et Vθ = 0.591

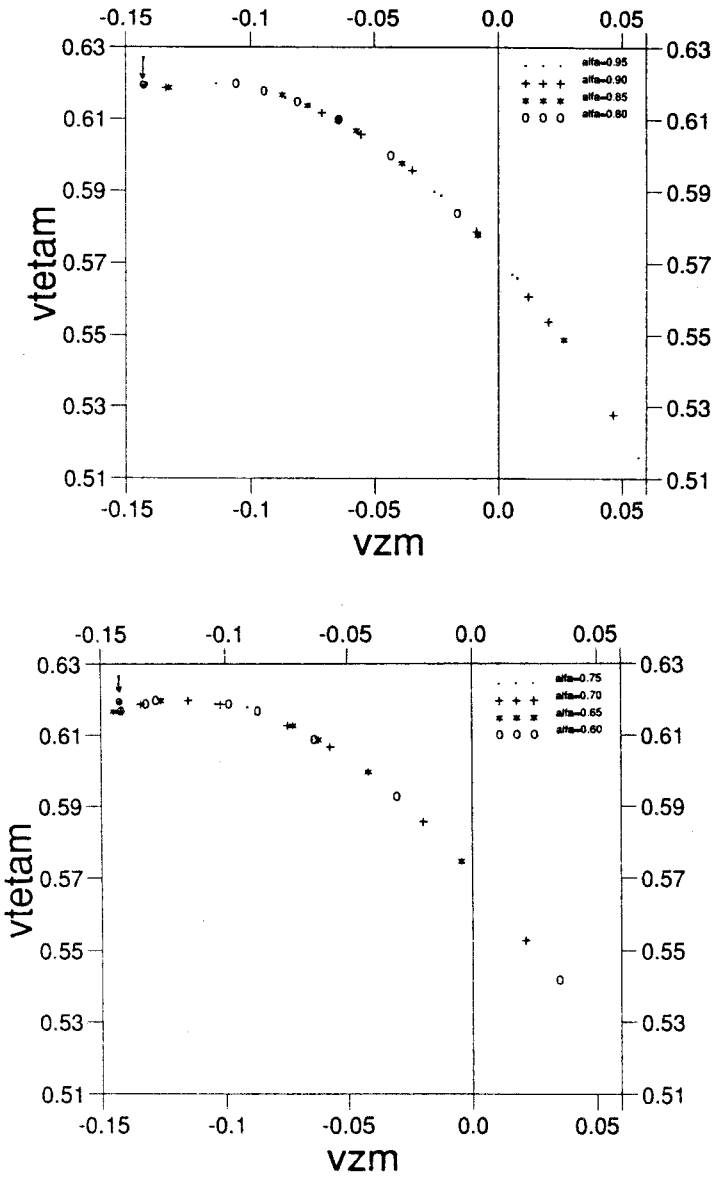


FIG 9 : 2ème position axiale-1ère position radiale
 avec \vec{v} vecteur vitesse de SEN
 $VZ = -0.143$ et $V\theta = 0.617$

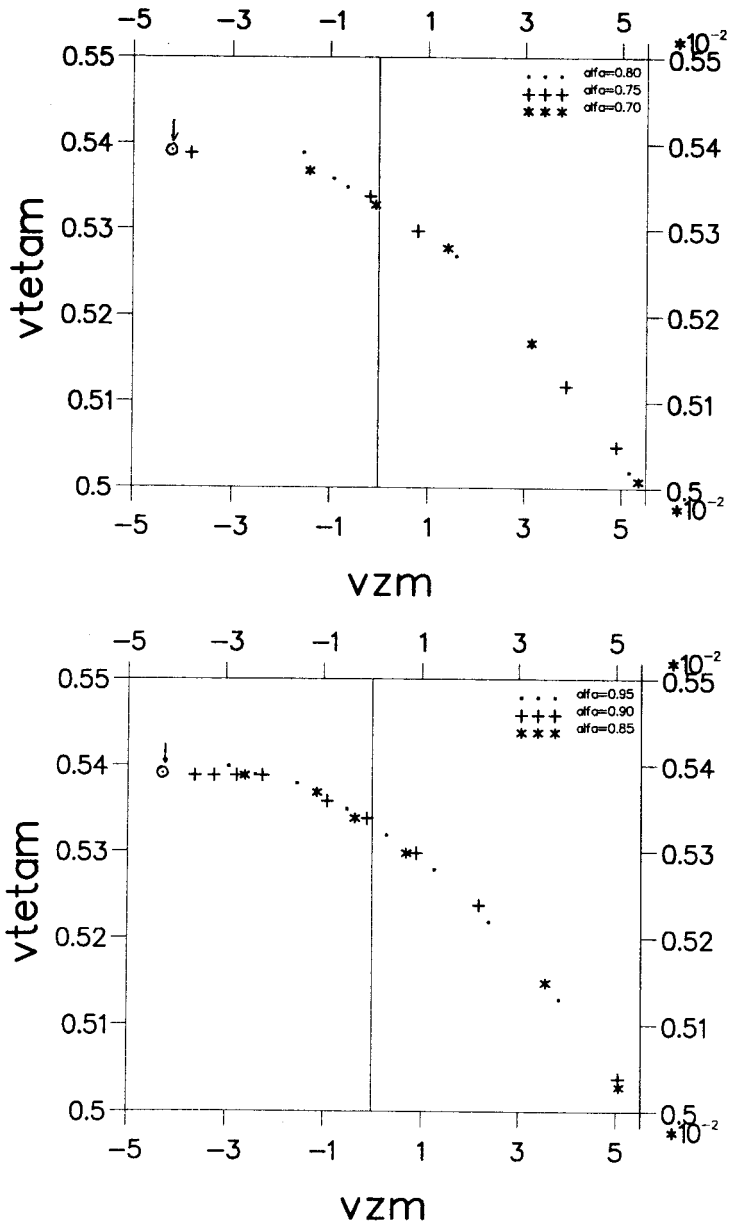


FIG 10 : 2ème position axiale-2ème position radiale
 avec $\downarrow \circ$ vecteur vitesse de SEN
 $VZ = -0.043$ et $V\theta = 0.539$

Ceci nous a amené à des résultats suivants :

- près de l'arbre, nous trouvons les solutions de SEN.

- près du carter, nous obtenons une infinité de solutions (fig 11,12) dont :

- La solution de SEN.

- Une solution dite "BASSE", dans laquelle nous obtenons des vitesses $V\theta_1$ supérieures à $V\theta_2$, où $V\theta_2$ est de beaucoup inférieure à U (vitesse périphérique de la roue), ce qui n'est pas vraisemblable (il s'agit d'une inversion de 1-2). Dans cette solution, la condition de glissement dans la roue, n'est pas du tout vérifiée.

- Une solution "HAUTE" dans laquelle, les vitesses sont vraisemblables (c'est à dire que $V\theta_2$ est beaucoup supérieure à $V\theta_1$, et VZ_2 est négative), dont certaines respectent la condition de glissement dans la roue. Ce sont ces dernières solutions que l'on retient à priori, car elles assurent la continuité de la quantité de mouvement. (analogue à une condition de KUTTA-JOUKOWSKI)

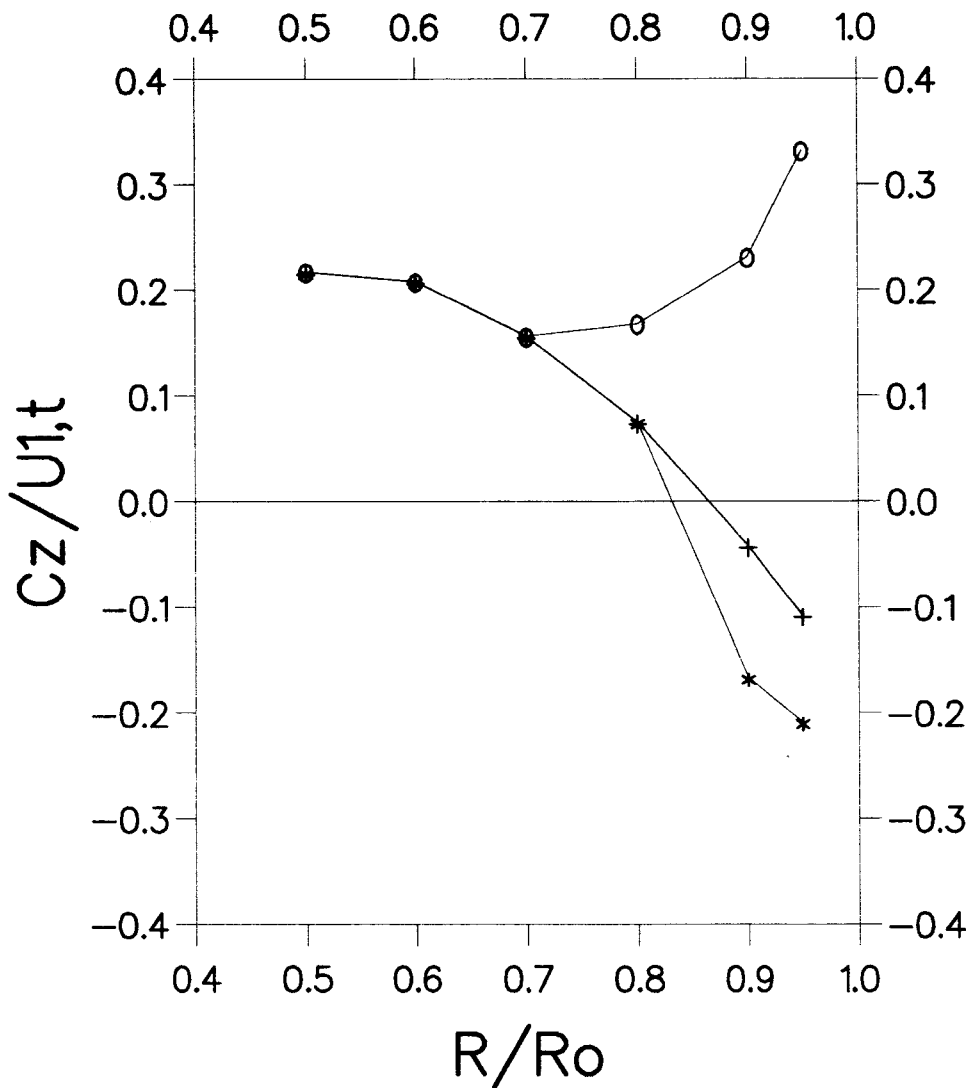


FIG 11 : Valeurs de la vitesse axiale à la station E
 +- : valeurs de SEN
 -o- : valeurs numériques (courbe haute)
 -* : valeurs numériques (courbe basse)

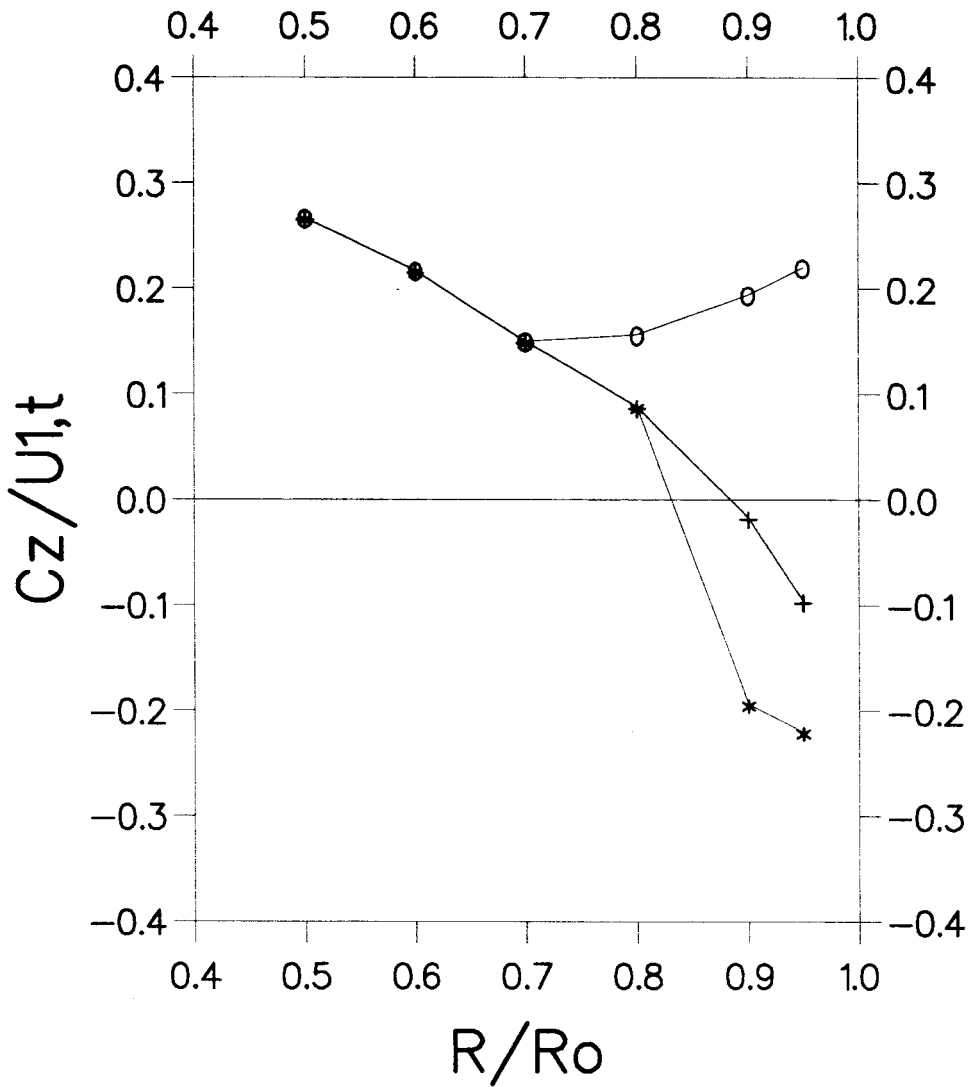


FIG 12 : Valeurs de la vitesse axiale à la station S

-- : valeurs de SEN

-o- : valeurs numériques (courbe haute)

-*- : valeurs numériques (courbe basse)

5.3 - Comparaison des débits

Nous avons calculé le débit aux stations E et S (entrée et sortie, (fig 5) pour les résultats de SEN et pour nos résultats (courbes HAUTE et BASSE).

Ce débit est calculé à partir de la formule :

$$Q = \int r.WZ dr$$

par la méthode des TRAPEZES, sachant que l'erreur commise est de l'ordre de : 6.10^4 . L'erreur due à la lecture est évaluée à 14.10^4 .

Tableau de comparaison des débits

	DEBIT ENTREE	DEBIT SORTIE	ECART (E-S) en pourcent
SEN	0.040	0.044	10.0
!courbe BASSE	0.024	0.021	14.0
!courbe HAUTE	0.092	0.084	09.5

Comme nous l'avons signalé auparavant, seulement la solution "HAUTE" nous intéresse puisque les vitesses sont vraisemblables. Si nous comparons le débit de cette solution avec celui de SEN, nous constatons un grand écart entre les deux. La solution qui consisterait à faire coexister sur une certaine

hauteur (rayon) cette solution près du carter avec celle de SEN n'est pas vraisemblable notamment à cause de la vitesse débitante trop élevée. Ceci nous amène à réviser nos hypothèses sur la structure de l'écoulement 1 et 2, en supposant que la structure de l'écoulement est intermédiaire entre l'axisymétrie parfaite et la structure que nous avons décrite.

comparaison entre les débits d'entrée et de sortie

Quand nous remontons vers l'amont, nous constatons un défaut de débit de 10 % entre l'entrée et la sortie. Ceci pourrait s'expliquer a priori de la même manière que précédemment, c'est à dire par la perception par la sonde des traces des sillages.

En fait ceci nous paraît peu vraisemblable parce que cela supposerait une amplification de la trace des sillages plutôt qu'une atténuation lorsqu'on avance vers l'amont.

Par ailleurs, comme les couches limites ne semblent pas pouvoir justifier cet écart, la seule explication que l'on retient est que loin à l'amont (en tête de la zone recirculée), il y a vraisemblablement des fluctuations de direction de la vitesse de grande amplitude qui perturbent la sonde.

Ces fluctuations, puisqu'elles ne sont pas dues au défilement de sillage, pourraient être imputées à un phénomène instationnaire tournant, structuré différemment que celui dans notre modèle.

Comparaison entre débit débitmètre et résultats de SEN

Le débit indiqué par le débitmètre est égal à 0.0463 .

D'après les valeurs du tableau, nous constatons un écart de 5 % entre le débit du débitmètre et le débit calculé à partir des résultats de SEN. Cet écart reste supérieur aux erreurs que l'on a pu évaluer et ne peut pas se justifier semblait-il dans les hypothèses de stationnarité et d'axisymétrie de l'écoulement. De plus la prise en compte des couches limites accentuerait cet écart.

Nous avons noté, dans les résultats de MAROUFI à la sortie de la roue, le même genre d'écart que les nôtres. Ceci peut être imputé à la non axisymétrie de l'écoulement à la sortie. La structure générale de l'écoulement est fortement dépendante de la variable circonférentielle et du temps.

6. - Conclusion

Pour avoir une plus grande sensibilité à ces phénomènes, il aurait fallu d'une part disposer des stations axiales beaucoup plus proches de la roue pour détecter un sillage plus marqué et, d'autre part de développer un modèle de fonctionnement de la sonde dans un écoulement plus réaliste, faisant intervenir les cinq trous et partir d'une répartition de la vitesse plus continue que celle choisie.

Cependant, il semble d'après ces premiers résultats que l'écoulement dans la zone recirculée près de la roue, ne peut pas être assimilé à un écoulement méridien moyen stationnaire, axisymétrique, turbulent. En effet, les écarts de vitesses perçues par la sonde : (10 % en moyenne, donc localement encore plus importants) montrent que cette sonde ne fonctionne pas partout dans les conditions de stationnarité requises. On en

déduit que l'écoulement est instationnaire et structuré en bouffées de taille importante.

Pour compléter ces premières informations, il serait nécessaire de disposer de mesures qui décrivent la structure de l'écoulement notamment dans les couches limites et dans le plan des bords d'attaque.

CHAPITRE III

MISE EN EQUATIONS-DISCRETISATION

1. - INTRODUCTION

Le problème que nous traitons ici concerne l'écoulement tridimensionnel stationnaire non visqueux. Cet écoulement est régi par les équations d'EULER écrites dans un repère relatif (repère lié à la roue). Ces équations sont résolues en éliminant la pression. Le problème est formulé à partir de deux fonctions de courant qui définissent deux surfaces de courant sécantes S1 et S2.

L'objectif est de discrétiser les équations locales. Cette discrétisation est testée sur un opérateur laplacien tridimensionnel avec des conditions aux limites qui ne sont pas celles des écoulements inter-aubes dans les roues de turbomachines, mais qui permettent la comparaison avec des solutions analytiques.

2. - EQUATIONS LOCALES

La description de l'écoulement réel passe par l'écriture de trois lois de conservations qui sont :

* conservation de la masse (équation de continuité).

* conservation de la quantité de mouvement (équation du principe fondamental de la dynamique).

* conservation de l'énergie (équation du premier principe de la thermodynamique).

Les deux premières lois se traduisent par les équations suivantes :

* Equation de continuité:

$$\operatorname{div} (\rho \cdot \vec{W}) = 0 \quad (1)$$

* Equation de quantité de mouvement:

$$\frac{d\vec{W}}{dt} + \vec{w} \wedge \vec{W} - \vec{w}^2 \vec{r} = - 1/\rho \overrightarrow{\operatorname{grad}} P \quad (2)$$

avec : \vec{W} vitesse relative
 ρ masse volumique
 P pression
 \vec{w} vitesse de rotation

En utilisant l'expression suivante :

$$\vec{dW}/dt = \vec{W} \cdot \text{grad}(\vec{W}) + \vec{w} \wedge \vec{W} = \text{grad}(W^2/2) + \text{rot}(\vec{V}) \wedge \vec{W} \quad (3)$$

(ici l'écoulement est supposé stationnaire en repère relatif)

$$\text{avec} \quad \text{rot}(\vec{V}) = \text{rot}(\vec{W}) + 2 \vec{w} \quad (4)$$

$$\text{et} \quad \vec{V} = \vec{W} + \vec{w} \wedge \vec{r}$$

où \vec{V} vitesse absolue

$\vec{w} \wedge \vec{r}$ vitesse d'entraînement avec r , rayon vecteur définissant la position du point considéré par rapport à l'axe de rotation de la machine.

l'équation (2) devient :

$$1/\rho \text{ grad}(P) + \text{grad}(W^2/2 - w \cdot r^2/2) = -2w \wedge W - \text{rot}(W) \wedge W \quad (5)$$

Pour faire apparaître les variations de l'enthalpie h et de l'entropie s avec la pression, on utilise la relation thermodynamique :

$$1/\rho \text{ grad}(P) = \text{grad}(h) - T \text{ grad}(s) \quad (6)$$

En définissant la rothalpie I par la relation :

$$I = h + W^2/2 - w \cdot r^2/2 \quad (7)$$

l'équation (5) devient, après avoir éliminé la pression et combiné les relations (5), (6) et (7) :

$$\vec{W} \wedge \text{rot}(\vec{V}) = \text{grad}(I) - T \text{grad}(s) \quad (8)$$

Dans cette équation, puisque le fluide est non visqueux, on a :

$$(\vec{W} \cdot \vec{\nabla}) s = 0$$

ce qui veut dire que \vec{W} est perpendiculaire à $(\vec{\nabla}s)$, donc s est une fonction de ψ_1 et ψ_2 , où ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions de courant qui définissent les deux surfaces de courant S_1 et S_2 . On en déduit que $(\vec{\nabla}I)$ est aussi perpendiculaire à \vec{W} , donc I est aussi fonction de ψ_1 et ψ_2 .

L'équation (5) montre que la quantité $(P/\rho + W/2 - w^2/r)$ se conserve le long d'une trajectoire dans la roue si l'écoulement est stationnaire et si le fluide est non visqueux. En effet, on trouve dans ce cas en multipliant scalairement l'équation (5) par \vec{W} , l'expression suivante :

$$\vec{W} \cdot \text{grad} \left(W/2 + P/\rho - w^2/r \right) = 0 \quad (9)$$

3. - FONCTION DE COURANT

L'équation de continuité (1) a une intégrale première qui s'écrit sous la forme :

$$\vec{W} = 1/\rho (\overrightarrow{\text{grad}}(\psi_1) \wedge \overrightarrow{\text{grad}}(\psi_2)) \quad (10)$$

En injectant l'équation (10) dans (8), on trouve les deux expressions suivantes:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \psi_2 = dI/d\psi_1 - T ds/d\psi_1 - 2w d\psi_2/dz \quad (11)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{W} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \psi_1 = dI/d\psi_2 - T ds/d\psi_2 - 2w d\psi_1/dz \quad (12)$$

En appliquant la formule suivante :

$$\text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$$

, avec $\vec{A} = \vec{W}$ et $\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}} \psi_1$ ou $\overrightarrow{\text{grad}} \psi_2$, aux deux termes de gauche de (11) et (12), et en tenant compte de l'équation (10), on obtient les deux expressions (13) et (14) :

$$\begin{aligned} \text{div} (\vec{W} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \psi_2) &= \text{div} 1/\rho (\overrightarrow{\text{grad}} \psi_2 \cdot (\overrightarrow{\text{grad}} \psi_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \psi_2) \\ &\quad - \overrightarrow{\text{grad}} \psi_1 \cdot (\overrightarrow{\text{grad}} \psi_2)^2) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{div} (\vec{W} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \psi_1) &= \text{div} 1/\rho (\overrightarrow{\text{grad}} \psi_2 \cdot (\overrightarrow{\text{grad}} \psi_1)^2 \\ &\quad - \overrightarrow{\text{grad}} \psi_1 \cdot (\overrightarrow{\text{grad}} \psi_2 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \psi_1)) \end{aligned} \quad (14)$$

et si on reporte (13) et (14) dans l'équation (8), on trouve les deux expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} 1/\rho (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi_2 . (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi_1 . \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi_2) - \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi_1 . (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi_2)^2) \\ = dI/d\psi_1 - T ds/d\psi_1 - 2w d\psi_2/dz \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} 1/\rho (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi_2 . (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi_1)^2 - \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi_1 . (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi_2 . \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi_1)) \\ = dI/d\psi_2 - T ds/d\psi_2 - 2w d\psi_1/dz \end{aligned} \quad (16)$$

Les équations (10), (15) et (16) constituent le système local à résoudre .

Il reste à définir le système de coordonnées choisi et la méthode de discrétisation.

4. - SYSTEME DE COORDONNEES

Les équations générales, définies dans le paragraphe précédent, sont écrites dans un système de coordonnées locales curvilignes non orthogonales défini en tout point de l'espace de la roue par trois vecteurs unitaires : (\vec{e}_m , \vec{e}_n , \vec{e}_l).

Ce système de coordonnées reste proche des lignes de courant. Avec m une ligne coordonnée qui est sensiblement parallèle à l'écoulement.

Pour maintenir, le système de coordonnées, dans les diverses zones: roue, amont, aval..., les deux autres lignes coordonnées n et l sont maintenues sur des surfaces de révolutions sensiblement perpendiculaires à l'écoulement méridien moyen, tel que par exemple la surface contenant les bords d'attaque.

5. - DISCRETISATION - MAILLAGE

5.1 - MAILLAGE:

Le maillage est structuré en i, j, k suivant les lignes coordonnées m, n et l définies ci-dessus. Il peut être déformé suivant une seule direction, où deux, où suivant les trois directions.

5.2 - DOMAINE DE CONTROLE:

Le choix d'une méthode de discrétisation est la tâche la plus difficile. Car, il faut la choisir de façon qu'elle puisse supporter sans difficultés des variations brutales de pas et des déformations de maillage sans que la solution ne soit trop affectée.

L'idée de la discrétisation en termes de bilan de flux a pour but de rendre plus compacte et plus simple les expressions des équations de l'écoulement considéré.

Pour cela, il faut définir le domaine de contrôle qui est un domaine centré. Il comprend 24 facettes (fig 13) Le problème maintenant est d'exprimer le flux à travers ces 24 facettes.

Pour cela, on découpe le domaine, qui est un hexaèdre, en huit petits volumes, afin de faciliter le calcul du flux

total. Chacun de ces volumes appelé 'quartier' (fig 14), est limité à l'extérieur par trois facettes. Les trois facettes communes aux autres 'quartiers' ne sont pas utilisées dans le calcul du flux.

Un premier pas permet de calculer le flux élémentaire de chacune des trois facettes. Ceci donne un flux partiel d'un quartier qui est généré sur l'ensemble du volume pour avoir le flux total.

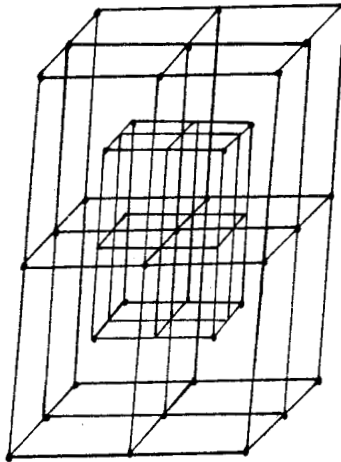


FIG 13 : Domaine de contrôle à 24 facettes

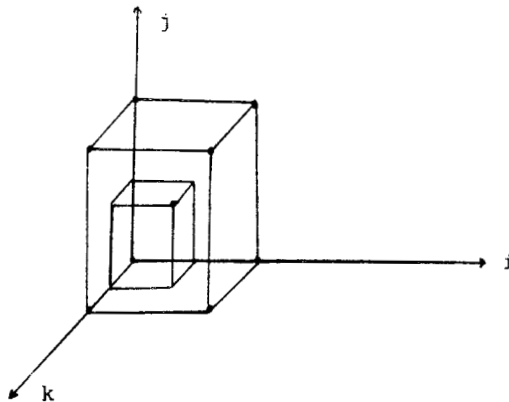


FIG 14 : Sous-domaine appelé "quartier"

5.3 - DISCRETISATION

Rappelons que l'idée de départ est de discrétiser en termes de bilans de flux. D'où l'utilisation de la formule de la divergence :

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} (\vec{B}) \, dV = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$$

avec S : surface fermée, frontière d'un domaine (V) tridimensionnel, et \vec{n} vecteur unitaire normal à S dirigé vers l'extérieur. \vec{B} est de la forme $A \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} (X)$.

5.3.1 - Ecriture de l'opérateur gradient:

Par commodité pour le calcul, nous avons choisi une représentation matricielle de tous les opérateurs de base dont nous avons besoin :

- * opérateur gradient d'un champ de scalaire.
- * produit scalaire de deux gradients.
- * produit vectoriel de deux gradients.

Nous appelons \vec{U}_i (avec $i=m,n,1$) les vecteurs unitaires de la base locale; et par \vec{U}^i les vecteurs unitaires de la base duale .

L'opérateur gradient d'un champ de scalaire s'écrit de la façon suivante :

$$\vec{\nabla} \psi = \partial \psi / \partial x^i \vec{e}^i$$

avec x^i coordonnée métrique, et \vec{e}^i base duale.

$$\vec{\nabla} \psi = 1/V_0 \cdot (\partial \psi / \partial x^i) \cdot \begin{pmatrix} \vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3 \\ \vec{U}_3 \wedge \vec{U}_1 \\ \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 \end{pmatrix}$$

où V_0 est le déterminant du jacobien formé par les vecteurs unitaires de la base locale \vec{U}_i .

$$\vec{\nabla} \psi = 1/V_0 \cdot (\partial \psi / \partial x^i) \cdot \left[\text{AUO} \right]$$

avec $\left[\text{AUO} \right]$ matrice formée par les vecteurs de la base duale.

A partir de l'expression du gradient, nous pouvons déterminer le flux élémentaire $d\psi$ à travers un élément de surface dS .

$$d\psi = \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{dS}$$

$$\text{On pose } \vec{dS} = ds \cdot \left[\text{AUI} \right] \quad \text{avec } \left[\text{AUI} \right] = \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix}$$

$$d\psi = 1/V_0 \cdot (\partial \psi / \partial x^i) \cdot \left[\text{AUO} \right] \cdot \left[\text{AUI} \right] \cdot (ds)$$

$$d\psi = (\partial\psi/\partial x^i) \cdot [AUN] \cdot (ds)$$

5.3.2 - Produit scalaire de deux gradients:

Soit $\vec{\nabla}\psi_1$ et $\vec{\nabla}\psi_2$, les gradients de deux fonctions de courant ψ_1 et ψ_2 . Leur produit scalaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{\nabla}\psi_1 = 1/V_0 \cdot (\partial\psi_1/\partial x) \cdot [AUO]$$

$$\vec{\nabla}\psi_2 = 1/V_0 \cdot (\partial\psi_2/\partial x) \cdot [AUO]$$

$$\vec{\nabla}\psi_1 \cdot \vec{\nabla}\psi_2 = 1/V_0 \cdot (\partial\psi_1/\partial x^i) \cdot [AUO] \cdot (\partial\psi_2/\partial x^j) \cdot [AUO]$$

$$\text{et } [AUO] \cdot [AUO] = \begin{bmatrix} \vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3 \\ \vec{U}_3 \wedge \vec{U}_1 \\ \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 \end{bmatrix} \cdot [\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3, \vec{U}_3 \wedge \vec{U}_1, \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2] = V_0 \cdot [AUN]$$

Finalement on obtient :

$$\vec{\nabla}\psi_1 \cdot \vec{\nabla}\psi_2 = 1/V_0 \cdot (\partial\psi_1/\partial x^i) \cdot (\partial\psi_2/\partial x^j) \cdot [AUN]$$

$$\text{où } [AUN] = [AUO] \cdot [AUO]$$

5.3.3 - Produit vectoriel de deux gradients:

Le produit vectoriel de deux gradients s'écrit :

$$\vec{\nabla} \psi_1 \wedge \vec{\nabla} \psi_2 = 1/V_0 \cdot (\partial \psi_1 / \partial x^i) \cdot (\partial \psi_2 / \partial x^j) \cdot \begin{bmatrix} AUO \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AUO \end{bmatrix}$$

où, compte-tenu des expressions de $\begin{bmatrix} AUO \end{bmatrix}$ et de son transposé, leur produit vectoriel donne :

$$\begin{bmatrix} AUO \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AUO \end{bmatrix} = V_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -U_3 & -U_2 \\ U_3 & 0 & U_1 \\ -U_2 & -U_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Enfin, nous arrivons à la relation suivante :

$$\vec{\nabla} \psi_1 \wedge \vec{\nabla} \psi_2 = 1/V_0 \cdot (\partial \psi_1 / \partial x^i) \cdot (\partial \psi_2 / \partial x^j) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -U_3 & -U_2 \\ U_3 & 0 & U_1 \\ -U_2 & -U_1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.3.4 - Discretisation

Rappelons l'expression de ce flux élémentaire :

$$d \psi = (\partial \psi / \partial x^i) \cdot \begin{bmatrix} AUN \end{bmatrix} \cdot (dsi) \quad \text{avec } i=m,n,l$$

La discrétisation des termes $\partial \psi / \partial x^m$, $\partial \psi / \partial x^n$ et $\partial \psi / \partial x^l$ est évaluée de façon pondérée sur l'ensemble de l'élément volume.

D'une manière générale la discrétisation de ces trois termes s'écrit de la façon suivante:

$$\alpha (\partial \psi / \partial x^m)_1 + \alpha \cdot (1-\alpha) ((\partial \psi / \partial x^m)_2 + (\partial \psi / \partial x^m)_4) + (1-\alpha) (\partial \psi / \partial x^m)_3$$

avec α est un facteur de pondération choisi de façon à réduire les erreurs dues à la discrétisation. Les chiffres 1, 2, 3 et 4 représentent les numéros des arêtes.

6. - QUELQUES RESULTATS DE LA DISCRETISATION

6.1 - TEST SUR UN MAILLAGE REGULIER

Nous avons testé notre méthode de discrétisation sur un opérateur laplacien tridimensionnel dont on connaît la solution analytique sur un maillage régulier à 9x9x9 et 7x7x7 points. Le résultat obtenu (fig 15) est intéressant en le comparant avec la solution analytique qui est connue et prise égale à 1 au centre du domaine. L'erreur commise pour le cas de 9x9x9 est de l'ordre de 4.3 % .

6.2 - TEST SUR UN EXEMPLE DE MAILLAGE DEFORME

Le même maillage a été déformé dans différentes directions (par exemple suivant la direction de x voir fig 16), dans le but de voir comment cette méthode de discrétisation peut supporter les variations un peu brutales du pas. Les résultats obtenus (fig 17) sont intéressants vu le pourcentage d'erreur commise entre la solution analytique et la solution numérique. Un tableau récapitulatif est présenté pour différents cas de déformation de maillage.

FIG 15 : Comparaison entre la solution numérique (o) et la solution analytique (*) pour un maillage régulier

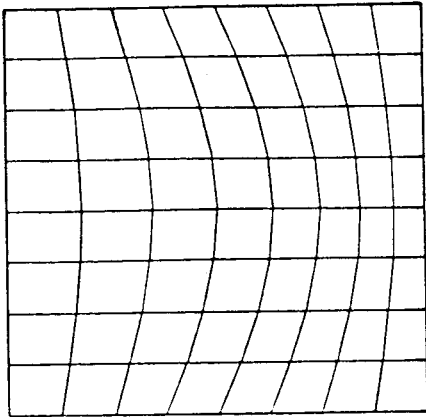
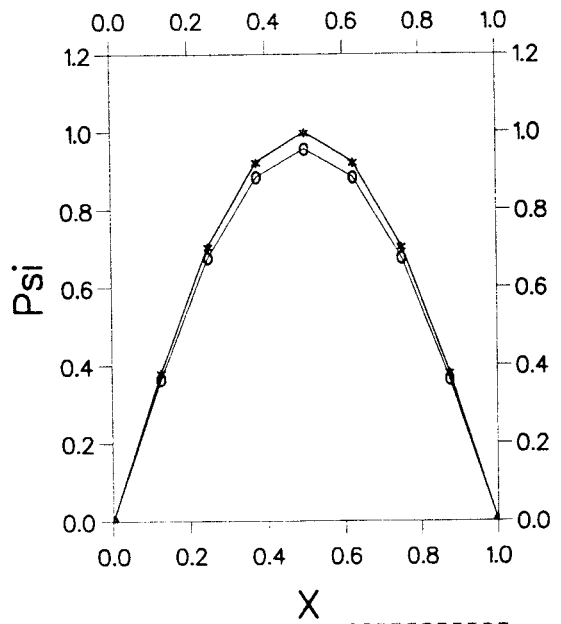


FIG 16 : Exemple de déformation de maillage suivant la direction de x

FIG 17 : Comparaison entre la solution numérique (o) et la solution analytique (*) pour un maillage déformé suivant la direction de x

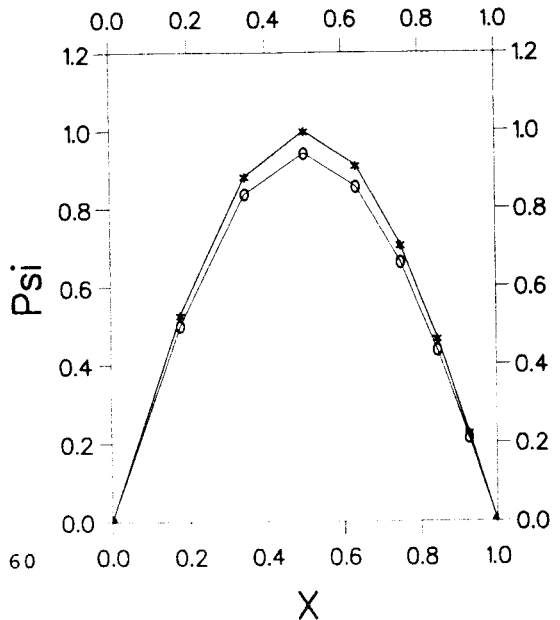


TABLEAU RECAPITULATIF POUR DIFFERENTES DEFORMATIONS DE MAILLAGE

! maillage	! solution	! solution	! erreur en
! (9x9x9)	! numérique	! analytique	! pourcentage
! régulier	! 0.957	! 1.	! 4.3
! déformé en X(x,y)	! 0.943	! 1.	! 5.7
! déformé en Y(x,y)	! 0.943	! 1.	! 5.7
! déformé en Z(x,y,z)	! 0.981	! 1.	! 1.9
! déformé en X(x,y,z)	! 0.945	! 1.	! 5.5
! déformé en Y(y)	! 0.955	! 1.	! 4.5
! déformé en X(x,y,z)	! 0.943	! 1.	! 5.7
! et en Y(y)	!	!	!
! déformé en X(x,y,z)	! 0.967	! 1.	! 3.3
! et en Z(x,y,z)	!	!	!
! déformé en Y(y) et	! 0.978	! 1.	! 2.2
! et en Z(x,y,z)	!	!	!
! déformé en X(x,y,z)	! 0.965	! 1.	! 3.5
! Y(y) et en Z(x,y,z)	!	!	!

6.3 - TEST SUR UN MERIDIEN

Un test de la méthode de discrétisation a été fait sur le calcul méridien pour une turbomachine axiale avec redresseur. Nous avons calculé les coordonnées des lignes de courant sur un maillage mobile (fig 18). D'où la nécessité d'avoir un opérateur qui soit peu sensible aux déformations de maillage.

Cet opérateur s'écrit sous la forme suivante:

Dans la roue

$$\text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \psi_1 \cdot \left(\frac{1}{r} + \overrightarrow{\text{grad}} \theta \right) \right) - \overrightarrow{\text{grad}} \theta \cdot \left(\overrightarrow{\text{grad}} \psi_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \theta \right)$$

$$- dI/d\psi_1 + 2w d\psi_1/dz = 0$$

Hors aubage

$$\text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}} \psi_1 / r \right) - dH/d\psi_1 + 1/r \overline{\Gamma}_a \cdot d\overline{\Gamma}_a/d\psi_1 = 0$$

avec θ : fonction de l'aubage

$\overline{\Gamma}_a$: circulation absolue

I : rothalpie

H : enthalpie

ψ_1 : fonction de courant

w : vitesse de rotation

Les conditions aux limites sont :

à l'entrée : la fonction de courant est une donnée.

- sur l'arbre : $\psi_1 = 0$

- sur le carter : $\psi_1 = Q$

- $d\psi_1/dm = 0$

à la sortie : $d\psi_1/dm = 0$

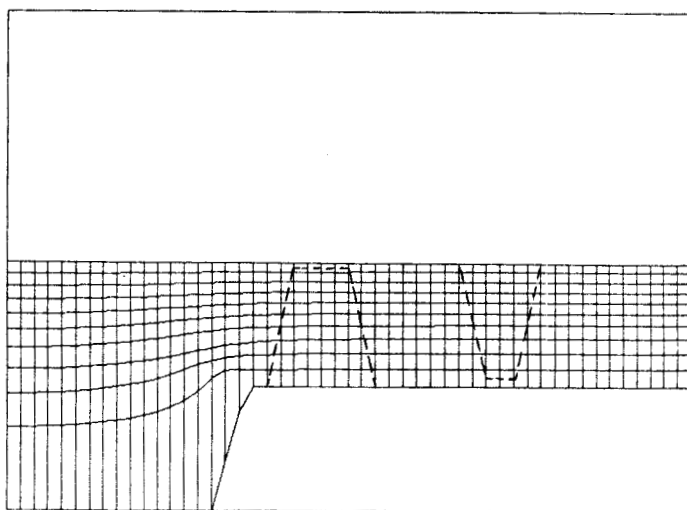


FIG 18 : Tracé des lignes de courant dans le plan méridien
d'une turbomachine axiale avec redresseur

7. - CONCLUSION

La méthode de discrétisation proposée donne des résultats intéressants pour les déformations de maillage que nous avons imposées dans les trois directions x, y et z.

Un test sur le méridien d'une turbomachine axiale a été effectué, le résultat obtenu est très satisfaisant, comparé à des résultats exacts, il montre que cette discrétisation est particulièrement bien adaptée à des problèmes de type méridien, les écarts entre les résultats analytiques et numériques sont très faibles. Une application éventuelle au calcul aube à aube est possible avec cette méthode.

CHAPITRE IV

LES PERTES

1. - INTRODUCTION

Les pertes sont les phénomènes irréversibles qui apparaissent dans les roues des turbomachines. Leur prise en compte est encore empirique (à caractère expérimental), plus ou moins justifiée au plan théorique.

Au départ, ces pertes étaient supposées de type "perte de charge", ceci est valable dans les conduites. Dans les canaux inter-aubes, cette formulation reste discutable.

LIEBLEIN (24,25) a pu évaluer les pertes assez correctement en fonction des couches limites. Il considère que les pertes sont dûes :

- au frottement dans les couches limites (sur l'intrados, l'extrados, l'arbre, et le carter). Elles correspondent à la trainée des corps habituelle.

- au mélange à l'aval dû à la non uniformité du profil de vitesses et de l'écoulement secondaire.

Cette théorie de LIEBLEIN nécessite la connaissance des couches limites. Pour cela, l'auteur a introduit le facteur de diffusion qui prend en compte de façon cohérente tous les ralentissements (méridien et aube à aube) qui participent à l'augmentation des pertes (il traduit un compromis entre les pertes de frottement et le sillage des aubages).

Sur l'extrados du profil, la vitesse locale passe, au voisinage du bord d'attaque, par une valeur maximale qui dépend de la déviation et du pas de l'aubage (solidité). Dans le trajet entre ce point et le bord de fuite, va s'effectuer un ralentissement dont l'intensité est décrite par ce facteur de diffusion local. Plus le ralentissement est grand, plus l'épaisseur de la couche limite attachée sur l'extrados est épaisse et plus le sillage se détachant dans l'écoulement aval est important.

L'objectif de cette dernière partie est de montrer comment pouvons-nous prendre en compte les couches limites dans l'écoulement moyen.

On peut facilement évaluer et connaître l'état des couches limites. Pour cela , on a envisagé une technique, comparable à celle utilisée par J.CHAUVIN (26), qui consiste à partir des équations de NAVIER-STOKES, à sommer aube à aube et à faire apparaître les équations de VON-KARMAN. Celles-ci seront vérifiées par les paramètres de la couche limite. Dans la partie saine, on écrit l'équation qui régit l'écoulement moyen. Par la suite, on essaye d'évaluer les termes qui traduisent l'effet secondaire visqueux et l'effet secondaire non visqueux.

2. - DESCRIPTION DU VECTEUR VITESSE

La figure (19) permet de voir, dans le plan méridien (r,z) , les différentes descriptions de la vitesse méridienne dans différentes bases locales.

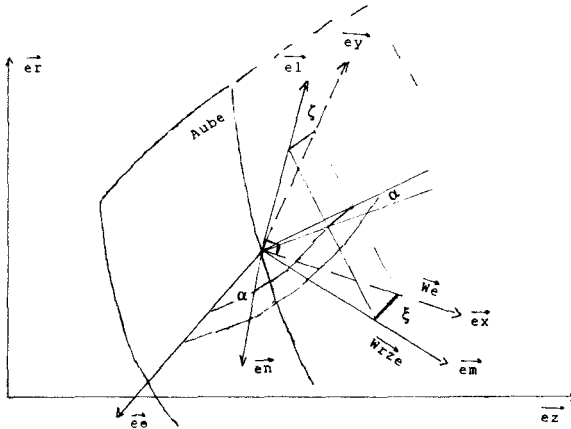


FIG 19 : description géométrique du vecteur vitesse

Dans le plan tangent (x,y) à l'aubage, où x et y sont respectivement la direction de l'écoulement extérieur à la couche limite et la direction transversale, la vitesse méridienne peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{W}_r z = W_x (\vec{e}_x - \sin(\xi) \vec{e}_0) + W_y (\vec{e}_y - \sin(\zeta) \vec{e}_0) \\ + W_n (\vec{e}_n - \cos(\alpha) \vec{e}_0) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{et} \quad W_\theta = W_n \cos(\alpha) + \vec{W}_r z \cdot r \vec{\nabla}(\theta) \quad (2)$$

$$\text{ou bien} \quad W_\theta = W_x \sin(\xi) + W_y \sin(\zeta) + W_n \cos(\alpha) \quad (3)$$

où ξ est l'angle entre (\vec{e}_m, \vec{e}_x)

ζ est l'angle entre (\vec{e}_l, \vec{e}_y)

α est l'angle entre (\vec{e}_n, \vec{e}_0)

A l'extérieur de la couche limite Wye est égal à zéro. Wn et Wne sont petites devant les autres composantes (hypothèse de la couche limite).

Les deux expressions (1) et (2) deviennent, en dehors de la couche limite :

$$\vec{W}_{rze} = W_{xe} (\vec{e}_x - \sin(\xi) \vec{e}_\theta) + W_{ne} (\vec{e}_n - \cos(\alpha) \vec{e}_e) \quad (4)$$

$$W_{\theta e} = W_{ne} \cos(\alpha) + W_{rze} \cdot r \nabla(\theta) \quad (5)$$

ou bien
$$W_{\theta e} = W_{xe} \sin(\xi) + W_{ne} \cos(\alpha) \quad (6)$$

3. - SOMMATION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

On somme les équations de NAVIER-STOKES dans tout le canal inter-aubes, y compris les couches limites (de l'intrados à l'extrados). Pour séparer la zone saine des deux zones visqueuses, on a décomposé l'intégrale totale en trois autres, dont une concerne la zone saine, les deux autres concernent les couches limites. Pour simplifier le calcul, on a gardé une écriture vectorielle des équations et on a décomposé la vitesse relative en deux composantes : une vitesse méridienne (dans le plan méridien) et une vitesse circumférentielle.

On pose :
$$\vec{W} = \vec{W}_{rz} + W_{\theta} \vec{e}_\theta$$

3.1 - Equation de continuité

Pour un écoulement tridimensionnel d'un fluide compressible, l'équation de continuité s'écrit :

$$\operatorname{div}_z (\rho r \vec{w} r z) + \int (\rho w \theta) / \int \theta = 0 \quad (7)$$

On somme l'équation (7) de l'extrados θ_1 à l'intrados θ_2 , tout en séparant les trois zones. Le calcul donne pour chacune d'elles :

3.1.1 - Dans la zone visqueuse 1 :

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_1'} \operatorname{div} (\rho r \vec{w} r z) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_1'} \int (\rho w \theta) / \int \theta d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_1'} r \cdot \operatorname{div} (\rho \vec{w}) d\theta$$

on pose : $r \cdot d\theta = dn \cdot \cos(\alpha)$, sachant que $\alpha = (\vec{e}_\theta, \vec{e}_n)$ est l'angle entre la direction normale à l'aubage et la direction circonférentielle.

Le calcul de la quantité A (voir annexe 2) donne l'expression suivante :

$$A = \rho \cos(\alpha) \left\{ w n e_1 - \int (w x e_1 \cdot \delta n_{11}) / \int x - \int (w x e_1 \cdot \delta n_{21}) / \int y + \delta n_1 \cdot \int (w x e_1) / \int x \right\}$$

ou δn_1 , δn_{11} et δn_{21} sont respectivement les épaisseurs totale, de déplacement normal et de déplacement transversal de la couche limite.

3.1.2 - Dans la zone saine :

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2'} \operatorname{div} (\rho r \vec{w} r z) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2'} \int (\rho w \theta) / \int \theta d\theta$$

On fait passer la divergence à l'extérieur du signe somme, on obtient une autre forme de B :

$$B = \operatorname{div} \int_{\theta'_2}^{\theta_2} (\rho r \overrightarrow{Wrz}) d\theta - \left[\overrightarrow{\rho r Wrz \cdot \nabla rz} (\theta) \right]_{\theta'_2}^{\theta_2} \left[\rho w \theta \right]_{\theta'_2}^{\theta_2}$$

3.1.3 - Dans la zone visqueuse 2 :

le calcul est identique à celui de la zone visqueuse 1, seulement l'indice 1 est remplacé par l'indice 2.

$$C = \rho \cos(\alpha) \left[W n_{e_2} - J(W x_{e_2} \cdot \delta n_{12}) / Jx - J(W x_{e_2} \cdot \delta n_{22}) / Jy + \delta n_2 J(W x_{e_2}) / Jx \right]$$

Si on rassemble tous les termes (A + B + C), et si on remplace la composante circonférentielle par son expression (2), on obtient une forme plus simple de l'équation de continuité :

$$\operatorname{div} \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} (\rho r \overrightarrow{Wrz}) d\theta - \sum_{i=1}^2 \rho_i \cos(\alpha_i) \operatorname{div} (W x_{e_i} \cdot \overrightarrow{\delta n})_i \dots + \sum_{i=1}^2 \rho_i \cdot \delta n_i \cos(\alpha_i) \operatorname{div} (\overrightarrow{We})_i = 0 \quad (8)$$

avec $\overrightarrow{\delta n}_i = \delta n_{1i} \overrightarrow{x} + \delta n_{2i} \overrightarrow{y}$ et $\rho_i \cos(\alpha_i) = \text{cste}$, dans l'épaisseur de la couche limite (hypothèse de la couche limite).

La quantité $\sum_{i=1}^2 \rho_i \cdot \delta n_i \cos(\alpha_i) \operatorname{div} (\overrightarrow{We})_i$ peut s'écrire sous une autre forme qui est :

$$\sum_{i=1}^2 \rho_i \cdot \delta n_i \cos(\alpha_i) \operatorname{div} (\overrightarrow{We})_i = \sum_{i=1}^2 \operatorname{div} (\rho r \overrightarrow{Wrz} \cdot \delta \theta)_i - \sum_{i=1}^2 (\overrightarrow{Wrz} \cdot \nabla (\rho r \cdot \delta \theta))_i$$

et

$$\sum_{i=1}^2 \operatorname{div} (\rho r \overline{\operatorname{Wrz}} \cdot \delta \theta)_i = \operatorname{div} (\rho r \cdot \overline{\operatorname{Wrz}}_1 \cdot (\theta'_1 - \theta_1) + \rho r \cdot \overline{\operatorname{Wrz}}_2 \cdot (\theta_2 - \theta'_2))$$

$$= \operatorname{div} \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \rho r \cdot \overline{\operatorname{Wrz}}_1 \, d\theta + \operatorname{div} \int_{\theta'_2}^{\theta_2} \rho r \cdot \overline{\operatorname{Wrz}}_2 \, d\theta$$

En injectant ces expressions dans l'équation (8), on obtient l'équation (9) :

$$\operatorname{div} \int_{\theta_1}^{\theta'_1} (\rho r \overline{\operatorname{Wrz}}) \, d\theta + \operatorname{div} \int_{\theta_1}^{\theta'_1} (\rho r \cdot \overline{\operatorname{Wrz}}_1) \, d\theta + \operatorname{div} \int_{\theta'_2}^{\theta_2} (\rho r \cdot \overline{\operatorname{Wrz}}_2) \, d\theta -$$

$$- \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i \operatorname{Wrz} \cdot \delta \theta_{1i} \vec{x} \right) - \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i \operatorname{Wrz} \cdot \delta \theta_{2i} \vec{y} \right) = 0 \quad (9)$$

Cette même équation (9) peut être écrite sous une forme simplifiée :

$$\operatorname{div} \int_{\theta_1 + \frac{\delta \theta_{11}}{r}}^{\theta_2 - \frac{\delta \theta_{12}}{r}} (\rho r \overline{\operatorname{Wrz}}) \, d\theta - \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i \operatorname{Wrz} \cdot \delta \theta_{2i} \vec{y} \right) = 0 \quad (10)$$

où le second terme de l'équation (10) qui est un terme de source, traduit l'effet secondaire visqueux.

3.2 - Equation de quantité de mouvement méridienne

On procède de la même façon que précédemment pour l'équation de continuité. L'équation locale de quantité de mouvement méridienne :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{rz} (\rho r \overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz}) + \int (\rho \overrightarrow{Wrz} \cdot W\theta) / \int \theta - \overrightarrow{er} \rho (W\theta^2 + 2wrW\theta + wr^2) \dots \\ + \overrightarrow{rVrz} (P) - \left(\operatorname{div} (\overrightarrow{\tau}) \right)_{rz} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

L'équation (11) est sommée dans les trois zones du canal :

3.2.1 - Dans la zone visqueuse 1:

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta'_1} (\operatorname{div}_{rz} (\rho r \overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz}) + \int (\rho \overrightarrow{Wrz} \cdot W\theta) / \int \theta) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \overrightarrow{rVrz} (P) d\theta - \dots \\ - \overrightarrow{er} \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \rho (W\theta^2 + 2wr \cdot W\theta + wr^2) d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \left(\operatorname{div} (\overrightarrow{\tau}) \right)_{rz} d\theta = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Du fait de l'hypothèse de la couche limite, La pression P est égale à la pression extérieure Pe. On peut donc remplacer le gradient de pression par son expression déduite de l'équation d'EULER, c'est à dire par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rVrz} (Pe) = - \operatorname{div} (r\rho \overrightarrow{Wrze} \otimes \overrightarrow{Wrze}) - \int (\rho \overrightarrow{Wrze} \cdot W\theta e) / \int \theta \dots \\ + \overrightarrow{er} \rho (W\theta e^2 + 2wr \cdot W\theta e + wr^2) \end{aligned}$$

L'équation (12) devient alors :

$$\operatorname{div} \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \rho r (\overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz} - \overrightarrow{Wrze} \otimes \overrightarrow{Wrze}) d\theta - \rho r (\overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz} \cdot \overrightarrow{Vrz}(\theta)) \Big|_{\theta_1}^{\theta'_1} \dots$$

$$\begin{aligned}
& + \rho r \left(\overrightarrow{Wrze} \otimes \overrightarrow{Wrze} \cdot \overrightarrow{Vrz}(\theta) \right) + \rho \left(\overrightarrow{Wrz} \cdot \overrightarrow{W\theta} - \overrightarrow{Wrze} \cdot \overrightarrow{W\theta e} \right) \frac{\theta'_1}{\theta_1} \dots \\
& + \overline{er} \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \rho \left(W\theta e^2 - W\theta^2 + 2wr \cdot (W\theta e - W\theta) \right) d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \left(\operatorname{div} \left(\overrightarrow{r} \right) \right)_{rz} d\theta = 0 \quad (13)
\end{aligned}$$

Le développement des termes en \overrightarrow{Wrz} de l'équation (13) donne, après avoir remplacé respectivement \overrightarrow{Wrz} et \overrightarrow{Wrze} par leurs expressions (1) et (4) :

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div} \int_{\theta_1}^{\theta'_1} - \rho r \left(\overrightarrow{Wrze} \otimes \overrightarrow{Wrze} - \overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz} \right) d\theta = \\
& \operatorname{div} \int_{\theta_1}^{\theta'_1} - \rho r \left(WxeWxe - WxWx \right) \cos^2(\xi) \left(\overrightarrow{em} \otimes \overrightarrow{em} \right) + \dots \\
& + \left(Wy \cos^2(\zeta) \left(\overrightarrow{el} \otimes \overrightarrow{el} \right) + WxWy \cos(\xi) \cos(\zeta) \left(\overrightarrow{em} \otimes \overrightarrow{el} + \overrightarrow{el} \otimes \overrightarrow{em} \right) \right) d\theta
\end{aligned}$$

Pour faire apparaître les épaisseurs de couche limite dans cette expression, on met Wxe en facteur, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
& \rho Wxe \int_{\theta_1}^{\theta'_1} - \left(1 - Wx/Wxe + Wx/Wxe \left(1 - Wx/Wxe \right) \right) \cos^2(\xi) \left(\overrightarrow{em} \otimes \overrightarrow{em} \right) - \dots \\
& - \left(Wy/Wxe \cos^2(\zeta) \left(\overrightarrow{el} \otimes \overrightarrow{el} \right) - \dots \right. \\
& \left. - \left(WxWy/Wxe \cos(\xi) \cos(\zeta) \left(\overrightarrow{em} \otimes \overrightarrow{el} + \overrightarrow{el} \otimes \overrightarrow{em} \right) \right) d\theta
\end{aligned}$$

Le calcul de cette intégrale nous donne une nouvelle

quantité exprimée seulement en fonction des épaisseurs de la couche limite :

$$\text{div} \left[- \rho W x e_1 \cos(\alpha) (\cos(\xi) (\delta n_{11} + \theta n_{11}) (\vec{e}_m \otimes \vec{e}_m) + \cos(\zeta) \theta n_{22} (\vec{e}_l \otimes \vec{e}_l) + \cos(\xi) \cos(\zeta) \theta n_{12} (\vec{e}_m \otimes \vec{e}_l + \vec{e}_l \otimes \vec{e}_m)) \right] \quad (14)$$

Dans (14), les termes en $\text{div} \int_{\theta_1}^{\theta_1'} (W x e W n e) r d\theta$ sont de de l'ordre de $(\rho W x e W n e \cdot \delta / L)$. Cette quantité est trop inférieure à 1. Ce qui nous permet de les négliger devant les autres termes.

Le développement des termes en $W\theta$:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_1'} - \rho (W\theta e - W\theta + 2wr(W\theta e - W\theta)) d\theta$$

donne, après avoir remplacé respectivement les quantités $W\theta$ et $W\theta e$ par (3) et (6) :

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_1}^{\theta_1'} - \rho (W\theta e - W\theta + 2wr(W\theta e - W\theta)) d\theta = \\ & \rho W x e_1 \int_{\theta_1}^{\theta_1'} \left[(1 - Wx/Wxe + Wx/Wxe (1 - Wx/Wxe)) \sin(\xi) - \dots \right. \\ & \quad - (Wy/Wxe) \sin(\zeta) - 2 \sin(\xi) \sin(\zeta) WxWy/WxeWxe + \dots \\ & \quad \left. + 2wr/Wxe (1 - Wx/Wxe) \sin(\xi) - Wy/Wxe \sin(\zeta) \right] d\theta \end{aligned}$$

D'où la forme finale de cette intégrale :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_1'} - \rho (W\theta e^2 - W\theta + 2wr(W\theta e - W\theta)) d\theta =$$

$$- \rho \cos(\alpha) Wx e_1 / r \left[\sin^2(\xi) (\delta n_{11} + \theta n_{11}^1) + 2 \sin(\xi) \sin(\zeta) \theta n_{12}^1 + \dots \right.$$

$$\left. + \sin^2(\zeta) \theta n_{22}^1 + 2wr/Wx e_1 (\sin(\xi) \delta n_{11} + \sin(\zeta) \delta n_{21}) \right]$$

Dans cette expression, on a aussi négligé les termes en $(Wx e Wne)$ puisqu'ils sont très petits devant $Wx e Wx e$.

3.2.2 - Dans la zone saine:

On a l'expression suivante :

$$\text{div} \int_{\theta_1}^{\theta_2'} (r \rho \overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz}) d\theta - (\rho r \overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz} \cdot \overrightarrow{Vrz}(\theta) - \rho \overrightarrow{Wrz} \cdot W\theta) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2'}$$

$$- \overrightarrow{er} \int_{\theta_1}^{\theta_2'} \rho (W\theta + 2wr \cdot W\theta + wr) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2'} r \overrightarrow{Vrz} (P) d\theta = 0 \quad (15)$$

3.2.3 - Dans la zone visqueuse 2:

On a la même expression que dans la zone visqueuse 1, seulement l'indice 1 est remplacé par 2.

3.2.4 - Equation globale de quantité de mouvement méridienne

Finalement, en rassemblant toutes les quantités

relatives aux trois zones, on obtient une forme plus simple de l'équation de quantité de mouvement méridienne (16) globale, en fonction des vitesses locales dans la zone saine et des vitesses extérieures dans les zones visqueuses :

$$\text{div} \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} (\rho r \overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz}) d\theta - \overrightarrow{er} \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} \rho (W\theta^2 + 2wr.W\theta + wr^2) d\theta + \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} r \nabla r z (P) d\theta$$

$$- (\overrightarrow{\rho Wrze} \cdot Wne \cos(\alpha))_{\theta'_1} - (\overrightarrow{\rho Wrze} \cdot Wne \cos(\alpha))_{\theta'_2} + \dots$$

$$\overrightarrow{er}/r \left(\sum_{i=1}^2 \rho_i \cos(\alpha_i) (Wx e_i^2 (\sin(\xi) (\delta n_{1i} + \theta_{n_{11}}^i) + 2 \sin(\xi) \sin(\zeta) \theta_{n_{12}}^i \right.$$

$$\left. + \sin(\zeta) \theta_{n_{22}}^i) + 2wr.Wx e_i (\sin(\xi) \delta n_{1i} + \sin(\zeta) \delta n_{2i}) \right) - \dots$$

$$(A) \quad - \sum_{i=1}^2 \text{div} (\rho_i \cos(\alpha_i) Wx e_i^2 (\cos(\xi) (\delta n_{1i} + \theta_{n_{11}}^i) (\overrightarrow{em} \otimes \overrightarrow{em})) + \dots$$

$$+ \cos(\zeta) \cos(\xi) \theta_{n_{12}}^i (\overrightarrow{em} \otimes \overrightarrow{el} + \overrightarrow{el} \otimes \overrightarrow{em}) + \cos(\zeta) \theta_{n_{22}}^i (\overrightarrow{el} \otimes \overrightarrow{el}) - \dots$$

$$- \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} \left(\text{div} (\overrightarrow{r}) \right)_{rZ} d\theta - \int_{\theta'_2}^{\theta'_2} \left(\text{div} (\overrightarrow{r}) \right)_{rZ} d\theta = 0 \quad (16)$$

Dans l'équation (16), l'expression (A) représente les équations de VON-KARMAN qui sont satisfaites par les paramètres de la couche limite. L'ensemble de ces termes est nul. Dans (16), nous gardons que l'équation dans la zone saine.

Pour les termes restants et pour avoir une forme d'intégrale analogue à celle de l'équation de continuité, nous allons ajouter à l'équation (15) les deux expressions qui

résultent de la sommation des équations d'EULER de $\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}$ à θ_1' pour la zone visqueuse 1 et de θ_2' à $\theta_2 - \frac{\delta\theta_{12}}{r}$ pour la zone visqueuse 2 :

pour la zone 1:

$$\int_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_1'} \text{div} (r\rho \cdot \overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz}) d\theta + \int_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_1'} \rho (\overrightarrow{Wrz} \cdot \overrightarrow{W\theta}) / r d\theta \dots$$

$$- \overrightarrow{er} \int_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_1'} \rho (W\theta^2 + 2wr \cdot W\theta + wr^2) d\theta + \int_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_1'} r \nabla r z (P) d\theta = 0$$

pour la zone 2:

$$\int_{\theta_2'}^{\theta_2 - \frac{\delta\theta_{12}}{r}} \text{div} (r\rho \cdot \overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz}) d\theta + \int_{\theta_2'}^{\theta_2 - \frac{\delta\theta_{12}}{r}} \rho (\overrightarrow{Wrz} \cdot \overrightarrow{W\theta}) / r d\theta \dots$$

$$- \overrightarrow{er} \int_{\theta_2'}^{\theta_2 - \frac{\delta\theta_{12}}{r}} \rho (W\theta^2 + 2wr \cdot W\theta + wr^2) d\theta + \int_{\theta_2'}^{\theta_2 - \frac{\delta\theta_{12}}{r}} r \nabla r z (P) d\theta = 0$$

on obtient l'équation (17) :

$$\text{div} \int_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_2 - \frac{\delta\theta_{12}}{r}} (r\rho \cdot \overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz}) d\theta - \overrightarrow{er} \int_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_2 - \frac{\delta\theta_{12}}{r}} \rho (W\theta^2 + 2wr \cdot W\theta + wr^2) d\theta + \int_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_2 - \frac{\delta\theta_{12}}{r}} r \nabla r z (P) d\theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \left(r\rho \cdot \overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz} \cdot \nabla r z (\theta) \right)_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_1'} - \left(r\rho \cdot \overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz} \cdot \nabla r z (\theta) \right)_{\theta_2'}^{\theta_2 - \frac{\delta\theta_{12}}{r}} \\ + \left(\rho \overrightarrow{Wrz} \cdot \overrightarrow{W\theta} \right)_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_1'} + \left(\rho \overrightarrow{Wrz} \cdot \overrightarrow{W\theta} \right)_{\theta_2'}^{\theta_2 - \frac{\delta\theta_{12}}{r}} \dots \\ - \left(\rho \overrightarrow{Wrz} \cdot \overrightarrow{Wne} \cos(\alpha) \right)_{\theta_1}^{\theta_1'} - \left(\rho \overrightarrow{Wrz} \cdot \overrightarrow{Wne} \cos(\alpha) \right)_{\theta_2'}^{\theta_2} = 0 \end{array} \right. \quad (17)$$

Dans cette équation, les bornes sont celles qu'on a dans l'équation de continuité. Elle va nous permettre de faire apparaître la vitesse moyenne.

La partie (F) concerne uniquement les couches limites. On remplace la vitesse circonférentielle $W\theta$ par son expression (2) et des simplifications deviennent alors possibles. Il faut remarquer aussi que :

$$Wn(\theta'_1) = Wne(\theta'_1) \quad \text{et} \quad Wn(\theta'_2) = Wne(\theta'_2)$$

l'expression (F) devient alors :

$$F = - \left(\overrightarrow{\rho W r z e} \cdot Wne \cos(\alpha) \right)_{\theta_1}^{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}} - \left(\overrightarrow{\rho W r z e} \cdot Wne \cos(\alpha) \right)_{\theta_2}^{\theta_2 + \frac{\delta\theta_{12}}{r}}$$

Pour éliminer Wne de (F), on utilise l'équation de continuité intégrée depuis la paroi jusqu'à la frontière limite de la couche limite (voir annexe 2), l'expression F s'écrit sous la forme suivante :

$$F = - \sum_{i=1}^2 \rho_i \cos(\alpha_i) \cdot \overrightarrow{W r z e} \left(\text{div} (Wxe \cdot \overline{\delta n}) \right)$$

L'équation de quantité de mouvement méridienne sommée (17) devient :

$$\begin{aligned} \text{div} \int_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_2 + \frac{\delta\theta_{12}}{r}} \left(r \overrightarrow{\rho} \cdot \overrightarrow{W r z e} \otimes \overrightarrow{W r z e} \right) d\theta - \overrightarrow{e r} \int \left(\rho \left(W\theta^2 + 2wr \cdot W\theta + wr^2 \right) \dots \right. \\ \left. + \overrightarrow{r V r z} (P) \right) d\theta = \sum_{i=1}^2 \rho_i \cos(\alpha_i) \cdot \overrightarrow{W r z e} \left(\text{div} (Wxe \cdot \overline{\delta n}) \right) \quad (18) \end{aligned}$$

On a ainsi trouvé une équation qui a les mêmes bornes d'intégration que l'équation de continuité (10), avec des termes de source qui dépendent de la vitesse extérieure et des deux épaisseurs de déplacement.

Notre objectif est de faire apparaître les vitesses moyennes et de faire disparaître la pression au moyen de l'équation de quantité de mouvement circonférentielle.

3.3 - Composante circonférentielle

L'écriture de l'équation de quantité de mouvement circonférentielle est la suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_z (\rho r \cdot \overrightarrow{W} r z W \theta) + \int (\rho W \theta)^2 / \int \theta + \rho W r (W \theta + 2 w r) + \dots \\ + \int P / \int \theta - \left(\operatorname{div} (\overrightarrow{\tau}) \right)_\theta = 0 \quad (19) \end{aligned}$$

On somme cette équation (19) dans les trois différentes zones du canal inter-aubes.

3.3.1 - Dans la zone visqueuse 1

La même démarche de calcul, faite pour l'équation méridienne, sera utilisée ici pour la composante circonférentielle. L'équation (19) sommée dans la zone visqueuse 1 s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_{\theta_1}^{\theta'_1} \text{div} (\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta}) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \int (\rho W\theta^2) / \int \theta d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \rho W_r (W\theta + 2wr) d\theta + \dots$$

$$+ \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \int P / \int \theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \text{div} (\vec{r}) d\theta = 0 \quad (20)$$

La pression est remplacée ici par son expression tirée de l'équation d'EULER (la même démarche a été faite précédemment pour l'équation de quantité de mouvement méridienne). L'équation (20) devient :

$$\int_{\theta_1}^{\theta'_1} \text{div} (\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta} - \rho r \cdot \overrightarrow{WrzeW\theta e}) d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \int (\rho W\theta^2) / \int \theta - \int (\rho W\theta e) / \int \theta d\theta +$$

$$+ \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \rho (WrW\theta - WreW\theta e + 2wr (Wr - Wre)) d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \text{div} (\vec{r}) d\theta = 0 \quad (21)$$

Après avoir fait passer la divergence à l'extérieur du signe somme du premier terme de (21), et après avoir remplacé les vitesses \overrightarrow{Wrz} , $W\theta$, \overrightarrow{Wrze} et $W\theta e$ respectivement par leurs expressions (1), (3), (4) et (6), on obtient une forme (22) plus simple qui dépend des paramètres de la couche limite. On pose :

$$I1 = \text{div} \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \rho r (WrzW\theta - WrzeW\theta e) d\theta = \dots$$

$$\text{div} (- \rho \cos(\alpha) \cdot Wx_{e1}^2 ((\sin(\zeta) \cos(\xi) (\delta n_{11} + \theta n_{11}^1) + \dots$$

$$+ \sin(\zeta) \cos(\xi) \theta n_{12}^1) \vec{em} + \sin(\zeta) \cos(\xi) \theta n_{22}^1 \vec{e1}) \quad (22)$$

Un développement identique est utilisé pour la

troisième intégrale de l'équation (21), en remplaçant toujours les vitesses par leurs projections, on pose :

$$\begin{aligned}
 J1 &= \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \rho ((WrW\theta - WreW\theta e) + 2wr (Wr - Wre)) d\theta = \dots \\
 &= \rho \cos(\alpha)/r (Wxe_1 ((\delta n_{11} + \theta_{n_{11}}^1) \sin(\xi) + \theta_{n_{12}}^1 \sin(\zeta)) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x \\
 &\quad + (\theta_{n_{12}}^1 \sin(\xi) + \theta_{n_{22}}^1 \sin(\zeta)) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_y) + \dots \\
 &\quad + 2wr.Wxe_1 (\delta n_{11} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x + \delta n_{21} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_y) \quad (23)
 \end{aligned}$$

L'équation finale dans cette zone visqueuse 1 peut s'écrire, en rassemblant toutes les quantités trouvées, y compris (22) et (23), sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 - (\rho r. \vec{W}rzw\theta \cdot \vec{\nabla}(\theta) - \rho r. \vec{W}rzw\theta e \cdot \vec{\nabla}(\theta)) \frac{\theta'_1}{\theta_1} + (\rho^2 W\theta - \rho^2 W\theta e) \frac{\theta'_1}{\theta_1} \dots \\
 - \int_{\theta_1}^{\theta'_1} \text{div}(\vec{\tau}) d\theta + I1 + J1 = 0 \quad (24)
 \end{aligned}$$

3.3.2 - Dans la zone saine

Dans la zone saine, l'équation s'écrit :

$$\text{div} \int_{\theta_1}^{\theta'_2} (\rho r. \vec{W}rzw\theta) d\theta - (\rho r. \vec{W}rzw\theta \cdot \vec{\nabla}(\theta)) \frac{\theta'_2}{\theta_1} + (\rho^2 W\theta) \frac{\theta'_2}{\theta_1} + \dots$$

$$+ \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} \rho W r (W\theta + 2wr) d\theta + (P) \frac{\theta'_2}{\theta'_1} = 0 \quad (25)$$

3.3.3 - Dans la zone visqueuse 2

L'équation circonférentielle sommée dans cette zone visqueuse 2 s'écrit :

$$\int_{\theta'_2}^{\theta_2} \text{div} (\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta}) d\theta + \int_{\theta'_2}^{\theta_2} \int (\rho W\theta^2) / J\theta d\theta + \int_{\theta'_2}^{\theta_2} \rho W r (W\theta + 2wr) d\theta + \dots$$

$$+ \int_{\theta'_2}^{\theta_2} \int P / J\theta d\theta - \int_{\theta'_2}^{\theta_2} \text{div} (\overrightarrow{r}) d\theta = 0 \quad (26)$$

Le calcul est identique à celui de la zone visqueuse 1, développé dans le paragraphe précédent. Dans l'équation (24), ce sont seulement les bornes et les indices qui changent :

$$- \left(\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta} \cdot \overrightarrow{\nabla} (\theta) - \rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta} \cdot \overrightarrow{\nabla} (\theta) \right) \frac{\theta_2}{\theta'_2} + \left(\rho W\theta^2 - \rho W\theta e \right) \frac{\theta_2}{\theta'_2} \dots$$

$$- \int_{\theta'_2}^{\theta_2} \text{div} (\overrightarrow{r}) d\theta + I_2 + J_2 = 0 \quad (27)$$

3.3.4 - Equation circonférentielle globale

Avant d'écrire l'équation globale de quantité de mouvement circonférentielle sommée dans tout le canal, on va faire apparaître les mêmes bornes d'intégration que celles de l'équation méridienne ou de l'équation de continuité. Pour cela, on ajoute respectivement aux équations (24) et (27), les quantités nulles suivantes, issues de l'équation circonférentielle d'EULER :

dans la zone 1:

$$\int_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_1'} (\text{div} (\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta}) + \int (\rho W\theta^2) / \int \theta + \int P / \int \theta + \rho W r (W\theta + 2wr)) d\theta = 0$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \text{div} \int_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_1'} (\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta}) d\theta - \left(\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta} \cdot \overrightarrow{\nabla} (\theta) \right)_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_1'} + (\rho W\theta)_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_1'} + (P)_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_1'} + \dots \\ + \int_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_1'} \rho W r (W\theta + 2wr) d\theta = 0 \quad (28) \end{aligned}$$

dans la zone 2:

$$\int_{\theta_2'}^{\theta_2 + \frac{\delta\theta_{12}}{r}} (\text{div} (\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta}) + \int (\rho W\theta^2) / \int \theta + \int P / \int \theta + \rho W r (W\theta + 2wr)) d\theta = 0$$

ou bien :

$$\begin{aligned} \text{div} \int_{\theta_2'}^{\theta_2 + \frac{\delta\theta_{12}}{r}} (\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta}) d\theta - \left(\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta} \cdot \overrightarrow{\nabla} (\theta) \right)_{\theta_2'}^{\theta_2 + \frac{\delta\theta_{12}}{r}} + (\rho W\theta)_{\theta_2'}^{\theta_2 + \frac{\delta\theta_{12}}{r}} + (P)_{\theta_2'}^{\theta_2 + \frac{\delta\theta_{12}}{r}} + \dots \\ + \int_{\theta_2'}^{\theta_2 + \frac{\delta\theta_{12}}{r}} \rho W r (W\theta + 2wr) d\theta = 0 \quad (29) \end{aligned}$$

On rassemble toutes les quantités trouvées pour les trois différentes zones (24), (25) et (27), plus les expressions (28) et (29), nous obtenons l'équation globale de quantité de mouvement circumférentielle sommée dans tout le canal :

$$\begin{aligned}
& \int_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_2 - \frac{\delta\theta_{12}}{r}} \operatorname{div} (\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta}) d\theta + \int_{\theta_1 + \frac{\delta\theta_{11}}{r}}^{\theta_2 - \frac{\delta\theta_{12}}{r}} \rho W r (W\theta + 2wr) d\theta + (P) \theta_2 \frac{\delta\theta_{12}}{r} \dots \\
& - \int_{\theta_2}^{\theta_2'} \operatorname{div} (\vec{r}) d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_1'} \operatorname{div} (\vec{r}) d\theta - \dots \\
& - \sum_{i=1}^2 \operatorname{div} (\rho \cos(\alpha_i) \cdot W x e_i ((\sin(\xi) \cos(\xi) (\delta n_{1i} + \theta_{n_{11}}^i) + \dots \\
& + \sin(\zeta) \cos(\xi) \theta_{n_{12}}^i \vec{e}_m + \sin(\xi) \cos(\zeta) \theta_{n_{12}}^i \vec{e}_l) - \dots \\
& - \sum_{i=1}^2 \rho \cos(\alpha_i) / r (W x e_i ((\sin(\xi) (\delta n_{1i} + \theta_{n_{11}}^i) + \dots \\
& + \sin(\zeta) \theta_{n_{12}}^i \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x + (\sin(\xi) \theta_{n_{12}}^i + \sin(\zeta) \theta_{n_{22}}^i) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_y) + \dots \\
& + 2wr W x e_i (\delta n_{1i} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x + \delta n_{2i} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_y)) + \dots
\end{aligned}$$

$$(G) \left\{ \begin{aligned}
& + (- \rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta} \cdot \overrightarrow{\nabla}(\theta) + \rho W \theta \frac{\theta_2'}{\theta_1}) + (\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta e} \cdot \overrightarrow{\nabla}(\theta) - \rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta} \cdot \overrightarrow{\nabla}(\theta) + \\
& \rho W \theta - \rho W \theta e) \frac{\theta_1'}{\theta_1} + (\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta e} \cdot \overrightarrow{\nabla}(\theta) - \rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta} \cdot \overrightarrow{\nabla}(\theta) + \rho W \theta - \rho W \theta e) \frac{\theta_2}{\theta_2'} - \\
& - (\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta} \cdot \overrightarrow{\nabla}(\theta) - \rho W \theta \frac{\theta_1'}{\theta_1}) - (\rho r \cdot \overrightarrow{WrzW\theta} \cdot \overrightarrow{\nabla}(\theta) - \rho W \theta \frac{\theta_2}{\theta_2'} \frac{\delta\theta_{12}}{r}) = 0 \quad (30)
\end{aligned} \right.$$

Dans l'expression (G) de l'équation (30), si on remplace les vitesses $W\theta$ et $W\theta e$ respectivement par leurs expressions (2) et (5) et si, pour éliminer Wne , on utilise

l'équation de continuité intégrée depuis la paroi jusqu'à la frontière limite de la couche limite, la quantité (G) devient alors plus simple :

$$(G) = - \sum_{i=1}^2 \rho_i \cos(\alpha_i) W_{\theta i} \operatorname{div} (W_{xe} \cdot \vec{\delta n})_i$$

On a aussi trouvé une équation qui a les mêmes bornes d'intégration que l'équation méridienne et qui va nous permettre de déterminer la pression.

4. - INTRODUCTION DES GRANDEURS MOYENNES

On appelle \overline{Wrz} la moyenne de \vec{Wrz} telle que :

$$\overline{Wrz} = 1/(\Delta\theta) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\delta\theta_{12}}{r} \vec{Wrz} d\theta + \frac{\delta\theta_{11}}{r}$$

avec :
$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 - \sum_{i=1}^2 \frac{\delta\theta_{1i}}{r}$$

On pose :

$$\vec{Wrz} = \overline{Wrz} + \vec{Wrz}'$$

$$W_{\theta} = \overline{W_{\theta}} + W_{\theta}'$$

où \vec{Wrz}' et W_{θ}' sont des fluctuations en TETA.

(ici on suppose que l'écoulement est incompressible $\rho = \text{cste}$)

Les équations de NAVIER-STOKES deviennent alors :

4.1 - Dans l'équation de continuité

l'équation de continuité (10) se transforme en :

$$\operatorname{div} (\Delta \rho r_p \cdot \overrightarrow{W r z}) - \operatorname{div} \sum_{i=1}^2 (\rho_i W r z_i \cdot \delta \theta_{2i} \overrightarrow{y}) = 0 \quad (31)$$

où le second terme traduit l'effet secondaire visqueux.

4.2 - Dans l'équation méridienne

On peut développer la quantité $\int_{\theta_1 + \frac{\delta \theta_{11}}{r}}^{\theta_2 - \frac{\delta \theta_{12}}{r}} r \cdot \overrightarrow{\nabla} (P) d\theta$ de l'équation (18) :

$$(H) = \int_{\theta_1 + \frac{\delta \theta_{11}}{r}}^{\theta_2 - \frac{\delta \theta_{12}}{r}} r \cdot \overrightarrow{\nabla} (P) d\theta = r \cdot \overrightarrow{\nabla} \int_{\theta_1 + \frac{\delta \theta_{11}}{r}}^{\theta_2 - \frac{\delta \theta_{12}}{r}} P d\theta - \left(r P \cdot \overrightarrow{\nabla} (\theta) \right) \left. \begin{array}{l} \theta_2 - \frac{\delta \theta_{12}}{r} \\ \theta_1 + \frac{\delta \theta_{11}}{r} \end{array} \right|$$

On pose :

$$\theta_1 = \theta_s + \epsilon p / 2r$$

et $\theta_2 = \theta_s - \epsilon p / 2r$

ce qui nous donne :

$$(H) = r \cdot \overrightarrow{\nabla} \int_{\theta_1 + \frac{\delta \theta_{11}}{r}}^{\theta_2 - \frac{\delta \theta_{12}}{r}} P d\theta + r \left(\overrightarrow{\nabla} (\theta_s) \left(P(\theta_1 + \delta \theta_{11}/r) - P(\theta_2 - \delta \theta_{12}/r) \right) + \right. \\ \left. + \overrightarrow{\nabla} (\epsilon p / r) \left(P(\theta_1 + \delta \theta_{11}/r) + P(\theta_2 - \delta \theta_{12}/r) \right) / 2 - \dots \right. \\ \left. - P(\theta_1 + \delta \theta_{11}/r) \overrightarrow{\nabla} (\delta \theta_{11}/r) - P(\theta_2 - \delta \theta_{12}/r) \overrightarrow{\nabla} (\delta \theta_{12}/r) \right) \quad (32)$$

Dans l'équation (18), on introduit les grandeurs moyennes, et on injecte l'expression de (32) moyennée, ce qui nous donne l'équation suivante (33) :

$$\begin{aligned}
 & \text{div} (r\rho\Delta\theta \cdot \overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz}) - \overrightarrow{er} \rho\Delta\theta (\overline{W\theta W\theta} + 2wr \cdot \overline{W\theta} + wr) + \dots \\
 & + r \overrightarrow{\nabla rz} (\Delta\theta \cdot \overline{P}) + r (\overrightarrow{\nabla} (\theta s)) (P(\theta_1 + \delta\theta_{11}/r) - P(\theta_2 - \delta\theta_{12}/r)) + \\
 & - \overline{\nabla} (ep/r) (P(\theta_1 + \delta\theta_{11}/r) + P(\theta_2 - \delta\theta_{12}/r))/2 + \dots \quad (33) \\
 & + P(\theta_1 + \delta\theta_{11}/r) \overrightarrow{\nabla} (\delta\theta_{11}/r) + P(\theta_2 - \delta\theta_{12}/r) \overrightarrow{\nabla} (\delta\theta_{12}/r) = \dots \\
 & = \sum_{i=1}^2 \rho \cos(\alpha) \overrightarrow{Wrz} (\text{div} (Wxe \cdot \overrightarrow{\delta n})) - \text{div} (\rho r \Delta\theta \overrightarrow{Wrz}' \otimes \overrightarrow{Wrz}') + \rho \overline{W\theta}' / r \overrightarrow{er}
 \end{aligned}$$

avec un premier terme (à droite du signe égal), qui traduit l'effet secondaire visqueux et deux derniers termes qui traduisent l'effet secondaire non visqueux.

4.3 - Dans l'équation circonférentielle

En introduisant les grandeurs moyennes dans l'équation (30), on obtient l'expression de (ΔP) :

$$\begin{aligned}
 \Delta P & = - \text{div} (\rho r \Delta\theta \cdot \overrightarrow{Wrz} \overline{W\theta}) - \rho \Delta\theta \cdot \overline{Wr} (\overline{W\theta} + 2wr) - \rho \overline{Wr' W\theta}' / r + \\
 & + \sum_{i=1}^2 \rho \cos(\alpha_i) \overline{W\theta}_i \text{div} (Wxe \cdot \overrightarrow{\delta n})_i - \text{div} (\rho r \Delta\theta \cdot \overrightarrow{Wrz}' \overline{W\theta}') \quad (34)
 \end{aligned}$$

4.4 - Elimination de la pression

De l'équation (34), on retire l'expression de la pression, et on l'injecte dans l'équation méridienne (33), ce qui nous donne l'équation suivante (35) :

$$\begin{aligned}
 & \text{div} (\rho r \Delta \theta \cdot \overrightarrow{\text{Wrz}} \otimes \overrightarrow{\text{Wrz}}) - \overrightarrow{e_r} \rho r \Delta \theta (\overline{W\theta W\theta} + 2w_r \cdot \overline{W\theta} + \overline{w_r^2}) + r \overrightarrow{\text{Vrz}} (\Delta \theta \cdot P) - \\
 & - r \overrightarrow{\nabla} (e_P/r) (\overline{P}(\theta_1 + \delta\theta_{11}/r) + \overline{P}(\theta_2 - \delta\theta_{12}/r)) / 2 - \dots \\
 & - \overline{P}(\theta_1 + \delta\theta_{11}/r) \overrightarrow{\nabla} (\delta\theta_{11}/r) - \overline{P}(\theta_2 - \delta\theta_{12}/r) \overrightarrow{\nabla} (\delta\theta_{12}/r) - \dots \\
 & - r \overrightarrow{\nabla} (\theta_s) (- \text{div} (\rho r \Delta \theta \cdot \overrightarrow{\text{Wrz}} \overline{W\theta}) - \rho \Delta \theta \cdot \overline{w_r} (\overline{W\theta} + 2w_r) - \rho \overline{w_r' W\theta'} / r + \\
 & + \sum_{i=1}^2 \rho \text{icos}(\alpha_i) W\theta_i \text{div} (W_x e \cdot \overline{\delta n})_i - \text{div} (\rho r \Delta \theta \overrightarrow{\text{Wrz}} \overline{W\theta'}) - \dots \\
 & - \sum_{i=1}^2 \rho \text{icos}(\alpha_i) \overrightarrow{\text{Wrz}} \text{div} (W_x e \cdot \overline{\delta n})_i + \dots \\
 & + \text{div} (\rho r \Delta \theta \cdot \overrightarrow{\text{Wrz}} \overline{W\theta'}) - \rho \overline{W\theta'} / r \overrightarrow{e_r} = 0 \tag{35}
 \end{aligned}$$

L'équation (35) est valable seulement dans l'aubage. A l'extérieur de l'aubage, le (ΔP) est nul.

Dans cette équation, $W\theta$ est exprimée à partir de $\overrightarrow{\text{Wrz}}$ et de la surface S_2 . Les termes fluctuants sont évalués ou négligés.

Les termes de couches limites qui proviennent soit de l'équation méridienne soit de la composante circonférentielle sont éliminés. On peut les combiner pour faire apparaître les équations de VON-KARMAN. Celles-ci seront vérifiées par les paramètres de couches limites.

5. - EVALUATION DES TERMES FLUCTUANTS

Pour évaluer les termes fluctuants qui figurent dans l'équation (35) :

$$\begin{aligned}
 & \text{div} (\rho r \Delta \theta \cdot \overrightarrow{Wrz} \otimes \overrightarrow{Wrz}) - \overrightarrow{er} \rho r \Delta \theta (\overline{W\theta W\theta} + 2wr \cdot \overline{W\theta} + \overline{wr^2}) + r \overrightarrow{Vrz} (\Delta \theta \cdot P) - \\
 & - r \overrightarrow{V} (\overline{ep/r}) (P(\theta_1 + \delta\theta_{11}/r) + P(\theta_2 - \delta\theta_{12}/r))/2 - \dots \\
 & - P(\theta_1 + \delta\theta_{11}/r) \overrightarrow{V} (\overline{\delta\theta_{11}/r}) - P(\theta_2 - \delta\theta_{12}/r) \overrightarrow{V} (\overline{\delta\theta_{12}/r}) - \dots \\
 & - r \overrightarrow{V} (\theta_s) (- \text{div} (\rho r \Delta \theta \cdot \overrightarrow{Wrz} \overline{W\theta}) - \rho \Delta \theta \cdot \overline{Wr} (\overline{W\theta} + 2wr) - \overline{\rho W r' W \theta'} / r + \\
 & + \sum_{i=1}^2 \rho_{icos} (\alpha_i) W \theta_i \text{div} (W x e \cdot \overline{\delta n})_i - \text{div} (\rho r \Delta \theta \overline{Wrz' W \theta'}) - \dots \\
 & - \sum_{i=1}^2 \rho_{icos} (\alpha_i) \overrightarrow{Wrz} \text{div} (W x e \cdot \overline{\delta n})_i + \dots \\
 & + \text{div} (\rho r \Delta \theta \cdot \overrightarrow{Wrz' \otimes Wrz'}) - \overline{\rho W \theta'} / r \overrightarrow{er} = 0 \tag{35}
 \end{aligned}$$

On écrit, au premier ordre, la quantité suivante sous la forme de :

$$\overline{X'Y'} \simeq 1/12 (\Delta X \Delta Y)$$

où X' et Y' sont des termes fluctuants de X et Y.

Dans l'équation (35), les termes fluctuants sont :

$$* \operatorname{div} (\rho r \Delta \theta \overrightarrow{\overline{Wrz' \otimes Wrz'}})$$

$$* \operatorname{div} (\rho r \Delta \theta \overline{Wrz' W\theta'})$$

$$* \rho \overline{Wr' W\theta'}$$

$$* \rho \overline{W\theta' W\theta'}$$

Evaluation de $\overrightarrow{\overline{Wrz' \otimes Wrz'}}$:

$$I = \overrightarrow{\overline{Wrz' \otimes Wrz'}} \simeq 1/12 \overrightarrow{\Delta Wrz \otimes \Delta Wrz}$$

$$\text{On pose : } \overrightarrow{\Delta Wrz} = \overrightarrow{\Delta Wm} + \overrightarrow{\Delta Ws}$$

où $\overrightarrow{\Delta Wm}$ et $\overrightarrow{\Delta Ws}$ traduisent respectivement le champ de l'écoulement principal et le champ de l'écoulement transversal.

La quantité I devient alors :

$$I = 1/12 \begin{pmatrix} \Delta Wm \Delta Wm & \Delta Wm \Delta Ws \\ \Delta Wm \Delta Ws & \Delta Ws \Delta Ws \end{pmatrix}$$

Evaluation de $\overline{Wrz'W\theta'}$:

$$J = \overline{Wrz'W\theta'} \simeq 1/12 (\Delta Wm + \Delta Ws) \Delta W\theta$$

Evaluation de $\overline{Wr'W\theta'}$:

$$K = \overline{Wr'W\theta'} \simeq 1/12 \Delta Wr \Delta W\theta$$

Evaluation de $\overline{W\theta'W\theta'}$:

$$L = \overline{W\theta'W\theta'} \simeq 1/12 \Delta W\theta \Delta W\theta$$

Reste maintenant à évaluer tous les termes en ΔWm , ΔWs , $\Delta W\theta$ et ΔWr .

On peut évaluer approximativement le terme ΔWm à partir de la rothalpie :

$$\vec{Wm} \cdot \Delta \vec{Wm} \simeq \Delta (Wm^2/2) = \Delta I - \Delta (P/\rho) - \Delta (W\theta^2/2) \quad (a')$$

$$\text{où} \quad \Delta W\theta \simeq r \Delta \vec{Wrz} \cdot \vec{\nabla}(\theta s) \quad (b')$$

avec θs fonction, à une épaisseur près, du squelette de l'aubage.

Pour l'évaluation de $\Delta W\theta$, On suppose que :

\vec{W}_m est quasiment parallèle à $\vec{V}(\theta_s)$. D'où $\Delta W\theta$ et $r\Delta W_{rz} \cdot \vec{V}(\theta_s)$ sont quasiment égaux à $W_m r_j \theta_s / j_m$.

Si on multiplie et on divise le terme de droite de la quantité (b') par W_m , et si on remplace $\vec{W}_m \Delta \vec{W}_m$ par son expression (a'), on trouve la quantité de $\Delta W\theta$:

$$\Delta W\theta = W_m (r_j \theta_s / j_m) \cdot (1/W_m) \cdot (\Delta I - \Delta(P/\rho) - \Delta(W\theta/2)) \quad (c')$$

ou encore :

$$\Delta W\theta \simeq W\theta (1/W_m) \cdot (\Delta I - \Delta(P/\rho) - \Delta(W\theta/2)) \quad (d')$$

et de ce fait :

$$W\theta \Delta W\theta \simeq (W\theta/W_m)^2 \cdot (\Delta I - \Delta(P/\rho) - \Delta(W\theta/2)) = \Delta(W\theta/2) \quad (e')$$

$$\text{où } W\theta/W_m = r (j\theta_s/j_m) = \cotg(\beta_s) = \tg(\alpha) \quad (f')$$

De l'expression (e'), on tire la relation suivante :

$$\Delta(W\theta/2) = \sin^2(\alpha) (\Delta I - \Delta(P/\rho)) \quad (g')$$

Une combinaison des relations (e') et (g') nous donne :

$$\Delta I - \Delta(P/\rho) - \Delta(W\theta/2) = \cos^2(\alpha) (\Delta I - \Delta(P/\rho)) \quad (h')$$

Si on combine les relations (e'), (g') et (f'), on trouve l'expression de $\Delta W\theta$:

$$\Delta W\theta = (\sin(\alpha) \cos(\alpha) / W_m) \cdot (\Delta I - \Delta(P/\rho)) \quad (i')$$

De même pour ΔW_m , si on combine les deux quantités (a') et (g'), on obtient :

$$\Delta W_m = (\cos(\alpha) / W_m) \cdot (\Delta I - \Delta(P/\rho)) \quad (j')$$

ΔW_r et ΔW_s sont évalués en :

$$\Delta \vec{W}_s = - \vec{e}_l w r \Delta\theta \quad \text{et} \quad \Delta W_r = - \cos(\phi) w r \Delta\theta$$

où ϕ est l'angle entre \vec{e}_r et \vec{e}_l . (qui sont respectivement les directions radiale et transversale)

et \vec{w} est le vecteur rotation.

On a pu exprimer tous les termes fluctuants de l'équation (35) en fonction de la rothalpie.

6. - ECRITURE DES EQUATIONS DE VON-KARMAN AVEC PRISE EN COMPTE DES COURBURES DE LA SURFACE

6.1 - Introduction

On définit un système de coordonnées locales (x,y,n) , et on lui associe la base locale $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_n)$, formée de vecteurs unitaires.

On définit les rotations de cette base locale par l'écriture suivante .

$$d\vec{e}_x/dx \vec{e}_n = C_{xx} , d\vec{e}_x/dy \vec{e}_n = C_{xy}$$

$$d\vec{e}_y/dx \vec{e}_n = C_{xy} , d\vec{e}_y/dy \vec{e}_n = C_{yy}$$

$$d\vec{e}_n/dx \vec{e}_x = - C_{xx} , d\vec{e}_n/dx \vec{e}_y = - C_{xy}$$

$$d\vec{e}_n/dy \vec{e}_x = - C_{xy} , d\vec{e}_n/dy \vec{e}_y = - C_{yy}$$

où les C_{xx} , C_{xy} et C_{yy} sont les courbures.

6.2 - Equation de continuité

Tenant compte de ces rotations, le calcul de la divergence du vecteur vitesse donne :

$$\text{div } (\vec{W}) = dW_x/dx + dW_y/dy + dW_n/dn - W_n (C_{xx} + C_{yy}) \quad (36)$$

6.3 - Equation de quantité de mouvement

L'écriture vectorielle de l'équation de quantité de mouvement est :

$$\text{div } (\rho \vec{W} \otimes \vec{W}) + 2\rho w \vec{k} \wedge \vec{W} - \rho \frac{\vec{W} \cdot \vec{W}}{2} + \vec{V}(P) = \text{div } (\vec{\tau}) \quad (37)$$

On pose $\vec{W} = \vec{W}_p + W_n \vec{e}_n$ où $\vec{W}_p = W_x \vec{e}_x + W_y \vec{e}_y$,
 l'équation (37) devient en fonction des courbures :

$$\text{div} (\rho \vec{W}_p \otimes \vec{W}_p) - (\vec{C} + Co \cdot \vec{II}) \vec{W}_p \cdot W_n + \rho (\vec{W}_p \cdot W_n) / \rho n + 2\rho w \vec{k} \wedge \vec{W}$$

$$- \rho \nabla (wR/2) + \nabla (P) = \text{div} (\vec{\tau}_p) - (\vec{C} + Co \cdot \vec{II}) \tau_{in} + \rho \tau_{in} / \rho n \quad (38)$$

Cette équation est celle dans le plan tangent à l'aubage (x,y). Par contre la composante normale s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{div} (\vec{W}_p \cdot W_n) + \rho W_n / \rho n + (\vec{C} : \vec{W}_p) \vec{W}_p - Co W_n + \rho P / \rho n =$$

$$\text{div} (\vec{\tau}_{in}) + \rho \tau_{nn} / \rho n + \vec{C} : \vec{\tau}_p - Co \tau_{nn} \quad (39)$$

avec \vec{C} : tenseur de courbures
 Co : trace de \vec{C}
 \vec{II} : matrice unité

6.4 - Evaluation de la pression dans la couche limite

L'équation (39) permet de déterminer $\rho P / \rho n$. Si on développe le calcul et si on néglige les termes convectifs, on obtient une forme plus simple de $\rho P / \rho n$:

$$\rho P / \rho n = - (C_{xx} W_x + C_{yy} W_y + 2 C_{xy} W_x W_y) + \text{Termes visqueux} \quad (40)$$

Si on se place à l'extérieur de la couche limite, Wye devient nul et l'expression (40) devient :

$$\partial Pe / \partial n = - C_{xx} W_x \quad (41)$$

Les deux expressions (40) et (41) montrent que la pression n'est pas constante suivant la normale et que l'hypothèse de couche limite qui se traduit par l'uniformité de la pression dans les deux zones (visqueuse et saine) le long la normale n'est plus valable.

6.5 - Sommation des équations de NAVIER-STOKES locales

Pour sommer l'équation (38), on lui soustrait l'équation d'EULER, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} & \text{div} (\rho \vec{w}_p \otimes \vec{w}_p - \rho \vec{w}_{pe} \otimes \vec{w}_{pe}) + \partial (\rho \vec{w}_p \cdot W_n - \rho \vec{w}_{pe} \cdot W_{ne}) / \partial n \\ & - (\vec{C} + Co \vec{II}) (\rho \vec{w}_p \cdot W_n - \rho \vec{w}_{pe} \cdot W_{ne}) + 2\rho w \vec{k} \wedge (\vec{W} - \vec{W}_e) + \\ & + \vec{\nabla} (P) - \vec{\nabla} (Pe) = \partial \tau_{in} / \partial n - (\vec{C} + Co \vec{II}) \tau_{in} \quad (42) \end{aligned}$$

La sommation des termes suivants :

- * $\text{div} (\rho \vec{w}_p \otimes \vec{w}_p - \rho \vec{w}_{pe} \otimes \vec{w}_{pe})$ (a)
- * $\partial (\rho \vec{w}_p \cdot W_n - \rho \vec{w}_{pe} \cdot W_{ne}) / \partial n$ (b)
- * $2\rho w \vec{k} \wedge (\vec{W} - \vec{W}_e)$ (c)

$$* - (\vec{C} + C_0 \vec{II}) (\rho \vec{W}_p \cdot W_n - \rho \vec{W}_p e \cdot W_n e) \quad (d)$$

depuis la paroi jusqu'à la frontière limite de la couche limite, ne pose aucune difficulté, sauf pour la quantité (d) où la sommation n'est pas définie.

Pour résoudre ce problème, on a envisagé deux cas possibles :

6.5.1 - Cas de faibles courbures ($\delta.C \ll 1$)

Pour ce cas, on évalue l'ordre de grandeur des quantités (a), (d) et $\rho P/\rho n$, ce qui nous donne :

de l'expression (a), on a : W_x/L

de l'expression (d), on a : $C W_n \cdot W_x$

de l'expression de $\rho P/\rho n$, on a : $\delta/L C W_x$

et si on les compare entre elles, on trouve que :

$$C W_n \cdot W_x = \delta/L C W_x \ll W_x/L$$

ce qui nous permet de négliger tous les termes de courbures devant les autres. Dans ce cas, on obtient les équations classiques de NAVIER-STOKES sommées dans la zone visqueuse.

6.5.2 - Cas de fortes courbures ($\delta.C \approx 1$)

Dans ce cas, on ne néglige aucun terme de l'équation (42), seulement pour pouvoir sommer cette équation, il faut définir d'autres nouvelles épaisseurs de la couche limite que celles qui existent. L'équation sommée s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\delta n} \operatorname{div} (\rho \vec{w}_p \otimes \vec{w}_p - \rho \vec{w}_{pe} \otimes \vec{w}_{pe}) \, dn + \int_0^{\delta n} \rho (\vec{w}_p \cdot \vec{w}_n - \rho \vec{w}_{pe} \cdot \vec{w}_{ne}) / \rho \, dn - \\
& - \int_0^{\delta n} ((\vec{C} + Co \vec{II}) (\rho \vec{w}_p \cdot \vec{w}_n - \rho \vec{w}_{pe} \cdot \vec{w}_{ne})) \, dn + \int_0^{\delta n} 2\rho \vec{w} \cdot \vec{k} \wedge (\vec{W} - \vec{W}_e) \, dn + \\
& + \int_0^{\delta n} (\vec{V}(P) - \vec{V}(Pe)) \, dn = \int_0^{\delta n} \rho \tau_{in} / \rho \, dn - \int_0^{\delta n} (\vec{C} + Co \vec{II}) \tau_{in} \, dn \quad (43)
\end{aligned}$$

7. -CONCLUSION

La sommation des équations de NAVIER-STOKES dans le canal inter-aubes nous a permis de séparer les équations de VON-KARMAN qui sont vérifiées par les paramètres de la couche limite de celle de l'écoulement moyen (écoulement dans le plan méridien). Dans cette dernière équation, tous les termes qui traduisent les effets secondaires (visqueux et non visqueux) ont été gardés.

On a pu évaluer les termes fluctuants qui figurent dans l'équation de l'écoulement moyen (dans la zone saine), en les exprimant en fonction de la rothalpie et de la pression.

La sommation de la composante circonférentielle de l'équation de quantité de mouvement nous a permis de déterminer l'expression de la pression. Cette dernière est injectée dans l'équation de l'écoulement moyen.



CHAPITRE V

CONCLUSIONS GENERALES

L'étude bibliographique nous a montré que les modèles existants ne rendent pas compte de tous les phénomènes dans les turbomachines. Il existe le modèle quasi-tridimensionnel qui offre des avantages dans la simplicité de la discrétisation et la possibilité de la prise en compte des couches limites.

Ce modèle se trouve limité dans son application aux machines bien dessinées et aux faibles charges qui permettent de supposer que les effets tridimensionnels sont faibles. Ceci est dû aux hypothèses prises, que l'une des surfaces est axisymétrique.

Dans la perspective d'obtenir une meilleure modélisation de l'écoulement non visqueux, une méthode de discrétisation a été proposée sur un opérateur avec des conditions aux limites apparentées à celles des turbomachines et qui permettent de comparer avec des solutions analytiques connues. Les résultats obtenus pour différentes déformations de

maillage dans les trois directions sont satisfaisants. Un calcul méridien a été effectué sur une turbomachine axiale avec redresseur, le résultat est intéressant comparé aux résultats exacts. Une application éventuelle au calcul aube à aube est possible et envisageable pour la suite.

Dans la deuxième partie, l'étude des résultats expérimentaux sur le phénomène de recirculation qui apparaît à l'entrée d'une roue de turbomachine nous a amené, à partir des résultats donnés par SEN, à proposer un modèle écoulement instationnaire et de sonde. Les résultats obtenus montrent que l'écoulement dans cette partie de la turbomachine ne peut pas être assimilé à un écoulement méridien moyen stationnaire, axisymétrique, turbulent.

Dans la dernière partie, qui est consacrée à la prise en compte des couches limites, on a procédé à la sommation des équations de NAVIER-STOKES dans tout le canal inter-aubes, dans le but d'obtenir l'équation qui régit l'écoulement moyen sans négliger aucun terme et en utilisant le fait que les équations de VON-KARMAN sont vérifiées. On a obtenu effectivement une équation de l'écoulement méridien moyen avec en plus des termes qui traduisent l'effet secondaire visqueux et l'effet secondaire non visqueux. Tous les termes fluctuants ont été évalués. Compte-tenu de la forme prise par l'équation de continuité, cette équation peut se réécrire en termes de fonction de courant.

L'ensemble de ces trois parties nous donnent des indications utiles pour une modélisation de l'écoulement stationnaire dans une roue : structure de l'écoulement, discrétisation locale et prise en compte des pertes.

Nos perspectives sont d'intégrer effectivement nos résultats dans un modèle global.

ANNEXE 1

Les pressions P1, P2, P3 relatives aux trous T1, T2, T3 s'écrivent en fonction des vitesses normales aux trous :

$$P1 = 0.5 (ALFA \overset{1}{VN11} + (1-ALFA) \overset{2}{VN21})$$

avec VN11 : vitesse normale à T1, de l'écoulement 1
et VN21 : vitesse normale à T1, de l'écoulement 2

$$P2 = 0.5 (ALFA \overset{1}{VN12} + (1-ALFA) \overset{2}{VN22})$$

avec VN12 : vitesse normale à T2, de l'écoulement 1
et VN22 : vitesse normale à T2, de l'écoulement 2

et enfin
$$P3 = 0.5 (ALFA \overset{1}{VN13} + (1-ALFA) \overset{2}{VN23})$$

avec VN13 : vitesse normale à T3, de l'écoulement 1
et VN23 : vitesse normale à T3, de l'écoulement 2

Le système I d'équations :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} P1 - P2 = 0 \\ P3 - 1.65 P1 = 0 \\ P3 - P0 = 0 \\ \text{donnée de } VZ1 \\ \text{donnée de } V\theta 2 \end{array} \right.$$

s'écrit en fonction des inconnues X(1), X(2), X(3), X(4) et X(5) sous la forme suivante :

On pose :

$$b_m = \beta - \pi/4$$

$$b_p = \beta + \pi/4$$

$$b_e = \beta$$

$$X(5) * ((X(1) * \sin (b_m) - X(2) * \cos (b_m))^2 \\ - (X(1) * \sin (b_p) - X(2) * \cos (b_p))^2)$$

$$+ (1 - X(5)) * ((X(3) * \sin (b_m) - X(4) * \cos (b_m))^2 \\ - (X(3) * \sin (b_p) - X(4) * \cos (b_p))^2) = 0$$

$$X(5) * (X(1) * \sin (b_e) - X(2) * \cos (b_e))^2 \\ - 1.65 * (X(1) * \sin (b_m) - X(2) * \cos (b_m))^2$$

$$+ (1 - X(5)) * ((X(3) * \sin (b_e) - X(4) * \cos (b_e))^2 \\ - 1.65 * (X(3) * \sin (b_m) - X(4) * \cos (b_m))^2) = 0$$

$$X(5) * (X(1) * \sin (b_e) - X(2) * \cos (b_e))^2 + (1 - X(5)) \\ * (X(3) * \sin (b_e) - X(4) * \cos (b_e))^2 - P_0 = 0$$

Donnée de X(1)

Donnée de X(4)

Les inconnues $X(1)$, $X(2)$, $X(3)$, $X(4)$ et $X(5)$ du système posé, correspondent respectivement aux grandeurs physiques $VZ1$, $V\theta1$, $VZ2$, $V\theta2$ et ALFA.

ANNEXE 2

Nous partons de l'équation de continuité suivante :

$$\operatorname{div} \vec{W} = \partial W_x / \partial x + \partial W_y / \partial y + \partial W_n / \partial n \approx 0 \quad (1)$$

et nous l'intégrons de $\theta_1 = 0$ à $\theta_1' = \delta n$, l'équation (1) devient alors :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_1'} (\partial W_x / \partial x + \partial W_y / \partial y + \partial W_n / \partial n) dn = 0 \quad (2)$$

Les deux premières quantités s'écrivent, après avoir développé le calcul :

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_1'} \partial W_x / \partial x dn &= \partial / \partial x \left(\int_{\theta_1}^{\theta_1'} W_x dn \right) - W_x e. \partial \delta n / \partial x \\ &= \partial / \partial x \left(W_x e \int_{\theta_1}^{\theta_1'} (1 - (1 - W_x / W_x e)) dn \right) - W_x e. \partial \delta n / \partial x \\ &= \partial (W_x e. \delta n - W_x e. \delta n_1) / \partial x - W_x e. \partial \delta n / \partial x \end{aligned}$$

et

$$\int_{\theta_1}^{\theta_1'} \partial W_y / \partial y dn = \partial / \partial y \left(\int_{\theta_1}^{\theta_1'} W_y dn \right) - W_y e. \partial \delta n / \partial y$$

$$\begin{aligned}
&= \partial/\partial y \left(W_{xe} \int_{\theta_1}^{\theta_1'} (W_y/W_{xe}) \, dn \right) - W_{ye} \cdot \partial \delta n / \partial y \\
&= - \partial (W_{xe} \cdot \delta n) / \partial y - W_{ye} \cdot \partial \delta n / \partial y
\end{aligned}$$

Finalement l'équation (2) devient, après avoir remplacé les deux premières quantités par leurs expressions :

$$W_{ne} - \partial (W_{xe} \cdot \delta n_1) / \partial x - \partial (W_{xe} \cdot \delta n_2) / \partial y + \delta n \cdot \partial W_{xe} / \partial x = 0 \quad (3)$$

Le terme $(W_{ye} \cdot \partial \delta n / \partial y)$ est éliminé de l'équation (3), car à l'extérieur de la couche limite, W_{ye} est nul.

BIBLIOGRAPHIE

- /1/ VEUILLOT J.P.
Calcul de l'écoulement moyen dans une roue de turbomachine axiale.
Thèse de 3 ème cycle soutenue en 1975. PARIS VI
- /2/ CHUNG HUA WU
A General Theory of Three dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial, Radial, and Mixed-Flow Types.
Transaction of the ASME NOV 1952, p 1363-1380.
- /3/ NOVAK R.A ; HEARSEY R.M.
A nearly three-dimensional intrablade computing system for turbomachinery.
Transactions of the ASME Journal of Fluids Engineering Serie 1, vol 99, n° 1, 1977, p 154-166
- /4/ KATSANIS T.
Quasi three dimensional calculation of velocities in turbomachines blade row.
ASME Paper 72 - WA/GT-7, 1972, p 1-8
- /5/ KRIMERMAN Y.; ADLER D.
The complete three dimensional calculation of the compressible flow field in turbo impellers.
Journal Mechanical Engineering Science, vol. 20, n°3, 1978 p 149-158.

- /6/ SALVAGE J.W.
Investigation of secondary flow behaviour and wall boundary layer development through compressor cascades.
Technical note 107, Von Karman Institute For Fluid Dynamics, june 1974.
- /7/ MOORE J; MOORE J.G.
Numerical methods for flows in turbomachinery.
VKI Lecture Series 1982.5
- /8/ HORLOCK J.H.
Secondary flows in turbomachines.
VKI lecture series 72
January 1975.
- /9/ BUISINE D.
Quelques résultats sur le calcul des écoulements tridimensionnels dans les turbomachines axiales.
Thèse de doctorat d'état soutenue en 1985 . Lille 1
- /10/ BOSMAN C.
Analytical theory of three dimensional flow in centrifugal compressors.
Journal Mechanical Engineering Science, vol.23, n°4, 1981
p 179-191.
- /11/ VICTOROV G.V ; AGARWAL P.K.
The third two-dimensional problem of three-dimensional blade systems for hydraulic machines.
ASME- Journal of Fluids Engineering Vol. 103, 1981, p 42-51
- /12/ COUSTEIX J.
Aerodynamique , Turbulence et couche limite
Collection La Chevêche CEPAD 1989.

- /13/ COUSTEIX J ; AUPOIX
Three-dimensional boundary layers : turbulence modelisation and calculation methods" Second Symposium on turbulent Shear Flows - Imperial College, LONDON - p 15.25-15.30, 1979
- /14/ SPALDING D.B ; PATANKAR S.V
A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows.
J. Heat and Mass Transfer. Vol 15, 1972, p 1787-1791.
- /15/ PATANKAR S.V
Numerical heat transfer and fluid flow.
Series in computational methods in mechanics and thermal sciences.
W.J MINKOWYCZ and E.M Sparrow, Editors.
- /16/ SPEZIALE C.G
Numerical study of viscous flow in rotating rectangular ducts.
Journal of Fluid Mechanics. Vol 122, 1982, p 251-271
- /17/ BRILEY W.R
Numerical method for predicting three-dimensional steady viscous flow in ducts.
Journal of Computational Physics. Vol 14, 1974, p 8-28
- /18/ LEBOEUF F.
Annulus endwall boundary layer theory
VKI Lecture Series 1984.5
- /19/ HIRSCH CH. ; WARZEE G.
A finite element method for through flow calculations in turbomachines.
Journal of Fluids Engineering. Vol 98, 1976, p 403-421.

/20/ SEN M.H.

Study of inlet flow of centrifugal pumps at partial flow rates.

Thèse soutenue en 1980 à l'Université de Bruxelles.

/21/ MAROUFI S.

Contribution à l'étude de l'apparition des recirculations en sortie de roue dans une pompe centrifuge fonctionnant à débits partiels.

Thèse de 3 ème cycle soutenue en 1986. Lille

/22/ TANAKA T.

An experimental study of backflow phenomena in a high specific speed turbomachinery

Proceedings of the 10th BPMA International Pump Technical; BHRA Fluids Engineering; march 24-26,1987; p 41-60

/23/ SCHIAVELLO B.

Débit critique d'apparition de la recirculation à l'entrée des roues de pompes centrifuges

La Houille Blanche; 1982, p 139-158

/24/ LIEBLEIN S ; ROUDEBUSH W.H

Theoretical loss relations for low-speed two-dimensional-cascade flow.

VKI Technical Note NACA 3662 1965.

/25/ LIEBLEIN S.

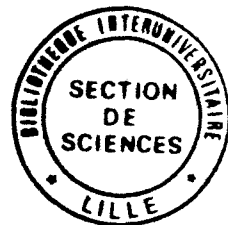
Analytical relation for wake momentum thickness and diffusion ratio for low-speed compressor cascade blades.

VKI Technical Note NACA 4318 1958.

/26/ CHAUVIN. J

Meridional flow in axial turbomachines

VKI Course note 99 January 1977



MOTS CLES

Turbomachine	Couche limite
Ecoulement méridien	Recirculation
Ecoulement secondaire	Pertes
Discrétisation	Sommation aube à aube

RESUME

Ce travail porte sur l'étude de l'écoulement dans une turbomachine.

Dans la première partie, à partir des résultats de SEN concernant le phénomène de recirculation à l'entrée de la roue d'une turbomachine, nous proposons un modèle sonde-écoulement dans le but d'avoir une idée sur la structure de l'écoulement. Le résultat obtenu montre que l'écoulement dans la zone recirculée ne peut pas être modélisé à partir d'un écoulement méridien moyen, stationnaire et turbulent.

Dans la deuxième partie, une méthode de discrétisation par volumes finis des équations d'EULER est proposée et validée sur différents maillages. Le calcul de l'écoulement méridien d'une turbomachine axiale avec redresseur s'est avéré satisfaisant.

La dernière partie concerne la prise en compte des couches limites dans la résolution de l'écoulement méridien. Nous procédons à la sommation aube à aube des équations de Navier-Stokes, dans le but d'extraire l'équation de l'écoulement méridien moyen. Dans cette dernière, tous les termes qui tiennent compte des couches limites et des effets secondaires ont été évalués.