LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE
ET D'OPTIMISATION

n° d'ordre : 931

THESE

Nouveau régime

présentée à
l'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en MATHEMATIQUES

par

Jilali ABOUIR

PROBLEMES CONCERNANT L'APPROXIMATION RATIONNELLE A PLUSIEURS VARIABLES.

Soutenue le 5 Juin 1992 devant la commission d'examen :

Membres du jury

Président :	C. BREZINSKI, Professeur à L'U.S.T.L.
Rapporteurs :	A. CUYT, Professeur à I.U.A. (Anvers - Belgique)
	J. VAN ISEGHEM, Professeur à L'U.S.T.L.

Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation, UFR IEEA - M3, Université des Sciences et Technologies de Lille,
59655 Villeneuve d'Ascq - Cedex - FRANCE.

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNOLOGIES DE LILLE

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS, A.DUBRULLE

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

M. P. LOUIS

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du solide
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. MACKE Bruno	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques

M. MIGEON Michel	EUDIL
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. TRIDOT Gabriel	Chimie appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCQ Denis	Probabilités
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. BRASSELET Jean Paul	Géométrie et topologie
M. BREZINSKI Claude	Analyse numérique
M. BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CELET Paul	Géologie générale
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. CROSNIER Yves	Electronique
Mme DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	Informatique
M. DEBOURSE Jean Pierre	Gestion des entreprises
M. DEBRABANT Pierre	Géologie appliquée
M. DECLERCQ Roger	Sciences de gestion
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DESCHEPPER Joseph	Sciences de gestion
Mme DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité chimique
M. DHAINAUT André	Biologie animale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie animale
M. DJAFARI Rouhani	Physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DOUKHAN Jean Claude	Physique du solide
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie hertzienne
M. DUPOUY Jean Paul	Biologie
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. FOCT Jacques Jacques	Métallurgie
M. FOUQUART Yves	Optique atmosphérique
M. FOURNET Bernard	Biochimie structurale
M. FRONTIER Serge	Ecologie numérique
M. GLORIEUX Pierre	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie-Physique
M. GRANELLE Jean Jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie animale
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. HENRY Jean Pierre	Génie mécanique
M. HERMAN Maurice	Physique spatiale
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANGRAND Claude	Probabilités et statistiques

M. LATTEUX Michel	Informatique
M. LAVEINE Jean Pierre	Paléontologie
Mme LECLERCQ Ginette	Catalyse
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique atomique et moléculaire
M. LEROY Jean Marie	Spectrochimie
M. LHENAFF René	Géographie
M. LHOMME Jean	Chimie organique biologique
M. LOUAGE Françis	Electronique
M. LOUCHEUX Claude	Chimie-Physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie physique
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M. MAROUF Nadir	Sociologie
M. MICHEAU Pierre	Mécanique des fluides
M. PAQUET Jacques	Géologie générale
M. PASZKOWSKI Stéfan	Mathématiques
M. PETIT Francis	Chimie organique
M. PORCHET Maurice	Biologie animale
M. POUZET Pierre	Modélisation - calcul scientifique
M. POVY Lucien	Automatique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. RAMAN Jean Pierre	Sciences de gestion
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHAMPS Joël	Spectroscopie moléculaire
Mme SCHWARZBACH Yvette	Géométrie
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SLIWA Henri	Chimie organique
M. SOMME Jean	Géographie
Melle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. THIEBAULT François	Sciences de la Terre
M. THOMAS Jean Claude	Géométrie - Topologie
M. THUMERELLE Pierre	Démographie - Géographie humaine
M. TILLIEU Jacques	Physique théorique
M. TOULOTTE Jean Marc	Automatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du travail
M. TURRELL Georges	Spectrochimie infrarouge et raman
M. VANEECLOO Nicolas	Sciences Economiques
M. VAST Pierre	Chimie inorganique
M. VERBERT André	Biochimie
M. VERNET Philippe	Génétique
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. WALLART Françis	Spectrochimie infrarouge et raman
M. WEINSTEIN Olivier	Analyse économique de la recherche et développement
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ABRAHAM Francis	
M. ALLAMANDO Etienne	Composants électroniques
M. ANDRIES Jean Claude	Biologie des organismes
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BALL Steven	Génétique
M. BART André	Biologie animale
M. BASSERY Louis	Génie des procédés et réactions chimiques
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BAUSIERE Robert	Systèmes électroniques
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BELLET Jean	Physique atomique et moléculaire
M. BERNAGE Pascal	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. BERTHOUD Arnaud	Sciences Economiques
M. BERTRAND Hugues	Sciences Economiques
M. BERZIN Robert	Analyse
M. BISKUPSKI Gérard	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie végétale
M. BOHIN Jean Pierre	Biochimie métabolique et cellulaire
M. BOIS Pierre	Mécanique
M. BOISSIER Daniel	Génie civil
M. BOIVIN Jean Claude	Spectrochimie
M. BOUCHER Daniel	Physique
M. BOUQUELET Stéphane	Biologie appliquée aux enzymes
M. BOUQUIN Henri	Gestion
M. BROCARD Jacques	Chimie
Mme BROUSMICHE Claudine	Paléontologie
M. BUISINE Daniel	Mécanique
M. CAPURON Alfred	Biologie animale
M. CARRE François	Géographie humaine
M. CATTEAU Jean Pierre	Chimie organique
M. CAYATTE Jean Louis	Sciences Economiques
M. CHAPOTON Alain	Electronique
M. CHARET Pierre	Biochimie structurale
M. CHIVE Maurice	Composants électroniques optiques
M. COMYN Gérard	Informatique théorique
Mme CONSTANT Monique	Composants électroniques et optiques
M. COQUERY Jean Marie	Psychophysiologie
M. CORIAT Benjamin	Sciences Economiques
Mme CORSIN Paule	Paléontologie
M. CORTOIS Jean	Physique nucléaire et corpusculaire
M. COUTURIER Daniel	Chimie organique
M. CRAMPON Norbert	Tectolique géodynamique
M. CURGY Jean Jacques	Biologie
M. DANGOISSE Didier	Physique théorique
M. DE PARIS Jean Claude	Analyse
M. DECOSTER Didier	Composants électroniques et optiques
M. DEJAEGER Roger	Electrochimie et Cinétique
M. DELAHAYE Jean Paul	Informatique
M. DELORME Pierre	Physiologie animale
M. DELORME Robert	Sciences Economiques
M. DEMUNTER Paul	Sociologie
Mme DEMUYNCK Claire	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. DENEL Jacques	Informatique
M. DEPREZ Gilbert	Physique du solide - christallographie

M. LE MAROIS Henri	Vie de la firme
M. LEMOINE Yves	Biologie et physiologie végétales
M. LESCURE François	Algèbre
M. LESENNE Jacques	Systèmes électroniques
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
Mme LOPES Maria	Mathématiques
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU François	Sciences économiques
M. MAHIEU Jean Marie	Optique - Physique atomique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MANSY Jean Louis	Géologie
M. MAURISSON Patrick	Sciences Economiques
M. MERIAUX Michel	EUDIL
M. MERLIN Jean Claude	Chimie
M. MESMACQUE Gérard	Génie mécanique
M. MESSELYN Jean	Physique atomique et moléculaire
M. MOCHE Raymond	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. MONTEL Marc	Physique du solide
M. MORCELLET Michel	Chimie organique
M. MORE Marcel	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. MORTREUX André	Chimie organique
Mme MOUNIER Yvonne	Physiologie des structures contractiles
M. NIAY Pierre	Physique atomique,moléculaire et du rayonnement
M. NICOLE Jacques	Spectrochimie
M. NOTELET Francis	Systèmes électroniques
M. PALAVIT Gérard	Génie chimique
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie organique
M. PERROT Pierre	Chimie appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie animale
M. PETIT Daniel	Biologie des populations et écosystèmes
M. PLIHON Dominique	Sciences Economiques
M. PONSOLLE Louis	Chimie physique
M. POSTAIRE Jack	Informatique industrielle
M. RAMBOUR Serge	Biologie
M. RENARD Jean Pierre	Géographie humaine
M. RENARD Philippe	Sciences de gestion
M. RICHARD Alain	Biologie animale
M. RIETSCH François	Physique des polymères
M. ROBINET Jean Claude	EUDIL
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROLLAND Paul	Composants électroniques et optiques
M. ROLLET Philippe	Sciences Economiques
Mme ROUSSEL Isabelle	Géographie physique
M. ROUSSIGNOL Michel	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. ROY Jean Claude	Psychophysiologie
M. SALERNO Françis	Sciences de gestion
M. SANCHOLLE Michel	Biologie et physiologie végétales
Mme SANDIG Anna Margarette	
M. SAWERYSYN Jean Pierre	Chimie physique
M. STAROSWIECKI Marcel	Informatique
M. STEEN Jean Pierre	Informatique
Mme STELLMACHER Irène	Astronomie - Météorologie
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLIEZ Roger	Génie alimentaire
M. TANRE Daniel	Géométrie - Topologie
M. THERY Pierre	Systèmes électroniques
Mme TJOTTA Jacqueline	Mathématiques
M. TOURSEL Bernard	Informatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du travail

M. DERIEUX Jean Claude	Microbiologie
M. DERYCKE Alain	Informatique
M. DESCAMPS Marc	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie minérale
M. DEWAILLY Jean Michel	Géographie humaine
M. DHAMELINCOURT Paul	Chimie physique
M. DI PERSIO Jean	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. DUBAR Claude	Sociologie démographique
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie hertzienne
M. DUBOIS Jean Jacques	Géographie
M. DUBUS Jean Paul	Spectrométrie des solides
M. DUPONT Christophe	Vie de la firme
M. DUTHOIT Bruno	Génie civil
Mme DUVAL Anne	Algèbre
Mme EVRARD Micheline	Génie des procédés et réactions chimiques
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FARVACQUE Jean Louis	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. FAUQUEMBERGUE Renaud	Composants électroniques
M. FELIX Yves	Mathématiques
M. FERRIERE Jacky	Tectonique - Géodynamique
M. FISCHER Jean Claude	Chimie organique, minérale et analytique
M. FONTAINE Hubert	Dynamique des cristaux
M. FORSE Michel	Sociologie
M. GADREY Jean	Sciences économiques
M. GAMBLIN André	Géographie urbaine, industrielle et démographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOURIEROUX Christian	Probabilités et statistiques
M. GREGORY Pierre	I.A.E.
M. GREMY Jean Paul	Sociologie
M. GREVET Patrice	Sciences Economiques
M. GRIMBLOT Jean	Chimie organique
M. GUELTON Michel	Chimie physique
M. GUICHAOUA André	Sociologie
M. HAIMAN Georges	Modélisation,calcul scientifique, statistiques
M. HOUDART René	Physique atomique
M. HUEBSCHMANN Johannes	Mathématiques
M. HUTTNER Marc	Algèbre
M. ISAERT Noël	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JACOB Pierre	Probabilités et statistiques
M. JEAN Raymond	Biologie des populations végétales
M. JOFFRE Patrick	Vie de la firme
M. JOURNEL Gérard	Spectroscopie hertzienne
M. KOENIG Gérard	Sciences de gestion
M. KOSTRUBIEC Benjamin	Géographie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
Mme KRIFA Hadjila	Sciences Economiques
M. LANGEVIN Michel	Algèbre
M. LASSALLE Bernard	Embryologie et biologie de la différenciation
M. LE MEHAUTE Alain	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. LEBFEVRE Yannic	Physique atomique,moléculaire et du rayonnement
M. LECLERCQ Lucien	Chimie physique
M. LEFEBVRE Jacques	Physique
M. LEFEBVRE Marc	Composants électroniques et optiques
M. LEFEVRE Christian	Pétrologie
Melle LEGRAND Denise	Algèbre
M. LEGRAND Michel	Astronomie - Météorologie
M. LEGRAND Pierre	Chimie
Mme LEGRAND Solange	Algèbre
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LEMAIRE Jean	Spectroscopie hertzienne

M. TURREL Georges	Spectrochimie infrarouge et raman
M. VANDIJK Hendrik	
Mme VAN ISEGHEM Jeanine	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. VANDORPE Bernard	Chimie minérale
M. VASSEUR Christian	Automatique
M. VASSEUR Jacques	Biologie
Mme VIANO Marie Claude	
M. WACRENIER Jean Marie	Electronique
M. WARTEL Michel	Chimie inorganique
M. WATERLOT Michel	géologie générale
M. WEICHERT Dieter	Génie mécanique
M. WERNER Georges	Informatique théorique
M. WIGNACOURT Jean Pierre	
M. WOZNIAK Michel	Spectrochimie
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Algèbre

Introduction

Les approximants de Padé fournissent un moyen pratique de calcul numérique de certaines fonctions. Ils s'appliquent aussi à la physique théorique et à la mécanique des fluides, on peut citer l'ouvrage : "Padé approximants method and its applications to Mechanics" édité par H. Cabannes. L'approximation de Padé donne de bons résultats pour les séries de Stieljes qu'on trouve dans de nombreux problèmes physiques.

En physique, on est souvent confronté à des problèmes multidimensionnels(filtrage bidimensionnel, traitement d'images). C'est pour cela que plusieurs généralisations des approximants de Padé aux fonctions à plusieurs variables ont été définies par plusieurs auteurs : [BREZa, CHAF, CHIS, CUYTb, CUYTf, LEVIa, LEVIb, KARL, LUTTa, LUTTb, ...]

Notre travail est de se mettre dans le cadre de l'interpolation rationnelle de Newton-Padé à plusieurs variables introduite et étudiée par A. Cuyt et B. Verdonk [CUYTe, CUYTf] et de développer plusieurs propriétés de celle-ci.

Le premier chapitre est constitué de trois paragraphes :

-Nous rappelons le problème d'approximation de Newton-Padé à plusieurs variables.

-Avec des hypothèses moins fortes que la normalité, la continuité de l'opérateur d'approximation est établie tout en variant les coefficients c_{ij} du développement en série de Newton d'une fonction f.

$$f(x,y) = \sum_{(i,j)\in \mathbb{N}^2} c_{ij} B_{ij}(x,y)$$

-Dans ce paragraphe nous généralisons la notion de normalité au cas des approximants de Newton-Padé à plusieurs variables. Un premier théorème donne les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir la normalité. Dans un second théorème nous pouvons satisfaire des conditions suffisantes, en faisons la connexion avec les déterminants de Hankel généralisés.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions une extention du théorème de Kronecker, défini en 1881, au cas des séries à deux variables. Nous faisons la connexion avec les approximants de Padé homogènes à deux variables. Les deux parties directe et réciproque du théorème sont étudiées séparément.

Dans le troisième chapitre, nous définissons les approximants de Newton-Padé partiel et les approximants de de type Newton-Padé à plusieurs variables, c'est une généralisation du cas scalaire introduit par C. Brezinski. L'avantage de ces approximants est d'utiliser les renseignements sur les zéros et les pôles de la fonction f développable en serie formelle, pour améliorer l'approximation. Nous justifions cette idée par l'étude numérique de l'exemple traditionel :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

en faisant une comparaison entre l'approximant de Padé et l'approximant de Padé partiel au voisinage des zéros et des pôles. Nous comparons aussi nos approximants de type Newton-Padé avec d'autres approximants définis par plusieurs auteurs.

Dans le quatrième chapitre, nous nous servons de la représentation intégrale de Cauchy des fonctions holomorphes dans un polydisque et sa connexion avec les différences divisées à plusieurs variables pour donner deux approches à la formulation de l'erreur de l'interpolation rationnelle et de l'approximation de Padé à plusieurs variables.

Pour la simplicité et la clarté de ce travail nous n'utilisons que deux variables . Le cas à n variables est absolument analogue pour ce qui concerne les démonstrations et la validité des résultats.

Table des matières

CHAPITRE I:

Continuité et Normalité de l'approximation de Newton-Padé à plusieurs variables.

1 Approximation de Newton-Padé à plusieurs variables

1.1 Introduction

Soit f une fonction à deux variables réelles ou complexes, nous supposons que f est connue aux points (x_i, y_j) où $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

Nous rappelons le formalisme introduit et étudié par A. Cuyt et B. Verdonk dans [CUYTe,CUYTh], pour déterminer l'approximant de Newton-Padé. Cet approximant est dit de Padé seulement, si tous les points (x_i, y_j) coincident.

Nous supposons que f est développable en série formelle dans la base de Newton :

$$f(x,y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} c_{ij} B_{ij}(x,y)$$

$$B_{00}(x,y) = 1$$

$$B_{ij}(x,y) = \prod_{k=0}^{i-1}(x - x_k)\prod_{l=0}^{j-1}(y - y_l), \quad \forall i,j \geq 1$$

1.2 Différences divisées

Les $c_{ij} = f[x_0, x_1, ..., x_i][y_0, y_1, ..., y_j]$ sont les différences divisées à deux variables de la fonction f.

Si tous les points (x_i, y_j) coincident, par exemple :

$x_0 = x_1 = ... = x_i = 0 \; et \; y_0 = y_1 = ... = y_j = 0$ alors :

$$c_{kl} = \frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^l}\Big|_{(0,0)} \quad \text{pour} \quad k \leq i \quad \text{et} \quad l \leq j$$

Les différences divisées se calculent récursivement :

$$f[x_0][y_0] = f(x_0, y_0)$$

$$f[x_0][y_0, y_1, ..., y_s] = \frac{f[x_0][y_1, ..., y_s] - f[x_0][y_0, y_1, ..., y_{s-1}]}{y_s - y_0}, \quad s \geq 1$$

$$f[x_0, x_1, ..., x_r][y_0] = \frac{f[x_1, ..., x_r][y_0] - f[x_0, ..., x_{r-1}][y_0]}{x_r - x_0}, \quad r \geq 1$$

$$f[x_0, x_1, ..., x_r][y_0, y_1, ..., y_s] = \frac{f[x_0, x_1, ..., x_r][y_1, ..., y_s] - f[x_0, ..., x_r][y_0, y_1, ..., y_{s-1}]}{y_s - y_0}, \quad r, s \geq 1$$

$$f[x_0, x_1, ..., x_r][y_0, y_1, ..., y_s] = \frac{f[x_1, ..., x_r][y_0, ..., y_s] - f[x_0, ..., x_{r-1}][y_0, y_1, ..., y_s]}{x_r - x_0}, \quad r, s \geq 1$$

1.3 Résolution du problème d'approximation

Nous choisissons deux ensembles finis N, D dans $\mathbb{N}^2$:

N "pour le numérateur", D "pour le dénominateur", notre problème est de déterminer les deux polynômes :

(1) $\quad p(x,y) = \sum_{(i,j) \in N} a_{ij} B_{ij}(x,y), \quad card(N) = n+1$

(2) $\quad q(x,y) = \sum_{(i,j) \in D} b_{ij} B_{ij}(x,y), \quad card(D) = m+1$

Soit I un ensemble fini d'indices dans $\mathbb{N}^2$ tel que :

(3) $\quad (fq - p)(x,y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \setminus I} d_{ij} B_{ij}(x,y), \quad card(I) = n+m+1$

$$d_{ij} = (fq-p)[x_0, x_1, ..., x_i][y_0, y_1, ..., y_j] \text{ pour } i, j \geq 1$$

Nous supposons que I vérifie la régle du réctangle :

(4) $\quad$ (si $(i,j) \in I$ alors $(k,l) \in I$ pour $k \leq i$ et $l \leq j$)

(5) $\quad N \subseteq I$

L'equation (3) est équivalente au système linéaire :

$$(6) \qquad (fq-p)[x_0,x_1,...,x_i][y_0,y_1,...,y_j]=0 \text{ pour } (i,j)\in I$$

Puisque $N \subseteq I$ alors (6) se divise en un système non homogène et en un système homogène :

$$(6\text{-a}) \qquad (fq)[x_0,x_1,...,x_i][y_0,y_1,...,y_j]=p[x_0,x_1,...,x_i][y_0,y_1,...,y_j], \ (i,j)\in N$$

$$(6\text{-b}) \qquad (fq)[x_0,x_1,...,x_i][y_0,y_1,...,y_j]=0 \ (i,j)\in I\backslash N$$

$card(I\backslash N)=m$ donc $(6-b)$ est un système à m équations et $m+1$ inconnues qui sont les coefficients b_{ij} du polynôme q, admet au moins une solution.

Si nous ordonons N,D,I :

$$N=\{(i_0,j_0),(i_1,j_1),...,(i_n,j_n)\}$$

$$D=\{(d_0,e_0),(d_1,e_1),...,(d_m,e_m)\}$$

$$I=\{(i_0,j_0),(i_1,j_1),...,(i_n,j_n),(i_{n+1},j_{n+1}),...,(i_{n+m},j_{n+m})\}$$

nous pouvons calculer les différences divisées : $c_{di,ej}$

$$c_{di,ej}=f[x_d,x_{d+1},...,x_i][y_e,y_{e+1},...,y_j], \ d\le i \text{ et } e\le j$$

$$c_{di,ej}=0 \ \text{ si } d>i \text{ ou } e>j$$

Le système $6-b$ peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} c_{d_0 i_{n+1},e_0 j_{n+1}} & \cdots & c_{d_m i_{n+1},e_m j_{n+1}} \\ . & \cdots & . \\ . & & . \\ . & & . \\ c_{d_0 i_{n+m},e_0 j_{n+m}} & \cdots & c_{d_m i_{n+m},e_m j_{n+m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{d_0e_0} \\ . \\ . \\ . \\ b_{d_me_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice qui correspond à ce système est notée :

$$C_{nm}=(c_{d_k i_l,e_k j_l})$$

$$avec: 0\le k\le m \quad n+1\le l\le n+m$$

Si le rang de C_{nm} est maximal m, alors la solution $q(x,y)$ sera donnée par :

$$q(x,y)=\begin{vmatrix} B_{d_0e_0}(x,y) & \ldots & B_{d_me_m}(x,y) \\ c_{d_0 i_{n+1},e_0 j_{n+1}} & \cdots & c_{d_m i_{n+1},e_m j_{n+1}} \\ . & \cdots & . \\ . & & . \\ . & & . \\ c_{d_0 i_{n+m},e_0 j_{n+m}} & \cdots & c_{d_m i_{n+m},e_m j_{n+m}} \end{vmatrix}$$

$$(fq)[x_0, x_1, ..., x_i][y_0, y_1, ..., y_j] = (qf)[x_0, x_1, ..., x_i][y_0, y_1, ..., y_j]$$

$$= \sum_{\mu=0}^{i} \sum_{\nu=0}^{j} q[x_0, x_1, ..., x_\mu][y_0, y_1, ..., y_\nu] f[x_\mu, x_1, ..., x_i][y_\nu, y_1, ..., y_j]$$

Les $q[x_0, x_1, ..., x_\mu][y_0, y_1, ..., y_\nu]$ existent pour $(\mu, \nu) \in D$ donc :

$$(fq)[x_0, x_1, ..., x_i][y_0, y_1, ..., y_j] = \sum_{(\mu,\nu)\in D} b_{\mu\nu} f[x_\mu, x_1, ..., x_i][y_\nu, y_1, ..., y_j]$$

nous déduisons le polynôme $p(x, y)$:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= \sum_{(i,j) \in N} a_{ij} B_{ij}(x,y) \\ &= \sum_{(i,j) \in N} p[x_0, x_1, ..., x_i][y_0, y_1, ..., y_j] B_{ij}(x,y) \\ &= \sum_{(i,j) \in N} (fq)[x_0, x_1, ..., x_i][y_0, y_1, ..., y_j] B_{ij}(x,y) \\ &= \sum_{(\mu,\nu) \in D} b_{\mu,\nu} \sum_{(i,j) \in N} c_{\mu i, \nu j} B_{ij}(x,y) \end{aligned}$$

Donc :

$$p(x,y) = \begin{vmatrix} \sum_{(i,j) \in N} c_{d_0 i, e_0 j} B_{d_0 e_0}(x,y) & \ldots & \sum_{(i,j) \in N} c_{d_m i, e_m j} B_{d_m e_m}(x,y) \\ c_{d_0 i_{n+1}, e_0 j_{n+1}} & \ldots & c_{d_m i_{n+1}, e_m j_{n+1}} \\ . & \ldots & . \\ . & & . \\ . & & . \\ c_{d_0 i_{n+m}, e_0 j_{n+m}} & \ldots & c_{d_m i_{n+m}, e_m j_{n+m}} \end{vmatrix}$$

Avec les hypothèses (1), (2), (3), (4), (5) et (6) sur les ensembles d'indices N, D *et* I, le problème d'approximation de Padé admet toujours une solution . L'ensemble de ces solutions est noté $[N/D]_I$. Un élément de cet ensemble se note de la même façon $[N/D]_I$. L'ensemble $[N/D]_I$ contient un seul élément (la solution est unique) si le rang de la matrice C_{nm} est maximal.

1.4 Exemples

Exemple 1 : [CUYTe]

$$f(x,y) = 1 + \frac{x}{0.1 - y} + sin(xy)$$

Avec :

$$x_i = i\sqrt{\pi} \quad i = 0, 1, 2, ...$$

$$y_j = (j-1)\sqrt{\pi} \quad j = 0, 1, 2, ...$$

f admet le développement en série de Newton suivant :

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{0.1+\sqrt{\pi}}x + \frac{10}{0.1+\sqrt{\pi}}x(y+\sqrt{\pi}) + \frac{10}{0.01-\pi}x(y+\sqrt{\pi})y + \sum_{i+j\geq 4} c_{0i,0j}B_{ij}(x,y)$$

Nous choisissons :

$$D = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$$

$$N = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$$

$$I = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1),(2,1),(1,2)\}$$

Donc $I \backslash N = \{(2,1),(1,2)\}$

$n = 2 \; et \; m = 3$

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} c_{02,01} & c_{12,11} & c_{02,11} \\ c_{01,02} & c_{11,02} & c_{01,12} \end{pmatrix}$$

est de rang maximal.

d'où :

$$q(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & x & y+\sqrt{\pi} \\ c_{02,01} & c_{12,11} & c_{02,11} \\ c_{01,02} & c_{11,02} & c_{01,12} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{100}{0.01-\pi}\left(1 - \frac{1}{0.1+\sqrt{\pi}}(y+\sqrt{\pi})\right)$$

$$p(x,y) = \begin{vmatrix} N_{00}(x,y) & N_{10}(x,y) & N_{01}(x,y) \\ c_{02,01} & c_{12,11} & c_{02,11} \\ c_{01,02} & c_{11,02} & c_{01,12} \end{vmatrix}$$

avec :

$$\begin{aligned}
N_{00}(x,y) &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} c_{0i,0j}B_{ij}(x,y) \\
&= 1 + \frac{x}{0.1+\sqrt{\pi}} + \frac{10}{0.1+\sqrt{\pi}}x(y+\sqrt{\pi}) \\
N_{10}(x,y) &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} c_{1i,0j}B_{ij}(x,y) \\
&= \frac{0.1+2\sqrt{\pi}}{0.1+\sqrt{\pi}}x + \frac{\sqrt{\pi}}{0.1(0.1+\sqrt{\pi})}x(y+\sqrt{\pi}) \\
N_{01}(x,y) &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} c_{0i,1j}B_{ij}(x,y) \\
&= (y+\sqrt{\pi}) + 10x(y+\sqrt{\pi})
\end{aligned}$$

finalement nous obtenons l'unique approximant de Newton-Padé d'ordre $(2,3)$:

$$\begin{aligned}
[N/D]_I(x,y) &= \frac{p}{q}(x,y) \\
&= \frac{0.1+\sqrt{\pi}+x-(y+\sqrt{\pi})}{0.1+\sqrt{\pi}-(y+\sqrt{\pi})} \\
&= \frac{0.1+x-y}{0.1-y}
\end{aligned}$$

Exemple 2 :

$$f(x,y) = 1 + y + xy$$

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \quad (x_i, y_j) = (0,0)$$

Nous choisissons :

$$N = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$$

$$D = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$$

$$I = \{(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1)\}$$

$$I \backslash N = \{(2,0),(1,1)\}$$

I vérifie la régle du réctangle.

Calculons l'approximant de Padé $[N/D]_I$

n=m=2

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} c_{20} & c_{10} & 0 \\ c_{11} & c_{01} & c_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$rang(C_{nm}) = 1$

Pour la normalisation, nous choisissons $b_{00} = 1$

alors $b_{10} = -1$ et $b_{01} = \alpha$ (un réel quelconque)

$a_{00} = b_{00}c_{00} = 1$

$a_{10} = b_{00}c_{10} + b_{10}c_{00} = -1$

$a_{01} = b_{00}c_{01} + b_{01}c_{00} = 1 + \alpha$

Donc l'approximant de Padé d'ordre $(2,2)$ n'est pas unique. L'ensemble de solutions est de la forme :

$$[N/D]_I = \frac{1 - x + (1+\alpha)y}{1 - x + \alpha y}$$

Exemple 3 : [ALLO]

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x - y - xy}$$

$x_i = i \quad i = 0,1,2,...$

$y_j = j + 1 \quad j = 0,1,2,...$

$N = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$

$D = \{(0,0),(1,0),(0,1),(2,0)\}$

$I = \{(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2)\}$

$I \backslash N = \{(2,0),(1,1),(0,2)\}$

$f(I) = \{f(x_i,y_j)/(i,j) \in I\} = \{-1,-2,-1,-3,-1,-1\}$

I vérifie la régle du réctangle.

$n = 2 \, et \, m = 3$

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rang(C_{nm}) = 2$

la solution générale est de la forme :

$$[N/D]_I = \frac{3\alpha(x-1) - \beta(y-1)}{-3\alpha(x-1) + \beta(y-1) + \alpha(x-1)}$$

1.5 Définition

Pour $r \geq 0, s \geq 0$ et $t \geq 0$, on définit le déterminant de Hankel généralisé, dont les éléments sont les différences divisées : $c_{di,ej}$, par :

$$H_t^{r,s} = \begin{vmatrix} c_{d_r i_s, e_r j_s} & c_{d_{r+1} i_s, e_{r+1} j_s} & \cdots & c_{d_{r+t} i_s, e_{r+t} j_s} \\ c_{d_r i_{s+1}, e_{r+1} j_{s+1}} & c_{d_{r+1} i_{s+1}, e_{r+1} j_{s+1}} & \cdots & c_{d_{r+t} i_{s+1}, e_{r+t} j_{s+1}} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & & . \\ c_{d_r i_{s+t}, e_r j_{s+t}} & c_{d_{r+1} i_{s+t}, e_{r+1} j_{s+t}} & \cdots & c_{d_{r+t} i_{s+t}, e_{r+t} j_{s+t}} \end{vmatrix}.$$

Dans le cas où le rang de la matrice C_{nm} est maximal, les polynômes $p(x, y)$ et $q(x, y)$ se décomposent de la façon suivante :

$$q(x,y) = (-1)^m H_{m-1}^{0,n+1} B_{d_m e_m}(x,y) + \ldots + H_{m-1}^{1,n+1} B_{d_0 e_0}(x,y)$$

$$P(x,y) = H_m^{0,n} B_{i_n j_n}(x,y) +$$

$$\sum_{(i,j) \in N \setminus \{(i_n, j_n)\}} \begin{vmatrix} c_{d_0 i, e_0 j} & c_{d_1 i, e_1 j} & \cdots & c_{d_m i, e_m j} \\ c_{d_0 i_{n+1}, e_0 j_{n+1}} & c_{d_1 i_{n+1}, e_1 j_{n+1}} & \cdots & c_{d_m i_{n+1}, e_m j_{n+1}} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & & . \\ c_{d_0 i_{n+m}, e_0 j_{n+m}} & c_{d_1 i_{n+m}, e_1 j_{n+m}} & \cdots & c_{d_m i_{n+m}, e_m j_{n+m}} \end{vmatrix} B_{ij}(x,y)$$

1.6 Solutions irréductibles

Si le rang de la matrice C_{nm} n'est pas maximal, la solution du problème d'approximation de Newton-Padé peut avoir plusieurs formes irréductibles.

a) Soit la solution de l'exemple 2, elle est de la forme :

$$[N/D]_I = \frac{1 - x + (1+\alpha)y}{1 - x + \alpha y}$$

Si $\alpha = 0$ alors $[N/D]_I = \dfrac{1-x+y}{1-x}$ est une forme irréductible.

Si $\alpha = -1$ alors $[N/D]_I = \dfrac{1-x}{1-x-y}$ est une forme irréductible.

b) Soit la solution de l'exemple 3, elle est de la forme :

$$[N/D]_I = \frac{3\alpha(x-1) - \beta(y-1)}{-3\alpha(x-1) + \beta(y-1) + \alpha(x-1)}$$

Si $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ alors $[N/D]_I = \dfrac{1-y}{y-1} = -1$ est une forme irréductible.

Si $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ alors $[N/D]_I = \dfrac{3(1-x)}{(x-1)(x-3)} = \dfrac{3}{x-3}$ est une forme irréductible.

Si le rang de la matrice C_{nm} est maximal, le problème d'approximation de Newton-Padé admet une solution unique, cette solution a une seule forme irréductible

$$\frac{p}{q}(x,y) = \frac{\sum_{(i,j)\in N_{n'}} a_{ij} B_{ij}(x,y)}{\sum_{(d,e)\in D_{m'}} b_{de} B_{de}(x,y)}$$

Avec $a_{i_{n'}j_{n'}} \neq 0$ et $b_{d_{m'}e_{m'}} \neq 0$ pour $n' \leq n$ et $m' \leq m$.

Nous définissons le défaut, traduit du mot anglais "defect" par :

$$\begin{aligned} \delta_{nm} &= min[card(N_n/N_{n'}), card(D_m/Dm')] \\ &= min(n-n', m-m') \end{aligned}$$

1.7 Proposition

Si $\delta_{nm} = 0$ alors $|H^{0,n+1}_{m-1}| + |H^{0,n}_{m}| > 0$ et la solution unique du problème de Newton-Padé est irréductible.

Preuve :

Si $\delta_{nm} = 0$ alors $N_n = N_{n'}$ ou $D_m = D_{m'}$

$\Longrightarrow$ $|a_{i_n j_n}| + |b_{d_m e_m}| > 0$ et d'après la décomposition de $p(x,y)$ *et* $q(x,y)$ développée précédement, on en déduit que : $|H^{0,n+1}_{m-1}| + |H^{0,n}_{m}| > 0$.

De plus, on a $n = n'$ ou $m = m'$ donc la solution unique $\dfrac{p}{q}$ du problème de Newton-Padé est irréductible (i.e. il n'y a pas simplification)

$\blacksquare$

2 Continuité de l'opérateur de Newton-Padé à plusieurs variables

2.1 Introduction

Dans ce paragraphe nous étudions la notion de continuité de l'opérateur d'approximation de Newton-Padé d'une fonction à plusieurs variables, plus clairement nous regardons le comportement de l'approximant

$$T(f) = [N/D]_I^f,$$

lorsque les composantes de la matrice C_{nm} varient. L'étude dans le cas scalaire est donnée dans [WERNb,WUYT]. Un résultat dans le cas à plusieurs variables avec les polynômes $p(x,y)$ et $q(x,y)$ sont homogènes, est dans [CUYTc]. Nous pouvons aussi citer un résultat sur les approximants multipoints de type-Padé dans [VANIS].

2.2 Notations

Soit la série de Newton formelle :

$$\bar{f}(x,y) = \sum_{(i,j)\ \in \mathbb{N}^2} \bar{c}_{ij} B_{ij}(x,y)$$
$$\bar{c}_{ij} = \bar{f}[x_0, x_1, ..., x_i][y_0, y_1, ..., y_j]$$
$$T(f) = [N/D]_I^f = \frac{p_c}{q_c}$$
$$T(\bar{f}) = [N/D]_I^{\bar{f}} = \frac{p_{\bar{c}}}{q_{\bar{c}}}$$

2.3 Normes

Nous rappelons les normes suivantes :

Soit A une matrice d'ordre (r,s) :

$$A = (a_{ij}) \ \ 1 \le i \le r \ \ et \ \ 1 \le j \le s \ \ a_{ij} \in \mathbb{C}$$

alors :

$$\|A\|_1 = max_{1 \leq i \leq r} \sum_{j=1}^{s} |a_{ij}|$$

Soit K un compact dans $\mathbb{C}$ et soit g une fonction continue sur K, alors :

$$\|g\|_K = sup_{(x,y) \in K} |g(x,y)|$$

2.4 Proposition

Si $\delta_{nm} = 0$ alors il existe η_1 positif, tel que pour toute série $\bar{f}$ dont la matrice associée $\bar{C}_{nm}$ vérifie $\|\bar{C}_{nm} - C_{nm}\|_1 < \eta_1$, le rang de la matrice $\bar{C}_{nm}$ est maximal et $|\bar{H}_{m-1}^{0,n+1}| + |\bar{H}_m^{0,n}| > 0$.

($\bar{H}$ est le déterminant de Hankel associé à $\bar{f}$).

Preuve :

Pour tout indice $l \in \{0, ..., m\}$ nous définissons le déterminant $det_l(c)$:

$$det_l(c) = \begin{vmatrix} c_{d_0 i_{n+1}, e_0 j_{n+1}} & \cdots & c_{d_{l-1} i_{n+1}, e_{l-1} j_{n+1}} & c_{d_{l+1} i_{n+1}, e_{l+1} j_{n+1}} & \cdots & c_{d_m i_{n+1}, e_m j_{n+1}} \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ . & & . & . & & . \\ . & & . & . & & . \\ c_{d_0 i_{n+m}, e_0 j_{n+m}} & \cdots & c_{d_{l-1} i_{n+m}, e_{l-1} j_{n+m}} & c_{d_{l+1} i_{n+m}, e_{l+1} j_{n+m}} & \cdots & c_{d_m i_{n+m}, e_m j_{n+m}} \end{vmatrix}$$

Pour définir δ_{nm} , nous avons supposer que C_{nm} est de rang maximal.

Il existe $l \in \{0, ..., m\}$ tel que $det_l(c)$ est non nul.

Nous remarquons que $det_l(c)$ est une combinaison finie de produits de differences divisées $c_{d_r i_s, e_r j_s}$ avec: $r = 0, ..., m$ $r \neq l$ et $s = n+1, ..., n+m$.

L'application : $C_{nm} \longmapsto det_l(c)$ est continue $\forall l \in \{0, ..., m\}$.

Puisque $det_l(c) \neq 0$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour toute fonction $\bar{f}$ dont la matrice associée $\bar{C}_{nm}$ vérifie $\|\bar{C}_{nm} - C_{nm}\|_1 < \eta_1$ alors $det_l(\bar{c}) \neq 0$.

De même l'application : $C_{nm} \longmapsto |H_{m-1}^{0,n+1}| + |H_m^{0,n}|$ est continue. Puisque $|H_{m-1}^{0,n+1}| + |H_m^{0,n}| \neq 0$, il existe, quitte à changer la notation, η_1 tel que pour toute fonction $\bar{f}$ dont $\bar{C}_{nm}$ vérifie $\|\bar{C}_{nm} - C_{nm}\|_1 < \eta_1$ alors : $|\bar{H}^{0,n+1}_{m-1}| + |\bar{H}^{0,n}_{m}| > 0$

$\blacksquare$

2.5 Remarque

Si $\delta_{nm} = 0$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour toute fonction

$$\bar{f}(x,y) = \sum_{(i,j)\ \in\ \mathbb{N}^2} \bar{c}_{ij} B_{ij}(x,y)$$

où la matrice $\bar{C}_{nm}$ associée à $\bar{f}$ vérifie : $\|\bar{C}_{nm} - C_{nm}\|_1 < \eta_1$ alors $\bar{C}_{nm}$ est de rang maximal et l'ensemble de solutions du problème d'approximation de Newton-Padé d'ordre (n,m) pour $\bar{f}$ admet un élément unique $\frac{p_{\bar{c}}}{q_{\bar{c}}}$ (c'est la forme irréductible).

2.6 Théorème

Soient les deux séries de Newton formelles :

$$f(x,y) = \sum_{(i,j)\ \in\ \mathbb{N}^2} c_{ij} B_{ij}(x,y) \text{ et } \bar{f}(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \bar{c}_{ij} B_{ij}(x,y)$$

de matrices associées :

$$C_{nm} = (c_{d_r i_s, e_r j_s}) \ \text{ et } \ \bar{C}_{nm} = (\bar{c}_{d_r i_s, e_r j_s})$$

avec : $0 \leq r \leq m$ *et* $n+1 \leq s \leq n+m$. Le rang de C_{nm} est égal à m.

les approximants de Newton-Padé d'ordre (n,m) pour f et $\bar{f}$ sont

$$T(f) = [N/D]^f_I = \frac{p_c}{q_c} \ \text{ et } \ T(\bar{f}) = [N/D]^{\bar{f}}_I = \frac{p_{\bar{c}}}{q_{\bar{c}}}$$

Si $\delta_{nm} = 0$ alors il existe un compact K voisinage d'un point $(\tilde{x},\tilde{y})$, $K \subset \mathbb{C}^2$ et $q_c(\tilde{x},\tilde{y}) \neq 0$, tel que : $\forall\epsilon > 0 \ \exists\eta > 0$ tel que si $\|\bar{C}_{nm} - C_{nm}\|_1 < \eta$ alors :

$$\|T(f) - T(\bar{f})\|_K = \|[N/D]^f_I - [N/D]^{\bar{f}}_I\|_K < \epsilon.$$

Démonstration :

q_c est une fonction polynomiale continue en (x,y) dans $\mathbb{C}^2$, q_c est non identiquement nulle. Nous choisissons un point $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathbb{C}^2$ où $q_c(\tilde{x},\tilde{y})$ est non nulle. Il existe tout un voisinage compact K contenant $(\tilde{x},\tilde{y})$ tel que : pour tout $(x,y) \in K$ $q_c(x,y) \neq 0$. Il existe E_1 tel que : $\|q_c\|_K \geq E_1$.

D'autre part, l'application

$$C_{nm} \longmapsto q_c(x,y) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k det_k(c) B_{d_k e_k}(x,y)$$

est continue $\forall (x,y) \in K$.

Puisque q_c est non nul sur K, il existe $\eta_2 > 0$ tel que : si $\|\bar{C}_{nm} - C_{nm}\|_1 < \eta_2$ alors q_c est aussi non nul sur K.

Puisque $(x,y) \longmapsto q_c(x,y)q_{\bar{c}}(x,y)$ est continue et ne s'annule pas sur K, il existe $E > 0$ (aussi petit que l'on veut) tel que :

$$E \leq \|q_c q_{\bar{c}}\|_K \leq \frac{1}{E}$$

Continuité de l'opérateur T :

$$\begin{aligned}
\|T(f) - T(\bar{f})\|_K &= \|[N/D]_I^f - [N/D]_I^{\bar{f}}\|_K \\
&= \|\frac{p_c}{q_c} - \frac{p_{\bar{c}}}{q_{\bar{c}}}\|_K \\
&= \|\frac{(p_c - p_{\bar{c}})q_c - (q_{\bar{c}} - q_c)p_c}{q_c q_{\bar{c}}}\|_K \\
&\leq \|p_c - p_{\bar{c}}\|_K \cdot \|\frac{q_c}{q_c q_{\bar{c}}}\|_K + \|q_c - q_{\bar{c}}\|_K \cdot \|\frac{p_c}{q_c q_{\bar{c}}}\|_K
\end{aligned}$$

Il existe deux constantes positives M_1 *et* M_2 telles que :

$$\|\frac{q_c}{q_c q_{\bar{c}}}\|_K \leq \frac{M_1}{E} \quad et \quad \|\frac{p_c}{q_c q_{\bar{c}}}\|_K \leq \frac{M_2}{E}$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{C}^2$:

$$q_c(x,y) - q_{\bar{c}}(x,y) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k (det_k(c) - det_k(\bar{c})) B_{d_k e_k}(x,y)$$

det_k est continue par rapport à C_{nm} donc :

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta_3 > 0$ tel que si $\|\bar{C}_{nm} - C_{nm}\|_1 < \eta_3$ alors :

$$\|q_c - q_{\bar{c}}\| < \epsilon' = \frac{\epsilon E}{2M_2}$$

De même :

$$P_c(x,y) - P_{\bar{c}}(x,y) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \sum_{(i,j)\in N} (c_{d_k i, e_k j} det_k(c) - \bar{c}_{d_k i, e_k j} det_k(\bar{c})) B_{ij}(x,y)$$
$$= \sum_{(i,j)\in N} \sum_{k=0}^{m}(-1)^k (c_{d_k i, e_k j} det_k(c) - \bar{c}_{d_k i, e_k j} det_k(\bar{c})) B_{ij}(x,y)$$

Pour $k = 0, ..., m$ nous avons :

$$|c_{d_k i, e_k j} det_k(c) - \bar{c}_{d_k i, e_k j} det_k(\bar{c})| =$$
$$|c_{d_k i, e_k j} det_k(c) - \bar{c}_{d_k i, e_k j} det_k(c) + \bar{c}_{d_k i, e_k j} det_k(c) - \bar{c}_{d_k i, e_k j} det_k(\bar{c})|$$
$$\leq |c_{d_k i, e_k j} - \bar{c}_{d_k i, e_k j}||det_k(c)| + |\bar{c}_{d_k i, e_k j}||det_k(c) - det_k(\bar{c})|$$

Nous déduisons la continuité du polynôme P par rapport à la variation des éléments de C_{nm} :

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta_4 > 0$ tel que si $\|\bar{C}_{nm} - C_{nm}\|_1 < \eta_4$ alors :

$$\|p_c - p_{\bar{c}}\| < \epsilon'' = \frac{\epsilon\, E}{2M_1}$$

Conclusion :

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \eta = min(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) > 0$ et il existe un compact K voisinage d'un point $(\tilde{x}, \tilde{y})$ dans $\mathbb{C}^2$ ($\forall (x,y) \in K,\ q_c(x,y) \neq 0$) tels que :

$$si \ \|\bar{C}_{nm} - C_{nm}\|_1 < \eta \ alors : \ \|[N/D]_I^f - [N/D]_I^{\bar{f}}\|_K < \epsilon$$

■

2.7 Contre exemple : $(Si\,\delta_{nm} > 0)$

$$f(x,y) = 1 + xy = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} c_{ij}x^i y^j$$

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \quad (x_i, y_j) = (0,0)$$

Nous choisissons :

$$N = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$$

$$D = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$$

$$I = \{(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1)\}$$

$$I \backslash N = \{(2,0),(1,1)\}$$

I vérifie la régle du réctangle.

Calculons l'approximant de Padé $[N/D]_I = \frac{p}{q}$

$$p(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y$$

$$q(x,y) = b_{00} + b_{10}x + b_{01}y$$

n=m=2

$$C_{nm} = \begin{pmatrix} c_{20} & c_{10} & 0 \\ c_{11} & c_{01} & c_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rang(C_{nm}) = 1$

Donc nous avons la solution : $b_{00} = 0 \quad b_{10} = \beta$ et $b_{01} = -\beta$ (un réel quelconque)

$a_{00} = b_{00}c_{00} = 0$

$a_{10} = b_{00}c_{10} + b_{10}c_{00} = \beta$

$a_{01} = b_{00}c_{01} + b_{01}c_{00} = -\beta$

Donc l'approximant de Padé d'ordre $(2,2)$ est :

$$r(x,y) = \frac{p}{q}(x,y) = 1$$

$$\delta_{22} = min(n - n', m - m') = 2 > 0$$

$\forall K$ compact et $\forall (x,y) \in K \; : q(x,y) \neq 0$

Soit maintenant la fonction :

$$f_\alpha(x,y) = 1 + \alpha y + xy \quad \text{où} \quad \alpha \neq 0$$

$$\bar{C}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$\|C_{22} - \bar{C}_{22}\|_1 = |\alpha|$ qui tend vers 0 lorsque α tend vers 0.

$$p(x,y) = 1 - \frac{1}{\alpha}x + (\alpha+\delta)y$$
$$q(x,y) = 1 - \frac{1}{\alpha}x + \delta y$$

(δ est un réel quelconque). Donc :

$$r_\alpha(x,y) = \frac{\alpha - x + \alpha(\alpha+\delta)y}{\alpha - x + \alpha\delta y}$$

$r_\alpha(x,y)$ converge vers $r(x,y)$ lorsque α converge vers 0.

$$\begin{aligned} \|r_\alpha - r\|_K &= sup_{(x,y)\in K}\left|\frac{\alpha^2 y}{\alpha - x + \alpha\delta y}\right| \\ &= sup_{(x,y)\in K}\left|\frac{\alpha^2 y}{\alpha(1+\delta y) - x}\right| \end{aligned}$$

Pour tout compact K voisinage de $(0,0)$, nous avons :

$$sup_{(x,y)\in K}|r_\alpha(x,y) - r(x,y)| = \infty$$

pour cela, Il suffit de prendre :

y au voisinage de 0,

α assez petit,

et $x = \alpha(1+\delta y) + \epsilon$

puis tendre ϵ vers 0.

3 Normalité de la table de Newton-Padé à plusieurs variables

3.1 Introduction

Plusieurs études sur la normalité de la table de Newton-Padé et la table de Padé à une variable, sont faites par : G. Claessens [CLAE], A. Draux [DRAU], W.B. Gragg [GRAG], L. Wuytack [WUYT],....

Une généralisation dans le cas des approximants de Padé homogènes à plusieurs variables est donnée par A. Cuyt [CUYTa].

Nous nous intéressons maintenant à étudier la normalité dans le cadre le plus général des approximants de Newton-Padé à plusieurs variables.

Nous énumérons les ensembles d'indices N, D *et* I.

Soit le schéma récursif suivant :

$$N_0 = \{(i_0, j_0)\} \subseteq ... \subseteq N_k = \{(i_0, j_0), ..., (i_k, j_k)\} \subseteq ... \subseteq N_n \subseteq ...$$

$$N_{k+1} \backslash N_k = \{(i_{k+1}, j_{k+1})\}$$

$$D_0 = \{(d_0, e_0)\} \subseteq ... \subseteq D_l = \{(d_0, e_0), ..., (d_k, e_k)\} \subseteq ... \subseteq D_m \subseteq ...$$

$$D_{l+1} \backslash D_l = \{(d_{l+1}, e_{l+1})\}$$

$$I_0 = \{(i_0, j_0)\} \subseteq ... \subseteq I_{k+l} = \{(i_0, j_0), ..., (i_{k+l}, j_{k+l})\} \subseteq ... \subseteq I_{n+m} \subseteq ...$$

$$I_{k+1,k+l} = \{(i_{k+1}, j_{k+1}), ..., (i_{k+l}, j_{k+l})\}$$

$$I_{n+m} \backslash N_n = I_{k+1,k+l}$$

Nous supposons que f est connue aux points ordonnés (x_i, y_j) où $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Les approximants de Newton-Padé sont rangés dans un tableau à double entrées, appelé table des approximants de Newton-Padé.

$$\begin{array}{cccccccc}
[N_0/D_0]_{I_0} & [N_0/D_1]_{I_1} & \cdots & [N_0/D_m]_{I_m} & & \cdots & [N_0/D_{n+m}]_{I_{n+m}} & .. \\
[N_1/D_0]_{I_1} & [N_1/D_1]_{I_2} & \cdots & . & & \cdots & . & .. \\
. & . & \cdots & . & & \cdots & . & .. \\
[N_n/D_0]_{I_n} & . & \cdots & [N_n/D_m]_{I_{n+m}} & [N_n/D_{m+1}]_{I_{n+m+1}} .. & & . & .. \\
. & . & \cdots & [N_{n+1}/D_m]_{I_{n+m+1}} & & \cdots & . & .. \\
. & . & \cdots & . & & \cdots & . & .. \\
[N_{n+m}/D_0]_{I_{n+m}} & . & \cdots & . & & \cdots & . & .. \\
. & . & \cdots & . & & \cdots & . & ..
\end{array}$$

3.2 Définition 1

Un élément de la table de Newton-Padé à plusieurs variables est dit normal, s'il est unique dans cette table.

3.3 Définition 2

Une table de Newton-Padé à plusieurs variables est dite normale si tout élément de cette table est normal.

3.4 Théorème 1

Un approximant de Newton-Padé d'ordre (n,m) : $r_{nm} = [N/D]_I$ est normal si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) $rang(C_{nm}) = m$

ii) $a_{i_n j_n} \neq 0$

iii) $b_{d_m e_m} \neq 0$

iv) $d_{i_{n+m+1}, j_{n+m+1}} \neq 0$.

Démonstration

$\Longrightarrow$) Nous supposons que l'approximant de Newton-Padé d'ordre (n,m) $r_{nm} = [N/D]_I$ est maximal.

Si $rang(C_{nm}) < m$, la solution r_{nm} admet au moins une forme irréductible qui sera solution aussi d'un problème d'approximation de Newton-Padé d'ordre $(k,l) \neq (n,m)$.

Ce qui est absurde car r_{nm} est unique dans la table , d'où i).

Supposons maintenant par absurde que $a_{i_n j_n} = 0$ ou $b_{d_m e_m} = 0$.

Donc $p(x,y)$ peut se développer sur un ensemble d'indices $N_{n'} \subset N_n$ ou $q(x,y)$ peut se développer sur un ensemble d'indices $D_{m'} \subset D_m$

alors : $n' + m' + 1 < n + m + 1$.

Puisque $I_{n'+m'} \subset I_{n+m}$, alors r_{nm} vérifie les conditions d'approximation du problème de Newton-Padé d'ordre $(n',m') \neq (n,m)$ ce qui contredit le fait qu'il est normal, d'où ii) et iii).

Nous supposons maintenant que $r_{nm} = \dfrac{p(x,y)}{q(x,y)}$ vérifie :

$$(fq - p)(x,y) = \sum_{(i,j)\in \mathbb{N}^2 \setminus I} d_{ij} B_{ij}(x,y)$$

avec $I_{n+m} \subset I$ (i.e. $d_{i_{n+m+1}, j_{n+m+1}} = 0$) donc $\exists t > 0$ tel que $I_{n+m+t} = I$

Puisque $N_n \subset N_{n+k}$ *et* $D_m \subset D_{m+l}$ *pour* $k,l \geq 0$

alors :

$$p(x,y) = \sum_{(i,j)\in N_n} a_{ij} B_{ij}(x,y) = \sum_{(i,j)\in N_{n+k}} a_{ij} B_{ij}(x,y)$$
$$\text{où } a_{ij} = 0 \text{ pour } (i,j) \in N_{n+k} \setminus N_n$$

de même

$$q(x,y) = \sum_{(d,e)\in D_m} b_{de} B_{de}(x,y) = \sum_{(d,e)\in D_{m+l}} b_{de} B_{de}(x,y)$$
$$\text{où } b_{de} = 0 \text{ pour } (d,e) \in D_{m+l} \setminus D_m$$

Avec le choix $k + l \leq t$

Donc r_{nm} vérifie les conditions d'approximation de tous les problèmes de Newton-Padé d'ordre $(n+k, m+l)$ "$k + l \leq t$". Ce qui contredit le fait qu'il est normal, d'où iv).

$\Longleftarrow$) Soit $r = \dfrac{p}{q}$ un approximant de Newton-Padé qui vérifie i), ii), iii) et iv), cet approximant est égal à sa forme irréductible (unique). Il vérifie les conditions du problème d'ordre (n, m).

Pour tout $(n', m') \neq (n, m)$, nous vérifions facilement que r ne satisfait pas les conditions d'approximation du problème de Newton-Padé d'ordre (n', m') , d'où l'unicité de r dans la table de Newton-Padé

∎

Connexion avec les déterminants de Hankel

Nous rappelons le déterminant de Hankel généralisé :

Pour $r \geq 0, s \geq 0$ et $t \geq 0$.

$$H_t^{r,s} = \begin{vmatrix} c_{d_r i_s, e_r j_s} & c_{d_{r+1} i_s, e_{r+1} j_s} & \cdots & c_{d_{r+t} i_s, e_{r+t} j_s} \\ c_{d_r i_{s+1}, e_{r+1} j_{s+1}} & c_{d_{r+1} i_{s+1}, e_{r+1} j_{s+1}} & \cdots & c_{d_{r+t} i_{s+1}, e_{r+t} j_{s+1}} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & & . \\ c_{d_r i_{s+t}, e_r j_{s+t}} & c_{d_{r+1} i_{s+t}, e_{r+1} j_{s+t}} & \cdots & c_{d_{r+t} i_{s+t}, e_{r+t} j_{s+t}} \end{vmatrix}.$$

Le polynôme $q(x, y) = \sum_{k=0}^{m} b_{d_k e_k}(x, y)$, où les coefficients $b_{d_k e_k}$ vérifient :

$$\begin{pmatrix} c_{d_0 i_{n+1}, e_0 j_{n+1}} & \cdots & c_{d_m i_{n+1}, e_m j_{n+1}} \\ . & \cdots & . \\ . & & . \\ . & & . \\ c_{d_0 i_{n+m}, e_0 j_{n+m}} & \cdots & c_{d_m i_{n+m}, e_m j_{n+m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{d_0 e_0} \\ . \\ . \\ . \\ b_{d_m e_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.5 Théorème 2

Une condition suffisante pour qu'un approximant de Newton-Padé d'ordre (n,m) soit normal est que :

$$H_{m-1}^{0,n+1} \neq 0,$$

$$H_{m}^{0,n} \neq 0,$$

$$H_{m}^{0,n+1} \neq 0,$$

$$et\ H_{m-1}^{1,n+1} \neq 0\,.$$

Démonstration

Si $H_{m-1}^{1,n+1} \neq 0$ alors la matrice C_{nm} sera de rang maximal : m. Les polynômes $p(x,y)$ *et* $q(x,y)$ sont représentés par :

$$q(x,y) = B_{d_0e_0}(x,y) + \ldots + (-1)^m \frac{H_{m-1}^{0,n+1}}{H_{m-1}^{1,n+1}} B_{d_me_m}(x,y)$$

donc :

$$b_{d_me_m} = (-1)^m \frac{H_{m-1}^{0,n+1}}{H_{m-1}^{1,n+1}}$$

$$P(x,y) = \frac{H_m^{0,n}}{H_{m-1}^{1,n+1}} B_{i_nj_n}(x,y) +$$

$$\frac{1}{H_{m-1}^{1,n+1}} \sum_{(i,j)\in\ N\setminus\{(i_n,j_n)\}} \begin{vmatrix} c_{d_0i,e_0j} & c_{d_1i,e_1j} & \cdots & c_{d_mi,e_mj} \\ c_{d_0i_{n+1},e_0j_{n+1}} & c_{d_1i_{n+1},e_1j_{n+1}} & \cdots & c_{d_mi_{n+1},e_mj_{n+1}} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & & . \\ c_{d_0i_{n+m},e_0j_{n+m}} & c_{d_1i_{n+m},e_1j_{n+m}} & \cdots & c_{d_mi_{n+m},e_mj_{n+m}} \end{vmatrix} B_{ij}(x,y)$$

donc :

$$a_{i_nj_n} = \frac{H_m^{0,n}}{H_{m-1}^{1,n+1}}$$

d'autre part :

$$(fq-p)(x,y) = \sum_{(i,j)\in\ \mathbb{N}^2\setminus I} d_{ij}B_{ij}(x,y)$$

$$d_{i_{n+m+1},j_{n+m+1}} = (fq)[x_0, x_1, ..., x_{i_{n+m+1}}][y_0, y_1, ..., y_{j_{n+m+1}}]$$

$$= \sum_{k=0}^{m} b_{d_k e_k} c_{d_k i_{n+m+1}, e_k j_{n+m+1}}$$

$$d_{i_{n+m+1},j_{n+m+1}} = \frac{1}{H_{m-1}^{1,n+1}} \begin{vmatrix} c_{d_0 i_{n+m+1}, e_0 j_{n+m+1}} & c_{d_1 i_{n+m+1}, e_1 j_{n+m+1}} & \cdots & c_{d_m i_{n+m+1}, e_m j_{n+m+1}} \\ c_{d_0 i_{n+1}, e_0 j_{n+1}} & c_{d_1 i_{n+1}, e_1 j_{n+1}} & \cdots & c_{d_m i_{n+1}, e_m j_{n+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{d_0 i_{n+m}, e_0 j_{n+m}} & c_{d_1 i_{n+m}, e_1 j_{n+m}} & \cdots & c_{d_m i_{n+m}, e_m j_{n+m}} \end{vmatrix}$$

$$d_{i_{n+m+1},j_{n+m+1}} = (-1)^{m+1} \frac{H_m^{0,n+1}}{H_{m-1}^{1,n+1}}$$

Nous déduisons alors la condition suffisante du théorème 1 :

$$rang(C_{nm}) = m,$$

$$a_{i_n j_n} \neq 0,$$

$$b_{d_m e_m} \neq 0,$$

$$et\ d_{i_{n+m+1},j_{n+m+1}} \neq 0.$$

Donc l'approximant $r_{nm} = \dfrac{p(x,y)}{q(x,y)}$ est normal

■

CHAPITRE II

Généralisation du Théorème de Kronecker pour les séries formelles à deux variables et la connexion avec les approximants de Padé homogènes .

1 Généralisation du théorème de Kronecker pour les séries entières à deux variables

Nous rappelons le théorème dans le cas scalaire [BAKE,DIEN].

1.1 Théorème 1: (Kronecker,1881)

Pour $\mu \geq 0$ et $\nu \geq 1$ soit le déterminant de Toeplitz :

$$D(\mu/\nu) = \begin{vmatrix} c_\mu & c_{\mu+1} & \cdots & c_{\mu+\nu-1} \\ c_{\mu-1} & c_\mu & \cdots & c_{\mu+\nu-2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_{\mu-\nu+1} & c_{\mu-\nu+2} & \cdots & c_\mu \end{vmatrix}$$

avec $c_i = 0$ si $i < 0$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ soit rationnelle de type $(n-1, m-1)$ (i.e. le numérateur est au plus de degré $n-1$, le dénominateur est au plus de degré $m-1$) est que :

$$D(\mu/\nu) = 0 \text{ pour } \mu \geq n \text{ et } \nu \geq m.$$

1.2 Généralisation

Soit la série formelle

$$F(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x,y) \quad \text{pour } (x,y) \in I\!R^2$$

où $C_k(x,y) = \sum_{k_1+k_2=k} c_{k_1k_2} x^{k_1} y^{k_2}$ sont des polynômes homogènes de degré k en (x,y).

Définition

Soit $P(x,y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x,y)$ avec $P_k(x,y) = \sum_{k_1+k_2=k} p_{k_1k_2} x^{k_1} y^{k_2}$ polynôme homogène de degré k en (x,y).

a) on appelle $n_1 = \omega P$ l'ordre du polynôme P si pour tout k $(0 \leq k < n_1)$: $P_k \equiv 0$ et $P_{n_1} \not\equiv 0$.

b) on appelle $n_2 = d^0 P$ le degré du polynôme P si pour tout $k\,(n_2 < k)$: $P_k \equiv 0$ et $P_{n_2} \not\equiv 0$.

c) on définit l'ensemble des couples de polynômes (G, L) de type (n, m), dont le degré est déplacé de nm par :

$$P_{n,m} = \{(G,L) \text{ couple de polynômes}/G(x,y) = \sum_{k=0}^{n} G_k(x,y) \text{ et } L(x,y) = \sum_{k=0}^{m} L_k(x,y)$$

$$G_k(x,y) = \sum_{k_1+k_2=nm+k} g_{k_1k_2} x^{k_1} y^{k_2}$$

$$L_k(x,y) = \sum_{k_1+k_2=nm+k} l_{k_1k_2} x^{k_1} y^{k_2}\}.$$

Si (G, L) est un élément de $P_{n,m}$, alors :

$$nm \leq \omega G \text{ et } d^0 G \leq nm + n$$

$$nm \leq \omega L \text{ et } d^0 L \leq nm + m$$

Théorème 2

Si $F = \frac{G}{L}$ irréductible telle que :

$$G(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} G_k(x,y) \;\; et \;\; L(x,y) = \sum_{k=0}^{m-1} L_k(x,y)$$

$$G_k(x,y) = \sum_{i+j=k} g_{ij} x^i y^j \;\; et \;\; L_k(x,y) = \sum_{i+j=k} l_{ij} x^i y^j,$$

alors $D(\mu/\nu) \equiv 0$ *pour* $\mu \geq n$ *et* $\nu \geq m$

$$D(\mu/\nu) = \begin{vmatrix} C_\mu(x,y) & C_{\mu+1}(x,y) & \dots & C_{\mu+\nu-1}(x,y) \\ C_{\mu-1}(x,y) & C_\mu(x,y) & \dots & C_{\mu+\nu-2}(x,y) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{\mu-\nu+1}(x,y) & C_{\mu-\nu+2}(x,y) & \dots & C_\mu(x,y) \end{vmatrix}$$

avec $C_p \equiv 0$ pour $p < 0$.

(On remarque que la notation $D(\mu/\nu)$ est la même que dans le cas scalaire, alors que $D(\mu/\nu)$ n'est pas un scalaire mais un polynôme homogène de degré $\mu\nu$).

Démonstration

$$F(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=k} c_{k_1 k_2} x^{k_1} y^{k_2}$$

Nous supposons que $F(x,y) = \dfrac{G(x,y)}{L(x,y)}$ est irréductible

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \sum_{k=0}^{n-1} G_k(x,y) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k_1+k_2=k} g_{k_1 k_2} x^{k_1} y^{k_2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L(x,y) &= \sum_{k=0}^{m-1} L_k(x,y) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{k_1+k_2=k} l_{k_1 k_2} x^{k_1} y^{k_2} \end{aligned}$$

Soit l'équation $F(x,y)L(x,y) = G(x,y)$. Elle est équivalente aux deux systèmes suivants :

$$(1) \left\{ \begin{array}{rcl} C_0(x,y)L_0(x,y) & = & G_0(x,y) \\ C_0(x,y)L_1(x,y) + C_1(x,y)L_0(x,y) & = & G_1(x,y) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ C_0(x,y)L_{n-1}(x,y) + C_1(x,y)L_{n-2}(x,y) + \dots + C_{n-1}(x,y)L_0(x,y) & = & G_{n-1}(x,y) \end{array} \right.$$

$$(2)\left\{\begin{array}{lcl} C_0(x,y)L_n(x,y)+C_1(x,y)L_{n-1}(x,y)+\ldots+C_n(x,y)L_0(x,y) & = & 0\\ C_0(x,y)L_{n+1}(x,y)+C_1(x,y)L_n(x,y)+\ldots+C_{n+1}(x,y)L_0(x,y) & = & 0\\ \vdots & & \vdots\\ C_0(x,y)L_j(x,y)+C_1(x,y)L_{j-1}(x,y)+\ldots+C_j(x,y)L_0(x,y) & = & 0\\ \vdots & & \vdots\\ & & \text{pour } j\geq n \end{array}\right.$$

$$\text{avec}\quad (3)\left\{\begin{array}{lcl} L_{m+i}(x,y) & = & 0 \text{ pour } i=0,1,2,\ldots\\ C_j(x,y) & = & 0 \text{ pour } j<0 \end{array}\right.$$

Soient $\mu \geq n$ et $\nu \geq m$.

Nous écrivons le système en L_i dont $D(\mu/\nu)$ est le déterminant :

d'après (2) et (3), nous avons, en écrivant les équations de (2) où la somme des indices est $\mu, \mu+1, \ldots$

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_{\mu-m+1}(x,y)L_{m-1}(x,y)+C_{\mu-m+2}(x,y)L_{m-2}(x,y)+\ldots+C_\mu(x,y)L_0(x,y) & = & 0\\ C_{\mu-m+2}(x,y)L_{m-1}(x,y)+C_{\mu-m+3}(x,y)L_{m-2}(x,y)+\ldots+C_{\mu+1}(x,y)L_0(x,y) & = & 0\\ \vdots & & \vdots \end{array}\right.$$

Si $\nu > m$ alors $L_m(x,y)=0, \ldots, L_{\nu-1}(x,y)=0$ (d'après (3)), dans ce cas nous complétons les équations du système précédent par des termes nuls. Nous obtenons le système $\nu * \nu$ suivant où les équations sont celles de (2) pour la somme des indices $\mu, \mu+1, \ldots, \mu+\nu-1$.

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_{\mu-\nu+1}(x,y)L_{\nu-1}(x,y)+C_{\mu-\nu+2}(x,y)L_{\nu-2}(x,y)+\ldots+C_\mu(x,y)L_0(x,y) & = & 0\\ C_{\mu-\nu+2}(x,y)L_{\nu-1}(x,y)+C_{\mu-\nu+3}(x,y)L_{\nu-2}(x,y)+\ldots+C_{\mu+1}(x,y)L_0(x,y) & = & 0\\ \vdots & & \vdots\\ C_\mu(x,y)L_{\nu-1}(x,y)+C_{\mu+1}(x,y)L_{\nu-2}(x,y)+\ldots+C_{\mu+\nu-1}(x,y)L_0(x,y) & = & 0 \end{array}\right.$$

C'est un système homogène, qui admet une solution non identiquement nulle, $(L_0(x,y), \ldots, L_{m-1}(x,y), \ldots, L_{\nu-1}(x,y))$, donc son déterminant est identiquement nul.

Soit :

$$\begin{vmatrix} C_{\mu-\nu+1}(x,y) & C_{\mu-\nu+2}(x,y) & \dots & C_{\mu}(x,y) \\ C_{\mu-\nu+2}(x,y) & C_{\mu-\nu+3}(x,y) & \dots & C_{\mu+1}(x,y) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{\mu}(x,y) & C_{\mu+1}(x,y) & \dots & C_{\mu+\nu-1}(x,y) \end{vmatrix} \equiv 0$$

Si nous permutons toutes les lignes, nous avons :

$$\begin{vmatrix} C_{\mu}(x,y) & C_{\mu+1}(x,y) & \dots & C_{\mu+\nu-1}(x,y) \\ C_{\mu-1}(x,y) & C_{\mu}(x,y) & \dots & C_{\mu+\nu-2}(x,y) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{\mu-\nu+1}(x,y) & C_{\mu-\nu+2}(x,y) & \dots & C_{\mu}(x,y) \end{vmatrix} \equiv 0$$

Donc pour $\mu \geq n$ et $\nu \geq m$: $D(\mu/\nu) \equiv 0$

■

Théorème 3

S'il existe $(n,m) \in I\!N * I\!N^*$ tel que pour tout μ, ν verifiant $\mu \geq n$ et $\nu \geq m$ nous avons $D(\mu/\nu) \equiv 0$, alors F est rationnelle, elle est égale à son approximant de Padé d'ordre $(n-1, m-1)$. Elle se présente donc comme une fraction $\frac{P}{Q}$ avec $(P,Q) \in P_{n-1,m-1}$.

Démonstration

Soit $(n,m) \in I\!N * I\!N^*$ tel que pour $\mu \geq n$ et $\nu \geq m$ nous avons $D(\mu/\nu) \equiv 0$.

Soit le système :

$$(1) \begin{cases} C_{n-1}(x,y)B_{m-1}(x,y) & +C_n(x,y)B_{m-2}(x,y) & +\dots+ & C_{n+m-2}(x,y)B_0(x,y) = 0 \\ C_{n-2}(x,y)B_{m-1}(x,y) & +C_{n-1}(x,y)B_{m-2}(x,y) & +\dots+ & C_{n+m-3}(x,y)B_0(x,y) = 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{n-m+1}(x,y)B_{m-1}(x,y) & +C_{n-m+2}(x,y)B_{m-2}(x,y) & +\dots+ & C_n(x,y)B_0(x,y) = 0 \end{cases}$$

(1) a $m-1$ équations et m inconnues (les polynômes homogènes $B_j(x,y)$, $j = 0, \dots, m-1$).

Si le rang de (1) est maximal : $m-1$, alors il admet une solution unique (à un facteur multiplicatif près, qui est un polynôme homogène).

En résolvant le système par la méthode de Cramer, nous avons :

$$B_0(x,y) = D(n-1/m-1)$$

$$B_0(x,y) = \begin{vmatrix} C_{n-1}(x,y) & C_n(x,y) & \dots & C_{n+m-3}(x,y) \\ C_{n-2}(x,y) & C_n(x,y) & \dots & C_{n+m-4}(x,y) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{n-m+1}(x,y) & C_{n-m+2}(x,y) & \dots & C_n(x,y) \end{vmatrix}$$

Pour $j = 1, ..., m-1$

$$B_j(x,y) = \begin{vmatrix} C_{n-1}(x,y) & \dots & -C_{n+m-2}(x,y) & \dots & C_{n+m-3}(x,y) \\ C_{n-2}(x,y) & \dots & -C_{n+m-3}(x,y) & \dots & C_{n+m-4}(x,y) \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ C_{n-m+1}(x,y) & \dots & -C_n(x,y) & \dots & C_{n-1}(x,y) \\ & & \uparrow & & \end{vmatrix}$$

m-j ieme colonne de $D(n-1/m-1)$

est remplacée par cette colonne

Le degré du polynôme homogène B_j est : $d^0 B_j = (n-1)(m-1)+j$.

Dans le cas où le rang est maximal, nous avons ainsi une solution $(B_0(x,y), ..., B_{m-1}(x,y))$ non identiquement nulle.

Supposons maintenant que le système (1) est de rang $k < m-1$. Nous permutons les lignes de (1), nous avons :

$$(2) \begin{cases} C_n(x,y)B_0(x,y) & +C_{n-1}(x,y)B_1(x,y) & +...+ & C_{n-m+1}(x,y)B_{m-1}(x,y) = 0 \\ C_{n+1}(x,y)B_0(x,y) & +C_n(x,y)B_1(x,y) & +...+ & C_{n-m+2}(x,y)B_{m-1}(x,y) = 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{n+m-2}(x,y)B_0(x,y) & +C_{n-m+1}(x,y)B_1(x,y) & +...+ & C_{n-1}(x,y)B_{m-1}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, (2) est réduit à un système homogène extrait à k équations et $k+1$ inconnues : $B_{j_0}, ..., B_{j_k}$, et le déterminant concernant $B_{j_0}, ..., B_{j_k}$, soit $D_{j_0}(x,y)$, est non identiquement nul.

$$(3)\left\{\begin{array}{l} C_{n-1+h_1-j_0}(x,y)B_{j_0}(x,y) + C_{n-1+h_1-j_1}(x,y)B_{j_1}(x,y) + ... + C_{n-1+h_1-j_k}(x,y)B_{j_k}(x,y) = 0 \\ C_{n-1+h_2-j_0}(x,y)B_{j_0}(x,y) + C_{n-1+h_2-j_1}(x,y)B_{j_1}(x,y) + ... + C_{n-1+h_2-j_k}(x,y)B_{j_k}(x,y) = 0 \\ \vdots \\ C_{n-1+h_k-j_0}(x,y)B_{j_0}(x,y) + C_{n-1+h_k-j_1}(x,y)B_{j_1}(x,y) + ... + C_{n-1+h_k-j_k}(x,y)B_{j_k}(x,y) = 0 \end{array}\right.$$

avec :

$$1 \leq h_i \leq m-1$$

$$0 \leq j_0 \leq j_1 \leq ... \leq j_k \leq m-1$$

Le système (3) admet une solution unique (à un facteur multiplicatif près) : $(D_{j_0}(x,y), ..., D_{j_k}(x,y))$ non identiquement nulle. Soit la solution polynomiale, donnée par la méthode de Cramer :

$$D_{j_0}(x,y) = \begin{vmatrix} C_{n-1+h_1-j_1}(x,y) & ... & C_{n-1+h_1-j_k}(x,y) \\ C_{n-1+h_2-j_1}(x,y) & ... & C_{n-1+h_2-j_k}(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n-1+h_k-j_1}(x,y) & ... & C_{n-1+h_k-j_k}(x,y) \end{vmatrix} \not\equiv 0$$

et pour $i = 1, ..., k$:

$$D_{j_i}(x,y) = \begin{vmatrix} C_{n-1+h_1-j_1}(x,y) & ... & -C_{n-1+h_1-j_0}(x,y) & ... & C_{n-1+h_1-j_k}(x,y) \\ C_{n-1+h_2-j_1}(x,y) & ... & -C_{n-1+h_2-j_0}(x,y) & ... & C_{n-1+h_2-j_k}(x,y) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1+h_k-j_1}(x,y) & ... & -C_{n-1+h_k-j_0}(x,y) & ... & C_{n-1+h_k-j_k}(x,y) \\ & & \uparrow & & \end{vmatrix}$$

i ieme colonne du déterminant précédent

est remplacée par cette colonne

$$d^0 D_{j_0} = k(n-1) + \sum_{i=1}^{k} h_i - j_i$$

Pour $i = 1, ..., k$ les deux déterminants qui représentent $D_{j_{i-1}}(x,y)$ et $D_{j_i}(x,y)$ ont la même taille mais ils diffèrent par une seule colonne :

$$\begin{pmatrix} C_{n-1+h_1-j_i}(x,y) \\ C_{n-1+h_2-j_i}(x,y) \\ . \\ . \\ . \\ C_{n-1+h_k-j_i}(x,y) \end{pmatrix}$$

figure dans $D_{j_{i-1}}(x,y)$ et ne figure pas dans $D_{j_i}(x,y)$;

$$\begin{pmatrix} C_{n-1+h_1-j_{i-1}}(x,y) \\ C_{n-1+h_2-j_{i-1}}(x,y) \\ . \\ . \\ . \\ C_{n-1+h_k-j_{i-1}}(x,y) \end{pmatrix}$$

figure dans $D_{j_i}(x,y)$ et ne figure pas dans $D_{j_{i-1}}(x,y)$.

Comme $j_{i-1} < j_i$, les éléments de la première colonne sont de degré inférieur au degré des éléments de la deuxième colonne (la comparaison se fait ligne par ligne). Alors si nous développons $D_{j_{i-1}}(x,y)$ et $D_{j_i}(x,y)$ par rapport à ces deux colonnes, nous aurons : $d^0 D_{j_{i-1}} < d^0 D_{j_i}$, donc

$$d^0 D_{j_0} < d^0 D_{j_1} < ... < d^0 D_{j_k}$$

$$d^0 D_{j_k} = k(n-1) + \sum_{i=1}^{k} h_i - j_{i-1}.$$

Avec les notations suivantes, le système (1) admet la solution $(B_{\bar{j}_i}, B_{j_i})$.

$$\{\bar{h}_1, ..., \bar{h}_{m-1-k}\} = \{1, ..., m-1\} - \{h_1, ..., h_k\}$$

$$\{\bar{j}_1, ..., \bar{j}_{m-1-k}\} = \{0, ..., m-1\} - \{j_0, ..., j_k\}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} B_{\bar{j}_i} \equiv 0 & \text{pour } i = 1, ..., m-1-k \\ B_{j_i} \equiv D_{j_i} & \text{pour } i = 0, ..., k \end{cases}$$

Dans le cas où le rang du système (1) est maximal $k = m-1$, nous avons :

$$d^0 B_j = (n-1)(m-1)+j \quad 0 \le j \le m-1.$$

Dans le cas où le rang du système (1) n'est pas maximal $k < m-1$, il faut multiplier la solution donnée dans (4) par un polynôme homogène T, non identiquement nulle, pour déplacer les degrés des $B_i(x,y)$. Le but de cette translation des degrés est de retrouver les conditions nécessaires de degrè et d'ordre que verifient le numérateur et le dénominateur de l'approximant de Padé homogène d'ordre $(n-1, m-1)$.

Quitte à changer la notation, la solution dans (4) devient :

$$(5) \qquad \begin{cases} B_{\bar{j}_i} \equiv 0 & \text{pour } i = 1, \ldots, m-1-k \\ B_{j_i} \equiv T.D_{j_i} & \text{pour } i = 0, \ldots, k \end{cases}$$

Choix du degré du polynôme homogène T

Soit le déterminant :

$$\delta(x,y) = \begin{vmatrix} C_{n-1+\bar{h}_1-\bar{j}_1}(x,y) & \cdots & C_{n-1+\bar{h}_1-\bar{j}_{m-1-k}}(x,y) \\ C_{n-1+\bar{h}_2-\bar{j}_1}(x,y) & \cdots & C_{n-1+\bar{h}_2-\bar{j}_{m-1-k}}(x,y) \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n-1+\bar{h}_{m-1-k}-\bar{j}_1}(x,y) & \cdots & C_{n-1+\bar{h}_{m-1-k}-\bar{j}_{m-1-k}}(x,y) \end{vmatrix}$$

Posons $t = d^0\delta = (n-1)(m-1-k) + \sum_{l=1}^{m-1-k} \bar{h}_l - \bar{j}_l$

Soit le déterminant :

$$S_j(x,y) = \begin{vmatrix} C_{n-1}(x,y) & \cdots & -C_{n+m-2}(x,y) & \cdots & C_{n+m-3}(x,y) \\ C_{n-2}(x,y) & \cdots & -C_{n+m-3}(x,y) & \cdots & C_{n+m-4}(x,y) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{n-m+1}(x,y) & \cdots & \underset{\uparrow}{-C_n(x,y)} & \cdots & C_{n-1}(x,y) \end{vmatrix}$$

$m-j$ ieme colonne de $D(n-1/m-1)$

est remplacée par cette colonne

Dans la cas où le rang est maximal, $S_j \equiv B_j$ pour $j = 0, ..., m-1$

$$d^0 S_j = (n-1)(m-1) + j \text{ pour } j = 0, ..., m-1$$

En utilisant l'expression de Laplace [AITK,p38] pour les déterminants, nous remarquons qu'en particulier pour $i = 0, ..., k$, nous avons :

$$S_{j_i}(x,y) = \pm\delta(x,y) D_{j_i} + ...$$

$$\text{donc } (n-1)(m-1) \leq t + d^0 D_{j_i} \leq (n-1)(m-1) + m - 1.$$

Dans ce cas la valeur de t présente un bon choix pour le degré du polynôme T.

Nous calculons, en particulier, les degrés de B_{j_0} et de B_{j_k}.

$$\begin{aligned}
d^0 B_{j_0} &= t + d^0 D_{j_0} \\
&= (n-1)(m-1) + \sum_{l=1}^{m-1-k} (\bar{h}_l - \bar{j}_l) + (n-1)k + \sum_{l=1}^{k} (h_l - j_l) \\
&= (n-1)(m-1-k) + (\sum_{l=1}^{m-1-k} \bar{h}_l + \sum_{l=1}^{k} h_l) - (\sum_{l=1}^{m-1-k} \bar{j} + \sum_{l=1}^{k} j_l) + j_0 \\
&= (n-1)(m-1) + (1+2+...m-1) - (0+1+...+m-1) + j_0 \\
d^0 B_{j_0} &= (n-1)(m-1) + j_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^0 B_{j_k} &= t + d^0 D_{j_k} \\
&= (n-1)(m-1) + \sum_{l=1}^{m-1-k} (\bar{h}_l - \bar{j}_l) + (n-1)k + \sum_{l=1}^{k} (h_l - j_{l-1}) \\
&= (n-1)(m-1) + (1+2+...m-1) - (0+1+...+m-1) + j_k \\
d^0 B_{j_k} &= (n-1)(m-1) + j_k
\end{aligned}$$

donc :

$$(n-1)(m-1) \leq (n-1)(m-1) + j_0 = d^0 B_{j_0} < d^0 B_{j_1} < ...$$

$$... < d^0 B_{j_k} = (n-1)(m-1) + j_k \leq (n-1)(m-1) + m - 1$$

Soit les deux polynômes $Q(x,y) = \sum_{j=0}^{m-1} B_j(x,y)$ et $P(x,y) = \sum_{l=0}^{n-1} A_l(x,y)$,

avec :

$$(6) \qquad A_l(x,y) = \sum_{j=0}^{m-1} B_j(x,y) C_{l-j}(x,y) \quad \text{pour} \quad l = 0,...,n-1$$

$$d^0 A_l = (n-1)(m-1) + l \quad \text{pour} \quad l = 0,...,n-1.$$

Donc :

$$(n-1)(m-1) \leq \omega P \text{ et } d^0 P \leq (n-1)(m-1) + n - 1$$

$$(n-1)(m-1) \leq \omega Q \text{ et } d^0 Q \leq (n-1)(m-1) + m - 1$$

D'après (6) et la définition des B_j, nous avons :

$$\omega(FQ - P) \geq (n-1)(m-1) + n + m - 1.$$

Soit $\frac{P_*}{Q_*}$ la forme irréductible de $\frac{P}{Q}$ $(Q_*(0,0)) \neq 0)$, est donc l'approximant $[n-1/m-1]$ de F.

Nous allons montrer que $FQ - P \equiv 0$:

Soit la matrice d'ordre $(m-1, m)$ du système (1)

$$M = \begin{pmatrix} C_{n-1}(x,y) & C_n(x,y) & \dots & C_{n+m-2}(x,y) \\ C_{n-2}(x,y) & C_{n-1}(x,y) & \dots & C_{n+m-3}(x,y) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{n-m+1}(x,y) & C_{n-m+2}(x,y) & \dots & C_n(x,y) \end{pmatrix}$$

Notons $M_1, M_2, ..., M_{m-1}$ les lignes successives de M, elles seront linéairement indépendantes si $D(n-1/m-1)$ est non identiquement nul.

Soit :

$$D(n/m) = \begin{vmatrix} C_n(x,y) & C_{n+1}(x,y) & \dots & C_{n+m-1}(x,y) \\ C_{n-1}(x,y) & C_n(x,y) & \dots & C_{n+m-2}(x,y) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{n-m+1}(x,y) & C_{n-m+2}(x,y) & \dots & C_n(x,y) \end{vmatrix}$$

$D(n/m) \equiv 0$, donc la première ligne de $D(n/m)$ est combinaison linéaire de $M_1, ..., M_{m-1}$.

Il existe $(\alpha_1, ..., \alpha_{m-1}) \neq (0, ..., 0)$ tel que :

$$(C_n(x,y), C_{n+1}(x,y), ..., C_{n+m-1}(x,y)) = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i M_i$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 C_{n-1}(x,y) + \alpha_2 C_{n-2}(x,y) + ... + \alpha_{m-1} C_{n-m+1}(x,y) \\ \alpha_1 C_n(x,y) + \alpha_2 C_{n-1}(x,y) + ... + \alpha_{m-1} C_{n-m+2}(x,y) \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_1 C_{n+m-2}(x,y) + \alpha_2 C_{n+m-3}(x,y) + ... + \alpha_{m-1} C_n(x,y) \end{pmatrix}^T$$

donc :

$$C_n(x,y)B_{m-1}(x,y) + C_{n+1}(x,y)B_{m-2}(x,y) + ... + C_{n+m-1}(x,y)B_0(x,y)$$

$$= \alpha_1(C_{n-1}(x,y)B_{m-1}(x,y) + C_n(x,y)B_{m-2}(x,y) + ... + C_{n+m-2}(x,y)B_0(x,y))$$

$$+\alpha_2(C_{n-2}(x,y)B_{m-1}(x,y) + C_{n-1}(x,y)B_{m-2}(x,y) + ... + C_{n+m-3}(x,y)B_0(x,y))$$

....

$$+\alpha_{m-1}(C_{n-m+1}(x,y)B_{m-1}(x,y) + C_{n-m+2}(x,y)B_{m-2}(x,y) + ... + C_n(x,y)B_0(x,y))$$

$= \alpha_1.0 + \alpha_2.0 + ... + \alpha_{m-1}.0$ (d'après le système (1))

$= 0$

donc :

$$C_n(x,y)B_{m-1}(x,y) + C_{n+1}(x,y)B_{m-2}(x,y) + ... + C_{n+m-1}(x,y)B_0(x,y) = 0$$

Soit en général l'équation :

(7) $C_{n+l}(x,y)B_{m-1}(x,y) + C_{n+l+1}(x,y)B_{m-2}(x,y) + ... + C_{n+l+m-1}(x,y)B_0(x,y) = 0$

Nous avons montré dans ce qui précède que (7) est vérifiée pour $l = 0$. Nous allons montrer par récurrence que (7) est vérifiée pour $l \geq 1$.

Supposons que le résultat est valable jusqu'à l'ordre $i-1$ et démontrons qu'il est aussi vrai pour l'ordre i.

Soit $i \geq 1$

$$D(n+i/m) = \begin{vmatrix} C_{n+i}(x,y) & C_{n+i+1}(x,y) & \ldots & C_{n+i+m-1}(x,y) \\ C_{n+i-1}(x,y) & C_{n+i}(x,y) & \ldots & C_{n+i+m-2}(x,y) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{n+i-m+1}(x,y) & C_{n+i-m+2}(x,y) & \ldots & C_{n+i}(x,y) \end{vmatrix}$$

$$D(n+i/m) \equiv 0$$

Si nous notons $d_0, d_1, ..., d_{m-1}$ les lignes successives de $D(n+i/m)$, alors d_0 est combinaison linéaire de $d_1, d_2, ..., d_{m-1}$.

Il existe $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{m-1}) \neq (0, ..., 0)$ tel que :

$$d_0 = \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i d_i$$

D'après le système (1) et l'hypothèse de récurrence,

$$C_{n+l}(x,y)B_{m-1}(x,y) + C_{n+l+1}(x,y)B_{m-2}(x,y) + \ldots + C_{n+l+m-1}(x,y)B_0(x,y) = 0$$

est vérifiée pour $l = -(m-1), -(m-2), ..., 0, 1, ..., i-1$. Alors $d_1, d_2, ..., d_{m-1}$ vérifient cette relation.

Donc

$$C_{n+i}(x,y)B_{m-1}(x,y) + C_{n+i+1}(x,y)B_{m-2}(x,y) + \ldots + C_{n+i+m-1}(x,y)B_0(x,y)$$

$$= \beta_1(C_{n+i-1}(x,y)B_{m-1}(x,y) + C_{n+i}(x,y)B_{m-2}(x,y) + \ldots + C_{n+i+m-2}(x,y)B_0(x,y))$$
$$+\beta_2(C_{n+i-2}(x,y)B_{m-1}(x,y) + C_{n+i-1}(x,y)B_{m-2}(x,y) + \ldots + C_{n+i+m-3}(x,y)B_0(x,y))$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\beta_{m-1}(C_{n+i-m+1}(x,y)B_{m-1}(x,y) + C_{n+i-m+2}(x,y)B_{m-2}(x,y) + \ldots + C_{n+i}(x,y)B_0(x,y))$$
$$= \beta_1.0 + \beta_2.0 + \ldots + \beta_{m-1}.0 = 0$$

Si nous regroupons toutes les équations développées précédement, alors les polynômes homogènes $C_l(x,y)$ vérifient : $\forall i \geq -(m-1)$

$C_{n+i}(x,y)B_{m-1}(x,y) + C_{n+i+1}(x,y)B_{m-2}(x,y) + ... + C_{n+i+m-1}(x,y)B_0(x,y) = 0$

autrement :

$$(8) \qquad \forall l \geq n \ \sum_{j=0}^{m-1} B_j(x,y)C_{l-j}(x,y) = 0.$$

Alors d'après cette relation, $FQ - P \equiv 0$.

F est donc rationnelle. Elle est égale à son approximant de Padé homogène d'ordre $(n-1, m-1)$, en utilisant l'unicité de l'approximant, donnée dans [CUYTf,p108].

Soit $\dfrac{P_*}{Q_*}$ la forme irréductible de $\dfrac{P}{Q}$ $(Q_*(0,0)) \neq 0)$,

alors $$F \equiv \frac{P_*}{Q_*} \equiv [n-1/m-1]$$

∎

Corollaire 1

Si le couple d'entiers (n,m) vérifie :

i) m est le plus petit entier de $\mathbb{N}^*$ et n est le plus petit entier de $\mathbb{N}$ (il dépend de m), tels que :

$$D(\mu/\nu) \equiv 0 \text{ pour } \mu \geq n \text{ et } \nu \geq m$$

ii) $D(n-1/m-1)$ est non identiquement nul, alors

$\exists (P,Q) = (\sum_{k=0}^{n-1} A_k(x,y), \sum_{k=0}^{m-1} B_k(x,y)) \in P_{n-1,m-1}$ tel que

$$B_0 \not\equiv 0$$

$$A_{n-1} \not\equiv 0$$

$$B_{m-1} \not\equiv 0$$

$$F \equiv [n-1/m-1] = \frac{P_*}{Q_*} \text{ la forme irréductible de } \frac{P}{Q}.$$

Preuve

Nous avons vu dans la démonstration du théorème 3 que si $D(n-1/m-1)$ est non identiquement nul alors nous choisissons

$$B_0(x,y) = D(n-1/m-1) \not\equiv 0.$$

Et pour $j = 1, ..., m-1$

$$B_j(x,y) = \begin{vmatrix} C_{n-1}(x,y) & ... & -C_{n+m-2}(x,y) & ... & C_{n+m-3}(x,y) \\ C_{n-2}(x,y) & ... & -C_{n+m-3}(x,y) & ... & C_{n+m-4}(x,y) \\ . & & . & & . \\ . & & . & & . \\ . & & . & & . \\ C_{n-m+1}(x,y) & ... & -C_n(x,y) & ... & C_{n-1}(x,y) \end{vmatrix}$$

m-j ieme colonne de $D(n-1/m-1)$

est remplacée par cette colonne

$$B_{m-1}(x,y) = \begin{vmatrix} -C_{n+m-2}(x,y) & C_{n-1}(x,y) & ... & C_{n+m-3}(x,y) \\ -C_{n+m-3}(x,y) & C_{n-2}(x,y) & ... & C_{n+m-4}(x,y) \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ -C_n(x,y) & C_{n-m+1}(x,y) & ... & C_{n-1}(x,y) \end{vmatrix}$$

donc $B_{m-1}(x,y) = (-1)^m D(n/m-1)$

De plus $A_{n-1}(x,y) = C_{n-m}(x,y)B_{m-1}(x,y) + ... + C_{n-1}(x,y)B_0(x,y)$,

donc

$$A_{n-1}(x,y) = \begin{vmatrix} C_{n-m}(x,y) & C_{n-m+1}(x,y) & ... & C_{n-1}(x,y) \\ C_{n-1}(x,y) & C_n(x,y) & ... & C_{n+m-1}(x,y) \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ C_{n-m+1}(x,y) & C_{n-m+1}(x,y) & ... & C_n(x,y) \end{vmatrix}$$

d'où $A_{n-1}(x,y) = (-1)^m D(n-1/m)$

D'après le théorème 3 $(P,Q) \in P_{n-1,m-1}$ (solution du problème d'approximation de Padé d'ordre $(n-1, m-1)$).

Il reste à montrer que $D(n-1/m)$ *et* $D(n/m-1)$ sont non identiquement nuls.

Remarquons que :

$$D(\mu/\nu) = (-1)^{[\frac{\nu}{2}]} H_{\nu}^{\mu-\nu+1}$$

avec

$$H_{\nu}^{\mu-\nu+1} = \begin{vmatrix} C_{\mu-\nu+1}(x,y) & C_{\mu-\nu+2}(x,y) & \dots & C_{\mu}(x,y) \\ C_{\mu-\nu+2}(x,y) & C_{\mu-\nu+3}(x,y) & \dots & C_{\mu+1}(x,y) \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ C_{\mu}(x,y) & C_{\mu+1}(x,y) & \dots & C_{\mu+\nu-1}(x,y) \end{vmatrix}$$

le déterminant de Hankel.

En écrivant l'identité de Sylvester pour ces déterminants, nous avons pour

$\mu \geq 1$ et $\nu \geq 2$

$$H_{\nu}^{\mu-\nu+1}.H_{\nu-2}^{\mu-\nu+3} = H_{\nu-1}^{\mu-\nu+2}.H_{\nu-1}^{\mu-\nu+3} - [H_{\nu-1}^{\mu-\nu+2}]^2$$

Soit

$$D(\mu/\nu).D(\mu/\nu-2) = D(\mu-1/\nu-1).D(\mu+1/\nu-1) - [D(\mu/\nu-1)]^2$$

Soit maintenant : $\mu = n+i \;\; i \geq 0$ et $\nu = m$

$$D(n+i/m).D(n+i/m-2) = D(n+i-1/m-1).D(n+i+1/m-1) - [D(n+i/m-1)]^2$$

$D(n+i/m) \equiv 0 \Longrightarrow$

$$\forall i \geq 0 \;\; D(n+i-1/m-1).D(n+i+1/m-1) - [D(n+i/m-1)]^2 \equiv 0 \;\; (\star)$$

pour $i = 0$ $(\star) \Longrightarrow D(n-1/m-1).D(n+1/m-1) - [D(n/m-1)]^2 \equiv 0$

Si $D(n/m-1) \equiv 0$ (comme $D(n-1/m-1)$ est non identiquement nul) alors $D(n+1/m-1) \equiv 0$. Par récurrence nous montrons que :

$\forall i \geq 0 \; D(n+i/m-1) \equiv 0$ (en utilisant $(\star)$).

Ce qui est contradictoire avec l'hypothése i).

De même pour $\mu = n - 1$ et $\nu = m + 1 + i$ $i \geq 0$, nous avons la relation

$$D(n/m+1+i).D(n-1/m-1+i) = D(n-1/m+i).D(n/m+i) - [D(n-1/m+i)]^2$$

Comme $D(n/m+i) \equiv 0$, la relation précédente devient

$$D(n/m+1+i).D(n-1/m-1+i) = -[D(n-1/m+i)]^2 \quad (\star\star)$$

pour $i = 0$ $(\star\star) \Longrightarrow D(n/m+1).D(n-1/m-1) = -[D(n-1/m)]^2$

Si $D(n-1/m) \equiv 0$ (comme $D(n-1/m-1)$ est non identiquement nul) alors $D(n-1/m+1) \equiv 0$.

Par récurrence nous montrons que : $\forall i \geq 0$ $D(n-1/m+i) \equiv 0$ (en utilisant $(\star\star)$). Ce qui est contradictoire avec l'hypothése i)

■

L'ensemble des théorèmes 2 et 3 donne le corollaire suivant, qui généralise le cas scalaire (théorème 1).

Corollaire 2

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe un couple de polynômes $(P, Q) \in P_{n-1,m-1}$ tel que $FQ - P \equiv 0$

ii) Pour $\mu \geq n$ et $\nu \geq m$ $D(\mu/\nu) \equiv 0$.

CHAPITRE III

Approximants de Newton-Padé partiel et approximants de type Newton-Padé à plusieurs variables.

Multivariate partial Newton-Padé
and Newton-Padé type approximants

J. Abouir and A. Cuyt

November 1989 **89–41**

J. ABOUIR, UFR-IEEA, GROUPE ANO
UNIVERSITÉ DE LILLE I, BÂTIMENT M3
F–59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE

A. CUYT, RESEARCH ASSOCIATE NFWO, DEPT. MATH. & COMP. SC.
UNIVERSITY OF ANTWERP (UIA), UNIVERSITEITSPLEIN 1
B–2610 WILRIJK, BELGIUM

Abstract.

The notion of partial Padé approximant is generalized to that of general order multivariate partial Newton-Padé approximant. Previously introduced multivariate Padé-type approximants are recaptured as special cases so that it is a true and unifying generalization. The last section contains numerical results for the bivariate Beta function.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

1. The multivariate Newton-Padé approximation problem.

We shall often restrict our description to the bivariate case for the sake of notational simplicity although we use the term multivariate. Let a bivariate function $f(x,y)$ be known in the points $(x_i, y_j) \in \mathbb{C}^2$ with $(i,j) \in I$, a finite subset of $\mathbb{N}^2$ playing the role of index set. If none of the points in $\{(x_i, y_j)\}_{(i,j)\in I}$ coincide then we are dealing with a rational interpolation problem and the values in $\{f_{ij}\}_{(i,j)\in I}$ are function values. If all the interpolation points coincide then the problem is one of Padé approximation and it is well-known that the given data are not function values but Taylor coefficients. If some of the points coincide and some do not then the problem is of a mixed type and it is called a rational Hermite interpolation problem or a Newton-Padé approximation problem. In [8] is indicated how one should interpret the data f_{ij}: some of them are partial derivatives and some of them are function values. In the sequel of the text we shall distinguish, when necessary, between the Padé approximation case where all the interpolation points coincide and the Newton-Padé approximation case where this is not so.

With our data points (x_i, y_j) we construct the polynomial basis functions

$$B_{ij}(x,y) = \prod_{k=0}^{i-1}(x - x_k)\prod_{\ell=0}^{j-1}(y - y_\ell)$$

The problem of interpolating the data f_{ij} by a bivariate rational function was formulated in [8] as follows. Choose finite subsets N (from "Numerator") and D (from "Denominator") of $\mathbb{N}^2$ with $N \subset I$ and compute bivariate polynomials

$$p(x,y) = \sum_{(i,j)\in N} a_{ij}B_{ij}(x,y) \qquad \#N = n+1$$

$$q(x,y) = \sum_{(i,j)\in D} b_{ij}B_{ij}(x,y) \qquad \#D = m+1 \tag{1a}$$

such that

$$(fq - p)(x_i, y_j) = 0 \qquad (i,j) \in I \qquad \#I = n+m+1 \tag{1b}$$

If $q(x_i, y_j) \neq 0$ then this last condition implies that

$$f(x_i, y_j) = \frac{p}{q}(x_i, y_j) \qquad (i,j) \in I$$

If some of the x_i and y_j coincide then also higher partial derivatives of $(fq - p)$ will cancel at (x_i, y_j) and higher partial derivatives of f will agree with those of p/q at

(x_i, y_j) [8]. The following 2 conditions for the polynomials given in (1a) are sufficient to satisfy (1b), both in the Padé and Newton-Padé approximation case [8]:

$$(fq - p)(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \setminus I} d_{ij} B_{ij}(x, y) \tag{2a}$$

$$I \text{ satisfies the inclusion property} \tag{2b}$$

where the series development (2a) is still formal and where (2b) means that when a point (i, j) belongs to I, all the points in the rectangle emanating from the origin with (i, j) as its furthermost corner belong to I. How this can be achieved in a lot of situations is explained in [8]. From now on we denote a rational function $(p/q)(x, y)$ satisfying (1) or (2) for data coming from the function $f(x, y)$ by $[N/D]_I^f$.

By the set $N * D$ we denote the index set that results from the multiplication of a polynomial indexed by N with a polynomial indexed by D. Since we work with the polynomial basis functions $B_{ij}(x, y)$ instead of $x^i y^j$, we must keep in mind that

$$B_{ij}(x, y) B_{k\ell}(x, y) = \sum_{\mu=0}^{k} \sum_{\nu=0}^{\ell} \lambda_{\mu\nu} B_{i+\mu, j+\nu}(x, y)$$

So

$$\begin{aligned} N * D &= \bigcup_{(i,j) \in N} \bigcup_{(k,\ell) \in D} \left([i, i + k] \times [j, j + \ell] \cap \mathbb{N}^2 \right) \\ &\supset \{(i + k, j + \ell) \mid (i, j) \in N, (k, \ell) \in D\} \end{aligned}$$

In case all the interpolation points (x_i, y_j) coincide, for example and for simplicity in $(0, 0)$, then

$$N * D = \{(i + k, j + \ell) \mid (i, j) \in N, (k, \ell) \in D\}$$

If moreover the sets N and D satisfy the inclusion property, then

$$N \cup D \subset N * D$$

2. General order multivariate partial Newton-Padé approximants.

The notion of partial Padé approximant was introduced by Brezinski [3] for univariate functions $f(x)$: some of the Padé approximation conditions are dropped due to the knowledge of some poles or zeros of $f(x)$. Let the polynomials $v_k(x)$ and $w_\ell(x)$ respectively represent k zeros and ℓ poles of f. The partial Padé approximation problem for f consists in finding polynomials $p(x)$ and $q(x)$ respectively of degree n and m and satisfying

$$(fqw_\ell - pv_k)(x) = O(x^{n+m+1}) \tag{3}$$

The rational function $(pv_k)/(qw_\ell)$ is then called the partial Padé approximant to f of order $(n+k, m+\ell)$. It is easy to see that, if $v_k(0) \neq 0$, the rational function p/q is the Padé approximant of order (n,m) to fw_ℓ/v_k [3]. We generalize this concept as follows.

Let the polynomials $V_k(x,y)$ and $W_\ell(x,y)$ respectively represent some knowledge about the zeros and poles of $f(x,y)$,

$$V_k(x,y) = \sum_{(i,j)\in V} v_{ij} B_{ij}(x,y)$$
$$\#V = k+1$$
$$W_\ell(x,y) = \sum_{(i,j)\in W} w_{ij} B_{ij}(x,y)$$
$$\#W = \ell+1$$

Consider the following approximation problem. Let the finite subset $I \subset I\!N^2$ index those data points (x_i, y_j) that will be used as interpolation points. The knowledge of $f(x,y)$ in these interpolation points (x_i, y_j) can be expressed by means of a formal Newton series development for f,

$$f(x,y) = \sum_{(i,j)\in I\!N^2} c_{ij} B_{ij}(x,y)$$
$$c_{ij} = f[x_0, \ldots, x_i][y_0, \ldots, y_j]$$

where the bivariate divided differences with possible coalescence of coordinates are computed as in [8]. To generalize (3) we look for polynomials

$$P(x,y) = \sum_{(i,j)\in N} a_{ij} B_{ij}(x,y) \qquad N \text{ from “Numerator”}$$

$$Q(x,y) = \sum_{(i,j)\in D} b_{ij} B_{ij}(x,y) \qquad D \text{ from “Denominator”}$$

satisfying

$$(fQW_\ell - PV_k)(x,y) = \sum_{(i,j)\in I\!N^2\setminus I} d_{ij} B_{ij}(x,y) \tag{4}$$

Which conditions have to be imposed on N and D to find a nontrivial solution for the unknowns a_{ij} and b_{ij} in (4)? Assuming that $V_k(x_i, y_j) \neq 0$ we first study

$$\left(\frac{fW_\ell}{V_k} Q - P\right)(x,y) = \sum_{(i,j)\in I\!N^2\setminus I} e_{ij} B_{ij}(x,y)$$

where

$$\left(\frac{fW_\ell}{V_k}\right)(x,y) = \sum_{(i,j)\in I\!N^2} \tilde{c}_{ij} B_{ij}(x,y) \tag{5}$$

The coefficients $\tilde{c}_{ij}$ are given by

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} =&(fW_\ell)[x_0,\ldots,x_i][y_0,\ldots,y_j]\\ =& \sum_{(t,u)\in W} W_\ell[x_0,\ldots,x_t][y_0,\ldots,y_u]f[x_t,\ldots,x_i][y_u,\ldots,y_j]\\ =& \sum_{(t,u)\in W} w_{tu} f[x_t,\ldots,x_i][y_u,\ldots,y_j]\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \left[\left(\frac{fW_\ell}{V_k}\right)V_k\right][x_0,\ldots,x_i][y_0,\ldots,y_j]\\ &= \sum_{\mu=0}^{i}\sum_{\nu=0}^{j} \tilde{c}_{\mu\nu} V_k[x_\mu,\ldots,x_i][y_\nu,\ldots,y_j]\end{aligned}$$

If P/Q is the Newton-Padé approximant to $(fW_\ell/V_k)(x,y)$ then $(PV_k)/(QW_\ell)$ is the partial Newton-Padé approximant to $f(x,y)$. Here the Newton-Padé approximant P/Q is denoted by $[N/D]_I^{fW_\ell/V_k}$ and we introduce the notation $\{N,V/D,W\}_I^f$ for the partial Newton-Padé approximant $(PV_k)/(QW_\ell)$. From [8] we know that $[N/D]_I^{fW_\ell/V_k}$ can be computed for

$$\begin{gathered} N\subset I\\ \#(I\setminus N) = \#D-1\\ I \text{ inclusion property}\end{gathered}$$

Using known results for general order multivariate Newton-Padé approximants, the partial Newton-Padé approximant $\{N,V/D,W\}_I^f$ can be expressed as a ratio of determinants involving the coefficients $\tilde{c}_{ij}$ from the formal Newton series expansion (5) for $(fW_\ell/V_k)(x,y)$. Let us number the indices in D by $(d_0,e_0),(d_1,e_1),\ldots,(d_m,e_m)$ and the indices in $I\setminus N$ by $(h_1,k_1),\ldots,(h_m,k_m)$. If the rank of the coefficient matrix of the linear conditions arising from (2a) [8] with f replaced by (fW_ℓ/V_k), is maximal, then $Q(x,y)$ and $P(x,y)$ are given by

$$Q(x,y) = \begin{vmatrix} B_{d_0e_0}(x,y) & \ldots & B_{d_me_m}(x,y)\\ \tilde{c}_{d_0h_1,e_0k_1} & \cdots & \tilde{c}_{d_mh_1,e_mk_1}\\ \vdots & & \vdots\\ \tilde{c}_{d_0h_m,e_0k_m} & \cdots & \tilde{c}_{d_mh_m,e_mk_m}\end{vmatrix} \tag{6a}$$

$$P(x,y) = \begin{vmatrix} \sum_{(i,j)\in N} \tilde{c}_{d_0i,e_0j}B_{ij}(x,y) & \ldots & \sum_{(i,j)\in N} \tilde{c}_{d_mi,e_mj}B_{ij}(x,y)\\ \tilde{c}_{d_0h_1,e_0k_1} & \cdots & \tilde{c}_{d_mh_1,e_mk_1}\\ \vdots & & \vdots\\ \tilde{c}_{d_0h_m,e_0k_m} & \cdots & \tilde{c}_{d_mh_m,e_mk_m}\end{vmatrix} \tag{6b}$$

The error formulas developed in [1] for general order multivariate Newton-Padé approximants remain valid when applied to the function fW_ℓ/V_k. When calculating a partial Padé approximant instead of a partial Newton-Padé approximant, we use a formal Taylor series development of $(fW_\ell/V_k)(x,y)$ and carry out the same computations as above. In this case all the interpolation points coincide in one point. For special results about general order partial Padé approximants we refer to the next section.

3. Algebraic properties of the multivariate partial Padé approximant.

It is well-known that univariate Padé approximants satisfy a number of covariance properties, such as reciprocal covariance, homographic covariance, covariance for some transformations of the variable. These covariance properties remain valid for univariate partial Padé approximants, as was pointed out by Brezinski in [3]. In this section we study the covariance properties of the multivariate partial Padé approximant. For the sake of notational simplicity we stick to the bivariate case. Let the formal Taylor series development of $f(x,y)$ be given by

$$f(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} c_{ij}x^iy^j$$

with

$$c_{00} \neq 0$$

Then the formal Taylor series development of $g(x,y) = (1/f)(x,y)$ is defined by

$$g(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} d_{ij}x^iy^j$$

with

$$f(x,y)g(x,y) = 1$$

If the polynomial $V_k(x,y)$ contains information on the zeros of f, then it also contains information on the poles of g and vice versa for $W_\ell(x,y)$. If

$$(fQW_\ell - PV_k)(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\setminus I} d_{ij}x^iy^j$$

then after multiplication by $-g(x,y)$, we get

$$(gPV_k - QW_\ell)(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\setminus I} \tilde{d}_{ij}x^iy^j$$

From this we can conclude

THEOREM 1:
Let $\{N, V/D, W\}_I^f$ *be the general order multivariate partial Padé approximant to* $f(x,y)$ *as defined above and let* $g(x,y) = (1/f)(x,y)$. *Then*

$$\{N, V/D, W\}_I^f \cdot \{D, W/N, V\}_I^g = 1$$

By multiplying the formal Taylor series expansion of $f(x,y)$ by a constant complex number, we do not change its zeros or poles. It is easy to verify

THEOREM 2:
Let $\{N, V/D, W\}_I^f$ *be the general order multivariate partial Padé approximant to* $f(x,y)$ *as defined above and let* $a \neq 0$. *Then*

$$\{N, V/D, W\}_I^{af} = a\{N, V/D, W\}_I^f$$

If we study the homographic function covariance of the multivariate partial Padé approximant, we must disappoint the reader. By transforming the function f into the function $\tilde{f} = (af+b)/(cf+d)$, the rational approximant under consideration transforms into

$$\frac{aPV_k + bQW_\ell}{cPV_k + dQW_\ell}(x,y) = \frac{\sum_{(ij)\in\tilde{N}} \tilde{a}_{ij} x^i y^j}{\sum_{(ij)\in\tilde{D}} \tilde{b}_{ij} x^i y^j}$$

which can not necessarily be written in the form $(\tilde{P}V_k)/(\tilde{Q}W_\ell)$ with $\tilde{P}/\tilde{Q} = [N/D]_I^{\tilde{f}W_\ell/V_k}$.

Let us now study some changes in the variables. We define

$$\begin{aligned} a \neq 0 \qquad b &\neq 0 \\ \tilde{V}_k(x,y) &= V_k(ax, by) \\ \tilde{W}_\ell(x,y) &= W_\ell(ax, by) \\ \tilde{f}(x,y) &= f(ax, by) \end{aligned}$$

Since

$$(fQW_\ell - PV_k)(x,y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\setminus I} d_{ij} x^i y^j$$

implies

$$(fQW_\ell - PV_k)(ax,by) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\setminus I} d'_{ij} x^i y^j$$

it is easy to conclude

THEOREM 3:
Let $\{N, V/D, W\}_I^f$ be the general order multivariate partial Padé approximant to $f(x, y)$ as defined above and let $a \neq 0, b \neq 0$ with $\tilde{f}, \tilde{W}_\ell$ and $\tilde{V}_k$ as defined above. Then

$$\{N, V/D, W\}_I^{\tilde{f}} = \{N, V/D, W\}_I^f(ax, by)$$

Another change is the translation of the coefficients in the formal power series, in other words a multiplication of $f(x, y)$ by $x^s y^t$. We introduce the notations

$$\begin{aligned} \hat{N} &= N + \{(s,t)\} = \{(i+s, j+t) \mid (i,j) \in N\} \\ \hat{I} &= \overline{I + \{(s,t)\}} = \bigcup_{(k,\ell) \in I} ([0, k+s] \times [0, \ell + t] \cap \mathbb{N}^2) \end{aligned}$$

Here overlining means making the set satisfy the inclusion property, in other words taking a kind of closure, namely filling the "holes" when looking at the set in $\mathbb{N}^2$. If $N \subset I$ then also $\hat{N} \subset \hat{I}$. One can verify

THEOREM 4:
Let $\{N, V/D, W\}_I^f$ be the general order multivariate partial Padé approximant to $f(x, y)$ as defined above and let $\hat{N}$ and $\hat{I}$ be defined as above. Then

$$\{\hat{N}, V/D, W\}_{\hat{I}}^{x^s y^t f} = x^s y^t \{N, V/D, W\}_I^f$$

The most important change of variable is the one involved in the homographic variable covariance of the multivariate partial Padé approximant.

THEOREM 5:
Let $\{N, V/D, W\}_I^f$ be the general order multivariate partial Padé approximant to $f(x, y)$ as defined above with $N = D = ([0, i_M] \times [0, j_M]) \cap \mathbb{N}^2$ and let

$$\begin{gathered} \tilde{x} = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \tilde{y} = \frac{a'y+b'}{c'y+d'} \\ \tilde{V}_k(x,y) = (cx+d)^{k_M}(c'y+d')^{\ell_M} V_k(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \tilde{W}_\ell(x,y) = (cx+d)^{k_M}(c'y+d')^{\ell_M} W_\ell(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \tilde{f}(x,y) = f(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ ad - bc \neq 0 \qquad a'd' - b'c' \neq 0 \end{gathered}$$

with $V = W = ([0, k_M] \times [0, \ell_M]) \cap \mathbb{N}^2$. Then

$$\{N, V/D, W\}_I^{\tilde{f}}(x, y) = \{N, V/D, W\}_I^f(\tilde{x}, \tilde{y})$$

PROOF:
For $ad - bc \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\tilde{x} =& \frac{1}{d}(ax+b)\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\left(\frac{c}{d}x\right)^i \\
=& \frac{b}{d} + x\left(\frac{a}{d} - \frac{bc}{d^2}\right) + \dots \\
=& \frac{b}{d} + \frac{x}{d^2}(ad-bc) + \dots
\end{aligned}$$

represents a formal power series in x and analogously for $\tilde{y}$. Equation (4) combined with these formal power series expansions for $\tilde{x}$ and $\tilde{y}$ results in

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{f}\tilde{W}_\ell\right)(x,y)Q(\tilde{x},\tilde{y}) - \tilde{V}_k(x,y)P(\tilde{x},\tilde{y}) =& (cx+d)^{k_M}(c'y+d')^{\ell_M} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\setminus I} d_{ij}\tilde{x}^i\tilde{y}^j \\
=& \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\setminus I} \tilde{d}_{ij}x^iy^j
\end{aligned}$$

The fact that

$$\begin{aligned}
\frac{P(\tilde{x},\tilde{y})}{Q(\tilde{x},\tilde{y})} =& \frac{\sum_{(i,j)\in N} a_{ij}\tilde{x}^i\tilde{y}^j}{\sum_{(i,j)\in N} b_{ij}\tilde{x}^i\tilde{y}^j} \\
=& \frac{(cx+d)^{i_M}(c'y+d')^{j_M}\sum_{(i,j)\in N} a_{ij}\tilde{x}^i\tilde{y}^j}{(cx+d)^{i_M}(c'y+d')^{j_M}\sum_{(i,j)\in N} b_{ij}\tilde{x}^i\tilde{y}^j} \\
=& \frac{\sum_{(r,s)\in N} \tilde{a}_{rs}x^ry^s}{\sum_{(r,s)\in N} \tilde{b}_{rs}x^ry^s}
\end{aligned}$$

completes the proof. ∎

Last but not least the consistency property. If we are given an irreducible rational function $f(x,y)$ right from the start, do we come across it when calculating the appropriate general order Newton-Padé approximant. By this we mean that for

$$\begin{aligned}
f(x,y) = \frac{g(x,y)}{h(x,y)} &= \frac{\sum_{(i,j)\in N} g_{ij}x^iy^j}{\sum_{(i,j)\in D} h_{ij}x^iy^j} \\
V_k(x,y) = 1 \qquad & W_\ell(x,y) = 1 \\
(fQ-P)(x,y) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\setminus I} d_{ij}B_{ij}(x,y)
\end{aligned}$$

with $P(x,y)$ and $Q(x,y)$ defined by (1a) we want to find

$$(Ph - gQ)(x,y) = 0$$

It is clear that this is the case if the general order multivariate Newton-Padé approximation problem $[N/D]^f_I$ has a unique solution, because then both P/Q and g/h satisfy the approximation conditions (4). If the solution is non-unique we can get in trouble because of the non-unicity of the irreducible form of the Newton-Padé approximant. A solution of the form

$$\frac{\alpha + \alpha x + (1-\alpha)y}{1+x+y}$$

has 3 different irreducible forms, namely

$$\begin{aligned} \alpha = 0.0: &\quad \frac{y}{1+x+y} \\ \alpha = 0.5: &\quad 0.5 \\ \alpha = 1.0: &\quad \frac{1+x}{1+x+y} \end{aligned}$$

These irreducible forms cannot all together coincide with g/h. In general we can only say that

$$(Ph - gQ)(x,y) = \sum_{(i,j)\in N*D\setminus I} e'_{ij} B_{ij}(x,y)$$

4. General order multivariate Newton-Padé type approximants.

Newton-Padé type approximants are a special case of partial Newton-Padé approximants: the denominator polynomial is completely fixed and no factor of the numerator polynomial is prechosen. In the univariate case this means putting $\partial w_\ell = m$ and $\partial v_k = 0$ in (3), implying that $\partial p = n$ and $\partial q = 0$. The Newton-Padé type approximant is then given by

$$\frac{p}{w_m}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m} w_j \sum_{i=0}^{n} f[x_j, \ldots, x_i] B_i(x)}{\sum_{j=0}^{m} w_j B_j(x)}$$

satisfying

$$(fw_m - p)(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} d_i B_i(x)$$

Convergence results for Padé-type approximants can be found in [9, 10]. From (4) we find that its multivariate analogon is

$$\frac{P}{W_m}(x,y) = \frac{\sum_{(k,\ell)\in W} w_{k\ell} \sum_{(i,j)\in N} c_{ki,\ell j} B_{ij}(x,y)}{\sum_{(k,\ell)\in W} w_{k\ell} B_{k\ell}(x,y)}$$

with $c_{ki,\ell j} = f[x_k, \ldots, x_i][y_\ell, \ldots, y_j]$ and satisfying

$$(fW_m - P)(x,y) = \sum_{(i,j)\in \mathbb{N}^2 \setminus N} d_{ij} B_{ij}(x,y)$$

For general order multivariate Padé type approximants this last formula reduces to

$$\frac{P}{W_m}(x,y) = \frac{\sum_{(k,\ell)\in W} w_{k\ell} \sum_{(i,j)\in N} c_{i-k,j-\ell} x^i y^j}{\sum_{(k,\ell)\in W} w_{k\ell} x^k y^\ell}$$

with $c_{i-k,j-\ell} = (\partial^{i-k+j-\ell} f / \partial x^{i-k} \partial y^{j-\ell})(0,0)$. A convergence theorem for multivariate Padé-type approximants will be given in [7]. We shall now rediscover some independently developed notions of multivariate Newton-Padé type or multivariate Padé type approximants as special cases of our general order rational approximants.

In [2] Brezinski introduces multivariate Padé type approximants with a denominator polynomial of the form

$$W_m(x,y) = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} w_{ij} x^i y^j$$

satisfying

$$(fW_m - P)(x,y) = \sum_{(i,j)\in \mathbb{N} * (\mathbb{N} + \{(0,m_2)\}) \cup (\mathbb{N} + \{(m_1,0)\} * \mathbb{N}} d_{ij} x^i y^j$$

which is equivalent to (4) with $I = N = ([0, m_1 - 1] \times [0, m_2 - 1]) \cap \mathbb{N}^2$. Here

$$\#W = (m_1 + 1)(m_2 + 1)$$

In [12] Kida introduces multivariate Padé type approximants using multivariate homogeneous expressions. Their construction is similar to the construction of multivariate Padé approximants by Cuyt in [5]. He chooses

$$W_m(x,y) = \sum_{i+j=s}^{s+m} w_{ij} x^i y^j$$

$$P(x,y) = \sum_{i+j=s}^{s+n} a_{ij} x^i y^j$$

with the multivariate Padé type approximant satisfying

$$(fW_m - P)(x,y) = \sum_{i+j=s+n+1}^{\infty} d_{ij}x^iy^j$$

So $I = \{(i,j) \mid 0 \le i+j \le s+n\}$. The integer s indicates a shift of the degrees of W_m and P over s. Instead of the index sets W and N being triangular, they have a band structure, resulting from shifting the triangle away from the origin by s.

In [15, 16] Sablonniere chooses m points $z^{(1)} = (z_1^{(1)}, z_2^{(1)}), \ldots, z^{(m)} = (z_1^{(m)}, z_2^{(m)})$ in $\mathbb{C}^2$ to construct

$$\begin{aligned} W_m(x,y) &= \prod_{i=1}^{m}(1 - z_1^{(i)}x - z_2^{(i)}y) \\ &= \sum_{i+j=0}^{m} w_{ij}x^iy^j \end{aligned}$$

while the numerator of the multivariate Padé type approximant is of the form

$$P(x,y) = \sum_{i+j=0}^{m-1} a_{ij}x^iy^j$$

Hence

$$\begin{aligned} \#W &= (m+1)(m+2)/2 \\ \#N &= m(m+1)/2 \end{aligned}$$

Finally the approximation conditions are given by

$$(fW_m - P)(x,y) = \sum_{i+j=m}^{\infty} d_{ij}x^iy^j$$

Recently Mühlbach introduced a multivariate Newton-Padé type approximant which he called in [14] a multivariate rational interpolant with prescribed poles. He fixes $m_1 + 1$ finite non-coinciding points $\alpha_{i,1}$ and $m_2 + 1$ finite non-coinciding points $\alpha_{j,2}$ in $\mathbb{C}$ to construct

$$W_m(x,y) = \prod_{i=0}^{m_1}(x - \alpha_{i,1}) \prod_{j=0}^{m_2}(y - \alpha_{j,2})$$

The multivariate Newton-Padé type approximant under consideration will be computed in its partial fraction decomposition

$$(P/W_m)(x,y) = \sum_{i=0}^{m_1}\sum_{j=0}^{m_2} \frac{\beta_{ij}}{(x - \alpha_{i,1})(y - \alpha_{j,2})}$$

So

$$W = ([0, m_1] \times [0, m_2]) \cap \mathbb{N}^2$$
$$I = N = ([0, m_1 - 1] \times [0, m_2 - 1]) \cap \mathbb{N}^2$$

The above results can be generalised for multiple prescribed poles where some of the $\alpha_{i,1}$ or $\alpha_{j,2}$ coincide.

5. Numerical illustration.

To illustrate the concept of multivariate partial Padé approximant we shall compare it numerically with the general order multivariate Padé approximant. It is clear that the partial approximant can only be a powerful tool if the polynomials $W_\ell(x,y)$ and $V_k(x,y)$ contain accurate information on the zeros and poles of the multivariate function responsable for the interpolation data. The bivariate Beta function $B(x,y)$ will serve as a concrete example here because many numerical results on other types of approximants for this function can be found in the literature [4, 7, 11, 13]. It is defined by

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

where Γ is the Gamma function. Singularities occur at $x = -k$ and $y = -k, (k = 0, 1, 2, \ldots)$ and zeros at $y = -x - k, (k = 0, 1, 2, \ldots)$. By means of the recurrence formulas

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$$

for the Gamma function, we can write

$$B(x,y) = \frac{1 + (x-1)(y-1)f(x,y)}{xy}$$

We shall now compute approximants $R(x,y)$ for $f(x,y)$ and compare the exact value $B(u_i, v_j)$ with the expression

$$\frac{1 + (u_i - 1)(v_j - 1)R(u_i, v_j)}{u_i v_j}$$

in a number of points (u_i, v_j) close to zeros and poles simulated by the partial Padé approximant. For the partial approximant the supplementary information on the poles is given by

$$W_3(x,y) = (1+x)(1+y)$$
$$W = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$$

and that on the zeros by

$$V_2(x,y) = 1 + x + y$$
$$V = \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$$

Of course when comparing partial approximants with full approximants this extra information on the zeros and poles will be accounted for. For the general order Padé approximants in total 36 pieces of information will be used, namely the Taylor coefficients c_{ij} of a series development for $f(x,y)$ with (i,j) in

$$I = \{(i,j) \mid 0 \leq i \leq 5, 0 \leq j \leq 5\}$$

For the numerator and denominator of the general order Padé approximant we take

$$N = \{(i,j) \mid 0 \leq i+j \leq 5\} \cup \{(3,3)\}$$
$$D = \{(i,j) \mid 0 \leq i+j \leq 4\}$$

For the numerator and denominator of the partial Padé approximant we keep in mind that already some coefficients are fixed by the choice of W_3 and V_2 and hence we take

$$N = \{(i,j) \mid 0 \leq i+j \leq 5\} \cup \{(3,3)\} \setminus \{(5,0),(0,5)\}$$
$$D = \{(i,j) \mid 0 \leq i+j \leq 3\} \cup \{(3,1),(1,3)\}$$

The unknown coefficients in the partial Padé approximant can be fixed by imposing $36 - k - \ell = 36 - 2 - 3 = 31$ approximation conditions coming from

$$I = \{(i,j) \mid 0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 4\} \cup \{(5,0),(5,1),(5,2),(2,5),(1,5),(0,5)\}$$

Note that our approximants are chosen symmetric in x and y because we are dealing with a symmetric function. The following table displays some numerical results that are typical throughout the region $[-1,1] \times [-1,1]$. We did not pick particular numbers that served our purpose. The difficulty with the bivariate Beta function is that it is very steep near its zeros and singularities. This forces us to go quite close to illustrate the advantage of the partial Newton-Padé approximants. For other examples this is not necessary, but the bivariate Beta function already has such a rich tradition [4, 5, 11, 13].

(u_i, v_j)	$R(u_i, v_j) = [N/D]^f_I$ $E^{(21)}_{14}$	$R(u_i, v_j) = \{N, V/D, W\}^f_I$ $E^{(19)}_{11}$	$B(u_i, v_j)$
$(-0.9875, -0.2)$	56.	110.	91.
$(-0.9925, -0.2)$	75.4	196.	155.
$(-0.9975, -0.2)$	112.	603.	475.
$(-0.5975, -0.4)$	-0.0334	-0.0346	-0.0343
$(-0.6, -0.4)$	0.0009	0.	0.
$(-0.6025, -0.4)$	0.0355	0.0349	0.0345
$(-0.9800, -0.25)$	42.5	68.3	58.3
$(-0.9875, -0.25)$	59.0	113.	95.8
$(-0.9950, -0.25)$	93.4	290.	246.
$(-0.2, -0.7990)$	-0.041	-0.036	-0.033
$(-0.8, -0.1990)$	-0.049	-0.039	-0.034
$(-0.85, -0.149)$	-0.120	-0.076	-0.055

References.

1. Abouir J. and Cuyt A., *Error formulas for multivariate rational interpolation and Padé approximation*, J. Comp. Appl. Math. **31** (1990), 233–241.
2. Brezinski C., *Padé-type approximants for double power series*, J. Indian Math. Soc. **42** (1978), 267–282.
3. Brezinski C., *Partial Padé approximation*, J. Approx. Th. **54** (1988), 210–233.
4. Cuyt A., *A recursive computation scheme for multivariate rational interpolants*, SIAM J. Numer. Anal. **24** (1987), 228–238.
5. Cuyt A., "Padé approximants for operators: theory and applications", LNM 1065, Springer Verlag, Berlin, 1984.
6. Cuyt A., Gonzalez-Vera P. and Orive R., *Error formulas and convergence results for multivariate Padé-type approximants*, (in preparation).
7. Cuyt A. and Verdonk B., *A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximants*, Appl. Numer. Math. **4** (1988), 263–271.
8. Cuyt A. and Verdonk B., *General order Newton-Padé approximants for multivariate functions*, Num .Math. **43** (1984), 293-307.
9. Eiermann M., *On the convergence of Padé-type approximants to analytic functions*, J. Comp. Appl. Math. **10** (1984), 219–227.
10. Goncar A. A., *On the convergence of generalized Padé approximants of meromorphic functions*, Math. USSR Sbornik **27** (1975), 503–514.
11. Graves Morris P., Hughes Jones R. and Makinson G., *The calculation of some rational approximants in two variables*, Journ. Inst. Math. Applcs **13** (1974), 311-320.
12. Kida S., *Padé-type and Padé approximants in several variables*, Appl. Numer. Math. **6** (1990), 371-391.
13. Levin D., *On accelerating the convergence of infinite double series and integrals*, Math. Comp. **35** (1980), 1331-1345.
14. Mühlbach G., *On interpolation by rational functions with prescribed poles with applications to multivariate interpolation*, (to appear).
15. Sablonniere P., *A new family of Padé-type approximants in* $\mathbb{R}^k$, J. Comp. Appl. Math. **9** (1983), 347–359.
16. Sablonniere P., *Padé-type approximants for multivariate series of functions*, Springer Verlag, Berlin, LNM **1071** (1984), 238–251.

CHAPITRE IV

Formulation de l'erreur d'approximation de Newton Padé à plusieurs variables.

Journal of Computational and Applied Mathematics 31 (1990) 233–241
North-Holland

Error formulas for multivariate rational interpolation and Padé approximation

J. ABOUIR
UFR-IEEA, Groupe ANO, Université de Lille I, Bâtiment M3, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cédex, France

A. CUYT
Department of Mathematics and Computer Science, University of Antwerp (UIA), Universiteitsplein 1, B-2610 Wilrijk, Belgium

Received 22 August 1989
Revised 7 February 1990

Abstract: The univariate error formulas for Padé approximants and rational interpolants, which are repeated in Section 2, are generalized to the multivariate case in Section 4. We deal with "general order" multivariate Padé approximants and rational interpolants, where the numerator and denominator polynomials as well as the equations expressing the approximation order, can be chosen by the user of these multivariate rational functions.

Keywords: Error in multivariate Padé approximation, Newton–Padé approximation, rational interpolation, rational Hermite interpolation.

1. The multivariate rational interpolation problem

We shall often restrict our description to the bivariate case for the sake of notational simplicity although we use the term multivariate. Let a bivariate function f be known in the points $(x_i, y_j) \in \mathbf{C}^2$ with $(i, j) \in I$, a finite subset of $\mathbf{N}^2$, playing the role of index set. If none of the points in $\{(x_i, y_j)\}_{(i,j)\in I}$ coincides, then we are dealing with a rational interpolation problem and the values in $\{f_{ij}\}_{(i,j)\in I}$ are function values. If all the interpolation points coincide, then the problem is one of Padé approximation and it is well known that the given data are not function values but Taylor coefficients. If some of the points coincide and some do not, then the problem is of a mixed type and it is called a Hermite interpolation problem or a Newton–Padé approximation problem. In [3] is indicated how one should interpret the data f_{ij}: some of them are partial derivatives and some of them are function values. In the sequel of the text we shall distinguish, when necessary, between the Padé approximation case, where all the interpolation points coincide, and the Newton–Padé approximation case, where this is not so.

With our data points (x_i, y_j) we construct the polynomial basis functions

$$B_{ij}(x, y) = \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \prod_{l=1}^{j-1} (y - y_l).$$

The problem of interpolating the data f_{ij} by a bivariate rational function was formulated in [3] as follows. Choose finite subsets N (from "Numerator") and D (from "Denominator") of $\mathbb{N}^2$ with $N \subset I$ and compute bivariate polynomials

$$p(x, y) = \sum_{(i,j)\in N} a_{ij}B_{ij}(x, y), \quad \#N = n+1,$$
$$q(x, y) = \sum_{(i,j)\in D} b_{ij}B_{ij}(x, y), \quad \#D = m+1, \tag{1a}$$

such that

$$(fq-p)(x_i, y_j) = 0, \quad (i, j) \in I, \quad \#I = n+m+1. \tag{1b}$$

If $q(x_i, y_j) \neq 0$, then this last condition implies that

$$f(x_i, y_j) = \frac{p}{q}(x_i, y_j), \quad (i, j) \in I.$$

If some of the x_i and y_j coincide, then also higher partial derivatives of $(fq-p)$ will cancel at (x_i, y_j) and higher partial derivatives of f will agree with those of p/q at (x_i, y_j) [3]. The following two conditions for the polynomials given in (1a) are sufficient to satisfy (1b), both in the Padé and Newton–Padé approximation case [3]:

$$(fq-p)(x, y) = \sum_{(i,j)\in \mathbb{N}^2 \setminus I} d_{ij}B_{ij}(x, y), \tag{2a}$$

I satisfies the inclusion property, (2b)

where the series development (2a) is still formal and where (2b) means that, when a point (i, j) belongs to I, all the points in the rectangle emanating from the origin with (i, j) as its furthermost corner belong to I. How this can be achieved in a lot of situations is explained in [3]. From now on we restrict ourselves to finite interpolation sets I satisfying this inclusion property. The series development (2a) is not only formal, but also involves undefined interpolation points. More precisely, it has to be interpreted as an accuracy-through-order condition. The rest of the paper is devoted to obtain usable formulas for $(fq-p)(x, y)$.

2. The univariate error formulas

Let the polynomials $p(z)$ and $q(z)$ solve the univariate (n, m) Padé approximation problem for a function $f(z)$ with $z \in \mathbb{C}$ and let the function $(fq)(z)$ be holomorphic in the disk $B(0; \rho)$ with center 0 and radius ρ. Then we know that for $|z| < \rho$

$$(fq-p)(z) = \sum_{i \geqslant n+m+1} d_i z^i. \tag{3}$$

The series $(fq-p)(z)$ can be expressed by Cauchy's integral formula as

$$(fq-p)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho} \frac{(fq-p)(w)}{w-z}\,dw,$$

with its Taylor coefficients given by

$$\frac{d^j(fq-p)(0)}{dz^j} = \frac{j!}{2\pi i}\int_{|w|=\rho} \frac{(fq-p)(w)}{w^{j+1}}\,dw.$$

With (3) in mind and knowing that the degree of p is at most n, Cauchy's integral formula for the rest series (3) reads [1, p.250]

$$(fq-p)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho}\left(\frac{z}{w}\right)^{n+m+1}\frac{(fq)(w)}{w-z}\mathrm{d}w. \tag{4}$$

From (3) we also know that for $|z|<\rho$

$$|(fq-p)(z)| \leqslant \sup_{w\in[0,z]} |(fq-p)^{(n+m+1)}(w)| \frac{|z|^{n+m+1}}{(n+m+1)!}$$

$$= \sup_{w\in[0,z]} |(fq)^{(n+m+1)}(w)| \frac{|z|^{n+m+1}}{(n+m+1)!}. \tag{5}$$

Let the polynomials $p(z)$ and $q(z)$ solve the univariate (n, m) Newton–Padé approximation problem for a function $f(z)$ and for interpolation points $z_0,\ldots, z_{n+m}$. Let the function $(fq)(z)$ be holomorphic in the disk $B(0; \rho)$ with center 0 and radius ρ, containing the interpolation points. Then for $|z|<\rho$

$$(fq-p)(z)=\sum_{i\geqslant n+m+1} d_i B_i(z), \quad B_i(z)=\prod_{k=0}^{i-1}(z-z_k). \tag{6}$$

The rest series can still be given by an integral formula [2, p.121]

$$(fq-p)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho}\frac{B_{n+m+1}(z)(fq)(w)}{B_{n+m+1}(w)(w-z)}\mathrm{d}w, \tag{7}$$

which is based on Hermite's formula for the divided differences d_i, namely

$$(fq-p)[z_0,\ldots,z_{n+m},z]=(fq)[z_0,\ldots,z_{n+m},z]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\rho}\frac{(fq)(w)}{B_{n+m+1}(w)(w-z)}\mathrm{d}w.$$

The majorant for this error is given by [5, p.5]

$$|(fq-p)(z)| \leqslant \sup_{|w|\leqslant\rho} |(fq)^{(n+m+1)}(w)| \frac{|B_{n+m+1}(z)|}{(n+m+1)!}. \tag{8}$$

We shall now develop multivariate analogons of the formulas (4) and (7).

3. Tools from multivariate complex analysis

Let the multivariate function $f(z_1,\ldots,z_p)$ be given in the polydisc $B(0; \rho_1,\ldots,\rho_p)=\{(z_1,\ldots,z_p)\in\mathbb{C}^p: |z_i|<\rho_i, i=1,\ldots,p\}$ with center 0 and polyradius $(\rho_1,\ldots,\rho_p)$. A multivariate function $f(z_1,\ldots,z_p)$ holomorphic in the polydisc $B(0; \rho_1,\ldots,\rho_p)$ is now given by the following Cauchy integral form [4]

$$f(z_1,\ldots,z_p)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^p\int_{|w_i|=\rho_i}\frac{f(w_1,\ldots,w_p)}{(w_1-z_1)\cdots(w_p-z_p)}\,\mathrm{d}w_1\cdots\mathrm{d}w_p,$$

and its Taylor series coefficients are given by

$$\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_p} f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_p^{i_p}}(0,\ldots,0)=\frac{(i_1)!\cdots(i_p)!}{(2\pi \mathrm{i})^p}\int_{|w_i|=\rho_i}\frac{f(w_1,\ldots,w_p)}{w_1^{i_1+1}\cdots w_p^{i_p+1}}\mathrm{d}w_1\cdots\mathrm{d}w_p.$$

For $f(z_1,\ldots,z_p)$ bounded in the polydisc by

$$|f(z_1,\ldots,z_p)|\leqslant M,\quad (z_1,\ldots,z_p)\in B(0;\ \rho_1,\ldots,\rho_p),$$

we also have [4]

$$\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_p} f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_p^{i_p}}(0,\ldots,0)\leqslant M\frac{(i_1)!\cdots(i_p)!}{\rho_1^{i_1}\cdots\rho_p^{i_p}}.$$

The Taylor coefficients of $f(z_1,\ldots,z_p)$ are limit values of its divided differences

$$f\left[z_1^{(0)},\ldots,z_1^{(i_1)}\right]\cdots\left[z_p^{(0)},\ldots,z_p^{(i_p)}\right],$$

when we let all the data points $(z_1^{(0)},\ldots,z_p^{(0)})$, $(z_1^{(1)},\ldots,z_p^{(1)}),\ldots$ coincide in the origin. The divided differences for a data set satisfying the inclusion property (2b), are recursively computed by [7]

$$\begin{aligned}
&f\left[z_1^{(0)},\ldots,z_1^{(i_1)}\right]\cdots\left[z_p^{(0)},\ldots,z_p^{(i_p)}\right]\\
&\quad=\left\{f\left[z_1^{(0)},\ldots,z_1^{(i_1)}\right]\cdots\left[z_k^{(1)},\ldots,z_k^{(i_k-1)},\ z_k^{(i_k)}\right]\cdots\left[z_p^{(0)},\ldots,z_p^{(i_p)}\right]\right.\\
&\qquad\left.-f\left[z_1^{(0)},\ldots,z_1^{(i_1)}\right]\cdots\left[z_k^{(0)},\ldots,z_k^{(i_k-2)},\ z_k^{(i_k-1)}\right]\cdots\left[z_p^{(0)},\ldots,z_p^{(i_p)}\right]\right\}\\
&\qquad\times\left\{z_k^{(i_k)}-z_k^{(0)}\right\}^{-1},\\
&\qquad k=1,\ldots,p,
\end{aligned}$$

with

$$f\left[z_1^{(k)}\right]\cdots\left[z_p^{(k)}\right]=f\left(z_1^{(k)},\ldots,z_p^{(k)}\right),$$

and they can still be given by Hermite's formula applied to each of the variables successively, namely [2, p.149]

$$\begin{aligned}
&f\left[z_1^{(0)},\ldots,z_1^{(i_1)}\right]\cdots\left[z_p^{(0)},\ldots,z_p^{(i_p)}\right]\\
&\quad=\left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\right)^p\int_{|w_i|=\rho_i}\frac{f(w_i,\ldots,w_p)}{B_{i_1+1,\ldots,i_p+1}(w_1,\ldots,w_p)}\mathrm{d}w_1\cdots\mathrm{d}w_p,
\end{aligned}$$

where the polydisc $B(0;\ \rho_1,\ldots,\rho_p)$ contains the interpolation points occurring in the divided difference. In what follows we shall treat, without loss of generality, the bivariate case. The reader is asked not to confuse the complex number i with the index i.

4. The multivariate error formulas for Padé approximants: first approach

In order to generalize expression (4) for general interpolation sets $I \subset \mathbb{N}^2$, we divide the index set $\mathbb{N}^2 \backslash I$ of the rest series (2a) in three parts, called a "vertical" part, a "horizontal" part and a

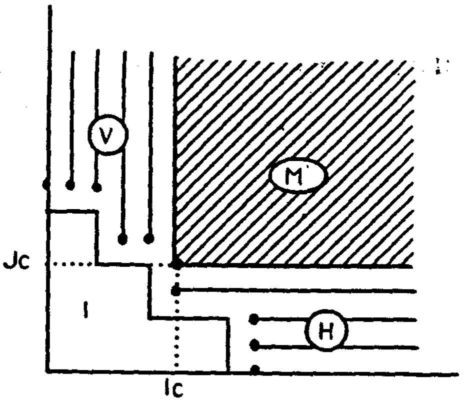

Fig. 1.

"mixed" part. For each of the three parts the infinite sums can be replaced by a finite number of contributions which can easily be majorized, thus establishing multivariate error formulas. Let us now first describe how to "divide and conquer". Choose a point (i_C, j_C) along the border of I which will keep the "horizontal" and "vertical" parts separated from each other by the "mixed" part, and write

$$\begin{aligned} V &= \{(i, j) \mid 0 \leqslant i < i_C\} \cap (\mathbb{N}^2 \backslash I), \\ H &= \{(i, j) \mid 0 \leqslant j < j_C\} \cap (\mathbb{N}^2 \backslash I), \\ M &= \{(i_C + k, j_C + l) \mid k, l \geqslant 0\}, \\ (fq - p)(x, y) &= \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \backslash I} d_{ij} x^i y^j \\ &= \sum_{(i,j) \in V} d_{ij} x^i y^j + \sum_{(i,j) \in H} d_{ij} x^i y^j + \sum_{(i,j) \in M} d_{ij} x^i y^j. \end{aligned} \tag{9}$$

Remember that all interpolation points coincide when dealing with Padé approximants. Without loss of generality we let them coincide in the origin. It is clear that the set V consists of vertical half-lines containing indices from $\mathbb{N}^2 \backslash I$, that the set H consists of horizontal half-lines containing indices from $\mathbb{N}^2 \backslash I$ and that M is merely a translation of $\mathbb{N}^2$ over (i_C, j_C). Each of the vertical and horizontal half-lines have an origin along the border of I and the number of vertical and horizontal lines is finite (see Fig. 1).

For the indices (i, j) on a vertical half-line in V, the coefficient d_{ij} of the rest series is given by

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}(fq-p)}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0) \\ &= \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial y^j}\left(\frac{1}{i!} \frac{\partial^i(fq-p)}{\partial x^i}\right)(0, 0) \\ &= \frac{1}{i!(2\pi \mathrm{i})} \int_{|v| = \rho_2} \frac{1}{v^{j+1}} \left. \frac{\partial^i (fq-p)(x, v)}{\partial x^i} \right|_{x=0} \mathrm{d}v, \end{aligned}$$

and analogously on a horizontal half-line in H,

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}(fq-p)}{\partial x^i \partial y^j}(0, 0) \\ &= \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\frac{1}{j!} \frac{\partial^j (fq-p)}{\partial y^j}\right)(0, 0) \\ &= \frac{1}{j!(2\pi i)} \int_{|u|=\rho_1} \frac{1}{u^{i+1}} \left.\frac{\partial^j (fq-p)(u, y)}{\partial y^j}\right|_{y=0} du. \end{aligned}$$

Since $N \subset I$ and (i, j) in $V \cup H$ lie outside I, we can replace $(fq-p)$ in the above expressions by (fq) since no terms of p will survive the differentiation to contribute to d_{ij}. Let us denote the origin of a vertical half-line by (i, j_i) with $0 \leqslant i < i_C$ and the origin of a horizontal half-line by (i_j, j) with $0 \leqslant j < j_C$. Finally we obtain from (9)

$$\begin{aligned} (fq-p)(x, y) = {} & \sum_{i=0}^{i_C-1} \frac{1}{i!(2\pi i)} \int_{|v|=\rho_2} \frac{x^i y^{j_i}}{v^{j_i}(v-y)} \left.\frac{\partial^i (fq)(x, v)}{\partial x^i}\right|_{x=0} dv \\ & + \sum_{j=0}^{j_C-1} \frac{1}{j!(2\pi i)} \int_{|u|=\rho_1} \frac{x^{i_j} y^j}{u^{i_j}(u-x)} \left.\frac{\partial^j (fq)(u, y)}{\partial y^j}\right|_{y=0} du \\ & + \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{|u|=\rho_1} \int_{|v|=\rho_2} \left(\frac{x}{u}\right)^{i_C} \left(\frac{y}{v}\right)^{j_C} \frac{(fq)(u, v)}{(u-x)(v-y)} du\, dv. \end{aligned} \tag{10}$$

Using Fubini's and Taylor's theorem, formula (10) can be rewritten as

$$\begin{aligned} (fq-p)(x, y) = {} & \sum_{i=0}^{i_C-1} \frac{1}{i!j_i!} x^i y^{j_i} \frac{\partial^{j_i}}{\partial y^{j_i}} \frac{\partial^i (fq)}{\partial x^i}(0, \eta_i) \\ & + \sum_{j=0}^{j_C-1} \frac{1}{i_j!j!} x^{i_j} y^j \frac{\partial^{i_j}}{\partial x^{i_j}} \frac{\partial^j (fq)}{\partial y^j}(\xi_j, 0) \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\rho_1} \left(\frac{x}{u}\right)^{i_C} \frac{1}{(u-x)} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|v|=\rho_2} \left(\frac{y}{v}\right)^{j_C} \frac{(fq)(u, v)}{(v-y)} dv\right) du \\ = {} & \sum_{i=0}^{i_C-1} \frac{1}{i!j_i!} x^i y^{j_i} \frac{\partial^{j_i}}{\partial y^{j_i}} \frac{\partial^i (fq)}{\partial x^i}(0, \eta_i) \\ & + \sum_{j=0}^{j_C-1} \frac{1}{i_j!j!} x^{i_j} y^j \frac{\partial^{i_j}}{\partial x^{i_j}} \frac{\partial^j (fq)}{\partial y^j}(\xi_j, 0) \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\rho_1} \left(\frac{x}{u}\right)^{i_C} \frac{1}{(u-x)} \frac{1}{j_C!} y^{j_C} \frac{\partial^{j_C} (fq)}{\partial y^{j_C}}(u, \eta)\, du \\ = {} & \sum_{i=0}^{i_C-1} \frac{1}{i!j_i!} x^i y^{j_i} \frac{\partial^{j_i}}{\partial y^{j_i}} \frac{\partial^i (fq)}{\partial x^i}(0, \eta_i) \\ & + \sum_{j=0}^{j_C-1} \frac{1}{i_j!j!} x^{i_j} y^j \frac{\partial^{i_j}}{\partial x^{i_j}} \frac{\partial^j (fq)}{\partial y^j}(\xi_j, 0) \\ & + \frac{1}{i_C!j_C!} x^{i_C} y^{j_C} \frac{\partial^{i_C+j_C} (fq)}{\partial x^{i_C} \partial y^{j_C}}(\xi, \eta), \end{aligned}$$

with $\xi, \xi_j \in [0, x]$ and $\eta, \eta_i \in [0, y]$ for $i = 0, \ldots, i_C$ and $j = 0, \ldots, j_C$.

5. The multivariate error formulas for Newton–Padé approximants

In order to generalize expression (7) for general interpolation sets $I \subset \mathbb{N}^2$ we again divide the index set $\mathbb{N}^2 \backslash I$ of the rest series (2a) in three parts, called a "vertical" part, a "horizontal" part and a "mixed" part. From (2a) we can write

$$\begin{aligned}(fq-p)(x, y) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\backslash I} d_{ij}B_{ij}(x, y)\\ &= \sum_{(i,j)\in V} d_{ij}B_{ij}(x, y) + \sum_{(i,j)\in H} d_{ij}B_{ij}(x, y) + \sum_{(i,j)\in M} d_{ij}B_{ij}(x, y).\end{aligned} \tag{11}$$

Each vertical half-line from V originates in an index (i, j_i) with $0 \leqslant i < i_C$ and each horizontal half-line from H originates in an index (i_j, j) with $0 \leqslant j < j_C$. Hence the contribution to the rest series from V can be rewritten as

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in V} d_{ij}B_{ij}(x, y) &= \sum_{i=0}^{i_C-1} B_i(x) \sum_{j=j_i}^{\infty} d_{ij}B_j(y)\\ &= \sum_{i=0}^{i_C-1} B_i(x)(fq-p)[x_0,\ldots,x_i][y_0,\ldots,y_{j_i-1}, y]B_{j_i}(y)\\ &= \sum_{i=0}^{i_C-1} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|v|=\rho_2} \frac{B_{i,j_i}(x, y)}{B_{j_i}(v)} \frac{(fq)[x_0,\ldots,x_i][v]}{v-y}\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Analogously for the contribution from H

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in H} d_{ij}B_{ij}(x, y) &= \sum_{j=0}^{j_C-1} B_j(y) \sum_{i=i_j}^{\infty} d_{ij}B_i(x)\\ &= \sum_{j=0}^{j_C-1} B_j(y)(fq-p)[x_0,\ldots,x_{i_j-1}, x][y_0,\ldots,y_j]B_{i_j}(x)\\ &= \sum_{j=0}^{j_C-1} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{|u|=\rho_1} \frac{B_{i_j,j}(x, y)}{B_{i_j}(u)} \frac{(fq)[u][y_0,\ldots,y_j]}{u-x}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

For the "mixed part" we have

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in M} d_{ij}B_{ij}(x, y) &= (fq-p)[x_0,\ldots,x_{i_C-1}, x][y_0,\ldots,y_{j_C-1}, y]B_{i_C,j_C}(x, y)\\ &= (fq)[x_0,\ldots,x_{i_C-1}, x][y_0,\ldots,y_{j_C-1}, y]B_{i_C,j_C}(x, y)\\ &= \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\right)^2 \int_{|u|=\rho_1}\int_{|v|=\rho_2} \frac{B_{i_C,j_C}(x, y)}{B_{i_C,j_C}(u, v)} \frac{(fq)(u, v)}{(u-x)(v-y)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Grouping our results we get the following integral formula for the error given by (11):

$$(fq-p)(x,y)=\sum_{i=0}^{i_C-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|v|=\rho_2}\frac{B_{i,j_i}(x,y)}{B_{j_i}(v)}\,\frac{(fq)[x_0,\ldots,x_i][v]}{v-y}\,dv$$
$$+\sum_{j=0}^{j_C-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|u|=\rho_1}\frac{B_{i_j,j}(x,y)}{B_{i_j}(u)}\,\frac{(fq)[u][y_0,\ldots,y_j]}{u-x}\,du$$
$$+\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{|u|=\rho_1}\int_{|v|=\rho_2}\frac{B_{i_C,j_C}(x,y)}{B_{i_C,j_C}(u,v)}\,\frac{(fq)(u,v)}{(u-x)(v-y)}\,du\,dv, \tag{12}$$

which transforms to (10) when we let all the interpolation points coincide in the origin. Using Hermite's integral formula for divided differences, (12) can be rewritten as

$$(fq-p)(x,y)=\sum_{i=0}^{i_C-1}B_{i,j_i}(x,y)(fq)[x_0,\ldots,x_i][y_0,\ldots,y_{j_i-1},y]$$
$$+\sum_{j=0}^{j_C-1}B_{i_j,j}(x,y)(fq)[x_0,\ldots,x_{i_j-1},x][y_0,\ldots,y_j]$$
$$+B_{i_C,j_C}(x,y)(fq)[x_0,\ldots,x_{i_C},x][y_0,\ldots,y_{j_C},y].$$

6. The multivariate error formulas for Padé approximants: second approach

Instead of dividing $\mathbb{N}^2\setminus I$ in V, H and M we can also include I in a circumscribing triangle as follows. Let

$$k_D=\max_{(i,j)\in I}(i+j).$$

This integer indicates the diagonal furthermost from the origin that contains index points from I. Then define

$$T=\{(i,j)\,|\,0\leqslant i+j\leqslant k_D\}$$

(see Fig. 2).

We rewrite (9) as

$$(fq-p)(x,y)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\setminus I}d_{ij}x^iy^j$$
$$=\sum_{(i,j)\in T\setminus I}d_{ij}x^iy^j+\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2\setminus T}d_{ij}x^iy^j. \tag{13}$$

Using a multivariate Taylor's formula [6] and knowing that the index set N defining $p(x,y)$ is a subset of I and hence of T, (13) can be rewritten as

$$(fq-p)(x,y)=\sum_{(i,j)\in T\setminus I}\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}(fq)}{\partial x^i\partial y^j}(0,0)x^iy^j$$
$$+\frac{1}{(k_D+1)!}\sum_{i=0}^{k_D+1}\binom{k_D+1}{i}\frac{\partial^{k_D+1}(fq)}{\partial x^i\partial y^{k_D+1-i}}(\xi,\eta)x^iy^{k_D+1-i},$$

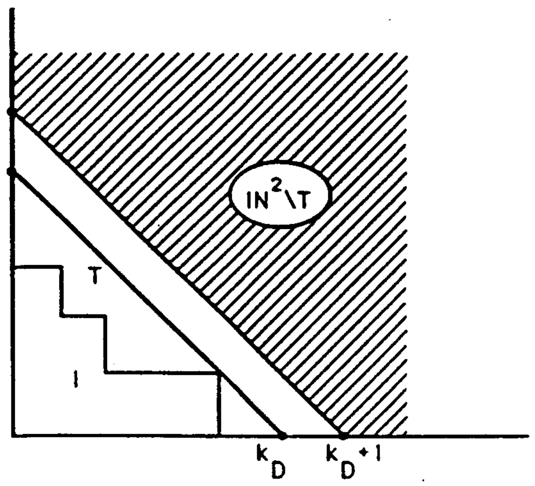

Fig. 2.

with (ξ, η) on the line segment joining (0, 0) and (x, y). Sometimes the set $T\backslash I$ may be large and then this approach involves more partial derivatives of the function $(fq)(x, y)$ than the approach of Section 4. Moreover, even if $T\backslash I$ is small, its use involves information in undefined interpolation points, because the indices in $T\backslash I$ lie outside I. The choice of the error formula depends on the configuration of the data set I.

References

[1] G. Baker and P. Graves-Morris, *Padé Approximants I: Basic Theory*, Encyclopedia Math. Appl. 13 (Addison-Wesley, Reading, MA, 1981).

[2] C. Chaffy, Interpolation polynômiale et rationelle d'une fonction de plusieurs variables complexes, Thèse Univ. Grenoble, 1984.

[3] A. Cuyt and B. Verdonk, General order Newton–Padé approximants for multivariate functions, *Numer. Math.* 43 (1984) 293–307.

[4] R. Gunning and H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965).

[5] A.M. Ostrowski, *Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces* (Academic Press, London, 1973).

[6] L. Rall, *Computational Solution of Nonlinear Operator Equations* (Krieger, Huntington, 1979).

[7] H. Werner, Remarks on Newton-type multivariate interpolation for subsets of grids, *Computing* 25 (1980) 181–191.

REFERENCES :

[ABOUa] Abouir J. and Cuyt A., *Error formulas for multivariate rational interpolation and Padé approximation*, J. Comp. Appl. Math. (1990), 233-241.

[ABOUb] Abouir J. and Cuyt A., *Multivariate partial Newton-Padé and Newton-Padé type approximants*, à paraître dans J. Approx. Th.

[AITK] Aitken A. C., *Determinants and matrices*, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1967.

[ALLO] Allouche H. and Cuyt A., *On the structure of a table of multivariate rational interpolants*, à paraître.

[BAKE] Baker G. and Graves-Morris P., *Padé Approximants I : Basic Theory*, Encyclopedia Math. Appl. 13(Addison-Wesley, Reading, MA, 1981).

[BREZa] Brezinski C., *Padé type approximants for double power series*, J. Indian Math. Soc. 42(1978), 267-282.

[BREZb] Brezinski C., *Partial Padé approximation*, J. Approx. Th. 54(1988), 210-233.

[CART] Cartan H., *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Enseignement des sciences 1961, Hermann.

[CHIS] Chisholm J.S.R., *N-variable rational approximants*, dans [SAFF], 23-42.

[CHAF] Chaffy C., *Interpolation polynômiale et rationnelle d'une fonction de plusieurs variables complexes*, Thése Univ. Grenoble, 1984.

[CLAE] Claessens G., *On the Newton-Padé Approximation problem*, J. Approx. Th. 22(2), February(1978), 150-159.

[CUYTa] Cuyt A., *Regularity and Normality of Abstract Padé Approximants ; Projection property and Product-property*, J. Approx. Th. 35(1), 1982, 1-11.

[CUYTb] Cuyt A., *Multivariate Padé approximants*, J. Math. Anal. Appli. 15(1), October(1983).

[CUYTc] Cuyt A., Werner H. and Wuytack L., *On the Continuity of the Multivariate Padé Operator*, Publication interne U.I.A 1983-39.

[CUYTd] Cuyt A., *Abstracts Padé approximants for operators : theory and applications*, LNM 1065, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[CUYTe] Cuyt A. and Verdonk B., *General order Newton-Padé approximants for multivariate functions*, Num. Math. 43(1984), 293-307.

[CUYTf] Cuyt A. and Wuytack L., *Nonlinear methods in numerical analysis*, North-Holland Amsterdam, 1986.

[CUYTg] Cuyt A., *A recursive computation scheme for multivariate rational interpolants*, SIAM J. Numer. Anal. 24(1987), 228-238.

[CUYTh] Cuyt A. and Verdonk B., *A review of branched continued fraction theory for the construction of multivariate rational approximants*, Appl. Numer. Math. 4(1988), 263-271.

[CUYTi] Cuyt A., Gonzalez-Vera P. and Orive R., *Error formulas and convergence results for multivariate Padé-type approximants*, en préparation.

[DRAU] Draux A., *The Padé approximants in a non-commutative algebra and their applications*, in Padé Approximation and its Applications. Bad Honnef (1983), editors : Werner H. and Bunger H.J., LNM 1071, Springer-Verlag, Berlin, 117-131.

[DIEN] Dienes P., *The taylor series*, New York : Dover 1957.

[EIER] Eiermann M., *On the convergence of Padé-type approximants to analytic functions*, J. Comp. Appl. Math. 10(1984), 219-227.

[GONC] Goncar A.A., *On the convergence of generalized Padé approximants of meromorphic functions*, Math. USSR Sbornik 27(1975), 503-514.

[GRAG] Gragg W.B., *The Padé table and its relation to certainal algorithms of numerical analysis*, SIAM Rev. 14(1972), 1-62.

[GRAV] Graves Morris P., Hughes Jones R. and Majkinson G., *The calculation of some rational approximants in two variables*, J. Inst. Math. Applcs 13(1974).

[GUNN] Gunning R. and Rossi H., *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nj, 1965.

[KARL] Karlsson J. and Wallin H., *Rational approximation by an interpolation procedure in several variables*, dans [SAFF], 83-100.

[KIDA] Kida S., *Padé-type and Padé approximants in several variables*, Appl. Numer. Math. 6(1990), 371-391.

[LEVIa] Levin D., *General order Padé type rational approximants defined from double power series*, J. Inst. Math. Appl. 18(1976), 1-8.

[LEVIb] Levin D., *On accelerationg the convergence of infinite double series and integrals*, Math.Comp. 35(1980), 1331-1345.

[LUTTa] Lutterodt C., *A tow-dimensional analogue of Padé approximant theory*, J. Phys. A 7(1974), 1027-1037.

[LUTTb] Lutterodt C., *Rational approximants to holomorphic functions in n dimensions*, J. Math. Anal. Appl. 53(1976), 89-98.

[MÜHL] Mühlbach G., *On interpolation by rational functions with prescribed poles with applications to multivariate interpolation*, à paraître.

[OSTR] Ostrowski A.M., *Solution of Euclidean and Banach Spaces*, Academic Press, London, 1973.

[RALL] Rall L., *Computational Solution of Nonlinear Equations*, Kriger, Huntington, 1979.

[SABLa] Sablonniere P., *A new family of Padé-type approximants in* $\mathbb{R}^k$, J. Comp. Appl. Math. 9(1983), 347-359.

[SABLb] Sablonniere P., *Padé-type approximants for multivariate series of functions*, Springer-Verlag, Berlin, LNM 1071 (1984), 238-251.

[SAFF] Saff E. and Varga R., *Padé and rational approximation : theory and applications*, Academic Press, New York, 1977.

[VANIS] Van Iseghem J., *Multipoint Padé-type approximants*, Publication ANO 254.

[WERNa] Werner H., *Remarks on Newton-type multivariate interpolation for subsets of grids*, Computing 25(1980), 181-191.

[WERNb] Werner H. and Wuytack L., *On the Continuity of the Padé Operators*, SIAM J. Numer. Anal., 20, 6 December (1983).

[WUYT] Wuytack L., *On the Continuity of the Padé Approximation problem, in Padé Approximation and its Applications*, Amsterdam (1980), De Bruin M. and Van Rossun H. eds., Spring-Verlag, Berlin(1981), 78-89.

Abstract

In the multivariate rational interpolation we study the following fondamentales properties : continuity of the approximation operator, the necessaries and sufficientes conditions for having normality of Newton-Padé approximants.

In the second part, we study a extension Kronecker's theorem in multivariate formal series, we give the connexion with homogeneous Padé approximants.

In third part, we generalize the notion of Newton-Padé partial approximants and Newton-Padé type approximants in the multivariate case. The scalar case is introducted by C. Brezinski. The advantage of this approximants is to use some informations of the zeros and poles of a formal series, for having the best approximation.

In fourth part, we give two approachs of the error formulas for multivariate rational interpolation.

Keywords :

Rational interpolation

Newton-Padé approximation

Padé type approximant

Partial Padé approximants

Continuity

Normality

Kronecker's theorem

Error in multivariate Padé approximation.

PPN 044198493

Résumé

Dans le cadre de l'interpolation rationnelle à plusieurs variables, nous étudions les propriétés fondamentales suivantes : continuité de l'opérateur d'approximation, les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir la normalité de l'approximant de Newton-Padé.

Dans la seconde partie, nous étudions une extension du théorème de Kronecker au cas des séries entières à deux variables, nous faisons la liaison avec les approximants de Padé homogènes.

Dans la troisième partie, nous définissons les approximants de Newton-Padé partiel et les approximants de type Newton-Padé au cas de plusieurs variables, c'est une généralisation du cas scalaire introduit par C. Brezinski. L'avantage de ces approximants est l'utilisation des renseignements sur les zéros et les pôles d'une fonction f développable en serie formelle, pour améliorer l'approximation.

Dans la quatrième partie, nous donnons deux approches sur la formulation de l'erreur de l'interpolation rationnelle et de l'approximation de Padé à plusieurs variables.

Mots clés :

Interpolation rationnelle

Approximation de Newton-Padé

Approximant de type Padé

Approximants de Padé partiel

Continuité

Normalité

Théorème de Kronecker

Erreur dans l'approximation de Padé à plusieurs variables.