

50376
1992
174

62257

50376
1992
174

N° d'ordre : 968

THESE DE DOCTORAT

de l'Université des Sciences et Technologies
de Lille

UFR de Physique fondamentale

Sciences des matériaux

Présentée par

Louis-Marie MOUKALA

**EVALUATION NON DESTRUCTIVE DES MILIEUX STRATIFIES
PAR DISPERSION DE CELERITE D'ONDES DE STONELEY-SCHOLTE.**

Simulation de fonds marins.



Soutenu le 9 septembre 1992, devant la commission d'examen

Membres du jury :

Rapporteurs : B. POIREE
J. RIPOCHE

Examineurs : A. DEFEBVRE
B. DJAFARI-ROUHANI
L. DOBRZYNSKI
J. POULIQUEN (Directeur de thèse)

A mes Parents.

Nul ne peut connaître le grand livre
de l'univers s'il n'en connaît la langue,
qui est la mathématique...

Galileo, Galilei.

*Ce volume utilise quelques mathématiques abordables
pour charmer la physique; laquelle n'a trouvé d'expressions
incontestables que dans les mathématiques à la recherche du sens.*

o

En ce sens, je dédie ce travail à mon frère Aïné.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire d'Acoustique Ultrasons (CNRS UA 253) de la Faculté Libre des Sciences de Lille (F.L.S), sous la direction de Monsieur J. POULIQUEN, Directeur de Recherche au CNRS, que je tiens à remercier pour ses conseils pratiques et l'aide qu'il m'a apportée.

Je remercie aussi particulièrement Monsieur Le Professeur A. DEFEBVRE, Doyen de la Faculté Libre des Sciences, qui a bien voulu m'accueillir dans son laboratoire et pour ses conseils remarquables tout au long de cette étude. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude à cette finalité.

Je tiens également à remercier Monsieur B. POIREE et Monsieur Le Professeur J. RIPOCHE de l'honneur qu'ils me font en examinant ce travail et de leurs observations remarquables dont j'ai bénéficié.

J'exprime aussi ma reconnaissance à Monsieur Le Professeur B. DJAFARI-ROUHANI et Monsieur L. DOBRZYNSKI de leur participation au jury.

Mes remerciements vont aussi à tous les membres du Laboratoire, et à tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la parcelle, même la plus infime, quant à l'aboutissement de ce travail.

SOMMAIRE

	Page
INTRODUCTION	2
Chapitre I: THEORIE GENERALE DES ONDES D'INTERFACE SUR MILIEUX PLANS STRATIFIES	
1. Equations de l'élasticité linéaire	5
2. Etude théorique des ondes localisées à l'interface liquide/milieu solide stratifié	
2.1. Position du problème	7
2.2. Etude des ondes dans un solide	8
2.2.1 Equations des ondes longitudinales et transversales	
2.2.2 Solutions harmoniques	
2.3. Solution harmonique des ondes dans le fluide	11
2.4. Composantes du tenseur des contraintes, normales aux strates	12
2.5. Expressions des conditions aux limites	13
2.5.1 Localisation aux interfaces	
2.5.2 Conditions de continuité aux interfaces	
2.6. Expression de la dispersion	16
2.7. Amplitudes des déplacements	21
2.8. Localisation de l'énergie acoustique	22
3. Multiplicité des modes de vibration d'interface dans les structures stratifiées	
3.1. Définition des types d'ondes	24
3.2. Multiplicité des solutions de l'équation de dispersion	25
3.2.1 Ondes de type <i>Stoneley-Scholte (O.S.S)</i> ou de type <i>Rayleigh (O.R)</i>	
3.2.2 Ondes de <i>Stoneley-Scholte-Sézawa (O.S.S.Se)</i> ou de <i>Rayleigh-Sézawa (O.R.Se)</i>	
3.2.3 Ondes de <i>Sézawa (O.Se)</i>	
4. Organisation générale du calcul numérique	36

Chapitre II: *ILLUSTRATION DES ONDES DE TYPE STONELEY-SCHOLTE*

1 Choix des matériaux	37
2 Cas des systèmes monocouches	
2.1. Systèmes Eau-Bismuth-Polystyrène	38
2.1.1 Dispersion de célérité	
2.1.2 Distribution d'amplitudes et d'énergie	
2.2. Système monocouche Eau/PVC Réticulé/Aluminium	42
2.2.1 Dispersion de célérité	
2.2.2 Distribution d'amplitudes et d'énergie	
2.3. Influence du substrat pour une association de type plastique-métal	48
3. Cas des structures à plusieurs couches discrètes	
3.1. Ondes d'interfaces dans les milieux périodiques	49
3.1.1 Dispersion de célérité	
3.1.2 Distribution d'amplitudes et d'énergie	
3.2. Etude prévisionnelle d'un modèle réduit expérimental	56
4 Etude d'une structure à gradient de propriétés	
4.1. Présentation du système et modélisation	57
4.2. Dispersion de célérité	59
4.3. Répartition d'amplitudes et d'énergie	59
Chapitre III: <i>RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE</i>	62
1. Méthode générale - Algorithme des gradients conjugués	
1.1. Démarche générale	63
1.2. Difficultés du problème d'identification	64
2. Critère de choix des paramètres et de leurs taux de variation	
2.1. Généralités	65
2.2. Application au problème posé	66
3. Identification d'une couche de PVC homogène	
3.1. Sensibilité de la dispersion de célérité des O.S.S aux paramètres	

physiques descriptifs du système	67
3.2. Fiabilité de la méthode	71
3.3. Influence du choix des valeurs initiales et du nombre de paramètres: Multiplicité des solutions	74
3.4. Choix raisonné des valeurs initiales : esquisse d'une procédure d'identification	77

Chapitre IV: RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE POUR UN MILIEU A GRADIENTS DE PROPRIETES

I. Système monopprofil

1. Caractéristiques du système	79
2. Résolution du problème direct	80
3. Evaluation non destructive du PVC : problème inverse	81
3.1. Conditions de calcul	
3.2. Résultats obtenus	

II. Système à double profil

1. Caractéristiques du système	86
2. Résolution du problème direct	86
3. "Efficacité" des paramètres sur la courbe de dispersion	87
4. Evaluation non destructive du PVC : problème inverse	88

III. Confrontation avec les mesures obtenues par ICPI 91

CONCLUSION 93

ANNEXE I : Cas d'ondes non dispersives de Stoneley-Scholte 95

ANNEXE II : Ondes dispersives de type Rayleigh et de type Sézawa 102

ANNEXE III : Données relatives aux fonds marins 112

ANNEXE IV : Méthode des gradients conjugués: Algorithme de résolution du problème inverse 117

BIBLIOGRAPHIE 125

INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'évaluation non destructive, à partir des courbes de dispersion de célérité d'ondes de Stoneley-Scholte, des caractéristiques élasto-mécaniques (densité, épaisseur, coefficients d'élasticité ou célérité des ondes de volume longitudinale et transversale) de systèmes stratifiés immergés, dans une prospective générale d'évaluation de fonds marin.

Il est toutefois difficile d'aborder l'étude des ondes élastiques d'interface sans rencontrer des types d'ondes très variés et, compte tenu de la diversité des appellations utilisées dans la littérature, nous croyons utile d'en faire un bref rappel historique.

En 1885 *Lord Rayleigh* [1] établit l'existence d'une onde mécanique non dispersive à la surface libre d'un solide élastique isotrope semi-infini, les composantes du vecteur déplacement (contenu dans le plan sagittal) décroissant rapidement en fonction de la distance à la surface.

Il est impossible d'obtenir des ondes de surface polarisées dans le plan de surface pour un milieu isotrope semi-infini. Cependant en 1911, *Love* [2] établit l'existence d'ondes dispersives de ce type quand la surface est surmontée d'une couche d'épaisseur faible par rapport à la longueur d'onde.

Des ondes de type Rayleigh (O.R) dispersives (contenues dans le plan sagittal et à décroissance d'amplitude exponentielle en fonction de la distance à la surface) peuvent être obtenues dans le cas des milieux stratifiés (à couches minces) sur substrat semi-infini sous certaines conditions: on les appelle *ondes de Rayleigh généralisées* [3].

Vers 1924 *Stoneley* [4] reprend le cas Rayleigh en détail et montre que des ondes non dispersives polarisées dans le plan sagittal peuvent se propager à l'interface de deux milieux solides semi-infinis soudés, avec une décroissance exponentielle de l'amplitude de leurs composantes respectives de chaque côté de l'interface. Appelées par *Stoneley* "ondes de Rayleigh généralisées" ces ondes sont maintenant communément appelées "*ondes de Stoneley*".

De 1942 à 1949 le géophysicien *Scholte*, afin d'interpréter des sismogrammes et de comprendre la génération des microséismes, reconsidère et complète l'étude de *Stoneley* et montre que ces ondes peuvent être obtenues dans des conditions moins restrictives que celles initialement fixées.

Il s'intéresse également à l'interface fluide-solide [5] et montre l'existence d'une onde ayant toutes les caractéristiques des ondes de Stoneley, aussi les appelle-t-il également ondes de Stoneley. Depuis d'autres auteurs [6,7] les ont appelées ondes de Scholte. En ce qui nous concerne nous les désignerons par *ondes de Stoneley-Scholte (O.S.S)*.

Bien avant Scholte, plusieurs géophysiciens avaient déjà examiné le système à une couche sur un substrat. C'est ainsi qu'en 1935 *Sézawa* et *Kanai* [8,9] montrèrent qu'au cours de la propagation d'une onde de Rayleigh continentale il y a deux types d'ondes: l'un de type M_1 à polarisation elliptique directe comme pour l'onde de Rayleigh et l'autre de type M_2 à polarisation elliptique inverse contraire au premier. Cette démonstration n'imposait pas nécessairement une décroissance exponentielle des amplitudes de déplacement dans la couche puisque les termes d'atténuation exponentiels habituellement utilisés pouvaient être remplacés par des fonctions hyperboliques ou sinusoïdales selon le cas, conférant ainsi à l'onde la possibilité de se propager à des célérités supérieures à la célérité transversale, voire à la célérité longitudinale de la couche d'épaisseur finie. Certains auteurs appellent ces ondes "ondes de Rayleigh" ou "ondes de Stoneley" selon leur comportement aux très hautes fréquences [10]; nous les désignerons par "*ondes de Sézawa*" ou par "*ondes de Rayleigh-Sézawa*" (*O.R.Se*) si la célérité de l'onde est comprise entre les deux célérités d'ondes de volume de la couche, ou par "*ondes de Stoneley-Scholte - Sézawa*" (*O.S.S.Se*) si la couche solide est surmontée d'un milieu fluide semi-infini.

Des ondes de ce type peuvent également exister dans des systèmes multicouches solides; le nombre de modes vibratoires croît sans cesse avec la fréquence. Nous utiliserons les appellations précédentes pour les distinguer.

Ces différents types d'ondes sont maintenant utilisés couramment dans le domaine physico-technique de la caractérisation des matériaux: de leur évaluation non destructive (E.N.D) ou de leur contrôle dans des domaines très variés [11-14] (détection des défauts superficiels, fatigue des matériaux, comportement au cours d'une transition de phase) ainsi que dans les techniques de traitement du signal (sonar, radar, télévision, ...) par production d'ondes de surface ou d'interface. La géophysique, qui a suscité les premières études, en reste utilisatrice non seulement pour la compréhension des phénomènes sismiques mais aussi dans l'évaluation (non destructive) des couches sédimentaires en eau profonde.

Le travail ici présenté s'inscrit dans cette ligne et a été effectué au sein d'un groupe de travail piloté par la DRET dans différents laboratoires dont celui de l'ICPI de Lyon (*) avec lequel nous nous sommes plus spécialement coordonnés.

Le problème direct d'étude de la dispersion de célérité et des répartitions d'amplitudes de vibration et d'énergie de déformation des ondes d'interface de Stoneley-Scholte ou de Stoneley-Scholte-Sézawa sur milieux plans stratifiés immergés a été abordé dans la première partie (chapitres I et II). Diverses illustrations seront fournies tant pour les systèmes multicouches que pour les systèmes à distribution continue de propriétés modélisés en couches discrètes.

Au passage, les divers types d'ondes de Rayleigh ou de Rayleigh-Sézawa (par suppression du fluide) sont également retrouvés et permettent tant de contrôler nos calculs que de justifier des résultats antérieurement acquis au laboratoire.

Après avoir établi les propriétés dispersives de l'onde de Stoneley-Scholte, nous abordons le problème inverse dans la deuxième partie (chapitre III et IV) avec la méthode numérique des gradients conjugués appliquée au modèle d'échantillon de fond marin réalisé à l'ICPI de Lyon.

Le modèle est constitué d'une couche d'eau surmontant une couche de Polychlorure de Vinyl (PVC) à diverses réticulations de 10 mm d'épaisseur déposé sous presse sur un substrat d'aluminium de 110 mm d'épaisseur (modèle PVC ou ZAK – pour Zakharia). Le problème est considéré sous plusieurs angles:

- la couche de PVC est homogène
- la couche de PVC est inhomogène et présente un ou deux gradients linéaires de propriétés (ou profils linéaires) sur les célérités d'ondes de volume.

Après discussion de la possibilité d'identifier ou non certains matériaux, en l'occurrence le substrat d'aluminium, dans un tel modèle à partir des courbes de dispersion, nous avons étudié le "taux de variation de la célérité" en fonction de chaque paramètre et à toute fréquence encore appelé sensibilité au paramètre, dans un modèle à une couche homogène et isotrope, puis dans le modèle ZAK modélisé à dix couches d'épaisseurs égales. Cela permet de juger une fois de plus de la possibilité d'identifier certains paramètres des couches. Des résultats ont été obtenus et discutés et des procédures d'identification définies.

(*) L.A.S.S.SO. : Laboratoire d'Acoustique Systèmes et Signaux Sonar.

CHAPITRE I : THEORIE GENERALE DES ONDES D'INTERFACE SUR MILIEUX PLANS STRATIFIES

1. Equations de l'élasticité linéaire

Ce rappel n'a d'autre objet que d'indiquer les notations bien connues qui seront systématiquement utilisées ici.

L'étude de la propagation des ondes élastiques dans un milieu quelconque utilise :

- la loi de Hooke généralisée et
- l'équation fondamentale de la dynamique;

a) la loi de Hooke généralisée relie les composantes T_{ij} du tenseur de contraintes aux composantes e_{kl} du tenseur de déformation par l'intermédiaire des composantes C_{ijkl} du tenseur de rigidité suivant la relation (écriture condensée des tenseurs Einstein):

$$T_{ij} = C_{ijkl} \cdot e_{kl} \quad (1)$$

$$\text{où } e_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad \text{en élasticité linéaire}$$

u_k est la composante k du déplacement $\vec{D}(u_1, u_2, u_3)$;

x_k la coordonnée k d'un point dans une *représentation orthonormée* $OX_1X_2X_3$.

b) la loi fondamentale de la dynamique, appliquée à une unité de volume, s'écrit:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad \text{soit en tenant compte de (1) :}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} \quad (2)$$

Si le milieu est isotrope, les composantes du tenseur de rigidité se réduisent à :

$$\begin{aligned} C_{iiii} &= \lambda + 2\mu \\ C_{iikk} &= \lambda \quad (i, k = 1, 2, 3) \\ C_{iklk} &= C_{lkkil} = \mu \end{aligned} \quad (3)$$

où λ et μ sont les constantes de Lamé, tous les autres termes du tenseur étant nuls.

Si le milieu est fluide sans viscosité, il n'existe pas d'ondes de cisaillement: $\mu = 0$ (hypothèse qui permettra de transposer les solutions dans le fluide à partir de celles trouvées dans le solide).

Dans le cas de plusieurs milieux en contact, les équations de propagation doivent être complétées de conditions aux limites :

a) Si deux milieux solides (1) et (2) sont *en contact parfait* suivant un plan normal à la direction OX_1 , l'existence de l'onde dans les deux milieux doit respecter:

- la continuité des déplacements

$$(U_k)_1 = (U_k)_2 \quad (k = 1,2,3) \quad ; \quad (4)$$

- la continuité des contraintes normales

$$(T_j)_1 = (T_j)_2 \quad (j = 1,2,3) \quad . \quad (5)$$

b) Si un milieu solide (1) est en contact avec un milieu fluide (2) suivant un plan normal à la direction OX_1 , ces conditions se réduisent à:

- la continuité des déplacements normaux

$$(U_1)_1 = (U_1)_2 \quad (6)$$

- la continuité des contraintes normales

$$(T_j)_1 = (T_j)_2 \quad (j = 1,2,3) \quad (7)$$

Rappelons enfin que l'énergie de déformation par unité de volume dans un milieu est donnée par la relation

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{kl} e_{ij} . \quad (8)$$

Si le milieu est isotrope, d'après (3), (8) se réduit à:

$$W = \frac{1}{2} \lambda e_{11} \delta_{ij} e_{ij} + \mu e^2_{ij} \quad (8')$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

2. Etude théorique des ondes localisées à l'interface liquide / milieu solide stratifié

2.1 Position du problème

L'espace étant rapporté à un trièdre trirectangle $Ox_1x_2x_3$ (fig1), on considère un milieu solide ($x_2 < 0$) surmonté d'un fluide parfait sans viscosité ($x_2 > 0$).

Le solide stratifié à $(N+1)$ milieux comporte sur un substrat homogène et isotrope semi-infini N couches de matériaux différents (isotropes et homogènes) d'épaisseurs E_i , de masses volumiques ρ_i , où

$$C_{li} = [(\lambda_i + 2\mu_i)/\rho_i]^{1/2} \quad \text{et} \quad C_{ti} = (\mu_i/\rho_i)^{1/2} \quad (9)$$

sont les célérités respectives des ondes de volume longitudinales et transversales et λ_i, μ_i les coefficients de Lamé du milieu i ($i \in [1, N+1]$).

Les coefficients du liquide sont désignés par $\lambda_0, \mu_0 = 0$ et ρ_0 . L'onde longitudinale de volume a une célérité C_0 telle que:

$$\lambda_0 = \rho_0 C_0^2. \quad (9')$$

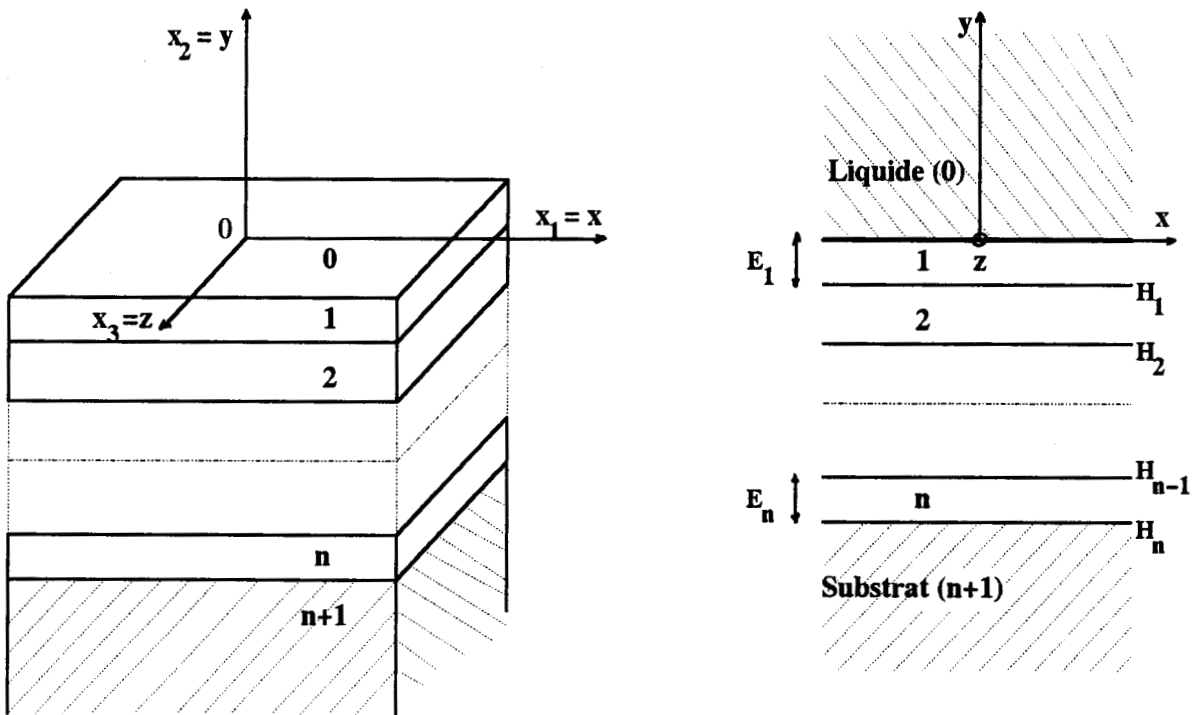


Fig1: Système stratifié à n couches

On étudie la propagation d'une onde harmonique d'interface de pulsation ω , de célérité C et de nombre d'onde $k = \omega/C$ polarisée dans le plan sagittal défini par la direction de propagation Ox et la normale Oy à l'interface, en résolvant le système d'équations d'ondes (2) pour chaque milieu m

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} \right)_m = (C_{ijkl} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial x_j \partial x_k})_m$$

$(C_{ijkl})_m$ étant le tenseur de rigidité du milieu m , les solutions devant vérifier les conditions de passage entre milieux. Les contraintes $(T_{ij})_m$ et les déplacements $\vec{D}_i(u_i, v_i, 0)$ sont alors contenus dans le plan sagittal et doivent s'exprimer en termes d'exponentielles réelles dans les milieux extrêmes (condition de localisation), cette condition n'étant pas indispensable dans les couches intermédiaires.

2.2. Etude des ondes dans un solide

2.2.1 Equation des ondes longitudinales et transversales

Pour un milieu isotrope donné les équations (2), (3) et (9) permettent d'écrire

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} = C^2_t \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial x^2_j} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + C^2_l \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial x^2_i} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (10)$$

avec $i, j = 1, 2$ et $i \neq j$.

Pour alléger les notations on pose

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad u_1 = u, \quad u_2 = v$$

Comme $i \neq j$, les vibrations u et v sont solutions du système couplé suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= C^2_t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + C^2_l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= C^2_t \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) + C^2_l \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Si l'on pose que le vecteur déplacement $\vec{D}(u, v, 0)$ comporte deux parties: l'une \vec{D}_T dépendant de C_t et l'autre \vec{D}_L dépendant de C_l , alors $\vec{D} = \vec{D}_T + \vec{D}_L$; il faut pour cela avoir:

$$\frac{\partial^2 u_L}{\partial t^2} = C_l^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

avec

$$\frac{\partial^2 v_L}{\partial t^2} = C_l^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0$$

Cela aura lieu si $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

Donc cette "composante" de la solution de célérité C_l est irrotationnelle. Il en résulte que

$$\frac{\partial^2 u_L}{\partial t^2} = C_l^2 \left(\frac{\partial^2 u_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_L}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 v_L}{\partial t^2} = C_l^2 \left(\frac{\partial^2 v_L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_L}{\partial y^2} \right)$$

$$\text{soit } \frac{\partial^2 \vec{D}_L}{\partial t^2} = C_l^2 \Delta(\vec{D}_L) \quad (11-1)$$

De même on aura

$$\frac{\partial^2 u_T}{\partial t^2} = C_t^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

avec

$$\frac{\partial^2 v_T}{\partial t^2} = C_t^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0.$$

Il suffit donc que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Donc cette "composante" de la solution de célérité C_t est à divergence nulle. Il en résulte que

$$\frac{\partial^2 u_T}{\partial t^2} = C_t^2 \left(\frac{\partial^2 u_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_T}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 v_T}{\partial t^2} = C_t^2 \left(\frac{\partial^2 v_T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_T}{\partial y^2} \right)$$

$$\text{soit } \frac{\partial^2 \vec{D}_T}{\partial t^2} = C_t^2 \Delta(\vec{D}_T). \quad (11-2)$$

Les équations (11-1) et (11-2) montrent qu'il existe deux ondes qui se propagent indépendamment l'une de l'autre à des célérités respectives C_l et C_t . Dans le cas général des solutions des équations (10), il y a propagation simultanée de l'onde de dilatation (avec variation de volume : $\text{div } \vec{D}_L \neq 0$) à la célérité C_l et de l'onde de cisaillement (sans variation de volume: $\text{div } \vec{D}_T = 0$) à la célérité C_t .

2.2.2 Solutions harmoniques

On choisit des ondes harmoniques progressives se propageant selon Ox. Les équations (11-1) et (11-2) ayant la même forme

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = C^2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)$$

nous prenons des solutions du type onde plane

$$g = g(y) e^{j(kx - \omega t)}$$

où $k = 2\pi/\Lambda$ est le nombre d'onde si Λ est la longueur d'onde et ω la pulsation de l'onde. L'injection de g dans l'équation donne après simplification par l'exponentielle:

$$\frac{d^2 g(y)}{dy^2} - (k^2 - \omega^2/C^2)g(y) = 0.$$

Posons $\alpha = (k^2 - \omega^2/C^2)^{1/2}$, l'équation différentielle admet pour solution générale:

$$g(y) = A_1 e^{\alpha y} + B_1 e^{-\alpha y}.$$

Nous avons donc respectivement pour les équations (11-1) et (11-2) les solutions suivantes:

$$\begin{aligned} u_L &= (A e^{ry} + B e^{-ry}) e^{j(kx-\omega t)} \\ v_L &= (A' e^{ry} + B' e^{-ry}) e^{j(kx-\omega t)} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} u_T &= (C e^{sy} + D e^{-sy}) e^{j(kx-\omega t)} \\ v_T &= (C' e^{sy} + D' e^{-sy}) e^{j(kx-\omega t)} \end{aligned}$$

$$\text{où } r = (k^2 - \omega^2/C^2)^{1/2} \quad s = (k^2 - \omega^2/C^2_t)^{1/2}, \quad k = \omega/C \quad (12')$$

La composante \vec{D}_L étant irrotationnelle ($\frac{\partial u_L}{\partial y} = \frac{\partial v_L}{\partial x}$), les coefficients doivent vérifier les relations:

$$A' = -j(r/k)A, \quad B' = j(r/k)B$$

De même, la condition de divergence nulle pour la composante \vec{D}_T ($\frac{\partial u_T}{\partial x} + \frac{\partial v_T}{\partial y} = 0$)

impose : $C' = -j(k/s)C, \quad D' = j(k/s)D$

La solution générale de l'onde qui se propage dans un solide i étant:

$$u_i = u_{Li} + u_{Ti}; \quad v_i = v_{Li} + v_{Ti}$$

on obtient alors

$$u_i = [A_i e^{r_i y} + B_i e^{-r_i y} + C_i e^{s_i y} + D_i e^{-s_i y}] e^{j(kx-\omega t)} \quad (13)$$

$$v_i = -j[(r_i/k)(A_i e^{r_i y} - B_i e^{-r_i y}) + (k/s_i)(C_i e^{s_i y} - D_i e^{-s_i y})] e^{j(kx-\omega t)}$$

où A_i, B_i, C_i et D_i sont des constantes d'intégration à déterminer par les conditions aux limites.

2.3 Solution harmonique des ondes dans le fluide

Dans un fluide sans viscosité ($\mu_0 = 0 \Rightarrow C_{t0} = 0$) les seules ondes qui se propagent sont des ondes de dilatation (composante \vec{D}_L de la solution).

$$u_0 = u_L; \quad v_0 = v_L$$

L'onde résultante se transpose de (13) en éliminant u_T et v_T , c'est à dire les solutions en ($s_0 y$). On obtient alors:

$$u_0 = (A_0 e^{r_0 y} + B_0 e^{-r_0 y}) e^{j(kx - \omega t)} \quad (14)$$

$$v_0 = -j(r_0/k)[A_0 e^{r_0 y} - B_0 e^{-r_0 y}] e^{j(kx - \omega t)}$$

avec $r_0 = (k^2 - \omega^2/C_0^2)^{1/2}$, C_0 étant la célérité du son dans le fluide.

2.4 Composantes du tenseur des contraintes, normales aux strates

Contenues dans le plan sagittal elles sont données pour chaque milieu i d'après (1) et (3) par:

$$T_{yy}^i = 2\mu_i \frac{\partial v_i}{\partial y} + \lambda_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) \quad (15)$$

$$T_{xy}^i = \mu_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right)$$

En injectant dans (15) les valeurs des composantes u_i , v_i des déplacements déduites de (13) et (14) il vient:

$$T_{yy}^i = -j[\alpha_i(A'_i e^{r_i y} + B'_i e^{-r_i y}) + \beta_i(C'_i e^{s_i y} + D'_i e^{-s_i y})] e^{j(kx - \omega t)} \quad (16)$$

$$T_{xy}^i = [\Gamma_i(A'_i e^{r_i y} - B'_i e^{-r_i y}) + \alpha_i(C'_i e^{s_i y} - D'_i e^{-s_i y})] e^{j(kx - \omega t)}$$

en introduisant les notations suivantes:

$$A'_i = A_i/k, \quad B'_i = B_i/k, \quad C'_i = C_i/s_i, \quad D'_i = D_i/s_i; \quad (17)$$

$$h_i^2 = \omega^2/C_i^2 = k^2 - r_i^2; \quad \alpha_i = 2\mu_i r_i^2 - \lambda_i h_i^2; \quad \beta_i = 2\mu_i k s_i; \quad \Gamma_i = 2\mu_i k r_i;$$

$$\delta_i = \mu_i(k^2 + s_i^2) = \alpha_i;$$

en effet d'après (9) et (12')

$$\delta = \mu(2k^2 - \omega^2/C_t^2)$$

$$\alpha = 2\mu(k^2 - \omega^2/C_l^2) - \lambda\omega^2/C_l^2 = 2\mu k^2 - \omega^2(\lambda + 2\mu)/C_l^2 = 2\mu k^2 - \rho\omega^2$$

$$= \mu(2k^2 - \omega^2\rho/\mu) = \mu(2k^2 - \omega^2/C_t^2) = \delta$$

Bien entendu, quand $i = 0$ (milieu fluide $\mu_0 = 0$), les termes en C'_0 , D'_0 disparaissent et comme d'après (17) et (9')

$$\alpha_0 = -\lambda_0 h^2_0 = -\rho_0 C^2_0 \omega^2 / C^2_0 = -\rho_0 \omega^2$$

$$\Gamma_0 = 0$$

les contraintes deviennent

$$T_{yy}^0 = j\rho_0 \omega^2 (A'_0 e^{r_0 y} + B'_0 e^{-r_0 y}) e^{j(kx - \omega t)} \quad (16')$$

$$T_{xy}^0 = 0$$

Remarque: Le report des constantes d'intégration A'_j, B'_j, \dots dans les déplacements amène à exprimer (13) et (14) comme suit

$$u_j = [k(A'_j e^{r_j y} + B'_j e^{-r_j y}) + s_j(C'_j e^{s_j y} + D'_j e^{-s_j y})] e^{j(kx - \omega t)} \quad (14')$$

$$v_j = -j[r_j(A'_j e^{r_j y} - B'_j e^{-r_j y}) + k(C'_j e^{s_j y} - D'_j e^{-s_j y})] e^{j(kx - \omega t)}$$

les termes C'_0 et D'_0 disparaissant pour le fluide.

2.5 Expressions des conditions aux limites

Elles permettent de calculer les constantes A'_j, B'_j, C'_j, D'_j en exprimant:

- la localisation à l'interface: les composantes des ondes doivent s'annuler quand $y \rightarrow \pm\infty$ (loin dans le fluide et dans le substrat)
- les conditions de continuité (4) à (7) des déplacements et des contraintes aux diverses interfaces entre strates

2.5.1 Localisation aux interfaces

a) Dans le substrat ($n+1$) les déplacements (14') doivent s'annuler pour $y \rightarrow -\infty$: $B'_{n+1} = D'_{n+1} = 0$; d'où les écritures de (14') et (16)

$$u_{n+1} = [kA'_{n+1} e^{r_{n+1} y} + s_{n+1} C'_{n+1} e^{s_{n+1} y}] e^{j(kx - \omega t)}$$

$$v_{n+1} = -j[r_{n+1} A'_{n+1} e^{r_{n+1} y} + kC'_{n+1} e^{s_{n+1} y}] e^{j(kx - \omega t)}$$

$$T_{yy}^{n+1} = -j[\alpha_{n+1} A'_{n+1} e^{r_{n+1} y} + \beta_{n+1} C'_{n+1} e^{s_{n+1} y}] e^{j(kx - \omega t)} \quad (18)$$

$$T_{xy}^{n+1} = [\Gamma_{n+1} A'_{n+1} e^{r_{n+1} y} + \alpha_{n+1} C'_{n+1} e^{s_{n+1} y}] e^{j(kx - \omega t)}$$

b) Dans le fluide (0) les déplacements (14) doivent s'annuler pour $y \rightarrow +\infty$: $A_0=0$ d'où les écritures de (14) et (16') avec $B_0 = kB'_0$

$$u_0 = kB'_0 e^{-r_0 y} e^{j(kx - \omega t)}$$

$$v_0 = jr_0 B'_0 e^{-r_0 y} e^{j(kx - \omega t)}$$

(19)

$$T_{yy}^0 = j\rho_0 \omega^2 B'_0 e^{-r_0 y} e^{j(kx - \omega t)}$$

$$T_{xy}^0 = 0$$

2.5.2 Conditions de continuité aux interfaces

Nous les envisageons de haut en bas en partant du fluide.

a) Interface fluide-solide: $y = 0$, contact (0-1)

On exprime successivement

- la continuité des déplacements normaux: $v_0 = v_1$;
d'après (14') et (19)

$$r_0 B'_0 + r_1 A'_1 - r_1 B'_1 + k C'_1 - k D'_1 = 0 \quad (20-1)$$

- la continuité des contraintes normales:

$$T_{yy}^0 = T_{yy}^1 \quad \text{et} \quad T_{xy}^0 = 0 = T_{xy}^1$$

soit d'après (16) et (19)

$$\rho_0 \omega^2 B'_0 + \alpha_1 A'_1 + \alpha_1 B'_1 + \beta_1 C'_1 + \beta_1 D'_1 = 0 \quad (20-2)$$

$$\Gamma_1 A'_1 - \Gamma_1 B'_1 + \alpha_1 C'_1 - \alpha_1 D'_1 = 0 \quad (20-3)$$

b) Interface solide-solide $y = H_1$, contact (1-2) (fig 1)

On exprime de même la continuité des déplacements (14') et des contraintes normales (16):

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2; \quad T_{yy}^1 = T_{yy}^2, \quad T_{xy}^1 = T_{xy}^2$$

$$kA'_1 e^{r_1 H_1} + kB'_1 e^{-r_1 H_1} + s_1 C'_1 e^{s_1 H_1} + s_1 D'_1 e^{-s_1 H_1} - \\ -kA'_2 e^{r_2 H_1} - kB'_2 e^{-r_2 H_1} - s_2 C'_2 e^{s_2 H_1} - s_2 D'_2 e^{-s_2 H_1} = 0 \quad (21-1)$$

$$r_1 A'_1 e^{r_1 H_1} - r_1 B'_1 e^{-r_1 H_1} + kC'_1 e^{s_1 H_1} - kD'_1 e^{-s_1 H_1} - \\ -r_2 A'_2 e^{r_2 H_1} + r_2 B'_2 e^{-r_2 H_1} - kC'_2 e^{s_2 H_1} + kD'_2 e^{-s_2 H_1} = 0 \quad (21-2)$$

$$\alpha_1 A'_1 e^{r_1 H_1} + \alpha_1 B'_1 e^{-r_1 H_1} + \beta_1 C'_1 e^{s_1 H_1} + \beta_1 D'_1 e^{-s_1 H_1} - \\ -\alpha_2 A'_2 e^{r_2 H_1} - \alpha_2 B'_2 e^{-r_2 H_1} - \beta_2 C'_2 e^{s_2 H_1} - \beta_2 D'_2 e^{-s_2 H_1} = 0 \quad (21-3)$$

$$\Gamma_1 A'_1 e^{r_1 H_1} - \Gamma_1 B'_1 e^{-r_1 H_1} + \alpha_1 C'_1 e^{s_1 H_1} - \alpha_1 D'_1 e^{-s_1 H_1} - \\ -\Gamma_2 A'_2 e^{r_2 H_1} + \Gamma_2 B'_2 e^{-r_2 H_1} - \alpha_2 C'_2 e^{s_2 H_1} + \alpha_2 D'_2 e^{-s_2 H_1} = 0 \quad (21-4)$$

Ces relations sont aisément généralisables aux contacts $(i, i+1)$ pour $y = H_i$. Toutefois au contact $(N, N+1)$: $B'_{n+1} = D'_{n+1} = 0$ et contraintes et déplacements s'expriment suivant (18).

On obtient ainsi un système linéaire et homogène (20-21,...) de $(4N+3)$ équations à $(4N+3)$ inconnues: $B'_0, A'_i, B'_i, C'_i, D'_i \dots A'_{n+1}, C'_{n+1}$.

2.6 Expression de la dispersion

Le système précédent n'admet de solutions non triviales que si son déterminant $\mathcal{D}_{(4N+3)(4N+3)}$ écrit au tableau 1 est nul

Sa complexité n'autorise que des solutions numériques permettant d'exprimer à chaque fréquence la célérité C des ondes d'interface satisfaisant l'ensemble des conditions précédentes. Un certain nombre de transformations ont été introduites sur \mathcal{S} pour l'amener sous une forme voisine de celle déjà obtenue au laboratoire dans l'étude de la propagation des ondes de Rayleigh généralisées sur milieux plans stratifiés [3].

On exprime alors les célérités en coordonnées réduites par rapport à la célérité C des ondes et les altitudes H_i (ou les épaisseurs des couches) de même par rapport à la longueur d'onde Λ . On pose ainsi:

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{C_0}{C} & P_i &= \frac{C_{fi}}{C} & Q_i &= \frac{C_{ti}}{C} \\
 S_0 &= P_0 \sqrt{P_0^2 - 1} & S_i &= P_i \sqrt{P_i^2 - 1} & R_i &= Q_i \sqrt{Q_i^2 - 1} \\
 T_i &= -\lambda_i + 2\mu_i(P_i^2 - 1) & U_i &= 2\mu_i S_i & V_i &= 2\mu_i R_i & W_i &= \mu_i(2Q_i^2 - 1), \\
 X_i &= 2\pi \sqrt{1 - 1/P_i^2} & Y_i &= 2\pi \sqrt{1 - 1/Q_i^2} .
 \end{aligned} \tag{22}$$

Les coefficients intervenant dans le tableau 1 deviennent alors:

$$\begin{aligned}
 r_i &= kS_i/P_i^2, & s_i &= kR_i/Q_i^2, & \alpha_i &= k^2 T_i/P_i^2 = k^2 W_i/Q_i^2, \\
 \beta_i &= k^2 V_i/Q_i^2, & \Gamma_i &= k^2 U_i/P_i^2,
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$X_{ij} = r_i H_j = X_i \frac{H_j}{\Lambda}, \quad Y_{ij} = s_i H_j = Y_i \frac{H_j}{\Lambda} .$$

La valeur d'un déterminant nul ne changeant pas quand on multiplie tous les termes d'une ligne ou d'une colonne par un même nombre, on utilise cette propriété à des fins de simplification en multipliant:

	B'_0	A'_1	B'_1	C'_1	D'_1	A'_2	B'_2	C'_2	D'_2	...	A'_n	B'_n	C'_n	D'_n	A'_{n+1}	C'_{n+1}
	r_0	r_1	$-r_1$	k	$-k$	0	0	0	0		← Continuité des déplacements normaux 0-1					
$\rho_0 \omega^2$		α_1	α_1	β_1	β_1	0	0	0	0] Continuité des contraintes normales 0-1					
0		Γ_1	$-\Gamma_1$	α_1	$-\alpha_1$	0	0	0	0] Continuité des déplacements 1-2					
0		$ke^{r_1 H_1}$	$ke^{-r_1 H_1}$	$s_1 e^{s_1 H_1}$	$s_1 e^{-s_1 H_1}$	$-ke^{r_2 H_1}$	$-ke^{-r_2 H_1}$	$-s_2 e^{s_2 H_1}$	$-s_2 e^{-s_2 H_1}$] Continuité des contraintes normales 1-2					
0		$r_1 e^{r_1 H_1}$	$-r_1 e^{-r_1 H_1}$	$ke^{s_1 H_1}$	$-ke^{-s_1 H_1}$	$-r_2 e^{r_2 H_1}$	$r_2 e^{-r_2 H_1}$	$-ke^{s_2 H_1}$	$ke^{-s_2 H_1}$							
0		$\alpha_1 e^{r_1 H_1}$	$\alpha_1 e^{-r_1 H_1}$	$\beta_1 e^{s_1 H_1}$	$\beta_1 e^{-s_1 H_1}$	$-\alpha_2 e^{r_2 H_1}$	$-\alpha_2 e^{-r_2 H_1}$	$-\beta_2 e^{s_2 H_1}$	$-\beta_2 e^{-s_2 H_1}$							
0		$\Gamma_1 e^{r_1 H_1}$	$-\Gamma_1 e^{-r_1 H_1}$	$\alpha_1 e^{s_1 H_1}$	$-\alpha_1 e^{-s_1 H_1}$	$-\Gamma_2 e^{r_2 H_1}$	$\Gamma_2 e^{-r_2 H_1}$	$-\alpha_2 e^{s_2 H_1}$	$\alpha_2 e^{-s_2 H_1}$							
	0	0	0	0	0	$ke^{r_2 H_2}$	$ke^{-r_2 H_2}$	$s_2 e^{s_2 H_2}$	$s_2 e^{-s_2 H_2}$		0					
$\mathcal{B} =$	0	0	0	0	0	$r_2 e^{r_2 H_2}$	$-r_2 e^{-r_2 H_2}$	$ke^{s_2 H_2}$	$-ke^{-s_2 H_2}$							
	0	0	0	0	0	$\alpha_2 e^{r_2 H_2}$	$\alpha_2 e^{-r_2 H_2}$	$\beta_2 e^{s_2 H_2}$	$\beta_2 e^{-s_2 H_2}$							
	0	0	0	0	0	$\Gamma_2 e^{r_2 H_2}$	$-\Gamma_2 e^{-r_2 H_2}$	$\alpha_2 e^{s_2 H_2}$	$-\alpha_2 e^{-s_2 H_2}$							
	0	0	0	0	0	0	0	0	0							
	0	0	0	0	0	0	0	0	0							
] Continuité des déplacements n-substrat					
] continuité des contraintes normales n-substrat					
											$ke^{r_n H_n}$	$ke^{-r_n H_n}$	$s_n e^{s_n H_n}$	$s_n e^{-s_n H_n}$	$-ke^{r_{n+1} H_n}$	$-s_{n+1} e^{s_{n+1} H_n}$
											$\Gamma_n e^{r_n H_n}$	$-\Gamma_n e^{-r_n H_n}$	$ke^{s_n H_n}$	$-ke^{-s_n H_n}$	$-\Gamma_{n+1} e^{r_{n+1} H_n}$	$-ke^{s_{n+1} H_n}$
											$\alpha_n e^{r_n H_n}$	$\alpha_n e^{-r_n H_n}$	$\beta_n e^{s_n H_n}$	$\beta_n e^{-s_n H_n}$	$-\alpha_{n+1} e^{r_{n+1} H_n}$	$-\beta_{n+1} e^{s_{n+1} H_n}$
											$\Gamma_n e^{r_n H_n}$	$-\Gamma_n e^{-r_n H_n}$	$\alpha_n e^{s_n H_n}$	$-\alpha_n e^{-s_n H_n}$	$-\Gamma_{n+1} e^{r_{n+1} H_n}$	$-\alpha_{n+1} e^{s_{n+1} H_n}$

Tableau 1

- . Les lignes 1, 4, 5, 8, 9,... par k
- . la colonne 1 par P^2_0/k^2
- . les colonnes 2, 3 par P^2_1/k^2 ; 4-5 par Q^2_1/k^2 ; 6-7 par P^2_2/k^2 , 8-9 par Q^2_2/k^2 ...

Il est facile de contrôler les transpositions suivantes pour les coefficients des exponentielles:

$$\begin{aligned}
 r_i &\rightarrow S_i; & s_i &\rightarrow R_i; & \beta_i &\rightarrow V_i; & \Gamma_i &\rightarrow U_i \\
 k &\rightarrow P^2_i \text{ dans les colonnes } r_i \text{ ou } Q^2_i \text{ dans les colonnes } s_i \\
 \alpha_i &\rightarrow T_i \text{ dans les colonnes } r_i \text{ ou } W_i \text{ dans les colonnes } s_i
 \end{aligned} \tag{24}$$

Sur ces bases le déterminant \mathcal{D} prend l'allure détaillée tableau 2 dont le calcul numérique n'est possible sous cette forme que dans la mesure où tous les termes sont réels. Aussi nous réécrivons ce déterminant sous une forme plus générale (tableau 3) par introduction des fonctions hyperboliques qui se transposent aisément en fonction trigonométriques si les arguments X_{ij} et Y_{ij} deviennent imaginaires purs.

On effectue pour cela les combinaisons suivantes des colonnes:

- * Col2 $\rightarrow \frac{1}{2}(\text{Col2} + \text{Col3})$; Col3 $\rightarrow \frac{1}{2}(\text{Col2} - \text{Col3})$
- * Col4 $\rightarrow \frac{1}{2}(\text{Col4} + \text{Col5})$; Col5 $\rightarrow \frac{1}{2}(\text{Col4} - \text{Col5})$, etc...

et on multiplie les deux dernières par des exponentielles correspondantes d'arguments de signes opposés.

Les natures des milieux étant définies par $(\lambda_i, \mu_i, \rho_i)$ le problème consiste à trouver la célérité C (figurant dans les termes $P_i, Q_i, R_i, S_i, T_i, U_i, V_i, W_i, X_i, Y_i$) qui annule le déterminant, pour une série d'altitudes réduites H/Λ (et donc d'épaisseurs) des couches dont on impose les valeurs numériques.

Les résultats seront traduits par des courbes paramétrées $C = f(H_i/\Lambda)$ dont la signification n'est pas évidente, C intervenant dans l'expression de l'abscisse réduite H_i/Λ . Si les épaisseurs $E_i = H_{i-1} - H_i$ sont connues on peut déduire les courbes de dispersion de célérité $C = f(F)$.

B'_0	A'_1	B'_1	C'_1	D'_1	A'_2	B'_2	C'_2	D'_2	...	A'_n	B'_n	C'_n	D'_n	A'_{n+1}	C'_{n+1}
S_0	S_1	$-S_1$	Q_1^2	$-Q_1^2$	0	0	0	0	←	Continuité des déplacements normaux 0-1					
$\rho_0 C_0^2$	T_1	T_1	V_1	V_1	0	0	0	0]	Continuité des contraintes normales 0-1					
0	U_1	$-U_1$	W_1	$-W_1$	0	0	0	0]	Continuité des déplacements 1-2					
0	$P_1^2 X_{11}$	$P_1^2 -X_{11}$	$R_1 e^{Y_{11}}$	$R_1 e^{-Y_{11}}$	$-P_2^2 X_{21}$	$-P_2^2 -X_{21}$	$-R_2 e^{Y_{21}}$	$-R_2 e^{-Y_{21}}$]	Continuité des contraintes normales 1-2					
0	$S_1 e^{X_{11}}$	$-S_1 e^{-X_{11}}$	$Q_1^2 e^{Y_{11}}$	$-Q_1^2 e^{-Y_{11}}$	$S_2 e^{-X_{21}}$	$S_2 e^{X_{21}}$	$-O_2^2 e^{Y_{21}}$	$O_2^2 e^{-Y_{21}}$]	0					
0	$T_1 e^{X_{11}}$	$T_1 e^{-X_{11}}$	$V_1 e^{Y_{11}}$	$V_1 e^{-Y_{11}}$	$-T_2 e^{X_{21}}$	$-T_2 e^{-X_{21}}$	$-V_2 e^{Y_{21}}$	$-V_2 e^{-Y_{21}}$]	0					
0	$U_1 e^{X_{11}}$	$-U_1 e^{-X_{11}}$	$W_1 e^{Y_{11}}$	$-W_1 e^{-Y_{11}}$	$-U_2 e^{X_{21}}$	$-U_2 e^{-X_{21}}$	$-W_2 e^{Y_{21}}$	$-W_2 e^{-Y_{21}}$]	0					
0	0	0	0	0	$P_2^2 X_{22}$	$P_2^2 -X_{22}$	$R_2 e^{Y_{22}}$	$R_2 e^{-Y_{22}}$.	0					
0	0	0	0	0	$S_2 e^{X_{22}}$	$-S_2 e^{-X_{22}}$	$O_2^2 e^{Y_{22}}$	$-O_2^2 e^{-Y_{22}}$.	0					
0	0	0	0	0	$T_2 e^{X_{22}}$	$T_2 e^{-X_{22}}$	$V_2 e^{Y_{22}}$	$V_2 e^{-Y_{22}}$.	0					
0	0	0	0	0	$U_2 e^{X_{22}}$	$-U_2 e^{-X_{22}}$	$W_2 e^{Y_{22}}$	$-W_2 e^{-Y_{22}}$.	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	.	0					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	.	0					
0										0					
Continuité des déplacements n-substrat										Continuité des déplacements n-substrat					
Continuité des contraintes normales n-substrat										Continuité des contraintes normales n-substrat					

Tableau 2

2.7 Amplitudes des déplacements

La célérité C étant connue par annulation du déterminant \mathcal{D} (tableau 3) il est maintenant possible de calculer les amplitudes des composantes parallèles u_i et perpendiculaires v_i des vecteurs déplacements D_i des divers milieux. Il faut pour cela résoudre le système d'équations (20-21) de $(4N+3)$ équations exprimant les conditions aux limites (§2.5) et reliant les constantes d'intégration $B'_0, A'_i, B'_i, C'_i, D'_i...$ des solutions (14').

Il est commode de normaliser tous ces termes par rapport à l'amplitude de la composante perpendiculaire dans le fluide à l'interface; soit d'après (19) quand $y = 0$:

$$V_0 = r_0 B'_0 = (r_0/k) \cdot B_0$$

Les diverses composantes s'écrivent alors:

a) *Dans le fluide (0)* : d'après (19)

$$\text{Re}[u_0] = kB'_0 \cdot e^{-r_0 y} \cos(kx - \omega t) = U'_0(y) \cos(kx - \omega t) \quad (25)$$

$$\text{Re}[v_0] = -V_0 \cdot e^{-r_0 y} \sin(kx - \omega t) = V'_0(y) \sin(kx - \omega t) .$$

Donc les amplitudes dans le fluide sont

$$U'_0(y) = k(V_0/r_0) e^{-r_0 y} \quad (26)$$

$$V'_0(y) = -V_0 e^{-r_0 y}$$

$$\text{avec } r_0 = k(1 - C^2/C_0^2)^{1/2}$$

L'onde est polarisée elliptiquement dans le sens direct et les ellipses sont homothétiques entre elles à toute altitude y [$U'_0(y)/V'_0(y) = \text{Cte } \forall y$]

b) *Dans le solide i , ($i \in [1, n+1]$)*, d'après (14') il vient de même:

$$\begin{aligned} \text{Re}[u_i] &= [k(A'_i e^{r_i y} + B'_i e^{-r_i y}) + s_i(C'_i e^{s_i y} + D'_i e^{-s_i y})] \cos(kx - \omega t) \\ &= U'_i(y) \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \text{Re}[v_i] &= [r_i(A'_i e^{r_i y} - B'_i e^{-r_i y}) + k(C'_i e^{s_i y} - D'_i e^{-s_i y})] \sin(kx - \omega t) \\ &= V'_i(y) \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

$$\text{avec } r_i = k(1 - C^2/C_{2i}^2)^{1/2}; \quad s_i = k(1 - C^2/C_{ti}^2)^{1/2}; \quad B'_{n+1} = D'_{n+1} = 0.$$

Dans les couches, l'écriture des amplitudes peut être généralisée à l'instar du déterminant en introduisant les fonctions hyperboliques. La relation (27) s'écrit alors:

$$U_i(y) = k[A_i \operatorname{ch}(r_i y) + B_i \operatorname{sh}(r_i y)] + s_i [C_i \operatorname{ch}(s_i y) + D_i \operatorname{sh}(s_i y)] \quad (27')$$

$$V_i(y) = r_i [A_i \operatorname{sh}(r_i y) + B_i \operatorname{ch}(r_i y)] + k [C_i \operatorname{sh}(s_i y) + D_i \operatorname{ch}(s_i y)]$$

où A_j , B_j , C_j et D_j sont des constantes d'intégration.

S'il n'est pas possible d'explicitier analytiquement U_i et V_i en fonction de V_0 , il conviendra toutefois de vérifier que le calcul respecte la condition de continuité $V_1 = V'_0(0)$ à l'interface solide-liquide. Il n'est pas exclu que l'onde puisse être purement transversale ou longitudinale à certaines profondeurs et que le sens de parcours de l'ellipse décrite par une particule du milieu soit inversé.

2.8 Localisation de l'énergie acoustique.

L'énergie acoustique de déformation (ou énergie potentielle généralisée) est donnée par la relation

$$W = \frac{1}{2} \lambda_i (e_{11} + e_{22})^2 + \mu_i (e_{11}^2 + 2e_{12}^2 + e_{22}^2) \quad (28)$$

$$\text{avec } e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

que l'on déduit des composantes réelles du déplacement (27, 27') suivant le cas en prenant la valeur moyenne temporelle:

$$\begin{aligned} \langle W \rangle_i = & \frac{\lambda_i}{4} (r_i^2 - k^2)^2 L_i^{+2} + \frac{\mu_i}{2} (k^2 L_i^+ + k s_i M_i^+)^2 + \\ & + \frac{\mu_i}{2} [r_i^2 L_i^+ + k s_i M_i^+]^2 + \frac{\mu_i}{4} [2k r_i L_i^- + (s_i^2 + k^2) M_i^-]^2 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\text{où } L_i^\pm = A_i' e^{r_i y} \pm B_i' e^{-r_i y}; \quad M_i^\pm = C_i' e^{s_i y} \pm D_i' e^{-s_i y}$$

dans le premier cas (d'après 27); et par transposition

$$\begin{aligned} L_i^+ &= A_i \operatorname{ch}(r_i y) + B_i \operatorname{sh}(r_i y) & L_i^- &= A_i \operatorname{sh}(r_i y) + B_i \operatorname{ch}(r_i y) \\ M_i^+ &= C_i \operatorname{ch}(s_i y) + D_i \operatorname{sh}(s_i y) & M_i^- &= C_i \operatorname{sh}(s_i y) + D_i \operatorname{ch}(s_i y) \end{aligned}$$

dans le second cas (d'après 27'), formes pour lesquelles il ne semble pas intéressant de chercher des expressions plus condensées et qu'il conviendra de calculer numériquement.

La forme particulière utilisable pour le calcul de l'énergie de déformation dans le fluide (milieu 0, $\mu = 0$), par contre, est beaucoup plus simple:

$$\langle W_0 \rangle = \frac{\lambda_0}{4} (r_0^2 - k^2)^2 B_0'^2 e^{-2r_0 y} = \frac{\rho_0}{4} \frac{\omega^2 C^2}{C_0 - C} V_0^2 e^{-2r_0 y} \quad (29')$$

puisque $A'_0 = 0$ $\lambda_0 = \rho_0 C_0^2$ (1') $r_0 = k(1 - C^2/C_0^2)^{1/2}$

L'énergie dans le fluide à l'interface ($y=0$) est proportionnelle aux carrés de la fréquence et de l'amplitude de la composante perpendiculaire à l'interface. Elle croît quand $C \rightarrow C_0$ et présente un affaiblissement exponentiel avec la pénétration dans le fluide.

3. Multiplicité des modes de vibration d'interface dans les structures stratifiées

Nous allons ici chercher les divers types d'ondes d'interface susceptibles de se propager dans un milieu stratifié suivant la nature réelle ou imaginaire des exponentielles intervenant dans \mathcal{D} ainsi que le nombre de solutions du déterminant en liaison avec le nombre d'interfaces du système ou les types d'ondes impliqués.

3.1 Définition des types d'ondes.

Nous les définissons en fonction des conditions physiques du système. Les termes X_{ij} et Y_{ij} intervenant dans le déterminant (tableau 3)

$$X_{ij} = \frac{X_j H_j}{\Lambda} = 2\pi \frac{H_j}{\Lambda} \left(1 - \frac{C^2}{C_{li}^2}\right)^{1/2}$$

$$Y_{ij} = \frac{Y_j H_j}{\Lambda} = 2\pi \frac{H_j}{\Lambda} \left(1 - \frac{C^2}{C_{ti}^2}\right)^{1/2}$$

sont réels ou imaginaires purs suivant la valeur de la célérité C qui affecte également les termes S_j , R_j , U_j et V_j (22)

On peut distinguer trois cas auxquels nous donnerons des appellations tirées des noms des auteurs ayant étudié ces types d'ondes dans les cas simples de milieux semi-infinis.

1er cas: *Ondes de type Stoneley-Scholte (O.S.S.) ou de Rayleigh (O.R.)*

$$C < \text{Min}(C_0, C_{ti}, C_{li}) \quad \forall i \in [1, n+1] \quad (30)$$

Tous les termes du déterminant sont réels.

Les amplitudes et les énergies s'expriment en termes d'exponentielles réelles dans tous les milieux.

En l'absence de fluide (30) devient la condition d'existence d'ondes de type Rayleigh:

$$C < \text{Min}(C_{ti}, C_{li}) \quad \forall i \in [1, n+1] \quad (30')$$

2^e cas: *Ondes de type Stoneley–Scholte–Sézawa (O.S.S.Se.) ou de Rayleigh–Sézawa (O.R.Se.)*

$$\text{Min}(C_{ij}) < C < \text{Min}(C_0, C_{tj}, C_{li}) \quad i \neq j, n+1 \quad (31)$$

Tous les termes en X_{ij} sont réels; *certaines termes* Y_{ij} sont réels, d'autres imaginaires purs.

Pour un système monocouche la condition d'existence est très explicite

$$C_{t1} < C < C_{t2} < \text{Min}(C_0, C_{11}); \quad (31)$$

X_{11}, S_1, U_1 sont réels ainsi que les termes d'indice 2; Y_{11}, R_1, V_1 sont imaginaires purs.

3^e cas: *Ondes de type Sézawa (O.Se.)*

$$\text{Min}(C_{ij}) < C < \text{Min}(C_{tn+1}, C_0); \quad i \in [1, n] \quad (32)$$

Certains termes $X_{ij}, Y_{ij}, S_i, R_i, V_i, U_i$ peuvent être imaginaires purs et d'autres réels.

Dans le cas particulier d'une monocouche sans fluide ($\rho_0 = 0$), des ondes obtenues sont dites de Sézawa; (32) s'écrit alors

$$C_{t1} < C_{11} < C < C_{t2}$$

et X_{11}, Y_{11}, R_1 et V_1 sont imaginaires purs.

3.2 Multiplicité des solutions de l'équation de dispersion

Elle dépend à la fois des dimensions du déterminant, liées au nombre de couches, et de la nature des ondes qui en modifient les termes. Eu égard au nombre de combinaisons possibles nous procéderons en trois étapes suivant les types d'ondes possibles.

3.2.1 Ondes de type Stoneley–Scholte (O.S.S.) ou Rayleigh (O.R.)

Nous allons chercher ici toutes les solutions possibles aux hautes fréquences afin de déduire du nombre d'asymptotes le nombre de solutions du déterminant. Pour ne pas alourdir la présentation, le calcul sera développé dans le cas d'un système à deux couches comprises entre un substrat et un liquide semi-infini, les résultats pouvant être ensuite généralisés.

a) *Forme asymptotique du déterminant \mathcal{D}*

On se place à des fréquences élevées pour que les épaisseurs réduites E_j/Λ des couches soient grandes, entraînant une valeur négligeable des exponentielles de type $e^{X_{11}}$ ou $e^{+(X_{22}-X_{21})}$ intervenant dans \mathcal{D} (tableau 2) où les termes $X_{ij} = \frac{X_j H_j}{\Lambda}$ sont négatifs car $H_j < 0$ (fig 1).

Si l'on admet $e^{X_{11}} < 10^{-4}$, la condition est satisfaite dès que $H/\Lambda > 2$.

Le déterminant 11x11 issu du tableau 2 s'écrit conformément au tableau 4.

On peut lui faire subir des simplifications successives :

- multiplications des colonnes 6-7 par $e^{\pm X_{21}}$; des colonnes 8-9 par $e^{\pm Y_{21}}$; des colonnes 10-11 par $e^{-X_{32}}$ ou $e^{-Y_{32}}$,
- annulation de tous les termes en exponentielles de type $e^{X_{11}}$, $e^{Y_{11}}$, $e^{+(X_{22}-X_{21})}$, $e^{+(Y_{22}-Y_{21})}$ négligeables dans le cadre de notre approximation.
- Permutation des colonnes 3 et 4, 7 et 8,
- multiplication par -1 des colonnes 6, 7; 10, 11,
- division des colonnes 4-5 respectivement par $e^{-X_{11}}$ et $e^{-Y_{11}}$; des colonnes 8-9 de même par $e^{-(X_{22}-X_{21})}$ et $e^{-(Y_{22}-Y_{21})}$ et annulation des termes exponentiels d'arguments opposés obtenus.

On obtient ainsi le système "asymptotique" définitif suivant (tableau 5):

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix}
 S_0 & S_1 & -S_1 & Q_1^2 & -Q_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_0 C_0^2 & T_1 & T_1 & V_1 & V_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & U_1 & -U_1 & W_1 & -W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & P_1^2 X_{11} & P_1^2 -X_{11} & R_1^e Y_{11} & R_1^e -Y_{11} & -P_2^2 X_{21} & -P_2^2 -X_{21} & -R_2^e Y_{21} & -R_2^e -Y_{21} & 0 & 0 \\
 0 & S_1^e X_{11} & -S_1^e -X_{11} & Q_1^2 Y_{11} & -Q_1^2 -Y_{11} & -S_2^e X_{21} & S_2^e -X_{21} & -Q_2^2 Y_{21} & Q_2^2 -Y_{21} & 0 & 0 \\
 0 & T_1^e X_{11} & T_1^e -X_{11} & V_1^e Y_{11} & V_1^e -Y_{11} & -T_2^e X_{21} & -T_2^e -X_{21} & -V_2^e Y_{21} & -V_2^e -Y_{21} & 0 & 0 \\
 0 & U_1^e X_{11} & -U_1^e -X_{11} & W_1^e Y_{11} & -W_1^e -Y_{11} & -U_2^e X_{21} & U_2^e -X_{21} & -W_2^e Y_{21} & W_2^e -Y_{21} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_2^2 X_{22} & P_2^2 -X_{22} & R_2^e Y_{22} & R_2^e -Y_{22} & -P_3^2 X_{32} & -R_3^e Y_{32} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_2^e X_{22} & -S_2^e -X_{22} & Q_2^2 Y_{22} & -Q_2^2 -Y_{22} & -S_3^e X_{32} & -Q_3^2 Y_{32} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2^e X_{22} & T_2^e -X_{22} & V_2^e Y_{22} & V_2^e -Y_{22} & -T_3^e X_{32} & -V_3^e Y_{32} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_2^e X_{22} & -U_2^e -X_{22} & W_2^e Y_{22} & -W_2^e -Y_{22} & -U_3^e X_{32} & -W_3^e Y_{32}
 \end{vmatrix} = 0$$

Tableau 4

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix}
 S_0 & S_1 & Q_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \rho_0 C_0^2 & T_1 & V_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & U_1 & W_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & P_1^2 & R_1 & P_2^2 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -S_1 & -Q_1^2 & S_2 & Q_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & T_1 & V_1 & T_2 & V_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -U_1 & -W_1 & U_2 & W_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_2^2 & R_2 & P_3^2 & R_3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_2 & -Q_2^2 & S_3 & Q_3^2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_2 & V_2 & T_3 & V_3 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -U_2 & -W_2 & U_3 & W_3 & 0
 \end{vmatrix} = 0$$

Tableau 5

lequel se décompose en un produit de trois déterminants:

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix}
 S_0 & S_1 & Q_1^2 \\
 \rho_0 C_0^2 & T_1 & V_1 \\
 0 & U_1 & W_1
 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}
 P_1^2 & R_1 & P_2^2 & R_2 \\
 -S_1 & -Q_1^2 & S_2 & Q_2^2 \\
 T_1 & V_1 & T_2 & V_2 \\
 -U_1 & -W_1 & U_2 & W_2
 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix}
 P_2^2 & R_2 & P_3^2 & R_3 \\
 -S_2 & -Q_2^2 & S_3 & Q_3^2 \\
 T_2 & V_2 & T_3 & V_3 \\
 -U_2 & -W_2 & U_3 & W_3
 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathcal{D} = I_{01} \times I_{12} \times I_{23} = 0 \tag{33}$$

Leurs annulations respectives peuvent donner naissance à trois solutions dont nous allons discuter la nature.

b) *Nombre et nature des solutions.*

Les trois déterminants partiels sont chacun relatifs à une interface déterminée 0-1, 1-2, 2-3. Les solutions asymptotiques sont donc celles de couples de deux milieux agissant comme semi-infinis, les autres étant ignorés. On y distingue les systèmes :

- *d'ondes de Stoneley-Scholte* non dispersives, relatives au liquide 0 et au milieu 1:
 $I_{01} = 0.$

Ce déterminant I_{01} développé restitue d'ailleurs l'équation de Stoneley-Scholte

$$4(1-\alpha^2)^{1/2}(1-l^2\alpha^2)^{1/2} - (2-\alpha^2)^2 = \frac{\rho_0}{\rho} \alpha^4 \frac{(1-l^2\alpha^2)^{1/2}}{(1-m^2\alpha^2)^{1/2}} \quad (34)$$

en posant (d'après 22)

$$\alpha = \frac{1}{Q} = \frac{C}{C_t}; \quad l\alpha = \frac{1}{P} = \frac{C}{C_l}; \quad m\alpha = \frac{1}{P_0} = \frac{C}{C_0}; \quad l = \frac{C_t}{C_l}; \quad m = \frac{C_t}{C_0}.$$

Celle-ci dégénère en *équation de Rayleigh* quand $\rho_0 = 0$ (absence de fluide).

$$4(1-\alpha^2)^{1/2}(1-l^2\alpha^2)^{1/2} - (2-\alpha^2)^2 = 0 \quad \text{soit}$$

$$\alpha^6 - 8\alpha^4 + 8(3-2l^2)\alpha^2 - 16(1-l^2) = 0 \quad (34')$$

- *d'ondes de Stoneley* non dispersives entre milieux solides (1 et 2) ou (2 et 3) pourvu que les conditions de Stoneley soient satisfaites [19]; soit pour les milieux i et $i+1$

$$- \text{Max}(C_{Ri}, C_{Ri+1}) < \text{Min}(C_{ti}, C_{ti+1}) \quad (35)$$

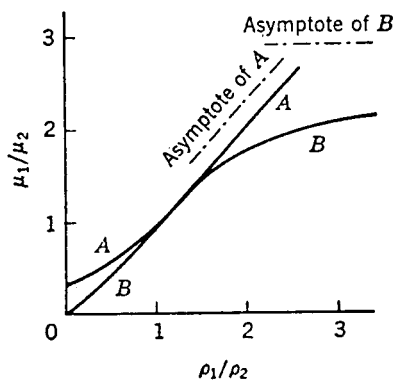
C_R et C_t étant les célérités respectives des ondes de Rayleigh et transversales.

- Les célérités longitudinales C_l et transversales C_t (ou encore les constantes de Lamé λ et μ) doivent être relativement voisines entre elles (fig 2).

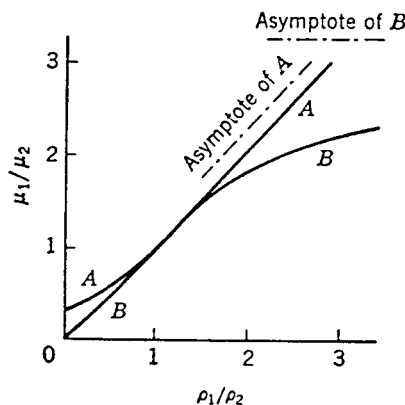
On notera que, dans chaque cas, ces conditions de passage à la limite sont relatives à un bloc: il s'agit donc apparemment d'*ondes localisées* à des interfaces distinctes et non d'O.S.S. de tout le système.

Toutefois, les termes de couplage entre blocs, négligés ici, interviennent dès que les épaisseurs réduites des couches ne sont plus infinies. Ils transformeront les solutions limites en courbes de dispersion pouvant faire apparaître *une solution d'ensemble de Stoneley-scholte de tout le système stratifié* intervenant à des fréquences assez basses (Λ élevée) pour que tous les milieux soient concernés. Ces solutions pourront être distinguées par l'étude des amplitudes vibratoires et de leurs raccordements aux interfaces.

Le traitement ci-dessus du déterminant respecte l'individualité des colonnes; il est répétitif d'une interface à l'autre et donc généralisable. On en déduit donc que: "Pour des milieux stratifiés, on peut obtenir un nombre de solutions de type "Rayleigh-Stoneley-Scholte" égal au nombre d'interfaces".



$$\text{a) } \lambda_1/\mu_1 = \lambda_2/\mu_2 = 1$$



$$\text{b) } \lambda_1 = \lambda_2 = \infty$$

Fig 2: Domaine d'existence des ondes de Stoneley (entre les courbes A et B).

Remarque: Cas de dégénérescence des solutions asymptotiques:

Jusqu'ici aucune hypothèse restrictive autre que (30) ou (35) n'a été faite touchant la nature des milieux. Si certains d'entre eux sont identiques, des déterminants d'interface peuvent être semblables entraînant la dégénérescence du nombre d'asymptotes. Un cas particulier est celui de l'alternance de deux milieux solides différents. Il est alors facile, à partir de (33) de vérifier que (3 et 1 étant identiques):

$$I_{23} = I_{21} = I_{12}$$

Subsistent donc deux solutions asymptotiques distinctes (O.S.S. et O.S.).

Il en serait de même pour un système à N couches de deux matériaux; le nombre de solutions asymptotiques n'augmentant pas. On ne peut toutefois en déduire une diminution du nombre de modes vibratoires car il est possible d'atteindre une même asymptote de diverses manières. Des exemples seront donnés plus loin.

3.2.2 Ondes de Stoneley-Scholte Sézawa (O.S.S.Se.) ou de Rayleigh-Sézawa (O.R.Se.)

Le calcul analytique n'est ici développé que dans le cas d'un système à une seule couche sans fluide pour diminuer le nombre de termes à traiter.

Le déterminant (tableau 3) prend la forme suivante

a) Forme du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} T_1 & 0 & V_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_1 & 0 & W_1 & 0 & 0 \\ P_1^{2ch} X_{11} & P_1^{2sh} X_{11} & R_1^{ch} Y_{11} & R_1^{sh} Y_{11} & P_2^2 & R_2 \\ S_1^{sh} X_{11} & S_1^{ch} X_{11} & Q_1^{2sh} Y_{11} & Q_1^{2ch} Y_{11} & S_2 & Q_2^2 \\ T_1^{ch} X_{11} & T_1^{sh} X_{11} & V_1^{ch} Y_{11} & V_1^{sh} Y_{11} & T_2 & V_2 \\ U_1^{sh} X_{11} & U_1^{ch} X_{11} & W_1^{sh} Y_{11} & W_1^{ch} Y_{11} & U_2 & W_2 \end{vmatrix} = 0$$

Tableau 6

avec d'après (22) :

$$P_i = \frac{C_{li}}{C}, \quad Q_i = \frac{C_{ti}}{C}, \quad S_i = P_i \sqrt{P_i^2 - 1}, \quad R_i = Q_i \sqrt{Q_i^2 - 1}$$

$$T_i = -\lambda_i + 2\mu_i(P_i^2 - 1), \quad U_i = 2\mu_i S_i, \quad V_i = 2\mu_i R_i, \quad W_i = \mu_i(2Q_i^2 - 1)$$

et

$$X_{ij} = X_i \frac{H_j}{\Lambda} = \frac{2\pi}{\Lambda} H_j \sqrt{1 - \frac{C^2}{C_{li}^2}}; \quad Y_{ij} = Y_i \frac{H_j}{\Lambda} = \frac{2\pi}{\Lambda} H_j \sqrt{1 - \frac{C^2}{C_{ti}^2}} \quad (H_1 < 0) \quad (36)$$

C_{li} et C_{ti} étant les célérités longitudinales et transversales des ondes de volume.

Nous supposons donc réalisée la condition (31) :

$$C_{t1} < C < C_{t2} < C_{l1}.$$

Il vient alors d'après (36)

$$X_{11} \text{ réel}; \quad Y_1 = 2\pi \sqrt{1 - \frac{C^2}{C_{t1}^2}} = j2\pi \sqrt{\frac{C^2}{C_{t1}^2} - 1} = jY'_1$$

$$S_1 \text{ réel}; \quad R_1 = Q_1 \sqrt{Q_1^2 - 1} = \frac{C_{t1}}{C} \sqrt{\frac{C_{t1}^2}{C^2} - 1} = j \frac{C_{t1}}{C} \sqrt{1 - \frac{C_{t1}^2}{C^2}} = jR'_1$$

$$U_1 \text{ réel}; \quad V_1 = 2\mu_1 R_1 = j2\mu_1 R'_1 = jV'_1.$$

$$\text{Avec} \quad Y_{11} = Y_1 H_1 / \Lambda = jY'_1 H_1 / \Lambda = jY'_{11}$$

$$\text{et dans } \mathcal{D} \text{ (tableau 6)} \quad \text{ch}Y_{11} = \cos Y'_{11}, \quad \text{sh}Y_{11} = j \sin Y'_{11},$$

tous les autres termes, étant réels, ne changent pas de forme.

Le développement de \mathcal{D} (tableau 6) suivant les deux premières lignes permet de l'exprimer en la somme de quatre déterminants 4×4 .

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} = & jU_1 T_1 \begin{vmatrix} R'_1 \cos Y'_{11} & -R'_1 \sin Y'_{11} & P_2^2 & R_2 \\ Q_1^2 \sin Y'_{11} & Q_1^2 \cos Y'_{11} & S_2 & Q_2^2 \\ V'_1 \cos Y'_{11} & -V'_1 \sin Y'_{11} & T_2 & V_2 \\ W_1 \sin Y'_{11} & W_1 \cos Y'_{11} & U_2 & W_2 \end{vmatrix} - jU_1 V'_1 \begin{vmatrix} P_1^2 \operatorname{ch} X_{11} & -R'_1 \sin Y'_{11} & P_2^2 & R_2 \\ S_1 \operatorname{sh} X_{11} & Q_1^2 \cos Y'_{11} & S_2 & Q_2^2 \\ T_1 \operatorname{ch} X_{11} & -V'_1 \sin Y'_{11} & T_2 & V_2 \\ U_1 \operatorname{sh} X_{11} & W_1 \cos Y'_{11} & U_2 & W_2 \end{vmatrix} \\
& + jW_1 T_1 \begin{vmatrix} P_1^2 \operatorname{sh} X_{11} & R'_1 \cos Y'_{11} & P_2^2 & R_2 \\ S_1 \operatorname{ch} X_{11} & Q_1^2 \sin Y'_{11} & S_2 & Q_2^2 \\ T_1 \operatorname{sh} X_{11} & V'_1 \cos Y'_{11} & T_2 & V_2 \\ U_1 \operatorname{ch} X_{11} & W_1 \sin Y'_{11} & U_2 & W_2 \end{vmatrix} + jW_1 V'_1 \begin{vmatrix} P_1^2 \operatorname{ch} X_{11} & P_1^2 \operatorname{sh} X_{11} & P_2^2 & R_2 \\ S_1 \operatorname{sh} X_{11} & S_1 \operatorname{ch} X_{11} & S_2 & Q_2^2 \\ T_1 \operatorname{ch} X_{11} & T_1 \operatorname{sh} X_{11} & T_2 & V_2 \\ U_1 \operatorname{sh} X_{11} & U_1 \operatorname{ch} X_{11} & U_2 & W_2 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Tableau 7

$$\text{Soit } \mathcal{D} = j(\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3 + \mathcal{D}_4) = j\mathcal{D}' = 0$$

Le déterminant devenant imaginaire pur, les calculs de célérité peuvent s'effectuer sans tenir compte des nombres complexes.

b) Multiplicité des solutions

Comme précédemment, nous allons examiner si le nombre de solutions peut être déterminé par un raisonnement dans des conditions asymptotiques.

Nous nous plaçons à des épaisseurs réduites $E/\Lambda \geq 2$ telles que

$$e^{X_{11}} \ll e^{-X_{11}} \quad (X_{11} < 0) \quad \text{donc} \quad \operatorname{ch} X_{11} = -\operatorname{sh} X_{11} \approx \frac{e^{-X_{11}}}{2}$$

le déterminant (tableau 7) peut alors se mettre sous la forme

$$\mathcal{D} = j[\mathcal{A} + \mathcal{B}e^{-X_{11}}]$$

$$\text{avec } \mathcal{A} = U_1 T_1 \mathcal{D}_1(Y'_{11}); \quad \mathcal{B} = -\frac{U_1 V'_1}{2} \mathcal{D}_2(Y'_{11}) + \frac{W_1 T_1}{2} \mathcal{D}_3(Y'_{11})$$

car $\mathcal{D}_4 = 0$ puisque les deux premières colonnes sont égales et opposées.

$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 sont du même ordre de grandeur donc

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{B}e^{-X_{11}} \gg \mathcal{A}$$

En négligeant \mathcal{A} , à une valeur de célérité constante, \mathcal{B} est périodique comme le sont $\cos Y'_{11}$ et $\sin Y'_{11}$; donc si

Y'_{11} est solution de $\mathcal{D} = 0$,

$Y'_{11} + 2\pi n$ est aussi solution (n entier) de sorte que le nombre de solutions peut tendre vers l'infini en très hautes fréquences telles qu'à une valeur de célérité C correspondent plusieurs épaisseurs réduites E/Λ régulièrement espacées.

Par contre, en tenant compte de \mathcal{A} , le nombre de solutions reste infini mais les distances entre branches consécutives, à célérité constante, ne sont plus que voisines.

3.2.3 Ondes de Sézawa (O.Se.)

a) Forme du déterminant

Nous nous plaçons ici dans la condition (32)

$$C_{t1} < C_{l1} < C < C_{t2}$$

Les deux quantités X_{11} et Y_{11} deviennent imaginaires pures. En faisant les mêmes changements de variables que précédemment

$$X'_1 = 2\pi\sqrt{\frac{C^2}{C_{l1}^2} - 1}, \quad X'_{11} = X'_1 \frac{H}{\Lambda} \quad \text{et} \quad X_1 = jX'_1$$

$$jS'_1 = P_1\sqrt{P_1^2 - 1} \quad \text{et} \quad jU'_1 = 2\mu_1 S_1$$

U_2, S_2, R_2, V_2 sont réels.

Le déterminant (tableau 7) prend donc la forme (tableau 8).

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} = & -U'_1 T_1 \begin{vmatrix} R'_1 \cos Y'_{11} & -R'_1 \sin Y'_{11} & P_2^2 & R_2 \\ Q_1^2 \sin Y'_{11} & Q_1^2 \cos Y'_{11} & S_2 & Q_2^2 \\ V'_1 \cos Y'_{11} & -V'_1 \sin Y'_{11} & T_2 & V_2 \\ W_1 \sin Y'_{11} & W_1 \cos Y'_{11} & U_2 & W_2 \end{vmatrix} + U'_1 V'_1 \begin{vmatrix} P_1^2 \cos X'_{11} & -R'_1 \sin Y'_{11} & P_2^2 & R_2 \\ -S'_1 \sin X'_{11} & Q_1^2 \cos Y'_{11} & S_2 & Q_2^2 \\ T_1 \cos X'_{11} & -V'_1 \sin Y'_{11} & T_2 & V_2 \\ -U'_1 \sin X'_{11} & W_1 \cos Y'_{11} & U_2 & W_2 \end{vmatrix} + \\
& -W_1 T_1 \begin{vmatrix} P_1^2 \sin X'_{11} & R'_1 \cos Y'_{11} & P_2^2 & R_2 \\ S'_1 \cos X'_{11} & Q_1^2 \sin Y'_{11} & S_2 & Q_2^2 \\ T_1 \sin X'_{11} & V'_1 \cos Y'_{11} & T_2 & V_2 \\ U'_1 \cos X'_{11} & W_1 \sin Y'_{11} & U_2 & W_2 \end{vmatrix} - W_1 V'_1 \begin{vmatrix} P_1^2 \cos X'_{11} & P_1^2 \sin X'_{11} & P_2^2 & R_2 \\ -S'_1 \sin X'_{11} & S'_1 \cos X'_{11} & S_2 & Q_2^2 \\ T_1 \cos X'_{11} & T_1 \sin X'_{11} & T_2 & V_2 \\ -U'_1 \sin X'_{11} & U'_1 \cos X'_{11} & U_2 & W_2 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Tableau 8

b) Multiplicité des solutions

Le déterminant devient $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3 + \mathcal{D}_4$.

- Les sous-déterminants \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_4 sont périodiques comme les fonctions trigonométriques $\cos Y'_{11}$ et $\cos X'_{11}$ respectivement

- Les sous-déterminants \mathcal{D}_2 et \mathcal{D}_3 sont périodiques comme le produit $\cos X'_{11} \times \cos Y'_{11}$ si

le rapport $\frac{Y'_{11}}{X'_{11}}$ est entier. Le déterminant \mathcal{D} admet alors la même périodicité. Posant

$$n = \frac{Y'_{11}}{X'_{11}} = \frac{\sqrt{C^2/C_1^2 - 1}}{\sqrt{C^2/C_1 - 1}}$$

on tire les valeurs de la célérité pour lesquelles les épaisseurs (ou altitudes) réduites sont régulièrement espacées, soit

$$C = C_1 \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2 - \alpha^2}} \quad \text{avec } n > \alpha = \frac{C_1}{C_t} > 1$$

$C \rightarrow C_1$ quand $n \rightarrow \infty$

On obtient donc une infinité de solutions et ce résultat subsiste même si \mathcal{D} n'est pas périodique, l'écart des solutions n'étant plus régulier.

Les modes de Sézawa peuvent donc exister en nombre indéterminé, comme nous le verrons en annexe II pour la structure monocouche "Vide"/PVC/Al.

4. Organisation générale du calcul numérique

Pour une série de paramètres H_i/Λ ($i \in [1, n]$) donc d'épaisseurs réduites E_i/Λ , on calcule la célérité C par annulation du déterminant \mathcal{D} général (tableau 3) afin de tracer les courbes paramétrées $C = f(E_i/\Lambda)$ ou $C = f(F)$, puis on calcule les coefficients d'intégration (résolution du système d'équations aux limites (20-21)); on en déduit les lois de variation des amplitudes (26-27) et des énergies (28-29) dans le fluide et le solide stratifié en fonction de la distance à l'interface.

Le contenu du programme écrit en langage Turbo Basic et traité sur ordinateur PC/AT est le suivant:

- on fixe le nombre de couches N intercalées entre le liquide et le substrat,
- on entre les caractéristiques mécaniques du liquide (ρ_0, C_0) et des $(N+1)$ couches solides (ρ_j, λ_j, μ_j),
- on fixe les épaisseurs E_j de chaque couche,
- on fait varier Λ dans un domaine étendu compris dans l'intervalle $[E_j/\Lambda \ll 1, E_j/\Lambda \approx 2]$
- on en déduit les hauteurs réduites H_j/Λ dans chaque cas,
- on cherche la ou les célérités C dans tout l'intervalle de valeurs possibles d'existence des ondes avec usage des termes adéquats dans le déterminant (modification des termes devenant imaginaires purs (§3), transformation des fonctions hyperboliques concernées en fonctions trigonométriques: $\text{ch} \rightarrow \cos, \text{sh} \rightarrow \sin$),
- on en déduit le type d'onde correspondant, sa fréquence $F = C/\Lambda$ et le nombre d'onde $k = \omega/C$,
- on effectue le calcul d'amplitudes et d'énergies dans le liquide et le milieu stratifié à toute distance donnée de l'interface,
- on normalise les amplitudes par rapport à celle de la composante perpendiculaire à l'interface liquide/milieu stratifié et les énergies locales par rapport à l'énergie dans le liquide à l'interface,
- on norme les énergies globales contenues dans le liquide et dans chaque couche par rapport à l'énergie totale de l'onde d'interface.

CHAPITRE II : *ILLUSTRATION DES ONDES DE TYPE STONELEY-SCHOLTE*

1. Choix des matériaux

Notre objectif ici est de connaître les propriétés dispersives des O.S.S. et de prévoir et vérifier les résultats expérimentaux de type fonds marins. Nous choisissons donc certains matériaux susceptibles de nous renseigner sur les propriétés dispersives des O.S.S. d'une part et/ou compatibles avec la réalisation de modèles de laboratoire permettant une simulation expérimentale de fonds marins.

Comme il convient, nous prenons l'eau comme liquide surmontant la stratification solide.

La condition d'existence (30) impose une célérité d'O.S.S. inférieure au minorant de la célérité du son dans l'eau C_0 et des célérités transversales d'ondes de volume dans les solides qui doivent être très différentes de C_0 pour que la dispersion des O.S.S. soit significative. Les seuls solides satisfaisant à la condition se trouvent être des plastiques ou des amorphes présentant une célérité de Stoneley-Scholte relativement éloignée de C_0 .

Le tableau 1 donne les caractéristiques mécaniques de quelques matériaux sélectionnés avec en dernière colonne la célérité de Stoneley-Scholte correspondante pour le système simple à deux milieux semi-infinis eau-substrat solide. Une étude succincte de milieux semi-infinis est présentée en annexe I.

Pour illustrer l'influence de la stratification, nous aborderons successivement les cas des monocouches puis les cas des systèmes à multicouches discrètes homogènes avant d'établir une modélisation des milieux inhomogènes à gradients de célérités utilisés dans le problème de restitution des modèles de fonds marins.

Eau : $\rho_0 = 1 \text{ g/cm}^3$; $C_0 = 1496,65 \text{ m/s}$ (à 25° C)

Noms des matériaux	ρ g/cm ³	λ Kgp/mm ²	μ Kgp/mm ²	C_1 m/s	C_t m/s	C m/s
Aluminium	2,7	5630	2640	6296	3097,1	1493,0
Bismuth	9,8	2330	1208,8	2180	1100	1005,0
Cuivre	8,9	10807,7	4638	4705	2261	1494,7
Nickel	8,8	12791	7850	5635,7	2958	1496,2
Plexiglas	1,18	555,2	151,2	2670,2	1121,2	897,8
Polystyrène	1,06	325,6	135,5	2349,8	1119,8	868,9
PVC réticulé	1,377	281,6	140,8	2003,0	1001,5	810,8

Tableau 1: Caractéristiques mécaniques de quelques matériaux et célérité de l'onde non dispersive de Stoneley–Scholte

2. Cas des systèmes monocouches

Deux cas très différents sont traités. Le premier utilise le couple Bismuth-polystyrène pour ses propriétés dispersives très significatives et le second traite d'une couche de PVC homogène sur un substrat d'aluminium pour la compatibilité expérimentale de réalisation d'échantillons.

Dans le premier cas, l'étude est limitée au domaine d'existence des ondes de type Stoneley–Scholte (30) avec la condition de Stoneley satisfaite, tandis que dans le deuxième cas, tous les types d'ondes possibles ont été cherchés pour montrer à titre d'exemple les solutions du déterminant (tableau 3 – Chap. I).

2.1. Systèmes Eau–Bismuth – polystyrène

Les résultats sont donnés pour les deux associations possibles Eau/Bi/Polystyrène ou Eau/Polystyrène/Bi pour les courbes de dispersion; amplitudes et énergies ne sont données que pour la première structure en vue des comparaisons ultérieures (§ 3.1.).

Dispersion de célérité d'O.S.S en fonction de l'épaisseur réduite E/λ de la couche

Eau/Bismuth/Polystyrène
 ∞ ; E ; ∞

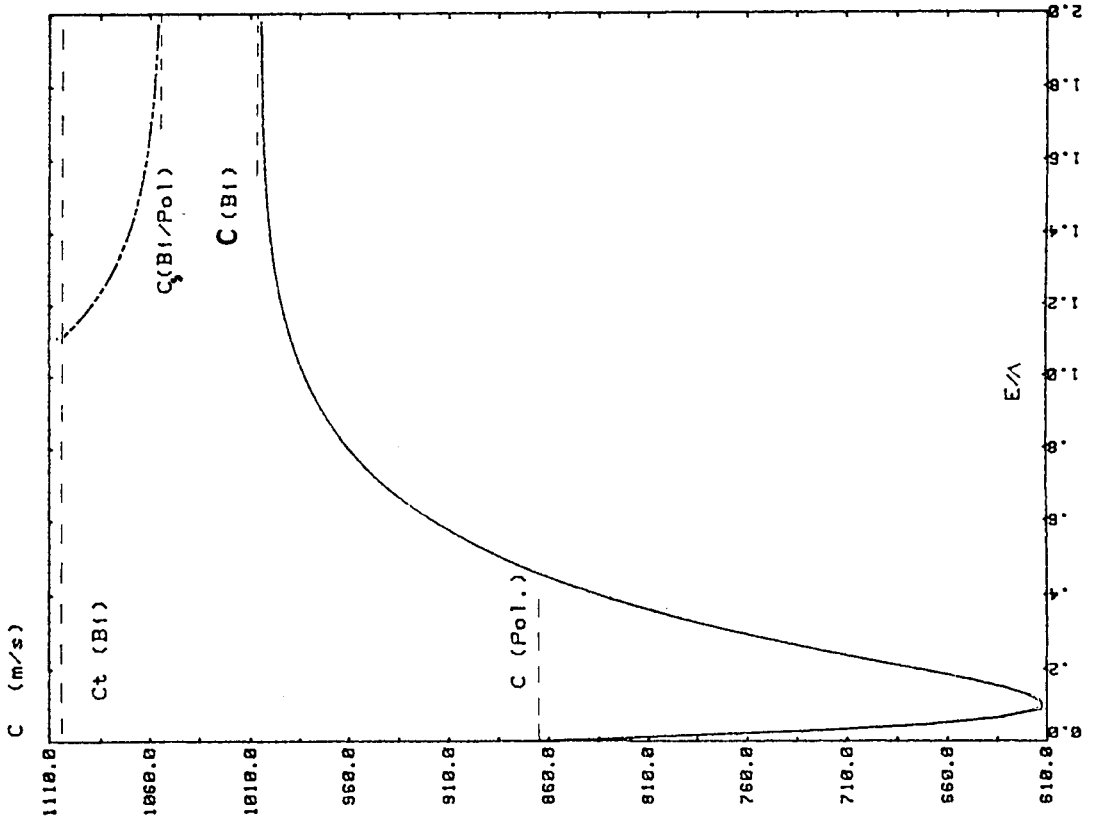


Fig 1a

Dispersion de célérité d'O.S.S en fonction de l'épaisseur réduite E/λ de la couche

Eau/Polystyrène/Bismuth
 ∞ ; E ; ∞

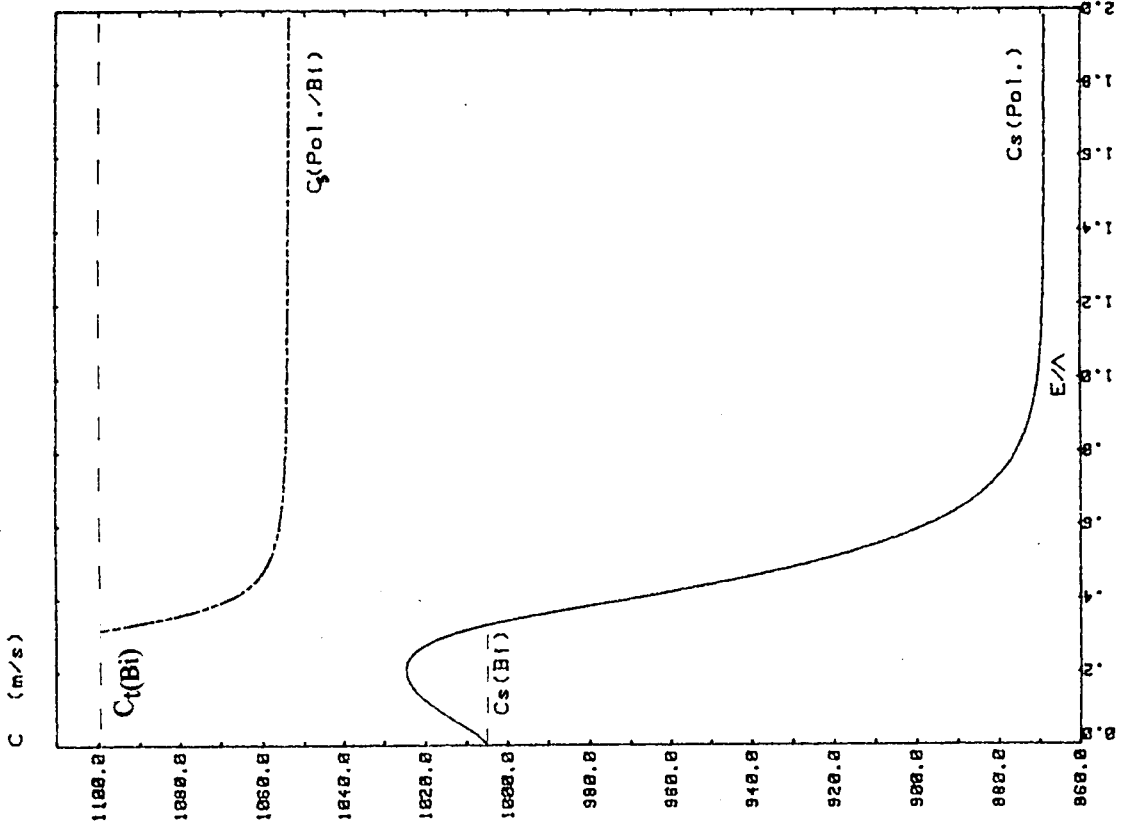


Fig 1b

2.1.1. Dispersion de célérité

Les courbes de dispersion d'O.S.S. en fonction de l'épaisseur réduite E/Λ de la couche intermédiaire (fig. 1a, 1b) présentent deux modes de vibration correspondant aux nombres d'interfaces et des célérités C limitées par la valeur $C_{tBi} = 1100$ m/s conformément à la condition (30) d'existence des O.S.S. :

$$C < C_{Bi} < C_{tpolyst.} < C_0$$

La branche 1 évolue de façon non monotone entre les célérités d'O.S.S. du substrat en BF et de la couche supérieure en HF en passant par des valeurs soit très inférieures ($C_{min} = 612,5$ m/s) soit légèrement supérieures ($C_{max} = 1024,8$ m/s) à celles du milieu le plus lent ou le plus rapide.

La branche 2 de type Stoneley montre que la célérité évolue entre la célérité transversale C_{tBi} et la limite asymptotique de Stoneley $C_{sBi/Polyst.} = 1053,8$ m/s entre deux milieux semi-infinis. Elle peut commencer à des épaisseurs réduites variables suivant l'effet d'écran établi par la couche entre l'eau et le substrat. Cet effet est manifestement plus élevé avec le polystyrène.

Des résultats semblables sont obtenus dans le cas d'ondes de type Rayleigh en l'absence d'eau (annexe II).

2.1.2. Distribution d'amplitudes et d'énergie (fig. 2 et 3)

Les courbes représentant les distributions des amplitudes parallèles et perpendiculaires et les distributions de l'énergie ont été tracées en fonction de la distance réduite y/Λ à l'interface supérieure, pour les deux branches de célérité, à la même épaisseur réduite de la couche de Bi soit $E/\Lambda = 1,5$. Les célérités étant différentes pour les deux branches, il en est de même des fréquences respectives. Leurs valeurs sont indiquées en légende sur les diagrammes ; notons que l'on se situe dans la zone asymptotique afin de montrer explicitement les interfaces concernées et juger de la localisation de l'onde étudiée.

a) Amplitudes vibratoires (fig. 2a et 2b)

Normalisées par rapport à l'amplitude perpendiculaire V_0 à l'interface dans le liquide, elles ont une allure familière [16] pour la première et plus surprenante pour la seconde. On note :

Amplitudes longitudinales $\frac{U}{V_0}$ et transversales $\frac{V}{V_0}$ des O.S.S (Eau/ Bi/Polyst.) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface : Branche 1
 $C = 1000 \mu\text{m}$ $C = 1002.1 \text{ m/s}$ $F = 1.50 \text{ MHz}$ $\frac{C}{\lambda} = 1.500$

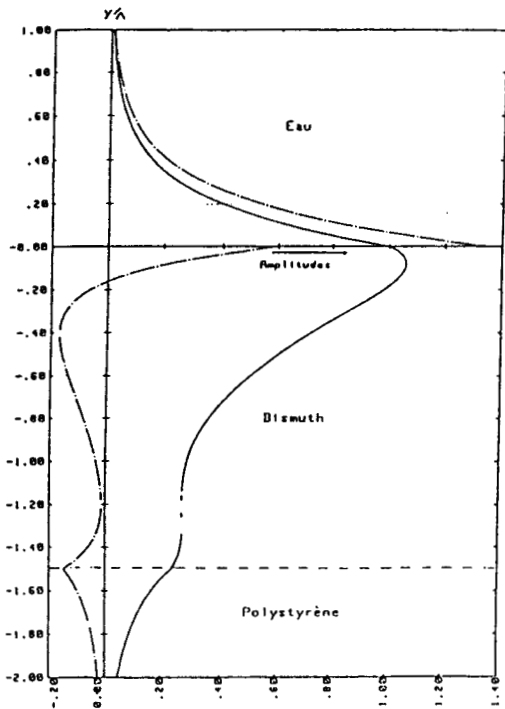


Fig 2a

Amplitudes longitudinales $\frac{U}{V_0}$ et transversales $\frac{V}{V_0}$ des O.S.S (Eau/ Bi/Polyst.) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface : Branche 2
 $C = 1000 \mu\text{m}$ $C = 1065.4 \text{ m/s}$ $F = 1.60 \text{ MHz}$ $\frac{C}{\lambda} = 1.500$

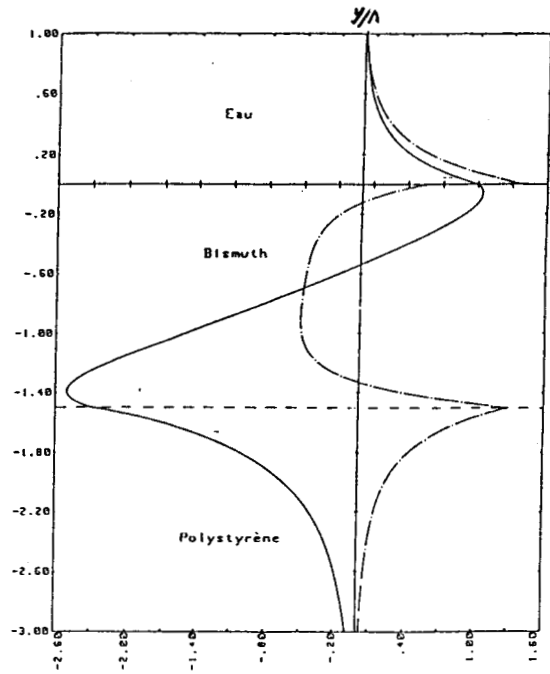


Fig 2b

Energies acoustiques $H(y)$ des O.S.S (Eau/Bi/Polystyrène) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface : Branche 1

$C = 1000 \mu\text{m}$ $C = 1002.1 \text{ m/s}$ $F = 1.50 \text{ MHz}$ $\frac{C}{\lambda} = 1.500$

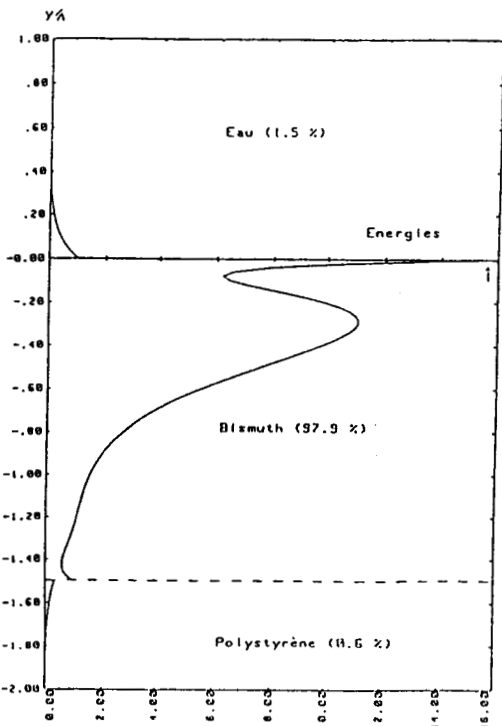


Fig 3a

Energies acoustiques $H(y)$ des O.S.S (Eau/Bi/Polystyrène) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface : Branche 2

$C = 1000 \mu\text{m}$ $C = 1065.4 \text{ m/s}$ $F = 1.60 \text{ MHz}$ $\frac{C}{\lambda} = 1.500$

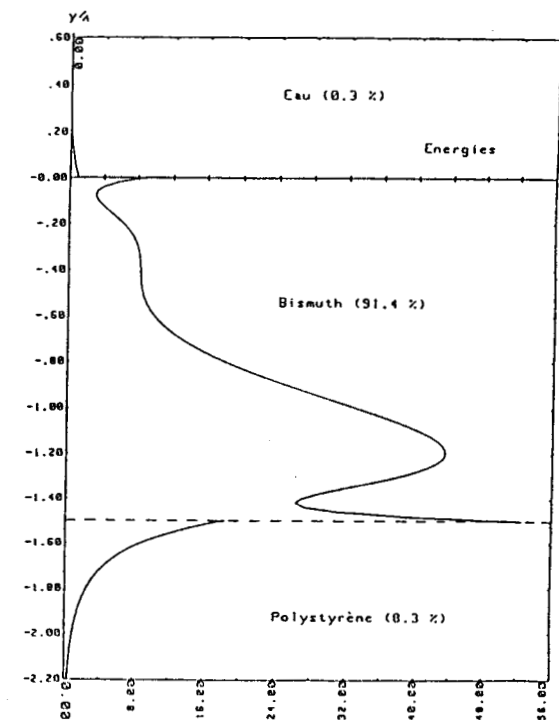


Fig 3b

– dans tous les cas, la continuité des amplitudes vibratoires aux interfaces, réduite à celle de la seule composante perpendiculaire à l'interface eau–Bismuth. Il s'agit donc *toujours* d'onde d'ensemble du système de type Stoneley–Scholte,

– la complexité des distributions pour la branche 2 où la composante parallèle s'annule deux fois (contre une pour la branche 1) et la composante perpendiculaire une fois dans la couche de Bismuth. Il y correspond de multiples inversions du sens de parcours de la vibration elliptique,

– une pénétration plus grande dans les solides que dans le liquide (2Λ ou 3Λ contre Λ) plus élevée pour la branche 2 où les amplitudes sont plus élevées au voisinage du socle qu'à l'interface liquide–solide.

b) *Distribution d'énergie* (fig. 3a et 3b)

Normalisées par rapport à l'énergie locale à l'interface dans l'eau, elles comportent la valeur en pour-cent d'énergie totale dans le milieu. Leur étude confirme l'analyse précédente.

– En branche 1, il s'agit essentiellement d'une onde d'interface de Stoneley–Scholte eau–Bi, l'énergie locale étant maximale au voisinage de celle-ci,

– en branche 2, il s'agit davantage d'une onde d'interface de Stoneley Bismuth–Polystyrène quoique la quantité d'énergie totale dans la couche de Bismuth soit plus faible que précédemment (91,4 % contre 97,9 %).

Dans tous les cas, le niveau énergétique dans l'eau est faible. Bien entendu, il n'y a pas continuité d'énergie aux interfaces où les variations sont très brutales.

2.2. *Système monocouche Eau/PVC–Ret/Al.*

Contrairement aux cas précédents, cette étude est étendue aux ondes de Stoneley–Scholte–Sézawa. Les résultats pourront être comparés à ceux obtenus par suppression de l'eau (O.R. annexe II).

2.2.1. *Dispersion de célérité*

On trouvera les courbes de dispersion en fonction de l'épaisseur réduite E/Λ de la couche (fig. 4) et de la fréquence (fig. 5) avec indication des types d'ondes concernés.

Dispersion de système d'ondes sur monocouche de PVC en fonction de l'épaisseur réduite

Eau / PVC_ret / Aluminium

∞ ; E ; ∞

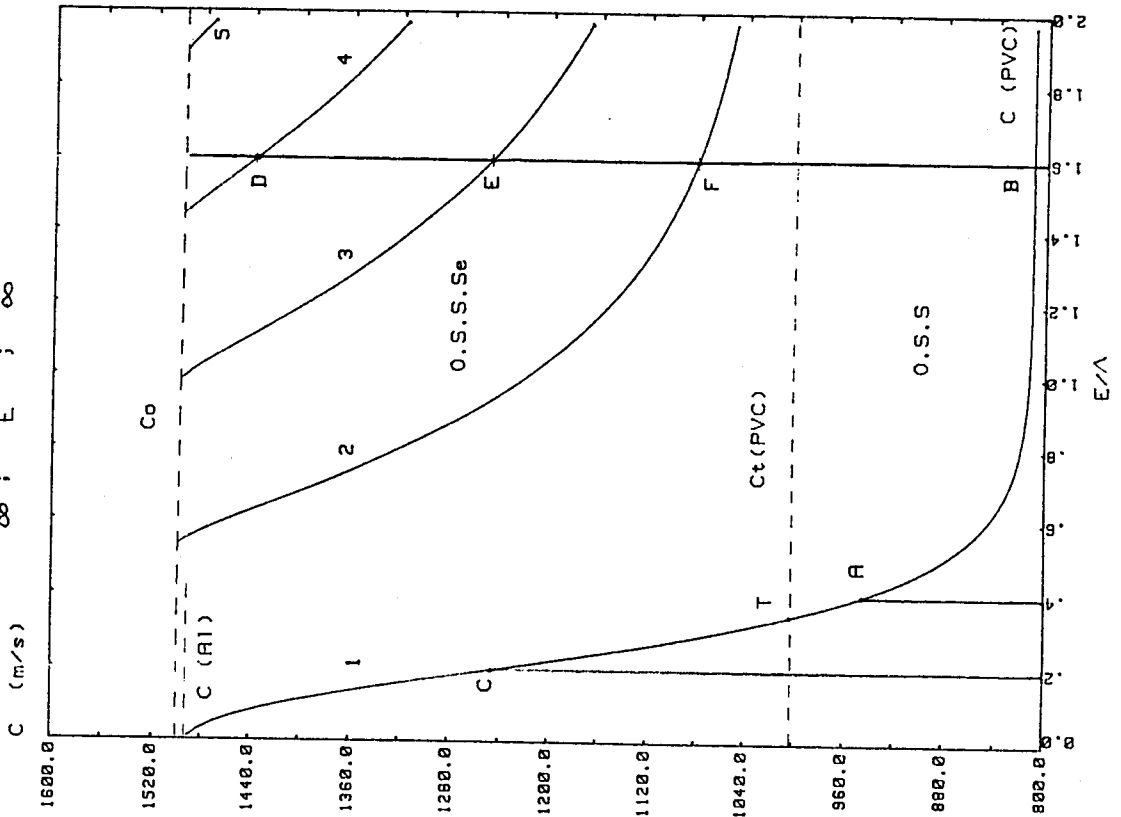


Fig 4

Dispersion de système d'ondes sur monocouche de PVC en fonction de la fréquence

Eau / PVC_ret / Aluminium

∞ ; 4 mm ; ∞

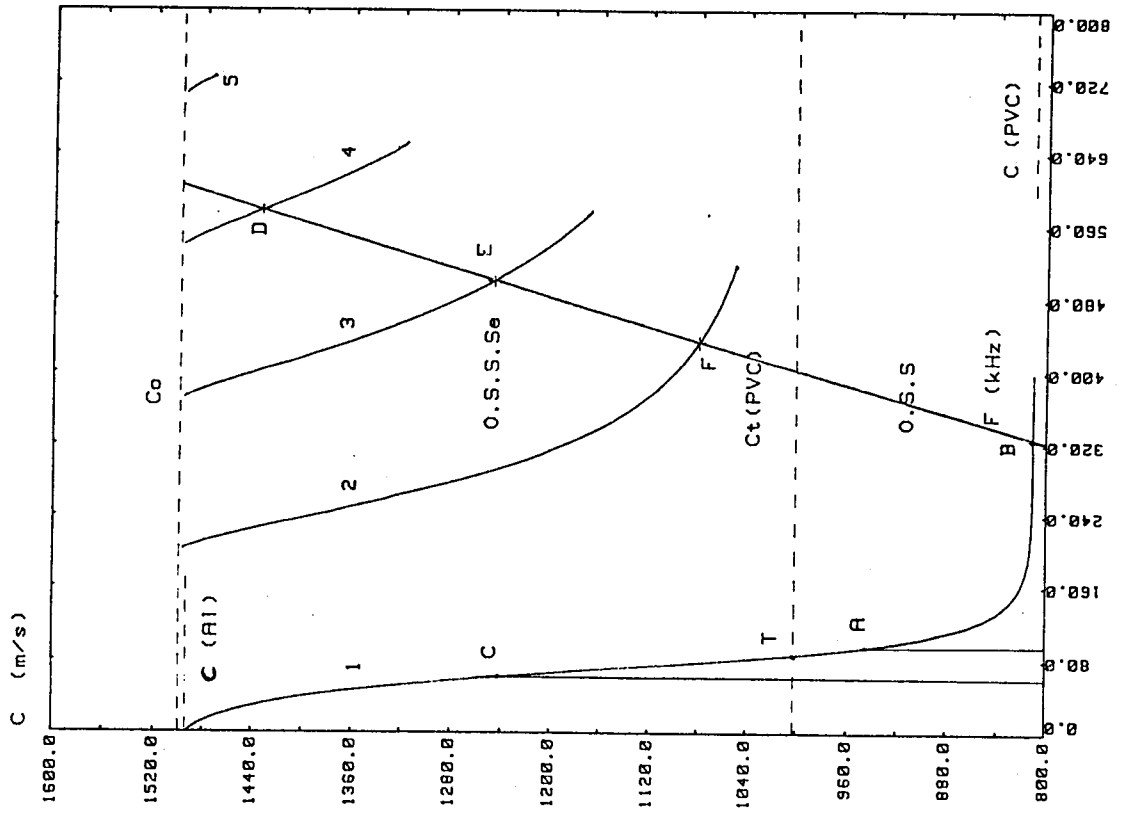


Fig 5

Ces ondes d'interfaces n'existent qu'aux célérités inférieures à celle C_0 du son dans l'eau.

Les ondes mixtes de S.S.Se. obtenues en BF (branche 1) évoluent de la célérité de Stoneley–Scholte C_{Al} dans le substrat d'Al vers celle de Stoneley–Scholte C_{PVC} de la couche en HF en se convertissant de façon apparemment continue en O.S.S. pures.

Aux fréquences plus élevées apparaissent une multitude de modes O.S.S.Se. comme nous l'avons établi, tendant apparemment vers C_{IPVC} .

2.2.2. Distribution d'amplitudes et d'énergie

a) Ondes de Stoneley–Scholte (O.S.S.)

Les courbes ont été calculées pour deux valeurs d'épaisseurs réduites : $E/\Lambda = 0,4$ (fig. 6a, 6b) ; $E/\Lambda = 1,6$ (fig. 7a, 7b) (points marqués A ou B fig. 4 et 5).

On note les caractéristiques classiques extraites de nos travaux antérieurs [16,17] ou au paragraphe précédent :

- continuité des amplitudes aux interfaces,
- annulation de l'amplitude parallèle dans la couche à une profondeur voisine de $0,1 \Lambda$ puis extremum atteint entre $0,2$ et $0,4 \Lambda$,
- localisation majoritaire de l'énergie dans la couche, où elle passe par des extremums à des altitudes voisines des zéros ou maximums d'amplitudes,
- rôle limité du substrat où l'énergie est quasi nulle quand l'épaisseur de la couche croît.

Enfin comme précédemment les diagrammes présentent des discontinuités brutales de l'énergie aux interfaces.

b) Ondes de Stoneley–Scholte–Sézawa (O.S.S.Se.) (fig. 8 et 9)

Deux cas ont été retenus correspondant aux situations physiques des points marqués C et D sur les branches 1 et 4 de la courbe de dispersion (fig. 4) soit pour des épaisseurs faible ($0,2 \Lambda$) et élevée ($1,6 \Lambda$) de la couche PVC.

Les distributions d'amplitudes et d'énergie du cas C branche 1 (fig. 8a et 8b) manifestent une très grande parenté avec celles exposées (fig. 6a et 6b) pour le point A

Amplitudes longitudinales $\frac{U}{V_0}$ (---) et transversales $\frac{V}{V_0}$ (—) des O.S.S (Eau/PVC_ret/Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

E = 4 mm C = 947.9 m/s F = 94.8 kHz $E/\lambda = 0.4$

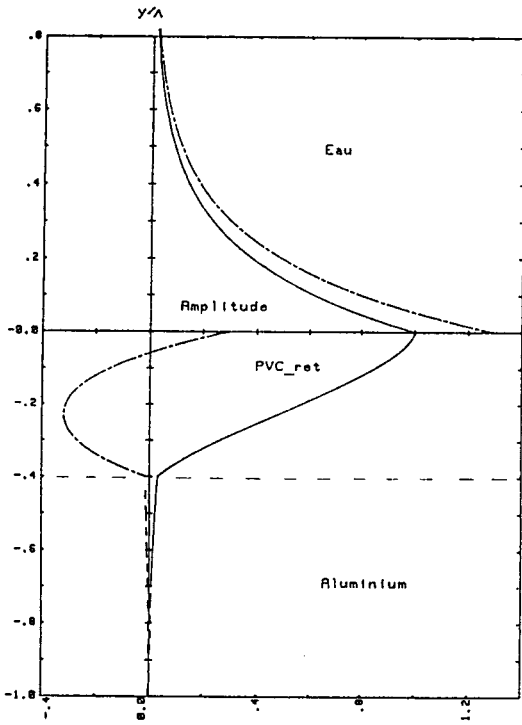


Fig 6a

Energies acoustiques $W(y)$ des O.S.S (Eau/PVC_ret/Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

E = 4 mm C = 947.9 m/s F = 94.8 kHz $E/\lambda = 0.4$

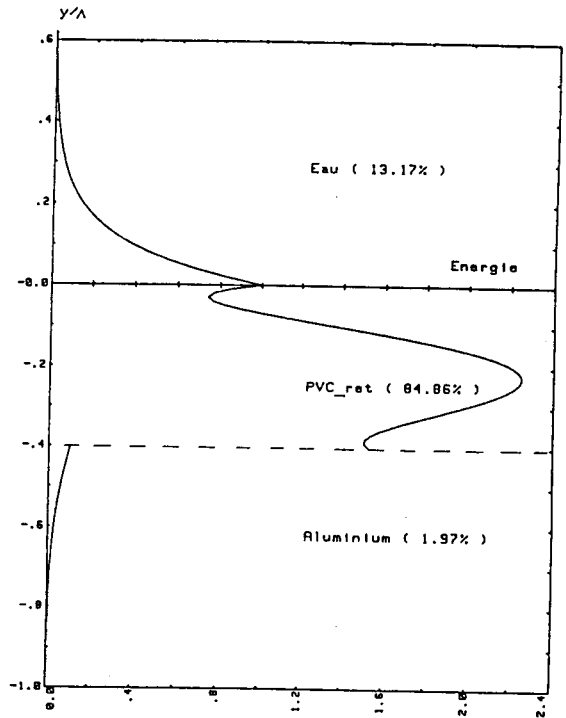


Fig 6b

Amplitudes longitudinales $\frac{U}{V_0}$ (---) et transversales $\frac{V}{V_0}$ (—) des O.S.S (Eau/PVC_ret/Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

E = 4 mm C = 810.8 m/s F = 324 kHz $E/\lambda = 1.6$

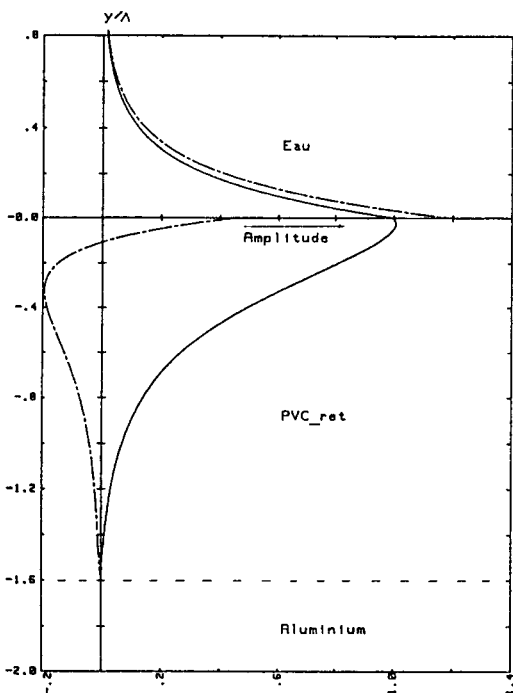


Fig 7a

Energies acoustiques $W(y)$ des O.S.S (Eau/PVC_ret/Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

E = 4 mm C = 810.8 m/s F = 324 kHz $E/\lambda = 1.6$

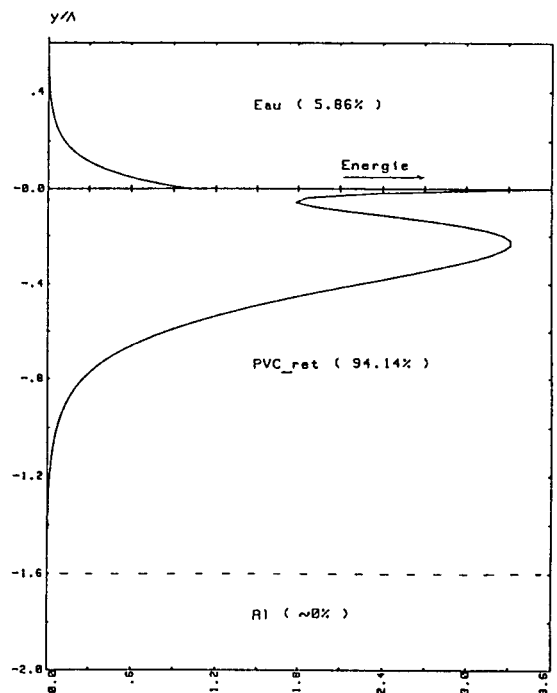


Fig 7b

de la même branche sauf pour ce qui concerne la non-annulation de l'amplitude parallèle dans la couche.

Le passage du mode O.S.S. à celui d'O.S.S.Se. ne bouleverse donc pas ces distributions. Nous avons contrôlé d'ailleurs que pour deux valeurs de C proches du point de transition T ($C = C_{1PVC}$) les courbes d'amplitude et d'énergie étaient strictement superposables.

Dans le second cas D , amplitudes et énergies (fig. 9a et 9b) ont un comportement oscillatoire qui s'affirme avec la croissance de la célérité de l'onde comme nous l'avons constaté en étudiant les points E et F à la même épaisseur réduite. La célérité C étant intermédiaire entre C_1 et C_{1PVC} il semble que la couche devienne en mode S.S.Se. le siège d'ondes essentiellement locales, l'énergie localisée diminuant toutefois avec le nombre d'oscillations au profit de l'eau et de l'aluminium. La concentration maximale est obtenue pour $C \approx C_{1PVC}$ (98,7 % au point F).

Dans tous les cas, la composante parallèle de la vibration dans la couche à l'interface supérieure est de signe contraire à celle dans l'eau justifiant ainsi le caractère de polarisation inverse par rapport aux O.S.S. pour certaines valeurs de célérités $C > C_{1PVC}$.

Amplitudes longitudinales $-\frac{U}{V_0}$ (---) et transversales $\frac{V}{V_0}$ (—) des O.S.S.S (Eau/PVC_ret/Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface: Branche 1

E= 4 mm C= 1242.5 m/s F= 62 kHz $E/\lambda = 0.2$

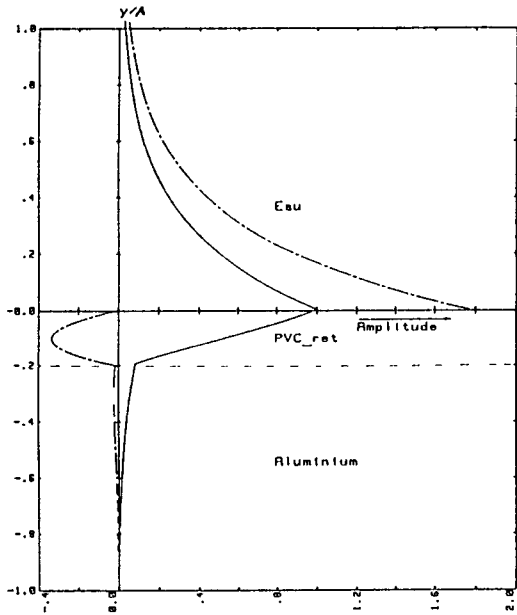


Fig 8a

Energies acoustiques $W(y)$ des O.S.S.S (Eau/PVC_ret/Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface: Branche 1

E= 4 mm C= 1242.5 m/s F= 62 kHz $E/\lambda = 0.2$

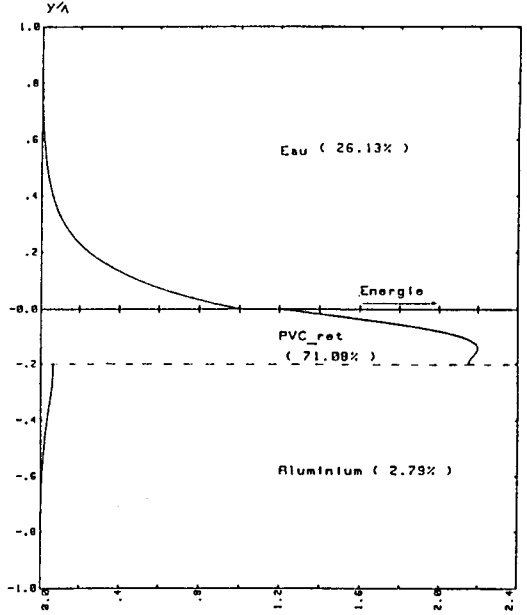


Fig 8b

Amplitudes longitudinales $-\frac{U}{V_0}$ (---) et transversales $\frac{V}{V_0}$ (—) des O.S.S.S (Eau/PVC_ret/Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface: Branche 4

E= 4 mm C= 1436.0 m/s F= 575 kHz $E/\lambda = 1.6$

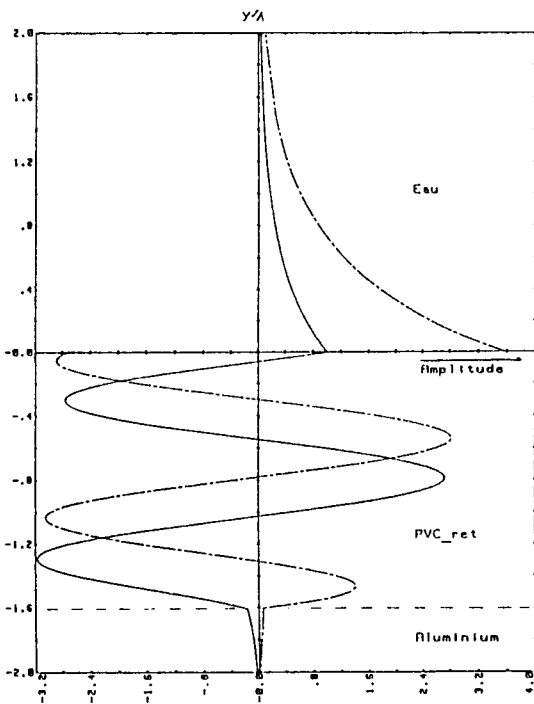


Fig 9a

Energies acoustiques $W(y)$ des O.S.S.S (Eau/PVC_ret/Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface: Branche 4

E= 4 mm C= 1436.0 m/s F= 575 kHz $E/\lambda = 1.6$

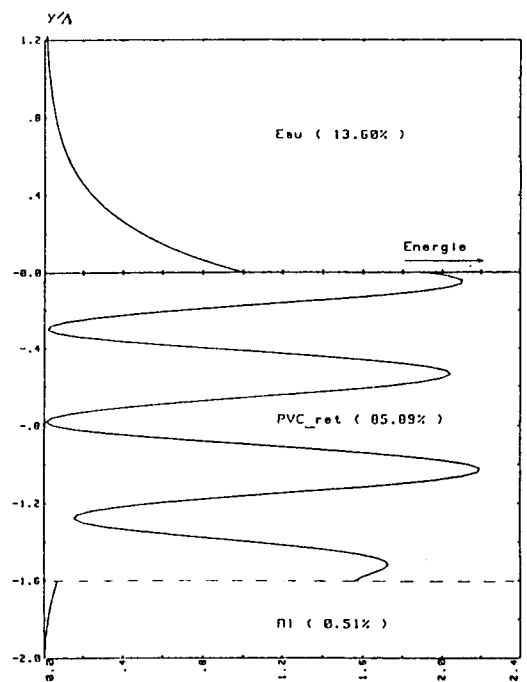


Fig 9b

2.3. Influence du substrat pour une association de type plastique-métal

L'étude est menée pour le seul mode de vibration de Stoneley-Scholte pour une couche de PVC avec des socles de Ni ou d'Al.

La décroissance de la célérité en fonction de F est monotone dans les deux cas, le décalage entre courbes (fig. 10) étant minime et inférieur à l'incertitude probable des mesures de C.

Le socle paraît ainsi "écrané" et il nous semble probable que ce résultat se maintiendrait quel que soit le type d'ondes lorsque des différences importantes existent entre les propriétés mécaniques de la couche et du substrat.

Dispersion de vitesse d' O.S.S. sur PVC en fonction de la fréquence indépendamment du substrat

1. EAU /PVC RETiculé/ Al
 ∞ : 4000 μ m ; ∞
2. EAU /PVC RETiculé/ Ni
 ∞ : 4000 μ m ; ∞

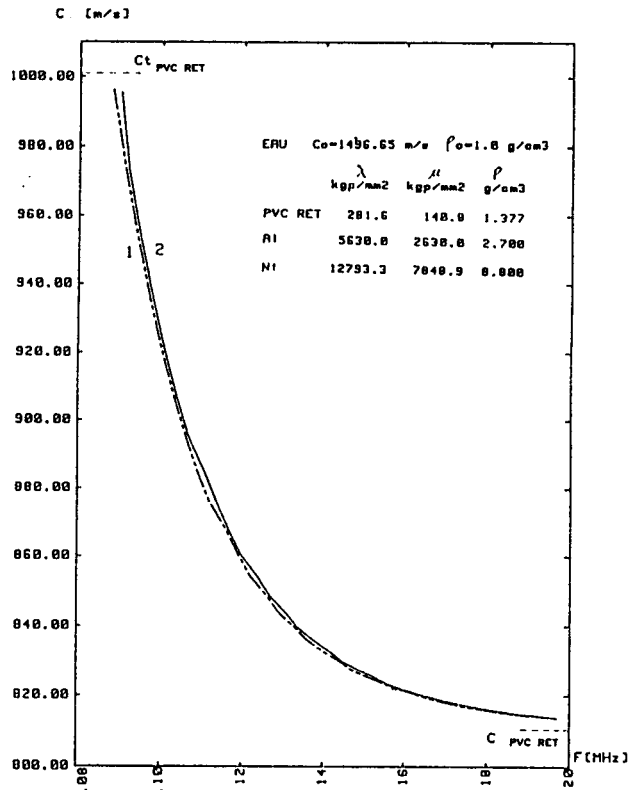


Fig 10

3. Cas des structures à plusieurs couches discrètes

Pour compléter l'illustration des théories exposées nous abordons ici l'étude de modes de Stoneley-Scholte stricts pour des systèmes multicouches "périodiques" à quatre interfaces et pour des systèmes quelconques dont nous relierons les nombres de modes de vibration et d'interfaces.

3.1. Ondes d'interfaces dans les milieux périodiques: Système $H_2O/Bi/Polystyrène/Bi/Polystyrène$

Nous complétons ainsi l'étude (§ 2.1.) du système monocouche composé des mêmes matériaux.

Il s'agit ici d'un système à quatre interfaces ayant des couches de même épaisseur.

3.1.1. Dispersion de célérité

Le réseau à 4 branches (fig. 11) présente des similitudes frappantes avec le système à trois milieux $OH_2/Bi/Polystyrène$ (fig. 1a).

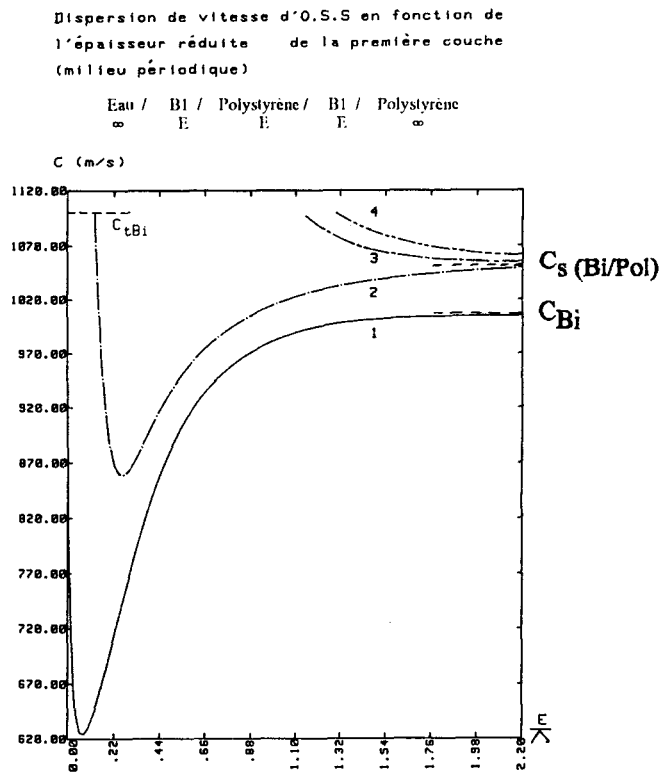


Fig 11

- *La branche 1* est voisine (mais non identique sauf quand $E/\Lambda \geq 1$) de celle de l'O.S.S. eau/Bi/Polystyrène entre des limites BF $C_{\text{Polyst.}}$ du substrat et asymptotique HF C_{Bi} de la couche ; elle a un minimum marqué comme la branche 2 qui, évoluant entre $C_{\text{tBi}} = 1100$ m/s et $C_{\text{sBi/Polyst.}} = 1053,8$ m/s, se comporte davantage comme une branche de type Stoneley.

- *La branche 3* (pratiquement identique à la branche 2 du système à trois milieux (fig. 1a) et la branche 4 évoluent entre les mêmes limites que la branche 2, sans minimum.

L'ensemble des branches apparaît pour $E/\Lambda > 1,32$. Nous constatons aussi que dans ce système à alternance de deux milieux le nombre d'asymptotes HF de la courbe de célérité dégénère mais pas le nombre de solutions qui reste égal au nombre d'interfaces (§ 3.2. Chap. I).

3.1.2. Distributions d'amplitude et d'énergie

Nous avons adopté des conditions variées pour les diverses branches afin d'identifier sûrement la localisation des différents modes de vibration.

- Branche 1

Pour $E/\Lambda = 0,3$ on obtient une onde de Stoneley-Scholte distribuée dans tous les milieux (fig. 12a), la composante parallèle s'annulant dans les trois couches supérieures et présentant des extremums aux interfaces entre solides.

L'énergie (fig. 12b) est surtout concentrée dans les deux couches supérieures solides, principalement aux interfaces de la première couche ; les parts restant dans l'eau et le socle sont faibles.

Pour $E/\Lambda = 1,5$, en position asymptotique, les courbes d'amplitudes (fig. 13a) sont quasi identiques à celles du système réduit OH₂/Bi/Polyst. (fig. 2a) dans les trois premiers milieux ; la pénétration dans les couches profondes (Bi-Polyst.) est quasi inexistante mais respecte les lois de continuité : il s'agit donc d'une onde de Stoneley-Scholte de l'ensemble du système mais concernant principalement la partie supérieure, l'énergie étant surtout localisée dans la première couche à l'interface supérieure (fig. 13b).

Amplitudes longitudinales $\frac{U}{V_0}$ (—) et transversales $\frac{V}{V_0}$ (---) des O.S.S (Eau/Bi/Polyst./Bi/Polyst.) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

E = 1000 μ m Branche 1
C = 772.0 m/s F = 0.232 MHz $E/\lambda = 0.300$

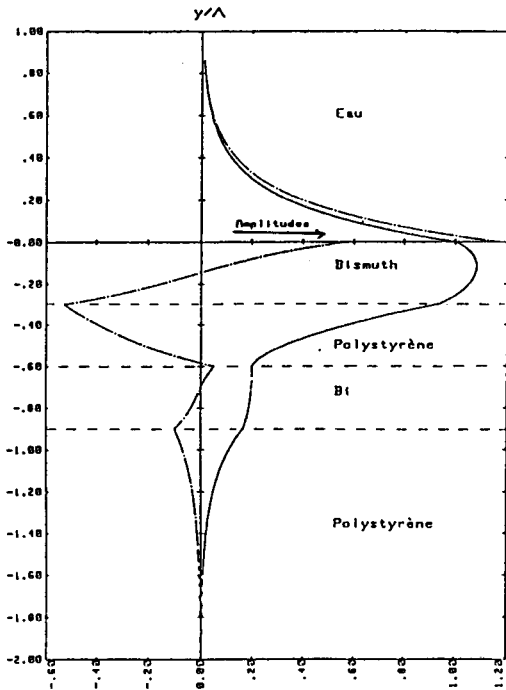


Fig 12a

Energies acoustiques $H(y)$ des O.S.S (Eau/Bi/Polyst./Bi/Polyst.) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface :

E = 1000 μ m Branche 1
C = 772.0 m/s F = 0.232 MHz $E/\lambda = 0.300$

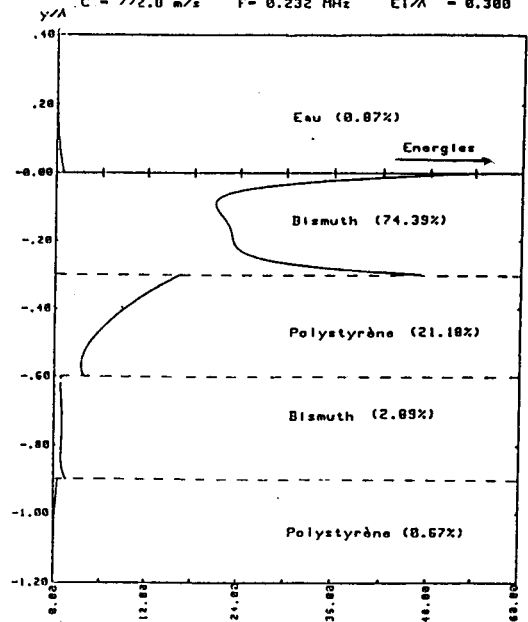


Fig 12b

Amplitudes longitudinale $\frac{U}{V_0}$ (—) et transversale $\frac{V}{V_0}$ (---) des O.S.S (eau/Bi/Polystyrène/Bi/Polystyrène) dans les milieux périodiques en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

E = 1000 μ m Branche 1
C = 1002.1 m/s F = 1.503 MHz $E/\lambda = 1.50$

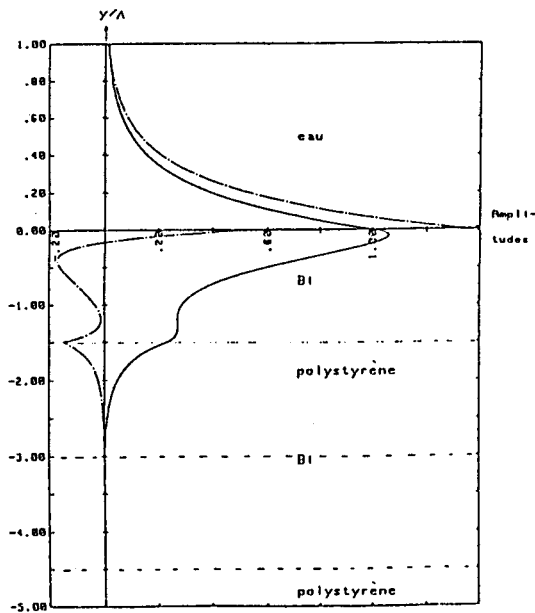


Fig 13a

Energies acoustiques $H(y)$ des O.S.S (eau/Bi/Polystyrène/Bi/Polystyrène) dans les milieux périodiques en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

E = 1000 μ m Branche 1
C = 1002.1 m/s F = 1.503 MHz $E/\lambda = 1.50$

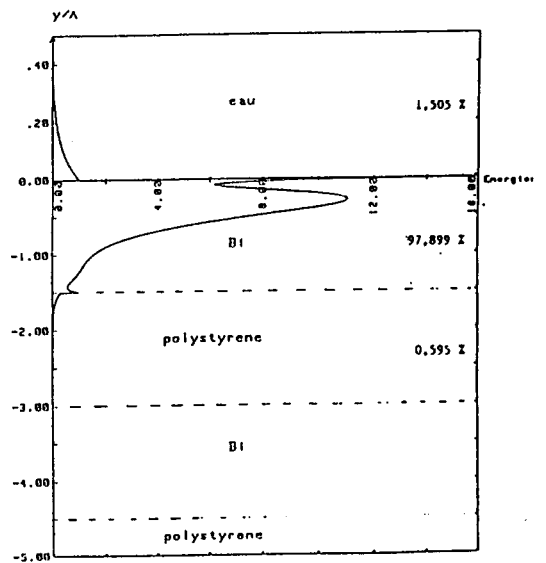


Fig 13b

– *Branche 2*

L'étude a été menée pour les mêmes valeurs que précédemment ($E/\Lambda = 0,3$ fig. 14 ; $E/\Lambda = 1,5$ fig. 15).

L'onde de Stoneley-Scholte (continuités respectées (fig. 14a) se localise toutefois essentiellement dans la couche trois de bismuth : l'énergie étant maximale aux interfaces de cette couche et des milieux voisins (Fig. 14b).

Dans le cas asymptotique ($E/\Lambda = 1,5$) la localisation profonde et le caractère dominant d'onde de Stoneley se confirment comme l'indiquent les distributions d'amplitude (fig. 15a) et d'énergie (fig. 15b). Les conditions de continuité ne sont plus vérifiées numériquement à l'interface avec le liquide (où à vrai dire, le niveau est négligeable). Dans les couches profondes (niveau d'amplitudes au moins 100 fois plus élevé) les déplacements longitudinaux sont extrémaux aux interfaces de la couche trois et les déplacements transversaux extrémaux dans la couche à leur proche voisinage. Par rapport au plan médian de cette même couche les premiers sont quasi antisymétriques et créent des changements de sens de rotation ; les seconds quasi symétriques ainsi que l'énergie (fig. 15b) maximale aux frontières de la couche et oscillant dans celle-ci.

– *Branche 3* (fig 16)

Pour $E/\Lambda = 1,5$ on retrouve les caractéristiques d'une O.S.S. pour le système précédent à trois milieux : ($H_2O/Bi/Polystyrène$) l'analogie avec les figures 2b et 3b est frappante (elle confine à la quasi-identité) et suscite les mêmes commentaires. Toutefois l'examen des valeurs numériques établit qu'il s'agit d'une solution d'ensemble du système (continuités respectées aux différentes interfaces), bien que dans les deux derniers milieux l'énergie soit négligeable. On note que celle-ci se localise plutôt à l'interface inférieure de la première couche, à l'opposé de la première branche où elle est localisée à l'interface supérieure.

– *Branche 4* (fig. 17)

Comme pour la branche 2 aux conditions asymptotiques, on retrouve une onde de Stoneley des couches solides (quoique la continuité transversale soit quasi satisfaite, à 2 % près, à l'interface avec le liquide. Les niveaux profonds (couche 3) sont élevés et les symétries des modes longitudinaux et transversaux par rapport au plan médian du milieu 3 sont inversées.

Amplitudes longitudinales $\frac{U}{V_0}$ (---) et transversales $\frac{V}{V_0}$ (—) des O.S.S (Eau/Bi/Polyst./Bi/Polyst.) en fonction de la distance réduite y/Λ à l'interface

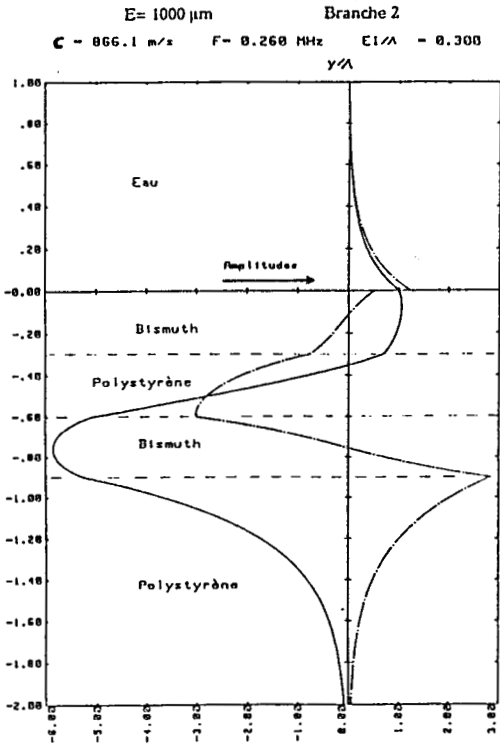


Fig 14a

Energies acoustiques $H(y)$ des O.S.S (Eau/Bi/Polyst./Bi/Polyst.) en fonction de la distance réduite y/Λ à l'interface :

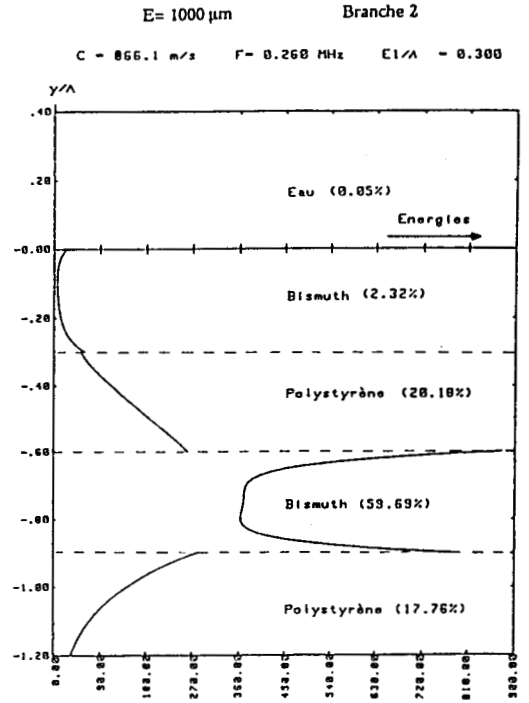


Fig 14b

Amplitudes longitudinales $\frac{-U}{V_0}$ (---) et transversales $\frac{V}{V_0}$ (—) des O.S.S (eau/Bi/Polystyrene/Bi/Polystyrene) dans les milieux périodiques en fonction de la distance réduite y/Λ à l'interface

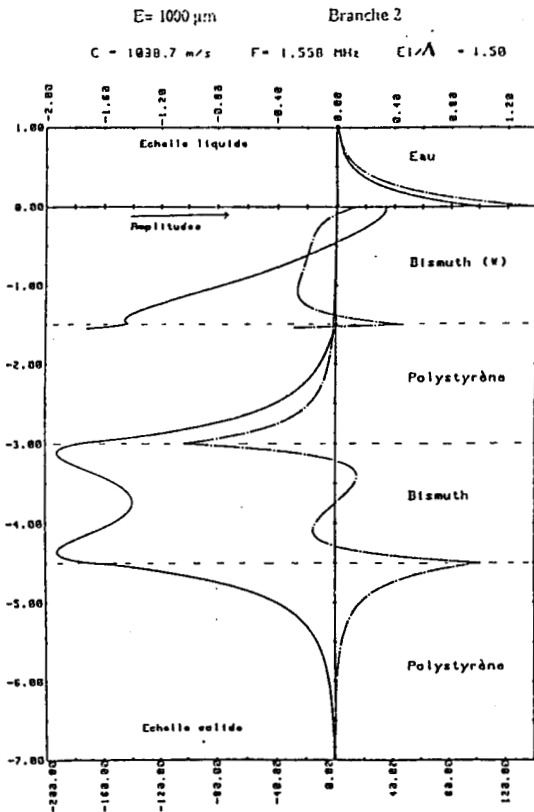


Fig 15a (*) Echelle liquide

Energies acoustiques $H(y)$ des O.S.S (eau/Bi/Polystyrene/Bi/Polystyrene) dans les milieux périodiques en fonction de la distance réduite y/Λ à l'interface

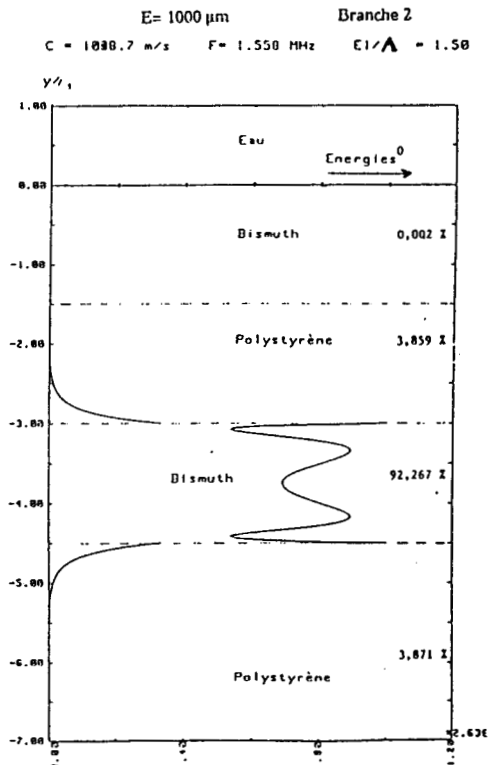


Fig 15b

Amplitudes longitudinale $\frac{-U}{V_0}$ (—) et transversale $\frac{V}{V_0}$ (---) des O.S.S (eau/Bi/Polystyrène/Bi/Polystyrène) dans les milieux périodiques en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

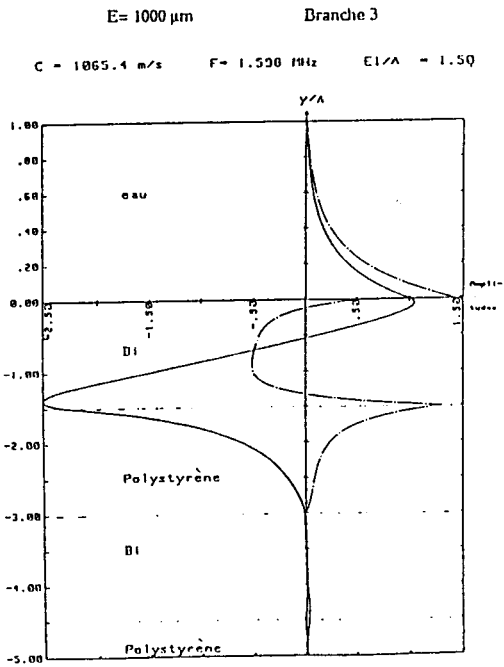


Fig 16a

Energies acoustiques $H(y)$ des O.S.S (eau/Bi/Polystyrène/Bi/Polystyrène) dans les milieux périodiques en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

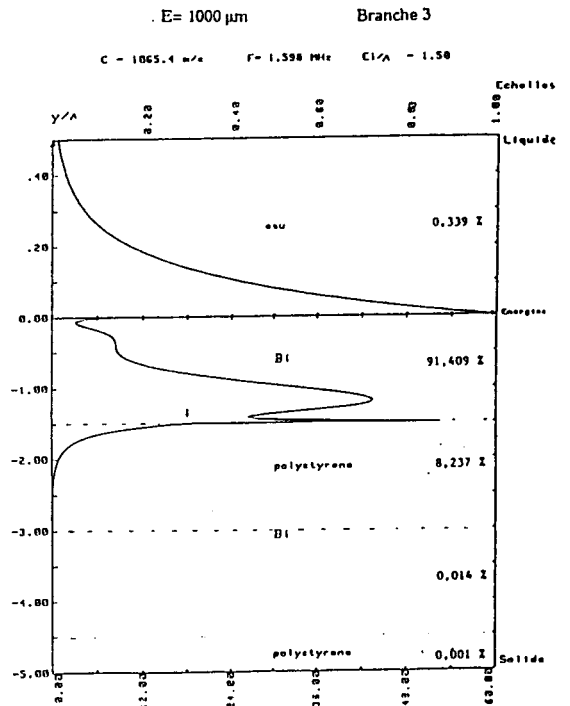


Fig 16b

Amplitudes longitudinale $\frac{-U}{V_0}$ (—) et transversale $\frac{V}{V_0}$ (---) des O.S.S (eau/Bi/Polystyrène/Bi/Polystyrène) dans les milieux périodiques en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

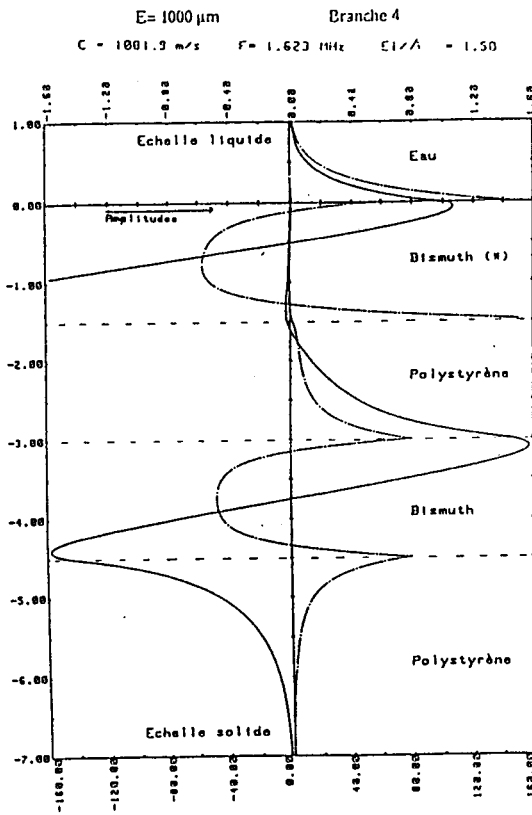


Fig 17a

Energies acoustiques $H(y)$ des O.S.S (eau/Bi/Polystyrène/Bi/Polystyrène) dans les milieux périodiques en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

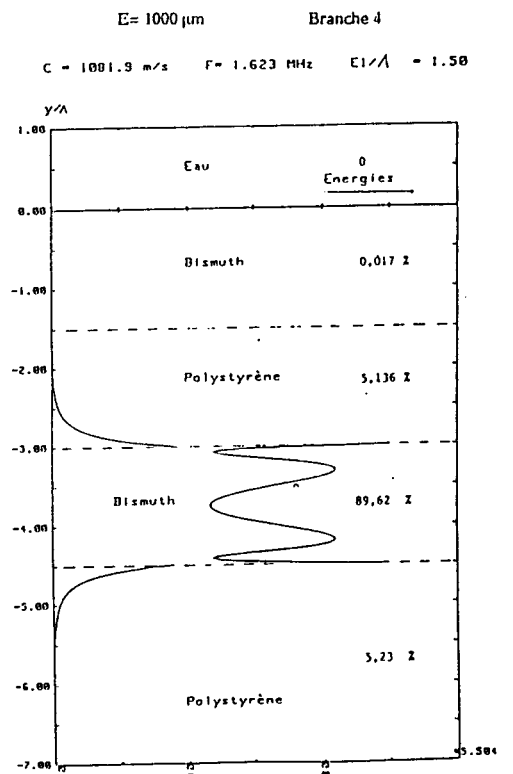


Fig.17b

Propriétés vibratoires des structures quasi périodiques

En résumé, l'analyse des distributions d'amplitude et d'énergie correspondant aux branches de la courbe de dispersion montre qu'on obtient deux types de modes vibratoires dominants :

- . des ondes de Stoneley–Scholte intéressant surtout la partie supérieure,
- . des ondes de Stoneley quasi symétriques ou quasi antisymétriques intéressant essentiellement les couches profondes, quoique dans les deux cas, ces solutions restent des solutions d'ensemble du système avec très peu d'énergie dans le liquide.

Un passage continu s'effectue entre ces deux types de solutions qui ne semblent pas apparaître dans l'ordre des branches de la courbe de dispersion de célérité mais en alternance (branches impaires 1 et 3 – O.S.S., branches paires 2 et 4 – O.S.).

Enfin les systèmes sans liquide présentent le même type d'alternance entre ondes de Rayleigh dominantes et ondes de Stoneley plus profondes (voir annexe II).

3.2 Etude prévisionnelle d'un modèle réduit expérimental

Nous achevons cette étude par une brève exploration d'un assemblage Eau/Plexiglass/ PVC/ Al en envisageant la subdivision de l'ensemble Plexi-PVC en milieux hypothétiques à propriétés intermédiaires variant en progression arithmétique entre les extrêmes (Cf légende fig 18). Les caractéristiques des divers milieux constitutifs du système sont données au tableau 1 §1.

Les courbes de dispersion évoluent en BF dans la gamme 100–500 kHz entre la vitesse C_{1PVC} et une limite asymptotique basse atteinte par valeurs inférieures qui est la vitesse de Stoneley-Scholte C d'un système Eau-Plexiglass.

Le milieu supérieur joue donc ici quasi-seul, les couches intermédiaires n'ayant qu'une action limitée, par la position du minimum, sur l'amplitude globale de la dispersion qui reste forte (~ 115 m/s).

Signalons enfin que les conditions de Stoneley (§3.2.1 Chap I) n'étant pas satisfaites entre les différentes couches en contact, il n'existe de ce fait d'un seul mode de vibration, celui lié à l'interface supérieur Eau-plexiglass.

Dispersion de célérité d'ondes de Stoneley-Scholte (Plexiglass - PVC_{ret}) en fonction de la fréquence

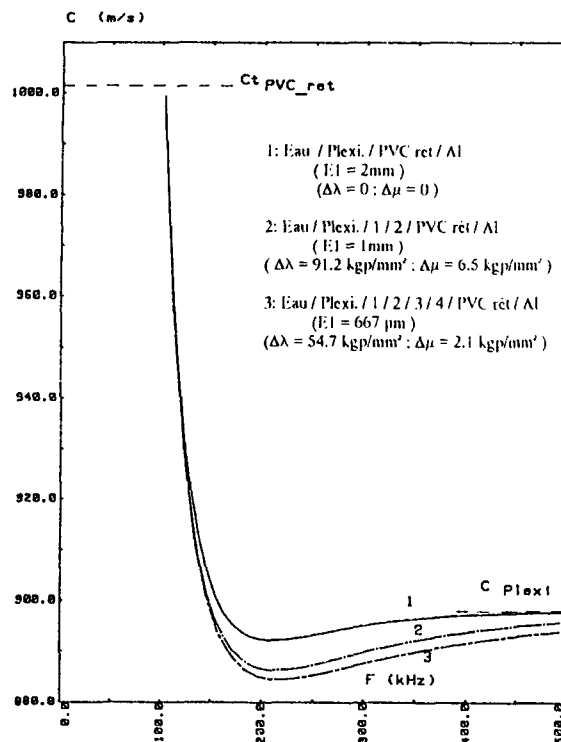


Fig 18

4. Etude d'une structure à gradient de propriétés

4.1 Présentation du système et modélisation.

Pour simuler un fond marin (*) rocheux surmonté de couches sédimentaires à propriétés continûment variables, le laboratoire de l'ICPI de Lyon a construit la maquette suivante.

Sur un socle d'aluminium de 110 mm d'épaisseur considéré comme un substrat semi-infini est collée sous presse une couche de PVC d'épaisseur 10 mm dont un traitement thermique a fait varier continûment le degré de réticulation, le système étant surmonté d'eau.

Les propriétés acoustiques et la structure du système sont présentées figure 19. On note que la célérité C_t du son dans la couche varie linéairement avec la profondeur. La valeur C_l initialement inaccessible a été adoptée comme égale à $2C_t$.

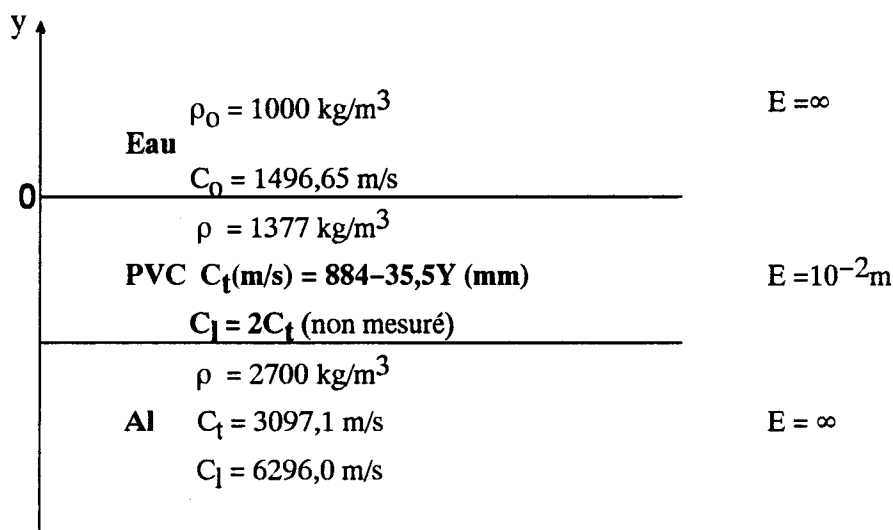


Fig 19: Modèle Zak à un profil linéaire

Pour calculer la dispersion de célérité des ondes de Stoneley-Scholte dans un système à gradient de propriétés, il nous faut modéliser la couche intermédiaire en la discrétisant en n sous-couches d'épaisseurs égales à propriétés acoustiques uniformes au sein de chacune d'elles.

(*) On trouvera en annexe III quelques données relatives aux fonds marins

Trois modèles ont été adoptés suivant la position du point de référence choisi pour chaque sous-couche (fig. 20) et auxquelles correspondent les expressions suivantes des célérités C_{ti} :

- point de référence au centre de la couche (I)

$$C_{ti} = \frac{C_{li}}{2} = A + B \frac{2i-1}{2n} E \quad (37)$$

- point de référence sur la face supérieure (II)

$$C_{ti} = \frac{C_{li}}{2} = A + B \frac{i-1}{2n} E < C_{ti}^{(I)} \quad (38)$$

- point de référence glissant dans l'épaisseur (III)

$$C_{ti} = \frac{C_{li}}{2} = A + B \frac{i-1}{n-1} E > C_{ti}^{(II)} \quad (39)$$

On remarque dans ce dernier cas (fig. 20) que la première couche prend les caractéristiques du PVC en $y=0$ et la dernière couche celle du PVC en $y=E$ et que si une couche médiane existe (n impair) elle a comme caractéristiques celles de son centre.

Dans tous les cas $A = 884$ m/s; $B = 35,5$ m/s/mm; $E = 10$ mm.

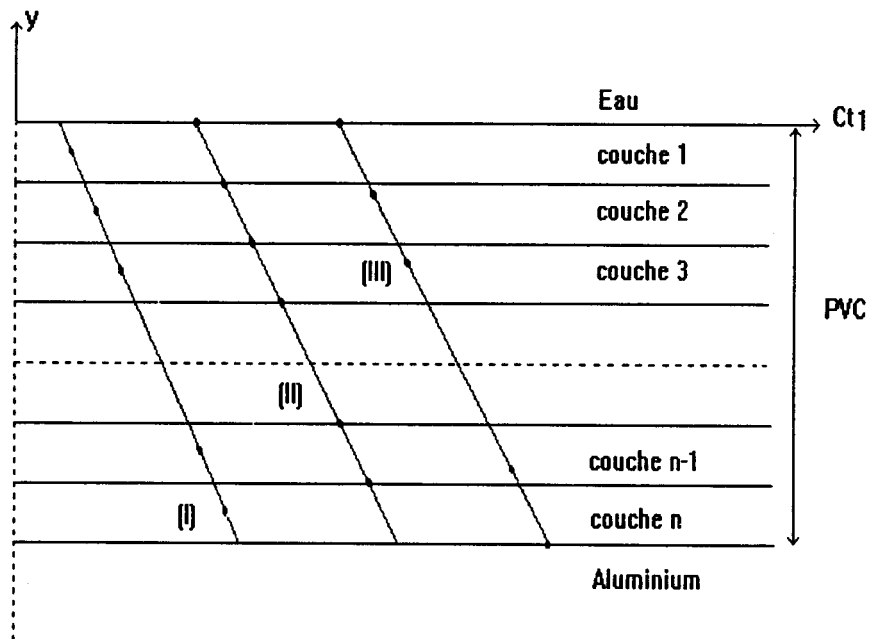


Fig 20

4.2 Dispersion de célérité

Les courbes de dispersion sont données pour chaque choix (I, II, III) à nombre de sous-couches variable $n=3,5$ ou 10 (fig. 21, 22, 23).

Elles ont toutes le même aspect d'une décroissance monotone entre les célérités C_{11} et C_1 de la couche supérieure, les variations de ces limites suivant le modèle n'étant évidemment qu'apparentes et liées au choix du point de référence choisi dans la première sous-couche. Le choix d'un point de référence glissant s'avère de ce point de vue le meilleur car les limites BF et HF sont indépendantes du nombre total de couches. Il est par ailleurs évident que pour un cas donné, la courbe de dispersion n'évolue plus lorsque le nombre de couches atteint une certaine valeur; nous avons de ce fait contrôlé que la dispersion n'était guère sensible pour $n > 8$.

4.3 Répartitions d'amplitudes et d'énergies.

Les calculs sont effectués dans le cas III pour deux fréquences (fig. 23 – points 1 et 2):

a) $F=80$ kHz, $C = 796,8$ m/s, $\Lambda = 10\text{mm} = E$ (fig 24a, 24b)

b) $F=150$ kHz, $C = 752,1$ m/s, $\Lambda = 5\text{mm} = \frac{E}{2}$ (fig 25a, 25b)

Dans les deux cas, les amplitudes sont évidemment continues aux interfaces dans le PVC. Les courbes d'énergies présentent une allure classique avec cependant des décrochements limités aux interfaces des différentes strates de PVC du modèle qui a introduit des discontinuités artificielles. L'énergie se répartit dans l'eau et la partie supérieure de la couche (jusqu'à $1,6\Lambda$) qui écranthe le substrat d'aluminium.

Dispersion de célérité d' O.S.S sur modèle PVC à 1 gradient de propriété

Point médian

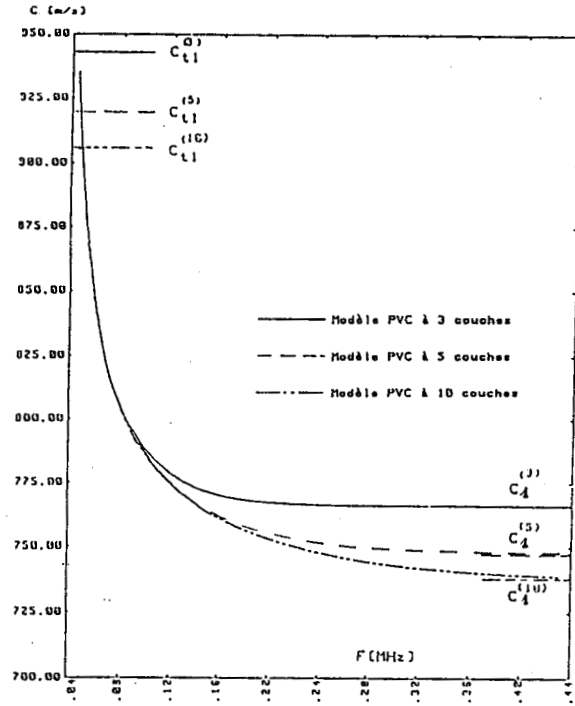


Fig 21

Dispersion de célérité d' O.S.S sur modèle PVC à 1 gradient de propriété

Point supérieur

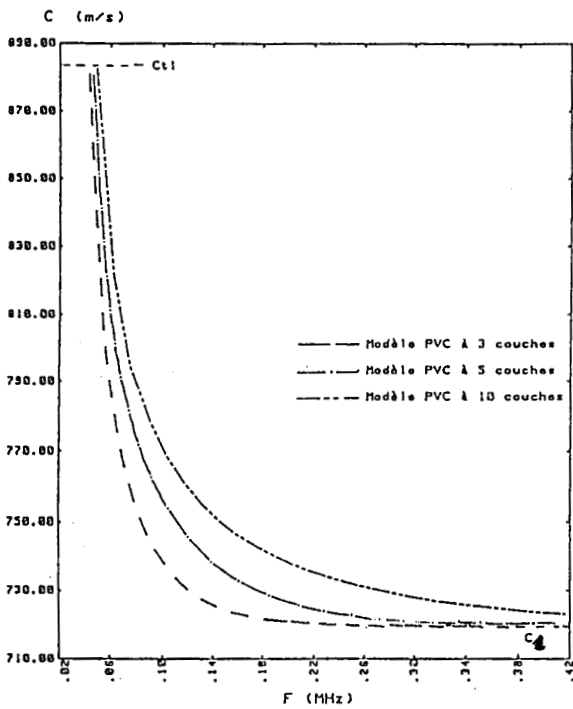


Fig 22

Dispersion de célérité d' O.S.S sur modèle PVC à 1 gradient de propriété

Point glissant

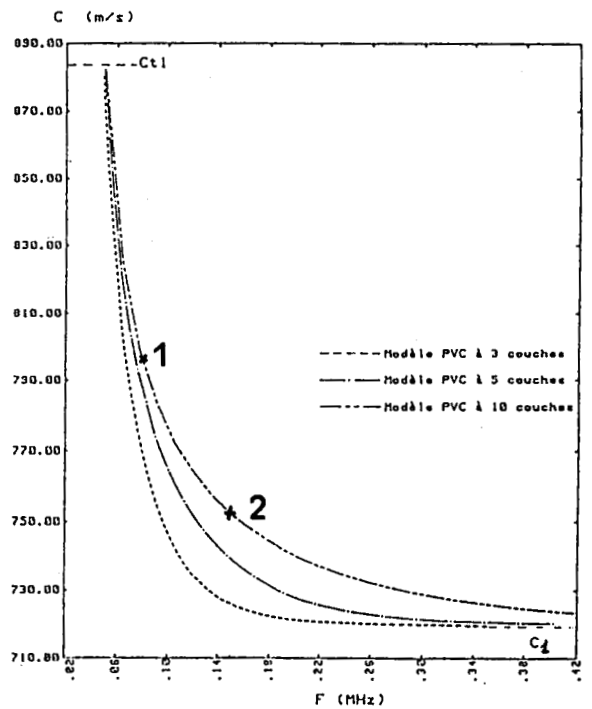


Fig. 23

Amplitudes longitudinales $\frac{U}{V_0}$ (---) et transversales $\frac{V}{V_0}$ (—) des O.S.S en fonction de la distance y/λ réduite à l'interface

Modèle ZNk à 1 profilé linéaire (n = 10)

E = 10 mm C = 796.0 m/s F = 80 kHz E/\lambda = 1.0

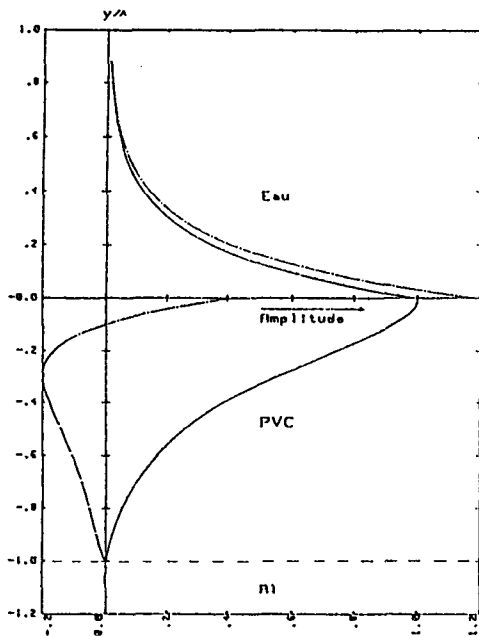


Fig 24a

Energies acoustiques $W(y)$ des O.S.S en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

Modèle ZNk à 1 profilé linéaire (n = 10)

E = 10 mm C = 796.0 m/s F = 80 kHz E/\lambda = 1.0

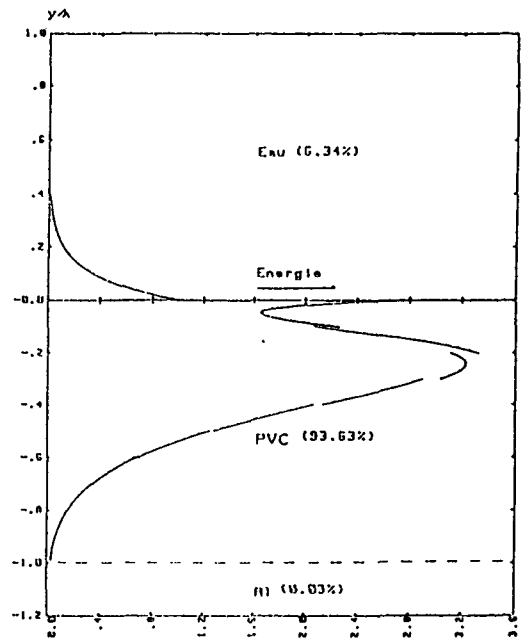


Fig 24b

Amplitudes longitudinales $\frac{U}{V_0}$ (---) et transversales $\frac{V}{V_0}$ (—) des O.S.S en fonction de la distance y/λ réduite à l'interface

Modèle ZNk à 1 profilé linéaire (n = 10)

E = 10 mm C = 752.1 m/s F = 150 kHz E/\lambda = 2.0

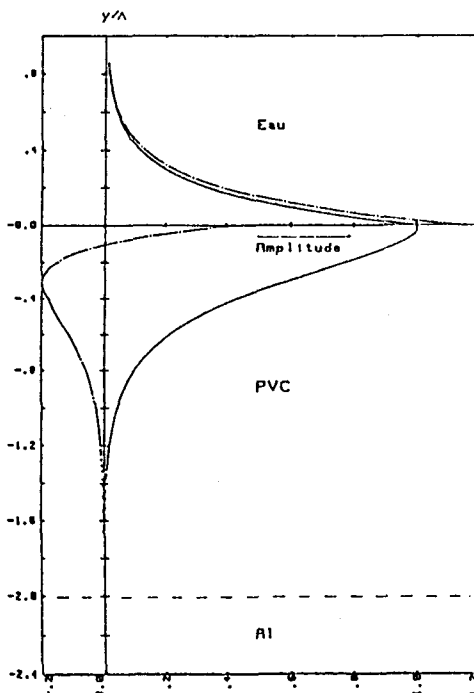


Fig 25a

Energies acoustiques $W(y)$ des O.S.S en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

Modèle ZNk à 1 profilé linéaire (n = 10)

E = 10 mm C = 752.1 m/s F = 150 kHz E/\lambda = 2.0

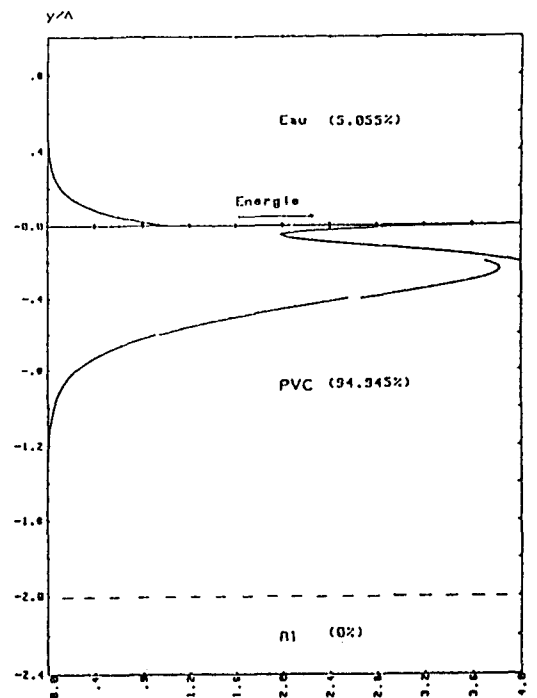


Fig 25b

CHAPITRE III: *RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE*

Le principal but ici est de remonter à la connaissance des milieux constitutifs d'une structure stratifiée dont on connaît la réponse acoustique en célérités et en fréquences à partir d'une courbe de dispersion expérimentale. On utilise pour cela des traitements mathématiques pour la résolution du problème, auxquels il convient d'associer des raisonnements physiques pour déterminer des solutions acceptables.

Le problème revient donc à résoudre numériquement un système de N équations non linéaires pour N_e points expérimentaux donnés de la courbe. Le déterminant général (tableau 3 chap I) fournit l'expression de chacune des équations du système à célérité et fréquence définies, conformément à la théorie générale établie précédemment. Le nombre d'inconnues ou paramètres à déterminer dépend évidemment de la composition physique de la structure modélisée.

Contrairement au problème direct où il est certain de déterminer l'existence ou non d'une célérité à partir d'une fréquence ou d'une longueur d'onde imposée, connaissant les constantes mécaniques, il nous faut ici inverser la procédure afin de déterminer, à partir d'un traitement mathématique incluant des approximations inévitables, la composition d'une structure dont des valeurs plausibles des paramètres sont à définir au départ du calcul.

Il existe dans la littérature plusieurs méthodes de résolution de systèmes d'équations non linéaires, notamment les méthodes par approximations successives qui peuvent être équivalentes les unes aux autres sous certaines formes [21]. On peut citer au passage les méthodes non linéaires de Jacobi, de Gauss-Seidel ou de Newton-Raphson. Nous utiliserons ici la méthode itérative dite de gradients conjugués (par opposition à gradients simples) et qui fut développée par *Hestenes* et *Stieffel* [22] pour des fonctions quadratiques appliquées à la résolution des systèmes d'équations linéaires et étendue à des fonctions non quadratiques pour la résolution des systèmes non linéaires par *Fletcher* et *Reeves* [23].

Notre étude se limitant à des modèles de fonds marins, nous examinons dans ce chapitre la possibilité d'identifier une couche unique homogène en traitant l'exemple de l'assemblage $H_2O/PVC/Al$ déjà envisagé plus haut (§1.2.3).

Nous étendrons ensuite cette étude au cas de couches de PVC inhomogène à gradients de propriétés variant linéairement avec la profondeur.

1. Méthode générale: Algorithme des gradients conjugués

1.1 Démarche générale

On souhaite déterminer les caractéristiques mécaniques des milieux constitutifs d'un système plan stratifié, soit:

- les coefficients de Lamé (λ_i, μ_i), les densités ρ_i des milieux et les épaisseurs E_i des couches; ou
- les célérités longitudinales C_{li} , et transversales C_{ti} , les densités ρ_i des milieux et les épaisseurs E_i des couches

à partir de la mesure de la courbe de dispersion de célérité des O.S.S. $C(F)$ ou plus exactement connaissant N_e points de cette courbe (aux incertitudes près).

On utilise à cette fin l'algorithme des gradients conjugués, associé au programme de calcul de $C(F)$. Partant d'un jeu "plausible" de valeurs initiales des paramètres cherchés, cet algorithme est censé converger vers une solution finale acceptable, permettant de calculer une courbe de dispersion ajustable sur la courbe expérimentale. La qualité de l'ajustement est évaluée par une grandeur appelée distance:

$$D = \sum_{j=1}^{N_e} \frac{(V_{cj} - V_{ej})^2}{N_e}$$

écart quadratique moyen entre les célérités expérimentales V_{ej} et calculées V_{cj} des points d'analyse, qu'il convient de minimiser.

On trouvera en annexe IV sur cet algorithme quelques considérations mathématiques extraites des travaux antérieurs du laboratoire [15,18].

1.2 Difficultés du problème d'identification

L'application de la méthode exposée peut comporter quelques difficultés décelées au cours des travaux antérieurs sur des systèmes multicouches de verre trempé ou monocouche Cr/Acier [15,18].

- * Les valeurs de départ ne peuvent être choisies de façon totalement arbitraire.
- * Le nombre des points expérimentaux doit être suffisant mais pas excessif (en relation avec le nombre de paramètres à ajuster simultanément).
- * La nature, le nombre, l'ordre et les taux de variations des paramètres qu'on essaie d'ajuster simultanément peuvent avoir une influence.
- * Il est fort possible de trouver des solutions parfaitement adaptées et physiquement absurdes. Pour l'éviter il est bon de pouvoir imposer quelques "contraintes" au processus en précisant par exemple des valeurs plausibles des épaisseurs ou des densités.
- * Une solution ne peut jamais être parfaite en raison de l'approximation linéaire adoptée utilisée dans le calcul, entraînant des écarts numériques inévitables.

Fort heureusement l'autovérification de la procédure est faisable en résolvant le problème inverse à partir d'une courbe théorique calculée dont on retient quelques points (avec éventuellement des incertitudes supposées) pour se créer un modèle pseudo-expérimental auquel on applique la méthode décrite.

Quelques aspects de cette pré-analyse seront en conséquence traités ici en utilisant à titre de modèle pseudo-expérimental le système

H₂O/PVC/Al.

En premier lieu nous abordons le problème général du choix des paramètres et de leurs pas de variations sur la qualité de la restitution.

2. Critères de choix des paramètres et de leurs taux de variation

2.1 Généralités

Soit dans un espace de dimension N , une fonction D dépendant des coordonnées p_i :

$$D = D(p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_N)$$

Si D est continue et dérivable en tout point, la différentielle dD s'exprime au premier ordre par:

$$dD = \sum_{i=1}^N \frac{\partial D}{\partial p_i} dp_i + o(dp_i^2) \quad (40)$$

$\frac{\partial D}{\partial p_i}$: élément du vecteur gradient quand tous les p_j ($i \neq j$) sont constants.

Si p_{i_0} est le paramètre le moins actif sur D (ou auquel D est le moins sensible) c'est-à-dire tel que

$$\frac{\partial D}{\partial p_{i_0}} < \frac{\partial D}{\partial p_i} \quad \forall i \neq i_0$$

(40) peut s'écrire :

$$dD = \frac{\partial D}{\partial p_{i_0}} \sum_{i=1}^N \left[dp_{i_0} + \frac{\partial D / \partial p_i}{\partial D / \partial p_{i_0}} dp_i \right] \quad (i \neq i_0) \quad (40')$$

Posant $\tau = \frac{dp_{i_0}}{p_{i_0}}$, $\epsilon_{p_i} = \frac{dp_i}{p_i}$, et choisissant des variations Δp_i et Δp_{i_0} produisant la même variation ΔD , il vient

$$\frac{\partial D / \partial p_i}{\partial D / \partial p_{i_0}} = \frac{\text{grad}_{p_i}(D)}{\text{grad}_{p_{i_0}}(D)} \approx \frac{dp_{i_0}}{dp_i} = \frac{\tau_{p_{i_0}}}{\epsilon_{p_i} \cdot p_i} \approx \frac{\Delta p_{i_0}}{\Delta p_i},$$

si l'on admet que les variations Δp sont suffisamment petites pour être identifiées aux différentielles.

Les variations relatives ε_{p_i} et τ sont alors liées par

$$\varepsilon_{p_i} = \tau \frac{p_{i0} \text{grad}_{p_{i0}}(D)}{p_i \text{grad}_{p_i}(D)} \quad (41)$$

Avec ces choix de Δp_i et Δp_{i0} (40') se transpose en

$$dD = \frac{\partial D}{\partial p_{i0}} \sum_{i \neq i_0}^N [dp_{i0} + \frac{\Delta p_{i0}}{\Delta p_i} dp_i] \quad (40'')$$

Pour minimiser dD il est préférable que $\frac{\Delta p_{i0}}{\Delta p_i} \approx 1$

soit d'après (41) $\varepsilon_{p_i} \approx \tau \frac{p_{i0}}{p_i}$.

Si pour des raisons d'efficacité de calcul *on souhaite que ε_{p_i} ne soit pas trop faible devant τ* il convient que les paramètres p_i et p_{i0} soient du même ordre de grandeur (dans leurs systèmes d'unités respectifs).

2.2 Application au problème posé.

Comme
$$D = \sum_{j=1}^{N_e} \frac{(V_{c_j} - V_{e_j})^2}{N_e}, \quad (42)$$

la variation relative ε_{p_i} (41), s'explique comme suit:

$$\varepsilon_{p_i} = \tau \frac{\sum_{j=1}^{N_e} (V_{c_j} - V_{e_j}) \frac{\partial V_{c_j}}{\partial p_{i0}/p_{i0}}}{N_e \sum_{j=1}^{N_e} (V_{c_j} - V_{e_j}) \frac{\partial V_{c_j}}{\partial p_i/p_i}} \quad (41')$$

On appelle *coefficient de sensibilité au paramètre p_i* à la fréquence F_j le facteur

$$s(p_i) = \frac{\partial V_{c_j}}{\partial p_i/p_i} \quad (43)$$

Précisons enfin que dans la pratique de l'algorithme de gradients conjugués les $s(p_i)$ et ε_{p_i} doivent être calculés à chaque itération puisqu'ils sont susceptibles de changer suivant que la valeur actuelle d'un paramètre est inférieure ou supérieure à la valeur finale cherchée.

3. Identification d'une couche de PVC homogène

3.1 Sensibilité de la dispersion de célérité des O.S.S. aux paramètres physiques descriptifs du système

Nous avons étudié ici les coefficients de sensibilité $s(p_i)$ de C aux divers paramètres possibles pour le système **Eau/PVC / Aluminium** ne retenant que l'action de la couche de PVC puisque nous savons négligeable l'influence du substrat (Chap II §1.2.3)

Deux groupes de courbes sont donnés pour des variations de $\pm 10\%$:

- de λ , μ , ρ et E de la couche de PVC (fig 1a à 1d): C croît avec λ et μ , décroît avec ρ et E
- de C_l , C_t (fig 2a) et ρ (fig 2b) de la couche de PVC : C est une fonction croissante de C_l , C_t et ρ .

Il apparaît que les limites hautes et basses de ces courbes $C = f(F)$ peuvent rester constantes (fig 1a,1d) ou être modifiées (fig 1b, 1c) suivant le choix des paramètres variables ou constants.

On peut comparer (tableau 1), pour quelques fréquences, les sensibilités aux divers paramètres p en évaluant les rapports (43):

$$s(p) = \frac{\Delta C}{\Delta p/p}$$

s_p (m/s)	F(kHz)			
		100	150	200
s_λ		210,6	80,6	64,5
s_μ		1032	742	726
s_ρ		-701,6	-571	-540
s_e		-943,5	-177	-40
s_{C_l}		516	252	210
s_{C_t}		1419	1129	1056
s_ρ		387	226	185,5

Tableau 1

Dispersion de vitesse d' O.S.S. pour différentes valeurs du paramètre μ_1 de la couche

ERU / PVC Réticulé / RI
 ∞ ; 4000 μm ; ∞

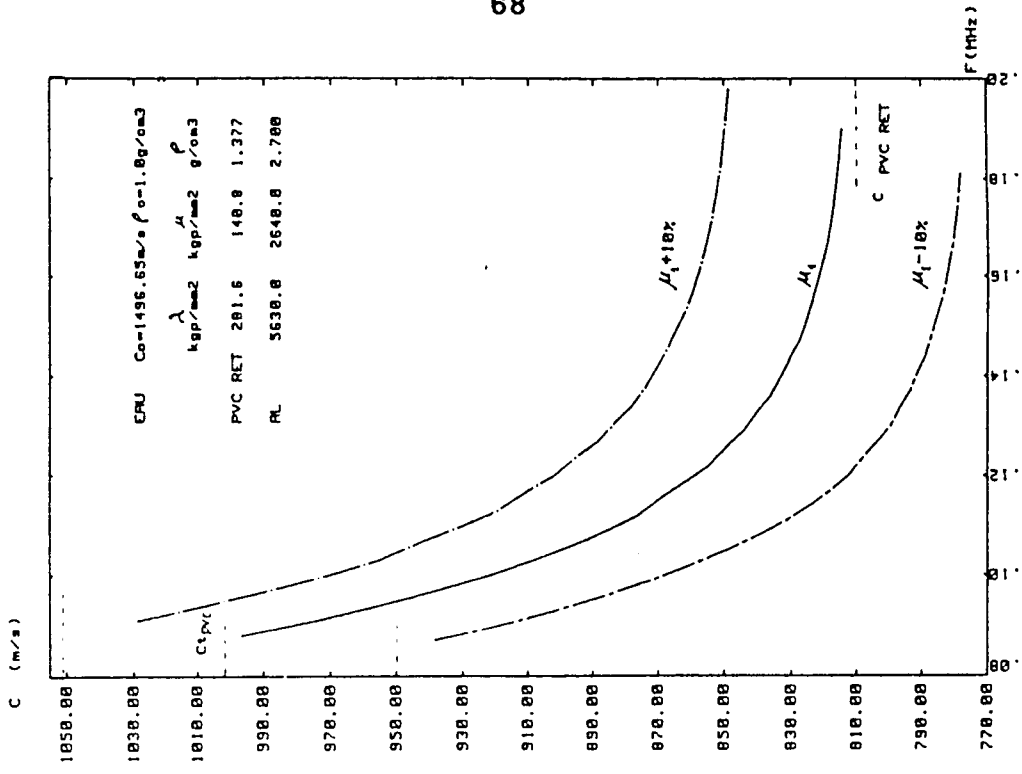


Fig 1b

Dispersion de vitesse d' O.S.S. pour différents valeurs du paramètre λ_1 de la couche

ERU / PVC Réticulé / RI
 ∞ ; 4000 μm ; ∞

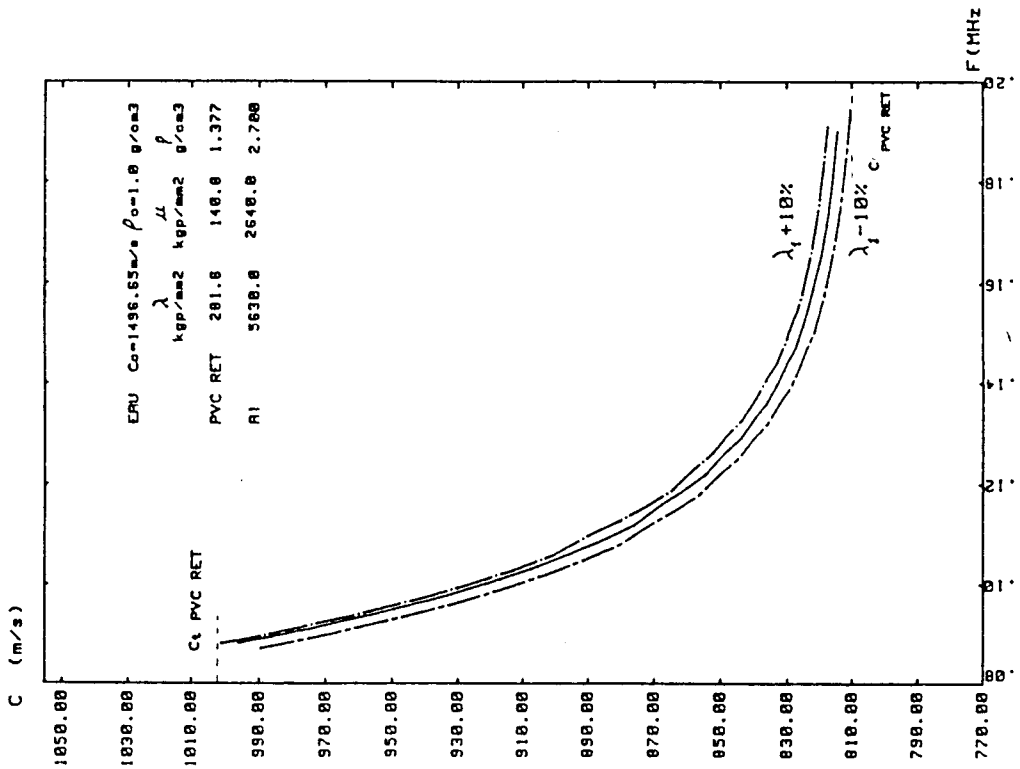


Fig 1a

Dispersion de vitesse d' O.S.S. pour différentes valeurs du paramètre β_1 de la couche

ERU / PVC Réticulé / RI

∞ ; 4000 μm ; ∞

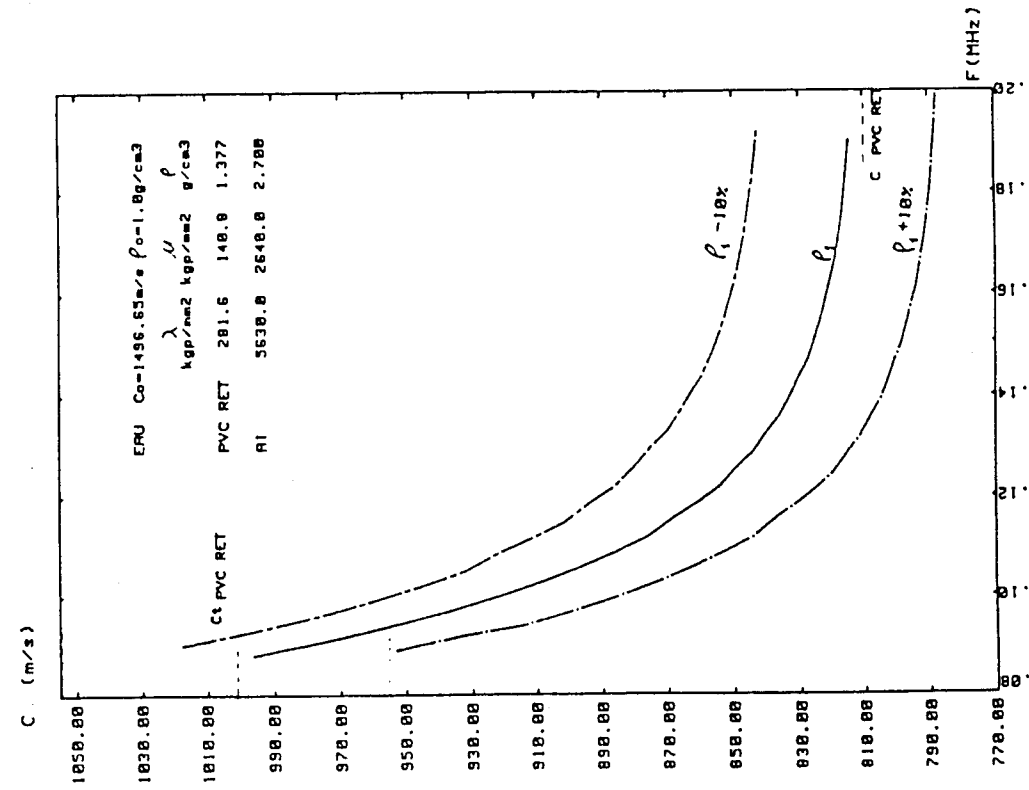


Fig 1c

Dispersion de vitesse d' O.S.S. pour différentes valeurs du paramètre E de la couche

ERU / PVC Réticulé / RI

∞ ; 4000 μm ; ∞

C (m/s)

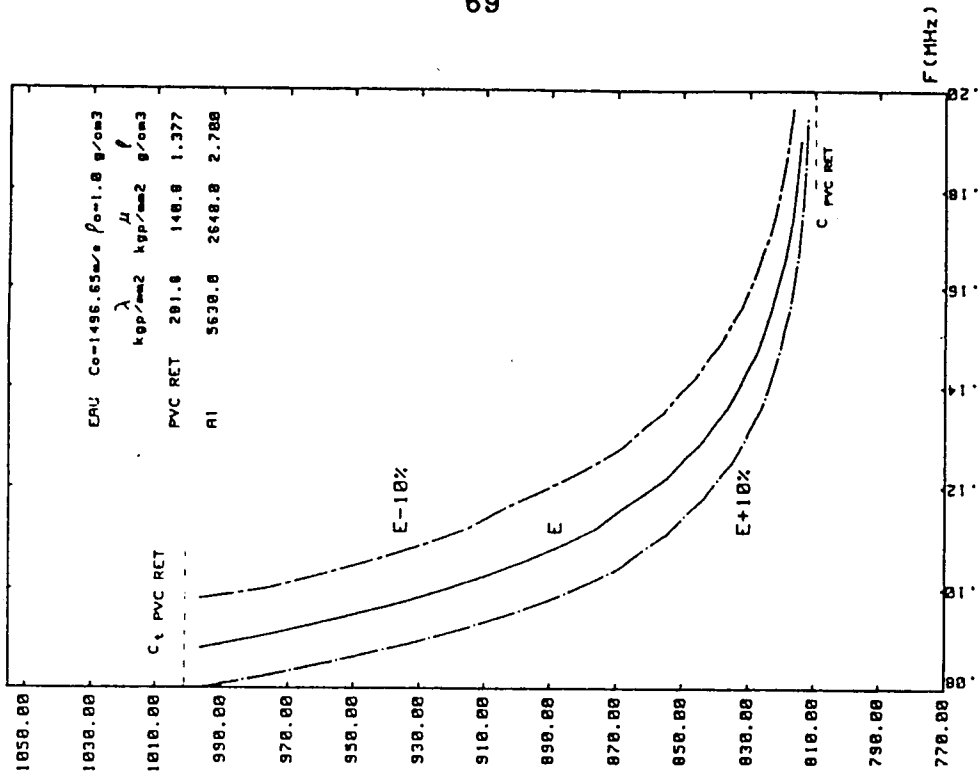


Fig 1d

Dispersion de vitesse d' O.S.S. pour différentes valeurs du paramètre C_1 ou C_2 de la couche

EAU / PVC Réticulé / Al

∞ ; 4000 μ m ; ∞

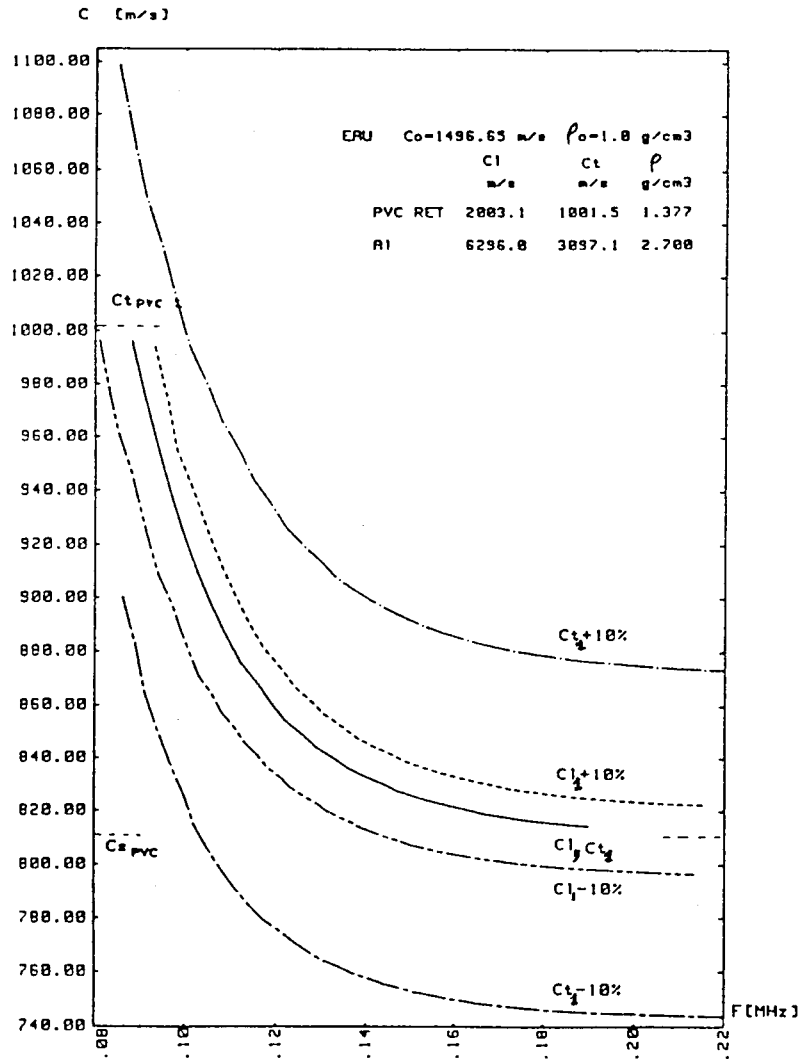


Fig 2a

Dispersion de vitesse d' O.S.S. pour différentes valeurs du paramètre ρ_1 de la couche

EAU / PVC Réticulé / Al

∞ ; 4000 μ m ; ∞

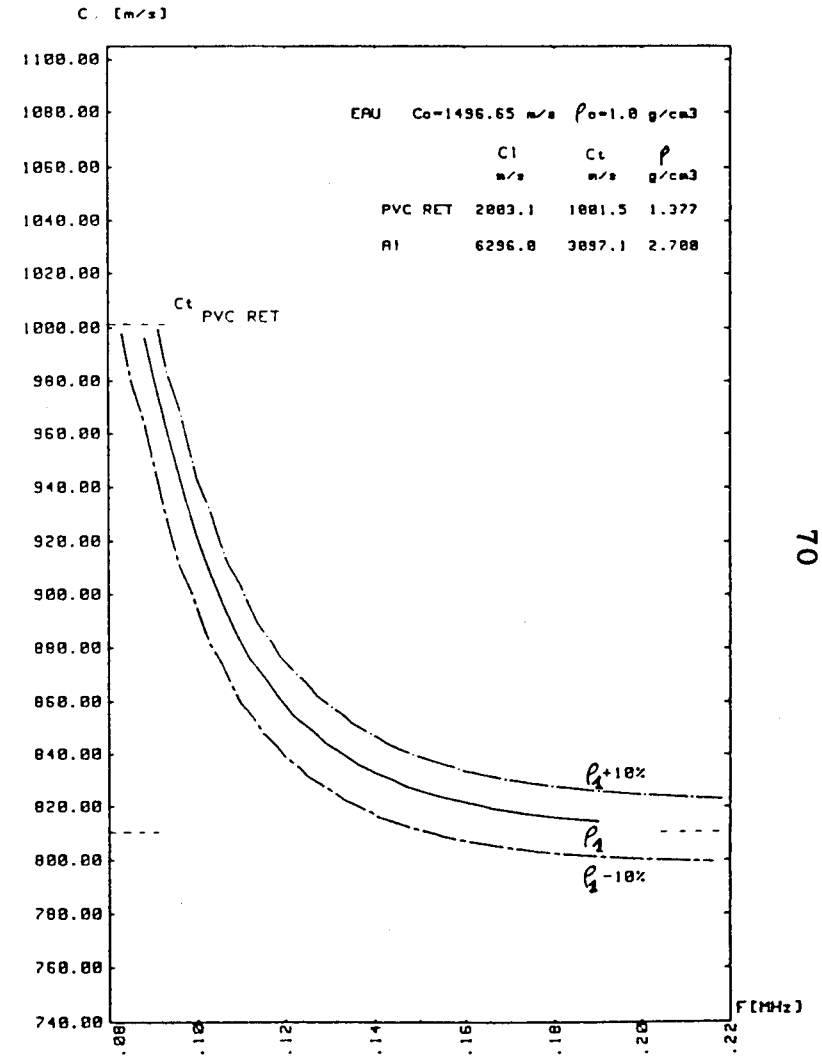


Fig 2b

Notons que, si cette analyse a un sens algorithmique, le sens physique d'une telle démarche n'est pas évident (ainsi il est peu "physique" d'imaginer une variation de C_t (qui implique des variations de μ et/ou ρ) à C_l constant (C_l dépendant aussi de μ et ρ). Une conséquence en est que suivant le groupe de paramètres l'influence de ρ est différente.

Enfin, quant au choix des paramètres d'identification, il est préférable d'adopter le groupe (C_{li} , C_{ti} , ρ_i , E_i) plutôt que (λ_i , μ_i , ρ_i , E_i) : les ordres de grandeur numériques, en MKS, du premier étant plus comparables entre eux que ceux de second (§ 2.1). Un essai d'identification par le second groupe (coefficients de Lamé et ρ) a d'ailleurs montré l'apparition de difficultés dès que l'on cherche à restituer deux paramètres simultanément.

3.2 Fiabilité de la méthode

Nous avons souligné plus haut que l'algorithme de gradients conjugués ne pouvait donner de solution parfaite puisqu'il s'exécute sur un petit nombre de points, avec des développements limités au premier ordre, pour des fonctions qui ne sont pas, comme il est souhaitable, quadratiques. On peut toutefois apprécier le degré de confiance à attribuer à cette procédure dans un processus "self-consistant" sur modèle pseudo-expérimental en adoptant comme valeurs initiales de la recherche les valeurs exactes connues (!). L'écart observé sur les valeurs finales mesure la fiabilité de la méthode et permet de chiffrer son incertitude intrinsèque.

L'étude a été menée sur le système H₂O / PVC/Al, en adoptant 8 points de référence (*), utilisant le groupe de paramètres (C_l , C_t , ρ , E) relatifs au PVC dont on cherche successivement l'identification individuelle ou par groupes de 2, 3 ou 4 éléments dans toutes les combinaisons possibles, et à nombre maximum d'itérations égale à 2NPID (**), fixé ou limité à l'obtention d'une distance $D < 0,25$ (m/s)².

On trouvera (tableau2) l'ensemble des résultats précisant les valeurs et les taux de variations ϵ_{pi} initiaux et finals des paramètres, la distance D en (m/s)² et l'incertitude intrinsèque (en %). Bien sûr dans chaque cas tous les paramètres non cherchés de la couche et du substrat gardent leurs valeurs exactes.

(*) En théorie, un nombre de points égal au nombre de paramètres à identifier suffit pour résoudre un système d'équations linéaires ou non linéaires.

(**) NPID : Nombre de paramètres à identifier pendant le calcul.

On constate que l'incertitude intrinsèque reste toujours faible ($<$ ou $\ll 0,5\%$), sauf dans le cas (C_1, ρ) dont les variations relatives restent très limitées. Dans ce processus à nombre fixé d'itérations la distance obtenue entre le modèle et la réalité reste acceptable, le plus souvent inférieure à $0,25 \text{ (m/s)}^2$.

Enfin il va sans dire que l'identification de plusieurs paramètres à pas relatif de variation constant pour chacun d'eux donne des résultats moins satisfaisants qu'en utilisant des pas pondérés variables avec le rang d'itération.

De toute façon la validité de l'algorithme adopté pour la résolution du problème inverse semble établie.

Nombre de param. N	Paramètres à identifier	Valeurs de départ	Taux de variation initial $\varepsilon_i(\%)$	Valeurs finales	Taux de variation final $\varepsilon_f(\%)$	Distance finale $D_f(m/s)^2$	Ecart à la valeur réelle (en %)	
1	C_l C_t ρ E	Valeurs réelles	1,0	2007,8 1002,0 1381 3992	1,00	0,41 0,54 0,45 0,28	0,23 0,05 0,30 -0,20	
2	C_l	$C_l = 2003,1$ (m/s)	1,0	2023,6	0,34	0,19	1	
	C_t		0,4	999,0	0,39		-0,25	
	ρ		0,8	2043,0	-0,3		2,	
	E		1,0	1348	-0,4		-2,1	
	C_l	$C_t = 1001,5$ (m/s)	1,0	1996,3	1,0	0,21	-0,34	
	E		-0,6	3982	-0,7		-0,45	
	C_t		0,3	1002,0	0,3		0,05	
	ρ		1,0	1377,2	0,4		0,015	
3	C_l	$\rho = 1377$ (kg/m ³)	-0,6	1001,6	0,12	0,31	0,001	
	E		1,0	3993	-0,13		-0,2	
	ρ		1,0	1372	1,0		-0,36	
	E		-0,5	3983	-0,3		-0,4	
	C_l C_t ρ E	E=4000 (μm)	0,8	2014,7	-0,20	0,18	0,6	
			C_t	0,3	999,2		-0,02	-0,2
			ρ	1,0	1384		-0,15	0,5
			E	1,0	2005,8		-0,08	0,1
C_l C_t ρ E		0,4	1001,0	-0,04	0,23	-0,05		
		E	-0,6	3992		0,04	0,2	
		C_l	0,8	2002,3		0,23	0,21	-0,04
		ρ	1,0	1374		0,42	-0,2	
C_l C_t ρ E		E	-0,49	3985	-0,10	-0,4		
		C_t	0,31	1000,8	-0,01	0,21	-0,07	
		ρ	1,0	1379	-0,06		0,1	
		E	-0,49	3990	0,08		-0,25	
4	C_l C_t ρ E	0,83	2005,4	0,23	0,23		0,12	
		0,32	1000,8	0,04		-0,07		
		1,0	1378	0,20		0,07		
		0,52	3993	-0,08		-0,18		

Tableau 2 : Stabilité de l'algorithme – Test d'auto-cohérence de la méthode.

3.3 Influence du choix des valeurs initiales et du nombre de paramètres. Multiplicité des solutions

Il nous reste à aborder le problème inverse dans des conditions plus réalistes, avec des valeurs de départ "inconnues" dont l'écart par rapport aux vraies valeurs a été choisi de +10% pour un paramètre unique et de +5% dans les cas d'identifications simultanées (2, 3 ou 4 paramètres), les paramètres constants restant fixés aux valeurs vraies.

Le test d'arrêt reste le même que ci-dessus: distance $D < 0,25 \text{ (m/s)}^2$ et en tout cas nombre d'itérations limité au double du nombre de paramètres cherchés.

Les résultats obtenus consignés (tableau 3) avec la même présentation que ci-dessus appellent les commentaires suivants:

-1 *paramètre cherché*: écart final minime par rapport aux valeurs réelles.

-2 *paramètres cherchés*: résultats assez bons au moins à 1% près sauf pour les composantes à taux de variation élevés C_1 et ρ des couples (C_1, C_t) , (C_t, ρ) .

-3 *paramètres*: le triplet (C_1, C_t, ρ) donne des résultats meilleurs que les autres; pour certains triplets (et le quadruplet) les écarts à la valeur réelle peuvent même croître (>5%) pour certains paramètres bien que le plus souvent la distance D soit très satisfaisante.

Cette multiplicité des solutions est aussi observée dans une recherche par quadruplet avec un écart initial de $\pm 10\%$ par rapport aux valeurs réelles (tableau 4) dont les résultats sont à vrai dire médiocres et divergents alors que le test de distance et donc l'ajustement des points calculés sur la courbe pseudo-expérimentale (fig 3) sont bons.

Il convient donc comme nous l'avons suggéré de mettre quelques "contraintes" dans l'exécution de l'algorithme.

Nombre de param. N	Paramètres à identifier	Valeurs de départ	Taux de variation initial $\varepsilon_i(\%)$	Valeurs finales	Taux de variation final $\varepsilon_f(\%)$	Distance finale $D_f(m/s)^2$	Ecart à la valeur réelle (en %)	
1(*)	C_l	2203,1		2008,1		0,41	0,25	
	C_t	1101,5		1002,0		0,54	0,05	
	ρ	1515,0	1,0	1381	1,00	0,56	0,30	
	E	4400,0		3991		0,34	-0,23	
2(**)	C_l	$C_l = 2103,1$ (m/s)	1,0	2078,2	1,00	2,0	3,75	
	C_t		0,3	993,1	0,20		-0,85	
	C_l		0,99	2020,7	0,94	0,33	0,88	
	ρ		1,00	1367	1,00	-0,73		
	C_l		1,00	1997,9	1,00	0,23	-0,26	
	E		-0,81	3985	-0,44	-0,39		
	C_t	$C_t = 1051,5$ (m/s)	0,26	993,0	0,24	0,68	-0,85	
	ρ		1,00	1431	1,00	3,9		
	C_t		-0,23	1004,1	-0,07	2,43	0,26	
	E		1,00	4022	0,05	-0,5		
	ρ		1,0	1370	1,0	0,23	-0,5	
	E		-0,82	3979	-0,78	-0,5		
3(**)	C_l	$\rho = 1446$ (kg/m ³)	0,85	2030,9	0,93	0,43	1,4	
	C_t		0,24	995,7	0,23		-0,56	
	ρ		1,00	1392	1,00		1,0	
	C_l		E=4200 (μm)	1,00	2129,7	1,00	0,1	6,3
	C_t			0,27	992,0	0,21		-0,95
	E			-0,94	4059	-0,71		1,5
	C_l	1,00		2040,0	0,97	0,24	1,8	
	ρ	0,997		1349	0,997		-2	
	E	-0,78		3997	-0,77		0,07	
	4(**)	C_t		0,24	993,0	0,23	1,56	-0,85
		ρ		1,00	1462	1,00		6,2
		E		-0,83	4064	-0,78		1,6
C_l		0,87		2116,5	1,00	0,21	5,7	
C_t		0,23		984,8	0,2		-1,7	
ρ		1,00		1452	0,95		5,5	
E	-0,78	4101	-0,68	2,5				

Tableau 3: Identification d'un ou plusieurs paramètres de la couche

(*) Valeurs initiales à +10% des valeurs réelles

(**) Valeurs initiales à +5% des valeurs réelles.

Identification des paramètres C_l , C_t , ρ et E de la couche (eau/PVC/Al)

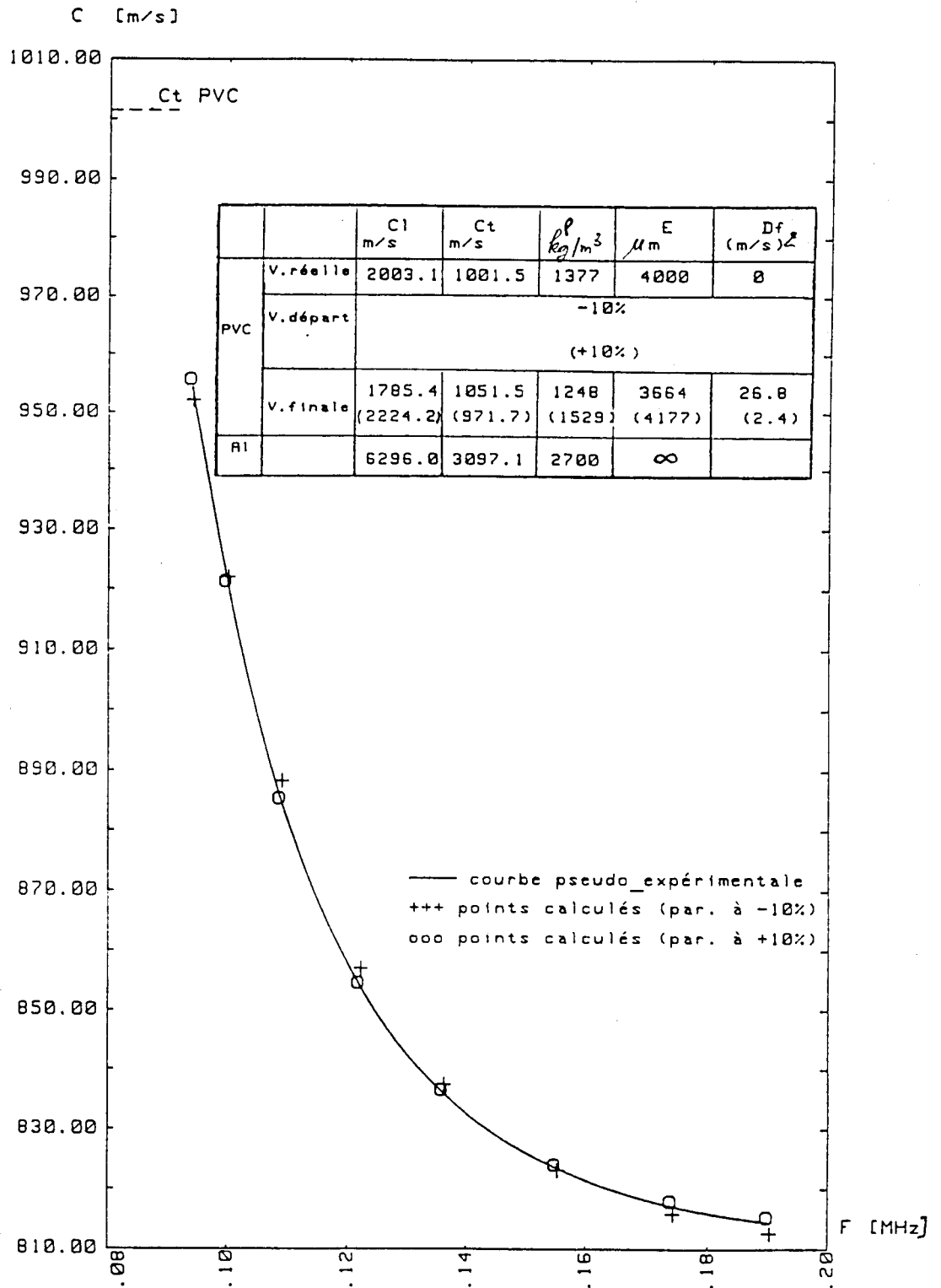


Fig 3

Nombre de param. N	Paramètres à identifier	Valeurs de départ	Taux de variation initial $\varepsilon_i(\%)$	Valeurs finales	Taux de variation final $\varepsilon_f(\%)$	Distance finale $D_f(\text{m/s})^2$	Ecart à la valeur réelle (en %)
4	C_l	2203,4	0,85	2224,2	0,97	0,3	11
	C_t	1103,7	0,23	971,7	0,18		-3
	ρ	1515	1,00	1529,4	1,00		11,1
	E	4400	-0,78	4177,1	-0,65		4,4
	C_l	1802,8	0,90	1785,4	0,60	3,35	-10,9
	C_t	901,4	0,25	1051,5	0,33		5
	ρ	1240	1,00	1247,8	1,00		-9,4
	E	3600	-0,85	3663,7	-0,85		-8,4

Tableau 4: Identification simultanée des 4 paramètres pour des valeurs initiales à $\pm 10\%$ des valeurs réelles.

3.4 Choix raisonné des valeurs initiales: esquisse d'une procédure d'identification

Il importe manifestement que le choix des valeurs initiales de départ soit aussi "réaliste" que possible pour obtenir un très bon ajustement final.

L'étude précédente de la sensibilité (§3.1) fournit à cet égard des indications précieuses.

1. En prenant un point expérimental à fréquence très basse on obtient une valeur C tendant vers C_t qui est estimée.
2. On choisit $C_l = 2C_t$.
3. La densité ρ est estimée par les coordonnées du point à fréquence la plus élevée (asymptotique) par résolution de l'équation de Stoneley-Scholte pour un système à deux milieux semi-infinis (H_2O et PVC).
4. L'épaisseur est cherchée à partir des valeurs précédentes par l'algorithme des gradients conjugués appliqué au point de fréquence la plus basse pour lequel la sensibilité à ce paramètre est maximale (tableau 1)

5. On affine alors le choix de la densité ρ qu'on minimise de $n\%$. Il apparaît en effet que toute évaluation par défaut de C_t (ce qui est le cas ici) entraîne normalement une erreur par excès de ρ .

$$\text{Ceci ressort des relations: } C_1 = \left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2}; C_t = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}$$

$$\rho(C_1^2 - 2C_t^2) = \lambda$$

Ce paramètre λ étant donné pour un milieu (et de toute façon peu actif sur C), la dérivée logarithmique à λ constant de cette équation donne:

$$\frac{\delta \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = -2 \frac{\delta C_t}{C_t} \text{ quand } C_1 = 2C_t.$$

Par ailleurs, consultant le tableau 3 sur les écarts obtenus dans les déterminations simultanées de C_t et ρ , il apparaît un rapport moyen sur les cas observés

$$\frac{\delta \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = -4,2 \frac{\delta C_t}{C_t}.$$

Nous avons "exagéré" cette tendance en minimisant ρ de 6%. Les résultats obtenus à partir de ce choix apparaissent au tableau 5.

Nombre de param. N	Paramètres à identifier	Valeurs de départ	Taux de variation initial $\varepsilon_i(\%)$	Valeurs finales	Taux de variation final $\varepsilon_f(\%)$	Distance finale $D_f(m/s)^2$	Ecart à la valeur réelle (en %)	
4	a)	C_1	1992,4	0,89	2011,7	0,88	0,19	0,43
		C_t	996,2	0,23	1000,7	0,23		-0,08
		ρ	1361,0	1,00	1373,1	1,00		-0,28
		E	4044,0	-0,84	3989,9	-0,78		-0,25
	b)	C_1	idem	0,87	2007,6	0,86	0,23	0,23
		C_t		0,24	999,4	0,24		-0,21
		ρ		1,00	1373,1	1,00		-0,28
		E		-0,75	4001,2	-0,71		0,03

Tableau 5: Identification simultanée par choix particulier des valeurs initiales:
 a) Avec 8 points pseudo-expérimentaux
 b) Avec 5 points pseudo-expérimentaux

Les résultats obtenus apparaissent presque aussi satisfaisants que ceux de l'étude de fiabilité avec une légère amélioration quand le nombre de points passe de 8 à 5.

Le problème inverse semble donc soluble dans des conditions satisfaisantes à partir de la courbe de dispersion de célérité des O.S.S.: toutefois l'étude d'un milieu homogène nécessite, déjà, de prendre certaines précautions.

CHAPITRE IV: *RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE POUR UN MILIEU A GRADIENTS DE PROPRIETES*

Nous avons étudié plus haut la caractérisation d'une couche de PVC homogène. Nous visons ici le même objectif pour un milieu PVC à degré de réticulation variable, dont les célérités d'ondes longitudinales et transversales varient avec la profondeur, baignant dans l'eau et reposant sur un socle d'aluminium, en partant de la dispersion de célérités d'ondes de Stoneley-Scholte (O.S.S.).

Ces travaux ont été menés en liaison avec le laboratoire de l'ICPI (Lyon) et en plusieurs étapes au fur et à mesure de l'acquisition des résultats expérimentaux. De ce fait, deux modélisations successives, à un ou deux profils linéaires de célérités d'ondes de volumes, ont été étudiées.

Les courbes de dispersion des ondes de Stoneley-Scholte n'étant pas expérimentalement connues, nous avons été obligés dans chaque cas de les calculer par résolution du problème direct obtenant au départ, faute de mieux, une courbe baptisée "pseudo-expérimentale" sur laquelle sera basée la restitution (problème inverse).

I. Système monopofil

1. Caractéristiques du système

Construit et étudié par le laboratoire de l'ICPI (Lyon), il est constitué d'une lame de PVC à réticulation variable (densité $\rho = 1\,377\text{ kg/m}^3$, épaisseur $E = 10\text{ mm}$) intercalée entre un socle d'aluminium et une couche d'eau supposés semi-infinis. Les mesures [28] établissent qu'on peut adopter pour le PVC un profil linéaire de répartition des célérités d'ondes de volume longitudinales C_l et transversales C_t avec la profondeur, avec la condition $C_l = 2 C_t$.

Le problème est discrétisé en modélisant la lame de PVC en sous-couches de nombre N variant de 3 à 10. S'il peut paraître logique d'attribuer aux couches les caractéristiques mécaniques de leurs plans médians, il est préférable, en fait, d'adopter des valeurs correspondant à des points "glissants" (fig 1) dans les épaisseurs des couches successives, suivant la loi :

$$C_{ti} = C_{li}/2 = A + B E (i-1)/(N-1) \quad i \in [1, N] \quad (44)$$

où i désigne le rang de la couche à compter de l'eau, avec $A = 884$ m/s ; $B = 35,5$ m/s/mm constants dans la gamme des fréquences étudiées (50 kHz $< F < 1$ MHz).

Les couches extrêmes ont ainsi les caractéristiques de leurs plans supérieur ou inférieur, ce qui fournit une courbe de dispersion dont les valeurs en BF et en HF sont insensibles au choix de N .

On adopte par ailleurs : $C_0 = 1\,496,65$ m/s ; $\rho_0 = 1000$ kg/m³ ;
 $C_{tAl} = 6\,296$ m/s, $C_{lAl} = 3\,097,1$ m/s ; $\rho_{Al} = 2\,700$ kg/m³.

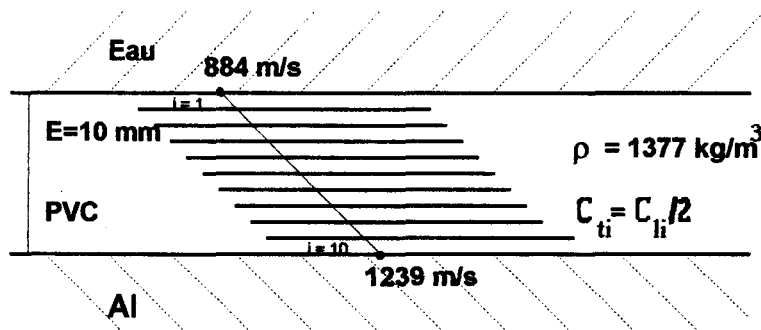


Fig 1: Système étudié

2. Résolution du problème direct [17,26]

Suivant des méthodes exposées au chapitre I nous calculons la courbe de dispersion de célérité des O.S.S. dont la forme (fig 2) dépend du choix de N mais évolue entre des limites fixées par la seule première couche : célérité des ondes transversales C_{t1} de la face supérieure en BF et célérité asymptotique égale à celle des ondes de Stoneley-Scholte C_1 eau – couche supérieure, en HF.

De cette courbe nous ne retiendrons qu'un certain nombre N_e ($N_e = 8$ pour un modèle à $N = 3$ couches ; $N_e = 4$ pour $N = 10$) de valeurs régulièrement espacées jouant pour la suite le rôle de points "pseudo-expérimentaux" d'identification du matériau et dont les valeurs sont précisées (Tableau 1).

On voit (fig.2) un tel choix pour $N_e = 8$.

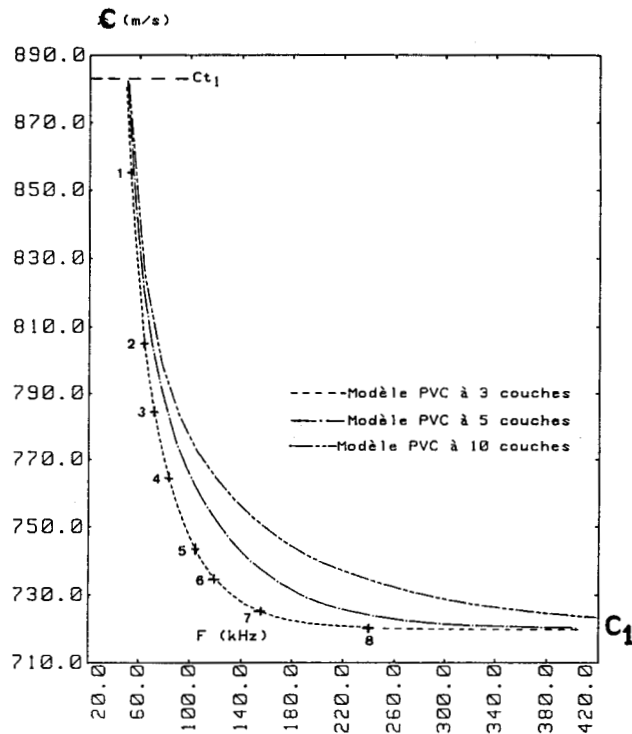


Fig.2 : Dispersion de célérité en fonction de la fréquence

N° de points	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4
Célérité (m/s)	854,6	804,9	784,8	764,4	744,0	734,6	724,6	720,3	799	777,2	752,7	744,9
Fréquence (kHz)	53	64	72	84	104	120	158	248	78	106	149	177

a) b)

Tableau 1: Points pseudo-expérimentaux des modèles

a) modèle à 3 couches; b) modèle à 10 couches.

3. Evaluation non destructive du PVC : problème inverse

3.1. Conditions de calcul

La courbe de dispersion n'étant connue que par les valeurs discrètes ci-dessus définies, on cherche à retrouver les caractéristiques – célérités longitudinales C_{lj} et transversales C_{tj} – des N couches du modèle adopté, les épaisseurs étant fixées et la densité uniforme connue. Il y a donc au plus $2N$ inconnues.

La recherche est menée à l'aide de l'algorithme des gradients conjugués en fixant par le choix des coefficients A et B (44) des valeurs arbitraires "de départ" aux inconnues à identifier.

Le critère d'ajustement est celui du chapitre III § 1.1.:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{N_e} (V_{ei} - V_{ci})^2}{N_e} \quad (45)$$

Il exprime l'écart quadratique moyen entre les célérités "expérimentales" V_{ei} et calculées V_{ci} des N_e points d'identification et permet de juger la qualité de l'évaluation.

Les propriétés particulières du matériau nous ont incité à introduire éventuellement dans l'algorithme la *contrainte* (c) $C_1 = 2 C_t$ réduisant le nombre d'inconnues de moitié ou à imposer, de plus, en cours de calcul le respect d'un *profil linéaire* (cp) de célérité avec la profondeur.

3.2. Résultats obtenus

3.2.1 Stabilité de l'algorithme

Adoptant au départ les valeurs vraies, celles-ci sont retrouvées à mieux que 0,5% (et souvent à quelques 10^{-4} près) avec des écarts $D < 0,2 \text{ (m/s)}^2$, les résultats étant meilleurs pour $N = 10$ couches, même si le nombre N_e de points d'identification est réduit à 3 ou 4. Les différents essais sont récapitulés au tableau 2. Les numéros des points renvoient au tableau 1.

Condition du calcul	Nbre de couches	N° des pts expérim.	A départ en m/s	B départ m/s/mm	Préc. C1. en %	Préc. Cn en %	D (m/s) ²	Temps (s)	
Sans Ctr.	3	1 à 8	valeur exacte	valeur exacte	0,04	0,01	0,15	73	<1>
	10	1 à 4			0,09	0,13	0,02	928	<2>
Avec Ctr.	3	1 à 8			0,2	0,5	0,2	55	<3>
	10	1 à 4			0,02	0	0,02	542	<4>

C1 : 1ère couche identifiée

Cn : dernière couche identifiée ou couche présentant l'erreur maximale

Tableau 2: Stabilité de l'algorithme

3.2.2. Détermination de A

Les limites de dispersion ne dépendant que de la première couche (§2), on identifie $A = C_{11}$ (44) en adoptant un système PVC simplifié monocouche d'épaisseur totale E. Partant de valeurs de A éloignées de la valeur vraie, on retrouve celle-ci à 0,01% près ($C_{11} = 2C_{11}$) sous réserve de n'adopter qu'un seul point d'identification en HF proche de l'asymptote horizontale.

3.2.3. Evaluation de B

Trois procédures ont été successivement utilisées en admettant A connu.

a) Sans contrainte et sans profil

Une fois les valeurs initiales imposées dans (44) ($A = 884 \text{ ms}^{-1}$, $B = 20$ ou 61 m/s/mm) on laisse le programme évoluer dans un modèle à 3 couches ($2N-1 = 5$ variables à identifier) avec $N_e = 5$ ou 8. Les précisions sur C_t se dégradent avec la profondeur de 0,25% à 4% ; C_1 est médiocrement identifié et le profil n'est guère restitué. Les résultats sont récapitulés au tableau 3.

Nbre de couches	N° des pts expérim.	A départ m/s	B départ m/s/mm	Préc. C1. en %	Préc. Cn en %	D (m/s) ²	Temps (s)
3	1-3-4-5-6	valeur	20	0,19	4	0,05	100
	1-3-4-5-6	exacte et	61	0,15	2	0,15	99
	1 à 8	fixe	20	0,25	3	0,235	173

Tableau 3 : Evaluation de B sans contrainte et sans profil

b) Avec contrainte et sans profil (c)

On procède en deux temps en imposant la condition $C_1 = 2 C_t$:

- Estimation de B : Avec $N = N_e = 3$, $B_{\text{initial}} = 20 \text{ m/s/mm}$ on obtient une valeur approximative de B ($B = 29,6 \text{ m/s/mm}$) à 17% près, qui servira de point de départ pour les calculs suivants.

- Identification finale : Avec $N = 10$ ($N-1 = 9$ variables à identifier), on montre qu'il est avantageux de réduire N_e à 2 car le temps de calcul est divisé par 5,5 sans préjudice sur la précision de détermination de C_t comprise entre 0,8 et 4,5% quand i croît. La restitution du profil est de qualité moyenne : l'erreur sur B étant de 6% ($N_e = 4$) à 9% ($N_e = 2$).

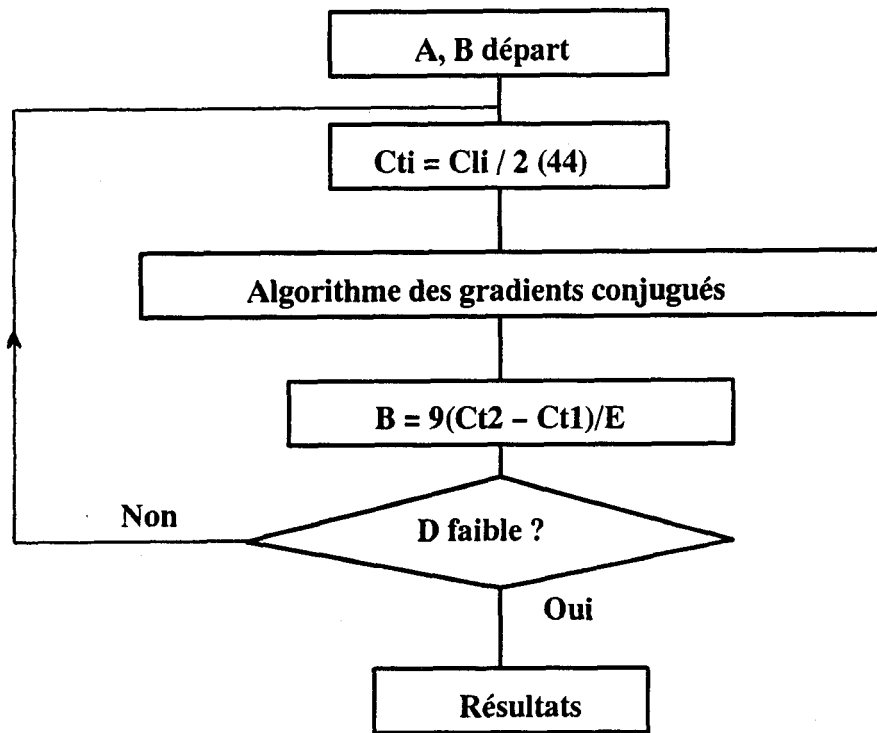
c) Avec contrainte et avec profil (cp)

On impose à chaque itération l'équation (44) définissant le profil pour suivre l'évolution de l'unique inconnue B par :

$$B = 9 (C_{t2} - C_{t1}) / E \quad (46)$$

d'où résulte par (44) la détermination temporaire des C_{1j} et C_{2j} .

Cette démarche peut être illustrée par l'organigramme suivant :



Les résultats sont regroupés au tableau 4.

N_e	N° pts	B départ m/s/mm	B trouvé m/s/mm	$(B_{\text{calc}} - B_{\text{vrai}}) / B_{\text{vrai}}$ Erreur sur B	D (m/s) ²	Temps (s)
7	1 à 7	61	35,353	-0,4%	0,020	279
6	1 à 6	55	35,353	-0,4%	0,020	208
6		10	35,355	-0,4%	0,020	235
3	2-4-6	61	35,452	-0,15%	0,007	176
3		10	35,448	-0,15%	0,007	136
1	2	10	35,429	-0,2%	Négligeable	51
1		20	35,428	-0,2%	"	40
1	4	10	35,585	+0,2%	"	44

Tableau 4: Evaluation de B avec contrainte et profil

Cette procédure autorise à adopter des valeurs initiales de B très éloignées de la réalité (de 10 à 60m/s/mm). On détermine la valeur finale de 0,15 à 0,2% près en réduisant jusqu'à $N_e = 1$ le nombre de points d'identification avec une diminution supplémentaire d'un facteur 5 du temps de calcul et l'obtention d'écarts D négligeables.

Conclusion

L'identification d'un système monoprofil est donc possible en deux étapes distinctes:

- détermination de A sur un système simplifié monocouche
- détermination de B où les résultats sont excellents si l'on impose un algorithme de restitution prenant en compte, à chaque stade, les propriétés spécifiques du système (profil de célérités linéaire et relation constante entre C_1 et C_t).

II. Système à double profil

1. Caractéristiques du système

Le système construit et étudié est identique à celui décrit précédemment (§ I.1.1) sauf que nous aurons, avec les notations précédentes :

$$C_l = A_l + B_l \frac{i-1}{N-1} E \quad i \in [1, N] \quad (47)$$

$$C_t = A_t + B_t \frac{i-1}{N-1} E \quad i \in [1, N] \quad (48)$$

les caractéristiques de chaque couche homogène étant celle d'un point glissant progressivement en profondeur (fig. 1).

Le PVC ayant servi à réaliser effectivement la maquette avait des caractéristiques différentes de celles du premier système. Nous adoptons donc :

$$A_l = 2027,1 \text{ m/s} \quad B_l = 106,6 \text{ m/s/mm}$$

$$A_t = 832,5 \text{ m/s} \quad B_t = 23,8 \text{ m/s/mm}$$

$$\rho = C_{te} = 1380 \text{ kg/m}^3$$

et pour les milieux extrêmes : $C_{Al} = 6350 \text{ m/s}$; $C_{tAl} = 2935 \text{ m/s}$; $\rho_{Al} = 2700 \text{ kg/m}^3$
 $C_o = 1500 \text{ m/s}$; $\rho_o = 1000 \text{ kg/m}^3$

2. Résolution du problème direct

Avec la méthode précédente, nous calculons la courbe de dispersion de célérité en fonction de la fréquence (fig. 3) dans une modélisation à $N=10$ couches.

Cinq points d'identification (tableau 5) sont choisis sur cette courbe et joueront le rôle de points "pseudo-expérimentaux". Nous avons déjà établi que l'augmentation du nombre de ces points ne fait que croître le temps de calcul dans la résolution du problème inverse sans bénéfice sur la précision d'identification des différents paramètres.

N°du point	1	2	3	4	5
C (m/s)	797,3	754,8	727,6	710,9	695,0
F (kHz)	55	75	115	184	555

Tableau 5– Points pseudo-expérimentaux

Dispersion de célérité d'ondes de Stoneley-Scholte sur modèle PVC à 2 gradients de célérité ($N = 10$).

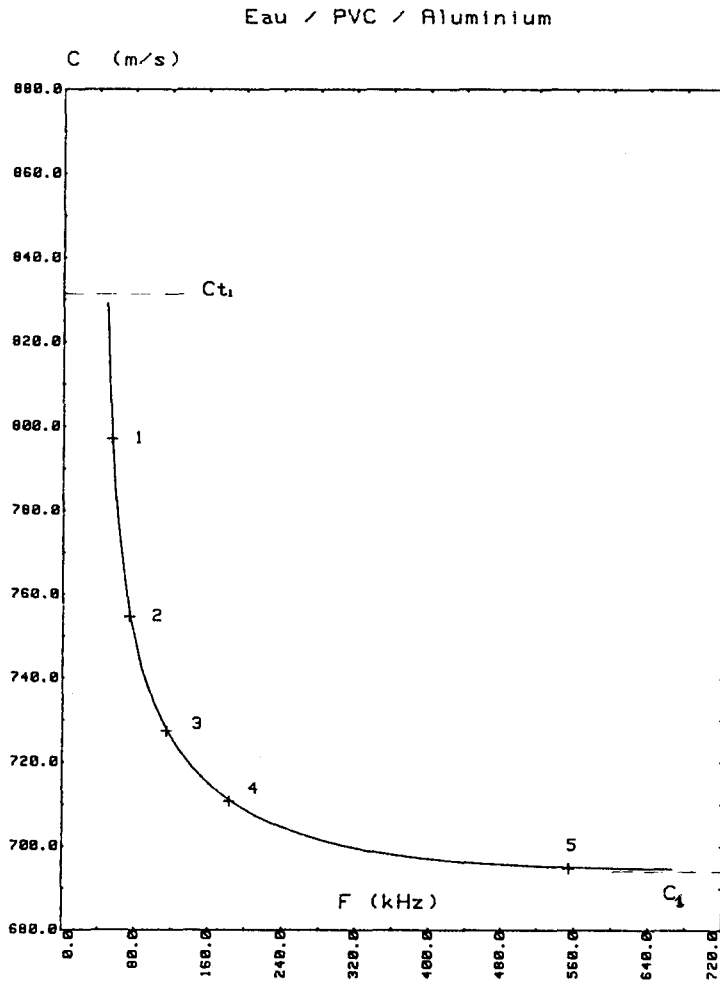


Fig 3

3. "Efficacité" des paramètres sur la courbe de dispersion

L'étude du chapitre précédent nous ont montré l'intérêt de connaître l'action des paramètres à identifier sur la courbe de dispersion dont la forme est affectée de façon très variable par leurs variations.

Les figures 4 et 5 permettent de comparer les efficacités des paramètres A et B pour des variations respectives de $\pm 10\%$ ou $\pm 20\%$.

Les termes longitudinaux sont peu (A_l) à pas du tout (B_l) efficaces tandis que les termes transversaux (A_t, B_t) créent de grands déplacements de la courbe de dispersion. Ceci semble suggérer que les termes A_l et B_l seront difficiles à identifier.

Sensibilité aux paramètres A_l, A_t dans le modèle ZAK à 2 profils linéaires.

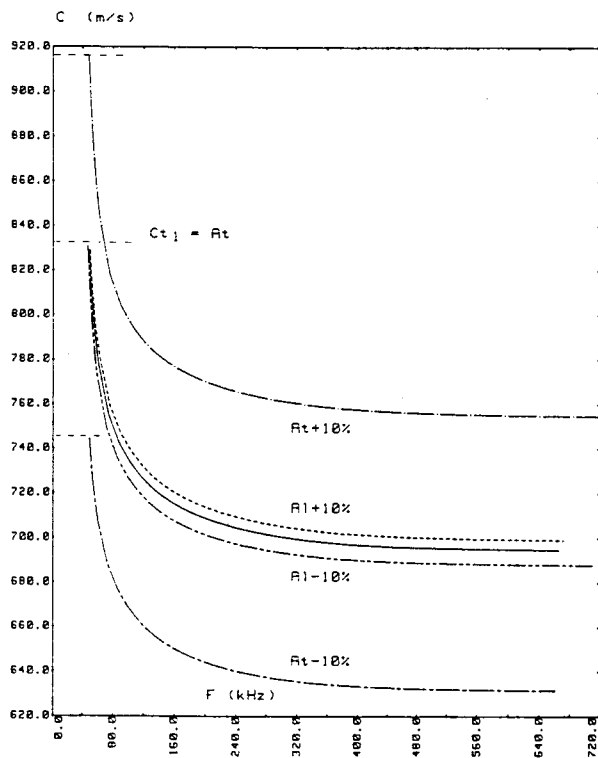


Fig 4

Sensibilité aux paramètres B_l, B_t dans le modèle ZAK à 2 profils linéaires.

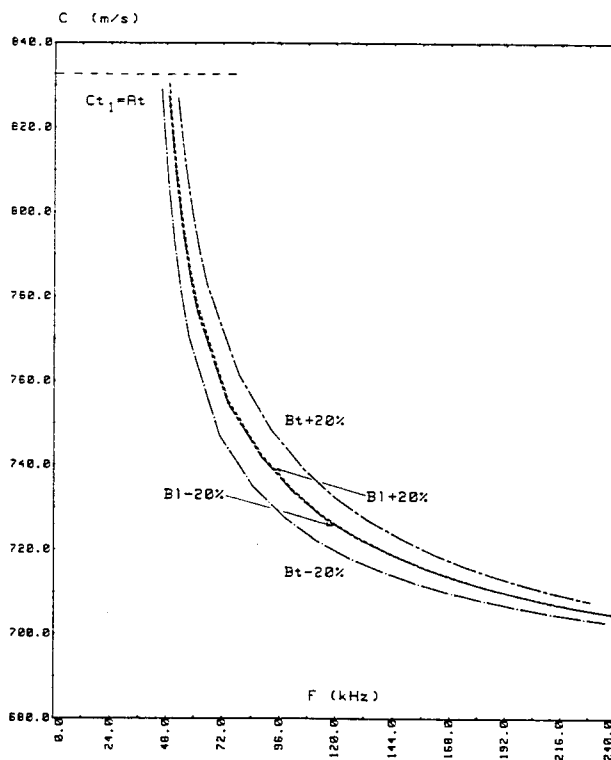


Fig 5

4. Evaluation non destructive du PVC : problème inverse

L'étude du cas précédent a établi l'intérêt d'imposer le respect des profils linéaires avec la profondeur en cours de calcul ; nous nous servons donc des relations inspirées de (46):

$$B_l = 9(C_{l2} - C_{l1})/E \quad \text{et} \quad B_t = 9(C_{t2} - C_{t1})/E \quad (46')$$

Cette procédure réduit à 4 le nombre de paramètres à identifier. Le critère d'ajustement (45) restera le même.

4.1. Stabilité de l'algorithme (tableau 6)

Adoptant au départ les valeurs vraies des coefficients A et B, on vérifie avec quelle précision relative elles sont retrouvées suivant les conditions adoptées :

- choix des grandeurs fixes et variables (colonnes 1 et 2),
- nombre des points pseudo-expérimentaux (colonne 3);

la qualité de l'ajustement (fournie par la "distance" D) et le temps de calcul étant précisés dans chaque cas.

L'algorithme est stable à mieux de 2 % près sauf quand B_1 varie seul. Ce résultat est facile à comprendre (cf. § I.3) puisque la courbe de dispersion est pratiquement insensible à ce paramètre.

Grandeur (s) fixe(s)	Grandeur (s) variable(s)	Pts pseudo-expérimentaux	$\Delta A_1/A_1$ (%)	$\Delta B_1/B_1$ (%)	$\Delta A_t/A_t$ (%)	$\Delta B_t/B_t$ (%)	D (m/s) ²	Temps (s)	Commentaires
X	$A_1 B_1$ $A_t B_t$	1 à 4	0	0	0	+0,4	0,05	363	Très stable mais aucune variation sur C_1
$A_t B_t$	$A_1 B_1$	1 à 4	+0,5	+2	X	X	0,025	101	Moyennement stable
$A_1 B_1$	$A_t B_t$	2 et 4	X	X	0	-0,7	0,015	129	Stable
$A_1 A_t B_t$	B_1	2 et 4	X	+20	X	X	très petit	61	<i>Instable</i>
$A_1 B_1 A_t$	B_t	2 et 4	X	X	X	+0,6	0,01	72	Stable

Tableau 6: Stabilité de l'algorithme

4.2. Essai d'identification des coefficients A et B

De multiples essais ont été traités, qu'il serait fastidieux d'exposer ici, en généralisant les méthodes antérieures c'est-à-dire :

- détermination des termes A dans un système stratifié monocouche de PVC ayant les caractéristiques de sa face supérieure avec un point d'identification unique en HF,
- détermination des termes B dans une procédure avec profil et application des relations (46),

Il en résulte que :

- l'identification de A_1 (à 1,5 % près) ou de A_t (à 0,1% près) est possible si l'autre terme est connu ; leur détermination conjointe est impossible.

- celle de B_t est possible (si tout le reste est connu : ce qui est peu réaliste) et même si B_l est mal connu (ou négligé),
- celle de B_l est difficile ou impossible.

De ce fait, une procédure particulière "mixte" a dû être envisagée.

4.3. Détermination des paramètres

On accepte que la dispersion des O.S.S. est insuffisante pour résoudre tout le problème et qu'une détermination distincte de A_l est possible. On procède alors comme suit, à partir d'un A_l exact :

- détermination de A_t (par la méthode du système monocouche) à 0,01 % près. On en déduit $\alpha = A_l/A_t$,
- estimations successives de B_t ($B_{t \text{ initial}}$: arbitraire, $B_{l \text{ initial}} = \alpha B_t$) et B_l ($B_{l \text{ initial}} = \alpha B_{t \text{ estimé}}$),
- identifications successives de B_t ($B_{t \text{ initial}} = B_{t \text{ estimé}}$) et B_l ($B_{l \text{ initial}} = B_{l \text{ estimé}}$, $B_{t \text{ initial}} = B_{t \text{ final}}$ de la procédure antérieure).

Les résultats en sont donnés au tableau 7 où chaque ligne 1 à 4 correspond à une procédure complète caractérisée par la valeur $B_{t \text{ initial}}$ choisie, avec un ajustement D toujours meilleur que 0,4 (m/s)²

Les écarts des valeurs trouvées par rapport aux valeurs vraies montrent à l'évidence qu'il est impératif de partir de valeurs de B_t élevées.

Estimation de B_t points 1 et 4			Estimation de B_l points 1 et 2			Identification de B_t points 2 et 3			Identification de B_l points 1,2,3 et 4.			
B_t départ	B_t trouvé	écarts	B_l départ	B_l trouvé	écarts	B_t départ	B_t trouvé	écarts	B_l départ	B_l trouvé	écarts	
2 B_t	23,77	-0,13%	23,77 α	116,09	+8,9%	23,8	23,79	-0,04%	116,1	114,5	7,4%	<1>
1,5 B_t	24,15	-1,5%	24,15 α	94,37	-11,5%	24,1	23,98	0,76%	94,4	99,82	-6,4%	<2>
0,8 B_t	24,95	-4,8%	24,95 α	43,63	-59%	25	24,48	2,9%	43,6	66,91	-37%	<3>
0,5 B_t	25,35	6,5%	25,35 α	30,08	-72%	25,3	24,61	3,4%	30,1	61,5	-42%	<4>
1,85 B_t	23,9	0,4%	X	X	X	23,9	23,9	0,4%	107,2	106,9	0,3%	<5>

Tableau 7 – Identification de B_l et B_t pour différentes valeurs de B_t de départ.

L'inspection du tableau 7 montre que :

- 1^{ère} ligne - (Départ $2 B_t = 47,6$) que $B_{lintermédiaire}$ (116,09) décroît pour atteindre B_{lfinal} (114,53).

- 2^{ème} ligne : (départ $1,5 B_t = 35,7$) que, au contraire $B_{lintermédiaire}$ (94,37) croît pour atteindre B_{lfinal} (99,82).

Cela laisse penser qu'un départ intermédiaire donnerait une valeur plus stable à B_l initial = B_l estimé et probablement meilleure. Les écarts +7,4 % et -6,4 % calculables seulement si la vraie valeur de B_l est connue le confirment ici (mais cela est impossible dans une situation expérimentale).

Prenons comme valeur de départ :

$$B_t \text{ départ} = \alpha^{-1} \langle B_l \rangle \text{ avec } \langle B_l \rangle = (114,53 + 99,82)/2 = 107,18$$

en rappelant que : $\alpha = A_l/A_t = 2,435$

ce qui donne $B_t \text{ départ} = 44,02$ et on a bien $35,7 < 44,02 < 47,6$.

Avec cette valeur initiale l'identification donne la ligne suivante <5> du tableau 7. Ces résultats sont de qualité exceptionnelle.

III. Confrontation avec le modèle construit par l'ICPI

L'exploitation à l'ICPI (L.A.S.S.SO.) par la méthode de Wigner-Ville des mesures de célérités effectuées sur le modèle de fonds marins donne la célérité expérimentale de groupe C_g des O.S.S. (fig. 6) à mieux de 3 % près.

La comparaison (fig. 6) avec des valeurs C_g calculées à partir des paramètres expérimentaux définissant le milieu, majorés ou minorés de 5 %, s'avère très satisfaisante.

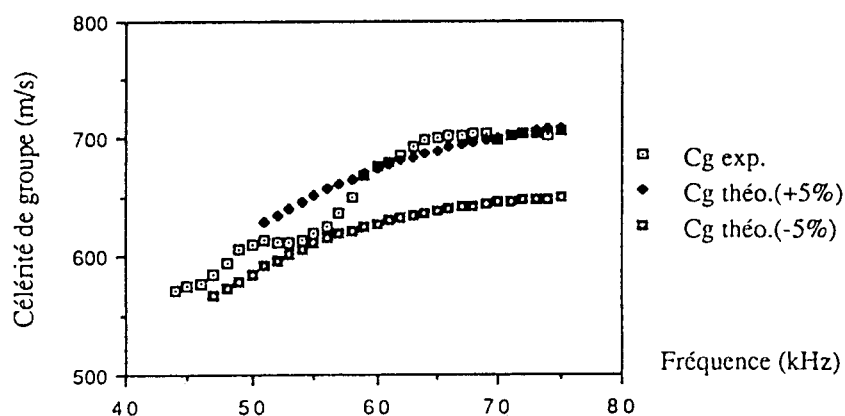


Fig 6 : Courbes théorique et expérimentale de dispersion de célérité de groupe

Toutefois pour apprécier notre restitution, il convient de passer de la célérité de groupe à la célérité de phase. La formule approchée suivante établie par J. Guilbot :

$$C_{\varphi} = \frac{C_{S1}}{\sqrt{1 - \left[\frac{F_C}{F}\right]^2 \left(1 - \left[\frac{C_{S1}}{C_{t1}}\right]^2\right)}} \quad (49)$$

avec $F_C = 48 \text{ kHz}$; $C_{t1} = 842,417 \text{ m/s}$; $C_{S1} = 702,586 \text{ m/s}$, fournit les points de mesure de la figure 7. Les points calculés le sont à partir des caractéristiques du matériaux (47) et (48).

L'erreur maximale dont est entachée C_{φ} n'excède pas 2 %. Les résultats comparatifs sont donnés à la figure 7.

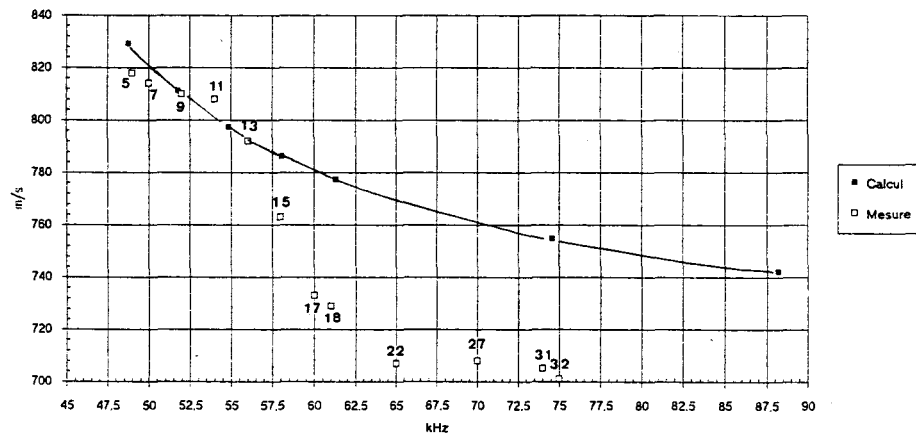


Fig 7 : Comparaison des célérités de phase mesurée et calculée

- Les points 1 à 4 n'ont pas été reportés car ils correspondent à des ondes de Stoneley-Scholte-Sézawa, ce qui laisse penser qu'elles sont excitables de la même manière que les O.S.S. (résultat expérimental intéressant).
- Les points 5 à 13 coïncident bien avec la courbe théorique.
- Les points 14 à 32, par contre, s'en éloignent beaucoup. Ils tendent trop rapidement vers une asymptote à peu près exacte : 700 m/s au lieu de 694,4 m/s (à 75kHz écart $\approx 8,5\%$).

La répartition des points semble indiquer une erreur systématique pouvant avoir plusieurs causes :

- mélange de deux signaux
- déphasage introduit par les transducteurs et non pris en compte.

Une autre série de mesures est envisagée où, par déconvolution, on éliminerait toute influence des transducteurs.

Les irrégularités de la courbe expérimentale ne nous ont pas incité à l'utiliser pour l'identification.

CONCLUSION

L'étude du problème direct a montré qu'il peut exister dans les milieux plans stratifiés à couches homogènes surmontées d'un fluide, plusieurs modes de vibration dont certains sont liés au nombre d'interfaces du système.

Ces modes, qu'ils soient de *Stoneley-Scholte*, de *Stoneley* ou de *Stoneley-Scholte-Sézawa*, paraissent de même nature physique bien que distincts par les expressions mathématiques qui les caractérisent. Les ondes à caractère Rayleigh existant dans une constitution analogue, sans fluide, ramènent aux mêmes conclusions. L'examen des courbes d'amplitudes et d'énergies à partir des valeurs de courbes de dispersion calculées établit leurs localisations respectives. Le mode de vibration de *Stoneley-Scholte* dépendant du fluide et du solide à toute fréquence est de ce fait unique.

A partir de l'algorithme de *Fletcher et Reeves* (ou des gradients conjugués) nous avons traité le problème inverse de restitution des caractéristiques du système stratifié, à n couches, à partir de quelques points de la courbe de dispersion.

Nous avons traité le cas de milieux homogènes monocouches et "stratifiés" quand leurs propriétés variaient linéairement avec l'épaisseur suivant un ou deux profils linéaires de célérité, le second cas ne pouvant être complètement résolu que si l'un des paramètres relatif aux célérités longitudinales est connu.

Dans tous les cas, la restitution se fait à mieux que le centième si la loi de profil est imposée dans l'algorithme du problème inverse, le coefficient de vitesse longitudinale suivant la profondeur étant difficile à évaluer en raison de sa faible efficacité sur la courbe de dispersion de célérité.

Une procédure d'identification a été mise au point pour obtenir ces résultats et ainsi nous n'avons jamais obtenu de solution parasite. Le paramètre présentant très peu d'influence sur la courbe de dispersion et difficile à identifier a cependant pu l'être à mieux que 0,3% grâce à cette procédure.

L'identification du substrat métallique présentant des vitesses d'ondes de volume très supérieures à celles existant dans le PVC est impossible: l'énergie acoustique présente dans le métal est négligeable. Cela correspond en géophysique à un socle rocheux (métal) surmonté de sédiment (PVC).

La répartition d'énergie pour les ondes de Stoneley–Scholte–Sézawa est tout autre, ce qui laisse à penser que ce type d'onde permettrait la solution de ce problème.

ANNEXE I: CAS D' ONDES NON DISPERSIVES DE STONELEY-SCHOLTE

Nous résumons ici les propriétés des ondes non dispersives d'interface entre deux milieux liquide et solide semi-infinis (O.S.S.) de caractéristiques respectives (ρ_0, C_0) , (ρ, C_l, C_t) .

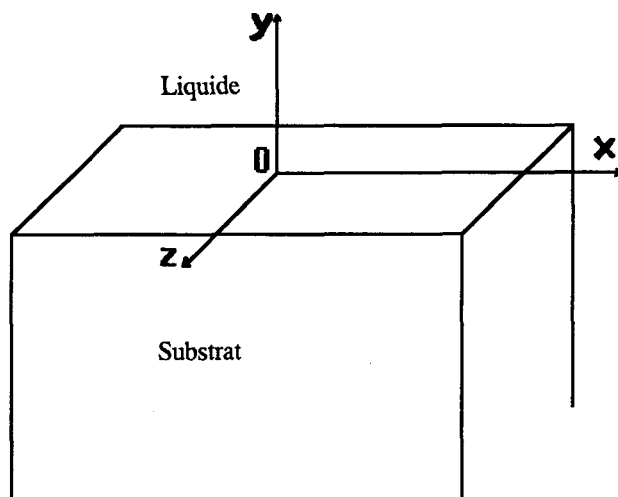


Fig 1: Interface fluide-solide.

1. Eléments théoriques

Ce modèle simplifié étant équivalent au modèle stratifié déjà étudié, par suppression des couches intermédiaires, le déterminant \mathcal{D} (tableau 2 - chapitre I) n'exprime plus que la continuité des déplacements normaux et des contraintes normales. Les termes B_1' et D_1' disparaissant dans le substrat (tableau 2: $n=0$), \mathcal{D} se réduit à un déterminant de rang 3 soutenu par les constantes d'intégration (non nulles) B_0', A_1', C_1' .

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} S_0 & S & Q^2 \\ \rho_0 C_0^2 & T & V \\ 0 & U & W \end{vmatrix} \equiv 0 .$$

avec

$$\begin{aligned} S_i &= P_i \sqrt{P_i^2 - 1}, & T &= -\lambda + 2\mu(P^2 - 1), \\ U &= 2\mu S, & V &= 2\mu Q \sqrt{Q^2 - 1}, & W &= \mu(2Q^2 - 1) \end{aligned}$$

dont l'expression développée n'est autre que l'équation de l'onde non dispersive de Stoneley-Scholte. Soit

$$4(1-\alpha^2)^{1/2}(1-l^2\alpha^2)^{1/2} - (2-\alpha^2)^2 = \frac{\rho_0}{\rho} \alpha^4 \frac{(1-l^2\alpha^2)^{1/2}}{(1-m^2\alpha^2)^{1/2}} \quad (34)$$

en posant: $\alpha = \frac{1}{Q} = \frac{C}{C_t}$, $l = \frac{C_t}{C_l}$, $m = \frac{C_t}{C_0}$;
 $l\alpha = \frac{1}{P} = \frac{C}{C_l}$, $m\alpha = \frac{1}{P_0} = \frac{C}{C_0}$.

Cette équation est obtenue par Maradudin [24] en déterminant les solutions à partir des potentiels de vitesses des unités de volume dans les milieux respectifs.

Celle-ci se transforme en *équation de Rayleigh* en l'absence de fluide ($\rho_0 = 0$).

$$\alpha^6 - 8\alpha^4 + 8(3-2l^2)\alpha^2 - 16(1-l^2) = 0. \quad (34')$$

Son second membre traduit donc la perturbation apportée par le liquide à l'onde de surface sur le solide. Nous en donnons plus loin des illustrations.

- De même les **composantes de vibration** dans les milieux se déduisent de (26,27) :
 – dans le fluide celles-ci restent inchangées

$$U'_0(y) = \left(\frac{k}{r_0}\right) \cdot V_0 e^{-r_0 y} \quad (26)$$

$$V'_0(y) = -V_0 \cdot e^{-r_0 y}$$

avec $r_0 = k(1 - C^2/C_0^2)^{1/2}$ et k le nombre d'onde ;

– dans le substrat, on obtient d'après (27) (sans considérations d'indices):

$$U(y) = kA e^{ry} + sC e^{sy} \quad (27)$$

$$V(y) = rA e^{ry} + kC e^{sy}$$

avec $r = k(1 - C^2/C_l^2)^{1/2}$; $s = k(1 - C^2/C_t^2)^{1/2}$, $(B = D = 0)$.

Les constantes d'intégration A et C peuvent être exprimées par rapport à la valeur V_0 de la composante perpendiculaire à l'interface puisque $V|_{y=0} = V'_0|_{y=0}$,

$$\text{soit } A = \frac{k^2+s^2}{r(k^2-s^2)} V_0, \quad C = -\frac{2k}{k^2-s^2} V_0 \quad \text{et}$$

$$U(y) = \frac{2k^2}{k^2-s^2} V_0 \left[\frac{s^2+k^2}{2kr} e^{ry} - \left(\frac{s}{k}\right) e^{sy} \right]$$

$$V(y) = \frac{2k^2}{k^2-s^2} V_0 \left[\frac{s^2+k^2}{2k^2} e^{ry} - e^{sy} \right].$$

- Enfin l'expression de l'énergie dans le fluide garde la forme simple (29') déjà obtenue,

$$W_f = \frac{\rho_0}{4} \frac{\omega^2 C^2}{C_0^2 - C^2} V_0^2 e^{-2r_0 y}.$$

sans se simplifier suffisamment dans le substrat (29):

$$W_s = \frac{\lambda}{4} \left[\frac{r^2-k^2}{k} \right]^2 A^2 e^{2ry} + \frac{\mu}{2} k^2 [Ae^{ry} + Ce^{sy}]^2 +$$

$$+ \frac{\mu}{2} \left[\frac{r^2 A e^{ry} + k^2 C e^{sy}}{k} \right]^2 + \frac{\mu}{4} [2r A e^{ry} + \left(\frac{s^2+k^2}{s}\right) C e^{sy}]^2$$

2. Illustrations

2.1. Influence du fluide sur la célérité des O.S.S.

Nous avons représenté l'écart relatif $\frac{C_0-C}{C_t}$ en fonction du rapport des densités $\frac{\rho_0}{\rho}$ (fig 2a et fig 2b) pour un double choix de paramètres C_l/C_t et C_0/C_t . On trouvera (fig 2b) les positions relatives à quelques matériaux solides – métaux ou plastiques – dont les caractéristiques mécaniques sont indiquées au tableau 1 (chap II).

On remarque que la célérité C_s des O.S.S. varie très peu quand $\frac{C_0}{C_t} < 0,5$ puisque C_0-C reste très faible, de sorte que pour les métaux, la célérité C est toujours voisine de celle C_0 du son dans le fluide qui impose le comportement de l'onde (Cf chap II). Pour les matériaux plastiques par contre où $\frac{C_0}{C_t} > 1$ la célérité C devient très inférieure à C_0 .

Variation relative de la célérité de l'O.S.S.
 en fonction du rapport des masses volumiques
 fluide/solide ρ_0/ρ

$$\sqrt{2} \leq \frac{C_1}{C_t} \leq 4$$

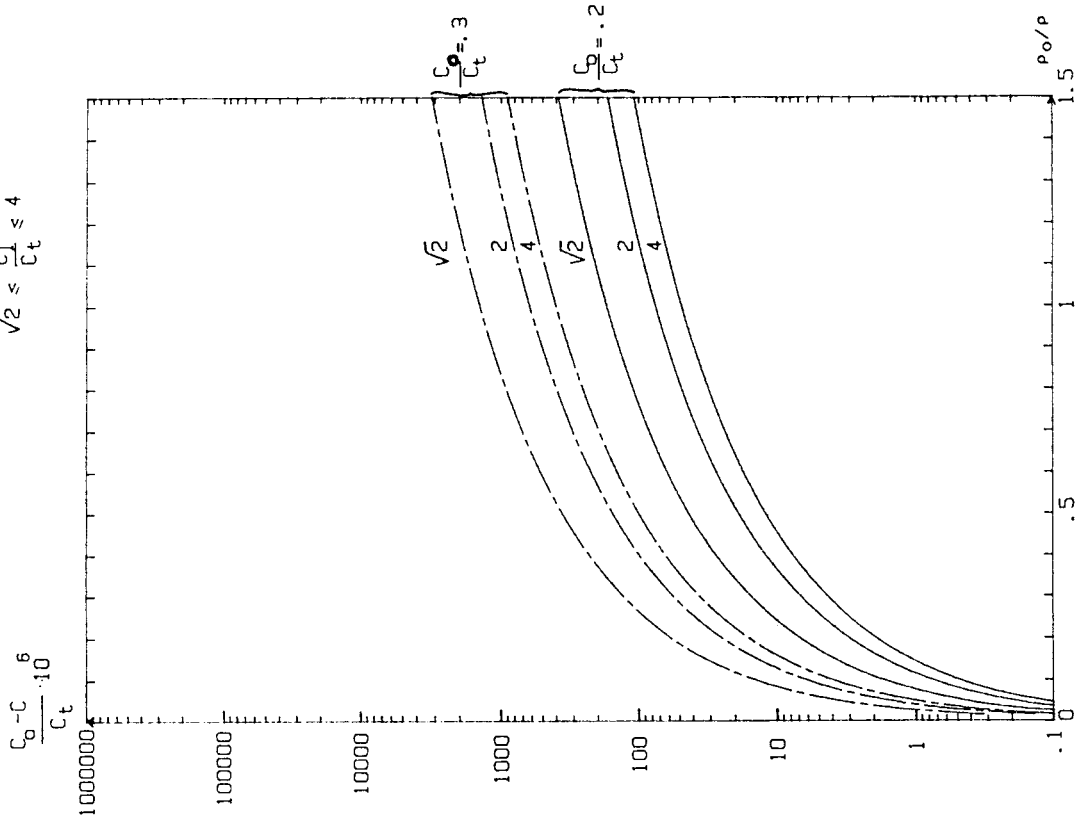


Fig 2a

Variation relative de la célérité de l'O.S.S.
 en fonction du rapport des masses volumiques
 fluide/solide ρ_0/ρ

$$\frac{C_1}{C_t} = 2 : .1 \leq \frac{C_0}{C_t} \leq 1.5$$

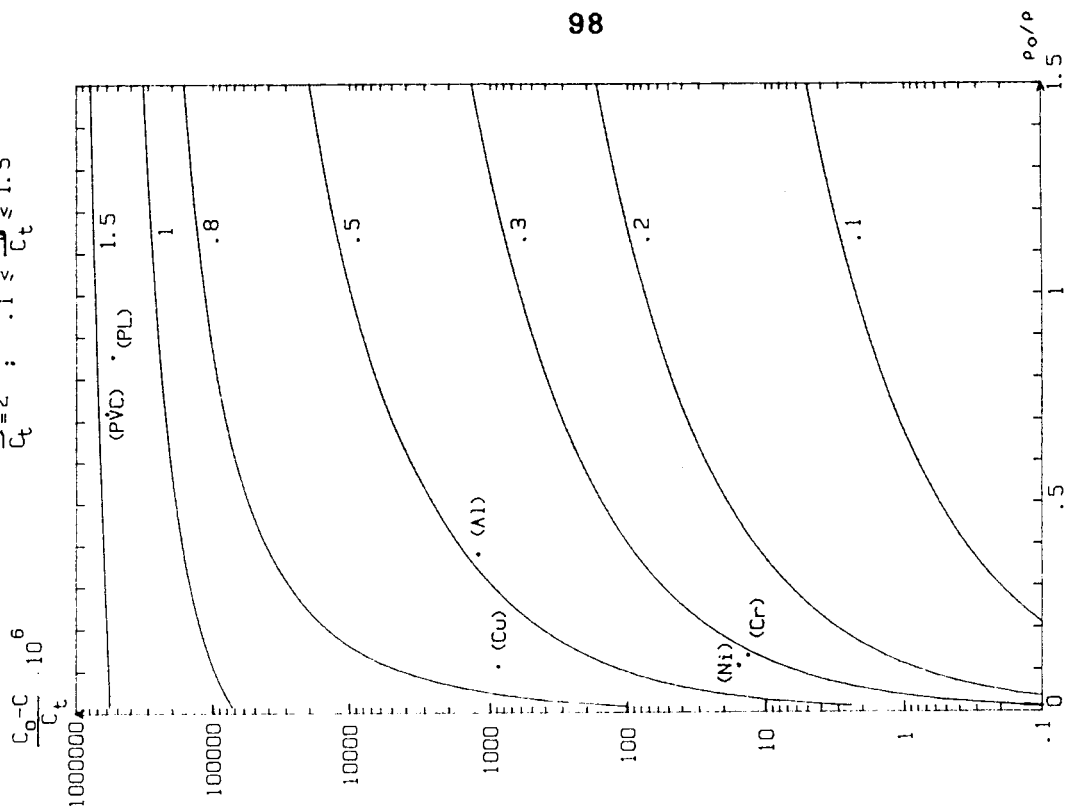


Fig 2b

2.2 Pénétration de l'onde et localisation de l'énergie acoustique suivant le type de matériau

Nous donnons (fig 3a et 3b) deux cas comparés de couples très différents (Eau/Cu et Eau/ Plexiglas).

On constate que la pénétration est limitée à quelques longueurs d'ondes dans les substrats solides quel que soit le cas et devient très grande dans l'eau pour le cuivre (cas où $C_t > C_0$) : quelques dizaines de longueurs d'ondes.

Les énergies locales $\frac{W_i}{W_{ls}}$ et totales $\int \frac{W_i}{W_T} dy$ dans une épaisseur de milieu donné (fig 4a et 4b) donnent des résultats inversés:

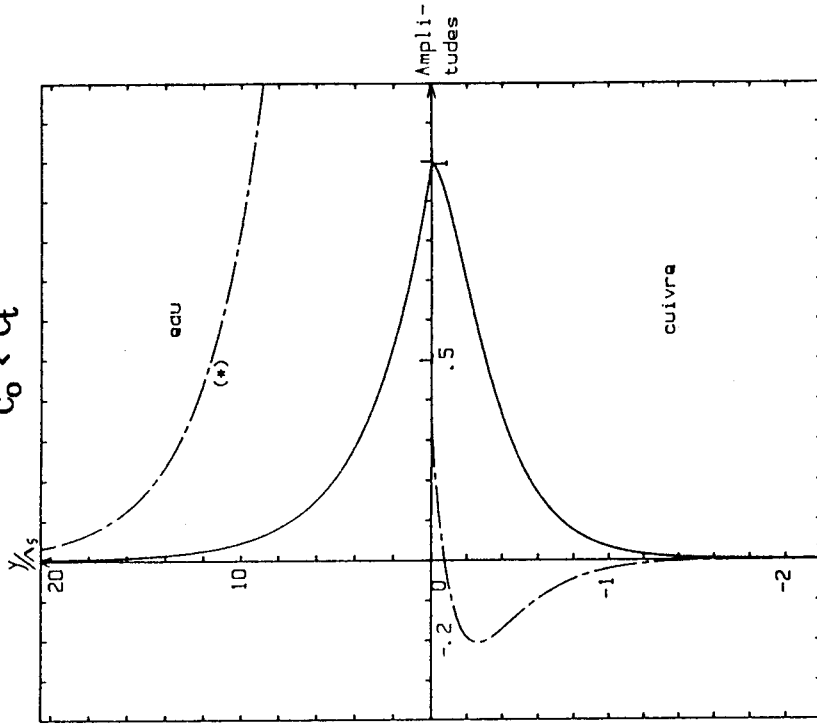
- $C_0 > C_t$: environ 91% d'énergie dans le plexiglas contre 9% dans l'eau,
- $C_0 < C_t$: environ 99% d'énergie dans l'eau contre 1% dans le cuivre indiquant ainsi une grande incertitude quant à l'identification d'un tel substrat.

Signalons enfin que les comportements des amplitudes et des énergies locales sont similaires à ceux que l'on obtient avec les ondes de Rayleigh.

Amplitudes longitudinales (---) et transversales (—) des O.S.S. (eau/cuivre) en fonction de la distance à l'interface

eau ($\frac{U_0}{V_0} \cdot \frac{V_0}{V_0}$), cuivre ($\frac{U}{V_0} \cdot \frac{V}{V_0}$); $C = 1494.7$ m/s

$C_0 < C_t$



(*) Partie de la courbe U_0/V_0 (cf. a)

Fig 3b

Amplitudes longitudinales (---) et transversales (—) des O.S.S. (eau/plexiglas) en fonction de la distance à l'interface

eau ($\frac{U_0}{V_0} \cdot \frac{V_0}{V_0}$), plexiglas ($\frac{U}{V_0} \cdot \frac{V}{V_0}$); $C = 897.7$ m/s

$C_0 > C_t$

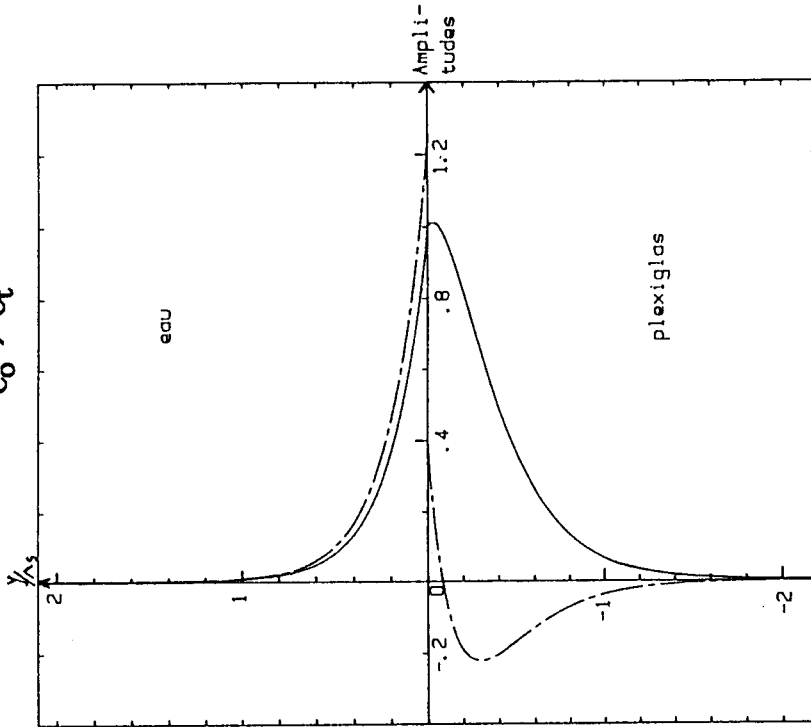


Fig 3a

Energies acoustiques des 0. S. S. (eau/plexiglas)
 en fonction de la distance à l'interface
 (C = 897.7 m/s)

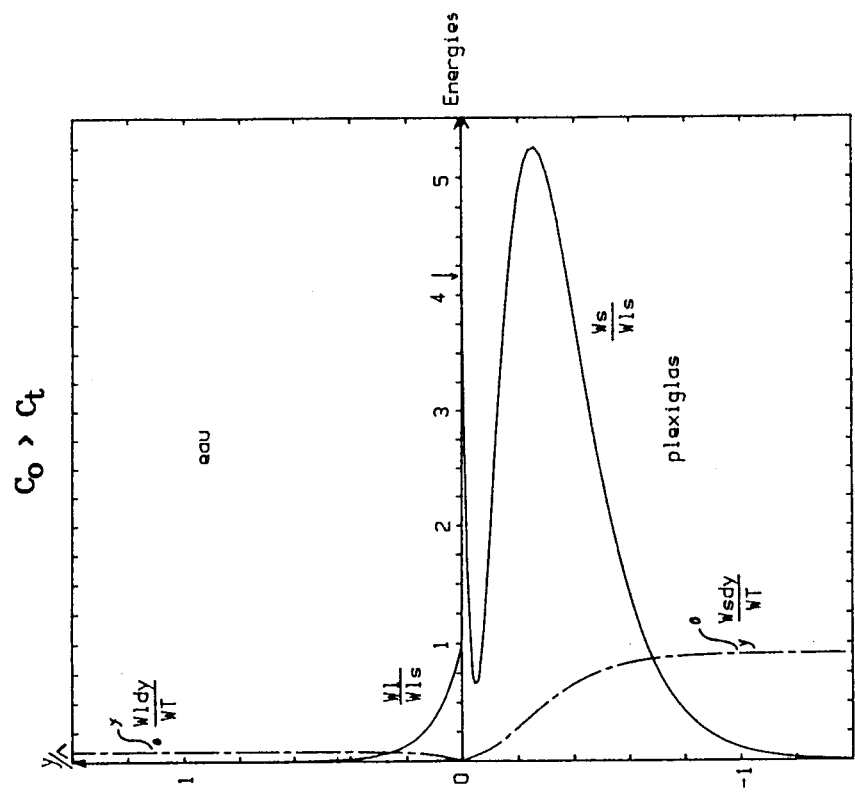


Fig 4a

Energies acoustiques des 0. S. S. (eau/cuivre)
 en fonction de la distance à l'interface
 (C = 1494.7 m/s)

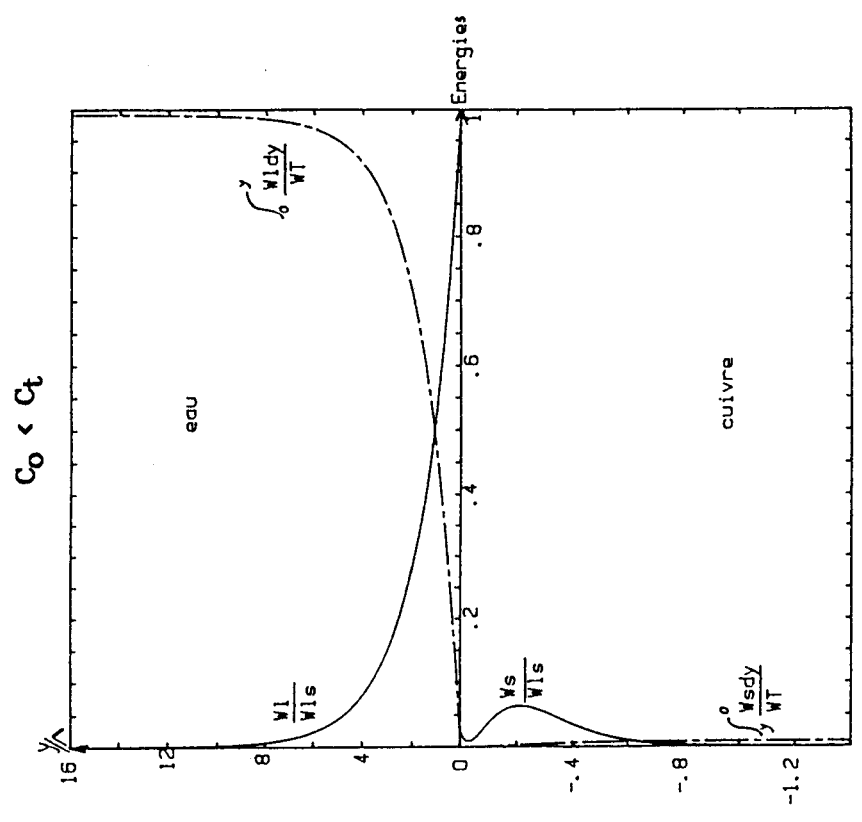


Fig 4b

ANNEXE II: ONDES DISPERSIVES DE TYPE RAYLEIGH ET DE TYPE SEZAWA

Parallèlement à l'étude principale consacrée aux ondes de type Stoneley-Scholte dispersives nous donnons ici des compléments relatifs aux ondes de type Rayleigh-Sézawa obtenues par suppression du milieu supérieur liquide. Certaines de ces études sont relatives à des travaux antérieurs du laboratoire dont elles étendent cependant la portée ou justifient à posteriori les résultats.

1. Ondes de Rayleigh et Sézawa dans des systèmes monocouches.

Elles sont obtenues suivant la valeur de la célérité d'onde par rapport à celles de la couche et du substrat.

1.1 Ondes de type Rayleigh (O.R.): $C < \text{Min}(C_{ti}, C_{li})$

Nous avons retenu les systèmes Ni/Al et Al/Ni (fig 1-2) précédemment étudiés [3] tant pour contrôler nos programmes relatifs aux cas Stoneley-Scholte que pour étendre les résultats antérieurs où un seul mode avait été calculé.

On constate ici, comme pour le cas S.S. (fig 1a et 1b Chap I), que les courbes de dispersion présentent deux branches; la première classique de type Rayleigh, la seconde de type Stoneley observable puisque:

$$C_{R\max} < C_{t\min} \text{ soit ici} \\ C_{RAI} = 2891,4 \text{ m/s} < C_{tNi} = 2958,2 \text{ m/s.}$$

De toute façon les ondes correspondant à ces branches sont des ondes d'ensemble du système.

1.2 Dispersion de célérité d'ondes de Rayleigh-Sézawa dans le système Al/ Verre

Nous avons retenu ce système, objet de mesures antérieures de dispersion de célérité [15] au laboratoire, pour la caractérisation non destructive de verres trempés, par la méthode du Knife-Edge, la réflectivité du verre étant accrue par dépôt d'un film mince d'aluminium ($< 2000 \text{ \AA}$).

Dispersion de vitesse d'ondes de Rayleigh
en fonction de l'épaisseur réduite

Aluminium/Nickel
10 μm ; ∞

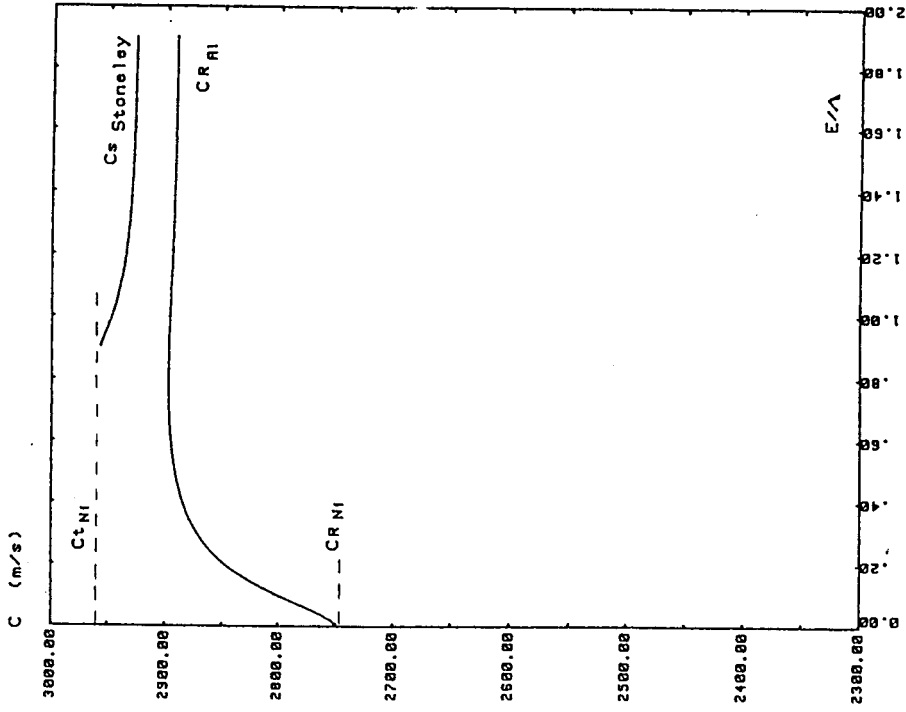


Fig 2

ONDES DE RAYLEIGH
NICKEL / ALUMINIUM
EPAISSEUR = 10 μm

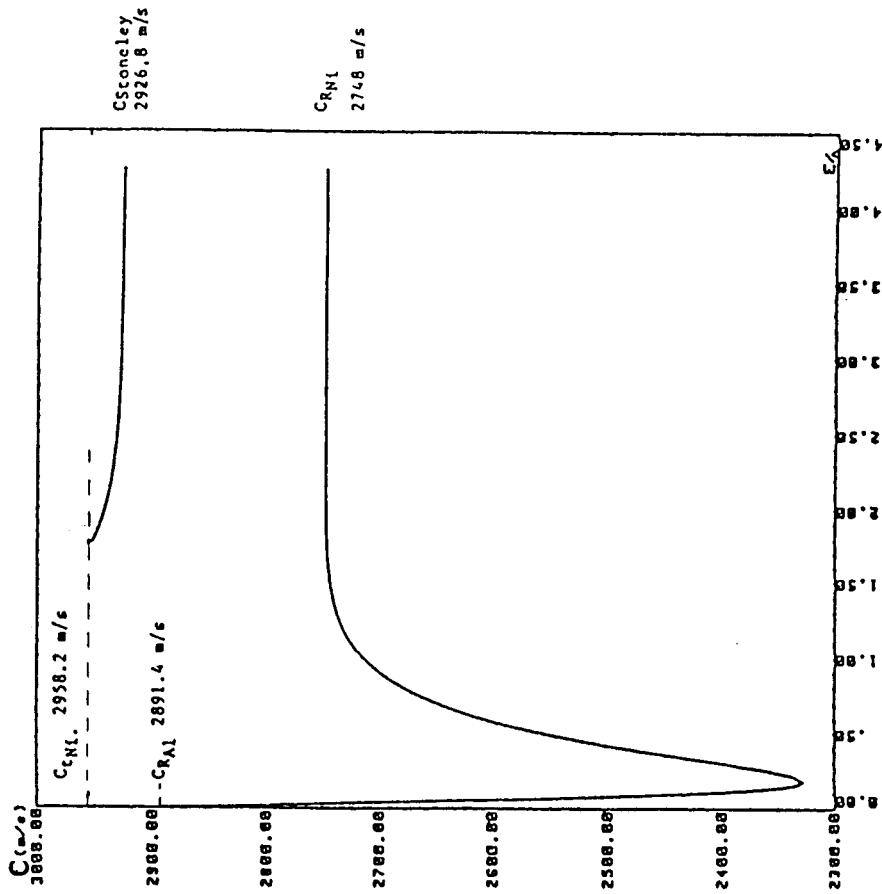


Fig 1

Ce système permet d'illustrer les cas d'O.R. et d'O.R.Se. La courbe de dispersion de célérité est donnée (fig 3) en fonction de l'épaisseur réduite E/Λ de la couche d'aluminium. Elle comporte ici trois branches :

- Branche 1

On obtient d'abord aux basses fréquences des ondes mixtes R.Se. puisque $C_{tAl} < C < C_{tverre} < C_{lAl}$ (condition 31'). La célérité de départ est quasiment la célérité de Rayleigh dans le substrat quoique l'onde excitée soit de type mixte Rayleigh-Sézawa.

Ceci établit la validité des mesures effectuées aux fréquences $f < 30$ MHz soit avec $\Lambda \geq 100 \mu\text{m}$ et $E/\Lambda \leq 2.10^{-3}$ aux origines de la branche 1.

Ces ondes se convertissent ensuite en O.R. quand la célérité descend sous $C_{tAl} = 3097,1$ m/s soit

$$C < C_{tAl} < C_{tverre}$$

La courbe tend alors asymptotiquement aux fréquences élevées vers la célérité de Rayleigh dans la couche d'aluminium $C_{RAI} = 2891,4$ m/s, le verre n'ayant plus d'influence.

Il y a donc continuité entre les cas O.R. et O.R.Se.

- Branches 2 et 3:

Quand F et E/Λ croissent, apparaissent successivement des branches 2, 3... relatives au cas R.Se. soit

$$C_{tAl} < C < C_{tverre} < C_{lAl}$$

Nous n'avons pu poursuivre le calcul du comportement de ces branches au-delà de 1000 MHz ($E/\Lambda \approx 3$) en raison des pertes de précision. Il semble toutefois que pour la branche 2 la célérité tombait déjà sous la valeur C_R des O.R. dans le verre.

1.3 Etude d'un système PVC réticulé/Aluminium.

1.3.1 Courbes de dispersion

Elles sont calculées pour le système étudié précédemment (Chapitre II) pour les O.S.S. dont les caractéristiques, énoncées au tableau 1 (Chap II) permettent l'obtention successive des conditions (30'), (31') et (32) d'existence des O.R. , O.R.Se. et O.Se.

Dispersion de vitesse d'ondes de RAYLEIGH-SEZAWA en fonction de l'épaisseur réduite de la couche

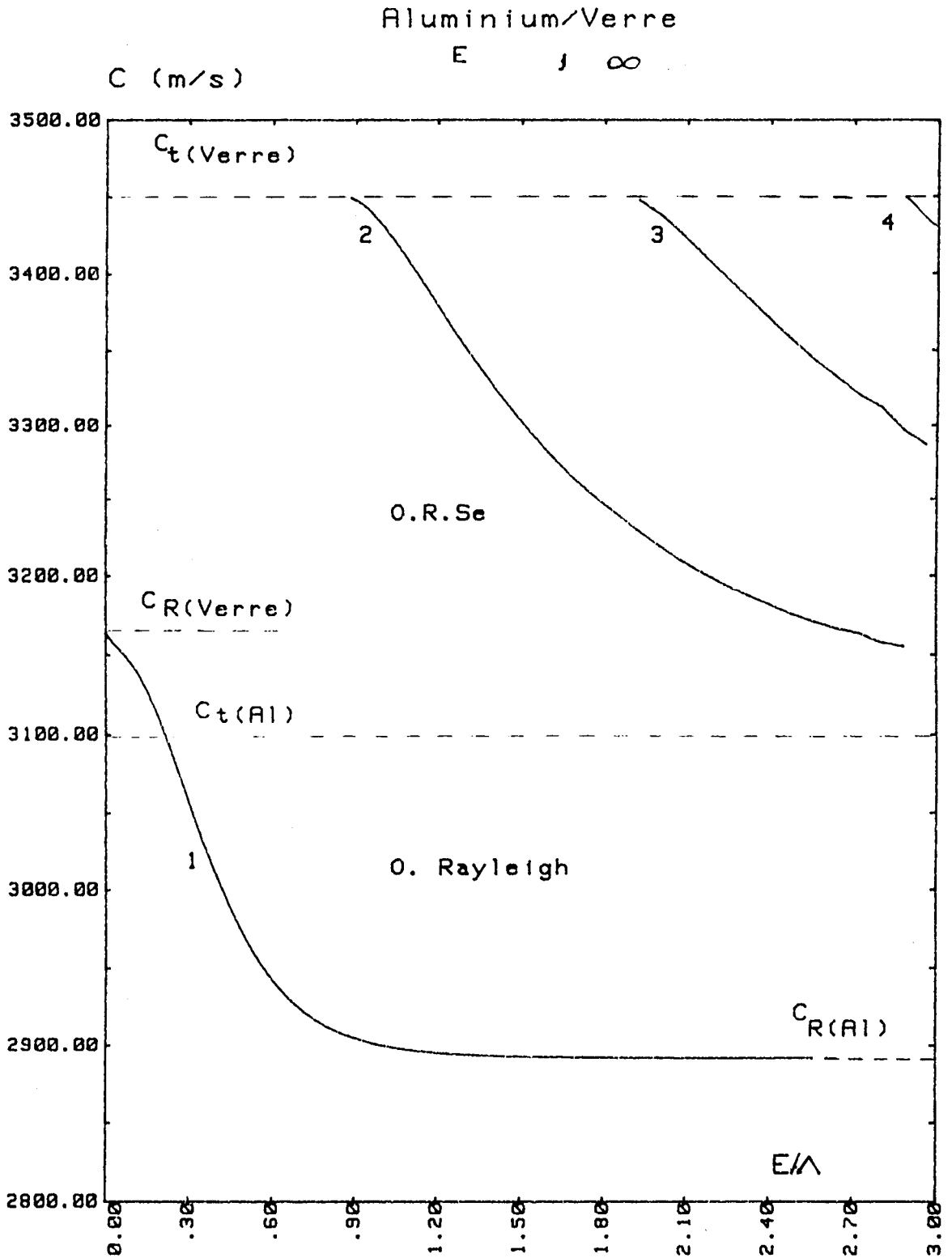


Fig 3

On trouvera les courbes de dispersion en fonction de l'épaisseur réduite E/Λ de la couche (fig 4) et de la fréquence (fig 5) avec indication des types d'ondes R., Se., R.Se. concernés.

On constate que les courbes se raccordent sans accident de pente: il semble bien que les ondes restent de même nature physique même si les fonctions mathématiques qui les représentent diffèrent. Le repérage physique des transitions entre O.R. et O.R.Se. ou encore O.R.Se. et O.Se. semble bien difficile: il serait peut-être possible si l'amplitude des vibrations d'une couche était mesurable.

1.3.2 Calcul des amplitudes et répartition d'énergie

Les amplitudes parallèles U et perpendiculaires V sont normalisées par rapport à l'amplitude V_0 à la surface du PVC.

Les calculs ont été faits pour deux épaisseurs réduites $E/\Lambda = 0,5$ ou 1 de la couche de PVC pour les points marqués α à ϵ ou a à i (fig 4). Nous n'en donnons que quelques-uns à titre d'illustration pour les cas R.Se. et Se., le cas Rayleigh pur n'ayant aucun caractère original.

a) *Ondes de Rayleigh-Sézawa* fig (6a, 6b) : point β et fig (7a,7b): point c

Les amplitudes oscillent dans la couche et les énergies restent très faibles ($< 3\%$) dans l'aluminium.

b) *Ondes de Sézawa*. fig (8a, 8b) : point h et fig (9a,9b) : point i

Ici encore les amplitudes et les énergies oscillent dans la couche. On remarque qu'un mode sur deux (δ , f et h) conserve des valeurs d'énergie faibles dans le socle tandis que les autres modes (γ , ϵ , e , g et i) voient cette énergie prendre des valeurs élevées, croissant avec la célérité (83% pour ϵ).

Ce type d'onde d'interface devrait permettre d'interroger le socle malgré la présence de la couche de PVC. Il semble que pour certains modes la couche de PVC n' "écranter" plus totalement le socle, contrairement aux ondes de Stoneley-Scholte-Sézawa pour la même structure surmontée d'eau. Il semble une fois de plus que la présence du liquide impose la distribution d'énergie dans les différents milieux.

ONDES DE DIFFERENTS TYPES
 PVC RETICULE / ALUMINIUM
 EPAISSEUR : 4000 μm

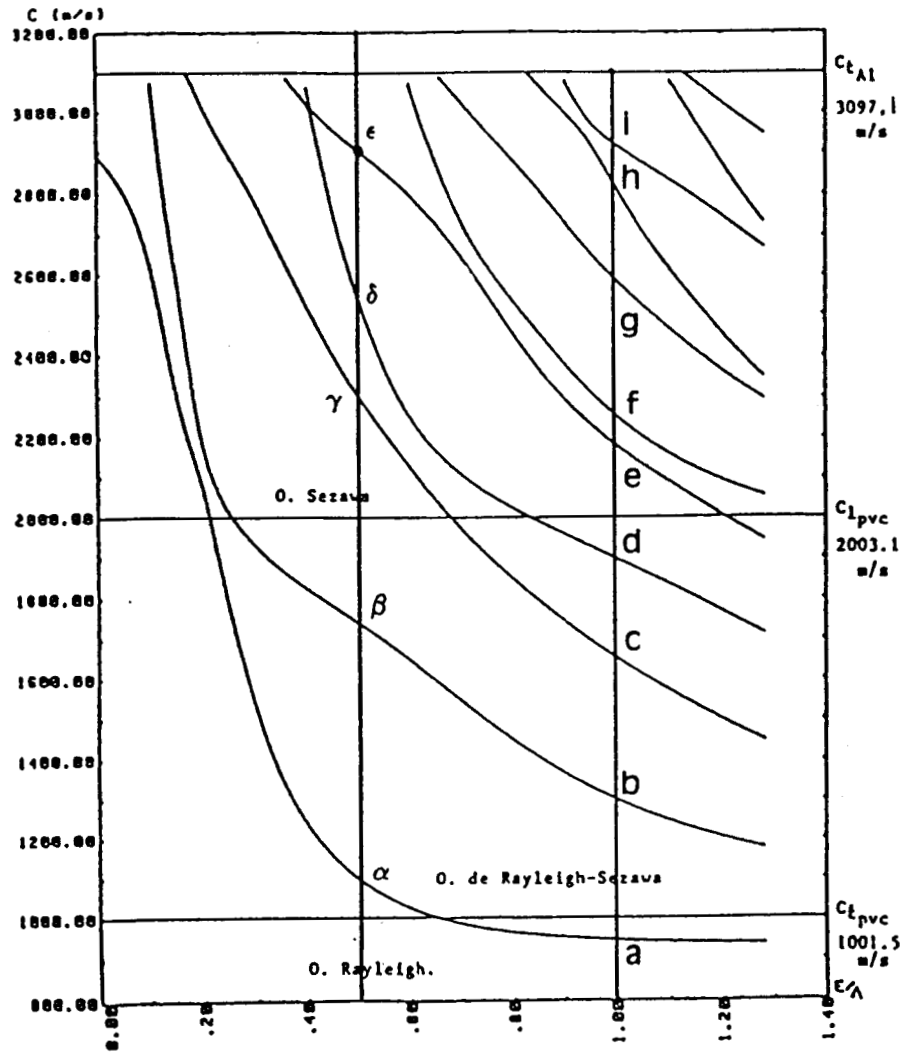


Fig 4

ONDES DE DIFFERENTS TYPES
 PVC RETICULE / ALUMINIUM
 EPAISSEUR : 4000 μm

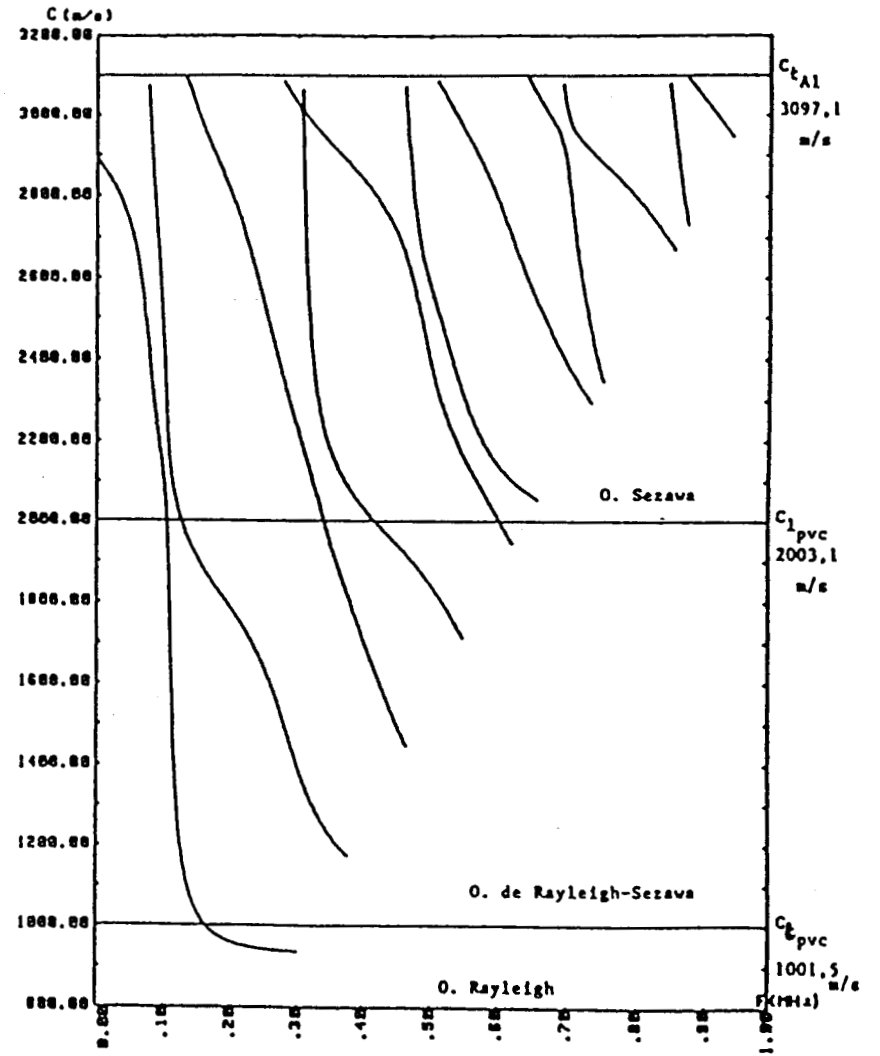


Fig 5

Amplitudes longitudinales (---) et transversales (—) des ondes (PVC_RET / Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

O.R. Sezawa
 $C=4000\mu\text{m}$ $C_0=1740.7\text{m/s}$ $F=0.218\text{MHz}$ $E/\lambda = -0.508$

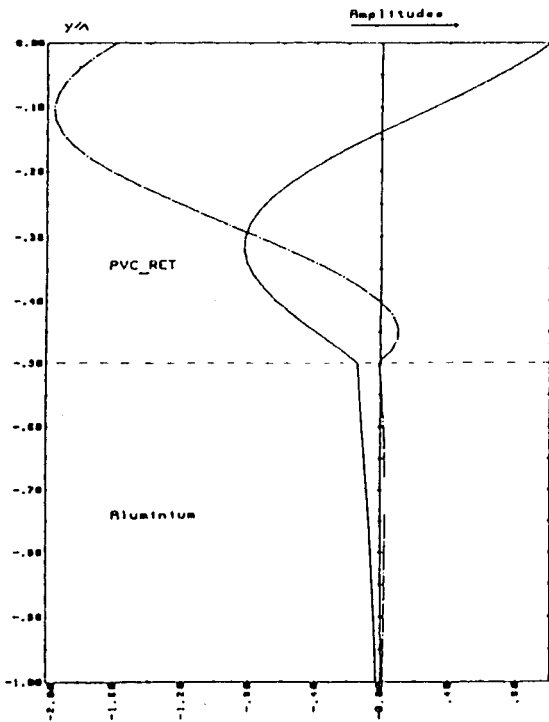


Fig 6a

Energies acoustiques des ondes (PVC_RET / Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

O.R. Sezawa
 $E=4000\mu\text{m}$ $C_0=1740.7\text{m/s}$ $F=0.218\text{MHz}$ $E/\lambda = -0.508$

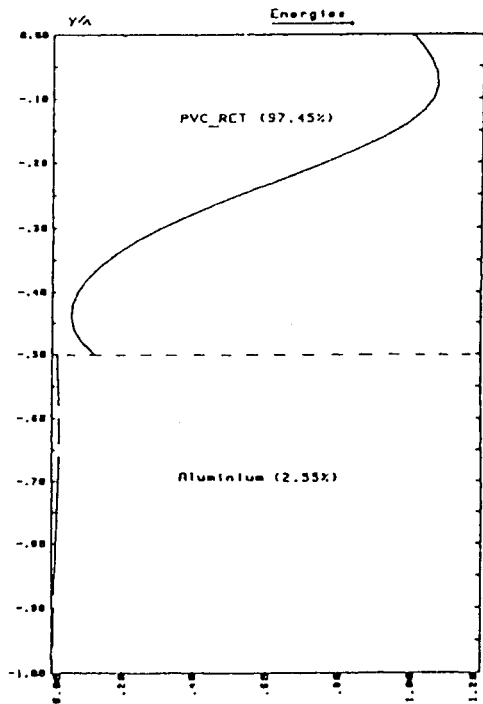


Fig 6b

Amplitudes longitudinales (---) et transversales (—) des ondes (PVC_RET / Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

O.R. Sezawa
 $C=4000\mu\text{m}$ $C_0=1652.7\text{m/s}$ $F=0.413\text{MHz}$ $E/\lambda = 1.000$

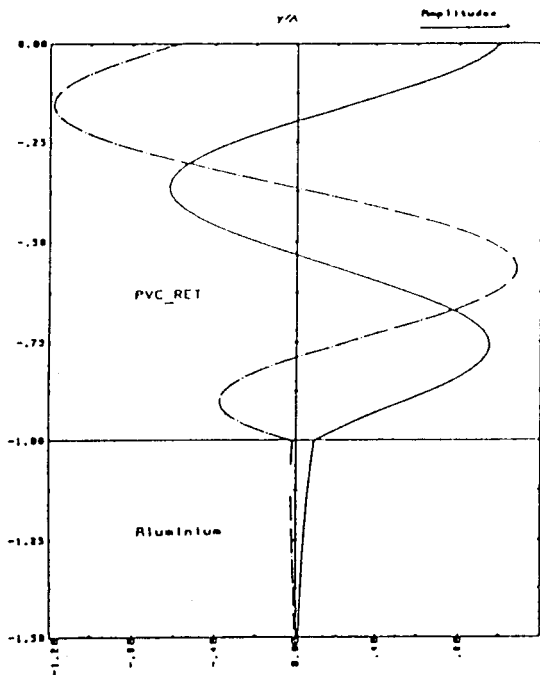


Fig 7a

Energies acoustiques des ondes (PVC_RET / Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

O.R. Sezawa
 $E=4000\mu\text{m}$ $C_0=1652.7\text{m/s}$ $F=0.413\text{MHz}$ $E/\lambda = 1.000$

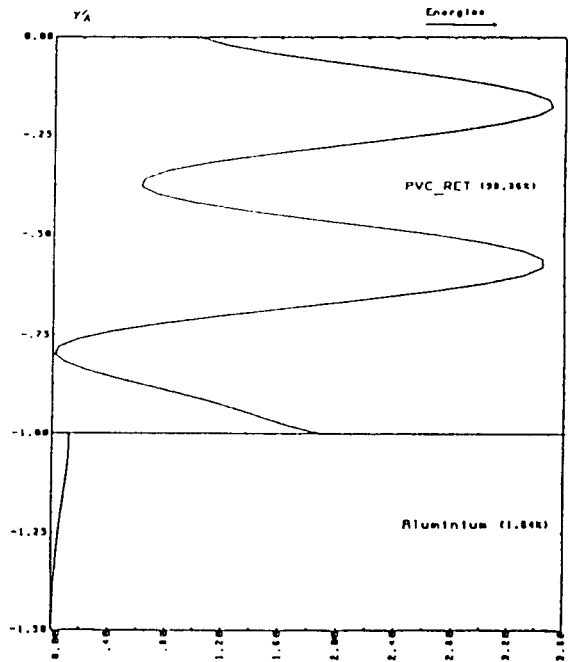


Fig 7b

Amplitudes longitudinales (---) et transversales (—) des ondes (PVC_RET / Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

0.562aws
E=4000 μ m C=2015.0m/s F=0.704MHz EA=1.000

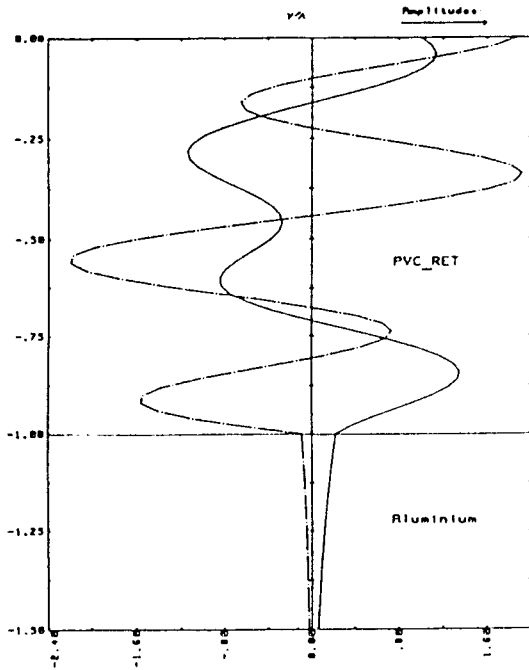


Fig 8a

Energies acoustiques des ondes (PVC_RET / Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

0.562aws
E=4000 μ m C=2015.0m/s F=0.704MHz EA=1.000

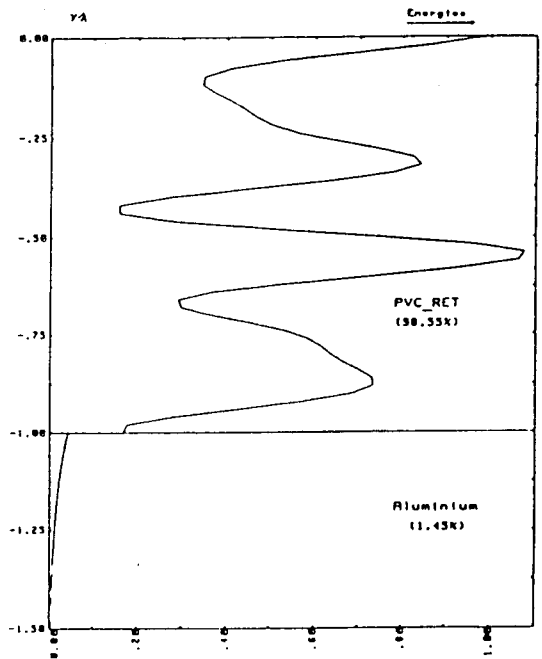


Fig 8b

Amplitudes longitudinales (---) et transversales (—) des ondes (PVC_RET / Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

0.562aws
E=4000 μ m C=2916.3m/s F=0.729MHz EA=1.000

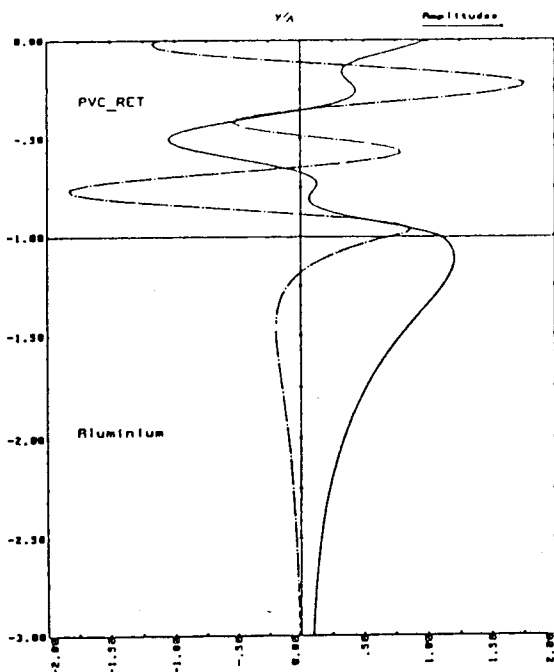


Fig 9a

Energies acoustiques des ondes (PVC_RET / Al) en fonction de la distance réduite y/λ à l'interface

0.562aws
E=4000 μ m C=2916.3m/s F=0.729MHz EA=1.000

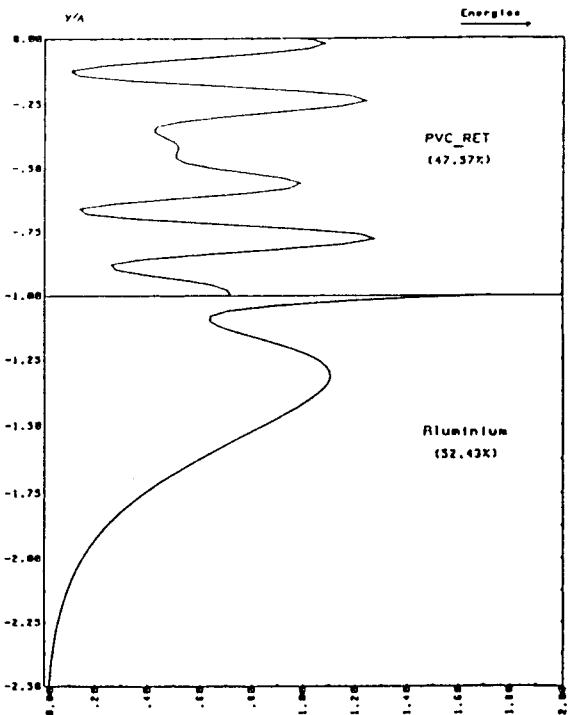


Fig 9b

2. Ondes de type Rayleigh dans les milieux quasi périodiques.

De même qu'au § 1.1, nous avons repris les systèmes à deux milieux Ni/ Al/ Ni/ Al, objets de travaux antérieurs, mais où seul le mode fondamental avait été calculé.

2.1 Courbe de dispersion.

Ce système quasi périodique présente quatre interfaces donc une dispersion de célérité à quatre branches (fig 10) comparable au cas d'O.S.S. (Eau/ Bi/ Polystyrène/ Bi/ Polystyrène) avec deux asymptotes dont une dégénérée à la célérité de Stoneley $C_{\text{Stoneley}} = 2926,8 \text{ m/s}$ pour le couple Ni-Al.

- La première branche confirme des résultats classiques [3,16]: courbe à minimum marqué, évoluant entre les célérités C_{RAI} du substrat en BF et C_{RNI} de la couche supérieure en HF, elle présente l'allure d'une courbe de dispersion d'ondes de Rayleigh généralisée.
- Les autres courbes seraient plutôt du type Stoneley généralisé. Apparaissant à fréquences plus élevées, elles évoluent entre la célérité transversale C_{INi} et la limite asymptotique unique $C_S = 2926,8 \text{ m/s}$ du système Ni/Al atteinte de plusieurs façons; seule la courbe 2 présente un minimum marqué.

2.2 Localisation des ondes.

Le calcul des distributions d'amplitudes parallèles et perpendiculaires pour des points choisis des diverses branches dans leurs domaines d'existence respectifs avec $E/\Lambda = 0,5; 1,5; 1,75; 2,5$ établit :

- la continuité des composantes aux interfaces : il s'agit donc dans tous les cas *d'ondes dispersives d'ensemble du système*.
- néanmoins les branches de célérité se rapportent à deux types différents de distribution:
 - Les branches 1 et 3 définissent des ondes essentiellement superficielles relatives aux deux premières couches, la pénétration dans les couches profondes restant quasi nulle.
 - Les branches 2 et 4 sont relatives à des ondes profondes essentiellement localisées dans la couche 3 (de 60 à 88,3% d'énergie) avec des pénétrations symétriques

(de 18–20% à 5,85%) dans le milieu 2 et le socle, la couche superficielle étant à peine atteinte.

Les premières ont donc indubitablement un comportement de type Rayleigh, les secondes un comportement de type Stoneley. On ne peut donc se fier uniquement à l'allure des courbes de dispersion pour prévoir le type d'ondes correspondant, ni au domaine de fréquence pour supposer leur profondeur de localisation et les interfaces concernées.

Dispersion de vitesse d'ondes de Rayleigh en fonction de la fréquence dans les milieux périodiques

Ni / Al / Ni / Al
 $10\mu\text{m}; 10\mu\text{m}; 10\mu\text{m}; \infty$

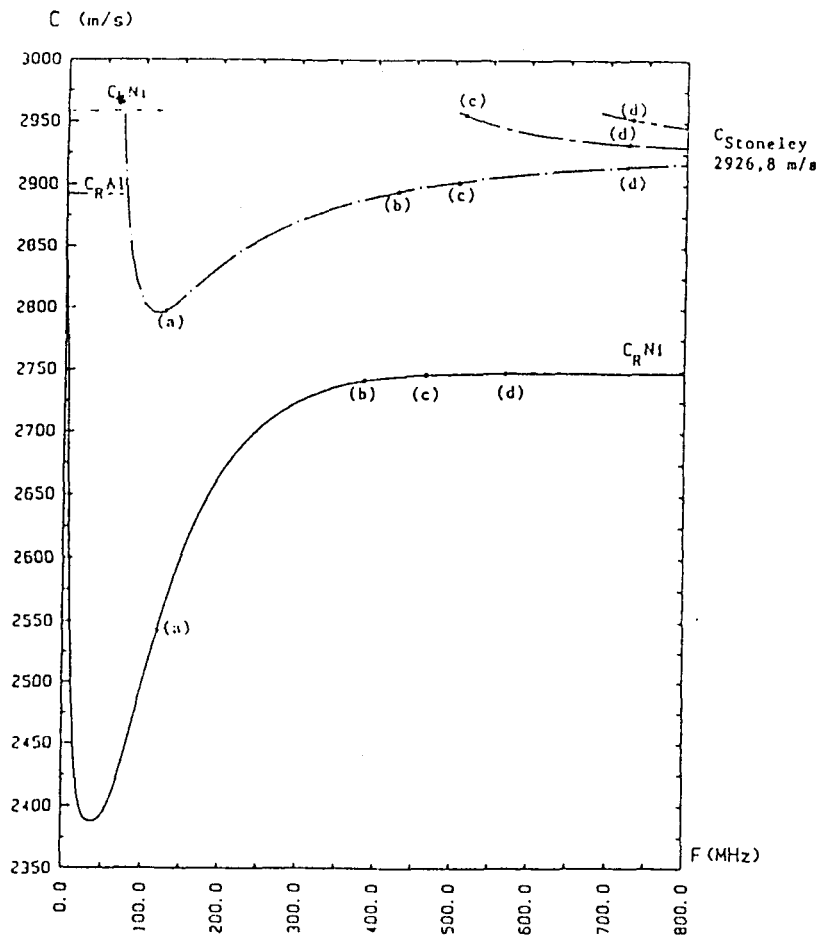


Fig 10

Valeur de E/Λ : 0,5 en (a) ; 1,5 en (b) ; 1,75 en (c) ; 2,5 en (d)

ANNEXE III: *DONNEES RELATIVES AUX FONDS MARINS*

Les modèles de fonds marins ici présentés ont été choisis dans la littérature.

1. Modèles à couches homogènes.

La configuration de chaque système est celle présentée (tableau 1) où l'on trouve, outre les épaisseurs des couches, les densités, les vitesses C_l et C_t des ondes longitudinales et transversales caractéristiques des milieux. On fournit aussi quelques indications sur les atténuations, les références aux différents auteurs complétant le tableau.

Matériaux	Epaisseur (m)	ρ (kg/m ³)	C_l (m/s)	C_t (m/s)	α_l	α_t	Référence [25]
Eau	1,0 (*)	1000	1500	0			<i>H.H Essen</i> Model for surface waves on marine sediments (p.304)
Sédiment1	16,0	1800	1700	135			
Sédiment2	∞	1900	1800	230			
Eau	C_{te}	1000	1500	0	(dB/ Λ)	(dB/ Λ)	<i>D.Rauch.</i> Seismic interface waves in coastal waters. (p. 311)
Sable		2000	1800	700	0,75	1,5	
Roche sédimentaire		∞	2200	2000	1400	0,1	
Sédiments de nature non précisée	15 5 2 4 7 9 ∞	1000 1000 1200 1400 1600 1800 2000	1536 1533 1500 1540 1600 1680 1840	- - 90 120 160 210 310			Du même auteur dans le même article
Eau	4000	1000	1485- 1495.	0			<i>E.A. Okal and J. Talandrier.</i> Earthquake generated Rayleigh waves (p.354)
Croûte	12000	2700- 2800.	6400- 6600	3500- 3800.			
Manteau	∞	3000	8000	4600			
Eau	4000	1000	1485- 1495.	0			Des mêmes auteurs dans le même article
Couche intermédiaire sous-sol	2000	1900	2500- 2700.	800			
	1000	2000- 2050.	4700- 4800.	2000- 2100.			
Croûte	9000	2700- 2800.	6400- 6600.	3700- 3800			
Manteau	∞	3000	8000	4600			

Tableau 1

(*) Les valeurs données correspondent aux profondeurs

Matériaux	Épaisseur (m)	ρ (kg/m ³)	C_1 (m/s)	C_t (m/s)	α_1	α_t	Référence [25]
Eau	32	1000	1530	0			<i>S.T McDaniel and J.H Beebe : Propagation over semiconsolidated sediments (p.501)</i>
1 (sédi-	3	1800	1720	200			
2 ments)	40	2000	2400	670			
3	60	2000	2400	900			
4	∞	2300	3570	2100			
Sable	?	2060	1750	?	(dB/km/Hz) 0,26	(dB/km/Hz) ?	<i>D.M.F Chapman and D.D Ellis: Geoacoustique model of scotian shelf (p. 536)</i>
Till	?	2100	1900	?	0,30	?	
Lit rocheux	∞	2200	2050	?	0,50	?	
Sédiments	2	1500	1460	?	(dB/Λ) 0,1	(dB/Λ) ?	<i>M.C Ferla and Al : Comparisons in coastal water (p.588)</i>
Bas-fond	∞	2000	1700	700	1,0	1,5	
Fond mou	?	ρ/ρ_{eau} 1,6	C_t/C_{eau} 1,03	C_t/C_1 0,23	(dB/Λ) 0,2	(dB/Λ) 0,6	<i>O.F Hastrup: Bottom loss anomalies near grazing (p.145)</i>
Fond moyen	?	1,9	1,11	0,27	1,0	2,0	
fond dur	∞	2,1	1,24	0,35	0,7	1,5	
Eau	∞	1030	1530	-	(dB/Λ) ?		<i>N.R. Chapman: Low frequency bottom loss measurements. (p.203)</i>
Sédiments	400	1600	1700- 2300.	?	0,002	?	
Substrat	∞	2200	5200	?	0,0008	?	

Tableau 1 (suite)

2. Modèles à profils linéaires

Ces modèles géoacoustiques proviennent de la résolution de problèmes inverses afin d'interpréter des mesures globales faites sur l'ensemble du système et non sur chacune des couches. Il nous est donc difficile d'en apprécier le réalisme.

2.1 Modèle de DINAPOLI [26]

Les profils des caractéristiques acoustiques des matériaux ne sont pas toujours donnés de façon exhaustive. Ainsi, on trouve couramment des caractéristiques de profils de C_l , sans profil ou valeur précisée de C_t . Ce manque est un inconvénient majeur puisque la célérité des ondes de Stoneley-Scholte est très sensible à cette grandeur.

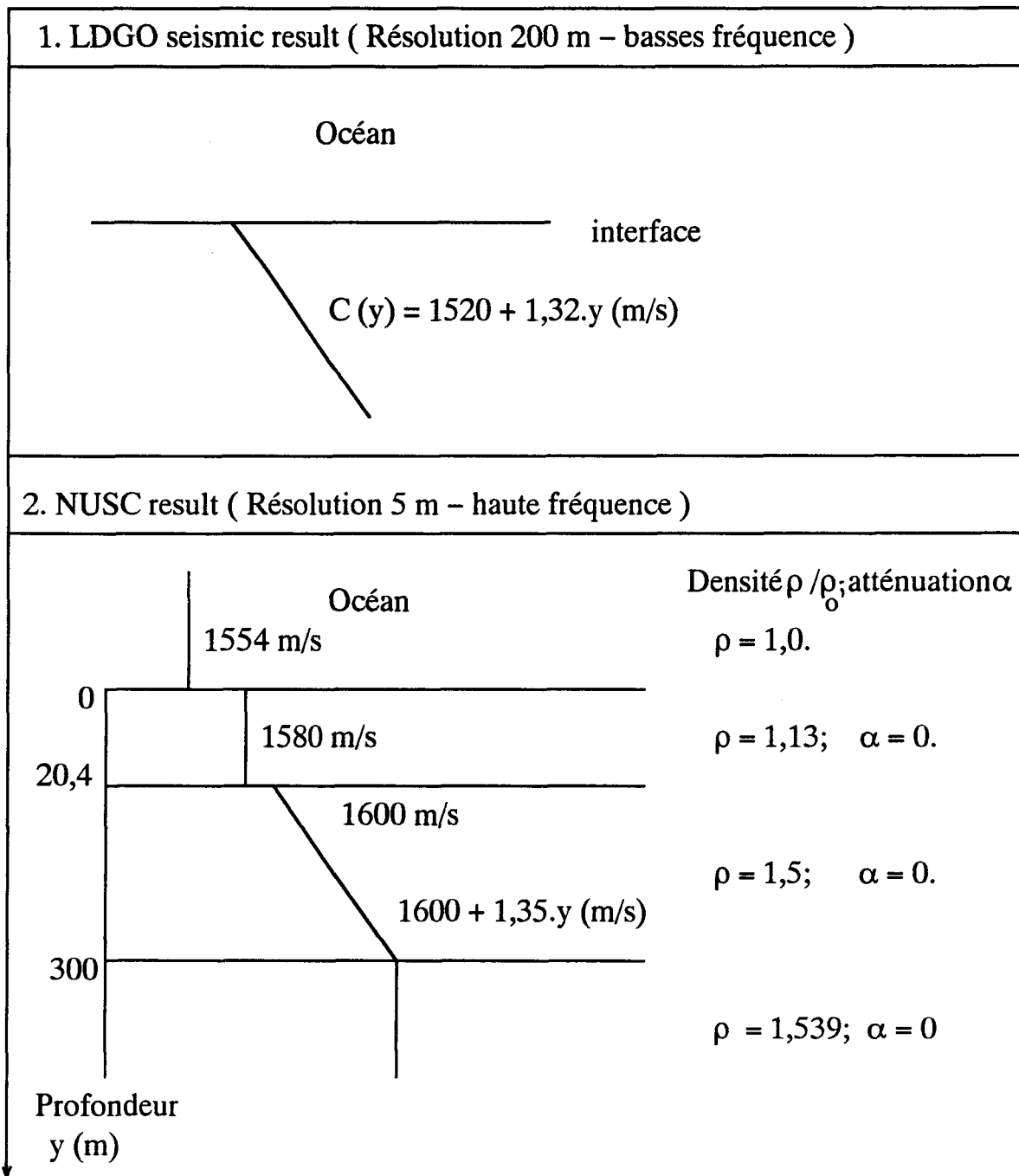


Fig 1 : Profils linéaires de vitesses dans les sédiments.

Dans le cas de modèle avec profil, la littérature ne nous fournit pas de modèle complètement défini (profils sur toutes les caractéristiques, ou profil(s) connu(s) sur certaines avec connaissance des valeurs définies pour d'autre(s) fig 1 [26]).

2.2 Modèle de Manghnani et al [27]

Nous donnons ici des cas de profils déduits de mesures de densité ρ_j et de célérités C_{1j} , C_{tj} effectuées dans les sédiments carbonatés (milieux anisotropes) [27] par Manghnani et al.

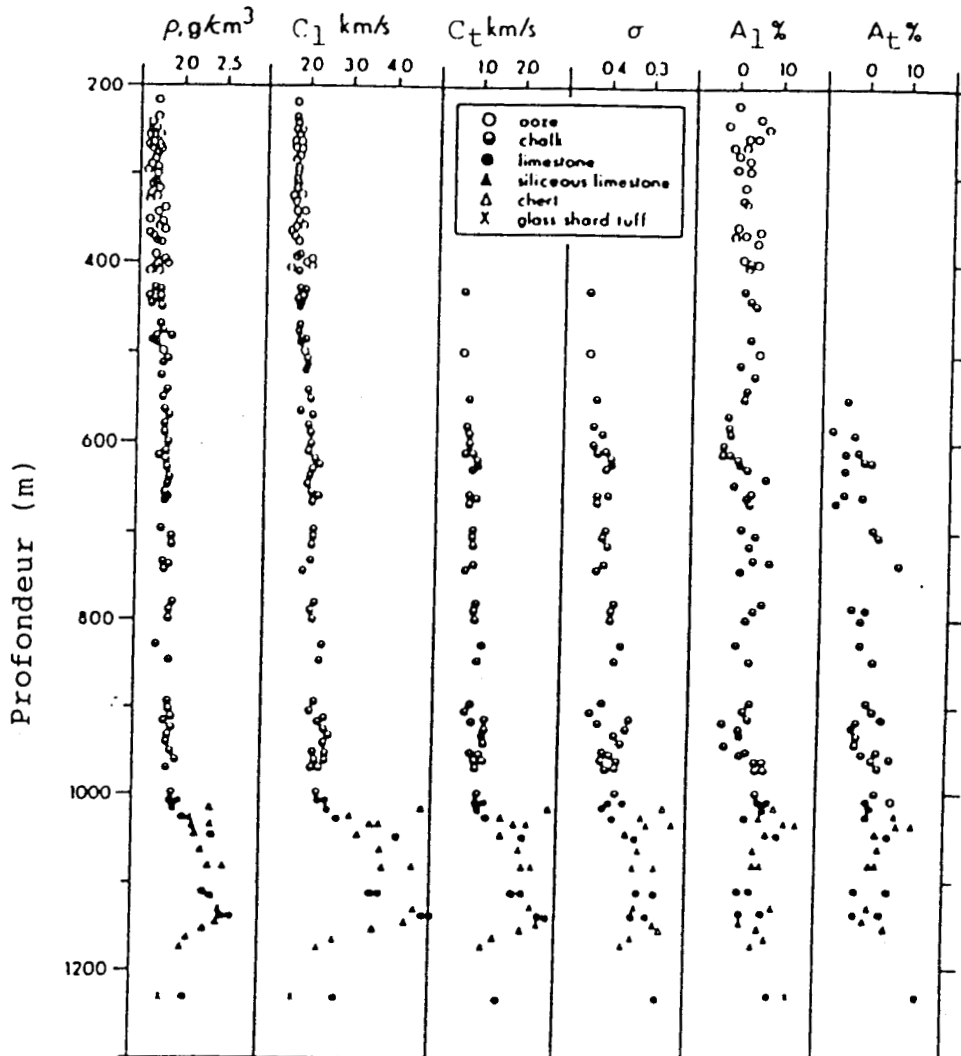


Fig 2: Valeurs mesurées de densité (ρ), de vitesses de compression (C_1) et de cisaillement (C_t), de coefficient de poisson (σ), d'anisotropies suivant la compression (A_1) et le cisaillement (A_t) en fonction de la profondeur dans la stratification limon-craie-calcaire du site 289.

Nous négligeons l'anisotropie et déduisons un modèle simplifié avec profils linéaires de densité et de célérités en fonction de la profondeur.

Le modèle dérivé présente cinq couches de sédiments de différentes natures sur un substrat (fig 3). Les expressions des profils sont calculées de façon approximative en fonction de la profondeur à partir de la figure 2, ce qui donne la structure de la figure 3.

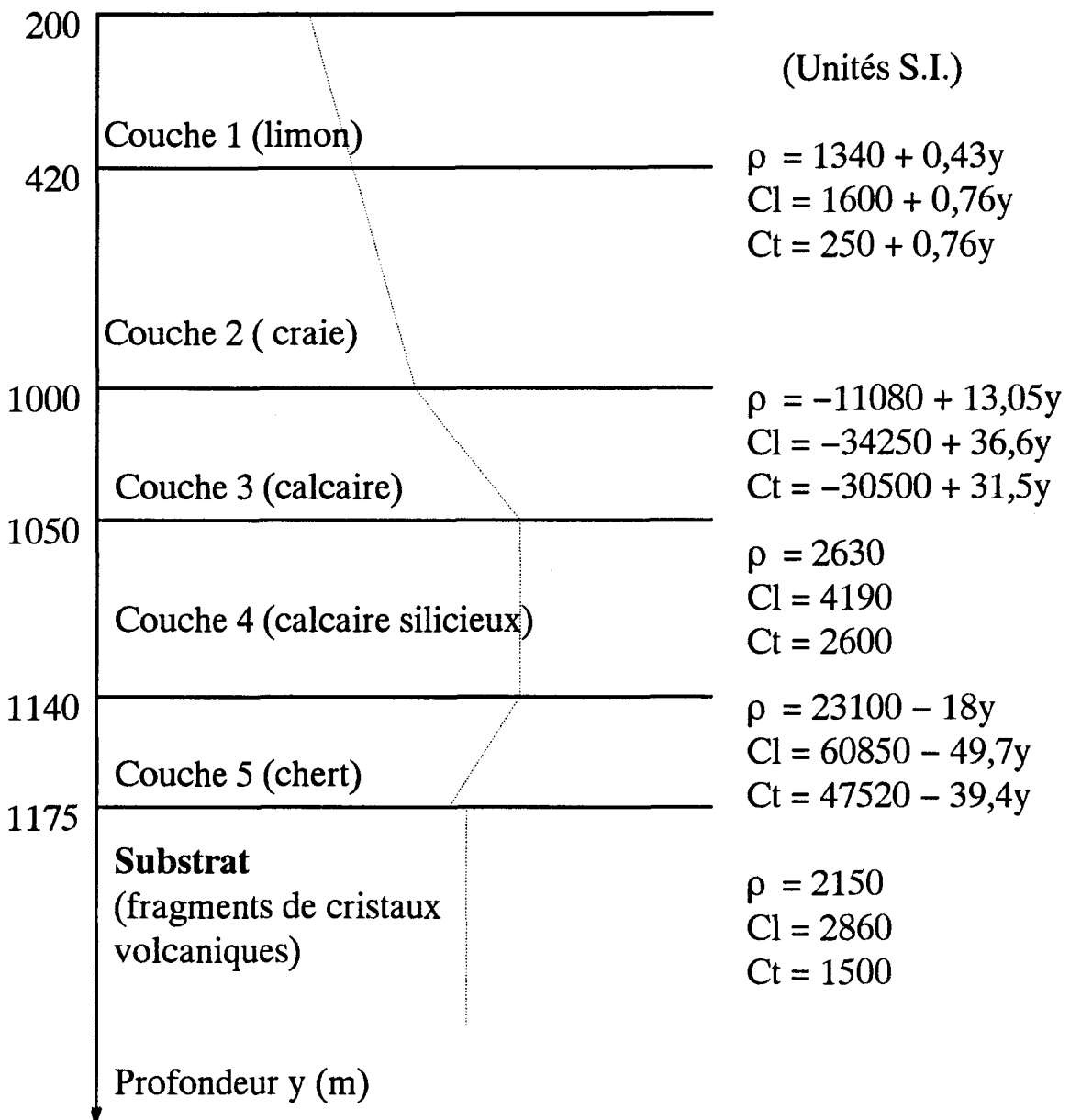


Fig 3 : Profils linéaires des caractéristiques dans les sédiments carbonatés déduits du modèle de Manghnani (fig 2).

ANNEXE IV : *METHODE DES GRADIENTS CONJUGUES.*
ALGORITHME DE RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE

1. Présentation de la méthode des gradients conjugués (Extrait de [18])

Le programme utilise la méthode de minimisation des gradients conjugués, qui est une procédure itérative. Celle-ci a été développée à l'origine par *Hestenes* et *Stieffel* [22] et précisée par *Fletcher* et *Reeves* [23]. Elle est essentiellement une extension de la méthode de convergence dite de la descente rapide [21].

1.1. Méthode de la descente rapide

Notre courbe de dispersion de vitesse, définie de manière implicite, est connue en N_e points de mesure relevés en fonction de la fréquence. Soient V_{ej} les vitesses expérimentales pour j variant de 1 à N_e ; nous assimilons cette courbe à une fonction dépendant de p paramètres, pouvant être ainsi représentée dans un espace de dimension p .

Le modèle théorique de milieux plans stratifiés étant fonction de p_i paramètres $1 \leq i \leq NP$ définissant les propriétés des couches et du substrat ($\lambda_j, \mu_j, \rho_j, e_j$) forme ainsi un sous ensemble de l'ensemble des paramètres p liés à cette fonction. En effet ce modèle décrit de façon convenable la réalité expérimentale, mais il peut exister néanmoins des paramètres intervenant dans la fonction réelle et dont le modèle ne tient pas compte. On définit par V_{cj} la valeur de la vitesse calculée à partir du modèle en chacun des points, pour des valeurs initiales $(p_j)_0$ des paramètres choisis arbitrairement mais réalistes compte tenu des milieux constituant notre système.

Les valeurs des vitesses mesurées et calculées V_{ej} et V_{cj} seront évidemment différentes; nous les assimilons respectivement à des points de deux courbes (expérimentale et calculée), fonctions des p_j paramètres définis précédemment.

On évalue l'écart entre chaque point calculé et le point respectif déterminé expérimentalement, par le calcul du carré de la distance initiale les séparant $(D_j)_0$. Ainsi la somme des écarts respectifs pour tous les points sera donnée par:

$$(D)_0 = \sum_{j=1}^{N_e} (D_j)_0 \quad (1)$$

avec

$$(D_j)_0 = (V_{c_j} - V_{e_j})^2 \quad (2)$$

Le choix de minimisation de la fonction carré de la distance est lié à la restriction de la méthode des gradients conjugués à des fonctions quadratiques à valeurs minimales nulles.

Le problème est alors de déterminer à l'itération suivante les nouvelles valeurs (p_j) des paramètres qui minimiseront cette fonction D ...

Dans ce cas, on doit déterminer, d'une part la direction dans laquelle devra s'effectuer la recherche de chaque nouvelle valeur des paramètres p_j , et d'autre part le choix du pas convenable à adopter. Pour cela il est nécessaire d'étudier le comportement en un point j de la fonction D_j pour des variations dp_j des paramètres p_j . Développons D_j au second ordre.

L'équation (1) donne :

$$D_j(p_i + dp_i) = D_j(p_i) + \sum_{i=1}^{NP} \frac{\partial D_j}{\partial p_i} dp_i + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{NP} \frac{\partial^2 D_j}{\partial p_i^2} dp_i^2 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq 1}}^{NP} \frac{\partial^2 D_j}{\partial p_i \partial p_j} dp_i dp_j \right] \quad (3)$$

Les équations (2) puis (1) fournissent

$$\frac{\partial D_j}{\partial p_i} = 2 (V_{c_j} - V_{e_j}) \frac{\partial V_{c_j}}{\partial p_i} \quad (4)$$

et

$$\frac{\partial D}{\partial p_i} = 2 \sum_{j=1}^{Ne} (V_{c_j} - V_{e_j}) \frac{\partial V_{c_j}}{\partial p_i} \quad (5)$$

On montre alors que la direction de coefficients directeurs $u_j = \frac{\partial D}{\partial p_i}$ est la direction de montée la plus rapide, qu'on appelle habituellement gradient de la fonction D . Le gradient négatif est donc la direction de la descente la plus rapide qui s'écrit (*):

$$\mathbf{dir}_i = - \frac{\partial D}{\partial p_i} = - 2 \sum_{j=1}^{Ne} (V_{c_j} - V_{e_j}) \frac{\partial V_{c_j}}{\partial p_i} \quad (6)$$

(*) Par convention les vecteurs sont notés en caractères gras.

où les termes $\frac{\partial V_{c_j}}{\partial p_i}$ sont appelés coefficients de sensibilité au paramètre p_i . Chaque nouvelle composante estimée $(p_i)_n$, à l'itération n , s'écrit :

$$(p_i)_n = (p_i)_{n-1} + K_n (U_i)_n = (p_i)_{n-1} - K_n \left(\frac{\partial D}{\partial p_i} \right)_n \quad (7)$$

Le vecteur \mathbf{P} (vecteur colonne des composantes p_i estimées) s'écrit

$$(\mathbf{P})_n = (\mathbf{P})_{n-1} + K_n \mathbf{U}_n = (\mathbf{P})_{n-1} - K_n [\mathbf{grad} (D)]_n \quad (8)$$

où $(K)_n$ représente le pas optimal minimisant D dans la direction $(U_i)_n$.

$$D(\mathbf{P})_n = D [(\mathbf{P})_{n-1} + K_n \mathbf{U}_n]$$

On voit qu'une fois la direction de recherche définie, la fonction D ne dépend que de la variable unique K_n , qui est la distance à parcourir avant de changer de direction de recherche. Sa valeur optimale sera déterminée par une recherche monodimensionnelle.

La méthode de la descente rapide, aussi appelée *méthode du gradient simple* par opposition à la *méthode des gradients conjugués*, est basée sur le fait que l'approximation linéaire obtenue par le calcul fournit une approximation valable pour une distance positive dans une direction proche de la direction de la descente la plus rapide. Elle suscite deux questions :

- Quelle assurance a-t-on que les pas choisis ne soient pas si longs qu'ils deviennent des pas de montée ?

- Si les pas choisis sont vraiment des pas de descente, pourquoi n'est-il pas désirable de prendre des pas plus longs dans cette direction, abandonnant le désir de descendre le plus rapidement en faveur du désir de descendre aussi loin que possible avec un petit volume de calcul ?

C'est en ce sens qu'*Hestenes* et *Stiefel* ont examiné la question de savoir de combien il peut être désirable de se déplacer le long d'une direction de descente et ont mis au point la méthode des gradients conjugués, appliquée à la minimisation de fonctions liées à la solution d'un système de NP équations linéaires ; et c'est ainsi que cette méthode a été étendue par la suite par *Fletcher* et *Reeves* à des fonctions non quadratiques.

1.2. Méthode des gradients conjugués.

En reprenant le développement de D cette relation peut s'écrire sous la forme vectorielle :

$$D(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) = D(\mathbf{P}) + \mathbf{grad} D(\mathbf{P}) \cdot \Delta\mathbf{P} + \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{P})^T \cdot \mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{P} \quad (9)$$

avec $\Delta\mathbf{P}$ le vecteur colonne variation des paramètres et $(\Delta\mathbf{P})^T$ son transposé,
 \mathbf{H} , la matrice carrée (NP, NP) des dérivées secondes (appelée Hessien)

Posons

$$\Delta D = D(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) - D(\mathbf{P}) \quad (10)$$

donc

$$\Delta D = \mathbf{grad} D(\mathbf{P}) \cdot \Delta\mathbf{P} + \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{P})^T \cdot \mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{P} \quad (11)$$

En minimisant D(P), ΔD devient maximum à travers la relation (10) et donc sa dérivée s'annule.

$$\frac{\partial(\Delta D)}{\partial\mathbf{P}} = 0 = \mathbf{grad} D(\mathbf{P}) + \mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{P} \quad (12)$$

ainsi

$$\Delta\mathbf{P} = -\mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{grad} D(\mathbf{P}) \quad (13)$$

Cette dernière relation conduit à l'inversion du Hessien , qui souvent dans la pratique est mal défini. Dans ce cas on peut utiliser une matrice arbitraire définie positive, qui à chaque itération est modifiée de façon à tendre vers le Hessien inversé.

La méthode des gradients conjugués procède de la façon suivante [22]. Soient $(\mathbf{P})_0$ et $(\mathbf{grad} D)_0$ les vecteurs paramètres et gradients initiaux. La première direction de recherche est donnée par le gradient simple

$$(\mathbf{dir})_0 = -(\mathbf{grad} D)_0 \quad (14)$$

A l'itération (n-1) on connaît le gradient $(\mathbf{grad} D)_{n-1}$, la direction de recherche $(\mathbf{dir})_{n-1}$ et le vecteur $(\mathbf{P})_{n-1}$; le vecteur paramètre $(\mathbf{P})_n$ sera calculé à partir de ces deux derniers et du pas K_n à travers la relation

$$(\mathbf{P})_n = (\mathbf{P})_{n-1} + K_n (\mathbf{dir})_{n-1} \quad (15)$$

où K_n est le pas optimal minimisant D ; il est déterminé par une recherche monodimensionnelle dans la direction $(\mathbf{dir})_{n-1}$.

Le vecteur (\mathbf{P}) étant calculé, ceci permet de calculer des gradients dans de nouvelles directions.

$$(\mathbf{grad} D)_n = \left(\frac{\partial D(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \right) (\mathbf{P})_n \quad (16)$$

On en déduit un facteur β donné par

$$\beta_{n-1} = \frac{(\mathbf{grad} D)_n^2}{(\mathbf{grad} D)_{n-1}^2} \quad (17)$$

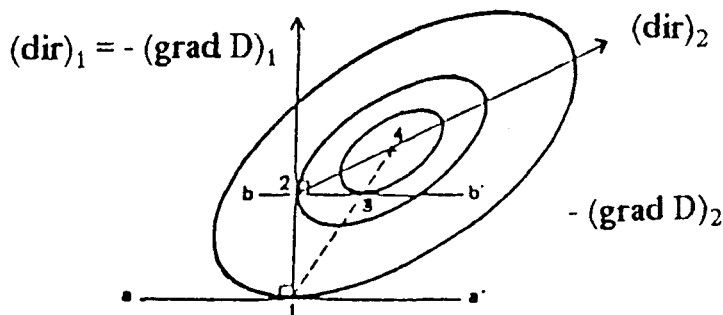
et ainsi la nouvelle direction de recherche sera définie :

$$(\mathbf{dir})_n = -(\mathbf{grad} D)_{n-1} + \beta_{n-1} (\mathbf{dir})_{n-1} \quad (18)$$

Notons que la nouvelle direction de la recherche $(\mathbf{dir})_n$ n'est pas la direction du gradient négatif $-(\mathbf{grad} D)_{n-1}$ telle que dans (14), mais calculée à travers la relation (18).

On peut établir que les gradients successifs sont orthogonaux et que les directions successives sont conjuguées par rapport à H , c'est-à-dire pour deux itérations successives $(n-1)$ et n , les vecteurs gradients correspondants sont tels que $(\mathbf{grad} D)_{n-1} \times (\mathbf{grad} D)_n = 0$ et que les directions vérifient $(\mathbf{dir})_{n-1}^T \times H \times (\mathbf{dir})_n = 0$.

On peut illustrer ceci à travers un exemple à deux dimensions en considérant la fonction quadratique distance D .



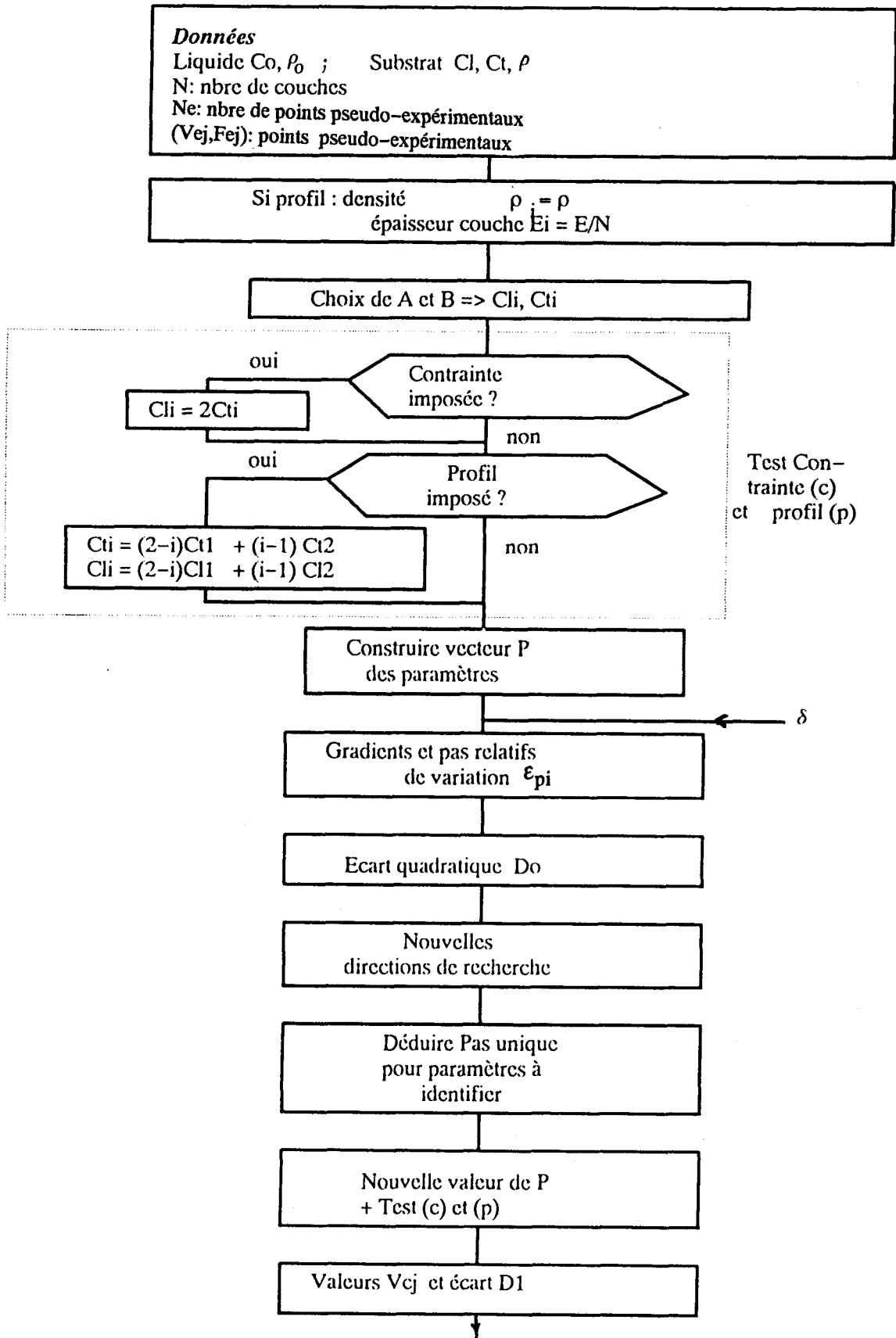
Les courbes isodistances sont représentées par des ellipses centrées sur le point 4 représentant le point optimum recherché.

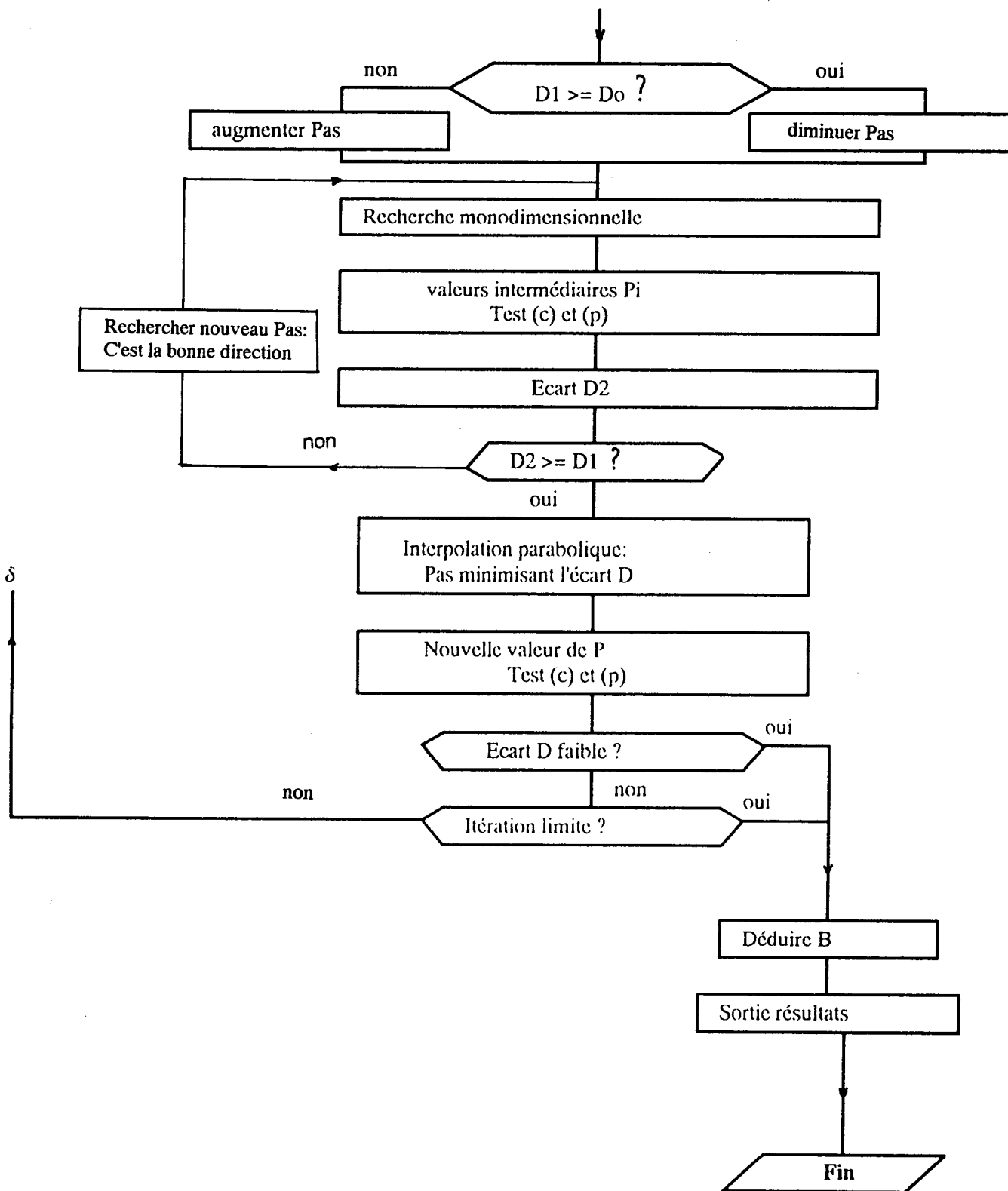
A partir du point initial 1 on calcule la direction du gradient $(\mathbf{dir})_1$, et par une recherche monodimensionnelle sur cette direction on détermine le meilleur point 2. On calcule le gradient négatif $-(\mathbf{grad} D)_2$ en ce point et on déduit le coefficient β_{n-1} . La direction $(\mathbf{dir})_2$ sera construite par l'algorithme de *Fletcher* et *Reeves* et passe par le centre de l'ellipse car $(\mathbf{dir})_1$ et $(\mathbf{dir})_2$ sont conjuguées. La recherche monodimensionnelle sur $(\mathbf{dir})_2$ aboutit au minimum 4.

Si la fonction n'est pas quadratique $(\mathbf{dir})_2$ ne passe pas par le point 4, mais par un autre point à partir duquel il faut recommencer les opérations précédentes.

Comme la plupart des autres procédures itératives, la méthode ici présentée ne peut pas distinguer entre un minimum local et un minimum global. En général le meilleur qui peut être attendu est la convergence sûre vers le bas de n'importe quelle vallée dans laquelle a lieu le commencement. La procédure usuelle pour des problèmes avec des minimums locaux est de recommencer la méthode avec d'autres points de départ.

2. Algorithme de résolution du problème inverse





BIBLIOGRAPHIE

- [1] LORD RAYLEIGH : On waves propagated along the plane surface of an elastic solide. Proc. London Math. Soc., 17, 4–11 (1885) ou Scientific papers, 2, 441–447, Cambridge University press, london, 1900.
- [2] A. E. H. LOVE : Some problems of geodynamics, Cambridge University. Press. Cambridge, England, (1911).
- [3] J. ROUSSEAU : Etude d'ondes de type Rayleigh sur des milieux stratifiés. Thèse de 3^è cycle, Lille I (1979).
- [4] R. STONELEY : Elastic waves at the surface of separation of two solids. Proc. Roy. Soc., London A 106, 416–428 (1924).
- [5] J.G. SCHOLTE : On the large displacements commonly regarded as caused by Love-waves and similar dispersive surface-waves. Proc. Kon. Ned. Akad. V. Wetensch. Amsterdam 51, Part I, 533–543, part. III , 828–835, Part. IV ,939–976 (1948).
- [6] J.R. CHAMUEL : Experimental observations on liquid/solid interface waves. J. Acoust. Soc. Am. Suppl. 1, 72, 599– (1982).
- [7] M. DE BILLY, G. QUENTIN : Experimental study of the Scholte wave propagation on a plane surface partially immersed in a liquid. J. Appl. Phys. 54 , 4314–4322 (1983).
- [8] K. SEZAWA and K. KANAI : Discontinuity in the dispersion of Rayleigh waves, Bull. Earthquake Research Inst. (Tokyo) 13, 237–244 (1935).
- [9] K. SEZAWA and K. KANAI : The M_2 seismic waves, Bull. Earthquake Research Inst. (Tokyo) 13, 750–756 (1935).
- [10] W.M. EWING, W.S. JARDETZKY, F. PRESS : Elastics waves in layered media. Mc Graw-Hill book compagny, inc. 1957.
- [11] WHITE : I.E.E.E. Trans. Electron. Devices 14, 181 (1967).
- [12] SCHNITZLER, BEGSTEIN, STRAUSS : I.E.E.E. Trans. Sonics and Ultrasonics. 17, 3, 185 (1970).
- [13] SHTYKOV, MASON, MOTZ : I.E.E.E. Trans. Sonics and Ultrasonics, 22, 2, 131 (1975).
- [14] OLINER : Acoustic surface waves, Topics in applied physics, 24 (1978).
- [15] G. HAW : Dispersion de vitesse d'ondes de Rayleigh sur des verres trempés. Thèse de Docteur-ingénieur, Lille I (1983).

- [16] A. DEFEBVRE, J. POULIQUEN, L.-M. MOUKALA : Velocity dispersion and energy location of Stoneley-Scholte wave in layered media. 13th international congress on acoustics, 4, 319-322, Belgrade, 1989.
- [17] A. DEFEBVRE, J. POULIQUEN, L.-M. MOUKALA : Interface waves in layered media peculiar to the cas of quasiperiodical structures. Ultrasons international'91. Conference and exhibition, (1991), le Touquet - France.
- [18] B. CHENNI : Evaluation non destructive d'acier chromé par dispersion de vitesse d'ondes de Rayleigh. Thèse d'Université, Lille I, 1988.
- [19] D. RAUCH : Seismic interface waves in coastal waters. Bottom-interacting-Ocean acoustics. Nato conferences series. Series IV. Marine Science p. 310.
- [20] J.G. SCHOLTE : The range of existence of Rayleigh and Stoneley waves, Notices Ray. Astron. Soc. : Geophys-Suppl., 5, 120-126 (1947).
- [21] M. SIBONY et J.-CL. MARDON : Analyse numérique I, Systèmes linéaires et non linéaires. Ed. HERMANN, Paris 1984.
- [22] H.R HESTENES and E.E. STIEFFEL : Method of conjuguate gradients for solving linear systems. R.Res. Nat, Bur. Standard, 49 , 409-430 (1952).
- [23] R. FLETCHER and C.M. REEVES : Fonction minimization by conjuguate gradients, Computer journal, vol 7.2.(1964).
- [24] MARADUDIN : Surface acoustics waves. Non equilibrium phonon dynamics. Plenum Press, New York (1985).
- [25] Bottom - Interacting Ocean Acoustics : W.A. KUPERMAN et F.B. FENSEN, Nato conference series, Serie IV Marine Sciences. Plenum Press, New York and London.
- [26] F.D. DINAPOLI et al. : Référence [25]. Bottom loss waveforms. 225-237.
- [27] M.H. MANGHNANI et al. : Référence [25]. Elastic properties of carbonate sediments, 41-51.
- [28] Communication privée du Laboratoire d'Acoustique Systèmes et Signaux Sonar (L.A.S.S.SO.), ICPI, Lyon, mars 1990.
- [29] J. RICHALET, A. RAULT, R. POULIQUEN : Identification des processus par la méthode du modèle, Théorie des systèmes, tome 4, Gordon and Breach Ed. 1971.
- [30] A. DEFEBVRE, J. POULIQUEN, L.-M. MOUKALA : Caractérisation de milieux plans stratifiés à profil linéaire par mesure de la vitesse des ondes de Stoneley-Scholte - Etude d'une simulation. 2è congrès Français d'acoustique, 2, 861-864 (1992), Arcachon - France.

