

50376  
1992  
220

x50376  
1992  
220

# THESE

N° d'ordre 967

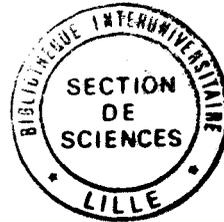
présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES  
ARTOIS

Productique, Automatique et Informatique Industrielle

par

Radouan FAÏZ



pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Lille-Flandres-Artois

dans la spécialité : Automatique-Informatique Industrielle



## COMMANDE OPTIMALE D'UN LASER IMPULSIONNEL CHIRURGICAL

Soutenue le 30 septembre 1992 devant la commission d'examen:

Mr.M.STAROSWIECKI  
Mr.S.MORDON  
Mr.P.BORNE  
Mr.R.LAURENT  
Mr.J.M.BRUNETAUD  
Mr.D.BOUCHER

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur

SCD LILLE 1



D 030 282341 6

61482

50376  
1992  
220

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé en collaboration très étroite entre le Centre de technologie Biomédicale (INSERM U 279) et le Laboratoire d'Automatique Fondamentale et Appliquée (L.A.F.A) de l'Université de Lille I.

Cette thèse a été effectuée sous la direction du Professeur M.Staroswiecki, je le remercie très sincèrement pour les nombreux conseils, le soutien constant et les multiples encouragements qu'il n'a cessé de me prodiguer tout au long de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma reconnaissance pour cette aide efficace.

J'adresse également mes plus vifs remerciements à Monsieur S.Mordon, chargé de recherches à l'INSERM pour m'avoir accueilli à l'INSERM U 279 et m'avoir fait bénéficier, avec une sincère amitié de son expérience de chercheur.

Je remercie également Monsieur J.M.Brunetaud, Professeur à la faculté de médecine et directeur du laboratoire d'Enseignement et de Recherche des Lasers de m'avoir fourni les moyens nécessaires qui ont été déterminants pour l'aboutissement de ce travail, je le remercie de bien vouloir participer au jury.

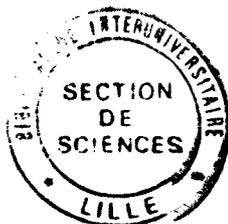
Je remercie Monsieur P.Borne Professeur à l'Ecole Centrale de Lille qui me fait l'honneur de juger ce travail et assurer la tâche de rapporteur. Qu'il trouve ici l'expression de ma déférente gratitude.

Mes remerciements vont également à Monsieur R.Laurent Professeur à l'I.U.T d'Orléans qui me fait l'honneur d'examiner ce travail et d'assurer la tâche de rapporteur, qu'il en soit remercié.

Je remercie Monsieur D.Boucher Professeur à l'Université des Sciences et techniques de Lille F.A qui me fait l'honneur de juger ce travail.

Que tout mes collègues et amis du laboratoire d'Enseignements et de recherches des Lasers que j'ai côtoyé durant ces années, et grâce auxquels ce travail a pu s'effectuer dans une ambiance agréable, trouvent ici l'expression de ma reconnaissance et ma sympathie.

J'adresse enfin toute ma sympathie aux personnels de l'INSERM U 279.



## INTRODUCTION

L'action thermique des lasers a été largement utilisée dans le domaine médical depuis plusieurs années. C'est une technique sûre, efficace et très appréciée par les patients traités. Cependant, des problèmes dans l'utilisation des lasers restent encore posés. La quantification (extension du dommage) de l'action thermique des lasers pendant le traitement n'est pas encore bien maîtrisée. Actuellement, l'observation à l'oeil nu à la surface du tissu permet d'évaluer le dommage produit. Ce moyen d'apprécier le dommage peut être valable pour des lasers ayant une longueur d'onde qui est fortement absorbée à la surface du tissu tels l'Argon et le CO<sub>2</sub>, mais elle n'est pas valable pour des lasers dont la longueur d'onde est absorbée en profondeur comme le Nd-YAG qui est utilisé pour la coagulation et la thérapie interstitielle. Avec le développement croissant des outils de développement informatiques, le contrôle du dommage en boucle fermée devient possible.

Plusieurs systèmes de commande d'un laser médical ont été proposés. Un système basé sur la mesure de la lumière réfléchi pour contrôler l'extension de la lésion sur l'oeil du lapin (Yan et al 1989). Cette méthode présente encore des problèmes quant à son utilisation en temps réel. En effet, le signal réfléchi n'apparaît qu'après un temps de latence. Ce temps de latence est au moins égal à 25 ms et peut augmenter en fonction des paramètres du laser et du tissu. Ce problème de temps de latence est évité par les systèmes de commande du laser basés sur la mesure de température. Le retour de l'information (mesure de température) dépend uniquement du temps de réponse du capteur thermique.

La méthode "on-off" (Yoon et al 1989) consiste à calculer une suite d'impulsions en boucle ouverte de telle sorte que la température en surface ne dépasse pas les deux seuils de coagulation. Une autre méthode, Laserthermia, (Daikuzono et al 1986) est appliquée en hyperthermie. Dans ce cas, un ensemble de thermocouples sont placés à des points stratégiques autour de la tumeur pour mesurer la température. Le système de commande calcule la température et le temps pendant lequel la température est maintenue pour chaque thermocouple. Dès que la température dépasse le seuil maximal de l'hyperthermie, le laser est arrêté. Ce système nécessite un temps de réponse de plusieurs minutes, il est bien adapté pour l'hyperthermie, mais, il est très lent, moins rigoureux et très limité pour le contrôle en temps réel d'une nécrose de coagulation. Saadatmesh (1989) et Cohen (1991) ont développé un système de commande en temps réel. Ce système est basé sur l'optimisation de l'énergie délivrée. Mais, la température et la réaction du tissu sont inconnus.

Dans ce travail nous allons étudier la commande d'un laser Nd-YAG pour le contrôle d'une nécrose de coagulation en boucle fermée. Nous nous sommes basés sur une étude précédente qui montre que dans le cas des tissus à structure "homogène", il existe une relation directe liant la profondeur de la nécrose à la durée de chauffage du tissu au

dessus du seuil critique de coagulation (Mordon 1985). Ainsi, la mesure de température en surface est retenue pour contrôler l'évolution de la nécrose de coagulation en temps réel.

Le premier chapitre traite deux thèmes :

1/ généralités sur les lasers et en particulier les lasers médicaux : l'intérêt des lasers en médecine, les différents lasers utilisés en médecine, le choix des sources lasers pour le traitement de tumeurs particulières ...

2/ La modélisation de l'action thermique des lasers sur les tissus vivants : ce travail consiste à décrire par un formalisme mathématique, les différents processus mis en jeu lors d'un traitement laser sur un tissu vivant. Nous présentons, à la fin du chapitre, un modèle de commande simple mais, physiquement significatif, qui va permettre de calculer la commande du laser en boucle fermée.

Le deuxième chapitre est consacré au calcul de la loi de commande. A partir du modèle de commande, une loi de commande optimale a été développée sur la base du principe d'optimalité de Bellman connu aussi sous le nom de *programmation dynamique*. Parmi les techniques d'optimisation, la programmation dynamique a l'avantage de fournir une commande optimale en boucle fermée. Elle fournit, à tout instant, une commande optimale (définie par deux paramètres,  $d$  : largeur de l'impulsion et  $D$  : durée entre impulsions) tenant compte des contraintes liées à l'état et aux signaux de commande.

Dans le troisième chapitre nous étudions un algorithme d'adaptation paramétrique. En effet, la loi de commande étudiée dans le deuxième chapitre ne tient pas compte des changements paramétriques qui surviennent pendant le traitement. Cette loi de commande est donc valable pour des paramètres tissulaires fixes. Le couplage de la programmation dynamique à un algorithme d'adaptation paramétrique s'avère nécessaire pour prendre en compte les variations paramétriques. L'algorithme d'adaptation paramétrique est basé sur la méthode des moindres carrés récurrents introduite par Landau et Lozano. La loi de commande ainsi obtenue est communément appelée commande auto-ajustable (Self-Tuning Control S.T.C).

Enfin le dernier chapitre présente les résultats de simulation de la loi de commande effectués sur un modèle de connaissance. Ce modèle, baptisé Hélios, décrit l'action thermique des lasers sur les tissus vivants.

Dans un premier temps, nous présentons le modèle Hélios et les résultats de sa validation par des données expérimentales obtenues à la suite de l'irradiation du foie de rat par le laser Nd-YAG impulsif. Ensuite nous donnons les résultats de simulation de la loi de commande optimale et adaptative que nous avons développée.

## TABLE DES MATIERES

## CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES LASERS

PRINCIPE DU LASER.....	1
Définition.....	1
Caractéristiques du rayonnement émis par le laser.....	2
Principaux lasers.....	2
LES LASERS EN MEDECINE.....	2
Histoire.....	2
Effets microscopiques du laser sur les tissus vivants.....	3
Source de chaleur.....	3
Transfert de chaleur.....	3
Mécanisme de dénaturation.....	3
Effets macroscopiques des lasers sur les tissus.....	6
Hyperthermie.....	6
Coagulation.....	6
Volatilisation.....	6
Les sources lasers en médecine.....	6
Laser CO <sub>2</sub> .....	7
Laser Argon.....	7
Laser Néodyme-YAG (Nd-YAG).....	7
Effets non thermiques.....	8
Effets photochimiques.....	8
Effets électriques.....	8
Effets mécaniques.....	8
MODELISATION DES EFFETS THERMIQUES.....	8
Etude qualitative.....	8
Etude quantitative.....	10
Principe de la modélisation.....	10
Equation de la source de chaleur.....	11
Equation de la chaleur.....	14
Le modèle du dommage.....	14
MODELISATION DES TISSUS HOMOGENES : MODELE DE COMMANDE.....	18
Pendant le tir.....	21
Après le tir.....	22
CONCLUSION.....	23

## CHAPITRE II : COMMANDE OPTIMALE

INTRODUCTION.....	24
Aspect historique.....	24
Problème de la commande optimale.....	25
Processus.....	25
Contraintes.....	25

Conditions aux limites.....	26
Critère:.....	26
RAPPEL SUR LE PROCESSUS A COMMANDER.....	27
FORMULATION DU PROBLEME DE COMMANDE.....	28
Horizon et conditions initiales.....	28
Le processus.....	28
Température à la surface du tissu.....	28
Domage à produire.....	29
Contraintes.....	32
Contrainte sur l'état du système:.....	32
Contrainte sur les signaux de commande:.....	32
Critère.....	32
But de la commande optimale.....	33
PROGRAMMATION DYNAMIQUE : Principe général.....	33
RESOLUTION DE L'EQUATION DE BELLMAN.....	35
Méthode itérative pour la recherche de l'optimum.....	36
Etape d'initialisation:.....	36
Recherche de la durée de tir $d_{N-1}$ .....	36
Contraintes:.....	37
Coût de la dernière étape.....	38
Commentaire.....	41
Remarques.....	41
Avant dernière étape.....	42
Optimisation de la durée entre tirs: $D_{N-2}$ .....	43
Optimisation de la durée de tir $d_{N-2}$ .....	44
Equations de l'étape.....	45
Contraintes: Domaine de validité des équations.....	46
Coût de l'étape.....	48
Etape d'ordre k.....	50
Optimisation de $D_{N-k}$ .....	51
Optimisation de la durée de tir $d_{N-k}$ .....	52
Equation de l'étape:.....	52
Contrainte:Domaine de validité.....	53
Coût de l'étape.....	54
CONCLUSION.....	57
ANNEXES.....	
Annexe I : Optimisation de $D_{N-k}$ .....	
Annexe II : Optimisation de la durée de tir $d_{N-k}$ .....	

**CHAPITRE III : COMMANDE ADAPTATIVE**

INTRODUCTION.....	58
LES DIFFERENTES APPROCHES DE LA COMMANDE ADAPTATIVE.....	59
APPLICATION DE LA COMMANDE AUTO-AJUSTABLE AU PROBLEME DU LASER MEDICAL.....	61
Méthode directe.....	62
Conditions de déclenchement.....	62
Méthode des moindres carrés simples.....	65
Conditions de déclenchement.....	66
Algorithme des moindres carrés récursifs pondérés.....	69
Algorithme des moindres carrés récursif (M.C.R).....	69
Calcul du gain d'adaptation (Algorithme des M.C.R pondéré).....	73
CONCLUSION.....	82

**CHAPITRE IV : VALIDATION ET RESULTATS**

INTRODUCTION.....	83
PRESENTATION DU MODELE HELIOS.....	84
Résolution numérique de l'équation de la chaleur.....	84
Structure du logiciel Hélios.....	88
Fonction 1: Création/Lecture des paramètres.....	88
Fonction 2: Lancement des calculs.....	88
Fonction 3: Etude des résultats.....	89
VALIDATION DU MODELE HELIOS.....	89
Materiels de validation : organe de commande, laser, capteur thermique.....	89
Les lasers.....	89
Laser Nd-YAG.....	89
Laser Argon.....	90
La carte de commande.....	90
Le capteur thermique.....	90
La caméra infrarouge.....	90
Système d'acquisition et de traitement.....	91
Tissu biologique.....	91
Résultats de validation.....	91
Laser Argon.....	92
Le laser Nd-YAG continu.....	94
SIMULATION DE LA LOI DE COMMANDE OPTIMALE SUR HELIOS.....	96
Description de l'algorithme de simulation:.....	97
Simulation de la loi de commande en l'absence de perturbations.....	100
Simulation en boucle ouverte.....	101
Variation des paramètres.....	101
Perturbation sur l'état.....	102
Simulation de la programmation dynamique (sans adaptation paramétrique).....	103
Variation des paramètres.....	103
Perturbation sur l'état.....	104

**TABLES DES MATIERES :**

Simulation de la commande adaptative .....	105
Variation des paramètres .....	105
Perturbation sur l'état.....	106
CONCLUSION.....	107

## **Chapitre 1 : Généralités sur les lasers**

## CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES LASERS

PRINCIPE DU LASER.....	1
Définition.....	1
Caractéristiques du rayonnement émis par le laser.....	2
Principaux lasers.....	2
LES LASERS EN MEDECINE.....	2
Histoire.....	2
Effets microscopiques du laser sur les tissus vivants.....	3
Source de chaleur.....	3
Transfert de chaleur.....	3
Mécanisme de dénaturation.....	3
Effets macroscopiques des lasers sur les tissus.....	6
Hyperthermie.....	6
Coagulation.....	6
Volatilisation.....	6
Les sources lasers en médecine.....	6
Laser CO2.....	7
Laser Argon.....	7
Laser Néodyme-YAG (Nd-YAG).....	7
Effets non thermiques.....	8
Effets photochimiques.....	8
Effets électriques.....	8
Effets mécaniques.....	8
MODELISATION DES EFFETS THERMIQUES.....	8
Etude qualitative.....	8
Etude quantitative.....	10
Principe de la modélisation.....	10
Equation de la source de chaleur.....	11
Equation de la chaleur.....	14
Le modèle du dommage.....	14
MODELISATION DES TISSUS HOMOGENES : MODELE DE COMMANDE.....	18
Pendant le tir.....	21
Après le tir.....	22
CONCLUSION.....	23

## 1 PRINCIPE DU LASER

### 1.1 Définition

Le mot laser est un acronyme de l'expression anglaise: Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, ce qui signifie que le laser est une source de rayonnement dans laquelle un photon émis par un atome excité, est contraint d'extraire de l'énergie des autres atomes excités, créant par là même d'autres photons et augmentant ainsi l'amplitude du champ électromagnétique originel.

Trois éléments sont nécessaires à la création du rayonnement:

Un milieu actif: C'est un ensemble d'atomes, de molécules, ou d'ions, émettant un rayonnement dans la partie "optique" du spectre.

Un pompage: C'est un processus conduisant à une inversion de population, elle transforme le milieu actif en milieu amplificateur de rayonnement.

Une cavité résonnante: Pour amplifier le rayonnement d'une onde électromagnétique stationnaire, l'ensemble "milieu actif + pompage" doit être placé dans un résonateur optique qui a pour rôle d'entretenir le phénomène d'émission.

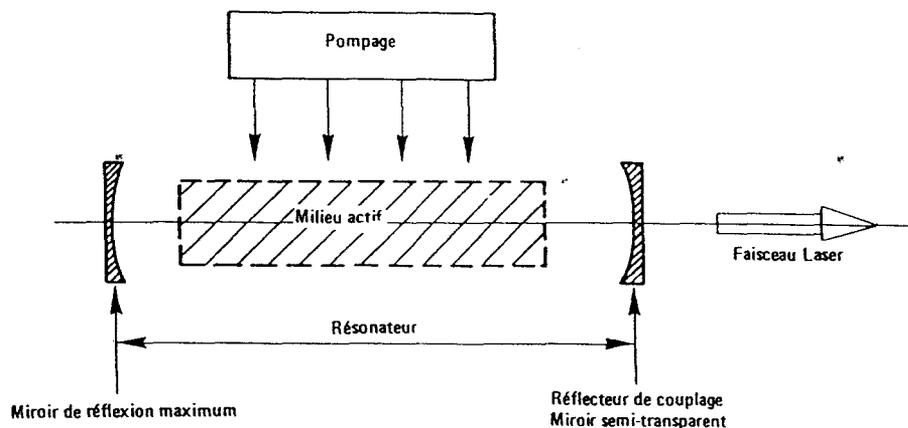


Figure 1 : Principe du laser

## 1.2 Caractéristiques du rayonnement émis par le laser

Considéré comme une source de chauffage, le rayonnement (en fonctionnement discontinu non déclenché) possède 3 caractéristiques essentielles:

- \* Une durée d'impulsion brève.
- \* Une puissance rayonnée élevée.
- \* Une divergence très faible permettant de le concentrer optiquement sur une très petite surface. Cette propriété donne lieu à de nombreuses applications:
  - Matérialiser une direction dans l'espace.
  - Aligner des éléments.
  - Transmettre l'énergie à distance.

## 1.3 Principaux lasers

Type du laser	Longueur d'onde (nm)	Mode de fonctionnement	Puissance /Energie	Remarques
Lasers à solide	649.3 (Rouge)	Impulsionnel	quelques Joules à quelques 10 joules	Peu employé
Laser à Neodyme	1060	impulsionnel/continu	100 W en continu 100 mJ/ Pulse en impulsionnel	Très utilisé
<b>Laser à gaz:</b>				
HeNe(Hélium Néon)	632.8, 1150 et 339(Rouge)		<= 10 mW	
Argon	498,496.5 et 514(bleu,vert)		<=10W	Rendement = 0.1%
Krypton	568.2			Rendement = 0.1%
CO <sub>2</sub>	10μ (InfraRouge)		plusieurs Kilowattheures	Rendement = 10% à 15%

## 2 LES LASERS EN MEDECINE

### 2.1 Histoire

Peu de temps après l'apparition du premier laser en 1960, les ophtalmologistes pensent à l'utiliser pour photocoaguler la rétine. Les premiers résultats cliniques sont obtenus en 1963 par Zweng, Vassiliadis et Campbell. D'autre disciplines s'intéressent au laser: Goldman en dermatologie, Stern en odontologie et Mac Goff en cancérologie. C'est en 1972 que les ophtalmologistes s'équipent de lasers à Argon continu qui donnent des résultats cliniques satisfaisants. En même temps HallJill et Beach étudient les effets du

CO<sub>2</sub> sur les tissus vivants. En 1975 apparait le Nd-YAG transmissible par fibre optique qui sera utilisé en endoscopie.

## **2.2 Effets microscopiques du laser sur les tissus vivants**

Du point de vue biologique, le laser est avant tout une source de rayonnement électromagnétique dont les effets dépendent de la fréquence, de l'intensité et de la durée d'exposition. Les effets du laser peuvent être divisés en deux catégories: thermiques et non thermiques.

L'effet thermique est le principal effet du rayonnement laser actuellement utilisé en thérapie. Quand le rayonnement laser est en contact avec le tissu, une partie de la lumière est réfléchi, une autre partie est transmise à travers le tissu, et le reste est absorbé. L'énergie absorbée sous forme de lumière élève la température du tissu. La température atteinte peut engendrer un dommage irréversible si elle dépasse un seuil thermique.

### **2.2.1. Source de chaleur**

Trois phénomènes se produisent lorsque la lumière pénètre le tissu: réflexion, absorption et transmission. La quantité réfléchi du rayonnement laser nous renseigne sur la quantité absorbée et celle transmise. L'absorption est en fait le mécanisme responsable de la création de chaleur. La transmission porte sur la quantité non réfléchi et non absorbée. Ces trois phénomènes dépendent des caractéristiques optiques du tissu. Un autre phénomène, la diffusion, qui joue un rôle important dans la distribution de l'énergie absorbée, limite la pénétration de la radiation.

### **2.2.2. Transfert de chaleur**

Deux phénomènes sont responsables du transfert de chaleur: la conduction et la convection (Bowman 1974). La convection de chaleur est un transport par le sang, alors que la conduction se fait sans transport de sang. La conduction de chaleur est le mécanisme le plus important du transfert de chaleur dans les tissus vivants.

### **2.2.3. Mécanisme de dénaturation**

Pour comprendre le phénomène de nécrose il faudrait connaître la cinétique de la transformation tissulaire. Cette cinétique dépend de la température et de son évolution temporelle (Henriques 1947). Les figures(2) et (3) représentent, respectivement, les courbes de survie du tissu hépatique (Bodecker 1975) et de la peau de boeuf déduites des données de Henriques (Goldman 1971). Elles mettent en évidence la variation du logarithme du taux de survie pour une température donnée en fonction de la durée de chauffage. Ces vitesses de réaction dépendent aussi de la structure moléculaire des tissus à transformer. Ainsi la dénaturation des protéines se produit entre 50°C et 70°C, le collagène est plus résistant à la température car sa structure est plus hiérarchisée sa dénaturation se produit entre 70°C et 90°C. La vitesse est élevée pour des molécules protéiniques et plus

faible pour les molécules du collagène. La chaleur induite par photocoagulation provoque le phénomène d'obturation des vaisseaux. Ce phénomène dépend du diamètre du vaisseau et de la longueur d'onde de la radiation laser: (Jain 1983) pour le CO<sub>2</sub> et le Nd -YAG, (Leheta 1976) pour l'Argon.

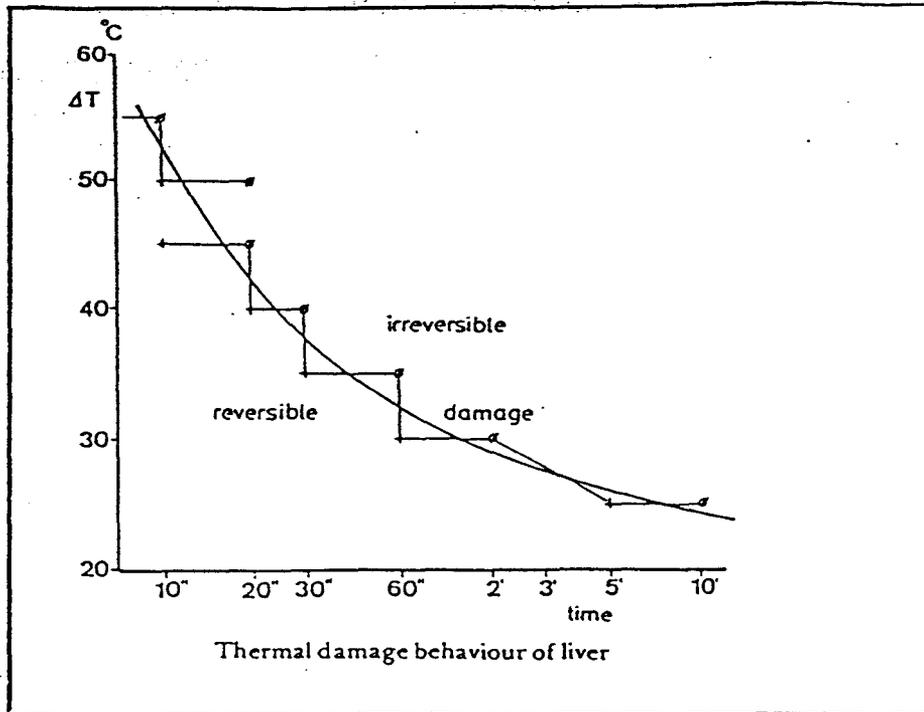


Figure 2 : Courbe de survie du tissu hépatique. (D'après Bodecker 1975).

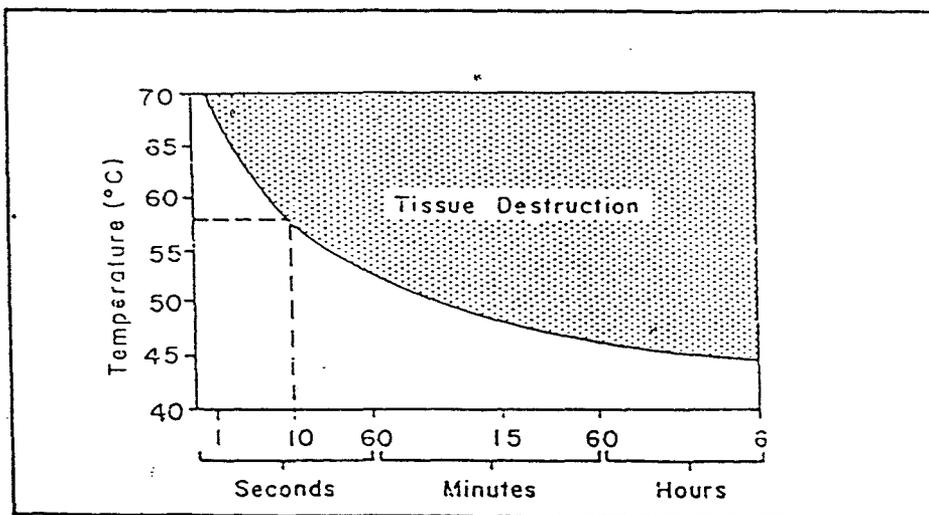


Figure 3 : Courbe de survie de la peau de boeuf déduite des données de Henriques.(D'après Goldman 1971).

### 2.3 Effets macroscopiques des lasers sur les tissus

Le résultat du champ thermique sur le tissu est fonction du taux d'énergie déposé, de la durée de l'irradiation, du volume du tissu irradié et de la capacité calorifique du tissu. On distingue trois effets thermiques en fonction de la température et du temps d'échauffement.

#### 2.3.1. Hyperthermie

Correspond à une élévation de température modérée de quelques degrés au dessus des températures physiologiques normales, pouvant ainsi correspondre à des températures de 41°C à 45°C pendant plusieurs minutes. L'application de l'hyperthermie est basée sur une thermosensibilité différente des cellules tumorales (Prevost 1982).

#### 2.3.2. Coagulation

Correspond à une nécrose irréversible. Ce n'est pas une brûlure, mais le seul changement macroscopique observé est le blanchiment de la surface irradiée. Ce blanchiment signifie une réjection (réflexion) de toutes les longueurs d'ondes de la lumière visible et est dû à un changement fondamental dans la structure du tissu qui conduit à un accroissement de diffusion, de réfraction et de réflexion de la lumière (Carruth & McKenzie ). La température atteinte est de 50°C à 100°C, maintenue pendant une durée de l'ordre de la seconde. Elle produit une dissémination avec rétraction des tissus. La coagulation est utilisée soit pour détruire des petits phénomènes tumoraux, soit pour réaliser une hémostase (Brunetaud 1984).

#### 2.3.3. Volatilisation

Correspond à une destruction de la structure du tissu. Les différents constituants du tissu partent en fumée à une température supérieure à 100°C dans un temps de l'ordre du dixième de seconde. Si la zone volatilisée est grande il est possible de détruire des phénomènes tumoraux volumineux. Si la zone volatilisée est étroite on obtient alors un phénomène de coupe avec une parfaite hémostase.

### 2.4 Les sources lasers en médecine

Les applications médicales qui visent à détruire une tumeur dans un tissu utilisent généralement le laser CO<sub>2</sub> de puissance relativement élevée (20-100W). L'énergie lumineuse est absorbée à la surface du tissu et la densité de puissance est suffisante pour volatiliser ou couper un volume tissulaire. Cependant, le champ d'application du laser CO<sub>2</sub> se trouve limité (endoscopie) par la complexité du mode de transmission de la radiation. Les lasers Nd-YAG et Argon présentent l'avantage d'être transmis par fibre optique et peuvent être utilisés pour des applications endoscopiques.

#### 2.4.1. Laser CO<sub>2</sub>

La longueur d'onde du CO<sub>2</sub> (10.6  $\mu\text{m}$ ) est fortement absorbée par l'eau, la partie non réfléchiée de cette radiation est quasiment absorbée à la surface du tissu. Ceci conduit à une rapide carbonisation et évaporation de la matière organique à l'aide d'un faisceau laser CO<sub>2</sub> focalisé, et ceci même avec une faible puissance de sortie (quelques Watts). Le laser CO<sub>2</sub> est essentiellement utilisé pour la coupe. Les premiers travaux sur l'irradiation des cordes vocales par laser CO<sub>2</sub> sur le chien ont été effectués par Jako en 1971. Les résultats ont été satisfaisants. Un programme clinique a été établi pour traiter des lésions bénignes (Strong 1976).

#### 2.4.2. Laser Argon

La longueur d'onde de l'Argon est comprise entre 0.5 et 0.6  $\mu\text{m}$ . Il a une profondeur de pénétration beaucoup plus importante que le laser CO<sub>2</sub>. Ainsi, la zone nécrosée et la profondeur de coagulation sont plus importantes qu'avec le CO<sub>2</sub>. 90 % de la radiation du laser Argon est absorbée dès les premières 0.6 mm de profondeur du tissu (Kiefhaber & all 77, Fruhmorgen & all 1976). La longueur d'onde de l'Argon est très absorbée par l'hémoglobine, c'est pour cette raison que son effet hémostatique est limité à l'hémostase de très petits vaisseaux. Le laser Argon est aussi utilisé en angioplastie (Cosman 1980, Ohshiro & all 1980) et pour la destruction des tumeurs de la vessie (Stahler 1980, Goodale & all 1970).

#### 2.4.3. Laser Néodyme-YAG (Nd-YAG)

La longueur d'onde du Nd-YAG est 1.06  $\mu\text{m}$  (proche Infra rouge). L'absorption des tissus biologiques à cette longueur d'onde est 4 ou 5 fois plus faible que pour le laser à Argon (Kiefhaber & all 77, Fruhmorgen & all 76). L'absorption sélective par les pigments, bien que beaucoup moins importante que celle du rayonnement laser à Argon, existe néanmoins avec le Nd-YAG (Goldman 79). Ce type de laser possède un important pouvoir pénétrant, mais la transmission en profondeur est fortement réduite par le phénomène de diffusion (scattering). Selon Halldorson (Halldorson 76) la diffusion réduit la profondeur de pénétration de la radiation de l'ordre de plusieurs millimètres et augmente considérablement la réflectance totale par retro diffusion. Les effets thermiques du laser Nd-YAG sont observés jusqu'à une profondeur de 3 à 4 mm.

Kiefhaber & all ont montré que le contrôle de l'hémorragie chez le chien a été beaucoup plus facile avec le Nd-YAG qu'avec l'Argon. La forte pénétration du faisceau Nd-YAG dans le tissu provoque un dommage important. Fruhmorgen & all et d'autres auteurs (Silverstein & all 1977, Stahler & all 1976, Silverstein & all 1979) ont constaté que l'extension du dommage aux alentours de la tumeur et le risque de perforer la paroi (de

l'estomac) est fort probable avec le Nd-YAG. Cependant seul le Nd-YAG peut être utilisé pour des hémorragies importantes ou en profondeur.

## 2.5 Effets non thermiques

### 2.5.1. Effets photochimiques

L'effet thermique concerne l'absorption globale du rayonnement par le tissu biologique. L'effet photochimique concerne une absorption sélective du rayonnement. Ce mode d'action est utilisé pour la photo-activation ou la photo-inhibition. Certains corps ne sont sensibles qu'à une ou plusieurs longueurs d'ondes bien précises. On peut donc dénaturer ou détruire certaines substances cellulaires sans pour cela entraîner la mort d'une cellule. Rounds, Johnson et Gamalya ont modifié l'activité contractile du tissu myocardique du rat en utilisant un laser Argon (514.5 et 488 nm) à très faible puissance ( $3 \text{ m.J.cm}^{-2}$ ). Rounds a montré que le Cytochrome B est inhibé à 530 nm par le Nd (1060nm) doublé à très faible puissance ( $3 \text{ m.J.cm}^{-2}$ ).

### 2.5.2. Effets électriques

Les effets électriques sur les tissus biologiques sont dus au champ électrique qui accompagne le laser. Le champ électromagnétique du faisceau laser peut atteindre  $10^7$  à  $10^{12} \text{ V.m}^{-1}$ . Cette intensité est du même ordre que celle des champs électriques qui lient électron et noyau dans les atomes. Ceci justifie la désorganisation moléculaire et le changement des constantes physiques des milieux traversés par le faisceau laser. Volkov a constaté des modifications de la conductivité diélectrique de la peau abdominale du hamster sous l'action d'un tir laser Nd de 250J.

### 2.5.3. Effets mécaniques

Ces effets sont obtenus par des lasers pulsés où l'énergie est délivrée au tissu biologiques en des temps brefs (100 ms à  $10^{-12}$  s). Cette interaction comprend:

La production d'une onde acoustique et d'ondes de choc, l'effet électrostrictif et la pression de radiation qui se produit au niveau de l'interface d'absorption du rayonnement peuvent être exploités pour produire des lésions dans des tissus solides tels que l'orbite ou la carie dentaire.

## 3 MODELISATION DES EFFETS THERMIQUES

### 3.1 Etude qualitative

L'interaction laser-tissu est un phénomène résultant de trois processus distincts (Figure 4): une conversion de lumière en chaleur, un transfert de chaleur et une réaction tissulaire dépendante de la température. Ce phénomène d'interaction conduit à la dénaturation et à la destruction d'un volume tissulaire (Welch 1983). Ce volume médical atteint constituera pour le système de commande une des données. Les données connues seront les paramètres du laser (puissance, longueur d'onde, durée de tirs et durée entre tirs)

et le tissu à traiter (coefficients optiques, paramètres thermiques et coefficients de la réaction de dénaturation).

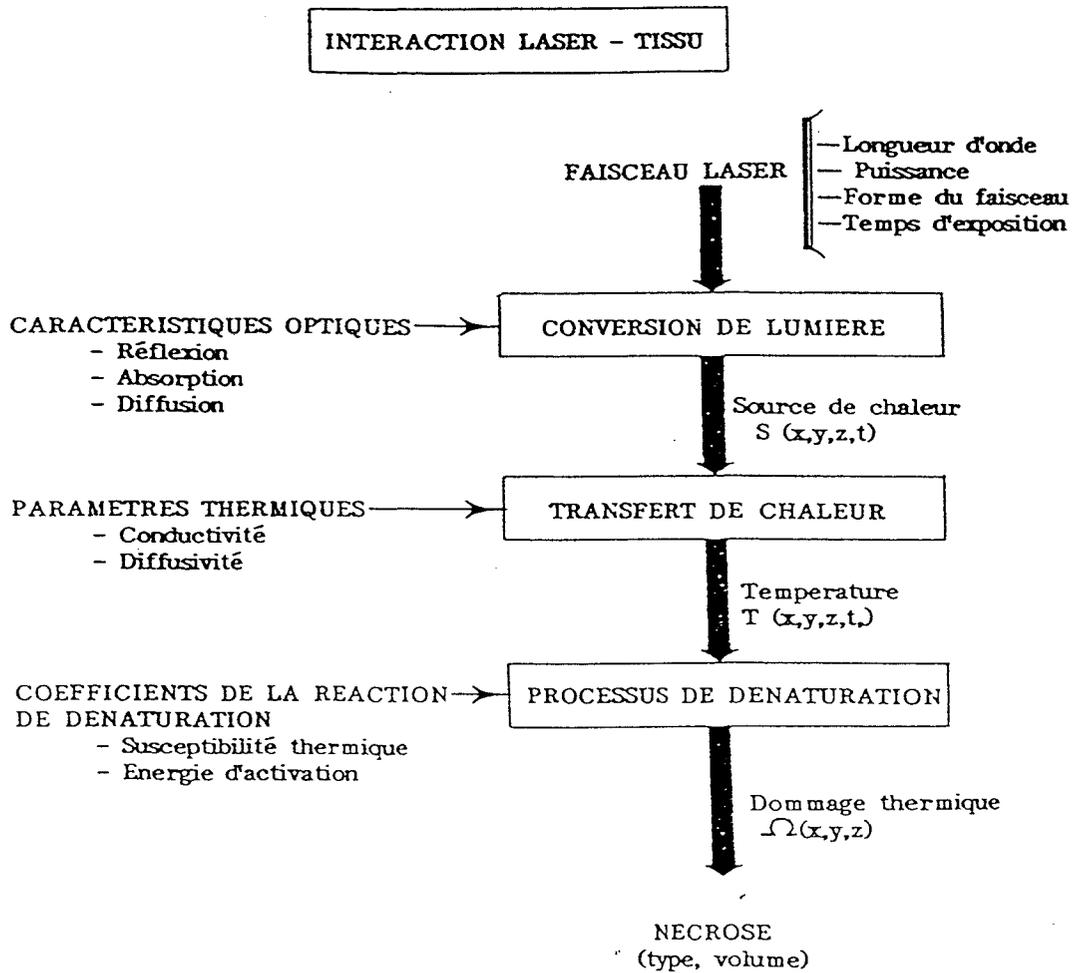


Figure 4 : Modèle de l'interaction laser – tissu vivants (D'après Mordon 1985).

### 3.2 Etude quantitative

Le rôle de la modélisation est de trouver des réponses aux questions concernant la production de chaleur par laser sur les tissus biologiques. La mise en équation du modèle s'obtient à partir des processus physiques de dissipation et de génération d'énergie thermique. Les lois de la physique théorique permettent d'expliquer les phénomènes d'absorption et de distribution de l'énergie lumineuse qui seront par la suite implantés sur ordinateur. Pour faire face à la complexité de la structure des tissus vivants, certaines simplifications ont été effectuées.

La représentation graphique permet d'illustrer et d'expliquer sous forme d'images en mouvement le phénomène de l'action thermique des lasers sur les tissus vivants. Elle permet par ailleurs de pratiquer des simulations.

La modélisation de l'action thermique sur les tissus présente deux avantages:

- Développer un outil de recherche pratique permettant une approche plus rationnelle dans l'utilisation des lasers.
- Mettre à la disposition des médecins un moyen pédagogique qui leur permettra une approche pratique à l'utilisation des lasers médicaux.

### 3.3 Principe de la modélisation.

Les tissus biologiques contiennent une multitude de structures différentes et d'espèces chimiques actives. L'échauffement des tissus vivants, pendant ou après l'irradiation, provoque le changement des propriétés chimiques du tissu et des paramètres dynamiques. La description de ce genre de système est limitée en pratique par les capacités de calcul. Le modèle décrit ici ne tient pas compte du processus de dissémination et de carbonisation.

Plusieurs modèles ont été établis. Priebe et Welch ont étudié la convergence d'un rayon laser sur une interface fluide-tissu avec une absorption de type Lambert -Beer (Priebe & Welch 1979), (Ishimaru 1978). Mainster et White utilisent la méthode de Peaceman-Rachford ADI (Alternating-Direction Implicit) des différences finies avec une extension exponentielle de la grille (Mainster & White 1970). Le modèle de Halldorson est entièrement analytique, il décrit l'influence de la diffusion interne (scattering) sur le volume final. Les modèles de Priebe (1979) et de Halldorson (1978) supposent constants les paramètres thermodynamiques et les paramètres de la fonction source de chaleur.

La figure (5) représente le schéma du modèle décrit dans ce document. La radiation provenant du cathéter de la fibre optique est appliquée perpendiculairement à la surface du tissu biologique. On suppose que la distribution d'énergie est symétrique par rapport à l'axe z.  $d_f$  est la distance fibre optique-interface air tissu et  $\alpha_0$  est l'angle de divergence. On suppose que la surface du tissu est un parfait isolant.

### 3.4 Equation de la source de chaleur

La figure (6) représente le profil d'une radiation du laser Argon pour la photocoagulation (Johnson 1980). Le diamètre de la fibre optique est  $80\mu\text{m}$ , la longueur du cathéter est de  $0.5\text{m}$ , il est positionné perpendiculairement au plan du tissu.

On suppose que la lumière pénètre dans le tissu sans dispersion et que le taux d'absorption local d'énergie de radiation est proportionnel à l'intensité (loi de Beer). Un faisceau d'intensité  $I_0(r)$  dirigé le long de l'axe  $z$ , aura pour intensité à la profondeur  $z$  de la surface:

$$I(r,z) = I_0(r).e^{-\beta.z} \quad (1)$$

$I_0$  est l'intensité du faisceau à la surface de la couche absorbante,  $\beta$  ( $\text{cm}^{-1}$ ) est le coefficient d'absorption.

La fonction source de chaleur s'écrit:

$$S(r,z) = \beta.I_0(r).e^{-\beta.z} \quad (2)$$

Le coefficient d'absorption dépend de la longueur d'onde de la radiation ainsi que de la nature du tissu (Welch 1982). Ceci entraîne que d'un laser à l'autre la puissance de pénétration diffère. Ceci a été mis en évidence dans le cas du sang (Welch & all 1977). La figure (7) représente la variation du coefficient d'absorption du sang par rapport aux différentes longueur d'onde ( $400\text{ nm}$  à  $1000\text{ nm}$ ). D'autre part l'intensité varie en fonction de la distance par rapport au centre. La figure (8) présente l'intensité relative en fonction de la distance au centre pour le laser Argon et Nd-YAG (Welch 1982). L'intensité est réduite de  $50\%$  à  $0.005\text{ cm}$  pour l'Argon, alors qu'elle est réduite de moitié à  $0.11\text{ cm}$  pour le Nd-YAG. L'énergie de la radiation du laser Ar est absorbée à la surface, alors que la radiation émise par le Nd-YAG est absorbée uniformément à travers le tissu.

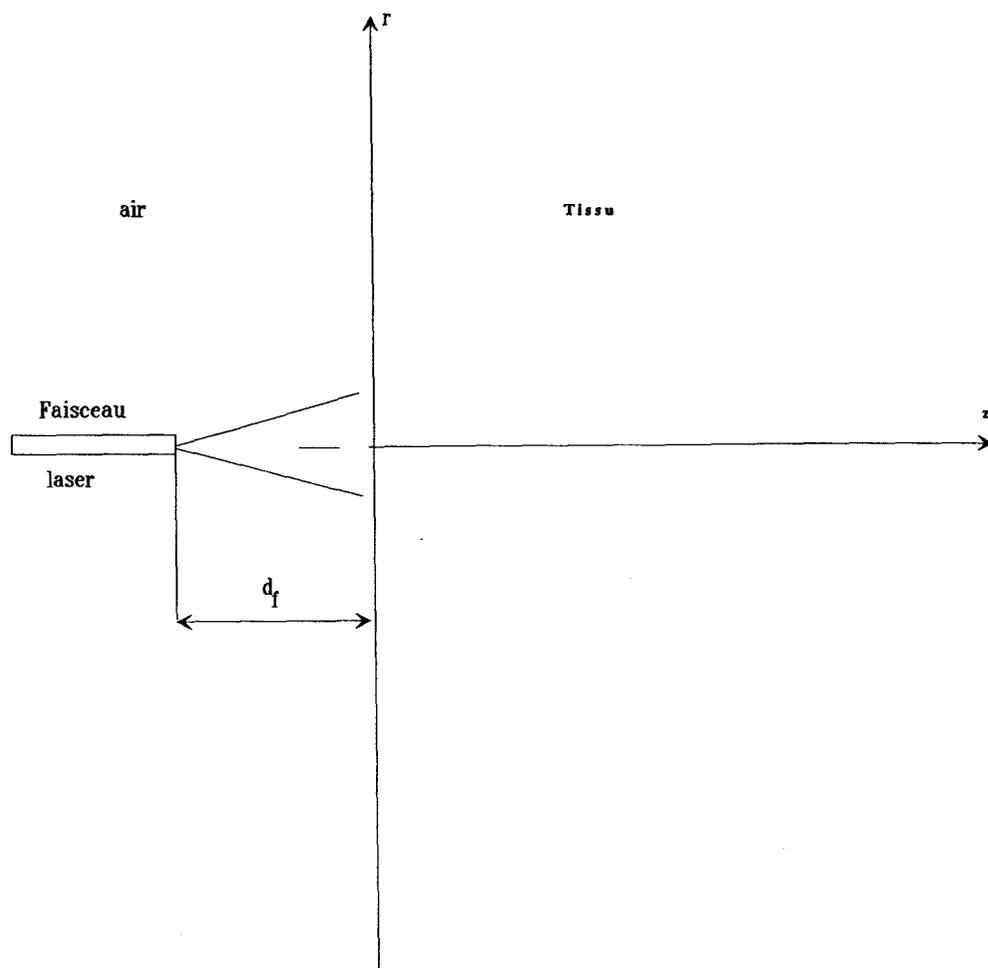


Figure 5 : Schéma synoptique du modèle

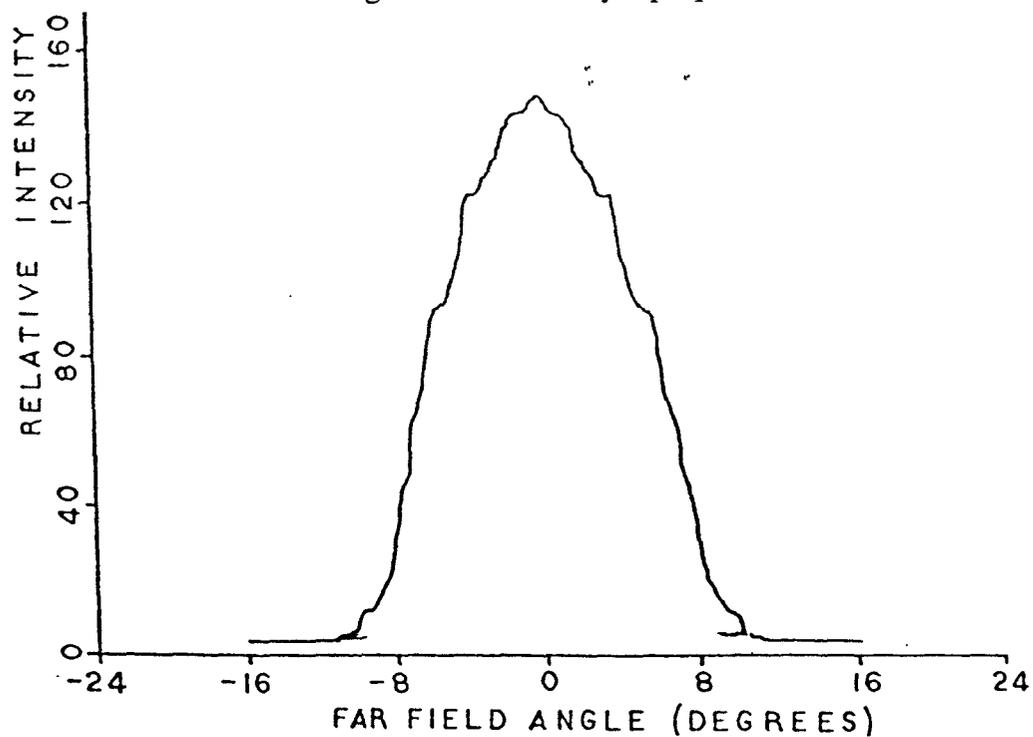


Figure 6 : Profil de l'intensité du laser Argon (D'après Johnson 1980)

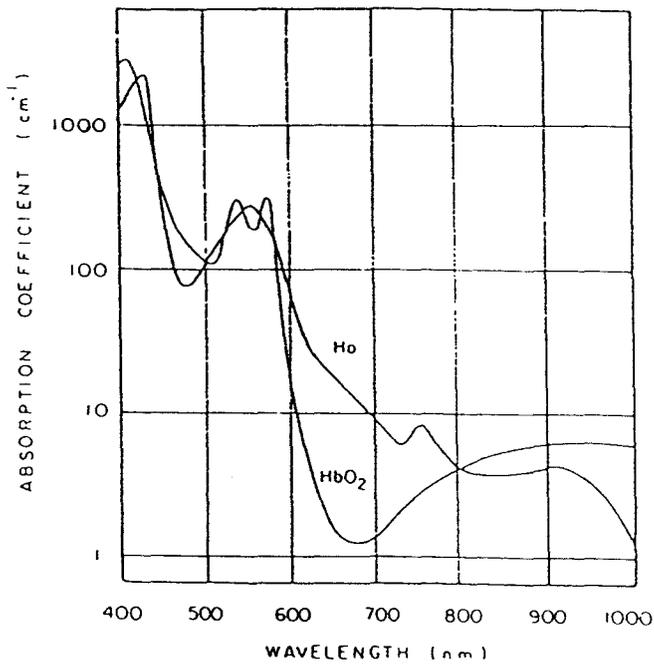


Figure 7 : Coefficient d'absorption de l'hémoglobine oxygénée et désoxygénée en fonction de la longueur d'onde.(D'après Welsch & all 1977)

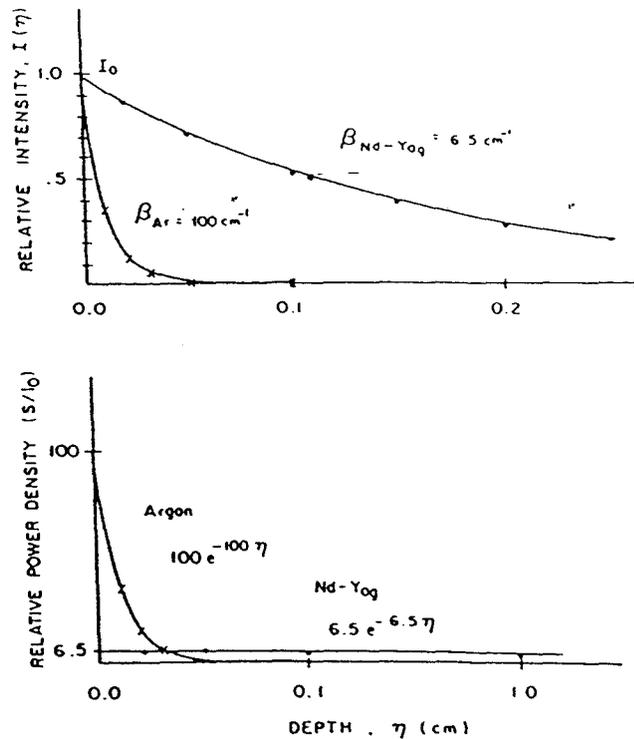


Figure 8 : a) L'intensité de la radiation laser en fonction de la profondeur dans l'hémoglobine oxygénée.b) Source de chaleur en fonction de la profondeur dans l'hémoglobine oxygénée.(D'après Welsch & all 1977).

### 3.5 Equation de la chaleur

La réponse en température des modèles de l'état transitoire et de l'état stable à la suite d'une radiation laser sur un tissu, est basée sur l'équation de la conduction de la chaleur qui ne tient pas compte du phénomène de convection de chaleur (transport de chaleur par flux sanguin). Si  $k$  est la conductivité thermique, l'équation de la chaleur s'écrit:

$$\Delta^2 T + \frac{s}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} \quad (3)$$

$k$  : Conductivité thermique (cal/cm.sec.°C)

$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c}$  : diffusivité thermique (cm<sup>2</sup>/sec)

$c$  : Chaleur spécifique (Cal/g°C)

$T$  : Température (°C)

$s$  : Source de chaleur (Cal/cm<sup>3</sup>.sec)

$r$  : Densité (g/cm<sup>3</sup>).

### 3.6 Le modèle du dommage

Plusieurs auteurs ont essayé de modéliser le processus du dommage (Stoll & Green 1959), (Hu & Barnes 1970), (Kach & Incropera 1974), (Takata 1974,1977), (Vassiliadis 1971) et (Priebe & Welch 1979).

Le dommage tissulaire, dû à l'action des lasers, est défini comme étant une dénaturation ou une perte de molécules tissulaires ou extracellulaires. Nous supposons qu'il y a une condition liée à la température au dessus de laquelle se produit un dommage irréversible (Routh 1971).

Les premiers travaux sur l'action thermique des lasers ont été réalisés par Henriques et Moritz (Henriques & Moritz 1947). Le dommage thermique a été décrit comme étant un processus qui dépend de la température. Cette dénaturation a été exprimée (Stoll 1960, Weaver 1969) par la fonction de dommage  $\Omega(t)$ . En tout point elle dépend de la réaction des coefficients du tissu et de l'évolution de la température dans le temps. L'expression du taux du dommage en tout point du tissu s'exprime par:

$$\frac{d\Omega(r,z,t)}{dt} = A \cdot \exp\left[\frac{E}{R \cdot T(r,z,t)}\right] \quad (13)$$

où  $A$  est une constante.

$E$  : Energie d'activation pour la réaction (Cal/mole).

R : Constante des gaz parfaits (Cal/mole•K)

T : Température absolue (°K).

En intégrant l'équation (13), la fonction dommage s'écrit:

$$\Omega(r,z) = A \cdot \int_{t_i}^{t_f} \exp\left[\frac{-E}{R \cdot T(r,z,t)}\right] dt \quad (14)$$

$t_i$  : Début du traitement

$t_f$  : fin du traitement.

Henriques et Moritz prennent  $\Omega = 1$  pour une nécrose épidermale complète. Alors que  $\Omega = 0.53$  correspond à un niveau de dommage réversible. Les valeurs de A et E sont déduites de mesures expérimentales de températures. Henriques et Moritz obtiennent:

$$A = 3.1 \cdot 10^{98} \text{ (1/sec)}$$

$$E = 150000 \text{ (Cal/mole)}.$$

La figure 10 représente le taux d'accumulation du dommage  $\frac{\delta\Omega}{\delta t}$  en fonction de la température (Henriques & Moritz 1947). La fonction de dommage se calcule à partir de la température par une intégration numérique basée sur l'équation (14). La procédure consiste à diviser l'axe des temps de l'évolution de température de la figure (11) en intervalles de longueur  $\Delta t$ . Le taux du dommage pour chaque intervalle est obtenue en lisant la valeur de  $\frac{\delta\Omega}{\delta t}$  correspondant à la température moyenne dans cet intervalle. Ces taux sont tracés sur la figure (11) sous forme de rectangles de largeur  $\Delta t$ . La surface de chaque rectangle représente la fraction du dommage produite dans cet intervalle. L'accumulation du dommage dans le temps  $\Omega(k \cdot \Delta t)$  approximée par  $\sum_{i=1}^N A_i$  est illustré sur la figure(11). La fonction dommage s'approche de sa valeur finale après le retour de la température à sa valeur normale.

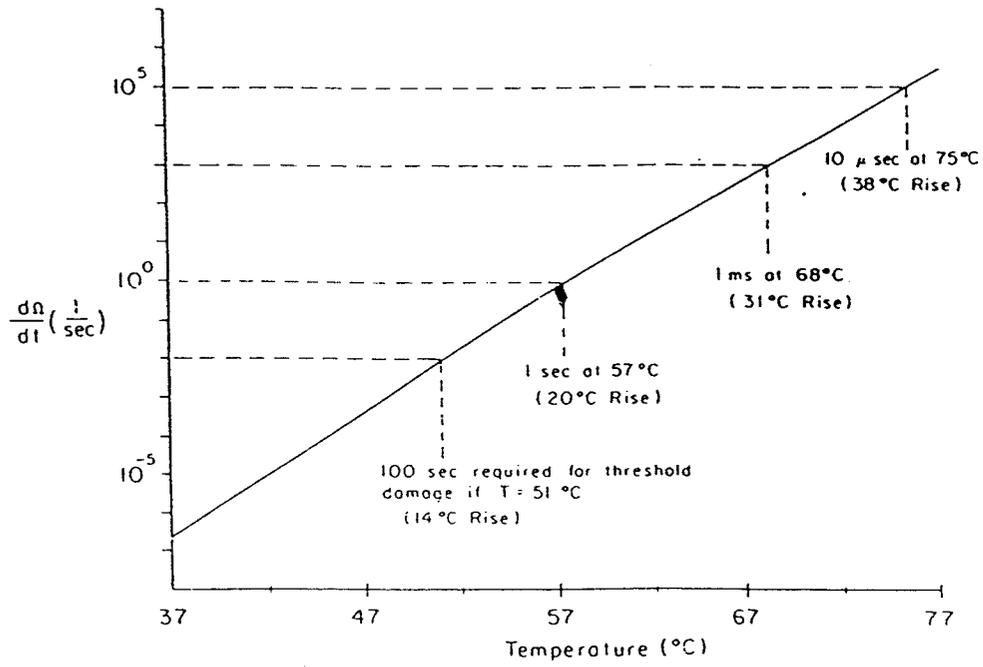


Figure 10 : Taux d'accumulation du dommage (D'après Henriques et Moritz 1947)

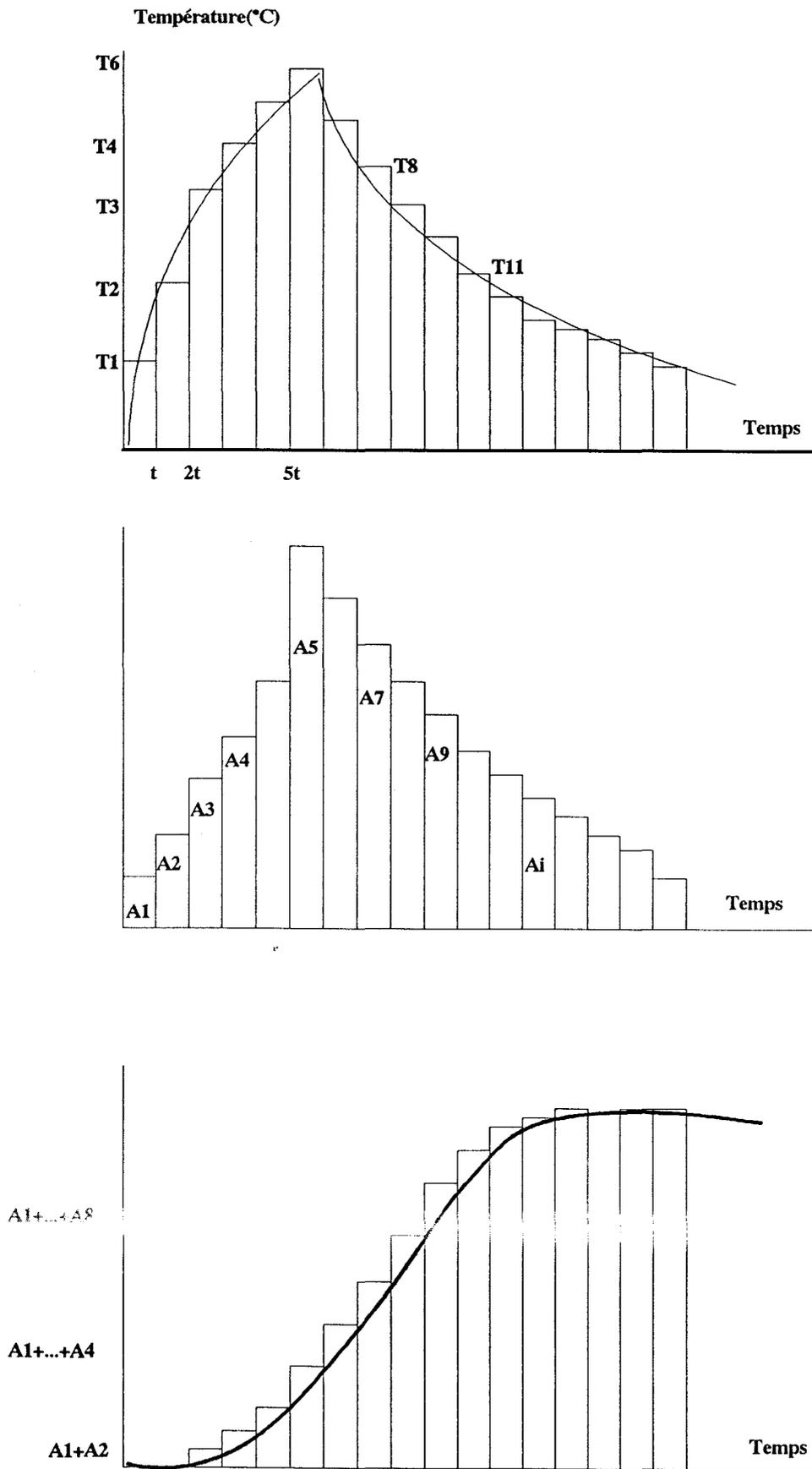


Figure 11 : Calcul de la fonction de dommage  $\Omega(t)$

La valeur de  $\Omega$  qui correspond à une dénaturation irréversible du tissu est arbitraire. Henriques prend  $\Omega = 1$  pour une nécrose épidermique complète. Linke considère  $\Omega=1$  pour un dommage irréversible déterminé 36 heures après l'exposition (Linke 1967).

En général on admet que  $\Omega(t)=1$  lorsque l'on observe histologiquement une nécrose complète et irréversible due à une dénaturation thermodynamique des enzymes et des protéines.

**Remarque:** L'objectif de la structure de commande que nous allons étudier dans les prochains chapitres serait d'obtenir  $\Omega(t) = 1$  à une profondeur  $z^*$ .

#### 4 MODELISATION DES TISSUS HOMOGENES : MODELE DE COMMANDE

\* Le modèle mathématique Hélias permet d'avoir une approche du laser plus rationnelle, il constitue en même temps un outil pédagogique puissant. C'est un *modèle de connaissance*. Cependant, en l'absence actuelle d'une instrumentation robuste et peu coûteuse il est difficile de se servir de ce modèle, dans une boucle de régulation, pour calculer la commande du laser. Le but de la modélisation est de fournir un modèle simple capable de représenter au mieux le phénomène d'interaction laser-tissu en temps réel. Ce type de modèle porte le nom de *modèle de commande*.

La profondeur de la nécrose de coagulation ou le volume tissulaire détruit peuvent être considéré comme une information capitale pour pouvoir commander le laser. Cependant, la mesure de ces deux paramètres en temps réel est extrêmement difficile et dans la plupart des cas elle est impossible. Il existe plusieurs méthodes pour effectuer une mesure indirecte du dommage produit. La résonance magnétique (Magnetic Resonance Imaging) est utilisée pour la localisation (Jolesz et al 1988). La réflectance (Reflectance imaging) est une mesure indirecte pour contrôler l'extension de la nécrose de coagulation (Yang et al 1990). La Fluorescence est utilisé pour détecter le phénomène de métabolisme dû à la coagulation (Müller et al 1991). La mesure de température est utilisée pour contrôler les changements de paramètres tissulaires pendant un processus d'hyperthermie ou de coagulation.

Depuis quelques années Mordon et al ont étudié expérimentalement la coagulation par laser Nd-YAG. En ce qui concerne les tissus à structure relativement homogène comme le foie, il a été montré (Mordon 1985) que la profondeur dans l'axe de la nécrose de coagulation est directement liée à l'évolution de la température en surface du tissu. La température atteinte à la surface du tissu et la durée pendant laquelle cette température est supérieure au seuil de coagulation ( $55^{\circ}\text{C}$ ), constituent les principales grandeurs qui ont un effet sur la géométrie de la nécrose.

La durée pendant laquelle la température à la surface du tissu est maintenue au dessus du seuil de coagulation qu'on appellera par la suite *durée de chauffage effectif* est liée à la profondeur de la nécrose dans l'axe du faisceau par la relation suivante:

$$\Gamma = \frac{z^2}{4.a} \quad (15)$$

$z$  : Profondeur de pénétration dans l'axe du faisceau laser en (cm)

$a$  : Diffusivité thermique comprise entre  $1,6.10^{-3} \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$  et  $2,4.10^{-3} \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$  pour le foie.

$\Gamma$  : durée de chauffage effectif en secondes.

Cette expression a été vérifiée expérimentalement. Elle peut être utilisée pour l'étude de l'élévation de température dans les tissus soumis à un faisceau laser (Goldman 1971). La figure (12) représente l'évolution de la profondeur de la nécrose en fonction de la durée de chauffage effectif (Mordon 1985). Les courbes théoriques et expérimentales se superposent dans l'intervalle de temps (0.2 s à 10 s), pour  $a = 2.10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  et le seuil de coagulation est  $53^\circ\text{C}$ . L'écart est faible et est dû soit à l'imprécision des coupes histologiques soit à l'écart sur la valeur de la diffusivité. L'expression (15) est une bonne approximation pour des durées de chauffage comprise entre 0.2 s et 10 s. En effet pour de telles durées, la perfusion sanguine n'intervient pratiquement pas (Eichler 1977).

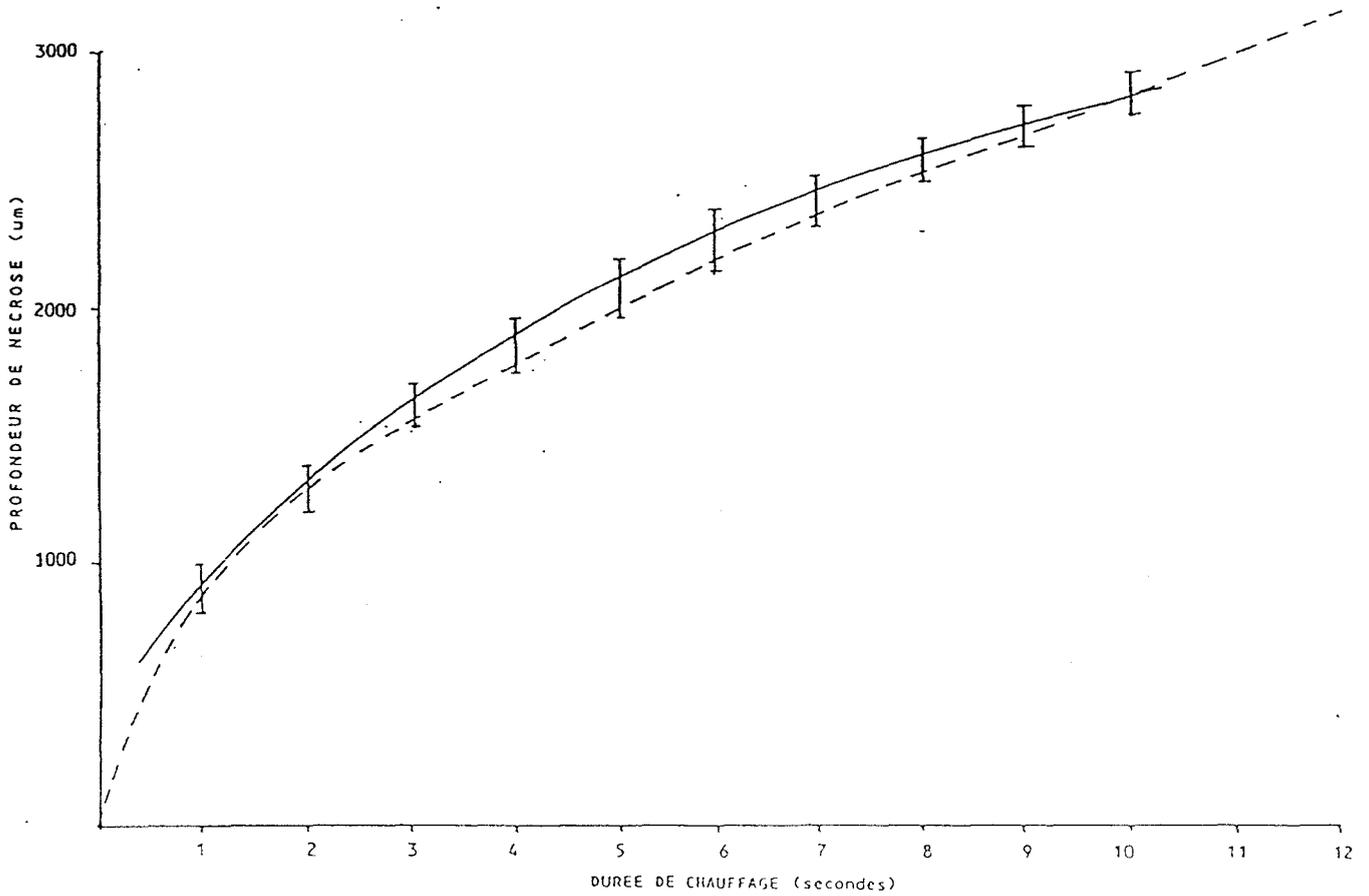


Figure 12: Laser Nd-YAG impulsif, relation profondeur de nécrose-durée de chauffage effectif. Comparaison des courbes théoriques et expérimentales.

Dans le cas particulier des tissus homogènes, la température à la surface du tissu et la durée pendant laquelle cette température est maintenue à la surface du tissu sont les deux paramètres qui nous permettent de suivre en temps réel l'évolution de la nécrose de coagulation. La température à la surface du tissu est donc une mesure indirecte de l'extension de la nécrose de coagulation dans les tissus homogènes. Le modèle de commande va donc représenter la température à la surface du tissu. Nous avons retenu un modèle du premier ordre. Ce modèle représente l'évolution de la température à la surface du tissu, pendant et après le tir.

#### 4.1 Pendant le tir

$$\tau.\theta' + \theta = G \quad (16)$$

Avec  $\tau$  : Constante de temps à la montée (s)  
 $G$  : Gain thermique (°C)

L'intégration de l'équation (16) donne

$$\Delta\theta = (\Delta\theta_i - G).e^{-t/\tau} + G \quad (17)$$

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0$$

$\theta_0$  est la température physiologique ( $\theta_0 = 37^\circ\text{C}$ ).

L'équation (16) est une approximation de l'équation de transfert de chaleur (3). Pour des courtes durées de tir, une approximation de la constante de temps a été proposée par Van Gemert et Welch (Van Gemert et al 1989). Le gain thermique  $G$  s'exprime:

$$G = \frac{\mu.\Phi.\tau}{\rho*c} \cdot (^\circ\text{C})$$

$\Phi$  : Fluence à la surface du tissu

$$\Phi = \frac{P_c}{2.*\pi*r^2}$$

$\tau$  : Constante de temps thermique de montée

$\mu$  : Coefficient d'absorption

$\rho$  : densité tissulaire

$c$  : Chaleur spécifique

$r$  : Rayon du spot laser

$P_c$  : Puissance crête

## 4.2 Après le tir

$$\beta \cdot \theta' + \theta = 0 \quad (18)$$

Avec  $\beta$  : Constante de temps après le tir (s)

L'intégration de l'équations (18) donne:

$$\Delta\theta = \Delta\theta_d \cdot e^{-t/\beta} \quad (19)$$

$d$  : Largeur de l'impulsion.

$\Delta\theta_d$  : Température maximale atteinte à la fin du tir.

$\Delta\theta_d = (\Delta\theta_i - G) \cdot e^{-d/\tau} + G$  par application de (16)

$\beta$  : Constante de temps thermique de décroissance

## **5 CONCLUSION**

La modélisation des lasers à action thermique permet de déterminer théoriquement le dommage tissulaire  $\Omega$  en connaissant les caractéristiques du faisceau laser (puissance, temps et mode d'émission). La notion de dommage tissulaire  $\Omega$  traduit les dimensions et la qualité de la nécrose. Actuellement, il n'existe pas d'instrumentation capable d'intégrer ces modèles dans un système de boucle fermée. Cependant, dans le cas particulier des tissus homogènes, l'expression du dommage tissulaire est simplifiée et est ramenée à un temps de chauffage de la surface du tissu au dessus de la température de coagulation ( $55^{\circ}\text{C}$ ). A cet effet un modèle de commande est déterminé, il représente l'évolution de la température pendant et après le tir. Ce modèle de commande permettra de calculer une suite de commandes capable de produire le dommage souhaité en termes de temps de chauffage.

## **Chapitre 2 : Commande optimale**

## CHAPITRE II : COMMANDE OPTIMALE

INTRODUCTION.....	24
Aspect historique.....	24
Problème de la commande optimale.....	25
Processus.....	25
Contraintes.....	25
Conditions aux limites.....	26
Critère:.....	26
RAPPEL SUR LE PROCESSUS A COMMANDER.....	27
FORMULATION DU PROBLEME DE COMMANDE.....	28
Horizon et conditions initiales.....	28
Le processus.....	28
Température à la surface du tissu.....	28
Domage à produire.....	29
Contraintes.....	32
Contrainte sur l'état du système:.....	32
Contrainte sur les signaux de commande:.....	32
Critère.....	32
But de la commande optimale.....	33
PROGRAMMATION DYNAMIQUE : Principe général.....	33
RESOLUTION DE L'EQUATION DE BELLMAN.....	35
Méthode itérative pour la recherche de l'optimum.....	36
Etape d'initialisation:.....	36
Recherche de la durée de tir $d_{N-1}$ .....	36
Contraintes:.....	37
Coût de la dernière étape.....	38
Commentaire.....	41
Remarques.....	41
Avant dernière étape.....	42
Optimisation de la durée entre tirs: $D_{N-2}$ .....	43
Optimisation de la durée de tir $d_{N-2}$ .....	44
Equations de l'étape.....	45
Contraintes: Domaine de validité des équations.....	46
Coût de l'étape.....	48
Etape d'ordre k.....	50
Optimisation de $D_{N-k}$ .....	51
Optimisation de la durée de tir $d_{N-k}$ .....	52
Equation de l'étape:.....	52
Contrainte:Domaine de validité.....	53
Coût de l'étape.....	54
CONCLUSION.....	57
ANNEXES.....	
Annexe I : Optimisation de $D_{N-k}$ .....	
Annexe II : Optimisation de la durée de tir $d_{N-k}$ .....	

## 1 INTRODUCTION

Deux raisons essentielles ont été à la base du développement de la commande optimale:

- \* Le progrès technologique qui a permis à l'homme de construire des machines de plus en plus complexes et performantes.

- \* L'apparition de nouveaux moyens de calcul analogiques puis digitaux qui permettent d'exploiter les modèles mathématiques des systèmes dynamiques.

Les méthodes classiques d'asservissement consistent à faire accomplir à un processus une tâche particulière généralement caractérisée par une consigne.

Ainsi dans un problème de *régulation*, les sorties doivent atteindre et garder des valeurs de consigne fixées; dans un problème de *poursuite* elles doivent atteindre et suivre des valeurs de consigne qui évoluent dans le temps et qui peuvent elles même provenir d'un processus de consigne.

En général il existera un grand nombre de politiques réalisant une consigne tout en satisfaisant les contraintes. On peut donc aller plus loin en faisant un choix parmi ces politiques ce qui conduit à la notion *d'optimisation*.

Pour pouvoir effectuer rationnellement ce choix on définit un *critère*. Par exemple, on recherchera la politique qui réalise la consigne le plus rapidement possible ou en utilisant le minimum d'énergie ou encore qui minimise, pour un horizon fini, l'intégrale du carré de l'erreur d'une sortie par rapport à sa valeur de consigne. La plupart du temps le critère sera caractérisé par la minimisation ou la maximisation d'une certaine quantité appelée *revenu* et dont la valeur dépend de la commande appliquée et de l'évolution du système.

La première étape de la résolution d'un problème de commande optimale consiste à représenter l'évolution du processus réel par des relations mathématiques dont l'ensemble constitue *le modèle mathématique du processus*. Les modèles mathématiques peuvent être des équations différentielles, des fonctions de transfert, des équations récurrentes, des équations aux dérivées partielles.

### 1.1 Aspect historique.

Les problèmes liés à l'optimisation d'une fonction économique ont intéressé l'humanité depuis très longtemps. Fermat énonce son célèbre principe de temps minimum dès 1657. Newton a inventé la notion de dérivée en 1669. En 1837 Jacobi introduit la notion de point conjugué et les conditions suffisantes locales. Weierstrass a fait faire à la théorie de la commande optimale des progrès considérables en introduisant la notion de champ de trajectoire et découvre sa condition suffisante d'optimalité (1870-1880) équivalente au fait que l'Hamiltonien doit être minimisé par rapport à la variable de commande en tout point. En 1957 Bellman publie la programmation dynamique qui est

une version moderne de la théorie de Hamilton–Jacobi–Caratheodory. Parallèlement, des recherches se sont poursuivies en France (Coutenson) aux USA (Breakwell) et en URSS (Pontryaguine: Principe du maximum:1962).

## 1.2 Problème de la commande optimale.

L'optimisation est basée sur la minimisation d'un coût par rapport à un certain nombre de variables. Dans le cas de la commande optimale la minimisation se fait par rapport au vecteur de commande. Le problème se définit de manière générale par les éléments suivants:

### 1.2.1. Processus

On utilise un modèle dynamique susceptible de représenter le processus physique à commander. Il est supposé décrire parfaitement le système. Les systèmes dynamiques seront classés en deux catégories selon la nature de la variable temps:

Si la variable temps est continue (signaux continus), le modèle dynamique sera décrit par une équation différentielle de la forme:

$$x' = f(x,u,t), \quad x \in X, u \in U, t \in \mathbb{R}^+ \quad (1)$$

Si la variable temps est discrète, le modèle dynamique sera décrit par une équation récurrente de la forme:

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t, t) \quad (2)$$

où  $x$  est le vecteur d'état de dimension  $n$ ,  $u$  le vecteur de commande de dimension  $m$ . On suppose que la fonction  $f$  est continue et admet des dérivées partielles continues dans un certain domaine de l'espace  $X*U*\mathbb{R}$ . Le système dynamique admet une solution unique pour des conditions initiales déterminées  $x_{t=0}=x_0$  et une commande  $u_t$  donnée.

### 1.2.2. Contraintes

Elles expriment en général que les commandes et l'état doivent appartenir à un sous-espace de l'espace  $X*U*\mathbb{R}$ . Cette région peut être définie par les relations:

$$q(x,u,t) \leq 0$$

les fonctions  $q$  étant supposées continues et continûment dérivables. On rencontre aussi des contraintes égalités, intégrales, différentielles etc ...

Les états et commandes qui vérifient les contraintes sont appelés admissibles.

**1.2.3. Conditions aux limites**

Le système évolue entre une variété initiale caractérisée par  $(x_0, t_0)$  et une variété finale  $(x_N, t_N)$ . Ces états peuvent être libres ou, plus généralement, obéir à des conditions aux limites de la forme:

$$\begin{aligned} l_1(x_0, t_0) &= 0 \\ l_2(x_N, t_N) &= 0 \end{aligned}$$

Les fonctions  $l_1$  et  $l_2$  sont supposées continues et continûment dérivables.

**1.2.4. Critère:**

Dans le cas où la variable temps est continue, il s'exprime sous la forme d'une fonctionnelle qui prend le plus souvent la forme suivante:

$$J = \int_{t_0}^{t_N} L(x_t, u_t, t) dt + L_0(x_N, t_N) \quad (3)$$

La fonction  $L$  est supposée continue et continûment dérivable.

Dans le cas où la variable temps est discrète, le critère s'exprime sous la forme d'une fonction qui prend la forme suivante:

$$J = \sum_{t=t_0}^{t=t_N} L(x_t, u_t, t) + L_0(x_N, t_N) \quad (4)$$

**But de la commande optimale:** Le problème consiste alors à trouver parmi les commandes  $u_t$  admissibles, transférant le système de la variété initiale à la variété finale, celle pour laquelle le critère  $J$  est minimum. Une telle commande est dite optimale et la courbe correspondante est appelée trajectoire optimale.

Le problème étant posé, la deuxième étape consiste à en trouver la solution mathématique. Pour cela on dispose d'un certain nombre de méthodes qu'on peut classer en trois grandes catégories:

- Méthode de programmation linéaire et non linéaire pour les problèmes d'optimisation en dimension finie,
  - Méthode de programmation dynamique pour les problèmes d'optimisation en dimension finie et infinie,
  - Méthode variationnelle pour les problèmes d'optimisation en dimension infinie:
- Principe du minimum de Pontryagin qui est une généralisation des équations d'Euler

## 2 RAPPEL SUR LE PROCESSUS A COMMANDER

Nous nous intéresserons à la coagulation sur des tissus à structure "homogène". Nous avons vu que la coagulation correspond à un dommage tissulaire (nécrose) irréversible. Elle correspond à une élévation de température de 55°C à 90°C pendant des durées de l'ordre de la seconde. L'étude de la coagulation par Laser Nd-YAG sur des tissus homogènes montre que les dimensions de la nécrose de coagulation sont directement liées à l'évolution de la température (Henriques 1947) pendant et après le tir. Deux grandeurs sont alors considérées: la température  $\theta$  et la durée de chauffage *effectif*  $\Gamma$  (durée pendant laquelle cette température est maintenue au dessus du seuil critique de coagulation S). Le contrôle de ces deux grandeurs permet de suivre l'évolution du dommage tissulaire en temps réel avec une approximation satisfaisante.

Dans le cas des tissus homogènes, la profondeur de la nécrose de coagulation  $z$  est directement liée à la durée de chauffage effectif total  $\Gamma$  par la relation suivante:

$$z = \sqrt{4.a.\Gamma} \quad (5)$$

où  $z$  est la profondeur réduite de la nécrose de coagulation dans l'axe du faisceau laser (en cm),  $\Gamma$  est la durée totale de chauffage effectif dans l'intervalle [S,M], S seuil minimal (55°C) ou critique de coagulation et M seuil maximal de coagulation (90°C).  $a$  est la diffusivité thermique du tissu (en cm<sup>2</sup>/s).

Par la suite, l'appellation dommage signifiera pour nous temps de chauffage effectif. Produire le dommage  $z^*$  revient à porter le tissu à une température comprise entre 55°C et 90°C pendant une durée égale à  $\Gamma^*$ . Le processus à commander est un laser Nd-YAG impulsionnel de longueur d'onde égale à 1.06  $\mu\text{m}$ . La commande du laser s'effectue en jouant à la fois sur la puissance, la durée des impulsions et la durée entre impulsions. La mesure de la température, à distance, à la surface du tissu est un moyen de contrôler le dommage tissulaire. Pendant un traitement, la puissance est maintenue constante. La modulation de fréquence et de largeur des impulsions (PFM et PWM), et la température à la surface du tissu sont retenues respectivement comme variables de commande et variable à contrôler.

### 3 FORMULATION DU PROBLEME DE COMMANDE

La formulation du problème d'optimisation comprend les données suivantes:

#### 3.1 Horizon et conditions initiales

Le système évolue entre l'état initial ( $\theta_0=0, \Gamma_0, 0$ ) et l'état final ( $\theta_N < S, \Gamma_N=0, N$ ).

$\Gamma_0$  : Dommage initial à produire.

$\theta_0$  : Température initiale.

$N$  : Nombre d'impulsions nécessaire pour produire le dommage  $\Gamma_0$ .

$\theta_N$  : Température finale.

$\Gamma_N$  : Dommage final restant à produire, qui doit être nul.

#### 3.2 Le processus

Le processus à commander est un laser Nd-YAG (Micro Contrôle) à émission impulsionnelle. La puissance moyenne est de 150 W. Au cours du traitement, la puissance est maintenue à une valeur constante. Le vecteur de commande  $u_k$  traduira la modulation de la largeur et de la fréquence des impulsions:

$$u_k = \begin{pmatrix} d_k \\ D_k \end{pmatrix}$$

$d_k$  : largeur de l'impulsion ou durée du  $k^{\text{ième}}$  tir.

$D_k$  : durée entre la fin du  $k^{\text{ième}}$  tir et le début du  $k+1^{\text{ième}}$  tir.

le couple  $(d_k, D_k)$  constitue la période de tir. La période de tir est variable pendant le traitement.

Par ailleurs l'état de la nécrose est parfaitement défini par deux grandeurs fondamentales:

- \* La température à la surface du tissu:  $\theta$ .
- \* La durée de chauffage effectif du tissu:  $\Gamma$ .

##### 3.2.1. Température à la surface du tissu

Le modèle de commande exponentiel a été utilisé pour représenter la température à la surface du tissu. C'est un modèle du premier ordre, il décrit l'évolution de la température pendant et après le tir.

a) **Pendant le tir:**

$$\theta(t) = (\theta_i(k) - G) \cdot e^{-t/\tau} + G \quad (6)$$

$t$  : Durée écoulée depuis le début du tir.

$\theta_i(k)$  : Température initiale (°C) au début du  $k^{\text{ième}}$  tir.

$$G = \frac{\mu \cdot F \cdot \tau}{\rho \cdot c} \cdot (^\circ\text{C})$$

$$F = \frac{P_c}{2 \cdot \pi \cdot r^2}$$

$\tau$  : Constante de temps thermique de montée

$\mu$  : Coefficient d'absorption.

$\rho$  : Densité tissulaire.

$c$  : Chaleur spécifique.

$r$  : Rayon du spot laser.

$P_c$  : Puissance crête.

b) **Après le tir:**

$$\theta(t) = \theta_d(k) \cdot e^{-t/\beta} \quad (7)$$

$t$  : Durée écoulée depuis la fin du tir

$\theta_d(k)$  : Température maximale atteinte à la fin du  $k^{\text{ième}}$  tir.

$\theta_d(k) = (\theta_i(k) - G) \cdot e^{-d_k/\tau} + G$  par application de (6)

$\beta$  : Constante de temps thermique de décroissance

**Remarque :** L'origine des temps de la phase suivant le tir est prise à la fin du tir.

### 3.2.2. Dommage à produire.

La figure ci-dessous montre la forme géométrique de la nécrose de coagulation qu'il faut produire. La profondeur de la nécrose est représentée par le dommage total à produire  $\Gamma_0$ . Le principe retenu pour produire ce dommage consiste à considérer  $\Gamma_0$  comme une somme de dommages élémentaires  $\delta_i$  qu'on peut écrire de la façon suivante

$$\Gamma_0 = \sum_{i=0}^{i=N-1} \delta_i \quad (8)$$

Le dommage élémentaire  $\delta_i$  est produit en envoyant au laser une impulsion de durée  $d_i$ .

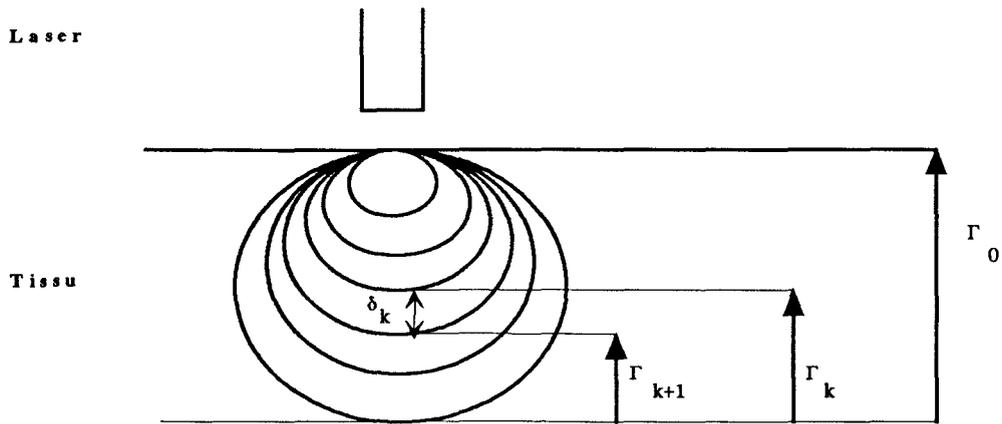


Figure 1 : Détermination de l'expression du dommage

Le dommage restant à produire s'exprime sous forme d'une équation récurrente

$$\Gamma_{k+1} = \Gamma_k - \delta_k \quad (9)$$

$\Gamma_k$  est le dommage restant à produire à la  $k^{\text{ième}}$  impulsion.

$\Gamma_{k+1}$  est le dommage restant à produire à la  $k+1^{\text{ième}}$  impulsion.

$\delta_k$  : Dommage élémentaire produit par la  $k^{\text{ième}}$  impulsion. Les expressions de  $\delta_k$  sont données dans le tableau suivant:

Soient  $u$  et  $v$  les variables booléennes définies par:

$\theta_k \geq S$  :  $u=1$   $u=0$  si non

$\theta_{k+1} \geq S$  :  $v=1$   $v=0$  si non

$S$  : Seuil critique de coagulation

$u$	$v$	$\delta(t)$
1	1	$d_k + D_k$
0	1	$d_k - t_i(k) + D_k$
1	0	$d_k + t_f(k)$
0	0	$d_k + t_f(k) - t_i(k)$

Tableau 1

$t_i(k)$  et  $t_f(k)$  sont, respectivement, les instants où la température, de montée et de descente, atteint la température de seuil de coagulation. Nous donnons ci-dessus leurs expressions analytiques:

$$t_i(k) = \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{\theta_i(k) - G}{S - G} \right] \quad (10)$$

$$t_f(k) = \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{\theta_d(k)}{\theta_{k+1}} \right] \quad (11)$$

Avec

$\theta_i(k)$  : température initiale à la  $k^{\text{ième}}$  période de tir.

$\theta_d(k)$  : température maximale atteinte pendant le  $k^{\text{ième}}$  tir:

$$\theta_d(k) = (\theta_i(k) - G) \cdot e^{-d_k/\tau} + G \quad (12)$$

S : Température de seuil de coagulation.

G : Gain thermique.

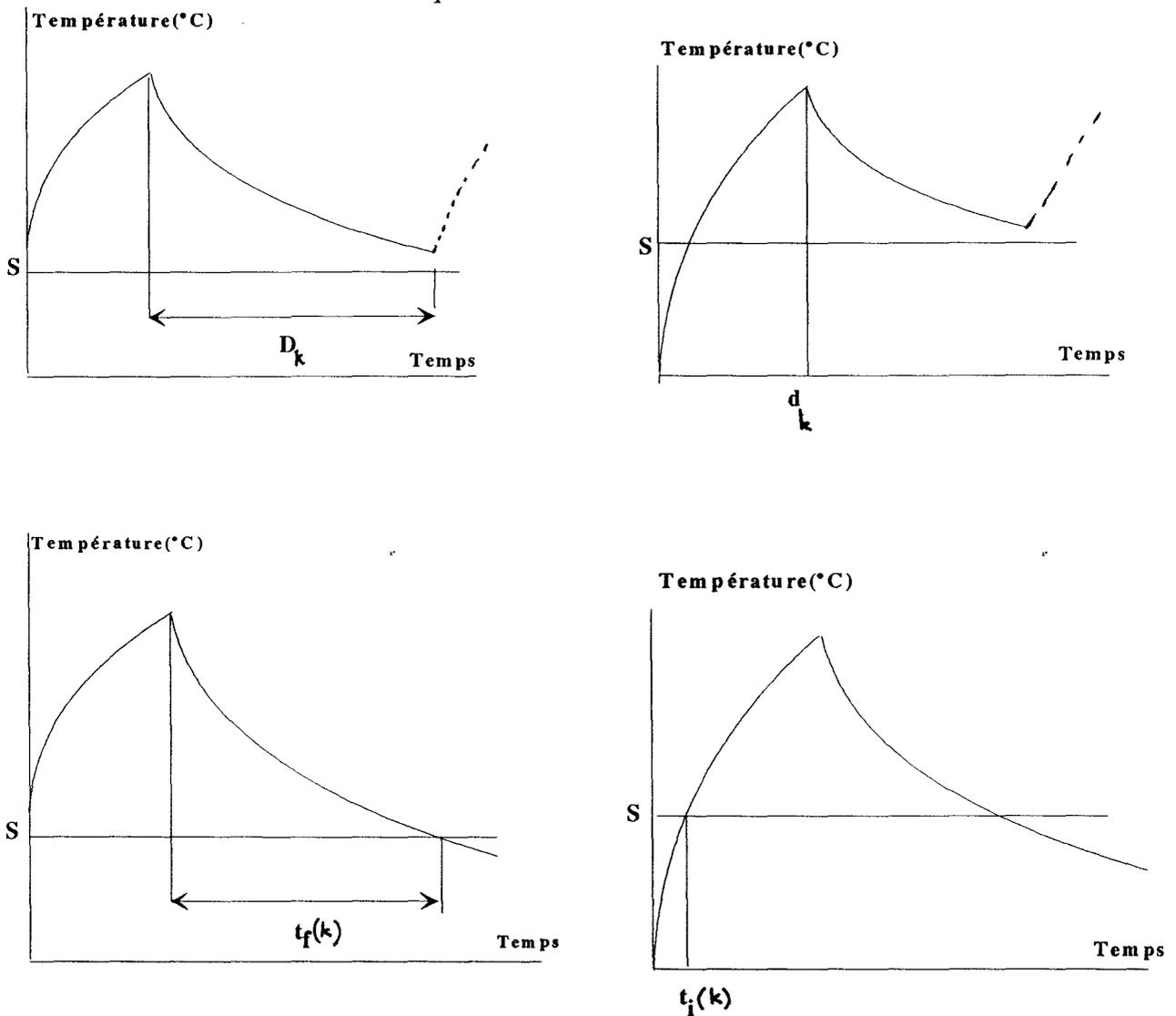


Figure 2 : Différents cas de figure de l'évolution de la température

### 3.3 Contraintes

Dans les problèmes de commande optimale on impose à l'état et aux commandes d'appartenir à une région de l'espace généralement fermée.

#### 3.3.1. Contrainte sur l'état du système:

La suite de commandes  $u_0, u_1 \dots u_{N-1}$  est calculée en tenant compte du système d'équations d'état reliant le vecteur de commande  $u_k^T = (d_k, D_k)$  au vecteur d'état  $x_k^T = (\theta_k, \Gamma_k)$ . Ce sont des contraintes égalité que nous avons exprimées par les équations de température:

$$\theta_{k+1} = F(\theta_k, d_k, D_k)$$

et l'équation du dommage (9) à savoir:

$$\Gamma_{k+1} = \Gamma_k - \delta_k$$

Par ailleurs la coagulation qui consiste à chauffer le tissu entre les deux seuils de température impose que l'on ne dépasse pas le seuil maximal de coagulation  $M$ .

$$\theta_d(k) \leq M \quad (13)$$

Dans le cas contraire on risque de volatiliser le tissu.

#### 3.3.2. Contrainte sur les signaux de commande:

C'est une contrainte technologique. Elle est liée à l'échauffement de la tête laser. Elle impose que la durée entre impulsions soit au minimum deux fois supérieure à la durée des impulsions.

$$D_k \geq 2 \cdot d_k \quad \forall k \quad (14)$$

Par ailleurs, la durée de tir doit bien sûr être positive:

$$d_k \geq 0 \quad \forall k \quad (15)$$

### 3.4 Critère

L'énergie par unité de surface ou fluence déposée sur le tissu lors d'une séquence de tirs, détermine le volume tissulaire nécrosé. On caractérise, donc, la qualité d'une séquence d'impulsions au moyen de la quantité d'énergie déposée. Notre critère sera basé sur la minimisation de l'énergie déposée sur le tissu. La puissance du laser est maintenue constante lors du traitement, la quantité d'énergie est donc directement liée à la durée des

impulsions. La minimisation de la quantité d'énergie reposera sur la minimisation de la somme des durées d'impulsions. Le critère de coût s'écrira:

$$J(x_0, t_0) = \sum_{i=0}^{N-1} d_i \quad (16)$$

### 3.5 But de la commande optimale

Le but de la commande optimale consiste à trouver la suite de commandes  $\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$  qui minimise le critère  $J(x_0, t_0)$  parmi les suites de commande transférant le système de l'état initial défini par  $(\theta_0, \Gamma_0, 0)$  à l'état final défini par  $(\theta_N, \Gamma_N = 0, N)$ ; compte tenu de l'équation d'état caractérisant le processus et des contraintes liées à l'état et aux signaux de commandes. Une telle suite de commandes est dite optimale.

**Remarque:**  $N$  est libre, c'est donc un problème à horizon libre.

## 4 PROGRAMMATION DYNAMIQUE : Principe général

Basée sur le principe d'optimalité, l'utilisation de la programmation dynamique nous paraît mieux à même que les méthodes variationnelles d'offrir ici une présentation simple et relativement "intuitive" de la détermination d'une commande optimale. En effet un des avantages majeurs de la méthode de programmation dynamique par rapport à d'autres méthodes de résolution, est de permettre de résoudre le problème de la commande optimale en boucle fermée. La programmation dynamique a été reconnue comme étant une des techniques d'optimisation les plus performantes. Elle repose sur le principe d'optimalité de Bellman.

La technique générale de la programmation dynamique consiste à plonger le problème global, avec état initial  $(x_0, t_0)$  et état final  $(x_N, t_N)$ , dans une classe de problème avec états et instants initiaux  $(x, t)$  (qu'on appellera problème  $(x, t)$ ). On définit pour chacun de ces problèmes la fonction:

$$J^*(x, t) = \text{Min } J \quad (17)$$

On introduit ainsi une hypothèse supplémentaire en supposant l'existence d'une telle fonction: on suppose en fait que tous les problèmes  $(x, t)$  pour tout  $x$  et tout  $t$  ont une solution, alors qu'a priori on ne devrait supposer que l'existence de  $J^*(x_0, t_0)$ . Les conditions que nous allons rencontrer seront des conditions nécessaires et suffisantes d'optimum.

L'idée fondamentale de la programmation dynamique consiste à partager l'opération de minimisation en deux niveaux:

$$J^*(x,t) = \min_{u(t), u(t+1), \dots} \left[ \sum_{i=t}^{i=t_N} L(x_i, u_i, i) \right] \quad (18)$$

$$J^*(x,t) = \min_{u(t)} \left[ L(x, u_t, t) + \min_{u(t+1), u(t+2), \dots} \left[ \sum_{i=t+1}^{i=t_N} L(x_i, u_i, i) \right] \right] \quad (19)$$

Cette opération est possible grâce à la nature Markovienne du problème: le critère  $J$  est additif, la dynamique du processus est représentée par une équation récurrente du premier ordre.

Ceci nous conduit à énoncer le principe d'optimalité de Bellman:

*Une suite de commandes dans un processus d'optimisation dynamique est telle que quels que soient l'état et l'instant considérés sur une trajectoire optimale les commandes ultérieures constituent, pour le problème ayant cet état et cet instant comme éléments initiaux, une suite de commandes optimales.*

## 5 RESOLUTION DE L'EQUATION DE BELLMAN

Le principe de la résolution consiste à trouver la commande  $u(t)$  qu'il faut appliquer à chaque instant  $t$  compte tenu de l'état  $(\theta(t), \Gamma(t))$  dans lequel peut se trouver le système à cet instant. On résout ainsi toute une classe de problèmes correspondants à divers états initiaux et non le seul problème avec état et instant initial  $(\theta(0), \Gamma(0))$ . Pour chacun de ces problèmes on définit le critère à l'instant  $t=k$ :

$$J(x_k, u_k) = \sum_{i=k}^N d_i \quad (20)$$

$$J^*(x_k) = \min_{u_k, u_{k+1}, \dots} \sum_{i=k}^N d_i \quad (21)$$

L'application du principe d'optimalité nous donne:

$$J^*(x_k) = \min_{u_k} \left[ d_k + \min_{u_{k+1}, \dots} \sum_{i=k+1}^N d_i \right] \quad (22)$$

$$J^*(x_k) = \min_{u_k} \{ d_k + J^*(x_{k+1}) \} \quad (23)$$

Avec

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} &= F(\theta_k, u_k, k) \\ \Gamma_{k+1} &= \Gamma_k - \delta_k \end{aligned} \quad (24)$$

$$J^*(x_N) = 0 \quad (25)$$

$N$  : Indice de l'étape d'initialisation.

L'équation (24) est le système d'équations d'état (équation du dommage et équation de la température).

La commande optimale relative à l'état  $x_k$  est notée  $\hat{u}_k$ . C'est la valeur qui minimise l'équation (23) de Bellman. Cette équation signifie que la valeur minimale de  $J$  à l'étape  $k$ ,  $J^*(u_k)$ , inconnue est obtenue en déterminant la valeur de  $u$  qui minimise l'expression

$\{d_k + J^*(x_{k+1})\}$ , dans laquelle la valeur minimale de  $J$  à l'étape  $k+1$   $\{J^*(x_{k+1})\}$ , est connue par l'exploration précédente. En utilisant l'équation récurrente (23) et en commençant par la dernière étape  $J^*(x_N)$  connue, nous pouvons construire la trajectoire optimale complète, tronçon par tronçon.

Le calcul de  $J^*$  pour chaque état initial,  $x_k$ , conduit à une commande optimale  $\hat{u}_k$  et permet donc de construire point par point une fonction  $\hat{u}_k = f(x_k)$  pour chaque étape  $k$ . On constate que la collection des fonctions  $f(x_k)$  permet de définir le système de commande optimale élaborant le signal de commande relatif à n'importe quel état  $x_k$ . Ceci correspond bien à une structure en boucle fermée. L'ensemble des fonctions  $f$ , forme pour chaque étape une structure de données qu'on va répertorier dans des abaques.

## 5.1 Méthode itérative pour la recherche de l'optimum

### 5.1.1. Etape d'initialisation:

#### 5.1.1.1. Recherche de la durée de tir $d_{N-1}$

Le problème est considéré à une seule étape appelée étape d'initialisation. L'état initial pour cette étape est caractérisé par le vecteur d'état:

$$x_{N-1} = [ \theta_{N-1}, \Gamma_{N-1} ]^T$$

La commande associée à cette étape est définie par le couple:

$$u_{N-1} = [ d_{N-1}, D_{N-1} ]^T$$

Les équations d'état à cette étape s'écrivent d'après les équations (6) et (7):

$$\theta_N = [ (\theta_{N-1} - G).e^{-d_{N-1}/\tau} + G ].e^{-D_{N-1}/\beta} \quad (26)$$

$$\Gamma_N = \Gamma_{N-1} - \delta_{N-1} \quad (27)$$

où  $\delta$  est l'élément de dommage produit pendant cette étape. Les différentes expressions de  $\delta_{N-1}$  sont données dans le tableau (1).

Le but est d'obtenir:

$$\Gamma_N = 0 \quad (28)$$

C'est à dire:

$$\Gamma_{N-1} = \delta_{N-1} \quad (29)$$

L'équation de l'étape s'écrit:

$\theta_{N-1} < S$ :

$$\Gamma_{N-1} = d_{N-1} - t_{i(N-1)} + t_{f(N-1)} \quad (30)$$

$\theta_{N-1} \geq S$ :

$$\Gamma_{N-1} = d_{N-1} + t_{f(N-1)} \quad (31)$$

où  $t_{i(N-1)}$  et  $t_{f(N-1)}$  sont données respectivement par (10) et (11).

La durée optimale de tir s'obtient à partir des équations (30) et (31) en écrivant:

$$d_{N-1}^* = f(\Gamma_{N-1}, \theta_{N-1}) \quad (32)$$

Il est impossible de donner l'expression de  $d_{N-1}^*$  de façon littérale. On est donc amené à déterminer  $d_{N-1}^*$  numériquement. Parmi les méthodes numériques de résolution d'équations non linéaires, nous avons appliqué la méthode de Newton-Raphson. Elle permet d'extraire  $d_{N-1}^*$  des équations (30) et (31) avec un maximum de précision (l'erreur est inférieure à  $10^{-6}$ ) et un minimum d'itération (le nombre maximum d'itérations observé est 3).

#### 5.1.1.2. Contraintes:

**\*Température maximale:** Pour assurer la coagulation du tissu, la température maximale atteinte pendant le tir doit être en dessous de la température de volatilisation,  $M$ , qui se situe entre  $90^\circ\text{C}$  et  $100^\circ\text{C}$ . La contrainte sur la température s'écrit:

$$\theta_{d(N-1)} \leq M$$

Ecrivons l'expression de la contrainte en fonction des variables d'état  $\theta_{N-1}$  et  $\Gamma_{N-1}$ . Nous distinguons deux cas selon que la température initiale est inférieure ou supérieure à  $S$ .

$\theta_{N-1} < S$

$\Gamma_{N-1}$  est une fonction croissante de  $d_{N-1}$ :

$$\Gamma_{N-1} < \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - S}{G - M} \right] + \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{M}{S} \right] \quad (33)$$

$\theta_{N-1} \geq S$ :

$\Gamma_{N-1}$  est une fonction croissante de  $d_{N-1}$  et  $\theta_{N-1}$  on a donc:

$$\Gamma_{N-1} < \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - \theta_{N-1}}{G - M} \right] + \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{M}{S} \right] \quad (34)$$

Cette étape (Figure 3) regroupe les états  $(\theta, \Gamma)$  pour lesquels on peut produire le dommage  $\Gamma$ , partant de la température initiale  $\theta$ , en envoyant une impulsion de durée  $d$ . Ces états sont regroupés sous forme de courbes d'isotirs (ensemble d'états  $(\theta, \Gamma)$  ayant la même durée de tir). L'isotir 0 (trait plein) regroupe les états  $(\theta^\circ, \Gamma^\circ)$  dont le dommage  $\Gamma^\circ$  peut être obtenu sans aucun apport énergétique ( $d=0$  milliseconde (ms)); c'est ce qu'on appelle le régime libre.

**\* Contrainte sur les signaux de commande.**

L'étape  $N-1$  est la dernière étape la durée suivant le tir  $D_{N-1}$  est infinie, la contrainte technologique  $D_{N-1} \geq 2 \cdot d_{N-1}$  n'existe donc pas.

La seule contrainte que l'on peut imposer sur la commande est que la durée de tir soit positive:

$$d_{N-1} \geq 0$$

Dans le plan  $(\Gamma, \theta)$  ceci se traduit par:

Si  $\theta_{N-1} < S$

$$\Gamma_{N-1} \geq \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{\theta_{N-1}}{S} \right] - \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - \theta_{N-1}}{G - S} \right] \quad (35)$$

Cette condition est toujours vérifiée puisque le deuxième membre de l'inégalité est négatif.

Si  $\theta_{N-1} \geq S$

$$\Gamma_{N-1} \geq \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{\theta_{N-1}}{S} \right] \quad (36)$$

Ceci donne une contrainte sur  $\theta_{N-1}$  et  $\Gamma_{N-1}$ .

**5.1.1.3. Coût de la dernière étape:**

A chaque couple  $(\theta_{N-1}, \Gamma_{N-1})$  on peut associer une valeur  $\alpha$  de  $d$  telle que:

Si  $\theta_{N-1} < S$

$$\Gamma_{N-1} = \alpha - \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{\theta_{N-1} - G}{S - G} \right] + \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{\theta_{\alpha(N-1)}}{S} \right]$$

Si  $\theta_{N-1} \geq S$

$$\Gamma_{N-1} = \alpha + \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{\theta_{\alpha(N-1)}}{S} \right]$$

$$J^*(x_{N-1}) = \alpha(\theta_{N-1}, \Gamma_{N-1}) \quad (37)$$

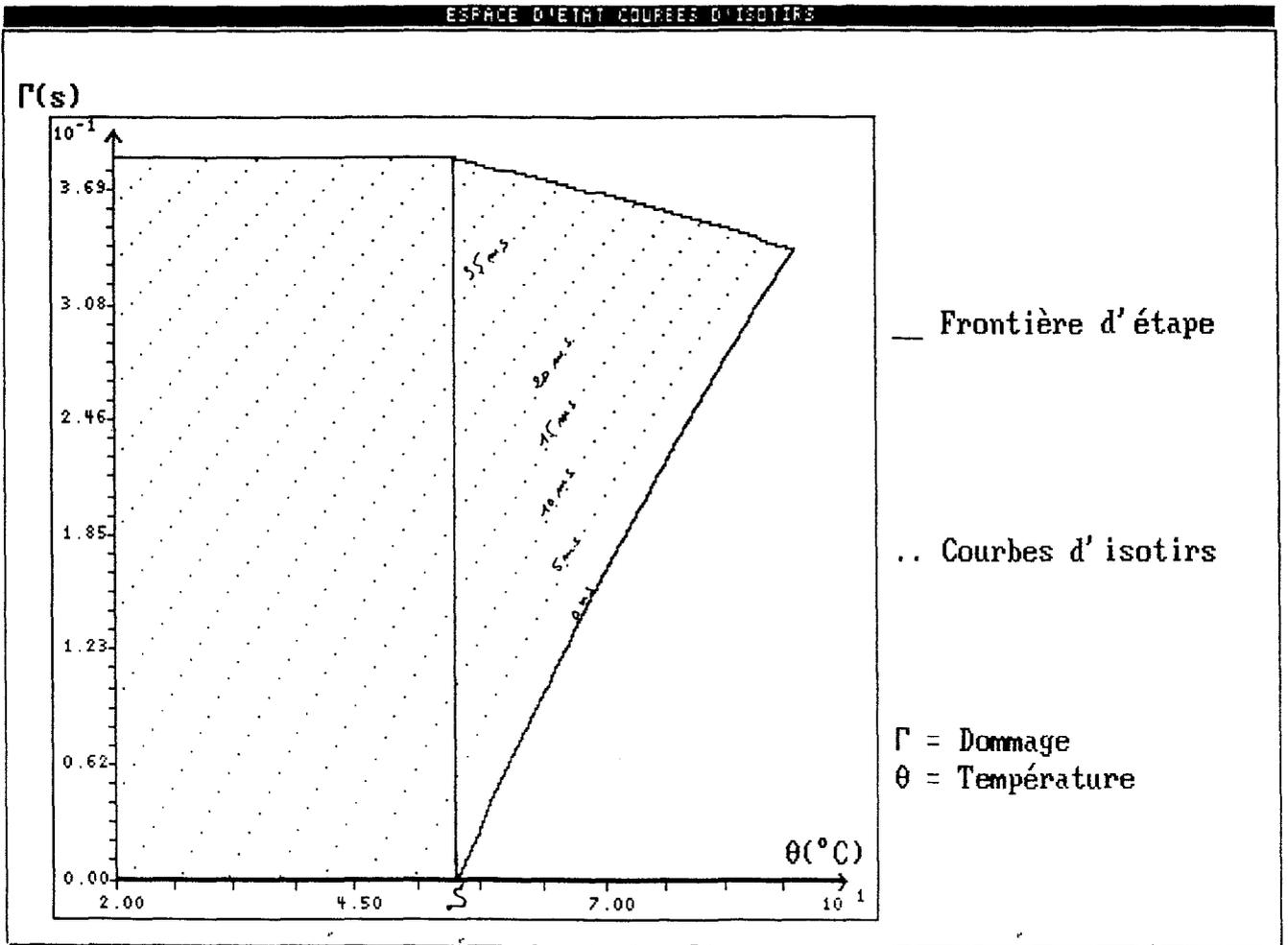


Figure 3 : Espace d'état: étape d'initialisation

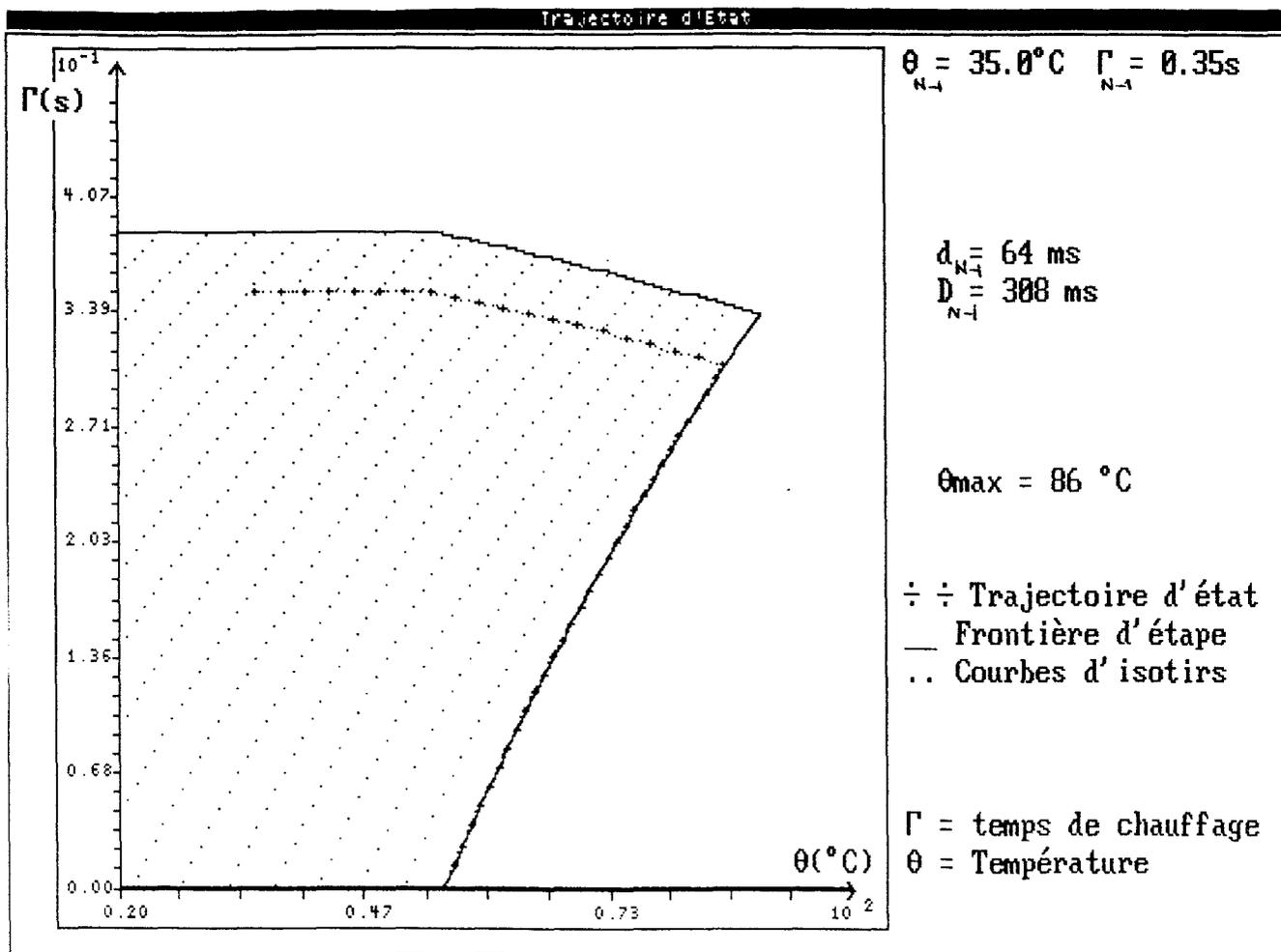


Figure 4 : Evolution du dommage dans l'espace d'état.

#### **5.1.1.4. Commentaire.**

La figure (3) représente l'espace d'état à une étape. Cette étape regroupe les états  $(\theta, \Gamma)$  pour lesquels on peut produire le dommage  $\Gamma$ , partant de la température initiale  $\theta$ , en envoyant une seule impulsion  $d$ . Ces états sont regroupés sous forme de courbes d'isotirs (ensemble d'états  $(\theta, \Gamma)$  ayant la même durée de tir). L'isotir 0 milliseconde (ms), trait plein sur la figure, regroupe les états  $(\theta, \Gamma)$  tels que le dommage  $\Gamma$  peut être obtenu sans aucun apport énergétique; c'est le régime libre. Sur la figure (3) les courbes d'isotir sont espacées de 5 ms. Ainsi on peut lire directement sur la figure la valeur de la durée de tir nécessaire.

La figure (4) représente une trajectoire d'état qui décrit l'évolution du dommage en fonction de la température. Le point représentatif de l'état initial indique la nécessité d'une commande en une impulsion. L'état initial se trouve sur l'isotir 64 ms. L'étude de la trajectoire pendant et après le tir, permet de distinguer deux zones:

- $\theta < S$ : Il n'y a pas de dommage produit;  $\Gamma$  est constant.
- $\theta \geq S$ :  $\Gamma$  varie en fonction de  $\theta$ : plus la température augmente, plus le dommage restant à accomplir diminue, ceci jusqu'à la fin du tir. Après le tir, on aboutit sur la courbe d'isotir 0 ms qui correspond au régime libre.

#### **5.1.1.5. Remarques.**

- Les équations (30) et (31) sont les expressions analytiques de la fonction  $f(\theta, \Gamma, N-1)$  qui donne la valeur de  $d$  (durée de tir) en fonction de l'état du système  $(\theta, \Gamma)$ , celui-ci doit satisfaire les équations (33) et (34).

- Les équations (33), (34), (35) et (36) forment les frontières de l'étape d'initialisation.

### 5.1.2. Avant dernière étape

Il existe des états pour lesquels les équations, (33) et (34), ne sont pas vérifiées. Ces états sont tels que pour terminer avec une impulsion, il faudrait dépasser le seuil maximal de coagulation  $M$ . On ne trouve donc pas de commande concernant ces états dans la première étape. La deuxième étape concerne l'ensemble des états ne vérifiant pas les contraintes dans l'étape d'initialisation. Autrement dit, partant de ces états nous terminerons avec au moins deux impulsions.

Les conditions initiales de l'étape sont:

$$x_{N-2} = [ \theta_{N-2}, \Gamma_{N-2} ]^T$$

La commande qui va être appliquée pour un couple de conditions initiales est:

$$u_{N-2} : [ d_{N-2}, D_{N-2} ]^T$$

Le système d'équation d'état s'écrit:

$$\begin{aligned} \Gamma_{N-1} &= \Gamma_{N-2} - \delta_{N-2} \\ \theta_{N-1} &= \theta_{d(N-2)} \cdot e^{-D_{N-2}/\beta} \end{aligned} \quad (38)$$

Avec

$$\delta_{N-2} = d_{N-2} - t_i(N-2) + t_f(N-2) \quad \text{Si } \theta_{N-2} < S$$

$$\delta_{N-2} = d_{N-2} + t_f(N-2) \quad \text{Si } \theta_{N-2} \geq S$$

$$\theta_{d(N-2)} = (\theta_{N-2} - G) \cdot e^{-d_{N-2}/\tau} + G$$

$t_i(N-2)$  et  $t_f(N-2)$  sont données respectivement par (10) et (11).

Pour résoudre ce problème, nous allons rechercher la commande  $u_{N-2}$  qui minimise l'équation de Bellman:

$$J_{N-2}(\theta_{N-2}, \Gamma_{N-2}, d_{N-2}, D_{N-2}) = d_{N-2} + J_{N-1}^*(\theta_{N-1}, \Gamma_{N-1})$$

Avec

$\theta_{N-1}, \Gamma_{N-1}$  donnés par le système d'équation (38).

$$J_{N-2}^*(\theta_{N-2}, \Gamma_{N-2}) = \min_{u_{N-2}} \left[ d_{N-2} + J_{N-1}^*(\theta_{N-1}, \Gamma_{N-1}) \right] \quad (39)$$

Nous allons traiter séparément la minimisation par rapport à  $D_{N-2}$  et ensuite  $d_{N-2}$ .

5.1.2.1. Optimisation de la durée entre tirs:  $D_{N-2}^*$

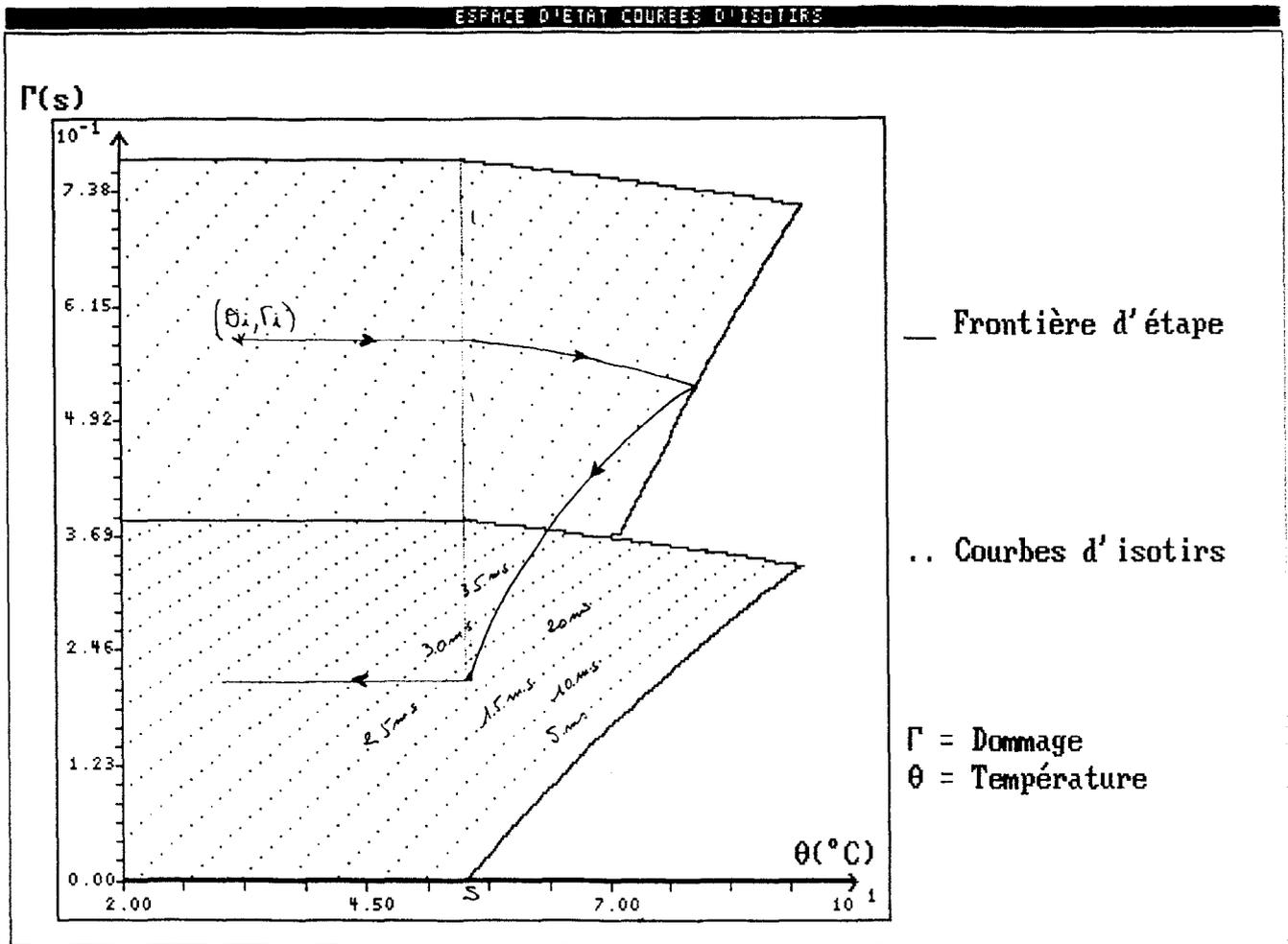


Figure 5 : Evolution de la durée entre tirs dans l'étape d'initialisation.

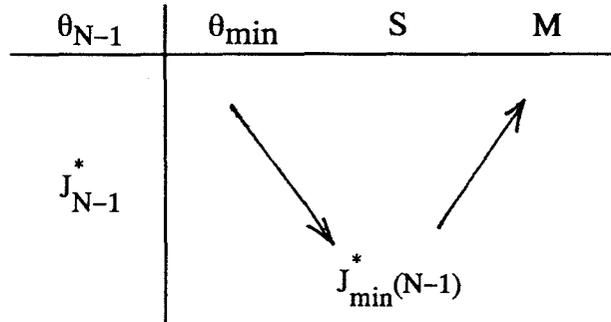
La figure (5) montre que la trajectoire du premier tir évolue dans la première étape en traversant deux zones:

Dans la première zone ( $\theta \geq S$ ), la figure montre que plus la température diminue (le dommage à produire diminue) plus les valeurs des isotirs diminuent. Cependant, dans la deuxième zone ( $\theta < S$ ), la température continue de baisser (le dommage à produire reste constant), les valeurs des isotirs augmentent.

L'isotir optimal (isotir 22 ms) par lequel passe la trajectoire se trouve à la frontière des deux domaines ( $\theta < S$ ) et ( $\theta > S$ ) c'est à dire au point  $\theta = S$ . Le minimum de l'équation de Bellman (39) par rapport à  $D_{N-2}$  correspond à  $\theta_{N-1} = S$ . En effet la démonstration donnée en annexe I montre que:

Si  $\theta_{N-1} > S$   $J_{N-1}^*(\theta_{N-1}, \Gamma_{N-1})$  est une fonction croissante de  $\theta_{N-1}$ .

Si  $\theta_{N-1} < S$   $J_{N-1}^*(\theta_{N-1}, \Gamma_{N-1})$  est une fonction décroissante de  $\theta_{N-1}$ .



Pour un fonctionnement optimal lors de la décroissance, la température doit revenir à  $\theta_{N-1} = S$ . Ceci correspond à une valeur optimale de  $D_{N-2}$  de la forme:

$$\boxed{D_{N-2}^* = \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{\theta_d^{(N-2)}}{S} \right]} \quad (40)$$

$\theta_{N-1} = S$  correspond bien à la valeur optimale de  $D_{N-2}$

### 5.1.2.2. Optimisation de la durée de tir $d_{N-2}$ :

Après avoir trouvé le minimum par rapport à  $D_{N-2}$  l'équation de Bellman (39) se réécrit de la façon suivante:

$$J_{N-2}^*(\theta_{N-2}, \Gamma_{N-2}) = \min_{d_{N-2}} \left[ d_{N-2} + J_{N-1}^*[S, \Gamma_{N-1}] \right] \quad (41)$$

Avec

$\Gamma_{N-1} = \Gamma_{N-2} - \delta_{N-2}$ ,  $\delta_{N-2}$  est donné par le tableau (1) (cf. page 30)

Le calcul de la valeur  $d_{N-2}$  se fait en annulant la dérivée première de la quantité  $J_{N-2}^*(\theta_{N-2}, \Gamma_{N-2})$  par rapport à  $d_{N-2}$ .

Le résultat du calcul de la dérivée, donné dans l'annexe II, donne:

$$\boxed{\theta_d^{(N-2)} = \theta_d^{(N-1)}} \quad (42)$$

ou encore:

$$\boxed{d_{N-2}^* = d_{N-1}^* + \tau^* L n \frac{G - \theta_{N-2}}{G - S}} \quad (43)$$

### 5.1.2.3. Equations de l'étape:

La première conséquence de la solution de l'équation de Bellman est que la température maximale atteinte pendant le tir est la même pour les deux étapes. Ceci a permis d'exprimer la durée de tir de l'avant dernière étape par rapport à la durée de tir de la dernière étape.

Pour assurer un fonctionnement en boucle fermée du système, il faut fournir une commande (durée de tir) à chaque état de l'étape. On doit donc exprimer la durée de tir  $d_{N-2}$  en fonction de la température  $\theta_{N-2}$  et du dommage à produire  $\Gamma_{N-2}$ .

L'équation d'état du dommage pour cette étape

$$\Gamma_{N-1} = \Gamma_{N-2} - \delta_{N-2},$$

l'équation du dommage de la dernière étape

$$\Gamma_{N-1} = d_{N-1} + t_i^{(N-2)}$$

et l'équation (43) qui exprime  $d_{N-1}$  en fonction de  $d_{N-2}$  conduisent à formuler l'expression de la durée de tir  $d_{N-2}$  en fonction de l'état ( $\theta_{N-2}$ ,  $\Gamma_{N-2}$ ). Cette expression représente l'équation de l'étape:

$\theta_{N-2} < S$ :

$$\boxed{\Gamma_{N-2} = 2.d_{N-2} - 2.t_i^{(N-2)} + 2.D_{N-2}^*} \quad (44)$$

$\theta_{N-2} \geq S$ :

$$\boxed{\Gamma_{N-2} = 2.d_{N-2} - t_i^{(N-2)} + 2.D_{N-2}^*} \quad (45)$$

$$\boxed{d_{N-2}^* = f(\Gamma_{N-2}, \theta_{N-2})} \quad (46)$$

Comme dans l'étape d'initialisation, il est impossible de donner l'expression de  $d_{N-2}^*$  de façon littérale. On est donc amené à déterminer  $d_{N-2}^*$  numériquement. Parmi les méthodes numériques de résolution d'équations non linéaires, nous avons appliqué la

méthode de Newton–Raphson. Elle permet d'extraire  $d_{N-2}^*$  des équations (44) et (45) avec un maximum de précision (l'erreur est inférieure à  $10^{-6}$ ) et un minimum d'itérations.

#### 5.1.2.4. Contraintes: Domaine de validité des équations

##### Domaine de validité:

La limitation du domaine de l'étape s'obtient en appliquant la contrainte sur la température maximale  $\theta_{d(N-2)} \leq M$ . Les limites de l'étape N-2 s'obtiennent en appliquant la contrainte de la température maximale aux équations de l'étape en cours (N-2):

$\theta_{N-2} < S$  :

$$\Gamma_{N-2} \leq 2 \cdot \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - S}{G - M} \right] + 2 \cdot \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{M}{S} \right] \quad (47)$$

$\theta_{N-2} \geq S$  :

$$\Gamma_{N-2} \leq \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - \theta_{N-2}}{G - M} \right] + \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - S}{G - M} \right] + 2 \cdot \beta \cdot \text{Ln} \frac{M}{S} \quad (48)$$

##### Etude de la contrainte sur les signaux de commandes:

L'échauffement de la tête laser impose une contrainte sur la durée entre deux tirs successifs: la durée entre tirs doit être au moins deux fois supérieure à la durée de tir:

$$D_{N-2}^* \geq 2 \cdot d_{N-2} \quad (49)$$

La contrainte se réécrit de la façon suivante:

$$\beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{\theta_{d(N-2)}}{S} \right] \geq 2 \cdot d_{N-2}$$

En exprimant  $\theta_{N-2}$  en fonction de  $d_{N-2}$  cela donne:

$$\theta_{N-2} \geq G + S \cdot e^{(1/\tau + 2/\beta) \cdot d_{N-2}} - G \cdot e^{d_{N-2}/\tau} \quad (50)$$

Le domaine admissible est obtenu en remplaçant l'expression de  $\theta_{N-2}$  de l'équation (50), dans les expressions des équations (44) et (45) de l'étape (N-2). Cependant, il est difficile d'exploiter ces équations du fait de leur caractère non linéaire. A cet effet nous avons montré numériquement, comme le montre la figure (6), que pour tout état initial  $(\Gamma_{N-2}, \theta_{N-2})$ , la température atteinte pendant la phase suivant le tir  $d_{N-2}$  après une durée de  $2 \cdot d_{N-2}$ , est supérieure à S.

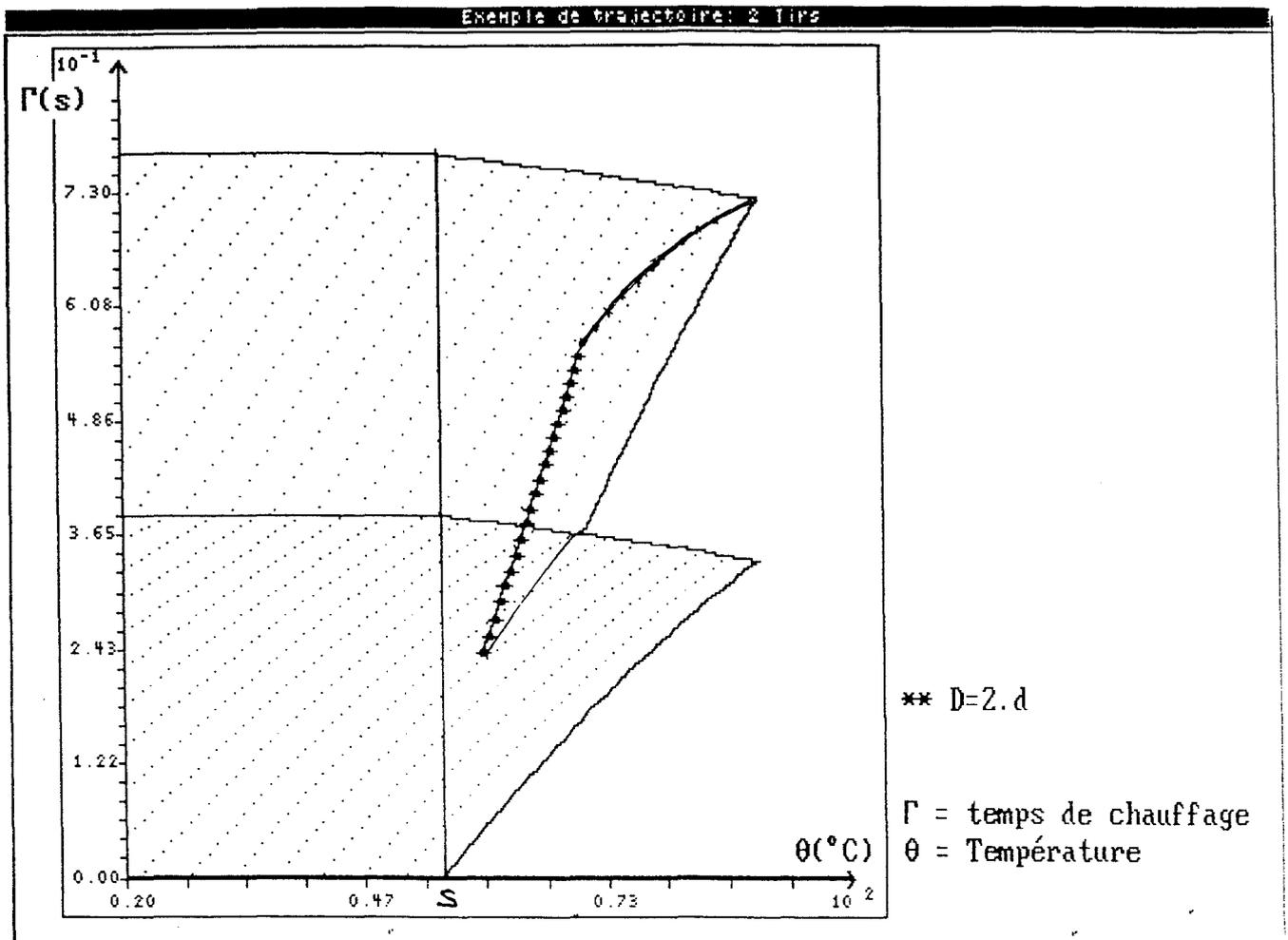


figure 6 : Contrainte sur les signaux de commande:  $D_{N-2} > 2.d_{N-2}$

Tous les états de l'étape N-2 satisfont donc la contrainte  $D_{N-2}^* \geq 2 \cdot d_{N-2}$ .

**5.1.2.5. Coût de l'étape**

Par application de l'équation de Bellman (39) on peut écrire:

$$J_{N-2}^*(\theta_{N-2}, \Gamma_{N-2}) = 2 \cdot d_{N-2} - \tau \cdot \text{Ln} \left( \frac{G - \theta_{N-2}}{G - S} \right) \quad (51)$$

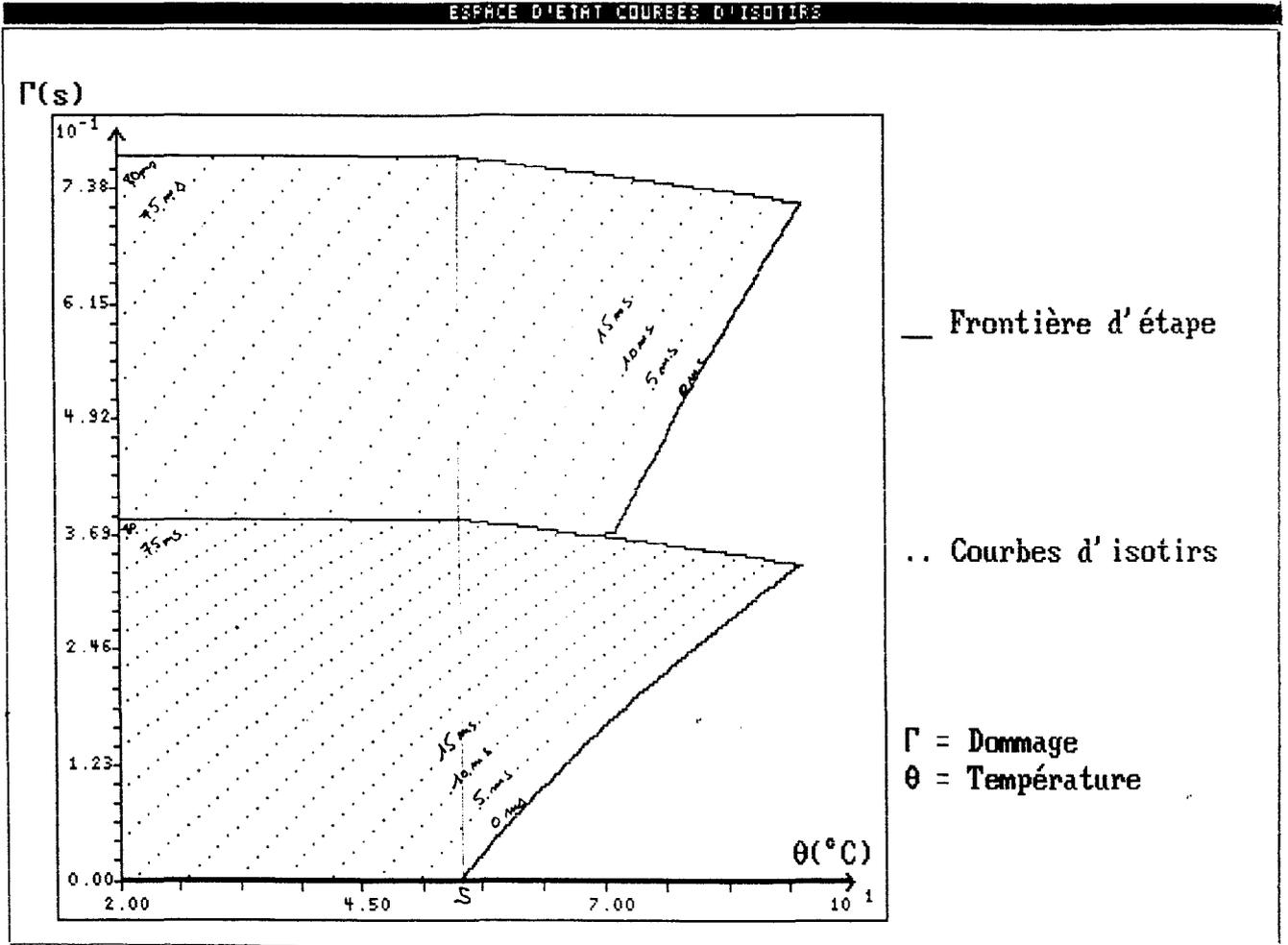


Figure 7 : Espace d'état à deux étapes

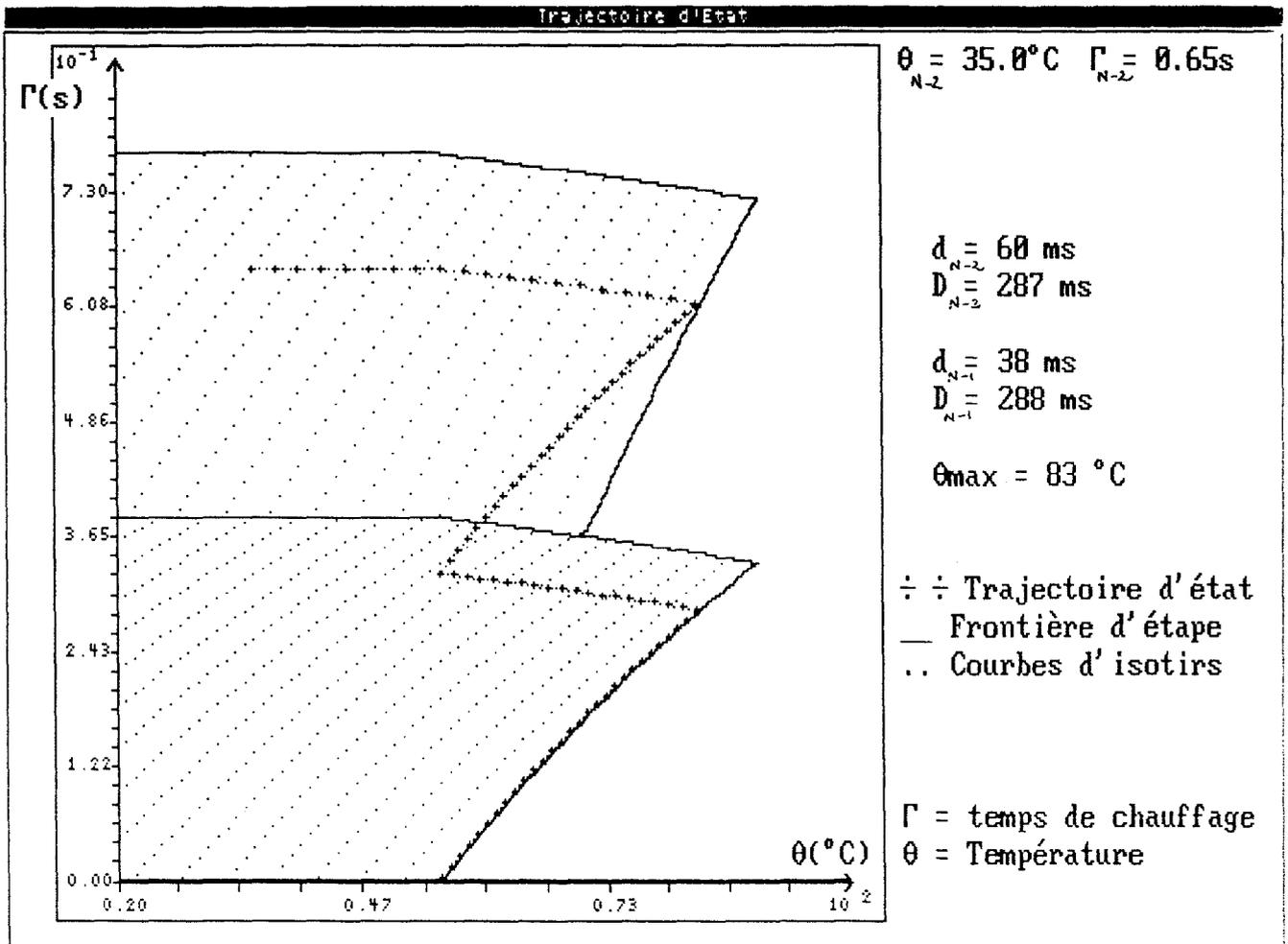


Figure 8 : Trajectoire dans l'espace d'état à deux étapes.

### 5.1.3. Etape d'ordre k

Les équations de l'étape k sont une généralisation des équations obtenues pendant les étapes précédentes. Pour résoudre le problème nous utiliserons un raisonnement par récurrence.

A cet effet nous allons supposer que les équations obtenues à l'ordre 2 sont aussi valables jusqu'à l'ordre k-1. C'est à dire:

a) La durée entre tirs  $D_{N-k+1}$  est optimale pour  $\theta_{N-k+2} = S$ .

$$D_{N-k+1}^* = \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{\theta_{N-k+2}}{S} \right] \quad (52)$$

b) Le coût de l'étape pour chaque couple  $(\theta_{N-k+1}, \Gamma_{N-k+1})$  a pour expression:

$$J_{N-k+1}^*(\theta_{N-k+1}, \Gamma_{N-k+1}) = (k-1) \cdot d_{N-k+1} - (k-2) \cdot \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - \theta_{N-k+1}}{G - S} \right] \quad (53)$$

c) La durée optimale de tir qui correspond à chaque couple  $(\theta_{N-k+1}, \Gamma_{N-k+1})$  s'exprime à travers les équations de l'étape:

$\theta_{N-k+1} < S$ :

$$\Gamma_{N-k+1} = (k-1) \cdot d_{N-k+1} - (k-1) \cdot t_{i(N-k+1)} + (k-1) \cdot D_{N-k+1}^* \quad (54)$$

$\theta_{N-k+1} \geq S$ :

$$\Gamma_{N-k+1} = (k-1) \cdot d_{N-k+1} - (k-2) \cdot t_{i(N-k+1)} + (k-1) \cdot D_{N-k+1}^* \quad (55)$$

$t_{i(N-k+1)}$  est donnée par l'équation (10).

d) Chaque état de l'étape doit satisfaire les contraintes suivantes:

$\theta_{N-k+1} < S$ :

$$\Gamma_{N-k+1} \leq (k-1) \cdot \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - S}{G - M} \right] + (k-1) \cdot \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{M}{S} \right] \quad (56)$$

$\theta_{N-k+1} \geq S$ :

$$\Gamma_{N-k+1} \leq \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - \theta_{N-k+1}}{G - M} \right] + (k-2) \cdot \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - S}{G - M} \right] + (k-1) \cdot \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{M}{S} \right] \quad (57)$$

L'équation de Bellman pour cette étape, k, s'écrit:

$$J_{N-k}^*(\theta_{N-k}, \Gamma_{N-k}) = \min_{u_{N-k}} \left[ d_{N-k} + J_{N-k+1}^*(\theta_{N-k+1}, \Gamma_{N-k+1}) \right] \quad (58)$$

la minimisation se fait par rapport à la commande  $u_{N-k} : (d_{N-k}, D_{N-k})$

Avec

$$\begin{aligned} \Gamma_{N-k+1} &= \Gamma_{N-k} - \delta_{N-k} \\ \theta_{N-k+1} &= \theta_d(N-k).e^{-D_{N-k}/\beta} \end{aligned} \quad (59)$$

Où

$$\theta_d(N-k) = (\theta_{N-k} - G).e^{-d_{N-k}/\tau} + G$$

$$\begin{aligned} \delta_{N-k} &= d_{N-k} - t_i(N-k) + t_f(N-k) & \text{Si } \theta_{N-k} < S \\ \delta_{N-k} &= d_{N-k} + t_f(N-k) & \text{Si } \theta_{N-k} \geq S \end{aligned} \quad (60)$$

$t_i(N-k)$  et  $t_f(N-k)$  sont données respectivement par les équations (10) et (11).

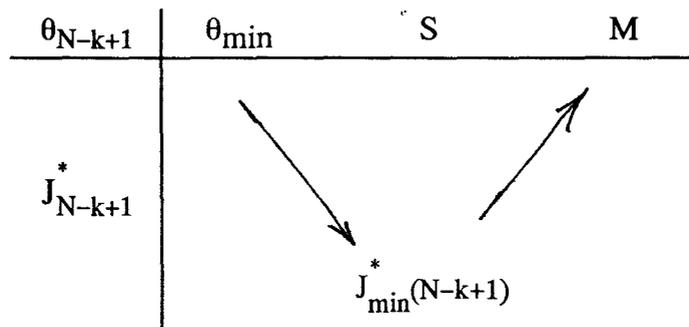
### 5.1.3.1. Optimisation de $D_{N-k}$ :

Dans l'annexe I, nous montrons que  $\theta_{N-k+1} = S$  correspond à  $D_{N-k}$  optimale. Le minimum de l'équation (58) par rapport à  $D_{N-k}$  correspond à  $\theta_{N-k+1} = S$ . En effet le resultat donnée en annexe I montre que:

Si  $\theta_{N-k+1} \geq S$ , alors  $J_{N-k+1}^*(\theta_{N-k+1}, \Gamma_{N-k+1})$  est une fonction croissante de  $\theta_{N-k+1}$ .

Si  $\theta_{N-k+1} < S$ , alors  $J_{N-k+1}^*(\theta_{N-k+1}, \Gamma_{N-k+1})$  est une fonction décroissante de  $\theta_{N-k+1}$ .

Le tableau suivant montre la variation de  $J_{N-k+1}^*(\theta_{N-k+1}, \Gamma_{N-k+1})$  par rapport à  $\theta_{N-k+1}$



Pour un fonctionnement optimal lors de la décroissance, la température doit revenir à  $\theta_{N-k+1} = S$ . Ceci correspond à une valeur optimale de  $D_{N-k}^*$  de la forme:

$$\boxed{D_{N-k}^* = \beta.Ln \frac{\theta_d(N-k+1)}{S}} \quad (61)$$

**5.1.3.2. Optimisation de la durée de tir  $d_{N-k}$  :**

La recherche du minimum de l'équation de Bellman (58) est obtenue en annulant la dérivée première de l'équation  $J_{N-k}$  par rapport à  $d_{N-k}$ . Le résultat de ce calcul, donné en annexe II, montre que les températures maximales successives doivent être égales:

$$\theta_{d(N-k+1)} = \theta_{d(N-k)} \quad (62)$$

Ou alors en exprimant  $d_{N-k}$  par rapport à  $d_{N-k+1}$ :

$$d_{N-k}^* = d_{N-k+1}^* + \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - \theta_{N-k}}{G - S} \right] \quad (63)$$

**5.1.3.3. Equation de l'étape:**

L'expression qui donne la durée de tir optimale  $d_{N-k}^*$  en fonction de la température  $\theta_{N-k}$  et du dommage à produire  $\Gamma_{N-k}$  est déduite des équations de l'étape précédente par récurrence. L'équation d'état du dommage pour l'étape  $N-k$  est:

$$\Gamma_{N-k+1} = \Gamma_{N-k} - \delta_{N-k}$$

et en tenant compte des équations (61), (62) et (63) on obtient:

$\theta_{N-k} < S$ :

$$\Gamma_{N-k} = k \cdot d_{N-k} - k \cdot t_i(N-k) + k \cdot D_{N-k}^* \quad (64)$$

$\theta_{N-k} \geq S$

$$\Gamma_{N-k} = k \cdot d_{N-k} - (k-1) \cdot t_i(N-k) + k \cdot D_{N-k}^* \quad (65)$$

Comme précédemment, il est impossible de donner l'expression de  $d_{N-k}^*$  de façon littérale, et nous avons appliqué la méthode de Newton-Raphson pour déterminer  $d_{N-k}^*$  numériquement.

$$d_{N-k}^* = f(\Gamma_{N-k}, \theta_{N-k}) \quad (66)$$

**5.1.3.4. Contrainte:Domaine de validité**

**Domaine de validité**

Les conditions initiales doivent vérifier la contrainte:  $\theta_{d(N-k)} \leq M$ . Dans l'espace  $(\theta, \Gamma)$  cette contrainte s'écrit:

$\theta_{N-k} < S$ :

$$\Gamma_{N-k} \leq k \cdot \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - S}{G - M} \right] + k \cdot \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{M}{S} \right] \quad (67)$$

$\theta_{N-k} \geq S$ :

$$\Gamma_{N-k} \leq \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - \theta_{N-k}}{G - M} \right] + (k-1) \cdot \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - S}{G - M} \right] + k \cdot \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{M}{S} \right] \quad (68)$$

**Etude de la contrainte sur les signaux de commandes:**

Le risque de l'échauffement de la tête laser impose à ce que la durée entre tirs doit être au moins deux fois supérieure à la durée de tir:

$$D_{N-k}^* \geq 2 \cdot d_{N-k} \quad (69)$$

La contrainte se réécrit de la façon suivante:

$$\beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{\theta_{d(N-k)}}{S} \right] \geq 2 \cdot d_{N-k}$$

En exprimant  $\theta_{N-k}$  en fonction de  $d_{N-k}$  cela donne:

$$\theta_{N-k} \geq G + S \cdot e^{(1/\tau + 2/\beta) \cdot d_{N-k}} - G \cdot e^{d_{N-k}/\tau} \quad (70)$$

Le domaine admissible est obtenu en remplaçant cette équation dans les expressions de l'étape (64) et (65). Cependant, il est difficile d'exploiter ces équations du fait de leur caractère non linéaire. A cet effet nous avons pu montrer numériquement, comme le montre la figure (9), que pour tout état initial  $(\Gamma_{N-k}, \theta_{N-k})$ , la température atteinte pendant la phase suivant le tir  $d_{N-k}$  après une durée de  $2 \cdot d_{N-k}$ , est supérieure à  $S$ .

Tous les états de l'étape  $N-k$  satisfont donc la contrainte  $D_{N-k}^* \geq 2 \cdot d_{N-k}$ .

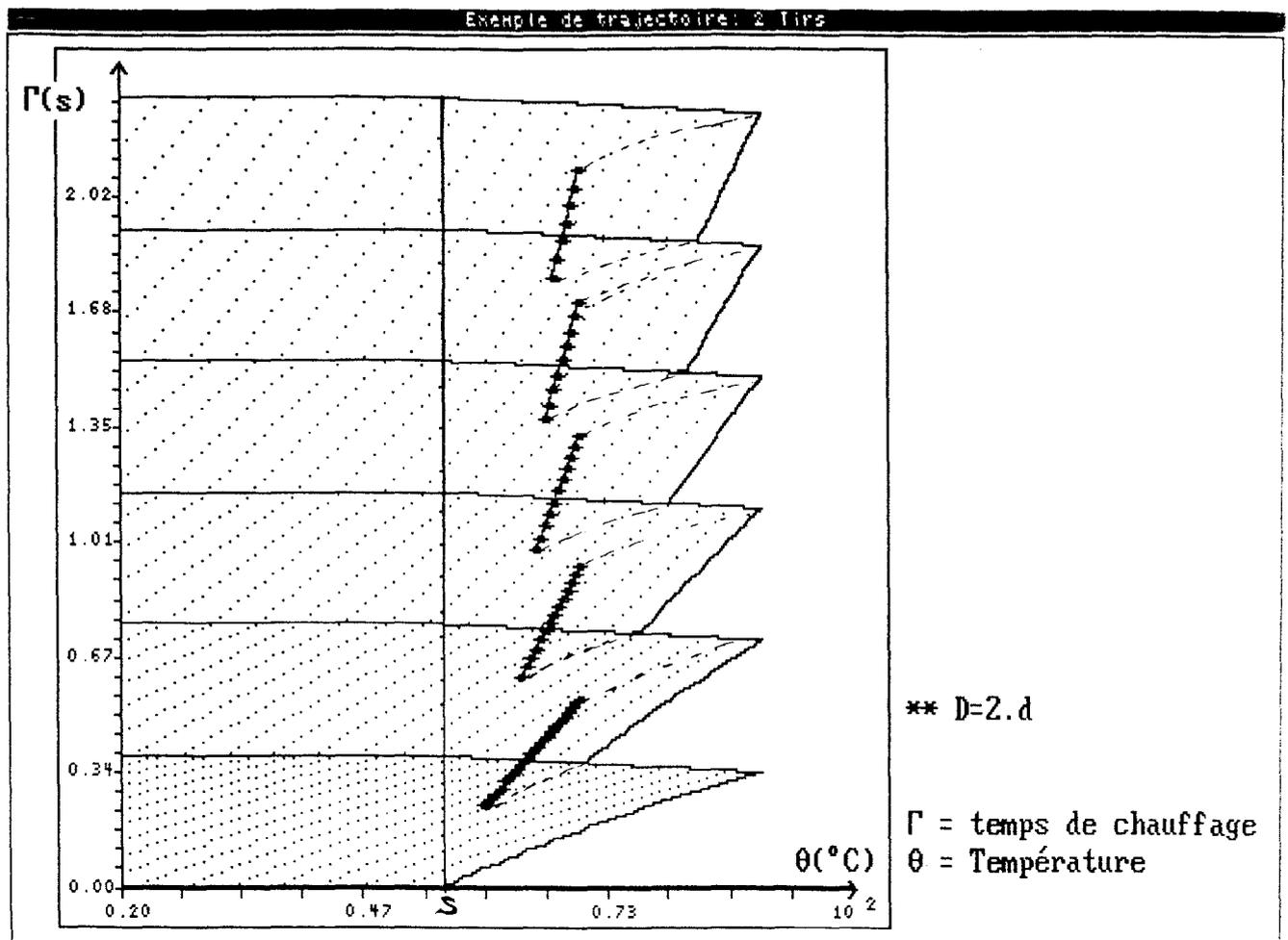


Figure 9 : Contrainte sur les signaux de commande:  $D \geq 2.d$

### 5.1.3.5. Coût de l'étape

Le coût optimal de l'étape s'écrit en appliquant le principe de Bellman (58):

$$J_{N-k}^*(\theta_{N-k}, \Gamma_{N-k}) = k.d_{N-k} - (k-1).\tau.Ln\left(\frac{G - \theta_{N-k}}{G - S}\right) \quad (71)$$

#### Remarques:

- La dérivé de  $J_{N-k}^*$  par rapport à  $d_{N-k}$  est une condition de minimum, nécessaire mais pas suffisante. Pour s'assurer du minimum, il faut étudier la dérivée seconde de  $J_{N-k}^*$  par rapport à  $d_{N-k}$ :

$$\frac{\delta^2 J}{\delta d^2} = G \cdot \frac{\beta (G - \theta).e^{-d/\tau}}{(\tau.\theta_d)^2} \geq 0$$

- Unicité de la solution : Les expressions analytiques de chaque étape montrent que pour chaque couple de condition initiale  $(\theta_{N-k}, \Gamma_{N-k})$ , il y a une valeur  $d_{N-k}^*$  unique et optimale.

- Le calcul des fonctions  $u = f(x,k)$ , correspond à la synthèse du système de commande, s'effectue récursivement en "sens inverse du temps" . Par contre, l'utilisation des  $u=f(x,k)$  en temps réel se fait évidemment dans le sens du temps  $(0,N-1)$ .

**REMARQUE:**

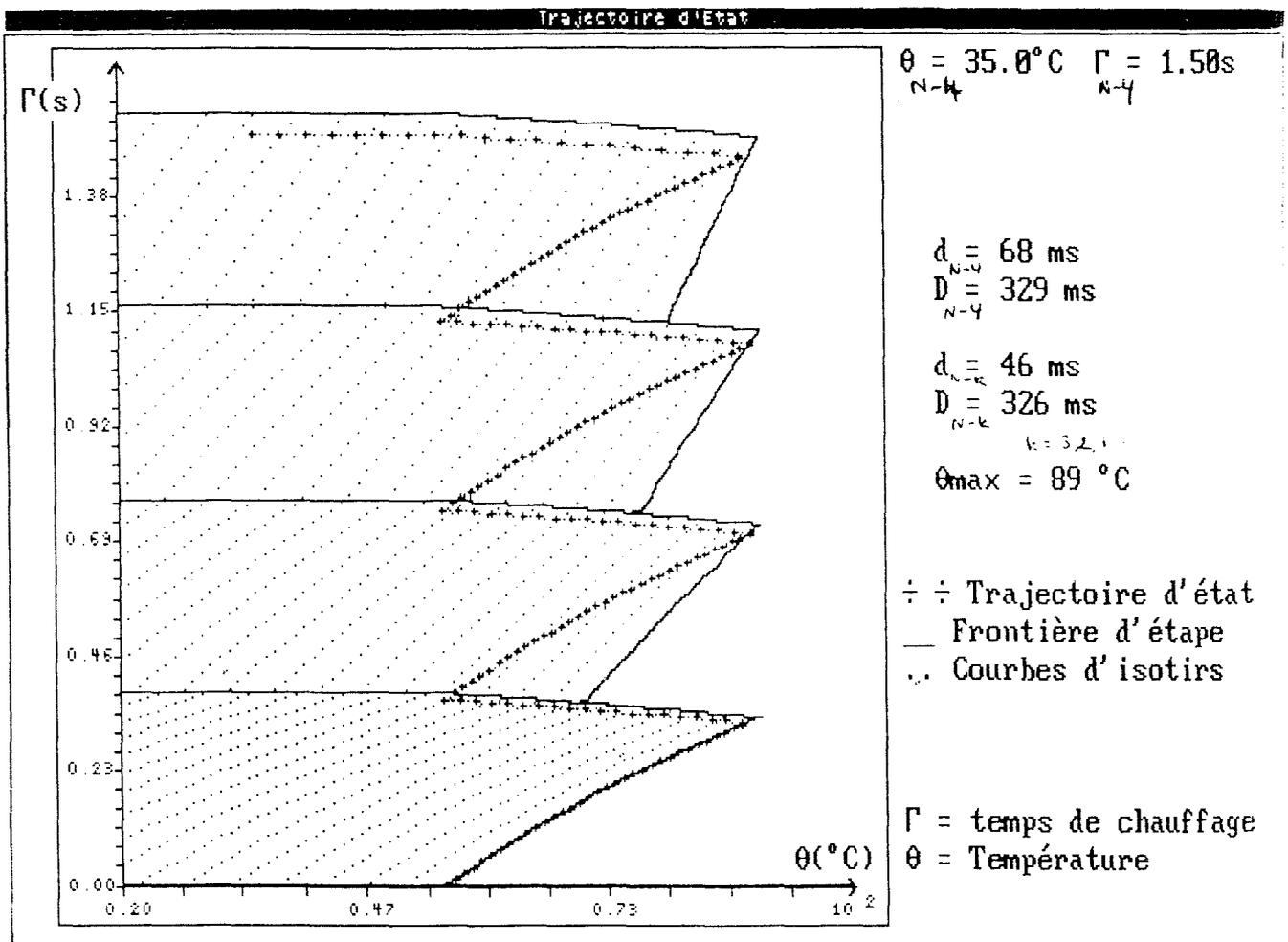


Figure 10 : Exemple de trajectoire d'état dans un espace à 4 étapes

Il est intéressant d'analyser une trajectoire (évolution du dommage en fonction de la température et du temps) dans l'espace d'état (Figure 9).

\* Le dommage élémentaire produit pendant chaque étape est le même. Si  $k$  (dans le cas de la figure (9),  $k=4$ ) est le nombre de tirs (nombre d'étapes), les dommages élémentaires s'expriment ainsi:

$$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{N-k} = \frac{\Gamma}{k}$$

Dans le cas de la figure (9):

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \frac{\Gamma}{4}$$

\* Pour toutes les étapes, sauf la première, la température initiale est égale à la température finale qui n'est autre que S : température de coagulation.

\* La température maximale atteinte pendant le tir est la même pour toutes les étapes.

\* La première durée de tir s'exprime implicitement par l'équation:

$$\delta = d - \tau \cdot \text{Ln} \frac{G - \theta}{G - S} + \beta \cdot \text{Ln} \frac{(S - G) \cdot e^{-d/\tau} + G}{S}$$

D'où:

$$d = \phi(\delta, \theta) = \phi(\Gamma/k, \theta).$$

$\delta$  : Dommages élémentaire produit par la durée de tir d.

\* La durée de tir pour les autres étapes est:

$$\delta = d + \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{(S - G) \cdot e^{-d/\tau} + G}{S} \right]$$

D'où

$$d = \phi(\delta) = \phi(\Gamma/k).$$

\* La durée entre tirs pour toutes les étapes s'exprime par :

$$D = \beta \cdot \text{Ln} \left[ \frac{(S - G) \cdot e^{-d/\tau} + G}{S} \right]$$

## 6 CONCLUSION

La technique de la programmation dynamique nous a permis de construire l'espace d'état, défini par les variables d'état ( $\theta$ ,  $\Gamma$ ), à partir duquel on peut déterminer une suite de commandes optimale ( $d^*$ ,  $D^*$ ) pouvant produire un certain dommage  $\Gamma$  sur un tissu ayant une température initiale  $\theta$ .

La commande ( $d^*$ ,  $D^*$ ) est calculée en boucle fermée en respectant les contraintes sur l'état (produire un dommage donné tout en restant en dessous d'une température limite) et les contraintes sur les signaux de commande (La durée entre tirs doit être au moins égale à deux fois la durée de tir).

L'algorithme de programmation dynamique présenté dans ce chapitre peut s'appliquer sur d'autres lasers thermique et impulsif.

## ANNEXES

Dans cette annexe nous allons développer les calculs concernant l'optimisation de la durée entre deux tirs successifs et l'optimisation de la durée de tir pour l'étape d'ordre k. L'avant dernière étape est déduite en posant k=2.

### Annexe I : Optimisation de $D_{N-k}$

Il s'agit d'étudier la variation de  $J_{N-k+1}^*$  par rapport à  $\theta_{N-k}$  donnée par le système d'équation

$$\begin{aligned}\Gamma_{N-k+1} &= \Gamma_{N-k} - \delta_{N-k} \\ \theta_{N-k+1} &= \theta_{d(N-k)} \cdot e^{-D_{N-k}/\beta}\end{aligned}$$

ceci revient à étudier le rapport:

$$\frac{\delta J_{N-k+1}^*}{\delta \theta_{N-k+1}}$$

\* Cas où  $\theta_{N-k+1} < S$ :

L'équation

$$J_{N-k+1}^*(\theta_{N-k+1}, \Gamma_{N-k+1}) = (k-1) \cdot d_{N-k+1} - (k-2) \cdot \tau \cdot \text{Ln} \left[ \frac{G - \theta_{N-k+1}}{G - S} \right]$$

permet d'écrire:

$$\frac{\delta J_{N-k+1}^*}{\delta \theta_{N-k+1}} = (k-1) \cdot \frac{\delta d_{N-k+1}}{\delta \theta_{N-k+1}} + (k-2) \cdot \frac{\tau}{G - \theta_{N-k+1}} \quad (72)$$

D'autre part, en dérivant l'équation du dommage de l'étape N-k+1 par rapport à  $\theta_{N-k+1}$  on obtient :

$$\frac{\delta \Gamma_{N-k+1}}{\delta \theta_{N-k+1}} = (k-1) \cdot \left[ \frac{\delta d_{N-k+1}}{\delta \theta_{N-k+1}} + \frac{\tau}{G - \theta_{N-k+1}} + \frac{\beta \cdot e^{-d_{N-k+1}/\beta}}{\theta_{d(N-k+1)}} \right] \quad (73)$$

Dans la zone  $\theta_{N-k+1} < S$  (la température est en dessous du seuil de coagulation) le tissu ne coagule pas et le dommage reste constant :

$$\frac{\delta \Gamma_{N-k+1}}{\delta \theta_{N-k+1}} = 0 \quad (74)$$

Compte tenu des équations de l'étape et des équations ci-dessus on obtient:

$$\frac{\delta J_{N-k+1}}{\delta \theta_{N-k+1}} = - \frac{\tau}{G - \theta_{N-k+1}} - \frac{\beta \cdot e^{-d_{N-k+1}/\tau}}{\theta_{d(N-k+1)}} < 0 \quad (75)$$

\* Cas où  $\theta_{N-k+1} \geq S$

En utilisant la propriété suivante:

$$\theta_{d(N-k+1)} = \theta_{d(N-k+2)} = (S - G) \cdot e^{-d_{N-k+2}/\tau} + G.$$

la dérivée de  $\Gamma_{N-k+1}$  par rapport à  $\theta_{N-k+1}$  dans l'équation s'écrit:

$$\frac{\delta \Gamma_{N-k+1}}{\delta \theta_{N-k+1}} = (k-1) \cdot \frac{\delta d_{N-k+1}}{\delta \theta_{N-k+1}} + (k-2) \cdot \frac{\tau}{G - \theta_{N-k+1}}$$

Le système d'équations d'état le long des trajectoires du système en régime libre peut se réécrire de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \beta \cdot \frac{d\theta_{N-k+1}}{dt} + \theta_{N-k+1} &= 0 \\ \frac{d\Gamma_{N-k+1}}{dt} &= -1 \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\frac{\delta \Gamma_{N-k+1}}{\delta \theta_{N-k+1}} = \frac{\beta}{\theta_{N-k+1}}$$

Par ailleurs l'équation du coût de l'étape  $N-k+1$  donne:

$$\frac{\delta J_{N-k+1}^*}{\delta \theta_{N-k+1}} = (k-1) \cdot \frac{\delta d_{N-k+1}}{\delta \theta_{N-k+1}} + (k-2) \cdot \frac{\tau}{G - \theta}$$

On conclut donc que:

$$\frac{\delta J_{N-k+1}^*}{\delta \theta_{N-k+1}} > 0 \quad (76)$$

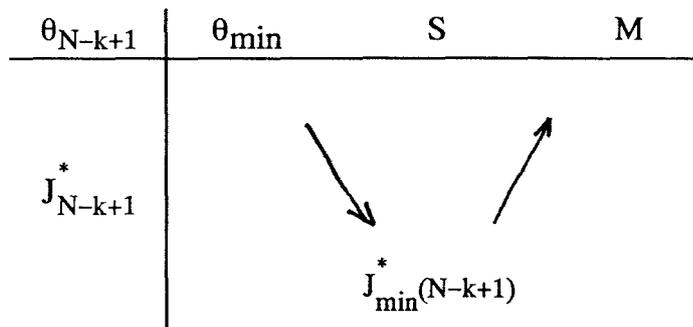
En résumé l'analyse du coût à cette étape, compte tenu des équations (75) et (76), montre que:

Si  $\theta_{N-k+1} \geq S$ , alors  $J_{N-k+1}^*(\theta_{N-k+1}, \Gamma_{N-k+1})$  est une fonction croissante de  $\theta_{N-k+1}$ .

Si  $\theta_{N-k+1} < S$ , alors  $J_{N-k+1}^*(\theta_{N-k+1}, \Gamma_{N-k+1})$  est une fonction décroissante de

$\theta_{N-k+1}$ .

Le tableau suivant illustre ce résultat:



Pour un fonctionnement optimal lors de la décroissance, la température doit revenir à  $\theta_{N-k+1} = S$ . Ceci correspond à une valeur optimale de  $D_{N-k}^*$  de la forme:

$$D_{N-k}^* = \beta \cdot \text{Ln} \frac{\theta_{d(N-k+1)}}{S}$$

### Annexe II : Optimisation de la durée de tir $d_{N-k}$

Le calcul de la valeur  $d_{N-k}$  se fait en annulant la dérivée première de la quantité  $J_{N-k}^*(\theta_{N-k}, \Gamma_{N-k})$  par rapport à  $d_{N-k}$ . Le calcul de la dérivée conduit à:

$$\frac{\delta J_{N-k}^*}{\delta d_{N-k}} = 1 + \frac{\delta J_{N-k+1}^*}{\delta \Gamma_{N-k+1}} \cdot \frac{\delta \Gamma_{N-k+1}}{\delta d_{N-k}} \quad (77)$$

Calcul de  $\frac{\delta J_{N-k+1}^*}{\delta \Gamma_{N-k+1}}$

$\Gamma_{N-k+1}$  et  $(\theta_{N-k+1} = S)$  sont les conditions initiales sur l'étape précédente, on peut donc écrire:

$$\Gamma_{N-k+1} = (k-1).d_{N-k+1} + (k-1) \beta.Ln \frac{\theta_{d(N-k+1)}}{S} \quad (78)$$

Le coût  $J_{N-k+1}^*$ , associé à tout couple de conditions initiales  $(\Gamma_{N-k+1}, S)$  de l'étape  $N-k+1$  s'écrit de la façon suivante:

$$J_{N-k+1}^*(\Gamma_{N-k+1}, \theta_{N-k+1}) = (k-1).d_{N-k+1}$$

L'équation (78) devient:

$$\Gamma_{N-k+1} = J_{N-k+1}^* + (k-1) \beta.Ln \frac{\theta_{d(N-k+1)}}{S}$$

Dans cette équation, la dérivée de  $J_{N-k+1}^*$  par rapport à  $\Gamma_{N-k+1}$  donne:

$$\frac{\delta J_{N-k+1}^*}{\delta \Gamma_{N-k+1}} = \frac{\theta_{d(N-k+1)}}{\theta_{d(N-k+1)} + \frac{\beta}{\tau} \cdot (G - S).e^{-d(N-k+1)/\tau}} \quad (79)$$

Calcul de  $\frac{\delta \Gamma_{N-k+1}}{\delta d_{N-k}}$  :

La dérivée de  $\Gamma_{N-k+1}$  par rapport à  $d_{N-k}$

$$\Gamma_{N-k+1} = \Gamma_{N-k} - \delta_{N-k}$$

En effet:

$$\frac{\delta \Gamma_{N-k+1}}{\delta d_{N-k}} = - \frac{\theta_{d(N-k+1)} + \frac{\beta}{\tau} \cdot (G - \theta).e^{-d(N-k)/\tau}}{\theta_{d(N-k+1)}} \quad (80)$$

Par application de l'équation (77) et en tenant compte des equations (79) et (80), on peut déduire le résultat suivant:

$$\theta_{d(N-k+1)} = \theta_{d(N-k)} \quad (81)$$

Ou alors en exprimant  $d_{N-k}$  par rapport à  $d_{N-k+1}$ :

$$d_{N-k} = d_{N-k+1} + \tau \cdot \text{Ln} \frac{G - \theta_{N-k}}{G - S} \quad (82)$$

## **Chapitre 3 : commande adaptative**

## **CHAPITRE III : COMMANDE ADAPTATIVE**

INTRODUCTION.....	58
LES DIFFERENTES APPROCHES DE LA COMMANDE ADAPTATIVE.....	59
APPLICATION DE LA COMMANDE AUTO-AJUSTABLE AU PROBLEME DU LASER MEDICAL .....	61
Méthode directe.....	62
Conditions de déclenchement.....	62
Méthode des moindres carrés simples. ....	65
Conditions de déclenchement.....	66
Algorithme des moindres carrés récursifs pondérés .....	69
Algorithme des moindres carrés récursif (M.C.R) .....	69
Calcul du gain d'adaptation (Algorithme des M.C.R pondéré).....	73
CONCLUSION .....	82

## 1 INTRODUCTION

Dans le premier chapitre, nous avons vu que lors de l'échauffement du tissu, ses propriétés thermiques et optiques varient. Ceci implique une variation des coefficients du modèle de commande. Lors de la synthèse de la structure du modèle de commande, cette propriété qui est due aux changements métaboliques et à la conduction de la chaleur par flux sanguin (convection) n'a pas été prise en compte. La température estimée par le modèle de commande est erronée quand les paramètres varient.

Le calcul de la commande optimale dans le chapitre 2 a été effectué en supposant constants les paramètres du modèle de commande. Les performances de la commande optimale se dégradent au fur et à mesure que l'erreur entre la dynamique effective du processus et celle de son modèle de commande croit. Un réajustement de la commande optimale s'avère nécessaire. Le concept de *commande adaptative* est une solution. Différentes approches de commande adaptative ont été développées dans le but d'obtenir un réajustement automatique des paramètres de l'organe de commande, de manière à pallier l'effet des variations de la dynamique du procédé et l'effet des perturbations.

L'ajustement concerne les paramètres du modèle pendant et après le tir.

### – Pendant le tir:

Il n'est pas facile de bien contrôler la température pendant le tir: en effet, les durées de tir sont très brèves (la durée maximale de tir est 100 ms). Le temps de réponse du capteur thermique (caméra infra rouge) est de 40 ms. L'incidence des modifications tissulaires sur les paramètres du modèle, pendant le tir, sont mal connues.

### – Après le tir:

Cependant, les changements de paramètres tissulaires se manifestent fortement après le tir. Il a été constaté (Henriques 1947) que la plus grande partie (70 % environ) du dommage produit a lieu après le tir. Ces modifications ont une incidence directe sur le dommage produit.

L'adaptation paramétrique va donc concerner les paramètres qui interviennent pendant la phase suivant le tir, et en particulier le paramètre  $\beta$ .

Le but de la commande adaptative est de fournir une commande optimale qui tient compte de l'altération des paramètres due à l'échauffement du tissu.

La validation de la commande auto-ajustable est effectuée par Hélios qui est un modèle de connaissance simulant l'action thermique des lasers sur les tissus vivants.

## 2 LES DIFFERENTES APPROCHES DE LA COMMANDE ADAPTATIVE.

Les recherches concernant la commande adaptative ont été abordées à la fin des années 50 (Gregory 1959). L'application principale de ces recherches était de fournir une aide au pilotage des avions. Des résultats théoriques significatifs ont été apportés grâce aux travaux de R. Bellman (programmation dynamique 1957), Feldbaum en 1965 et plus tard Tsypkin en 1973.

Par ailleurs, le progrès rapide de la micro-informatique a permis une réalisation simple, convenable et peu coûteuse des systèmes adaptatifs.

Il existe deux approches fondamentales dans la théorie de la commande adaptative: les systèmes *auto-ajustables* (Self Tuning Control – S.T.C ) et les systèmes *adaptatifs avec modèle de référence* (Model Reference Adaptive Control M.R.A.C) ( Åstrom et all. 1977, Landau 1979). La technique de commande adaptative avec modèle de référence a été étudiée pour la première fois par Whitaker en 1958, tandis que la technique de commande auto-ajustable a été proposée pour la première fois par Kalman en 1958. Le développement de ces techniques repose sur l'hypothèse fondamentale suivante: pour toutes les valeurs possibles des paramètres du procédé on suppose qu'il existe un régulateur de structure donnée qui peut assurer la réalisation des performances désirées. Le rôle de la boucle d'adaptation est uniquement limité à trouver les bonnes valeurs des paramètres de ce régulateur dans chaque cas (Landau 1986).

Dans la plupart des cas, ces deux approches sont équivalentes (Egardt 1979, Landau 1981) et on distingue généralement deux types de schémas de commande adaptative.

-Les schémas indirects : l'adaptation paramétrique se fera en deux étapes:

1/ Estimation en temps réel des paramètres du processus.

2/ Reconstitution de l'organe de commande en fonction des nouveaux paramètres estimés et calcul de la nouvelle commande optimale.

Généralement, toutes les techniques qui mettent en jeu à la fois les processus de commande et d'identification peuvent conduire à des schémas de commande adaptatives de ce type. Ceci est valable, sous réserve que cette combinaison commande-identification conduise à la stabilité du système de commande adaptative (M'saad et al 1985). (Ph De Larminat 1981-1984).

-Les schémas directs : le principe de ces schémas consiste à estimer, en temps réel, directement les paramètres de l'organe de commande. Ceci revient à supprimer l'étape d'estimation des paramètres du modèle dans le cas indirect. Dans la plupart des cas, ce type de schéma est obtenu en effectuant une re-paramétrisation appropriée de l'organe de commande faisant apparaître les paramètres du modèle.

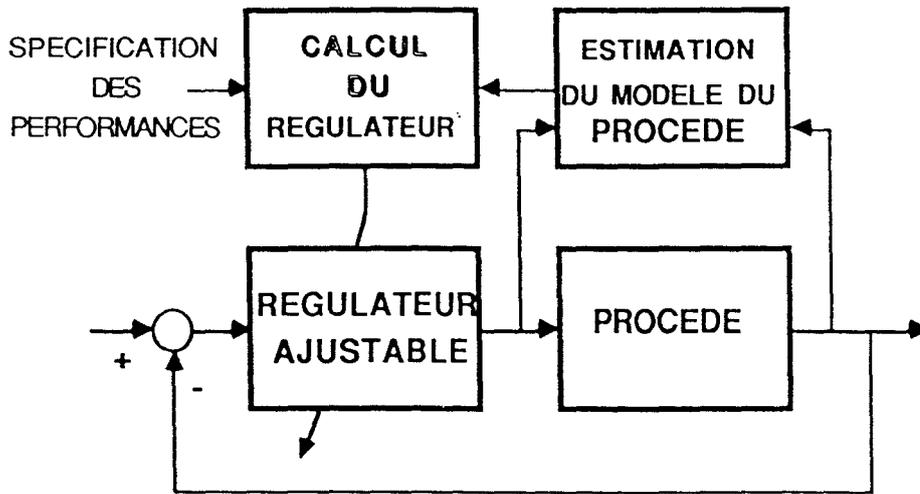


Figure 1 : Système adaptatif avec identificateur ou régulateur auto-ajustable

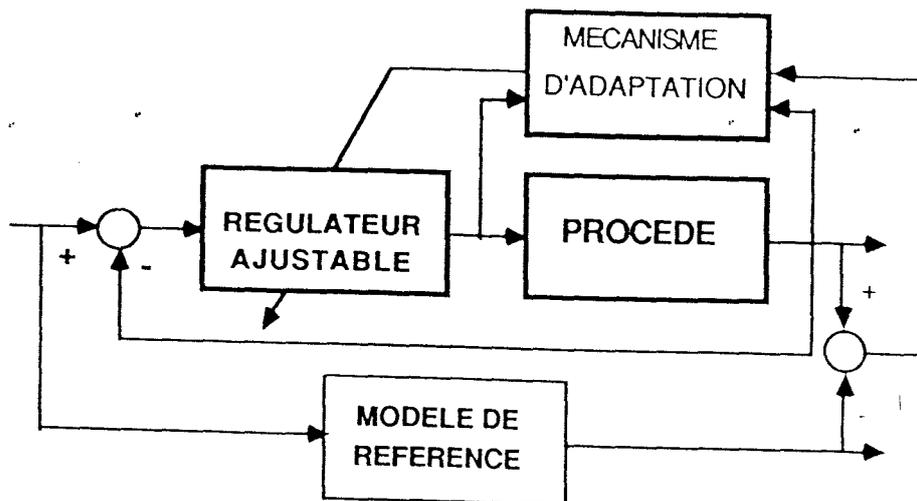


Figure 2 : Système adaptatif à modèle de référence.

Dans le cas de la commande optimale du laser médical, les paramètres de la structure de commande sont les mêmes que les paramètres du modèle. Il suffit, alors, d'estimer en ligne les paramètres du modèle par l'intermédiaire d'un algorithme d'adaptation paramétrique et les utiliser pour le calcul de la loi de commande optimale comme s'ils étaient les vrais paramètres du processus. Cette stratégie de réglage des paramètres de l'organe de commande, correspond au principe de la commande auto-ajustable (Self-Tuning Control S.T.C).

Le but de la commande auto-ajustable est d'atteindre une consigne préalablement fixée et tenant compte des variations de paramètres. On rappelle que cette consigne se résume à produire un dommage en termes de temps de chauffage effectif.

Le principe de l'algorithme d'adaptation paramétrique (A.A.P) repose sur la minimisation de l'erreur en température entre le modèle de commande et le modèle de validation du processus (Hélios).

$$\varepsilon_i = \theta_i - \theta_i^*$$

Nous traiterons deux types d'algorithmes d'adaptation: l'A.A.P simple, basé sur la méthode des moindres carrés simple et l'A.A.P récursif basé sur la méthode des moindres carrés récursifs pondérée. L'adaptation paramétrique a lieu pendant ou après la phase suivant le tir.

### 3 APPLICATION DE LA COMMANDE AUTO-AJUSTABLE AU PROBLEME DU LASER MEDICAL

L'étude de la commande auto-ajustable s'effectue en deux étapes:

La première étape consiste à calculer le paramètre  $\beta$  par minimisation de l'erreur entre la température du modèle de commande et la température obtenue par le processus. Celui-ci est représenté par Hélios qui est un modèle de connaissance simulant l'interaction laser-tissu. Ce modèle sera détaillé au chapitre IV. Tous les tests seront réalisés sur Hélios.

La deuxième étape a pour but d'adapter la loi de commande au nouveau paramètre calculé. La structure des équations de la loi de commande dans le cas adaptatif reste la même que dans le cas à paramètres fixes. Le calcul de la nouvelle commande à un instant donné, s'obtient en remplaçant le paramètre fixe par son estimation à ce même instant dans la structure de l'organe de commande. Si à la fin de la phase suivant le  $(k-1)$ ème tir,  $\Gamma_k$  est le dommage restant à produire,  $\theta_k$  la température atteinte (pour un fonctionnement optimal  $\theta_k \approx S$ ) et  $\beta_k$  le nouveau paramètre calculé par l'AAP, l'équation du dommage s'écrit:

$$\Gamma_k = k.d_k - (k-1).\tau.Ln \frac{G - \theta_k}{G - S} + k.\beta_k.Ln \left[ \frac{\theta_{dk}}{S} \right] \quad (1)$$

$d_k$  s'exprimera de la façon suivante:

$$d_k = f(\Gamma_k, \theta_k, \beta_k) \quad (2)$$

### 3.1 Méthode directe

Dans ce cas le calcul du nouveau paramètre  $\beta$  intervient à la fin de chaque période de tir.

Si  $D_k$  est la durée entre tirs réelle, le nouveau paramètre  $\beta^*$  s'écrit par application de(4):

$$\beta^* = \frac{D_k}{\omega_k} \quad (3)$$

où

$$\omega_k = \text{Ln} \left[ \frac{\theta_{\max}(k)}{S} \right]$$

$\theta_{\max}$  est la température maximale réelle atteinte à la surface du tissu à la fin du  $k^{\text{ième}}$  tir.

#### Conditions de déclenchement

Dans le cas de l'adaptation par la méthode directe, le déclenchement de la procédure d'adaptation ne peut être décidé qu'à la fin de la durée suivant le tir (au moment où la température revient à S). Deux cas sont envisagés:

**Le déclenchement inconditionnel:** La procédure d'adaptation paramétrique est déclenchée systématiquement à la fin de chaque période suivant le tir pendant toute la durée de la séquence de tir. Ce cas est représenté sur la figure (3).

**Le déclenchement conditionnel:** la procédure d'adaptation paramétrique ne se déclenche que si l'erreur entre le dommage produit par le processus et le dommage prévu par le modèle de commande dépasse une marge d'erreur tolérée. Ce cas est représenté sur la figure (4). La marge d'erreur tolérée a été choisie égale à 5%.

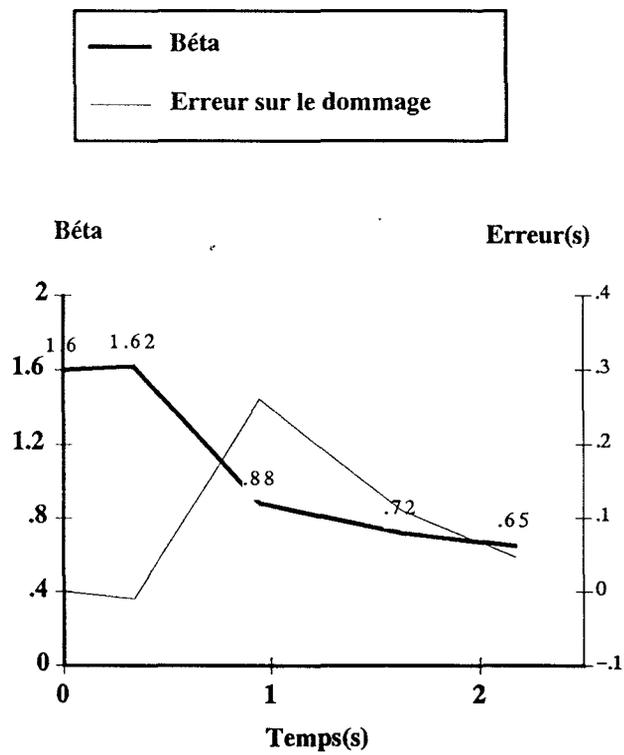
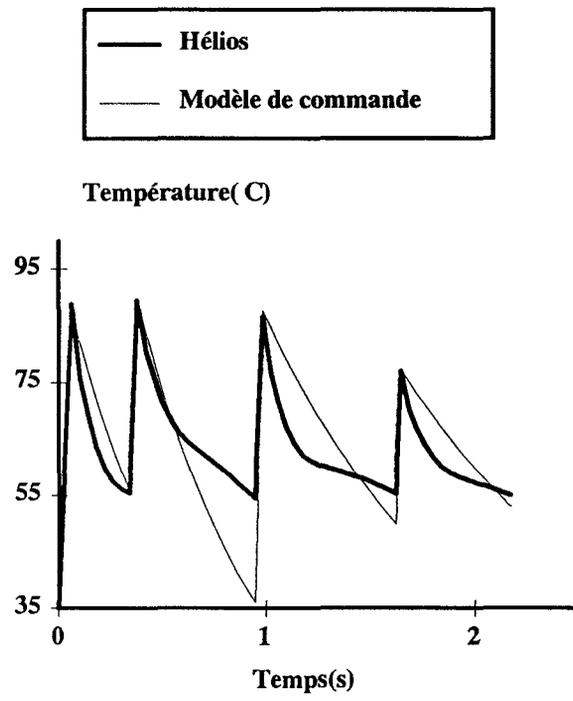


Figure 3 : méthode directe: cas inconditionnel

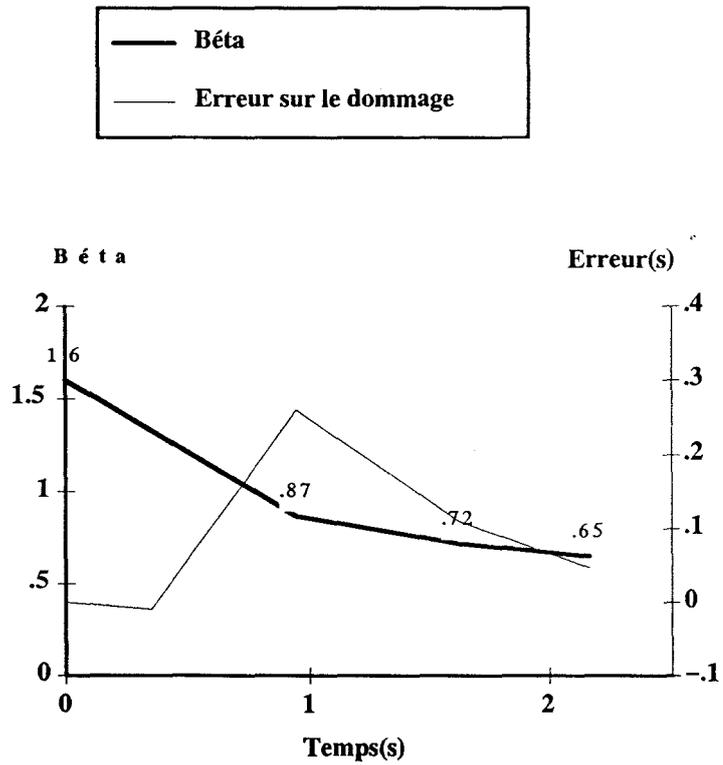
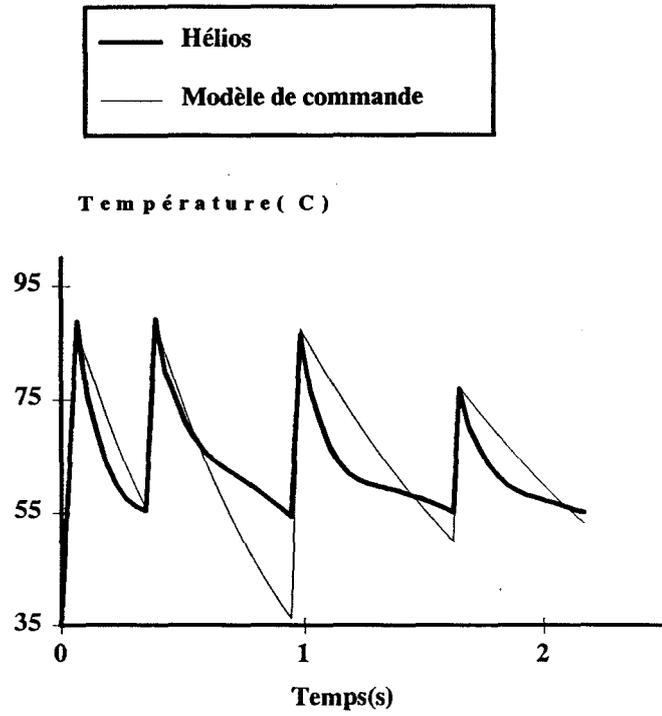


Figure 4 : Méthode directe: cas conditionnel

Les figures 3 et 4 illustrent cette procédure d'adaptation. Le modèle Hélios conduit à une modification de la valeur de  $\beta$  dès le deuxième tir. Dans les deux cas, la procédure d'adaptation ramène la valeur de  $\beta$  de 1.6 (valeur initiale) à 0.72 (valeur au dernier tir). Quant à l'erreur de dommage, elle est ramenée dans l'intervalle de l'erreur tolérée. Le mode de déclenchement n'a pas d'effet sur le calcul de  $\beta$ .

### 3.2 Méthode des moindres carrés simples.

L'algorithme d'adaptation paramétrique consiste à effectuer une estimation au sens de la minimisation d'un critère des moindres carrés sur les températures du processus calculées pendant la phase après tir et d'en déduire la valeur  $\beta$  la plus vraisemblable (indépendamment de la valeur calculée pendant la période de tir précédente) qui minimise la somme des carrés de l'erreur de température processus-modèle de commande.

La structure du modèle paramétrique se présente de la façon suivante:

$$\theta^*(t) = \theta_d(k).e^{-t/\beta} \quad (4)$$

$\theta_d(k)$  est la température maximale atteinte pendant le  $k^{\text{ième}}$  tir

$\theta^*(t)$  est la sortie du modèle de commande pendant la durée entre tirs.

Pour faciliter les calculs nous linéarisons l'équation (4):

$$\text{Ln}(\theta^*(t)) = \text{Ln}(\theta_d(k)) - \frac{t}{\beta} \quad (5)$$

L'erreur d'estimation à tout instant  $t=i$  est définie par:

$$\varepsilon_i^* = \text{Ln}(\theta(i)) - \text{Ln}(\theta^*(i)) \quad (6)$$

On peut écrire par application de (6):

$$y_i = P \cdot f_i + \varepsilon_i^*$$

où

$$y_i = \text{Ln}(\theta(i)) - \text{Ln}(\theta_d(k))$$

$$P = \frac{1}{\beta} : \text{le paramètre à identifier.}$$

$$f_i = -i$$

Le critère des moindres carrés est défini par:

$$J_I = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^I [\varepsilon_i^*]^2 \quad (7)$$

I est le nombre d'observations effectués dans la période suivant le tir. Les observations s'effectuent toutes les 40 ms.

Il s'agit de déterminer une estimation du paramètre après I mesures de telle sorte qu'il minimise la somme des carrés des écarts entre le procédé et le modèle de commande de I mesures.

La valeur de  $\beta^*$  qui minimise le critère  $J_I$  s'obtient en cherchant la valeur  $\beta^*$  qui annule le gradient de  $J_I$  par rapport à  $\beta$ . D'où le meilleur estimé de  $\beta$  :

$$\beta^* = \frac{\sum_{i=1}^I i^2}{\sum_{i=1}^I i \cdot \text{Ln} \left[ \frac{\theta_d(k)}{\theta(i)} \right]} \quad (8)$$

L'écriture matricielle est la suivante:

$$P = (F^T \cdot F)^{-1} \cdot F^T \cdot Y \quad (9)$$

Avec

$$F : \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_I \end{pmatrix} \quad Y : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_I \end{pmatrix}$$

où

$$f_i = -i \quad \text{et} \quad y_i = \text{Ln} \left[ \frac{\theta(i)}{\theta_d(k)} \right]$$

L'équation (9) correspond à l'algorithme des moindres carrés simples ou encore à l'algorithme d'adaptation paramétrique non récursif.

### Conditions de déclenchement

Les conditions de déclenchement sont identiques à celles de la méthode simple. La figure (5) et la figure (6) représentent respectivement le mode de déclenchement inconditionnel et conditionnel, sur le même exemple que ci-dessus.

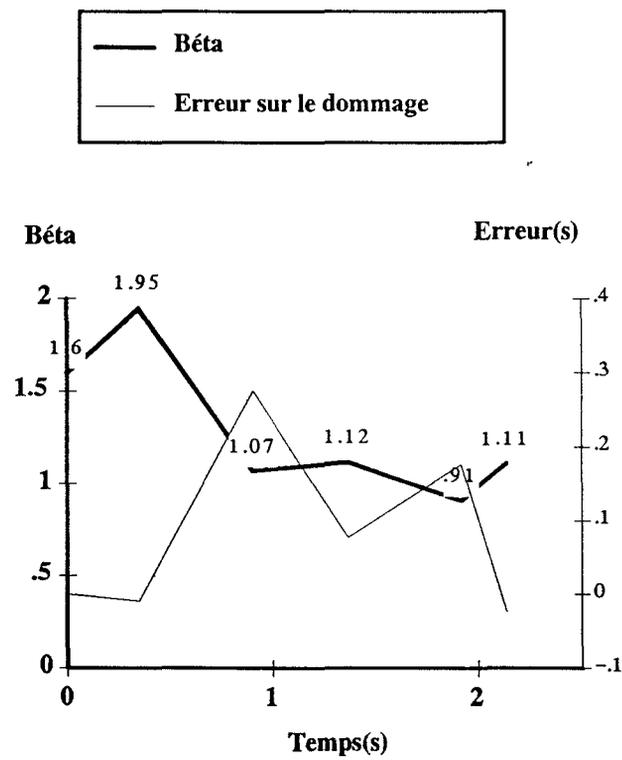
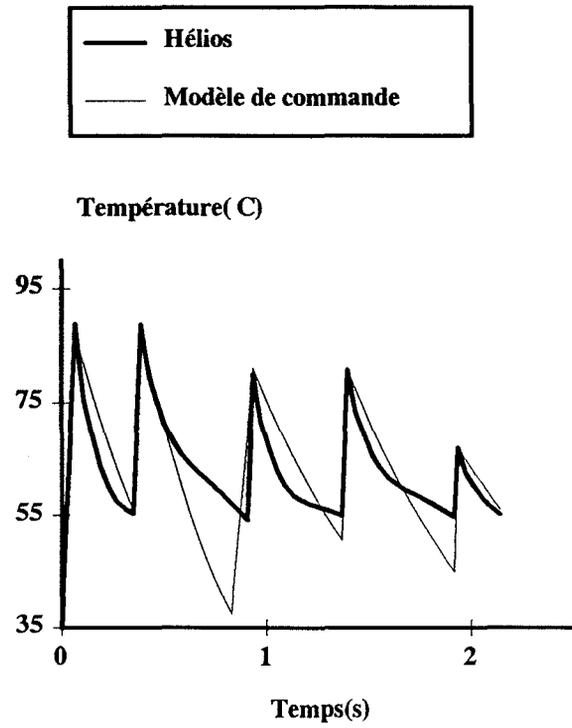


Figure 5 : Adaptation inconditionnelle: moindres carrés simples

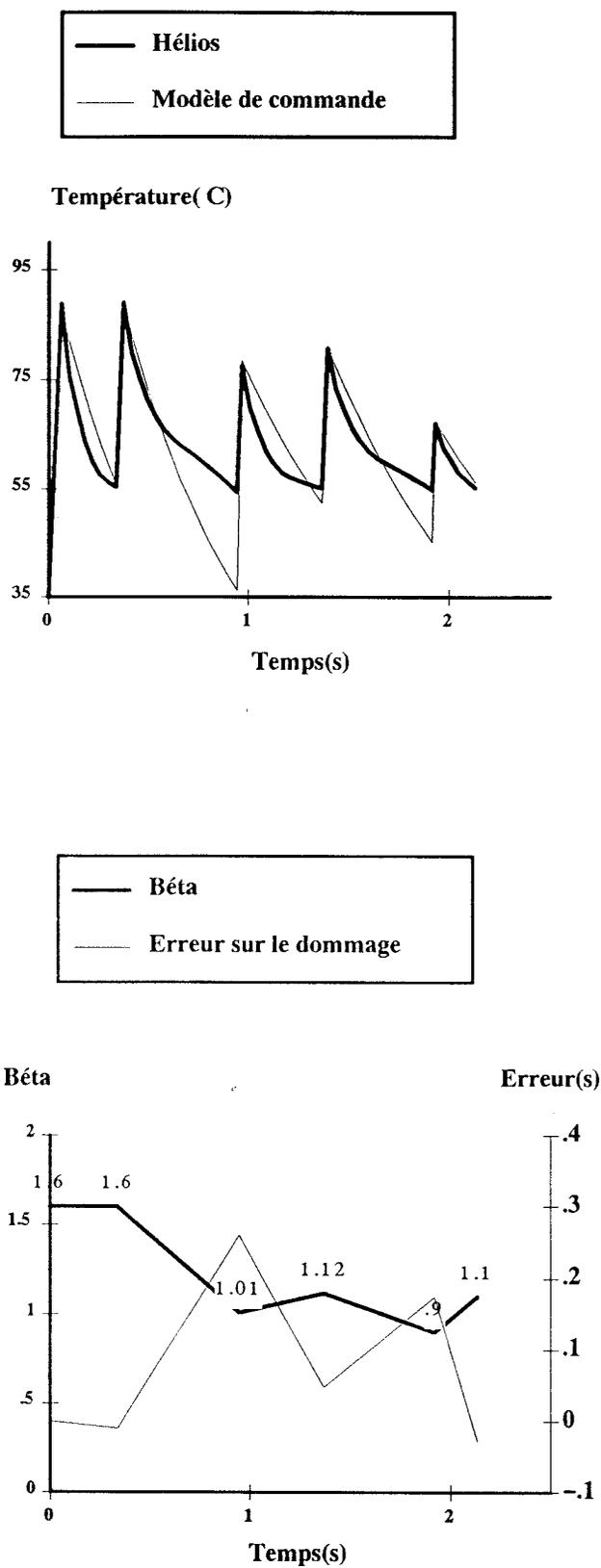


Figure 6 : Moindres carrés simples conditionnel

### 3.3 Algorithme des moindres carrés récursifs pondérés

Pour améliorer l'algorithme des moindres carrés simple (9), nous étudierons la forme récursive, dont la structure est:

$$P_{i+1} = P_i + L_i \cdot f_i \cdot \varepsilon_i \quad (10)$$

où  $\varepsilon_i$  est l'erreur d'adaptation,  $f_i$  est le vecteur de mesures et  $L_i$  est le gain d'adaptation. Ensuite, par une pondération appropriée du gain d'adaptation, nous donnons l'expression de l'algorithme des moindres carrés récursifs pondéré.

#### Algorithme des moindres carrés récursif (M.C.R)

Afin d'obtenir un algorithme récursif, on recalcule la valeur estimée de  $P_{i+1}$  pour la minimisation de  $J_{i+1}$  (on rajoute un jeu de mesures) et on exprime  $P_{i+1}$  en fonction de  $P_i$ , plus un terme de correction:

$$P_{i+1} = P_i + L_i \cdot f_i \cdot \varepsilon_i \quad (11)$$

$$L_{i+1} = \left[ \begin{array}{c} L_i \cdot f_i^2 \\ L_i - \frac{L_i \cdot f_i^2}{1 + L_i \cdot f_i^2} \end{array} \right] \quad (12)$$

$$\varepsilon_i = \frac{y_i - f_i \cdot P_i}{1 + L_i \cdot f_i^2} \quad (13)$$

#### Remarques:

\* L'expression récursive (11) qui donne le paramètre estimé a une forme bien adaptée au calcul numérique. L'estimé à l'instant  $i+1$  est égal à l'estimé à l'instant  $i$  plus une correction. Le terme de correction est proportionnel à  $y_i - f_i \cdot P_i$ . Le terme  $f_i \cdot P_i$  serait la valeur de  $\theta$  à l'instant  $i+1$  si le modèle était parfait et si les perturbations étaient nulles. Le terme de correction est donc proportionnel à la différence entre la valeur mesurée et la valeur prédite de  $\theta_{i+1}$ .

\* L'A.A.P récursif fonctionne durant toute la phase suivant le tir sans aucune condition. En effet on ne peut estimer l'erreur sur le dommage qui sera produit à la fin de la période de tir. Le déclenchement de la procédure d'adaptation est donc systématique.

\* La méthode récursive est avantageuse dans plusieurs cas:

– Elle conduit à des calculs très simples, et traite l'information séquentiellement, elle peut être implantée sur des calculateurs de faibles capacité de mémoire ou de calcul, en leur permettant de traiter de gros volume de données.

– Elle corrige l'estimation à chaque période d'échantillonnage, elle permet de suivre des variations de paramètres sur le procédé à condition qu'on donne un poids fort aux mesures les plus récentes. C'est ce qu'on va étudier dans le paragraphe suivant.

\* L'initialisation de l'algorithme récursif à l'ordre  $i=1$  nécessite la connaissance de  $\beta_0$  et de  $L_0$ .  $\beta_0$  est la valeur de  $\beta$  avant altération des paramètres du tissu, et

$$L_0 = \frac{1}{\sigma}$$

$0 < \sigma \ll 1$ ,  $L_0$  est choisi suffisamment grand pour faire converger rapidement le paramètre  $\beta$ .

\* Le calcul de la commande pour le tir suivant se fait par la dernière valeur de  $\beta$  calculée à l'issue de la dernière acquisition.

Cet algorithme est testé sur Hélios, il est illustré sur la figure (7). Cet exemple montre que l'erreur en température entre le modèle de commande et le processus reste significative. Cet algorithme ne permet pas de suivre l'évolution du paramètre  $\beta$ . Les valeurs de  $\beta$  calculées, sont proches de celles calculées avec la méthode des moindres carrés simples.

L'algorithme des M.C.R est approprié pour l'estimation des paramètres inconnus mais constants car  $L_i$  décroît dans le temps. L'algorithme des M.C.R donne en fait de moins en moins de poids aux nouvelles mesures.

En conséquence ce type de variation du gain d'adaptation ne convient pas pour l'estimation des paramètres variables dans le temps.

Pour améliorer l'algorithme des M.C.R, nous allons étudier une méthode qui permet de donner plus de poids aux mesures les plus récentes en pondérant convenablement le gain d'adaptation.

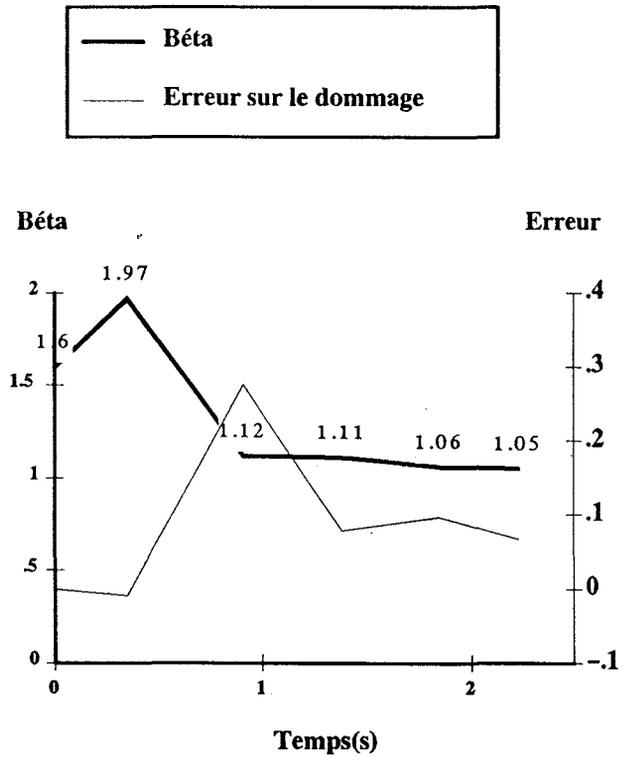
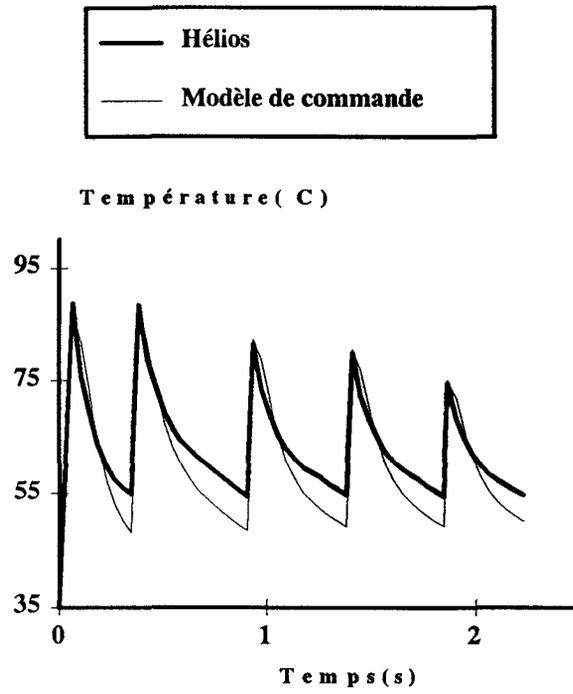


Figure 7 : algorithme des moindres carrés récursifs

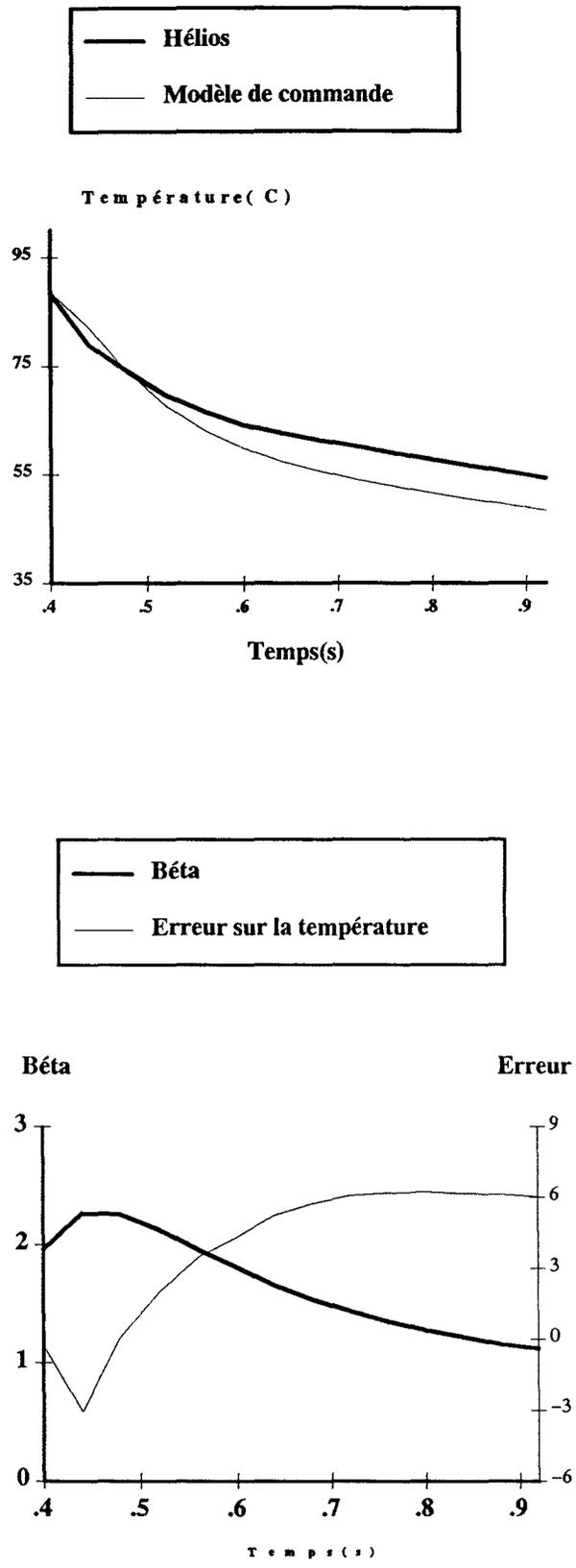


Figure 7-bis : algorithme des moindres carrés récurrents (détail de la période suivant le 2<sup>ème</sup> tir)

**Calcul du gain d'adaptation (Algorithme des M.C.R pondéré)**

Plusieurs méthodes de calcul du gain d'adaptation sont disponibles dans la littérature de l'identification et de la commande adaptative (Ljung et Soderstrom 1983 , Goodwin et Sin 1984). Le choix du type d'algorithme d'adaptation paramétrique est déterminé par des considérations théoriques et pratiques. Dans notre cas nous utilisons l'algorithme des moindres carrés récursifs pondérés (algorithme à facteur d'oubli) développé par Landau et Lozano (Landau, Lozano 1981):

$$P(i+1) = P(i) + L(i).f_i.\varepsilon(i) \tag{14}$$

$$L(i+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \cdot \left[ L(i) - \frac{L^2(i).f_i^2}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + f_i^2.L(i)} \right] \tag{15}$$

$$\varepsilon(i) = \frac{y_i - f_i.P(i)}{1 + f_i^2.L(i)} \tag{16}$$

Avec  $0 < \lambda_1(t) \leq 1$ ;  $0 < \lambda_2(t) \leq 2$ ;  $L(0) > 0$ .

L'algorithme d'adaptation paramétrique donné ci-dessus correspond à une structure générale des A.A.P.  $\lambda_1(t)$  et  $\lambda_2(t)$  sont des coefficients de pondération du gain d'adaptation. Différentes types d'A.A.P sont obtenus en fonction des valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

\*  $\lambda_1(t) < 1$ ;  $\lambda_2(t) = 1$ : Algorithme à facteurs d'oubli (Astrom et al 1977) et (Goodwin, Payne 1977). Il introduit un "oubli" des mesures anciennes et est communément utilisé dans la pratique (Astrom 1983). La meilleure estimation de  $\beta$  est obtenue pour  $\lambda_1 = 0.5$ . Les figures (8) et (8-bis) illustrent cette méthode, elles montrent bien que le modèle de commande suit nettement mieux l'évolution du processus. La valeur de  $\beta$  au premier tir est 1.6, cette valeur change à partir du deuxième tir. A partir du troisième tir la valeur de  $\beta$  se stabilise autour d'une valeur comprise entre 0.78 et 0.87. L'erreur sur le dommage est plus faible que dans le cas des M.C.R.

La figure 8-bis montre la phase suivant le deuxième tir. La figure du haut montre l'évolution de température du modèle de commande et du processus représenté par Hélios. La figure du bas représente l'évolution de  $\beta$  et de l'erreur en température. La valeur de  $\beta$  qui minimise l'erreur en température est 0.86. Après un régime transitoire l'erreur maximale reste inférieure à 1°C.

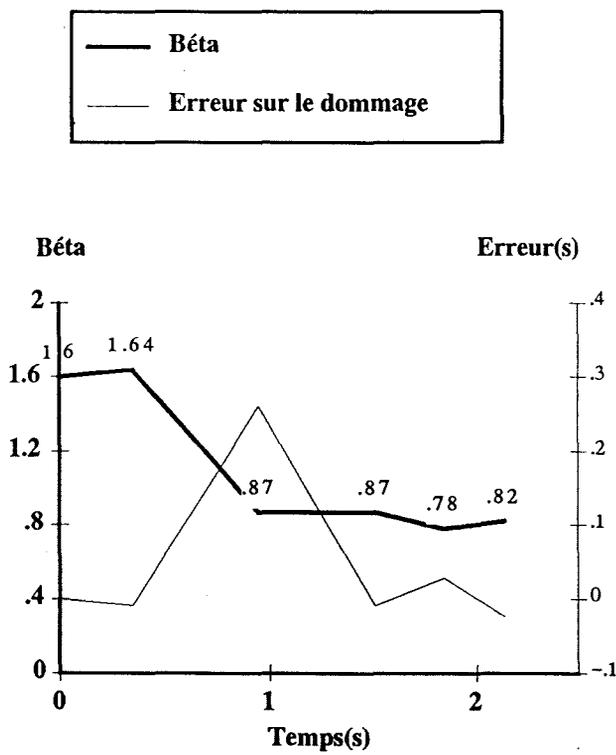
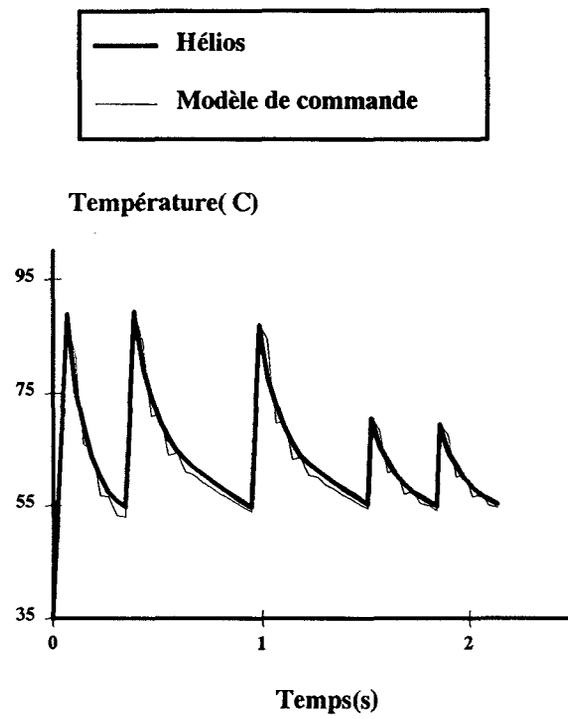


Figure 8 : Algorithme d'adaptation à facteur d'oubli

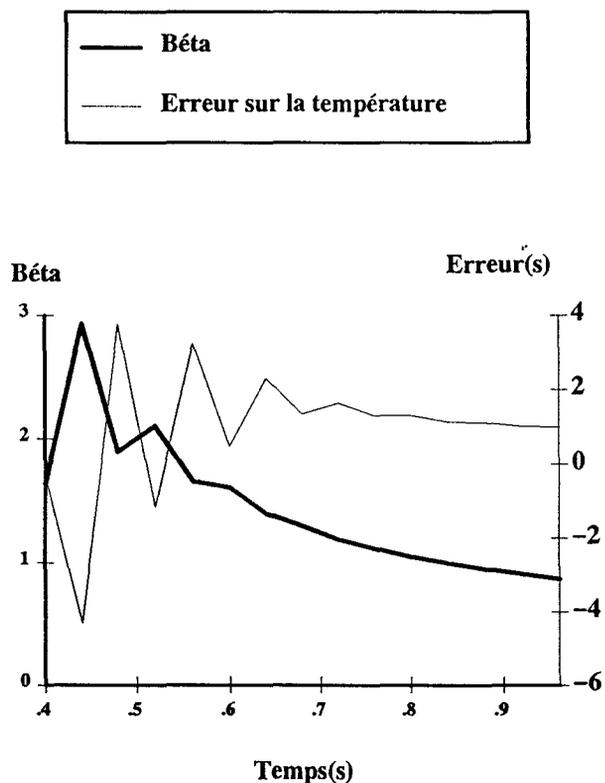
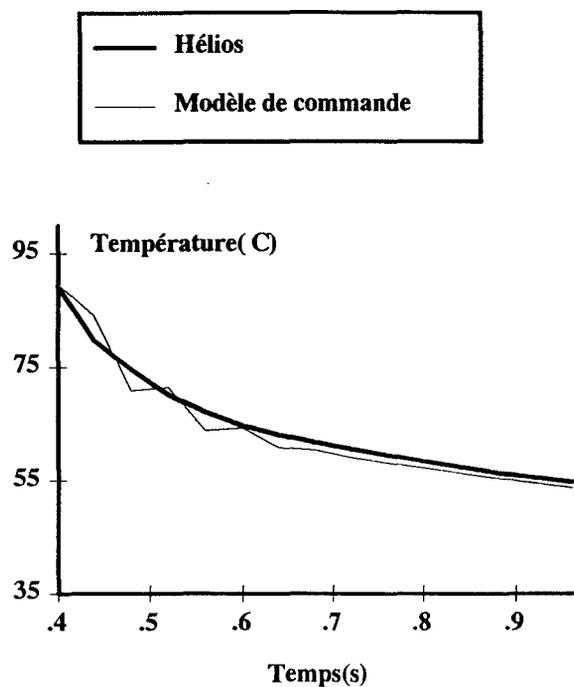


Figure 8-bis : Algorithme d'adaptation à facteur d'oubli: période suivant le deuxième tir

\* Algorithme à trace constante: le calcul effectif de  $\lambda_1(t)$  et  $\lambda_2(t)$  se fait en maintenant le rapport  $\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)}$  constant

$$\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} = c = \text{constante positive.}$$

et en tenant compte de l'équation (15) qui conduit à:

$$\text{tr}(L(i+1)) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \cdot \text{tr} \left[ L(i) - \frac{L^2(i) \cdot f_i^2}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + f_i^2 \cdot L(i)} \right]$$

$\lambda_1(t)$  est choisi de manière à ce que l'on ait:

$$\text{trace}(L(t+1)) = \text{trace}(L(t))$$

Ceci donne:

$$\lambda_1(t) = 1 - \frac{\text{trace}(M(t))}{\text{trace}(L(t))}$$

où

$$M(t) = \frac{L_N^2 \cdot f_N^2}{c + L_N \cdot f_N^2}$$

Cette méthode est illustrée sur les figures (9) et (9-bis). On remarque que l'erreur sur température est encore plus faible que dans le cas des MCR pondérés. La valeur de  $\beta$  passe de 1.6 (valeur initiale) à 0.68 (valeur au dernier tir).

**Remarque :**

Dans le cas de l'adaptation par moindres carrés pondérés, le gain d'adaptation décroît dans le temps et en dessous d'une valeur critique l'erreur d'adaptation se stabilise à une valeur supérieure à zéro (figure 8-bis). L'erreur pourrait baisser davantage si on maintenait le gain d'adaptation constant à partir de cette valeur critique. A cet effet nous proposons une troisième approche qui consiste à combiner les deux derniers algorithmes: l'algorithme à gain pondéré et l'algorithme à trace constante. Quand le gain  $L_i$  devient plus petit qu'une valeur donnée on commute sur l'algorithme d'adaptation à trace

constante. La figure (10) illustre cet exemple, ici la commutation se fait quand le gain d'adaptation atteint la valeur de 18. A partir du troisième tir la valeur de  $\beta$  se stabilise autour d'une valeur comprise entre 0.78 et 0.83. L'erreur sur le dommage est plus faible que dans le cas des M.C.R. La phase suivant le deuxième tir, représentée par la figure 10-bis, montre que la valeur de  $\beta$  qui minimise l'erreur en température est de 1. L'erreur maximale reste inférieure en valeur absolue à  $0.55^{\circ}\text{C}$  et donc inférieure à celle du cas des M.C.R pondérés.

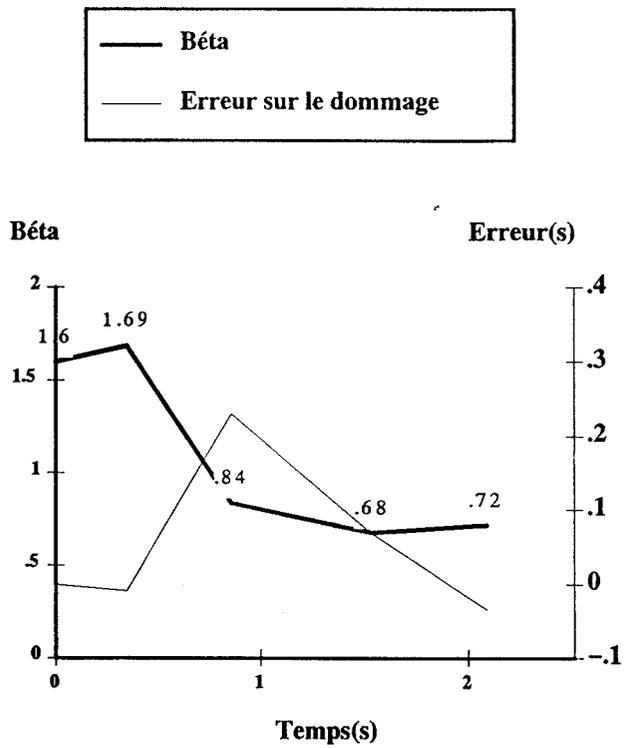
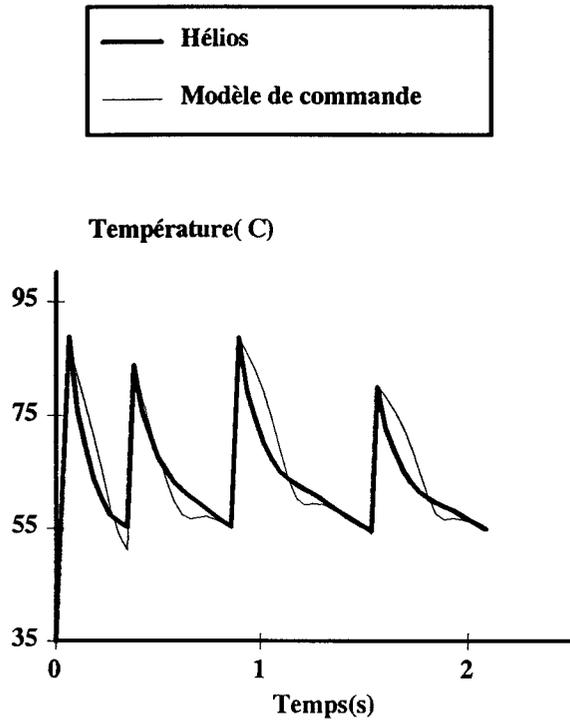


Figure 9 : Algorithme à trace constante

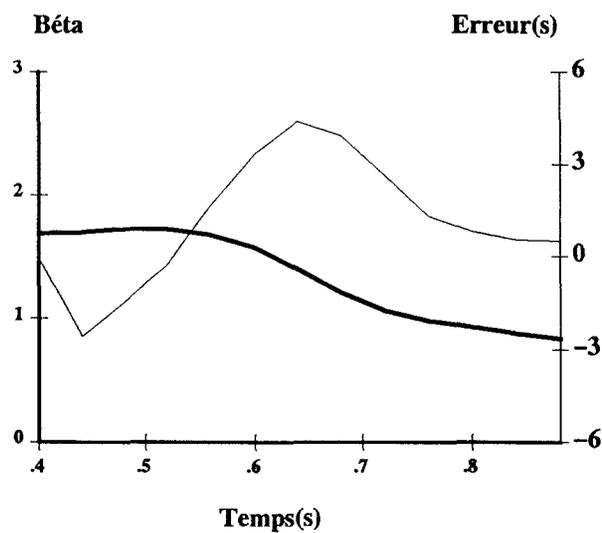
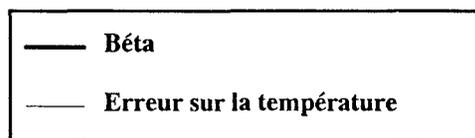
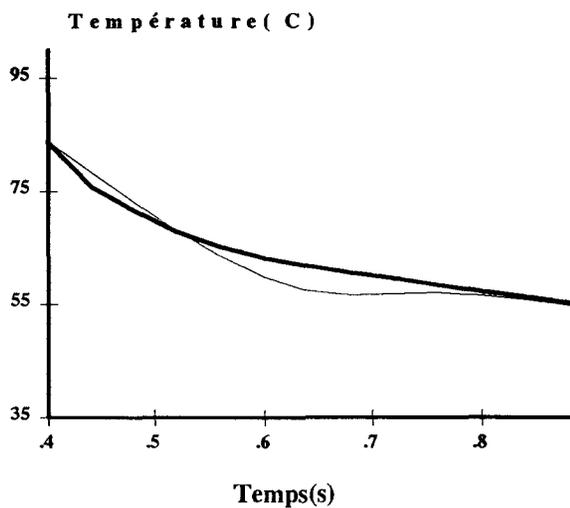
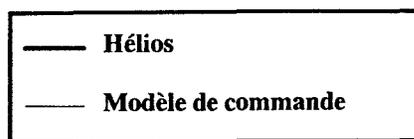


Figure 9-bis : Algorithme à trace constante: période suivant le 2<sup>ème</sup> tir

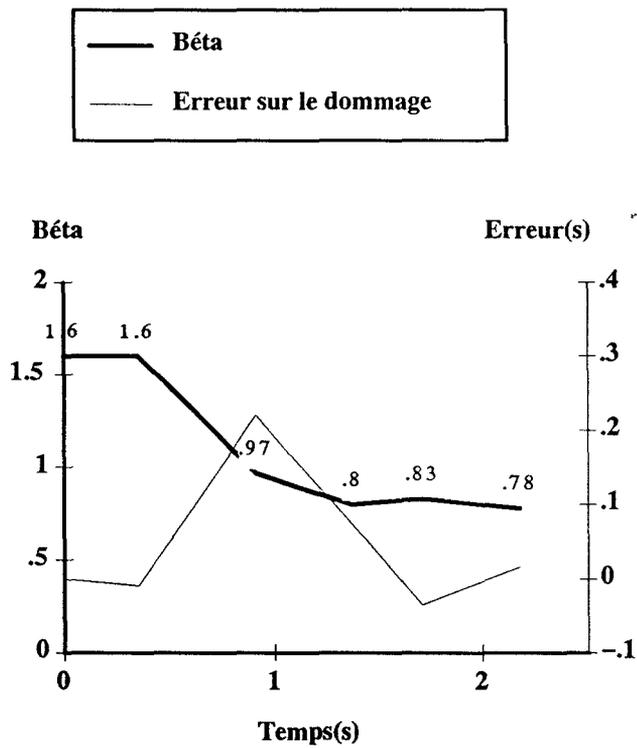
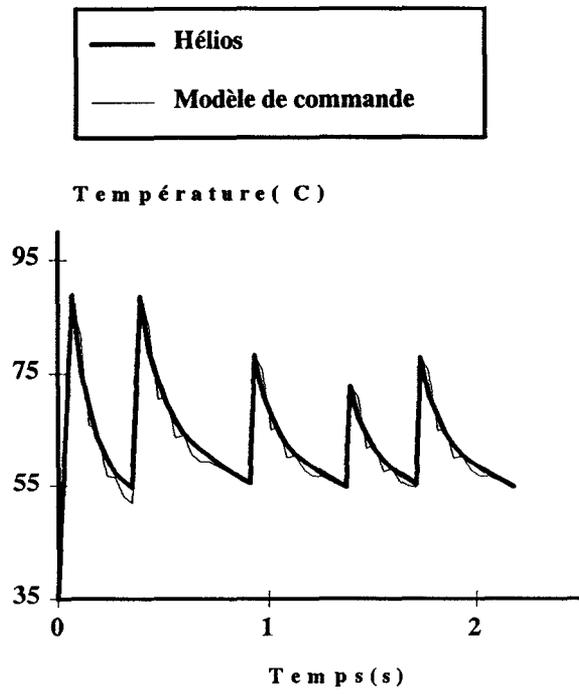


Figure 10 : combinaison des deux algorithmes, algorithme à trace constante et algorithme pondéré.

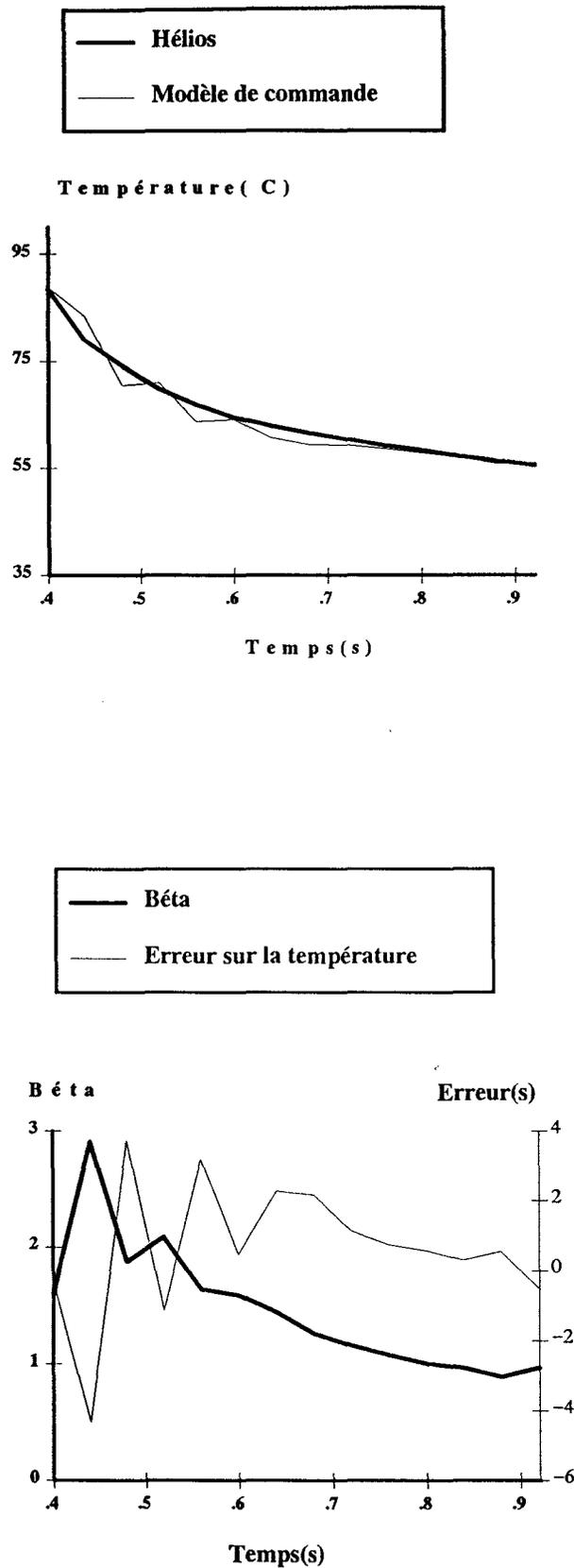


Figure 10-bis : combinaison des deux algorithmes, algorithme à trace constante et algorithme pondéré: période suivant le 2<sup>ème</sup> tir.

#### 4 CONCLUSION

Le but de ce chapitre était de déterminer un algorithme d'adaptation paramétrique capable d'estimer les paramètres du modèle de commande pendant la phase suivant le tir. Les paramètres estimés permettent à la structure de commande de fournir la suite de commandes optimales pour produire le dommage avec une précision de 5%.

La procédure d'adaptation est mise en oeuvre pendant la phase suivant le tir. Elle peut être récursive ou non.

Dans le cas des procédures d'adaptation non récursives, c'est la méthode directe qui donne le meilleur résultat, en effet: le paramètre converge rapidement vers sa meilleure estimée, le dommage est obtenu avec une meilleure précision.

Dans le cas des procédures d'adaptation récursives, c'est la méthode des M.C.R à trace constante et la méthode qui consiste à combiner l'algorithme des M.C.R à facteur d'oubli et l'algorithme des M.C.R à trace constante qui donnent le meilleur résultat, à savoir une bonne convergence de  $\beta$  et une meilleure précision sur l'erreur du dommage.

Cependant, l'usage des procédures d'adaptation non récursives, en particulier la méthode directe, est plus simple et plus économique d'un point de vue "temps machine", puisque le calcul du nouveau paramètre ne s'effectue qu'une fois à la fin de chaque phase suivant le tir.

## **Chapitre 4 : Validation et résultats**

## CHAPITRE IV : VALIDATION ET RESULTATS

INTRODUCTION.....	83
PRESENTATION DU MODELE HELIOS.....	84
Résolution numérique de l'équation de la chaleur.....	84
Structure du logiciel Hélios.....	88
Fonction 1: Création/Lecture des paramètres.....	88
Fonction 2: Lancement des calculs.....	88
Fonction 3: Etude des résultats.....	89
VALIDATION DU MODELE HELIOS.....	89
Materiels de validation : organe de commande, laser, capteur thermique.....	89
Les lasers.....	89
Laser Nd-YAG.....	89
Laser Argon.....	90
La carte de commande.....	90
Le capteur thermique.....	90
La caméra infrarouge.....	90
Système d'acquisition et de traitement.....	91
Tissu biologique.....	91
Résultats de validation.....	91
Laser Argon.....	92
Le laser Nd-YAG continu.....	94
SIMULATION DE LA LOI DE COMMANDE OPTIMALE SUR HELIOS.....	96
Description de l'algorithme de simulation:.....	97
Simulation de la loi de commande en l'absence de perturbations.....	100
Simulation en boucle ouverte.....	101
Variation des paramètres.....	101
Perturbation sur l'état.....	102
Simulation de la programmation dynamique (sans adaptation paramétrique).....	103
Variation des paramètres.....	103
Perturbation sur l'état.....	104
Simulation de la commande adaptative.....	105
Variation des paramètres.....	105
Perturbation sur l'état.....	106
CONCLUSION.....	107

## 1 INTRODUCTION

Dans ce dernier chapitre nous exposons les résultats de la validation de la loi de commande. La validation expérimentale de cette loi devrait mettre en oeuvre un dispositif comprenant les éléments suivants:

- Une unité de commande qui peut être un micro-ordinateur muni de cartes d'entrées-sorties.

- Le laser, dont la carte base de temps d'alimentation est directement liée à la sortie du micro-ordinateur délivrant la durée de l'impulsion.

- Un capteur thermique, en l'occurrence la caméra infrarouge, qui fournit la température à la surface du tissu en temps réel. Le capteur serait directement lié à l'entrée du micro-ordinateur.

- Un tissu biologique : le foie dont la structure est considérée comme homogène.

Cependant, pour des raisons de coût de réalisation d'un tel système nous nous sommes limités à la simulation. L'outil de simulation est le logiciel Hélios qui décrit l'interaction laser-tissu. Ce logiciel a été récemment validé (Beacco 1992) par des données expérimentales obtenues à la suite de l'irradiation du foie de rat *in-vivo* par un laser Nd-YAG impulsif et en utilisant une caméra infrarouge comme capteur thermique (Mordon 1985).

Dans ce qui suit nous présentons le modèle Hélios, les conditions d'expérimentation pour la validation du logiciel Hélios ensuite nous exposerons les résultats de cette validation et enfin les résultats de simulation de la loi de commande.

## 2 PRESENTATION DU MODELE HELIOS

Le modèle Hélios est un logiciel qui décrit la dynamique des effets thermiques du laser sur les tissus vivants. Il permet de simuler des séquences de tir d'un laser, caractérisé par sa longueur d'onde, sa puissance, ...etc, sur un tissu biologique, caractérisé par ses coefficients optiques, thermiques ...etc. Le modèle Hélios est une résolution numérique de l'équation de la conduction de la chaleur (cf chapitre I) qui ne tient pas compte du phénomène de la convection (Transport de chaleur par flux sanguin). Si  $k$  est la conductivité thermique, l'équation de la chaleur s'écrit:

$$\Delta^2\theta + \frac{s}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\theta}{dt} \quad (1)$$

$k$  : Conductivité thermique (cal/cm.sec.°C)

$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c}$  : Diffusivité thermique (cm<sup>2</sup>/sec)

$c$  : Chaleur spécifique (Cal/g°C)

$\theta$  : Température (°C)

$s$  : Source de chaleur (Cal/cm<sup>3</sup>.sec)

$r$  : Densité (g/cm<sup>3</sup>).

Le faisceau laser a une symétrie circulaire, il est convenu d'écrire l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques.

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^2\theta}{r \cdot dr} + \frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{s}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\theta}{dt} \quad (2)$$

Les deux techniques numériques les plus utilisées pour résoudre l'équation (2) sont: la technique des différences finies et la technique des éléments finis (Forsythes et all 1960), (Berth et all 1976), (Zienkiewicz 1971), (Chari et all 1980) et (Hornbeck 1975).

### 2.1 Résolution numérique de l'équation de la chaleur

La figure (1) représente une grille des différences finies, le modèle est basé sur le méthode de Peaceman-Rachford ADI (Alternating-Direction Implicit) qui calcule la température tout au long des grilles radiales et axiales.

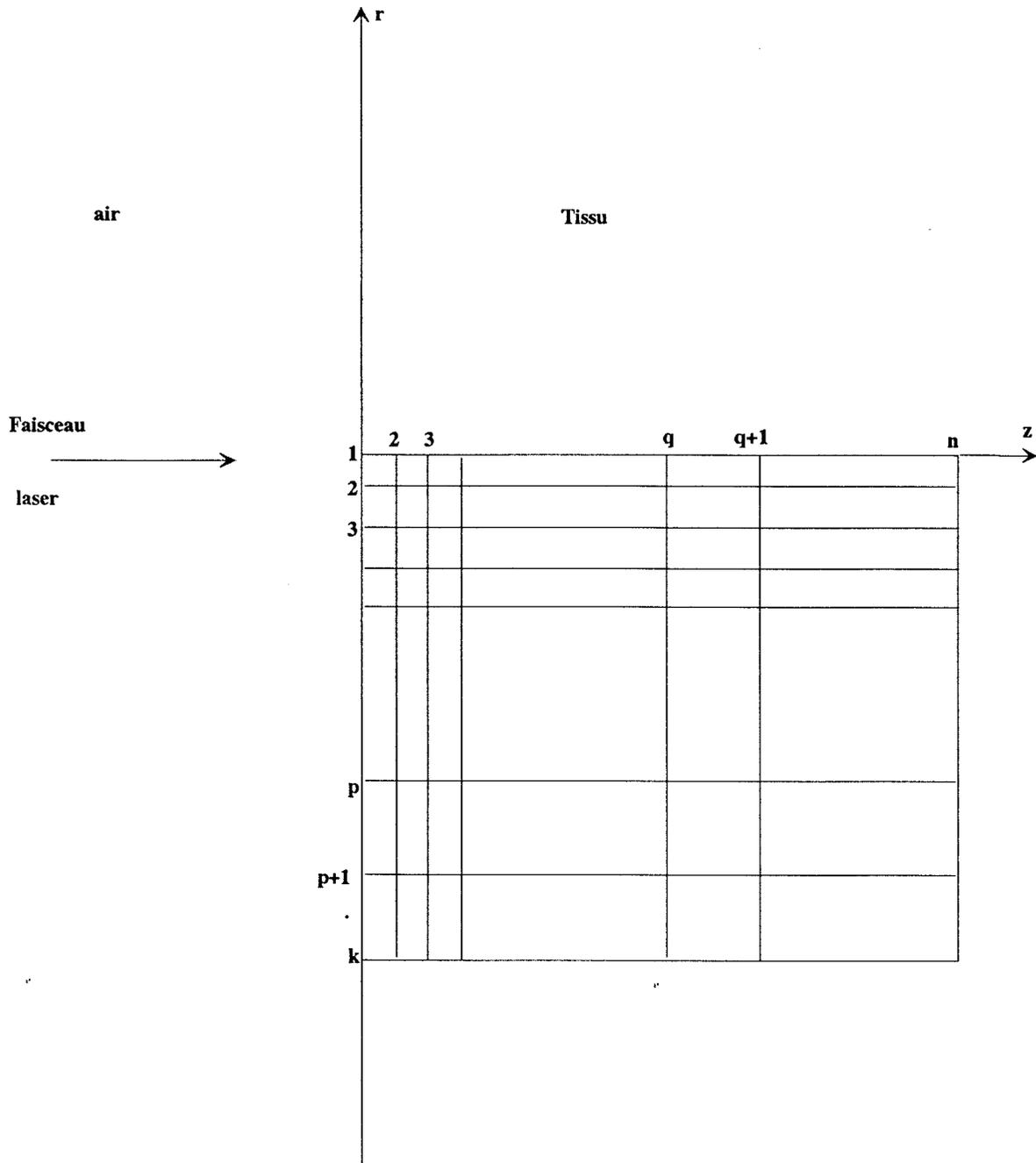


Figure 1 : Grille des différences finies

L'équation (2) est une équation différentielle partielle homogène et linéaire. La solution analytique est obtenue en partant des conditions aux limites données par (Morse et al 1953), (Carblaw 1959), (Özisik 1968) et (Luikov 1968).

**Les conditions aux limites:**

Les indices  $l, m$  spécifient les noeuds à l'intersection des lignes de la grille.

$l$  : Coordonnée radiale.

$m$  : Coordonnée axiale.

\* La frontière  $m=1$  (pour  $1 \leq l \leq k$ ) (surface du tissu) est considérée comme une interface isolante.

\* Les frontières  $m=n$  (pour  $1 \leq l \leq k$ ) et  $l=k$  (pour  $1 \leq m \leq n$ ) sont fixées à la température initiale du corps  $\theta_0$ .

\* Au voisinage de l'origine ( $1 \leq m \leq q$ ) et ( $1 \leq l \leq p$ ) les mailles de la grille sont très fines.

\* Pour ( $q \leq m \leq n$ ) et ( $p \leq l \leq k$ ) la grille est exponentiellement étendue.

La distance entre deux noeuds consécutifs est:

$$r_{l+1} - r_l = \begin{cases} \Delta r & 1 \leq l \leq p-1 \\ \Delta r \cdot R^{l+1-p} & p \leq l \leq k-1 \end{cases}$$

$$z_{m+1} - z_m = \begin{cases} \Delta z & 1 \leq m \leq q-1 \\ \Delta z \cdot Z^{m+1-q} & q \leq m \leq n-1 \end{cases}$$

**Approximation des dérivées spatiales et temporelles**

Soit  $x$  une variable réelle de la fonction  $t$ . Le développement de  $\theta(x)$  en série de Taylor fournit la meilleure approximation de la dérivée première de  $\theta$  par rapport à  $x$  au point  $x_0$  qui s'écrit:

$$\frac{\delta \theta}{\delta x} \# \frac{\theta(x_0 + \Delta x) - \theta(x_0 - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x} \quad (3)$$

La dérivée seconde de  $\theta$  par rapport à  $x$  au point  $x_0$  est le rapport de la variation de la dérivée première par la variation de  $x$ , on peut écrire:

$$\frac{\delta^2 \theta}{\delta x^2} \# \frac{\theta(x_0 + \Delta x) + \theta(x_0 - \Delta x) - 2 \cdot \theta(x_0)}{(\Delta x)^2} \quad (4)$$

**Application de l'approximation des différences finies à l'équation de la chaleur**

En appliquant les dérivées des différences finies à l'équation de la chaleur, les dérivées premières et secondes de l'équation (1) sont remplacées par les différences finies suivantes:

$$\frac{\delta\theta_t}{\delta r} \# \frac{\theta_t[m,l+1] - \theta_t[m,l-1]}{2.\Delta r} \quad (5)$$

$$\frac{\delta^2\theta_t}{\delta r^2} \# \frac{\theta_t[m,l+1] + \theta_t[m,l-1] - 2.\theta_t[m,l]}{(\Delta r)^2} \quad (6)$$

$$\frac{\delta^2\theta_t}{\delta z^2} \# \frac{\theta_t[m+1,l] + \theta_t[m-1,l] - 2.\theta_t[m,l]}{(\Delta z)^2} \quad (7)$$

En posant  $\Delta r = \Delta z = \Delta$ , l'écriture du terme  $\Delta^2\theta$  sous forme de différences finies est la suivante:

$$\Delta^2\theta_t = \frac{\theta_t[m,l+1] + \theta_t[m,l-1] - 2.\theta_t[m,l]}{\Delta^2} + \frac{\theta_t[m,l+1] - \theta_t[m,l-1]}{2.r.\Delta} + \frac{\theta_t[m+1,l] + \theta_t[m-1,l] - 2.\theta_t[m,l]}{\Delta^2} \quad (8)$$

En combinant les termes nous obtenons:

$$\Delta^2\theta_t = \frac{1}{\Delta^2} \left[ \left(1 + \frac{\Delta}{2.r}\right).\theta_t[m,l+1] + \left(1 - \frac{\Delta}{2.r}\right).\theta_t[m,l-1] + \theta_t[m+1,l] + \theta_t[m-1,l] - 4.\theta_t[m,l] \right] \quad (9)$$

En posant  $R_0 = 1 + \Delta/2.r$  et  $R_1 = 1 - \Delta/2.r$ , l'équation (1) de la chaleur devient:

$$\frac{\delta\theta_t}{\delta t} = \frac{\rho.c}{k.\Delta^2} \left[ R_0.\theta_t[m,l+1] + R_1.\theta_t[m,l-1] + \theta_t[m+1,l] + \theta_t[m-1,l] - (4+\Delta^2P).\theta_t[m,l] + \frac{\Delta^2}{k}.\theta_t[m,l] \right] \quad (10)$$

L'équation (10) est résolue par la méthode de Peaceman-Rachford: Alternating-Direction Implicit (ADI). Cette méthode consiste à écrire l'équation (10) sous deux formes: l'expression de la température pour un pas de temps impair,  $\theta_{2i+1}$ , en fonction de  $\theta_{2i}$  et l'expression de la température pour un pas de temps pair,  $\theta_{2i+2}$  en fonction de  $\theta_{2i+1}$ . Ainsi les températures  $\theta_{2i+1}$  jouent un rôle intermédiaire pour le calcul des températures finales  $\theta_{2i+2}$ .

A l'instant initial,  $i=0$ , les températures  $\theta_{2i}$  sont initialisées à la température initiale du tissu.

Le détail de la méthode de Peaceman–Rachford: (A.D.I) est donné dans la référence (Chris Gulacsik 1981).

## 2.2 Structure du logiciel Hélios

Le logiciel Hélios permet de calculer la source de chaleur, la diffusion thermique et le dommage tissulaire induit par différents paramètres laser.

Le logiciel Hélios propose un menu composé de trois fonctions:

### 2.2.1. Fonction 1: Création/Lecture des paramètres

Cette fonction contient deux procédures:

a) Une procédure création qui permet de créer le fichier paramètres. Ce fichier doit contenir les caractéristiques du laser (longueur d'onde, nature du faisceau, puissance, nombre de tirs, durée première impulsion, durée entre impulsions et durée autres impulsions, ...etc), les caractéristiques optiques du tissu (coefficient d'extinction, coefficient d'absorption) caractéristiques thermiques du tissu (conductivité, diffusivité,...).

b) Une procédure de lecture permet d'accéder au fichier paramètres préalablement créé.

### 2.2.2. Fonction 2: Lancement des calculs

La fonction 2 permet d'exécuter séquentiellement quatre procédures:

a) Calcul de la source: la partie initialisation de cette procédure consiste à lire le fichier paramètres, tandis que la partie "calcul" permet de calculer la source de chaleur en chaque noeud de la grille. Les valeurs de la source sont sauvegardées dans un fichier. Le fichier "source" ainsi constitué, est rappelé pour le calcul des températures en tout point de la grille.

b) Calcul des grilles: Cette procédure consiste à calculer les températures en tout point de la grille à chaque pas de temps pendant toute la durée de la séquence. On associe à chaque pas de temps un fichier de données où sont sauvegardées les températures de chaque point de la grille.

c) Calcul de la nécrose: Cette procédure calcule le dommage global produit en tout point de la grille. Le calcul du dommage s'effectue suivant la méthode décrite par Stoll (Stoll 1960). Les valeurs du dommage sont sauvegardées dans un fichier "\*.NEC" pour permettre de les visualiser ultérieurement.

d) Animation: sauvegarde des images dans un fichier pour animation.

La procédure "animation" a pour rôle de transformer les résultats obtenus sous forme de données numériques en données graphiques beaucoup plus parlantes et plus compréhensibles pour l'utilisateur. Les images calculées sont ensuite sauvegardées dans un fichier "\*.IMA", afin de pouvoir les utiliser ultérieurement. Ce genre de représentation constitue un outil pédagogique très puissant.

### 2.2.3. Fonction 3: Etude des résultats

Cette fonction consiste à évaluer les effets causés par une séquence de tir; elle permet donc de rappeler tous les fichiers de données et les fichiers images sauvegardés lors des phases précédentes afin de visualiser une image dynamique des isothermes pendant la séquence, l'évolution de la température en fonction du temps et en tout point de la grille, le profil de température suivant l'axe radial, la forme de la nécrose, la durée d'exposition.

## 3 VALIDATION DU MODELE HELIOS

### 3.1 Matériels de validation : organe de commande, laser, capteur thermique

Le système expérimental de validation est composé de quatre éléments essentiels:

- Le laser Nd-YAG impulsionnel + la carte de commande.
- Le capteur thermique, qui est une caméra infrarouge.
- Un micro-ordinateur lié à la caméra infrarouge par une carte d'acquisition.
- Le tissu biologique.

#### 3.1.1. Les lasers

##### Laser Nd-YAG

C'est un laser Nd-YAG de longueur d'onde 1.06  $\mu\text{m}$ . Il émet en mode impulsionnel et en mode continu. En mode impulsionnel, le laser envoie des trains d'impulsions dont la

durée et la puissance peuvent être modifiées à volonté. Les caractéristiques sont les suivantes:

- \* d : durée de l'impulsion, elle varie de 2 ms à 1s
- \* D : Durée entre impulsions, elle varie dans le même intervalle que d.
- \* Cadence de répétition: 1 à 50 Hz.
- \* Energie par impulsion: 1 à 120 Joules.
- \* La puissance crête peut atteindre jusqu'à 1000 W.

### **Laser Argon**

Ce laser est fabriqué par Spectra-physics. Il émet entre 487 nm et 544 nm. La puissance est réglable entre 0,5 et 10 W. Le temps de tir, en continu, se règle entre 0,1 s et 20s.

#### **3.1.2. La carte de commande.**

Le laser est piloté par un micro-ordinateur Apple muni d'une carte, développée par QUANTEL, qui permet d'envoyer une série d'impulsions d à la carte base de temps d'alimentation laser. La fréquence des impulsions est réglable entre 2 ms et 1 s.

#### **3.1.3. Le capteur thermique.**

Nous avons vu dans le premier chapitre que la cinétique de dénaturation est liée à la température par l'intermédiaire du temps de chauffage effectif<sup>1</sup>. Pour contrôler la cinétique du taux de dommage il faut maîtriser l'évolution de la température en tout point de la partie traitée du tissu. Il est donc indispensable de disposer d'un bon capteur thermique.

Ainsi, des thermocouples ont été retenus pour la mesure de température dans le tissu et la thermographie infrarouge pour la mesure de température en surface. Cependant les thermocouples présentent deux inconvénients: le contact de la sonde avec le tissu et son absorption du rayonnement laser influencent la mesure.

La technique des caméras infrarouges présente l'avantage d'effectuer la mesure à distance ( 15 cm de l'impact du faisceau) sans, de ce fait, être perturbée par le rayonnement laser. Elle présente cependant l'inconvénient de limiter la mesure uniquement à la surface du tissu. L'utilisation de ce capteur dans une boucle de commande nécessite la connaissance de la relation qui lie la température en surface et la profondeur de la nécrose.

#### **3.1.4. La caméra infrarouge**

Le capteur utilisé est une caméra infrarouge à détecteur unique 720 AGA de la firme AGA (Suède). Les images infrarouges sont digitalisées afin de mener des analyses en différé. Le système Thermovision AGA délivre 25 images par seconde chaque image étant constituée de 100 lignes. Pour des raisons de limitation de la capacité mémoire seule une ligne par image est numérisée (la ligne passant par le point d'impact).

---

<sup>1</sup> durée pendant laquelle la température reste au dessus du seuil critique de coagulation.

### **3.1.5. Système d'acquisition et de traitement**

L'architecture du système d'acquisition est composée d'un micro-ordinateur (compatible XT) équipé d'une carte d'acquisition analogique (Charlier 81) et d'un module de sélection de profil qui assure la génération des signaux de déclenchement d'acquisition.

### **3.1.6. Tissu biologique**

Le matériau biologique utilisé lors des expérimentations est le foie de rat Wistar mâle. Plusieurs raisons ont déterminé ce choix. Le foie est un parenchyme fragile, de structure relativement homogène. Sa vascularisation est importante. C'est donc un bon modèle pour l'étude de la photocoagulation. De nombreux auteurs l'ont utilisé et proposent ainsi de nombreux éléments de comparaison dans la littérature.

## **3.2 Résultats de validation**

Le modèle Hélios a été validé par des expérimentations effectués au Centre de Technologies Biomédicales INSERM U 279 (Mordon et al 1985) (Beacco et al 1992) . Le travail consistait à étudier la photocoagulation par les lasers Nd-YAG continu et Argon sur le foie de rat. Les coefficients des paramètres optiques, thermiques et les paramètres relatifs au dommage nécessaires au calcul des séquences de tir ont été proposés par les auteurs (voir tableau (1)) :

Tissu	K(W/cm°C)	a(cm <sup>2</sup> /s)	Référence
Foie humain in vitro	5,67.10 <sup>-3</sup>	1,5	Cooper 1971
Foie de boeuf in vitro	4,4.10 <sup>-3</sup>	1,2	Grossweiner 1990
Foie de chien in vivo	5,7.10 <sup>-3</sup>	2	Chato 1985
Foie in vivo	13,8.10 <sup>-3</sup>	-	Ponder 1962
Foie de chien in vivo	9.10 <sup>-3</sup>	2,4	Chato 1985

Tableau 1: coefficients thermiques de l'équation de la chaleur.  $a = \frac{K}{\rho \cdot c}$

Pour la validation du modèle Hélios les valeurs  $K=15.10^{-3} \text{W}/(\text{cm} \cdot ^\circ\text{C})$  et  $a = 1,2 \text{ cm}^2/\text{s}$  ont été retenues. Les coefficients optiques sont  $\mu_a = 0.09 \text{ cm}^{-1}$  et  $\mu_s = 3.5 \text{ cm}^{-1}$  pour le Nd-YAG (continu et impulsif) et  $\mu_a = \mu_s = 32 \text{ cm}^{-1}$  pour l'Argon.

### 3.2.1. Laser Argon

Dans le cas du laser Argon, le diamètre du faisceau est de 1.5 mm. La figure (2) montre l'évolution des températures maximales en fonction de la fluence, c'est à dire la quantité d'énergie déposée par unité de surface. L'erreur entre les données expérimentales et les données calculées est inférieure à 5°C.

La figure (3) montre l'évolution de la température calculée par Hélios et celle obtenue par des expériences sur le foie de rat. Les paramètres utilisés pour le calcul sont les suivants:

Diamètre du spot = 1.5 mm

Puissance = 2 Watt

Durée d'exposition = 0.2 s

Fluence = 23 J/cm<sup>2</sup>

$$\mu_a = 32 \text{ cm}^{-1}$$

$$\mu_s = 32 \text{ cm}^{-1}$$

$$K = 15.10^{-3} \text{ W}/\text{cm} \cdot ^\circ\text{C}$$

L'évolution de la température (figure 3) en fonction du temps montre que pendant la montée les valeurs expérimentales et théoriques coïncident presque parfaitement. Pendant la décroissance l'erreur maximale ne dépasse pas 4°C.

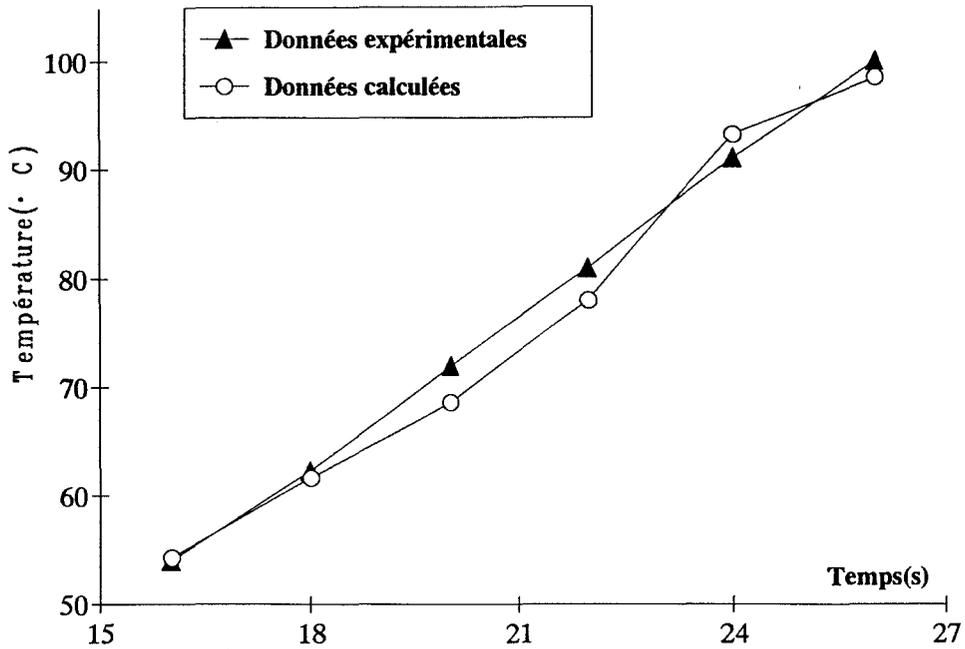


Figure 2 : Evolutions des températures maximales à la surface du tissu en fonction de la fluence (énergie par unité de surface) du laser Argon: : comparaison entre le modèle Hélios et les données expérimentales, diamètre du spot 1.5 mm (d'après Beacco et all 1992)

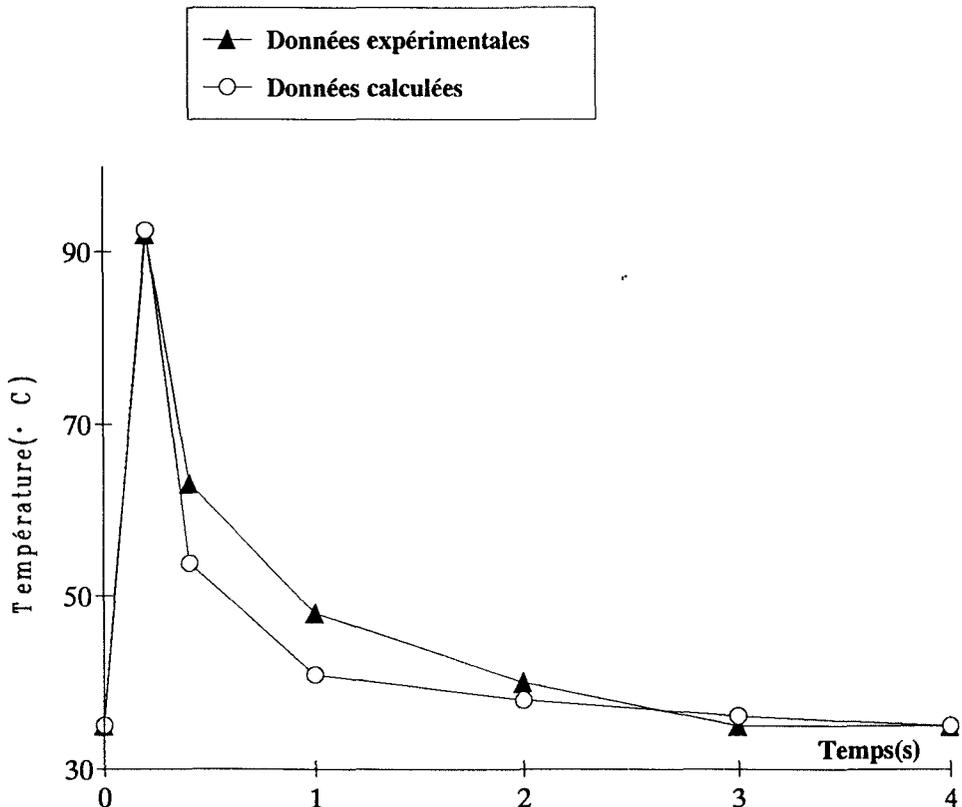


Figure 3 : Evolutions à la surface du tissu de la température en fonction du temps du laser Argon: comparaison entre le modèle Hélios et les données expérimentales, Puissance=2 Watts, Durée de tir=0.2 s (d'après Beacco et all 1992)

### 3.2.2. Le laser Nd-YAG continu

Dans le cas du laser Nd-YAG, le diamètre du faisceau est de 4 mm. La fluence varie entre  $160 \text{ J.cm}^{-2}$  et  $300 \text{ J.cm}^{-2}$ . La figure (4) montre l'évolution des températures maximales en fonction de la fluence. L'erreur maximale est de  $6^\circ\text{C}$ . La figure (5) montre l'évolution de la température issue du modèle et de l'expérience. Les paramètres de calcul sont:

Diamètre du spot = 4 mm

Puissance = 30 Watts

Durée d'exposition = 1 s

Fluence =  $240 \text{ J/cm}^2$

$\mu_a = 0,09 \text{ cm}^{-1}$

$\mu_s = 3.5 \text{ cm}^{-1}$

$K = 15.10^{-3} \text{ W/cm}^\circ\text{C}$

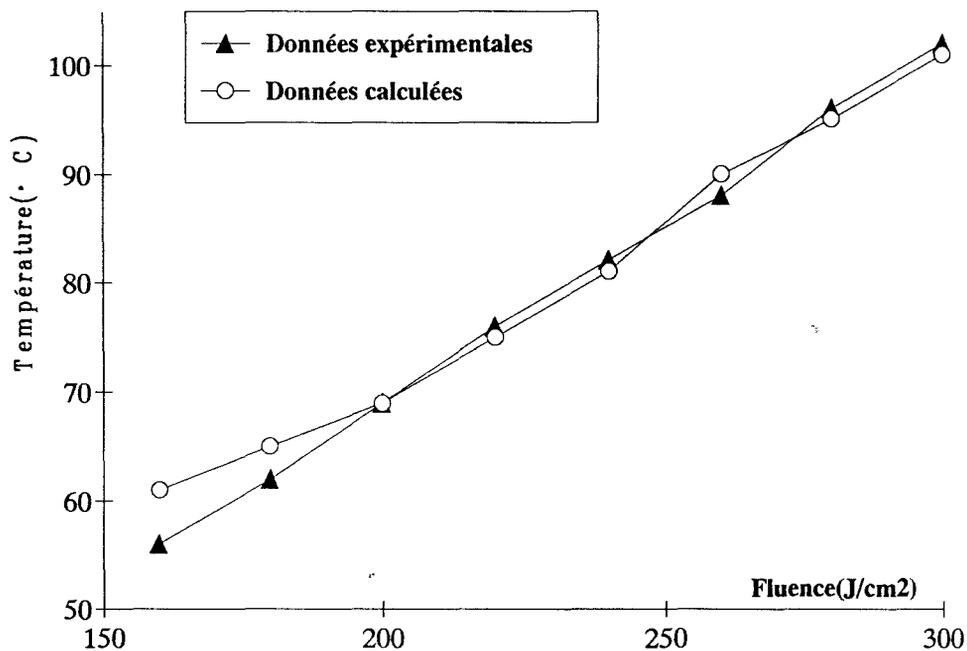


Figure 4 : Evolutions des températures maximales à la surface du tissu en fonction de la fluence (énergie par unité de surface) du laser Nd-YAG continu: : comparaison entre le modèle Hélios et les données expérimentales, diamètre du spot = 4 mm (d'après Beacco et al 1992)

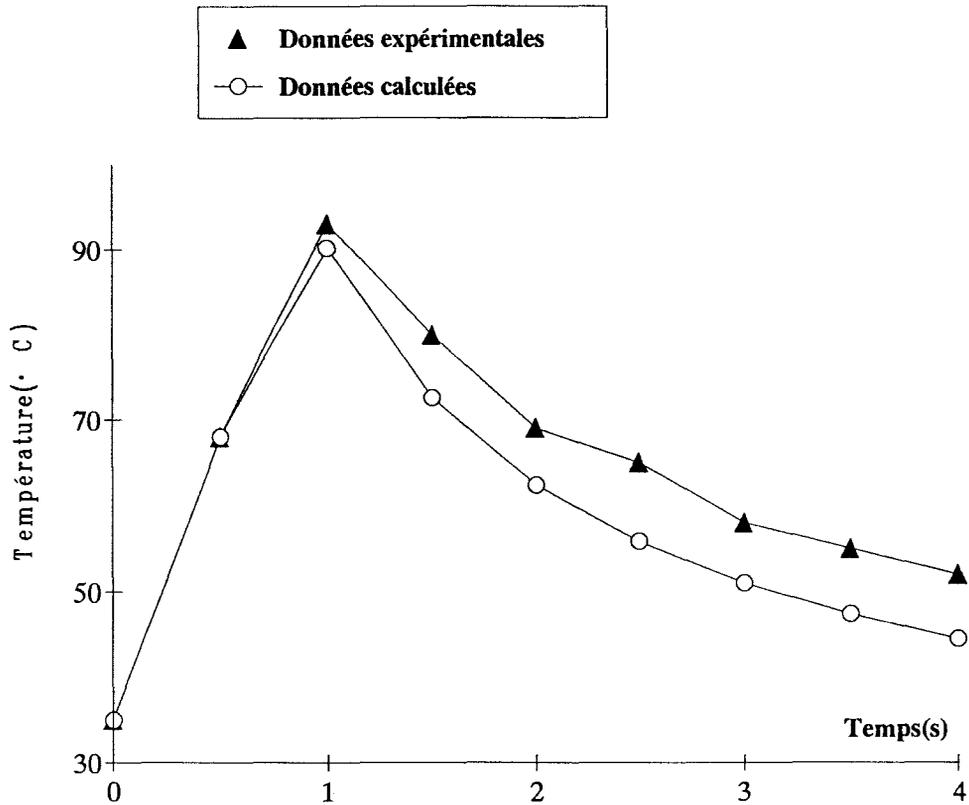
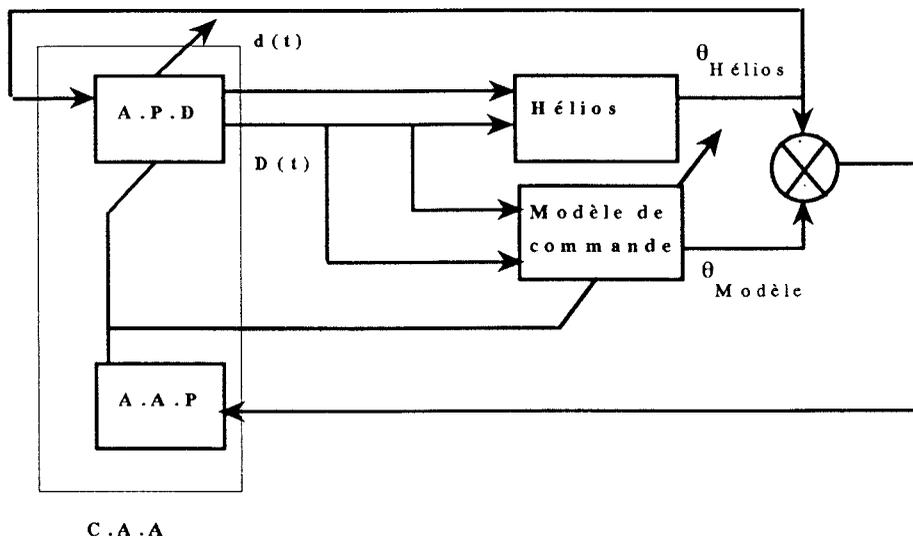


Figure 5 : Evolutions à la surface du tissu de la température en fonction du temps du laser Nd-YAG continu: comparaison entre le modèle Hélios et les données expérimentales, Puissance =30Watts. Durée de tir = 1s (d'après Beacco et al 1992).

#### 4 SIMULATION DE LA LOI DE COMMANDE OPTIMALE SUR HELIOS

L'implantation d'une procédure de commande de processus dans un site réel, est toujours précédée par une simulation. La simulation est une notion très importante dans le contrôle et la commande des processus. En effet certaines caractéristiques de fonctionnement du système ne sont pas toujours faciles à mettre en évidence de manière précise par des voies purement théoriques. La simulation est donc un moyen d'investigation simple et efficace.

Le principe général de la simulation consiste à développer une version en boucle fermée de Hélios. Dans cette boucle, Hélios représentera le processus à commander. Le graphique ci-dessous donne le principe de la méthode:



- A.P.D : Algorithme de Programmation Dynamique
- A.A.P : Algorithme d'Adaptation Paramétrique
- C.A.A : Commande Auto-Ajustable

Figure 6 : Principe général de la simulation de la loi de commande

La version boucle fermée de Hélios se distingue de l'ancienne version par une remise à jour permanente du fichier paramètres. Dans le cas de la boucle fermée, une séquence multi-tirs est traitée de la façon suivante: les paramètres de tir (ou commande optimale: durée de tir et durée entre tirs) sont calculés et envoyés les uns après les autres. Les paramètres de tir, à un instant donné, sont calculés en fonction de la température et du dommage à produire à ce même instant.

#### 4.1 Description de l'algorithme de simulation:

Le problème posé s'énonce de la façon suivante: étant donné un état initial  $(\theta_0, \Gamma_0)$  où  $\theta_0$  est la température initiale du tissu et  $\Gamma_0$  est la durée de chauffage caractérisant le dommage à produire, comment calculer la commande ou la suite de commandes qui peut produire un tel dommage compte tenue des contraintes imposées à l'état et à la commande?

L'algorithme de la loi de commande va permettre, à partir de l'état initial  $(\theta_0, \Gamma_0)$ , de fournir les paramètres de la suite de commandes capable de résoudre le problème.

Hélios est simulé en tenant compte de deux perturbations typiques :

\* Une perturbation sur l'état due à un mouvement inattendu du tissu. Nous étudierons le cas où la perturbation a lieu pendant la phase suivant le deuxième tir. Cette perturbation va faire baisser la température du tissu. Dans ce cas la programmation dynamique se charge de recalculer la suite de commandes optimales capable de corriger la perturbation et de produire le dommage souhaité.

\* une perturbation due aux modifications des paramètres du tissu après la première impulsion. Dans ce cas l'algorithme d'adaptation paramétrique est mis en oeuvre pour déterminer les nouveaux paramètres. La programmation dynamique recalcule une nouvelle suite de commandes optimales en fonction des nouveaux paramètres.

Nous présentons les résultats de simulation obtenus à partir de l'état initial suivant:

Température initiale,  $\theta_i = 35^\circ\text{C}$

Domage initial à produire,  $\Gamma_i = 2.5 \text{ s}$

L'évolution de la trajectoire dans l'espace d'état est présentée figure (7). Pour tracer cet espace d'état nous avons utilisé les paramètres relatifs au premier tir. Cet espace est donc défini pour des paramètres constants.

La figure (8) montre l'évolution des trajectoires (température et domage) en l'absence de perturbations. Pendant le tir les températures de Hélios et du modèle de commande coïncident. Le domage produit à la fin de la durée entre tirs est le même que celui prévu par le modèle de commande.

L'influence d'une perturbation due à une variation du paramètre  $\beta$  en boucle ouverte est montrée sur la figure (9). Cette perturbation cause une production de domage supérieure à celle attendue. Par contre la figure (10) montre un exemple où une perturbation sur l'état conduit à une production du domage inférieure à celle prévue.

Les figures (11) et (12) montrent la simulation de la programmation dynamique sans tenir compte des variations paramétriques. On remarque dans les deux cas que l'erreur finale sur le domage produit reste inférieure à 5%.

Enfin, le résultat de simulation de la loi commande optimale auto-ajustable est montré sur les figures (13) et (14). Dans le cas de la perturbation paramétrique figure(13), le domage est produit en envoyant 5 impulsions avec un coût global (en terme de durée de tir) de 188 ms plutôt que 6 impulsions dans le cas non adaptatif (figure11) et un coût global de 220 ms. D'autre part, en présence de la perturbation sur l'état le domage est réalisé en envoyant 7 impulsions avec un coût global de 271 ms plutôt que 8 dans le cas non adaptatif et un coût global de 286 ms (figure 12). La loi de commande auto-ajustable donne de meilleurs résultats que la loi de commande basée uniquement sur la programmation dynamique.

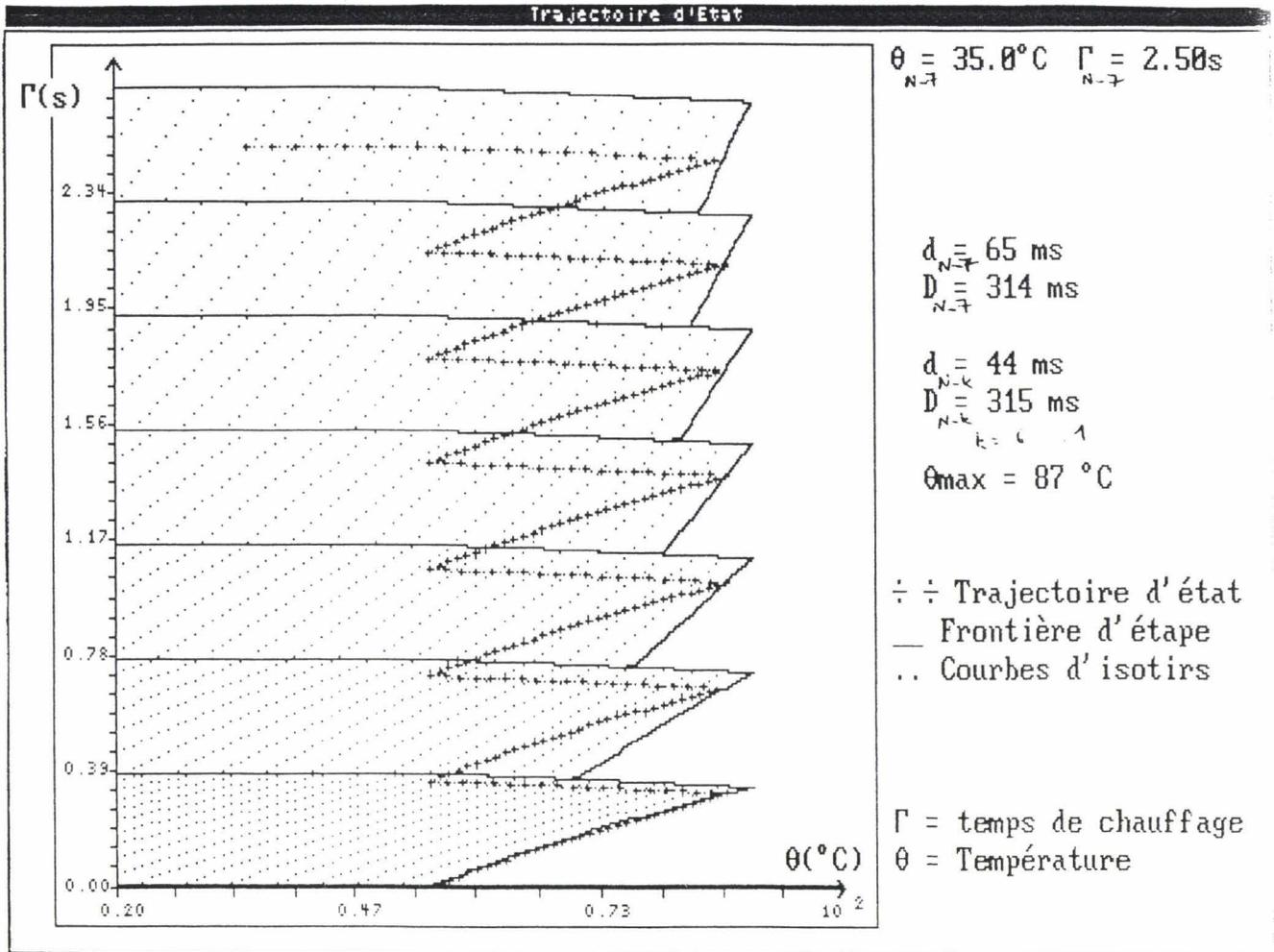


Figure 7 : Trajectoire d'état relative aux conditions initiales(35°C , 2.5s.)

4.2 Simulation de la loi de commande en l'absence de perturbations

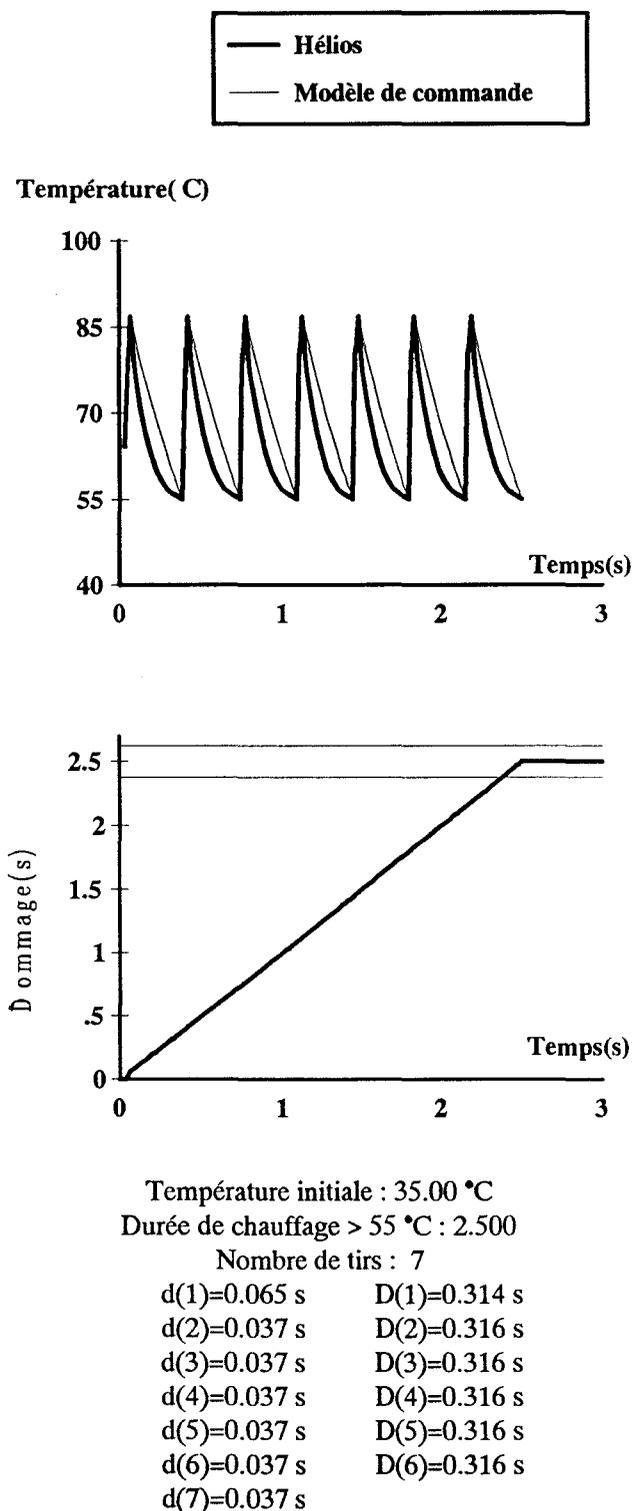


Figure 8 : Température et temps de chauffage obtenus en l'absence de perturbations.

### 4.3 Simulation en boucle ouverte

#### Variation des paramètres

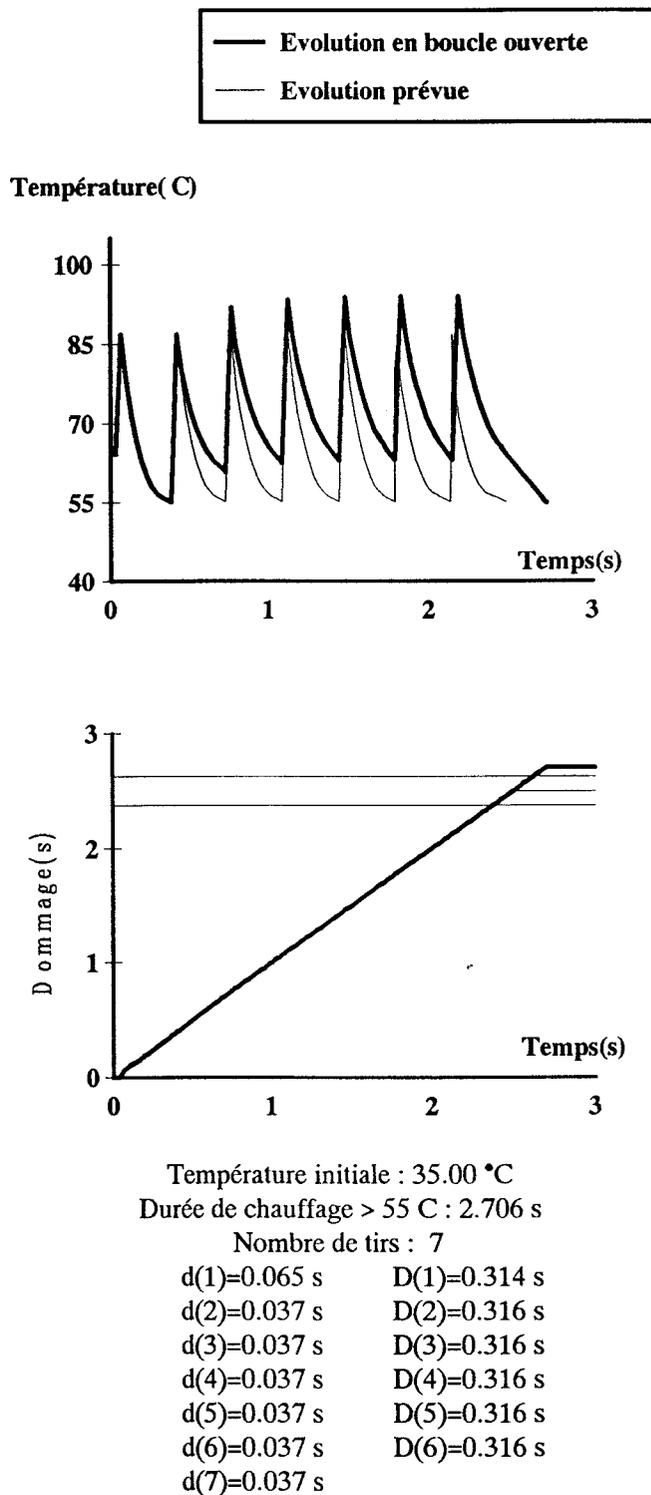


Figure 9 : Evolution de la température et du temps de chauffage en boucle ouverte : influence des variations paramétriques.

Perturbation sur l'état

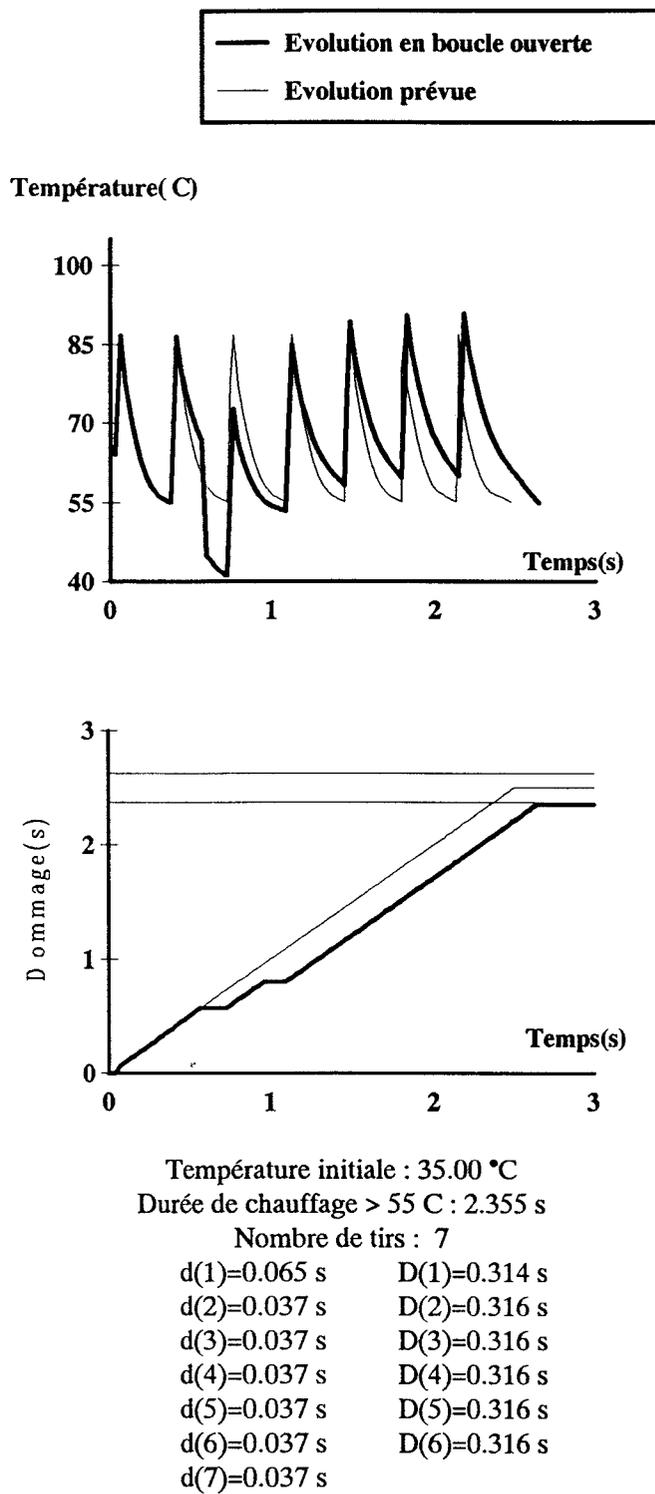
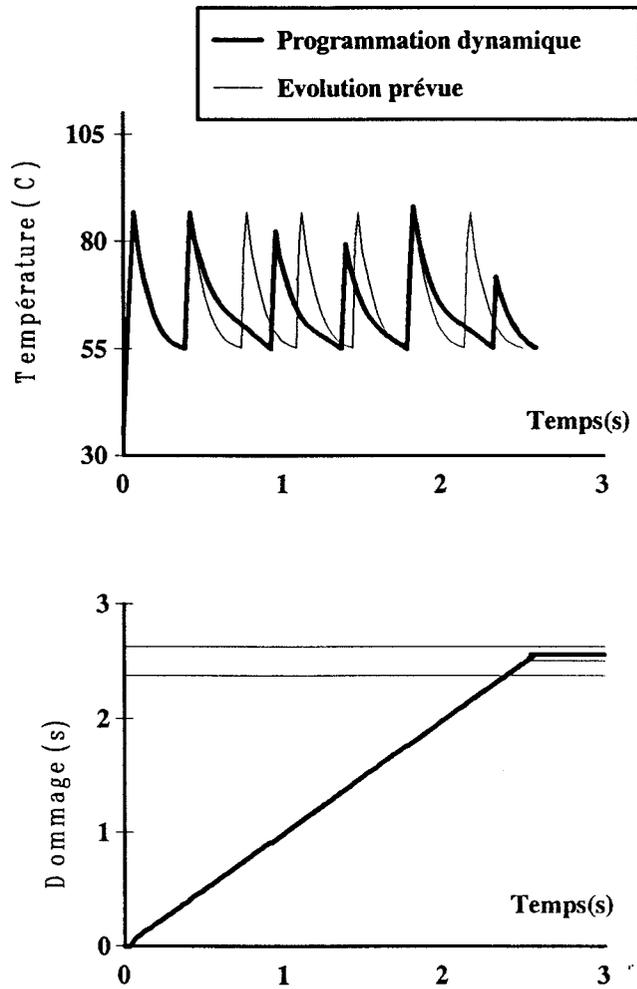


Figure 10 : Evolution de la température et du temps de chauffage en boucle ouverte : influence d'une perturbation sur l'état.

4.4 Simulation de la programmation dynamique (sans adaptation paramétrique)

Variation des paramètres



Température initiale : 35.00  
 Durée de chauffage > 55 C : 2.556  
 Nombre de tirs : 6  
 d(1)=0.065 s      D(1)=0.314 s  
 d(2)=0.037 s      D(2)=0.506 s  
 d(3)=0.032 s      D(3)=0.415 s  
 d(4)=0.028 s      D(4)=0.388 s  
 d(5)=0.040 s      D(5)=0.497 s  
 d(6)=0.018 s

Figure 11 : Température et temps de chauffage obtenus en présence des variations paramétriques: boucle fermée.

Perturbation sur l'état

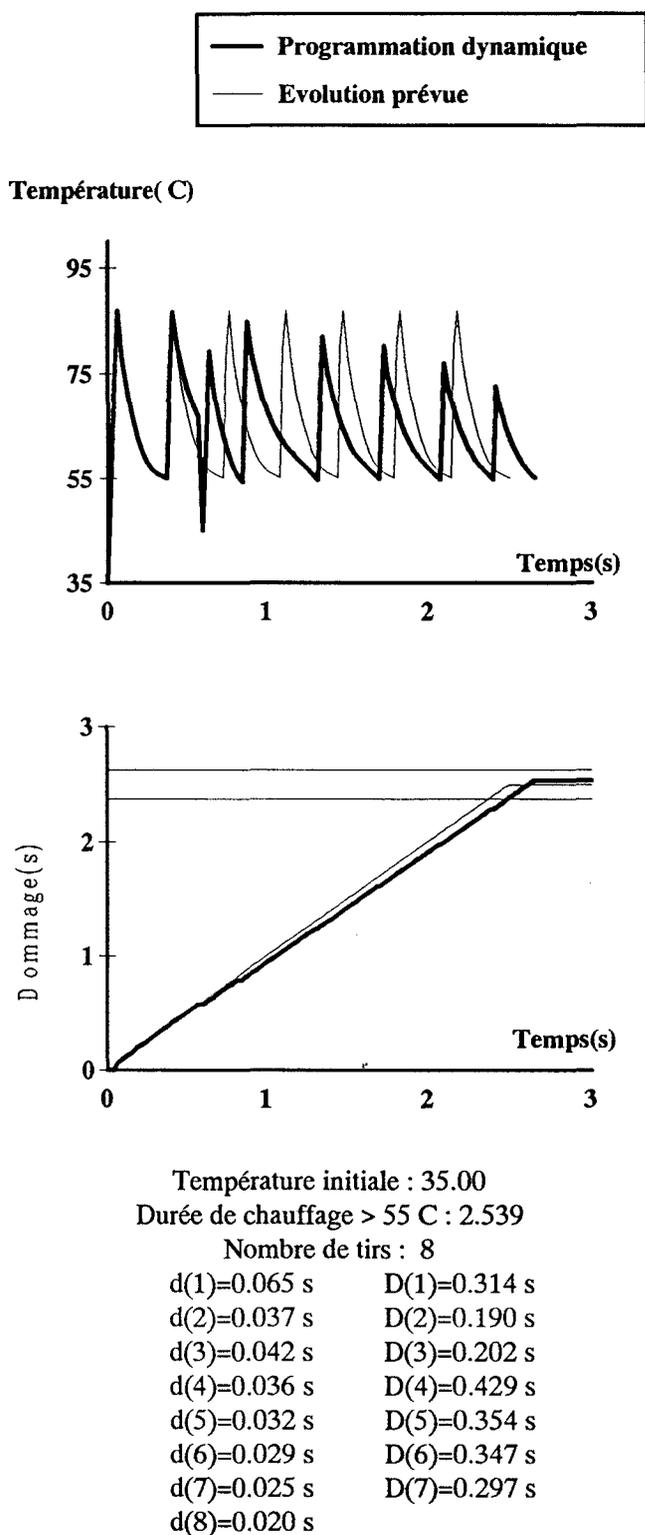


Figure 12 : Température et temps de chauffage réalisé en présence de perturbation sur l'état.

### 4.5 Simulation de la commande adaptative

#### Variation des paramètres

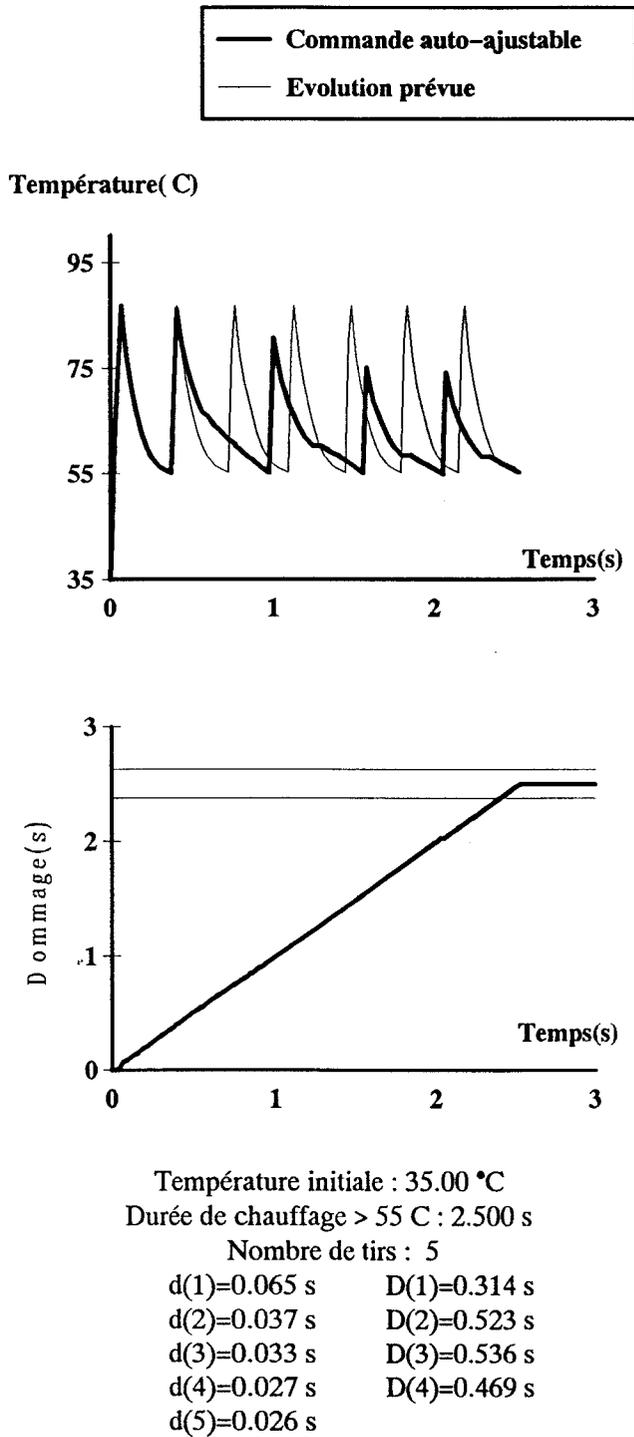


Figure 13 : Température et temps de chauffage obtenus en présence des variations paramétriques: boucle fermée auto-ajustable.

Perturbation sur l'état

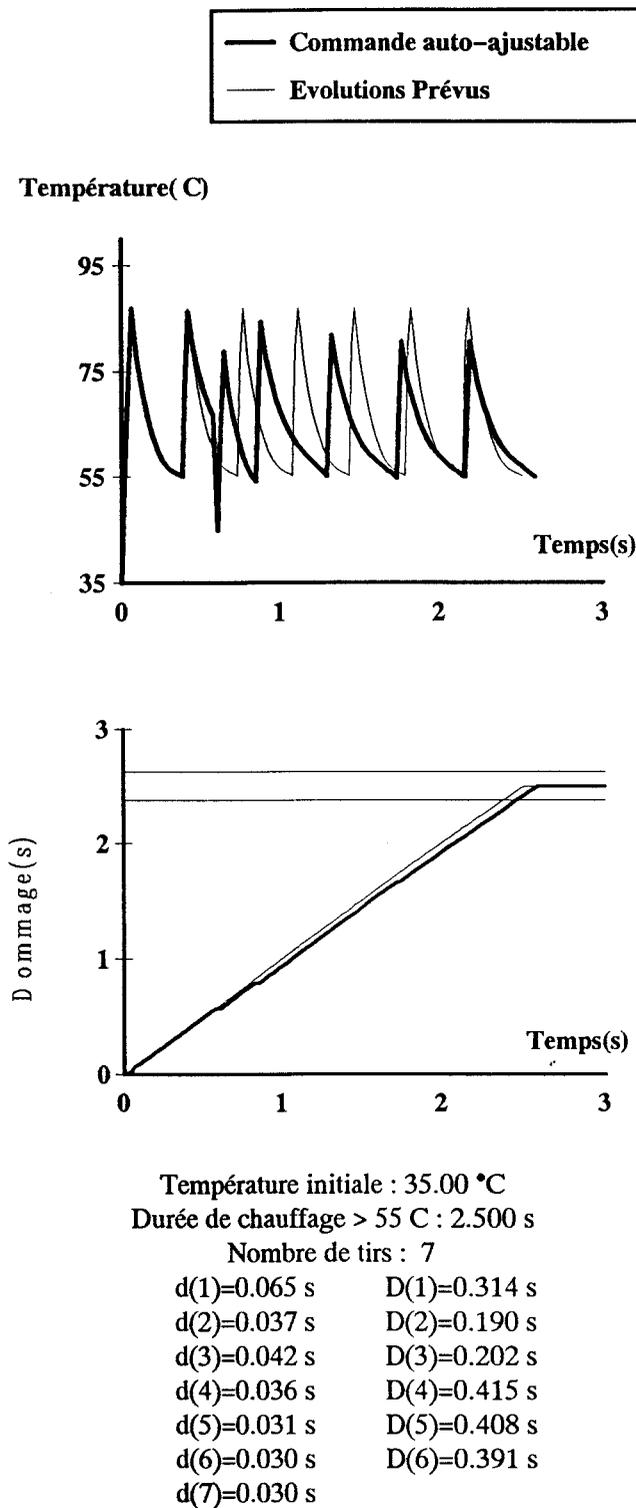


Figure 14 : Température et temps de chauffage réalisé en présence de perturbation sur l'état: boucle fermée auto-ajustable.

## **5 CONCLUSION**

Les figures (11) et (12) montrent que la programmation dynamique sans adaptation paramétrique peut être suffisante pour déterminer une suite de commandes optimales capable de produire un dommage avec une erreur inférieure ou égale (en valeur absolue) à 5%. Cependant, comme le montrent les exemples du chapitre précédent et les figures (13) et (14), l'utilisation des procédures d'adaptation paramétrique améliore davantage la commande du laser: les séquences de tir sont plus optimales, le dommage est réalisé avec plus de précision.

## BIBLIOGRAPHIE

- 1.- **Ästrom.K.J, Borisson.U, Ljung.L, Wittenmark.B.,**  
"Theory and applications of self-tuning regulators"  
Automatica, 1977 Vol 13 pp. 457-479.
2. - **Beacco.C, Mordon.S, Brunetaud.J.M.,**  
"Development and experimental In-Vivo evaluation of mathematical modeling of coagulation by laser"  
A paraître à SPIE 1992.
3. - **Bellman.R.,**  
"Dynamic Programming"  
Princeton University, 1957.
4. - **Cohen.H., Lee.G., Rink.J., Mason.D.T.,**  
"Application of a new real-time temperature control surgical laser to enhance cutting and coagulation".  
Lasers in Surgery and Medicine, supp3: 135, 1991.
5. - **Daikuzono.N., Joffe.S.N.,**  
"Computer controlled contact Nd:YAG laser system for interstitial local hyperthermia",  
Lasers in Surgery and Medicine, 1986, 6: 218.
6. - **De Larminat.Ph.,**  
"Unconditional stabilization of linear discrete systems via adaptive control"  
Systems & Control letters, 1981 Vol. 1, n°1, pp. 47-51.
7. - **De Larminat.Ph.,**  
"On stabilizability condition in indirect adaptive control"  
Automatic, 1984 Vol.20 n°6, pp 793-795.
8. - **Derbyshire.G.J, Bogen.D.K, Unger.M.,**  
"Thermally induced optical property changes in myocardium at 1.06 mm,"  
Lasers Surg Med, vol 10, pp.28-34. 1990.
9. - **Egardt.B.,**  
"Stability of adaptive controllers"  
Lecture Notes and Information Sciences, 1979 Vol. 20 Springer-Verlag, Berlin.

- 10. – Faiz.R, Mordon.S, Staroswiecki.M, Brunetaud.J.M,**  
"Self-Tuning Control of Nd-YAG laser coagulation : principle"  
à paraître dans SPIE-The International Society for Optical Engineering, 1992, Los Angeles,  
CALIFORNIE.
- 11. – Faiz.R, Mordon.S, Staroswiecki.M, Brunetaud.J.M.**  
"Commande optimale d'un laser médical : simulation"  
10<sup>ième</sup> congrès annuel de la Société Française des Lasers Médicaux. 28 Janv – 1 Fév 1991,  
Les Arcs 1800.
- 12. – Gregory.P.C.,**  
"Proceeding of the self adaptive flight control systems symposium."  
WDAC Technical Report 59-4,1959 Wright Air Development Center, Wright-Pallerson Air  
Force Base, Ohio.
- 13. – Jolesz.F.A, Bleier.A.R, Jakab.P, Ruenzel.P.W, Huttl.K, Jako.G.J.,**  
"MR Imaging of laser-tissue interactions",  
Radiology, vol. 168, pp.249-253, 1988.
- 14. – Knudsen.M. and Overgaard.J.,**  
"Identification of thermal model for human tissue",  
IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. BME-33, pp. 477-485, May 1986.
- 15. – Landau.I.D.,**  
"Adaptive control. The model reference approach"  
Dekker N.Y, 1979.
- 16. – Landau.I.D.,**  
"Model reference adaptive controllers and stochastic self-tuning regulators. A unified  
approch."  
Trans. A. S. M. E J of Dyn. Syst. Meas. and Contr. Vol.103, n°4, Dec. pp. 404-416.
- 17. – Mainster.M.A, White.T.J, Tips.J.H, Wilson.P.W.,**  
"Transient thermal behaviour in biological systems"  
Bulletin of Mathematical Biophysics, 1970 32:303-314.
- 18. – Madding.R.P.,**  
"Infrared sensors and process control,"  
SPIE, Thermosense, vol.VI 446, pp.9-17, 1983.
- 19. – Masters.A., Bown.S.G.,**  
"Interstitial laser hyperthermia in the treatment of tumours",  
Lasers in Medical Science, , 5: 129- 136, 1989.

20. – Mordon.S, Brunetaud.J.M, Buys.B, Sozanski.J.P, Moschetto.Y.,  
"Commande adaptative d'un laser médical Nd-YAG: principe"  
I.T.B.M; 1988 Vol. 9, n° 2.
21. – Mordon.S., Cornil.A.H., Brunetaud.J.M., Buys.B., Sozanski.J.P., Moschetto.Y.,  
"Development of controlled Nd:YAG for Medical applications",  
Medical Instrumentation, 21, 4: 222–225, 1987
22. – Mordon.S., Cornil.A.H., Brunetaud.J.M., Gosselin.B. and Moschetto.Y.,  
"Nd:YAG laser thermal effect: comparative study of coagulation in rat liver in vivo by  
continuous wave and high power lasers,"  
Lasers in Medical Science, vol 2, pp. 285–294, 1987.
23. – Mordon.S., Buys.B., Moschetto.Y.,  
Zirconium fluoride glass fiber radiometer for low temperature measurements,  
Journal of lightwave Technology, 1989, 7, 7: 1097–1100.
24. – M'Saad.M, Ortega.R, Landau.I.D.,  
"Adaptive Controllers for discrete-time systems with arbitrary zero: an overview"  
Automatica, 1985 vol.21, n°4, pp 413–423.
25. – Müller.G., Dörschel.K., Kar.H.,  
Biophysics of the photoablation process,  
Lasers in Medical Science, 6: 241–254; 1991.
26. – Priebe.L.A, Cain.C.P, Welch.A.J.,  
"Temperature rise required for production of minimal lesions in the Macaca Mulata retina"  
Am. J. of Ophthalmol, 1975, 71/3 : 406–413
27. – Saadatmanesh.V., Hussein.H.M.G.,  
"A fiberoptic temperature sensor and control system for laser thermal angioplasty",  
SPIE, Optical Fibers in Medicine IV, vol 1067: 98–107, 1989.
28. – Staroswiecki.M, Faiz.R, Mordon.S, Brunetaud.J.M  
"Commande optimale d'un laser chirurgical impulsif"  
Compte rendu de fin d'étude d'une recherche financée par le ministère de la recherche et de la  
technologie. Décision d'aide N: 88.431, Octobre 1990.
29. – Tsytkin.Y.Z.,  
"Foundations of the theory of learning systems"  
Academic Press 1973.
30. – Welch.A.J.,  
"Laser irradiation of tissue,"  
Heat Transfer in Medicine and Biology, vol II. chapter 19. plenum press. New York and  
London, 1985.

- 31. – Welch.A.J, Wissler.E.H, Priebe.L.A.,**  
"Significance of blood flow in calculations of temperature in laser irradiated tissue"  
IEEE, Biom. Med. Eng.,1980, 27:164–166
- 32. – Whitaker.H.P, Yamron.J, Kezer.A.,**  
"Design of model reference adaptive control systems for aircraft".  
Report R-164, Instrumentation Laboratory, MIT, Cambridge, Mass.
- 33. – Yang.Y., Markow.M.S., Rylander.H.G., Weinberg.W.S., Welch.A.J.,**  
"Reflectance as an indirect measurement of the extent of laser induced coagulation,"  
IEEE Transactions on Biomedical Engineering, vol. 37–50, pp.466–473, 1990.
- 34. – Yoon.G., Mordon.S., Brunetaud.J.M., Faiz.R., Straight.R., Bugnon.P.Y.,  
Staroswiecki.M., Leroux.J.,**  
"On-off time control of lasers pulses for pseudo-constant temperature coagulation in tissue,"  
SPIE-The International Society for Optical Engineering, 14 – 19 Janvier 1990, Los Angeles,  
CALIFORNIE.
- 35. – Yoon.G., Mordon.S., Faiz.R, Brunetaud.J.M., Straight.R.**  
"Thermal coagulation by controlled temperature evolution in laser-irradiated tissue"  
American Society for lasers in medicine and surgery, April 1990.

## CONCLUSION

Le système de la commande optimale auto-ajustable d'un laser Nd-YAG impulsionnel (milliseconde) conçu dans le cadre de cette étude est le fruit d'une collaboration très étroite entre le Laboratoire d'Automatique Fondamentale et Appliquée de Lille et le Centre de Technologie Biomédicale (INSERM U 279). Cette concertation pluridisciplinaire se situe au carrefour de deux disciplines qui sont liées depuis quelques années à savoir, l'automatique et l'instrumentation médico-chirurgicale.

La conduite d'une intervention chirurgicale par un système automatisé fait aujourd'hui partie des réalités du monde de l'instrumentation médicale. L'idée d'obtenir un protocole opératoire, logique dans son esprit, ne vise pas à remplacer le chirurgien par une machine, mais à lui fournir une assistance efficace dans la réalisation de gestes stéréotypés, auxquels on peut conférer une précision et une rapidité d'exécution que la main de l'homme ne peut atteindre.

Dans ce travail le système de commande optimale du laser pour le contrôle d'une nécrose de coagulation en boucle fermée est basé sur une étude précédente qui montre que l'évolution de la température dans le temps est corrélée avec l'extension de la nécrose de coagulation (Mordon et al 1987), le coefficient de corrélation entre l'évolution de la température en surface et l'extension de la nécrose de coagulation est de 0.89. Le volume théorique du dommage tissulaire est une fonction de la température en surface et de la durée pendant laquelle cette température est au dessus du seuil de coagulation.

A cet effet nous avons utilisé un modèle de commande du premier ordre pour représenter la température en surface pendant et après le tir laser. Ce modèle de commande a permis de développer une loi de commande optimale basée sur la programmation dynamique qui fournit une commande en boucle fermée. La résolution du problème de la programmation dynamique dans plusieurs cas consiste à mémoriser toutes les solutions (commande optimale et coût associé) ceci peut nécessiter d'énormes capacités de calcul et de mémoires, c'est le problème classique de dimensionnalité caractéristique de la programmation dynamique. Cependant, dans notre cas et grâce à la simplicité du modèle de commande, le problème de dimensionnalité ne se pose pas : la commande optimale et le coût associé sont calculés par une simple équation analytique.

La loi de commande obtenue dépend des paramètres thermodynamiques du tissu qui varient dans le temps avec l'échauffement du tissu. Les performances de la loi de commande optimale risquent de se dégrader. Ainsi, nous avons développé, dans le chapitre III, un certain nombre d'algorithmes d'adaptation paramétrique qu'on peut classer en deux catégories : les algorithmes d'adaptation simples ou non récursifs et les algorithmes

d'adaptation récursifs. Dans le cas des algorithmes simples, c'est la méthode directe qui donne le meilleur résultat. Tandis que dans le cas des algorithmes récursifs c'est l'algorithme des moindres carrés récursifs à trace constante qui est retenu.

La simulation de la loi de commande sur un modèle de connaissance (Hélios) a été effectuée dans les cas suivants: commande optimale en boucle ouverte, commande optimale en boucle fermée et commande auto-ajustable (commande optimale couplée à l'algorithme d'adaptation paramétrique). Dans chaque cas la simulation s'effectuait en présence de perturbations typiques. Les résultats obtenus ont été très satisfaisant.

La commande optimale en boucle fermée (C.O.B.F) permettait, sans adaptation paramétrique, de produire le dommage souhaité avec une précision inférieure à 5% qui est l'objectif de la loi de commande. La commande auto-ajustable augmente la précision (précision inférieure à 5%) et surtout, elle améliore l'optimisation: le dommage est produit avec un nombre d'impulsions inférieur au cas de la C.O.B.F et avec une quantité d'énergie moindre.

L'algorithme de la commande auto-ajustable a prouvé, à travers la simulation, qu'il est précis et bien adapté à la commande et au contrôle d'un laser médical. Cette précision semble être suffisante pour la coagulation de tissu en clinique. Cet algorithme, est transportable: il peut s'implanter sur tout laser médical impulsionnel (ms, ms, ns ..... ) et pour diverse application thérapeutiques du laser.

La simulation a permis de démontrer que l'algorithme de la commande optimale auto-ajustable est conforme au cahier des charges et sa fiabilité devrait être démontré lors d'expérimentations sur des tissus vivants. L'étude de l'interface entre la commande optimale auto-ajustable du laser et l'endoscope semble déterminante si l'on veut rendre la méthode universelle cliniquement.

