

N° d'ordre : 973

62221

50376
1992
224

50376
1992
224

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le titre de

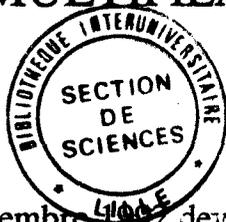
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

spécialité électronique

par

Cécile POUDROUX

**ETUDE DE L'INCIDENCE DES PARAMETRES
PRIMAIRES DES LIGNES COUPLEES SUR LA
PRECISION DE PREDICTION DE L'AMPLITUDE DES
PARASITES INDUITS SUR DES TORONS
MULTIFILAIRES.**



soutenu le 30 septembre 1992 devant la Commission d'examen

Membres de jury : MM	R. GABILLARD	Président, Examineur
	J.C. SABONNADIÈRE	Rapporteur
	M. IANOZ	Rapporteur
	B. DEMOULIN	Directeur de thèse
	P. DEGAUQUE	Examineur
	J.C. ALLIOT	Invité
	J.P. APARICIO	Invité

REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Radiopropagation et Electronique de l'Université des Sciences et Technologies de LILLE, dirigé par le Monsieur le Professeur R. GABILLARD.

Je le prie de bien vouloir trouver ici l'expression de toute ma reconnaissance et de mon plus profond respect pour avoir bien voulu juger mon travail et assurer la présidence du jury.

Je tiens à remercier Monsieur B. DEMOULIN, Maître de Conférences, qui m'a encadré tout au long de ce travail; ses conseils éclairés et son soutien permanent ont été déterminants pour son aboutissement. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma reconnaissance pour son aide efficace.

Messieurs les Professeurs M. IANOZ, de l'Ecole Polytechnique Fédérale de LAUSANNE, et J.C. SABONNADIÈRE, de l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs Electriciens de GRENOBLE, m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail et d'assurer la tâche de rapporteur. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma déférente gratitude.

J'adresse également mes sincères remerciements à Monsieur le Professeur P. DEGAUQUE, qui m'a fait bénéficier de son expérience et qui me fait l'honneur d'examiner ce travail et de participer au jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur J.C. ALLIOT, Chef de la Division Compatibilité Electromagnétique à l'O.N.E.R.A., et à Monsieur J.P. APARICIO, Ingénieur à la THOMSON-CSF-RCM, pour l'intérêt qu'ils portent à mes travaux ainsi que pour leur collaboration; leur participation au jury m'honore.

Cette thèse a été effectuée avec l'aide financière de la Direction des Etudes et Recherches Techniques, que je tiens également à remercier.

Je tiens à remercier Madame M. DEMOULIN pour l'aide qu'elle m'a apportée sur le plan du calcul scientifique ainsi que Monsieur L. KONE pour ses conseils et son aide très précieux lors de la phase expérimentale de certains travaux.

J'adresse mes remerciements à J.P. DEHORTER et J. LEMAIRE pour la reproduction de ce mémoire.

Enfin, je remercie tous les membres du laboratoire qui ont contribué à créer une atmosphère de travail fort sympathique.

INTRODUCTION

INTRODUCTION

La protection des aéronefs contre les effets directs ou indirects des foudroiements nécessite la connaissance de la sensibilité électromagnétique des câbles et lignes de transmission installés à bord des avions. Lors d'un phénomène de foudroiement, un aéronef est le siège de courants transitoires intenses. Ces courants circulent sur la carlingue métallique de l'appareil de façon très inhomogène et peuvent engendrer des champs électromagnétiques de grande amplitude. Les réseaux de câbles très denses que l'on trouve à l'intérieur de l'avion véhiculeront des courants et tensions parasites dont l'amplitude peut être suffisante pour engendrer des anomalies de fonctionnement de l'électronique ou même détruire certains composants. Le risque est d'autant plus grand que les constructions aéronautiques actuelles utilisent des équipements électroniques fonctionnant à très bas niveau d'énergie et des matériaux composites, pour leurs propriétés mécaniques et leur faible poids, mais dont la conductivité rend les avions très perméables aux champs électromagnétiques. Ces impératifs de compatibilité électromagnétique devront être pris en compte dès la conception de l'avion quand on sait que les commandes vitales de l'appareil sont informatisées.

La mise en oeuvre de câbles blindés est probablement le moyen de garantir l'immunité électromagnétique des câbles les plus sensibles. Cette solution a toutefois deux inconvénients dans la mesure où elle pénalise le critère poids et où elle complique l'implantation du réseau filaire. Le recours aux blindages devra donc se faire au prix de règles optimales dont le but sera de limiter le poids de ces composants et de rechercher une organisation du réseau de câbles telle que les contraintes appliquées au blindage soient les plus faibles possibles.

La résolution de ce compromis peut être facilitée dès la conception de l'appareil si on dispose d'outils de prédiction capables d'évaluer l'amplitude des parasites qui parviendront aux extrémités des câbles et sur la face externe des câbles blindés.

La topologie électromagnétique développée aux Etats-Unis par Baum, Liu et Tesche [2] consiste à reconnaître dans un système aussi complexe qu'un aéronef un ensemble de sous-structures imbriquées et qui permettront à l'aide de graphes de fluence de décrire la progression d'une agression électromagnétique. Le formalisme topologique tel qu'il est proposé par ces auteurs ramène le système soumis à l'action d'un champ électromagnétique à un enchaînement de produits de matrices transposable sur calculateurs.

De plus, le formalisme utilisé fait que l'outil informatique peut très facilement s'adapter à toutes modifications d'architecture du système. C'est dans le but d'appliquer ce modèle topologique aux cas concrets d'aéronefs qu'un vaste programme réunit aujourd'hui des partenaires industriels dont l'O.N.E.R.A.*, le C.E.G.** et les avions Marcel DASSAULT. C'est dans ce cadre et au moyen d'un

* Office National d'Etudes et de Recherche Aérospatiale

** Centre d'Etudes de Gramat

financement accordé par la DRET que s'est déroulée notre thèse. Le sujet consiste à proposer et justifier quelques simplifications qui permettront de traiter plus facilement le problème de l'interaction du champ électromagnétique avec les torons de câbles.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les bases théoriques de la topologie. Nous verrons sur des exemples simples que le graphe de fluence se réduit à une architecture de noeuds reliés par des tubes. Les tubes peuvent dans notre cas particulier s'apparenter aux torons de câbles. C'est donc à l'étude de cette brique élémentaire qu'est consacrée la suite de notre travail. Nous allons donc rappeler au cours de ce premier chapitre la théorie des lignes couplées traduite dans le formalisme matriciel où nous envisagerons successivement deux situations d'intérêt suivant que ces lignes évoluent dans un diélectrique homogène ou qu'au contraire les conducteurs sont revêtus d'une gaine isolante.

La mise en oeuvre de cette théorie nécessite la connaissance des paramètres inductance qui forment les données élémentaires permettant de prédire les parasites qui apparaissent aux extrémités des torons. Diverses solutions expérimentales seront proposées dans le second chapitre pour évaluer ces paramètres. Nous insisterons plus spécialement sur la marge de l'erreur commise lors de la détermination de ces paramètres et sur l'impact induit par ces erreurs lors du traitement mathématique des lignes couplées.

La mesure des paramètres linéiques devient d'autant plus fastidieuse que le nombre de conducteurs augmente. C'est pourquoi, dans le troisième chapitre, nous avons recherché une simplification dont le but est de réduire cette tâche expérimentale: elle consiste à calculer les paramètres inductance au moyen de formules analytiques et à admettre que tous les conducteurs baignent dans un milieu diélectrique homogène dont la permittivité équivalente se déduit de la mesure de la vitesse du mode commun se propageant sur le faisceau, la matrice capacité sera déduite par inversion de la matrice inductance. Les erreurs systématiquement introduites par cette simplification seront chiffrées à partir d'exemples instructifs.

Nous verrons que les principales discordances entre le modèle simplifié et le modèle rigoureux qui suppose le milieu diélectrique hétérogène se traduisent dans le nombre et la position des fréquences de résonances des parasites. Nous savons que l'existence de ces résonances est étroitement liée aux multiples réflexions qui se manifestent sur les charges d'extrémités. Une confrontation plus complète du modèle simplifié et du modèle rigoureux doit donc considérer le domaine temporel. C'est à cette transcription qu'est consacré le quatrième chapitre de notre travail. Nous proposons de convertir les signaux dans le domaine temporel en faisant appel aux matrices réflexions modales dont nous rappelons la structure. Cette démarche nous permet d'atteindre des expressions analytiques des amplitudes crêtes des signaux et de faire la confrontation des modèles simplifié et rigoureux traduisant la propagation sur la ligne multifilaire.

Pour conclure notre travail, le cinquième chapitre est axé sur une autre simplification dont l'intérêt est de réduire de façon fictive l'ordre des matrices représentatives des torons de câbles. En effet, l'ordre des matrices topologiques évoquées au début de notre propos sera directement proportionnel au nombre de conducteurs intervenant dans les tubes du graphe de fluence. On comprend que toute réduction de cet ordre n'aura qu'un impact positif sur le traitement informatique de la topologie. Notre raisonnement a consisté à supposer que seuls un ou deux conducteurs fassent l'objet d'un modèle prédictif de parasites. Nous proposons de réduire ce conducteur à un conducteur fictif équivalent, dont les paramètres géométriques seront définis de telle sorte que les parasites induits aux extrémités de ce conducteur fictif soient les mêmes que ceux observés aux extrémités du conducteur réel immergé dans le faisceau. Les limites d'application de ce concept de conducteur équivalent dépendent des conditions de charge des lignes environnantes. Nous proposerons un ensemble de formules analytiques qui permettront d'exploiter ce concept en fonction de quelques cas typiques de configuration de charges.

SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
I. PRESENTATION GENERALE	4
<u>I-1 Rappel de la méthode topologique</u>	5
<u>I-2 Induction sur un faisceau de N conducteurs immergés dans un diélectrique homogène</u>	11
<u>I-3 Induction sur un faisceau de N conducteurs immergés dans un milieu diélectrique hétérogène</u>	16
II. DETERMINATION DES PARAMETRES LINEIQUES CAPACITE ET INDUCTANCE	19
<u>II-1 Méthode de caractérisation d'un multiconducteur</u>	20
II-1-a Approche du problème	20
II-1-b Méthodes de mesures des paramètres linéiques utilisant des signaux harmoniques	21
II-1-c Méthodes de mesures des paramètres linéiques utilisant des signaux temporels	28
<u>II-2 Détermination des paramètres linéiques d'un bifilaire</u>	33
II-2-a Conducteurs en milieu homogène	33
II-2-b Conducteurs gainés de diélectrique	37
<u>II-3 Confrontation de Z_e mesurée et Z_e modélisée</u>	44

III. REDUCTION A UNE MODELISATION SIMPLIFIEE PAR EGALISATION DES VITESSES	50
<u>III -1 Enoncé de la simplification proposée</u>	51
<u>III-2 Validation de la simplification proposée sur l'impédance d'entrée d'un conducteur quelconque du faisceau</u>	54
<u>III-3 Validation de la simplification proposée sur les parasites induits sur un faisceau de câbles par une agression électromagnétique</u>	59
IV. THEORIE MODALE DES REFLEXIONS MULTIPLES	63
<u>IV-1 Milieu homogène</u>	65
<u>IV-2 Milieu hétérogène</u>	71
<u>IV-3 Validation de la théorie modale des réflexions multiples</u>	81
<u>IV-4 Réduction de la théorie modale des réflexions multiples par égalisation des vitesses de propagation</u>	84
<u>IV-5 Application de la théorie modale des réflexions multiples au cas de sources réparties</u>	88

V. CONCEPT DU CONDUCTEUR EQUIVALENT	94
<u>V-1 Principe de superposition d'onde appliqué à la recherche du conducteur équivalent</u>	95
<u>V-2 Définition du conducteur équivalent</u>	105
V-2-a Etablissement des formules mathématiques donnant les paramètres géométriques du conducteur équivalent	105
V-2-b Confrontation des règles mathématiques avec des exemples numériques	119
<u>V-3 Application du concept du conducteur équivalent à des faisceaux comprenant des conducteurs connectés sur impédance quelconque</u>	120
CONCLUSION	127
BIBLIOGRAPHIE	129
ANNEXE (I-1)	133
ANNEXE (I-2)	135
ANNEXE (IV-1)	136

CHAPITRE I
PRESENTATION GENERALE

I - PRESENTATION GENERALE

Dans ce premier chapitre, nous commençons par décrire succinctement la méthode topologique. Cette méthode consiste à représenter les mécanismes d'induction par un diagramme topologique, description géométrique du système, et par un graphe des interactions, description électromagnétique de la propagation des perturbations. Elle peut être appliquée à des configurations géométriques très diverses.

Toutefois, le faisceau de câbles rectilignes qui relie deux équipements électroniques constitue un élément du diagramme topologique. Il est donc indispensable de connaître les parasites induits sur ce faisceau lorsqu'il est agressé par une onde électromagnétique. C'est en appliquant à ce système la théorie des lignes couplées que nous sommes parvenus au résultat.

Nous exposons donc ensuite le formalisme des lignes couplées, appliqué à un faisceau de conducteurs rectilignes sans perte, parallèles à un plan de masse. Nous supposons, dans un premier temps, que les conducteurs baignent dans un milieu diélectrique homogène puis nous présenterons le formalisme modal de la théorie des lignes couplées pour un faisceau de conducteurs immergés dans un milieu diélectrique hétérogène.

I-1 Rappel de la méthode topologique: [1], [2], [3], [15]

La méthode topologique, largement décrite dans la thèse de Parmantier [15] et dont nous ne rappelons ici que le principe, nous permet de prédire la réponse d'un système complexe à une agression électromagnétique. La première étape consiste à découper géométriquement le système en "volumes" et "surfaces" tout en respectant le cheminement logique de l'énergie perturbatrice. Un volume est défini comme une zone de l'espace dans laquelle les parasites, tensions ou courants, sont induits par les mêmes sources de perturbation; deux volumes sont séparés par une surface. A partir de ce diagramme topologique, nous établissons le graphe d'interaction: chaque volume est représenté par un noeud volumique et chaque surface est représentée par un noeud surfacique; les deux noeuds sont reliés par une arête.

Afin d'illustrer ces notions succinctes de diagrammes et graphes topologiques, prenons l'exemple correspondant au schéma de la figure (I-1).

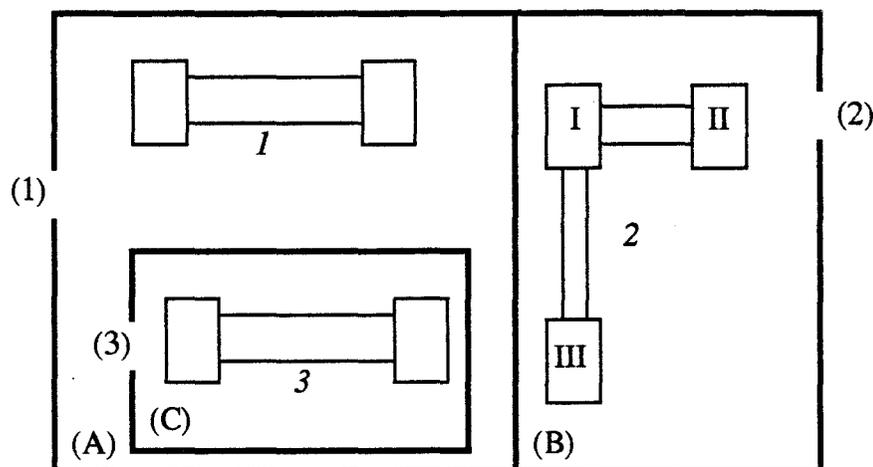


Figure (I-1)

Cette structure comporte deux enceintes métalliques (A) et (B), dans lesquelles ont été percées deux ouvertures (1) et (2). Une troisième enceinte (C) est placée dans (A) et possède une ouverture (3).

A l'intérieur de ces enceintes figurent des câbles électriques reliant différents équipements que nous avons notés circuit 1, 2 et 3. La perturbation électromagnétique pénètre dans les enceintes (A) et (B) par les ouvertures 1 et 2. A partir du volume (A), elle pénètre dans le volume (C) par l'ouverture 3.

Nous pouvons tracer le diagramme topologique suivant. Figure (I-2). V_{ij} est la notation des différents volumes; "i" indique l'ordre hiérarchique du volume; "j" indique une numérotation dans le volume défini par "i". A cette notion de volume est associée celle de surface $S_{ij,kl}$ séparant les volumes V_{ij} et V_{kl} .

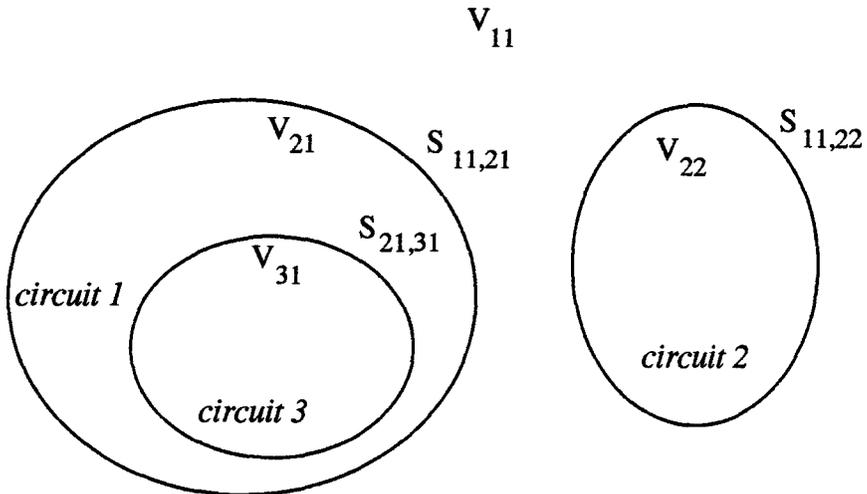


Figure (I-2)

- V_{11} volume extérieur
- V_{21} volume (A) ; (C) non inclus
- V_{31} volume (C)
- V_{22} volume (B)

A ce diagramme topologique, nous associons le graphe d'interactions suivant. Figure (I-3)

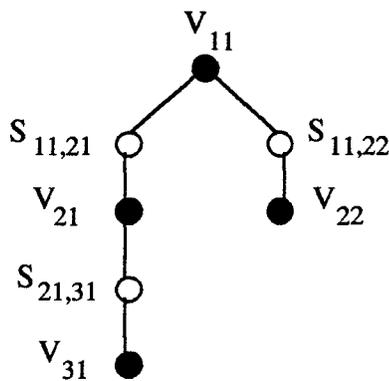


Figure (I-3)

A partir du graphe d'interaction, représentation des interactions entre volumes, nous définissons maintenant le réseau topologique, représentation des voies de propagation des perturbations et de leur répartition dans les différents volumes

topologiques. Les voies de propagation des signaux électromagnétiques appelées "ondes" sont modélisées par des tubes, correspondant aux arêtes du graphe tandis que leur répartition est caractérisée par des jonctions situées aux emplacements des noeuds du graphe. Le réseau est donc un ensemble de jonctions reliées par des tubes, comme le montre la figure (I-4), réseau associé au circuit 2 de la figure (I-1).

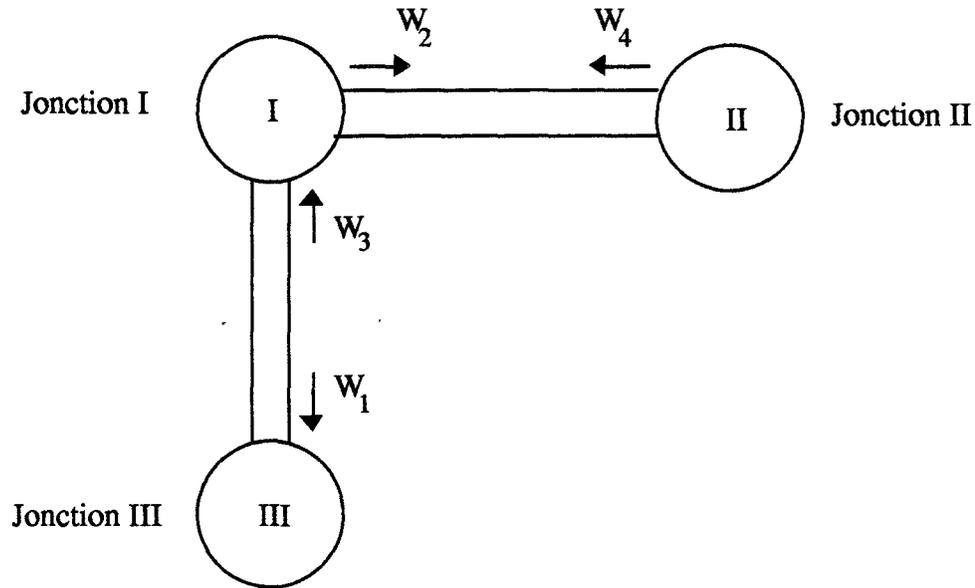


Figure (I-4)

Les ondes W_i , propres au formalisme topologique, qui entrent ou qui sortent des jonctions, sont les inconnues principales du réseau. Elles sont regroupées dans un supervecteur noté $[W(z)]$, où z est la variable longitudinale du tube ; les ondes sortantes correspondent à l'abscisse $z=0$, tandis que les ondes entrantes sont considérées à l'extrémité du tube en $z=L$. L'ordre du réseau est noté N ; il correspond au nombre d'ondes associées au réseau. Ecrivons maintenant l'équation de propagation qui caractérise les tubes. Elle relie les supervecteurs des ondes entrantes $[W(L)]$ aux supervecteurs des ondes sortantes $[W(0)]$ en faisant intervenir la supermatrice de propagation $[\Gamma]$ de dimension $N*N$

$$[W(L)] = [\Gamma][W(0)] + [W^{(s)}] \quad (I-1)$$

$[W^{(s)}]$ est le supervecteur onde source qui traduit le couplage des sources extérieures sur chaque tube.

Il ne reste plus qu'à écrire l'équation de répartition, qui caractérise les jonctions. Elle relie les ondes sortantes $[W(0)]$ et les ondes entrantes $[W(L)]$ par une supermatrice de transfert $[S]$.

$$[W(0)] = [S][W(L)] \quad (I-2)$$

Des équations (I-1) et (I-2), nous tirons la B.L.T. équation généralisée, du nom des auteurs Baum, Liu et Tesche.

$$([1] - [S] [\Gamma]) [W(0)] = [S] [W^{(s)}] \quad (I-3)$$

où $[1]$ est la supermatrice unité de dimension $N \times N$

Il nous faut maintenant exprimer les supermatrices $[S]$ et $[\Gamma]$ et le supervecteur $[W^{(s)}]$ pour le cas particulier des réseaux de lignes de transmission à plusieurs conducteurs. La figure (I-5) représente un faisceau élémentaire de N conducteurs de longueur dz .

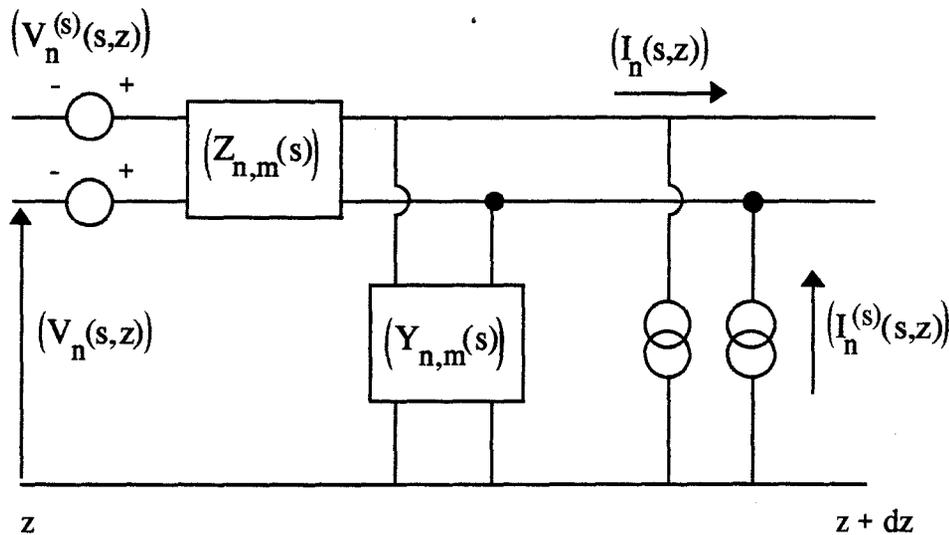


Figure (I-5)

$V_n(z,s)$ est la tension entre le conducteur "n" et le conducteur de référence.
 $s=j\omega$ est la variable symbolique.

$I_n(z,s)$ est le courant qui circule sur ce conducteur "n".

$[Z_{n,m}(z,s)]$ et $[Y_{n,m}(z,s)]$ sont les matrices impédance et admittance.

$V_n^{(s)}(z,s)$ et $I_n^{(s)}(z,s)$ sont les matrices source de tension et de courant.

Nous pouvons associer à ce système les équations matricielles suivantes

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} [V_n(z,s)] = - [Z_{n,m}(z,s)] [I_n(z,s)] + [V_n^{(s)}(z,s)] \\ \frac{d}{dz} [I_n(z,s)] = - [Y_{n,m}(z,s)] [V_n(z,s)] + [I_n^{(s)}(z,s)] \end{cases} \quad (I-4)$$

En définissant la matrice coefficient de propagation par

$$\gamma_{c\ n,m}(s) = \left([Z_{n,m}(s)] [Y_{n,m}(s)] \right)^{\frac{1}{2}}$$

et la matrice impédance caractéristique par

$$Z_{c\ n,m}(s) = [\gamma_{c\ n,m}(s)] [Y_{n,m}(s)]^{-1}$$

et en introduisant les variables suivantes que nous associons aux ondes définies plus haut

$$[V_n(z,s)]_+ = [V_n(z,s)] + [Z_{c\ n,m}(s)] [I_n(z,s)] \quad (I-5)$$

$$[V_n(z,s)]_- = [V_n(z,s)] - [Z_{c\ n,m}(s)] [I_n(z,s)] \quad (I-6)$$

$$[V_n^{(s)}(z,s)]_+ = [V_n^{(s)}(z,s)] + [Z_{c\ n,m}(s)] [I_n^{(s)}(z,s)]$$

$$[V_n^{(s)}(z,s)]_- = [V_n^{(s)}(z,s)] - [Z_{c\ n,m}(s)] [I_n^{(s)}(z,s)]$$

les équations du système (I-4) s'écrivent

$$\left[[1] \frac{d}{dz} + [\gamma_{c\ n,m}(s)] \right] [V_n(z,s)]_+ = [V_n^{(s)}(z,s)]_+ \quad (I-7)$$

$$\left[[1] \frac{d}{dz} - [\gamma_{c\ n,m}(s)] \right] [V_n(z,s)]_- = [V_n^{(s)}(z,s)]_- \quad (I-8)$$

La résolution de l'équation (I-7) nous donne la relation suivante

$$\begin{aligned} [V_n(L,s)]_+ &= \left\{ \exp \left(- [\gamma_{c\ n,m}(s)] L \right) \right\} [V_n(0,s)]_+ \\ &+ \int_0^L \left\{ \exp \left(- [\gamma_{c\ n,m}(s)] (L - z) \right) \right\} [V_n^{(s)}(z,s)]_+ dz \end{aligned}$$

Pour relier cette équation à l'équation de propagation (I-1), nous posons

$$[W(z)] = [V(z,s)]_+$$

$$[\Gamma] = \left\{ \exp \left(- [\gamma_{c\ n,m}(s)] L \right) \right\}$$

$$[W^{(s)}] = \int_0^L \left\{ \exp \left(- [\gamma_{c\ n,m}(s)] (L - z) \right) \right\} [V^{(s)}(z,s)]_+ dz$$

L'équation de propagation s'écrit

$$[V(L,s)]_+ = [\Gamma][V(0,s)]_+ + [W^{(s)}(s)]_+$$

L'équation de répartition s'écrit

$$[V(0,s)]_+ = [S][V(L,s)]_+$$

D'où l'équation B.L.T. établie par C. BAUM, T.K. LIU et F.M. TESCHE

$$\{ [1] - [S][\Gamma] \} [V(0,s)]_+ = [S][W^{(s)}]_+ \quad (I-9)$$

$[V(0,s)]_+$ est obtenue par inversion de la matrice interaction $[I] = [1] - [S][\Gamma]$

$$[V(0,s)]_+ = \{ [1] - [S][\Gamma] \}^{-1} [S][W^{(s)}]_+$$

Pour retrouver les grandeurs physiques ($V_n(z,s)$) et ($I_n(z,s)$), nous devons connaître les ondes rétrogrades $[V(z,s)]_-$ puisque, d'après (I-5) et (I-6)

$$[V_n(z,s)] = \frac{1}{2} [[V_n(z,s)]_+ + [V_n(z,s)]_-]$$

$$[I_n(z,s)] = \frac{1}{2} [Z_{c n,m}(s)]^{-1} [[V_n(z,s)]_+ - [V_n(z,s)]_-]$$

Or, pour chaque tube, deux ondes directes se propageant en sens inverse ont été affectées arbitrairement. Donc si deux ondes $W_n(z)$ et $W_m(z)$ se propagent sur un même tube en sens inverse

$$\text{si } [V_n(z,s)]_+ = W_n(z) \quad , \quad [V_n(z,s)]_- = W_m(L - z)$$

La méthode topologique nous donne donc la réponse d'un faisceau de câbles arborescents à une agression électromagnétique, à savoir $[V_n(z,s)]$ et $[I_n(z,s)]$. Elle nécessite des développements mathématiques assez lourds puisque l'ordre des relations matricielles qu'elle fait apparaître est directement proportionnel au nombre de ports du faisceau. Ces matrices se subdivisent souvent en sous-éléments qui caractérisent les tubes du diagramme topologique qui relie les points de jonction du réseau, comme l'indique la figure (I-4). Un tube va donc comporter un ensemble de N conducteurs couplés entr'eux que nous appellerons faisceau élémentaire. La matrice de propagation qui caractérise les ondes entrant et sortant de ce tube va donc dépendre des paramètres du faisceau élémentaire. Ces paramètres exprimés dans le langage habituel de la théorie des lignes couplées, que nous rappelons dans le paragraphe suivant, ne sont autres que les coefficients des matrices inductance et capacité.

I-2 Induction sur un faisceau de N conducteurs immergés dans un milieu diélectrique homogène [4], [5], [6], [28], [29]

Considérons un faisceau de N conducteurs rectilignes parallèles à un plan de masse (0yz). Figure (I-6)

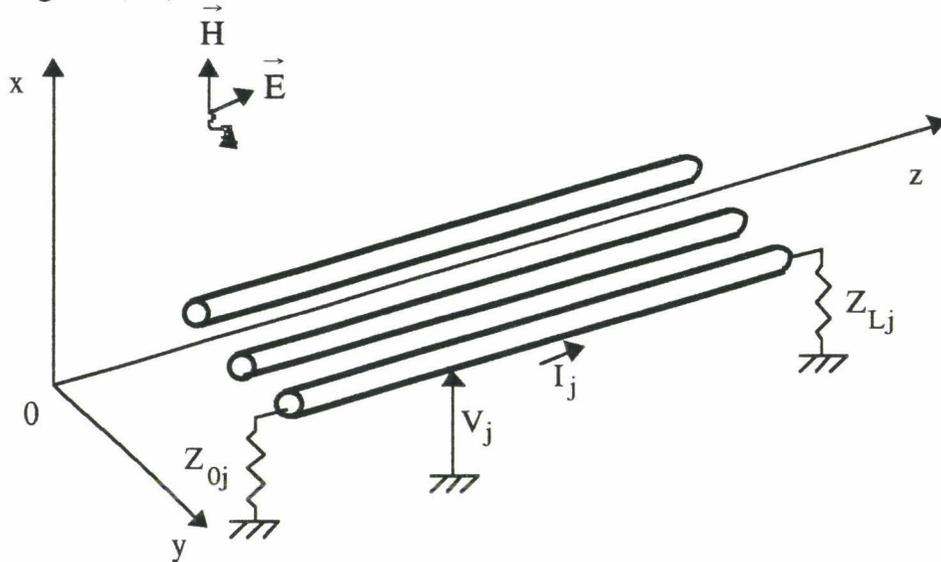


Figure (I-6)

Un conducteur quelconque du faisceau a pour diamètre d_j et longueur L ; il est placé à une hauteur h_j par rapport au plan de référence et est connecté aux extrémités par des impédances Z_{0j} et Z_{Lj} reliant le conducteur au plan de masse en $z=0$ et $z=L$. Sur ce conducteur "j", à l'abscisse z , nous pouvons définir un courant $I_j(z)$ et une tension $V_j(z)$ référencée au plan.

Pour pouvoir appliquer la théorie des lignes à ce système, nous sommes contraints de poser quelques hypothèses préliminaires :

- les mécanismes d'induction des composantes \vec{E} et \vec{H} du champ exciteur s'apparentent à des termes sources introduits dans les équations des lignes couplées. C'est pour cette raison que nous considérons que le faisceau de câbles est posé à proximité d'un plan de masse et que la distance entre deux conducteurs du faisceau ainsi que la hauteur d'un conducteur par rapport au plan de masse sont supposées bien plus petites que la longueur d'onde du perturbateur.

- l'onde électromagnétique source de perturbation est une onde plane d'incidence quelconque. Nous verrons dans le dernier chapitre que, dans le cas général, cette condition n'est pas impérative puisque nous montrerons qu'une onde quelconque peut être assimilée à une superposition d'ondes planes.

La théorie des lignes nous permet de relier les courants I_j et les tensions V_j par des systèmes matriciels d'ordre N

$$\begin{cases} \left(-\frac{dV}{dz} \right) = (Z) (I) - (\epsilon) \\ \left(-\frac{dI}{dz} \right) = (Y) (V) - (\mathcal{L}) \end{cases} \quad (\text{I-10})$$

(V) et (I) sont les matrices colonnes courant et tension
(Z) et (Y) sont les matrices impédance et admittance du système

Tout au long de notre travail, nous négligeons la résistance des conducteurs. Cela signifie que (Z) et (Y) sont purement imaginaires.

$$(Z) = j (L) \omega$$

$$(Y) = j (C) \omega$$

où (L) et (C) sont les matrices inductance et capacité.

Les N conducteurs baignent dans un milieu homogène ; les modes induits sur les conducteurs se propagent à la même vitesse ; le produit des matrices (Z) et (Y) est diagonal et vaut :

$$(Z) (Y) = (Y) (Z) = \gamma_0^2 (1) \quad (I-11)$$

où (1) est la matrice unité d'ordre N et γ_0 la constante de propagation du milieu

$$\gamma_0 = j \omega \sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0} = j \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r}$$

avec ϵ_r la permittivité relative du milieu

c la vitesse de propagation dans l'air ($c = 3.10^8$ m/s)

v la vitesse de propagation dans le milieu est égale à $\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$.

Les matrices (ϵ) et (\mathcal{L}) qui apparaissent dans le système (I-10) correspondent aux sources de tension et de courant générées par l'onde électromagnétique incidente.[7]

Pour déterminer les coefficients de ces matrices, raisonnons à l'aide du schéma de la figure (I-7)

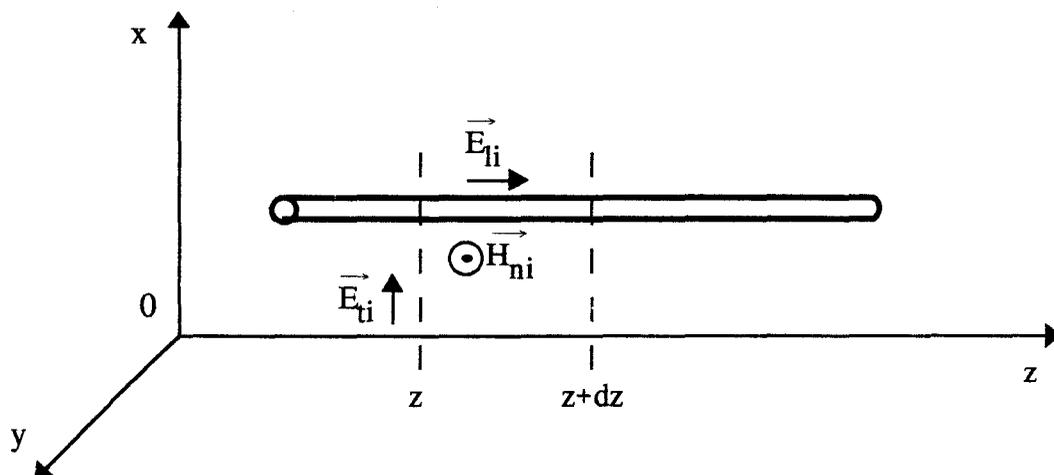


Figure (I-7)

La loi de Faraday dans sa forme intégrale s'écrit

$$\oint_{C_i} \vec{E} \cdot d\vec{C}_i = -j\omega\mu_0 \int_{S_i} \vec{H} \cdot \vec{n} dS_i \quad (I-12)$$

où S_i est une surface rectangulaire placée dans le plan (0xz) entre le plan de masse et le conducteur i , délimitée par les abscisses z et $z+dz$.

\vec{n} est le vecteur normal à S_i ; il a pour direction l'axe Oy .

$dS_i = dz dx$

C_i est un contour encerclant la surface S_i .

L'équation (I-12) devient

$$\begin{aligned} & \int_0^{h_i} [E_{ti}(x, z+\Delta z) - E_{ti}(x, z)] dx - \int_z^{z+\Delta z} [E_{li}(h_i, z) - E_{li}(0, z)] dz \\ & = -j\omega\mu_0 \int_z^{z+\Delta z} \int_0^{h_i} [H_{ni}(x, z)] dx dz \end{aligned} \quad (I-13)$$

où E_{ti} est la composante du champ électrique total perpendiculaire au conducteur

$$E_{ti} = E_x$$

E_{li} est la composante longitudinale du champ électrique total

$$E_{li} = E_z$$

H_{ni} est la composante du champ magnétique total perpendiculaire au conducteur et parallèle au plan de masse.

$$H_{ni} = H_y$$

La tension entre le conducteur et le plan de masse est définie par

$$V_i(z) = - \int_0^{h_i} [E_{ti}(x, z)] dx \quad (I-14)$$

$$- \frac{dV_i(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \int_0^{h_i} [E_{ti}(x, z+\Delta z) - E_{ti}(x, z)] dx \quad (I-15)$$

La composante longitudinale du champ électrique total est nulle puisque nous supposons les conducteurs parfaits.

L'équation (I-15) devient alors pour $\Delta z \rightarrow 0$

$$- \frac{dV_i(z)}{dz} = j \omega \mu_0 \int_0^{h_i} H_{ni}(x, z) dx \quad (I-16)$$

Le champ magnétique total est la somme du champ incident et du champ réfléchi

$$H_{ni}(x,z) = H_y(x,z) = H_y^r(x,z) + H_y^i(x,z) \quad (I-17)$$

Le champ magnétique réfléchi est produit par les courants qui circulent sur les conducteurs. Nous pouvons donc écrire que

$$\begin{aligned} \phi_i^r(z) &= -\mu_0 \int_0^{h_i} H_y^r(x,z) dx \\ &= \sum_{k=1}^N L_{ik} I_k(z) \end{aligned} \quad (I-18)$$

En remplaçant (I-17) et (I-18) dans (I-16), nous obtenons

$$\frac{d}{dz}(V(z)) + j\omega (L) (I(z)) = \begin{pmatrix} \vdots \\ j\omega\mu_0 \int_0^{h_i} H_y^i(x,z) dx \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (I-19)$$

En comparant (I-19) à la première équation du système (I-10), nous pouvons écrire que

$$\varepsilon_j = j\omega\mu_0 \int_0^{h_j} H_y^i(x,z) dx \quad (I-20)$$

Ecrivons maintenant l'équation de continuité du courant sur le conducteur i

$$I_i(z+\Delta z) + \frac{dq_i}{dt} \Delta z = I_i(z) \quad (I-21)$$

où q_i est la charge par unité de longueur du conducteur i

$$\frac{dq_i}{dt} = j\omega q_i$$

En divisant (I-21) par Δz et en faisant tendre Δz vers 0, nous obtenons

$$\frac{dI_i}{dz} + j\omega q_i = 0 \quad (I-22)$$

$$q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j^t \quad (I-23)$$

où V_j^t est le potentiel produit par le champ électrique total E_x

$$V_j^t = - \int_0^{h_j} E_x(x,z) dx$$

E_x est la somme du champ incident et du champ réfléchi

$$E_x(x,z) = E_x^r(x,z) + E_x^i(x,z)$$

$$V_j^t = - \int_0^{h_j} E_x^r(x,z) dx - \int_0^{h_j} E_x^i(x,z) dx$$

$$V_j^t = - \int_0^{h_j} E_x^i(x,z) dx + V_j$$

En substituant (I-23) dans (I-22) et en remplaçant V_j^t par l'expression ci-dessus, nous pouvons écrire

$$\frac{dI_i}{dz} + j\omega \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j = j\omega \sum_{j=1}^N C_{ij} \int_0^{h_j} E_x^i(x,z) dx$$

soit sous forme matricielle

$$\left(- \frac{dI}{dz} \right) = j\omega (C)(V) + j\omega (C) \begin{pmatrix} \vdots \\ \int_0^{h_j} E_x^i(x,z) dx \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (I-24)$$

En comparant (I-24) à la deuxième équation du système (I-10), nous exprimons la matrice (\mathcal{L}) par

$$(\mathcal{L}) = - j\omega (C) \begin{pmatrix} \vdots \\ \int_0^{h_j} E_x^i(x,z) dx \\ \vdots \end{pmatrix}$$

En récapitulatif, un élément quelconque de la source de tension s'exprime

$$\varepsilon_j = j \omega \int_0^{h_j} B_y dx \quad (I-25)$$

où B_y est la composante d'induction magnétique orientée parallèlement au plan et normalement à l'axe du faisceau.

Un élément de la matrice source de courant s'écrit :

$$\mathbf{I}_j = -j \omega \sum_{i=1}^N C_{ji} \left(\int_0^{h_i} E_x dx \right) \quad (\text{I-26})$$

où E_x est la composante électrique normale au plan.

Les courants sont solutions de l'équation

$$\left(\frac{d^2 \mathbf{I}}{dz^2} \right) - \gamma_0^2 (\mathbf{I}) = (\mathbf{S}) \quad (\text{I-27})$$

$$\text{avec } (\mathbf{S}) = -(\mathbf{Y})(\boldsymbol{\varepsilon}) + \left(\frac{d\mathbf{I}}{dz} \right) \quad (\text{I-28})$$

Ils s'écrivent donc sous la forme

$$(\mathbf{I}) = (\mathbf{A}) e^{-\gamma_0 z} + (\mathbf{B}) e^{\gamma_0 z} - \frac{(\mathbf{S})}{\gamma_0^2}$$

Les tensions s'expriment

$$(\mathbf{V}) = (\mathbf{Y})^{-1} \left(-\frac{d\mathbf{I}}{dz} \right) + (\mathbf{Y})^{-1} (\mathbf{I})$$

Les matrices (A) et (B) sont calculées en appliquant les conditions aux limites

$$(\mathbf{V})_{z=0} = -(\mathbf{Z}_0) (\mathbf{I})_{z=0}$$

$$(\mathbf{V})_{z=L} = (\mathbf{Z}_L) (\mathbf{I})_{z=L}$$

où (\mathbf{Z}_0) et (\mathbf{Z}_L) sont des matrices diagonales dont un élément quelconque j correspond aux impédances Z_{0j} et Z_{Lj} .

I-3 Formalisme de la théorie des lignes dans un milieu diélectrique hétérogène [8], [9]

Considérons maintenant un faisceau de conducteurs enrobés de diélectrique, qui correspond au cas réel des torons trouvés à bord des aéronefs. La présence des gaines diélectriques fait que le produit des matrices (Z) et (Y) n'est plus diagonal et que nous devons avoir recours au formalisme modal.

Récrivons le système (I-10)

$$\begin{cases} \left(-\frac{dV}{dz} \right) = (Z) (I) - (\epsilon) \\ \left(-\frac{dI}{dz} \right) = (Y) (V) - (\mathcal{L}) \end{cases} \quad (\text{I-29})$$

qui nous donne une équation différentielle du second ordre en courant

$$\left(\frac{d^2 I}{dz^2} \right) - (Y) (Z) (I) = (S) \quad (\text{I-30})$$

avec (S) définie par la relation (I-28)

Posons $(A_i) = (Y) (Z)$

(A_i) n'est pas diagonale. Soit (Γ^2) la matrice diagonale obtenue par la transformation linéaire produite par les matrices de passage (T_i) telle que

$$(\Gamma^2) = (T_i)^{-1} (A_i) (T_i) \quad (\text{I-31})$$

Si nous exprimons l'équation différentielle du second ordre (I-30) en gardant comme variable la tension, nous introduisons la matrice (A_v) définie par $(A_v) = (Z) (Y)$ et nous montrons en annexe (I-1) que

$$(\Gamma^2) = (T_v)^{-1} (A_v) (T_v) \quad (\text{I-32})$$

où (T_v) est la matrice de passage formée des vecteurs propres de (A_v) .

L'équation (I-30) est associée à l'équation en base propre

$$\left(\frac{d^2 i}{dz^2} \right) - (\Gamma^2) (i) = (s) \quad (\text{I-33})$$

où $(i) = (T_i)^{-1} (I)$ et $(s) = (T_i)^{-1} (S)$

La deuxième équation du système (I-29) peut s'écrire

$$\left(-\frac{di}{dz} \right) = (y) (v) - (T_i)^{-1} (\mathcal{L}) \quad (\text{I-34})$$

où $(y) = (T_i)^{-1} (Y) (T_v)$

De même, nous pouvons introduire la matrice (z) telle que

$$(z) = (T_v)^{-1} (Z) (T_i)$$

Nous montrons que (z) et (y) sont diagonales. Annexe (I-2)

Les courants (i) et tensions (v) exprimés dans la base propre, solutions des équations (I-33) et (I-34), s'écrivent

$$(i) = (e^{-\Gamma z}) (a) + (e^{\Gamma z}) (b) - (\Gamma^2)^{-1}(s) \quad (\text{I-35})$$

où $(e^{-\Gamma z})$ et $(e^{\Gamma z})$ sont des matrices diagonales dont un élément quelconque j correspond à $e^{-\Gamma_j z}$ et $e^{\Gamma_j z}$, Γ_j étant l'exposant de propagation associé au mode propre j .

$$(v) = (y)^{-1} \left[\left(-\frac{di}{dz} \right) + (T_i)^{-1} (\mathcal{I}) \right]$$

En introduisant les matrices impédance de charge (z_0) et (z_L) exprimées dans la base propre définies par

$$\begin{aligned} (z_0) &= (T_v)^{-1} (Z_0) (T_i) \\ (z_L) &= (T_v)^{-1} (Z_L) (T_i) \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire les conditions aux limites dans cette base afin de déterminer les matrices (a) et (b)

$$\begin{aligned} (v)_{z=0} &= - (z_0) (I)_{z=0} \\ (v)_{z=L} &= (z_L) (I)_{z=L} \end{aligned}$$

Courants et tensions dans la base originale sont obtenus par les transformations

$$\begin{aligned} (I) &= (T_i) (i) \\ (V) &= (T_v) (v) \end{aligned}$$

La matrice diagonale (Γ^2) et les matrices de passage (T_i) et (T_v) sont déterminées à partir des coefficients inductance et capacité du faisceau.

Pour connaître les courants (I) et tensions (V) induits par la perturbation électromagnétique, nous devons, par conséquent, disposer de l'ensemble des coefficients inductance et capacité. Ces coefficients peuvent être obtenus au moyen de mesures comme nous allons le voir dans le prochain chapitre.

CHAPITRE II
DETERMINATION DES PARAMETRES
LINEIQUES CAPACITE ET INDUCTANCE

II DETERMINATION DES PARAMETRES LINEIQUES CAPACITE ET INDUCTANCE

Les paramètres linéiques capacité et inductance d'un faisceau de N conducteurs sont des données essentielles pour la prédiction de la réponse de ce faisceau à une agression électromagnétique. Pour un ensemble de N conducteurs placés au-dessus d'un plan de masse, les inductances linéiques sont données par des formules analytiques classiques. Ces formules sont établies pour un faisceau de conducteurs, dont l'espacement ainsi que la distance par rapport au plan est grande vis à vis de leur diamètre. Si les conducteurs sont immergés dans un milieu homogène, les coefficients de la matrice capacité sont obtenus par inversion de la matrice inductance. Si les conducteurs baignent dans un milieu hétérogène, les capacités linéiques peuvent être calculées par des méthodes numériques utilisant la méthode des éléments finis. Le second moyen consiste à faire usage de mesures.

Dans ce deuxième chapitre, nous avons tenté de cerner les limites de validité des formules analytiques en procédant à quelques mesures significatives sur un système bifilaire que nous avons comparées aux coefficients inductance et capacité théoriques. Nous avons pu apprécier l'influence des caractéristiques géométriques du faisceau sur la validité des formules analytiques qui en donnent les paramètres primaires. Nous avons ensuite répertorié quelques méthodes différentes de mesure : en milieu homogène ou hétérogène, utilisant des signaux harmoniques ou temporels. En les mettant en oeuvre sur un toron de cinq conducteurs entourés d'une gaine diélectrique et sur un trifilaire, exemple concret trouvé à bord d'aéronefs, nous avons évalué la précision de chacune des méthodes. Enfin, pour évaluer l'incidence des erreurs commises dans la détermination des paramètres primaires sur la prédiction des différents modes, nous avons procédé à la détermination de l'impédance d'entrée d'un conducteur quelconque du faisceau chargé de telle façon que les différents modes de propagation sur l'ensemble des conducteurs du faisceau soient excités.

II-1 Méthode de caractérisation d'un multiconducteur :

II-1-a Approche du problème :

Considérons un ensemble de trois conducteurs rectilignes de longueur L parallèles à un plan de masse. Figure (II-1). Dans toute la suite du chapitre, les différentes méthodes de mesures seront exposées pour un système de trois conducteurs par souci de simplification. Bien évidemment, ces méthodes peuvent être généralisées à N conducteurs.

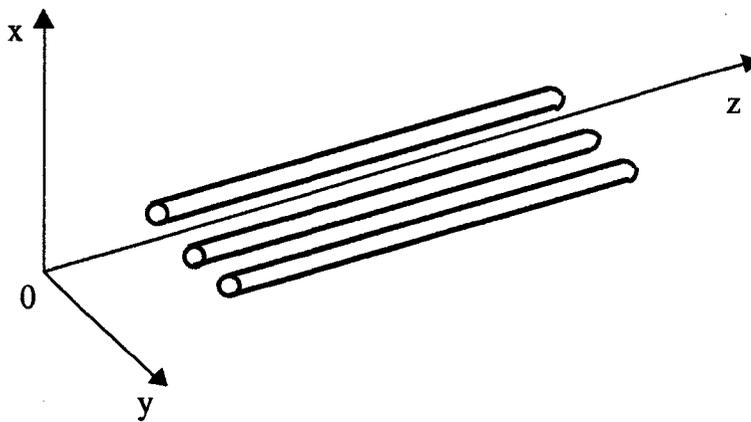
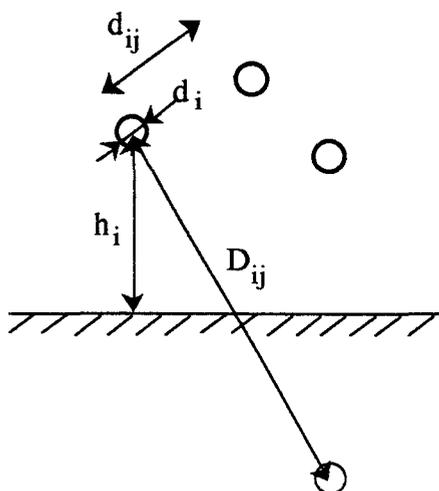


Figure (II-1)

En supposant que l'espacement des conducteurs ainsi que leur distance par rapport au plan de référence est grande vis à vis de leur diamètre, nous pouvons déduire les coefficients de la matrice inductance L_{ij} au moyen de formules analytiques [3]. Conformément à la figure (II-2) ces conditions s'écrivent

$$d_{ij}, h_i \gg d_i$$



d_i est le diamètre du conducteur i
 h_i sa hauteur par rapport au plan de masse
 d_{ij} est la distance entre les conducteurs i et j
 D_{ij} est la distance entre le conducteur i et l'image du conducteur j par rapport au plan de masse.

Figure (II-2)

Nous obtenons pour les coefficients inductance diagonaux

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi} \text{Log} \left(\frac{4h_j}{d_j} \right) \quad (\text{II-1})$$

pour les coefficients non diagonaux

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi} \text{Log} \left(\frac{D_{ij}}{d_{ij}} \right) \quad (\text{II-2})$$

avec
$$D_{ij} = \sqrt{d_{ij}^2 + 4 h_i h_j}$$

Dans l'hypothèse d'un milieu homogène, connaissant les coefficients L_{ij} , nous déterminons par inversion de la matrice inductance (L) la matrice capacité (C)

$$(C) = \frac{(L)^{-1}}{v^2} \quad (\text{II-3})$$

où v est la vitesse de propagation dans le diélectrique.

Afin de déterminer les limites de validité de ces formules, nous avons recherché plusieurs protocoles de mesures des paramètres linéiques et comparé les résultats obtenus par les formules analytiques aux paramètres linéiques mesurés. Nous développons dans la suite deux principales méthodes de mesure : celles utilisant des signaux harmoniques et celles utilisant des signaux temporels.

II-1-b Méthodes de mesures des paramètres primaires utilisant des signaux harmoniques

En ce qui concerne les méthodes de mesures des paramètres primaires dans le domaine fréquentiel, nous pouvons distinguer deux façons de procéder:

- la méthode, dite classique, consiste à faire des mesures de courant et de tension aux extrémités des conducteurs du faisceau avec différentes configurations de charges et d'en faire le rapport pour obtenir les paramètres primaires.

- la méthode, dite de substitution, consiste à mesurer à l'aide d'un pont des impédances d'entrée des conducteurs du faisceau connectés judicieusement et d'en déduire les paramètres primaires.

Méthode classique [10]

A ce faisceau de trois conducteurs, nous pouvons associer les systèmes d'équations suivantes, issus de la théorie des lignes couplées.

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{dV_1}{dz} = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 \\ -\frac{dV_2}{dz} = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 \\ -\frac{dV_3}{dz} = Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 \end{array} \right. \quad (\text{II-4})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{dI_1}{dz} = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 \\ -\frac{dI_2}{dz} = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 \\ -\frac{dI_3}{dz} = Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3 \end{array} \right. \quad (\text{II-5})$$

où Z_{ij} et Y_{ij} sont les coefficients des matrices impédance et admittance (Z) et (Y) de la théorie des lignes couplées.

Nous mesurons les impédances en court-circuitant les conducteurs à l'une de leurs extrémités selon le schéma ci-dessous. Figure (II-3)

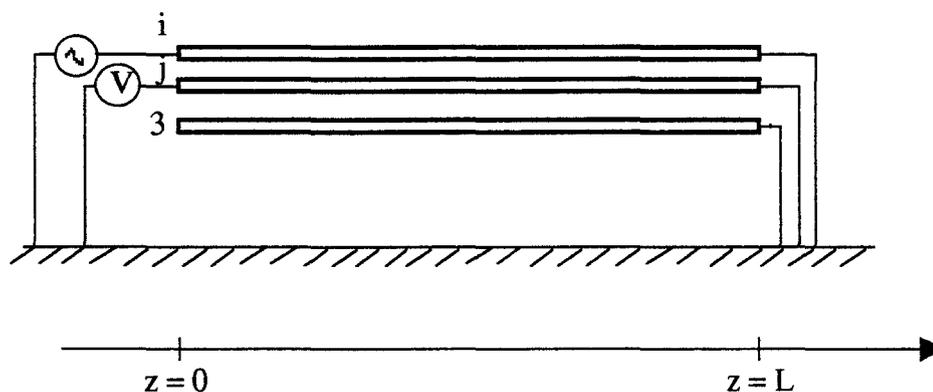


Figure (II-3)

En $z=L$, les trois conducteurs sont mis à la masse

$$V_1(L) = V_2(L) = V_3(L) = 0$$

En $z=0$, le conducteur "i" est alimenté par un générateur de tension ; nous mesurons la tension sur le conducteur "j" ; tous les autres conducteurs sont en l'air.

$$\forall k \in [1,3] \quad k \neq i \quad I_k = 0$$

Dans le cas des grandes longueurs d'onde, $\lambda \gg L$, le système (II-4) devient donc

$$\begin{cases} V_1(0) - V_1(L) = (Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3) L \\ V_2(0) - V_2(L) = (Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3) L \\ V_3(0) - V_3(L) = (Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3) L \end{cases} \quad (\text{II-6})$$

soit $V_j(0) = Z_{ji} I_i L$

Si nous négligeons la résistance linéique des conducteurs, Z_{ji} se réduit à l'expression $Z_{ji} = j L_{ji} \omega$ où $\omega = 2\pi f$

d'où la valeur de l'inductance linéique L_{ji}

$$L_{ji} = \frac{V_j(0)}{I_i} \frac{1}{j \omega L} \quad (\text{II-7})$$

Nous mesurons les admittances en laissant en l'air les conducteurs selon la figure ci-dessous. Figure (II-4)

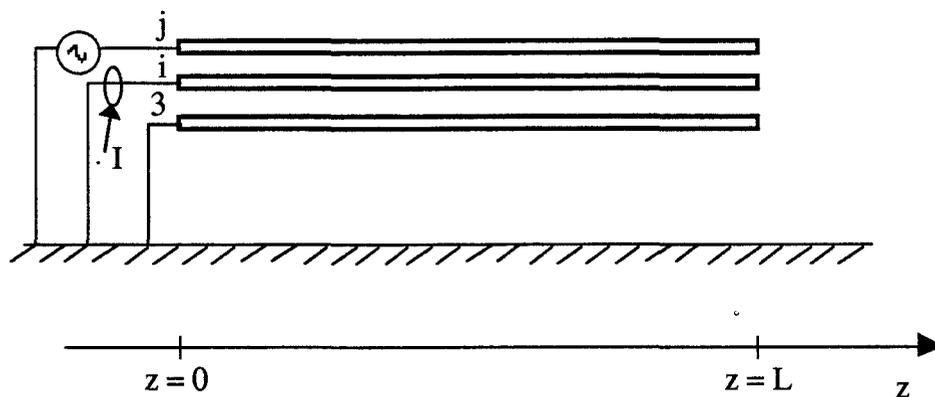


Figure (II-4)

En $z=L$, les trois conducteurs du faisceau sont en l'air.

$$I_1(L) = I_2(L) = I_3(L) = 0$$

En $z=0$, le conducteur "j" est alimenté par un générateur de tension ; nous mesurons le courant sur le conducteur "i" ; tous les autres conducteurs sont mis à la masse.

$$\forall k \in [1,3] \quad k \neq j \quad V_k = 0$$

Dans le cas des grandes longueurs d'onde, $\lambda \gg L$, le système (II-5) devient donc

$$\begin{cases} I_1(0) - I_1(L) = (Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3) L \\ I_2(0) - I_2(L) = (Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3) L \\ I_3(0) - I_3(L) = (Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3) L \end{cases} \quad (\text{II-8})$$

soit $I_i(0) = Y_{ij} V_j L$

Si nous négligeons la conductance linéique des conducteurs, l'expression de Y_{ij} est réduite à $Y_{ij} = j C_{ij} \omega$

d'où la valeur de la capacité linéique C_{ij}

$$C_{ij} = \frac{I_i(0)}{V_j} \frac{1}{j \omega L} \quad (\text{II-9})$$

Le banc de mesures utilisé pour évaluer les paramètres linéiques d'un faisceau de câbles est représenté Figure (II-5); ce banc est inspiré du dispositif proposé par AGRAWAL.

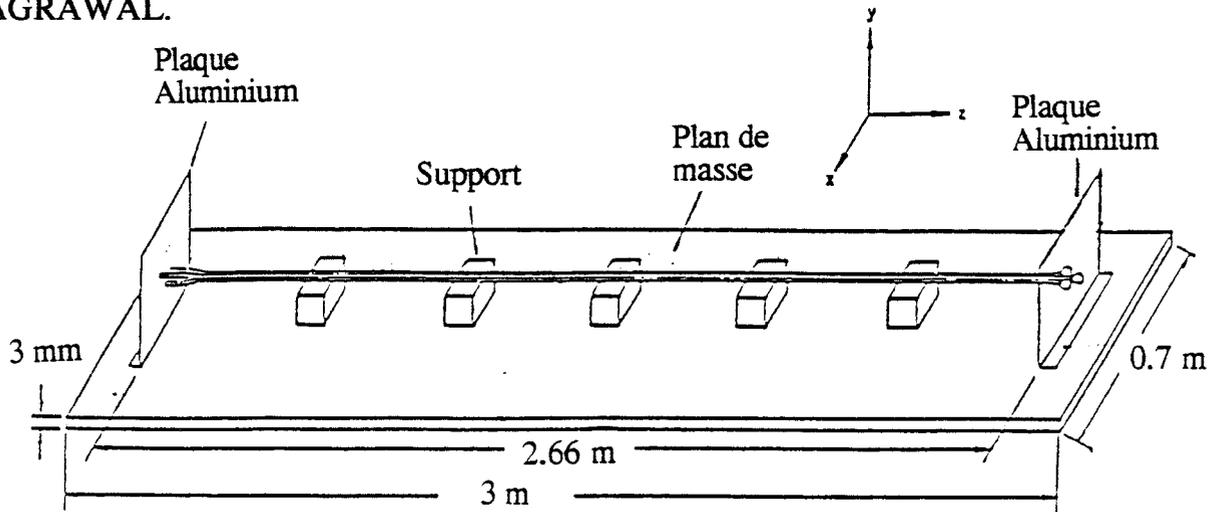


Figure (II-5)

Le faisceau de câbles est posé parallèlement à un plan de masse constitué d'une plaque d'aluminium d'épaisseur 3 mm, de longueur 3 m et de largeur 0,7 m, à l'aide de supports en PVC. Deux plaques d'aluminium sont placées aux extrémités des conducteurs facilitant ainsi les connexions.

Le schéma bloc correspondant au banc de mesures est représenté Figure (II-6). Il comprend un générateur de fréquence et un analyseur vectoriel à grande impédance d'entrée. Les courants sont mesurés à l'aide d'une sonde de courant passive large bande.

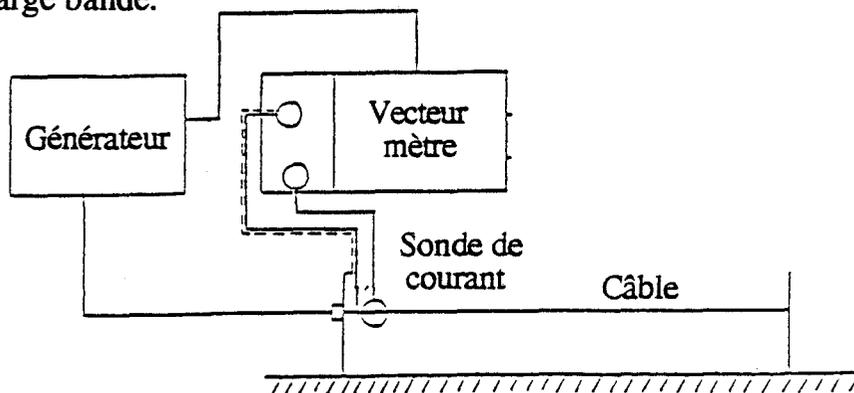


Figure (II-6)

Méthode par substitution :

Pour déterminer les paramètres linéiques d'un multifilaire, nous pouvons mesurer directement les impédances d'entrée des conducteurs au moyen d'un pont puis déduire les coefficients des matrices (L) et (C) par une méthodologie que nous nous proposons d'exposer.

Mesure de la matrice (L)

Les éléments diagonaux de la matrice (L) sont mesurés en suivant le montage de la figure (II-7). Tous les conducteurs sont court-circuités à leur extrémité en $z=L$. Le pont RLC est placé entre le conducteur "i" et le plan de masse.

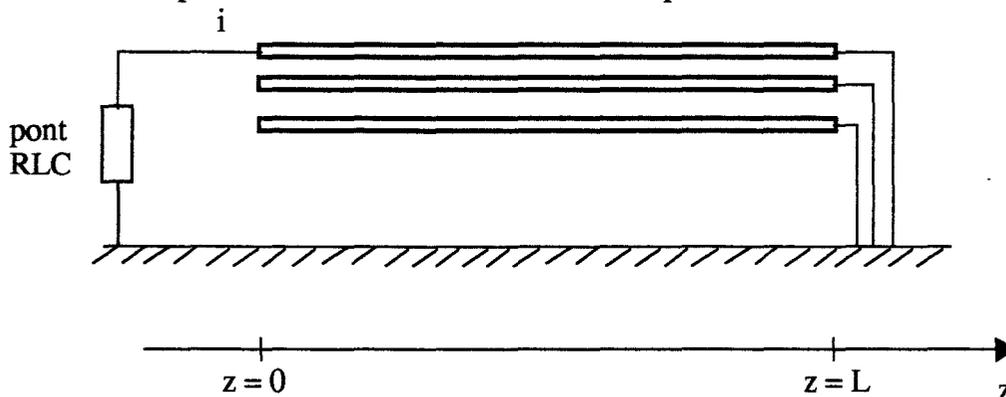


Figure (II-7)

Le pont RLC nous donne directement la valeur du coefficient L_{ij} .

Pour mesurer L_{ij} , il existe plusieurs alternatives. Nous développons ici le principe du procédé qui nous semble le plus facile d'emploi: nous relierons les deux conducteurs "i" et "j" à leur extrémité en $z=L$; les conducteurs voisins sont en l'air en $z=0$ et court-circuités au plan de masse en $z=L$. Nous pouvons par un dispositif flottant associé au pont RLC mesurer l'impédance d'entrée de l'ensemble "ij" court-circuité en extrémité. Figure (II-8)

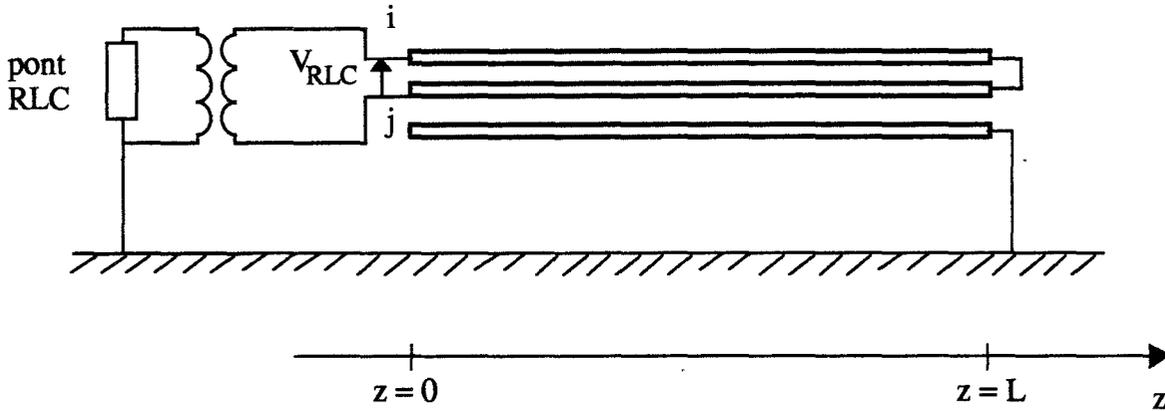


Figure (II-8)

Soit V_{RLC} , la tension mesurée, que nous pouvons écrire

$$V_{RLC} = V_i - V_j$$

dans laquelle V_i et V_j s'expriment

$$V_i = Z_{ii} I_i + Z_{ij} I_j$$

$$V_j = Z_{ji} I_i + Z_{jj} I_j$$

$$I_i = - I_j$$

où I_i et I_j sont les courants qui circulent dans ces conducteurs. Cette dernière relation résulte de la condition de l'excitation flottante. La matrice impédance (Z) est symétrique, $Z_{ij} = Z_{ji}$

d'où
$$V_{RLC} = (Z_{ii} + Z_{jj}) I_i - 2 Z_{ij} I_i$$

L'inductance donnée directement par la mesure peut donc s'exprimer

$$L_{mes} = L_{ii} + L_{jj} - 2 L_{ij}$$

Par substitution, nous déduisons aisément le coefficient L_{ij} , en ayant auparavant mesuré les coefficients diagonaux L_{ii} et L_{jj}

$$L_{ij} = \frac{L_{ii} + L_{jj} - L_{mes}}{2}$$

Mesure de la matrice (C)

Pour mesurer les éléments C_{ji} de la matrice (C), on fait usage de la configuration de la figure (II-9).

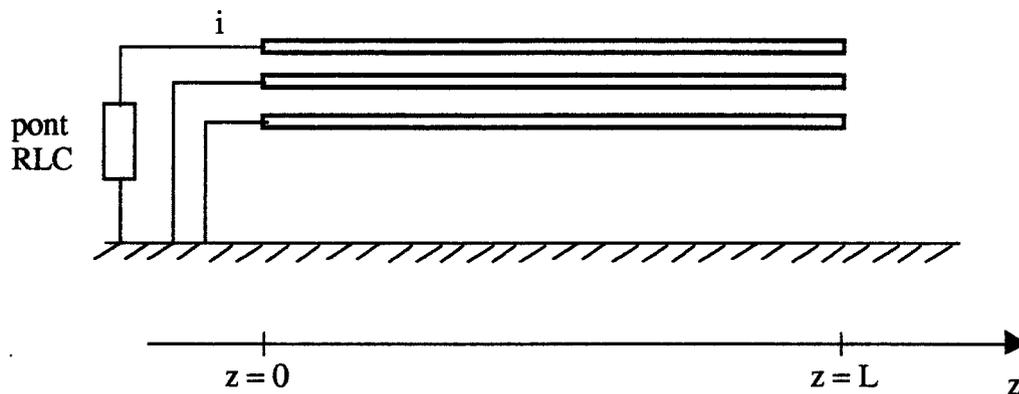


Figure (II-9)

Le coefficient C_{ji} de la matrice (C) est mesuré directement par le pont alors que l'évaluation de coefficient C_{ij} sera faite en connectant ensemble les conducteurs i et j comme l'indique la figure (II-10) et en mesurant l'admittance vue entre ces deux conducteurs et la référence.

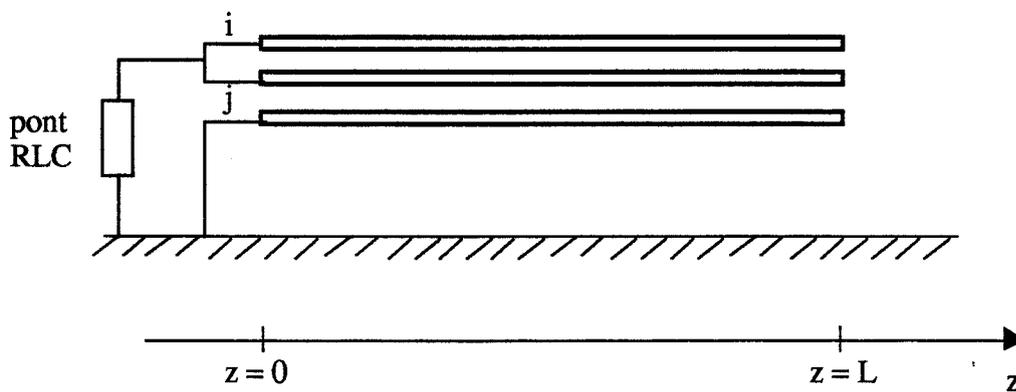


Figure (II-10)

Le courant I_{RLC} mesuré par le pont est égal à

$$I_{RLC} = I_i + I_j = (C_{ii} V_i - C_{ji} V_j) + (C_{jj} V_j - C_{ij} V_i)$$

$$V_i = V_j$$

La capacité mesurée par le pont, C_{mes} , vaut

$$C_{mes} = C_{ii} + C_{jj} - 2 C_{ij}$$

d'où on déduit, par substitution, la capacité C_{ij} à partir des capacités C_{ii} et C_{jj} déjà mesurées

$$C_{ij} = \frac{C_{ii} + C_{jj} - C_{mes}}{2}$$

Les capacités de couplage C_{ij} sont en général des valeurs assez faibles, difficiles à mesurer. Par ce procédé, nous espérons mesurer une capacité C_{mes} supérieure et obtenir une plus grande précision.

II-1-c Méthodes de mesures des paramètres primaires utilisant des signaux transitoires [11]

Contrairement aux méthodes exposées précédemment, l'usage de signaux transitoires tels que des échelons à front de montée rapide permettra de visualiser les phénomènes de propagation. En effet, comme nous l'avons signalé dans le premier chapitre, les différents modes de propagation peuvent être reconnus par leur vitesse de propagation et leur impédance caractéristique. C'est cette propriété qui est mise à profit pour extraire les paramètres primaires des lignes couplées.

L'équation des télégraphistes généralisée comme fonction du temps t et de la coordonnée longitudinale z devient le système d'équations aux dérivées partielles suivant:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} (V) = (L) \frac{\partial}{\partial t} (I) \\ -\frac{\partial}{\partial z} (I) = (C) \frac{\partial}{\partial t} (V) \end{cases} \quad \text{(II-10)}$$

où

$$(V) = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \quad (I) = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

et

$$(L) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \quad (C) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

Si les trois conducteurs sont immergés dans un milieu homogène, la matrice inductance (L) et la matrice capacité (C) sont reliées par la relation qui correspond à des vitesses modales toutes confondues soit:

$$(L)(C) = \frac{1}{v^2} \quad \text{(II-11)}$$

où v est la vitesse de propagation dans le milieu.

La famille des solutions générales du système (II-10) peut être obtenue facilement. En effet, nous pouvons définir six fonctions différentiables $g_k(t)$ et $f_k(t)$ où $k = 1, 2, 3$ formant les deux matrices colonnes suivantes

$$(f(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} \quad (g(t)) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix}$$

fonctions qu'on relie au vecteur courant et tension par les relations

$$(V) = [f(t - \frac{z}{v})] - [g(t - \frac{z}{v})] \quad (\text{II-12})$$

$$(I) = v(C) [f(t - \frac{z}{v})] + v(C) [g(t - \frac{z}{v})] \quad (\text{II-13})$$

Les fonctions $f_k(t - \frac{z}{v})$ représentent les ondes progressives alors que les fonctions $g_k(t + \frac{z}{v})$ représentent les ondes régressives.

Si nous admettons que les lignes sont de dimension infinie, il n'y a pas d'onde réfléchie; les fonctions g_k sont donc par principe nulles. Si nous raisonnons à l'origine du faisceau en $z=0$, nous pouvons exprimer le courant I_j ainsi que la tension V_j que nous trouvons sur l'élément "j" du faisceau soit

$$V_j = f_j(t) \quad (\text{II-14})$$

$$I_j = \sum_{i=1}^3 v C_{ji} f_i(t) \quad (\text{II-15})$$

Si nous formons maintenant le rapport de la tension et du courant, que nous notons Z_{ej} , il s'exprime

$$Z_{ej} = \frac{f_j(t)}{\sum_{i=1}^3 v C_{ji} f_i(t)} \quad (\text{II-16})$$

Ce rapport peut être identifié à l'impédance d'entrée présentée par le conducteur "j". Il est fonction des paramètres intrinsèques aux lignes C_{ji} mais aussi des fonctions $f_k(t)$ ($k=1,3$) étroitement liées aux conditions imposées à l'extrémité $z=0$ de ces lignes.

En effet, $f_k(t) = (V_k)_{z=0}$

Nous allons donc procéder à des mesures d'impédance à l'origine du faisceau formé de trois conducteurs pendant l'intervalle de temps $[0, 2\theta[$ à l'aide d'un réflectomètre, où θ est le temps de propagation sur la ligne; cet intervalle est choisi pour que l'onde rétrograde ne soit pas encore parvenue en $z = 0$; la ligne apparaît donc durant cet intervalle de temps comme un composant infini.

Pour déduire le coefficient C_{11} de la mesure de Z_{e1} , nous connectons le réflectomètre sur le conducteur 1 et court-circuitons tous les autres conducteurs au plan de masse comme il est indiqué sur la figure (II-11).

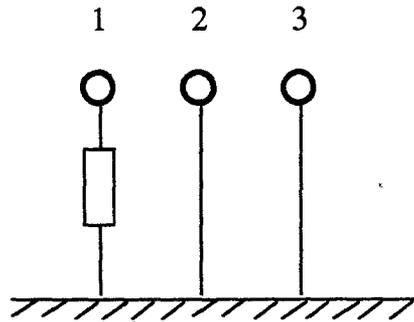


Figure (II-11)

L'impédance d'entrée du conducteur 1, mesurée par le réflectomètre, s'exprime conformément à la relation (II-16)

$$Z_{e1} = \frac{f_1(t)}{\sum_{i=1}^3 v C_{1i} f_i(t)} \quad (\text{II-17})$$

Les conditions imposées à l'entrée des autres conducteurs sont

$$\begin{aligned} f_2(t) &= V_2 = 0 \\ f_3(t) &= V_3 = 0 \end{aligned}$$

L'expression (II-17) se réduit alors à

$$Z_{e1} = \frac{1}{v C_{11}}$$

soit
$$C_{11} = \frac{1}{v Z_{e1}}$$

Les coefficients C_{22} et C_{33} sont mesurés de la même façon.

Pour mesurer le coefficient C_{12} , nous connectons le réflectomètre sur le conducteur 1 lui-même relié au conducteur 2. Nous relierons le conducteur 3 à la masse. Figure (II-12).

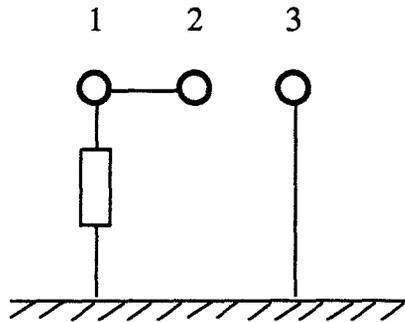


Figure (II-12)

L'impédance d'entrée du conducteur 1, mesurée par le réflectomètre, s'exprime

$$Z_e^m = \frac{V}{I}$$

avec

$$V = V_1 = V_2$$

$$I = I_1 + I_2$$

En usant des relations (II-14) et (II-15), nous pouvons écrire que

$$Z_e^m = \frac{f_1(t)}{\sum_{i=1}^3 v C_{1i} f_i(t) + \sum_{i=1}^3 v C_{2i} f_i(t)} \quad (\text{II-18})$$

Les conditions à l'entrée du conducteur 3 sont telles que

$$f_3(t) = V_3 = 0$$

$$f_1(t) = V_1 = f_2(t) = V_2 = V$$

La relation (II-18) se réduit à

$$Z_e^m = \frac{1}{v(C_{11} + C_{11} + 2C_{12})}$$

d'où

$$C_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{Z_e^m} - C_{11} - C_{22} \right)$$

Les coefficients C_{13} et C_{23} sont obtenus de la même façon, en faisant une permutation circulaire. Une fois que la matrice $[C]$ est complètement déterminée, nous déduisons les coefficients de la matrice inductance par l'inversion

$$(L) = \frac{(C)^{-1}}{v^2}$$

Si les trois conducteurs baignent dans un milieu non homogène, cette méthode doit être révisée et il faut alors avoir recours à la théorie modale et procédé par la méthode proposée par Agrawal [12], [13].

Considérons un ensemble de trois conducteurs entourés de diélectrique et parallèle à un plan de masse. La théorie des lignes nous permet d'écrire

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} [V(z,t)] = (L) \frac{\partial}{\partial t} [I(z,t)] \\ -\frac{\partial}{\partial z} [I(z,t)] = (C) \frac{\partial}{\partial t} [V(z,t)] \end{cases}$$

Si nous supposons que trois modes non dégénérés se propagent sur ces conducteurs à des vitesses de propagation différentes. Nous diagonalisons le produit des matrices (L) (C) où v_1, v_2 et v_3 sont les vitesses des modes propres.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{v_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{v_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{v_3^2} \end{pmatrix} = (T_v)^{-1} (L) (C) (T_v) = (T_i)^{-1} (C) (L) (T_i)$$

(T_v) et (T_i) sont les matrices de passage formées des vecteurs propres

Si on définit la matrice des vitesses (v) comme étant reliée aux vitesses propres par la relation

$$(v) = (T_v) \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix} (T_v)^{-1}$$

(L) et (C) s'exprimeront alors

$$\begin{aligned} (L) &= (v)^{-1} (Z_0) \\ (C) &= (Y_0) (v)^{-1} \end{aligned}$$

où (Z_0) et (Y_0) sont les matrices impédance et admittance caractéristique des modes propres.

La méthode consiste à mesurer les vitesses de propagation des modes, les vecteurs propres de la matrice des vitesses (v) et la matrice admittance caractéristique par réflectométrie. Cette méthode est difficile à mettre en oeuvre. Nous ne l'exposerons donc pas en détail et nous nous contenterons d'en définir les trois grandes étapes:

- pour déterminer la matrice admittance caractéristique, nous procédons de la même manière que pour un milieu homogène, c'est-à-dire comme nous l'avons exposé précédemment.

- la détermination des vitesses de propagation des modes s'effectue au moyen d'un réflectomètre en alimentant l'un des conducteurs, par un échelon qui génère les N modes. En laissant en l'air l'autre extrémité de ce conducteur, il n'y a pas de conversion de mode. Les modes se propageant à des vitesses différentes, ils se réfléchissent à des instants différents que nous pouvons mesurer au réflectomètre.

- les vecteurs propres de la matrice vitesse (v) sont déterminés à partir de mesures d'amplitude de chaque mode présent sur chaque conducteur du faisceau lorsqu'un seul conducteur est alimenté par un échelon de tension.

Cette méthode n'est pas très conviviale ; en effet, bien souvent, les modes se propagent à des vitesses très peu différentes qu'il est difficile de discerner au réflectomètre. Nous avons donc très vite abandonné cette méthode.

Ces différents protocoles de mesures de paramètres primaires ont été testés sur un bifilaire. Cette phase expérimentale nous permettra d'une part, d'évaluer la précision de chacune des méthodes de mesures, en comparant les paramètres linéiques mesurés aux paramètres linéiques calculés par les formules analytiques (II-1) et (II-2). D'autre part, ces formules analytiques n'étant données que pour des caractéristiques géométriques des conducteurs assez particulières, elle nous permettra d'apprécier l'influence de ces paramètres géométriques sur la validité des expressions analytiques. Nous allons d'abord déterminer les paramètres linéiques d'un bifilaire immergé dans un milieu homogène, puis nous examinerons le cas où les deux conducteurs baignent dans un milieu hétérogène.

II-2 Détermination des paramètres linéiques d'un bifilaire

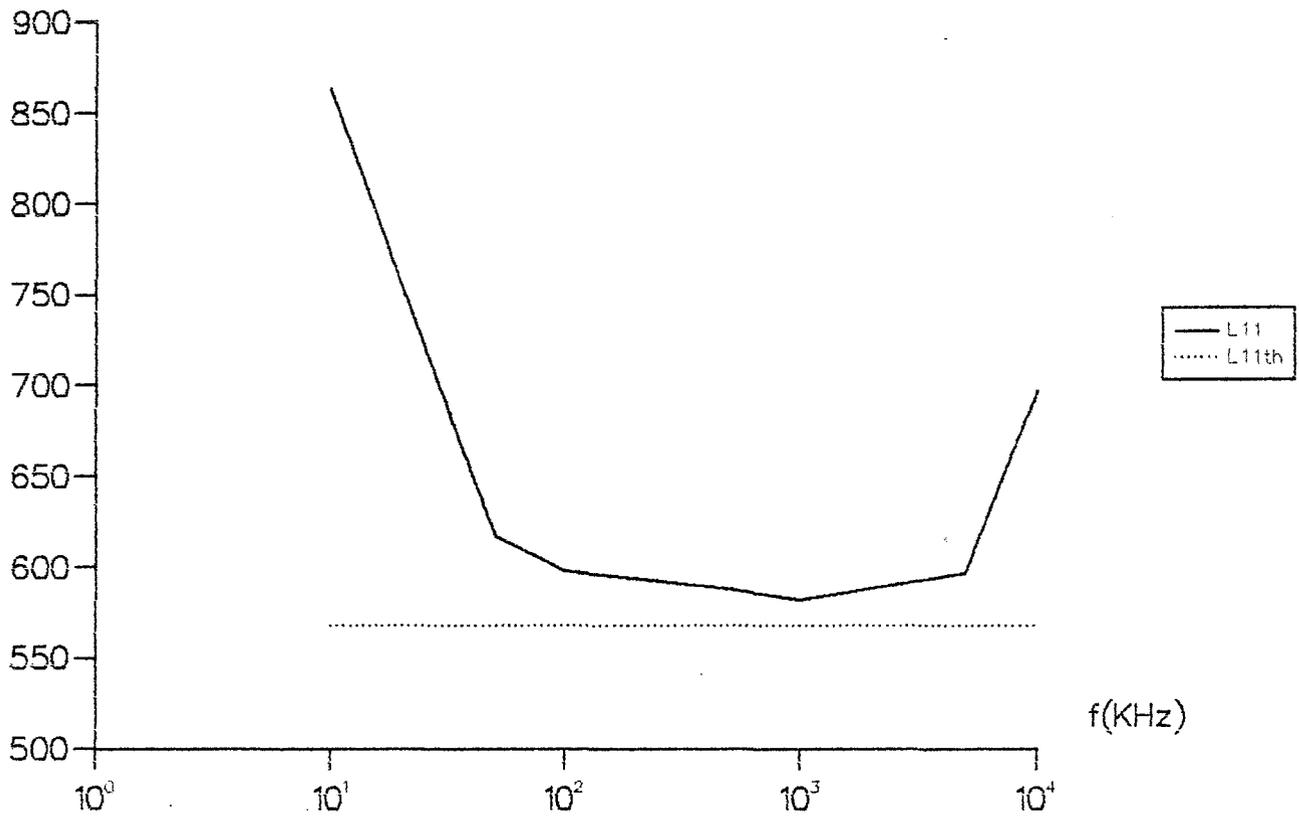
II-2-a Conducteur en milieu homogène

Si nous mesurons les paramètres primaires d'un bifilaire en utilisant des signaux harmoniques, nous devons cerner le domaine de fréquences dans lequel nous effectuerons des mesures correctes.

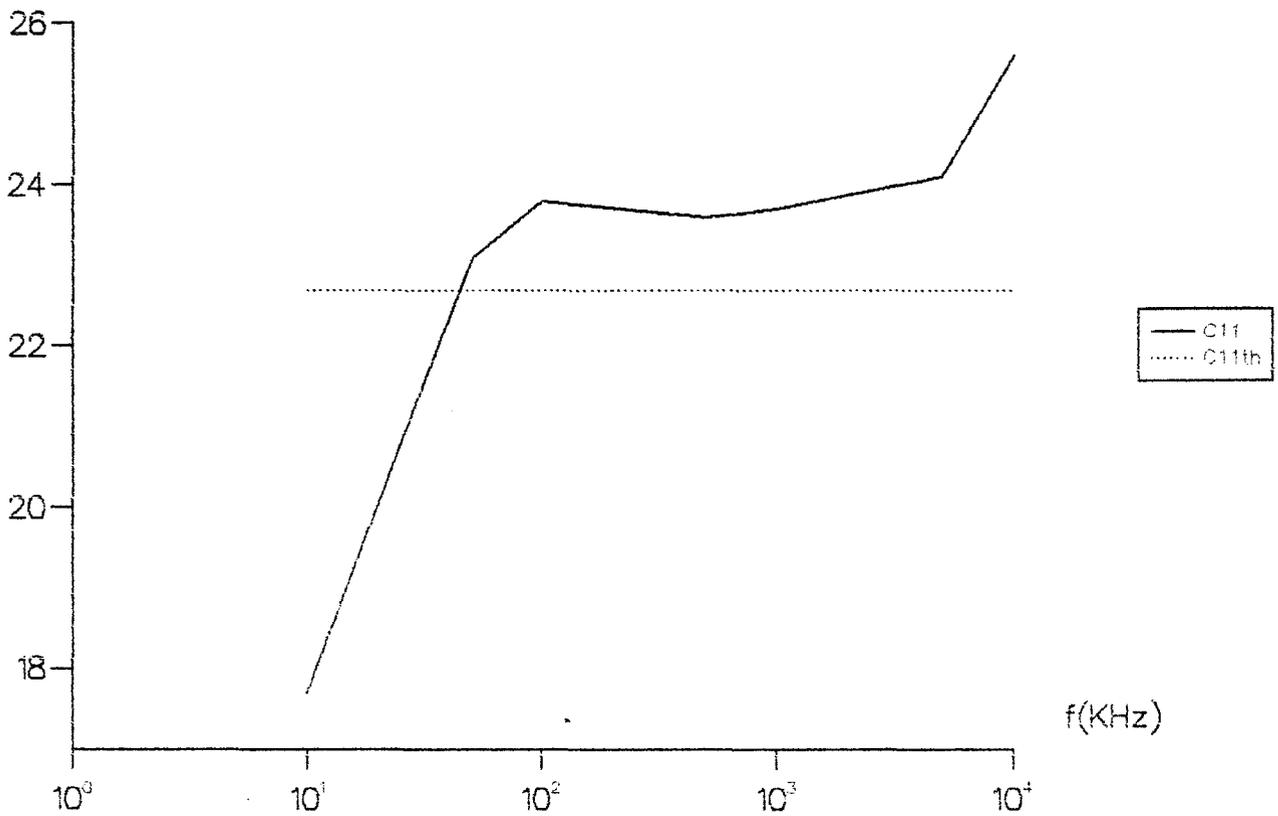
Considérons un conducteur de diamètre 7 mm, de longueur $L = 2$ m 66 et situé à 30 mm au-dessus du plan de référence. Les courbes de la planche PL (II-1) représentant les évolutions de la capacité et de l'inductance linéique de ce conducteur en fonction de la fréquence dans la bande 100 kHz - 1 MHz. Les paramètres linéiques

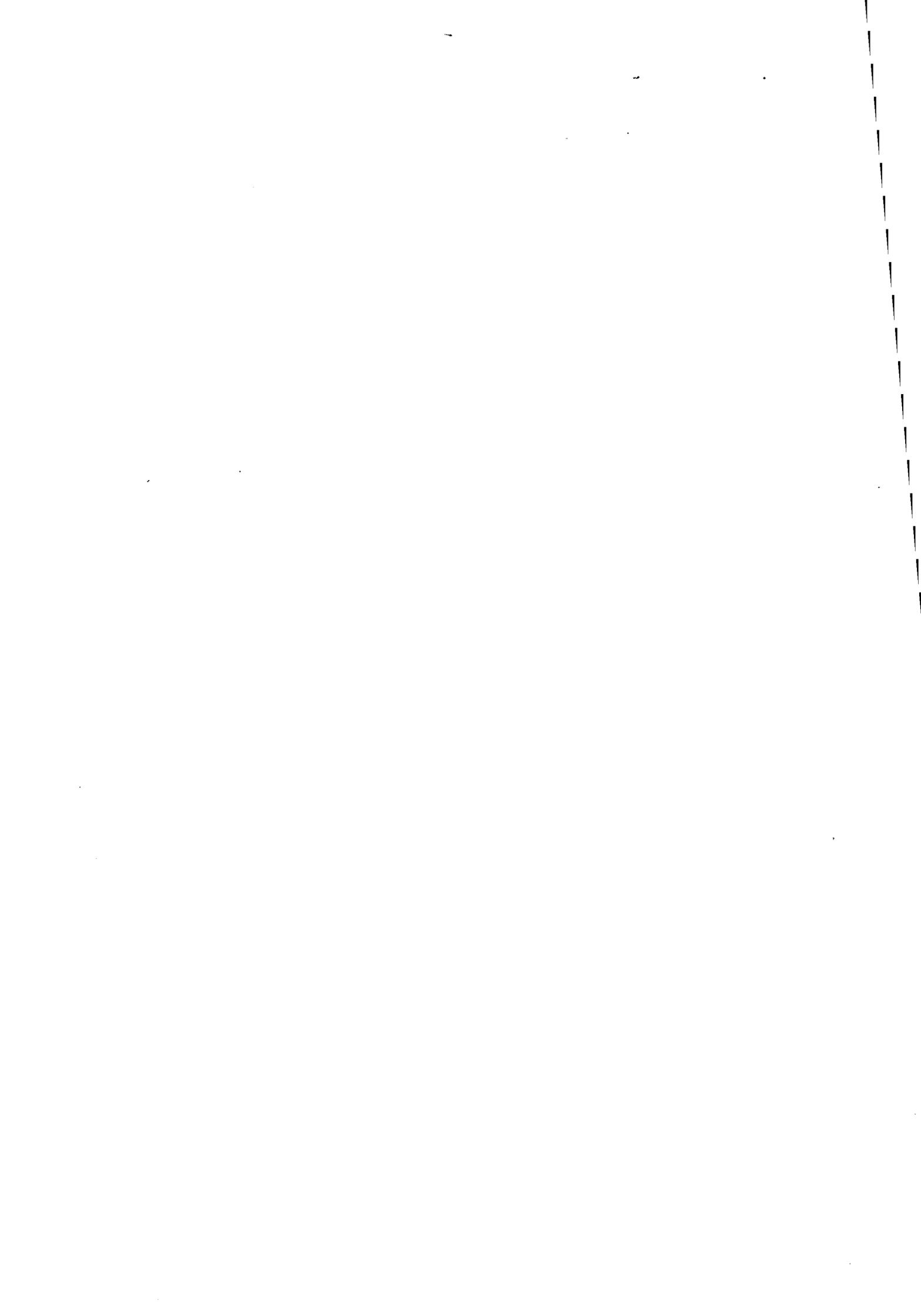


Inductance lineique (nH/m)



Capacite lineique (pF/m)





sont mesurés par la méthode classique utilisant des signaux harmoniques et calculés par les formules (II-1), (II-2) et (II-3).

- en basses fréquences, de l'ordre de quelques dizaines de kHz, nous obtenons des écarts, qui sont dûs à la résistance du conducteur qui n'est pas négligeable devant la composante réactive de l'impédance linéique. De plus, les courants et tensions que nous mesurons sont de faible amplitude. L'erreur commise sur ces valeurs est donc plus sensible.

- en hautes fréquences, de l'ordre de quelques dizaines de MHz, les effets de propagation se manifestent; il en résulte des erreurs systématiques parfaitement visibles sur la courbe. Nous pouvons d'ailleurs prévoir ces phénomènes en faisant usage de simulation au moyen des approches théoriques exposées plus haut .

Le choix de la fréquence, à laquelle nous effectuerons les mesures, est donc lié à deux contraintes.

- la résistance linéique doit être négligeable devant la composante réactive de l'impédance linéique ;
- la longueur d'onde, λ , doit être grande devant la longueur L du conducteur.

Les expériences menées sur cet échantillon amènent par conséquent à explorer les mesures autour de 500 kHz où l'incidence de ces deux facteurs demeure négligeable. Afin d'évaluer l'influence des paramètres géométriques sur les formules analytiques (II-1) et (II-2), considérons deux conducteurs placés parallèlement au plan de masse à des hauteurs h_1 et h_2 . Le conducteur 1 a un diamètre $d_1 = 7$ mm, le conducteur 2 a un diamètre $d_2 = 8$ mm, les conducteurs sont espacés de $d_{12} = 40$ mm. Faisons varier les hauteurs h_1 et h_2 . Les valeurs des paramètres linéiques mesurées et théoriques sont rassemblées dans les tableaux ci-dessous .Tableaux (II-1) et (II-2)

h_1 (mm)	h_2 (mm)	L_{11} (nH/m)	L_{22} (nH/m)	L_{12} (nH/m)	L_{11th} (nH/m)	L_{22th} (nH/m)	L_{12th} (nH/m)
100.	100.5	843.	822.	336.	809.	782.	326.
29.7	30.2	595.	579.	116.	566.	543.	117.
13.5	14.	444.	433.	40.7	408.	389.	38.7
8.	8.5	339.	325.8	15.	304.	289.4	15.7
3.57	4.07	142.5	144.2	1.8	142.6	142.1	3.6

Tableau (II-1)

h_1 (mm)	h_2 (mm)	C_{11} (pF/m)	C_{22} (pF/m)	C_{12} (pF/m)	C_{11th} (pF/m)	C_{22th} (pF/m)	C_{12th} (pF/m)
100.	100.5	19.1	19.4	- 7.2	19.5	20.2	- 8.1
29.7	30.2	23.4	24.6	- 4.3	24.3	25.3	- 5.2
13.5	14.	31.6	32.7	- 2.7	32.4	34.	- 3.2
8.	8.5	38.5	40.3	- 1.6	43.3	45.5	- 2.35
3.57	4.07	219.1	197.6	- 0.85	92.1	92.4	- 2.31

Tableau (II-2)

Les valeurs mesurées et théoriques des inductances linéiques figurent sur la planche PL (II-2) ; les capacités linéiques mesurées et théoriques figurent sur la planche PL (II-3). Les paramètres mesurés sont assez proches des résultats théoriques. L'erreur relative commise sur les inductances linéiques et sur les capacités linéiques propres est en général inférieure à 5 %. Cette erreur relative augmente quand on rapproche les conducteurs du plan de référence. Quant à la capacité linéique de couplage, C_{12} , l'erreur relative est plus importante, environ de 10 à 20 %.

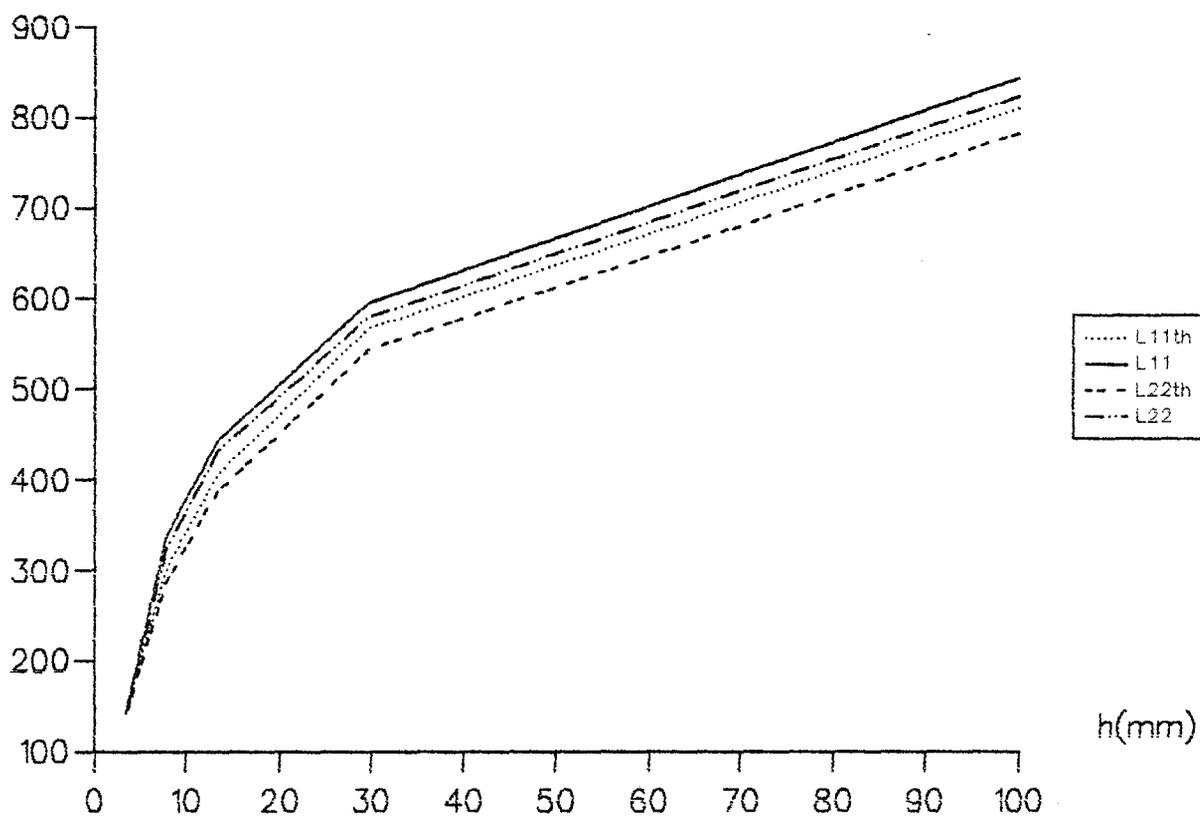
La mesure des paramètres linéiques, pour la hauteur la plus faible $h_1 = 3,57$ mm, a été réalisée en intercalant une feuille de papier entre les conducteurs et le plan de masse. L'erreur commise sur les deux paramètres C_{11} et C_{22} s'expliquent peut-être par la présence du papier, dont la permittivité n'est pas prise en compte dans les formules théoriques.

Considérons maintenant les deux mêmes conducteurs ($d_1 = 7$ mm, $d_2 = 8$ mm) placés à des hauteurs fixées $h_1 = 30$ mm et $h_2 = 32,5$ mm par rapport au plan de masse et faisons varier la distance d_{12} entre les conducteurs. Les valeurs mesurées et théoriques des paramètres linéiques sont rassemblées dans le tableaux ci-dessous. Tableaux (II-3) et (II-4)

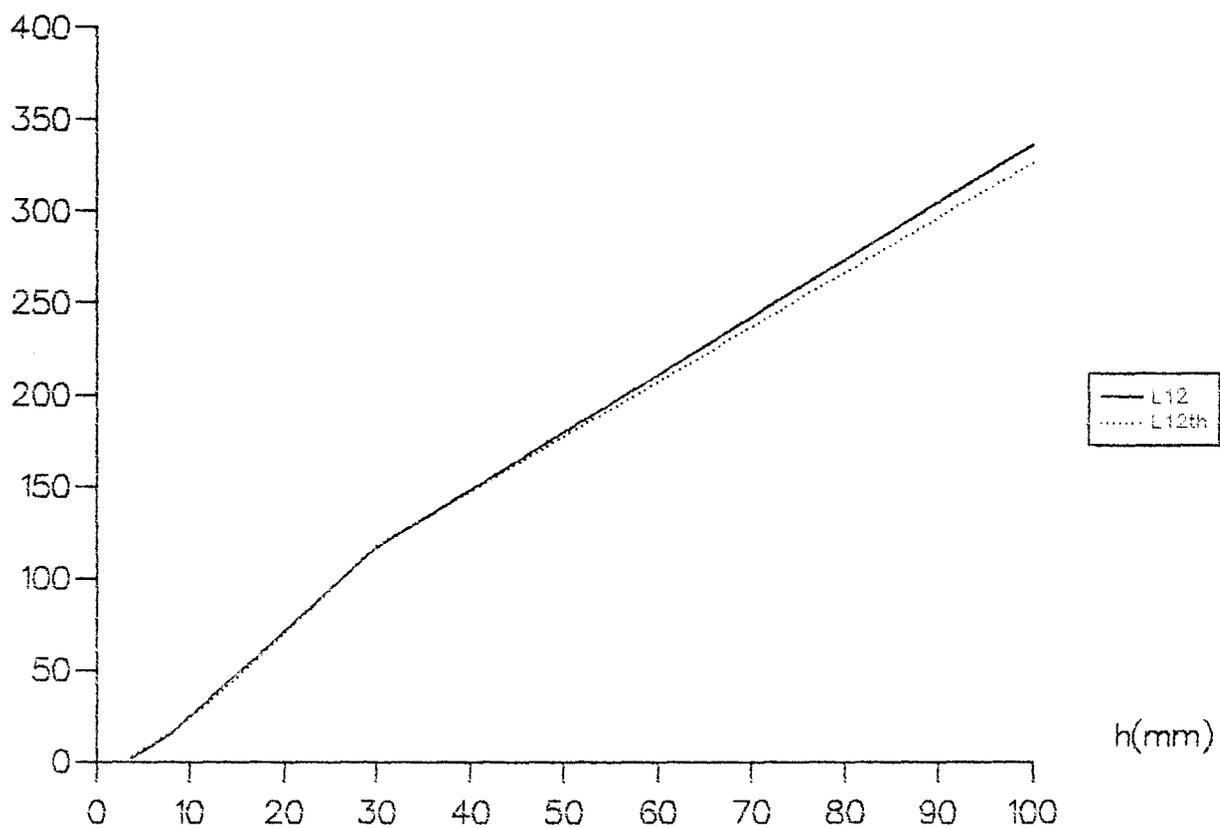
d_{12} (mm)	L_{11} (nH/m)	L_{22} (nH/m)	L_{12} (nH/m)	L_{11th} (nH/m)	L_{22th} (nH/m)	L_{12th} (nH/m)
70.2	589.	587.3	56.2	568	557.6	58.3
30.8	589.2	586.	152.7	568	557.6	163.1
17.	586.	576.	258.	568	557.6	268.
12.2	582.	578.	317.	568	557.6	330.
8.1	547.	555.5	411.3	568	557.6	410.2

Tableau (II-3)

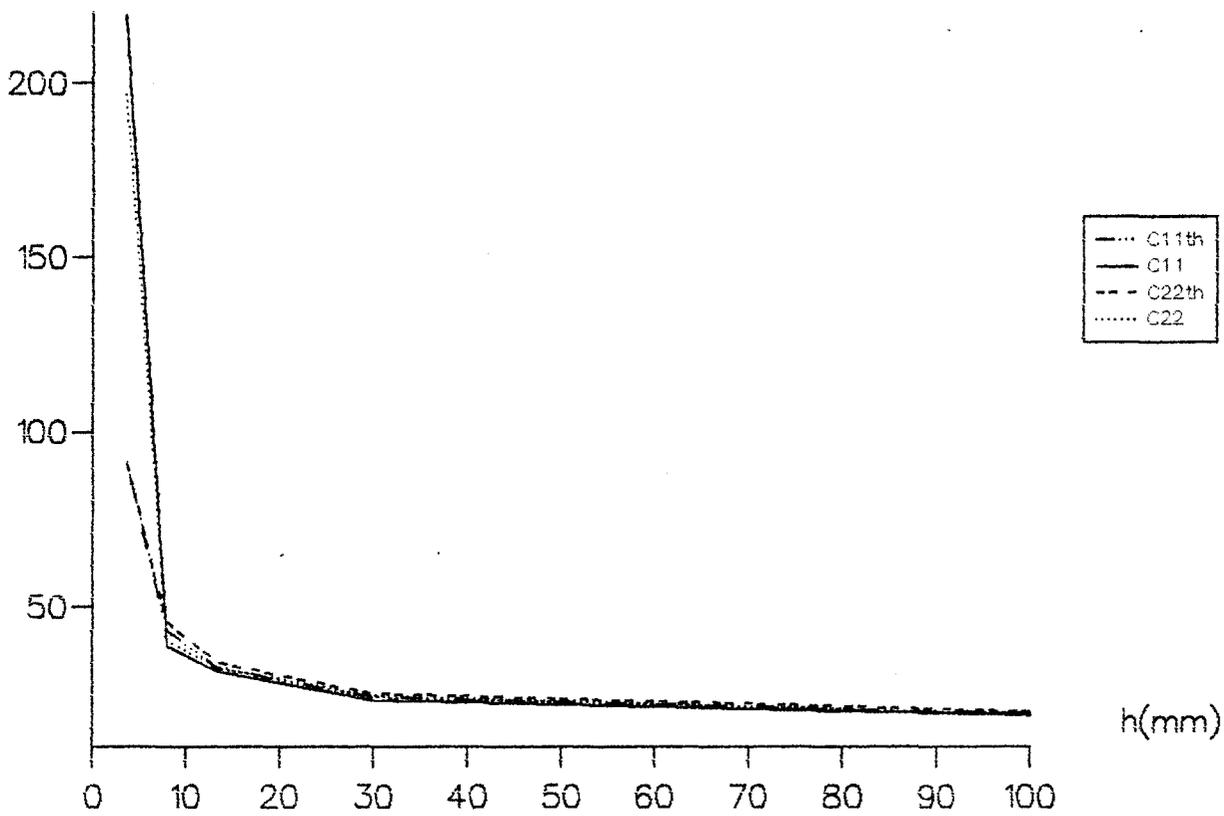
Inductances lineiques (nH/m)



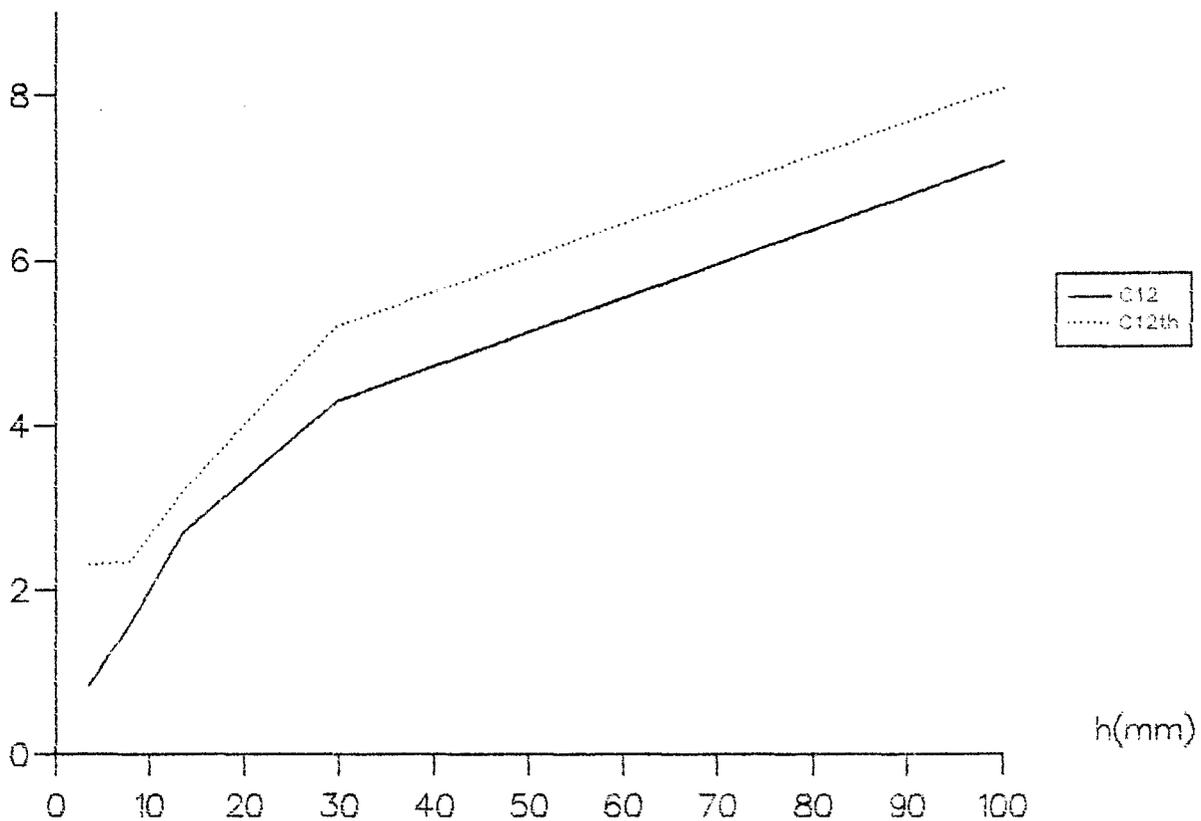
Inductances lineiques (nH/m)

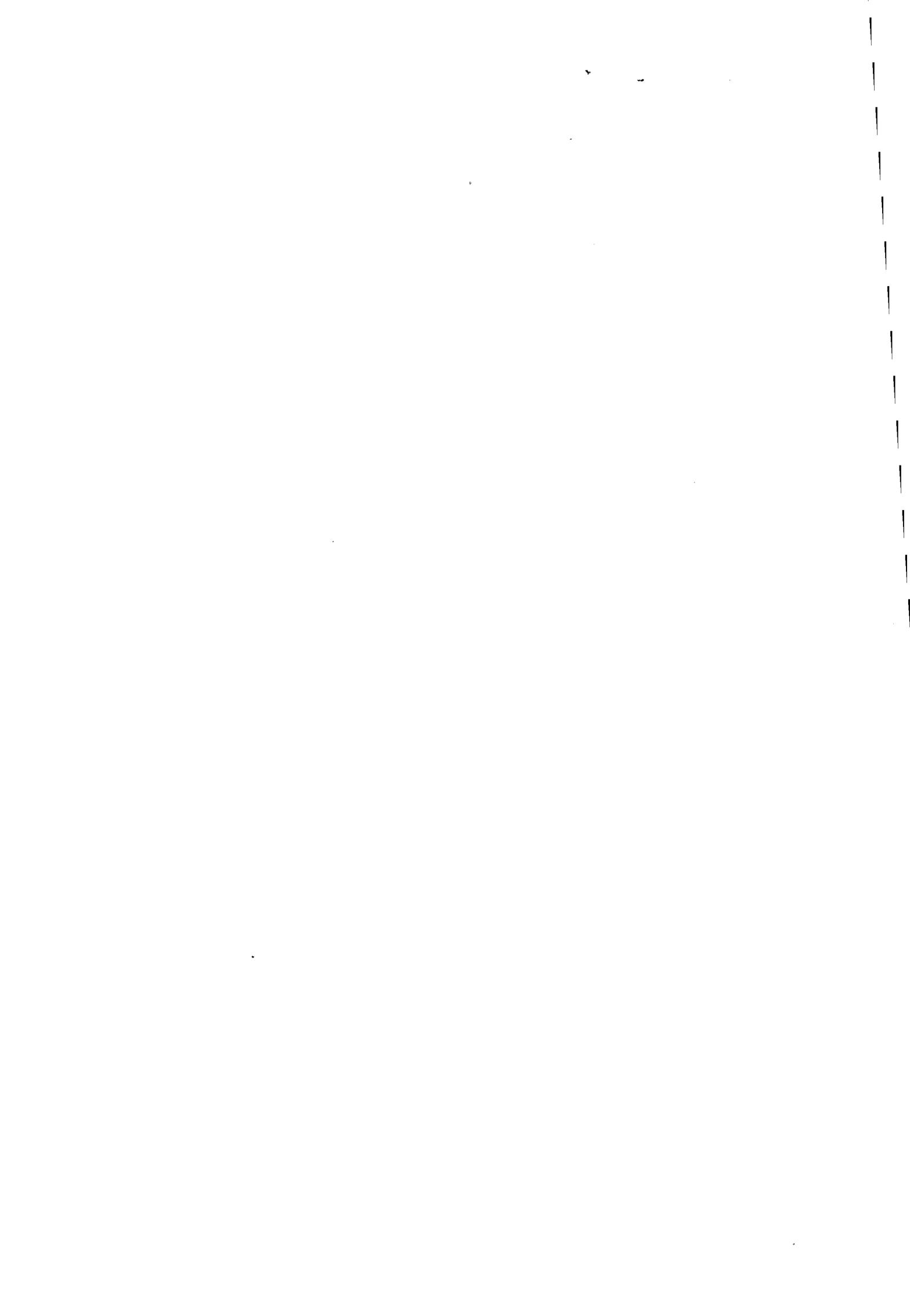


Capacites lineiques (pF/m)



Capacites lineiques (pF/m)





d ₁₂ (mm)	C ₁₁ (pF/m)	C ₂₂ (pF/m)	C ₁₂ (pF/m)	C _{11th} (pF/m)	C _{22th} (pF/m)	C _{12th} (pF/m)
70.2	23.6	23.3	- 2.14	23.3	23.8	- 2.44
30.8	25.1	24.7	- 6.4	25.2	25.7	- 7.3
17.	29.7	29.2	- 13.1	29.8	30.3	- 14.3
12.2	35.	35.05	- 19.2	35.2	35.9	- 20.9
8.1	74.6	75.	- 60.6	49.2	50.2	- 36.2

Tableau (II-4)

Les valeurs mesurées et théoriques des inductances linéiques sont représentées sur la planche PL (II-4) et celles des capacités linéiques figurent sur la planche PL (II-5).

L'erreur relative commise sur les inductances linéiques et les capacités linéiques propres est de l'ordre de 5 %. Quant à la capacité linéique de couplage, elle est un peu plus importante.

En ce qui concerne la mesure effectuée pour la distance la plus petite entre les deux conducteurs égale à 8,1 mm, l'erreur relative commise sur les capacités linéiques est de l'ordre de 50 %, alors que celle sur les inductances linéiques reste de l'ordre de 5 %. Pour une distance entre conducteurs aussi faible, la mesure des capacités linéiques devient difficile. Dans le cas particulier où le rapport d_1/d_{12} est égal à 0.86 et n'est donc plus négligeable devant 1, calculons le produit (L) (C).

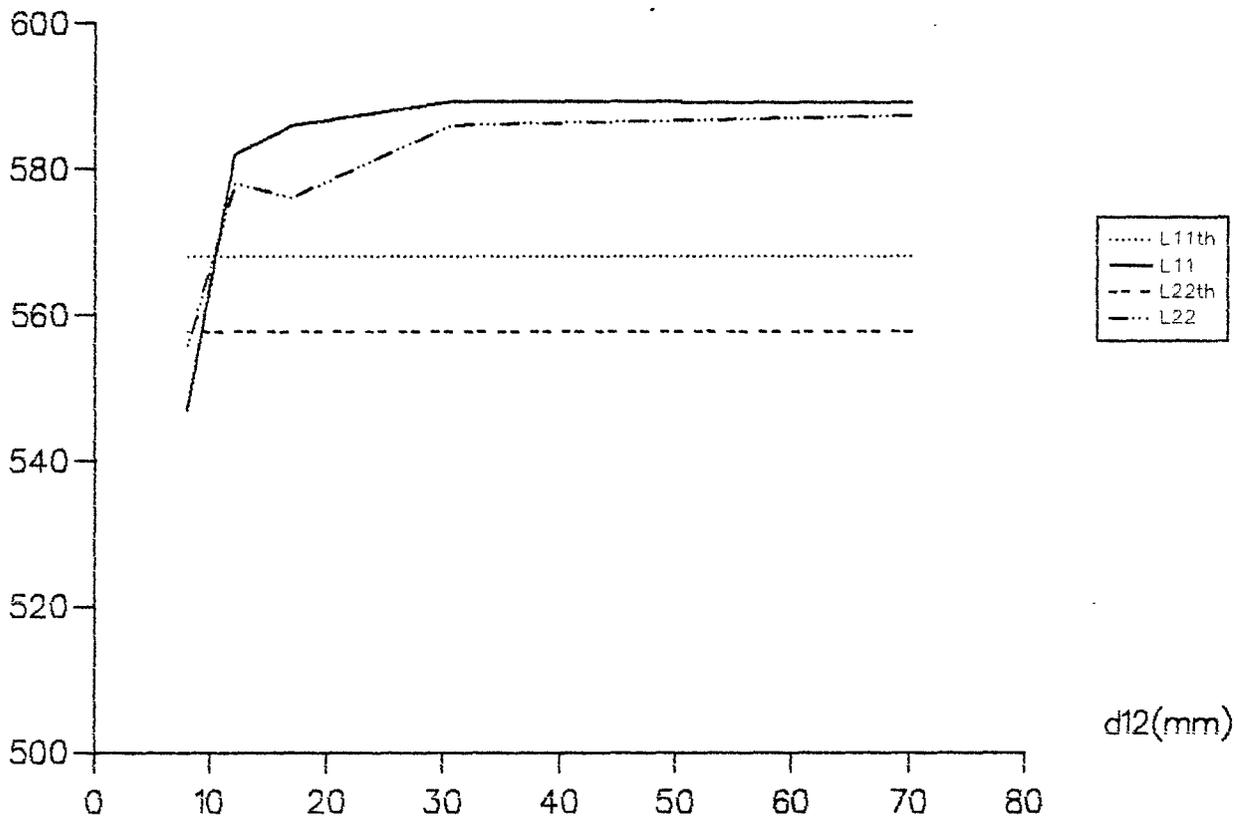
$$(L) (C) = \begin{pmatrix} L_{11} C_{11} + L_{12} C_{21} & L_{11} C_{12} + L_{12} C_{22} \\ L_{21} C_{11} + L_{22} C_{21} & L_{21} C_{12} + L_{22} C_{22} \end{pmatrix}$$

$$(L) (C) = \begin{pmatrix} 1.58 & -0.23 \\ -0.3 & 1.67 \end{pmatrix} \times 10^{-17}$$

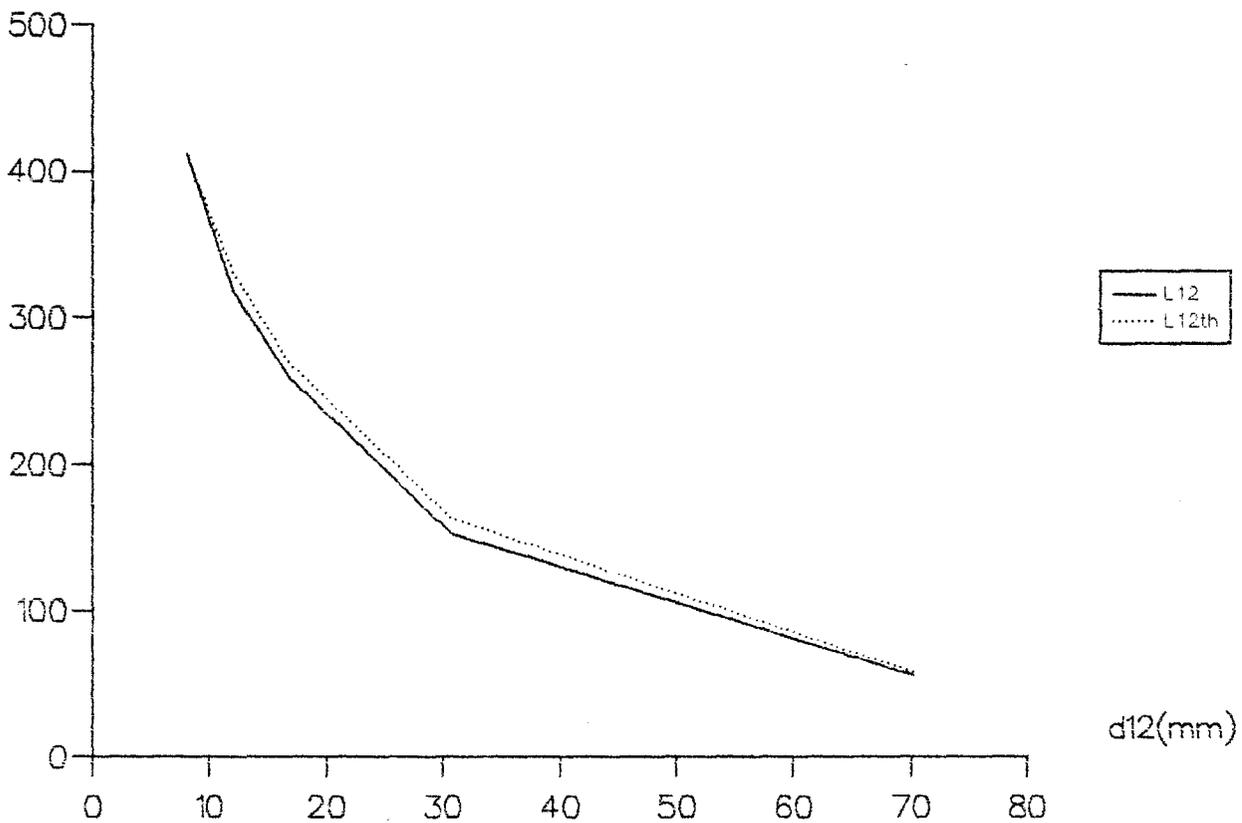
Les termes extra-diagonaux ne sont plus négligeables devant les termes diagonaux. Le produit (L) (C) n'est plus diagonal.

Ceci peut s'expliquer par la présence d'entretoises nécessaires pour maintenir une distance fixée aussi petite entre les deux conducteurs. Aussi des résultats plus proches de la théorie peuvent être obtenus par inversion de la matrice inductance mesurée.

Inductances lineiques (nH/m)

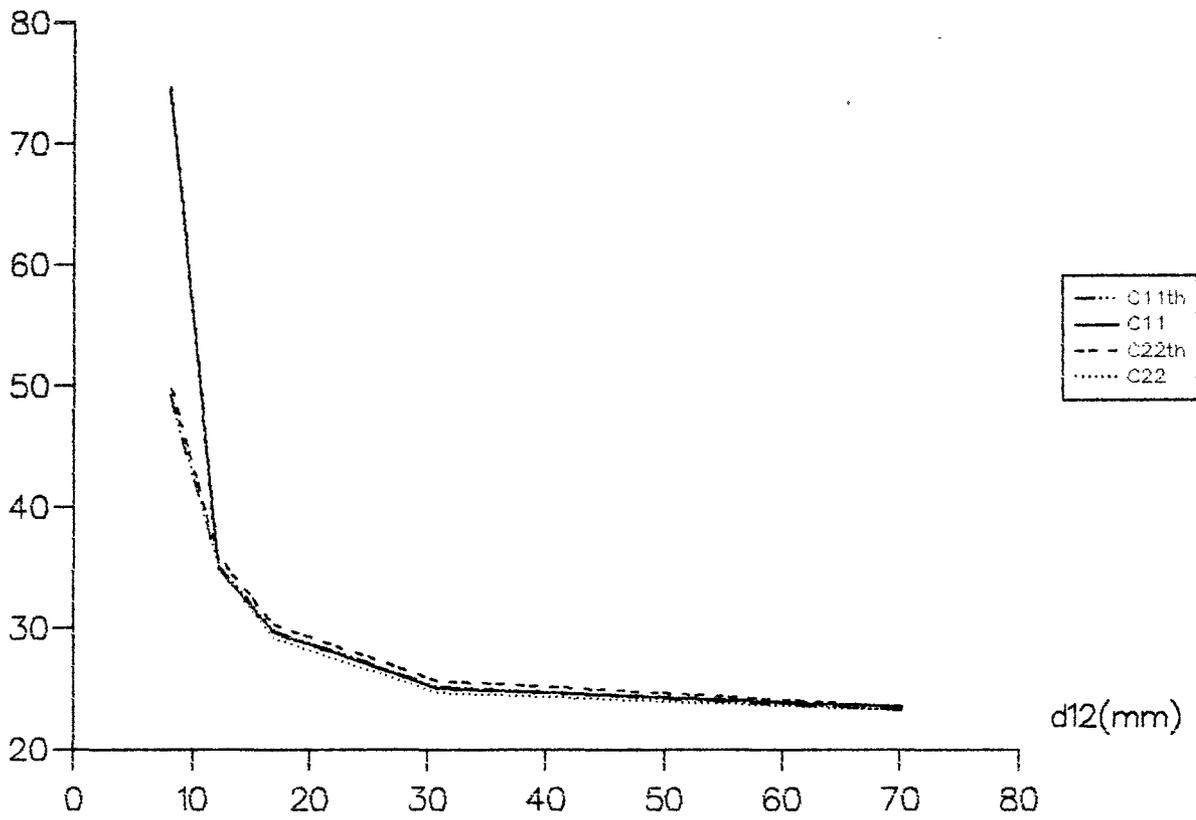


Inductances lineiques (nH/m)

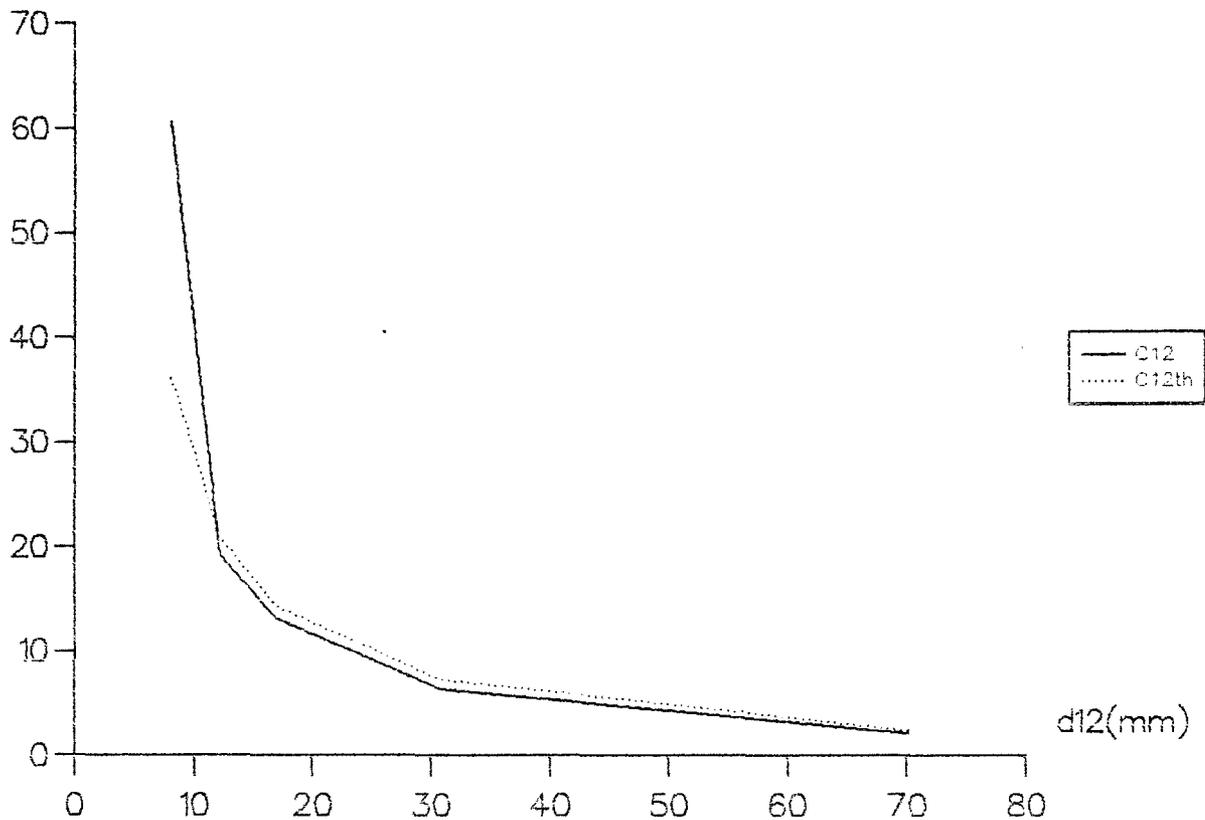




Capacites lineiques (pF/m)



Capacites lineiques (pF/m)



En présence de deux conducteurs, la propriété (II-3) nous donne les capacités linéiques suivantes :

$$C_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{L_{22}}{\Delta} \quad C_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{L_{11}}{\Delta}$$

$$C_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{L_{12}}{\Delta} \quad C_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{L_{21}}{\Delta}$$

$$\Delta = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$$

Avec les inductances linéiques mesurées pour $d_{12} = 8,1$ mm, nous obtenons

$$C_{11} = 45.8 \text{ pF/m}$$

$$C_{12} = C_{21} = -33.9 \text{ pF/m}$$

$$C_{22} = 45.1 \text{ pF/m}$$

L'erreur relative commise sur les capacités linéiques est cette fois de l'ordre de celle commise sur les inductances linéiques, c'est-à-dire 5 %.

Quand les conducteurs sont très proches, les capacités linéiques mesurées ne sont plus satisfaisantes. Il est préférable d'obtenir ces paramètres par inversion de la matrice inductance mesurée.

Il semble donc que les formules analytiques (II-1) et (II-2) restent valables même si le rapport distance entre conducteurs diamètre ou hauteur diamètre est inférieur à 2. Toutefois, nous aboutissons à cette conclusion pour un bifilaire et nous verrons, dans le troisième chapitre, que nous devons la mettre en doute lorsque le nombre de conducteurs augmente

II- 2- b Conducteurs gainés de diélectrique:

Lorsque le bifilaire est immergé dans un milieu non homogène, nous pouvons toujours déduire les paramètres linéiques par des rapports de tension et courant mesurés. Toutefois, pour le cas particulier du bifilaire, il est plus facile d'introduire les paramètres linéiques de mode commun et de mode différentiel, effectuer une mesure de ces paramètres et d'en déduire les paramètres primaires. Cette méthode inspirée de solutions permettant de caractériser la diaphonie entre paires [14] semble donner de meilleurs résultats, comme nous le verrons dans le paragraphe (II-3).

Pour un bifilaire, la théorie des lignes donne le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} -\frac{dV_1}{dz} = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ -\frac{dV_2}{dz} = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases} \quad (\text{II-19})$$

$$\begin{cases} -\frac{dI_1}{dz} = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ -\frac{dI_2}{dz} = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases} \quad (\text{II-20})$$

où z est la variable longitudinale.

Introduisons les courant de mode commun i_c et tension de mode commun v_c en utilisant des définitions

$$i_c = \frac{I_1 + I_2}{2} \quad (\text{II-21})$$

$$v_c = \frac{V_1 + V_2}{2} \quad (\text{II-22})$$

Nous pouvons également définir les courant et tension de mode différentiel

$$i_d = \frac{I_1 - I_2}{2} \quad (\text{II-23})$$

$$v_d = \frac{V_1 - V_2}{2} \quad (\text{II-24})$$

En introduisant ces variables, les systèmes (II-19) et (II-20) s'écrivent

$$\begin{cases} -\frac{dv_c}{dz} = z_c i_c + z_{12} i_d \\ -\frac{dv_d}{dz} = z_{21} i_c + z_d i_d \end{cases} \quad (\text{II-25})$$

$$\begin{cases} -\frac{di_c}{dz} = y_c v_c + y_{12} v_d \\ -\frac{di_d}{dz} = y_{21} v_c + y_d v_d \end{cases} \quad (\text{II-26})$$

z_c et y_c sont les impédance et admittance linéiques attachées au mode commun alors que z_d et y_d sont les impédance et admittance linéiques attachées au mode différentiel. z_{12} et y_{12} sont les impédance et admittance qui traduisent le couplage intermodal.

Ces coefficients s'expriment

$$\begin{cases} z_c = \frac{1}{2} (Z_{11} + Z_{22} + 2 Z_{12}) \\ z_d = \frac{1}{2} (Z_{11} + Z_{22} - 2 Z_{12}) \\ z_{12} = \frac{1}{2} (Z_{11} - Z_{22}) \end{cases} \quad (\text{II-27})$$

$$\begin{cases} y_c = \frac{1}{2} (Y_{11} + Y_{22} + 2 Y_{12}) \\ y_d = \frac{1}{2} (Y_{11} + Y_{22} - 2 Y_{12}) \\ y_{12} = \frac{1}{2} (Y_{11} - Y_{22}) \end{cases} \quad (\text{II-28})$$

Pour le cas des grandes longueurs d'onde, $\lambda \gg L$, où L est la dimension longitudinale du bifilaire, les systèmes (II-25) et (II-26) s'écrivent

$$\begin{cases} v_c(0) - v_c(L) = (z_c i_c + z_{12} i_d) L \\ v_d(0) - v_d(L) = (z_{21} i_c + z_d i_d) L \end{cases} \quad (\text{II-29})$$

$$\begin{cases} i_c(0) - i_c(L) = (y_c v_c + y_{12} v_d) L \\ i_d(0) - i_d(L) = (y_{21} v_c + y_d v_d) L \end{cases} \quad (\text{II-30})$$

$$\begin{cases} i_c(0) - i_c(L) = (y_c v_c + y_{12} v_d) L \\ i_d(0) - i_d(L) = (y_{21} v_c + y_d v_d) L \end{cases} \quad (\text{II-31})$$

$$\begin{cases} i_c(0) - i_c(L) = (y_c v_c + y_{12} v_d) L \\ i_d(0) - i_d(L) = (y_{21} v_c + y_d v_d) L \end{cases} \quad (\text{II-32})$$

Mesure de z_d :

Nous adoptons le montage de la figure (II-13)

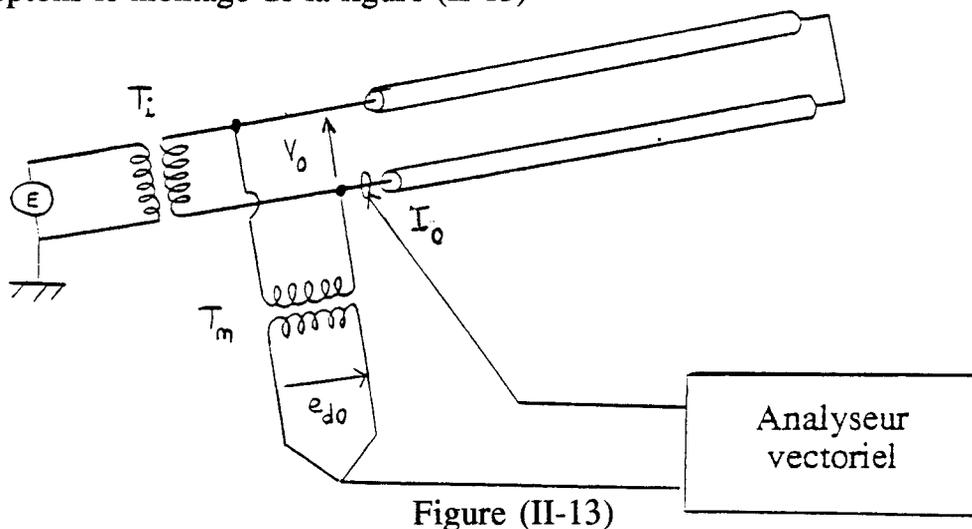


Figure (II-13)

La chaîne de mesure comporte un générateur de fréquence et un analyseur vectoriel à grande impédance d'entrée. Les courants sont mesurés au moyen d'une sonde de courant passive large bande. T_i et T_m sont des transformateurs dont le coefficient de transfert est tel que $e_{d0} = \frac{V_0}{2}$

Par ce montage, nous avons réalisé les conditions $v_d(L) = 0$ et $i_c = 0$. La relation (II-30) donne donc

$$z_d = \left. \frac{v_d(0)}{L i_d} \right|_{i_c = 0}$$

Les relations (II-23) et (II-24) nous permettent d'écrire avec les notations de la figure (II-14)

$$i_d = I_0 \quad \text{et} \quad v_d(0) = \frac{V_0}{2}$$

d'où
$$z_d = \frac{v_d(0)}{L i_d} = \frac{e_{d0}}{L I_0}$$

Mesure de y_d :

Nous reprenons le même montage mais en ne court-circuitant pas cette fois-ci les deux conducteurs en $z=L$.

$$v_c = 0 \quad \text{et} \quad i_d(L) = 0$$

La relation (II-32) donne

$$y_d = \frac{i_d(0)}{L v_d} = \frac{I_0}{L e_{d0}}$$

Mesure de z_c :

Nous adoptons le montage de la figure (II-14)

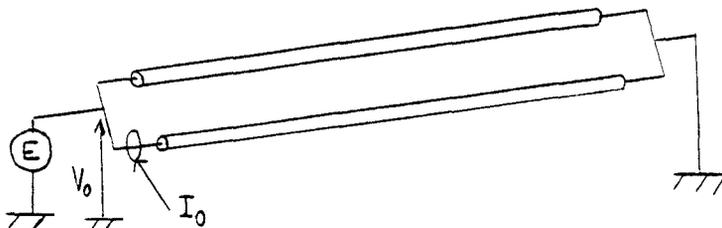


Figure (II-14)

et nous obtenons les conditions suivantes

$$i_d = 0 \quad \text{et} \quad v_c(L) = 0$$

La relation (II-26) devient

$$z_c = \left. \frac{v_c(0)}{L i_c} \right|_{i_d=0}$$

En respectant les notations de la figure (II-14), les relations (II-21) et (II-22) nous donnent les expressions de i_c et $v_c(0)$.

$$i_c = \frac{I_0}{2} \quad \text{et} \quad v_c(0) = V_0$$

d'où
$$z_c = \frac{v_c(0)}{L i_c} = \frac{2 V_0}{L I_0}$$

Mesure de y_c :

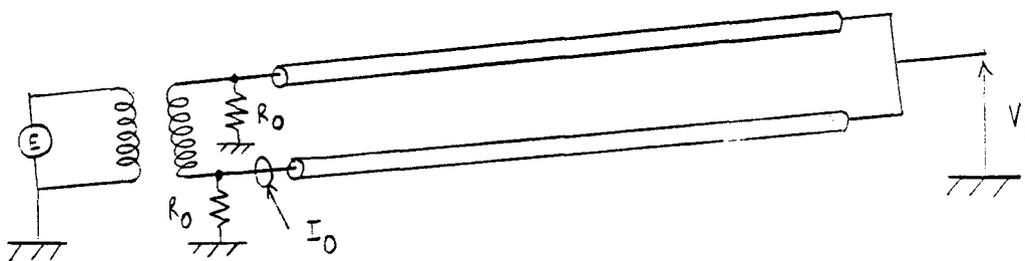
La mesure de y_c se fait avec le même montage en court-circuitant les deux conducteurs à leur extrémité $z=L$ mais en les laissant en l'air.

Dans ces conditions, $i_d(L) = 0$ et $v_d = 0$

La relation (II-31) donne

$$y_c = \frac{i_c(0)}{L v_c} = \frac{1}{L} \frac{I_0}{2 V_0}$$

Mesure de z_{12} :



avec $R_0 \ll Z_c$, Z_c impédance caractéristique des conducteurs

Figure (II-15)

Deux résistances de valeur identique $R_0 = 50 \Omega$ sont connectées conformément au schéma de la figure (II-15) pour réaliser les deux conditions suivantes:

$$i_c = 0 \quad \text{et} \quad v_c(0) = 0$$

La relation (II-29) devient

$$z_{12} = - \left. \frac{v_c(L)}{L i_d} \right|_{i_c=0}$$

En respectant les notations de la figure (II-15), z_{12} s'exprime

$$z_{12} = - \frac{1}{L} \frac{V'_0}{I_0}$$

Mesure de y_{12} :

y_{12} peut être mesurée au moyen du montage de la figure (II-16).

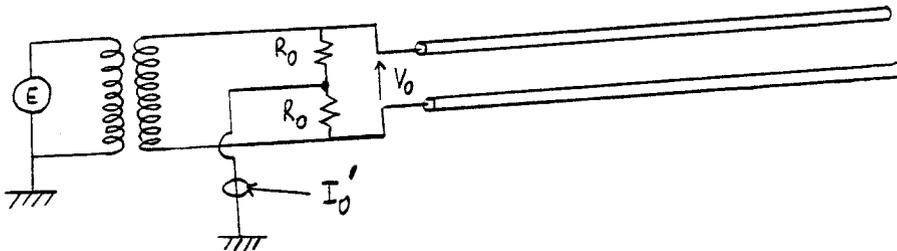


Figure (II-16)

Nous obtenons les conditions

$$i_c(L) = 0 \quad \text{et} \quad v_c = 0$$

L'équation (II-31) nous donne l'expression de y_{12} suivante

$$y_{12} = - \left. \frac{i_c(0)}{L v_d} \right|_{v_c=0}$$

Avec les notations du schéma de la figure (II-16), les relations (II-21) et (II-24) nous donnent

$$v_d = \frac{V_0}{2} \quad \text{et} \quad i_c(0) = I'_0$$

$$y_{12} = - \frac{2 I'_0}{L V_0}$$

Mettons en application cette méthode de mesure sur un bifilaire formé de deux conducteurs enrobés de diélectrique dont les paramètres géométriques sont récapitulés sur le schéma de la figure (II-17)

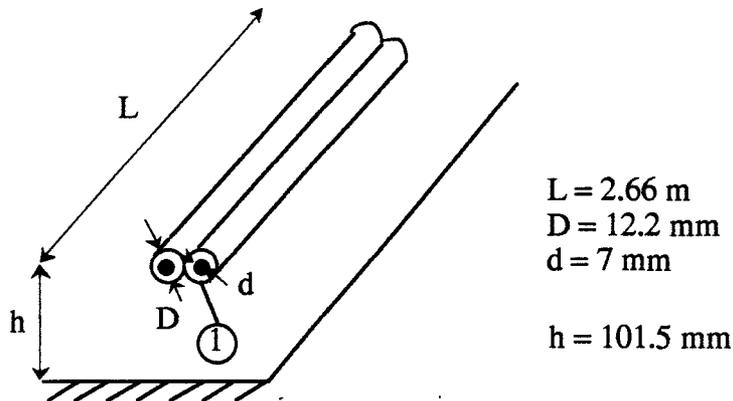


Figure (II-17)

A la fréquence de 500 kHz, nous avons obtenu les paramètres linéiques indiqués dans le tableau (II-5) par les trois méthodes différentes utilisant des signaux harmoniques : méthode directe, méthode qui consiste à déduire les paramètres primaires des mesures de paramètres linéiques de mode commun et de mode différentiel et méthode par substitution.

	L_{11} (nH/m)	L_{12} (nH/m)	C_{11} (pF/m)	C_{12} (pF/m)
Méthode par substitution	845.8	584.8	37.6	- 28.7
Méthode directe	848.3	559.3	39.9	- 29.9
Méthode par mesure de l_c , c_c , l_d et c_d	881.	636.	38.8	- 29.2

Tableau (II-5)

Les trois méthodes donnent des résultats très proches les uns des autres. Nous verrons dans le paragraphe suivant qu'une mesure d'impédance d'entrée globale du faisceau peut apporter quelques informations sur l'impact des imprécisions commises sur ces paramètres.

II-3 Confrontation de l'impédance d'entrée mesurée et de l'impédance d'entrée modélisée pour un conducteur du faisceau

Pour apprécier l'incidence des erreurs commises dans la détermination des paramètres linéiques inductance et capacité, nous avons cherché à exciter les différents modes qui se propagent sur l'ensemble des conducteurs. Pour mettre en évidence le couplage entre les différents conducteurs, nous pouvons procéder de trois façons différentes.

- soit nous excitons l'un des conducteurs et nous mesurons les parasites qui sont induits aux extrémités des autres conducteurs

- soit nous simulons une illumination par une onde plane, grâce à un strip-line. Cette solution est assez difficile à mettre en oeuvre

- soit nous mesurons l'impédance d'entrée d'un conducteur quelconque du faisceau, dont les conditions de charge sont indiquées sur la figure (II-18).

C'est cette dernière solution que nous avons retenue pour sa facilité de mise en oeuvre, dans la mesure où elle peut former une première indication sur l'incidence des mécanismes de couplage entre conducteurs.

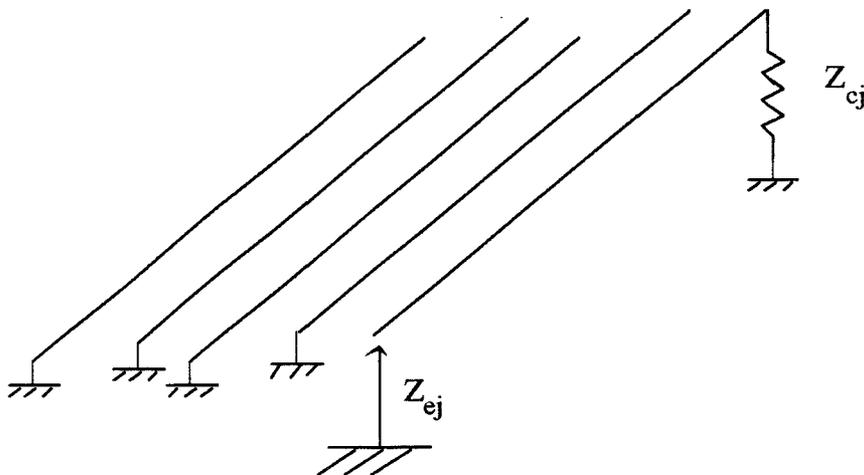


Figure (II-18)

Tous les conducteurs sont court-circuités au plan à l'une de leurs extrémités et ouvert à l'autre extrémité excepté le conducteur j qui est connecté à son extrémité sur une impédance Z_{cj} définie par

$$Z_{cj} = \sqrt{\frac{L_{jj}}{\sum_{i=1}^N C_{ji}}}$$

Z_{cj} est une extension de la définition de l'impédance caractéristique d'un conducteur seul au-dessus d'un plan de masse. Cette valeur ne correspond pas à l'impédance caractéristique définie pour chaque mode propre. Cependant en chargeant le conducteur j sur cette impédance, nous évitons d'importantes réflexions à l'extrémité

de ce conducteur et nous pouvons alors évaluer l'influence des charges d'extrémité des autres conducteurs c'est-à-dire le couplage entre les différentes lignes.

Comme nous allons le voir sur l'exemple suivant, cette dissymétrie de charges va engendrer une propagation multimodale, qui donnera naissance à des mécanismes de résonances. Considérons un ensemble de cinq conducteurs identiques de diamètre 7 mm et de longueur $L = 2.66$ m, immergés dans un milieu homogène de permittivité relative $\epsilon_r = 1$. Ils sont connectés au plan de masse comme il est indiqué sur la figure (II-18) et leurs caractéristiques géométriques sont récapitulées sur la figure (II-19)

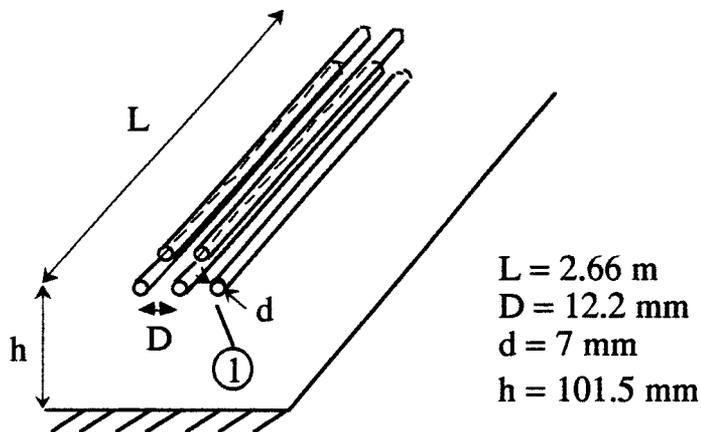


Figure (II-19)

Sur la planche PL(II-6), nous avons tracé en trait plein l'évolution de l'impédance d'entrée du conducteur 1 en fonction de la fréquence, les paramètres linéiques étant calculés à l'aide des formules (II-1), (II-2) et (II-3). La courbe en pointillés représente l'impédance d'entrée de ce même conducteur que l'on a éloigné des quatre autres d'une distance de 100 mm. Les résonances sont évidemment moins importantes dans ce dernier cas.

Nous aurions pu choisir la configuration de charge suivante différente de celle indiquée sur la figure (II-18)

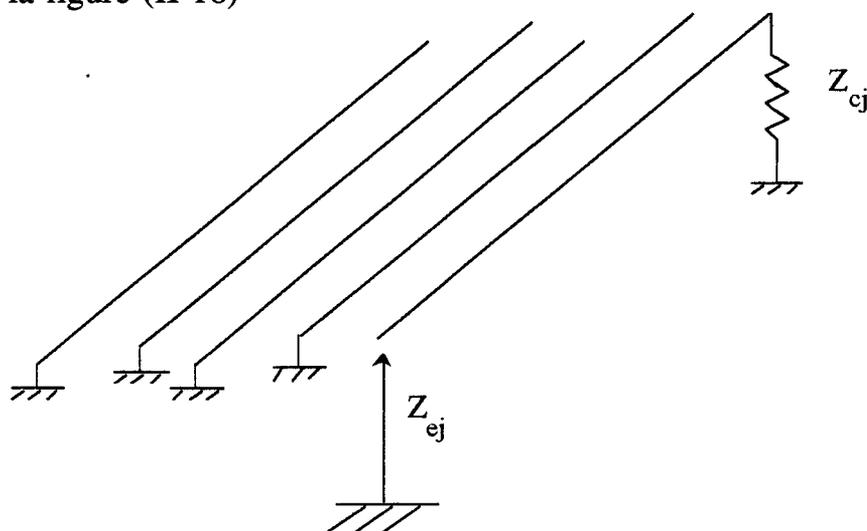
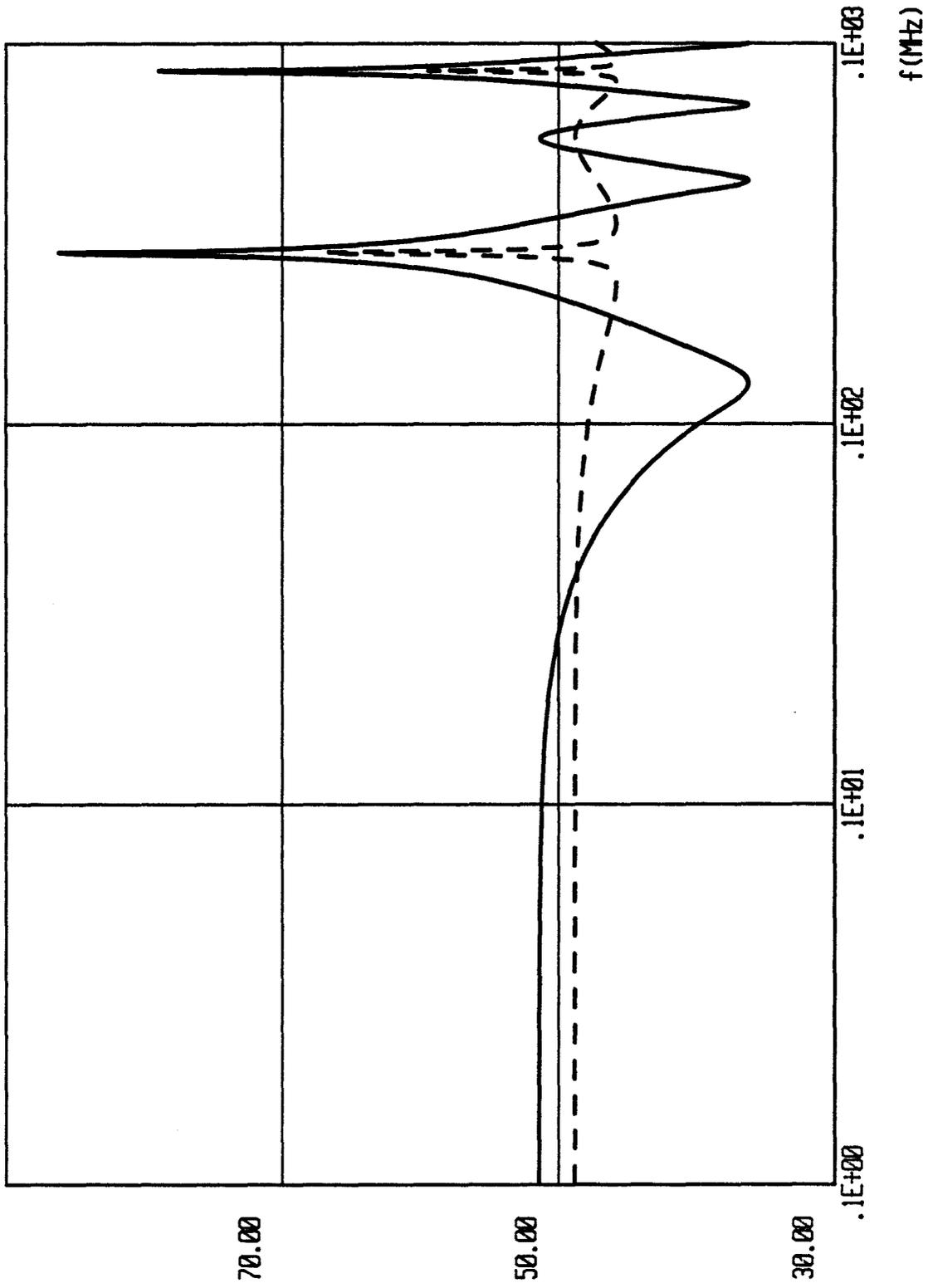


Figure (II-20)

$Z_e(\text{dB}) = 20 \log (Z_e(\text{Ohm}) / 1 \text{ Ohm})$



PL(II-6)

Sur la planche PL(II-7), nous avons représenté, en trait plein, l'évolution de l'impédance d'entrée du conducteur 1 placé comme il est indiqué sur la figure (II-19) et en pointillés l'évolution de cette même impédance lorsque le conducteur 1 est rejeté à une distance de 100 mm des autres conducteurs. Les conclusions restent les mêmes que pour le premier choix de configuration de charges: des résonances, dont l'amplitude dépend directement des paramètres linéiques inductance et capacité apparaissent.

Avec la configuration de charge représentée sur la figure (II-18), nous avons, tout d'abord, mesuré à l'analyseur de réseau l'impédance d'entrée du conducteur "j" entre 300 kHz et 100 MHz. Ensuite, nous avons calculé cette impédance d'entrée par le modèle théorique multimodal, en utilisant comme données d'entrée les paramètres linéiques mesurés. Enfin, nous avons comparé les deux résultats obtenus ceci pour trois cas de figures :

- le bifilaire représenté sur la figure (II-17)
- un toron de cinq conducteurs
- un trifilaire torsadé.

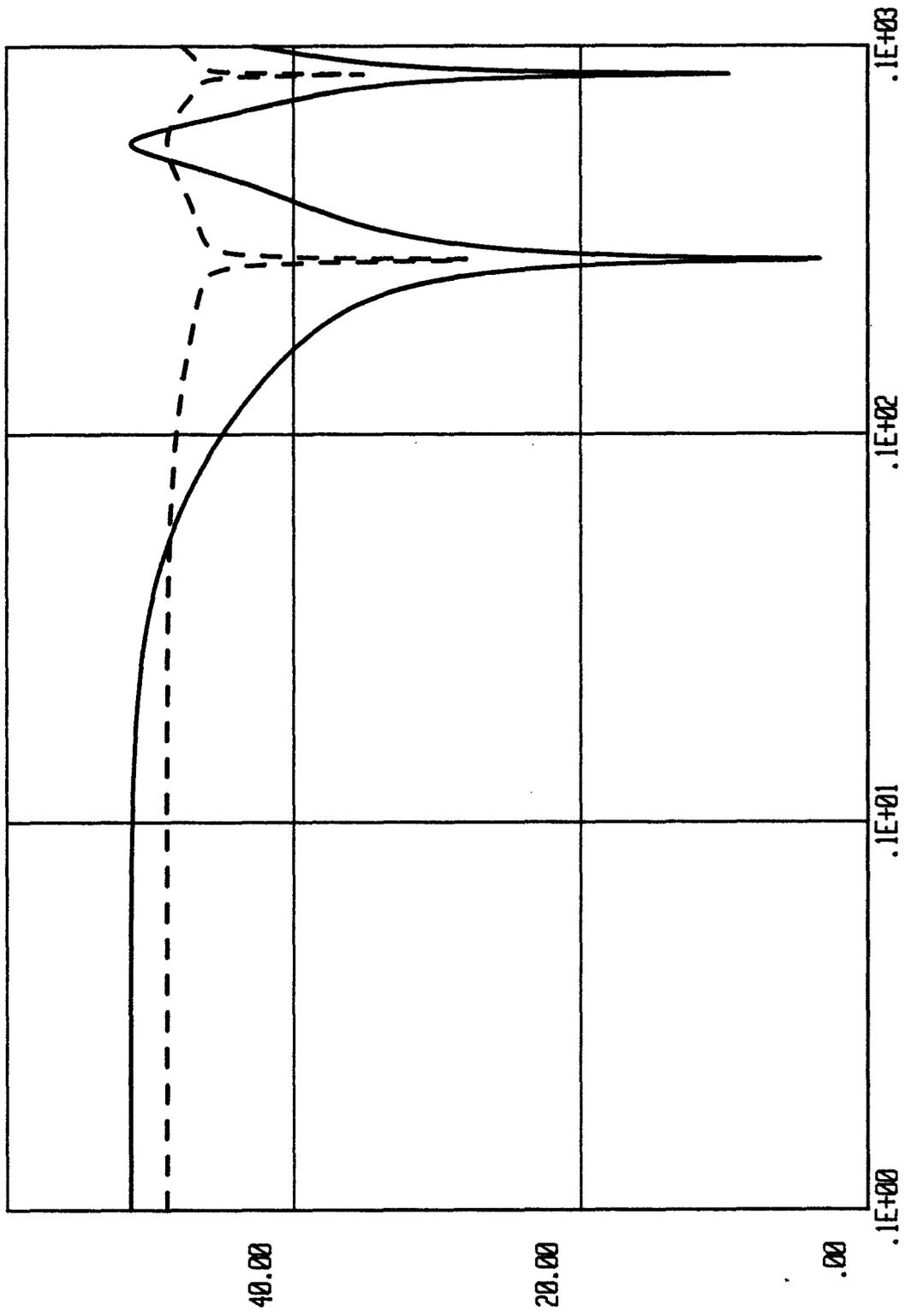
II-3-a Bifilaire comportant deux conducteurs munis d'une gaine diélectrique

Les paramètres linéiques de ce bifilaire dont la configuration géométrique est représentée figure (II-13) ont été mesurés par deux méthodes différentes : l'une est basée sur l'excitation des modes commun et différentiel ; l'autre, plus classique, consiste à une mesure directe par rapport de courant-tension ou inversement. Les résultats obtenus pour les inductances et capacités linéiques sont récapitulés dans le tableau (II-3)

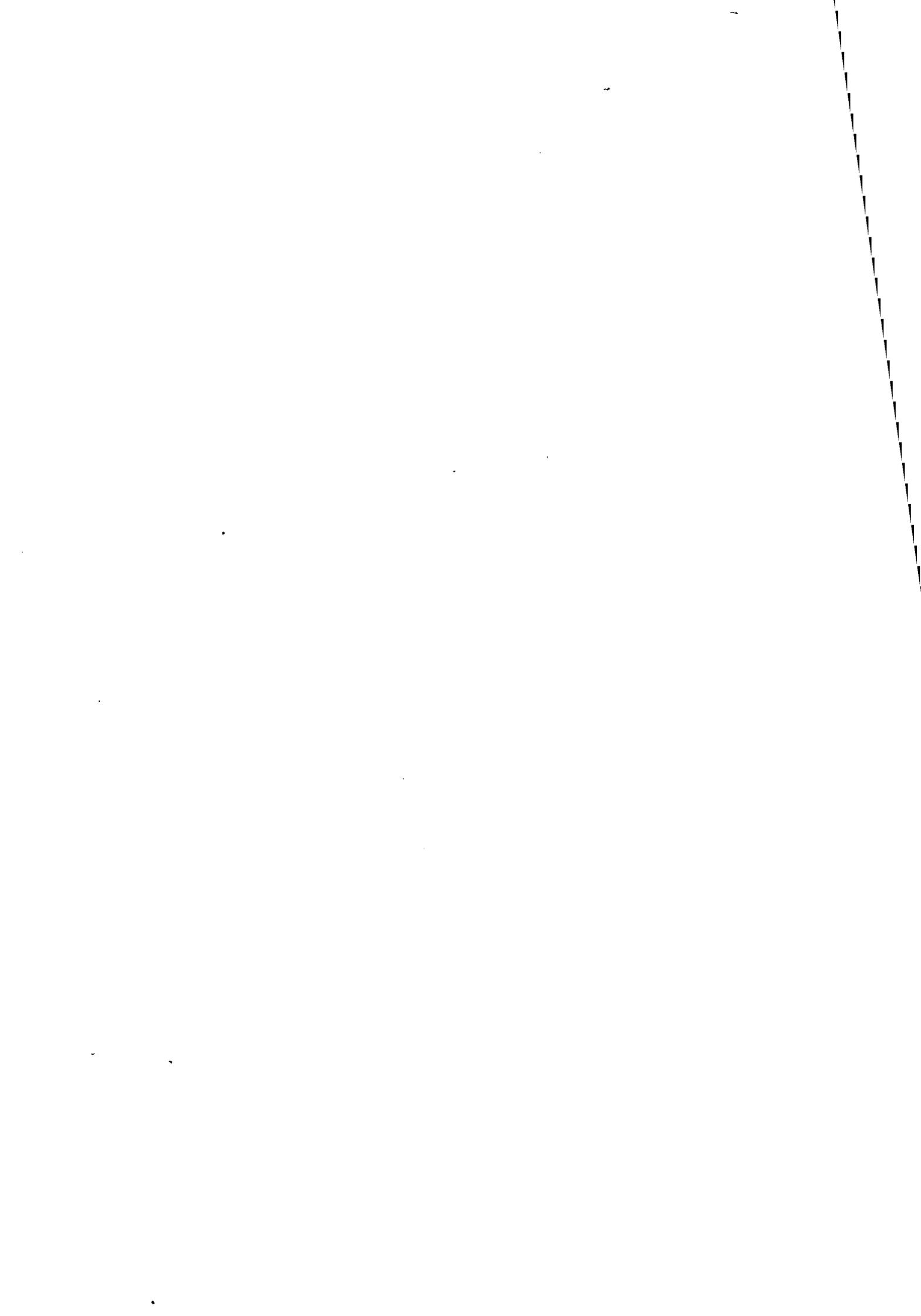
Sur la planche PL (II-8), la courbe en trait plein montre l'impédance d'entrée de l'un des conducteurs telle qu'elle est mesurée à l'analyseur de réseau ; elle est confrontée à la caractéristique prévue par le formalisme multimodal, courbe en pointillés, en ayant entré les paramètres linéiques obtenus par la mesure directe. Sur la planche PL (II-9) cette même courbe expérimentale est confrontée à la caractéristique théorique avec comme paramètres linéiques ceux déduits des paramètres linéiques de mode commun et de mode différentiel mesurés. Les courbes de la planche PL (II-9) sont très proches l'une de l'autre. Sur la planche PL (II-10), la courbe expérimentale est comparée à la courbe théorique obtenue avec les paramètres linéiques mesurés par la méthode de substitution.

Pour le cas d'un bifilaire, la méthode qui consiste à introduire et mesurer les paramètres linéiques de mode commun et de mode différentiel pour déduire les capacités et inductances linéiques caractéristiques du bifilaire semble donner de bons résultats.

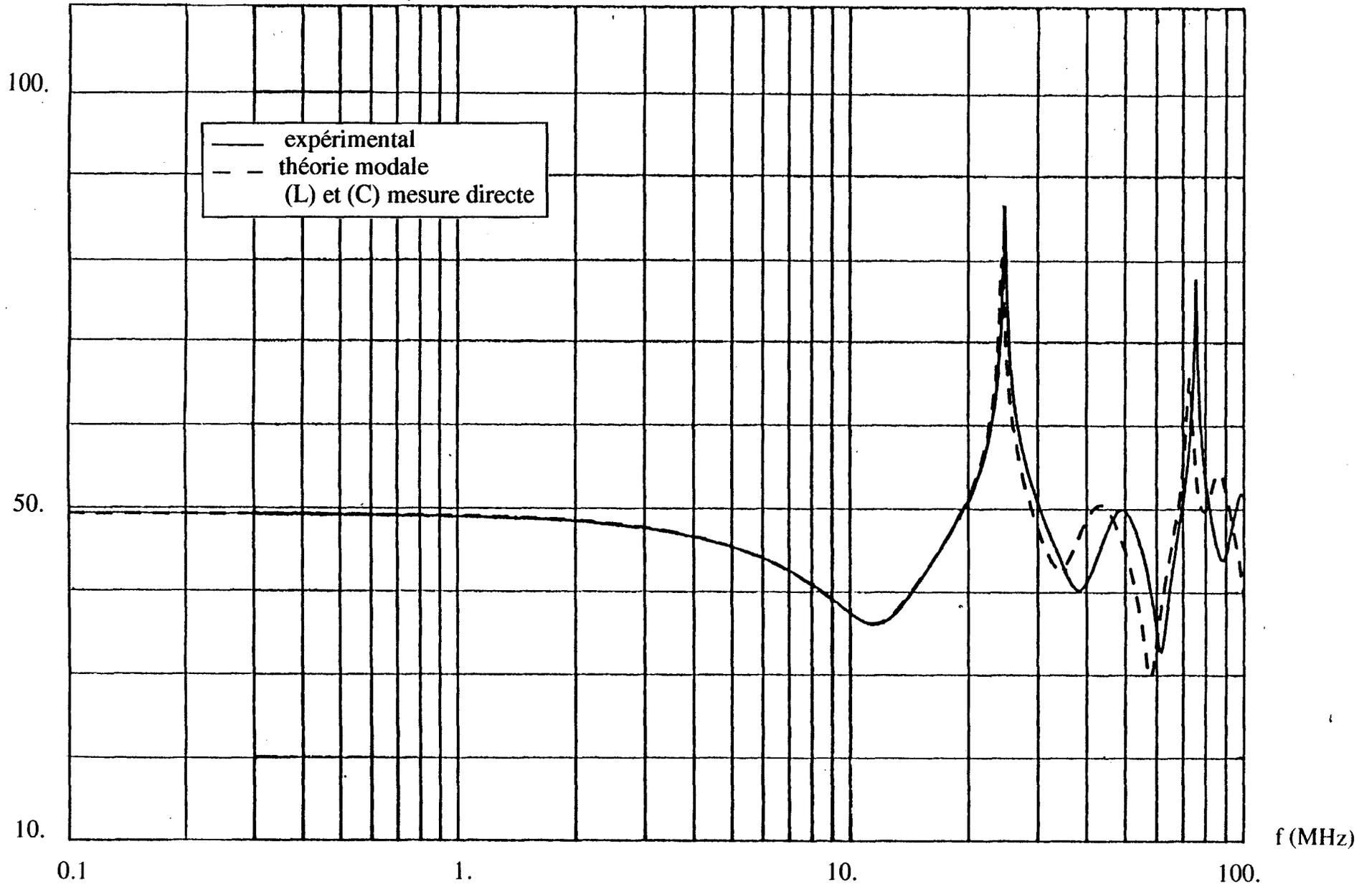
$Z_e \text{ (dB)} = 20 \log(Z_e \text{ (Ohm)} / 10 \text{ Ohm})$



PL(II-7)

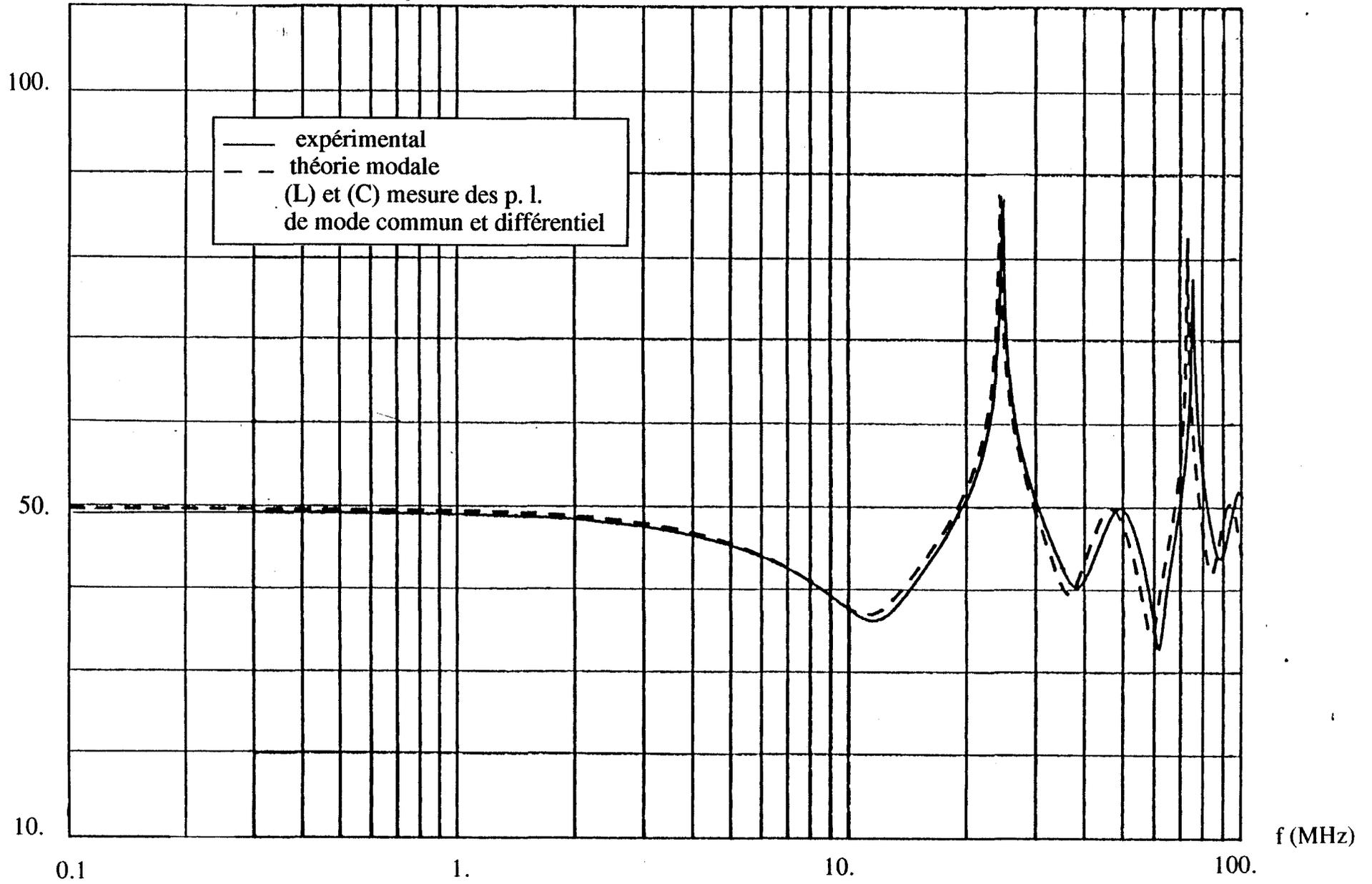


$$Z_e = 20 \log (Z_e (\Omega) / 1 \Omega)$$

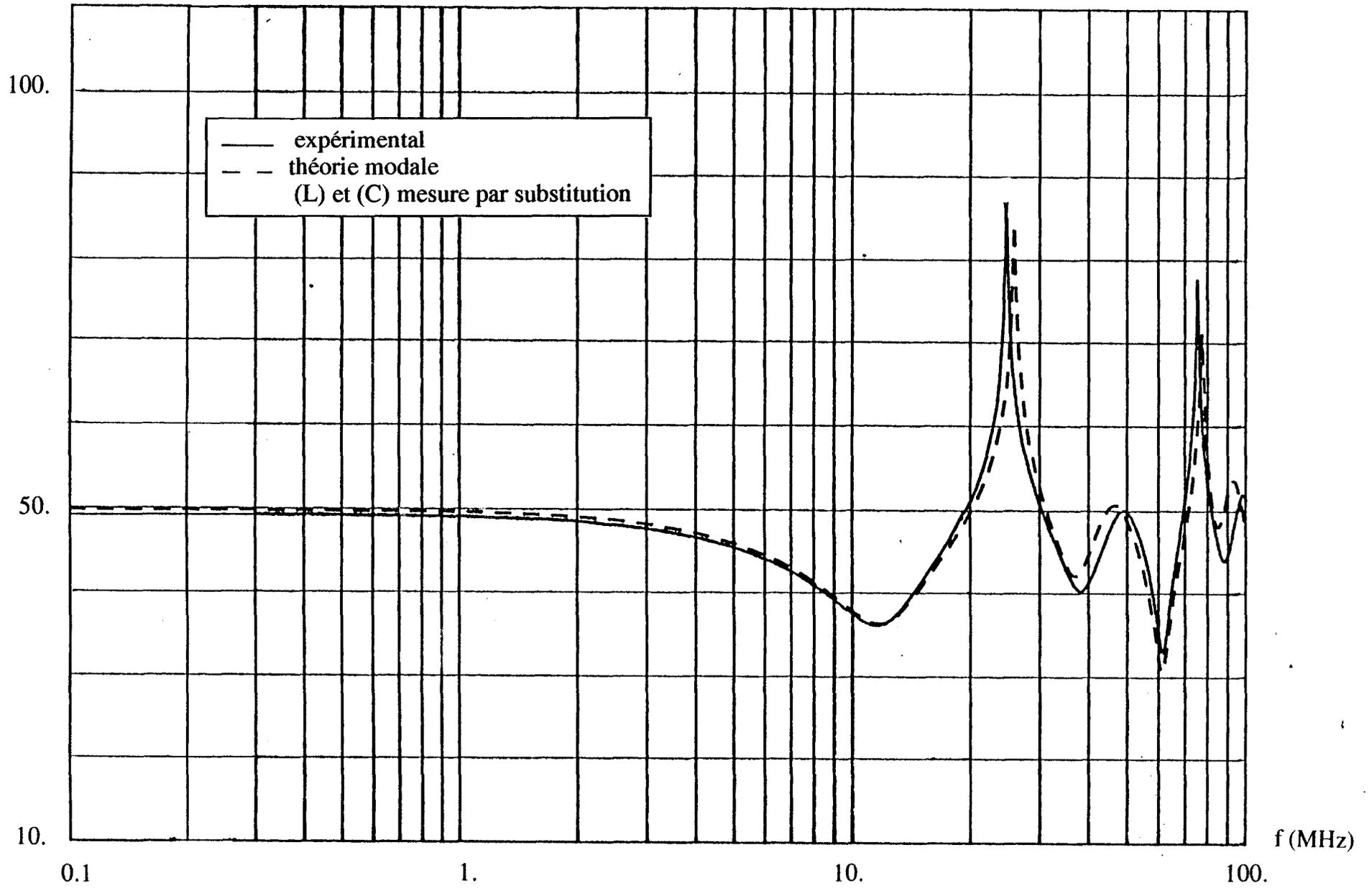


PL(II-8)

$$Z_e = 20 \log (Z_e (\Omega) / 1 \Omega)$$



$$Z_e = 20 \log (Z_e (\Omega) / 1 \Omega)$$



PL(II-10)

II-3-b Toron de cinq conducteurs

Construisons un modèle canonique expérimental en assemblant cinq conducteurs identiques de diamètre 7 mm et de longueur 2.66 mètres, comportant une gaine diélectrique d'épaisseur 2.6 mm. Ces conducteurs sont placés à une hauteur h du plan de masse comme il est indiqué sur la figure (II-21).

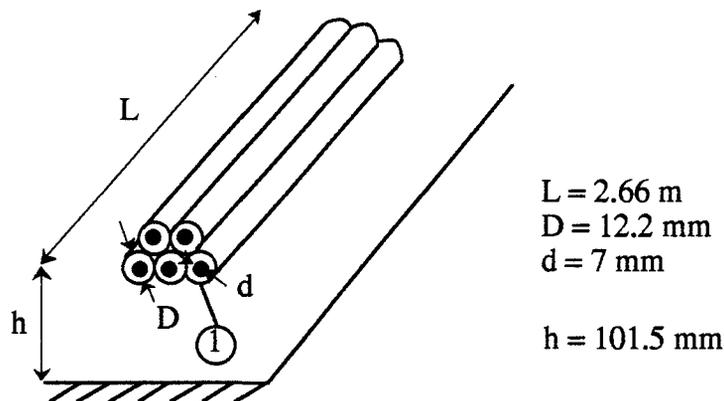
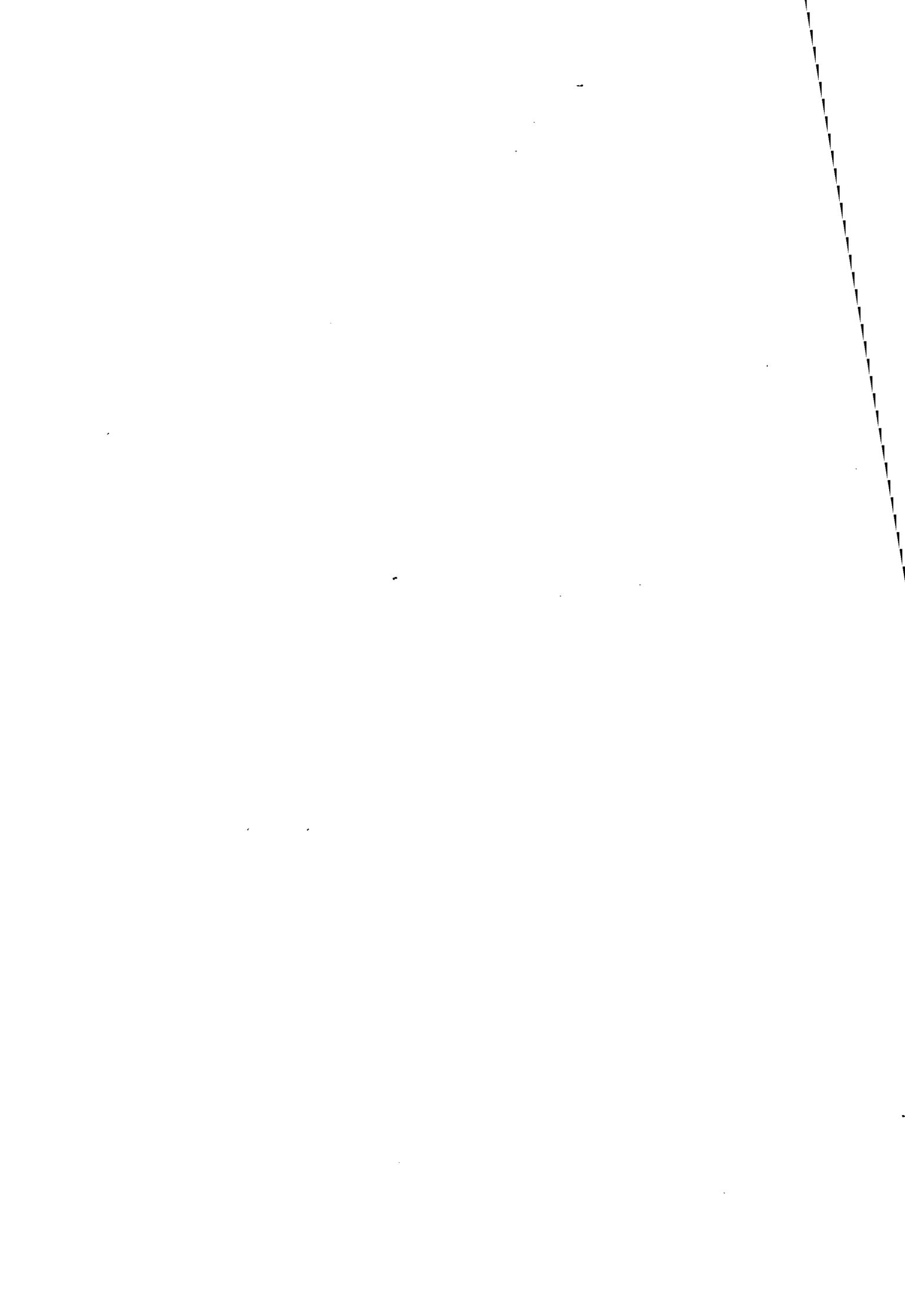


Figure (II-21)

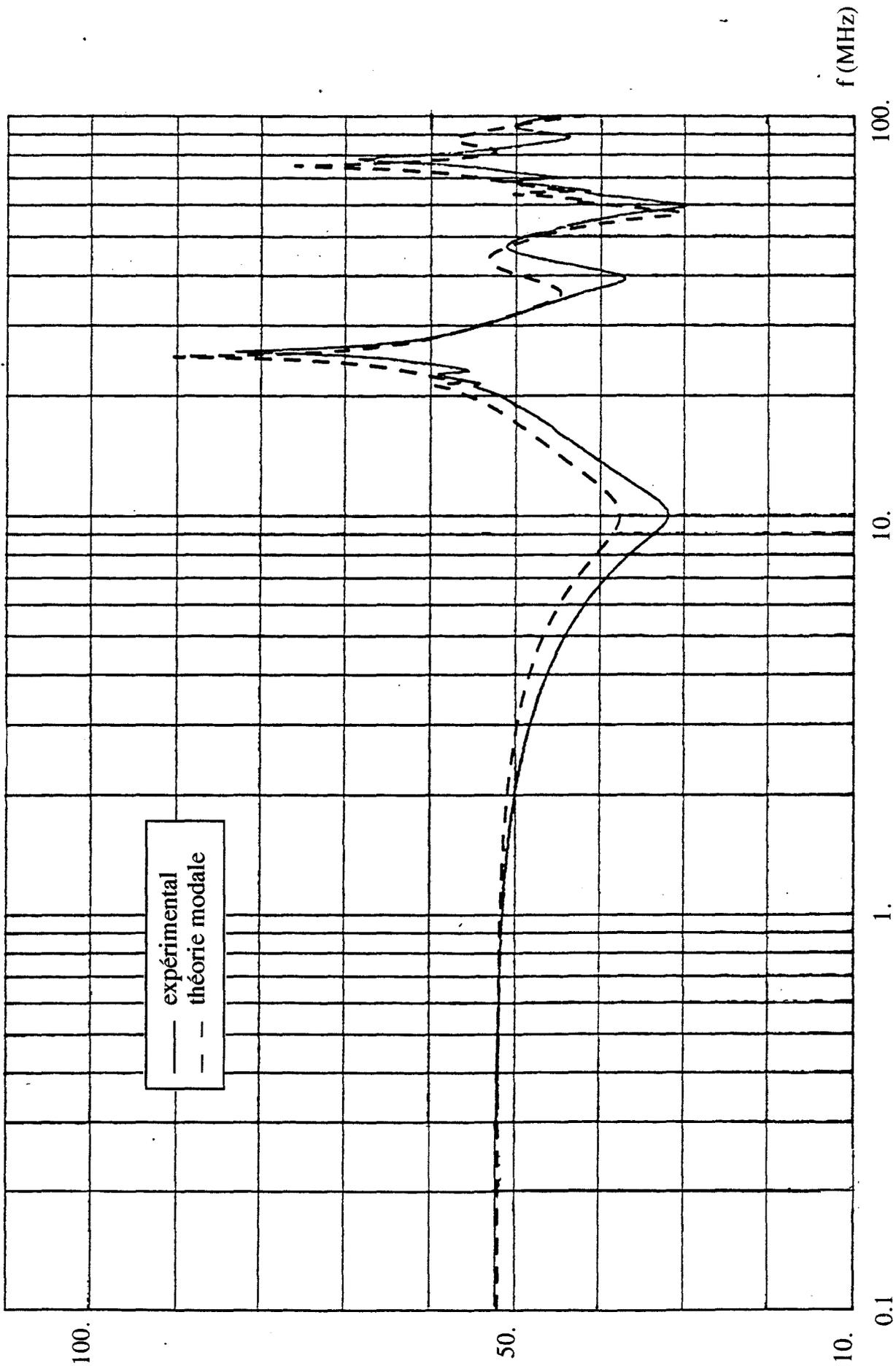
Les paramètres linéiques de ce faisceau de cinq conducteurs ont été mesurés par la méthode classique du domaine fréquentiel. Sur la planche PL (II-11), la courbe en trait plein représente l'évolution de l'impédance d'entrée du conducteur 1 en fonction de la fréquence tandis que la courbe en pointillés nous indique cette même impédance d'entrée prévue par la théorie modale, avec comme données d'entrée les inductances et capacités linéiques mesurées. Le bon accord entre les courbes montre que l'imprécision sur la détermination des coefficients inductance et capacité influence assez peu la prédiction théorique des modes.

II-3-c Trifilaire torsadé

Considérons un trifilaire torsadé formée de trois conducteurs identiques de diamètre 1.2 mm entourés d'une gaine diélectrique d'épaisseur 0.25 mm. Ce trifilaire a une longueur de 2.66 m et est placé à une hauteur $h = 27.2 \text{ mm}$ du plan de masse. Ses paramètres linéiques ont été mesurés successivement par la méthode classique du domaine fréquentiel avec un générateur et un vecteur-mètre et par la méthode de substitution à l'aide d'un pont RLC.



$$Z_e = 20 \log (Z_e (\Omega) / 1 \Omega)$$



Les résultats obtenus ont été regroupés dans les tableaux (II-6) et (II-7)

	L ₁₁ (nH/m)	L ₂₂ (nH/m)	L ₃₃ (nH/m)	L ₁₂ (nH/m)	L ₁₃ (nH/m)	L ₂₃ (nH/m)
Méthode classique	902.5	902.1	912.2	652.2	657.7	653.5
Méthode par substitution	932.3	932.3	932.3	682.3	686.1	684.2

Tableau (II-6)

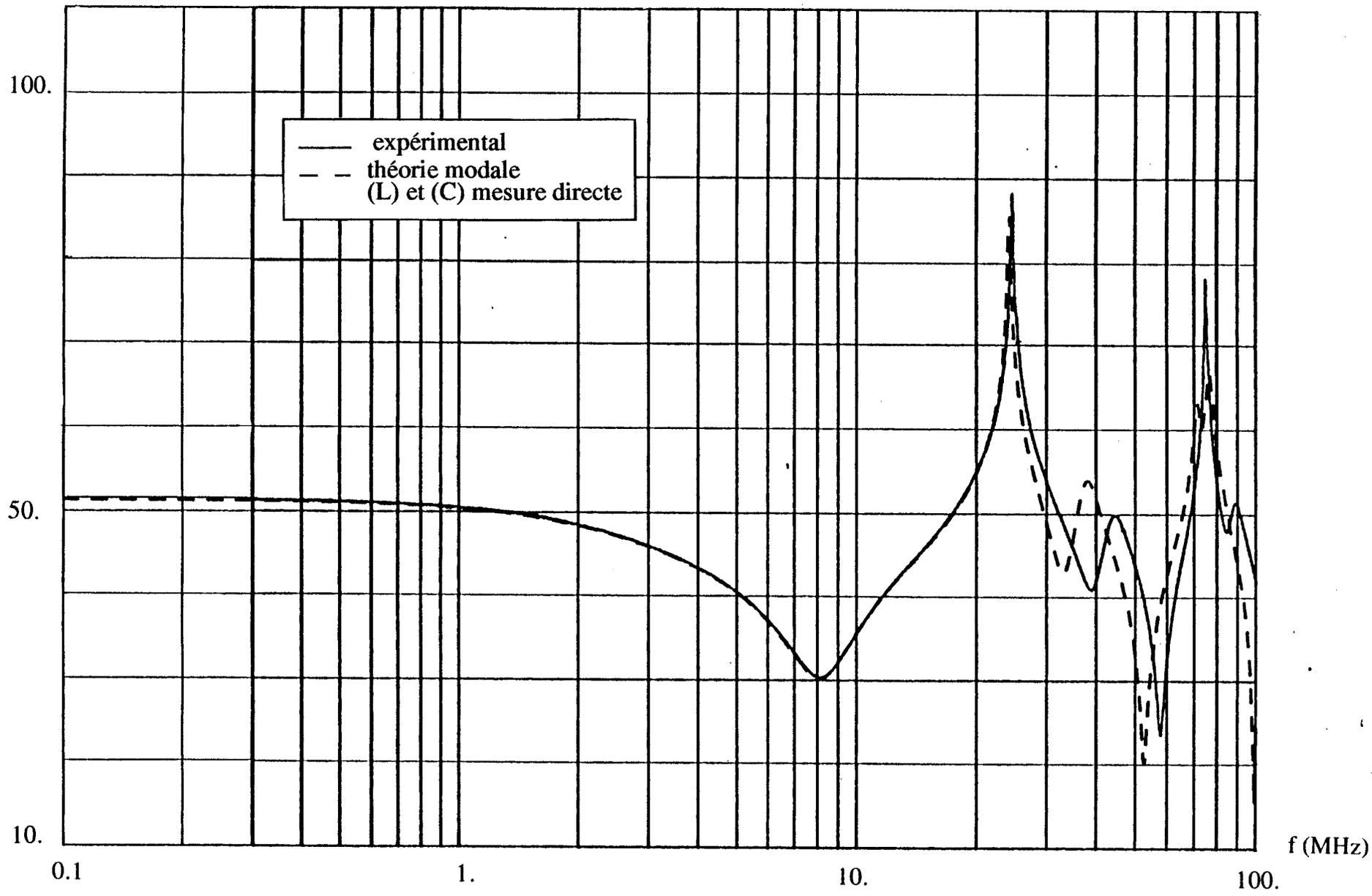
	C ₁₁ (pF/m)	C ₂₂ (pF/m)	C ₃₃ (pF/m)	C ₁₂ (pF/m)	C ₁₃ (pF/m)	C ₂₃ (pF/m)
Méthode classique	71.3	70.5	70.8	- 32.	- 32.5	- 31.8
Méthode par substitution	70.3	69.2	69.5	- 32.	- 32.7	- 31.6

Tableau (II-7)

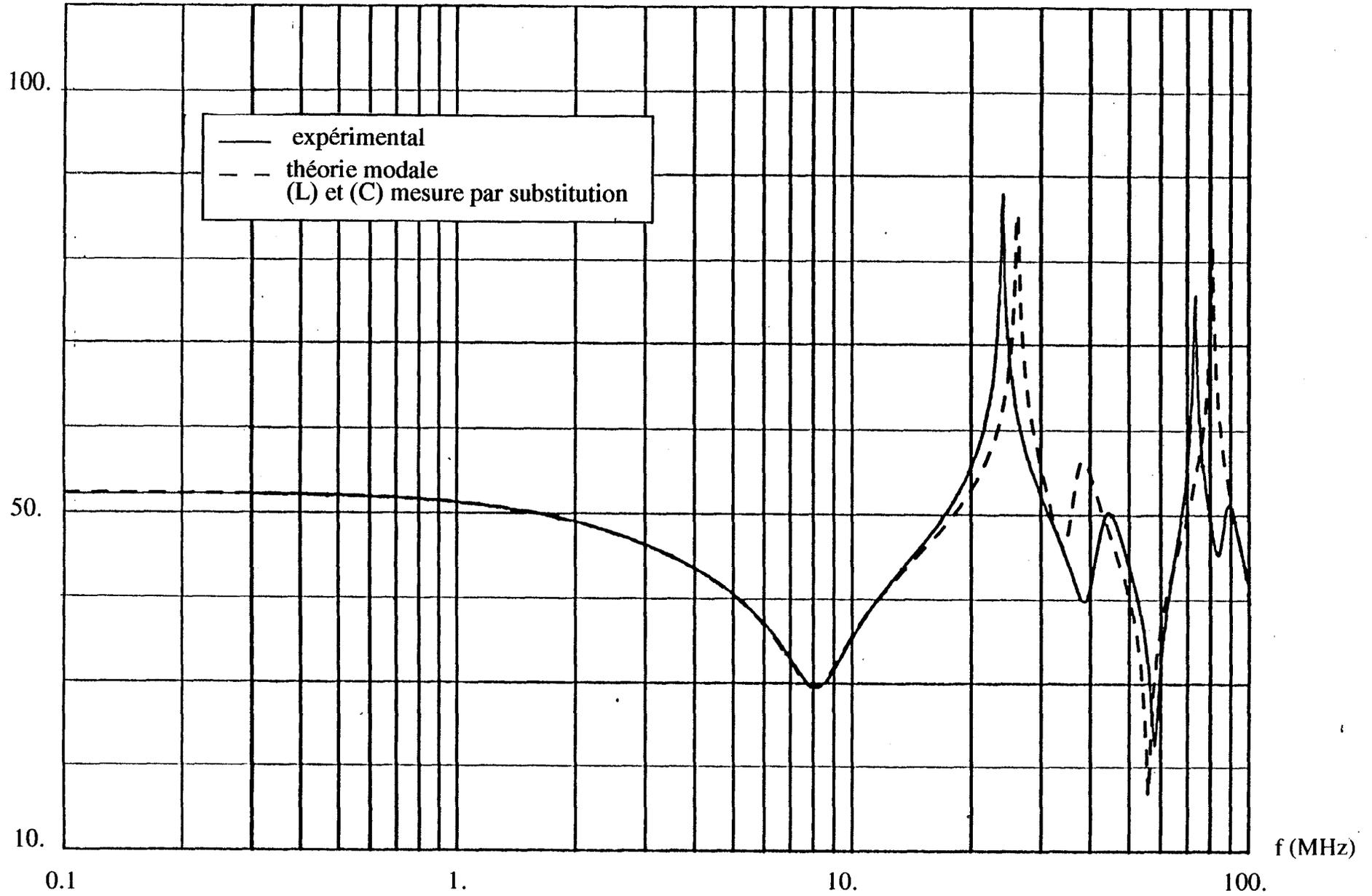
Sur les planches PL(II-12) et PL(II-13), la courbe en trait plein représente l'impédance d'entrée de l'un des conducteurs telle qu'elle est mesurée à l'analyseur du réseau, tandis que la courbe en pointillés montre l'impédance d'entrée prévue par le formalisme multimodal; les paramètres linéiques sont issus des mesures effectuées par la méthode classique sur la planche PL(II-12) et par la méthode de substitution sur la planche PL(II-13). Les deux méthodes donnent des résultats assez satisfaisants. Toutefois, il existe un décalage en fréquences sur les résonances pour la méthode de substitution qu'on ne retrouve pas pour la méthode directe. Sur la planche PL (II-14) nous avons représenté les mêmes caractéristiques, impédance d'entrée mesurée à l'analyseur de réseau et prévue par la théorie modale, lorsque le trifilaire est plaqué sur le plan de masse. Même pour cette configuration géométrique limite, nous obtenons un bon accord entre les deux courbes.

Dans ce chapitre, nous avons exploité les différentes méthodes de mesure des paramètres linéiques d'un faisceau de câbles développées par de nombreux auteurs sur des exemples canoniques tels qu'un bifilaire et un toron de cinq conducteurs et sur un cas réel, le trifilaire torsadé. Les résultats obtenus ont été validés soit en les comparant à ceux calculés par les formules analytiques, soit en confrontant l'impédance d'entrée d'un conducteur quelconque du faisceau mesurée à l'analyseur de réseau et son impédance d'entrée prévue par un modèle théorique dont les données principales sont les paramètres linéiques mesurés du multifilaire. La confrontation a été satisfaisante et nous avons constaté que l'imprécision sur la détermination des coefficients inductance et capacité influence assez peu la prédiction théorique des modes. De plus, la mesure de ces coefficients devient d'autant plus fastidieuse que le nombre de conducteurs du faisceau augmente. Nous sommes donc

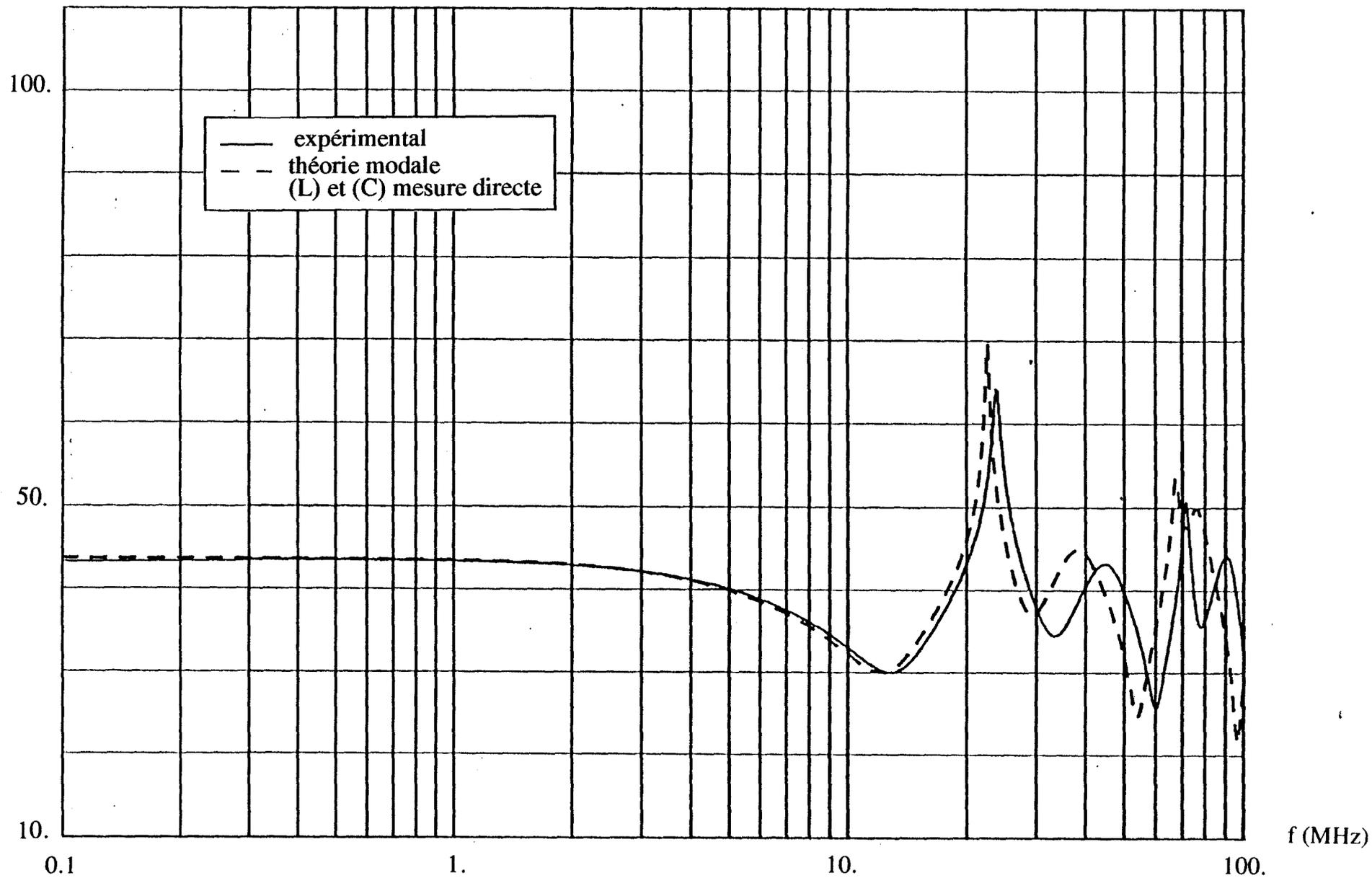
$$Z_e = 20 \log (Z_e (\Omega) / 1 \Omega)$$



$$Z_e = 20 \log (Z_e (\Omega) / 1 \Omega)$$



$$Z_e = 20 \log (Z_e (\Omega) / 1 \Omega)$$



PL(II-14)

amenés à proposer une simplification, qui consiste à évaluer les inductances linéiques par les formules analytiques, les capacités linéiques étant obtenues par inversion de la matrice (L). Cette simplification suppose que l'ensemble des modes se propage à la même vitesse, vitesse que l'on apparente à celle du mode commun. Cette simplification du formalisme modal est développée dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III
REDUCTION A UNE MODELISATION SIMPLIFIEE
PAR EGALISATION DES VITESSES

III REDUCTION A UNE MODELISATION SIMPLIFIEE PAR EGALISATION DES VITESSES

La théorie modale, telle qu'elle a été exposée dans le premier chapitre, nécessite la connaissance de l'ensemble des coefficients inductance et capacité. Comme nous l'avons vu dans le deuxième chapitre, ces paramètres peuvent être obtenus au moyen de mesures qui deviennent très vite fastidieuses lorsque le nombre de conducteurs augmente. Dans ce chapitre, nous proposons une simplification dont l'objectif est de réduire le nombre de données primaires à mesurer. Cette simplification se fera au prix d'approximations qui engendreront des erreurs sur la précision de la prédiction. Nous tenterons de chiffrer ces erreurs en confrontant tout d'abord l'impédance d'entrée d'un conducteur du faisceau modélisée par le formalisme modal et celle prédite par la théorie simplifiée. Puis nous comparerons les parasites induits sur un faisceau de câbles par une perturbation extérieure obtenus par le formalisme modal aux parasites induits calculés par le modèle simplifié.

III-1 Enoncé de la simplification proposée :

Considérons un ensemble de N conducteurs de longueur identique immergés dans un milieu diélectrique hétérogène placé au dessus d'un plan de masse ($0yz$).
Figure (III-1)

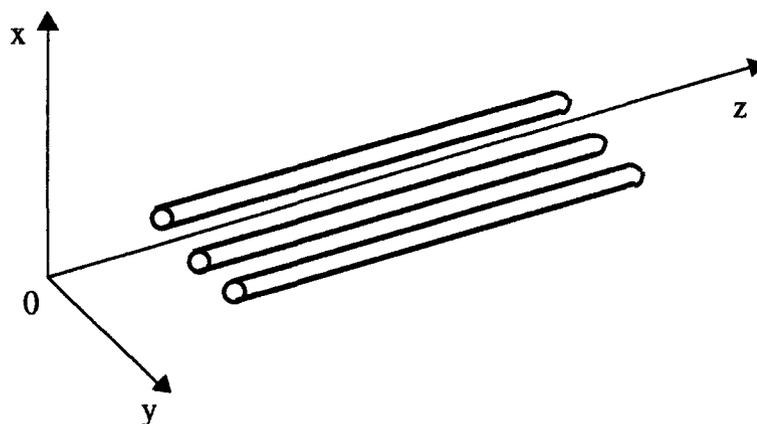


Figure (III-1)

Le calcul des tensions et courants induits aux extrémités de ces conducteurs a été largement développé dans le premier chapitre. Il nécessite la détermination de matrices inductance (L) et capacité (C) et passe par la diagonalisation du produit (L)(C). La matrice diagonale obtenue est de la forme

$$(D_v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & 0 \\ v_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \frac{1}{2} & \\ & & v_i & \\ & & & \dots \\ 0 & & & & \frac{1}{2} \\ & & & & v_N \end{pmatrix}$$

où v_i est la vitesse associée au mode propre i .

Nous avons défini dans le premier chapitre, une matrice de passage (T_v) qui vérifie la relation (I-32) soit en éliminant la variable fréquence

$$(D_v) = (T_v)^{-1} (L) (C) (T_v)$$

Si nous considérons le toron de cinq conducteurs dont la configuration est celle de la figure (II-21), que nous rappelons ci-dessous, nous avons mesuré les matrices inductance et capacité suivantes en utilisant la méthode classique d'Agrawal présentée dans le deuxième chapitre. Figure (III-2).

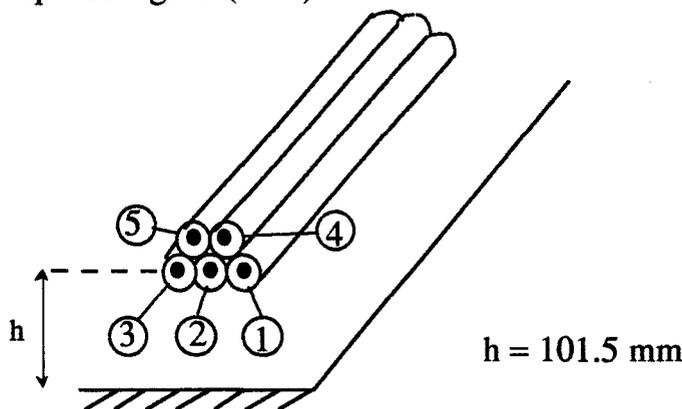


Figure (III-2)

Les inductances linéiques mesurées sont exprimées en nH/m et les capacités linéiques mesurées en pF/m.

$$(L) = \begin{pmatrix} 810.7 & 550.1 & 448.5 & 553.5 & 479. \\ 550.1 & 793.8 & 546.7 & 553.5 & 553.5 \\ 448.5 & 546.7 & 809.6 & 480.3 & 555. \\ 553.5 & 553.5 & 480.3 & 819.8 & 565.2 \\ 479. & 553.5 & 555. & 565.2 & 819. \end{pmatrix} \quad (III-1)$$

$$(C) = \begin{pmatrix} 52.1 & -21.8 & -2.2 & -21.8 & -1.2 \\ -21.8 & 79.2 & -21.6 & -16.9 & -15.9 \\ -2.2 & -21.6 & 54.7 & -1.3 & -22.9 \\ -21.8 & -16.9 & -1.3 & 66.1 & -21.9 \\ -1.2 & -15.9 & -22.9 & -21.9 & 66.4 \end{pmatrix} \quad (III-2)$$

Nous avons procédé à une deuxième série de mesures en plaquant le toron contre le plan de masse. Figure (III-3)

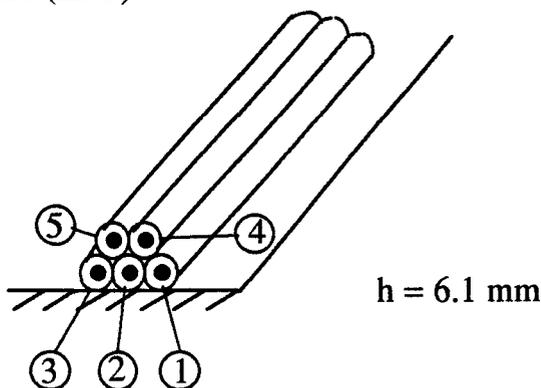


Figure (III-3)

Les paramètres mesurés sont les suivants

$$(L) = \begin{pmatrix} 274.5 & 54.8 & 21. & 101.2 & 53.1 \\ 54.8 & 260.4 & 53.3 & 96.7 & 97. \\ 21. & 53.3 & 271.7 & 51.1 & 97.5 \\ 101.2 & 96.7 & 51.1 & 412.5 & 156.3 \\ 53.1 & 97. & 97.5 & 156.3 & 409.7 \end{pmatrix} \quad (\text{III-3})$$

$$(C) = \begin{pmatrix} 78.6 & -13. & -0.2 & -19. & -1. \\ -13. & 93.4 & -12.2 & -14.4 & -13.7 \\ -0.2 & -12.2 & 78.7 & -0.8 & -19.2 \\ -19. & -14.4 & -0.8 & 57.2 & -20.3 \\ -1. & -13.7 & -19.2 & -20.3 & 57.2 \end{pmatrix} \quad (\text{III-4})$$

Après diagonalisation des produits (L)(C), nous déduisons les vitesses de propagation des modes propres représentées dans le tableau (III-1).

h = 101.5 mm	h = 6.1 mm
v ₁ = 2.71 10 ⁸ m/s	v ₁ = 2.68 10 ⁸ m/s
v ₂ = 2.35 10 ⁸ m/s	v ₂ = 2.35 10 ⁸ m/s
v ₃ = 2.22 10 ⁸ m/s	v ₃ = 2.18 10 ⁸ m/s
v ₄ = 2.16 10 ⁸ m/s	v ₄ = 2.24 10 ⁸ m/s
v ₅ = 2.12 10 ⁸ m/s	v ₅ = 2.27 10 ⁸ m/s

Tableau (III-1)

Nous pouvons constater que les vitesses de propagation des différents modes propres sont très peu dispersées dans les deux configurations étudiées. Ceci nous amène directement à proposer la simplification suivante du formalisme modal qui consiste à supposer que tous les modes se propagent à la même vitesse. Cette simplification vise à réduire les processus de mesure des paramètres linéiques. Elle consiste à calculer les inductances linéiques du faisceau de N conducteurs par les formules analytiques (II-1) et (II-2) qui ne font pas intervenir les gaines diélectriques et que nous rappelons ici

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{2\pi} \text{Log} \left(\frac{4h_j}{d_j} \right) \quad (\text{III-5})$$

$$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{Log} \left(1 + \frac{4 h_i h_j}{d_{ij}^2} \right) \quad (\text{III-6})$$

où d_j est le diamètre du conducteur j , h_j sa hauteur par rapport au plan de masse et d_{ij} la distance entre les conducteurs i et j .

Dans le deuxième chapitre, nous avons pu apprécier la validité de ces formules lorsque le rapport espacement des conducteurs diamètre est supérieur à 2.

Nous supposons ensuite que tous les modes se propagent à la même vitesse v_c qui s'apparente à celle du mode commun. En effet, cette donnée est facilement accessible puisqu'elle peut être appréciée à l'aide d'un réflectomètre. Cette hypothèse revient à supposer que les N conducteurs baignent dans un milieu diélectrique homogène de permittivité relative ϵ_r directement liée à la vitesse de mode commun par

$$\epsilon_r = \frac{c^2}{v_c^2}$$

Nous pouvons, par conséquent, déduire la matrice capacité par inversion de la matrice inductance soit

$$(C) = \frac{(L)^{-1}}{v_c^2} \tag{III-7}$$

Cette simplification se fait au prix d'approximations qui ne seront pas bien entendu sans effet sur la précision de la prédiction des parasites induits par une perturbation extérieure aux extrémités du faisceau de câbles. Dans un premier temps, nous allons tenter de chiffrer les erreurs engendrées par cette simplification sur l'impédance d'entrée d'un conducteur quelconque du faisceau, paramètre introduit dans le deuxième chapitre.

III-2 Validation de la simplification proposée sur l'impédance d'entrée d'un conducteur quelconque du faisceau: [17]

Pour apprécier les erreurs introduites par le modèle simplifié, considérons le toron de cinq conducteurs qui nous a servi de référence au chapitre précédent pour évaluer l'incidence des erreurs commises dans la détermination des paramètres linéiques inductance et capacité. Nous rappelons sa configuration de charge sur la figure (III-4)

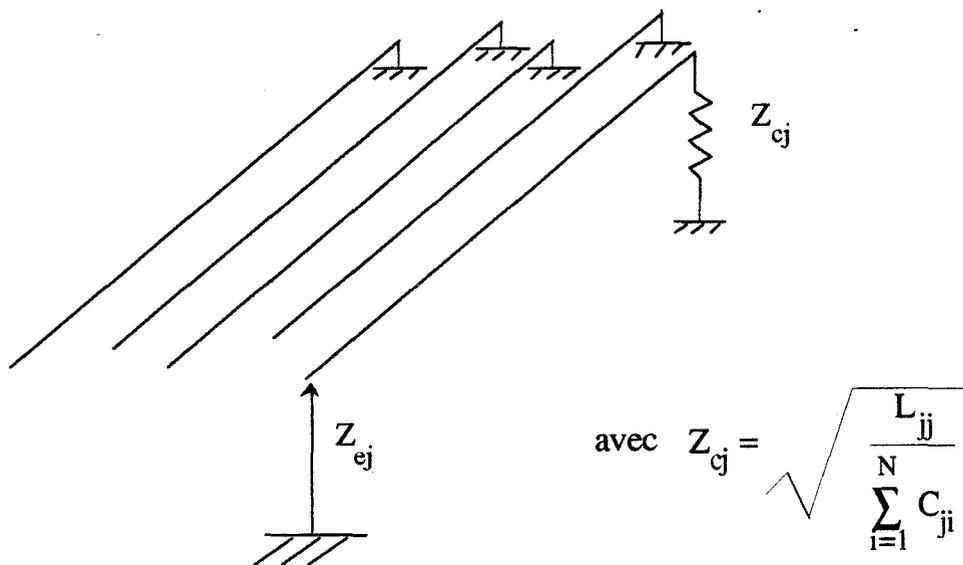


Figure (III-4)

Les courants et tensions qui apparaissent aux extrémités de ces conducteurs sont régis par le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \left(-\frac{dV}{dz} \right) = (Z) (I) \\ \left(-\frac{dI}{dz} \right) = (Y) (V) \end{cases}$$

La résolution de ce système a été largement développée dans le premier chapitre. Si le milieu est hétérogène, nous avons recours au formalisme modal. Si le milieu est supposé homogène, hypothèse principale de la théorie simplifiée, nous résolvons ce système par le formalisme classique.

L'impédance d'entrée d'un conducteur j quelconque du faisceau s'écrit

$$Z_{ej} = \frac{V_j(0)}{I_j(0)}$$

Dans le but de valider la simplification énoncée, nous allons comparer cette impédance d'entrée obtenue par le modèle simplifié à celle prédite par la théorie modale.

Considérons le toron placé à une hauteur de 101.5 mm au-dessus du plan de masse. Figure (III-2). Pour cette configuration géométrique, la matrice inductance donnée par les formules (III-5) et (III-6) et exprimée en (nH/m) est la suivante

$$(L) = \begin{pmatrix} 812.1 & 562.2 & 425.2 & 572.5 & 462.7 \\ 562.7 & 812.1 & 562.7 & 572.5 & 572.5 \\ 425.2 & 562.7 & 812.1 & 462.7 & 572.5 \\ 572.5 & 572.5 & 462.7 & 831.8 & 582.3 \\ 462.7 & 572.5 & 572.5 & 582.3 & 831.8 \end{pmatrix} \quad (III-8)$$

La vitesse de mode commun est mesurée par réflectométrie selon le principe du schéma de la figure (III-5). Tous les conducteurs sont reliés à leur extrémité $z = 0$ au réflectomètre. En $z = L$, ils sont laissés en l'air.

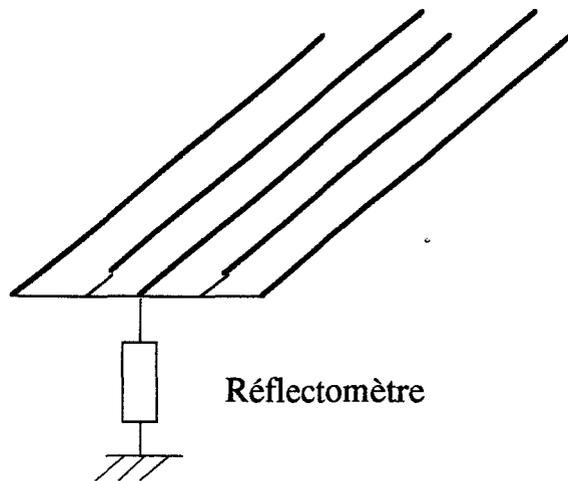


Figure (III-5)

En appliquant un signal en $z = 0$ à $t = 0$, la première réflexion due aux circuits ouverts en bout de ligne se produit à l'instant $t = 2\theta$ où θ est le temps de propagation sur la ligne

$$\theta = \frac{L}{v_c}$$

En mesurant 2θ , nous déduisons la vitesse de mode commun par $v_c = \frac{2L}{2\theta}$

Pour la configuration étudiée, nous avons mesuré une vitesse de mode commun égale à $2.66 \cdot 10^8$ m/s. Elle correspond à un milieu de permittivité relative équivalente égale à 1.12. En usant de la relation (III-7), nous obtenons la matrice capacité exprimée en (pF/m) suivante:

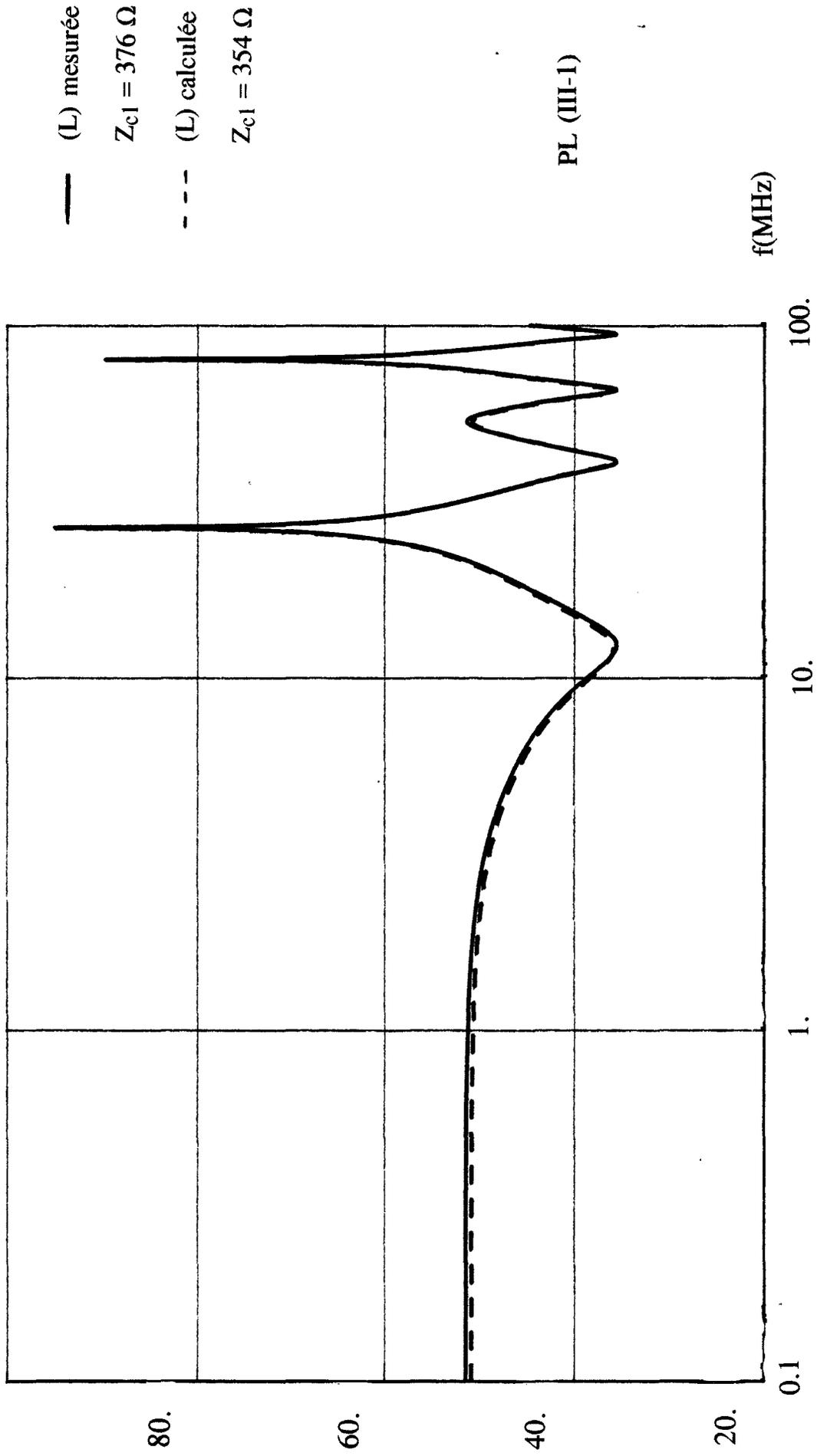
$$(C) = \begin{pmatrix} 40.4 & -16.1 & -1.3 & -17 & +1.4 \\ -16.1 & 53.8 & -16.1 & -10. & -10. \\ -1.3 & -16.1 & 40.4 & 1.4 & -17 \\ -17. & -10. & 1.4 & 47.1 & -17.6 \\ 1.4 & -10. & -17. & -17.6 & 47.1 \end{pmatrix} \quad (\text{III-9})$$

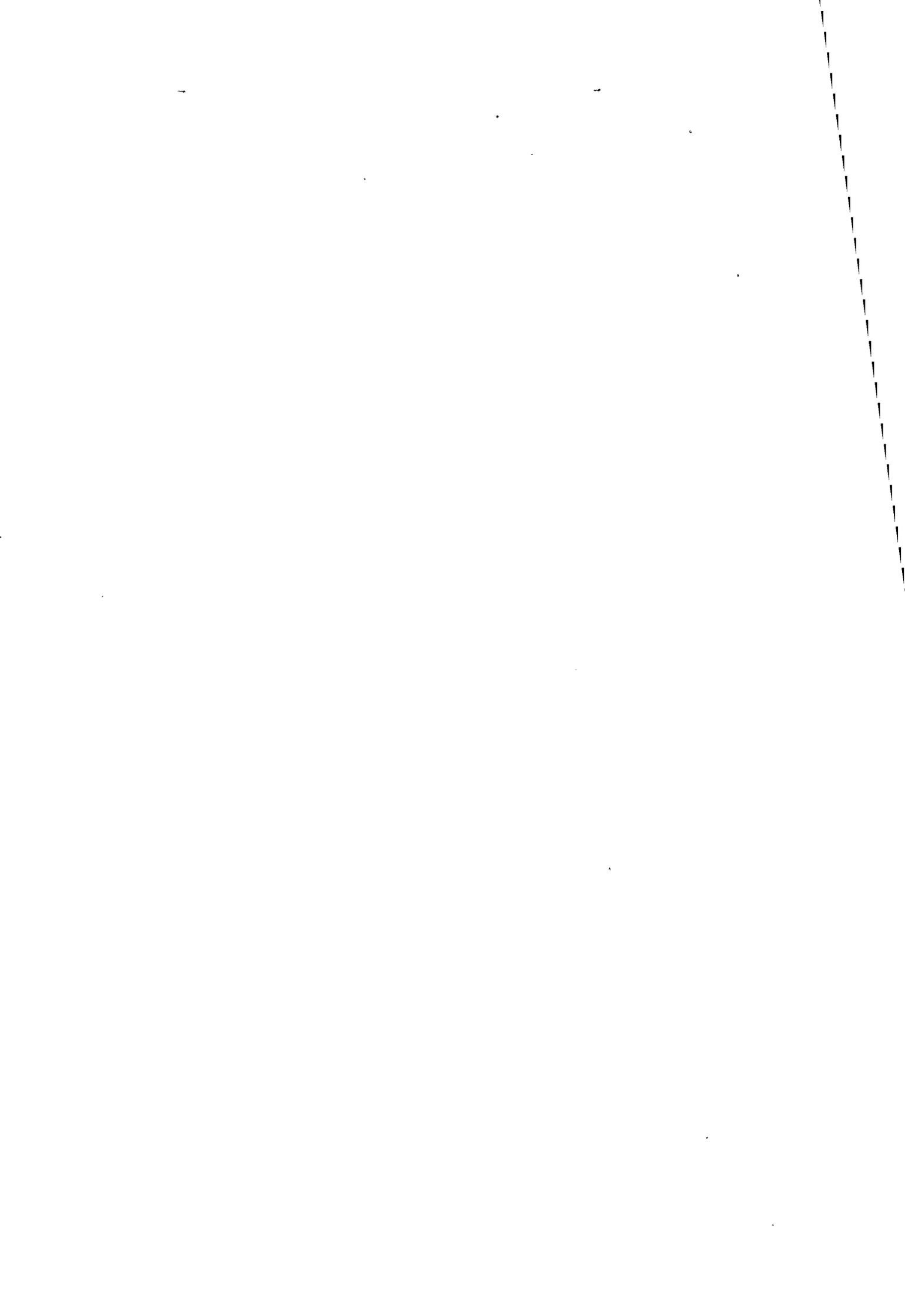
Cette matrice comporte des termes positifs C_{15} , C_{34} , C_{51} et C_{43} , ce qui à priori est contraire à la signification physique des coefficients d'influence électrostatique. Ceci s'explique par le fait que nous avons obtenu ce résultat de l'inversion d'une matrice inductance qui elle-même peut être une source d'erreur. En effet, les termes de couplage L_{12} , L_{14} , L_{23} , L_{24} , L_{25} , L_{35} et L_{45} sont calculés à l'aide de la formule (III-6). Or, cette formule est établie [16] dans l'hypothèse où le rapport espacement des conducteurs diamètre est supérieure ou égal à 2, c'est-à-dire où l'on néglige l'effet de proximité, ce qui revient à supposer que les distributions de charge sur le contour des conducteurs sont constantes. Pour les sept inductances précédemment citées, cette condition n'est pas vérifiée puisque la distance entre deux conducteurs est égal à 12.2 mm et le diamètre des conducteurs vaut 7 mm. Les valeurs obtenues pour ces sept paramètres sont donc erronées.

Il faut noter que nous avons choisi de déduire la matrice capacité (C) de l'inversion de la matrice inductance (L) pour des raisons de facilité et qu'en toute rigueur c'est l'inverse qu'il faut faire. Seulement il n'est pas simple de déterminer les coefficients de capacité en tenant compte des distributions de charge non uniformes [16]. Nous avons donc cherché à évaluer l'erreur commise sur le modèle établi à partir de la matrice (L) erronée afin de la comparer à celle engendrée par d'autres sources d'erreurs telles que la mesure.

Afin d'évaluer cette erreur sur la prédiction théorique de l'impédance d'entrée d'un conducteur quelconque du faisceau, nous avons confronté, sur la planche PL(III-1), l'impédance d'entrée du conducteur 1 calculée avec des paramètres linéiques différents. Le milieu est supposé homogène de permittivité relative égale à 1.12; la courbe en pointillés représente l'impédance d'entrée du conducteur évaluée avec les inductances linéiques calculées de la matrice (III-8) et la courbe en trait plein montre l'évolution de l'impédance d'entrée modélisée avec les inductances linéiques mesurées de la matrice (III-1). En basses fréquences, nous observons un

$$Z_e = 20 \log (Z_e (\Omega) / 1 \Omega)$$





léger écart entre les deux courbes. La valeur en basses fréquences n'est autre que la valeur de l'impédance sur laquelle le conducteur 1 est chargé. Comme l'indique la formule de la figure (III-4), cette impédance de charge est directement reliée aux inductances et capacités linéiques. Lorsque nous modélisons Z_e avec la matrice inductance (III-8), le conducteur est chargé sur 354 Ω ; si nous utilisons la matrice inductance (III-1), il est chargé sur 376 Ω . Cette différence d'impédance de charge explique l'écart de 0.6 dB entre les deux courbes sur la valeur de l'impédance de charge en basses fréquences.

En effet, sur la courbe PL(III-2), nous avons confronté l'impédance d'entrée du conducteur 1 chargé sur 354 Ω avec les inductances linéiques de la matrice (III-8), courbe en pointillés, et celle du conducteur 1 chargé également sur 354 Ω avec les inductances linéiques de la matrice (III-1), courbe en trait plein. Cette fois-ci, les courbes sont très proches. Les erreurs commises sur la matrice inductance ont très peu d'influence sur la prédiction théorique de l'impédance d'entrée.

Sur la planche PL(III-3), nous avons confronté cette fois l'impédance d'entrée du conducteur 1 calculée au moyen du formalisme multimodal avec les paramètres linéiques exprimés par les matrices (III-1) et (III-2), courbe en trait plein, et l'impédance d'entrée du conducteur 1 évaluée avec le modèle simplifié, courbe en pointillés. Dans les deux approches, le conducteur 1 est chargé sur 354 Ω . En basses fréquences, les deux courbes se superposent. En hautes fréquences, l'interprétation des écarts est plus difficile. Les différents modes qui se propagent sur la ligne multifilaire ne se propagent pas à la même vitesse. Autour des résonances qui apparaissent aux fréquences directement proportionnelles à la vitesse de mode commun, apparaissent des résonances dues à la non dégénérescence des modes.

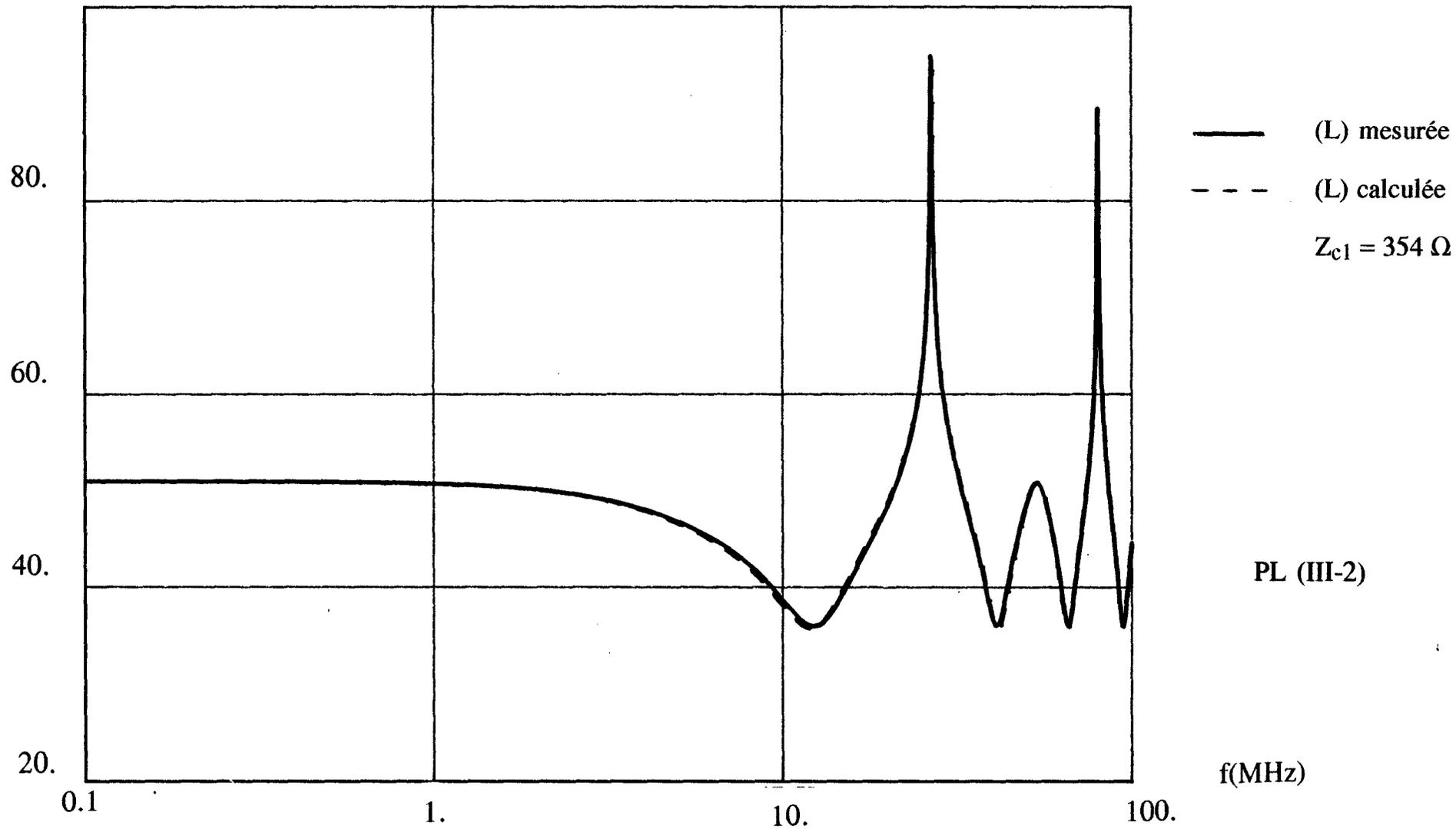
Nous avons suivi la même démarche en plaquant le toron de cinq conducteurs contre le plan de masse comme il est indiqué sur la figure (III-3). Pour cette configuration, nous obtenons les inductances linéiques établies par les formules (III-5) et (III-6) en nH/m.

$$(L) = \begin{pmatrix} 249.7 & 69.3 & 22.3 & 131.4 & 64.2 \\ 69.3 & 249.7 & 69.2 & 131.4 & 131.4 \\ 22.3 & 69.2 & 249.7 & 64.2 & 131.4 \\ 131.4 & 131.4 & 64.2 & 450. & 212.9 \\ 64.2 & 131.4 & 131.4 & 212.9 & 409.7 \end{pmatrix} \quad (\text{III-10})$$

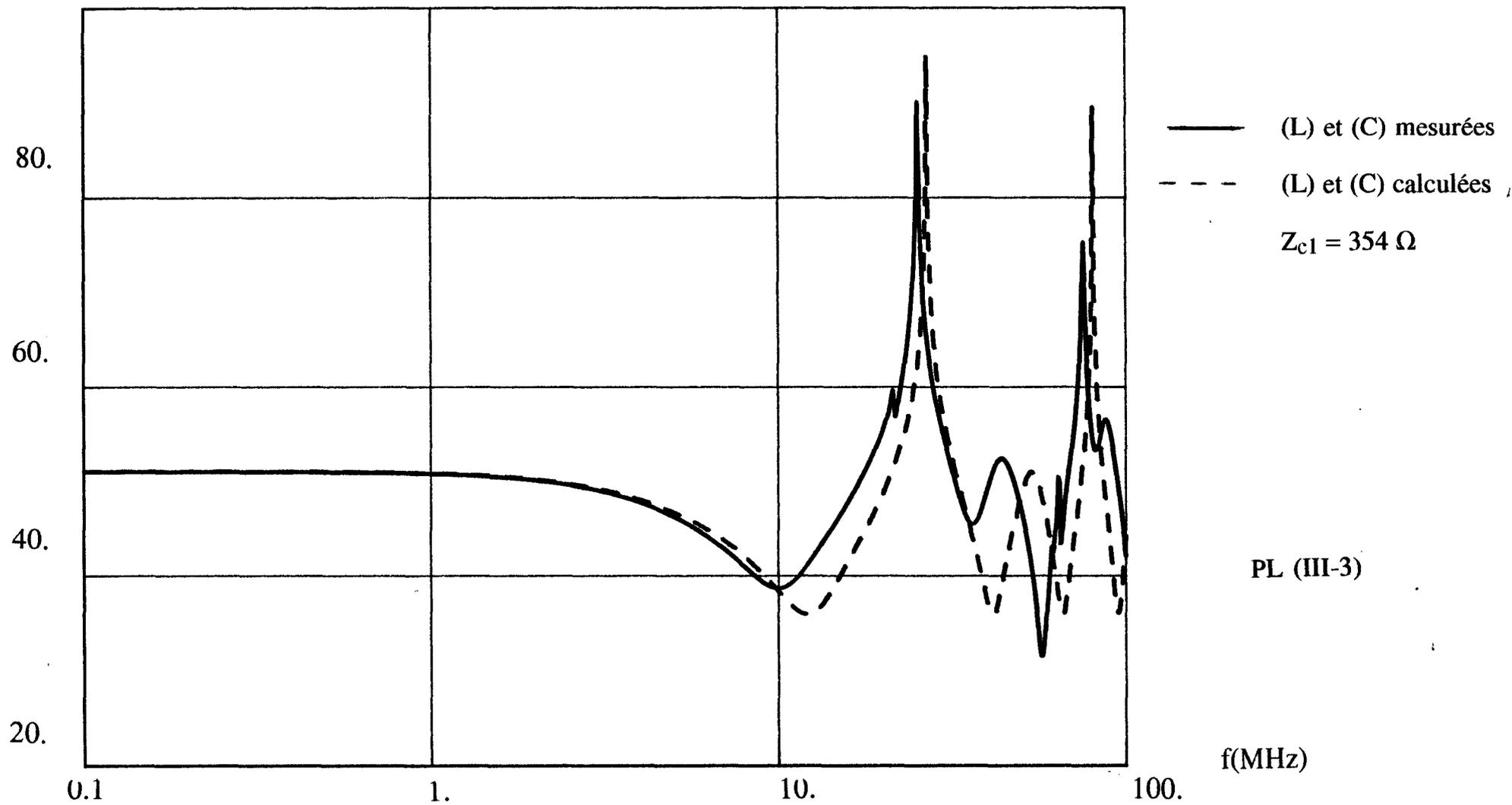
La vitesse de mode commun mesurée vaut $2.3 \cdot 10^8$ m/s, ce qui correspond à un milieu de permittivité relative équivalente 1.3. En inversant la matrice inductance et en la divisant par v_c^2 , nous obtenons la matrice capacité suivante exprimée en pF/m.

$$(C) = \begin{pmatrix} 91.5 & -14.2 & 0.8 & -23.6 & 2. \\ -14.2 & 100. & -14.2 & -15.6 & -15.7 \\ 0.8 & -14.2 & 91.5 & 2. & -23.6 \\ -23.6 & -15.6 & 2. & 64. & -23. \\ 2. & -15.7 & -23.6 & -23. & 64. \end{pmatrix} \quad (\text{III-11})$$

$$Z_e = 20 \log (Z_e (\Omega) / 1 \Omega)$$



$$Z_e = 20 \log (Z_e (\Omega) / 1 \Omega)$$



Comme précédemment, dans cette matrice capacité apparaissent des termes de couplage C_{ij} positifs. Ces termes qui n'ont aucun sens physique sont dus aux erreurs commises sur les inductances établies par les formules (III-5) et (III-6). Pour certains conducteurs, le rapport espacement diamètre ainsi que le rapport hauteur diamètre est inférieur à 2. Les formules analytiques nous conduisent à des erreurs que nous évaluons en comparant sur la planche PL(III-4) l'impédance d'entrée du conducteur 1 modélisée avec les inductances linéiques calculées de la matrice (III-10), en trait pointillé, et celle modélisée avec les inductances linéiques mesurées de la matrice (III-3), en trait plein. Dans les deux cas, le conducteur 1 est chargé sur 74.3Ω , valeur calculée par la formule de la figure (III-3) avec les inductances linéiques de la matrice (III-10).

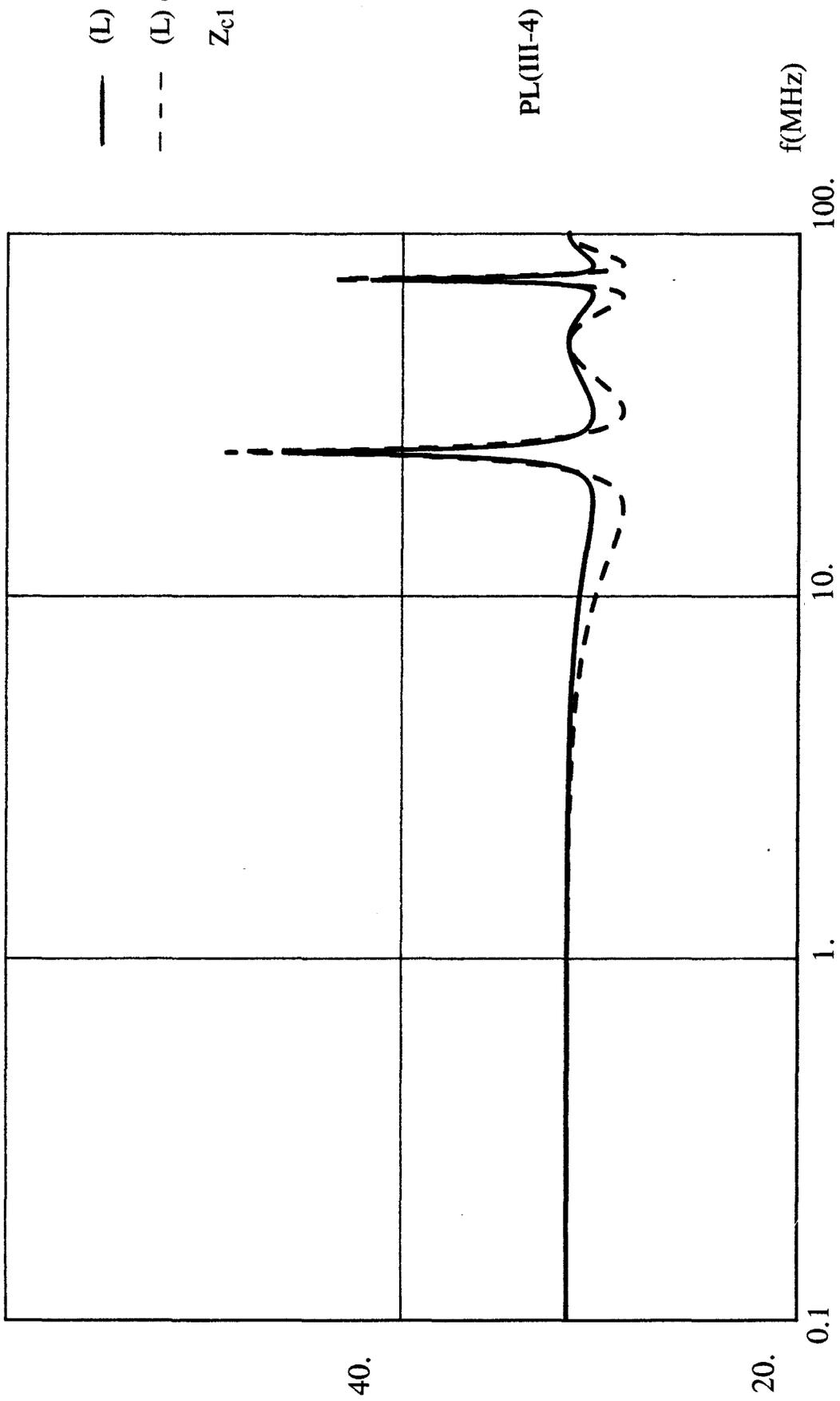
En basses fréquences, il y a une concordance parfaite entre les deux courbes. Par contre, en hautes fréquences, nous observons un écart. Il ne faut pas oublier que, dans ce cas particulier où le toron est plaqué contre le plan de masse, non seulement le rapport espacement diamètre est inférieur à 2 mais aussi le rapport hauteur diamètre, ce qui nous donne vingt coefficients de la matrice inductance erronés. Cependant, les erreurs commises en utilisant les formules analytiques classiques pour la détermination des inductances linéiques influencent très peu la prédiction théorique du paramètre étudié qu'est l'impédance d'entrée.

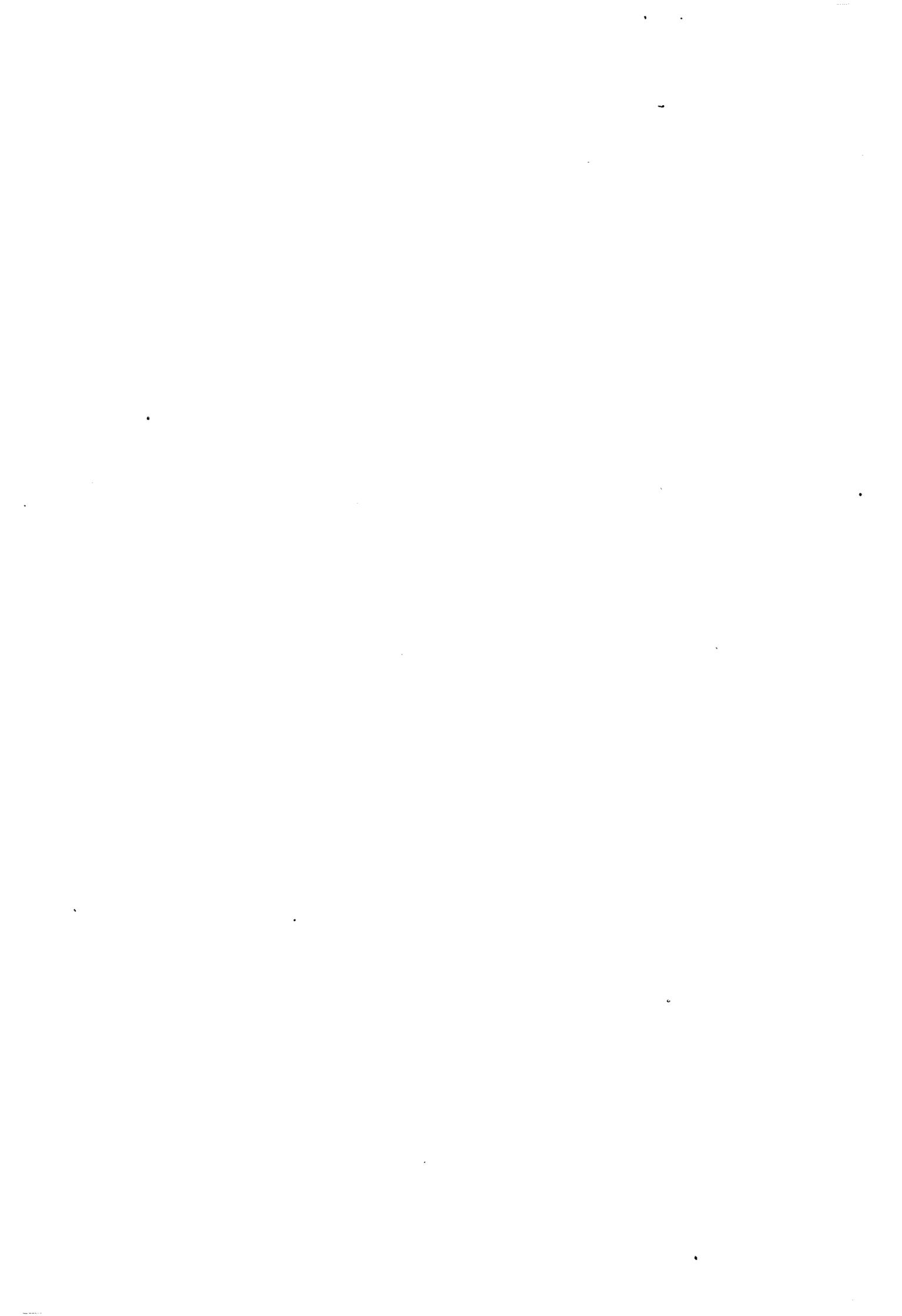
Sur la planche PL(III-5), nous avons comparé l'impédance d'entrée du conducteur 1 calculée au moyen du formalisme multimodal avec les paramètres linéiques rassemblés dans les matrices (III-3) et (III-4), courbe en trait plein, et l'impédance d'entrée de ce même conducteur évaluée par le modèle simplifié, courbe en pointillés. Dans les deux cas, le conducteur est chargé sur 74.3Ω . Les conclusions sont identiques à celles observées lorsque le toron est situé à une dizaine de centimètres du plan de référence: la concordance entre les deux courbes est satisfaisante en basses fréquences alors qu'en hautes fréquences, nous ne retrouvons pas les résonances dues à la non dégénérescence des modes de propagation sur la caractéristique obtenue par le modèle simplifié.

Pour les deux configurations étudiées, nous pouvons conclure que l'impédance d'entrée prédite par le modèle simplifié est très proche de celle obtenue par le formalisme modal. Les comparaisons effectuées valident tout à fait la simplification proposée en ce qui concerne l'impédance d'entrée d'un conducteur quelconque du faisceau. Pour les basses fréquences, il y a concordance parfaite entre les deux approches. La suite de ce chapitre consiste à valider cette simplification sur la prédiction des parasites induits sur un faisceau de câbles par une perturbation extérieure.

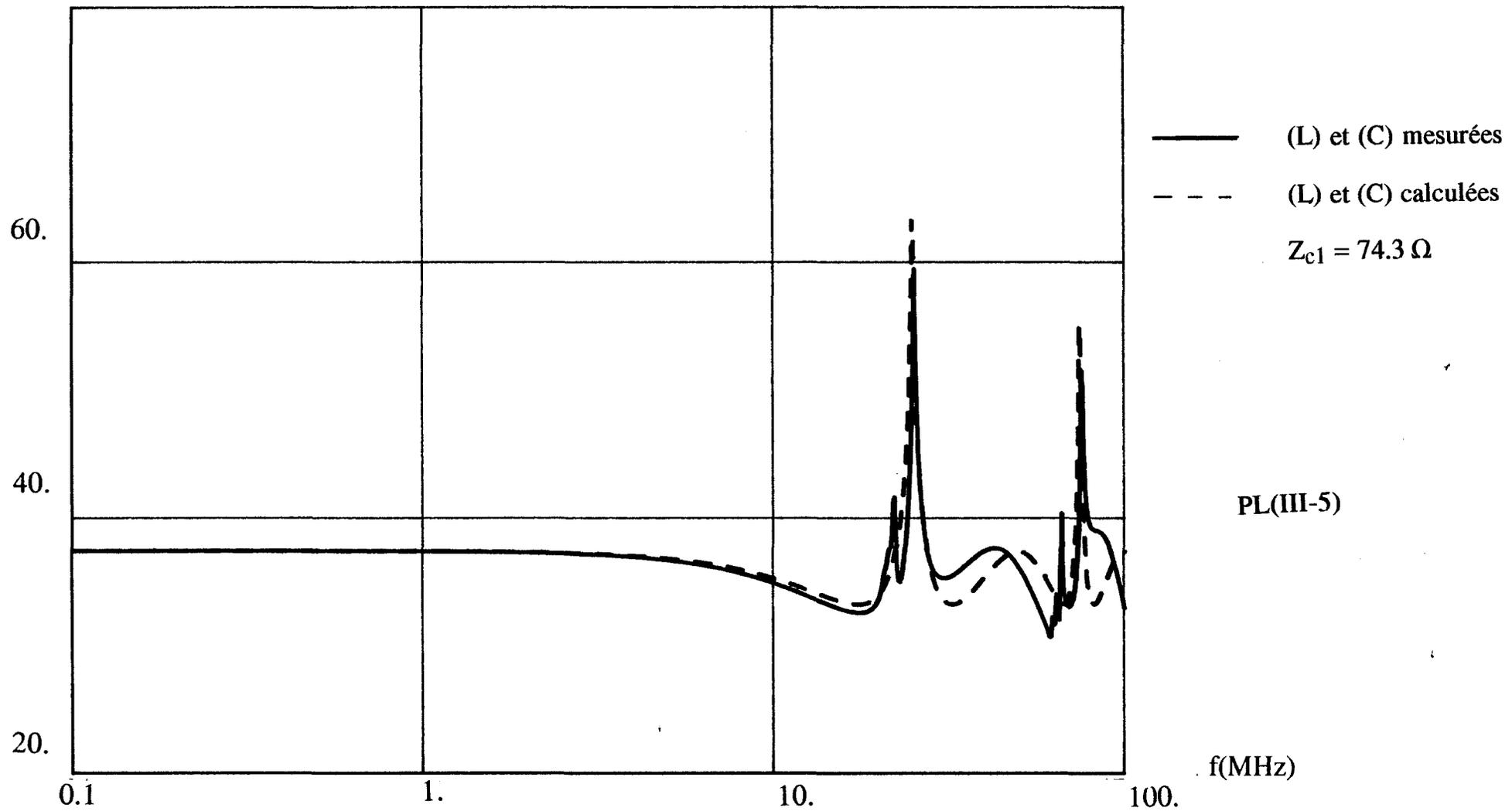


$$Z_e = 20 \log (Z_e (\Omega) / 1 \Omega)$$





$$Z_e = 20 \log (Z_e (\Omega) / 1 \Omega)$$



III-3 Validation de la simplification proposée sur les parasites induits sur un faisceau de câbles par une agression électromagnétique:

Considérons un ensemble de N conducteurs de longueur L immergés dans un milieu diélectrique hétérogène et placés au-dessus d'un plan de masse. Figure (III-6). Ce faisceau est illuminé par une onde électromagnétique.

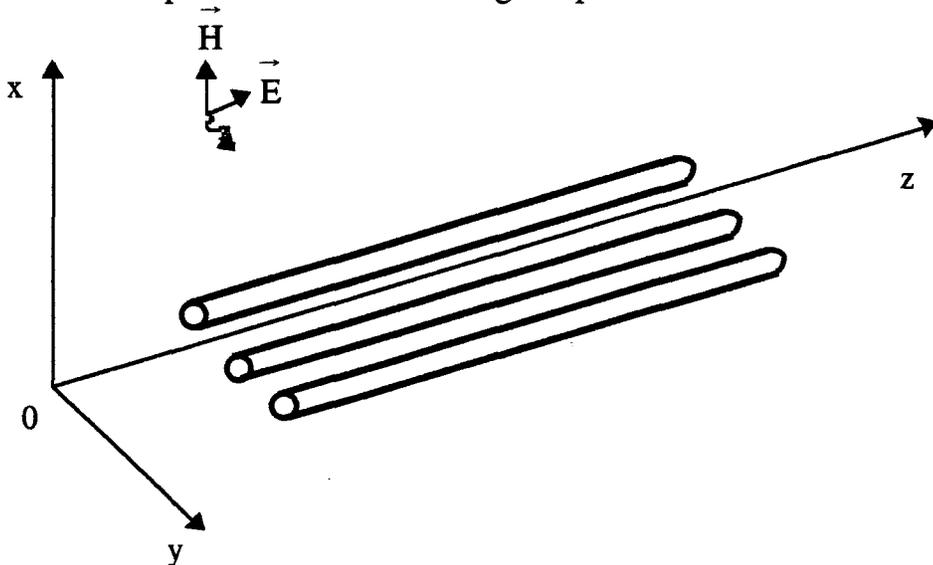


Figure (III-6)

Les courants et tensions observés aux extrémités de ce faisceau vérifient le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \left(-\frac{dV}{dz} \right) = (Z) (I) - (\epsilon) \\ \left(-\frac{dI}{dz} \right) = (Y) (V) - (L) \end{cases} \quad (\text{III-12})$$

où (ϵ) et (L) sont les matrices source de tension et de courant qui caractérisent la perturbation extérieure.

Si nous adoptons la simplification proposée, qui consiste à supposer que les conducteurs baignent dans un milieu homogène dont la permittivité relative équivalente est directement liée à la vitesse de mode commun, le système précédent se résout par le formalisme classique développé dans le premier chapitre. Si nous déterminons les tensions et courants induits (I) et (V) à partir des paramètres linéiques (L) et (C) mesurés, nous avons recours au formalisme modal, également développé dans le premier chapitre.

Pour apprécier les erreurs introduites par la simplification sur le modèle théorique, considérons le toron placé à une hauteur $h = 101.5$ mm du plan de masse de la figure (III-2). Les cinq conducteurs de ce faisceau sont connectés à leurs extrémités au plan de masse. Figure (III-7). Le courant induit sur l'un des conducteurs est tout d'abord calculé au moyen du formalisme modal; ensuite il sera évalué avec le modèle simplifié.

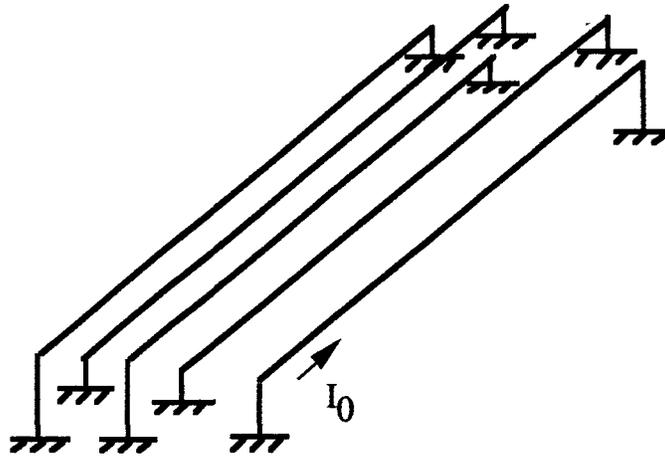


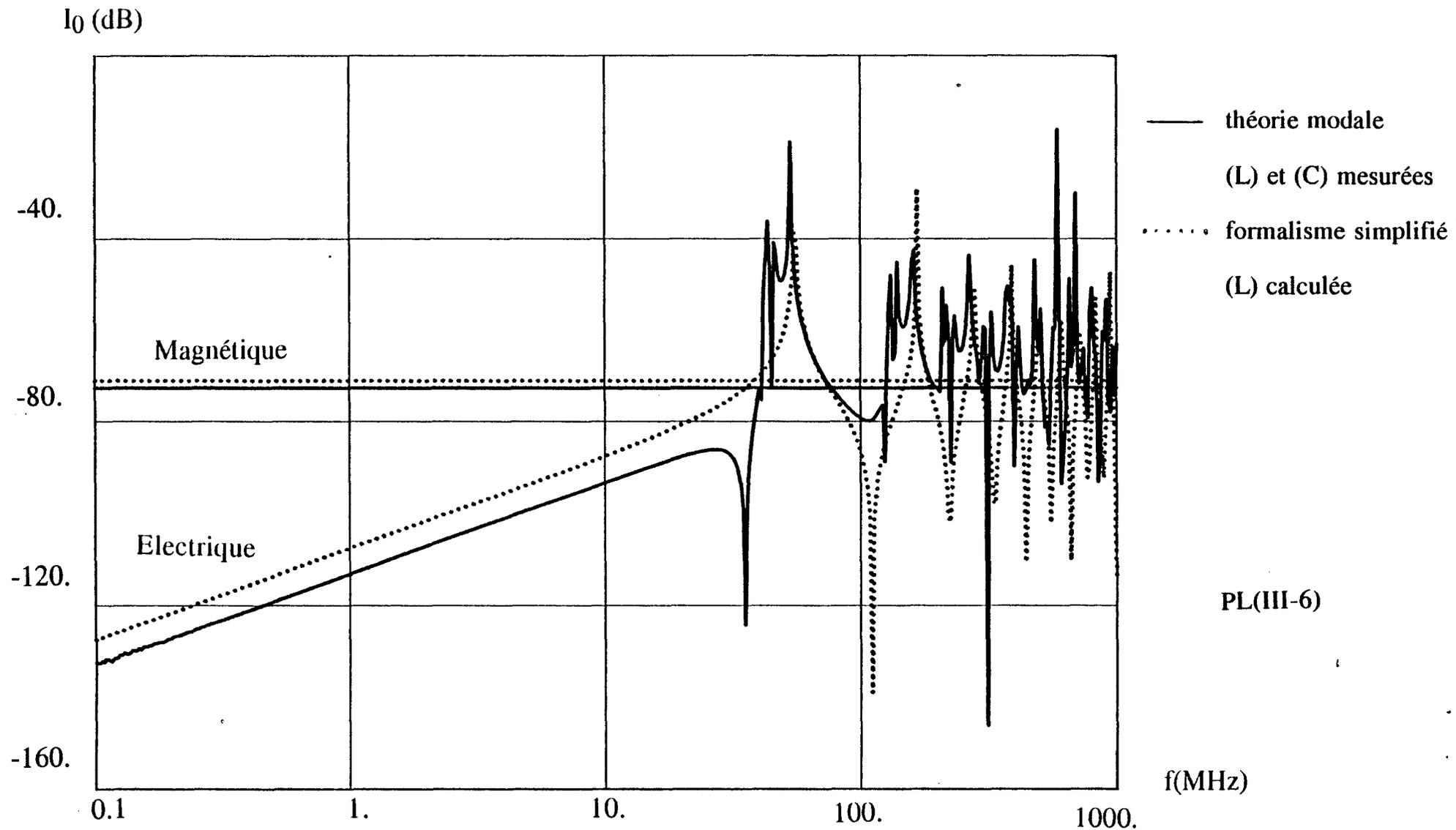
Figure (III-7)

Sur la planche PL(III-6), la courbe en trait plein représente le courant induit sur le conducteur 1 en appliquant le formalisme modal, la courbe en pointillés montre l'évolution de ce même paramètre calculé par la simplification proposée. Les courbes de cette planche montrent que, sous excitation magnétique produite par une onde parvenant normalement au plan, nous observons un léger écart sur l'amplitude en dB du courant induit. La caractéristique déduite par le formalisme modal utilise la matrice inductance mesurée (III-1) alors que la caractéristique modélisée par la théorie simplifiée utilise la matrice inductance calculée (III-8). Ces deux matrices n'étant pas rigoureusement identiques, nous constatons une légère différence sur l'amplitude du courant induit. En effet, comme nous le verrons dans le cinquième chapitre, pour un ensemble de conducteurs court-circuités illuminé par une onde de type magnétique, le courant induit sur l'un des conducteurs est constant et dépend uniquement de la matrice inductance du faisceau. Cette propriété est exprimée par la relation (V-44).

Par contre, s'il s'agit d'un couplage électrique produit par une onde parvenant normalement au conducteur, il n'y a pas rigoureusement convergence entre les résultats. En basses fréquences, nous observons un écart de 4% sur l'amplitude du courant en dB. Cet écart peut être attribué aux erreurs introduites dans l'évaluation des coefficients capacité puisqu'ils déterminent le niveau du courant induit comme l'indique la formule (V-48). A plus hautes fréquences, l'interprétation des écarts est plus difficile à formuler; celle-ci affecte le nombre et la position de certaines résonances. Des résonances caractéristiques de la propagation multimodale apparaissent uniquement sur les courbes obtenues par le formalisme modal.

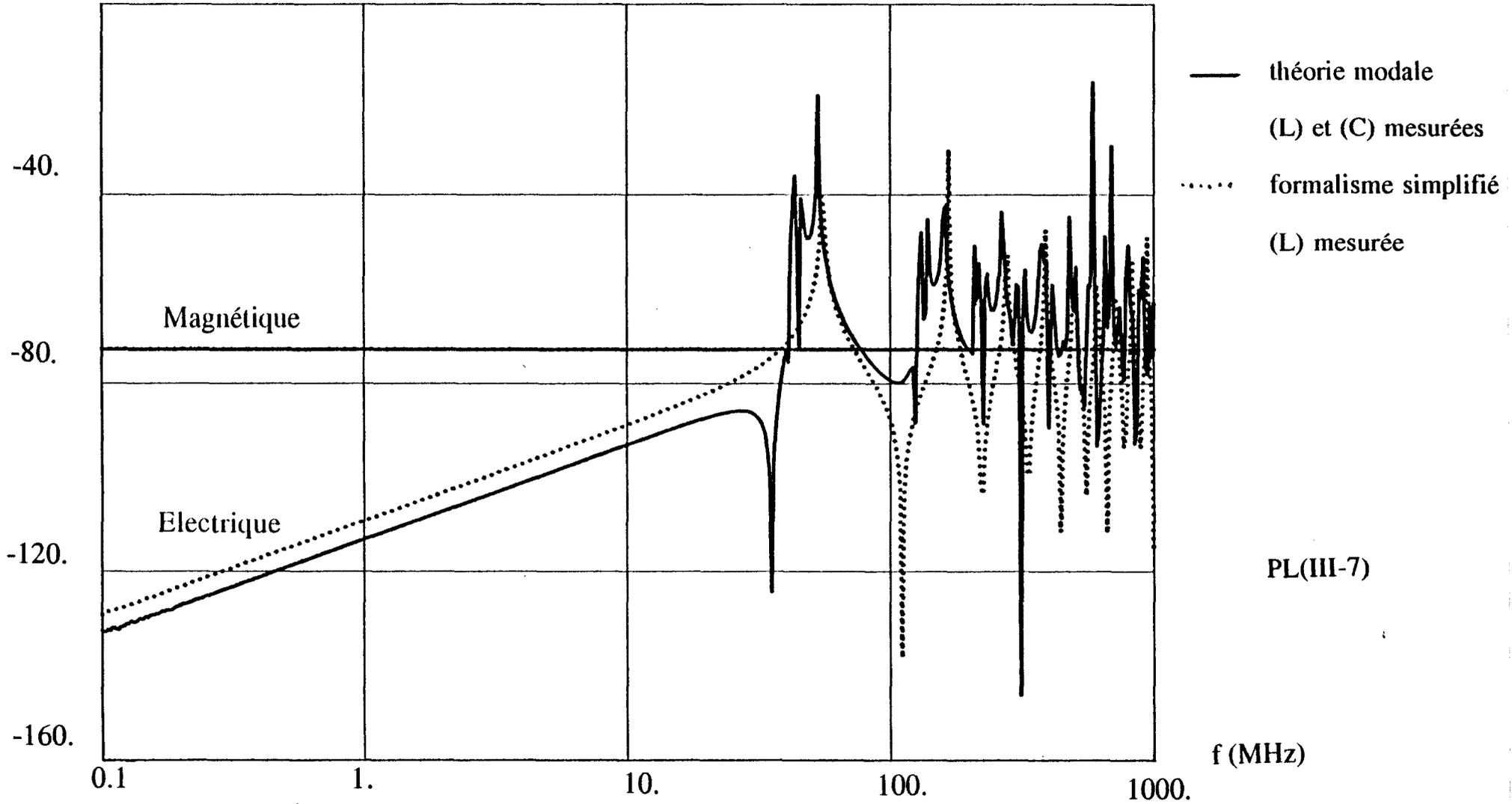
Sur ces courbes, c'est à partir des inductances calculées que nous avons modélisé le courant induit sur le conducteur 1. Sur la planche PL(III-7), nous avons représenté les mêmes caractéristiques que sur la planche PL(III-6) en ayant cette fois utilisé les inductances mesurées pour la modélisation du courant par la théorie simplifiée. Cette fois, pour le couplage magnétique, il y a convergence entre les deux

Courant induit sur le conducteur 1



Courant induit sur le conducteur 1

I_0 (dB)



courbes alors que pour le couplage électrique, l'écart enregistré en basses fréquences est toujours présent. Cette planche nous permet de lever le doute quant aux erreurs introduites par les coefficients C_{ij} positifs sur le niveau du courant induit en basses fréquences et de montrer que les phénomènes de résonance sont peu influencés par cette erreur.

Pour toutes les planches qui suivent, la courbe en trait plein représente le courant (ou la tension) induit sur le conducteur 1 en appliquant le formalisme modal, la courbe en pointillés montre l'évolution de ce même paramètre calculé par la simplification proposée. La planche PL(III-8) montre l'évolution du courant induit par une onde de type hybride rasante arrivant parallèlement au conducteur. En basses fréquences, le léger écart entre les deux courbes est dû au fait que les matrices inductance mesurée et calculée ne sont pas rigoureusement identiques; en hautes fréquences, les conclusions sont identiques à celles du cas électrique.

Les courbes de la planche PL(III-9) représentent le courant induit sur le conducteur 1, lorsque nous plaquons le toron de cinq conducteurs contre le plan de masse sous excitation électrique. En basses fréquences, l'écart observé sur l'amplitude en dB du courant modélisé par les deux approches est d'environ 2%.

Considérons à nouveau le toron de cinq conducteurs placé à une hauteur $h = 101.5$ mm au-dessus du plan de masse. Mais cette fois les extrémités des conducteurs sont laissées en l'air. Figure (III-8).

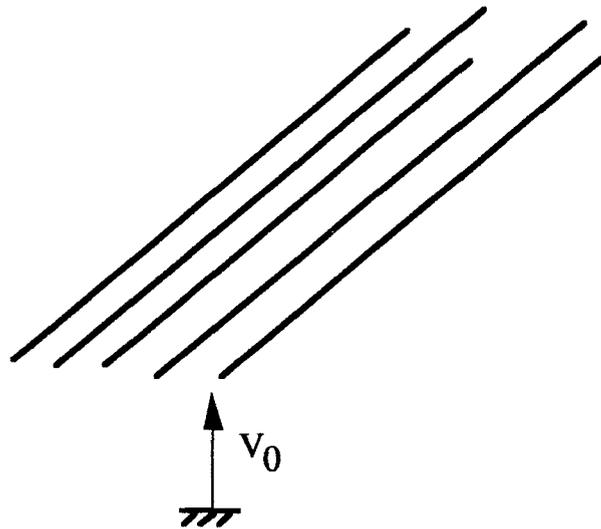


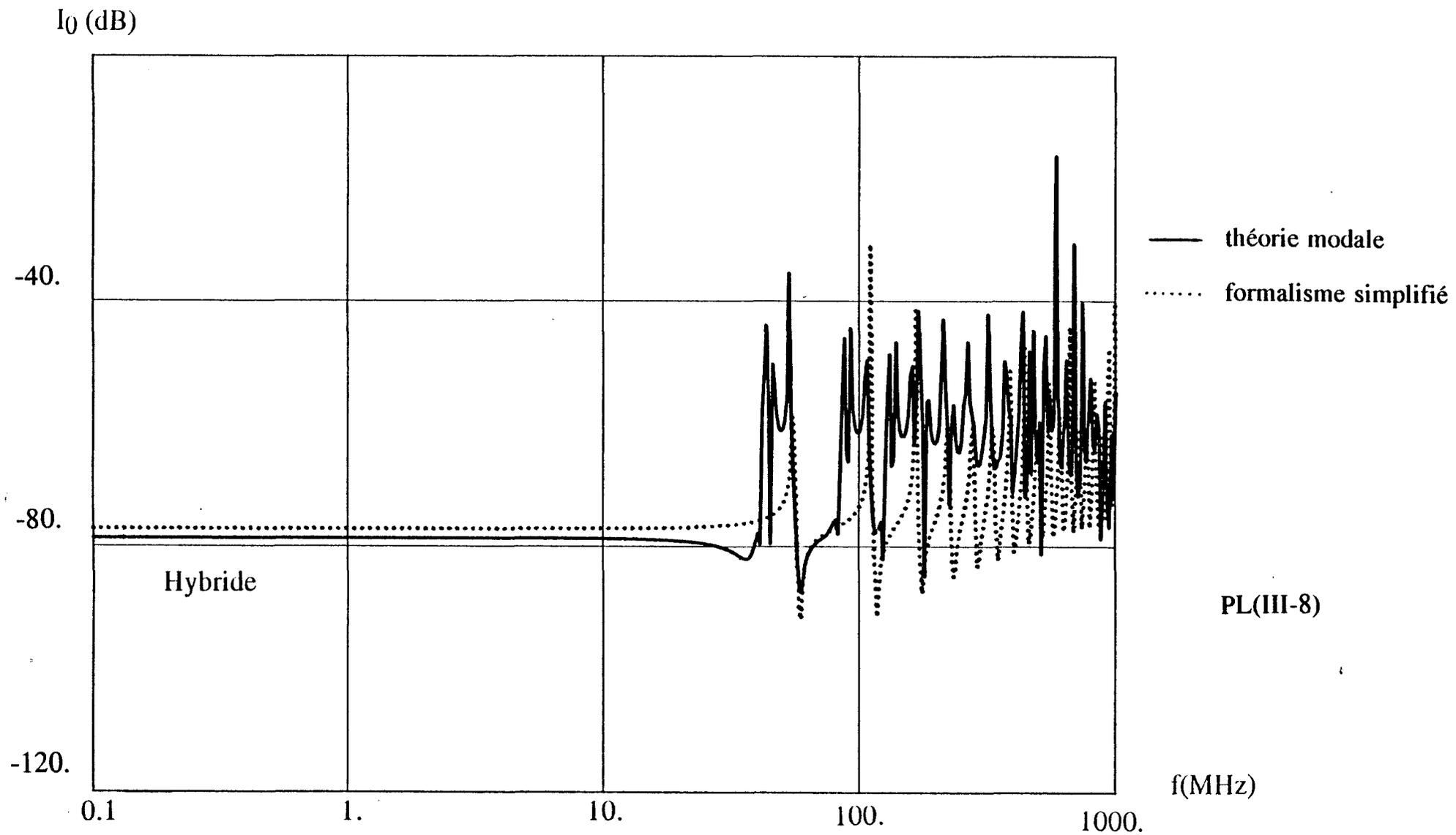
Figure (III-8)

Les courbes de la planche PL(III-10) montrent que sous excitation électrique, il y a convergence entre la théorie modale et le modèle simplifié. La valeur de la tension est indépendante de la fréquence et, pour un ensemble comprenant uniquement des conducteurs en l'air, cette valeur n'est fonction que du champ électrique et des hauteurs des conducteurs par rapport au plan de référence, comme l'exprime la relation (V-19). En ce qui concerne le couplage magnétique, en basses

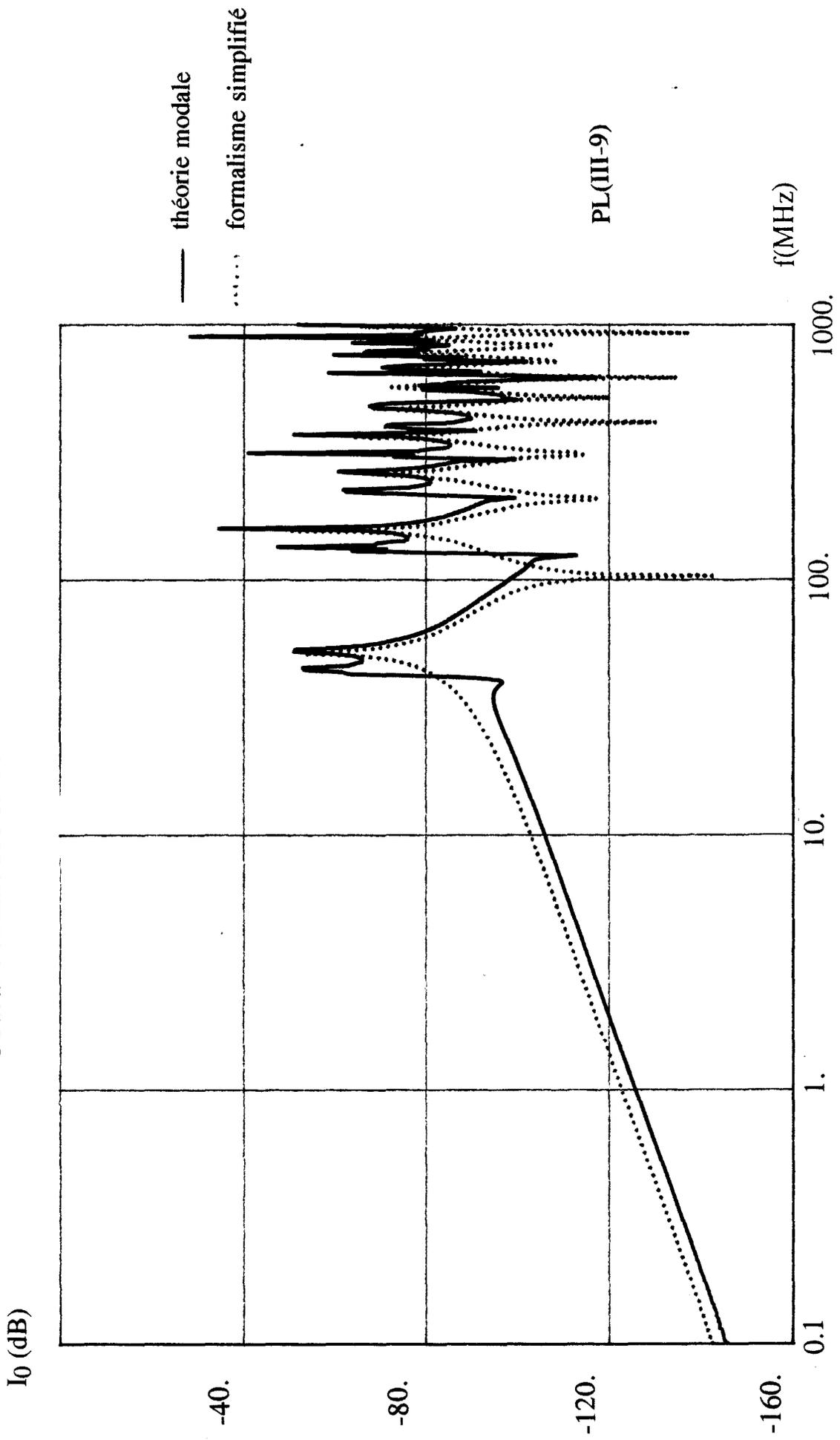
fréquences, il y a superposition des deux courbes; en effet, comme nous le verrons dans le cinquième chapitre, pour un ensemble uniquement de conducteurs en l'air, l'amplitude de la tension induite ne dépend que de la fréquence, du champ magnétique et de la hauteur du conducteur par rapport au plan de masse, comme le montre la formule (V-23). En plus hautes fréquences, nous observons, comme pour un ensemble de conducteurs court-circuités, des écarts sur le nombre et la position des résonances.

Dans ce chapitre, nous avons exposé une simplification de la théorie modale dans le but de réduire le nombre de paramètres primaires à mesurer. Elle consiste à déduire les inductances et capacités linéiques par des formules analytiques et de procéder à une seule mesure qu'est la vitesse de mode commun. Cette simplification engendre des erreurs qui n'influencent pas l'impédance d'entrée d'un conducteur quelconque du faisceau en basses fréquences mais qui fait varier le nombre et la position des résonances de ce paramètre en hautes fréquences. En ce qui concerne la prédiction des parasites induits par une agression électromagnétique, les erreurs commises lorsque nous utilisons la simplification dépendent du type d'excitation et des conditions de charge du faisceau; il est donc difficile de généraliser. Toutefois, nous avons pu chiffrer cette erreur sur quelques exemples: en basses fréquences, l'écart observé sur l'amplitude du courant ou de la tension en dB modélisée par les deux approches ne dépasse pas 5%; en hautes fréquences, il est difficile de tirer une conclusion. Sur le plan de l'énergie induite sur le conducteur, ces erreurs n'auront pas un impact important. Toutefois, il reste à établir quel effet auront ces erreurs sur l'amplitude crête des parasites transitoires. Ceci nous amène à transposer l'analyse fréquentielle qui a été faite jusqu'à présent dans le domaine temporel, ce qui fait l'objet du chapitre suivant.

Courant induit sur le conducteur 1



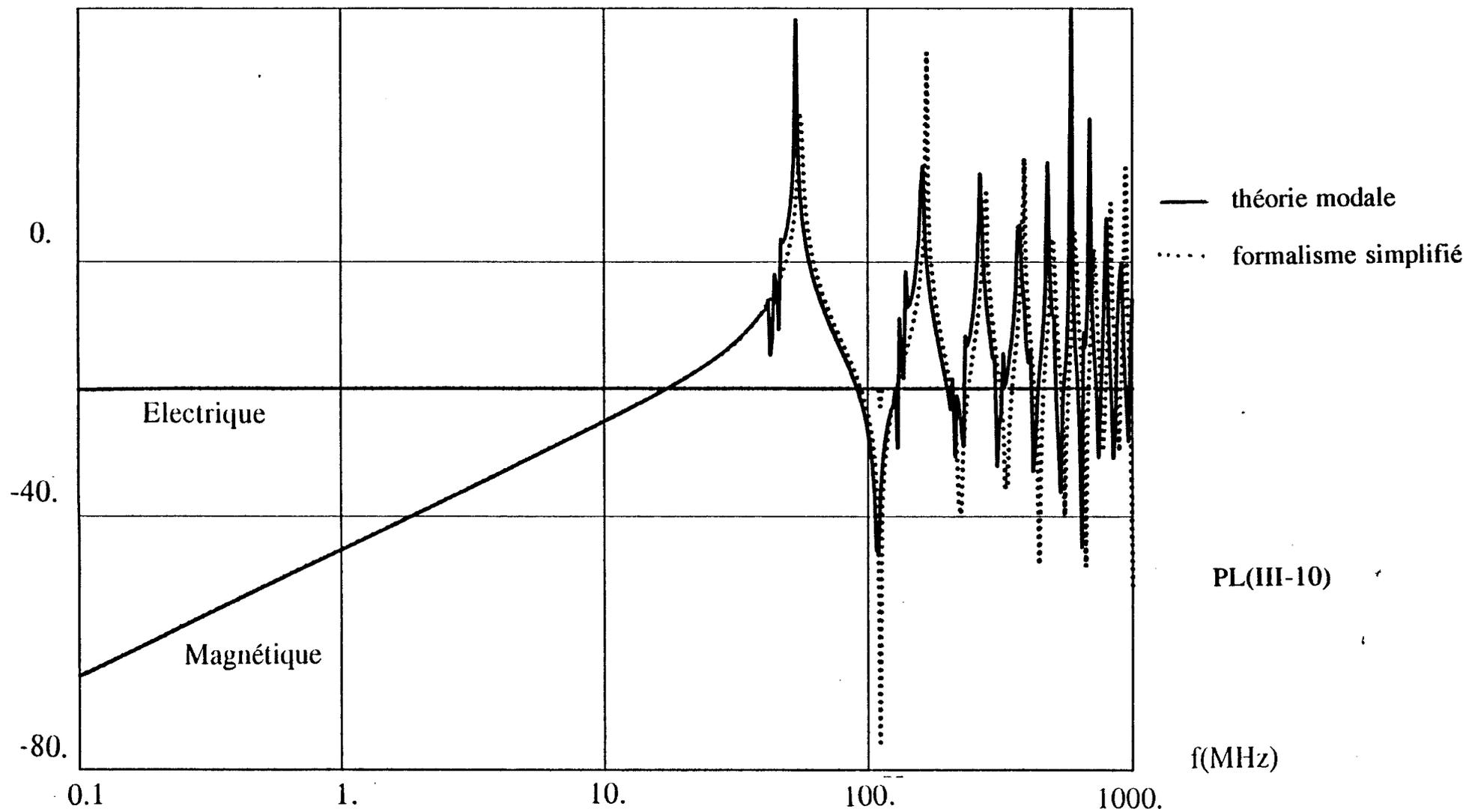
Courant induit sur le conducteur 1





Tension induite sur le conducteur 1

V_0 (dB)



CHAPITRE IV
THEORIE MODALE DES REFLEXIONS MULTIPLES

IV THEORIE MODALE DES REFLEXIONS MULTIPLES

Pour évaluer la réponse temporelle d'un système à une agression électromagnétique, nous avons à notre disposition plusieurs méthodes possibles. Ces méthodes sont répertoriées dans un article de Djordjevic [18]: résolution spatio-temporelle des équations des télégraphistes [31], analyse modale dans le domaine fréquentiel avec passage dans le domaine temporel par transformée de Fourier, analyse modale dans le domaine temporel. Dans l'un de ses articles [9], Canavero résoud les équations des lignes couplées dans le domaine symbolique et aboutit à une expression analytique des parasites induits sur un système par une perturbation électromagnétique néanmoins certaines hypothèses à savoir que la propagation est totalement dégénérée.

Dans ce chapitre, nous allons construire la réponse temporelle d'une ligne multifilaire à partir des réflexions modales pour des sources de perturbation localisées. Nous distinguerons deux cas selon que les conducteurs baignent dans un milieu homogène ou non c'est-à-dire que les modes se propagent tous à la même vitesse ou non. Les développements analytiques auxquels nous aboutissons seront comparés à des résultats trouvés dans la bibliographie et à des résultats obtenus expérimentalement. Nous pourrons ensuite apprécier l'erreur introduite sur les parasites induits par la théorie simplifiée développée dans le chapitre précédent. Enfin, nous verrons comment adapter la théorie modale des réflexions multiples au cas de sources réparties.

Considérons un faisceau de N conducteurs supposés parfaits rectilignes de longueur L parallèles à un plan de masse. Nous étudierons un premier modèle canonique dans lequel une source est connectée à l'une des extrémités de chaque conducteur et l'autre extrémité est reliée à une impédance. Figure (IV-1).

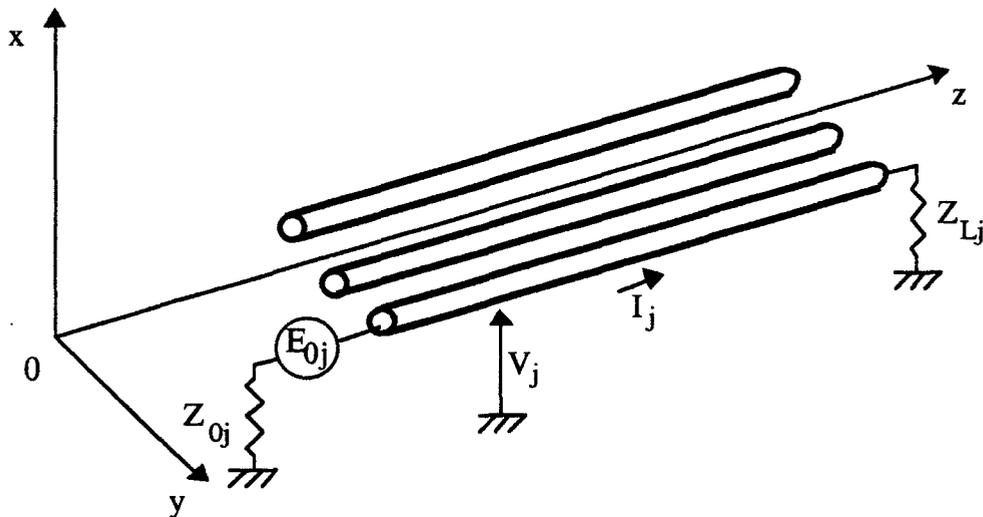


Figure (IV-1)

Z_{0j} est l'impédance interne de la source connectée sur le conducteur j .
 Z_{Lj} est l'impédance de charge de ce conducteur.

Les courants I_j et tensions V_j sont donnés par la théorie des lignes couplées, qui s'exprime sous forme matricielle

$$\begin{cases} \left(-\frac{dV}{dz} \right) = (Z) (I) \\ \left(-\frac{dI}{dz} \right) = (Y) (V) \end{cases} \quad (\text{IV-1})$$

Ce système se réduit à deux équations différentielles du second ordre

$$\left(\frac{d^2 I}{dz^2} \right) - (Y)(Z)(I) = 0 \quad (\text{IV-2})$$

$$\left(\frac{d^2 V}{dz^2} \right) - (Z)(Y)(V) = 0 \quad (\text{IV-3})$$

Nous conviendrons que la première relation correspond à l'équation en courant et la seconde à l'équation pour les tensions. Pour les résoudre nous devons distinguer deux cas, comme nous l'avons fait dans le premier chapitre : le cas où les conducteurs baignent dans un milieu diélectrique homogène et celui où ils sont enrobés de diélectrique.

IV-1 Milieu homogène :

L'hypothèse du milieu diélectrique homogène implique que les matrices (Z) et (Y) commutent et que leur produit est une matrice diagonale dont les éléments sont égaux soit

$$(Z)(Y) = (Y)(Z) = \gamma_0^2 (1) \quad (\text{IV-4})$$

où (1) est la matrice unité et γ_0 la constante de propagation du milieu. $\gamma_0 = j \frac{\omega}{v}$ avec v vitesse de propagation dans le milieu.

Avec cette hypothèse, les équations (IV-2) et (IV-3) deviennent

$$\left(\frac{d^2 \mathbf{I}}{dz^2} \right) - \gamma_0^2 (\mathbf{I}) = 0 \quad (\text{IV-5})$$

$$\left(\frac{d^2 \mathbf{V}}{dz^2} \right) - \gamma_0^2 (\mathbf{V}) = 0 \quad (\text{IV-6})$$

Nous pouvons choisir de résoudre l'une ou l'autre des deux équations (IV-5) et (IV-6). Si nous optons pour la première, nous exprimons la solution en courant; si nous résolvons la seconde, nous exprimons la solution en tension.

Les courants solutions du système (IV-5) s'expriment

$$(\mathbf{I}) = (\mathbf{A}) e^{-\gamma_0 z} + (\mathbf{B}) e^{\gamma_0 z}$$

où (A) et (B) sont des vecteurs dont les coefficients inconnus sont fonction des conditions imposées aux extrémités du faisceau.

De (IV-1), nous pouvons déduire les tensions correspondantes

$$(\mathbf{V}) = (\mathbf{Y})^{-1} \left(- \frac{d\mathbf{I}}{dz} \right) = \frac{(\mathbf{Z})}{\gamma_0} [(\mathbf{A}) e^{-\gamma_0 z} - (\mathbf{B}) e^{\gamma_0 z}]$$

Si nous admettons que les lignes sont de dimension infinie, il n'y a pas d'onde réfléchie. (B) est donc nul.

Le courant I_j qui circule sur le conducteur j s'exprime

$$I_j = A_j e^{-\gamma_0 z}$$

alors que la tension V_j s'écrit

$$V_j = \frac{\sum_{i=1}^N Z_{ji} A_i}{\gamma_0} e^{-\gamma_0 z}$$

Calculons maintenant le rapport de la tension et du courant que nous notons Z_{ej}

$$Z_{ej} = \frac{1}{V_0} \frac{\sum_{i=1}^N Z_{ji} A_i}{A_j} \quad (\text{IV-7})$$

Ce rapport peut être identifié à l'impédance d'entrée du conducteur j . Il est fonction des paramètres primaires du faisceau Z_{ij} mais aussi des coefficients A_i dont la valeur est directement liée aux conditions imposées à l'origine du faisceau. Pour les lignes non couplées, ce rapport n'est fonction que des paramètres intrinsèques des lignes et s'identifie à l'impédance caractéristique du faisceau.

Dans le cas des lignes couplées, pour pouvoir identifier l'impédance d'entrée Z_{ej} définie par (IV-7) à l'impédance caractéristique du conducteur j , il faut que (Z) soit diagonale. Ceci peut être réalisé par un changement de base.

Les valeurs propres de la matrice (Z) sont solutions de l'équation

$$\det ((Z) - \lambda (1)) = 0$$

Notons (T) la matrice de passage formée des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ . Nous obtenons donc la matrice diagonale (z) définie par

$$(z) = (T)^{-1} (Z) (T)$$

Il est important de signaler que (T) est également la matrice de passage qui diagonalise (Y) . En effet, en utilisant (IV-4), nous exprimons (Y) par

$$(Y) = (Z)^{-1} V_0^2$$

Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} (T)^{-1} (Y) (T) &= (T)^{-1} (Z)^{-1} (T) V_0^2 \\ &= (z)^{-1} V_0^2 \end{aligned}$$

La matrice définie par $(y) = (T)^{-1} (Y) (T)$ est diagonale.

Les courants et tensions dans la base propre sont notés (i) et (v) . Nous passons des composantes en base propre aux composantes dans la base originale à l'aide de la matrice de passage (T) soit

$$\begin{aligned} (I) &= (T) (i) \\ (V) &= (T) (v) \end{aligned} \quad (\text{IV-8})$$

Le système (IV-1) s'exprime dans cette base

$$\begin{cases} \left(-\frac{dv}{dz} \right) = (T)^{-1}(Z) (T) (i) \\ \left(-\frac{di}{dz} \right) = (T)^{-1}(Y) (T) (v) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \left(-\frac{di}{dz} \right) = (T)^{-1}(Y) (T) (v) \\ \left(\frac{d^2i}{dz^2} \right) - (T)^{-1}(Y) (Z) (T) (i) = 0 \end{cases}$$

En utilisant la relation (IV-4), ce système s'écrit encore

$$\begin{cases} \left(-\frac{di}{dz} \right) = (y) (v) \\ \left(\frac{d^2i}{dz^2} \right) - \gamma_0^2 (i) = 0 \end{cases}$$

avec $(y) = (T)^{-1} (Y) (T)$

d'où la solution en courant dans la base propre

$$(i) = (a) e^{-\gamma_0 z} + (b) e^{\gamma_0 z}$$

La solution en tension associée s'écrit

$$(v) = (T)^{-1} (Y)^{-1} (T) \left(-\frac{di}{dz} \right)$$

soit en utilisant (IV-4)

$$(v) = \frac{1}{\gamma_0^2} (T)^{-1} (Z) (T) \left(-\frac{di}{dz} \right)$$

$$(v) = \frac{(Z)}{\gamma_0} [(a) e^{-\gamma_0 z} - (b) e^{\gamma_0 z}]$$

où (z) est une matrice diagonale.

Pour une ligne infinie, le courant et la tension s'écrivent

$$i_j = a_j e^{-\gamma_0 z}$$

$$v_j = \frac{z_j}{\gamma_0} a_j e^{-\gamma_0 z}$$

Nous pouvons donc identifier les modes propres et leur attribuer une impédance caractéristique définie par

$$z_{cj} = \frac{Z_j}{\gamma_0} \quad (\text{IV-9})$$

Les solutions en courant et tension s'expriment alors

$$(i) = (a) e^{-\gamma_0 z} + (b) e^{\gamma_0 z} \quad (\text{IV-10})$$

$$(v) = (z_c) (a) e^{-\gamma_0 z} - (z_c) (b) e^{\gamma_0 z} \quad (\text{IV-11})$$

Il est à noter que tous les modes se propagent à la même vitesse.

Les matrices (a) et (b) sont déterminées en appliquant les conditions aux limites à chaque extrémité des conducteurs dans la base propre.

Dans la base originale, ces conditions s'écrivent

$$(V)_{z=0} = (E_0) - (Z_0) (I)_{z=0} \quad (\text{IV-12})$$

$$(V)_{z=L} = (Z_L) (I)_{z=L} \quad (\text{IV-13})$$

où (Z_0) et (Z_L) sont les matrices diagonales formées des éléments Z_{0j} et Z_{Lj} .

(E_0) est la matrice colonne correspondant aux fem appliquées à chaque conducteur.

En utilisant les transformations (IV-8), ces conditions aux limites deviennent dans la base propre

$$(v)_{z=0} = (e_0) - (z_0) (i)_{z=0}$$

$$(v)_{z=L} = (z_L) (i)_{z=L}$$

avec

$$(e_0) = (T)^{-1} (E_0)$$

$$(z_0) = (T)^{-1} (Z_0) (T)$$

$$(z_L) = (T)^{-1} (Z_L) (T)$$

En exprimant (i) et (v) par les relations (IV-10) et (IV-11), nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} [(z_0) + (z_c)] (a) + [(z_0) - (z_c)] (b) & = (e_0) \\ [(z_L) - (z_c)] (a) e^{-\gamma_0 L} + [(z_L) + (z_c)] (b) e^{\gamma_0 L} & = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-14})$$

où (a) et (b) sont les matrices colonnes inconnues.

Par analogie avec les systèmes ne comportant qu'un seul conducteur, nous pouvons définir deux coefficients de réflexion sous forme matricielle tels que

$$(\rho_0) = [(z_0) + (z_c)]^{-1} [(z_0) - (z_c)] \quad (\text{IV-15})$$

$$(\rho_L) = [(z_L) + (z_c)]^{-1} [(z_L) - (z_c)] \quad (\text{IV-16})$$

Le système (IV-14) s'écrit alors

$$\begin{cases} (a) - (\rho_0) (b) = [(z_0) + (z_c)]^{-1} (e_0) \\ (\rho_L) (a) e^{-\gamma_0 L} - (b) e^{\gamma_0 L} = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} (a) = (1 - (\rho_0) (\rho_L) e^{-2\gamma_0 L})^{-1} [(z_0) + (z_c)]^{-1} (e_0) \\ (b) = (\rho_L) (a) e^{-2\gamma_0 L} \end{cases}$$

En remplaçant dans (IV-10) (a) et (b) par les expressions ci-dessus, le courant à l'origine de la ligne s'exprime

$$(i)_{z=0} = (1 + (\rho_L) e^{-2\gamma_0 L}) (1 - (\rho_0) (\rho_L) e^{-2\gamma_0 L})^{-1} [(z_c) + (z_0)]^{-1} (e_0) \quad (\text{IV-17})$$

Pour développer cette expression, aidons-nous du théorème mathématique suivant [25] : Si la fonction $f(x)$ peut être développée en une série entière dans le cercle $|x - x_0| < r$

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_p (x - x_0)^p$$

cette expression est encore valable lorsque l'argument scalaire x est remplacé par une matrice A dont les valeurs caractéristiques sont situées à l'intérieur du cercle de convergence.

Ce théorème nous permet d'écrire que

$$(1 - (\rho_0) (\rho_L) e^{-2\gamma_0 L})^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} ((\rho_0) (\rho_L) e^{-2\gamma_0 L})^m$$

La relation (IV-17) devient

$$(i)_{z=0} = (1 + (\rho_L) e^{-2\gamma_0 L}) \sum_{m=0}^{\infty} ((\rho_0) (\rho_L) e^{-2\gamma_0 L})^m [(z_c) + (z_0)]^{-1} (e_0)$$

Si nous supposons que les charges sont réelles, les pertes en lignes étant négligées tout au long de notre thèse, nous pouvons transcrire $(i)_{(z=0)}$ dans le domaine symbolique soit

$$(i)_{z=0} = (1 + (\rho_L) e^{-2\theta_0 p}) \sum_{m=0}^{\infty} ((\rho_0) (\rho_L))^m e^{-2m\theta_0 p} [(z_c) + (z_0)]^{-1} (e_0(p)) \quad (\text{IV-18})$$

où θ_0 est le temps de propagation en ligne puisque $\theta_0 = \frac{L}{v}$.

Traduite dans le domaine temporel (IV-18) s'exprime

$$(i(0,t)) = \sum_{m=0}^{\infty} ((\rho_0) (\rho_L))^m [(z_c) + (z_0)]^{-1} (e_0(t - 2m\theta_0)) \\ + (\rho_L) \sum_{m=0}^{\infty} ((\rho_0) (\rho_L))^m [(z_c) + (z_0)]^{-1} (e_0(t - 2(m+1)\theta_0))$$

solution qui se résume à une superposition de réflexions multiples.

Le courant dans la base originale se déduit de $i(0,t)$ par la transformation

$$(I(0,t)) = (T) (i(0,t))$$

Conformément à la relation (IV-10), le courant en bout de ligne s'exprime

$$(i)_{z=L} = (a) e^{-\gamma_0 L} + (b) e^{\gamma_0 L}$$

soit

$$(i)_{z=L} = (1 + (\rho_L)) e^{-\gamma_0 L} (1 - (\rho_0) (\rho_L) e^{-2\gamma_0 L})^{-1} [(z_c) + (z_0)]^{-1} (e_0)$$

En suivant le même raisonnement que pour le calcul de $(i(0,t))$, nous obtenons l'expression temporelle du courant en $z=L$.

$$(i(L,t)) = (1 + \rho_L) \sum_{m=0}^{\infty} ((\rho_0) (\rho_L))^m [(z_c) + (z_0)]^{-1} (e_0(t - (2m+1)\theta_0))$$

Nous obtenons le courant dans la base originale par

$$(I(L,t)) = (T) (i(L,t))$$

IV-2 Milieu hétérogène :

Dans le cas où les conducteurs sont enrobés de diélectrique, la démarche que nous venons de suivre pour déterminer le courant aux extrémités des conducteurs dans un milieu homogène est difficilement transposable. Nous nous heurtons à des difficultés mathématiques qui rendent impossible le passage analytique domaine symbolique - domaine temps. Nous pourrions obtenir numériquement l'expression temporelle du courant $i(0,t)$ ou $i(L,t)$ en appliquant une transformée de Laplace inverse. Nous pourrions également utiliser une transformée de Fourier rapide pour convertir la réponse fréquentielle dans le domaine temporel. Toutefois, cette méthode est difficile à mettre en oeuvre; un mauvais choix de la fenêtre ou du nombre d'échantillons peut donner des résultats erronés. Mais notre objectif étant d'aboutir à une formule analytique, nous avons développé la théorie de la réflexion modale.

Le système (IV-1) conduit à deux équations différentielles du second ordre que nous exprimons

$$\left(\frac{d^2 I}{dz^2} \right) - (Y)(Z)(I) = 0 \quad (IV-19)$$

$$\left(\frac{d^2 V}{dz^2} \right) - (Z)(Y)(V) = 0 \quad (IV-20)$$

La première relation correspond à l'équation pour les courants et la seconde à l'équation pour les tensions.

Les matrices (Z) et (Y) n'étant plus commutables, en gardant les mêmes notations que dans le premier chapitre, nous posons

$$(A_i) = (Y) (Z)$$

$$(A_v) = (Z) (Y)$$

Les équations (IV-19) et (IV-20) deviennent

$$\left(\frac{d^2 I}{dz^2} \right) - (A_i)(I) = 0 \quad (IV-21)$$

$$\left(\frac{d^2 V}{dz^2} \right) - (A_v)(V) = 0 \quad (IV-22)$$

Pour résoudre ces équations, nous les transcrivons dans l'espace propre où les courants et tensions s'expriment (i) et (v) soit

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 i}{dz^2} \right) - (\Gamma^2)(i) &= 0 \\ \left(\frac{d^2 v}{dz^2} \right) - (\Gamma^2)(v) &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons montré en annexe (I-1) que la matrice diagonale (Γ^2) obtenue après cette transformation est la même que l'on choisisse l'équation en courant ou l'équation en tension.

Les solutions en courant et tension dans la base propre s'écrivent

$$(i) = (e^{-\Gamma z})(a_i) + (e^{\Gamma z})(b_i) \tag{IV-23}$$

$$(v) = (e^{-\Gamma z})(a_v) + (e^{\Gamma z})(b_v) \tag{IV-24}$$

Les courants et tensions dans la base originale sont obtenus à l'aide des matrices de passage (T_i) et (T_v) formées des vecteurs propres de (A_i) et (A_v) soit

$$(I) = (T_i) (i) \tag{IV-25}$$

$$(V) = (T_v) (v) \tag{IV-26}$$

Nous pouvons noter que (T_i) et (T_v) sont liées par la relation remarquable

$$(T_i) = (T_v)^{-1}$$

Nous allons relier les coefficients (a_i) et (a_v) , (b_i) et (b_v) . Si nous admettons que la ligne est de dimension infinie, les coefficients des matrices (b_i) et (b_v) sont nuls.

Il en résulte (IV-23) et (IV-34) que

$$\begin{cases} (i) = (e^{-\Gamma z})(a_i) \\ (v) = (e^{-\Gamma z})(a_v) \end{cases} \tag{IV-27}$$

En utilisant la seconde équation du système (IV-1), la tension dans la base originale s'exprime

$$(V) = (Y)^{-1} \left(- \frac{dI}{dz} \right) \tag{IV-28}$$

Soit dans la base propre

$$(v) = (T_v)^{-1} (Y)^{-1} (T_i) \left(- \frac{di}{dz} \right) \tag{IV-29}$$

En remplaçant (i) et (v) par leurs expressions données par (IV-27), nous obtenons

$$(e^{-\Gamma z})(a_v) = (T_v)^{-1}(Y)^{-1}(T_j)(\Gamma)(e^{-\Gamma z})(a_j) \quad (\text{IV-30})$$

Nous pouvons à ce stade introduire un concept d'impédance caractéristique. En notant $(z_j) = (T_v)^{-1}(Y)^{-1}(T_j)(\Gamma)$, la relation (IV-30) devient

$$(e^{-\Gamma z})(a_v) = (z_j)(e^{-\Gamma z})(a_j) \quad (\text{IV-31})$$

Nous avons montré en annexe (I-2) que pour N conducteurs avec propagation non dégénérée la matrice (y) définie par

$$(y) = (T_j)^{-1}(Y)(T_v)$$

est diagonale ; (Γ) étant également par définition diagonale, (z_j) est une matrice diagonale.

Dans les N courants et tensions propres, nous pouvons donc considérer le mode d'ordre "j" où il est facile d'établir

$$v_j = z_{cj} i_j$$

c'est-à-dire

$$a_{vj} e^{-\Gamma_j z} = z_{cj} a_{ij} e^{-\Gamma_j z}$$

où le paramètre "j" caractérise un mode de propagation intrinsèque auquel nous pouvons attribuer une impédance caractéristique z_{cj} et un exposant de propagation Γ_j

En introduisant la matrice (z_c) , la relation (IV-29) s'écrit

$$(v) = (z_c)(e^{-\Gamma z})(a) - (z_c)(e^{\Gamma z})(b) \quad (\text{IV-32})$$

En comparant (IV-32) et (IV-24) et en utilisant (IV-31), nous relierons (b_i) et (b_v) par

$$(b_v) = -(z_c)(b_i)$$

A la solution en courant

$$(i) = (e^{-\Gamma z})(a_i) + (e^{\Gamma z})(b_i) \quad (\text{IV-33})$$

correspond la solution en tension

$$(v) = (z_c)(e^{-\Gamma z})(a_i) - (z_c)(e^{\Gamma z})(b_i) \quad (\text{IV-34})$$

Considérons le réseau d'impédance connecté à l'extrémité $z = L$. Courants et tensions dans la base originale sont reliés par

$$(V)_{z=L} = (Z_L)(I)_{z=L}$$

où (Z_L) est la matrice associée au réseau de charges.

Dans la base propre, cette condition aux limites s'écrit

$$(v)_{z=L} = (z_L) (i)_{z=L} \quad (\text{IV-35})$$

avec

$$(z_L) = (T_{\downarrow})^{-1} (Z_L) (T_{\downarrow})$$

(IV-35) nous permet de relier (a_i) et (b_i) par

$$[(z_{\downarrow}) - (z_L)] (e^{-\Gamma L}) (a_i) = [(z_{\downarrow}) + (z_L)] (e^{\Gamma L}) (b_i)$$

que nous pouvons écrire

$$(b_i) = (e^{-\Gamma L}) [(z_{\downarrow}) + (z_L)]^{-1} [(z_{\downarrow}) - (z_L)] (e^{-\Gamma L}) (a_i) \quad (\text{IV-36})$$

Nous définissons alors un coefficient de réflexion sous forme matricielle

$$(\rho_L) = [(z_L) + (z_{\downarrow})]^{-1} [(z_L) - (z_{\downarrow})]$$

(IV-36) devient

$$(b_i) = - (e^{-\Gamma L}) (\rho_L) (e^{-\Gamma L}) (a_i)$$

(IV-33) et (IV-34) s'écrivent

$$(i) = (e^{-\Gamma z}) (a_i) - (e^{\Gamma z}) (e^{-\Gamma L}) (\rho_L) (e^{-\Gamma L}) (a_i)$$

$$(v) = (z_{\downarrow}) (e^{-\Gamma z}) (a_i) + (z_{\downarrow}) (e^{\Gamma z}) (e^{-\Gamma L}) (\rho_L) (e^{-\Gamma L}) (a_i)$$

Pour un observateur en $z = L$, le courant et la tension sont donnés par

$$(i(L)) = (e^{-\Gamma L}) (a_i) - (\rho_L) (e^{-\Gamma L}) (a_i)$$

(a_i) est le vecteur incident

$-(\rho_L)(a_i)$ est le vecteur réfléchi

Prenons l'exemple d'un système d'ordre 2

$$(a_i) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (\rho_L) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & t_{12} \\ t_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

Le vecteur réfléchi s'exprime

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \rho_{11} & t_{12} \\ t_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

soit

$$b_1 = - (\rho_{11} a_1 + t_{12} a_2)$$

$$b_2 = - (t_{21} a_1 + \rho_{22} a_2)$$

Les éléments diagonaux ρ_{11} et ρ_{22} caractérisent respectivement la réflexion du mode 1 et du mode 2 alors que les coefficients t_{12} et t_{21} caractérisent des transferts du mode 1 vers le mode 2 ou vice versa.

Considérons une bifilaire symétrique connectée sur des impédances identiques $Z_{L1} = Z_{L2} = Z_L$. Figure (IV-2).

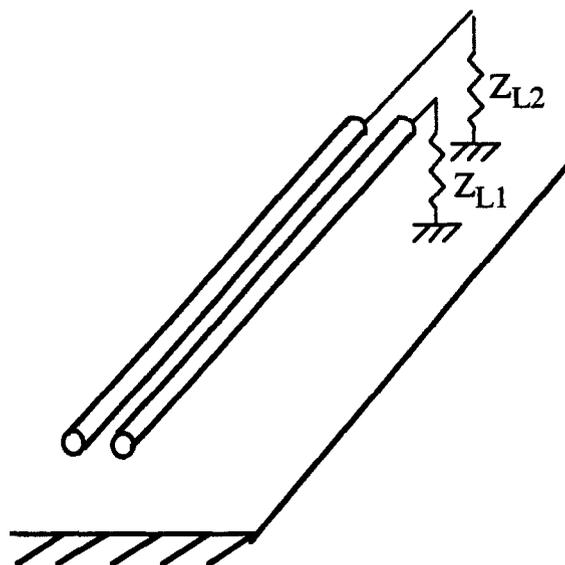


Figure (IV-2)

La détermination des coefficients des matrices (z_L) et (ρ_L) a été développée en annexe (IV-1). Si les impédances de charge Z_{L1} et Z_{L2} sont identiques et valent Z_L , les coefficients de la matrice (ρ_L) peuvent s'écrire:

$$\rho_{11} = \frac{Z_L - z_{c1}}{Z_L + z_{c1}}$$

$$\rho_{22} = \frac{Z_L - z_{c2}}{Z_L + z_{c2}}$$

$$t_{12} = t_{21} = 0$$

Quelle que soit l'impédance de charge, ce type de connexion ne produit pas de conversion modale.

Si le bifilaire est chargé sur des court-circuit, $Z_L = 0$

$$\rho_{11} = \rho_{22} = -1$$

Si le bifilaire est connecté sur des impédances infinies, $Z_L = \infty$

$$\rho_{11} = \rho_{22} = 1$$

Dans ces deux cas, il y a réflexion totale.

Pour appliquer la théorie des réflexions multiples, nous devons tout d'abord évaluer (a_j). Après avoir exprimé les conditions aux limites en z = L, écrivons celles en z = 0. Nous rappelons que la configuration du faisceau est celle de la figure (IV-1) et donc que celle de chaque conducteur j est telle que

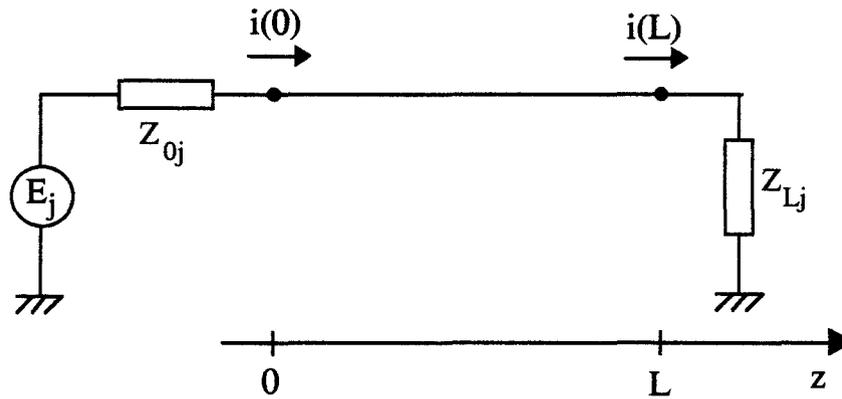


Figure (IV-3)

La condition aux limites en z = 0 s'écrit

$$(E) - (Z_0) (I)_{z=0} = (V)_{z=0}$$

où (Z₀) est la matrice associée au réseau d'impédance disposé en z = 0. Nous traduisons cette relation dans la base modale

$$(e) - (z_0) (i)_{z=0} = (v)_{z=0} \tag{IV-37}$$

avec $(e) = (T_v)^{-1} (E)$

et $(z_0) = (T_v)^{-1} (Z_0) (T_i)$

L'onde incidente générée en z = 0 voit du point de vue modal une ligne de dimension infinie d'où

$$(v)_{z=0} = (z_c) (a_i) \tag{IV-38}$$

et $(i)_{z=0} = (a_i)$

En identifiant (IV-37) et (IV-38), nous obtenons

$$(e) - (z_0) (i)_{z=0} = (z_c) (a_i)$$

soit $(a_i) = [(z_c) + (z_0)]^{-1} (e) \tag{IV-39}$

Nous pouvons maintenant construire les réflexions multiples auxquelles nous assignons un ordre "n". Ceci peut être représenté schématiquement sur la figure (IV-4) qui montre les ondes successives atteignant le réseau d'impédances de charge, se réfléchissant en partie vers le générateur et ainsi de suite.

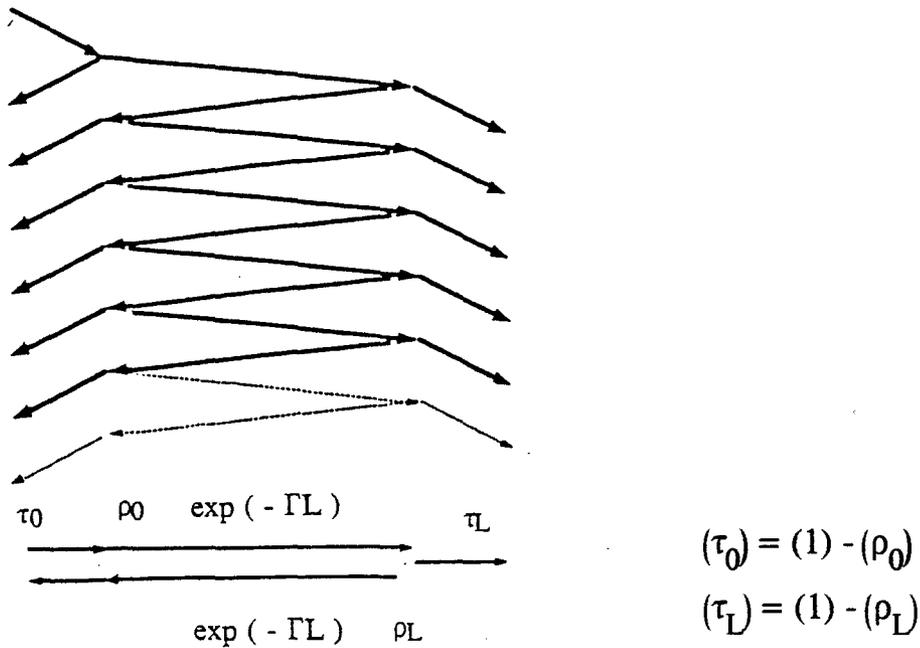
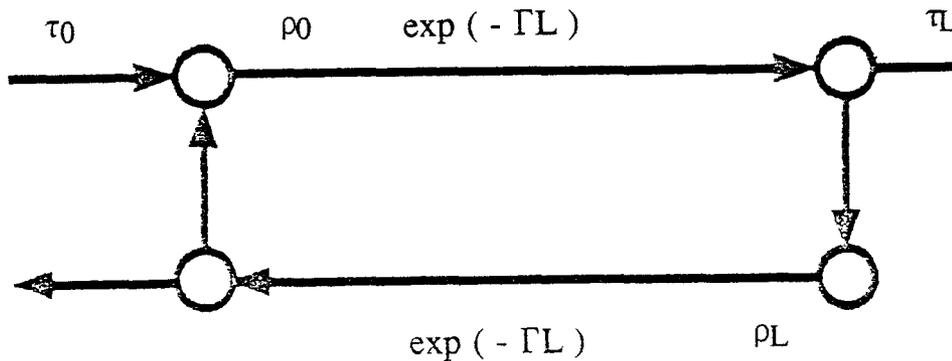


Figure (IV-4)

Nous pouvons nous aider d'un graphe de fluence pour construire les réflexions multiples



$n = 0$ l'impédance d'entrée du système vue par les modes propres n'est autre que le réseau impédance caractéristique modale donnée par la matrice (z_c)

$$i(0) = (i)_{z=0} = (a_i) \quad \text{avec } (a_i) \text{ défini par (IV-39)}$$

Les termes qui vont s'ajouter à (a_i) sont pour les autres itérations

$n = 1$ l'onde se réfléchit en $z = L$ et parvient en $z = 0$ où elle se réfléchit sur le réseau en $z = 0$

$$\begin{aligned}
 & - (\tau_0) \left[(e^{-\Gamma L}) (\rho_L) (e^{-\Gamma L}) (a_i) \right] \\
 & = - (e^{-\Gamma L}) (\rho_L) (e^{-\Gamma L}) (a_i) + (\rho_0) (e^{-\Gamma L}) (\rho_L) (e^{-\Gamma L}) (a_i)
 \end{aligned}$$

$n = 2$

$$\begin{aligned}
 & - (\tau_0) \left[(e^{-\Gamma L}) (\rho_L) (e^{-\Gamma L}) (\rho_0) (e^{-\Gamma L}) (\rho_L) (e^{-\Gamma L}) (a_i) \right] \\
 & = - (e^{-\Gamma L}) (\rho_L) (e^{-\Gamma L}) (\rho_0) (e^{-\Gamma L}) (\rho_L) (e^{-\Gamma L}) (a_i) \\
 & \quad + (\rho_0) (e^{-\Gamma L}) (\rho_L) (e^{-\Gamma L}) (\rho_0) (e^{-\Gamma L}) (\rho_L) (e^{-\Gamma L}) (a_i) \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad \vdots
 \end{aligned}$$

La matrice de propagation $(e^{-\Gamma L})$ étant à coefficients distincts, elle ne commute pas avec les matrices coefficients de réflexion (ρ_0) et (ρ_L) . Le processus d'itérations est très laborieux à appliquer. Nous proposons de le présenter de la façon suivante: l'itération consiste à générer à chaque étape des vecteurs dont nous distinguons deux types (a_{i_n}) et $(\overline{a_{i_n}})$ où n représente l'ordre de l'itération.

La génération de (a_{i_n}) est faite au moyen de la matrice coefficient de réflexion

- pour les itérations d'ordre pair $2p$

$$(a_{i_{2p}}) = - (\rho_0) (\overline{a_{i_{2p-1}}})$$

- pour les itérations d'ordre impair $2p+1$

$$(a_{i_{2p+1}}) = - (\rho_L) (\overline{a_{i_{2p}}})$$

La génération de $(\overline{a_{i_n}})$ est faite par la matrice de propagation

$$(\overline{a_{i_n}}) = (e^{-\Gamma L}) (a_{i_n})$$

Appliqué à notre ligne multifilaire, le processus s'itère comme suit:

$$\begin{aligned}
 n = 0 \quad & (a_{i_0}) = (a_i) \\
 & (\overline{a_{i_0}}) = (e^{-\Gamma L}) (a_{i_0}) \\
 n = 1 \quad & (a_{i_1}) = -(\rho_L) (\overline{a_{i_0}}) \\
 & (\overline{a_{i_1}}) = (e^{-\Gamma L}) (a_{i_1}) \\
 n = 2 \quad & (a_{i_2}) = -(\rho_0) (\overline{a_{i_1}}) \\
 & (\overline{a_{i_2}}) = (e^{-\Gamma L}) (a_{i_2}) \\
 n = 3 \quad & (a_{i_3}) = -(\rho_L) (\overline{a_{i_2}}) \\
 & (\overline{a_{i_3}}) = (e^{-\Gamma L}) (a_{i_3}) \\
 n = 4 \quad & (a_{i_4}) = -(\rho_0) (\overline{a_{i_3}}) \\
 & (\overline{a_{i_4}}) = (e^{-\Gamma L}) (a_{i_4}) \\
 & \vdots \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Le courant à l'origine de la ligne s'écrit alors

$$(i(0)) = (a_{i_0}) + (\overline{a_{i_1}}) + (a_{i_2}) + (\overline{a_{i_3}}) + (a_{i_4}) + \dots$$

soit

$$(i(0)) = (a_{i_0}) + \sum_{p=1}^{\infty} [(\overline{a_{i_{2p-1}}}) + (a_{i_{2p}})] \quad (\text{IV-40})$$

Traduisons maintenant l'effet de l'itération dans le domaine temporel. Comme nous négligeons l'atténuation en ligne, la génération du vecteur $(\overline{a_{i_n}})$ correspond à un décalage temporel, où chaque ligne du vecteur est retardé d'un incrément de temps qui correspond au temps de propagation du mode affecté à cette ligne. La génération (a_{i_n}) correspond au produit de la matrice coefficient de réflexion et d'un vecteur. Dans notre cas, les réseaux d'impédances sont purement réels ; le produit a pour effet de pondérer chaque ligne du vecteur (a_{i_n}) par un mélange d'amplitude des autres modes réflexion et transfert d'énergie.

Cette méthode permet de traiter les N modes de propagation et d'en déduire le courant dans la base originale à l'aide de la matrice de transfert (T_i)

$$(I(0)) = (T_i) (i(0))$$

Si nous nous intéressons maintenant au courant en $z = L$, nous pouvons suivre le même processus itératif

$n = 1$ l'onde parvient en $z = L$ et se réfléchit sur le réseau de charges

$$i(L) = (i)_{z=L} = (e^{-\Gamma L})(a_i) - (\rho_L)(e^{-\Gamma L})(a_i) = (\tau_L)(e^{-\Gamma L})(a_i)$$

avec (a_i) défini par (IV-39)

Les termes qui vont s'ajouter pour les autres itérations sont

$n = 2$ l'onde parvient en $z = 0$, se réfléchit sur le réseau d'impédances à l'origine et arrive en $z = L$ où elle se réfléchit sur le réseau d'impédances de charge.

$$\begin{aligned} & (\tau_L) \left[(e^{-\Gamma L})(\rho_0)(e^{-\Gamma L})(\rho_L)(e^{-\Gamma L})(a_i) \right] \\ & = + (e^{-\Gamma L})(\rho_0)(e^{-\Gamma L})(\rho_L)(e^{-\Gamma L})(a_i) - (\rho_L)(e^{-\Gamma L})(\rho_0)(e^{-\Gamma L})(\rho_L)(e^{-\Gamma L})(a_i) \end{aligned}$$

Nous pouvons définir les mêmes vecteurs (a_{1n}) et $(\overline{a_{1n}})$ que précédemment.

Le courant en $z = L$ s'écrit alors

$$(i(L)) = (\overline{a_{10}}) + (a_{11}) + (\overline{a_{12}}) + (a_{13}) + \dots$$

soit

$$(i(L)) = (\overline{a_{10}}) + \sum_{p=1}^{\infty} \left[(a_{1_{2p-1}}) + (\overline{a_{1_{2p}}} \right] \quad (IV-41)$$

Après avoir traduit l'effet de l'itération dans le domaine temporel, nous pouvons en déduire le courant dans la base originale à l'aide de la matrice de passage (T_i).

$$(I(L)) = (T_i) (i(L))$$

IV-3 Validation de la théorie modale des réflexions multiples

Afin de valider le modèle que nous venons d'établir, nous proposons d'abord de comparer les résultats obtenus aux courbes présentées par Djordjevic [18] puis de les comparer à des résultats expérimentaux.

Considérons une ligne comportant deux conducteurs de longueur $L = 0.305$ mm placés au-dessus d'un plan de masse. Figure (IV-5).

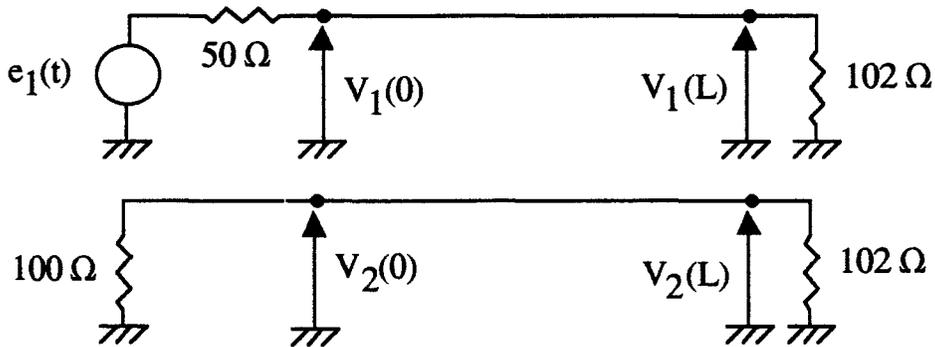


Figure (IV-5)

Les paramètres linéiques de cette ligne sont

$$\begin{aligned}
 L_{11} = L_{22} &= 494.6 \text{ nH/m} & C_{11} = C_{22} &= 62.8 \text{ pF/m} \\
 L_{12} = L_{21} &= 63.3 \text{ nH/m} & C_{12} = C_{21} &= -4.94 \text{ pF/m}
 \end{aligned}$$

Le conducteur 1 est alimenté par un générateur de tension d'impédance interne égale à 50Ω , délivrant un échelon $e_1(t)$ d'amplitude 4 V et de temps de montée 1.5 ns représenté figure (IV-6).

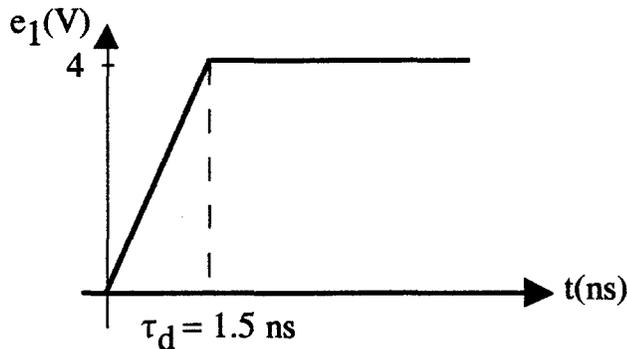
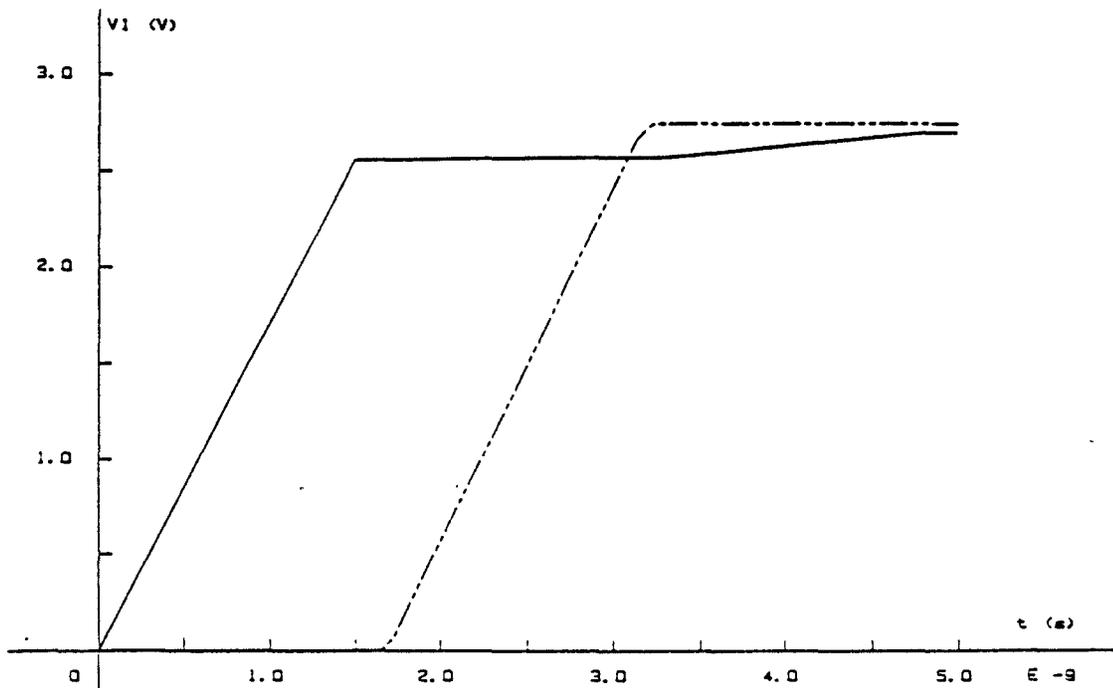
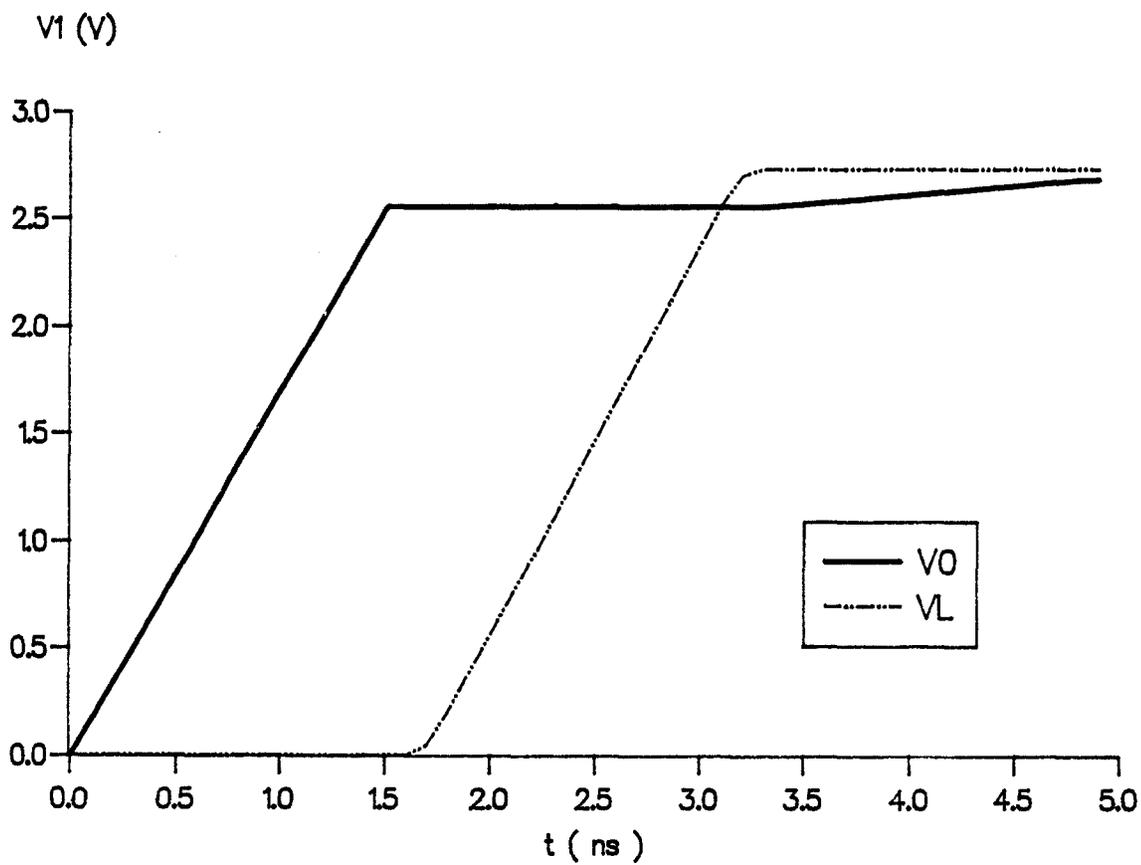


Figure (IV-6)

Sur la planche PL(IV-1), nous avons repris les courbes obtenues par Djordjevic qui a procédé par une analyse modale dans le domaine temporel. La courbe en pointillés correspond à la tension observée en $z = L$ sur le conducteur 1 alors que la courbe en trait plein montre l'évolution de la tension observée à l'origine du conducteur 1. Sur la planche PL(IV-2), nous avons représenté ces mêmes paramètres calculés par la



PL (IV-1)



PL (IV-2)

théorie modale des réflexions multiples. Sur la planche PL(IV-3) figurent en trait plein l'évolution de la tension en $z = 0$ du conducteur 2 et en trait pointillé celle de la tension en $z = L$ de ce même conducteur, tensions obtenues par le modèle de Djordjevic. La planche PL(IV-4) montre l'évolution de ces mêmes paramètres calculés par notre modèle. La bonne concordance entre les courbes valident les expressions (IV-40) et (IV-41) établies précédemment.

Une autre validation a consisté à vérifier expérimentalement les résultats obtenus en considérant le bifilaire dont la configuration est la suivante figure (IV-7):

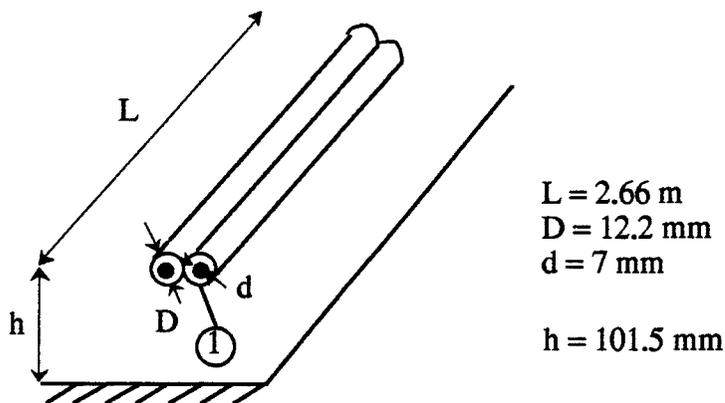


Figure (IV-7)

Le conducteur 2 est relié au plan de masse par deux résistances de 100Ω . Le conducteur 1 est alimenté en $z = 0$ par un générateur de tension d'impédance interne 50Ω et est connecté au plan de masse en $z = L$ sur une résistance de 100Ω , comme il est indiqué sur la figure (IV-8).

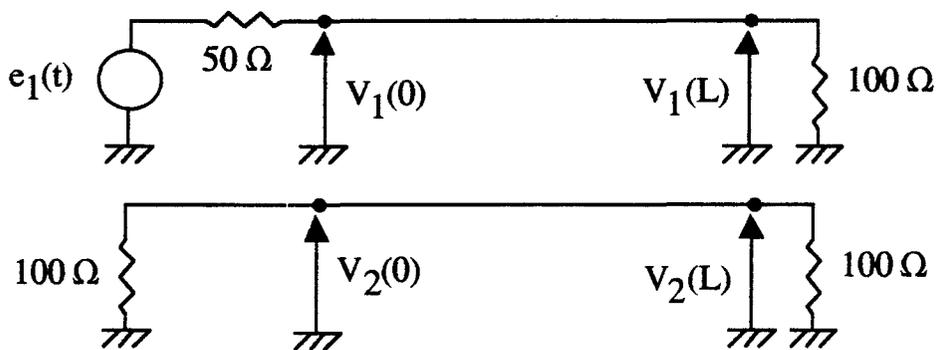


Figure (IV-8)

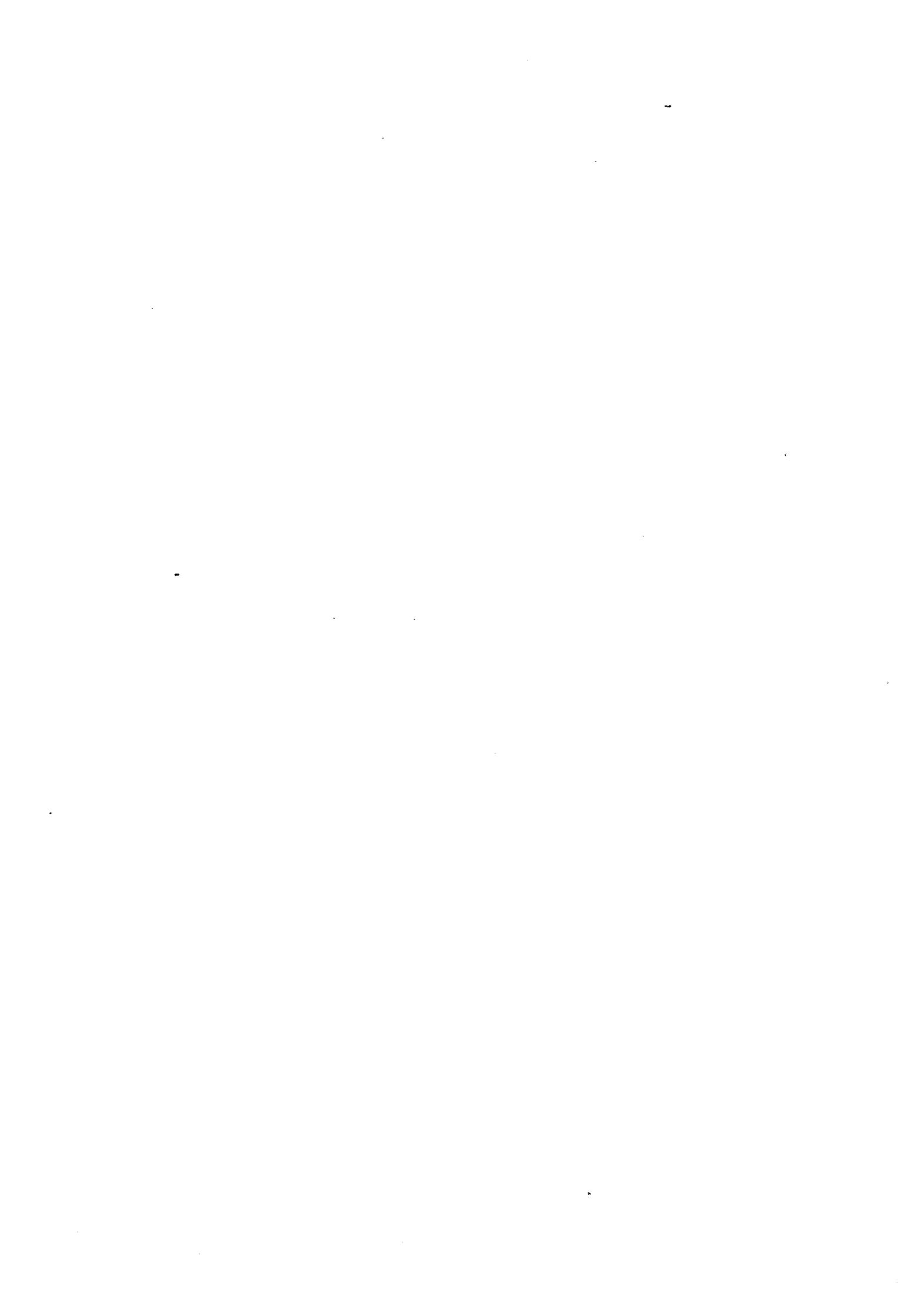
Le générateur de tension délivre un échelon d'amplitude 4 V et de temps de montée 10 ns. Les paramètres linéiques de ce bifilaire ont été mesurés par la méthode directe développée dans le deuxième chapitre et sont tirés du tableau (II-3).

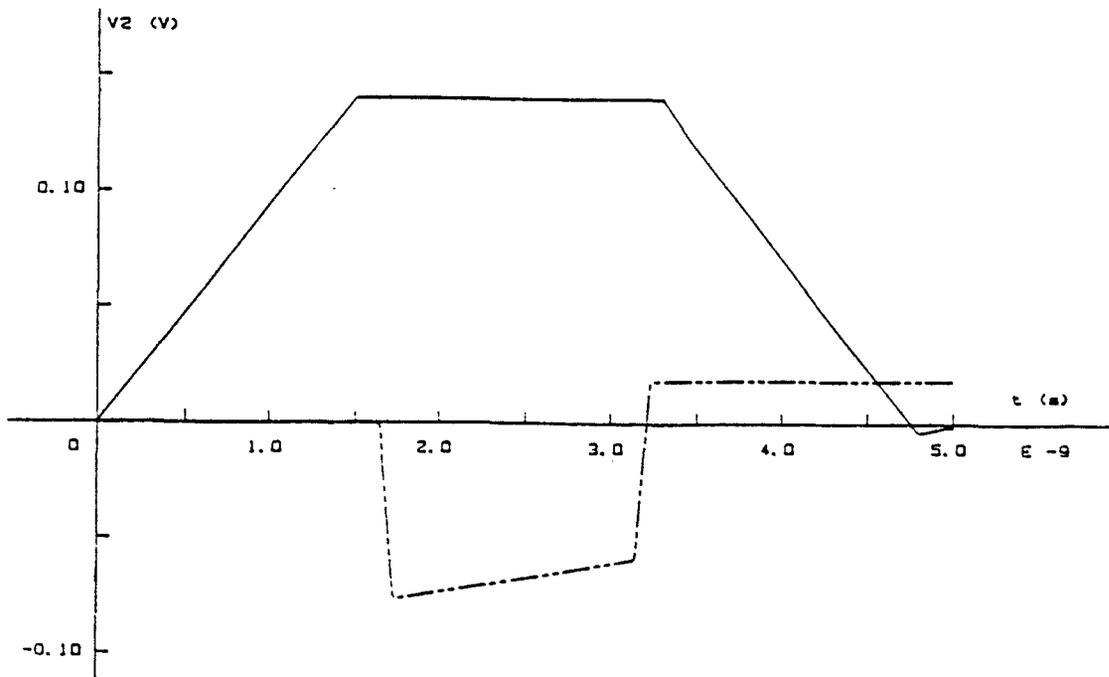
$$L_{11} = L_{22} = 845.8 \text{ nH/m}$$

$$C_{11} = C_{22} = 39.9 \text{ pF/m}$$

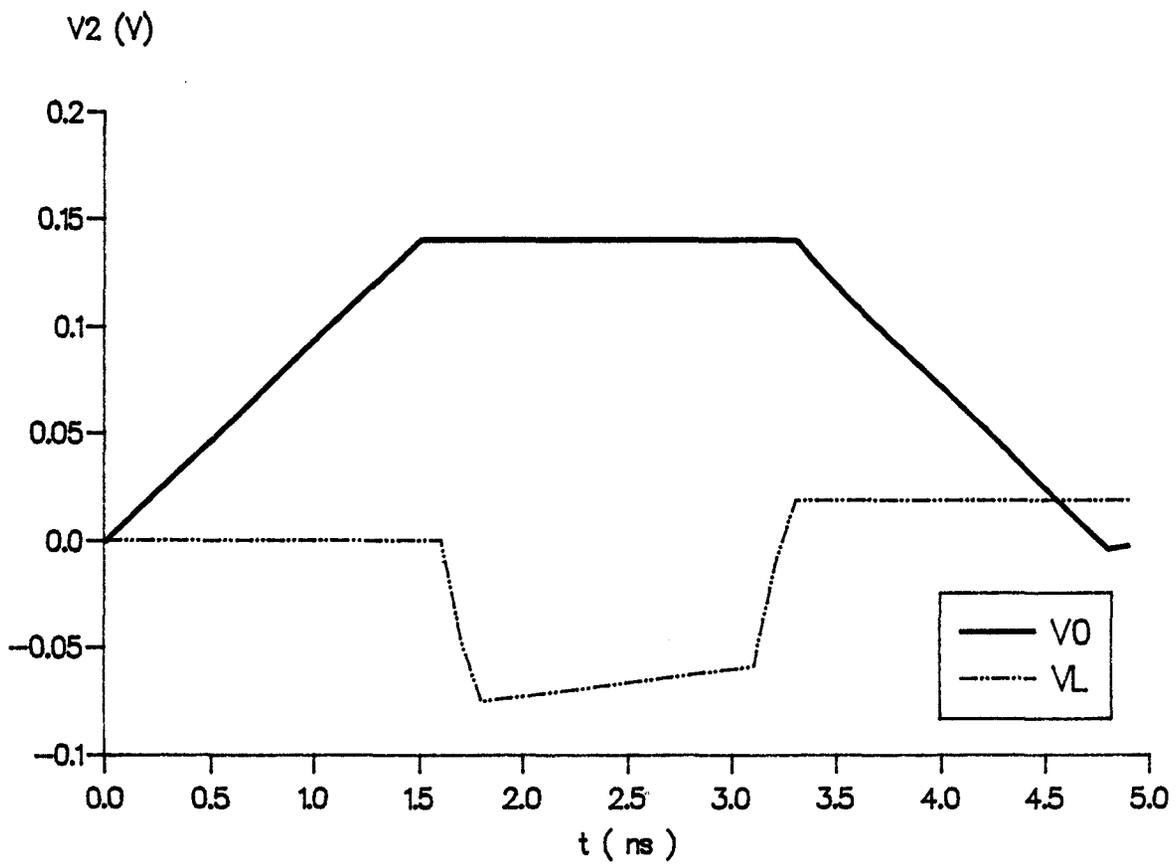
$$L_{12} = L_{21} = 559.3 \text{ nH/m}$$

$$C_{12} = C_{21} = -29.9 \text{ pF/m}$$





PL (IV-3)



PL(IV-4)

Sur les quatre planches qui suivent, la courbe placée en haut de la page représente la tension obtenue expérimentalement à l'aide d'un oscilloscope alors que la courbe du bas montre l'évolution de la tension calculée par la théorie modale des réflexions multiples.

Sur la planche PL(IV-5), nous avons représenté la tension à l'origine du conducteur 1, sur la planche PL(IV-6) la tension en $z = L$ de ce même conducteur, sur la planche PL(IV-7) la tension à l'origine du conducteur 2 et sur la planche PL(IV-8) la tension à l'extrémité $z = L$ de ce même conducteur.

Pour toutes ces planches, nous constatons que les tensions expérimentales relevées sont très proches des modèles obtenus par la théorie modale des réflexions multiples aussi bien sur le plan de l'allure générale des courbes que sur l'amplitude des tensions observées. Toutefois il faut préciser que le décalage temporel entre la tension à l'origine d'un conducteur et la tension à son autre extrémité n'est pas observé sur les courbes expérimentales. En effet, toutes les tensions ont été relevées à l'aide d'un oscilloscope avec comme synchronisation extérieure le signal d'entrée $e_1(t)$. Pour mesurer les tensions en $z = L$, nous avons ramené cette synchronisation par un câble BNC d'une longueur 3 m. Ceci a eu pour effet d'engendrer un retard d'environ 15 ns et de masquer le retard dû au temps de propagation du mode associé au conducteur 1 qui est de 12 ns. Nous pouvons donc conclure que les comparaisons théorie-expérience sont très satisfaisantes.

Reprenons la courbe de la planche PL(IV-8) qui montre l'évolution de la tension à l'extrémité du conducteur 2 en fonction du temps. La diagonalisation du produit $(C)(L)$ nous conduit à deux valeurs propres distinctes. Chacune d'elles correspond au temps de propagation du mode affecté à une ligne. Pour la configuration étudiée, nous avons obtenu $\theta_1 = 10$ ns et $\theta_2 = 12$ ns. Nous pouvons retrouver sur la courbe différentes combinaisons de ces valeurs.

Nous avons choisi d'étudier une deuxième configuration, qui est celle représentée sur la figure (IV-9), en gardant les mêmes conducteurs.

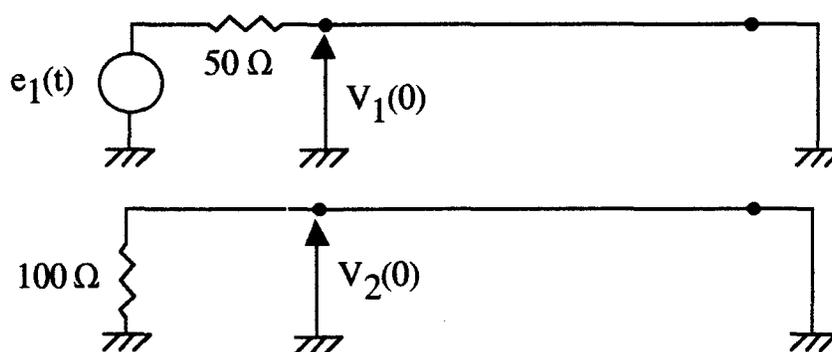
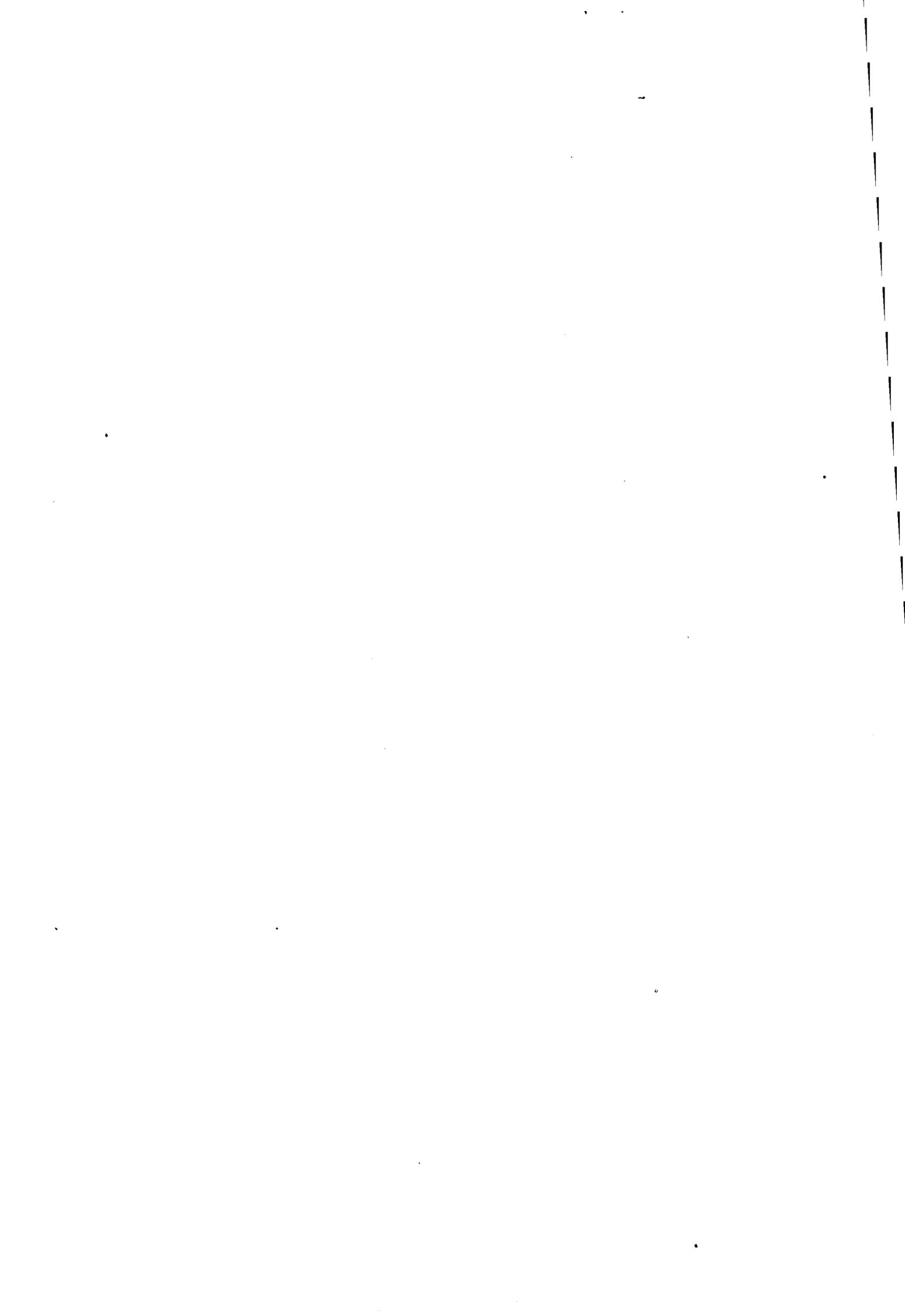
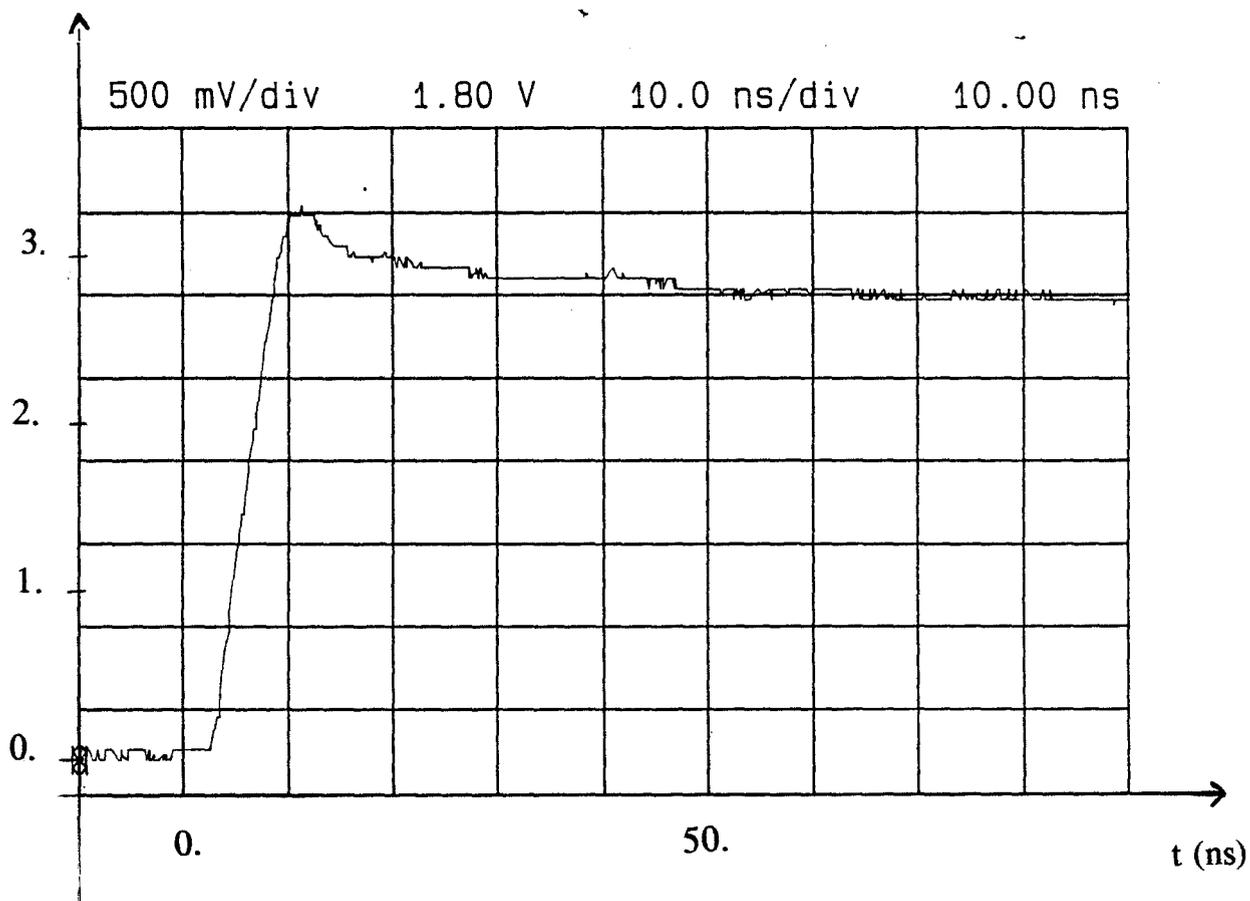


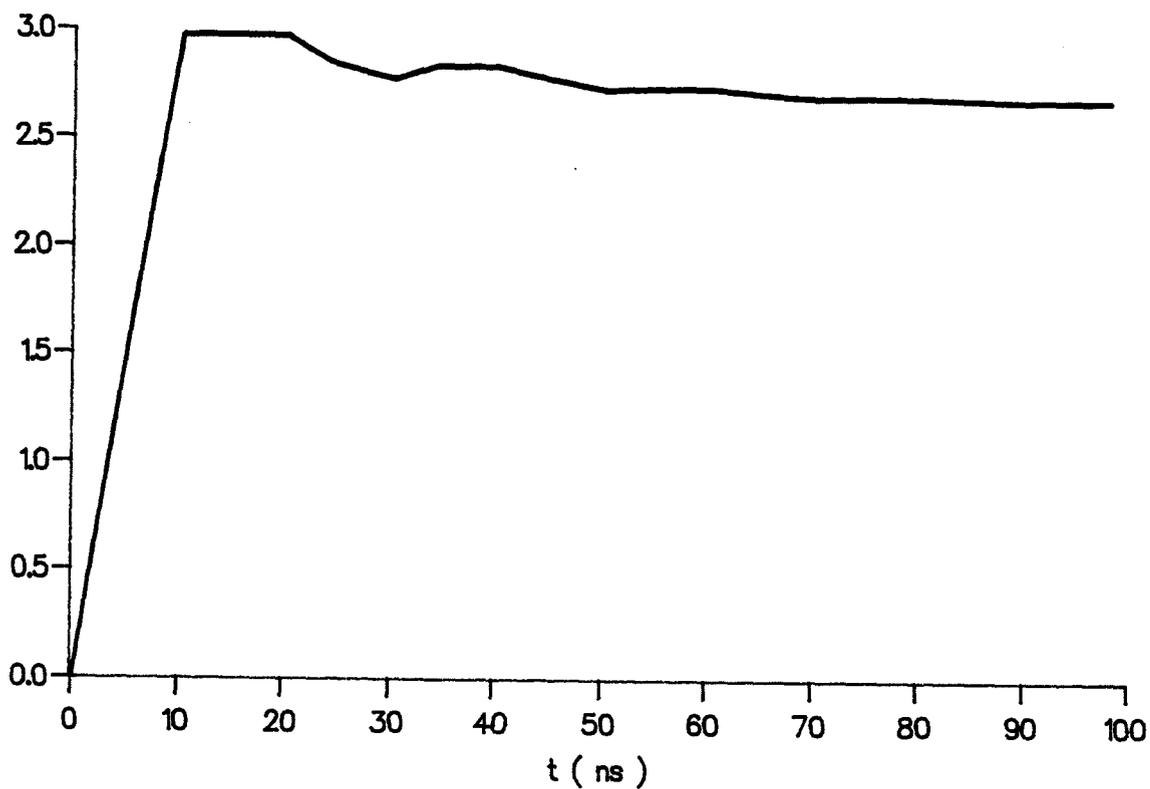
Figure (IV-9)



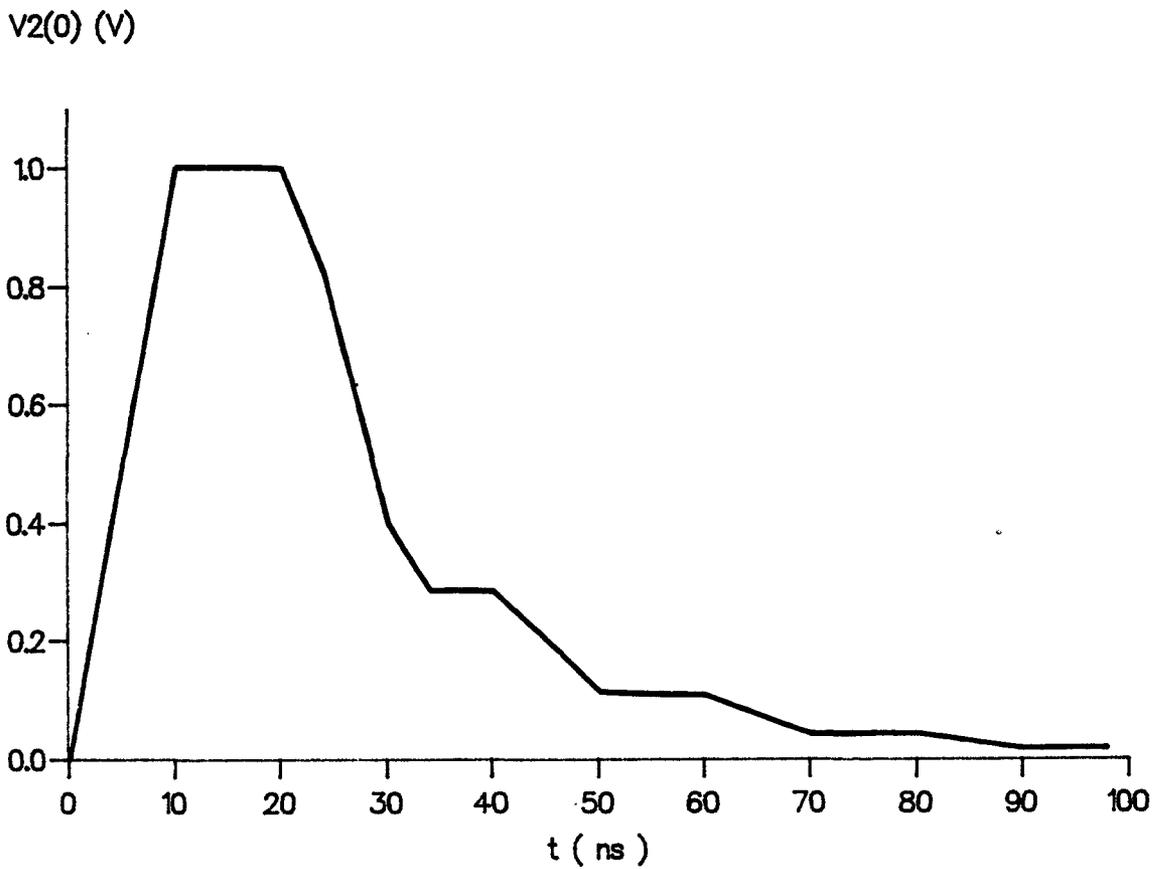
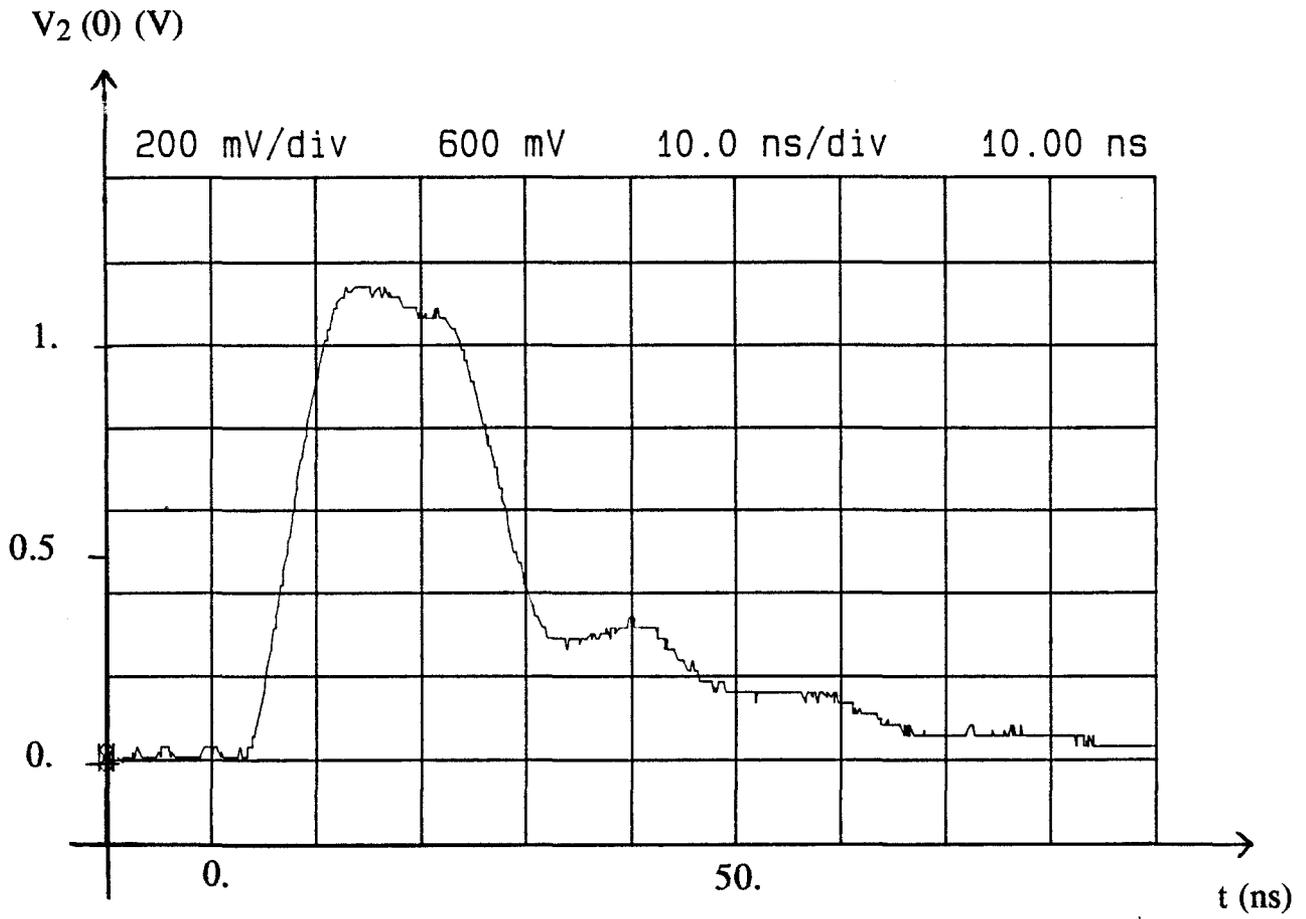
$V_1(t)$ (V)



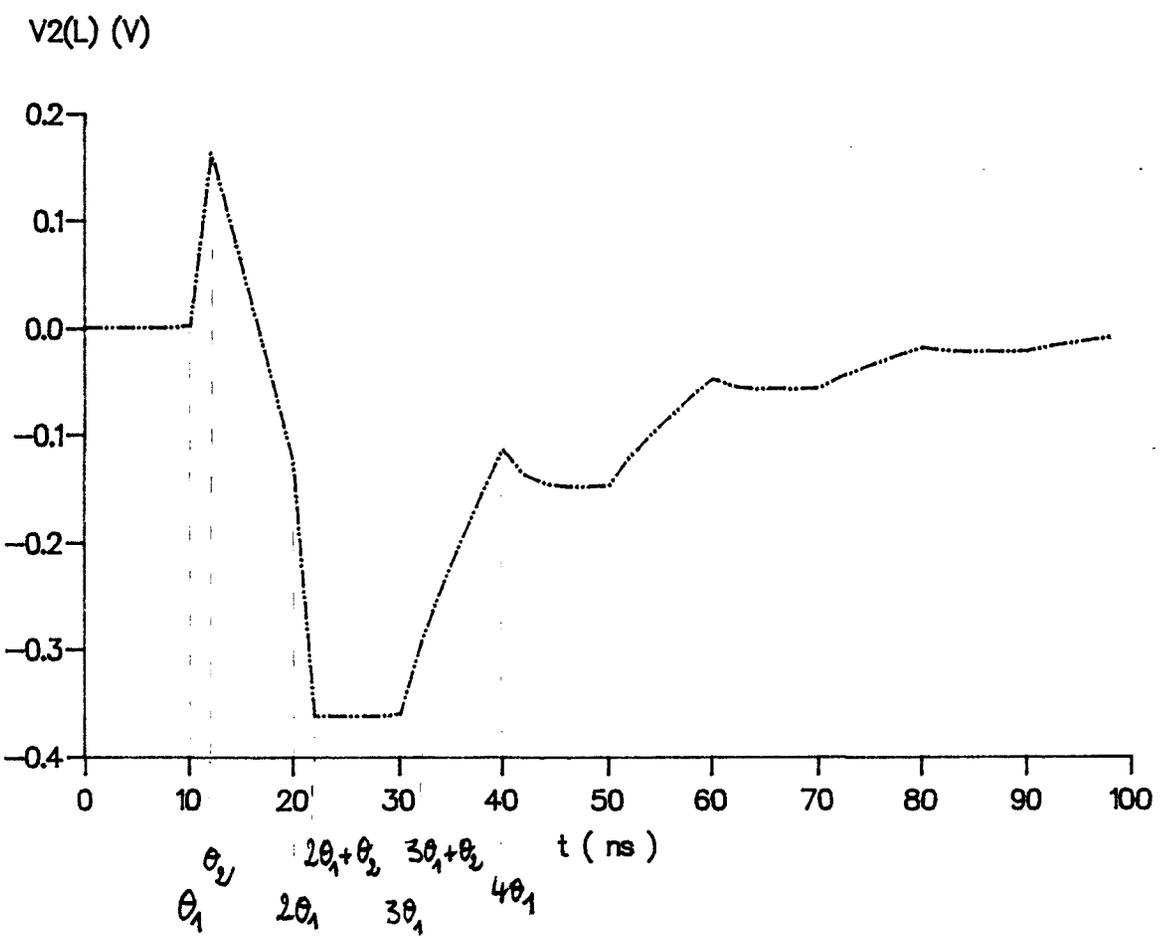
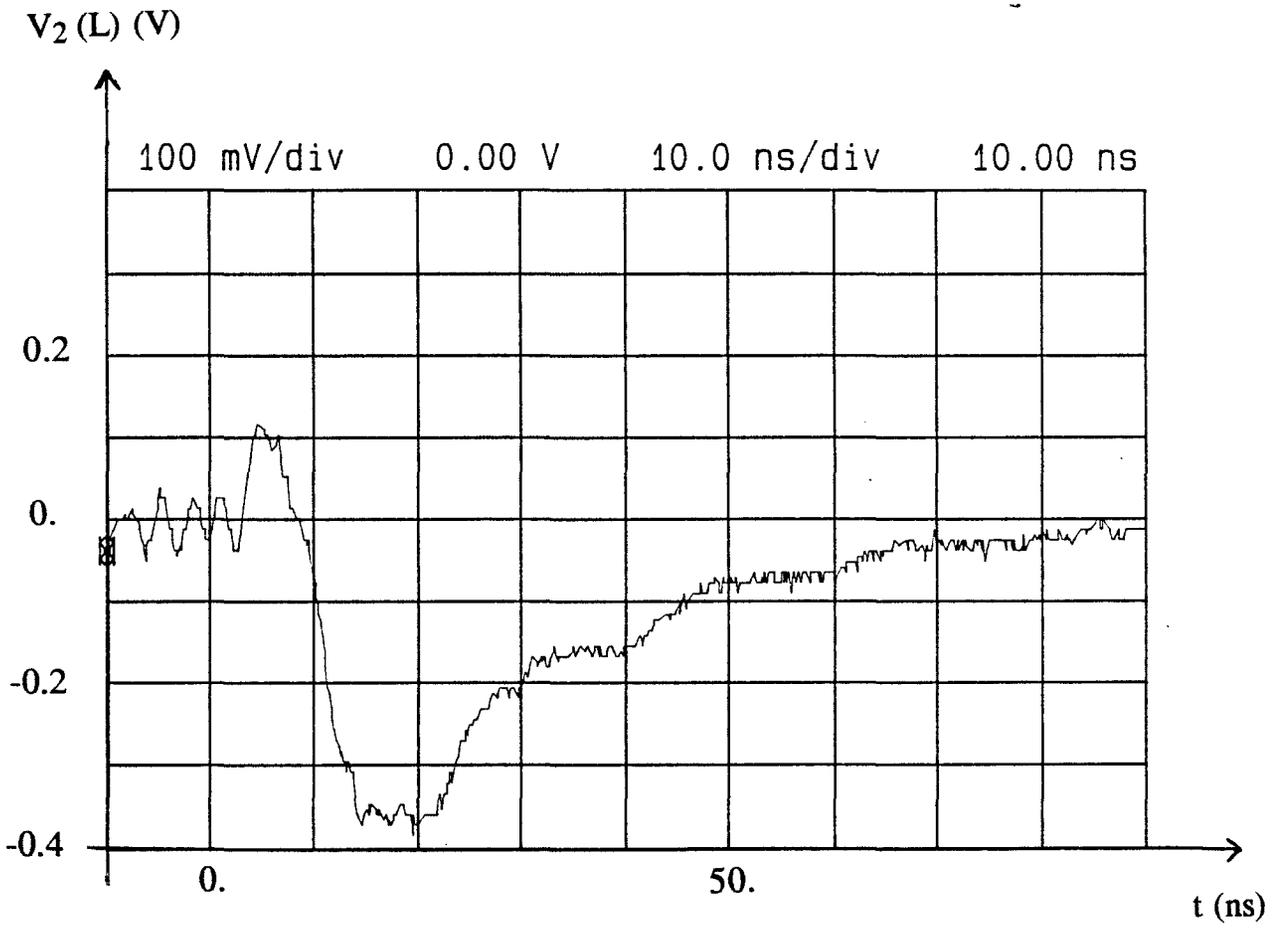
$V_1(t)$ (V)



PL(IV-5)



PL(IV-7)



PL(IV-8)

La planche PL(IV-9) montre l'évolution de la tension à l'origine du conducteur 1 obtenue par la modélisation et expérimentalement alors que sur la planche PL(IV-10), nous avons représenté la tension à l'origine du conducteur 2. La bonne concordance entre les courbes obtenues par modélisation et celles obtenues expérimentalement valide la théorie modale des réflexions multiples élaborée.

IV-4 Réduction de la théorie modale des réflexions multiples par égalisation des vitesses de propagation

Dans le troisième chapitre, nous avons introduit une réduction de la théorie modale qui consiste à supposer que tous les modes se propagent à la même vitesse. Les inductances linéiques sont déterminées par des formules analytiques; l'hypothèse du milieu homogène nous permet de calculer les capacités linéiques par inversion de la matrice inductance et de résoudre la théorie des lignes par le formalisme classique. Cette simplification engendre des erreurs sur la prédiction des parasites induits par une perturbation électromagnétique, erreurs que nous avons chiffrées dans le domaine fréquentiel. Il nous reste à établir quel effet a cette simplification sur l'amplitude crête des parasites transitoires. Nous nous limiterons au cas où la perturbation est produite par une ou plusieurs sources localisées connectées à l'une des extrémités des conducteurs du faisceau.

Considérons le toron de cinq conducteurs de longueur 2.66 m dont la configuration est rappelée ci-dessous. Figure (IV-10).

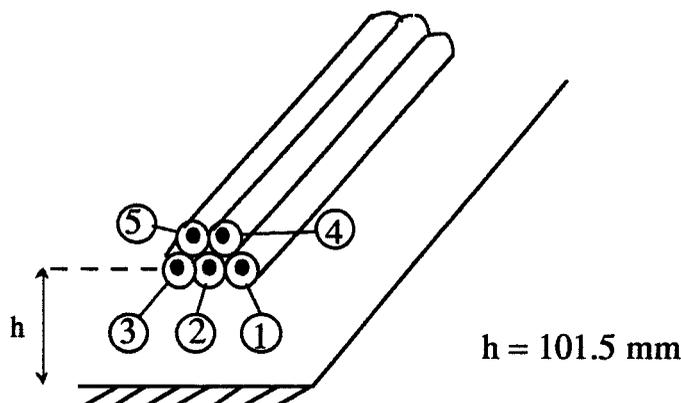
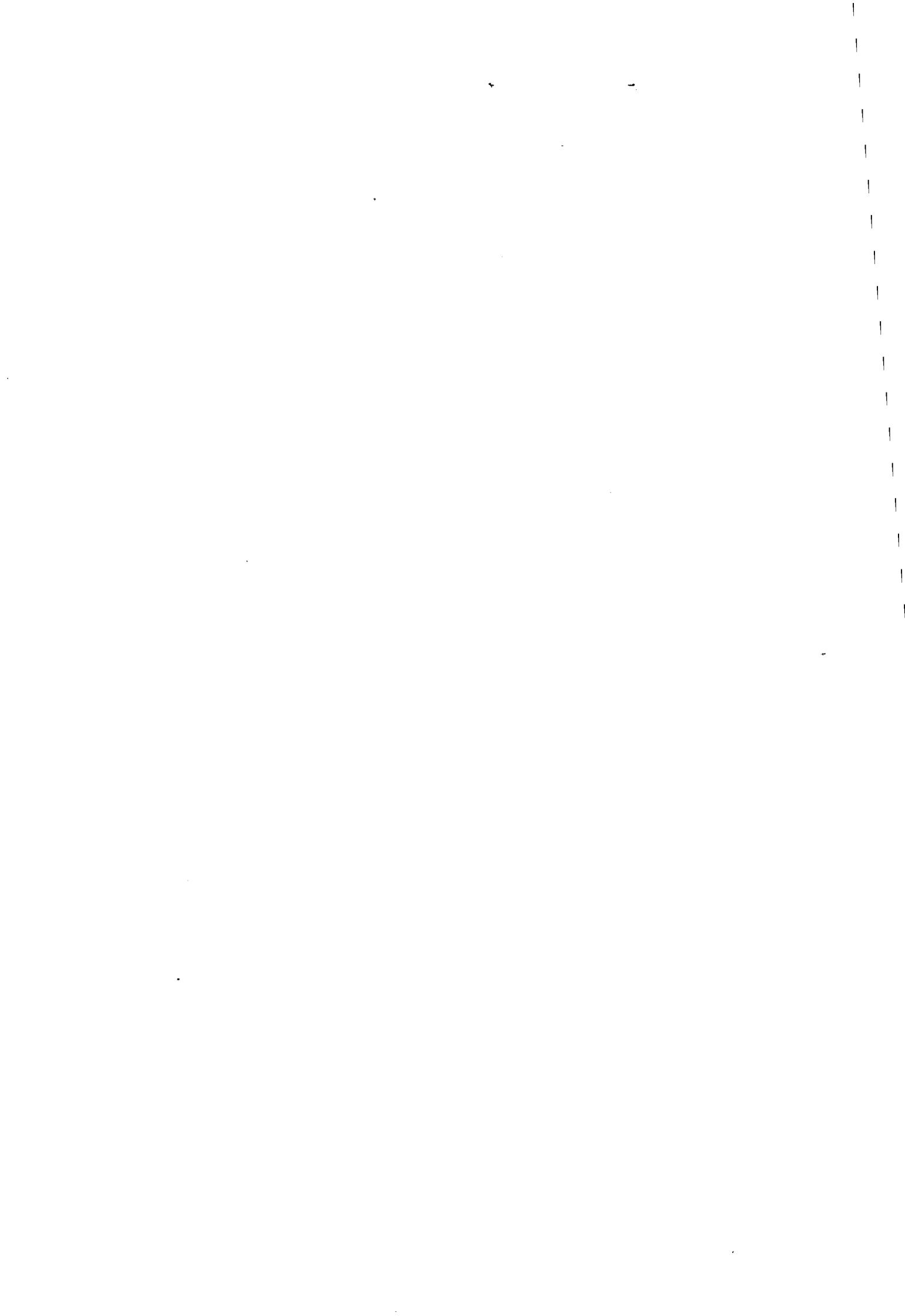
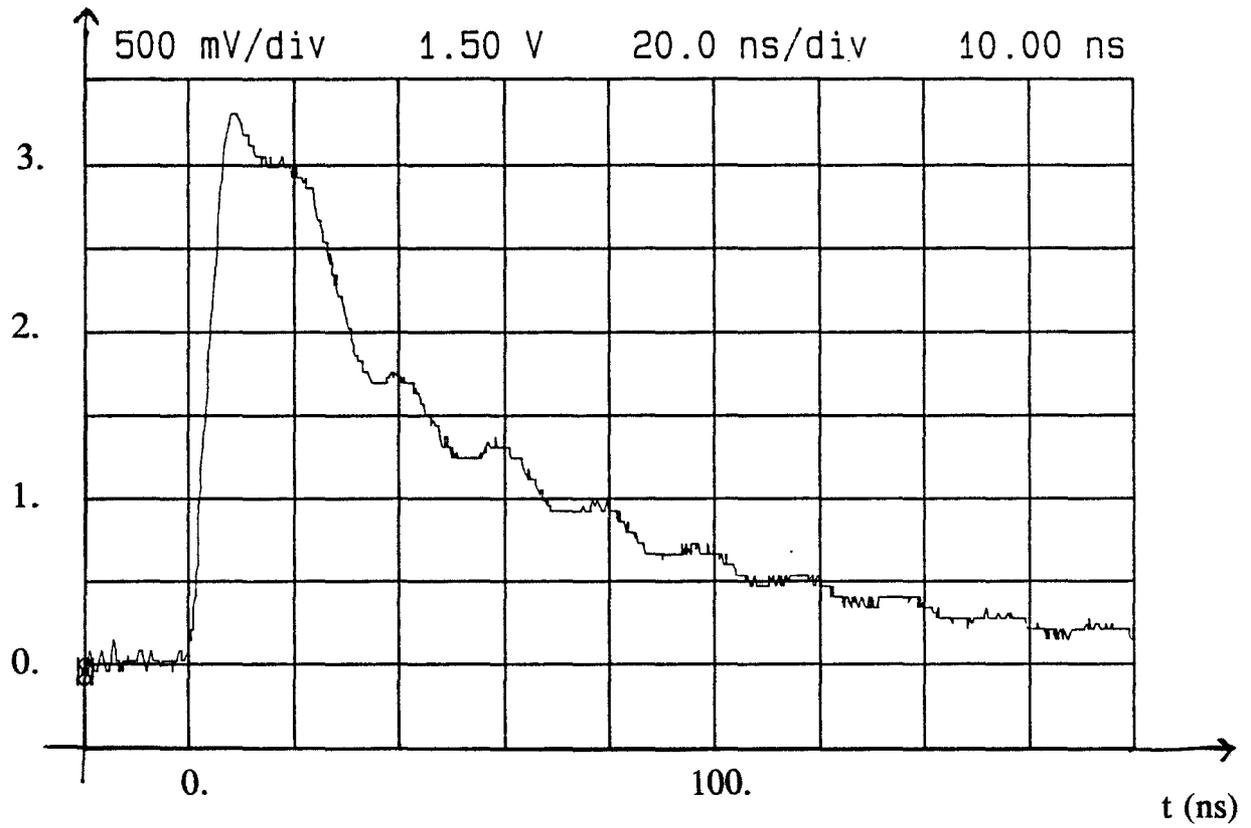


Figure (IV-10)

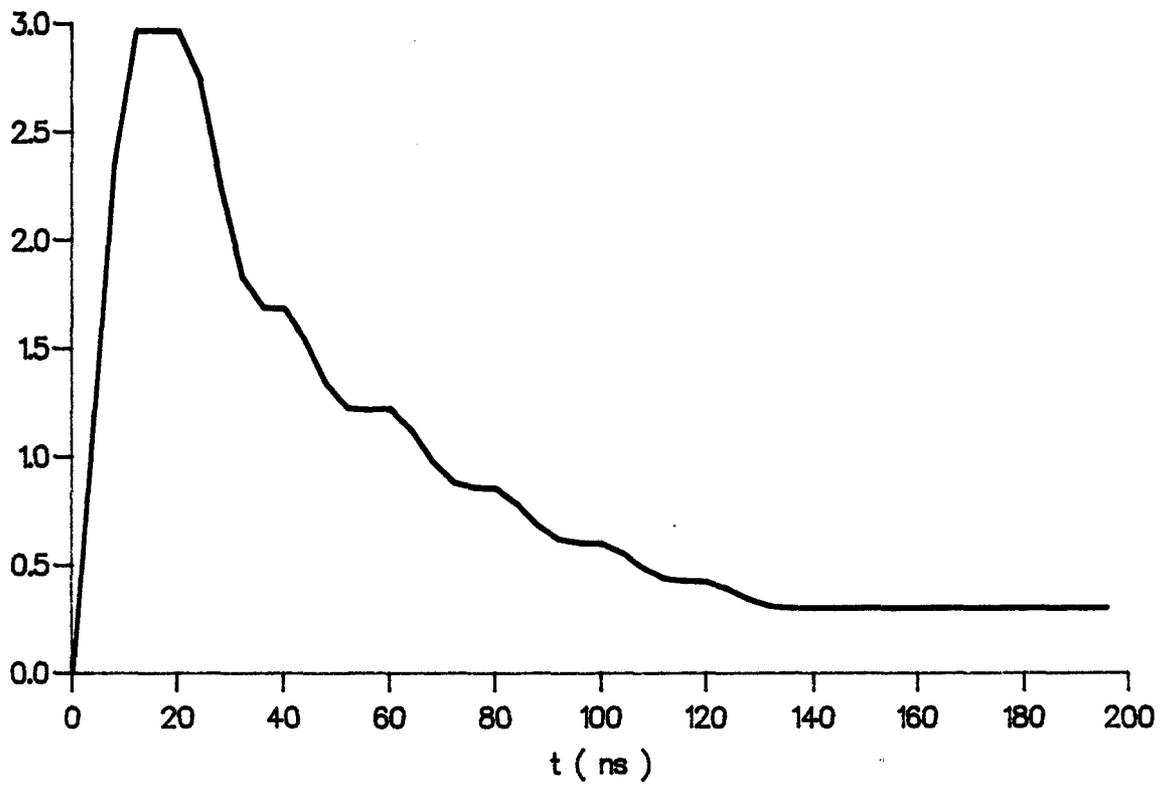
Le conducteur 2 est alimenté en $z = 0$ par un générateur de tension d'impédance interne 50Ω et connecté au plan de masse en $z = L$ par une résistance de 100Ω . Les quatre autres conducteurs sont reliés au plan de masse par une résistance de 100Ω .



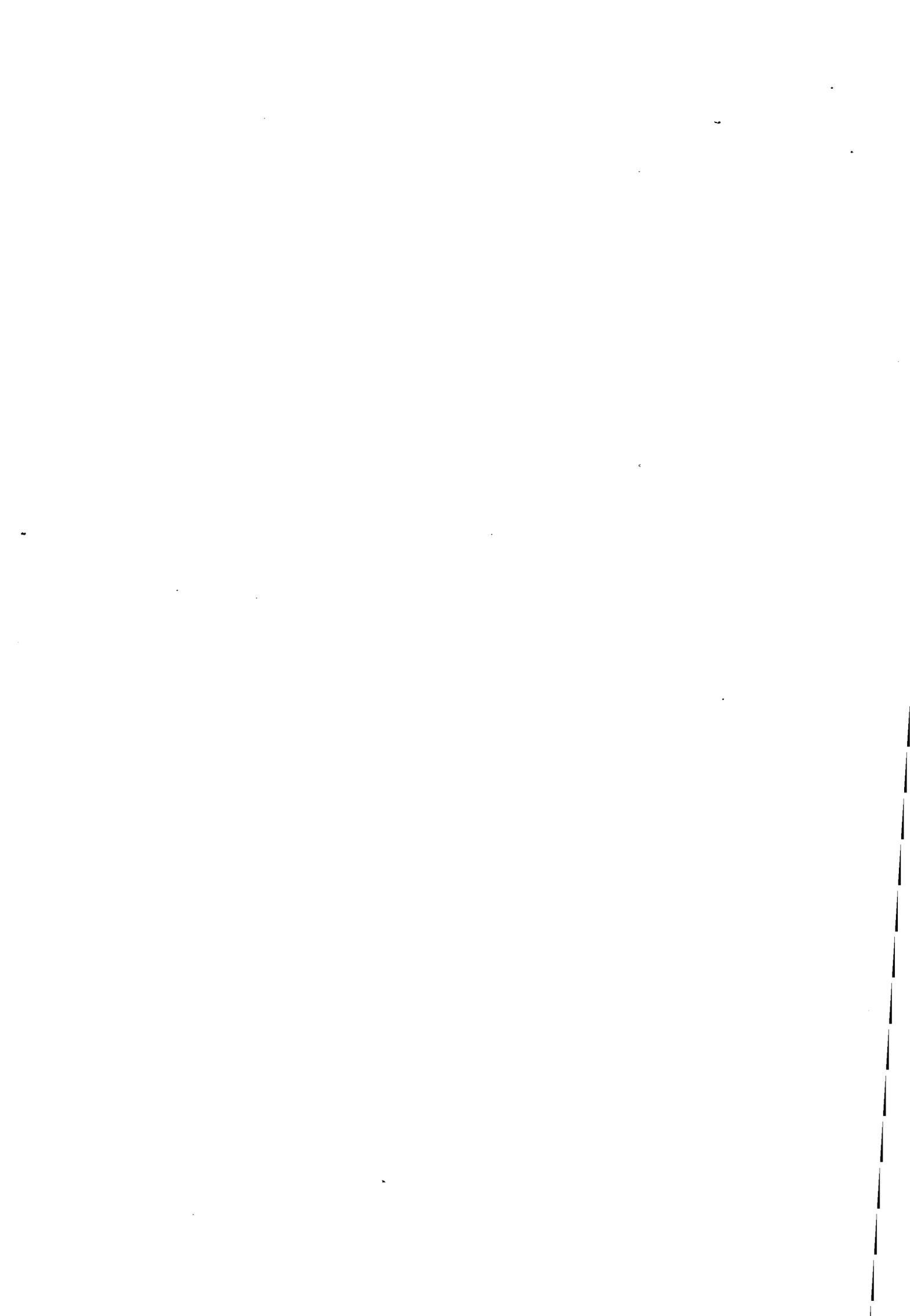
$V_1(0)$ (V)

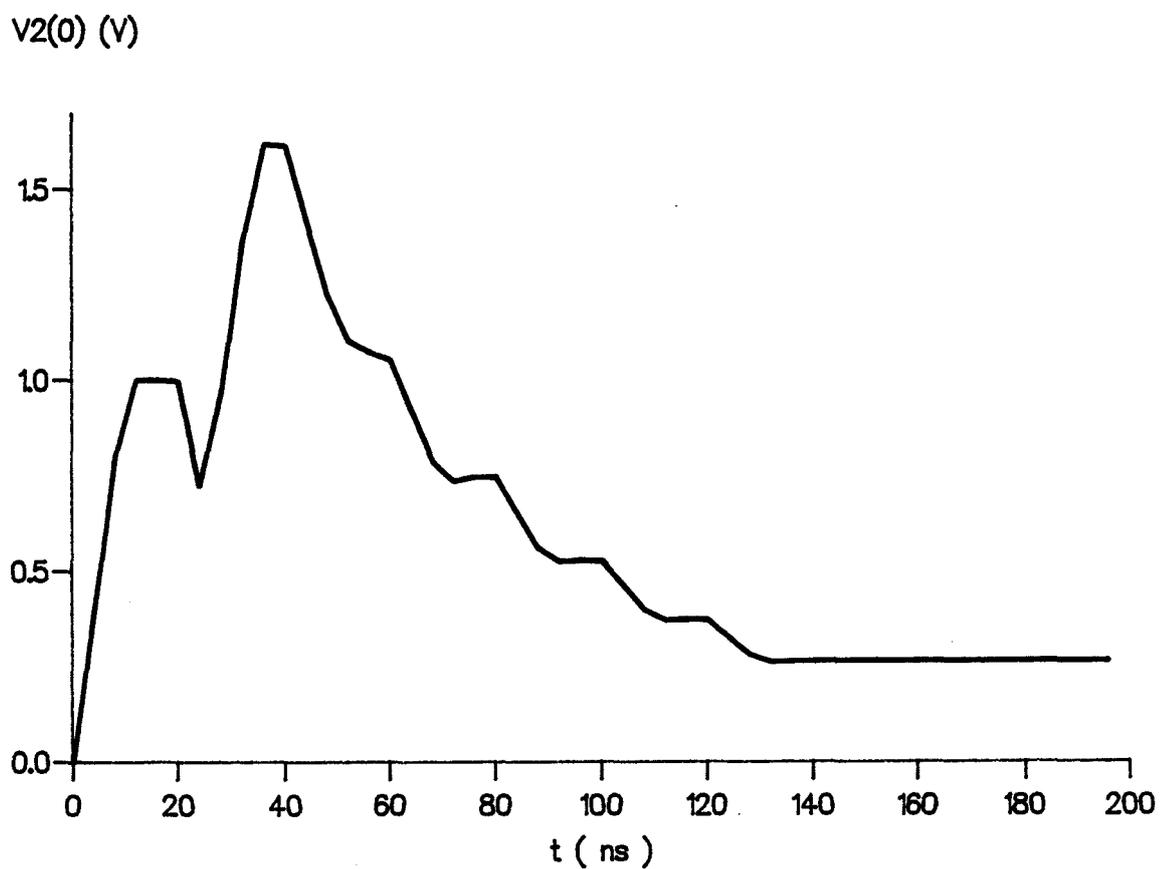
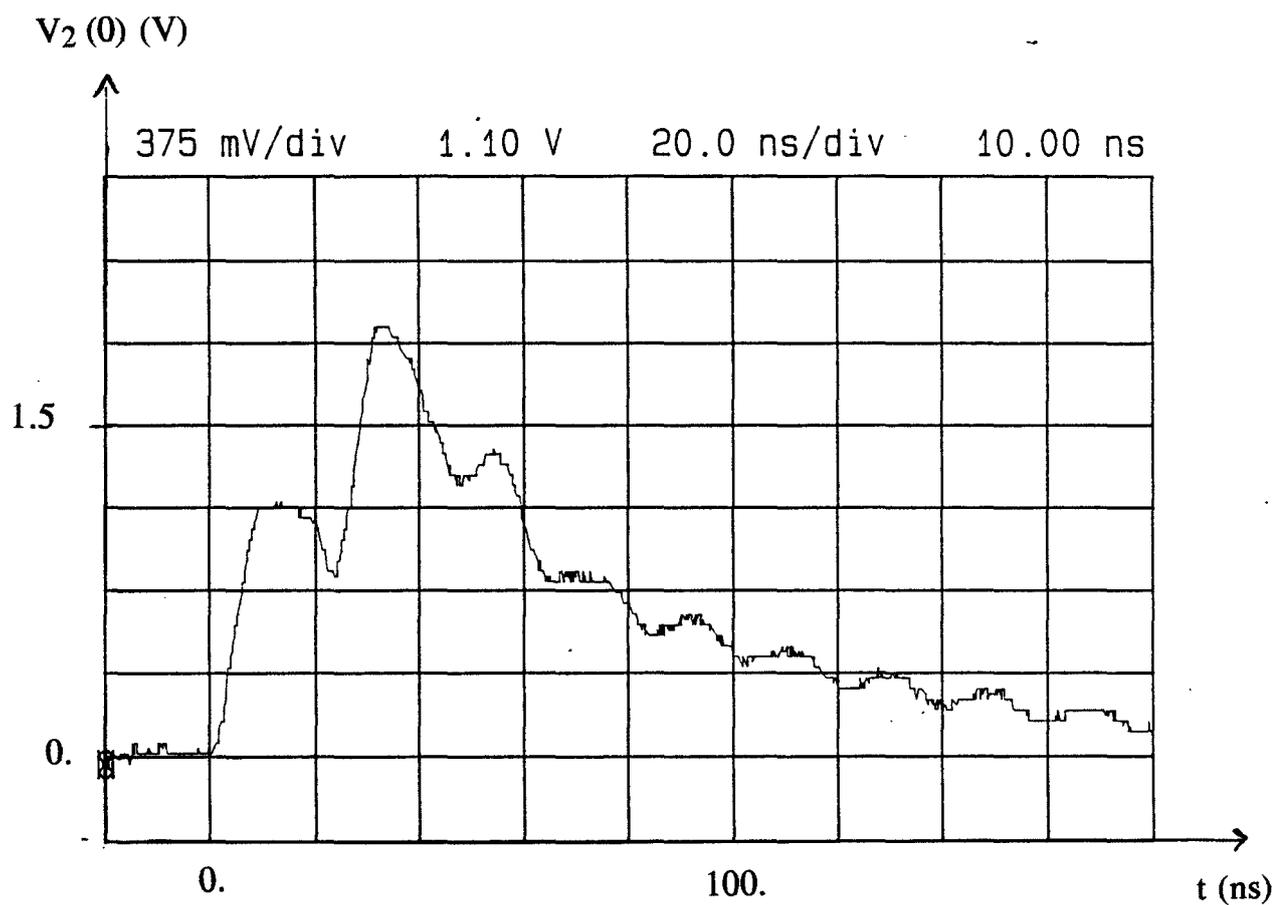


$V(0)$ (V)

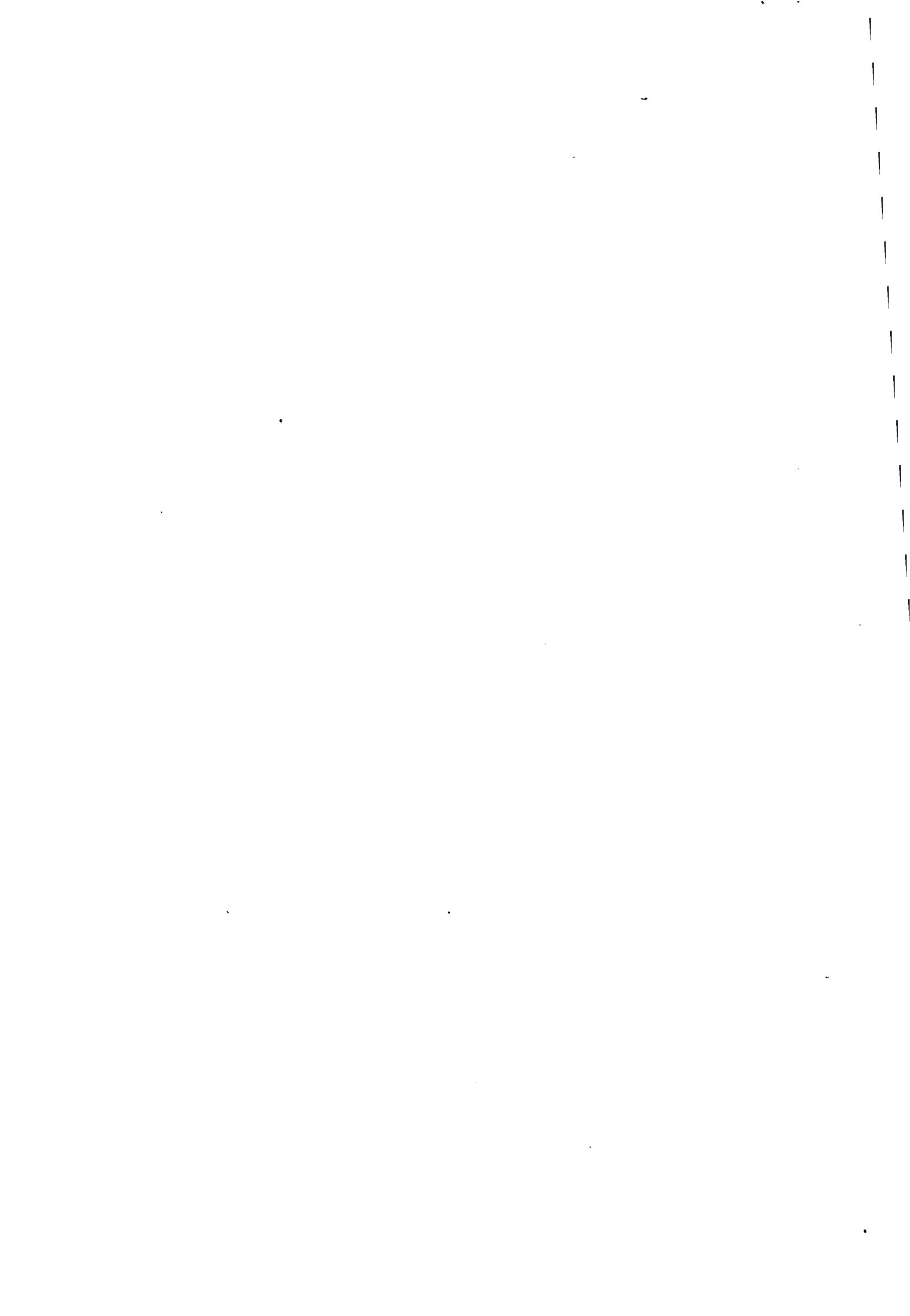


PL(IV-9)





PL(IV-10)



Le générateur $e_1(t)$ délivre un échelon d'amplitude 4 V et de temps de montée 10 ns. Figure (IV-11).

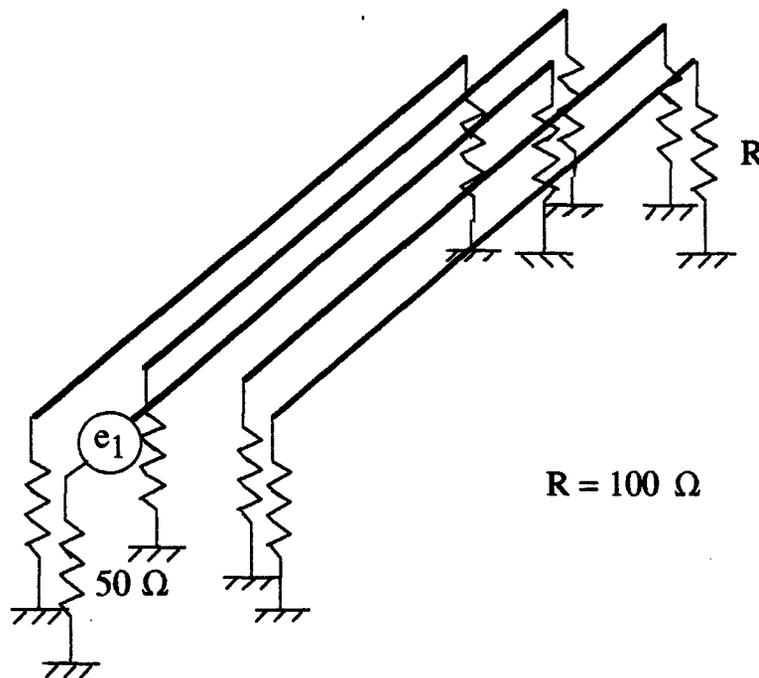
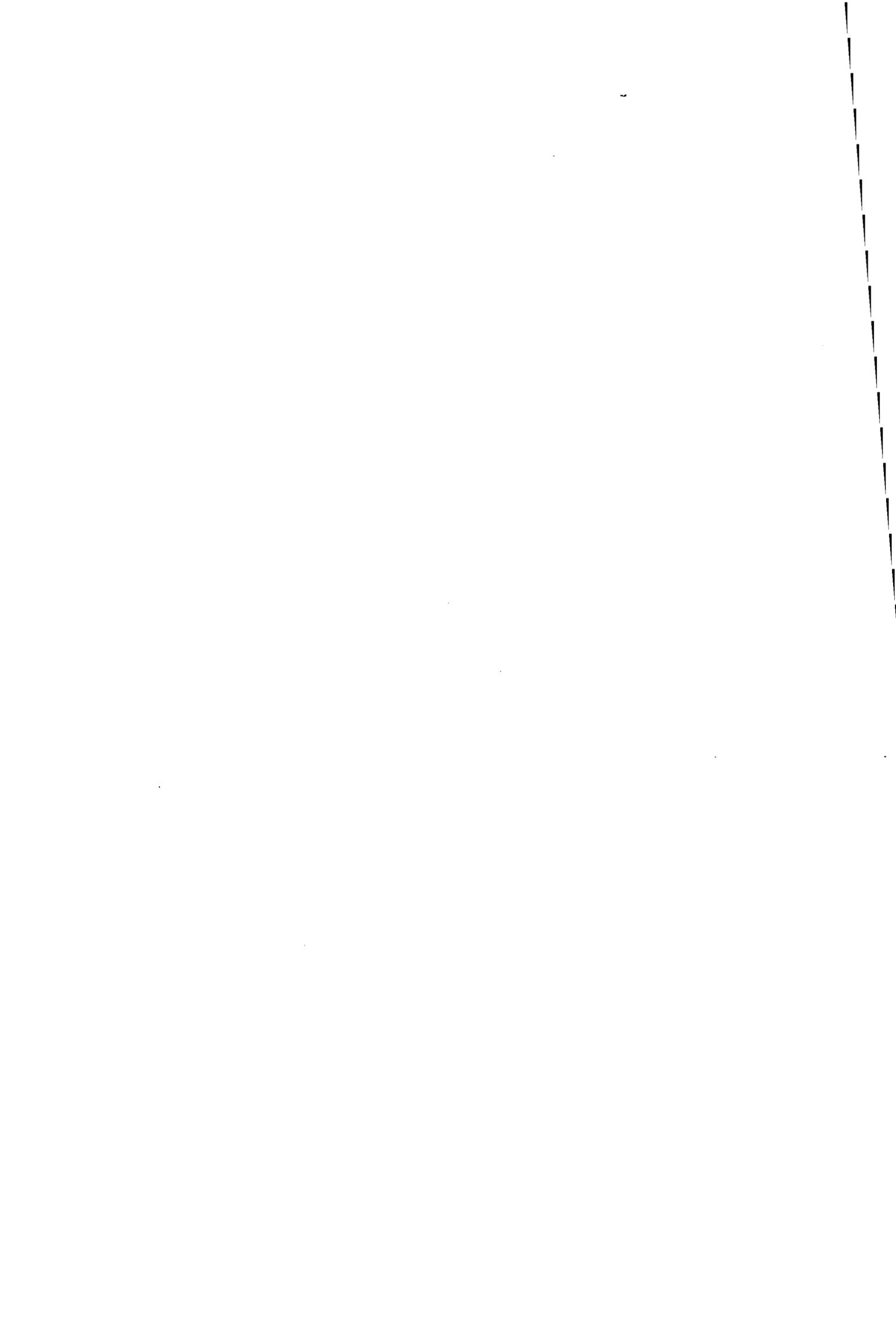


Figure (IV-11)

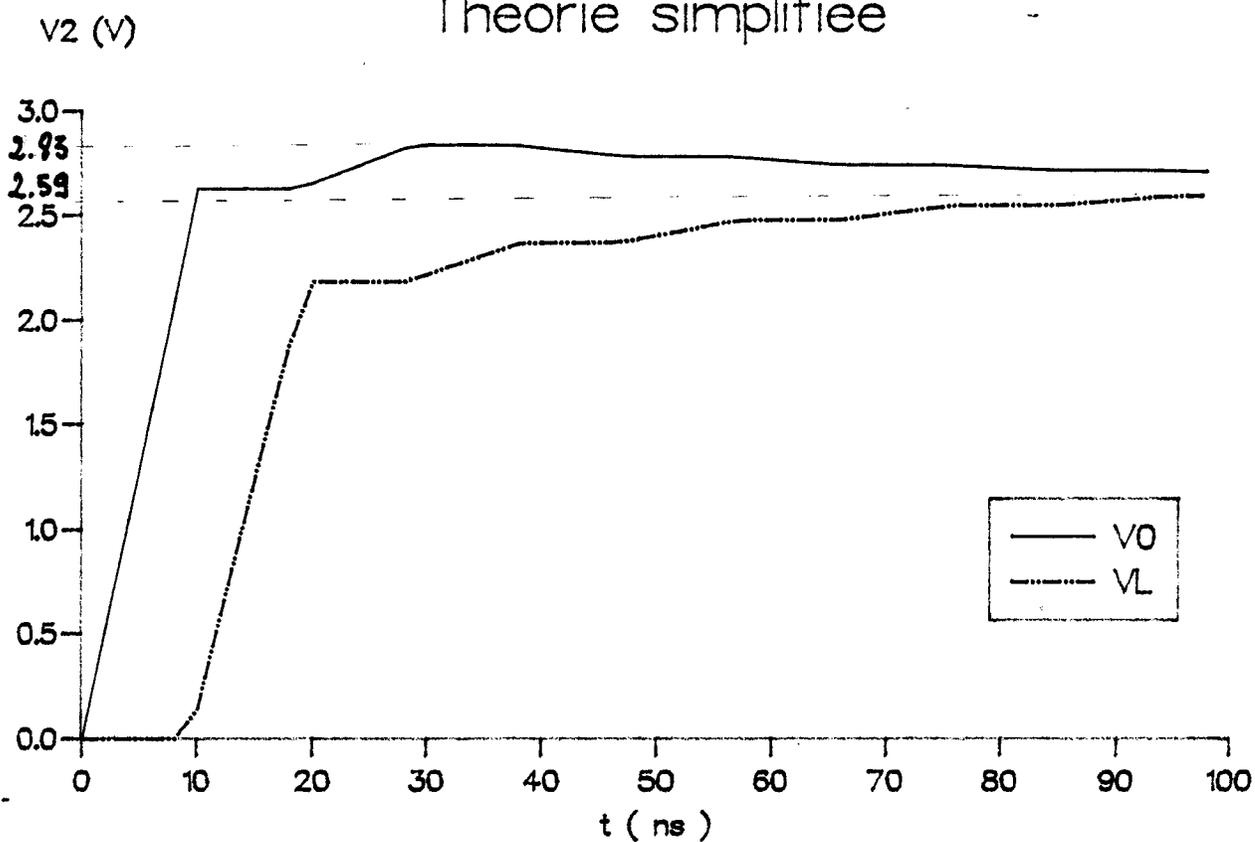
Sur la planche PL(IV-11), la courbe en trait plein représente la tension à l'origine du conducteur 2 alors que la courbe en pointillés montre la tension à l'extrémité $z = L$ de ce même conducteur. Ces tensions ont été modélisées par la théorie modale des réflexions multiples, avec comme paramètres d'entrée les inductances et capacités linéiques mesurées rassemblées dans les matrices (III-1) et (III-2). Sur la planche PL(IV-12), nous avons représenté les mêmes tensions obtenues cette fois par le formalisme simplifié, les paramètres linéiques entrés étant issus des matrices (III-8) et (III-9).

Les planches PL(IV-13) et PL(IV-14) montrent l'évolution de la tension du conducteur 1 en $z = 0$ (courbe en trait plein) et en $z = L$ (courbe en pointillés). Les caractéristiques de la planche PL(IV-13) ont été obtenues par la théorie modale des réflexions multiples alors que celles de la planche PL(IV-14) ont été calculées par la théorie simplifiée.

L'allure des courbes présentées d'une part, sur les planches PL(IV-11) et PL(IV-12), et d'autre part, sur les planches PL(IV-13) et PL(IV-14), est assez peu différente. Cependant, nous pouvons constater que la théorie modale des réflexions multiples introduit des temps de propagation différents, ce qui donne des réflexions plus nombreuses.

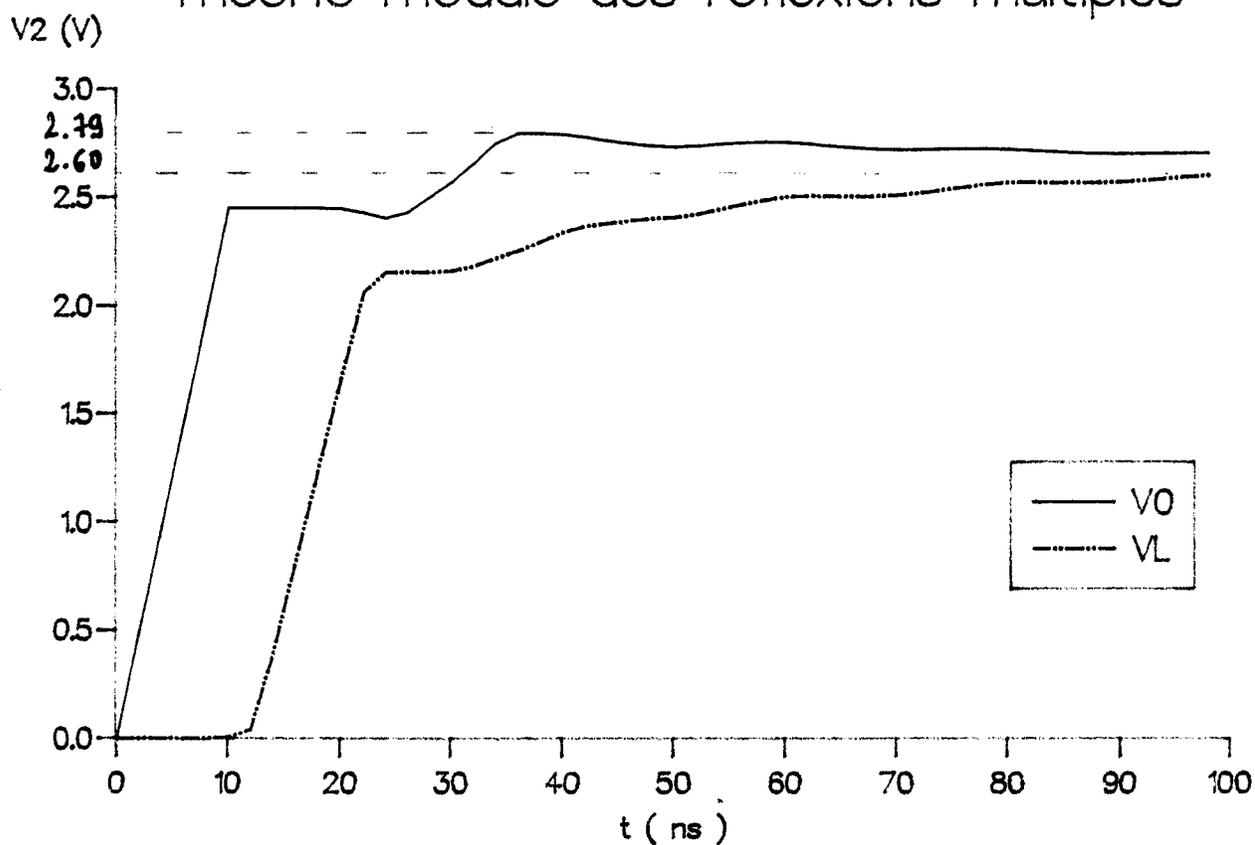


Theorie simplifiee



PL(IV-11)

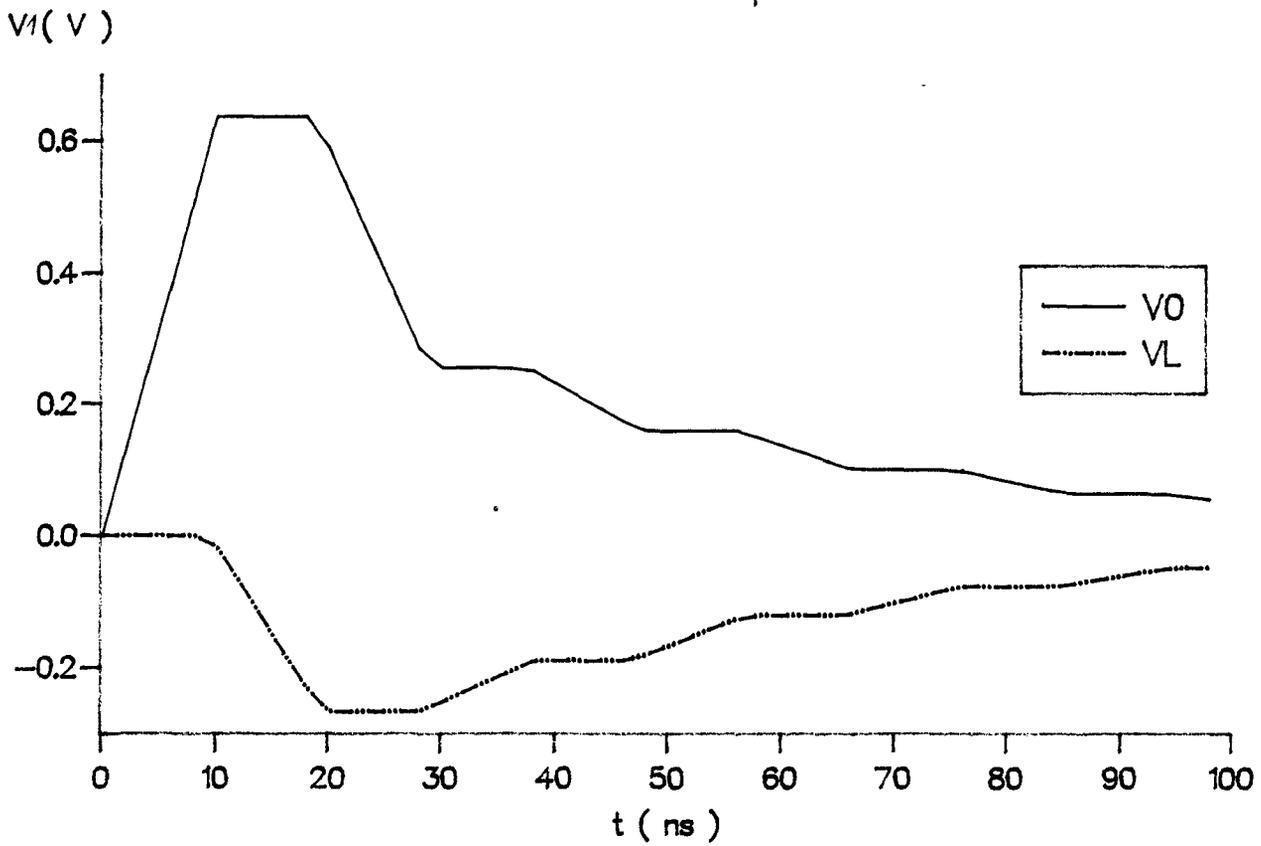
Theorie modale des reflexions multiples



PL(IV-12)

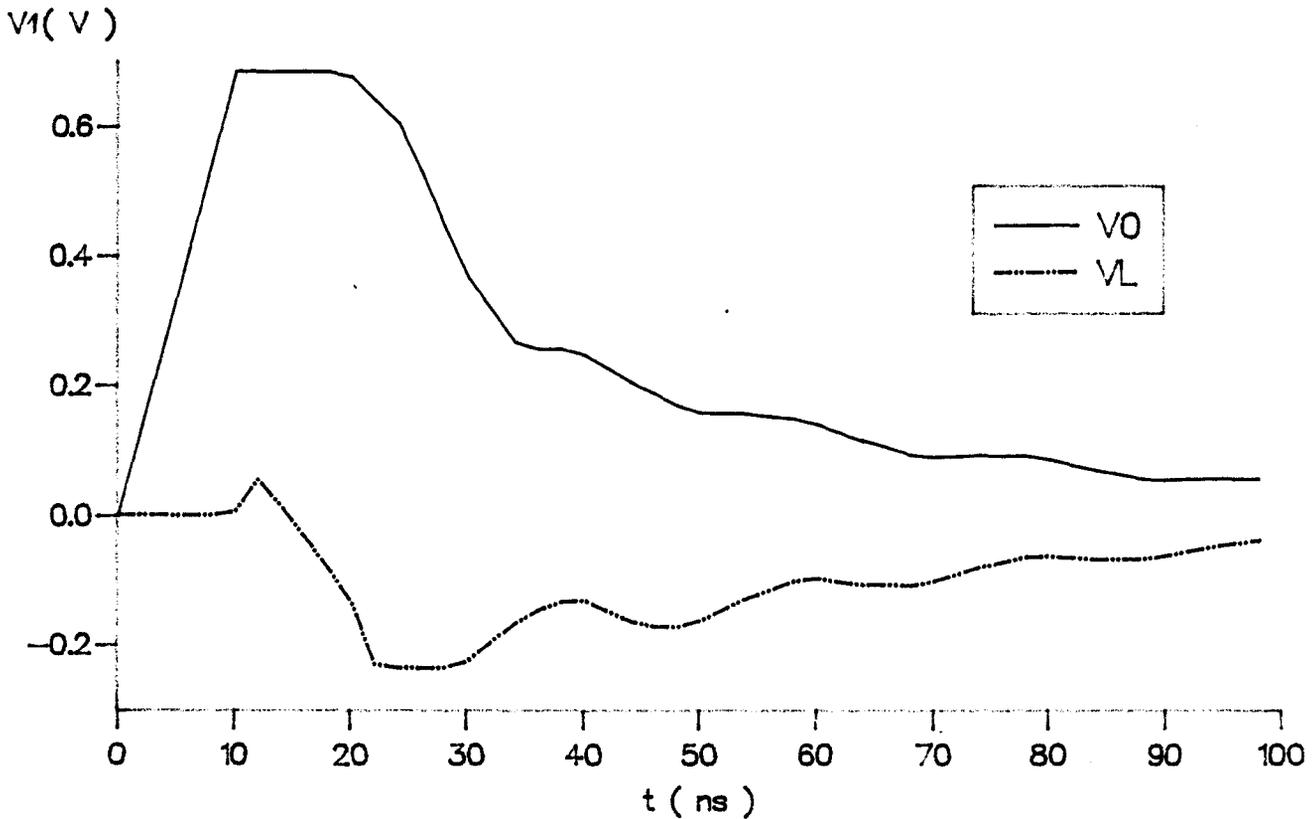


Theorie simplifiee



PL(IV-13)

Theorie modale des reflexions multiples



PL(IV-14)

Pour le faisceau de cinq conducteurs étudié, nous obtenons les cinq temps de propagation suivants:

$$\theta_1 = 9.8 \text{ ns}$$

$$\theta_2 = 11.3 \text{ ns}$$

$$\theta_3 = 12. \text{ ns}$$

$$\theta_4 = 12.3 \text{ ns}$$

$$\theta_5 = 12.5 \text{ ns}$$

Toutefois, il est difficile de discerner ces différents instants sur les courbes de la planche PL(IV-12): en effet, le temps de calcul pour modéliser ces tensions étant assez long, nous nous sommes limités à une cinquantaine de points, ce qui donne une résolution de 2 ns dans le domaine temporel. Cette résolution n'est évidemment pas assez fine pour observer des écarts de temps de propagation de l'ordre de 0.2 ns, comme c'est le cas pour θ_4 et θ_5 .

L'amplitude crête des signaux parasites induits est sensiblement la même qu'on utilise la théorie modale ou le formalisme simplifié. Sur l'amplitude crête de la tension observée aux extrémités du conducteur 2, le conducteur alimenté, l'erreur commise est inférieure à 2%. En ce qui concerne l'amplitude crête induite sur le conducteur 1, le conducteur voisin, elle est de l'ordre de 10%.

Pour conclure sur l'incidence des erreurs commises dans la détermination des paramètres linéiques inductance et capacité et de celles engendrées par la théorie simplifiée, nous avons repris le toron de cinq conducteurs dont la configuration de charge est celle étudiée aux chapitres 3 et 4.

Le conducteur 1 est connecté au plan de masse en $z = L$ par une résistance Z_{c1} . Cette résistance est donnée par

$$Z_{c1} = \sqrt{\frac{L_{11}}{\sum_{i=1}^5 C_{1i}}}$$

et vaut 354 Ω , en prenant les paramètres linéiques calculés rassemblés dans les matrices (III-8) et (III-9).

En $z = 0$, le conducteur 1 est soit connecté à un générateur de tension, pour obtenir la réponse temporelle du conducteur 2, soit à un analyseur de réseau pour observer une réponse fréquentielle; ces deux appareils ont une impédance interne de 50 Ω .

Les quatre autres conducteurs sont court-circuités en $z = L$ et laissés en l'air en $z = 0$ excepté le conducteur 2 sur lequel nous connectons un appareil de mesure, oscilloscope ou analyseur de réseau, d'impédance interne 50 Ω . Figure(IV-12).

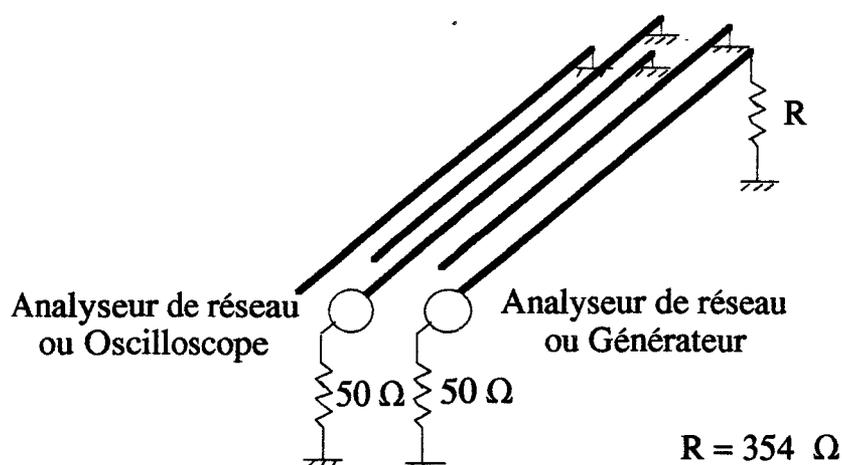


Figure (IV-12)

Dans le domaine fréquentiel, nous avons représenté le paramètre S_{21} défini par

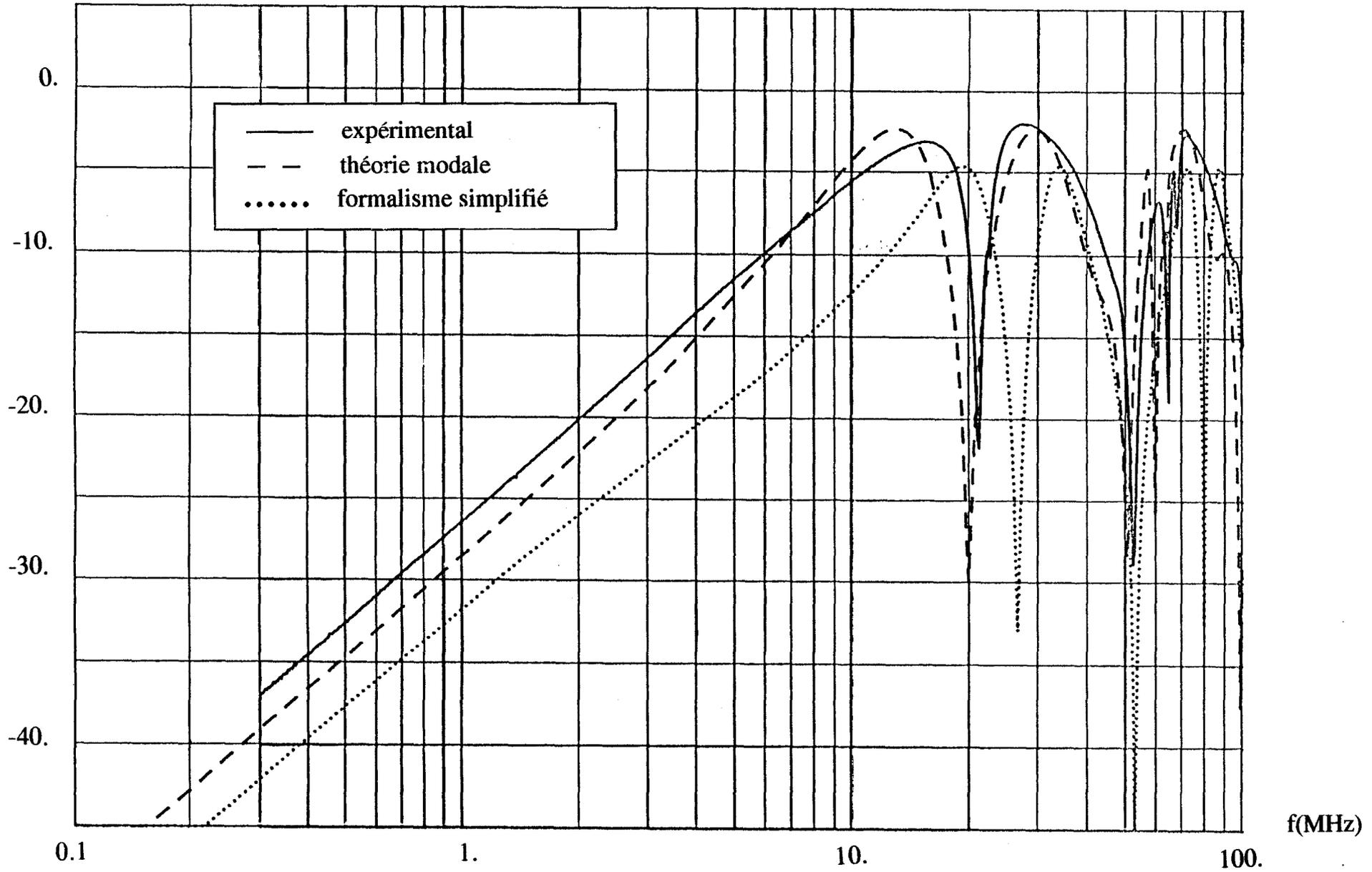
$$S_{21} = 20 \log \left(\frac{V_2(0)}{V_1(0)} \right)$$

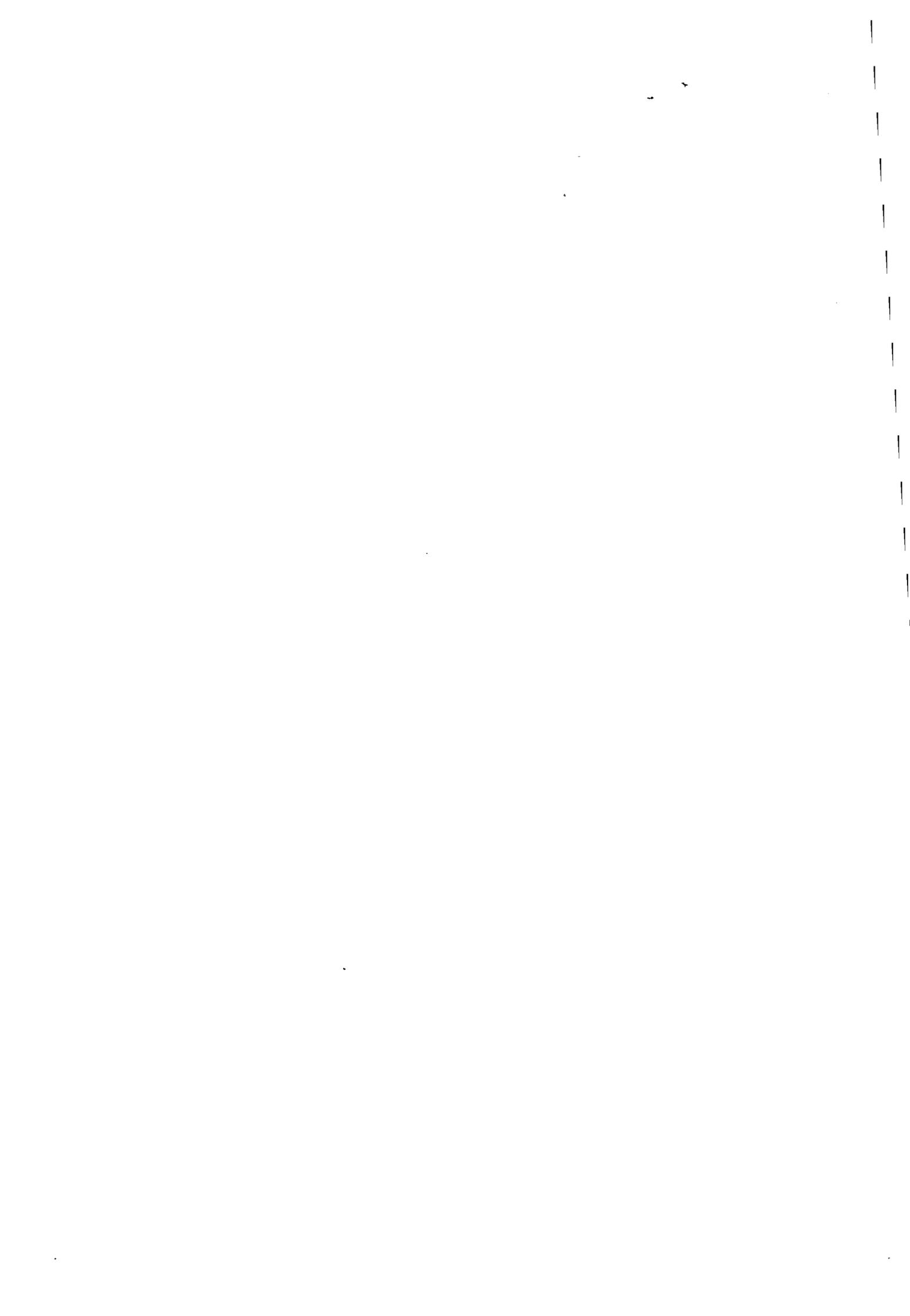
Sur la planche PL(IV-15), nous avons confronté l'évolution du paramètre S_{21} mesuré à l'analyseur de réseau, courbe en trait plein, modélisé par le formalisme modal, courbe en pointillés et obtenu par le formalisme simplifié, caractéristique en points. La courbe expérimentale et celle obtenue par la théorie modale sont très proches: l'écart observé sur le niveau en basses fréquences d'environ 5 % ainsi que le décalage des résonances en plus hautes fréquences sont dus aux erreurs de mesures lors de la détermination des paramètres lineiques. Quant aux erreurs introduites par la simplification de la théorie modale, elles se manifestent sur le niveau en basses fréquences du paramètre S_{21} avec un ordre de grandeur de 13% ainsi que sur le nombre et la position des résonances en plus hautes fréquences.

Nous avons fait parallèlement une analyse dans le domaine temporel. Le conducteur 1 est alimenté par un générateur $e_1(t)$ délivrant un échelon d'amplitude 4 V et de temps de montée 10 ns.

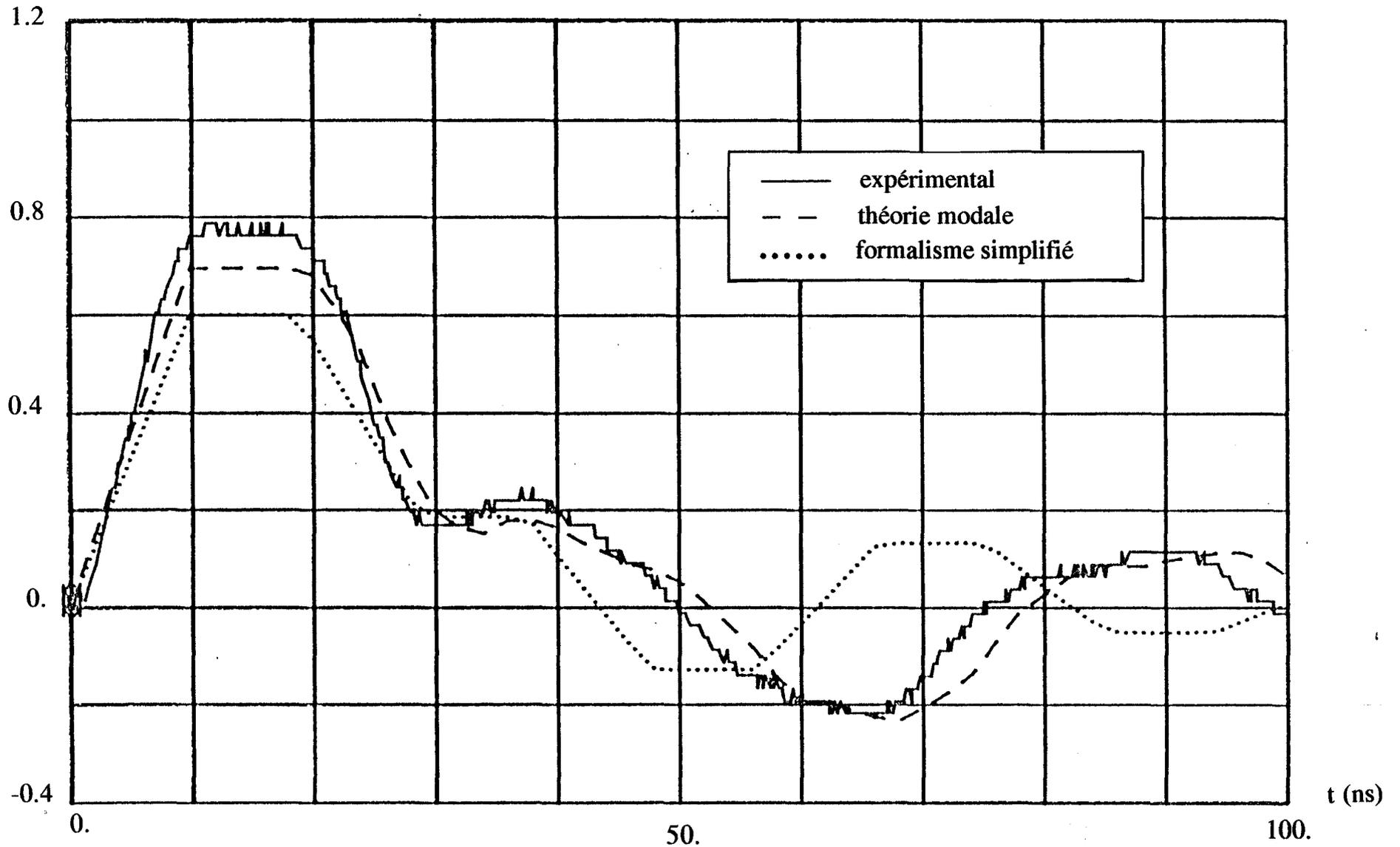
Sur la planche PL(IV-16), nous avons comparé l'évolution de la tension du conducteur 2 en $z = 0$ observée à l'oscilloscope, courbe en trait plein, modélisée par le formalisme modal, courbe en pointillés et obtenue par le formalisme simplifié, caractéristique en points. Les conclusions sont les mêmes que pour le domaine fréquentiel. La courbe expérimentale et celle obtenue par la théorie modale sont très proches: nous observons un léger écart d'environ 9% sur l'amplitude crête de $V_2(0)$ qui est due aux erreurs de mesures lors de la détermination des paramètres lineiques. Quant aux erreurs introduites par la simplification de la théorie modale, elles se manifestent sur l'amplitude crête de $V_2(0)$ avec un ordre de grandeur de 20% ainsi que sur le nombre des réflexions et l'instant auquel elles se produisent.

$$S_{21} \text{ (dB)} = 20 \log(V_2(0) / V_1(0))$$





$V_2(0)$ (V)



IV-5 Application de la théorie modale des réflexions multiples au cas de sources réparties

Nous avons développé jusqu'à présent le formalisme des réflexions multiples pour le cas où les parasites sont induits par des sources localisées aux extrémités des conducteurs. Dans ce paragraphe, nous allons étudier comment il est possible d'étendre ce formalisme au cas de sources réparties. Figure (IV-13)

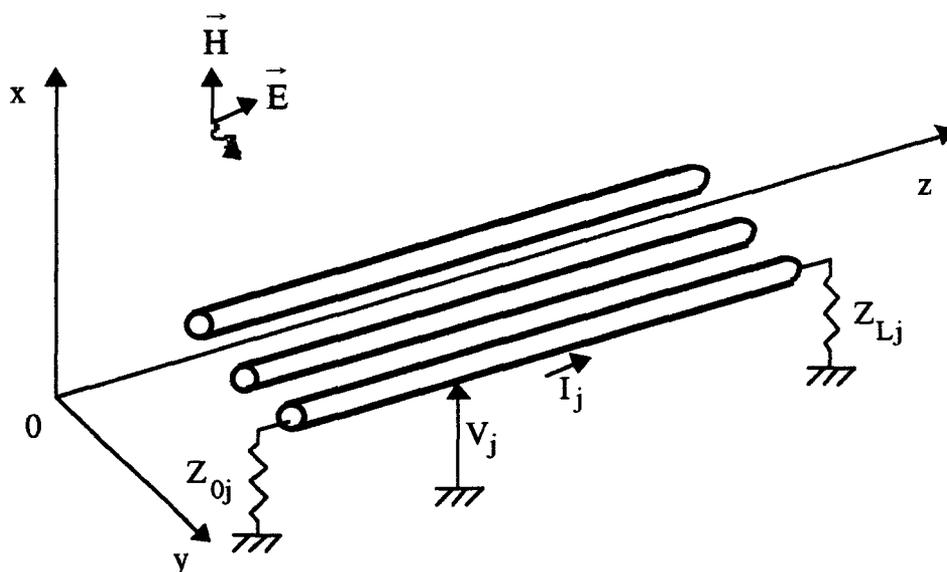


Figure (IV-13)

Lorsque les lignes sont illuminées par un champ électromagnétique, il convient d'ajouter aux équations du système (IV-1) deux vecteurs (ϵ) et (\mathcal{L}) caractéristiques de la source perturbatrice

$$\begin{cases} \left(-\frac{dV}{dz} \right) = (Z) (I) - (\epsilon) \\ \left(-\frac{dI}{dz} \right) = (Y) (V) - (\mathcal{L}) \end{cases} \quad (\text{IV-42})$$

(ϵ) dépend de la composante magnétique du champ excitateur perpendiculaire à Oz et parallèle au plan

(\mathcal{L}) dépend de la composante électrique normale au plan.

Ces sources de tension (ϵ) et de courant (\mathcal{L}) sont réparties suivant la coordonnée longitudinale z.

Considérons un élément infinitésimal dz du faisceau. Nous pouvons associer à l'un de ses conducteurs j le schéma de la figure (IV-14)

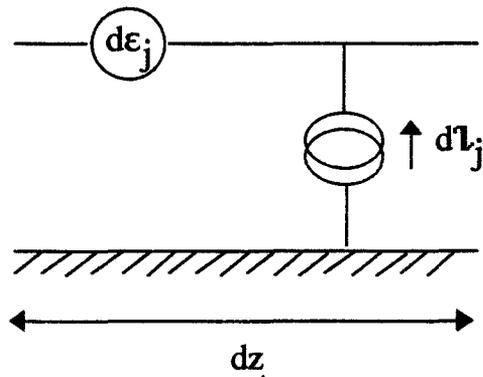


Figure (IV-14)

$$\text{où} \quad d\epsilon_j = \epsilon_j(z) dz$$

$$d\ell_j = \ell_j(z) dz$$

avec ϵ_j et ℓ_j éléments d'ordre j des vecteurs (ϵ) et (ℓ) .

Pour des raisons de simplicité, nous admettons que la propagation est totalement dégénérée. Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous avons établi un changement de base par la matrice de passage (T) . Dans cette base, appelée base propre, les courants et tensions sont notés (i) et (v) et le système (IV-42) s'écrit

$$\begin{cases} \left(-\frac{dv}{dz} \right) = (z) (i) - (e_0) \\ \left(-\frac{di}{dz} \right) = (y) (v) - (i_0) \end{cases} \quad (\text{IV-43})$$

où

$$(e_0) = (T)^{-1} (\epsilon)$$

$$(i_0) = (T)^{-1} (\ell)$$

$$(z) = (T)^{-1} (Z) (T)$$

$$(y) = (T)^{-1} (Y) (T)$$

Conformément à ces relations, les sources élémentaires s'écrivent dans l'espace propre

$$(de_0) = (T)^{-1} (d\epsilon)$$

$$(di_0) = (T)^{-1} (d\ell)$$

Chaque vecteur source modal émet une source à droite et à gauche; les vecteurs courant et tension induits sont notés (di^-) et (dv^-) pour l'onde régressive et (di^+) et (dv^+) pour l'onde progressive, comme l'indique la figure (IV-15).

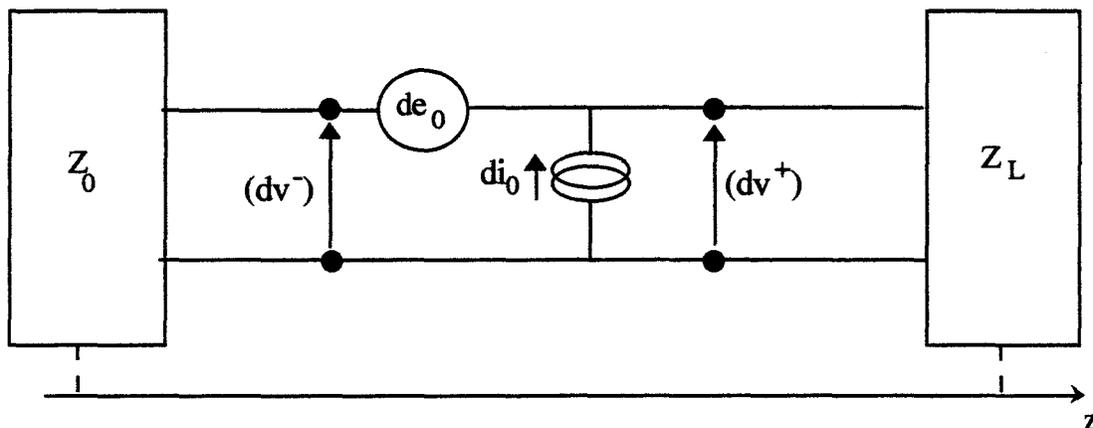


Figure (IV-15)

Pour la première itération, $n = 1$, l'onde régressive a pour amplitude (dv_1^-) et l'onde progressive (dv_1^+) . Ces amplitudes sont exprimées par les relations du système (IV-45).

$$\begin{cases} (dv_1^-) = \frac{1}{2} (de_0) + \frac{1}{2} (z_c) (di_0) \\ (dv_1^+) = \frac{1}{2} (de_0) - \frac{1}{2} (z_c) (di_0) \end{cases} \quad (IV-45)$$

avec (z_c) matrice impédance caractéristique définie par (IV-9).

L'onde régressive (dv_1^-) arrive en $z = 0$, elle a pour amplitude $(d\bar{v}_1^-)$ telle que

$$(d\bar{v}_1^-) = (e^{-\gamma_0 z}) (dv_1^-) \quad (IV-46)$$

Elle se réfléchit sur le réseau d'impédances connecté en $z = 0$, dont la matrice coefficient de réflexion est (ρ_0) ; cette réflexion génère la seconde itération et donne naissance à l'onde (dv_2^-) qui se propage vers l'extrémité $z = L$

$$(dv_2^-) = (\rho_0) (d\bar{v}_1^-) \quad (IV-47)$$

En $z = L$, cette onde devient $(d\bar{v}_2^-)$

$$(d\bar{v}_2^-) = (e^{-\gamma_0 L}) (dv_2^-)$$

Elle subit une réflexion sur le réseau d'impédances de charge et génère la troisième itération en créant l'onde (dv_3^-)

$$(dv_3^-) = (\rho_L) (d\bar{v}_2^-)$$

Les sources élémentaires induites en z donnent donc à l'origine du faisceau une tension élémentaire $(dv^-(0))$ telle que

$$\begin{aligned} (dv^-(0)) &= (dv^-)_{z=0} = (d\bar{v}_1^-) + (\rho_0) (d\bar{v}_1^-) + (d\bar{v}_3^-) + (\rho_L) (d\bar{v}_3^-) + \dots \\ &= (d\bar{v}_1^-) + (dv_2^-) + (d\bar{v}_3^-) + (dv_4^-) + \dots \end{aligned}$$

soit

$$(dv^-(0)) = [1 + (\rho_0)] \sum_{m=0}^{\infty} ((\rho_L)(\rho_0))^m e^{-2m\gamma_0 L} e^{-\gamma_0 z} (dv_1^-)$$

où γ_0 est la constante de propagation du milieu définie par (IV-4).

La contribution de l'ensemble des sources élémentaires donnera le vecteur $(v^-(0))$ tel que

$$(v^-(0)) = [1 + (\rho_0)] \sum_{m=0}^{\infty} ((\rho_L)(\rho_0))^m e^{-2m\gamma_0 L} \int_0^L e^{-\gamma_0 z} (dv_1^-)$$

Nous pouvons raisonner de la même façon pour déterminer le vecteur $(v^+(0))$. Réécrivons les différentes itérations:

l'onde progressive (dv_1^+) arrive en $z = L$ et a pour amplitude $(d\bar{v}_1^+)$ telle que

$$(d\bar{v}_1^+) = (e^{-\gamma_0(L-z)}) (dv_1^+)$$

Elle se réfléchit sur le réseau d'impédances de charge, génère la deuxième itération (dv_2^+) qui parvient en $z = 0$ avec une amplitude égale à $(d\bar{v}_2^+)$

$$(d\bar{v}_2^+) = (e^{-\gamma_0 L}) (dv_2^+) = (e^{-\gamma_0 L})(\rho_L) (d\bar{v}_1^+)$$

En $z = 0$, elle subit une réflexion et génère la troisième itération en donnant naissance à l'onde (dv_3^+)

$$(dv_3^+) = (\rho_0) (d\bar{v}_2^+)$$

$$(dv^+(0)) = (d\bar{v}_2^+) + (dv_3^+) + (d\bar{v}_4^+) + \dots$$

soit

$$(dv^+(0)) = [1 + (\rho_0)] (\rho_L) \sum_{m=0}^{\infty} ((\rho_L)(\rho_0))^m e^{-2m\gamma_0 L} e^{-\gamma_0(2L-z)} (dv_1^+)$$

ce qui donne le vecteur $(v^+(0))$:

$$v^+(0) = [1 + (\rho_0)] (\rho_L) \sum_{m=0}^{\infty} ((\rho_L)(\rho_0))^m e^{-2m\gamma_0 L} \int_0^L e^{-\gamma_0(2L-z)} (dv_1^+)$$

Le vecteur résultant à l'origine est la somme des deux tensions

$$(v(0)) = (v^+(0)) + (v^-(0))$$

Pour obtenir les tensions dans la base originale, il suffit d'effectuer la transformation suivante:

$$(V(0)) = (T) (v(0))$$

Pour évaluer analytiquement les intégrales représentant la circulation des sources sur toute la ligne, nous devons considérer trois cas de figures:

1 - le champ électromagnétique qui génère les parasites a des composantes indépendantes de la variable longitudinale z ; (ϵ) et (\mathcal{L}) sont donc indépendantes de z ; il en est de même pour (v_1^+) et (v_1^-) .

Nous pouvons poser:

$$(dv_1^+) = (v_1^+) dz$$

$$(dv_1^-) = (v_1^-) dz$$

où (v_1^+) et (v_1^-) sont des vecteurs indépendants de z . Ils s'écrivent en fonction des sources (ϵ) et (\mathcal{L}) exprimées par unité de longueur

$$\begin{cases} (v_1^-) = \frac{1}{2} (\epsilon_0) + \frac{1}{2} (z_c) (i_0) \\ (v_1^+) = \frac{1}{2} (\epsilon_0) - \frac{1}{2} (z_c) (i_0) \end{cases}$$

avec $(\epsilon_0) = (T)^{-1} (\epsilon)$

$$(i_0) = (T)^{-1} (\mathcal{L})$$

Les intégrales deviennent alors

$$\int_0^L e^{-\gamma_0 z} (dv_1^-) = \int_0^L e^{-\gamma_0 z} (v_1^-) dz = (v_1^-) \frac{1 - e^{-\gamma_0 L}}{\gamma_0}$$

$$\int_0^L e^{-\gamma_0(2L-z)} (dv_1^+) = \int_0^L e^{-\gamma_0(2L-z)} (v_1^+) dz = (v_1^+) \frac{1 - e^{-\gamma_0 L}}{\gamma_0} e^{-\gamma_0 L}$$

2 - la propagation des sources se fait suivant l'axe Oz et les composantes du champ électromagnétique sont indépendantes de cette variable

(v_1^+) et (v_1^-) s'expriment alors

$$(v_1^-) = (|v_1^-|) e^{-\gamma z}$$

$$(v_1^+) = (|v_1^+|) e^{-\gamma z}$$

où γ est l'exposant de propagation associé aux sources. Dans le cas général, $\gamma \neq \gamma_0$

Les intégrales deviennent

$$\int_0^L e^{-\gamma_0 z} (dv_1^-) = (|v_1^-|) \int_0^L e^{-(\gamma_0 + \gamma) z} dz = (|v_1^-|) \frac{1 - e^{-(\gamma_0 + \gamma)L}}{\gamma_0 + \gamma}$$

$$\int_0^L e^{-\gamma_0 z} (dv_1^+) = (|v_1^+|) e^{-2\gamma_0 L} \int_0^L e^{(\gamma_0 - \gamma) z} dz = (|v_1^+|) \frac{1 - e^{(\gamma_0 - \gamma)L}}{\gamma - \gamma_0} e^{-2\gamma_0 L}$$

3 - la distribution des sources est quelconque. En écrivant $(v_1^-(z))$ et $(v_1^+(z))$ sous la forme d'une série de Fourier, nous pouvons résoudre analytiquement les deux intégrales.

Dans ce quatrième chapitre, nous avons développé la théorie modale des réflexions multiples qui nous permet de déterminer, dans le domaine temporel, les parasites induits par des sources de perturbation localisées. Pour cela, nous avons distingué deux cas, selon que les conducteurs baignent dans un milieu homogène ou non. Cette théorie a été validée sur des exemples trouvés dans la bibliographie ou expérimentaux. Nous avons pu ensuite chiffrer l'erreur introduite par la théorie simplifiée développée au troisième chapitre sur l'amplitude crête des parasites induits. Sur un toron de cinq conducteurs, cette erreur est de l'ordre de 10%. Pour évaluer l'amplitude crête des transitoires induits, nous pouvons donc procéder de deux façons différentes:

- soit, nous calculons ce paramètre à partir des inductances et capacités linéiques mesurées par la théorie des réflexions multiples, ce qui exige un temps de calcul considérable et nous commettons alors des erreurs qui sont dues aux mesures.

- soit, nous déterminons ce paramètre par le modèle simplifié, en faisant l'hypothèse de la totale dégénérescence des modes, à partir des inductances et capacités linéiques; le temps de calcul est alors dérisoire et l'erreur commise est due à la simplification introduite.

Comme nous venons de le justifier pour conclure ce chapitre, cette théorie peut également être transcrite au problème de l'induction par une onde plane sur un faisceau de câbles.

CHAPITRE V
CONCEPT DU CONDUCTEUR EQUIVALENT

V - CONCEPT DU CONDUCTEUR EQUIVALENT

Pour un faisceau de N conducteurs, les matrices introduites par la topologie sont d'ordre N . L'objet de ce chapitre est de proposer une méthode qui permet de réduire l'ordre de ces matrices. Lorsque le conducteur objet du modèle prédictif ne concerne qu'un seul élément de l'ensemble N , il peut être réduit, sous certaines conditions, à un conducteur fictif unique. Les caractéristiques géométriques de ce conducteur équivalent seront définies de telle sorte que les parasites qui apparaissent aux extrémités de ce conducteur équivalent soient de même amplitude que les parasites observés aux extrémités du conducteur réel immergé dans le faisceau.

Nous avons tout d'abord raisonné sur un faisceau de deux conducteurs et nous avons montré que l'application du concept du conducteur était fortement influencé par la valeur des impédances connectées aux extrémités des conducteurs et par la polarisation de l'onde. En ce qui concerne la polarisation, nous allons montrer qu'une fonction de distribution quelconque de champ peut être assimilée à une superposition de fonctions harmoniques qui s'apparentent à des ondes planes. Une onde plane d'incidence quelconque peut elle-même être assimilée à la superposition de trois modes de polarisation fondamentaux. S'agissant de l'influence des impédances d'extrémités, ce concept est inapplicable dans le cas général puisque les conclusions aboutissent à des hauteurs et diamètres fictifs fonction de la fréquence. Il y a cependant moyen de réduire ces difficultés en supposant que les conducteurs entrant dans le faisceau obéissent à des conditions d'extrémité très spécifiques. Pour simplifier, nous supposons donc que le faisceau peut présenter un ensemble de conducteurs connectés à la masse aux deux extrémités et un ensemble de conducteurs connectés sur impédances infinies et nous définissons les paramètres géométriques de ce conducteur équivalent dans ces conditions.

En réalité, la plupart des conducteurs installés à bord des avions sont connectés sur des impédances qui ne peuvent être assimilées ni à des court-circuits, ni à de grandes impédances. Le concept du conducteur équivalent tel que nous le développerons ne sera plus valable; cette dernière partie sera consacrée à l'évaluation des marges d'erreur que nous commettons lorsque nous assimilons les impédances des conducteurs environnants à des court-circuits ou circuits ouverts alors qu'en réalité ils sont connectés sur des impédances quelconques.

V - 1 Principe de superposition d'onde appliquée à la recherche du conducteur équivalent [22]

Sur l'exemple du bifilaire, nous avons constaté que les caractéristiques géométriques du conducteur fictif dépendent de la polarisation de l'onde plane incidente. En faisant usage du principe de superposition tel qu'il est décrit par la suite, toute onde plane peut être assimilée à la superposition de trois modes fondamentaux qui correspondent à trois excitations électromagnétiques dont nous chercherons à évaluer la réponse vis à vis du conducteur fictif.

Considérons une onde électromagnétique plane repérée dans un système orthonormé $Oxyz$. Figure (V-1).

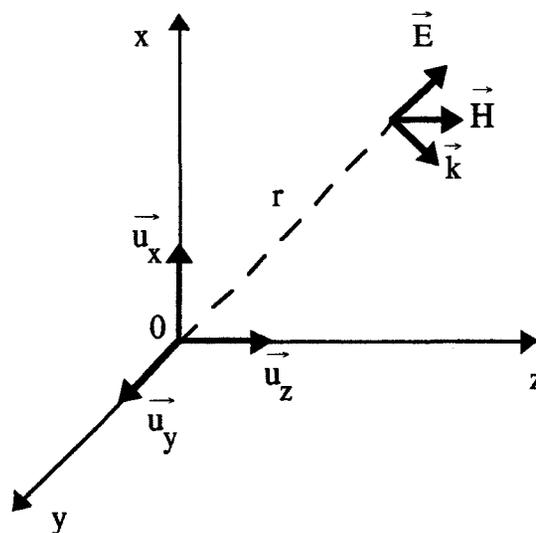


Figure (V-1)

Cette onde peut être décrite par les vecteurs champ électrique et champ magnétique, soit :

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}\end{aligned}\tag{V-1}$$

\vec{E} et \vec{H} sont liés par l'impédance d'onde

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

\vec{k} est le nombre d'onde (vecteur) qui indique la direction de propagation de l'onde. Il possède trois composantes k_x , k_y et k_z qu'on exprime :

$$\vec{k} = k_x \vec{u}_x + k_y \vec{u}_y + k_z \vec{u}_z$$

\vec{r} est un point géométrique où sont définis \vec{E} et \vec{H}

$$\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

(V-1) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} \end{aligned}$$

Si l'axe du faisceau de conducteurs est orienté parallèlement à Oz on montre que la propagation (terme de phase) suivant x ou y est sans effet. Cela provient de l'utilisation pour termes sources E_x^i et B_y^i dans l'équation différentielle.

Le système précédent peut alors avantageusement se simplifier:

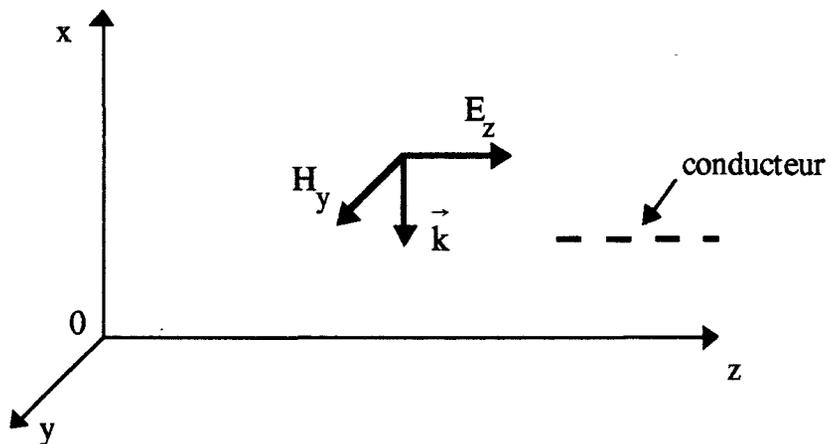
$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{-jk_z z} \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{-jk_z z} \end{aligned}$$

Nous allons montrer que \vec{E} et \vec{H} peuvent se réduire à la superposition des modes d'excitation magnétique, électrique et mixte: Figure (V-2).

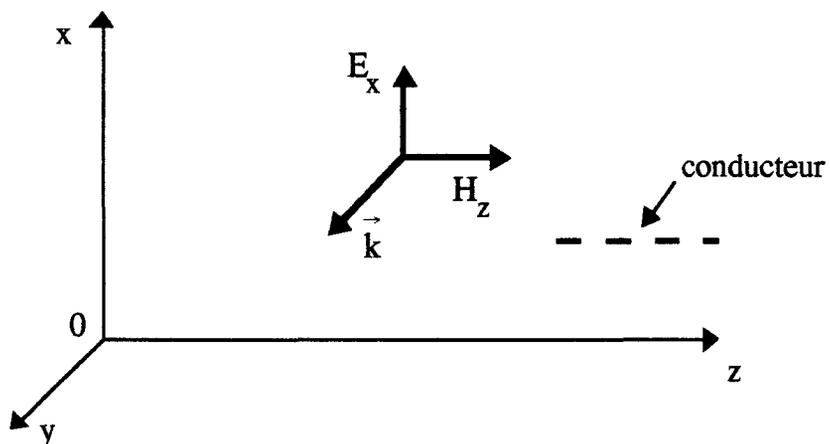
- le mode magnétique correspond à une onde arrivant normalement au plan dont le vecteur champ magnétique est normal à l'axe Oz confondu avec le conducteur.

- le mode électrique correspond à une onde arrivant sous incidence rasante et normalement à l'axe Oz.

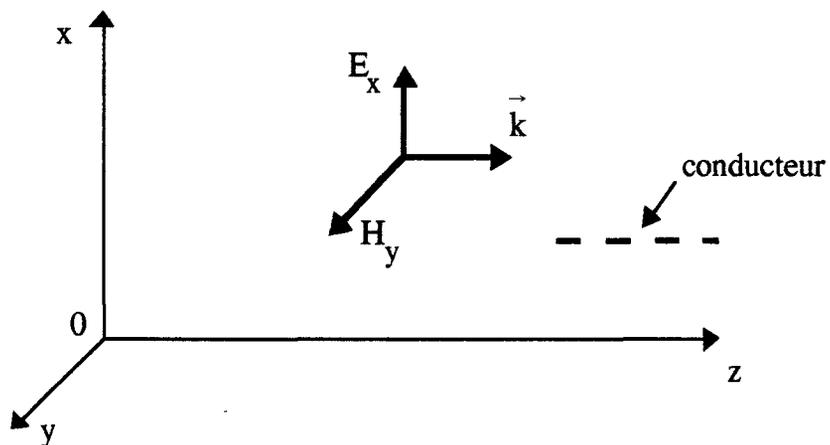
- le mode hybride est une onde rasante arrivant parallèlement à l'axe Oz.



Mode magnétique



Mode électrique



Mode hybride

Figure (V-2)

Pour cela désignons un mode d'excitation au moyen des notations :

$$(\vec{E}_i, \vec{H}_j, \vec{u}_k) \text{ et } (\vec{H}_i, \vec{E}_j, \vec{u}_k) \tag{V-2}$$

Notations auxquelles correspondent les conventions de la Figure (V-3) :

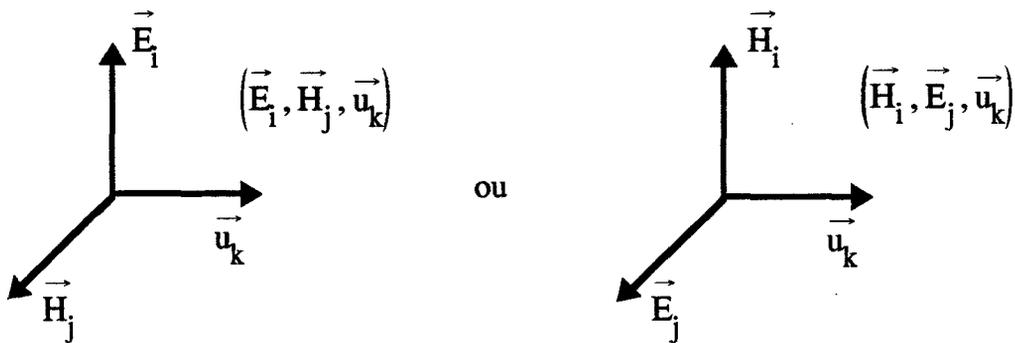


Figure (V-3)

k, i et j suivent la permutation circulaire

$$\begin{cases} k = z \Rightarrow i = x, j = y \\ k = x \Rightarrow i = y, j = z \\ k = y \Rightarrow i = z, j = x \end{cases}$$

\vec{E}_i, \vec{H}_j et \vec{u}_k sont trois vecteurs orthogonaux.

\vec{u}_k est un vecteur unitaire colinéaire aux axes 0x ou 0y ou 0z.

De plus les composantes électriques et magnétiques contenues dans (V-2) sont liées par l'impédance d'onde :

$$\frac{|\vec{E}_i|}{|\vec{H}_j|} = Z_0$$

Les composantes \vec{E} et \vec{H} de l'onde plane vont s'exprimer comme la superposition de ces modes d'excitation, soit :

$$(\vec{E}, \vec{H}) = \sum_k (\vec{E}_i, \vec{H}_j, \vec{u}_k) + \sum_k (\vec{H}_i, \vec{E}_j, \vec{u}_k)$$

qu'on peut aussi écrire avec la notation allégée :



$$(\vec{E}, \vec{H}) = \sum_k (\vec{E}_i^k, \vec{H}_j^k) + \sum_k (\vec{H}_i^k, \vec{E}_j^k)$$

Il faut aussi remarquer qu'étant donné l'orientation relative des composantes \vec{E} et \vec{H} et de l'axe du fil et les conditions aux limites imposées par le plan de référence, à savoir que $\vec{E} \wedge \vec{n} = 0$ et $\vec{H} \cdot \vec{n} = 0$ si \vec{n} représente la normale au plan, nous distinguons les composantes actives qui produisent une tension induite ou un courant induit sur le conducteur et les composantes passives qui sont sans effet pour les raisons évoquées.

Les modes actifs sont notés à l'aide de majuscules et les modes passifs à l'aide de minuscules.

Modes actifs

$$(\vec{E}_x^z, \vec{H}_y^z) \quad (\vec{E}_x^y, \vec{H}_z^y) \quad (\vec{E}_z^x, \vec{H}_y^x)$$

Modes passifs

$$(\vec{e}_y^z, \vec{h}_x^z) \quad (\vec{e}_z^y, \vec{h}_x^y) \quad (\vec{e}_y^x, \vec{h}_z^x)$$

Chaque composante électrique ou magnétique de l'onde incidente va donc s'exprimer en fonction de combinaisons linéaires de ces modes.

$$\begin{cases} E_x^i = E_x^z + E_x^y \\ E_y^i = e_y^z + e_y^x \\ E_z^i = E_z^x + e_z^y \end{cases} \quad (V-3)$$

$$\begin{cases} H_x^i = h_x^z + h_x^y \\ H_y^i = H_y^z + H_y^x \\ H_z^i = H_z^y + h_z^x \end{cases} \quad (V-4)$$

Sachant que chaque mode est relié par l'impédance d'onde, (V-3) peut s'exprimer :

$$\begin{cases} E_x^i = Z_0 H_y^z + Z_0 H_z^y \\ E_y^i = Z_0 h_x^z + Z_0 h_z^x \\ E_z^i = Z_0 H_y^x + Z_0 h_x^y \end{cases} \quad (V-5)$$

Si on fait usage d'une notation matricielle, (V-3) et (V-4) vont s'exprimer :

$$\begin{pmatrix} E_x^i \\ H_x^i \\ E_y^i \\ H_y^i \\ E_z^i \\ H_z^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_0 & 0 & Z_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & Z_0 & Z_0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_0 & 0 & 0 & 0 & Z_0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_y^z \\ H_y^x \\ H_z^y \\ h_z^x \\ h_x^z \\ h_x^y \end{pmatrix}$$

qu'on peut réduire à l'expression :

$$\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = (T) \begin{pmatrix} H^k \\ h^k \end{pmatrix}$$

L'amplitude de chaque mode sera donnée par l'inversion :

$$\begin{pmatrix} H^k \\ h^k \end{pmatrix} = (T)^{-1} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$$

(E_x^x, H_y^x) est l'excitation magnétique à laquelle correspond sur le conducteur j du faisceau la réponse en tension V_j^x ou la réponse en courant I_j^x .

(E_x^y, H_z^y) est l'excitation électrique à laquelle correspond sur le conducteur j la tension V_j^y ou le courant I_j^y .

(E_x^z, H_z^y) est l'excitation mixte à laquelle correspond sur le conducteur j du faisceau la tension V_j^z ou le courant I_j^z .

La réponse du conducteur j peut donc s'écrire :

$$V_j = \sum_k V_j^k \quad I_j = \sum_k I_j^k$$

Une onde plane d'incidence quelconque peut donc être assimilée à la superposition des trois modes de polarisation fondamentaux : magnétique, électrique et hybride.

Dans le cas où la distribution de champ est une fonction quelconque de z , nous allons montrer qu'elle peut être assimilée à une superposition de fonctions harmoniques qui s'apparentent à des ondes planes.

Considérons le cas d'une onde dont l'amplitude varie avec la variable longitudinale z qui illumine un faisceau de conducteurs de longueur L . Figure (V-4)

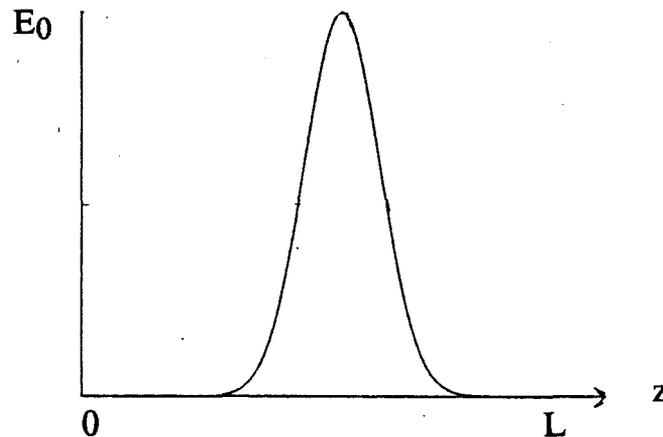


Figure (V-4)

A $E(z)$ et $H(z)$, nous pouvons associer dans un espace dual les fonctions $e(f_z)$ et $h(f_z)$, définies comme les transformées de Fourier inverses de $E(z)$ et $H(z)$

$$\begin{array}{l} E(z) \\ H(z) \end{array} \xRightarrow{F^{-1}} \begin{array}{l} e(f_z) \\ h(f_z) \end{array} \quad \begin{array}{l} F = \text{transformée de Fourier} \\ f_z = \text{fréquence spatiale} \end{array}$$

$e(f_z)$ et $h(f_z)$ s'écrivent donc

$$e(f_z) = F^{-1}[E(z)]$$

$$h(f_z) = F^{-1}[H(z)]$$

Dans l'espace dual, on échantillonne $e(f_z)$ et $h(f_z)$ soit f_{z0} la période d'échantillonnage

Les fonctions $e(f_z)$ et $h(f_z)$ échantillonnées sont définies comme

$$e(f_z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e(n f_{z0}) \delta(f - n f_{z0})$$

$$h(f_z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n f_{z0}) \delta(f - n f_{z0})$$

où δ est la fonction de Dirac.

Pour retrouver $E(z)$ et $H(z)$, il suffit maintenant d'appliquer la transformée de Fourier aux fonctions échantillonnées $e(f_z)$ et $h(f_z)$

$$E(z) = F[e(f_z)]$$

$$H(z) = F[h(f_z)]$$

$$E(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e(n f_{z0}) e^{-j 2\pi n f_{z0} z}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n f_{z0}) e^{-j 2\pi n f_{z0} z}$$

En choisissant astucieusement la période d'échantillonnage, c'est-à-dire $f_{z0} = \frac{1}{L}$, nous obtenons

$$E(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e\left(\frac{n}{L}\right) e^{-j 2\pi n \frac{z}{L}}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h\left(\frac{n}{L}\right) e^{-j 2\pi n \frac{z}{L}}$$

soit

$$E(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n e^{-\gamma_n z}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n e^{-\gamma_n z}$$

$$\gamma_n = j \frac{2\pi n}{L}$$

γ_n étant homogène à un exposant de propagation, $E(z)$ et $H(z)$ s'écrivent sous la forme d'une somme d'ondes progressives et régressives. Pour trouver la réponse d'un conducteur à cette excitation, il suffit de faire la somme des réponses de ce même conducteur aux excitations de constante de propagation γ_n .

La réponse du conducteur j à l'excitation de propagation γ_n peut être obtenue de la même façon que sa réponse à une excitation de type hybride.

Prenons l'exemple d'une excitation magnétique où l'onde électromagnétique parvient dans une direction Ox perpendiculaire au plan de référence. Le vecteur champ magnétique est parallèle à Oy et son amplitude varie avec la variable longitudinale z suivant une loi gaussienne comme il est indiqué sur la figure (V-4).

Nous venons de montrer que B_y peut se mettre sous la forme

$$B_y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n e^{-\gamma_n z}$$

Considérons un ensemble de N conducteurs parallèles à un plan de masse. A ce système de N lignes couplées, nous pouvons associer les équations matricielles suivantes déduites de (I-10).

$$\begin{cases} \left(-\frac{dV}{dz} \right) = (Z) (I) - (\epsilon) \\ \left(-\frac{dI}{dz} \right) = (Y) (V) \end{cases}$$

(ϵ) est une matrice dont un élément quelconque j est donné par la relation (I-25)

$$\epsilon_j = j \omega \int_0^{h_j} B_y dx = j \omega \int_0^{h_j} B_y^i dx$$

En remplaçant B_y^i par son développement en série, nous obtenons

$$\epsilon_j = 2 j \omega h_j \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} B_n e^{-\gamma_n z}$$

Pour chaque valeur de γ_n , nous résolvons le système matriciel.

$$\begin{cases} \left(-\frac{dV^n}{dz} \right) = (Z) (I^n) - (\epsilon^n) \\ \left(-\frac{dI^n}{dz} \right) = (Y) (V^n) \end{cases}$$

avec

$$(\epsilon^n) = \begin{pmatrix} \vdots \\ 2j\omega h_j B_n e^{-\gamma_n z} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la réponse du conducteur j , il suffit ensuite de faire la somme des réponses obtenues pour l'excitation de constante de propagation γ_n .

$$V_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_j^n$$

$$I_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_j^n$$

Prenons un ensemble de trois conducteurs de diamètre identique, dont deux sont court-circuités et le troisième est sur grande impédance. Les trois conducteurs sont à égale distance du plan de référence soit $h_1 = h_2 = h_3 = 10$ mm et ils sont espacés de 5 mm. Figure (V-5).

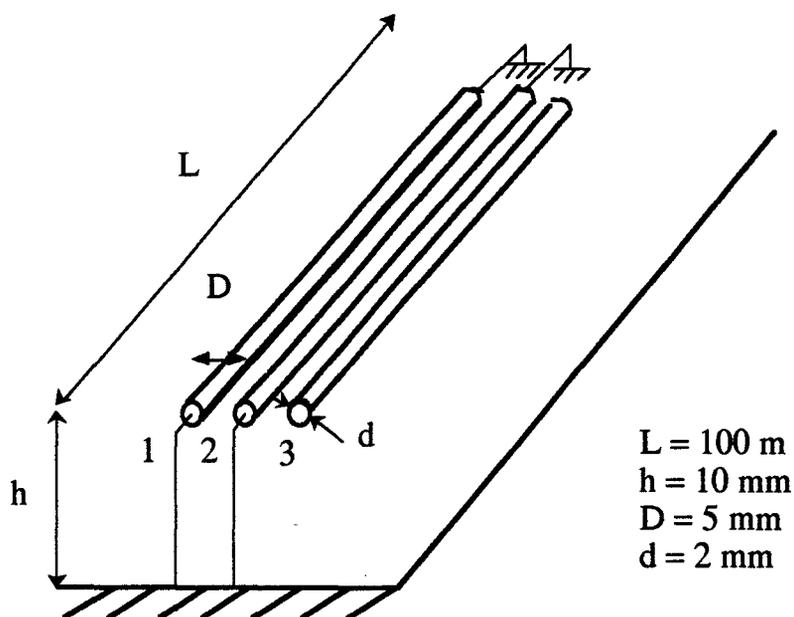


Figure (V-5)

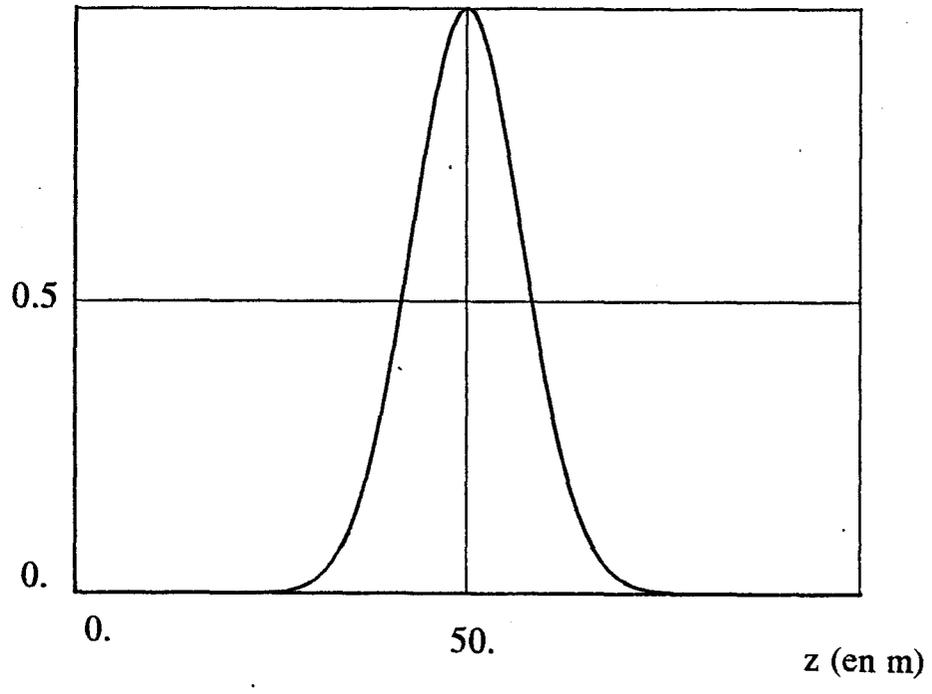
L'onde incidente, qui excite cette ligne suivant le mode magnétique, suit une loi gaussienne. Le champ magnétique $B(z)$ est reconstitué par une série de Fourier en ne gardant que les échantillons d'ordre inférieur ou égal à 30 et est représenté sur la planche PL(V-1-a). La courbe de la planche PL(V-1-b) montre l'évolution du courant en $z=0$ du conducteur 1.

Dans le cas d'une excitation hybride, où l'onde se propage parallèlement à l'axe Oz , nous verrons que les paramètres du conducteur équivalent, hauteur et diamètre, ne dépendent pas de la constante de propagation γ_n ; nous définirons donc un conducteur fictif unique équivalent au conducteur réel immergé dans le faisceau dans le cas d'une excitation quelconque.



Distribution de Gauss

E_0



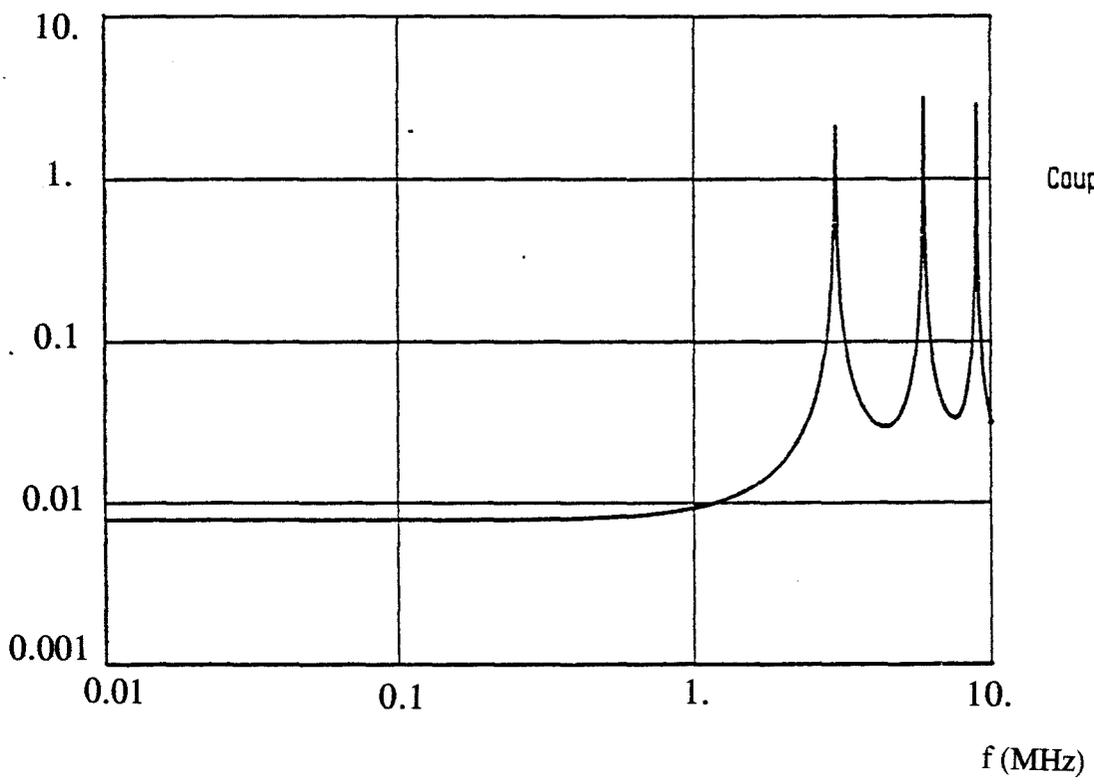
$$E(z) = e^{-\beta^2 z^2}$$

$\beta = 0.1$

30 itérations

PL (V-1-a)

$I_1(0)$ (mA) Courant sur le conducteur 1 en $z=0$



Couplage magnetique

PL (V-1-b)



V-2 Définition du conducteur équivalent [24], [26]

V-2-a Etablissement des formules mathématiques donnant les paramètres géométriques du conducteur équivalent:

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré qu'une fonction de distribution quelconque du champ peut être assimilée à une superposition de fonctions harmoniques qui s'apparentent à des ondes planes. Une onde plane d'incidence quelconque étant elle-même assimilée à la superposition de trois modes de polarisation fondamentaux, nous étudierons donc les parasites en réponse à chacun de ses trois modes fondamentaux définis précédemment à savoir :

- mode magnétique
- mode électrique
- mode hybride

Considérons un ensemble de N conducteurs disposés parallèlement au plan de référence comprenant N_1 conducteurs à la masse et N_2 conducteurs en l'air. Figure (V-6).

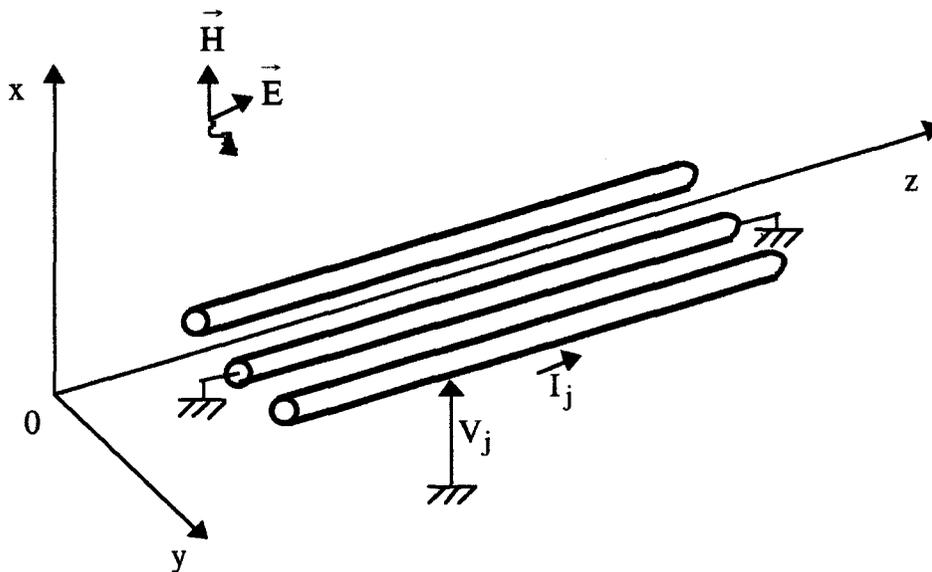


Figure (V-6)

Sur un conducteur élémentaire, on peut définir un courant I_j et une tension V_j référencée par rapport au plan.

Ces courants et tensions sont reliés par des systèmes matriciels donnés par (I-10)

$$\begin{cases} \left(-\frac{dV}{dz} \right) = (Z) (I) - (\epsilon) \\ \left(-\frac{dI}{dz} \right) = (Y) (V) - (\mathcal{L}) \end{cases}$$

Rappelons que les matrices (Z) et (Y) sont les matrices impédance et admittance du système et que

$$\begin{aligned} (Z) &= j (L) \omega \\ (Y) &= j (C) \omega \end{aligned}$$

En admettant que les N conducteurs sont plongés dans un milieu homogène, les matrices (Z) et (Y) vérifient la relation (I-11)

$$(Z) (Y) = (Y) (Z) = \gamma_0^2 (1)$$

avec $\gamma_0 = j \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ s'il s'agit de l'air.

Les matrices (ϵ) et (\mathbf{l}) sont les matrices source de tension et de courant, générées par l'onde électromagnétique incidente. Leur expression est donnée par les relations (I-25) et (I-26) que nous rappelons ici

$$\begin{aligned} (\epsilon) &= (\epsilon_j) \quad \text{avec} \quad \epsilon_j = j \omega \int_0^{h_j} B_y dx \\ (\mathbf{l}) &= (\mathbf{l}_j) \quad \text{avec} \quad \mathbf{l}_j = -j \omega \sum_{i=1}^N C_{ji} \left(\int_0^{h_i} E_x dx \right) \end{aligned}$$

Pour une excitation magnétique, mode (E_z, H_y)

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_j &= 0 \\ \epsilon_j &= 2 j \omega B_{y0} h_j \end{aligned}$$

Pour une excitation électrique, mode (E_x, H_z)

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_j &= -j \omega \sum_{i=1}^N C_{ji} E_{x0} h_i \\ \epsilon_j &= 0 \end{aligned}$$

Pour une excitation hybride, mode (E_x, H_y)

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_j &= -j \omega \sum_{i=1}^N C_{ji} E_{x0} h_i e^{-\gamma z} \\ \epsilon_j &= j \omega B_{y0} h_j e^{-\gamma z} \end{aligned}$$

γ étant l'exposant de propagation attaché à l'onde qui se propage parallèlement à l'axe du conducteur avec la vitesse de la lumière c

$$\gamma = j \frac{\omega}{c}$$

Recherche de la tension sur un conducteur en l'air

Ecrivons le système (I-10) sous la forme suivante

$$\begin{cases} \left(-\frac{dV}{dz} \right) = (Z) (I) - (\epsilon_s) e^{-\gamma z} \\ \left(-\frac{dI}{dz} \right) = (Y) (V) - (\mathcal{L}_s) e^{-\gamma z} \end{cases} \quad (\text{V-6})$$

les matrices source de tension et de courant (ϵ_s) et (\mathcal{L}_s) étant indépendantes de la variable longitudinale z .

Résolvons le système (V-6) en choisissant la tension comme variable.

$$\left(\frac{d^2V}{dz^2} \right) - \gamma_0^2 (V) = - \left[(Z) (\mathcal{L}_s) + \gamma (\epsilon_s) \right] e^{-\gamma z} \quad (\text{V-7})$$

Soit
$$\left(\frac{d^2V}{dz^2} \right) - \gamma_0^2 (V) = (S_v) e^{-\gamma z} \quad (\text{V-8})$$

avec
$$(S_v) = - \left[(Z) (\mathcal{L}_s) + \gamma (\epsilon_s) \right] \quad (\text{V-9})$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2V}{dz^2} \right) - \gamma_0^2 (V) = (S_v) e^{-\gamma z} \\ (I) = -\frac{1}{\gamma_0^2} (Y) \left[\left(\frac{dV}{dz} \right) - (\epsilon_s) e^{-\gamma z} \right] \end{cases} \quad (\text{V-10})$$

Nous allons résoudre le problème dans le cas d'une excitation hybride qui représente la situation la plus complexe et nous en déduisons les deux autres cas (excitation magnétique et excitation électrique).

Dans la résolution du problème, nous distinguerons le sous-ensemble des N_1 conducteurs court-circuités et celui des N_2 conducteurs connectés sur grande impédance. Ce type de représentation facilite l'application des conditions aux limites.

Les matrices qui interviennent dans (V-6) se subdivisent donc en sous-matrices conformément à la notation

$$(V) = \begin{pmatrix} \overline{V}_1 \\ \overline{V}_2 \end{pmatrix} \quad (I) = \begin{pmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \end{pmatrix}$$

$$(\epsilon_s) = \begin{pmatrix} \overline{\epsilon_{s1}} \\ \overline{\epsilon_{s2}} \end{pmatrix} \quad (\mathbf{l}_s) = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{l}_{s1}} \\ \overline{\mathbf{l}_{s2}} \end{pmatrix}$$

l'indice 1 se rapportant au sous-ensemble des conducteurs court-circuités et l'indice 2 à celui des conducteurs en l'air.

$$(Z) = \begin{pmatrix} \overline{Z_{11}} & \overline{Z_{12}} \\ \overline{Z_{21}} & \overline{Z_{22}} \end{pmatrix} \quad (Y) = \begin{pmatrix} \overline{Y_{11}} & \overline{Y_{12}} \\ \overline{Y_{21}} & \overline{Y_{22}} \end{pmatrix}$$

où $\overline{Z_{ij}}$ et $\overline{Y_{ij}}$ sont des matrices à N_i colonnes et N_j lignes.

Le système se réduit donc à deux systèmes indépendants que nous exprimons

$$\left(\frac{d^2 \overline{V_1}}{dz^2} \right) - \gamma_0^2 (\overline{V_1}) = (\overline{S_{v1}}) e^{-\gamma z} \quad (V-11)$$

$$\left(\frac{d^2 \overline{V_2}}{dz^2} \right) - \gamma_0^2 (\overline{V_2}) = (\overline{S_{v2}}) e^{-\gamma z} \quad (V-12)$$

avec
$$\overline{S_{v1}} = -\overline{Z_{11}} \overline{\mathbf{l}_{s1}} - \overline{Z_{12}} \overline{\mathbf{l}_{s2}} - \gamma \overline{\epsilon_{s1}} \quad (V-13)$$

$$\overline{S_{v2}} = -\overline{Z_{21}} \overline{\mathbf{l}_{s1}} - \overline{Z_{22}} \overline{\mathbf{l}_{s2}} - \gamma \overline{\epsilon_{s2}} \quad (V-14)$$

Les solutions de (V-11) et (V-12) s'écrivent

$$\overline{V_1} = \overline{A_1} e^{-\gamma_0 z} + \overline{B_1} e^{\gamma_0 z} + \frac{\overline{S_{v1}}}{\gamma^2 - \gamma_0^2} e^{-\gamma z} \quad (V-15)$$

$$\overline{V_2} = \overline{A_2} e^{-\gamma_0 z} + \overline{B_2} e^{\gamma_0 z} + \frac{\overline{S_{v2}}}{\gamma^2 - \gamma_0^2} e^{-\gamma z} \quad (V-16)$$

Les courants sont donnés par la formule

$$(I) = -\frac{1}{\gamma_0^2} (Y) \left[\left(\frac{dV}{dz} \right) - (\epsilon_s) e^{-\gamma z} \right]$$

Les matrices \overline{A}_1 , \overline{B}_1 , \overline{A}_2 et \overline{B}_2 sont déterminées en appliquant les conditions aux limites :

$$\overline{I}_2(0) = \overline{I}_2(L) = \overline{0}$$

$$\overline{V}_1(0) = \overline{V}_1(L) = \overline{0}$$

Nous trouvons ensuite les expressions de $V_2(0)$ et $V_2(L)$

$$\begin{aligned} \overline{V}_2(0) = & -\frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \left[\overline{\epsilon}_{s2} - \overline{Z}_{21} \overline{Z}_{11}^{-1} \overline{\epsilon}_{s1} \right] \left[\gamma - \gamma_0 \frac{\text{ch}(\gamma_0 L) - e^{-\gamma L}}{\text{sh}(\gamma_0 L)} \right] \\ & - \frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \left[\overline{Y}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{l}}_{s2} \right] \left[\gamma_0^2 - \gamma \gamma_0 \frac{\text{ch}(\gamma_0 L) - e^{-\gamma L}}{\text{sh}(\gamma_0 L)} \right] \end{aligned} \quad (\text{V-17})$$

$$\begin{aligned} \overline{V}_2(L) = & -\frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \left[\overline{\epsilon}_{s2} - \overline{Z}_{21} \overline{Z}_{11}^{-1} \overline{\epsilon}_{s1} \right] \left[\gamma e^{-\gamma_0 L} - \gamma_0 \frac{1 - e^{-\gamma L} \text{ch}(\gamma_0 L)}{\text{sh}(\gamma_0 L)} \right] \\ & - \frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \left[\overline{Y}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{l}}_{s2} \right] \left[\gamma_0^2 e^{-\gamma L} - \gamma \gamma_0 \frac{1 - e^{-\gamma L} \text{ch}(\gamma_0 L)}{\text{sh}(\gamma_0 L)} \right] \end{aligned} \quad (\text{V-18})$$

Excitation électrique

Pour retrouver le cas de l'onde de type électrique à partir de l'excitation hybride, il suffit "d'annuler" l'exposant de propagation γ et la matrice (ϵ_s) .

Les tensions données par les formules (V-17) et (V-18) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \overline{V}_2(0) &= \overline{Y}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{l}}_{s2} \\ \overline{V}_2(L) &= \overline{Y}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{l}}_{s2} \end{aligned} \quad (\text{V-19})$$

La tension induite sur le conducteur équivalent ayant les mêmes paramètres linéiques que le conducteur "j" de l'ensemble N_2 serait

$$V_{eqj} = V_{eqj}(0) = V_{eqj}(L) = \frac{\mathbf{l}_{eqj}}{j C_{jj} \omega} \quad (\text{V-20})$$

avec V_{eqj} coefficient de la matrice colonne \overline{V}_{eq} et \mathbf{l}_{eqj} coefficient de la matrice colonne $\overline{\mathbf{l}}_{eq}$

En identifiant (V-19) et (V-20) et en exprimant $\overline{\mathbf{I}}_{s2}$, nous obtenons

$$\overline{\mathbf{V}}_{eq} = \overline{\mathbf{Y}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{I}}_{s2} = -\overline{\mathbf{C}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{C}}_{21} \overline{\mathbf{h}}_1 \mathbf{E}_x - \overline{\mathbf{h}}_2 \mathbf{E}_x$$

où $\overline{\mathbf{h}}_2$ est la matrice colonne formée des hauteurs des conducteurs de l'ensemble N_2 et $\overline{\mathbf{h}}_1$ la matrice colonne formée des hauteurs des conducteurs de l'ensemble N_1

Soit pour un conducteur $j \in [1, N_2]$

$$h_{eqj} = h_j + \sum_{m=N_1+1}^{N_1+N_2} c_{jm}^{22} \sum_{k=1}^{N_1} c_{mk}^{21} h_k \quad (\text{V-21})$$

où c_{jm}^{22} sont les coefficients de la matrice $\overline{\mathbf{C}}_{22}^{-1}$ inverse de la sous-matrice capacité $\overline{\mathbf{C}}_{22}$ et c_{mk}^{21} les coefficients de la sous-matrice $\overline{\mathbf{C}}_{21}$.

Le diamètre d_{eqj} du conducteur est tel que

$$C_{jj} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\text{Log} \left(\frac{4 h_{eqj}}{d_{eqj}} \right)} \quad (\text{V-22})$$

Excitation magnétique

Pour retrouver une onde de type magnétique, nous "annulons" γ et la matrice (\mathbf{L}_s)

Les tensions données par (V-17) et (V-18) s'écrivent alors

$$\overline{\mathbf{V}}_2(0) = -\frac{1}{\gamma_0} \left[\overline{\epsilon}_{s2} - \overline{\mathbf{Z}}_{21} \overline{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \overline{\epsilon}_{s1} \right] \text{th} \left(\frac{\gamma_0 L}{2} \right) \quad (\text{V-23})$$

$$\overline{\mathbf{V}}_2(L) = +\frac{1}{\gamma_0} \left[\overline{\epsilon}_{s2} - \overline{\mathbf{Z}}_{21} \overline{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \overline{\epsilon}_{s1} \right] \text{th} \left(\frac{\gamma_0 L}{2} \right)$$

La tension induite sur le conducteur équivalent ayant les mêmes paramètres linéiques que le conducteur "j" de l'ensemble N_2 serait

$$V_{eqj} = V_{eqj}(0) = -V_{eqj}(L) = -\frac{1}{\gamma_0} \epsilon_{eqj} \text{th} \left(\frac{\gamma_0 L}{2} \right) \quad (\text{V-24})$$

avec V_{eqj} coefficient de la matrice colonne $\overline{\mathbf{V}}_{eq}$ et ϵ_{eqj} coefficient de la matrice colonne $\overline{\epsilon}_{eq}$

En identifiant (V-23) et (V-24), nous obtenons

$$\overline{\epsilon}_{eq} = \overline{\epsilon}_{s2} - \overline{Z}_{21} \overline{Z}_{11}^{-1} \overline{\epsilon}_{s1}$$

soit pour un conducteur $j \in [1, N_2]$

$$h_{eqj} = h_j - \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} L_{jm}^{21} l_{mk}^{11} h_k \quad (V-25)$$

où l_{mk}^{11} sont les coefficients de la matrice \overline{l}^{11} inverse de la sous-matrice inductance \overline{L}_{11} et L_{jm}^{21} les coefficients de la sous-matrice \overline{L}_{21} .

Le diamètre d_{eqj} du conducteur est tel que

$$C_{jj} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\text{Log} \left(\frac{4 h_{eqj}}{d_{eqj}} \right)} \quad (V-26)$$

Excitation hybride

Avec les formules (V-17) et (V-18), il est difficile de trouver les paramètres du conducteur équivalent aux extrémités duquel $V_j(0)$ et $V_j(L)$ seront induits par l'excitation hybride.

En effet, la tension induite sur le conducteur équivalent ayant les mêmes paramètres que le conducteur "j" de l'ensemble N_2 serait

$$V_{eqj}(0) = -\frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} [\epsilon_{eqj}] \left[\gamma - \gamma_0 \frac{\text{ch}(\gamma_0 L) - e^{-\gamma L}}{\text{sh}(\gamma_0 L)} \right] \\ - \frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \left[\frac{l_{eqj}}{j C_{jj} \omega} \right] \left[\gamma_0^2 - \gamma \gamma_0 \frac{\text{ch}(\gamma_0 L) - e^{-\gamma L}}{\text{sh}(\gamma_0 L)} \right] \quad (V-27)$$

$$V_{eqj}(L) = -\frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} [\epsilon_{eqj}] \left[\gamma e^{-\gamma_0 L} - \gamma_0 \frac{1 - e^{-\gamma L} \text{ch}(\gamma_0 L)}{\text{sh}(\gamma_0 L)} \right] \\ - \frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \left[\frac{l_{eqj}}{j C_{jj} \omega} \right] \left[\gamma_0^2 e^{-\gamma L} - \gamma \gamma_0 \frac{1 - e^{-\gamma L} \text{ch}(\gamma_0 L)}{\text{sh}(\gamma_0 L)} \right] \quad (V-28)$$

En identifiant (V-27) et (V-17) d'une part et (V-28) et (V-18) d'autre part, nous obtenons deux conditions

$$\overline{\epsilon}_{eq} = \overline{\epsilon}_{s2} - \overline{Z}_{21} \overline{Z}_{11}^{-1} \overline{\epsilon}_{s1} \quad (V-29)$$

$$\overline{V}_{eq} = \overline{Y}_{22}^{-1} \overline{I}_{s2} \quad (V-30)$$

où \overline{V}_{eq} est une matrice colonne d'ordre N_2 dont l'élément j est égal à $\frac{V_{eqj}}{j C_{jj}\omega}$ et $\overline{\epsilon}_{eq}$

la matrice colonne dont l'élément j est égal à ϵ_{eqj}

A priori, ces deux conditions nous amènent à des paramètres géométriques h_{eq} différents mais la relation physique (I-11) nous conduit à la conclusion contraire.

La condition (V-29) identique à celle trouvée dans le cas de l'excitation magnétique nous amène à

$$h_{eqj} = h_j - \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} L_{jm}^{21} l_{mk}^{11} h_k$$

La condition (V-30) identique à celle trouvée dans le cas de l'excitation électrique nous amène à

$$h_{eqj} = h_j + \sum_{m=N_1+1}^{N_1+N_2} \sum_{k=1}^{N_1} c_{jm}^{22} C_{mk}^{21} h_k$$

Les N conducteurs étant immergés dans un milieu homogène, les matrices (L) et (C) vérifient la relation suivante tirée de (I-11)

$$(L)(C) = (C)(L) = \frac{1}{v^2} \quad (V-31)$$

Si nous exprimons (V-31) à l'aide des sous-matrices, nous obtenons un système de quatre équations:

$$\begin{cases} \overline{C_{11}L_{11}} + \overline{C_{12}L_{21}} = \frac{1}{v^2} \overline{I_1} \\ \overline{C_{11}L_{12}} + \overline{C_{12}L_{22}} = 0 \\ \overline{C_{21}L_{11}} + \overline{C_{22}L_{21}} = 0 \\ \overline{C_{21}L_{12}} + \overline{C_{22}L_{22}} = \frac{1}{v^2} \overline{I_2} \end{cases} \quad (V-32)$$

où $\overline{I_1}$ est la matrice carrée unité d'ordre N_1 et $\overline{I_2}$ est la matrice carrée unité d'ordre N_2

La troisième équation nous donne

$$\overline{C_{21}L_{11}} = - \overline{C_{22}L_{21}}$$

soit

$$\overline{C_{22}}^{-1} \overline{C_{21}} = - \overline{L_{21}} \overline{L_{11}}^{-1}$$

ou encore avec les notations adoptées dans les relations (V-21) et (V-25)

$$\overline{C_{22}^{-1} C_{21}} = - \overline{L_{21}} \overline{L_{11}^{-1}}$$

Les conditions (V-29) et (V-30) aboutissent à une même hauteur équivalente

$$h_{eqj} = h_j - \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} L_{jm}^{21} L_{mk}^{11} h_k$$

Le diamètre d_{eqj} du conducteur est tel que

$$C_{jj} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\text{Log} \left(\frac{4 h_{eqj}}{d_{eqj}} \right)}$$

Ceci nous amène à la conclusion suivante : les paramètres équivalents pour un conducteur connecté sur grandes impédances sont identiques quelque soit le mode d'excitation.

Recherche du courant sur un conducteur court-circuité

Résolvons le système (V-6) en choisissant le courant comme variable

$$\left(\frac{d^2 I}{dz^2} \right) - \gamma_0^2 (I) = (S_j) e^{-\gamma z} \quad (V-33)$$

avec $(S_j) = - \left[(Y) (\epsilon_s) + \gamma (\tau_s) \right] \quad (V-34)$

$$(V) = - \frac{1}{\gamma_0^2} (Z) \left[\left(\frac{dI}{dz} \right) - (\tau_s) e^{-\gamma z} \right] \quad (V-35)$$

Résolvons le système dans le cas d'une excitation hybride. Comme pour la recherche des tensions sur un conducteur en l'air, nous distinguerons le sous-ensemble des N_1 conducteurs court-circuités et celui des N_2 conducteurs connectés sur grande impédance.

Le système (V-32) se réduit donc à deux systèmes indépendants que nous exprimons

$$\left(\frac{d^2 \bar{I}_1}{dz^2}\right) - \gamma_0^2 (\bar{I}_1) = \bar{S}_{i1} e^{-\gamma z} \quad (\text{V-36})$$

$$\left(\frac{d^2 \bar{I}_2}{dz^2}\right) - \gamma_0^2 (\bar{I}_2) = \bar{S}_{i2} e^{-\gamma z} \quad (\text{V-37})$$

avec
$$\bar{S}_{i1} = -\bar{Y}_{11} \bar{\epsilon}_{s1} - \bar{Y}_{12} \bar{\epsilon}_{s2} - \gamma \bar{\mathbf{L}}_{s1} \quad (\text{V-38})$$

$$\bar{S}_{i2} = -\bar{Y}_{21} \bar{\epsilon}_{s1} - \bar{Y}_{22} \bar{\epsilon}_{s2} - \gamma \bar{\mathbf{L}}_{s2} \quad (\text{V-39})$$

Les solutions de (V-35) et (V-36) s'écrivent

$$\bar{I}_1 = \bar{A}_1 e^{-\gamma_0 z} + \bar{B}_1 e^{\gamma_0 z} + \frac{\bar{S}_{i1}}{\gamma^2 - \gamma_0^2} e^{-\gamma z} \quad (\text{V-40})$$

$$\bar{I}_2 = \bar{A}_2 e^{-\gamma_0 z} + \bar{B}_2 e^{\gamma_0 z} + \frac{\bar{S}_{i2}}{\gamma^2 - \gamma_0^2} e^{-\gamma z} \quad (\text{V-41})$$

Nous déduisons les tensions de la formule (V-34).

Les conditions aux limites:

$$\bar{I}_2(0) = \bar{I}_2(L) = \bar{0}$$

$$\bar{V}_1(0) = \bar{V}_1(L) = \bar{0}$$

nous permettent de calculer les matrices \bar{A}_1 , \bar{B}_1 , \bar{A}_2 et \bar{B}_2

Nous obtenons les expressions de $\bar{I}_1(0)$ et $\bar{I}_1(L)$

$$\begin{aligned} \bar{I}_1(0) = & -\frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \left[\bar{\mathbf{L}}_{s1} - \bar{Y}_{12} \bar{Y}_{22}^{-1} \bar{\mathbf{L}}_{s2} \right] \left[\gamma - \gamma_0 \frac{\text{ch}(\gamma_0 L) - e^{-\gamma L}}{\text{sh}(\gamma_0 L)} \right] \\ & - \frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \left[\bar{Z}_{11}^{-1} \bar{\epsilon}_{s1} \right] \left[\gamma_0^2 - \gamma \gamma_0 \frac{\text{ch}(\gamma_0 L) - e^{-\gamma L}}{\text{sh}(\gamma_0 L)} \right] \end{aligned} \quad (\text{V-42})$$

$$\begin{aligned} \overline{I}_1(L) = & -\frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \left[\overline{Y}_{s1} - \overline{Y}_{12} \overline{Y}_{22}^{-1} \overline{Y}_{s2} \right] \left[\gamma e^{-\gamma_0 L} - \gamma_0 \frac{1 - e^{-\gamma L} \operatorname{ch}(\gamma_0 L)}{\operatorname{sh}(\gamma_0 L)} \right] \\ & -\frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \left[\overline{Z}_{11}^{-1} \overline{\epsilon}_{s1} \right] \left[\gamma_0^2 e^{-\gamma L} - \gamma \gamma_0 \frac{1 - e^{-\gamma L} \operatorname{ch}(\gamma_0 L)}{\operatorname{sh}(\gamma_0 L)} \right] \end{aligned} \quad (\text{V-43})$$

Excitation magnétique

Pour retrouver le cas de l'excitation magnétique à partir de l'excitation hybride, nous "annulons" l'exposant de propagation γ et la matrice (\overline{Y}_s).

Les courants donnés par les formules (V-42) et (V-43) s'expriment alors

$$\begin{aligned} \overline{I}_1(0) &= \overline{Z}_{11}^{-1} \overline{\epsilon}_{s1} \\ \overline{I}_1(L) &= \overline{Z}_{11}^{-1} \overline{\epsilon}_{s1} \end{aligned} \quad (\text{V-44})$$

Le courant sur le conducteur fictif ayant les mêmes paramètres linéiques que le conducteur "j" de l'ensemble N_1 peut s'exprimer

$$I_{eqj} = I_{eqj}(0) = I_{eqj}(L) = \frac{\epsilon_{eqj}}{j L_{eqj} \omega} = \frac{1}{j \omega} v^2 C_{eqj} \epsilon_{eqj} = \frac{1}{j \omega} v^2 C_{jj} \epsilon_{eqj} \quad (\text{V-45})$$

avec I_{eqj} coefficient de la matrice colonne \overline{I}_{eq} et ϵ_{eqj} coefficient de la matrice colonne $\overline{\epsilon}_{eq}$

En identifiant (V-44) et (V-45), nous obtenons pour un conducteur $j \in [1, N_1]$

$$h_{eqj} = \frac{1}{v^2 C_{jj}} \sum_{k=1}^{N_1} l_{jk}^{11} h_k \quad (\text{V-46})$$

où l_{jk}^{11} sont les coefficients de la matrice \overline{l}^{11} inverse de la sous-matrice inductance \overline{L}_{11} .

Le diamètre d_{eqj} du conducteur fictif est tel que

$$C_{jj} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\operatorname{Log} \left(\frac{4 h_{eqj}}{d_{eqj}} \right)} \quad (\text{V-47})$$

Excitation électrique

Cette fois, nous "annulons" γ et la matrice (ϵ_s) pour retrouver une onde de type électrique.

Les courants donnés par les formules (V-42) et (V-43) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \overline{I}_1(0) &= -\frac{1}{\gamma_0} \left[\overline{\mathbf{I}}_{s1} - \overline{\mathbf{Y}}_{12} \overline{\mathbf{Y}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{I}}_{s2} \right] \operatorname{th} \left(\frac{\gamma_0 L}{2} \right) \\ \overline{I}_1(L) &= +\frac{1}{\gamma_0} \left[\overline{\mathbf{I}}_{s1} - \overline{\mathbf{Y}}_{12} \overline{\mathbf{Y}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{I}}_{s2} \right] \operatorname{th} \left(\frac{\gamma_0 L}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{V-48})$$

Le courant induit sur le conducteur équivalent ayant les mêmes paramètres linéiques que le conducteur "j" de l'ensemble N_1 serait

$$I_{eqj} = I_{eqj}(0) = -I_{eqj}(L) = -\frac{1}{\gamma_0} \mathbf{I}_{eqj} \operatorname{th} \left(\frac{\gamma_0 L}{2} \right) \quad (\text{V-49})$$

avec I_{eqj} coefficient de la matrice colonne $\overline{\mathbf{I}}_{eq}$ et \mathbf{I}_{eqj} coefficient de la matrice colonne $\overline{\mathbf{I}}_{eq}$

En identifiant (V-48) et (V-49), nous obtenons

$$\overline{\mathbf{I}}_{eq} = \overline{\mathbf{I}}_{s1} - \overline{\mathbf{Y}}_{12} \overline{\mathbf{Y}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{I}}_{s2}$$

soit

$$\overline{\mathbf{I}}_{eq} = -\overline{\mathbf{Y}}_{11} \mathbf{h}_1 E_x + \overline{\mathbf{Y}}_{12} \overline{\mathbf{Y}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{Y}}_{21} \mathbf{h}_1 E_x$$

soit pour un conducteur $j \in [1, N_1]$

$$h_{eqj} = \frac{\sum_{k=1}^{N_1} C_{jk}^{11} h_k - \sum_{m=N_1+1}^{N_1+N_2} \sum_{l=N_1+1}^{N_1+N_2} C_{jm}^{12} c_{ml}^{22} C_{lk}^{21} h_k}{C_{jj}} \quad (\text{V-50})$$

où c_{ml}^{22} sont les coefficients de la matrice \overline{c}^{22} inverse de la sous-matrice capacité \overline{C}_{22} , C_{jk}^{11} les coefficients de la sous-matrice capacité \overline{C}_{11} , C_{jm}^{12} les coefficients de la sous-matrice capacité \overline{C}_{12} et C_{lk}^{21} les coefficients de la sous-matrice capacité \overline{C}_{21} .

Le diamètre d_{eqj} du conducteur est tel que

$$C_{jj} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\text{Log} \left(\frac{4 h_{eqj}}{d_{eqj}} \right)} \quad (\text{V-51})$$

Excitation hybride

Le courant induit sur le conducteur fictif ayant les mêmes paramètres que le conducteur "j" de l'ensemble N_1 serait

$$I_{eqj}(0) = - \frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \left[\mathbf{I}_{eqj} \left[\gamma - \gamma_0 \frac{\text{ch}(\gamma_0 L) - e^{-\gamma L}}{\text{sh}(\gamma_0 L)} \right] - \frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \left[\frac{v^2 C_{jj}}{j\omega} \epsilon_{eqj} \right] \left[\gamma_0^2 - \gamma \gamma_0 \frac{\text{ch}(\gamma_0 L) - e^{-\gamma L}}{\text{sh}(\gamma_0 L)} \right] \right] \quad (\text{V-52})$$

$$I_{eqj}(L) = - \frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \left[\mathbf{I}_{eqj} \left[\gamma e^{-\gamma_0 L} - \gamma_0 \frac{1 - e^{-\gamma L} \text{ch}(\gamma_0 L)}{\text{sh}(\gamma_0 L)} \right] - \frac{1}{\gamma^2 - \gamma_0^2} \left[\frac{v^2 C_{jj}}{j\omega} \epsilon_{eqj} \right] \left[\gamma_0^2 e^{-\gamma L} - \gamma \gamma_0 \frac{1 - e^{-\gamma L} \text{ch}(\gamma_0 L)}{\text{sh}(\gamma_0 L)} \right] \right] \quad (\text{V-53})$$

En identifiant (V-52) à (V-42) et (V-53) à (V-43), nous obtenons les deux conditions suivantes

$$\overline{\mathbf{I}}_{eq} = \overline{\mathbf{I}}_{s1} - \overline{\mathbf{Y}}_{12} \overline{\mathbf{Y}}_{22}^{-1} \overline{\mathbf{I}}_{s2} \quad (\text{V-54})$$

$$\overline{\mathbf{I}}_{eq} = \overline{\mathbf{Z}}_{11}^{-1} \overline{\epsilon}_{s1} \quad (\text{V-55})$$

où $\overline{\mathbf{I}}_{eq}$ est une matrice colonne d'ordre N_1 dont l'élément j est égal à $\frac{v^2 C_{jj}}{j\omega} \epsilon_{eqj}$ et

$\overline{\mathbf{I}}_{eq}$ la matrice colonne dont l'élément j est égal à \mathbf{I}_{eqj}

La relation (V-54) identique à celle qui détermine les paramètres géométriques du conducteur fictif dans le cas d'une excitation électrique devient

$$h_{eqj} = \frac{\sum_{k=1}^{N_1} C_{jk}^{11} h_k - \sum_{m=N_1+1}^{N_1+N_2} \sum_{l=N_1+1}^{N_1+N_2} C_{jm}^{12} C_{ml}^{22} C_{lk}^{21} h_k}{C_{jj}}$$

avec les notations de la relation (V-50).

La relation (V-55) qui correspond au cas de l'excitation magnétique donne la hauteur équivalente suivante:

$$h_{eqj} = \frac{1}{v^2 C_{jj}} \sum_{k=1}^{N_1} I_{jk}^{11} h_k$$

avec les notations de la relation (V-46).

En gardant les deux relations suivantes du système (V-32) qui exprime que le produit (C) (L) est diagonal

$$\begin{cases} \overline{C_{11}L_{11}} + \overline{C_{12}L_{21}} = \frac{1}{v^2} \overline{I_1} \\ \overline{C_{21}L_{11}} + \overline{C_{22}L_{21}} = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne

$$\overline{L_{21}} = - \overline{C_{22}}^{-1} \overline{C_{21}L_{11}}$$

que l'on remplace dans la première

$$\overline{C_{11}L_{11}} - \overline{C_{12}} \overline{C_{22}}^{-1} \overline{C_{21}L_{11}} = \frac{1}{v^2} \overline{I_1}$$

soit

$$\overline{C_{11}} - \overline{C_{12}} \overline{C_{22}}^{-1} \overline{C_{21}} = \frac{\overline{L_{11}}^{-1}}{v^2}$$

ou encore avec les notations adoptées dans les relations (V-46) et (V-50)

$$\overline{C_{11}} - \overline{C_{12}} \overline{c^{22}} \overline{C_{21}} = \frac{\overline{l^{11}}}{v^2}$$

Les deux conditions (V-54) et (V-55) aboutissent à une même hauteur équivalente donnée par

$$h_{eqj} = \frac{1}{v^2 C_{jj}} \sum_{k=1}^{N_1} I_{jk}^{11} h_k$$

Le diamètre d_{eqj} du conducteur fictif est tel que

$$C_{jj} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\text{Log} \left(\frac{4 h_{eqj}}{d_{eqj}} \right)}$$

Les paramètres géométriques du conducteur fictif équivalent à un conducteur connecté à la masse sont indépendants du mode d'excitation.

Le tableau (V-1) récapitule les formules mathématiques qui permettent de calculer les paramètres h_{eq} et d_{eq} du conducteur fictif équivalent à un conducteur quelconque de l'ensemble N_1 court-circuité ou à un conducteur quelconque de l'ensemble N_2 connecté sur grandes impédances, quelque soit le mode d'excitation

conducteur court-circuité	conducteur sur grandes impédances
$h_{eqj} = \frac{1}{v^2 C_{jj}} \sum_{k=1}^{N_1} l_{jk}^{11} h_k$ $C_{jj} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\text{Log} \left(\frac{4 h_{eqj}}{d_{eqj}} \right)}$	$h_{eqj} = h_j - \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} L_{jm}^{21} l_{mk}^{11} h_k$ $C_{ij} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\text{Log} \left(\frac{4 h_{eqj}}{d_{eqj}} \right)}$

Tableau (V-1)

V-2-b Confrontation des règles mathématiques avec des exemples numériques

Pour valider les formules mathématiques trouvées précédemment, nous considérons le cas de figure suivant:

- un ensemble de quatre conducteurs dont trois sont reliés à la masse et le dernier connecté sur grandes impédances; ils sont disposés parallèlement à un plan de masse conformément à la figure (V-7).

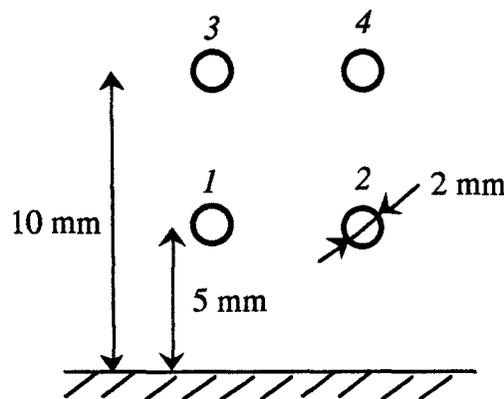


Figure (V-7)

Les conducteurs 1, 2 et 3 sont à la masse.

Ces conducteurs ont tous un diamètre de 2 mm. La distance entre deux conducteurs est $a = 5$ mm. La dimension longitudinale du faisceau est $L = 100$ m et la distance du conducteur 1 au plan de masse est $h = 5$ mm.

Pour chaque mode d'excitation, nous traçons l'évolution du courant à l'extrémité du conducteur 1 ainsi que celle du courant à l'extrémité du conducteur équivalent dont les paramètres h_{eq} et d_{eq} auront été déterminés par les formules du tableau (V-1). Les caractéristiques de la planche PL(V-2-a) montrent l'évolution du courant sur le conducteur 1 tandis que les courbes de la planche PL(V-2-b) correspondent au courant obtenu sur le conducteur équivalent.

La reproduction fidèle du courant I_{10} montre que le concept du conducteur équivalent établi est tout à fait satisfaisant pour les trois modes d'excitation: magnétique, électrique et hybride.

Intéressons-nous maintenant à l'évolution de la tension à l'extrémité du conducteur 4 connecté sur grandes impédances. Les courbes de la planche PL(V-3-a) correspondent à la tension à l'extrémité du conducteur 4 obtenu par le modèle multifilaire. Les courbes de la planche PL(V-3-b) correspondent à celles obtenues par le modèle du conducteur équivalent. Pour les trois modes d'excitation, l'accord de ces caractéristiques valide les relations du tableau (V-1).

V-3 Application du concept du conducteur équivalent pour des faisceaux comprenant des conducteurs connectés sur impédances quelconques [27]

Le concept de conducteur équivalent tel qu'il vient d'être exposé n'est valable que pour des faisceaux comprenant des conducteurs court-circuités au plan de référence ou des conducteurs en l'air. Pour les raisons évoquées dans l'introduction de ce chapitre, nous allons étendre ce concept à un ensemble de conducteurs dont certains sont connectés sur des impédances quelconques.

Considérons un ensemble de N conducteurs, un élément quelconque "N" de cet ensemble sera connecté à ses extrémités sur des charges quelconques Z_{0N} et Z_{LN} alors que l'ensemble (N-1) est court-circuité au plan de référence aux deux extrémités. Figure (V-8).

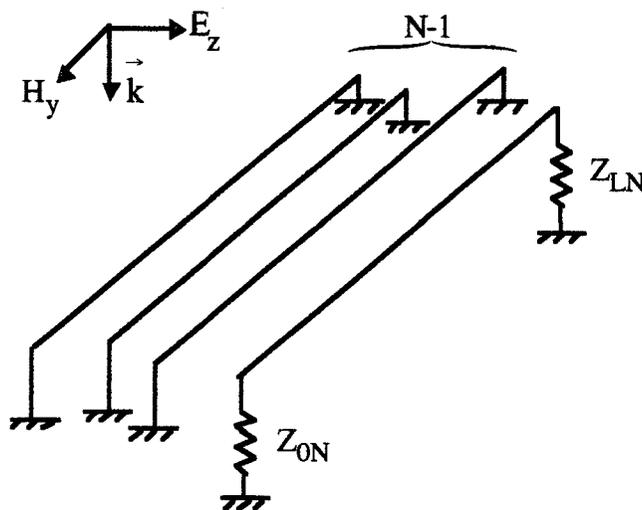
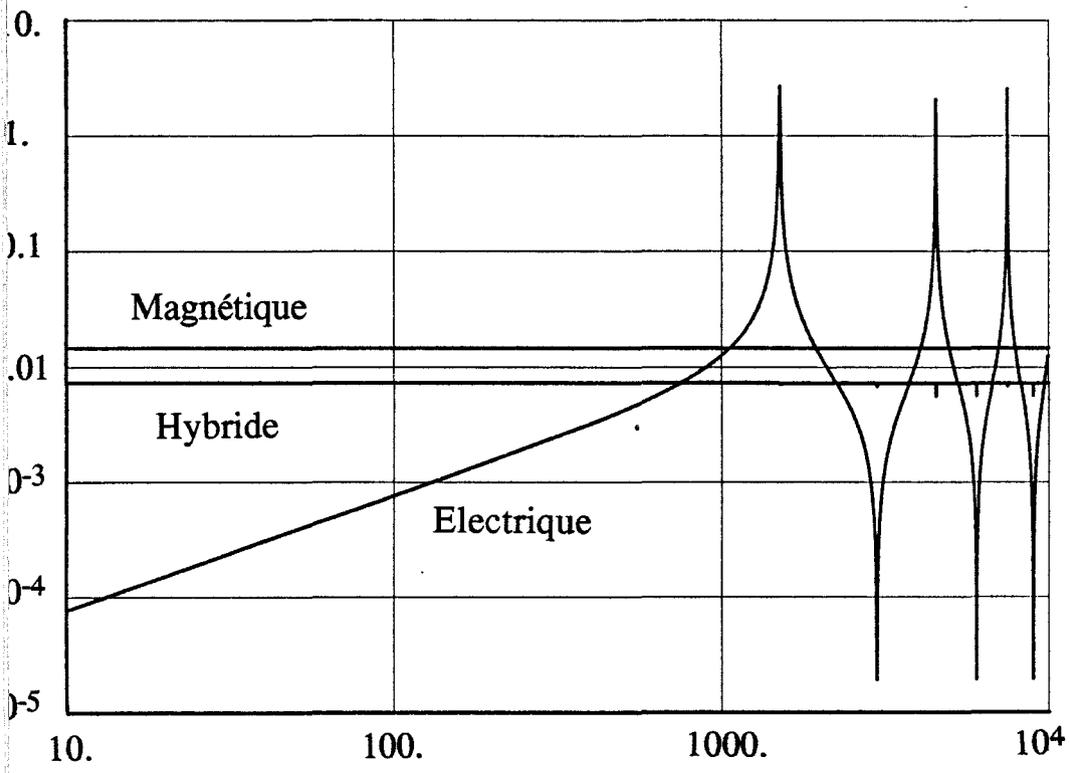


Figure (V-8)

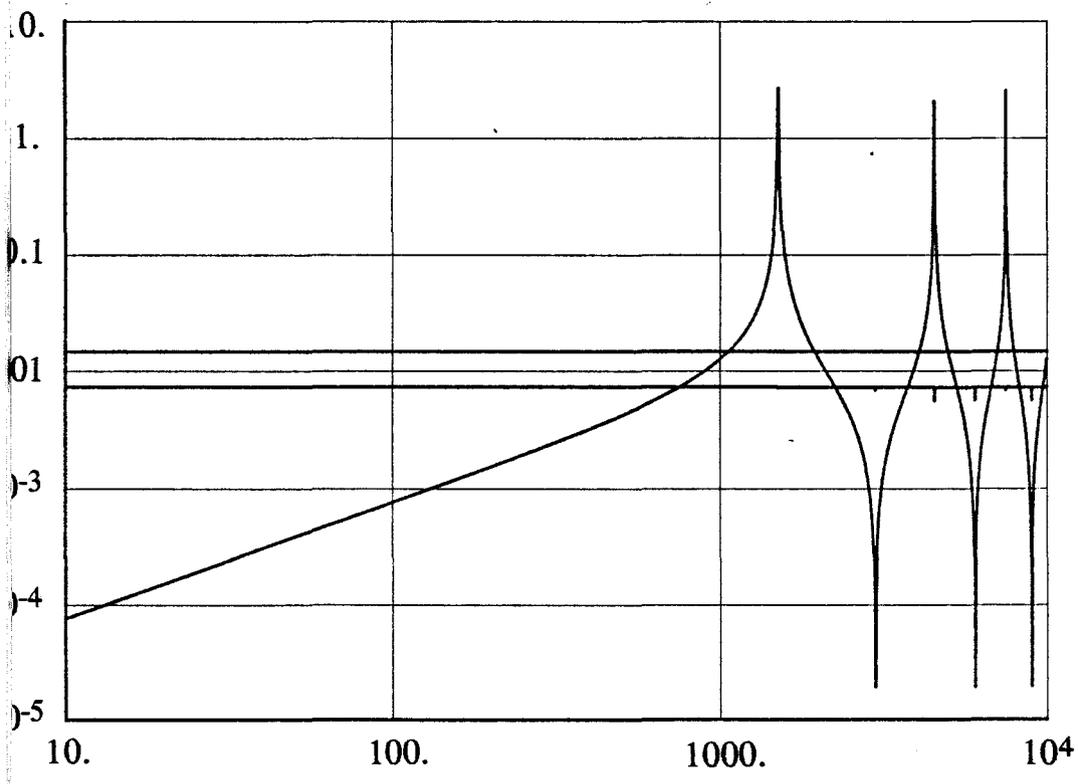
$I_1(0)$ (mA) Courant sur le conducteur 1 court-circuite



PL (V-2-a)

f (kHz)

$I_1(0)$ (mA) Courant sur le conducteur equivalent au conducteur 1



PL (V-2-b)

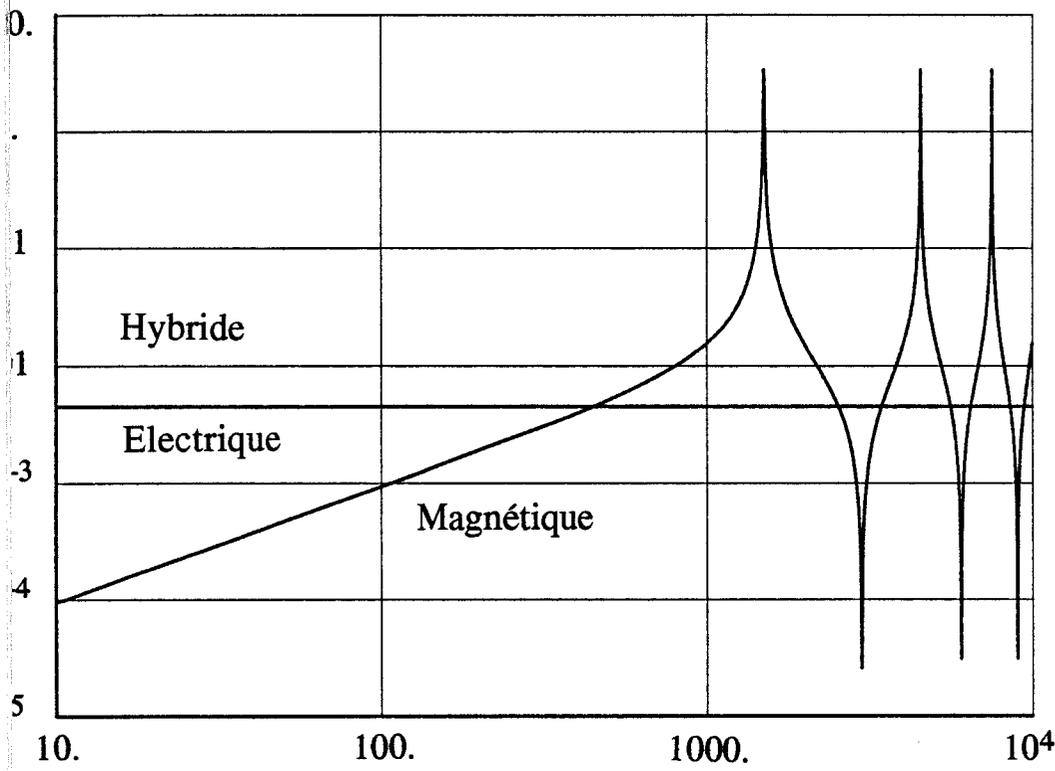
$h_{eq} = 0.76$ mm

$d_{eq} = 0.52$ mm

f (kHz)

$V_4(\theta)$ (V)

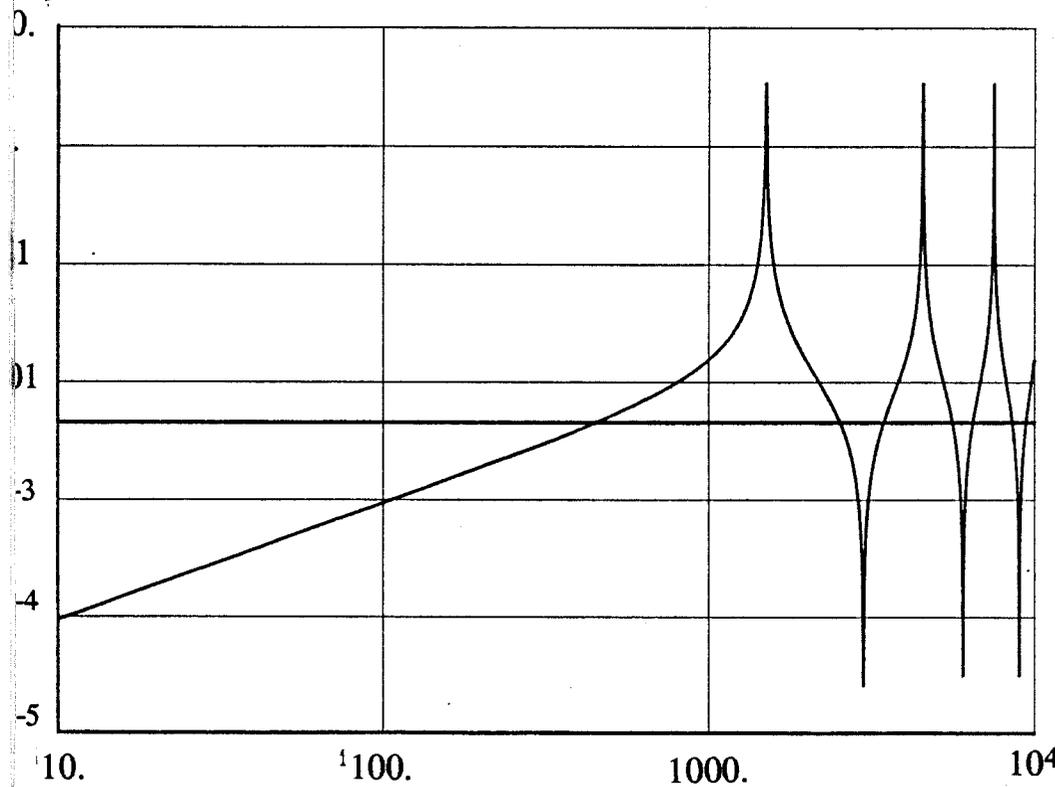
Tension sur le conducteur 4



PL (V-3-a)

f (kHz)

$V_4(\theta)$ (V) Tension sur le conducteur equivalent au conducteur 4



PL (V-3-b)

$h_{eq} = 4.42$ mm

$d_{eq} = 2.23$ mm

f (kHz)

Nous supposons toujours que l'ensemble des conducteurs baigne dans un milieu diélectrique homogène. Nous envisageons d'abord le cas où le faisceau est illuminé par une onde de type magnétique.

Dans cette application du concept du conducteur fictif le couplage du conducteur N sur l'ensemble des (N-1) autres conducteurs est négligé. Ainsi, nous pourrions attribuer au conducteur N un conducteur fictif dont les paramètres géométriques ne dépendront pas de la fréquence. Evidemment, par ce procédé, nous commettons une erreur qu'il nous faudra chiffrer.

Nous pouvons associer au système considéré les équations matricielles :

$$\begin{cases} \left(-\frac{dV}{dz} \right) = (Z) (I) - (\epsilon) \\ \left(-\frac{dI}{dz} \right) = (Y) (V) - (\mathbf{L}) \end{cases} \quad (V-56)$$

Pour une excitation de type magnétique, $(\mathbf{L}) = 0$ et $(\epsilon) = 2 j\omega B_{y0} (h)$ où (h) est la matrice colonne formée des hauteurs des N conducteurs.

Le système (V-56) se réduit à

$$\begin{cases} \left(-\frac{dV}{dz} \right) = (Z) (I) - (\epsilon) \\ \left(-\frac{dI}{dz} \right) = (Y) (V) \end{cases}$$

Comme précédemment, subdivisons la matrice (Z) en sous-matrices de la façon suivante :

$$(Z) = \begin{pmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1,N-1} & Z_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N-1,1} & \dots & Z_{N-1,N-1} & Z_{N-1,N} \\ Z_{N,1} & \dots & Z_{N,N-1} & Z_{NN} \end{pmatrix}$$

$$(Z) = \begin{pmatrix} \overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{1N} \\ \overline{Z}_{N1} & \overline{Z}_{NN} \end{pmatrix} \quad (\epsilon) = \begin{pmatrix} \overline{\epsilon}_1 \\ \overline{\epsilon}_N \end{pmatrix}$$

où l'indice 1 se rapporte à l'ensemble N_1 des conducteurs court-circuités et N au conducteur N branché sur impédance quelconque.

Les tension et courant induits sur le conducteur N sont régis par les équations suivantes, tirées du système (V-56)

$$-\frac{dI_N}{dz} = Y_{N1}V_1 + \dots + Y_{NN}V_N \quad (\text{V-57})$$

$$-\frac{dV_N}{dz} = Z_{N1}I_1 + \dots + Z_{NN}I_N - \epsilon_N \quad (\text{V-58})$$

avec $\epsilon_N = 2 j\omega B_{y0} h_N$

En basses fréquences, les conditions imposées sur les conducteurs 1, ... (N-1) sont telles que :

$$\forall j \in [1, (N-1)] \quad V_j = 0$$

d'où la simplification des équations (V-57) et (V-58)

$$-\frac{dI_N}{dz} = Y_{NN}V_N \quad (\text{V-59})$$

$$-\frac{dV_N}{dz} = Z_{N1}I_1 + \dots + Z_{NN_1}I_{N_1} + Z_{NN}I_N - \epsilon_N \quad (\text{V-60})$$

Les tension et courant induits sur le conducteur fictif vérifient les équations suivantes

$$\begin{cases} -\frac{dI_{eq}}{dz} = Y_{eq}V_{eq} \\ -\frac{dV_{eq}}{dz} = Z_{eq}I_{eq} - \epsilon_{eq} \end{cases}$$

Nous pouvons donc définir le conducteur équivalent comme suit:

$$\epsilon_{eq} = \epsilon_N - Z_{N1}I_1 - \dots - Z_{NN_1}I_{NN_1} \quad (\text{V-61})$$

En négligeant la réaction du conducteur N sur les (N-1) autres conducteurs, les courants qui circulent sur les conducteurs [1,N-1] sont donnés par la formule (V-44) soit

$$\overline{I_1(0)} = \overline{I_1(L)} = \overline{Z_{11}}^{-1} \overline{\epsilon_{s1}} \quad (\text{V-62})$$

où $\overline{I_1}$ est la sous-matrice colonne d'ordre (N-1) formée des courants de l'ensemble (N-1).

L'équation (V-61) s'écrit alors

$$\epsilon_{eq} = \epsilon_N - \overline{Z_{N1}} \overline{Z_{11}}^{-1} \overline{\epsilon_{s1}} \quad (V-63)$$

soit

$$h_{eq} = h_N - \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} L_{Nj} l_{jk}^{11} h_k \quad (V-64)$$

où l_{jk}^{11} sont les coefficients de la matrice $\overline{l^{11}}$ inverse de la sous-matrice inductance $\overline{L_{11}}$ d'ordre (N-1).

Le diamètre d_{eq} du conducteur est tel que

$$C_{NN} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\text{Log} \left(\frac{4 h_{eq}}{d_{eq}} \right)} \quad (V-65)$$

Si nous envisageons le mode électrique, nous reprenons le système (V-56). Cette fois, la matrice source de tension (ϵ) est nulle tandis que la matrice source de courant est donnée par la formule (I-26).

$$(\mathbf{l}) = -j \omega E_{x0} (C) (h)$$

soit

$$\begin{cases} \left(-\frac{dV}{dz} \right) = (Z) (I) \\ \left(-\frac{dI}{dz} \right) = (Y) (V) - (\mathbf{l}) \end{cases} \quad (V-66)$$

Les tension et courant induits sur le conducteur N sont solutions des équations suivantes tirées de (V-66)

$$\begin{cases} -\frac{dV_N}{dz} = Z_{N1} I_1 + \dots + Z_{NN} I_N \\ -\frac{dI_N}{dz} = Y_{N1} V_1 + \dots + Y_{NN} V_N - \mathbf{l}_N \end{cases} \quad (V-67)$$

avec $\mathbf{l}_N = -j \omega \sum_{j=1}^N C_{Nj} E_{x0} h_j$

En basses fréquences, les conditions imposées aux extrémités des conducteurs 1,...,(N-1) sont telles que

$$\forall j \in [1, (N-1)] \quad V_j = 0$$

d'où la simplification des équations (V-57) et (V-58)

$$\begin{cases} -\frac{dV_N}{dz} = Z_{N1}I_1 + \dots + Z_{NN_1}I_{N_1} + Z_{NN}I_N \\ -\frac{dI_N}{dz} = Y_{NN}V_N - \mathbf{l}_N \end{cases} \quad (V-68)$$

Les tension et courant sur le conducteur fictif vérifient les équations du système suivant:

$$\begin{cases} -\frac{dI_{eq}}{dz} = Y_{eq}V_{eq} - \mathbf{l}_{eq} \\ -\frac{dV_{eq}}{dz} = Z_{eq}I_{eq} \end{cases}$$

Nous pouvons définir le conducteur équivalent de la façon suivante

$$\mathbf{l}_{eq} = \mathbf{l}_N \quad \text{et} \quad Y_{eq} = Y_{NN} \quad (V-69)$$

$$Y_{eq}h_{eq} = \sum_{j=1}^N Y_{Nj}h_j$$

$$h_{eq} = \frac{\sum_{j=1}^N C_{Nj}h_j}{C_{NN}} = h_N - \frac{\sum_{j=1}^{N-1} C_{Nj}h_j}{C_{NN}} \quad (V-70)$$

Le diamètre d_{eq} du conducteur est tel que

$$C_{NN} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\text{Log} \left(\frac{4 h_{eq}}{d_{eq}} \right)}$$

De la même façon que dans le paragraphe précédent, nous allons montrer que les expressions (V-70) et (V-64) aboutissent à une même hauteur. Pour cela, nous traduisons que le produit (C) (L) est diagonal avec les sous-matrices introduites précédemment. Nous obtenons un système de six équations dont l'une d'elles est la suivante

$$\overline{C_{N1}} \overline{L_{11}} + \overline{C_{NN}} \overline{L_{N1}} = 0$$

soit
$$\overline{C_{N1}} \overline{L_{11}} = - \overline{C_{NN}} \overline{L_{N1}}$$

$$\overline{C_{NN}}^{-1} \overline{C_{N1}} = - \overline{L_{N1}} \overline{L_{11}}^{-1}$$

Multiplions cette identité par $\overline{h_1}$, la matrice colonne formée des hauteurs des conducteurs de l'ensemble (N-1)

$$\overline{C_{NN}}^{-1} \overline{C_{N1}} \overline{h_1} = - \overline{L_{N1}} \overline{L_{11}}^{-1} \overline{h_1}$$

si nous exprimons les produits matriciels, cette relation devient

$$\frac{\sum_{j=1}^{N-1} C_{Nj} h_j}{C_{NN}} = h_{eq} = h_N - \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} L_{Nj} l_{jk}^{11} h_k$$

ce qui signifie que les relations (V-64) et (V-70) sont identiques.

Nous négligeons le couplage du conducteur N sur l'ensemble des conducteurs court-circuités afin de calculer les courants qui circulent sur les (N-1) autres conducteurs; toutefois, le couplage du conducteur N sur les (N-1) autres conducteurs est pris en compte lorsque nous imposons que la capacité linéique du conducteur équivalent est égal à la capacité du conducteur N. Nous pouvons donc attribuer au conducteur fictif des paramètres géométriques indépendants de la fréquence. De plus, ces paramètres sont identiques que l'on considère une excitation magnétique ou électrique. L'excitation hybride étant la combinaison de ces deux modes, les paramètres établis restent valables si nous envisageons le cas d'une illumination de type hybride.

Pour valider les expressions (V-64) et (V-70), considérons un ensemble de quatre conducteurs de longueur $L = 100$ m et de diamètre 2 mm. Ils sont placés au-dessus d'un plan de masse comme il est indiqué sur le schéma de la figure (V-9).

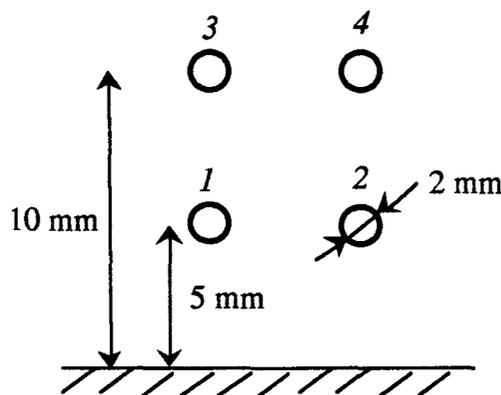
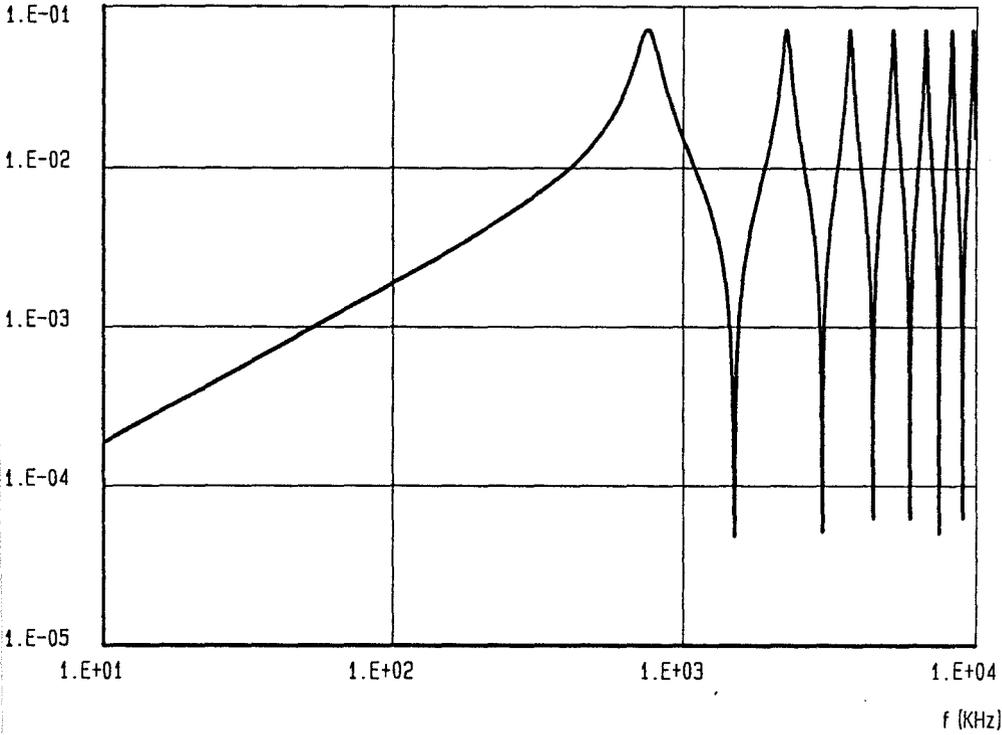


Figure (V-9)

Les conducteurs 1,2 et 3 sont court-circuités au plan de masse tandis que le conducteur 4 est court-circuité à une extrémité et terminé sur une charge de $1\text{ k}\Omega$ à l'autre extrémité. La planche PL(V-4-a) correspond à l'évolution de la tension obtenue à l'extrémité du conducteur 4 chargé sur $1\text{ k}\Omega$, soumis à une polarisation magnétique, prédite suivant le formalisme rigoureux tandis que la planche PL(V-4-b) correspond à l'évolution de la tension obtenue à l'extrémité du conducteur fictif. Les planches PL(V-5-a) et PL(V-5-b), respectivement PL(V-6-a) et PL(V-6-b), correspondent aux mêmes paramètres lorsque les conducteurs sont soumis à une polarisation électrique, respectivement hybride. La correspondance très satisfaisante entre les courbes établies par le modèle global des lignes de transmission et celles établies en utilisant le concept du conducteur équivalent justifie la validation de ce concept sur le plan de son potentiel d'application.

Tension sur le cond. 4 - Couplage magnetique

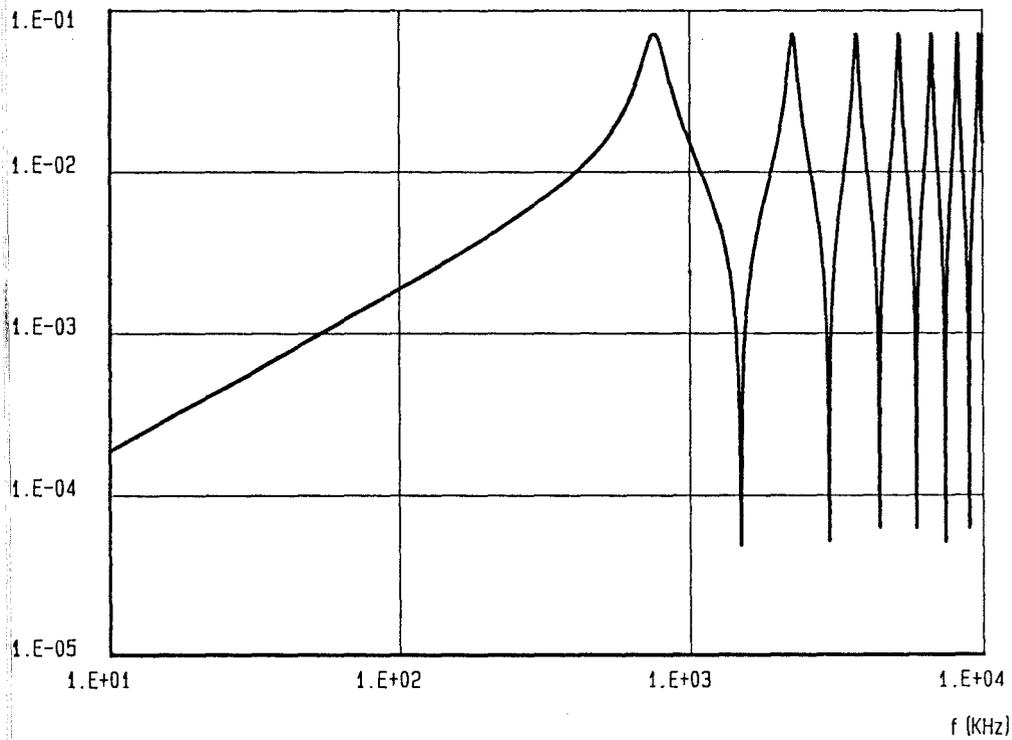
V40 (V)



PL (V-4-a)

Tension sur le cond. equivalent au cond. 4

v 0 (V)



$h_{eq} = 4.42 \text{ mm}$

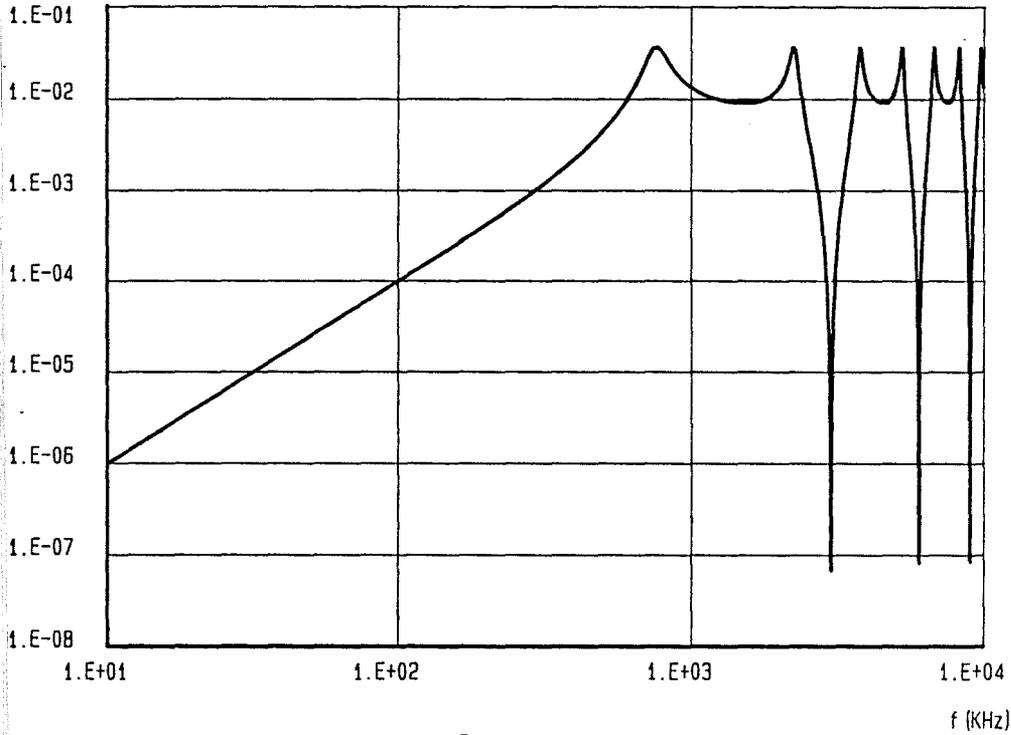
$d_{eq} = 2.23 \text{ mm}$

PL (V-4-b)



Tension sur le cond. 4 - Couplage electrique

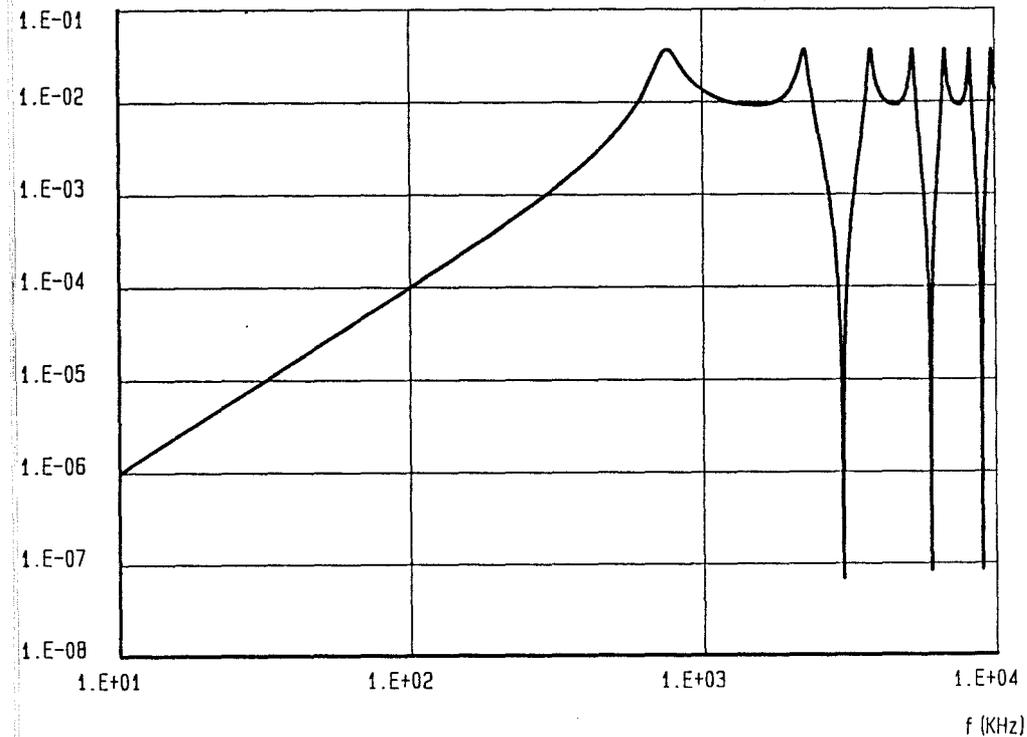
V40 (V)



PL (V-5-a)

Tension sur le cond. equivalent au cond. 4

V0 (V)

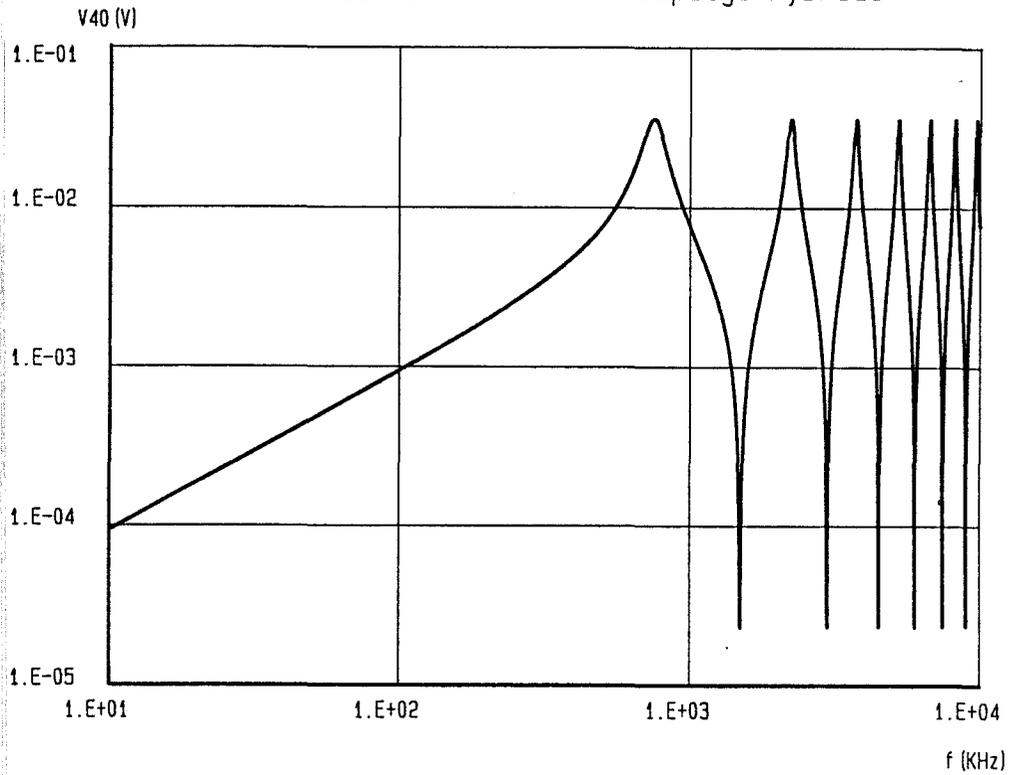


$h_{eq} = 4.42 \text{ mm}$

$d_{eq} = 2.23 \text{ mm}$

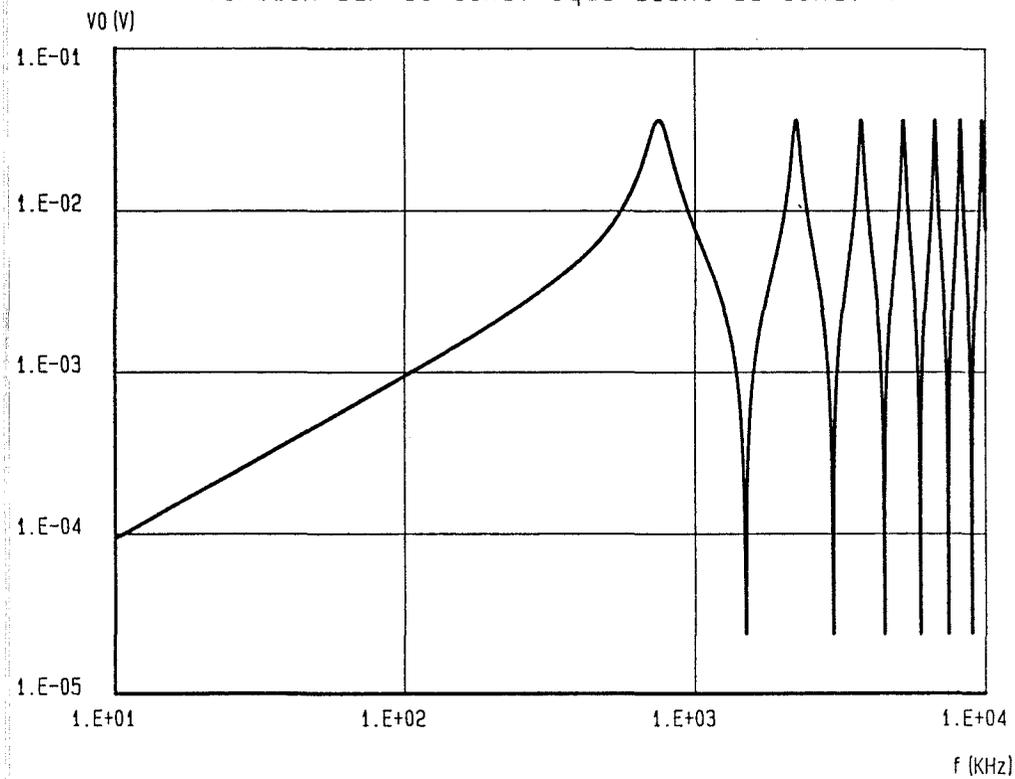
PL (V-5-b)

Tension sur le cond. 4 - Couplage hybride



PL (V-6-a)

Tension sur le cond. equivalent au cond. 4



$h_{eq} = 4.42$ mm

$d_{eq} = 2.23$ mm

PL (V-6-b)

CONCLUSION

CONCLUSION

La réponse d'un système complexe, tel qu'un aéronef, à une agression électromagnétique peut être résolue par la topologie électromagnétique. Cette méthode nécessite de gros moyens de calcul quand on sait que l'ordre des matrices est directement proportionnel au nombre de conducteurs contenus dans un toron et qu'il n'est pas rare de trouver à bord des constructions aéronautiques des torons d'une cinquantaine voire même d'une centaine de conducteurs. Aussi, nous avons recherché la réponse d'un faisceau de câbles à une perturbation électromagnétique en faisant usage de la théorie des lignes couplées afin d'introduire quelques simplifications.

L'application de cette théorie nécessite la connaissance des paramètres linéiques inductance et capacité. Ces données peuvent être mesurées par les différentes méthodes que nous avons exposées. Les mesures devenant très vite laborieuses lorsque le nombre de conducteurs augmente, nous avons proposé la simplification suivante: nous déterminons la matrice inductance à partir de formules analytiques, nous admettons que tous les modes induits sur le faisceau se propagent à la même vitesse qui s'apparente à la vitesse de mode commun, et nous déduisons la matrice capacité par inversion de la matrice inductance. Il s'est avéré que l'erreur introduite par cette simplification influence assez peu la prédiction théorique des parasites induits en basses fréquences mais qu'elle affecte surtout le nombre et la position des résonances en plus hautes fréquences. Ces résonances correspondent dans le domaine temporel aux réflexions multiples sur les charges d'extrémités. Nous avons donc vérifié que la simplification n'avait pas beaucoup d'effet sur l'amplitude crête des parasites transitoires induits et que les erreurs qu'elle engendre sont du même ordre de grandeur que celles commises lors de la détermination par mesure des paramètres linéiques.

La seconde simplification, que nous avons proposée, consiste à réduire l'ordre des matrices topologiques en utilisant le concept du conducteur équivalent, largement développé dans le dernier chapitre. Ce concept s'est montré très satisfaisant: en effet, pour un faisceau comprenant des conducteurs court-circuités ou en l'air, nous pouvons définir un conducteur fictif rigoureusement équivalent à un conducteur quelconque du faisceau, les paramètres géométriques de ce conducteur fictif ne dépendant que des paramètres intrinsèques du faisceau. L'application de ce concept pour des torons comprenant des conducteurs connectés sur des impédances quelconques est moins immédiate et introduit des erreurs sur la prédiction des parasites induits que nous avons chiffrés.

Pour prolonger ce travail, il faudrait introduire le cas des câbles blindés. Le principe adopté consiste à séparer le problème en deux: le problème extérieur qui concerne les parasites écoulés sur le blindage et le problème intérieur où on évalue les parasites résiduels en faisant intervenir l'impédance de transfert. Cette procédure

suppose que les blindages des câbles sont correctement utilisés, c'est-à-dire que la continuité électrique est sans défaut. Si nous considérons le problème sous son aspect topologique, il sera intéressant d'envisager de nombreux scénarios et notamment ceux où la continuité électrique des blindages est défectueuse. Cette contrainte nous amènera à banaliser les blindages et à englober dans les faisceaux l'ensemble des conducteurs y compris les éléments internes aux blindages. Le problème sera alors traité en une seule étape et il faudra préciser avec beaucoup de rigueur les impédances ou admittances qui entreront dans le formalisme des lignes couplées.

Les études, que nous avons menées jusqu'à présent, traitaient des cas, somme toute, canoniques de faisceaux de conducteurs parallèles avec des conditions de charge linéaires. Vue la complexité des équipements réels, il paraît impossible de déterminer les amplitudes exactes des parasites induits. Aussi, il faut s'orienter vers la recherche d'un majorant de ces amplitudes. Si nous considérons un faisceau dont la position transversale des conducteurs est complètement aléatoire, il s'agit de trouver un majorant de l'amplitude ou de l'énergie des parasites induits qui soit valable quelle que soit la position occupée par le conducteur. Toutefois, ce majorant ne doit pas être exagéré. Il serait également intéressant d'étudier la possibilité de définir une norme, inspirée des définitions de normes de la topologie. La théorie des normes [2], telle que l'a développée Baum, reste jusqu'à présent très mathématique mais elle semble être la solution de notre problème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.P. PARMANTIER, G. LABAUNE, J.C. ALLIOT et P. DEGAUQUE
"Couplages électromagnétiques sur des systèmes complexes: approche topologique."
La Recherche Aérospatiale, 1991.
- [2] C. E. BAUM
"The theory of electromagnetic interference control."
Interaction Note 478. Dec. 1989
- [3] K.S.H. LEE
"EMP Interaction : principles, techniques and reference data."
Hemisphere Publishing Corporation 1986.
- [4] S. FRANKEL
"Multiconductor transmission line analysis."
Ed. Artech House 1977.
- [5] A.A SMITH, Jr
"Coupling of external electromagnetic fields to transmission lines."
John Wiley and Sons - New-York - 1977.
- [6] F. E. GARDIOL
"Lossy transmission lines."
Ed. Artech House 1987.
- [7] C. R. PAUL
"Frequency response of multiconductor transmission lines illuminated by an electromagnetic field."
IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility , vol EMC-18, pp 183-190, Nov. 1976.
- [8] K. D. MARX
"Propagation modes, equivalent circuits, and characteristic terminations for multiconductor transmission lines with inhomogeneous dielectrics."
IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol MTT-21, pp 450-457, July 1973.
- [9] F. G. CANAVERO, V. DANIELE and R. D. GRAGLIA
"Electromagnetic pulse interaction with multiconductor transmission lines."
Electromagnetics 8, pp 293-310, 1988.



- [10] A. K. AGRAWAL, K. LEE, L. D. SCOTT and H. M. FOWLES
"Experimental characterization of multiconductor transmission lines in the frequency domain."
IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility, vol EMC-21, pp 20-27, February 1979.
- [11] V. L. CAREY, T. R. SCOTT and W. T. WEEKS
"Characterization of multiple parallel transmission lines using time domain reflectometry."
IEEE Trans. Instrumentation and Measurement, vol IM-18, pp 166-171, Sept. 1969.
- [12] A. K. AGRAWAL, H. M. FOWLES and L. D. SCOTT
"Experimental characterization of multiconductor transmission lines in inhomogeneous media using time-domain techniques."
IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility, vol EMC-21, pp 28-32, February 1979.
- [13] A. K. AGRAWAL and H. J. PRICE
"Experimental characterization of partially degenerate three-conductor transmission lines in the time domain."
IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility, vol EMC-23, pp 133-138, August 1981.
- [14] L. KONE, B. DEMOULIN et P. DEGAUQUE
"Modélisation des tensions de diaphonie induites sur des câbles multifilaires."
Rapport de contrat ACOME, LILLE 1991.
- [15] J.P. PARMANTIER
"Approche topologique pour l'étude des couplages électromagnétiques."
Thèse de l'Université des Sciences de LILLE. Déc. 1991.
- [16] C. R. PAUL
"Computation of the transmission line inductance and capacitance matrices from the generalized capacitance matrix."
IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility, vol EMC-18, pp 175-182, Nov. 1976.
- [17] C. POUDROUX, M. RIFI, B. DEMOULIN et P. DEGAUQUE
"Evaluation de l'amplitude des parasites induits sur les câbles assemblés en toron"
6ème Colloque sur la CEM. LYON Juin 1992.
- [18] A. R. DJORDJEVIC, T. P. SARKAR and R. F. HARRINGTON
"Time-domain response of multiconductor transmission lines ."
Proceedings of IEEE, vol 75, pp 743-764, June 1987.

- [19] K. KERROUM, J. FONTAINE, N. NAJMOUDDINE et A. ZEDDAM
"Perturbations impulsionnelles créées par des câbles d'énergie sur des câbles de transmission de données."
Annales Télécommunication , 46 n° 11-12, pp 577-590, 1991.
- [20] A. ZEDDAM
"Couplage d'une onde électromagnétique rayonnée par une décharge orageuse à un câble de télécommunication."
Thèse . LILLE. 1988
- [21] J. HAMELIN et P. DEGAUQUE
"Compatibilité électromagnétique."
Dunod - 1990.
- [22] C. POUDROUX, B. DEMOULIN et P. DEGAUQUE
"Couplages électromagnétiques sur les structures d'aéronef"
Rapport d'avancement de contrat sur : évaluation des courants et tensions parasites induits sur des faisceaux de câbles arborescents. "Concept de conducteur équivalent"
Contrat DRET - Avril 1990
- [23] C. POUDROUX, B. DEMOULIN et P. DEGAUQUE
"Couplage électromagnétique sur torons "
Journée thématique sur la foudre.
DGA 17-18 Décembre 1990
- [24] C. POUDROUX, L. KONE, B. DEMOULIN et P. DEGAUQUE
"Couplages électromagnétiques sur les structures d'aéronef"
Rapport de synthèse de contrat sur : "évaluation des courants et tensions parasites induits sur des faisceaux de câbles arborescents "
Contrat DRET - Octobre 1990
- [25] F. R. GANTMACHER
"Théorie des matrices ." - Tome 1.
DUNOD - 1966
- [26] F. M. TESCHE and T.K. LIU
"Recent developments in electromagnetic field coupling to transmission lines."
EMC 81 - ZURICH - pp249-254
- [27] C. POUDROUX, B. DEMOULIN et P. DEGAUQUE
"Couplages électromagnétiques sur les structures d'aéronef"
Rapport d'avancement
Contrat DRET - Mars 1992



- [28] N. ARI and W. BLUMER
"Analytic formulation of the response of a two-wire transmission line excited by a plane wave."
IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility, vol EMC-30, pp 437-448, November 1988.
- [29] Y. KAMI and R. SATO
"Circuit-concept approach to externally excited transmission lines."
IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility, vol EMC-27, pp 177-183, November 1985.
- [30] A. K. AGRAWAL, H. J. PRICE and S. H. GURBAXANI
"Transient response of multiconductor transmission lines excited by a nonuniform electromagnetic field."
IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility, vol EMC-22, pp 119-129, May 1980.

ANNEXE (I-1)

Cette annexe a pour but de montrer que les matrices de propagation obtenues après diagonalisation sont les mêmes que l'on utilise le formalisme courant ou le formalisme tension.

Reprenons les équations de la théorie des lignes sans tenir compte des termes sources, par souci de simplification

$$\begin{cases} \left(-\frac{dV}{dz} \right) = (Z) (I) \\ \left(-\frac{dI}{dz} \right) = (Y) (V) \end{cases}$$

Formalisme en courant:

$$\left(\frac{d^2 I}{dz^2} \right) - (A_{0i}) (I) = 0 \quad \text{où} \quad (A_{0i}) = (Y) (Z)$$

$$(V) = (Y)^{-1} \left(-\frac{dI}{dz} \right)$$

Formalisme en tension:

$$\left(\frac{d^2 V}{dz^2} \right) - (A_{0v}) (V) = 0 \quad \text{où} \quad (A_{0v}) = (Z) (Y)$$

$$(I) = (Z)^{-1} \left(-\frac{dV}{dz} \right)$$

Les valeurs propres de la matrice (A_{0i}) sont solutions de l'équation

$$\det ((A_{0i}) - \lambda_i(1)) = 0$$

où (1) est la matrice unité d'ordre N .

Les valeurs propres de la matrice (A_{0v}) sont solutions de l'équation

$$\det ((A_{0v}) - \lambda_v(1)) = 0$$

$$\begin{aligned} \det ((A_{0i}) - \lambda_i(1)) = 0 & \Rightarrow \det ((Y)(Z) - \lambda_i(1)) = 0 \\ \det ((A_{0v}) - \lambda_v(1)) = 0 & \Rightarrow \det ((Z)(Y) - \lambda_v(1)) = 0 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \det ((Z) - \lambda_i(Y)^{-1}) &= 0 \\ \det ((Z) - \lambda_v(Y)^{-1}) &= 0 \end{aligned}$$

qui sont deux équations identiques d'où $\lambda_i = \lambda_v$

La matrice diagonale Γ_i^2 formée des valeurs propres λ_i et la matrice diagonale Γ_v^2 formée des valeurs propres λ_v sont identiques

$$\Gamma_i^2 = \Gamma_v^2 = \Gamma^2$$

ANNEXE (I-2)

La matrice diagonale (Γ^2) peut être obtenue soit par la transformation linéaire produite par les matrices de passage (T_j) soit par celle produite par les matrices de passage (T_v) .

$$(\Gamma^2) = (T_j)^{-1} (Y) (Z) (T_j) \quad (\text{A-1})$$

$$(\Gamma^2) = (T_v)^{-1} (Z) (Y) (T_v) \quad (\text{A-2})$$

De l'équation (A-2), nous pouvons déduire (Y)

$$(Y) = (Z)^{-1} (T_v) (\Gamma^2) (T_v)^{-1}$$

que nous remplaçons dans (A-1), ce qui nous donne

$$(\Gamma^2) = (T_j)^{-1} (Z)^{-1} (T_v) (\Gamma^2) (T_v)^{-1} (Z) (T_j) \quad (\text{A-3})$$

En définissant $(z) = (T_v)^{-1} (Z) (T_j)$, (A-3) s'écrit

$$(\Gamma^2) = (z)^{-1} (\Gamma^2) (z)$$

soit

$$(z) (\Gamma^2) = (\Gamma^2) (z)$$

(z) est une matrice qui commute avec une matrice diagonale dont les éléments, dans le cas général (modes non dégénérés), sont tous différents, (z) est donc une matrice diagonale.

Nous pouvons de la même façon démontrer que (y) définie par $(y) = (T_j)^{-1} (Y) (T_v)$ est diagonale.

ANNEXES

ANNEXE (IV-1)

DETERMINATION DES MATRICES (Z_C) ET (ρ_L) POUR UNE BIFILAIRE SYMETRIQUE A PROPAGATION NON DEGENEREE.

Les matrices impédance et admittance d'une telle ligne s'écrivent, si nous négligeons l'effet des résistances linéiques:

$$(Z) = j (L) \omega$$

$$(Y) = j (C) \omega$$

avec

$$(L) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

$$(C) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

Or, $L_{21} = L_{12}$ et $C_{21} = C_{12}$

De plus, si nous considérons que la ligne est symétrique, afin de faciliter les calculs mathématiques, $L_{11} = L_{22}$ et $C_{11} = C_{22}$.

Les matrices (L) et (C) s'expriment alors

$$(L) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{11} \end{pmatrix}$$

$$(C) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{11} \end{pmatrix}$$

La diagonalisation du produit (L)(C) nous amène aux deux valeurs propres suivantes

$$\lambda_1 = (L_{11} - L_{12}) (C_{11} - C_{12})$$

$$\lambda_2 = (L_{11} + L_{12}) (C_{11} + C_{12})$$

et à la matrice de passage (T_v) exprimée ci-dessous

$$(T_v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La diagonalisation du produit (C)(L) nous amène aux mêmes valeurs propres λ_1 et λ_2 et à la matrice de passage (T_i) qui n'est autre que la transposée de $(T_v)^{-1}$.

$$(T_i) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les courants et tensions dans la base propre sont alors donnés par les transformations

$$(i) = (T_i)^{-1} (I)$$

$$(v) = (T_v)^{-1} (V)$$

soit

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$i_1 = \frac{I_1 - I_2}{2}$$

$$v_1 = \frac{V_1 - V_2}{2}$$

$$i_2 = \frac{I_1 + I_2}{2}$$

$$v_2 = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

Nous retrouvons les courants et tensions de mode commun et de mode différentiel, définis au deuxième chapitre par les relations (II-21), (II-22), (II-23) et (II-24).

La matrice (z_c) est déduite de la relation (IV-30)

$$(z_c) = (T_v)^{-1} (Y)^{-1} (T_i) (\Gamma) \quad (\text{A-1})$$

(Γ) est la matrice diagonale telle que

$$(\Gamma^2) = (T_i)^{-1} (Y) (Z) (T_i)$$

$$(\Gamma^2) = (T_v)^{-1} (Z) (Y) (T_v)$$

La relation (A-1) devient

$$(z_c) = (T_v)^{-1} (C)^{-1} (T_i) \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$(z_j) = \begin{pmatrix} z_{c1} & 0 \\ 0 & z_{c2} \end{pmatrix}$$

avec

$$z_{c1} = \sqrt{\frac{L_{11} - L_{12}}{C_{11} + C_{12}}}$$

$$z_{c2} = \sqrt{\frac{L_{11} + L_{12}}{C_{11} - C_{12}}}$$

Pour le réseau d'impédance de la figure (IV-2), la matrice (Z_L) s'écrit

$$(Z_L) = \begin{pmatrix} Z_{L1} & 0 \\ 0 & Z_{L2} \end{pmatrix}$$

Nous déduisons (z_L) , la matrice impédance de charge dans la base propre par la relation

$$(z_L) = (T_j)^{-1} (Z_L) (T_j)$$

soit

$$(z_L) = \begin{pmatrix} S z_L & \Delta z_L \\ \Delta z_L & S z_L \end{pmatrix}$$

$$\Delta z_L = \frac{Z_{L1} - Z_{L2}}{2} \quad S z_L = \frac{Z_{L1} + Z_{L2}}{2}$$

La matrice coefficient de réflexion (ρ_L) est définie par

$$(\rho_L) = [(z_L) + (z_j)]^{-1} [(z_L) - (z_j)]$$

soit

$$(\rho_L) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & t_{12} \\ t_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

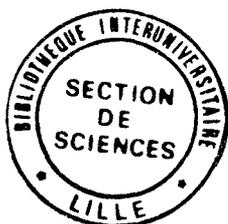
avec

$$\rho_{11} = \frac{(S z_L + z_{c2})(S z_L - z_{c1}) - (\Delta z_L)^2}{(S z_L + z_{c1})(S z_L + z_{c2}) - (\Delta z_L)^2}$$

$$\rho_{22} = \frac{(S z_L + z_{c1})(S z_L - z_{c2}) - (\Delta z_L)^2}{(S z_L + z_{c1})(S z_L + z_{c2}) - (\Delta z_L)^2}$$

$$t_{12} = \frac{2 z_{c2} \Delta z_L}{(S z_L + z_{c1})(S z_L + z_{c2}) - (\Delta z_L)^2}$$

$$t_{21} = t_{12} \frac{z_{c1}}{z_{c2}}$$



RESUME

La prédiction de l'amplitude des parasites induits par une agression électromagnétique sur des faisceaux de câbles multifilaires se résoud par la théorie des lignes couplées et nécessite la connaissance des paramètres primaires de ces lignes. Ces coefficients inductance et capacité peuvent être obtenus au moyen de mesures fastidieuses ou parfois par des modèles numériques, qui s'avèrent très vite inexploitable lorsque le nombre de conducteurs augmente. Nous avons d'abord recherché différents protocoles de mesures des paramètres linéiques d'un câble multifilaire. Puis, afin de réduire les procédés expérimentaux d'évaluation de ces paramètres à la seule détermination des inductances, nous avons proposé une simplification du formalisme modal de la théorie des lignes qui consiste à supposer que tous les modes se propagent à la même vitesse qui s'apparente à celle du mode commun, c'est à dire à supposer que le milieu est homogène. Dans le domaine fréquentiel, les erreurs introduites par cette simplification affectent le nombre et la position des fréquences de résonances des parasites. Pour compléter notre étude, nous avons confronté le modèle simplifié et le modèle rigoureux dans le domaine temporel en utilisant la théorie modale des réflexions multiples. Une autre simplification a consisté à réduire un conducteur quelconque d'un faisceau à un conducteur équivalent dont les paramètres géométriques sont modifiés afin de faire abstraction des conducteurs voisins.

Mots clés : multifilaire perturbation électromagnétique
paramètres primaires induction
lignes couplées réflexions multiples

