

**USTL**

FLANDRES ARTOIS

**LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE ET  
D'OPTIMISATION**



50376  
1992  
232

61609

50376  
1992  
232

n° d'ordre : 913

**THESE**

présentée à  
l'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR en MATHÉMATIQUES**

par

**Hervé LE FERRAND**

**CONVERGENCE ET APPLICATIONS  
D'APPROXIMATIONS RATIONNELLES VECTORIELLES**



soutenue le 29 mai 1992 devant la commission d'examen

Président

**C. BREZINSKI**

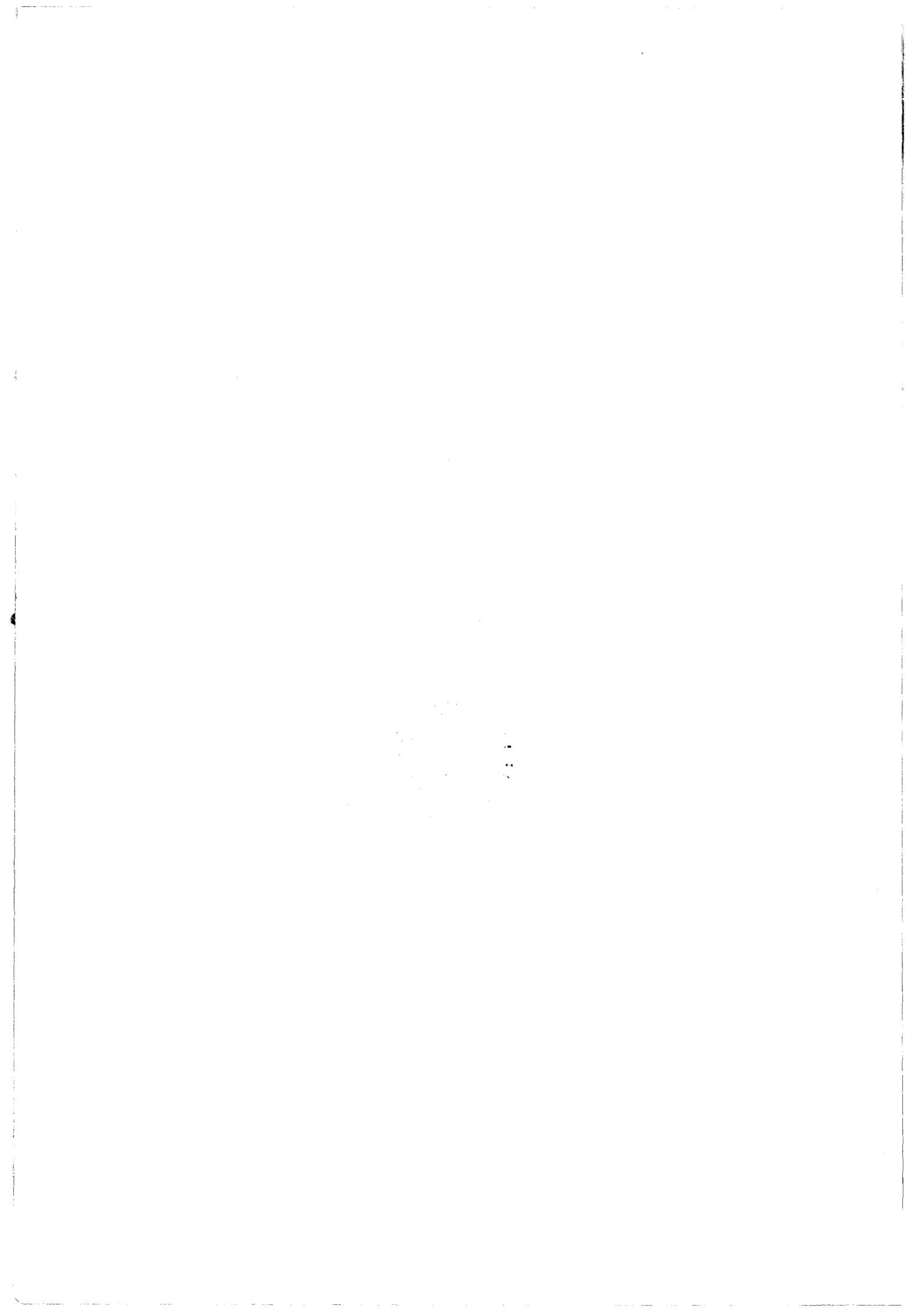
Membres :

**J. VAN ISEGHEM**

**J. DELLA DORA**

**J.F. MAITRE**

Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation, UFR IEEA - M3, USTL ,  
59655 Villeneuve d'Ascq - Cedex - FRANCE.



DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT  
ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS, A. DUBRULLE

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

M. P. LOUIS

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du solide
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. MACKE Bruno	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques

M. LATTEUX Michel	Informatique
M. LAVEINE Jean Pierre	Paléontologie
Mme LECLERCQ Ginette	Catalyse
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique atomique et moléculaire
M. LEROY Jean Marie	Spectrochimie
M. LHENAFF René	Géographie
M. LHOMME Jean	Chimie organique biologique
M. LOUAGE François	Electronique
M. LOUCHEUX Claude	Chimie-Physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie physique
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M. MAROUF Nadir	Sociologie
M. MICHEAU Pierre	Mécanique des fluides
M. PAQUET Jacques	Géologie générale
M. PASZKOWSKI Stéfan	Mathématiques
M. PETIT Francis	Chimie organique
M. PORCHET Maurice	Biologie animale
M. POUZET Pierre	Modélisation - calcul scientifique
M. POVY Lucien	Automatique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. RAMAN Jean Pierre	Sciences de gestion
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHAMPS Joël	Spectroscopie moléculaire
Mme SCHWARZBACH Yvette	Géométrie
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SLIWA Henri	Chimie organique
M. SOMME Jean	Géographie
Melle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. THIEBAULT François	Sciences de la Terre
M. THOMAS Jean Claude	Géométrie - Topologie
M. THUMERELLE Pierre	Démographie - Géographie humaine
M. TILLIEU Jacques	Physique théorique
M. TOULOTTE Jean Marc	Automatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du travail
M. TURRELL Georges	Spectrochimie infrarouge et raman
M. VANEECLOO Nicolas	Sciences Economiques
M. VAST Pierre	Chimie inorganique
M. VERBERT André	Biochimie
M. VERNET Philippe	Génétique
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. WALLART François	Spectrochimie infrarouge et raman
M. WEINSTEIN Olivier	Analyse économique de la recherche et développement
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

M. LE MAROIS Henri	Vie de la firme
M. LEMOINE Yves	Biologie et physiologie végétales
M. LESCURE François	Algèbre
M. LESENNE Jacques	Systèmes électroniques
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
Mme LOPES Maria	Mathématiques
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU François	Sciences économiques
M. MAHIEU Jean Marie	Optique - Physique atomique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MANSY Jean Louis	Géologie
M. MAURISSON Patrick	Sciences Economiques
M. MERIAUX Michel	EUDIL
M. MERLIN Jean Claude	Chimie
M. MESMACQUE Gérard	Génie mécanique
M. MESSELYN Jean	Physique atomique et moléculaire
M. MOCHE Raymond	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. MONTEL Marc	Physique du solide
M. MORCELLET Michel	Chimie organique
M. MORE Marcel	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. MORTREUX André	Chimie organique
Mme MOUNIER Yvonne	Physiologie des structures contractiles
M. NIAY Pierre	Physique atomique,moléculaire et du rayonnement
M. NICOLE Jacques	Spectrochimie
M. NOTELET Francis	Systèmes électroniques
M. PALAVIT Gérard	Génie chimique
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie organique
M. PERROT Pierre	Chimie appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie animale
M. PETIT Daniel	Biologie des populations et écosystèmes
M. PLIHON Dominique	Sciences Economiques
M. PONSOLLE Louis	Chimie physique
M. POSTAIRE Jack	Informatique industrielle
M. RAMBOUR Serge	Biologie
M. RENARD Jean Pierre	Géographie humaine
M. RENARD Philippe	Sciences de gestion
M. RICHARD Alain	Biologie animale
M. RIETSCH François	Physique des polymères
M. ROBINET Jean Claude	EUDIL
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROLLAND Paul	Composants électroniques et optiques
M. ROLLET Philippe	Sciences Economiques
Mme ROUSSEL Isabelle	Géographie physique
M. ROUSSIGNOL Michel	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. ROY Jean Claude	Psychophysiologie
M. SALERNO François	Sciences de gestion
M. SANCHOLLE Michel	Biologie et physiologie végétales
Mme SANDIG Anna Margarete	
M. SAWERYSYN Jean Pierre	Chimie physique
M. STAROSWIECKI Marcel	Informatique
M. STEEN Jean Pierre	Informatique
Mme STELLMACHER Irène	Astronomie - Météorologie
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLIEZ Roger	Génie alimentaire
M. TANRE Daniel	Géométrie - Topologie
M. THERY Pierre	Systèmes électroniques
Mme TJOTTA Jacqueline	Mathématiques
M. TOURSEL Bernard	Informatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du travail

M. TUREL Georges  
M. VANDIJK Hendrik  
Mme VAN ISEGHEM Jeanine  
M. VANDORPE Bernard  
M. VASSEUR Christian  
M. VASSEUR Jacques  
Mme VIANO Marie Claude  
M. WACRENIER Jean Marie  
M. WARTEL Michel  
M. WATERLOT Michel  
M. WEICHERT Dieter  
M. WERNER Georges  
M. WIGNACOURT Jean Pierre  
M. WOZNIAK Michel  
Mme ZINN JUSTIN Nicole

Spectrochimie infrarouge et raman

Modélisation, calcul scientifique, statistiques  
Chimie minérale  
Automatique  
Biologie

Electronique  
Chimie inorganique  
géologie générale  
Génie mécanique  
Informatique théorique

Spectrochimie  
Algèbre

« Mais à l'essor de la pensée  
L'instinct des sens s'oppose en vain ;  
Sous le dieu, mon âme opprimée  
Bondit, s'élance, et bat mon sein. »

Lamartine, L'enthousiasme,  
Méditations poétiques.

à Martine, William  
et Hortense.



## Introduction

Les approximants de Padé et leurs généralisations sont depuis plusieurs années l'objet d'intenses recherches. Les applications sont nombreuses, et des domaines aussi variés que la physique, la chimie, la théorie des circuits, la dynamique des fluides sont concernés. Cependant beaucoup de problèmes théoriques restent en suspens. Les questions suivantes reviennent souvent : les approximants que l'on a définis existent-ils ? A-t-on des critères simples d'existence et d'unicité ? Les procédés ou les algorithmes que l'on utilise convergent-ils ? Accélèrent-ils la convergence ?.

Tous ces problèmes sont très difficiles. L'objectif du travail de thèse présenté ici était justement d'apporter des réponses à de telles questions. Par exemple, dans le chapitre I de la première partie on trouvera des conditions d'existence et d'unicité pour les approximants de Padé vectoriels de séries de matrices. Dans la seconde partie, au chapitre I,

une condition suffisante est donnée pour avoir la convergence quadratique de l'E-algorithme topologique appliqué à des systèmes non linéaires. Dans la troisième partie, en fait, des dénominateurs des approximations de type Padé de  $e^{-z}$  conduit à l'accélération de convergence.

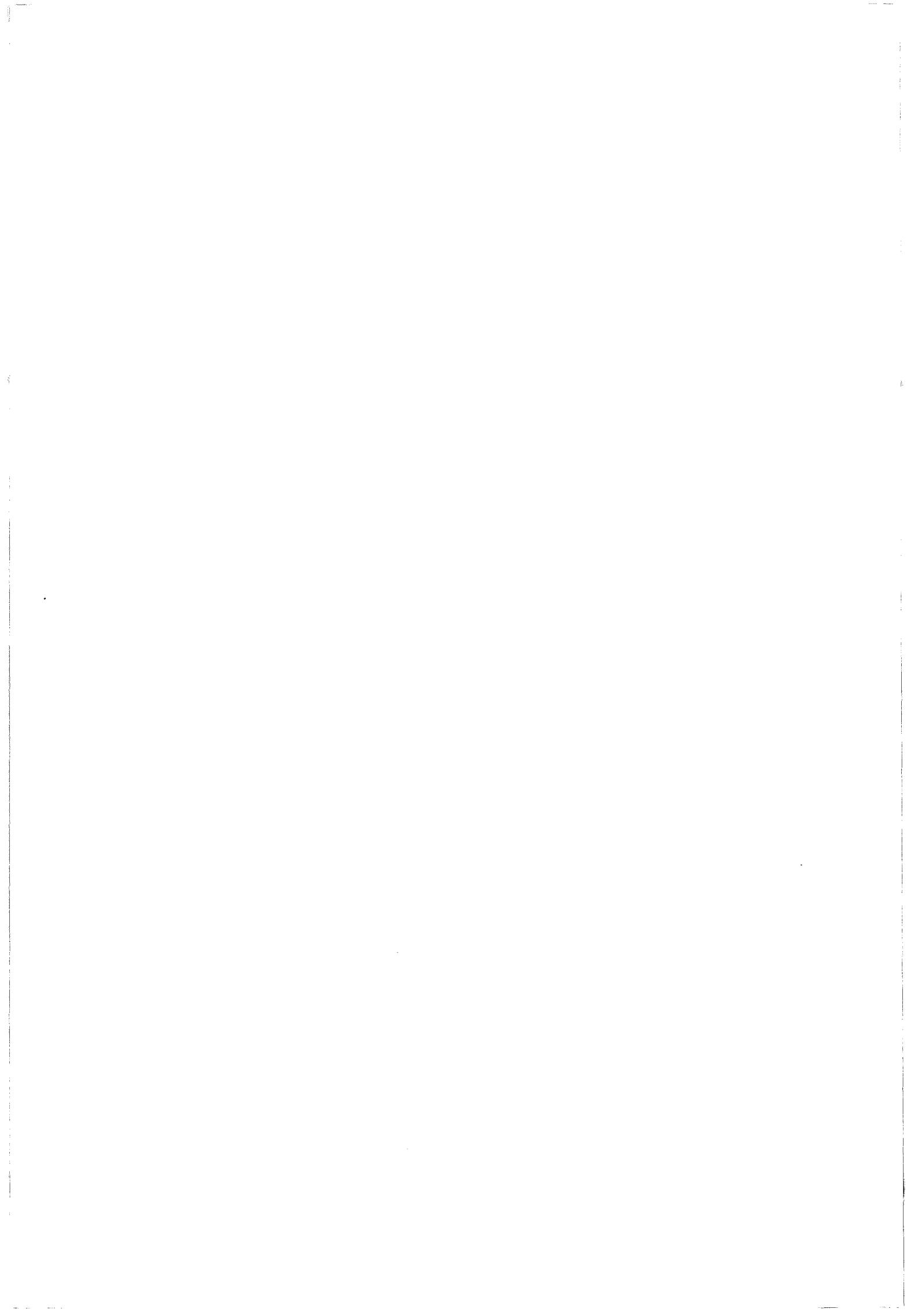
Au delà de ces considérations, nous avons voulu faire aussi le lien entre différents points de vue. Par exemple dans la première partie, chapitre II, on met en lumière la connexion entre approximations de Padé, théorie de Lanczos pour les systèmes linéaires, et polynômes biorthogonaux.

Je remercie les professeurs, Madame Morandi Cecchi, Université de Padoue, Monsieur Della Dora, Université de Grenoble, et Maître, INSA de Lyon, pour leur participation à ce jury. Il m'est agréable de remercier tout particulièrement Madame Jeannette Van Iseghem et Monsieur Claude Brezinski, professeurs à l'Université de Lille, pour leur aide et leurs encouragements constants.

En dernier lieu je remercie le personnel ATOS de l'Université de Lille et en particulier Madame Tailly pour son aide.

## Table des matières.

<u>Première partie</u>	p 3
Chap. I Polynômes orthogonaux vectoriels et séries de matrices.	p 4
Chap. II Polynômes orthogonaux vectoriels et méthode de Lanczos.	p 37
Chap. III Convergence de l'algorithme Q.D vectoriel dans le cas $(f, f')$ où $f$ est une fonction "lisse" au sens de Lukashy.	p 56
<u>Deuxième partie</u>	p 77
Chap. I La convergence quadratique de l'épilon algorithme topologique dans la résolution de systèmes non-linéaires d'équations	p 78
Chap. II De l'épilon algorithme vectoriel	p 98
Chap. III Transformations quasi-linéaires	p 124
<u>Troisième partie</u>	
Approximants de type Padé et accélération de la convergence: deux exemples.	p 135
<u>Quatrième partie</u>	
Biorthogonalité et procédé de Gram - Schmidt.	p 156



# PREMIERE PARTIE

Approximants de Padé vectoriels :  
exemples et applications.

<< Cui, j'ai quitté ce port tranquille,  
Ce port si longtemps appelé,  
Cui loin des ennuis de la ville,  
Dans un loisir doux et facile,  
Sans huit mes jours auraient coulé. >>

Lamartine, Adieu,  
Méditations poétiques.



## Chapitre I

### Polynômes orthogonaux vectoriels et séries de matrices.

L'objet de ce chapitre est de donner des conditions d'existence et d'unicité des polynômes orthogonaux vectoriels. Les polynômes qui sont considérés ici, sont ceux définis par Van Iseghem dans [13]. Nous donnons leur définition et leurs principales propriétés dans le paragraphe 1.

Bezinski a généralisé au cas vectoriel la transformation de Shanks, et a trouvé un epsilon algorithme, appelé epsilon algorithme topologique (TEA), pour calculer récursivement la transformation généralisée de Shanks [1]. De plus, des généralisations de la table de Padé ont été obtenues [2]. Il y a donc un lien très étroit entre les approximants de Padé vectoriels, la transformation généralisée de Shanks et le TEA. En particulier, comme l'epsilon vectoriel de Wynn [14], l'epsilon algorithme topologique peut être utilisé comme une méthode itérative (mais exacte après un nombre fini d'étapes) pour

résoudre des systèmes linéaires [2][6][10]. Ainsi, la théorie des approximations de Padé vectoriels, présentée dans [13], appliquée à la fonction  $(I - zA)^{-1} \cdot X_0$ , nous donne une méthode itérative pour résoudre le système linéaire  $X = AX + X_0$ .

Nous allons considérer la fonction  $F(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n A^n \cdot X_0$  où  $c_n \in \mathbb{F}$ ,  $A$  est une matrice carrée  $d \times d$  et  $X_0 \in \mathbb{F}^d$ .

Dans le paragraphe 2 nous donnons des résultats sur les polynômes orthogonaux associés à une telle fonctionnelle (en particulier nous établissons un lien entre le polynôme minimal de  $A$  pour  $X_0$  et ces polynômes orthogonaux, et traduisons les conditions de normalité jusqu'à la colonne  $d$  en termes de projection).

Dans le paragraphe 3 nous examinons le cas de la réductibilité d'une matrice, i.e.  $F(z) = (I - zA)^{-1} \cdot X_0$ , et nous utilisons l'algorithme Q.D vectoriel pour le calcul des valeurs propres de  $A$ .

Enfin, dans la dernière partie, nous nous intéressons à la fonction  $z \mapsto e^{zA} \cdot X_0$ , qui contrairement au cas scalaire ne présente pas une table normale.

### 1. Propriétés des polynômes orthogonaux vectoriels.

On considère une fonction  $F$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}^d$ ,  
 supposée analytique en zéro :  $F(z) = \sum_{n \geq 0} \Gamma_n z^n$  où  
 $\Gamma_n \in \mathbb{C}^d$ . Van Iseghem a défini dans [12] une famille  
 de polynômes  $(P_n^\delta)_{n \geq 0, \delta \geq 0}$  associées à  $F$  : si  $\Gamma$  désigne

la fonction de  $\mathbb{C}^d[[X]]$  dans  $\mathbb{C}^d$ , définie par  
 $\Gamma(X^i) = \Gamma_i$ , les polynômes  $(P_n^\delta)$  vérifient les relations  
 d'orthogonalité suivantes ;

$$\begin{cases} \Gamma(X^i P_n^\delta(X)) = 0 & n = nd+k \quad (0 \leq k < d) \\ & i = \delta, \dots, \delta+n-1 \\ \Gamma^{(k)}(X^{\delta+n} P_n^\delta(X)) = 0 \end{cases}$$

( $\Gamma^{(k)}$  représente le vecteur formé par les  $k$  premières  
 coordonnées de  $\Gamma$ ).

Ainsi, les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$   
 ( $a_n = 1$ ) du polynôme  $P_n^\delta$  doivent vérifier le  
 système linéaire :

$$(5) \quad \begin{cases} a_0 \Gamma_\delta + \dots + a_n \Gamma_{n+\delta} = 0 \\ \vdots \\ a_0 \Gamma_{\delta+n-1} + \dots + a_n \Gamma_{n+\delta+n-1} = 0 \\ a_0 \Gamma_{\delta+n}^{(k)} + \dots + a_n \Gamma_{n+\delta+n}^{(k)} = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} n = nd+k \\ 0 \leq k < d \end{matrix}$$

où  $\Gamma_j^{(k)}$  désigne les  $k$  premières composantes du vecteur  $\Gamma_j$ .

Le polynôme  $\tilde{P}_n^\delta$  (i.e.  $P_n^\delta(x) = x^n P_n^\delta(\frac{1}{x})$ ) est le dénominateur de l'approximant de Padé vectoriel  $[n+\delta-1/n]$  au sens de [12] de  $F(z) = \sum_{n \geq 0} \Gamma_n z^n$ .

Son existence et unicité est donc liée à la condition de non-nullité du déterminant de Hankel généralisé  $H_n^\delta$ :

$$H_n^\delta = \begin{vmatrix} \Gamma_0 & \dots & \dots & \dots & \Gamma_{\delta+n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \Gamma_{\delta+n-1} & \dots & \dots & \dots & \Gamma_{\delta+n-2} \\ \Gamma_{\delta+n}^{(k)} & \dots & \dots & \dots & \Gamma_{\delta+n-1}^{(k)} \end{vmatrix}$$

(chaque ligne vectorielle représente  $d$  lignes scalaires ( $k$  lignes pour la dernière)).

Les polynômes  $P_n^\delta$  sont liés, en supposant la table normale (i.e.  $H_n^\delta \neq 0$  pour  $n \geq 0, \delta \geq 0$ ) par différentes relations de récurrence [12][13]. En particulier pour  $\delta$  fixé la famille  $(P_n^\delta)_{n \geq 0}$  vérifie une relation de récurrence d'ordre  $d+1$  (i.e. avec  $d+2$  termes): on obtient aussi une généralisation du théorème de Shohat - Favard.

On a une généralisation de l'algorithme Q.D de Rutishauser [9], l'algorithme Q.D vectoriel qui lie les familles  $(P_n^\delta)_n$  et  $(P_n^{\delta+1})_n$  :

$$(9) \quad \begin{cases} P_{n+1}^\delta(x) = x P_n^{\delta+1}(x) - q_{n+1}^\delta P_n^\delta(x) & n \geq 0 \quad \delta \geq 0 \\ q_{n+1}^\delta = \frac{H_{n+1}^{\delta+1} \times H_n^\delta}{H_{n+1}^\delta \times H_n^{\delta+1}} \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} P_n^{\delta+1}(x) - P_n^\delta(x) = - \sum_{i=n-d}^{n-1} e_{n,i}^\delta P_i^{\delta+1}(x) & \delta \geq 0 \quad n \geq d \\ e_{n,n-d}^\delta \neq 0 \end{cases}$$

$$(Q.D) \quad \begin{cases} q_{n+1}^{\delta+1} + e_{n,n-1}^{\delta+1} = q_{n+1}^\delta + e_{n+1,n}^\delta \\ e_{n,i}^{\delta+1} \times q_{i+1}^{\delta+1} + e_{n,i-1}^{\delta+1} = e_{n,i}^\delta q_{n+1}^\delta + e_{n+1,i}^\delta & i = n-d+1, \dots, n-1 \\ e_{n,n-d}^{\delta+1} \times q_{n-d+1}^{\delta+1} = e_{n,n-d}^\delta \times q_{n+1}^\delta \end{cases}$$

Des résultats de convergence du Q.D vectoriel et des polynômes  $P_n^\delta$  pour  $n$  fixé ont été démontrés par Van Iseghem dans [11], quand  $F$  est méromorphe.

Pour la mise en œuvre de ces algorithmes (i.e. algorithme Q.D et calcul des  $P_n^\delta$ ) plusieurs problèmes se posent :

\* initialisation de l'algorithme Q.D (en particulier si  $d$  est grand)

\* normalité de la table

\* convergence des  $P_n^d$ .

Nous allons aborder ces problèmes quand

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n A^n \cdot X_0 \text{ où } c_n \in \mathbb{C}, A \text{ est une matrice}$$

carrée  $d \times d$  et  $X_0 \in \mathbb{C}^d$ . On applique en fait une série de matrices à un vecteur  $X_0$ . Étudier directement la série matricielle, quand une matrice est considérée comme un vecteur de  $\mathbb{C}^d$ , ne semble pas un choix judicieux comme le montre l'exemple suivant :

$$\text{soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, c_n = 1 \text{ pour tout } n, F(z) = \sum_{n \geq 0} z^n I \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{1-z} & \frac{1}{1-z} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Si on écrit } F(z) = \left( \frac{1}{1-z}, 0, 0, \frac{1}{1-z} \right) \text{ on a } H_n^d = 0$$

dès que  $n \geq 1$ .

## 2. Condition pour l'existence et unicité des polynômes orthogonaux vectoriels ( $n \leq d$ ).

On considère une matrice  $d \times d$ ,  $A$ , et  $X_0$  un vecteur non nul de  $\mathbb{C}^d$ . Soit  $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$  ( $R \neq 0$ ).

Pour  $z$  suffisamment petit posons  $F(z) = f(zA) \cdot X_0 = \sum_{m \geq 0} c_m z^m A^m X_0$   
 et  $P_m = c_m A^m X_0$ . Remarquons que si  $A$  et  $B$  sont deux  
 matrices semblables,  $A = PBP^{-1}$ , on a :

$$F(z) = P \left( \sum_{m \geq 0} c_m z^m B^m P^{-1} X_0 \right) = P f(zB) P^{-1} X_0$$
, donc  
 en termes d'approximants de Padé, il revient au  
 même d'approcher  $F(z)$  que  $f(zB) P^{-1} X_0$ .

Il ne faut pas perdre de vue que les approximants  
 de Padé vectoriels de Van Iseghem sont une extension  
 de ceux définis par Brezinski dans [2] : ce sont  
 exactement les approximants de Padé vectoriels  $[m+k/k]$   
 pour  $k \leq d$  [13]. Les  $d$  premières colonnes de la  
 table de Padé jouent donc un rôle particulier.

2.1 Le cas  $n = d$ .

Dans le cas  $n = d$  (5) se réduit à :

$$(a_0 c_0 A^0 + \dots + a_d c_{d+d} A^{d+d}) \cdot X_0 = 0.$$

Supposons  $A$  inversible : en multipliant la ligne ci-dessus  
 par  $A^{-d}$  on obtient le système (5') ;

$$(a_0 c_0 I + a_1 c_{d+1} A + \dots + a_d c_{d+d} A^d) \cdot X_0 = 0 \quad (d_d = 1).$$

(5') admet une solution et une seule, si et seulement si  
 la famille  $(c_0 X_0, \dots, c_{d+d-1} A^{d-1} X_0)$  est libre. Ceci

équivalent à :  $c_0 \neq 0, c_{d+1} \neq 0, \dots, c_{2d} \neq 0$  et  $(x_0, \dots, A^{d-1}x_0)$  libre. Rappelons ici la définition d'une matrice cyclique [7] : une matrice carrée  $M$  est dite cyclique si son polynôme caractéristique  $P_M$  est égal à son polynôme minimal  $\pi_M$ . En montre le résultat suivant [5, chap 7]

Proposition 2:  $M$  est une matrice carrée  $d \times d$  cyclique si et seulement si il existe un vecteur  $x \neq 0$  tel que la famille  $(x, Mx, \dots, M^{d-1}x)$  soit libre.

A présent les vecteurs  $x_0, Ax_0, \dots, A^{d-1}x_0$  engendrent  $\mathbb{F}^d$  (i.e le sous-espace de Krylov  $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{d-1}x_0 \rangle$  est égal à  $\mathbb{F}^d$ ), cela signifie que la matrice  $A$  est cyclique, c'est à dire que son polynôme caractéristique  $P_A$  est égal à son polynôme minimal  $\pi_A$  et que  $\pi_A = \pi_{x_0}$  où  $\pi_{x_0}$  désigne le polynôme minimal de  $A$  pour  $x_0$ .

Considérons le polynôme  $Q(X) = a_0c_0 + a_1c_{d+1}X + \dots + a_dc_{2d}X^d$ ,  
 on a d'après ce qui précède :

$$Q(X) = K \prod_{X_0} (X) = K P_A(X) \text{ où } K \in \mathbb{C}^d.$$

Si  $P_A(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{d-1} X^{d-1} + \alpha_d X^d$  ( $\alpha_d = 1$ ) on doit avoir :  $a_0 c_{\delta} = K \alpha_0, a_1 c_{\delta+1} = K \alpha_1, \dots, a_d c_{\delta+d} = K$ ,  
d'où  $a_i = \frac{c_{\delta+d}}{c_{\delta+i}} \alpha_i$  pour  $i = 0 \text{ à } d-1$ .

En résumé ce qui précède par :

### Théorème 2.1

Soit  $F(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n A^n \cdot X_0$  avec  $c_n \neq 0$  pour tout  $n$ .

Soit  $P_A = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{d-1} X^{d-1} + X^d$  le polynôme caractéristique de  $A$ . Le polynôme  $P_d^\delta$ ,  $\delta \geq 0$ , existe et est unique si et seulement si  $A$  est cyclique inversible et si le système  $(X_0, AX_0, \dots, A^{d-1}X_0)$  est libre. On a alors :

$$P_d^\delta = \sum_{i=0}^d \frac{c_{\delta+d}}{c_{\delta+i}} \alpha_i X^i \quad (\alpha_d = 1).$$

Remarquons que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{R}$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+d}}{c_{n+i}} = \frac{1}{R^{d-i}}$  ( $R \in \mathbb{C}^*$ ).

### Corollaire 2.2

Avec les hypothèses précédentes, si de plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{R}$   $R \in \mathbb{C}^*$ , la suite  $(P_d^\delta(z))_{\delta \geq 0}$  converge uniformément sur les compacts de  $\mathbb{C}$  vers  $\frac{P_A(Rz)}{R^d}$ .

Remarque : ce résultat n'est pas surprenant au vu de [11].  
 En effet le théorème de Fabry nous dit que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{R}$   
 ( $R \in \mathbb{C}^*$ ),  $f$  est analytique à l'intérieur du disque  $\{|z| < R\}$   
 et  $R$  est une singularité sur la frontière. Par exemple supposons  
 que  $f(z) = g(z) + \frac{\lambda_1}{z-R} + \dots + \frac{\lambda_n}{(z-R)^n}$  où  $g$  est  
 holomorphe dans le plan ( $f$  est méromorphe avec un pôle  
 en  $R$ ). On a  $f(zA) X_0 = g(zA) \cdot X_0 + \lambda_1 (zA - RI)^{-1} \cdot X_0$   
 $+ \dots + \lambda_n (zA - RI)^{-n}$

( $I$  est l'opérateur identité de  $\mathbb{C}^d$ ). Ainsi nous voyons  
 que  $\frac{R}{\lambda_1}, \dots, \frac{R}{\lambda_n}$  sont des pôles de  $f(zA) \cdot X_0$   
 ( $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  étant les valeurs propres de  $A$ ). Mais dans  
 notre cas, contrairement à [11], on peut très bien  
 avoir des pôles de même module pour une même composante  
 de  $f(zA) \cdot X_0$ .

## 2.2 Le cas $n < d$ .

Le cas  $n < d$  est plus délicat : nous nous limiterons  
 au cas des polynômes  $P_n^0$  (l'hypothèse  $A$  inversible est  
 alors inutile).

On a donc le système :

$$(S) \quad (a_0 c_0 X_0 + \dots + a_{n-1} c_{n-1} A^{n-1} X_0 + c_n A^n X_0)^{(1)} = 0.$$

Si  $S_n$  désigne la projection orthogonale sur  $E_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$   
 ( $(e_1, \dots, e_d)$  désigne la base canonique de  $\mathbb{C}^d$ ),

Le système a une solution et une seule, si et seulement si la famille  $(\delta_n(c_0 x_0), \dots, \delta_n(c_{n-2} A^{n-2} x_0))$  est libre, - ce qui équivaut à  $c_0 \neq 0, \dots, c_{n-2} \neq 0$  et  $(\delta_n(x_0), \dots, \delta_n(A^{n-2} x_0))$  libre.

Il est donc nécessaire que les vecteurs  $x_0, Ax_0, \dots, A^{n-2} x_0$  soient indépendants, donc que  $n \leq m$  où  $m$  est le degré du polynôme minimal de  $A$  pour  $x_0$ . La matrice est par ailleurs semblable à une matrice du type :

$$n \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

### Théorème 2.3

a) Soit  $F(z) = \sum_{m \geq 0} c_m z^m A^m x_0$  avec  $c_m \neq 0$  pour tout  $m$ .

Le polynôme  $P_n^0$ ,  $n \leq d$ , existe et est unique, si et seulement si les vecteurs  $\delta_n(x_0), \dots, \delta_n(A^{n-2} x_0)$  sont indépendants, où  $\delta_n$  est la projection orthogonale sur  $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ . Il est donc nécessaire que  $n \leq m$  où  $m$  est le degré du polynôme minimal de  $A$  pour  $x_0$ .

b) Si les vecteurs  $\delta_m(x_0), \dots, \delta_m(A^{m-2} x_0)$  sont indépendants, on a  $P_m^0 = \sum_{i=0}^m \frac{c_m}{c_i} \beta_i x^i$ , où

les  $\beta_i$  sont les coefficients du polynôme minimal de  $A$  pour  $x_0$ .

Donnez des exemples :

$$i) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_A(x) = \pi_{X_0}(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$F(z) = \left( \frac{1}{1-z}, \frac{1}{1-2z} \right) = \frac{(1-2z, 1-z)}{(1-z)(1-2z)}$$

Pour tout  $\delta \geq 0$   $P_2^\delta(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = \widetilde{(1-x)(1-2x)}$

$$ii) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad G(z) = X_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} A^n X_0$$

$$= (1 - \text{Log}(1-z), 1 - \text{Log}(1-2z))$$

$$P_2^\delta(x) = x^2 - 3x \frac{(\delta+1)}{(\delta+2)} + 2 \frac{\delta}{(\delta+2)}$$

$$iii) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad H(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n A^n X_0$$

$$= (ze^z, e^z)$$

$$P_2^\delta = x^2 - \frac{2}{\delta+2} x + \frac{1}{(\delta+1)(\delta+2)}$$

### 3. Résolvante de la matrice A.

3.1. Polynômes orthogonaux vectoriels de  $(I - zA)^{-1} X_0$ .

On considère ici  $F(z) = (I - zA)^{-1} X_0$  (résolvante de A appliquée à  $X_0$ ). Au niveau des applications on pourra considérer  $F(z)$  comme la solution du système linéaire  $(I - zA) X = X_0$ .

La fonction  $F(z)$  est une fonction rationnelle dont les pôles sont les inverses des valeurs propres de A :

$$(I - zA)^{-1} X_0 = \frac{1}{\det(I - zA)} \text{Cof}(I - zA) \cdot X_0$$

où  $\text{Cof } M$  est la matrice des mineurs algébriques de  $M$ .

On peut donc appliquer les résultats de convergence donnés dans [11] et en particulier celui de la convergence des colonnes du Q.D, ici vers les valeurs propres de  $A$ .

De plus si  $n > d$  le système (5), en supposant  $A$  inversible, se réduit à  $(a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n) X_0 = 0$ .

Ce système possède une infinité de solutions, i.e les  $a_i$  sont les coefficients d'un polynôme de la forme  $P(x) \Pi_{X_0}(x)$  avec  $\delta^\circ P = n - \delta^\circ \Pi_{X_0}$ . On va donc restreindre notre étude aux  $d$  premières colonnes : cependant  $d$  peut être grand et nous venons en peu plus loin que le calcul du Q.D est possible en utilisant l'algorithme RPA [4].

Si  $n = d$  on peut utiliser les résultats de la seconde partie : si  $A$  est cyclique et inversible, et si le sous-espace de Krylov  $\langle X_0, AX_0, \dots, A^{d-1} X_0 \rangle$  est égal à  $\mathbb{C}^d$ , on a  $P_d^\Delta = P_A (d \geq 0)$  où  $P_A$  est le polynôme caractéristique de  $A$ .

Remarques :

Calculons l'approximant de Padé rectangulaire  $[d/d]_F$  de  $F$ ,

$$[d/d]_F(z) = \frac{\tilde{w}(z)}{\tilde{v}(z)} \quad \text{où} \quad v(t) = P_A(t) \quad \text{et}$$

$$w(t) = \Gamma(t) \left( \frac{v(x) - v(t)}{x-t} \right), \text{ soit } w(t) = \sum_{j=1}^d \alpha_j \sum_{k=0}^{j-1} \Gamma_{k+1} t^{j-1-k},$$

ce qui donne

$$[d|d]_F(z) = \frac{\sum_{j=0}^d \alpha_j z^{d-j} \left( \sum_{k=0}^j \Gamma_k z^k \right)}{\alpha_d + \alpha_{d-1} z + \dots + \alpha_0 z^d}.$$

Par ailleurs  $\sum_{j=0}^d \alpha_j t^{d-j} \left( \sum_{k=j+1}^{+\infty} \Gamma_k t^k \right) = \sum_{j=0}^d \alpha_j t^d \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \Gamma_{k+j} t^k \right),$

on a  $\Gamma_{k+j} = A^{j+k} x_0 = A^j (A^k x_0) = A^j \Gamma_k$ , d'où

$$\sum_0^d \alpha_j t^{d-j} \left( \sum_{j+1}^{+\infty} \Gamma_k t^k \right) = t^d \sum_0^d \alpha_j A^j \left( \sum_1^{\infty} \Gamma_k t^k \right) = 0$$

En conclusion :  $[d|d]_F(z) = \sum_0^{+\infty} \Gamma_k z^k = (I - zA)^{-1} x_0.$

Finalement, soit  $A$  une matrice cyclique et régulière,  $x_0$  un vecteur tel que la famille  $(x_0, Ax_0, \dots, A^{d-1}x_0)$  soit libre : si  $P_A(x) = \sum_{i=0}^d \alpha_i x^i$ , alors

$$(I - zA)^{-1} x_0 = [d|d]_F(z) = \frac{\sum_{j=0}^d \alpha_j z^{d-j} \left( \sum_{k=0}^j A^k z^k \right)}{\alpha_d + \alpha_{d-1} z + \dots + \alpha_0 z^d} \cdot x_0.$$

Démontrons le lemme suivant :

Lemme : soit  $f$  un endomorphisme inversible et cyclique de  $\mathbb{F}^n$  ( $\pi f = P f$ ). Soit  $x \in \mathbb{F}^n$  tel que  $\pi x = P x$ . Alors on a :  $\pi f(x) = \pi x$ .

preuve :

$$\pi_x(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n \quad (a_0 \neq 0 \text{ car } f \text{ est inversible}).$$

$$\pi_{f(x)}(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_{q-1} X^{q-1} + X^q \quad q \leq n.$$

$$\text{On a } \pi_{f(x)}(f) \cdot f(x) = 0, \text{ soit } (b_0 \text{id} + b_1 f + \dots + f^q) \cdot f(x) = 0 \\ (b_0 f + b_1 f^2 + \dots + f^{q+1}) \cdot x = 0$$

Ainsi  $x \pi_{f(x)}(X)$  est divisible par  $\pi_x$  donc  $q = n$  ou  $n-1$ .

Or  $a_0 \neq 0$  donc nécessairement  $q = n$  et  $\pi_{f(x)} = \pi_x \quad \square$

D'après le lemme  $\pi_{A^i x_0} = \pi_{x_0}$  pour  $i = 0 \text{ à } d-1$ ,  
et donc l'égalité précédente reste vraie si on remplace  $x_0$  par  $A^i x_0$ . Les  $A^i x_0$  forment une base de  $\mathbb{C}^d$ ,  
on peut ainsi remplacer  $x_0$  par un vecteur quelconque  
de  $\mathbb{C}^d$ . Soit  $A$  une matrice cyclique inversible,

$$P_A(X) = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i X^i \text{ son polynôme minimal, on a} \\ (\mathbf{I} - ZA)^{-1} = \frac{\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i Z^{d-i} \left( \sum_{k=0}^i A^k Z^k \right)}{\alpha_d + \alpha_{d-1} Z + \dots + \alpha_0 Z^d}$$

On retrouve une identité de la théorie des matrices [7].

De plus cette égalité est vraie sans hypothèse de régularité et de caractère cyclique.

On peut aussi remarquer que si  $\mathbf{I} - A$  est inversible,  
on obtient :

$$(I-A)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^d \sum_{k=0}^j \alpha_j A^k}{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_d} = \frac{\sum_{j=0}^d \left( \sum_{k=j}^d \alpha_k \right) A^j}{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_d}$$

$$\text{Or } \sum_{j=0}^d \left( \sum_{k=j}^d \alpha_k \right) A^j = \sum_{j=0}^d \left( \sum_{k=j+1}^d \alpha_k \right) A^j + \sum_{j=0}^d \alpha_j A^j$$

$$= \sum_{j=0}^d \left( \sum_{k=j+1}^d \alpha_k \right) A^j$$

d'où 
$$(I-A)^{-1} = \frac{\sum_{j=0}^d \left( \sum_{k=j+1}^d \alpha_k \right) A^j}{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_d} \quad \cdot \text{ On retrouve}$$

ainsi un résultat de [3] p 77.

Pour  $n < d$ , on peut appliquer les résultats de la première partie : en particulier si  $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1}x_0 \rangle = E_n$  on a l'existence et l'unicité de  $P_n^0$ .

Définissons  $A_n$ , opérateur de  $E_n$  dans  $E_n$  par :

$$A_n x_0 = A x_0; \quad A_n(Ax_0) = A^2 x_0; \quad \dots; \quad A_n(A^{n-2}x_0) = A^{n-1}x_0$$

et  $A_n(A^{n-1}x_0) = S_n(A^n x_0)$ .

Considérons le polynôme caractéristique de  $A_n$  :

$$\beta_0 I + \dots + \beta_{n-1} A_n^{n-1} + A_n^n = 0, \quad \text{d'où}$$

$$\beta_0 x_0 + \dots + \beta_{n-1} A^n x_0 + S_n(A^n x_0) = 0, \quad \text{ce qui équivaut à}$$

$$S_n(\beta_0 x_0 + \dots + \beta_{n-1} A^{n-2} x_0 + A^n x_0) = 0.$$

$P_n^0$  est donc le polynôme caractéristique de  $A_n$  et

la matrice de  $A_n$  dans la base  $(e_1, \dots, e_r)$  est la matrice extraite de  $A$  en prenant les  $n$  premières lignes et les  $n$  premières colonnes.

### Théorème 3.1

Soit  $A$  une matrice  $d \times d$ ,  $x_0 \in \mathbb{F}^d$ . Supposons que  $E_n = \langle x_0, \dots, A^{n-1}x_0 \rangle$ . Alors l'approximant de Padé  $[n-1/n]$  de  $F(z) = (I - zA)^{-1}x_0$  existe et est unique : son dénominateur est  $\tilde{P}_n^0$  où  $P_n^0$  est le polynôme caractéristique de la matrice extraite de  $A$  en prenant les  $n$  premières lignes et les  $n$  premières colonnes.

### Corollaire 3.2

Si de plus  $A$  est inversible et si  $n = m$  où  $m$  est le degré du polynôme minimal de  $A$  pour  $x_0$ , on a :

$$[m-1/m](z) = (I - zA)^{-1}x_0.$$

La preuve est identique à celle du cas  $m = d$ , après avoir remarqué que le polynôme minimal de  $A$  pour  $(x_0 - (I - zA)^{-1}x_0)$  est aussi le polynôme minimal de  $A$  pour  $x_0$  (on a besoin de l'hypothèse  $A$  inversible).

Ce résultat est à rapprocher de celui de [2] p 147.

Donons un exemple de matrice  $A$  pour laquelle l'hypothèse  $E_n = \langle X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0 \rangle$  est vérifiée pour  $n=1 \text{ à } d$  :

soit  $A = [a_{ij}]$  avec  $\begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{si } i \geq j+2 \\ \text{et} \\ a_{j+1, j} \neq 0 \end{cases}$   
 $1 \leq i, j \leq m$

Cette matrice est cyclique et pour tout  $n=1 \text{ à } d$  on a  $\langle e_1, Ae_1, \dots, A^{n-1}e_1 \rangle = E_n$ , car  $A^j e_1 \in E_{j+1} \setminus E_j$  ( $j=1 \text{ à } d-1$ ).

exemples

i)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$   $X_0 = e_1$   $P_0^0 \equiv 1$   $P_1^0(x) = x-1$   
 $P_2^0(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 3x - 1$   
 et  $P_3^0(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 6$

ii)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -\alpha_{d-1} \end{bmatrix}$  (matrice compagnon du polynôme  $\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{d-1} x^{d-1} + x^d$   $\alpha_0 \neq 0$ )

$P_n^0 = X^n$  pour  $n=1 \text{ à } d-1$  et  $P_d^0 = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{d-1} X^{d-1} + X^d$



$F(z) = (I - zA)^{-1} X_0$  et on procéderait de la même façon dans le cas d'une autre fonction.

Pour  $\alpha = 0, \dots, d-1$  et  $\delta$  fixé on considère le rapport  $H_{\alpha+1}^\delta / H_\alpha^\delta$

$$\frac{H_{\alpha+1}^\delta}{H_\alpha^\delta} = \frac{\begin{vmatrix} (e_1 | A^\delta X_0) & \dots & (e_1 | A^{\delta+\alpha} X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_{\alpha+1} | A^\delta X_0) & \dots & (e_{\alpha+1} | A^{\delta+\alpha} X_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (e_1 | A^\delta X_0) & \dots & (e_1 | A^{\delta+\alpha-1} X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_\alpha | A^\delta X_0) & \dots & (e_\alpha | A^{\delta+\alpha-1} X_0) \end{vmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} (e_{\alpha+1} | A^{\delta+\alpha} X_0) & (e_{\alpha+1} | A^\delta X_0) & \dots & (e_{\alpha+1} | A^{\delta+\alpha-1} X_0) \\ (e_1 | A^{\delta+\alpha} X_0) & (e_1 | A^\delta X_0) & \dots & (e_1 | A^{\delta+\alpha-1} X_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_\alpha | A^{\delta+\alpha} X_0) & (e_\alpha | A^\delta X_0) & \dots & (e_\alpha | A^{\delta+\alpha-1} X_0) \end{vmatrix} / H_\alpha^\delta$$

Soit  $0 \leq R \leq \alpha$  Posons :

$$E_{R, \alpha}^{(\delta, \alpha)} = \begin{vmatrix} A^{\delta+\alpha} X_0 & A^\delta X_0 & \dots & A^{\delta+\alpha-R} X_0 \\ (e_1 | A^{\delta+\alpha} X_0) & (e_1 | A^\delta X_0) & \dots & (e_1 | A^{\delta+\alpha-R} X_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_R | A^{\delta+\alpha} X_0) & (e_R | A^\delta X_0) & \dots & (e_R | A^{\delta+\alpha-R} X_0) \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} (e_1 | A^\delta X_0) & \dots & (e_1 | A^{\delta+\alpha-R} X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_R | A^\delta X_0) & \dots & (e_R | A^{\delta+\alpha-R} X_0) \end{vmatrix}$$

On reprend la formulation habituelle du RPA [4], avec

$$z = A^{\delta+\alpha} \cdot X_0, \quad z_i = e_i, \quad x_i = A^{\delta+i-1} \cdot X_0.$$

$$\text{On a } \frac{H_{\alpha+1}^\delta}{H_\alpha^\delta} = (e_{\alpha+1} | E_\alpha^{(\delta, \alpha)}).$$

Les  $E_k^{(\delta, \alpha)}$  se calculent récursivement par :

$$E_0^{(\delta, \alpha)} = A^{\delta+\alpha} \cdot X_0 \quad g_{0,i}^{(\delta, \alpha)} = A^{\delta+i-1} \cdot X_0$$

$$E_k^{(\delta, \alpha)} = E_{k-1}^{(\delta, \alpha)} - \frac{(e_k | E_{k-1}^{(\delta, \alpha)})}{(e_k | g_{k-1,k}^{(\delta, \alpha)})} g_{k-1,k}^{(\delta, \alpha)} \quad \alpha \geq k \geq 0$$

$$g_{k,i}^{(\delta, \alpha)} = g_{k-1,i}^{(\delta, \alpha)} - \frac{(e_k | g_{k-1,i}^{(\delta, \alpha)})}{(e_k | g_{k-1,k}^{(\delta, \alpha)})} g_{k-1,k}^{(\delta, \alpha)} \quad i > k > 0$$

On obtient ainsi :

$$q_{\alpha+1}^\delta = \frac{(e_{\alpha+1} | E_\alpha^{(\delta+1, \alpha)})}{(e_{\alpha+1} | E_\alpha^{(\delta, \alpha)})}$$

(Remarquons que les calculs sont effectués pour chaque  $\alpha$  indépendamment)

On donnera des exemples de calculs un peu plus loin.

### 3.3 Valeurs propres.

Étudions à présent la convergence du Q.D. vectoriel vers les valeurs propres de la matrice  $A$ . On se place dans le cas où  $A$  est diagonalisable.

$$A = P \Delta P^{-1} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_i \text{ valeurs propres de } A \\ (\lambda_i \neq 0) \end{array}$$

$$\text{et } P = [a_{ij}]$$

Soit  $x_0 \in \mathbb{C}^d$ , on a  $P^{-1}x_0 = y_0 = (y_{11}, \dots, y_{d1})^T$  :

l'expression de  $F(z)$  est alors

$$\begin{aligned} F(z) &= (I - zA)^{-1}x_0 = \left( \sum_{j=1}^d a_{1j} \frac{y_{j1}}{1 - \lambda_j z}, \dots, \sum_{j=1}^d a_{dj} \frac{y_{j1}}{1 - \lambda_j z} \right) \\ &= (f_1(z), \dots, f_d(z)) \end{aligned}$$

Les pôles éventuels de  $f_\alpha$  sont les  $\frac{1}{\lambda_j}$  (i.e. si  $a_{\alpha j} y_{j1} \neq 0$ ).

Donnons tout d'abord un théorème de Van Isegem [11]

**Théorème :** Soit  $E_\alpha = \{z_i^\alpha\}_{i \geq 0}$  l'ensemble des pôles de  $f_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, d$ ).

On suppose que pour chaque  $\alpha = 1, \dots, d$ ,  $|z_1^\alpha| < \dots < |z_i^\alpha| < \dots$ .  
Chaque fonction  $f_\alpha$  a des pôles simples.  $\cup E_\alpha$  contient au moins  $m$  pôles dans  $D_\rho$ .  $f_1, \dots, f_d$  sont  $n$ -plairement indépendantes pour  $n = 1 \bar{a} m$  sur  $D_\rho$ .

Alors, pour  $n = 1 \bar{a} m$

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} q_n^\delta = u_n \quad \text{avec } u_n^{-1} \in \cup_{\alpha} E_\alpha.$$

Rappelons aussi la définition de fonctions polairement indépendantes, due à Graves Morris and Saff [8].

Définition: Soient  $f_1, \dots, f_d$  des fonctions méromorphes dans le disque  $D$ , et soit des entiers positifs  $p_i$  donnés, tels que  $\sum_{i=1}^d p_i \geq 0$ .

Les fonctions sont dites polairement indépendantes par rapport aux nombres  $p_i$  si il n'existe pas de polynômes  $\pi_1, \dots, \pi_d$ , au moins un d'entre eux est non nul, avec  $\partial^\alpha \pi_i \leq p_i - 1$  si  $p_i \geq 1$  et  $\pi_i \equiv 0$  si  $p_i = 0$ , tels que  $\varphi(z) = \sum_i \pi_i(z) f_i(z)$  soit analytique dans  $D$ .

Si on prend pour  $p_i$  les entiers suivants:

si  $n = nd + k$   $0 \leq k < d$ ,  $p_\alpha = (n + \epsilon_\alpha)$  où

$\epsilon_\alpha = 1$  si  $1 \leq \alpha \leq k$ ,  $\epsilon_\alpha = 0$  si  $k+1 \leq \alpha \leq d$ ,

on obtient la définition de fonctions  $n$ -polairement indépendantes.

A présent, soit  $K_\alpha \in \Phi^d$  ( $\alpha = 1, \dots, d$ ) et

$$\varphi(z) = \sum_{\alpha=1}^d K_\alpha f_\alpha(z) = \sum_{j=1}^d \frac{\sum_{\alpha=1}^d K_\alpha a_{\alpha,j} y_j}{1 - \lambda_j z}.$$

On suppose que  $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ . Alors  $\varphi$  est analytique dans un disque contenant les inverses des valeurs propres de  $A$  si et seulement si

$$\sum_{\alpha=1}^d K_\alpha a_{\alpha,i} y_i = 0 \quad \text{pour } i=1 \text{ à } d.$$

Si  $y_i \neq 0$  pour tout  $i$ , comme la matrice  $P$  est inversible, on a  $K_\alpha = 0$  pour  $\alpha = 1 \bar{a} d$ , ce qui entraîne que  $f_1, \dots, f_d$  sont  $n$ -polairement indépendantes pour  $n = 1 \bar{a} d$ . Pour pouvoir appliquer le théorème précédent on doit supposer de plus que  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_d| > 0$ .

Théorème 3.3 :

$A$  une matrice de valeurs propres  $\lambda_i$  ( $i = 1 \bar{a} d$ ).

On applique l'algorithme Q.D. vectoriel à  $F(z) = (I - zA)^{-1} x_0$ ,  $x_0 \in \mathbb{F}^d \setminus \{0\}$ , et on suppose que  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_d| > 0$ .

Soit  $P$  la matrice inversible telle que :

$$A = P \Delta P^{-1} \quad \text{où} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{bmatrix}$$

Si toutes les coordonnées de  $P^{-1} x_0$  sont différentes de zéro, pour  $n = 1 \bar{a} d$

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow +\infty} q_n^s = u_n \\ u_n \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\} \end{cases}$$

Remarques :

a) La notion de fonctions  $n$ -polairement indépendantes dépend de l'ordre dans lequel on considère les fonctions. L'hypothèse très forte,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  pour  $i \neq j$ , nous permet d'éviter ce problème. Cependant, avec l'hypothèse précédente

on peut avoir des pôles de même module. On devra alors faire des hypothèses supplémentaires sur la matrice  $P$ . (Par exemple, si  $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ , on doit supposer que  $a_{21} = 0$  ou  $a_{22} = 0$ ).

b) En utilisant la preuve du théorème de Van Issegheem, on peut voir que  $\left(\lim_{\delta \rightarrow +\infty} q_1^\delta\right)^{-1}$  est le pôle de plus petit module de  $f_1$ . Par exemple, si  $a_{11} \neq 0$ , on a  $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} q_1^\delta = \lambda_1$ .

Pour  $n > 1$  on n'a pas de résultat général: le problème vient du fait que si un pôle est simple pour une fonction mais commun à plusieurs de ces fonctions, il apparaîtra seulement une fois dans la suite  $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (q_n^\delta)^{-1}\right)_n$ .

Cependant, si  $A = \Delta$  et  $x_0 = (1, \dots, 1)^T$ , on peut écrire  $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} q_1^\delta = \lambda_1$ .

On calcule à présent l'algorithme QD vectoriel en utilisant l'algorithme RPA. (simple précision en turbo-Pascal).

examples :

$$i) A = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 30 \\ -6 & -27 & -66 \\ 4 & 16 & 37 \end{bmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{valeurs propres } 9; 3; 1)$$

$$\begin{cases} q_1^{10} = 9,0003 \\ q_1^{15} = 9,000001 \end{cases} \quad q_2^{10} = 3,00002 \quad \begin{cases} q_3^8 = 1,00044 \\ q_3^9 = 0,905 \end{cases}$$

$$(\text{avec } x_0 = (1, 1, 1)^T) \quad \begin{cases} q_1^{10} = 9,00018 \\ q_1^{15} = 9,0000007 \\ q_3^{10} = 0,988 \end{cases}$$

$$ii) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -24 \\ 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \quad x_0 = (1, 0, 0, 0)^T \quad (\text{valeurs propres: } 4; 3; 2; 1)$$

$$\begin{cases} q_1^{20} = 4,0128 \\ q_1^{15} = 4,003 \end{cases} \quad q_2^{25} = 2,99809 \quad q_3^{20} = 2,0036 \quad q_4^{10} = 0,989.$$

#### 4. La fonction $e^{zA} \cdot X_0$

On peut appliquer les résultats de la deuxième partie :

##### Théorème 4.1

Soit  $F(z) = e^{zA} \cdot X_0$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) et

$P_A(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{d-1} X^{d-1} + X^d$  le polynôme caractéristique de  $A$ .

a) Le polynôme  $P_d^\delta$ ,  $\delta \geq 0$ , existe et est unique si et seulement si  $A$  est cyclique inversible, et si le système  $(X_0, AX_0, \dots, A^{d-1}X_0)$  est libre. En ce cas

$$P_d^\delta(X) = \sum_{i=0}^d \frac{\alpha_i}{(\delta+d)(\delta+d-1)\dots(\delta+i-1)} X^i \quad (\alpha_d=1)$$

b) Avec les mêmes hypothèses, la suite  $(P_d^\delta(z))_{\delta \geq 0}$  converge uniformément sur les compacts de  $\mathbb{C}$  vers  $X^d$ .

On se pose le problème suivant :

$P_n^\delta(z)$  existe-t-il et est-il unique pour  $n > d$  ?

La réponse est négative si l'on ne fait pas d'hypothèse supplémentaire sur la matrice  $A$ .

Remarque : considérons l'équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Posez  $y_1 = y, \dots, y_n = y^{(n-1)}$ , on obtient alors

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ -a_{n-1} y^{(n-1)} \dots - a_0 y \end{bmatrix} \quad \text{soit encore,}$$

$$Y' = AY \quad \text{avec} \quad Y = (y_1, \dots, y_n)^T \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$A$  est cyclique et la solution du système est  $Y(t) = e^{tA} Y(0)$ .  
Les approximations de Padé vectoriels de  $z \mapsto e^{zA} Y(0)$ , nous donnent donc des approximations de la solution exacte.

Revenons au problème posé : considérons l'exemple suivant en dimension 2 ;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad F(z) = e^{zA} \cdot X_0 = \begin{bmatrix} x_0 e^z + z x_1 e^z \\ x_1 e^z \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où } H_4^0 = \begin{vmatrix} x_0 & x_0+x_1 & \frac{x_0+x_1}{2} & \frac{x_0+x_1}{6} + \frac{x_1}{2} \\ x_1 & x_1 & \frac{x_1}{2} & \frac{x_1}{6} \\ x_0+x_1 & \frac{x_0+x_1}{2} + x_1 & \frac{x_0+x_1}{6} + \frac{x_1}{2} & \frac{x_0}{24} + \frac{x_1}{6} \\ x_1 & \frac{x_1}{2} & \frac{x_1}{6} & \frac{x_1}{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & x_0+x_1 & \frac{x_0+x_1}{2} & \frac{x_0+x_1}{6} + \frac{x_1}{2} \\ x_1 & x_1 & \frac{x_1}{2} & \frac{x_1}{6} \\ x_0 & \frac{x_0}{2} & \frac{x_0}{6} & \frac{x_0}{24} \\ x_1 & \frac{x_1}{2} & \frac{x_1}{6} & \frac{x_1}{24} \end{vmatrix}$$

les deux dernières lignes étant proportionnelles  $H_4^0 = 0$ .

On considère  $n = 2d$  : les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_{2d}$  ( $a_{2d} = 1$ ) de  $P_{2d}^\Delta$  doivent vérifier le système suivant ;

$$(*) \begin{cases} \left( \frac{a_0}{\delta!} I + \frac{a_1}{(\delta+1)!} A + \dots + \frac{a_{2d}}{(\delta+2d)!} A^{2d} \right) \cdot X_0 = 0 \\ \left( \frac{a_0}{(\delta+1)!} I + \frac{a_1}{(\delta+2)!} A + \dots + \frac{a_{2d}}{(\delta+2d+1)!} A^{2d} \right) \cdot X_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{on suppose } A \text{ inversible})$$

Faisons l'hypothèse que  $A$  est cyclique avec  $\Pi_{X_0} = P_A = P$  où  $P(x) = \sum_0^d \alpha_j x^j$  ( $\alpha_d = 1$  et  $P(0) \neq 0$ ). Posons,  $\beta_j = \frac{\alpha_j}{(\delta+j)!}$ ,

$$Q_1(x) = \sum_0^{2d} \beta_j x^j, \quad Q_2(x) = \sum_0^{2d} \frac{\beta_j}{(j+1)} x^j.$$

D'après (\*), les polynômes  $Q_1$  et  $Q_2$  sont divisibles par  $P$ .

$$\text{On a par ailleurs } x^{\delta+1} Q_2(x) = \sum_0^{2d} \frac{\beta_j}{(j+1)} x^{j+1},$$

$$\text{d'où } (x^{\delta+1} Q_2(x))' = \sum_0^{2d} \beta_j x^{j+\delta} = x^\delta Q_1(x),$$

$(x^{\delta+1} Q_2(x))'$  est divisible par  $P(x)$ . De plus  $Q_2(x) = P(x)R(x)$

avec  $\delta^\circ R = d$ , en dérivant on obtient :

$$(x^{\delta+1} Q_2(x))' = x^\delta \left\{ P(x) [x R'(x) + (\delta+1) R(x)] + x P'(x) R(x) \right\}.$$

Ainsi  $x P'(x) R(x)$  est divisible par  $P(x)$  et comme  $P(0) \neq 0$

$P'(x)R(x)$  est divisible par  $P(x)$ . En particulier si  $P'(x)$  et  $P(x)$  sont premiers entre eux  $R(x) = K P(x)$  :

$$Q_2(x) = K P^2(x) = \frac{P_{2d}}{(2d+s+1)} \sum_{j=0}^{2d} \underbrace{\left( \sum_{p+q=j} \alpha_p \alpha_q \right)}_{\alpha'_j} x^j$$

d'où  $\frac{\beta_j}{(j+s+1)} = \frac{P_{2d}}{(2d+s+1)} \left( \sum_{p+q=j} \alpha_p \alpha_q \right)$ , - ce qui donne

$$a_j = \frac{(j+s+1)!}{(2d+s+1)!} \alpha'_j. \quad \text{Le polynôme } P_{2d}^0 \text{ existe donc}$$

et est unique dans ce cas.

Vérification:  $Q_1(x) = \sum_{j=0}^{2d} \frac{a_j}{(s+1)^j} x^j = \frac{1}{(2d+s+1)!} \sum_{j=0}^{2d} (j+s+1) \alpha'_j x^j$

$$= \frac{1}{(2d+s+1)!} \left\{ (s+1) \sum_{j=0}^{2d} \alpha'_j x^j + \sum_{j=0}^{2d} j \alpha'_j x^j \right\}$$

$$= \frac{1}{(2d+s+1)!} \underbrace{\left\{ (s+1) P^2(x) + x (P^2(x))' \right\}}_{\text{divisible par } P(x)}.$$

Remarque : dans l'hypothèse sur  $P$ , le choix  $R(x) = P(x)$  nous donne une solution de  $(*)$ . Un autre choix pour  $R$  nous donne une autre solution de  $(*)$

prouve que  $XP'(X)R(X)$  soit divisible par  $P$ .

En résumé :

### Théorème 4.2

Soit  $A$  une matrice cyclique inversible et  $x_0 \in \mathbb{F}^d$  tel que  $(x_0, Ax_0, \dots, A^{d-1}x_0)$  soit libre.

Le polynôme  $P_{2d}^\Delta$ ,  $\Delta \geq 0$ , existe et est unique, si et seulement si  $P(X)$ , polynôme caractéristique de  $A$ , n'a que des racines simples. Dans ce cas si  $\alpha_j$  ( $j=0 \text{ à } 2d$ ) désigne le coefficient de  $X^j$  dans  $P^2(X)$  ( $\alpha_{2d} = 1$ ) on a :

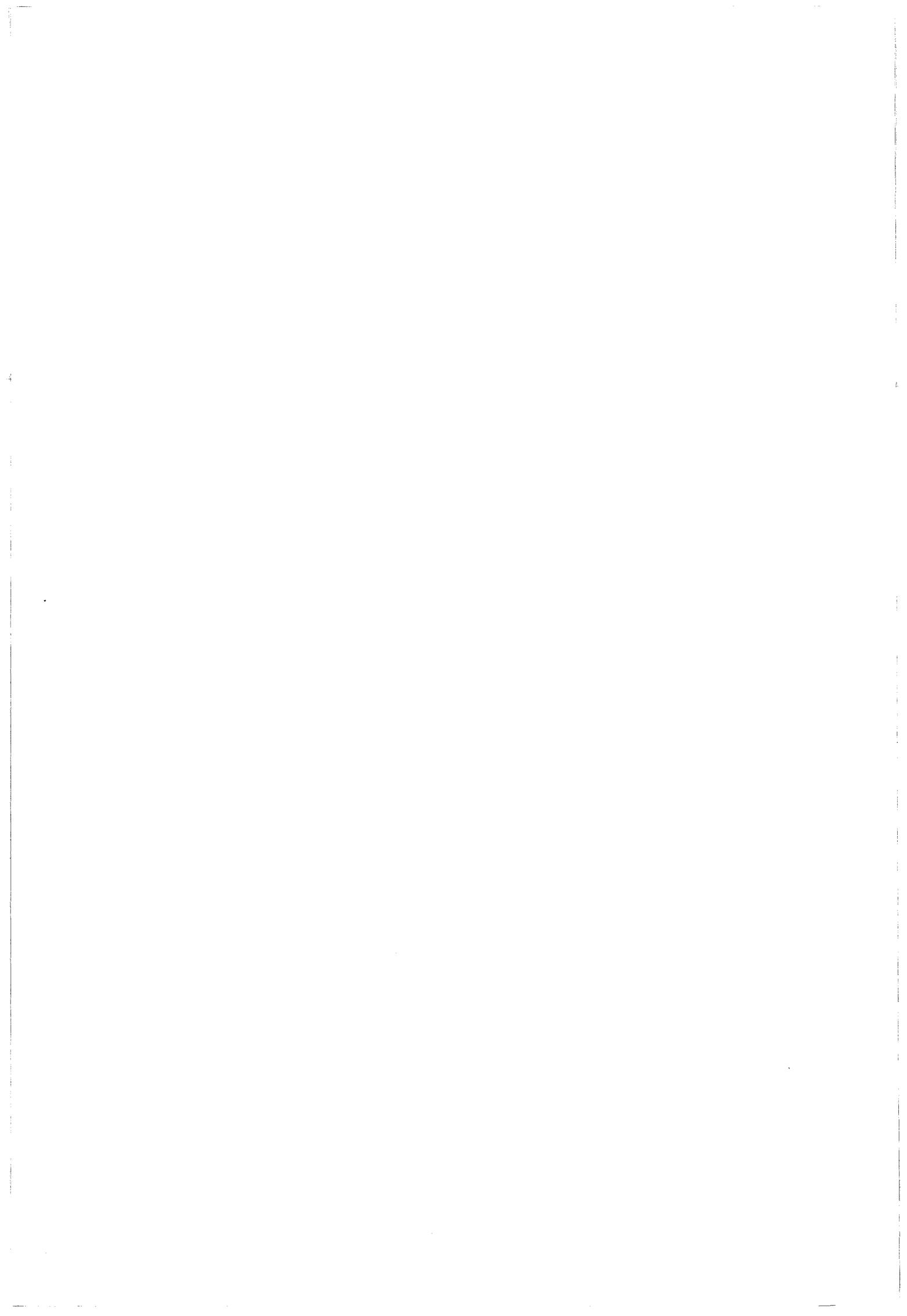
$$P_{2d}^\Delta = \sum_0^{2d} \frac{(j+1)!}{(2d-j+1)!} \alpha_j^\Delta X^j.$$

## References

- [1] C. Brezinski, Généralisation de la transformation de Shanks, de la table de Padé, et de l'E-algorithme, *Calcolo*, 12 (1975), pp 317-360.
- [2] C. Brezinski, Accélération de la convergence en analyse numérique, LNM 584, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [3] C. Brezinski, Padé type Approximants and General Orthogonal Polynomials, Birkhäuser Verlag, Basel, 1980.
- [4] C. Brezinski, Recursive interpolation, extrapolation and projection, *J. Comp. App. Math.*, 9 (1983) 369-379.
- [5] F.R Gantmacher, Théorie des matrices, Dunod, Paris, 1966.
- [6] E. Geheler, On the solution of systems of equations by epsilon algorithm of Uryun, *Math. Comp.* 26 (1972) pp 427-456.
- [7] G.H Golub and C.F Van Loan, Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1989, 2<sup>nd</sup> edition.
- [8] P. Graves Morris and E.B Saff, A Montessus Theorem for vector valued Rational Interpolants, in *Rational Approximation and Interpolation* 227-242, LNM 1105, Springer-Verlag.
- [9] P. Henrici, Applied and computational Complex Analysis, Wiley, New York 1974.
- [10] D.A Smith, W.F Fad, and A-Sidi, Extrapolation methods for vector sequences, *SIAM Rev.*, 29: 199-233, 1987.
- [11] J. Van Iseghem, Convergence of the Vector Q.D-algorithm, *J. Comp. App. Math.*, 25 (1989) 33-46
- [12] J. Van Iseghem, Vector Orthogonal Relations, Vector Q.D-algorithm, *J. Comp. App. Math.*, 19 (1987) 141-150

[13] J. Van Iseghem, Approximants de Padé vectoriels,  
Thesis 1987, Université des Sciences et Techniques de  
Lille - Flandres - Artois.

[14] P. Wynn, Acceleration techniques for iterated  
vector and matrix problems, Math. Comp., 16 (1962) pp 301-322.



## Chapitre II

### Polynômes orthogonaux vectoriels et méthode de Lanczos.

Dans ce chapitre nous allons utiliser les résultats précédemment obtenus sur les approximations de Padé vectoriels d'une fonction du type  $z \mapsto (I - zA)^{-1} X_0$  où  $A$  est une matrice carrée  $d \times d$ . Cette fonction étant rationnelle, il y a égalité entre la fonction et certains approximations d'une part. D'autre part  $(I - zA)^{-1} X_0$  peut être considérée comme la solution du système  $X = (zA)X + X_0$ . C'est cette situation que nous allons exploiter.

Récemment, Braziński a montré dans [4] que la méthode de Lanczos pour résoudre des systèmes linéaires est issue d'une généralisation de la méthode des moments de Vorobyev [7]. Si la méthode classique de Lanczos met en jeu une famille de polynômes orthogonaux formels [2], la généralisation obtenue

par Brezinski fait apparaître une famille de polynômes biorthogonale [3].

Nous allons justement montrer qu'apparaît de façon naturelle comme famille possible, les polynômes orthogonale rectangulaires de Van Isegem [6]. Plus généralement nous ferons le lien avec les résultats de Brezinski [4].

Dans ce chapitre, on conservera les notations du chapitre I.

### 1. Approximants de Padé de $z \mapsto (I - zA)^{-1}x_0$ .

On considère un endomorphisme  $A$  dans  $\mathbb{C}^d$ .

On identifiera au besoin  $A$  à sa matrice, notée encore  $A$ , dans la base canonique de  $\mathbb{C}^d$ . (Dans le chapitre I,  $A$  était une matrice carrée  $d \times d$ , nous reviendrons un peu plus loin sur ce fait.)

1.1 Soit  $F(z) = (I - zA)^{-1} X_0$ . Supposons que l'on ait  $\langle X_0, AX_0, \dots, A^{d-1} X_0 \rangle = \mathbb{C}^d$ .

La matrice  $A$  est donc cyclique et :

$$P_d^0 = \pi_A = P_A = \pi_{A, X_0}.$$

D'après le chapitre I, sans faire l'hypothèse  $A$  inversible puisque  $d=0$  :

$$(I - zA)^{-1} X_0 = [d-1 | d]_F(z)$$

Remarques :

a) si  $I - A$  est inversible on a :

$$(I - A)^{-1} X_0 = [d-1 | d](1) = Q_{d-1}(A) X_0$$

où  $Q_{d-1}$  est le polynôme de degré  $d-1$  défini par :

$$1 - \frac{P_d^0(t)}{P_d^0(1)} = (1-t) Q_{d-1}(t).$$

b)  $(I - A)^{-1} X_0$  est la solution du système :

$$X = AX + X_0$$

1.2 Plus généralement, supposons que l'on ait

$$\langle X_0, AX_0, \dots, A^{n-1} X_0 \rangle = \langle e_1, \dots, e_n \rangle = E_n.$$

Toujours d'après le chapitre I, l'approximant de Padé vectoriel  $[n-1 | n]_F(z)$  de  $F(z) = (I - zA)^{-1} X_0$

existe et est unique : son polynôme générateur,  $P_n^0$ , est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme  $A_n = \partial_n A$  restreint à  $E_n$  ( $\partial_n$  est la projection orthogonale sur  $E_n$ ).

De plus on a :

$$[z^{-1} | n]_F(z) = (I_n - z A_n)^{-1} x_0 \quad (I_n \text{ identité de } E_n)$$

car  $A_n^k = A^k$  pour  $k=0, \dots, n-1$ .

Voyons à présent à quelle condition on a  $P_n^0(1) \neq 0$ .

### Lemme 1

Soit  $B$  un endomorphisme de  $\mathbb{F}^d$  et  $x_0 \in \mathbb{F}^d$ .

Supposons que  $\langle x_0, Bx_0, \dots, B^{n-1}x_0 \rangle = E_n$ .

Alors  $\partial_n B = B_n$  est inversible si et seulement si

$$\begin{vmatrix} (x_0 | Bx_0) & \dots & (x_0 | B^{n-1}x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (B^{n-1}x_0 | Bx_0) & \dots & (B^{n-1}x_0 | B^n x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

preuve : soit  $X = \sum_{i=0}^{n-1} x_i B^i x_0 \in E_n$ , alors

$$BX = \sum_{i=0}^{n-1} x_i B^{i+1} x_0.$$

Ainsi  $\partial_n(BX) = 0$  si et seulement si pour tout  $k=0, \dots, n-1$

$$(B^k x_0 | BX) = 0, \text{ soit } \sum_{i=0}^{n-1} x_i (B^k x_0 | B^{i+1} x_0) = 0.$$

$B_n$  est donc inversible si et seulement si le système

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i (B^h x_0 | B^{i+h} x_0) = 0 \quad h=0, \dots, n-1 \text{ et de Gram,}$$

1. e si on a la condition du lemme  $\square$

### lemme 2

Soit  $B$  un endomorphisme de  $\mathbb{F}^d$  et  $x_0 \in \mathbb{F}^d$ .

Supposons que la famille  $(x_0, Bx_0, \dots, B^{n-1}x_0)$  soit libre.

Alors  $\langle x_0, Bx_0, \dots, B^{n-1}x_0 \rangle = \langle x_0, (I-B)x_0, \dots, (I-B)^{n-1}x_0 \rangle$ .

preuve : soit  $h \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , en utilisant la formule du binôme on voit que  $(I-B)^h x_0 \in \langle x_0, Bx_0, \dots, B^{n-1}x_0 \rangle$ .

donc que  $\langle x_0, (I-B)x_0, \dots, (I-B)^{n-1}x_0 \rangle \subset \langle x_0, Bx_0, \dots, B^{n-1}x_0 \rangle$

Par ailleurs considérons une combinaison linéaire nulle :

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 (I-B)x_0 + \dots + \alpha_{n-1} (I-B)^{n-1} x_0 = 0$$

$$\text{soit } \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \left( \sum_{j=0}^i (-1)^j B^j x_0 \right) = 0$$

$$\text{ou encore } \sum_{m=0}^{n-1} \left[ \sum_{i=m}^{n-1} (-1)^m \alpha_i C_i^m \right] B^m x_0 = 0$$

On obtient le système triangulaire suivant :

$$\alpha_0 C_0^0 + \alpha_1 C_1^0 + \dots + \alpha_{n-1} C_{n-1}^0 = 0$$

$$\alpha_1 C_1^1 + \dots + \alpha_{n-1} C_{n-1}^1 = 0$$

$$\vdots$$

$$\alpha_{n-1} C_{n-1}^{n-1} = 0$$

d'où  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ , et l'égalité désirée  $\square$

En utilisant les lemmes 1 et 2, on peut énoncer :

Théorème 1

Soit  $A$  un endomorphisme de  $\mathbb{F}^d$  et  $x_0 \in \mathbb{F}^d$ .

Supposons que  $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1}x_0 \rangle = E_n$ .

Soit alors  $P_n^0$  le polynôme générateur de  $[n-1|n]_{\mathbb{F}}$ , qui est aussi le polynôme caractéristique de  $A_n = \partial_n A$ .

$$\text{Si } \begin{vmatrix} (x_0 | (I-A)x_0) & \dots & (x_0 | (I-A)^{n-1}x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ ((I-A)^{n-1}x_0 | (I-A)x_0) & \dots & ((I-A)^{n-1}x_0 | (I-A)^{n-1}x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

alors  $P_n^0(1) \neq 1$  (i.e.  $I_n - A_n$  est inversible)

et si  $Q_{n-1}$  désigne le polynôme défini par

$$1 - \frac{P_n^0(t)}{P_n^0(1)} = (1-t) Q_{n-1}(t) \quad \text{alors}$$

$$(I_n - A_n)^{-1} x_0 = [n-1|n]_{\mathbb{F}}(1) = Q_{n-1}(A_n) \cdot x_0 = Q_{n-1}(A) \cdot x_0.$$

1.3 On s'intéresse à présent au système :

$$AX = x_0 \quad (A \text{ inversible}).$$

On peut l'écrire  $(I-B)X = x_0$  avec  $B = I-A$

Commençons tout d'abord par le résultat suivant :

### Lemme 3

Soit  $\pi_A$  le polynôme minimal de  $A$  et  $\pi_B$  le polynôme minimal de  $B$ .

Si  $B = I - A$ , alors  $\pi_B(x) = \pi_A(1-x)$ .

(et on a le même résultat pour les polynômes caractéristiques, et les polynômes minimaux pour un vecteur).

preuve : on a  $\pi_A(I-B) = \pi_A(A) = 0$ , donc  $\pi_B$  divise  $\pi_A(1-x)$ .

De même  $\pi_A$  divise  $\pi_B(1-x)$ .

On a  $\partial^\circ \pi_A(1-x) = \partial^\circ \pi_A$ , ainsi  $\partial^\circ \pi_B \leq \partial^\circ \pi_A$ .

$\partial^\circ \pi_B(1-x) = \partial^\circ \pi_B$ , ainsi  $\partial^\circ \pi_A \leq \partial^\circ \pi_B$ .

En conclusion  $\partial^\circ \pi_A = \partial^\circ \pi_B$ , d'où  $\pi_B(x) = \pi_A(1-x)$   $\square$ .

A présent, supposons que  $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1}x_0 \rangle = E_n$  et que  $\partial_n A$  soit inversible.

On a alors  $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1}x_0 \rangle = \langle x_0, Bx_0, \dots, B^{n-1}x_0 \rangle = E_n$  et  $B_n = I_n - A_n$ .

Désignons par :

$P_n^\circ$  le polynôme générateur de  $[n-1/n]_F$  où  $F(z) = (I - zA)^{-1}x_0$

$P$  le polynôme générateur de  $[n-1/n]_G$  où  $G(z) = (I - zB)^{-1}x_0$

Appliquons à  $B$  le théorème 1 :

$$(I_n - B_n)^{-1} X_0 = Q(B) X_0 \quad \text{où } Q \text{ est le polynôme défini par } 1 - \frac{P(x)}{P(1)} = (1-x) Q(x).$$

$P$  étant le polynôme caractéristique (et d'ailleurs aussi le polynôme minimal) de  $B_n$ , on a d'après le lemme 3 la relation  $P(x) = P_n^0(1-x)$ . On en déduit que  $1 - \frac{P_n^0(1-x)}{P_n^0(0)} = (1-x) Q(x)$ , soit

$$1 - \frac{P_n^0(x)}{P_n^0(0)} = x Q(1-x) = x V_{n-1}(x).$$

En conclusion on a obtenu le résultat suivant :

$$A_n^{-1} \cdot X_0 = (I_n - B_n)^{-1} X_0 = V_{n-1}(I - B) X_0$$

$$\text{soit } A_n^{-1} \cdot X_0 = V_{n-1}(A) \cdot X_0.$$

On résume notre étude par le théorème suivant :

## Théorème 2

Soit  $A$  un endomorphisme de  $\mathbb{C}^d$  et  $x_0 \in \mathbb{C}^d$ .  
Supposons que  $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{n-1}x_0 \rangle = E_n$  et que

$$\begin{vmatrix} (x_0 | Ax_0) & \dots & (x_0 | A^n x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (A^{n-2}x_0, Ax_0) & \dots & (A^{n-2}x_0 | A^n x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

( $E_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$  ( $e_i$ )<sub>1 ≤ i ≤ d</sub> base canonique de  $\mathbb{C}^d$ ).

On considère le système linéaire :

$$\partial_n A X = X_0, \quad X \in E_n.$$

Alors  $\partial_n A$  est inversible et la solution du système est :  $X = V_{n-1}(A) \cdot X_0$  où  $V_{n-1}$  est le polynôme défini par la relation  $1 - \frac{P_n^0(x)}{P_n^0(0)} = x V_{n-1}(x)$

avec  $P_n^0$  polynôme caractéristique de  $A_n = \partial_n A$ ,  
et aussi polynôme générateur de l'approximant de Padé vectoriel  $[n-1/n]$  de  $F(z) = (I - zA)^{-1} X_0$ .

Nous allons à présent utiliser ces résultats pour

la résolution de systèmes linéaires dans  $\mathbb{C}^d$ .

## 2. La méthode de Lanczos.

On considère dans  $\mathbb{C}^d$  le système linéaire :

$$(*) \quad Ax = b \quad (A \text{ matrice inversible})$$

Soit  $x_0 \in \mathbb{C}^d$ , on pose  $r_0 = b - Ax_0$ .

On suppose dans ce paragraphe que pour tout  $k = 1, \dots, m$  où  $m$  est le degré du polynôme minimal de  $A$  pour  $r_0$ , on a :

$$\langle r_0, Ar_0, \dots, A^{k-1} r_0 \rangle = E_k = \langle e_1, \dots, e_k \rangle.$$

Cette hypothèse semble très restrictive : nous ferons à ce sujet des remarques dans le paragraphe 3, et d'autre part dans le chapitre I de la première partie nous avons donné un exemple important d'opérateur  $A$  vérifiant cette condition.

En posant  $x = x_0 + z$ , le système (\*) devient :

$$Az = r_0. \quad \text{On résout ensuite le}$$

système  $\exists_k A z = r_0$  dans  $E_k$ . On applique pour cela le théorème 2, la condition

$$\begin{vmatrix} (\lambda_0 | A \lambda_0) & \dots & (\lambda_0 | A^k \lambda_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (A^{k-1} \lambda_0 | A \lambda_0) & \dots & (A^{k-1} \lambda_0 | A^k \lambda_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

devant être réalisée :

la solution dans  $E_k$  du système est

$$z_k = V_{k-1}(A) \lambda_0 \quad \text{où } V_{k-1} \text{ est le polynôme défini par } 1 - \frac{P_k^0(x)}{P_k^0(0)} = x V_{k-1}(x) \quad \text{où } P_k^0 \text{ est le}$$

polynôme générateur de l'approximant de Padé vectoriel  $[k-1|k]$  de la fonction  $z \mapsto (I - zA)^{-1} \lambda_0$ .

On pose ensuite :

$$\begin{cases} x_k = x_0 + z_k \\ \lambda_k = b - Ax_k \end{cases} ,$$

$$\begin{aligned} \text{ainsi } \lambda_k &= b - Ax_k = b - A(x_0 + V_{k-1}(A) \lambda_0) \\ &= \lambda_0 - AV_{k-1}(A) \lambda_0 \\ &= \frac{P_k^0(A)}{P_k^0(0)} \lambda_0 \end{aligned}$$

Par définition des polynômes orthogonaux vectoriels on a de plus  $P_k^0(A)$  orthogonal à  $E_k$ .

De plus, comme  $r_m = 0$ , on obtient  $Ax_m = b$ .

Tout le problème est donc de calculer les polynômes  $(P_k^0)_{k \geq 0}$ . Ces calculs peuvent être effectués en utilisant les relations de récurrence données dans le paragraphe 1 de Chapitre I de la première partie.

Faisons maintenant quelques remarques au sujet des différentes hypothèses.

### 3. Remarques et extensions

#### a) Polynômes biorthogonaux

Considérons les polynômes biorthogonaux les plus généraux [3]: on se donne une famille libre  $(L_i)_{i \geq 0}$  de formes linéaires sur  $\mathbb{C}[X]$ , et on s'intéresse aux polynômes  $(P_k)_{k \geq 0}$  vérifiant les relations  $L_i(P_k) = 0$  pour  $i = 0, \dots, k-1$ .

Les polynômes orthogonaux rectaies de dimension  $n$  en sont un cas particulier lorsque les formes linéaires  $L_i$  vérifient

$$(1) \quad L_i(x^{i+1}) = L_{i+n}(x^i)$$

Dans les paragraphes 1 et 2 nous avons considéré les polynômes rectaies de dimension  $n = d$  où  $d$  est la dimension de l'espace dans lequel nous travaillons. Nous nous sommes restreints aux polynômes  $(P_k)$  avec  $k \leq d$  : nous n'avons donc pas utilisé la relation (1).

$$b) \quad \underline{\text{L'hypothèse } \langle x_0, Ax_0, \dots, A^{k-1}x_0 \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle}$$

La famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$  désigne toujours la base canonique de  $\mathbb{C}^d$ . Le polynôme orthogonal rectaie  $P_k^0$  est défini par : ( $k \leq d$ )

$$(e_i | P_k^0(A)x_0) = 0 \quad i = 1, \dots, k.$$

On cherche à exprimer ces relations en terme de projection sur le sous-espace  $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{k-1}x_0 \rangle$ .

Si on fait l'hypothèse  $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{k-1}x_0 \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ ,

La projection oblique n'est rien d'autre que la projection orthogonale sur  $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{k-1}x_0 \rangle$ .

D'autre part on a immédiatement la matrice de l'opérateur  $A_k$  dans la base canonique : c'est la matrice obtenue à partir de celle de  $A$  en considérant les  $k$  premières lignes et les  $k$  premières colonnes.

Supposons que  $\langle x_0, Ax_0, \dots, A^{k-1}x_0 \rangle = E_k$  avec  $\dim E_k = k$  ( $E_k$  n'est plus nécessairement égal à  $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ ). Faisons toujours l'hypothèse d'existence et d'unicité du polynôme  $P_k^0$ , i.e

$$\begin{vmatrix} (e_1 | x_0) & \dots & (e_1 | A^{k-1}x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_k | x_0) & \dots & (e_k | A^{k-1}x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Comme la famille  $(x_0, Ax_0, \dots, A^{k-1}x_0)$  est libre, cela signifie que la famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq k}$  considérée comme famille de formes linéaires sur  $E_k$  est libre [5]. On peut donc prendre comme projection, la projection oblique sur  $E_k$  construite en orthogonalisant les familles  $(x_0, Ax_0, \dots, A^{k-1}x_0)$  et  $(e_1, \dots, e_k)$  [3][5].

On obtient alors un opérateur  $A_n$  de  $E_n$  dont le polynôme caractéristique est  $P_n^0$ .

c) Généralisation de la table de Padé.

On va généraliser ce qui précède en considérant la troisième généralisation de la table de Padé donnée par Brezinski dans [1]. Rappelons cette

généralisation: soient  $L_1, \dots, L_h$  des formes linéaires indépendantes sur  $\mathbb{C}^d$ ,  $f(z) = \sum_{i \geq 0} c_i z^i$

où  $z \in \mathbb{C}$ ,  $c_i \in \mathbb{C}^d$  une série formelle vectorielle,

pour  $p \geq q-1$  on pose:

$$[p/q] = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{p-q} c_i z^{q+i} & \dots & \sum_{i=0}^p c_i z^i \\ L_1(c_{p-q+1}) & \dots & L_1(c_{p+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ L_h(c_{p-q+1}) & \dots & L_h(c_{p+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z^q & \dots & 1 \\ L_1(c_{p-q+1}) & \dots & L_1(c_{p+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ L_h(c_{p-q+1}) & \dots & L_h(c_{p+1}) \end{vmatrix}}$$

Le cas des approximants de Padé vectoriels de

Van Isegem correspond à  $L_i = e_i$ .

On s'intéresse à  $f(z) = \sum_{i \geq 0} z^i A^i x_0$ . Pour  $h \leq d$   
on considère donc les polynômes :

$$P_h(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & x^k \\ L_1(x_0) & \dots & L_1(A^k x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_h(x_0) & \dots & L_h(A^k x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1(x_0) & \dots & L_1(A^{k-1} x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ L_h(x_0) & \dots & L_h(A^{k-1} x_0) \end{vmatrix}}$$

On a alors  $P_h(A)x_0 = 0$ , i.e.  $L_i(P_h(A)x_0) = 0$   
pour  $i = 1 \text{ à } h$ . Notons  $u_i = A^i x_0$  : on  
biorthogonalise  $(L_j, u_i)$  en  $(L_j^*, u_i^*)$

$$\left( (L_j^*, u_i^*) = \delta_{ij}, u_i^* \in E_h = \langle u_0, \dots, u_{h-1} \rangle \right. \\ \left. L_j^* \in \langle L_1, \dots, L_{h-1} \rangle \quad i=0, \dots, h-1 \text{ et } j=1, \dots, h \right)$$

Soit  $P_h(x) = \sum_{i=0}^{h-1} L_{i+1}^*(x) u_i^*$  :  $P_h$  est une projection

sur  $E_h$  et les conditions  $L_i(P_h(A)x_0) = 0 \quad i=1 \text{ à } h$   
sont équivalentes à  $P_h(P_h(A)x_0) = 0$ .

En notant  $A_h = P_h A$  (restreint à  $E_h$ ), le  
polynôme  $P_h$  n'est rien d'autre que le polynôme  
caractéristique  $A_h$  opérateur cyclique de  $E_h$ .

Les conclusions du théorème 2 restent alors valables et

on retrouve la généralisation de la méthode  
de Lanczos [4] .

Références du chapitre II, première partie.

- [1] C. Brezinski, Accélération de la convergence en Analyse Numérique, Springer Verlag, Berlin, 1977.
- [2] C. Brezinski, Padé - type Approximations and General Orthogonal Polynomials, ISNM vol 50, Birkhäuser, Basel, 1980.
- [3] C. Brezinski, Biorthogonality and its applications to Numerical Analysis, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [4] C. Brezinski, The Theory of Lanczos Method, ANO, 1991.
- [5] P.J Davis, Interpolation and Approximation, Dover, New York, 1975.
- [6] J. Van Iseghem, Vector orthogonal relation. Vector Q.D algorithm, J. Comp. Appl. Math 19 (1987) 141-150.
- [7] Yu. V. Vorobyev, Method of Moments in Applied Mathematics, Gordon and Breach, New York, 1965.

### Chapitre III

Convergence de l'algorithme Q.D. réel  
dans le cas de  $z \mapsto (f(z), f'(z))$  où  $f$   
est une fonction "lisse" au sens de Lubinsky.

L'étude des approximations de type Padé [1]  
d'une fonction  $f$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , développable en  
série entière au voisinage de zéro,  $f(z) = \sum_{i \geq 0} a_i z^i$ ,

conduit aux polynômes  $(P_n^\delta)_{s,n}$  :

$P_n^\delta$  existe et est unique si et seulement si le  
determinant de Hankel,  $H_n^\delta = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{s+n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s+n-1} & \dots & a_{s+2n-2} \end{vmatrix}$

est non nul. Sous cette condition  $P_n^\delta$  s'exprime de  
la façon suivante :

$$P_n^\delta(x) = \frac{H_n^\delta(x)}{H_n^\delta} \quad \text{ou} \quad H_n^\delta(x) = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & a_{s+n-1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s+n-1} & \dots & a_{s+2n-1} & x^n \end{vmatrix} .$$

Les polynômes  $\tilde{P}_n^\delta$ , i.e.  $\tilde{P}_n^\delta(x) = x^n P_n^\delta\left(\frac{1}{x}\right)$ , sont les dénominateurs des approximations de Padé  $[n+\delta-1/n]$  de  $f$ . De plus  $\delta$  étant fixé, la famille  $(P_n^\delta)_n$  constitue la famille des polynômes orthogonaux associés à la fonctionnelle  $a^\delta$  (i.e.  $a^\delta(x^i) = a_{i+\delta}$ ).

Par ailleurs on a la relation de récurrence suivante:

$$(*) \quad P_{n+1}^\delta(x) = x P_n^{\delta+1}(x) - q_{n+1}^\delta P_n^\delta(x) \quad (n \geq 0, \delta \geq 0)$$

$$P_0^\delta \equiv 1 \quad (\delta \geq 0)$$

$$\text{ou} \quad q_{n+1}^\delta = \frac{H_{n+1}^{\delta+1} \times H_n^\delta}{H_{n+1}^\delta \times H_n^{\delta+1}}$$

Les quantités  $(q_n^\delta)$  se calculent à l'aide de l'algorithme Q.D. de Rutishauser [4].

De nombreux résultats de convergence sur les  $P_n^\delta$  existent : on pourra consulter [2] d'une part et d'autre part nous rappellerons certains résultats plus loin.

La relation (\*) nous suggère l'idée suivante : si l'on arrive à connaître le comportement

de la suite  $(q_{n+1}^{\circ})_{n \geq 0}$  ( $n$  est donc fixé),

en utilisant (\*) et en raisonnant par récurrence sur  $n$  on doit obtenir des résultats de convergence pour les suites  $(P_n^{\circ})_{n \geq 0}$ . L'intérêt de cela est, comme nous l'avons vu au chapitre I de la première partie, que la relation (\*) subsiste dans le cas vectoriel.

Nous allons développer cette idée dans le cas d'une fonction  $z \mapsto (f(z), f'(z))$  ( $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ).

Pourquoi en tel chose ? Il y a deux motivations:

\* approcher simultanément une fonction et sa dérivée (on trouvera dans [3] une approche "scalaire" de ce problème, où il est fait usage des polynômes de Bernstein)

\* avoir un lien étroit entre les coefficients des deux séries concernées dans le cas d'une fonction de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}^2$ .

### 1. Le cas scalaire.

1.1 Citons un premier résultat dans le

cas d'une fonction méromorphe :

Théorème 1 [4] p 626

Soit  $f$  analytique en 0, méromorphe dans  $D = \{ |z| < R \}$

Soit  $z_i$  les pôles de  $f$  dans  $D$  :  $0 < |z_1| < |z_2| < \dots < R$ .

Si  $n$  est tel que  $|z_n| < |z_{n+1}|$  alors

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} P_n^\delta(u) = (u - u_1)(u - u_2) \dots (u - u_n)$$

uniformément sur les compacts de  $\mathbb{C}$ . ( $u_i = z_i^{-1}$ )

Remarque : On obtient le même résultat en utilisant (\*), avec cependant des hypothèses plus fortes.

En effet, toujours d'après [4], pour avoir un résultat de convergence sur  $(q_n^\delta)_{\delta \geq 0}$  on doit

supposer que  $|z_{n-1}| < |z_n| < |z_{n+1}|$ , auquel cas

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} q_n^\delta = \frac{1}{z_n}. \text{ Supposons que } 0 < |z_1| < |z_2| < \dots :$$

pour tout  $n$  on aura donc  $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} q_n^\delta = a_n$ .

Pourtant de  $P_0^\delta \equiv 1$  ( $\delta \geq 0$ ) on a d'après (\*):

$$P_1^\delta(x) = x P_0^{\delta+1}(x) - q_1^\delta P_0^\delta(x) = x - q_1^\delta \text{ et}$$

ainsi  $\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} P_n^\Delta(x) = x - u_1$  sur les compacts

de  $\mathbb{C}$ . Supposons que  $\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} P_n^\Delta(x) = (x - u_1)(x - u_2) \dots (x - u_n)$ :

$$P_{n+1}^\Delta(x) = x P_n^{\Delta+1}(x) - q_{n+1}^\Delta P_n^\Delta(x).$$

En passant à la limite, on a uniformément sur tout compact de  $\mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} P_{n+1}^\Delta(x) &= x (x - u_1)(x - u_2) \dots (x - u_n) \\ &\quad - u_{n+1} (x - u_1) \dots (x - u_n) \\ &= (x - u_1)(x - u_2) \dots (x - u_n)(x - u_{n+1}). \end{aligned}$$

On obtient donc le résultat désiré pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Examinons à présent le comportement asymptotique des  $H_n^\Delta$  avec d'autres hypothèses sur  $f$ .

### 1.2 Cas des fonctions "lisses" au sens de Zubairy.

Soit  $f(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$  avec  $a_j \in \mathbb{C}^*$  pour tout  $j$ .

On suppose que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{a_{j-1} \times a_{j+1}}{a_j^2} = q \in \mathbb{C}$  (fonction "lisse")

On remarque en particulier que si  $|q| < 1$ ,  $f$  est une fonction entière d'ordre zéro.

Urbinsky [5] a obtenu le résultat suivant sur les déterminants de Toeplitz  $D(\delta | n)$  :

$$(-1)^n H_n^\delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D(\delta + n - 1 | n)$$

### Théorème 2 [5]

Soit  $f(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$  avec  $a_j \neq 0$  pour  $j$  assez grand, et

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{a_{j-1} \times a_{j+1}}{a_j^2} = q \in \mathbb{C}.$$

On a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{D(\delta | n)}{a_n^n} = \prod_{j=1}^{n-1} (1 - q^j)^{n-j} \quad (n \text{ est fixé})$$

Remarquons que si  $q$  n'est pas une racine de l'unité  $\prod_{j=1}^{n-1} (1 - q^j)^{n-j} \neq 0$ , - ce qui nous permet alors de faire des quotients de déterminants de Toeplitz.

On a alors :

### Corollaire 1

Avec les hypothèses précédentes et si  $q$  n'est pas une racine de l'unité, - on a :  $n$  étant fixé,

$$q_n^\delta = \frac{a_{n+\delta}}{a_{n+\delta-1}} q^{n-1} (1 + o(n)) \text{ quand } \delta \text{ tend vers } +\infty$$

preuve :

$$\text{On a } q_n^\Delta = \frac{H_n^{\Delta+1} \times H_{n-1}^\Delta}{H_n^\Delta \times H_{n-1}^{\Delta+1}} = \frac{D(n+\Delta/n) \times D(\Delta+n-2/n-1)}{D(n+\Delta-1/n) \times D(n+\Delta-1/n-1)}$$

$$q_n^\Delta = \frac{\left[ \frac{D(n+\Delta/n)}{(a_{n+\Delta})^2} \right]}{\left[ \frac{D(n+\Delta-1/n)}{(a_{n+\Delta-1})^2} \right]} \times \frac{\left[ \frac{D(n+\Delta-2/n-1)}{(a_{n+\Delta-2})^{n-1}} \right]}{\left[ \frac{D(n+\Delta-1/n-1)}{(a_{n+\Delta-1})^{n-1}} \right]} \times \left( \frac{a_{n+\Delta} \times a_{n+\Delta-2}}{(a_{n+\Delta-1})^2} \right)^{n-1} \times \frac{a_{n+\Delta}}{a_{n+\Delta-1}}$$

En utilisant le théorème 2, on a le résultat annoncé  $\square$ .

Remarques :

a) on peut démontrer le résultat du corollaire 1, directement en utilisant les règles de calcul du Q.D algorithme :

supposons que  $\frac{a_{j+1} \times a_{j-1}}{(a_j)^2} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} q \in \mathbb{C}^*$  non racine de l'unité

et considérons (notations habituelles du Q.D [4])

la propriété

$$(R_m) \begin{cases} q_m^m \underset{m \rightarrow +\infty}{=} \frac{a_{m+m}}{a_{m+m-1}} q^{m-1} (1+o(1)) \\ e_m^m \underset{m \rightarrow +\infty}{=} \frac{a_{m+m}}{a_{m+m-1}} (q^m - 1) (1+o(1)) \end{cases}$$

On a :

$$e_1^m = q_1^{m+1} - q_1^m = \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} - \frac{a_{m+1}}{a_m} \quad (\text{d'après}$$

l'initialisation du Q.D.), d'où

$$e_1^m = \frac{a_{m+1}}{a_m} \left[ \frac{a_{m+2} \times a_m}{(a_{m+1})^2} - 1 \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{a_{m+1}}{a_m} (q-1) (1+o(1))$$

(R<sub>1</sub>) est donc vraie. Supposons (R<sub>m</sub>) vraie :

au rang  $m+1$  on a ainsi

$$\begin{aligned} q_{m+1}^m &= \frac{\frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} (q^m - 1) (1+o(1))}{\frac{a_{m+n}}{a_{m+n-1}} (q^m - 1) (1+o(1))} \times \frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} q^{m-1} (1+o(1)) \\ &= \frac{a_{m+n+1} \times a_{m+n-1}}{(a_{m+n})^2} \times \frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} q^{m-1} (1+o(1)) \\ &= \frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} q^m (1+o(1)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e_{m+1}^m &= \left[ \frac{a_{m+n+2}}{a_{m+n+1}} q^m (1+o(1)) - \frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} q^m (1+o(1)) \right] \\ &\quad + \frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} (q^m - 1) (1+o(1)) \end{aligned}$$

$$= \frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} \left[ \frac{a_{m+n} \times a_{m+n+2}}{(a_{m+n+1})^2} q^m (1+o(1)) - q^m (1+o(1)) + (q^m - 1) (1+o(1)) \right]$$

$$= \frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} \left[ q^{m+1} (1+o(1)) - q^m (1+o(1)) + (q^m - 1) (1+o(1)) \right]$$

$$= \frac{a_{m+n+1}}{a_{m+n}} \left[ q^{m+1} - 1 \right] (1+o(1))$$

$(R_{m+1})$  est donc vraie

En conclusion  $(R_m)$  est vraie pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ .

f) Dans la démonstration du théorème 2, Lubinsky a prouvé dans un premier temps que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} D(m|m) / a_m^m = \det \left( q^{(k-j)(k-j-1)/2} \right)_{j,k=1}^m$$

Ensuite, en raisonnant par récurrence et en utilisant l'identité de Jacobi [4] l'auteur a montré que le membre de droite est égal à  $\prod_{j=1}^{m-1} (1-q^j)^{m-j}$ .

Provoons ce résultat directement.

Soit  $A = \left( q^{(k-j)(k-j-1)/2} \right)_{1 \leq j, k \leq n}$  On a :

$$A = BVC \quad \text{ou} \quad \begin{cases} B = \left( q^{\frac{j^2+j}{2}} \delta_{jk} \right)_{j,k=1}^n \\ V = \left( (q^{-j})^k \right)_{j,k=1}^n \\ C = \left( q^{\frac{k^2-k}{2}} \delta_{jk} \right)_{j,k=1}^n \end{cases}$$

( $\delta_{jk}$  étant le symbole de Kronecker)

B et C sont des matrices diagonales donc,

$$\det B = q^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j^2+j)} \quad \text{et} \quad \det C = q^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j^2-j)}$$

Par ailleurs,  $\det V = q^{-\sum_{j=1}^n j} \det \left( (q^{-j})^{k-1} \right)$

soit  $\det V = q^{-\sum_{j=1}^n j} q^{\sum_{j=1}^n (j-j^2)} \prod_{j=1}^{n-1} (1-q^j)^{n-j}$  matrice de Vandermonde

car  $\det \left( (q^{-j})^{k-1} \right)_{j,k=1}^n = \prod_{k=2}^n \prod_{j=1}^{k-1} (q^{-k} - q^{-j})$

$$= \prod_{k=2}^n (q^{-k})^{k-1} \prod_{j=1}^{k-1} (1 - q^{k-j})$$

$$= q^{-2} \times (q^{-3})^2 \times \dots \times (q^{-n})^{n-1} \prod_{k=2}^n \prod_{j=1}^{k-1} (1 - q^{k-j})$$

$$= q^{\sum_{j=1}^n (j-j^2)} \prod_{j=1}^{n-1} (1 - q^j)^{n-j}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \det A &= \det B \times \det V \times \det C \\ &= q^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (j^2+j)} \times q^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (j^2-j)} \times q^{-\sum_{j=1}^m j} \times q^{\sum_{j=1}^m (j-j^2)} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^{m-1} (1-q^j)^{m-j} \\ &= \prod_{j=1}^{m-1} (1-q^j)^{m-j} \quad \square \end{aligned}$$

Revenons à la relation de récurrence (\*):

on peut l'écrire,

$$\widetilde{P}_{n+1}^\Delta(x) = \widetilde{P}_n^\Delta(x) - x q_{n+1}^\Delta \times \widetilde{P}_n^\Delta(x)$$

et ainsi

$$\widetilde{P}_{n+1}^\Delta \left( x \frac{a_{n+\delta}}{a_{n+\delta+1}} \right) = \widetilde{P}_n^{\Delta+1} \left( x \frac{a_{n+\delta}}{a_{n+\delta+1}} \right) - x q_{n+1}^\Delta \times \frac{a_{n+\delta}}{a_{n+\delta+1}} \widetilde{P}_n^\Delta \left( x \frac{a_{n+\delta-1}}{a_{n+\delta}} \times \frac{a_{n+\delta}^2}{a_{n+\delta-1} \times a_{n+\delta+1}} \right).$$

Montrons par récurrence que :

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \widetilde{P}_n^\Delta \left( x \frac{a_{n+\delta-1}}{a_{n+\delta}} \right) = B_n(x) \quad \text{uniformément}$$

sur les compacts de  $\mathbb{C}$ , où les  $B_n$  sont les polynômes de Rogers - Szegő [6] définis par

$$\begin{cases} B_{n+1}(x) = B_n(x) - x q^n B_n(x q^{-1}) \\ B_0(x) \equiv 1. \end{cases}$$

En utilisant le développement asymptotique de  $q_{n+1}^\delta$ ,  $\delta \rightarrow +\infty$ , et la relation précédente on obtient le résultat voulu.

Nous allons procéder de même dans le cas vectoriel.

## 2. Le cas vectoriel.

On se place sur  $\mathbb{C}^2$  et on considère la fonction  $F(z) = (f(z), f'(z))$  où  $f(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$  ( $a_j \in \mathbb{C}^*$  pour tout  $j$ ) est une fonction "lisse" au sens de Lubinsky, i.e.  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{a_{j+1} \times a_{j-1}}{a_j^2} = q \in \mathbb{C}$ .

$$\text{On notera } q_j = \frac{a_{j+1} \times a_{j-1}}{a_j^2}.$$

Commençons par établir un résultat sur le comportement asymptotique des déterminants de Hankel généralisés  $H_n^\delta$  quand  $\delta$  tend vers  $+\infty$ .

### Théorème 3

Soit  $F(z) = (f(z), f'(z))$  avec  $f(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$

où  $\lim_{j \rightarrow +\infty} q_j = q \in \mathbb{C}$  ( $q_j = \frac{a_{j+1} \times a_{j-1}}{2}$ ).

On considère les déterminants de Hankel généralisés,  $H_n^\delta$ , associés à  $F$ .

Soit  $n \in \mathbb{N} : n = 2m + h$  ( $h = 0$  ou  $1$ )

Les quantités suivantes ont une limite quand  $\delta$  tend vers  $+\infty$  ( $n$  fixée), notée  $S_n(q)$  :

$$\frac{H_n^\delta}{\delta (a_{\delta+m})^2 \times \dots \times (a_{\delta+n-1})^2} \quad (n \text{ pair})$$

$$\frac{H_n^\delta}{a_{\delta+m} (a_{\delta+m+1})^2 \times \dots \times (a_{\delta+n-1})^2} \quad (n \text{ impair})$$

démonstration : a a

$$H_n^\delta = \begin{vmatrix} a_\delta & \dots & a_{n+\delta-1} \\ (\delta+1) a_{\delta+1} & \dots & (n+\delta) a_{n+\delta} \\ a_{\delta+1} & \dots & a_{n+\delta} \\ (\delta+2) a_{\delta+2} & \dots & (n+\delta+1) a_{n+\delta+1} \\ \vdots & & \\ a_{\delta+m-1} & \dots & a_{n+\delta+m-2} \\ (\delta+m) a_{\delta+m} & \dots & (n+\delta+m-1) a_{n+\delta+m-1} \\ (a_{\delta+m})^{(h)} & \dots & a_{n+\delta+m-1}^{(h)} \end{vmatrix}$$

Si  $n$  est pair, par des combinaisons entre lignes il ne restera de coefficients avec  $\delta$  qu'à la dernière ligne.

Si  $n$  est impair, il ne restera plus de coefficients avec  $\delta$ .

Plaçons nous en  $(i, j)$  :

$i = 2\theta_i + k_i$  ( $k_i = 0$  ou  $1$ ), on aura comme terme  $a_{\delta + \theta_i + j - 1}$  ou  $(\theta_i + j - 1) a_{\delta + \theta_i + j - 1}$

en  $(i, n+1-i)$  on aura  $a_{\delta + \theta_i + n - i}$

Multiplicons la  $i^{\text{ème}}$  ligne par  $\left(\frac{a_{n+\delta-1}}{a_{n+\delta-2}}\right)^{n+i+1}$ , et

la  $j^{\text{ème}}$  colonne par  $\left(\frac{a_{n+\delta-1}}{a_{n+\delta-2}}\right)^{-j}$ , on obtiendra

alors en  $(i, j)$  dans  $\frac{H_n^\delta}{\delta(a_{\delta+n})^2 - (a_{\delta+n-1})^2}$  ou dans

$\frac{H_n^\delta}{a_{\delta+n} (a_{\delta+n+1})^2 - (a_{\delta+n-1})^2}$ , à un coefficient près :

$$\left(\frac{a_{\delta + \theta_i + j - 1}}{a_{\delta + \theta_i + n - i}}\right) \left(\frac{a_{n+\delta}}{a_{n+\delta-1}}\right)^{n+1 - (i+j)}$$

Posez  $t = i + j - (n+1)$  et  $m_i = \delta + \theta_i + n - i$ .

$$\frac{a_{\delta + \theta_i + j - 1}}{a_{\delta + \theta_i + n - i}} = \frac{a_{m_i + t}}{a_{m_i}}$$

Supposons par exemple que  $t > 0$ :

$$\frac{a_{m_i + t}}{a_{m_i}} = \prod_{l=0}^{t-1} \frac{a_{m_i + l + 1}}{a_{m_i + l}}$$

$$\text{Or } \frac{a_{m_i + l + 1}}{a_{m_i + l}} = q_{m_i + l} \times \dots \times q_{m_i + 1} \times \frac{a_{m_i + 1}}{a_{m_i}}$$

$$\text{d'où } \frac{a_{m_i + t}}{a_{m_i}} \underset{\delta \rightarrow +\infty}{=} q^{\frac{t(t-1)}{2}} \left( \frac{a_{m_i + 1}}{a_{m_i}} \right)^t (1 + o(1))$$

Il reste à examiner alors:

$$\left( \frac{a_{m_i + 1}}{a_{m_i}} \times \frac{a_{n + \delta - 1}}{a_{n + \delta}} \right)^t$$

$$\frac{a_{n + \delta}}{a_{n + \delta - 1}} = \frac{a_{m_i + l + 1}}{a_{m_i + l}} \text{ avec } l = i - \theta_i - 1$$

$$\text{d'où } \frac{a_{n + \delta}}{a_{n + \delta - 1}} = \prod_{k=1}^{i - \theta_i - 1} (q_{m_i + k}) \frac{a_{m_i + 1}}{a_{m_i}}$$

$$\text{d'où } \left( \frac{a_{m_i + 1}}{a_{m_i}} \times \frac{a_{n + \delta - 1}}{a_{n + \delta}} \right)^t = \left( \prod_{k=1}^{i - \theta_i - 1} (q_{m_i + k})^{-1} \right)^t$$

En conclusion, en passant à la limite dans  $\text{I}$  ou  $\text{II}$  on obtient un déterminant dont le terme  $(i, j)$  vaut, à un coefficient près,

$$q^{(\theta_i + 1 - i)t} \times q^{\frac{t(t-1)}{2}}$$

$$\text{où } \begin{cases} t = i + j - (n+1) \\ j = 2\theta_i + ki \quad (k_i = 0 \text{ ou } 1) \end{cases} \quad \blacksquare$$

Remarque

$\mathcal{P}_n(q)$  est une fonction rationnelle en  $q$ .

exemples

$$\mathcal{P}_2(q) = q - 1 \quad ; \quad \mathcal{P}_3(q) = -(q - 1)^2$$

$$\mathcal{P}_4(q) = (q - 1)^4 (q^2 - 1) \quad ; \quad \mathcal{P}_5(q) = (q - 1)^6 (q^2 - 1)^2.$$

Corollaire 2.

$$\text{Soit } n = 2m + k \quad (k = 0 \text{ ou } 1). \quad \text{Si } \begin{cases} \mathcal{P}_n(q) \neq 0 \\ \mathcal{P}_{n-1}(q) \neq 0 \end{cases}$$

$$m - a \quad q_n^{\delta} = q^{n-1} \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m}} (1 + o(1)) \quad \text{quand } \delta \rightarrow +\infty$$

preuve : montrons le dans le cas  $n$  pair.

On a :

$$q_n^\delta = \frac{H_n^{\delta+1}}{(\delta+1)(a_{\delta+m+1})^2 \dots (a_{\delta+n})^2} + \frac{H_{n-1}^\delta}{a_{\delta+m-1}(a_{\delta+m})^2 \dots (a_{\delta+n-2})^2}$$

$$\frac{H_n^\delta}{\delta(a_{\delta+m})^2 \dots (a_{\delta+n-1})^2} + \frac{H_{n-1}^{\delta+1}}{a_{\delta+m}(a_{\delta+m+1})^2 \dots (a_{\delta+n-1})^2}$$

$$\times \frac{(\delta+1)(a_{\delta+m+1})^2 \dots (a_{\delta+n})^2 \times a_{\delta+m-1}(a_{\delta+m})^2 \dots (a_{\delta+n-2})^2}{\delta(a_{\delta+m})^2 \dots (a_{\delta+n-1})^2 \times a_{\delta+m}(a_{\delta+m+1})^2 \dots (a_{\delta+n-1})^2}$$

Quand  $\delta$  tend vers  $+\infty$  ;

$$q_n^\delta = (1+o(1)) \left( \frac{a_{\delta+n}}{a_{\delta+n-1}} \right)^2 \times \frac{a_{\delta+m-1}}{a_{\delta+m}}$$

On :

$$\left( \frac{a_{\delta+n}}{a_{\delta+n-1}} \right)^2 \times \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m-1}} = \left( \frac{a_{\delta+n}}{a_{\delta+m}} \right)^2 \times \left( \frac{a_{\delta+m-1}}{a_{\delta+n-1}} \right)^2 \times \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m-1}}$$

$$\frac{a_{\delta+n}}{a_{\delta+m}} = \prod_{\ell=0}^{n-1} \left( q_{\delta+m+\ell} \times q_{\delta+m+\ell-1} \times \dots \times q_{\delta+m+1} \times \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m}} \right)$$

$$= \left( \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m}} \right)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} (1+o(1)) \text{ quand } \delta \rightarrow +\infty$$

$$\frac{a_{\delta+n-1}}{a_{\delta+m-1}} = \frac{a_{\delta+m-1+n}}{a_{\delta+m-1}} = \left( \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m-1}} \right)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} (1+o(1))$$

$$d'ou \left( \frac{a_{\delta+n}}{a_{\delta+n-1}} \right)^2 \times \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m-1}} = \left( \frac{a_{\delta+m+1} \times a_{\delta+m-1}}{a_{\delta+m}^2} \right)^{2n} \times \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m-1}} (1+o(1))$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{a_{\delta+m+1} \times a_{\delta+m-1}}{a_{\delta+m}^2} \right)^{2m-1} \times \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m}} (1+o(1)) \\
&= q^{2m-1} \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m}} (1+o(1)) \quad \square
\end{aligned}$$

Comme dans le cas scalaire on a la relation :

$$\tilde{P}_{n+1}^{\delta}(x) = \tilde{P}_n^{\delta+1}(x) - x q^{\delta} \tilde{P}_n^{\delta}(x) .$$

Il faut cependant tenir compte de la parité de  $n$  :

• si  $n=2m$  ( $n+1=2m+1$ )

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{n+1}^{\delta} \left( x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \right) &= \tilde{P}_n^{\delta+1} \left( x \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m+2}} \times \frac{a_{\delta+m+2} \times a_{\delta+m}}{(a_{\delta+m+1})^2} \right) \\
&\quad - x q^{\delta} (1+o(1)) \tilde{P}_n^{\delta} \left( x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \right)
\end{aligned}$$

donc si  $\tilde{P}_n^{\delta} \left( x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \right)$  tend vers  $P_1(x)$  uniformément

sur les compacts de  $\mathbb{C}$  quand  $\delta \rightarrow +\infty$ ,

$\tilde{P}_{n+1}^{\delta} \left( x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \right)$  tend vers  $P_2(x)$  tel que :

$$P_2(x) = P_1(xq) - xq^2 P_1(x)$$

• si  $n = 2m+1$  ( $n+1 = 2(m+1)$ )

$$\tilde{P}_{n+1}^\delta \left( x \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m+2}} \right) = \tilde{P}_n^{\delta+1} \left( x \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m+2}} \right)$$

$$- xq^n (1+q) \tilde{P}_n^\delta \left( x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \times \frac{(a_{\delta+m+1})^2}{a_{\delta+m} \times a_{\delta+m+2}} \right)$$

Ainsi si  $\tilde{P}_n^\delta \left( x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \right)$  tend vers  $Q_1(x)$ ,

uniformément sur les compacts de  $\mathbb{C}$  quand  $\delta \rightarrow +\infty$ ,

$\tilde{P}_{n+1}^\delta \left( x \frac{a_{\delta+m+1}}{a_{\delta+m+2}} \right)$  tend vers  $Q_2(x)$  tel que :

$$Q_2(x) = Q_1(x) - xq^n Q_1(xq^{-1}).$$

En conséquence on a : la convergence étant la convergence sur les compacts de  $\mathbb{C}$ , supposons  $n$  pair ( $n = 2m$ ), alors si

$$\tilde{P}_n^\delta \left( x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \right) \text{ tend vers } P_1(x),$$

$$\tilde{P}_{n+1}^\delta \left( x \frac{a_{\delta+m}}{a_{\delta+m+1}} \right) \text{ tend vers } P_2(x) \text{ et}$$

$\tilde{P}_{n+2}^{\delta} \left( x \frac{a_{\delta+n+1}}{a_{\delta+n+2}} \right)$  tend vers  $P_3(x)$  tels que

$$\begin{cases} P_2(x) = P_1(qx) - x q^n P_1(x) \\ P_3(x) = P_2(x) - x q^{n+1} P_2(xq^{-1}) \end{cases}$$

d'où  $P_3(x) = P_1(qx) - x q^n P_1(x) - x q^{n+1} (P_1(x) - x q^{n-1} P_1(xq^{-1}))$

soit  $P_3(x) = x^2 q^{2n} P_1(xq^{-1}) - x q^n (q+1) P_1(x) + P_1(qx)$ .

Conclusion : avec les hypothèses précédentes,  
 $\tilde{P}_0^{\delta} \equiv 1$  ( $\delta \geq 0$ ),  $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \tilde{P}_{2n}^{\delta} \left( x \frac{a_{\delta+n}}{a_{\delta+n+1}} \right) = V_n(x)$   
 uniformément sur les compacts de  $\mathbb{C}$ , où les  
 polynômes  $V_n$  satisfait à

$$\begin{cases} V_{n+1}(x) = x^2 q^{2n} V_n(xq^{-1}) - x q^n (q+1) V_n(x) + V_n(qx) \\ V_0(x) \equiv 1 \end{cases}$$

References du chapitre III, première partie.

- [1] C. Brezinski, Padé type Approximations and General Orthogonal Polynomials, Birkhäuser Verlag, Basel, 1980.
- [2] C. Brezinski and J. Van Iseghem. Padé approximations. In P. G. Ciabat and J. L. Lions, eds., Handbook of Numerical Analysis, vol 3, Amsterdam, 1992. North-Holland.
- [3] P. J. Davis, Interpolation and Approximation, Dover, New York, 1975.
- [4] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis, Wiley, New York 1974.
- [5] D. S. Lubinsky, Uniform Convergence of Rows of the Padé table for Functions with Smooth MacLaurin Series Coefficients, Canad. Approx. (1987) 3: 307-330.
- [6] G. Szegő (1926): Ein Beitrag zur Theorie der Thetafunktionen. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Phys. Math. Kl. 1, 242-251.



## DEUXIEME PARTIE

Epsilon algorithmes :  
problèmes de convergence.

« Rougis plutôt, rougis d'envier au vulgaire  
le stérile repos dont un cœur est jaloux :  
Les dieux ont fait pour lui tous les biens de la terre,  
Mais la lyre est à nous. »

Lamartine, La Gloire,  
Méditations poétiques.



## Chapitre I

### La convergence quadratique de l'epsilon topologique algortisme (TEA) dans la résolution de systèmes non-linéaires d'équations.

On considère le système non-linéaire défini par  $G(x) = x$ , où  $G$  est une fonction de  $D$ , ouvert convexe de  $\mathbb{K}^p$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), dans  $\mathbb{K}^p$ . Soit  $\bar{x}$  une solution de ce système.

L'algortisme qui nous intéresse est le suivant :

- \* chose d'un point initial  $x_0 \in D$
- \* à l'itération  $k$ , on pose :  $u_0 = x_k$  et  $u_j = G(u_{j-1})$  pour  $j = 1, \dots, 2m_k$  où  $m_k$  est le degré du polynôme minimal de  $G'(\bar{x})$  pour le vecteur  $x_k - \bar{x}$ .
- \* on applique l' $\epsilon$ -algortisme topologique à  $u_0, \dots, u_{2m_k}$  et on pose  $x_{k+1} = E_{2m_k}^{(0)}$ .

Cet algortisme a été proposé par Brezinski [1] et presque simultanément par Gehebr [3]. D'après les résultats numériques, sa convergence semble quadratique sous les hypothèses habituelles. Cet algortisme

a été étudiée par plusieurs autres auteurs [6].  
 Cependant, jusqu'à présent, aucune preuve satisfaisante  
 de cette propriété n'a été obtenue. Nous allons  
 combler cette lacune.

1. Convergence quadratique de l'algorithme.

$E_{2m_k}^{(0)}$  s'exprime comme un quotient de deux  
 déterminants [1] :

$$E_{2m_k}^{(0)} = \frac{\begin{vmatrix} \mu_0 & \dots & \mu_{m_k} \\ (y, \Delta \mu_0) & \dots & (y, \Delta \mu_{m_k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (y, \Delta \mu_{m_k-1}) & \dots & (y, \Delta \mu_{2m_k-1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ (y, \Delta \mu_0) & \dots & (y, \Delta \mu_{m_k}) \\ \vdots & & \vdots \\ (y, \Delta \mu_{m_k-1}) & \dots & (y, \Delta \mu_{2m_k-1}) \end{vmatrix}} \\
 = \frac{\begin{vmatrix} \mu_0 & \Delta \mu_0 & \dots & \Delta \mu_{m_k-1} \\ (y, \Delta \mu_0) & (y, \Delta^2 \mu_0) & \dots & (y, \Delta^2 \mu_{m_k-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (y, \Delta \mu_{m_k-1}) & (y, \Delta^2 \mu_{m_k-1}) & \dots & (y, \Delta^2 \mu_{2m_k-2}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (y, \Delta^2 \mu_0) & \dots & (y, \Delta^2 \mu_{m_k-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (y, \Delta^2 \mu_{m_k-1}) & \dots & (y, \Delta^2 \mu_{2m_k-2}) \end{vmatrix}}$$

En utilisant l'identité de Magnus généralisée [2], on obtient :

$$x_{k+1} = x_k - \Delta U_{0, m_k} (M U_{0, m_k})^{-1} (y, \Delta U)_{0, m_k}$$

$$\text{où } \begin{cases} \Delta U_{0, m_k} = (\Delta u_0, \dots, \Delta u_{m_k-1}) \\ M U_{0, m_k} = \begin{pmatrix} (y, \Delta^2 u_0) & \dots & (y, \Delta^2 u_{m_k-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (y, \Delta^2 u_{m_k-1}) & \dots & (y, \Delta^2 u_{2m_k-2}) \end{pmatrix} \\ (y, \Delta U)_{0, m_k} = ((y, \Delta u_0), \dots, (y, \Delta u_{m_k-1}))^T \end{cases}$$

$$\text{Ecrivons : } (M U_{0, m_k})^{-1} (y, \Delta U)_{0, m_k} = (a_0^{(k)}, \dots, a_{m_k-1}^{(k)})^T.$$

Ainsi on a la relation de récurrence suivante :

$$(*) \quad x_{k+1} = x_k - (a_0^{(k)} \Delta u_0 + \dots + a_{m_k-1}^{(k)} \Delta u_{m_k-1}).$$

Nous allons faire maintenant le lien entre les  $a_i^{(k)}$  et les coefficients du polynôme minimal de  $G'(\bar{x})$  pour le vecteur  $x_k - \bar{x}$ .

Pour cela nous supposons, dans ce paragraphe, que

$G$  satisfait les conditions suivantes :

- (40) {
- \* la matrice  $G'(\bar{x})$  est inversible
  - \* la dérivée de Fréchet  $G'$  de  $G$  vérifie la condition de Lipschitz  $\|G'(x) - G'(y)\| \leq L \|x - y\|$  pour  $x, y \in D$  ( $L \in \mathbb{R}$  fixé)

On considère aussi la matrice  $H_h$  :

$$H_h = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \frac{(y, \Delta u_0)}{\|\Delta u_0\|} & \dots & \dots & \frac{(y, \Delta u_m)}{\|\Delta u_0\|} \\ \vdots & & & \\ \frac{(y, \Delta u_{m-1})}{\|\Delta u_0\|} & \dots & \dots & \frac{(y, \Delta u_{2m-1})}{\|\Delta u_0\|} \end{pmatrix}$$

### Théorème 1

Si  $G$  possède la propriété (40) et si  $\exists \alpha > 0 \exists K \in \mathbb{N} \quad |\det H_h| > \alpha \quad \forall h \geq K$  alors il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\bar{x}$  tel que  $\forall x_0 \in \mathcal{V}, \quad \|x_{k+1} - \bar{x}\| = O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$ .

démonstration :

La condition de Lipschitz entraîne ([3])

$$\begin{cases} \Delta u_i = [G'(\bar{x})]^i (G'(\bar{x}) - I) (x_k - \bar{x}) + \omega_i^{(k)} \\ \tilde{\Delta} u_i = [G'(\bar{x})]^i (G'(\bar{x}) - I)^2 (x_k - \bar{x}) + \tilde{\omega}_i^{(k)} \end{cases}$$

où  $\|w_i^{(k)}\| = O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$  et  $\|\tilde{w}_i^{(k)}\| = O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$ .

Soit  $c_i^{(k)}$ , les coefficients du polynôme

$$\frac{1}{P_R(x)} \frac{P_R(1) - P_R(x)}{x-1}, \text{ où } P_R \text{ est le polynôme minimal}$$

de  $G'(\bar{x})$  pour le vecteur  $x_k - \bar{x}$  ( $P_R$  est le polynôme unitaire de plus petit degré tel que  $P_R(G'(\bar{x}))(x_k - \bar{x}) = 0$ )

On a par ailleurs  $P_R(1) \neq 0$  car la matrice  $G'(\bar{x}) - I$  est inversible.

On a :

$$(MTV_{0,m_k})^{-1} \begin{bmatrix} (y, \Delta^2 u_j) \\ \vdots \\ (y, \Delta^2 u_{j+m_k-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow (j+1)^{\text{ième}} \text{ ligne,}$$

$$\text{donc } \sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(k)} (MTV_{0,m_k})^{-1} (y, \Delta^2 v_i) = (c_0^{(k)}, \dots, c_{m_k-1}^{(k)})^T.$$

D'un autre côté on peut écrire :

$$\sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(k)} (MTV_{0,m_k})^{-1} (y, \Delta^2 v_i) = (MTV_{0,m_k})^{-1} \sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(k)} (y, \Delta^2 v_i)$$

$$\text{et } \sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(k)} (y, \Delta^2 v_i) = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(k)} (y, \Delta^2 u_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(k)} (y, \Delta^2 u_{m_k+i-1}) \end{bmatrix}.$$

$$\text{Mais } \Delta^2 u_{i+j} = [G'(\bar{x})]^{i+j} (G'(\bar{x}) - I)^2 (x_k - \bar{x}) + O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$$

$$\text{d'où } \sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(h)} \Delta^2 u_{i+j} = G'(\bar{x})^j (G'(\bar{x}) - I)^2 \sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(h)} G'(\bar{x})^i (x_k - \bar{x}) + O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$$

(car les  $c_i^{(h)}$  sont bornés indépendamment de  $h$ ).

Par définition des  $c_i^{(h)}$  on a :

$$\sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(h)} G'(\bar{x})^i (x_k - \bar{x}) = (G'(\bar{x}) - I)^{-1} (x_k - \bar{x}), \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(h)} \Delta^2 u_{i+j} &= G'(\bar{x})^j (G'(\bar{x}) - I) (x_k - \bar{x}) + O(\|x_k - \bar{x}\|^2) \\ &= \Delta u_j + O(\|x_k - \bar{x}\|^2) \end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(h)} (y, \Delta^2 U_i) = \begin{bmatrix} (y, \Delta u_0) \\ \vdots \\ (y, \Delta u_{m_k-1}) \end{bmatrix} + O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$$

Si on multiplie cette égalité par  $(M U_{0, m_k})^{-1}$  il vient

$$\begin{aligned} (*) \quad (c_0^{(h)}, \dots, c_{m_k-1}^{(h)})^T &= (a_0^{(h)}, \dots, a_{m_k-1}^{(h)})^T \\ &\quad + (M U_{0, m_k})^{-1} O(\|x_k - \bar{x}\|^2). \end{aligned}$$

En utilisant la norme de Frobenius, on a l'inégalité [4] :

$$\|(M \mathcal{V}_{0, m_k})^{-1}\|_2 \leq \frac{\|M \mathcal{V}_{0, m_k}\|_F^{m_k-1}}{|\det(M \mathcal{V}_{0, m_k})|}$$

Mais  $\det(M \mathcal{V}_{0, m_k}) = \|\Delta u_0\|^{m_k} \times \det H_k$

$$\|\Delta u_0\| = \|(G'(\bar{x}) - I)(x_k - \bar{x}) + w_1^{(k)}\| \text{ avec } \|w_1^{(k)}\| = O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$$

d'où pour  $x_k$  proche de  $\bar{x}$ ,

$$\|\Delta u_0\| \geq \|(G'(\bar{x}) - I)(x_k - \bar{x})\| - \|w_1^{(k)}\| \geq D \|(G'(\bar{x}) - I)(x_k - \bar{x})\| \quad (D > 0)$$

De plus, si  $A$  est une matrice inversible  $\|Ax\|_2 \geq \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|_2}$ ,

la dernière inégalité devient :

$$\|\Delta u_0\| \geq \frac{D}{\|(G'(\bar{x}) - I)^{-1}\|_2} \|x_k - \bar{x}\|.$$

Finalement il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$|\det(M \mathcal{V}_{0, m_k})| \geq c \|x_k - \bar{x}\|^{m_k}.$$

Par ailleurs on a  $\|M \mathcal{V}_{0, m_k}\|_F \leq c' \|x_k - \bar{x}\|$  ( $c' > 0$ ):

$$\|M \mathcal{V}_{0, m_k}\|_F = \left( \sum_{j=0}^{m_k-1} \|(y, \delta^2 \mathcal{V}_j)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

pour  $j=0, \dots, 2m_k-2$   $|(y, \delta^2 u_j)| \leq \|y\| \|\delta^2 u_j\|$

$$\|\Delta^2 u_j\| \leq \|G'(\bar{x})\|^{j+1} \|G'(\bar{x}) - I\|^2 \|x_k - \bar{x}\| + O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$$

donc  $\exists K_2 > 0$  tel que :  $\|\Delta^2 u_j\| \leq K_2 \|x_k - \bar{x}\|$ .  
et finalement on obtient :

$$\|M_{0, m_k}^T\|_F \leq \left( \sum_{i=0}^{p-1} (p \|y\| K_2 \|x_k - \bar{x}\|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ = p^{3/2} \|y\| K_2 \|x_k - \bar{x}\|.$$

et par conséquent

$$\| (M_{0, m_k}^T)^{-1} \|_2 \leq \frac{C''}{\|x_k - \bar{x}\|} \quad (C'' > 0)$$

(\*) devient

$$(**) \quad a_i^{(k)} = c_i^{(k)} + O(\|x_k - \bar{x}\|) \quad i=0 \text{ à } m_k-1.$$

Revenons à la relation de récurrence (\*):

$$x_{k+1} - \bar{x} = x_k - \bar{x} - \sum_{i=0}^{m_k-1} a_i^{(k)} \Delta u_i \\ = (x_k - \bar{x}) - \sum_{i=0}^{m_k-1} a_i^{(k)} G'(\bar{x}) (G'(\bar{x}) - I) (x_k - \bar{x}) \\ - \sum_{i=0}^{m_k-1} a_i^{(k)} \omega_i^{(k)} \\ = x_k - \bar{x} - \sum_{i=0}^{m_k-1} a_i^{(k)} G'(\bar{x})^i (G'(\bar{x}) - I) (x_k - \bar{x}) \\ + O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$$

car d'après (\*\*\*) les  $a_i^{(k)}$  sont bornés.

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m_k-1} a_i^{(k)} G'(\bar{x})^i (x_k - \bar{x}) &= \sum_{i=0}^{m_k-1} c_i^{(k)} G'(\bar{x})^i (x_k - \bar{x}) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m_k-1} O(\|x_k - \bar{x}\|) (x_k - \bar{x}) \\ &= (G'(\bar{x}) - I)^{-1} (x_k - \bar{x}) + O(\|x_k - \bar{x}\|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } x_{k+1} - \bar{x} &= x_k - \bar{x} - (G'(\bar{x}) - I)(G'(\bar{x}) - I)^{-1} (x_k - \bar{x}) \\ &\quad + O(\|x_k - \bar{x}\|^2) \\ &= O(\|x_k - \bar{x}\|^2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque: à la place de la matrice  $H_k$ , on aurait pu considérer la matrice

$$F_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ \frac{(y, \Delta u_0)}{\|\Delta u_0\|} & & & & \frac{(y, \Delta u_{m_k})}{\|\Delta u_0\|} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \frac{(y, \Delta u_{m_k-1})}{\|\Delta u_{m_k-1}\|} & & & & \frac{(y, \Delta u_{2m_k-1})}{\|\Delta u_{m_k-1}\|} \end{pmatrix}$$

pour éaire ensuite que

$$\det(MV_{0,m_k}) = \|\Delta u_0\| \times \dots \times \|\Delta u_{m_k-1}\| \times \det F_k.$$

Cherchant une minoration de  $|\det(MV_{0,m_k})|$ , il nous faut minorer  $\|\Delta u_i\|$ : or si  $i > 0$ , dans l'expression de  $\Delta u_i$  apparaît un terme en  $[G'(\bar{x})]^i$ .

Pour être certain plus que  $\|Du\|$  se comporte comme  $\|x_n - \bar{x}\|$ , il suffit d'ajouter l'hypothèse  $G(\bar{x})$  inversible. On pourra consulter [3].

## 2. Considérations géométriques.

a) L'utilisation du HPE [4] ou du TEA pour résoudre des systèmes non-linéaires, nécessite l'introduction du polynôme minimal d'une matrice pour un vecteur. Soit  $A$  une matrice carrée  $p \times p$  et  $m \in \mathbb{N}^*$ . Considérons les vecteurs dont les polynômes minimaux par rapport à  $A$  sont de degré  $m$ . Une question intéressante est de décider cet ensemble. Donnons le résultat suivant :

### Théorème 2 :

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $A$ , supposées distinctes. Soit  $v_1, \dots, v_p$  une base de vecteurs propres associés. Si  $m$  est le degré du polynôme minimal de  $A$  pour  $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i v_i$ , alors il y a exactement  $m$  nombres différents de zéro parmi les  $\alpha_i$ .

preuve :  $A^j x = \sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_i^j v_i$ . On travaille dans la base  $(v_1, \dots, v_p)$ . Par définition du polynôme minimal d'une matrice pour un vecteur,

le système  $(x, Ax, \dots, A^{m-2}x)$  est libre

et

le système  $(x, Ax, \dots, A^m x)$  est lié.

En utilisant la notion de rang d'une matrice,

le rang de  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_p & \alpha_p \lambda_p & \dots & \alpha_p \lambda_p^{m-1} \end{pmatrix}$  est égal à  $m$

ainsi que le rang de  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_p & \alpha_p \lambda_p & \dots & \alpha_p \lambda_p^m \end{pmatrix}$ .

On peut supposer sans perte de généralité que :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_m & \alpha_m \lambda_m & \dots & \alpha_m \lambda_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{soit } \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \underbrace{V(\lambda_1, \dots, \lambda_m)} \neq 0$$

déterminant de Vandermonde.

On a donc déjà  $\alpha_i \neq 0$  pour  $i=1$  à  $m$ .

D'après la définition du rang pour  $k=m+1, \dots, p$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \alpha_1 \lambda_1^{m-1} & \alpha_1 \lambda_1^m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \alpha_m & \alpha_m \lambda_m & \dots & \alpha_m \lambda_m^{m-1} & \alpha_m \lambda_m^m \\ \alpha_k & \alpha_k \lambda_k & \dots & \alpha_k \lambda_k^{m-1} & \alpha_k \lambda_k^m \end{vmatrix} = 0$$

soit  $(\alpha_1 x \dots x \alpha_m) \times \alpha_n \times V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda_n) = 0$ .  
 Or les  $\lambda_i$  étant distincts,  $V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \lambda_n) \neq 0$ ,  
 on en déduit que  $\alpha_n = 0$  ■

Soit  $m(x)$  le degré du polynôme minimal  
 de  $A$  pour le vecteur  $x \neq 0$  et  $m \in \mathbb{N}^*$  : on pose

$$U_m = \{x \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } m(x) = m\}$$

Soit  $p_i$  la projection sur  $\mathbb{R}v_i$  parallèlement à  
 $\langle v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_p \rangle$ ,  $i = 1, \dots, p$

$$p_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}v_i$$

$$x \mapsto \alpha_i v_i$$

On pose aussi pour

terminer :

$$\begin{cases} V_i = p_i^{-1}(\mathbb{R}^*) \\ \mathcal{H}_i = p_i^{-1}(\{0\}) \text{ (hyperplan)} \end{cases}$$

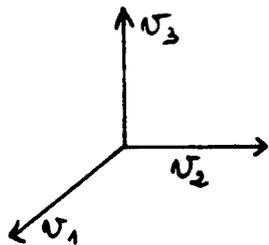
D'après le théorème précédent :

$$U_m = \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq p} \left\{ \bigcap_{j=1}^m V_{i_j} \cap \bigcap_{k \notin \{i_1, \dots, i_m\}} \mathcal{H}_k \right\}$$

exemples : dans  $\mathbb{R}^3$

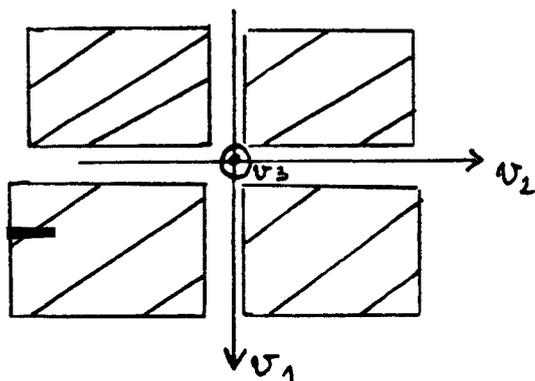
$$U_1 = (V_1 \cap \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_3) \cup (V_2 \cap \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_3) \cup (V_3 \cap \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2)$$

soit  $U_1 = R^*_{\sigma_1} U R^*_{\sigma_2} U R^*_{\sigma_3}$



$$U_2 = (V_1 \wedge V_2 \wedge \mathcal{H}_3) U (V_1 \wedge V_3 \wedge \mathcal{H}_2) U (V_1 \wedge V_3 \wedge \mathcal{H}_1)$$

représentons  $V_1 \wedge V_2 \wedge \mathcal{H}_3$  :



b) Considérons la matrice  $LH_k$  :

$$LH_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \frac{(y, L\Delta u_0)}{\|L\Delta u_0\|} & & \frac{(y, L\Delta u_{2m})}{\|L\Delta u_0\|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{(y, L\Delta u_{2m-1})}{\|L\Delta u_0\|} & \dots & \frac{(y, L\Delta u_{2m-1})}{\|L\Delta u_0\|} \end{pmatrix}$$

où  $L \Delta u_i = [G'(\bar{x})]^i (G'(\bar{x}) - I) (x_k - \bar{x})$  (la partie linéaire de  $\Delta u_i$ ).

Nous allons voir que l'hypothèse  $|\det LH_k| \geq \alpha$  entraîne  $|\det H_k| \geq \alpha$ , et donner une interprétation de la condition  $|\det LH_k| \geq \alpha$ .

Supposons que  $G'(\bar{x})$  remplisse les conditions du théorème 2. On peut écrire  $x_k - \bar{x} = \sum_{\ell=1}^p \alpha_\ell^{(k)} v_\ell$  avec

$\alpha_i^{(k)} \neq 0$  pour  $i=1, \dots, m_k$  et  $\alpha_i^{(k)} = 0$  sinon.

Alors : ( $m=m_k$ )

$$\det LH_k = \frac{1}{\|L \Delta u_0\|^{m_k}} \begin{vmatrix} 1 & \sum_{i_1=1}^p \beta_{i_1} & \dots & \sum_{i_m=1}^p \beta_{i_m} \lambda_{i_m}^{m-1} \\ 1 & \sum_{i_1=1}^p \beta_{i_1} \lambda_{i_1} & \dots & \sum_{i_m=1}^p \beta_{i_m} \lambda_{i_m}^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \sum_{i_1=1}^p \beta_{i_1} \lambda_{i_1}^{m_k} & \dots & \sum_{i_m=1}^p \beta_{i_m} \lambda_{i_m}^{2m-1} \end{vmatrix}$$

où  $\beta_\ell^{(k)} = \alpha_\ell^{(k)} (\lambda_\ell - 1) (y, v_\ell)$ .

$$\det LH_k = \frac{1}{\|L \Delta u_0\|^{m_k}} \sum_{i_1=1}^p \dots \sum_{i_m=1}^p \begin{vmatrix} 1 & \beta_{i_1} & \dots & \beta_{i_m} \lambda_{i_m}^{m-1} \\ 1 & \beta_{i_1} \lambda_{i_1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \beta_{i_1} \lambda_{i_1}^m & \dots & \beta_{i_m} \lambda_{i_m}^{2m-1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\|L\Delta u_0\|^m} \sum_{i_1=1}^p \dots \sum_{i_m=1}^p \left( \prod_{j=1}^m \beta_{i_j} \lambda_{i_j}^{j-1} \right) V(1, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}).$$

En utilisant un résultat de [5] on obtient

$$\det L H_k = \frac{1}{\|L\Delta u_0\|^m} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m}^p \begin{vmatrix} \beta_{i_1} & \dots & \beta_{i_m} \\ \beta_{i_1} \lambda_{i_1} & \dots & \beta_{i_m} \lambda_{i_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{i_1} \lambda_{i_1}^{m-1} & \dots & \beta_{i_m} \lambda_{i_m}^{m-1} \end{vmatrix} \times V(1, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m})$$

$$= \frac{1}{\|L\Delta u_0\|^m} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m}^p \left( \prod_{j=1}^m \beta_{i_j} \right) V(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}) \times V(1, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m})$$

Mais  $\beta_i^{(k)} = 0$  pour  $i = m+1, \dots, p$  donc

$$= \frac{1}{\|L\Delta u_0\|^m} \left( \prod_{j=1}^m \beta_j^{(k)} \right) V(\lambda_1, \dots, \lambda_m) V(1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

et finalement

$$\det L H_k = \frac{1}{\|L\Delta u_0\|^{m_k}} \left( \prod_{j=1}^{m_k} \alpha_j^{(k)} (\gamma_j \nu_j) \right) V(1, \lambda_1, \dots, \lambda_{m_k})^2$$

La condition  $|\det L H_k| \geq \epsilon > 0$  est équivalente à :

$$\frac{\prod_{j=1}^m |\alpha_j^{(h)}|}{\left[ (\alpha_1^{(h)})^2 + \dots + (\alpha_m^{(h)})^2 \right]^{\frac{m}{2}}} \geq \alpha' > 0$$

$$\text{d'où } \prod_{j=1}^m \left[ 1 + \left( \frac{\alpha_j^{(h)}}{\alpha_j^{(h)}} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\alpha_{j-1}^{(h)}}{\alpha_j^{(h)}} \right)^2 + \left( \frac{\alpha_{j+1}^{(h)}}{\alpha_j^{(h)}} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\alpha_m^{(h)}}{\alpha_j^{(h)}} \right)^2 \right] \leq \frac{1}{(\alpha')^2}$$

La dernière condition équivaut à :

il existe deux nombres  $K_1 > 0$   $K_2 > 0$  tels que

$$K_1 \leq \left| \frac{\alpha_j^{(h)}}{\alpha_i^{(h)}} \right| \leq K_2 \quad \text{pour tout } h \text{ quand}$$

$$\alpha_j^{(h)} \neq 0 \quad \text{et} \quad \alpha_i^{(h)} \neq 0.$$

### Théorème 3

$|\det L H_h| \geq \alpha > 0$  ssi il existe des réels

$\rho_j > 0$  tels que :

$\sum \rho_j^2 < 1$ , et pour  $h$  assez grand

$$\rho_j \times \|x_h - \bar{x}\| \leq \alpha_j^{(h)} \leq \|x_h - \bar{x}\|.$$

Sous cette hypothèse on a la condition

$$|\det H_k| \geq \alpha > 0.$$

$$\text{En effet, } \det H_k = \frac{1}{\|\Delta u_0\|^{m_k}} \left\{ \|\Delta u_0\|^{m_k} \det L H_k + \Sigma \right\}$$

où  $\Sigma$  désigne des déterminants dont une colonne au moins est faite de  $w_i^y$

$$\text{(i.e. } w_i^y = (y, w_i^{(h)}) \quad |w_i^y| = O(\|x_k - \bar{x}\|^2))$$

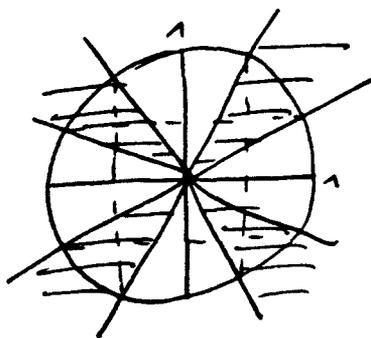
On peut donc écrire :

$$\det H_k = \frac{1}{\|\Delta u_0\|^{m_k}} \prod_{j=1}^{m_k} \alpha_j^{(h)} (y, w_j) V(1, \lambda_1, \dots, \lambda_{m_k}) \times (1 + O(\|x_k - \bar{x}\|))$$

et on a le résultat.

exemple :

$$\bar{x} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \|x\| \leq |x_1| \leq \|x\| \\ \frac{1}{2} \|x\| \leq |x_2| \leq \|x\| \end{array} \right. \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$



Les  $x_k$  reste dans la partie hachurée.

c) On peut remarquer que l'hypothèse d'uniforme inversibilité (i.e.  $|\det H_n| \geq \alpha > 0 \forall n > N$ ) passe directement sur les termes de la suite  $(x_n)$ .

On souhaiterait, au moins dans certains cas, avoir une hypothèse sur  $x$  restant dans un certain convexe.

Pour le MPE  $x_{n+1}$  est barycentre de  $G^i(x_n)$ , avec somme des coefficients égale à 1. Si ces coefficients sont positifs et si les  $G^i(x_n)$  sont dans le convexe  $x_{n+1}$  reste dans le convexe : c'est le cas si la matrice  $G'(\bar{x})$  n'a que des valeurs propres positives.

Par ailleurs, avec les notations de [4],  $(\alpha_n(x))^2$  est le déterminant de Gram des vecteurs normés  $\frac{G(x)-x}{\|G(x)-x\|}, \dots, \frac{G^{d_n}(x)-G^{d_n-1}(x)}{\|G^{d_n}(x)-G^{d_n-1}(x)\|}$ .

Plus généralement, soit  $A$  une matrice et  $m(x)$  le degré du polynôme minimal de  $A$  pour  $x$  ( $x \neq 0$ ):

$$\text{on pose } \varphi(x) = g \left( \frac{x}{\|x\|}, \frac{Ax}{\|Ax\|}, \dots, \frac{A^{m(x)-1}x}{\|A^{m(x)-1}x\|} \right)$$

où  $g(\ )$  désigne le déterminant de Gram.

Soit  $\alpha > 0$ , l'ensemble  $\{\varphi(x) \geq \alpha\}$  n'est pas nécessairement un voisinage de zéro. Cependant on a l'exemple, dans  $\mathbb{R}^2$ , suivant :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} (\theta \neq k\pi), \quad \varphi(x) = |\sin \theta| > 0.$$

References du chapitre I, deuxième partie.

- [1] C. Brezinski  
Accélération de la convergence en analyse numérique.  
LNM 584, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [2] C. Brezinski  
Other manifestations of the Schur complement.  
Linear Algebra Appl., 111 (1988), 231-247.
- [3] E. GEKELER  
On the solution of systems of equations by the  
epsilon algorithm of Wynn.  
Math. Comp., 26, (1972) 427-436
- [4] K. Jbilou, H. Sadok  
Some results about vector extrapolation methods  
and related fixed point iterations.  
J. Comput. Appl. Math., 36 (1991) 385-398.
- [5] A. Sidi, W.F. Fud, D.A. Smith  
Acceleration of convergence of vector sequences.  
SIAM J. Numer. Anal., 23 (1986), 178-196.
- [6] S. Shelton  
Computation of the periodic steady-state response  
of nonlinear networks by extrapolation methods  
IEEE Circuits and Systems, 27 (1980), 161-175.

## Chapitre II

### De l'epsilon algorithme vectoriel.

Il y a peu de résultats théoriques pour l'epsilon algorithme vectoriel : ceci s'explique en partie par le fait que l'on n'a pas une expression de  $E_n^{(n)}$  à l'aide de déterminants. Pour une synthèse sur l' $\epsilon$ -algorithme vectoriel, on pourra consulter [1] [7]. Cependant cet algorithme admet dans la pratique beaucoup d'applications [2] [3].

Dans une première partie nous allons nous intéresser à  $E_2^{(h)}$  appliqué à des suites vectorielles aux empilements linéaires au sens de Nievergelt [6]. Au préalable nous ferons quelques remarques sur cette notion.

Dans une seconde partie, partant de fait que l'on a uniquement une relation de récurrence pour définir les  $E_n^{(n)}$ , on essaiera de progresser de deux colonnes en deux colonnes.

#### 1. Transformation $E_2^{(h)}$ et suites aux empilements linéaires.



Dans tout ce paragraphe on travaille dans  $\mathbb{R}^p$ .  
Brignishi a montré dans [1] p 142-143 l'accélération  
de convergence par  $E_2^{(n)}$  des suites  $(S_n)$  ( $S_n \in \mathbb{R}^p$ )  
vérifiant les hypothèses suivantes :

- (H) {
- il existe une suite  $(e_n)$  dans  $\mathbb{R}^p$  qui converge vers zéro
  - il existe  $y \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $0 < \lambda < 1$
  - $S_n - S = \lambda^n (y + e_n)$  pour tout  $n$  à partir d'un certain rang.

Les vecteurs  $(S_n - S)$  ne sont pas nécessairement colinéaires.

Remarquons alors que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(S_{n+1} - S) - \lambda(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(e_{n+1} + e_n)}{\|y + e_n\|} = 0$$

$$\text{On a aussi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} = \frac{y}{\|y\|}.$$

La suite  $(S_n)$  converge donc  $\lambda I$ -linéairement  
au sens de Niergelt, à savoir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(S_{n+1} - S) - \lambda(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0.$$

Cependant, une suite  $(X_n)$  de  $\mathbb{R}^p$  peut très bien

converger linéairement vers  $x$  sans pour autant avoir  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}$  existe. Il suffit de considérer

la suite  $x_n = \left( \frac{\cos \sqrt{n}}{2^n}, \frac{\sin \sqrt{n}}{2^n} \right)$  :  $x_n$  tend vers 0,

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n}{\|x_n\|} &= \frac{1}{2} \left( \cos \sqrt{n+1} - \cos \sqrt{n}, \sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n} \right) \\ &= \left( \sin \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2} \sin \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2}, \sin \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2} \cos \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2} \right) \end{aligned}$$

Or  $\sin \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2} = \sin \left( \frac{1}{2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , d'où

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n}{\|x_n\|} = 0$ . Cependant  $\frac{x_n}{\|x_n\|} = (\cos \sqrt{n}, \sin \sqrt{n})$

n'a pas de limite.

Pour généraliser le résultat d'accélération donné au début du paragraphe on va considérer la définition suivante :

### 1.1 Définition [6]

On dira que la suite  $(S_n)$  de  $\mathbb{R}^p$  (ou  $\mathbb{F}^p$ ) se comporte linéairement vers un point  $S$  de  $\mathbb{R}^p$  (ou  $\mathbb{F}^p$ ) si :

- (a) il existe  $K \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq K \quad S_n \neq S$
- (b) il existe une matrice  $A$  telle que  $(I - A)$  soit inversible et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0$

Remarques :

a) la suite  $(S_n)$  n'est pas nécessairement convergente.

b) Soit  $A$  une matrice carrée  $p \times p$  telle que  $(I-A)$  soit inversible : considérons la suite  $(S_n)$  générée de la façon suivante ;

$$S_{n+1} = AS_n + b$$

Si  $S$  est la solution du système  $S = AS + b$ , on a :

$(S_{n+1} - S) - A(S_n - S) = 0$ . La suite  $(S_n)$  se comporte donc  $A$  linéairement.

D'autre part, notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $A$ . Supposons que l'on ait  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_p|$  :

on a alors [1] p 143

$S_n - S = \lambda_1^n (y_1 + \varepsilon_n)$  ( $y_1 \neq 0$  vecteur propre associé à  $\lambda_1$ ) avec  $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

(Ceci vient de la décomposition spectrale de  $A$ ).

On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(S_{n+1} - S) - \lambda_1(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0$$

Sur cet exemple, on voit que la matrice  $A$  de la définition n'est pas nécessairement unique d'une part, et d'autre part  $(S_n)$  ne converge pas nécessairement vers  $S$  (il faudrait  $|\lambda_1| < 1$ ).

c) Considérons une suite  $(S_n)$  vérifiant la relation suivante :

$$(*) \quad S_{n+1} - S = (A + A_n)(S_n - S) \quad \text{avec}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 0 \quad (A_n \text{ étant une matrice } p \times p)$$

$$\text{On a } \frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = A_n \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} \quad \text{donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0. \quad \text{La suite } (S_n)$$

se comporte donc  $A$ -linéairement.

A-t-on la réciproque ? (i.e si  $(S_n)$  se comporte  $A$ -linéairement vers  $S$ , existe-t-il une suite  $(A_n)$  de matrice qui converge vers  $0$ , telle que l'on ait (\*)?)

Notons  $u_n$  le vecteur  $\frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|}$ .

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ .

Posez  $A_n = \left( \left( e_1, \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} \right) u_n, \dots, \left( e_p, \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} \right) u_n \right)$

la matrice dont le  $i^{\text{ème}}$  vecteur colonne est

$$\left( e_i, \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} \right) u_n. \quad \text{La suite } (A_n) \text{ tend vers } 0.$$

Calculons  $A_n \cdot (S_n - S)$  :

$$A_n \cdot (S_n - S) = \sum_{i=1}^p \frac{(e_i, S_n - S)^2}{\|S_n - S\|} \cdot u_n = \|S_n - S\| u_n$$

$$\text{Or } S_{n+1} - S = A(S_n - S) + \|S_n - S\| u_n$$

$$\text{soit } S_{n+1} - S = (A + A_n)(S_n - S).$$

On a donc équivalence entre les deux notions.

Dans la suite nous conserverons la présentation de Neiergelt.

Nous allons à présent nous intéresser à la deuxième colonne de l'épsilon algorithme vectoriel et montrer un résultat d'accélération de convergence pour certaines suites à calculer linéaire.

Tout va dépendre en fait de la matrice  $A$  intervenant dans le calcul linéaire de la suite, et plus précisément de son polynôme minimal. Nous faisons donc quelques remarques à ce sujet.

1.2 Dans  $\mathbb{R}^p$  si  $y \neq 0$ , on note  
 $y^{-1} = \frac{y}{(y, y)}$ . Soit  $(S_n)$  une suite d'éléments de  
 $\mathbb{R}^p$ .

On considère :

$$E_2^{(n)} = S_{n+1} + (\Delta E_1^{(n)})^{-1}$$

où 
$$\Delta E_1^{(n)} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\|\Delta S_{n+1}\|^2} - \frac{\Delta S_n}{\|\Delta S_n\|^2}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned} \|\Delta E_1^{(n)}\|^2 &= \frac{1}{\|\Delta S_{n+1}\|^2} - 2 \frac{(\Delta S_{n+1}, \Delta S_n)}{\|\Delta S_{n+1}\|^2 \|\Delta S_n\|^2} + \frac{1}{\|\Delta S_n\|^2} \\ &= \|\Delta S_n\|^{-2} \|\Delta S_{n+1}\|^{-2} \left( \|\Delta S_n\|^2 - 2(\Delta S_{n+1}, \Delta S_n) + \|\Delta S_{n+1}\|^2 \right) \\ &= \|\Delta S_n\|^{-2} \|\Delta S_{n+1}\|^{-2} \|\Delta^2 S_n\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient l'égalité :

$$E_2^{(n)} = S_{n+1} + \frac{1}{\|\Delta^2 S_n\|^2} \left( \|\Delta S_n\|^2 \Delta S_{n+1} - \|\Delta S_{n+1}\|^2 \Delta S_n \right).$$

Supposons que  $(S_h)$  se comporte linéairement  
 vers  $S$  : il existe une matrice  $A$  avec  $(I-A)$  inversible

telle que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(S_{k+1}-S) - A(S_k-S)}{\|S_k-S\|} = 0$

( on suppose  $S_R \neq S$  pour  $k$  assez grand ).

On a donc :

$$\frac{S_{k+1}-S}{\|S_k-S\|} = A \cdot \frac{(S_k-S)}{\|S_k-S\|} + o(1)$$

Remarquons alors que  $\frac{\|S_{k+1}-S\|}{\|S_k-S\|}$  est borné

$$\left( \frac{\|S_{k+1}-S\|}{\|S_k-S\|} \leq \|A\| + 1 \right)$$

Examinons le rapport  $\frac{E_2^{(k)}-S}{\|S_k-S\|}$  :

$$\frac{E_2^{(k)}-S}{\|S_k-S\|} = \frac{S_{k+1}-S}{\|S_k-S\|} + \frac{1}{\|\Delta^2 S_k\|^2} \left[ \frac{\|\Delta S_k\|^2 \Delta S_{k+1}}{\|S_k-S\|} - \frac{\|\Delta S_{k+1}\|^2 \Delta S_k}{\|S_k-S\|} \right]$$

Or :

$$\frac{\Delta S_k}{\|S_k-S\|} = \frac{S_{k+1}-S_k}{\|S_k-S\|} = \frac{(S_{k+1}-S) + (S-S_k)}{\|S_k-S\|}$$

soit  $\boxed{\frac{\Delta S_k}{\|S_k-S\|} = (A-I) \frac{S_k-S}{\|S_k-S\|} + o(1)}$

$$\frac{\Delta S_{k+1}}{\|S_k - S\|} = \frac{S_{k+2} - S_{k+1}}{\|S_k - S\|} = \frac{\|S_{k+1} - S\|}{\|S_k - S\|} \times \frac{S_{k+2} - S}{\|S_{k+1} - S\|} - \frac{S_{k+1} - S}{\|S_k - S\|}$$

comme  $\frac{S_{k+2} - S}{\|S_{k+1} - S\|} = A \cdot \frac{S_{k+1} - S}{\|S_{k+1} - S\|} + o(1)$ , on obtient :

$$\frac{\Delta S_{k+1}}{\|S_k - S\|} = \frac{\|S_{k+1} - S\|}{\|S_k - S\|} \left\{ A \cdot \frac{S_{k+1} - S}{\|S_{k+1} - S\|} + o(1) \right\} - A \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1)$$

et puisque  $\frac{\|S_{k+1} - S\|}{\|S_k - S\|}$  est borné,

$$\frac{\Delta S_{k+1}}{\|S_k - S\|} = A \cdot \frac{S_{k+1} - S}{\|S_k - S\|} - A \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1)$$

$$\boxed{\frac{\Delta S_{k+1}}{\|S_k - S\|} = A(A - I) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1)}$$

On déduit de ces différentes égalités :

$$\frac{\Delta^2 S_k}{\|S_k - S\|} = \frac{\Delta S_{k+1} - \Delta S_k}{\|S_k - S\|} = (A - I)^2 \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1).$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{\|\Delta S_k\|}{\|\Delta^2 S_k\|} = \frac{\frac{\|\Delta S_k\|}{\|S_k - S\|}}{\frac{\|\Delta^2 S_k\|}{\|S_k - S\|}} = \frac{\|(A - I) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1)\|}{\|(A - I)^2 \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1)\|}}$$

On remarque d'ailleurs que toutes les quantités sont définies.

et

$$\frac{\|\Delta S_{k+1}\|}{\|\Delta^2 S_k\|} = \frac{\left\| A(A-I) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(n) \right\|}{\left\| (A-I)^2 \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(n) \right\|}.$$

On résume tout ceci par :

lemme 1

$$\frac{E_2^{(k)} - S}{\|S_k - S\|} = \left[ A + \frac{\left\| (A-I) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(n) \right\|^2}{\left\| (A-I)^2 \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(n) \right\|^2} A(A-I) - \frac{\left\| A(A-I) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(n) \right\|^2}{\left\| (A-I)^2 \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(n) \right\|^2} (A-I) \right] \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|}$$

1.3 Le cas  $A = \lambda I$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) avec  $\lambda \neq 1$

$$\text{On a } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| (\lambda - 1) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(n) \right\| = |\lambda - 1| :$$

$$\text{en effet } \left\| (\lambda - 1) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} \right\| - o(n) \leq \left\| (\lambda - 1) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(n) \right\|$$

$$\leq \left\| (\lambda - 1) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} \right\| + o(n)$$

$$\text{soit } |\lambda - 1| - o(n) \leq \left\| (\lambda - 1) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(n) \right\| \leq |\lambda - 1| + o(n).$$

$$\text{De même } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \lambda (\lambda - 1) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(n) \right\| = |\lambda (\lambda - 1)| \text{ et}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| (\lambda-1)^2 \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\| = (\lambda-1)^2$$

On en déduit que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ \begin{aligned} & A + \frac{\left\| (A-I) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\|^2}{\left\| (A-I) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\|^2} A(A-I) \\ & - \frac{\left\| A(A-I) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\|^2}{\left\| (A-I) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} + o(1) \right\|^2} (A-I) \end{aligned} \right\}$$

$$= \left\{ \lambda + \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^4} \lambda(\lambda-1) - \frac{\lambda^2(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^4} (\lambda-1) \right\} I$$

$$= \left\{ \lambda + \frac{\lambda}{\lambda-1} - \frac{\lambda^2}{\lambda-1} \right\} I$$

$$= \left\{ \frac{\lambda^2 - \lambda + \lambda - \lambda^2}{\lambda-1} \right\} I = 0.$$

Ainsi :

$$\frac{\|E_2^{(k)} - S\|}{\|S_k - S\|} = \left\| o(1) \frac{S_k - S}{\|S_k - S\|} \right\| = o(1).$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

### Théorème 1

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 1$  et soit  $(S_k)$  une suite de  $\mathbb{R}^p$  vérifiant :

- $S_k \neq S$  pour  $k$  assez grand
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(S_{k+1} - S) - \lambda(S_k - S)}{\|S_k - S\|} = 0$

Alors on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{E_2^{(k)} - S}{\|S_k - S\|} = 0.$$

### Remarques

a) Si de plus la suite  $(\|S_k - S\|)$  est bornée on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} E_2^{(k)} = S$ .

b) Soit  $(S_k)$  la suite générée par :

$$S_{k+1} = AS_k + b \quad \text{avec } (I-A) \text{ inversible.}$$

Supposons que les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  soient telles que :  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_p|$

Si  $A$  est une matrice réelle nécessairement  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$

(puisque si  $\lambda$  est racine du polynôme caractéristique de  $A$  il en est de même de  $\bar{\lambda}$ ).

La suite  $(S_k)$  vérifie alors les conditions du théorème,

avec  $S = (I-A)^{-1}b$ .

Donc si  $|\lambda_1| < 1$ ,  $(S_n)$  converge vers  $S$ ,  
et  $E_m^{(2)}$  converge vers  $S$  plus rapidement que  $(S_n)$ .

c) Plaçons nous dans  $\mathbb{R}^2$  (on peut faire  
les mêmes raisonnements dans  $\mathbb{R}^p$   $p > 2$ )

Soit  $S_n = (x_n, y_n)$  : on suppose que  $S_n$  tend  
vers  $S = (x, y)$  de la façon suivante ;

(i)  $x_n \neq x$  pour  $n$  assez grand

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = \lambda (\neq 1)$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y}{x_n - x} = \lambda' (\lambda' \neq 0)$$

$$\text{On a alors : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(S_{n+1} - S) - \lambda(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0.$$

Géométriquement on a l'interprétation suivante  
de (iii) :

la droite  $(S_n, S)$  tend vers une direction donnée  
 $(\Delta)$ , où  $(\Delta)$  est la droite passant par  $S$  de  
pente  $\lambda'$ .

Par ailleurs on peut remarquer que (iii) peut  
être une conséquence de (ii) et réciproquement

En effet regardons les deux cas suivants :

$$\boxed{\text{cas 1}} : S_{n+1} = AS_n + b \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$\text{On a} \quad \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = \alpha + \beta \frac{y_n - y}{x_n - x}$$

$$\text{Si} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = l \quad \text{et si } \beta \neq 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y}{x_n - x} \text{ existe (et est non nulle si } l \neq \alpha)$$

$$\boxed{\text{cas 2}} \quad S_{n+1} = \phi(S_n) \quad (S = \phi(s))$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \phi_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = \phi_2(x_n, y_n) \end{cases}$$

$$\frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = \partial_1 \phi_1(x, y) + \partial_2 \phi_1(x, y) (1 + o(n)) \frac{y_n - y}{x_n - x} + o(n).$$

$$\text{donc si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = l \quad (l \neq 1) \quad \text{et si } \partial_2 \phi_1(x, y) \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y}{x_n - x} = \frac{l - \partial_1 \phi_1(x, y)}{\partial_2 \phi_1(x, y)}.$$

On peut d'ailleurs remarquer que si  $l = 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n - y}{x_n - x} = - \frac{\partial_1 \phi_1(x, y)}{\partial_2 \phi_1(x, y)} = f'(x) \quad \text{où } f \text{ est définie}$$

par le théorème des fonctions implicites :

localement en  $(x, y)$ ,  $\phi_1(u, v) = x$  si et seulement si  $v = f(u)$ .

On peut aussi voir que l'hypothèse " $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x}{x_n - x} = l \neq 1$ "

peut être remplacée par " $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} = l \neq 1$ ". [4]

exemple (du à Sadhana [7])

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{12}(x_n - y_n)^2 & (x_0, y_0) = (6, 4) \\ y_{n+1} = -\frac{1}{6}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{12}(x_n - y_n)^2 & (x_1, y_1) = (0, 0) \end{cases}$$

On peut voir que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = -1$

donc  $E_2^{(n)}$  accélère la convergence de la suite.

d) Soit  $(S_n)$  une suite convergeant A-linéairement. Si on rajoute l'hypothèse  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} = u$  ( $\|u\| = 1$ ),

on a alors  $\frac{S_{n+1} - S}{\|S_n - S\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Au$ . Par ailleurs on a :

$$\frac{S_{n+1} - S}{\|S_{n+1} - S\|} = \frac{\|S_n - S\|}{\|S_{n+1} - S\|} \times \frac{S_{n+1} - S}{\|S_n - S\|}, \text{ d'où } Au = \|Au\| u.$$

En conclusion: si  $(S_n)$  tend vers  $S$  A. linéairement, pour que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|}$  existe, il faut que la matrice  $A$  admette une valeur propre positive  $\lambda$ . Dans ce cas,  $\frac{S_{n+1} - S}{\|S_n - S\|} - \lambda \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} \rightarrow 0$ .

1.4 La matrice  $A$  n'est pas une homothétie.

a) Un exemple dans  $\mathbb{R}^2$

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$   $A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (notation d'angle  $\frac{\pi}{2}$ )

Pour tout  $u \in \mathbb{R}^2$  on a:  $\|Au\| = \sqrt{2} \|u\|$ . En utilisant l'expression du lemme 1, on a:

$$\frac{E_2^{(n)} - S}{\|S_n - S\|} = \left\{ A + A(A-I) - 2(A-I) \right\} \frac{S_n - S}{\|S_n - S\|} + o(1).$$

Or  $A + (A-I) - 2(A-I) = A^2 - 2(A-I) = 0$

(car  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ )

Conclusion: dans  $\mathbb{R}^2$ , si une suite  $(S_n)$  vérifie  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(S_{n+1} - S) - A(S_n - S)}{\|S_n - S\|} = 0$  avec

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|E_2^{(n)} - S\|}{\|S_n - S\|} = 0$ .

### b) Degré d'une suite.

On perçoit, d'après ce qui précède, que l'accélération va dépendre du degré du polynôme minimal de la matrice  $A$ , d'où l'idée de poser :

$(x_n)$  une suite vectorielle à convergence linéaire,

$$\text{deg}(x_n) = \inf \left\{ \begin{array}{l} \text{degrés des polynômes minimaux} \\ \text{des matrices } A \text{ telles que} \\ x_n \rightarrow x \text{ } A\text{-linéairement} \end{array} \right\}.$$

On a un premier résultat :

**Lemme :**  $A$  et  $B$  deux matrices carrées qui commutent. Soit  $(x_n)$  une suite vectorielle qui converge vers  $x$   $A$ -linéairement.

On pose  $y_n = Bx_n$ . Si  $B$  est de plus inversible alors  $(y_n)$  tend vers  $y = Bx$   $A$ -linéairement.

preuve :

$$\begin{aligned} (y_{n+1} - y) - A(y_n - y) &= B(x_{n+1} - x) - AB(x_n - x) \\ &= B[(x_{n+1} - x) - A(x_n - x)] \text{ car } AB = BA. \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\|x_n - x\| = \|B^{-1}(y_n - y)\| \leq \|B^{-1}\| \|y_n - y\|$$

$$\text{d'où } \frac{1}{\|y_n - y\|} \leq \frac{\|B^{-1}\|}{\|x_n - x\|}.$$

Ainsi :

$$\frac{\|(y_{n+1}-y) - A(y_n-y)\|}{\|y_n-y\|} \leq \|B\| \|B^{-1}\| \frac{\|(x_{n+1}-x) - A(x_n-x)\|}{\|x_n-x\|}$$

d'où le résultat du lemme  $\square$

Faisons deux remarques :

i) si  $A$  est une matrice de polynôme minimal de degré  $\deg(x_n)$ , on peut en déduire que  $\deg(y_n) \leq \deg(x_n)$ .

ii) si  $B$  n'est pas inversible, le problème est d'avoir une inégalité du type  $\frac{1}{\|y_n-y\|} \leq \frac{K}{\|x_n-x\|}$  ( $K > 0$ ).

Pour avoir le résultat du lemme, il suffit de rajouter une hypothèse du type

$$\inf_{n \geq N} \frac{\|B(x_n-x)\|}{\|x_n-x\|} > 0.$$

• Supposons que  $\deg(x_n) = \partial^0 \pi_A = h$  où  $\pi_A$  est le polynôme minimal de  $A$ . Faisons l'hypothèse supplémentaire que  $A$  est normale (i.e.  $AA^* = A^*A$ )  $A$  étant diagonalisable [5], elle possède  $h$  valeurs propres distinctes. (on se place ici dans  $\mathbb{C}^P$ )

Supposons, pour fixer les idées, que  $E_1$  soit un espace

propre relatif à la valeur propre  $\lambda_1$ , soit de dimension 1. Posons  $\mathcal{H} = E_1^\perp$  (orthogonal de  $E_1$ )  
 L'hyperplan  $\mathcal{H}$  est stable par  $A$  et  $A^*$  et  $\tilde{A}$ , la restriction de  $A$  à  $\mathcal{H}$ , est normale. Soit  $p$  la projection orthogonale de  $\mathbb{C}^p$  sur  $\mathcal{H}$ : pour tout vecteur  $x$  on a  $A.p(x) = p(Ax)$ .

Considérons la suite  $y_n = p(x_n)$ , suite des projetés dans  $\mathcal{H}$ : on a

$$p[(x_{n+1} - x) - A(x_n - x)] = y_{n+1} - y - \tilde{A}(y_n - y).$$

Par ailleurs  $\pi_A(x) = (x - \lambda_1)Q(x)$  avec  $Q(\lambda_1) \neq 0$  et  $\partial^\circ Q = k - 1$ .

Si  $x \in \mathcal{H}$ ,  $(A - \lambda_1 I)Q(A)x = 0$ , soit

$$A[Q(A)x] = \lambda_1 Q(A)x, \text{ d'où}$$

$$Q(A)x \in \mathcal{H} \cap E_1 = \{0\}. \text{ Ainsi } \pi_A^{\mathcal{H}} = Q.$$

Pour terminer on a aussi:

$$\frac{(y_{n+1} - y) - \tilde{A}(y_n - y)}{\|y_n - y\|} = \frac{\|x_n - x\|}{\|y_n - y\|} p \left[ \frac{(x_{n+1} - x) - A(x_n - x)}{\|x_n - x\|} \right]$$

Résumons tout cela par la proposition suivante:

Proposition :

Soit  $(x_n)$  une suite qui converge linéairement vers  $x$  au sens de Niervgelt, à son degré.

Supposons qu'il existe une matrice  $A$  normale, dont le polynôme minimal soit de degré  $k$ , telle que  $(x_n)$  se comporte vers  $x$   $A$ -linéairement.

On suppose de plus que un des sous-espaces propres de  $A$  est de dimension 1 et on note  $\mathcal{H}$  l'hyperplan orthogonal et  $p$  la projection orthogonale sur  $\mathcal{H}$ .

$$\text{Si } \frac{\|p(x_n - x)\|}{\|x_n - x\|} \geq \alpha > 0 \quad \forall n > N$$

alors la suite  $y_n = p(x_n)$  converge vers  $p(x)$   $\tilde{A}$ -linéairement, où  $\tilde{A}$  est la restriction de  $A$  à  $\mathcal{H}$ .  
De plus on a  $\deg(y_n) \leq k-1$ .

Si un procédé accéleie les suites à convergence linéaire de degré  $\leq k-1$ , on peut l'appliquer à la suite des projetés  $y_n = p(x_n)$ .

exemple :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 \in \mathbb{R} \quad \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \lambda_2 \neq 1 \end{array}$$

$$\pi_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2).$$

Supposons que  $x_n \rightarrow x$  A. linéairement.

On note  $(e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ .

On projette  $(x_n)$  sur  $\langle e_2, \dots, e_p \rangle$ : la suite des projetés  $y_n$  converge alors à  $\lambda_2 I_{p-1}$  ( $I_{p-1}$  identité de  $\mathbb{C}^{p-1}$ ) si  $\frac{\|y_n - y\|}{\|x_n - x\|} > \alpha$  pour  $n$  assez grand.

Le procédé  $E_2^m$  va donc accélérer la convergence de la suite  $(y_n)$ .

2. Progression de 2 colonnes en 2 colonnes.

L'É - algorithme vectoriel est appliqué à une suite  $(S_n)$  de  $\mathbb{R}^p$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ .

Supposons que l'on ait calculé les quantités  $E_{2k}^{(n)}, E_{2k+1}^{(n)}$  pour tout  $n \geq 0$  ( $k$  étant fixé), que peut-on en déduire pour  $E_{2k+2}^{(n)}$  et  $E_{2k+3}^{(n)}$  ?

Faisons les hypothèses  $H_k$  suivantes :

(a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{2k}^{(n)} = S$

(b)  $\frac{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} = a_{n,k}$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} = a_k \neq 1$  ( $a_k > 0$ ).

(c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta E_{2k}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} = u_k \in \mathbb{R}^p$  ( $\|u_k\| = 1$ )

(d)  $E_{2k+1}^{(n)}$  tend vers l'infini dans la direction  $u_k$

avec la vitesse  $\frac{1}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|}$  (i.e.  $E_{2k+1}^{(n)} = \frac{1}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} (u_k + e_{n,k})$ )

avec  $e_{n,k} \rightarrow 0$   
 $n \rightarrow +\infty$ )

On a alors :

## Théorème 2 :

sous les hypothèses  $\forall k$  on a :

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow +\infty} E_{2k+2}^{(n)} = S$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} = 0$$

$$\textcircled{3} \text{ si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta E_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|} \text{ existe, alors } E_{2k+3}^{(n)}$$

tend vers l'infini dans la direction de cette limite  
avec la vitesse  $\frac{1}{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|}$ .

$$\text{démonstration : on a } E_{2k+2}^{(n)} = E_{2k}^{(n+1)} + (\Delta E_{2k+1}^{(n)})^{-1}$$

$$\text{d'où } \Delta E_{2k+2}^{(n)} = \Delta E_{2k}^{(n+1)} + \frac{\Delta E_{2k+1}^{(n+1)}}{\|\Delta E_{2k+1}^{(n+1)}\|^2} - \frac{\Delta E_{2k+1}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k+1}^{(n)}\|^2}$$

$$\text{Or } E_{2k+1}^{(n)} = \frac{1}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} (u_k + e_{n,k}), \text{ ainsi}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{2k+1}^{(n)} &= \frac{1}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} (u_k + e_{n+1,k}) - \frac{1}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} (u_k + e_{n,k}) \\ &= \frac{1}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} \left\{ u_k + e_{n+1,k} - \frac{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} (u_k + e_{n,k}) \right\} \end{aligned}$$

$$\Delta E_{2k+1}^{(n)} = \frac{1}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} \left\{ (1-a_{n,k})u_k + e_{n+1,k} - a_{n,k}e_{n,k} \right\}$$

On obtient alors :

$$\frac{\Delta E_{2k+1}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k+1}^{(n)}\|^2} = \|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\| \times \frac{(1-a_{n,k})u_k + e_{n+1,k} - a_{n,k}e_{n,k}}{\|(1-a_{n,k})u_k + e_{n+1,k} - a_{n,k}e_{n,k}\|^2}$$

d'où

$$\frac{\Delta E_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} = \frac{\Delta E_{2k}^{(n+1)}}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} + \frac{\|\Delta E_{2k}^{(n+2)}\|}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} \times \frac{(1-a_{n,k})u_k + \dots}{\|(1-a_{n,k})u_k + \dots\|^2} - \frac{(1-a_{n,k})u_k + \dots}{\|(1-a_{n,k})u_k + \dots\|^2}$$

En passant à la limite il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta E_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} = \left( 1 + a \frac{(1-a)}{(1-a)^2} - \frac{1-a}{(1-a)^2} \right) u_k$$

$$1 + a \frac{(1-a)}{(1-a)^2} - \frac{1-a}{(1-a)^2} = 1 + \frac{a}{1-a} - \frac{1}{1-a} = 1 + \frac{a-1}{1-a} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta E_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} = 0 \text{ et comme } \frac{\Delta E_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} = \frac{\Delta E_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} \times \frac{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|}$$

il vient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Delta E_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k}^{(n)}\|} = 0$ .

De plus  $E_{2k+2}^{(n)} - S = E_{2k}^{(n)} - S + (\Delta E_{2k+1}^{(n)})^{-1}$  :

or  $\|(\Delta E_{2k+1}^{(n)})^{-1}\| = \frac{1}{\|\Delta E_{2k+1}^{(n)}\|} = \frac{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|}{\|(1-u_{n,k})u_{n+}\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_{2k+2}^{(n)} = S$ .

$$\begin{aligned} * E_{2k+3}^{(n)} &= E_{2k+1}^{(n+1)} - \frac{\Delta E_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|^2} \\ &= \frac{1}{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|} \left\{ \frac{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} \times \|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\| E_{2k+1}^{(n+1)} + \frac{\Delta E_{2k+2}^{(n)}}{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|} \right\} \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|\Delta E_{2k+2}^{(n)}\|}{\|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\|} = 0$  et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\Delta E_{2k}^{(n+1)}\| E_{2k+1}^{(n+1)}$

existe, on obtient le résultat (3) du théorème. ■

References du chapitre II, deuxième partie.

- [1] C. Brezinski  
Accélération de la convergence en analyse numérique,  
LNM 584, Springer Verlag, Heidelberg, 1977.
- [2] C. Brezinski  
Algorithmes d'accélération de la convergence. Etude numérique.  
Editions Technip, Paris, 1978.
- [3] C. Brezinski. M. Redivo-Zaglia  
Extrapolation Methods, Theory and Practice  
North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [4] J.P. Delahaye  
Sequence Transformations.  
Springer Verlag, Berlin, 1988.
- [5] F.R. Gantmacher  
Théorie des Matrices, Dunod, Paris, 1966
- [6] Y. Niewergelt  
Aitken's and Steffensen's accelerations in several  
variables.  
Numer. Math. 59, 295-310 (1991)
- [7] H. Sadok  
Accélération de la convergence de suites réelles,  
et méthodes de point fixe.  
Thèse, Lille, 1988.

## Chapitre III

### Transformations quasi-linéaires

Sadok a généralisé récemment au cas vectoriel la notion de procédé quasi-linéaire [4]. Dans le cas scalaire l'étude complète a été faite dans [1] par Brezinski.

Nous allons tout d'abord faire quelques rappels sur cette notion, puis nous nous intéresserons aux problèmes de convergence (accélération de la convergence pour des suites à convergence linéaire, convergence de méthodes de points fixes).

#### 1. Transformation quasi-linéaire.

Soit  $E = \mathbb{R}^p$  ou  $\mathbb{C}^p$  et  $k$  un entier naturel fixé.

On considère une application  $F$  de  $E^{k+1}$  dans  $E$ .

On dira que  $F$  est translatif si :

$$F(u_0 + \theta, \dots, u_k + \theta) = F(u_0, \dots, u_k) + \theta$$

pour tout  $(u_0, \dots, u_k) \in E^{k+1}$  et tout  $\theta \in E$ .

Sadok a montré le résultat suivant :

Théorème 1 :

soit  $F: E^{k+1} \rightarrow E$  une application translatrice de classe  $C^2$ . Il existe alors une fonction  $f: E^{k+1} \rightarrow E$  de classe  $C^2$  telle que :

$$F(\mu_0, \dots, \mu_k) = [Df(\mu_0, \dots, \mu_k)]^{-1} \cdot f(\mu_0, \dots, \mu_k)$$

avec  $D^2 f(\mu_0, \dots, \mu_k) \equiv 0$ .

Et on a la réciproque.

(Notation :  $Df(\mu_0, \dots, \mu_k) = \frac{\partial f}{\partial \mu_0} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \mu_k}$

$\frac{\partial f}{\partial \mu_i} \in L(E)$ , application linéaire de  $E$  dans  $E$ )

Supposons de plus qu'il existe  $a > 0$  tel que :

$$f(a\mu_0, \dots, a\mu_k) = a^n f(\mu_0, \dots, \mu_k).$$

On a alors d'une part  $f(0, \dots, 0) = 0$ ,

et d'autre part ,

$$Df(a\mu_0, \dots, a\mu_k) = a^{n-1} Df(\mu_0, \dots, \mu_k).$$

Montrons ce dernier point :

pour  $h \in E$  tel que  $\|h\|$  soit assez petite on a

$$f(a\mu_0+h, \dots, a\mu_k+h) = f(a\mu_0, \dots, a\mu_k) + Df(a\mu_0, \dots, a\mu_k) \cdot h + o(\|h\|).$$

$$\begin{aligned} \text{Or } f(a\mu_0+h, \dots, a\mu_k+h) &= a^n f\left(\mu_0 + \frac{h}{a}, \dots, \mu_k + \frac{h}{a}\right) \\ &= a^n \left[ f(\mu_0, \dots, \mu_k) + Df(\mu_0, \dots, \mu_k) \frac{h}{a} + o(\|h\|) \right] \end{aligned}$$

$$\text{d'où } Df(a\mu_0, \dots, a\mu_k) \cdot h = a^{n-1} Df(\mu_0, \dots, \mu_k) \cdot h + o(\|h\|)$$

Soit alors  $\mu \in E$ ,  $\mu \neq 0$  : pour  $n$  assez grand

$$\begin{aligned} Df(a\mu_0, \dots, a\mu_k) \frac{\mu}{n} &= a^{n-1} Df(\mu_0, \dots, \mu_k) \frac{\mu}{n} \\ &\quad + \frac{\mu}{n} \varepsilon\left(\frac{\mu}{n}\right) \left( \varepsilon\left(\frac{\mu}{n}\right) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } Df(a\mu_0, \dots, a\mu_k) \mu = a^{n-1} Df(\mu_0, \dots, \mu_k) \mu + \mu \varepsilon\left(\frac{\mu}{n}\right)$$

$$\text{ainsi } Df(a\mu_0, \dots, a\mu_k) \mu = a^{n-1} Df(\mu_0, \dots, \mu_k) \mu \quad \square$$

En particulier si  $n > 1$  on a :

$$Df(0, \dots, 0) = 0.$$

Si  $F$  est translatrice :  $F = (Df)^{-1} \cdot f$ .

Si de plus  $f$  est homogène, d'après ce qui précède  $F$  sera homogène de degré 1.

On dit alors que  $F$  est quasi-linéaire.

Terminons ces rappels par le calcul des opérateurs  $\frac{\partial F}{\partial \mu_i}$ .

Lemme 1 :

si  $F(\mu_0, \dots, \mu_n) = [Df(\mu_0, \dots, \mu_n)]^{-1} f(\mu_0, \dots, \mu_n)$

( $D^2 f \equiv 0$ ) alors :

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_i}(\mu_0, \dots, \mu_n) \cdot \mu = [Df(\mu_0, \dots, \mu_n)]^{-1} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial \mu_i}(\mu_0, \dots, \mu_n) \cdot \mu \right)$$

$$- [Df(\mu_0, \dots, \mu_n)]^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial \mu_i} (Df) \cdot \mu \circ [Df(\mu_0, \dots, \mu_n)]^{-1} \cdot f(\mu_0, \dots, \mu_n).$$

preuve : il suffit de décomposer  $F$ ,

$$\mu_0 \xrightarrow{F_1} Df(\mu_0, \dots, \mu_n) \xrightarrow{F_2} (Df(\mu_0, \dots, \mu_n))^{-1}$$

(-on calcule  $\frac{\partial F}{\partial \mu_0}$ )

puis

$$\mu_0 \longmapsto (F_2 \circ F_1(\mu_0), f(\mu_0, \dots, \mu_n)) \longmapsto F_2 \circ F_1(\mu_0) \cdot f(\mu_0, \dots, \mu_n)$$

et d'utiliser le théorème sur la dérivée d'une fonction composée et le résultat suivant ;

$$[2] \text{ l'application } \gamma: GL(E) \rightarrow GL(E)$$

$$u \mapsto u^{-1}$$

( $GL(E)$  groupe linéaire de  $E$ ) est de classe  $C^\infty$

et  $\gamma'(u).h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$  pour  $h \in L(E)$ .

## 2. Accélération de la convergence.

On a le théorème suivant :

### Théorème 2

Soit  $f: E^{h+1} \rightarrow E$  de classe  $C^2$ , homogène de degré  $n > 1$ . On considère la transformation quasi-linéaire  $F = [Df]^{-1} \cdot f$ , et  $A$  une matrice carrée  $p \times p$ .

Soit  $(x_n)$  une suite dans  $E$  qui converge  $A$ -linéairement vers  $x \in E$  (i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x_{n+1} - x) - A(x_n - x)}{\|x_n - x\|} = 0$$

). Supposons que :

$$\forall u \in E \quad f(u, Au, \dots, A^h u) = 0.$$

S'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\inf \left\{ \left| \det Df \left( \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, A \cdot \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, A^h \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|} \right) \right| \mid n \geq N \right\} > 0$$

alors  $T_n = F(x_n, \dots, x_{n+h})$  tend vers  $x$  plus rapidement que  $x_n$

démonstration :

Remarquons que  $x_{n+1} - x = A(x_n - x) + \|x_n - x\| e_{n,1}$

avec  $e_{n,1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } x_{n+2} - x &= A(x_{n+1} - x) + \|x_{n+1} - x\| e_{n+1,1} \\ &= A^2(x_n - x) + \|x_n - x\| A \cdot e_{n,1} \\ &\quad + \|x_{n+1} - x\| e_{n+1,1}. \end{aligned}$$

$$\text{On } \|x_{n+2} - x\| \leq \|A\| \|x_n - x\| + \|x_n - x\| \|e_{n,1}\|$$

$$\text{soit } \|x_{n+1} - x\| = O(\|x_n - x\|)$$

$$\text{d'où } x_{n+2} - x = A^2(x_n - x) + \|x_n - x\| e_{n,2} \quad e_{n,2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Plus généralement on a :

$$x_{n+i} - x = A^i(x_n - x) + \|x_n - x\| e_{n,i} \quad e_{n,i} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On obtient ainsi :

$$T_n - x = F(x_n - x, \dots, x_{n+h} - x)$$

$$= \|x_n - x\| F\left(\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, \frac{x_{n+h} - x}{\|x_n - x\|}\right)$$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, \frac{x_{n+h} - x}{\|x_n - x\|}\right) &= F\left(\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, A \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, A^h \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}\right) \\ &\quad + \sum_{i=0}^h \frac{\partial F}{\partial u_i}\left(\frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, A^h \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}\right) e_{n,i} + o\left((e_{n,0}, \dots, e_{n,h})\right). \end{aligned}$$

Pour avoir le résultat voulu, il suffit donc que

$$\left( \frac{\partial F}{\partial u_i} \left( \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, A^k \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|} \right) \right)_{n \geq N} \text{ soit formée}$$

dans  $L(E)$ . Pour cela, étant donnée l'expression de  $\frac{\partial F}{\partial u_i}$  obtenue dans le lemme 1, il suffit que

$$\left( Df \left( \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, A \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, A^k \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|} \right)^{-1} \right)_{n \geq N} \text{ soit}$$

formée dans  $L(E)$ , ce qui équivaut [3] à

$$\inf \left\{ \left| \det \left( Df \left( \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, A \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}, \dots, A^k \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|} \right) \right) \right| \right. \\ \left. n \geq N \right\} > 0 \quad \blacksquare$$

### Remarques

a) On a considéré l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & L(E) \\ u & \longmapsto & Df(u, Au, \dots, A^k u) \end{array}$$

A-t-on toujours  $Df(u, Au, A^2 u, \dots, A^k u) \in GL(E)$ ?

Doit-on mettre des conditions sur  $A$ , sur  $k$ ?

Le problème est difficile, et regardons à titre d'exemple la situation suivante :

$$E \longrightarrow L(E)$$

$$u \longmapsto G(u, Au, \dots, A^k u)$$

$G(\dots)$  désignant la matrice de Gram des vecteurs  $(u, Au, \dots, A^k u)$ . Pour que l'on ait bien une application de  $E$  dans  $L(E)$ , la matrice de Gram étant d'ordre  $(k+1) \times (k+1)$ , il faut que  $k = p-1$ .

D'autre part  $G(u, Au, \dots, A^k u) \in GL(E)$  si et seulement si le système  $(u, Au, \dots, A^k u)$  est libre : cela signifie d'une part que la matrice  $A$  est cyclique et que le degré du polynôme minimal de  $A$  pour le vecteur  $u$  est  $p$ . On aura donc pas la condition pour tous les vecteurs de l'espace  $E$  !

b) L'hypothèse,

$\forall x \in E \quad f(x, Ax, \dots, A^k x) = 0$  entraîne que  $I-A$  est inversible. En effet on a d'une part  $F(x, Ax, \dots, A^k x) = 0$ , et d'autre part si  $1$  était valeur propre de  $A$  il existerait un vecteur  $u$  tel que  $Au = u$  ( $u \neq 0$ ), -d'où

$$0 = F(u, Au, \dots, A^k u) = F(u, \dots, u)$$

$$= F(0, \dots, 0) + u = u \quad !$$

### 3. Méthode de point fixe.

Soit à résoudre l'équation  $G(x) = x$  ( $x \in E$ ).

Soit  $\bar{x}$  un point fixe de  $G$  :  $G(\bar{x}) = \bar{x}$ . On suppose que  $A = G'(\bar{x})$  est telle que  $I - A$  soit inversible. On fait sur  $G$  les mêmes hypothèses que dans le cas de la convergence quadratique de l' $\varepsilon$ -algorithme topologique.

Soit  $F = [Df]^{-1} \cdot f$  une transformation quasi-linéaire sur  $E^{k+1}$ . On considère l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \text{ donné (dans un voisinage de } \bar{x} \text{)} \\ \mu_0 = x_n \\ \mu_i = G(\mu_{i-1}) \quad i = 1 \text{ à } k \\ x_{n+1} = F(\mu_0, \dots, \mu_k) \end{array} \right.$$

Théorème 3 : si on suppose que  $F(\mu, \mu, \dots, \mu) = 0 \forall \mu$   
et  $\inf \left\{ \left| \det \left( \frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|}, A \frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|}, \dots, A^k \frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|} \right) \right| \right\} > 0$   
alors  $\|x_{n+1} - \bar{x}\| = o(\|x_n - \bar{x}\|)$  si  $x_0$  est proche de  $\bar{x}$ .

démonstration : elle est identique à celle de  
l'écrème 2 après avoir noté que

$$\mu_i - \bar{x} = A^i (\mu_0 - \bar{x}) + O(\|\mu_0 - \bar{x}\|^2).$$

### Reference du chapitre III

- [1] C. Braziński . Quasi-linear extrapolation processes.  
In R.P Agarwal et al., eds., Numerical Mathematics.  
Singapore 1988, volume 86 of ISNM, pp 61-78, Basel, 1988.  
Birkhäuser-Verlag.
- [2] H. Cartan . Cours de Calcul Differential .  
2<sup>e</sup> éd, Hermann, Paris, 1977.
- [3] Y. Nievergelt . Aitken's and Steffensen's accelerations  
in several variables . Numer. Math 59, 295-310 (1991).
- [4] H. Sadokh . Quasi-linear vector processes,  
à faire.



## TROISIEME PARTIE

Approximants de type Padé et  
accélération de la convergence :  
deux exemples .

<< Ainsi toujours poussés vers de nouveaux rivages,  
Dans la nuit éternelle emportés sans retour,  
Ne pourrions-nous jamais sur l'océan des âges  
Jeter l'ancre en seul jour ? >>

Lamartine , Le Lac,  
Méditations poétiques.



## INTRODUCTION

Des résultats théoriques sur le choix des polynômes générateurs des approximations de type Padé [1] ont été obtenus par Eiermann [3]. En particulier on a le théorème suivant

**Théorème [ ]:** Soit  $f$  une fonction entière et  $(h-1/h)_f$  l'approximant de type Padé de  $f$  de polynôme générateur  $v_h(z) = \prod_{i=1}^h (z-a_i)$   $a_i \in \mathbb{C}$ .

Si  $\lim_{i \rightarrow +\infty} a_i = 0$ , alors  $\lim_{h \rightarrow +\infty} (h-1/h)_f = f(z)$

uniformément sur les compacts de  $\mathbb{C}$ .

De plus :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} |f(z) - (h-1/h)_f(z)|^{\frac{1}{h-1}} = 0.$$

Le théorème reste vrai pour  $v_h$  de la forme :

$$v_h(z) = (z - a_h)^h \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} a_h = 0.$$

( pour une synthèse de tous ces résultats on peut voir [2, p 77-78-79] ).

Comme exemple important on a  $f(z) = e^{-z}$  avec

$a_k = -\frac{1}{k}$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ): ce cas a été étudié par Van Iseghem [7].

L'objectif de cette première partie est d'aborder le problème suivant: les approximations de type Padé  $(k-1|k)f$  définies précédemment, accélèrent-ils la convergence des sommes partielles de la série?

Le calcul de  $(k-1|k)f$  nécessitant la connaissance de  $c_0, \dots, c_{k-1}$  ( $f(x) = \sum_{i \geq 0} c_i x^i$ ), il s'agit

de comparer  $[f(t) - (k-1|k)f(t)]$  et  $[f(t) - \sum_{i=0}^{k-1} c_i t^i]$ .

Nous allons étudier les deux exemples suivants:

$$\bullet \quad z \mapsto e^{-z} \quad \text{avec} \quad \sigma_R(z) = \left(z + \frac{1}{R}\right)^R$$

$$\bullet \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n \quad (0 < q < 1) \quad \text{avec}$$

$$\sigma_R(z) = \left(z - q^{\frac{1}{R}}\right)^R.$$

1. Approximants de type Padé de  $z \mapsto e^{-z}$   
dont les dénominateurs sont  $(1 + \frac{z}{h})^h$

Soit  $t \in \mathbb{C}^*$  et  $h$  assez grand : on considère l'approximant de type Padé  $(h-1|h)$  de  $z \mapsto e^{-z}$ , de polynôme générateur  $(z + \frac{1}{h})^h$ .

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, ces approximants ont été étudiés par Van Isegem [].

En particulier Van Isegem a retrouvé sur cet exemple les résultats du théorème de Eiermann, et a donné une expression de  $(h-1|h)$  à l'aide de polynômes de Laguerre.

1.1 Notons  $E_h(z)$  l'erreur :

$$E_h(z) = e^{-z} - (h-1|h)(z).$$

Nous allons établir une nouvelle majoration de  $|E_h(t)|$ . Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1 [1, p21]

Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe  $D$  contenant l'origine. Soit  $C'$  un lacet simple dans ce domaine. Si on pose  $C = \psi(C')$  où  $\psi: z \mapsto \frac{1}{z}$ , on a alors :

$$f(t) - (h-1|h)f(t) = \frac{1}{2i\pi} \frac{t^h}{\psi(t)} \int_C \frac{x^{-1} f(x^{-1}) \psi(x)}{1-xt} dx$$

( $\psi$  étant le polynôme générateur).

Théorème 1 :

Soit  $t \in \mathbb{C}$  donné. Pour  $h$  assez grand on a l'inégalité suivante :

$$|E_h(t)| \leq 4 e^{|t|} \times |t|^h \times \left(\frac{\sqrt{e}}{h}\right)^h.$$

démonstration :

Soit  $r > 0$  tel que  $|t| < r$  : on a, d'après le lemme 1,

$$E_h(t) = \frac{1}{2i\pi} \frac{t^h}{\tilde{V}(t)} \int_C \frac{z^{-1} f(z^{-1}) V(z)}{1-zt} dz$$

avec  $C = \left\{ z \mid |z| = \frac{1}{r} \right\}$   $(z = \frac{e^{i\theta}}{r} \theta \in [0, 2\pi])$   
 et  $V(z) = \left(z + \frac{1}{h}\right)^h$ .

$$\int_C \frac{z^{-1} f(z^{-1}) V(z)}{1-zt} dz = \int_0^{2\pi} \frac{r e^{-i\theta} \times e^{-n e^{-i\theta}} \times \left(\frac{e^{i\theta}}{r} + \frac{1}{h}\right)^h \times \frac{i}{r} e^{i\theta}}{1 - \frac{e^{i\theta} \times t}{r}} d\theta$$

$$= i \int_0^{2\pi} \frac{e^{-n e^{-i\theta}} \times \left(\frac{e^{i\theta}}{r} + \frac{1}{h}\right)^h}{1 - \frac{e^{i\theta} \times t}{r}} d\theta$$

d'où  $\left| \int_C \frac{z^{-1} f(z^{-1}) V(z)}{1-zt} dz \right| \leq \frac{1}{(rh)^h} \times \frac{1}{1 - \frac{|t|}{r}} \int_0^{2\pi} e^{-r \cos \theta} (r^2 + r^2 + 2rh \cos \theta)^{\frac{h}{2}}$

car :  $|e^{-r} e^{-i\theta}| = |e^{-r \cos \theta} \times e^{i r \sin \theta}| = e^{-r \cos \theta}$

$$\left| \frac{e^{i\theta}}{r} + \frac{1}{h} \right|^h = \left( \frac{1}{rh} \right)^h (r^2 + h^2 + 2rh \cos \theta)^{\frac{h}{2}}$$

$$\left| 1 - \frac{e^{i\theta} \times t}{r} \right| \geq 1 - \frac{|t|}{r}$$

De plus on a  $|\tilde{V}(t)| = \left| 1 + \frac{t}{h} \right|^h \geq \frac{1}{2} |e^t| \geq \frac{1}{2} e^{-|t|}$ .

Ainsi pour  $r > |t|$  et  $h$  assez grand on a obtenu :

$$|E_R(t)| \leq \frac{e^{|t|}}{\pi} \times \frac{|t|^h}{1 - \frac{|t|}{r}} \times \left( \frac{\sqrt{2}}{h} \right)^h \int_0^{2\pi} e^{-h \cos \theta} (1 + \cos \theta)^{\frac{h}{2}} d\theta$$

Remarquons alors que :

$$\begin{aligned} e^{-h \cos \theta} (1 + \cos \theta)^{\frac{h}{2}} &= e^{-h \cos \theta} \left( \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2} \right)^{\frac{h}{2}} \\ &= (\sqrt{2})^h e^{-h \cos \theta} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|^h \\ &= (\sqrt{2})^h \left( e^{-\cos \theta} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \right)^h. \end{aligned}$$

Soit  $u(\theta) = e^{-\cos \theta} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$   $\theta \in [0; 2\pi]$  : en étudiant  $u$  sur  $[0; 2\pi]$  on montre que  $u$  a un maximum en  $\frac{2\pi}{3}$  qui vaut  $\frac{1}{2} \sqrt{e} (< 1)$ .

On obtient ainsi :

$$|E_R(t)| \leq \frac{2e^{|t|}}{1 - \frac{|t|}{h}} \left( \frac{\sqrt{e}}{h} \right)^h \times |t|^h \leq 4e^{|t|} \times |t|^h \times \left( \frac{\sqrt{e}}{h} \right)^h \blacksquare$$

1.2 Considérons à présent l'erreur :

$$e_h(t) = e^{-t} - \sum_{j=0}^{h-1} \frac{(-t)^j}{j!}$$

Théorème 2 :

Soit  $t \in \mathbb{C}^*$  donné. On a l'équivalence :

$$|e_h(t)| \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|t|^h}{h!}$$

démonstration :

$$e_h(t) = \sum_{j \geq h} \frac{(-t)^j}{j!} = \frac{(-t)^h}{h!} \sum_{j \geq 0} \frac{h!}{(j+h)!} (-t)^j$$

Posez  $S_h(t) = \sum_{j \geq 0} \frac{h!}{(j+h)!} (-t)^j$ . On a alors

$$|S_h(t) - 1| = \left| \sum_{j \geq 1} \frac{h!}{(j+h)!} (-t)^j \right| \leq \sum_{j \geq 1} \left( \frac{|t|}{h} \right)^j$$

Si  $h > 2|t|$  alors  $\frac{|t|}{h} < \frac{1}{2}$  d'où

$$|S_h(t) - 1| \leq \frac{\frac{|t|}{h}}{1 - \frac{|t|}{h}} \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} S_h(t) = 1.$$

On  $|e_h(t)| = \frac{|t|^h}{h!} \times |S_h(t)|$  d'où le résultat souhaité. ■

Remarque :  $t$  étant fixé, on a pour  $h$  assez grand

$$|e_h(t)| \geq \frac{1}{2} \frac{|t|^h}{h!}$$

1.3 Nous allons à présent comparer  $|E_h(t)|$  et  $|e_h(t)|$ .

Théorème 3 :

Soit  $t \in \mathbb{C}^*$ . On a :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t} - (R-1)h(t)}{e^{-t} - \sum_{j=0}^{h-1} \frac{(-t)^j}{j!}} = 0$$

Ce résultat signifie que la suite  $(R-1)h(t)_{h \geq 1}$  converge plus vite vers  $e^{-t}$  que les sommes partielles  $\left( \sum_{j=0}^{h-1} \frac{(-t)^j}{j!} \right)_{h \geq 1}$ .

démonstration :

D'après les théorèmes 1 et 2 on a : si  $t \in \mathbb{C}^*$

$$\frac{|E_h(t)|}{|e_h(t)|} \leq 4 e^{|t|} \times |t|^h \times \left(\frac{\sqrt{e}}{h}\right)^h \times \frac{2h!}{|t|^h}$$

$$\text{soit } \frac{|E_h(t)|}{|e_h(t)|} \leq 8 e^{|t|} h! \left(\frac{\sqrt{e}}{h}\right)^h$$

Or, d'après la formule de Stirling,  $h! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi h} h^h e^{-h}$ .  
d'où  $h! \left(\frac{\sqrt{e}}{h}\right)^h \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi h} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^h$  qui tend vers 0 quand  $h \rightarrow +\infty$  ■

Remarque :

On aurait pu choisir comme polynôme générateur de l'approximation de type Padé  $(k-1|k)$  de  $z \mapsto e^{-z}$  le polynôme  $(z + \rho^{-k})^k$  avec  $0 < \rho < 1$ .

D'après le théorème d'Eiermann on a convergence uniforme sur les compacts de  $\mathbb{C}$  de la suite  $((k-1, k))_{k \geq 0}$  vers la fonction  $e^{-z}$ .

Par contre, les techniques de majorations du paragraphe 1.1 donnent :

$$|e^{-t} - (k-1|k)(t)| \leq \frac{\left|\frac{t}{\rho^k}\right|^k 2^k}{\left(1 - \frac{|t|}{\rho^k}\right)\left(1 + \frac{|t|}{\rho^k}\right)^k} \sup_{\Theta} \left( e^{-\frac{\rho^k}{2} \cos \Theta} \times \left|\cos \frac{\Theta}{2}\right| \right)^k$$

$$\text{Or } \sup_{\Theta} \left( e^{-\frac{\rho^k}{2} \cos \Theta} \times \left|\cos \frac{\Theta}{2}\right| \right)^k = e^{\frac{1}{2} \frac{\rho^k}{2}} \times \frac{1}{2^k}$$

$$\text{d'où } |e^{-t} - (k-1|k)(t)| \leq \frac{\left|\frac{t}{\rho^k}\right|^k}{\left(1 - \frac{|t|}{\rho^k}\right)\left(1 + \frac{|t|}{\rho^k}\right)^k} e^{\frac{1}{2} \times \frac{\rho^k}{2}}$$

Le membre de droite est équivalent, quand  $k$  tend vers l'infini à  $\left|\frac{t}{\rho^k}\right|^k e^{\frac{\rho^k}{2}}$ , terme qui tend vers  $+\infty$ .

Donc si le pôle est trop grand, on ne peut même plus démontrer la convergence par cette méthode, - car  $\sup_{\Theta} \left( e^{-\frac{\rho^k}{2} \cos \Theta} \left|\cos \frac{\Theta}{2}\right| \right) = \frac{1}{2} e^{\frac{\rho^k}{2}}$  et le module de  $f(\rho e^{-i\Theta})$  - croît beaucoup plus vite que  $\rho^k$ .

2. Approximants de type Padé de  
 $z \mapsto \sum_{n \geq 0} \rho^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n$  ( $0 < \rho < 1$ ) de dénominateurs  $(1 - z\rho^h)^h$ .

On considère à présent la série entière  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$

avec

(a)  $a_n \neq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

(b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} \times a_{n-1}}{a_n^2} = q$  où  $q \in \mathbb{C}$   $|q| < 1$

Il existe alors  $\rho \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \rho < 1$  tel que :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \rho \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|. \text{ Ainsi on a } \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \rho^n \left| \frac{a_1}{a_0} \right|$$

et donc  $f$  est holomorphe dans tout le plan.

Des résultats de convergence sur les approximants de Padé de telles fonctions ont été obtenus par Lubinsky [5] et Lubinsky et Saff [6].

Posons :  $E_R(t) = f(t) - \sum_{j=0}^{h-1} a_j t^j$ .

2.1 On a le résultat suivant sur l'erreur  $E_R(t)$ .

**Théorème 4**

Soit  $t \in \mathbb{C}^*$  fixé. On a l'équivalence :

$$|E_R(t)| \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} |a_h| \times |t|^h$$

démonstration :

$$E_k(t) = \sum_{j \geq k} a_j t^j = a_k t^k \sum_{j \geq 0} \frac{a_{j+k}}{a_k} t^j$$

$$\text{Or } \left| \sum_{j \geq 0} \frac{a_{j+k}}{a_k} t^{j-1} \right| = \left| \sum_{j \geq 1} \frac{a_{j+k}}{a_k} t^j \right| \leq \sum_{j \geq 1} \left| \frac{a_{j+k}}{a_k} \right| |t|^j.$$

De plus  $\frac{a_{j+k}}{a_k}$  est le produit  $\underbrace{\frac{a_{j+k}}{a_{j+k-1}} \times \frac{a_{j+k-1}}{a_{j+k-2}} \times \dots \times \frac{a_{k+1}}{a_k}}_j \text{ termes}$

$$\text{d'où } \left| \frac{a_{j+k}}{a_k} \right| \leq \rho^{j+k-1} \times \rho^{j+k-2} \times \dots \times \rho^k \times \left| \frac{a_1}{a_0} \right|^j \leq \left( \rho^k \left| \frac{a_1}{a_0} \right| \right)^j.$$

Pour  $k$  assez grand on a :  $0 < \rho^k \left| \frac{a_1}{a_0} \right| < 1$ , donc

$$\left| \sum_{j \geq 0} \frac{a_{j+k}}{a_k} t^{j-1} \right| \leq \sum_{j \geq 1} \left( \rho^k \left| \frac{a_1}{a_0} \right| \times |t| \right)^j \leq \frac{\rho^k \left| \frac{a_1}{a_0} \right| \times |t|}{1 - \rho^k \left| \frac{a_1}{a_0} \right| \times |t|}.$$

Le dernier terme tend vers 0 quand  $k \rightarrow +\infty$ , on obtient ainsi  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{j \geq 0} \frac{a_{j+k}}{a_k} t^j = 1$ , et du même coup le résultat cherché. ■

Remarque :  $t \in \mathbb{C}^*$  fixé, on a pour  $k$  assez grand

$$|E_k(t)| \geq \frac{|a_k|}{2} \times |t|^k.$$

2.2 On suppose à présent que  $q = p$  avec  $0 < p < 1$ .

On remarque que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Il semble donc raisonnable de considérer les approximations de type Padé  $(k-1, k)$  de  $f$  de polynômes générateurs  $(z - p^k)^k$  (on "envoie" les zéros des dénominateurs des type Padé vers  $+\infty$ ).

Notons  $E_k(z)$  l'erreur :  $E_k(z) = f(z) - (k-1|k)_z$ .

En utilisant le lemme 1 on obtient une expression de  $E_k(z)$ , et d'ailleurs plus généralement on a :

Lemme 2 :

Soit  $g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$  une fonction entière et  $R_k$  l'approximation de type Padé  $(k-1|k)$  de  $g$  de polynôme générateur  $v(x) = (x - \frac{1}{a})^k$  ( $a \neq 0$ ).

On a :

$$g(t) - R_k(t) = \frac{(-1)^k \left(\frac{t}{a}\right)^k}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^k} \sum_{n=0}^k c_n t^n \left( \sum_{p=0}^m c_p \frac{(-1)^p \left(\frac{a}{t}\right)^p}{h} \right) + \sum_{n=k+1}^{+\infty} c_n t^n .$$

démonstration :

d'après le lemme 1 on a l'égalité

$$g(t) - R_k(t) = \frac{1}{2i\pi} \frac{t^k}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^k} \int_0^{2\pi} \frac{n e^{-i\theta} g(n e^{-i\theta}) \left(\frac{e^{i\theta}}{n} - \frac{1}{a}\right)^k}{1 - \frac{e^{i\theta}}{n} t} \frac{i}{n} e^{i\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \frac{t^k}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^k} \int_0^{2\pi} \sum_{m \geq 0} c_m n^{m-k} \frac{e^{-i(m+1)\theta} \left(e^{i\theta} - \frac{1}{a}\right)^k}{1 - \frac{e^{i\theta}}{n} t} i e^{i\theta} d\theta$$

et comme la série converge uniformément sur  $[0; 2\pi]$

$$g(t) - R_k(t) = \frac{1}{2i\pi} \frac{t^k}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^k} \sum_{m \geq 0} c_m n^{m-k} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i(m+1)\theta} \left(e^{i\theta} - \frac{1}{a}\right)^k}{1 - \frac{e^{i\theta}}{n} t} i e^{i\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \frac{t^k}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^k} \sum_{m \geq 0} c_m n^{m-k} \int_{C_1} \frac{z^{-(m+1)} \left(z - \frac{1}{a}\right)^k}{1 - z \frac{t}{n}} dz$$

où  $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ .

Pour  $I_m = \int_{C_1} \frac{z^{-(m+1)} \left(z - \frac{1}{a}\right)^k}{1 - z \frac{t}{n}} dz$  : on remarque que

$$\frac{1}{2i\pi} I_m = \text{Res} \left( z=0, \frac{\left(z - \frac{1}{a}\right)^k}{z^{m+1} \left(1 - z \frac{t}{n}\right)} \right) \quad (\text{Res désigne}$$

le résidu).

$$\begin{aligned} \text{On } \frac{\left(z - \frac{a}{z}\right)^k}{1 - z \frac{t}{a}} &= \left( \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^{k-p} \frac{a^{k-p}}{z^p} \right) \left( \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{t^h}{a^h} z^h \right) \\ &= \sum_{m \geq 0} \left[ \sum_{p=0, m}^k \binom{k}{p} (-1)^{k-p} \frac{a^{k-m}}{a^{k-p}} t^{m-p} \right] z^m \end{aligned}$$

on en déduit que ,

$$\frac{1}{2i\pi} I_m = \left( \sum_{p=0}^m \binom{k}{p} (-1)^p a^p t^{m-p} \right) (-1)^k \frac{a^{k-m}}{a^k}$$

(avec la convention  $\binom{k}{p} = 0$  si  $p > k$ ), puis que

$$g(t) - R_k(t) = \frac{(-1)^k \left(\frac{t}{a}\right)^k}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^k} \sum_{m \geq 0} c_m t^m \left( \sum_{p=0}^m \binom{k}{p} (-1)^p \left(\frac{a}{t}\right)^p \right).$$

$$\begin{aligned} \text{De plus } \sum_{m \geq k+1} c_m t^m \left( \sum_{p=0}^m \binom{k}{p} (-1)^p \left(\frac{a}{t}\right)^p \right) &= \sum_{m \geq k+1} c_m t^m \left( \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^p \left(\frac{a}{t}\right)^p \right) \\ &= \sum_{m \geq k+1} c_m t^m \left(1 - \frac{a}{t}\right)^k \\ &= \left(\frac{a}{t}\right)^k (-1)^k \left(1 - \frac{t}{a}\right)^k \sum_{m \geq k+1} c_m t^m. \end{aligned}$$

En conclusion, il vient :

$$g(t) - R_k(t) = \frac{(-1)^h \left(\frac{t}{a}\right)^h}{\left(1 - \frac{t}{a}\right)^h} \sum_0^h c_n t^n \left( \sum_{p=0}^n c_h^p (-1)^p \left(\frac{a}{t}\right)^p \right) + \sum_{k+1}^{+\infty} c_n t^n \quad \square$$

On peut remarquer que :

$$\sum_0^h c_n t^n \left( \sum_{p=0}^n c_h^p (-1)^p \left(\frac{a}{t}\right)^p \right) = \sum_{n=0}^h \left( \sum_{p=0}^{k-n} c_{n+p} c_h^p (-1)^p a^p \right) t^n$$

Si on applique le lemme 2 à  $f(z) = \sum_{n \geq 0} \rho^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n$ ,

on obtient :

### Théorème 5

Soit  $t \in \mathbb{C}^*$ , on a :

$$\mathcal{P}_k(t) = \frac{(-1)^k t^k}{(1 - t \rho^k)^k} \sum_{n=0}^k \left( \sum_{p=0}^{k-n} (-1)^p c_k^p (\rho^k)^{k-p} \rho^{\frac{(p+n)(p+n-1)}{2}} \right) t^n + \sum_{n \geq k+1} \rho^{\frac{n(n-1)}{2}} t^n.$$

Remarque :

On aurait pu prendre comme dénominateurs des approximations de type Padé les polynômes  $(1 + z \rho^k)^k$ . Dans les deux cas le théorème

de Eiermann nous permet de conclure quant à la convergence des approximations de type Padé.

On retrouve ce résultat directement en utilisant l'expression de  $\mathcal{E}_k(t)$  donnée par le théorème 5.

En effet on a :

$$\left| \sum_{p=0}^{k-m} (-1)^p C_k^p (\rho^k)^{k-p} \rho^{\frac{(p+m)(p+m-1)}{2}} \right| \leq \sum_{p=0}^{k-m} C_k^p (\rho^k)^{k-p} \rho^{\frac{(p+m)(p+m-1)}{2}}$$

$$\text{et} \quad \sum_{p=0}^{k-m} C_k^p (\rho^k)^{k-p} \rho^{\frac{(p+m)(p+m-1)}{2}} = \rho^{\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{p=0}^{k-m} C_k^p \rho^{\Psi_m(p)}$$

$$(0 \leq m \leq k)$$

où la fonction  $\Psi_m$  est définie par ;

$$p \in [0; k-m] \quad \Psi_m(p) = \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} - pk + \frac{(p+m)(p+m-1)}{2}$$

Comme  $\Psi_m'(p) = -k+m-\frac{1}{2}+p$ , on voit que  $\Psi_m$  est décroissante sur  $[0; k-m]$  :

$$\Psi_m(0) = \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + \frac{m(m-1)}{2} \text{ et } \Psi_m(k-m) = mk, \text{ donc si}$$

$$p \in [0; k-m]$$

$$mk \leq \Psi_m(p) \leq \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + \frac{m(m-1)}{2}$$

Ainsi :

$$\sum_{p=0}^{h-m} \binom{p}{h} (\rho^h)^{h-p} \rho^{\frac{(p+1)(p+1-1)}{2}} \leq \rho^{\frac{h(h-1)}{2}} \sum_{p=0}^{h-m} \binom{p}{h} (\rho^h)^m$$

$$\leq 2^h \rho^{\frac{h(h-1)}{2}} (\rho^h)^m$$

d'où

$$\left| \sum_{m=0}^h \left( \sum_{p=0}^{h-m} (-1)^p (\rho^h)^{h-p} \rho^{\frac{(p+1)(p+1-1)}{2}} \right) t^m \right| \leq 2^h \rho^{\frac{h(h-1)}{2}} \sum_{m=0}^h (\rho^h |t|)^m$$

$$\leq \frac{2^h \rho^{\frac{h(h-1)}{2}}}{1 - \rho^h |t|}$$

De plus  $\lim_{h \rightarrow +\infty} \left( \frac{2^h \rho^{\frac{h(h-1)}{2}}}{1 - \rho^h |t|} \right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{2 \times \rho^{\frac{h-1}{2}}}{(1 - \rho^h |t|)^{\frac{1}{h}}} = 0$

et comme  $\sum_{m \geq h+1} \rho^{\frac{m(m-1)}{2}} t^m$  se compare, d'après la démonstration du théorème 4, comme  $t^{h+1} \rho^{\frac{h(h+1)}{2}}$ ,

on obtient :

Théorème 6

Pour  $t \in \mathbb{C}$  fixé, on a :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} |E_h(t)|^{\frac{1}{h}} = 0$$

L'étude de l'accélération de la convergence est beaucoup plus délicate que dans le cas de  $z \mapsto e^{-z}$  : en effet nous n'avons pas de majoration de  $|f(z)|$  contrairement au cas  $|e^{-z}| = e^{-\Re(z)}$ .

D'après les théorèmes 4. et 5., il suffit de regarder le comportement de  $\sum_{n=0}^h \left( \sum_{p=0}^{h-n} (-1)^p C_R^p (\rho^R)^{h-p} \rho^{\frac{(p+1)(p+1)}{2}} \right) t^n$  vis à vis de celui de  $\rho^{\frac{h(h-1)}{2}}$  quand  $h \rightarrow +\infty$ .

$$\text{Or } \rho^{\frac{h(h-1)}{2}} \sum_{n=0}^h \left( \sum_{p=0}^{h-n} (-1)^p C_R^p \rho^{\psi_n(p)} \right) t^n = \sum_{n=0}^h \left( \sum_{p=0}^{h-n} (-1)^p C_R^p (\rho^R)^{h-p} \rho^{\frac{(p+1)(p+1)}{2}} \right) t^n$$

Si  $n \geq 1$   $\rho^{\psi_n(p)-h} \leq (\rho^R)^{n-1} \leq 1$ , d'où

$$\left| \sum_{n=1}^h \left( \sum_{p=0}^{h-n} (-1)^p C_R^p \rho^{\psi_n(p)} \right) t^n \right| \leq \rho^h \sum_{n=1}^h \left( \sum_{p=0}^{h-n} C_R^p (\rho^R)^{n-1} \right) |t|^n$$

$$\leq 2^R \rho^h \frac{|t|}{1 - \rho^R |t|}$$

Si  $0 < \rho < \frac{1}{2}$  l'expression tend vers 0 quand  $h \rightarrow +\infty$ .

Conclusion : le comportement de  $E_R(t)$  ( $t$  fixé) vis à vis de  $E_R(t)$ , quand  $h \rightarrow +\infty$ , dépend, si  $0 < \rho < \frac{1}{2}$ , de celui de  $v_R = \sum_{p=0}^R C_R^p (-1)^p \rho^{\psi_0(p)}$ .

Remarques :

a) en faisant un changement d'indice,  $p$  en  $h-p$   
on voit que  $v_h = (-1)^h \sum_{p=0}^h (-1)^p C_h^p \rho^{\frac{p(p+1)}{2}}$

b) Considérons les polynômes  $P_h(x) = \sum_{p=0}^h C_h^p x^p \rho^{\frac{p(p+1)}{2}}$

$$\text{Alors } P_h(\rho x) = \sum_{p=0}^h C_h^p x^p \rho^{\frac{p(p+1)}{2}}$$

$$x P_h(\rho x) = \sum_{p=0}^h C_h^p x^{p+1} \rho^{\frac{p(p+1)}{2} + p}$$

$$(l=p+1) \quad = \sum_{l=1}^{h+1} C_h^{l-1} x^l \rho^{\frac{l(l+1)}{2}} \times \rho^{-1}$$

$$\text{On obtient ainsi : } \rho x P_h(x \rho) = \sum_{p=1}^{h+1} C_h^{p-1} x^p \rho^{\frac{p(p+1)}{2}}$$

Plus

$$P_h(x) + \rho x P_h(\rho x) = \sum_{p=0}^h C_h^p x^p \rho^{\frac{p(p+1)}{2}} + \sum_{p=1}^{h+1} C_h^{p-1} x^p \rho^{\frac{p(p+1)}{2}}$$
$$= 1 + \sum_{p=1}^h \left\{ C_h^p + C_h^{p-1} \right\} x^p \rho^{\frac{p(p+1)}{2}} + x \rho^{\frac{(h+1)(h+2)}{2}}$$

soit

$$P_h(x) + \rho x P_h(\rho x) = P_{h+1}(x).$$

c) Revenons sur le fait que nous n'avons pas de majoration intéressante  $|f(z)|$ . Les fonctions entières du type  $f(z) = \sum_{n \geq 0} \rho^{\frac{n(n-1)}{2}} z^n$  ( $|\rho| < 1$ ) sont d'ordre 0.

Elles sont donc en particulier de type exponentiel [4].

On pourrait espérer une majoration du type :

$|f(re^{i\theta})| \leq K e^{r\delta(\theta)}$  où  $\delta$  est une fonction de l'argument  $\theta$ . C'était le cas pour  $e^{-z}$  avec

$$\delta(\theta) = -\cos \theta$$

La transformée de Laplace de  $f(z)$  est :

$$g(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{Or } a-a:$$

$$\frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}} (n+1)! \times q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (n-1)!}{(n! q^{\frac{n(n-1)}{2}})^2} = q^{\frac{n+1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q$$

la série  $\sum_0^{+\infty} n! q^{\frac{n(n-1)}{2}} u^n$  définit encore une

fonction entière d'ordre 0. La seule singularité de  $g(s)$  est donc 0 ce qui ne nous permet pas de conclure [4] p 312.

Références de la troisième partie :

- [1] Brzeginski C. [1980]: Padé type approximation and General Orthogonal Polynomials, ISNM Vol 50, Birkhäuser - Verlag, Basel.
- [2] Brzeginski C. Van Iseghem J. [1991]: Padé Approximations
- [3] Eiermann H. [1984]: On the convergence of Padé-type approximants to analytic functions, J-Comput. Appl. Math. 10, 219-227.
- [4] Henrici P. [1977]: Applied and Computational Complex Analysis Vol 2, John Wiley and Sons, New-York.
- [5] Lubinsky D.S [1987]: Uniform convergence of rows of the Padé Table. Constr. Approx. 3, 307-330.
- [6] Lubinsky D.S; Saff E.B [1988]: Padé tables of entire functions of very slow and smooth growth II, Constr. Approx. 4, 321-339.
- [7] Van Iseghem J. [1984]: Padé-type approximants of  $\exp(-z)$  whose denominators are  $(1 + \frac{z}{n})^n$ , Numer - Math 43, 282-282.

## QUATRIÈME PARTIE

Biorthogonalité et procédé de  
Gram - Schmidt.

« Ainsi tout change, ainsi tout passe ;  
Ainsi nous-mêmes nous passons ,  
Hélas ! sans laisser plus de trace  
Que cette barque où nous glissons  
Sur cette mer où tout s'efface. »

Lamartine , Le Golfe de Baya,  
Méditations poétiques.



## Introduction

Rappelons tout d'abord un résultat important de factorisation des matrices carrées [2]: étant donné une matrice  $A$  d'ordre  $n$ , il existe une matrice unitaire  $Q$  et une matrice triangulaire supérieure  $R$  telles que  $A = Q.R$ . De plus on peut s'arranger pour que les éléments diagonaux de la matrice  $R$  soient tous positifs, et alors, dans le cas d'une matrice  $A$  inversible, la factorisation  $A = QR$  correspondante est unique. Ce résultat est appelé factorisation QR et n'est rien d'autre que l'interprétation matricielle de la méthode de Householder pour la résolution d'un système linéaire  $Au = b$  [4].

Si la matrice  $A$  est inversible, la factorisation QR signifie géométriquement que les vecteurs colonnes de la matrice unitaire  $Q$ , formant un système orthonormal, sont construits à partir des vecteurs colonnes de la matrice  $A$  par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Malheureusement, d'un point de vue numérique, ce procédé ne donne pas de bons résultats. On va remplacer ce procédé par un procédé de biorthonormalisation [3] et comparer les deux méthodes.

## 1. Procédé de Gram-Schmidt (G.S).

Les résultats exposés sont donnés dans [3] au chapitre VIII.

Le procédé de Gram-Schmidt est le suivant :  
soit  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des vecteurs indépendants dans  $\mathbb{F}^p$ ,  
il existe des constantes  $\alpha_{ij}$  telles que

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha_{11} x_1 \\ x'_2 = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 \\ \vdots \\ x'_n = \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \dots + \alpha_{nn} x_n \end{cases}$$

avec  $\alpha_{ii} > 0$  et  $(x'_i, x'_j) = \delta_{ij}$  (symbole de Kronecker).

On peut exprimer les vecteurs  $x'_h$  à l'aide de déterminants. En effet si on note  $g(u_1, \dots, u_n)$  le déterminant de Gram de  $u_1, \dots, u_n$  (i.e.  $g(u_1, \dots, u_n) = |(u_i, u_j)|_{1 \leq i, j \leq n}$ ) on a :

$$x'_h = \frac{1}{\sqrt{g(x_1, \dots, x_{h-1}) g(x_1, \dots, x_h)}} \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_2, x_1) & \dots & (x_h, x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_1, x_{h-2}) & (x_2, x_{h-2}) & \dots & (x_h, x_{h-2}) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_h \end{vmatrix}$$

et si  $k > 1$ ,

$$\alpha_{kk} = \sqrt{\frac{g(x_1, \dots, x_{k-1})}{g(x_1, \dots, x_k)}} \quad \left( \alpha_{11} = \frac{1}{\sqrt{g(x_1)}} \right).$$

## 2. Biorthogonalité

Soit  $x_1, x_2, \dots$  des vecteurs indépendants  
 $L_1, L_2, \dots$  des formes linéaires indépendantes.

On suppose que les déterminants  $G_n = |L_i(x_j)|_{1 \leq i, j \leq n}$

sont non nuls. Considérons alors [1][3] :

$$x_j^* = \frac{1}{G_{j-1}} \begin{vmatrix} L_1(x_1) & L_1(x_2) & \dots & L_1(x_j) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_{j-1}(x_1) & L_{j-1}(x_2) & \dots & L_{j-1}(x_j) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_j \end{vmatrix}$$

et

$$L_j^* = \frac{1}{G_j} \begin{vmatrix} L_1(x_1) & L_2(x_1) & \dots & L_j(x_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_1(x_{j-1}) & L_2(x_{j-1}) & \dots & L_j(x_{j-1}) \\ L_1 & L_2 & \dots & L_j \end{vmatrix}$$

La famille  $(L_j^*, x_i^*)$  est biorthogonale, c'est à dire

$$L_j^*(x_i^*) = \delta_{ij}$$

Faisons le lien entre le procédé de Gram-Schmidt  
et le procédé de biorthogonalisation.

### 3. Lien entre la biorthonormalisation et G.S

Posons  $L_i(x) = (x_i, x)$  : on a alors

$$G_n = |(x_i, x_j)|_{1 \leq i, j \leq n} = g(x_1, \dots, x_n).$$

Ainsi on obtient l'expression suivante pour  $x_j^*$  :

$$\begin{aligned} x_j^* &= \frac{1}{g(x_1, \dots, x_{j-1})} \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_j) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_{j-2}, x_1) & (x_{j-2}, x_2) & \dots & (x_{j-2}, x_j) \\ x_1 & x_2 & \dots & x_j \end{vmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{g(x_1, \dots, x_j)}{g(x_1, \dots, x_{j-1})}} \times \frac{1}{\sqrt{g(x_1, \dots, x_{j-1})g(x_1, \dots, x_j)}} \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_1, x_j) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_{j-2}, x_1) & \dots & (x_{j-2}, x_j) \\ x_1 & \dots & x_j \end{vmatrix} \end{aligned}$$

soit 
$$\boxed{x_j^* = \frac{x_j'}{\alpha_{jj}}$$

De même on a :

$$\boxed{L_j^* = \alpha_{jj} x_j'}$$

On peut d'ailleurs remarquer que :

$$\|x_j^*\| = \frac{1}{\alpha_{jj}} \quad \text{d'où} \quad x_j' = \frac{x_j^*}{\|x_j^*\|}.$$

#### 4. Résolution de systèmes linéaires et interpolation.

Comme l'explique Davis dans son livre [3], il y a un lien étroit entre l'orthonormalisation et problème d'interpolation. Regardons ce lien dans le cas d'un système linéaire [1].

Soit  $A$  une matrice carrée  $n \times n$ . Désignons par  $a_i$  le  $i^{\text{ième}}$  vecteur ligne de  $A$ . Posons :

$$b = (b_1, \dots, b_n)^T \quad \text{et} \quad L_i(x) = (a_i, x).$$

Résolve le système  $Ax = b$  équivalent au problème d'interpolation suivant :

trouver  $x$  tel que  $L_i(x) = b_i$  pour  $i = 1 \bar{n}$ .

$$\text{D'après [1] on a} \quad x = R_n = \sum_{i=1}^n L_i^*(x) a_i^*.$$

$$\text{On a de plus :} \quad R_k = R_{k-1} + \beta_k a_k^* \quad (R_0 = 0)$$

$$\text{où } R_k \text{ satisfait } \bar{a}; \quad L_i(R_k) = b_i \quad i = 1 \bar{k}$$
$$R_k \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle.$$

$$\text{et} \quad \beta_k = \frac{b_k - (a_k, R_{k-1})}{(a_k | a_k^*)}$$

En conclusion : soit  $\bar{a}$  résoudre le système linéaire  $Ax = b$  ( $A$  inversible), on considère

la famille des vecteurs ligne de  $A$  ( $a_i$ ,  $i^{\text{ème}}$  vecteur ligne). On applique la méthode suivante :

\* calcul des  $a_i^*$

$$* R_k = R_{k-1} + \frac{b_k - (a_k, R_{k-1})}{(a_k, a_k^*)} a_k^* \quad (R_0 = 0)$$

$$* x = R_n = A^{-1} b$$

Remarques :

a) Le problème est de voir s'il est facile et peu coûteux de calculer les  $a_i^*$ . Ce problème est à l'étude, on pourra consulter [5].

b) Considérons la factorisation QR de  $A^*$ , adjointe de  $A$  :  $A^* = QR$

Si  $a_i$  désigne le  $i^{\text{ème}}$  vecteur colonne de  $A^*$  et  $q_i$  le  $i^{\text{ème}}$  vecteur colonne de  $Q$  on a  $q_i = a_i'$  (procédé de Gram-Schmidt). De plus  $A = R^* Q^*$  donc la résolution de  $Ax = b$  équivaut à :

$$\begin{cases} R^* y = b \\ x = Q y \end{cases}$$

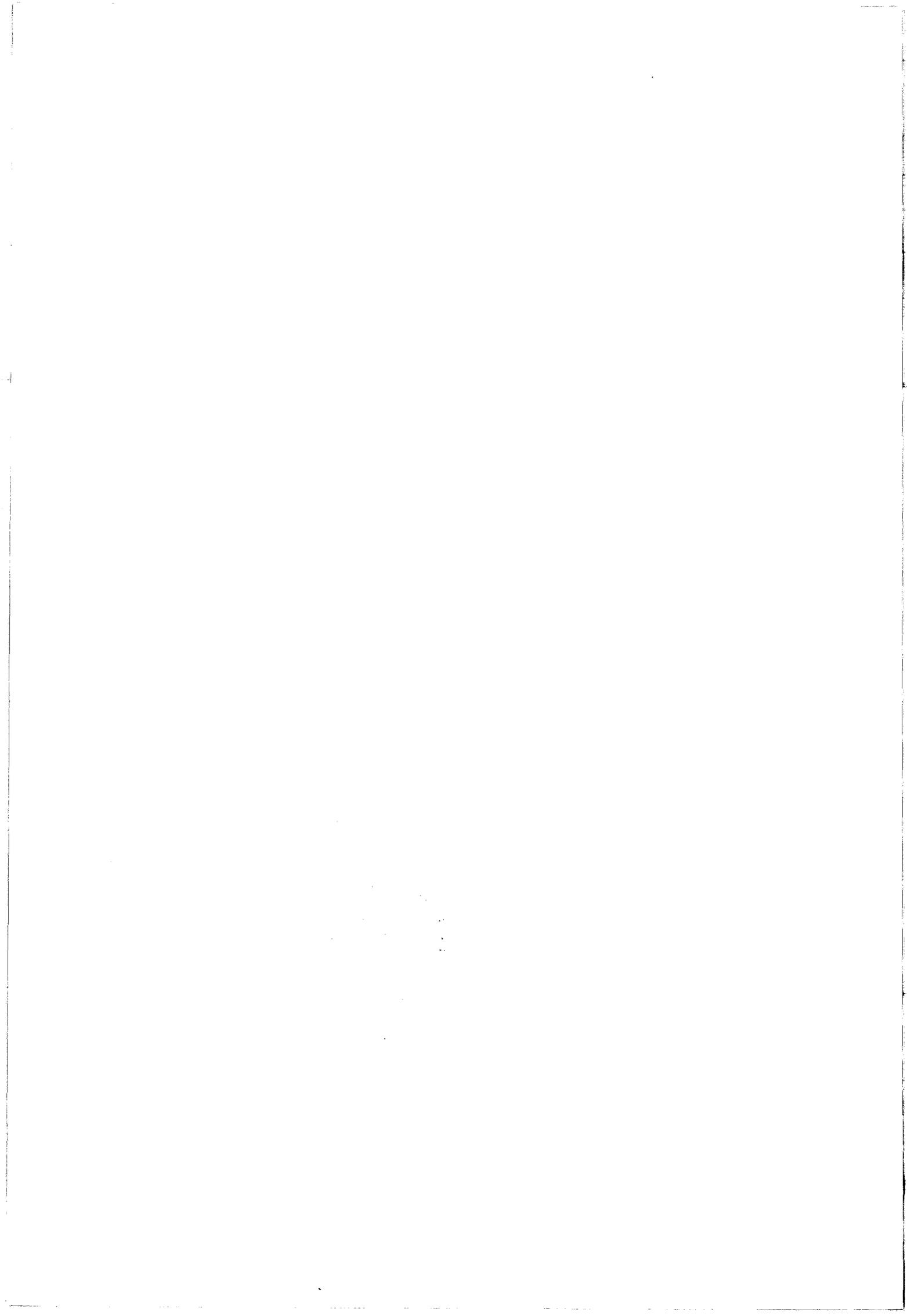
$$\text{d'où } x = \sum_{i=1}^n y_i a_i' = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} y_i a_i^*, \text{ soit } L_i^*(x) = \alpha_{ii} y_i,$$

ce qui établit un lien entre la méthode précédente et la factorisation QR.

References :

- [1] C. Brezinski, Biorthogonality and its applications to Numerical Analysis, Marcel Dekker, New York, in press.
- [2] P.G. Ciarlet, Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, Paris, 1985.
- [3] P.J. Davis, Interpolation and Approximation Dover, New York, 1975.
- [4] A.S. Householder, The Theory of Matrices in Numerical Analysis, Blaisdell, New York, 1964.
- [5] Z. Da Rocha, Implementation of the recurrence relations of adjacent biorthogonal families, à paraître.





*abstract*

The Padé approximants and their generalizations are for many years the matter of intense researchs. Yet, many theoretical problems stay in suspense: problems of existence and unicity, problems of convergence and acceleration of convergence. The purpose of the present work was to give answers to such questions. In the first section we take an interest in vector Padé approximants of matrix series. Conditions of existence and unicity, results of convergence are given, as also the link with the theory of Lanczos method for the resolution of linear systems. We utilize also the vector Padé approximants to provide a simultaneous approximation of a function and its derivative. In the second section a sufficient condition for the quadratic convergence of the topological epsilon algorithm for systems of nonlinear equations is given. Results of acceleration of convergence are proved for the second column of the vector epsilon algorithm, and more generally for vector quasi linear transformations. The third section deals with some Padé type approximants of entire functions. In the last section a link between biorthogonality, Gram-Schmidt process, linear system and interpolation is made.

*Keywords*

Vector Padé approximants  
Padé type approximants  
Biorthogonal polynomials  
Vector epsilon algorithm  
Topological epsilon algorithm  
Acceleration of convergence

**Résumé :**

Les approximants de Padé et leurs généralisations sont depuis plusieurs années l'objet d'intenses recherches, et leurs applications sont nombreuses. Beaucoup de problèmes théoriques restent cependant en suspens : problèmes tout d'abord d'existence, d'unicité, problèmes de convergence, d'accélération de convergence. L'objectif du travail présenté ici était justement d'apporter des réponses à de telles questions. Dans la première partie nous nous sommes intéressés aux approximants de Padé vectoriels de séries de matrices. Des conditions d'existence et d'unicité, des résultats de convergence sont donnés, ainsi que le lien avec la théorie de Lanczos pour la résolution de systèmes linéaires. Nous utilisons aussi les approximants de Padé vectoriels pour l'approximation simultanée d'une fonction et de sa dérivée. Dans la seconde partie une condition suffisante pour la convergence quadratique de l'épsilon algorithme topologique pour la résolution de systèmes non - linéaires est donnée. Des résultats d'accélération de convergence sont démontrés pour la deuxième colonne de l'épsilon algorithme vectoriel, et plus généralement pour des procédés quasi linéaires vectoriels. La troisième partie porte sur certains approximants de type Padé de fonctions entières. Des résultats sur l'accélération sont établis. La dernière partie fait le lien entre biorthogonalité, procédé de Gram - Schmidt, système linéaire et interpolation.

**Mots clés :** Approximants de Padé vectoriels

Approximants de type Padé

Polynômes biorthogonaux

Epsilon algorithme vectoriel

Epsilon algorithme topologique

Accélération de la convergence

Biorthogonalité