N° : 993

THESE

présentée à

L'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le grade de

Docteur en Productique : Automatique et Informatique Industrielle

par

A.Besoa RABENASOLO
Ingénieur IDN

ANALYSE ET COMMANDE DES SYSTEMES LINEAIRES A COEFFICIENTS PERIODIQUES

Travail préparé au :
Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille (LAIL URA-CNRS D1440)
Ecole Centrale de Lille, Villeneuve d'Ascq, FRANCE.

Directeur de thèse : J.P. RICHARD (Professeur, LAIL-EC Lille)

Rapporteurs : C. BURGAT (Professeur, LAAS-Toulouse)
A. EL MOUDNI (Professeur, OGP-IUT de Belfort)
T. KACZOREK (Professeur, ICIE-Warsaw University of Technology)

Examinateurs : P. BORNE (Professeur, LAIL-EC Lille)
F. ROTELLA (Docteur d'Etat, LAIL-EC Lille)
M. STAROSWIECKI (PROFESSEUR, EUDIL-USTL)

Soutenue le 6 Novembre 1992.

Introduction générale.

La première étape en Automatique consiste en la modélisation du processus étudié. Plusieurs modèles de représentation se sont ainsi parallèlement développés. Et avec eux, une multitude d'outils mathématiques permettant la synthèse de commande sur ces systèmes, et répondant aux divers objectifs qualitatifs ou quantitatifs poursuivis. Dans les modèles mathématiques sous forme d'équations d'état, la classe des systèmes linéaires occupe une position privilégiée à cause de sa simplicité relative. Toutefois, si le linéaire stationnaire a rapidement mûri pour déboucher sur plus d'un demi-siècle d'applications industrielles méthodiques, l'intérêt pour le non stationnaire s'est manifesté plus tardivement. Ceci est essentiellement dû aux problèmes de résolution analytique rencontrés.

Dans le cadre de notre étude, nous nous focalisons sur le cas des systèmes linéaires à coefficients périodiques. Historiquement, les premiers résultats obtenus concernant la commande se situent aux alentours des années 60-70 : Brunovsky [1969] a jeté les bases de l'analyse des propriétés structurelles de ces systèmes, tandis que Meerkov [1971-1975] mettait au point la stabilisation par vibrations à hautes fréquences à partir du théorème de centrage de Bogolioubov [1961]. Dans le même temps, d'autres travaux ont montré l'intérêt du mode opératoire périodique (*optimal periodic processing*) et les possibilités accrues des gains de bouclage périodiques. Plus récemment, Kabamba [1986] ouvre une nouvelle voie en introduisant le concept de *sampled state periodic hold* et des fonctions d'échantillonnage généralisées, particulièrement bien adapté aux systèmes linéaires périodiques.

Notre objectif est de proposer une approche unifiée de cette classe de systèmes, tant en continu qu'en discret, qui généralise le cas stationnaire tout en montrant une ouverture au cas presque périodique et, dans une moindre mesure, au cas non stationnaire quelconque. Ce mémoire se veut en même temps une présentation de résultats originaux relatifs aux systèmes périodiques et un support pédagogique pouvant s'adresser à des lecteurs connaissant peu ces systèmes. C'est pourquoi nous avons adopté un plan structuré par thèmes, et non pas selon le degré d'originalité des résultats présentés. Par contre, nous signalerons notre apport personnel chaque fois que le cas se présentera.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les caractérisations de la ***stabilité*** et des ***propriétés structurelles*** pour les systèmes linéaires. La section 2 de ce chapitre regroupe tout ce qui concerne le cas périodique.

Le deuxième chapitre expose les différents types de commandes (gains impulsionnels, bouclages discrets et multi-échantillonnage), visant à obtenir la stabilisation par ***placement de multiplieurs caractéristiques*** par retour de sortie ou d'état, éventuellement en utilisant un reconstructeur d'état. Une étude des ***cycles limites*** est aussi abordée : la commande en boucle ouverte peut alors être identifiée à partir de la connaissance du cycle limite choisi, et inversement.

Le troisième chapitre traite des problèmes de ***commande optimale***, essentiellement par rapport à un critère quadratique-plus-linéaire. On expose la méthode de calcul de la solution de l'équation périodique de Riccati y correspondant. La poursuite optimale de trajectoire périodique est aussi présentée, ainsi que la possibilité de commandes quasi-optimales.

Enfin, le quatrième chapitre propose une méthode originale pour l'analyse de la ***stabilité robuste*** des systèmes linéaires périodiques soumis à des incertitudes paramétriques. En adoptant une approche temporelle, on montre les limites des méthodes du linéaire stationnaire. Le résultat obtenu est appliqué aux lois de commande des chapitres 2 et 3.

Chapitre 1. Systèmes linéaires, propriétés

Les systèmes linéaires sont sans doute ceux qui ont le plus suscité d'intérêt dans la théorie des systèmes. A cause de la simplicité des équations, on essaie le plus souvent de se ramener à cette forme d'équations d'état pendant la phase de modélisation : on peut, dans de nombreux cas, obtenir une linéarisation approchée en restreignant les domaines de fonctionnement du processus. Par définition, un modèle linéaire permettra l'application du principe de superposition. Cependant, si l'étude des systèmes linéaires stationnaires a conduit à un grand nombre de réalisations pratiques, les systèmes non stationnaires, c'est-à-dire à coefficients variant au cours du temps, nécessitent des méthodes d'analyse et de synthèse de commande plus élaborées, que nous allons rappeler dans ce premier chapitre.

1. Rappels sur les systèmes non stationnaires

Nous ne reviendrons que très succinctement sur des concepts déjà habituels comme "processus, système, linéarité". Cette première section rappelle les résultats concernant les propriétés de stabilité, de commandabilité, d'atteignabilité et d'observabilité pour un système linéaire quelconque. A partir des définitions et des théorèmes relatifs à ces propriétés, nous exposerons dans une seconde section les particularités structurelles de notre principal thème d'étude : les systèmes linéaires à coefficients périodiques.

1.1. Généralités sur les systèmes linéaires

1.1.1. Définitions :

Système : ensemble d'éléments ("objets" ou concepts), en inter-relation.

Processus : système physique agissant et évoluant au cours du temps, soumis à l'effet de diverses influences externes (environnement, perturbations) et internes (lois de commandes, rétroactions). On distingue en général quatre sous-ensembles de variables : le vecteur des commandes $\boldsymbol{u}$ du système (ou du processus), les perturbations $\boldsymbol{p}$, le vecteur des sorties $\boldsymbol{y}$ et celui des variables internes $\boldsymbol{x}$ dit vecteur état.

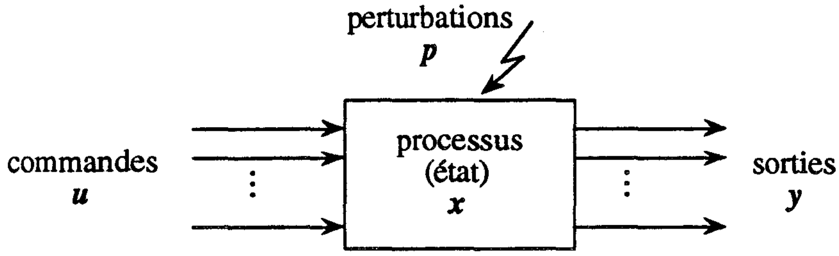


Figure 1.1. Schéma d'un processus.

Classification des systèmes : [BORNE et al., 1991]

On peut définir les ensembles $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{T}$ respectivement les domaines admissibles de l'état, de la commande, et du temps.

Le système (ou processus) est *à état continu* si l'ensemble $\mathcal{X}$ est compact. En général, $\mathcal{X}$ est inclus dans $\mathbf{R}^n$ (si n est la dimension du vecteur état).

Le système est *en temps discret* si l'ensemble $\mathcal{T}$ des instants admissibles est dénombrable. Le système est *en temps continu* si l'ensemble $\mathcal{T}$ est un intervalle inclus dans $\mathbf{R}$. Par exemple, $\mathcal{T} = [t_0, +\infty[$, $\mathcal{T} = [t_1, t_2]$, $\mathcal{T} =]-\infty, +\infty[$.

Représentation des systèmes :

La première étape de l'analyse des systèmes consiste en la description des relations donnant leurs évolutions au cours du temps. La représentation d'un système donné n'est pas unique. Une discussion sur les mérites respectifs de chaque représentation dépasserait largement le cadre de notre étude. Pour notre part, nous nous intéresserons à la représentation des systèmes par leurs variables d'état, issues lorsque cela est possible, *des équations mathématiques de ses lois physiques.*

Dans le cas des systèmes en temps et état continus, ce type de représentation conduit à des systèmes d'équations différentielles. Sous certaines conditions, on obtient des équations d'état sous forme explicite dit équations différentielles régulières :

$$\frac{dx}{dt} = h(t, t_0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}),$$
$$y = g(t, t_0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}),$$
$$\text{où } \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}, t, t_0 \in \mathcal{T}.$$

Pour les systèmes à état continu et temps discret, l'équation d'état est une équation de récurrence de la forme :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = h(k, k_0, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_k),$$
$$y_k = g(k, k_0, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k),$$
$$\text{où } \boldsymbol{x}_k \in \mathcal{X}, \boldsymbol{u}_k \in \mathcal{U}, k, k_0 \in \mathbf{Z},$$

Les propriétés de linéarité du modèle nous amènent à une forme plus simplifiée de cette équation d'état.

1.1.2. Systèmes linéaires continus :

On appelle système *continu* un système en temps continu et à état continu. La propriété de linéarité du système est liée à celle des fonctions h et g par rapport à $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{u}$. On a alors :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t).\boldsymbol{x} + B(t).\boldsymbol{u}, \\ y(t) = C(t).\boldsymbol{x} + D(t).\boldsymbol{u} \end{cases}$$

où $\forall\, t$, $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ est le vecteur état, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^m$ le vecteur de commande, $y \in \mathbf{R}^l$ le vecteur de sortie, $A(t) \in \mathbf{R}^{nxn}$ est la matrice d'évolution, $B(t) \in \mathbf{R}^{nxm}$ la matrice de commande, $C(t) \in \mathbf{R}^{lxn}$ la matrice d'observation et $D(t) \in \mathbf{R}^{lxm}$ la matrice de transmission directe de la commande vers la sortie.

On verra dans la section 1.2. que les propriétés de ce type de système (stabilité, commandabilité, observabilité) seront déterminées par les trois matrices $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$. Nous étudierons donc surtout l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t).\boldsymbol{x} + B(t).\boldsymbol{u}, \\ y(t) = C(t).\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{1.1}$$

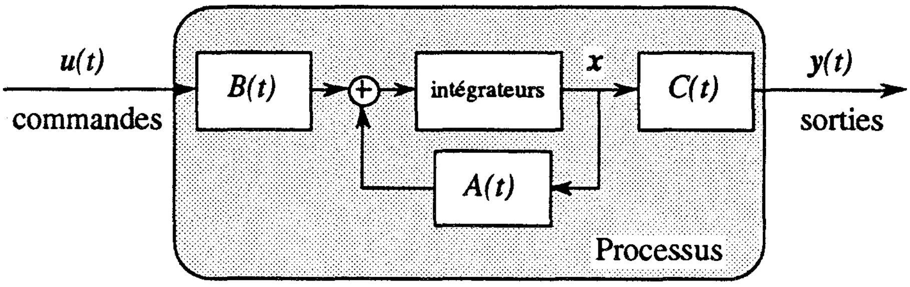


Figure 1.2. Schéma du système linéaire continu étudié

1.1.2.1. Intégration de l'équation différentielle d'état : la matrice de transition

On définit la *matrice de transition* du système, également appelée *"matrice fondamentale"* ou *"matrice intégrale"*, comme étant la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\,\Phi_A(t,\tau) = A(t).\Phi_A(t,\tau) \tag{1.2}$$

$\Phi_A(\tau,\tau) = Id_n$, la matrice identité d'ordre n,

$\Phi_A(t,\tau) \in \mathbf{R}^{nxn}$.

Existence et unicité de la matrice de transition :

On montre que l'hypothèse ci-dessous est suffisante pour assurer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1.2).

Hypothèse H :

On suppose que $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ sont intégrables (ou bornées) sur l'intervalle $\mathcal{T}$.

Toutes les autres solutions sont alors uniquement déterminées par leurs conditions initiales :

Si une matrice $X(t)$ est solution de (1.2), alors $\forall\, t,\ X(t) = \Phi_A(t,t_0).X(t_0)$.

Propriétés :

La matrice de transition a les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{ll} \forall\, t_0, t_1, t_2, & \Phi_A(t_2,t_0) = \Phi_A(t_2,t_1).\Phi_A(t_1,t_0), \\ \forall\, t_0, t_1, & \Phi_A^{-1}(t_1,t_0) = \Phi_A(t_0,t_1) \\ \forall\, t, \tau \in \mathbf{R}, & \frac{d}{dt}\Phi_A(t,\tau) = -\,\Phi_A(t,\tau).A(\tau). \end{array}$$

On montre qu'elle est inversible quels que soient les instants t_0 et t_1, notamment à partir de la relation bien connue :

Identité de Jacobi : [GANTMACHER, 1966]

$$det\,[\Phi(t,t_0)] = exp\left[\int_{t_0}^{t} trace[A(\tau)].d\tau\right]$$

En utilisant la méthode de Lagrange de variation des constantes, l'évolution du système (1.1) au cours du temps est donnée par :

$$x(t) = \Phi_A(t,t_0).\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi_A(t,\tau).B(\tau).u(\tau).d\tau \tag{1.3}$$

où $x(t_0)$ est la valeur initiale du vecteur état x à l'instant t_0. Désormais, nous noterons $\Phi(t,t_0)$ en omettant, sauf s'il y a risque de confusion, l'indice A correspondant à la matrice d'évolution du système.

Ainsi donc, la connaissance de la matrice de transition est à la base de l'analyse du comportement du système linéaire étudié puisqu'elle caractérise son évolution future.

1.1.2.2. Calcul de la matrice de transition : Cas de résolution directe

Nous appelons ici *résolution directe* la résolution analytique exacte de l'équation d'état. Or pour un système linéaire quelconque, la détermination de la matrice de transition du système n'est pas toujours possible. Dans ses travaux, Min-Yen Wu [1980] a pu définir des classes de systèmes solubles en formulant des hypothèses supplémentaires sur la forme de la matrice $A(t)$. On cite ainsi pour mémoire :

1. La classe $\mathcal{A}_1$

$A(t) \in \mathcal{A}_1 \Leftrightarrow \exists\, A_1$, une matrice constante telle que $\forall\, t,\ \frac{d}{dt}A(t) = A_1A(t) - A(t)A_1$.

La matrice de transition est alors :

$$\Phi(t,t_0) = e^{A_1 t}.e^{A_2(t-t_0)}.e^{-A_1 t_0},$$
$$\text{avec } A_2 = e^{-A_1 t_0}.[A(t_0) - A_1].e^{A_1 t_0}.$$

2. La classe $\mathcal{A}_h$

$A(t) \in \mathcal{A}_h \Leftrightarrow \exists\, A_1$ constante et $h(t)$ une fonction scalaire telles que

$$\forall\, t, \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{A(t)}{h(t)}\right] = A_1A(t) - A(t)A_1.$$

La matrice de transition est dans ce cas :

$$\Phi(t,t_0) = e^{A_1.g(t,t_0)}.e^{A_2.g(t,t_0)},$$
$$\text{avec } g(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} h(\tau).d\tau\,,$$
$$A_2 = \left[\lim_{t\to t_0}\left[\frac{A(t)}{h(t)}\right] - A_1\right].$$

3. La classe C

$$A(t) \in C \Leftrightarrow \forall\, t, \quad A(t).\int_{t_0}^{t} A(\tau).d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau).d\tau.A(t).$$

La matrice de transition est pour la classe C:

$$\Phi(t,t_0) = exp\left[\int_{t_0}^{t} A(\tau).d\tau\right],$$

Remarquons que cette formule, habituelle pour les systèmes linéaires stationnaires, n'est valable en non stationnaire que dans ce cas exceptionnel de commutativité. En fait, tous les systèmes linéaires stationnaires appartiennent à cette classe C.

4. On peut ajouter à ces classes l'ensemble Δ des matrices triangulaires par blocs dont les blocs de la diagonale sont solubles (appartenant en particulier aux classes ci-dessus). Dans ce cas, la matrice de transition est calculée de proche en proche en commençant par le bloc indépendant.

Cette liste n'est bien entendu pas exhaustive. Le problème consiste à reconnaître effectivement la classe d'un système avec une matrice $A(t)$ donnée. Pour le moment, il n'y pas de méthode générale pour déterminer la matrice de transition. On se contentera dans la plupart des cas, soit de l'intégration numérique de l'équation différentielle (1.2) soit du calcul de *l'intégrale multiplicative de Volterra* [GANTMACHER, 1966] suivante :

$$\Phi_A(t_2,t_1) = \oint_{t_1}^{t_2} \left[Id + A(\tau).d\tau\right] = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=N-1}^{0} \left[Id + \frac{(t_2-t_1)}{N}.A\left(t_1+i.\frac{t_2-t_1}{N}\right)\right].$$

Ce produit non-commutatif doit être calculé en respectant l'ordre des facteurs, soit de l'indice $i = N\text{-}1$ à $i = 0$ en commençant par le terme le plus à gauche.

1.1.2.3. Les transformations de Lyapunov :

La représentation par les variables d'état n'est pas unique puisqu'elle est liée à la notion de transformation.

Introduction aux transformations :

Soit le changement de variables d'état de la forme :

$$z(t) = P(t).x(t),$$

$$det[P(t)] \neq 0, \ \forall\, t \in \mathcal{T}, \text{ l'intervalle de temps considéré.}$$

Si $P(t)$ est dérivable, nous obtenons à partir du système continu (1.1) :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dz}{dt} = \tilde{A}(t).z + \tilde{B}(t).u, \\ y(t) = \tilde{C}(t).z, \\ \tilde{A}(t) = \left[P(t).A(t).P^{-1}(t) + \dfrac{d}{dt}P(t).P^{-1}(t)\right], \\ \tilde{B}(t) = P(t).B(t), \\ \tilde{C}(t) = C(t).P^{-1}(t). \end{array}\right. \qquad (1.4)$$

Les matrices $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t)$, $\tilde{C}(t)$ constituent ainsi une nouvelle représentation du système (1.1) associée à l'état z.

Remarque :

Choisissons $\tilde{A}(t) = 0$. D'après (1.4) nous avons alors :

$$\frac{d}{dt}P(t) = -P(t).A(t)$$

Avec l'équation (1.2), il est facilement vérifiable que $P(t).\Phi(t,t_0)$ est une matrice constante. En particulier, si $P(t) = \Phi^{-1}(t,t_0)$, le système transformé (1.4) se comporte comme une intégration pure.

Les transformations de Lyapunov :

La remarque précédente fait apparaître la généralité de la notion de transformation, qui peut faire disparaître les caractéristiques dynamiques du système. Pour préserver certaines propriétés dynamiques de la représentation initiale en x du système, on peut se restreindre aux transformations $P(t)$ vérifiant :

1. $P(t)$ dérivable sur l'intervalle de temps $\mathcal{T}$ concerné,

2. $P(t)$ et $\frac{d}{dt}P(t)$ sont bornées et continues sur cet intervalle,

3. $\exists\, \alpha$ tel que $\forall\, t \in \mathcal{T}$, $|\det[P(t)]| \geq \alpha > 0$.

Les transformations de ce type sont appelés "transformations de Lyapunov". On montre que la propriété de stabilité au sens de Lyapunov est préservée : Le système (1.1) est stable si et seulement si (1.4) est stable.

Equivalence algébrique et équivalence topologique :

On peut aisément vérifier que les transformations de la forme (1.4) expriment une relation d'équivalence entre les deux matrices $\tilde{A}(t)$ et $A(t)$.

La représentation $\tilde{A}(t)$ est *algébriquement équivalente* à $A(t)$ si et seulement s'il existe une transformation $P(t)$ continue, différentiable et non singulière telle que $\tilde{A}(t)$ et $A(t)$ soient reliées par l'équation (1.4).

Les représentations $\tilde{A}(t)$ et $A(t)$ sont *topologiquement équivalentes* si et seulement si elles sont algébriquement équivalentes et si la transformation $P(t)$ est une transformation de Lyapunov.

1.1.3. Systèmes linéaires discrets :

Un système est *discret* s'il est en temps discret et à état continu, c'est-à-dire si les variables qui le caractérisent ne peuvent évoluer ou être observées que sur une suite $\{t_k, k \in \mathbf{Z}\}$ d'instants particuliers du temps. Un système linéaire discret peut alors être décrit par une relation de la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \\ y_k = C_k x_k + D_k u_k \end{cases}$$

Ici encore, $x_k \in \mathbf{R}^n$ est le vecteur état, $u_k \in \mathbf{R}^m$ le vecteur de commande, $y_k \in \mathbf{R}^l$ le vecteur de sortie. La matrice A_k appartient à $\mathbf{R}^{nxn}$, B_k à $\mathbf{R}^{nxm}$, C_k à $\mathbf{R}^{lxn}$ et D_k à $\mathbf{R}^{lxm}$.
Les matrices A,B,C et D varient selon l'instant t_k, référencé par l'indice k sous réserve de l'hypothèse H' suivante :

Hypothèse H' :

On suppose que $\forall$ k, les matrices A_k, B_k, C_k et D_k sont bornées.

De même qu'en continu, nous nous bornerons à étudier les équations d'état sans la matrice de transfert direct D_k :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \\ y_k = C_k x_k \end{cases} \qquad (1.5)$$

De façon analogue à la matrice de transition des systèmes linéaires continus, on introduit les notations suivantes :

$$\forall\ i > j > k \in \mathbf{Z}, \qquad \begin{aligned} &\Psi_A(i,i) = Id_n, \text{ la matrice identité d'ordre } n, \\ &\Psi_A(i+1,i) = A_i, \\ &\Psi_A(i,j) = A_{i-1}A_{i-2} \dots A_j, \\ &\Psi_A(i,k) = \Psi_A(i,j).\Psi_A(j,k), \end{aligned}$$

On remarque que $\Psi_A(i,j)$ peut être *non inversible*, contrairement au cas continu. L'évolution du système linéaire discret (1.5) est donnée à chaque instant t_k par :

$$x_k = \Psi_A(k,k_0).x_{k_0} + \sum_{i=k_0}^{k-1} \Psi_A(k,i+1).B_i.u_i \qquad (1.6)$$

où x_{k_0} est la valeur initiale de x_k à l'instant t_{k_0}.

1.2. Etudes des propriétés des systèmes linéaires :

Dans le cadre de l'analyse des systèmes, plusieurs propriétés ont été définies, soit pour vérifier que le système correspond (quantitativement ou qualitativement) aux spécifications initiales, soit pour orienter la synthèse de la commande visant à améliorer le comportement du système. On trouvera donc dans cette section les définitions et théorèmes relatifs aux propriétés de *stabilité*; ceux concernant les propriétés de *commandabilité*, d'*atteignabilité* et de leurs duales, la *reconstructibilité* et l'*observabilité*; et enfin, la *stabilisabilité* et la *détectabilité* des systèmes linéaires .

1.2.1. Stabilité des systèmes linéaires :

Physiquement, le problème de la stabilité consiste à déterminer si au cours de son évolution, les variables d'un système donné restent dans des limites connues à l'avance (borne minimale et borne maximale). L'étude de cette propriété, d'une utilité pratique évidente, reste un des problèmes majeurs de l'Automatique [LYAPUNOV, 1892] [GRUJIC, 1975] [D'ANDREA & LEVINE, 1970]

Cependant, dans le cadre des systèmes linéaires, on peut énoncer quelques définitions et théorèmes fondamentaux. Les résultats que nous rappelons ici ont été obtenus sur les systèmes continus, on verra néanmoins qu'ils se généralisent sans problème au cas discret. L'évolution du système est, comme on l'a vu précédemment, donnée par l'équation (1.3) :

$$x(t) = \Phi(t,\, t_0)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau).B(\tau).u(\tau).d\tau.$$

On peut facilement constater sur $x(t)$ la superposition des influences de la valeur initiale de l'état $x(t_0)$ et de la commande u (voir figure 1.3.).

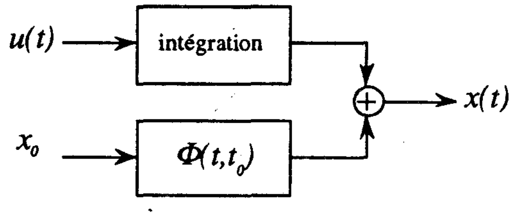


Figure 1.3.

La stabilité du système peut alors se définir selon deux points de vues différents : la stabilité en terme d'entrée/sortie et la stabilité par rapport aux variables d'état, dite stabilité interne.

1.2.1.1. Stabilité en terme d'entrée/sortie :

Le système étant considéré comme une boîte noire, la question qui se pose ici est d'analyser la répercussion des propriétés de la commande (l'entrée) $u(t)$ sur la sortie $y(t)$. Pour cela, on utilise une description du système par ses entrées/sorties où n'intervient pas le vecteur état x. La valeur initiale $x(t_0)$ de la variable d'état est fixée à **0**. Ainsi, la sortie $y(t)$ est déterminée de manière unique par la connaissance de la commande $u(t)$ sur l'intervalle $[t_0,+\infty[$. Ce système est appelé *système relaxé* ou *système initialement au repos* [CHEN, 1970].

Soit $G(t,\tau)$ la réponse du système linéaire à l'instant t pour une entrée égale à une impulsion (unitaire) de Dirac $\delta(t-\tau)$ à l'instant τ. Pour un système multivariable, $G(t,\tau)$ est une matrice composée des éléments $G_{ij}(t,\tau)$, réponse de la i-ème composante de y à une impulsion sur la j-ème composante de u. Alors, par superposition (et donc sous l'hypothèse de linéarité), la réponse du système pour une commande $u(.)$ est :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\tau).u(\tau).d\tau.$$

Supposons que $u(t) = 0$ pour $t < t_0$. Si le système est "causal", il n'y aura pas de réponse à l'instant t pour une commande "future" $u(\tau)$, $\tau > t$. Ainsi :

$$\forall\ \tau > t, \quad G(t,\tau) = 0,$$

D'où la réponse pour une entrée $u(t)$ quelconque :

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,\tau).u(\tau).d\tau \qquad (1.7)$$

Remarques :

1. Pour les systèmes linéaires stationnaires, La matrice $G(t,\tau)$ ne dépend que de la différence entre t et τ. On peut ainsi écrire $G(t,\tau) = G(t-\tau)$.
Dans ce cas, l'intégrale ci-dessus correspond à une *intégrale de convolution.* La représentation habituelle utilise alors la matrice de transfert $G(s) = \mathcal{L}[G(t-\tau)]$, qui est la transformée de Laplace de $G(t-\tau)$ La relation entrées/sorties obtenue reste linéaire $\mathcal{L}[y] = G(s).\mathcal{L}[u]$.

2. Pour les systèmes linéaires quelconques, cette réponse impulsionnelle $G(t,\tau)$ est invariante par les transformations de Lyapunov et est égale à :

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} C(t).\Phi(t,\tau).B(\tau).u(\tau).d\tau. \qquad (1.8)$$

Théorèmes 1.1 : [KAILATH, 1980]

1. Un système relaxé décrit par (1.7) est EB/SB stable, c'est-à-dire stable au sens des entrées bornées/sorties bornées, si et seulement si pour tout vecteur d'entrées borné, c'est-à-dire dont toutes les composantes sont bornées, le vecteur de sorties est borné, soit :

$$\exists\, k < \infty \text{, tel que } \forall\, t \in \mathbf{R},\ \forall\, (i,j) \in \{1,..,l\} \times \{1,..,m\},\ \int_{t_0}^{t} |g_{ij}(t,\tau)|.d\tau \leq k,$$

où $g_{ij}(t,\tau)$ désigne l'élément i-j de la matrice $G(t,\tau)$ et $|g_{ij}(t,\tau)|$ son module.

Dans le cas où le système considéré est linéaire, on sait que

$$G(t,\tau) = C(t).\Phi(t,\tau).B(\tau).$$

De plus, on suppose que $\boldsymbol{u}(t) = 0$ pour $t < t_0$. On peut alors introduire une norme matricielle pour exprimer le caractère borné des éléments de G :

2. Le système linéaire relaxé (à état initial nul) décrit par (1.8) est stable au sens des entrées bornées/sorties bornées si et seulement si :

$$\exists\, k < \infty \text{, tel que } \forall\, t \in \mathbf{R},$$
$$\int_{t_0}^{t} \|C(t).\Phi(t,\tau).B(\tau)\|.d\tau \leq k.$$

Ce critère de stabilité entrée/sortie n'est pas suffisant dans la mesure où nous n'avons aucune information sur le comportement interne du système. Deux objections limitent son utilisation :

1) L'hypothèse de l'état initial nul ou du système initialement au repos n'est pas facilement vérifiable. Le système peut évoluer de lui-même en l'absence de commande ($\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{0}$).

2) Une instabilité interne ne s'observe pas forcément à la sortie (cas de non observabilité). Une sortie bornée n'implique pas que les variables d'état du système soit bornées.

L'analyse de stabilité sera donc plus complète à travers la notion de stabilité interne.

1.2.1.2. Stabilité interne :

Nous avons déjà signalé l'importance de la valeur initiale de l'état du système. Elle peut conditionner l'aboutissement de la trajectoire du système dans l'espace des phases vers une trajectoire bornée ou un point particulier.

Notons $x(t,t_0,x_0,u)$ l'état du système à l'instant t en partant de x_0 à t_0, soumis à une commande $u(t)$ donnée, $t \in \mathbf{R}$. On introduit alors la notion d'orbite telle que l'a définie D'Andréa [1970] ou plus récemment Chiang, Hirsch et Wu [1988] :

Orbite :

On appelle orbite d'un point (état) x_0 *l'ensemble* $\Omega(x_0,t_0,u) = \{x(t,t_0,x_0,u),\ t \in \mathbf{R}\}$.

C'est l'ensemble de tous les points de la trajectoire avant et après son passage en (t_0,x_0), c'est-à-dire l'image de la trajectoire dans l'espace des phases. Notons que l'orbite est nécessairement définie pour un instant initial t_0 donné et une loi de commande u donnée.

Point d'équilibre :

Un état x_e *du système (1.1) est un point d'équilibre pour* $u(t)$, $t \in \mathbf{R}$, *si et seulement si*

$$\forall\, t_0 \in \mathbf{R},\ et\ t \geq t_0, \quad x_e = x(t,t_0,x_e,u).$$

Autrement dit, $\forall\, t_0 \in \mathbf{R}$, $\Omega(x_e,t_0,u) = \{x_e\}$.

Le choix de la commande est ici encore primordial. Par contre, le point d'équilibre est *indépendant* du temps t et de l'instant initial t_0. Une trajectoire d'état qui passe par un point d'équilibre y restera donc indéfiniment.

Orbite périodique :

Une orbite $\Omega(x_p,t_0,u)$ *est périodique si* x_p *n'est pas un point d'équilibre et si*

$$\exists\, T \in \mathbf{R}^+ \text{ tel que } \forall\, t \in \mathbf{R},\ \forall\, x(t) \in \Omega(x_p,t_0,u),\ x(t+T,t_0,x_0,u) = x(t,t_0,x_0,u).$$

Le plus petit réel T satisfaisant cette égalité est appelé la période de l'orbite.

Comme nous le voyons, la définition du point d'équilibre et de l'orbite périodique inclut déjà une certaine stabilité au sens intuitif du terme. La stabilité interne du système sera définie autour de ces ensembles de points. La stabilité interne ne correspond généralement pas à la stabilité externe, sauf dans le cas d'une réalisation minimale, c'est-à-dire quand il n'y a pas de simplification possible dans le modèle de représentation du système [KAILATH, 1980].

La notion de stabilité exprime que si le système part d'une condition initiale x_0 suffisamment proche du point d'équilibre, son évolution future restera dans un voisinage proche de ce même point. Grujic [1975] a soulevé plusieurs remarques intéressantes : En général, la propriété de stabilité n'est pas invariante par rapport à l'instant initial t_0 : c'est le cas de certains systèmes non-stationnaires. L'état d'équilibre peut être stable pour un t_0 donné et instable pour d'autres instants initiaux. Dès lors, la définition d'un intervalle $\mathcal{T}_0$ des t_0 où le système est stable est importante. On peut ainsi distinguer l'influence de l'instant initial t_0 à travers six définitions, dont les dernières ("stabilité au sens de Lyapunov") sont plus classiquement utilisées dans le cas des systèmes stationnaires.

Stabilité d'un point d'équilibre par rapport à t_0:

1. *Le point d'équilibre x_e est stable par rapport à un instant initial $t_0 \in \mathbf{R}$ si et seulement si* $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(t_0,\varepsilon) > 0$ *tel que* $\forall\, t \geq t_0,\ \|x_0 - x_e\| \leq \delta(t_0,\varepsilon) \Rightarrow \|x(t,t_0,x_0,u) - x_e\| \leq \varepsilon.$

Stabilité par rapport aux instants initiaux : [GRUJIC, 1975]

2. *Le point d'équilibre x_e est stable par rapport à $\mathcal{T}_0 \subset \mathbf{R}$ si et seulement si :* $\forall\, t_0 \in \mathcal{T}_0, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(t_0,\varepsilon) > 0$ *tel que*
$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta(t_0,\varepsilon) \Rightarrow \|x(t,t_0,x_0,u) - x_e\| \leq \varepsilon, \forall\, t \geq t_0.$$

3. *Le point d'équilibre x_e est uniformément stable par rapport à $\mathcal{T}_0$ si et seulement si la définition 2. est vérifiée et si* $\forall\, \varepsilon > 0,\ inf\{\delta(t,\varepsilon), t \in \mathcal{T}_0\} > 0.$

4. *Le point d'équilibre x_e est non-uniformément stable par rapport à $\mathcal{T}_0$ si et seulement si la définition 2. est vérifiée et si* $\exists\, \varepsilon > 0,\ inf\{\delta(t,\varepsilon), t \in \mathcal{T}_0\} = 0.$

Stabilité au sens de Lyapunov : [LYAPUNOV,1892]

5. *Le point d'équilibre x_e est stable si et seulement s'il est stable par rapport à tout instant initial $t_0 \in \mathbf{R}$.*

Stabilité uniforme : [LYAPUNOV,1892]

6. *Le point d'équilibre x_e est uniformément stable (au sens de Lyapunov) si et seulement si* $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ *tel que* $\forall\, t_0 \in \mathbf{R}, \forall\, t \geq t_0,\ \|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t,t_0,x_0,u) - x_e\| \leq \varepsilon.$
   L'écart $\delta(\varepsilon)$ *des états initiaux ne dépend pas de l'instant initial.*

De façon plus exigeante, la stabilité asymptotique requiert de plus la convergence de l'état au voisinage de son point d'équilibre. Pour appréhender cette propriété de convergence, on définit d'abord la notion d'attractivité :

Attractivité :

1. Le point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e$ *est attractif si :*

$\exists\ \delta > 0, \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ T(\varepsilon,\delta,t_0) > 0$ *tels que*

$$\forall\ t_0 \in \mathbf{R}, \forall\ t \geq t_0 + T(\varepsilon,\delta,t_0), \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_e\| \leq \delta \Rightarrow \| \boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{x}_e\| \leq \varepsilon$$

2. L'orbite $\Omega(\boldsymbol{x}_0,t_0,\boldsymbol{u})$ *est attractive si et seulement si :*

$\exists\ \delta > 0, \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ T(\varepsilon,\delta) > 0$ *tels que*

$$\forall\ t_0 \in \mathbf{R}, \forall\ t \geq t_0 + T(\varepsilon,\delta), \forall\ \boldsymbol{x}_1,\ \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_1\| \leq \delta \Rightarrow \| \boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{u})\| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas, la trajectoire $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{u})$ *du point voisin* $\boldsymbol{x}_1$ *de* $\boldsymbol{x}_0$ *converge vers la trajectoire* $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})$ *quand t tend vers l'infini.*

Stabilité asymptotique : [LYAPUNOV,1892]

Le point d'équilibre $\boldsymbol{x}_e$ *est (uniformément) asymptotiquement stable s'il est attractif et (uniformément) stable au sens de Lyapunov. Dans ce cas, toute trajectoire issue de conditions initiales suffisamment proches de* $\boldsymbol{x}_e$ *converge vers* $\boldsymbol{x}_e$ *quand t tend vers l'infini. Ainsi :*

$$\forall\ \varepsilon > 0, \forall\ t_0 \in \mathbf{R}, \exists\ \delta(\varepsilon,t_0) > 0 \text{ tel que } \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_e\| \leq \delta \Rightarrow \| \boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{x}_e\| \leq \varepsilon$$

$$\text{et } \lim_{t\to\infty} \| \boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{x}_e\| = 0.$$

De ce fait, les notions de stabilité pour t_0 sur un sous-intervalle ou sur $]-\infty,+\infty[$ seront distinctes. La stabilité asymptotique sur $]-\infty,+\infty[$ garantit son uniformité sur un intervalle de temps borné quelconque.

Stabilité d'une orbite : [D'ANDREA, 1970]

1. L'orbite $\Omega(\boldsymbol{x}_0,t_0,\boldsymbol{u})$ *est (uniformément) stable si et seulement si :*

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ *tel que*

$$\forall\ t_0 \in \mathbf{R}, \forall\ t \geq t_0, \forall\ \boldsymbol{x}_1,\ \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_1\| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{u})\| \leq \varepsilon$$

2. L'orbite $\Omega(\boldsymbol{x}_0,t_0,\boldsymbol{u})$ *est (uniformément) asymptotiquement stable si et seulement si elle est (uniformément) stable et attractive.*

Cette définition de la stabilité s'applique à une orbite quelconque qui n'est pas forcément périodique.

Exemple :

Soit le système monovariable : $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1-t}\, x$.

La solution de ce système est

$$\forall\ t_0 \neq 1,\ x(t,t_0,x_0) = (t-1)^{-1}(t_0-t)\, x_0\,.$$

Le point d'équilibre est $\mathbf{x}_e = 0$.

Nous constatons alors que $|x(1\text{-}\sigma,t_0,x_0) - x_e| \rightarrow +\infty$ quand $\sigma \rightarrow 0^+$, $\forall\ t_0 \in]\text{-}\infty,1[$ et $\forall\ \varepsilon > 0$. Le point $x_e = 0$ n'est donc pas asymptotiquement stable par rapport à $[0,+\infty[$. Par contre, nous pouvons conclure à la stabilité uniforme de ce système non stationnaire par rapport à $\mathcal{T}_0 =]1,+\infty[$.

Equation aux écarts pour les systèmes linéaires :

Dans toutes les définitions que nous avons énoncées, l'analyse de la stabilité se ramène à l'étude de l'écart entre deux trajectoires voisines $x(t,t_0,x_1,u)$ et $x(t,t_0,x_2,u)$ quand on applique la même commande $u(t)$. Or, en linéaire, ces deux trajectoires correspondent aux équations :

$$\frac{dx_1}{dt} = A(t)\, x_1 + B(t)\, u(t),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = A(t)\, x_2 + B(t)\, u(t),$$

Définissons l'écart entre les deux trajectoires : $\delta x(t) = x_1(t) - x_2(t)$.

Sous l'hypothèse H (voir § 1.1.2.1) et si on suppose que $u(t)$ est borné sur tout l'intervalle de définition de t, on obtient :

$$\frac{d}{dt}[\delta x] = A(t)\ \delta x, \qquad (1.9)$$

soit,

$$\delta x(t) = \Phi(t,t_0)\ \delta x(t_0).$$

Ainsi, tout le concept de stabilité interne du système (1.1) est inclus dans les propriétés de stabilité du point d'équilibre trivial $\delta x = \mathbf{0}$ du système (1.9). Abusivement, on parlera de stabilité pour la matrice $A(t)$ ou $\Phi(t,t_0)$.

Proposition 1.2 :

Quelle que soit la commande $u(t) \in \mathcal{U}$, *tout point d'équilibre ou toute orbite du système linéaire initial (1.1) est stable selon les définitions précédentes si le point d'équilibre* $\delta x = \mathbf{0}$ *du système homogène (1.9) est stable pour les mêmes définitions.*

D'où le théorème suivant :

Théorème 1.3 : stabilité des systèmes linéaires

1. L'état nul (l'origine) du système linéaire (1.9) est stable au sens de Lyapunov si et seulement si

$$\exists\, \alpha < \infty \text{, tel que } \forall\, t_0 \text{ et } \forall\, t \geq t_0,\ \|\Phi(t,t_0)\| \leq \alpha.$$

où $\|\,.\,\|$ désigne une norme matricielle reliée à une norme vectorielle quelconque.

2. L'état nul (l'origine) du système linéaire (1.9) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si et seulement si

$$\forall\, t_0 \text{ et } \forall\, t \geq t_0,\ \|\Phi(t,t_0)\| \text{ est borné et } \lim \|\Phi(t,t_0)\| \to 0 \text{ quand } t \to +\infty.$$

Dans ce cas, il est l'unique point d'équilibre de ce système. On dit alors que le système ou la matrice $A(t)$ est asymptotiquement stable.

3. L'état nul (l'origine) du système linéaire (1.9) est exponentiellement stable si et seulement si

$$\exists\, \alpha > 0, \exists\, \beta > 0 \text{ tels que } \forall\, t_0 \text{ et } \forall\, t \geq t_0,\ \|\Phi(t,t_0)\| \leq \alpha\, e^{-\beta\,(t-t_0)}.$$

4. Ces trois résultats se transposent au cas d'un système linéaire discret en utilisant $\Psi(k,k_0)$ au lieu de $\Phi(t,t_0)$. Soit pour la stabilité exponentielle :

$$\exists\, \alpha > 0, \exists\, \beta > 0 \text{ tels que } \forall\, k_0 \text{ et } \forall\, k \geq k_0,\ \|\Psi(k,k_0)\| \leq \alpha\, e^{-\beta\,(k-k_0)}$$

Nous pouvons remarquer que l'état initial x_0 n'intervient plus dans ce théorème. Pour les systèmes linéaires stationnaires, des critères de stabilité peuvent être établis à partir des valeurs propres de la matrice A. Etant donné que la matrice de transition $\Phi(t,t_0)$ est égale à $e^{A.(t-t_0)}$ pour le système stationnaire continu, et $\Psi(k,k_0) = A^{k-k_0}$ pour le système stationnaire discret, ces résultats découlent directement du théorème précédent.

Conditions nécessaires et suffisantes de stabilité asymptotique pour les systèmes linéaires stationnaires :

1. Un système linéaire continu stationnaire défini par

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A.x + B.u, \\ y(t) = C.x \end{cases}$$

est asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice d'évolution constante A *sont à partie réelle strictement négative, c'est-à-dire :*

$$\forall\, \lambda \in spec\,\{A\},\ Re(\lambda) < 0.$$

2. Un système linéaire discret stationnaire défini par

$$\begin{cases} x_{k+1} = A.x_k + B.u_k, \\ y_k = C.x_k \end{cases}$$

est asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice d'évolution constante A *sont de module strictement inférieur à l'unité, c'est-à-dire :*
$\forall \lambda \in spec\ \{A\}, |\lambda| < 1.$

Conditions suffisantes d'instabilité des systèmes linéaires stationnaires :

1. Un système linéaire continu stationnaire défini par

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A.x + B.u, \\ y(t) = C.x \end{cases}$$

est instable si $\exists \lambda \in spec\ \{A\}, Re(\lambda) > 0.$

2. Un système linéaire discret stationnaire défini par

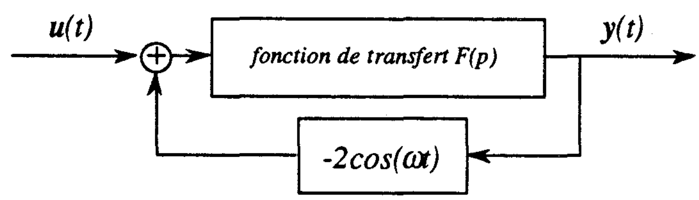
$$\begin{cases} x_{k+1} = A.x_k + B.u_k, \\ y_k = C.x_k \end{cases}$$

est instable si $\exists \lambda \in spec\ \{A\}, |\lambda| > 1.$

Ces conditions ne sont pas valables dans le cas non stationnaire : d'une part, les valeurs propres de la matrice $A(t)$ d'un système linéaire non stationnaire peuvent être à partie réelle négative sans qu'il y ait stabilité. D'autre part, ce système peut être stable et en même temps, sa matrice d'évolution $A(t)$ peut avoir des valeurs propres à partie réelle positive.

Exemple :

Soit le système linéaire décrit par le schéma ci-dessous



où $F(p) = \dfrac{1}{(p + 0.4)(p - 0.4)(p + 1.5)}$.

Ce système est linéaire non stationnaire. Une représentation en forme canonique commandable correspond à la matrice d'évolution :

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.24 + 2cos(\omega t) & 0.16 & -1.5 \end{bmatrix}.$$

On montre alors [RICHARD, LAURENT, 1983] que ce système est asymptotiquement stable si $\omega \in]1.3, 1.56[$. Pourtant, selon les conditions suffisantes du linéaire stationnaire ci-dessus, le calcul des valeurs propres de $A(t)$ à chaque instant aurait conclu à une instabilité. On remarque en outre que ce système est instable si ω est à l'extérieur de cet intervalle.

Proposition 1.4 :

S'il existe t_0 tel que $\forall\ t \geq t_0$, $\int_{t_0}^{t} trace[A(\tau)].d\tau > 0$, alors le système n'est pas asymptotiquement stable (au sens de Lyapunov).

Démonstration :

D'après l'identité de Jacobi (voir § 1.1.2.1):

$$det\ [\Phi(t,t_0)] = exp\left[\int_{t_0}^{t} trace[A(\tau)].d\tau\right].$$

La stabilité asymptotique uniforme de Lyapunov suppose que $\|\Phi(t,t_0)\| \to 0$ quand $t \to \infty$. Ce qui implique que $det\ [\Phi(t,t_0)] \to 0$, or ceci est impossible si $\int_{t_0}^{t} trace[A(\tau)].d\tau > 0$ □

1.2.2. Commandabilité et atteignabilité

Indépendamment de l'analyse de la stabilité, le deuxième domaine d'étude des systèmes consiste à vérifier l'existence d'une loi de commande admissible $u(t)$ qui permet de transférer un état initial $x_1 = x(t_1)$ du système vers un état d'arrivé $x_2 = x(t_1)$. On introduit pour cela deux notions : la *commandabilité* de l'état initial vers x_2, et *l'atteignabilité* de l'état final à partir de x_1. En général, ces deux notions ne coincident pas et ont amené à la définition du domaine commandable $\mathcal{X}_{C,x_2}$ vers l'état x_2 et du domaine atteignable $\mathcal{X}_{A,x_1}$ à partir de l'état x_1 par rapport à l'instant initial t_1 et l'instant final t_2.

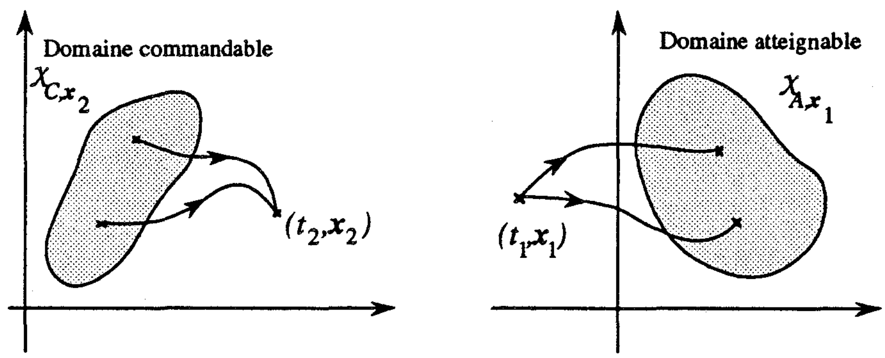


Figure 1.4.

Pour les systèmes linéaires, ces deux définitions peuvent être simplifiées en considérant comme état initial ou état final l'origine $\mathbf{0}$ de l'espace des phases. La commandabilité est en fait équivalente à la possibilité de diriger le système, partant d'un état quelconque x_1, *vers* l'origine $x_2 = \mathbf{0}$; tandis que l'atteignabilité correspond à la commandabilité *depuis* l'origine $x_1 = \mathbf{0}$ [ROSENBROCK, 1970].

Définitions :

*1. L'état x_1 est **commandable sur l'intervalle** $[t_1,t_2]$ si et seulement s'il existe une loi de commande $u_{x_1}(t)$ définie et continue pour tout t appartenant à $[t_1,t_2]$, telle que l'événement (t_1,x_1) soit transféré à $(t_2,\mathbf{0})$ par la commande $u(t) = u_{x_1}(t)$.*
L'ensemble des états commandables sur $[t_1,t_2]$ sera noté $\mathcal{X}_C[t_1,t_2]$.

*2. L'état x_2 est **atteignable sur l'intervalle** $[t_1,t_2]$ si et seulement s'il existe une loi de commande $u_{x_2}(t)$ définie et continue pour tout t appartenant à $[t_1,t_2]$, telle que l'événement $(t_1,\mathbf{0})$ soit transféré à (t_2,x_2) par la commande $u(t) = u_{x_2}(t)$.*
L'ensemble des états atteignables sur $[t_1,t_2]$ sera noté $\mathcal{X}_A[t_1,t_2]$.

*3. L'état x_1 est **commandable à** t_1 si et seulement s'il existe un instant t_2 tel qu'il soit commandable sur $[t_1,t_2]$. L'ensemble des états commandables à t_1 sera noté $\mathcal{X}_C[t_1]$.*

*L'état x_2 est **atteignable à** t_2 si et seulement s'il existe un instant t_1 tel qu'il soit atteignable sur $[t_1,t_2]$.L'ensemble des états atteignables à t_2 sera noté $\mathcal{X}_A[t_2]$.*

*4. Le système est **commandable sur l'intervalle** $[t_1,t_2]$ si et seulement si $\mathcal{X}_C[t_1,t_2] = \mathbf{R}^n$.*
*Le système est **atteignable sur l'intervalle** $[t_1,t]$ si et seulement si $\mathcal{X}_A[t_1,t_2] = \mathbf{R}^n$.*

*5. Le système est **commandable à** t_1 si et seulement s'il existe un instant t_2 tel qu'il soit commandable sur $[t_1,t_2]$. Dans ce cas, $\mathcal{X}_C[t_1] = \mathbf{R}^n$.*
*Le système est **atteignable à** t_2 si et seulement s'il existe un instant t_1 tel qu'il soit atteignable sur $[t_1,t_2]$. Dans ce cas, $\mathcal{X}_A[t_2] = \mathbf{R}^n$.*

*6. Le système est **commandable** s'il est commandable à tout instant t_1.*
*Le système est **atteignable** s'il est atteignable à tout instant t_2.*

Remarque :

Pour les définitions 4, 5 et 6, certains auteurs parlent de commandabilité ou d'atteignabilité complète du système. Ces définitions s'appliquent aussi bien aux systèmes en temps continu qu'en temps discret. Pour les systèmes linéaires, ces deux propriétés sont en relation directe avec l'interaction mutuelle de la matrice *A(.)* et *B(.)*. Nous parlerons donc indifféremment de la commandabilité et de l'atteignabilité du système (1.1)/(1.5) ou de la paire *[A(.),B(.)]*, *A(.)* et *B(.)* étant respectivement la matrice d'évolution et la matrice de commande de ce système.

1.2.2.1. Commandabilité et atteignabilité des systèmes linéaires continus :

Nous allons maintenant énoncer les théorèmes sur la commandabilité et l'atteignabilité d'un système linéaire continu. On met d'abord en évidence les conditions dans lesquelles un état est commandable ou non. Le théorème 1.7 montre alors, conformément à la définition 4, que le système est complètement commandable si le sous-espace commandable est égal à $\mathbf{R}^n$. On verra ensuite (Théorème 1.9) que la commandabilité complète et l'atteignabilité complète sont équivalentes pour ces systèmes.

Les sous-espaces commandable et non commandable :

On vérifie facilement que les états commandables (respectivement, non commandables) du système linéaire (1.1) forment un sous-espace commandable (respectivement, non commandable) dans $\mathbf{R}^n$. En effet, on définit d'abord le *grammien de commandabilité* :

$$W_C(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_1,\tau).B(\tau).B^{\mathrm{T}}(\tau).\Phi^{\mathrm{T}}(t_1,\tau).d\tau \qquad (1.10)$$

où, dans le cas complexe, les matrices transposées (notées avec l'exposant ^{T}) sont remplacées par les matrices transposées conjuguées.

Proposition 1.5 :

Soit un état $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tel que $\boldsymbol{x}^T.\Phi(t_1,t).B(t) = 0 \ \forall \ t \in [t_1,t_2]$. Alors cet état $\boldsymbol{x}$ n'est pas commandable sur l'intervalle $[t_1,t_2]$.

Trivialement, $\forall \ \alpha \in \mathbf{R}$, l'état $\alpha.\boldsymbol{x}$ n'est pas commandable sur le même intervalle de temps. De même, tout combinaison linéaire $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i.}\boldsymbol{x}_{i.}$ d'états non commandables est non commandable.

Démonstration :

Soit $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ satisfaisant $\boldsymbol{x}^T.\Phi(t_1,t).B(t) = \mathbf{0} \ \forall \ t \in [t_1,t_2]$. La démonstration de la non commandabilité se fait par l'absurde : on suppose que $\boldsymbol{x}$ est commandable, il existe alors une commande $\boldsymbol{u}(t)$ qui le ramène à l'origine. A partir de l'équation (1.3) et avec $\boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0}$, on obtient ainsi :

$$-\boldsymbol{x} = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_1,\tau).B(\tau).\boldsymbol{u}(\tau).d\tau.$$

Dans ce cas,

$$-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} = \int_{t_1}^{t_2} q^T\Phi(t_1,\tau).B(\tau).\boldsymbol{u}(\tau).d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{0}.\boldsymbol{u}(\tau).d\tau = 0.$$

Ceci n'est vérifié que pour $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Ce qui est contradictoire aux hypothèses. D'où la proposition 1.5 ❑

Proposition 1.6 :

Soient un état $\boldsymbol{x}$ du système (1.1) et $\boldsymbol{w}_i$, $i = 1$ à n, les colonnes de $W_C(t_1,t_2)$. Alors, $\boldsymbol{x}$ est commandable si et seulement s'il est une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{w}_i$:

$$\boldsymbol{x} \in X_C[t_1,t_2] \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in span\{\boldsymbol{w}_i,\ i = 1 \text{ à } n\}.$$

Ainsi, $X_C[t_1,t_2] = span\{\boldsymbol{w}_i,\ i = 1 \text{ à } n\}$, et $\dim X_C[t_1,t_2] = rang\{W_C(t_1,t_2)\}$.

Démonstration :

1) Supposons $\boldsymbol{x} \in span\{\boldsymbol{w}_i,\ i = 1 \text{ à } n\}$. Dans ce cas, il existe n scalaires α_i tels que

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i.}\boldsymbol{w}_{i.}$$

Si on considère le vecteur colonne α formé des α_i, alors $x = W_C(t_1,t_2).\alpha$ et on peut aisément vérifier que la commande $u(t) = -B^T(t).\Phi^T(t_1,t).\alpha$ annule l'état $x(t_2)$ du système à l'instant t_2. L'état x est donc commandable sur $[t_1,t_2]$.

2) Supposons $x \neq 0$ et $x \notin span\{w_i,\ i = 1 \text{ à } n\}$, alors

$$\forall\, i \in \{1,n\},\ x^T.w_i = 0 \Rightarrow x^T.W_C(t_1,t_2) = 0 \Rightarrow x^T.W_C(t_1,t_2).x = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} (x^T\Phi(t_1,\tau).B(\tau)).(B^T(\tau).\Phi^T(t_1,\tau).x).d\tau = 0 \Rightarrow x^T\Phi(t_1,\tau).B(\tau) = 0,\ \forall \tau \in [t_1,t_2].$$

En utilisant la proposition 1.5, on conclut que $x \notin \mathcal{X}_C[t_1,t_2]$ ❑

Théorème 1.7 :

La propriété de commandabilité complète sur $[t_1,t_2]$ du système (1.1) ou de la paire $[A(t),B(t)]$ est équivalente à chacune des propositions suivantes :

1. $\forall\, t \in [t_1,t_2]$, l'égalité $x^T.\Phi(t_1,t).B(t) \equiv 0$ n'est possible que si le vecteur x est nul.

2. Le grammien de commandabilité $W_C(t_1,t_2)$ défini par (1.10) est inversible (et donc défini positif).

3. En supposant que $A(t)$ et $B(t)$ soient suffisamment dérivables, la matrice définie par :

$$C_{(A,B)}(t) = \left[\, B(t)\ \left(A(t) - \frac{d}{dt}\right)B(t)\ \ldots\ \left(A(t) - \frac{d}{dt}\right)^{n-1}B(t) \,\right] \qquad (1.11)$$

est de rang maximum pour au moins un instant t *appartenant à $[t_1,t_2]$.*

Remarques :

Ces résultats sont très connus. Notons seulement que :

1. Les propriétés 1) et 2) sont les conditions d'indépendance linéaire des vecteurs lignes de $\Phi(t_1,t).B(t)$ sur l'intervalle $[t_1,t_2]$. De plus, la commande $u(t)$ qui annule l'état du système en t_2 est :

$$u(t) = -\,B^T(t).\Phi^T(t_1,t).W_C^{-1}(t_1,t_2).x_1,$$

puisque d'après l'équation (1.3) :

$$\begin{aligned} x(t_2) &= \Phi(t_2,t_1)\,x_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2,\tau).B(\tau).u(\tau).d\tau \\ &= \Phi(t_2,t_1)\,x_1 - \Phi(t_2,t_1).W_C(t_1,t_2).W_C^{-1}(t_2,t_1).x_1 = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

2. La propriété 3) peut être démontrée par le choix d'une commande impulsionnelle appliquée à l'instant t [SILVERMAN & MEADOWS, 1967].

Les sous-espaces atteignable et non atteignable :

En définissant le grammien d'atteignabilité :

$$W_A(t_2,t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2,\tau).B(\tau).B^T(\tau).\Phi^T(t_2,\tau).d\tau \qquad (1.12)$$

On peut facilement mettre en évidence l'analogue de la proposition 1.6 précédente pour l'atteignabilité :

Proposition 1.8 :

Soient w_i, $i = 1$ à n, les colonnes de $W_A(t_2,t_1)$. Alors,

$\mathcal{X}_A[t_1,t_2] = \mathrm{span}\{w_i,\ i = 1 \text{ à } n\}$,

$\dim \mathcal{X}_A[t_1,t_2] = rang\{w_i,\ i = 1 \text{ à } n\} = rang\{W_A(t_2,t_1)\}$.

Théorème 1.9 :

Le système (1.1) ou la paire [A(t),B(t)] *est atteignable sur* $[t_1,t_2]$ *si et seulement si le grammien d'atteignabilité* $W_A(t_2,t_1)$ *défini par (1.12) est inversible (et donc défini positif). De plus, la propriété de commandabilité sur* $[t_1,t_2]$ *du système (1.1) ou de la paire* $[A(t),B(t)]$ *est équivalente à la propriété d'atteignabilité sur* $[t_1,t_2]$ *de* $[A(t),B(t)]$.

Remarques :

1. La commandabilité et l'atteignabilité des systèmes linéaires continus sont équivalentes car l'inversibilité est équivalente pour le grammien d'atteignabilité ou celui de commandabilité :

$$W_A(t_2,t_1) = \Phi(t_2,t_1)\,.W_C(t_1,t_2)\,.\Phi^T(t_2,t_1)\,,$$

sachant que $\Phi(t_2,t_1)$ est inversible.

2. Pour un système linéaire continu non stationnaire quelconque, le sous-espace commandable $\mathcal{X}_C[t_2,t_1]$ et le sous-espace atteignable $\mathcal{X}_A[t_2,t_1]$ ne coincident pas forcément. Cependant, en vertu de la relation entre les deux grammiens donnée ci-dessus, ils sont de même dimension.

3. Les dimensions de $\mathcal{X}_C[t_1]$ et de $\mathcal{X}_A[t_2]$ sont plus difficiles à mettre en évidence. Rappelons que

$$\forall\, t > t_1,\ \mathcal{X}_C[t_1,t] \subset \mathcal{X}_C[t_1].$$
$$\forall\, t < t_2,\ \mathcal{X}_A[t_2,t] \subset \mathcal{X}_A[t_2].$$

4. Pour les systèmes linéaires continus, on peut montrer que si le système est commandable sur $[t_1,t_2]$, il existe un sous-intervalle de $[t_1,t_2]$ sur lequel il est commandable. Cela vient des propriétés des fonctions linéairement indépendantes.

La notion de commandabilité différentielle, introduite notamment par Chen [1984], consiste à étudier la commandabilité sur ces sous-intervalles :

Définition de la commandabilité différentielle :

> *Un système est différentiellement commandable sur un intervalle $\mathcal{T}$ s'il est commandable sur n'importe quel sous-intervalle de $\mathcal{T}$.*

C'est le cas des systèmes linéaires stationnaires et des systèmes linéaires dont $A(t)$ et $B(t)$ sont analytiques. Les dimensions des sous-espaces commandables $\mathcal{X}_C[t_1]$ et atteignables $\mathcal{X}_A[t_2]$ sont alors indépendantes de l'instant t. Ainsi, on peut décomposer le systèmes en deux sous-systèmes commandable et non-commandable.

Décomposition en sous-systèmes commandable et non commandable.

En supposant que $A(t)$ et $B(t)$ soient analytiques, un système non-commandable peut être décomposé en sous-systèmes commandable et non-commandable par le biais d'une transformation régulière $P(t)$. Il prend alors la forme

$$z = P(t)\ x,$$

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix} . z + \begin{bmatrix} B_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} . u, \qquad (1.13)$$

$A_{11}(t)$ *appartenant à* $\mathbf{R}^{k_c x k_c}$ *, avec* $k_c < n$.

De plus, il est montré [GILBERT, 1963; KALMAN, 1963] que la dimension k_c du sous-système commandable ne dépend pas de t, k_c est défini comme étant le *rang de commandabilité du système*. Notons que k_c est aussi la dimension du sous-espace commandable $\mathcal{X}_C[t]$ à n'importe quel instant t.

1.2.2.2. Commandabilité pour les systèmes linéaires stationnaires :

La commandabilité des systèmes linéaires stationnaires est plus simple à établir. La matrice de transition $\Phi(t,t_0)$ étant égale à $e^{A(t-t_0)}$, les instants t et t_0 ne jouent plus aucun rôle si ce n'est par leur différence $t-t_0$. La commandabilité à un instant quelconque équivaut donc à la commandabilité complète du système.

Théorème 1.10 :

> *1. Soit le système linéaire stationnaire continu défini par sa matrice d'évolution A et sa matrice de commande B. Posons* $C_s = [\ B\ \ AB\ \ \dots\ \ A^{n-1}B\ ] \in \mathbf{R}^{n x n m}$. *Alors, Le système est commandable si et seulement si la matrice* C_s *est de rang égal à la dimension n du système.*

2. Le système stationnaire ou la paire [A,B] est non-commandable si et seulement si : $\exists\, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ *un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ tel que* $\boldsymbol{x}.A = \lambda\, \boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{x}.B = 0$.

3. Le système stationnaire ou la paire [A,B] est commandable si et seulement si :

$\forall\, \lambda \in \mathbf{C}$, *l'ensemble des complexes,*

rang $\left[A-\lambda Id\ ,\ B\right] = n$, *la dimension du système.*

On montre que la commandabilité du système est vérifiée si cette condition est satisfaite sur le spectre de la matrice A, étant donné que $det[A-\lambda Id\,] \neq 0$ *si* $\lambda \notin spec\{A\}$.

Ce test sur les valeurs propres de A est connu sous le nom de test de Popov-Belevitch-Hautus (PBH).

Remarques :

Si $\boldsymbol{x}$ est un vecteur propre vérifiant la partie 2 du théorème, alors $\boldsymbol{x}$ est un état non commandable, et la valeur propre λ associée ne pourra être changée par aucune commande $\boldsymbol{u(t)}$ de placement de pôle. Dans le cas des systèmes linéaires stationnaires, la notion de commandabilité *d'un état* est donc finalement équivalente à la notion de commandabilité *modale*, c'est-à-dire des valeurs propres de la matrice de transition du système. Ainsi, chaque mode $\lambda \in spec\{A\}$ qui ne vérifie pas le test PBH n'est pas commandable.

1.2.2.3. Commandabilité et atteignabilité des systèmes linéaires discrets :

Toutes les définitions que nous avons énoncées concernant la commandabilité et l'atteignabilité sont applicables aux systèmes linéaires discrets. Ici, la commandabilité et l'atteignabilité sont deux notions distinctes car $\Psi(k_2,k_1)$ n'est pas forcément inversible. Nous savons par l'équation (1.5) que :

$$\boldsymbol{x}_{k_2} = \Psi(k_2,k_1).\boldsymbol{x}_{k_1} + \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \Psi(k_2,k+1).B_k.\boldsymbol{u}_k.$$

Etudions plus précisément ces deux propriétés.

Définition du grammien d'atteignabilité :

De manière générale, on pourra définir le grammien d'atteignabilité analogue à (1.12) :

$$W_A(k_2,k_1) = \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \Psi(k_2,k+1).B_k.B_k^{\mathrm{T}}.\Psi^{\mathrm{T}}(k_2,k+1)$$

Le grammien de commandabilité ne pourra être défini que pour les systèmes où la matrice $\Psi(k_2,k_1)$ est inversible. Le système est dit *réversible*. Dans ce cas, $\forall\ k \in [k_1,k_2]$, A_k est nécessairement inversible et le grammien de commandabilité est :

$$W_C(k_1,k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \Psi(k_1,k+1).B_k.B_k^{\mathrm{T}}.\Psi^{\mathrm{T}}(k_1,k+1)$$

en notant $\Psi(k_1,k) = \Psi^{-1}(k,k_1)$ si $k > k_1$. La propriété de commandabilité de (1.4) est ainsi équivalente à la propriété d'atteignabilité.

Les sous-espaces atteignable et commandable peuvent être identifiés par les versions discrètes des proposition 1.6 et 1.8 (voir § 1.2.2.1). Appelons $\Psi[k_1,k_2](\mathbf{R}^n)$ le sous-espace image de $\mathbf{R}^n$ par la transformation $\Psi[k_1,k_2]$:

$$\begin{array}{rcl} \Psi[k_1,k_2]:\ \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \Psi[k_1,k_2](\mathbf{R}^n) \subset \mathbf{R}^n \\ x & \longrightarrow & y = \Psi(k_2,k_1)\,x. \end{array}$$

On obtient alors les résultats suivants,

Proposition 1.11 : condition nécessaire et suffisante de commandabilité sur l'intervalle $[k_1,k_2]$

> *L'état* $\boldsymbol{x}$ *est commandable sur l'intervalle* $[k_1,k_2]$ *si et seulement si :*
> $\Psi(k_2,k_1).\boldsymbol{x} \in span\{\Psi(k_2,i+1).B_i\ /\ i \in [k_1,k_2]\}$
>
> *Le système linéaire discret (1.4) est commandable sur* $[k_1,k_2]$ *si et seulement si les colonnes de* $\{\Psi(k_2,i+1).B_i\ /\ i \in [k_1,k_2]\}$ *génèrent le sous-espace* $\Psi[k_1,k_2](\mathbf{R}^n)$, *c'est-à-dire si* $\Psi[k_1,k_2](\mathbf{R}^n) \subset span\{\Psi(k_2,i+1).B_i\ /\ i \in [k_1,k_2]\}$.

Démonstration :

D'après la définition, le système est commandable sur $[k_1,k_2]$ si et seulement si $\mathcal{X}_C[k_1,k_2] = \mathbf{R}^n$. C'est-à-dire, quel que soit $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbf{R}^n$, il existe une suite de commandes $\{\boldsymbol{u}_i,\ i \in [k_1,k_2]\}$ telles que :

$$\forall\ \boldsymbol{x}_1 \in \mathbf{R}^n, \exists\ \{\boldsymbol{u}_i,\ i \in [k_1,k_2]\},\ \ -\Psi(k_2,k_1).\boldsymbol{x}_1 = \sum_{i=k_1}^{k_2-1} \Psi(k_2,i+1).B_i.\boldsymbol{u}_i.$$

Ainsi :

i) les colonnes de $\{\Psi(k_2,i+1).B_i\ /\ i \in [k_1,k_2]\}$ doivent engendrer le sous-espace $\Psi[k_1,k_2](\mathbf{R}^n)$ car $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbf{R}^n$ (condition nécessaire),
ii) l'existence des $\{\boldsymbol{u}_i\}$ est évidente si le sous-espace $\Psi[k_1,k_2](\mathbf{R}^n)$ est inclus dans $span\{\Psi(k_2,i+1).B_i\ /\ i \in [k_1,k_2]\}$ (condition suffisante) □

Proposition 1.12 : condition nécessaire et suffisante d'atteignabilité sur $[k_1,k_2]$

i) L'état x est atteignable sur l'intervalle $[k_1,k_2]$ si et seulement si

$$x \in span\{\,\Psi(k_2,i+1).B_i \,/\, i \in [k_1,k_2]\,\}.$$

ii) Le système linéaire discret (1.4) est atteignable sur l'intervalle $[k_1,k_2]$ si et seulement si les colonnes de $span\{\,\Psi(k_2,i+1).B_i \,/\, i \in [k_1,k_2]\}$ engendrent $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire si

$$span\{\,\Psi(k_2,i+1).B_i \,/\, i \in [k_1,k_2]\} = \mathbf{R}^n.$$

Démonstration :

D'après la définition, il existe une suite de commandes $\{u_i\}$ définies pour $i \in [k_1,k_2]$ qui transfère le système de l'état $x_1 = \mathbf{0}$ vers un état quelconque x_2. L'équation (1.5) nous donne alors :

$$\mathbf{x}_2 = \sum_{i=k_1}^{k_2-1} \Psi(k_2,i+1).B_i.u_i.$$

Pour pouvoir atteindre x_2 quelconque dans $\mathbf{R}^n$, il faut et il suffit que $span\{\,\Psi(k_2,i+1).B_i \,/\, i \in [k_1,k_2]\} = \mathbf{R}^n$, c'est-à-dire que n colonnes des matrices $\{\,\Psi(k_2,i+1).B_i \,/\, i \in [k_1,k_2]\}$ soient linéairement indépendantes sur $[k_1,k_2]$, où n est la dimension du système. On peut alors montrer le résultat suivant de manière équivalente au théorème 1.9 pour les systèmes linéaires continus ❑

Théorème 1.13 :

Le système (1.4) ou la paire $[A_k,B_k]$ est atteignable sur $[k_1,k_2]$ si et seulement si le grammien d'atteignabilité défini ci-dessus est inversible (et donc défini positif).

Proposition 1.14 :

Si le système (1.4) est atteignable sur l'intervalle $[k_1,k_2]$, alors il est commandable sur ce même intervalle.

Par contre, la commandabilité n'entraîne pas nécessairement l'atteignabilité du système.

Démonstration :

Il suffit de noter qu'en cas d'atteignabilité complète du système, $\Psi[k_1,k_2](\mathbf{R}^n)$ est nécessairement inclus dans $span\{\,\Psi(k_2,i+1).B_i \,/\, i \in [k_1,k_2]\} = \mathbf{R}^n$. Pour les systèmes discrets, l'atteignabilité (commandabilité *depuis* l'origine) est donc une notion plus forte que la commandabilité (*vers* l'origine). Comme en pratique, nous nous intéressons à un transfert vers un état x_2 quelconque, la propriété d'atteignabilité est plus importante. Si la matrice $\Psi(k_2,k_1)$ est inversible, les deux notions seront équivalentes car $\Psi[k_1,k_2](\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n$ ❑

1.2.3. Observabilité :

Ici, le problème consiste à déduire l'état initial du système à partir de la connaissance de la commande *u(t)* et de la sortie *y(t)* sur un intervalle de temps $[t_1,t_2]$. Dans l'affirmative, on dira que le système est *observable.*

1.2.3.1. Définitions :

1. L'état x_1 *du système à l'instant* t_1 ***est observable sur l'intervalle*** $[t_1,t_2]$ *si et seulement si on peut déduire sa valeur de la mesure de* ***u(t)*** *et de* ***y(t)*** *sur l'intervalle de temps* $[t_1,t_2]$*. Soit* $\mathcal{X}_O[t_1,t_2]$ *l'ensemble des états observables sur* $[t_1,t_2]$*.*

2. L'état x_1 ***est observable à*** t_2 *si et seulement s'il existe un instant* t_1 *tel qu'il soit observable sur* $[t_1,t_2]$*. Soit* $\mathcal{X}_O[t_2]$ *l'ensemble des états observables à* t_2*.*

3. Le système ***est observable sur l'intervalle*** $[t_1,t_2]$ *si et seulement si* $\mathcal{X}_O[t_1,t_2] = \mathbf{R}^n$*.*

4. Le système ***est observable à*** t_2 *si et seulement s'il existe un instant* t_1 *tel qu'il soit observable sur* $[t_1,t_2]$*. Dans ce cas,* $\mathcal{X}_O[t_2] = \mathbf{R}^n$*.*

5. Le système ***est observable*** *s'il est observable à tout instant* t_2*.*

1.2.3.2. Observabilité du système linéaire continu :

Nous avons alors le théorème d'équivalences suivant :

Théorème 1.15 : [KAILATH,1980]

Le système (1.1) ou la paire [A(t),C(t)] est observable si et seulement si :

1. Les colonnes de $C(t).\Phi(t,t_1)$ *sont linéairement indépendantes sur l'intervalle* $[t_1,t_2]$*. C'est-à-dire, l'égalité* $C(t).\Phi(t,t_1).\boldsymbol{x} = 0$, $\forall\ t \in [t_1,t_2]$*, n'est possible que si le vecteur* $\boldsymbol{x}$ *est nul.*

2. Le ***grammien d'observabilité*** *défini par :*

$$W_O(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \Phi^T(t,t_1).C^T(t).C(t).\Phi(t,t_1).dt \qquad (1.14)$$

est inversible (et donc défini positif).

3. En supposant que A(t) et C(t) soient suffisamment dérivables, la matrice définie par :

$$O_{(A,C)}(t) = \left[\ C^T(t)\ \ \left(A^T(t) + \frac{d}{dt}\right).C^T(t)\ \ \ldots\ \ \left(A^T(t) + \frac{d}{dt}\right)^{n-1} C^T(t)\ \right] \qquad (1.15)$$

est de rang égal à la dimension du système pour au moins un instant $t \in [t_1,t_2]$*.*

4. Le système adjoint défini par la paire $[-A^T(t),C^T(t)]$ *est atteignable (donc commandable). Cette dernière proposition exprime la dualité entre les deux notions.*

La démonstration de ces équivalences se fait de manière tout à fait analogue à celle du théorème correspondant à la commandabilité (voir § 1.2.2.1.).

Remarques sur le système adjoint :

1. Si $A(t) \in \mathbf{C}^{nxn}$, la matrice duale est définie par la matrice complexe transposée et conjuguée notée $A^*(t)$. D'une façon générale, les transposées sont alors à remplacer par des transposées conjuguées. La matrice de monodromie du système adjoint est $\Phi_{-A^T}(t,t_0) = [\Phi_A^{-1}(t,t_0)]^T$.

2. Nous savons que le système adjoint est commandable sur $[t_1,t_2]$ si les *lignes* de la matrice $\Phi_{-A^T}(t_1,t).C^T(t)$ sont linéairement indépendantes sur cet intervalle, c'est-à-dire si les *lignes* de $[\Phi_A^{-1}(t_1,t)]^T.C^T(t)$ ou les *colonnes* de $C(t).\Phi_A(t,t_1)$ sont indépendantes. On retrouve donc la dualité des deux notions de commandabilité et d'observabilité.

3. Le grammien d'observabilité est défini en utilisant la remarque 2 ci-dessus et les résultats en commandabilité.

1.2.3.3. Observabilité pour les systèmes linéaires stationnaires :

Théorème 1.16 :

1. Soit le système linéaire stationnaire continu défini par sa matrice d'évolution A *et sa matrice d'observation C.*

Posons $$O_s = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{nlxn},$$

Le système est observable si et seulement si la matrice O_s est de rang égal à la dimension n du système.

1.2.3.4. Observabilité pour les systèmes linéaires discrets :

On peut définir le grammien d'observabilité pour $k_2 > k_1$:

$$W_O(k_2,k_1) = \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \Psi^T(k+1,k_1)\, C_k^T.C_k.\Psi(k+1,k_1).$$

Le résultat qui en découle utilise la dualité de l'observabilité et de l'atteignabilité.

Théorème 1.17 :

Le système (1.4) ou la paire $[A_k,C_k]$ est observable sur $[k_1,k_2]$ si et seulement si le grammien d'observabilité défini ci-dessus est inversible (et donc défini positif).

1.2.3.5. Décomposition de Kalman en sous-espaces observable et non-observable :

On peut aussi décomposer un système non complètement observable en sous-systèmes observable et non-observable. Si $A(t)$ et $C(t)$ sont analytiques, ces deux sous-systèmes sont de dimensions constantes. En définitive, le système initial (1.1) pourra alors être décomposé en 4 sous-systèmes :

- le sous-système commandable et observable,
- le sous-système commandable et non-observable,
- le sous-système non-commandable et observable,
- et le sous-système non-commandable et non-observable.

Cette décomposition sera utilisée quand on définira les propriétés dites "étendues" de stabilisabilité et de détectabilité.

1.2.4. Stabilisabilité et détectabilité :

Ces deux propriétés sont des propriétés structurelles dites "étendues" car elles font appel aux précédentes notions de stabilité, de commandabilité et d'observabilité déjà définies précédemment. La stabilisabilité et la détectabilité sont duales l'une de l'autre.

1.2.4.1. Stabilisabilité :

La stabilisabilité caractérise l'existence d'une loi de commande (en boucle fermée) qui stabilise le système. Deux définitions équivalentes de la stabilisabilité sont principalement utilisées dans la littérature. Nous noterons ici $A(.)$, $B(.)$, et $G(.)$ des matrices dépendant de la variable temps sous sa forme continue ou discrète.

Définition 1 :

> *Un système linéaire continu ou discret décrit par la paire $[A(.),B(.)]$ est stabilisable si et seulement s'il existe une matrice $G(.)$ de dimension appropriée telle que la matrice $A(.)+B(.)\,G(.)$ est asymptotiquement stable.*

Définition 2 :

> *Un système linéaire continu ou discret décrit par la paire $[A(.),B(.)]$ est stabilisable si et seulement si la partie non commandable de sa décomposition de Kalman est asymptotiquement stable.*

Remarque :

Si $[A(.), B(.)]$ est stabilisable, alors $\forall\, G(.)$, le système en boucle fermée $[A(.) + B(.)G(.), B(.)]$ est aussi stabilisable.

Si la commandabilité du système est vérifiée, ce système peut être transféré vers l'origine au bout d'un temps fini t_2 (ou k_2 dans le cas discret). Par contre, la stabilisabilité du système exige seulement que l'état $x(t)$ de ce système converge vers l'origine quand $t \to \infty$.

La vérification de la stabilisabilité d'un système linéaire non-stationnaire n'est pas évidente *a priori* car il faudrait calculer sa décomposition de Kalman et vérifier la stabilité asymptotique du sous-système non-commandable. Des critères plus simples existent pour les systèmes linéaires stationnaires.

Stabilisabilité d'un système linéaire stationnaire :

1. *Un système linéaire stationnaire continu décrit par* $[A,B]$ *est stabilisable si et seulement si* $rang\,[A-\lambda Id\,;\,B] = n$, *pour tout* $\lambda \in spec\{A\}$ *tel que* $Re(\lambda) \geq 0$.

2. *Un système linéaire stationnaire discret décrit par* $[A,B]$ *est stabilisable si et seulement si* $rang\,[A-\lambda Id\,;\,B] = n$, *pour tout* $\lambda \in spec\{A\}$ *tel que* $|\lambda| \geq 1$.

C'est l'utilisation du test PBH pour vérifier la commandabilité d'un valeur propre particulier de la matrice A. Les propositions 1) et 2) signifient donc que le système linéaire stationnaire continu ou discret est stabilisable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont commandables.

1.2.4.4. Détectabilité :

La détectabilité est la propriété duale de la stabilisabilité. Nous noterons ici $A(.)$, $B(.)$, et $G(.)$ des matrices dépendant de la variable temps sous sa forme continue ou discrète.

Définition 3 :

Un système linéaire continu ou discret décrit par la paire $[A(.),C(.)]$ *est détectable si et seulement s'il existe une matrice* $G(.)$ *de dimension appropriée telle que la matrice* $A(.)+G(.)\,C(.)$ *est asymptotiquement stable.*

Définition 4 :

Un système linéaire continu ou discret décrit par la paire $[A(.),C(.)]$ *est détectable si et seulement si la partie non observable de sa décomposition de Kalman est asymptotiquement stable.*

Proposition 1.18 :

la paire $[A(.),C(.)]$ *est détectable si et seulement si la paire* $[A^T(.),C^T(.)]$ *est stabilisable. Cette proposition est valable pour les systèmes linéaires continus ou discrets.*

2. Les systèmes linéaires à coefficients périodiques :

Système linéaire continu périodique :

Nous dirons que le système linéaire en temps continu

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t)\, x + B(t)\, u, \\ y(t) = C(t)\, x \end{cases} \tag{1.16}$$

est à coefficients périodiques si et seulement si

$$(P_1) : \exists\ T_0 > 0 \text{ tel que } \forall\ t \in \mathbf{R},\ A(t+T_0) = A(t),\ B(t+T_0) = B(t), \text{ et } C(t+T_0) = C(t).$$

Si nous notons $\mathbf{T}$ l'ensemble des $T_0 \in \mathbf{R}$ satisfaisant (P_1) }, alors $T = min\ \{ T_0 \in \mathbf{T} \}$ existe. On définit T comme étant la période du système, et $\forall\ T_0 \in \mathbf{T}$, $\exists\ \nu \in \mathbf{N}$ tel que $T_0 = \nu T$.

Système linéaire discret périodique :

De la même façon, le système

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \\ y_k = C_k x_k \end{cases} \tag{1.17}$$

est à coefficients périodiques si et seulement si :

$$\exists\ T \in \mathbf{N} - \{0\} \text{ tel que } \forall\ k \in \mathbf{Z},\ A_{k+T} = A_k,\ B_{k+T} = B_k, \text{ et } C_{k+T} = C_k.$$

Les systèmes linéaires à coefficients périodiques, ou abusivement systèmes linéaires périodiques, appartiennent à une classe particulière des systèmes linéaires.

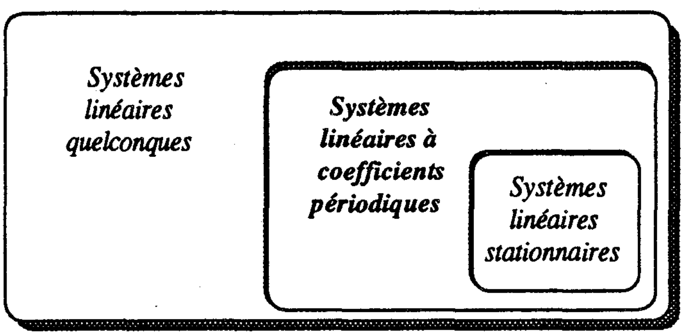


Figure 1.6. Schéma des classes de systèmes linéaires.

Remarque :

La classe bien connue des systèmes linéaires à coefficients constants, c'est-à-dire les systèmes linéaires stationnaires, est une sous-classe des systèmes linéaires à coefficients périodiques. Comme nous le verrons, de nombreux points communs existent entre ces deux classes de systèmes. Cependant, la généralisation de l'ensemble des résultats obtenus sur les systèmes linéaires stationnaires n'est pas évidente. Nous en avons vu un exemple sur les propriétés de stabilité (voir § 1.2.1.2).

2.1. Propriétés de la matrice de transition, stabilité :

2.1.1. Systèmes linéaires continus périodiques :

La matrice de transition du système est définie, comme nous l'avons précédemment vu, comme étant la solution de l'équation différentielle (1.2) :

$$\frac{d}{dt}\Phi = A(t)\Phi,$$
$$\Phi(t_0,t_0) = Id_n\text{, la matrice identité d'ordre } n,$$
$$\Phi(t,t_0) \in \mathbf{R}^{nxn}.$$

Pour les systèmes linéaires périodiques, cette matrice a les propriétés suivantes en plus de celles déjà exposées précédemment (voir § 1.1.2.1):

1. $\forall\, t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, $\Phi(t_2+T, t_1+T) = \Phi(t_2, t_1)$ *si T est la période du système.*
2. $\forall\, t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, $\Phi(t_2+T, t_2) = \Phi(t_2, t_1).\Phi(t_1+T, t_1).\Phi^{-1}(t_2, t_1)$

Ainsi, les valeurs propres de la matrice $\Phi(t+T, t)$ ne dépendent pas de l'instant t. Cette matrice est appelée la *matrice de monodromie* à l'instant t. En particulier, $\Phi(T, 0)$ est appelée tout simplement "matrice de monodromie" sans référence au temps t.

Définition 1 :

Les valeurs propres de la matrice de monodromie sont appelées les *multiplieurs caractéristiques.*

Nous avons déjà introduit la notion de transformation de Lyapunov. Pour les systèmes à coefficients périodiques, Floquet a démontré l'existence d'une transformation qui stationnarise la matrice d'évolution du système.

Théorème 1.20 : [FLOQUET, 1892 ; LYAPUNOV, 1949]

Soit un système continu linéaire et périodique (1.16), dont la matrice d'évolution $A(t)$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$. Alors, il existe une matrice de transformation de Lyapunov $P(t)$ régulière et périodique telle que la matrice d'évolution du système transformé soit constante :

$$z(t) = P(t).x(t), \quad det[P(t)] \neq 0,\ \forall\, t \in \mathbf{R},$$
$$\frac{dz}{dt} = M.z + P(t).B(t).u,$$
$$\text{où } M = \left[P(t).A(t).P^{-1}(t) + \frac{d}{dt}P(t).P^{-1}(t)\right] \text{ est une matrice constante.}$$

Cette transformation est un cas particulier des transformation de Lyapunov. Dans le cas où on connait la matrice M, $P(t)$ est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}P(t) = M.P(t) - P(t).A(t). \qquad (1.18)$$

Il s'agit d'un théorème d'existence, qui permet d'écrire la matrice de transition sous la forme :

$$\Phi(t_2,t_1) = P^{-1}(t_2).e^{M(t_2-t_1)}.P(t_1). \qquad (1.19)$$

En choisissant la transformation particulière telle que $P(T) = P(0) = Id$, la matrice de monodromie du système est $\Phi(T,0) = e^{MT}$.

Définition 2 :

Les valeurs propres de M sont appelées les *exposants caractéristiques* du système.

Propriétés des exposants et multiplieurs caractéristiques :

1. Le produit des multiplieurs caractéristiques doit être positif (Théorème de Jacobi). En fait :
$$det\,[\Phi(T,0)] = det\,[\,e^{MT}\,] = e^{T.trace(M)}$$

2. Chaque multiplieur caractéristique μ du système (1.16) est relié à un exposant caractéristique λ par $\mu = e^{\lambda T}$, où T est la période.

3. La trace de M donc la somme des exposants caractéristiques est égale à la moyenne de la trace de $A(t)$: $trace(M) = \frac{1}{T}\int_0^T trace(A(t)).dt.$

2.1.2. Systèmes linéaires discrets périodiques :

Pour cette classe de systèmes (1.17), la matrice de transition vérifie aussi la propriété de périodicité :

$$\forall\ i > j \in \mathbf{Z} : \qquad \Psi(i+T,j+T) = \Psi(i,j).$$

De même, on retrouve la définition des multiplieurs caractéristiques,

Proposition 1.21 :

*Les valeurs propres de la matrice $\Psi(k+T,k)$ sont indépendantes de k. Ces valeurs propres sont appelées les **multiplieurs caractéristiques** du système (1.17). La matrice de monodromie est définie comme étant $\Psi(T,0)$.*

Démonstration :

$\forall\ i > j \in \mathbf{Z}$, $\exists$ F et G tels que :

$$\Psi(i+T,i) = \Psi(i+T,j+T).\Psi(j+T,i) = \Psi(i,j).\Psi(j+T,i) = F\,G,$$
$$et\ \ \Psi(j+T,j) = \Psi(j+T,i).\Psi(i,j) = G\,F.$$

Ainsi, $\forall\ i > j$, $\Psi(i+T,i)$ et $\Psi(j+T,j)$ ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres ❑

2.1.3. Théorème de stabilité :

La définition des multiplieurs et exposants caractéristiques indépendants du temps permet de donner des critères spectraux de stabilité analogues à ceux des systèmes linéaires stationnaires.

Théorème 1.22 :

1. *Le système linéaire continu périodique (1.16) est asymptotiquement stable si et seulement si les modules de tous ses multiplieurs caractéristiques sont strictement inférieurs à 1:* $\forall\, \mu \in spec\,\{\Phi(T,0)\}, |\mu| < 1$.

2. *Le système (1.16) est asymptotiquement stable si et seulement si les parties réelles de ses exposants caractéristiques sont strictement négatives :* $\forall\, \lambda \in spec\,\{M\}, Re(\lambda) < 0$.

3. *Le système linéaire discret périodique (1.17) est asymptotiquement stable si et seulement si les modules de tous ses multiplieurs caractéristiques sont strictement inférieurs à 1:* $\forall\, \mu \in spec\,\{\Psi(T,0)\}, |\mu| < 1$.

Remarque :

A partir de l'équation (1.3), nous pouvons définir la suite des états échantillonnés à chaque période :

$$x((k+1)T) = \Phi(T,0).x(kT) + \int_0^T \Phi(T,\tau).B(\tau).u(\tau-kT).d\tau.$$

Comme la stabilité interne est définie par rapport au système en régime libre, nous poserons $u(t) = \mathbf{0}$.

$$x((k+1)T) = \Phi(T,0).x(kT).$$

Ainsi, la stabilité du système continu périodique est équivalente à la stabilité du système stationnaire discret dont la matrice d'évolution est $\Phi(T,0)$. Nous verrons plus tard que moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur la forme de la commande $u(t)$, nous pouvons définir pour ce système stationnaire une suite de commandes $v(kT)$ telle que :

$$\Theta(T,0).v(kT) = \int_0^T \Phi(T,\tau).B(\tau).u(\tau-kT).d\tau.$$

Certaines propriétés seront alors équivalentes pour les systèmes $[A(t),B(t)]$ et $[\Phi(T,0),\Theta(T,0)]$.

2.1.4. Utilisation du théorème de Floquet : calcul de la matrice de transition

Le calcul de la matrice de transition du système linéaire périodique en temps continu peut être considérablement simplifié en utilisant l'équation (1.19) résultant du théorème de Floquet-Lyapunov. En effet, moyennant la connaissance de $P(t)$ et de M, on évite ainsi l'intégration de l'équation différentielle homogène (1.2), économisant ainsi plusieurs itérations numériques. En outre, la valeur de $\Phi(t,\tau)$ est disponible pour tout instant t ou τ. Cependant, tout en énonçant son existence, ce théorème ne nous permet pas de déterminer cette transformation. La démarche exposée ici consiste à calculer M à partir de la matrice de monodromie (§ 2.1.4.1), ce qui nécessite au plus une intégration du système sur l'intervalle $[0,T]$. Ensuite, à partir de M, déterminer le développement en série de Fourier de $P(t)$ [RICHARD et al,1990]. Cette étape est rappelée dans la section § 2.1.4.2. La section § 2.1.4.3 analyse l'erreur introduite par la troncature de cette série de Fourier à un ordre donné.

2.1.4.1. Calcul de la matrice constante M

Cette matrice est donnée par la formule

$$M = \frac{1}{T} Log[\Phi(T,0)] \tag{1.20}$$

Sa partie imaginaire est donc déterminée modulo $\frac{2\pi}{T}$.

Notons que la propriété de stabilité est indépendante de cette éventuelle indétermination.

Remarque :

Si la matrice M obtenue est complexe, on peut effectuer le calcul sur 2 périodes du système. Dans ce cas, nous avons

$$\Phi(2T,0) = [\Phi(T,0)]^2,$$
$$M = \frac{1}{2T} Log[\Phi(2T,0)].$$

Cette deuxième matrice peut être choisie réelle en utilisant le théorème de Rouche et Mahwin suivant [ROUCHE & MAHWIN, 1973] :

$\forall$ *X une matrice carrée réelle,* $\exists$ *Y matrice réelle telle que* $e^Y = X^2$.

On peut calculer la matrice de monodromie de deux façons différentes :

1. par l'intégrale de Volterra
$$\Phi(T,0) = \lim_{r\to\infty} \prod_{i=r-1}^{0} \left[Id + \frac{T}{r} . A\left(t_1 + i . \frac{T}{r}\right)\right]$$
que l'on approxime par le choix d'un entier r suffisamment grand.
2. par simulation numérique hors ligne de l'équation différentielle (1.2).

En pratique, nous avons constaté que la convergence du produit de Volterra est très lente, alors qu'il existe des méthodes d'intégration numérique stables du type Runge-Kutta qui de plus, permettent des estimations de l'erreur commise.

2.1.4.2. Calcul du changement de base $P(t)$ dans le cas où $A(t)$ est analytique

Etant périodique, $P(t)$ peut se développer en série de Fourier.

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ \cdots & p_{ii}(t) & \cdots \\ p_{n1}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{nxn}.$$

où, en tronquant le développement à l'ordre N :

$$\forall\ (i,j) \in \{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}, \qquad p_{ij}(t) = \pi_N^{\mathrm{T}}(t).C_{N,ij}$$

$$\pi_N^{\mathrm{T}}(t) = \left[\, 1\ cos(\omega t) \ldots\ cos(N\omega t)\ sin(\omega t) \ldots\ sin(N\omega t) \right] \in \mathbf{R}^{1x(2N+1)},$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T étant la période du système,

$$C_{N,ij} = \left[\, a_{ij}^0\, a_{ij}^1 \ldots\ a_{ij}^N\, b_{ij}^1 \ldots\ b_{ij}^N \right]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{1x(2N+1)},$$

On regroupe les coefficients de cette série dans la matrice

$$L_N = [\ C_{N,11}\ C_{N,21}\ \cdots\ C_{N,i1}\ \cdots\ C_{N,n1}\ C_{N,12}\ C_{N,22}\ \cdots\ C_{N,nn}\ ].$$

Cette matrice $L_N \in \mathbf{R}^{(2N+1)xn^2}$ constitue donc la solution recherchée pour obtenir la matrice $P(t)$.

D'autre part, on sait que $\quad \frac{d}{dt}P(t) = M.P(t) - P(t).A(t).$

Dans le cas où $A(t)$ est analytique (de classe C^∞), on peut mettre en évidence la relation de récurrence :

$$\begin{cases} P^{(0)}(t) = P(t), \\ P^{(k)}(t) = M.P^{(k-1)}(t) - \sum\limits_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i} P^{(i)}(t).A^{(k-1-i)}(t),\ pour\ k > 0, \end{cases}$$

avec $P^{(k)}(t)$ désignant la dérivée par rapport à t à l'ordre k de $P(t)$.

Posons $Z_k = P^{(k)}(0)$, pour $2N \geq k \geq 0$. Définissons les matrices :

$$\Pi_N = \begin{bmatrix} \pi_N^{\mathrm{T}}(0) \\ \frac{d}{dt}\pi_N^{\mathrm{T}}(0) \\ \pi_N^{\mathrm{T}(2)}(0) \\ \cdots \\ \pi_N^{\mathrm{T}(2N)}(0) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(2N+1)x(2N+1)} \text{ et } R_N = \begin{bmatrix} vec^{\mathrm{T}}(Z_0) \\ vec^{T}(Z_1) \\ vec^{\mathrm{T}}(Z_2) \\ \cdots \\ vec^{\mathrm{T}}(Z_{2N}) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(2N+1)xn^2}.$$

où vec désigne l'opérateur de Kronecker de vectorisation de matrice. Soit par exemple :

$$vec^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [\, a\ c\ b\ d\,].$$

Les coefficients de la solution L_N sont alors donnés par : [RICHARD et al, 1990]

$$L_N = \Pi_N^{-1}.R_N \tag{1.21}$$

Cette méthode de calcul est très intéressante et peut conduire pour certains systèmes solubles à la solution exacte de $P(t)$. Cependant, quand ce n'est pas le cas, trois questions se posent :

1. A quel ordre N doit-on pousser le développement en série de Fourier de $P(t)$?

2. Comment évaluer l'erreur commise en tronquant ce développement en série de Fourier de $P(t)$ à l'ordre N ?

3. Peut-on utiliser les résultats L_N de la troncature à l'ordre N pour simplifier le calcul de la troncature L_{N+1} à l'ordre N+1?

Nous y répondrons en développant la méthode suivante.

2.1.4.3. Un nouvel algorithme pour le calcul de P(t) :

Selon les mêmes notations que précédemment, on peut remarquer que la matrice Π_N a la forme particulière :

$$\Pi_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\omega & \dots & -N\omega \\ 0 & -\omega^2 & \dots & -N^2\omega^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \omega^3 & \dots & (N\omega)^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{N-1}\omega^{2N-1} & \dots & (-1)^{N-1}(N\omega)^{2N-1} \\ 0 & (-1)^N\omega^{2N} & \dots & (-1)^N(N\omega)^{2N} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Une permutation U_N des lignes de Π_N conduit à la matrice bloc-triangulaire suivante :

$$T_N = U_N \Pi_N = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{1 \dots 1} & \boxed{0 \dots 0} \\ 0 & \boxed{C_N} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{S_N} \end{bmatrix}$$

où les blocs C_N et S_N appartiennent à $\mathbf{R}^{N \mathrm{x} N}$ et vérifient des relations de récurrence par rapport à l'ordre N de développement en série de Fourier. On obtient par exemple pour C_N :

$$C_N = \begin{bmatrix} C_{N-1} & \chi_N \\ \lambda_N & \alpha_{NN} \end{bmatrix},$$

α_{NN} est le NN ième élément de C_N,

λ_N est la N ième ligne de C_N, sans l'élément α_{NN},
χ_N est la N ième colonne de C_N, sans l'élément α_{NN}.
avec l'initialisation $C_1 = -\omega^2$.

La matrice S_N a une forme analogue avec la valeur initiale $S_1 = -\omega$
La matrice de permutation U_N est donnée par

$$U_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(2N+1)\mathrm{x}(2N+1)}$$

où les places des 1 *sont décalées de deux colonnes par ligne. De plus,*

$$U_N^{-1} = U_N^{\mathrm{T}}$$

La méthode précédente nécessite l'inversion de Π_N, qui s'écrit maintenant :

$$\Pi_N^{-1} = T_N^{-1}\, U_N.$$

Or ici, le calcul de T_N^{-1} se déduit du calcul des inverses de C_N et de S_N. Ces derniers peuvent quant à eux se calculer par récurrence. Cela nous permettra de répondre affirmativement à la question 3. Si nous posons :

$$\mathcal{R}_N = U_N.R_N,$$

la solution L_N est

$$L_N = T_N^{-1}.\mathcal{R}_N = T_N^{-1}.U_N.R_N.$$

Proposition 1.23 :

Soit une matrice de la forme :

$$C_N = \begin{bmatrix} C_{N-1} & \chi_N \\ \lambda_N & \alpha_{NN} \end{bmatrix}$$

α_{NN} est le NN-ième élément de C_N; λ_N est la N-ième ligne de C_N, sans l'élément α_{NN}; et χ_N la N-ième colonne de C_N, sans l'élément α_{NN}.
Son inverse est donnée par :

$$C_N^{-1} = \begin{bmatrix} C_{N-1}^{-1}\left[\mathrm{Id}_{N-1} + \dfrac{\chi_N \lambda_N C_{N-1}^{-1}}{\Delta}\right] & -\dfrac{C_{N-1}^{-1}\chi_N}{\Delta} \\ -\dfrac{\lambda_N C_{N-1}^{-1}}{\Delta} & \dfrac{1}{\Delta} \end{bmatrix},$$

où $\Delta = \alpha_{NN} - \lambda_N C_{N-1}^{-1}\chi_N$

Cette propriété est obtenue en appliquant la formule de Schur.

Dans notre cas, nous initialisons la récurrence par $C_1^{-1} = -\frac{1}{\omega^2}$ et $S_1^{-1} = -\frac{1}{\omega}$.

Proposition 1.24 :

Soit l'équation matricielle

$$Y_N = C_N . X_N \qquad (a)$$

où X_N est la matrice des inconnues, C_N une matrice de la forme précédente. A chaque itération sur N, nous rajoutons une ligne à la matrice Y_N.

Supposons que nous connaissons la valeur de $\tilde{X}_{N-1}$ à l'itération N-1 :

$$\tilde{X}_{N-1} = C_{N-1}^{-1} . \tilde{Y}_{N-1}, \ \text{avec } \tilde{Y}_{N-1} = Y_{N-1} \qquad (b)$$

Alors,

$$\begin{cases} X_{N-1} = \tilde{X}_{N-1} - C_{N-1}^{-1} . \chi_N . x_N, \\ x_N = \frac{1}{\Delta} . [y_N - \lambda_N . \tilde{X}_{N-1}], \ \text{avec } \Delta = \alpha_{NN} - \lambda_N C_{N-1}^{-1}\chi_N \end{cases}$$

Démonstration :

Décomposons X_N et Y_N en :

$$X_N = \begin{bmatrix} X_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}, \ et\ Y_N = \begin{bmatrix} Y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix},$$

où x_N (respectivement y_N) est la dernière ligne de X_N (respectivement de Y_N). L'équation *(a)* devient alors :

$$\begin{cases} Y_{N-1} = C_N . X_{N-1} + \chi_N . x_N, \\ y_N = \lambda_N . X_{N-1} + \alpha_{NN} . x_N . \end{cases}$$

En utilisant *(b)*, on obtient :

$$\begin{cases} X_{N-1} = C_{N-1}^{-1} . Y_{N-1} - C_{N-1}^{-1} . \chi_N . x_N = \tilde{X}_{N-1} - C_{N-1}^{-1} . \chi_N . x_N, \\ x_N = \frac{1}{\Delta} . [y_N - \lambda_N . \tilde{X}_{N-1}], \ avec\ \Delta = \alpha_{NN} - \lambda_N C_{N-1}^{-1}\chi_N \end{cases}$$

Ainsi, à chaque itération, nous calculons la ligne x_N additionnée à X_N en fonction de y_N et des coefficients $\tilde{X}_{N-1}$ calculés à l'itération précédente. La correction de X_{N-1} par rapport à $\tilde{X}_{N-1}$ dépend de x_N □

Proposition 1.25 :

Si $Lgn[i \text{ à } j]X$ est la matrice extraite formée des lignes i à j de la matrice X, on peut décomposer la solution L_N donnant la série de Fourier tronquée à l'ordre N en :

$$Lgn[1]L_N = Lgn[1]\mathcal{R}_N - Lgn[2 \text{ à } N{+}1]L_N,$$

$$Lgn[2 \text{ à } N{+}1]L_N = C_N^{-1}.Lgn[2 \text{ à } N{+}1]\mathcal{R}_N,$$

$$Lgn[N{+}2 \text{ à } 2N{+}1]L_N = S_N^{-1}.Lgn[N{+}2 \text{ à } 2N{+}1]\mathcal{R}_N,$$

De plus,

$$Lgn[2 \text{ à } N{+}1]\mathcal{R}_N = \begin{bmatrix} vec^T(Z_2) \\ vec^T(Z_4) \\ \dots \\ vec^T(Z_{2N}) \end{bmatrix}, \text{ formé à partir des dérivées d'ordre pair de } P(t),$$

$$Lgn[N{+}2 \text{ à } 2N{+}1]\mathcal{R}_N = \begin{bmatrix} vec^T(Z_1) \\ vec^T(Z_3) \\ \dots \\ vec^T(Z_{2N-1}) \end{bmatrix}, \text{ à partir des dérivées d'ordre impair de } P(t),$$

La démonstration est évidente à cause de la forme bloc-triangulaire de T_N.

Résumé :

L'algorithme que nous proposons est le suivant :

1. *Initialiser $C_1^{-1} = \frac{-1}{\omega^2}$ et $S_1^{-1} = \frac{-1}{\omega}$ pour $N = 1$, et $Z_0 = P(0) = Id_n$, la matrice identité,*

2. *Calculer Z_{2N-1} et Z_{2N}.*

3. *Calculer L_N à l'aide de la proposition 1.25.*

4. *Estimer l'écart par rapport à l'itération précédente. (Proposition 1.24)*
   S'il est suffisamment petit, arrêter l'algorithme, sinon continuer.

5. *Calculer C_{N+1}^{-1} et S_{N+1}^{-1} à l'aide de la proposition 1.23,et reprendre en 2.*

2.2. Commandabilité, atteignabilité et observabilité

2.2.1. Commandabilité et atteignabilité des systèmes linéaires périodiques :

La plupart des critères de commandabilité et d'atteignabilité des systèmes linéaires périodiques sont semblables à ceux utilisés pour les systèmes linéaires quelconques déjà développés dans la section § 1.2.2. Cependant, du fait de la périodicité des coefficients du système, des conditions nécessaires et suffisantes plus simples ont pu être établies.

Les théorèmes exposés dans cette section sont valables pour n'importe quel système linéaire à coefficients périodiques. Cependant, on verra dans le chapitre sur la commande non optimale que certaines propriétés particulières, telle que la commandabilité différentielle ou des hypothèses sur la forme de la loi de commande, permettront d'introduire d'autres théorèmes d'équivalence de commandabilité ou d'atteignabilité entre le système linéaire périodique et différentes représentations en stationnaire discret.

2.2.1.1. Systèmes linéaires continus périodiques :

Les sous-espaces commandable $\mathcal{X}_C[t]$ et atteignable $\mathcal{X}_A[t]$, définis en § 1.2.2. présentent dans le cas périodique certaines propriétés [BITTANTI & BOLZERN, 1984] que nous rappelons ici :

1. $\forall\ t,\ \mathcal{X}_C[t] = \mathcal{X}_C[t+T]$, où T est la période du système.

2. A chaque instant, le sous-espace atteignable est égal au sous-espace commandable :
$$\forall\ t,\ \mathcal{X}_C[t] = \mathcal{X}_A[t].$$
Ceci n'est pas surprenant car on sait que la commandabilité et l'atteignabilité sont équivalentes pour les systèmes linéaires continus. Cependant, si on se restreint à un intervalle de temps fini $[t,\tau]$, on verra que généralement $\mathcal{X}_C[t,\tau] \neq \mathcal{X}_A[t,\tau]$ quand le système n'est pas commandable sur $[t,\tau]$ (voir l'exemple à la page 48).

3. $\forall\ t \neq t',\ dim\{\mathcal{X}_C[t]\} = dim\{\mathcal{X}_C[t']\}$
Ainsi la commandabilité à un instant t est équivalente à la commandabilité à n'importe quel instant.

En vertu de cette troisième propriété, nous ne nous intéresserons par la suite qu'à la commandabilité à l'instant particulier $t = 0$. L'atteignabilité en sera déduite par équivalence.

Remarque sur la longueur de l'intervalle de transition du système continu vers l'origine :

Si le système est différentiellement commandable (par exemple, si $A(t)$ et $B(t)$ sont analytiques) et quand on n'a pas de contrainte sur la commande (majoration de l'énergie ou de l'amplitude de la commande), la transition peut être effectuée sur un intervalle de temps aussi court que l'on veut. C'est par exemple le cas pour les systèmes linéaires stationnaires. Cependant, dans le cas général où la commandabilité différentielle n'est pas vérifiée, cet intervalle de transition peut être réduit à un certain nombre de périodes.

Théorème 1.26 : commandabilité sur *n* périodes
[BRUNOVSKY, 1969].

> *Si $A(.)$ et $B(.)$ sont T-périodiques et intégrables sur $[0,T]$, le système décrit par la paire $[A(t),B(t)]$ est commandable si et seulement s'il est commandable sur n périodes (où n est la dimension du système). Dans ce cas :*
> *1. Les colonnes de $\Phi^{-1}(t,0)B(t)$ sont linéairement indépendantes pour $t \in [0,nT]$.*
> *2. Les grammiens d'atteignabilité et de commandabilité $W_A(nT,0)$ et $W_C(0,nT)$ sont inversibles.*

La proposition "commandable sur $[0,nT] \Rightarrow$ commandable sur $[0, +\infty[$" est évidente car la commandabilité d'un système sur un intervalle $\mathcal{T}$ donné entraîne sa commandabilité sur tout intervalle incluant $\mathcal{T}$.
La démonstration de l'implication "commandable sur $[0, +\infty[\Rightarrow$ commandable sur $[0,nT]$" doit faire appel à la propriété de périodicité du système :

$$a)\ \Phi(nT,0) = \Phi^n(T,0) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \Phi^i(T,0)) \quad \textit{(Théorème de Cayley-Hamilton)}$$

$$b)\ W_A(iT,0) = \Phi(T,0).W_A((i-1)T,0).\Phi(T,0) + W_A(T,0) \textit{ pour tout } i \in \mathbf{N}.$$

Ce théorème nécessite une intégration sur *n* périodes pour le calcul du grammien. Une amélioration de ce résultat est énoncée dans le théorème suivant, qui ne nécessitera plus qu'une période d'intégration pour le calcul du grammien et de la matrice de transition.

Théorème 1.27 : commandabilité sur ν_A périodes, $\nu_A \leq n$.
[BITTANTI,BOLZERN, COLANERI & GUARDABASSI, 1983].

> *Le système décrit par la paire $[A(t),B(t)]$ est commandable si et seulement si :*
> $\forall \lambda \in \mathcal{C}$, *$rang[\Phi(T,0) - \lambda Id \,;\, W_A(T,0)] = n$, où n est la dimension du système.*
> *De plus, la transition vers l'origine peut être éffectuée sur ν_A périodes, où ν_A est le degré du polynôme minimal de la matrice de monodromie.*

Remarque :

Le critère ci-dessus est le test PBH pour le système linéaire discret stationnaire décrit par la paire $[\Phi(T,0), W_A(T,0)]$. Le nombre ν_A est le plus petit nombre de périodes de transition vers l'origine que nous pouvons déduire à partir de la seule analyse de la matrice $A(t)$. C'est-à-dire que, pour une matrice $A(t)$ donnée, il existe une matrice $B(t)$ telle que même si le système caractérisé par $[A(t),B(t)]$ est commandable, certains états de ce système ne peut pas être transférés vers l'origine en ν_A-1 périodes. Cependant, en considérant la paire $[A(t),B(t)]$, ce résultat est légèrement amélioré dans le cas multivariable par le théorème 1.28.

Théorème 1.28 : commandabilité sur μ périodes, $\mu \le \nu_A$

[SHAYMAN, 1984; KABAMBA, 1989].

le système décrit par la paire $[A(t),B(t)]$ est commandable si et seulement si le système stationnaire discret défini par $[\Phi(T,0), W_A(T,0)]$ est commandable. On peut alors appliquer tous les critères du linéaire stationnaire, en particulier le test PBH :

$$\forall \lambda \in C,\ rang[\Phi(T,0) - \lambda Id\, ;\, W_A(T,0)] = n, \text{ la dimension du système.}$$

De plus, le nombre de périodes μ pour transférer le système initial à l'origine est égal à l'indice de commandabilité [CHEN, 1970] *du système linéaire stationnaire discret décrit par la paire $[\Phi(T,0), W_A(T,0)]$. Le nombre μ dépend ici de $A(t)$ et $B(t)$.*

Remarque :

La transition vers **0** ne pourra généralement pas être effectuée en une seule période, contrairement à une proposition de Kalman [1969]. Nous pouvons constater cela sur un exemple :

Soient n nombres réels $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ distincts et les matrices périodiques de période $T = 1$:

$$A(t) = diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n),$$

et

$$B(t) = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1(1-t)} \\ \ldots \\ e^{-\lambda_n(1-t)} \end{bmatrix} sin(\pi t) \text{ pour } t \in [0,1[,$$

$B(t)$ est définie par son extension périodique pour $t \notin [0,1[$.

On obtient :

$$\Phi(0,t)B(t) = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1} \\ \ldots \\ e^{-\lambda_n} \end{bmatrix} sin(\pi t)$$

Le grammien de commandabilité sur [0,1] est

$$W_C(0,1) = \alpha . x_1 x_1^T,$$

avec

$$x_1 = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1} \\ \dots \\ e^{-\lambda_n} \end{bmatrix}, \ et\ \alpha = \int_0^1 sin^2\pi t.dt.$$

La dimension de l'espace commandable $\mathcal{X}_C[0,1]$, qui est le sous-espace engendré par x_1, sur l'intervalle [0,1] est donc égale à 1. Le système n'est pas commandable sur [0,1] si $n > 1$. Par contre, si on considère un intervalle $[0,k]$, $k \leq n$,

$$W_C(0,k) = \alpha.(x_1 x_1^{\mathrm{T}} + x_2 x_2^{\mathrm{T}} + \dots + x_k x_k^{\mathrm{T}}).$$

avec

$$x_i = \begin{bmatrix} e^{-i\lambda_1} \\ \dots \\ e^{-i\lambda_n} \end{bmatrix}, \ i = 1 \ à \ k.$$

par conséquent,

$$\forall\ k \leq n,\ \mathcal{X}_C[0,k] = span\{x_1, x_2, \dots, x_k\},$$
$$et\ dim\ \mathcal{X}_C[0,k] = k.$$

Le système est complètement commandable sur $[0,n]$. De la même manière, l'espace atteignable sur l'intervalle $[0,k]$ est

$$\forall\ k \leq n,\ \mathcal{X}_A[0,k] = span\{x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-k}\},$$
$$et\ dim\ \mathcal{X}_A[0,k] = k.$$

On vérifie alors que pour ce système, $\forall\ k < n$, $\mathcal{X}_C[0,k] \neq \mathcal{X}_A[0,k]$.

2.2.1.2. Systèmes linéaires discrets périodiques:

Nous allons maintenant voir parallèlement les propriétés de commandabilité et d'atteignabilité pour les systèmes discrets périodiques. En linéaire discret, on montre que [BITTANTI & BOLZERN, 1984] :

1. A chaque instant, le sous-espace atteignable ne coincide plus avec le sous-espace commandable. Cependant :
$$\forall\ k,\ \mathcal{X}_A[k] \subset \mathcal{X}_C[k].$$
2. $\dim\{\mathcal{X}_C[k]\}$ reste constante au cours du temps alors que $\dim\{\mathcal{X}_A[k]\}$ peut varier, comme nous le montre l'exemple suivant.

Exemple :

Soit le système de dimension 1

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k$$
$$où\ A_k = B_k = \begin{cases} 0, & quand\ k\ est\ pair, \\ 1, & quand\ k\ est\ impair, \end{cases}$$

alors, $\mathcal{X}_C[k] = \mathbf{R}$ quel que soit k, tandis que $\mathcal{X}_A[k] = \begin{cases} \mathbf{R}, & \text{quand k est pair,} \\ \{0\}, & \text{quand k est impair.} \end{cases}$

Longueur de l'intervalle de transition vers (depuis) l'origine :

Les résultats énoncés ici sont en fait les versions "discrètes" des théorèmes rencontrés dans le paragraphe § 2.2.1.1. pour les systèmes en temps continus :

Théorème 1.29 :

1. $\forall\ k,\ X_C[k] = X_C[k, k + nT]$, où n est la dimension du système et T la période (T est un nombre entier).
   $\forall\ k,\ X_A[k] = X_A[k - nT, k]$.

2. Si le système est commandable, il est commandable sur ν périodes, $\nu \leq n$:
   $\forall\ k,\ X_C[k] = X_C[k, k + \nu T]$.
   Si le système est atteignable, il est atteignable sur ν périodes, $\nu \leq n$:
   $\forall\ k,\ X_A[k] = X_A[k - \nu T, k]$.
   Ici, ν est le degré du polynôme minimal de $\Psi(k + T,k)$. Il peut dépendre de l'instant k à une unité près, c'est-à-dire que si ν_k et $\nu_{k'}$ représentent ce degré pour deux instants k et k', il a été montré que $|\nu_k - \nu_{k'}| \leq 1, \forall\, k \neq k'$ [BITTANTI & BOLZERN, 1985].

3. La commandabilité du système discret non stationnaire $[A_k, B_k]$ est équivalente à la commandabilité de $[\Psi(k+T,k)\ ,\ W_A(k,k+T)]$.

Théorème 1.30 : commandabilité et d'atteignabilité des systèmes discrets périodiques

1. ***Critère d'atteignabilité à l'instant k :***
   Le système est atteignable si et seulement si rang $[\lambda Id - \Psi(k+T,k)\ , W_A(k+T,k)] = n$ *pour toutes les valeurs propres* λ *de* $\Psi(k+T,k)$.

2. ***Critère de commandabilité à l'instant k :***
   Le système est commandable si et seulement si rang $[\lambda Id - \Psi(k+T,k)\ , W_A(k+T,k)] = n$ *pour toutes les valeurs propres* λ ***non nulles*** *de* $\Psi(k+T,k)$.

Ceci correspond à l'application du test PBH sur le système discret stationnaire équivalent $[\Psi(k+T,k), W_A(k,k+T)]$.

On note que le critère de commandabilité fait intervenir le grammien d'atteignabilité du système, étant donné que le grammien de commandabilité n'est défini que pour les systèmes linéaires discrets réversibles. Les valeurs propres nulles correspondent aux états qui s'annulent naturellement quand le système est en mouvement libre, c'est-à-dire sans aucune commande appliquée.

2.2.2. Observabilité des systèmes linéaires périodiques :

On obtient les résultats correspondant à l'observabilité des systèmes linéaires périodiques en utilisant les critères d'observabilité du linéaire stationnaire sur $[\Phi(T,0), W_O(0,T)]$ pour les systèmes en temps continu et sur $[\Psi(k+T,k), W_O(k,k+T)]$ pour ceux en temps discret. Néanmoins, en linéaire discret, la dimension du sous-espace observable peut varier selon l'instant k. Si on applique le test PBH à ces systèmes, on obtient

Théorème 1.31 : observabilité des systèmes linéaires périodiques

> *1. Le système linéaire périodique en temps continu (1.16) est observable si et seulement si rang* $[\lambda Id - \Phi(T,0), W_O(0,T)] = n$ *pour toutes les valeurs propres* λ *de* $\Phi(T,0)$.
>
> *2. Le système linéaire périodique en temps discret (1.17) est observable à l'instant k si et seulement si rang* $[\lambda Id - \Psi(k+T,k), W_O(k,k+T)] = n$ *pour toutes les valeurs propres* λ *de* $\Psi(k+T,k)$.

2.3. Propriétés de stabilisabilité et de détectabilité des systèmes linéaires périodiques :

Les critères qu'on utilise ici sont les extensions des résultats déjà obtenus en § 1.2.4. La spécialisation aux systèmes linéaires périodiques se retrouve ici encore par l'utilisation des systèmes discrets stationnaires $[\Phi(t_0+T,t_0), W_A(t_0+T,t_0)]$ et $[\Phi(t_0+T,t_0), W_O(t_0+T,t_0)]$, ou $[\Psi(k_0+T,k_0), W_A(k_0+T,k_0)]$ et $[\Psi(k_0+T,k_0), W_O(k_0+T,k_0)]$ si le système initial est discret.

2.3.1. Stabilisabilité des systèmes linéaires périodiques :

Soit un système Σ linéaire T-périodique continu (1.16) ou discret (1.17). Les propositions suivantes sont équivalentes :

Le système Σ est stabilisable si et seulement si :

a) il existe une matrice $K(.)$ T-périodique telle que $A(.) + B(.).K(.)$ soit asymptotiquement stable,

b) la partie non-commandable de sa décomposition de Kalman est asymptotiquement stable,

c) il existe au moins un instant t_0 tel que rang $[\lambda Id - \Phi(t_0+T,t_0), W_A(t_0+T,t_0)] = n$, la dimension du système pour tout multiplieur caractéristique λ tel que $|\lambda| \geq 1$.

d) le système discret stationnaire décrit par $[\Phi(T,0), W_A(0,T)]$ est stabilisable.

Si le système Σ est discret, on remplace $\Phi(T,0)$ par $\Psi(T,0)$.

2.3.2. Détectabilité des systèmes linéaires périodiques :

Soit un système Σ linéaire T-périodique continu (1.16) ou discret (1.17). Les propositions suivantes sont équivalentes :

Le système Σ est détectable si et seulement si :

a) il existe une matrice $K(t)$ T-périodique telle que $A(.) + K(.).C(.)$ soit asymptotiquement stable,

b) la partie non-observable de sa décomposition de Kalman est asymptotiquement stable,

c) il existe au moins un instant t_0 tel que rang $[\lambda Id - \Phi(t_0+T,t_0), W_O(t_0+T,t_0)] = n$, *la dimension du système pour tout multiplieur caractéristique λ tel que $|\lambda| \geq 1$.*

d) le système discret stationnaire décrit par $[\Phi(T,0), W_O(0,T)]$ est détectable.

Ici encore, si le système Σ est discret, on remplace $\Phi(T,0)$ par $\Psi(T,0)$.

3. Conclusion :

Nous avons pu présenter un algorithme numérique améliorant des résultats antérieurs [SAADANE, 1990], qui donne l'expression de la matrice de transition par l'intermédiaire de la transformation de Floquet-Lyapunov. Ce problème étant résolu, la périodicité d'un système linéaire permet d'en simplifier considérablement l'étude : En effet, à cause de cette périodicité même, la connaissance du comportement du système sur un seul intervalle $[t_0,t_0+T]$ permet l'extrapolation à n'importe quel instant ultérieur. La stabilité est alors caractérisée par les valeurs propres de la matrice de transition sur cet intervalle, dite matrice de monodromie. De même, les propriétés structurelles comme l'atteignabilité ou l'observabilité ne requièrent que l'intégration des grammiens correspondants sur une période. La définition du système discret stationnaire équivalent s'impose peu à peu. Ceci est très important et va orienter la synthèse de commande, comme nous allons le voir au chapitre suivant.

Chapitre 2. Commande non optimale

Nous allons maintenant aborder le problème de la synthèse de commande sur ces systèmes. Les méthodes de commande que nous avons regroupées dans ce deuxième chapitre sont développées selon les objectifs suivants :

a) comment améliorer la stabilité d'un système donné,

b) comment commander le système pour avoir un comportement entrée/sortie spécifié,

c) comment diminuer la sensibilité du système par rapport aux perturbations et bruits,

d) comment assurer un comportement satisfaisant malgré les imperfections du modèle mathématique de représentation.

Dans un premier temps, et en guise d'introduction, nous allons très brièvement rappeler quelques méthodes classiques de placement de pôles pour les systèmes linéaires stationnaires : ce rappel concerne le calcul du retour d'état ainsi que la reconstruction de l'état à partir de la mesure des sorties.

La section 2 suivante étendra ces méthodes aux systèmes périodiques continus et discrets . Cette généralisation est basée sur l'analogie entre les valeurs propres de la matrice d'évolution, “les pôles” du système linéaire stationnaire, et les multiplieurs caractéristiques du système périodique considéré. On rappelera alors des concepts tels que la commande par G.S.H.F. (“Generalized Sampled-Data Hold Functions”) ou S.S.P.H. (“Sampled-State Periodic Hold”).

Notre apport principal se situe au niveau du calcul ou de l'obtention des cycles limites périodiques dans la section 3.

1. Commande des systèmes linéaires stationnaires :

Cette partie est un bref rappel de méthodes classiques dont on trouvera un large développement dans [BORNE et al, 1990-1992]

1.1. Stabilisation par retour d'état, placement de pôles :

1.1.1. Systèmes stationnaires continus :

Soit le système linéaire stationnaire continu :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A.x + B.u, \\ y = C.x. \end{cases} \tag{2.1}$$

On a vu que la propriété de stabilité du système est déterminée par les valeurs propres de la matrice d'évolution du système linéaire stationnaire considéré. Ainsi, la stabilisation du système reviendra en fait, à changer ces valeurs propres par une boucle de retour de la forme :

$$u(t) = G.x(t) + v(t) \tag{2.2}$$

où v est le nouveau vecteur de commande. Dans ce cas, le système en boucle fermée est :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = [A + BG].x + B.v, \\ y = C.x. \end{cases} \tag{2.3}$$

On fait classiquement les distinctions suivantes :

Stabilisation : calculer le gain de retour G de telle sorte que le système en boucle fermée soit stable, c'est-à-dire tel que les valeurs propres de $[A + BG]$ soient à partie réelle strictement négative. La condition nécessaire et suffisante d'existence de la matrice G est naturellement la stabilisabilité de la paire $[A,B]$.

Placement des pôles : Soient n scalaires (complexes) $\lambda'_1,\ldots, \lambda'_n$. Le problème ici consiste à calculer le gain de retour G tel que $spec[A + BG] = \{\lambda'_1,\ldots, \lambda'_n\}$. Une condition d'existence plus forte, la commandabilité complète du système, est requise.

Remarque :

Le gain de bouclage G peut être choisi réel si les pôles complexes apparaissent par paires conjuguées dans $\{\lambda'_1,\ldots,\lambda'_n\}$. Dans le cas des systèmes où $u(t) \in \mathbf{R}$, plusieurs méthodes existent pour le placement des pôles : On cite notamment les formules de Bass et Gura, d'Ackermann ou de Mayne-Murdoch. Tandis que pour les systèmes multivariables, le calcul du gain de bouclage G utilise essentiellement la forme commandable de Luenberger. Si le système $[A,B]$ n'est pas complètement commandable, on applique ces méthodes sur le sous-système commandable de la décomposition de Kalman.

1.1.2. Systèmes stationnaires discrets :

Les systèmes discrets stationnaires n'introduisent pas de difficulté supplémentaire par rapport aux systèmes continus stationnaires. En plus des problèmes sus-cités de stabilisation et de placement de pôles, signalons le cas particulier où les valeurs propres sont assignées à 0 :

La réponse pile consiste à calculer le gain G tel que $\boldsymbol{x}_{p+k} = \mathbf{0}, p \in \mathbf{N}$, quel que soit l'état initial $\boldsymbol{x}_k$. Dans ce cas, G est choisi tel que la matrice $[A+BG]^p = 0$, ce qui correspond donc à une matrice $A+BG$ nilpotente.

Ce problème n'a pas de sens dans le cas des systèmes continus car il correspondrait à un choix de pôles en boucle fermée $\lambda_i = -\infty, i \in \{1,\dots, n\}$.

1.2. Reconstructeur d'état, retour de sortie :

Quand l'état du système considéré n'est pas mesurable, on introduit un estimateur ou reconstructeur d'état dans la boucle de retour. Le placement de pôles se fera alors par une commande de la forme $u(t) = G.\xi(t)$, où ξ est l'état estimé et non l'état réel du processus.

Soit le système linéaire stationnaire (2.1). Introduisons un estimateur selon le schéma donné à la figure 2.1.

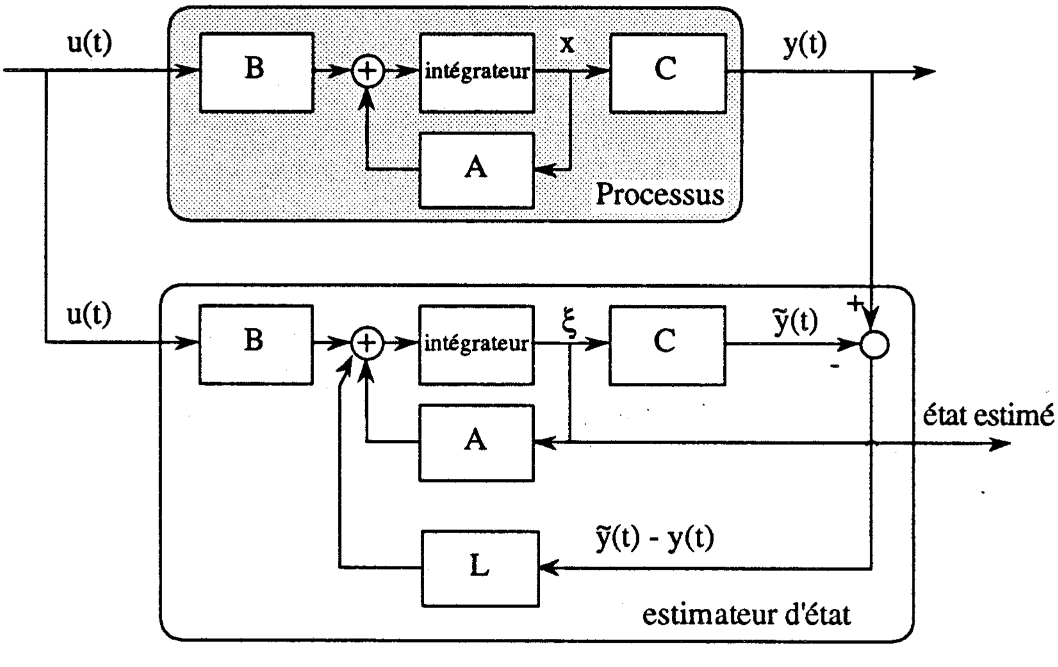


Figure 2.1 Schéma d'un estimateur d'état.

Il faut choisir la matrice L telle que

$$\|x(t) - \xi(t)\| \to 0 \textit{ quand } t \to +\infty,$$

où x *est l'état du système et* ξ *l'état estimé.*

En posant $\varepsilon(t) = x(t) - \xi(t)$, l'écart ε vérifie l'équation suivante :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = [A - LC]\,\varepsilon, \textit{ avec } \varepsilon(0) = x(0) - \xi(0).$$

La solution consiste à placer les pôles de $[A - LC]$ de telle sorte qu'elle soit exponentiellement (asymptotiquement) stable avec des dynamiques beaucoup plus rapides que celles de A, c'est-à-dire celles de l'état à reconstruire.

Condition nécessaire et suffisante d'existence :

1) La matrice L existe si et seulement si $[A,C]$ *est détectable.*
2) L existe et les valeurs propres de $[A - L.C]$ *peuvent être choisies de façon arbitraire si et seulement si* $[A,C]$ *est observable.*

Le calcul de L se fait de manière tout à fait analogue à celui d'un boucle de retour d'état en remarquant la dualité entre les deux problèmes : $spec\{A - L.C\} = spec\{A^T - C^T.L^T\}$. Cependant, l'utilisation d'un estimateur d'état introduit deux difficultés :

1) la dimension du vecteur état de l'estimateur devrait être le même que celui du système initial. La commande nécessitera un calculateur suffisamment puissant si le nombre de composantes à reconstruire est élevé. On peut alors avoir recours à des reconstructeurs d'état d'ordre réduit.

2) Si le retour d'état permet d'atteindre les objectifs de robustesse que nous avons énumérés, il a été montré [J.C. DOYLE, 1978] que l'estimateur d'état amoindrit ces avantages.

2. Systèmes linéaires à coefficients périodiques :

2.1. Introduction :

Les multiplieurs caractéristiques d'un système linéaire périodique jouent un rôle équivalent à celui des pôles d'un système linéaire stationnaire : ce sont eux qui déterminent la stabilité du système considéré, et cela indépendamment de l'instant t. Les problèmes de la stabilisation et du placement de pôles de la section précédente se transposent donc entièrement aux systèmes linéaires périodiques. Plus précisément, nous verrons que ces problèmes sont équivalents au placement de pôle d'un système linéaire discret stationnaire dont la matrice d'évolution est la matrice de monodromie $\Phi(T,0)$ ou $\Psi(T,0)$ du système initial :

Système linéaire stationnaire	**Système linéaire à coefficients périodiques**
Placement de pôles	Placement des multiplieurs caractéristiques, c'est-à-dire assigner $\{\mu_1 \dots \mu_n\}$ aux valeurs $\{\mu_1' \dots \mu_n'\}$.
Stabilisation	Déterminer une loi de commande en boucle fermée telle que $\forall\, i$, $\lvert\mu_i\rvert < 1$.
Réponse pile	Rendre nilpotente la matrice de monodromie $\Phi_{bf}(T,0)$ ou $\Psi_{bf}(T,0)$ en boucle fermée. Dans ce cas, la totalité des multiplieurs caractéristiques sont assignés à 0.
Reconstructeur d'état	Placement des multiplieurs caractéristiques du système $[A(t),C(t)]$ bouclé par $L(t)$

Figure 2.2

Pour répondre à ces objectifs, plusieurs solutions sont envisageables. Pour les systèmes en temps continu, la section 2.2 exposera essentiellement trois classes de lois de commande :

1) Soit une commande en bouclage permanent analogue à ce qu'on obtient dans le cas des systèmes stationnaires. Une telle commande est de la forme $u(t) = G(t).x(t)$ pour les systèmes linéaires continus, en supposant $G(t)$ périodique de même période que le système. On verra cependant que cette méthode est difficilement calculable et nécessite quelques restrictions sur les matrices $A(t)$ et $B(t)$. En pratique, elle se ramenera à un gain $G(t)$ sous forme de série d'impulsions [YOSHII & HAKOMORI, 1989], ce qui correspond finalement à un multi-échantillonnage de l'état.

2) Une autre démarche, initialisée par Kabamba [1986] sur les systèmes continus, est de mesurer l'état $x(t)$ une fois par période. La loi de commande générée est alors de la forme $u(t) = G(t).x(kT)$, avec ici encore $G(t) = G(t+T)$. On verra que cette solution est la plus simple et la plus facile à calculer.

3) La troisième méthode consiste à échantillonner $x(t)$ plusieurs fois par période dans le but d'exploiter la propriété de commandabilité sur un sous-intervalle de $[0,T]$ (commandabilité différentielle). On obtient ici un système linéaire discret périodique qui, le cas échéant, pourrait aussi être commandé par les méthodes du discret de la section 2.3.

Pour les systèmes discrets périodiques, on verra surtout des techniques analogues à 2). Ces méthodes ne se différencieront que par la mise en forme des équations.

2.2. Commande non optimale des systèmes périodiques continus :

Soit le système périodique en temps continu suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t).x + B(t).u, \\ y(t) = C(t).x \end{cases} \tag{2.4}$$

où $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ sont T-périodiques et intégrables (ou bornées) sur $[0,T]$. Notons $\mathcal{M} = \{\mu_1,...,\mu_n\}$ l'ensemble de ses multiplieurs caractéristiques et $\mathcal{M}' = \{\mu'_1,...,\mu'_n\}$ les multiplieurs caractéristiques désirés.

2.2.1. Retour d'état par bouclage permanent :

Choisissons la commande $u(t)$ de la forme :

$$u(t) = G(t).x(t) \tag{2.5}$$

où $G(t)$ est une matrice T-périodique de dimension appropriée. Le calcul du gain $G(t)$ est immédiat si $[A(t),B(t)]$ est sous la forme canonique commandable et si :

$$\forall\, \mu'_i \in \mathcal{M}',\ \mu'_i \neq 0,$$

En effet, soit l'exemple monovariable où les matrices d'évolution et de commande sont :

$$A_c(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{n-1}(t) & a_n(t) \end{bmatrix} \text{ et } B_c(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

En définissant $a(t) = \begin{bmatrix} a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{n-1}(t) & a_n(t) \end{bmatrix}$ et $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$ la matrice des coefficients du polynôme caractéristique associé aux *exposants caractéristiques* λ'_i désirés, la solution $G(t)$ sera par exemple :

$$G(t) = (-a(t) - \alpha).b^{-1}(t),\ si\ b(t) \neq 0,\ \forall\, t \geq 0.$$

On rappelle que les λ'_i sont reliés aux μ'_i par la relation $\mu'_i = e^{\lambda'_i T}$, $\mu'_i \in \mathcal{M}$. Les μ'_i doivent donc nécessairement être non nuls. En théorie, on pourra se ramener à cette forme canonique par une transformation de Lyapunov *P(t)* appropriée. La difficulté se résume à l'identification et au calcul effectif de *P(t)*.

2.2.1.1. Méthode de Brunovsky : [BRUNOVSKY, 1969]

Dans le cas d'un système à coefficients périodiques avec *A(t)* et *B(t)* *T*-périodiques et de classe $\mathcal{C}^1$, Brunovsky a mis en évidence l'existence d'un gain de retour d'état *G(t)* qui permet le placement de multiplieurs caractéristiques. La démonstration de l'existence de *G(t)* nécessite le choix d'un gain de forme assez particulière, comme on le verra ci-dessous. La continuité par rapport au temps de *G(t)* n'est pas requise, mais néanmoins, Brunovsky démontre que *G(t)* pourra théoriquement être choisie continu ou même de classe $\mathcal{C}^\infty$. On se restreint toujours à des multiplieurs caractéristiques non nuls. Pour cela, Brunovsky démontre le théorème d' équivalence de commandabilité suivant :

Théorème 2.1 : équivalence de commandabilité [BRUNOVSKY, 1969]

> *Si A(t) et B(t) sont continues et T-périodiques, le système (2.4) est commandable si et seulement s'il existe* r *instants* $0 \le t_1 < \ldots < t_r \le T$, $1 \le r \le n$, *et* r *entiers* $i_1,\ldots,i_r$ où $1 \le i_j \le m$, *tels que*
>
> *i) les vecteurs* $b_j = \Phi_A(0,t_j)B_{i_j}(t_j)$, *(où* $j = 1$ *à* r*) sont linéairement indépendants,* $B_{i_j}(t_j)$ *désignant la* i_j*-ème colonne de B(t) à l'instant* t_j
>
> *ii) la paire* $[\Phi(T,0), \mathcal{B}]$ *est commandable, avec* $\mathcal{B} = [b_1, \ldots, b_r]$, *ou de façon équivalente* $[\Phi(T,0), \Phi(T,0)\mathcal{B}]$ *est commandable, car* $\Phi(T,0)$ *est inversible.*

Théorème 2.2 : [BRUNOVSKY, 1969]

> *Soit le système (2.4) avec A(t) et B(t) T-périodiques et de classe* C^1. *Si ce système est commandable, alors :*
>
> *1) Pour n'importe quel ensemble de valeurs réelles* $\mathcal{M} = \{\mu'_1,\ldots,\mu'_n\}$ *où* $\forall\ 1 \le i \le n$, $\mu'_i \ne 0$ *et* $\prod_{i=1}^{n} \mu'_i > 0$, *il existe une matrice T-périodique G(t) de retour d'état telle que l'ensemble des multiplieurs caractéristiques du système bouclé soit égal à* $\mathcal{M}$.
>
> *2) Pour n'importe quel ensemble de valeurs réelles* $\mathcal{M} = \{\mu'_1,\ldots,\mu'_n\}$ *où* $\forall\ 1 \le i \le n$, $\mu'_i \ne 0$, *il existe une matrice 2T-périodique G(t) de retour d'état telle que les multiplieurs caractéristiques du système bouclé considéré comme 2T-périodique soient* $(\mu'_i)^2$, $i = 1$ *à* n.

Remarque :

Si $A(t)$ et $B(t)$ sont seulement continues, le théorème est encore valable mais dans une forme plus faible :

1) Si le système $[A(t),B(t)]$ est commandable, et si $\mathcal{M}' = \{\mu'_1,\dots,\mu'_n\}$ est un ensemble de valeurs caractéristiques tels que $\prod_{i=1}^{n} \mu'_i \geq 0$, alors quel que soit ε, il existe une matrice $G(t)$ de retour d'état telle que les multiplieurs caractéristiques $\{\mu''_i, i = 1 \text{ à } n\}$ du système en boucle fermée $[A(t) + B(t)G(t), B(t)]$ satisfassent :

$$\forall i = 1 \text{ à } n,\ |\mu''_i - \mu'_i| < \varepsilon.$$

2) Le cas 2) du théorème 2.1 est énoncé de manière similaire avec

$$\forall i = 1 \text{ à } n,\ |(\mu''_i)^2 - (\mu'_i)^2| < \varepsilon.$$

Calcul du gain impulsionnel :

Le gain impulsionnel $G_0(t)$ est obtenu à partir des équations (2.8)-(2.9)-(2.10), dont les démonstrations sont présentées en Annexe 2. Pour cela, on subdivise la période en choisissant r instants $0 \leq t_1 < \dots < t_r \leq T$, $1 \leq r \leq n$, et r entiers $i_1,\dots,i_r$ où $1 \leq i_j \leq m$, m étant le nombre de colonnes de $B(t)$. On cherche une matrice constante G de dimension $(r\times n)$, qui en notant g_i les vecteurs lignes de G, permettra de définir un gain T-périodique

$$G_h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h} G_{(j)} \ sur\ [t_j, t_j+h] \\ 0 \ partout\ ailleurs, \end{cases} \tag{2.6}$$

où h soit tel que $0 < h \leq h_0 = \min\{t_i - t_{i-1}, i = 1 \text{ à } r\}$, $G_{(j)}$ est la matrice dont la j-ème ligne est g_j, les n-1 autres lignes étant nulles. Soit $\Phi_{G,h}(t,\tau)$ la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\Phi_{G,h} = [A(t) + B(t).G_h(t)].\Phi_{G,h}$$
$$\Phi_{G,h}(\tau,\tau) = Id_n,\ la\ matrice\ identit\acute{e}\ d'ordre\ n,$$

Le gain impulsionnel $G_0(t)$, obtenu quand h tend vers 0 et caractérisé par la matrice constante G, est un retour d'état impulsionnel appliqué sur la i_j-ème composante de la commande $u(t)$ à chaque instant t_j, le reste des composantes de $u(t)$ étant nul à cet instant. On peut mettre en évidence les résultats suivants

$$\forall \sigma \in [0,1],\ \Phi_{G,h}(t_j+\sigma h, t_j) = e^{\sigma B_{i_j}(t_j) g_j} + O(h),$$
$$\Phi_{G,h}(T,0) = \Phi_{G,0}(T,0) + O(h)\ localement\ uniform\acute{e}ment\ en\ G,$$

$$où\ \Phi_{G,0}(T,0) = \Phi_A(T,0).\prod_{j=1}^{r} e^{b_j\gamma_j}. \tag{2.7}$$
$$\gamma_j = g_j.\Phi_A(t_j,0),\ et\ \boldsymbol{b}_j = \Phi_A(0,t_j)B_{i_j}(t_j).$$

Deux étapes sont nécessaires pour ramener le calcul de la matrice de monodromie (2.7) à un placement de pôles de système linéaire stationnaire. On montre qu'il existe r vecteurs lignes p_j et r vecteurs lignes v_j tels que :

$$\prod_{j=1}^{r} e^{b_j\gamma_j} = \prod_{j=1}^{r} (Id + \boldsymbol{b}_j.p_j) = Id + \sum_{s=j}^{r} \boldsymbol{b}_s.v_s\ , \tag{2.8}$$

Ces vecteurs doivent vérifier :

$$\forall\, j = 1\ à\ r, \quad \boldsymbol{b}_j\gamma_j = Log(Id + \boldsymbol{b}_j.p_j),$$
$$p_j = v_j\left[Id + \sum_{s=j+1}^{r} \boldsymbol{b}_s.v_s\right]^{-1},$$

sous réserve que

$$det\,(Id + \sum_{s=j}^{r} \boldsymbol{b}_s.v_s) > 0,\ pour\ j = 1\ à\ r. \tag{2.9}$$

A partir de (2.8), la matrice de monodromie du système bouclé est donc :

$$\Phi_{G,0}(T,0) = \Phi_A(T,0) + \sum_{j=1}^{r} \Phi_A(T,0).\boldsymbol{b}_j.v_j,$$

ou encore

$$\Phi_{G,0}(T,0) = \Phi_A(T,0) + \sum_{j=1}^{r} \Phi_A(T,t_j)B_{i_j}(t_j).v_j \tag{2.10}$$

Ce qui revient finalement à placer les pôles du système linéaire stationnaire discret défini par $[\Phi_A(T,0),\Phi_A(T,0)\mathcal{B}]$ à l'aide d'une matrice V, où

$$\mathcal{B} = [\boldsymbol{b}_1\ , \dots , \boldsymbol{b}_r\ ]$$
$$\forall\, j = 1\ à\ r,\ \boldsymbol{b}_j = \Phi_A(0,t_j)B_{i_j}(t_j).$$

Il suffira alors d'expliciter sous quelle condition $[\Phi_A(T,0),\Phi_A(T,0)\mathcal{B}]$ est commandable.

Calcul d'un gain continu ou constant par morceaux :

La solution *G(t) continue par morceaux* de la forme (2.6) est issue de l'utilisation du théorème sur les fonctions implicites en élargissant le gain impulsionnel, c'est-à-dire, en mettant en évidence une fonction donnant la matrice G_h qui, au voisinage de $h = 0$, donnera les mêmes multiplieurs caractéristiques que G_0. On montre d'abord la continuité en G et en h, autours du point $(G_0, h=0)$, des matrices

$$\Phi_{G,h}(T,0),\ \frac{\delta}{\delta g_i}\Phi_{G,h}(T,0),\ et\ \frac{\delta}{\delta h}\Phi_{G,h}(T,0).$$

Puis, en considérant le polynôme caractéristique $P_{G_0,0}(M)$ de $\Phi_{G_0,0}(T,0)$ appliqué à une matrice M quelconque, on sait que ce polynôme s'annule au point $(G_0,h=0)$. Soit,

$$\phi(G,h) = P_{G_0,0}(\Phi_{G,h}(T,0)),\ alors\ \phi(G_0,0) = P_{G_0,0}(\Phi_{G*,0}(T,0)) = 0.$$

On montre alors que $\phi(G,h)$ est aussi continue et différentiable. De plus, $\frac{\delta}{\delta g_i}\left[\phi(G,h)\right]_{G=G_0}$ est inversible. Le théorème des fonctions implicites permet de conclure à l'existence d'une fonction continue $G(h)$, pour $h > 0$ suffisamment petit, telle que $\phi(G(h),h) = 0$ et $G(0) = G_0$. Ainsi, le gain $G_h(t)$, avec $h > 0$, n'est pas impulsionnel mais sous forme de créneau. Cependant, cette dernière étape reste théorique car la mise en évidence de la fonction $G(h)$ n'est pas acquise.

Exemple :

Soit le système linéaire instable de période $T = 1$:

$$\forall\ t \in [0,1[,\ A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ B(t) = sin(\pi t).\begin{bmatrix} e^{-1(1-t)} \\ e^{-2(1-t)} \end{bmatrix}$$

avec l'extension périodique $B(t+1) = B(t)$.

alors,

$$\Phi_A(t,0) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Selon les notations précédentes, en choisissant les suites d'instants $\{t_j\}$, la matrice $\mathcal{B}$ est formée des vecteurs b_j où

$$b_j = \Phi_A^{-1}(t_j,0).B(t_j) = sin(\pi t_j).\begin{bmatrix} e^{-1} \\ e^{-2} \end{bmatrix}.$$

On veut obtenir les multiplieurs caractéristiques en boucle fermée $\mathcal{M}' = \{\mu'_1 = 0.1, \mu'_2 = 0.1\}$.

$$\Phi_A(T,0) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \text{ et } \Phi_A(T,0)\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si on choisit $r = 1$ avec $t_1 = 0.5$, la matrice V de placement de pôles du système discret $[\Phi_A(T,0),\Phi_A(T,0)\mathcal{B}]$ est

$$V = v_1 = [\ 1.4677 \quad -11.3751\ ]$$

Dans (2.8) on obtient facilement $p_1 = V$. Ainsi,

$$b_1\gamma_1 = Log(Id + b_1.p_1) = \begin{bmatrix} 4.1084 & -31.8408 \\ 1.5114 & -0.5394 \end{bmatrix},$$

$$\gamma_1 = [\ 11.1678 \quad -86.5524\ ].$$

D'où le gain de l'impulsion : $g_1 = [\ 6.7736 \quad -31.8408\ ]$

Simulation du système bouclé :

x_1 (respectivement x_2) est la première (respectivement, deuxième) composante du vecteur état.

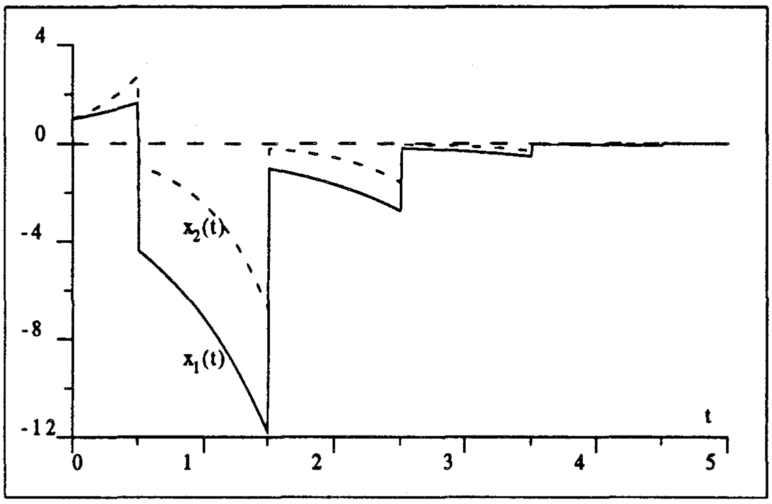


Figure 2.3. Evolution de l'état pour $r = 1$, $t_1 = \frac{1}{2}$, $T = 1$.

Le système a été simulé en approchant l'impulsion par un signal en créneau d'épaisseur h et d'amplitude $\frac{g_1}{h}$ où g_1 est le gain obtenu précédemment. Si on recalcule la matrice de monodromie en tenant compte de cette approximation, on obtient :

pour $h = 0.01$,

$$\Phi_{bf}(T,0) = \begin{bmatrix} 4.1666 & -11.3226 \\ 1.4483 & -3.9335 \end{bmatrix},$$

$$spec(\Phi_{bf}(T,0)) = \{\ 0.1836,\ 0.0495\ \},$$

et pour $h = 0.001$,

$$\Phi_{bf}(T,0) = \begin{bmatrix} 4.1842 & -11.3710 \\ 1.4659 & -3.9815 \end{bmatrix},$$

$$spec(\Phi_{bf}(T,0)) = \{\ 0.1207,\ 0.0821\ \}.$$

On vérifie bien entendu que l'écart par rapport à $\mathcal{M} = \{0.1, 0.1\}$ s'améliore en affinant h. Cependant, le résultat est imprécis (20% d'erreur sur les multiplieurs caractéristiques pour h égal à un millième de la période). Il faut donc modifier g_1 en même temps qu'on élargit h en résolvant l'équation implicite pour le calcul d'un gain non impulsionnel.

D'autre part, étant donné que le système initial est instable, le système diverge entre deux impulsions successives. Pour éviter un trop grand écart dans l'évolution de l'état (entre -12 et +2 sur la figure 2.3.), il faut augmenter le nombre d'impulsions par période.

2.2.1.2. Méthode de Yoshii & Hakomori :
[YOSHII & HAKOMORI, 1989]

Yoshii et Hakomori utilisent les mêmes résultats que ceux de Brunovsky. Néanmoins, au lieu de calculer un retour d'état qui n'utilise qu'une seule composante de l'entrée $u(t)$, leur méthode consiste à envoyer simultanément des impulsions sur toutes les composantes de $u(t)$. De la même façon qu'en § 2.2.1.1, l'instant t^* où le gain impulsionnel est appliqué est choisi en fonction d'un théorème d'équivalence de commandabilité :

Théorème 2.3 : équivalence de commandabilité [YOSHII & HAKOMORI, 1989]

Soit le système $[A(t),B(t)]$ *où* $A(t) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ *et* $B(t) \in \mathbf{R}^{n\times m}$ *sont analytiques sur* $[0,+\infty[$.
En posant

$$\mathcal{B}(t) = \Phi^{-1}(t,0).B(t),$$

soit la matrice

$$\mathcal{C}(t) = \left[\, \mathcal{B}(t)\ \ \Phi^{-1}(T,0).\mathcal{B}(t) \ldots\ \Phi^{-k}(T,0).\mathcal{B}(t) \ldots\ \Phi^{-(n-1)}(T,0).\mathcal{B}(t) \,\right]$$

Ce système est commandable si et seulement si rang$[\mathcal{C}(t)] = n$ *presque partout.*

Par conséquent, si le système $[A(t),B(t)]$ est commandable, on peut choisir un instant particulier t^* où le système linéaire stationnaire $\left[\Phi^{-1}(T,0),\ \mathcal{B}^*\right]$ soit commandable, où $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}(t^*)$. On va donc effectuer un placement de pôle sur le système $\left[\Phi^{-1}(T,0),\ \mathcal{B}^*\right]$ et en trouver l'équivalent sur les multiplieurs caractéristiques du système initial $[A(t),B(t)]$.

La matrice de monodromie en boucle fermé utilisant un gain impulsionnel :

Le gain de retour d'état sur le système initial est de la forme

$$G(t) = G.\delta(t - t^*),\ pour\ t \in [0,T[, \qquad (2.12)$$
$$G(t + T) = G(t),$$

où $t^* \in\ ]0,T[$ et $\delta(t - t^*)$ l'impulsion de Dirac à l'instant t^*. La matrice de monodromie en boucle fermée est :

$$\Phi_{bf}(T,0) = \Phi(T,0).exp\left(\mathcal{B}^*.G.\Phi(t^*,0)\right). \qquad (2.13)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\Phi_{bf}^{-1}(T,0) &= exp\left[-\mathcal{B}^*.G.\Phi(t^*,0)\right].\Phi^{-1}(T,0),\\ &= \Phi^{-1}(T,0).exp\left[-\Phi(T,0).\mathcal{B}^*.G.\Phi(t^*,0).\Phi^{-1}(T,0)\right],\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\Phi_{bf}^{-1}(T,0) = \Phi^{-1}(T,0).exp\left[-\Phi(T,0).\mathcal{B}^*.G.\Phi(t^*,T)\right],$$

Relation entre le placement de pôles de $\left[\Phi^{-1}(T,0),\ \mathcal{B}^*\right]$ et celui de $[A(t),B(t)]$:

Soit V la matrice de placement de pôle telle que

$$spec\left\{\Phi^{-1}(T,0) + \mathcal{B}^*.V\right\} = \left\{\frac{1}{\mu_1'},\ \dots\ ,\ \frac{1}{\mu_n'}\right\} \qquad (2.11)$$

où les $\mu_i' \in \mathcal{M}$ sont les valeurs désirées des multiplieurs caractéristiques.

On montre que :

$$\Phi^{-1}(T,0) + \mathcal{B}^*.V = \Phi^{-1}(T,0).exp\left[-\Phi(T,0).\mathcal{B}^*.G.\Phi(t^*,T)\right],$$

ce qui équivaut à

$$Id_n + \Phi(T,0)\mathcal{B}^*.V = exp\left[-\Phi(T,0).\mathcal{B}^*.G.\Phi(t^*,T)\right].$$

d'où

$$\mathcal{B}^*.G = -\Phi^{-1}(T,0).Log(Id_n + \Phi(T,0)\mathcal{B}^*.V).\Phi(T,t^*) \qquad (2.14)$$

sous réserve que

$$det\left[Id_n + \Phi(T,0)\mathcal{B}^*.V\right] > 0$$

Ces résultats sont tout à fait similaires à ceux de Brunovsky. Les restrictions sont les mêmes quant au choix des multiplieurs caractéristiques. Ici aussi, il faut que

$$\prod_{i=1}^{n} \mu'_i > 0.$$

Néanmoins, la résolution de (2.14) nécessite une hypothèse supplémentaire : la matrice $\mathcal{B}^*$ doit être de rang plein, ce qui veut dire que $B(t)$ soit elle aussi de rang égal à $min\{n,m\}$. Dans ce cas, on calcule la matrice G par

$$G = -\left[\mathcal{B}^{*T}\mathcal{B}^*\right]^{-1}\mathcal{B}^*\Phi^{-1}(T,0).Log\left[Id_n + \Phi(T,0)\mathcal{B}^*.V\right].\Phi(T,t^*)$$

Théorème 2.4. [YOSHII & HAKOMORI, 1989]

> *Soit un système (2.4) commandable où $A(t)$ et $B(t)$ sont analytiques sur $[0,\infty[$ et les colonnes ou lignes de $B(t)$ linéairement indépendantes. Soit un ensemble de valeurs réelles toutes distinctes*
>
> $$\mathcal{M} = \{\mu'_1,\dots,\mu'_n\},\ \textit{telles que}\ \prod_{i=1}^{n}\mu'_i > 0.$$
>
> *Si la matrice $Id_n + \Phi(T,0)\mathcal{B}^*.V$ est inversible et n'a pas de valeur propre réelle négative, alors il existe une matrice G^* solution de l'équation (2.14) telle que l'ensemble des multiplieurs caractéristiques de (2.4) bouclée avec la loi de commande*
>
> $$u(t) = G^*.\delta(t - t^*).x(t)$$
>
> *soit égal $\mathcal{M}$.*

2.2.1.3. Remarques sur les gains impulsionnels :

Si le gain impulsionnel est intéressant sur le plan théorique, son utilisation pratique est limité pour plusieurs raisons :

i) Imprécision sur les multiplieurs caractéristiques en boucle fermée :

La loi de commande impulsionnelle doit être approchée par un signal de grande amplitude $\frac{1}{h}G$ et de très faible épaisseur h. Cette approximation introduit donc une imprécision supplémentaire sur les valeurs des multiplieurs caractéristiques. La solution théorique de ce problème revient à résoudre l'équation sur les fonctions implicites qui permet de calculer G en fonction de h, tout en gardant les mêmes multiplieurs caractéristiques. Dans les exemples que nous avons vus jusqu'ici, le système bouclé reste encore stable. Cependant, une étude de la robustesse de la stabilité semble s'imposer. Pour le moment, nous nous intéresserons à des critères de coût de l'énergie de commande.

ii) Calcul de l'énergie de commande : critère quadratique

Introduisons la quantité

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} u^{\mathsf{T}}(t).u(t).dt$$

Supposons que la loi de commande soit de la forme (2.6) (§ 2.2.1.1, méthode de Brunovsky). Calculons J_j pour une seule impulsion par période appliquée aux instants $t_j + kT$. Dans ce cas :

$$J_j = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{kT}^{(k+1)T}\frac{1}{h^2}x^{\mathsf{T}}(t).g_j^{\mathsf{T}}.g_j.x(t).dt,$$

c'est-à-dire :

$$J_j = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}x^{\mathsf{T}}(t_j+kT).\int_{t_j}^{t_j+h}\frac{1}{h^2}\,\Phi_{bf}^{\mathsf{T}}(t,t_j).g_j^{\mathsf{T}}.g_j.\Phi_{bf}(t,t_j).dt.x(t_j+kT).$$

On note J est de l'ordre de $\frac{1}{h}$ car l'intégrale est calculée sur un intervalle de longueur h. Ainsi, plus h est faible, le gain $G(t)$ se rapprochant de l'impulsion, plus l'énergie requise pour la commande du système augmente. Il faut donc augmenter h, c'est-à-dire élargir l'impulsion. Ce critère contredit donc l'utilisation de gain impulsionnel. Ceci peut physiquement s'expliquer : l'impulsion implique une transition quasi-instantanée entre deux états différents du systèmes, ce qui théoriquement, nécessite une énergie de commande infinie. Néanmoins, en continuant les calculs pour $h > 0$, on obtient :

$$J_j = \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}(t_j).\sum_{k=0}^{\infty}\Phi_{bf}^{\mathsf{T}}(t_j+kT,t_j).\mathcal{F}_j.\Phi_{bf}(t_j+kT,t_j).x(t_j),$$

$$\text{où } \mathcal{F}_j = \int_{t_j}^{t_j+h} \frac{1}{h^2}\, \Phi_{bf}^{\mathsf{T}}(t,t_j).g_j^{\mathsf{T}}.g_j.\Phi_{bf}(t,t_j).dt.$$

En posant

$$S_{N+1,j} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\Phi_{bf}^{\mathsf{T}}(t_j+T,t_j)\right]^k.\mathcal{F}_j.\Phi_{bf}^{\,k}(t_j+T,t_j),$$

on montre que $S_{N,j}$ vérifie l'équation de Lyapunov discrète :

$$S_{N+1,j} = \Phi_{bf}^{\mathsf{T}}(t_j+T,t_j).S_{N,j}.\Phi_{bf}(t_j+T,t_j) + \mathcal{F}_j.$$

Cette équation admet une solution constante positive définie $S_{\infty,j}$ si $\Phi_{bf}(t_j+kT,t_j)$ est asymptotiquement stable, ce qui est le cas quand le système en boucle fermée l'est. Ainsi :

$$S_{\infty,j} = \Phi_{bf}^{\mathsf{T}}(t_j+T,t_j).S_{\infty,j}.\Phi_{bf}(t_j+T,t_j) + \mathcal{F}_j$$

et

$$J_j = \frac{1}{2}\, x^{\mathsf{T}}(t_j).S_{\infty,j}.x(t_j),$$

On obtient alors $J = \sum_{j=1}^{r} J_j$.

On calcule ainsi pour l'exemple d'application § 2.2.1.1, J ≈ 887123 → ∞, pour h = 0.01 → 0.

iii) Critère consommation :

Par contre, si on considère la quantité

$$I = \int_0^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{m} |u_i(t)|\right].dt = \sum_{j=1}^{r} I_j,$$

où I_j est la valeur du critère si on utilise une seule impulsion appliquée à l'instant t_j. Nous pouvons alors majorer I_j pour chaque impulsion à l'instant t_j par l'utilisation de norme vectorielle du type $p(a)$

$$\forall\, m \in \mathbf{N},\ \forall\, a \in \mathbf{R}^m,\ p(a) = \sum_{i=1}^{m} |a_i|.$$

On peut aussi obtenir numériquement une approximation de I. Notons que le critère I ne dépend plus de la largeur de l'impulsion. Ce deuxième critère sur la commande semble mieux convenir à l'utilisation de gains impulsionnels. En fait, le choix entre les deux critères J et I dépend du sens physique de la commande $u(t)$, ce qui ne pourra être déterminé qu'au cas par cas. Le critère le plus utilisé est le critère quadratique J, quand $u(t)$ correspond par exemple à une tension ou un courant électrique. Par contre, quand $u(t)$ correspond à un débit de matière (voir un exemple de stabilisation de satellite par jets de gaz, [YOSHII & HAKOMORI, 1989]), l'intégrale I est alors égale à la quantité de matière éjectée. L'utilisation du gain impulsionnel est dans ce cas physiquement justifié.

2.2.2. Placement de multiplieurs caractéristiques par un bouclage discret :

Comme les multiplieurs caractéristiques sont les valeurs propres de la matrice de transition $\Phi(T,0)$ sur un intervalle de temps de longueur T, l'idée principale du bouclage périodique est d'assigner directement les valeurs propres de cette matrice de monodromie à partir d'un modèle échantillonné du système. Il faut donc construire une loi de commande à partir de l'échantillonnage périodique de la sortie $y(t)$ ou de l'état $x(t)$ du système (voir figure 2.4). Une loi de commande analogue a été étudiée pour le placement de pôles et la réponse pile ou pour la commande optimale des systèmes linéaires stationnaires [CHAMMAS & LEONDES, 1978]. Dans notre cas, la période d'échantillonnage dépend de la période du système et non arbitrairement choisie comme dans les méthodes d'échantillonnage habituelles.

2.2.2.1. Bouclage discret des sorties : [KABAMBA, 1987]

La commande par G.S.H.F. ("Generalized Sampled-Data Hold Functions") que nous traduisons par "fonctions généralisées d'échantillonnage-blocage", par analogie aux bloqueurs d'ordre 0, d'ordre 1, etc... est schématisée comme suit :

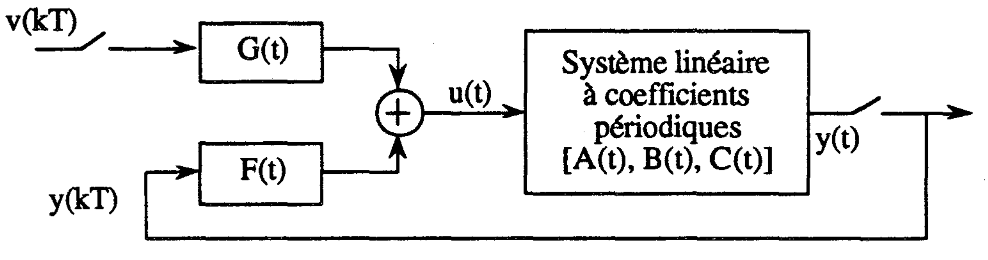


Figure 2.4. Schéma d'un régulateur G.S.F.H

Si on fixe les instants d'échantillonnage à t_0+kT, $k \in \mathbf{N}$, on définit :

$$\forall\, t \in [t_0+kT,\ t_0+(k+1)T],\ \forall\, k \in \mathbf{N},$$
$$u(t) = F(t).y(t_0+kT) + G(t).v(t_0+kT), \qquad (2.15)$$
$$F(t+T) = F(t),\ G(t+T) = G(t).$$

En posant $x_k = x(t_0+kT)$, $y_k = y(t_0+kT)$, $v_k = v(t_0+kT)$ pour $k \in \mathbf{N}$, le système résultant est :

$$x_{k+1} = [\Phi(t_0+T,t_0) + B_F C(t_0)].x_k + B_G.v_k \qquad (2.16)$$

$$avec\ B_F = \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(t_0+T,\tau).B(\tau).F(\tau).d\tau,$$

$$et\ B_G = \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(t_0+T,\tau).B(\tau).G(\tau).d\tau.$$

La matrice de monodromie du système bouclé est donc :

$$\Psi_{bf}(t_0+T,t_0) = [\Phi(t_0+T,t_0) + B_F C(t_0)].$$

Cette matrice est uniquement définie par le choix de la fonction $F(t)$.

Proposition 2.5. : [KABAMBA, 1987]

Soit un ensemble de valeurs réelles arbitraires $\mathcal{M}' = \{\mu'_1,\ldots,\mu'_n\}$.
Si $[A(t), B(t)]$ *est commandable sur* $[t_0,t_0+T]$ *et si la paire* $[\Phi(t_0+T,t_0),C(t_0)]$ *est observable, alors une solution pour le placement de multiplieurs caractéristiques est*

$$F(t) = B^{\mathsf{T}}(t).\Phi^{\mathsf{T}}(t_0+T,t).W_A^{-1}(t_0+T,t_0).F, \tag{2.17}$$

où F *est la matrice telle que* $\Phi(t_0+T,t_0) + F.C(t_0)$ *ait* $\mathcal{M}'$ *comme spectre, et* $W_A(t_0+T,t_0)$ *le grammien d'atteignabilité du système sur* $[t_0,t_0+T]$.

Remarques :

La commande par bouclage discret offre plusieurs avantages :

1) Le système (2.16) est un système discret stationnaire, ce qui permet d'utiliser les méthodes bien connues de placement de pôles en linéaire stationnaire.

2) La matrice de monodromie $\Phi(t_0+T,t_0)$ du système initial apparait directement dans (2.16). Le placement de pôles sur (2.16) est donc équivalent au placement des multiplieurs caractéristiques du système initial (2.4).

3) Le G.S.H.F. vient en extension de la méthode habituelle de bouclage. Il est plus efficace et permet d'obtenir des résultats quand le bouclage en continu est inopérant.

Exemple de retour de sortie :

Soit l'oscillateur harmonique :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A.x + B.u, \\ y = C.x. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1\ 0].$$

Ce système est commandable mais n'est pas asymptotiquement stable. On veut le stabiliser par un retour de sortie.

1) Si on utilise un retour de sortie direct $u(t) = F(t).y(t)$, où $F(t)$ est continu, le système en boucle fermée est

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1+F(t) & 0 \end{bmatrix} . x.$$

La trace de la matrice d'évolution reste égale à 0. Par le théorème de Jacobi-Liouville, le déterminant de la matrice de transition est égal à 1. Ainsi une telle commande ne stabilisera pas asymptotiquement le système.

2) Soit $u(t) = F.y(kT)$. Ceci correspond à un bloqueur d'ordre 0, un cas particulier du G.S.H.F. Le polynôme caractéristique du système discret (2.16) correspondant est :

$$p(z) = z^2 - [2.cosT + F(1-cosT)].z + 1 + F(cosT-1)$$

On vérifie aisément par la méthode du lieu des racines que le système est asymptotiquement stable si et seulement si $F \in \,]0,1[$. La période d'échantillonnage T est arbitraire car le système est stationnaire. Néanmoins, les deux multiplieurs caractéristiques en boucle fermée ne peuvent pas être assignés à des valeurs arbitraires car ils doivent rester sur le lieu des racines de $p(z)$.

3) On utilise maintenant la commande G.S.H.F. avec une période $T = 1$, $t_0 = 0$. D'après la proposition précédente, on obtient pour $\mu_1 = \mu_2 = 0$ (réponse pile):

$$F(t) = 13.17\, sin(1-t) + 7.09\, cos(1-t),\ t \in [0,1[.$$

La matrice de monodromie en boucle fermée est alors :

$$\Psi_{bf} = \begin{bmatrix} -0.5403 & 0.8415 \\ -0.3460 & 0.5403 \end{bmatrix},$$

et on vérifie $(\Psi_{bf})^2 = \mathbf{0}$. Le choix des multiplieurs caractéristiques est arbitraire, de même que la période T choisie.

Remarques :

1) Le grammien d'atteignabilité est inversible car le système initial est commandable. La fonction $F(t)$ donnée par l'équation (2.17) n'est pas l'unique solution pour le placement de pôles.
2) La matrice F est une matrice de reconstruction d'état classique pour un système discret stationnaire. L'observabilité de la paire $[\Phi(t_0+T,t_0),C(t_0)]$ que certains auteurs définissent comme étant l'observabilité *forte* du système $[A(t),C(t)]$, implique l'observabilité du système initial $[A(t),C(t)]$ au sens classique du terme [KABAMBA, 1989]. Par contre, l'observabilité de $[A(t),C(t)]$ n'implique pas l'observabilité de $[\Phi(t_0+T,t_0),C(t_0)]$

Cette dernière remarque limite donc l'utilisation de la méthode de retour de sortie ci-dessus à la seule classe de systèmes fortement observables.

2.2.2.2. Retour d'état discret : la commande par S.S.P.H.

La commande S.S.P.H. [KABAMBA, "Sampled-State Periodic Hold", 1986] est un cas particulier de la commande précédente. Ainsi, si on fixe $t_0 = 0$, la loi de commande $u(t)$ est une retour d'état de la forme :

$$u(t) = B^{T}(t).\Phi^{T}(T,t).F.x(kT), \quad \text{pour } t \in [kT, (k+1)T[, \forall k \in \mathbf{N}, \tag{2.18}$$

ce qui suppose que l'état du système est périodiquement mesurable aux instants kT. Le système (2.16) devient alors

$$x_{k+1} = [\Phi(T,0) + W_A(T,0).F]\, x_k \tag{2.19}$$

La matrice de monodromie en boucle fermée est donc :

$$\Psi_{bf}(T,0) = \Phi(T,0) + W_A(T,0).F \tag{2.20}$$

Le placement de multiplieurs caractéristiques du système initial est alors équivalent au placement de pôles du système discret stationnaire $[\Phi(T,0), W_A(T,0)]$. Or, on sait que les propriétés de commandabilité ou de stabilisabilité de ces deux systèmes sont équivalentes (voir chapitre 1, § 2.2 et § 2.3). D'où les propositions suivantes :

Proposition 2.6 :

Le système (2.4) ou la paire $[A(t),B(t)]$ est stabilisable par S.S.P.H. si et seulement si $[\Phi(T,0), W_A(T,0)]$ est stabilisable.
Les valeurs propres de $\Psi_{bf}(T,0)$ peuvent être assignées à des valeurs arbitraires complexes conjuguées si et seulement si $[\Phi(T,0), W_A(T,0)]$ est commandable.

Proposition 2.7 : [KABAMBA,1986]

Si le système (2.4) est commandable sur une période, alors $W_A(T,0)$ est inversible et la matrice de monodromie en boucle fermée $\Psi_{bf}(T,0)$ peut être assignée à n'importe quelle matrice arbitrairement choisie. La commande par S.S.P.H. correspondante est

$$\forall t \in [kT, (k+1)T[, \forall k \in \mathbf{N}, \quad u(t) = B^{T}(t)\, \Phi^{T}(T,t)\, F\, x(kT), \tag{2.21}$$

avec $F = W_A^{-1}(T,0).[\Psi_{bf}(T,0) - \Phi(T,0)]$.

Remarque :

La commande par S.S.P.H. permet donc un placement des valeurs propres et des *vecteurs propres*. Par rapport à la G.S.H.F., elle nécessite la capacité de mesurer l'état périodiquement. La matrice G est la matrice de placement de pôle du système linéaire discret stationnaire $[\Phi(T,0), W_A(T,0)]$. La commandabilité sur $[0,T]$ est aussi requise. Cette proposition peut être étendue dans le cas général de commandabilité sur ν périodes, que nous formulons ainsi :

Proposition 2.8 :

Si le système est commandable sur ν périodes, alors $W_A(\nu T,0)$ est inversible et la matrice de monodromie en boucle fermée $\Psi_{bf}(\nu T,0)$ peut être assignée à n'importe quelle matrice arbitrairement choisie. La commande par S.S.P.H. correspondante est donnée par

$\forall\, t \in [k\nu T, (k+1)\nu T[,\ \forall\, k \in \mathbf{N},$

$$u(t) = B^T(t).\Phi^T(\nu T,t)\, F\, x(k\nu T), \tag{2.22}$$

avec $F = W_A^{-1}(\nu T,0)\,[\Psi_{bf}(\nu T,0) - \Phi(\nu T,0)]$.

Démonstration :

Ce résultat est obtenu en utilisant la proposition 2.7 et en considérant le système comme étant de période νT □

2.2.2.3. Méthode de Rahmani et Franklin :

Sur le même principe que Kabamba, Rahmani et Franklin [1989] ont résolu le problème de placement de multiplieurs caractéristiques en choisissant une fonction $F(t)$ constante par morceaux, soit :

$$\forall\, t \in [kT, (k+1)T[,\ \forall\, k \in \mathbf{N},\ u(t) = F(t).x(kT), \tag{2.23}$$

$\forall\, i = 0$ à r-1, $\forall\, t \in [i\Delta + kT, (i+1)\Delta + kT[,\ k \in \mathbf{N}$,

la fonction $F(t) = F_i$ *une matrice constante.*

où r est un entier choisi, et $\Delta = \frac{T}{r}$. Le système en boucle fermée est

$$x(t) = \left[\Phi(t,kT) + \int_{kT+j\Delta}^{t} \Phi(T,t).B(t).F_j\,dt + \sum_{i=0}^{j-1} \int_{kT+i\Delta}^{kT+(i+1)\Delta} \Phi(T,t).B(t).F_i\,dt\right].x(kT)$$

pour $t \in [j\Delta + kT, (j+1)\Delta + kT[$.

On définit d'abord le ***grammien généralisé d'atteignabilité*** par :

$$\mathcal{H}_r(T,0) = \frac{r}{T}\sum_{i=0}^{r-1} \int_{kT+i\Delta}^{kT+(i+1)\Delta} \Phi(T,t).B(t).dt. \int_{kT+i\Delta}^{kT+(i+1)\Delta} B^{\mathrm{T}}(t).\Phi^{\mathrm{T}}(T,t).dt$$

On peut alors démontrer [RAHMANI & FRANKLIN, 1989] les résultats suivants :

Lemmes 2.9 :

i) Si $rang\{W_A(T,0)\} = p \leq n$, *alors* $\forall\ r$, $rang\{\mathcal{H}_r(T,0)\} \leq p$.
$W_A(T,0)$ *étant le grammien de commandabilité du système.*

ii) Si $rang\{W_A(T,0)\} = p$, *alors* $\exists\ r$ *tel que* $rang\{\mathcal{H}_r(T,0)\} = p$.

En fait , $W_A(T,0) = \lim_{r\to\infty} \mathcal{H}_r(T,0)$.

Corollaire 2.10 :

Il existe un entier r tel que la commandabilité du système décrit par $[A(t),B(t)]$ *soit équivalente à la commandabilité du système linéaire discret stationnaire* $[\Phi(T,0),\mathcal{H}_r(T,0)]$.

Ainsi, si on choisit un entier r qui satisfait l'équivalence de commandabilité, étant donné que la matrice de monodromie en boucle fermée est :

$$\Psi_{bf}(T,0) = \Phi(T,0) + \mathcal{H}_r(T,0).G, \tag{2.24}$$

on calcule la matrice G de telle sorte que $\Psi_{bf}(T,0)$ ait les valeurs propres désirées $\mathcal{M}'$. Le placement de multiplieurs caractéristiques sur le système initial est obtenu par :

$$\forall\ i = 0 \text{ à } r\text{-}1,\ F_i = \frac{r}{T} \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} B^{\mathrm{T}}(t).\Phi^{\mathrm{T}}(T,t).dt.G. \tag{2.25}$$

2.2.2.4. Exemple :

Soit le système défini par $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1+cos(\omega t) & -2 \end{bmatrix}$ et $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+cos(\omega t) \end{bmatrix}$ où $\omega = 4$.

On calcule la matrice de monodromie et le grammien d'atteignabilité de ce système :

$$\Phi(T,0) = \begin{bmatrix} 0.4849 & 0.2850 \\ -0.2965 & -0.0852 \end{bmatrix} \text{ et } W_A(T,0) = \begin{bmatrix} 0.1420 & 0.0816 \\ 0.0816 & 0.6616 \end{bmatrix}.$$

En outre, la transformation de Floquet-Lyapunov donne $M = \begin{bmatrix} -0.1157 & 0.8843 \\ -0.9199 & -1.8843 \end{bmatrix}$, avec, en tronquant $P(t)$ à l'ordre 2 :

$$P(t) = \begin{bmatrix} 0.9432 & 0.0000 \\ 0.1234 & 1.0665 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0591 & 0.0000 \\ -0.1262 & -0.0671 \end{bmatrix} cos(\omega t) + \begin{bmatrix} -0.0023 & 0.0000 \\ 0.0028 & 0.0005 \end{bmatrix} cos(2\omega t)$$
$$+ \begin{bmatrix} -0.0296 & -0.0296 \\ -0.2376 & 0.0296 \end{bmatrix} sin(\omega t) + \begin{bmatrix} 0.0003 & 0.0003 \\ 0.0039 & -0.0003 \end{bmatrix} sin(2\omega t).$$

On veut calculer une loi de commande telle que la matrice de monodromie en boucle fermée soit égale à

$$\Psi_{bf}(T,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On remarque qu'une telle loi de commande annule l'état du système en deux périodes (réponse pile). Appliquons alors les deux méthodes de bouclage discret précédentes :

Méthode de Kabamba :

Selon l'équation (2.21), la matrice de placement de pôles est

$$F = W_A^{-1}(T,0).[\Psi_{bf}(T,0) - \Phi(T,0)].= \begin{bmatrix} -3.9521 & 5.3388 \\ 0.9356 & -0.5297 \end{bmatrix},$$

Simulation :

Les figures suivantes montrent la simulation à partir de l'état initial $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

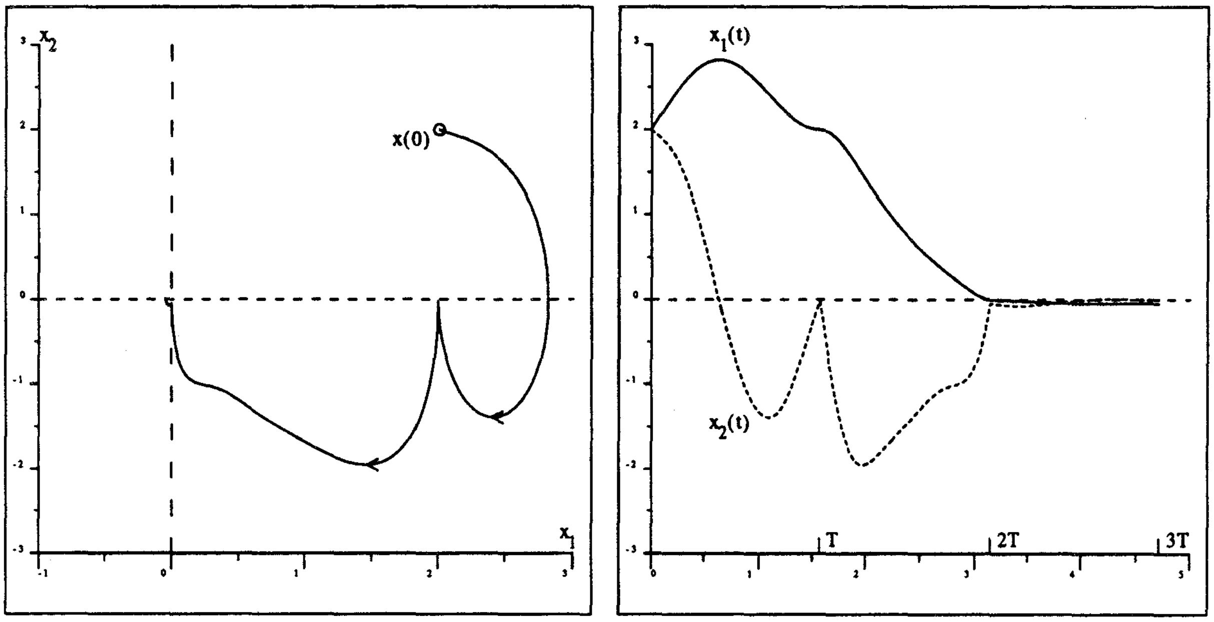


Figure 2.5. Evolution de l'état x dans l'espace des phases et en fonction du temps.

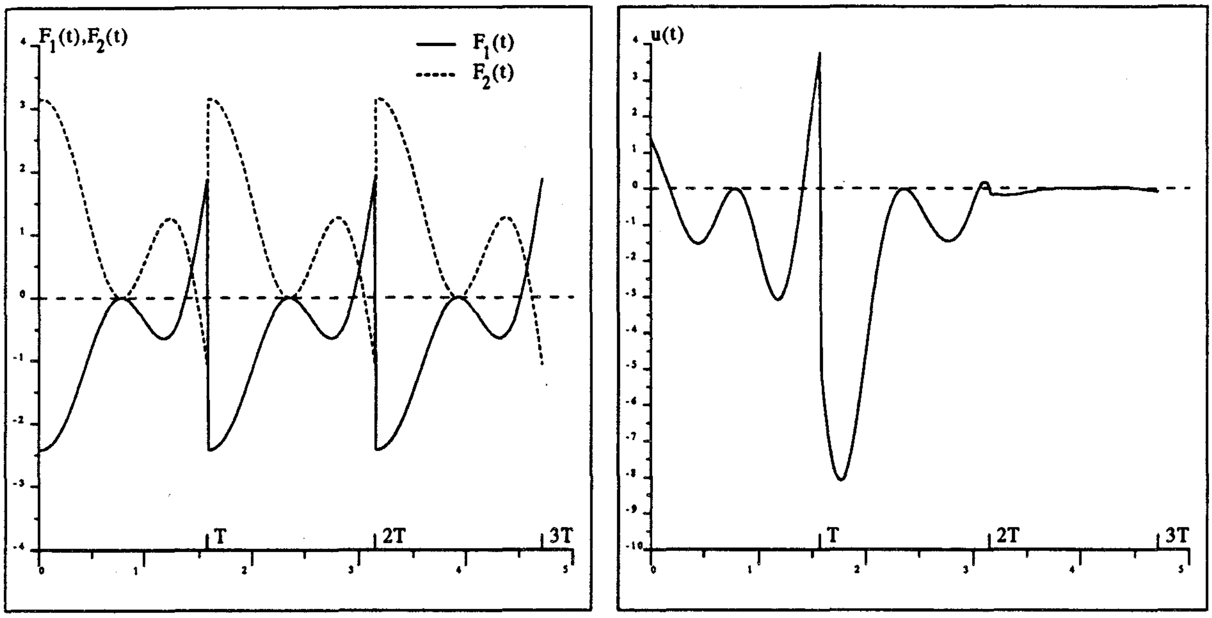


Figure 2.6. Gain $F(t) = [F_1(t), F_2(t)]$ et commande $u(t)$ (méthode de Kabamba).

Méthode de Rahmani et Franklin :

En choisissant $r = 2$, on vérifie que le grammien généralisé d'atteignabilité est inversible. D'où la matrice de placement de pôle G :

$$\mathcal{H}_r(T,0) = \begin{bmatrix} 0.0990 & 0.0774 \\ 0.0774 & 0.3423 \end{bmatrix} \Rightarrow G = \begin{bmatrix} -6.7678 & 8.5309 \\ 2.3957 & -1.6791 \end{bmatrix}.$$

Les gains constants par morceaux sont alors selon (2.25) :

$$\forall\, t \in [kT, (k+\tfrac{1}{2})T[, \qquad F(t) = F_0 = [-2.2127 \;\; 2.7329],$$

$$\forall\, t \in [(k+\tfrac{1}{2})T, (k+1)T[, \quad F(t) = F_1 = [\,0.4321 \;\; 0.3386].$$

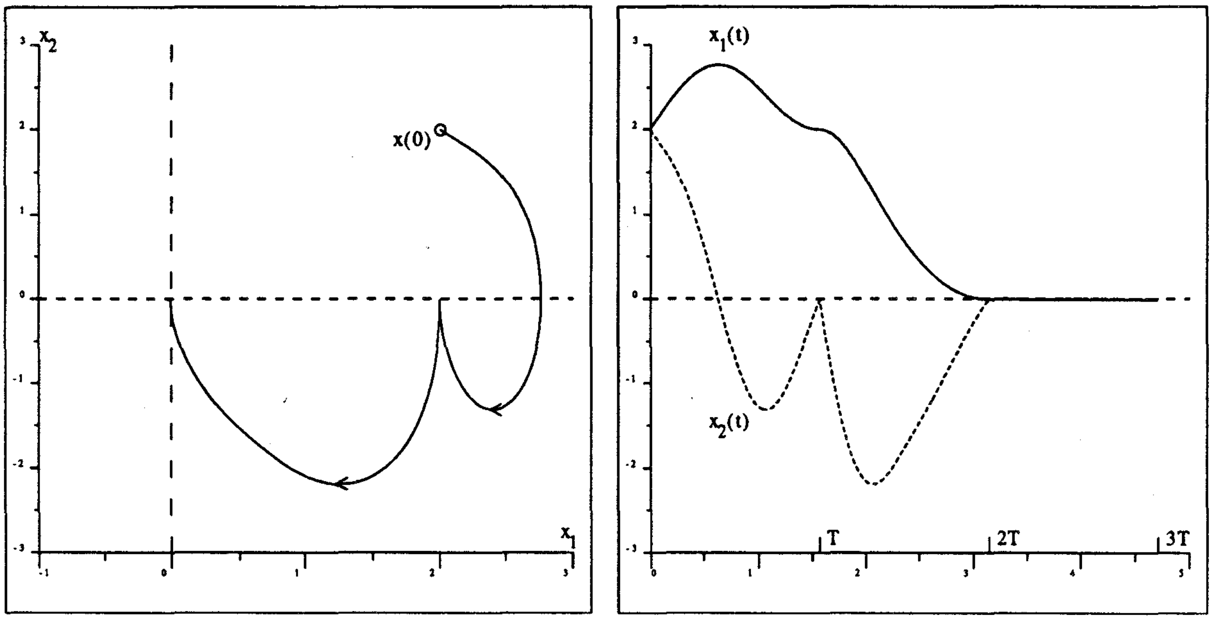


Figure 2.7. Evolution de l'état $x(t)$ en utilisant la méthode de Rahmani et Franklin.

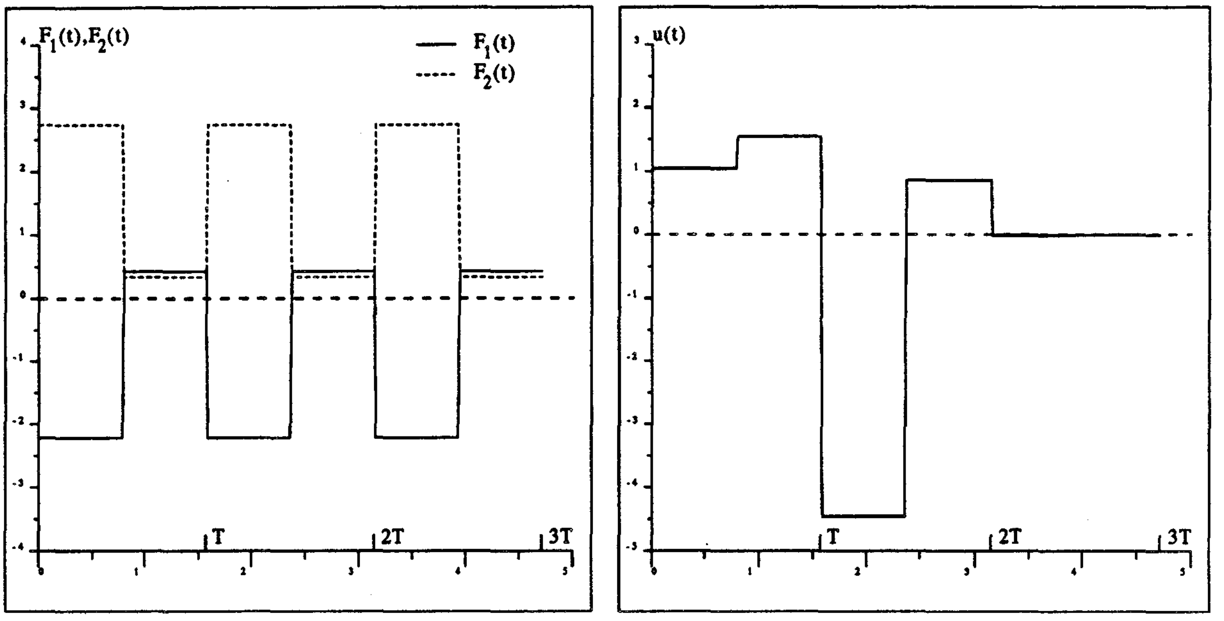


Figure 2.8. Gains et commande par la méthode de Rahmani et Franklin.

Conclusion :

Les deux méthodes permettent d'obtenir le même résultat quant au placement des multiplieurs caractéristiques. On remarque que l'allure générale des trajectoires et l'amplitude des gains sont relativement les mêmes dans les deux cas. Toutefois, la méthode de Rahmani et Franklin, par l'utilisation de gains périodiques constants par morceaux, est plus simple à utiliser. L'identification du nombre de sous-intervalles r requiert une manipulation supplémentaire pour vérifier que $\mathcal{H}_r(T,0)$ est bien inversible.

2.2.3. Généralisation : commande à plusieurs échantillonnages par période

Comme nous avons pu le voir, les lois de commande précédentes n'utilisent qu'une mesure de l'état du système par période. Or, ceci peut être un désavantage quand cette période est relativement longue. L'utilisation pratique d'une telle loi de commande est inefficace, notamment quand le système est perturbé sur les variables d'état $x(t)$. Pour remédier à cela, on peut mettre en place une loi de commande calculée à partir de la mesure de $x(t)$ plusieurs fois par période. La période d'échantillonnage, généralement une fraction entière de la période T du système, est choisie essentiellement en fonction de la rapidité du calculateur ou du générateur de commande utilisé.

De manière générale, on définit une suite d'instants $\{t_k, k= 1 \text{ à } r\}$ telle que

$$t_0 = 0 < t_1 <\ldots< t_{r-1} < t_r = T.$$

On choisit sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}[$ une matrice de dimension appropriée $F_k(t)$ intégrable et bornée telle que le vecteur de commande du système (2.4) soit de la forme :

$$\forall j \in \mathbf{N},\ u(t) = F_k(t).v_{k+jr},\ pour\ t \in [t_k+jT, t_{k+1}+jT[, \qquad (2.26)$$

où $v_k \in \mathbf{R}^q$ est le nouveau vecteur de commande du système.

Notons que la dimension de v_{k+jr} peut être différente de celle de $u(t)$. A partir de (2.4) et (2.26), on obtient alors le système linéaire discret à coefficients r–périodiques :

$$\begin{cases} x_{k+1+jr} = \Phi(t_{k+1}, t_k).x_{k+jr} + \displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, t).B(t).F_k(t).dt.v_{k+jr} \\ y_{k+jr} = y(t_k+jT) = C(t_k).x_{k+jr} \end{cases} \qquad (2.27)$$

où $x_{k+jr} = x(t_k+jT)$ et $v_{k+jr} = v(t_k+jT)$, pour tout $j \in \mathbf{N}$.

Remarque :

Le choix des fonctions $F_k(t)$ n'est pas totalement arbitraire : il faut que le système discret (2.27) soit de commandabilité ou d'atteignabilité équivalente au système linéaire continu initial. En pratique, on a vu que les $F_k(t)$ peuvent être continues par morceaux, constantes par morceaux ou encore sous forme de séries d'impulsions sur l'intervalle $[0,T]$.

2.2.3.1. La commande par M.S.S.P.H. : [KONO, 1989]

Avec les fonctions $F_k(t)$ de la forme :

$$\forall t \in [t_k, t_{k+1}[,\ F_k(t) = B^{\mathrm{T}}(t).\Phi^{\mathrm{T}}(t_{k+1}, t), \qquad (2.28)$$

Le système (2.27) devient

$$x_{k+1+jr} = \Phi(t_{k+1}, t_k).x_{k+jr} + W_A(t_{k+1}, t_k).v_{k+jr} \qquad (2.29)$$

On choisit alors un bouclage dont la forme ressemble à la commande S.S.P.H.

$$\forall i \in \mathbf{N},\ v(t_k+iT) = \mathcal{F}_k.x(t_k+iT), \qquad (2.30)$$

les $\mathcal{F}_k$ étant des matrices constantes

La matrice de monodromie du système en boucle fermée devient :

$$\Psi_{bf}(T,0) = \prod_{k=0}^{r-1} \left[\Phi(t_{k+1}, t_k) + W_A(t_{k+1}, t_k).\mathcal{F}_k \right] \qquad (2.31)$$

Equivalence d'atteignabilité :

On montre facilement que les systèmes (2.4) et le système (2.29) décrit par la paire $[\Phi(t_{k+1},t_k), W_A(t_{k+1},t_k)]$ sont d'atteignabilité (et de commandabilité) équivalente. Pour cela, on définit d'abord les matrices

$$B_{r-k-1} = \Phi(T,t_{k+1}).W_A(t_{k+1},t_k),\ pour\ k=0\ à\ r\text{-}1,$$
$$\mathcal{B} = [B_0, B_1,\dots,B_{r-1}] \qquad (2.32)$$

Proposition 2.11 : [CALICO & WIESEL, 1984]

L'atteignabilité du système (2.29) décrit par la paire $[\Phi(t_{k+1},t_k), W_A(t_{k+1},t_k)]$ *est équivalente à l'atteignabilité du système discret stationnaire décrit par la paire* $[\Phi(T,0),\mathcal{B}]$.

Proposition 2.12 : [KONO & SUZUKI, 1991]

Le système (2.29) est atteignable si et seulement si le système continu périodique (2.4) est atteignable (donc commandable).

Théorème 2.13 : [KONO & SUZUKI, 1991]

Les multiplieurs caractéristiques du système (2.4), c'est-à-dire les valeurs propres de $\Psi_{bf}(T,0)$*, peuvent être assignés à un ensemble de valeurs arbitraires* $\mathcal{M} = \{\mu'_1,\dots,\mu'_n\}$ *(où les* μ'_i *apparaissent en paires complexes conjuguées) par une loi de commande (2.28)(2.30)*

$$\forall\ t \in [t_k,t_{k+1}[\ et\ i \in \mathbf{N},\ u(t+iT) = F_k(t).\mathcal{F}_k.x(t_k+iT),$$

si et seulement si le système (2.4) est commandable.

La forme des $F_k(t)$ *donnée par l'équation (2.28) est une solution, et les matrices constantes* $\mathcal{F}_k$ *sont les solutions du placement de pôles calculées à partir de (2.31).*

L'équation (2.31) suggère donc qu'il faut résoudre le placement de pôles sur le système discret r-périodique (2.29) comme on le verra dans la section 2.3. Etudions les cas particuliers où l'hypothèse suivante est vérifiée :

Hypothèse :

$\forall\ k \in \{0,r\}$, $W_A(t_{k+1},t_k)$ *est inversible. Autrement dit, le système initial est commandable sur tous les intervalles* $[t_k,t_{k+1}[$.

Rappelons que cette hypothèse est vérifié en cas de commandabilité différentielle, notamment quand $A(t)$ et $B(t)$ sont analytiques. Avec cette hypothèse, il est possible de choisir arbitrairement la matrice de monodromie (2.31) en boucle fermée.

Soit une matrice $\Psi_{bf}(T,0)$ quelconque, On cherche $\mathcal{F}_k$ telle que l'équation (2.31) soit vérifiée. Introduisons la matrice Ψ racine r-ième de la matrice de monodromie :

$$\Psi_{bf}(T,0) = \Psi^r,$$

Cette matrice Ψ existe toujours dans le cas complexe [GANTMACHER, 1966]. Si on peut choisir la matrice Ψ réelle, alors le placement de multiplieurs a pour solution :

$$\forall\ k \in \{0,\dots,r-1\},\ \mathcal{F}_k = W^{-1}{}_A(t_{k+1},t_k).[\Psi - \Phi(t_k,t_{k+1})].$$

2.2.3.2. Exemple :

Reprenons l'exemple en § 2.2.2.4 où $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1+cos(\omega t) & -2 \end{bmatrix}$,$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+cos(\omega t) \end{bmatrix}$, et $\omega = 4$.

En choisissant $r = 3$, les instants $\{t_0 = 0, t_1 = \frac{T}{3}, t_2 = \frac{2T}{3}\}$ et la matrice $\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, on calcule les grammiens et les matrices de placement de pôles sur chaque intervalle $[t_k,t_k+1[$:

$$\Phi(t_1,t_0) = \begin{bmatrix} 0.9650 & 0.3165 \\ -0.2324 & 0.2874 \end{bmatrix}, W_A(t_1,t_0) = \begin{bmatrix} 0.0717 & 0.1201 \\ 0.1201 & 0.2901 \end{bmatrix}, F_0 = \begin{bmatrix} -48.3020 & -8.9938 \\ 20.7922 & 2.7316 \end{bmatrix},$$

$$\Phi(t_2,t_1) = \begin{bmatrix} 0.8241 & 0.2976 \\ -0.5454 & 0.2288 \end{bmatrix}, W_A(t_2,t_1) = \begin{bmatrix} 0.0012 & 0.0016 \\ 0.0016 & 0.0130 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} -891.8650 & -269.6548 \\ 151.6365 & 15.6370 \end{bmatrix},$$

$$\Phi(T,t_2) = \begin{bmatrix} 0.9205 & 0.3165 \\ -0.1435 & 0.3319 \end{bmatrix}, W_A(T,t_2) = \begin{bmatrix} 0.0299 & 0.0996 \\ 0.0996 & 0.6454 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} -65.0152 & -18.2977 \\ 10.2609 & 2.3110 \end{bmatrix},$$

On vérifie que l'état du système s'annule à $t \sim \frac{T}{3}$. L'utilisation de la méthode de Kabamba ou de Rahmani annulerait $x(t)$ en un instant supérieur ou égal à la période T.

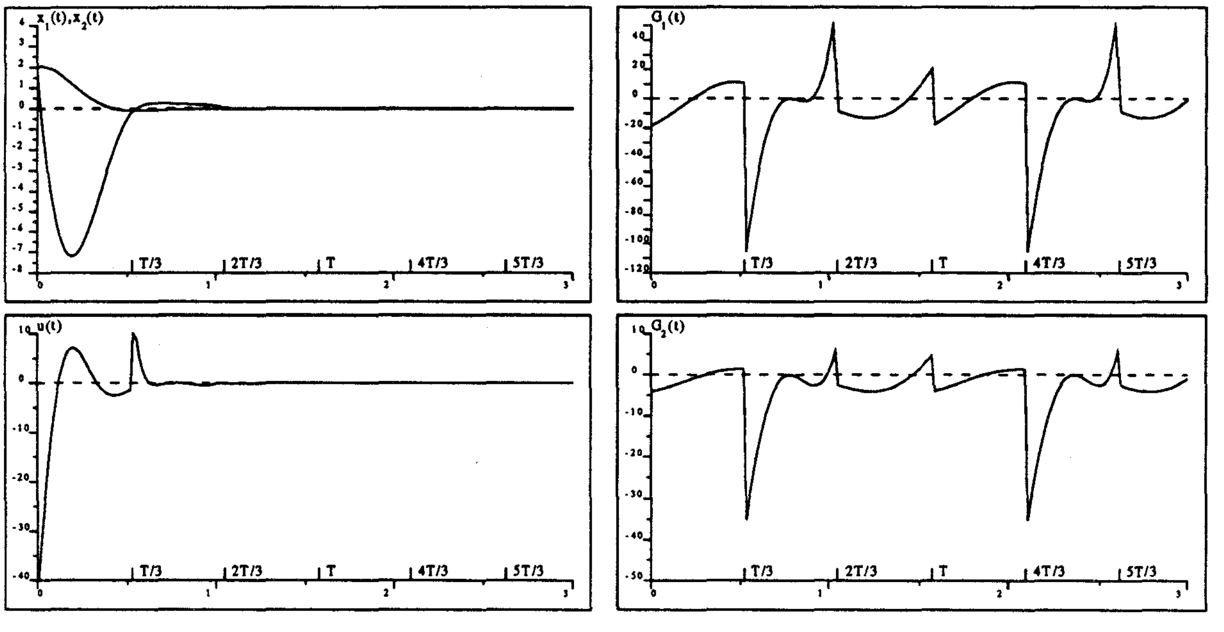


Figure 2.9. $x(t)$, la commande $u(t)$ et le gain de bouclage $G(t) = [G_1(t),G_2(t)]$.

Commande non optimale.

2.3. Reconstructeur d'état

Soit le système linéaire continu périodique (2.4). On rappelle que l'évolution de son état au cours du temps est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = \Phi(t,t_0).\, x(t_0) + f(t,t_0,u) \\ y(t) = C(t).\Phi(t,t_0).\, x(t_0) + C(t).f(t,t_0,u) \end{cases} \tag{2.33}$$

$$\text{où } f(t,t_0,u) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau).B(\tau).u(\tau).d\tau$$

2.3.1. Estimateur avec bouclage permanent :

En implantant un estimateur d'état selon le schéma de la figure 2.1 avec un gain $L(t)$ T-périodique,

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t).\xi + B(t).u(t) + L(t).[y(t) - \tilde{y}(t)],$$

la différence $\delta x(t)$ entre l'état réel et l'état estimé vérifie :

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = [A(t) - L(t).C(t)].\delta x \tag{2.34}$$

Le problème reviendra donc à un placement de multiplieurs caractéristiques par bouclage continu de $[A^T(t), C^T(t)]$. La résolution fera appel aux méthodes que nous avons déjà exposées à la section § 2.2.1., avec les mêmes restrictions et hypothèses sur $A(t)$ et $C(t)$.

2.3.2. Estimateur avec bouclage périodique :

Pour la stabilisation des systèmes linéaires périodiques, on a montré que la mesure échantillonnée de $x(t)$ est suffisante. Comme la connaissance de $y(t_0+kT)$, $k \in \mathbf{N}$, ne permet la stabilisation que sous la forte hypothèse de commandabilité de $[\Phi(t_0+T,t_0), C(t_0)]$ (voir § 2.1.1, commande par G.S.H.F.), nous allons étudier un estimateur d'état qui suit l'historique de $y(t)$ et $u(t)$, $t \in [t_0+kT, t_0+(k+1)T[$ de telle manière que l'état estimé à chaque fin de période $\xi(t_0+kT)$ tende vers $x(t_0+kT)$. Un schéma analogue à la figure 2.1. sera difficile à résoudre car l'évolution de l'erreur est

$$\delta x(t) = \Phi(t,t_0).\delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau).L(\tau).C(\tau).\delta x(\tau).d\tau$$

où la fonction $\delta x(.)$ apparait des deux côtés de l'égalité.

Pour éviter une intégration itérative, il faut obtenir dans la partie intégrale une fonction indépendante de $\delta x(t)$. Si on considère le schéma de la figure 2.10. ci-dessous, l'évolution du système est donné par les équations

$$\begin{cases} \xi_1(t) = \Phi(t,t_0+kT).\ \xi_1(t_0+kT) + f(t,t_0+kT,\boldsymbol{u}) \\ \tilde{y}(t) = C(t).\Phi(t,t_0+kT).\ \xi_1(t_0+kT) + C(t).f(t,t_0+kT,\boldsymbol{u}) \end{cases}$$

et

$$\xi_2(t) = \Phi(t,t_0+kT).\ \xi_2(t_0+kT) + f(t,t_0+kT,\boldsymbol{u}) + \int_{t_0+kT}^{t} \Phi(t,\tau).L(\tau).[y(\tau) - \tilde{y}(\tau)].d\tau \qquad (2.35)$$

en plus des équations (2.33).

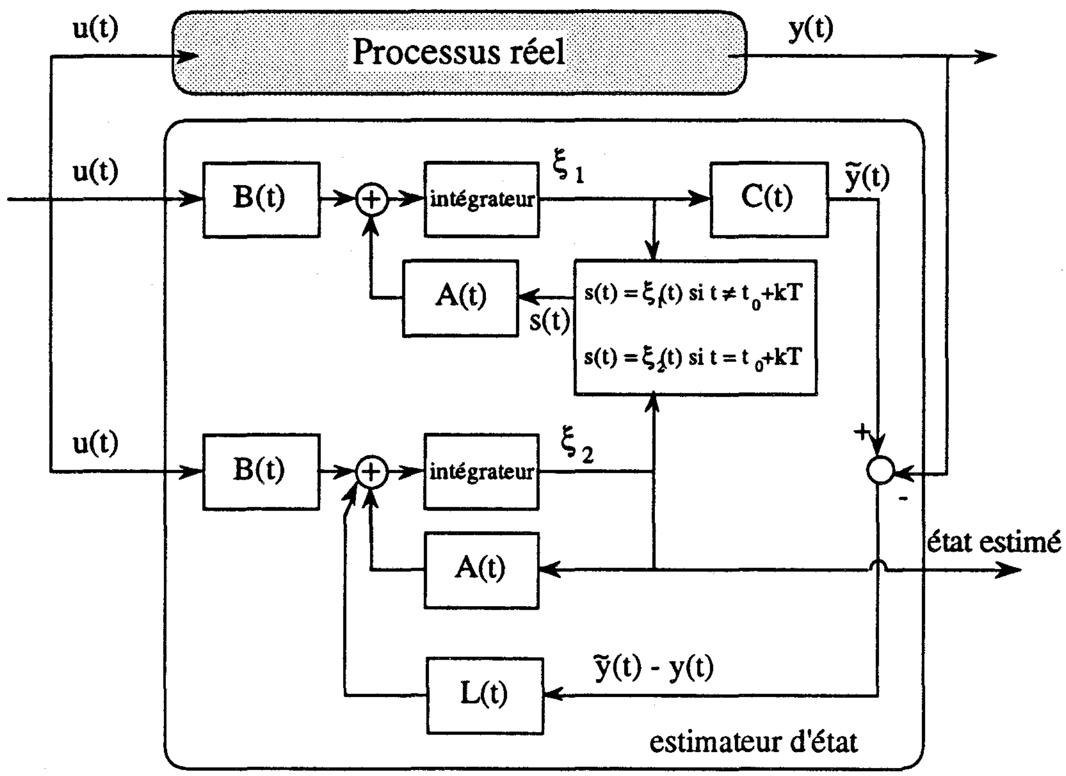


Figure 2.10. Principe du reconstructeur d'état discret périodique.

Ainsi :

$$\xi_2(t) = \Phi(t,t_0+kT).\xi_2(t_0+kT) + f(t,t_0+kT,\boldsymbol{u}) + \int_{t_0+kT}^{t} \Phi(t,\tau).L(\tau).C(\tau).\Phi(\tau,t_0+kT).d\tau).[\xi_1(t_0+kT) - \boldsymbol{x}(t_0+kT)]$$

Considérons maintenant, $\delta x'(t) = x(t) - \xi_2(t)$, la différence entre l'état réel et l'état estimé à un instant t. On montre que $\delta x'(t)$ vérifie

$$\delta x'(t) = \Phi(t,t_0+kT).\delta x'(t_0+kT) + \int_{t_0+kT}^{t} \Phi(t,\tau).L(\tau).C(\tau).\Phi(\tau,t_0+kT).d\tau.[\xi_1(t_0+kT) - x(t_0+kT)] \quad (2.36)$$

Le système en $\xi_1(t)$ fonctionne en boucle ouverte sur l'intervalle $]t_0+kT, t_0+(k+1)T[$. Il est reinitialisé aux instants t_0+kT de telle sorte que :

$$\forall\ k \in \mathbf{N},\ \xi_1(t_0+kT) = \xi_2(t_0+kT).$$

Finalement,

$$\delta x'(t_0+(k+1)T) = \left[\Phi(t_0+T,t_0) + \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(t,\tau).L(\tau).C(\tau).\Phi(\tau,t_0).d\tau\right].\delta x'(t_0+kT) \quad (2.37)$$

Etant donné que le système en $\delta x'(t)$ est aussi T-périodique, le problème du reconstructeur d'état consistera donc à choisir la fonction $L(t)$ telle que la matrice de monodromie

$$\Phi_{RC}(t_0+T,t_0) = \Phi(t_0+T,t_0) + \int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(t_0+T,\tau).L(\tau).C(\tau).\Phi(\tau,t_0).d\tau$$

soit asymptotiquement stable.

Solution du reconstructeur d'état :

Si on choisit $L(t)$ de la forme :

$$\forall\ \tau \in [t_0,t_0+T[,\ L(\tau) = \Phi^{-1}(t_0+T,\tau).L.\Phi^{\mathrm{T}}(\tau,t_0).C^{\mathrm{T}}(\tau) \quad (2.38)$$

où L est une matrice constante de dimension appropriée,

alors, la matrice de monodromie (2.35) devient

$$\Phi_{RC}(t_0+T,t_0) = \Phi(t_0+T,t_0) + L.W_O(t_0;t_0+T) \quad (2.39)$$

D'où la proposition suivante ,

Proposition 2.14 :

1) On peut calculer la matrice $L(t)$ de la forme (2.38) telle que la matrice de monodromie (2.39) du reconstructeur d'état soit asymptotiquement stable si et seulement si le système linéaire continu périodique (2.4) décrit par la paire $[A(t),C(t)]$ est détectable, ou de façon équivalente si le système linéaire stationnaire décrit par la paire $[\Phi(t_0+T,t_0),W_O(t_0,t_0+T)]$ est détectable.

2) La matrice de monodromie $\Phi_{RC}(t_0+T,t_0)$ de l'équation (2.39) peut être choisie arbitrairement si et seulement si le système (2.4) est observable sur une période. Dans ce cas, le grammien $W_O(t_0,t_0+T)$ est inversible et la matrice L est égale à

$$L = W_O^{-1}(t_0,t_0+T).[\Phi_{RC}(t_0+T,t_0) - \Phi(t_0+T,t_0)].$$

La démonstration est évidente à partir de (2.38) et (2.39). Notons cependant que la fonction $L(t)$ de l'équation (2.38) n'est pas l'unique solution. On remarque que cette solution dépend *a priori* de l'instant de référence t_0.

Etude de l'indépendance des multiplieurs caractéristiques par rapport à t_0 :

Comparons deux solutions $L_0(t)$ et $L_1(t)$ correspondant respectivement aux instants t_0 et $t_1 > t_0$. Soient L_0 et L_1 les matrices constantes telles que :

$$L_0(\tau) = \Phi^{-1}(t_0+T,\tau).L_0.\Phi^{T}(\tau,t_0).C^{T}(\tau),$$

$$L_1(\tau) = \Phi^{-1}(t_1+T,\tau).L_1.\Phi^{T}(\tau,t_1).C^{T}(\tau). \qquad (2.40)$$

A partir de (2.38), $L_1(\tau)$ peut être rapporté à l'instant t_0 et mis sous la forme :

$$L_1(\tau) = \Phi^{-1}(t_0+T,\tau).L'_0.\Phi^{T}(\tau,t_0).C^{T}(\tau),$$

en définissant la matrice

$$L'_0 = \Phi(t_0,t_1).L_1.\Phi^{T}(t_0,t_1). \qquad (2.41)$$

D'un autre côté, l'expression de $\Phi_{RC}(t_1+T,t_1)$ donne :

$$\begin{aligned}\Phi_{RC}(t_1+T,t_1) &= \Phi(t_1,t_0).\Big[\Phi(t_0+T,t_0) + \Phi(t_0,t_1).L_1.\Phi^{T}(t_0,t_1).W_O(t_0,t_0+T)\Big].\Phi(t_0,t_1)\\ &= \Phi(t_1,t_0).\Big[\Phi(t_0+T,t_0) + L'_0.W_O(t_0,t_0+T)\Big].\Phi(t_0,t_1).\end{aligned}$$

On retrouve ici aussi la même expression de L'_0 qu'en (2.41). Ainsi, si $L'_0 = L_0$, la matrice de monodromie $\Phi_{RC}(t_1+T,t_1)$, pour une commande à partir de t_1 avec la matrice L_1, est semblable à $\Phi_{RC}(t_0+T,t_0)$, pour une commande à partir de t_0 avec la matrice L_0. Les matrices $L_0(t)$ et $L_1(t)$ définissent donc la même loi de commande : en assignant les valeurs propres de $\Phi_{RC}(t_0+T,t_0)$, on assigne celles de $\Phi_{RC}(t_1+T,t_1)$ aux mêmes valeurs, L_0 et L_1 étant reliées par l'équation (2.41).

Proposition 2.15 :

Les multiplieurs caractéristiques du reconstructeur d'état, sont uniquement définies par le choix de $\Phi_{RC}(t_0+T,t_0)$ et sont indépendants de l'instant initial de référence t_0. On a alors :

$$\Phi_{RC}(t_0+T,t_0) = \Phi(t_0+T,t_0) + L_0.W_O(t_0;t_0+T),$$

$$\forall t_1 \in [0,T],\ \Phi_{RC}(t_1+T,t_1) = \Phi(t_1,t_0).\Phi_{RC}(t_0+T,t_0).\Phi(t_0,t_1).$$

Remarque :

Ce bouclage du reconstructeur d'état est un bouclage continu dans le sens où la différence entre les sorties $y(t)$ et $\tilde{y}(t)$ est mesurée de façon continue.

2.4. Systèmes linéaires périodiques discrets :

On sait que la différence essentielle entre les systèmes linéaires continus et discrets vient de l'éventuelle non-reversibilité de ces derniers. Néanmoins, pour n'importe quel système linéaire périodique continu ou discret, on a pu montrer une équivalence des propriétés avec un système stationnaire, soit : le système linéaire discret stationnaire $[\Phi(t_0+T,t_0), W_A(t_0+T,t_0)]$ ou $[\Psi(k_0+T,k_0), W_A(k_0+T,k_0)]$ pour les problèmes de commande, et $[\Phi(t_0+T,t_0), W_O(t_0;t_0+T)]$ ou $[\Psi(k_0+T,k_0), W_O(k_0;k_0+T)]$ pour les problèmes d'observation et de reconstruction d'état. On peut donc transposer au cas discret les résultats obtenus précédemment, notamment la loi de commande S.S.P.H. :

$$\forall\, r \in \mathbf{N} \text{ et } k \in [rT,\ (r+1)T],\ u_k = B_k^{\mathrm{T}} \Psi^{\mathrm{T}}(T,k).F.x_{rT}$$

où F est la matrice de placement de pôles de $[\Psi(k_0+T,k_0), W_A(k_0+T,k_0)]$.

Cependant, le reconstructeur d'état que nous avons défini au § 2.2.3. exige la réversibilité du système. On va donc introduire une autre représentation stationnaire discret du système.

2.4.1. Reformulation en linéaire stationnaire discrète :

Soit le système linéaire discret T-périodique

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \\ y_k = C_k x_k \end{cases} \tag{2.42}$$

La période T est ici un nombre entier positif. Fixons l'instant initial à k_0.

Pour $r \in \mathbf{Z}$, on définit les vecteurs :

$$\xi_r = x_{k_0+rT} \in \mathbf{R}^n$$

$$\gamma_r = \begin{bmatrix} y_{k_0+rT} \\ y_{k_0+1+rT} \\ \dots \\ y_{k_0+T-1+rT} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{Tl},\ et\ v_r = \begin{bmatrix} u_{k_0+rT} \\ u_{k_0+1+rT} \\ \dots \\ u_{k_0+T-1+rT} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{Tm}, \tag{2.43}$$

γ_r et v_r sont respectivement formés à partir de la mesure des sorties et de la commande sur une période $[k_0+rT, k_0+(r+1)T[$.

A partir de (2.42)-(2.43) et en fixant k_0, on obtient le système discret stationnaire

$$\begin{cases} \xi_{r+1} = \mathcal{A}\xi_r + \mathcal{B}v_r \\ \gamma_r = \mathcal{C}\xi_r + \mathcal{D}v_r \end{cases} \tag{2.44}$$

où $\mathcal{A} = \Psi_A(k_0+T, k_0) \in \mathbf{R}^{nxn}$,

$\mathcal{B} = [\mathcal{B}_1\ \mathcal{B}_2\ \dots\ \mathcal{B}_T] \in \mathbf{R}^{nxTm}$, *avec* $\mathcal{B}_i = \Psi_A(k_0+T, k_0+i)B_{k_0+i-1}$, $i = 1$ *à* T,

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_2 \\ \dots \\ \mathcal{C}_T \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{Tlxn},\ avec\ \mathcal{C}_i = \mathrm{C}_{k_0+i-1}\Psi_A(k_0+i-1, k_0),\ i = 1\ à\ T,$$

$\mathcal{D} \in \mathbf{R}^{TlxTm}$ *une matrice dont chaque bloc* $\mathcal{D}_{ij} \in \mathbf{R}^{lxm}$ *est défini par*

$$\mathcal{D}_{ij} = \begin{cases} C_{k_0+i-1}\Psi_A(k_0+i-1, k_0+j)B_{k_0+j-1}\ pour\ i < j, \\ 0\ pour\ i \geq j, \end{cases} \qquad où\ i, j = 1\ à\ T.$$

Cette reformulation est donc un échantillonnage de l'état à chaque période avec en plus la considération de l'historique de u_k et de y_k. On souligne que le système (2.44) dépend de l'instant initial k_0. Rappelons aussi que la détectabilité et la stabilisabilité des systèmes linéaires discrets périodiques ne dépendent pas de l'instant initial k_0 alors que les propriétés d'observabilité et d'atteignabilité en dépendent. On peut cependant mettre en évidence des équivalences de propriétés entre les deux systèmes.

Equivalence de propriétés :

1) Le système linéaire stationnaire (2.44) est asymptotiquement stable si et seulement si le système linéaire périodique (2.42) est asymptotiquement stable.
2) Le système périodique (2.42) est stabilisable si et seulement si le système stationnaire (2.44) l'est.
3) Le système périodique (2.42) est détectable si et seulement si le système stationnaire (2.44) l'est.
4) Les sous-espaces atteignables $\mathcal{X}_A[k_0]$ à l'instant k_0 des systèmes (2.42) et (2.44) coincident.
5) Les sous-espaces observables $\mathcal{X}_O[k_0]$ à l'instant k_0 des systèmes (2.42) et (2.44) coincident.

Les propriétés 1), 2), et 3) sont indépendantes de k_0.

2.4.2. Stabilisation par retour d'état :

Utilisons maintenant le système stationnaire (2.44) pour le placement de pôles.

Théorème 2.16 : [COLANERI, 1991]

Si n_A est la dimension du sous-espace atteignable à l'instant k_0 du système (2.42) décrit par $[A_k,B_k]$, alors

1) Pour n'importe quel ensemble $\mathcal{M}$ de n_A valeurs complexes (en paires conjuguées), il existe une fonction T-périodique $F_k \in \mathbf{R}^{m\mathrm{x}n}$, $k = 1$ à T, telle que les multiplieurs caractéristiques du système en boucle fermée constituent l'ensemble $\mathcal{M}$.

2) Il existe une fonction T-périodique $F_k \in \mathbf{R}^{m\mathrm{x}n}$, $k = 1$ à T, telle que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable si et seulement si la paire $[A_k,B_k]$ est stabilisable.

Dans le cas où ξ_r est mesurable, le système (2.44) fournit rapidement une solution à la stabilisation avec la loi de commande

$$v_r = \mathcal{F}.\xi_r,\ où\ \mathcal{F} \in \mathbf{R}^{Tm\mathrm{x}n} \tag{2.45}$$

telle que la matrice d'évolution du système (2.44), donc la matrice de monodromie de (2.42) en boucle fermée, soit asymptotiquement stable. Cette matrice est donnée par

$$\Psi_{bf} = \mathcal{A} + \mathcal{B}.\mathcal{F}.$$

L'existence de $\mathcal{F}$ est assurée si la paire $[\mathcal{A},\mathcal{B}]$, ou de manière équivalente la paire $[A_k,B_k]$, est stabilisable. Si on décompose alors $\mathcal{F}$ en T blocs,

$$F_i \in \mathbf{R}^{l\mathrm{x}n},\ i = 1\ à\ T,\ avec\ \mathcal{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_T \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{Tl\mathrm{x}n},$$

La matrice de monodromie peut être aussi écrite sous la forme

$$\Psi_{bf} = \mathcal{A} + \mathcal{B}.\mathcal{F} = \Psi_A(k_0+T,k_0) + \sum_{i=1}^{T} \mathcal{B}_i F_i \tag{2.46}$$

La loi de commande sur le système initial (2.42) est définie par un bouclage périodique

$$\forall\ r \in \mathbf{N}\ et\ k \in [k_0+rT, k_0+(r+1)T[,\ u_{k+rT} = F_k.x_{k_0+rT} \tag{2.47}$$

$$avec\ F_k = F_{k+T}$$

Comparaison avec la commande S.S.P.H. :

1) Ici, on n'a plus besoin de calculer le grammien d'atteignabilité de (2.42). La propriété d'atteignabilité est directement vérifiée sur le système stationnaire (2.44).

2) Les deux lois de commande utilisent l'échantillonnage de l'état à chaque période. Le gain F_k est donc analogue au terme $B_k^{\,T}\Psi^T(T,k).F$ rencontré dans la commande S.S.P.H.. Cette astuce de calcul n'est plus d'aucune utilité dans le cas discret car les équations sont plus simples à établir.

3) A la différence de la commande S.S.P.H., on ne peut commander que les valeurs des multiplieurs caractéristiques et non la matrice Ψ_{bf} en entier.

2.4.3. Reconstructeur d'état :

Théorème 2.17 : [COLANERI, 1991]

Si n_O est la dimension du sous-espace observable à l'instant k_0 du système (2.42) décrit par $[A_k,C_k]$, alors

i) Pour n'importe quel ensemble $\mathcal{M}$ de n_O valeurs complexes (en paires conjuguées), il existe une fonction T-périodique $L_k \in \mathbf{R}^{n\mathrm{x}l}$, $k=1$ à T, telle que les multiplieurs caractéristiques du reconstructeur d'état constituent l'ensemble $\mathcal{M}$.

2) Il existe une fonction T-périodique $L_k \in \mathbf{R}^{n\mathrm{x}l}$, $k=1$ à T, telle que le reconstructeur d'état soit asymptotiquement stable si et seulement si la paire $[A_k,C_k]$ est détectable.

Reprenons le système (2.44). Soit l'estimateur de l'état ξ_r régi par l'équation

$$\tilde{\xi}_{r+1} = \mathcal{A}\tilde{\xi}_r + \mathcal{B}v_r + \mathcal{L}(\mathcal{C}\tilde{\xi}_r - \gamma_r + \mathcal{D}v_r), \qquad (2.48)$$

où γ_r est la sortie réelle du système (2.44) et $\mathcal{L} \in \mathbf{R}^{n\mathrm{x}Tl}$

La différence entre l'état estimé et l'état réel de (2.44) est

$$\delta\xi_r = \xi_r - \tilde{\xi}_r \text{ et vérifie } \delta\xi_{r+1} = (\mathcal{A} + \mathcal{L}\mathcal{C}).\delta\xi_r \qquad (2.49)$$

Si le système $[\mathcal{A},\mathcal{C}]$ est détectable, c'est-à-dire si $[A_k,C_k]$ l'est, on peut calculer $\mathcal{L}$ telle que la matrice $\mathcal{A} + \mathcal{L}\mathcal{C}$ soit asymptotiquement stable.

On définit alors la fonction T-périodique $L_i \in \mathbf{R}^{n\mathrm{x}l}$, $i = 0$ à T-1, telle que $\mathcal{L} = [L_0, L_1, \ldots, L_{T-1}]$. A partir des définitions de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, on montre que le système (2.48) est équivalent à :

$$\tilde{x}_{k_0+(r+1)T} = \Psi_A(k_0+T,k_0).\,\tilde{x}_{k_0+rT} + \sum_{i=0}^{T-1} \Psi_A(k_0+T,k_0+i+1)B_{k_0+i}.u_{k_0+i+rT}$$
$$+ \sum_{i=0}^{T-1} L_i.C_{k_0+i}\left\{\Psi_A(k_0+i,k_0).\,\tilde{x}_{k_0+rT} + \sum_{j=0}^{i-1} \Psi_A(k_0+i,k_0+j+1)B_{k_0+j}.u_{k_0+j+rT}\right\}$$
$$+ \sum_{i=0}^{T-1} L_i.y_{k_0+i+rT'} \qquad (2.50)$$

L'expression entre accolades correspond à une réponse en boucle ouverte du système $[A_k,B_k]$. D'où le schéma du reconstructeur d'état suivant :

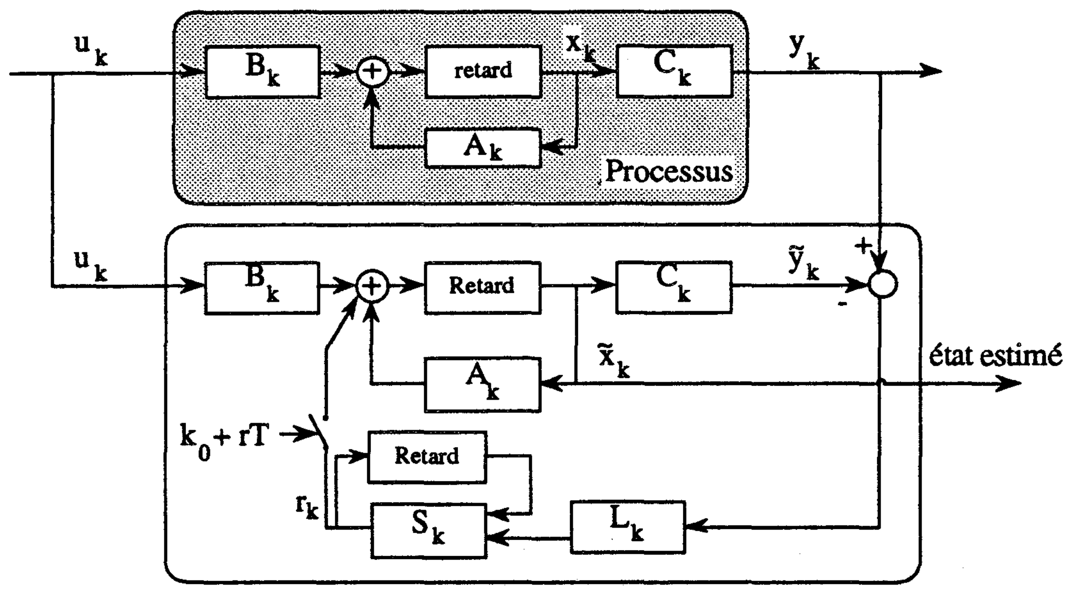


Figure 2.11. schéma du reconstructeur d'état discret périodique

dont les équations de récurrence sont

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = A_k\,\tilde{x}_k + B_k\,u_k + R_{k+1}.r_{k+1} \\ r_{k+1} = S_k\,r_k + L_k.[C_k.\tilde{x}_k - y_k] \end{cases} \qquad (2.51)$$
$$avec\ S_k = \begin{cases} 0\ pour\ k = k_0+rT, \\ Id\ pour\ k \neq k_0+rT \end{cases} \quad et\ R_k = Id - S_k.$$

La différence entre l'état estimé et l'état réel de (2.42) à chaque fin de période est caractérisé par

$$\delta x_k = x_k - \tilde{x}_k$$
$$avec\ \delta x_{k_0+(r+1)T} = (\mathcal{A} + \mathcal{L}.\mathcal{C}).\delta x_{k_0+rT} \qquad (2.52)$$
$$et\ \mathcal{A} + \mathcal{L}.\mathcal{C} = \Psi_A(k_0+T,k_0) + \sum_{i=1}^{T} L_i C_i$$

L'initialisation de r_k importe peu car la définition de la matrice S_k est telle que :

$$\forall\ 0 \leq i \leq T,\ \forall\ r \in \mathbf{N},\ \Psi_{S_k}(k_0+i+rT,k_0+rT) = 0,$$

$$\Psi_{S_k}(k_0+T,k_0) = 0 \ \textit{(la matrice de monodromie en } k_0\textit{)}$$

On peut rapidement vérifier que :

$$\forall\ 1 \leq i \leq T,\quad r_{k_0+i+rT} = \sum_{j=0}^{i-1} L_j[C_j.\tilde{x}_j - y_j],$$

$$r_{k_0+(r+1)T} = S_{k_0+rT}.r_{k_0+rT} + L_{k_0}[C_{k_0}.\tilde{x}_{k_0+rT} - y_{k_0+rT}] = L_{k_0}[C_{k_0}.\tilde{x}_{k_0+rT} - y_{k_0+rT}]$$

2.4.4. Stabilisation et placement de pôles avec reconstructeur d'état :

En unifiant les résultats en § 2.3.2. et § 2.3.3., on applique donc sur le système discret périodique (2.42) un bouclage de l'état estimé $\tilde{x}_k$. Ainsi,

$$\forall\ r \in \mathbf{N}\ et\ k \in [k_0+rT,k_0+(r+1)T[,\ u_k = F_k\tilde{x}_{k_0+rT} = F_k[x_{k_0+rT} - \delta x_{k_0+rT}]$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \\ \delta x_{k+1} = (A_k + R_{k+1}.\ L_k.C_k).\delta x_k \\ r_{k+1} = S_k r_k + L_k\ C_k.\delta x_k \end{cases}$$

On définit le vecteur

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ \delta x_k \\ r_k \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{3n},$$

On montre que X_k est une représentation de l'état du système en entier (2.42)(2.47)(2.50) dont la matrice de monodromie est définie par :

$$X_{k_0+(r+1)T} = \Psi_{\mathcal{A}_1}.X_{k_0+rT}, \tag{2.53}$$

$$\text{où } \Psi_{\mathcal{A}_1} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}+\mathcal{B}.\mathcal{F} & \mathcal{E}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}+\mathcal{L}.C & 0 \\ 0 & \mathcal{E}_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}+\mathcal{B}.\mathcal{F} = \Psi_A(k_0+T,k_0) + \sum_{i=1}^{T}\mathcal{B}_i F_i,$$

$$\mathcal{A}+\mathcal{L}.C = \Psi_A(k_0+T,k_0) + \sum_{i=1}^{T}L_i C_i,$$

et $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ deux matrices dont les valeurs importent peu.

D'où le théorème

Théorème 2.18 : [COLANERI, 1991]

Si n_A est la dimension du sous-espace atteignable à l'instant k_0 du système (2.42) décrit par $[A_k,B_k]$ et n_O est la dimension du sous-espace observable à l'instant k_0 du système (2.42) décrit par $[A_k,C_k]$, alors

1) Pour n'importe quel ensemble $\mathcal{M}$ de n_A+n_O valeurs complexes (en paires conjuguées), il existe deux fonctions T-périodiques $F_k \in \mathbf{R}^{m x n}$ et $L_k \in \mathbf{R}^{n x l}$, $k = 1$ à T, telle que les multiplieurs caractéristiques de $\Psi_{\mathcal{A}_1}$ constituent l'ensemble $\mathcal{M}$.

2) Il existe deux fonctions T-périodiques $F_k \in \mathbf{R}^{m x n}$ et $L_k \in \mathbf{R}^{n x l}$, $k = 1$ à T, telle que $\Psi_{\mathcal{A}_1}$ soit asymptotiquement stable si et seulement si la paire $[A_k,B_k]$ est stabilisable et la paire $[A_k,C_k]$ est détectable.

3. Etudes des cycles limites et orbites périodiques :

Les résultats des sections précédentes concernent surtout la stabilisation d'un point d'équilibre particulier : l'origine **0**. On sait que la propriété de stabilité d'un système linéaire ne dépend que de la matrice $A(t)$ (voir chapitre 1, § 1.2.1.2.), et est donc complètement définie par rapport à l'origine **0**. Or, les orbites périodiques constituent des variétés tout aussi intéressantes à étudier. Ce sont des ensembles invariants de points tout au long de l'évolution du système. Dans cette optique, le point d'équilibre est donc une orbite périodique singulière. Cependant, pour la généralité de l'étude, on considère que l'orbite périodique n'est pas réduite à un point.

L'objectif dans cette section est de deux ordres :

1) soit, trouver quand elle existe, la trajectoire périodique vers laquelle tend le système quand on applique une commande *u(t) donnée.*

2) ou inversement, trouver une loi de commande $u(t)$ telle que le système tend asymptotiquement vers une trajectoire périodique choisie.

Pour fixer les idées, on introduit d'abord les définitions suivantes :

Définitions :

i) On appelle cycle une trajectoire $x(t,t_0,x_0,u)$ périodique du système :

$$\exists\, T \in \mathbf{R}^+ \text{ tel que } \forall\, t \in \mathbf{R},\ x(t+T,t_0,x_0,u) = x(t,t_0,x_0,u).$$

ii) On appelle cycle limite la trajectoire $F(t)$ périodique (quand elle existe) vers laquelle tend l'état $x(t,t_0,x_0,u)$ du système quand t tend vers l'infini.

Les définitions données ci-dessus différent de ceux de Chiang, Hirsch et Wu [1988] où cycles et orbites périodiques sont confondus. Pour notre part, le cycle est une trajectoire, c'est-à-dire un état $F(t)$ qui évolue au cours du temps selon l'équation d'état du système tel que $F(t+T) = F(t)$, tandis que l'orbite périodique est l'ensemble de tous les points de cette trajectoire, c'est-à-dire l'image de ce cycle dans l'espace des phases. Cette distinction sera en effet nécessaire pour l'identification de la loi de commande $u(t)$.

On verra d'abord l'équation du cycle limite à partir de la connaissance de la loi de commande (§ 3.1.). On fera ensuite le lien (§ 3.2.) entre l'orbite périodique et cette trajectoire limite pour finalement déduire la loi de commande à appliquer à partir de la connaissance du cycle limite ou de l'orbite périodique (§ 3.3). On verra alors les conditions d'existence de la solution du problème 2) énoncé ci-dessus.

3.1. Equation du cycle limite :

Soit le système commandé en boucle ouverte :

$$\frac{dx}{dt} = A(t).x + f(t) \qquad (2.56)$$

avec $A(t) \in \mathbf{R}^{nxn}$ et $f(t) \in \mathbf{R}^n$ deux fonctions T-périodiques et intégrables, la matrice $A(t)$ est supposée asymptotiquement (exponentiellement) stable.

L'évolution au cours du temps est :

$$\forall\ t > \tau,\ x(t,f(.)) = \Phi(t,\tau).x(\tau) + \int_\tau^t \Phi(t,\sigma).f(\sigma).d\sigma \qquad (2.57)$$

Pour ne pas alourdir les notations, fixons l'instant initial à $\tau \in [0,T[$. Notons que le choix de l'instant initial $\tau < T$ n'est pas restrictif : si $\tau = \tau' + k'T$, il suffira de refaire les calculs en considérant la différence $k-k'$. Soient $s \in [0,T[$ et $k \in \mathbf{N}$ tels que $t = s + kT$, alors

$$\begin{aligned} x(s+kT,f(.)) &= \Phi(s+kT,\tau+kT).\Phi(\tau+kT,\tau).x(\tau) + \mathcal{F}(s,k,\tau), \qquad (2.58)\\ &= \Phi(s,\tau).\Phi^k(\tau+T,\tau).x(\tau) + \mathcal{F}(s,k,\tau), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(s,k,\tau) &= \int_\tau^{s+kT} \Phi(s+kT,\sigma).f(\sigma).d\sigma \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\tau+jT}^{\tau+(j+1)T} \Phi(s+kT,\sigma).f(\sigma).d\sigma + \int_{\tau+kT}^{s+kT} \Phi(s+kT,\sigma).f(\sigma).d\sigma \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \Phi(s+kT,s+jT). \int_{\tau+jT}^{\tau+(j+1)T} \Phi(s+jT,\sigma).f(\sigma).d\sigma + \int_{\tau+kT}^{s+kT} \Phi(s+kT,\sigma).f(\sigma).d\sigma \\ &= \int_\tau^s \Phi(s,\sigma).f(\sigma).d\sigma + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-j-1}(s+T,s) \int_\tau^{\tau+T} \Phi(s,\sigma).f(\sigma).d\sigma. \end{aligned}$$

A partir de là, l'équation du cycle limite est donc obtenu pour quand k tend vers l'infini. Quand le système est asymptotiquement stable, les valeurs propres de la matrice de monodromie $\Phi(\tau+T,\tau)$ sont toutes de modules inférieurs à 1. Ainsi,

$$\lim_{k\to\infty} \Phi^k(\tau+T,\tau) = 0.$$

On peut alors montrer que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^i(s+T,s) = \lim_{k\to\infty} [Id-\Phi^k(s+T,s)][Id-\Phi(s+T,s)]^{-1} = [Id-\Phi(s+T,s)]^{-1}.$$

D'où l'équation de $F(s)$, $s \in [0,T[$, à partir d'un instant initial quelconque τ fixé, et d'un vecteur T-périodique $f(t)$ donné :

$$F(s) = \lim_{k\to\infty} x(s+kT, f(.)) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(s,k,\tau)$$

Equation du cycle limite :

Par passage à la limite, on obtient l'expression :

$$\forall\ 0 \le s < T,\ et\ 0 \le \tau < T,$$

$$F(s) = \int_{\tau}^{s} \Phi(s,\sigma).f(\sigma).d\sigma + [Id - \Phi(s+T,s)]^{-1}.\int_{\tau}^{\tau+T} \Phi(s,\sigma).f(\sigma).d\sigma \qquad (2.59)$$

Cette équation ne nécessite que l'intégration sur une période de la fonction $\Phi(s,\sigma).f(\sigma)$. Elle montre que $F(s)$ existe toujours quand les hypothèses de (2.56) sont vérifiées.

Remarques :

1) $F(s)$ est continue par rapport à s.

2) On vérifie trivialement la T-périodicité de la trajectoire limite car

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(s,k+1,\tau) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(s,k,\tau).$$

Notons cependant que le passage de k à k+1 ne se traduit pas par le changement de s en $s+T$ dans l'équation (2.59) : cette équation n'est valide que pour $s < T$. Ceci s'explique par le fait qu'on ne différencie plus le point $F(s + kT)$ du point $F(s + (k+1)T)$ sur la trajectoire limite.

3) L'expression de $F(s)$ est indépendante de l'instant initial τ choisi. En effet,

$$F(s) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(s,k,\tau) = \lim_{k\to\infty} \int_{\tau}^{s+kT} \Phi(s+kT,\sigma).f(\sigma).d\sigma$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\int_{\tau'}^{s+kT} \Phi(s+kT,\sigma).f(\sigma).d\sigma + \int_{\tau}^{\tau'} \Phi(s+kT,\sigma).f(\sigma).d\sigma \right]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[\int_{\tau'}^{s+kT} \Phi(s+kT,\sigma).f(\sigma).d\sigma + \Phi^{k}(s+T,s).\int_{\tau}^{\tau'} \Phi(s,\sigma).f(\sigma).d\sigma \right]$$

$$F(s) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(s,k,\tau') + \lim_{k\to\infty} \left[\Phi^{k}(s+T,s)\right].\int_{\tau}^{\tau'} \Phi(s,\sigma).f(\sigma).d\sigma$$

en vérifiant *a posteriori* que les deux limites existent. Comme la deuxième partie s'annule effectivement à l'infini, on obtient le résultat escompté

$$F(s) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(s,k,\tau) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(s,k,\tau')$$

Cette propriété est évidente dans la mesure où la trajectoire (cycle) limite est complètement définie à partir de $f(\tau)$, $\tau \in \mathbf{R}$, $F(t)$ étant le point courant de cette trajectoire à l'instant t.

4) La convergence de $\boldsymbol{x}(s+kT)$ vers $F(s)$ s'effectue selon la dynamique de $\Phi(s+T,s)$, c'est-à-dire selon les multiplieurs caractéristiques du système (2.56). Elle est donc indépendante de l'instant courant s. Quand l'hypothèse d'asymptotique stabilité n'est pas vérifié, il faut auparavant stabiliser le système par un retour d'état (voir § 2.2).

3.2. Relation entre l'orbite périodique et le cycle limite :

L'orbite périodique est l'ensemble des points de la trajectoire cyclique, quand t varie sur $\mathbf{R}$. Elle peut donc être définie à l'aide d'une courbe paramétrique fermée. Dans ce cas, chaque point de l'orbite périodique est caractérisé par une fonction $\Omega(l)$, l étant l'abscisse curviligne. Le cycle limite est alors définie par la position du point courant $F(t)$ sur cet orbite périodique. Le passage de $\Omega(l)$ à $F(t)$ nécessite la définition de la relation temporelle $l = l(t,t_0,\boldsymbol{u})$. Cette relation fixe le sens et la vitesse de parcours sur l'orbite Ω. Ainsi :

$$F(t) = \Omega(l(t,t_0,\boldsymbol{u})).$$

Précisons que si L est la longueur de l'orbite, il faut que $L = l(t+T,t_0,\boldsymbol{u}) - l(t,t_0,\boldsymbol{u})$.
La figure 2.12 illustre tout ceci pour un exemple de système à deux dimensions (axes $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$). Le cycle limite est développé dans le temps selon l'axe t, ainsi que la trajectoire partant de l'état $\boldsymbol{x}_0$ à l'instant t_0.

Remarques :

L'orbite périodique peut inclure une infinité de cycles limites différenciés par la position du point courant $F(t)$. Ces cycles sont bien évidemment obtenus par des lois de commandes $f(t)$ différentes.

A partir du système (2.56), une infinité de fonctions $f(t)$ peuvent donner la même orbite périodique. Cependant, chaque $f(t)$ donne un cycle limite différent, c'est-à-dire un point $F(t)$ vers lequel l'état $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0 f(.))$ du système va tendre asymptotiquement. On dira abusivement que $F(t)$ est le point où $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0 f(.))$ ira toucher l'orbite périodique.

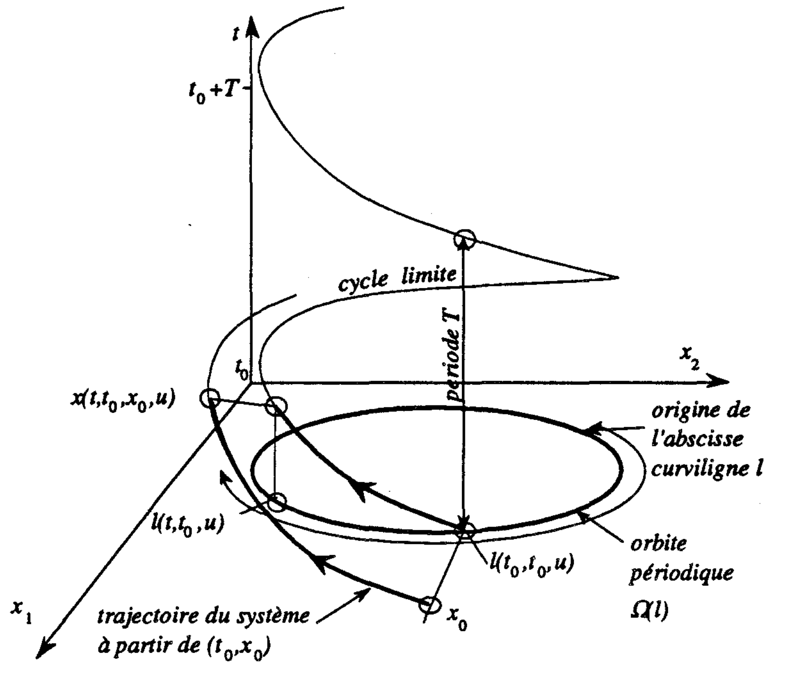


Figure 2.12. Trajectoire, orbite périodique et cycle limite.

3.3. Calcul de la loi de commande :

3.3.1. Calcul de $f(t)$ quand le cycle limite $F(t)$ est donné :

Le problème posé est l'inverse du paragraphe § 3.1 : Soit le cycle limite du système supposé asymptotiquement stable (2.56) caractérisé par la fonction $F(s)$ continue T-périodique, trouver le vecteur $f(t)$ T-périodique tel que $F(s)$ et $f(t)$ soient reliés par l'équation (2.59).

Dans la mesure où $F(s)$ est une trajectoire limite T-périodique du système (2.56), elle doit vérifier l'équation d'état :

$$\frac{d[F(t)]}{dt} = A(t).[F(t)] + f(t).$$

La solution en découle alors directement :

$$f(t) = \frac{d[F(t)]}{dt} - A(t).F(t). \qquad (2.60)$$

Remarque :

Au vue de la relation (2.59), $F(s)$ doit obligatoirement être continu en s. Si l'orbite périodique correspondante admet des points anguleux, sa dérivée est continue par morceaux. La relation (2.60) reste alors valable en admettant une fonction $f(t)$ avec des sauts aux points de discontinuité.

La relation (2.60) peut être mis en évidence en dérivant (2.59) par rapport à s. Posons

$$X = Id - \Phi(s+T,s).$$

Alors,

$$\frac{d[F(s)]}{ds} = A(s).\int_{\tau}^{s}\Phi(s,\sigma).f(\sigma).d\sigma + \Phi(s,s).f(s)$$

$$- X^{-1}.\frac{d[X]}{ds}.X^{-1}.\int_{\tau}^{\tau+T}\Phi(s,\sigma).f(\sigma).d\sigma + X^{-1}.A(s).\int_{\tau}^{\tau+T}\Phi(s,\sigma).f(\sigma).d\sigma,$$

or,

$$\frac{d[X]}{ds} = -\frac{d[\Phi(s+T,s)]}{ds} = -[A(s+T).\Phi(s+T,s) - \Phi(s+T,s).A(s)] = [A(s).X - X.A(s)],$$

d'où

$$\frac{d[F(s)]}{ds} = A(s).\int_{\tau}^{s}\Phi(s,\sigma).f(\sigma).d\sigma + f(s) + A(s).X^{-1}.\int_{\tau}^{\tau+T}\Phi(s,\sigma).f(\sigma).d\sigma.$$

En réutilisant (2.59), on obtient

$$\frac{d[F(s)]}{ds} = A(s).F(s) + f(s).$$

3.3.2. Orbite périodique compatible avec un système $[A(t),B(t)]$ donné :

Revenons maintenant au système linéaire périodique asymptotiquement stable décrit par la paire $[A(t),B(t)]$. Soit $F(t)$ un cycle limite de ce système, et $\Omega(l)$ l'orbite périodique correspondant. On a vu que $F(t)$ est relié à $\Omega(l)$ en donnant la relation $l = l(t,t_0)$:

$$F(t) = \Omega(l(t,t_0)).$$

En vertu de la relation (2.60), la loi de commande qui convient doit vérifier :

$$B(t).u(t) = f(t) = \frac{d[\Omega(l(t,t_0))]}{dt} - A(t).[\Omega(l(t,t_0))] \qquad (2.61)$$

Cette relation montre clairement que le choix de $F(t)$ ou de $\Omega(l)$ dépend de la forme de $B(t)$ pour pouvoir trouver la commande $u(t)$.

Définitions :

1) Soit un cycle limite $F(t)$ quelconque. Ce cycle limite est dit *compatible* avec le système Σ décrit par la paire $[A(t),B(t)]$ si et seulement s'il est possible de calculer une loi de commande $u(t)$ de Σ telle que $u(t)$ et $F(t)$ soient reliées par l'équation (2.60).

2) Une orbite périodique $\Omega(l)$ quelconque est dite *compatible* avec le système Σ décrit par la paire $[A(t),B(t)]$ si et seulement s'il existe une fonction $l(t,t_0)$ telle que le cycle limite $F(t) = \Omega(l(t,t_0))$ soit compatible avec Σ.

Cette compatibilité n'est pas due à la commandabilité du système Σ, elle ne dépend que de la forme de la matrice $B(t)$ et du cycle limite choisi : En effet, même si Σ n'est pas commandable, un cycle limite compatible avec Σ existe toujours quand ce système est asymptotiquement stable. Cependant, si l'existence de cycle limite est trivialement vérifié à partir d'une commande périodique quelconque, la détermination de $u(t)$ à partir de $\Omega(l)$ *quelconque* n'est pas toujours possible.

Conditions suffisantes de compatibilité de $B(t)$ et de $\Omega(l)$, $l = l(t,t_0)$:

Soit le système $[A(t),B(t)]$ où $A(t) \in \mathbf{R}^{nxn}$ et $B(t) \in \mathbf{R}^{nxm}$. On suppose que :

i) $1 < m < n$,
ii) $\forall\, t \in \mathbf{R}$, *rang* $[B(t)] = m$.
iii) *$B(t)$ est continue et bornée sur* $[0,T]$.

Dans ce cas, il existe une matrice $Q(t)$ T-périodique et inversible telle que :

$$\forall\, t \in \mathbf{R},\ B(t) = Q(t).B$$
$$\text{où } B = \begin{bmatrix} Id_m \\ 0 \end{bmatrix},\ Id_m \text{ est la matrice identité d'ordre } m.$$

En effet, soient $B_i(t)$ sont les m vecteurs colonnes de $B(t)$. On complète $\{B_i(t),\ i = 1 \text{ à } m\}$ par n-m vecteurs $e_j(t)$ de telle sorte que $\{B_i(t),e_j(t)\}$ forment une base de $\mathbf{R}^n$. $Q(t)$ est alors la matrice dont les colonnes sont $q_i(t) = B_i(t)$, pour $i = 1$ à m et $q_{m+j}(t) = e_j(t)$, $j = 1$ à n-m. Posons $R(t) = Q^{-1}(t)$, et partitionnons $f(t)$ et $R(t)$ en blocs :

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \text{ et } R(t) = \begin{bmatrix} R_1(t) & R_2(t) \\ R_3(t) & R_4(t) \end{bmatrix},$$
$$\text{avec } f_1(t) \in \mathbf{R}^m,\ R_1(t) \in \mathbf{R}^{mxm},\ R_4(t) \in \mathbf{R}^{(n-m)x(n-m)}.$$

L'équation (2.61) devient

$$\left\{ \begin{aligned} u(t) &= R_1(t).f_1(t) + R_2(t).f_2(t), \\ 0 &= R_3(t).f_1(t) + R_4(t).f_2(t), \end{aligned} \right. \tag{2.62}$$

ou encore :

$$\left\{ \begin{aligned} u(t) &= [R_1(t) - R_2(t).R_4^{-1}(t).R_3(t).].f_1(t) \\ f_2(t) &= -\ R_4^{-1}(t).R_3(t).f_1(t). \end{aligned} \right. \tag{2.62'}$$

si $R_4(t)$ est inversible.

La deuxième partie de (2.62) ou de (2.62') impose donc n-m relations entre les coordonnées de $f(t)$, c'est-à-dire entre $\dfrac{\mathrm{d}[\Omega(l(t,t_0,\boldsymbol{u}))]}{\mathrm{dt}}$ et $\Omega(l(t,t_0,\boldsymbol{u}))$. Ces relations constituent la condition suffisante de compatibilité entre $B(t)$ et $\Omega(l)$ où $l = l(t,t_0)$.

Proposition 2.19 :

$B(t)$ et $\Omega(l)$, $l = l(t,t_0)$, sont compatibles si elles respectent l'équation algébrique de (2.62) *ou de* (2.62').

Remarques :

1) On suppose que $\forall\ t \in \mathbf{R}$, $rang\{B(t)\} = r_t$, où $1 \leq r_t < n$ et $r_t < m$. On note que l'entier r_t peut dépendre du temps. Sous l'hypothèse iii) de continuité de $B(t)$, on peut mettre en évidence une suite d'instants $0 \leq t_i \leq T$, $i = 1$ à q, tels que r_t et les indices i_j, $j = 1$ à r_t, des colonnes linéairement indépendantes de $B(t)$ restent constants sur chaque sous-intervalle $]\, t_i, t_{i-1}[$. On extrait alors de $B(t)$ ces r_t colonnes linéairement indépendantes $B_{i_j}(t)$, $j = 1$ à r_t et on définit la nouvelle matrice et le nouveau vecteur de commande :

$$\tilde{B}(t) = \{B_{i_j}(t), j = 1 \text{ à } r_t\} \text{ et } \tilde{\boldsymbol{u}}(t) = \{u_{i_j}(t), j = 1 \text{ à } r_t\}$$

Sur chaque intervalle $]\, t_i, t_{i-1}[$, on obtient $\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$ et une condition de compatibilité en utilisant $\tilde{B}(t)$ et $\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$ dans l'équation (2.62). La loi de commande $\boldsymbol{u}(t)$ peut ainsi être calculée par morceaux :

$$\forall\ t \in\ ]\, t_i, t_{i-1}[,\ \forall\ k \in \{1,\ldots,m\},$$
$$\begin{cases} u_k(t) = \tilde{u}_j(t), \ si\ k = i_j,\ j = 1 \text{ à } r_t, \\ u_k(t) = 0 \ sinon. \end{cases}$$

A chaque instant, on n'utilise donc que r_t variables de commande.

2) Supposons que $m \geq n$ et $\forall\ t \in \mathbf{R}$, $rang\ [B(t)] = n$, alors toute orbite périodique continue $\Omega(l)$ est compatible avec $B(t)$. En effet, la partie algébrique de (2.62) n'existe plus car on dispose d'au moins autant de variables de commande que de variables d'état. De ce fait, on peut n'utiliser que n composantes de $\boldsymbol{u}(t)$. Par exemple, si les n premières colonnes de $B(t)$ sont linéairement indépendantes à chaque instant, une loi de commande solution de (2.61) est :

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ \ldots \\ u_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(t) \ldots B_n(t) \end{bmatrix}^{-1} . f(t),$$
$$u_j(t) = 0,\ pour\ n < j \leq m.$$

Sinon, quand les colonnes linéairement indépendantes de $B(t)$ changent au cours du temps, on peut utiliser le même principe qu'en 1) pour calculer $\boldsymbol{u(t)}$. On détermine alors à chaque instant ces n colonnes indépendantes de $B(t)$ et on utilise les variables de commande correspondantes. La loi de commande $\boldsymbol{u(t)}$ est ici aussi continue par morceaux.

Orbite périodique et transformation de Lyapunov :

Soient deux représentations $[A(t),B(t)]$ et $[\tilde{A}(t),\tilde{B}(t)]$ du système Σ, équivalentes par la transformation de Lyapunov $P(t)$:

$$\begin{cases} \tilde{A}(t) = \left[P(t).A(t).P^{-1}(t) + \frac{d}{dt}P(t).P^{-1}(t)\right] \\ \tilde{B}(t) = P(t).B(t) \end{cases}$$

Si $\Omega(l(t,t_0,\boldsymbol{u}))$ est un cycle limite compatible avec $[A(t),B(t)]$ pour la loi de commande $\boldsymbol{u(t)}$, alors $\tilde{\Omega}(l(t,t_0,\boldsymbol{u}))$ est un cycle limite compatible avec $[\tilde{A}(t),\tilde{B}(t)]$ avec la même loi de commande $\boldsymbol{u(t)}$ tel que :

$$\tilde{\Omega}(l(t,t_0,\boldsymbol{u})) = P(t).\Omega(l(t,t_0,\boldsymbol{u}))$$

3.4. Exemple d'application :

Soient $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) \end{bmatrix}$ et $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Choisissons l'orbite périodique tel que :

$$\Omega(l(t,t_0)) = F(t,t_0) = \begin{bmatrix} \alpha_1(t,t_0) \\ \alpha_2(t,t_0) \end{bmatrix}.$$

A partir de (2.60), on obtient :

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{d\alpha_1(t,t_0)}{dt} - \alpha_2(t,t_0), \\ u(t) = \dfrac{d\alpha_2(t,t_0)}{dt} - a_1(t).\alpha_1(t,t_0) - a_2(t).\alpha_2(t,t_0). \end{cases}$$

c'est-à-dire, en explicitant les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_1(t,t_0)}{dt} = \alpha_2(t,t_0), \\ u(t) = \dfrac{d^2\alpha_1(t,t_0)}{dt^2} - a_1(t).\alpha_1(t,t_0) - a_2(t).\dfrac{d\alpha_1(t,t_0)}{dt}. \end{cases} \qquad (2.63)$$

Les cycles compatibles avec le système

La forme particulière (canonique) de la représentation $[A(t),B(t)]$ impose une relation dérivative entre $\alpha_1(t,t_0)$ et $\alpha_2(t,t_0)$ que tout cycle limite du système dans cette représentation doit vérifier :

$$\frac{d\alpha_1(t,t_0)}{dt} = \alpha_2(t,t_0).$$

On peut prendre par exemple une orbite elliptique centrée en 0 :

$$\Omega(l) = \begin{bmatrix} \alpha cos(l) \\ \beta.sin(l) \end{bmatrix},\ où\ l(t,t_0) = \omega(t - t_0 - \varphi),$$

$$avec\ \omega = \frac{2\pi}{T},\ a_1(t) = -1 + cos(\omega t),\ a_2(t) = -2,\ T = 1,$$

le paramètre φ représentant le déphasage.

D'après (2.63), il est nécessaire que $\beta = -\alpha.\omega$. L'équation (2.63) nous permet de calculer $u(t)$.

La forme générale de la commande :

$$u(t) = -\alpha\omega^2 cos(\omega(t-t_0-\varphi)) - \alpha.a_1(t).cos(\omega(t-t_0-\varphi)) - \alpha\omega.a_2(t).sin(\omega(t-t_0-\varphi)).$$

En fixant $t_0 = 0$, on peut voir ci-dessous la simulation du système pour $\varphi = 0$. La suite des états $x(kT)$, visualisés par des o, tend vers $F(T) = F(kT)$:

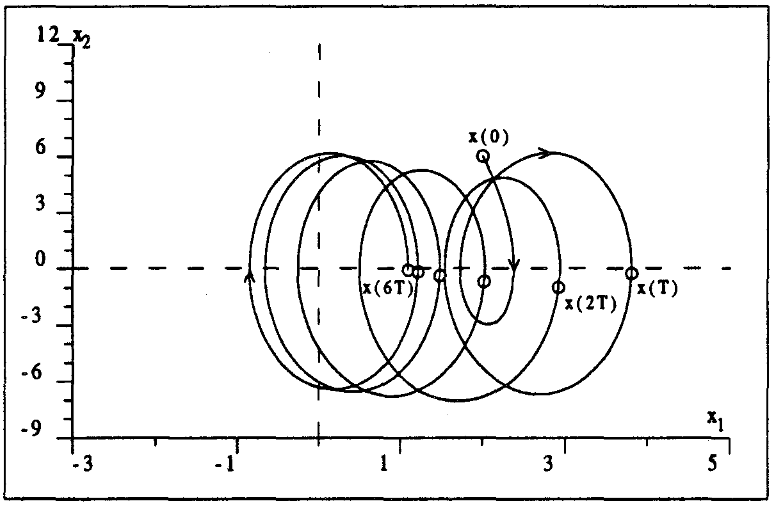


Figure 2.13. Trajectoire d'état pour φ = 0.

La loi de commande $u(t)$ dépend du paramètre de déphasage φ, qui détermine en fait la position du point courant $F(t)$ sur l'ellipse. La convergence asymptotique (exponentielle) du système vers ce cycle limite n'est pas influencée par φ. Soit l'écart entre la trajectoire $x(t)$ du système et le point courant du cycle limite :

$$\varepsilon(t) = F(t) - x(t),$$

On montre que $\varepsilon(t)$ vérifie :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = A(t).\varepsilon(t), \textit{ c'est-à-dire } \varepsilon(t) = \Phi(t,0).[F(0) - x(0)].$$

Cependant, à partir d'un même point initial, l'allure de la trajectoire de transition peut changer.

Optimisation de la transition vers l'orbite périodique

Comme problème annexe, on peut chercher le paramètre φ tel qu'un critère quadratique sur l'écart entre la trajectoire du système et le cycle limite soit minimale.

Introduisons par exemple la quantité :

$$J_x(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \varepsilon^{\mathrm{T}}\varepsilon.dt.$$

Ainsi,

$$J_x(\varphi) = \frac{1}{2}[F(0) - x(0)]^{\mathrm{T}}\left[\int_0^{\infty} \Phi^{\mathrm{T}}(t,0).\Phi(t,0).dt\right].[F(0) - x(0)],$$

$$J_x(\varphi) = \frac{1}{2}[F(0) - x(0)]^{\mathrm{T}}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\int_{jT}^{(j+1)T} \Phi^{\mathrm{T}}(t,0).\Phi(t,0).dt\right].[F(0) - x(0)],$$

$$J_x(\varphi) = \frac{1}{2}[F(0) - x(0)]^{\mathrm{T}}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \Phi^{\mathrm{T}}(jT,0).\mathcal{W}.\Phi(jT,0)\right].[F(0) - x(0)].$$

Si on pose

$$\mathcal{W} = \int_0^{T} \Phi^{\mathrm{T}}(t,0).\Phi(t,0).dt,$$

$$\forall\ N \geq 1,\ S_N = \sum_{j=0}^{N-1} \Phi^{\mathrm{T}}(jT,0).\mathcal{W}.\Phi(jT,0).$$

S_N vérifie l'équation de récurrence

$$\forall\ N \geq 1,\ S_{N+1} = \Phi^{\mathrm{T}}(T,0)S_N\Phi(T,0) + \mathcal{W}.$$

On obtient alors la valeur de J_x en fonction de φ :

$$J_x(\varphi) = \frac{1}{2}[F(0) - x(0)]^{\mathrm{T}}S_{\infty}.[F(0) - x(0)] \qquad (2.64)$$

où S_{∞} est solution de l'équation de Lyapunov discrète :

$$S_{\infty} = \Phi^{\mathrm{T}}(T,0)S_{\infty}\Phi(T,0) + \mathcal{W} \qquad (2.65)$$

On sait que la solution existe, est symétrique définie positive car $\Phi(T,0)$ est asymptotiquement stable. Pour une condition initiale $x(0)$ donnée, on peut donc calculer φ tel que $J_x(\varphi)$ soit minimum, c'est-à-dire la trajectoire qui s'écarte le moins du cycle limite.

Pour l'exemple précédent,

$$\Phi(T,0) = \begin{bmatrix} 0.7147 & 0.3491 \\ -0.3540 & 0.0164 \end{bmatrix},\ \mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0.4732 & 0.0909 \\ 0.0909 & 0.1447 \end{bmatrix},$$

alors,

$$S_\infty = \begin{bmatrix} 0.7676 & 0.2528 \\ 0.2528 & 0.2412 \end{bmatrix}.$$

Pour un état initial quelconque, le minimum de J_x est obtenu pour un paramètre φ qui vérifie nécessairement l'équation :

$$\frac{\delta J}{\delta \varphi} = \begin{bmatrix} -\alpha\omega.\sin(\omega\varphi) & \alpha\omega^2.\cos(\omega\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7676 & 0.2528 \\ 0.2528 & 0.2412 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha.\cos(\omega\varphi) - x_1(0) \\ \alpha\omega.\sin(\omega\varphi) - x_2(0) \end{bmatrix} = 0.$$

Ainsi, φ peut être déterminé en fonction de x(0).

Simulation :

A partir du point initial $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$,

$\varphi_1 = 0.1837975$ *correspond au minimum de* J_x,

$\varphi_2 = 0.7159049$ *correspond au maximum de* J_x.

On note que $\varphi_2 - \varphi_1 = 0.5321074$ ne correspond pas à une demi-période ($\frac{T}{2} = 0.5$).

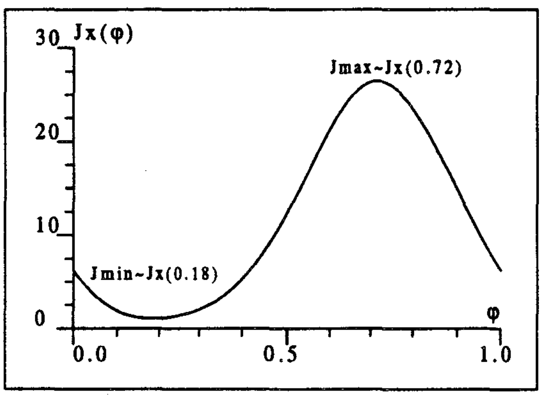


Figure 2.14. Valeur de J_x pour $x(0) = [2\ 6]^T$

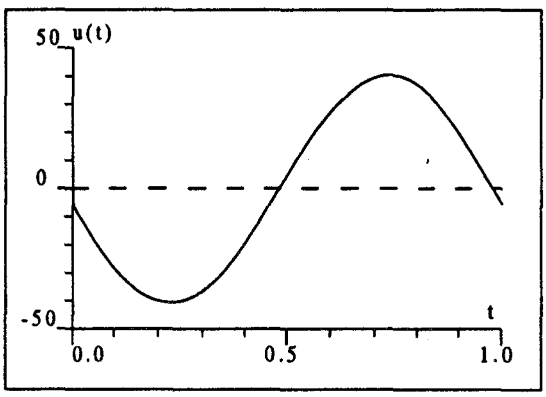


Figure 2.15. Loi de commande $u(t)$, calculée pour $\varphi = 0.18$.

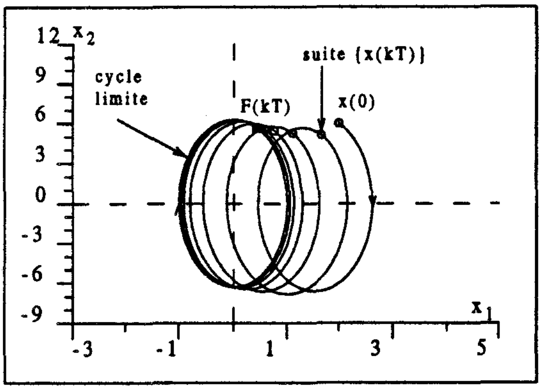


Figure 2.16. Trajectoire dans l'espace des phases pour φ = 0.18.

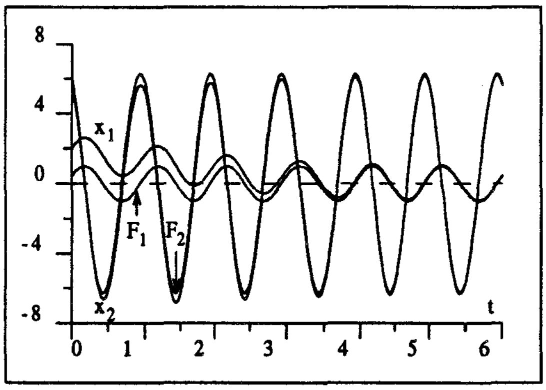


Figure 2.17. Comparaison entre le cycle limite et l'état (φ = 0.18)

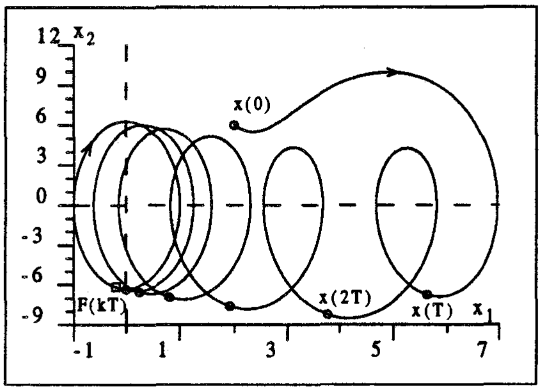


Figure 2.18. Trajectoire pour φ = 0.72.

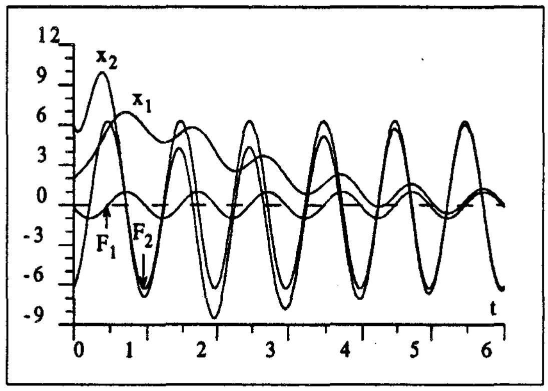


Figure 2.19. Comparaison entre le cycle limite et l'état (φ = 0.72)

On remarque que pour ce cas particulier, les positions initiales *F(kT)* correspondant au maximum et minimum de J_x sur l'orbite elliptique sont approximativement diamétralement opposées (voir figures 2.16 et 2.18). En outre, la valeur du critère varie énormément, ici d'un facteur ≈ 10. Bien que les dynamiques de convergence, i.e. le multiplieurs caractéristiques du système, soient les mêmes pour n'importe quel déphasage ωφ, les comportements transitoires sont différents.

Bien entendu, la position minimale pour ce critère varie par rapport à l'état initial du système. Si, à l'instant 0, on est déjà proche de l'orbite périodique à atteindre, la position de *F(0)* est proche de ***x****(0)*. Par contre, en s'éloignant, le système a besoin d'un certain temps pour se rapprocher. La position optimale de *F(0)* tient alors compte de ce phénomène de transition et est, soit en avance, soit en retard, par rapport à une position moyenne. Pour cet exemple, cette position moyenne est l'intersection du cycle et de la droite passant par l'origine *O* et le point ***x****(0)*.

4. Conclusion :

Ce deuxième chapitre expose donc les formes de commandes utilisables pour le placement de multiplieurs caractéristiques. Nous avons donné une large place aux techniques de bouclage discret car elles offrent plusieurs avantages. Tout d'abord, elles sont plus simples à réaliser par rapport aux bouclages permanents. De plus, le bouclage discret permet la réponse pile sur des systèmes périodiques initialement en temps continu car on peut assigner complètement les structures propres du système. Le problème de reconstruction d'état a été résolu de la même manière pour les processus en temps discret et pour ceux en temps continu.

Répondant à un autre type de problème, nous avons aussi mis en place un outil pour le calcul de la loi de commande, cette fois en boucle ouverte, qui permet d'atteindre ou d'approcher exponentiellement un cycle limite donné. Comme ce cycle ne peut pas être arbitrairement choisi, on a introduit la notion de compatibilité du cycle avec le système.

Pour le moment nous laissons en suspens le problème de robustesse, pour ne l'aborder qu'au quatrième chapitre. Le chapitre 3 suivant va traiter de la commande optimale.

Chapitre 3. Commande optimale des systèmes linéaires à coefficients périodiques.

Dans le chapitre précédent, les problèmes traités portaient surtout sur des critères globaux de comportement asymptotique du système.

Dans ce troisième chapitre, on introduit d'autres types de critères d'évaluation qui suivent ou intègrent l'évolution temporelle des variables du système et permettent de choisir éventuellement la loi de commande optimale, notamment en terme de coût énergétique, de longueur de trajectoire ou de temps de transition. Nous avons déjà rencontré un problème similaire dans le chapitre 2, section 3.4. avec l'exemple de calcul du cycle limite. Cependant, dans cet exemple, la forme de la commande est connue à l'avance d'après le cycle limite choisi.

Même si les résultats généraux de la commande optimale sont connus, il nous a semblé utile de les rappeler (§ 1.1 et § 1.2) pour pouvoir ensuite les spécifier, notamment pour l'utilisation du système adjoint et la recherche de la solution de l'équation différentielle de Riccati, dans le cas non stationnaire (§ 1.3), et enfin dans le cas linéaire périodique : la section 2 présente des résultats originaux complétant ceux de [BITTANTI et al, 1991] pour les systèmes en temps continu ; la section 3, pour ceux en temps discrets. La section 4 rappele et complète certains résultats plus spécifiques de commande quasi-optimale.

1. Rappels des méthodes d'optimisation:

Cette partie reprend des résultats classiques de la commande optimale des systèmes généraux, pour les appliquer ensuite aus système linéaires non stationnaires. Le lecteur interessé par un exposé plus détaillé pourra se référer à [BORNE et al, 1991].

1.1. Application de la méthode des variations au problème de commande optimale :

Le calcul des variations consiste à trouver une fonction vectorielle $x(t)$ de la variable indépendante t qui rend maximale, ou minimale, une quantité appelée *fonctionnelle* évaluée sur un intervalle de temps $\mathcal{T} = [t_0, t_1]$. Cela revient donc à identifier directement la trajectoire optimale $x(t)$. Les conditions d'optimalité viennent de la comparaison de la trajectoire optimale et des trajectoires voisines définies par une fonction de variation $\delta x(t)$ quelconque. De ce fait, la méthode des variations ne met donc en évidence que les propriétés locales d'optimalité et nécessite l'étude exhaustive des solutions possibles. Les résultats qui en découlent sont regroupés en trois types : les conditions nécessaires d'optimalité à vérifier le long de la trajectoire ; les conditions du deuxième ordre, c'est-à-dire de minimalité ou de maximalité de cette trajectoire ; et les conditions dites de transversalité, qui concernent les conditions aux extrémités initiale ou finale.

Soit un système décrit par l'équation d'état :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x,u,t) \text{ où } x \in \mathbf{R}^n,\ u \in \mathbf{R}^m. \tag{3.1}$$

On définit un domaine admissible de fonctionnement $\mathcal{D} = \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{T}$, par une caractérisation mathématique générale sous forme de contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} &i)\quad t \in \mathcal{T} = [t_0, t_1], \\ &ii)\quad q(x,u,t) \le 0, \\ &iii)\quad \int_{t_0}^{t_1} p(x,u,t).dt \le 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

On suppose que la solution $x(t)$ est uniquement définie par $x(t_0) = x_0$ et la connaissance de $u(t)$. Une condition suffisante pour cela est la condition de Lipschitz, vérifiée par exemple si f est continue et admet des dérivées partielles continues dans le domaine admissible $\mathcal{D}$.

De plus l'état doit vérifier les conditions aux limites :

$$\begin{cases} k(x_0,t_0) = 0, \\ l(x_1,t_1) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

La commande optimale $\boldsymbol{u}$ recherchée doit satisfaire (3.2)(3.3) et minimiser le critère :

$$J = \int_{t_0}^{t_1} r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t).dt + g(\boldsymbol{x}_0,t_0,\boldsymbol{x}_1,t_1) \qquad (3.4)$$

On applique le calcul de variations sur la quantité (voir annexe 3)

$$\rho(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t) = r(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t) + \psi^{\mathrm{T}}(\dot{\boldsymbol{x}} - f(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)) + \lambda^{\mathrm{T}}(q(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)+\boldsymbol{v}^2) + \mu^{\mathrm{T}}(p(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)+\boldsymbol{w}^2). \qquad (3.5)$$

Par l'introduction des variables supplémentaires λ, μ et de vecteurs à composantes positives notés $\boldsymbol{v}^2 = \{v_i^2, i = 1 \text{ à } n, v_i \in \mathbf{R}\}$ et $\boldsymbol{w}^2 = \{v_i^2, i = 1 \text{ à } n, v_i \in \mathbf{R}\}$, le problème se ramene alors à une optimisation sans contrainte de ρ, ce qui donne les conditions énoncées ci-dessous.

1.1.1. Conditions nécessaires d'optimalité, équations d'Euler :

On suppose que les dérivées totales ou partielles des fonctions ρ, f, q et p existent par rapport à chaque variable dans l'expression (3.5), H_z désignant ici la dérivée d'une fonction h par rapport à une variable quelconque z. L'équation d'Euler par rapport à $\boldsymbol{x}$ donne alors :

$$\rho_{\boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\rho_{\dot{\boldsymbol{x}}} = 0$$

soit

$$\dot{\psi} = r_{\boldsymbol{x}} - F_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\psi - Q_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\lambda - P_{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\mu. \qquad (3.6)$$

Par rapport à **u**, la condition d'Euler est :

$$\rho_{\boldsymbol{u}} - \frac{d}{dt}\rho_{\dot{\boldsymbol{u}}} = 0$$

c'est-à-dire

$$r_{\boldsymbol{u}} - F_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\psi - Q_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\lambda - P_{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\mu = 0. \qquad (3.7)$$

De même pour chaque variable v_i et w_i dans les vecteurs $\boldsymbol{v}^2$ et $\boldsymbol{w}^2$:

$$2\,\lambda_i v_i = 0 \qquad (3.8)$$

$$2\,\mu_i w_i = 0 \qquad (3.9)$$

On montre aussi que pour les contraintes intégrales, les coefficients μ_i sont constants.

1.1.2. Conditions de transversalité :

Les conditions finales et initiales sont :

$$\left\{\left[r - \psi^{\mathrm{T}}f + \mu^{\mathrm{T}}p\right]_1 + g_{t_1}\right\}\delta t_1 + \left\{\psi(t_1) + g_{\boldsymbol{x}_1}\right\}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{x}_1 = 0, \qquad (3.10)$$

pour tout δt_1 *et* $\delta\boldsymbol{x}_1$ *vérifiant* $l_t\delta t_1 + L_{\boldsymbol{x}_1}\,\delta\boldsymbol{x}_1 = 0,$

$$\left\{\left[r - \psi^{\mathrm{T}}f + \mu^{\mathrm{T}}p\right]_0 - g_{t_0}\right\}\delta t_0 + \left\{\psi(t_0) - g_{\boldsymbol{x}_0}\right\}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{x}_0 = 0, \qquad (3.11)$$

pour tout δt_0 *et* $\delta\boldsymbol{x}_0$ *vérifiant* $k_t\delta t_0 + K_{\boldsymbol{x}_0}\,\delta\boldsymbol{x}_0 = 0.$

1.1.3. Conditions du deuxième ordre : condition de Weierstrass.

Soient $\tilde{x}$, $\dot{\tilde{x}}$, $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ des solutions compatibles avec les conditions d'Euler et les contraintes. La condition de Weierstrass permet de vérifier que ces solutions correspondent à une valeur minimale du critère J :

$$\rho(\tilde{x},\dot{x},u,v,w,t) - \rho(\tilde{x},\dot{\tilde{x}},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},t) - (\dot{x} - \dot{\tilde{x}})^{T}\rho_{\dot{x}}(\tilde{x},\dot{\tilde{x}},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},t) \geq 0,$$

Soit, en tenant compte des équations (3.1)-(3.9),

$$\left[r(\tilde{x},u,t) + \mu^{T}p(\tilde{x},u,t)\right] - \left[r(\tilde{x},\tilde{u},t) + \mu^{T}p(\tilde{x},\tilde{u},t)\right] - \psi^{T}(\dot{x} - \dot{\tilde{x}}) \geq 0, \quad (3.12)$$

Si on pose

$$\mathcal{H}(\tilde{x},u,\psi,\mu,t) = - r(\tilde{x},u,t) + \psi^{T}f(\tilde{x},u,t) - \mu^{T}p(\tilde{x},u,t), \quad (3.13)$$

la condition de Weierstrass revient à dire que la quantité $\mathcal{H}$ est maximale pour $\tilde{u}(t)$:

$$\forall\, u \in \mathcal{U},\ \mathcal{H}(\tilde{x},\tilde{u},\psi,\mu,t) \geq \mathcal{H}(\tilde{x},u,\psi,\mu,t). \quad (3.14)$$

Remarques :

1) La condition d'Euler (3.7), qui exprime la stationnarité de ρ par rapport à u, pré-suppose que ρ est dérivable en u et $\dot{u}$. Or, comme u ne vérifie aucune équation différentielle, son évolution au cours du temps est *a priori* complètement libre. Dans la pratique, si on recherche une loi de commande $u(t)$ continue par morceaux, ceci peut poser quelques problèmes aux points de discontinuité. Nous reviendrons sur cette question par la suite.

2) D'un autre point de vue, en introduisant des variables d'état supplémentaires à partir des contraintes intégrales

$$\dot{z} = p(x,u,t), \text{ avec } z(t_1) = 0,$$

on remarque que (3.13) ressemble à l'expression d'un hamiltonien. Finalement, le principe du maximum démontre, avec des conditions moins restrictives que celles de l'équation d'Euler, que la maximisation du hamiltonien, c'est-à-dire l'équation (3.14), est nécessaire et suffisante pour identifier la loi de commande optimale même si elle est discontinue.

1.2. Le principe du maximum :

Soit le hamiltonien défini par :

$$H(x,u,\psi,t) = - r(x,u,t) + \psi^{T}f(x,u,t). \quad (3.15)$$

Le principe du maximum est énoncé de la manière simplifiée suivante :

Le principe du maximum :

> *La commande optimale est celle qui maximise le hamiltonien, toutes les contraintes étant satisfaites.*

A partir de là, les conditions d'optimalité peuvent être démontrées. On rappelle d'abord les équations canoniques de Hamilton.

1.2.1. Equations canoniques de Hamilton :

On montre que les trajectoires optimales doivent vérifier l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{x} = H_{\psi}(x,\psi,t), \\ \dot{\psi} = -\,H_{x}(x,\psi,t). \end{cases} \tag{3.16}$$

De plus,

$$\frac{d}{dt}H = H_t = -\,r_t \tag{3.17}$$

Le système (3.16), dit *système hamiltonien*, constitue un système de $2n$ équations du premier ordre équivalent aux n équations différentielles du second ordre d'Euler.

1.2.2. Identification de la commande optimale :

D'après le principe du maximum, la commande optimale est celle qui maximise $H(.)$ en tenant compte des contraintes. On distingue d'abord le cas particulier où $H(.)$ est linéaire en $\boldsymbol{u}$. La commande optimale $\boldsymbol{u}$ est alors sur la frontière ou les sommets de $\mathcal{U}$. On commute d'un sommet à un autre selon le changement de signe de $H_{\boldsymbol{u}}$ [PONTRIAGUINE et al, 1974].

Dans le cas général, la maximisation de $H(.)$ conduit à trouver la commande $\tilde{\boldsymbol{u}}$ telle que :

$$H_{\tilde{\boldsymbol{u}}} = 0, \tag{3.18}$$

$\boldsymbol{x}$ et ψ étant les solutions du système hamiltonien (3.16) satisfaisant les conditions aux limites.

1.2.3. Conditions de transversalité :

Les conditions de transversalité deviennent

$$\Big[-\,H(t_1) + g_{t_1}\Big]\delta t_1 + \Big[\psi(t_1) + g_{x_1}\Big]^{\mathrm{T}}\delta \boldsymbol{x}_1 = 0, \tag{3.19}$$

pour tout δt_1 *et* $\delta \boldsymbol{x}_1$ *vérifiant* $l_t\delta t_1 + L_{x_1}\,\delta \boldsymbol{x}_1 = 0,$

$$\Big[-\,H(t_0) - g_{t_0}\Big]\delta t_0 + \Big[\psi(t_0) - g_{x_0}\Big]^{\mathrm{T}}\delta \boldsymbol{x}_0 = 0, \tag{3.20}$$

pour tout δt_0 *et* $\delta \boldsymbol{x}_0$ *vérifiant* $k_t\delta t_0 + K_{x_0}\,\delta \boldsymbol{x}_0 = 0.$

1.2.4. Equation de Hamilton-Jacobi :

Soit la trajectoire optimale $\tilde{x}(t)$. On pose :

$$J(\tilde{x},t) = \int_t^{t_1} r(\tilde{x},\dot{\tilde{x}},\tau)\,d\tau, \tag{3.21}$$

la valeur du critère sur cette trajectoire optimale entre l'instant t et l'instant final t_1. On montre que (3.21) satisfait ***l'équation de Hamilton-Jacobi*** :

$$J_t - H(\tilde{x},\tilde{u}(\tilde{x},-J_x,t),-J_x,t) = 0 \tag{3.22}$$

avec la condition finale $J(\tilde{x}(t_1),t_1) = 0$.

1.3. Commande optimale des systèmes linéaires en temps continu :

Soit le système linéaire en temps continu suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(t).x + B(t).u, \\ y(t) = C(t).x \end{cases} \tag{3.23}$$

où $A(t) \in \mathbf{R}^{nxn}$, $B(t) \in \mathbf{R}^{nxm}$, et $C(t) \in \mathbf{R}^{lxn}$.

Le cas particulier des systèmes linéaires avec minimisation de critère quadratique ou quadratique-plus-linéaire sont très intéressants à étudier car en plus du sens physique évident de ce type de critère, se traduisant en coût énergétique, longueur de trajectoire ou moyenne pondérée des sorties, toute l'étude peut être menée de façon analytique. On peut aussi aboutir à une loi de commande en boucle fermée, ne nécessitant plus que la mesure de l'état x à chaque instant et non la connaissance préalable de toute la trajectoire optimale.

1.3.1. Optimisation de critères quadratiques-plus-linéaires :

Soient une trajectoire de sortie $e(t)$ désirée, et l'écart $\varepsilon(t)$ de la sortie $y(t)$ du système (3.23) par rapport à cette trajectoire :

$$\varepsilon(t) = e(t) - y(t) = e(t) - C(t)\, x(t).$$

On veut minimiser le critère quadratique-plus-linéaire suivant :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[\varepsilon^T(t)Q(t)\varepsilon(t) + 2m^T(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t) + 2l^T(t)u(t) \right].dt$$
$$+ \varepsilon^T(t_1)P_1\varepsilon(t_1), \tag{3.24}$$

où P_1, $Q(t)$ et $R(t)$ sont des matrices symétriques positives, $R(t)$ est supposée définie, $m(t)$ et $l(t)$ sont deux vecteurs de dimensions appropriées. Mathématiquement, minimiser $\int m^T(t)x(t)dt$ consiste à rester le plus perpendiculaire au vecteur $m(t)$ tout au long de l'évolution du système. Ce type de critère est utilisé par exemple en industrie chimique, ou il revient à maximiser la quantité de produits obtenus à partir d'une réaction chimique [BITTANTI et al, 1974]. Dans ce cas, $m(t)$ est à composantes négatives.

Pour simplifier l'exposé, on considère un problème sans contrainte. Le Hamiltonien est défini par

$$H(x,u,\psi,t) = -\tfrac{1}{2}\left[\varepsilon^{T}(t)Q(t)\varepsilon(t) + u^{T}(t)R(t)u(t)\right] - m^{T}(t)x(t) - l^{T}(t)u(t) + \psi^{T}\left[A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\right]. \tag{3.25}$$

Selon § 1.2.1, § 1.2.2 et § 1.2.3., la résolution du problème par le principe du maximum se fait en trois étapes :

1°) La commande optimale $\tilde{u}$ qui maximise ce Hamiltonien est donnée par $H_{\tilde{u}} = 0$, soit

$$-l(t) - R(t)\,\tilde{u} + B^{T}(t)\psi = 0.$$

Ainsi,

$$\tilde{u}(t) = R^{-1}(t)\left[B^{T}(t)\psi - l(t)\right]. \tag{3.26}$$

Remarque :

On note que H est bien maximal pour \O\AC(u;\S\UP4(~)) car H\O\AC(u;\S\UP3(~)) $_{\tilde{u}} = -R(t) < 0$. Cette détermination (unique) de $\tilde{u}$ est due à la forme quadratique du critère J.

2°) Le système hamiltonien (3.16) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)\,x(t) + B(t)\,\tilde{u}(t), \\ \dot{\psi} = -A^{T}(t)\psi + C^{T}(t)Q(t)C(t)\,x - C^{T}(t)Q(t)\,e(t) + m(t). \end{cases} \tag{3.27}$$

On pose $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n}$. Avec (3.26) et (3.27), ce nouveau vecteur doit vérifier

$$\dot{X} = \mathcal{A}(t)\,X(t) + \mathcal{B}(t), \tag{3.28}$$

$$\text{où } \mathcal{A}(t) = \begin{bmatrix} A(t) & B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t) \\ C^{T}(t)Q(t)C(t) & -A^{T}(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n\times 2n},$$

$$\text{et } \mathcal{B}(t) = \begin{bmatrix} -B(t)R^{-1}(t)l(t) \\ -C^{T}(t)Q(t)e(t) + m(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n}.$$

On remarque que le système hamiltonien (3.28) est aussi linéaire. Avec l'hypothèse H d'intégrabilité de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ (voir chapitre 1), la solution de (3.28) est uniquement définie par la connaissance de $X(t_0)$:

$$X(t) = \Phi_{\mathcal{A}}(t,t_0)\,X(t_0) + \beta(t,t_0), \tag{3.29}$$

où $\Phi_{\mathcal{A}}(t,t_0)$ est la matrice de transition du système hamiltonien (3.28),

$$\text{et } \beta(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi_{\mathcal{A}}(t,\tau)\mathcal{B}(\tau).d\tau.$$

3°) Le dernier point du problème consiste à déterminer les conditions initiales $X(t_0)$ de (3.28), ce qui revient à déterminer $x(t_0)$ et $\psi(t_0)$ à partir des équations de transversalité (3.19) et (3.20).

1.3.2. Solution générale de la commande optimale en boucle ouverte :

La commande en boucle ouverte s'effectue en générant la fonction $\psi(t)$, notamment par calculateur numérique. Cela nécessite la résolution de (3.29) et la détermination des conditions initiales $x(t_0)$ et $\psi(t_0)$. On suppose que pour le problème précédent, $x(t_0) = x_0$ et t_0 sont connus. On partitionne d'abord $\Phi_{\mathcal{A}}(t,t_0)$ en quatre blocs de dimension nxn, et $\beta(t,t_0)$ en vecteurs de dimension n :

$$\Phi_{\mathcal{A}}(t,t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t,t_0) & \Phi_{12}(t,t_0) \\ \Phi_{21}(t,t_0) & \Phi_{22}(t,t_0) \end{bmatrix}, \beta(t,t_0) = \begin{bmatrix} \beta_1(t,t_0) \\ \beta_2(t,t_0) \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

1°) Si $x(t_1) = x_1$ et t_1 sont donnés, (3.29) et (3.30) impliquent que

$$\psi_0 = \Phi_{12}(t_1,t_0)^{-1}\left[x_1 - \Phi_{11}(t,t_0)\, x_0 - \beta_1(t_1,t_0)\right]$$

2°) Si seul l'instant final t_1 est connu, la condition de transversalité (3.19) donne

$$\psi(t_1) = -g_{x_1} = C^T(t_1)P_1\left[e(t_1) - C(t_1)x_1\right]. \tag{3.31}$$

Or, d'après (3.29) et (3.30),

$$x(t_1) = \Phi_{11}(t_1,t_0)\, x_0 + \Phi_{12}(t_1,t_0)\, \psi_0 + \beta_1(t_1,t_0).$$
$$\psi(t_1) = \Phi_{21}(t_1,t_0)\, x_0 + \Phi_{22}(t_1,t_0)\, \psi_0 + \beta_2(t_1,t_0).$$

On en déduit que

$$\psi_0 = U^{-1}\left[\kappa - V\, x_0\right],$$

où

$$U = \Phi_{22}(t_1,t_0) + C^T(t_1)P_1C(t_1)\Phi_{12}(t_1,t_0),$$
$$V = \left[\Phi_{21}(t,t_0) + C^T(t_1)P_1C(t_1)\Phi_{11}(t,t_0)\right],$$
$$\kappa = C^T(t_1)P_1e(t_1) - \beta_2(t_1,t_0) - C^T(t_1)P_1C(t_1)\beta_1(t_1,t_0).$$

On peut par ailleurs montrer que l'inversion de U est toujours possible.

3°) Pour ce dernier cas de figure, x_1 et t_1 sont inconnus. Les équations de transversalité donneront, en plus de (3.31), la condition $H(t_1) = 0$. On peut alors résoudre car on dispose de $n+1$ équations pour les $n+1$ variables finales.

1.3.3. Problème en temps infini et boucle fermée : équation différentielle de Riccati.

Pour les problèmes en temps infini, on recherche en général une structure bouclée de la forme :

$$\psi(t) = K(t)\, x(t) + \kappa(t). \tag{3.32}$$

Ainsi, d'après (3.26), la commande optimale est

$$\tilde{u}(t) = R^{-1}(t)B^T(t)K(t)\, x(t) + R^{-1}(t)B^T(t)\kappa(t) - R^{-1}(t)l(t). \tag{3.33}$$

En considérant le nouveau vecteur $X_1(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \kappa(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n}$, on obtient un système équivalent au système hamiltonien (3.28) :

$$\dot{X}_1 = \mathcal{A}_1(t) X_1(t) + \mathcal{B}_1(t), \tag{3.34}$$

où

$$\mathcal{A}_1(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) & B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t) \\ E(K,t) & A_2(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n\mathrm{x}2n},$$

$$\mathcal{B}_1(t) = \begin{bmatrix} -B(t)R^{-1}(t)l(t) \\ -C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)e(t) + m(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)l(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n},$$

$$A_1(t) = \left[A(t) + B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)K(t)\right],\ A_2(t) = -\left[A^{\mathrm{T}}(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\right]$$

et la quantité $E(K,t)$ inclut l'expression de l'équation différentielle de Riccati :

$$E(K,t) = \dot{K}(t) + K(t)A(t) + A^{\mathrm{T}}(t)K(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)K(t) - C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t), \tag{3.35}$$

L'équation de Riccati $E(K,t) = 0$ joue un rôle très important dans l'optimisation des commandes de processus. En effet, la matrice $\mathcal{A}_1(t)$ est alors bloc-triangulaire. Dans ce cas, les variables $x(t)$ et $\kappa(t)$ peuvent être calculés indépendamment l'une de l'autre. Le problème reviendra donc finalement à la détermination de manière indépendante de $K(t_0)$ et de $\kappa(t_0)$.

Remarque :

Si $K(t)$ est solution de l'équation différentielle de Riccati définie par $E(K,t) = 0$:

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^{\mathrm{T}}(t)K(t) - K(t)B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)K(t) + C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t), \tag{3.36}$$

alors $K(t)$ est symétrique. Dans ce cas, (3.34) est aussi un système hamiltonien car

$$A_2(t) = -A_1^{\mathrm{T}}(t).$$

Cette matrice $A_1(t)$ est la matrice d'évolution du système en boucle fermée. Le calcul de la solution $K(t)$ de l'équation différentielle de Riccati (3.36) correspond à la résolution des problèmes de régulation quadratique optimale, où $e(t)$, $m(t)$ et $l(t)$ sont uniformément nuls tandis que la détermination de $\kappa(t)$ correspond à la prise en compte de ces données supplémentaires. On verra ultérieurement que le système en $\kappa(t)$ étant asymptotiquement instable, la seule solution qui convient dans ce problème de régulation est la solution triviale $\kappa(t) = 0$.

Propriétés du système hamiltonien :

On décompose $Q(t)$ et $R(t)$ en matrices de rang plein :

$$Q(t) = Q_1(t)^T Q_1(t), \text{ et } R^{-1}(t) = R_1(t) R_1^T(t), \tag{3.37.a}$$

$$\textit{avec rang } [Q_1(t)] = \textit{rang } [Q(t)] \textit{ et rang } [R_1(t)] = \textit{rang } [R^{-1}(t)] = \textit{rang } [R(t)].$$

et on définit :

$$B_1(t) = B(t)R_1(t), \text{ et } C_1(t) = Q_1(t)C(t). \tag{3.37.b}$$

Pour cela, on peut par exemple utiliser la décomposition de Cholewsky. En considérant une solution $K(t)$ de l'équation différentielle de Riccati (3.36), soient les matrices d'évolution des systèmes hamiltoniens (3.28) et (3.34) :

$$\mathcal{A}(t) = \begin{bmatrix} A(t) & B_1(t)B_1^T(t) \\ C_1^T(t)C_1(t) & -A^T(t) \end{bmatrix}, \text{ et } \mathcal{A}_1(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) & B_1(t)B_1^T(t) \\ 0 & -A_1^T(t) \end{bmatrix}.$$

dont les matrices de transition seront notés $\Phi_{\mathcal{A}}(t,t_0)$ et $\Phi_{\mathcal{A}_1}(t,t_0)$.

On peut montrer rapidement que :

$$\Phi_{\mathcal{A}_1}(t,t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{A_1}(t,t_0) & \Phi_{A_1}(t,t_0)W_{A_1,B_1}(t,t_0) \\ 0 & \Phi_{A_1}^{-T}(t,t_0) \end{bmatrix}. \tag{3.38}$$

où $W_{A_1,B_1}(t,t_0)$ est le grammien de commandabilité du système $[A_1(t), B_1(t)]$.

$$W_{A_1,B_1}(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} \Phi_{A_1}(t_0,\tau)B_1(\tau)B_1^T(\tau)\Phi_{A_1}^T(t_0,\tau).d\tau.$$

Les deux matrices de transition sont reliées par l'équation

$$\Phi_{\mathcal{A}}(t,t_0) = \mathcal{K}(t) \,.\, \Phi_{\mathcal{A}_1}(t,t_0) . \mathcal{K}^{-1}(t_0), \tag{3.39}$$

$$\textit{où } \mathcal{K}(t) = \begin{bmatrix} Id_n & 0 \\ K(t) & Id_n \end{bmatrix}, \textit{ avec } \mathcal{K}^{-1}(t) = \begin{bmatrix} Id_n & 0 \\ -K(t) & Id_n \end{bmatrix}.$$

$K(t)$ étant n'importe quelle solution de l'équation différentielle de Riccati (3.36).

En fait, la matrice $\mathcal{K}(t)$ est celle qui définit le changement de variable $X(t)$ en $X_1(t)$ dans (3.34).

On introduit les définitions suivantes :

Définitions :

Soit la matrice $Z = \begin{bmatrix} 0 & Id_n \\ -Id_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n\mathrm{x}2n}$. On sait que $Z^{-1} = Z^T = -Z$.

Une matrice $\mathcal{A}$ est *hamiltonienne* si et seulement si $\mathcal{A} = Z\mathcal{A}^T Z$.

Une matrice Φ est *symplectique* si et seulement si $\Phi^{-1} = -Z\Phi^T Z$. Dans ce cas :

$$\forall \lambda \in spec\,\{\Phi\},\ \frac{1}{\lambda} \in spec\,\{\Phi\}.$$

Théorème 3.1 : [KANO & NISHIMURA, 1979]

Soit $\mu \in spec\{\Phi_{\mathcal{A}}(t,\tau)\}$ *et* $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *un vecteur propre qui lui est associé, où* $x, y \in \mathbf{R}^n$. *Alors* μ^{-1} *est aussi une valeur propre de* $\Phi_{\mathcal{A}}(t,\tau)$ *et* $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ *est le vecteur propre de* $\Phi_{\mathcal{A}}^{\mathsf{T}}(t,\tau)$ *associé à* μ^{-1}.

Ce théorème résulte de la propriété de la matrice de transition du système hamiltonien. En effet,

Proposition 3.2 :

$\forall\ t, \tau \in \mathcal{T}$, *La matrice de transition* $\Phi_{\mathcal{A}}(t,\tau)$ *du système hamiltonien (3.28) est une matrice symplectique.*

Démonstration :

D'après la définition, il suffit de montrer que $\Phi_{\mathcal{A}}(t,\tau)$ est égale à $-Z\,\Phi_{\mathcal{A}}^{-\mathsf{T}}(t,\tau)Z$.

On pose $\Psi(t) = -\,Z\,\Phi_{\mathcal{A}}^{-\mathsf{T}}(t,\tau)Z$. La dérivation de $\Psi(t)$ donne :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi(t) &= -\,Z\frac{d}{dt}\Phi_{\mathcal{A}}^{-\mathsf{T}}(t,\tau)Z = Z\,\mathcal{A}^{\mathsf{T}}(t)\,\Phi_{\mathcal{A}}^{-\mathsf{T}}(t,\tau)Z = Z\,\mathcal{A}^{\mathsf{T}}(t)\,Z(-\,Z)\Phi_{\mathcal{A}}^{-\mathsf{T}}(t,\tau)Z,\\ &= Z\,\mathcal{A}^{\mathsf{T}}(t)\,Z\,\Psi(t) = \mathcal{A}(t)\,\Psi(t),\end{aligned}$$ étant donné que $\mathcal{A}(t)$ est hamiltonienne.

$\Psi(t)$ et $\Phi(t,\tau)$ vérifient la même équation différentielle avec la même condition initiale $\Psi(\tau) = Id_{2n} = \Phi(\tau,\tau)$. De ce fait, la proposition ci-dessus est démontrée par la vérification des conditions habituelles d'unicité de la solution de cette équation différentielle ❑

1.3.4. Cas particulier : Régulation quadratique optimale de système linéaire autonome

On suppose $\boldsymbol{m}(t)$, $\boldsymbol{l}(t)$ et $\boldsymbol{e}(t)$ uniformément nuls sur $\mathcal{T}$. On suppose en plus que $Q(t)$ et $R(t)$ sont des matrices constantes. Pour les système linéaires à coefficients constants, la condition de transversalité $H(t_1) = 0$ et l'équation canonique de Hamilton (3.17) implique que

$$\forall\ t \in \mathcal{T},\ H(t) = 0.$$

On montre alors que la solution de l'équation différentielle de Riccati (3.36) est aussi une matrice symétrique constante. On parle alors d'équation algébrique de Riccati :

$$KA + A^{\mathsf{T}}K + KBR^{-1}B^{\mathsf{T}}K - C^{\mathsf{T}}QC = 0 \qquad (3.40)$$

Comme Q et R sont symétriques positives, on peut les décomposer en matrices de rang plein :

$$Q = Q_1^{\mathsf{T}}Q_1,\ et\ R^{-1} = R_1R_1^{\mathsf{T}}.$$

On pose :

$$B_1 = BR_1,\ et\ C_1 = Q_1C.$$

L'équation algébrique de Riccati se réécrit en :

$$KA + A^{\mathsf{T}}K + KB_1B_1^{\mathsf{T}}K - C_1^{\mathsf{T}}C_1 = 0 \qquad (3.41)$$

Plusieurs méthodes existent pour la résolution de telles équations, soit par itération soit de façon plus directe, par l'utilisation de la forme de Schur ou la forme de Jordan. En définitive, la régulation optimale du système linéaire autonome est donné par le résultat bien connu :

$$\tilde{u}(t) = R^{-1}B^{T}K_1\, x(t) \qquad (3.42)$$

où K_1 est la solution définie négative de (3.40).

2. Application aux systèmes linéaires à coefficients périodiques en temps continu :

Reprenons le problème d'optimisation quadratique à horizon infini précédent. On suppose que les matrices $Q(t)$ et $R(t)$, et les vecteurs $e(t)$, $m(t)$ et $l(t)$ sont périodiques de même période que le système $[A(t), B(t), C(t)]$. Le système hamiltonien (3.34) est aussi à coefficients périodiques. En vertu de la remarque dans § 1.3.3., la résolution nécessitera deux étapes : la section 2.1 donne la solution de l'équation différentielle périodique de Riccati, tandis que la section 2.2 expose le calcul de la loi de commande tenant compte de la trajectoire poursuivie $e(t)$ et de la partie linéaire $m(t)$ et $l(t)$ du critère J.

2.1. L'équation différentielle périodique de Riccati :

On définit $Q_1(t)$, $R_1(t)$, $B_1(t)$ et $C_1(t)$ selon la décomposition donnée en (3.37). On considère alors le système linéaire défini par le triplet $[A(t),\ B_1(t),\ C_1(t)]$ et l'équation différentielle périodique de Riccati :

$$\dot{K}(t) = -K(t)A(t) - A^{T}(t)K(t) - K(t)B_1(t)B_1^{T}(t)K(t) + C_1^{T}(t)C_1(t), \qquad (3.43)$$

Remarque :

Soient les deux matrices d'évolution définies en (3.34) et (3.41) :

$$A_1(t) = \left[A(t) + B_1(t)B_1^{T}(t)K(t)\right],$$

$$et\ \ A_1'(t) = \left[A(t) - L(t)C_1^{T}(t)C_1(t)\right].$$

On rappelle les équivalences de propriétés suivantes :

i) La commandabilité de $[A(t),\ B_1(t)]$ est équivalente à celle de $[A(t),\ B(t)]$. En effet, si $u(t)$ est la loi de commande qui ramène $[A(t),\ B(t)]$ vers l'origine sur un intervalle $[t_1,t_2]$ donné, la loi de commande $v(t) = R_1^{-1}(t)\, u(t)$ effectue la même transition vers l'origine pour $[A(t),\ B_1(t)]$, étant donné que $R_1(t)$ est inversible.

ii) Si $[A(t),\ B_1(t)]$ est stabilisable, alors $[A_1(t),\ B_1(t)]$ l'est aussi en vertu de la remarque du chapitre 1, § 1.2.4.

iii) De même, si $[A(t),\ C_1(t)]$ est détectable, alors $[A'_1(t),\ C_1(t)]$ l'est.

2.1.1. La solution stabilisante de l'équation différentielle de Riccati :

Comme le système hamiltonien (3.29) est aussi linéaire et périodique, on peut en définir la matrice de monodromie $\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)$ et les multiplieurs caractéristiques μ_i, $i = 1$ à $2n$. L'objectif de ce paragraphe est de trouver la solution $K_1(t)$ de l'équation différentielle de Riccati telle que le système en boucle fermée, c'est-à-dire la matrice $A_1(t)$, soit asymptotiquement stable. Pour la détermination de cette solution particulière, trois principales méthodes existent dans la littérature, généralisant les résultats obtenus pour les systèmes linéaires stationnaires. On peut ainsi citer les méthodes itératives par quasi-linéarisation [HEWER, 1975; BITTANTI et al., 1991], et les méthodes symplectiques par diagonalisation de la matrice de monodromie du système hamiltonien [KANO & NISHIMURA, 1979] ou encore l'utilisation de la forme de Jordan pour cette même matrice [HERNANDEZ & JODAR, 1985]. Cependant, toutes ces méthodes postulent *a priori* que la solution $K(t)$ recherchée est périodique. Cette périodicité semble tout à fait justifiée par la cyclostationnarité du problème à horizon infini. Elle a été confirmée par une autre approche que nous avons adoptée [RICHARD, RABENASOLO, ed. TZAFESTAS, Marcel Dekker Inc., 1992, à paraitre] consistant à considérer la suite des états $[x(kT), \psi(kT)]$, $k \in \mathbf{N}$, du système hamiltonien. On calcule alors la relation $\psi(kT) = K(t)\, x(kT)$ sous la seule hypothèse d'*asymptotique stabilité* du système en boucle fermée $A_1(t)$. On montre alors que la solution qui convient est nécessairement périodique. La méthode exposée dans cette section prend en compte les cas de stabilité simple. La détermination de solution de l'équation de Riccati rejoint alors la méthode de Hernandez & Jòdar ou de Kano & Nishimura. Toutefois, la solution que nous donnons ici améliore légèrement ces résultats en utilisant une bloc triangularisation en matrice réelle au lieu d'une forme de Jordan en général complexe. Elle se calcule numériquement d'une manière simple. On reprend ici la terminologie définie par [Bittanti et al, 1991] pour classifier les solutions périodiques de l'équation de Riccati :

Classification des solutions périodiques de l'équation de Riccati :

i) *Une solution périodique $K_M(t)$ de l'équation de Riccati est* ***maximale*** *si,* $\forall\, t \in \mathbf{R}$, $\forall\, K(t)$ solution périodique de la même équation, $K_M(t) - K(t)$ *est non négative.*

ii) *Une solution périodique $K_m(t)$ de l'équation de Riccati est* ***minimale*** *si,* $\forall\, t \in \mathbf{R}$, $\forall\, K(t)$ solution périodique de la même équation, $K(t) - K_m(t)$ *est non négative.*

iii) *Une solution périodique $K_s(t)$ de l'équation de Riccati est dite* ***forte*** *si tous les multiplieurs caractéristiques du système bouclé $\left[A(t) + B_1(t)B_1^{\mathrm{T}}(t)K_s(t)\right]$ sont de module inférieur ou égal à* 1.

iv) *Une solution périodique $K_S(t)$ de l'équation de Riccati est* ***stabilisante*** *si tous les multiplieurs caractéristiques du système bouclé $\left[A(t) + B_1(t)B_1^{\mathrm{T}}(t)K_S(t)\right]$ sont de module strictement inférieur à* 1.

Dans ce qui va suivre, la proposition 3.3 énonce les conditions nécessaires pour que la solution de l'équation différentielle de Riccati stabilise le système en boucle fermée. La proposition 3.4 donne une condition suffisante pour que ce système bouclé soit asymptotiquement stable tandis que la proposition 3.5 étudie les propriétés des solutions trouvées.

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des multiplieurs caractéristiques de $\mathcal{A}(t)$. On a déjà démontré que $\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)$ est une matrice symplectique. De ce fait,

$$\forall\ \mu_i \in \mathcal{M},\ \frac{1}{\mu_i} \in \mathcal{M},$$

Soit une matrice $\mathcal{R}$ telle que

$$\mathcal{R}^{1}\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)\ \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & \Phi_4 \end{bmatrix}, \tag{3.44}$$

où Φ_1, Φ_2 et Φ_4 appartiennent à $\mathbf{R}^{nxn}$.

On considère la matrice définie par

$$\forall\ t \in \mathbf{R},\ \mathcal{R}(t) = \Phi_{\mathcal{A}}(t,0)\ \mathcal{R}, \tag{3.45}$$

On montre que $\mathcal{R}(t)$ bloc-triangularise la matrice de monodromie $\Phi_{\mathcal{A}}(t+T,t)$ à l'instant t, en la même matrice que celle donnée en (3.44) :

$$\forall\ t \in \mathbf{R},\ \mathcal{R}^{1}(t)\Phi_{\mathcal{A}}(t+T,t)\ \mathcal{R}(t) = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & \Phi_4 \end{bmatrix}.$$

On partitionne $\mathcal{R}(t)$ et $\mathcal{R}$ en quatre blocs de dimension nxn :

$$\mathcal{R}(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1(t) & \mathcal{R}_2(t) \\ \mathcal{R}_3(t) & \mathcal{R}_4(t) \end{bmatrix} \text{ et } \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1 & \mathcal{R}_2 \\ \mathcal{R}_3 & \mathcal{R}_4 \end{bmatrix}, \tag{3.46}$$

Proposition 3.3 : Conditions nécessaires donnant la forme de $K(t)$

On suppose que $\mathcal{R}_1(t)$ est inversible à chaque instant. On choisit une matrice $\mathcal{R}$ telle que les valeurs propres du bloc Φ_1 dans (3.44) soient celles dont le module est inférieur ou égal à 1. *Alors,*

i) Une solution stabilisante possible $K_1(t)$ de l'équation (3.43) est

$$\forall\ t \in [0,T],\ \forall\ k \in \mathbf{N},\ K_1(t+kT) = \mathcal{R}_3(t)\mathcal{R}_1^{-1}(t), \tag{3.47}$$

ii) Cette solution est périodique, de même période que $\mathcal{R}(t)$ et $\mathcal{A}(t)$.

iii) *Les multiplieurs caractéristiques du système en boucle fermée $A_1(t)$ sont les valeurs propres de $\Phi_{\mathcal{R}}(T,0)$ dans le bloc Φ_1.*

iv) *Les autres solutions périodiques de l'équation différentielle de Riccati (3.43) sont obtenues pour tous les arrangements différents des multiplieurs caractéristiques de $\Phi_{\mathcal{R}}(T,0)$ dans les deux blocs Φ_1 et Φ_4 respectant la répartition par modules.*

Proposition 3.4 : Condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique

On suppose que $\forall\ t \in [0,T]$, $\mathcal{R}_1(t)$ est inversible, et que $\forall\ \mu \in spec\{\Phi_{\mathcal{R}}(T,0)\}$, $|\mu| \neq 1$. Alors, le système en boucle fermée $A_1(t)$ est asymptotiquement stable pour l'unique solution $K_1(t)$ donnée par (3.47).

Remarque :

Par hypothèse, les multiplieurs caractéristiques de $A_1(t)$ sont de module inférieur ou égal à 1. La proposition 3.3 est une condition nécessaire sur $K_1(t)$ pour que la matrice $A_1(t)$ soit stable. Néanmoins, $A_1(t)$ n'est pas forcément asymptotiquement stable. De plus, s'il existe des multiplieurs caractéristiques de module égal à 1, la solution $K_1(t)$ n'est pas unique (proposition 1.iv). L'asymptotique stabilité et l'unicité de la solution nécessitent les hypothèses de la proposition 3.4.

Démonstration des propositions 3.3 et 3.4 :

On suppose que $\forall\ t \in [0,T[$, $\mathcal{R}_1(t)$ est inversible.

i) A partir de (3.45), on obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1(t) = \Phi_{11}(t,0)\ \mathcal{R}_1 + \Phi_{12}(t,0)\ \mathcal{R}_3, \\ \mathcal{R}_3(t) = \Phi_{21}(t,0)\ \mathcal{R}_1 + \Phi_{22}(t,0)\ \mathcal{R}_3. \end{cases} \tag{3.48}$$

Par dérivation de l'équation (3.47), on vérifie facilement que $K(t) = \mathcal{R}_3(t)\mathcal{R}_1^{-1}(t)$ est bien une solution de l'équation différentielle de Riccati (3.43).

ii) D'après (3.45),

$$\mathcal{R}(t+T) = \Phi(t+T,t)\ \mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(t)\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & \Phi_4 \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

D'où,

$$\begin{cases} \mathcal{R}_1(t+T) = \mathcal{R}_1(t)\Phi_1, \\ \mathcal{R}_3(t+T) = \mathcal{R}_3(t)\Phi_1. \end{cases} \tag{3.50}$$

alors,

$$K(t+T) = \mathcal{R}_3(t+T)\mathcal{R}_1^{-1}(t+T) = \mathcal{R}_3(t)\mathcal{R}_1^{-1}(t) = K(t).$$

Ainsi, $K(t)$ est T-périodique et continue sur $]-\infty,+\infty[$. Remarquons qu'ayant établi cette périodicité de $K(t)$, on montre que $K(0) = K_0$ est solution de l'équation algébrique du type Riccati :

$$\Phi_{21}(T,0) + \Phi_{22}(T,0)\,K_0 - K_0\Phi_{11}(T,0) - K_0\Phi_{12}(T,0)\,K_0 = 0. \qquad (3.51)$$

iii) Au vu des équations (3.38) et (3.39), et sachant que $K(T) = K(0)$,

$$\Phi_{\mathcal{A}}(T,0) = \mathcal{K}(0)\,\Phi_{\mathcal{A}_1}(T,0)\,\mathcal{K}^{-1}(0).$$

Les deux matrices de monodromie sont semblables et symplectiques avec les valeurs propres :

$$spec\ \{\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)\} = spec\ \{\Phi_{\mathcal{A}_1}(T,0)\}$$

$$spec\ \{\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)\} = spec\ \{\Phi_{A_1}(T,0)\} \cup \left\{\mu\ tel\ que\ \frac{1}{\mu} \in spec\ \{\Phi_{A_1}(T,0)\}\right\}.$$

Considérons maintenant la matrice de changement de base

$$\mathcal{R}' = \mathcal{K}^{-1}(0)\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1 & \mathcal{R}_2 \\ 0 & (\mathcal{R}_4 - K_0\mathcal{R}_2) \end{bmatrix},$$

$$[\mathcal{R}']^{-1} = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{K}(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1^{-1} & -\mathcal{R}_2(\mathcal{R}_4 - K_0\mathcal{R}_2)\mathcal{R}_1^{-1} \\ 0 & (\mathcal{R}_4 - K_0\mathcal{R}_2)^{-1} \end{bmatrix}.$$

On obtient l'expression de $\Phi_{\mathcal{A}_1}(T,0)$ en fonction des $\mathcal{R}_i$, $i = 1$ à 4, des Φ_j, $j = 1$ à 4 et de K_0 :

$$\Phi_{\mathcal{A}_1}(T,0) = K^{-1}(0)\,\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)\,K(0)$$

$$\Phi_{\mathcal{A}_1}(T,0) = \mathcal{K}^{-1}(0)\,\mathcal{R}\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & \Phi_4 \end{bmatrix}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{K}(0)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1\Phi_1\mathcal{R}_1^{-1} & F(\mathcal{R}_i,\Phi_j,K_0) \\ 0 & (\mathcal{R}_4 - K_0\mathcal{R}_2)\,\Phi_4(\mathcal{R}_4 - K_0\mathcal{R}_2)^{-1} \end{bmatrix}$$

$F(\mathcal{R}_i,\Phi_j,K_0)$ dénotant une matrice dont l'expression exacte importe peu. Le résultat iii) de la proposition 1 est ainsi démontré car $\Phi_{A_1}(T,0)$ est semblable à Φ_1. Elles ont donc les mêmes valeurs propres. On note aussi que $\Phi_{A_1}^{-T}(T,0)$ est semblable à Φ_4.

iv) Soient les matrices $\Psi_1 = U^{-1}\Phi_1 U$ et $\Psi_4 = V^{-1}\Phi_4 V$. En considérant la matrice bloc-diagonale

$$\mathcal{U} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix},$$

on montre que

$$\begin{bmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & \Phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & U^{-1}\Phi_2 V \\ 0 & \Psi_4 \end{bmatrix}.$$

La matrice de bloc-triangularisation de $\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)$ correspondant à (Ψ_1, Ψ_4) est définie par

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}\,\mathcal{U} = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1 U & \mathcal{R}_2 V \\ \mathcal{R}_3 U & \mathcal{R}_4 V \end{bmatrix},$$

donnant la même solution $K(t)$ de l'équation différentielle de Riccati

$$K(t) = \mathcal{R}_3''(t)[\mathcal{R}_1'']^{-1}(t) = \mathcal{R}_3(t)\mathcal{R}_1^{-1}(t).$$

Ainsi, seule la répartition des valeurs propres entre Φ_1 et Φ_4 différencie les solutions $K(t)$ (proposition 3.3.iv). Il est évident que la proposition 3.4 est une conséquence de la proposition 3.3.❑

En complément, les propriétés de ces solutions de l'équation différentielle périodique de Riccati sont précisées par la proposition suivante :

Proposition 3.5 : Propriétés des solutions *K(t)*

Soient $\mu_1,\ldots, \mu_n$ les valeurs propres du bloc Φ_1.

- *i) Supposons que $\forall\ i, j \in \{1,\ldots,n\}$, $\mu_i \neq \frac{1}{\mu_j}$. Alors, la solution stabilisante donnée par (3.47) est symétrique.*
- *ii) Si $\forall\ \mu_i \in spec\,\{\Phi_1\}$, $|\mu_i| > 1$, alors $K_1(t)$ est définie non négative.*
- *iii) Si $\forall\ \mu_i \in spec\,\{\Phi_1\}$, $|\mu_i| < 1$, alors $K_1(t)$ est définie non positive.*

Pour ce dernier cas, la proposition 3.3.iii) indique que le système en boucle fermée est asymptotiquement stable.

Démonstration :

Ayant établit la périodicité de la solution $K(t)$, la partie iv) de la démonstration précédente montre qu'on peut utiliser la forme de Jordan dans (3.45) au lieu d'une forme bloc-triangulaire. La proposition 3.5 est alors un cas particulier des résultats de Hernandez et Jòdar, établis à partir de l'étude du comportement des valeurs propres et des vecteurs propres généralisés de la matrice triangulaire par blocs (3.44) ❑

2.1.2. Existence et unicité de la solution de l'équation de Riccati :

Dans la section 2.1.1., l'existence de la solution $K(t)$ de l'équation différentielle de Riccati est conditionnée par l'inversibilité du bloc $\mathcal{R}_1(t)$. L'objectif de cette section est de relier cette condition d'existence aux propriétés structurelles du système défini par $[A(t),B_1(t),C_1(t)]$, et aussi, à partir de ces mêmes propriétés structurelles, de situer par rapport à l'unité les modules des valeurs propres de $\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)$ et du bloc Φ_1. Cela reviendra en fait à étendre les résultats établis par Kucera [1972] pour les systèmes linéaires stationnaires. On rappelera d'abord les relations entre les multiplieurs caractéristiques de $\mathcal{A}(t)$ et les propriétés structurelles de $[A(t),B_1(t),C_1(t)]$ par les lemmes suivants

Lemme 3.6 : [KANO & NISHIMURA, 1979]

On suppose que μ est un multiplieur caractéristique non-observable de $[A(t),C_1(t)]$. Alors,

$$\exists\ \xi \in \mathbf{R}^n,\ \textit{tel que}\ \Phi_{\mathcal{A}}(T,0)\begin{bmatrix}\xi\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix}\xi\\ \mathbf{0}\end{bmatrix},\ \textit{et}\ \xi \neq \mathbf{0},$$

où $\mathbf{0}$ est le vecteur nul de dimension n.

Lemme 3.7 : [KANO & NISHIMURA, 1979]

On suppose que μ est un multiplieur caractéristique non-commandable de $[A(t),B_1(t)]$. Alors,

$$\exists\ \eta \in \mathbf{R}^n,\ \textit{tel que}\ \Phi_{\mathcal{A}}(T,0)\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \eta\end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \eta\end{bmatrix},\ \textit{et}\ \eta \neq \mathbf{0}.$$

Lemme 3.8 : [KANO & NISHIMURA, 1979]

La matrice $\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)$ a une valeur propre de module égal à 1 si et seulement si au moins une valeur propre de $\Phi_A(T,0)$ (un multiplieur caractéristique de $A(t)$) est de module égal à 1 et est $[A(t),B_1(t)]$ non-commandable et / ou $[A(t),C_1(t)]$ non-observable.

Le corollaire est plus intéressant à énoncer :

Corollaire du lemme 3.8 :

La matrice $\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)$ n'a aucune valeur propre de module égal à 1 si et seulement si $[A(t),B_1(t)]$ est stabilisable et $[A(t),C_1(t)]$ détectable.

Pour compléter ces résultats, il convient d'étudier les propriétés spectrales des solutions périodiques de l'équation différentielle de Riccati. Les résultats qu'on obtient sont alors les extensions dans le cas périodique des résultats obtenus par ailleurs pour les équations algébriques de Riccati. Ils sont connus sous le nom de *théorèmes d'inertie* [SHAYMAN, 1984 ;

BITTANTI et al, 1986]. Pour les établir, on suppose l'existence de la solution T-périodique de l'équation différentielle de Riccati. On démontre alors les relations existant entre les multiplieurs caractéristiques du système en boucle fermée et des valeurs propres de $K(t)$. On rappelle le théorème d'inertie suivant :

Théorème 3.9 : Théorème d'inertie pour l'équation différentielle périodique de Riccati [SHAYMAN, 1984]

Soient $A(t)$, $B_1(t)$ et $C_1(t)$ des matrices T-périodiques, continues par morceaux et intégrables sur $[0,T]$. *On suppose qu'il existe une solution $K_1(t)$ T-périodique de l'équation (3.47) et que* $[A(t),C_1(t)]$ *est observable. Soit la matrice*

$$A_1(t) = \left[A(t) + B_1(t)B_1^{\mathrm{T}}(t)K_1(t)\right].$$

Alors, $A_1(t)$ n'a pas de multiplieur caractéristique de module égal à 1, *$K_1(t)$ est non-singulier, et le nombre de valeurs propres positives (négatives) de $K_1(t)$ est égal au nombre de multiplieurs caractéristiques de $A_1(t)$ de module supérieur (inférieur) à 1.*

Ainsi, si les multiplieurs caractéristiques de $A_1(t)$ sont de module inférieur ou égal à 1 (respectivement, strictement inférieur à 1), la solution $K_1(t)$ correspondante doit être semi-définie négative (respectivement définie négative). Certains auteurs choisissent d'utiliser le bouclage $\psi(t) = -K(t)\, x(t) + \kappa(t)$ au lieu de (3.32). Dans ce cas, en tenant compte du changement de signe, la solution optimale $K_1(t)$ recherchée doit être positive. Finalement, les conditions du corollaire du lemme 3.8 permettent d'énoncer le théorème d'existence et d'unicité de la solution stabilisante.

Théorème 3.10 : existence et d'unicité de $K(t)$ [KANO & NISHIMURA, 1979]

La proposition "$[A(t),B_1(t)]$ stabilisable et $[A(t),C_1(t)]$ détectable" est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une unique solution symétrique définie négative de l'équation différentielle périodique de Riccati (3.43), telle que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable.

La proposition suivante 3.11 assure alors l'inversibilité de la matrice $\mathcal{R}_1(t)$ et donc l'existence de la solution de l'équation différentielle de Riccati.

Proposition 3.11 :

On suppose que $[A(t), B_1(t)]$ est stabilisable et que

i) $\forall\ \mu \in spec\{\Phi_1\},\ |\mu| \leq 1.$

ii) $\forall\ \mu \in spec\{\Phi_1\}$, *si* $|\mu| = 1$ *alors l'ordre de multiplicité de* μ *est égal à* 1.

Alors, pour n'importe quel choix d'arrangement des multiplieurs caractéristiques dans le bloc Φ_1, $\mathcal{R}_1(t)$ est inversible à chaque instant.

Démonstration :

Le point i) de cette proposition a été démontré par Kano & Nishimura [1979] quand tous les multiplieurs caractéristiques μ sont de module *strictement* inférieur à 1. L'amélioration que nous avons introduit ici permet de calculer la solution $K(t)$ semi-définie négative de l'équation différentielle de Riccati même quand le système en boucle fermée n'est pas asymptotiquement stable (pour la démonstration complète, voir Annexe 4) ❑

Remarque :

S'il existe dans le bloc Φ_1 une valeur propre de module 1 et d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2, la proposition 3.11 ne se prononce pas sur l'existence de la solution de Riccati. Ce résultat est pour le moment le meilleur que l'on puisse dériver de l'approche symplectique. Par contre, la méthode de quasi-linéarisation (voir § 2.1.4. suivant) arrive à montrer sous la seule hypothèse de stabilisabilité de $[A(t),B_1(t)]$ qu'*il existe* un choix d'arrangement de valeurs propres tel que $\mathcal{X}_1(t)$ soit inversible, donc $K_1(t)$ existe et peut être choisie semi-définie négative. Bien entendu, cette solution ne stabilise pas asymptotiquement le système en boucle fermée $A_1(t)$ car celui-ci a des multiplieurs caractéristiques sur le cercle unité. Selon le lemme 3.8, ce cas correspond en fait à la non-détectabilité de $[A(t),C_1(t)]$. La solution $K(t)$ sera toutefois optimale par rapport au critère quadratique-plus-linéaire défini, même si on peut trouver dans certain cas (voir exemple § 2.3.3) trouver un autre gain de bouclage $G(t)$ T-périodique tel que $A(t) + B_1(t)G(t)$ soit asymptotiquement stable. En effet, selon le théorème d'inertie, seuls les états $[A(t),C_1(t)]$-détectables seront pris en compte dans la valeur du critère J, et non les états appartenant à $Ker[K(t)]$.

Remarquons enfin que, seule la proposition 3.4 permet d'obtenir un système bouclé asymptotiquement stable.

2.1.3. Méthode pratique de calcul de la solution de l'équation différentielle de Riccati :

Sauf pour des cas particuliers évidents, la vérification de la stabilisabilité et de la détectabilité requiert le calcul de la matrice de monodromie $\Phi_A(T,0)$ et des deux grammiens $W_{A,B_1}(T,0)$ et $W_{A,C_1}(T,0)$. Etant donné qu'en cas de réponse positive (voir théorème ci-dessus), on sera amené à calculer la matrice de monodromie $\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)$ du système hamiltonien, il est plus judicieux de procéder comme suit :

1°) Calculer directement $\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)$, par intégration de l'équation d'état.

2°) Bloc-triangulariser $\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)$ selon (3.44), et en calculer les valeurs propres.

3°) Selon les modules des multiplieurs caractéristiques de $\mathcal{A}(t)$, deux cas apparaissent :

i) $\forall\ \mu_i \in spec\ \{\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)\}$, $|\ \mu_i\ | \neq 1$: une unique solution symétrique définie négative $K_1(t)$ existe, la loi de commande (3.42) est optimale, le système bouclé est asymptotiquement stable et $[A(t),B_1(t),C_1(t)]$ est stabilisable et détectable.

ii) $\exists\ \mu_0 \in spec\ \{\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)\}$, $|\ \mu_0\ | = 1$: $[A(t),B_1(t),C_1(t)]$ est non-stabilisable ou/et non-détectable et le système bouclé n'est pas asymptotiquement stable. Si $[A(t),B_1(t)]$ est stabilisable alors $[A(t),C_1(t)]$ est non-détectable. Dans ce cas, une solution T-périodique continue dérivable, symétrique et semi-définie positive $K_1(t)$ de l'équation différentielle périodique de Riccati existe.

2.1.4. Comparaison avec la méthode itérative de quasi-linéarisation :

La méthode de calcul exposée précédemment découle exclusivement de l'analyse du système hamiltonien. Une autre méthode parmi les plus utilisées consiste à approcher la solution exacte par itération de type newtonienne dans l'espace des fonctions. Pour les équations différentielles périodiques de Riccati, Bittanti et al [1989] ont considéré l'opérateur :

$$Ric : K(t) \rightarrow \dot{K}(t) + K(t)A(t) + A^{\mathrm{T}}(t)K(t) + K(t)B_1(t)B_1^{\mathrm{T}}(t)K(t) - C_1^{\mathrm{T}}(t)C_1(t)$$

On montre alors qu'une solution périodique et symétrique de l'équation différentielle de Riccati correspond à

$$Ric(K(t)) = 0. \qquad (3.52)$$

On définit d'abord la suite $\{K_i(.),\ i \in \mathbf{N}\}$ telle que

$\forall\ i \in \mathbf{N}$, $K_{i+1}(.)$ est une solution de l'équation différentielle de Lyapunov :

$$\dot{K}_{i+1}(t) = -K_{i+1}(t)A_i(t) - A_i^{\mathrm{T}}(t)K_{i+1}(t) - G_i^{\mathrm{T}}(t)G_i(t) + C_1^{\mathrm{T}}(t)C_1(t), \qquad (3.53)$$

où $A_i(t) = A(t) - B_1(t)G_i(t)$ et $G_i(t) = B_1^{\mathrm{T}}(t)K_i(t)$.

Théorème 3.12 : [BITTANTI et al, 1989]

On suppose que $[A(t),B_1(t)]$ est stabilisable. Soit la suite de matrices définie en (3.53), initialisée par une matrice T-périodique $G_0(t)$ telle que $A_0(t)$ soit stable. Alors,

i) $\forall\ i \in \mathbf{N}$, *il existe une unique solution symétrique non-négative de l'équation (3.53) telle que $A_{i+1}(t)$ soit stable.*

ii) la suite $\{K_i(.),\ i \in \mathbf{N}\}$ est monotone non croissante, i.e. $0 \leq K_{i+1}(t) \leq K_i(t)$.

iii) la limite $K_\infty(t) = \lim_{i\rightarrow\infty} K_i(t)$ existe. De plus, $K_\infty(t)$ est une solution de l'équation différentielle périodique de Riccati.

Remarques :

La même procédure peut être appliquée pour obtenir les solutions symétriques non-positives de l'équation de Riccati. La différence réside dans le fait que Bittanti utilise un bouclage de la forme $\psi(t) = -K(t)\,x(t)$, à l'inverse de notre choix en (3.32). La stabilité asymptotique du système en boucle fermée nécessite ici encore la détectabilité de $[A(t), C_1(t)]$.

On rappelle que la solution d'une équation différentielle périodique de Lyapunov du type

$$\dot{V}(t) = -V(t)A(t) - A^{T}(t)V(t) - Q(t) \tag{3.54}$$

est donnée par [BOLZERN & COLANERI, 1988; BITTANTI et al, 1991]

$$V(t) = \Phi_A{}^{T}(t_1,t)\ V(t_1)\ \Phi_A(t_1,t) + \int_t^{t_1} \Phi_A{}^{T}(\sigma,t)\ Q(\sigma)\ \Phi_A(\sigma,t)d\sigma, \tag{3.55}$$

où $V(t_1)$ est la valeur de $V(.)$ à l'instant final.

De ce fait, une solution périodique de (3.54) est obtenue par la résolution de l'équation algébrique discrète de Lyapunov :

$$V(t) = \Phi_A{}^{T}(t+T,t)\ V(t)\ \Phi_A(t+T,t) + \int_t^{t+T} \Phi_A{}^{T}(\sigma,t)\ Q(\sigma)\ \Phi_A(\sigma,t)d\sigma. \tag{3.56}$$

Comparaison des deux méthodes :

La méthode par quasi-linéarisation met en évidence la nécessité de la stabilisabilité de $[A(t), B_1(t)]$ pour l'existence d'une solution symétrique non-négative (non-positive) de l'équation différentielle de Riccati. Néanmoins, cette méthode nécessite plusieurs étapes coûteuses en temps de calcul :

i) Le calcul du gain $G_0(t)$ initialisant la suite $\{K_i(t)\}$ n'est *a priori* pas évident.

ii) Il faut résoudre l'équation différentielle de Lyapunov (3.53) à chaque itération, c'est-à-dire résoudre (3.56) pour chaque $A_i(t)$ et $G_i(t)$.

iii) Enfin, le critère d'arrêt de la procédure itérative est mal défini.

Par contre, la méthode dite hamiltonienne, donnée en § 2.1.3. peut directement conduire à la solution exacte de l'équation différentielle de Riccati. Le problème qui subsiste concerne le choix de la matrice $\mathcal{R}$ de bloc-triangularisation de $\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)$. Dans le cas où des multiplieurs caractéristiques de module 1 existent, cette méthode ne précise pas le choix des blocs Φ_1 et Φ_4 pour obtenir la solution optimale. Néanmoins, cette limitation est peu importante car on pourra calculer de manière exhaustive toutes les solutions périodiques de l'équation différentielle de Riccati : il suffit de changer par permutation de lignes et de colonnes les valeurs propres que l'on veut obtenir dans le bloc Φ_1. Dans la pratique, on se placera dans les conditions de stabilisabilité et de détectabilité définies à la proposition 2.

2.2. Poursuite de trajectoire :

Reprenons maintenant le problème d'optimisation (3.24) en considérant que la trajectoire périodique de sortie $e(t)$ désirée n'est pas uniformément nulle. On cherche à minimiser :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[\varepsilon^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\varepsilon(t) + 2m^{\mathrm{T}}(t)x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t) + 2l^{\mathrm{T}}(t)u(t) \right].dt.$$

On suppose que $[A(t),B_1(t),C_1(t)]$ est stabilisable et détectable. Soit $K_1(t)$ l'unique solution symétrique définie négative de l'équation différentielle périodique de Riccati (3.43) telle que la matrice d'évolution $A_1(t)$ du système bouclé soit asymptotiquement stable. On rappelle que l'équation différentielle vérifiée par le système hamiltonien est :

$$\dot{X}_1 = \mathcal{A}_1(t)\,X_1(t) + \mathcal{B}_1(t),$$

où

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \kappa(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n},\ \mathcal{A}_1(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) & B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t) \\ 0 & -A_1^{\mathrm{T}}(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2nx2n},$$

$$\mathcal{B}_1(t) = \begin{bmatrix} -B(t)R^{-1}(t)l(t) \\ -C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)e(t) + m(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)l(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n},$$

$$A_1(t) = \left[A(t) + B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)K(t)\right].$$

Pour résoudre complètement le problème de la commande optimale, il suffira de résoudre l'équation différentielle correspondant à $\kappa(t)$:

$$\frac{d}{dt}\,\kappa(t) = -A_1^{\mathrm{T}}(t)\ \kappa(t) + s(t) \qquad (3.57)$$

où $s(t) = -C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)e(t) + m(t) + K(t)B(t)R^{-1}(t)l(t)$.

On note que $s(t)$ *est T-périodique.*

La solution de (3.57) est

$$\kappa(t) = \Phi_{A_1}^{-\mathrm{T}}(t,0)\ \kappa(0) + \Phi_{A_1}^{-\mathrm{T}}(t,0) \int_0^t \Phi_{A_1}^{-\mathrm{T}}(0,\tau)\, s(\tau)\, d\tau \qquad (3.58)$$

On remarque (3.57) est un système exponentiellement instable. Par contre, le système correspondant à la simulation en temps inverse est asymptotiquement stable. On sait alors (voir par exemple les cycles limites dans le chapitre 2, § 3) qu'il existe une unique solution T-périodique du système inverse, donc de l'équation (3.57), $\kappa_1(t)$ obtenue à partir de la condition initiale κ_0 vérifiant :

$$\kappa_1(0) = \kappa_0 = \left[\Phi_{A_1}^{\mathrm{T}}(T,0) - Id_n\right]^{-1} \int_0^T \Phi_{A_1}^{-\mathrm{T}}(0,\tau)\, s(\tau)\, d\tau \qquad (3.59)$$

Notons que $\kappa_1(t)$ peut être calculée par la méthode du chapitre 2, § 3.1. De plus, tout autre solution différente de $\kappa_1(t)$ est non-bornée. De ce fait, la considération de l'optimalité du critère quadratique J permet d'énoncer le résultat suivant.

2.2.1. La loi de commande optimale :

Proposition 3.13 :

Selon les notations précédentes, on suppose que le système linéaire périodique défini en (3.37) par le triplet $[A(t), B_1(t), C_1(t)]$ *est stabilisable et détectable.Alors, la loi de commande optimale pour le critère quadratique-plus-linéaire J (3.24) est :*

$$\tilde{u}(t) = R^{-1}(t)B^{T}(t)K_1(t)\, x(t) + R^{-1}(t)B^{T}(t)\kappa_1(t) - R^{-1}(t)l(t).$$

où $K_1(t)$ *est l'unique solution stabilisante de l'équation différentielle périodique de Riccati calculée à partir de (3.47), et* $\kappa_1(t)$ *l'unique solution périodique de (3.57)(3.58).*

2.2.2. La valeur optimale du critère :

Soit la quantité

$$\mathcal{J}(t,x) = -\tfrac{1}{2}\, x^{T}K_1(t)\, x - \kappa_1(t)^{T}x + h(t). \tag{3.60}$$

où $K_1(t)$ *est la solution stabilisante de l'équation différentielle de Riccati et* $\kappa_1(t)$ *la solution périodique de (3.57)(3.58).*

Le calcul des dérivées partielles de J par rapport à t et x montre que

$$\begin{cases} \mathcal{J}_x = -\, K_1(t)\, x - \kappa_1(t) = -\, \psi, \\ \mathcal{J}_t = -\, \tfrac{1}{2}\, x^{T}\dot{K}_1(t)\, x - \dot{\kappa}_1(t)^{T}x + \dot{h}(t), \end{cases} \tag{3.61}$$

Par définition, $\mathcal{J}(t,x)$ vérifie l'équation de Hamilton-Jacobi si et seulement si

$$\mathcal{J}_t - H(\tilde{x},\tilde{u}(\tilde{x},-\mathcal{J}_x,t),-\mathcal{J}_x,t) = 0.$$

c'est-à-dire, si $h(t)$ vérifie l'équation (3.62) suivante :

$$\dot{h}(t) = \tfrac{1}{2}\left[l^{T}(t)R^{-1}(t)l(t) + \kappa_1^{T}(t)B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)\kappa_1(t) - e^{T}(t)Q(t)e(t) \right] - \kappa_1^{T}B(t)R^{-1}(t)l(t).$$

Dans ce cas, $\mathcal{J}(t,x(t))$ correspond à la valeur du critère quadratique plus linéaire J calculée sur la trajectoire optimale $x(t)$ à partir de l'instant t vers un instant final t_1 :

$$\int_t^{t_1} r(x,u,t).dt = \mathcal{J}(t,x(t)) - \mathcal{J}(t_1,x(t_1)), \tag{3.63}$$

$$\text{où } r(x,u,t) = \tfrac{1}{2}\left[\varepsilon^{T}(t)Q(t)\varepsilon(t) + 2m^{T}(t)x(t) + u^{T}(t)R(t)u(t) + 2l^{T}(t)u(t) \right].$$

Valeur du critère sur une période :

Dans le cas où on atteint la trajectoire poursuivie : $x(t+T) = x(t)$, *la valeur du critère entre chaque période est :* $J = \mathcal{J}(t+T,x(t+T)) - \mathcal{J}(t,x(t)) = h(T) - h(0)$.

2.3. Exemples d'application :

2.3.1. Problème de régulation :

Soit le système linéaire périodique de période $T = 2$ avec :

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-0.5sin(\omega t) & -2.1 \end{bmatrix},\ B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ et\ C(t) = Id_2,\ avec\ \omega = \pi.$$

On cherche la loi de commande minimisant le critère quadratique :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left[x^{T}(t)Q(t)x(t) + u^{T}(t)R(t)u(t) \right].dt$$

$$où,\ Q(t) = q\, Id_2,\ et\ R(t) = r\, Id_2,\ q \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{R}.$$

Ici encore, on utilise la transformation de Floquet-Lyapunov pour calculer la matrice de transition du système hamiltonien :

$$\Phi_{\mathcal{A}}(t,0) = \mathcal{P}^{1}(t)\, e^{\mathcal{M}t}.$$

En fixant $q = 1$, la solution stabilisante $K_S(t)$ de l'équation différentielle périodique de Riccati est calculée pour différentes valeurs de r.

1) pour $q = 1$ et $r = 1$:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} -0.1241 & 1.0018 & 0.0174 & 0.0034 \\ -0.7432 & -1.9942 & 0.0034 & 0.9426 \\ 1.0165 & -0.1713 & 0.1242 & 0.7432 \\ -0.1713 & 0.9249 & -1.0018 & 1.9942 \end{bmatrix},$$

La matrice de transformation de Floquet-Lyapunov est développée en série de Fourier jusqu'à l'ordre 2, soit pour ce cas :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t) = &\begin{bmatrix} 1.0292 & 0.0231 & 0.0005 & -0.0089 \\ 0.1059 & 0.9732 & -0.0080 & 0.0035 \\ -0.0630 & -0.0197 & 0.9765 & -0.1056 \\ -0.0140 & 0.0252 & -0.0237 & 1.0330 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0303 & -0.0231 & -0.0005 & 0.0089 \\ -0.1044 & 0.0269 & 0.0080 & -0.0039 \\ 0.0640 & 0.0191 & 0.0238 & 0.1042 \\ 0.0128 & -0.0255 & 0.0237 & -0.0341 \end{bmatrix} cos(\omega t) \\ &+ \begin{bmatrix} -0.0390 & 0.0010 & 0.0055 & 0.0005 \\ 0.0834 & 0.0332 & 0.0009 & -0.0182 \\ 0.0000 & -0.0549 & 0.0391 & -0.0842 \\ -0.0571 & -0.0234 & -0.0010 & -0.0332 \end{bmatrix} sin(\omega t) + \begin{bmatrix} 0.0011 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0000 \\ -0.0016 & -0.0001 & 0.0000 & 0.0004 \\ -0.0010 & 0.0006 & -0.0002 & 0.0013 \\ 0.0012 & 0.0003 & 0.0000 & 0.0011 \end{bmatrix} cos(2\omega t) \\ &+ \begin{bmatrix} -0.0003 & -0.0002 & 0.0000 & 0.0003 \\ -0.0008 & 0.0002 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.0026 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0012 \\ 0.0013 & -0.0003 & 0.0002 & -0.0002 \end{bmatrix} sin(2\omega t) + \dots\end{aligned}$$

Les multiplieurs caractéristiques du système hamiltonien sont

$$spec[\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)] = \{\ 0.0395,\ 0.1711,\ 5.8463,\ 25.3410\ \},$$

Ceux du système en boucle fermée sont :

$$spec[\Phi_{A_1}(T,0)] = \{\ 0.0395,\ 0.1711\ \},$$

pour la solution stabilisante de Riccati générée par $K_S(0) = K_S(kT) = \begin{bmatrix} -1.3403 & -0.3563 \\ -0.3563 & -0.3766 \end{bmatrix}$.

2) pour $q = 1$ et $r = 0.1$:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} -0.0564 & 1.0003 & 0.0287 & -0.0136 \\ -0.8556 & -2.0962 & -0.0136 & 9.8578 \\ 0.9956 & -0.0854 & 0.0564 & 0.8556 \\ -0.0854 & 0.9827 & -1.0003 & 2.0962 \end{bmatrix},$$

Les matrices $\mathcal{M}$ et $\mathcal{P}(t)$ sont différentes de celles du cas 1) ci-dessus et doivent être recalculées. Les multiplieurs caractéristiques du système hamiltonien sont

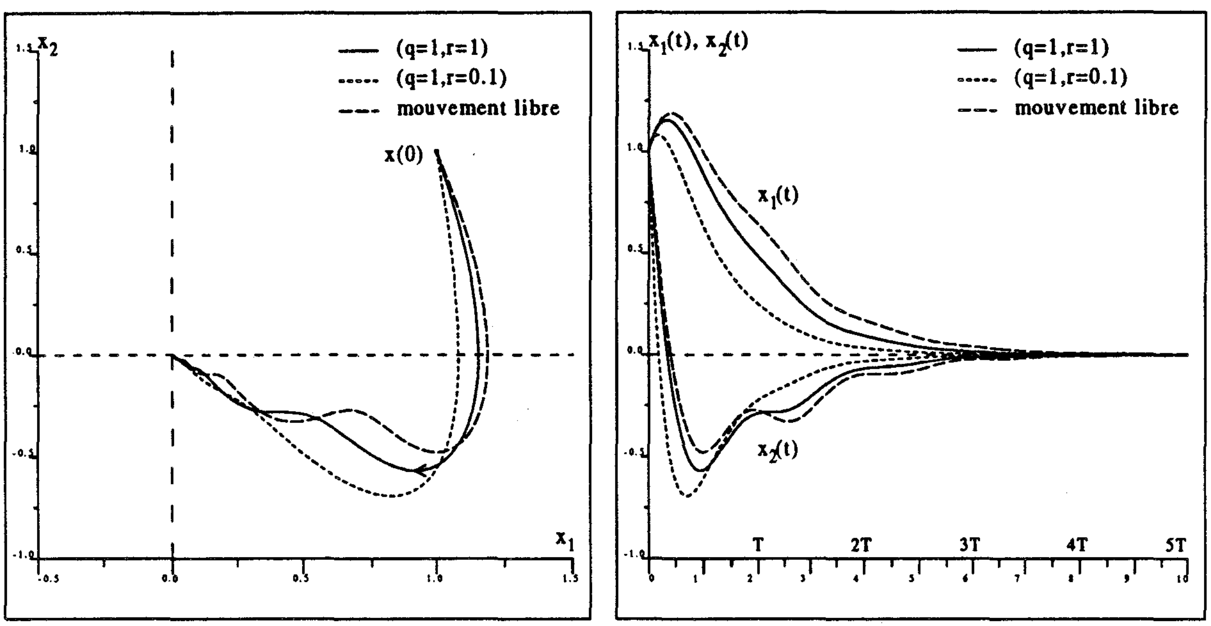
$$spec[\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)] = \{\ 0.0012,\ 0.1397,\ 7.1599,\ 865.4306\ \},$$

Ceux du système en boucle fermée sont :

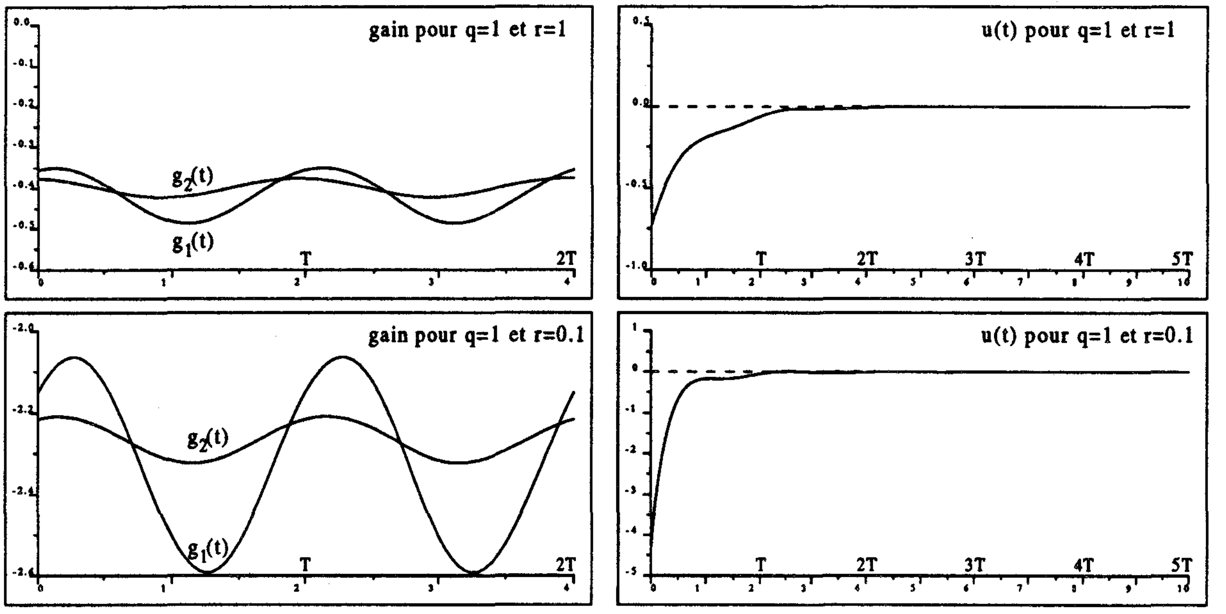
$$spec[\Phi_{A_1}(T,0)] = \{\ 0.0012,\ 0.1397\ \},$$

pour la solution stabilisante de Riccati générée par $K_S(0) = K_S(kT) = \begin{bmatrix} -1.2106 & -0.2151 \\ -0.2151 & -0.2216 \end{bmatrix}$.

3) Simulations :



Figures 3.1. Trajectoire dans l'espace des phases et évolution de l'état x dans le temps.



Figures 3.2. Evolution du gain $G(t) = [g_1(t), g_2(t)]$ et de la commande $\boldsymbol{u(t)}$.

Malgré la non-stationnarité du système et l'utilisation d'un gain périodique, les résultats obtenus sont classiques. En effet, l'amplitude des gains et de $\boldsymbol{u(t)}$ augmente avec $\frac{q}{r}$ tandis que la valeur du critère s'améliore. Ainsi, $J_0 = 1.3518$ pour le mouvement libre, $J_1 = 1.2213$ pour $q = r = 1$, et $J_{10} = 0.9411 \sim 0.696 J_0$ pour $q = 1$, $r = 0.1$.

En considérant $J_{x,(q/r)} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{x}(t).dt$, on obtient dans chaque cas, $J_{x,1} = 1.1278$ et $J_{x,10} = 0.8029$.

2.3.2. Poursuite de trajectoire d'état :

Soit le même système linéaire périodique précédent :

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1\text{-}0.5sin(\omega t) & -2.1 \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, et\ C(t) = Id_2,\ \omega = \pi.$$

i) Premier problème :

On cherche à minimiser le critère quadratique :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\, \varepsilon^T(t)Q(t)\varepsilon(t) + \boldsymbol{u}^T(t)R(t)\boldsymbol{u}(t) \,\right].dt$$

$$où,\ Q(t) = q\, Id_2,\ et\ R(t) = r\, Id_2,\ q \in \mathbf{R}, r \in \mathbf{R},$$

$$et\ \varepsilon(t) = \boldsymbol{e}(t) - \boldsymbol{x}(t),\ avec\ \boldsymbol{e}(t) = \begin{bmatrix} cos(\omega t) \\ -\omega sin(\omega t) \end{bmatrix}.$$

Pour chaque valeur de (q, r), les solutions stabilisantes de l'équation différentielle de Riccati sont les mêmes que celles du problème de régulation de la section § 2.3.1. Il suffira alors de calculer la solution périodique $\kappa_1(t)$ de l'équation différentielle (3.57) :

$$\frac{d}{dt}\kappa(t) = -A_1^{\mathrm{T}}(t)\,\kappa(t) - C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)e(t),$$

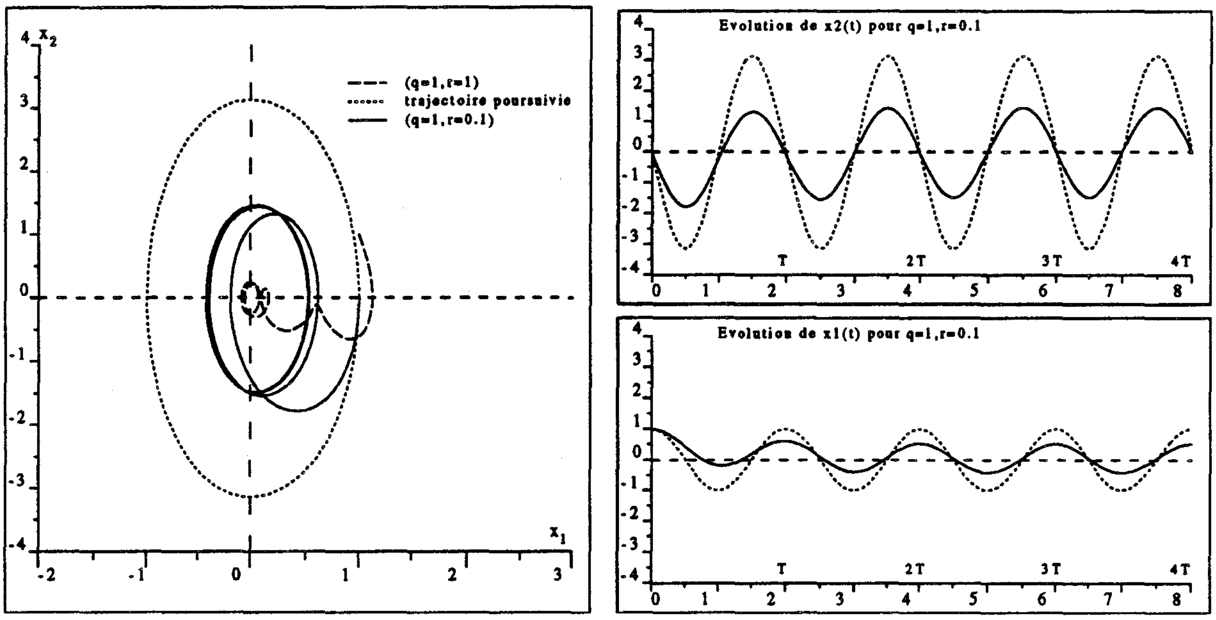
dont la condition initiale $\kappa_{1,0}$ vérifie l'équation (3.59) :

$$\kappa_1(0) = \kappa_{1,0} = \left[\Phi_{A_1}{}^{\mathrm{T}}(T,0) - Id_n\right]^{-1} \int_0^T \Phi_{A_1}{}^{-\mathrm{T}}(0,\tau)\, s(\tau)\, d\tau.$$

On calcule ainsi :

Pour $q = 1, r = 1.0,\ \kappa_{1,0} = \begin{bmatrix} 0.4660 \\ -0.6424 \end{bmatrix}$

Pour $q = 1, r = 0.1,\ \kappa_{1,0} = \begin{bmatrix} 0.7857 \\ -0.2881 \end{bmatrix}$



Figures 3.3.a. Simulations pour (q=1,r=1) et (q=1,r=0.1).

Pour $q = 5, r = 0.2,\ \kappa_{1,0} = \begin{bmatrix} 4.6100 \\ -0.6158 \end{bmatrix}$

La matrice de monodromie du système hamiltonien est très mal conditionnée :

$$\Phi_{\mathcal{A}}(T,0) = \begin{bmatrix} -980.7454 & 1818.7414 & -553.6864 & 2821.0254 \\ -5108.2284 & 9443.348 & -2877.8967 & 14650.679 \\ -2068.4391 & 3859.1652 & -1172.1505 & 5983.5274 \\ -7623.574 & 14088.869 & -4294.1589 & 21858.329 \end{bmatrix}$$

avec les multiplieurs caractéristiques { 29141.344, 7.2997, 0.1369, 0.0000343 }.

$$K_1(0) = \begin{bmatrix} -5.7797 & -0.7867 \\ -0.7867 & -0.7991 \end{bmatrix}.$$

Pourquoi la poursuite n'est pas parfaite ?

On constate sur les figures 3.3 que la trajectoire poursuivie n'est pas atteinte. En augmentant le rapport q/r, on diminue l'écart permanent et la poursuite s'améliore. Toutefois, des problèmes de résolution numérique apparaissent car la matrice de monodromie du système hamiltonien devient mal conditionnée.

Cela ne remet cependant pas en cause l'optimalité de la commande ci-dessus. L'optimisation de critère quadratique appliquée à la poursuite de trajectoire périodique peut laisser une erreur permanente. Ceci est dû à la prise en compte de l'énergie de commande dans le critère. Dans ce cas, essayer d'atteindre la trajectoire poursuivie, comme par exemple par l'application de la commande calculée au chapitre 2, § 3.4, coûte plus cher selon ce critère.

ii) Deuxième problème :

Soit la commande qui permet d'atteindre la trajectoire poursuivie $e(t)$:

$$u_0(t) = -\,\omega^2 cos(\omega t) + [1{+}0.5sin(\omega t)]cos(\omega t) - 2.1\ \omega\ sin(\omega t),$$

obtenue dans le chapitre 2, § 3.4. On introduit maintenant le nouveau critère quadratique :

$$J' = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\, \varepsilon^T(t)Q(t)\varepsilon(t) + [u(t){-}u_0(t)]^T R(t)[u(t){-}u_0(t)] \,\right].dt$$
$$\text{où, } Q(t) = q\, Id_2,\ et\ R(t) = r\, Id_2,\ q \in \mathbf{R},\ r \in \mathbf{R},$$

La minimisation de J' revient à minimiser le critère quadratique-plus-linéaire

$$J'' = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\, \varepsilon^T(t)Q(t)\varepsilon(t) + u^T(t)R(t)u(t) - 2u_0^{\ T}(t)R(t)u(t) \,\right].dt,$$

c'est-à-dire, avec les notations de (3.25), $l(t) = -\,R(t)\ u_0(t)$. Selon la section 2.2. ci-dessus, la loi de commande optimisant J' est donc

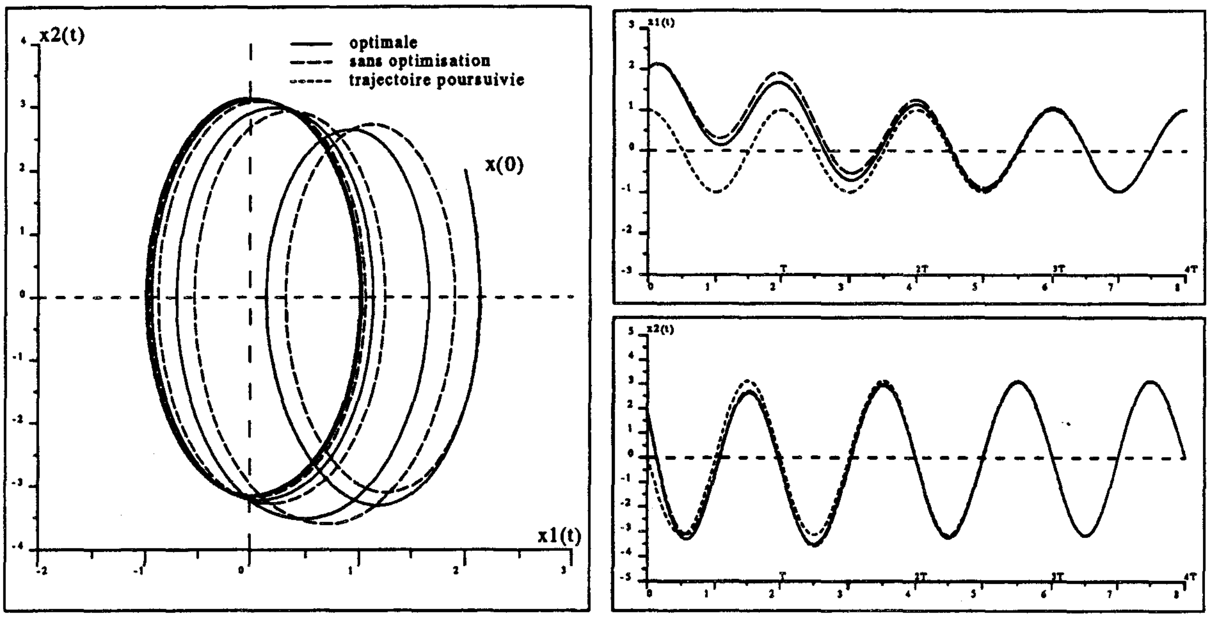
$$\begin{aligned}\tilde{u}(t) &= R^{-1}(t)B^T(t)K_1(t)\ x(t) + R^{-1}(t)B^T(t)\kappa_1(t) - R^{-1}(t)l(t),\\ &= R^{-1}(t)B^T(t)K_1(t)\ x(t) + R^{-1}(t)B^T(t)\kappa_1(t) + u_0(t),\end{aligned}$$

qui, pour des valeurs données de q et r, fait intervenir la même solution périodique $K_1(t)$ de Riccati, et la solution périodique de

$$\frac{d}{dt}\,\kappa(t) = -A_1^{\ T}(t)\ \kappa(t) - C^T(t)Q(t)e(t) - K_1(t)B(t)u_0(t),$$

Remarque :

On note que la commande optimale résulte de la superposition de la solution du premier problème et d'un terme prenant en compte la commande "poursuivie" $u_0(t)$.



Figures 3.3.b. Simulations pour $q = r = 1$.

Sur la figure 3.3.b, on compare la trajectoire d'état $x(t)$ pour la commande optimale $\tilde{u}(t)$ calculé à la page précédente (trait continu), et celle pour la loi de commande $u_0(t)$ du chapitre 2 (trait pointillé long). La transition vers la trajectoire poursuivie (trait pointillé fin) est amélioré, et nous n'avons plus d'erreur permanente.

2.3.3. Exemple stabilisable et non détectable :

Soit le système linéaire périodique de période $T = 2$ avec :

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{bmatrix} si\ t \in [0,1[,$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -2. \end{bmatrix} si\ t \in [1,2[,$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1. \\ 1. \\ 0. \end{bmatrix} \quad et \quad C(t) = [\ 0.\ \ 0.\ \ 1.\ ].$$

La matrice de monodromie en boucle ouverte est

$$\Phi_A(T,0) = \begin{bmatrix} 1. & 1. & 0. \\ 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0.3679 \end{bmatrix}.$$

Le grammien de commandabilité de $[A(t), B(t)]$ est

$$W_{A,B}(T,0) = \begin{bmatrix} 3.525 & 2.65 & 0. \\ 2.65 & 2.1 & 0. \\ 0. & 0. & 0. \end{bmatrix}.$$

Ce système est stabilisable car le seul multiplieur caractéristique non commandable est de module inférieur à 1 ($\mu = 0.3679$). Par contre, $[A(t), C(t)]$ n'est pas détectable car le grammien d'observabilité est

$$W_{A,C}(T,0) = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 5.0995 \end{bmatrix}$$

La matrice de monodromie du système hamiltonien est

$$\Phi_{\mathcal{A}}(T,0) = \begin{bmatrix} 1. & 1. & 0. & 2.8333 & 3.5 & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 1.5 & 2. & 0. \\ 0. & 0. & 0.3679 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -1. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 13.5530 & 0. & 0. & 2.7183 \end{bmatrix}.$$

dont les valeurs propres sont $\{1., 1., 2.7183, 0.3679, 1., 1.\}$. Plusieur choix sont possible pour la bloc-triangularisation Φ_1-Φ_4, soit par exemple

$$\mathcal{K}^{1}\Phi_{\mathcal{A}}(T,0)\,\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 0.3679 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 2. & 1.5 & 0. \\ 0. & 1. & 1. & 3.5 & 2.8333 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. & -1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 2.7183 \end{bmatrix}$$

On obtient la solution symétrique périodique semi-définie négative à partir de

$$K(0) = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -5.7918 \end{bmatrix}$$

Le système bouclé n'est pas asymptotiquement stable car il a les mêmes multiplieurs caractéristiques que ceux en boucle ouverte : les deux premiers étant non observables et le dernier non commandable. Cet exemple est très particulier car finalement la commande optimale est $\boldsymbol{u}(t)=0$. La valeur du critère quadratique pour le problème de régulation est

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left[\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{u}(t)\right].dt,$$

$$J = -\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)\, K(0)\boldsymbol{x}(0) = 5.7918\, \boldsymbol{x}_3^{\,2}(0) = 5.7918\, \boldsymbol{y}^2(0)\,,$$

où $\boldsymbol{x}_3^{\,2}(t)$ *est la troisième coordonnée de* $\boldsymbol{x}(t)$.

Ce critère ne tient compte effectivement que de la composante $[A(t), C(t)]$-détectable de $\boldsymbol{x}$. Il n'est donc pas nécéssaire, même si cela est possible, de stabiliser complètement le système. Tout autre commande pénaliserait inutilement le critère quadratique par rapport à $\boldsymbol{u}(t)$.

3. Systèmes linéaires à coefficients périodiques en temps discret :

On rappellera d'abord dans la section 3.1. les méthodes générales de résolution du problème d'optimisation pour un système discret quelconque. La section 3.2. exposera l'application de ces méthodes pour les systèmes linéaires discrets avec un critère quadratique plus linéaire. On verra alors dans la section 3.3. l'utilisation de ces résultats pour les systèmes linéaires discrets à coefficients périodiques.

3.1. Formulation du problème pour un système discret quelconque :

Soit un système en temps discret régi par l'équation de récurrence :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, k), \qquad (3.64)$$
$$\text{où } k \in \mathbf{N},\ x_k \in \mathbf{R}^n,\ u_k \in \mathbf{R}^m.$$

Ce système est soumis aux contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} &i)\ \ k \in \{0,\ldots,N\text{-}1\},\\ &ii)\ \ \forall\, k \in \{0,\ldots,N\text{-}1\},\ q_k(x_k, u_k) \le 0,\\ &iii)\ p(x_0,\ldots,x_{N-1},u_0,\ldots,u_{N-1}) \le 0, \end{aligned} \qquad (3.65)$$

tout en vérifiant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} k(x_0) = 0,\\ l(x_N) = 0. \end{cases} \qquad (3.66)$$

La commande optimale **u** recherchée doit satisfaire (3.65)(3.66) et minimiser le critère :

$$J = r(x_0,\ldots,x_{N-1},u_0,\ldots,u_{N-1}) \qquad (3.67)$$

De manière analogue aux systèmes en temps continu, le problème d'optimisation des systèmes en temps discret peut se résoudre par deux approches. La première consiste à calculer directement la trajectoire optimale par la minimisation d'une quantité [BORNE et al, 1991] dont l'expression est donnée par :

$$\begin{aligned} \rho(x_0,\ldots,x_{N-1},u_0,\ldots,u_{N-1}, w) = {} & r(x_0,\ldots,x_{N-1},u_0,\ldots,u_{N-1})\\ & + \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k^{\mathrm{T}}(f(x_k, u_k, k) - x_{k+1}) + \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k^{\mathrm{T}}(q_k + v_k^2)\\ & + \mu^{\mathrm{T}}(p(.) + w^2) + \zeta_0^{\mathrm{T}}\mathrm{k}(x_0) + \zeta_N^{\mathrm{T}} l(x_N) \end{aligned} \qquad (3.68)$$

où ψ_k, λ_k, μ, ζ_0 et ζ_N sont les paramètres de Lagrange ou de Kuhn-Tucker associés aux contraintes. A partir de là, on peut mettre en évidence les conditions au premier ordre, celles du second, et les conditions de transversalité tout-à-fait analogues à ceux des systèmes en temps continu (voir § 1.1.1, § 1.1.2, § 1.1.3.).

La deuxième méthode utilise la version discrète du principe du maximum. dans ce cas, la commande optimale recherchée est celle qui maximise le hamiltonien tout en tenant compte des contraintes. La formulation du hamiltonien habituellement utilisée est [BORNE et al, 1991] :

$$H(.) = -r(.) + \psi_{k+1}^{\mathsf{T}} f(x_k, u_k, k), \tag{3.69}$$

ou encore

$$H(.) = -r(.) + \sum_{k=0}^{N-1} \psi_{k+1}^{\mathsf{T}} f(x_k, u_k, k). \tag{3.70}$$

Remarque :

Le hamiltonien donné par (3.70) est bien adapté pour les systèmes linéaires discrets non stationnaires avec un critère quadratique. Sauf indication du contraire, on l'utilisera exclusivement dans les sections suivantes.

3.2. Systèmes linéaires discrets, optimisation d'un critère quadratique :

Soit le système linéaire discret non stationnaire

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \\ y_k = C_k x_k \end{cases} \tag{3.71}$$

Soit la sortie désirée $\{e_k, k \in \mathbf{N}\}$, et la différence $\varepsilon_k = e_k - y_k$, pour tout $k \in \mathbf{N}$.
On veut optimiser le critère quadratique plus linéaire suivant

$$r(.) = \frac{1}{2}\varepsilon_N^{\mathsf{T}} P \varepsilon_N + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \left[\varepsilon_k^{\mathsf{T}} Q_k \varepsilon_k + 2m_k^{\mathsf{T}} x_k + u_k^{\mathsf{T}} R_k u_k + 2l^{\mathsf{T}}_k u_k\right] \tag{3.72}$$

où P, Q_k et R_k sont des matrices symétriques positives, R_k est supposée définie quel que soit $k \in \mathbf{N}$, m_k et l_k sont deux vecteurs de dimensions appropriées. Ici encore, on considère un problème sans contrainte. La maximisation du hamiltonien donne

$$\begin{cases} x_{k+1} = H_{\psi_{k+1}} \\ \psi_k = H_{x_k}, \\ H_{u_k} = 0. \end{cases} \tag{3.73}$$

On obtient alors

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k \tilde{u}_k, \\ \psi_k = A_k^{\mathsf{T}} \psi_{k+1} - C_k^{\mathsf{T}} Q_k C_k x_k + C_k^{\mathsf{T}} Q_k e_k - m_k, \\ -l_k - R_k \tilde{u}_k + B_k^{\mathsf{T}} \psi_{k+1} = 0. \end{cases} \tag{3.74}$$

Ici aussi, on recherchera les structures bouclées de la forme

$$\forall k \in \mathbf{N},\ \psi_k = S_k x_k + s_k \tag{3.75}$$
$$S_k \in \mathbf{R}^{nxn},\ s_k \in \mathbf{R}^n.$$

A partir de (3.74) et (3.75), on montre que la commande optimale recherchée est

$$\tilde{u}_k = G_k x_k + g_k, \qquad (3.76)$$
$$\text{où } G_k = \left[R_k - B_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} B_k\right]^{-1} B_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} A_k,$$
$$\text{et } g_k = \left[R_k - B_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} B_k\right]^{-1} \left[B_k^{\mathsf{T}} s_{k+1} - l_k\right].$$

avec S_k et s_k vérifiant

$$S_k = -C_k^{\mathsf{T}} Q_k C_k + A_k^{\mathsf{T}} \left[S_{k+1}^{-1} - B_k R_k^{-1} B_k^{\mathsf{T}}\right]^{-1} A_k, \qquad (3.77)$$
$$s_k = F_k s_{k+1} + \sigma_k, \qquad (3.78)$$
$$\text{où } F_k = A_k^{\mathsf{T}}\left[Id_n + S_{k+1} B_k (R_k - B_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} B_k)^{-1} B_k^{\mathsf{T}}\right],$$
$$\text{et } \sigma_k = -A_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} B_k (R_k - B_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} B_k)^{-1} B_k^{\mathsf{T}} l_k + C_k^{\mathsf{T}} Q_k e_k - m_k.$$

De ce fait, le problème sera décomposé en deux sous-problèmes :

i) le calcul de S_k solution de (3.77) qui correspond au problème classique de régulation où e_k, m_k et l_k sont nuls pour tout $k \in \mathbf{N}$. Ce calcul nécessitera la résolution de l'équation récurrente de Riccati.

ii) la détermination de s_k à partir de (3.78) quand e_k, m_k et l_k ne sont pas tous uniformément nuls. Ce cas correspond par exemple aux problèmes de poursuite de trajectoire.

Remarques :

Le système bouclé est défini par

$$x_{k+1} = \tilde{A}_k x_k + B_k g_k, \qquad (3.79)$$
$$\text{avec } \forall\, k \in \mathbf{N},\ \tilde{A}_k = \left[Id_n + B_k (R_k - B_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} B_k)^{-1} B_k^{\mathsf{T}} S_{k+1}\right] A_k.$$

De plus, la matrice R_k étant supposée définie positive, on vérifie l'optimalité de la solution obtenue car

$$\forall\, k \in \mathbf{N},\ H_{u_k u_k} = -R_k < 0.$$

L'équation récurrente de Riccati :

L'équation (3.77) peut être mis sous la forme plus connue de l'équation de Riccati :

$$S_k = -C_k^{\mathsf{T}} Q_k C_k + A_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} A_k + A_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} B_k \left[R_k - B_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} B_k\right]^{-1} B_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} A_k. \qquad (3.80)$$

La plupart des auteurs normalisent (3.80) en définissant les matrices $\tilde{B}_k$ et $\tilde{C}_k$ telles que :

$$\forall\, k \in \mathbf{N},\ B_k R_k^{-1} B_k^{\mathsf{T}} = \tilde{B}_k \tilde{B}_k^{\mathsf{T}} \text{ et } C_k^{\mathsf{T}} Q_k C_k = \tilde{C}_k^{\mathsf{T}} \tilde{C}_k. \qquad (3.81)$$

L'équation récurrente de Riccati est alors réécrite en

$$S_k = -\tilde{C}_k^{\mathsf{T}} \tilde{C}_k + A_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} A_k + A_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} \tilde{B}_k \left[Id_n - \tilde{B}_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} \tilde{B}_k\right]^{-1} \tilde{B}_k^{\mathsf{T}} S_{k+1} A_k. \qquad (3.82)$$

Cas particuliers :

a) Si l'instant N est donné, la solution de (3.80) est connue à partir de la condition finale de transversalité $S_N = -P$.

b) Dans le cas des systèmes discrets stationnaires à horizon infini, la solution recherchée est constante et doit vérifier l'équation algébrique de Riccati :

$$S = -\tilde{C}^T\tilde{C} + A^TS\,A + A^TS\,\tilde{B}\left[Id_n - \tilde{B}^TS\,\tilde{B}\right]^{-1}\tilde{B}^TS\,A. \qquad (3.83)$$

3.3. Système linéaire discret à coefficients périodiques :

Dans cette section, on suppose que le système (3.71) est T-périodique, où $T \in \mathbf{N}$. On suppose aussi que la consigne $\boldsymbol{e}_k$, les matrices Q_k et R_k, et les vecteurs $\boldsymbol{m}_k$ et $\boldsymbol{l}_k$ sont périodiques de même période T. Dans le cas du problème à horizon infini, on recherchera la solution périodique de l'équation périodique récurrente de Riccati (3.82). La résolution de cette équation de Riccati pour le problème d'optimisation énoncé précédemment peut être menée de deux manières différentes. La première approche, développée en § 3.3.1., consiste à considérer cette équation et la résoudre telle-quelle, tandis que le deuxième approche exploite la propriété particulière des systèmes linéaires périodiques permettant de trouver un système linéaire discret équivalent. On peut alors plus facilement calculer la solution de l'équation (3.82) à partir d'une équation algébrique discrète de Riccati (§ 3.3.2.).

3.3.1. Résolution directe de l'équation périodique récurrente de Riccati :

On énonce d'abord le théorème d'existence suivant :

Théorème 3.14 : [BITTANTI et al,1991]

Selon la classification des solutions de l'équation de Riccati donnée en § 2.1.1.,

i) *Une solution forte de l'équation de Riccati (3.82) existe si et seulement si* $[A_k, \tilde{B}_k]$ *est stabilisable.*

ii) *La solution forte de (3.82) existe et coincide avec la solution périodique stabilisante si et seulement si* $[A_k, \tilde{B}_k]$ *est stabilisable et si aucun multiplieur caractéristique non observable de* $[A_k, \tilde{C}_k]$ *n'est de module égal à* 1.

iii) *La solution périodique stabilisante de (3.82) est positive définie (respectivement, négative définie) à l'instant k si et seulement si* $[A_k, \tilde{B}_k]$ *est stabilisable et si aucun multiplieur caractéristique non observable de* $[A_k, \tilde{C}_k]$ *n'est de module supérieur ou égal à* 1 *(respectivement, inférieur ou égal à* 1*) à cet instant k.*

iv) La solution forte est l'unique solution périodique semi-définie positive de l'équation de Riccati (3.82) si et seulement si $[A_k, \tilde{B}_k]$ *est stabilisable et si aucun multiplieur caractéristique non observable de* $[A_k, \tilde{C}_k]$ *n'est de module strictement supérieur à* 1.

La méthode itérative de quasi-linéarisation :

Cette méthode a été étudiée pour les systèmes discrets notamment par Hewer [1971], Caines et Maynes [1971] ou plus récemment, par Bittanti, Colaneri et De Nicolao [1988] pour les problèmes de prédiction avec la seule condition de détectabilité du système considéré. Néanmoins, nous avons pu transposer la démonstration de Bittanti à la commande optimale des systèmes linéaires discrets. On obtient alors le résultat suivant :

A partir de (3.82), on définit la suite d'équations récurrentes de Lyapunov telle que

$$\forall\ i \geq 0,\ S_{i+1,k} = A_{i,k}^{\mathrm{T}} S_{i+1,k+1} A_{i,k} - \tilde{C}_{i,k}^{\mathrm{T}} \tilde{C}_{i,k} + G_{i,k}^{\mathrm{T}} G_{i,k}, \quad (3.84)$$

où le premier indice i correspond à la i-ème itération, et k se réfère à l'instant k, avec

$$\forall\ i \geq 0,\ A_{i,k} = A_k + \tilde{B}_k G_{i,k},$$
$$\forall\ i \geq 1,\ G_{i,k} = \left[Id_n - \tilde{B}_k^{\mathrm{T}} S_{i,k} \tilde{B}_k\right]^{-1} \tilde{B}_k^{\mathrm{T}} S_{i,k} A_k.$$

Si $[A_k, \tilde{B}_k]$ est stabilisable, on peut trouver une matrice $G_{0,k}$ T-périodique telle que $A_{0,k}$ soit asymptotiquement stable. De ce fait,

i) $\forall\ i \geq 0$, une solution périodique semi-définie positive de (3.84) existe,

ii) $\forall\ k \geq 0$, $S_{\infty,k} = \lim\limits_{i \to \infty} S_{i,k}$ existe et est une solution périodique semi-définie positive de l'équation périodique récurrente de Riccati (3.82).

Remarque :

Si on définit $\tilde{G}_{i,k}$ la matrice telle que $\tilde{G}_{i,k}^{\mathrm{T}} \tilde{G}_{i,k} = G_{i,k}^{\mathrm{T}} G_{i,k} - \tilde{C}_{i,k}^{\mathrm{T}} \tilde{C}_{i,k}$, la solution de l'équation périodique de Lyapunov (3.84) à l'instant k est la solution de l'équation algébrique discrète

$$\forall\ k \geq 0,\ S_{i+1,k} = \Psi_{A_{i,k}}^{\mathrm{T}}(k+T,k) S_{i+1,k} \Psi_{A_{i,k}}(k+T,k) + W_{A_{i,k} \tilde{C}_{i,k}}(k,k+T), \quad (3.85)$$

où $\Psi_{A_{i,k}}(k+T,k)$ *est la matrice de monodromie de* $A_{i,k}$ *à l'instant k,*

et $W_{A_{i,k}\tilde{C}_{i,k}}(k,k+T)$ *le grammien d'observabilité de* $[A_{i,k}, \tilde{C}_k]$.

3.3.2. Reformulation en système discret stationnaire :

On reprend ici le système discret stationnaire équivalent proposé dans le chapitre 2, § 2.4.1.

$$\begin{cases} \xi_{r+1} = \mathcal{A}\,\xi_r + \mathcal{B}\,v_r \\ \gamma_r = \mathcal{C}\,\xi_r + \mathcal{D}\,v_r \end{cases} \tag{3.86}$$

où $\mathcal{A} = \Psi_A(k_0+T,k_0) \in \mathbf{R}^{nxn}$,

$\mathcal{B} = [\mathcal{B}_1\ \mathcal{B}_2\ \dots\ \mathcal{B}_T] \in \mathbf{R}^{nxTm}$, *avec* $\mathcal{B}_i = \Psi_A(k_0+T,k_0+i)\ \tilde{B}_{k_0+i-1}$, $i = 1$ *à* T,

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_2 \\ \dots \\ \mathcal{C}_T \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{Tlxn},\ \text{avec } \mathcal{C}_i = \tilde{C}_{k_0+i-1}\Psi_A(k_0+i-1,k_0),\ i = 1 \text{ à } T,$$

$\mathcal{D} \in \mathbf{R}^{TlxTm}$ *une matrice dont chaque bloc* $\mathcal{D}_{ij} \in \mathbf{R}^{lxm}$ *est défini par*

$$\mathcal{D}_{ij} = \begin{cases} \tilde{C}_{k_0+i-1}\Psi_A(k_0+i-1,k_0+j)\ \tilde{B}_{k_0+j-1}\ pour\ i < j, \\ 0\ pour\ i \geq j, \end{cases} \qquad \text{où } i, j = 1 \text{ à } T.$$

On rappelle que pour tout $r \in \mathbf{Z}$, les vecteurs ξ_r, γ_r et v_r sont définis par

$$\xi_r = x_{k_0+rT} \in \mathbf{R}^n$$

$$\gamma_r = \begin{bmatrix} y_{k_0+rT} \\ y_{k_0+1+rT} \\ \dots \\ y_{k_0+T-1+rT} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{Tl},\ et\ v_r = \begin{bmatrix} u_{k_0+rT} \\ u_{k_0+1+rT} \\ \dots \\ u_{k_0+T-1+rT} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{Tm}, \tag{3.87}$$

γ_r *et* v_r *sont respectivement formés à partir de la mesure des sorties et de la commande sur une période* $[k_0+rT,k_0+(r+1)T[$.

Si on considère maintenant le critère quadratique associé au problème de régulation optimale pour le système (3.86) :

$$r'(.) = \frac{1}{2}\xi_{NT}^{\ T}P\xi_{NT} + \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{N-1}\left[\gamma_r^{\ T}\gamma_r + v_r^{\ T}v_r\right]. \tag{3.88}$$

En appliquant les résultats bien connus du linéaire stationnaire discret, on sait que la commande $\tilde{v}_r$ qui minimise le critère (3.88) est

$$\tilde{v}_r = [Id + \mathcal{D}^T\mathcal{D} - \mathcal{B}^T S_{r+1}\mathcal{B}]^{-1}\mathcal{B}^T S_{r+1}\ \tilde{\mathcal{A}}\,\xi_r, \tag{3.89}$$

où

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - \mathcal{B}^T[Id + \mathcal{D}^T\mathcal{D}]^{-1}\mathcal{D}^T\mathcal{C}, \tag{3.90}$$

et $\mathcal{S}_r$ est solution de l'équation récurrente à coefficients constants de Riccati

$$\mathcal{S}_r = \tilde{\mathcal{A}}^T \mathcal{S}_{r+1}\ \tilde{\mathcal{A}} + \tilde{\mathcal{A}}^T \mathcal{S}_{r+1}\ \mathcal{B}^T [Id + \mathcal{D}^T \mathcal{D} - \mathcal{B}^T \mathcal{S}_{r+1} \mathcal{B}]^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{S}_{r+1}\ \ \tilde{\mathcal{A}} - \tilde{\mathcal{C}}^T \tilde{\mathcal{C}}, \qquad (3.91)$$

avec $\tilde{\mathcal{C}}^T \tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^T [Id + \mathcal{D}^T \mathcal{D}]^{-1} \mathcal{C}$.

On montre alors que chaque solution de (3.91) est reliée à une solution de l'équation périodique récurrente de Riccati initiale (3.82) par les propositions suivantes :

Lemme 3.15 : [BITTANTI et al, 1991]

Soit une suite de matrices $\mathcal{S}_r$, $r \in \mathbf{N}$, solution de (3.91) et S_k, $k \in \mathbf{N}$, une solution de (3.82). Si à l'instant final NT, $\mathcal{S}_N = S_{k_0+NT}$, alors $\forall\ r \leq N$, $\mathcal{S}_r = S_{k_0+rT}$

Théorème 3.16 : [BITTANTI et al, 1991]

S_k, $k \in \mathbf{N}$, est une solution positive (respectivement, négative) semi-définie, symétrique et périodique de (3.82) si et seulement si $\mathcal{S} = S_{k_0+rT}$ est une solution positive (respectivement, négative) semi-définie, symétrique de l'équation algébrique de Riccati :

$$\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{A}}^T \mathcal{S}\ \tilde{\mathcal{A}} + \tilde{\mathcal{A}}^T \mathcal{S} \mathcal{B}^T [Id + \mathcal{D}^T \mathcal{D} - \mathcal{B}^T \mathcal{S} \mathcal{B}]^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{S}\ \ \tilde{\mathcal{A}} - \tilde{\mathcal{C}}^T \tilde{\mathcal{C}}, \qquad (3.92)$$

Remarque sur l'indépendance par rapport à k_0 :

On note que la solution $\mathcal{S}$ de (3.92) dépend de l'instant initial k_0, de même que les matrices $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, et $\mathcal{D}$ définies dans (3.86). Elle existe si et seulement si $[\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}]$ est stabilisable. Or, il a déjà été rappelé dans le chapitre 2, § 2.4.1., que la stabilisabilité et la détectabilité de $[\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}]$ et du système linéaire discret périodique initial sont équivalentes, et ceci indépendamment de k_0. On peut aussi établir cette équivalence de propriété avec le système linéaire stationnaire défini par $[\tilde{\mathcal{A}},\mathcal{B},\tilde{\mathcal{C}}]$. Or, pour deux instants k_0 et k_1 différents, on obtient deux modèles stationnaires $[\mathcal{A}_0,\mathcal{B}_0,\mathcal{C}_0,\mathcal{D}_0]$, respectivement $[\mathcal{A}_1,\mathcal{B}_1,\mathcal{C}_1,\mathcal{D}_1]$, et donc deux solutions $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$ d'équations algébriques de Riccati du type (3.92). Ces deux solutions génèrent deux solutions *a priori* différentes de la même équation périodique récurrente de Riccati correspondant au système initial $[A_k,\tilde{B}_k,\tilde{C}_k]$, soient $\{S_k^{\ 0}$, $k \in \mathbf{N}$, telle que $S_{k_0+rT} = \mathcal{S}_0$ $\}$ et $\{S_k^{\ 1}$, $k \in \mathbf{N}$, telle que $S_{k_1+rT} = \mathcal{S}_1$ $\}$. A l'aide du théorème 3.14.iv) sur l'existence et unicité de la solution périodique forte et stabilisante, on montre que ces deux suites coincident à chaque instant quand $[A_k,\tilde{B}_k, \tilde{C}_k]$ est stabilisable et détectable.

En pratique, il suffit de calculer $\mathcal{S}_0$ pour un instant k_0 donné, puis S_k, $k = k_0$ à k_0+T-1, à partir de l'équation récurrente (3.82) avec la valeur initiale $S_{k_0} = \mathcal{S}$.

Un autre moyen consiste à calculer la solution de l'équation algébrique de Riccati (3.92) pour différentes valeurs de $k_i \in \{0,\ldots,T-1\}$. Il faut alors recalculer en même temps les matrices $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{C}_i$, et $\mathcal{D}_i$ qui y correspondent.

La matrice de monodromie en boucle fermée :

Pour compléter ceci, on note que si S_k est une solution périodique semi-définie négative de (3.82), la matrice d'évolution du système linéaire discret périodique bouclé est

$$\forall\ k \geq 0,\ \tilde{A}_k = A_k + \tilde{B}_k G_k, \tag{3.93}$$
$$où\ G_k = \left[Id - \tilde{B}_k^{\mathrm{T}} S_{k+1} \tilde{B}_k\right]^{-1} \tilde{B}_k^{\mathrm{T}} S_{k+1} A_k.$$

La matrice de monodromie de ce système est

$$\Psi_{\tilde{A}_k}(k_0+T,k_0) = \prod_{k=k_0}^{T+k_0-1} \tilde{A}_k, \tag{3.94}$$

tandis que celle du système linéaire stationnaire équivalent est

$$\Psi = \tilde{\mathcal{A}} + \mathcal{B}\,\mathcal{G}, \tag{3.95}$$
$$où\ \mathcal{G} = [Id + \mathcal{D}^{\mathrm{T}}\mathcal{D} - \mathcal{B}^{\mathrm{T}}\mathcal{S}_{r+1}\mathcal{B}]^{-1}\mathcal{B}^{\mathrm{T}}\mathcal{S}_{r+1}\ \tilde{\mathcal{A}},$$
$$en\ rappelant\ que\ \tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - \mathcal{B}^{\mathrm{T}}[Id + \mathcal{D}^{\mathrm{T}}\mathcal{D}]^{-1}\mathcal{D}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}.$$

Il est facile de montrer à partir de tout ce qui précède que $\Psi_{\tilde{A}_k}(k_0+T,k_0) = \Psi$.

3.3.3. Comparaison des deux méthodes :

De même que pour les systèmes en temps continu, la méthode de quasi-linéarisation pose le problème d'initialisation de l'itération. Il faut ici encore, trouver la valeur du gain T-périodique $G_{0,k}$ défini pour chaque instant $k \in \{0,\ldots,T\text{-}1\}$. En outre, le critère qui permet d'arrêter la récurrence est ici aussi mal définie : en pratique, on vérifiera numériquement la rapidité de convergence.

Contrairement à cette méthode, la réformulation en système linéaire stationnaire discret permet de calculer la solution exacte de l'équation différentielle périodique de Riccati, par le calcul de la valeur initiale S_{k_0+rT} solution de l'équation algébrique de Riccati (3.92). La seule limitation de cette méthode concerne les dimensions des matrices $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ décrivant le système linéaire stationnaire (3.86).

4. Commande quasi-optimale :

Pour finir, on signale la possibilité d'approcher la commande optimale par l'utilisation des formes de commande particulières telles que la S.S.P.H. de Kabamba ou de Rahmani et Franklin déjà rencontrées pour le placement de pôles des systèmes linéaires à coefficients périodiques, et non plus par des gains de bouclage permanents de la forme $u(t) = G(t)\,x(t)$ ou $u_k = G_k\,x_k$. Pour simplifier l'exposé, on considère le problème de régulation linéaire quadratique de systèmes linéaires périodiques en temps continu où on cherche à minimiser le critère

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left[x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t) \right].dt, \tag{3.96}$$

avec $Q(t)$ et $R(t)$ deux matrices T-périodiques, symétriques, $Q(t)$ est non négative semi-définie et $R(t)$ définie positive.

pour le système défini par

$$\frac{dx}{dt} = A(t).x + B(t).u, \tag{3.97}$$

où la commande est contrainte à être de la forme

$$\forall\, s \in [0,T[,\ \forall\, k \in \mathbf{N},\ u(s + kT) = G(s)\, x(kT), \tag{3.98}$$

le gain de bouclage $G(s)$ est continu par morceaux [KABAMBA, 1986] ou constant par morceaux [RAHMANI & FRANKLIN, 1989-1990].

4.1. Utilisation de la méthode de Rahmani et Franklin :

On subdivise la période en r sous-intervalles (voir chapitre 2, § 2.2.2.3.). On choisit alors la forme de commande :

$$\forall\, s \in [0,\tfrac{T}{r}[,\ \forall\, j \in \{0,\ldots,r\text{-}1\},\ \forall\, k \in \mathbf{N},\ u(s + j\tfrac{T}{r} + kT) = \tfrac{r}{T}\, \theta_j^{\mathrm{T}} \mathcal{F}_r v_k, \tag{3.99}$$

$$avec\ \theta_j = \int_{j\frac{T}{r}}^{(j+1)\frac{T}{r}} \Phi_A(T,t).B(t).dt,\ et\ \ \mathcal{F}_r = \Lambda_r(\Lambda_r^{\mathrm{T}}\Lambda_r)^{-1},$$

où v_k est une nouvelle loi de commande discrète définie pour chaque intervalle $[kT,(k+1)T[$, $k \in \mathbf{N}$, et Λ_r est la factorisation de plein rang du grammien d'atteignabilité généralisé :

$$\mathcal{H}_r(T,0) = \frac{r}{T}\sum_{i=0}^{r-1} \theta_j\theta_j^{\mathrm{T}},$$

telle que

$$\mathcal{H}_r(T,0) = \Lambda_r\Lambda_r^{\mathrm{T}},\ avec\ rang\ [\mathcal{H}_r(T,0)] = rang\ [\Lambda_r].$$

Ainsi l'évolution du système initial (3.97) est donné par

$$\forall\, s \in [0,\tfrac{T}{r}[,\ \forall\, j \in \{0,\ldots,r\text{-}1\},\ \forall\, k \in \mathbf{N},$$

$$x(s + j\tfrac{T}{r} + kT) = \Phi_A(s + j\tfrac{T}{r},0)\, x(kT)\ +\ \mathcal{B}_r(j,s)\ v_k, \tag{3.100}$$

où

$$\mathcal{B}_r(j,s) = \frac{r}{T}\left[\cdot\sum_{i=0}^{j-1} \int_{i\frac{T}{r}}^{(i+1)\frac{T}{r}} \Phi_A(j\tfrac{T}{r}+s,\tau).B(\tau).d\tau\ \theta_i^{\mathsf{T}}.+ \int_{j\frac{T}{r}}^{(j+1)\frac{T}{r}+s} \Phi_A(j\tfrac{T}{r}+s,\tau).B(\tau).d\tau\ \theta_j^{\mathsf{T}} \right] \mathcal{F}_r.$$

En chaque fin de période, on obtient alors le système linéaire discret stationnaire

$$\begin{aligned} &x_{k+1} = \Phi_A(T,0)\ x_k + \Lambda_r\, v_k, \\ &avec\ \forall\ k \in \mathbf{N},\ x_k = x(kT). \end{aligned} \tag{3.101}$$

Remarque :

En vertu du corollaire 2.10 du chapitre 2, § 2.2.2.3., il existe un entier r tel que la commandabilité (respectivement, la stabilisabilité) du système décrit par $[A(t),B(t)]$ soit équivalente à la commandabilité (respectivement, la stabilisabilité) du système linéaire discret stationnaire $[\Phi(T,0),\mathcal{H}_r(T,0)]$ ou $[\Phi(T,0),\Lambda_r]$. Dans tout ce qui suit, on suppose que r est choisi de telle façon que cette équivalence de propriété soit vérifiée.

On montre [RAHMANI & FRANKLIN, 1990] que le problème de régulation linéaire quadratique initial (3.96) revient à minimiser

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[x_k^{\mathsf{T}}\ u_k^{\mathsf{T}} \right] \begin{bmatrix} \tilde{Q} & \tilde{M} \\ \tilde{M}^{\mathsf{T}} & \tilde{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \tag{3.102}$$

pour le système (3.101), avec

$$\tilde{Q} = \int_0^T \Phi_A^{\mathsf{T}}(t,0).Q(t)\ \Phi_A(t,0).dt,$$

$$\tilde{M} = \sum_{j=0}^{r-1} \int_0^{\frac{T}{r}} \Phi_A^{\mathsf{T}}(s+j\tfrac{T}{r},0).Q(s+j\tfrac{T}{r})\ \mathcal{B}_r(j,s).ds,$$

$$\tilde{R} = \sum_{j=0}^{r-1} \int_0^{\frac{T}{r}} \left[\mathcal{B}_r^{\mathsf{T}}(j,s).Q(s+j\tfrac{T}{r})\ \mathcal{B}_r(j,s) + \left(\tfrac{r}{T}\right)^2 \mathcal{F}_r^{\mathsf{T}} \theta_j\, R(s+j\tfrac{T}{r})\ \theta_j^{\mathsf{T}}\ \mathcal{F}_r \right].ds.$$

La solution d'un tel problème est connue comme étant

$$\begin{aligned} &\tilde{v}_k = G\, x_k, \\ &avec\ G = -\left[\tilde{R} + \Lambda_r^{\mathsf{T}}\ \tilde{S}\ \Lambda_r\right]^{-1}\left[\tilde{M}^{\mathsf{T}} + \Lambda_r^{\mathsf{T}}\ \tilde{S}\ \Phi_A(T,0)\right], \end{aligned} \tag{3.103}$$

où $\tilde{S}$ est la solution de l'équation algébrique discrète de Riccati :

$$\begin{aligned} S = {} & \Phi_A^{\mathsf{T}}(T,0)\ S\ \Phi_A(T,0) + \tilde{Q} \\ & -\left[\tilde{M} + \Phi_A^{\mathsf{T}}(T,0)\ S\ \Lambda_r\right]\left[\tilde{R} + \Lambda_r^{\mathsf{T}}\ s\ \Lambda_r\right]^{-1}\left[\tilde{M}^{\mathsf{T}} + \Lambda_r^{\mathsf{T}}\ S\ \Phi_A(T,0)\right]. \end{aligned} \tag{3.104}$$

Remarque :

L'existence et l'unicité de $\tilde{S}$ sont vérifiées en faisant appel au théorème bien connu sur les équations algébriques de Riccati :

Une unique solution définie positive (respectivement positive semi-définie) $\tilde{S}$ existe, et le système en boucle fermée correspondant est asymptotiquement stable si et seulement si $[\Phi(T,0),\Lambda_r]$ est commandable (respectivement stabilisable) et $[\Phi(T,0),\tilde{Q}]$ est observable (respectivement détectable), c'est-à-dire, en vertu de l'équivalence de propriétés structurelles, si et seulement si $[A(t),B(t)]$ est commandable (respectivement stabilisable) et $[A(t), Q(t)]$ est observable (respectivement détectable).

4.2. La valeur quasi-optimale du critère :

La valeur du critère J dépend essentiellement du choix du nombre de subdivisions de l'intervalle $[kT,(k+1)T[$, c'est-à-dire de l'entier r. Pour mettre en évidence cette valeur, il convient de transformer (3.101) et (3.102) en posant

$$\bar{Q} = \tilde{Q} - \tilde{M}\,\tilde{R}^{-1}\tilde{M}^{T}, \qquad (3.105)$$

$$\bar{\Phi} = \Phi_A(T,0) - \Lambda_r\,\tilde{R}^{-1}\tilde{M}^{T},$$

On obtient alors un nouveau système discret équivalent

$$x_{k+1} = \bar{\Phi}\,x_k + \Lambda_r\,w_k, \qquad (3.106)$$

dont on cherche à minimiser le critère quadratique

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x_k^{T}\bar{Q}x_k + w_k^{T}\tilde{R}\,w_k.dt. \qquad (3.107)$$

La commande optimale qui en découle est alors

$$\tilde{w}_k = -\left[\tilde{R} + \Lambda_r^{T}\,\tilde{S}\,\Lambda_r\right]^{-1}\Lambda_r^{T}\tilde{S}\,\bar{\Phi}\,x_k, \qquad (3.108)$$

où $\tilde{S}$ est la solution de l'équation algébrique discrète de Riccati :

$$S = \bar{\Phi}^{T}\,S\,\bar{\Phi} + \tilde{Q} - \bar{\Phi}^{T}\,S\,\Lambda_r\left[\tilde{R} + \Lambda_r^{T}\,s\,\Lambda_r\right]^{-1}\Lambda_r^{T}\,S\,\bar{\Phi}, \qquad (3.109)$$

On note que (3.109) donne la même solution $\tilde{S}$ que (3.104). De plus, la commande optimale définie en (3.103) peut être recalculée à partir de $\tilde{w}_k$ par

$$\tilde{v}_k = \tilde{w}_k - \tilde{R}^{-1}\tilde{M}^{T}x_k. \qquad (3.110)$$

Il est facile de vérifier que (3.109) et (3.110) donnent le même gain de bouclage G donné en (3.103). On montre alors que la valeur optimale du critère J pour un entier r donné est [RAHMANI & FRANKLIN, 1990] :

$$J_{r\text{-}opt} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left[x^{\mathsf{T}}(t)Q(t)x(t) + \tilde{u}^{\mathsf{T}}(t)R(t)\tilde{u}(t)\right].dt = \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}(0)\,\tilde{S}\,x(0) \tag{3.111}$$

La loi de commande $\tilde{u}(t)$ étant celle définie par (3.99) et (3.103)

$$\forall\, s \in [0,\tfrac{T}{r}[,\ \forall\, j \in \{0,\ldots,r\text{-}1\},\ \forall\, k \in \mathbf{N},\ u(s + j\tfrac{T}{r} + kT) = \tfrac{r}{T}\,\theta_j^{\mathsf{T}}\mathcal{F}_r G\, x(kT),$$

$$avec\ G = -\left[\tilde{R} + \Lambda_r^{\mathsf{T}}\,\tilde{S}\,\Lambda_r\right]^{-1}\left[\tilde{M}^{\mathsf{T}} + \Lambda_r^{\mathsf{T}}\,\tilde{S}\,\Phi_A(T,0)\right], \tag{3.112}$$

4.3. Utilisation de la commande M.S.S.P.H. :

Selon cette méthode (voir chapitre 2, § 2.2.3.1), la commande appliquée est de la forme

$$\forall\, i \in \mathbf{N},\ \forall\, k \in \{0,\ldots,r\text{-}1\},\ \forall\, t \in [t_k,t_{k+1}[,\ u(t+ iT) = B^{\mathsf{T}}(t)\Phi^{\mathsf{T}}(t_{k+1},t)\, v_{k+ir}, \tag{3.113}$$

v_k étant le nouveau vecteur de commande, et $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{r\text{-}1} < t_r = T.$

Ainsi l'évolution du système est

$$x(t+ iT) = \Phi(t,t_k)\, x_{k+ir} + \Phi(t,t_k)W_C(t_k,t)\Phi^{\mathsf{T}}(t_{k+1},t_k)\, v_{k+ir}, \tag{3.114}$$

avec $x_{k+ir} = x(t_k+iT)$, et $W_C(t,\tau)$ le grammien de commandabilité.

Le variable d'état échantillonné obéit à l'équation de récurrence

$$x_{k+1+ir} = \Phi(t_{k+1},t_k)\, x_{k+ir} + W_A(t_{k+1},t_k)\, v_{k+ir}, \tag{3.115}$$

où $W_A(t,\tau)$ est le grammien d'atteignabilité.

La valeur du critère quadratique (3.96) en $x(t)$ et $u(t)$ est alors

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[x_k^{\mathsf{T}}\ v_k^{\mathsf{T}}\right]\begin{bmatrix} Q_k & M_k \\ M_k^{\mathsf{T}} & R_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_k \\ v_k \end{bmatrix} \tag{3.116}$$

où les matrices Q_k, M_k, et R_k sont r-périodiques avec les valeurs ci-dessous pour $k \in \{0,\ldots,r\}$

$$Q_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi^{\mathsf{T}}(t,t_k)\; Q(t)\; \Phi(t,t_k)\; dt,$$

$$M_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi^{\mathsf{T}}(t,t_k)\; Q(t)\; \Phi(t,t_k)\; W_C(t_k,t)\, dt\; \Phi^{\mathsf{T}}(t_{k+1},t_k),$$

$$R_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1},t)\; B(t)\; R(t)\; B^{\mathsf{T}}(t)\Phi^{\mathsf{T}}(t_{k+1},t)\; dt,$$

La solution optimale de ce problème (3.115)(3.116) est bien connue :

$$\tilde{v}_k = G_k\, x_k, \tag{3.117}$$

où G_k est le gain de bouclage

$$G_k = \left[R_k - W_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1},t_k) S_{k+1} W_A(t_{k+1},t_k)\right]^{-1}\left[W_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1},t_k) S_{k+1}\Phi(t_{k+1},t_k) - M_k^{\mathrm{T}}\right],$$

avec S_k, la solution périodique de l'équation réccurente de Riccati

$$\begin{aligned} S_k = -Q_k + \Phi^{\mathrm{T}}(t_{k+1},t_k) S_{k+1}\Phi(t_{k+1},t_k) + \left[\Phi^{\mathrm{T}}(t_{k+1},t_k) S_{k+1} W_A(t_{k+1},t_k) - M_k\right] \\ \left[R_k - W_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1},t_k) S_{k+1} W_A(t_{k+1},t_k)\right]^{-1}\left[W_A^{\mathrm{T}}(t_{k+1},t_k) S_{k+1}\Phi(t_{k+1},t_k) - M_k^{\mathrm{T}}\right], \end{aligned}$$

La loi de commande en boucle fermée M.S.S.P.H. est donc d'après (3.113) et (3.116)

$$\forall\, i \in \mathbf{N}, \forall\, k \in \{0,\dots,r\text{-}1\}, \forall\, t \in [t_k,t_{k+1}[,\ u(t+iT) = B^{\mathrm{T}}(t)\Phi^{\mathrm{T}}(t_{k+1},t)\, G_k x(t_k+iT).$$

Remarque :

En utilisant le changement de variable $v_k = -R_k^{-1}M_k^{\mathrm{T}}x_k + w_k$, l'optimisation du critère quadratique avec coûts croisés (3.115)(3.116) est aussi équivalente à celle de

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[x_k^{\mathrm{T}}\ w_k^{\mathrm{T}}\right]\begin{bmatrix} Q_k - M_k R_k^{-1} M_k^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & R_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_k \\ w_k \end{bmatrix}$$

avec l'équation récurrente

$$x_{k+1+ir} = [\Phi(t_{k+1},t_k) - R_k^{-1}M_k^{\mathrm{T}}]\, x_{k+ir} + W_A(t_{k+1},t_k)\, w_{k+ir}.$$

Les résultats de la section 3 précédente sont alors utilisables sur ce cas.

4.4. Exemple :

Reprenons l'exemple de la page 151 avec le critère quadratique où $Q(t) = R(t) = Id_2$. Les simulations (voir figures 3.4 et 3.5) montrent que la trajectoire quasi-optimale diffère peu de celle obtenue avec la commande optimale. Or la commande quasi-optimale est à la fois plus simple à calculer et à réaliser. La valeur de J pour $r = 10$ est :

$$J_{r=10} \sim 1.2414,$$

Pour comparaison, on rappelle que la valeur optimale du critère est $J_1 = 1.2213$ (voir page 153). Bien évidemment, ce résultat s'améliore en augmentant la valeur du nombre r d'échantillonnage, mais on complique d'autant la réalisation. Il faut, dans la pratique, trouver un compromis entre ce nombre r et le taux d'optimalité que l'on veut obtenir.

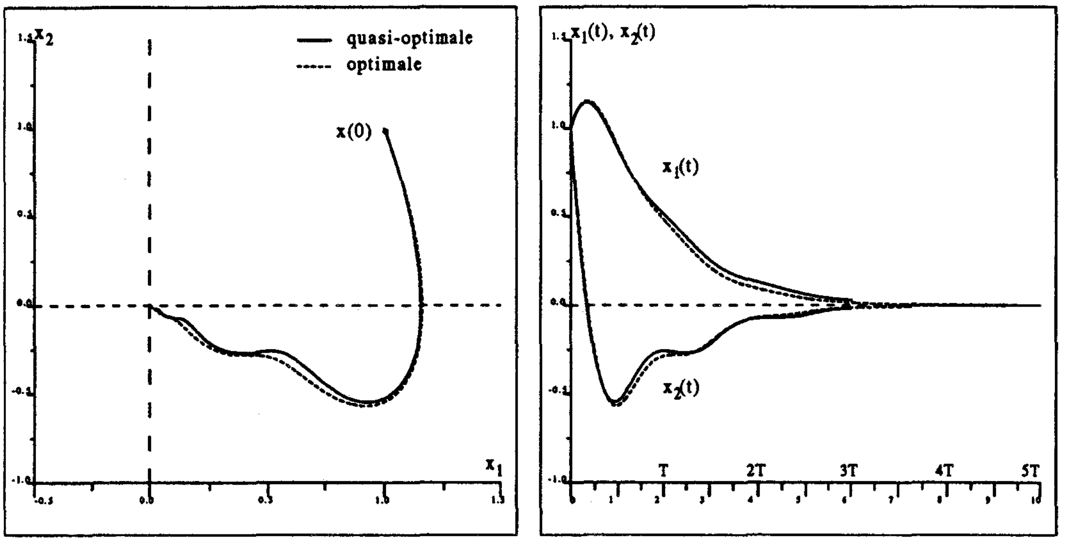


Figure 3.4. Comparaison des trajectoires optimale et quasi-optimale pour $r = 10$.

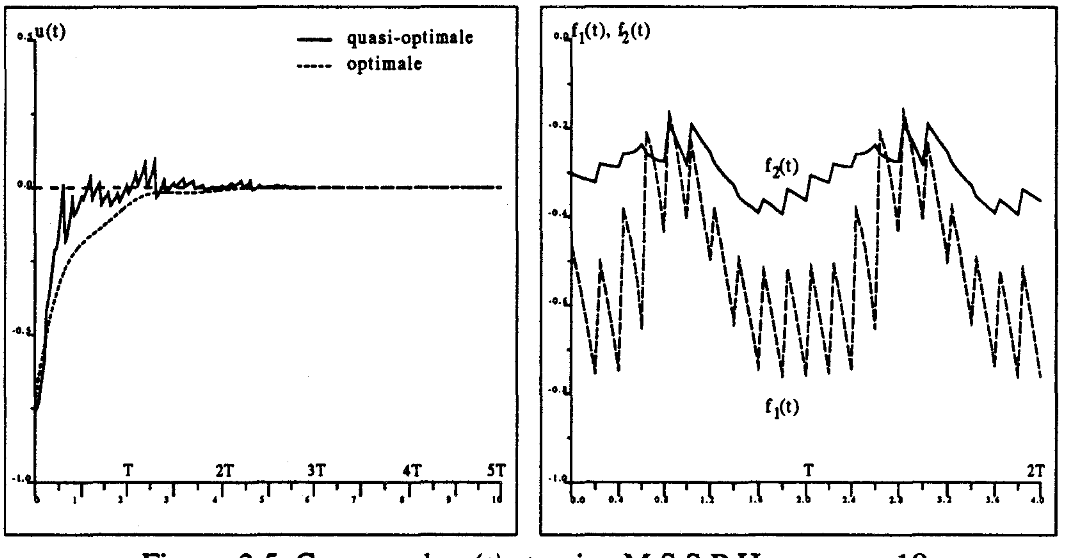


Figure 3.5. Commande $u(t)$ et gains M.S.S.P.H. pour $r = 10$.

5. Conclusion :

Le problème de la commande optimale sur un critère quadratique ou quadratique-plus-linéaire est traité de manière assez classique. Les résultats obtenus généralisent ceux du linéaire stationnaire. Les théorèmes d'existence et d'unicité établis par Kucera, et aussi les théorèmes dits d'inertie sont notamment retraduits en versions périodiques. Ici encore, les problèmes traités nécessitent la connaissance de la matrice de transition, identifiée le cas échéant avec la transformation de Floquet-Lyapunov. La solution de l'équation de Riccati est se calcule plus simplement par l'utilisation d'une bloc-triangularisation en matrice réelle au lieu d'une forme de Jordan en général complexe. Et les exemples traités mettent en évidence les mêmes types de comportement bien connus en linéaire stationnaire. Nous avons aussi développé la commande quasi-optimale basée sur l'échantillonnage du système.

Chapitre 4. Robustesse et sensibilité vis-à-vis des erreurs de modélisation ou de réalisation.

Ce dernier chapitre aborde les problèmes de robustesse ou de sensibilité des formes de commandes que nous avons étudié précédemment. En effet, les modèles théoriques se doivent d'intégrer dans leur analyse les incertitudes possibles pour pouvoir déboucher sur des applications fiables. Ces erreurs viennent généralement de trois sources : les erreurs de modélisation ou d'identification du modèle représentant le système, dynamiques ou retards négligés, erreurs paramétriques,...; les erreurs numériques de réalisation, notamment dans les calculs de la commande (calcul du gain de bouclage, la solution de l'équation de Riccati, etc...); enfin les erreurs inhérentes au système physique (fluctuations ou bruits paramétriques, perturbations sur les variables du système). Notons au passage que ces erreurs peuvent aussi bien être des erreurs statiques, ou bien variant régulièrement dans le temps, ou encore être aléatoires. L'étude peut alors être abordée de deux manières différentes :

- L'approche globale consiste à trouver une loi de commande qui permettra de maintenir un niveau de performance acceptable compte tenu des incertitudes possibles. Ainsi formulé, le problème est très vaste et suppose une approche exhaustive de toutes les formes de commandes admissibles. Dans le cas des systèmes linéaires stationnaires, on peut trouver plusieurs outils pour identifier une telle commande bien que le problème ne soit pas pour autant résolu [FRANCIS, 1987; De LARMINAT, 1991].

- La deuxième approche, que nous adopterons, ici vérifie *a posteriori* que la loi de commande utilisée permet de garder le niveau de performances spécifié, ceci malgé les incertitudes liées à la phase de modélisation ou de réalisation.

On rappelle dans la section 1 les définitions nécessaires à la compréhension du problème et les résultats déjà obtenus pour les systèmes linéaires stationnaires. Ensuite, la section 2 fournit des résultats originaux pour les systèmes linéaires à coefficients périodiques. On trouvera des exemples d'application dans la section 3.

1. Définitions et rappels

1.1. Définitions :

Robustesse et sensibilité : [De LARMINAT, 1991]

Un système est *robuste* s'il permet de maintenir un certain niveau de performances malgré des incertitudes ou variations (éventuellement importantes) par rapport à un modèle nominal.

La notion de *sensibilité* décrit la variation des performances pour de *petites* variations du processus.

Comme on peut le remarquer, la sensibilité, bien que voisine de la robustesse, est un concept local. Pour la suite, il convient de décrire le plus précisément possible les domaines d'incertitudes du modèle et les performances auxquelles on s'intéresse.

Classification des incertitudes :

On distingue deux types d'incertitudes : [YEDAVALLI, 1985 ; De LARMINAT, 1991]

1) Les incertitudes *non structurées* : ce sont les variations sur les comportements entrée-sortie. Elles sont définies par la majoration des écarts de la réponse du système par rapport à une réponse nominale.

2) Les incertitudes dites *structurées* : ce sont les incertitudes relatives aux paramètres du modèle. On décrit généralement le domaine d'incertitude pour chaque paramètre θ_i par des inégalités de la forme

$$|\Delta\theta_i| \leq \delta\theta_i,$$

pour les incertitudes *fortement structurées*, ou dans le cas des incertitudes dites *faiblement structurées*, par une norme des écarts :

$$\|\Delta\theta\| \leq \delta\theta.$$

Remarque :

Les incertitudes fortement structurées sont les plus descriptives et permettent généralement une étude plus fine de la robustesse, notamment pour les systèmes linéaires stationnaires [PATEL & TODA, 1980 ; YEDAVALLI, 1985 ; CHEN & WONG, 1987 ; SHINKRE et al, 1987 ; ZHOU & KHARGONEKAR, 1987 ; K.M. SOBELL et al, 1989]. De Larminat [1991] fait cependant remarquer qu'obtenir une telle description n'est pas toujours possible : si cela est le cas pour des systèmes décrits par un petit nombre d'équations (par exemple en aéronautique), les incertitudes sont non structurées pour la plupart des systèmes industriels (chimie, etc...). On peut aussi rencontrer une combinaison des deux types d'incertitudes : erreurs structurées en basse fréquence et non structurées en haute fréquence.

Les critères de performances :

Le choix d'un tel critère n'est généralement pas unique. On peut citer par exemple la robustesse par rapport à des mesures d'écarts, d'absence de statisme ou de stabilité. Par la suite, nous ne nous intéresserons qu'au critère de stabilité robuste. Le problème est alors formulé comme suit :

Trouver des conditions pour que la propriété de stabilité asymptotique du modèle nominal soit conservée malgré les incertitudes.

Pour ce faire, on introduit les notations suivantes :

Notations :

Soit une matrice carrée M, on note

$\lambda_i[M]$: *la i-ème valeur propre de M,*

$\|M\|_l = \frac{1}{2} \max_i \{\lambda_i[M + M^T]\}$: *la norme logarithmique de M.*

Si M est une matrice rectangulaire ou carrée quelconque,

$|M|$ *est la matrice des modules des éléments de M,*

$\sigma_i[M] = \sqrt{\lambda_i[M^T M]}$ *est la i-ème valeur singulière de M,*

$\|M\|_s = \max_i \{\sigma_i[M]\}$ *est la norme spectrale ou norme euclidienne de M,*

$n[M] = \max_{t \in [0,T]} \|M(t)\|_s$, *pour M variant dans le temps.*

Si $M \in \mathbf{R}^{nxn}$ est à coefficients positives et $D \in \mathbf{R}^{nxn}$ désigne n'importe quelle matrice diagonale positive,

$\pi(M) = \inf_D \{\|D^{-1} M D\|_s\} = \max_i \{\lambda_i[M]\} \geq 0$, *est la valeur propre de Perron de M.*

Si $\Delta M(t)$ varie dans le temps, on note

$\delta M_s = n[\Delta M] = \max_{t \in [0,T]} \|\Delta M(t)\|_s$,

$\delta m_{ij} = \max_{t \in [0,T]} |\Delta m_{ij}(t)| \leq \delta m$,

$|\Delta M|_m$, *la matrice dont les éléments sont les quantités δm_{ij} définies ci-dessus.*

Selon ces notations, Kouvaritakis et Latchman [1985] montre que

$\forall M \in \mathbf{C}^{nxn}$, $\|M\|_s \leq \| \, |M| \, \|_s$.

1.2. Stabilité robuste des systèmes linéaires stationnaires :

Plusieurs résultats ont été établis pour la stabilité robuste des systèmes linéaires stationnaires, utilisant essentiellement deux approches : l'approche fréquentielle que l'on rappelle brièvement dans la section 1.2.1, et l'approche par l'équation d'état exposée à la section 1.2.2.

1.2.1. Robustesse de la stabilité par l'approche fréquentielle :

Soit le système linéaire stationnaire représenté par sa matrice de transfert nominale $G_n(s)$ supposée asymptotiquement stable et sujette à des variations $\Delta G(s)$ telles que

i) $\Delta G(s)$ *ne modifie pas le nombre de pôles instables de* $G_n(s)$,

ii) $|\Delta G(j\omega)G(j\omega)^{-1}| \leq l(\omega)$, *dans le cas monovariable,*

$\max_i \{\sigma_i[\Delta G(j\omega)G(j\omega)^{-1}]\} \leq l(\omega)$, *dans le cas multivariable.*

Le schéma utilisé pour l'étude de la stabilité robuste est le suivant :

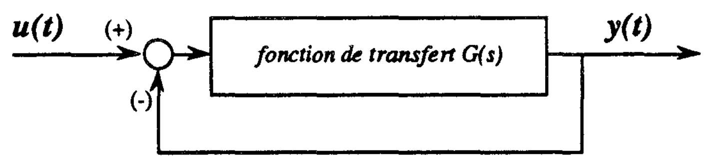


Figure 4.1. Schéma de base de l'approche fréquentielle.

On montre alors les résultats ci-dessous [De LARMINAT, 1991]

	Monovariable	**Multivariable**
Représentation fréquentielle	$G(s) = \left(1 + \frac{\Delta G(s)}{G(s)}\right) G_n(s)$	$G(s) = (Id + L(s))\, G_n(s)$
Incertitudes	$\left\lvert \frac{\Delta G(j\omega)}{G_n(j\omega)} \right\rvert \leq l(\omega)$	$\max_i \sigma_i [L(j\omega)] \leq l(\omega)$
Critère de stabilité robuste	$\left\lvert \frac{G_n(j\omega)}{1+G_n(j\omega)} \right\rvert \leq \frac{1}{l(\omega)}$	$T(s) = G_n(s)\,[Id + G_n(s)]^{-1}$, $\max_i \sigma_i [T(j\omega)] \leq \frac{1}{l(\omega)}$

Tableau 4.2. Résultats obtenus par l'approche fréquentielle.

Ces résultats ne sont donnés qu'à titre de rappel puisqu'ils ne sont plus applicables dans le cas des systèmes linéaires périodiques, où on ne dispose pas de représentation fréquentielle. On privilégiera alors l'approche suivante, basée sur la représentation par l'équation d'état.

1.2.2. Robustesse de la stabilité dans le domaine temporel et sous incertitudes structurées :

Soit le système :

$$\frac{dx}{dt} = (A + \Delta A(t))\, x, \qquad (4.1)$$

où $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ est supposée constante et asymptotiquement stable, $\Delta A(t)$ la matrice formée des $\Delta aij(t)$, $i, j = 1$ à n, avec selon les cas

$$\|\Delta A(t)\|_s = \max_i \{\sigma_i[\Delta A(t)]\} \leq \delta A_s$$

ou bien $\forall\, t \in \mathbf{R}, \forall\, i, j = 1$ à n, $|\Delta a_{ij}(t)| \leq \delta a_{ij} \leq \delta a$.

D'après les notations définies précédemment, les δa_{ij} sont les éléments de la matrice $|\Delta A|_m$.

1.2.2.1. Utilisation d'une fonction de Lyapunov :

Kharitonov [1978] a d'abord utilisé la représentation sous la forme compagne en utilisant des majorations sur les coefficients du polynôme caractéristique du type $0 < \alpha_i \leq a_i \leq \beta_i$, pour $i = 1$ à n. Cependant, le résultat le plus général a été démontré par Patel et Toda :

Théorème 4.1 : Condition suffisante de stabilité [PATEL & TODA, 1980]

Le système (4.1) est stable si

$$\delta A_s < \frac{1}{\|V\|_s}, \qquad (4.2)$$

où V est la solution positive de l'équation de Lyapunov :

$$A^T V + VA + 2Id = 0. \qquad (4.3)$$

A partir de ce théorème, plusieurs auteurs ont apporté des améliorations pour tenir compte de la structuration des incertitudes :

– Patel & Toda [1980] ont montré que si pour chaque élément de $\Delta A(t)$, on a

$$\forall\, t \in \mathbf{R}, |\Delta a_{ij}(t)| \leq \delta a_{ij} \leq \delta a,$$

alors au lieu de (4.2), on peut utiliser :

$$\delta a < \frac{1}{n\, \|V\|_s}. \qquad (4.4)$$

– Ce résultat a été repris par Yedavalli [1985] pour obtenir :

$$\delta a < \frac{1}{\|\, |V|\, U \|_s}, \qquad (4.5)$$

où la matrice $U \in \mathbf{R}^{n \times n}$ est définie élément par élément par $0 \leq U_{ij} \leq \frac{\delta a_{ij}}{\delta a} \leq 1$, pour exploiter au mieux la structuration des incertitudes.

– Zhou & Khargonekar [1987] ont étudié le cas où $\Delta A(t) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i \Delta A_i(t)$, pour obtenir des majorations sur chaque paramètre θ_i correspondant concrètement à des constantes physiques (masses, raideurs, capacités ...) du système considéré.

1.2.2.2. Utilisation du lemme de Gromwall :

Le résultat précédent nécessite la résolution d'une équation de Lyapunov. La méthode suivante, plus directe, a été proposée par Chen et Wong [1987] dans le cas des systèmes linéaires stationnaires en temps continu, puis étendue au cas discret par Shinkre et al [1988]. Elle permet d'assurer, par des techniques de majoration, que l'état $x(t)$ du système considéré tend asymptotiquement vers 0. Il est à noter que les résultats obtenus reviennent finalement à restreindre la variation des valeurs propres perturbées dans un domaine de stabilité robuste.

On rappelle d'abord le lemme de Gromwall :

Lemme de Gromwall 4.2 :

Soient $\varphi(t)$, une fonction continue sur un intervalle $[t_0, t_1]$, et $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions continues et positives sur le même intervalle, telles que :

$$\forall\, t \in [t_0, t_1],\ \varphi(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} g(\tau)\ \varphi(\tau)\ d\tau,$$

$$\text{alors, } \forall\, t \in [t_0, t_1],\ \varphi(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} g(\tau) f(\tau)\ exp\left\{\int_{\tau}^{t} g(\sigma)\ d\sigma\right\} d\tau.$$

Lemme de Gromwall discret 4.3 : [PACHPATTE, 1973]

Soient $\varphi(k)$, une fonction définie pour $k_0 \leq k \leq k_1$, et $f(k)$ et $g(k)$ deux fonctions positives sur le même intervalle, telles que :

$$\forall\, k,\ \ \varphi(k) \leq f(k) + \sum_{i=k_0}^{k-1} g(i)\ \varphi(i),$$

$$\text{alors, } \forall\, k \in \{k_0, \ldots, k_1\},\ \varphi(k) \leq f(k) + \sum_{i=k_0}^{k-1} \left[g(i) f(i) \prod_{j=i+1}^{k-1} \{\ 1 + g(j) \} \right].$$

Démonstration :

Les deux lemmes se démontrent de manière similaire. Comme la version discrète est moins familière, nous en exposons ici une démonstration :

Soit, $\qquad \psi(k) = \sum_{i=k_0}^{k-1} g(i)\ \varphi(i).$

Alors, $\qquad \forall\, i,\ \Delta\psi(i+1,i) = \psi(i+1) - \psi(i) = g(i)\ \varphi(i) \leq g(i)\ [f(i) + \psi(i)],$

car, on a par hypothèse : $\varphi(k) \leq f(k) + \psi(k)$. Il faut trouver une majoration de $\psi(k)$ indépendante de $\varphi(i)$.

On considère alors la quantité

$$\eta(k) = [P(k,k_0)]^{-1}\ \psi(k),$$

où $\quad \forall\ k > k_0, P(k,k_0) = \prod_{j=k_0}^{k-1} \left\{ 1 + g(j) \right\}$, avec $P(k_0,k_0) = 1,$

c'est-à-dire $\quad \eta(k_0) = \psi(k_0) = 0.$

Pour $\eta(i)$, la différence entre deux termes successifs est majorable indépendamment de $\varphi(i)$. En effet :

$$\forall\ i, \quad \Delta\eta(i+1,i) = \eta(i+1) - \eta(i) = [P(i+1,k_0)]^{-1}\psi(i+1) - [P(i,k_0)]^{-1}\psi(i),$$

$$= [P(i,k_0)]^{-1}\left[\frac{\psi(i+1)}{1+g(i)} - \psi(i)\right],$$

$$= \frac{1}{\{1+g(i)\}\ P(i,k_0)}\left[\psi(i) + \Delta\psi(i+1,i) - \{1+g(i)\}\ \psi(i)\right],$$

cela donne finalement

$$\Delta\eta(i+1,i) = \frac{g(i)\left[\phi(i) - \psi(i)\right]}{P(i+1,k_0)} \le \frac{g(i)\,f(i)}{P(i+1,k_0)}.$$

Ainsi, $\quad \psi(k) = P(k,k_0)\ \eta(k) = P(k,k_0) \sum_{i=k_0}^{k-1} \Delta\eta(i+1,i) \le P(k,k_0) \sum_{i=k_0}^{k-1} \frac{g(i)\,f(i)}{P(i+1,k_0)},$

$$\psi(k) \le \sum_{i=k_0}^{k-1} P(k,i+1)\ g(i)\,f(i),$$

$$\psi(k) \le \sum_{i=k_0}^{k-1} \left[g(i)\,f(i) \prod_{j=i+1}^{k-1} \left\{ 1 + g(j) \right\} \right].$$

D'où le lemme de Gromwall discret ❑

Théorème 4.4 : cas du système linéaire en temps continu [SOBEL et al, 1989]

On définit pour le système (4.1) la quantité $\alpha = -\max Re\{\lambda_i[A]\}$. *On suppose que tous les pôles de la matrice nominale A sont distincts et asymptotiquement stables. Soit la matrice de changement de base P diagonalisant A telle que* $\Lambda = P^{-1}A\,P$. *Alors,*

i) le système incertain (4.1) reste asymptotiquement stable si :

$$\alpha > \|\ |P^{-1}|\ |\Delta A|_m\ |P|\ \|_s\ . \qquad (4.6)$$

ii) Le résultat i) ci-dessus peut être amélioré en pondérant P par une matrice diagonale R à éléments positifs : $\Lambda = (R^{-1}P^{-1})A\ (PR)$. *On obtient alors* [STOER & WITZGALL, 1964]

$$\alpha > \inf_R\{\|\ R^{-1}|P^{-1}|\ |\Delta A|_m\ |P|\ R\ \|_s\} = \max\ \{\lambda_i[|P^{-1}|\ |\Delta A|_m\ |P|]\} \qquad (4.7)$$

ce qui revient à dire que α *doit être supérieure à la valeur propre de Perron de la matrice positive* $|P^{-1}|\ |\Delta A|_m\ |P|$.

Démonstration :

En considérant $x(t) = P\,z(t)$, on déduit que $\|z(t)\| \to 0$ implique $\|x(t)\| \to 0$ car $\|P\| < \infty$. Or,

$$\frac{dz}{dt} = (\Lambda + P^{-1}\Delta A(t)\,P)\,z,$$

d'où :

$$z(t) = exp(\Lambda t)z(0) + \int_0^t exp\{\Lambda(t-\tau)\}\,P^{-1}\Delta A(\tau)P\,z(\tau)\,d\tau,$$

$$\|z(t)\|_s \le \|exp(\Lambda t)\|_s\,\|z(0)\|_s + \int_0^t \|exp\,\{\Lambda(t-\tau)\}\,\|_s\,\|P^{-1}\Delta A(\tau)P\|_s\,\|z(\tau)\|_s\,d\tau.$$

Comme $\|exp(\Lambda t)\|_s \le exp(-\alpha t)$, on obtient :

$$\|z(t)\|_s \le exp(-\alpha t)\,\|z(0)\|_s + \int_0^t exp\,\{-\alpha(t-\tau)\}\,\|P^{-1}\Delta A(\tau)P\|_s\,\|z(\tau)\|_s\,d\tau.$$

En utilisant le lemme de Gromwall pour les fonctions

$$\varphi(t) = \|z(t)\|_s exp(\alpha t),\ f(t) = \|z(0)\|_s,\ et\ g(\tau) = \|P^{-1}\Delta A(\tau)P\|_s,$$

on montre que $\quad \|z(t)\|_s \le \|z(0)\|_s\,exp(-\alpha t)\,exp\left[\int_0^t \|P^{-1}\Delta A(\tau)P\|_s\,d\tau\right].$

Etant donné que

$$\|P^{-1}\Delta A(\tau)\,P\|_s \le \|\,|P^{-1}|\,|\Delta A|_m |P|\,\|_s,$$

$\|z(t)\|_s$ est majoré par

$$\|z(t)\|_s \le \|z(0)\|_s\,exp\,\left\{(-\alpha + \|\,|P^{-1}|\,|\Delta A|_m |P|\,\|_s)\,t\right\}.$$

Ainsi, (4.6) est une condition suffisante pour que $\|z(t)\| \to 0$ quand $t \to \infty$. D'où la stabilité asymptotique du système en $x(t)$ ❑

Théorème 4.5 : cas du système linéaire discret [SOBEL et al, 1989]

Soit le système linéaire discret

$$x_{k+1} = (A + \Delta A(k))\,x_k, \tag{4.8}$$

où $\forall\, k \in \mathbf{Z}$, *et* $\forall\, i,j = 1$ à n, $|\Delta a_{ij}(k)| \le \delta a_{ij} \le \delta a$. *On suppose que tous les pôles du système nominal défini par la matrice A sont distincts et asymptotiquement stables. Soit la matrice de changement de base P diagonalisant A telle que* $\Lambda = P^{-1}A\,P$. *Alors, le système incertain (4.8) reste asymptotiquement stable si :*

i) $1 - a > \|\,|P^{-1}|\,|\Delta A|_m\,|P|\,\|_s$. (4.9)
avec $a = max\,\{\,|\lambda_i[A]|\,\}$.

ii) ou encore, de la même manière qu'en temps continu,
$1 - a > \pi(|P^{-1}|\,|\Delta A|_m\,|P|) = max\,\{\lambda_i[|P^{-1}|\,|\Delta A|_m\,|P|]\}$ (4.10)

Démonstration :

En considérant $x_k = P\, z_k$, et la définition de a, on obtient :

$$\|z_k\| \leq a^k \|z_0\| + \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1} \|P^{-1}\Delta A(j)P\| \|z_j\|.$$

En utilisant le lemme de Gromwall discret sur les fonctions

$$\varphi(k) = a^{-k} \|z_k\|_s,\ f(k) = \|z_0\|_s,\ et\ g(j) = \|P^{-1}\Delta A(j)P\|_s,$$

et en majorant $g(j)$ par $\| \, |P^{-1}| \, |\Delta A|_m \, |P| \, \|_s$, on montre [SOBEL et al, 1989] après quelques manipulations que

$$\|z_k\| \leq \|z_0\| \left[a + \| \, |P^{-1}| \, |\Delta A|_m \, |P| \, \|_s\right]^k.$$

Dans ce cas, $\|z_k\| \to 0$ quand $k \to \infty$ si $\left[a + \| \, |P^{-1}| \, |\Delta A|_m \, |P| \, \|_s\right] < 1$,d'où le résultat ❑

2. Cas des systèmes linéaires à coefficients presque périodiques

On note que tous les résultats obtenus pour les systèmes linéaires stationnaires sont directement applicables aux systèmes linéaires périodiques. En effet, comme les incertitudes $\Delta A(t)$ sont généralement non stationnaires, on pourra prendre comme matrice d'évolution nominale A la valeur moyenne de $A(t)$. Néanmoins, une telle approche est restrictive et nous en exposerons les limites dans la section 2.1. La section 2.2 rappelle les méthodes de comparaison utilisant le théorème de centrage de Bogolioubov [1961]. Cette technique ne s'appliquant que pour les cas particuliers où la pulsation $\omega >> 1$, nous développons dans la section 2.3 un résultat plus général. L'utilisation de ce résultat est illustré dans la section 2.4 pour les placements de pôles, et dans la section 2.5 pour la commande optimale.

Dans tout ce qui suit nous étudierons le système linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = \left[A(t) + \Delta A(t)\right] x, \qquad (4.11)$$

où $A(t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ est T-périodique et asymptotiquement stable, avec

$$\forall\, t \in \mathbf{R},\ \|\Delta A(t)\|_s = \max_i \ \{\sigma_i[\Delta A(t)]\} \leq \delta A_s,$$
$$et\ \forall\, i, j = 1\ à\ n,\ |\Delta A_{ij}(t)| \leq \delta a_{ij} \leq \delta a.$$

2.1. Limite de l'approche linéaire stationnaire :

L'approche que nous qualifierons de *linéaire stationnaire* consiste à étudier le système (4.11) en décomposant $A(t)$ en composante constante et périodique. Tout ce qui est non stationnaire sera alors regroupé et considéré comme "incertitudes".

On définit donc les matrices A_0, $A_1(t)$, et $\Delta A_1(t)$:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T A(t)\;dt,$$

$$A_1(t) = A(t) - A_0,$$

$$et\;\; \Delta A_1(t) = A_1(t) + \Delta A(t).$$

Le système (4.11) devient alors

$$\frac{dx}{dt} = [A_0 + \Delta A_1(t)]\;x.$$

Toutefois, l'application des résultats du linéaire stationnaire, comme par exemple ceux donnés par les théorèmes 4.1 ou 4.4, nécessite quelques hypothèses restrictives :

Première limite : Hypothèse de stabilité asymptotique de A_0

On suppose que la matrice A_0 considérée comme matrice d'évolution nominale est asymptotiquement stable, c'est-à-dire : $\forall\, i$, $\mathrm{Re}(\lambda_i[A_0]) < 0$. Or, nous savons que la stabilité asymptotique de $A(t)$, pris comme hypothèse de départ en (4.11), n'implique pas celle de A_0.

Deuxième limite : Hypothèse pour les valeurs propres de $A(t)$

Le théorème 4.4 ci-dessus signifie que, si A_0 est asymptotiquement stable et si $\Delta A_1(t)$ est suffisamment petit (en norme ou en amplitude), les valeurs propres de $A_0+\Delta A_1(t)$ et donc, celles de $A(t)$dans le cas où $\Delta A(t) \equiv 0$, restent dans le domaine de stabilité du linéaire stationnaire. Elles sont donc à parties réelles négatives. Ici encore, une telle hypothèse est limitative.

Troisième limite : Hypothèse sur l'amplitude de $A_1(t)$

Enfin, la stabilité robuste par rapport à $\Delta A_1(t)$ nécessite un critère moins conservatif. En effet, comme illustré sur la figure 4.3, la majoration δa_1 est généralement moins fine que δa correspondant à la seule composante incertaine $\Delta A(t)$.

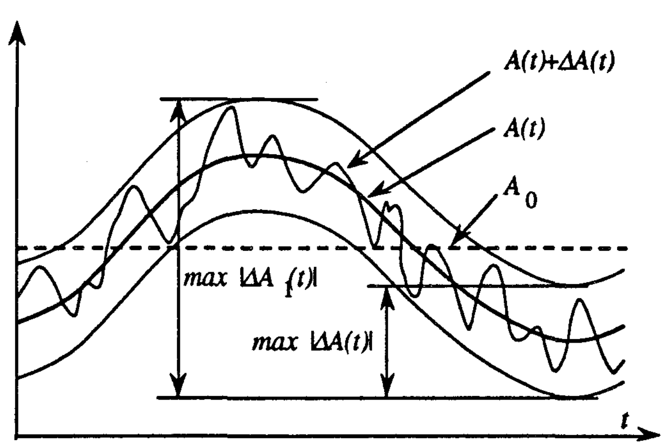


Figure 4.3. Représentation schématique de $A(t)+\Delta A(t)$.

2.2. Limites du théorème de centrage de Bogolioubov :

L'approche précédente est insatisfaisante. Dans la pratique, cette technique n'est efficace que si l'amplitude de la composante périodique de $A(t)$ est suffisamment petite ou du même ordre de grandeur que $\Delta A(t)$. Ce n'est malheureusement pas toujours le cas. La méthode suivante consiste à trouver un système de comparaison stationnaire à partir de (4.11). Elle est basée sur le théorème de centrage de Bogolioubov-Mitropolsky [1963] (valable aussi en non linéaire). Bien que Meerkov [1971-1975] l'a initialement dévéloppé dans le cadre de la commande par vibrations à hautes fréquences sur des systèmes linéaires, nous pouvons étendre les résultats aux cas où $A_1(t)$ est décomposable en somme de Fourier

$$A(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{N} K_i sin(\omega_i t + \varphi_i),$$

avec $\omega_i \gg 1$, et $k_{i,jl} \gg 1$, pour chaque élément ij de K_i.

Les incertitudes paramétriques sont supposées constantes et du type

$$\forall\, i \in \{1,\dots,N\},\ K_i \to K_i + \Delta K_i,\ \text{et } \omega_i \to \omega_i + \Delta\omega_i$$

La démarche est basée sur le schéma suivant

$$\frac{dx}{dt} = [A_0+A_1(t)]x \longrightarrow \frac{dy}{dt} = [A_0+\tilde{A}_1]y \longrightarrow \begin{cases} \tilde{x}(t) = [Id + F(t)]y(t), \\ \|\tilde{x}(t) - x(t)\| \sim \frac{1}{k}, \\ k \text{ est de même ordre de grandeur que } k_{i,ij} \end{cases}$$

Le tableau 4.4 résume le calcul de la matrice $F(t)$ et $\tilde{A}_1$.

forme de A_0	$A_1(t)$	$F(t)$	$\tilde{A}_1$
forme générale	matrice quasi-triangulaire supérieure ou inférieure : $A_1(t) = \{k_{ij} sin(\omega_{ij} t)$, pour $i \neq j$, et 0 sinon$\}$	Identifier à partir de $z(t) = [Id+F(t)-F(0)]\, z(0)$ où $z(t)$ est solution du système dégénéré : $\frac{dz}{dt} = A_1(t)\, z$.	$\tilde{A}_1 = -A_0{}^T \otimes F^2$ où $\otimes$ est le produit de matrice élément par élément, et $F^2 = \left\{\phi_{ij} = \frac{1}{T}\int_0^T f_{ij}{}^2(t)\, dt\right\}$
forme compagne	$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ -k_n sin(\omega t+\varphi_n) & \dots & -k_1 sin(\omega t+\varphi_1) \end{bmatrix}$	Le calcul de $F(t)$ est facilité par les formes particulières de $A_1(t)$.	$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \tilde{a}_n & \dots & \tilde{a}_1 \end{bmatrix}$ $\tilde{a}_n = \frac{k_2 k_i}{2\omega^2} cos(\varphi_2 - \varphi_i)$

Tableau 4.4. Résumé de la méthode de centrage.

Exemple :

Soit $$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_{21} sin(\omega_{21} t) & 0 & 0 \\ k_{31} sin(\omega_{31} t) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On trouve alors $$F(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_{21}}{\omega_{21}} cos(\omega_{21} t) & 0 & 0 \\ -\frac{k_{31}}{\omega_{31}} cos(\omega_{31} t) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } \tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_{21}^2}{2\omega_{21}^2} & 0 & 0 \\ -\frac{k_{31}^2}{2\omega_{31}^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On conclut alors que $A(t)$ est asymptotiquement stable si $\frac{k_{21}^2}{2\omega_{21}^2} > 2$ et $\frac{k_{31}^2}{2\omega_{31}^2} > 3$, sous réserve que $k_{ij} >> 1$ et $\omega_{ij} >> 1$. Ceci est le résultat classique de la commande vibrationnelle. Nous l'étendons facilement au cas où les incertitudes paramétriques sont constantes en testant la condition suffisante ci-dessus pour tous les k_{ij} et ω_{ij} admissibles :

$$\forall\, i \in \{2,3\},\; k_{i1} \to k_{i1} + \Delta k_{i1}, \text{ et } \omega_{i1} \to \omega_{i1} + \Delta\omega_{i1}$$

Limite de la méthode :

Bien que relativement simple à calculer, cette méthode ne s'applique pas aux cas des incertitudes non périodiques. La méthode que nous proposerons par la suite consiste à exprimer la variation de la matrice de monodromie $\Phi_A(T,0)$ en fonction de $\Delta A(t)$, puis de majorer cette variation pour établir la condition de stabilité robuste.

2.3. Résultat principal : approche non stationnaire

On note $\Phi_{A+\Delta A}(t,t_0) = \Phi_A(t,t_0) + \Delta\Phi(t,t_0)$, la matrice de transition de (4.11) et $\Phi_A(T,0)$ la matrice de monodromie du système périodique nominal.

Proposition 4.6 :

Le système incertain (4.11) est asymptotiquement stable si

$$\delta\Phi < 1 - \|\Phi_A(T,0)\|_s, \tag{4.12}$$

où $$\delta\Phi = \left[-1 + exp\{\delta A_s T\}\right] exp\left\{\int_0^T \|A(\sigma)\|_l \, d\sigma\right\},$$

L'inégalité (4.12) est équivalente à :

$$\delta A_s < \frac{1}{T} Log\left[1 + \left(1 - \|\Phi_A(T,0)\|_s\right) exp\left\{-\int_0^T \|A(\sigma)\|_l \, d\sigma\right\}\right], \tag{4.13}$$

Remarques :

1) De la même façon que pour les systèmes linéaires stationnaires, on peut utiliser la majoration $\| |\Delta A|_m \|$ au lieu de δA_s pour tenir compte de la structuration des incertitudes.

2) Ce résultat revient en fait à utiliser le critère de stabilité robuste pour le système linéaire discret défini par la matrice de monodromie $\Phi_A(T,0)$ et soumis à une incertitude majorée en norme par $\|\Delta\Phi_A((k+1)T,kT)\| \leq \delta\Phi$. L'essentiel de la démonstration consiste donc à expliciter la relation $\delta\Phi = f(\delta A_s)$.

3) Bien évidemment, la proposition (4.6) peut être généralisée en considérant le système comme étant kT-périodique, $k \in \mathbf{N}$. En réponse pile, ceci peut donner de meilleur résultat car la matrice de monodromie sur *deux périodes* est nulle.

4) Dans l'équation 4.13, on note que δA_s est inversement proportionnelle à la période nominale T. L'incertitude admissible augmente avec la pulsation ω (et donc, la fréquence) des composantes périodiques de $A(t)$. Autrement dit, à hautes fréqences, la stabilité du système (4.11) est comparable à celle du système défini par $A(t)$. Nous généralisons donc en ce sens les "méthodes de centrage" de Bogolioubov-Mitropolsky et de Meerkov, pour lesquelles le modèle centré est stationnaire, défini par la valeur moyenne de $A(t)$.

Démonstration de la proposition 4.6 :

La variation $\Delta\Phi(t,t_0)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\Delta\Phi(t,t_0) = A(t)\,\Delta\Phi(t,t_0) + \Delta A(t)(\Phi_A(t,t_0) + \Delta\Phi(t,t_0)), \qquad (4.14)$$

ce qui donne

$$\Delta\Phi(t,t_0) = \Phi_A(t,t_0)\,\Delta\Phi(t_0,t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi_A(t,\tau)\,\Delta A(\tau)\Big(\Phi_A(\tau,t_0) + \Delta\Phi(\tau,t_0)\Big)\,d\tau,$$

$$avec\ \Phi_{A+\Delta A}(t_0,t_0) = \Phi_A(t_0,t_0) = Id_n\ et\ donc\ \Delta\Phi(t_0,t_0) = 0.$$

Or, on montre que [KONSTANTINOV & PELOVA, 1991]

$$\|\Phi_A(t,t_0)\|_s \leq exp\left\{\int_{t_0}^{t} \|A(\sigma)\|_l\,d\sigma\right\},$$

où $\|A(\sigma)\|_l = \frac{1}{2}\max_i\ \{\lambda_i[A(\sigma) + A(\sigma)^T]\}$ est la norme logarithmique de $A(\sigma)$. Ainsi,

$$\|\Delta\Phi(t,t_0)\|_s \leq \delta A_s \int_{t_0}^{t}\left[exp\left\{\int_{\tau}^{t}\|A(\sigma)\|_l\,d\sigma\right\}\left(exp\left\{\int_{t_0}^{\tau}\|A(\sigma)\|_l\,d\sigma\right\} + \|\Delta\Phi(\tau,t_0)\|_s\right)\right]d\tau,$$

$$\|\Delta\Phi(t,t_0)\|_s \le \delta A_s\,(t-t_0)exp\left\{\int_{t_0}^{t}\|A(\sigma)\|_l d\sigma\right\} + \delta A_s \int_{t_0}^{t}\left[exp\left\{\int_{\tau}^{t}\|A(\sigma)\|_l d\sigma\right\}\|\Delta\Phi(\tau,t_0)\|_s\right]d\tau.$$

En utilisant le lemme de Gromwall pour les fonctions

$$\varphi(t) = \|\Delta\Phi(t,t_0)\|_s exp\left\{-\int_{t_0}^{t}\|A(\sigma)\|_l d\sigma\right\}, f(t) = \delta A_s\,(t-t_0),\ et\ g(\tau) = \delta A_s,$$

on obtient

$$\|\Delta\Phi(t,t_0)\|_s \le \left[-1 + exp\{\delta A_s(t-t_0)\}\right]\, exp\left\{\int_{t_0}^{t}\|A(\sigma)\|_l\, d\sigma\right\}, \qquad (4.15)$$

Le système donné en (4.11) n'est pas à coefficients périodiques. On ne peut donc pas lui définir une matrice de monodromie. Cependant, si on considère la suite d'états $\{x(kT),\ k \in \mathbf{Z}\}$, on sait que :

$$\forall\ k \in \mathbf{Z},\ x((k+1)T) = \Phi_{A+\Delta A}((k+1)T,kT)\ x(kT) = [\Phi_A(T,0)+\Delta\Phi((k+1)T,kT)]\ x(kT).$$

De ce fait,

$$\forall\ k \in \mathbf{Z},\ \|x(kT)\|_s \le \left[\|\Phi_A(T,0)\|_s+\delta\Phi\right]^k \|x(0)\|_s.$$

Ainsi, $\|x(kT)\|_s \to 0$ quand $k \to \infty$ si $\left[\|\Phi_A(T,0)\|_s+\delta\Phi\right] < 1$.

En outre,

$$\forall\ k \in \mathbf{Z},\ \forall\ t \in [0,T],\ x(t+kT) = \Phi_{A+\Delta A}(t+kT,kT)\ x(kT),$$

avec $\|\Phi_{A+\Delta A}(t+kT,kT)\|_s < \infty$.

Dans ce cas, $\forall\ t \in [0,T]$, $\|x(t+kT)\|_s \to 0$ quand $k \to \infty$. La condition (4.12) est suffisante pour la stabilité asymptotique du système incertain (4.11) ❑

2.4. Application au placement de pôles :

Soit un système linéaire où on suppose que les matrices $A(t)$ et $B(t)$ nominales sont T-périodiques et soumises aux incertitudes $\Delta A(t)$ et $\Delta B(t)$. Le placement de pôles est réalisé par un bouclage S.S.P.H calculé à partir des valeurs nominales ($\Delta F = 0$) :

$$\forall\ k \in \mathbf{Z},\ \forall\ t \in [kT,(k+1)T],\ \frac{dx}{dt} = A(t)\,x(t) + B(t)B^{\mathrm{T}}(t)\Phi^{\mathrm{T}}{}_A(T,t\text{-}kT)\ F\,x(kT), \qquad (4.16)$$

On rappelle que la matrice de monodromie de (4.16) est :

$$\Psi_{bf}(T,0) = \Phi_A(T,0) + W_{A,B}(T,0)\ F.$$

Pour le système incertain, on a :

$\forall\ k \in \mathbf{Z},\ \Psi_{bf}((k+1)T,kT)+\Delta\Psi_{bf}((k+1)T,kT) = \Phi_{A+\Delta A}((k+1)T,kT)+W_{A+\Delta A,B+\Delta B}((k+1)T,kT)F.$

En posant

$$\forall\ k \in \mathbf{Z},\ \Phi_{A+\Delta A}((k+1)T,kT) = \Phi_A(T,0) + \Delta\Phi((k+1)T,kT),$$

$$\text{et } W_{A+\Delta A,B+\Delta B}((k+1)T,kT) = W_{A,B}(T,0) + \Delta W((k+1)T,kT),$$

on obtient

$$\forall\ k \in \mathbf{Z},\ \Delta\Psi_{bf}((k+1)T,kT) = \Delta\Phi((k+1)T,kT) + \Delta W((k+1)T,kT)\ F.$$

L'équation (4.15) donne la majoration en norme de $\Delta\Phi((k+1)T,kT)$. Il nous reste donc à majorer l'incertitude sur le grammien d'atteignabilité en fonction de δA_s et de δB_s.

Majoration des incertitudes sur le grammien d'atteignabilité :

On montre que, quel que soit k,

$$\|\Delta W((k+1)T,kT)\|_s \leq \delta W_1 \leq \delta W_2, \tag{4.17}$$

où $\delta W_1 = a_0 + a_1\,\delta B_s + a_2\,\delta B_s^{\,2}$, (4.17.*a*)

$$a_0 = \int_0^T \|B(t)\|_s^{\,2}\left\{-1+exp\,\{2\delta A_s(T-t)\}\right\}\ exp\left\{2\int_t^T \|A(\sigma)\|_l\,d\sigma\right\}dt,$$

$$a_1 = 2\int_0^T \|B(t)\|_s\ exp\ 2\left\{\delta A_s\,(T-t) + \int_t^T \|A(\sigma)\|_l\,d\sigma\right\}dt,$$

$$a_2 = \int_0^T exp\ 2\left\{\delta A_s\,(T-t) + \int_t^T \|A(\sigma)\|_l\,d\sigma\right\}dt,$$

et $\delta W_2 = exp\ 2\left\{\int_0^T \|A(\sigma)\|_l\,d\sigma\right\}\left[b_0 + b_1\,\delta B_s + b_2\,\delta B_s^{\,2}\right]$, (4.17.*b*)

$$b_0 = n[B]^2\left\{-T + \frac{1}{2\delta A_s}\left[-1 + exp\,[2\delta A_s T]\right]\right\},$$

$$b_1 = \frac{n[B]}{\delta A_s}\left[-1 + exp\,[2\delta A_s T]\right]$$

$$b_2 = \frac{1}{2\delta A_s}\left[-1 + exp\,[2\delta A_s T]\right],$$

avec $\forall\ t \in \mathbf{R},\ \|\Delta A(t)\|_s \leq \delta A_s$, *et* $\|\Delta B(t)\|_s \leq \delta B_s$, $n[B] = max\ \|B(t)\|_s$.

Démonstration :

On sait que :

$$W_{A+\Delta A,B+\Delta B}((k+1)T,kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi_{A+\Delta A}((k+1)T,t)\,[B(t)+\Delta B(t)][B(t)+\Delta B(t)]^{\mathsf{T}}\Phi^{\mathsf{T}}{}_{A+\Delta A}((k+1)T,t)\;dt,$$

on obtient alors :

$$\|\Delta W((k+1)T,kT)\|_s \leq \int_{kT}^{(k+1)T} [\|B(t)\|_s+\|\Delta B(t)\|_s]^2[\|\Phi_A((k+1)T,t)\|_s + \|\Delta\Phi((k+1)T,t)\|_s]^2 dt$$
$$- \int_{kT}^{(k+1)T} \|B(t)\|_s{}^2\|\Phi_A((k+1)T,t)\|_s{}^2\, dt, \qquad (4.18)$$

ou encore, indépendamment de k,

$$\|\Delta W((k+1)T,kT)\|_s \leq \int_0^T \Big([\|B(\tau)\|_s+\delta B_s]^2[\|\Phi_A(T,\tau)\|_s+\|\Delta\Phi(T,\tau)\|_s]^2 - \|B(\tau)\|_s{}^2\|\Phi_A(T,\tau)\|_s{}^2\Big)\, d\tau.$$

avec, d'après (4.15),

$$\forall\, k \in \mathbf{Z},\ \|\Delta\Phi((k+1)T,t)\|_s \leq \Big[-1 + exp\{\delta A_s(T-\tau)\}\Big]\, exp\left\{ \int_\tau^T \|A(\sigma)\|_l\, d\sigma\right\},$$

$$et\ \|\Phi_A(T,\tau)\|_s < exp\left\{ \int_\tau^T \|A(\sigma)\|_l\, d\sigma\right\},\ avec\ t = \tau + kT,\ \tau \in [0,T].$$

(4.17.*a*) et (4.17.*b*) sont alors obtenues par majorations succesives des expressions dans (4.18) ❑

Condition suffisante de stabilité robuste :

Le système incertain correspondant à (4.16) est asymptotiquement stable si :

$$\delta\Psi < 1 - \|\Psi_{bf}(T,0)\|_s, \qquad (4.19)$$

où $\forall\, k \in \mathbf{Z},\ \delta\Psi \geq \|\Delta\Phi((k+1)T,kT) + \Delta W((k+1)T,kT)\, F\|_s,$
et $\Psi_{bf}(T,0)$ *la matrice de monodromie du système nominal en boucle fermée.*

L'inégalité (4.19) se démontre facilement de manière analogue au système linéaire discret stationnaire en (4.9) ou (4.12). Une autre majoration moins fine de $\delta\Psi$ est

$$\forall\, k \in \mathbf{Z},\ \delta\Psi \geq \|\Delta\Phi((k+1)T,kT)\|_s + \|\Delta W((k+1)T,kT)\, F\|_s,$$

avec pour avantage, le calcul indépendant d'une majoration de chaque terme à droite de l'inégalité comme indiqué dans (4.15) et (4.17).

Proposition 4.7 : Cas particulier de la réponse pile.

Si la commande S.S.P.H. place les multiplieurs caractéristiques en boucle fermée de (4.16) telle que

$$\Psi_{bf}(2T,0) = \Psi_{bf}^2(T,0) = 0.$$

Alors la condition suffisante de stabilité robuste est

$$0 < \delta\Psi < -\|\Psi_{bf}(T,0)\|_s + \sqrt{1 + \|\Psi_{bf}(T,0)\|_s^2}. \tag{4.20}$$

où, $\forall\, k \in \mathbf{Z}$, $\|\Delta\Psi_{bf}((k+1)T,kT)\|_s \leq \delta\Psi$.

Démonstration :

En considérant le système comme étant $2T$-périodique, (4.19) devient :

$$\forall\, k \in \mathbf{Z},\ \|\Delta\Psi_{bf}((k+2)T,kT)\|_s \leq \delta\Psi_{[0,2T]} < 1, \tag{i}$$

où $\delta\Psi_{[0,2T]}$ majore l'incertitude de la matrice de monodromie sur deux périodes.
Or, $\delta\Psi_{[0,2T]}$ peut être exprimée en fonction de $\delta\Psi = max\,\|\Delta\Phi((k+1)T,t)\|_s$. En effet :

$$\begin{aligned}
\Psi_{bf}((k+2)T,kT) &+ \Delta\Psi_{bf}((k+2)T,kT) \\
&= \Delta\Psi_{bf}((k+2)T,kT), \\
&= \Psi_{bf}(T,0)\Delta\Psi_{bf}((k+1)T,kT) + \Delta\Psi_{bf}((k+2)T,(k+1)T)\,\Psi_{bf}(T,0) \\
&+ \Delta\Psi_{bf}((k+2)T,(k+1)T)\,\Delta\Psi_{bf}((k+1)T,kT),
\end{aligned}$$

D'où la majoration :

$$\forall\, k \in \mathbf{Z},\ \|\Delta\Psi_{bf}((k+2)T,kT)\|_s \leq \delta\Psi_{[0,2T]} \leq 2\,\|\Psi_{bf}(T,0)\|_s\,\delta\Psi + \delta\Psi^2. \tag{ii}$$

avec, sur chaque période, $\forall\, k \in \mathbf{Z}$, $\|\Delta\Psi_{bf}((k+1)T,kT)\|_s \leq \delta\Psi$.

La proposition 4.7 est démontrée en identifiant la quantité $\delta\Psi$ qui vérifie (i) et (ii) ❑
Pour ce cas particulier de la réponse pile, (4.20) donne généralement de meilleur résultat par la prise en compte de la nilpotence de la matrice de monodromie en boucle fermée.

2.5. Application à la commande optimale :

Le système nominale en boucle fermée est :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A_{bf}(t)\, x(t), \\ y(t) = C(t)\, x(t), \end{cases} \tag{4.21}$$

avec

$$A_{bf}(t) = [\, A(t) + B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)K(t)\,];$$

et $K(t)$ la solution de l'équation différentielle de Riccati :

$$\frac{d}{dt}K = -K\,A(t) - A^{\mathrm{T}}(t)K - K\,B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\,K + C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t),$$
$$\text{où } K(0) = K(T) = K_0.$$

Notons maintenant $\Delta A_{bf}(t)$, $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$, $\Delta C(t)$, $\Delta K(t)$ et ΔK_0 les incertitudes et δA_{bf}, δA, δB, δC, δK et δK_0 leurs majorations respectives en norme. La principale difficulté consiste ici à exprimer les inégalités donnant $\delta K \leq g(\delta A,\delta B,\delta C,\delta K_0)$, et de là, $\delta A_{bf} \leq f(\delta A,\delta B,\delta C,\delta K_0)$. La condition suffisante de stabilité robuste du système incertain résulte alors de l'application de (4.12)(4.13). Pour simplifier les notations, on pose :

$$E(t) = B(t)R^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t), \quad et \quad F(t) = C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t),$$

ce qui donne : $\Delta F(t) = \Delta C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)C(t) + C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\Delta C(t) + \Delta C^{\mathrm{T}}(t)Q(t)\Delta C(t)$,

soit :

$$\|\Delta F(t)\|_s \leq \delta F = n[Q]\,\left[2\;n[C].\delta C + \delta C^2\right].$$

De même,

$$\|\Delta E(t)\|_s \leq \delta E = n[R^{-1}]\,\left[2\;n[B].\delta B + \delta B^2\right].$$

Majoration de la norme de $\Delta K(t)$:

On montre [KONSTANTINOV & PELOVA, 1991] que $\Delta K(t)$ vérifie

$$\frac{d}{dt}\,\Delta K = -\Delta K(t)\,A_{bf}(t) - A_{bf}^{\mathrm{T}}(t)\Delta K(t) + h(t,\Delta K(t)), \tag{4.22}$$

avec $\Delta K(0) = \Delta K_0$, et pour toute matrice $X \in \mathbf{R}^{n\mathrm{x}n}$,

$$\begin{aligned} h(t,X) = {} & K(t)\Delta E(t)K(t) - K(t)\Delta A(t) - \Delta A^{\mathrm{T}}(t)K(t) - \Delta F(t) \\ & - \left[\Delta A(t) - \Delta E(t)\,K(t)\right]^{\mathrm{T}}X - X\left[\Delta A(t) - \Delta E(t)\,K(t)\right] + X\,[E(t)+\Delta E(t)]\,X. \end{aligned}$$

La solution de (4.22) est alors donnée sous la forme d'opérateur matriciel suivante :

$$\Delta K(t) = \mathbf{S}(\Delta K)(t) = \Phi_{bf}^{\mathrm{T}}(T,t)\Delta K_0\Phi_{bf}(T,t) - \int_t^T \Phi^{\mathrm{T}}{}_{bf}(\sigma,t)\,h(\sigma,\Delta K(\sigma))\;\;\Phi_{bf}(\sigma,t)\,d\sigma. \tag{4.23}$$

Théorème : [KONSTANTINOV & PELOVA, 1991]

On définit les constantes :

$$\begin{cases} c_0 = \nu\,\delta F + 2\,\nu\,n[K]\,\delta A_s + \nu\,n[K]^2\delta E_s + \mu\,\delta K_{0s}, \\ c_1 = 2\,\nu\,(\delta A_s + n[K]\,\delta E_s), \\ c_2 = \nu\,(\delta E_s + n[E]), \end{cases} \tag{4.24}$$

$$avec\ \mu = n[\Phi_{bf}^{\ 2}] = \max_{t\,\in\,[0,T]} \{\|\Phi_{bf}(T,t)\|_s^{\ 2}\},$$

$$et\ v = \max_{t \in [0,T]} \left\{ \int_t^T \|\Phi_{bf}(T,\sigma)\|_s^2 \, d\sigma \right\}.$$

Si δA, δB, δC, et δK_0 sont tels que

$$c_0 + 2\sqrt{c_1 c_2} < 1, \tag{4.25}$$

alors la norme de $\Delta K(t)$ vérifie

$$\|\Delta K(t)\|_s \leq \delta K \leq \rho = \frac{1}{2c_2}\left[1 - c_1 - \sqrt{(1-c_1)^2 - 4c_0c_2}\right]. \tag{4.26}$$

En outre, (4.25) garantit l'unicité de la solution $K(t)+\Delta K(t)$ de l'équation de Riccati perturbée satisfaisant (4.26).

Démonstration :

En majorant $h(t,X)$, Konstantinov et Pelova analysent l'opérateur $\mathbf{S}$ et démontrent que pour toutes fonctions matricielles $X(t)$ et $Y(t)$, on a

$$\|\mathbf{S}(X)(t)\|_s \leq r(\|X(t)\|_s) = c_0 + c_1 \|X(t)\|_s + c_2 \|X(t)\|_s^2, \tag{4.27}$$

$$\|\mathbf{S}(X)(t)-\mathbf{S}(Y)(t)\|_s \leq r'(\|X(t)\|_s) = [c_1 + c_2 \max\{\|X(t)\|_s, \|Y(t)\|_s\}]\, \|X(t)-Y(t)\|_s,$$

Or, (4.23) et (4.27) indiquent que pour $\Delta K(t)$, on doit avoir $\|\Delta K(t)\|_s = \|\mathbf{S}(\Delta K)(t)\|_s \leq r(\|\Delta K(t)\|_s)$. En supposant l'existence de ρ tel $r(\rho) < \rho$, et $r'(\rho) < 1$, on montre que $\mathbf{S}$ est contractante sur l'ensemble des fonctions $\{X(t),\ \|X(t)\|_s \leq \rho\}$. Ainsi, une solution $\Delta K(t)$ de (4.23) existe, est unique, avec $\|\Delta K(t)\|_s \leq \rho$. Ceci est vérifié si et seulement si (4.25) est vérifiée, d'où le théorème ❑

Majoration de la norme de $\Delta A_{bf}(t)$:

D'après les notations,

$$\Delta A_{bf}(t) = \Delta A(t) + \Delta B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)K(t) + B(t)R^{-1}(t)\Delta B^{T}(t)K(t) + B(t)R^{-1}(t)B^{T}(t)\Delta K(t).$$

Il en résulte que

$$\|\Delta A_{bf}(t)\|_s \leq \delta A_{bf} \leq \delta A + 2\, n[R^{-1}]\, n[B]\, n[K]\, \delta B + n[R^{-1}]\, n[B]^2\, \delta K. \tag{4.28}$$

L'application de (4.13) donne alors la condition suffisante de stabilité robuste :

$$\delta A_{bf} < \frac{1}{T} Log\left[1 + \left(1 - \|\Phi_{bf}(T,0)\|_s\right) exp\left\{-\int_0^T \|A_{bf}(\sigma)\|_l \, d\sigma\right\}\right]. \tag{4.29}$$

2.6. Etude de la variation de la pulsation :

La variation de la pulsation semble très contraignante. Si l'écart par rapport à la période nominale se prolonge dans le temps, notre méthode ne permet généralement pas de trouver une condition de stabilité robuste. Voyons cela sur un exemple. Soit la matrice d'évolution nominale en somme de Fourier :

$$A(t) = \sum A_i \cos(i\omega t) + B_i \sin(i\omega t),$$

Introduisons une variation $\Delta\omega(t)$ sur la pulsation ω :

$$A(t) + \Delta A(t) = \sum A_i \cos(i\omega + i\Delta\omega)t + B_i \sin(i\omega + i\Delta\omega)t$$

On calcule alors l'incertitude

$$\Delta A(t) = \sum [A_i \cos(i\omega t) + B_i \sin(i\omega t)][-1+\cos(i\Delta\omega t)] + [-A_i \sin(i\omega t) + B_i \cos(i\omega t)]\sin(i\Delta\omega t)$$

La majoration de la norme de $\Delta A(t)$ dépend de la majoration des quantités $[-1+\cos(i\Delta\omega t)]$ et $\sin(i\Delta\omega t)$. Si l'erreur $\Delta\omega$ se prolonge dans le temps, δA_s est de l'ordre de grandeur de $2\,\|A(t)\|_s$, ce qui ne nous permet pas de conclure à la robustesse. Par contre si $\Delta\omega(t)$ représente une erreur fugitive ou périodique on peut continuer l'étude. Il serait intéressant d'envisager ainsi le cas des systèmes presque périodiques.

3. Exemples numériques :

Soit le système défini par $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1+\cos(\omega t) & -2 \end{bmatrix}$ et $B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\cos(\omega t) \end{bmatrix}$ où $\omega = 4$. Dans le chapitre 2, nous avons calculé la commande S.S.P.H. donnant la réponse pile. On trouve ainsi,

$$\Psi_{bf}(T,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pour la matrice de placement de multiplieurs caractéristiques $F = \begin{bmatrix} -3.9521 & 5.3388 \\ 0.9356 & -0.5297 \end{bmatrix}$.

On veut maintenant étudier la stabilité robuste si le système est soumis aux incertitudes de la forme :

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta a_1(t) & \Delta a_2(t) \end{bmatrix} \text{ et } \Delta B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta b(t) \end{bmatrix},$$

où $|\Delta a_1(t)| \le \delta a_1$, $|\Delta a_2(t)| \le \delta a_2$, et $|\Delta b(t)| \le \delta b$.

On note de l'équation (4.19) est inutilisable car $\|\Psi_{bf}(T,0)\|_s = 1$. Par contre, la proposition 4.7. nous donne la condition suffisante de stabilité robuste :

$$0 < \delta\Psi < -1 + \sqrt{2}, \text{ avec } \forall\, k \in \mathbf{Z},\ \|\Delta\Psi_{bf}((k+1)T, kT)\|_s \le \delta\Psi.$$

Il nous faut maintenant exprimer $\delta\Psi$ en fonction des δa_i et de δb. Etant donné que

$$\Delta\Psi_{bf}((k+1)T,kT) = \Delta\Phi((k+1)T,kT) + \Delta W((k+1)T,kT)\, F,$$

nous allons majorer chaque terme indépendamment avec (4.15) et (4.17.a-b).

On montre que :

$i)\ \delta A_s = \sqrt{\delta a_1{}^2 + \delta a_2{}^2},$

$ii)\ \delta B_s = \delta b.$

$iii)\ \|A(t)\|_l = \frac{1}{2} max\ \{\lambda[A(t) + A^T(t)]\} = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 + cos^2(\omega t)},$

$iv)\ \|B(t)\|_s = max\ \{\sigma_i[B(t)]\} = |\ 1 + cos(\omega t)\ | \leq n[B] = 2,$

ce qui donne

$$\delta\Phi = \Big[-1 + exp\{\delta A_s T\}\Big]\ exp\left\{\int_0^T \|A(\sigma)\|_l\, d\sigma\right\} \sim 1.0986\ [-1 + exp\{\delta A_s T\}],$$

De la même manière, on majore δW, à l'aide de (4.17). On peut alors identifier numériquement le domaine de stabilité robuste par rapport à δA_s et δB_s.

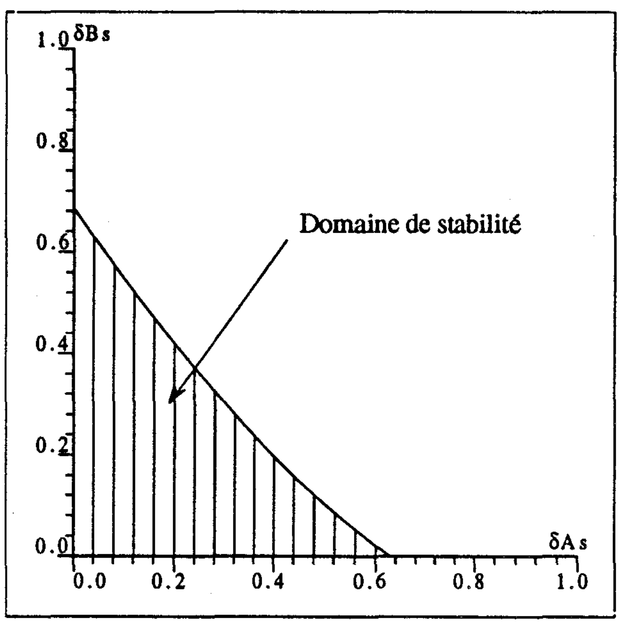


Figure 4.5. Domaine de stabilité robuste par rapport à δA_s et δB_s.

4. Conclusion :

Les méthodes d'analyse de la stabilité robuste que l'on peut trouver dans la littérature concernent, la plupart du temps, les systèmes linéaires incertains dont la matrice d'évolution nominale est constante. Le théorème de centrage de Bogolioubov-Mitropolsky est valable en linéaire et non-linéaire, périodique ou non, mais pas en basses fréquences. Les résultats de Meerkov adaptent ces méthodes aux cas linéaires périodiques et sont aussi inutilisables en basses fréquences. Nous avons voulu mener l'étude de la stabilité robuste à partir d'un modèle linéaire "centré" périodique, soumis à des incertitudes non-stationnaires quelconques. Notre résultat principal, essentiellement basé sur l'approche temporelle, constitue un premier outil allant dans ce sens, avec l'avantage d'être utilisable quel que soit la fréquence. Cela nous permet de tester les formes de commande mises en œuvre dans les chapitres précédents, et de quantifier l'erreur provoquée par des incertitudes évaluées en norme. Bien entendu, cette approche n'est certainement pas la seule envisageable, cependant elle ouvre une nouvelle voie de recherche quant à la synthèse de commande robuste.

Conclusion générale.

Nous avons regroupé dans ce mémoire un large éventail de méthodes d'analyse et de commande des systèmes linéaires à coefficients périodiques aussi bien en temps continu qu'en temps discret. Après en avoir montré les particularités, nous résolvons, pour ces systèmes, la plupart des objectifs habituels comme la stabilisation et la réponse pile, la synthèse de commande optimale, et la poursuite de trajectoire. Les techniques utilisées généralisent et dépassent les résultats disponibles en linéaire stationnaire.

Rappelons les apports essentiels de notre travail :

Dans la partie concernant l'analyse, nous avons amélioré un précédent algorithme de calcul de la transformation de Floquet-Lyapunov. Ceci permet d'appréhender l'erreur produite par la troncature du développement en série de Fourier de la matrice de transformation de Floquet. Nous avons aussi étudié l'introduction d'un reconstructeur d'état discret dans la boucle de commande. D'autre part, nous avons pu identifier la loi de commande en boucle ouverte qui permet d'obtenir un cycle limite donné.

En ce qui concerne la commande optimale, nous avons complété et amélioré le calcul de la solution de l'équation périodique de Riccati.

Enfin, en tenant compte des imperfections et des incertitudes dans la représentation, nous répondons aussi aux préoccupations quant à la robustesse des performances, essentiellement selon le critère de la stabilité. Nous avons mis au point une méthode d'estimation basée sur le lemme de Gromwall, dont l'originalité consiste en l'utilisation d'un système nominal à coefficients périodiques. Ceci permet de valider la modélisation d'un système linéaire non stationnaire général sous une forme simplifiée périodique.

Ce dernier point ouvre une voie de recherche intéressante, notamment pour le traitement des cas presque périodiques. En outre, des aspects de la robustesse autres que la stabilité (par exemple les comportements entrées/sorties) peuvent être développés par ce même biais.

Références bibliographiques.

BELEVITCH V.,

"Classical Network theory",

San Francisco, C-A : Holden Day, 1968.

BITTANTI S., BOLZERN,

"Stabilizability and Detectability of linear periodic systems",

Syst. Contr. Lett, n°6, 1985.

BITTANTI S.,

"Deterministic and stochastic linear periodic systems",

Time Series and Linear Systems, Bittanti S., ed. New York Springer Verlag, 1986.

BITTANTI S., GUARDABASSI G.,

"Optimal periodic control and periodic systems analysis : an overview",

Proc. 25th Conf. Decision Contr., Athens, Greece, 1986.

BITTANTI S., COLANERI P., De NICOLAO G.,

"The differential periodic Riccati equation for the periodic prediction problem",

IEEE Trans. on Aut. Contr, vol AC-33, n°8, 1988.

BITTANTI S., COLANERI P., De NICOLAO G.,

"The periodic Riccati equation",

Bittanti, Laub, Willems (Eds.), The Riccati equation, Springer Verlag, 1991.

BORNE P., DAUPHIN-TANGUY G., RICHARD J.P., ROTELLA F., ZAMBETAKIS I.

"Commande et optimisation des processus",

Méthodes et techniques de l'ingénieur, éd. TECHNIP, Paris, Août 1990.

"Modélisation et identification des processus",

tomes I-II, Méthodes et techniques de l'ingénieur, éd. TECHNIP, Paris, Déc. 1991.

BOUDAREL R., DELMAS J., GUICHET P.,

"Commande optimale des processus",

édition DUNOD, PARIS, 1969.

BURGAT C., MIRA C.,

"Sur une méthode de détermination des exposants caractéristiques d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients périodiques",

CRAS, t.271 (9 Nov. 1970), série A.

BRUNOVSKY P.,

"On stabilization of linear systems under a certain class of persistent perturbations",

Differentsialnyie uravnenia 2, 1966.

"Controllability and linear closed-loop controls in linear periodic systems",

Journal of Differential Equations, 6, 1969.

CALICO R.A., WIESEL W.E.,

"Control of time-periodic systems",

Journal of Guidance, vol.7, 1984.

CHAMMAS A.B., LEONDES C.T.,

"On the design of linear time invariant systems by periodic output feedback, Part I and II,

International Journal of Control, vol.27, 1978.

"Optimal control of stochastic linear systems by discrete output feedback,"

IEEE Transaction on Automatic Control, vol.AC-23, 1978.

"On the finite time control of linear systems by piecewise constant output feedback,"

International Journal of Control, vol.30, 1979.

CHEN C.T.,

"Introduction to linear system theory",

Electrical, Engineering, Electronics and systems,

Holt, Rinhart and Winston Series (USA) 1970.

CHEN B.S., WONG C.C.,

IEEE Trans. on Aut. Contr., vol.AC-32, 1987.

CHIANG H.D., HIRSCH M.W., WU F.F.,

"Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems",

IEEE Trans. on Aut. Contr., vol AC-33, n°1, 1988.

COLANERI P.,

"Output Stabilization via pole placement of discrete-time linear periodic systems",

IEEE Trans. on Aut. Contr., vol.AC-36, n°6, 1991.

DOYLE J.C.,
"Guaranteed margins for LQG regulators",
IEEE Trans. on Auto. Contr., vol AC-23, 1978.

DOYLE J.C., STEIN G.,
"Multivariable feedback design : concepts for a classical/modern synthesis",
IEEE Trans. on Auto. Contr., vol AC-26, 1981.

FLOQUET G.,
"Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques",
Annales Scient. de l'Ecole Norm. Sup., t. XII, 47, 1883.

FRANCIS B.A.,
"A course in H_∞ control theory",
Springer Verlag, 1987.

FRANCIS B.A., GEORGIOU T.T.,
"Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers"
IEEE Trans. on Auto. Contr., vol AC-32, n°9, 1988.

GANTMACHER,
"Théorie des matrices",
DUNOD Paris, tomes I et II, 1966.

GRUJIC L.T.,
"Novel development of Lyapunov stability of motion",
Internat. Jour. of Contr., vol 22, n°4, 1975
"Uniform practical and finite-time stability of large scale systems",
Internat. Jour. of Contr., vol 6, n°2, 1975

HAUTUS M.L.J.,
"Controllability and observability of linear autonomous systems",
Indag Math., vol.72, 1969.

HEWER G.A.,
"Periodicity, detectability and the matrix Riccati equation",
SIAM J.Contr, vol. 13, 1975.

HERNANDEZ V., JODAR L.,

"Boundary problems and periodic Riccati equations",

IEEE Trans. on Aut. Contr., vol.AC-30, n°11, 1985.

KABAMBA P.T.,

"Monodromy eigenvalue assignment in linear periodic systems",

IEEE Trans. on Aut. Contr., vol AC-31, p 950-952, 1986

"Control of linear systems using Generalized Sampled-Data Hold Functions",

IEEE Trans. on Aut. Contr., vol AC-32, n°9, pp 772-783, Sept.1987

"Simultaneous pole assignment in linear periodic systems by constrained structure feedback",

IEEE Trans. on Aut. Contr., vol AC-34, n°2, Fev.1989

KACZOREK T.,

"Pole placement for linear discrete-time systems by periodic output feedback",

Syst. Contr. Lett., vol.6, 1985.

KAILATH T.,

"Linear Systems",

Englewood Cliffs, N.J : Prentice-Hall, 1980.

KALMAN R.E.,

"New methods in Wiener filtering",

Proc of First Symp. on Eng.Applications of random function theory and probability, J.Bogdanoff and F.Kozin (eds), J. Wiley, 1963.

KALMAN R.E., FALB P.L., ARBIB M.A.,

"Topics in Mathematical System Theory",

New York, McGraw-Hill, 1969.

KANO & NISHIMURA,

"Periodic solutions of matrix Riccati equations with detectability and stabilizability",

Int. Journ. of Contr., n°29, 1979.

KERN G.,

"Linear closed-loop control on linear periodic systems with application to spin-stabilized bodies",

Int. Journ. of Contr., vol.31, n°5, 1980.

KHARGONEKAR P.P., POOLLA K., TANNENBAUM A.,
"Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation",
IEEE Trans. on Aut. Contr., vol.AC-30, 1985.

KHARITONOV V.L.,
"Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations",
Differentsialny Uravneniya, vol.14, n°11, 1978.

KOMAROFF,
"Bounds on eigenvalues of matrix products with an application to the algebraic Riccati equation",
IEEE Trans. on Aut. Contr., vol.AC-35, 1990.

KONO M., SUZUKI T.,
"Monodromy eigenvalue assignment for periodic continuous-time systems by multirate sampled state periodic hold control",
IMACS Symposium MCTS, Lille, 1991.

KONSTANTINOV M.M., PELOVA G.B.,
"Sensitivity of the solutions to differential matrix Riccati equations",
IEEE Trans. on Aut. Contr., vol.AC-36, n°2, 1991.

De LARMINAT P.,
"La commande robuste : un tour d'horizon",
RAIRO APII, n°25, Avril 1991.

LAUB A.J.,
"A Schur method for solving algebraic Riccati equations",
IEEE Trans. on Aut. Contr., vol.AC-24, 1979.

LYAPUNOV A.M.,
"Problème général de la stabilité du mouvement",
Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, tome IX, 1892.

LYAPUNOV A.M., PLISS V.A., BASOV V.P.,
"Stability of motion",
Academic Press, 1966.

MEERKOV S.M.,

"Vibrational control",

Avtomatik i Telemekhanik, n°2, 34-43, 1973.

"Averaging of trajectories of slow dynamic systems",

Differential equations, vol.9, 1975.

"Principle of vibrational control theory and applications",

IEEE Trans. on Aut. Contr., vol.AC-25, n°4, 1980.

MEERKOV S.M., TSITKIN M.Yu.,

"The effectiveness of the method of vibrational control for dynamic systems described by a differential equation of order n",

Determinate Systems (UDC 62-50).

Avtomatik i Telemekhanik, n°4, April 1975.

NARENDRA K.S., TAYLOR J.H.,

"Frequency domain criteria for absolute stability",

Academic Press, New York and London, 1973.

PACHPATT B.G.,

Journal of the Indian Mathematical Society, n°37, 147, 1973.

PATEL R.V., TODA M.,

"Quantitative measures of robustness for multivariable systems",

Proc. of Joint Automatic Control Conf., San Francisco, TP8-A, 1980.

PILLET E., POLOUJADOFF M.,

"Méthode de résolution des systèmes diffrentiels linéaires à coefficients périodiques. Application à un asservissement",

Symposium MECO'82, vol.1, Tunis, Sept. 1982.

PILLET E., POLOUJADOFF M., RICHARD J.P., LAURENT F.,

"Determination of time-varying systems asymptotically stable without verifying the linear stability conditions",

Symposium MECO'82, vol.1, Tunis, Sept. 1982.

PONTRIAGUINE L., BOLTINASKI V., GAMKRELIDZE R., MICHTCHENKO E.,

"Théorie mathématique des processus optimaux",

traduction française, éd. MIR, MOSCOU, 1974.

POPOV V.M.,

"Hyperstabilité des systems autonomes",

DUNOD, 1973.

PRZYBYLSKI C., RICHARD J.P.,

"On structural model reductions of continous non linear periodical time-varying systems",

Congrès IMACS, Lille, Juin 1986.

RAHMANI H.M., FRANKLIN G.F.,

"Linear periodic systems : eigenvalue assignment using discrete periodic feedback",

IEEE Trans. on Aut. Contr., vol AC-34, n°1, Jan. 1989.

"A new optimal multirate control of linear periodic and time-invariant systems",

IEEE Trans. on Aut. Contr., vol.AC-35, n°160, 1990.

RICCATI J.F.,

"Animadversiones in aequationes diffrentiales secundi gradus",

Acta Eruditorum Lipsiae, Supplementa, VIII, II, 1724.

RICHARD J.P.,

"Sur la mise en équation d'état de systèmes continus non-linéaires par une méthode de calcul symbolique : Définition d'un invariant de représentation",

Thèse de Docteur Ingénieur, n°259, Lille, 1981.

RICHARD J.P., CONZE P.,

"Toward the optimal control of linear periodic systems",

Computing and computers for control systems, IMACS, 1989.

RICHARD J.P., LAURENT F.,

"Identification of the dynamical properties of a linear process with periodical coefficients",

Congrès ACI 1983, Iasted Copenhagen, vol.1, 8/7-8/11..

RICHARD, RABENASOLO, SAADANE,

"Periodic systems : Pole assignment and optimal control by Floquet's factor direct computation",

Syst. Anal. Model. Simul., vol.8, n°10, 1991, Akademie Verlag.

RICHARD J.P., RABENASOLO B., SAADANE A.,

"Control of periodic systems by use of Floquet transformations",

Applied Control : Current Trends and Modern Methodologies, chap.13,

ed. Tzafestas, Marcel Dekker Inc., New York, à paraitre.

RICHARD J.P., RABENASOLO A.B.,

"About optimal control for linear periodic systems",

Mathematics of the Analysis and Design of Process Control - Proc. of the 13th IMACS World Congress, Dublin, 22-27 July 1991 et IMACS Conf. on Modelling and Control of Technological Systems, Lille, 7-10 May 1991.

Elsevier Science Publishers B.V. (Academic Publishing Division).

ROSENBROCK H.H.,

"State space and multivariable theory",

London, England : Nelson, 1970.

ROUCHE & MAHWIN,

"Equations différentielles ordinaires",

Maçon et Cie, 1973.

SAADANE A.,

"Reduction des systèmes linéaires périodiques, application à la commande",

Thèse de Doctorat en Automatique, n°589, Lille, 1990.

SHAYMAN M.A.,

"Inertia theorems for the periodic Lyapunov equation and periodic Riccati equation",

Syst. Contr. Lett., n°4, 1984.

SHINKRE R.B., TRAN M.T., SAWAN M.E.,

"Robust controller design for discrete-time systems",

Proc. of the American Control Conf., Atlanta, 1988.

SOBEL K.M., BANDA S.S., HSI-HAN YEH,

"Robust control of linear systems with structured state space uncertainty",

Int. Journ. of Contr., vol.50, n°5, 1989.

STOER J., WITZGALL C.,

Numerical Mathematics, n°4, 1964.

YOSHII K., HAKOMORI K.,

"Characteristic multiplier assignment in continuous-time linear periodic systems",

Int. Journ. of Control, vol.50, n°6, 1989.

VIDYASAGAR M.

"Non linear systems analysis",

Englewood Cliffs, N.J : Prentice Hall.

VOLOSOV,

"Averaging in systems of ordinary differential equations",

USP Matem. Nauk., vol.17, n°6. 1962.

WU Min Yen,

"Solution of certain classes of linear time-varying systems",

Int. Journ. of Control, vol.31, n°1, 1980.

"Solvability and representation of linear time-varying systems",

Int. Journ. of Control, vol.31, n°5, 1980.

YEDAVALLI R.K.,

"Preturbation bounds for robust stability in linear state space models",

Int. Journ. of Control, vol.42, n°6, 1985.

ZHOU R., KHARGONEKAR P.P.,

"Stability robustness bounds for linear state space models with structured uncertainty",

IEEE Trans. on Aut. Contr., vol.AC-32, n°7, 1987.