

61300

50376  
1992  
325

N° d'ordre : 994

50376  
1992  
325

# THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Discipline : Lasers, Molécules et Rayonnement Atmosphérique



par

Marc LEFRANC



## CARACTERISATION DU CHAOS DANS LES LASERS CO<sub>2</sub>

*Soutenue le 17 Décembre 1992 devant la Commission d'Examen*

Membres du Jury :

MM.

F. LALOE  
E. ARIMONDO  
A. ARNEODO  
P. GLORIEUX  
B.J. ZHILINSKI

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Directeur de Thèse  
Examineur

*"L'état dans lequel force, forme et matière n'étaient  
pas encore séparées est dit Chaos"*

Lie-Tseu, *Le vrai classique du vide parfait*, Livre I, Chapitre III traduit  
par Benedykt Grynopas, in *Philosophes Taoïstes* (Gallimard,  
collection La Pléiade, 1980)

*à Catherine et Clara*

# TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 : CHAOS ET LASERS, CONCEPTS DE BASE ET DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX.....	9
1.1 OUTILS DE BASE DE LA THEORIE DES SYSTEMES DYNAMIQUES..	11
1.1.1 L'espace des phases.....	12
1.1.2 Attracteurs.....	15
1.1.3 Propriétés caractéristiques des attracteurs étranges.....	18
1.1.3.a Sensibilité aux conditions initiales.....	19
1.1.3.b Chaos et fractals.....	22
1.1.4 Sections de Poincaré.....	23
1.1.5 La mesure invariante naturelle.....	25
1.1.6 Reconstruction d'un attracteur étrange par la méthode des délais.....	28
1.2 LASERS ET DYNAMIQUE NON LINEAIRE.....	32
1.3 DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX.....	38
1.3.1 Le laser à modulation de pertes.....	38
1.3.1.a Dispositif.....	39
1.3.1.b Comportements.....	41
1.3.2 Le laser à absorbant saturable.....	43
1.3.2.a Dispositif.....	44
1.3.2.b Comportements.....	45

CHAPITRE 2 : CALCULS DE DIMENSIONS FRACTALES POUR LE LASER A MODULATION DE PERTES.....	53
2.1 INTRODUCTION.....	55
2.2 DIMENSIONS FRACTALES.....	57
2.2.1 Dimension de Hausdorff et capacité.....	57
2.2.2 Dimensions généralisées.....	61
2.2.2.a $D_0$ : Capacité.....	63
2.2.2.b $D_1$ : Dimension d'information.....	63
2.2.2.c $D_2$ : Dimension de corrélation.....	64
2.2.3 La dimension de Lyapunov.....	66
2.3 ALGORITHMES DE CALCUL.....	69
2.3.1 Le "comptage de boîtes".....	69
2.3.2 Méthode de corrélation spatiale : recouvrements à diamètre fixe.....	70
2.3.3 Statistiques de proches voisins : recouvrements à mesure fixe.....	72
2.4 DETERMINATION EXPERIMENTALE DE $D_2$ ET SOURCES D'ERREURS . .....	74
2.4.1 Introduction.....	74
2.4.2 Reconstruction de l'attracteur : choix du délai.....	76
2.4.3 Erreurs statistiques sur l'intégrale de corrélation.....	79
2.4.4 Estimation de $D_2$ à partir de l'intégrale de corrélation....	81
2.4.5 Effets géométriques.....	85
2.4.5.a Effets de bord.....	85

2.4.5.b Lacunarité.....	86
2.4.6 Corrélation entre voisins temporels.....	88
2.4.7 Bruit aléatoire et bruit de quantification.....	91
2.4.7.a Bruit aléatoire.....	91
2.4.7.b Bruit de quantification.....	94
2.4.8 Effet du filtrage.....	97

2.5 LE LASER A MODULATION DE PERTES : QUELLE VARIABLE UTILISER POUR RECONSTRUIRE L'ATTRACTEUR ?.....	100
---	-----

ANNEXE AU CHAPITRE 2.....	103
---------------------------	-----

CHAPITRE 3 : CHAOS HOMOCLINE DANS LE LASER CO2 A ABSORBANT SATURABLE.....	113
--	-----

3.1 INTRODUCTION.....	115
-----------------------	-----

3.2 TANGENCES HOMOCLINES ET CHAOS.....	118
--	-----

3.2.1 Ensembles hyperboliques. Variétés stable et instable.	118
---	-----

3.2.1.a Point fixe hyperbolique.....	120
--------------------------------------	-----

3.2.1.b Orbite périodique hyperbolique.....	121
---	-----

3.2.2 Tangences homoclines.....	124
---------------------------------	-----

3.2.3 Bifurcations au voisinage d'une tangence homocline....	127
--	-----

3.2.3.a Point fixe foyer-col.....	129
-----------------------------------	-----

3.2.3.b Orbite périodique de type col.....	132
--	-----

3.3	SECTIONS DE POINCARÉ. APPLICATIONS DE PREMIER RETOUR. DYNAMIQUE SYMBOLIQUE.....	136
3.4	APPLICATION AU LASER CO <sub>2</sub> A ABSORBANT SATURABLE .....	144
	ANNEXE AU CHAPITRE 3 .....	147
	CHAPITRE 4 : ANALYSE TOPOLOGIQUE DE REGIMES CHAOTIQUES DANS LE LASER A MODULATION DE PERTES.....	161
4.1	INTRODUCTION .....	163
4.2	ORBITES PERIODIQUES ET CHAOS .....	165
4.2.1	Généralités.....	165
4.2.2	Orbites périodiques en dimension trois.....	168
4.3	THEORIE DES NOEUDS. INVARIANTS DES ORBITES.....	172
4.3.1	Noeuds.....	175
4.3.1.a	Mouvements de Reidemeister.....	176
4.3.1.b	Noeuds de tore et noeuds de bretzel.....	177
4.3.2	Nombres d'enlacement.....	179
4.3.3	Polynômes de noeud.....	181
4.3.4	Tresses.....	184
4.3.5	Taux de rotation relative.....	195
4.3.6	Torsion d'une orbite.....	198
4.3.7	Un noeud de bretzel implique le chaos.....	201
4.4	LE GABARIT ("TEMPLATE") .....	203
4.4.1	Définition.....	203

4.4.2	Isotopie des orbites périodiques.....	204
4.4.3	L'exemple du fer à cheval.....	205
4.4.3.a	Construction du gabarit.....	206
4.4.3.b	Dynamique symbolique du fer à cheval.....	208
4.4.3.c	Structure des orbites périodiques.....	214
4.4.4	Autres exemples de gabarits.....	221
4.4.5	Description algébrique du gabarit.....	223
4.4.6	Détermination expérimentale du gabarit.....	224
4.4.6.a	Détection des orbites périodiques.....	225
4.4.6.b	Construction du gabarit.....	225
4.5	UN FER A CHEVAL DANS LE LASER A MODULATION DE PERTES.....	233
4.5.1	Introduction.....	233
4.5.2	Détection des orbites périodiques.....	234
4.5.3	Espace des phases. Sections de Poincaré. Applications de premier retour.....	239
4.5.4	Tresses associées aux orbites périodiques.....	247
4.5.5	Détermination du gabarit.....	251
4.5.5.a	Etirement et repliement.....	251
4.5.5.b	Calcul des invariants.....	253
4.5.6	Séquences de bifurcations.....	259
4.5.7	Des noeuds de bretzel dans le laser.....	263
4.6	ANALYSE DES CRISES DANS LE LASER A MODULATION INTERNE ..	265
4.6.1	Rappel sur les crises.....	265
4.6.2	Les crises dans le laser CO2 modulé.....	267

4.6.3	Topologie des attracteurs au-delà de la crise.....	269
4.6.3.a	Calcul des invariants.....	269
4.6.3.b	Détermination de l'itinéraire symbolique des orbites.....	278
4.6.3.c	Construction d'une partition génératrice.....	284
4.6.4	Crises et dynamique symbolique.....	292
4.7	CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	297
	CONCLUSION.....	301
	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	305

# INTRODUCTION

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Je remercie vivement M. le Professeur Bruno Macke, alors Directeur, de m'y avoir accueilli, ainsi que M. le Professeur Pierre Glorieux, qui a accepté de diriger mes recherches.

Je suis extrêmement reconnaissant à MM. Franck Laloë, Directeur de Recherches CNRS à l'E. N. S. de Paris, Alain Arnéodo, Directeur de Recherches CNRS au C. R. P. P. de Bordeaux, Ennio Arimondo, Professeur à l'Université de Pise, Pierre Glorieux, et Boris Zhilinski, Professeur à l'Université de Moscou, Professeur Invité à l'USTL, de m'avoir fait le grand honneur de bien vouloir examiner et juger ce travail.

Les travaux présentés ont bénéficié de la collaboration de Didier Dangoisse, Pierre Glorieux et Daniel Hennequin, ainsi que, en ce qui concerne le dernier chapitre, des conseils éclairés de Francesco Papoff, Ennio Arimondo et Robert Gilmore, et j'adresse donc à tous un grand merci.

Je remercie également Jean-Marc Lapauw et l'équipe d'électronique du troisième étage, ainsi que Laurent Paccou, pour leur aide efficace et leurs conseils pertinents.

Merci à tous les membres de l'équipe d'optique non linéaire et du laboratoire pour l'ambiance chaleureuse qu'ils m'ont fait partager.

Je remercie enfin ma femme Catherine, pour son soutien et sa patience, ainsi que ma petite fille Clara, pour les leçons de curiosité et de dynamisme qu'elle me donne tous les jours.

Depuis le développement et la diffusion du concept de chaos déterministe, il est devenu évident que des systèmes ne possédant que quelques degrés de liberté, et obéissant à des équations d'évolution déterministes, peuvent présenter des comportements erratiques et imprédictibles si ces équations sont non linéaires.

C'est Henri Poincaré qui le premier, il y a près d'un siècle, fit ce constat dans ses études du problème à trois corps. Il remarqua que, dans ces conditions, le calcul de l'évolution future d'un système à partir d'une condition initiale donnée n'a pas de sens, puisque cette évolution est intrinsèquement instable, et que l'existence de solutions analytiques est par là exclue. Seul le comportement global de l'ensemble des solutions peut être caractérisé, ce qui conduit à une approche géométrique des systèmes dynamiques, initiée par Poincaré.

C'est pendant les deux ou trois dernières décades que l'étude de ce problème est redevenu un objet d'intérêt, connaissant depuis une bonne dizaine d'années une véritable explosion, notamment sur le plan expérimental. Ce renouveau n'est pas étranger au développement des calculateurs digitaux, car, parallèlement aux développements fondamentaux comme ceux par exemple de Smale [1967] ou de Ruelle et Takens [1971], les illustrations numériques du phénomène de chaos déterministe données entre autres par Lorenz [1963], Hénon [1976] ou Rössler [1979], pour des systèmes extrêmement simples, ont largement contribué à renforcer l'idée qu'un comportement imprévisible n'est pas nécessairement le produit d'un processus intrinsèquement aléatoire.

L'expérimentateur confronté à des régimes dynamiques complexes sait donc aujourd'hui qu'ils ne sont pas incompatibles avec une modélisation simple du système qu'il étudie, et peut espérer trouver, dans la théorie des systèmes dynamiques et la dynamique non linéaire, les outils nécessaires à la compréhension des phénomènes observés et des lois d'évolution de son dispositif expérimental.

Par ailleurs, l'extrême généralité de ces outils lui permet de tirer des enseignements fructueux de résultats obtenus dans d'autres disciplines. L'étude des comportements chaotiques intéresse en effet aussi bien des mathématiciens, des physiciens, des chimistes et des biologistes que des économistes.

Il est ainsi frappant de constater les très grandes similitudes qui existent entre par exemple la dynamique de la réaction chimique de Belousov-Zhabotinskii et celle du laser  $\text{CO}_2$  à absorbant saturable. Plusieurs méthodes de caractérisation, appliquées de manière identique aux signaux temporels respectifs, donnent des résultats de même nature. Bien que ces deux systèmes soient très éloignés l'un de l'autre, et soient modélisés par des équations sensiblement différentes, des comportements qualitativement identiques émergent dans certaines zones de paramètres.

Beaucoup de mécanismes de transition vers le chaos ne dépendent en effet que très peu des particularités des systèmes dans lesquels ils apparaissent, comme le montre l'universalité dont font preuve les scénarios classiques que sont la cascade sous-harmonique, la route par la quasipériodicité ou les divers types d'intermittences.

C'est pourquoi il est possible de mettre au point des méthodes générales de caractérisation des régimes chaotiques, qui soient applicables à des systèmes à priori très différents, et dépendent peu du degré de connaissance du système étudié.

Dans ce travail, nous présentons les résultats que nous avons obtenus en appliquant trois méthodes de caractérisation différentes aux comportements chaotiques observés dans deux types de lasers  $\text{CO}_2$  monomodes : le laser à modulation de pertes et le laser à absorbant saturable.

Dans le premier chapitre, nous passons tout d'abord en revue les outils de base de la théorie des systèmes dynamiques. Ceux-ci permettent à l'expérimentateur d'extraire de signaux erratiques les structures sous-jacentes engendrées par des lois d'évolution déterministes. Nous rappelons ensuite brièvement la place du chaos déterministe et des instabilités dans la physique des lasers. Nous présentons enfin les dispositifs expérimentaux que nous avons utilisés lors de nos expériences.

Le deuxième chapitre est consacré à la détermination de dimensions fractales à partir de signaux expérimentaux provenant du laser à pertes modulées. Après avoir rappelé quelques définitions de dimensions fractales, et les différentes sources d'erreur pouvant intervenir dans les estimations numériques, nous évoquons le problème de l'influence sur la qualité de ces estimations du choix de la variable du système utilisée pour analyser les régimes chaotiques observés.

Les instabilités et les régimes chaotiques observés dans le laser à absorbant saturable (LSA) présentent des schémas de bifurcation caractéristiques, qui suggèrent qu'un mécanisme de tangence

homocline est à l'oeuvre dans ce laser. Dans le troisième chapitre, nous rappelons les propriétés de ce type de chaos, et la manière dont il peut être caractérisé par l'analyse de la structure d'applications de premier retour convenablement choisies. L'application de cette méthode à des signaux chaotiques provenant du LSA confirme le caractère homocline des régimes observés, ainsi que les simulations numériques effectuées sur un modèle simple de ce laser.

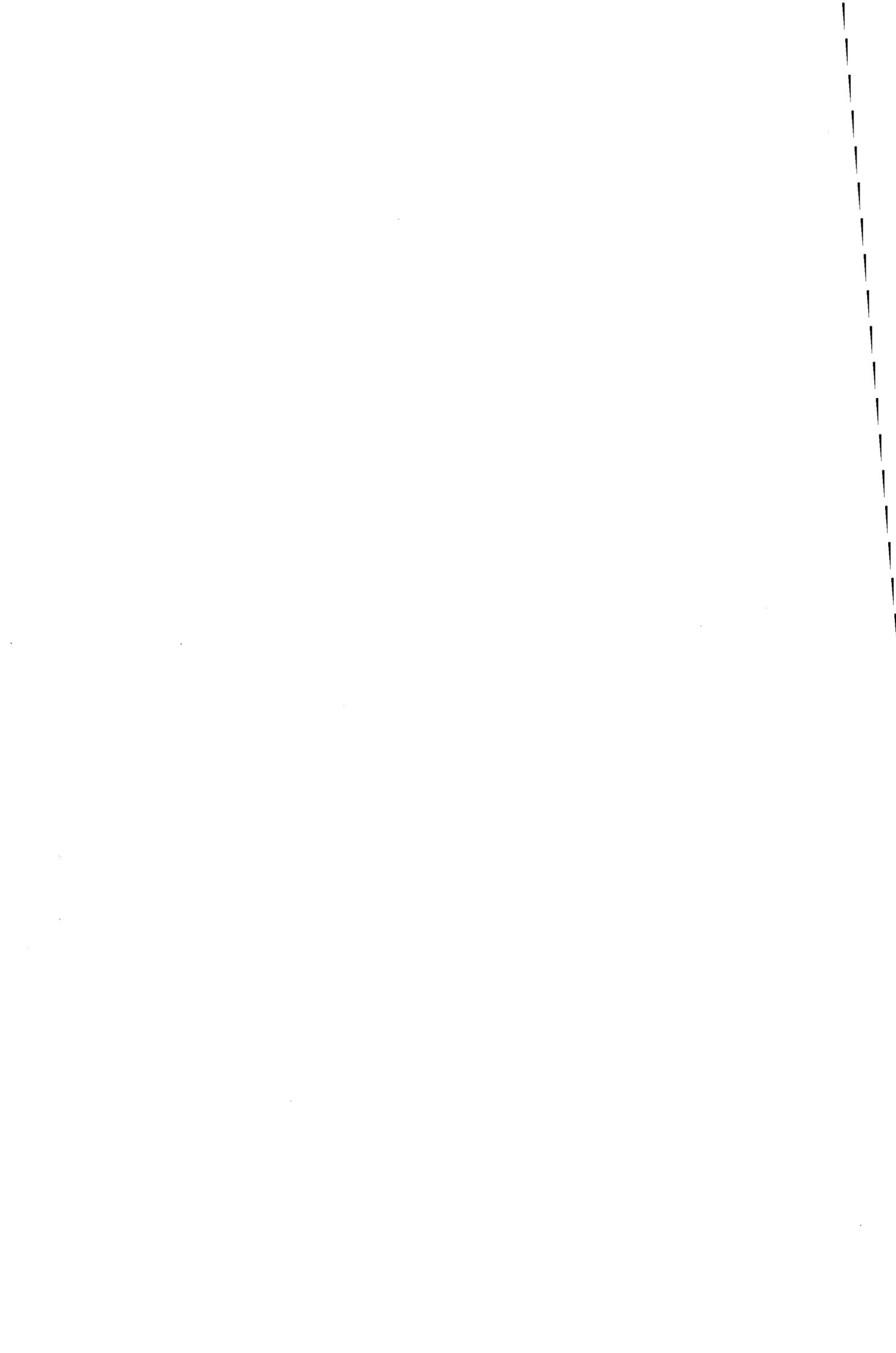
Nous présentons au quatrième chapitre une analyse topologique des régimes chaotiques observés dans le laser à modulation de pertes. De manière typique, la trajectoire représentant l'évolution d'un système chaotique passe au voisinage d'une infinité d'orbites périodiques instables. Ces orbites, qui peuvent être détectées à partir des signaux temporels, constituent des courbes fermées dont l'enchevêtrement peut être caractérisé au moyen d'outils provenant de la théorie des noeuds.

Nous rappelons tout d'abord les concepts de base de cette dernière, ainsi que la manière dont l'organisation globale des orbites périodiques peut être analysée et décrite dans les systèmes dynamiques chaotiques. Les résultats expérimentaux obtenus sont ensuite présentés.

Nous montrons d'abord, dans le cas des systèmes à modulation externe, de quelle manière les orbites sont détectées et comment la structure topologique des orbites périodiques peut être analysée simplement à partir des signaux temporels. L'organisation globale de ces orbites dans le laser à modulation de pertes indique que le chaos observé dans ce laser correspond à la formation d'un fer à ...

cheval de Smale, qui est l'un des mécanismes les plus simples de transition vers le chaos.

Nous montrons ensuite comment l'analyse topologique des orbites périodiques permet de construire un codage symbolique des trajectoires, dans les cas où d'autres méthodes ne peuvent être appliquées. Enfin, nous remarquons que l'analyse de cette dynamique symbolique permet de caractériser simplement les phénomènes de crises observés dans ce laser.



**CHAPITRE 1 : CHAOS ET LASERS,  
CONCEPTS DE BASE ET DISPOSITIFS  
EXPERIMENTAUX**



## 1.1 OUTILS DE BASE DE LA THEORIE DES SYSTEMES DYNAMIQUES

Tant que l'on a affaire à des comportements stationnaires ou périodiques, l'examen du comportement temporel d'une variable du système suffit à caractériser le régime dynamique observé, par exemple par la mesure de fréquences et d'amplitudes. Par contre, dans le cas de régimes chaotiques, ou même de régimes quasipériodiques comportant plusieurs fréquences incommensurables, les signaux temporels possèdent une structure extrêmement complexe de laquelle il est quasiment impossible d'extraire directement des informations pertinentes.

La théorie des systèmes dynamiques permet de substituer à la description temporelle une représentation géométrique des lois d'évolution, et par là de retrouver une stationnarité masquée au premier abord par des comportements apériodiques.

Cette approche fait implicitement l'hypothèse que le système que l'on étudie est descriptible par un faible nombre de variables, couplées par des équations différentielles non linéaires. Il s'agit là d'une hypothèse sans aucun doute raisonnable pour bon nombre de systèmes physiques, en particulier les lasers auxquels nous nous intéressons dans ce travail. Quoiqu'il en soit, le fait de pouvoir dégager de cette manière un ordre sous-jacent au désordre apparent des signaux temporels prouve a posteriori la validité de cette hypothèse.

Dans le reste de cette section nous rappelons donc, entre autres, les notions d'espace des phases, d'attracteur, de section de

Poincaré, dont la plupart des méthodes d'analyse de régimes chaotiques demandent la mise en oeuvre.

### 1.1.1 L'espace des phases

Supposons que l'état d'un système puisse être entièrement décrit par  $N$  variables  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , et qu'il obéisse à des lois d'évolution déterministes décrites par un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dX_i}{dt} = F_i(\mu, X_1, X_2, \dots, X_N, t), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.1a)$$

soit, en notation vectorielle,

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mu, \mathbf{X}, t) \quad (1.1b)$$

où  $\mu$  représente un ou plusieurs paramètres. Un système d'équations (1.1) est dit autonome quand les fonctions  $F_i$  ne dépendent pas explicitement du temps  $t$ . Dans ce cas, l'état du système à un instant donné, ainsi que son évolution future, sont entièrement caractérisés par un point dans un espace  $M$  dont les coordonnées sont les variables  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , et qui est appelé l'espace des phases du système. On donne ainsi une représentation géométrique de la dynamique : les équations d'évolution (1.1) déterminent la manière dont le point représentatif du système se déplace dans cet espace au cours du temps.

Plus précisément, un système d'équations (1.1) correspond à un champ de vecteurs  $\mathbf{F}(\mu, \mathbf{X})$  dans l'espace des phases, auquel les trajectoires sont en tout point tangentes. Ce champ de vecteurs induit dans l'espace des phases un flot  $\{\phi^t\}$ , qui est un groupe à un paramètre de difféomorphismes de  $M$ , tel que si  $\mathbf{X}(t)$  est une solution du système (1.1) vérifiant  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ , alors :

$$\mathbf{X}(t) = \phi^t(\mathbf{X}_0) \quad (1.2)$$

De manière évidente,  $\{\phi^t\}$  possède les propriétés suivantes :

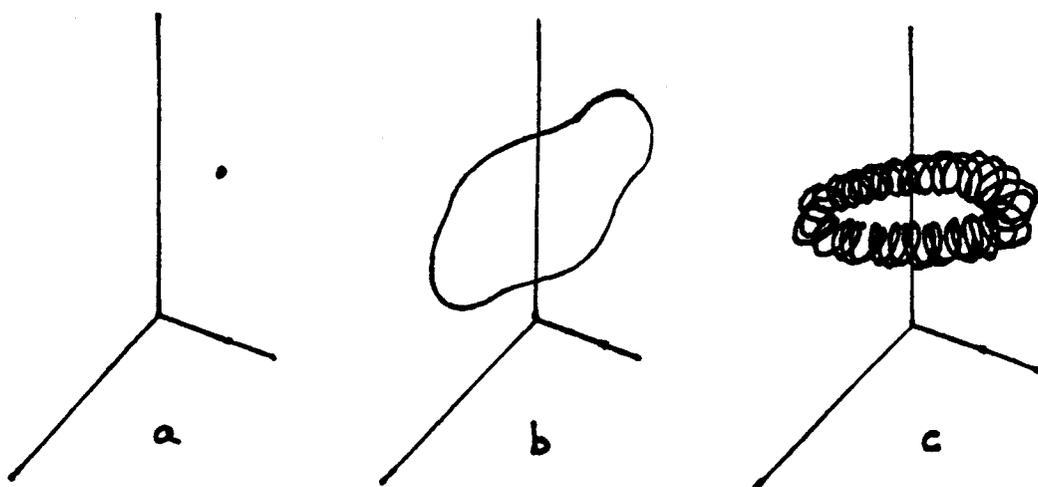
$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \phi^t(\mathbf{X}) \right|_{t=0} &= \mathbf{F}(\mu, \mathbf{X}) \\ \phi^t \circ \phi^{t'} &= \phi^{t+t'} \\ \phi^0 &= \mathbb{I} \\ (\phi^t)^{-1} &= \phi^{-t} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Si  $U$  est une région de l'espace des phases, son image sous l'action du flot est définie par  $\phi^t(U) = \{\phi^t(\mathbf{X}); \mathbf{X} \in U\}$ .

Les différents types de comportements dynamiques sont associés à des trajectoires dans l'espace des phases de nature différente. Par exemple, :

- si le régime est stationnaire, toutes les variables sont indépendantes du temps : on reste alors sur un point fixe.
- Quand le régime observé est périodique, le point représentatif décrit une courbe fermée dans l'espace des phases.
- Dans le cas d'un comportement quasipériodique faisant intervenir  $n$  fréquences incommensurables, la trajectoire du système s'inscrit sur un tore  $T^n$ .

Ces quelques cas simples sont représentés sur la figure 1.1. Chacun de ces comportements est caractérisé géométriquement par la nature de la trajectoire suivie dans l'espace des phases. Nous verrons plus loin que les régimes chaotiques dans les systèmes dissipatifs sont associés dans l'espace des phases aux objets géométriques plus compliqués que sont les attracteurs étranges.



**Fig. 1.1** Trajectoires dans l'espace des phases associées à des régimes dynamiques simples

Dans le cas où le système (1.1) dépend explicitement du temps, il est possible de le ramener à un système autonome en augmentant la dimension de l'espace des phases. Par exemple, si le système est soumis à un forçage périodique, et  $F(\mu, X, t) = G(\mu, X, \cos \omega t)$ , alors le système (1.1) est équivalent au système autonome suivant, de dimension  $N+1$  :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = G(\mu, X, \cos \phi) & i=1, \dots, N \\ \frac{d\phi}{dt} = \omega \end{cases} \quad (1.4)$$

L'espace des phases est donc dans ce cas  $\mathbf{R}^N \times S^1$ , où  $S^1$  est le cercle unité parcouru à vitesse constante par la variable  $\phi$ .

Les systèmes dynamiques définis par des équations aux différences finies présentent également beaucoup d'intérêt. Les lois d'évolution sont alors données par des équations du type :

$$X_{n+1} = F(\mu, X_n) \quad (1.5)$$

et décrivent des évolutions à temps discret  $n$ . Ce type de système s'introduit naturellement dans l'étude des flots par la méthode de la section de Poincaré, que nous présentons plus bas.

### 1.1.2 Attracteurs

Les systèmes dissipatifs constituent une classe importante de systèmes dynamiques, et décrivent physiquement les dispositifs qui ne vérifient pas de loi de conservation de l'énergie et sont le siège de phénomènes irréversibles. C'est souvent le cas quand un système est décrit en fonction de quelques variables macroscopiques qui regroupent un grand nombre de degrés de liberté microscopiques, comme en hydrodynamique, par exemple. La dissipation de l'énergie correspond alors à une diffusion à l'échelle microscopique.

Les systèmes dissipatifs sont caractérisés par une contraction des volumes dans l'espace des phases : si  $U$  est une région de l'espace des phases, de volume  $V(U)$ , et  $\phi^t(U)$  son image au bout d'un temps  $t$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\phi^t(U)) = 0$ .

Pour un champ de vecteurs, cette contraction des volumes est exprimée mathématiquement par le fait que  $\text{div } \mathbf{F} = \sum_i (\partial F_i / \partial X_i) < 0$

(en moyenne), et l'on a  $V(\phi^t(U)) \approx V(U) e^{<\text{div } \mathbf{F}>t}$ .

Cette décroissance des volumes entraîne que, contrairement aux systèmes Hamiltoniens, les systèmes dissipatifs présentent des régimes transitoires pendant lesquels le système converge de manière irréversible vers un comportement dynamique dont les propriétés sont indépendantes de la valeur précise des conditions initiales. L'évolution du système reste ensuite confinée dans une

région bien précise de l'espace des phases, qui constitue un attracteur du système. La notion d'attracteur peut être formalisée de la manière suivante :

supposons que  $U$  soit une région de l'espace des phases telle que toutes les trajectoires qui en sont originaires n'en sortent pas :

$$x \in U \Rightarrow \forall t, \phi^t(x) \in U$$

$\phi^t(U)$  va donc tendre pour  $t \rightarrow \infty$ , vers un ensemble fermé  $B = \bigcap_{t>0} \phi^t(U)$ , de volume nul dans l'espace des phases.  $B$  est un ensemble invariant :  $\phi^t(B) = B$ , attirant l'ensemble des trajectoires issues de  $U$ .

Dans certains cas,  $B$  peut être décomposé en plusieurs parties qui attirent chacune un ensemble différent de conditions initiales. La dynamique asymptotique d'une condition initiale donnée est alors confinée sur une seule de ces parties.

Pour que la définition mathématique d'un attracteur reflète fidèlement les régimes asymptotiques observés en pratique, on demande en général qu'un attracteur  $A$  vérifie les conditions suivantes [Eckmann 81, 85] :

(i)  $A$  est invariant sous l'action du flot  $\phi^t$  :  $\phi^t(A) = A$ .

(ii)  $A$  attire toutes les trajectoires originaires d'un voisinage de  $A$  : il existe un voisinage  $U$  de  $A$  tel que  $\phi^t(U) \subset U$ , et  $A = \bigcap_{t>0} \phi^t(U)$

(iii) le flot  $\phi^t$  est récurrent sur  $A$  : quelque soit un ouvert  $U$  tel que  $A \cap U \neq \emptyset$ , si  $X \in A \cap U$ , alors il existe des valeurs de  $t$  arbitrairement grandes pour lesquelles  $\phi^t(X) \in A \cap U$ .

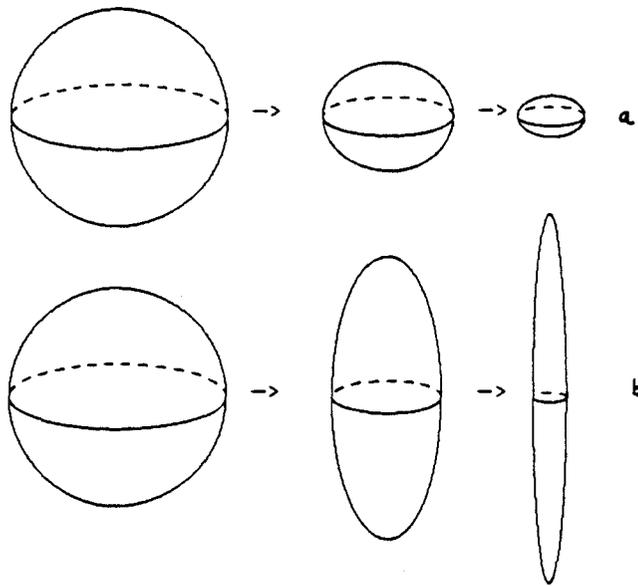
(iv)  $A$  ne peut être décomposé en deux sous-ensembles non triviaux, qui soient séparément invariants. Pour que  $A$  soit indécomposable, il suffit qu'il existe une trajectoire  $\phi^t(X)$  qui passe arbitrairement près de chaque point de  $A$ , c'est-à-dire qui soit dense dans  $A$ .

L'ensemble des points de l'espace des phases dont l'image tend vers un attracteur  $A$  est appelé le bassin d'attraction de  $A$ . Plusieurs attracteurs, entourés de leurs bassins d'attraction respectifs, peuvent coexister dans le même espace des phases. On observe dans ce cas de la multistabilité : selon les conditions initiales, le système converge vers l'un ou l'autre des attracteurs.

Si les trajectoires ne divergent pas à l'infini, l'existence d'au moins un attracteur est donc assurée par la contraction des volumes dans l'espace des phases. Un point fixe stable, une orbite périodique stable (un cycle limite), un tore limite constituent les exemples les plus simples d'attracteurs.

La contraction des volumes n'implique cependant pas une contraction selon toutes les directions de l'espace des phases : il se peut que certaines directions soient dilatées, tandis que d'autres sont contractées (fig. 1.2). Les trajectoires de points proches divergent alors selon la direction dilatante, ce qui a pour conséquence que toutes les trajectoires sur l'attracteur sont instables.

On observe dans ce cas des attracteurs plus compliqués, sur lesquels la dynamique est chaotique, baptisés pour leurs propriétés remarquables attracteurs étranges. La figure 4.40 donne un exemple d'attracteur étrange observé dans le laser  $\text{CO}_2$  à pertes modulées.



**Fig. 1.2** La contraction des volumes dans l'espace des phases peut s'effectuer, soit (a) par une contraction dans toutes les directions, soit (b) par une contraction selon certaines directions et une dilatation selon d'autres.

### 1.1.3 Propriétés caractéristiques des attracteurs étranges

Déjà les outils classiques que sont l'analyse de Fourier ou la fonction d'autocorrélation indiquent un comportement complexe quand ils sont appliqués à des signaux chaotiques. On observe un spectre de Fourier continu, d'où émergent éventuellement quelques pics, et une fonction d'autocorrélation qui décroît rapidement vers zéro.

Ceci permet par exemple de distinguer un comportement chaotique d'un comportement quasipériodique simple, qui est lui caractérisé par un spectre de raies. Cependant, le spectre de Fourier

ne permet pas de différencier le signal chaotique produit par un système déterministe d'un signal stochastique.

Les spécificités des régimes chaotiques ne peuvent en fait être appréciées que dans l'espace des phases : c'est ainsi que l'on peut mettre en évidence leur caractère déterministe. Deux propriétés remarquables des attracteurs étranges constituent une signature de la présence de chaos déterministe : la sensibilité aux conditions initiales de leurs trajectoires, et leur nature fractale.

### 1.1.3.a Sensibilité aux conditions initiales

Un attracteur étrange est caractérisé par le fait que toutes les trajectoires qu'il contient sont instables. En chaque point, il existe au moins une direction selon laquelle l'action du flot "étire" l'espace des phases, ce qui entraîne que les orbites de deux points voisins divergent rapidement l'une de l'autre.

Cet effet est spectaculaire : l'écart entre deux points, initialement égal à  $\delta x_0$  pour  $t=0$ , croît en moyenne comme  $\delta x(t) = \delta x_0 e^{\lambda t}$ . L'exposant  $\lambda$  donne une mesure du taux de divergence de trajectoires voisines et est le plus grand des exposants de Lyapunov. Cette divergence exponentielle doit évidemment s'entendre pour des points infiniment proches, puisque l'écart entre deux points est limité par le diamètre de l'attracteur.

Les trajectoires issues de deux conditions initiales arbitrairement proches suivent donc, après un intervalle de temps relativement court, des chemins différents sur l'attracteur et sont totalement décorréelées. La moindre perturbation d'un système chaotique modifie donc complètement le détail de son histoire future.

Cette sensibilité aux conditions initiales (SCI) implique que l'évolution d'un système chaotique est fondamentalement imprévisible. La moindre incertitude sur sa position dans l'espace des phases interdit de prévoir son évolution future au delà d'un certain temps au bout duquel le système peut se trouver n'importe où sur l'attracteur. Il faut cependant noter que cette imprédictibilité est limitée au mouvement sur l'attracteur, puisqu'il est par contre certain que les autres régions de l'espace ne sont pas concernées par la dynamique asymptotique.

De manière paradoxale, la SCI correspond à un flux continu d'information. Considérons par exemple un ensemble de trajectoires dont les points de départ sont indiscernables à la précision dont on dispose. En mesurant au bout d'un temps  $t$  la distribution des distances, amplifiées exponentiellement, entre points représentatifs, il est possible de remonter à celle des distances entre les conditions initiales. Cet effet de microscope est particulièrement intéressant quand, par exemple, on désire estimer la dimension fractale d'un attracteur étrange reconstruit par la méthode des délais que nous présentons plus bas.

Les exposants de Lyapunov donnent une mesure quantitative du degré d'instabilité d'un système, l'exposant  $\lambda$  mentionné plus haut étant le plus grand d'entre eux. Si on considère dans l'espace des phases une sphère de rayon infinitésimal  $\delta x_0$  centrée en  $t=0$  au point  $X$ , son image par le flot au bout d'un temps  $t$  est en moyenne un ellipsoïde dont les axes principaux sont égaux à  $\delta x_0 \exp(\lambda_1 t)$ ,  $\delta x_0 \exp(\lambda_2 t)$ , ...,  $\delta x_0 \exp(\lambda_N t)$ , où  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  sont les exposants de Lyapunov. Remarquons que dans le cas d'un système dissipatif, on a nécessairement  $\sum_i \lambda_i < 0$ , car le volume  $N$ -dimensionnel de cet

ellipsoïde est proportionnel à  $\exp((\sum_i \lambda_i)t)$  et doit tendre vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ .

On peut définir les exposants de Lyapunov pour un flot  $\phi^t$  de la façon suivante.

Considérons une orbite  $X(t)$  et une perturbation infinitésimale  $X(t) + \delta X(t)$  de cette orbite. Si on suppose que la dynamique est décrite par un système d'équations différentielles (1.1), l'évolution de la perturbation  $\delta X(t)$  sera gouvernée par les équations linéarisées autour de l'orbite  $X(t)$  :

$$\frac{d}{dt} \delta X = [L(t)] \delta X, \quad (1.6)$$

où  $L(t)$  est la matrice  $N \times N$  dont les éléments sont donnés par :

$$L_{ij}(t) = \left. \frac{\partial F_i(\mu, X)}{\partial X_j} \right|_{X(t)} \quad (1.7)$$

Si la solution de cette équation est donnée par :

$$\delta X(t) = [T_{X(0)}^t] \delta X(0), \quad (1.8)$$

il a été prouvé par Oseledec [1968] que la limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \log (T_{X(0)}^{t*} T_{X(0)}^t) = \Lambda_{X(0)} \quad (1.9)$$

existe et que ses valeurs propres sont indépendantes de  $X(0)$ , pour presque toute condition initiale  $X(0)$ . Les exposants de Lyapunov sont ces  $N$  valeurs propres classées généralement par ordre décroissant :  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$ .

On observe la sensibilité aux conditions initiales dès que  $\lambda_1 > 0$ , et chaque exposant positif correspond à une direction asymptotiquement instable sur l'attracteur. De plus, si l'attracteur n'est pas un point fixe stable, au moins un exposant de Lyapunov

est nul [Haken 83], puisque deux points sur une même trajectoire restent toujours à distance finie l'un de l'autre.

En se plaçant par exemple en dimension quatre, les différents types d'attracteurs ont donc des exposants de Lyapunov dont les signes sont les suivants :

- point fixe stable :  $(-, -, -, -)$ .
- cycle limite :  $(0, -, -, -)$ .
- tore limite :  $(0, 0, -, -)$  ou  $(0, 0, 0, -)$ .
- attracteur étrange :  $(+, 0, -, -)$  ou  $(+, +, 0, -)$ .

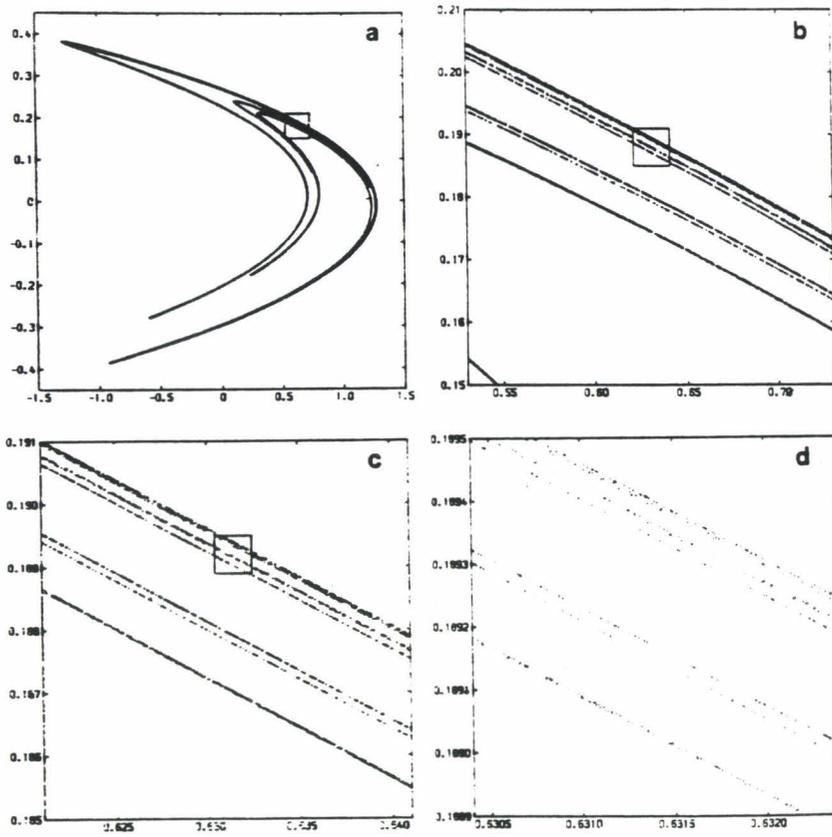
Des algorithmes numériques pour calculer les exposants de Lyapunov ont été élaborés, aussi bien pour des modèles théoriques [Bennettin 78] que pour des signaux expérimentaux [Wolf 85, Sano 85, Eckmann 86]

### 1.1.3.b Chaos et fractals

Pour que les trajectoires demeurent dans une région bornée de l'espace des phases, la divergence incessante des orbites doit être compensée par un effet de repliement ramenant des régions distinctes de l'espace des phases l'une sur l'autre. L'effet conjoint de l'étirement et du repliement donne à un attracteur étrange un aspect "feuilleté" caractéristique.

De fait, en examinant attentivement un attracteur étrange, on s'aperçoit que son aspect qualitatif se répète de manière identique à des échelles de plus en plus petites (fig. 1.3). Cette invariance d'échelle est typique d'un objet fractal, et est caractérisée par une dimension non entière. Remarquons d'ailleurs que pour un système dissipatif chaotique en dimension trois, la divergence des trajectoires impose une dimension strictement supérieure à deux,

tandis que la dissipation implique que la dimension soit strictement inférieure à trois.



**Fig 1.3** Illustration de l'invariance d'échelle dans le cas du modèle de Hénon. Chaque figure est l'agrandissement du carré situé dans la figure précédente (d'après Hénon [1976])

Différentes définitions de la dimension fractale seront rappelées au chapitre 2, ainsi que les méthodes permettant leur mesure à partir de données expérimentales.

#### 1.1.4 Sections de Poincaré

La méthode de la section de Poincaré permet de simplifier l'étude d'un flot, tout en préservant les informations essentielles.

Pour cela, on choisit une hypersurface  $\Sigma$  de l'espace des phases, par exemple un hyperplan, et on considère les intersections avec  $\Sigma$  des trajectoires arrivant d'un côté fixé de  $\Sigma$  (fig. 1.4).

L'action du flot définit une application  $F: \Sigma \rightarrow \Sigma$ , l'image d'un point  $X$  de  $\Sigma$  étant  $\phi^t(X)$ , le premier point où son orbite  $\phi^t(X)$  traverse  $\Sigma$  dans le sens choisi. L'application de Poincaré ainsi définie est inversible et présente les mêmes propriétés de différentiabilité que le champ de vecteurs, à condition toutefois que celui-ci ne soit en aucun point tangent à  $\Sigma$ . On peut par ailleurs également définir l'application qui associe à  $X$  le temps de retour  $\tau$  dans  $\Sigma$ .

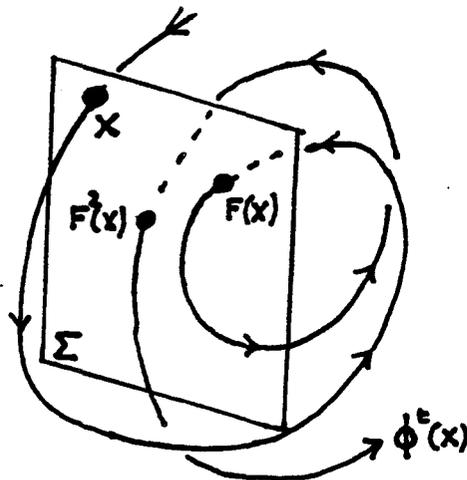


Fig. 1.4 Principe de la section de Poincaré.

On obtient de cette manière une coupe de l'attracteur : en passant de l'étude d'un flot dans  $\mathbb{R}^n$  à celle d'une application de  $\mathbb{R}^{n-1}$  dans  $\mathbb{R}^{n-1}$ , on réduit d'une unité la dimension des phases. Les propriétés essentielles du flot se retrouvent néanmoins dans l'application de Poincaré, comme par exemple la sensibilité aux

conditions initiales, ou l'invariance d'échelle. La dimension fractale de l'attracteur de l'application de Poincaré est ainsi égale à celle de l'attracteur du flot, diminuée d'une unité.

Les sections de Poincaré de régimes périodiques ou quasipériodiques à deux fréquences consistent respectivement en un ensemble de points isolés et une courbe fermée.

C'est dans le cas des systèmes forcés périodiquement que la section de Poincaré peut être effectuée le plus simplement. En effet l'espace des phases est dans ce cas  $\mathbb{R}^n \times S^1$ , le cercle unité  $S^1$  étant parcouru par la phase de la modulation. Choisir un plan de section de phase constante revient alors à faire une stroboscopie du système à la fréquence de modulation, ce qui est aisément réalisable, tant numériquement qu'expérimentalement. La transversalité des trajectoires par rapport au plan de section est assurée par construction.

Dans certain cas où la section de Poincaré est très proche d'une courbe unidimensionnelle (l'attracteur a une dimension fractale très légèrement supérieure à 2), on peut poursuivre la simplification en modélisant grossièrement l'application de Poincaré par une application d'un intervalle dans lui-même. Des exemples de cette méthode seront présentés au chapitre 3.

### 1.1.5 La mesure invariante naturelle

Nous avons vu qu'un attracteur occupait un volume nul dans l'espace des phases. La caractérisation quantitative de la dynamique sur un attracteur, par exemple par la détermination de dimensions fractales ou d'exposants de Lyapunov, exige donc de définir une nouvelle mesure qui soit concentrée sur les points de

l'attracteur, et permette d'affecter un poids à chaque partie de l'attracteur.

Une telle mesure  $\mu$  ne doit évidemment pas dépendre du temps et doit donc être laissée invariante par le flot :

$$\mu(U) = \mu(\phi^{-t}(U)), \quad t > 0 \quad (1.10)$$

où  $U$  est une région quelconque de l'espace des phases. Cette condition est cependant vérifiée en général par une infinité de mesures différentes. Par exemple, si un attracteur étrange contient un point fixe  $X_0$  instable, la mesure donnée par  $\mu(X) = \delta(X - X_0)$  est une mesure invariante. Elle ne caractérise cependant pas la dynamique asymptotique du système.

La mesure invariante naturelle est définie comme la seule mesure qui vérifie la condition suivante d'ergodicité, pour toute fonction  $f$  continue sur l'espace des phases, et pour presque toute condition initiale dans le bassin d'attraction d'un attracteur  $A$  :

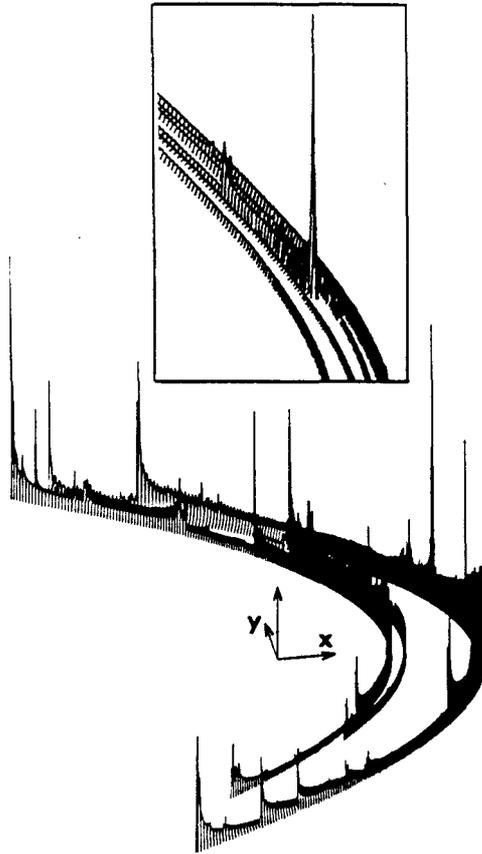
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi^t(X)) dt = \int_A f(X) \mu(X) dX \quad (1.11)$$

La mesure invariante naturelle apporte donc une information statistique permettant de caractériser de manière statistique la dynamique sur l'attracteur, par la mesure de dimensions fractales ou d'entropies. Une conséquence immédiate de la relation (1.11) est que si  $U$  est une région quelconque de l'espace des phases, sa mesure  $\mu(U)$  peut être définie par :

$$\mu(U) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I_U(\phi^t(X)) dt, \quad (1.12)$$

où  $X_0$  est une condition initiale typique et  $I_U(X)$  est la fonction caractéristique de  $U$  ( $I_U(X) = 1$  si  $X \in U$ , et 0 sinon). On voit que

$\mu(U)$  est donnée par la fraction de temps que le système passe dans la région  $U$ . En pratique, si l'on dispose de  $N$  points pris au hasard sur l'attracteur, dont  $n(U)$  appartiennent à  $U$ , on peut considérer qu'ils sont répartis selon la mesure invariante naturelle, et  $\mu(U)$  est donnée de manière approchée par  $n(U)/N$ .



**Fig. 1.5** Mesure naturelle invariante de l'attracteur de Hénon [1976], estimée sur la base de  $10^8$  itérations (d'après Arnéodo et al. [1987]).

La figure 1.5 montre une approximation de la mesure invariante naturelle de l'attracteur de Hénon [1976].

### 1.1.6 Reconstruction d'un attracteur étrange par la méthode des délais

Lorsque l'on étudie expérimentalement un dispositif évoluant de manière erratique en fonction du temps, il n'est pas toujours possible de mesurer toutes les variables pertinentes. Dans le cas des lasers, si l'intensité du rayonnement émis est facilement accessible, on ne dispose pas en général des inversions de population et des polarisations atomiques ou moléculaires.

C'est pourquoi, dans une grande majorité des cas, le résultat brut de l'expérience est une série temporelle qui contient les mesures d'une variable unique du système, effectuées à intervalles de temps réguliers. A partir de cette série temporelle, il faut donc être en mesure de récupérer toute l'information sur la dynamique globale du système dans l'espace des phases.

Il se trouve que chacune des variables participant à la dynamique contient cette information. En effet, si la dynamique peut être décrite par des équations différentielles, l'évolution temporelle d'une variable donnée dépend des valeurs prises par les autres variables, et la série temporelle d'une variable reflète l'évolution conjointe de toutes les variables. Par exemple, si une variable présente un comportement périodique, il en est nécessairement de même pour les variables non mesurées, de par le théorème d'unicité des solutions d'équations différentielles.

A partir de l'évolution temporelle d'une seule variable  $y(t)$ , il faut donc être en mesure de construire une série de fonctions indépendantes, qui puissent être considérées comme les coordonnées du point représentatif du système dans un espace des phases. Deux méthodes ont été proposées par Packard et al. [1980]

pour reconstruire un espace des phases, et dont la justification mathématique a été donnée par Takens [1981]. Dans chaque méthode, l'état du système à l'instant  $t$  est représenté par un point dans un espace des phases  $\mathbb{R}^m$  dont les coordonnées sont, soit les dérivées successives de  $y(t)$  :

$$\mathbf{Y} = \left( y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dt^{m-1}} \right), \quad (1.12)$$

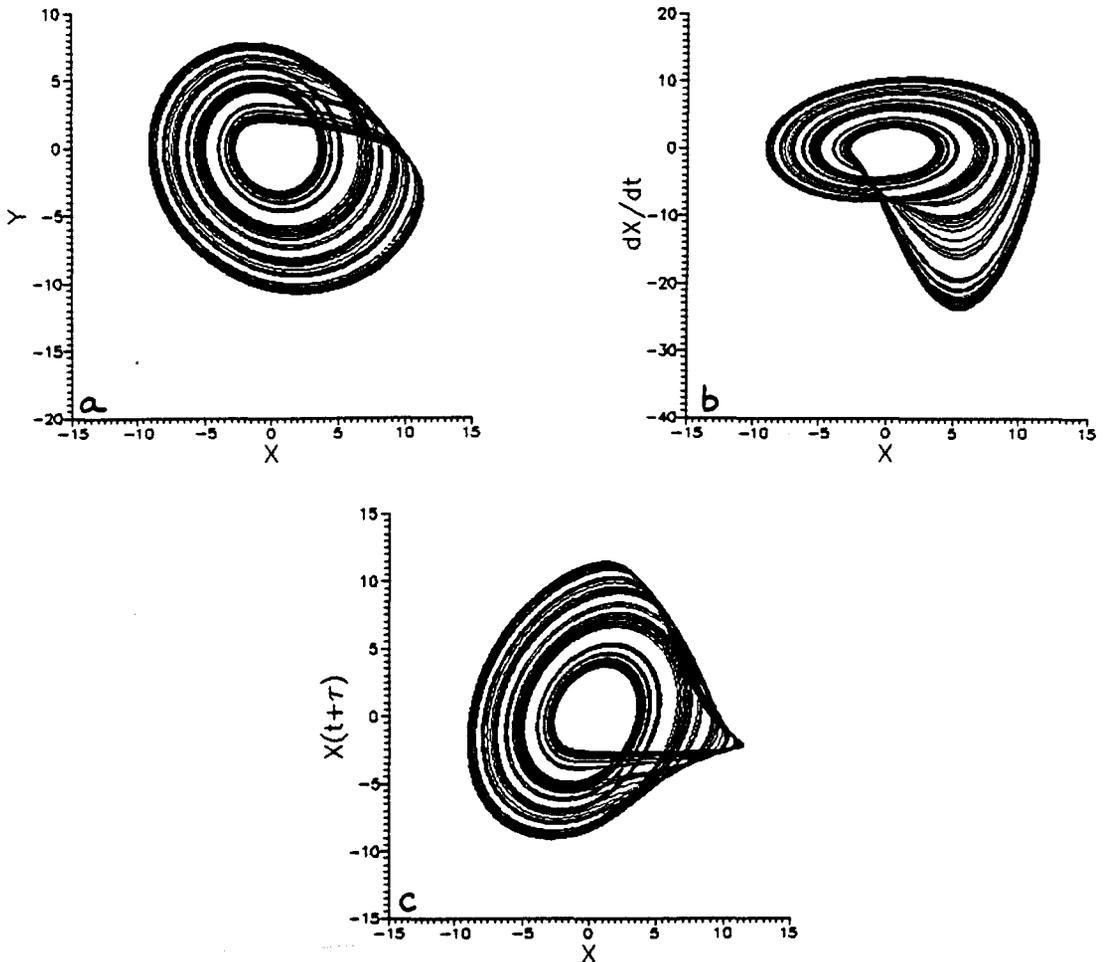
soit les valeurs de la variable  $y(t)$  prises à des instants régulièrement espacés d'un délai temporel  $\tau$  :

$$\mathbf{Y} = (y(t), y(t+\tau), y(t+2\tau), \dots, y(t+(m-1)\tau)) \quad (1.13)$$

On trouvera dans la figure 1.6 un exemple d'attracteur chaotique reconstruit à l'aide de ces deux méthodes.

Le passage des variables naturelles du système à ces nouvelles variables revient en principe à faire un changement de coordonnées. Par exemple, pour certains systèmes simples comme le modèle de Rössler, le passage des coordonnées naturelles à des coordonnées de type (1.12) peut être déterminé analytiquement. Cela implique que toutes les grandeurs laissées invariantes par un changement de coordonnées, dimensions fractales, exposants de Lyapunov, etc..., peuvent être mesurées à partir de l'attracteur reconstruit.

Plus précisément, Takens a montré que ces applications de  $M$ , l'espace des phases naturel du système, vers  $\mathbb{R}^m$  constituaient des plongements, c'est-à-dire des difféomorphismes de  $M$  dans une sous-variété de  $\mathbb{R}^m$  (un difféomorphisme est une application différentiable admettant une application réciproque elle aussi différentiable).



**Fig. 1.6** Exemple de reconstruction d'un attracteur chaotique rencontré dans un modèle de Rössler [1979]. Portraits de phases utilisant (a) deux variables naturelles, (b) une variable et de sa dérivée, (c) les valeurs d'une seule variable aux instants  $t$  et  $t+\tau$ .

La dimension  $m$  de l'espace des phases reconstruit, appelée dimension de plongement, doit évidemment être au moins supérieure à la dimension  $D$  de l'attracteur dans l'espace des phases naturel du système. Il se peut cependant dans certains cas que ces changements de variables introduisent des singularités, qui se manifestent par des intersections de trajectoires dans l'espace des

phases reconstruit, et dont l'élimination exige d'augmenter la dimension de plongement  $m$ . On peut montrer que l'absence de singularités est assurée si  $m \geq 2D+1$ , car, de manière générique, les trajectoires sur l'attracteur reconstruit ne présentent alors pas d'intersections transverses.

En pratique la méthode des délais (1.13) est beaucoup plus utilisée que celle utilisant les dérivées successives. En effet, l'opération de dérivation augmente de manière significative le rapport signal sur bruit, qu'elle soit effectuée numériquement ou analogiquement, et la qualité du signal est très vite dégradée. De plus la méthode des délais présente l'avantage de tirer parti de la sensibilité aux conditions initiales et permet, par exemple dans un calcul de dimension fractale, d'extraire des informations qui seraient localisées à des échelles très petites dans l'espace des phases naturel du système.

Elle présente cependant l'inconvénient de dépendre d'un paramètre, qui est le délai temporel  $\tau$ . Dans le cas d'une série temporelle de longueur infinie, et mesurée avec une précision infinie, il est démontré que presque toutes les valeurs de  $\tau$  donnent un résultat correct. En pratique, on travaille à partir de séries temporelles de taille finie et plus ou moins entachées de bruit. On s'aperçoit alors très vite que les caractérisations quantitatives des attracteurs étranges reconstruits peuvent dépendre de manière critique du délai.

Le problème du choix d'une valeur raisonnable de  $\tau$  sera abordée plus en détail au chapitre 2, à propos de la détermination de dimensions fractales.

## 1.2 LASERS ET DYNAMIQUE NON LINEAIRE

Les lasers constituent un outil de choix pour l'étude de la dynamique non linéaire. En effet, les échelles de temps caractéristiques, comprises selon les dispositifs entre quelques millisecondes et quelques fractions de microseconde, autorisent une exploration rapide des différents comportements d'un système expérimental. Le régime transitoire précédant l'établissement de la dynamique asymptotique est d'une durée négligeable à l'échelle humaine, et l'acquisition de longues séries temporelles peut se faire en des temps extrêmement courts, ce qui permet d'assurer une bonne stabilité des conditions expérimentales.

Par ailleurs, les rapports signal sur bruit élevés qui peuvent être atteints permettent de disposer de systèmes très peu perturbés et autorisent des mesures d'une grande précision, souvent limitée uniquement par la résolution des dispositifs d'enregistrement.

Enfin, le fonctionnement des lasers peut être facilement modélisé à partir des principes de base de l'électromagnétisme et de la mécanique quantique.

Bien que les modèles les plus simples soient obtenus au moyen de plusieurs approximations, ils reproduisent néanmoins dans un grand nombre de cas l'essentiel des comportements observés. Au besoin, certaines de ces approximations peuvent être abandonnées pour améliorer l'accord entre les prévisions théoriques et les observations expérimentales. L'étude des instabilités et du chaos dans les lasers a ainsi bénéficié d'une interaction étroite entre expérience et théorie et a donné des informations pertinentes sur la

modélisation de certains types de lasers : un laser chaotique est en quelque sorte plus "bavard" qu'un laser en régime stationnaire.

Si l'étude du chaos déterministe dans les lasers ne s'est réellement développée que depuis une bonne dizaine d'années, les premières observations datent des tous débuts, puisque les premiers lasers à rubis construits vers 1960 présentaient déjà des oscillations de relaxation irrégulières. Par ailleurs, la découverte, aux cours de simulations numériques d'un modèle semi-classique du laser, de comportements aléatoires que nous appellerions aujourd'hui chaotiques, remonte à 1964 [Grasyuk 64, Buley 64], mais ne reçut alors qu'une attention limitée, les paramètres ne correspondant pas aux dispositifs alors opérationnels.

Il est remarquable que cette première incursion dans le domaine du chaos déterministe soit contemporaine du célèbre article dans lequel Lorenz [1963] montra qu'un système d'équations différentielles, obtenu à partir d'une troncature des équations de Navier-Stokes, présentait des comportements instables et imprévisibles. Cette coïncidence est d'autant plus frappante que Haken devait établir quelques années plus tard [Haken 75] que le modèle semi-classique du laser est équivalent au modèle de Lorenz. Il faut cependant noter que les seuils d'apparitions d'instabilités et de chaos prévus par le modèle de Lorenz-Haken correspondaient à des paramètres largement supérieurs à ceux réalisables alors en pratique, et ce n'est que relativement récemment qu'on a pu observer expérimentalement dans des lasers infrarouge lointain des régimes périodiques et chaotiques compatibles avec ce modèle [Weiss 86].

Le modèle semi-classique du laser est obtenu en considérant l'interaction dans la cavité laser d'un champ électromagnétique classique, décrit par les équations de Maxwell, et d'un milieu matériel décrit de manière quantique [Sargent 79, Narducci 88, ...]. Il est basé essentiellement sur les hypothèses suivantes :

- le champ électromagnétique est en interaction dipolaire électrique avec deux niveaux quantiques dont la fréquence de Bohr est proche de celle du champ.
- l'amplitude du champ électromagnétique est lentement variable,
- le champ est uniforme dans la cavité, et sa structure transverse est donnée par une onde plane,
- les atomes sont indiscernables (l'élargissement du profil de gain est homogène),

Partant des équations de Maxwell et de Schrödinger, et sous ces hypothèses, la dynamique du laser est alors modélisée par trois équations différentielles ordinaires, qui peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = -\kappa [(1+i\delta) E + AP] & (1.14a) \\ \frac{dP}{dt} = -\gamma_{\perp} [(1+i\Delta) P + ED] & (1.14b) \\ \frac{dD}{dt} = -\gamma_{\parallel} [(D-1) - \frac{1}{2} (P^*E + PE^*)] & (1.14c) \end{cases}$$

où  $E$  est l'amplitude lentement variable du champ électromagnétique,  $D$  l'inversion de population entre les deux niveaux de la transition, et  $P$  la polarisation macroscopique du milieu.  $\kappa$ ,  $\gamma_{\parallel}$ ,  $\gamma_{\perp}$  sont les taux de relaxation de ces trois variables,  $A$

est le paramètre de pompe,  $\delta = \frac{1}{\kappa}(\omega_c - \omega_L)$ , et  $\Delta = \frac{1}{\gamma_{\perp}}(\omega_L - \omega_a)$ , où  $\omega_c$ ,  $\omega_L$ ,  $\omega_a$  sont respectivement les fréquences du mode de la cavité sélectionné, du rayonnement laser et de la transition quantique.

Ces équations forment la base de la description du couplage cohérent entre le rayonnement laser et le milieu actif dans la cavité. Il convient de remarquer qu'il s'agit là d'équations à variables complexes, qui ne deviennent réellement équivalentes au modèle de Lorenz que lorsque la fréquence de la transition coïncide avec celle d'un mode de la cavité ( $\delta = \Delta = 0$ ).

Dans certains cas, ces équations doivent être complétées, pour tenir compte par exemple d'un élargissement inhomogène de la transition laser, ou d'un fonctionnement multimode. Inversement, lorsque les échelles de temps caractéristiques de ces équations sont très différentes l'une de l'autre, ces équations peuvent être simplifiées.

En effet, trois paramètres gouvernent de manière cruciale les comportements dynamiques. Le premier est  $\kappa$ , qui caractérise le coefficient de pertes de la cavité, et donc le temps de vie des photons. Les deux autres sont  $\gamma_{\parallel}$  et  $\gamma_{\perp}$ , qui sont respectivement les taux de relaxation de l'inversion de population et de la polarisation. Ces trois paramètres peuvent varier de plusieurs ordres de grandeur d'un type de laser à l'autre.

Or, lorsqu'une variable évolue sur une échelle de temps beaucoup plus rapide que les autres variables, elle réagit de manière quasi-instantanée aux variations des autres variables. Il est alors possible de procéder à son élimination adiabatique : elle devient une fonction implicite des autres variables [Lugiato 84, Haken 85].

Ceci permet de classer les différents types de lasers dans trois classes distinctes [Tredicce 85, Abraham 88].

- classe A :  $\kappa$  est beaucoup plus petit que  $\gamma_{\parallel}$  et  $\gamma_{\perp}$ . On peut alors éliminer adiabatiquement les variables décrivant le milieu actif. Il ne reste qu'une seule équation décrivant l'évolution du champ. Les lasers à colorant sont des exemples typiques de lasers de classe A.

- classe B : ici,  $\gamma_{\perp}$  est beaucoup plus grand que  $\kappa$  et  $\gamma_{\parallel}$ . Après élimination adiabatique de la polarisation, deux équations subsistent pour le champ et l'inversion de population, dans lesquelles le champ n'intervient que par son intensité. Ces deux équations peuvent par ailleurs être obtenues à partir d'équations de bilan et d'un modèle énergétique du laser. Ces équations prédisent un régime stationnaire toujours stable au-dessus du seuil d'émission laser. On peut citer comme exemples les lasers à rubis, Nd:YAG, CO<sub>2</sub>, etc...

- classe C : les trois échelles de temps sont égales, et le système complet d'équations (1.14) doit être considéré. Cette classe compte par exemple les lasers infrarouge lointain, Ar<sup>+</sup>, He-Ne, ....

Il faut cependant noter que cette classification ne prend tout son sens que dans le cas d'un élargissement homogène. En effet, en élargissement inhomogène, les différentes classes d'atomes interagissent de manière différente avec le champ, et le nombre effectif de degrés de liberté peut être supérieur à ce qui est indiqué ci-dessus.

Pour enrichir la dynamique, notamment pour déstabiliser les lasers de classe B, il faut augmenter le nombre de degrés de liberté. Pour cela, on peut, par exemple :

- rendre le système non autonome en modulant un paramètre, par exemple les pertes de la cavité, ou le paramètre de pompe
- placer un absorbant saturable dans la cavité.
- injecter dans la cavité un champ extérieur provenant d'un autre laser.
- augmenter le nombre de modes du champ électromagnétique interagissant avec le milieu actif.

Dans nos expériences, nous avons utilisé des lasers CO<sub>2</sub>, qui appartiennent à la classe B décrite ci dessus, et ne présentent donc pas d'instabilités en fonctionnement monomode.

### 1.3 DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX

Deux types de lasers  $\text{CO}_2$  ont été utilisés dans nos expériences : un laser à absorbant saturable intracavité et un laser guide d'onde à modulation de pertes. Les lasers  $\text{CO}_2$  sont, comme nous l'avons vu plus haut, des lasers de classe B, et à ce titre possèdent en fonctionnement monomode essentiellement deux degrés de liberté : l'intensité du champ et l'inversion de population.

Or, trois degrés de liberté au moins sont nécessaires pour que des régimes chaotiques puissent être observés. L'absorbant saturable dans un cas, la modulation de pertes dans l'autre, apportent les degrés de liberté manquants et sont à l'origine des comportements chaotiques rencontrés dans ces deux types de lasers.

#### 1.3.1 Le laser à modulation de pertes

Le laser à pertes modulées présente un grand intérêt dans le domaine des télécommunications, pour la transmission de signaux par voie optique. La modulation intracavité permet d'obtenir des taux importants de modulation du rayonnement émis, grâce à la forte non linéarité du mécanisme d'émission laser. Cependant, cette non linéarité entraîne l'apparition de régimes chaotiques, qui limitent évidemment la plage des modulations utilisables pour transmettre de l'information.

Le laser  $\text{CO}_2$  à pertes modulées présente donc un double intérêt. D'une part, une bonne connaissance de son comportement en fonction des paramètres de contrôle peut permettre, dans le cas d'applications pratiques, d'éviter les plages chaotiques. D'autre part, le très bas niveau de bruit rencontré dans ce dispositif, sa

modélisation facile et les fréquences élevées de modulation utilisées en font un système modèle pour l'étude et la caractérisation des phénomènes chaotiques

### 1.3.1.a Dispositif

Le laser utilisé est un petit laser guide d'onde pompé par radio-fréquences, et dans la cavité duquel ont été insérés un modulateur électrooptique et une lame de Brewster. La figure 1.7 indique de manière schématique le dispositif expérimental.

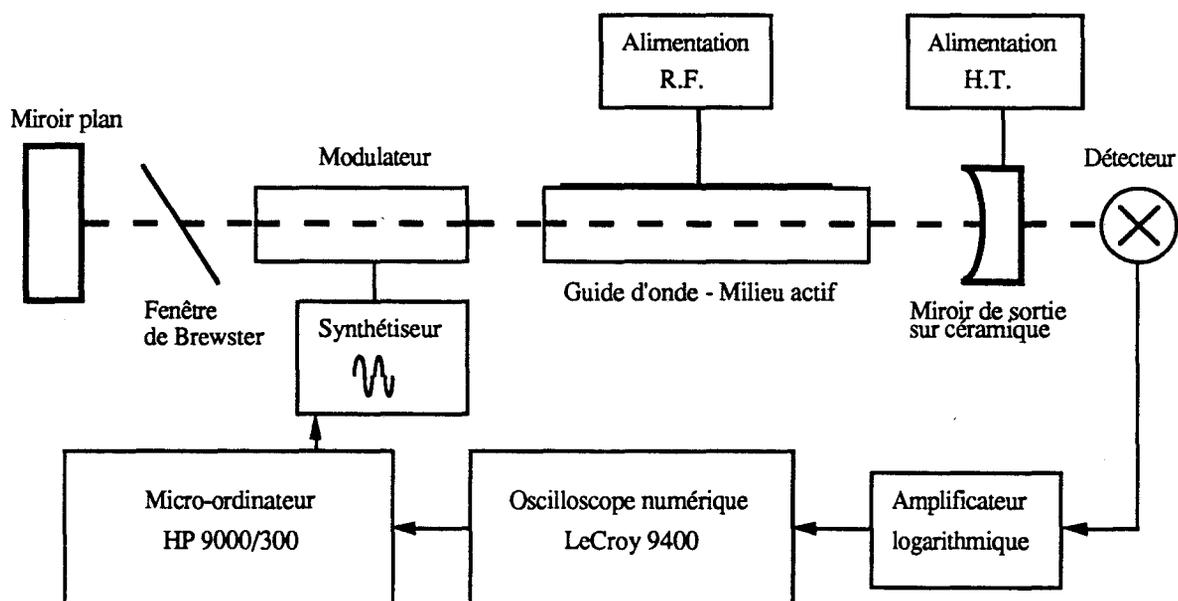


Fig. 1.7 Laser CO<sub>2</sub> à pertes modulées : dispositif expérimental.

Le guide d'onde en alumine possède un diamètre de 2 mm, et une longueur égale à 235 mm. Il est fermé à chaque extrémité par des fenêtrés anti-reflet. Le mélange gazeux contenu à l'intérieur, est composé de CO<sub>2</sub> (17%), de CO (9%), de Xe (4%) et de He (70%), le fonctionnement optimal étant obtenu pour une pression totale d'environ 100 mm de Hg. Une électrode plaquée sur la surface

extérieure du guide permet d'amener la décharge radio-fréquence, dont la fréquence est environ 81 MHz.

La cavité elle-même, longue de 320 mm, est limitée d'un côté par un miroir plan totalement réfléchissant, de l'autre par une lame de couplage sphérique de rayon de courbure 25,5 cm possédant un coefficient de réflexion de 95%. Cette dernière est montée sur une céramique piézo-électrique permettant d'ajuster la longueur de la cavité laser. Entre le guide d'onde et cette dernière sont placés le modulateur électrooptique, constitué d'un barreau de CdTe, et la lame de Brewster.

Une différence de potentiel appliquée sur les faces du modulateur, rend le cristal de CdTe biréfringent par effet électrooptique. La lame de Brewster imposant une polarisation fixe au champ électromagnétique intracavité, il en résulte une modulation des pertes de la cavité.

Bien qu'à priori, ce type de modulateur, à la différence des modulateurs élasto-optiques, fonctionne dans une gamme étendue de fréquences, nous avons observé que le maximum d'efficacité de la modulation était situé dans une gamme très étroite de fréquences, située aux alentours de 382,5 kHz, et d'une largeur d'au plus 1 kHz, vraisemblablement en raison d'une résonance mécanique du cristal.

Nous avons donc travaillé à cette fréquence, à laquelle le premier doublement de période peut être obtenu pour des amplitudes crête-crête de 100 mV, la tension de modulation, fournie par un synthétiseur Hewlett-Packard HP3325A, étant directement appliquée sur le cristal. Il est intéressant de comparer cette fréquence à celle des oscillations de relaxation vers l'état

d'équilibre en l'absence de modulation, et que nous avons trouvé être d'environ 170 kHz dans nos conditions de fonctionnement.

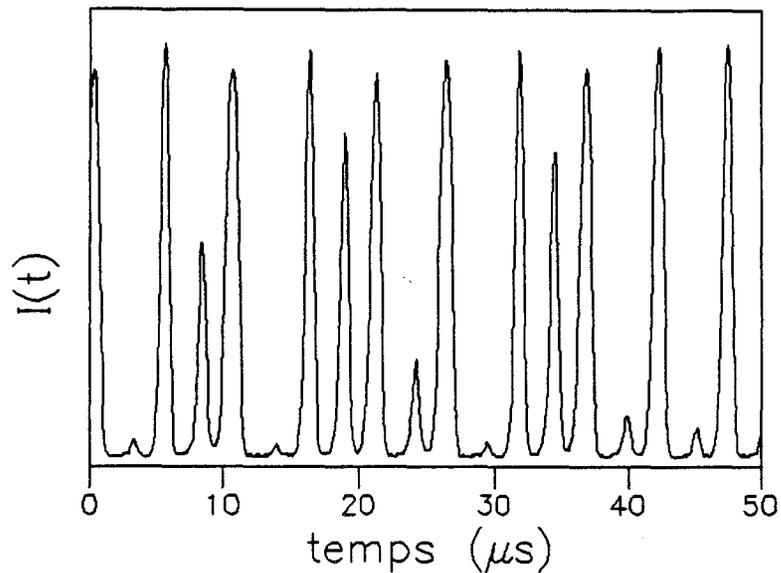
Le rayonnement émis par le laser est envoyé sur un détecteur rapide HgCdTe, relié à un oscilloscope numérique LeCroy 9400, par l'intermédiaire d'un amplificateur logarithmique réalisé au laboratoire. Nous verrons en effet plus loin que le logarithme de l'intensité émise s'est révélé être une variable beaucoup plus utile que l'intensité elle-même. L'inconvénient de l'amplificateur logarithmique est d'amplifier considérablement le bruit à bas niveau. Ceci n'a toutefois pas été une limitation pratique, compte tenu de l'excellent rapport signal sur bruit du laser utilisé.

L'oscilloscope numérique 8 bits LeCroy 9400, d'une fréquence d'échantillonnage maximale de 100 MHz et d'une profondeur mémoire de 32000 échantillons par voie, est par ailleurs relié à un micro-ordinateur HP 9000/300, permettant ainsi le stockage rapide des séquences enregistrées et, éventuellement, des acquisitions en rafale de signaux expérimentaux.

### 1.3.1.b Comportements

Le laser CO<sub>2</sub> à pertes modulées a été le premier laser moléculaire dans lequel des régimes chaotiques ont été observés [Arecchi 82], et a fait depuis lors l'objet de nombreuses études [Midavaine 85; Tredicce 86; Dangoisse 86, 87a]. La figure 1.8 donne un exemple de signal chaotique observé dans ce laser.

Le comportement de ce laser est extrêmement similaire à celui d'un oscillateur non linéaire dissipatif. En l'absence de modulation, il revient à son état d'équilibre par des oscillations de relaxation amorties, comme la plupart des lasers monomodes de classe B.



**Fig 1.8** Exemple de signal chaotique observé dans le laser à pertes modulées. L'intensité de sortie du laser est tracée en fonction du temps.

Dans le dispositif utilisé, on peut faire varier essentiellement deux paramètres de contrôle pour explorer la dynamique du laser : l'amplitude de la modulation et le désaccord en fréquence de la cavité. En effet, l'alimentation radio-fréquence du laser délivre une puissance constante, et nous avons vu que l'efficacité de la modulation dépendait fortement de la fréquence de travail.

Lorsque l'amplitude de modulation est augmentée, on observe une cascade de doublements de période, suivie de régimes chaotiques entrecoupés de fenêtres périodiques. La manière dont ceux-ci apparaissent et se succèdent est tout à fait similaire à ce que l'on peut trouver dans la célèbre suite logistique [Cvitanovic 84]. Il existe toutefois quelques différences notables, qui sont liées essentiellement à des phénomènes de multistabilité et de crises.

Plusieurs attracteurs indépendants peuvent en effet coexister, chacun possédant son propre bassin d'attraction. Nous avons ainsi pu observer l'attracteur issu de la cascade de doublement de période, un attracteur de période fondamentale  $3T$ , et un attracteur  $4T$  pour une même valeur des paramètres. Dans les diagrammes de bifurcation, ce comportement est signalé par le mode d'apparition de certaines fenêtres périodiques : par exemple, la fenêtre  $3T$  n'apparaît jamais par bifurcation tangente, mais lors d'une crise au cours de laquelle le système bascule sur l'attracteur  $3T$  [Dangoisse 86].

L'effet du désaccord, quant à lui, est essentiellement de modifier les types de crises observés, en déplaçant les points de bifurcation où les orbites donnant naissance aux attracteurs  $nT$  sont créées par bifurcation tangente. On trouvera une discussion plus approfondie de ces phénomènes au chapitre 4 et dans [Hennequin 86].

Le comportement de ce laser est décrit de manière satisfaisante par le modèle classique d'un laser de classe B en élargissement homogène, obtenu à partir du système (1.14) par élimination adiabatique de la polarisation [Dangoisse 87a].

### 1.3.2 Le laser à absorbant saturable

Dans un laser à absorbant saturable (LSA), le champ électromagnétique interagit non seulement avec le milieu actif responsable de l'émission laser, mais également avec un milieu absorbant dont l'intensité de saturation est en général plus faible que celle du milieu actif. Il s'agit donc, comparé au laser à modulations de pertes, d'un système ne mettant en jeu que des phénomènes optiques.

Il est connu depuis longtemps que la présence de l'absorbant saturable dans la cavité a pour effet de déstabiliser le laser. Si les premières observations d'instabilités dans des lasers CO<sub>2</sub> à absorbant saturable remontent à 1967 [Wood 67], ce n'est cependant que récemment que des régimes chaotiques ont pu y être mis en évidence [Dangoisse 87b, Hennequin 87, Tachikawa 88]

### 1.3.2.a Dispositif

Le dispositif utilisé, schématisé sur la figure 1.9, est identique à celui ayant servi lors d'études précédentes au laboratoire [Dangoisse 87b,88; Bekkali 89]. L'énergie est fournie au milieu actif par une décharge électrique continue. Le tube de décharge d'une longueur de 1,3 m et d'un diamètre de 12 mm est fermé par deux fenêtres de Brewster en ZnSe. L'anode est reliée à une alimentation haute tension par deux résistances ballast de 45 k $\Omega$  en série, et la cathode à un régulateur de courant d'impédance dynamique comprise entre 25 à 75 M $\Omega$  pour un courant de décharge variant de 5 à 40 mA. La tension de décharge est de l'ordre de 6 à 7 kV.

Dans les expériences que nous présentons, le milieu actif est constitué d'un mélange gazeux de 62% de N<sub>2</sub>, de 10% de He et de 28% de CO<sub>2</sub>, la pression totale étant de l'ordre de 8 Torr. Un débit continu est assuré par une pompe primaire, avec un temps de résidence dans le tube de décharge d'environ 70 ms.

L'absorbant gazeux, ici CH<sub>3</sub>I, est introduit dans la cellule d'absorption par une vanne microfuite, permettant de contrôler la pression au milli-Torr près, celle-ci variant typiquement entre 1 et 100 milli-Torr, et étant voisine de 30 mTorr dans nos expériences. L'écoulement est ici aussi assuré par une pompe primaire.

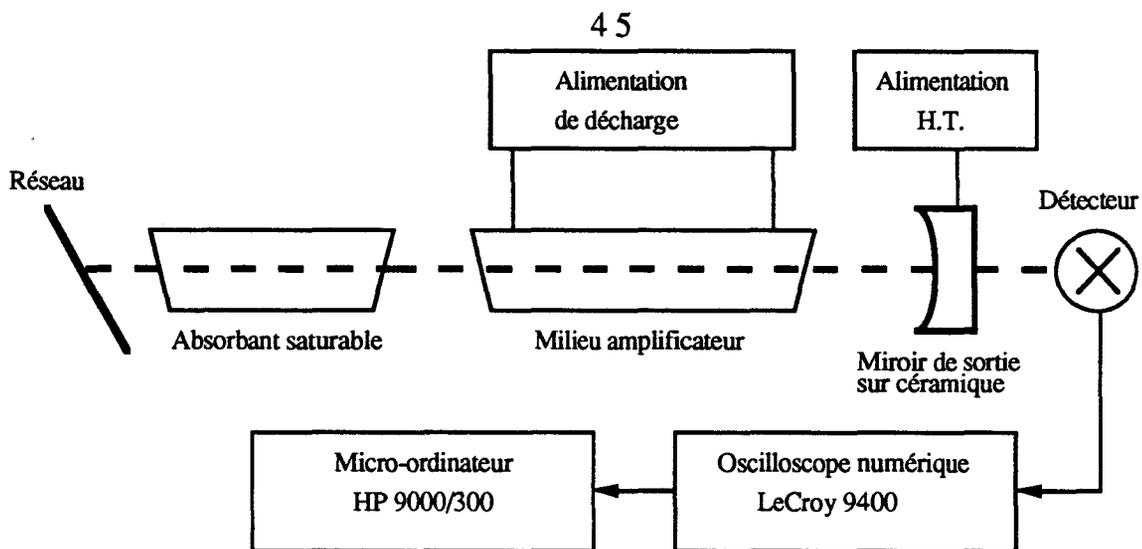


Fig. 1.9 Laser à absorbant saturable : dispositif expérimental.

La cavité elle-même, d'une longueur de 3 m, est limitée par un réseau et par un miroir de couplage sphérique monté sur céramique piézoélectrique, dont le pouvoir réflecteur est de 90%.

Le paramètre de contrôle que nous avons utilisé est le désaccord en fréquence de la cavité laser.

Par ailleurs, les appareils de mesure et d'enregistrement utilisés sont ceux qui ont été décrits dans la section concernant le laser à pertes modulées, si ce n'est le fait que l'amplificateur logarithmique n'a pas été utilisé dans cette expérience.

### 1.3.2.b Comportements

L'effet de l'absorbant saturable est de faire dépendre le coefficient de pertes de la cavité de l'intensité du champ électromagnétique : à faible puissance, l'inversion de population de l'absorbant est quasiment celle de l'équilibre thermodynamique, et l'absorption du rayonnement est maximale. Quand la puissance augmente, l'absorbant devient rapidement transparent, du fait de la

saturation de l'inversion de population, et les pertes dans la cavité diminuent rapidement.

Les régimes de fonctionnement les plus simples du LSA sont deux régimes stationnaires, que nous noterons dans la suite  $I_0$  et  $I_+$ , et qui correspondent respectivement à une intensité laser nulle et à une intensité constante différente de zéro. Dans l'espace des phases, ces deux régimes sont représentés par deux points fixes qui jouent un rôle important dans l'interprétation des comportements chaotiques du LSA.

De manière générale, les domaines de stabilité de  $I_0$  et  $I_+$  correspondent respectivement aux petites et aux grandes valeurs du paramètre de pompe du laser. Ces deux domaines peuvent se recouvrir partiellement, donnant lieu à des phénomènes de bistabilité [Jacques 82, Arimondo 83], ou être séparés par une région d'instabilités [Arimondo 85, Tachikawa 86,87].

Le laser  $\text{CO}_2$  à absorbant saturable présente en effet une grande variété de comportements dynamiques, notamment des instabilités périodiques regroupées sous le nom de régimes P.Q.S. (Passive Q-Switching). Ce terme fait référence à la modulation spontanée du facteur de qualité de la cavité laser obtenue grâce à l'absorbant saturable.

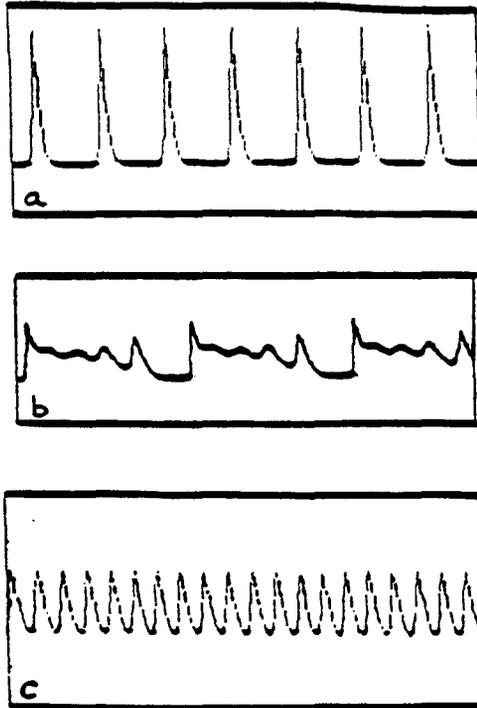
Ces régimes P.Q.S., qui présentent de nombreuses formes d'impulsion ont été regroupés en deux grandes classes :

- les régimes PQS de type I sont caractérisés par des impulsions de puissances crête importantes séparées par des intervalles plus ou moins longs où l'intensité émise par le laser est quasiment nulle. La trajectoire du système passe donc un temps non négligeable dans un voisinage

proche du plan de l'espace des phases correspondant à l'intensité nulle (fig. 1.10a,b).

- dans les régimes PQS de type II, l'intensité du laser est faiblement modulée de manière quasi-sinusoidale autour de la valeur correspondant au point  $I_+$  instable (fig. 1.10c).

Les régimes PQS I sont eux-mêmes classés d'après la forme des impulsions qu'ils présentent. Le régime PQS I le plus simple, baptisé  $P^{(0)}$ , est celui où l'impulsion présente un seul maximum : l'intensité augmente brusquement et redescend aussitôt de manière exponentielle (fig. 1.10a).



**Fig. 1.10** Exemples de signaux PQS. Type I : (a) régime  $P^{(0)}$ , (b) régime  $P^{(n)}$ . Type II : (c) régime T.

Il existe par ailleurs, comme on peut le voir sur la figure 1.10b, d'autres formes de signaux où l'impulsion initiale de grande intensité est suivie d'oscillations d'amplitude plus petite. Ces

régimes sont appelés  $P^{(n)}$ , où  $n$  représente le nombre d'oscillations suivant l'impulsion principale.

Les régimes PQS I sont plutôt observés pour des petites valeurs du paramètre de pompe du laser, ou, de manière équivalente, pour les désaccords de cavité importants.

Les régimes PQS II, que nous appellerons également régimes T, sont créés de manière générique par une bifurcation de Hopf du point fixe  $I_+$ , qui correspond au point de fonctionnement stationnaire du laser. Le plus souvent, la bifurcation de Hopf est surcritique, c'est à dire que la solution de type II apparaît avec une amplitude nulle, mais il est possible d'observer également des bifurcations sous-critiques, où le régime périodique apparaît avec une amplitude non nulle.

Les régimes PQS I et II ne sont pas totalement étrangers l'un à l'autre : pour des pressions d'absorbant importantes, un signal T se transforme de manière continue en un signal de type  $P^{(0)}$  quand on diminue le paramètre de pompe du laser ou qu'on augmente le désaccord de la cavité. Donc, même quand des comportements compliqués sont observés entre ces deux cas extrêmes, on peut penser qu'il s'agit de la même solution périodique dont l'aspect qualitatif varie en fonction des paramètres.

En ce qui concerne la modélisation du LSA, on notera que les régimes de type  $P^{(n)}$  ne sont correctement reproduits que si l'on introduit, en plus des deux niveaux vibrationnels impliqués dans la transition laser, le niveau fondamental dans la description des mécanismes de relaxation entre niveaux d'énergie du milieu amplificateur [Tachikawa 86,87].

Des comportements chaotiques avaient été prédits dans le LSA depuis un certain temps [Mrugala 80], mais pour des valeurs de paramètres inaccessibles expérimentalement. Le fait que l'observation expérimentale de régimes chaotiques dans le LSA soit récente [Dangoisse 87b, 88; Hennequin 87, 88; de Tomasi 89; Tachikawa 88] est due en grande partie à ce qu'ils sont situés dans une région relativement restreinte de l'espace des paramètres.

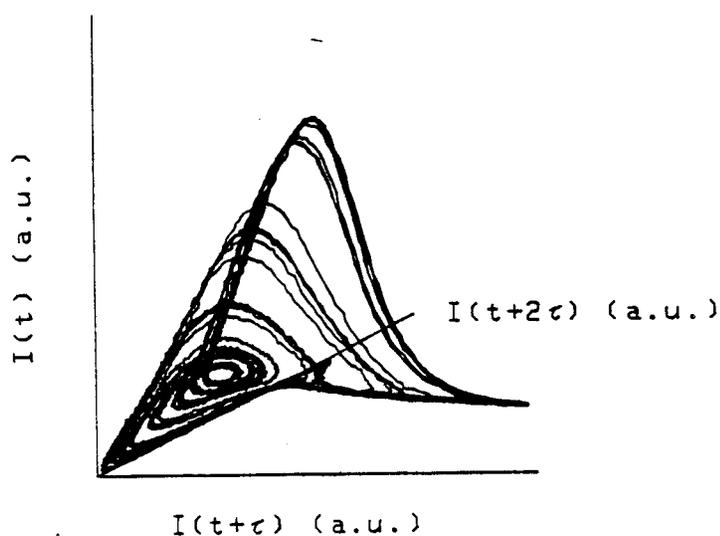
Les deux types de régimes PQS I et II présentés ci-dessus présentent des routes vers le chaos différentes. En ce qui concerne le régime T (PQS II), la transition vers des régimes chaotiques se fait via une classique cascade de doublements de période [Dangoisse 87b, Hennequin 87].

Dans le cas des régimes  $P^{(n)}$  (PQS I), on observe des alternances de régimes chaotiques et périodiques tout à fait similaires à celles déjà décrites dans le cas de la réaction de Belousov-Zhabotinskii [Turner 81, Richetti 85]. Dans ces séquences, on observe successivement les régimes périodiques  $P^{(n)}$ ,  $P^{(n+1)}$ ,  $P^{(n+2)}$ , ..., chaque  $P^{(n)}$  se déstabilisant par doublement de périodes pour donner un régime chaotique baptisé  $C^{(n)}$ , qui est interrompu par l'apparition de l'orbite périodique  $P^{(n+1)}$  dans une bifurcation tangente [Dangoisse 88, Lefranc 91]. Par exemple, dans la séquence expérimentale analysée au chapitre 3, on observe successivement les comportements  $I_+$ , T, 2T, 4T, chaos,  $P^{(3)}$ ,  $C^{(2)}$ ,  $P^{(2)}$ ,  $C^{(1)}$ ,  $P^{(1)}$ ,  $P^{(0)}$ ,  $I_0$ .

La suite de régimes périodiques  $P^{(n)}$ ,  $P^{(n+1)}$ , ... a également été observée observée dans un LSA  $\text{CO}_2+\text{SF}_6$ , sans que soient intercalés les régimes chaotiques  $C^{(n)}$  [Hennequin 88, De Tomasi 89]. On passe alors de manière discontinue d'un régime périodique à l'autre, et,

dans la zone de transition, on observe des "hésitations" entre les deux comportements adjacents  $P^{(n)}$  et  $P^{(n+1)}$ , où les deux formes d'impulsion se succèdent de manière aléatoire. Hennequin et al. ont montré que l'influence du bruit peut expliquer en grande partie ces hésitations [Hennequin 89a].

La forme particulière des régimes  $P^{(n)}$  et leur représentation dans l'espace des phases indique que les points  $I_+$  et  $I_0$  jouent un rôle important dans la dynamique dans l'espace des phases. Les trajectoires sont en effet régulièrement réinjectées au voisinage du point  $I_+$ , et en divergent ensuite en spiralant approximativement sur une surface bidimensionnelle. Elles passent ensuite un temps non négligeable au voisinage de  $I_0$ , ou tout au moins du plan  $I=0$  (fig 1.11).



**Fig 1.11** Trajectoire dans l'espace des phases associée à un régime chaotique du LSA.

Ce comportement, ajouté au schéma particulier que suivent les bifurcations, fait suspecter que l'origine des régimes chaotiques

peut être expliqué en termes de chaos homocline. Nous examinerons cette hypothèse plus en détail au chapitre 3.



## **CHAPITRE 2 : CALCULS DE DIMENSIONS FRACTALES POUR LE LASER A MODULATION DE PERTES**

"It is not difficult to develop an algorithm that will yield numbers that can be called dimension, but it is far more difficult to be confident that those numbers truly represent the dynamics of the system"

A. Brandstater and H.L. Swinney, Phys. Rev. A **35**, 2207 (1987).



## 2.1 INTRODUCTION

La détermination de la dimension de l'attracteur d'un système dissipatif est certainement l'une des méthodes les plus utilisées de caractérisation quantitative de régimes chaotiques. Le fait qu'un système évolue dans l'espace des phases sur un objet fractal de dimension finie est en effet une signature sans ambiguïté de chaos déterministe.

Elle permet en outre d'estimer le nombre de degrés de liberté intervenant effectivement dans la dynamique du système. Celui-ci peut être très inférieur à la dimension de l'espace des phases naturel, comme le montre l'exemple de l'hydrodynamique, où des attracteurs étranges de dimensions inférieures à 3 ont pu être observés alors que l'espace des phases est en toute rigueur de dimension infinie.

Un régime stationnaire, un comportement périodique ou quasipériodique sont représentés respectivement dans l'espace des phases par un point fixe, un cycle limite, et un tore limite, dont les dimensions sont égales à 0, 1 et 2. S'il est facile d'attribuer une dimension à ces attracteurs simples, les attracteurs étranges correspondant aux régimes chaotiques sont des objets fractals et échappent donc aux mesures conventionnelles de longueur, surface, volume...

Ainsi, l'attracteur étrange d'un système dynamique à trois degrés de liberté possède typiquement une surface infinie et un volume nul et présente donc un comportement intermédiaire entre les dimensions 2 et 3. La notion de dimension fractale permet de

quantifier plus précisément comment un objet fractal occupe de manière complexe l'espace dans lequel il se trouve.

Dans ce qui suit, nous rappelons les définitions de dimensions fractales les plus usuelles, en particulier celle de la dimension de corrélation, qui est la plus facile à estimer. Nous passons ensuite en revue différentes sources d'erreurs intervenant dans la détermination expérimentale de cette dimension. Nous présentons enfin les difficultés que nous avons rencontrées dans le calcul de la dimension de corrélation de régimes chaotiques observés dans le laser  $\text{CO}_2$  à pertes modulées, ainsi que la solution que nous leur avons apportée.

## 2.2 DIMENSIONS FRACTALES

De manière intuitive, la dimension d'un objet géométrique est reliée à une loi de puissance entre une mesure de cet objet et ses dimensions linéaires. Supposons que nous voulions mesurer la surface d'un objet plan. Nous pouvons le recouvrir par des petits carrés de côté  $\varepsilon$  et évaluer de manière approchée la surface par  $S_\varepsilon \approx N(\varepsilon) \varepsilon^2$ , où  $N(\varepsilon)$  est le nombre minimum de carrés de côté  $\varepsilon$  nécessaires pour recouvrir l'objet. Quand on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0,  $N(\varepsilon) \varepsilon^2$  a pour limite  $S_0$ , la surface de l'objet. On a donc :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \varepsilon^D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_0 \varepsilon^{D-2} = \begin{cases} \infty & \text{si } D < 2 \\ S_0 & \text{si } D = 2 \\ 0 & \text{si } D > 2 \end{cases} \quad (2.1)$$

La dimension d'un objet peut donc être définie comme l'exposant qui permet d'obtenir une mesure finie de cet objet.

Cette définition de la dimension a été généralisée par Hausdorff pour caractériser les ensembles dont les mesures euclidiennes usuelles n'ont pas de valeur finie [Falconer 85].

### 2.2.1 Dimension de Hausdorff et capacité

Considérons un ensemble  $A$  appartenant à un espace métrique sur lequel on a défini une distance  $d$ . Un  $\varepsilon$ -recouvrement  $C(A, \varepsilon) = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$  est un recouvrement de cet objet par des ouverts  $B_i$  tels que leurs diamètres  $\delta_i$  soient tous inférieurs à  $\varepsilon$  :

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k B_i \quad \text{et} \quad \forall i, \delta_i < \varepsilon$$

Définissons :

$$\Gamma_H(A, D, \varepsilon) = \inf_{C(A, \varepsilon)} \left( \sum_i \delta_i^D \right) \quad (2.2)$$

qui est la valeur minimale prise par la somme  $(\sum_i \delta_i^D)$  sur l'ensemble de tous les  $\varepsilon$ -recouvrements de  $A$ . La mesure de Hausdorff  $D$ -dimensionnelle de  $A$  est définie par :

$$\Gamma_H(A,D) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \Gamma(A,D,\varepsilon) \quad (2.3)$$

On montre facilement qu'il existe une unique valeur  $D_H$  de  $D$ , telle que :

$$\Gamma_H(A,D) = \begin{cases} \infty & \text{pour } D < D_H \\ \Gamma_H(A) & \text{finie pour } D = D_H \\ 0 & \text{pour } D > D_H \end{cases} \quad (2.4)$$

$D_H$  est la dimension de Hausdorff de  $A$  et est donc l'unique valeur de  $D$  pour laquelle la mesure de Hausdorff  $D$ -dimensionnelle de  $A$  prend une valeur finie.

Cette définition se prête évidemment mal à une évaluation numérique, puisqu'il faut considérer tous les  $\varepsilon$ -recouvrements possibles de  $A$ . La capacité, introduite par Kolmogorov [1958], est une notion dérivée de la dimension de Hausdorff, obtenue en considérant des recouvrements par des cubes de diamètres tous égaux à  $\varepsilon$ . On a alors :

$$\Gamma(A,D,\varepsilon) \approx N_A(\varepsilon) \varepsilon^D ,$$

$N_A(\varepsilon)$  étant le nombre minimal de cubes de diamètre  $\varepsilon$  qu'il faut employer pour recouvrir  $A$ . Le fait que  $\Gamma(A,D,\varepsilon)$  tende vers une valeur finie quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  implique que la capacité  $D_C$  est donnée par :

$$D_C(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\log N_A(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (2.5)$$

On peut trouver certains exemples où capacité et dimension de Hausdorff diffèrent mais il est vraisemblable que dans la plupart

des cas d'intérêt courant, la capacité d'un ensemble est égale à sa dimension de Hausdorff.

Il est évident que pour une courbe, une surface, un volume, les nombres de cubes nécessaires à un recouvrement varient respectivement comme  $N_A(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-1}$ ,  $N_A(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-2}$ ,  $N_A(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-3}$  (figure 2.1). Pour ces objets simples, on retrouve les dimensions topologiques usuelles et de manière générale,  $D_C(\mathbb{R}^n) = n$ .

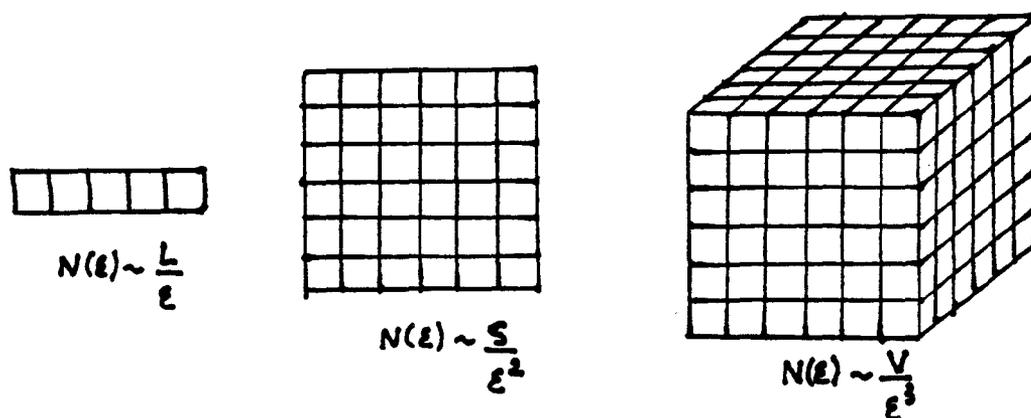


Fig. 2.1 Recouvrements d'objets géométriques usuels par des cubes de côté  $\varepsilon$ .

Par contre, il existe des ensembles pour lesquels la dimension de Hausdorff et la capacité prennent des valeurs non entières : il s'agit des objets fractals. C'est typiquement le cas des attracteurs étranges associés aux régimes chaotiques des systèmes dynamiques dissipatifs, comme l'attracteur de Hénon de la figure 1.3.

Dimension de Hausdorff et capacité sont des concepts purement géométriques, qui ne font intervenir que les distances, et sont indépendants de la mesure invariante naturelle : pour calculer

la dimension de Hausdorff d'un ensemble, on suppose que tous les points de cet ensemble sont équiprobables.

Or, certaines régions d'un attracteur étrange sont beaucoup plus peuplées que d'autres, cette inhomogénéité étant une conséquence des lois d'évolution dans l'espace des phases et constituant donc une information dynamique sur le système.

On est ainsi amené à définir la dimension ponctuelle, qui caractérise la structure locale de l'attracteur en un de ses points. Soit :

$$B_x(\varepsilon) = \{y : \|x-y\| < \varepsilon\},$$

la boule de rayon  $\varepsilon$  centrée sur  $x$ , et définissons  $C_x(\varepsilon)$  comme la mesure naturelle invariante de  $B_x(\varepsilon)$  :

$$C_x(\varepsilon) = \mu(B_x(\varepsilon)).$$

Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit,  $C_x(\varepsilon)$  variera typiquement comme :

$$C_x(\varepsilon) \approx \varepsilon^{D_P(x)} \quad (2.6)$$

et on peut par conséquent définir la dimension ponctuelle  $D_P(x)$  de l'attracteur au point  $x$  par :

$$D_P(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C_x(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (2.7)$$

On notera que la dimension ponctuelle n'est pas à proprement parler une dimension : on peut trouver des exemples où la dimension ponctuelle en certains points est plus grande que la dimension de l'espace des phases, ces points appartenant à des régions de très faible probabilité.

Dans un attracteur étrange, les dimensions ponctuelles ne sont pas égales pour tous les points de l'attracteur, bien que certaines valeurs soient infiniment plus probables que d'autres : les

attracteurs étranges sont ce qu'on appelle des multifractals, pour les différencier des fractals les plus simples où la dimension ponctuelle est égale en tout point à la dimension de Hausdorff.

Pour caractériser cette distribution de lois d'échelles, on peut songer à moyenner de manière variable les dimensions ponctuelles des points de l'attracteur. C'est ce que font les dimensions généralisées que nous présentons ci-dessous, et qui caractérisent la mesure naturelle invariante de l'attracteur.

### 2.2.2 Dimensions généralisées

Lorsque nous effectuons un  $\varepsilon$ -recouvrement de l'attracteur  $A$  par des ouverts  $B_i$ , nous pouvons associer à chacun d'entre eux la fraction  $p_i = \mu(B_i)$  de points de l'attracteur appartenant à  $B_i$ , qui est donnée par la mesure invariante naturelle. On introduit, sur le modèle de la définition (2.2) :

$$\Gamma_q^{H_q}(A, D, \varepsilon) = \left. \begin{array}{l} \inf \\ \sup \end{array} \right\} \left( \sum_i p_i^q \delta_i^{(1-q)D} \right), \quad (2.8)$$

où la borne inférieure (resp. supérieure) est prise quand  $q < 1$  (resp.  $q > 1$ ). La mesure de Hausdorff  $D$ -dimensionnelle généralisée est alors donnée par :

$$\Gamma_q^{H_q}(A, D) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma_q^{H_q}(A, D, \varepsilon), \quad (2.9)$$

et la dimension généralisée de Hausdorff  $D^{H_q}$  [Grassberger 85a, Halsey 86] est définie de manière analogue à la dimension classique de Hausdorff :

$$\Gamma_q^{H_q}(A, D) = \begin{cases} \infty & \text{pour } D < D^{H_q} \\ \Gamma_q^{H_q}(A) & \text{finie pour } D = D^{H_q} \\ 0 & \text{pour } D > D^{H_q} \end{cases} \quad (2.10)$$

Comme précédemment, on peut se limiter aux recouvrements effectués à l'aide de cubes de côté tous égaux à  $\varepsilon$ . Dans ce cas, on a :

$$\Gamma_q(A, D, \varepsilon) = \varepsilon^{(1-q)D} \sum_i p_i^q ,$$

qui tend vers une valeur finie quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  si  $D$  est égale à la dimension généralisée  $D_q$  [Grassberger 83a, 84, Hentschel 83] donnée par :

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\sum_i p_i^q)}{\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-S_q(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (2.11)$$

où  $S_q(\varepsilon)$  est une entropie de Renyi [1970]. On peut montrer facilement que  $D_q$  est une fonction décroissante de  $q$ , et que la variation de  $D_q$  en fonction de  $q$  donne une mesure de l'inhomogénéité de l'attracteur. En effet si tous les  $p_i$  sont égaux à une valeur commune  $p$  dans la formule ci-dessus,  $\sum_i p_i^q = p^{q-1} =$

$N_A(\varepsilon)^{1-q}$ , et on trouve donc que tous les  $D_q$  sont égales à  $D_0$ . Si le fractal n'est pas homogène, on aura :

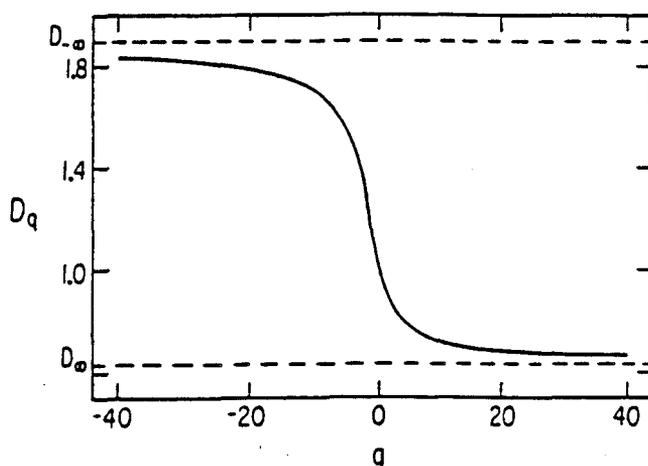
$$D_\infty = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\max_i p_i)}{\log \varepsilon} \quad (2.12)$$

et

$$D_{-\infty} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\min_i p_i)}{\log \varepsilon} \quad (2.13)$$

$D_\infty$  (resp.  $D_{-\infty}$ ) est la plus petite (resp. grande) des dimensions généralisées et est associée aux régions les plus denses (resp. les moins denses) de l'attracteur. On remarquera que ces deux dimensions extrêmes correspondent aux bornes supérieures et inférieures du spectre de dimensions ponctuelles sur l'attracteur. En général, l'ensemble des points ayant  $D_\infty$  ou  $D_{-\infty}$  comme dimension

ponctuelle est constitué de points isolés. La figure 2.2 donne un exemple de spectre de dimensions généralisées.



**Fig. 2.2** Spectre de dimensions généralisées d'une application du cercle dans lui-même à la transition vers le chaos à partir d'un régime quasi périodique dont le nombre de rotation est le nombre d'or (d'après Halsey et al. [1986]).

Dans ce spectre infini de dimensions généralisées, on distingue trois dimensions auxquelles on peut attribuer une signification indépendante, et qui ont été étudiées avant l'introduction des dimensions généralisées. Il s'agit des dimensions  $D_0$ ,  $D_1$  et  $D_2$ .

#### 2.2.2.a $D_0$ : Capacité

On peut vérifier que si l'on pose  $q=0$  dans les formules (2.8) et (2.11), on retrouve la définition de la capacité (2.5).  $D_0$  n'est donc autre que la capacité du fractal.

#### 2.2.2.b $D_1$ : Dimension d'information

La formule 2.11 n'est pas définie pour  $q=1$ . On pose donc :

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} D_q, \quad (2.14)$$

et l'on trouve que :

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-S(\varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad (2.15)$$

où  $S(\varepsilon)$  correspond à :

$$S(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N_A(\varepsilon)} p_i \log p_i = S_1(\varepsilon), \quad (2.16)$$

$S(\varepsilon)$  représente la quantité d'information, au sens de Shannon, nécessaire pour localiser un point sur l'attracteur avec une précision  $\varepsilon$ . Pour cette raison,  $D_1$  est communément appelée dimension d'information, car elle caractérise comment l'information  $S(\varepsilon)$  varie avec la résolution  $\varepsilon$ . On peut montrer que presque tous les points sur le fractal (par rapport à la mesure naturelle) ont une dimension ponctuelle égale à la dimension d'information.

### 2.2.2.c $D_2$ : Dimension de corrélation

La dimension  $D_2$  se prête également à une interprétation simple, et peut se mettre sous une forme particulièrement bien adaptée à une évaluation numérique, qui est d'ailleurs celle sous laquelle elle fut initialement introduite par Grassberger et Procaccia [1983a,b]. D'après la formule (2.11), on a

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log (\sum_i p_i^2)}{\log \varepsilon} \quad (2.17)$$

Or,  $\sum p_i^2$  est la probabilité que deux points de l'attracteur pris au hasard se trouvent dans un même cube de côté  $\varepsilon$ , qui est à peu de chose près la probabilité  $P(\|x-y\| < \varepsilon)$  pour que la distance entre deux points  $x$  et  $y$  pris au hasard soit plus petite que  $\varepsilon$ . On a donc :

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log (P(\|x-y\| < \varepsilon))}{\log \varepsilon}. \quad (2.18)$$

$P(\|x-y\| < \varepsilon)$  s'évalue facilement grâce à l'intégrale de corrélation  $C(\varepsilon)$  :

$$P(\|x-y\| < \varepsilon) = C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} C(N, \varepsilon), \quad (2.19)$$

$C(N, \varepsilon)$  étant donnée par :

$$C(N, \varepsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i < j} \theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|) \quad (2.20)$$

où les  $x_i$  sont  $N$  points pris au hasard selon la mesure naturelle sur l'attracteur et  $\theta(x)$  est la fonction de Heaviside :  $\theta(x) = 1$  (resp. 0) pour  $x > 0$  (resp.  $x < 0$ ). L'intégrale de corrélation  $C(N, \varepsilon)$  compte la proportion de distances inférieures à  $\varepsilon$  parmi les  $N(N-1)/2$  distances entre les  $N$  points.

Notons que si on définit une intégrale de corrélation individuelle :

$$C_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} C_i(N, \varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N-1)} \sum_{i \neq j} \theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|), \quad (2.21)$$

qui est la mesure de la boule de rayon  $\varepsilon$  centrée sur  $x_i$ ,  $C(\varepsilon)$  peut s'écrire sous la forme :

$$C(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} C(N, \varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_i C_i(N, \varepsilon) = \langle C_i(\varepsilon) \rangle. \quad (2.22)$$

L'intégrale de corrélation peut donc être interprétée comme la moyenne arithmétique des intégrales de corrélation individuelles, en rappelant que les points  $x_i$  sont pris au hasard selon la mesure naturelle de l'attracteur.

### 2.2.3 La dimension de Lyapunov

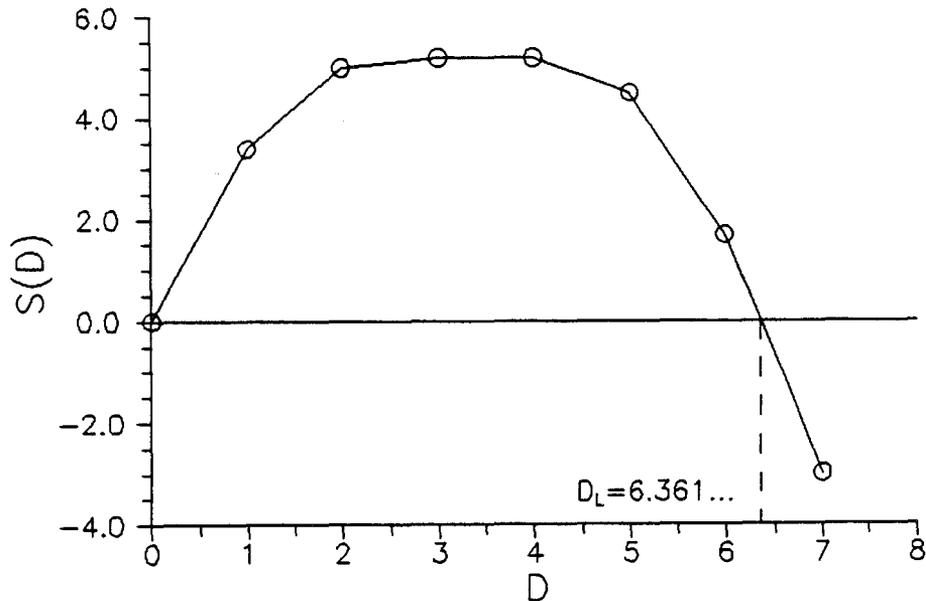
La dimension de Lyapunov, également appelée dimension de Kaplan-Yorke [Kaplan 79, Fredrickson 83, Russell 80], définit une dimension fractale qui est uniquement fonction des exposants de Lyapunov évoqués au chapitre précédent, et relie donc une information géométrique à une information dynamique.

Supposons que l'on étudie un système dissipatif évoluant dans un espace des phases de dimension  $n$  et que les exposants de Lyapunov soient égaux à  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ . Appelons  $S_i = \sum_{k=1}^i \lambda_k$ , la somme des  $i$  premiers exposants de Lyapunov. Si le régime est chaotique,  $S_1 > 0$ , et comme le système est dissipatif,  $S_n < 0$ . Il existe donc un  $j$  tel que  $S_j > 0$ , et  $S_{j+1} < 0$ . La dimension de Lyapunov est alors définie comme :

$$D_L = j + \frac{S_j}{|\lambda_{j+1}|} = j + \frac{\sum_{k=1}^j \lambda_k}{|\lambda_{j+1}|} \quad (2.23)$$

Il est conjecturé que  $D_L = D_1$ , mais seule l'inégalité  $D_1 \leq D_L$  a été démontrée rigoureusement [Ledrappier 81].

L'évaluation de la dimension de Lyapunov est malaisée pour des signaux expérimentaux, car les exposants de Lyapunov négatifs sont moins faciles à calculer que ceux positifs. Par contre, dans le cas de simulations numériques, où l'on connaît les équations du mouvement, et où l'on peut donc facilement calculer tout les exposants (voir le 1.2.3.a), la définition (2.23) permet d'obtenir rapidement et de manière sûre une estimation de la dimension fractale.



**Fig. 2.3** Illustration de la dimension de Lyapunov. Les sommes  $S_i$  sont tracées en fonction de  $i$  et extrapolées entre deux valeurs entières de la dimension. La dimension de Lyapunov est la valeur de  $D$  telle que  $S(D)=0$ .

Une démonstration heuristique de cette conjecture est par exemple donnée par Grassberger [1986], mais on peut en donner une illustration simple de la manière suivante : la somme  $S_i$  indique le taux de contraction des volumes  $k$ -dimensionnels dans l'espace des phases. Par exemple, si l'on considère trois points infiniment proches, la surface du parallépipède défini par ces trois points varie comme  $\exp(S_2 t)$ . Si l'on trace  $S_i$  en fonction de  $i$ , en extrapolant linéairement entre deux valeurs entières (fig. 2.3), la dimension de Lyapunov correspond à la valeur pour laquelle la somme extrapolée est nulle. Si  $j < D_L < j+1$ , les volumes  $j$ -dimensionnels divergent, les volumes  $(j+1)$ -dimensionnels tendent

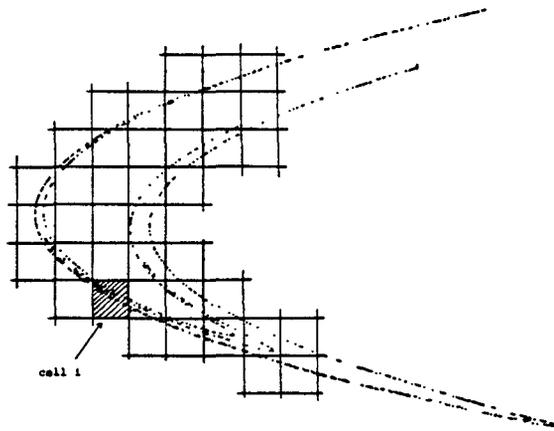
vers zéro, et les volumes  $D_L$ -dimensionnels gardent une valeur finie.

## 2.3 ALGORITHMES DE CALCUL

Les principales méthodes numériques diffèrent essentiellement par la manière dont le recouvrement de l'objet fractal est effectué, ainsi que par le type de loi d'échelle utilisé pour extraire les dimensions.

### 2.3.1 Le "comptage de boîtes"

Pour appliquer directement la formule (2.11), on peut effectuer une partition de l'espace des phases par des cubes de côté  $\epsilon$  (fig. 2.4) et estimer la probabilité  $p_i$  associée à chaque cube en comptant combien de points parmi  $N$  se trouvent à l'intérieur de chaque boîte :  $p_i \approx n_i/N$  [Froehling 81]. Il s'agit de la méthode dite de "comptage de boîtes".



**Fig 2.4** Illustration de la méthode de comptage de boîtes dans le cas de l'attracteur de Hénon (d'après Grassberger [1986]).

En considérant des partitions de plus en plus fines, on étudie la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , et le tracé de  $\log \sum p_i^q$  en fonction de  $\log \epsilon$  donne accès

à la dimension généralisée  $D_q$ . Bien que cette méthode soit la plus proche de la définition générale (2.11), elle exige d'utiliser un très grand nombre de points et n'est guère utilisable pour des dimensions supérieures à 2.

### 2.3.2 Méthode de corrélation spatiale : recouvrements à diamètre fixe.

Nous avons vu au paragraphe 2.2.2c que la dimension  $D_2$  pouvait être obtenue à partir de l'intégrale de corrélation (2.19, 2.20) et que cette intégrale  $C(\epsilon)$  était la moyenne des intégrales de corrélation individuelles (relation (2.22)). Cet algorithme revient à effectuer un recouvrement de l'attracteur par des boules de rayon fixé  $\epsilon$  centrées sur les points de l'attracteur.

On peut procéder de manière analogue pour évaluer le spectre de dimensions généralisées. On a en effet la relation suivante :

$$\sum p_i(\epsilon)^q = \sum p_i(\epsilon) p_i(\epsilon)^{q-1} = \langle p_i(\epsilon)^{q-1} \rangle \approx \langle C_i(\epsilon)^{q-1} \rangle \quad (2.24)$$

où la moyenne est prise par rapport à la mesure invariante naturelle et les  $C_i(\epsilon)$  sont les fonctions introduites dans l'équation (2.21).

Si on définit l'intégrale de corrélation généralisée :

$$C_q(\epsilon) = (\langle C_i(\epsilon)^{q-1} \rangle)^{1/(q-1)}, \quad (2.25)$$

$C_q(\epsilon)$  vérifie une loi de puissance dont  $D_q$  est l'exposant :

$$D_q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log C_q(\epsilon)}{\log \epsilon} \quad (2.26)$$

Dans le cas de la dimension d'information  $D_1$ , le passage à la limite  $q \rightarrow 1$  définit  $C_1$  comme une moyenne géométrique des intégrales individuelles de corrélation :

$$C_1(\varepsilon) = \lim_{q \rightarrow 1} C_q(\varepsilon) = \exp(\langle \log C_i(\varepsilon) \rangle) \quad (2.27)$$

En pratique, à partir d'un échantillon fini de  $N$  points  $x_i$ , les fonctions  $C_i(\varepsilon)$  sont approchées par les  $C_i(N, \varepsilon)$  introduites dans l'équation (2.21).

La dimension généralisée la plus facile à calculer, et de loin, par cette méthode est la dimension de corrélation  $D_2$ . En effet, la moyenne arithmétique (2.22) des intégrales individuelles de corrélation se calcule facilement numériquement. D'autre part, Grassberger a montré que la formule (2.25) demandait à être corrigée pour éviter des déviations systématiques aux petites valeurs de  $\varepsilon$ , liées au nombre fini de points utilisés [Grassberger 88].

Or, cette correction, basée sur la loi de Poisson, et qui alourdit considérablement les calculs numériques, est exactement nulle dans le cas de  $D_2$ . En fait, l'intégrale de corrélation  $C(\varepsilon)$  utilisée pour le calcul de la dimension de corrélation est bien approchée par  $C(N, \varepsilon)$  jusqu'à des distances à peine plus grandes que la plus petite des  $N(N-1)/2$  distances intervenant dans  $C(N, \varepsilon)$ . Cela explique en grande partie la très grande popularité de l'algorithme de Grassberger-Procaccia.

La méthode de corrélation spatiale se montre relativement efficace pour  $q > 1$ , mais pas pour  $q < 1$ , car  $C_i(N, \varepsilon)^{q-1}$  peut alors ne plus être définie pour des  $\varepsilon$  sensiblement plus grands que la plus petite distance entre deux points. On peut alors recourir à des méthodes utilisant les statistiques sur les distances entre proches voisins.

### 2.3.3 Statistiques de proches voisins : recouvrements à mesure fixe.

Pour le calcul des dimensions généralisées  $D_q$  avec  $q \leq 1$ , il est en fait préférable d'utiliser des recouvrements dont les ouverts ont une mesure fixe. Si on pose dans la formule (2.8) que  $\forall i, p_i = p$ , alors on obtient :

$$\Gamma_q(A, D, \varepsilon) \approx p^{q-1} \left( \sum_i p \delta_i^{(1-q)D} \right) \approx p^{q-1} \langle \delta_i^{(1-q)D} \rangle \quad (2.28)$$

et en posant  $\gamma = (1-q)D_q$ , on arrive à la relation ( $\Gamma_q(A, D, \varepsilon)$  doit tendre vers une limite finie) :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\log \langle \delta_i^\gamma \rangle}{\log p} = \frac{\gamma}{D_q}, \quad (2.29)$$

$q$  étant donné par  $q = 1 + \gamma/D_q$ . Quand  $q = 1$  (ou  $\gamma = 0$ ) cette formule n'est pas définie, mais par passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\langle \log \delta_i \rangle}{\log p} = \frac{1}{D_1}, \quad (2.30)$$

et l'on obtient donc dans ce cas la dimension d'information. En général, ces formules sont utilisées en considérant des boules centrées sur les points de l'attracteur, qui contiennent les  $k$  plus proches voisins du centre de la boule. La mesure  $p$  de la boule est alors donnée par  $p = k/N$ , où  $N$  est le nombre total de points sur l'attracteur. La limite  $p \rightarrow 0$  est obtenue en gardant  $k$  fixé, et en augmentant progressivement  $N$  [Badii 85]. On étudie alors la variation de  $\log \langle r_k^\gamma \rangle$  en fonction de  $\log N$ ,  $r_k$  étant la distance entre un point et son  $k^{\text{ième}}$  plus proche voisin.

Ayant passé en revue différentes définitions de dimensions fractales et leurs méthodes de calcul, nous nous intéressons dans la

section suivante à la détermination de dimensions fractales à partir de données expérimentales, et aux sources d'erreurs systématiques.

Nous nous sommes limités à l'estimation de la dimension de corrélation  $D_2$  par l'algorithme de Grassberger-Procaccia, introduit au 2.2.2.c. En effet, comme nous l'avons souligné plus haut,  $D_2$  est la dimension fractale la plus aisée à obtenir expérimentalement, et c'est celle que nous avons utilisée pour caractériser les attracteurs chaotiques observés dans nos expériences.

Néanmoins, les difficultés pratiques dans le calcul de  $D_2$  que nous allons évoquer interviennent le plus souvent également dans la détermination des autres dimensions fractales.

## 2.4 DETERMINATION EXPERIMENTALE DE $D_2$ ET SOURCES D'ERREURS

### 2.4.1 Introduction

Les algorithmes numériques ne peuvent bien sûr donner au plus qu'une estimation des dimensions fractales, car ils sont nécessairement basés sur des descriptions finies de l'objet fractal considéré, par exemple un nombre fini de points appartenant à l'attracteur d'un système dynamique. La limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  ne peut donc être effectuée de manière rigoureuse.

Cependant, si on observe une loi d'échelle de la forme  $C(r) \approx r^D$  pour  $r$  suffisamment petit, on peut faire l'hypothèse que ce comportement se prolonge jusqu'à des distances arbitrairement petites et déterminer les dimensions fractales à partir de l'exposant de cette loi d'échelle.

Bien que la détermination de la dimension de corrélation  $D_2$  soit l'une des méthodes les plus populaires d'analyse de régimes chaotiques expérimentaux, il est souvent difficile d'estimer la justesse et la précision des estimations numériques obtenues. Dans cette section, nous rappelons comment la dimension de corrélation est déterminée en pratique et nous passons en revue les sources d'erreurs, statistiques et systématiques, les plus susceptibles de falsifier les résultats expérimentaux.

Nous avons vu au chapitre 1 que dans l'immense majorité des cas, on mesure expérimentalement une série temporelle correspondant à une seule variable du système, à partir de laquelle l'attracteur étrange associé est reconstruit par la méthode des délais. Si on dispose d'une quantité infinie de données exemptes de

bruit, l'attracteur reconstruit est difféomorphe à l'attracteur dans l'espace des phases naturel du système, pour presque toute variable du système et presque toute valeur du délai [Takens 81].

Les dimensions fractales étant laissées invariantes par les difféomorphismes, on peut donc espérer en principe les mesurer à partir des attracteurs reconstruits. Cependant la présence, même limitée, de bruit est inévitable, et le nombre de points utilisés pour échantillonner l'attracteur est nécessairement limité. Il s'agit donc de savoir quels effets ces déviations au théorème de Takens entraînent sur la détermination des dimensions fractales.

L'effet du bruit est de brouiller la géométrie de l'attracteur aux petites distances : le niveau de bruit fixe une échelle en dessous de laquelle la structure fractale ne peut plus être résolue. Bien évidemment, le nombre de points utilisés limite également la plus petite échelle de distances explorable.

Certains types d'erreurs systématiques persistent aussi loin que l'on pousse le calcul, d'autres ont pour effet de ralentir sensiblement la convergence de la méthode en fonction du nombre de points utilisés. Or, le nombre de points utilisables en pratique est limité, ne serait-ce que par la puissance des ordinateurs utilisés, bien que certains auteurs aient décrit des méthodes permettant de faire passer le temps de calcul avec  $N$  points de  $O(N^2)$  à  $O(N \log N)$  [Theiler 87, Grassberger 90]. Par ailleurs, dans certains cas, des problèmes de stabilité peuvent limiter l'acquisition de séries temporelles.

Il est donc crucial pour l'expérimentateur d'obtenir une convergence rapide de l'algorithme, c'est à dire une observation de

la loi d'échelle pour un intervalle de distances accessible, et en utilisant un nombre limité de points sur l'attracteur.

#### 2.4.2 Reconstruction de l'attracteur : choix du délai

Avant d'extraire la dimension  $D_2$  des intégrales de corrélation, il faut d'abord reconstruire correctement l'attracteur à partir de la série temporelle obtenue expérimentalement. Pour cela, deux paramètres interviennent de manière essentielle : la dimension de plongement et le délai temporel  $\tau$  entre deux composantes successives d'un vecteur  $(X(t), X(t+\tau), \dots, X(t+(n-1)\tau))$  de l'espace des phases reconstruit à partir de la série temporelle  $X(t)$ .

Le fait qu'une série temporelle expérimentale ne contienne qu'une quantité finie d'information et possède inévitablement une composante bruyante entraîne que toutes valeurs du délai ne sont pas équivalentes. On s'aperçoit donc en pratique que le choix du délai a une grande importance, ce qui peut d'ailleurs se comprendre sur les exemples limites suivants :

- quand le délai tend vers 0, les points tendent à s'accumuler sur la diagonale principale de l'espace des phases, et la loi d'échelle est vérifiée pour des distances de plus en plus petites. Aux échelles accessibles, la dimension estimée d'après l'intégrale de corrélation se rapproche de 1, quelque soit la valeur correcte de  $D_2$ .
- si le délai est trop grand, les coordonnées successives d'un même vecteur seront complètement décorrélées sous l'action du bruit toujours présent. La dimension estimée se rapproche alors de la dimension de plongement.

Entre ces deux extrêmes se trouve une valeur optimale, pour laquelle les propriétés de l'attracteur reconstruit avec  $N$  points reproduisent le plus fidèlement celles de l'attracteur réel. En général, plus la quantité de données est limitée, et plus le choix du délai est crucial.

De nombreuses méthodes ont donc été proposées pour déterminer de manière rigoureuse le délai optimal, et le relier aux temps caractéristiques du système étudié. Par exemple, l'inverse de la fréquence dominante du spectre de Fourier du signal fournit de manière très grossière l'ordre de grandeur du délai.

De manière générale, il est souhaitable d'obtenir le comportement en loi de puissance recherché pour des dimensions de plongement les plus petites possibles. C'est pourquoi on a intérêt à ce que les composantes successives  $X(t)$ ,  $X(t+\tau)$ ,..., des vecteurs de l'espace des phases soient aussi indépendantes que possible, de manière à apporter des informations complémentaires, ce qui n'est pas le cas si le délai choisi est trop petit. Dans ce but, certains auteurs ont proposé par exemple de prendre comme valeur du délai le premier zéro de la fonction d'autocorrélation du signal, ou bien encore le temps pour lequel cette fonction tombe à  $1/e$ .

Néanmoins, une corrélation nulle entre deux variables ne signifie pas qu'elles soient indépendantes, comme le montre le fait que  $\langle \sin t \sin(t+\pi/2) \rangle = 0$ . C'est pourquoi Fraser et Swinney [1986] ont proposé de choisir comme valeur du délai celle correspondant au premier minimum de l'information mutuelle, qui mesure la quantité d'information commune à deux variables : connaissant la valeur de  $X(t)$ , quelle information peut-on en tirer sur les valeurs que va prendre  $X(t+\tau)$  ?

Malgré le fait que l'information mutuelle ne soit pas toujours aisée à calculer numériquement, elle donne en général de manière correcte l'ordre de grandeur du délai. Plus récemment, il a été également proposé de se baser sur le premier minimum par rapport à  $\tau$  de l'intégrale de corrélation  $C_1(\epsilon)$  (2.25) [Liebert 89], ou de rendre maximal le volume moyen de parallèpipèdes construits sur des points pris au hasard sur l'attracteur [Buzug 90]. On peut également citer des méthodes étudiant comment évoluent les proches voisins lorsqu'on augmente la dimension de plongement [Liebert 91].

Il est à noter que ces différentes méthodes donnent en général des valeurs voisines, mais différentes, du délai optimal. En pratique, pour le laser à pertes modulées, nous avons utilisé l'information mutuelle pour estimer l'ordre de grandeur de ce dernier. Puis nous avons calculé l'intégrale de corrélation pour des valeurs du délai comprises dans un intervalle large autour de cette valeur approchée.

Pour chaque valeur du délai, nous avons augmenté progressivement la dimension de plongement jusqu'à ce que la pente de  $\log C(\epsilon)$  en fonction de  $\log \epsilon$  dans la région linéaire ne dépende plus de la dimension de plongement. Nous avons retenu la valeur du délai pour laquelle la loi d'échelle était vérifiée sur le plus grand intervalle de distances. Nous avons trouvé qu'en général cette valeur était de l'ordre de  $T/5$  à  $T/4$ , où  $T$  est la période de modulation.

Il faut noter que les valeurs du délai et de la dimension de plongement ne sont pas des paramètres entièrement indépendants. En première approximation, les pentes obtenues ne sont fonctions

que du produit  $L=(n-1)\tau$ ,  $n$  étant la dimension de plongement, et tendent vers une valeur constante pour  $L$  suffisamment grand. L'interprétation de  $L$  est évidente : il s'agit de l'écart temporel entre la première et la dernière composante du vecteur reconstruit.

Si  $n$  et  $\tau$  sont variés tout en maintenant  $L$  fixé, les vecteurs dans les différents espaces des phases reconstruits contiennent en effet la même information, celle apportée par une séquence de longueur  $L$  de la série temporelle. Il faut cependant noter que ce comportement n'est bien vérifié que si le signal temporel est suffisamment homogène.

Si l'on mesure la série temporelle avec une précision limitée, il est préférable de prendre  $L$  plus grand que le strict minimum. En effet, la sensibilité aux conditions initiales entraîne une divergence des trajectoires, et l'intervalle de distances où la loi d'échelle est vérifiée se déplace vers des distances plus grandes quand  $L$  augmente.

Cependant, si  $L$  est grand, la perturbation apportée par le bruit devient macroscopique sur un intervalle de temps de longueur  $L$  : la première et la dernière composante du vecteur reconstruit ne sont plus reliées de manière déterministe, ce qui entraîne une augmentation de la dimension de corrélation estimée.  $L$  doit donc être approximativement borné par  $L_0 \approx \lceil \log \varepsilon_0 / \lambda \rceil$ , où  $\varepsilon_0$  est le rapport signal sur bruit et  $\lambda$  le plus grand exposant de Lyapunov.

#### 2.4.3 Erreurs statistiques sur l'intégrale de corrélation

L'intégrale de corrélation  $C(\varepsilon)$  (2.19) est définie dans la limite où le nombre de points considérés est infini. L'intégrale de corrélation obtenue en pratique à partir d'un nombre fini de points

est donc sujette à des fluctuations statistiques dont l'amplitude diminue avec le nombre de points utilisés.

Theiler [1990a] a donné à partir de modèles simples une expression heuristique de la déviation standard de l'intégrale de corrélation  $C(N,\varepsilon)$  à  $N$  et  $\varepsilon$  donnés :

$$\sigma_C = \sqrt{\langle C(N,\varepsilon)^2 \rangle - \langle C(N,\varepsilon) \rangle^2} \approx \sqrt{\left( \frac{4 B_{rms}^2}{N/t_0} + \frac{2 C(1-C)}{N^2} \right)} \quad (2.31)$$

où  $N$  est le nombre de points utilisés,  $B_{rms} = \sqrt{\langle C_i(\varepsilon)^2 \rangle - \langle C_i(\varepsilon) \rangle^2}$  est la déviation standard des fonctions de masse individuelles moyennées sur l'attracteur, et  $t_0$  est un temps d'autocorrélation mesuré par rapport à l'écart entre deux vecteurs reconstruits successifs. Il faut noter que dans l'expression (2.31), la moyenne est prise sur l'ensemble des échantillons de  $N$  points, tandis que dans l'expression de  $B_{rms}$ , elle est effectuée sur l'ensemble des points de l'attracteur.

Le temps d'autocorrélation  $t_0$  intervient dans la formule (2.31), car une forte corrélation entre points successifs sur la trajectoire diminue le nombre de points indépendants et augmente par conséquent les fluctuations. On voit que quand  $N$  est suffisamment grand, la déviation standard sur l'intégrale de corrélation est donnée par :

$$\sigma_C \approx \frac{2 B_{rms}}{\sqrt{N/t_0}} \quad (2.32)$$

On voit donc qu'on a essentiellement un comportement en  $1/\sqrt{N}$  et que, si l'on veut réduire  $\sigma_C$  d'un facteur 10, il faut multiplier  $N$  par 100. Par ailleurs,  $\sigma_C$  est proportionnelle à  $B_{rms}$ , qui mesure la variation des densités locales sur l'attracteur. Par conséquent, plus

un attracteur est inhomogène, plus l'erreur statistique sur l'intégrale de corrélation sera importante.

#### 2.4.4 Estimation de $D_2$ à partir de l'intégrale de corrélation

Une fois l'intégrale de corrélation  $C(r)$  calculée, il faut en extraire la dimension de corrélation, qui caractérise le comportement de  $C(r)$  pour  $r$  petit ( $C(r) \approx r^{D_2}$ ). Il n'est évidemment pas question d'utiliser la définition formelle :

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r}, \quad (2.33)$$

puisque même si la loi de puissance est parfaitement vérifiée, le moindre préfacteur devant  $r^{D_2}$  fait converger l'expression précédente de manière logarithmique. Cependant on peut remarquer que l'on a également la relation :

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d \log C(r)}{d \log r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{dC(r)/dr}{C(r)/r} \quad (2.34)$$

Si on trace donc  $\log C(r)$  en fonction de  $\log r$  (fig. 2.5), la courbe doit avoir un comportement linéaire pour  $r$  suffisamment petit, et donc posséder une pente constante égale à la dimension de corrélation.

Cette pente est en général estimée en sélectionnant la région où la loi d'échelle semble bien vérifiée, et en estimant la pente par une procédure de moindres carrés. Bien que cette méthode soit celle que nous ayons utilisée, elle présente cependant quelques inconvénients.

Ainsi, l'erreur statistique sur  $C(r)$  augmente au fur et à mesure que  $r$  diminue : il faut donc en tenir compte dans les poids attribués aux différents points de la courbe, en utilisant par

exemple les résultats rappelés au 2.4.3. Par ailleurs, une méthode de moindres carrés suppose que les erreurs sur les différents points de mesure sont indépendantes, alors que ce n'est évidemment pas le cas pour  $C(r)$ , puisque  $C(r+dr)$  est égal à  $C(r)$  plus le nombre de distances comprises entre  $r$  et  $r+dr$ . On notera en outre que si les erreurs sur l'intégrale de corrélation sont de moyenne nulle, il n'en sera plus de même pour les erreurs sur son logarithme.

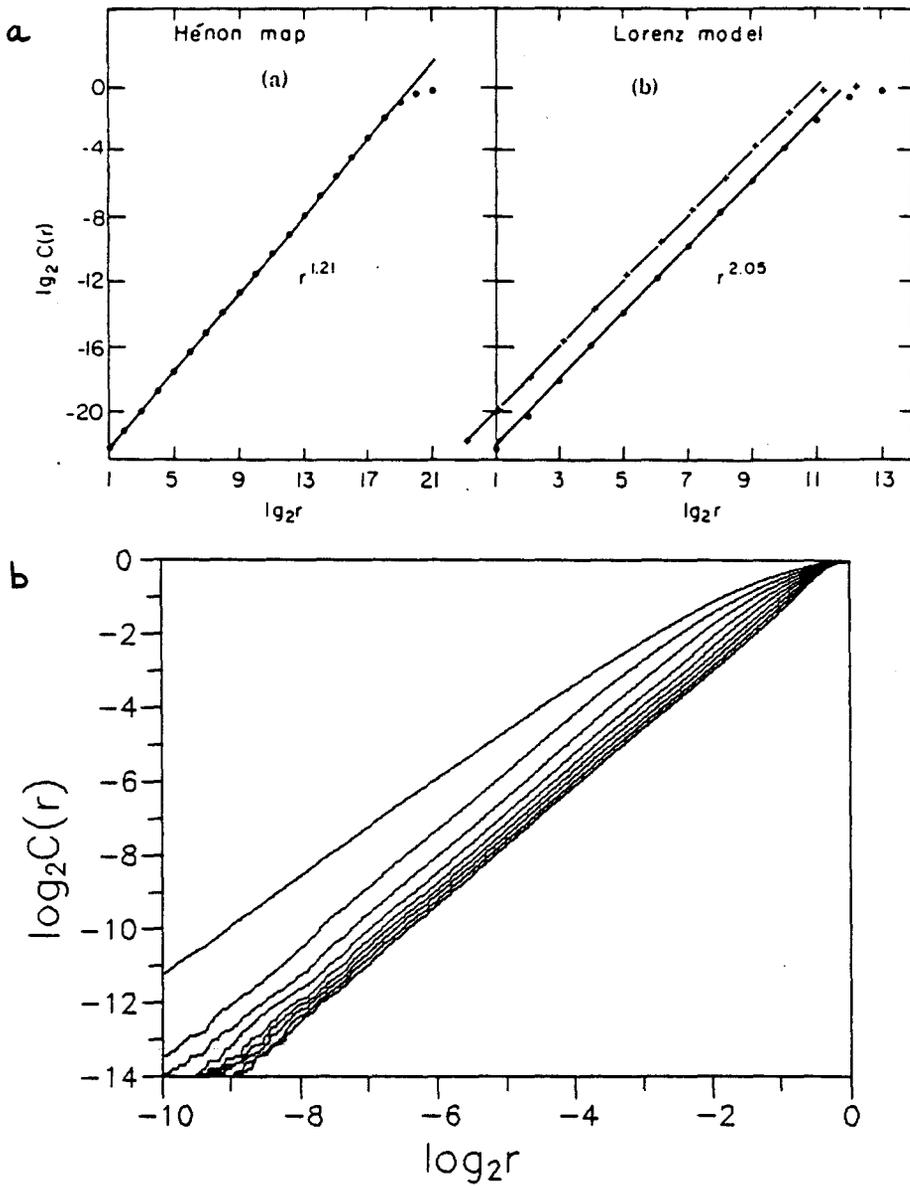
Takens [1985] a proposé une méthode d'estimation de la dimension de corrélation à partir de l'intégrale de corrélation qui présente l'avantage d'être non paramétrique.

Supposons qu'il existe une échelle de distance  $r_0$  telle que pour  $r \leq r_0$ , l'intégrale de corrélation soit donnée exactement par  $C(r) = C_0 r^\alpha$ . Considérons toutes les paires de points dans l'intégrale de corrélation ayant une distance  $r \leq r_0$  et renormalisons ces distances en posant  $\rho = r/r_0$ . nous avons alors un échantillon de  $m$  distances  $\rho_1, \dots, \rho_m \in [0,1]$ . La probabilité d'observer une distance comprise entre  $\rho$  et  $\rho+d\rho$  est égale à  $\alpha \rho^{\alpha-1} d\rho$ , de par la définition de l'intégrale de corrélation.

Pour un  $\alpha$  fixé, la probabilité d'obtenir un échantillon de distances situées dans les intervalles  $[\rho_1, \rho_1+d\rho_1], \dots, [\rho_m+d\rho_m]$  est alors égale à  $\prod (\alpha \rho_i^{\alpha-1} d\rho_i)$ .

Inversement, à partir de l'échantillon  $(\rho_1, \dots, \rho_m)$  résultant du calcul, on peut déterminer la valeur de  $\alpha$  la plus probable comme étant celle qui rend maximale cette probabilité,  $\rho_1, \dots, \rho_m$  étant fixés. Il est facile de montrer, en prenant son logarithme, que la probabilité est maximale quand :

$$\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln \rho_i ,$$



**Fig. 2.5** Estimation de la dimension de corrélation d'après le tracé de  $\log C(r)$  en fonction de  $\log r$ . (a) résultats pour les modèles de Hénon et de Lorenz (d'après Grassberger et Procaccia [1983b]). (b) tracés obtenus pour des valeurs croissantes de la dimension de plongement dans des simulations numériques du laser  $\text{CO}_2$  à pertes modulées. Le fait que les courbes soient parallèles lorsque cette dimension est suffisamment grande indique une convergence vers une valeur finie de  $D_2$ .

et par conséquent la valeur de  $\alpha$  la plus probable est donnée par :

$$\alpha = - \frac{1}{\langle \ln(r/r_0) \rangle} \quad (2.36)$$

L'estimateur de Takens en fonction de  $R$  effectue cette moyenne sur toutes les distances inférieures à  $R$  et est donné en fonction de l'intégrale de corrélation  $C(r)$  par :

$$D_T(R) = \frac{-\sum_{ij} H(R-r_{ij})}{\sum_{ij} H(R-r_{ij}) \ln(r_{ij}/R)} = \frac{C(N,R)}{R \int_0^R (C(N,r)/r) dr} \quad (2.37)$$

Par conséquent, si il existe une loi d'échelle pour  $r$  suffisamment petit, on doit observer que  $\lim_{R \rightarrow 0} D_T(R) = D_2$ . Bien que la

moyenne dans (2.37) soit faite sur toutes les distances inférieures à  $R$ , la valeur de  $D_T(R)$  est de façon surprenante assez proche de la valeur de la pente locale de  $\log C(r)$  en fonction de  $\log r$ . Cela est dû en partie au fait que les grandes distances  $r_{ij}$  sont beaucoup plus nombreuses que les petites.

Remarquons que si l'intégrale de corrélation est perturbée par le bruit en dessous d'une certaine échelle, on peut écrire une formule équivalente, où l'intégrale est effectuée entre une valeur finie  $r_1$  et  $R$ .

Cet estimateur se révèle très utile pour l'analyse d'attracteurs obtenus par des simulations numériques. On trouvera un exemple dans la figure 2.6.

Par contre, son application à des signaux expérimentaux est malaisée, car les logarithmes des distances sont obtenus de manière

très imprécise pour les distances proches de la résolution de l'échantillonneur utilisé.

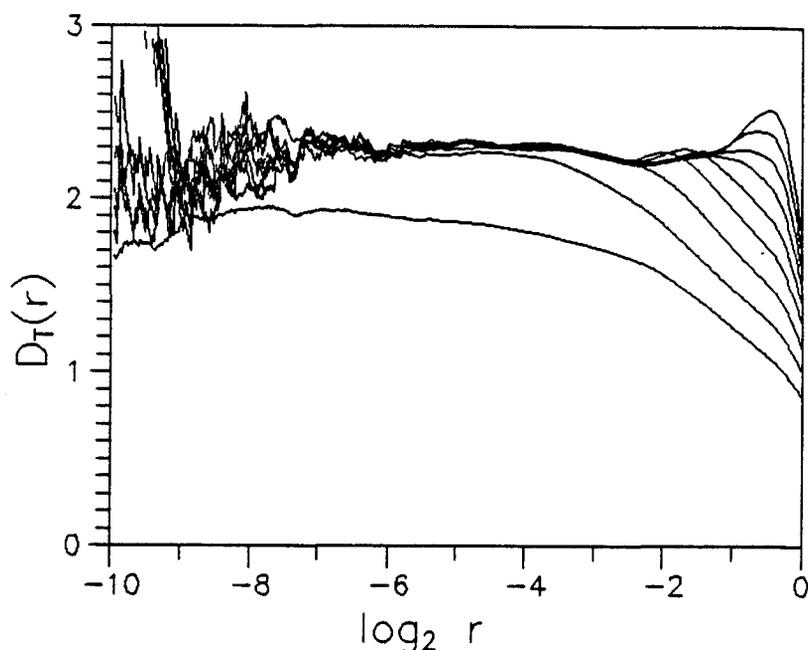


Fig. 2.6 Analyse des courbes de la fig. 2.5 à l'aide de l'estimateur de Takens.

## 2.4.5 Effets géométriques

### 2.4.5.a Effets de bord

Il existe bien évidemment une échelle de distance au dessus de laquelle l'intégrale de corrélation  $C(r)$  ne peut plus varier comme  $r^{D_2}$ , qui est le diamètre  $R_0$  de l'attracteur : quelque soit  $r > R_0$ ,  $C(r) = 1$ . L'intégrale de corrélation ne présente donc pas en général la loi d'échelle attendue pour les valeurs de  $r$  de l'ordre de grandeur du diamètre de l'attracteur, ce qui limite la partie utile de  $C(r)$ .

Par ailleurs, il faut remarquer que les points situés près des bords de l'attracteur ne contribuent correctement à l'intégrale de corrélation que pour des distances  $r$  plus petites que leur distance

au bord. Cet effet s'accroît quand la dimension de l'attracteur augmente, car une fraction croissante de points se retrouve très près des bords de l'attracteur.

On peut, pour donner un exemple simple, considérer le problème d'un hypercube de dimension  $m$  et de côté 1, rempli uniformément. Dans ce cas, l'intégrale de corrélation peut être calculée exactement et est donnée par  $C(r) = (2r-r^2)^m$ . La pente locale  $v(r)$  du tracé de  $\log C(r)$  en fonction de  $\log r$  est égale à :

$$v(r) = \frac{d \log C(r)}{d \log r} = \frac{m(1-r)}{(1-r/2)} \quad (2.38)$$

Si l'on veut que  $v(r)$  soit égale à  $D_2 = m$  avec une certaine tolérance, il faut donc ne considérer que les valeurs de l'intégrale de corrélation obtenues pour des distances inférieures à un certain  $r_{\max}$ . Dans l'exemple ci-dessus, il faut pour obtenir une estimation à 5% près, ne considérer que des distances inférieures à  $r_{\max} = 0,1$ .

Quand la dimension de l'attracteur est relativement élevée, cela impose des contraintes importantes sur le nombre de points à utiliser pour calculer l'intégrale de corrélation, et qui ont été analysées par Smith [1988]. Smith a avancé que l'ordre de grandeur  $N_{\min}$  du nombre de points nécessaires pour déterminer la dimension de corrélation d'un attracteur de dimension  $D$  à 5% près, sur une gamme de distances  $[r_{\min}, r_{\max}]$  avec au moins  $r_{\min}/r_{\max} = 1/4$ , était donné approximativement par :

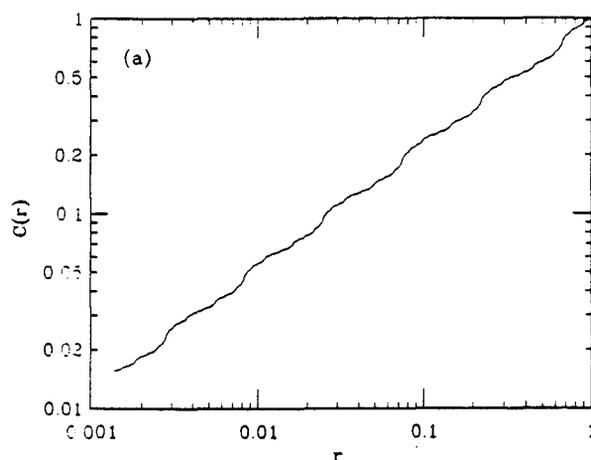
$$N_{\min} = 42^D \quad (2.39)$$

#### 2.4.5.b Lacunarité

Quand on trace le logarithme de l'intégrale de corrélation  $C(r)$  en fonction de  $\log r$ , on n'obtient pas toujours un comportement

parfaitement linéaire pour  $r$  suffisamment petit, même si les paramètres choisis pour le calcul sont optimaux.

Dans certains cas,  $\log C(r)$  montre des oscillations plus ou moins importantes autour d'une pente moyenne égale à la dimension fractale (fig. 2.7) [Badii 84, Smith 86, Theiler 88]. Si la dimension fractale peut alors être définie comme la pente moyenne du tracé log-log, il est cependant nécessaire d'étudier le comportement de l'intégrale de corrélation sur plusieurs ordres de grandeur, afin de pouvoir estimer correctement cette pente moyenne : une estimation sur une plage limitée de distances peut conduire à des fluctuations importantes.



**Fig. 2.7** Intégrale de corrélation de l'ensemble de Cantor obtenu en retirant récursivement le tiers central de l'intervalle. La lacunarité se manifeste par les oscillations de la courbe (d'après Theiler [1988]).

Arnéodo et al. [1987] ont ainsi montré que ce phénomène était le facteur limitant dominant dans l'évaluation des dimensions généralisées de l'attracteur de Hénon et ont proposé d'évaluer dans

ce cas le spectre de dimensions par transformée de Legendre du spectre de singularités  $f(\alpha)$  [Halsey 86].

#### 2.4.6 Corrélation entre voisins temporels

Déterminer une dimension fractale à partir d'une série temporelle suppose que les  $N$  points de l'attracteur reconstruit échantillonnent de manière représentative la structure de l'attracteur chaotique. Entre autres, les proches voisins d'un point doivent être alignés de manière équilibrée selon les directions tangentes à l'attracteur en ce point. Comme nous le verrons ci-dessous, une corrélation excessive entre points successifs sur la trajectoire utilisée peut dégrader de manière significative la qualité de l'attracteur reconstruit.

Atten et al. [1984] ont ainsi remarqué qu'un intervalle de temps insuffisant entre points successifs sur la trajectoire pouvait détruire la loi d'échelle aux petites distances. L'explication est simple : si les points successifs sur la trajectoire sont trop rapprochés, les plus proches voisins d'un point quelconque de l'attracteur reconstruit seront ses voisins temporels, c'est à dire les points par lesquels la trajectoire du système est passée juste avant et juste après lui.

Aux petites distances, l'attracteur sera alors perçu comme une courbe à une dimension, et les pentes des tracés log-log de l'intégrale de corrélation tendront vers 1, s'éloignant donc de la valeur réelle de la dimension de corrélation. L'idéal serait évidemment de prendre des points successifs aussi éloignés que possible, chaque vecteur étant formé à partir d'échantillons décalés d'un délai convenable. Il suffit de prendre pour cela une série temporelle suffisamment grande.

Cependant, si la longueur maximale des séries temporelles enregistrables est limitée (par exemple pour des raisons de stationnarité), l'intervalle entre vecteurs successifs ne peut être pris aussi grand qu'on le veut, puisque le temps d'échantillonnage doit rester au moins plus petit que le délai optimal. De plus, si l'on veut pouvoir ajuster ce délai pour trouver la valeur optimale, il n'est pas déraisonnable de prendre un temps d'échantillonnage de l'ordre du dixième de l'ordre de grandeur du délai optimal.

Theiler [1986] a mis en évidence un effet de même nature, plus général, faisant intervenir les corrélations entre voisins temporels sur une trajectoire, et a proposé une solution à ce problème.

Il a ainsi montré que les intégrales de corrélation obtenues à partir d'un bruit gaussien de temps de corrélation fini pouvaient présenter des anomalies susceptibles de laisser croire à une saturation des pentes des tracés log-log.

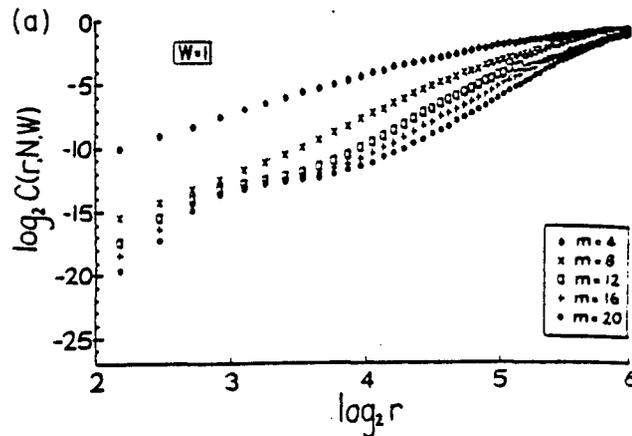
Dans le cas de données provenant d'un système déterministe, il a montré qu'un temps de corrélation non négligeable devant le temps d'échantillonnage pouvait de même distordre les intégrales de corrélation et réduire de manière très importante la plage de distances utilisable pour déterminer la dimension de corrélation (fig. 2.8).

En analysant le cas du bruit gaussien à temps d'auto-corrélation fini, il a montré que pour éviter cette source d'erreur systématique, la longueur  $N$  de la série temporelle devait vérifier :

$$N \gg 2 \tau^m, \quad (2.40)$$

où  $\tau$  est le temps d'autocorrélation de la série temporelle et  $m$  la dimension de plongement. On peut vérifier que si par exemple  $\tau = 10$  et  $m=10$ , le critère ci-dessus donne  $N \gg 2 \cdot 10^5$ .

Pour diminuer  $\tau$ , on peut évidemment diminuer le taux d'échantillonnage, mais l'on a vu que l'on ne pouvait pas descendre en dessous d'un taux minimal.



**Fig. 2.8** Déviations systématiques dues à une trop grande corrélation entre voisins temporels sur la trajectoire, dans l'analyse du modèle de Mackey-Glass (d'après Theiler [1986]).

Une autre possibilité, proposée par Theiler, est d'exclure du calcul de l'intégrale de corrélation les paires de proches voisins temporels. Le nombre  $W$  de proches voisins temporels à exclure pour obtenir des résultats corrects est de l'ordre de :

$$W \approx \tau \left( \frac{2}{N} \right)^{2/m}, \quad (2.41)$$

ce qui nous donne pour notre exemple précédent  $W \approx 2$ , si on dispose d'une série temporelle comportant  $N = 10^4$  points. On élimine ainsi  $2N$  distances parmi  $N(N-1)/2$ , soit un nombre négligeable de distances si  $N$  est suffisamment grand. Il convient donc en pratique de vérifier que les intégrales de corrélation que

l'on obtient ne varient pas si on élimine les distances entre proches voisins temporels.

On remarquera que pour ce type d'erreur systématique, un faible niveau de bruit peut paradoxalement jouer un rôle positif en diminuant le temps d'autocorrélation des trajectoires du système.

#### **2.4.7 Bruit aléatoire et bruit de quantification**

Même si le système que l'on étudie obéit à des lois strictement déterministes, les signaux temporels acquis au cours d'expériences seront toujours plus ou moins entachés de bruit provenant des dispositifs de mesure ou de fluctuations dans les paramètres du système. Des niveaux de bruit trop importants masquent bien évidemment la nature déterministe des processus à l'oeuvre et il n'est alors pas question de déterminer une dimension de corrélation.

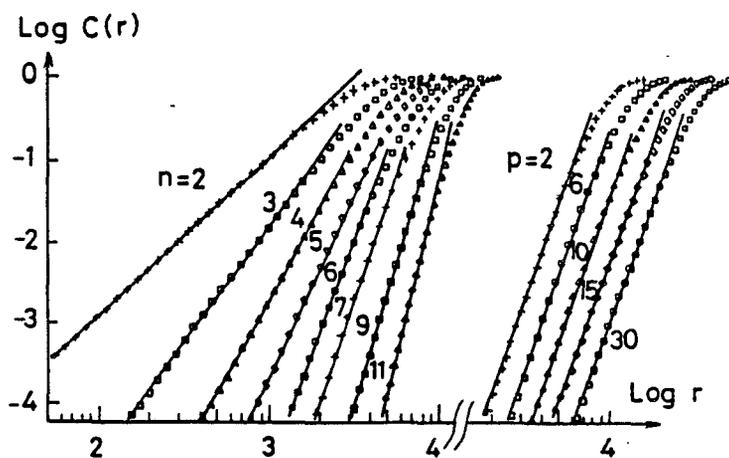
Par ailleurs, l'acquisition des signaux est en général effectuée par des convertisseurs analogique-numérique qui discrétisent les valeurs prises par le signal et introduisent ainsi une perturbation supplémentaire.

Dans cette section, nous rappelons comment le bruit aléatoire et le bruit de quantification influent sur la détermination de la dimension de corrélation.

##### **2.4.7.a Bruit aléatoire**

Si l'on considère du bruit blanc, dont le temps d'autocorrélation est strictement nul, des échantillons successifs seront totalement décorrélés et l'espace des phases obtenu par la méthode des délais sera rempli de manière dense. On trouve donc dans ce cas une dimension de corrélation égale à la dimension de l'espace des

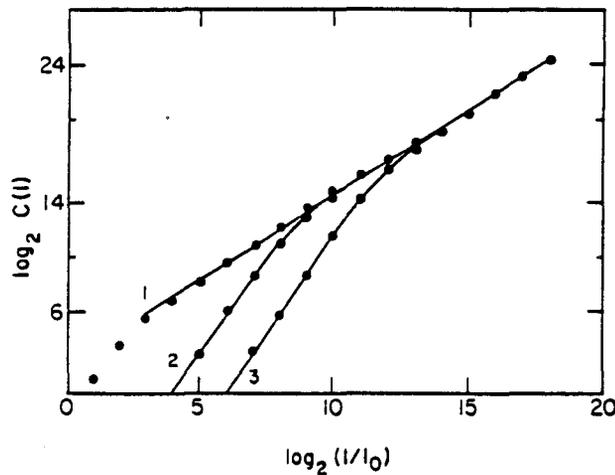
phases dans lequel on a effectué le plongement. Cette propriété permet d'ailleurs en principe de distinguer en principe un signal déterministe d'un signal bruyant, car pour celui-ci la dimension de corrélation augmente en même temps que la dimension de plongement (fig 2.9).



**Fig. 2.9** Intégrales de corrélation obtenues pour (a) des valeurs croissantes de la dimension de plongement, (b) des valeurs croissantes du délai temporel, dans le cas de bruit blanc (d'après Atten et al. [1984]).

Si on considère un système déterministe perturbé par du bruit, on peut montrer que les trajectoires bruyantes que l'on observe restent proches de vraies trajectoires. La structure fractale de l'attracteur reconstruit sera donc préservée à grande échelle, mais brouillée en dessous de l'échelle correspondant au niveau moyen de bruit. On admet donc généralement que l'intégrale de corrélation  $C(r)$  est affectée uniquement pour des valeurs de  $r < r_0$ , où  $r_0$  est le niveau moyen de bruit [Ben Mizrachi 83].

En traçant l'intégrale de corrélation en fonction de la distance en coordonnées logarithmiques, on doit donc avoir une région contaminée par le bruit, où la pente augmente avec la dimension de plongement et une région où l'on observe la loi d'échelle fractale et dont la pente est égale à la dimension de corrélation (fig. 2.10).



**Fig. 2.10** Effet du bruit sur l'intégrale de corrélation pour des signaux déterministes. Les courbes 1, 2 et 3 correspondent à des niveaux de bruit croissants. La pente augmente brusquement pour les distances situées en dessous du niveau de bruit (d'après Ben Mizrahi et al. [1983]).

En fait, si le niveau moyen de bruit n'est pas très éloigné de la région où l'on observe la loi d'échelle, la valeur de  $D_2$  estimée à partir de la pente continue d'augmenter légèrement avec la dimension de plongement, car la présence de bruit éloigne en moyenne deux points sur l'attracteur.  $C(r)$  décroît donc plus vite qu'en l'absence de bruit et une pente légèrement trop grande est estimée.

Les études numériques de Möller et al. [1989] semblent montrer que, indépendamment de la distribution de probabilité du

bruit, la dimension  $\Delta$  calculée à partir de l'intégrale de corrélation est approximativement reliée à la dimension réelle  $D_2$  par une loi de la forme :

$$\Delta = D_2 (1+K (\delta/\bar{r})^2), \quad (2.42)$$

où  $\delta$  est le niveau moyen de bruit,  $\bar{r} = \sqrt{r_1 r_2}$ ,  $r_1$  et  $r_2$  étant les bornes de la région utilisée pour le calcul de la pente  $\Delta$ , et  $K$  une constante positive de l'ordre de l'unité. Möller et al ont en conséquence proposé des corrections à la loi de puissance, de la forme :

$$C(r) = k r^\Delta \exp[-\frac{1}{2}\Lambda(\delta/r)^2], \quad (2.43)$$

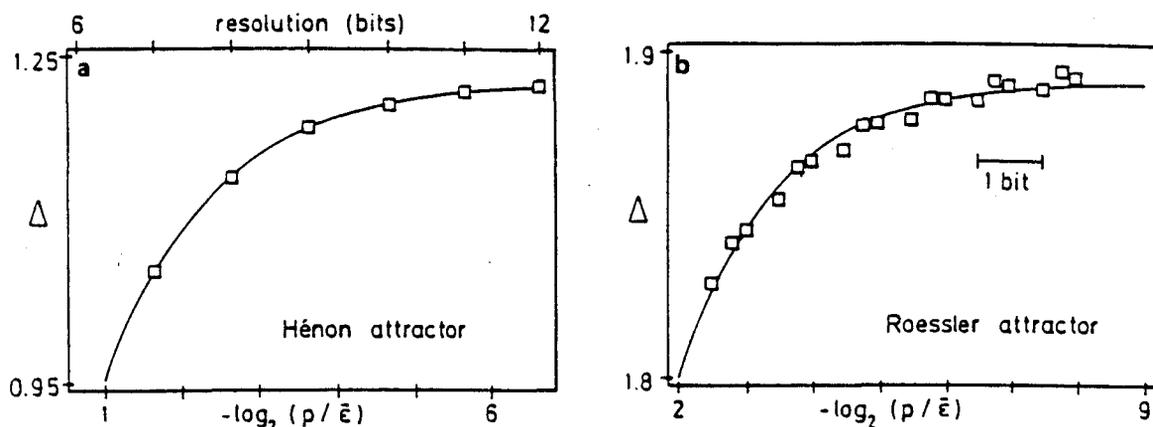
mais il est néanmoins délicat d'appliquer de telles formules dans la mesure où on ne connaît pas toutes les erreurs systématiques.

#### 2.4.7.b Bruit de quantification

Lors de l'enregistrement numérique d'un signal expérimental, celui-ci est transformé en une série de valeurs entières. La résolution d'un convertisseur analogique-numérique indique le nombre de valeurs différentes pouvant être prises. Ainsi un convertisseur 8 bits donnera des valeurs comprises entre 0 et 255, un convertisseur 16 bits des valeurs entre 0 et 65535.

Comme le signal est converti en la valeur entière la plus proche, on pourrait à priori songer à modéliser ce processus par un bruit de distribution rectangulaire superposé au signal original, dont le niveau est d'autant plus élevé que la résolution de l'échantillonneur est faible. Une résolution limitée devrait conduire alors à une surestimation de la dimension de corrélation.

Or Möller et al. [1989] ont montré qu'une résolution limitée induisait au contraire une sous-estimation de la dimension fractale : le processus d'échantillonnage est un processus déterministe et ne peut être assimilé à du bruit aléatoire (fig 2.11).



**Fig 2.11** Effet du bruit de digitalisation sur la détermination de la dimension de corrélation.  $p$  représente la résolution de l'échantillonneur, et  $\bar{\epsilon}$  l'ordre de grandeur de l'intervalle de distances utilisé pour estimer la dimension  $\Delta$  (d'après Möller et al. [1989]).

La manière la plus simple d'analyser et de corriger les effets dus à la quantification est d'utiliser la norme du maximum pour calculer les distances entre deux points de l'attracteur reconstruit. En appelant  $2p$  la valeur du plus petit bit significatif, la distance entre deux points sur l'attracteur sera arrondie au multiple de  $2p$  le plus proche, et l'intégrale de corrélation ne peut évidemment être évaluée que pour des multiples de  $2p$ .

Comme  $C(r)$  compte les distances inférieures à  $r$ , les distances arrondies au multiple de  $2p$  immédiatement supérieur ne modifient pas l'intégrale de corrélation, alors que les distances arrondies au

multiple immédiatement inférieur vont l'augmenter. On aura donc  $C_{qu}(2mp) > C_0(2mp)$ , où  $C_{qu}$  et  $C_0$  sont les intégrales de corrélation respectivement avec et sans quantification. Cependant, on peut écrire de manière approximative :

$$C_{qu}(2mp) = C_0(2mp+p), \quad (2.44)$$

en supposant que toutes les distances jusque  $2mp+p$  ont été arrondies à  $2mp$ . Si on trace naïvement  $C_{qu}$  en fonction de  $\log(2mp)$ , on trouvera une pente égale à :

$$\Delta = \frac{\log(r+p)D_2}{\log r} \approx D_2(1-p/r). \quad (2.45)$$

On voit que pour  $r$  de l'ordre de grandeur de  $p$ , l'erreur systématique est substantielle. Quand la résolution du convertisseur est limitée, ce qui est le cas de l'oscilloscope numérique 8 bits LeCroy 9400 utilisé dans nos expériences, la loi d'échelle fractale commence à apparaître à des échelles très peu supérieures à l'unité d'échantillonnage, ce qui entraîne une distorsion des plateaux que l'on devrait observer. Il existe heureusement une correction simple qui semble donner de bons résultats, basée sur la relation (2.44), et qui consiste à tracer  $C_{qu}(2mp)$  en fonction de  $\log(2mp+p)$ .

Il faut remarquer que l'erreur systématique est due ici au fait que l'erreur sur le signal et le signal lui-même sont fortement corrélés. Si l'on a un niveau de bruit comparable à  $p$ , cette corrélation va être substantiellement diminuée et l'erreur systématique va être réduite. Avant d'appliquer cette correction, il convient donc de procéder à une estimation du niveau de bruit dans le dispositif expérimental.

### 2.4.8 Effet du filtrage

Nous venons de voir que la présence de bruit dans des signaux expérimentaux pouvait nuire à une bonne estimation de la dimension de corrélation. Comme le bruit de mesure est en général un bruit haute fréquence, on pourrait songer à filtrer le signal avant de l'échantillonner et améliorer ainsi les calculs d'intégrales de corrélation.

Or, Badii et al. [1986,88] ont montré que cela est délicat : le filtrage du signal peut introduire une erreur systématique dans la mesure de  $D_2$ , d'autant plus sévère que la fréquence de coupure est basse. Paradoxalement, le filtrage complique la structure fractale de l'attracteur reconstruit, et donne lieu à des surestimations de la dimension.

Si on modélise le filtre par l'équation différentielle :

$$\frac{dz}{dt} = -\alpha z(t) + x(t), \quad (2.46)$$

où  $x(t)$  est une variable du système et  $z(t)$  le signal de sortie du filtre, on peut se faire une idée simple de l'origine de cet effet à l'aide de la dimension de Lyapunov, dont on a vu plus haut qu'elle était très proche de la dimension d'information.

En effet, la variable  $z$ , qui est celle mesurée effectivement, est déterminée par les équations du système et par l'équation (2.46). L'effet de celle-ci est d'apporter un exposant de Lyapunov supplémentaire, égal à  $-\alpha$ . Supposons que le spectre d'exposants du système non filtré soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, 0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ . Notons  $S_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i$

et supposons que  $S_{k+1} < 0$ . On a alors selon les valeurs de  $\alpha$  :

$$D_L(\alpha) = \begin{cases} k+S_k/\lambda_{k+1} & \text{pour } \lambda_{k+1} < -\alpha \\ k+S_k/|\alpha| & \text{pour } -\alpha < \lambda_{k+1} \text{ et } S_{k-\alpha} < 0 \\ k+1+(S_{k-\alpha})/\lambda_{k+1} & \text{pour } -\alpha < \lambda_{k+1} \text{ et } S_{k-\alpha} > 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

On voit que dans la limite où  $\alpha$  tend vers 0, la dimension de Lyapunov est celle du système non filtré augmentée d'une unité. Cet effet a été mis en évidence à la fois numériquement et expérimentalement (fig 2.12).

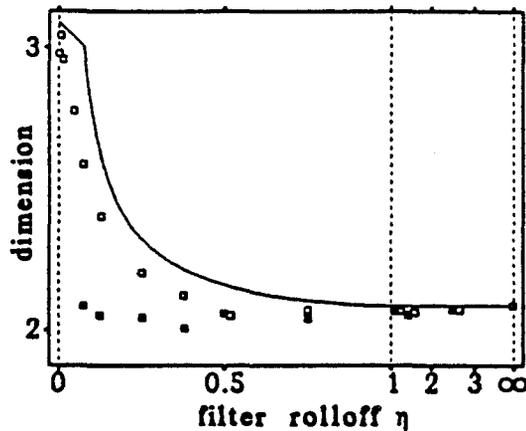


Fig. 2.12 Dimensions estimées d'un attracteur chaotique en fonction de la fréquence de coupure du filtre utilisé. La ligne en trait plein indique la dimension de Lyapunov, les carrés blancs indiquent  $D_2$  (d'après Mitschke [1990]).

On notera que même si le signal expérimental n'est pas délibérément filtré, les dispositifs de la chaîne de mesure, détecteurs ou amplificateurs, peuvent, si le système étudié est très dissipatif, avoir des fréquences de coupure de l'ordre de grandeur du plus petit exposant de Lyapunov négatif.

Pour remédier à ce problème, certains auteurs ont proposé de mesurer la dérivée du signal filtré et ont montré que l'erreur systématique semblait éliminée dans ce cas. L'opération de

différentiation, numérique ou analogique, a malheureusement pour effet, de relever le niveau de bruit, et cette procédure semble difficilement applicable à des situations expérimentales.

Par ailleurs, Mitschke [1990] a montré que des filtres non causaux n'entraînaient pas de surestimation de la dimension fractale. De tels filtres peuvent donc éventuellement être utilisés dans un traitement numérique du signal. On remarquera cependant que la plupart des dispositifs d'une chaîne de mesure sont bien évidemment des filtres causaux.

## 2.5 LE LASER A MODULATION DE PERTES : QUELLE VARIABLE UTILISER POUR RECONSTRUIRE L'ATTRACTEUR ?

En principe, d'après le théorème de Takens, presque toute variable du système peut être utilisée pour reconstruire l'attracteur selon la méthode des délais, et à notre connaissance, aucune étude n'a mis en évidence jusqu'ici de différences significatives entre les résultats obtenus pour deux variables différentes d'un même système.

C'est pourquoi, pour mesurer les dimensions de corrélation de régimes chaotiques observés dans le laser à modulation interne, nous avons initialement mesuré l'intensité émise par le laser en fonction du temps. Il s'agissait en effet de la variable expérimentale la plus facilement accessible. Cependant, les résultats obtenus ainsi étaient de très mauvaise qualité, et présentaient une convergence médiocre en fonction de la dimension de plongement.

Une des caractéristiques du laser à modulation interne est de fournir un signal très inhomogène : dans les régimes à forte modulation, de longues périodes d'intensité extrêmement faible séparent de brèves impulsions dont l'intensité maximale est supérieure de plusieurs ordres de grandeur à celle des périodes léthargiques. Ce comportement induit dans l'espace des phases reconstruit une densité anormalement grande au voisinage du point correspondant à une intensité constante nulle. Pour les dimensions de plongement trop faibles, l'attracteur se comporte alors, statistiquement, comme un point.

Pour remédier à ce problème, nous avons choisi de mesurer non pas l'intensité de sortie du laser elle-même, mais son

logarithme, qui est d'une certaine façon une variable plus naturelle [Lefranc 92]. Celui-ci est obtenu à l'aide d'un amplificateur logarithmique. Des simulations numériques effectuées auparavant, sur un modèle simple de ce type de laser, avaient en effet montré que les intégrales de corrélation obtenues avec le logarithme de l'intensité présentaient dans certains cas une loi d'échelle fractale très nette pour des dimensions de plongement égales à 4, alors qu'aucune loi d'échelle, même dans des espaces des phases de dimension élevée, ne pouvait être obtenue avec l'intensité.

Nous avons pu retrouver expérimentalement le même effet et obtenir de meilleures estimations de la dimension de corrélation que précédemment, bien que l'échantillonnage des signaux sur 8 bits impose de sérieuses limitations, en réduisant notablement les échelles de distances où la loi d'échelle fractale peut être observée.

On voit donc que le choix de la fonction utilisée pour reconstruire l'attracteur peut se montrer crucial, au même titre que celui du délai, dont la conséquence a été beaucoup mieux étudiée jusqu'ici. On peut se demander alors si il est possible de dégager un critère permettant de systématiser le choix de la variable mesurée. Par ailleurs, on pourrait imaginer de déterminer, à partir de mesures faites sur une variable quelconque du système, le changement de variable optimisant la mise en oeuvre de l'algorithme de Grassberger-Procaccia.

L'analyse serait ensuite faite sur le signal mis en forme et permettrait ainsi de retirer le maximum d'information des données expérimentales dont on dispose.

Nous n'avons pas fait d'analyse systématique du spectre de dimensions généralisées, après avoir fait quelques essais plus ou

moins concluants. Cependant, on peut se demander quel peut être l'effet sur ce spectre de changements de variables modifiant notablement la répartition des points sur l'attracteur, les algorithmes de calcul de dimensions généralisées mesurant justement ces variations de densité sur l'attracteur.

## **ANNEXE AU CHAPITRE 2**



## Improved correlation dimension estimates through change of variable

M. Lefranc, D. Hennequin and P. Glorieux

*Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne<sup>1</sup>, UFR de Physique, Université de Lille I, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

Received 16 December 1991; accepted for publication 6 January 1992

Communicated by D.D. Holm

To evaluate the correlation dimension of chaotic regimes of a CO<sub>2</sub> laser with modulated losses, attractor reconstruction using the method of delays is performed using the logarithm of the intensity rather than the intensity itself. Improved convergence with respect to the embedding dimension and better reliability are observed.

### 1. Introduction

The measure of quantities like dimensions, entropies and Lyapunov exponents has by now become standard to analyze and characterize the chaotic dynamics which can be observed in a variety of experimental systems [1]. Most of the time, they are evaluated by reconstructing from a single time series the underlying strange attractor in  $\mathbb{R}^n$  using the method of time delays proposed by Takens and Packard et al. [2]. Indeed, in the limit of an infinite, noise-free time series, the reconstructed attractor is shown to be diffeomorphic to the original one and may therefore be used to compute the above-mentioned quantities, which are left invariant by diffeomorphisms. Nevertheless the experimentalist is not only interested in the validity, but also in the robustness of the method, as he obtains from experiments finite time series corrupted by noise. He is furthermore limited by the computer time necessary to run the computational algorithms.

Among the different quantitative measures of chaotic behaviors, one of the most widely used is the evaluation of the correlation dimension of the reconstructed attractor through the Grassberger–Procaccia algorithm [3]. This procedure indicates the minimum number of degrees of freedom nec-

essary to account for the observed dynamics and characterizes the fractal nature of the attractor by a number which may be compared to those obtained from numerical simulations of models of the system under consideration. Among the whole spectrum of generalized dimensions [4], the correlation dimension  $D_2$  is the easiest to compute because it needs fewer data points and does not require finite sample corrections [5].

While the Grassberger–Procaccia algorithm is rather easy to implement, numerous sources of systematic errors may often prevent the result from accurately reproducing the correlation dimension of the original attractor. These include for example the effect of random and digitizing noise [6], of low-pass filtering of the signal [7], of a too strong correlation between temporal neighbours on the trajectory [8].

We will try to show in the sequel that a strong non-uniformity of the attractor can also alter the determination of the correlation dimension, and how this effect may be substantially corrected by an adequate change of variable. This will be illustrated using experimental signals and numerical simulations of a CO<sub>2</sub> laser with modulated losses, comparing attractors reconstructed with the output intensity of the laser and with the logarithm of this intensity.

<sup>1</sup> Unité de recherche associée au CNRS.

## 2. Experimental system

The experimental signals presented hereafter come from a CO<sub>2</sub> waveguide laser with an electrooptic crystal and a ZnSe Brewster angle plate inserted inside the cavity of the laser [9]. A sinusoidal voltage is applied to the crystal at a frequency of 382.5 kHz, which results in modulation of the losses for the laser. The typical scenario encountered when increasing the modulation amplitude is a sequence of period doublings culminating in chaos [9]. The output intensity of the laser is measured with a HgCdTe detector and data acquisition is done with a LeCroy 9400 transient digitizer with a maximum sampling rate of 100 MHz, a storage capacity of 32000 samples and a resolution of eight bits.

The signals which may be seen on the first rows of figs. 1a and 2a have been recorded respectively at the end of the inverse cascade and further in the chaotic region. The intensity of the laser is often close to the zero intensity, so that a large number of points (15% and 45% in the case of figs. 1a and 2a respectively) in the time series have the same digitized value. When reconstructing the attractor using the method of time delays, small regions of the attractor contain most of the data points, unless very high embedding dimensions are used. This is a problem for accurately evaluating the correlation dimension, since the fractal structure is poorly resolved in those overpopulated parts of the attractor, due to the limited resolution of the digitizer. Similar signals with long periods of almost constant intensity may also be found in other chaotic lasers such as the laser with a saturable absorber [10] and the doped fiber laser with pump modulation [11]. Heavy low-pass filtering of the signal was used in ref. [12] to circumvent this problem. However, this introduces systematic errors as discussed by Badii et al. [7].

This feature of temporal signals in lasers can easily be explained by the fact that intracavity absorption and gain through stimulated emission are proportional to the intracavity radiation intensity  $I$ . This may be illustrated for example by the evolution equations for  $I$  and the inversion population  $D$  obtained from a single-mode, homogeneously broadened, two-level model for our laser with modulated losses [13]:

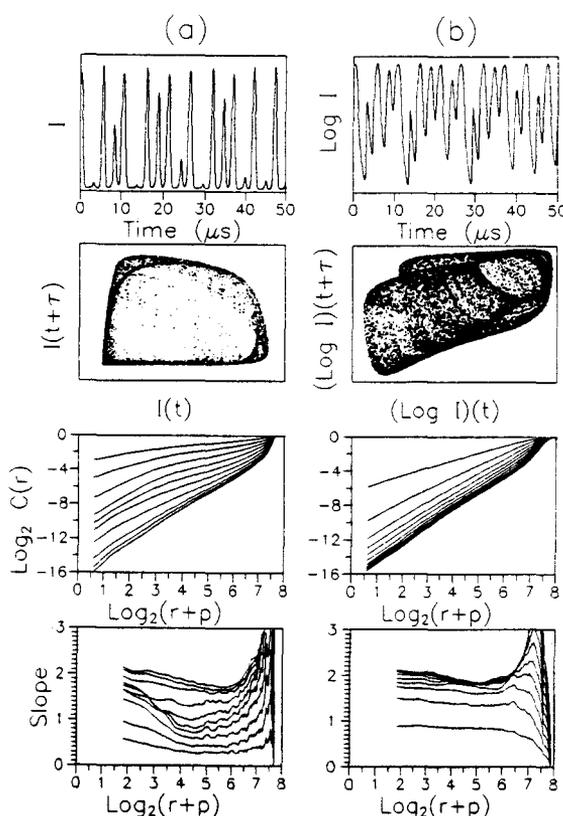


Fig. 1. Comparison of the attractors reconstructed with: (a) output of the HgCdTe detector, (b) output of the logarithmic amplifier. Row 1: simultaneous temporal sequences (625 samples). Row 2: phase portraits (20000 samples).  $\tau = 7\Delta t$ , where  $\Delta t = 80$  ns is the sampling time. Row 3: log-log (base 2) plot of the correlation integral versus length scale ( $r+p$ ) for embedding dimensions 1 to 10 using  $\tau$  as delay and 5000 data points. Row 4: slopes of the log-log plots of the correlation integral versus length scale for embedding dimensions 1 to 10.

$$\frac{dI}{dt} = 2\kappa I(AD - 1 - m \sin \omega t),$$

$$\frac{dD}{dt} = \gamma[1 - D(1 + I)], \quad (1)$$

where  $\kappa$  is the cavity damping rate,  $A$  the pump parameter,  $m$  and  $\omega$  the modulation amplitude and frequency,  $\gamma$  the population inversion relaxation rate. The time derivative of  $I$  being proportional to  $I$ , the intensity seems to be frozen when it comes close to zero. It is then natural to use the logarithm of the intensity, whose time derivative is

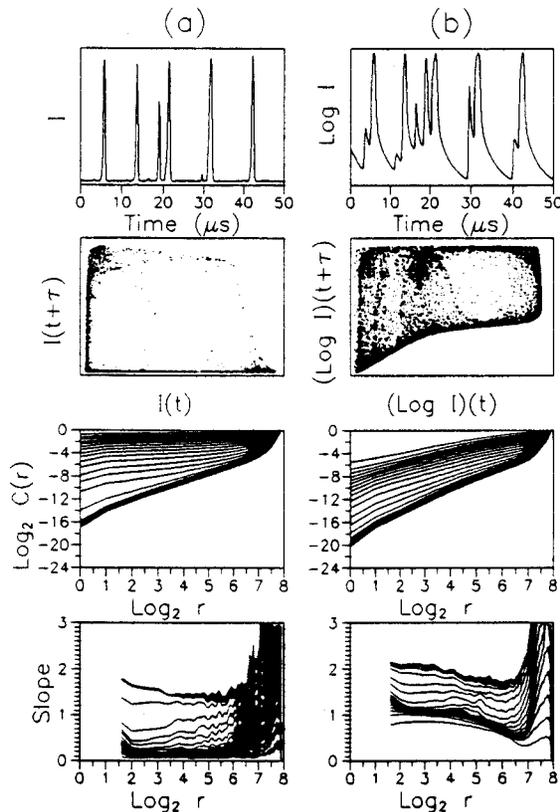


Fig. 2. Comparison of the attractors reconstructed with: (a) output of the HgCdTe detector, (b) output of the logarithmic amplifier. Row 1: simultaneous temporal sequences (625 samples). Row 2: Phase portraits (20000 samples).  $\tau = 8\Delta t$ , where  $\Delta t = 80$  ns is the sampling time. Row 3: log-log (base 2) plot of the correlation integral versus length scale  $r$  for embedding dimensions 1 to 20 using  $\tau$  as delay and 5000 data points. Row 4: slopes of the log-log plots of the correlation integral versus length scale for embedding dimensions 1 to 20.

$$\frac{d}{dt} \log I = 2\kappa(AD - 1 - m \sin \omega t),$$

as the relevant dynamical variable. In other respects, Oppo et al. [14] remarked that the logarithm of the intensity appeared as a natural variable of their final equations in a paper in which they derived, by means of the center manifold theorem, two-dimensional equations for the CO<sub>2</sub> laser taking into account the coupling with rotational levels.

We have therefore inserted in our experimental setup a logarithmic amplifier between the detector

and the digitizer. The output signal given by this amplifier is proportional to  $\log(V_e + V_0)$ , where  $V_e$  is the signal coming from the detector. The offset  $V_0$  was chosen so that the zero intensity voltage of the detector was situated in the high slope region of the amplifier characteristics, in such a way as to discriminate the low intensity points without saturating too much the maxima. In each measurement the intensity signal coming directly from the detector and the output of the logarithmic amplifier were stored simultaneously to allow further comparison of the correlation integrals obtained in each case. The first rows of figs. 1b and 2b show the output signals of the logarithmic amplifier which were recorded simultaneously with the signals of figs. 1a and 2a respectively. These latter correspond to different modulation amplitudes and contain different amounts of low intensity periods. It is easy to see that the dynamics for the low intensity levels is well resolved. By inspecting the phase portraits on the second row of figs. 1 and 2, one can verify that the attractor reconstructed with the "logarithm" of the intensity is much more homogeneous and seems to be better reconstructed than the one obtained with the intensity.

### 3. Analysis of the experimental data

We present in this part the results obtained by analyzing these experimental data files with the Grassberger-Procaccia algorithm. Interpoint distances were computed using the maximum norm because, besides the fact that this speeds up significantly calculations, the systematic error induced by digitizing is more easily corrected than in the case of the Euclidean norm [6]. Indeed, because of the eight-bit resolution of the digitizer, we followed for the signal of fig. 1 a procedure suggested by Möller et al. [6], which consists in replacing  $r$  by  $r+p$  in the log-log plots of the correlation integrals  $C(r)$ , where  $p$  is half the last significant bit of the digitizer. Such a correction was also used by Hübner et al. to compute dimensions and entropies in a NH<sub>3</sub> laser [15]. On the other hand, we did not use this correction in the case of the signal of fig. 2, because a noise level of the order of the last significant bit was estimated from the sudden slope increase in the log-log plots of the correlation integral. The digitizing error is substan-

tially reduced in this case [6], and using the correction would overestimate the correlation dimension. It is possible that for the first data file the correction for the digitizing error, which assumes that the data are noise free, slightly overestimates the correlation dimension. However, our primary goal is to illustrate how attractor reconstruction depends on the variable used.

The third and fourth rows of fig. 1 display the plots of  $\log C(r)$  versus  $\log(r+p)$  for embedding dimensions up to 10 and of the local slopes of these curves versus  $\log(r+p)$  for the signals of fig. 1. The time delay  $\tau$  used in the reconstruction was chosen empirically as the one which yielded the widest scaling regions, and is approximately equal to  $0.21T$ , where  $T$  is the period of the modulation. Whereas no clear convergence of the local slopes may yet be seen in fig. 1a, where intensity was used, saturation is observed on fig. 1b for embedding dimensions greater than 6. The plateau in this case is only approximately 1.5 octaves wide, but it is rather difficult to get wider scaling regions with eight-bit resolution, if we exclude highly homogeneous attractors such as the Lorenz attractor [16]. The good convergence with the embedding dimension allows us to estimate the correlation dimension to be close to 2.05. Fig. 3

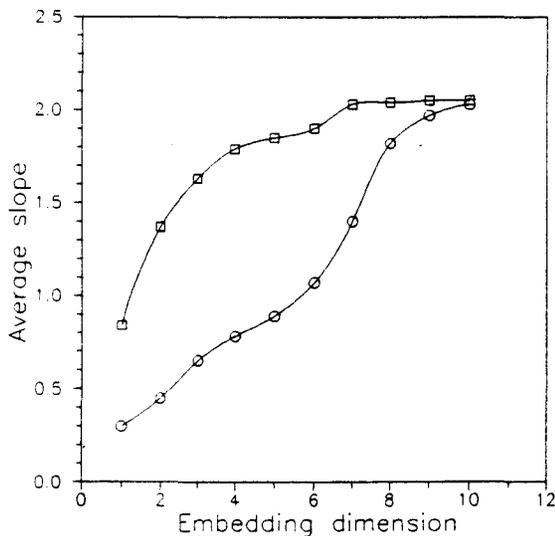


Fig. 3. Average slope in the "plateau region" versus embedding dimension for the data files of fig. 1a (circles) and fig. 1b (squares).

displays the evolution of the estimation of the correlation dimension as a function of the embedding dimension for the  $I$  and  $\log I$  signals of fig. 1. The fact that the curves saturate much faster with the embedding dimension improves clearly the estimation of the correlation dimension, because the systematic overestimate of the fractal dimension due to random noise increases with the embedding dimension.

The signal of fig. 2 is much more inhomogeneous than the signal of fig. 1 (the zero intensity level corresponds to more than 75% of the samples). As a consequence, we used in this case embedding dimensions up to 20 to achieve saturation of the local slopes. The optimal time delay was found to be equal in this case to  $0.24T$ . Saturation of the local slopes is observed in both cases for embedding dimensions greater than 16, but there is a clear-cut difference between the two correlation dimension estimates. When laser intensity is used, slopes saturate near 1.5, whereas a correlation dimension close to 2.09 may be estimated from the output of the logarithmic amplifier, as may be seen on fig. 4. It is nevertheless possible that this value is still underestimated because the inhomogeneity is only partially removed. It is indeed interesting to note that, for embedding

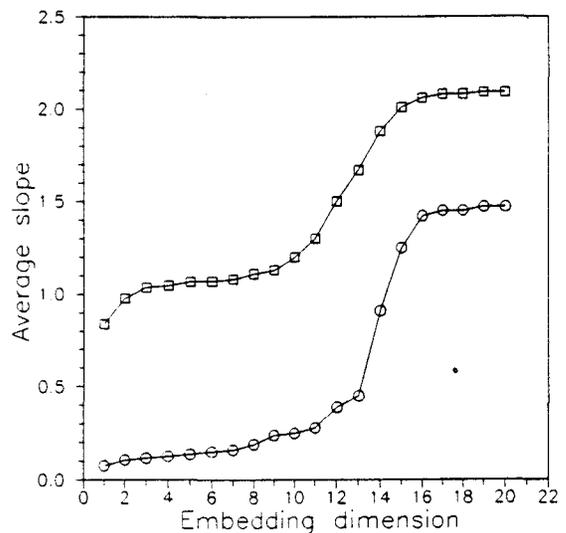


Fig. 4. Average slope in the "plateau region" versus embedding dimension for the data files of fig. 2a (circles) and fig. 2b (squares).

dimensions lower than 10, slopes of the correlation integrals are approximately equal to 0.15 in fig. 2a, indicating a very strong inhomogeneity, while in fig. 2b they cluster around 1.05. Thus, for low embedding dimensions, the reconstructed strange attractors look respectively like a point and a line.

For some other very inhomogeneous data sets, we were not able to find any clear scaling region in the log-log plots. We nevertheless systematically found that the local slopes using the logarithm were significantly higher than with the intensity and were always in the order of 2 for small distances.

#### 4. Numerical simulations

We have also applied the same procedure to signals coming from numerical simulations, to check if similar effects could be observed even with higher precision, since in this case smaller length scales may be investigated. The set of equations (1) was numerically integrated with the Bulirsch-Stoer algorithm [17] and table 1 displays the parameters used. The signals were digitized to 32 bits. To compute the correlation integrals, we reconstructed the attractor using the method of delays, to ease the comparison with the experimental results.

To evaluate the fractal dimension with the best precision possible, since we are not limited in this case by random noise and digitizing errors, we used a maximum likelihood estimator of the correlation dimension derived by Takens [18]. The Takens estimator  $D(r_0)$  of the correlation dimension for the length scales between 0 and  $r_0$  is defined as

$$-\frac{1}{D(r_0)} = \langle \ln(r/r_0) \rangle,$$

where the averaging is done on all the distances  $r$  between points of the attractor smaller than  $r_0$ . This

Table 1

Parameters	Value
$\kappa$	$6 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$
A	1.1
$\omega$	$4 \times 10^5 \text{ Hz}$
$m$	0.0246
$\gamma$	$2.5 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$

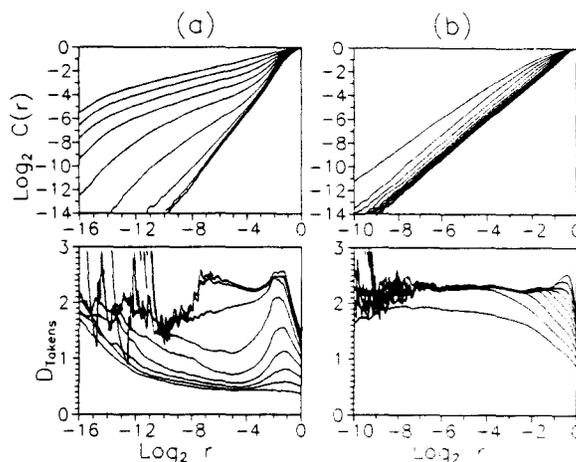


Fig. 5. Analysis of the files obtained from numerical simulations using: (a) intensity, (b) logarithm of the intensity. Row 1: log-log plot of the correlation integral versus  $r$  for embedding dimensions 2 to 10. Row 2: Takens estimator of the correlation dimension  $D_{\text{Takens}}(r)$  versus  $\log_2 r$  for embedding dimensions 2 to 10.

method, which has the advantage of being non-parametric, is more difficult to use with digitized data of relatively low precision since there is in this case a large uncertainty in the logarithms of the distances.

Correlation integrals and the Takens estimator for the numerical simulations may be seen in fig. 5. The calculations were made with 5000 points, and a delay time equal to  $0.24T$ . The benefit in using the logarithm of the intensity to reconstruct the attractor is even more clearly demonstrated than for the experimental data, probably because we may use here the true logarithm. For embedding dimensions higher than 3, we observe a clear convergence to a value of 2.29 over nearly three octaves for the logarithm, whereas no convergence may be seen with the curve for the intensity. To have independent information on the fractal dimension of the attractor, we computed the Lyapunov dimension of the attractor [19] which is known to be an upper bound of the correlation dimension [20]. This yielded a value of 2.304, which is very close to the correlation dimension found by the Takens estimator.

#### 5. Conclusion

To evaluate the correlation dimension of signals

coming from a CO<sub>2</sub> laser with modulated losses, we have reconstructed the underlying strange attractor using the logarithm of the laser intensity instead of the intensity as is done usually. This allowed us to achieve better convergence of the slopes of the log-log plots and to remove artefacts such as false convergence to erroneous values due to inhomogeneity. We observed that, while in principle dimension is invariant under changes of variables, choosing the adequate variable to reconstruct the attractor allows one to give more reliable estimates of dimension.

Although from a mathematical point of view almost all values of the time delay give an acceptable embedding, there is in practice an optimal value of the delay for which the desired scaling law is best observed. It is interesting to note that, in the same way, while in principle reconstruction of the attractor may be done using any function of the intrinsic dynamical variables, we may conjecture from the results of this study that there should be an optimal function for the reconstruction of the attractor. In the case of our laser, the logarithm of the intensity happens to be a more natural and more efficient variable for quantitative characterization than the intensity itself. The method may obviously be used in the study of other chaotic systems with long sequences of almost constant signal [10,11].

We believe that using the logarithm of the output intensity of a laser should also prove useful for other techniques of characterizing deterministic chaos, such as symbolic dynamics [21], extraction of unstable periodic orbits [22] and template analysis [23], since it provides more details on the regions of the reconstructed phase space which are squeezed.

#### Acknowledgement

We are grateful to Jean Legrand and Laurent Paccou for their help in setting up the laser.

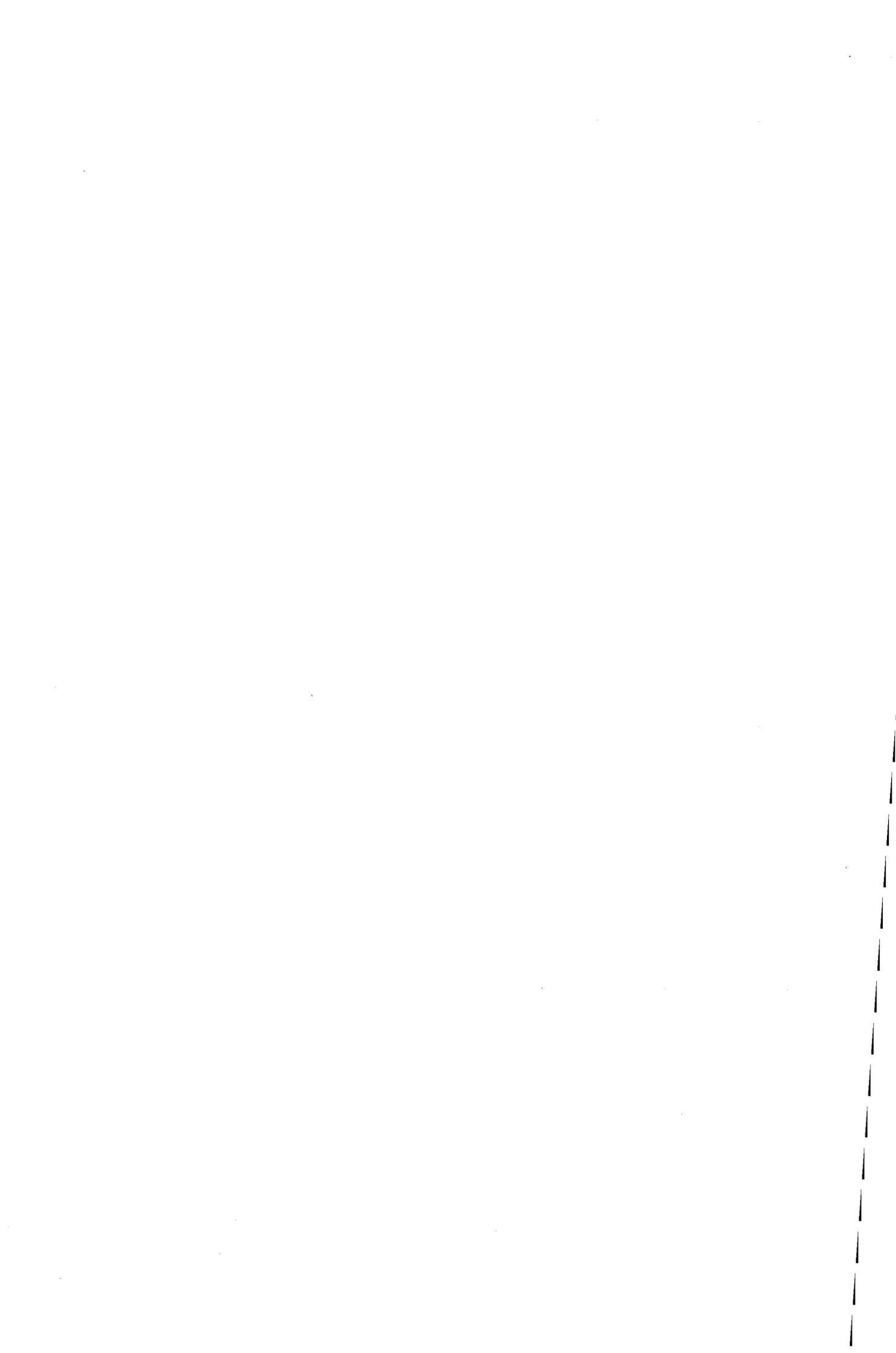
#### References

- [1] N.B. Abraham, A.M. Albano and N.B. Tuffillaro, in: *Measures of complexity and chaos*, eds. N.B. Abraham, A.M. Albano, A. Passamante and P.E. Rapp, NATO ASI series (Plenum, New York, 1989) p. 1.
- [2] F. Takens, in: *Lecture notes in mathematics*, Vol. 898 (Springer, Berlin, 1981) p. 366; N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J.D. Farmer and R.S. Shaw, *Phys. Rev. Lett.* 45 (1980) 712.
- [3] P. Grassberger and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* 50 (1983) 346; *Physica D* 9 (1983) 189.
- [4] P. Grassberger, *Phys. Lett. A* 97 (1983) 227.
- [5] P. Grassberger, *Phys. Lett. A* 128 (1988) 369; 107 (1985) 101.
- [6] M. Möller, W. Lange, F. Mitschke, N.B. Abraham and U. Hübner, *Phys. Lett. A* 138 (1989) 176.
- [7] R. Badii, G. Broggi, B. Derighetti, M. Ravani, S. Ciliberto, A. Politi and M.A. Rubio, *Phys. Rev. Lett.* 60 (1988) 979; F. Mitschke, M. Möller and W. Lange, *Phys. Rev. A* 37 (1988) 4518.
- [8] J. Theiler, *Phys. Rev. A* 34 (1986) 2427.
- [9] C. Lepers, J. Legrand and P. Glorieux, *Phys. Rev. A* 43 (1991) 2573.
- [10] M. Lefranc, D. Hennequin and D. Dangoisse, *J. Opt. Soc. Am. B* 8 (1991) 239.
- [11] D. Derozier, S. Bielawski and P. Glorieux, *Opt. Commun.* 83 (1991) 97.
- [12] G.P. Puccioni, A. Poggi, W. Gadomski, J.R. Tredicce and F.T. Arecchi, *Phys. Rev. Lett.* 55 (1985) 339.
- [13] F.T. Arecchi, R. Meucci, G.P. Puccioni and J.R. Tredicce, *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 1217; T. Midavaine, D. Dangoisse and P. Glorieux, *Phys. Rev. Lett.* 55 (1985) 1989; D. Dangoisse, P. Glorieux and D. Hennequin, *Phys. Rev. A* 36 (1987) 4775.
- [14] G.L. Oppo, J.R. Tredicce and L.M. Narducci, *Opt. Commun.* 69 (1989) 393.
- [15] U. Hübner, N.B. Abraham and C.O. Weiss, *Phys. Rev. A* 40 (1989) 6354.
- [16] E.N. Lorentz, *J. Atmos. Sci.* 20 (1963) 130.
- [17] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling, *Numerical recipes* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986) p. 563.
- [18] F. Takens, in: *Lecture notes in mathematics*, Vol. 1125 (Springer, Berlin, 1985) p. 99.
- [19] P. Fredrickson, J.L. Kaplan, E.D. Yorke and J.A. Yorke, *J. Diff. Eqs.* 49 (1983) 185.
- [20] F. Ledrappier, *Commun. Math. Phys.* 81 (1981) 229.
- [21] R. Badii, in: *Measures of complexity and chaos*, eds. N.B. Abraham, A.M. Albano, A. Passamante and P.E. Rapp, NATO ASI series (Plenum, New York, 1989) p. 313. D. Hennequin and P. Glorieux, *Europhys. Lett.* 14 (1991) 237.
- [22] D. Auerbach, P. Cvitanovic, J.P. Eckmann, G. Gunaratne and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.* 58 (1987) 2387; D. Lathrop and E.J. Kostelich, *Phys. Rev. A* 40 (1989) 4028.
- [23] G.B. Mindlin, X.J. Hou, H.G. Solari, R. Gilmore and N.B. Tuffillaro, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 2350; F. Papoff, A. Fioretti, E. Arimondo, G.B. Mindlin, H. Solari and R. Gilmore, *Phys. Rev. Lett.*, in press.



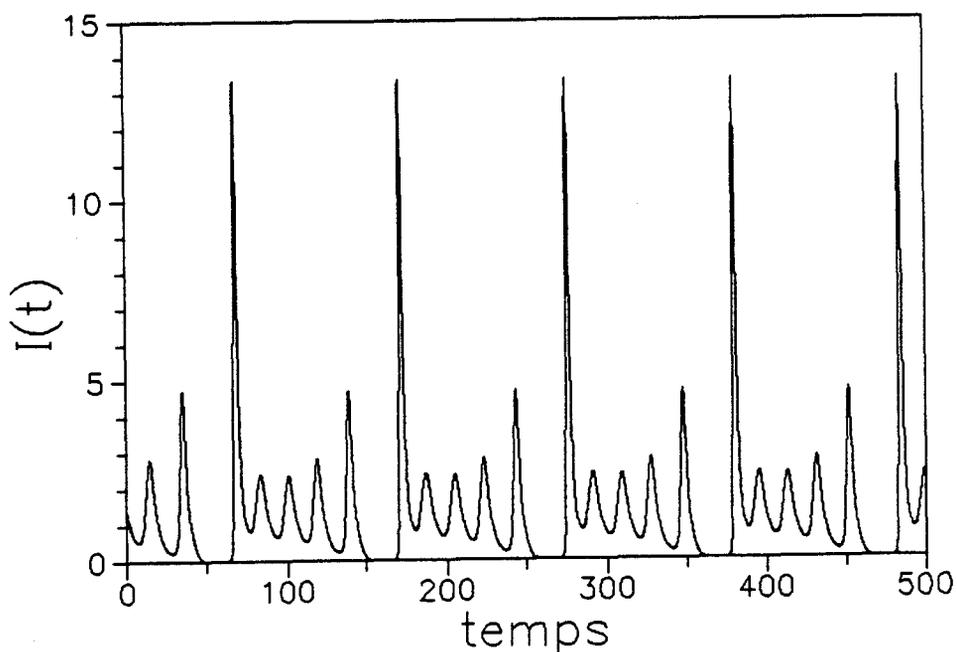


**CHAPITRE 3 : CHAOS HOMOCLINE DANS  
LE LASER CO<sub>2</sub> A ABSORBANT  
SATURABLE**



### 3.1 INTRODUCTION

Nous avons vu, au chapitre 1, que le laser  $\text{CO}_2$  à absorbant saturable présentait, dans les zones de fonctionnement où des régimes chaotiques sont observés, des structures de bifurcations particulières. On y observe en effet des alternances de régions chaotiques et de fenêtres périodiques tout à fait analogues à celles décrites dans la réaction chimique de Belousov-Zhabotinskii ([Turner 81, Richetti 85, Argoul 87a,b]). Le signal temporel des différentes solutions périodiques observées le long de ces séquences de bifurcation est caractérisé par l'existence d'un grand pic, suivi d'un certain nombre d'oscillations plus petites. Cela permet de classer ces solutions en baptisant  $P^{(n)}$  le régime périodique comportant  $n$  petites oscillations (fig. 3.1).



**Fig. 3.1** Régime périodique  $P^{(4)}$  provenant de simulations numériques d'un modèle du LSA.

En suivant une séquence périodique-chaotique, on rencontre successivement les comportements :

$$\dots, P^{(n)}, 2P^{(n)}, 4P^{(n)}, \dots, C^{(n)}, P^{(n+1)}, 2P^{(n+1)}, 4P^{(n+1)}, \dots, C^{(n+1)}, \dots \quad (3.1)$$

les  $C^{(n)}$  désignant les régimes chaotiques observés entre deux fenêtres périodiques  $P^{(n)}$ . Sauf éventuellement pour les petits  $n$ , pour lesquels se produisent parfois des phénomènes de bistabilité, chaque solution périodique  $P^{(n)}$  se déstabilise par une cascade de doublements de période  $2^m P^{(n)}$ , au point d'accumulation de laquelle apparaît le régime chaotique  $C^{(n)}$ . Celui disparaît lorsque la solution périodique stable  $P^{(n+1)}$  est créée dans une bifurcation tangente.

Ce schéma de bifurcations à lui seul constitue une forte indication que les comportements chaotiques observés constituent un exemple de chaos homocline. Pour confirmer cette hypothèse, nous nous sommes intéressés à la structure des attracteurs observés expérimentalement, au moyen de sections de Poincaré et des applications de premier retour associées, et nous avons pu montrer que nous retrouvions également par cette approche les propriétés du chaos homocline.

On peut citer comme exemples de systèmes expérimentaux où ce type de chaos a été mis en évidence : la réaction de Belousov-Zhabotinskii [Argoul 87a,b], l'électro-dissolution du cuivre [Bassett 88], un laser  $\text{CO}_2$  à contre-réaction [Arecchi 87,88a], le laser  $\text{CO}_2$  à absorbant saturable [Hennequin 89a, Papoff 89, Lefranc 91, Papoff 91], et un plasma de décharge [Braun 92].

Avant de présenter l'article où est résumé ce travail, nous rappelons dans ce chapitre les propriétés essentielles du chaos

homocline, et comment il peut être mis en évidence expérimentalement.

### 3.2 TANGENCES HOMOCLINES ET CHAOS

#### 3.2.1 Ensembles hyperboliques. Variétés stable et instable.

Supposons que l'on ait un flot  $\phi^t$ , et un sous-ensemble  $\Lambda$  de l'espace de phases  $M$  invariant sous l'action du flot :  $\phi^t(\Lambda) = \Lambda$ .

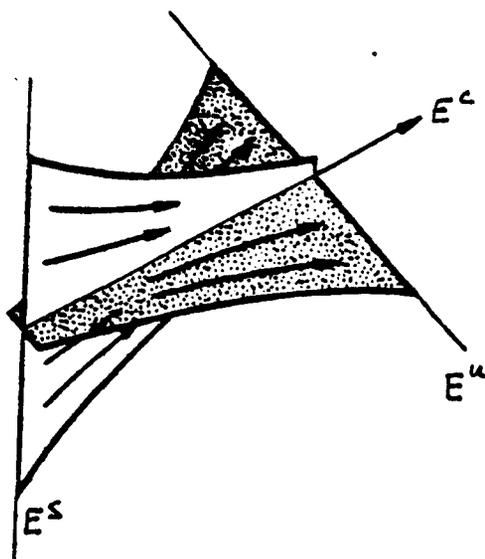


Fig. 3.2 Illustration du concept d'hyperbolicité.

L'ensemble  $\Lambda$  est dit hyperbolique si, en tout point  $x$  de  $\Lambda$ , l'espace tangent à  $M$  en  $x$  se décompose en la somme directe d'un sous-espace stable  $E_x^s$ , d'un sous-espace instable  $E_x^u$ , et, si le champ de vecteurs  $F(\mu, x)$  en  $x$  est non nul, d'un sous-espace neutre  $E_x^c$  engendré par  $F(\mu, x)$ .  $E_x^s$  et  $E_x^u$  correspondent respectivement aux directions de l'espace tangent dans lesquelles se trouvent les points proches dont l'orbite converge exponentiellement vers l'orbite de  $x$  ou diverge exponentiellement de l'orbite de  $x$  (fig. 3.2). Par ailleurs,

cette décomposition doit varier de manière continue avec  $x$ , et les taux de convergence ou de divergence doivent vérifier des estimations uniformes [Guckenheimer 83, Eckmann 85, Chenciner 85].

On peut définir en chaque point  $x$ , une variété stable  $W^s(x)$  et une variété instable  $W^u(x)$ , tangentes respectivement à  $E_x^s$  et à  $E_x^u$ ,

et qui sont définies de la manière suivante :

$$W^s(x) = \{y \in M: \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi^t(x), \phi^t(y)) = 0\} \quad (3.2a)$$

$$W^u(x) = \{y \in M: \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi^{-t}(x), \phi^{-t}(y)) = 0\} \quad (3.2b)$$

où  $d$  représente une métrique dans l'espace des phases.  $W^s(x)$  et  $W^u(x)$  constituent les extensions de  $E_x^s$  et  $E_x^u$  à l'espace des phases

tout entier. Notons que si  $x$  appartient à un attracteur  $A$ , alors  $W^u(x) \subset A$ .

Ces définitions se généralisent aisément à la définition des variétés stable et instable d'un ensemble hyperbolique invariant  $\Lambda$  :

$$W^s(\Lambda) = \{y \in M: \lim_{t \rightarrow \infty} d(\Lambda, \phi^t(y)) = 0\} = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s(x) \quad (3.3a)$$

$$W^u(\Lambda) = \{y \in M: \lim_{t \rightarrow \infty} d(\Lambda, \phi^{-t}(y)) = 0\} = \bigcup_{x \in \Lambda} W^u(x) \quad (3.3b)$$

Notons que les variétés stable et instable d'un ensemble invariant sont elles-mêmes invariantes. Ces variétés jouent un rôle extrêmement important dans la dynamique, car elles se comportent comme des séparatrices : d'après le théorème sur l'unicité des solutions de champs de vecteurs, les trajectoires ne peuvent traverser ces variétés.

Un point fixe ou une orbite périodique d'un flot fournissent des exemples simples d'ensembles hyperboliques et de leur variétés invariantes.

### 3.2.1.a Point fixe hyperbolique

Considérons un champ de vecteurs  $F(\mu, X)$  dans un espace des phases de dimension  $n$ , et supposons que  $X_0$  soit un point fixe de ce champ de vecteurs :  $F(\mu, X_0) = 0$ . Dans un voisinage de  $X_0$ , en posant  $Y = X - X_0$ , on peut développer  $F(\mu, X)$  en série de Taylor et le mettre sous la forme :

$$\frac{dY}{dt} = [L] Y + N(Y) \quad (3.4)$$

où  $[L]$ , qui est une matrice  $n \times n$  correspond à la partie linéaire du champ de vecteurs, et  $N$  aux termes d'ordres supérieurs. Le point  $X_0$  est hyperbolique si aucune valeur propre de  $[L]$  ne présente de partie réelle nulle.

Les vecteurs propres ou sous-espaces propres de  $[L]$  dont la valeur propre associée possède une partie réelle négative (resp. positive) engendrent le sous-espace  $E_{X_0}^s$  (resp.  $E_{X_0}^u$ ), auquel est tangente la variété stable  $W^s(X_0)$  (resp. variété instable  $W^u(X_0)$ ).

La figure 3.3 donne un exemple de point fixe hyperbolique en dimension trois, dont les valeurs propres sont égales à  $\rho \pm i\omega$  et  $\lambda$ , avec  $\rho > 0$ ,  $\lambda < 0$ . Un tel point fixe est dit de type foyer-col.

Dans cet exemple, le point fixe possède une variété instable bi-dimensionnelle associée aux deux valeurs propres imaginaires conjuguées  $\rho \pm i\omega$ , où le flot spirale autour de  $X_0$ , et une variété stable à une dimension, correspondant à la valeur propre réelle  $\lambda$ .

Si les signes de  $\rho$  et de  $\lambda$  étaient échangés, c'est évidemment la variété stable qui serait à deux dimensions. Il faut cependant

remarquer qu'un tel type de point fixe ne peut en dimension trois être contenu dans un attracteur étrange, qui possède nécessairement une variété stable unidimensionnelle. La présence d'un point fixe de ce type dans le voisinage d'un attracteur peut toutefois induire des transitions entre comportements dynamiques différents, comme l'a montré Gaspard [1982] dans le cas du modèle de Rössler.

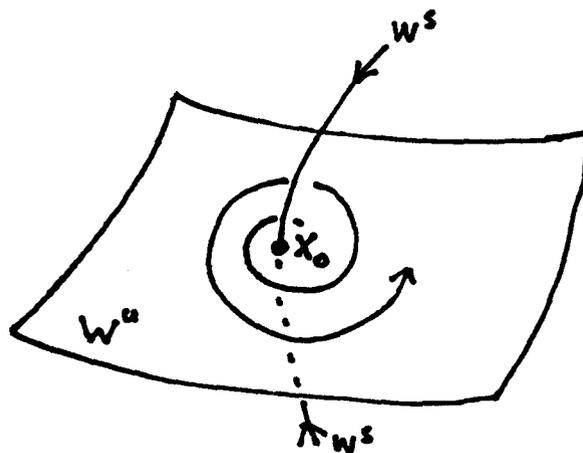
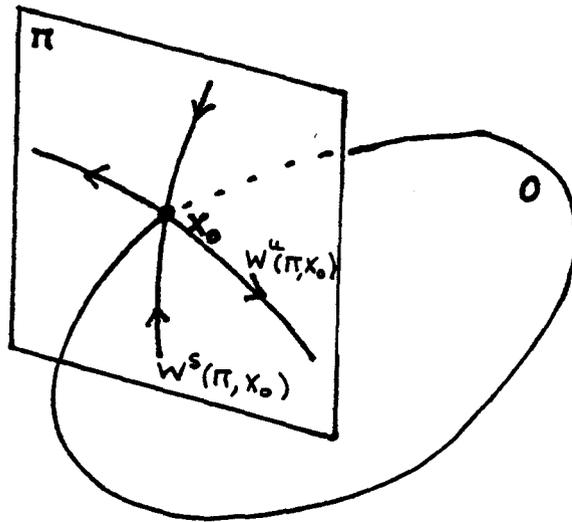


Fig. 3.3 Variétés stable et instable d'un point fixe foyer-col.

### 3.2.1.b Orbite périodique hyperbolique

Examinons maintenant le cas d'une orbite périodique  $O$ . A la différence d'un point fixe, il existe en tout point  $x$  de l'orbite une direction telle que les points proches de  $x$  selon cette direction ne convergent ni ne divergent : c'est celle du champ de vecteurs, tangente à l'orbite. Deux points proches sur une orbite périodique restent en effet à distance finie l'un de l'autre.



**Fig. 3.4** Analyse de l'hyperbolicité d'une orbite périodique à l'aide d'une section de Poincaré.

La décomposition en sous espaces stable et instable se fait donc dans les directions transverses à l'orbite périodique. Pour cela, le plus simple est d'effectuer une section de Poincaré au moyen d'un plan transverse à l'orbite périodique, et traversé une seule fois par celle-ci (fig. 3.4). L'intersection  $X_0$  de l'orbite avec le plan de section est alors un point fixe de l'application de premier retour  $P : X_0 = P(X_0)$ . Dans un voisinage de  $X_0$ , en posant  $Y = X - X_0$ , l'application de premier retour peut s'écrire de manière similaire à l'équation (3.4) :

$$P(Y) = [A] Y + N(Y) \quad (3.5)$$

Les valeurs propres de la matrice  $(n-1) \times (n-1)$   $[A]$ , appelés coefficients de Floquet ou encore nombres de Lyapunov, qui ne dépendent pas du plan de section choisi, renseignent sur la stabilité de l'orbite périodique. Celle-ci est hyperbolique si aucune de ces

valeurs propres n'est égale à 1 en module. L'intersection  $X_0$  est par ailleurs un point fixe hyperbolique de l'application de premier retour.

Les variétés :

$$W^s(\Pi, X_0) = \{y \in \Pi: \lim_{n \rightarrow \infty} d(X_0, P^n(y)) = 0\} \quad (3.6a)$$

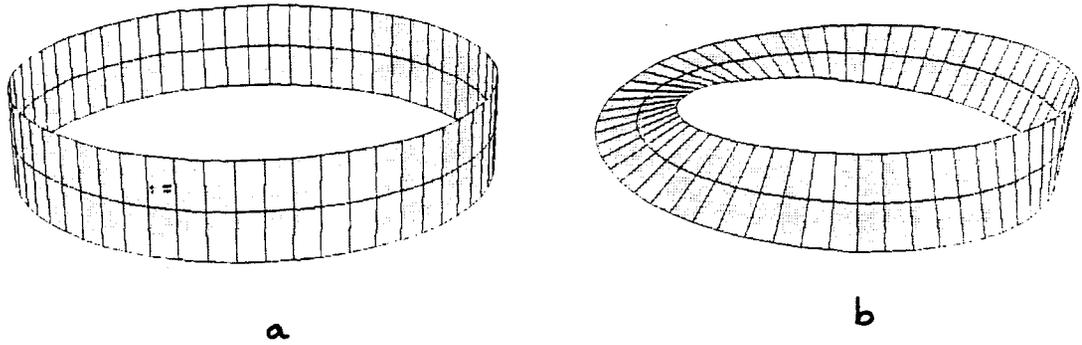
$$W^u(\Pi, X_0) = \{y \in \Pi: \lim_{n \rightarrow \infty} d(X_0, P^{-n}(y)) = 0\} \quad (3.6b)$$

sont les intersections des variétés stable  $W^s(O)$  et instable  $W^u(O)$  de l'orbite périodique avec le plan de section.  $W^s(\Pi, X_0)$  (resp.  $W^u(\Pi, X_0)$ ) est tangente au vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_s$  (resp.  $\lambda_u$ ) de la matrice de Floquet.

$W^s(O)$  et  $W^u(O)$  sont par ailleurs l'union des variétés stable et instable des points appartenant à l'orbite périodique, comme dans la définition (3.3). Il faut noter que  $W^{s,u}(\Pi, X_0)$  et  $W^{s,u}(X_0)$  ne coïncident pas.

Une orbite dont les coefficients  $\lambda_i$  sont réels et vérifient tous  $|\lambda_i| < 1$  (resp.  $|\lambda_i| > 1$ ) est appelée noeud stable (resp. instable). Une orbite dont les coefficients sont réels et ont des valeurs absolues situées de part et d'autre de 1 sont dites de type col.

Supposons qu'une orbite périodique en dimension trois ait deux coefficients de Floquet réels qui vérifient  $|\lambda_s| < 1 < |\lambda_u|$ . Le fait qu'un flot préserve l'orientation dans l'espace des phases implique que  $\lambda_u$  et  $\lambda_s$  sont de même signe. Quand  $\lambda_u, \lambda_s > 0$ , les variétés invariantes sont toutes les deux orientables. Par contre quand  $\lambda_u, \lambda_s < 0$ , ces variétés prennent la forme de rubans de Moebius, modulo un certain nombre de tours. Ces deux cas sont représentés sur la figure 3.5.



**Fig. 3.5** Exemples de variétés invariantes d'orbites périodiques : (a) cas orientable (b) cas non orientable.

Le nombre de demi-tours effectués par chacune des variétés invariantes le long de l'orbite définit la torsion de l'orbite, dont nous verrons au chapitre 4 qu'elle a une grande importance dans la caractérisation topologique de l'organisation des orbites périodiques.

### 3.2.2 Tangences homoclines

On dit qu'un flot présente une tangence homocline lorsqu'il existe dans l'attracteur du flot un ensemble invariant hyperbolique  $\Lambda$ , tel qu'en certains points de l'espace des phases, ses variétés stable et instable  $W^s(\Lambda)$  et  $W^u(\Lambda)$  soient tangentes l'une à l'autre. Si l'on peut imaginer des tangences homoclines impliquant des points fixes, des orbites périodiques, des tores, des ensembles de type "fer à cheval" de Smale [Gaspard 87], nous ne nous intéresserons dans la suite qu'aux deux premiers cas, qui interviennent dans la discussion du chaos homocline observé dans le LSA.

Un tangence homocline n'est pas structurellement stable : une perturbation arbitrairement petite des paramètres du flot la fait disparaître. Il s'agit en général d'une bifurcation de codimension 1, c'est à dire rencontrée de manière générique en faisant varier un seul paramètre de contrôle. Une tangence homocline est par ailleurs une bifurcation globale, car la structure globale du champ de vecteurs joue un rôle important dans la réinjection du flot au voisinage de l'ensemble hyperbolique.

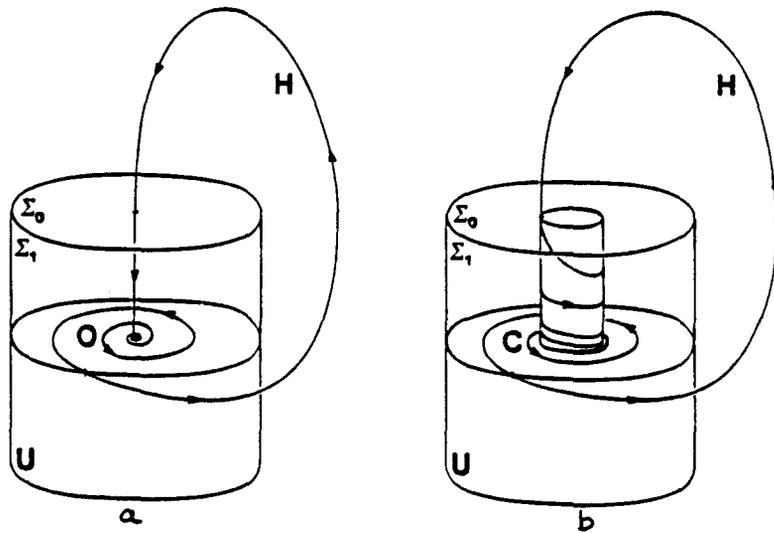
Une orbite homocline  $H$  est une trajectoire  $\phi^t(x)$  connectant les variétés stable et instable d'un ensemble hyperbolique invariant  $\Lambda$  :

$$H \subset (W^s(\Lambda) \cap W^u(\Lambda)),$$

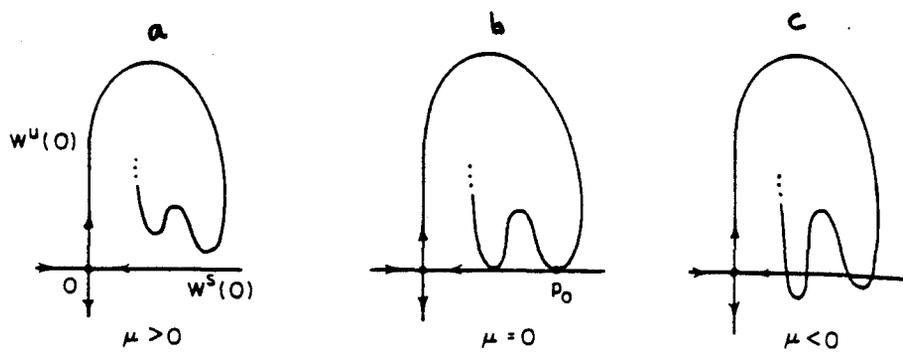
et qui tend donc asymptotiquement vers l'ensemble  $\Lambda$  pour  $t \rightarrow \pm \infty$ . La figure 3.6 donne l'exemple d'orbites homoclines biasymptotiques à un point fixe et à une orbite périodique.

La relation entre une tangence homocline et l'existence d'une orbite homocline est différente selon qu'on considère un point fixe ou une orbite périodique.

Pour le point fixe de la figure <sup>3-3</sup> $X$ ,  $\dim W^u = 2$ ,  $\dim W^s = 1$ . De manière générique  $\dim (W^u \cap W^s) = 0$ , et donc  $W^u \cap W^s = \emptyset$ , puisque le théorème d'unicité des solutions interdit que cette intersection soit constituée de points isolés. Il n'existe donc pas d'orbite homocline dans ce cas. Par contre, quand les deux variétés sont tangentes, c'est à dire ici quand  $W^s \subset W^u$ ,  $\dim (W^u \cap W^s) = 1$ , et il existe une orbite homocline. Une orbite homocline à un point fixe est donc détruite par une variation arbitrairement petite du paramètre de contrôle.



**Fig. 3.6** Orbites homoclines biasymptotiques à (a) un point fixe, (b) une orbite périodique (d'après Gaspard [1987b]).



**Fig 3.7** Intersections avec un plan de section des variétés stable et instable d'une orbite périodique : (a) avant, (b) pendant, (c) après la tangence homocline (d'après Guckenheimer [1983]).

Dans le cas d'une orbite périodique,  $\dim W^u = 2$  et  $\dim W^s = 2$ . Ici  $\dim(W^u \cap W^s) = 1$  de manière générique, et une orbite

homocline est donc structurellement stable. La tangence homocline correspond alors à la disparition (ou l'apparition) d'orbites homoclines. La figure 3.7 représente l'intersection avec un plan de section des variétés stable et instable de l'orbite périodique, de part et d'autre de la tangence homocline. Les points d'intersection des deux variétés font partie d'orbites homoclines.

En toute rigueur, une tangence homocline ne peut être observée expérimentalement, puisque la moindre perturbation la fait disparaître. En fait, le très grand intérêt que présentent les tangences homoclines pour l'analyse des systèmes dans lesquels elles se produisent est que, sous certaines conditions que nous rappelons ci-dessous, elles entraînent l'existence de comportements chaotiques et de structures complexes de bifurcations dans toute une région de l'espace des paramètres. Elles jouent donc un rôle crucial dans le comportement global du système.

### **3.2.3 Bifurcations au voisinage d'une tangence homocline**

Quand certaines conditions sont vérifiées, l'existence d'une tangence homocline pour un foyer-col ou une orbite périodique instable implique l'existence d'une infinité d'orbites périodiques instables au voisinage de l'orbite homocline concernée, ainsi qu'un comportement complexe et chaotique du flot. Les schémas caractéristiques de bifurcations au voisinage d'une tangence homocline correspondent à l'apparition de ces orbites.

Sans entrer dans les détails, indiquons que dans les deux cas ces bifurcations peuvent être analysées en décomposant l'espace des phases en deux régions où les trajectoires du système ont des comportements qualitatifs différents.

La première est un voisinage de l'ensemble invariant  $\Lambda$ , où les trajectoires peuvent être calculées en linéarisant le flot. La deuxième région contient les portions de trajectoires qui quittent le voisinage de  $\Lambda$  selon la variété instable, et sont réinjectées sur la variété stable de  $\Lambda$ , en décrivant une large boucle dans l'espace des phases, guidée par une orbite homocline. La dynamique est modélisée par deux applications décrivant l'action du flot dans ces deux régions.

Parmi l'infinité d'orbites périodiques mentionnées ci-dessus, les plus importantes pour l'analyse sont les orbites périodiques dites à simple circuit. Ces orbites périodiques effectuent un certain nombre d'oscillations au voisinage du point fixe ou de l'orbite périodique, puis parcourent une fois le circuit de réinjection homocline avant de revenir à leur point de départ. Nous baptiserons ces orbites  $P^{(n)}$ , par analogie avec les orbites périodiques observées expérimentalement.

Ces orbites ont un aspect caractéristique, dont l'observation dans des signaux expérimentaux fait suspecter la présence de chaos homocline. Dans le cas d'un foyer-col, de valeurs propres  $(\rho \pm i\omega, \lambda)$  avec  $\lambda < 0 < \rho$ , on verra ainsi  $n$  oscillations divergeant du point fixe, suivies d'un grand pic correspondant à la réinjection homocline. L'aspect des solutions périodiques à simple circuit dans le cas d'une orbite périodique est très similaire, à ceci près que les  $n$  oscillations s'effectuent autour de l'orbite périodique, et leur amplitude est donc limitée par celle de l'orbite périodique (fig. 3.1).

Nous nous limitons ici à rappeler les résultats essentiels concernant les bifurcations des orbites à simple circuit, une analyse complète pouvant être trouvée par exemple dans [Gaspard 84, 87;

Glendinning 84]. Nous supposons dans les deux cas que  $\mu$  est le paramètre de contrôle, et que la tangence homocline est obtenue pour  $\mu = 0$ .

### 3.2.3.a Point fixe foyer-col

Supposons que les valeurs propres du point fixe à l'homoclinicité sont  $(\rho \pm i\omega, \lambda)$  avec  $\lambda < 0 < \rho$  (figure 3.2). Shil'nikov [1965] a démontré que si :

$$\left| \frac{\rho}{\lambda} \right| < 1, \quad (3.7)$$

alors il existe pour  $\mu = 0$  une infinité dénombrable d'orbites périodiques instables de type col, ainsi qu'une infinité non dénombrable de trajectoires chaotiques au voisinage de l'orbite homocline.

Parmi cette infinité d'orbites, les orbites à simple circuit apparaissent dans des bifurcations tangentes, situées de part et d'autre de  $\mu = 0$ , en  $\mu = \mu_n^{t\pm}$ , avec  $\mu_n^{t+} > 0$ ,  $\mu_n^{t-} < 0$  [Gaspard 84,87].

Les deux suites  $\mu_n^{t\pm}$  convergent vers  $\mu = 0$  de façon géométrique :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1}^{t\pm} - \mu_n^{t\pm}}{\mu_n^{t\pm} - \mu_{n-1}^{t\pm}} = e^{-2\pi |\rho/\omega|} \quad (3.8)$$

En  $\mu = \mu_n^{t\pm}$ , les périodes de ces orbites sont égales à  $T_n^{t\pm}$ , et

vérifient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T_{n+1}^{t\pm} - T_n^{t\pm}) = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.9)$$

En ce qui concerne la stabilité des solutions apparaissant dans ces bifurcations, deux cas doivent être distingués :

• Si  $0 < |\rho/\lambda| < 1/2$ , alors les deux orbites apparaissant en  $\mu_n^{t\pm}$  sont l'une un col, l'autre un noeud stable qui double de période en  $\mu_n^{d\pm}$ , avec :

$$(\mu_{n+1}^{d\pm} - \mu_n^{t\pm}) = O(e^{-4\pi n|\rho/\omega|}) \quad (3.10)$$

• Si  $1/2 < |\rho/\lambda| < 1$ , les deux orbites apparaissant en  $\mu_n^{t\pm}$  sont l'une un col, l'autre un noeud instable devenant un col en  $\mu_n^{h\pm}$ , avec :

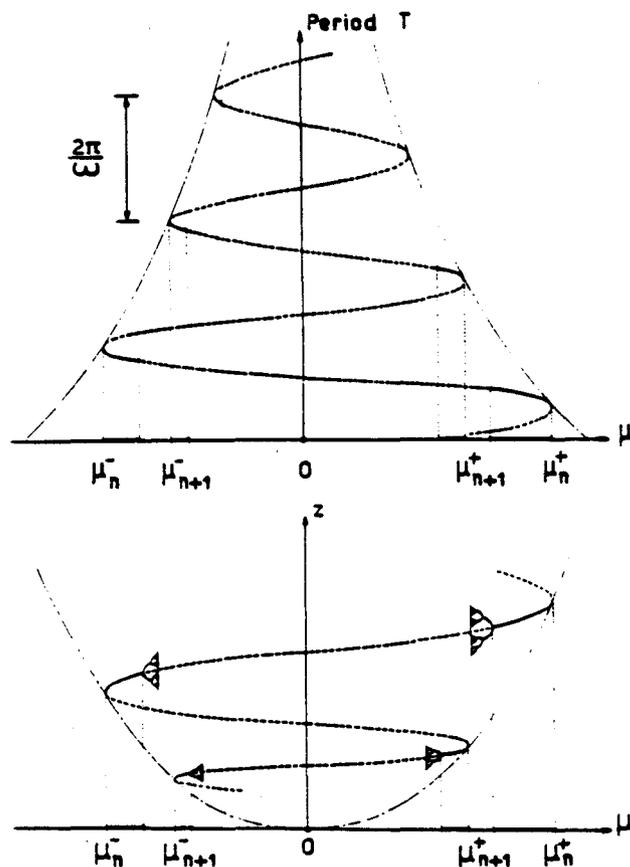
$$(\mu_{n+1}^{h\pm} - \mu_n^{t\pm}) = O(e^{-2\pi n|\lambda/\omega|}) \quad (3.11)$$

Il est à remarquer que dans le cas d'un foyer col avec  $\rho < 0 < \lambda$ , les stabilités des orbites doivent être inversées dans les résultats énoncés ci-dessus : un noeud stable devient un noeud instable et vice-versa [Glendinning 84]. Cela est dû au fait qu'on passe d'un type de point fixe à l'autre en renversant le sens du temps.

On voit donc que c'est uniquement dans le cas  $|\rho/\lambda| < 1/2$  que l'on peut trouver des attracteurs périodiques arbitrairement près de la tangence homocline. Chaque fenêtre périodique apparue par bifurcation tangente est dans cette configuration suivie d'une cascade sous-harmonique. On remarquera que la condition ci-dessus a toutes les chances d'être vérifiée au voisinage d'une bifurcation de Hopf, puisque  $\rho$  est alors petit.

On retrouve donc là les séquences alternées périodiques-chaotiques, si ce n'est que celles prédites ici sont en gros symétriques par rapport à la tangence homocline. La structure

globale des bifurcations dans le cas  $|\rho/\lambda| < 1/2$  est schématisée sur la figure 3.8.



**Fig. 3.8** Schéma de bifurcation au voisinage de la tangence homocline à un foyer col, ( $\lambda < 0 < \rho$ ), avec  $|\rho/\lambda| < 1/2$  (d'après Gaspard [1987b]).

Si  $|\rho/\lambda| > 1$ , aucun comportement chaotique n'est observé, du moins au voisinage de l'homoclinicité, et l'orbite homocline se transforme pour  $\mu \neq 0$  en une orbite périodique unique, dont la période tend vers l'infini quand  $\mu \rightarrow 0$ .

Cet ensemble de bifurcations, s'il est le plus important pour l'analyse des bifurcations dans un système expérimental est loin d'épuiser toute la richesse des comportements dynamiques. Gaspard [1982, 1983] a par exemple montré qu'une suite infinie de

bifurcations homoclines secondaires, dites à double circuit, s'accumulait sur la bifurcation homocline principale. Comme ce théorème peut s'appliquer de manière récursive, on entrevoit toute la complexité du schéma global de bifurcations.

### 3.2.3.b Orbite périodique de type col

Supposons que l'orbite périodique ait à l'homoclinicité des coefficients de Floquet égaux à  $\lambda_u$  et  $\lambda_s$ . Contrairement au cas du point fixe, il n'existe pas de conditions sur l'existence à l'homoclinicité d'une infinité d'orbites périodiques instables [Gavrilo 72,73]. On retrouve par contre la distinction en deux cas [Gaspard 87a,b] :

- Si  $|\lambda_u \lambda_s| > 1$ , les orbites apparaissant par bifurcation tangente pour  $\mu = \mu_n^t$  sont l'une un col, l'autre un noeud instable. On n'observe donc pas dans ce cas d'attracteurs périodiques aussi près qu'on le veut de la tangence homocline.

- Si  $|\lambda_u \lambda_s| < 1$ , les orbites apparaissant par bifurcation tangente pour  $\mu = \mu_n^t$  sont l'une un col, l'autre un noeud stable. On observe donc dans ce cas des fenêtres périodiques. Les valeurs  $\mu_n^t$  du paramètre de contrôle aux points de bifurcations vérifient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1}^t - \mu_n^t}{\mu_n^t - \mu_{n-1}^t} = \frac{1}{\lambda_u} \quad (3.12)$$

En  $\mu = \mu_n^t$ , les périodes de ces orbites sont égales à  $T_n^t$ , et

vérifient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T_{n+1}^t - T_n^t) = T_c \quad (3.13)$$

où  $T_c$  est la période du cycle instable.

Les solutions périodiques stables se déstabilisent par doublement de période en  $\mu_n^d$  tel que

$$\mu_n^d - \mu_n^t = O\left(\frac{1}{2^n \lambda_u}\right) \quad (3.14)$$

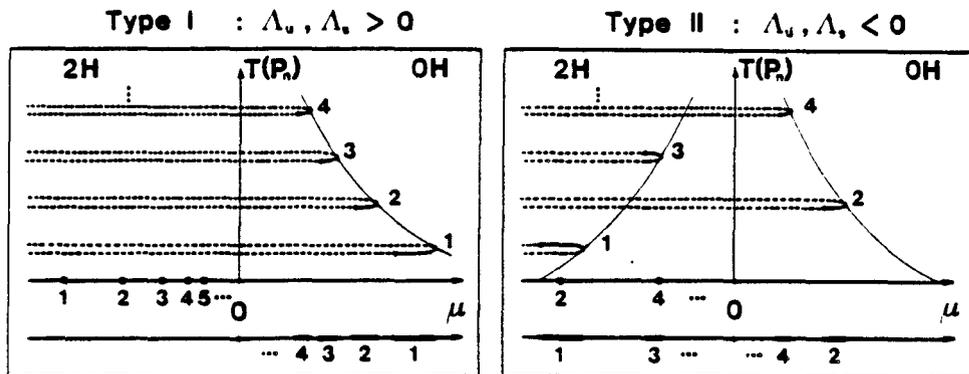
ce qui donne une estimation de la largeur des fenêtres périodiques  $P(n)$ .

Deux structures de bifurcation, schématisées sur la figure 3.9, peuvent être distinguées selon le signe de  $\lambda_u$  (rappelons que  $\lambda_u$  et  $\lambda_s$  sont nécessairement de même signe).

- Si  $\lambda_u > 0$ , toutes les bifurcations ont lieu du même côté de la tangence homocline.

- Par contre, si  $\lambda_u < 0$ , toutes les bifurcations tangentes correspondant à un  $n$  impair se trouvent d'un côté de la tangence homocline, et les bifurcations concernant les  $n$  pairs de l'autre.

On voit donc que, bien que les structures de bifurcation soient légèrement différentes, les mécanismes d'apparition du chaos dans le cas d'une tangence homocline à une orbite périodique sont extrêmement semblables à ceux rencontrés dans le cas d'un point fixe foyer-col.



**Fig. 3.9** Schémas de bifurcation au voisinage d'une tangence homocline d'une orbite périodique. Les variétés invariantes sont supposées (a) orientables, (b) non orientables (d'après Gaspard [1987b]).

En conclusion, nous avons vu que des séquences alternées périodiques-chaotiques du type (3.1) peuvent être obtenues à la fois dans le cas d'une tangence homocline d'un point fixe foyer-col avec  $|\rho/\lambda| < 1/2$  ou d'une orbite périodique instable avec  $|\lambda_u \lambda_s| < 1$ .

La distinction entre ces deux hypothèses peut se faire en examinant les schémas de bifurcations des orbites périodiques à simple circuit. Par ailleurs, l'aspect de ces solutions périodiques près de l'homoclinicité peut également apporter des informations : l'amplitude des petites oscillations dans le cas d'une orbite périodique est toujours supérieure à une valeur minimum.

Remarquons cependant qu'il n'est pas impossible de passer dans un même système d'une configuration à l'autre. En effet, la proximité de la bifurcation homocline et d'une bifurcation de Hopf sous-critique peut faire que l'on passe en modifiant légèrement un paramètre d'une tangence homocline sur le point fixe à une

tangence homocline sur l'orbite périodique instable créée dans la bifurcation de Hopf [Gaspard 87b].

### 3.3 SECTIONS DE POINCARE. APPLICATIONS DE PREMIER RETOUR. DYNAMIQUE SYMBOLIQUE

D'après ce que nous avons vu dans la section précédente, la disposition des bifurcations dans l'espace des paramètres, ainsi que la structure des solutions périodiques observées sont déjà de fortes indications de la présence de chaos homocline. Il est toutefois possible, si les attracteurs étranges obtenus ont une dimension fractale très légèrement supérieure à deux, d'étayer ces observations par l'analyse des sections de Poincaré et des applications de premier retour associées, comme l'ont fait Argoul et al. [1987a,b] pour démontrer l'existence de chaos homocline dans la réaction de Belousov-Zhabotinskii.

Au premier abord, la manière la plus naturelle d'effectuer la section de Poincaré est de choisir un plan qui intercepte toutes les oscillations au voisinage de l'ensemble invariant. On prendra par exemple un plan passant par le point fixe et transverse à la variété bidimensionnelle, ou coupant transversalement l'orbite périodique, selon le cas. Nous appellerons un tel plan de section un plan de type  $\Lambda$ .

Nous avons vu que les solutions périodiques à simple circuit  $P^{(n)}$  ne suivaient qu'une seule fois le circuit de réinjection homocline. On peut donc également envisager de choisir un plan de section qui évite les petites oscillations autour de l'ensemble invariant, mais qui soit traversé par la boucle homocline, et que nous appellerons plan de type H.

Les orbites  $P^{(n)}$ , ayant une et une seule intersection avec ce plan de section, sont par conséquent des points fixes de son

application de premier retour. Le nombre de ces points fixes donne une mesure de la proximité de l'homoclinicité.

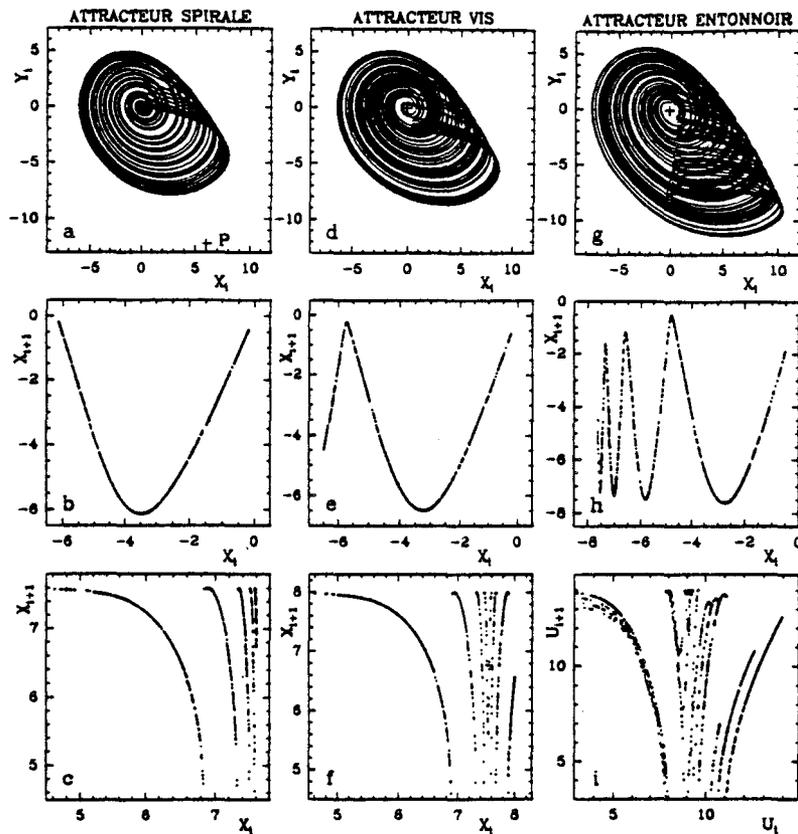
Si le système est fortement dissipatif, on obtient des sections de Poincaré quasiment unidimensionnelles, dont la structure fractale n'apparaît qu'à des échelles très petites. Il est alors possible d'étudier la dynamique au moyen d'une application d'un intervalle dans lui-même. On peut par exemple définir une coordonnée curviligne  $\xi$  le long de la section et considérer l'application  $\xi_{n+1} = f(\xi_n)$ . Il est également possible dans certains cas de construire directement l'application de premier retour  $y_{n+1} = f(y_n)$  associée à une des variables de la section de Poincaré.

La figure 3.10 montre quelques exemples de telles applications provenant de l'étude du modèle de Rössler [Argoul 87b]. L'homoclinicité implique essentiellement dans ce cas un point fixe de valeurs propres  $(\rho \pm i\omega, \lambda)$  avec  $\lambda < 0 < \rho$ , mais la complexité croissante du mécanisme de réinjection lorsqu'on va de gauche à droite est due à la présence d'un foyer-col de type  $\rho < 0 < \lambda$  se rapprochant de l'homoclinicité. Il faut noter que, pour ce type de point fixe, les applications obtenues possèdent une structure différente [Glendinning 84, Arnéodo 85, Argoul 87b].

On remarquera que ces trois types d'attracteurs présentent des topologies différentes, comme le montrent les nombres différents d'extrema pour les applications de premier retour de type  $\Lambda$ . Il serait par conséquent intéressant d'appliquer la méthode de caractérisation topologique que nous présentons au chapitre 4 à ces trois types d'attracteurs.

Dans le cas le plus simple, qui est celui de l'attracteur "spirale", on voit que si l'application de premier retour de type  $\Lambda$  est une

simple courbe à un maximum, l'application de type H présente une structure caractéristique. Elle se décompose en effet en un certain nombre de branches, séparées par des discontinuités. Chaque branche correspond à un nombre différent de tours autour du point fixe, comme on peut s'en convaincre en remarquant que les points fixes de cette application multi-branchée correspondent aux solutions périodiques  $P(n)$ .

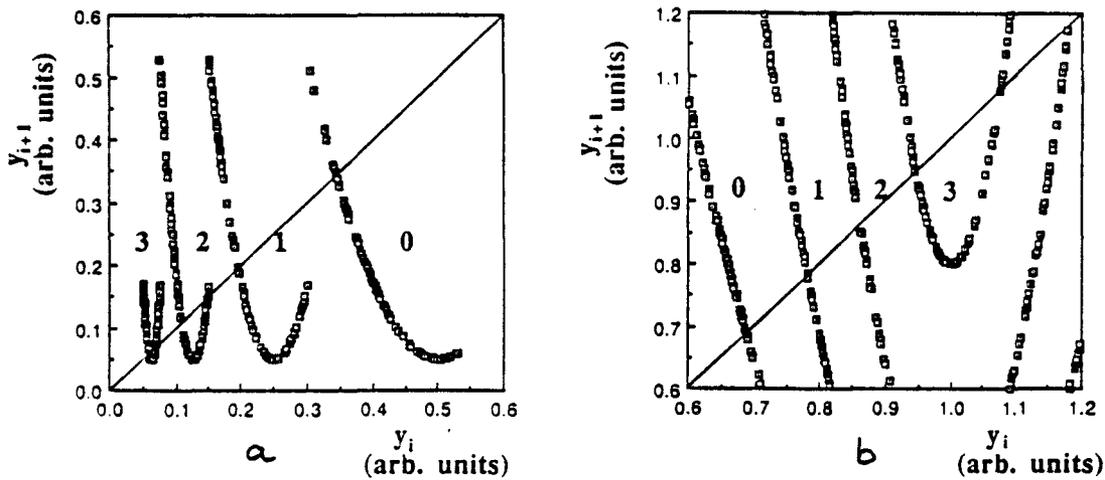


**Fig. 3.10** Portraits de phase (première ligne), applications à premier retour de type  $\Lambda$  (deuxième ligne) et de type H (troisième ligne) pour trois attracteurs observés dans le modèle de Rössler (d'après Argoul et al. [1987b]).

Dans le cas d'une tangence homocline à une orbite périodique, l'étude de Papoff et al. [1991], et les simulations numériques que nous avons effectuées, montrent des applications de types  $\Lambda$  et H

analogues à celles obtenues dans le cas de l'homoclinicité "spirale" d'un point fixe.

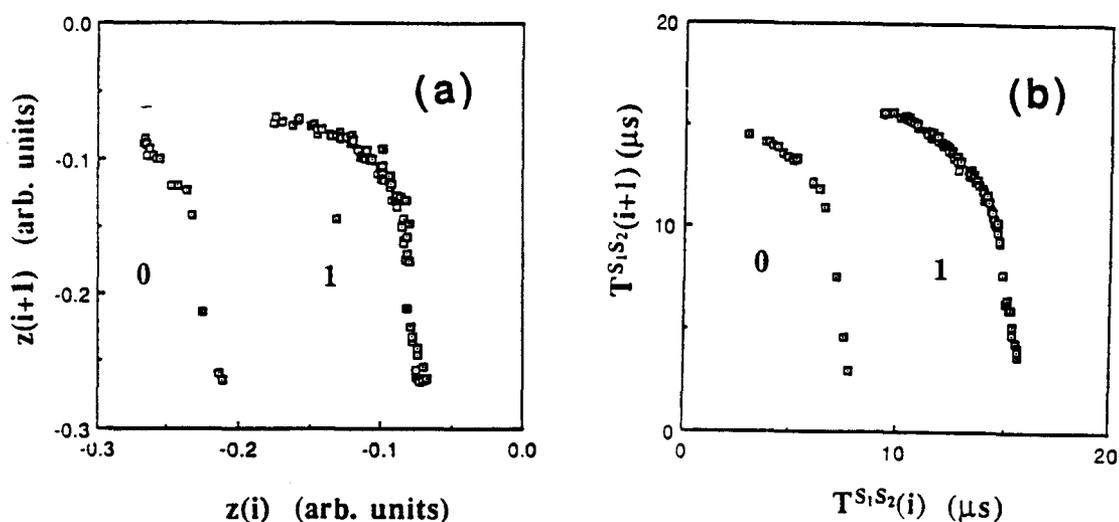
Il est intéressant de noter que les applications de premier retour associées aux sections de Poincaré situées dans la région de réinjection possèdent un aspect différent selon que le plan de section est choisi au début ou à la fin de la réinjection, comme le montre la figure 3.11 [Papoff 91].



**Fig. 3.11** Applications de premier retour de type H dans le cas de la tangence homocline d'une orbite périodique. Le plan de section se trouve (a) au début, (b) à la fin de la boucle de réinjection (d'après Papoff et al. [1991]).

Par ailleurs, les applications multibranchées caractéristiques du chaos homocline peuvent également être construites à partir de l'étude des temps de retour dans un plan de section, ou des temps de vol entre deux plans de section, situés par exemple après et avant la réinjection homocline. Cette méthode a été exploitée par Arecchi et al. [1988a,b] et Papoff et al. [1989,1991] pour caractériser expérimentalement les comportements homoclines

observés respectivement dans un laser CO<sub>2</sub> à contre-réaction et dans un laser CO<sub>2</sub> à absorbant saturable. Les applications obtenues de cette manière sont tout à fait équivalentes à celles présentées plus haut, comme le montre par exemple la figure 3.12.

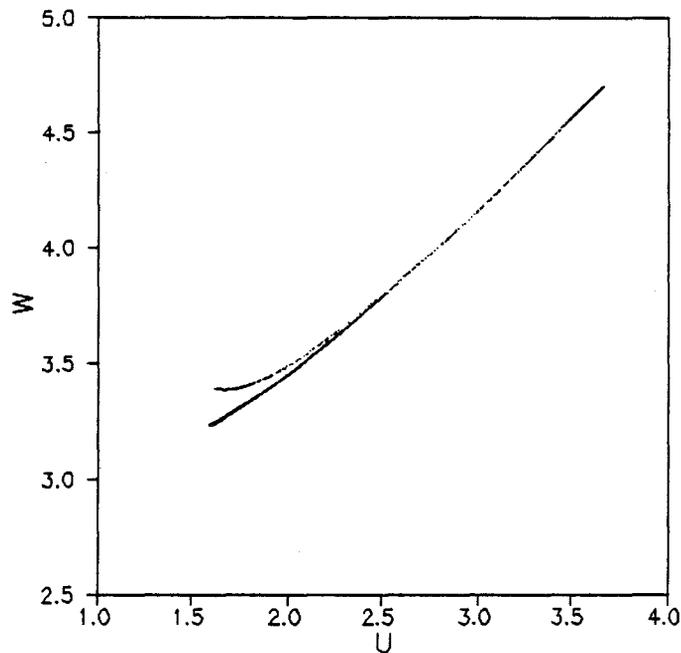


**Fig 3.12** Applications de premier retour de type H (a) d'une variable du système, (b) du temps de vol entre deux plans de section situés au début et à la fin de la boucle de réinjection, dans le cas de la tangence homocline d'une orbite périodique (d'après Papoff et al. [1991]).

Il semble enfin qu'il existe une dernière façon d'obtenir des applications multi-branchées, et ce directement à partir d'une section de Poincaré interceptant toute la dynamique. Nous prendrons comme exemple la tangence homocline sur une orbite périodique observée dans un modèle du laser à absorbant saturable où l'absorbant est éliminé adiabatiquement [Lefranc 91].

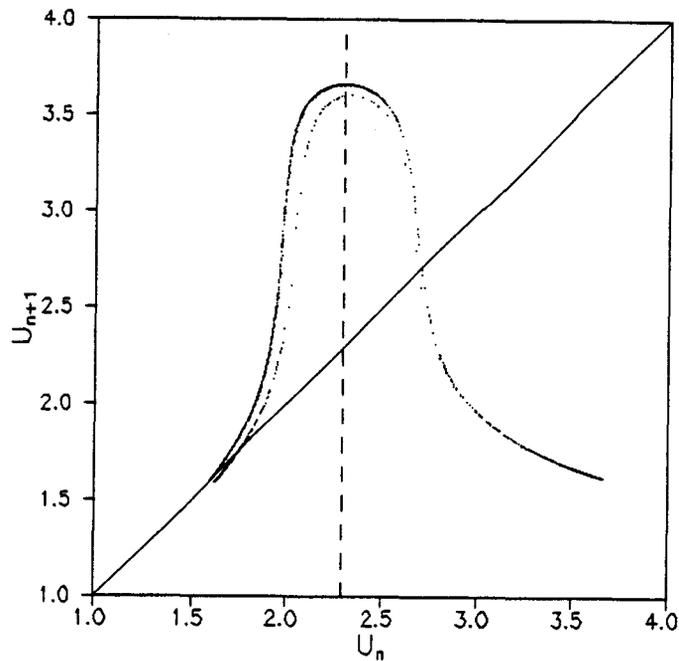
La figure 3.13 représente la section de Poincaré d'un attracteur chaotique proche de l'homoclinicité. Le plan de section est un plan d'intensité constante passant par le point fixe, et coupant transversalement le cycle instable qui l'entoure. En traçant

l'application de premier retour pour une des deux coordonnées du plan, on trouve la courbe à un maximum de la figure 3.14. L'extrémité gauche de la partie à pente positive correspond aux trajectoires qui évoluent dans un voisinage du cycle limite, la partie à pente négative assurant la réinjection dans ce voisinage. Dans la suite nous noterons ces deux branches "x" et "y".



**Fig. 3.13** Section de Poincaré d'un attracteur chaotique près d'une tangence homocline d'une orbite périodique, obtenue dans des simulations numériques d'un modèle du LSA. Le plan de section passe par le point fixe, et coupe transversalement l'orbite périodique qui l'entoure. Celle-ci se situe en bas et à gauche de la section de l'attracteur.

L'analogie des sections de Poincaré de type H est ici l'application de premier retour dans l'intervalle "y", puisque celui-ci correspond aux réinjections. Le nombre de fois qu'une trajectoire visite la branche "x" entre deux passages par "y", c'est-à-dire entre deux réinjections, est égal au nombre de tours effectués autour du cycle limite instable.

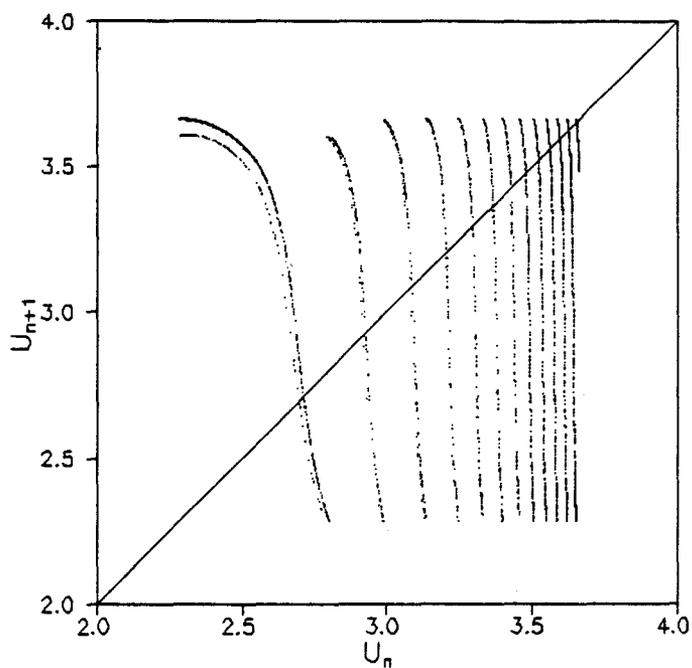


**Fig. 3.14** Application de premier retour (de type  $\Lambda$ ) d'une des coordonnées du plan de section de la fig. 3.13.

La figure 3.15 montre l'application de premier retour dans l'intervalle "y" de l'application de la figure 3.14. On constate qu'on retrouve bien la structure à plusieurs branches, chaque branche correspondant à un nombre donné de tours autour du cycle limite instable. Les points fixes de cette application correspondent aux orbites périodiques  $P^{(n)}$  du flot.

On notera que les applications des figures 3.14 et 3.15 permettent de donner deux codages symboliques différents des trajectoires. Ainsi, si on numérote les branches de la figure 3.14 de 0 à n en allant de gauche à droite, les orbites  $P^{(n)}$  seront codées  $yx^n$  avec le premier type d'application, et n avec le second. De manière générale, on peut remarquer que toutes les séquences symboliques de x et de y peuvent être recodées comme une suite des symboles  $0 = y$ ,  $1 = yx$ , ...,  $n = yx^n$ , où n+1 est le nombre de branches de

l'application multi-branchée. Une description plus compacte de la dynamique symbolique est ainsi obtenue.



**Fig 3.15** Application de premier retour dans la partie à pente négative de l'application de la fig. 3.14.

### 3.4 APPLICATION AU LASER CO<sub>2</sub> A ABSORBANT SATURABLE

On trouvera ci-dessous l'article dans lequel nous avons présenté nos résultats concernant le laser CO<sub>2</sub> où CH<sub>3</sub>I est l'absorbant saturable. Nous y avons montré que des applications de premier retour multi-branchées de type "spirale" étaient obtenues à la fois dans l'analyse des signaux expérimentaux et dans celle de simulations numériques.

Si le point fixe  $I_+$ , autour duquel les trajectoires spiralent, est a priori un candidat crédible à l'homoclinicité, plusieurs faits indiquent que les comportements observés peuvent être expliqués par une tangence homocline sur un cycle instable encerclant  $I_+$ .

En effet, les séquences alternées chaotiques-périodiques ne sont pas disposées de manière symétrique dans l'espace des paramètres, et l'amplitude des petites oscillations ne tend pas vers zéro.

De plus, nous avons pu mettre en évidence l'existence d'une tangence homocline sur un cycle instable dans les simulations numériques, dans l'hypothèse où l'absorbant réagit de manière instantanée au champ électromagnétique. Cette observation rejoint celles de Zambon [1991] et Papoff et al. [1991].  $I_+$  joue cependant un rôle important dans ce scénario, dans la mesure où le cycle instable impliqué apparaît dans une bifurcation de Hopf sous-critique de  $I_+$ .

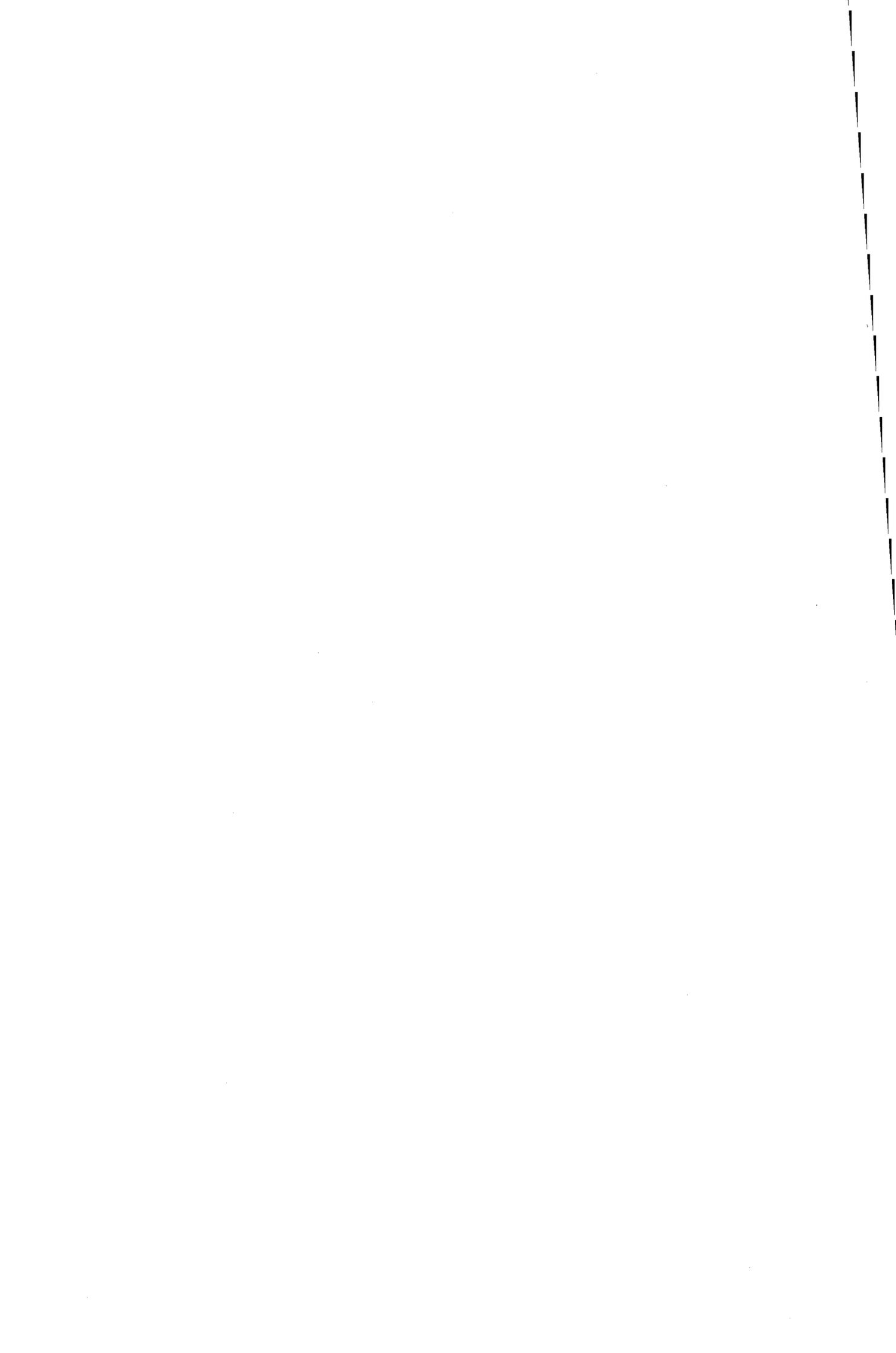
C'est ce qui explique la bistabilité observée dans les simulations numériques entre  $I_+$  et les attracteurs chaotiques : avant la tangence homocline, la variété stable du cycle instable

sépare les bassins d'attraction des deux régimes. A la tangence homocline, l'attracteur chaotique est détruit dans une crise de frontière, et le système bascule sur le point fixe stable  $I_+$ . Inversement, quand on diminue le paramètre de pompe,  $I_+$  étant stable, on observe une transition soudaine vers un attracteur chaotique à la bifurcation de Hopf sous-critique.

S'il est vraisemblable que les scénarios observés expérimentalement sont eux aussi dus à une tangence homocline sur un cycle instable, on notera néanmoins qu'il devrait être possible d'observer également une bifurcation homocline du point fixe  $I_+$ , en faisant varier modérément deux paramètres de contrôle. Ces deux configurations sont en effet reliées par une bifurcation de codimension 2, à savoir l'interaction de la bifurcation homocline de  $I_+$  avec une bifurcation de Hopf sous-critique de  $I_+$  [Gaspard 87].



## **ANNEXE AU CHAPITRE 3**



# Homoclinic chaos in a laser containing a saturable absorber

M. Lefranc, D. Hennequin, and D. Dangoisse

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, Associé au Centre National de la Recherche Scientifique, Université des Sciences et Techniques de Lille-Flandres-Artois, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

Received August 15, 1989; accepted October 11, 1990

Checks of homoclinic chaos made with nonlinear analysis techniques have been performed on the signals coming from a CO<sub>2</sub> laser containing CH<sub>3</sub>I as a saturable absorber. The one-dimensional return maps of the regimes appearing inside the alternating periodic chaotic sequence are typical of homoclinic chaos. Numerical simulations give results in good agreement with the experimental observations. In the case of a fast absorber, a homoclinic tangency to a cycle created in a subcritical Hopf bifurcation is seen to be responsible for the homoclinic behavior observed in the model.

## 1. INTRODUCTION

A laser containing a saturable absorber (LSA) was studied extensively in connection with the requirement for easy and efficient modulation of CO<sub>2</sub> laser radiation, and many molecules have been used as saturable absorbers for passive Q switching (PQS). In the PQS regime, the laser is spontaneously unstable, and its output intensity exhibits periodic pulses of various shapes. In the beginning of the 1970's this PQS regime received much attention as new absorbing molecules were searched for, but only a few publications were devoted to the mechanisms from which PQS originates. To our knowledge, the first model able to reproduce the PQS shapes was a four-level model for both the laser medium and the absorber.<sup>1-4</sup> In the beginning of the 1980's there was renewed interest in the LSA as the field of optical instability grew.<sup>5</sup> New shapes of PQS pulses were discovered,<sup>6-8</sup> and the dual four-level model was unable to reproduce them correctly.<sup>9</sup> A three-plus-two-level model was then introduced by Tachikawa *et al.* to reproduce the entire experimentally observed phenomenology.<sup>7,8,10</sup> This model was later completed by the addition of a rotational-level bath in the gain medium.<sup>11</sup> Recently, chaotic pulses were observed both experimentally<sup>12,13</sup> and theoretically.<sup>14</sup> The dynamics of this chaos has been interpreted through a topological analysis of the phase space associated with the signal.<sup>12,13,15</sup>

The PQS regime usually corresponds to the existence of two unstable fixed points: the  $I_0$  point has zero intensity and is a saddle point and the  $I_+$  point has a nonzero intensity and is a saddle focus. As a control parameter is varied, the  $I_+$  point loses its stability through a Hopf bifurcation, generating type II PQS, which destabilizes through period doubling.<sup>12,16</sup> Then alternating periodic and chaotic sequences appear,<sup>12</sup> similar to those encountered in the neighborhood of a homoclinic bifurcation,<sup>17,18</sup> when some conditions specified by Shil'nikov<sup>19</sup> are satisfied. However, the situation here is complicated by the presence of the second fixed point in the phase space and possibly by a perturbation that is due to noise.<sup>20</sup>

To our knowledge, no characterization of the chaotic behavior inside the alternating periodic-chaotic sequence other than in the preliminary results given by us<sup>21</sup> and in

a related paper by Papoff *et al.*<sup>22</sup> has been made. Similar characterizations have been made for a CO<sub>2</sub> laser with feedback<sup>23</sup> and in the Belousov-Zhabotinskii reaction.<sup>24</sup> In fact, although chaos has been observed in the LSA, there has been no demonstration that this was Shil'nikov chaos and two phenomena may, in some situations, inhibit this chaotic behavior: the noise<sup>20</sup> and a strong attraction of  $I_0$  along its stable manifold, which can destroy sensitivity to the initial conditions.<sup>13,15</sup>

Here we report on an analysis that uses methods inspired by the dynamical system theory [phase portraits, Poincaré maps, and one-dimensional (1-D) maps] of the erratic behavior inside the alternating chaotic-periodic sequence. We show that in the CO<sub>2</sub> + CH<sub>3</sub>I LSA, in spite of the presence of a second fixed point in the phase space, the dynamics qualitatively follows the Shil'nikov behavior. We also study the evolution of the chaos between two periodic regimes and show that the transition from periodic behavior to chaos follows two different routes: period doubling on the one hand and the Pomeau-Manneville (type I intermittency) route on the other.

This paper is organized as follows: in Section 2 an analysis of experimental data is presented, showing that the PQS regime possesses the properties of the Shil'nikov chaos. In Section 3 the stability of the fixed points of a standard model of the LSA is discussed. The numerical solutions of this system are analyzed in Section 4 by using the same techniques as in Section 2 together with Floquet's theory.

## 2. EXPERIMENTS

The experimental device has already been described elsewhere.<sup>3</sup> It is composed of a CO<sub>2</sub> + CH<sub>3</sub>I LSA, in which amplification is obtained in a mixture of CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, and He in the approximate proportions of 3:6.5:1 for a total pressure of 7.8 Torr; the absorber is CH<sub>3</sub>I at a pressure of ~30 mTorr. The laser is tuned on the 10(P)32 line, in quasi-resonance with at least three absorption lines of CH<sub>3</sub>I.<sup>25</sup> The general behavior exhibited by the LSA when the cavity detuning or the pump parameter is varied in this region of the parameter space<sup>12</sup> shows a cw regime followed by a periodic regime that becomes chaotic through

a period-doubling cascade; then periodic and chaotic sequences alternate, as chemical reactions have shown.<sup>26</sup> Beyond this sequence, the laser is off. In the particular conditions of the results discussed below, the control parameter is the cavity detuning, and the observed order of behavior is cw,  $T$ ,  $2T$ ,  $4T$ , chaos,  $P^{(3)}$ ,  $C^{(2)}$ ,  $P^{(2)}$ ,  $C^{(1)}$ ,  $P^{(1)}$ ,  $P^{(0)}$ , off. The notation used here was introduced in Ref. 15 and may be summarized as follows:

- (i) The  $T$  regime refers to type II PQS: the output of the LSA is a  $T$  periodic oscillation, emerging from the cw regime through a Hopf bifurcation. It evolves toward chaos through a period-doubling cascade (regimes  $2^n T$ ).
- (ii) The  $P^{(n)}$  regimes refer to type I PQS: the output of the LSA exhibits periodic pulses composed of a narrow

high peak followed by a series of  $n$  undulations at period  $T$ . It has been observed<sup>12</sup> that the pulses also undergo a series of period doublings culminating in an erratic regime called  $C^{(n)}$  when the output is located in parameter domains between the  $P^{(n)}$  and  $P^{(n+1)}$  regions.

We have analyzed the erratic regimes  $C^{(n)}$  to find characteristic properties that support the existence of homoclinic chaos. The most remarkable one concerns the 1-D maps constructed from the Poincaré section of the attractor: the 1-D map of homoclinic chaos shows  $n + 1$  branches and possibly a part of an  $(n + 2)$ th one; each branch is associated with  $p$  spirals in the phase space ( $p \leq n$  or  $p \leq n + 1$ ), and the distance between the branches decreases when  $p$  increases. The number of

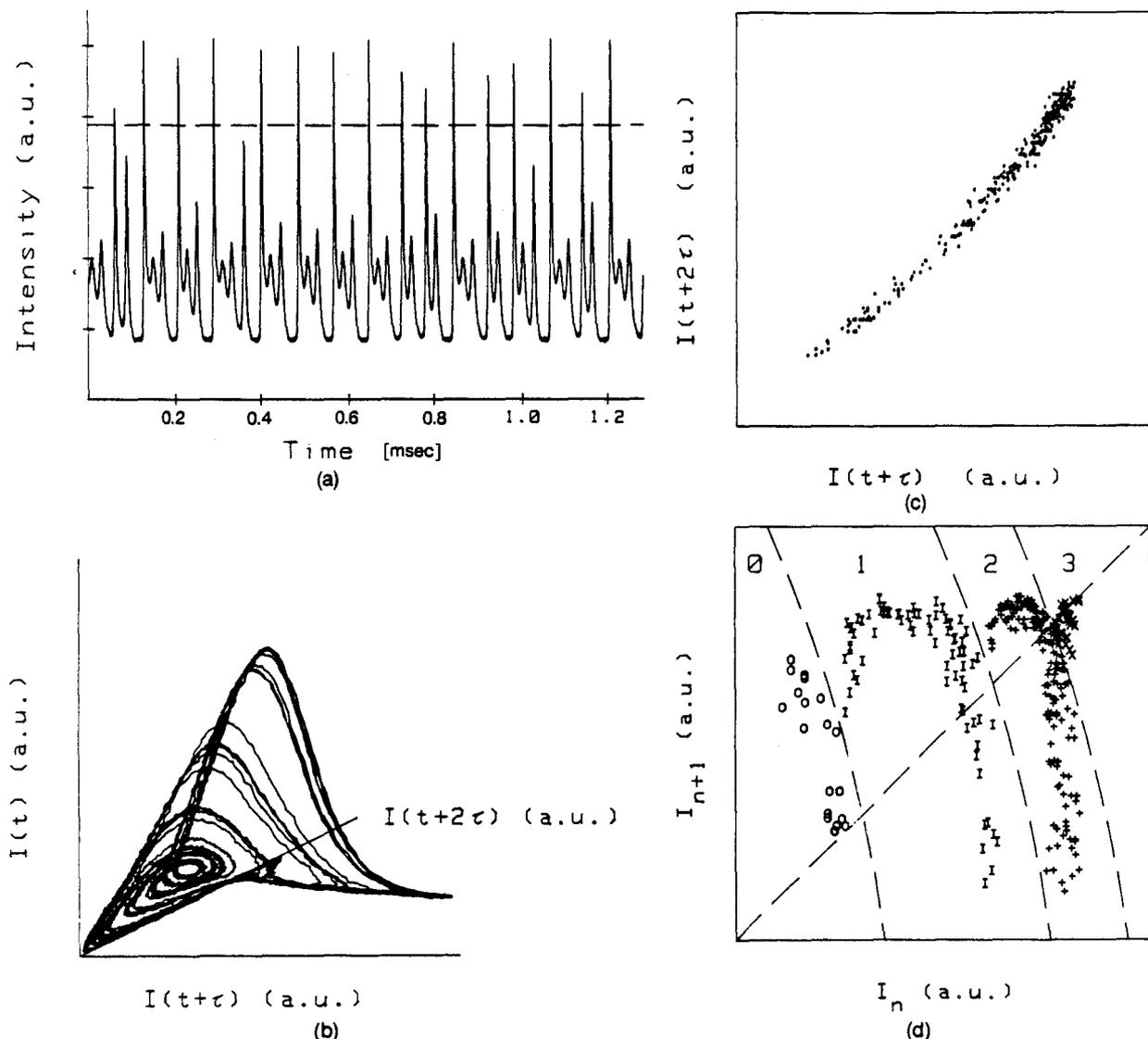


Fig. 1. Analysis of the  $C^{(2)}$  experimental regime: (a) temporal sequence; (b) three-dimensional reconstruction of the attractor in the phase space  $I(t)$ ,  $I(t + \tau)$ ,  $I(t + 2\tau)$ , where  $\tau = 3.2 \mu\text{sec}$ ; (c) Poincaré section performed in the reinjection loop of the attractor in a plane indicated by the dashed line in (a); (d) first return map of the Poincaré section of (c). Each point of coordinates  $(I_n, I_{n+1})$  is represented by the number  $p$  of undulations that separate the  $n$ th and the  $(n + 1)$ th crossings through the Poincaré section. The symbols O, I, +, and  $\times$  correspond, respectively, to  $p = 0, 1, 2$ , and 3. The dashed curves separate regions corresponding to a given  $p$ , which is indicated for each region at the top of each the figure. The experimental conditions are given in the text.

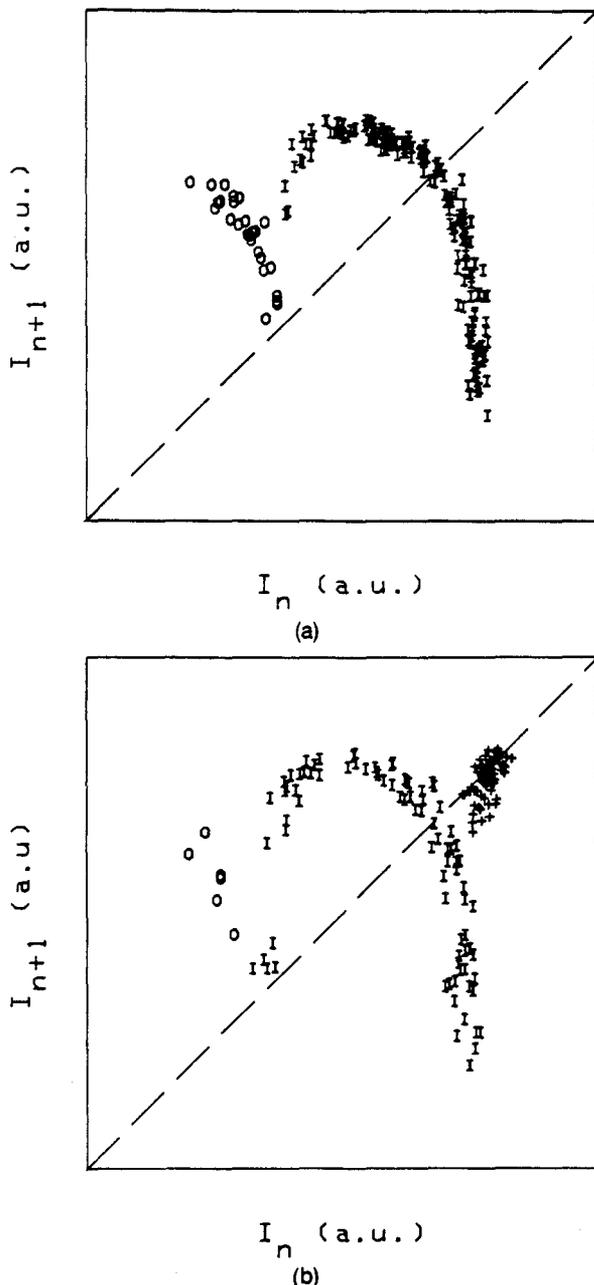


Fig. 2. 1-D maps of  $C^{(1)}$  chaos: (a) close to the  $P^{(1)}$  regime, (b) close to the  $P^{(2)}$  regime. The symbols are the same as in Fig. 1(d).

branches becomes infinite as the system approaches the homoclinic bifurcation.<sup>24,27</sup>

Experimentally, the only accessible variable of the flow is the laser intensity. An example of its temporal evolution in a  $C^{(n)}$  regime is shown in Fig. 1(a) for  $n = 2$ . The signal shows a succession of  $P^{(p)}$ -type pulses with  $p \leq 3$ . The 1-D map is obtained in three steps: (i) A reconstruction of the attractor is undertaken, using the time-delay method. A projection of this attractor in the three-dimensional space  $I(t)$ ,  $I(t + \tau)$ ,  $I(t + 2\tau)$ , with  $\tau = 3.2 \mu\text{sec}$  (i.e.  $\sim T/7$ , where  $T$  is the period of the small

undulations), is shown in Fig. 1(b). It is composed of a spiraling part diverging from  $I_+$  and of a reinjection loop, which, in this three-dimensional representation, passes close to  $I_0$ . (ii) A Poincaré section of this attractor is then obtained at  $I(t)$  constant [Fig. 1(c)]. The value of the constant is chosen so that the Poincaré section plane cuts the trajectory in the middle of the reinjection loop, on the ascending part of the loop [dashed line of Fig. 1(a)]. (iii) Eventually the first return map associated with this section is plotted. As the Poincaré section lies almost on a straight line, this return map is equivalent to a 1-D map. The first return map  $I_n(t + \tau)$ ,  $I_{n+1}(t + \tau)$  obtained for the  $C^{(2)}$  regime is shown in Fig. 1(d). Three branches appear clearly, and the beginning of a fourth one may be seen in the top right-hand corner of the figure. Additional information is provided by counting the number of small undulations separating the two crossings through the Poincaré section associated with each point. The dashed curves in Fig. 1(d) define regions where the same number of undulations are found. It is clear that each region corresponds to a branch. Note that the distance between the branches decreases when  $p$  increases. All these properties hold for other experimentally observed  $C^{(n)}$  regimes. The entire behavior described above is consistent with the properties of homoclinic chaos and supports its existence in the LSA.<sup>24</sup>

The characterization of the behavior can be refined by studying the evolution of the chaos between the  $P^{(n)}$  and  $P^{(n+1)}$  regimes. The passage from  $P^{(n)}$  to  $C^{(n)}$  is well understood, as it occurs through a cascade of period-doubling bifurcations. On the other hand, the passage from  $C^{(n)}$  to  $P^{(n+1)}$  in the LSA has not been discussed. We have plotted the 1-D maps of the  $C^{(1)}$  regime in a region close to  $P^{(1)}$  [Fig. 2(a)] and in a region close to  $P^{(2)}$  [Fig. 2(b)]. In the first case, only the two branches corresponding to  $p = 0$  and  $p = 1$  are visible, whereas in the second case the beginning of a third branch corresponding to  $p = 2$  appears below the  $45^\circ$  line. This may be considered part of the third branch of the  $C^{(2)}$  regime [Fig. 1(d)]. Although the control parameter noise prevents our bringing our system close to the bifurcation, the transition from  $C^{(1)}$  to  $P^{(2)}$  might be interpreted as follows: When the system evolves to  $P^{(2)}$ , a third branch appears in the first return map below the  $45^\circ$  line, approaching it tangentially. Finally,  $P^{(2)}$  appears through a tangent bifurcation. The other experimentally observed  $C^{(n)}-P^{(n+1)}$  transitions evolve in the same way. This behavior, completed by the fact that the transition from the  $P^{(n)}$  to the  $C^{(n)}$  regime occurs through a period-doubling cascade, corresponds exactly to the one exhibited by homoclinic chaos. These results confirm that the  $\text{CO}_2 + \text{CH}_3\text{I}$  LSA in our experimental conditions exhibits a dynamical behavior consistent with the properties known for Shil'nikov chaos.

### 3. MODEL OF THE LASER CONTAINING A SATURABLE ABSORBER

The various theoretical models of the PQS LSA differ in the number of molecular levels considered. Early models aimed at a quantitative agreement for particular experimental parameters and included a large number of variables to model the relaxation processes.<sup>1,2</sup> In an attempt to reach a more global description of the LSA with the

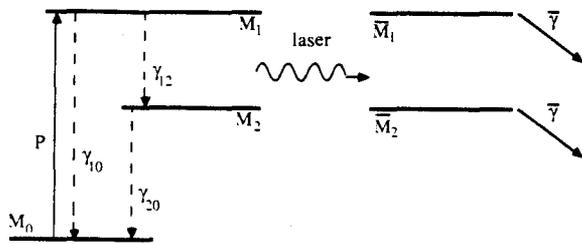


Fig. 3. Schematic representation of the energy levels used in the theoretical model of the LSA. The quantities with overbars refer to the absorber medium, those without overbars to the active medium.

simplest model, Powell *et al.* introduced a two-level description for the absorber and the active medium,<sup>28</sup> which displays a rich phenomenology if molecular polarization and cavity detuning are taken into account.<sup>29</sup> However, this model could hardly provide the range of parameters in which instabilities appear in the CO<sub>2</sub> LSA. For this reason, Arimondo *et al.*<sup>3</sup> proposed including the vibrational manifolds to which the lasing and absorbing levels are coupled, thus reproducing well the experimental domain of existence of PQS.

Nevertheless, there remained a qualitative discrepancy, since this four-level model is unable to predict the  $P^{(n)}$  regimes observed experimentally. A definite step toward such prediction was made by Tachikawa and co-workers,<sup>7,8,10</sup> who introduced the ground state of the CO<sub>2</sub> molecule as a third level for the active medium. With this model other authors were able to obtain the  $P^{(n)}$  periodic states and the  $C^{(n)}$  erratic ones numerically.<sup>14,15</sup> Although Tachikawa's model neglects the influence of inhomogeneous broadening, it provides surprisingly good agreement with experimental observations.

We shall therefore use this model, which is schematically represented in Fig. 3, in numerical simulations to determine whether the different features reminiscent of homoclinic chaos observed experimentally can be reproduced.

The equations, verified by the photon density  $\phi$ , the population densities of the upper lasing level ( $M_1$ ), the lower level ( $M_2$ ), and the ground state ( $M_0$ ) and the population difference in the absorber  $\bar{M}$ , are

$$\dot{\phi} = \phi(\zeta\mathcal{A}(M_1 - M_2) - \bar{\zeta}\bar{\mathcal{A}}\bar{M} - 2\kappa), \quad (1a)$$

$$\dot{M}_1 = -\mathcal{A}(M_1 - M_2)\phi + PM_0 - (\gamma_{10} + \gamma_{12})M_1, \quad (1b)$$

$$\dot{M}_2 = \mathcal{A}(M_1 - M_2)\phi - \gamma_{20}M_2 + \gamma_{12}M_1, \quad (1c)$$

$$\dot{M}_0 = \gamma_{10}M_1 + \gamma_{20}M_2 - PM_0, \quad (1d)$$

$$\dot{\bar{M}} = -2\bar{\mathcal{A}}\phi\bar{M} - \bar{\gamma}(\bar{M} - \bar{M}^*), \quad (1e)$$

where  $\zeta$  ( $\bar{\zeta}$ ) is the relative length of the amplifying (absorbing) medium,  $P$  is the pumping rate,  $2\kappa = cT/L$  is the cavity-damping rate,  $L$  is the total cavity length,  $T$  is the mirror transmittivity,  $\bar{M}^*$  is the equilibrium population in the absorber, and  $\mathcal{A}(M_1 - M_2)$  ( $\bar{\mathcal{A}}\bar{M}$ ) is the saturated amplification (absorption) coefficient.  $\gamma_{ij}$  are the relaxation rates from level  $i$  to level  $j$ , and  $\bar{\gamma}$  is the relaxation rate of the absorber's population inversion. This set of equations is just a generalization of the two-level rate-equation model of the LSA, modified to take into account the pres-

ence of the third level in the active medium and in which only the most relevant relaxation mechanisms have been included. The amplification coefficient  $\mathcal{A}$  is corrected to take into account the rotational partition function and the level degeneracy factor, since emission occurs between two rotational levels not represented in this model. Note also that spontaneous emission has been neglected in the equation for the photon density.

As  $M_0 + M_1 + M_2 = N$  is a constant, a change of variables can then be undertaken to express the dynamics of the LSA in terms of the evolution of the active molecule population difference  $M = M_1 - M_2$  and the dimensionless intensity  $I = 2\mathcal{A}\phi/\gamma_2$ :

$$\dot{I} = I(\zeta\mathcal{A}M - \bar{\zeta}\bar{\mathcal{A}}\bar{M} - 2\kappa), \quad (2a)$$

$$\dot{M} = -(I + 1)\gamma_2M + PM_0 + \gamma_1(N - M_0), \quad (2b)$$

$$\dot{M}_0 = \gamma_2N - \gamma_1M - (\gamma_2 + P)M_0, \quad (2c)$$

$$\dot{\bar{M}} = -2\bar{\mathcal{A}}\phi\bar{M} - \bar{\gamma}(\bar{M} - \bar{M}^*), \quad (2d)$$

where the combined relaxation rates  $\gamma_1 = (\gamma_{20} - \gamma_{10} - 2\gamma_{12})/2$  and  $\gamma_2 = (\gamma_{20} + \gamma_{10} + 2\gamma_{12})/2$  have been introduced as well as the total density of molecules in the amplifier  $N = M_0 + M_1 + M_2$ .

In Eq. (2b) the term  $PM_0 + \gamma_1(N - M_0)$  may be considered a source term. When the relaxation rates are such that  $\gamma_{10} + 2\gamma_{12} = \gamma_{20}$ , the source term is reduced to  $PM_0$ , and the model reduces to a two-level model for both the absorber and the amplifier since Eq. (2c) is no longer coupled to the other ones.

Introducing dimensionless quantities

$$a = \frac{\bar{\mathcal{A}}}{\mathcal{A}} \frac{\gamma_2}{\bar{\gamma}}, \quad b = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2,$$

$$\varepsilon = \frac{\gamma_2}{2\kappa}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\gamma}}{2\kappa},$$

$$A = P(\sqrt{b} + 1) \frac{\mathcal{A}L N}{2\kappa\gamma_2}, \quad \bar{A} = \bar{M}^* \frac{\bar{\zeta}\bar{\mathcal{A}}}{2\kappa},$$

$$U = M_0 \frac{\mathcal{A}}{2\kappa}, \quad \bar{U} = \bar{M} \frac{\bar{\mathcal{A}}}{2\kappa},$$

a new variable representing the source term

$$W = \frac{\mathcal{A}}{2\kappa} \frac{\zeta}{\gamma_2} [PM_0 + \gamma_1(N - M_0)],$$

and a dimensionless time  $t' = 2\kappa t$ , we can reformulate Eqs. (2) as follows:

$$\dot{I} = I(U - \bar{U} - 1), \quad (3a)$$

$$\dot{U} = \varepsilon[W - U(1 + I)], \quad (3b)$$

$$\dot{W} = \varepsilon(A + bU - W), \quad (3c)$$

$$\dot{\bar{U}} = \bar{\varepsilon}[\bar{A} - \bar{U}(1 + aI)]. \quad (3d)$$

In Eq. (3c) the term  $P/\gamma_2$  has been considered negligible compared to unity, in good agreement with the values chosen by Tachikawa *et al.*<sup>9</sup> and those used in our numerical estimations ( $P/\gamma_2 < 1.5 \times 10^{-3}$ ).

The threshold of the laser occurs at  $A = A_{th} = (A + 1)(1 - b)$ . Above this threshold, Eqs. (3) have two

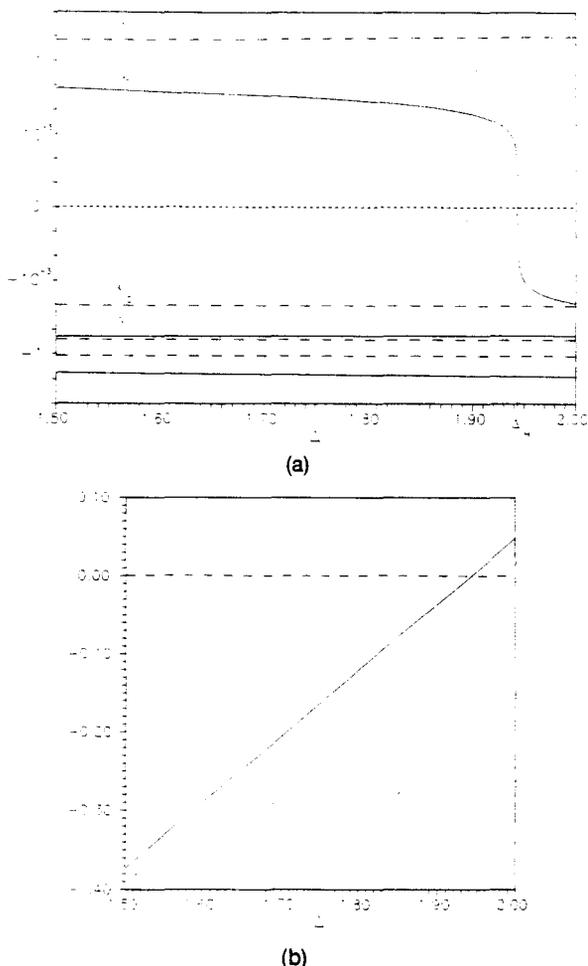


Fig. 4. (a) Evolution of the eigenvalues of the  $I_0$  (dashed lines) and the  $I_+$  (solid lines) eigenvalues as functions of the  $A$  parameter.  $A_H = 1.943$  is the Hopf bifurcation point. (b) Values of  $\rho/\lambda$  (solid line) and  $(\lambda_2/\lambda_1)(\rho/\lambda)$  (dashed line) versus  $A$ . Their absolute values are both smaller than 1.

stationary solutions corresponding in phase space to two fixed points  $I_0$  and  $I_+$  whose coordinates  $(I_0, U_0, W_0, \bar{U}_0)$  and  $(I_+, U_+, W_+, \bar{U}_+)$  are

$$I_0 = 0, \quad U_0 = W_0 = A(1 - b)^{-1}, \quad \bar{U}_0 = \bar{A},$$

$$I_+ = \frac{\alpha(A + b - 1) - (\bar{A} + 1) + \{[\alpha(A + b - 1) - (\bar{A} + 1)]^2 + 4\alpha(A - A_{th})\}^{1/2}}{2\alpha},$$

$$U_+ = A(1 + I_+ - b)^{-1},$$

$$W_+ = A(1 + I_+)(1 + I_+ - b)^{-1},$$

$$\bar{U}_+ = \bar{A}(1 + \alpha I_+)^{-1}.$$

A linear stability analysis provides the eigenvalues of the linear flow in the vicinity of these two fixed points. With parameters corresponding to our experiments, the stability of  $I_0$  is characterized by four real eigenvalues  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \text{ and } \lambda_4)$ , where  $\lambda_1$  is positive and corresponds to an eigenvector collinear to the intensity vector and  $\lambda_2, \lambda_3,$  and  $\lambda_4$  are negative,  $|\lambda_4| \geq |\lambda_3| \geq |\lambda_2|$ , and  $I_+$  is associated with two real negative eigenvalues  $(\lambda \text{ and } \lambda', |\lambda'| \geq |\lambda|)$  and

two complex-conjugate eigenvalues  $(\rho \pm i\omega)$ , where  $\rho$  is positive).  $I_0$  is therefore a saddle point whose unstable manifold is along the intensity direction and  $I_+$  is a saddle focus. These eigenvalues are plotted versus the pump parameter in Fig. 4. Note that the eigenvalues of  $I_+$  have real parts with different orders of magnitude: for typical values of the parameters,  $|\lambda'| \approx 30|\lambda| \approx 300|\rho|$ . Therefore one expects that, near  $I_+$ , the eigendirection corresponding to  $\lambda'$  will be irrelevant and that  $I_+$  will be equivalent to a three-dimensional saddle-focus fixed point with eigenvalues  $\lambda, \rho \pm i\omega$ . Note that the eigenvector corresponding to  $\lambda'$  is quasi-orthogonal to the  $(U, W)$  plane, indicating that these two variables, which describe the amplifying medium, evolve on a slow time scale.

The dynamics of the system depends strongly on the relative values of the eigenvalues of  $I_+$  and of the global structure of the flow. Shil'nikov showed that if a homoclinic orbit is associated with a saddle focus such as  $I_+$ , and if in the neighborhood of this point the characteristic time of the flow following the focus directions is the largest one ( $\rho/\lambda < 1$ ), the system has a chaotic behavior.<sup>19</sup> This is a sufficient condition but not a necessary one. In particular, if the unstable and the stable manifolds are not perfectly connected but close to form a homoclinic orbit, chaos may occur.<sup>30</sup> The values of  $\rho/\lambda$  are plotted in Fig. 4(b) for the set of parameters discussed in Section 4. It is clear that the Shil'nikov condition for chaos is fulfilled, but, as the existence of a homoclinic orbit cannot be predicted analytically, only a numerical resolution of the equations will allow the presence of chaos to be inferred.

The situation is complicated here by the presence of the second fixed point,  $I_0$ . Either of two limit configurations is possible: (i) The two points are coupled by a homoclinic cycle, which connects the unstable manifold of  $I_+$  to the stable manifold of  $I_0$  and the unstable manifold of  $I_0$  to the stable manifold of  $I_+$ . In this case, the Shil'nikov condition for chaos becomes  $|(\lambda_2/\lambda_1)(\rho/\lambda)| < 1$ ,<sup>39</sup> indicating that too large an attractive power of  $I_0$  ( $\lambda_2$  large) will destroy the chaos by rescaling the trajectory at each passage in the vicinity of  $I_0$ . (ii) The two points are completely decoupled, and their respective stable and unstable manifolds always remain far from the conditions of intersection. In this case, a trajectory coming from  $I_+$  always remains out of reach from  $I_0$ , which does not interfere in the dynamics. Between these two limit cases a large number of possible intermediate configurations exists in

which the influence of  $I_0$  evolves with the strength of the coupling between the two fixed points.

Figure 4(b) shows the values of  $(\lambda_2/\lambda_1)(\rho/\lambda)$  for the same set of parameters as above. It appears that the product  $|(\lambda_2/\lambda_1)(\rho/\lambda)|$  is negligible compared to 1, so that, if we are in the case of strong coupling between the two fixed points, the effect of the  $I_0$  point will be to increase the sensitivity to initial conditions of the trajectories emerging from  $I_+$ . Consequently we can conclude that, provided that the system is close to a homoclinic or heteroclinic bifurcation, chaotic behavior will be observed, since sufficient conditions for the presence of homoclinic chaos hold true in both cases.

**Table 1. Values of the Parameters Used in the Numerical Simulations**

Parameter	Value
$A$	1.4 to 2.1
$\gamma_{20}$	$2.892 \times 10^5 \text{ sec}^{-1}$
$\gamma_{10}$	$1.2 \times 10^5 \text{ sec}^{-1}$
$\gamma_{12}$	$10 \text{ sec}^{-1}$
$\bar{A}$	2.16
$\bar{\gamma}$	$1.3 \times 10^6 \text{ sec}^{-1}$
$\epsilon$	0.137
$\bar{\epsilon}$	1.2
$b$	0.85
$\alpha$	4.17
$2\kappa$	$1.1 \times 10^6 \text{ sec}^{-1}$

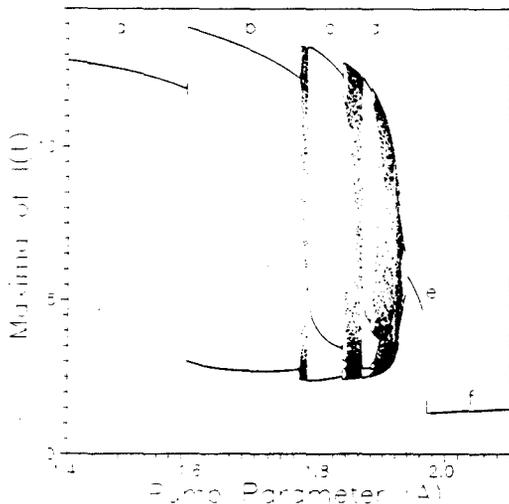


Fig. 5. Bifurcation diagram of the model of the LSA for parameters of Table 1. The letters indicate the following regimes: a,  $P^{(0)}$ ; b,  $P^{(1)}$ ; c,  $P^{(2)}$ ; d,  $P^{(3)}$ ; e, T; f,  $I_+$ .

#### 4. NUMERICAL RESULTS

In our experiments the main control parameter is the frequency detuning. As we assume that its main effect is to change the pump parameter  $A$ ,<sup>11</sup> this quantity has been chosen as a control parameter in the following numerical study, and all other parameters are fixed to the values given in Table 1.

In Fig. 5 we show a bifurcation diagram corresponding to the values of Table 1 in which the pump parameter  $A$  is varied from 1.4 to 2.1. For each parameter value successive maxima of the  $I$  variable are plotted. This allows us to characterize the chaotic regimes, the  $P^{(n)}$  ones, and their period doublings.

The calculated bifurcation diagram is close to the experimental behavior: the  $P^{(n)}$  states with  $n \leq 3$  are present and are separated by chaotic regimes  $C^{(n)}$ , except that  $P^{(0)}$  and  $P^{(1)}$  experience bistability, as is often seen experimentally. The transition from  $P^{(n)}$  to  $C^{(n)}$  occurs through a cascade of period-doubling bifurcations.  $C^{(n)}$  signals are characterized by a quasi-random sequence of  $P^{(m)}$ -like pulses, with  $0 \leq m \leq n$  or  $0 \leq m \leq n + 1$ , depending on whether we are closer in parameter space to the  $P^{(n)}$  or to the  $P^{(n+1)}$  periodic window. The T regime

(type II PQS), which appears after a subcritical Hopf bifurcation, and the successive period-doubled orbits can also be seen on the right-hand side of the Fig. 5. We shall see in the what follows that the subcritical nature of the Hopf bifurcation is a crucial point. The experimental transition from steady state to PQS appears to be subcritical or supercritical, depending on the operating conditions (e.g., see Refs. 3, 5, and 10), and it would be of interest to determine the boundary between the two kinds of behavior since supercritical bifurcations are observed numerically for smaller  $\bar{\epsilon}$ .

Figures 6(a) and 7(a) show examples of the time evolution of the laser intensity inside the  $C^{(1)}$  and the  $C^{(2)}$  chaotic regions, respectively, of the bifurcation diagram that are quite similar to experimental signals. To compute the 1-D return maps associated with these regimes and compare them with experimental results, a Poincaré section plane must be fixed. To get the multibranch maps characteristic of the homoclinic chaos, we choose a plane of constant intensity, which is crossed once and only once between two reinjection loops corresponding to the large peaks in the temporal signal.

The Poincaré sections for  $A = 1.773$  and  $A = 1.86$  are shown in Figs. 6(b) and 7(b), respectively. Whereas the model is four dimensional, strong volume contraction occurs, and the projections of the sections on the  $(U, W)$  plane are seen to be quasi-1-D. Indeed, on computing the Lyapunov exponents for, e.g.,  $A = 1.86$ , one finds the values 0.0168, 0.0,  $-0.191$ , and  $-7.81$  inverse reduced time units, yielding from the Kaplan-Yorke formula<sup>31</sup> a Lyapunov dimension of 2.088, which is known to be an upper bound on the fractal dimension.<sup>32</sup> A projection of the corresponding attractor in the  $(I, U, W)$  subspace is displayed in Fig. 7(d). The fractal dimension is therefore close to 2, suggesting that a phenomenological model involving only three variables could in principle be found. This fact allows us to construct 1-D return maps  $U_{n+1} = f(U_n)$ , which are shown in Figs. 6(c) and 7(c). They are seen to have exactly the same structure as those observed experimentally, although they are computed in the  $(I, U, W, \bar{U})$  phase space instead of in a reconstructed attractor.

Similar 1-D maps can be plotted for the other chaotic regimes and display the same features. In a general way, the first return map of a  $C^{(n)}$  regime shows  $n + 1$  or  $n + 2$  branches corresponding to the  $P^{(m)}$  pulses of the temporal signal. The appearance of the  $(n + 2)$ th branch in the  $C^{(n)}$  region is linked with the proximity of the tangent bifurcation in which the  $P^{(n+1)}$  periodic orbit is created. Indeed, as the  $P^{(n)}$  window is approached, the  $(n + 2)$ th branch comes closer and closer to the  $U_{n+1} = U_n$  line and eventually becomes tangent to it. Beyond the bifurcation, a stable and an unstable fixed point appear, the stable one corresponding to the  $P^{(n+1)}$  state. To confirm this observation, we have computed the transverse Floquet multipliers of the  $P^{(3)}$  regime inside its domain of stability. Two are always small, owing to strong dissipation, and the evolution of the other has been plotted in Fig. 8. The value  $-1$  for  $A = 1.8780$  corresponds to the period-doubling bifurcation of  $P^{(3)}$ , and the value 1 for  $A = 1.8647$  clearly shows that the transition from  $C^{(2)}$  to  $P^{(3)}$  occurs through a tangent bifurcation. This has also been verified for other bifurcations from  $C^{(n)}$  to  $P^{(n+1)}$ . In the vicinity of the

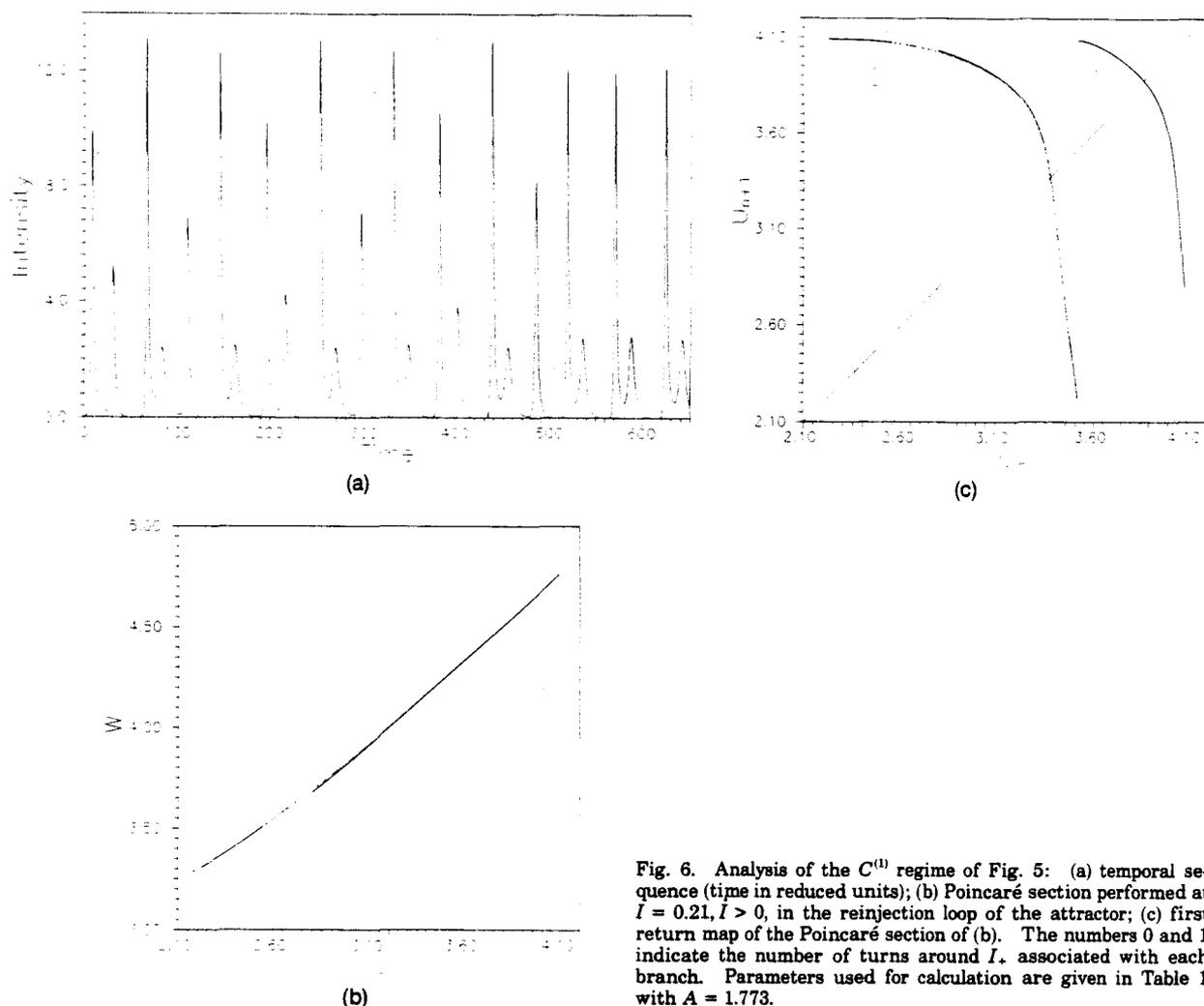


Fig. 6. Analysis of the  $C^{(1)}$  regime of Fig. 5: (a) temporal sequence (time in reduced units); (b) Poincaré section performed at  $I = 0.21, I > 0$ , in the reinjection loop of the attractor; (c) first return map of the Poincaré section of (b). The numbers 0 and 1 indicate the number of turns around  $I_+$  associated with each branch. Parameters used for calculation are given in Table 1 with  $A = 1.773$ .

transition, there is type I intermittency, whose reinjection mechanism is deeply connected with the Shil'nikov dynamics. Recall that the creation of periodic orbits with increasing numbers of undulations by tangent bifurcations is one of the main characteristics of homoclinic chaos.<sup>18,33</sup>

Whereas both the scenario observed when  $A$  is varied and the 1-D maps shown strongly favor the hypothesis of homoclinic chaos in the model studied, no homoclinic bifurcation can be located for the parameters used so far. This means that our one-parameter path does not intersect the codimension-1 subset of parameter space where homoclinic bifurcations take place. We have therefore varied another parameter,  $\bar{\epsilon}$ , which controls the time scale on which the absorber evolves. We stress that this does not mimic experimental operation, as increasing the absorber pressure, for example, would result in a higher  $\bar{\epsilon}$  but would also decrease the relative saturability  $\alpha$ . Nevertheless, it corresponds to using a much more saturable absorber (for instance,  $SF_6$ ) with a buffer gas. Looking at the different bifurcation diagrams obtained for increasing  $\bar{\epsilon}$ , we find that the various  $P^{(n)}$  regimes with increasing numbers of undulations appear successively in the bifurcation diagram in a continuous way, without changing its

global structure, as can be seen from Fig. 9, indicating that we come closer to homoclinicity.

Since the numerical integration time increases rapidly with  $\bar{\epsilon}$ , it was not possible to determine the value of  $\bar{\epsilon}$  above which a homoclinic bifurcation is encountered in the bifurcation diagram with control parameter  $A$ . Nevertheless, in the limit case  $\bar{\epsilon} \rightarrow \infty$ , where the absorber's population inversion can be adiabatically eliminated, leading to a three-variable model, we find an homocliniclike bifurcation, in the neighborhood of which chaotic regimes with as many as 41 undulations, as in Fig. 10 for  $A = 1.997$ , could be located. Hence it is highly likely that the global structure of the bifurcation diagram obtained with parameters of Table 1 can be traced back to the existence of such bifurcations for higher values of  $\bar{\epsilon}$ . We shall therefore concentrate in what follows on the model obtained for infinite  $\bar{\epsilon}$  and study the nature of the observed bifurcation. Figure 11 shows the corresponding bifurcation diagram.

We stress that the  $P^{(n)}$  and  $C^{(n)}$  solutions of this model for the lowest  $n$  are similar to those obtained in the model with four variables, as can be seen from Fig. 12 for the  $C^{(2)}$  regime. The fact that the same type of dynamics is

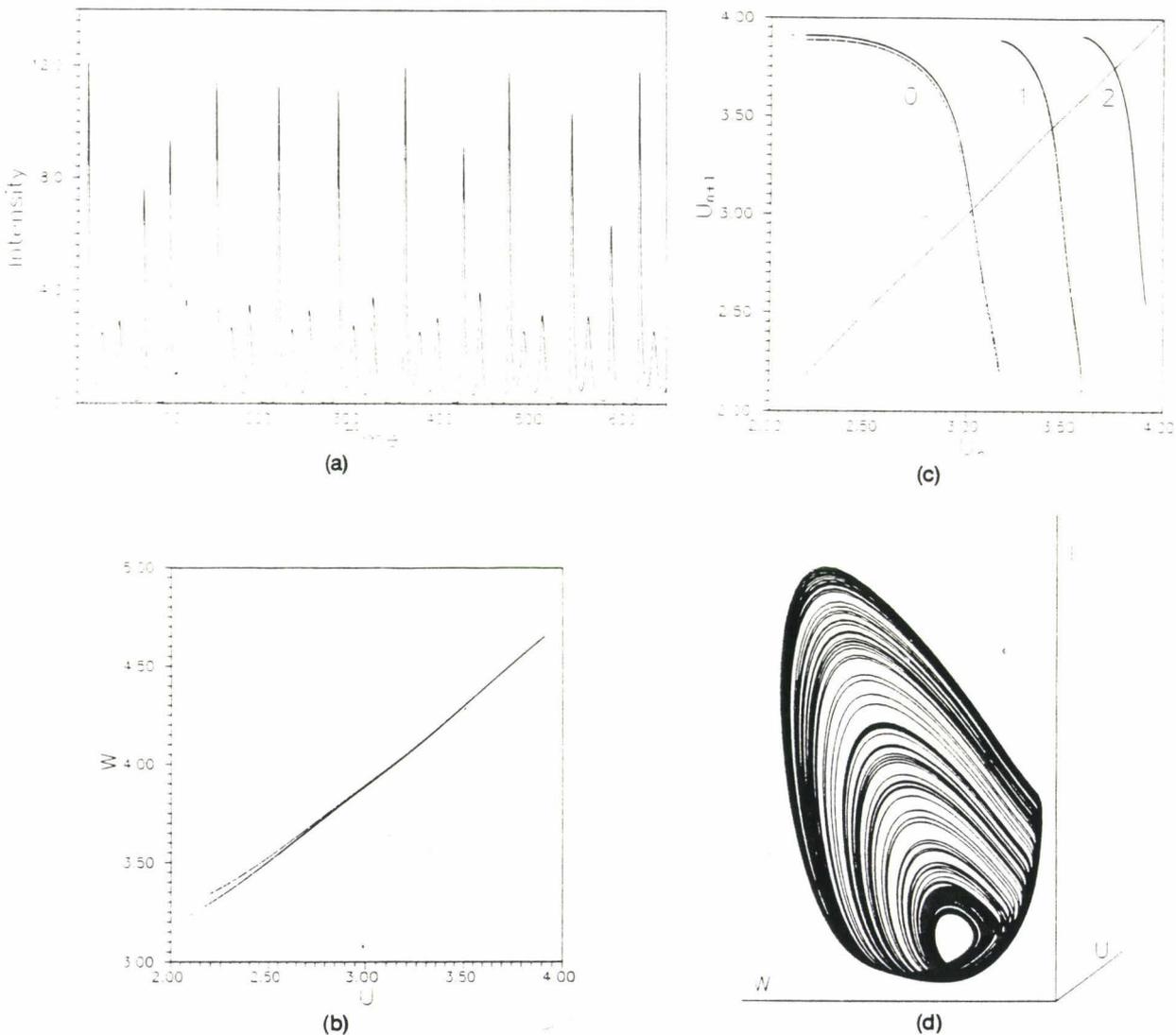


Fig. 7. Analysis of the  $C^{(2)}$  of the diagram of Fig. 5: (a) Temporal sequence (time in reduced units). (b) Poincaré section performed at  $I = 0.21, I > 0$ , in the reinjection loop of the attractor. (c) First return map of the Poincaré section of (b). 0–2 indicate the number of turns associated with each branch. (d) Projection of the attractor on the hyperplane ( $I, U, W$ ). The parameters used for calculation are given in Table 1 with  $A = 1.860$ .

found indicates that the characteristic time scale of the absorber is not a crucial parameter when one is looking from homocliniclike behavior. In fact, as was already suggested,<sup>9</sup> the origin of the PQS behavior is the slow relaxation rate from the low level of the laser transition to the ground level.

Some facts about the behavior observed for infinite  $\bar{\epsilon}$ , however, contrast with the standard Shil'nikov configuration involving a saddle-focus fixed point:

- (i) The  $I_+$  fixed point is stable at the parameter value at which the bifurcation occurs.
- (ii) The amplitude of the undulations never shrinks to zero and is always greater than a minimum value.
- (iii) All the  $P^{(n)}$  and  $C^{(n)}$  states are found on one side only of the bifurcation instead of lying symmetrically on each side.

These three facts lead to believe that we in fact observe in the reduced model a homoclinic tangency to an unstable periodic orbit with positive Floquet multipliers.<sup>33</sup> Using a standard method to find periodic orbits and follow them for changing parameters,<sup>34</sup> we were able to locate precisely the unstable cycle around which the flow spirals and determine its transverse Floquet multipliers near homoclinicity,  $\lambda_u = 1.1326$  and  $\lambda_s = 0.05646$ . We also discovered that this cycle corresponds to the unstable cycle created at the subcritical Hopf bifurcation of  $I_+$  for  $A \approx 1.974$  and annihilated for higher  $A$  in a saddle-node bifurcation with the  $T$  periodic orbit for  $A \approx 2.034$ . As it corresponds to an infinite number of undulations, hereafter it will be called  $P^{(*)}$ .

For evidence that a homoclinic tangency to  $P^{(*)}$  occurs in the model for  $A \approx 1.997$ , we computed the stable and unstable manifolds  $W_s$  and  $W_u$ , respectively, of  $P^{(*)}$  for

parameter values  $A = 1.997$  and  $A = 1.991$ . The intersection of these manifolds with a section plane transverse to  $P^{(n)}$  is shown in Fig. 13. It is clear that, for  $A = 1.997$ ,  $W_u$  and  $W_s$  become tangent so that a homoclinic orbit that is biasymptotic to the unstable cycle is created.<sup>33</sup> For  $A < 1.997$  the stable manifold acts as a separatrix and prevents the trajectories that spiral around  $P^{(n)}$  from reaching  $I_+$ . This explains the generalized bistability observed between  $I_+$  and the  $P^{(n)}$  and  $C^{(n)}$  regimes for  $n > 8$  ( $1.974 < A < 1.997$ ). For  $A > 1.997$ ,  $W_u$  intersects  $W_s$  transversally, so that the attraction basin of  $I_+$  extends beyond  $P^{(n)}$ . This is why a sudden transition from chaos to a constant-intensity region is observed in the bifurcation diagram of Fig. 11 when  $A = 1.997$  is reached. There is still bistability between the period-doubling cascade of the  $T$  regime and  $I_+$  for  $1.997 < A < 2.034$ , but  $P^{(n)}$  is no longer involved.

It is interesting to note that the 1-D maps computed in the case of a homoclinic tangency to a cycle, as in

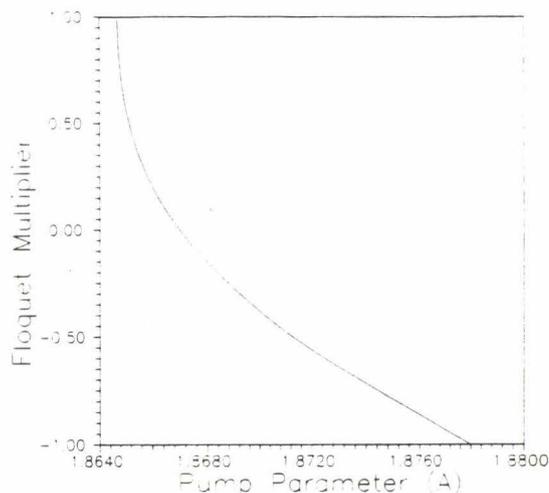


Fig. 8. Plot of the largest transverse Floquet multiplier associated with the  $P^{(3)}$  periodic orbit as a function of  $A$ .

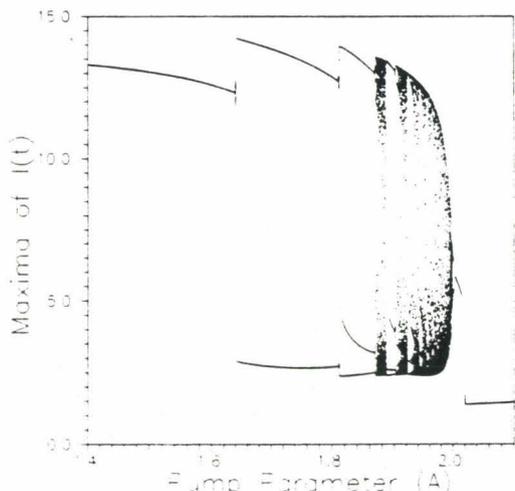
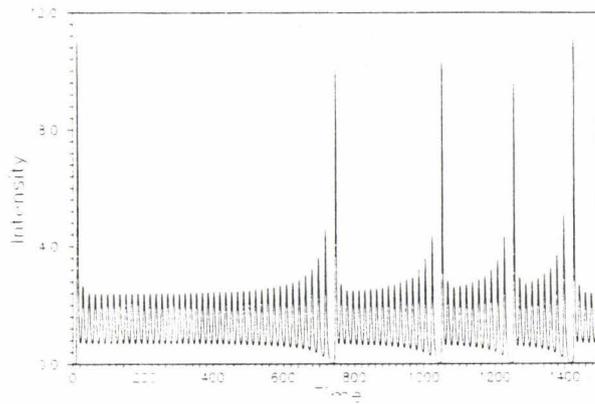
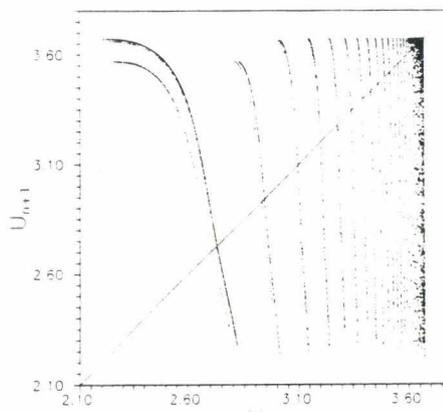


Fig. 9. Bifurcation diagram of the model of the LSA for the parameters of Table 1, except for  $\tilde{\epsilon} = 6$ . Periodic regimes  $P^{(n)}$  with  $n \leq 8$  are present.



(a)



(b)

Fig. 10. (a) Temporal signal obtained for  $A = 1.997$  with the reduced model ( $\tilde{\epsilon}$  infinite). A pulse with 41 undulations can be seen. (b) First return map of the Poincaré section plane  $I = 0.2, I > 0$ , with 42 branches. The branches converge geometrically with an asymptotic rate equal to 0.882. Except for  $\tilde{\epsilon}$ , the parameters may be found in Table 1, as they can for Figs. 11–13.

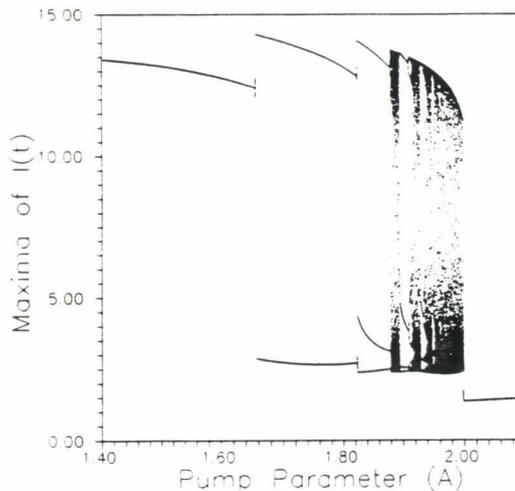


Fig. 11. Bifurcation diagram obtained with infinite  $\tilde{\epsilon}$ . The sudden transition from chaos to  $I_+$ , which can be seen at the right, corresponds to a homoclinic bifurcation.

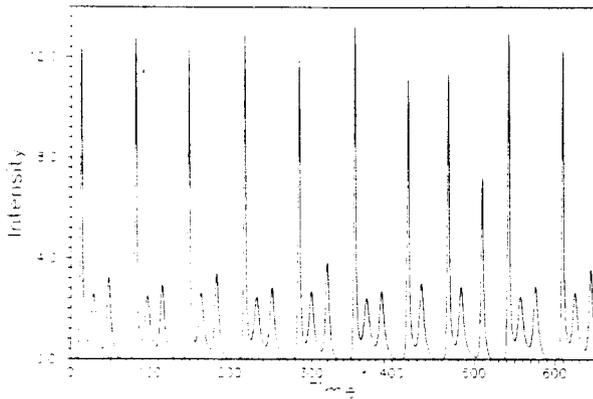


Fig. 12. Temporal signal obtained for  $A = 1.888$  with the reduced model ( $\bar{\epsilon}$  infinite). It is similar to signals of the four-variable model computed for equivalent pump parameters and may be compared with Fig. 7(a).

Fig. 10, have exactly the properties that were originally established<sup>24,27</sup> in the case of a saddle-focus fixed point. We cannot therefore exclude the possibility that the 1-D maps observed experimentally are related to a homoclinic tangency.

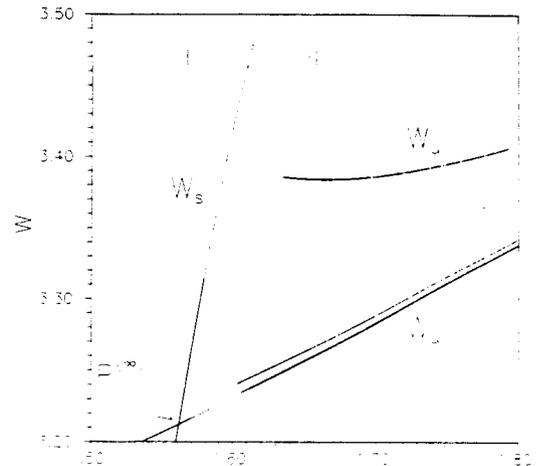
The fact that the unstable cycle  $P^{(\infty)}$  involved in the homoclinic tangency is created in the Hopf bifurcation of  $I_+$  is quite important for two reasons:

(i) The  $P^{(n)}$  regimes for  $n \leq 8$  are created, whereas  $P^{(\infty)}$  does not yet exist. This means that this part of the bifurcation diagram is controlled by the saddle focus  $I_+$ , as if we were in a standard Shil'nikov situation. As the Hopf bifurcation is encountered, there is a crossover from  $I_+$  to  $P^{(\infty)}$  as the organizing center of the dynamics, since  $I_+$  is then isolated from the remainder of the phase space.

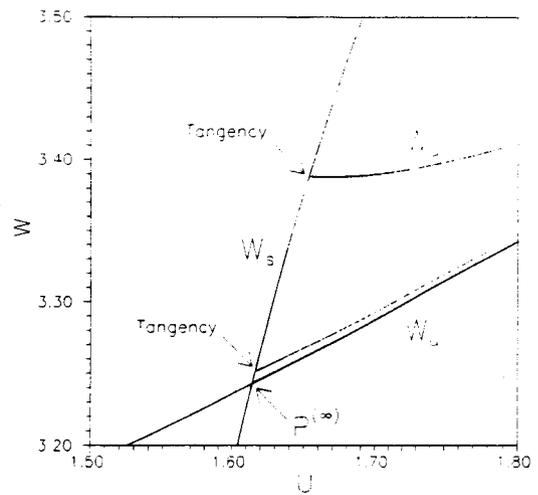
(ii) In experiments with  $\text{CH}_3\text{I}$ , and in numerical simulations as well, a reduction of the amplitude of the undulations of the  $P^{(n)}$  regimes has not been observed; furthermore, no scenario for the type  $\dots C^{(n-1)}, P^{(n)}, C^{(n)}, P^{(n+1)}, \dots, P^{(n+1)}, C^{(n)}, P^{(n)}, C^{(n-1)} \dots$  has been encountered. This suggests that, in the experimental situation, the mechanism leading to chaos involves homoclinicity to a periodic orbit, in the same way as in the numerical study. As the scenario described in the case of a fast absorber can occur only if the Hopf bifurcation is subcritical, working in parameter space regions where  $I_+$  and the PQS regime experience bistability could help in locating a homoclinic tangency experimentally.

## 5. CONCLUSION

Experimental chaotic regimes of the LSA of the type  $C^{(n)}$  have been shown to display the characteristic features of homoclinic chaos through the analysis of first return maps of the signal and the study of the transitions between chaotic and periodic regimes. A now-standard model of the  $Q$ -switching LSA has been explored numerically, reproducing the experimental behavior well. The results obtained with a fast absorber suggest that the phase diagram of a LSA is determined largely by a homoclinic tangency to an unstable cycle created in a subcritical Hopf bifurcation, which explains the homocliniclike behavior observed.



(a)



(b)

Fig. 13. Intersection with a section plane transverse to  $P^{(\infty)}$  of the stable ( $W_s$ ) and unstable ( $W_u$ ) manifolds of  $P^{(\infty)}$  in the neighborhood of the unstable cycle. The point where the two manifolds cross is the intersection of  $P^{(\infty)}$  with the section plane: (a) For  $A = 1.991$ ,  $W_s$  and  $W_u$  are disconnected. Region I is the attraction basin of  $I_+$ , and region II is the part of phase space where motion on the attractor takes place. The two regions are separated by  $W_u$ . (b) For  $A = 1.997$ ,  $W_s$  and  $W_u$  are tangent to each other.

## ACKNOWLEDGMENTS

We thank A. Bekkali for his help in the early stages of this study. We are also grateful to A. Arneodo, C. Baesens, P. Coulet, and C. Tresser for fruitful discussions of the properties of Shil'nikov chaos and to E. Arimondo and B. Zambon for stimulating exchanges and for communication to us of their papers and works before publication. We are particularly indebted to P. Glorieux for his advice and numerous suggestions.

## REFERENCES

1. I. Burak, P. L. Houston, D. G. Sutton, and J. I. Steinfeld, "Mechanism of passive  $Q$ -switching in  $\text{CO}_2$  lasers," IEEE J. Quantum Electron. **QE-7**, 73-82 (1971).

2. J. Dupré, F. Meyer, and C. Meyer, "Influence des phénomènes de relaxation sur la forme des impulsions fournies par un laser CO<sub>2</sub> déclenché par un absorbant saturable," *Rev. Phys. Appl.* **10**, 285-293 (1975).
3. E. Arimondo, F. Casagrande, L. Lugiato, and P. Glorieux, "Repetitive passive Q-switching and bistability in lasers with saturable absorber," *Appl. Phys. B* **30**, 57-77 (1983).
4. M. L. Asquini and F. Casagrande, "Passive Q-switching in lasers with saturable absorbers: improved treatment of a four level method," *Nuovo Cimento* **2D**, 917-931 (1983).
5. A. Jacques and P. Glorieux, "Observation of bistability in a CO<sub>2</sub> laser exhibiting passive Q-switching," *Opt. Commun.* **40**, 455-460 (1982).
6. E. Arimondo and E. Menchi, "Analysis of Q-switch in a CO<sub>2</sub> laser with saturable absorber," *Appl. Phys. B* **37**, 55-61 (1985).
7. M. Tachikawa, K. Tani, M. Kajita, and T. Shimizu, "Undamped undulation superposed on the passive Q-switching pulse of a CO<sub>2</sub> laser," *Appl. Phys. B* **39**, 83-90 (1986).
8. K. Tani, M. Tachikawa, M. Kajita, and T. Shimizu, "Sinusoidal self-modulation in the output of a CO<sub>2</sub> laser with an intracavity saturable absorber," *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 24-28 (1988).
9. E. Arimondo, P. Bootz, P. Glorieux, and E. Menchi, "Pulse shape and phase diagram in the passive Q-switching of CO<sub>2</sub> lasers," *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 193-201 (1985).
10. M. Tachikawa, K. Tani, and T. Shimizu, "Comprehensive interpretation of passive Q-switching and optical bistability in a CO<sub>2</sub> laser with an intracavity saturable absorber," *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 387-395 (1987).
11. B. Zambon, F. de Tomasi, D. Hennequin, and E. Arimondo, "Investigations of models for the laser with a saturable absorber: theoretical and experimental studies of the stationary regimes," *Phys. Rev. A* **40**, 3782-3795 (1989).
12. D. Dangoisse, A. Bekkali, F. Papoff, and P. Glorieux, "Shil'nikov dynamics in a passive Q-switching laser," *Europhys. Lett.* **6**, 335-340 (1988).
13. D. Hennequin, F. de Tomasi, B. Zambon, and E. Arimondo, "Homoclinic orbits and cycles in the instabilities of a laser with saturable absorber," *Phys. Rev. A* **37**, 2243-2246 (1988).
14. M. Tachikawa, K. Tani, and T. Shimizu, "Laser instability and chaotic pulsation in a CO<sub>2</sub> laser with intracavity saturable absorber," *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 1077-1081 (1988).
15. F. de Tomasi, D. Hennequin, B. Zambon, and E. Arimondo, "Instabilities and chaos in an infrared laser with saturable absorber: experiments and vibrational model," *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 45-57 (1989).
16. M. Tachikawa, F. L. Hong, K. Tani, and T. Shimizu, "Deterministic chaos in passive Q-switching pulsation of a CO<sub>2</sub> laser with saturable absorber," *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2266-2268 (1988).
17. P. Glendinning and C. Sparrow, "Local and global behavior near homoclinic orbits," *J. Stat. Phys.* **35**, 645-696 (1984).
18. P. Gaspard, R. Kapral, and G. Nicolis, "Bifurcation phenomena near homoclinic systems: a two-parameter analysis," *J. Stat. Phys.* **35**, 697-727 (1984).
19. L. P. Shil'nikov, "A case of the existence of a countable number of periodic motions," *Sov. Math. Dokl.* **6**, 163-166 (1965); "A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle focus type," *Math. USSR Sbornik* **10**, 91-102 (1970).
20. D. Hennequin, F. de Tomasi, L. Fronzoni, B. Zambon, and E. Arimondo, "Influence of noise on the quasi-homoclinic behavior of a laser with saturable absorber," *Opt. Commun.* **70**, 253-258 (1989).
21. D. Hennequin, M. Lefranc, A. Bekkali, D. Dangoisse, and P. Glorieux, "Characterization of Shil'nikov chaos in a CO<sub>2</sub> laser containing a saturable absorber" in *Measures of Complexity and Chaos*, N. B. Abraham, A. M. Albano, A. Passamante, and P. E. Rapp, eds. (Plenum, New York, 1989), pp. 299-302.
22. F. Papoff, A. Fioretti, E. Arimondo, and N. B. Abraham, "Time return maps and distributions for the laser with a saturable absorber," in *Measures of Complexity and Chaos*, N. B. Abraham, A. M. Albano, A. Passamante, and P. E. Rapp, eds. (Plenum, New York, 1989), pp. 309-312.
23. F. T. Arecchi, A. Lapucci, R. Meucci, J. A. Roversi, and P. H. Coulet, "Experimental characterization of Shil'nikov chaos by statistics of return times," *Europhys. Lett.* **6**, 677-682 (1988); F. T. Arecchi, W. Gadomski, A. Lapucci, H. Mancini, R. Meucci, and J. A. Roversi, "Laser with feedback: an optical implementation of competing instabilities, Shil'nikov chaos, and transient fluctuation enhancement," *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 1153-1159 (1988).
24. F. Argoul, A. Arneodo, and P. Richetti, "Experimental evidence for homoclinic chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction," *Phys. Lett. A* **120**, 269-275 (1987); F. Argoul, A. Arneodo, and P. Richetti, "Dynamique symbolique dans la réaction de Belousov-Zhabotinskii: une illustration expérimentale de la théorie de Shil'nikov des orbites homoclines," *J. Chim. Phys.* **84**, 1367-1385 (1987).
25. E. Arimondo and P. Glorieux, "Saturated absorption experiments on a dressed molecule. Application to the spectroscopy of the  $\nu_8$  band of CH<sub>3</sub>I," *Phys. Rev. A* **19**, 1067-1083 (1979).
26. See, e.g., J. S. Turner, J. C. Roux, W. D. McCormick, and H. L. Swinney, "Alternating periodic and chaotic regimes in a chemical reaction—experiments and theory," *Phys. Lett.* **85A**, 9-12 (1981).
27. A. Arneodo, P. Coulet, E. A. Spiegel, and C. Tresser, "Asymptotic chaos," *Physica D* **14**, 327-347 (1985).
28. H. T. Powell and G. J. Wolga, "Repetitive passive Q-switching of single-frequency lasers," *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-7**, 213-219 (1971).
29. T. Erneux and P. Mandel, "Bifurcation phenomena in a laser with saturable absorber I and II," *Z. Phys. B* **44**, 353-363, 365-374 (1981); P. Mandel and T. Erneux, "Stationary, harmonic and pulsed operations of an optically bistable laser with saturable absorber. I and II," *Phys. Rev. A* **30**, 1893-1901, 1902-1909 (1984); T. Erneux, P. Mandel, and J. Magann, "Quasi-periodicity in lasers with saturable absorbers," *Phys. Rev. A* **29**, 2690-2699 (1984); D. E. Chyba, N. B. Abraham, and A. M. Albano, "Semiclassical analysis of a detuned ring laser with a saturable absorber. New results for the steady states," *Phys. Rev. A* **35**, 2936-2950 (1987).
30. C. Tresser, "About some theorems by L. P. Shil'nikov," *Ann. Inst. Henri Poincaré* **40**, 441-461 (1984).
31. P. Fredrickson, J. L. Kaplan, E. D. Yorke, and J. A. Yorke, "The Lyapunov dimension of strange attractors," *J. Diff. Eqs.* **49**, 185-207 (1983).
32. F. Ledrappier, "Some relations between dimension and Lyapunov exponent," *Commun. Math. Phys.* **81**, 229-238 (1981).
33. P. Gaspard and X. J. Wang, "Homoclinic orbits and mixed-mode oscillations in far from equilibrium systems," *J. Stat. Phys.* **48**, 151-199 (1987).
34. C. Sparrow, *The Lorenz Equations, Bifurcations, Chaos and Strange Attractors* (Springer-Verlag, Berlin, 1982), pp. 211-220, App. E.



## **CHAPITRE 4 : ANALYSE TOPOLOGIQUE DE REGIMES CHAOTIQUES DANS LE LASER A MODULATION DE PERTES**

"D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont pour ainsi dire la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place réputée jusqu'ici inabordable."

Henri Poincaré (Méthodes nouvelles de la mécanique céleste)



## 4.1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons vu comment la structure des applications de premier retour obtenues dans le cas du laser à absorbant saturable permettait d'expliquer les instabilités rencontrées par une tangence homocline sur un cycle instable pour certaines valeurs des paramètres. L'observation d'un tel scénario constitue une preuve forte de chaos déterministe, car on sait que l'alternance caractéristique de fenêtres périodiques et de zones chaotiques correspond à la formation de fers à cheval de Smale [Smale 67, Guckenheimer 83], qui sont des ensembles invariants hyperboliques possédant une entropie topologique positive et présentant une dynamique chaotique.

Dans ce chapitre, grâce à la méthode du "gabarit" ("template" ou "knot-holder" en anglais), nous verrons comment caractériser de manière directe et irréfutable la présence d'un fer à cheval, ou de tout autre ensemble invariant, dans l'attracteur d'un système présentant des comportements chaotiques. Pour cela, nous verrons comment caractériser, à l'aide d'outils topologiques provenant notamment de la théorie des noeuds, l'organisation des orbites périodiques instables plongées dans l'attracteur. Nous constaterons que cette organisation constitue une signature du mécanisme d'apparition du chaos dans le système étudié, et permet une classification topologique des attracteurs chaotiques.

Nous exposerons ensuite les résultats que nous avons obtenus en analysant par cette méthode les signaux chaotiques provenant d'un laser  $\text{CO}_2$  à pertes modulées. Nous nous intéresserons tout particulièrement à la structure des attracteurs présents de part et

d'autre des crises que l'on peut rencontrer dans ce système expérimental.

## 4.2 ORBITES PERIODIQUES ET CHAOS

### 4.2.1 Généralités

Les orbites périodiques jouent un rôle important dans l'étude des systèmes chaotiques. Par exemple, dans l'étude de la transition vers le chaos par doublement de période, l'ensemble de Feigenbaum apparaissant au point d'accumulation de la cascade est approché par une suite d'orbites périodiques de périodes  $2^n$ . La transition vers le chaos à partir d'un régime quasipériodique de nombre de rotation égal au nombre d'or est étudiée en considérant une hiérarchie d'orbites périodiques sur le tore dont les nombres de rotation sont des rapports de nombres de Fibonacci.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'approche d'une tangence homocline est caractérisée par des schémas de bifurcation où apparaissent des orbites périodiques possédant une structure caractéristique. On peut également rappeler que les collisions d'attracteurs chaotiques avec des orbites périodiques instables sont souvent responsables des phénomènes de crises, dans lesquels l'attracteur est brutalement modifié.

Il a été récemment proposé de caractériser les attracteurs chaotiques au delà de la transition vers le chaos au moyen des orbites périodiques instables qui y sont plongées [Auerbach 87, Cvitanovic 88]. L'ensemble des orbites de période  $n$  constitue en effet une approximation de plus en plus fidèle de l'attracteur lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Les propriétés d'une orbite périodique déterminant par continuité le comportement du flot dans son voisinage, il a été montré que l'on pouvait, à partir de ces orbites périodiques

instables et de leurs multiplicateurs de Floquet, déterminer un certain nombre d'invariants de l'attracteur (exposants de Lyapunov, entropies, dimensions généralisées, etc...) (voir par exemple [Lathrop 89]).

En effet, comme le flot sur l'attracteur est ergodique, de toute trajectoire chaotique partant d'un point de l'attracteur on peut extraire une suite infinie de points convergeant vers ce point : toute trajectoire repasse arbitrairement près de sa condition initiale. On conçoit aisément que si l'orbite d'un point revient dans son voisinage au bout d'intervalles de temps  $t_n$ , on puisse pour chaque récurrence déplacer légèrement la condition initiale pour obtenir une orbite périodique dont la période soit proche de  $t_n$ .

Dans le cas d'un ensemble invariant hyperbolique  $\Lambda$  présentant une dynamique chaotique, il est rigoureusement établi que  $\Lambda$  contient une infinité d'orbites périodiques instables, dont l'ensemble est dense dans  $\Lambda$  (voir par exemple [Guckenheimer 83]). Tout voisinage d'un point de  $\Lambda$  possède une intersection non nulle avec une infinité d'orbites périodiques de périodes arbitrairement grandes.

Les attracteurs chaotiques rencontrés dans des systèmes physiques ou dans des simulations numériques ne sont en général pas hyperboliques, à cause de la présence de tangences entre leurs variétés stable et instable, souvent localisées au niveau des points de rebroussement des sections de Poincaré. Cependant, les mécanismes qui engendrent ces attracteurs correspondent dans l'immense majorité des cas à la formation d'un ensemble invariant hyperbolique, par exemple un "fer à cheval" de Smale [Smale 67, Guckenheimer 83]. Cela implique qu'une fraction au moins de

l'infinité d'orbites périodiques existant dans la limite hyperbolique doit être présente dans l'attracteur chaotique observé expérimentalement, cette fraction augmentant au fur et à mesure qu'on se rapproche de cette limite.

C'est pourquoi les attracteurs non hyperboliques ne sont pas structurellement stables. Quand on se déplace dans l'espace des paramètres, des orbites périodiques sont constamment créées ou détruites lors de bifurcations. On peut se reporter à l'exemple de la suite logistique  $x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n)$  [Cvitanovic 84], où les fenêtres périodiques sont denses dans le diagramme de bifurcation : aussi petite que soit la variation du paramètre de contrôle, l'on est assuré de traverser une infinité de fenêtres périodiques. En pratique, les fenêtres périodiques correspondant à des périodes élevées n'occupent que des intervalles infimes du paramètre de contrôle et le bruit de paramètres ne permet d'observer que les fenêtres périodiques de petite période.

La fin d'une fenêtre périodique ne correspond pas à la disparition de la solution périodique, mais à sa déstabilisation par une cascade de doublements de période. Après la traversée d'une fenêtre de période  $n$ , les deux orbites de période  $n$  créées dans la bifurcation tangente marquant l'apparition de la fenêtre, et les orbites de période  $2^m \times n$  créées dans la cascade de doublement de période s'ajoutent à celles déjà existantes. C'est pourquoi, sans rencontrer apparemment de fenêtre périodique, il est possible de détecter un nombre croissant d'orbites périodiques instables en faisant varier un paramètre de contrôle. Ces orbites correspondent aux fenêtres périodiques de périodes élevées que l'on a traversées, et le spectre des orbites périodiques instables de l'attracteur porte

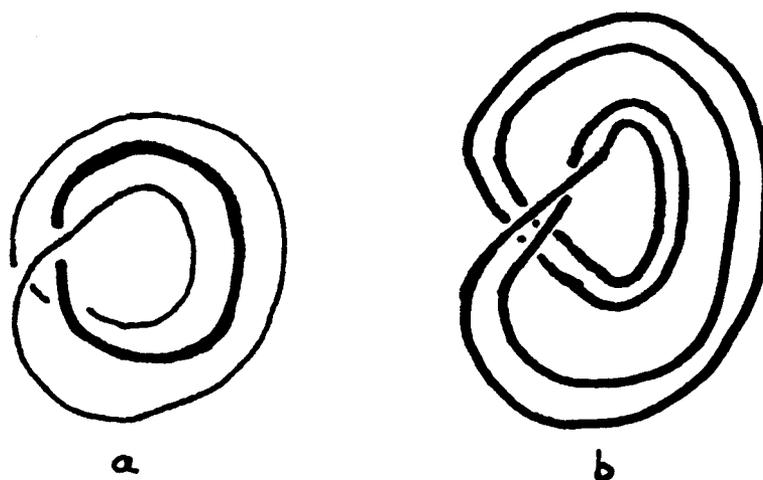
donc la trace des bifurcations rencontrées. Ces observations faites à propos de la suite logistique sont également valables de manière générale pour les flots. Il faut toutefois rappeler que la suite logistique ne présente pas de multistabilité, qui est un phénomène relativement courant.

#### 4.2.2 Orbites périodiques en dimension trois

L'intérêt que présentent les orbites périodiques instables pour la caractérisation topologique d'un attracteur est dû au fait que lorsqu'on fait varier un paramètre de contrôle, une orbite périodique ne peut être amenée à se croiser elle-même, ni à croiser une autre orbite. C'est une conséquence du théorème d'unicité des solutions d'un champ de vecteurs [Guckenheimer 83] : en partant du point d'intersection dans l'espace des phases, deux trajectoires pourraient être empruntées, ce qui contredirait ce théorème.

Cette propriété prend toute son importance lorsque l'on étudie un champ de vecteurs tridimensionnel, ou un attracteur expérimental pouvant être plongé dans un espace des phases de dimension trois. Les orbites périodiques étant, comme nous l'avons vu plus haut, des courbes fermées ne pouvant se croiser, il est alors possible de caractériser leur enchevêtrement, c'est-à-dire la manière dont elles sont nouées et enlacées entre elles, à l'aide d'invariants provenant de la théorie des noeuds. Le type de noeud réalisé par une orbite ne peut en effet changer sur tout le domaine d'existence de cette orbite sans autoriser de croisements, et les invariants caractérisant ce noeud sont par conséquent également des invariants de l'orbite. Pour les mêmes raisons, les invariants de l'enlacement formé par deux orbites périodiques différentes ne dépendent pas non plus des paramètres.

Par exemple, dans une cascade typique de doublements de période, l'orbite  $T$  et l'orbite  $2T$  sont liées comme indiqué sur la figure 4.1a. Elles conserveront cette disposition quelle que soit la valeur du paramètre de contrôle. Si ces deux orbites sont des noeuds triviaux, l'orbite  $4T$  constitue une réalisation du noeud le plus simple, le noeud de "trèfle" (fig. 4.1b)



**Fig. 4.1** Orbites d'une cascade de doublements de période (a) orbites  $T$  et  $2T$  (b) orbite  $4T$ .

Il est intéressant de noter que l'organisation des différentes orbites influe directement sur les bifurcations que l'on peut observer. Il est par exemple évident que deux orbites doivent posséder le même type de noeud pour interagir dans une bifurcation tangente. Par ailleurs, dans l'exemple de la figure 4.2, les orbites  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  doivent d'abord disparaître ensemble dans une bifurcation tangente inverse avant que les orbites  $\beta_1$  et  $\beta_2$  ne puissent faire de même. Inversement, si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  d'une part,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  d'autre part, sont des couples d'orbites apparus dans deux bifurcations tangentes différentes, nous pouvons déduire de leur

disposition que les orbites  $\alpha_i$  ont été créées postérieurement aux orbites  $\beta_i$ . Cela implique que si l'organisation des orbites dans la limite hyperbolique peut être déterminée, on peut en tirer des conclusions sur l'ordre dans lequel apparaissent les différentes orbites existant dans cette limite. Les configurations du type de celle de la figure 4.2 se repèrent en effet facilement en construisant des tables d'invariants : chaque orbite  $\beta_i$  enlace de manière identique les deux orbites  $\alpha_i$ , tandis que la réciproque n'est pas vraie.

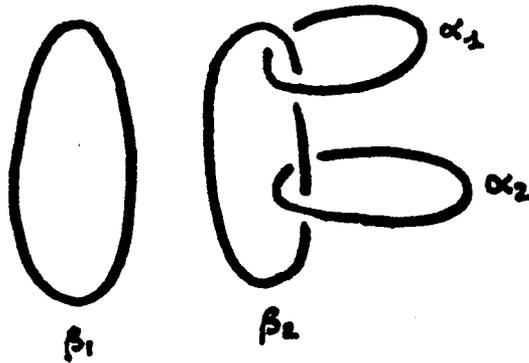


Fig. 4.2: L'enchevêtrement des orbites périodiques détermine les séquences de bifurcations observables.

De même, si on considère toutes les orbites d'une cascade de doublement de période, une orbite de période  $2^n \times T$  ne peut disparaître dans un doublement de période inverse tant que l'orbite de période  $2^{n+1} \times T$  qui s'enroule autour n'a pas elle-même disparu : il faut dénouer dans l'ordre où l'on a noué.

Avant de montrer dans la section 4.4 comment caractériser de manière globale l'organisation des orbites périodiques dans un

attracteur, nous présentons dans la section suivante les invariants topologiques qui permettent de mener à bien cette tâche.

### 4.3 THEORIE DES NOEUDS. INVARIANTS DES ORBITES.

De manière générale, la théorie des noeuds [Kauffman 87, 91] est l'étude des classes d'isotopie des plongements de  $S^n$  dans  $S^{n+2}$ , où  $S^n$  est la sphère de dimension  $n$ . Nous nous intéresserons ici uniquement à la théorie classique des noeuds, traitant des plongements de  $S^1$  (le cercle unité) dans  $\mathbb{R}^3$  ( $S^3 = \mathbb{R}^3 + \{\infty\}$ ), ce qui correspond aux noeuds sur une courbe fermée (fig. 4.3). Il est clair qu'il est impossible (sans ciseaux...) de transformer un noeud de trèfle en un noeud trivial. Ces deux noeuds ne sont pas isotopes : ils ne peuvent être déformés continûment l'un dans l'autre. Plusieurs noeuds différents peuvent être enchevêtrés, et l'on appelle enlacement une collection de noeuds disjoints ou non.

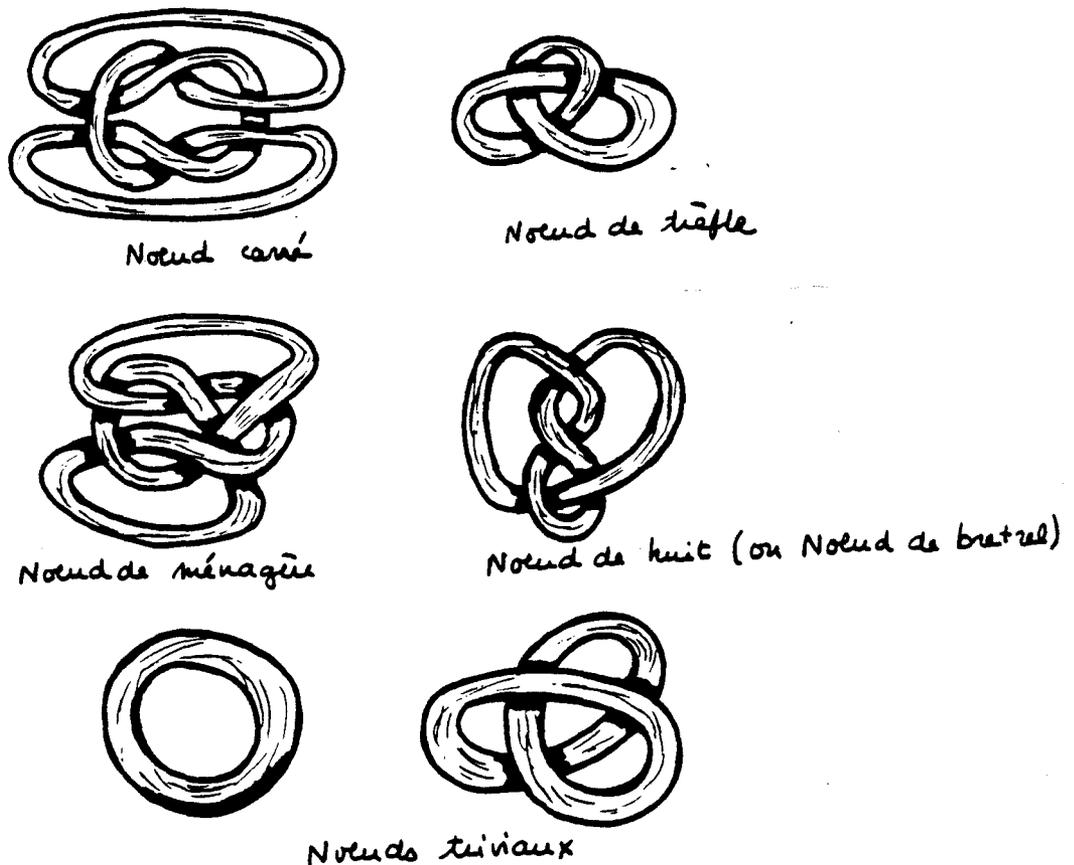
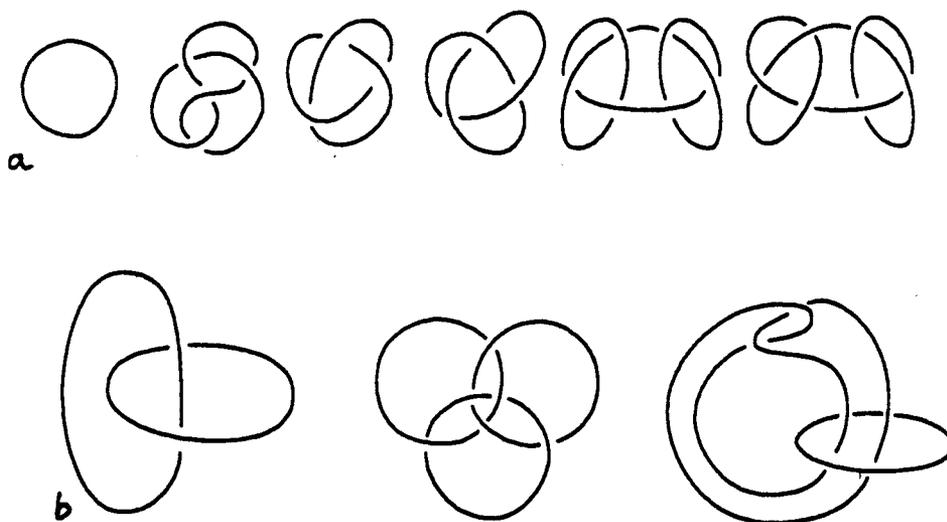


Fig. 4.3 Quelques noeuds. (d'après [Kauffman 91]).

Un certain nombre de concepts que nous présenterons dans ce qui suit s'appliquent aussi bien à un noeud isolé qu'à un enlacement comportant plusieurs noeuds. Nous utiliserons alors de manière générique le terme d'enlacement, un noeud isolé étant considéré comme un enlacement à un seul composant.

La théorie des noeuds fournit des outils permettant de travailler à partir de projections d'enlacements sur un plan (les diagrammes d'enlacement), plutôt que dans l'espace à trois dimensions. Un enlacement dans l'espace à trois dimensions est en effet parfaitement défini par sa projection si l'on indique, pour chaque croisement, le segment passant en dessous de l'autre en le représentant par une ligne brisée (fig. 4.4).



**Fig.4.4** Diagrammes d'enlacement : (a) noeuds (b) enlacements. (d'après [Tuffillaro 92]).

Une orbite périodique ne peut cependant être entièrement réduite au concept de noeud, qui ne rend compte que de la façon dont l'orbite est plongée dans l'espace à trois dimensions. Sous

peine de ne pas extraire toute l'information dynamique du flot, nous devons par conséquent utiliser d'autres outils.

Ainsi, une caractéristique importante d'une orbite périodique est le nombre d'intersections qu'elle possède avec une section de Poincaré donnée. Or, si on déforme librement un noeud dans  $\mathbb{R}^3$  (mouvements d'isotopie ambiante), ce nombre d'intersections peut être modifié arbitrairement. Or dans certains cas, la topologie de l'espace des phases n'autorise qu'une classe réduite de mouvements d'isotopie, qui préservent ce nombre. C'est le cas notamment des oscillateurs non linéaires forcés périodiquement dont l'espace des phases est  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ , et pour lesquels on effectue une section de Poincaré à phase de modulation constante. Une orbite périodique de période  $nT$  possède nécessairement  $n$  intersections avec un tel plan de section. Elle peut être alors caractérisée à l'aide d'invariants d'isotopie dans  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  (isotopie régulière), dont par exemple ce nombre d'intersections fait partie. La représentation des noeuds en termes de tresses facilite l'évaluation de ces invariants.

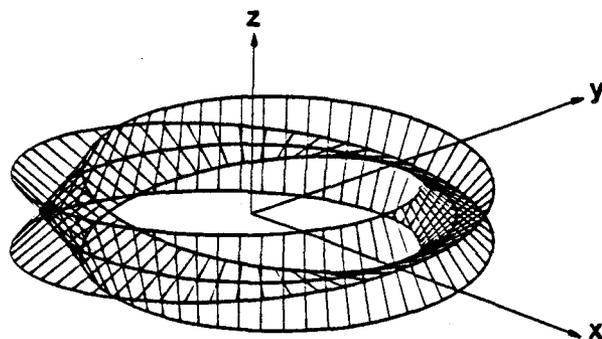
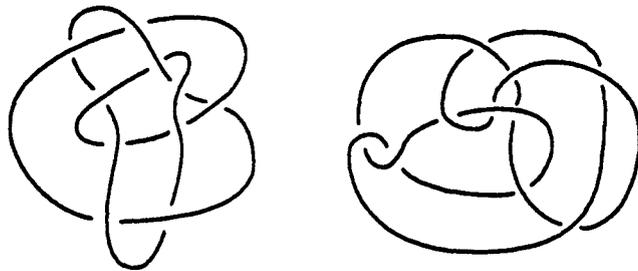


Fig. 4.5 Variétés invariantes d'une orbite de torsion 1.

Enfin, une orbite périodique possède un invariant dynamique important, sa torsion [Uezu 82], qui est préservée par plongement. La torsion quantifie la rotation du flot autour de l'orbite. Plus exactement, elle est égale au nombre de demi-tours qu'effectuent les variétés invariantes autour de l'orbite lorsque celle-ci est parcourue une fois. Ainsi, une torsion égale à un indique que les variétés invariantes ont la forme de rubans de Moebius (fig. 4.5).

#### 4.3.1 Noeuds.

La première caractéristique d'une orbite périodique est le type de noeud qu'elle réalise. Nous verrons qu'une fois connu le schéma global d'organisation des orbites périodiques d'un système dynamique, il est possible<sup>de</sup> prédire le type de noeud d'une orbite périodique donnée, ainsi que le type d'enlacement formé par deux orbites. Si l'on se rend compte facilement que les noeuds représentés sur la figure 4.4 sont tous différents, il est moins facile de voir du premier coup d'oeil que ceux de la figure 4.6 sont équivalents.



**Fig 4.6** Deux noeuds équivalents (à vérifier!)  
(d'après [Tufillaro 92]).

Pour pouvoir montrer que deux enlacements sont équivalents, et donc en particulier qu'une orbite observée possède bien le type de noeud prédit, il faut des outils : ce sont les mouvements de Reidemeister [Kauffman 87], qui permettent de montrer que deux projections d'enlacements correspondent à des enlacements équivalents. Ils indiquent quelles modifications des projections correspondent effectivement à des déformations continues autorisées en dimension trois.

#### 4.3.1.a Mouvements de Reidemeister.

Reidemeister a montré que si les diagrammes plans de deux enlacements sont reliés par une séquence de mouvements de Reidemeister, qui sont les trois transformations illustrées par la figure 4.7, ces enlacements sont déformables continûment l'un dans l'autre dans  $\mathbb{R}^3$ .

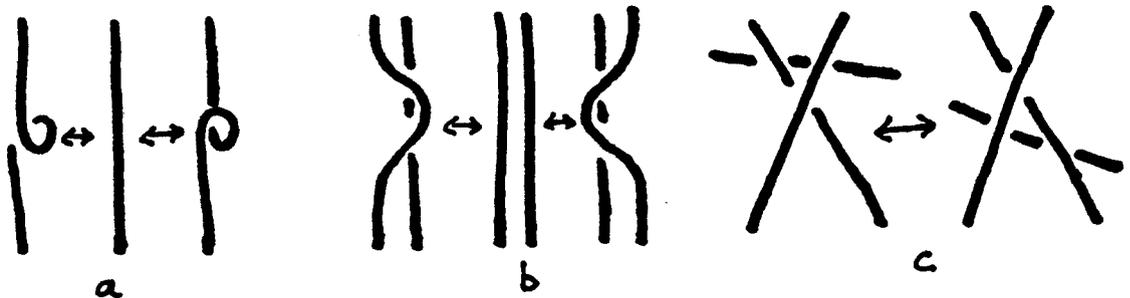


Fig 4.7 Mouvements de Reidemeister (a) de type I, (b) de type II, (c) de type III.

On remarquera que les mouvements de type II et III s'appliquent à n'importe quel enlacement, tandis que le mouvement

de type I ne peut concerner qu'un noeud isolé. Ces mouvements permettent de définir les deux types d'isotopies que nous avons évoqués plus haut :

- l'isotopie ambiante, dans laquelle les trois types de mouvements sont autorisés.
- l'isotopie régulière, qui interdit le mouvement de type I.

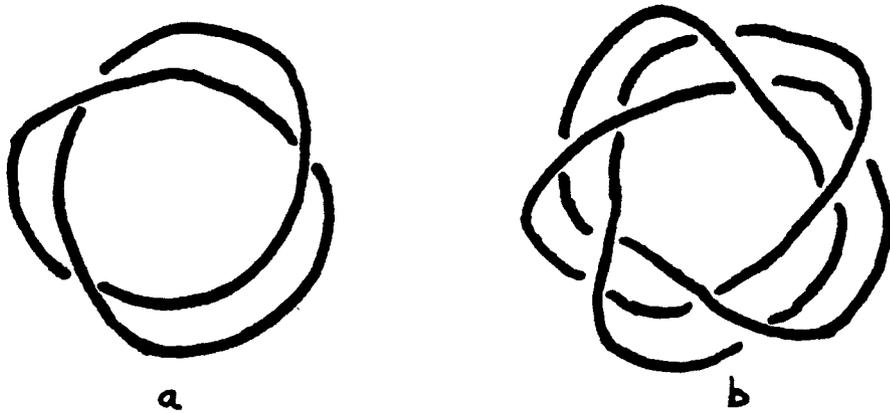
Pour qu'une grandeur soit invariante pour un type d'isotopie donné, il faut et il suffit qu'elle soit laissée invariante par les mouvements de Reidemeister correspondants.

On remarquera que deux diagrammes d'enlacement reliés par des mouvements d'isotopie ambiante ne le sont pas nécessairement par des mouvements d'isotopie régulière. Les invariants d'isotopie régulière ont par conséquent un pouvoir de discrimination plus élevé que les invariants d'isotopie ambiante. Ils sont cependant moins robustes et ne peuvent être employés que dans certains cas, comme par exemple celui des systèmes forcés périodiquement.

#### 4.3.1.b Noeuds de tore et noeuds de bretzel.

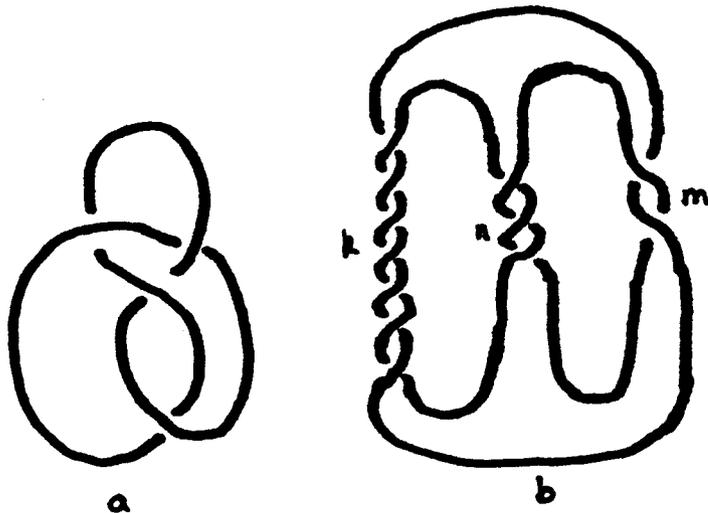
A titre d'exemple, nous présentons ici brièvement deux familles de noeuds dont on rencontre plusieurs représentants dans les attracteurs de notre laser CO<sub>2</sub> : les noeuds de tore et les noeuds de bretzel.

Les noeuds de tore sont les noeuds qui peuvent être inscrits sur la surface d'un tore. Le noeud de tore (n,m) effectue m rotations autour du petit cercle du tore en n rotations sur le grand cercle. L'exemple non trivial le plus simple est le noeud de tore (2,3), qui n'est autre que le noeud de trèfle (fig. 4.8).



**Fig 4.8** (a) Noeud de tore (2,3) (noeud de trèfle), (b) noeud de tore (3,5).

On trouvera par ailleurs en figure 4.9 le représentant le plus simple des noeuds de bretzel et la définition du noeud de bretzel  $(k,n,-m)$ . Comme nous le verrons plus loin, ce type de noeud ne peut apparaître dans un attracteur qu'au delà d'une transition vers le chaos.



**Fig 4.9** (a) Noeud de bretzel simple (b) noeud de bretzel  $(k,n,-m)$ .  $k$ ,  $n$ ,  $m$  sont les nombres de croisements.

### 4.3.2 Nombres d'enlacement

Le nombre ou coefficient d'enlacement ("linking number") caractérise un enlacement orienté comportant deux noeuds. Etant données  $X$  et  $Y$ , deux courbes fermées orientées dans  $\mathbb{R}^3$ , leur nombre d'enlacement est défini par l'intégrale suivante (intégrale de Gauss),

$$\text{lk}(X,Y) = \frac{1}{4\pi} \int_X \int_Y \frac{(dx \wedge dy) \cdot (x-y)}{\|x-y\|^3}, \quad (4.1)$$

où  $x$  et  $y$  parcourent les courbes fermées  $X$  et  $Y$  (voir par exemple [Dobrovine 82]). On montre que cette intégrale ne prend que des valeurs entières et reste constante si on déplace les courbes continûment sans qu'elles se coupent. Si les deux courbes ne sont pas liées, on peut en éloigner une à l'infini, ce qui démontre que le coefficient vaut alors zéro. Par contre, si une des deux courbes effectue  $n$  tours autour de l'autre, le nombre d'enlacement vaut  $n$ . On remarquera que le sens de parcours d'une orbite périodique au cours du temps lui fournit une orientation naturelle.



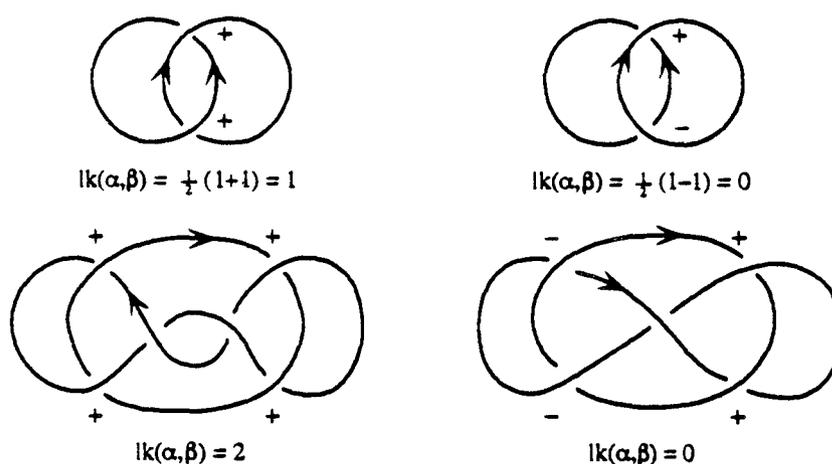
Fig. 4.10 Conventions de croisement : (a) croisement positif  $\varepsilon=+1$ , (b) croisement négatif  $\varepsilon=-1$ .

Il existe heureusement une méthode beaucoup plus simple de calculer le coefficient d'enlacement de deux noeuds, et ceci d'après

un diagramme plan. On affecte à chaque croisement de deux orbites un nombre  $\epsilon = \pm 1$  selon la convention indiquée sur la figure 4.10. En sommant sur tous les croisements, on a alors :

$$\text{lk}(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_i \epsilon_i \quad (4.2)$$

La figure 4.11 donne quelques exemples de calculs de nombre d'enlacement.



**Fig 4.11** Exemples de calculs de nombre d'enlacement (d'après [Tuffillaro 92]).

Le seul mouvement de Reidemeister susceptible de modifier le nombre de croisements entre les projections de deux noeuds différents est le mouvement de type II. On s'assure facilement qu'il fait apparaître ou disparaître des croisements de signes opposés, et qu'il ne change donc pas la somme totale (4.2). Le nombre d'enlacement est donc bien un invariant topologique.

Remarquons pour finir qu'il existe l'analogue de la relation (4.2), définissant le nombre d'auto-enlacement ("self-linking number") d'un noeud isolé comme la somme signée des croisements de sa projection (sans le facteur 1/2 de (4.2)). On peut ainsi vérifier

que le nombre d'auto-enlacement de l'orbite 4T de la figure 4.1b est 5. Cependant, il ne s'agit là que d'un invariant d'isotopie régulière, car le mouvement de Reidemeister de type I, faisant disparaître un seul croisement à la fois, ne le laisse pas invariant. Le nombre d'auto-enlacement (également appelé "writhe") possède donc des propriétés d'invariance moins fortes que le nombre d'enlacement de deux orbites. Nous pourrions néanmoins en faire usage dans notre étude du laser à pertes modulées.

### 4.3.3 Polynômes de noeud.

Il existe des invariants algébriques qui facilitent grandement le problème de savoir si deux enlacements sont équivalents : ce sont les polynômes de noeud. La plupart des polynômes usuels sont des invariants d'isotopie ambiante, mais certains le sont uniquement par rapport à l'isotopie régulière. Deux noeuds possédant deux polynômes différents sont nécessairement non équivalents. Si l'on dispose de méthodes efficaces de calcul, l'usage de ces polynômes permet donc de distinguer deux noeuds compliqués.

Par ailleurs, ils peuvent aider à identifier certains noeuds. Par exemple, les polynômes des noeuds de tore  $(n,m)$  peuvent être calculés de manière récursive, ce qui permet de les obtenir simplement. Si l'on trouve un noeud dont le polynôme est égal à l'un de ces polynômes, il est fort possible qu'il s'agisse du noeud de tore correspondant. Il convient toutefois de noter qu'en général il existe des noeuds non équivalents associés au même polynôme et une grande partie de la recherche en théorie des noeuds s'intéresse à la construction de polynômes aux capacités de discrimination les plus élevées possibles.

La plupart des polynômes peuvent être définis par une relation entre les polynômes de noeuds reliés par des transformations simples. Par exemple, supposons que  $L_+$ ,  $L_-$ ,  $L_0$  soient des enlacements tels que leur projection soit identique dans tout le plan à l'exception d'un petit disque où ils se présentent comme sur la

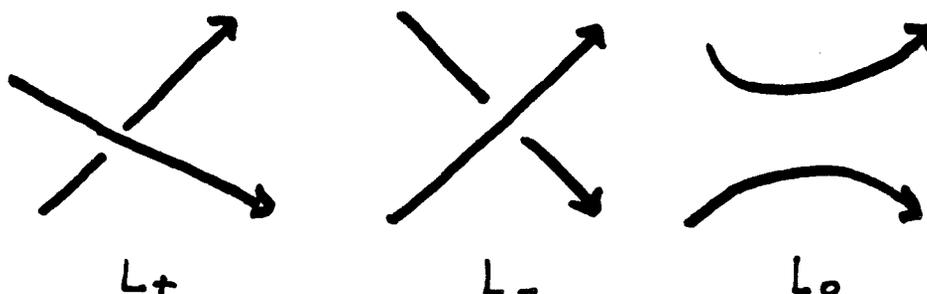


Fig 4.12

figure 4.12. Le polynôme de Conway  $\nabla(z)$  est par exemple défini par la relation suivante [Kauffman 87] :

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z \nabla_{L_0}(z), \quad (4.3)$$

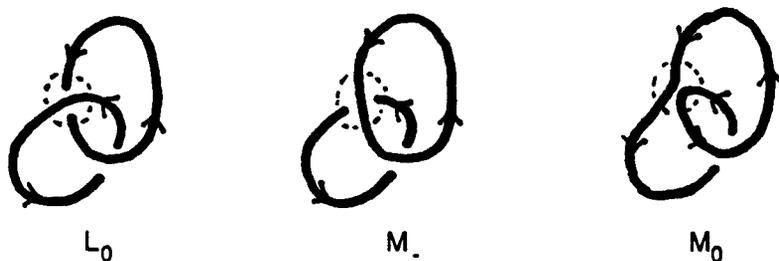
Le polynôme de Conway est normalisé en prenant le polynôme du noeud trivial égal à 1, ce qui entraîne que tous les coefficients de  $\nabla(z)$  sont entiers. Cette convention et la relation (4.3) permettent de calculer le polynôme de n'importe quel noeud ou enlacement. On peut par exemple montrer que le polynôme d'un enlacement formé de  $n$  noeuds disjoints est nul. A titre d'exemple, la figure 4.13 détaille le calcul du polynôme du noeud de trèfle, qui est  $\nabla_T = 1+z^2$ .

Comme  $\nabla_L(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$  est un invariant, il s'ensuit que chacun de ses coefficients l'est également. Les deux premiers coefficients ont les interprétations simples suivantes :

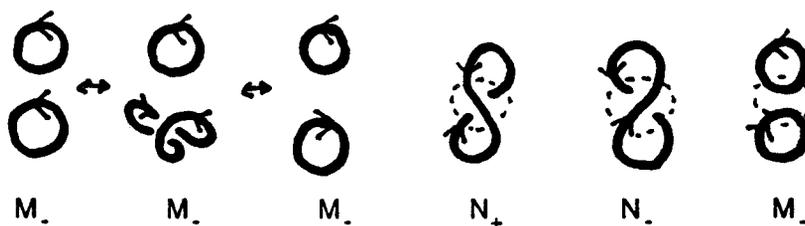


$L_+$   
(Noeud de trèfle)

$$\begin{aligned} \nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) &= z \nabla_{L_0}(z) \\ L_- \text{ trivial} &\Rightarrow \nabla_{L_-}(z) = 1 \\ \Rightarrow \nabla_{L_+}(z) &= 1 + z \nabla_{L_0}(z) \quad \text{(I)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \nabla_{L_0}(z) - \nabla_{M_-}(z) &= z \nabla_{M_0}(z) \\ M_0 \text{ trivial} &\Rightarrow \nabla_{M_0}(z) = 1 \\ \Rightarrow \nabla_{L_0}(z) &= z + \nabla_{M_-}(z) \quad \text{(II)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \nabla_{N_+}(z) - \nabla_{N_-}(z) &= 1 - 1 = z \nabla_{M_-}(z) = 0 \quad \text{(III)} \\ \text{(II) + (III)} &\Rightarrow \nabla_{L_0}(z) = z \quad \text{(IV)} \end{aligned}$$

$$\text{(I) + (IV)} \Rightarrow \nabla_{L_+}(z) = 1 + z^2$$

**Fig 4.13** Calcul du polynôme de Conway du noeud de trèfle, à l'aide de la relation (4.3)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1 \text{ si } L \text{ a un seul composant (} L \text{ est un noeud),} \\ a_0 = 0 \text{ sinon} \\ \\ a_1 = \text{lk}(L) \text{ si } L \text{ est un enlacement de deux noeuds,} \\ a_1 = 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Citons également le polynôme généralisé  $G(x,y,z)$  [Freyd 85], qui est un polynôme de Laurent homogène de degré 0, et constitue une généralisation d'un certain nombre de polynômes, dont le polynôme de Conway :

$$x G_{L_+}(x,y,z) + y G_{L_-}(x,y,z) = z G_{L_0}(x,y,z). \quad (4.4)$$

La convention concernant le noeud trivial est identique à celle du polynôme de Conway. On peut remarquer que  $\nabla(z) = G(1, -1, z)$ . Certains noeuds inéquivalents ont des polynômes de Conway identiques mais des polynômes généralisés différents. Entre autres, le polynôme généralisé permet de distinguer deux noeuds inéquivalents qui sont images l'un de l'autre dans un miroir. En suivant les mêmes étapes que celles décrites dans la figure 4.13, il est facile de montrer que le polynôme généralisé du noeud de trèfle est  $G_T(x,y,z) = -2 x^{-1} y - x^2 y^2 + x^{-2} z^2$ .

#### 4.3.4 Tresses

Les tresses [Birman 75, Kauffman 91] sont des objets mathématiques particulièrement utiles pour l'étude des orbites périodiques et étroitement reliés aux concepts de noeuds et d'enlacements.

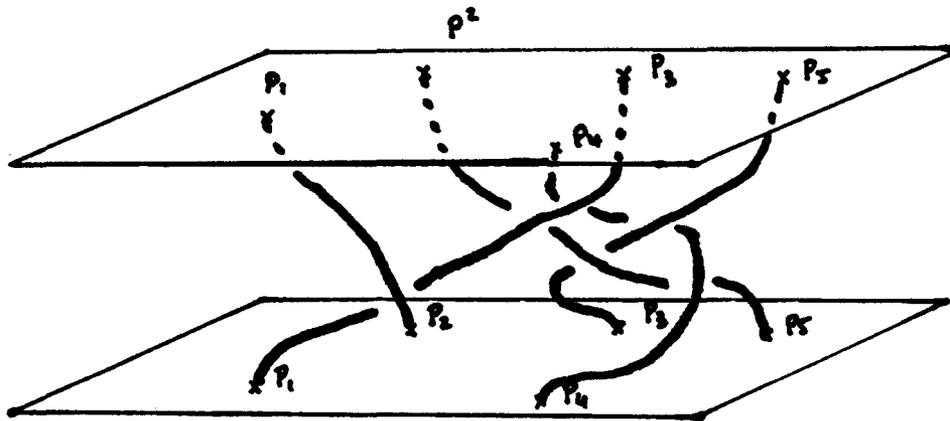


Fig. 4.14 Une tresse à  $n$  brins.

Prenons deux copies d'un plan  $\mathbb{R}^2$  où sont placés  $n$  points  $P_1, \dots, P_n$ . Relions ensuite chaque  $P_i$  du plan supérieur à un  $P_j$  du plan inférieur par une courbe : nous obtenons ainsi une tresse à  $n$  brins (fig. 4.14). Une tresse à  $n$  brins est traditionnellement représentée par un diagramme plan comme celui de la figure 4.15, qui n'est rien d'autre qu'une projection de la figure 4.14. Les  $n$  points sur les lignes supérieure et inférieure sont numérotés de gauche à droite.

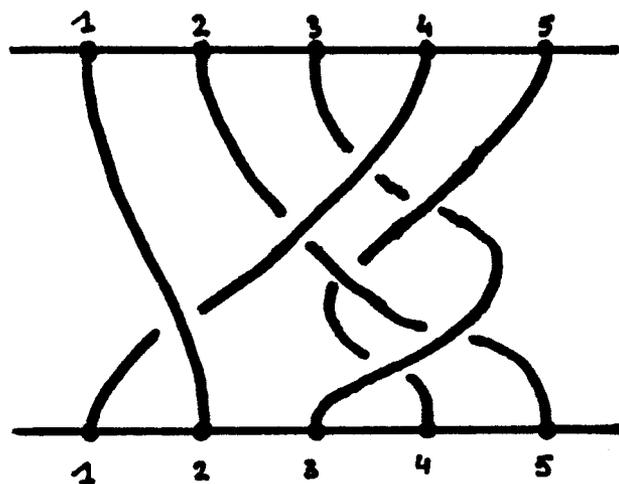


Fig. 4.15 Diagramme plan d'une tresse (ou : tresse géométrique).

Le groupe des tresses à  $n$  brins,  $B_n$ , est défini comme l'ensemble des classes d'équivalence des tresses par rapport aux mouvements d'isotopie laissant les points  $P_n$  fixes. L'élément unité de  $B_n$  est la tresse triviale à  $n$  brins où chaque  $P_i$  est connecté à lui-même sans croiser les brins. Le produit  $T_1 T_2$  de deux tresses  $T_1$  et  $T_2$  est défini en raccordant l'extrémité inférieure de  $T_1$  et l'extrémité supérieure de  $T_2$ . L'inverse d'une tresse est construit en parcourant la même tresse dans le sens inverse, et en inversant les croisements. Ces propriétés sont résumées dans la figure 4.16.

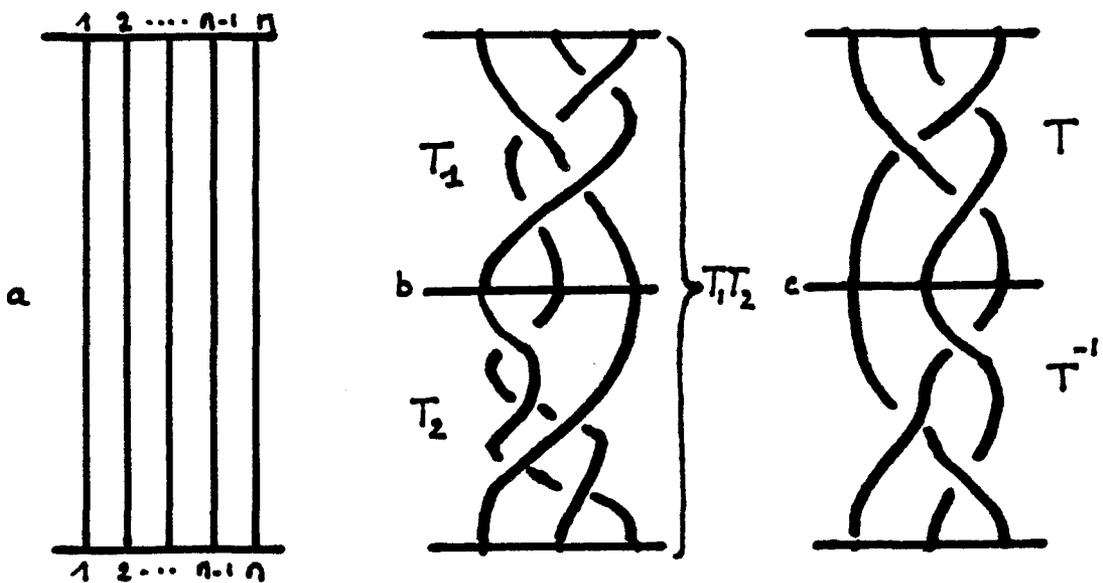


Fig 4.16 Groupe des tresses : (a) tresse unité, (b) produit de deux tresses  $T_1$  et  $T_2$ , (c) Inverse d'une tresse  $T$ .

Ce groupe possède  $n-1$  générateurs  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ . Le générateur  $\sigma_i$  est la tresse élémentaire où seuls les brins  $i$  et  $i+1$  sont permutés, ce dernier passant au-dessus du premier, tandis que son inverse  $\sigma_i^{-1}$  fait passer le  $i^{\text{ème}}$  brin au dessus (fig. 4.17). Il est clair que  $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1$  (figure 4.17c), cette relation étant l'analogue du mouvement de Reidemeister de type II.

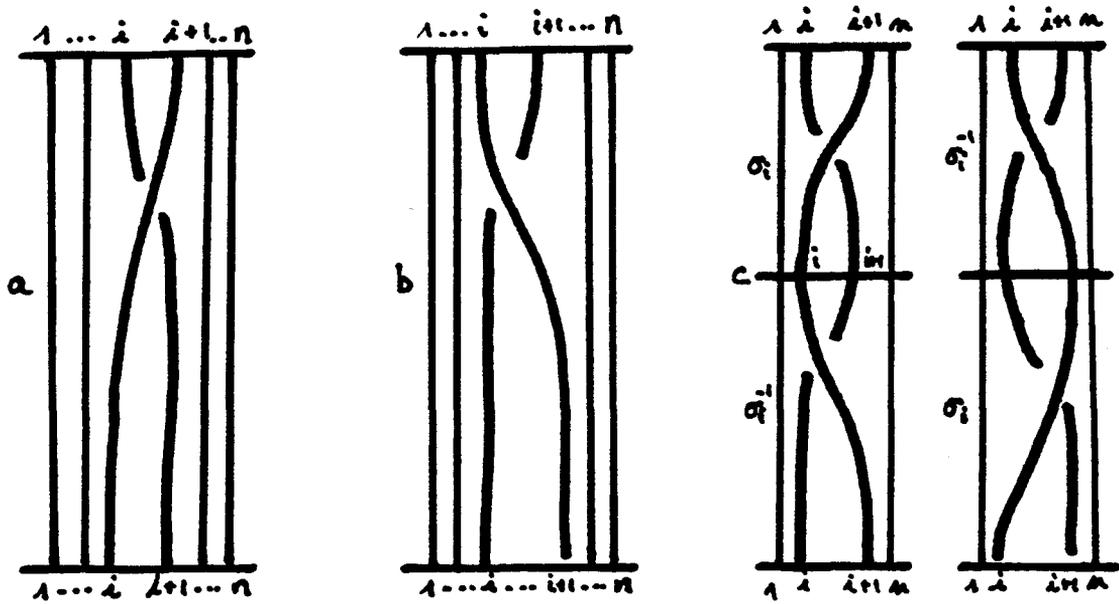


Fig 4.17 Générateurs du groupe des tresses : (a)  $\sigma_i$ ,  
 (b)  $\sigma_i^{-1}$ , (c)  $\sigma_i \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \sigma_i = 1$

N'importe quelle tresse peut être obtenue par action répétée de ces générateurs sur la tresse unité et être décrite en énumérant les générateurs nécessaires à sa construction. Par exemple, la tresse représentée en figure 4.18 correspond à  $\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^2 \sigma_2$ . La séquence  $\sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1^2 \sigma_2$  est appelé le mot de la tresse. Dans la suite nous noterons la tresse à  $n$  brins  $\sigma_i \sigma_j \sigma_k^{-1} \dots \sigma_m$  sous la forme plus compacte  $[ij(-k)\dots m]_n$ , soit pour l'exemple précédent,  $[1(-2)112]_3$ .

La même tresse peut cependant être décrite par plusieurs mots de tresse différents. Pour rendre bijective la correspondance entre mots et classes d'équivalence, les générateurs doivent vérifier les relations suivantes :

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \tag{4.5a}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i-j| > 1 \tag{4.5b}$$

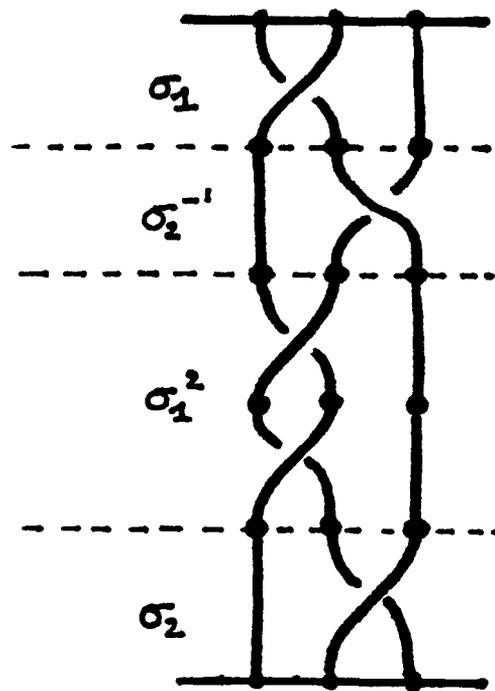


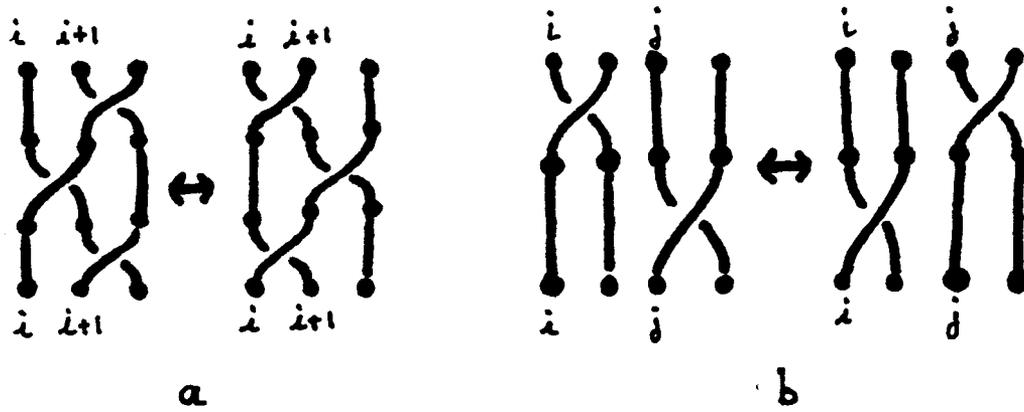
Fig. 4.18 Exemple de mot de tresse.

Ces deux relations, illustrées par la figure 4.19, peuvent être prises comme relations de définition du groupe des tresses  $B_n$ . Remarquons que la relation (4.5a) est l'analogie du mouvement de Reidemeister de type III.

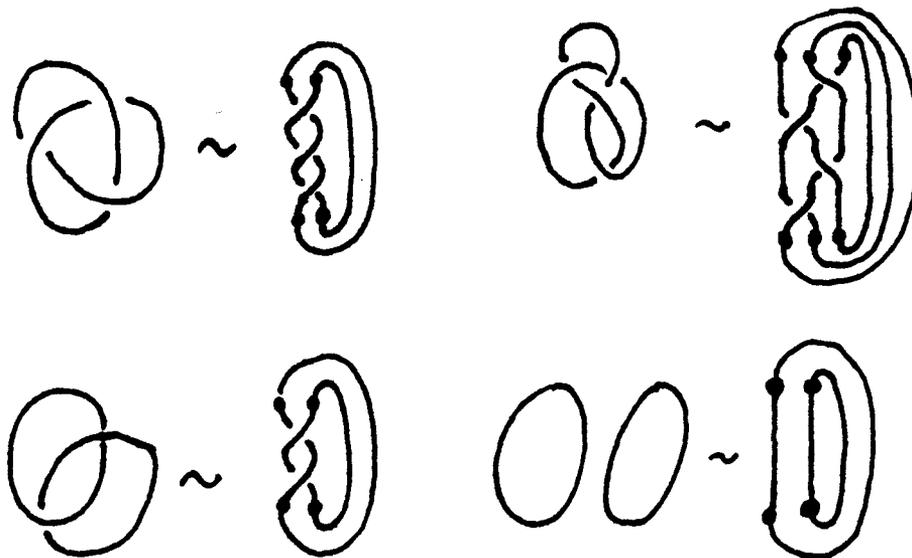
Une tresse fermée est obtenue en identifiant trivialement le haut et le bas de la tresse. On remarquera qu'une tresse fermée représente un enlacement dans  $D^2 \times S^1$ , où  $D^2$  est le disque unité  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , puisque les brins d'une tresse sont toujours parcourus dans le même sens.

Le fait que tout enlacement puisse être ramené par isotopie à un enlacement dans  $D^2 \times S^1$  [Kauffman 91] entraîne qu'il peut être représenté par une tresse fermée (fig. 4.20). Une orbite périodique est naturellement représentée par une tresse fermée : les points de base de la tresse sont les intersections de l'orbite avec le plan de

section de Poincaré, et les brins sont la trajectoire de l'orbite entre deux intersections.



**Fig 4.19** Relations de définition du groupe des tresses : (a) relation (4.5a), (b) relation (4.5b)



**Fig 4.20** Quelques enlacements représentés comme des tresses fermées.

Cependant, on peut se convaincre facilement qu'une même orbite peut être selon les cas représentée par des tresses distinctes. Ainsi, les points d'intersection  $P_i$  apparaîtront dans un ordre différent selon qu'on effectue la projection dans telle ou telle direction. Par ailleurs, changer de plan de section revient à faire une permutation circulaire des lettres du mot de tresse, ce qui donne un autre élément de  $B_n$ . Il nous faut donc identifier les tresses fermées qui peuvent être ramenées l'une à l'autre par des mouvements d'isotopie régulière dans  $D^2 \times S^1$ . Markov [1935] a établi que de telles tresses sont reliées [Birman 75] par des transformations du type (mouvement de Markov de type I, fig. 4.21a) :

$$w = uv \leftrightarrow w' = vu, \quad (u, v, w, w' \in B_n) \quad (4.6)$$

On remarquera que deux tresses équivalentes vérifient :

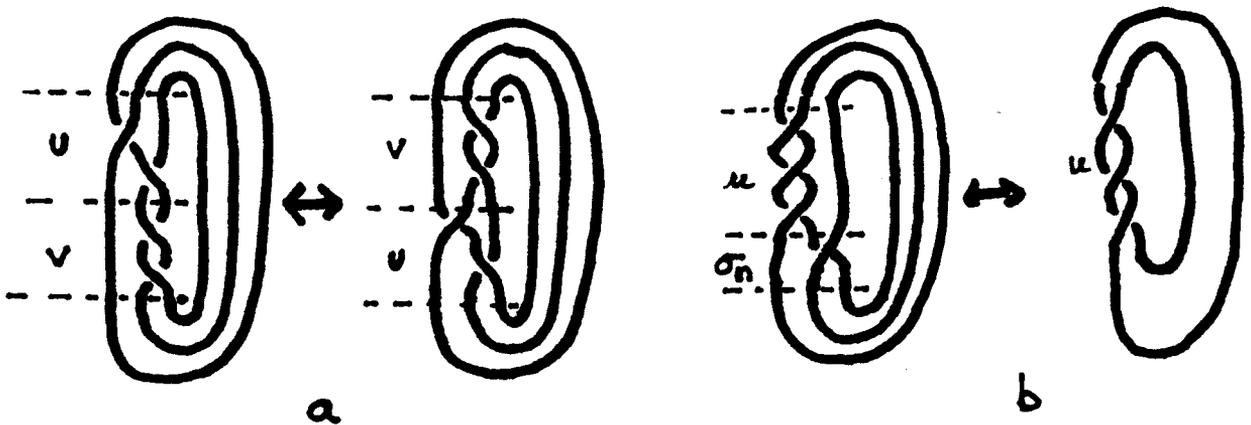
$$w' = vu = u^{-1} uv u = u^{-1} w u \quad (4.7)$$

et appartiennent par conséquent à la même classe de conjugaison dans le groupe  $B_n$  (voir par exemple [Hamermesh 89]). La relation (4.7) traduit bien l'effet d'un changement de projection.

Par ailleurs, les tresses fermées équivalentes à des mouvements d'isotopie ambiante près sont reliées [Birman 75] par une séquence de mouvements de Markov de type II, qui est l'analogue du mouvement de Reidemeister de type I (fig. 4.21b) :

$$u \leftrightarrow u \sigma_n \leftrightarrow u \sigma_n^{-1}, \quad (u \in B_n; \sigma_n \in B_{n+1}), \quad (4.8)$$

dont on voit qu'il relie des tresses à nombres de brins différents.



**Fig 4.21** Mouvements de Markov : (a) de type I, (b) de type II.

Par conséquent, un invariant  $\Psi$  d'isotopie régulière (resp. ambiante) doit vérifier la (resp. les) condition(s) de Markov (4.9a) (resp. (4.9a) et (4.9b)) ci-dessous :

$$\Psi(uv) = \Psi(vu), \quad (u, v \in B_n) \quad (4.9a)$$

$$= \Psi(u \sigma_n) = \Psi(u \sigma_n^{-1}), \quad (u, v \in B_n; \sigma_n \in B_{n+1}) \quad (4.9b)$$

Par exemple, l'orbite 4T et l'orbite 5T représentées sur la figure 4.22 ont des invariants d'isotopie ambiante (resp. régulière) identiques (resp. différents). En effet, si elles constituent deux réalisations du noeud de trèfle, leurs nombres d'auto-enlacement sont respectivement égaux à 5 et 6.

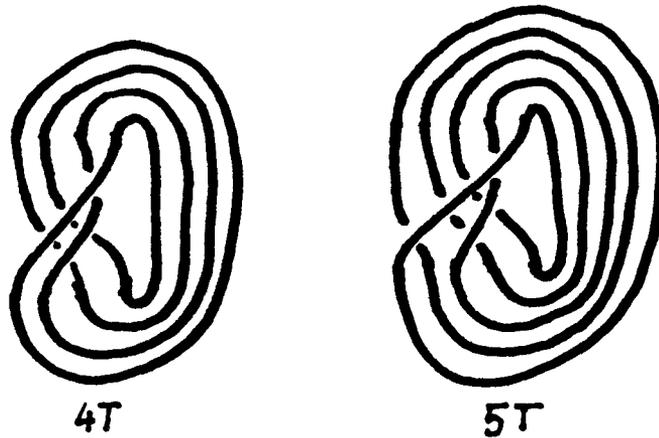


Fig. 4.22 Deux tresses non isotopes dans  $D^2 \times S^1$ , mais qui représentent le même noeud dans  $\mathbb{R}^3$ .

Nous verrons plus bas que le gabarit associé à un flot permet de prédire directement quelles sont les tresses associées aux orbites périodiques d'un flot, et que pour un système forcé, comme le laser  $\text{CO}_2$  à pertes modulées, on obtient très facilement la tresse associée à une orbite périodique donnée. Il sera donc naturel de travailler exclusivement en termes de tresses.

Si le nombre d'enlacement d'une tresse représentant deux orbites peut se calculer simplement comme celui d'un enlacement usuel au moyen de la relation (4.2), le caractère algébrique d'une tresse permet de mettre au point des algorithmes numériques pour déterminer les invariants plus raffinés.

Nous allons ainsi indiquer ici brièvement un algorithme déterminant le polynôme généralisé d'une tresse à partir du mot de tresse et du nombre de brins. Il est basé sur un ensemble de six

règles formelles utilisées par Freyd et Yetter [1985] pour démontrer l'existence du polynôme généralisé.

En admettant que les mots de tresse peuvent admettre des coefficients dans l'anneau des polynômes homogènes de degré 0 des variables  $x, y, z$ , et en considérant l'espace  $S$  constitué par les sommes de mots de tresse affectés de tels coefficients, on pose les six règles de substitution (4.10), agissant dans  $S$ . Dans les expressions ci-dessous, si  $L_n$  est l'ensemble des lettres  $n-1, n-2, \dots, 2, 1, -1, \dots, 1-n$ ,  $u$  et  $v$  représentent des mots formés de lettres de  $L_n$ , et  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $L_n$  vérifiant  $0 < b < a < n$ . Comme précédemment,  $[uabv]_n$  représente le mot d'une tresse à  $n$  brins, chaque lettre du mot  $uabv$  correspondant à l'action d'un générateur du groupe des tresses ou de son inverse.

$$[uabv]_n \rightarrow [ubav]_n \quad \text{si } b < a-1 \quad (4.10a)$$

$$[ua(a-1)\dots(a-p)av]_n \rightarrow [u(a-1)a(a-1)\dots(a-p)v]_n \quad (4.10b)$$

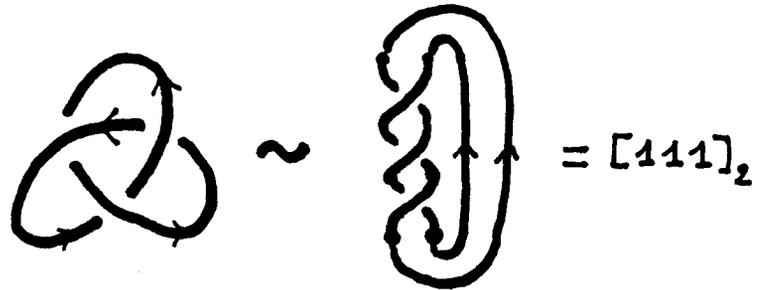
$$[u(-a)v]_n \rightarrow -x y^{-1} [uav]_n + y^{-1} z [uv]_n \quad (4.10c)$$

$$[uaav]_n \rightarrow -x^{-1} y [uv]_n + x^{-1} z [uav]_n \quad (4.10d)$$

$$[unv]_{n+1} \rightarrow [uv]_n \quad (4.10e)$$

$$[uv]_{n+1} \rightarrow (x+y) z^{-1} [uv]_n \quad (4.10f)$$

Les règles (4.10a) et (4.10b) proviennent des relations (4.5) vérifiées par les générateurs du groupe des tresses. Les règles (4.10c), (4.10d) et (4.10f) sont trois formes de la relation fondamentale (4.4). La règle (4.10e) exprime quant à elle la condition de Markov (4.9b).



$$[111]_2 \xrightarrow{(d)} -x^{-1}y [1]_2 + x^{-1}z [11]_2 \quad (I)$$

$$[1]_2 \xrightarrow{(e)} [.]_1 \quad (II)$$

$$[11]_2 \xrightarrow{(d)} -x^{-1}y [.]_2 + x^{-1}z [1]_2 \quad (III)$$

$$[.]_2 \xrightarrow{(f)} (x+y)z^{-1} [.]_1 \quad (IV)$$

$$(II+III+IV) \Rightarrow [11]_2 \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} (-x^{-1}y(x+y)z^{-1} + x^{-1}z) [.]_1 \\ \xrightarrow{\quad} (-yz^{-1} - x^{-1}y^2z^{-1} + x^{-1}z) [.]_1 \end{array} \quad (V)$$

$$(I+II+V) \Rightarrow [111]_2 \xrightarrow{\quad} (-2x^{-1}y - x^{-2}y^2 + x^{-2}z^2) [.]_1$$

Le polynôme généralisé du noeud de trèfle est donc :

$$G_T(x,y,z) = (-2x^{-1}y - x^{-2}y^2 + x^{-2}z^2)$$

Le polynôme de Conway est donné par  $\nabla_T(z) = G_T(1,-1,z)$  :

$$\nabla_T(z) = 1 + z^2$$

**Fig. 4.23** Calcul du polynôme généralisé du noeud de trèfle au moyen de l'algorithme (4.10).

Freyd et Yetter ont démontré :

- qu'à toute tresse au moins une des six règles peut être appliquée,

- que quelque soit l'ordre dans lequel on applique les règles, on arrive toujours en un nombre fini de substitutions à la forme terminale :  $G(x,y,z) \times [.]_1$ , où  $[.]_1$  est la tresse triviale à un brin.

$G(x,y,z)$  n'est autre que le polynôme généralisé. La figure 4.23 donne le détail du calcul du polynôme généralisé du noeud de trèfle par cet algorithme. Nous avons implémenté ces règles dans un algorithme calculant le polynôme généralisé à partir de la donnée du mot de tresse et du nombre de brins. Comme nous verrons plus bas que l'on peut déterminer automatiquement les mots de tresse associés aux orbites périodiques d'un système expérimental, on a ainsi un moyen simple d'utiliser toute la puissance de ce polynôme.

#### 4.3.5 Taux de rotation relative.

Les taux de rotation relative ("relative rotation rates") ont été introduits par Solari et Gilmore [1988a; Tufillaro 90]. Il constituent un raffinement du nombre d'enlacement, mais ne sont toutefois invariants que par rapport à l'isotopie régulière.

Soit deux orbites périodiques  $X$  et  $Y$ , de périodes  $p$  et  $q$ , dont les intersections avec une section de Poincaré donnée sont les points  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_q)$ . Considérons les deux trajectoires issues des conditions initiales  $x_i$  et  $y_j$ . Le taux de rotation relative  $R_{ij}(X,Y)$  est défini comme le nombre moyen de tours qu'effectue une trajectoire autour de l'autre entre deux passages par le plan de section (fig. 4.24).

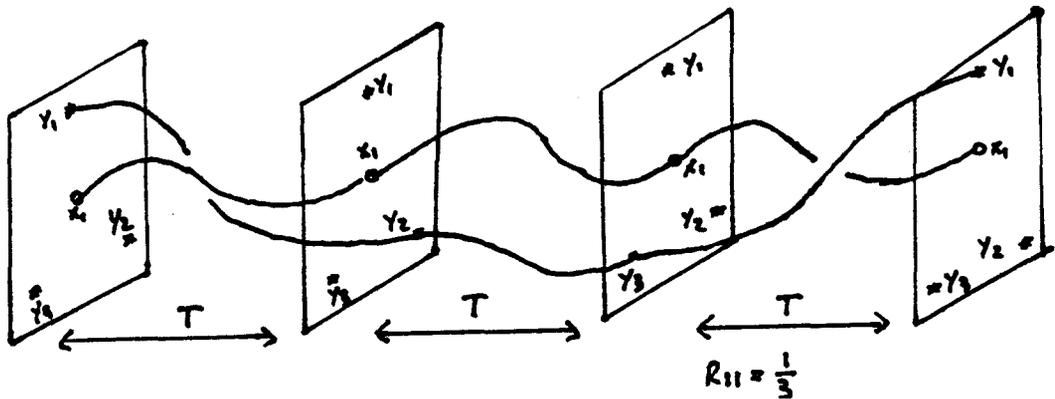


Fig 4.24 Taux de rotation relative

Dans le cas d'un système forcé, le taux de rotation relative (TRR)  $R_{ij}(X,Y)$  de  $X$  autour de  $Y$  est donné par :

$$R_{ij}(X,Y) = \frac{1}{2\pi p q} \int_0^{pqT} \frac{\|\Delta \mathbf{r}(t) \wedge d\Delta \mathbf{r}(t)\|}{\|\Delta \mathbf{r}(t)\|^2} = \frac{1}{2\pi p q} \int_0^{pqT} d\theta \quad (4.11)$$

où  $\Delta \mathbf{r}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$  est le vecteur différence entre les deux trajectoires de conditions initiales  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_j$ , et  $T$  est la période de la modulation externe. Si par exemple une orbite de période 2 et une orbite de période 4 ont quatre TRR égaux à  $(1/2)$  et quatre autres à  $(1/4)$ , cela signifie que quatre jeux de conditions initiales donnent deux tours complet sur huit périodes tandis que les quatre autres donnent quatre tours complets.

Les taux de rotation relative possèdent les propriétés suivantes :

- $R_{ij}(X,Y) = R_{ji}(Y,X)$ . Les TRR ne dépendent que du couple d'orbites considérées.

• Les TRR dépendent en général des conditions initiales  $x_i$  et  $y_j$ . Deux orbites de périodes  $p$  et  $q$  possèdent  $p \times q$  TRR mais le nombre de valeurs distinctes ne peut être plus grand que le plus grand diviseur commun de  $p$  et  $q$ .

• chaque TRR n'est pas en soi un invariant topologique, puisqu'il dépend des conditions initiales. Par contre l'ensemble des valeurs prises par les TRR de deux orbites est un invariant d'isotopie régulière. De plus on a la relation :

$$\sum_{i,j} R_{ij}(X,Y) = lk(X,Y) \quad (4.12)$$

où  $lk(X,Y)$  est le nombre d'enlacement de  $X$  et  $Y$ , qui est lui un invariant d'isotopie ambiante.

• on peut définir les TRR d'une orbite par rapport à elle-même, à condition de poser  $R_{ii}(X,X)=0$ . La somme des TRR est alors égale au nombre d'auto-enlacement que nous avons présenté plus haut. Nous parlerons dans ce cas de taux propres de rotation relative.

Le calcul des TRR est beaucoup plus simple si on représente les orbites périodiques sous la forme de tresses. Sur la tresse, les points de la ligne supérieure appartenant à la première orbite sont notés  $(x_1, \dots, x_p)$ , dans l'ordre où ils sont visités par l'orbite. On procède de même pour les points de la deuxième orbite  $(y_1, \dots, y_q)$ , comme on peut le voir sur la figure 4.25. On construit ensuite une matrice de croisements, dont les éléments  $C_{ij}$  sont égaux à la somme des croisements signés (voir fig. 4.10) entre les brins partant respectivement de  $x_i$  et  $y_j$ . Les TRR sont alors donnés par :

$$R_{ij}(X,Y) = \frac{1}{2pq} \sum_{n=1}^{pq} C'_{i+n,j+n} \quad (4.13)$$

où  $C'_{i+n,j+n} = C_{(1+(i+n-1) \bmod p), (1+(j+n-1) \bmod q)}$ .

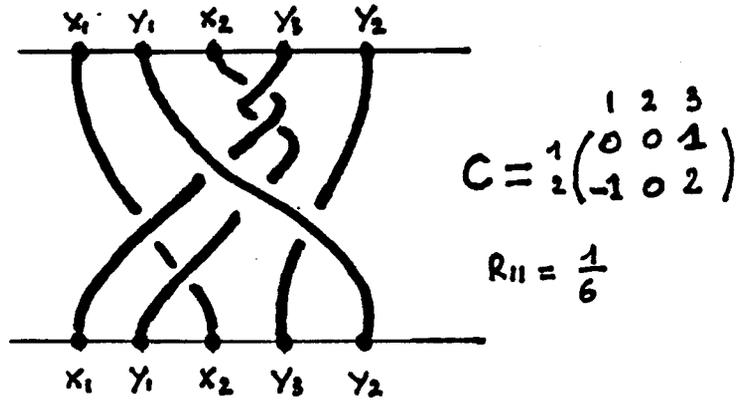


Fig 4.25 Calcul des taux de rotation relative à partir d'une tresse. Par exemple  $C_{23} = 2$ .

Comme tous les invariants d'isotopie régulière, les TRR permettent dans certains cas de distinguer des tresses qui représentent le même enlacement dans  $\mathbb{R}^3$ , mais des enlacements différents dans  $D^2 \times S^1$ .

4.3.6 Torsion d'une orbite.

Considérons une orbite périodique  $X_0(t)$  de période  $T_0$ , qui soit solution d'un champ de vecteurs  $dX/dt = F(X)$ , et écrivons les équation linéarisées au voisinage de  $X_0(t)$ , qui décrivent l'évolution d'une perturbation infinitésimale  $w$  :

$$\frac{dw}{dt} = [DF(X_0(t))] w \tag{4.14}$$

où

$$[DF(X_0(t))]_{ij} = (\partial F_i(X_0(t))/\partial X_j) \tag{4.15}$$

L'opérateur d'évolution sur une période est défini par :

$$w(t+T_0) = [L(t)] w(t) \quad ([L(t)] = [L(t+T_0)]) \tag{4.16}$$

Une valeur propre de  $[L(t)]$  est égale à 1 (elle a comme vecteur propre  $F(X_0(t))$  qui est le vecteur tangent à l'orbite), et les  $(n-1)$  autres valeurs propres sont les multiplicateurs de Floquet, définis au 3.2.1.a. Soit  $v$  un vecteur propre quelconque de  $[L(t)]$  de valeur propre différente de 1. La torsion de l'orbite est donnée par :

$$n = \frac{1}{\pi} \int_t^{t+T_0} \frac{(F(X_0(t)) \cdot (v(t) \wedge dv(t)))}{\|F(X_0(t))\| \|v\|^2}, \quad (4.17)$$

où  $dv(t)$  est donné par la relation (4.14). Cette expression indique le nombre de demi-tours qu'une trajectoire infiniment proche de l'orbite, de la forme  $X_0(t) + \eta v(t)$ , effectue autour de l'orbite. Le fait que  $v(t+T_0) = \lambda v(t)$  entraîne que  $n$  est un nombre entier. Chaque variété invariante de l'orbite a dans un voisinage de l'orbite l'aspect d'un ruban dont aurait recollé les extrémités après avoir imposé  $n$  demi-tours à l'une d'entre elles (fig. 4.5).

A titre d'exemple, rappelons que, dans une cascade de doublements de période, la torsion  $n$  d'une orbite sur le point de se déstabiliser est toujours impaire (son plus grand multiplicateur est proche de -1). Il se trouve que  $n$  est égal au nombre d'enlacement de cette orbite avec l'orbite apparaissant dans le doublement de période. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer un ruban de type Moebius à  $n$  demi-tours, et de considérer le nombre d'enlacement du centre du ruban avec son bord (fig. 4.5). On voit donc que torsion et invariants topologiques sont étroitement liés.

Comme conséquence intéressante de l'existence de la torsion, nous citerons la présence de fréquences "topologiques" dans le spectre de Fourier d'un flot au point d'accumulation de la cascade de doublements de période. Celui-ci peut présenter une

accumulation de pics à la fréquence  $2/3T$ , où  $T$  est la période de l'orbite de base. Ce phénomène s'explique simplement par le fait que la torsion de la solution de période  $2^m T$  tend vers  $(2/3) 2^m$  quand  $m$  tend vers l'infini [Gonzalez 89].

La torsion d'une orbite expérimentale peut être obtenue en principe en estimant l'opérateur  $DF$  en chaque point de l'orbite à l'aide des trajectoires voisines. En effet, si  $X(t)$  est une trajectoire voisine, on doit avoir  $X(t+dt) - X_0(t+dt) \approx [I + DF(t) \times dt] (X(t) - X_0(t))$ , et  $DF$  peut être estimé à partir d'un ensemble de trajectoires voisines par une procédure de moindres carrés (voir par exemple [Eckmann 86]).

La torsion peut également être obtenue assez simplement en étudiant comment les trajectoires voisines de cette orbite s'enroulent autour d'elle. Il faut cependant prendre garde au fait qu'une trajectoire passant dans le voisinage d'une orbite périodique s'en rapprochera d'abord selon la variété stable, puis s'en éloignera selon la variété instable. Il est donc préférable de ne retenir que les segments de trajectoires qui commencent à s'éloigner de l'orbite. Cette méthode s'applique cependant difficilement aux orbites de période élevée, car il est dans ce cas difficile de trouver une trajectoire voisine qui ne soit ni trop proche ni trop éloignée sur toute une période.

Nous verrons dans la discussion des résultats expérimentaux que, dans le cas des systèmes fortement dissipatifs, la torsion peut également être déterminée à partir de l'examen des sections de Poincaré.

### 4.3.7 Un noeud de bretzel implique le chaos.

On sait que dans le cas de la suite logistique, on ne peut obtenir d'orbites de période trois, et plus généralement de période impaire sans passer par des zone chaotiques. C'est le contenu du fameux "Period Three Implies Chaos" de Li et Yorke [Li 75]. Cette proposition est une conséquence du théorème de Sarkovskii [1964] qui ordonne de la manière suivante les périodes des orbites périodiques des applications à un seul maximum de l'intervalle :

$$\begin{array}{c}
 1 \prec 2 \prec 4 \prec \dots \prec 2^k \prec 2^{k+1} \prec \dots \\
 \dots \\
 \dots \prec 2^{k+1}(2n+1) \prec 2^{k+1}(2n-1) \prec \dots \prec 2^{k+1.5} \prec 2^{k+1.3} \prec \dots \\
 2^k(2n+1) \prec 2^k(2n-1) \prec \dots \prec 2^{k.5} \prec 2^{k.3} \prec \dots \\
 \dots \\
 2(2n+1) \prec 2(2n-1) \prec \dots \prec 2.5 \prec 2.3 \prec \dots \\
 (2n+1) \prec (2n-1) \prec \dots \prec 5 \prec 3
 \end{array}$$

Si l'application possède une orbite de période  $p$ , alors il existe des orbites pour toutes les périodes  $q$  telles que  $q \prec p$ . On voit que l'existence d'une orbite de période trois implique qu'il existe par ailleurs une infinité d'orbites avec toutes les périodes possibles.

Il existe des résultats analogues pour les applications du plan dans le plan, et par conséquent pour les flots tridimensionnels, via leurs sections de Poincaré.

Il a ainsi été montré que si une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  possède des orbites périodiques qui ne correspondent ni à des rotations ni à des rotations autour de rotations, alors l'entropie topologique de l'application est strictement positive, ce qui implique la présence d'une infinité d'autres orbites périodiques [Gambaudo 89]. Certaines orbites sont en effet nouées de telle façon qu'elles impliquent, par continuité, un comportement complexe pour le flot

dans le complément de l'orbite périodique. Par exemple, la présence de noeuds de bretzel est une condition suffisante pour que l'on ait une entropie topologique positive et constitue une signature irréfutable de chaos déterministe : le flot dans lequel elles sont plongées présente nécessairement de la sensibilité aux conditions initiales.

Nous remarquerons cependant que si les orbites correspondant à des rotations ou des rotations autour de rotations sont des noeuds de tore ou des noeuds de tore itérés (c'est à dire un noeud inscrit sur un tore noué comme un noeud de tore...), certaines orbites qui impliquent une entropie positive sont elles-mêmes des noeuds de tore.

Le fait qu'une orbite implique un comportement chaotique dépend en fait autant de la structure de sa tresse que du type de noeud qui lui est associé. Boyland [1985] et Matsuota [1985] donnent ainsi quelques critères permettant de déterminer si une tresse implique une entropie topologique ou non.

## 4.4 LE GABARIT ("TEMPLATE")

### 4.4.1 Définition

La notion de gabarit a été introduite dans l'étude des flots hyperboliques tridimensionnels par Birman et Williams [1983]. Elle permet l'étude systématique de l'organisation topologique des orbites périodiques instables d'un ensemble invariant chaotique, comme par exemple le fer à cheval de Smale. Un gabarit consiste en une surface bidimensionnelle à plusieurs branches et en un semi-flot sur cette surface. Sa définition mathématique est la suivante (voir par exemple [Holmes 86,88]) :

Supposons que nous ayons un flot  $\phi_t$  sur une variété  $M^3$  : ( $\phi_t(X(t_0))=X(t_0+t)$ ) et que ce flot possède un ensemble invariant hyperbolique  $\Omega$ , sur lequel la dynamique soit chaotique, avec un voisinage  $N \subset M^3$ . On peut définir la relation d'équivalence  $\approx$  suivante entre points de  $\Omega$  :

$$z_1 \approx z_2 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(z_1), \phi_t(z_2)) = 0. \quad (4.18)$$

où  $d$  est une distance sur  $M^3$ . On voit que  $z_1 \approx z_2$  si  $z_1$  et  $z_2$  se trouvent sur la même composante connexe  $W^s(x) \cap N$  de la variété stable d'un point  $x \in N$ . Deux points de l'attracteur ayant le même futur sous l'action du flot  $\phi_t$  se retrouvent donc dans la même classe d'équivalence. Si on identifie les points appartenant à une même classe d'équivalence de  $\approx$ , le flot  $\phi_t$  sur  $M^3$  induit un semi-flot  $\bar{\phi}_t$  sur une surface "branchue" à deux dimensions  $\mathcal{K} \subset M^3$ . On appelle la paire  $(\mathcal{K}, \bar{\phi}_t)$  le gabarit, mais souvent, par abus de langage on désigne sous ce nom uniquement la surface  $\mathcal{K}$ .

Le fait que  $K$  soit une surface à deux dimensions se comprend aisément : on projette  $\Omega$  le long de la variété stable et on fait disparaître ainsi la direction contractante. Ne subsistent que la direction dilatante, qui correspond à l'exposant de Lyapunov positif, et la direction du flot, qui constituent les deux dimensions de la surface. Par ailleurs, le fait que la surface résultante possède plusieurs branches peut se comprendre par le fait que des singularités apparaissent à la projection.

On peut remarquer que, mise à part la nature fractale de l'attracteur, les propriétés fondamentales du chaos sont préservées : la sensibilité aux conditions initiales existe toujours selon la direction dilatante, et l'unicité de la trajectoire passant par un point donné est conservée. La dynamique compliquée subsiste grâce au fait que les trajectoires peuvent hésiter entre plusieurs branches dans leur évolution sur le gabarit.

#### 4.4.2 Isotopie des orbites périodiques

Le rôle fondamental du gabarit provient du théorème suivant :

*L'ensemble des orbites périodiques du gabarit est isotope à l'ensemble des orbites périodiques de l'ensemble  $\Omega$ .*

Cela signifie qu'à chaque orbite périodique de  $\Omega$  correspond une et une seule orbite périodique du gabarit qui possède le même type de noeud. Par ailleurs, n'importe quel sous-ensemble d'orbites périodiques du gabarit est enlacé de la même façon que dans le flot initial.

Cela peut se comprendre de la manière suivante : la variété stable  $W^s(x)$  d'un point  $x$  appartenant à une orbite périodique ne

peut avoir d'intersection avec une autre orbite périodique. En effet, deux points appartenant à deux orbites différentes ont des trajectoires distinctes sur leurs orbites respectives et ne peuvent avoir le même futur. Pour la même raison,  $W^s(x)$  ne peut recouper l'orbite de  $x$  en un autre point de l'orbite (les deux points sont déphasés). La projection le long de la variété stable, qui peut se faire de manière continue, n'induit donc pas de croisement des orbites périodiques, et préserve l'organisation topologique.

#### 4.4.3 L'exemple du fer à cheval.

Pour illustrer de manière simple les concepts présentés dans le paragraphe précédent, nous prendrons l'exemple du fer à cheval de Smale, qui constitue l'un des paradigmes du chaos à petit nombre de degrés de liberté. Nous verrons par ailleurs que c'est le gabarit du fer à cheval que l'on détecte expérimentalement dans les attracteurs du laser à pertes modulées.

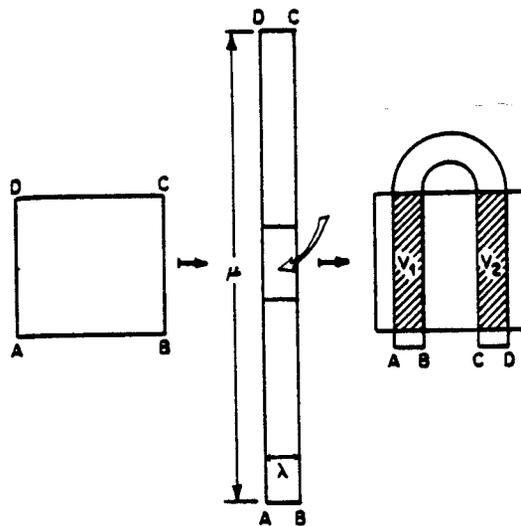
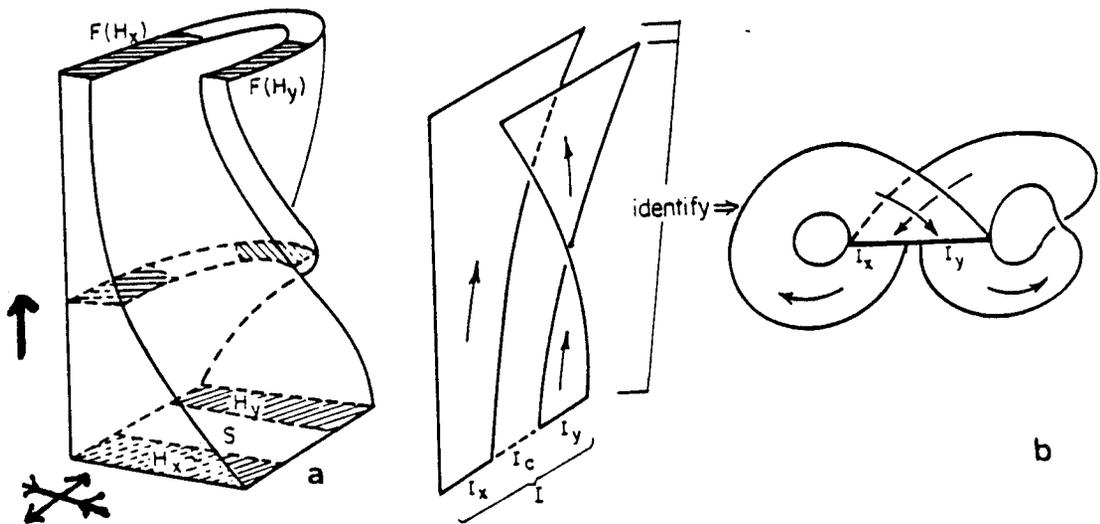


Fig 4.26 Le fer à cheval (d'après [Guckenheimer 83]).

#### 4.4.3.a Construction du gabarit.

Le fer à cheval est un difféomorphisme du plan dans le plan dont l'action est décrite schématiquement dans la figure 4.26 : le plan est tout d'abord contracté selon une direction et dilaté selon une direction transverse, puis on replie le ruban ainsi obtenu en lui donnant une forme de fer à cheval.

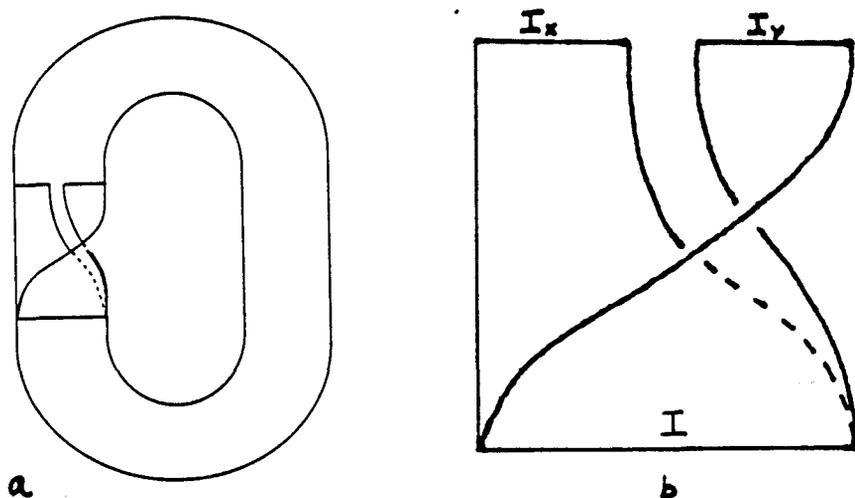


**Fig 4.27** (a) Une suspension du fer à cheval (b) projection le long de la variété stable et identification des extrémités. Le gabarit du fer à cheval est ainsi obtenu. (d'après [Holmes 86]).

Un flot dans un espace des phases de dimension trois dont l'application de premier retour est le fer à cheval est appelé suspension du fer à cheval. Remarquons que l'on peut construire différents flots non équivalents ayant la même application de

premier retour : il suffit d'imposer une torsion globale au champ de vecteurs entre deux passages par la section de Poincaré.

La figure 4.27a donne un exemple de suspension avec une torsion globale nulle (les parties haute et basse de la figure correspondent à la même section de Poincaré et doivent donc être identifiées). Les directions contractante et dilatante du flot sont indiquées sur la figure. Si on projette le flot le long de la direction contractante, on voit que l'on obtient la surface à deux branches de la figure 4.27b. On remarque qu'une des branches préserve l'orientation alors que les trajectoires passant par l'autre branche subissent une torsion d'un demi-tour.



**Fig 4.28** (a) Sous cette forme le gabarit du fer à cheval permet de déterminer les tresses associées aux orbites périodiques. (b) toute l'information est contenue dans la partie non triviale. (d'après [Mindlin 90]).

La surface de la figure 4.27b peut également être représentée sous la forme de la figure 4.28a, dont l'avantage est que les orbites périodiques du gabarit sur cette surface apparaissent comme des tresses fermées. En pratique, on peut ne garder que la partie non

triviale (figure 4.28b) où haut et bas doivent être identifiés. Le segment I où les branches se rejoignent est appelée la ligne de branchement du gabarit.

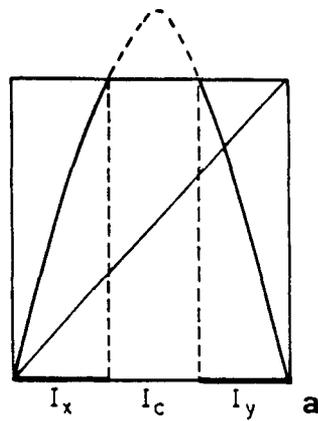
#### 4.4.3.b Dynamique symbolique du fer à cheval.

Le gabarit que nous venons de présenter possède une infinité d'orbites périodiques. Ces orbites sont en correspondance biunivoque avec celles d'un flot hyperbolique dont l'application de Poincaré est un fer à cheval, et possèdent la même organisation topologique. Pour analyser cette organisation, nous devons :

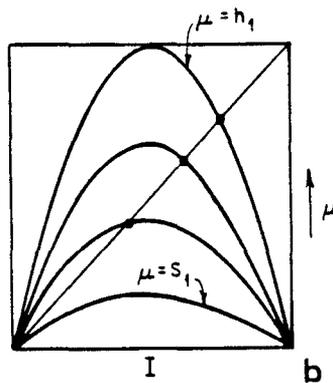
- déterminer les orbites périodiques autorisées par la structure du gabarit et en établir une classification (entre autres attribuer à chacune un nom unique)
- établir pour chaque orbite et chaque paire d'orbites les types de noeud et d'enlacement réalisés, et calculer les invariants topologiques associés.

L'analyse des trajectoires sur le gabarit en termes de dynamique symbolique permet de réaliser simplement ces deux tâches.

A chaque tour sur le gabarit (fig. 4.28a), les trajectoires passent soit par la branche préservant l'orientation, que nous noterons "x" par la suite, soit par la branche inversant l'orientation ("y"). Supposons que l'on prenne comme condition initiale un point P sur la ligne de branchement et que l'on note les branches par lesquelles sa trajectoire passe successivement, en commençant par celle où se trouve P. On obtient de cette manière une séquence infinie formée à partir des lettres x et y :



**Fig. 4.29** Application de premier retour sur la ligne de branchement du gabarit. (d'après [Holmes 86]).



**Fig 4.30** Famille d'applications de l'intervalle dont l'application de la figure 4.29 est la limite. (d'après [Holmes 86]).

$$\Psi(P) = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \text{avec } a_n \in \{x, y\}$$

Cette séquence symbolique détermine de manière unique la position de la condition initiale sur la ligne de branchement. On peut s'en rendre compte de manière simple à l'aide de l'application

de premier retour sur la ligne de branchement I du gabarit induite par le semi-flot  $\bar{\phi}_t$  (fig. 4.29).

La pente négative sur  $I_y$  traduit le renversement de l'orientation sur la branche y. Le fait que les points situés au milieu de I n'aient pas d'image dans I provient du fait que l'on se trouve dans le cas hyperbolique. On n'a donc pas d'attracteur, mais un ensemble invariant.

Une application de ce type peut cependant être obtenue comme limite d'une famille d'applications telles que celles représentées sur la figure 4.30, et qui, elles, possèdent des attracteurs. Une telle famille décrit la formation d'un fer à cheval. On voit donc que la dynamique symbolique sur le gabarit du fer à cheval est étroitement reliée à celle bien connue des applications de l'intervalle à un maximum quadratique, comme par exemple la suite logistique  $x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n)$  [Hao 89, Guckenheimer 83].

A chaque itération de l'application  $f$  de la figure 4.29, chacun des intervalles  $I_x$  et  $I_y$  est appliqué sur l'ensemble de l'intervalle. Cela permet de décomposer par exemple  $I_x$  en trois sous-intervalles  $I_{x,x}$ ,  $I_{x,y}$  et  $I_{x,c}$ , contenant les points dont l'image se trouve respectivement dans  $I_x$ ,  $I_y$ , et dans  $I_c$ , l'intervalle central de I.

On notera que les largeurs des intervalles  $I_x$ ,  $I_y$  et  $I_c$  sont bornées par  $L_0/\lambda$ , tandis que celles de  $I_{x,x}$ ,  $I_{x,y}$  et  $I_{x,c}$  le sont par  $L_0/\lambda^2$ , où  $L_0$  est la largeur de l'intervalle I, et  $\lambda$  est la valeur minimale prise par la valeur absolue de la dérivée de l'application  $f$  ( $\lambda > 1$ ).

En remarquant que par exemple,  $I_{x,x} = I_x \cap f^{-1}(I_x)$ , on définit de même les intervalles :

$$I_{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n} = I_{a_0} \cap f^{-1}(I_{a_1}) \cap f^{-2}(I_{a_2}) \cap \dots \cap f^{-n}(I_{a_n})$$

dont les largeurs sont bornées par  $L_0 \lambda^{-(n+1)}$ . On peut se convaincre facilement que l'intervalle  $I_{a_0, \dots, a_n}$  contient tous les points  $P$  dont la séquence symbolique  $\Psi(P)$  commence par  $\{a_0, \dots, a_n, \dots\}$ , et que, dans la limite  $n \rightarrow \infty$ , cet intervalle se réduit à un point.

Une séquence symbolique donnée est donc associée de manière unique à un point de la ligne de branchement. C'est bien évidemment la sensibilité aux conditions initiales qui permet de localiser "microscopiquement" la condition initiale à partir d'une caractérisation macroscopique de la trajectoire.

Cela nous permet de remplacer la dynamique sur le gabarit par la "dynamique symbolique" dans l'ensemble des séquences de  $x$  et de  $y$ . Si  $P$  est un point de la ligne de branchement  $I$ , dont l'itinéraire symbolique est  $\Psi(P) = \{a_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ , son image  $f(P)$  par l'application de premier retour dans  $I$  aura comme itinéraire symbolique  $\Psi(f(P)) = \{a_{n+1}\}_{n=0}^{n=\infty}$ . L'opération passant d'une séquence à l'autre est appelée l'opération de décalage ("shift") :

$$\sigma(\{a_n\}_{n=0}^{n=\infty}) = \{a_{n+1}\}_{n=0}^{n=\infty}, \quad (4.19)$$

et l'on a donc :

$$\sigma(\Psi(P)) = \Psi(f(P)) \quad (4.20)$$

Remarquons qu'à un point sur le gabarit correspond un ensemble de points du flot reliés par une variété stable. Si l'on veut déterminer de manière unique un point dans une section de Poincaré, il faudra donc également connaître son passé, donc la séquence bi-infinie  $\{a_n\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ .

Parmi toutes les trajectoires sur le gabarit, nous nous intéressons plus particulièrement à celles qui sont périodiques et qui sont par conséquent associées à des itinéraires symboliques eux-mêmes périodiques. Le motif de base de l'itinéraire symbolique d'un point appartenant à une orbite périodique peut donc servir à nommer cette orbite. La longueur de ce motif indique la période de l'orbite.

Par exemple la séquence  $\{x,y,y,x,y,y,x,y,y,\dots\}$ , dont le motif de base est  $x,y,y$  est l'itinéraire symbolique d'un point appartenant à une orbite périodique de période 3. Dans ce qui suit, la séquence symbolique infinie dont le motif de base est  $x,y,y$  sera notée  $\underline{xyy}$ , et le point de  $I$  correspondant  $xyy$  ( $=xy^2$ ).

A titre d'illustration, nous pouvons énumérer les orbites de plus faible période en examinant les motifs comportant un, deux, ou trois symboles :

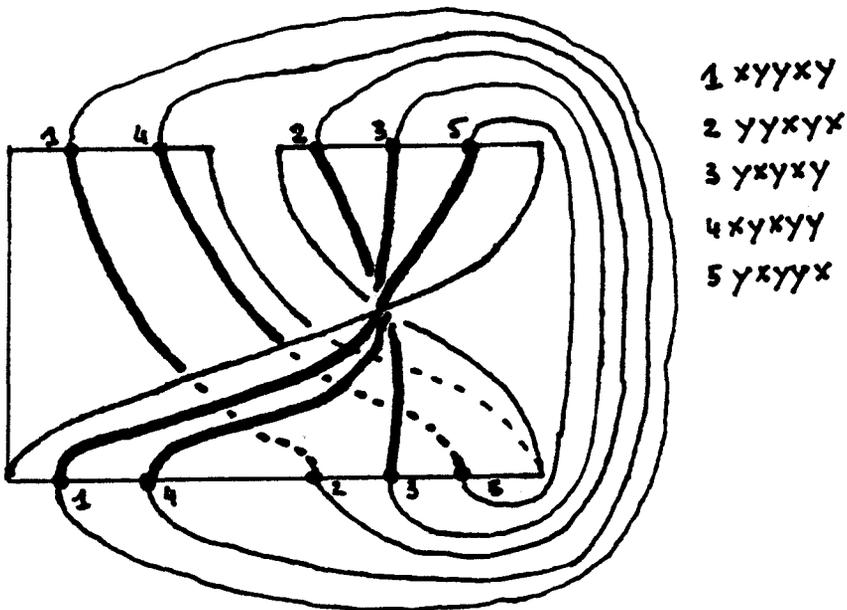
- $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  correspondent à deux orbites de période 1.
- $\underline{xx}$  et  $\underline{yy}$  sont les deux séquences précédentes.  $\underline{xy}$  et  $\underline{yx}$  sont reliées par une permutation circulaire, et sont associées à deux points appartenant à l'unique orbite de période 2 (que l'on peut noter  $xy$  ou  $yx$ ).
- $\underline{xxx}$  et  $\underline{yyy}$  sont identiques à  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$ . Les séquences  $\underline{xyy}$ ,  $\underline{yyx}$ ,  $\underline{yxy}$  correspondent à une première orbite de période 3, et  $\underline{xyx}$ ,  $\underline{xyx}$ ,  $\underline{yxx}$  à une deuxième orbite de période 3.

On remarquera qu'une orbite de période  $n$  possède  $n$  noms équivalents. Chacun de ces noms est le motif de base de l'itinéraire d'une des  $n$  intersections de l'orbite périodique avec la ligne de branchement.

L'opération de décalage sur une séquence périodique se réduit à une permutation circulaire des symboles du motif de base. Par exemple, pour l'orbite périodique  $xy^2$ , on a :

$$\underline{xyy} = \sigma(\underline{yxy}) = \sigma^2(\underline{yyx}) = \sigma^3(\underline{xyy}).$$

Le fait que les séquences symboliques localisent les différentes intersections de manière unique sur  $I$  implique que deux orbites périodiques distinctes possèdent des itinéraires symboliques différents. A titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure 4.31 l'orbite périodique  $xyxy^2$ , dont la construction sera détaillée plus loin.



**Fig. 4.31** L'orbite périodique d'itinéraire symbolique  $xyxy^2$ .

La table 4.1 indique le nombre d'orbites périodiques de période donnée que possède le gabarit du fer à cheval. Seule une partie de ces orbites périodiques est présente dans un attracteur

réel, et leur nombre indique si l'attracteur est plus ou moins proche de la limite hyperbolique.

n	Nombre d'orbites de période n
1	2
2	1
3	2
4	3
5	6
6	9
7	18
8	30
9	56
10	94
11	186
12	335

Table 1 Nombre d'orbites périodiques de période donnée du fer à cheval.

On voit que le nombre d'orbites périodiques de période  $n$  est donné approximativement par  $N(n) \approx 2^n/n$ . L'entropie topologique, qui peut être définie par :

$$h_T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(n)}{n} \quad (4.21)$$

est donc égale à  $\log 2$  pour le gabarit du fer à cheval.

#### 4.4.3.c Structure des orbites périodiques.

En inscrivant une orbite périodique d'itinéraire symbolique donné sur le gabarit, nous pouvons construire la tresse représentant cette orbite, à partir de laquelle ses invariants topologiques peuvent être déterminés.

Pour cela, il faut d'abord ordonner correctement sur la ligne de branchement les points appartenant à cette orbite périodique. Nous prendrons l'exemple de l'orbite  $xyxy^2$  dont les intersections avec la

ligne de branchement sont parcourues dans l'ordre  $xyxy \rightarrow yxyx \rightarrow xyyx \rightarrow yyxy \rightarrow yxyx$ . La première lettre du nom symbolique de chaque point indique la branche sur laquelle il se trouve, et nous savons donc que les points  $xyxy^2$  et  $xy^2xy$  se trouveront à gauche des trois autres points. (Par exemple  $xyxy^2 < yxy^2x$ , si l'on convient que  $v < w$  signifie :  $v$  se trouve à gauche de  $w$ ).

Pour ordonner ces deux points sur la branche  $x$ , on note que les deux séquences divergent à la troisième lettre, après être passé une fois par la branche  $y$  et que  $xyyxy = \sigma^2(xyxy) < yxyxy = \sigma^2(xyyxy)$ . Comme on a renversé l'orientation une fois (sur  $y$ ), on en déduit que  $xyyxy < xyxyy$ . Les points de la branche "y" peuvent être classés de manière similaire.

Ce raisonnement est formalisé dans la technique de "pétrissage" ("kneading theory") de Milnor et Thurston [1988]. Étant donné un point  $z$  sur la ligne de branchement, on définit comme plus haut la séquence semi-infinie  $\Psi(z) = \{\Psi_i(z)\}_{i=0}^{\infty}$  par la règle :

$$\Psi_i(z) = \begin{cases} x & \text{si } f^i(z) \in I_x \\ y & \text{si } f^i(z) \in I_y \end{cases} \quad (4.22)$$

$\Psi(z)$  est l'itinéraire symbolique de  $z$ . Posons  $\varepsilon(x)=0$ ,  $\varepsilon(y)=1$ . On définit la coordonnée invariante de  $z$  par  $\theta(z) = \{\theta_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$  avec

$$\theta_k(z) = \left( \sum_{j=0}^k \varepsilon(\Psi_j(z)) \right) \bmod 2 = (\theta_{k-1}(z) + \varepsilon(\Psi_k(z))) \bmod 2 \quad (4.23)$$

$\theta_k(z)=0$  (resp. 1) si  $f^{k+1}$  préserve (resp. renverse) l'orientation dans un voisinage de  $z$ . Si on définit un ordre lexicographique sur les séquences  $\theta(z)$  avec  $0 < 1$ , on a le résultat suivant :

$$z_1 < z_2 \Leftrightarrow \theta(z_1) < \theta(z_2) \quad (4.24)$$

qu'on peut expliquer simplement : on calcule les images des deux points jusqu'à ce que  $f^k(z_1)$  et  $f^k(z_2)$  se trouvent sur des branches différentes. Les deux points sont alors classés grâce à  $\theta_k(z)$  dans le même ordre que  $f^k(z_1)$  et  $f^k(z_2)$ , ou dans l'ordre inverse, selon que  $f^k$  est croissante ou décroissante sur un intervalle contenant  $z_1$  et  $z_2$ , ce qui est indiqué par la valeur de  $\theta_{k-1}(z_1) = \theta_{k-1}(z_2)$  (voir la relation (4.23)).

Dans le cas de l'orbite  $xyxy^2$ , les points sont rangés dans l'ordre suivant sur la ligne de branchement (les premiers symboles de la coordonnée invariante sont indiqués en dessous de chaque point)

$$\begin{array}{ccccccccc} xyxy & < & xyxy & < & yyxyx & < & yxyxy & < & yxyyx \\ 010011.. & < & 011011.. & < & 100110... & < & 110010... & < & 110110... \end{array}$$

La tresse de l'orbite (fig. 4.31) est obtenue en reliant par un brin chacun des points sur la ligne supérieure avec son image sur la ligne inférieure. Le mot de tresse peut être déterminé algorithmiquement de la manière suivante :

- la première partie du mot décrit la rotation d'un demi-tour des brins plaqués sur la branche  $y$ , dont le nombre est égal à la torsion  $t$  de l'orbite. Si l'orbite est de période  $n$ , cette rotation correspond à la tresse suivante :

$$[(n-1)(n-2)\dots(n-t+1)(n-1)(n-2)(n-t+2)\dots(n-1)(n-2)(n-1)]_n$$

soit  $[434]_5$  pour la tresse de notre exemple.

- la deuxième partie du mot peut être obtenue en :

(i) créant une liste triée des coordonnées invariantes des points périodiques, soit en numérotant ceux-ci de gauche à droite sur la ligne de branchement :

$$\theta(z_1), \theta(z_2), \dots, \theta(z_{n-t}), \theta(z_{n-t+1}), \theta(z_{n-t+2}), \dots, \theta(z_n)$$

(ii) inversant l'ordre des coordonnées correspondant aux points sur la branche  $y$  (c'est à dire celles avec  $\theta_0(z) = 1$ ) :

$$\theta(z_1), \theta(z_2), \dots, \theta(z_{n-t}), \theta(z_n), \dots, \theta(z_{n-t+2}), \theta(z_{n-t+1})$$

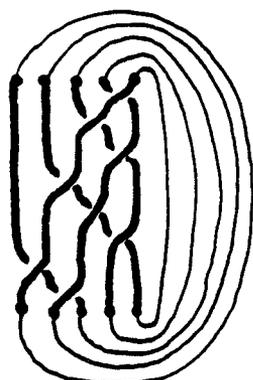
(iii) en faisant agir l'opérateur de décalage sur les valeurs de la liste ( on rappelle que  $\sigma(\{\theta_k(z)\}) = \{\theta_{k+1}(z)\}$ ) :

$$\sigma(\theta(z_1)), \sigma(\theta(z_2)), \dots, \sigma(\theta(z_{n-t})), \sigma(\theta(z_n)), \dots, \sigma(\theta(z_{n-t+2})), \sigma(\theta(z_{n-t+1}))$$

La séquence de permutations permettant de trier cette dernière liste selon l'ordre ascendant donne la fin du mot de tresse, soit ici  $[23412]_5$ .

Le mot de la tresse à cinq brins de la figure 4.31 est donc  $[43423412]_5$ , ce qui donne un nombre d'auto-enlacement égal à 8, et peut être ramené par des mouvements de Markov à  $[11111]_2$  (fig. 4.32). Ce mot de tresse représente un noeud de tore (2,5), dont le polynôme de Conway, qui peut être déterminé à l'aide de l'algorithme (4.10), est  $\nabla(z) = 1 + 3z^2 + z^4$ .

Rappelons que dans le cas des applications de l'intervalle à un maximum quadratique (fig. 4.29), par exemple la suite logistique, la coordonnée invariante permet de déterminer l'ordre des bifurcations dans lesquelles apparaissent les orbites périodiques.



$$= [43423412]_5$$

$$\begin{aligned}
 & [43423412]_5 \xrightarrow{(B1)} [34323412]_5 \xrightarrow{(B2)} [34323124]_5 \xrightarrow{(M1)} [43432312]_5 \xrightarrow{(B1)} \dots \\
 & [34332312]_5 \xrightarrow{(M1)} [33231234]_5 \xrightarrow{(M2)} [3323123]_4 \xrightarrow{(B1)} [3232123]_4 \xrightarrow{(B1)} \dots \\
 & [2322123]_4 \xrightarrow{(M1)} [3232212]_4 \xrightarrow{(B1)} [2322212]_4 \xrightarrow{(M1)} [2221223]_4 \xrightarrow{(M2)} \dots \\
 & [222122]_3 \xrightarrow{(B1)} [221212]_3 \xrightarrow{(B1)} [212112]_3 \xrightarrow{(B1)} [212111]_3 \xrightarrow{(B1)} [121112]_3 \xrightarrow{(M1)} \dots \\
 & [121111]_3 \xrightarrow{(M1)} [111112]_3 \xrightarrow{(M2)} [11111]_2
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } [43423412]_5 = [11111]_2$$



$$= [11111]_2 \text{ (noeud de tore (2,5))}$$

**Fig. 4.32** Tresse associée à l'orbite de la figure 4.31. Détermination du type de noeud par des mouvements de Markov. M1 et M2 représentent les mouvements de Markov (4.6) et (4.8). B1 et B2 représentent les relations de définition du groupe des tresses (4.5). La partie du mot de tresse impliquée dans chaque mouvement est soulignée.

Si  $f$  est à dérivée schwartzienne négative [Hao 89, Guckenheimer 83], et si  $c$  est le point critique de l'application ( $f'(c)=0, f''(c)<0$ ), alors toutes les orbites périodiques  $Z=\{z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1} = z_1\}$  telles que

$$\forall i, \theta(z_i) < \theta(f(c)), \quad (4.25)$$

existent.  $\theta(f(c))$  est appelé l'invariant de "pétrissage" ("kneading invariant").

Si on associe à chaque orbite périodique  $Z$  une coordonnée  $\Theta(Z) = \max_i \theta(z_i)$ , alors  $\Theta(Z_1) < \Theta(Z_2)$  indique que l'orbite  $Z_1$  apparaît avant l'orbite  $Z_2$ . On retrouve ainsi facilement la célèbre séquence universelle de Metropolis, Stein, et Stein [1973].

On notera toutefois que cette séquence universelle ne vaut que pour les applications de l'intervalle, ce qui correspond expérimentalement à des systèmes présentant une dissipation infinie. Pour des valeurs importantes mais finies de la dissipation, l'ordre d'apparition sera préservé pour les orbites de petite période, mais on pourra éventuellement observer des inversions de bifurcations pour les périodes plus élevées [Holmes 84].

Une autre remarque importante s'impose. Deux orbites périodiques sont confondues lorsqu'elles apparaissent ensemble dans une bifurcation tangente. Elles ne peuvent donc alors être distinguées au moyen d'une règle de codage symbolique. C'est pourquoi, dans ce qui suit, quand nous parlerons du nom (ou de l'itinéraire) symbolique d'une orbite, nous sous-entendrons celui qu'elle possède lorsqu'elle est instable, en particulier dans la limite hyperbolique où chaque orbite périodique correspond de manière unique à un itinéraire symbolique (le fer à cheval est complet).

Le nom symbolique d'une orbite apporte des informations utiles sur sa généalogie, également valables dans le cas de flots tridimensionnels. Ainsi, dans une cascade de doublements de période les noms symboliques de l'orbite  $2^n T$  et de l'orbite  $2^{n+1} T$  sont reliés de manière extrêmement simple. Il suffit de prendre le

nom symbolique du point de plus grande coordonnée invariante de l'orbite  $2^n T$ , de le doubler, et de changer la dernière lettre. On obtient de cette manière le nom symbolique du point de plus grande coordonnée invariante de l'orbite  $2^{n+1} T$ . La cascade de doublement de période de l'orbite  $y$  comprend ainsi successivement les orbites  $y$ ,  $yx$ ,  $xy^2$ ,  $xy^2(yx)^2$ ,  $xy^2(yx)^2(xy^2)^2$ . Le nom de chaque orbite est en fait le nom de sa mère suivie du nom répété deux fois de sa grand-mère! Ceci implique que l'orbite de période infinie au point d'accumulation de la cascade contient les noms de tous ses ancêtres. Cette propriété est la traduction symbolique de la structure fractale de cette orbite.

De même, les noms des points de plus grande coordonnée invariante de deux orbites créées conjointement dans une bifurcation tangente ne diffèrent que par la dernière lettre, au moins en régime fortement dissipatif (il en effet été montré que certaines orbites n'étaient pas associées au même partenaire de bifurcation tangente en régime dissipatif et en régime presque conservatif [Holmes 89]). De manière générale, le nombre de  $y$  est impair pour l'orbite initialement stable qui se déstabilise par doublements de période, pair pour l'autre.

De plus, les noms symboliques de toutes les orbites créées dans la cascade de doublements de période d'une fenêtre périodique obéissent à la même règle de construction que celles de la cascade initiale, en prenant comme motifs de base les noms des deux orbites créées à l'apparition de la fenêtre périodique.

Par exemple, l'apparition de la fenêtre  $3T$  correspond à la création de l'orbite  $xy$  et de l'orbite  $yx$  dans une bifurcation tangente. La cascade de doublement de période de la fenêtre  $3T$

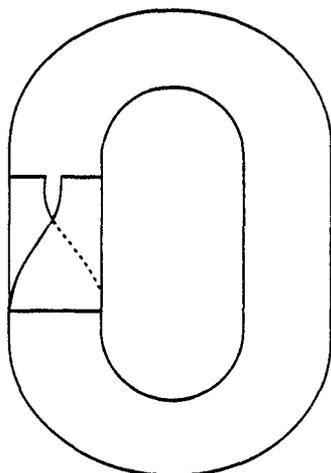
comprend les orbites  $yx^2$ ,  $yx^2yxy$ ,  $yx^2yxy(yx^2)^2$ , etc.... Si l'on pose  $X=yxy$  et  $Y=yx^2$ , on voit que ces orbites correspondent à  $Y$ ,  $YX$ ,  $YXYY$ , comme dans la cascade de l'orbite  $y$ . On retrouve là la structure fractale des diagrammes de bifurcation.

On voit donc que si les noms symboliques des différentes orbites présentes dans un flot sont connues, on peut établir si deux orbites sont apparues ensemble, ou si une orbite provient de la cascade de doublements de période d'une autre orbite.

#### 4.4.4 Autres exemples de gabarits.

Le gabarit du fer à cheval est à ce jour le seul à avoir été mis en évidence dans des attracteurs expérimentaux. Nous présentons ci-dessous deux gabarits qui devraient pouvoir être mis en évidence dans certains systèmes expérimentaux.

Le gabarit de l'attracteur de Lorenz, obtenu pour les valeurs usuelles des paramètres [Lorenz 63], est présenté sur la figure 4.33. Il possède deux branches comme le gabarit du fer à cheval, mais on peut remarquer qu'à la différence de celui-ci, aucune branche ne possède de torsion. C'est pourquoi on peut arriver à cet attracteur chaotique sans passer par une cascade de doublements de période. Le fait que le gabarit soit différent entraîne qu'on peut observer des noeuds dans l'attracteur de Lorenz qui n'ont pas d'équivalents dans le fer à cheval : la topologie des orbites périodiques est profondément modifiée.



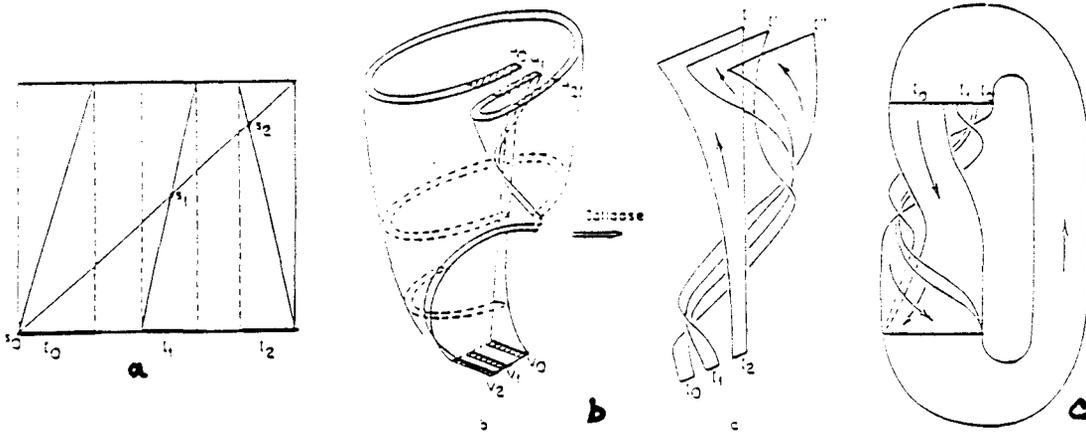
**Fig 4.33** Le gabarit de l'attracteur de Lorenz.  
(d'après [Mindlin 90]).

Par ailleurs l'équation d'un pendule forcé ,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \delta \frac{d\theta}{dt} + \sin \theta = v - \beta \cos \omega t \quad (4.26)$$

correspond, pour certains paramètres à un gabarit à trois branches [Holmes 88]. La structure de l'application de premier retour, la suspension et le gabarit qui en résulte sont indiqués en figure 4.34. Remarquons que dans ce cas la dynamique symbolique implique trois symboles.

De même que le gabarit du fer à cheval était relié aux applications à maximum quadratique de l'intervalle, ce gabarit est relié aux applications d'un cercle dans lui-même décrivant la route vers le chaos par la quasipériodicité. On peut voir que deux branches sont disposées entre elles comme dans le fer à cheval, ce qui explique les cascades de doublement de période à l'intérieur d'une langue d'Arnold.



**Fig 4.34** Topologie du pendule forcé : (a) application de premier retour, (b) suspension, (c) gabarit. (d'après [Holmes 88]).

#### 4.4.5 Description algébrique du gabarit

La mise au point d'algorithmes pour calculer les invariants des orbites périodiques d'un gabarit donné exige que l'on puisse décrire la structure géométrique de celui-ci de manière algébrique. Par ailleurs, le même gabarit peut être représenté graphiquement par des schémas très différents, dont l'équivalence topologique n'est pas toujours évidente. C'est pourquoi Mindlin et al. [1990] ont proposé d'associer à tout gabarit à  $n$  branches une matrice  $n \times n$ , la matrice de gabarit, et une matrice  $1 \times n$ , la matrice d'insertion.

La matrice de gabarit  $A$  est définie de la façon suivante : les branches étant numérotées  $1, 2, \dots, n$  de gauche à droite,  $A_{ij}$  est égal à la torsion de la branche  $i$  du gabarit, et  $A_{ij}$  au double du nombre

d'enlacement des orbites de période 1 se trouvant respectivement sur les branches  $i$  et  $j$ .

La matrice d'insertion décrit comment les différentes branches se superposent sur la ligne de branchement.  $B_1$  est égal à zéro, et un nombre entier est attribué à chaque autre branche de telle manière que si  $B_i < B_j$ , la branche  $i$  se trouve en dessous de la branche  $j$  au niveau de la ligne de branchement.

Par exemple, ces deux matrices pour le gabarit du fer à cheval sont :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

$$(0 \ 1)$$

et pour le gabarit du pendule forcé :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$(0 \ 2 \ 1)$$

Melvin et al. [1991] ont par ailleurs proposé une description équivalente et très voisine au moyen d'une unique matrice  $n \times n$ .

#### 4.4.6 Détermination expérimentale du gabarit

Nous avons vu, dans l'exemple du fer à cheval, qu'une fois le gabarit connu, on peut prédire entièrement les noeuds et les liens formés par les orbites périodiques, donc l'organisation topologique de l'attracteur. Si on veut déterminer le gabarit de l'attracteur d'un système expérimental, il faut effectuer la démarche inverse : après avoir extrait du signal chaotique un certain nombre d'orbites périodiques, on détermine leurs invariants topologiques. On construit ensuite le gabarit le plus simple dont les orbites

périodiques possèdent les mêmes invariants. Ce gabarit caractérise de manière globale l'organisation des orbites de l'attracteur.

#### 4.4.6.a Détection des orbites périodiques.

Bien que, pour déterminer les invariants des noeuds et liens formés par les orbites périodiques, il soit nécessaire de plonger l'attracteur dans un espace à trois dimensions, la détection de ces orbites peut se faire très simplement à partir d'une série temporelle [Tufillaro 90, Mindlin 91]. En effet, le mouvement sur l'attracteur étant ergodique, le système repasse régulièrement dans un voisinage proche d'une orbite périodique donnée, s'approchant initialement le long de sa variété stable pour diverger finalement le long de sa variété instable. Si cette orbite est modérément instable et si l'on s'en est approché assez près, le système va rester un certain temps dans son voisinage, et l'on observera une séquence quasiment périodique dans le signal temporel. Des exemples de telles séquences seront présentés dans la discussion des résultats expérimentaux.

Dans le cas où on ne détecte pas de récurrences de ce type, il faut conclure que le système n'évolue vraisemblablement pas sur un attracteur étrange de faible dimension.

#### 4.4.6.b Construction du gabarit.

Nous avons vu plus haut que les méthodes de la dynamique symbolique jouaient un rôle essentiel dans l'analyse topologique d'un attracteur. C'est pourquoi la détermination d'un gabarit à partir des orbites périodiques extraites de signaux expérimentaux est grandement simplifiée si on est en mesure d'attribuer à chacune de ces orbites un itinéraire symbolique. Cela est le cas si par exemple on a pu construire une application de premier retour

quasiment unidimensionnelle. Un symbole différent est alors affecté à chaque branche monotone de l'application de premier retour (voir par exemple [Hao 89]).

La connaissance préalable de l'itinéraire symbolique d'une orbite expérimentale permet de savoir à quelles branches du gabarit s'applique l'information que la structure de cette orbite apporte. Par ailleurs, le nombre de symboles utilisés donne une première indication du nombre de branches que doit posséder le gabarit.

Nous supposons donc dans un premier temps que nous savons coder symboliquement les trajectoires. Nous envisagerons ensuite le cas où la dynamique symbolique du système n'est pas connue.

C'est dans le cas idéal, très peu fréquent en pratique, où l'attracteur est hyperbolique que la construction du gabarit est la plus aisée.

Quand l'attracteur est hyperbolique, toutes les orbites périodiques du gabarit sont effectivement présentes dans le flot et à tout mot non périodique de longueur finie, aux permutations circulaires près, correspond une orbite périodique. Il s'ensuit que, pour un gabarit à  $n$  branches, on doit trouver exactement  $n$  orbites périodiques de période 1 (orbites  $T$ ) dans le flot, chacune correspondant à une branche du gabarit. Il existe de même  $n(n-1)/2$  orbites de période 2 (orbites  $2T$ ). Pour déterminer de façon exacte la disposition des différentes branches du gabarit et donc caractériser celui-ci, on déterminera :

- la torsion de chaque orbite  $T$ ,
- le nombre d'enlacement de chaque couple d'orbites  $T$ ,

- les nombres d'enlacement des orbites  $T$  avec les orbites  $2T$  (qui visitent successivement deux branches différentes du gabarit).

Prenons pour fixer les idées l'exemple du fer à cheval avec une suspension de torsion globale égale à  $+2$ . Ayant détecté dans le flot deux orbites de période 1,  $x$  et  $y$ , nous savons que le gabarit possède deux branches. Nous n'avons donc besoin que de trois orbites ( $x$ ,  $y$ , et  $xy$ ) pour le déterminer. Supposons que la mesure des torsions  $t$  et des nombres d'enlacement  $lk$  donne les résultats suivants :

$$\begin{cases} t(x)=2, t(y)=3, t(xy)=5 \\ lk(x,y)=1, lk(x,xy)=2, lk(y,xy)=3 \end{cases}$$

On peut vérifier que  $xy$  passe bien par les deux branches :  $t(xy)=t(x)+t(y)$ . De manière générale, la torsion d'une orbite dont l'itinéraire symbolique contient  $n$  fois  $x$  et  $m$  fois  $y$  sera égale à  $n t(x) + m t(y)$ .

La construction du gabarit se fait alors en trois étapes.

- $t(x)$  et  $t(y)$  donnent les torsions des deux branches du gabarit (fig. 4.35a)
- $lk(x,y)$  indique combien de fois une des branches tourne autour de l'autre (fig. 4.35b)
- $lk(y,xy)$  (ou  $lk(x,xy)$ ) nous permet de déterminer si la branche  $y$  se trouve au-dessus ou en-dessous de la branche  $x$  sur la ligne de branchement du gabarit. Dans le premier (resp. deuxième) cas, les croisements dans cette région entre deux brins situés sur les branches  $x$  et  $y$  seront positifs (resp. négatifs) (voir fig. 4.10) En posant

respectivement  $m=1$  et  $m=-1$ , on détermine facilement, à l'aide de la relation (4.2), et en ordonnant les intersections des orbites sur la ligne de branchement comme au 4.4.4.3c que :

$$\begin{cases} lk(x,xy) = lk(x,y) + t(x)/2 \\ lk(y,xy) = lk(x,y) + (t(y)+m)/2 \end{cases} \quad (4.29)$$

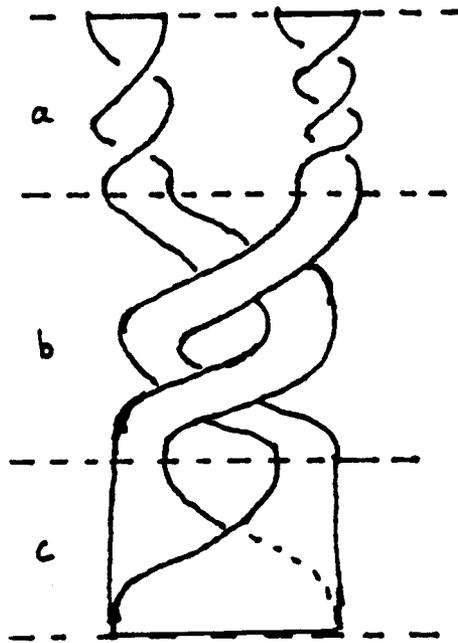
La deuxième relation nous indique que  $m=1$  et donc que le gabarit a la géométrie indiquée sur la figure 4.35.

On remarquera que  $lk(x,xy)=2$  ne dépend pas de la disposition des branches sur la ligne de branchement. Cela indique que le flot possède une torsion globale de  $+2$  et permet de représenter le gabarit de manière plus simple (fig. 4.36). Les deux représentations sont décrites par les matrices de gabarit et de d'insertion suivantes :

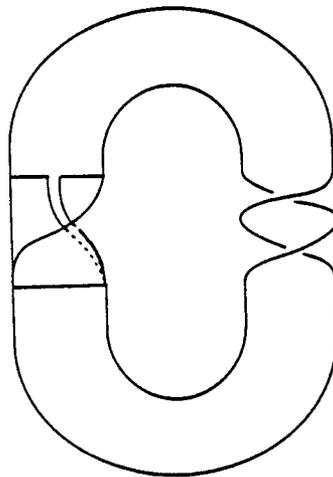
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

$$(0 \ 1)$$

On notera qu'en retirant 2 (c'est-à-dire la torsion globale) à chaque élément de la matrice de gabarit, on obtient celle du fer à cheval de torsion globale nulle.



**Fig 4.35** Construction du gabarit à partir de : (a)  $t(x)$  et  $t(y)$ , (b)  $lk(x,y)$ , (c)  $lk(y,xy)$ .



**Fig. 4.36** Une représentation plus simple du gabarit de la figure 4.35 (d'après [Mindlin 90]).

Quand on analyse des fichiers expérimentaux, on ne détecte pas en général toutes les orbites périodiques autorisées par la topologie de l'attracteur dans lequel elles sont plongées. Si nous

prenons comme exemple la tangence homocline que nous avons étudiée dans le LSA, l'orbite  $x$  correspond au cycle instable autour duquel le flot spirale et l'attracteur ne l'englobe qu'au moment de la tangence homocline, c'est à dire au moment où le fer à cheval devient complet. Les attracteurs expérimentaux ne sont le plus souvent pas hyperboliques et un certain nombre d'orbites présentes dans la limite hyperbolique n'existent pas encore ou ne sont pas plongées dans l'attracteur.

Il faut alors utiliser des orbites de période plus élevées, par exemple 3 ou 4. Supposons que l'on ait extrait des signaux expérimentaux les orbites  $y$ ,  $xy$ , et  $xyy$ , et que l'on ait mesuré leurs torsions et leurs nombres d'enlacement.

- La torsion de la branche  $x$  est obtenue au moyen de :

$$t(x) = t(xy) - t(y) \quad (4.31)$$

- $lk(x,y)$  est obtenue par la relation

$$lk(y,xyy) = t(y) + lk(x,y) \quad (4.32)$$

- la disposition des branches sur la ligne de branchement est obtenue grâce à  $lk(y,xy)$  comme dans l'exemple précédent.

Une fois le gabarit déterminé de manière unique à partir des orbites de plus basse période, il peut être utilisé pour prédire l'organisation et les invariants des autres orbites périodiques détectées. L'accord entre les valeurs prédites et celles mesurées effectivement permet de confirmer ou non la validité du gabarit que l'on a construit. En effet, quand les invariants de vingt orbites périodiques sont identiques à ceux prédits par le gabarit construit à

partir de trois d'entre elles, on peut raisonnablement estimer que ce gabarit décrit correctement la structure topologique de l'attracteur étudié.

La tâche est singulièrement plus compliquée quand on ne peut pas attribuer à priori un itinéraire symbolique aux orbites que l'on a extraites, et il n'existe pas alors à notre connaissance de procédure systématique. Il est cependant possible de procéder par recoupements successifs.

Le nombre d'orbites périodiques de période donnée donne déjà une indication du nombre de branches que doit nécessairement comporter le gabarit. Par exemple, trouver plus d'une orbite périodique de période 2, ou plus de deux orbites de période 3, implique que le gabarit cherché possède au moins trois branches.

Une autre information utile peut être apportée par la mesure du plus grand exposant de Lyapunov  $\lambda$ . Si le gabarit du système comporte  $n$  branches, on a en effet l'inégalité  $\lambda T < \log n$  (l'entropie topologique de l'application de premier retour est en effet bornée par  $\log n$ ).

Les orbites de période 1 sont précieuses car les orbites correspondantes sur le gabarit ne visitent qu'une seule branche, ce qui signifie qu'un symbole différent doit être attribué à chacune. Les torsions de ces orbites et leurs nombres d'enlacement fournissent directement certains éléments de la matrice de gabarit.

L'étude des orbites de période 2 donne également des renseignements intéressants. Par exemple, si une orbite  $2T$  a un nombre d'auto-enlacement égal à  $2n+1$ , alors le nombre d'enlacement des deux orbites  $T$  situées sur les branches par

lesquelles cette orbite passe ne peut être égal qu'à  $n$  ou  $n+1$ , selon la disposition des branches sur la ligne de branchement.

Par ailleurs, la torsion d'une orbite  $2T$  est la somme des torsions de deux branches différentes, ce qui permet éventuellement de déduire celle d'une branche dont l'orbite  $T$  n'a pas été détectée.

Toutes ces informations peuvent limiter grandement le nombre de gabarits compatibles avec les observations expérimentales. Il est alors envisageable de calculer pour chacun les nombres d'enlacement entre orbites de faible période et de voir quels sont ceux qui possèdent un groupe d'orbites pouvant être celles extraites des signaux expérimentaux. Cela peut être réalisé aisément à l'aide d'un ordinateur. On remarquera que dès qu'on a établi qu'un gabarit donné est la seule solution possible, on peut attribuer à chaque orbite périodique expérimentale l'itinéraire symbolique de l'orbite du gabarit possédant les mêmes invariants (s'il n'y a pas d'ambiguïté).

Ayant passé en revue les concepts permettant de caractériser la structure topologique des orbites périodiques (section 4.3) et de décrire leur organisation globale (section 4.4), nous présentons dans ce qui suit les résultats obtenus en appliquant ces méthodes aux signaux chaotiques provenant du laser  $\text{CO}_2$  à pertes modulées.

## 4.5 UN FER A CHEVAL DANS LE LASER A MODULATION DE PERTES.

### 4.5.1 Introduction.

Dans cette section et la suivante, nous décrivons les résultats que nous avons obtenus en appliquant les concepts et les outils que nous venons de présenter à des signaux expérimentaux provenant du laser CO<sub>2</sub> à pertes modulées. A notre connaissance, cette méthode d'analyse a pour l'instant été utilisée pour caractériser trois autres systèmes expérimentaux : la réaction de Belousov-Zhabotinski [Mindlin 91], l'oscillateur à résonance magnétique nucléaire [Tufillaro 91] et le laser CO<sub>2</sub> à absorbant saturable [Papoff 92]. Dans ces trois cas, l'organisation topologique des orbites périodiques s'est révélée être celle prédite par le gabarit du fer à cheval avec torsion globale nulle. Nous verrons dans ce qui suit que ce gabarit décrit également la structure topologique des attracteurs observés dans le laser CO<sub>2</sub> à pertes modulées [Lefranc 93].

Nous avons décomposé notre exposé en deux parties. Dans cette section, nous nous intéressons aux régimes chaotiques compris entre la cascade inverse et la crise où l'attracteur chaotique rentre en collision avec une orbite périodique instable 3T. Dans cette région de paramètres, il nous a toujours été possible de construire une application de premier retour à une dimension. Ceci nous a permis de d'établir l'itinéraire symbolique de chaque orbite détectée, indépendamment de l'analyse topologique, et a simplifié considérablement la détermination du gabarit.

La section suivante présente les observations faites au-delà de cette crise. Dans cette région, nous avons du déterminer l'itinéraire

symbolique des orbites extraites à partir de leurs invariants topologiques, ce qui a rendu l'analyse plus compliquée, mais a mené à la construction d'un codage symbolique de l'attracteur. Ce codage a révélé que les crises observées pouvaient être caractérisées de manière très simple en termes de dynamique symbolique.

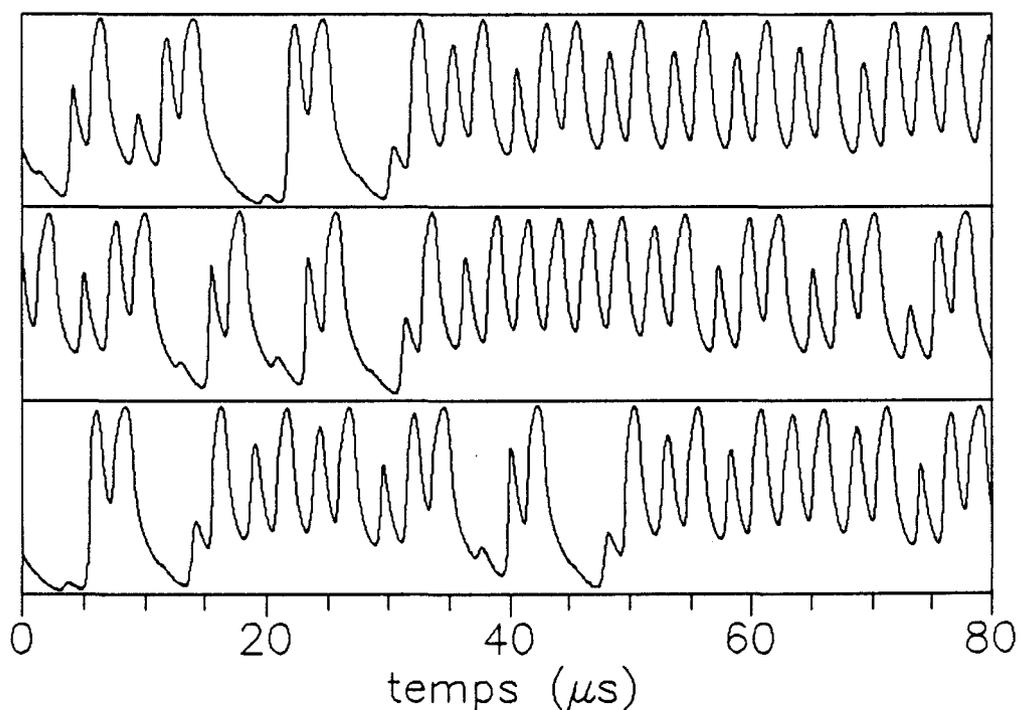
Les signaux temporels que nous avons analysés ont été obtenus au moyen de l'amplificateur logarithmique que nous avons déjà utilisé pour déterminer les dimensions de corrélation d'attracteurs observés dans ce laser. En effet, la grande inhomogénéité des attracteurs reconstruits à partir de l'intensité de sortie du laser rend la plupart des trajectoires indiscernables dans la région d'intensité presque nulle, où toute la dynamique s'effectue sur des variables orthogonales à celle que l'on mesure. On ne peut alors absolument pas déterminer les positions relatives des différentes orbites périodiques instables, dont l'extraction même est de plus rendue beaucoup plus difficile. Le logarithme de l'intensité s'est donc également révélé être une variable de choix pour l'analyse topologique des attracteurs observés.

#### **4.5.2 Détection des orbites périodiques**

Un simple examen des signaux délivrés par le laser laisse déjà pressentir que les comportements erratiques rencontrés sont engendrés par des processus déterministes. En effet, lorsqu'on parcourt une série temporelle, le laser donne fréquemment l'impression de "bégayer", dans le sens où de nombreuses séquences présentent un comportement quasiment périodique durant plusieurs périodes de modulation. Cela indique que le point représentatif du système dans l'espace des phases revient en un temps très court très près d'une position occupée antérieurement.

De telles récurrences sont hautement improbables dans des systèmes stochastiques, ou même dans des systèmes déterministes de dimension élevée.

On trouvera ainsi sur la figure 4.37 trois séquences extraites de manière totalement aléatoire d'un signal chaotique. Un coup d'oeil rapide permet d'y identifier plusieurs segments où le signal pourrait correspondre à celui d'une orbite périodique de faible période.



**Fig. 4.37** Séquences extraites aléatoirement d'un signal chaotique.

Ces séquences indiquent que le système passe régulièrement au voisinage d'orbites périodiques instables de faible période. Dans ces situations, la trajectoire chaotique approche d'abord l'orbite selon la variété stable de celle-ci, puis commence à s'en éloigner le long de la variété instable (fig. 4.38). Si l'on s'est suffisamment

approché de l'orbite, la trajectoire restera dans "l'ombre" de l'orbite périodique sur un intervalle de temps non négligeable. Cet intervalle de temps dépend évidemment du degré d'instabilité de l'orbite, qui est mesuré par son plus grand multiplicateur de Floquet.

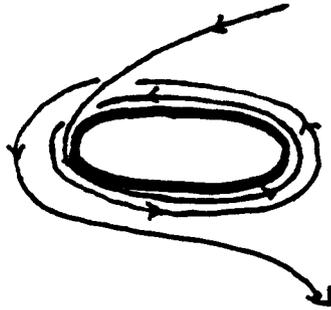


Fig. 4.38 Passage d'une trajectoire chaotique au voisinage d'une orbite périodique instable.

C'est pourquoi les orbites les plus faciles à détecter dans un flot sont les orbites de faible période ainsi que les orbites dont la plage de stabilité vient juste d'être traversée, et dont le voisinage est plus visité que les autres régions de l'attracteur

Le fait que notre système soit modulé extérieurement simplifie relativement la détection des orbites périodiques instables dans les séries temporelles. En effet, les orbites périodiques du flot ont alors des périodes qui sont des multiples de la période de modulation  $T=2\pi/\omega$ . On procède en pratique de la façon suivante.

A partir d'une séquence temporelle  $X(t)$ , on crée pour chaque entier  $p$  compris entre 1 et  $p_{\max}$  la série temporelle :

$$D^p(t) = |X(t) - X(t+pT)|,$$

puis la série :

$$D_{\max}^p(t) = \max\{D^p(t'); t < t' < t + pT\}.$$

On extrait ensuite des signaux les segments  $\{X(t'); t < t' < t + (p + \eta)T\}$  pour lesquels on a :

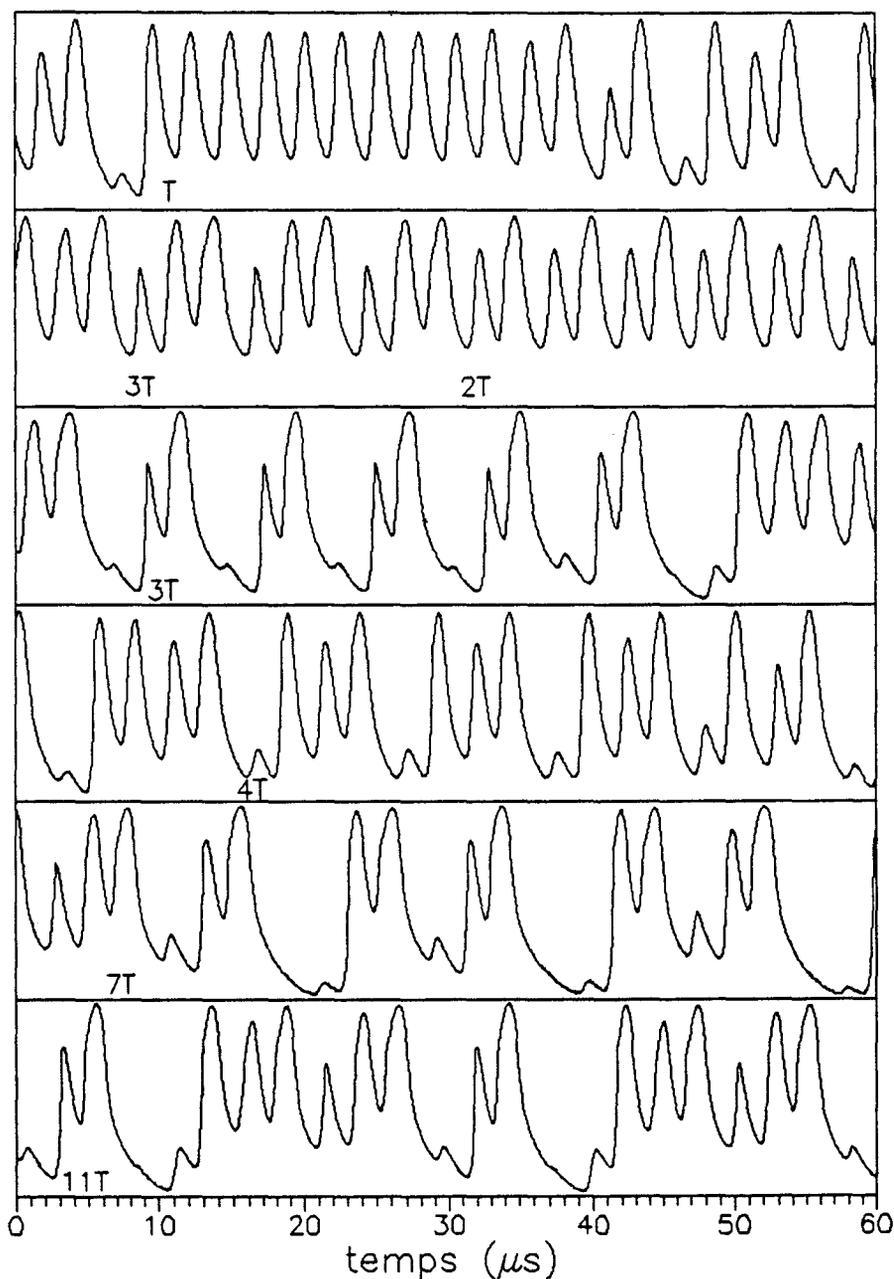
$$D_{\max}^p(t') < \varepsilon (X_{\max} - X_{\min}) \text{ pour } t < t' < t + \eta T,$$

avec un  $\varepsilon$  que nous avons choisi égal à 4-5% ( $(X_{\max} - X_{\min})$  est l'amplitude maximale du signal). De tels segments présentent une séquence de longueur  $pT$ , suivie d'une autre séquence de longueur supérieure à  $pT$  qui la reproduit à 5% près, et constituent donc une bonne approximation du signal temporel d'une orbite périodique de période  $pT$ .

En pratique, en ne retenant du segment que l'intervalle de temps  $[t_0, t_0 + pT]$  tel que  $D_{\max}^p(t_0) = \min D_{\max}^p(t')$ , la majorité des séquences sont reproduites avec une précision bien meilleure que 5%. Nous en avons détecté un certain nombre où le signal était reproduit à environ 0,5%, ce qui correspond à une amplitude de bruit légèrement inférieure à celle du bruit de digitalisation. Nous pouvons donc en déduire que l'amplitude du bruit dans notre système est inférieure à la résolution de l'oscilloscope numérique.

Il faut signaler qu'il n'est pas possible de caler sur une horloge extérieure la fréquence d'échantillonnage de l'oscilloscope numérique que nous avons utilisé, pour le synchroniser par exemple sur le signal de modulation. Or, pour obtenir la série  $D^p(t)$ , nous avons besoin de comparer des échantillons qui correspondent rigoureusement à la même phase de la modulation. Nous avons donc vérifié que les horloges de référence du synthétiseur

fournissant la modulation et de l'oscilloscope étaient suffisamment stables et précises pour que l'on puisse interpoler entre deux échantillons successifs de la série temporelle, et obtenir ainsi la valeur du signal correspondant à une phase donnée.



**Fig. 4.39** Séquences temporelles constituant de bonnes approximations d'orbites périodiques instables. La période de ces orbites est indiquée au début de chaque séquence.

Pour réduire au maximum l'erreur due à l'interpolation, nous avons utilisé un taux d'échantillonnage de 25 MHz pour des fréquences de modulation comprises entre 382,36 et 382,55 kHz. L'intervalle entre deux points successifs de la série temporelle est donc de l'ordre de  $T/65$ . Par ailleurs, nous avons utilisé une interpolation quadratique.

On trouvera dans la figure 4.39 quelques exemples d'orbites périodiques extraites des signaux temporels. On remarquera sur la première ligne de cette figure un segment où l'orbite de période  $T$  est reproduite pendant au moins huit périodes de modulation. Nous avons observé des séquences similaires allant jusqu'à quatorze périodes de modulation. Cela indique que la dynamique interne du système est pratiquement exempte de bruit, et que ce laser possède un rapport signal sur bruit intrinsèque très largement supérieur aux 48 dB de l'échantillonneur. Remarquons qu'il devrait être possible de donner un ordre de grandeur de ce rapport en estimant le plus grand multiplicateur de Floquet de l'orbite.

On remarquera également le cas particulier de la seconde ligne de la figure 4.39, où le système passe directement du voisinage d'une orbite  $3T$  à celui d'une orbite  $2T$ .

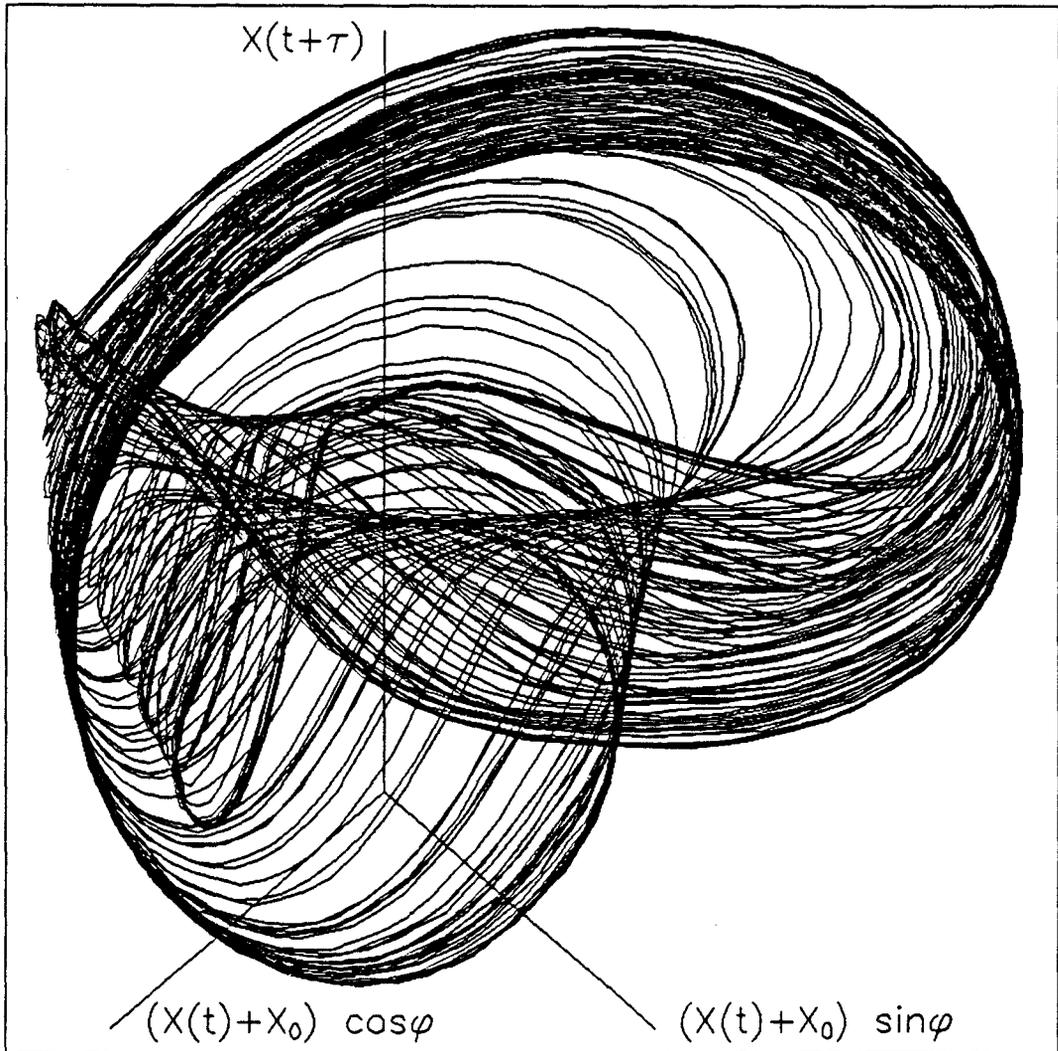
### **4.5.3 Espace des phases. Sections de Poincaré. Applications de premier retour.**

Le fait que notre système soit forcé périodiquement ne simplifie pas seulement la détection des orbites périodiques mais également la reconstruction des attracteurs et des orbites périodiques dans un espace des phases à trois dimensions. En effet, outre le signal émis par le laser, nous disposons de la phase  $\phi$  de la modulation comme variable naturelle du système ( $\phi = \omega t \bmod 2\pi$ ).

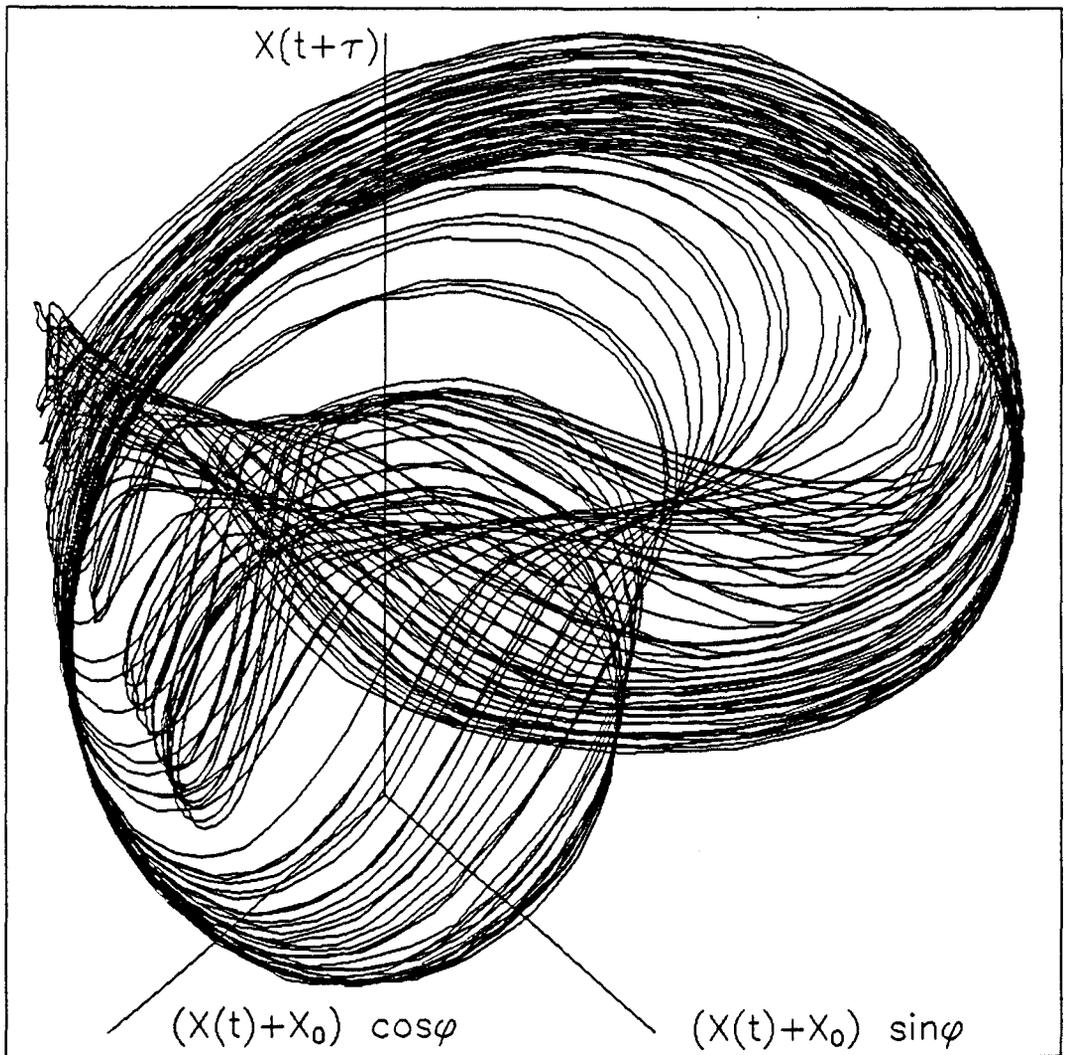
Les trajectoires peuvent donc être plongées dans des espaces des phases du type  $(X(t), X(t+\tau), \phi)$ , ou bien  $(X(t), dX(t)/dt, \phi)$ . Remarquons que la topologie de ces deux espaces des phases est  $D^2 \times S^1$ , ce qui autorise l'emploi des invariants d'isotopie régulière que nous avons présentés dans les sections précédentes. Dans le cas de signaux expérimentaux, le premier type d'espace est à priori plus commode car on sait que l'opération de dérivation s'accompagne d'une réduction importante du rapport signal sur bruit. Il faut cependant remarquer que si le système libre est assimilable à un oscillateur non linéaire bidimensionnel (descriptible par une équation différentielle du second ordre), le deuxième type d'espace est l'espace des phases naturel du système. Nous verrons plus bas qu'il est en fait possible d'utiliser l'espace des phases  $(X(t), dX(t)/dt, \phi)$  de manière implicite pour calculer les invariants topologiques, et ce directement à partir de la série temporelle.

Notons également qu'un plongement ne préserve pas nécessairement les relations d'isotopie. La façon la plus simple de s'en convaincre est de remarquer que les différents types de noeuds sont tous des plongements de la même variété  $S^1$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Il peut par conséquent être intéressant de comparer les résultats obtenus avec les deux espaces des phases.

La figure 4.40 donne un exemple d'attracteur expérimental reconstruit dans un espace des phases  $(X(t), X(t+\tau), \phi)$ . La figure 4.41 représente les trajectoires d'orbites périodiques plongées dans cet attracteur et détectées au moyen de la méthode présentée plus haut. La ressemblance nette entre ces deux figures illustre clairement le fait que l'étude des orbites périodiques et de leur



**Fig. 4.40** Attracteur chaotique reconstruit dans un espace des phases  $(X(t), X(t+\tau), \phi)$ . ( $\tau = T/4$ )

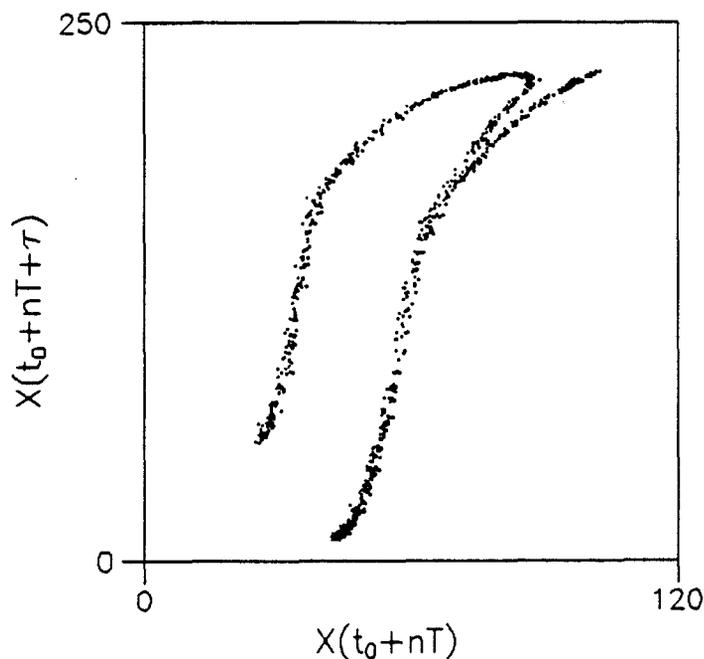


**Fig. 4.41** Orbites périodiques extraites des signaux correspondant à l'attracteur de la fig. 4.40 et reconstruites dans le même espace. ( $\tau = T/4$ )

organisation permet de dégager les caractéristiques essentielles de la dynamique sur l'attracteur.

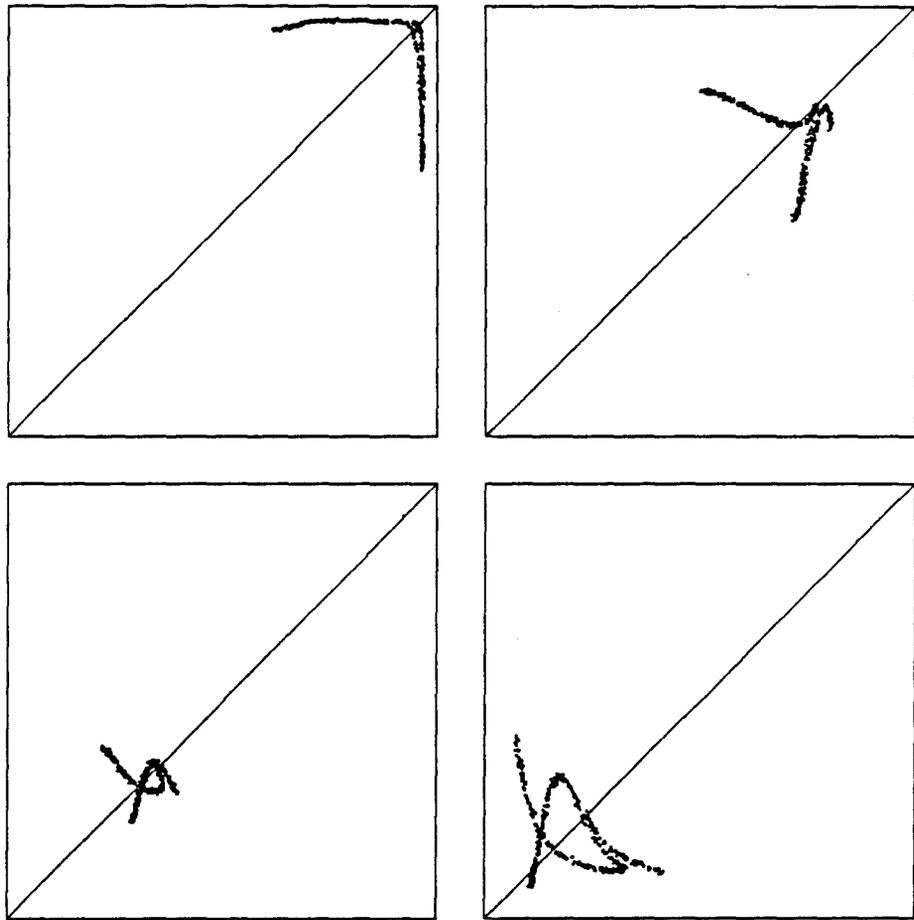
Une section de Poincaré dans un espace des phases de type  $D^2 \times S^1$  est obtenue de manière naturelle en utilisant un plan de section de phase constante. Cela revient à effectuer un échantillonnage stroboscopique des trajectoires et assure que les orbites de période  $nT$  possèdent  $n$  intersections avec le plan de section.

La figure 4.42 montre ainsi un exemple de section de Poincaré du type  $\{X(t_0+nT), X(t_0+nT+\tau)\}$ . On voit que cette section est très proche d'une courbe à une dimension, ce qui indique une dimension fractale proche de 2. On peut dans ce cas espérer modéliser l'application de premier retour dans le plan de section par une application de l'intervalle dans lui-même, en traçant  $X(t_0+(n+1)T)$  en fonction de  $X(t_0+nT)$ .

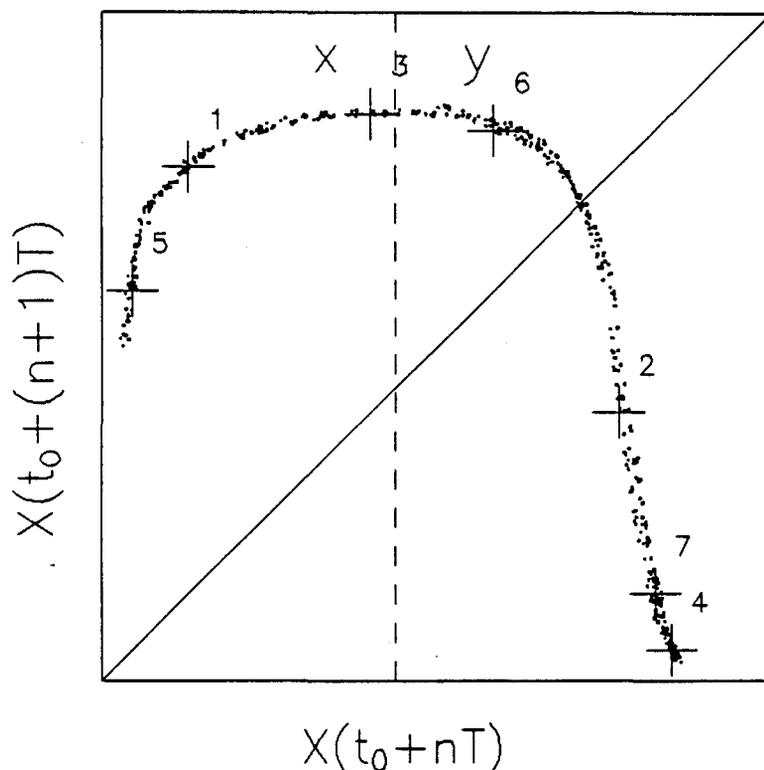


**Fig. 4.42** Section de Poincaré à phase constante d'un attracteur chaotique.

En pratique, on n'obtient une application bien définie que pour une certaine valeur de la phase de modulation, comme le montrent les figures 4.43 et 4.44. Le fait que, dans cette région de paramètres, nous trouvons une application à un seul maximum semblable à la suite logistique est déjà une forte indication que nous avons affaire à un fer à cheval. Nous devons néanmoins le confirmer en étudiant l'organisation des orbites périodiques.



**Fig. 4.43** Diagrammes de premier retour dans une section de Poincaré obtenus pour des valeurs quelconques de la phase



**Fig 4.44** Diagramme de premier retour proche d'une application de l'intervalle dans lui-même. Les points indiqués correspondent à une orbite  $7T$ .

En appelant la branche de pente positive (resp. négative) "x" (resp. "y"), cette application de premier retour nous permet d'assigner un itinéraire symbolique à chaque orbite périodique détectée dans la série temporelle. Cet itinéraire est obtenu en notant sur quelle branche se placent les intersections successives de l'orbite avec la section de Poincaré. L'itinéraire symbolique de l'orbite représentée sur la figure 4.44 est ainsi égal à  $xyxyxy^2$ .

On voit sur cette figure que l'application présente un maximum très étalé, ce qui ne permet pas a priori de déterminer avec précision la position du point critique. Ce problème peut être contourné en considérant les itérées successives de l'application (applications de deuxième, troisième, ... retour). Le point critique de

l'application de premier retour  $f$  est en effet également un point critique des applications  $f^n$ , mais possède une courbure d'autant plus élevée que  $n$  est élevé. On peut s'en convaincre en examinant la figure 4.45, où des applications de premier et de cinquième retour sont présentées. On peut également repérer le point de pente nulle sur les diagrammes de la figure 4.43, et localiser le point correspondant sur l'application de la figure 4.44.

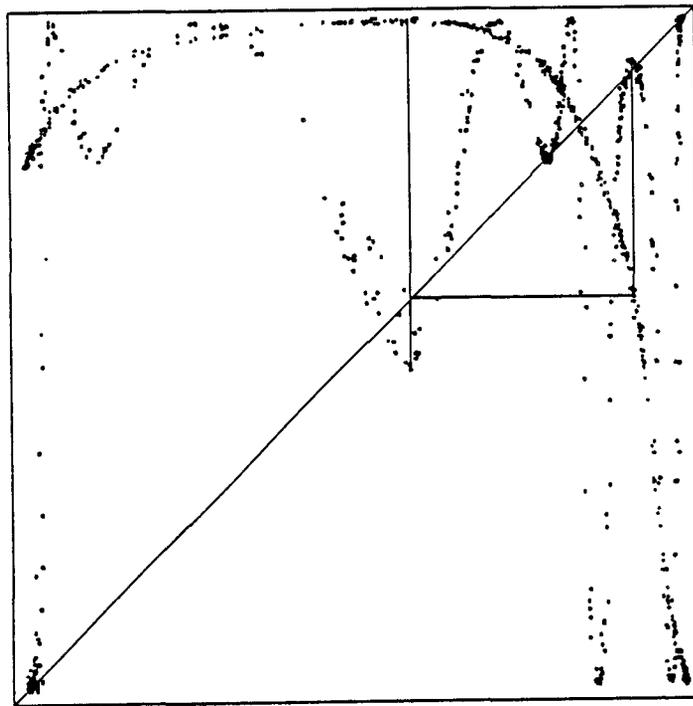


Fig. 4.45 Applications de premier et de cinquième retour. La deuxième permet de déterminer le point critique de la première.

On remarquera enfin qu'on aurait pu songer à détecter les orbites périodiques directement à partir des récurrences dans la section de Poincaré, en sélectionnant les points  $P$  tels que leur  $n$ ième itéré  $F^n(P)$  sous l'action de l'application de premier retour vérifie  $\|F^n(P) - P\| < \varepsilon$  (voir par exemple [Tuffillaro 91]). Cette méthode,

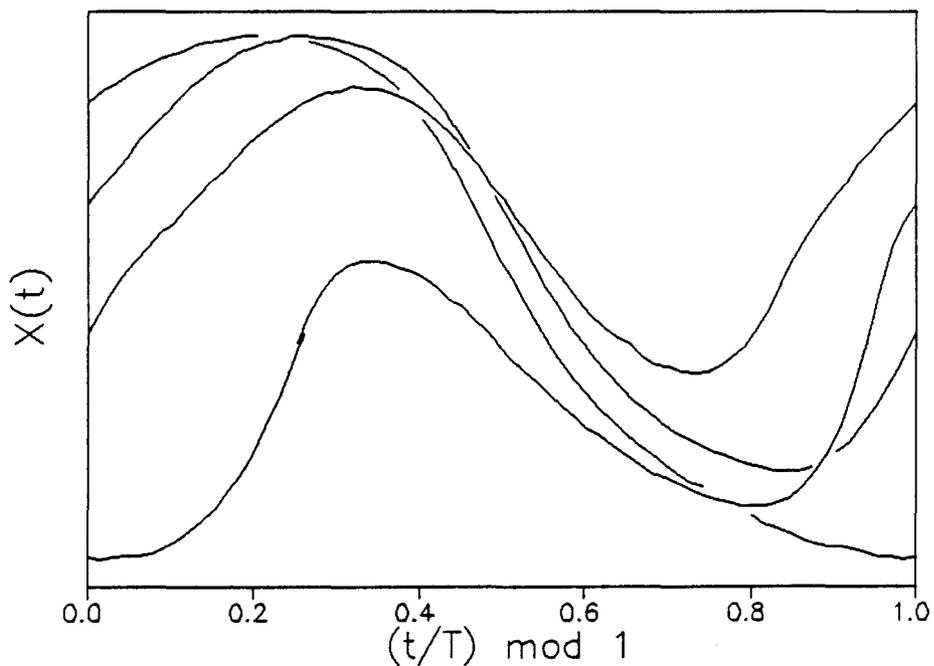
plus rapide, est cependant moins robuste que celle que nous avons utilisée. Celle-ci revient en effet à chercher les récurrences dans un espace des phases de dimension extrêmement élevé, de dimension approximativement égale au nombre de points échantillonnés sur l'orbite. Cela rend les récurrences accidentelles, dues par exemple au bruit, hautement improbables.

#### 4.5.4 Tresses associées aux orbites périodiques

Nous avons vu plus haut que la tresse associée à une orbite périodique pouvait être obtenue en projetant selon une direction donnée la trajectoire de l'orbite entre deux sections de Poincaré. Or, l'utilisation de sections de Poincaré à phase de modulation constante nous permet d'obtenir de manière très simple la tresse d'une orbite périodique : il suffit de tracer le segment temporel correspondant en fonction du temps modulo la période de modulation (fig. 4.46). Notons que cela revient à projeter dans l'espace des phases selon la direction  $X(t+\tau)$  ou  $dX(t)/dt$ , et à dérouler le cylindre de base  $S^1$  ainsi obtenu.

Pour déterminer de manière unique la tresse, il nous faut déterminer à chaque croisement de deux brins quel est celui qui passe au dessus de l'autre. Pour cela, il faut comparer les valeurs de la coordonnée perpendiculaire au plan de projection, c'est-à-dire  $X(t+\tau)$  ou  $dX(t)/dt$ , selon le cas. La réponse est immédiate si on a implicitement utilisé un plongement du type  $(X(t), dX(t)/dt, \phi)$ . En effet, au point de croisement, le brin pour lequel  $X(t)$  est plus petit avant le croisement, et plus grand après, correspond nécessairement à la dérivée la plus grande. Selon l'orientation choisie pour l'axe  $dX(t)/dt$ , ce brin passera donc au dessus ou au dessous de l'autre. On n'obtient donc que des croisements d'un seul

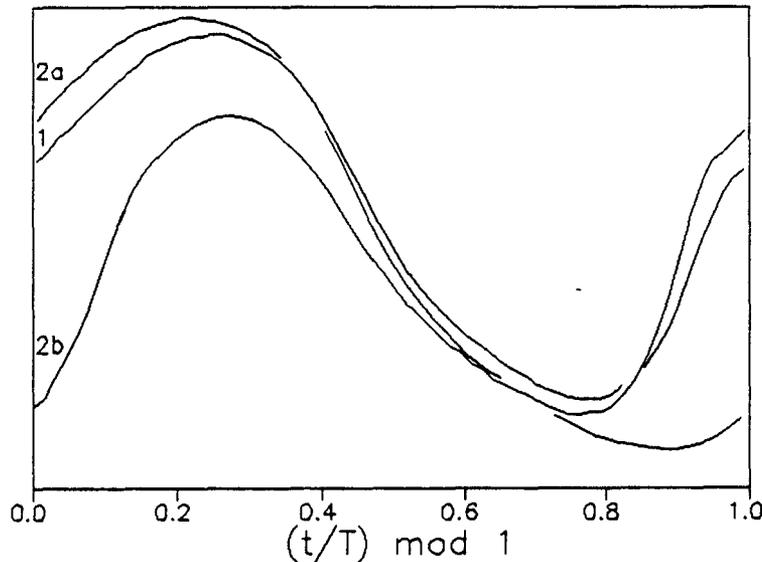
type (de telles tresses sont dites positives), le type particulier du croisement choisi pour la représentation étant une question de convention. Si la tresse de la figure 4.46 ne contient qu'une seule orbite et représente donc un noeud, celle de la figure 4.47 comporte à la fois l'orbite  $T$  et l'orbite  $2T$  et permet de caractériser leur enlacement.



**Fig. 4.46** Tracé de la séquence temporelle correspondant à une orbite  $4T$  en fonction du temps modulo la période de modulation. La tresse associée à l'orbite est ainsi obtenue. A chaque croisement, la trajectoire avec la plus grande dérivée passe au-dessus de l'autre

On voit donc que tracer le segment temporel correspondant à une ou deux orbites périodiques en fonction de  $(t/T) \bmod 1$  détermine sans ambiguïté la tresse associée. Les invariants topologiques sont ensuite calculés à partir de la tresse, au moyen des procédures présentées dans les sections précédentes. Il est

remarquable que l'organisation topologique des orbites périodiques dans l'espace à trois dimensions puissent être déterminée de manière à partir d'une simple série temporelle, sans reconstruire explicitement l'attracteur dans un espace des phases.



**Fig. 4.47** Tracé des séquences temporelles correspondant à deux orbites  $T$  et  $2T$  en fonction du temps modulo la période de modulation.

Il est également frappant de voir à quel point les tresses obtenues de manière aussi directe ressemblent à celles du fer à cheval. On observe en effet pour les brins de forte intensité un croisement systématique des brins, et on peut facilement les imaginer appliqués sur une surface tournant d'un demi-tour.

Si nous avons décidé de travailler implicitement dans un espace des phases  $(X(t), X(t+\tau), \phi)$ , il nous aurait fallu comparer à chaque croisement de deux brins les valeurs respectives de  $X(t+\tau)$ . Quand  $\tau$  est suffisamment petit, on peut se convaincre facilement que l'obtient les mêmes résultats qu'avec la dérivée de  $X(t)$ . En

effet, on a alors  $dX(t)/dt \approx (X(t+\tau)-X(t))/\tau$ . Il en découle qu'en un point de croisement (où les deux valeurs de  $X(t)$  sont égales), le brin pour lequel la valeur de  $dX(t)/dt$  est la plus grande correspond également à la plus grande valeur de  $X(t+\tau)$ .

Cependant, pour chaque orbite périodique, il existe une valeur du délai  $\tau_{\max}$  telle que cette orbite ne possède pas la même structure topologique dans l'espace  $(X(t), X(t+\tau), \phi)$  avec  $\tau > \tau_{\max}$  que dans l'espace  $(X(t), dX(t)/dt, \phi)$ . La valeur de  $\tau_{\max}$  est égale à l'intervalle de temps minimal entre deux zéros des séries temporelles  $(X(t)-X(t+kT))$ , où  $X(t)$  est le signal correspondant à une orbite périodique de période  $pT$  ( $X(t)=X(t+pT)$ ) et  $0 < k < p-1$ . Quand on passe de  $\tau < \tau_{\max}$  à  $\tau > \tau_{\max}$ , le signe d'un croisement est changé et l'on modifie par conséquent le type de noeud de l'orbite

Ayant utilisé dans notre analyse des espaces du type  $(X(t), dX(t)/dt, \phi)$ , qui est l'espace des phases naturel, nous n'avons pas fait d'étude systématique de ce phénomène. Nous avons cependant estimé, à partir de quelques fichiers expérimentaux, l'intervalle de temps minimum entre deux zéros de  $(X(t)-X(t+kT))$  pour  $k$  compris entre 1 et 15, et nous l'avons trouvé être de l'ordre de grandeur de  $T/4$ . Par ailleurs, l'examen de quelques orbites périodiques semble indiquer que la valeur de  $\tau_{\max}$  pour une orbite donnée est en général d'autant plus petite que la période est grande.

On voit donc que l'utilisation d'un espace des phases  $(X(t), X(t+\tau), \phi)$  demande quelques précautions. Si  $\tau > T/4$ , il semble en effet difficile d'éviter qu'au moins certaines orbites ne possèdent pas la même structure topologique qu'elles auraient dans l'espace des phases naturel du système. Plus généralement, on remarquera

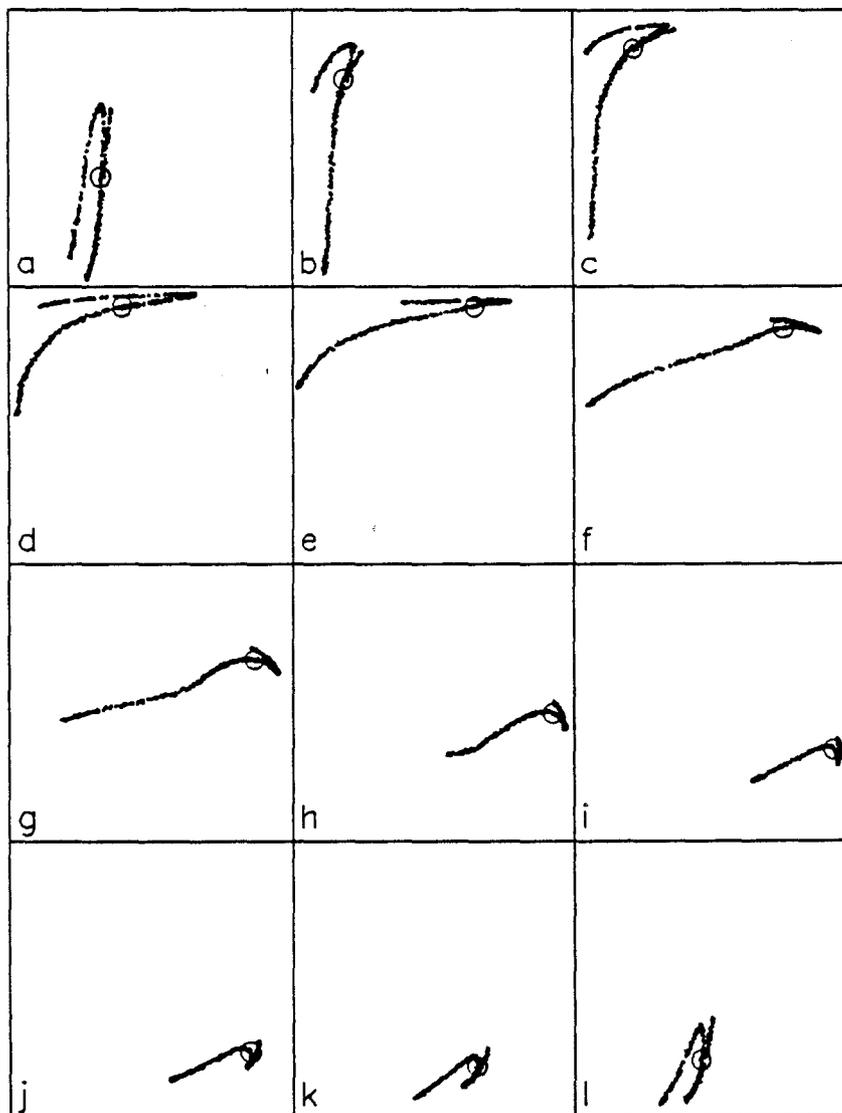
également que si  $\tau$  correspond à l'intervalle de temps entre deux zéros de  $(X(t)-X(t+kT))$  pour un  $k$  quelconque, une reconstruction de l'attracteur avec ce délai temporel induit des croisements de trajectoires et ne constitue donc pas un plongement dans un espace de dimension trois.

#### 4.5.5 Détermination du gabarit

##### 4.5.5.a Etirement et repliement

Le gabarit d'un flot décrit de manière schématique l'action des mécanismes d'étirement et de repliement, qui sont à l'origine des comportements chaotiques, sur les trajectoires de l'attracteur. Dans les cas où la dimension fractale de l'attracteur est proche de 2, l'évolution des sections de Poincaré à phase constante lorsqu'on fait varier la phase entre 0 et  $2\pi$  fournit des informations utiles sur la structure du gabarit. La figure 4.48 montre ainsi des sections de Poincaré effectuées pour des valeurs de la phase espacées de  $\pi/6$ . On voit très nettement le repliement qui s'effectue entre les figures 4.48f et 4.48l. Par ailleurs on reconnaît la forme caractéristique du fer à cheval sur les figures 4.48a ou 4.48l, par exemple. Ce sont pour les sections de Poincaré voisines de celle de la figure 4.45f que l'on obtient une application de premier retour la plus proche d'une application de l'intervalle. Les points situés sur la branche de pente positive (resp. négative) de cette application correspondent en gros aux points situés à gauche (resp. droite) du pli dans une section comme celle de la figure 4.48a. On peut d'ailleurs se rendre compte que les points situés sur la partie gauche de la section n'ont pas subi de torsion pendant la période de modulation écoulée (la branche a évolué en restant parallèle à elle-même), tandis que les

points sur la partie droite ont effectué un demi-tour (cette branche a vu son orientation renversée).



**Fig. 4.48** Sections de Poincaré obtenues pour des valeurs consécutives de la phase espacées de  $\pi/6$ . L'orbite 1T est représentée par un rond.

Nous avons également indiqué sur cette figure l'orbite 1T. Si l'on admet qu'au voisinage de celle-ci, la section de l'attracteur est en gros alignée le long de la variété instable de cette orbite, il est

facile de vérifier que la torsion de l'orbite 1T correspond à un demi-tour.

On voit donc qu'à la fois les applications de premier retour et l'évolution de la section de Poincaré sur une période suggèrent que les régimes chaotiques observés sont gouvernés par une dynamique du type fer à cheval. Il faut cependant nous en assurer en comparant les invariants des orbites extraites à ceux prédits par le gabarit du fer à cheval de torsion globale nulle.

#### 4.5.5.b Calcul des invariants.

A titre d'exemple nous présentons ci-dessous les résultats obtenus à partir d'un fichier expérimental enregistré juste avant la collision de l'attracteur avec une orbite 3T instable. Nous avons extrait de ce fichier 27 orbites périodiques de période inférieure ou égale à 12 (les orbites de période supérieure sont le plus souvent difficilement exploitables). Un itinéraire symbolique a été attribué à chaque orbite à l'aide de l'application de premier retour, en notant comme précédemment "x" (resp. "y") la branche préservant (resp. renversant) l'orientation.

La table 4.2 donne les taux de rotation relative des orbites de période inférieure ou égale à 8, soit 15 orbites. On remarquera que les orbites T, 2T, 4T et 8T de la cascade de doublements de période sont les orbites n° 1, 2, 4 et 8a.

Ces taux de rotation relative ont été calculés à partir de tresses à une et deux orbites, comme celles des figures 4.46 et 4.47. Pour calculer les croisements entre deux brins, nous avons cherché les intervalles temporels où la distance entre ces deux brins était plus petite qu'une constante  $\eta$ . Un croisement était comptabilisé si la

position relative des deux brins avait changé entre le début et la fin de l'intervalle, aucun sinon.

Pour éviter les croisements parasites provoqués par le bruit de digitalisation, ou par une approximation imparfaite des orbites, nous avons choisi  $\eta=3b_0$ , où  $b_0$  est le plus petit bit significatif de l'échantillonneur ( $b_0$  représente environ 0,4% de l'amplitude maximale du signal).

Toutefois, en procédant ainsi, nous avons observé un certain nombre de différences (environ 20%) par rapport aux valeurs prédites par le gabarit du fer à cheval, le plus souvent pour des orbites très proches l'une de l'autre. Nous avons observé que ces erreurs se produisaient lorsque deux orbites se trouvaient à une distance inférieure à  $\eta$  sur plus d'une période entière de modulation. Il était possible dans ces cas de trouver de longs intervalles de temps où aucun croisement n'était détecté, alors qu'un au moins aurait dû se produire, comme le passage des trajectoires par la partie du plan de section renversant l'orientation l'indiquait. Nous avons donc modifié notre algorithme de manière à affecter deux croisements à de tels intervalles. La permutation des brins impose alors en effet un nombre pair de croisements.

Cette correction simple a permis dans quasi-totalité des cas d'obtenir des résultats en accord avec les valeurs théoriques. Les valeurs indiquées entre crochets dans la table 4.2 ont été obtenues au moyen de cette correction.

Orbites	N°	1	2	3	4	5 a	5 b	6 a	6 b
y	1	0							
xy	2	$\frac{1}{2}$	$0, \frac{1}{2}$						
xy <sup>2</sup>	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$0, (\frac{1}{3})^2$					
xy <sup>3</sup>	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$0, \frac{1}{4}, (\frac{1}{2})^2$				
xy <sup>4</sup>	5 a	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$0, (\frac{2}{5})^4$			
xyxy <sup>2</sup>	5 b	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$0, (\frac{2}{5})^4$		
xyxy <sup>3</sup>	6 a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$[\frac{2}{5}]$	$0, (\frac{1}{3})^2, (\frac{1}{2})^3$	
xy <sup>5</sup>	6 b	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$	$[\frac{2}{5}]$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$	$0, (\frac{1}{3})^2, (\frac{1}{2})^3$
xyxy <sup>4</sup>	7 a	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{5}$	$[\frac{2}{5}]$	$[\frac{3}{7}]$	$[\frac{3}{7}]$
xy <sup>6</sup>	7 b	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{5}$	$[\frac{2}{5}]$	$\frac{3}{7}$	$[\frac{3}{7}]$
(xy) <sup>2</sup> xy <sup>2</sup>	7 c	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{3}$	$[\frac{11}{28}]$	$\frac{2}{5}$	$\frac{13}{35}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{17}{42}$
(xy) <sup>2</sup> xy <sup>3</sup>	8 a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}, [\frac{3}{8}], (\frac{1}{2})^2$	$\frac{2}{5}$	$[\frac{2}{5}]$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$
xy <sup>7</sup>	8 b	$[\frac{1}{2}]$	$\frac{3}{8}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}, \frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}, \frac{1}{2}$	$[\frac{5}{12}], \frac{1}{2}$
xyxy <sup>5</sup>	8 c	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$[\frac{3}{8}], \frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$[\frac{2}{5}]$	$[\frac{5}{12}], \frac{1}{2}$	$[\frac{3}{8}], \frac{1}{2}$
xy <sup>2</sup> xy <sup>4</sup>	8 d	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$[\frac{3}{8}]$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

**Table 4.2** Taux de rotation relative des orbites périodiques extraites jusqu'à la période 8T. Les valeurs entre crochets ont été obtenues en utilisant la correction utilisée dans le texte. Les valeurs entre accolades diffèrent de celles prédites à partir du gabarit du fer à cheval

Orbites	N°	7 a	7 b	7 c	8 a	8 b	8 c	8 d
$xyxy^4$	7 a	$0, (\frac{3}{7})^6$						
$xy^6$	7 b	$[\frac{3}{7}]$	$0, (\frac{3}{7})^6$					
$(xy)^2xy^2$	7 c	$(\frac{3}{7})^5, (\frac{2}{7})^2$	$(\frac{3}{7})^6, (\frac{2}{7})$	$0, (\frac{2}{7})^2, (\frac{3}{7})^4$				
$(xy)^2xy^3$	8 a	$[\frac{3}{7}]$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	$0, \frac{3}{8}, (\frac{1}{4})^2, (\frac{1}{2})^4$			
$xy^7$	8 b	$[\frac{3}{7}]$	$[\frac{3}{7}]$	$\frac{23}{56}$	$\frac{3}{8}, \frac{1}{2}$	$0, (\frac{3}{8})^3, (\frac{1}{2})^4$		
$xyxy^5$	8 c	$\{\frac{23}{56}\}$	$\frac{3}{7}$	$[\frac{11}{28}]$	$\frac{3}{8}, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}, \frac{1}{2}$	$0, (\frac{3}{8})^3, (\frac{1}{2})^4$	
$xy^2xy^4$	8 d	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$[\frac{3}{8}]$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$0, (\frac{3}{8})^7$

Table 4.2 (suite)

On notera que la seule orbite dont le calcul du taux de rotation relative avec l'orbite  $y$  a nécessité cette correction est l'orbite 8T  $xy^7$ . L'itinéraire symbolique de cette dernière indique clairement que les deux orbites sont très proches l'une de l'autre.

Nous avons noté que la plupart de ces erreurs disparaissaient également lorsque l'on prenait  $\eta = 2b_0$ , ce qui semble confirmer la validité de cette procédure. Ce choix de  $\eta$  induit cependant des croisements parasites pour d'autres couples d'orbites. Or, si l'on veut effectuer une comparaison significative entre les valeurs théoriques et expérimentales, il est préférable que ces dernières soient obtenues par un seul algorithme, pour un  $\eta$  fixé.

Trois valeurs de la table 4.2 ne sont pas celles prédites par le gabarit du fer à cheval et ont été indiquées entre accolades. Nous avons toutefois vérifié que ces erreurs disparaissaient lorsque  $\eta$  était choisi égal à  $4b_0$  ou  $5b_0$ , et qu'elles doivent donc être la conséquence de croisements parasites.

On trouvera les taux propres de rotation relative des orbites de période plus élevée dans la table 4.3. On notera que les invariants propres d'une orbite semblent moins sensibles aux incertitudes expérimentales que ceux caractérisant une paire d'orbites. En effet, toutes les valeurs obtenues sont correctes, sans qu'une correction particulière ait été appliquée.

Orbites		TPRR
$(xy)^3xy^2$	9 a	$0, (\frac{1}{3})^4, (\frac{4}{9})^4$
$xy^2xy^5$	9 b	$0, (\frac{1}{3})^4, (\frac{4}{9})^4$
$(xy)^2xy^4$	9 c	$0, (\frac{1}{3})^2, (\frac{4}{9})^6$
$xy^3xy^4$	9 d	$0, (\frac{1}{3})^2, (\frac{4}{9})^6$
$xyxy^2xy^4$	10 a	$0, \frac{3}{10}, (\frac{2}{5})^8$
$xyxy^4xy^2$	10 b	$0, \frac{3}{10}, (\frac{2}{5})^8$
$(xy)^4xy^2$	11 a	$0, (\frac{3}{11})^2, (\frac{4}{11})^4, (\frac{5}{11})^4$
$xyxy^3xy^4$	11 b	$0, (\frac{4}{11})^4, (\frac{5}{11})^6$
$xyxy^2xy^5$	11 c	$0, (\frac{5}{11})^4, (\frac{4}{11})^6$
$xy(xy^2)^3$	11 d	$0, (\frac{4}{11})^{10}$
$(xy)^2xy^4xy^2$	12 a	$0, (\frac{1}{3})^4, (\frac{5}{12})^7$
$xy^2xy^8$	12 b	$0, (\frac{1}{3})^2, (\frac{5}{12})^9$

Table 4.3 Taux propres de rotation relative des orbites périodiques extraites de période comprises entre 9T et 12T

Orbites	N°	Polynôme de Conway	Type de noeud
y	1	1	trivial
xy	2	1	trivial
xy <sup>2</sup>	3	1	trivial
xy <sup>3</sup>	4	1+z <sup>2</sup>	tore (2,3)
xy <sup>4</sup>	5 a	1+3z <sup>2</sup> +z <sup>4</sup>	tore (2,5)
xyxy <sup>2</sup>	5 b	1+3z <sup>2</sup> +z <sup>4</sup>	tore (2,5)
xyxy <sup>3</sup>	6 a	1+8z <sup>2</sup> +14z <sup>4</sup> +7z <sup>6</sup> +z <sup>8</sup>	tore (3,5)
xy <sup>5</sup>	6 b	1+8z <sup>2</sup> +14z <sup>4</sup> +7z <sup>6</sup> +z <sup>8</sup>	tore (3,5)
xyxy <sup>4</sup>	7 a	1+16z <sup>2</sup> +60z <sup>4</sup> +78z <sup>6</sup> +44z <sup>8</sup> +11z <sup>10</sup> +z <sup>12</sup>	tore (3,7)
xy <sup>6</sup>	7 b	1+16z <sup>2</sup> +60z <sup>4</sup> +78z <sup>6</sup> +44z <sup>8</sup> +11z <sup>10</sup> +z <sup>12</sup>	tore (3,7)
(xy) <sup>2</sup> xy <sup>2</sup>	7 c	1+12z <sup>2</sup> +31z <sup>4</sup> +27z <sup>6</sup> +9z <sup>8</sup> +z <sup>10</sup>	bretzel (7,3,-2)
(xy) <sup>2</sup> xy <sup>3</sup>	8 a	(1,25,155,385,451,275,90,15,1) <sub>16</sub>	tore itéré {(2,13);(2,3)}
xy <sup>7</sup>	8 b	(1,30,235,741,1131,936,442,119,17,1) <sub>18</sub>	tore (4,7)
xyxy <sup>5</sup>	8 c	(1,30,235,741,1131,936,442,119,17,1) <sub>18</sub>	tore (4,7)
xy <sup>2</sup> xy <sup>4</sup>	8 d	(1,21,105,189,157,65,13,1) <sub>14</sub>	tore (3,7)

Table 4.4 Polynômes de Conway et types de noeud des orbites de période inférieure à 8T.  $(a_0, a_1, \dots, a_n)_{2n}$  représente le polynôme  $a_0 + a_1 z^2 + a_2 z^4 + \dots + a_n z^{2n}$ .

Nous avons par ailleurs vérifié que les polynômes de noeuds des orbites de période inférieure à 10T étaient bien ceux prédits théoriquement, en déterminant leurs mots de tresse, et en appliquant l'algorithme (4.10). La table 4.4 donne à titre d'exemple les polynômes de Conway des orbites de période inférieure à 8T, ainsi que leurs types de noeud.

Au vu de ces résultats, et de ceux que nous avons obtenus pour plusieurs autres fichiers expérimentaux, il apparaît clair que

l'organisation topologique des orbites périodiques instables du laser  $\text{CO}_2$  à pertes modulées est décrite par le gabarit du fer à cheval de Smale de torsion globale nulle, au moins dans la région de paramètres considérée. Même si ce résultat pouvait être pressenti à partir de l'examen des sections de Poincaré, il faut insister sur le fait que le calcul des invariants topologiques permet de donner un résultat sans ambiguïté, et constitue la seule méthode possible lorsque les sections de Poincaré ne possèdent pas de structure facilement identifiable. Cela peut être par exemple le cas lorsque la dimension fractale de l'attracteur est proche de trois.

Nous n'avons pas affaire à un fer à cheval complet, puisque qu'un grand nombre d'orbites du fer à cheval semblent absentes du flot. Par exemple, on notera que les itinéraires symboliques des orbites périodiques analysées ci-dessus ne comportent pas de séquence "xx". Cette séquence est en effet interdite dans la région de paramètres correspondant à ce fichier, et nous verrons plus loin que son apparition se fait au travers d'une crise de l'attracteur. On voit cependant que les orbites périodiques détectées possèdent la même organisation topologique que dans la limite hyperbolique où le fer à cheval est complet.

#### 4.5.6 Séquences de bifurcations

Lorsque l'on compare des fichiers enregistrés à des valeurs successives de l'amplitude de modulation, on observe que le nombre d'orbites périodiques extraites est une fonction croissante de l'amplitude de modulation. L'analyse du contenu de ces fichiers permet de déduire dans une certaine mesure l'ordre dans lequel apparaissent les différentes orbites, en notant pour une orbite

d'itinéraire symbolique donné l'amplitude de modulation minimale pour laquelle elle peut être extraite des signaux expérimentaux. On peut ainsi obtenir des informations sur des orbites dont la plage de stabilité est trop petite pour être observée expérimentalement.

Il est relativement facile de repérer dans un fichier les orbites dont la fenêtre de stabilité vient juste d'être traversée. En effet, ces orbites sont très peu instables, et à la fois le nombre et la longueur des séquences temporelles approchant ces orbites sont élevées. Il faut cependant prendre garde au fait que cela peut également indiquer un phénomène d'intermittence, et correspondre en fait à l'approche de la fenêtre périodique où l'orbite est créée.

Les tables 4.5 et 4.6 donnent le contenu en orbites périodiques de quelques fichiers enregistrés entre la fin de la cascade inverse et la collision avec une orbite  $3T$ . On remarquera que les orbites apparaissent dans un ordre qui est tout à fait compatible avec la séquence universelle évoquée plus haut, au moins pour les périodes allant jusqu'à huit. Cela est bien évidemment dû au caractère fortement dissipatif du système étudié, car on sait par exemple que dans le modèle de Hénon, de nombreuses bifurcations sont inversées lorsqu'on diminue la dissipation [Holmes 84, 85].

Orbites		1	2	3	4	5	6
y	1	x	x	x	x	x	x
xy	1×2	x	x	x	x	x	x
xy <sup>3</sup>	1×4	x	x	x	x	x	x
(xy) <sup>2</sup> xy <sup>3</sup>	1×8	x	x	x			x
(xy) <sup>3</sup> xy <sup>3</sup>	10 <sup>1</sup>	x	x				
xyxy <sup>3</sup>	6 <sup>1</sup>	x	x	x	x	x	x
xy <sup>5</sup>	6 <sup>1</sup>	x	x		x	x	x
(xy) <sup>2</sup> xy <sup>5</sup>	10 <sup>2</sup>	x	x				
xyxy <sup>5</sup>	8 <sup>1</sup>	x			x		
xy <sup>7</sup>	8 <sup>1</sup>	x	x				
xyxy <sup>7</sup>	10 <sup>3</sup>	x					
xyxy <sup>6</sup>	9 <sup>1</sup>			x			
xy <sup>6</sup>	7 <sup>1</sup>			x	x		x
xyxy <sup>4</sup>	7 <sup>1</sup>		x		x		
(xy) <sup>2</sup> xy <sup>4</sup>	9 <sup>2</sup>		x				
xy <sup>3</sup> xy <sup>4</sup>	9 <sup>2</sup>				x		
xy <sup>4</sup>	5 <sup>1</sup>			x	x	x	x
xyxy <sup>2</sup>	5 <sup>1</sup>				x	x	x
xyxy <sup>4</sup> xy <sup>2</sup>	5 <sup>1</sup> ×2				x		
xyxy <sup>3</sup> xy <sup>2</sup>	9 <sup>3</sup>					x	
(xy) <sup>3</sup> xy <sup>2</sup>	9 <sup>3</sup>					x	
xyxyxy <sup>2</sup>	7 <sup>2</sup>						x
xy <sup>2</sup> xy <sup>3</sup>	7 <sup>2</sup>						x
xyxy <sup>2</sup> xy <sup>3</sup>	9 <sup>4</sup>						x
xy <sup>2</sup> xy <sup>4</sup>	8 <sup>2</sup>						x
xyxy <sup>2</sup> xy <sup>2</sup>	8 <sup>2</sup>						

**Table 4.5** Orbites périodiques de période inférieure à 10T extraites de six fichiers enregistrés entre la fin de la cascade inverse et la collision avec une orbite 3T. Les bifurcations sont rangées dans l'ordre de la séquence universelle [Metropolis 73]:  $n^m$  représente la  $m^{\text{ième}}$  bifurcation tangente de période  $n$ .  $n^m \times 2^p$  représente l'orbite de période  $n \times 2^p$  de la cascade de doublements de période de  $n^m$ .

Orbites		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1		x	x	x	x	x	x	x	x	x
xy	1×2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
xy <sup>3</sup>	1×4	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
(xy) <sup>2</sup> xy <sup>3</sup>	1×8		x	x	x	x					x
(xy) <sup>3</sup> xy <sup>3</sup>	10 <sup>1</sup>	x							x		
xy(xy <sup>3</sup> ) <sup>2</sup>	10 <sup>1</sup>	x	x								
xyxy <sup>3</sup>	6 <sup>1</sup>	x	x	x	x	x		x	x	x	x
xy <sup>5</sup>	6 <sup>1</sup>	x	x	x	x	x	x		x	x	x
xy <sup>3</sup> xy <sup>5</sup>	10 <sup>2</sup>		x		x						
(xy) <sup>2</sup> xy <sup>5</sup>	10 <sup>2</sup>		x	x						x	
xyxy <sup>5</sup>	8 <sup>1</sup>				x						
xy <sup>7</sup>	8 <sup>1</sup>		x		x						
xyxy <sup>7</sup>	10 <sup>3</sup>			x							
xy <sup>9</sup>	10 <sup>3</sup>		x								
xyxy <sup>6</sup>	9 <sup>1</sup>			x							
xy <sup>6</sup>	7 <sup>1</sup>			x		x	x				
xyxy <sup>4</sup>	7 <sup>1</sup>				x	x	x		x	x	x
(xy) <sup>2</sup> xy <sup>4</sup>	9 <sup>2</sup>						x		x		
xy <sup>4</sup>	5 <sup>1</sup>					x	x	x	x	x	x
xyxy <sup>2</sup>	5 <sup>1</sup>						x	x		x	x
xyxy <sup>4</sup> xy <sup>2</sup>	5 <sup>1</sup> ×2						x				
xyxy <sup>3</sup> xy <sup>2</sup>	9 <sup>3</sup>								x		
xyxyxy <sup>2</sup>	7 <sup>2</sup>										x
xy <sup>2</sup> xy <sup>3</sup> xy <sup>4</sup>	12 <sup>8</sup>									x	
xy <sup>2</sup> xy <sup>4</sup>	8 <sup>2</sup>										x
xy <sup>2</sup>	3										x

Table 4.6 Orbites périodiques de période inférieure à 10T extraites de dix fichiers enregistrés entre la fin de la cascade inverse et la collision avec une orbite 3T. L'orbite 12<sup>8</sup> a été incluse car elle constituait l'essentiel du fichier correspondant.

La possibilité de construire des applications de premier retour unidimensionnelles nous a par ailleurs fourni une confirmation indépendante, et dans doute plus fiable pour les orbites de faible période. Par exemple, avant la création des premières orbites 5T, l'application de cinquième retour ne présente qu'un seul point fixe, qui correspond à l'orbite T. Si pour le même paramètre, l'application de septième retour possède quinze intersections, on en déduit qu'une fenêtre périodique 7T a déjà été rencontrée ( $15=1+2\times 7$ ).

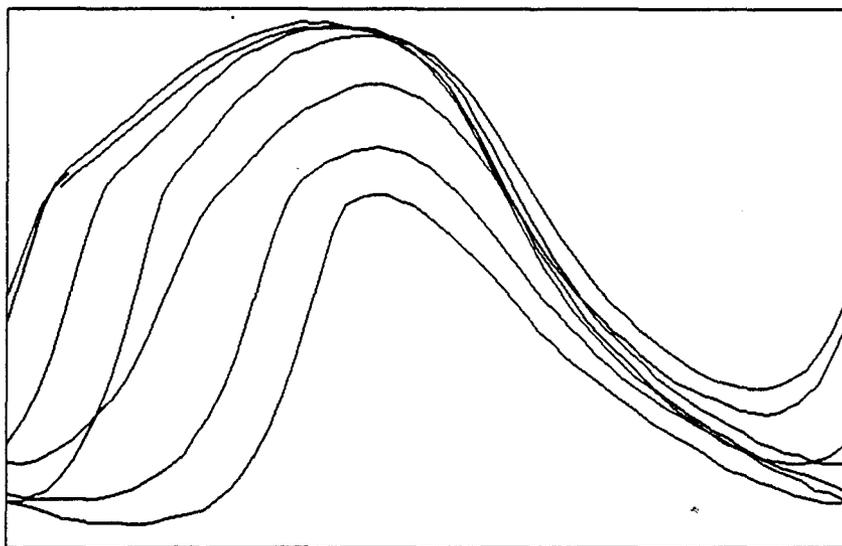
La seule différence notable avec la séquence universelle est le fait que les solutions 3T n'apparaissent pas lors d'une bifurcation tangente, mais lors d'une crise. Cela est dû au fait que ces orbites 3T ont été créées précédemment lors d'une bifurcation tangente et coexistent jusqu'à la crise avec l'attracteur chaotique. On trouve toutefois, en analysant des fichiers enregistrés juste avant cette crise, des orbites périodiques qui précèdent immédiatement les orbites 3T dans la séquence universelle, entre autres l'orbite 11T  $xy(xy^2)^3$ . L'itinéraire symbolique de ces orbites présente la propriété de contenir plusieurs fois le mot  $xy^2$ , ce qui reflète le fait que l'attracteur s'approche de l'orbite 3T  $xy^2$ . On a donc une sorte de phénomène d'intermittence, mais dont les propriétés statistiques sont bien sûr différentes, puisque l'orbite  $xy^2$  n'est pas sur le point d'être créée mais <sup>est</sup> déjà instable.

#### 4.5.7 Des noeuds de bretzel dans le laser

La structure en fer à cheval trouvée pour notre dispositif prouve de manière claire le fait qu'il s'agisse de chaos déterministe. Cependant, nous disposons d'un moyen encore plus simple pour conclure de manière définitive à l'existence de chaos déterministe dans le laser CO<sub>2</sub> à pertes modulées. En effet, nous avons vu que la

présence de certaines orbites dans le flot permettait de démontrer que celui-ci possédait une entropie topologique positive. Or, nous avons pu extraire de telles orbites de nos séries temporelles.

Comme exemple, nous montrons dans la figure 4.49 l'orbite, dont l'itinéraire symbolique est  $xyxyxy^2$  et qui est un noeud de bretzel (7,3,-2) (fig. 4.9) et vérifie donc une des conditions que nous avons énoncées dans la section 4.3.7. Nous avons ainsi une preuve supplémentaire du caractère chaotique des régimes erratiques observés dans notre laser.



**Fig 4.49** Tresse de l'orbite  $xyxyxy^2$ . Cette orbite implique une entropie topologique positive. Les croisements doivent être lus comme ceux de la fig. 4.46

## 4.6 ANALYSE DES CRISES DANS LE LASER A MODULATION INTERNE

Le laser CO<sub>2</sub> à pertes modulées a été le premier laser dans lequel le phénomène de crise a été mis en évidence expérimentalement [Dangoisse 86]. Nous avons donc essayé de caractériser l'attracteur chaotique de part et d'autre des crises qui surviennent dans ce système, afin de déterminer si la structure de l'attracteur restait inchangée. Il était en effet à priori possible qu'après la crise et l'expansion soudaine de l'attracteur chaotique, le système explore des régions de l'espace des phases qui correspondent à de nouvelles branches sur le gabarit. Nous verrons dans cette section que si le même gabarit résume l'organisation topologique des attracteurs observés avant et après la crise, l'utilisation de la dynamique symbolique permet de distinguer nettement les deux situations. Nous verrons d'autre part comment définir un codage symbolique lorsqu'on ne dispose pas d'une application de premier retour à une dimension bien définie.

### 4.6.1 Rappel sur les crises

Quand on fait varier le paramètre de contrôle d'un système chaotique, l'enveloppe de l'attracteur se déforme en général de manière continue et s'étend progressivement dans le bassin d'attraction, sauf pour certaines valeurs où l'on observe une modification soudaine de l'attracteur. Ces changements brutaux sont essentiellement dus à deux phénomènes :

- les bifurcations tangentes, correspondant à l'apparition d'une fenêtre périodique, et où sont créées conjointement deux orbites

périodiques stable et instable. L'évolution du système s'établit alors sur l'orbite stable qui constitue le nouvel attracteur du système. .

- les crises [Grebogi 83], où l'on observe la collision de l'attracteur chaotique avec un ensemble invariant, le plus souvent une orbite périodique instable. Après la crise, le système explore toute une région de l'espace des phases qui lui était inaccessible jusque là.

On peut distinguer deux types de crises : crises de frontière et crises intérieures, selon que l'orbite périodique instable se trouve à la limite ou à la frontière du bassin d'attraction de l'attracteur chaotique initial.

Dans le premier cas, l'orbite périodique instable et sa variété stable constituent la limite du bassin d'attraction. Dès que le l'attracteur franchit cette frontière, il est détruit (le bassin n'est plus invariant), et on bascule en général sur un nouvel attracteur. Il subsiste en général à l'endroit de l'ancien attracteur un ensemble invariant instable. Si, après la crise, on part d'une condition initiale dans l'ancien bassin d'attraction, on observera un transitoire chaotique précédant l'établissement de la dynamique sur le nouvel attracteur. Ce transitoire sera en moyenne d'autant plus long que l'on sera proche de la crise et sa durée moyenne vérifie des lois d'échelle au voisinage de la crise [Grebogi 83].

Dans le cas de la crise de frontière, l'orbite périodique se trouve à l'intérieur du bassin d'attraction, qui n'est donc pas détruit. Avant la crise la variété stable de l'orbite sépare le bassin d'attraction en deux régions indépendantes, dont l'une est visitée par l'attracteur. Après la crise, les deux régions sont explorées successivement, ce qui fait que l'on observe une extension soudaine

de l'attracteur. Juste après la crise, la fraction de temps passé par le système dans la région nouvellement explorée obéit à une loi d'échelle, et augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la crise. Notons que cette région est souvent l'ancien bassin d'attraction d'un attracteur détruit par exemple lors d'une crise de frontière.

On remarquera que dans les simulations numériques du laser à absorbant saturable, le passage brutal de l'attracteur chaotique au point fixe  $I_+$  quand on arrive à la tangence homocline constitue une crise de frontière, l'orbite  $P^{(\infty)}$  et sa variété stable étant la frontière entre les bassins d'attraction de  $I_+$  et de l'attracteur chaotique.

#### 4.6.2 Les crises dans le laser $\text{CO}_2$ modulé.

La fenêtre périodique 3T que l'on peut observer dans le diagramme de bifurcation du laser à pertes modulées a un comportement notablement différent de celle qui apparaît dans la suite logistique. Elle présente en effet de la bistabilité avec l'attracteur de la branche fondamentale. En augmentant progressivement l'amplitude de modulation, la fenêtre 3T apparaît pour une valeur  $\mu_2$  du paramètre de contrôle. Cependant, la solution 3T stable qui apparaît n'est pas dans un voisinage immédiat de l'ancien attracteur, ce qui exclut que cette solution apparaisse par bifurcation tangente. En variant l'amplitude en sens inverse, on reste sur la solution 3T jusqu'à une valeur  $\mu_1 < \mu_2$ , où on retombe brusquement sur l'attracteur de départ, l'orbite 3T disparaissant dans une bifurcation tangente inverse. La crise dans laquelle le laser saute sur l'orbite 3T est donc une crise de frontière.

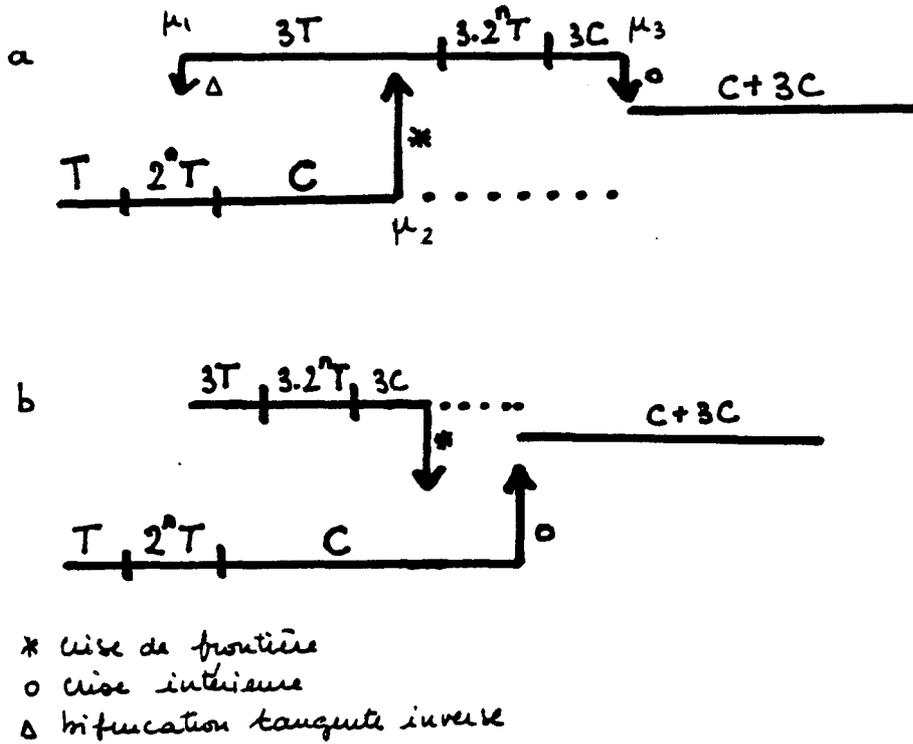


Fig 4.50 Représentation schématique des scénarios observés: (a) à faible désaccord, (b) à désaccord élevé.

A partir de la fenêtre  $3T$ , en augmentant l'amplitude de modulation, on voit se dérouler la cascade de doublements de période de l'orbite  $3T$  au point d'accumulation de laquelle apparaît un attracteur chaotique  $3C$  en trois parties. Ensuite, pour un paramètre  $\mu_3$ , on observe une crise intérieure après laquelle le laser explore à la fois l'attracteur  $3C$  et l'attracteur  $C$  de la branche fondamentale (fig. 4.50a).

En augmentant le désaccord de la cavité, on modifie ce scénario. Pour les valeurs les plus faibles du désaccord, on a toujours affaire à une crise de frontière, mais on bascule non pas sur l'orbite  $3T$  mais sur une orbite  $2^n \times 3T$  ou sur l'attracteur chaotique  $3C$  issu de la cascade de doublements de période de

l'orbite  $3T$ . Pour les valeurs plus élevées, on observe une crise intérieure, vraisemblablement parce que quand l'attracteur  $C$  de la branche fondamentale atteint la frontière de son bassin, l'attracteur  $3C$  a déjà été détruit dans une crise de frontière. L'attracteur  $C$  n'est pas détruit mais s'étend soudainement dans l'espace des phases en un attracteur  $C+3C$ , et visite les régions où se trouvent les restes de l'attracteur chaotique  $3C$  (fig. 4.50b). On observe alors de "l'intermittence induite par crise" : de longues périodes sur l'ancien attracteur  $C$  sont entrecoupées de bouffées explorant la région  $3C$ .

#### 4.6.3 Topologie des attracteurs au-delà de la crise.

##### 4.6.3.a Calcul des invariants

Les attracteurs  $C+3C$  qui apparaissent, soit à la suite d'une crise de frontière de l'attracteur  $C$  et d'une crise intérieure de l'attracteur  $3C$  (faibles désaccords), soit directement après une crise intérieure de l'attracteur  $C$  sont de même nature. L'analyse des orbites périodiques qu'ils contiennent ne révèle pas de différences. Nous ne présenterons donc ici que les résultats concernant des attracteurs observés après la crise intérieure où l'attracteur  $C$  s'étend brusquement en un attracteur  $C+3C$ .

L'examen des sections de Poincaré et des applications de premier retour obtenues au-delà de la crise révèle des différences significatives avec celles obtenues en deçà. Une nouvelle branche se greffe sur la section de Poincaré de l'attracteur  $C$ , lui donnant l'aspect d'un double fer à cheval (fig. 4.51). De plus, le tracé de  $X(t_0+(n+1)T)$  en fonction de  $X(t_0+nT)$  ne décrit plus une application de l'intervalle dans lui-même : quelque<sup>le</sup> soit la valeur de la phase, on trouve des points qui possèdent plusieurs images. La figure 4.52

donne un exemple d'un tel tracé obtenu en cherchant la phase pour laquelle on était le plus proche d'une application à une dimension.

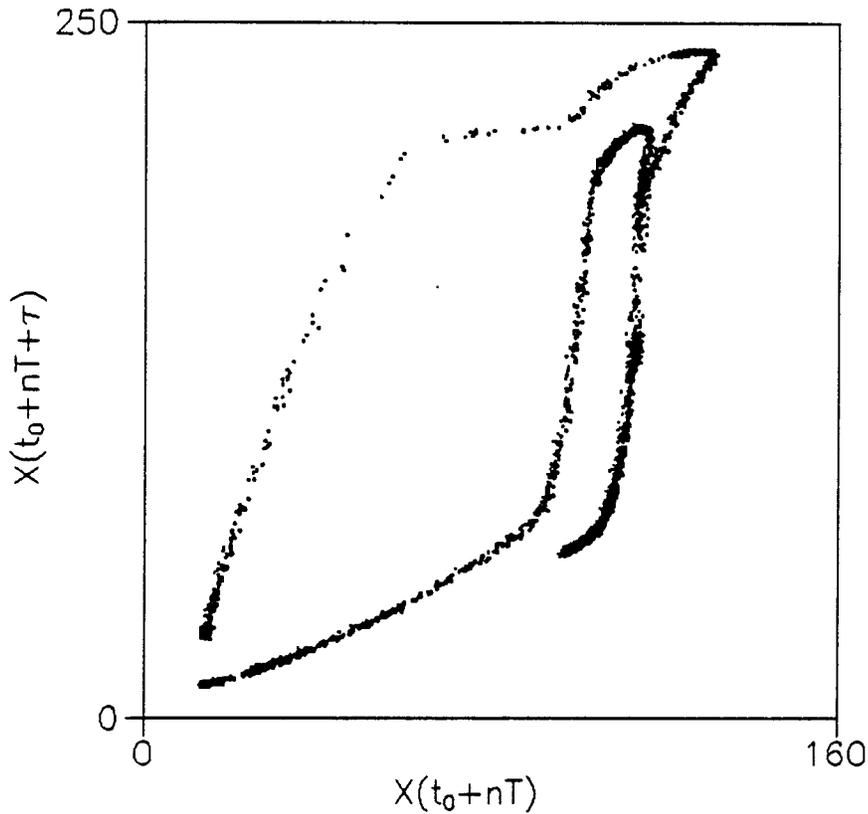
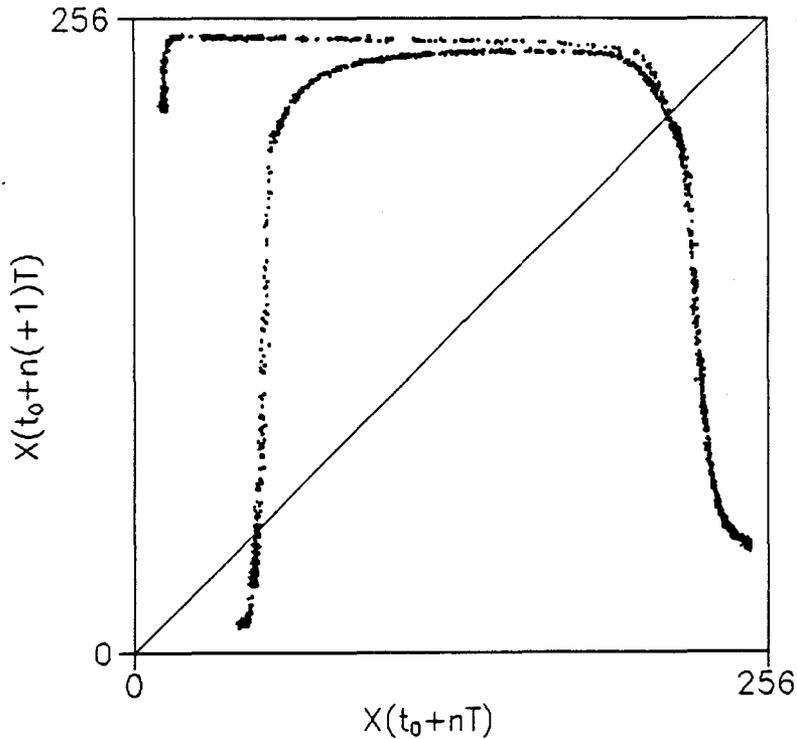


Fig 4.51 Section de Poincaré au-delà de la crise intérieure.

On notera que l'une des intersections avec la bissectrice (celle de gauche) ne correspond pas à une orbite  $1T$ , ce qui montre que ce diagramme ne peut être considéré comme une application.

Les méthodes de codage symbolique des applications de l'intervalle (voir par exemple [Hao 89]), que nous avons utilisées pour analyser les fichiers précédents, ne sont donc à priori pas applicables à cette situation. Nous ne pouvons donc pas attribuer de

manière simple un itinéraire symbolique à chaque orbite périodique extraite.



**Fig 4.52** Diagramme de premier retour au-delà de la crise intérieure.

Il est alors légitime de déterminer si ces modifications correspondent à l'apparition de nouvelles branches dans le gabarit associé à l'attracteur (et donc de nouveaux symboles dans le codage des orbites), ou si le gabarit du fer à cheval décrit de manière unifiée l'organisation topologique des attracteurs observés de part et d'autre de la crise.

L'hypothèse de départ la plus simple étant que la structure du gabarit ne change pas lors de la crise, nous avons calculé les

invariants des orbites extraites de fichiers enregistrés après la crise afin de déterminer si leurs propriétés topologiques étaient compatibles avec la structure du gabarit du fer à cheval. Nous nous sommes d'abord intéressés aux invariants propres caractérisant une seule orbite, car il est évidemment plus rapide de calculer  $n$  taux propres de rotation relative (TPRR) que  $n(n-1)/2$  nombres d'enlacement. Nous avons d'autre part constaté plus haut qu'ils étaient moins sensibles aux incertitudes expérimentales.

Pour cela, nous avons mis au point un programme qui :

- génère les itinéraires symboliques de toutes les orbites de période donnée du fer à cheval.
- calcule le mot de tresse pour chacune de ces orbites d'après la matrice de gabarit.
- calcule les invariants topologiques de chaque orbite à partir de son mot de tresse.
- compare ces invariants avec ceux de orbites extraites des fichiers expérimentaux.

En consultant les tables construites par ce programme, nous avons constaté que, au moins dans le cas du fer à cheval, les taux propres de rotation relative et les polynômes de noeud étaient redondants. En effet, il apparaît que parmi les orbites de même période, celles possédant les mêmes taux de rotation propre sont associées au même polynôme, et réciproquement. Or, même en s'aidant de l'algorithme décrit au 4.3.3, le temps de calcul des polynômes croit nettement plus vite avec la période que celui des taux de rotation relative. Nous n'avons donc utilisé que ceux-ci dans notre analyse.

En procédant ainsi, nous avons pu déterminer pour chaque orbite expérimentale une ou, le plus souvent, plusieurs orbites périodiques du fer à cheval de même période présentant les mêmes TPRR.

Le fait qu'il y ait dans la majorité des cas ambiguïté sur l'orbite du gabarit à associer à une orbite expérimentale s'explique à l'aide du phénomène de localisation lors d'une bifurcation tangente, ou de considérations plus subtiles de symétrie.

Ainsi, deux orbites périodiques créées conjointement dans une bifurcation tangente sont nécessairement reliées par des mouvements d'isotopie régulière, puisqu'elles sont confondues au moment de la bifurcation. Elles ne sont donc pas distinguées par leurs TPRR. Il faut noter d'autre part que certaines orbites du fer à cheval possédant un partenaire de bifurcation donné en régime de forte dissipation peuvent en changer lorsque l'on tend vers un système conservatif [Holmes 84]. Quatre orbites au moins de même période présentent alors les mêmes invariants.

Par ailleurs, le fer à cheval possède la propriété qu'une orbite d'itinéraire symbolique  $w_1w_2\dots w_{n-1}w_n$  est isotope régulièrement à l'orbite d'itinéraire  $w_nw_{n-1}\dots w_2w_1$  [Holmes 89]. Par exemple, les orbites  $x^2yxy^2$  (provenant du doublement de période de l'orbite  $3T$   $x^2y$ ) et  $x^2y^2xy$  ( $\approx y^2xyx^2$ ) sont isotopes. Si ces deux orbites constituent le seul exemple de ce phénomène pour les périodes inférieures ou égales à 6, le nombre de tels doublets augmente rapidement avec la période.

Le calcul de la torsion des orbites est d'un grand secours pour distinguer une partie des orbites périodiques isotopes.

Par exemple, les torsions de deux orbites nées dans une même bifurcation tangente diffèrent d'une unité. L'orbite périodique instable à la bifurcation présente une torsion paire : ses variétés invariantes sont orientables à la bifurcation et le restent par la suite. Par contre, l'orbite périodique initialement stable s'est déstabilisée par doublements de période et sa variété instable est de type Moebius : sa torsion est donc impaire.

Nous avons mis à profit la faible extension transverse des sections de Poincaré pour calculer la torsion des orbites. En effet, dans le plan de section, les points voisins d'une orbite périodique sont en gros alignés selon la variété instable de l'orbite. En suivant la rotation de cette variété autour de l'orbite dans des sections de Poincaré successives, il est facile de déterminer la torsion globale de l'orbite. On se reportera à titre d'illustration à la figure 4.48, où l'on voit la rotation du flot autour de l'orbite  $1T$ .

Il faut cependant signaler que des problèmes se posent quand une intersection de l'orbite avec le plan de section est pratiquement confondue avec un pli. En effet, la variété instable semble alors posséder deux directions différentes, et il est impossible de savoir laquelle correspond effectivement à celle de la variété instable de l'orbite périodique. On obtient alors deux valeurs possibles de la torsion qui diffèrent d'une unité.

Heureusement, les diagrammes de premier retour (fig. 4.52), bien qu'il ne représentent pas le graphe d'une application, peuvent servir à déterminer la parité de la torsion. Pour cela, il suffit en effet de compter le nombre de points se trouvant sur une branche de pente négative. Si ce nombre est pair, cela signifie que l'application de  $p$ ième retour, où  $pT$  est la période de l'orbite

préserve l'orientation. La variété instable est alors orientable et la torsion de l'orbite est paire (une trajectoire voisine effectue un nombre entier de tours autour de l'orbite).

De même, un nombre impair de points sur les parties de pente négative indique que la variété instable est de type Moebius, et que la torsion de l'orbite est impaire. Ce simple examen suffit donc à lever l'ambiguïté mentionnée ci-dessus, et permet de déterminer de manière sûre la valeur de la torsion.

Le calcul de la torsion permet donc en partie de distinguer des orbites isotopes, en particulier celles issues d'une même bifurcation tangente. Dans de nombreux cas, on trouve qu'environ seulement un tiers ou un quart des orbites du fer à cheval qui sont isotopes à une orbite périodique expérimentale possèdent la même torsion qu'elle. On notera toutefois que les itinéraires symboliques  $w_1 w_2 \dots w_n$  et  $w_n \dots w_2 w_1$  correspondent à des orbites de même torsion puisqu'ils contiennent nécessairement le même nombre de  $y$ , et que l'ambiguïté n'est donc pas levée dans ce cas.

Avant de poursuivre notre discussion, nous considérerons l'exemple d'un fichier expérimental, afin de fixer les idées. La section de Poincaré correspondante se trouve sur la figure 4.52, et l'on trouvera dans la table 4.7 les caractéristiques des orbites périodiques extraites de ce fichier, à savoir leurs périodes, leurs taux propres de rotation relative, et leur torsion. Dans la table 4.8, nous avons indiqué, pour chacune de ces orbites, les itinéraires symboliques des orbites du fer à cheval de caractéristiques identiques, ainsi que le nombre d'orbites périodiques isotopes mais ne possédant pas nécessairement la même torsion.

Numéro	TPRR	Torsion
1	0	1
2	$0, \frac{1}{2}$	1
3 a	$0, (\frac{1}{3})^2$	2
3 b	$0, (\frac{1}{3})^2$	1
4	$0, \frac{1}{4}, (\frac{1}{2})^2$	3
5 a	$0, (\frac{2}{5})^4$	3
5 b	$0, (\frac{2}{5})^4$	4
6	$0, \frac{1}{6}, (\frac{1}{3})^4$	3
7 a	$0, (\frac{2}{7})^2, (\frac{3}{7})^4$	4
7 b	$0, (\frac{3}{7})^6$	5
8 a	$0, (\frac{3}{8})^3, (\frac{1}{4})^4$	4
8 b	$0, (\frac{3}{8})^3, (\frac{1}{4})^4$	5
10 a	$0, (\frac{2}{5})^2, (\frac{3}{10})^7$	5
10 b	$0, (\frac{2}{5})^2, (\frac{3}{10})^7$	5
11	$0, (\frac{4}{11})^4, (\frac{3}{11})^6$	7
12	$0, (\frac{5}{12})^2, (\frac{1}{4})^3, (\frac{1}{3})^6$	6

**Table 4.7** Taux propres de rotation relative et torsion des orbites de période inférieure à 12 T.

On notera que puisque l'orbite n°6 peut correspondre à priori à deux orbites du fer à cheval, l'orbite 8a à trois orbites, etc..., il existe  $2 \times 3 \times 2 \times 4 \times 4 \times 5 \times 4 = 3840$  jeux différents d'orbites du fer à cheval compatibles avec l'information extraite jusqu'ici. Si, en poursuivant l'analyse, nous pouvons en sélectionner un seul, à chaque orbite expérimentale sera associé un itinéraire symbolique, celui de l'orbite correspondante du fer à cheval.

Convenons d'appeler orbite de type  $n$  toute orbite dont l'itinéraire symbolique contient la séquence  $x^{n-1}$ , mais non la séquence  $x^n$ . Par exemple  $xyxyxy^2$  est une orbite de type 2, mais  $x^2yxy^2$  est une orbite de type 3, tandis que l'unique orbite de type 1 est l'orbite  $y$ .

Numéro de l'orbite	Itinéraires symboliques des orbites du fer à cheval isotopes à l'orbite expérimentale et de même torsion	Nombre d'orbites isotopes
1	$y$	2
2	$xy$	1
3 a	$xy^2$	2
3 b	$x^2y$	2
4	$xy^3$	1
5 a	$xyxy^2$	2
5 b	$xy^4$	2
6	$x^2yxy^2, x^2y^2xy$	3
7 a	$xyxyxy^2$	2
7 b	$xyxy^4$	2
8 a	$x^2y^2(xy)^2, x^2yx^2y^3, x^2yxyxy^2$	6
8 b	$x^2y^2xy^3, x^2y^3xy^2$	6
10 a	$x^2y(xy)^2xy^2, (x^2y)^2xy^3, x^2yx^2y^3xy, x^2y^2(xy)^3$	12
10 b	Idem 10 a	12
11	$x^3y^6xy, x^3yxy^6, x^2y^2xy^2xy^3, x^2y^2xy^2xy^3, x^2y^2xy^3xy^2, x^2y^3(xy^2)^2$	14
12	$x^2yx^2y^3(xy)^2, (x^2y)^2xyxy^3, x^2y(xy)^3xy^2, x^2y^2(xy)^4$	16

Table 4.8 Itinéraires symboliques des orbites du fer à cheval dont les invariants propres sont compatibles avec ceux des orbites expérimentales.

On remarquera que les orbites expérimentales qui sont déjà associées de manière unique à une orbite du fer à cheval sont toutes des orbites de type 2, exception faite de l'orbite  $x^2y$ , tandis que les orbites indéterminées sont de type 3, éventuellement 4.

#### 4.6.3.b Détermination de l'itinéraire symbolique des orbites

Pour réduire cette indétermination et poursuivre le travail d'identification, il faut utiliser les invariants caractérisant l'enchevêtrement de deux orbites, c'est-à-dire les nombres d'enlacement et les taux de rotation relative.

De manière remarquable, les orbites de type 2 ne sont pour cela d'aucune utilité, car leurs nombres d'enlacement avec les orbites de type 3 ne dépendent apparemment que des classes d'isotopie, et ne permettent pas de distinguer deux orbites du fer à cheval isotopes à une même orbite expérimentale. Nous retrouverons cette relative indépendance entre orbites de types différents dans l'analyse des crises en termes de dynamique symbolique.

De même, les deux orbites de type 3  $x^2yxy^2$  et  $x^2y^2xy$ , isotopes à l'orbite n°6, possèdent le même taux de rotation relative de  $19/66$  avec les orbites  $x^3yxy^6$  et  $x^3y^6xy$ , isotopes à l'orbite n°11 et de type 4. Cela permet d'ailleurs d'écarter immédiatement ces deux dernières orbites, car le taux de rotation relative des orbites expérimentales n° 6 et 11 est égal à  $10/33$ . Mis à part l'orbite  $y$ , l'attracteur que nous étudions ne semble donc contenir que des orbites de types 2 et 3.

Il faut noter que, par exemple, les orbites de plus petite période possédant des nombres d'enlacement différents avec les orbites  $x^2yxy^2$  et  $x^2y^2xy$  sont les orbites de période 8  $x^2y^2(xy)^2$ ,  $x^2y^2xy^3$ ,  $x^2yxyxy^2$  et  $x^2y^3xy^2$ . Or, comme il s'agit également d'orbites de type 3, nous ne pouvons les utiliser directement pour déterminer si c'est  $x^2yxy^2$  ou  $x^2y^2xy$  qui correspond à l'orbite n°6, puisque, même en supposant que nous en ayons extrait une du

signal, l'itinéraire symbolique des orbites périodiques de type 3 n'est pas encore déterminé. En consultant la table 4.9, où nous avons indiqué les taux de rotation relative entre les orbites isotopes à l'orbite n°6 et les orbites isotopes à l'orbite n°8a, on constatera que la comparaison avec le taux expérimental (7/24) permet uniquement d'affirmer que, par exemple, si l'orbite n°6 est  $x^2yxy^2$ , alors l'orbite n°8a ne peut être  $x^2y^2(xy)^2$ .

	$x^2y^2(xy)^2$	$x^2yx^2y^3$	$x^2yxyxy^2$
$x^2yxy^2$	$\frac{1}{3} \frac{7}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{24}$
$x^2y^2xy$	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3} \frac{7}{24}$

Table 4.9 Taux de rotation relative entre les orbites du fer à cheval isotopes à l'orbite n°6 et à l'orbite n°8a.

Orbites	8 a	8 b	10 a	10 b	11	12
6	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{1}{4}, (\frac{1}{3})^2$
8 a		$(\frac{1}{4})^5, (\frac{3}{8})^3$	$\frac{13}{40}, \frac{3}{10}$	$\frac{13}{40}, \frac{11}{40}$	$\frac{27}{88}$	$\frac{1}{4}, (\frac{1}{3})^3$
8 b			$\frac{13}{40}, \frac{3}{10}$	$\frac{13}{40}, \frac{11}{40}$	$\frac{27}{88}$	$\frac{1}{4}, (\frac{1}{3})^3$
10 a				$\frac{2}{5}, (\frac{3}{10})^4$	$\frac{7}{22}$	$\frac{3}{10}, \frac{7}{20}$
10 b					$\frac{17}{55}$	$\frac{17}{60}, \frac{7}{20}$
11						$\frac{7}{22}$

Table 4.10 Taux de rotation relative des orbites expérimentales de type 3.

La table 4.10 donne les taux de rotation relative entre toutes les orbites expérimentales de type 3, c'est à dire les orbites n° 6, 8a, 8b, 10a, 10b, 11, et 12. Cette "matrice d'entrelacement" a été calculée en utilisant un algorithme similaire à celui décrit au 4.5.5.b.

On pourrait songer à calculer la matrice d'entrelacement pour chacune des 3840 configurations à priori envisageables, et à la comparer aux valeurs expérimentales de la table 4.10, mais nous avons mis au point un programme informatique déterminant de manière plus efficace quelles configurations étaient compatibles avec cette table.

A partir d'une liste comme celle de la table 4.8, ce programme crée tout d'abord une liste de toutes les configurations possibles, organisée sous la forme d'un arbre. Il calcule ensuite les TRR entre les orbites isotopes à deux orbites expérimentales, comme dans la table 4.9, et élimine de l'arbre toutes les configurations où apparaissent deux itinéraires dont le taux est différent de la valeur expérimentale, par exemple toutes les configurations où l'orbite n°6 est  $x^2yxy^2$  et l'orbite n° 8a est  $x^2y^2(xy)^2$ , pour reprendre l'exemple de la table 4.9.

Si en principe la même étape est répétée pour chaque paire d'orbites expérimentales, en pratique la structure en arbre permet d'effectuer naturellement des recoupements entre les informations déjà acquises et d'éviter tous les calculs inutiles. Pour fixer les idées, le traitement du fichier que nous avons pris comme exemple nécessite environ une centaine de calculs de TRR, et s'effectue en 30 secondes sur un Compaq 386/20, alors qu'une méthode naïve aurait demandé  $8 \times 10^4$  évaluations, soit environ 7 heures de calcul.

Le résultat obtenu est au premier abord quelque peu décevant dans la mesure où aucune configuration ne se trouve être compatible avec les valeurs expérimentales. Deux éventualités sont envisageables : (i) la structure topologique de l'attracteur est

proche mais légèrement différente de celle d'un fer à cheval, (ii) Certaines valeurs expérimentales sont erronées.

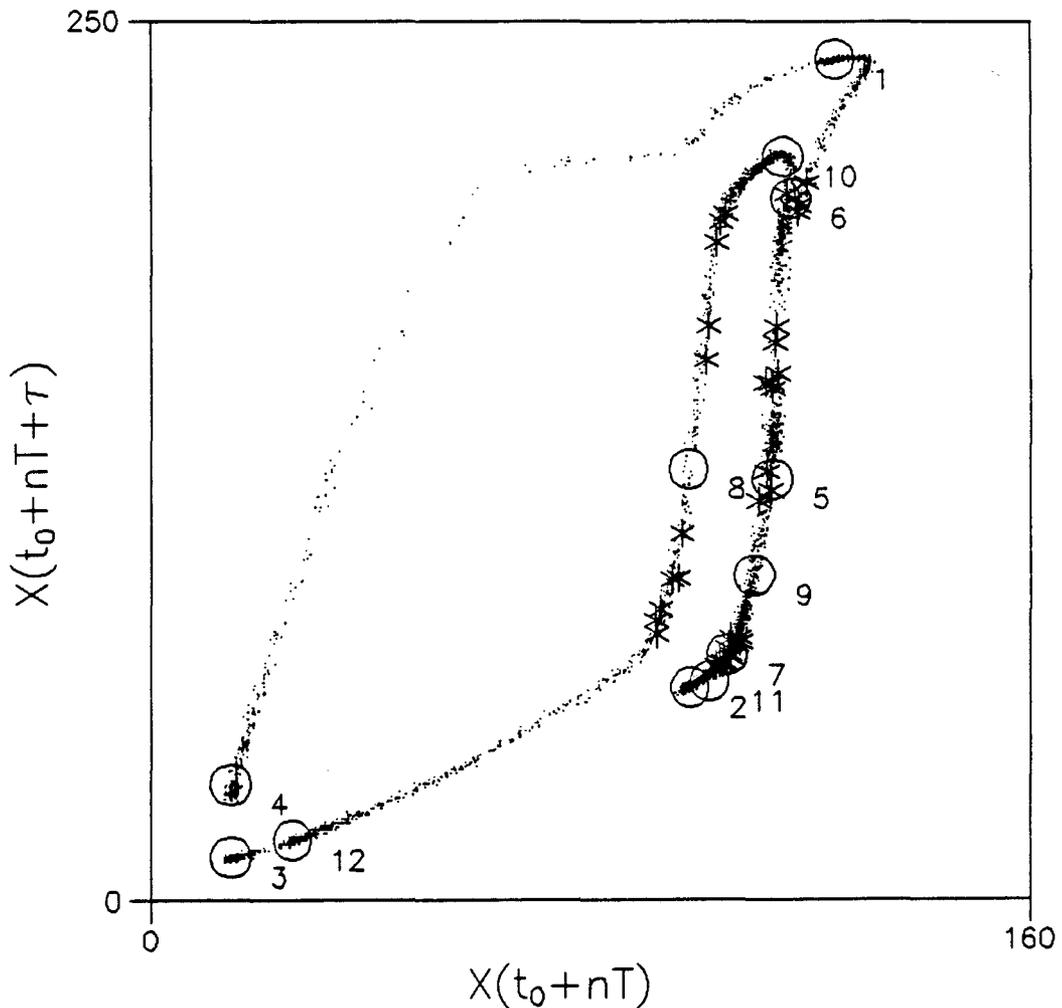
Comme rien jusque là n'avait laissé penser que la première hypothèse fût juste, nous avons a priori plutôt retenu la seconde et cherché à déterminer si des solutions pouvaient être obtenues en ne tenant pas compte d'une ou de plusieurs valeurs de la table. Il se trouve que si chaque valeur de la table est écartée tour à tour, on ne trouve une solution que dans un seul cas, plus précisément lorsqu'on ignore le TRR entre les orbites n° 10a et 12.

La probabilité d'erreur étant non nulle (voir le 4.5.5.a), le fait de trouver une solution en retirant une seule valeur de la table confirme fortement que la structure topologique de l'attracteur est toujours décrite par le gabarit du fer à cheval au-delà de la crise. Il faut toutefois noter que l'on ne trouve pas de solution unique, puisque deux configurations se trouvent être compatibles et sont présentées dans la table 4.11 (cela revient tout de même à en éliminer 3838).

Orbites	Configuration n°1	Configuration n°2
6	$x^2yxy^2$	$x^2y^2xy$
8 a	$x^2yxyxy^2$	$x^2y^2(xy)^2$
8 b	$x^2y^3xy^2$	$x^2y^2xy^3$
10a	$x^2yx^2y^3xy$	$(x^2y)^2xy^3$
10b	$x^2y(xy)^2xy^2$	$x^2y^2(xy)^3$
11	$x^2y^3(xy^2)^2$	$x^2y^2xy^2xy^3$
12	$x^2yx^2y^3(xy)^2$	$(x^2y)^2xyxy^3$

Table 4.11 L'analyse topologique des orbites périodiques indique que leurs itinéraires symboliques sont donnés de manière globale par l'une des deux configurations ci-dessus

Il ne manque plus donc qu'une information supplémentaire permettant de trancher entre ces deux possibilités pour pouvoir attribuer à chaque orbite périodique un itinéraire symbolique unique. Nous avons tiré cette information de l'examen des sections de Poincaré.



**Fig. 4.53** Section de Poincaré. Les astérisques correspondent aux orbites créées avant la crise. Les ronds correspondent à l'orbite n°12.

On remarquera en effet que les orbites de type 2 présentes dans le fichier que nous analysons étaient déjà contenues dans les attracteurs observés avant la crise. En indiquant la position de ces

orbites dans la section de Poincaré, nous pouvons donc localiser approximativement les régions visitées avant la crise (fig. 4.53).

Or, nous savons comment coder les points situés dans ces régions : la partie située en gros à gauche (resp. à droite) du pli correspond au symbole "x" (resp. "y"), ce qui est par ailleurs confirmé par l'itinéraire symbolique des orbites de type 2. Nous avons indiqué sur la figure 4.53 les intersections de l'orbite n°12 avec le plan de section. Cinq intersections consécutives (du point 5 au point 9), sont situées dans la région où nous disposons d'un codage, ce qui nous permet de déduire que l'itinéraire symbolique de cette orbite doit nécessairement contenir la séquence  $y^3xy$ . On se convaincra facilement, en se reportant à la table 4.11, que seule la première possibilité de codage est compatible avec cette observation. Ayant identifié de manière unique l'itinéraire symbolique de l'orbite n°12, nous obtenons donc du même coup l'itinéraire symbolique de toutes les autres orbites qui est celui donné par la configuration n°1 de la table 4.11.

Il faut insister sur le fait que nous n'avons du recourir à l'examen des sections de Poincaré que parce que nous ne disposions d'un nombre insuffisant d'orbites. Avec quelques orbites supplémentaires, la détermination de l'itinéraire des orbites périodiques aurait pu être effectuée uniquement à partir de leurs propriétés topologiques. En particulier, la méthode que nous avons exposée pourrait se révéler extrêmement utile dans l'analyse de simulations numériques de modèles théoriques. Dans ce cas en effet, la possibilité d'obtenir de longues séries temporelles d'une excellente précision permettrait d'utiliser un nombre beaucoup plus

grand d'orbites périodiques, et de pousser l'analyse jusqu'à des périodes beaucoup plus élevées.

#### 4.6.3.c Construction d'une partition génératrice

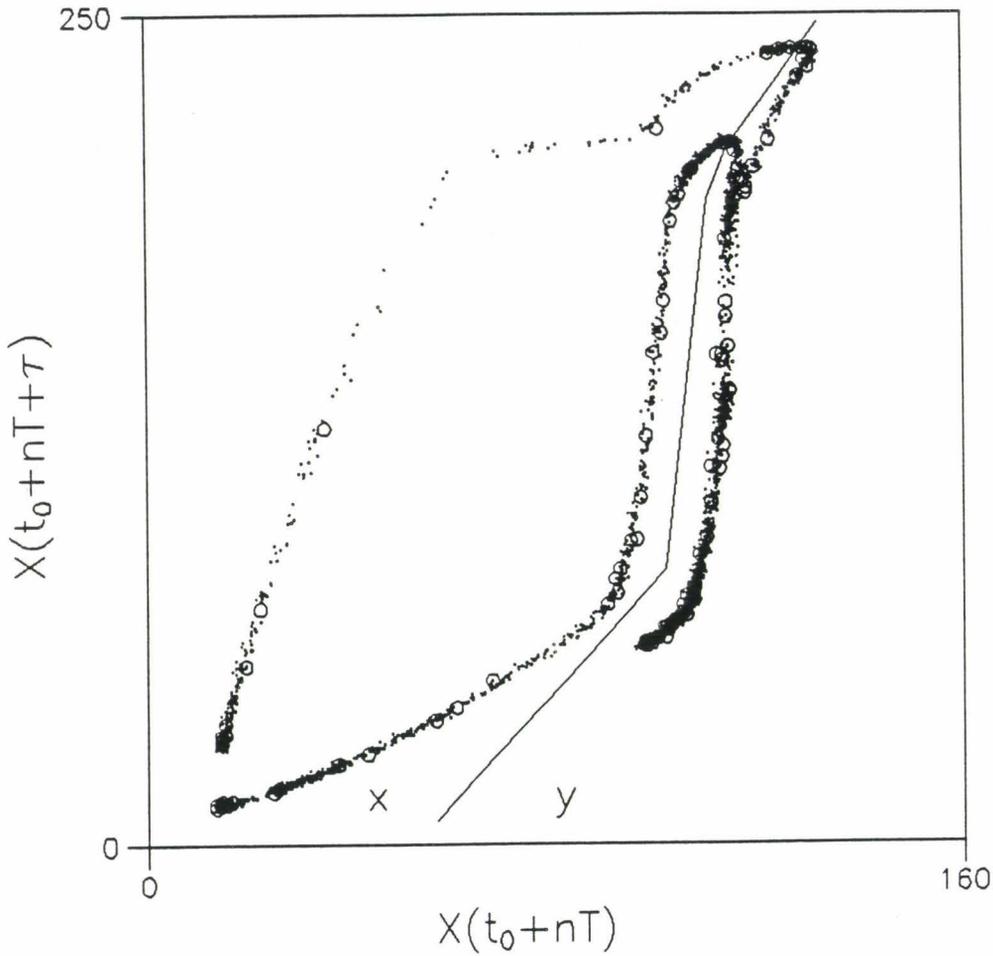
Par ailleurs, connaissant l'itinéraire de l'orbite n°12 et les points correspondants à la séquence  $y^3xy$ , il est facile d'attribuer à chaque point de cette orbite un symbole  $x$  ou  $y$  d'après l'ordre dans lequel ils sont parcourus. De manière analogue à ce que nous avons vu dans la section 4.4.3.b pour les points périodiques sur le gabarit, nous pouvons de plus attribuer à chaque point de l'orbite n°12 une des douze permutations circulaires de l'itinéraire symbolique de l'orbite. Ce nom constitue le motif de base du codage symbolique de la trajectoire d'un point périodique  $P$ , soit  $\{P, F(P), F^2(P), \dots, F^n(P), F^{n+1}(P)=P, \dots\}$ . La première lettre indique le symbole affecté à un point donné.

Supposons qu'il existe une partition du plan de section en deux régions " $x$ " et " $y$ " qui soit génératrice, c'est à dire que le codage symbolique de la trajectoire passée et future d'un point  $P$ ,  $\{\dots, F^{-m}(P), \dots, F^{-2}(P), F^{-1}(P), P, F(P), F^2(P), \dots, F^n(P), \dots\}$  permette de localiser de manière unique le point  $P$ . On peut alors pour chaque orbite de type 3 chercher quelle est la plus longue séquence correspondant à l'itinéraire symbolique d'une orbite de type 2, pour lesquelles le codage des points périodiques est connu.

Pour l'orbite n°12, par exemple, cette séquence est  $\Psi=y^3xy$ , qui est l'itinéraire symbolique de l'orbite 5b, ou  $yxyxy$ , qui est celui de l'orbite 5a. Si la partition est génératrice, le point de l'orbite de type 3 le plus proche du point de nom symbolique  $\Psi$  de l'orbite de type 2 doit posséder un nom symbolique commençant par  $\Psi$ . Cela est bien vérifié pour l'orbite n°12, pour laquelle nous connaissons déjà

le symbole affecté à chaque point, ayant identifié les points 5 à 9 comme correspondant à la séquence  $y, y, y, x, y$ .

Cette procédure permet d'attribuer rapidement et de manière unique un symbole et un nom symbolique à tous les points de chaque orbite périodique de type 3. Sa validité est confirmée par le fait que le codage en  $x$  ou  $y$  de chaque point périodique ainsi obtenu peut être résumé par une règle très simple, indiquée sur la figure 4.54 : les points situés à gauche (resp. droite) de la ligne en pointillés sont codés  $x$  (resp.  $y$ ). La frontière est relativement bien localisée, compte tenu du faible nombre d'orbites utilisées, grâce à des orbites très proches et situées de part et d'autre de la frontière. Le fait que les environs de la frontière soient bien échantillonnés peut s'expliquer par le fait que l'on y observe une plus forte densité de points que dans les autres parties de l'attracteur.



**Fig. 4.54** Codage symbolique des trajectoires dans la section de Poincaré. Les points situés à gauche de la frontière sont codés "x", les autres "y".

On remarquera que la frontière entre les deux régions passe très près des endroits de forte courbure de la section de Poincaré (les "plis"), mais pas nécessairement exactement par eux. Nous avons déjà évoqué ce point lors de l'analyse des attracteurs avant la crise. Cela signifie que l'obtention d'un codage symbolique par des méthodes topologiques est non triviale, dans le sens où la partition obtenue est plus précise que la méthode empirique consistant à relier les endroits de forte courbure de la section (voir par exemple [Finardi, 92]).

Néanmoins, le fait que la frontière passe près de ces plis présente une forte analogie avec le codage symbolique des applications à un maximum de l'intervalle, où la frontière passe par le point critique [Hao 89], ou avec la conjecture de Grassberger et Kantz [1985b], qui en constitue une généralisation pour les applications du plan dans lui-même. Selon cette conjecture, la frontière de la partition doit passer par des lieux de tangence homocline, c'est-à-dire les points du plan où les variétés stable et instable de l'attracteur sont tangentes. La partition la plus simple est obtenue en sélectionnant les tangences homoclines "primaires", où la courbure est la moins forte.

De manière évidente, des lieux de tangence homocline devraient se trouver près des plis de la section de Poincaré. En effet, sous l'action du repliement, des parties différentes de la variété instable sont amenées l'une sur l'autre, comme cela est schématisé sur la figure 4.55.

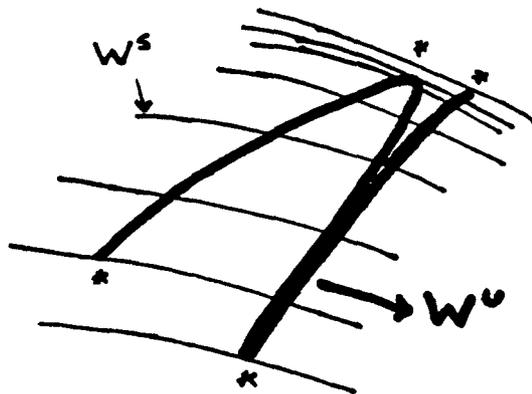


Fig. 4.56 Représentation schématique d'une tangence homocline.

La forte densité de points observée dans ces régions pourrait alors être expliquée par le fait que les lieux de tangence homocline

présentent des dimensions fractales anormalement basses [Politi 88], ce qui correspond effectivement à une plus grande densité de probabilité. Remarquons enfin que les plis "macroscopiques" que l'on discerne dans la section sont la conséquence de l'action du flot sur une période de modulation, tandis les variétés stable et instable ne sont rigoureusement déterminées qu'en suivant les trajectoires sur un nombre infini de périodes. Ceci pourrait expliquer pourquoi la frontière de la partition et les plis ne sont pas confondus. Il faut cependant noter qu'on peut trouver une valeur de la phase pour laquelle la frontière de la partition est pratiquement confondue avec les plis. Ce n'est cependant pas le cas général.

La partition génératrice approchée que nous avons construite a été obtenue à l'aide : (i) du calcul des invariants topologiques, (ii) de l'hypothèse qu'il existait une application continue de l'espace des séquences symboliques vers la section de Poincaré. Sauf pour déterminer éventuellement la parité de la torsion d'orbites, nous n'avons pas fait usage des tracés de  $X(t_0+(n+1)T)$  en fonction de  $X(t_0+nT)$ , qui pourtant, quand ils représentaient le graphe d'une application de l'intervalle, nous avaient servi à déterminer l'itinéraire symbolique des orbites périodiques.

Or, si on reporte sur un tel tracé les points correspondant à une orbite périodique extraite, on s'aperçoit que l'itinéraire de cette orbite peut être retrouvé par la règle suivante : chaque point situé sur une branche de pente positive (négative) correspond au symbole "x" (resp. "y"). De manière remarquable, ceci est non seulement vérifié pour les phases où l'on obtient un tracé relativement proche d'une application de l'intervalle, mais également pour la plupart des phases. Pour illustrer ce point, nous

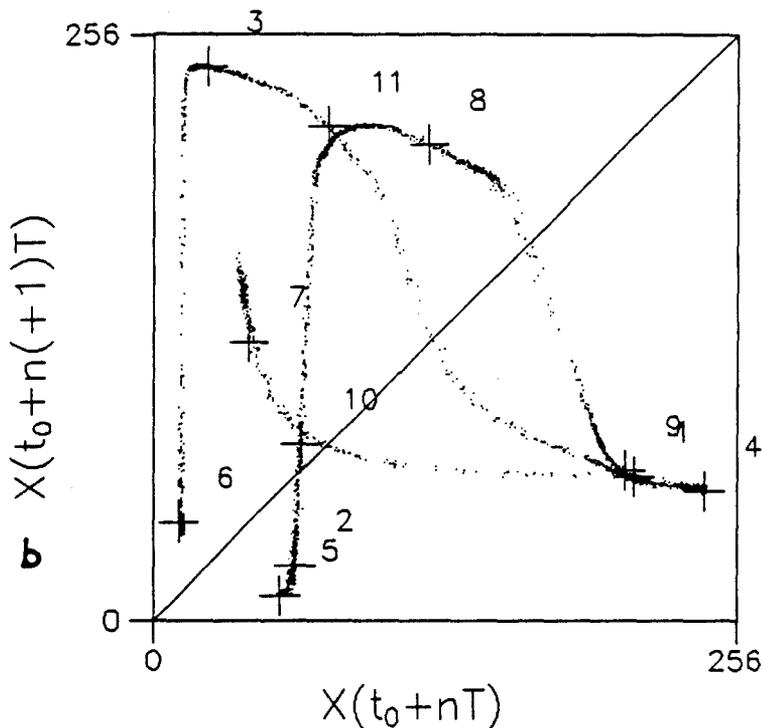
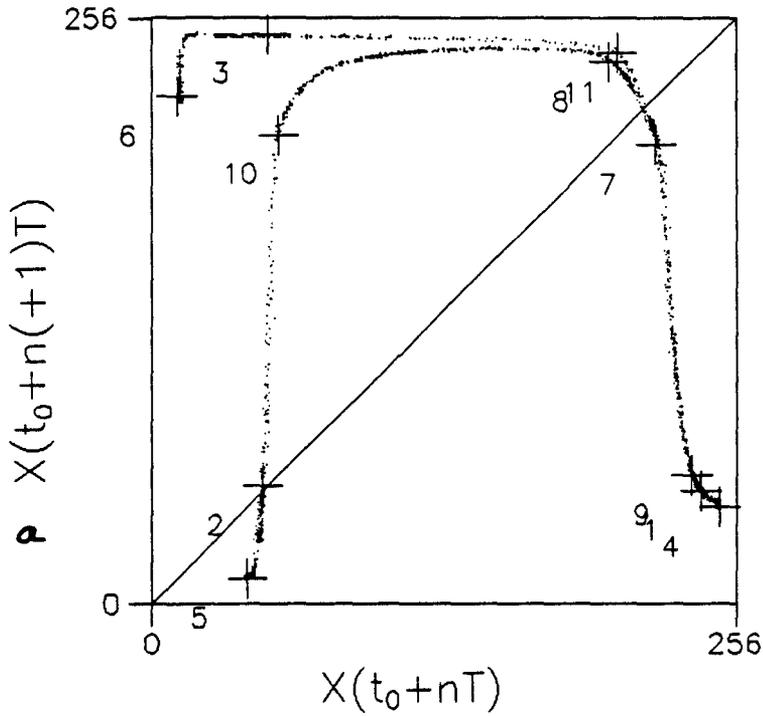
avons représenté sur les figures 4.56a et 4.56b deux "applications" de premier retour obtenues pour des phases différentes, ainsi que les points appartenant à l'orbite périodique n°11. On vérifie facilement que les deux tracés indiquent que le nom symbolique de l'orbite est  $yxyyxyyyxy \approx x^2y^3xy^2xy^2$ , qui est bien celui que nous avons déterminé par ailleurs.

Ce résultat est d'une grande importance, car il semble indiquer que même lorsque  $X(t_0+(n+1)T)=f(X(t_0+nT))$  n'est plus le graphe d'une application, il peut encore être utilisé pour coder symboliquement les trajectoires. Il faut cependant noter qu'il n'est légitime de procéder ainsi que si, comme nous l'avons fait plus haut, l'on a démontré que le gabarit associé à l'attracteur ne comportait que deux branches, et que l'une d'entre elles renverse l'orientation. En effet la structure compliquée du tracé pourrait également indiquer la nécessité d'introduire de nouveaux symboles.

Dans le cas présent il semble que nous puissions associer les parties de pente négative à l'une des branches du gabarit (y) et les parties de pente positive à l'autre branche (x). Il faudrait cependant vérifier qu'il s'agit là d'un résultat général qui ne soit pas lié à une particularité de notre système.

Si nous voulons utiliser les diagrammes de premier retour pour coder symboliquement les trajectoires apériodiques sur l'attracteur, nous ne pouvons évidemment pas utiliser les diagrammes du type de celui de la figure 4.56b tels quels. En effet, il y a ambiguïté sur le symbole à affecter aux points situés aux croisements de deux branches. Néanmoins, ce diagramme peut être utilisé pour localiser précisément les points de pente nulle, et déterminer les points correspondants sur un diagramme comme celui de la figure 4.56a,

où l'on n'observe pas d'intersection, mais où la position des points critiques n'apparaît pas clairement.



**Fig. 4.56** Diagrammes de premier retour obtenus pour deux phases différentes.

#### 4.6.4 Crises et dynamique symbolique

Nous avons observé plus haut que l'orbite périodique  $3T$   $xy^2$  joue un rôle particulier : c'est la collision de l'attracteur chaotique issu de la cascade de doublements de période avec cette orbite qui est responsable des phénomènes de crise observés, que l'on soit dans le cas de la crise de frontière (le système bascule sur une orbite  $3T$  stable ou sur un attracteur  $3C$ ), ou de la crise intérieure (l'attracteur  $C$  s'étend brutalement en un attracteur  $C+3C$ ).

Dans la classification des orbites du fer à cheval, l'orbite  $xy^2$  est créée dans la même bifurcation tangente que l'orbite  $x^2y$ . Lors de cette bifurcation les deux orbites (l'une stable, l'autre instable) apparaissent avec un itinéraire symbolique  $xy^2$ . L'orbite stable devient  $x^2y$  peu avant de se déstabiliser dans un doublement de période (cette bifurcation exige que l'orbite mère ait une torsion impaire).

Or, si on consulte une liste des orbites périodiques du fer à cheval classée par ordre d'apparition dans la séquence universelle, on constate que les orbites  $xy^2$  et  $x^2y$  sont respectivement la dernière orbite de type 2 et la première orbite de type 3. Par ailleurs, nous avons constaté plus haut que les fichiers enregistrés avant les crises ne contenaient que des orbites de type 2, et que dans cette zone de paramètres, les orbites semblaient apparaître dans l'ordre prédit par la séquence universelle. Enfin, les fichiers enregistrés au voisinage immédiat de la crise contiennent des orbites faiblement instables qui sont parmi les dernières orbites de type 2 à être créées dans la séquence universelle, comme par exemple l'orbite  $xy(xy^2)^3$ .

Ces observations indiquent clairement que la collision avec l'orbite  $3T$   $xy^2$  survient lorsque toutes les orbites de type 2 ont été créées, ce qui est confirmé par le fait que toutes les orbites visitant les régions explorées après la crise sont de type 3. Nous avons donc un moyen simple de distinguer les attracteurs chaotiques situés avant la crise de ceux observés au-delà au moyen de la dynamique symbolique : la séquence  $x^2$  est interdite dans la dynamique symbolique des premiers et autorisée dans celle des seconds. Cette règle simple a également été observée récemment par Finardi et al. [1992] dans l'analyse d'une crise de frontière dans un oscillateur à résonance magnétique nucléaire.

Le fait que de nouvelles séquences symboliques apparaissent après une crise n'est pas surprenant en soi, puisque de nouvelles régions de l'espace sont explorées. Ce qui est intéressant ici est le fait que l'on obtienne une règle extrêmement simple, et que de plus cette règle semble faire partie d'un schéma global. En effet, si partant de paramètres pour lesquels on observe un attracteur  $C+3C$ , on augmente l'amplitude de modulation, on observe une crise de frontière où le système bascule sur une orbite  $4T$ .

En utilisant les méthodes que nous avons présentées plus haut, il est facile d'établir que cette orbite est l'orbite  $x^3y$ , et que l'orbite instable avec laquelle l'attracteur est rentré en collision est sa partenaire  $x^2y^2$ . En analysant les attracteurs obtenus juste avant la crise, on observe qu'ils ne contiennent que des orbites de type 2 et 3. De plus, il semble que toutes les séquences de types 2 et 3 soient observées dans ces attracteurs. Par contre, si on augmente encore l'amplitude de modulation, l'orbite  $4T$  donne naissance par doublements de période à un attracteur chaotique  $4C$  en quatre

morceaux. La collision de cet attracteur avec l'orbite  $x^2y^2$  donne ensuite lieu à une crise de frontière où l'attracteur  $4C$  s'étend brutalement en un attracteur  $C+3C+4C$ . On trouvera une section de Poincaré de cet attracteur sur la figure 4.57.

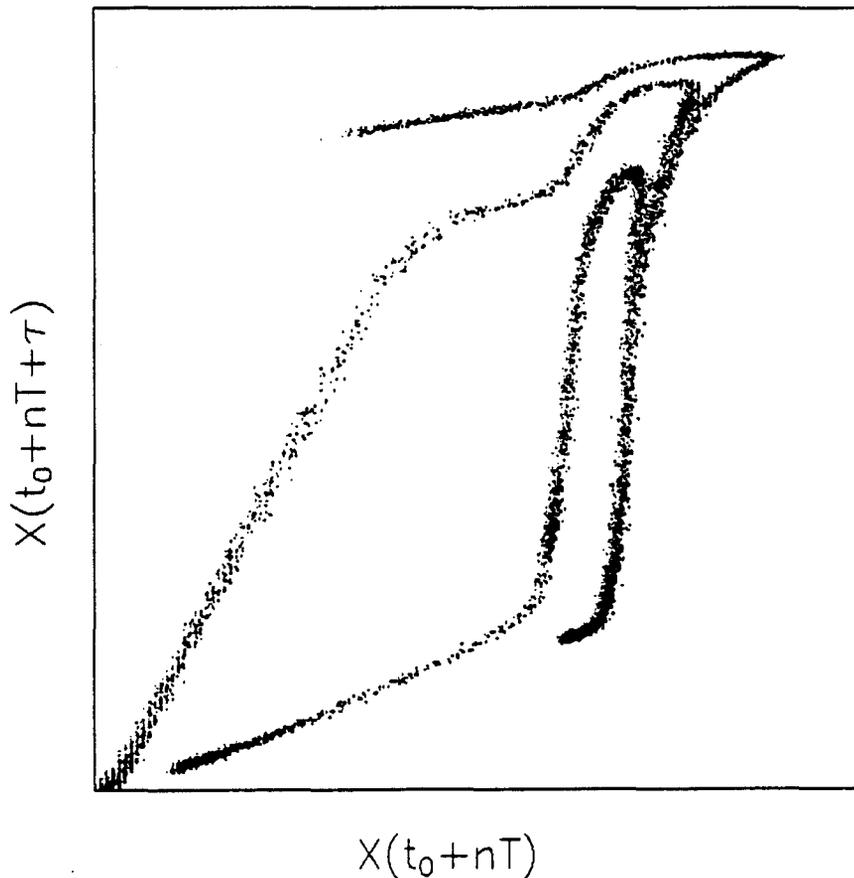


Fig. 4.57 Section de Poincaré d'un attracteur  $C+3C+4C$ .

Cet attracteur et l'attracteur  $4C$  contiennent des orbites périodiques de type 4, dont la première est bien évidemment l'orbite  $x^3y$ . On observe donc que c'est ici la séquence  $x^3$  qui devient autorisée après la crise.

Il semblerait donc que les séquences  $x^n$  ne puissent apparaître dans la dynamique symbolique de notre laser qu'au travers de

crises. Nous n'avions pas exploré lors de nos expériences les zones de paramètres correspondant à des amplitudes de modulation encore plus grandes, car nous avons affaire à des signaux très inhomogènes, mais il est intéressant de noter que, pour des amplitudes de modulation plus élevées, l'attracteur de la figure 4.57 rentre en collision avec une orbite  $5T$  instable, qui devrait logiquement être la partenaire de l'orbite  $x^4y$ .

Ces résultats sont tout à fait en accord avec des prédictions théoriques basées sur un modèle simple du laser à pertes modulées [Solari 87]. Il semblerait de plus qu'ils soient d'une portée plus générale, comme le montre l'étude des bassins d'attractions dans les systèmes forcés effectuée par Eschenazi et al. [1989].

En conclusion, nous avons affaire un système fortement dissipatif, ce qui entraîne que dans la plupart des cas, les orbites périodiques apparaissent dans un ordre compatible avec celui prédit par la séquence universelle. La différence majeure avec cette séquence est le fait que les orbites périodiques  $x^n y$  puissent coexister avec des attracteurs chaotiques. Ceci entraîne que les apparitions des séquences  $x^n$  coïncident avec des crises.

L'explication de ce phénomène se trouve peut-être dans les règles d'organisation topologique des orbites périodiques du fer à cheval. Nous avons en effet remarqué que les invariants caractérisant l'enlacement d'une orbite de type 2 et d'une orbite de type 3 ne dépendaient que des invariants propres des deux orbites. Il semble que cette propriété se généralise à l'enlacement de deux orbites de types différents, ce qui expliquerait que le schéma de bifurcation des orbites de type  $n$  et celui des orbites de type  $n+1$  soient largement indépendants.

Nous remarquerons enfin que les orbites  $x^n y$  jouent un rôle crucial dans le scénario global de bifurcation. Or, nous avons vu au chapitre 3 qu'au moins dans certains cas, ces orbites correspondent aux fenêtres périodiques  $P^{(n)}$  observées dans des systèmes présentant du chaos homocline, entre autres dans l'exemple que nous avons donné d'une tangence homocline sur le cycle instable d'itinéraire  $x$ .

Cette analogie ne doit pas nous étonner : dans les deux cas, nous assistons à la formation du même ensemble invariant hyperbolique, qui est le fer à cheval de Smale. Nous pouvons donc sans doute expliquer l'organisation globale des régimes chaotiques dans notre laser par une tangence homocline sur le cycle  $x$ , correspondant à une intensité rigoureusement nulle sur toute une période de modulation. Pour des raisons physiques, cette tangence ne peut jamais être approchée : en effet cette tangence constituerait une crise de frontière, et l'on observerait au-delà de la crise une divergence de l'intensité laser vers moins l'infini, ce qui est évidemment impossible. Il est donc impossible d'observer un fer à cheval complet dans le laser monomode à modulation de pertes.

#### 4.7 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce chapitre, nous avons analysé, à l'aide d'outils de la théorie des noeuds, l'organisation topologique d'orbites périodiques extraites de signaux expérimentaux provenant d'un laser CO<sub>2</sub> à pertes modulées. Nous avons établi que cette organisation était, dans une large gamme de paramètres, celle prédite par le gabarit du fer à cheval avec torsion globale nulle, et que par conséquent les régimes chaotiques observés correspondaient à la formation d'un fer à cheval de Smale, l'un des mécanismes les plus simples et les plus répandus de transition vers le chaos.

De plus, nous avons montré que le calcul des invariants topologiques apporte bien plus d'information que ne l'exige la simple détermination du gabarit. Nous avons exploité cette information pour construire, dans la section de Poincaré, un codage symbolique des trajectoires dans les cas où n'existait d'application de premier retour unidimensionnelle bien définie. Cette étude a montré que dans les régimes fortement dissipatifs, les diagrammes de premier retour (ne correspondant pas forcément à une application) peuvent être utilisés pour le codage, dès que l'on a clairement établi la structure topologique de l'attracteur.

Cette méthode devrait se montrer également utile dans l'analyse de systèmes moins dissipatifs, et fournir une règle de codage à partir de la section de Poincaré dans de nombreux cas. C'est pourquoi il serait intéressant de vérifier le bien-fondé de cette approche à beaucoup plus grande échelle, sur des simulations numériques de modèles du laser à pertes modulées. La possibilité d'acquérir de longues séries temporelles pratiquement exemptes de

bruit permettrait alors de définir la frontière de la partition génératrice avec une excellente précision.

Par ailleurs, nos signaux expérimentaux subissent nécessairement un filtrage dans la chaîne de mesure. Il serait donc intéressant de vérifier par des simulations numériques l'effet du filtrage et de tester la robustesse des méthodes topologiques. Il est en effet connu (voir chapitre 2) qu'un filtrage excessif provoque une distorsion de l'espace des phases, qui se manifeste par une augmentation des dimensions fractales mesurées. Si cette distorsion s'effectue d'abord aux petites échelles, elle devrait plutôt affecter les orbites de période élevée, et autoriser la détermination du gabarit à partir des orbites de faible période jusqu'à des taux de filtrage importants.

De plus, partant d'un attracteur de dimension fractale  $3-\varepsilon$ , il est possible de construire par filtrage un attracteur de dimension  $3+\varepsilon$ . Il serait alors intéressant d'étudier si la structure topologique de l'attracteur initial peut ~~être~~ toujours être obtenue à partir de l'attracteur filtré, bien que la théorie des noeuds ne puisse plus, en toute rigueur, être appliquée. Dans ce cas, cela signifierait que le critère de validité de la méthode est non pas la dimension de l'espace des phases, mais plutôt le nombre d'exposants de Lyapunov positifs.

La détermination de l'itinéraire symbolique des orbites extraites et la construction d'un codage symbolique nous a permis de caractériser de manière globale les crises observées dans notre laser : la collision avec une orbite  $nT$  coïncide avec l'apparition dans la dynamique symbolique des séquences  $x^{n-1}$  et la création de la dernière orbite de type  $n-1$ . Il nous reste à utiliser le codage

symbolique obtenu pour déterminer des invariants tels que l'entropie métrique, l'entropie topologique, ou les entropies généralisées, ainsi que les complexités généralisées introduites par Badii [1990,91]. Nous disposerions alors de méthodes indépendantes de celles utilisées de manière standard pour évaluer par exemple le plus grand exposant de Lyapunov [Wolf 85].

Nous remarquerons pour conclure que les invariants les plus puissants que nous avons utilisés sont les taux de rotation relative, qui sont des invariants d'isotopie régulière. Ces invariants ne permettent pas de distinguer plusieurs orbites du fer à cheval, comme par exemple les orbites  $x^2yxy^2$  et  $x^2y^2xy$ , ce qui rend nécessaire l'emploi des invariants caractérisant l'enlacement de deux orbites. Or, par des mouvements d'isotopie régulière, il est possible de placer les intersections d'une orbite périodique avec un plan de section selon n'importe quelle disposition.

Il semble cependant peu vraisemblable que n'importe quel arrangement de ces intersections soit compatible avec l'existence d'une application de premier retour différentiable. Il doit donc être possible de trouver des invariants topologiques permettant d'obtenir l'itinéraire symbolique d'une orbite à partir de la configuration de ses intersections avec un plan de section, et qui distinguent les deux orbites  $6T$  mentionnées plus haut. Il faut en effet remarquer qu'en utilisant la théorie des noeuds, c'est l'orbite périodique "nue" que nous caractérisons.

Or, dans un système dynamique, une orbite périodique est "habillée" par ses variétés stable et instable. Comme nous l'avons remarqué dans la section consacrée au gabarit, une orbite périodique ne peut traverser sa variété stable ou celle d'une autre

orbite. Cela implique que l'arrangement des points de l'orbites périodique dans un plan de section est fortement contraint, et que des invariants caractérisant cet arrangement faciliteraient grandement l'analyse topologique.

En conclusion, les méthodes topologiques de caractérisation de régimes chaotiques complètent remarquablement les méthodes plus usuelles que sont les calculs de dimensions fractales ou d'exposants de Lyapunov. Elle permettent de plus d'éclairer dans une certaine mesure les schémas de bifurcation observés.

C'est pourquoi nous projetons de les appliquer à court terme à d'autres systèmes expérimentaux, tels que le laser à absorbant saturable en régime multimode, ou le laser à fibre optique dopée. Nous avons obtenu pour ce dernier des résultats préliminaires très prometteurs, qui laissent entrevoir la première observation expérimentale d'un gabarit du type de celui du pendule forcé périodiquement. Ces études permettraient en outre de vérifier que des modèles phénoménologiques simples de ces deux dispositifs sont compatibles avec les structures topologiques observées expérimentalement.

## **CONCLUSION**



Nous avons présenté dans ce mémoire l'analyse de signaux chaotiques provenant de deux lasers  $\text{CO}_2$ , l'un à absorbant saturable, l'autre à pertes modulées, au moyen de trois méthodes de caractérisation différentes : le calcul de dimensions fractales, l'étude de la structure des applications de premier retour, et l'analyse topologique de l'organisation topologique des orbites périodiques instables.

L'évaluation de la dimension de corrélation des attracteurs rencontrés dans le laser à modulation de pertes a confirmé que celui-ci présente du chaos à petit nombre de degrés de liberté. C'est surtout le problème du choix de la variable utilisée pour reconstruire les attracteurs qui a été abordé : le logarithme de l'intensité émise par le laser s'est révélé être une variable plus naturelle que l'intensité elle-même, et a permis d'améliorer notablement la qualité des estimations. Ce résultat présente un intérêt pour toutes les méthodes opérant dans l'espace des phases, et a par exemple rendu possible l'analyse topologique présentée au chapitre 4.

L'étude des attracteurs rencontrés dans le laser à absorbant saturable au moyen d'applications de premier retour a permis de confirmer la nature homocline des régimes chaotiques observés. Les simulations numériques d'un modèle simple de ce laser se sont montrées en accord avec ce résultat. Plutôt qu'un scénario à la Shil'nikov impliquant un point fixe instable, c'est une tangence homocline sur une orbite périodique instable qui a été mise en évidence dans ce modèle.

Les attracteurs chaotiques présentent un degré d'organisation élevé. L'étude des orbites périodiques instables dans le laser à

modulation de pertes l'a montré : leur organisation topologique globale, analysée à l'aide de la théorie des noeuds, et caractérisée par une surface bidimensionnelle (le gabarit), a pu être déterminée à partir des invariants des trois orbites de plus petite période. La construction du gabarit n'utilise donc qu'une petite partie de l'information fournie par le calcul des invariants topologiques de toutes les orbites périodiques.

Nous avons utilisé cette information pour construire un codage symbolique approché dans une section de Poincaré. Cette méthode semble prometteuse et devrait pouvoir s'appliquer à des systèmes où une application de premier retour à une dimension ne peut être obtenue.

Enfin, l'étude de la dynamique symbolique a permis de caractériser de manière simple les crises observées dans ce laser.

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**



- Abraham, N.B. [1988], "Selected illustrations and interpretations of laser physics and laser instabilities in experimental systems", in *Laser Physics and Laser Instabilities* (World Scientific, Singapore).
- Arecchi, F.T., R. Meucci, G.P. Puccioni and J.R. Tredicce [1982], "Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched laser", *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1217.
- Arecchi, F.T., G.L. Lippi, G.P. Puccioni and J.R. Tredicce [1984], "Deterministic chaos in laser with an injected signal", *Opt. Commun.* **51**, 308.
- Arecchi, F.T., R. Meucci, and W. Gadomski [1987], "Laser dynamics with competing instabilities", *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2205.
- Arecchi, F.T., A. Lapucci, R. Meucci, H. Mancini, J.A. Roversi and P.H. Coulet [1988a], "Experimental characterization of Shil'nikov chaos by statistics of return times", *Europhys. Lett.* **6**, 677.
- Arecchi, F.T., W. Gadomski, A. Lapucci, R. Meucci, H. Mancini and J.A. Roversi [1988b], "Laser with feedback: an optical implementation of competing instabilities, Shil'nikov chaos, and transient fluctuations enhancement", *J. Opt. Soc. Am. B* **5**, 1153.
- Argoul, F., A. Arnéodo and P. Richetti [1987a], "Experimental evidence for homoclinic chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction", *Phys. Lett. A* **120**, 269.
- Argoul, F., A. Arnéodo and P. Richetti [1987b], "Dynamique symbolique dans la réaction de Belousov-Zhabotinskii : une illustration expérimentale de la théorie de Shil'nikov des orbites homoclines", *J. Chim. Phys.* **84**, 1367.
- Arimondo, E., F. Casagrande, L. Lugiato, and P. Glorieux [1983], "Repetitive passive Q-switching and bistability in lasers with saturable absorber", *Appl. Phys.* **30B**, 57.
- Arimondo, E., P. Bootz, P. Glorieux and E. Menchi [1985], "Pulse shape and phase diagram in the passive Q-switching of CO<sub>2</sub> lasers", *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 193.
- Arnéodo, A., P. Coulet, E.A. Spiegel and C. Tresser [1985], "Asymptotic chaos", *Physica D* **14**, 327.
- Arnéodo, A., G. Grasseau and E.J. Kostelich [1987], "Fractal dimensions and the  $f(\alpha)$  spectrum of the Hénon attractor", *Phys. Lett. A* **124**, 426.
- Atten, P., J.G. Caputo, B. Malraison, and Y. Gagne [1984], "Détermination de dimensions d'attracteurs pour différents écoulements", *Journal de Mécanique Théorique et appliquée*, numéro spécial 1984, p.133.

- Auerbach, D., P. Cvitanovic, J.-P. Eckmann, G. Gunaratne and I. Procaccia [1987], "Exploring chaotic motion through periodic orbits", *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2387.
- Badii, R., and A. Politi [1984], "Intrinsic oscillations in measuring the fractal dimension", *Phys. Lett. A* **104**, 303.
- Badii, R., and A. Politi [1985], "Statistical description of chaotic attractors : the dimension function", *J.Stat.Phys.* **40**, 725.
- Badii, R., and A. Politi [1986], "On the fractal dimension of filtered chaotic signals", in *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*, G. Mayer-Kress ed. (Springer, Berlin).
- Badii, R., G. Broggi, B. Derighetti, M. Ravani, S. Ciliberto, A. Politi, and M.A. Rubio [1988], "Dimension increase in filtered chaotic signals", *Phys. Rev. Lett.* **60**, 979.]
- Badii, R. [1990], "Complexity as unpredictability of the scaling dynamics", *Europhys. Lett.* **13**, 599.
- Badii, R. [1991], "Quantitative characterization of complexity and predictability", *Phys. Lett. A* **160**, 372.
- Bassett, M.R. and J.L. Hudson [1988], "Shil'nikov chaos during copper electrodisolution", *J. Phys. Chem.* **92**, 6963.
- Bekkali, A. [1989], "Chaos dans les lasers CO<sub>2</sub> : effets galvaniques et effets d'un absorbant saturable", Thèse de Doctorat, Université de Lille 1.
- Ben Mizrachi, A., I. Procaccia and P. Grassberger [1983], "The characterization of experimental (noisy) strange attractors", *Phys. Rev. A* **29**, 2591.
- Birman, J.S. [1975], *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, *Annals of Mathematics Studies* Vol. 82 (Princeton University Press, Princeton).
- Birman, J.S., and R. F. Williams [1983], "Knotted periodic orbits in dynamical systems-I : Lorenz's equations", *Topology* **22**, 47.
- Boyland, P. [1985], "Braid types and a topological method of proving positive entropy", Boston University preprint.
- Braun, T., J.A. Lisboa, and J.A.C. Gallas [1992], "Evidence of homoclinic chaos in the plasma of a glow discharge", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2770.
- Buley, E.R., and F.W. Cummings [1964], "Dynamics of a system of N atoms interacting with a radiation field", *Phys. Rev.* **134**, A1454.
- Buzug, Th., T. Reimers, G. Pfister [1990], "Optimal reconstruction of strange attractors from purely geometric arguments", *Europhys. Lett.* **13**, 605.

- Chenciner, A. [1985], "Systèmes dynamiques différentiables", in *Encyclopedia Universalis*, vol. 17.
- Cvitanovic, P. [1984], *Universality in Chaos* (Adam Hilger, Bristol).
- Cvitanovic, P. [1988a], Invariant measurement of strange sets in terms of cycles, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2729.
- Cvitanovic, P., G.H. Gunaratne, and I. Procaccia [1988b], "Topological and metric properties of Hénon-type attractors", *Phys. Rev. A* **38**, 1503 (1988).
- Dangoisse, D., P. Glorieux and D. Hennequin [1986], "Laser chaotic attractors in crisis", *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2657.
- Dangoisse, D., P. Glorieux, and D. Hennequin [1987a], "Chaos in a CO<sub>2</sub> laser with modulated parameters: experiments and numerical simulations", *Phys. Rev. A* **36**, 4775.
- Dangoisse, D., A. Bekkali, F. Papoff and P. Glorieux [1987b], *International Workshop on Instability and Chaos In Nonlinear systems*, paper TC 16-1, edited by N.B Abraham, E. Arimondo and R. Boyd (Il Ciocco, ETS editrice).
- Dangoisse, D., A. Bekkali, F. Papoff and P. Glorieux [1988], "Shilnikov dynamics in a passive Q-switching laser", *Europhys. Lett.* **6**, 335.
- Dangoisse, D., D. Hennequin, M. Lefranc, and P. Glorieux [1992], "The laser with a saturable absorber: A paradigm for the study of laser instabilities", in *Evolution of Dynamical Structures in Complex Systems*, Springer Proceedings in Physics, vol. 69, Eds. R. Friedrich, A. Wunderlin (Springer, Berlin).
- Dobrovine, B., S. Novikov, et A. Fomenko [1982], *Géométrie Contemporaine, Deuxième partie: Géométrie et topologie des variétés* (Editions Mir, Moscou).
- Eckmann, J.-P. [1981], "Roads to turbulence in dissipative dynamical systems", *Rev. Mod. Phys.* **53**, 643.
- Eckmann, J.-P., and D. Ruelle [1985], "Ergodic theory of chaos and strange attractors", *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617.
- Eckmann, J.-P., S. Oliffson Kamphorst, D. Ruelle and S. Ciliberto [1986], "Lyapunov exponents from time series", *Phys. Rev. A* **34**, 4971.
- Eschenazi, E., H.G. Solari, and R. Gilmore [1989], "Basins of attraction in driven dynamical systems", *Phys. Rev. A* **39**, 2609.
- Falconer, K.J. [1985], *The Geometry of Fractal Sets* (Cambridge University Press, Cambridge).
- Farmer, J. D., E. Ott, J. A. Yorke [1983], "The dimension of chaotic attractors", *Physica D* **7**, 153.

- Finardi, M., L. Flepp, J. Parisi, R. Holzner, R. Badii, and E. Brun [1992], "Topological and metric analysis of heteroclinic crises in laser chaos", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2989.
- Fraser, A.M., and H.L. Swinney [1986], "Independent coordinates for strange attractors from mutual information", *Phys. Rev. A* **33**, 1134.
- Fredrickson, P., J.L. Kaplan, E.D. Yorke and J.A. Yorke [1983], "The Liapunov dimension of strange attractors", *J. Diff. Eq.* **49**, 185.
- Freyd, P., D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Milette and A. Ocneanu, "A new polynomial invariant of knots and links", *Bull. Amer. Math. Soc.* **12**, 239 (1985).
- Froehling, H., J.P. Crutchfield, D. Farmer, N.H. Packard, and R. Shaw [1981], "On determining the dimension of chaotic flows", *Physica* **3D**, 605.
- Gambaudo, J.-M., S. Van Strien and C. Tresser [1989], "The periodic orbit structure of orientation preserving diffeomorphisms on  $D^2$  with topological entropy zero", *Ann. Inst. Henri Poincaré* **49**, 335.
- Gaspard, P. [1982], "Mécanismes d'apparition de comportements chaotiques dans les systèmes dynamiques dissipatifs", *Mémoire de Licence, Université Libre de Bruxelles*.
- Gaspard, P., R. Kapral and G. Nicolis [1984], "Bifurcation phenomena near homoclinic systems: a two-parameter analysis", *J. Stat. Phys* **35**, 697.
- Gaspard, P., and X.J. Wang [1987a], "Homoclinic orbits and mixed-mode oscillations in far-from-equilibrium systems", *J. Stat. Phys.* **48**, 151.
- Gaspard, P. [1987b], "Tangences homoclines dans les systèmes dynamiques dissipatifs", *Thèse de Doctorat, Université Libre de Bruxelles*.
- Gavrilov, N.K., and L.P. Shilnikov [1972], "On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve, I", *Math.USSR Sbornik.* **88**, 467 (1972).
- Gavrilov, N.K., and L.P. Shilnikov [1973], "On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve, II", *Math.USSR Sbornik.* **90**, 139.
- Glendinning, P., and C. Sparrow [1984], "Local and global behavior near homoclinic orbits", *J. Stat. Phys.* **35**, 645.
- Gonzalez, D.L., M.O. Magnasco, G.B. Mindlin, H.A. Larrondo, and L. Romanelli [1989], "A universal departure from the classical period doubling spectrum", *Physica D* **39**, 111.

- Grassberger, P. [1983a], "Generalized dimensions of strange attractors", *Phys. Lett. A* **97**, 227.
- Grassberger, P., and I. Procaccia [1983b], "Characterization of strange attractors", *Phys. Rev. Lett.* **50**, 346.
- Grassberger, P., and I. Procaccia [1983c], "Measuring the strangeness of strange attractors", *Physica D* **9**, 189.
- Grassberger, P., and I. Procaccia [1984], "Dimensions and entropies of strange attractors from a fluctuating dynamics approach", *Physica D* **13**, 34.
- Grassberger, P. [1985a], "Generalizations of the Hausdorff dimension of fractal measures", *Phys. Lett. A* **107**, 101.
- Grassberger, P., and H. Kantz [1985b], "Generating partitions for the dissipative Hénon map", *Phys. Lett. A* **163**, 235.
- Grassberger, P. [1986], "Estimating the fractal dimensions and entropies of strange attractors", in *Chaos*, A.V. Holden ed., p.291 (Manchester University Press).
- Grassberger, P. [1988], "Finite sample corrections to entropy and dimension estimates", *Phys. Lett. A* **128**, 369.
- Grassberger, P. [1990], "An optimized box-assisted algorithm for fractal dimensions", *Phys. Lett. A* **148**, 163.
- Grasyuk, A.Z., and A.N. Oraevsky [1964], "Transient processes in molecular oscillators", *Radio. Eng. Electron. Phys.* **9**, 424.
- Grebogi, C., E. Ott and J. A. Yorke [1983], "Crises, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos", *Physica D* **7**, 181.
- Guckenheimer, J., and P. Holmes [1983], *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, vol.42 (Springer, Berlin).
- Haken, H. [1975], "Analogy between higher instabilities in fluids and lasers", *Phys. Lett.* **53A**, 77.
- Haken, H. [1983], "At least one Lyapunov exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point", *Phys. Lett.* **94A**, 71.
- Haken, H. [1986], "The adiabatic elimination principle in dynamical theories", in *Optical Instabilities*, eds R.W. Boyd, M.G. Raymer and L.M. Narducci (Cambridge University Press, Cambridge).
- Halsey, T.C., M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia and B.I. Shraiman [1986], "Fractal measures and their singularities : the characterization of strange sets", *Phys. Rev. A* **33**, 1141.
- Hamermesh, M. [1989], *Group theory and its Applications to Physical Problems* (Dover).

- Hao, B.-L. [1989], *Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems* (World Scientific).
- Hennequin, D. [1986], "Chaos dans un laser CO<sub>2</sub> à modulation interne", Thèse de Doctorat, Université de Lille I.
- Hennequin, D., F. de Tomasi, L. Fronzoni, B. Zambon and E. Arimondo [1987], *International Workshop on Instability and Chaos In Nonlinear systems*, paper FB 9-1, edited by N.B. Abraham, E. Arimondo and R. Boyd (Il Ciocco, ETS editrice, 1987).
- Hennequin, D., F. de Tomasi, B. Zambon and E. Arimondo [1988], "Homoclinic orbits and cycles in the instabilities of a laser of a saturable absorber", *Phys. Rev. A* **37**, 2243.
- Hennequin, D., F. de Tomasi, L. Fronzoni, B. Zambon and E. Arimondo [1989a], "Influence of noise on the quasi-homoclinic behavior of a laser with a saturable absorber", *Opt. Commun.* **70**, 253 (1989).
- Hennequin, D., M. Lefranc, A. Bekkali, D. Dangoisse and P. Glorieux [1989b], "Characterization of Shil'nikov chaos in a CO<sub>2</sub> laser containing a saturable absorber", in *Measures of Chaos and Complexity*, N.B. Abraham, A.M. Albano, A. Passamante and P.E. Rapp, eds. (Plenum, New York,).
- Hénon, M. [1976], "A two-dimensional mapping with a strange attractor", *Commun. Math. Phys.* **50**, 69.
- Hentschel, H.G.E., and I. Procaccia [1983], "The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors", *Physica D* **8**, 435.
- Holmes, P. [1984], "Bifurcation sequences in horseshoe maps: infinitely many routes to chaos", *Phys. Lett. A* **104**, 299 (1984).
- Holmes, P., and R. F. Williams [1985], "Knotted periodic orbits in suspensions of Smale's Horseshoe: torus knots and bifurcation sequences", *Arch. Ration. Mech. Anal.* **90**, 115.
- Holmes, P. [1986], "Knotted periodic orbits in suspensions of Smale's Horseshoe: period multiplying and cabled knots", *Physica D* **21**, 7.
- Holmes, P. [1988], "Knots and orbit genealogies in nonlinear oscillators", in *New Directions in Dynamical Systems*, p. 150, eds. T. Bedford and J. Swift, London Mathematical Society Lecture Notes 127 (Cambridge University Press).
- Holmes, P. [1989], "Knotted periodic orbits in the suspensions of Smale's hoeseshoe: Extended families and bifurcation sequences", *Physica D* **40**, 42.
- Jacques, A., and P. Glorieux [1982], "Observation of bistability in a CO<sub>2</sub> laser exhibiting passive Q-switching", *Opt. Commun.* **40**, 455.

- Kaplan, J.L., and J.A. Yorke [1979], in *Functionnal Differential equations and approximation of fixed points*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 730, p.204 (Springer).
- Kauffman, L.H. [1987], *On Knots*, Annals of mathematic studies, study 115, Princeton University Press (Princeton, 1987).
- Kauffman, L.H. [1991], *Knots and Physics* (World Scientific).
- Kolmogorov, A.N. [1958], Dokl. Akad. Nauk. SSSR **119**, 861.
- Lathrop, D.P., and E.J. Kostelich [1989], "Characterization of an experimental strange attractor by periodic orbits", Phys. Rev. A **40**, 4028.
- Ledrappier, F. [1981], "Some relations between dimension and Lyapunov exponent", Commun. Math. Phys. **81**, 229.
- Lefranc, M., D. Hennequin and D. Dangoisse [1991], "Homoclinic chaos in a laser with a saturable absorber", J. Opt. Soc. Am. B **8**, 239.
- Lefranc, M., D. Hennequin and P. Glorieux [1992], "Improved correlation dimension estimates through change of variable", Phys. Lett. A **163**, 269.
- Lefranc, M., and P. Glorieux [1993], "Topological analysis of chaotic signals from a CO<sub>2</sub> laser with modulated losses", à paraître dans International Journal of Bifurcation and Chaos, numéro spécial de juin 1993.
- Liebert, W., and H.G. Schuster [1989], "Proper choice of the time delay for the analysis of chaotic time series", Phys. Lett. A **142**, 107.
- Liebert, W., K. Pawelzik, and H.G. Schuster [1991], "Optimal embeddings of chaotic attractors from topological considerations", Europhys. Lett. **14**, 521
- Lorenz, E.N. [1963], "Deterministic nonperiodic flow", J. Atmos. Sci. **20**, 130.
- Lugiato, L.A., P. Mandel, and L.M. Narducci [1984], "Adiabatic elimination in nonlinear dynamical systems", Phys. Rev. A **29**, 1438.
- Markov, A.A [1935], Recueil Math. Moscou **1**, 73.
- Matsuoka, T. [1985], "Braids of periodic points and a 2-dimensional analogue of Sarkovskii ordering", preprint
- Melvin, P., and N.B. Tufillaro [1991], "Templated and framed braids", Phys. Rev. A **44**, 3419.
- Metropolis, M., M.L. Stein, and P.R. Stein [1973], "On the finite limit sets for transformations of the unit interval", J. Comb. Theory **15**, 25.

- Milnor, J., and R. Thurston [1988], "On iterated maps of the interval", Lect. Notes in Math. 1342, in *Dynamical systems proceedings*, ed. J.C. Alexander (Springer, Berlin).
- Mindlin, G.B., X.-J. Hou, H. G. Solari, R. Gilmore and N. B. Tufillaro [1990], "Classification of strange attractors by integers", *Phys. Rev. Lett* **64**, 2350.
- Mindlin, G.B., H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore and X.-J.Hou [1991], "Topological analysis of chaotic time series data from the Belousov-Zhabotinskii reaction", *J. Nonlinear Sci.* **1**, 147.
- Mitschke, F. [1990], "Acausal filters for chaotic signals", *Phys. Rev. A* **41**, 1169.
- Möller, M., W. Lange, F. Mitschke, N.B. Abraham and U. Hübner [1989], "Errors from digitizing and noise in estimating attractor dimensions", *Phys. Lett. A* **138**, 176.
- Mrugala, F., and P. Peplowski [1980], "Stability investigations of laser with saturable absorber", *Z. Phys.* **B38**, 359.
- Narducci, L.M. [1988], "Theoretical outline of laser physics and laser instabilities", in *Laser Physics and Laser Instabilities* (World Scientific, Singapore).
- Oseledec, V.I. [1968], "A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems", *Moscow. Math. Soc.* **19**, 197.
- Packard, N.H., J.P. Crutchfield, J.D. Farmer and R.S Shaw [1980], "Geometry from a time series", *Phys. Rev. Lett.* **45**, 712.
- Papoff, F., A. Fioretti, E. Arimondo and N.B. Abraham [1989], "Time return maps and distributions for the laser with a saturable absorber", in *Measures of Chaos and Complexity*, N.B. Abraham, A.M. Albano, A. Passamante and P.E. Rapp, eds. (Plenum, New York).
- Papoff, F., A. Fioretti and E. Arimondo [1991], "Return maps for intensity and time in a homoclinic-chaos model applied to a laser with a saturable absorber", *Phys. Rev. A* **44**, 4639.
- Papoff, F., A. Fioretti, E. Arimondo, G. B. Mindlin, H. Solari and R. Gilmore [1992], "Structure of chaos in the laser with saturable absorber", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1128 (1992).
- Politi, A., R. Badii, and P. Grassberger [1988], "On the geometric structure of non-hyperbolic attractors", *J. Phys. A* **21**, L763.
- Puccioni, G.P., A. Poggi, W. Gadomski, J.R. Tredicce and F.T. Arecchi [1985], "Measurement of the formation and evolution of a strange attractor in a laser", *Phys. Rev. Lett.* **55**, 339.

- Rössler, O.E. [1979], "Continuous chaos- four prototype equations", *Ann. N.Y. Acad. Sci.* **316**, 376.
- Renyi, A. [1970], *Probability theory* (North-Holland, Amsterdam).
- Richetti, P., and A. Arnéodo [1985], "The periodic-chaotic sequences in chemical reactions: a scenario close to homoclinic conditions?", *Phys. Lett.* **109A**, 359.
- Ruelle, D. and F. Takens [1971], "On the nature of turbulence", *Commun. Math. Phys.* **20**, 167.
- Russell, D.A., J.D. Hanson and E. Ott [1980], "Dimension of strange attractors", *Phys. Rev. Lett.* **45**, 1175.
- Sano, M., and Y. Sawada [1985], "Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic series", *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1082.
- Sargent III, M., M.O. Scully, and W.E. Lamb Jr. [1979], *Laser Physics*, (Addison Wesley).
- Sarkovski, A.N. [1964], "Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself", *Ukr. Math. Z.* **16**, 61.
- Shil'nikov, L.P. [1965], "A case of the existence of a countable number of periodic motions", *Sov. Math. Dokl.* **6**, 163.
- Shil'nikov, L.P. [1970], "A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle focus type", *Math. USSR Sbornik.* **10**, 191.
- Smale, S. [1967], "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 747.
- Smith, L.A., J.-D. Fournier and E.A. Spiegel [1986], "Lacunarity and intermittency in fluid turbulence", *Phys. Lett. A* **114**, 465.
- Smith, L.A. [1988], "Intrinsic limits on dimension calculations", *Phys. Lett. A* **133**, 283.
- Solari, H.G., E. Eschenazi, R. Gilmore and J. R. Tredicce [1987], "Influence of coexisting attractors on the dynamics of a laser system", *Opt. Commun.* **64**, 49.
- Solari, H.G., and R. Gilmore [1988a], "Relative rotation rates for driven dynamical systems", *Phys. Rev. A* **37**, 3096.
- Solari, H.G., and R. Gilmore [1988b], "Organization of periodic orbits in the driven Duffing oscillator", *Phys. Rev. A* **38**, 1566.
- Tachikawa, M., K. Tanii, M. Kajita and T. Shimizu [1986], "Undamped undulation superposed on the passive Q-switching of a CO<sub>2</sub> laser", *Appl. Phys. B* **39**, 83.
- Tachikawa, M., K. Tanii and T. Shimizu [1987], "Comprehensive interpretation of passive Q-switching and optical bistability in a

- CO<sub>2</sub> laser with an intracavity saturable absorber", *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 387.
- Tachikawa, M., F.-L. Hong, K. Tanii and T. Shimizu [1988], "Deterministic chaos in passive Q-switching pulsation of a CO<sub>2</sub> laser with saturable absorber", *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2266.
- Takens, F. [1981], "Detecting strange attractors in turbulence", in *Dynamical Systems and Turbulence*, p.366, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898 (Springer).
- Takens, F. [1985], "On the numerical determination of the dimension of an attractor", in *Dynamical Systems and Bifurcations*, p.99, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1125 (Springer).
- Theiler, J. [1986], "Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data", *Phys. Rev. A* **34**, 2427.
- Theiler, J. [1987], "Efficient algorithm for estimating the correlation dimension from a set of discrete points", *Phys. Rev. A* **36**, 4456.
- Theiler, J. [1988], "Lacunarity in a best estimator of fractal dimension", *Phys. Lett. A* **133**, 195.
- Theiler, J. [1990a], "Statistical precision of dimension estimators", *Phys. Rev. A* **41**, 3038.
- Theiler, J. [1990b], "Estimating fractal dimension", *J. Opt. Soc. Am. A* **7**, 1055.
- de Tomasi, F., D. Hennequin, B. Zambon and E. Arimondo [1989], "Instabilities and chaos in an infrared laser with saturable absorber : experiments and vibrorotational model", *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 45.
- Theiler, J. [1991], "Some comments on the correlation dimension of  $1/f^\alpha$  noise", *Phys. Lett. A* **155**, 480.
- Tredicce, J.R., F.T. Arecchi, G.L. Lippi and G.P. Puccioni [1985], "Instabilities in lasers with an injected signal", *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 173.
- Tredicce, J.R., F.T. Arecchi, G.P. Puccioni, A. Poggi and W. Gadomski [1986], "Dynamic behavior and onset of low-dimensional chaos in a modulated homogeneously broadened single-mode laser : experiments and theory", *Phys. Rev. A* **34**, 2073.
- Tredicce, J.R., and L.M. Narducci [1987], "Emergence of chaos in laser systems and the development of diagnostic techniques", in *Directions in chaos*, vol. 1, p. 148, ed. Hao Bai-Lin (World Scientific, Singapore).
- Tresser, C. [1984], "About some theorems by L.P. Shil'nikov", *Ann. Inst. Henri Poincaré* **40**, 441.

- Tufillaro, N.B., H. G. Solari and R. Gilmore [1990], "Relative rotation rates: Fingerprints for strange attractors", *Phys. Rev. A* **41**, 5717.
- Tufillaro, N.B., R. Holzner, L. Flepp, E. Brun, M. Finardi, and R. Badii [1991], "Template analysis for a chaotic NMR laser", *Phys. Rev. A* **44**, 4786.
- Tufillaro, N.B., T. Abott, and J. Reilly [1992], *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos* (Addison Wesley).
- Turner, J.S, J.C. Roux, W.D. McCormick and H.L. Swinney [1981], "Alternating periodic and chaotic regimes in a chemical reaction-experiments and theory", *Phys. Lett. A* **85**, 9.
- Uezu, T., and Y. Aizawa [1982], "Topological character of a periodic solution in three dimensional ordinary differential equation system", *Prog. Theor. Phys.* **68**, 1907.
- Weiss, C.O., and J. Brock [1986], "Evidence of Lorenz-type chaos in lasers", *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 2804.
- Wolf, A., J.B. Swift, H.L. Swinney and J.A. Vastano [1985], "Determining Lyapunov exponents from a time series", *Physica D* **16**, 285.
- Zambon, B., F. de Tomasi, D. Hennequin and E. Arimondo [1989], "Investigations of models and experimental studies of a stationary regime for a laser with a saturable absorber", *Phys. Rev. A* **40**, 3782.
- Zambon, B. [1991], "Theoretical investigations of models for the laser with a saturable absorber : A case of homoclinic tangency to a periodic orbit", *Phys. Rev. A* **44**, 688.



## Résumé

Nous présentons dans ce travail les résultats obtenus en analysant par des méthodes de dynamique non linéaire les régimes chaotiques observés dans deux lasers CO<sub>2</sub>, l'un à absorbant saturable intracavité, l'autre à modulation de pertes.

L'alternance de régimes périodiques et chaotiques observée dans le laser à absorbant saturable est typique d'un mécanisme impliquant une tangence homocline sur un point fixe ou une orbite périodique instables. En analysant les trajectoires du système dans un espace des phases reconstruit à partir des signaux temporels, nous avons montré que la structure des applications de premier retour dans des sections de Poincaré convenablement choisies confirmait cette hypothèse. Les simulations numériques d'un modèle de ce laser ont par ailleurs précisé ce résultat.

Le laser à pertes modulées évolue vers le chaos via une classique cascade de doublements de période. Il présente par ailleurs des phénomènes de crises, où l'attracteur du système est brutalement modifié.

Les attracteurs chaotiques observés ont tout d'abord été caractérisés par le calcul de leur dimension fractale. Nous avons pu montrer que la qualité des estimations obtenues dépend grandement de la variable utilisée pour reconstruire les attracteurs dans un espace des phases. Le logarithme de l'intensité du rayonnement émis s'est révélé être une variable beaucoup plus naturelle que l'intensité elle-même, qui était jusque-là utilisée.

Nous avons également caractérisé les régimes chaotiques de ce laser en extrayant des signaux temporels les orbites périodiques instables plongées dans les attracteurs correspondants. A l'aide d'outils provenant notamment de la théorie des noeuds, nous avons déterminé l'organisation topologique globale de ces orbites, qui s'est révélée être celle prédite pour un "fer à cheval" de Smale.

En analysant des attracteurs situés de part et d'autre de crises, nous avons montré par ailleurs que l'information apportée par les invariants topologiques des orbites périodiques permettait de construire un codage symbolique des trajectoires. L'étude de cette dynamique symbolique a permis de caractériser de manière simple les phénomènes de crises observés.

