50376
1992
335

Numéro d'ordre: 879

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en MECANIQUE

par

UNIVERSITE DES Sc. et Techn. BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE LILLE

ANDRIANARAHINJAKA Herinirina

UNIVERSITE DES Sc. et Techn. BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE LILLE

ETUDE DES INSTABILITES LORS DE LA FABRICATION DE FILMS THERMOPLASTIQUES BIETIRES PAR LE PROCEDE DE SOUFFLAGE DE GAINE

Soutenue le 17 Février 1992 devant la commission d'examen

Membres du jury:

Président-Rapporteur :	M. LEBOUCHÉ, Professeur à l'Université de Nancy I
Rapporteur :	M. BUISINE, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille
Membres :	M. BOIS, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille
	M. MICHEAU, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille

à Lucien et Célestine,

à *Fabienne*

AVANT-PROPOS

Le présent travail a été effectué au sein du Département Conception de Systèmes, Laboratoire de Mécanique de Lille (URA CNRS 1441).

Monsieur MICHEAU, Directeur dudit Laboratoire, en a assumé la direction scientifique; je suis heureux de pouvoir lui exprimer ici ma profonde reconnaissance. Ses précieux conseils, son énergie débordante et son enthousiasme à toute épreuve ont constitué pour moi une source permanente d'encouragement et de motivation.

Messieurs M. LEBOUCHÉ, Directeur du LEMTA de Nancy, et BUISINE, Professeur à l'Université de Lille I, m'ont fait l'honneur de bien vouloir porter un intérêt à ce travail et de le juger; qu'ils trouvent ici l'expression de ma très vive gratitude.

Les trop courtes discussions que nous avons eues ont été pour moi une source d'enrichissement sur le plan scientifique.

Je tiens également à adresser mes remerciements à Monsieur BOIS, Professeur à l'Université de Lille I, qui a bien voulu examiner ce travail.

Je ne saurais oublier les camarades et collègues du Laboratoire ainsi que du Département de Construction Mécanique de l'EUDIL; je leur exprime ici mon amicale gratitude.

Je citerai particulièrement Monsieur MUNOZ pour son omniprésence en ce qui concerne les questions informatiques.

Enfin, à tous mes proches qui n'ont pas cessé de m'encourager durant les quelques périodes de doute, quand bien même, pour certains d'entre eux, cette thèse a été un véritable "désastre"; qu'il me soit permis de leur exprimer ici ma profonde affection.

TABLE DES MATIERES

INDEX	TITRE	PAGE
	PRINCIPALES NOTATIONS	7
Chapitre 1	**INTRODUCTION**	13
Chapitre 2	**LE SOUFFLAGE DE GAINE - POSITION DU PROBLEME**	
2.1	Mise en oeuvre	19
2.1.1	Paramètres de mise en oeuvre	19
2.1.2	Conduite du procédé	20
2.1.3	Quelques ordres de grandeur	21
2.2	Instabilités rencontrées	21
2.2.1	Etude antérieure dans cette voie	22
2.2.2	Résultats expérimentaux reportés dans la littérature	24
2.3	Conclusion	28

PREMIERE PARTIE

Chapitre 3	**GENERALITES SUR L'ETIRAGE DES POLYMERES FONDUS - HYPOTHESES GENERALES**	
3.1	Généralités	29
3.2	Etude bibliographique	31
3.2.1	Le comportement des polymères fondus – Modélisation	33
3.2.2	Les écoulements élongationnels uniaxiaux	37
3.2.3	Le soufflage de gaine	55
3.2.4	Calcul des valeurs propres	69
3.3	Bilan global – Approche adoptée – Hypothèses générales	72
3.4	Méthodologie d'étude	76

INDEX	TITRE	PAGE
Chapitre 4	**ETIRAGE D'UN FILM PLAN**	
4.1	Mise en équations	79
4.1.1	Equations générales	79
4.1.2	Conditions aux limites	83
4.1.3	Formulation adimensionnelle	83
4.2	Solution stationnaire	84
4.2.1	Equations et conditions aux limites	84
4.2.2	Procédure de résolution	84
4.2.3	Résultats	85
4.2.3.1	Généralités	85
4.2.3.2	Fluide newtonien	87
4.2.3.3	Fluide de Maxwell	87
4.2.3.4	Modèle de PTT	89
4.2.3.5	Application – Etude de cas pratiques	92
4.2.4	Conclusion	97
4.3	Analyse de stabilité	103
4.3.1	Mise en équations	103
4.3.2	Etude des instabilités d'étirage de type "Draw Resonance"	105
4.3.2.1	Généralités	105
4.3.2.2	Equations linéarisées et conditions aux limites	106
4.3.2.3	Techniques de calcul des valeurs propres	109
4.3.2.3.1	Généralités – Méthodes de résolution	109
4.3.2.3.2	Etude comparative des différentes méthodes	113
4.3.2.3.2.1	Généralités	113
4.3.2.3.2.2	Résultats	116
4.3.2.3.3	Synthèse et discussion – Définition d'une méthodologie de calcul	133
4.3.2.4	Applications	137
4.3.3	Etude des vibrations transversales	141
4.4	Conclusion globale	142
Chapitre 5	**ETIRAGE D'UN FILM AVEC SURPRESSION**	
5.1	Généralités	155
5.2	Mise en équations	155
5.2.1	Equations générales	155
5.2.2	Conditions aux limites	158
5.2.3	Formulation adimensionnelle	159

INDEX	TITRE	PAGE
5.3	Solution stationnaire	159
5.3.1	Equations et conditions aux limites	159
5.3.2	Procédure de résolution	159
5.3.3	Résultats	160
5.3.4	Conclusion	160
5.4	Analyse de stabilité	161
5.4.1	Mise en équations	161
5.4.1.1	Généralités	161
5.4.1.2	Equations linéarisées	162
5.4.1.3	Conditions aux limites	164
5.4.2	Procédures de résolution	165
5.4.3	Résultats	166
5.5	Conclusion	168
Chapitre 6	**LE SOUFFLAGE DE GAINE**	
6.1	Mise en équations	169
6.1.1	Equations générales	169
6.1.2	Conditions aux limites	172
6.1.3	Formulation adimensionnelle	173
6.2	Solution stationnaire	173
6.2.1	Equations et conditions aux limites	173
6.2.2	Procédure de résolution	174
6.2.3	Résultats	174
6.2.3.1	Fluide newtonien	175
6.2.3.2	Modèle de PTT	177
6.2.3.3	Simulation de résultats expérimentaux	179
6.2.4	Conclusion	183
6.3	Analyse de stabilité	189
6.3.1	Mise en équations	189
6.3.1.1	Généralités	189
6.3.1.2	Equations linéarisées	189
6.3.1.3	Conditions aux limites	189
6.3.1.4	Procédures de résolution	190
6.3.2	Résultats	191
6.3.2.1	Généralités	191
6.3.2.2	Fluide newtonien	192
6.3.2.3	Modèle de PTT	204
6.3.2.4	Synthèse des résultats obtenus – Discussion Comparaison avec les résultats expérimentaux	207
6.3.3	Conclusion	210

INDEX	TITRE	PAGE
	INSTABILITES D'ETIRAGE - CONCLUSION GENERALE	211

D E U X I E M E P A R T I E

Chapitre 7	**PRISE EN COMPTE DU JET D'AIR DE REFROIDISSEMENT COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE**	
7.1	Généralités	213
7.2	Etude bibliographique	214
7.2.1	Couplage fluide-structure	214
7.2.2	Jets pariétaux turbulents	217
7.3	Bilan global	219
7.4	Modélisation des efforts dus au jet d'air	220
7.4.1	Principe	220
7.4.2	Structure du jet – Hypothèses	220
7.4.3	Efforts exercés sur le film	223
7.4.4	Discussion	224
7.5	Méthodologie d'étude	224
7.6	Etirage d'un film plan	225
7.6.1	Mise en équations	225
7.6.2	Résultats	226
7.6.3	Conclusion	228
7.7	Etirage d'un film avec surpression	229
7.7.1	Mise en équations	229
7.7.2	Calcul stationnaire	229
7.7.3	Analyse de stabilité	230
7.7.4	Conclusion	231
7.8	Soufflage de gaine	232
7.8.1	Mise en équations	232
7.8.2	Calcul stationnaire	233
7.8.3	Analyse de stabilité	234
7.8.4	Conclusion	234
7.9	Conclusion globale	235

INDEX	TITRE	PAGE
Chapitre 8	**CONCLUSION**	237
	REFERENCES	245
	ANNEXES	
ANNEXE A	DIVERS	253
ANNEXE B	ETIRAGE D'UN FILM PLAN	276
ANNEXE C	ETIRAGE D'UN FILM AVEC SURPRESSION	281
ANNEXE D	SOUFFLAGE DE GAINE	285
ANNEXE E	DIVERS	304
ANNEXE F	COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE	307

PRINCIPALES NOTATIONS

Nous donnons ci-après la liste des principales notations utilisées.

- Les désignations accompagnées du symbole (*) concernent les variables adimensionnelles et "constantes" provenant de l'adimensionnement des équations.

- Nous nous sommes efforcé d'adopter les notations qui sont celles classiquement utilisées et/ou de faire en sorte qu'elles soient les plus mnémotechniques possibles. De ce fait, un même symbole peut revêtir différentes significations. Toutefois, un tel cas est rare et n'induit aucune confusion.

NOTATIONS LATINES

a	rayon de la bulle
a_0	rayon initial de la bulle, rayon de la filière
a_f	rayon final de la bulle
A	quantité d'air emprisonnée dans la bulle (*)
B	différence de pression de part et d'autre du film (*)
C	contrainte circonférentielle (*)
C_E	coefficient d'expansion du jet d'air de refroidissement (rapport entre l'épaisseur à la ligne de figeage et l'épaisseur initiale)
C_G	coefficient correcteur affectant le module de cisaillement G
C_p	chaleur spécifique du polymère
$\vec{d}$, d_{ij}	tenseur des taux de déformation, composantes
D	coefficient de transfert de chaleur (*)
De	nombre de Deborah (*)
E	taux d'étirage
E_M	module d'élasticité de la partie solidifiée (*)
$\vec{e}$, e_{ij}	tenseur des taux de déformation, composantes (*)
E_a	énergie d'activation
F_Z	force d'étirage (cas de la bulle), force d'étirage par unité de largeur (cas plan)
F_U	forces "fluides" (débit de quantité de mouvement)
$\vec{g}$, g_{ij}	tenseur métrique, composantes (cf. Annexe A4)
G	taux de gonflage, module de cisaillement (suivant le contexte)
h_c	coefficient de transfert de chaleur par convection forcée
h	épaisseur du film (*)

H	épaisseur du film
H_0	épaisseur initiale du film, entrefer de la filière
H_f	épaisseur finale du film
$\overset{\Rightarrow}{I}$	tenseur unité
k_1, k_2	rapports des extra-contraintes en sortie de filière
K	terme intervenant dans le modèle de PTT (cf. Annexe A2)
K_1,K_2	intégrales caractérisant le profil de similitude du jet d'air de refroidissement
K_M	module d'élasticité de la partie solidifiée
K_V	coefficient de viscosité
K_G	coefficient de module de cisaillement
$\overset{\Rightarrow}{L}$	tenseur gradient de vitesse du film
L_S	Longueur de la partie solidifiée
L_T	Longeur totale (distance entre les rouleaux d'entrainement et la sortie de filière)
M	taux d'amincissement (rapport entre l'épaisseur initiale et l'épaisseur finale du film)
n	exposant intervenant dans la corrélation entre le coefficient de transfert de chaleur et la vitesse de l'écoulement d'air
N	nombre de points de discrétisation
N_i	extra-contraintes (i = 1 à 3) (*)
p	pression hydrostatique (*)
P	pression hydrostatique, pression ambiante (*) (suivant le contexte)
P_{int}	pression interne absolue
q	pression dynamique de l'écoulement d'air de refroidissement
Q_E	débit volumique de matière (cas de la bulle), débit volumique par unité de largeur (cas plan)
Q_{air}	débit d'air de refroidissement
r	rayon de la bulle (*)
r_f, R	rayon final de la bulle (*)
R_g	constante des gaz parfaits
s	température du film (*)
s_{air}	température de l'air de refroidissement (*)
s_f	température finale du film
S	contrainte axiale (*)
Re	nombre de Reynolds (*)
R_1, R_3	rayons de courbure du film (*)

t	temps
T	température du film
T_U	tensions "fluides"
T_{11}, T_{33}	tensions dans le film
T_{air}	température de l'air de refroidissement
T_Z	force d'étirage (cas de la bulle), force d'étirage par unité de largeur (cas plan) (*)
T_1	force d'étirage corrigée (*)
u	vitesse du film (*)
$\vec{U}$	vitesse de l'écoulement d'air autour de la bulle
U_0	vitesse moyenne de sortie de l'air de refroidissement
U_{air}	vitesse du jet d'air
U_{max}	vitesse maximale du jet d'air
V	vitesse du film
V_0	vitesse initiale du film, vitesse d'extrusion
V_f	vitesse d'étirage
V_i	composantes de la vitesse du film (i = 1,2,3)
w	déflexion transversale (*)
W	déflexion transversale
We	nombre de Weissenberg (*)
x	abscisse axiale (*)
X	hauteur de figeage (*)
X_T	hauteur totale de la bulle (*)
y	abscisse normale à l'axe d'étirage (cas plan)
z	abscisse axiale
Z	hauteur de figeage

NOTATIONS GRECQUES

α	(cf. Annexe B2)
β	coefficient de viscosité (*)
ζ	coefficient de module de cisaillement (*)
γ	coordonnée normale réduite (profil de similitude) (*)
$\overset{\Rightarrow}{\Gamma}$	tenseur gradient de vitesse effectif (modèle de PTT, cf. Annexe A2)
δ	épaisseur du jet d'air

ΔP	différence de pression de part et d'autre du film
ε	paramètre du modèle de PTT
Φ_U	forces fluides (*)
φ	angle dans un système de coordonnées cylindriques
χ	temps de relaxation (*)
μ	viscosité du polymère (*)
λ	temps de relaxation du polymère
Λ	module de cisaillement (*)
ξ	paramètre du modèle de PTT, coordonnée curviligne axiale
ξ_i	abscisses curvilignes (i = 1,2,3)
$\dot{\gamma}$	taux de déformation, taux d'élongation
ρ	masse volumique du polymère
ρ_1, ρ_3	rayons de courbure du film
ρ_{air}	masse volumique de l'air
$\overline{\overline{\sigma}}$, σ_{ij}	tenseur des contraintes, composantes
Σ_0	section de l'orifice de sortie du jet d'air
Σ_{air}	section transversale du jet d'air
θ	angle entre la tangente au film et l'axe d'étirage
$\overline{\overline{\tau}}$, τ_{ij}	tenseur des extra-contraintes, composantes
τ	temps (*)
η	viscosité du polymère, coordonnée curviligne normale au film (suivant le contexte)
ω	valeur propre, fréquence complexe (*)
ω_1	première valeur propre (*)
ω_m	valeur propre de plus faible module (*)
ω_M	valeur propre de plus grande partie réelle (*)
Ω	valeur propre, fréquence complexe

INDICES INFERIEURS

0	grandeurs de sortie (filière ou orifice du jet d'air de refroidissement)
1	direction de l'écoulement
2	normale au film
3	direction circonférentielle
air	grandeurs relatives à l'air de refroidissement
f	grandeurs à la ligne de figeage

F	bord libre du jet d'air de refroidissement
ref	grandeurs de référence

INDICES SUPERIEURS

'	dérivation par rapport à l'abscisse axiale
*	perturbations venant se superposer à la solution stationnaire

SYMBOLES SUPERIEURS

–	solution stationnaire
~	fonctions de l'abscisse axiale dans une perturbation
→	grandeurs vectorielles
⇒	grandeurs tensorielles d'ordre 2

OPERATEURS

$\frac{d}{dt}, \frac{d}{d\tau}$	dérivée matérielle ou particulaire
$\frac{\Delta}{\Delta t}, \frac{\Delta}{\Delta \tau}$	dérivation convective supérieure d'Oldroyd (cf. relation 3.2.2)
$\frac{\partial}{\partial x}$	dérivation partielle
Re( )	partie réelle d'une grandeur complexe
Im( )	partie imaginaire d'une grandeur complexe

ABREVIATIONS

EF	étirage d'un film plan
EFDP	étirage d'un film avec différence de pression
PBVP	problème aux valeurs propres
PEBD	polyéthylène à basse densité
PEBDL	polyéthylène à basse densité linéaire

PEHD	polyéthylène à haute densité
SG	soufflage de gaine

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1. INTRODUCTION

■ Le secteur de la mise en forme des matières thermoplastiques connait actuellement un essor constant, ses produits occupant une place de plus en plus prépondérante dans notre vie quotidienne.

Les procédés de fabrication sont divers. Le soufflage de gaine constitue l'objet du présent travail. Il s'agit du procédé de fabrication de films[1] minces biorientés donnant lieu au plus grand volume de production. La majeure partie de cette production est assurée avec le polyéthylène à basse densité ou PEBD.

Le polymère fondu est extrudé à travers une filière annulaire sous forme d'un tube mince (figures 1.1). Ce dernier, non-encore solidifié, subit simultanément:

- un étirage longitudinal sous l'action d'une force axiale exercée par des rouleaux d'entrainement ou rouleaux pinceurs,
- un étirage transversal au moyen d'une surpression interne d'air.

Il se forme alors une bulle dont on accélère le refroidissement au moyen d'un jet d'air appliqué à sa base (**soufflage**). Au-delà d'une ligne dite de figeage, le tube est solidifié (vitreux ou semi-cristallin) et sa forme n'évolue plus. On obtient ainsi une **gaine** cylindrique qui est entrainée, repliée sur elle-même et bobinée.

L'installation que nous avons décrite est la plus courante et correspond au PEBD.

Par rapport aux autres procédés de fabrication de films (extrusion d'un film à travers une filière plate, calandrage, etc.), le soufflage de gaine présente les avantages suivants:

- plus grande facilité de mise en oeuvre (appareillage plus simple),
- les films produits, biétirés, possèdent de meilleures propriétés physiques et mécaniques.

Ces dernières dépendent de l'histoire thermomécanique subie par la matière: interaction entre le biétirage (orientation des chaines macromoléculaires) et le refroidissement.

(1) Il est d'usage d'appeler "films" des feuilles dont l'épaisseur est inférieure à 0,5 mm.

Compte tenu de son importance, ce procédé a fait l'objet de différentes études théoriques et expérimentales dont la finalité est généralement de prédire les propriétés mécaniques et physiques du film produit en fonction des conditions de mise en oeuvre et des propriétés du matériau (résine) utilisé.

■ Une des difficultés majeures que l'on rencontre lors du soufflage de gaine est de maintenir un régime permanent. **En effet, dans certaines conditions, toute production correcte devient impossible à cause de l'apparition d'instabilités affectant les propriétés du film et pouvant même entrainer sa rupture.**

Ces instabilités conduisent le plus souvent à une limitation de la cadence de production et à un produit doté de mauvaises propriétés (épaisseur non-uniforme).

Ainsi lors d'une étude expérimentale antérieure, FEIDT (B1983) a mis des instabilités en évidence en faisant varier les paramètres de refroidissement ainsi que le taux d'étirage (rapport entre la vitesse d'entrainement et la vitesse d'extrusion).

Toutefois, le problème de la stabilité a été jusqu'ici peu abordé.

■ Certains aspects de l'étude mentionnée ci-dessus ainsi que des études expérimentales publiées dans la littérature et pour lesquelles le jet d'air n'exerce qu'une faible influence suggèrent des instabilités uniquement liées à l'étirage subi par le polymère.

De tels phénomènes surviennent également lors des procédés suivants:

- filage à l'eau: étirage d'un filament de polymère fondu, suivi d'un refroidissement à l'aide d'un bain d'eau.

- extrusion d'un film à plat: étirage d'une feuille de polymère fondu extrudée à travers une filière plate, avec refroidissement à l'aide d'un rouleau d'entrainement thermostaté.

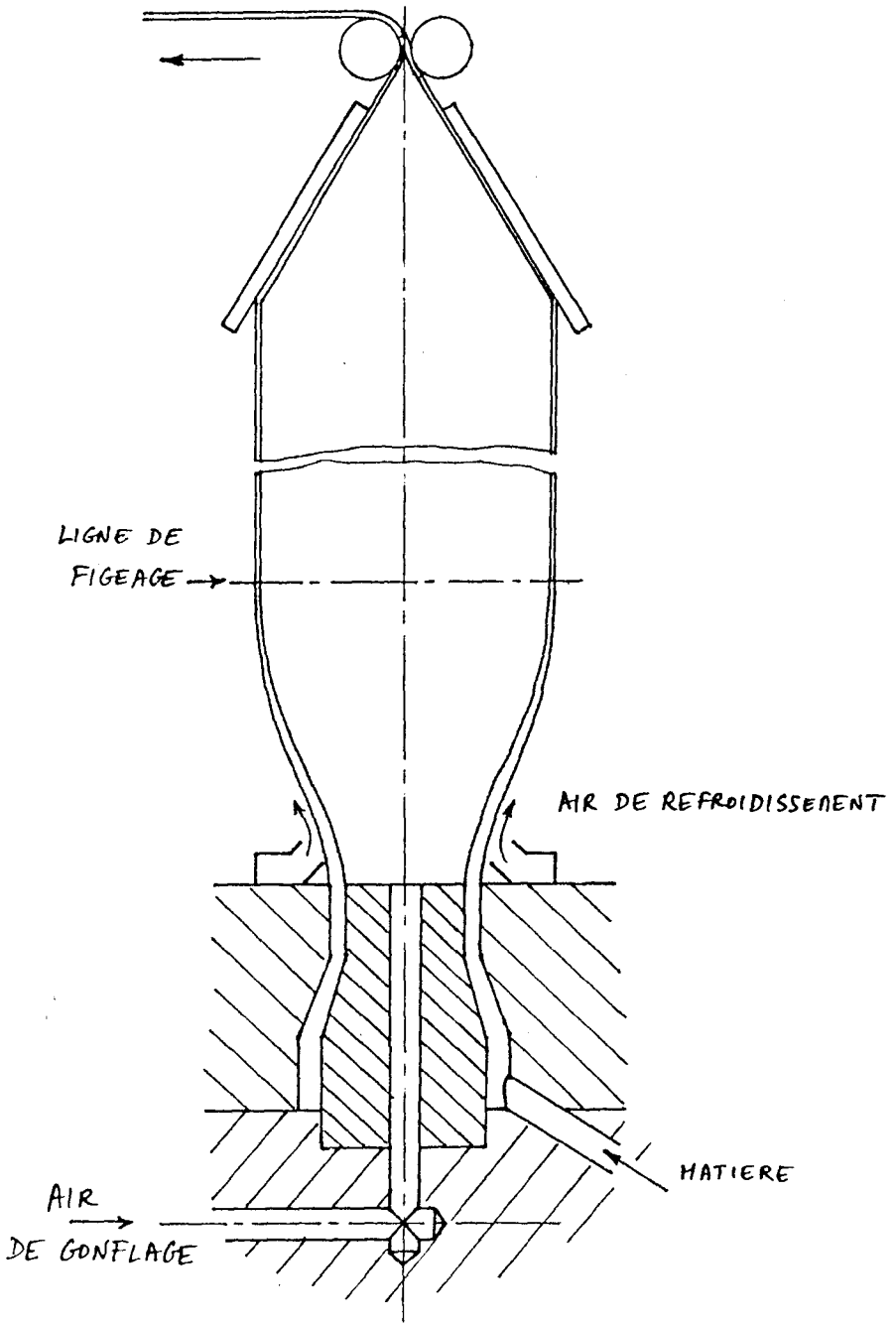
Les instabilités qui apparaissent alors sont caractérisées par une fluctuation périodique du diamètre du filament ou de l'épaisseur du film, et sont connues sous le vocable de "Draw Resonance" ou "instabilités d'étirage".

Ce phénomène a été intensivement étudié et les principaux mécanismes sont relativement bien appréhendés.

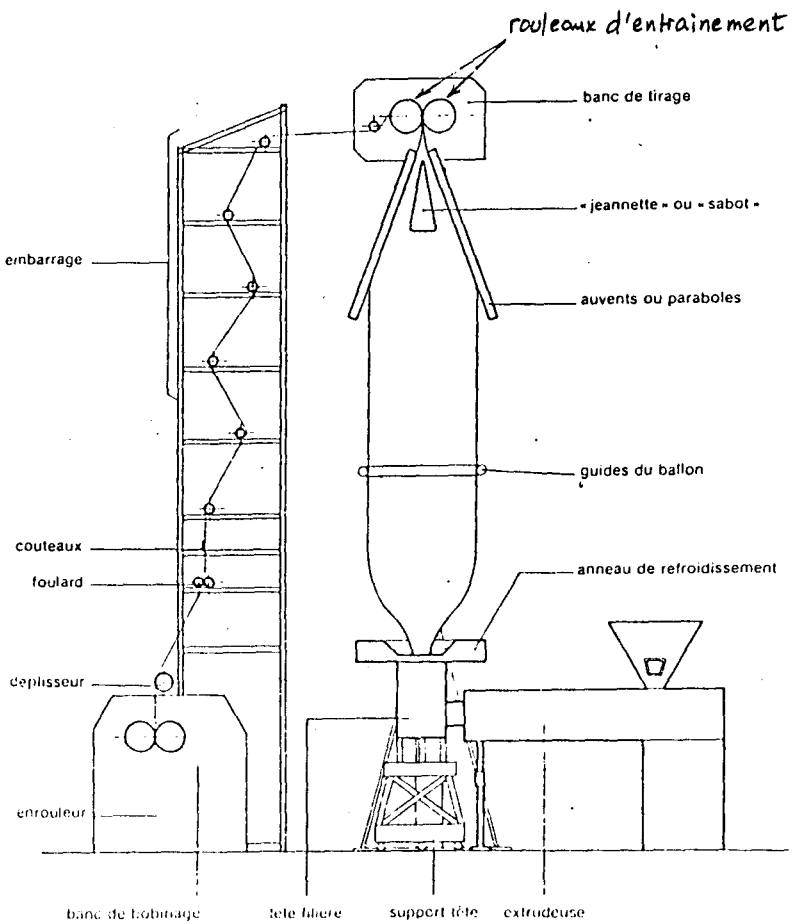
Il apparait alors que les instabilités sont caractéristiques des procédés de fabrication par étirage.

(a). Schématisation du procédé

figure 1.1. LE SOUFFLAGE DE GAINE



(b). Ligne de fabrication



■ L'interaction entre le jet d'air et la bulle constitue également une des causes possibles d'instabilité.

Le dispositif de refroidissement le plus simple et le plus utilisé est constitué d'un anneau appliquant un jet d'air à la base de la gaine. Nous excluons les systèmes plus sophistiqués, peu utilisés en général à cause des difficultés de réglage.

Nous pouvons donc être en présence d'un problème appartenant à la catégorie "couplage fluide-structure", avec l'interaction entre l'écoulement d'un fluide (air) et un solide (bulle) lui faisant "obstacle".

Le but de notre étude est d'évaluer l'importance de ces deux phénomènes dans l'existence des instabilités constatées et ce à partir d'études bibliographiques suivies de modélisations.

■ Dans un premier temps, après avoir apporté des précisions supplémentaires concernant le procédé et, en particulier, les paramètres de mise en oeuvre, nous donnons une description des phénomènes d'instabilités rencontrées.

Ces aspects font l'objet du **chapitre 2**.

■ Puis nous abordons la **première étape** proprement dite qui consiste à étudier l'étirage et les phénomènes d'instabilités induits **en faisant abstraction des efforts exercés par le jet d'air sur la bulle, mais en tenant compte du refroidissement du polymère.**

La zone d'intérêt est celle de biétirage, comprise entre la sortie de filière et la ligne de figeage.

Elle présente quelques particularités:

- l'écoulement à surface libre du polymère fondu est de nature élongationnelle et possède un caractère fortement non-isotherme,
- le polymère est doté d'une viscosité importante et admet généralement un comportement viscoélastique,
- l'épaisseur du film est faible devant les autres dimensions de la bulle, en particulier, les rayons de courbure,
- le jet d'air est du type pariétal turbulent même à de faibles vitesses de soufflage et possède une structure axisymétrique.

Au-delà de la ligne de figeage, le polymère solidifié se comporte comme un solide viscoélastique. Aucune déformation n'est mesurable bien que les contraintes puissent y être relativement importantes.

Voici quelques aspects que nous avons abordés:

- rendre le problème maniable en mettant à profit la faiblesse des caractéristiques d'épaisseur devant les autres caractéristiques dimensionnelles,
- choix d'une loi de comportement,
- étude du transfert thermique entre le film et le jet d'air.

L'approche utilisée est celle de la stabilité linéaire hydrodynamique, consistant à étudier l'évolution de perturbations infinitésimales superposées au régime permanent, et conduisant à un problème aux valeurs propres généralisé.

Notons qu'en ce qui concerne le régime permanent, il s'agit moins d'une prédiction "fine" que d'une étude effectuée préalablement dans le but d'étudier ultérieurement la stabilité.

D'autre part, pour une meilleure appréhension des différents phénomènes et afin de valider les méthodes d'analyse, nous avons défini un **problème modèle** simple: celui de l'étirage d'un film de largeur infinie, permettant un traitement en bidimensionnel. Selon les cas, il existera ou non une différence de pression de part et d'autre du film.

L'étude a porté sur différents modèles rhéologiques:

- fluide visqueux newtonien,
- fluides viscoélastiques de Maxwell et de Phan-Thien et Tanner (modèle de PTT).

Par ailleurs, nous n'avons considéré que des perturbations axisymétriques.

Cette première partie fait l'objet des **chapitres 3 à 6**:

Chapitre 3	: Généralités sur l'étirage des polymères fondus, Hypothèses générales,
Chapitre 4	: Etirage d'un film plan,
Chapitre 5	: Etirage d'un film avec surpression,
Chapitre 6	: Le soufflage de gaine.

■ Dans la **seconde étape**, nous traitons le problème sous l'aspect **couplage fluide-structure.**

La configuration est alors fort complexe:

- paroi mobile et déformable,
- jet pariétal turbulent.

Par ailleurs, l'interaction entre les deux milieux, à savoir le jet d'air et la bulle, est d'ordre:

- thermique: transfert de chaleur,
- mécanique: le jet exerce des efforts sur la bulle et la forme de cette dernière conditionne la structure du jet.

Le problème ainsi posé possède une généralité le démarquant nettement de ceux classiquement traités dans la littérature (fluides non-visqueux, couplage de type mécanique).

Compte-tenu des hypothèses préalablement effectuées, nous ne pouvons espérer qu'une réponse qualitative de l'ensemble. Ce qui exclut une modélisation "rigoureuse" du jet, par ailleurs presque impossible, de toute évidence, à l'heure actuelle.

Finalement, en mettant l'accent sur le couplage "mécanique", nous avons opté pour une prise en compte qualitative des efforts exercés par le jet sur la bulle et intégré ces derniers aux modèles élaborés lors de la première étape.

Cette étape fait l'objet du **chapitre 7**.

■ **Enfin**, dans le **chapitre 8**, nous faisons une **synthèse** des résultats obtenus ainsi que de la démarche adoptée et nous en tirons les conclusions.

Le présent travail dépasse le cadre spécifique du soufflage de gaine et s'inscrit dans l'étude de la stabilité d'écoulements complexes.

CHAPITRE 2

LE SOUFFLAGE DE GAINE
POSITION DU PROBLEME

2. LE SOUFFLAGE DE GAINE - POSITION DU PROBLEME

Dans un premier temps, nous décrivons les différents paramètres que comporte le procédé.

Il conviendra ensuite de préciser ceux qui, comme lors de tout processus en général, seront maintenus constants en cours de fonctionnement.

Enfin, nous ferons état des phénomènes d'instabilités rencontrés.

2.1 MISE EN OEUVRE (figures 1.1, chapitre 1)

2.1.1 Paramètres de mise en oeuvre

(a) Dans la zone de biétirage, le rayon de la bulle passe de a_0 à a_f, la vitesse du film de V_0 à V_f et l'épaisseur de ce dernier de H_0 à H_f. On définit alors:

– le taux de gonflage $$G = \frac{a_f}{a_0} \qquad (2.1.1)$$

– le taux d'étirage $$E = \frac{V_f}{V_0} \qquad (2.1.2)$$

– le taux d'amincissement $$M = \frac{H_0}{H_f} \qquad (2.1.3)$$

En supposant une masse volumique constante (celle-ci subit, en fait, une variation de l'ordre de 10 à 20%), nous avons la relation suivante:

$$G \cdot E = M \qquad (2.1.4)$$

qui traduit globalement la conservation de la masse.

– Par ailleurs, nous avons également la distance Z, appelée hauteur de figeage, séparant la sortie de filière de la ligne de figeage ou, plus significativement, sa valeur adimensionnelle:

$$X = \frac{Z}{a_0} \qquad (2.1.5)$$

(b) Le polymère, ou résine, est caractérisé par ses propriétés physiques telles que:

- la masse volumique,
- la viscosité en sortie de filière.

(c) Les caractéristiques de l'installation se résument à celle de la filière, en l'occurence:

- le rayon extérieur ou intérieur,
- la valeur de l'entrefer (écart entre les rayons extérieur et intérieur).

(d) Les paramètres sur lesquels l'opérateur agit sont:

- la vitesse d'étirage V_f ou la force d'étirage F_Z,
- la différence de pression ΔP ou la quantité d'air emprisonné dans la bulle,
- le débit d'air de refroidissement ou débit de soufflage Q_{air},
- la température d'extrusion T_0.

(e) Finalement, une phase de fabrication est caractérisée par le débit massique de matière ou cadence de production.

2.1.2 Conduite du procédé

Il existe, entre les paramètres ci-dessus, une relation de la forme:

$$\left(G, M, Z \right) = f \left(V_f, \Delta P, Q_{air}, \text{caract. du polymère, caract. de la filière}, T_0, \text{cadence de production} \right) \tag{2.1.6}$$

■ Pour un matériau, une installation et une cadence de production donnés, les paramètres repérés (d) sont ajustés, le plus souvent manuellement, jusqu'à obtention des caractéristiques géométriques souhaitées et éventuellement jusqu'à disparition des instabilités pouvant apparaitre.

Vient ensuite une seconde phase de détermination des propriétés mécaniques et physiques à l'aide d'échantillons prélevés à partir du film produit. Précisons que ces propriétés dépendent **fortement** de l'histoire thermomécanique subie par la matière.

En général, il faudra alors réajuster les paramètres (d), réitérer la seconde phase et ainsi de suite.

Cette procédure est, en général, pénalisante en temps et en matière et met en évidence la nécessité de disposer de modèles fiables.

- En régime permanent, la **masse d'air** contenue entre la filière et les rouleaux d'entrainement est maintenue constante. Pour ce faire, la légère fuite par entrainement entre les deux parties repliées est compensée par une injection d'air au niveau de la filière.

Ces rouleaux d'entrainement sont asservis de manière à maintenir constante la force d'étirage ou, le plus souvent, la **vitesse d'étirage**.

2.1.3 Quelques ordres de grandeur

rayon de la filière	25 à 100 mm
entrefer de la filière	1 mm
taux de gonflage	2 à 5
taux d'amincissement	10 à 100
température d'extrusion	180 à 220°C
température à la ligne de figeage	100 à 150°C
température au niveau des rouleaux d'entrainement	40°C
hauteur de figeage adimensionnelle X	5 à 10
vitesse de soufflage	jusqu'à 20 m/s

2.2 INSTABILITES RENCONTREES

L'un des problèmes majeurs que présente le soufflage de gaine consiste à maintenir une bulle stable, faute de quoi l'épaisseur du film obtenu ne sera pas uniforme. Il s'en suivra des dégradations des propriétés mécaniques et physiques du produit. Dans certains cas, ces instabilités peuvent même conduire à la rupture de la gaine.

Dans la partie qui suit, nous donnons une description des phénomènes d'instabilités rencontrées et ce à partir:

- d'une étude expérimentale antérieure dans la même voie,
- d'études expérimentales reportées dans la littérature.

2.2.1 Etude antérieure dans cette voie

2.2.1.1 Résultats

Une étude expérimentale[2] fut entreprise par FEIDT (B1983).

Deux types d'expérimentation ont été effectués. L'un sur une installation munie d'un dispositif de refroidissement par anneau à simple flux d'air, l'autre sur une installation munie d'un anneau à double flux (Annexe E1).

a) Anneau à simple flux

Les paramètres que l'on a fait varier étaient:

- la vitesse d'étirage (donc le taux d'étirage),
- la vitesse de soufflage (donc le débit d'air de refroidissement).

La figure 2.2.1a montre la carte de stabilité ainsi obtenue.

Nous pouvons constater que, pour une vitesse de soufflage donnée, il existe une vitesse d'étirage critique au-delà de laquelle de fortes instabilités apparaissent (ballonnements précédés de légères déformations). La variation de cette vitesse d'étirage critique en fonction de la vitesse de soufflage est, toutefois, très faible.

Notons qu'il convient de ne pas tenir compte du point de mesure repéré B3, sans nul doute erronné.

b) Anneau à double flux

Cette fois-ci, les paramètres que l'on a fait varier étaient les ouvertures des deux anneaux supérieur et inférieur (le débit d'air total étant constant). Cette opération a été répétée pour différentes vitesses d'étirage.

Quelle que soit cette dernière, on observe toujours deux types d'instabilités: des vibrations à faible ouverture de l'anneau supérieur et des déformations (ballonnements) à grande ouverture, encadrant une zone de stabilité de la bulle (voir figure 2.2.1b, établie pour une vitesse d'étirage donnée).

(2) Laboratoire d'applications des polymères – Société CDF Chimie – Mazingarbe (62).

RESULTATS EXPERIMENTAUX DE FEIDT

figure 2.2.1a - anneau simple

Taux de gonflage G ≃ 2

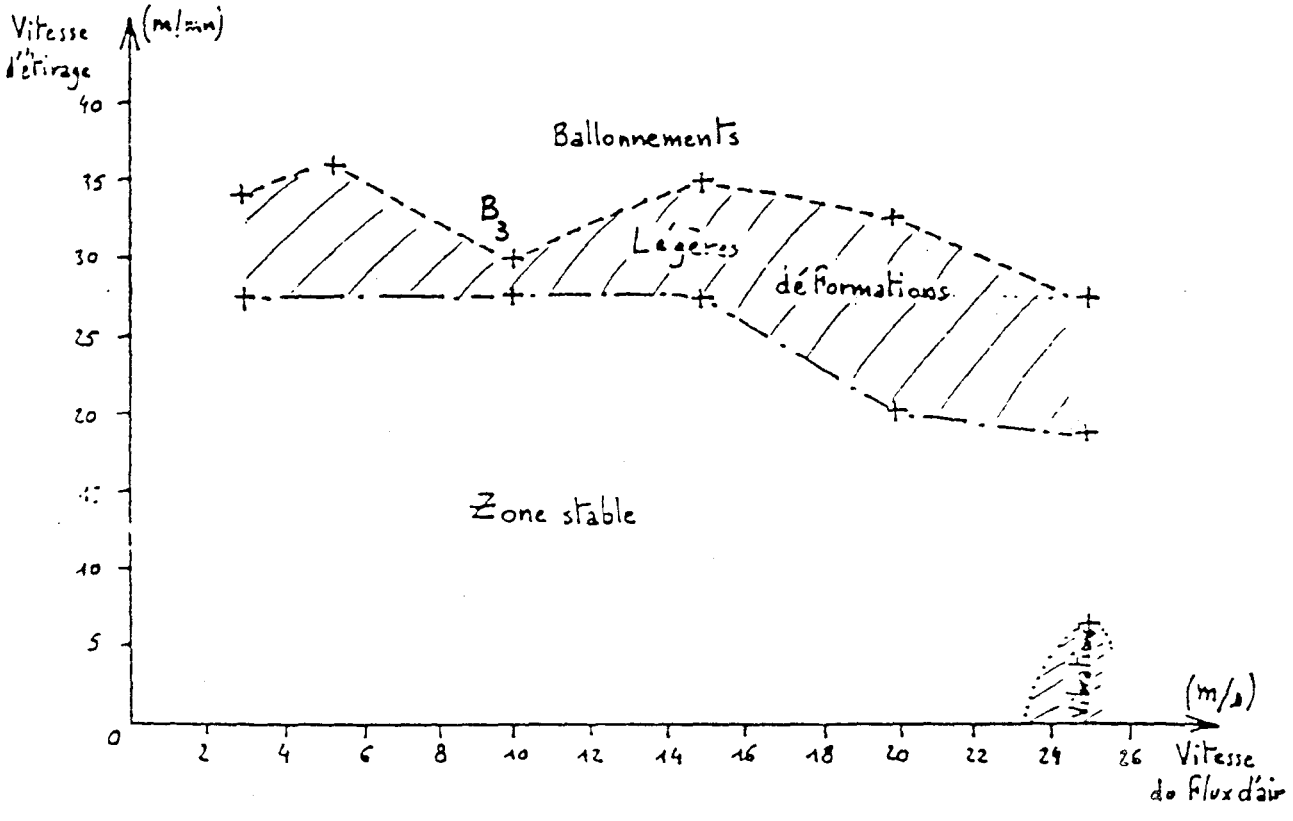
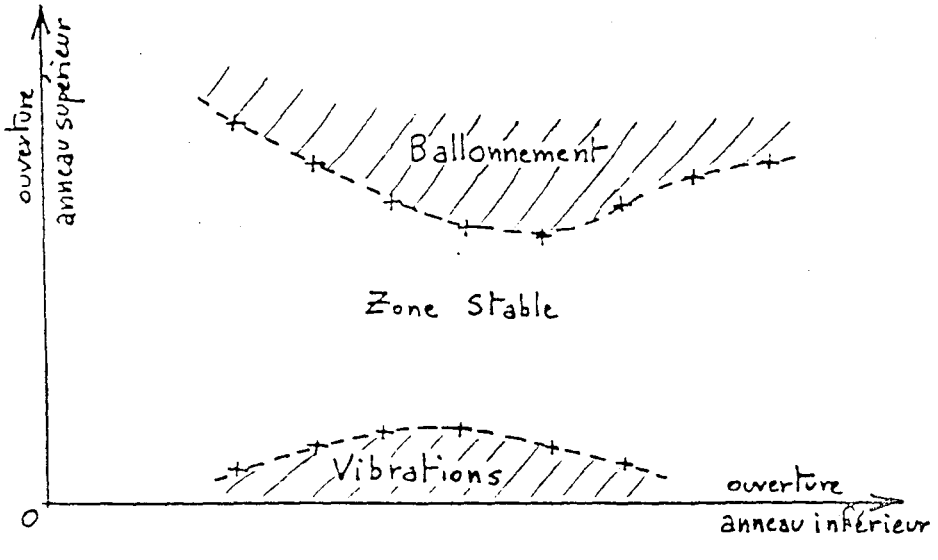


figure 2.2.1b - anneau double

Vitesse d'étirage fixée



2.2.1.2 Etude critique

Cette première étude expérimentale est purement qualitative. Nous pouvons néanmoins en dégager des conclusions significatives.

Il nous semble tout d'abord que les deux séries d'expérimentations (a, b) mettent en évidence des "instabilités" d'origines différentes.

- Le cas (a) indique clairement des instabilités dues à l'étirage subi par le polymère, prenant naissance au-delà d'une vitesse d'étirage critique. Cette dernière est peu affectée par la vitesse de soufflage.

Il existe donc un taux d'étirage critique (ici de l'ordre de 15 à 20).

Remarquons qu'il est vraisemblable que l'on ait fixé:

- le débit d'extrusion,
- la différence de pression,

auquel cas une variation de la vitesse de soufflage, à vitesse d'étirage fixée, aura naturellement pour effet de modifier les caractéristiques de la bulle:

- la hauteur de figeage,
- le taux de gonflage,
- le taux d'amincissement,

- Le cas (b) suggère deux remarques:

  - instabilité résultant de l'interaction entre la bulle et l'écoulement d'air (ballonnements),

  - réponse de la bulle face à une excitation forcée (mauvaise répartition du débit sur le pourtour, fluctuations de pression dans la couche limite turbulente, décollement, ...).

Les légères vibrations observées dans les deux types d'expérimentation relèvent manifestement du second mécanisme ci-dessus.

2.2.2 Résultats expérimentaux reportés dans la littérature

Nous donnons ci-après une synthèse de deux études expérimentales reportées dans la littérature, à notre connaissance les plus significatives concernant les instabilités rencontrées lors du soufflage de gaine.

2.2.2.1 Essais de HAN et SHETTY (B1977)

2.2.2.1.1 Résultats

La présente étude a consisté, en partant d'un régime stable donné, à augmenter de manière brutale, en échelon:

a) la vitesse d'étirage (≃ 200 à 300 %),

b) la différence de pression (≃ 50 %).

Afin de minimiser l'influence du jet d'air, le refroidissement était assuré par un ventilateur situé loin de la sortie de filière. Par ailleurs, les matériaux étaient des polyéthylènes à basse densité (PEBD) et à haute densité (PEHD).

– Dans le premier cas et en-deçà d'une amplitude de variation critique, on obtient un nouvel état d'équilibre, les fluctuations (plus ou moins axisymétriques) subies par le diamètre de la bulle s'amortissant dans le temps. Par contre, au-delà de cette valeur critique, les fluctuations s'auto–entretiennent et peuvent conduire à la rupture de la bulle.

Ces fluctuations ne sont pas périodiques. Par ailleurs, les variations du diamètre de la bulle en chaque point et à chaque instant sont telles que le volume d'air emprisonné dans la bulle semble se conserver.

Peu de résultats ont été présentés. Le taux d'étirage varie d'environ 4 (état initial) à environ 15 (état final).

– En faisant varier la différence de pression, on obtient systématiquement un nouvel état d'équilibre.

Les essais précédents ont été répétés en faisant varier la température d'extrusion. La diminution de celle-ci a pour effet de stabiliser la bulle. Ceci est attribué à l'augmentation de la viscosité du polymère.

Le PEHD est, globalement, plus stable que le PEBD.

2.2.2.1.2 Etude critique

Le cas (a) semble, de nouveau, mettre en évidence l'existence d'un taux d'étirage critique, au-delà duquel des instabilités apparaissent, et que l'on atteint lorsque l'amplitude de variation de la vitesse d'étirage est suffisamment importante.

En partant de cette idée, une explication simple et plausible de l'absence systématique d'instabilité dans le cas (b) est, qu'à aucun moment, le taux d'étirage critique, que l'on peut supposer fonction du taux de gonflage, n'est atteint.

Notons que HAN et SHETTY attribuent la différence entre les deux réponses de la bulle à la variation ou non du volume d'air contenu dans cette dernière (nulle dans le cas (a), non-nulle dans le cas (b)). Ce qui parait très peu probable.

2.2.2.2 Essais de MINOSHIMA et WHITE (B1986)

2.2.2.2.1 Résultats

Lors de cette étude, le refroidissement était assuré par un jet d'air appliqué à la base de la bulle.

En extrudant différents types de polyéthylènes (PEHD, PEBD, polyéthylènes à basse densité linéaire ou PEBDL), MINOSHIMA et WHITE (B1986) ont observé différents types d'instabilités de bulle.

a) En l'absence d'injection d'air dans cette dernière:

Il apparait des fluctuations périodiques de l'épaisseur du film pour des taux d'étirage très élevés. L'amplitude de ces fluctuations est constante, leur période importante correspond à la distance entre la sortie de filière et les rouleaux pinceurs.

Ce phénomène s'apparente à celui observé (voir, par exemple, la contribution présentement étudiée) lors de l'étirage d'un filament de polymère fondu ou de l'extrusion à plat d'un film sur de très courtes distances, le refroidissement étant respectivement effectué à l'aide d'un bain d'eau et un rouleau thermostaté. De telles instabilités sont connues sous le vocable de "Draw Resonance"(3).

b) Lorsque la bulle est gonflée, on observe:

– des fluctuations axisymétriques et périodiques du diamètre pour de faibles taux de gonflage ($G < 2$) et pour des valeurs élevées du produit ($E \times G$), E étant le taux d'étirage. Leurs amplitudes augmentent au cours du temps, et ce jusqu'à rupture de la bulle. En outre, la remarque précédente concernant la période des fluctuations reste valable.

(3) Aucune appellation spécifique n'existe dans la langue française. Afin d'éviter toute confusion, nous garderons donc cette terminologie. Nous réserverons le terme "instabilités d'étirage" pour les phénomènes d'instabilités dus à l'étirage d'une manière générale.

– une instabilité de forme hélicoïdale pour des taux de gonflage élevés (de l'ordre de 4 à 5).

– un état "métastable" pour lequel la hauteur de figeage fluctue de manière discontinue et périodique entre deux valeurs extrêmes. Des fluctuations identiques et en phase de la force d'étirage sont également observées. Le diamètre de la gaine (partie solidifiée) demeure constant.

Notons le caractère quasi-systématique des deux premiers types d'instabilité, tout au moins dans la plage de taux d'étirage explorée (de l'ordre de 4 à 11).

La zone de taux de gonflage compris entre 2 et 4 est, en général, une zone de stabilité.

Deux valeurs de la hauteur de figeage ont été considérées (≃ 6 et 15). Globalement la stabilité diminue (la zone d'instabilités s'élargit) lorsque la hauteur de figeage augmente.

Les résultats diffèrent d'un matériau à l'autre. Toutefois, aucune tendance réelle ne se dégage.

L'ordre approximatif de stabilité décroissante est:

PEBD - PEBDL - PEHD

Ce qui constitue une contradiction par rapport à l'étude précédente.

Les résultats sont reportés sous forme de cartes de stabilité dans le plan (E, G) pour différentes hauteurs de figeage et pour chaque matériau.

2.2.2.2.2 Etude critique

Aucune indication quant à l'initiation de ces instabilités n'est donnée. Nous en concluons qu'elles apparaissent au fur et à mesure que l'on fait varier les paramètres.

Classons d'emblée à part l'état "métastable", vraisemblablement dû à un problème d'extrusion (instabilité de l'écoulement dans la filière, débit pulsé, perte d'adhérence de la matière).

Un résultat ne peut manquer d'interpeller: l'impossibilité d'obtenir une bulle stable pour des taux de gonflage inférieurs à environ 2, sauf cas particuliers et ce quel que soit le taux d'étirage qui, de toute manière, demeure faible.

Ce résultat est en très net contraste avec ceux des deux études citées précédemment.

Il est intéressant de noter que les auteurs suggèrent d'attribuer l'instabilité "hélicoïdale" au jet d'air de refroidissement.

Cette troisième étude apparait finalement comme étant la plus exploitable des trois citées car les résultats sont les mieux chiffrés. De surcroit, une caractérisation partielle des matériaux a été réalisée auparavant par les mêmes auteurs (MINOSHIMA et WHITE (C1986)).

2.3 CONCLUSION

▪ Les résultats reportés indiquent clairement des instabilités dues à l'étirage subi par le polymère. Nous entendons par là des instabilités liées uniquement au caractère élongationnel de l'écoulement.

▪ Toutefois, les effets du jet d'air ne sont pas pour autant négligeables. Ainsi, dans certains cas, des précautions ont été prises pour les minimiser.

Il est difficile de distinguer:

– les phénomènes relevant de la réponse de la bulle face à une excitation forcée de la part du jet d'air,

– des phénomènes d'instabilités proprement dit, résultant de l'interaction entre la bulle et le jet d'air.

De ce fait, l'existence d'instabilités de couplage n'est pas à exclure.

En conséquence, le présent travail se divise en deux grandes parties:

– étude des instabilités d'étirage,
– étude des instabilités liées au couplage fluide-structure.

CHAPITRE 3

GENERALITES SUR L'ETIRAGE DES POLYMERES FONDUS

HYPOTHESES GENERALES

3. GENERALITES SUR L'ETIRAGE DES POLYMERES FONDUS HYPOTHESES GENERALES

3.1 GENERALITES

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'écoulement à surface libre du polymère fondu en aval de la sortie de filière.

Dans le cas du soufflage de gaine, l'écoulement est dit élongationnel biaxial (2 "axes" d'étirage par les effets conjugués de la force d'étirage et de la différence de pression), par opposition à un écoulement élongationnel uniaxial (1 "axe" d'étirage) que l'on rencontre dans les procédés précédemment mentionnés:

– le filage: étirage d'un filament de polymère fondu extrudé à travers une filière capillaire, suivi d'un refroidissement (à l'air ou à l'aide d'un bain d'eau),

– l'extrusion d'un film à plat: extrusion d'un film à travers une filière plate (caractérisée par son rapport largeur-entrefer, de l'ordre de 20 à 50). Ce procédé est, par exemple, adopté lorsque la viscosité du matériau, trop faible, ne permet pas une mise en oeuvre par soufflage de gaine.

Ces deux procédés sont caractérisés uniquement par le taux d'étirage.

Voici quelques aspects dont il nous faudra tenir compte:

- L'écoulement étant à surface libre, la résolution des équations sous leur forme générale est difficilement concevable.

Il convient alors de rendre le problème plus maniable en mettant à profit la faiblesse des caractéristiques d'épaisseur devant les autres caractéristiques dimensionnelles.

La théorie de la lubrification est, par exemple, fondée sur un principe similaire.

- Choix d'une loi rhéologique décrivant au mieux le comportement du polymère à l'état fondu.

Dans la zone de biétirage, le polymère se comporte comme un fluide viscoélastique.

Pour un écoulement de tels fluides, deux nombres sans dimension permettent d'évaluer les effets élastiques:

– le nombre de Weissenberg:

$$We = \frac{\text{forces élastiques}}{\text{forces visqueuses}}$$

– le nombre de Deborah:

$$De = \frac{\text{temps caractéristique du polymère}}{\text{temps de séjour}}$$

Les procédés de fabrication par étirage sont, en général, tels que ces deux nombres sont voisins de l'unité.

Les effets élastiques sont donc importants et il y a lieu d'en tenir compte.

D'une manière générale, les principaux critères de choix d'une loi de comportement sont les suivants:

- la loi doit rendre compte des principaux phénomènes physiques,
- le modèle rhéologique doit comporter le moins de paramètres possible ("constantes" qu'il faudra déterminer avec le plus de précision),
- le modèle doit être suffisamment simple pour être intégré dans un modèle global.

En résumé, il s'agit d'obtenir des résultats fiables, et ce au moindre coût.

- Modélisation de la transition liquide-solide.

Les lois de comportement "standards" de la mécanique des fluides tombent en défaut dès qu'il s'agit de poursuivre la simulation au-delà de la ligne de figeage.

Dans cette zone, la meilleure approximation du comportement du polymère, solidifié, est celui d'un solide viscoélastique, le problème consistant alors à "raccorder" les deux modélisations (celles correspondant à la partie "liquide" et à la partie "solide").

- Etude du transfert thermique entre le film et le jet d'air de refroidissement.

Parmi les différents problèmes, nous pouvons distinguer:

- la variation des propriétés physiques de la matière avec la température,
- la détermination de la valeur locale du coefficient de transfert de chaleur.

Ces différents aspects évoqués constituent autant de thèmes autour desquels s'articulera l'étude bibliographique qui suit.

3.2 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE(4)

L'importance des procédés de mise en oeuvre des matières thermoplastiques par étirage a suscité de nombreux travaux sur les écoulements élongationnels et sur le comportement de ces matériaux à l'état fondu, tant du point de vue théorique que du point de vue expérimental.

Les premières études ont tout d'abord concerné les écoulements élongationnels uniaxiaux. De nombreux travaux ont ainsi porté sur deux types d'écoulement:

- écoulement d'un filament axisymétrique de polymère fondu, comme problème modèle du procédé de filage,
- écoulement plan, comme problème modèle pour l'extrusion d'un film à plat.

Ces deux problèmes ont non seulement pour but d'étudier les deux procédés ci-dessus mais constituent également un champ d'investigation privilégié concernant les écoulements élongationnels, bien moins connus que les écoulement de cisaillement. Le filage, en particulier, est un procédé simple permettant d'obtenir des nombres de Deborah élevés.

C'est à ce titre et à ce titre seulement que nous allons les étudier.

(4) Les contributions des différents auteurs ont été classées par thèmes. Par conséquent, un même auteur peut être cité plusieurs fois.

Ainsi de nombreux résultats expérimentaux sont disponibles dans le cas du filage.

L'étirage d'un film plan est beaucoup plus complexe et fait intervenir d'autres phénomènes tels que:

- le rétrécissement latéral du film,
- l'épaississement des bords latéraux (communément appelé effet de bord)

qu'il est difficile de minimiser et dont les études que nous citerons ne tiennent pas compte.

Les études sur le soufflage de gaine se sont développées presque parallèlement à celles concernant les écoulements uniaxiaux, sans, toutefois, être aussi prolifiques que ces dernières. Ce procédé constitue également un champ d'investigation pour les écoulements biaxiaux en général, l'autre technique étant le gonflage d'une bulle (sans extrusion).

Beaucoup d'efforts ont également été fournis afin de caractériser les matériaux du point de vue rhéologique (les résines ne cessant d'évoluer du point de vue de leur constitution macromoléculaire) et d'élaborer de nouvelles lois de comportement.

Il existe alors deux façons d'étudier le comportement d'un polymère:

- rhéologie classique (ou viscométrie, écoulements de cisaillement),
- rhéologie élongationnelle (élongation ou étirage d'une éprouvette de liquide).

Les contributions à l'étude du transfert thermique sont relativement rares en dépit de l'importance que revêt ce dernier en pratique.

Dans la partie qui suit, nous aborderons successivement:

- les écoulements élongationnels uniaxiaux,
- le cas du soufflage de gaine proprement dit.

Auparavant, nous ferons état du comportement des polymères fondus et de leur modélisation. Nous présenterons ainsi les lois de comportement les plus usitées et dont nous ferons mention à plusieurs reprises.

3.2.1 Le comportement des polymères fondus - Modélisation

• La loi de comportement newtonienne ne permet pas, sauf cas particuliers, de rendre compte du comportement des polymères à l'état fondu.

La **viscoélasticité** qui caractérise ces derniers se manifeste par un certain nombre de phénomènes (HAN (C1976)):

– la dépendance du comportement par rapport au temps (retard et relaxation de la contrainte, recouvrance des déformations subies, ...). Ainsi, en imposant une déformation, par exemple, les temps de réponse observés peuvent être très importants devant les temps caractéristiques associés à l'inertie des appareils,

– l'existence de différences de contraintes normales au sein d'un écoulement de cisaillement pur. Ce phénomène permet d'expliquer l'effet Weissenberg (cf. Annexe A10),

– un taux de gonflement en sortie de filière très important vis-à-vis de celui correspondant à un fluide newtonien.

Les temps caractéristiques d'un matériau sont, en fait, liés à la dynamique des chaines macromoléculaires (réorganisation de ces chaines). Les procédés de mise en oeuvre impliquant des temps rapides devant ceux des matériaux, les effets élastiques sont importants.

• Il existe une grande diversité de lois de comportement viscoélastiques, chacune d'entre elles permettant de rendre compte de phénomènes observés dans des conditions précises ou en privilégiant un certain nombre.

Nous pouvons toutefois les classer en trois catégories (AGASSANT et al. (C1986)):

– les lois dites "hiérarchiques". C'est une généralisation de la loi de comportement d'un fluide purement visqueux qui fait entrer en ligne de compte les dérivées successives du tenseur des vitesses de déformation,

– les lois à fonction mémoire, principalement utilisées pour étudier finement les écoulements viscométriques,

– les lois à dérivation convective de la contrainte.

Ces dernières sont celles qui sont les plus utilisées dans le cas des polymères fondus car:

- elles rendent assez bien compte du comportement de ces derniers ou tout au moins des phénomènes les plus importants lors de la mise en oeuvre,
- elles sont "simples" à mettre en oeuvre,
- leurs constantes sont "faciles" à déterminer à l'aide d'expériences de viscométrie ou d'élongation.

Parmi ces lois à dérivation convective, la plus simple est celle régissant le comportement d'un fluide de Maxwell:

$$\vec{\tau} + \frac{\eta}{G} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} = 2\eta \, \vec{d} \qquad (3.2.1)$$

où

$$\frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} = \frac{d \vec{\tau}}{d t} - \vec{L} \cdot \vec{\tau} - \vec{\tau} \cdot \vec{L}^{t} \qquad (3.2.2)$$

représente la dérivation dite "convective supérieure d'Oldroyd",

$\vec{\tau}$ est le tenseur des extra-contraintes,

$\vec{d}$ le tenseur des vitesses de déformation,

$\vec{L}$ le tenseur gradient de vitesse,

η est la viscosité, G le module de cisaillement,

Le rapport $\frac{\eta}{G}$ représente le temps de relaxation apparent noté λ.

L'analogie en une dimension est le comportement d'une association en série de deux éléments:

- un ressort de rigidité G,
- un amortisseur de viscosité η.

La dérivation convective supérieure ci-dessus est une forme particulière d'une dérivation par rapport au temps plus générale, indépendante du repère lié au matériau. Les modèles faisant intervenir de telles dérivées sont également dits de "type Oldroyd" (cf. Annexe A1) et ont été développés à partir des années cinquante (DENN (C1990)).

Le modèle de Maxwell est, par convention, doté de constantes (viscosité et temps de relaxation) indépendantes du taux de déformation. Par ailleurs, ce modèle s'avère, en général, trop simpliste pour prétendre traduire convenablement la réalité.

Les caractéristiques des polymères fondus varient avec le taux de déformation (voir, par exemple, MINOSHIMA et WHITE (C1986) dans le cas de différentes variétés de polyéthylènes).

Ainsi, leurs viscosités de cisaillement décroissent généralement avec le taux de cisaillement. On dit alors d'un tel comportement qu'il est **fluidifiant** ("shear thinning"). Dans le cas contraire, le comportement est dit **épaississant** ("shear thickening").

En première approximation, on considère généralement une loi en puissance, ou loi pseudo-plastique:

$$\eta = K \left(\Pi \right)^{n-1} \qquad (3.2.3)$$

Π étant le second invariant du tenseur des vitesses de déformation, n l'indice de pseudo-plasticité.

A titre indicatif, les matériaux suivants sont fortement fluidifiants ($n<1$): le PEHD, le polypropylène et le polystyrène, à l'inverse du PEBD ou du PEBDL qui ne le sont que très faiblement.

Le modèle de Maxwell est dit à temps de relaxation unique. En réalité, les matériaux sont caractérisés par un spectre de temps de relaxation. D'où les modèles à décomposition spectrale du tenseur des extra-contraintes $\vec{\vec{\tau}}$:

$$\vec{\vec{\tau}} = \sum_i \vec{\vec{\tau}}^{(i)} \qquad (3.2.4)$$

chaque composante $\vec{\vec{\tau}}^{(i)}$ obéissant à une loi donnée. Par exemple, une loi telle que celle régissant le comportement d'un fluide de Maxwell.

Ces modèles, en principe beaucoup plus proche de la réalité que ceux à temps unique, sont toutefois assez peu utilisés du fait notamment de difficultés évidentes de mise en oeuvre.

Finalement, pour conclure en ce qui concerne les lois rhéologiques, remarquons que des corrections sont, en principe, nécessaires lorsque que l'on se trouve dans des conditions non-isothermes, du fait de la thermodépendance des propriétés du fluide.

- Deux fluides "équivalents" en cisaillement peuvent montrer des comportements très contrastés en élongation (l'un, par exemple, peut s'étirer plus facilement).

Lorsque l'on étire axialement une éprouvette cylindrique liquide de longueur L, la contrainte axiale σ ou contrainte d'élongation qui en résulte peut être reliée au taux d'élongation $\dot{\gamma}$ par la relation:

$$\sigma = \eta_E \dot{\gamma} \qquad (3.2.5)$$

avec:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{L(t)} \frac{dL(t)}{dt} \qquad (3.2.6)$$

η_E est appelée **viscosité élongationnelle**.

Lorsque le régime permanent est atteint et en supposant l'étirage uniforme, nous avons pour un fluide newtonien (cf. Annexe A3):

$$\eta_E = 3\ \eta_0 \qquad (3.2.7)$$

η_0 étant la viscosité de cisaillement. Ce résultat bien connu et vérifié expérimentalement fut établi pour la première fois par TROUTON, un des précurseurs en matière d'écoulement élongationnel.

Remarquons que la terminologie de viscosité élongationnelle ne doit être utilisée que dans les cas suivants: contrainte et taux d'élongation constants (le champ cinématique est contrôlé).

Cette notion a néanmoins été étendue à d'autres cas d'écoulements pour lesquels le rapport (contrainte d'élongation / taux d'élongation) n'est plus une fonction seule du matériau. On doit alors parler de **viscosité élongationnelle apparente.**

3.2.2 Les écoulements élongationnels uniaxiaux

3.2.2.1 Problèmes liés à l'extrusion d'un filament

- **Gonflement en sortie de filière**

Lorsqu'un polymère est extrudé à travers une filière, il apparait un phénomène de gonflement en sortie de celle-ci.

Les causes probables et généralement admises sont les suivantes:

- existence de différences de contraintes normales au sein de l'écoulement de cisaillement dans la filière,
- recouvrance, par mémoire élastique, des déformations subies par le polymère dans la filière,
- réarrangement, ou réorganisation, du profil de vitesse (passage d'un profil parabolique à un profil plan).

Expérimentalement, le gonflement s'atténue jusqu'à disparaitre totalement en présence d'un étirage (CHANG et DENN (A1979)).

Des simulations par la méthode des éléments finis de l'écoulement au voisinage de la filière (quelques diamètres en amont et en aval) ont permis de retrouver ce résultat (FISHER et al. (A1980) dans le cas d'un fluide newtonien, KEUNINGS et al. (A1983) dans le cas de fluides viscoélastiques).

Cette atténuation du gonflement s'accompagne d'une diminution de l'abscisse du point de gonflement maximal (l'origine étant la sortie de filière). La localisation de ce point est d'environ un diamètre en aval.

- **Rupture d'extrudat**

Au-delà d'une valeur critique du débit, l'écoulement en sortie de filière devient instable. Ce phénomène, caractérisé par différents aspects d'extrudat, est connu sous le nom de "rupture d'extrudat" (voir, par exemple, HAN et al. (A1972)).

On peut montrer que ces instabilités sont liées à un taux de cisaillement critique dans la filière. Ce taux de cisaillement critique étant fonction de la géométrie interne de celle-ci. D'où l'importance de cette géométrie (HAN (C1976)).

D'un point de vue pratique, ce phénomène a pour effet de limiter la cadence de production. Comme pour le gonflement, les instabilités s'atténuent rapidement jusqu'à disparition totale en présence d'un étirage (HAN et al. (A1972)).

L'examen d'un échantillon de produit solidifié met en évidence l'absence totale de "distorsions" à partir d'un taux d'étirage apparent (basé sur la vitesse d'extrusion) de deux.

Toutes les études citées concernent le filage. Toutefois, les conclusions sont valables dans un cas quelconque d'extrusion suivie d'un étirage.

3.2.2.2 Etudes en stationnaire

- **Equations monodimensionnelles**

Lorsque l'on extrude un filament ou un film, la dimension transversale (diamètre du filament ou épaisseur du film) est faible devant la dimension longitudinale (longueur d'étirage). D'où l'idée d'exploiter cette particularité afin de rendre le problème plus maniable, la résolution des équations sous leur forme générale étant difficilement concevable.

Ainsi, considérons l'étude de MATOVICH et PEARSON (A1969) dans le cas d'un filament de polymère fondu.

L'hypothèse adéquate est, en fait, celle d'une faible variation du diamètre du filament le long de l'axe d'étirage. A l'aide d'une telle hypothèse et en évaluant les différentes actions sur le filament (force de trainée, tension superficielle, ...), les auteurs ont établi d'une manière formelle, asymptotique, un système d'équations monodimensionnelles, la seule variable d'espace étant l'abscisse le long de l'axe d'étirage.

Les hypothèses étaient:

- masse volumique constante,
- fluide newtonien,
- écoulement isotherme,
- trainée de l'air négligeable.

Par contre, la gravité, l'inertie ainsi que la tension superficielle furent prises en compte.

Les deux problèmes suivants se sont alors posés:

- Domaine de validité des équations nouvellement obtenues,
- Conditions aux limites en sortie de filière (en particulier le diamètre ainsi que la vitesse du filament).

Les équations asymptotiques ne sont pas valables au voisinage de la filière à cause du phénomène de gonflement. On admet, en général, leur validité au-delà d'un point situé en aval, auquel, après réarrangement, le profil de vitesse est plat.

Ainsi, on considère, généralement, le point de gonflement maximal comme origine du système d'axe.

Les études de FISHER et al. (A1980) et de KEUNINGS et al. (A1983) précédemment citées ont permis de préciser ce domaine de validité.

Les équations asymptotiques sont alors valables à partir d'une distance de l'ordre de un à deux diamètres en aval de la sortie de filière.

Pour de grandes distances d'étirage, nous pouvons donc, sans erreur notable, prendre l'origine du système d'axe en sortie de filière. De surcroit, le gonflement disparaissant en présence d'un étirage, nous pouvons adopter les valeurs immédiatement en sortie de filière (vitesse et dimension transversale du film) comme conditions aux limites.

D'où un problème aux limites, les conditions étant spécifiées:

- en sortie de filière,
- au point de solidification (point de contact avec le bain de refroidissement ou point pris au niveau des rouleaux d'entrainement).

L'approche monodimensionnelle fut, par la suite, étendue d'une manière moins formelle aux cas des fluides viscoélastiques, en admettant l'hypothèse selon laquelle la moyenne d'un produit peut être remplacée par le produit des moyennes. Les erreurs ainsi introduites n'ont, en général, pas été analysées.

Ainsi, par exemple, DENN et al. (A1975) ont considéré le cas d'un fluide de Maxwell de viscosité fonction du taux d'élongation mais de module de cisaillement constant.

Remarquons que le problème consiste, en fait, à établir la forme limite des nouvelles relations constitutives.

PHAN-THIEN et CASWELL (A1986) ont reformulé la question, dans le cas d'un fluide newtonien et d'un fluide d'Oldroyd (cf. Annexe A1), en développant la solution à partir de l'axe où l'on suppose un écoulement purement élongationnel. Les termes du second ordre ont été évalués. Leur influence s'est avérée négligeable.

Cette étude peut alors être considérée comme une validation a posteriori de la démarche de DENN et al. (A1975) et de bien d'autres auteurs.

Dans le cas plan, on suppose une épaisseur faiblement variable le long de l'axe d'étirage.

Ces systèmes d'équations ont constitué la base de départ de la plupart des études sur le problème et de toutes celles que nous citerons en particulier(5).

- **Formulation adimensionnelle**

En règle générale, il est plus commode de travailler avec des grandeurs adimensionnelles, et c'est le cas pour le problème qui nous intéresse.

Les "grandeurs de référence" sont prises en sortie de filière. On y adjoint également la longueur de filage (distance entre la sortie de filière et le point de solidification). D'où un certain nombre de paramètres adimensionnels tels que le nombre de Reynolds par exemple.

- **Modèle newtonien, isotherme**

D'une manière générale, le modèle newtonien isotherme constitue un point de départ obligé pour des raisons évidentes de simplicité.

Pour un fluide réellement newtonien, il permet, de plus, de fournir le bon ordre de grandeur en ce qui concerne la force d'étirage nécessaire pour un taux d'étirage donné (CHANG et DENN (A1979)).

Les études se sont, par la suite, logiquement étendues aux modèles viscoélastiques.

- **Fluides viscoélastiques**

Afin de mettre en évidence les effets de l'élasticité, CHANG et DENN (A1979) ont mis en oeuvre une étude expérimentale dans des conditions isothermes en considérant d'une part un fluide newtonien (sirop de glucose), et d'autre part un fluide viscoélastique de viscosité sensiblement constante (vis-à-vis du taux d'élongation) et comparable à celle du fluide newtonien.

(5) **Ainsi, les profils dont il sera question par la suite seront des profils axiaux ou répartitions axiales. Nous utiliserons, pour simplifier, le terme de "profil".**

Dans les conditions d'expérimentation (à faible échelle), l'inertie, la trainée de l'air ainsi que la tension superficielle étaient négligeables.

Les constatations suivantes ont été effectuées dans le cas du fluide viscoélastique:

- la force d'étirage est de dix à cent fois plus importante que celle du fluide newtonien étiré dans les mêmes conditions,
- contrairement à celui d'un fluide newtonien, le profil "axial" de vitesse est sensiblement linéaire aux taux d'étirage élevés.

* **Fluide de Maxwell**

Les travaux de DENN et al. (A1975) sur le fluide de Maxwell ont constitué une des premières études théoriques concernant un fluide viscoélastique.

Un nouveau paramètre adimensionnel apparait: le nombre de Deborah De évoqué précédemment et qui est tel que:

$$De = \frac{\text{temps caractéristique du polymère}}{\text{temps de séjour}} = \frac{\lambda_0 \; V_0}{Z}$$

λ_0 étant le temps de relaxation en sortie de filière, V_0 la vitesse d'extrusion et Z la longueur de filage.

Ces auteurs ont, tout d'abord, étudié asymptotiquement les deux états limites suivants:

- De tendant vers zéro: les solutions tendent vers celles du fluide newtonien,
- état de contraintes élevées ($\frac{1}{T_Z De}$ tendant vers zéro, T_Z étant la force d'étirage adimensionnelle – cf. Annexe B1 – Remarquons que la quantité ci-dessus représente le rapport entre une contrainte caractéristique du matériau, le module de cisaillement, et la contrainte initiale imposée[6]):

(6) Les hypothèses étant telles que la force d'étirage se conserve.

Le profil de vitesse tend alors vers un profil linéaire. Il existe, par ailleurs, un taux d'étirage limite lorsque les contraintes tendent vers l'infini:

$$E_{max} = \frac{1}{De} + 1$$

Le temps de résidence est alors sensiblement égal au temps de relaxation.

Cette limitation se traduit, lors d'une expérience d'élongation par une viscosité élongationnelle tendant vers l'infini pour une valeur critique du produit ($\lambda \times \dot{\gamma}$), λ étant le temps de relaxation et $\dot{\gamma}$ le taux d'élongation.

Finalement, lorsque l'on augmente le taux d'étirage à nombre de Deborah fixé ou vice-versa, les prédictions numériques rejoignent les résultats précédents:

- la force d'étirage augmente rapidement, et ce jusqu' à devenir infinie,
- le profil de vitesse devient de plus en plus linéaire.

Par la suite, les auteurs ainsi que d'autres (CHANG et DENN (A1979)) ont comparé leurs résultats avec ceux mesurés expérimentalement.

La théorie sous-estime alors la force d'étirage. Pour obtenir un bonne concordance, une correction du module de cisaillement mesuré par voie viscométrique est nécessaire. Dans le cas de DENN et al. (A1975), il faut, par exemple, le diviser par deux ou par trois.

Un autre point de vue est alors de considérer le modèle comme étant un moyen de mesurer le temps de relaxation en écoulement élongationnel. Les valeurs sont alors supérieures à celles correspondant à un écoulement de cisaillement.

Remarquons que dans la zone de taux d'étirage élevés, la force d'étirage mesurée expérimentalement augmente moins rapidement que celle prédite par la théorie concernant un fluide de Maxwell (CHANG et DENN (A1979)). Cette zone est qualifiée de newtonienne.

* Autres lois viscoélastiques

Dans le cas d'un fluide d'Oldroyd-B (cf. Annexe A1), les deux états limites précédents tendent vers le comportement newtonien (GUPTA et al. (A1986)):

- De tendant vers 0: fluide de viscosité $\eta = \eta_S + \eta_P$,
- état de contraintes élevées: fluide de viscosité $\eta = \eta_S$.

η_S et η_P étant respectivement la viscosité du solvant et celle de la solution polymérique.

Les différences par rapport à un fluide de Maxwell sont notables. En particulier, il n'existe pas de taux d'étirage limite. De ce point de vue, le modèle d'Oldroyd-B est plus réaliste que le modèle de Maxwell.

Toutefois, il reste aussi sensible que ce dernier vis-à-vis du temps de relaxation (il faut introduire un facteur multiplicatif affectant le module de cisaillement d'environ 2 pour obtenir un bon accord avec les résultats expérimentaux).

La question qui se pose est donc celle de savoir si:

- les paramètres mesurés en cisaillement sont directement applicables en écoulement élongationnel,

- la cinématique d'un écoulement élongationnel affecte les propriétés rhéologiques du polymère.

Le fait que le temps de relaxation en écoulement élongationnel soit différent du temps de relaxation en cisaillement est une évidence car un modèle à temps de relaxation unique requiert une "moyenne" sur un spectre (ou une distribution) de temps de relaxation. Cette moyenne étant, de toute évidence, fonction de l'écoulement considéré.

A ce propos, l'effet d'une distribution de temps de relaxation a été mis en évidence par les travaux de DENN et MARRUCCI (A1977). Chaque composante spectrale du tenseur des extra-contraintes obéit à une loi identique à celle régissant le comportement d'un fluide de Maxwell.

Les auteurs ont comparé leurs résultats avec ceux fournis par un modèle de Maxwell dont le temps de relaxation est la moyenne de la distibution considérée.

La prise en compte du spectre de relaxation a alors pour effet de donner une force d'étirage plus importante, ainsi qu'un profil de vitesse plus linéaire.

Une autre interprétation est la suivante: pour un modèle à temps unique, le temps de relaxation moyen en écoulement élongationnel déduit de la comparaison par rapport aux résultats expérimentaux est supérieur à celui correspondant à la moyenne de la distribution.

Ceci est en total accord avec les résultats obtenus antérieurement.

A la question, précédemment posée, de savoir si les mesures en cisaillement peuvent s'appliquer aux écoulements élongationnels, nous pouvons donc répondre par l'affirmative à condition de disposer de la distribution spectrale et d'en tenir compte.

Ce résultat, établi pour le filage, peut aisément être généralisé.

Par ailleurs, il est important de noter que le fait de prendre en compte une distribution de temps de relaxation ne fait qu'exacerber le résultat constaté pour un fluide de Maxwell, à savoir:

- force d'étirage augmentant très vite avec le nombre de Deborah, à taux d'étirage fixé et vice-versa,
- existence d'un taux d'étirage limite.

Cette limitation, longtemps considérée comme une limitation physique, ne serait que la conséquence d'un modèle rhéologique trop simpliste.

De manière générale, différentes lois ont été élaborées afin de combler les lacunes du modèle de Maxwell. Citons par exemple:

- le modèle de ACIERNO et al. (ACIERNO et al. (D1976)),
- le modèle de LEONOV,
- le modèle de PHAN-THIEN et TANNER ou PTT (PHAN-THIEN et TANNER (D1977), PHAN-THIEN (A1978)).

Ce dernier semble représenter un bon compromis (bons résultats, facilité de mise en oeuvre) et a, par ailleurs, permis d'obtenir de bons résultats.

Il s'agit d'une loi à dérivation convective et comprenant une décomposition spectrale du tenseur des extra-contraintes (cf. Annexe A2).

Le facteur K, fonction de trace($\vec{\tau}^{(i)}$) représentatif de l'énergie élastique, n'est important qu'en écoulement élongationnel et permet de limiter la viscosité élongationnelle dans tous les cas.

Une forme linéaire de K permet d'obtenir une viscosité élongationnelle augmentant avec le taux d'élongation puis restant constante par la suite. A l'inverse, pour une forme exponentielle, nous avons croissance puis décroissance (PHAN-THIEN (A1978)).

Ce modèle fut testé avec succès par ce dernier. Les résultats représentent une amélioration considérable par rapport à ceux obtenus à l'aide d'un modèle de Maxwell (la comparaison avec les résultats expérimentaux a porté sur le profil de vitesse).

Toutefois, pour mieux apprécier le réel apport, il eut été souhaitable de disposer des résultats concernant:

- la force d'étirage calculée,
- un modèle de Maxwell à temps de relaxation multiples.

- **Conditions aux limites en contraintes pour un fluide viscoélastique**

Un fluide viscoélastique nécessite une condition à la limite amont concernant la contrainte. La valeur à spécifier étant, à priori, inconnue, du fait du "découpage" de l'écoulement au niveau de la sortie de filière.

DENN et al. (A1975) ont étudié les effets de cette valeur "initiale" dans le cas des deux états limites qu'ils ont définis:

- Nombre de Deborah faible: le profil de vitesse n'est affecté qu'au voisinage de la sortie de filière,
- Niveaux de contraintes élevés: le profil est peu affecté.

En dehors de ces deux cas limites, le choix de la valeur "initiale" peut constituer un obstacle majeur.

Il faut, en fait, raisonner en terme de rapport entre les extra-contraintes radiale et axiale (cas du filage par exemple) en sortie de filière. Ce rapport étant fonction de l'écoulement dans la filière.

KEUNINGS et al. (A1983) ont montré que ce rapport tend asymptotiquement vers zéro lorsque l'on s'éloigne de la sortie de filière.

Les auteurs suggèrent la valeur nulle comme condition en sortie de filière.

Un moyen de s'affranchir des problèmes de conditions aux limites en sortie de filière consiste à adopter une loi constitutive sous forme intégrale (NAM et BOGUE (A1984), PAPANASTASIOU et al. (A1987)), avec prise en compte de l'écoulement de cisaillement dans la filière.

Toutefois, les différences restent faibles mêmes dans le cas de très courtes longueurs de filage (NAM et BOGUE (A1984)) et ne justifient pas les complexités apportées par de telles lois.

Finalement, nous retiendrons la valeur nulle compte tenu de nos grandes distances d'étirage.

- **Etude mathématique du système d'équations monodimensionnelles**

BERIS et LIU (A1988) ont étudié le caractère mathématique du système d'équations monodimensionnelles instationnaires pour un fluide de Maxwell, en isotherme et en négligeant la gravité ainsi que la tension superficielle.

Il s'est alors avéré que le système de quatre équations ainsi obtenu est:

- totalement hyperbolique (quatre valeurs propres distinctes),
- toujours évolutionnaire (les valeurs propres sont toutes réelles),

en tenant compte du fait que le tenseur:

$$\vec{\sigma} + \frac{1}{De} \vec{I}$$

$\vec{\sigma}$ étant le tenseur des contraintes et $\vec{I}$ le tenseur unité

est toujours défini positif pour un fluide de Maxwell à dérivation convective supérieure.

Les signes des caractéristiques (trois à pente négative et une à pente positive) permettent de valider les conditions aux limites généralement admises (trois conditions en amont, une en aval).

- **Prise en compte du transfert de chaleur**

Les études en isotherme ont permis de mettre en évidence l'influence de la rhéologie en s'affranchissant des complexités dues à la variation des propriétés du fluide consécutive au refroidissement.

L'étape suivante a consisté à joindre l'équation de conservation de l'énergie aux systèmes d'équations précédents:

- la principale contribution est celle de la convection,
- celle du rayonnement est de l'ordre de 10 à 20 %,
- la dissipation visqueuse est faible.

Les nouveaux problèmes qui se sont posés étaient alors les suivants:

- lois de variation des propriétés physiques du polymère avec la température:

Une loi de variation en exponentielle (loi d'Arrhénius) constitue une bonne approximation concernant la viscosité. Cette loi fait intervenir l'énergie d'activation, fonction du matériau.

En ce qui concerne le module de cisaillement, une loi de variation linéaire est la plus fréquemment admise. On peut cependant remarquer que sa variation est faible devant celle de la viscosité et a souvent été négligée.

– corrélation donnant le coefficient de transfert de chaleur local.

– les relations constitutives doivent être "corrigées" afin de tenir compte des effets non-isothermes (FISHER et DENN (A1977) pour la loi de Maxwell, PHAN-THIEN (A1978), GUPTA (B1980)).

Ces lois "non-isothermes" sont, en fait, très peu utilisées car elles ne fournissent pas, semble-t-il, des résultats quantitativement différents de ceux des lois "isothermes".

Très peu de comparaisons avec les résultats expérimentaux (très rares également) ont été effectuées et cela se conçoit aisement car à l'incertitude concernant les paramètres rhéologiques s'ajoute celle concernant le coefficient de transfert et la variation des propriétés du matériau avec la température.

Une des seules comparaisons que nous ayons recensée est celle effectuée par GAGON et DENN (A1981), dans le cas du modèle de PTT.

Ces auteurs ont comparé leurs prédictions à des résultats expérimentaux obtenus dans des conditions "industrielles" de filage (fortement non-isothermes, longueur de filament importante, vitesse et taux d'étirage très élevés, ...). nécessitant la prise en compte de l'inertie ainsi que de la trainée de l'air.

Les comparaisons ont porté sur le profil de vitesse. Un bon accord est alors obtenu. Aucune indication n'est toutefois fournie quant à la force d'étirage ou au nombre de Deborah.

Malheureusement, les conditions ci-dessus sont telles que la rhéologie passe au second plan. au dépend de la trainée de l'air et du transfert de chaleur. Une spectaculaire illustration est, par exemple, l'absence de taux d'étirage limite dans le cas d'un fluide de Maxwell.

Les effets prédominants sont ceux liés à la variation de la température.

Un des intérêts de cette étude réside dans l'utilisation du modèle rhéologique de PTT. Une brève analyse de la solution y est alors présentée.

Cette dernière est sensiblement "newtonienne" dans le sens où la force d'étirage augmente moins vite avec le taux d'étirage, par rapport au cas d'un modèle de Maxwell. De même, il n'existe pas non plus de taux d'étirage limite.

3.2.2.3 Instabilités d'étirage

- **Mise en évidence expérimentale**

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 2, lors de l'étirage d'un filament de polymère fondu (ou de l'étirage d'un film), il apparait dans certaines conditions des instabilités caractérisées par une variation périodique du diamètre du filament (ou de l'épaisseur du film), accompagnées d'une variation similaire et en phase de la force d'étirage. La fluctuation de cette dernière constitue bien souvent le critère de détection de l'apparition de l'instabilité.

Ces instabilités sont connues sous le vocable de **"Draw Resonance"**.

De façon générale, les constatations communes à toutes les observations expérimentales sont les suivantes:

- apparition au-delà d'un taux d'étirage critique,
- l'amplitude des fluctuations augmente avec le taux d'étirage, conduisant à la rupture du filament,
- fluctuations de période et d'amplitude bien définies.

Ainsi, pour un fluide newtonien (huile de silicone) et dans des conditions isothermes, DONNELY et WEINBERGER (A1975) ont trouvé un taux d'étirage critique de l'ordre de 20 (en tenant compte du gonflement). Ce taux est indépendant de la force d'étirage. Par contre, une corrélation peut être effectuée entre celle-ci et l'amplitude des fluctuations.

CHANG et DENN (A1979) ont considéré un fluide newtonien (sirop de glucose) et un fluide viscoélastique de viscosité sensiblement constante et comparable à celle du fluide newtonien, permettant ainsi de mettre en évidence l'effet de l'élasticité.

Pour le fluide newtonien, le taux critique est de l'ordre de 24 à 26.

Dans le cas du fluide viscoélastique, les auteurs ont mis en évidence les phénomènes suivants:

- existence d'une zone de stabilité à taux d'étirage élevés,
- stabilité inconditionnelle aux débits élevés.

Les taux d'étirage critiques peuvent être considérablement plus faibles (de l'ordre de 5 à 10) dans le cas de matériaux fortement fluidifiants (PEHD, polypropylène ou PP - NAM et BOGUE (A1984), MINOSHIMA et WHITE (B1986)).

MINOSHIMA et WHITE (B1986) ont étudié l'effet de la macrostructure du polymère dans le cas du filage et de l'extrusion de film en considérant différents variétés de polyéthylènes.

Les taux d'étirage critiques sont comparables pour les deux procédés.

le PEBD s'avère le plus stable et le PEHD à large distribution moléculaire le plus instable.

DEMAY et AGASSANT (A1985) ont mis en évidence l'effet stabilisant du refroidissement dans le cas du filage à l'eau. A partir d'une certaine valeur de la longueur de filage, la stabilité est inconditionnelle.

Il convient de préciser un point de vocabulaire. Conformément à l'usage, il faut entendre par "stabilisation" ou par "plus stable que" le fait que le taux d'étirage critique est plus élevé. Cela ne signifie nullement l'absence d'instabilité et ne préjuge pas de la sévérité des fluctuations.

De même, un paramètre est dit stabilisant lorsque son augmentation produit une stabilisation.

- **Etudes théoriques**

Comme c'est souvent le cas, les premières études ont concerné un fluide newtonien dans des conditions isothermes.

PEARSON et MATOVICH (A1969) ont utilisé le formalisme de la stabilité linéaire, consistant à perturber puis à linéariser les équations autour de l'état stationnaire.

Le problème a été perçu en termes de réponse de l'écoulement à une perturbation forcée sinusoïdale (intervenant de façon explicite dans les conditions aux limites en sortie de filière ou en zone d'étirage). D'où un problème aux valeurs initiales avec intégration dans le temps.

Les auteurs ont pu exprimer analytiquement le facteur d'amplification en fonction de la fréquence Ω des perturbations et du taux d'étirage, et ce pour différentes conditions aux limites.

Les résultats mettent en évidence des points pour lesquels ce facteur devient infini, indiquant ainsi de possibles instabilités. Remarquons que de tels points n'existent pas lorsque l'on maintient la force d'étirage constante au lieu du taux d'étirage.

Le problème fut, par la suite, reformulé en un problème aux valeurs propres et l'équivalence entre les deux formulations citées, établie.

Une simple manipulation permet d'en déduire un problème aux limites dont une méthode de tir basée sur des itérations de type Newton-Raphson sur la valeur propre assure, en général, la résolution.

Si l'on néglige l'inertie, la gravité, la trainée de l'air ainsi que la tension superficielle, le taux d'étirage critique théorique est de:

$$E_C = 20.21$$

La période théorique est de:

$$T = 0.448 \frac{L}{V_0}$$

où L est la longueur du filament et V_0 la vitesse d'extrusion.

Conformément aux observations expérimentales, ces résultats ont été établis en considérant un taux d'étirage constant. On peut montrer qu'aucune solution non-triviale n'existe si l'on maintient une force d'étirage constante.

La perte de la stabilité se fait au profit d'une solution périodique (bifurcation de Hopf).

Il est important de noter que le phénomène n'est absolument pas lié à l'élasticité du fluide.

Le taux d'étirage critique calculé ci-dessus est conforme aux résultats expérimentaux.

Les résultats concernant la période des fluctuations sont qualitativement corrects, compte-tenu:

- des différentes hypothèses effectuées,
- du fait que l'on compare les prédictions d'une théorie linéaire et les mesures concernant un phénomène non-linéaire.

Remarquons également une corrélation avec le temps de résidence mise en évidence par NAM et BOGUE (A1984).

D'autres auteurs ont examiné l'influence de la gravité, de l'inertie et de la tension superficielle (SHAH et PEARSON (A1972), CHANG et al. (A1981)).

Les deux premiers s'avèrent stabilisants et le dernier déstabilisant.

Les études se sont, par la suite, étendu au cas des fluides viscoélastiques.

Ainsi, FISHER et DENN (A1976) ont considéré un fluide de Maxwell dont la viscosité est fonction du taux de déformation (loi en puissance, caractérisée par l'indice de pseudo-plasticité n) et le module de cisaillement constant.

Les auteurs ont présenté leurs résultats sous forme d'une carte de stabilité où le taux d'étirage critique est fonction du nombre de Deborah De et de l'indice de pseudo-plasticité n.

Ces auteurs ont alors mis en évidence l'existence de deux taux d'étirage critiques:

- un taux d'étirage critique "inférieur" E_{cinf} au-delà duquel les instabilités apparaissent,
- un taux d'étirage critique "supérieur" E_{csup} au-delà duquel on retrouve une zone de stabilité.

L'existence de ce dernier permet d'expliquer la stabilisation à taux d'étirage élevé constatée par CHANG et DENN (A1979).

L'effet de l'indice de pseudo-plasticité n permet d'expliquer les taux d'étirage critiques particulièrement faibles que l'on peut constater expérimentalement. En effet, si n diminue, E_{cinf} diminue rapidement.

Comme nous pouvons le constater, la théorie développée permet de rendre compte de la plupart des observations expérimentales. Elle ne peut, par contre, expliquer la stabilité à débits élevés constatée par CHANG et DENN (A1979). Ce phénomène ne peut non plus être attribué à l'inertie.

- **Etirage d'un film**

Ce cas se démarque de celui du filage par l'introduction de perturbations suivant la largeur du film. Ainsi on recherche des perturbations de la forme:

$$e^{\Omega t+ky}\,\tilde{\Phi}(z)$$

z étant la coordonnée suivant l'axe d'étirage et y celle suivant la largeur. k est le nombre d'onde.

L'écoulement est alors stable s'il est stable quelle que soit la valeur de k.

La présence de perturbations suivant la largeur affecte la stabilité (à une valeur de k correspond un taux d'étirage critique). Toutefois, les perturbations en "2D" (dans le plan) sont en général les plus instables et lorsque ce n'est pas le cas, les différences restent faibles (YEOW (A1974) - AIRD et YEOW (A1983) - ANTURKAR et CO (A1988)).

- **Influence du refroidissement**

Le refroidissement, comme nous allons le constater, joue un rôle primordial.

SHAH et PEARSON (A1972) ont considéré un fluide newtonien. Un refroidissement énergique a un effet d'autant plus déstabilisant que le coefficient de viscosité adimensionnel (paramètre β, Annexes B1 et B2) est faible (résultats reportés pour un taux d'étirage de 48).

Ce résultat qui peut paraitre curieux de prime abord n'est pas en totale contradiction avec les résultats précédents. En effet, lorsque le refroidissement est énergique, la température chute rapidement pour rester sensiblement constante sur une grande partie du filament. Ainsi l'écoulement se trouve dans des conditions se rapprochant des conditions isothermes.

DEMAY et AGASSANT (A1982) n'ont toutefois pas confirmé ce résultat.

FISHER et DENN (A1977) ont utilisé une forme non-isotherme de la loi de Maxwell. Le refroidissement a un effet stabilisant même s'il est énergique (le phénomène sus-mentionné n'a donc pas lieu).

D'une manière générale, le refroidissement stabilise fortement l'étirage, de sorte que, conformément à l'expérience, aucune instabilité n'est prédite dans des conditions réalistes.

WILLIEN et al. (A1988) ont mis en évidence l'effet de la nature du refroidissement, et ce dans le cas d'un fluide newtonien.

Conformément aux résultats des différents auteurs, un transfert thermique purement convectif est stabilisant. Un transfert thermique purement radiatif est, par contre, déstabilisant.

Des résultats contrastés apparaissent dans les cas pratiques où les deux modes de transfert coexistent.

Ce résultat est, d'un point de vue pratique, peu important car la contribution du rayonnement est, en général, assez faible, tout au moins dans le cas des polymères. (elle est, par exemple, plus importante dans le cas du verre).

- **Fluctuation de la position de la ligne de figeage**
  Effet de l'élasticité de la partie solidifiée

Les études précédemment citées supposent un point de solidification dont la position est précise et fixe. Ce qui est le cas d'un refroidissement à l'eau.

En présence d'un refroidissement par jet d'air, la solidification est achevée au cours de l'étirage, avant que le fluide n'atteigne les rouleaux d'entrainement où la vitesse est imposée.

D'où l'idée de PEARSON et al. (A1976) d'examiner l'influence de la fluctuation de la position du point de solidification ainsi que de celle de l'élasticité de la partie solidifiée dont la longueur est généralement importante devant celle de la partie "liquide".

Les auteurs ont tout d'abord admis que la solidification se fait instantanément lorsque la température de solidification (spécifiée) est atteinte, ce qui constitue l'hypothèse la plus sujette à caution de cette étude.

Le comportement du polymère dans la partie "liquide" est modélisé par une loi en puissance. Il est à noter que les auteurs ont considéré une viscosité indépendante de la température afin que le problème admette une solution analytique.

La partie solidifiée, supposée purement élastique, est caractérisée par son module d'élasticité ou module de Young.

Le problème étant linéarisé, la fluctuation de la position du point de solidification ainsi que l'élasticité de la partie solidifiée se traduisent par de nouvelles conditions aux limites à la ligne de figeage.

Les résultats sont alors les suivants:

- La stabilité est inconditionnelle lorsque l'indice de pseudo-plasticité est supérieur ou égal à l'unité et ce quel que soit le comportement de la partie solide,

- Il existe un taux d'étirage critique dans le cas contraire.

- La fluctuation du point de solidification est fortement stabilisante.

Les instabilités d'étirage apparaissent alors comme étant liées à une localisation précise et contrôlée du point de solidification, où l'on impose par ailleurs la vitesse.

Notons que, paradoxalement, la prise en compte de l'élasticité de la partie solidifiée a un effet stabilisant d'autant plus énergique que le module de Young est faible.

Finalement, en généralisant cette étude au cas plus réaliste d'une viscosité fonction de la température, aucune instabilité ne doit apparaitre dans tous les cas.

- **Stabilité non-linéaire**

Toutes les études mentionnées jusqu'à présent reposent sur la stabilité linéaire. Ce formalisme permet d'étudier l'évolution de perturbations infinitésimales mais tombe en défaut lorsque celles-ci s'amplifient, non pas exponentiellement, mais pour atteindre des valeurs "finies" du fait de la non-linéarité apparaissante.

Par ailleurs, lorsque l'écoulement est stable vis-à-vis de perturbations infinitésimales, il convient de vérifier s'il l'est également vis-à-vis de perturbations finies.

Nous avons recensé deux types d'approche:

La première consiste en une résolution directe des équations instationnaires de départ, non-linéarisées.

C'est le cas de l'étude entreprise par ISHIHARA et KASE (A1975, A1976) qui ont utilisé des méthodes de différences finies et intégré le système dans le temps.

Par ailleurs afin de valider leur modèle, ces auteurs ont mis en oeuvre une étude expérimentale ayant consisté à mesurer l'amplitude ainsi que la période des fluctuations dans différentes conditions d'instabilité.

La solution calculée consiste en des oscillations d'amplitude et de période constantes lorsque le taux d'étirage excède la valeur critique calculée par la théorie linéaire. Par ailleurs, l'amplitude augmente fortement avec le taux d'étirage.

L'accord concernant la période des fluctuations est bon. Celui concernant l'amplitude est bon dans le cas d'un fluide en loi puissance (A1976) mais mauvais dans le cas d'un fluide newtonien (A1975).

Dans le cas d'un fluide de Maxwell, FISHER et DENN (A1976) ont adopté l'approche usuelle en théorie non-linéaire, et consistant à développer la solution sur la base tronquée des modes propres du système linéaire.

Il s'avère alors que la zone de stabilité prédite coïncide parfaitement avec celle de la théorie linéaire. De nouveau, la concordance avec les résultats expérimentaux de ISHIHARA et KASE (A1976) est bonne.

Ces études confirment le bien-fondé de l'adoption d'une théorie linéaire si l'on veut "se contenter" de déterminer les conditions d'apparition de l'instabilité.

3.2.3 Le soufflage de gaine

Comme précédemment, nous considèrerons successivement:

- les études en stationnaire,
- les études de stabilité.

3.2.3.1 Etudes en stationnaire

- **Le modèle de PEARSON et PETRIE**

La première étude du soufflage de gaine du point de vue de la mécanique des fluides est due à PEARSON et PETRIE (B1970a). Ceux-ci ont considéré l'écoulement d'un film liquide tubulaire mince de rayon variable avec des hypothèses très restrictives:

- axisymétrie,
- écoulement stationnaire, isotherme,
- fluide newtonien.

La zone d'intérêt étant celle comprise entre la sortie de filière et la ligne de figeage dont la position est supposée connue.

Comme pour l'étirage d'un filament ou d'un film, les auteurs ont obtenu un système d'équations ne faisant intervenir qu'une seule variable d'espace, l'abscisse axiale, et ce en développant la solution à l'aide d'une technique de perturbation.

En plus de l'hypothèse d'épaisseur faiblement variable, le petit paramètre nécessaire est:

$$\varepsilon = \frac{\text{épaisseur caractéristique du film}}{\text{rayon caractéristique du tube}}$$

traduisant l'approximation dite du "film mince".

Une approche plus physique basée sur des arguments géométriques a, par la suite, permis aux mêmes auteurs (PEARSON et PETRIE (B1970b)) d'obtenir le même système d'équations. L'hypothèse de film mince se traduit alors par les hypothèses suivantes:

- la variation des grandeurs suivant l'épaisseur est négligée,
- les gradients de vitesse sont approximés localement par ceux d'un film plan.

La mise en équations du problème consiste alors:

- à élaborer les équations d'équilibre entre les efforts s'exerçant sur la bulle (dus à la force d'étirage et à la différence de pression), traitée alors comme une membrane, et les contraintes dans le film.

- à relier les contraintes ci-dessus et les grandeurs décrivant l'écoulement (en particulier les taux de déformation car il s'agit d'un fluide).

- à traduire la conservation du débit, permettant ainsi de calculer de la vitesse.

Il en résulte un système d'équations différentielles non-linéaires d'ordre 3 formant un problème aux limites à deux points: c'est le modèle de PEARSON et PETRIE (Annexe D3). **Ce dernier servira de base à toutes les études ultérieures.**

Les paramètres adimensionnels qui interviennent dans les équations sont (cf. Annexe D1):

- la force d'étirage T_Z,
- la différence de pression B,
- le taux de gonflage G,
- la hauteur de figeage X,

cette dernière de manière implicite par l'intermédiaire des conditions aux limites.

Remarquons que la ligne de figeage est matérialisée par une condition géométrique: le film est parallèle à l'axe de la bulle, ce qui n'est effectivement possible que lorsque la viscosité devient infinie.

La forme de bulle obtenue en résolvant les équations comporte un col cylindrique d'autant plus long que la hauteur de figeage est importante, suivi d'un gonflement brusque.

Les hypothèses supplémentaires du modèle de PEARSON et PETRIE, largement utilisées par la suite, sont:

- masse volumique constante:

Bien que celle-ci puisse subir des variations relativement importantes (de l'ordre de 10 à 20 %), cette hypothèse est raisonnable. De surcroit, une loi de variation avec la température (la plus adéquate) ne poserait aucune difficulté.

– les effets de l'inertie, de la gravité et de la tension superficielle sont négligés. Il en est également de même en ce qui concerne la trainée de l'air et plus généralement les efforts dus au jet d'air.

Ces hypothèses peuvent se justifier par la très forte viscosité du polymère dans les conditions de mise en oeuvre.

Toutefois, dans des conditions industrielles, ces contributions peuvent être significatives, en particulier la gravité.

Leur prise en compte ne devrait pas, au niveau du calcul, poser des difficultés majeures. A titre indicatif, PETRIE (B1983) propose un système d'équations incluant ces différents effets.

Comme dans le cas du filage ou de l'extrusion de film, aucune approche formelle n'a été effectuée en vue de l'obtention des équations du "film mince" pour des fluides viscoélastiques.

Le problème du domaine de validité des équations lié à la prise en compte éventuelle du gonflement en sortie de filière ne se pose pas compte-tenu de la grande distance d'étirage.

De même, il est raisonnable de supposer une faible influence des conditions aux limites en contraintes dans le cas d'un fluide viscoélastique.

- **Prise en compte de la variation de température**

L'hypothèse la plus restrictive du modèle de PEARSON et PETRIE est, bien évidemment, celle d'écoulement isotherme. Ainsi, l'équation de conservation de l'énergie fut jointe au système initial.

La principale contribution est celle de la convection forcée. Toutefois, le rayonnement peut, dans certains cas, être relativement important (jusqu'à 20%) et a été pris en compte par certains auteurs (HAN et PARK (B1975b), CAIN et DENN (B1988)). Bien qu'assurément très faible, la dissipation visqueuse fut également prise en considération (LUO et TANNER (B1985), CAIN et DENN (B1988)).

De manière générale, le coefficient de transfert par convection forcée, supposé constant, est déterminé par itérations, en imposant la température à la ligne de figeage.

Dans le cas de matériaux semi-cristallins, le profil de température présente un palier très prononcé, centré au niveau de la ligne de figeage et correspondant à la cristallisation (KANAI et WHITE (B1984), dans le cas de différents polyéthylènes). La valeur de ce palier est sensiblement constante quelles que soient les conditions d'élaboration.

A l'inverse, dans le cas de polymères amorphes, le palier n'existe pas et la température à la ligne de figeage est variable (GUPTA (B1980) – polystyrène). Il est à noter que l'on ne peut, en toute rigueur, parler de solidification pour de tels polymères.

Deux remarques s'imposent:

- puisque déterminé par itérations, on peut considérer que le coefficient de transfert ci-dessus prend en compte toutes les sources de transfert de chaleur.
- supposer un coefficient constant est assurément une hypothèse grossière, due à une lacune au niveau des données expérimentales.

En effet, peu de corrélations entre la vitesse du jet d'air et le coefficient de transfert local h_c sont disponibles.

PETRIE (B1983) propose une loi de la forme:

$$h_c = C_1 \, U_{max}^{\,n}$$

avec n=1,5 et C_1=4 (dans le système d'unités S.I.). U_{max} étant la vitesse maximale du jet d'air à la position considérée. Cet auteur propose:

$$U_{max} = C_2 \, (z)^m$$

avec m=–0,75, C_2 étant fonction du débit de soufflage et de la géométrie du système de refroidissement, ce qui rend cette corrélation inexploitable. Notons que z représente l'abscisse axiale.

En déterminant le coefficient local de transfert de chaleur h_c à partir du profil de température mesuré, KANAI et WHITE (B1984) ont établi le résultat suivant:

$$Nu = 0{,}043\ Re^{0{,}76}$$

au-delà du point où h_c est maximal et jusqu'à l'apparition de la cristallisation pour laquelle la température est constante. Nu et Re sont basées sur une longueur L mesurée à partir du point de h_c maximal (fonction de la hauteur de figeage). La vitesse intervenant dans la définition de Re est la vitesse maximale du jet d'air à la position considérée.

et:

$$h_c = 2{,}5\ U_{max}^{1,6}$$

au-delà de la zone où la cristallisation se produit.

Cette seconde relation est similaire à celle proposée par PETRIE (B1983). La première est certainement tributaire du système de refroidissement.

Notons que KANAI et WHITE ont mesuré le profil de vitesse du jet d'air le long de la bulle. Les résultats obtenus correspondent à ceux d'un jet pariétal classique se développant le long d'une paroi fixe.

- **Bilan concernant le modèle newtonien**

A première vue, il n'y a aucune raison de s'attendre à une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et la théorie newtonienne.

Toutefois, cette dernière permet, en général et si l'on impose le taux de gonflage, de bien reproduire les formes de bulle observées expérimentalement (cf. par exemple PETRIE (B1975)). Cependant, ce test n'est pas très probant.

En effet, la concordance concernant la vitesse, les vitesses de déformation et les contraintes est mauvaise. Il semblerait que ces grandeurs soient plus sensibles aux variations de température ainsi qu'à la rhéologie du polymère.

En conséquence, la force d'étirage ainsi que la différence de pression calculées présentent des différences notables avec les valeurs mesurées. Ainsi, par exemple, la différence de pression calculée par PETRIE (B1975) est largement surestimée (facteur 3 à 4).

- **Extension à d'autres lois rhéologiques**

HAN et PARK (B1975b) ont modélisé le comportement du fluide par une loi en puissance, en utilisant le concept de viscosité élongationnelle apparente. Une étude expérimentale antérieure (HAN et PARK (B1975a)) leur a permis d'établir une loi empirique reliant ladite viscosité élongationnelle au taux de déformation (loi en puissance) et à la température (loi exponentielle). Par ailleurs, la gravité fut prise en compte.

Les formes de bulle ainsi que le profil d'épaisseur sont prédites correctement. Cependant, les tests plus cruciaux concernant les vitesses de déformations et les contraintes n'ont pas été réalisés.

Notons qu'un corps fluidifiant donne lieu à des taux de gonflage supérieurs à ceux d'un corps épaississant (cf. § 3.2.1).

L'étude expérimentale mentionnée ci-dessus a, par ailleurs, montré que le soufflage de gaine permet l'étude de l'écoulement élongationnel des polymères fondus, au même titre que le procédé de filage. Contrairement à ce dernier, le soufflage de gaine permet l'étude d'écoulements uniaxiaux et biaxiaux, en jouant sur la différence de pression.

PETRIE (B1975) considéra le cas limite d'un fluide purement élastique (un fluide visqueux constituant le cas limite opposé). Les résultats expérimentaux s'interposent entre ces deux réponses extrêmes.

Par la suite, des modèles viscoélastiques furent adoptés, non sans difficultés.

LUO et TANNER (B1985) ont testé le modèle de Maxwell.

On retrouve alors la nécessité de spécifier les rapports des extra-contraintes en sortie de filière. Les valeurs généralement considérées sont les valeurs nulles. Compte-tenu des grandes distances, ces conditions aux limites ne doivent toutefois pas intervenir de manière significative.

Globalement, l'élasticité, représentée par le nombre de Deborah, a pour effet de restreindre le gonflement de la bulle ainsi que l'amincissement du film, à force d'étirage et à différence de pression imposées et par rapport à un fluide newtonien de même caractéristique de viscosité.

Les auteurs ont comparé leurs prédictions aux résultats expérimentaux de GUPTA (B1980). Cette dernière étude présente l'avantage de porter sur un matériau (polystyrène) ayant bien été caractérisé (viscosité, module de cisaillement, spectre de temps de relaxation). Notons que le refroidissement s'est effectué à l'air ambiant.

Il s'est alors posé le problème du choix du temps de relaxation.

Ainsi, les auteurs ont adopté un module de cisaillement 2,5 fois plus important que celui fourni par GUPTA mais ont, par contre, gardé la même viscosité.

En dépit des justifications fournies par les auteurs, force nous est de constater que seule la bonne concordance entre les prédictions numériques et les résultats expérimentaux est en mesure d'expliquer la valeur de ce facteur.

De nouveau, les formes de bulle sont reproduites correctement. Remarquons, en particulier, que le modèle prédit très bien une légère diminution avant augmentation du diamètre de la bulle (départ diminué). L'accord concernant les autres profils, notamment les contraintes, est également satisfaisant.

La force d'étirage et la différence de pression, déterminées par itérations en imposant le taux de gonflage et le taux d'étirage mesuré expérimentalement, sont estimées à 5-10 % près.

La méthode itérative adoptée pour le calcul de la solution a posé de considérables problèmes numériques liés à la convergence et à la stabilité.

Ainsi, aucune tentative de simulation d'essais à taux de gonflage inférieurs à l'unité n'a été fructueuse du fait de problèmes de divergence de la solution.

Ayant également adopté le modèle de Maxwell, CAIN et DENN (B1988) ont de nouveau comparé leurs prédictions théoriques aux résultats de GUPTA (B1980) (mêmes viscosité et temps de relaxation que LUO et TANNER).

Un des principaux attraits de cette étude réside dans l'adoption d'une méthode matricielle en remplacement de la méthode de tir classiquement adoptée. Son efficacité semble réelle. Ainsi, par exemple, la simulation d'essais à taux de gonflage inférieurs à l'unité a été couronnée de succès.

D'autres modèles rhéologiques ont également été considérés.

Le modèle de LEONOV, testé par LUO et TANNER (B1985), n'a pas permis , au dire de ces auteurs, de reproduire correctement les résultats de GUPTA (B1980).

Citons également le modèle de MARUCCI adopté par CAIN et DENN (B1988). Ce dernier n'a malheureusement pas fait l'objet d'une confrontation avec les résultats expérimentaux.

Il ressort tout d'abord de ces deux études qu'un modèle à temps de relaxation multiples n'est pas indispensable. Dans ce cas, le choix d'un temps de relaxation est primordial.

Il est intéressant de remarquer, dans la limite des faibles résultats disponibles, que pour obtenir une bonne concordance avec les résultats expérimentaux, la théorie basée sur un fluide de Maxwell nécessite:

- une réduction du module de cisaillement dans le cas du filage,
- une majoration de ce même module dans le cas du soufflage de gaine.

Dans les deux cas, aucune correction de la viscosité n'est cependant nécessaire.

Les éléments de discussion possibles sont:

- la nature des écoulements élongationnels,
- la présence ou non d'un refroidissement.

Les travaux de GUPTA (B1980) comprennent également des essais en isotherme. Toujours en adoptant la correction de LUO et TANNER, CAIN et DENN (B1988) ont simulé un de ces essais. Le relativement faible écart par rapport aux mesures (25%) permet de "disculper" le refroidissement.

La différence constatée ci-dessus serait donc bel et bien due à la nature des deux écoulements élongationnels en présence. Ceci confirme la dépendance par rapport à la nature de l'écoulement de la moyenne que l'on doit effectuer sur le spectre de temps de relaxation.

Finalement, les travaux cités mettent en évidence la prédominance de la variation des propriétés du matériau avec la température.

- **Analyse de la solution**

Il s'avère intéressant d'étudier l'existence, l'unicité ainsi que le comportement de la solution en fonction des paramètres. Ce point, abordé par PEARSON et PETRIE (B1970b), a été repris beaucoup plus en détails par CAIN et DENN (B1988). Ces derniers ont, de plus, étendu leur analyse au cas de fluides viscoélastiques (modèle de Maxwell, modèle de Marucci) et pour des conditions non-isothermes.

En isotherme et en supposant la hauteur de figeage fixée, les paramètres intervenant dans les équations sont:

- la force d'étirage T_χ,
- la différence de pression B,
- le taux de gonflage G,

Pour que la solution soit unique, lorsqu'elle existe, les paramètres que nous devons imposer sont les suivants:

- La force d'étirage T_z ou le taux d'étirage E,
- la quantité d'air emprisonnée dans la bulle (ce qui revient en général à imposer le taux de gonflage) au lieu de la différence de pression B.

Ce résultat reste valable en non-isotherme et pour un fluide viscoélastique.

Dans le cas non-isotherme et en fixant:

- la différence de pression B,
- la force d'étirage T_z,
- le coefficient de transfert h_c,
- la température finale s_f,

Il existe des solutions à taux de gonflages différents et pour des hauteurs de figeage différentes.

Remarquons les points suivants:

- Dans le cas d'un fluide newtonien et en isotherme, le cas où T_z=4B conduit à une bulle cylindrique et à des solutions analytiques, exponentielles, pour l'épaisseur et la vitesse, similaires au cas de l'étirage d'un filament de polymère fondu. L'écoulement est alors uniaxial.

- Dans le cas du fluide de Maxwell:

En fixant T_z, B et X, il existe une valeur maximale du temps de relaxation (valable également en non-isotherme).

Par ailleurs, quelle que soit B, il existe un taux d'étirage limite unique lorsque T_z tend vers l'infini. Le taux de gonflage est alors égal à l'unité.

- Aucune de ces limitations ne subsiste pour le modèle de MARUCCI.

- **Modélisation de la transition liquide-solide**

Toutes les études citées précédemment se limitent à la partie "liquide" comprise entre la sortie de filière et la ligne de figeage dont la position

est spécifiée. On y impose alors la condition d'ordre cinématique conventionnelle suivante:

$$\frac{da}{dz} = 0$$

a étant le rayon de la bulle et z l'abscisse axiale.

Très récemment, CAO et CAMPBELL (B1990) ont réexaminé le problème de la transition liquide-solide, les amenant ainsi à étendre la simulation au-delà de la ligne de figeage.

Le polymère est tout d'abord modélisé par un fluide viscoélastique (modification phénoménologique du modèle de Maxwell) et, par la suite, par un solide élastique.

La transition s'effectue au niveau d'une ligne dite de Transition Elasto-Plastique (PET dans le texte), matérialisée par un critère d'ordre rhéologique, et qui n'est plus nécessairement la ligne de figeage au sens conventionnel du terme. Le modèle rhéologique résultant est assez complexe et fait appel à des concepts tels que:

- la limite de plasticité ("Yield stress" en anglo-saxon),
- l'écrouissage.

La transition s'effectue par comparaison entre le second invariant du tenseur des contraintes et la limite de plasticité ci-dessus.

Tout modèle élastique requiert une connaissance de l'état non-déformé. Dans le cas présent, ce dernier est déduit en écrivant, au niveau de la transition, l'égalité des contraintes dans les deux parties liquide et solide.

Remarquons que l'ordre du système d'équations en-deça du PET est le même que lors d'une simulation "classique". Les auteurs ont alors considéré la condition suivante:

$$\frac{da}{dz}(0) = a'_0$$

a'_0 étant considéré comme un paramètre ajustable.

Une comparaison par rapport aux résultats expérimentaux de GUPTA (B1980) a, de nouveau, permis de tester le modèle ainsi élaboré. Une bonne concordance est obtenue en général.

La valeur donnée au paramètre a'_0 ci-dessus est celle mesurée expérimentalement. De ce point de vue, le modèle n'est pas réellement prédictif.

3.2.3.2 Etudes de stabilité

Les études concernant la stabilité, tant du point de vue théorique que du point de vue expérimental, sont peu nombreuses en dépit de l'importance que revêt cette notion sur le plan pratique.

- **Etudes expérimentales**

Les études expérimentales les plus significatives sont celles que nous avons reportées lors du chapitre 2. Nous en résumons ci-après les principales constatations.

– Les résultats expérimentaux mettent en évidence un large éventail d'instabilités quant à leurs formes. Les fluctuations peuvent être axisymétriques ou non et périodiques ou non, contrairement aux instabilités de type "Draw Resonance".

– Par contre, lorsque l'écoulement est sensiblement uniaxial (bulle non-gonflée), des fluctuations de l'épaisseur du film similaires au "Draw Resonance" prennent naissance aux taux d'étirage élevés.

– Il est également d'usage, car étant d'un intérêt pratique évident, d'examiner l'influence du type de matériau. De ce point de vue, les deux études sont en contradiction. L'une conclue à la plus grande stabilité du PEBD, l'autre à celle du PEHD.

Une explication de l'état métastable observée par MINOSHIMA et WHITE (B1986) a été suggérée par CAIN et DENN (B1988): l'existence, mise en évidence par ces derniers auteurs et évoquée précédemment, de solutions à taux de gonflage et à hauteurs de figeage différents lorsque l'on impose:

- la différence de pression B,
- la force d'étirage T_Z,
- le coefficient de transfert h_C,
- la température finale.

Cette interprétation n'est pas totalement satisfaisante car l'état métastable dont il est question est caractérisé par:

- un taux de gonflage sensiblement constant,
- et surtout, une fluctuation de la force d'étirage.

Les causes les plus plausibles demeurent celles que nous avons évoquées lors du chapitre 2.

Finalement, les résultats manquent d'homogénéité et peuvent même être en contradiction.

La seule certitude que l'on ait concerne l'existence d'un taux d'étirage critique au-delà duquel des instabilités prennent naissance.

- **Etudes théoriques**

La première et seule étude théorique disponible pendant longtemps est celle de YEOW (B1976) qui utilisa, de nouveau, le formalisme de la stabilité linéaire en superposant des perturbations infinitésimales au modèle de PEARSON et PETRIE.

Cet auteur considéra, par ailleurs, des perturbations axisymétriques.

La première étape de sa démarche a consisté à calculer les nouvelles composantes, instationnaires, du tenseur des taux de déformation en déterminant le nouveau tenseur métrique associé au repère naturel au point considéré (ce repère étant cette fois dépendant du temps).

Ces composantes fournissent alors les seuls termes instationnaires.

Les équations furent ensuite linéarisées autour de la position d'équilibre. D'où un problème aux valeurs propres généralisé, constitué de quatre équations différentielles linéaires du premier ordre et que l'auteur a résolu par une méthode de tir.

Les paramètres maintenus constants ont été le taux d'étirage et la différence de pression.

Les instabilités n'apparaissent que pour des taux d'étirage considérablement élevés (de l'ordre de 10000 ou plus). Par ailleurs, la stabilité est d'autant plus grande que la bulle est courte.

Les hypothèses, par trop simplistes, ne permettent pas de conclure de manière significative. Par contre, nous retiendrons la démarche, fort intéressante, et pouvant servir, à la manière du modèle de PEARSON et PETRIE, de point de départ pour la mise en oeuvre de modèles plus élaborés.

Ainsi, beaucoup plus récemment, CAIN et DENN (B1988) l'ont étendue au cas d'un fluide de Maxwell et pour des conditions non-isothermes. Les auteurs ont également considéré un fluide newtonien.

Contrairement à YEOW, ces deux auteurs ont considéré différents jeux de paramètres maintenus constants:

1) force d'étirage T_Z et différence de pression B,
2) force d'étirage T_Z et quantité d'air emprisonnée A,
3) taux d'étirage E et différence de pression B,
4) taux d'étirage E et quantité d'air emprisonnée A.

Le dernier jeu de paramètres est celui adopté en pratique et l'avant dernier celui adopté par YEOW.

Par ailleurs, une technique matricielle fut utilisée pour le calcul des valeurs propres.

Les résultats obtenus dépendent des paramètres maintenus constants. Le contrôle de la différence de pression est, par exemple, déstabilisant à l'inverse du contrôle de la quantité d'air emprisonnée, stabilisant.

Les remarques suivantes s'imposent:

– Aucune instabilité n'apparait pour (A,T_Z) fixés, ce qui n'est pas le cas pour (A,E) fixés. Ces deux cas de figure ont en commun le fait de ne pas présenter de solutions stationnaires multiples. La stabilisation du premier cas serait due à T_Z. A ce titre, rappelons qu'à force d'étirage constante, le filage est inconditionnellement stable.

D'une manière générale, les auteurs mettent en évidence une étroite corrélation entre l'apparition des instabilités et l'existence de solutions stationnaires multiples.

– le troisième jeu de paramètres imposés est celui adopté par YEOW. Dans les conditions de calcul de ce dernier (newtonien, isotherme), les deux techniques de résolution (méthode de tir, méthode matricielle) fournissent des résultats radicalement différents. En effet, contrairement aux résultats de YEOW, les instabilités trouvées par CAIN et DENN apparaissent dès les valeurs relativement faibles du taux d'étirage et appartenant à la plage de valeurs considérée d'un point de vue pratique.

Comme précédemment, la viscoélasticité a tendance à stabiliser la solution.

Les valeurs propres calculées mettent en évidence différents types d'instabilités; oscillatoires (idem "Draw Resonance") ou non-oscillatoires.

La fluctuation dynamique de la ligne de figeage (méthode de PEARSON et al. (B1976)) constitue un facteur de stabilité mais, contrairement au cas du filage, n'élimine pas systématiquement les instabilités.

L'effet du refroidissement est également stabilisant et s'avère finalement le plus important.

En résumé, l'influence des paramètres maintenus constants constitue le résultat le plus important. Ainsi, dans des conditions réalistes de mise en oeuvre, il semblerait que:

- imposer la quantité d'air emprisonnée conduise à une stabilité inconditionnelle,
- l'écoulement soit, au contraire, systématiquement instable lorsque l'on impose la différence de pression.

L'étude expérimentale de FEIDT (B1983) confirme cette influence de la manière dont on contrôle le gonflage de la bulle. Ainsi, ce dernier évoque l'impossibilité absolue d'obtenir des instabilités sur une installation munie d'un galet-palpeur détectant, au niveau de la ligne de figeage, tout mouvement de la bulle et agissant, en conséquence, sur le gonflage de celle-ci.

Plus généralement, l'évolution d'un processus quelconque dépend de la manière dont on en contrôle les différents paramètres. D'ailleurs, le filage n'est-il pas inconditionnellement stable lorsque l'on impose la force d'étirage ?

Les prédictions de CAIN et DENN ne peuvent pas rendre compte des observations expérimentales. Notons toutefois que lors de telles études, menées à une échelle de laboratoire en général, les paramètres réellement maintenus constants sont rarement précisés. La seule certitude que l'on ait concerne le contrôle du taux d'étirage.

Notons également que ces derniers n'ont pas tenu compte de l'effet de l'élasticité de la partie solidifiée. Une telle prise en compte devrait s'avèrer fondamentale en ce qui concerne la contrainte circonférentielle.

Par ailleurs, il est possible que le principe de "découpage" au niveau de la ligne de figeage soit en cause.

Rappelons qu'en "instationnaire", cette dernière est matérialisée par les conditions suivantes:

- le rayon a ne varie plus au-delà de la ligne de figeage:

$$\frac{da}{dt} = 0$$

- la température y est égale à la température de solidification du polymère:

$$T = T_{solidification}$$

a étant le rayon de la bulle et T la température du film.

Il existe alors deux alternatives:

- simulation "classique" de la seule partie "liquide", mais avec de nouvelles conditions aux limites à la ligne de figeage dont la position sera spécifiée.
- simulation complète de la gaine entière: parties liquide et solide. La transition entre les deux parties sera à définir.

Dans ce deuxième cas, l'étude de CAO et CAMPBELL (B1990) peut fournir une base de départ.

3.2.4 Calcul des valeurs propres

Il convient de faire le point sur les méthodes de résolution des problèmes aux valeurs propres auxquelles conduisent les différents études.

Nous conviendrons tout d'abord d'appeler **première valeur propre** ("dominant eigenvalue") celle qui est la moins stable, conditionnant ainsi la stabilité de l'écoulement.

La méthode classiquement adoptée consiste en un suivi "en continu" de cette première valeur propre à l'aide d'une méthode de tir (avec intégration à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 en général) en faisant varier "faiblement" les paramètres tels que:

- le taux d'étirage,
- le coefficient de transfert de chaleur,
- ... etc.

de façon à pouvoir considérer la valeur propre d'un calcul précédent comme valeur initiale du calcul suivant avec de bonnes chances de "suivre" la même valeur propre (la valeur propre précédemment calculée doit alors appartenir au domaine d'attraction de la nouvelle valeur à déterminer).

Cette méthode présente l'inconvénient évident de nécessiter la connaissance de la première valeur propre pour des valeurs bien déterminées des paramètres. De plus, l'évolution de cette dernière doit être la plus régulière possible.

Elle ne saurait donc nous convenir. Une méthode "directe" est préférable. Autrement dit, une méthode matricielle où le problème discrétisé sera, à première vue, formulé de manière "classique" comme suit:

$$\left[A \right] \left\{ x \right\} = \Omega \left[B \right] \left\{ x \right\}$$

où [A] et [B] sont deux matrices, {x} le vecteur des inconnues aux points de la discrétisation et Ω la valeur propre.

Une telle méthode fut testée par CHANG et al. (B1981). La valeur propre la plus instable est alors systématiquement celle de plus faible module.

Toutefois, les calculs, fortement limités, semblent n'avoir été effectués qu'à titre comparatif. D'ailleurs l'essentiel des résultats présentés par ces auteurs ont été obtenus à l'aide d'une méthode de tir.

L'étude de LIU et BERIS (E1988) suivante apporte davantage d'éléments de discussion.

Ces auteurs ont approximé le système d'équations instationnaires correspondant à un fluide de Maxwell (cf. BERIS et LIU (A1988), système tronqué) à l'aide de différents schémas numériques (méthodes de différences finies, méthodes pseudo-spectrales, méthodes des éléments finis).

Leur but consistait à étudier la stabilité des différents schémas en question en calculant les valeurs propres de la matrice Jacobienne J telle que:

$$\frac{d\alpha}{dt} = F\left(\alpha \right) , \quad J = \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_s}$$

α étant le vecteur des inconnues aux noeuds, l'indice s symbolisant la solution stationnaire.

La "performance" de chaque schéma est confrontée aux résultats de stabilité établis lors d'une étape précédente à partir d'une méthode de tir dont les valeurs propres correspondantes sont qualifiées, improprement, de "valeurs propres du système continu", par opposition aux "valeurs propres du système discret", celles de la matrice Jacobienne.

Les résultats mettent en évidence l'existence d'instabilités artificielles, induites par les différents schémas adoptés.

En particulier, le schéma centré "classique" se révèle générateur d'instabilité. Les méthodes les plus stables sont les méthodes d'éléments finis ainsi que le schéma en différence amont.

D'une manière plus générale, une forte dépendance du spectre des valeurs propres vis-à-vis et de la méthode de discrétisation et du maillage est mise en évidence (RENARDY et RENARDY (E1986), VAN SCHAFTINGEN (E1986) dans le cas de problèmes d'écoulements plus classiques).

Il est intéressant de noter que les méthodes très précises, par exemple les méthodes pseudo-spectrales, sont souvent génératrices d'instabilités artificielles.

Les méthodes matricielles permettent donc d'obtenir le spectre "complet" de valeurs propres. Ce spectre étant entaché d'erreurs:

- de précision: plus la fréquence temporelle augmente, plus la fréquence spatiale augmente. La longueur d'onde spatiale diminue donc et la précision se dégrade pour un nombre de points de discrétisation donné.

- modes artificiels générés par les schémas numériques.

Aucune indication n'est malheureusement fournie, lors des différentes études citées, quant à la manière de ne pas tenir compte de ces modes fictifs.

3.3 BILAN GLOBAL - APPROCHE ADOPTEE HYPOTHESES GENERALES

■ Bilan global de l'étude bibliographique

* Les instabilités dont il a été question lors de l'analyse bibliographique précédente sont propres à l'étirage subi par la matière et ne sont pas du tout liées, comme on pourrait le penser, au comportement spécifique des polymères fondus et, en particulier, à leur élasticité.

Remarquons toutefois que, d'une manière générale, l'étirage:

- stabilise l'écoulement lorsqu'il est faible (disparition de la rupture d'extrudat),
- déstabilise l'écoulement lorsqu'il est important (instabilités d'étirage): c'est le cas qui nous intéresse.

* Ces instabilités ont fait l'objet d'études intensives dans le cas d'un écoulement uniaxial, essentiellement pour l'étirage d'un filament de polymère fondu.

- Ils apparaissent lorsque le taux d'étirage excède une valeur critique.
- La rhéologie agit sur les conditions d'apparition des instabilités. Ainsi, l'élasticité du fluide est, en général, un facteur de stabilité.

On peut ainsi expliquer la stabilisation aux taux d'étirage élevés des filaments de courte longueur, pour lesquels le nombre de Deborah est élevé.

- Pour ce même procédé et en accord avec l'expérience, les instabilités disparaissent dans les conditions réelles de mise en oeuvre, du fait:
  - des effets non-isothermes,
  - de la fluctuation de la position du point de solidification.

Comme nous pouvons le constater, les principaux mécanismes sont bien appréhendés par la théorie. Des phénomènes restent toutefois inexpliqués: par exemple, l'influence du débit.

* Les instabilités apparaissent, dans le cas du filage ou de l'étirage d'un film, lorsque le taux d'étirage est maintenu constant. La stabilité est, par contre, inconditionnelle lorsque la force d'étirage est maintenue constante.

Le procédé de soufflage de gaine autorise différents jeux de paramètres maintenus constants, ou différents modes de conduite.

L'approche théorique la plus aboutie met clairement en évidence l'incidence de ces paramètres. Ainsi, dans des conditions réalistes et en imposant le taux d'étirage, il semblerait que la bulle soit:

- inconditionnellement stable lorsque l'on impose la quantité d'air emprisonné dans cette dernière,

- inconditionnellement instable lorsque l'on impose la différence de pression.

En dépit des similitudes entre les deux procédés, les résultats obtenus sont donc très différents. De ce point de vue, la contrainte circonférentielle en soufflage de gaine semble jouer un rôle primordial.

* De même, le soufflage de gaine présente un plus large éventail d'instabilités.

* Bien que les polymères à l'état fondu soient caractérisés par un spectre de temps de relaxation, les lois de comportement à temps unique permettent d'obtenir des résultats qualitativement corrects moyennant un choix judicieux de ce dernier.

Un tel choix implique une moyenne, fonction de l'écoulement considéré, sur le spectre de relaxation.

* Adopté pour d'évidentes raisons de simplicité, le modèle de Maxwell (qui est le modèle viscoélastique le plus élémentaire qui soit pour un fluide) présente une grave lacune: sa viscosité élongationnelle apparente peut, dans certaines conditions, devenir infinie.

Cela se traduit par une limitation du taux d'étirage à nombre de Deborah fixé et vice-versa.

* Les différentes études mettent en exergue la prépondérance des effets non-isothermes (variation des propriétés physiques du polymère) tant sur le régime permanent que sur la stabilité de ce dernier.

▪ Proposition de travail

* Nous allons donc élaborer un modèle permettant la simulation des instabilités en soufflage de gaine. Les deux étapes seront:

- Détermination du régime permanent: Il s'agit d'une étude qualitative de la réponse,
- Etude de la stabilité. L'approche adoptée sera celle de la théorie linéaire.

* **Voici nos principales options et hypothèses:**

• L'approche monodimensionnelle, largement utilisée, est basée sur l'approximation dite du "film mince" se traduisant par les hypothèses suivantes:

- épaisseur faiblement variable le long de l'axe d'étirage,
- épaisseur faible devant les rayons de courbure.

Les bons résultats obtenus d'une manière générale en confirment le bien-fondé ainsi que la validité.

Nous ferons de même. Le problème résidera dans l'obtention des formes limites des relations constitutives considérées.

• La prise en compte de l'écoulement dans la filière n'est pas indispensable.

La zone d'étude sera celle comprise entre la sortie de filière et la ligne de figeage.

Les conditions aux limites en sortie de filière seront supposées connues et fixes.

Le gonflement en sortie de filière est négligé. Les dimensions initiales de la bulle seront celles de la filière.

• Il convient d'adopter une loi rhéologique réaliste. Les phénomènes qui nous paraissent les plus importants sont:

- la limitation de la viscosité élongationnelle apparente,
- le comportement fluidifiant ("Shear thinning"), dans une moindre mesure toutefois.

Répondant à ces conditions, le modèle de PTT constitue un bon compromis car il est encore relativement simple à mettre en oeuvre. Par ailleurs, il s'agit, à notre connaissance, de la première application d'un tel modèle au cas d'un écoulement biaxial.

- nous considèrerons un modèle à temps unique,
- une forme non-isotherme ne s'impose pas,
- nous garderons une même forme pour K (cf. Annexe A2), que ce soit pour un écoulement uniaxial ou pour un écoulement biaxial.

• Nous considèrerons un transfert de chaleur purement convectif.

Devant la lacune de corrélations expérimentales, nous adopterons un coefficient de transfert constant.

De même, nous négligerons la dissipation visqueuse.

• Le problème de la solidification sera traité comme suit: la température à la ligne de figeage, fonction du matériau, sera supposée connue et sera imposée.

• Nous tiendrons compte de la fluctuation de la position de la partie solidifiée ainsi que de l'élasticité de cette dernière. Cette prise en compte se fera uniquement en terme de conditions aux limites au niveau de la ligne de figeage.

• Il n'apparait pas primordial, dans un premier temps, d'introduire des perturbations non-axisymétriques.

* **Nous accorderons une attention particulière au calcul des valeurs propres.**

Nous adopterons une technique matricielle. Le problème que nous devrons résoudre est alors celui lié à l'existence de solutions artificielles.

La discrétisation sera effectuée à l'aide de méthodes de différences finies.

Nous excluons les méthodes pseudo-spectrales car, bien que précises, elles ne semblent pas apporter un remède au problème évoqué.

Notre but étant alors de nous donner une méthodologie de calcul.

* **Pour une meilleure appréhension des différents phénomènes ainsi que pour une validation des méthodes d'analyse, nous définirons un problème modèle simple.**

Il s'agit de l'étirage d'un film extrudé au travers d'une filière plate, infiniment large, permettant ainsi un traitement en bidimensionnel, et avec ou sans différence de pression de part et d'autre du film.

L'écoulement est alors élongationnel uniaxial.

Par ailleurs, le refroidissement sera assuré par un jet d'air appliqué en sortie de filière.

* **Les autres hypothèses sont celles largement utilisées et que nous rappelons ci-après:**

- Nous négligerons les effets de la tension superficielle, de l'inertie, de la gravité et de la trainée de l'air.
- La masse volumique est constante.
- Les grandeurs intervenant dans l'équation de conservation de l'énergie seront considérées comme étant constantes.

* En pratique, les conditions de mise en oeuvre sont non-isothermes et les fluides, viscoélastiques. **Cependant, nous considèrerons, conjointement à ce cas réaliste, les cas suivants et ce essentiellement pour des raisons méthodologiques:**

- fluide newtonien,
- conditions isothermes.

3.4 METHODOLOGIE D'ETUDE

Dans ce qui suit, nous traitons successivement:

- l'étirage d'un film plan, sans surpression (chapitre 4),
- l'étirage d'un film avec surpression (chapitre 5),
- le soufflage de gaine proprement dit (chapitre 6).

La méthodologie d'étude que nous présentons ci-après sera commune à ces 3 chapitres.

▪ Etude de la solution stationnaire

La première étape consistera à analyser la solution stationnaire puis à nous assurer qu'elle reproduit, qualitativement compte-tenu de nos hypothèses ainsi que de l'objectif de notre étude, la solution réelle.

Se voulant être un reflet de la conduite pratique d'un procédé (cf. 2.1.2), la détermination de cette solution stationnaire consistera,

pour:

(a) un fluide donné: nature (visqueux ou viscoélastique), viscosité, temps de relaxation, température de solidification, masse volumique, . . . etc.,

(b) des conditions d'extrusion données: filière, débit de matière, température d'extrusion, température du jet d'air de refroidissement,

à imposer:

(c) la hauteur de figeage,

(d) le taux de gonflage,

(e) le taux d'amincissement,

puis à calculer:

(f) la force d'étirage,

(g) la différence de pression,

(h) le débit d'air de refroidissement.

nécessaires.

Au cours de la phase d'analyse, nous étudierons, entre autre, les effets des paramètres imposés ((a) à (e)). Pour ce faire, nous ferons varier séparemment chacun d'entre eux, les autres étant fixés.

- **Analyse de stabilité**

Comme pour le régime permanent, nous étudierons les effets des paramètres imposés sur la stabilité.

De plus, nous examinerons l'influence des paramètres maintenus constants ou, en quelque sorte, le mode de conduite du procédé en question.

CHAPITRE 4

ETIRAGE D'UN FILM PLAN

4. ETIRAGE D'UN FILM PLAN

4.1 MISE EN EQUATIONS

4.1.1 Equations générales (figure 4.1.1)

Les équations correspondant à un film d'épaisseur faiblement variable s'écrivent,

si l'on note:

- ρ la masse volumique du polymère,
- H l'épaisseur du film,
- V la vitesse du film,
- t le temps,
- z l'abscisse axiale,
- $\overline{\overline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes:

– Equation de continuité:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(HV \right) = 0 \qquad (4.1.1)$$

– Equations de conservation de la quantité de mouvement:

a) Suivant z nous avons:

$$\rho H \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{zz} H \right) \qquad (4.1.2)$$

Si les termes d'inertie sont négligés, l'équation ci-dessus peut être intégrée d'une abscisse z quelconque à la ligne de figeage z = L. D'où:

$$\sigma_{zz} H = F_z \qquad (4.1.3)$$

Où F_z est la force d'étirage par unité de largeur, exercée par les rouleaux d'entrainement. Cette nouvelle équation traduit alors la conservation de cette dernière.

b) L'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant y se réduit à:

$$\sigma_{yy} = 0 \qquad (4.1.4)$$

la pression atmosphérique étant prise en référence.

– Tenseur des vitesses de déformation:

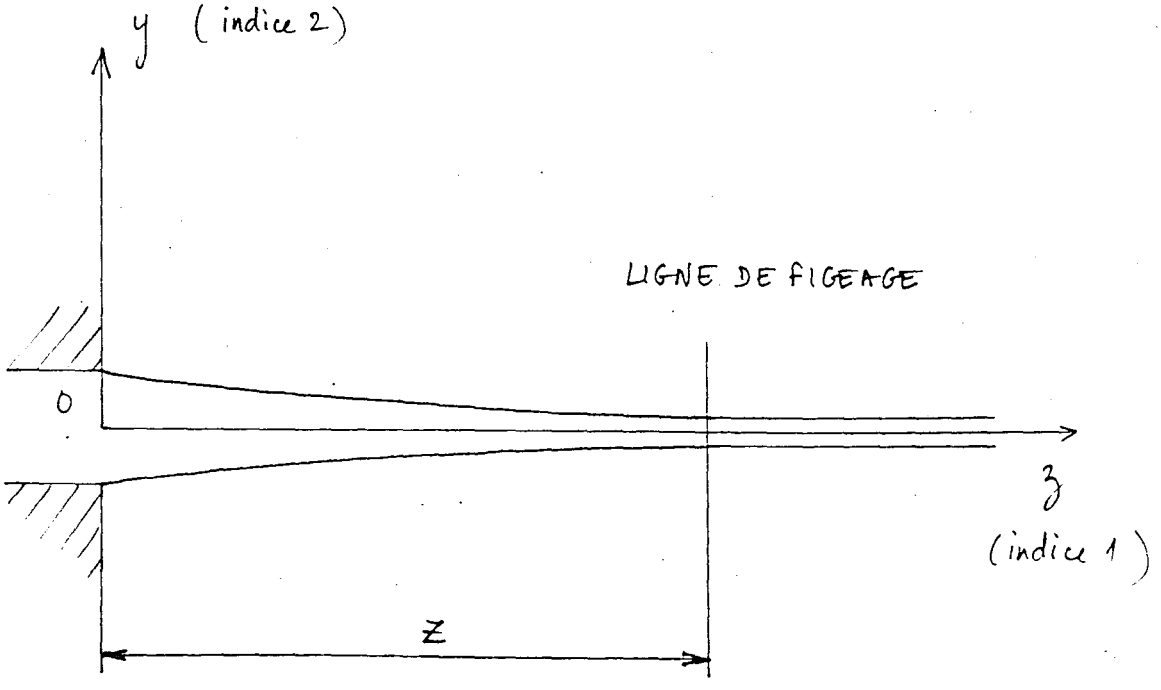
Les termes de cisaillement étant négligeables, nous avons:

$$\vec{\vec{d}} = \begin{pmatrix} d_{zz} & 0 \\ 0 & d_{yy} \end{pmatrix} \qquad (4.1.5)$$

avec

$$d_{zz} = \frac{\partial V}{\partial z}, \qquad d_{yy} = \frac{1}{H}\frac{dH}{dt} \qquad (4.1.6a,b)$$

figure 4.1.1. Schématisation de l'étirage d'un film plan



L'équation de continuité s'écrit également:

$$d_{zz} + d_{yy} = 0 \qquad (4.1.7)$$

D'où la nouvelle valeur de d_{yy}:

$$d_{yy} = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (4.1.8)$$

– Le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ s'exprime par:

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{zz} & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \qquad (4.1.9)$$

avec

$$\sigma_{zz} = -P + \tau_{zz} \qquad (4.1.10a)$$

$$\sigma_{yy} = -P + \tau_{yy} \qquad (4.1.10b)$$

Compte-tenu de l'équation 4.1.4, la nouvelle expression de σ_{zz} est:

$$\sigma_{zz} = \tau_{zz} - \tau_{yy} \qquad (4.1.11)$$

– L'équation de conservation de l'énergie s'écrit:

$$\rho C_p H \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -h_c \left(T - T_{air} \right) \qquad (4.1.12)$$

où:

T est la température du film,

h_c est le coefficient de transfert de chaleur par convection forcée,

C_p la chaleur spécifique du polymère,

T_{air} la température de l'air de refroidissement.

– Relations constitutives:

dans le cas d'un fluide newtonien, nous avons:

$$\tau_{zz} = + 2\eta\ d_{zz}\ , \qquad \tau_{yy} = + 2\eta\ d_{yy} \qquad (4.1.13a,b)$$

et dans le cas du modèle de PTT:

$$K\ \tau_{yy} + \lambda \left[\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} + V \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial z} - 2 \left(1 - \xi \right) \tau_{yy}\ d_{yy} \right] = + 2\eta\ d_{yy}$$

(4.1.14a,b)

$$K\ \tau_{zz} + \lambda \left[\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} + V \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - 2 \left(1 - \xi \right) \tau_{zz}\ d_{zz} \right] = + 2\eta\ d_{zz}$$

avec $$K = \exp \left[\frac{\varepsilon}{G} \left(\tau_{yy} + \tau_{zz} \right) \right] \qquad (4.1.15)$$

En faisant $\varepsilon = 0$ et $\xi = 0$, nous retrouvons les équations correspondant à un fluide de Maxwell.

Pour les deux fluides ci-dessus, η et G sont des fonctions de la température. Ainsi, pour la viscosité η, nous considèrerons la relation suivante, dite loi d'Arrhénius:

$$\eta = \eta_0 \exp \left[K_V \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \qquad (4.1.16)$$

où T est la température absolue en degré Kelvin. Nous avons par ailleurs:

$$K_V = \frac{E_a}{R_g} \qquad (4.1.17)$$

E_a étant l'énergie d'activation en écoulement de cisaillement et R_g la constante des gaz parfaits.

Le module de cisaillement G évolue linéairement avec la température selon la loi:

$$G = G_0 \left[1 + K_G \left(T - T_0 \right) \right] \qquad (4.1.18)$$

le temps de relaxation λ est donné par:

$$\lambda = \frac{\eta}{G} \qquad (4.1.19)$$

4.1.2 Conditions aux limites

En sortie de filière (z = 0):

$$H = H_0 , \qquad V = V_0 , \qquad T = T_0 \qquad (4.1.20a,b,c)$$

De plus, pour le modèle de PTT:

$$\tau_{yy} / \tau_{zz} = 0 \qquad (4.1.21)$$

A la ligne de figeage (z=Z): choix de l'une des deux conditions suivantes:

Taux d'étirage imposé: $V = V_f = E \cdot V_0$ (4.1.22a)

Force d'étirage imposée: $\sigma_{zz} H = F_z$ (4.1.22b)

4.1.3 Formulation adimensionnelle

Il est, en général, plus commode d'adopter une formulation adimensionnelle.

Nous avons reporté les variables et paramètres ainsi que les équations correspondantes respectivement en Annexes B1 et B2.

Les paramètres adimensionnels qui interviennent sont:

- le coefficient de transfert de chaleur D (également appelé nombre de Stanton dans le cas présent),

- le nombre de Reynolds Re,
- la température de l'air de refroidissement s_{air},
- la force d'étirage T_z (équation d'équilibre intégrée),
- le coefficient β (viscosité),

et pour le modèle de PTT uniquement:

- le nombre de Deborah De,
- le coefficient ζ (temps de relaxation),
- les paramètres ε et ξ.

4.2 SOLUTION STATIONNAIRE

4.2.1 Equations et conditions aux limites

Recherchons la solution stationnaire:

$$(\bar{h}, \bar{u}, \bar{s}, ...)$$

en faisant $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ dans les équations précédentes.

Nous obtenons un système d'ordre 4 pour un fluide newtonien et d'ordre 5 dans le cas du modèle de PTT.

Les conditions aux limites sont celles citées précédemment, exprimées en termes de variables adimensionnelles.

Les termes d'inertie seront, conformément à nos hypothèses, négligés. Nous n'en tiendrons compte, en fait, que lors de l'analyse des valeurs propres (cf. § 4.3.2.3.2).

Remarquons que la température n'est fonction que du coefficient de transfert de chaleur D et de la température de l'air de refroidissement s_{air}.

4.2.2 Procédure de résolution

– L'équation de conservation de la quantité de mouvement 4.1.2 est avantageusement intégrée d'une abscisse quelconque z à la ligne de figeage z = Z, en tenant compte de la condition 4.1.22b. D'où sa nouvelle forme:

$$Re \left(\bar{u} - E \right) = \bar{S}\,\bar{h} - T_Z \qquad (4.2.1)$$

Par cette opération, nous avons transformé le "problème aux limites" de départ en un "problème aux valeurs initiales".

– En ce qui concerne les paramètres:

La distance de figeage Z est fixée par hypothèse. Par ailleurs, nous pouvons imposer:

– le coefficient de transfert ou la température finale,
– la force d'étirage ou le taux d'étirage.

En fait, conformément à la pratique, nous imposerons le taux d'étirage et la température finale puis nous déterminerons la force d'étirage et le coefficient de transfert de chaleur, donc le débit d'air de refroidissement.

Compte-tenu de la structure des équations, cette détermination se fera de manière itérative.

L'intégration du système d'équations est effectuée à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (avec intégration pas à pas suivant les abscisses croissantes), les itérations sur chaque paramètre à ajuster à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson.

4.2.3 Résultats

4.2.3.1 Généralités

• Notre but est d'étudier l'étirage d'un film d'un point de vue qualitatif. Il s'agira alors:

– d'examiner les différents profils,
– d'évaluer le coefficient de transfert,

de façon à déterminer, en termes d'ordre de grandeur, les paramètres tels que:

– la force d'étirage,
– le débit d'air de refroidissement.

Pour cela, nous allons tout d'abord effectuer une étude comparative des différents modèles rhéologiques. Par la suite, nous fournissons un ensemble de résultats correspondant à des cas pratiques.

• Il nous faut, en premier lieu, déterminer les plages de variation des différents paramètres adimensionnels du problème.

Le tableau 4.2.1 montre les ordres de grandeurs des différentes données physiques.

Faute d'indication, nous considèrerons un module de cisaillement constant.

D'où les plages de variation des différents constantes (tableau 4.2.2).

Entrefer de la filière	H_0	= 1 mm
Viscosité de sortie	η_0	= 10^4 à 5 10^4 Pl
Temps de relaxation de sortie	λ_0	= 1 à 10 s
Coefficient de viscosité	K_v	= 5 10^3 à 2 10^4 K
Masse volumique	ρ	= 1000 Kg/m^3
Chaleur spécifique	C_p	= 2000 J/Kg.K
Température d'extrusion	T_0	= 180 à 220°C
Hauteur de figeage	Z	= 10 à 50 cm
Vitesse d'extrusion	V_0	= 1 à 2 cm/s
Température de l'air de ref.	T_{air}	= 30°C
Taux d'étirage	E	= 10 à 50
Température finale	T_f	= 120 à 160°C

tableau 4.2.1. Données

Nombre de Deborah	De	= 10^{-2} à 10^0
Coefficient de viscosité	β	= 25 à 100
Température de l'air de ref.	s_{air}	≃ 0,15
Température finale	s_f	= 0,5 à 0,85

tableau 4.2.2. Constantes

4.2.3.2 Fluide newtonien

- **Isotherme**

Les équations admettent des solutions analytiques, exponentielles. La valeur de la force d'étirage adimensionnelle est de:

$$T_z = 4 \text{ Log } E$$

- **Non-isotherme**

La figure 4.2.1 représente l'évolution des profils les plus significatifs en fonction de la température finale.

Plus celle-ci diminue, plus les pentes en x = 0 augmentent en valeur absolue et plus celles en x = 1 tendent vers zéro, ceci en ce qui concerne la vitesse et l'épaisseur.

Les contraintes et, par conséquent la force d'étirage T_z augmentent rapidement avec le refroidissement.

Remarquons que le phénomène le plus important est, bien évidemment, l'accroissement de la viscosité, fonction de la température finale et du coefficient β. Ainsi, une augmentation de ce dernier produira les mêmes effets qu'une diminution de la température finale.

La solidification est achevée en x = 1, le film ne se déformant plus au-delà de cette position. Il est alors logique d'estimer que les pentes des différents profils tels que la vitesse, l'épaisseur et la contrainte axiale y sont très faibles.

Toutefois, pour les valeurs courantes de la température finale (dans le cas présent comprise entre 0.75 et 0.5), ce n'est pas le cas.

4.2.3.3 Fluide de Maxwell

- **Isotherme**

Comme les autres auteurs, nous avons mis en évidence l'existence d'un taux d'étirage limite à nombre de Deborah fixé et, inversement, l'existence d'un nombre de Deborah limite à taux d'étirage fixé. Le profil de vitesse est alors linéaire.

Par ailleurs, au fur et à mesure que le nombre de Deborah De diminue, il faut augmenter le nombre de points de discrétisation N pour que l'on obtienne des solutions. Il s'agit d'un problème de stabilité lié à la méthode de Runge-Kutta adoptée.

Par exemple:

$De = 10^{-2}$	$N = 51$
$De = 10^{-3}$	$N = 201$
$De = 10^{-4}$	$N = 1001$

- **Non-isotherme**

Nous avons une conjugaison de deux phénomènes:

- augmentation de la viscosité et du temps de relaxation du fait du refroidissement,
- existence de valeurs limites.

Les contraintes, et par conséquent T_z, augmentent d'autant plus rapidement avec le refroidissement que De est important (figure 4.2.2).

D'une manière générale, en fixant deux paramètres parmi les trois suivants:

$$\left(s_f \ , \ E \ , \ De \right)$$

il existe une valeur limite pour le troisième.

Ainsi, sur la figure 4.2.2, le taux d'étirage étant fixé, nous avons représenté l'évolution de la force d'étirage en fonction de la température finale pour différentes valeurs de De et de β.

Remarquons que, lorsque la limitation survient en présence d'un refroidissement, le profil de vitesse n'est plus linéaire comme dans le cas isotherme.

Le paramètre ζ agit sur l'évolution du module de cisaillement et, par conséquent, sur celle du temps de relaxation. Ainsi, une valeur (négative) restreignant l'augmentation de ce dernier produit le même effet qu'une diminution du nombre de Deborah. Réciproquement, une valeur (positive) accentuant l'augmentation du temps de relaxation produit le même effet qu'une augmentation du nombre de Deborah.

4.2.3.4 Modèle de PTT

- **Isotherme**

  * **Effet des paramètres ε et ξ**

Etudions tout d'abord les effets de ces paramètres ajustables du modèle.

ξ permet, lors d'un écoulement de cisaillement pur, d'obtenir une contrainte de cisaillement décroissant avec le taux de déformation. Son effet est comparable à celui d'un indice de pseudo-plasticité n dans le cas d'une viscosité en loi puissance.

Cet effet doit rester relativement faible dans le cas d'un écoulement purement élongationnel.

Considérons, par exemple, le cas suivant:

$$E = 20$$
$$De = 0{,}01$$
$$\varepsilon = 0$$

Le tableau 4.2.3 montre la force d'étirage en fonction de ξ. Cette dernière diminue lorsque ξ augmente. Conjointement, le profil de vitesse se "creuse" (la courbure, négative, augmente en valeur absolue).

ε permet de limiter la viscosité élongationnelle quel que soit le taux d'élongation. C'est donc le paramètre le plus important pour un écoulement élongationnel.

Soit le cas suivant:

$$E = 20$$
$$De = 0{,}1$$
$$\xi = 0$$

La force d'étirage augmente rapidement lorsque ε diminue (tableau 4.2.4). Dans le cas particulier ci-dessus, pour lequel le nombre de Deborah De est supérieur à la valeur limite correspondant à un fluide de Maxwell, elle devient infinie pour une valeur nulle de ε.

Le profil de vitesse devient plus linéaire lorsque ε diminue et se creuse lorsque ε augmente.

Pour la suite de l'étude, nous considérerons pour les paramètres ε et ξ, les valeurs suivantes:

$$\varepsilon = 0.015 \quad \xi = 0.1$$

déterminées par PHAN-THIEN (A-1978) dans le cas d'un polystyrène. Les valeurs pour le polyéthylène sont sensiblement identiques.

* Effet du nombre de Deborah

Lorsque le nombre de Deborah augmente, à taux d'étirage fixé, le profil de vitesse tend vers un profil linéaire comme pour un fluide de Maxwell (figure 4.2.3).

Comme nous l'avons vu précédemment, ces profils sont moins linéaires que ceux obtenus à l'aide d'un fluide de Maxwell étiré dans les mêmes conditions (figure 4.2.4).

Au-delà d'une valeur De^*, le profil de vitesse se "creuse" de nouveau et la pente en x=1 tend vers l'infini au fur et à mesure que De augmente (figure 4.2.3). Il en est de même pour la contrainte axiale.

A taux d'étirage fixé, il n'existe donc pas de nombre de Deborah limite et, réciproquement, il n'existe pas de taux d'étirage limite à nombre de Deborah fixé.

La force d'étirage augmente rapidement (moins rapidement toutefois que dans le cas d'un fluide de Maxwell) jusqu'à un nombre de Deborah De^{**} différent de De^* en général, puis diminue avec De par la suite (figure 4.2.5).

Remarquons que De^* et De^{**} sont du même ordre de grandeur que De_{max} pour un fluide de Maxwell. Soit:

$$De^*, De^{**} \simeq \frac{1}{E - 1}$$

Par exemple, pour E = 20, $De^* \simeq 0{,}07$.

La figure 4.2.6 représente l'évolution de la force d'étirage adimensionnelle avec le taux d'étirage pour différentes valeurs du nombre de Deborah.

Il existe, pour chaque nombre de Deborah, une force d'étirage limite d'autant plus faible que le nombre de Deborah est important.

La solution obtenue aux nombres de Deborah élevés est irréaliste (profil de vitesse très creux) et est, bien évidemment, fortement liée à la forme de K (dépendance vis à vis de trace $\vec{\tau}$).

Le nombre de Deborah De^* (au-delà duquel le profil de vitesse se creuse) peut être considéré comme une limite de validité du modèle rhéologique.

Des modifications de ce dernier sont alors nécessaires afin de pouvoir couvrir correctement une plage plus étendue de nombre de Deborah. En premier lieu, il semblerait qu'il faille agir l'expression du terme K (cf. équation (4.1.15)).

ξ	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
T_Z	11,44	11,39	11,33	11,27	11,22	11,17
ξ	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20
T_Z	11,17	11,12	11,07	11,02	10,97	10,93

tableau 4.2.3. Effet de ξ sur la force d'étirage T_Z

$E = 20$ – $De = 0{,}01$ – $\varepsilon = 0$

ε	T_Z	ε	T_Z	ε	T_Z
0,015	37 , 99	0,015	37 , 99	0,010	52 , 58
0,016	36 , 14	0,014	40 , 09	0,008	63 , 40
0,017	34 , 50	0,013	42 , 51	0,006	81 , 32
0,018	33 , 04	0,012	45 , 32	0,004	116 ,9
0,019	31 , 73	0,011	48 , 62	0,002	223 ,4
0,020	30 , 55	0,010	52 , 58	0,001	435 ,7

tableau 4.2.4. Effet de ε sur la force d'étirage T_Z

$E = 20$ – $De = 0{,}1$ – $\xi = 0$

- **Non-isotherme**

A taux d'étirage et à nombre de Deborah fixés, la force d'étirage augmente moins vite avec le refroidissement que dans le cas d'un fluide de Maxwell.

Par ailleurs, aucune des limitations correspondant à ce dernier ne subsiste.

4.2.3.5 Application - Etude de cas pratiques

Notre but est, non pas de comparer nos prédictions avec des résultats expérimentaux, mais de déterminer les ordres de grandeur:

- de la force d'étirage,
- du coefficient de transfert de chaleur,

en simulant des situations réalistes.

Considérons les données du tableau 4.2.5 ainsi que les différents cas du tableau 4.2.6.

Les cas 1 à 3 s'inspirent des travaux de KANAI et WHITE (B1984). Le cas 4 correspond à l'essai RUN 20 de GUPTA (B1980) (ces deux études concernent le soufflage de gaine).

Les cas 3a et 3b ne diffèrent que par leurs températures d'extrusion.

Les coefficients K_V sont, pour les polyéthylènes (cas 1 à 3), des valeurs moyennes.

Dans le cas 4, le temps de relaxation en sortie de filière est de:

$$\lambda_0 = 1{,}45 \text{ s}$$

Dans le cas des polyéthylènes, la plage de valeur est assez large (cf., par exemple, MINOSHIMA et WHITE (B1986)):

$$\lambda_0 = 1 \text{ à } 10 \text{ s}$$

Ce qui nous donne un nombre de Deborah:

$$0{,}02 \leq De \leq 0{,}2$$

Nous discuterons des résultats en fonction de ce nombre de Deborah.

Les modules de cisaillement sont considérés constants, faute de données expérimentales.

De nouveau, nous avons considéré, pour le modèle de PTT, les valeurs suivantes:

$$\varepsilon = 0.015 - \xi = 0.1$$

A titre comparatif, nous considèrerons également des fluides newtoniens de même viscosité (De = 0).

Pour chaque cas, nous avons considéré:

- les taux d'étirage suivants: E = 20 et 50,
- les nombres de Deborah suivants, pour les fluides viscoélastiques:

De = 0,01 – 0,05 – 0,1 – 0,2.

Notons que le cas 2 n'est mentionné qu'à titre indicatif et n'a pas été traité car n'étant pas significativement différent du cas 1.

tableau 4.2.5. DONNEES

Entrefer de la filière	H_0 = 1 mm
Vitesse d'extrusion	V_0 = 1 cm/s
Hauteur de figeage	Z = 0,5 m
Chaleur spécifique	C_p = 2000 J/Kg°C
Température de l'air de ref.	T_{air} = 30°C

tableau 4.2.6. CAS ETUDIES

	CAS 1	CAS 2	CAS 3a	CAS 3b	CAS 4
Matériau	PEBD	PEBDL	PEHD	PEHD	PS
Temp. d'extrusion en °C	180	180	180	220	185
Temp. finale en °C	120	120	135	135	160
Visc. de sortie en Pl	10^4	$7\ 10^3$	$5\ 10^4$	$2\ 10^4$	$2\ 10^4$
Coefficient K_V en K	$5\ 10^3$	$5\ 10^3$	$5\ 10^3$	$5\ 10^3$	$2\ 10^4$

A titre indicatif, La figure 4.2.7 montre les différents profils de vitesse dans le CAS 1 (il s'agit de répartitions axiales rappelons-le).

Les pentes des profils en x=X sont alors relativement importantes.

Ce constat (on peut également dire que les profils au voisinage de la ligne de figeage ne sont pas en accord avec la réalité) traduit:

- une mauvaise appréhension de la solidification par la loi rhéologique.
- des lois constante-température (viscosité et module de cisaillement) cessant d'être valables dans cette zone.

La figure 4.2.8 montre l'évolution de la force d'étirage en fonction de la température finale, toujours dans le cas 1. Notons que l'allure générale est commune aux différents cas. Remarquons également que l'on ne doit considérer que les valeurs correspondant à la température finale fixée.

Dans le cas du modèle de PTT, la force d'étirage augmente régulièrement, de manière identique au cas d'un fluide newtonien.

Finalement les tableaux 4.2.7 donnent les résultats concernant la force d'étirage pour les différents cas. Le tableau 4.2.8 donne les grandeurs de référence, permettant de calculer les grandeurs réelles.

Dans le cas du fluide de Maxwell, la solution n'existe que pour De=0.01.

Dans le cas du modèle de PTT, les forces d'étirage obtenues pour De=0.2 sont exagérément élevées et n'ont pas éré reportées.

Le tableau 4.2.9 montre le coefficient de transfert de chaleur adimensionnel. Les valeurs réelles sont comprises entre 7 et 20 $w/m^2{}^\circ C$.

Tableau 4.2.7a. Force d'étirage
Fluide newtonien

E	CAS 1	CAS 3a	CAS 3b	CAS 4
20	25	21	30	32
50	33	27	39	42

Tableau 4.2.7b. Force d'étirage
Fluide de Maxwell

	E \ De	0,01	0,05	0,1	0,2
CAS 1	20	28	SOLUTION INEXISTANTE		
	50	∞			
CAS 3a	20	22			
	50	91			
CAS 3b	20	35			
	50	709(1)			
CAS 4	20	39			
	50	186(2)			

(1): pour $s_f = 0.7$, (2): pour $s_f = 0.92$

Tableau 4.2.7c. Force d'étirage
Modèle de PTT

	E \ De	0,01	0,05	0,1	0,2
CAS 1	20	25	83	99	
	50	35	112	99(3)	
CAS 3a	20	20	60	81	
	50	37	93	89	
CAS 3b	20	30	108	117	
	50	54	117	SOLUTION IRREALISTE	
CAS 4	20	33	118		
	50	85	140		

(3):pour $s_f = 0.69$

tableau 4.2.8 - forces d'étirage de référence

CAS 1	0,2 N/m
CAS 3a	1 N/m
CAS 3b	0,4 N/m
CAS 4	0,4 N/m

Tableau 4.2.9 - Coefficient de transfert de chaleur

$h_{c\ ref} = 40\ w/m^2{}^\circ C$

s_f	CAS 1 0 , 67	CAS 3a 0 , 75	CAS 3b 0 , 61	CAS 4 0 , 87
D	0 , 50	0 , 36	0 , 60	0 , 17

4.2.4 Conclusion

L'étude qualitative que nous avons entreprise a permis de mettre en évidence la nécessité d'adopter une loi rhéologique réaliste.

En effet, les lacunes bien connues du modèle de Maxwell sont exacerbées par la présence d'un refroidissement.

Le modèle de PTT constitue alors une alternative plus qu'intéréssante.

Il permet d'obtenir une viscosité élongationnelle limitée et permet de prédire, en accord avec l'expérience:

- un profil de vitesse linéaire,
- des niveaux de contraintes élevés par rapport à un fluide newtonien, de même caractéristiques de viscosité, étiré dans les mêmes conditions.

Remarquons toutefois que le rapport entre les forces d'étirage en question est loin d'atteindre les valeurs de 10 à 100 constatées expérimentalement par CHANG et DENN (A1979).

Les profils de vitesse obtenus aux nombres de Deborah très élevés ne sont pas réalistes. Cela nécessite vraisemblablement une correction de la loi de dépendance de K vis-à-vis de trace($\vec{\tau}$). Il serait par exemple intéressant de mettre à l'épreuve une loi linéaire.

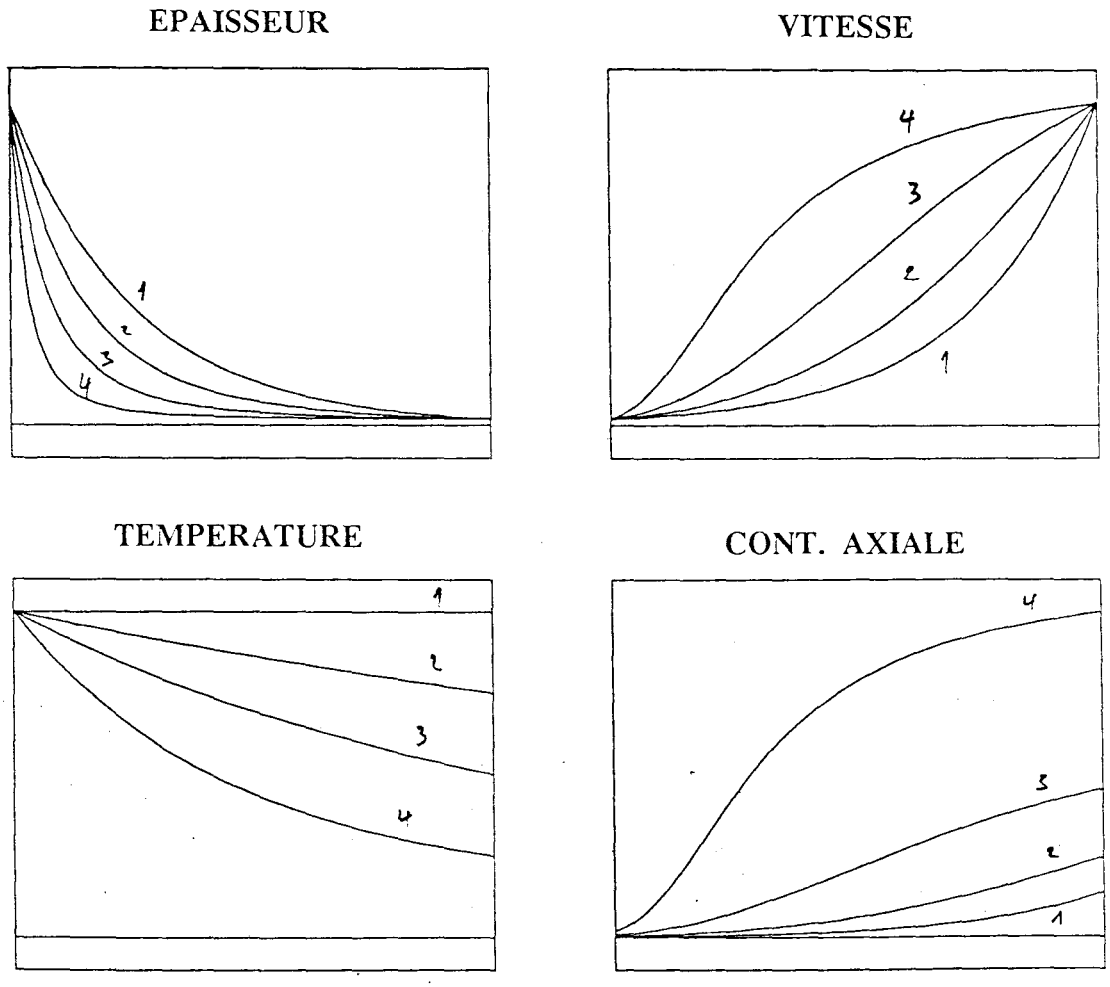
La limitation de la viscosité élongationnelle se fait donc au dépend des différents profils.

Par ailleurs, la lacune de résultats expérimentaux peut constituer un des principaux obstacles à une bonne modélisation. Cette lacune se situe tant au niveau:

- des propriétés physiques des matériaux et de leur dépendance vis à vis de la température,
- qu'au niveau des différents profils concernant un écoulement non-isotherme.

Toutefois, notre but étant d'obtenir une réponse qualitative, ces lacunes s'avèrent moins génantes que de prime abord. Une telle réponse peut être évaluée en considérant des valeurs moyennes recueillies parmi les divers résultats reportés dans la littérature.

figure 4.2.1. Effet de la température finale sur les différents profils
EF – newtonien – non-isotherme
$E = 50$ – $\beta = 25$ – $s_{air} = 30/200$
(1): $s_f = 1$, (2): $s_f = 0.75$, (3): $s_f = 0.5$, (4): $s_f = 0.25$



BU LILLE

figure 4.2.2. Force d'étirage en fonction de la température finale
EF – fluide de Maxwell – non-isotherme
E = xx – ζ = 0

De = 0.001 / (1): β=100, (2): β=75, (3): β=50, (4): β=25
De = 0.01 / (8): β=100, (7): β=75, (6): β=50, (5): β=25

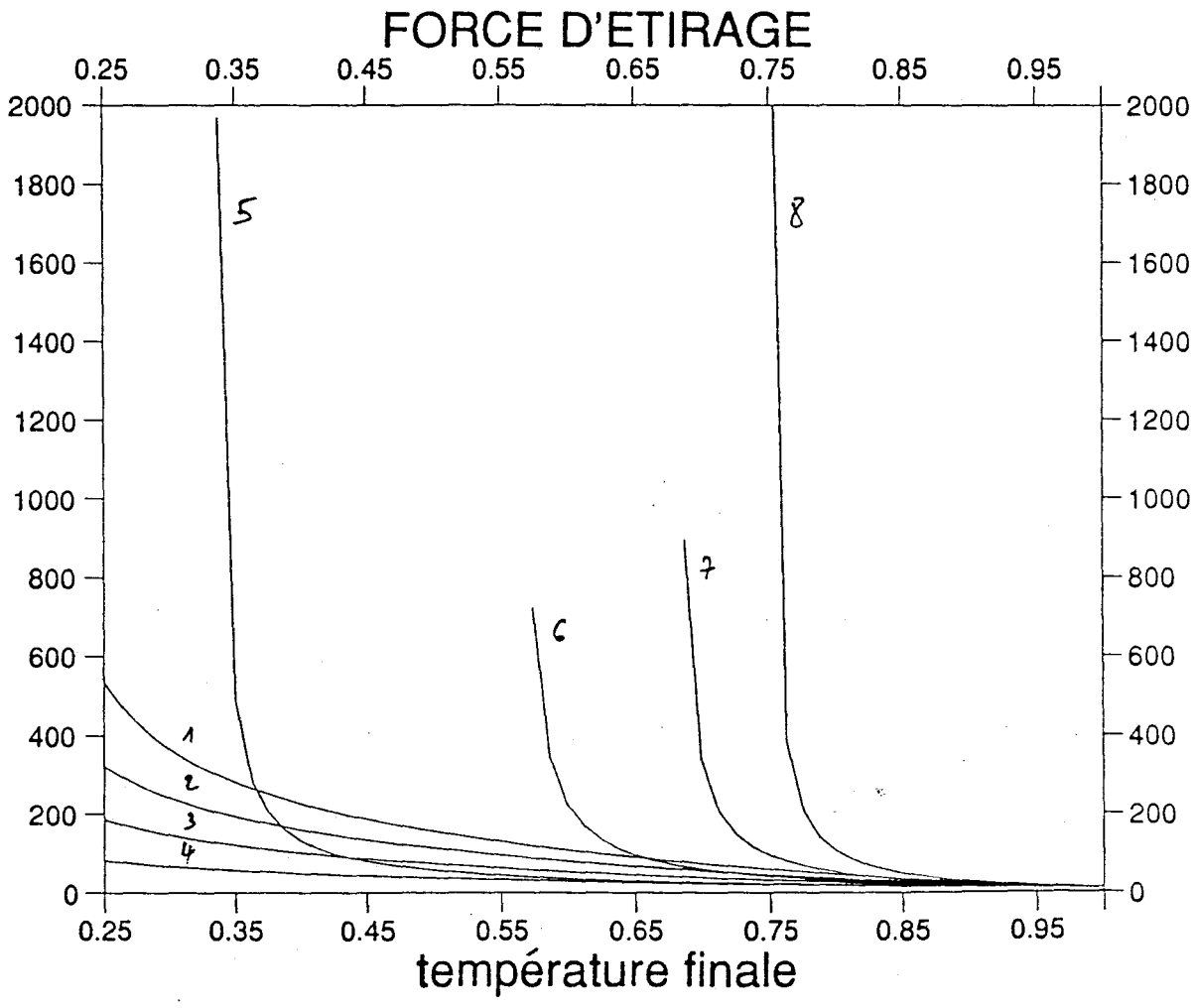


figure 4.2.3. Effet du nombre de Deborah sur la vitesse
EF – modèle de PTT – isotherme
E = 20 – ε = 0.015 – ξ = 0.1
(1): De = 0.01, (2): De = 0.1, (3): De = 1.

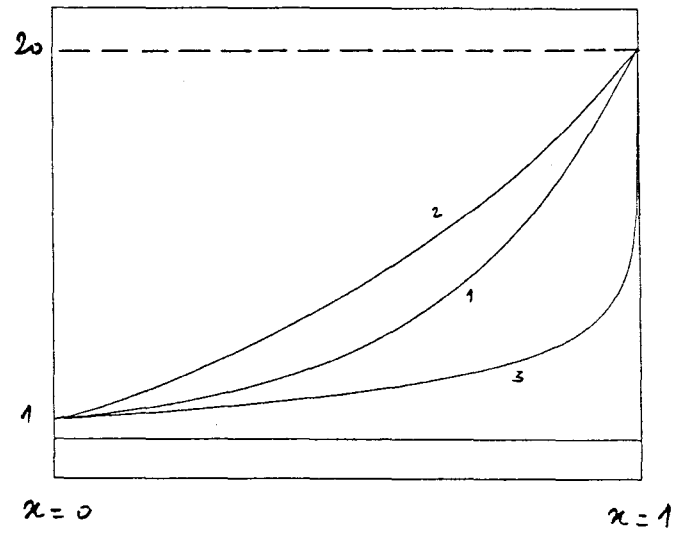


figure 4.2.4. Effet du nombre de Deborah sur la vitesse
EF – isotherme
E = 20 – ε = 0.015 – ξ = 0.1
fluide de Maxwell / (1a): De = 0.01, (1b): De = 0.05
modele de PTT / (2a): De = 0.01, (2b): De = 0.05

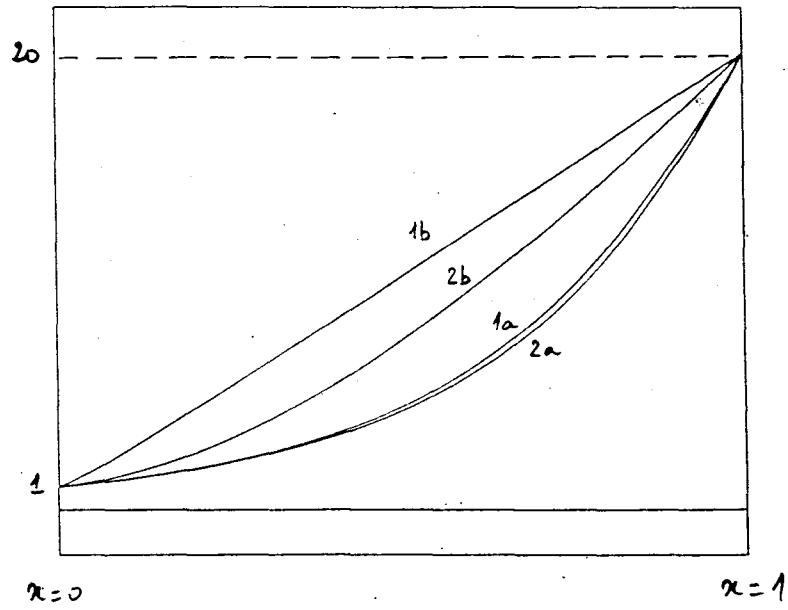


figure 4.2.5. Effet du nombre de Deborah sur la force d'étirage
EF – isotherme
(1): fluide de Maxwell, E = 20
(2): modèle de PTT , E = 20
(3): modèle de PTT , E = 100
ε = 0.015
ξ = 0.1

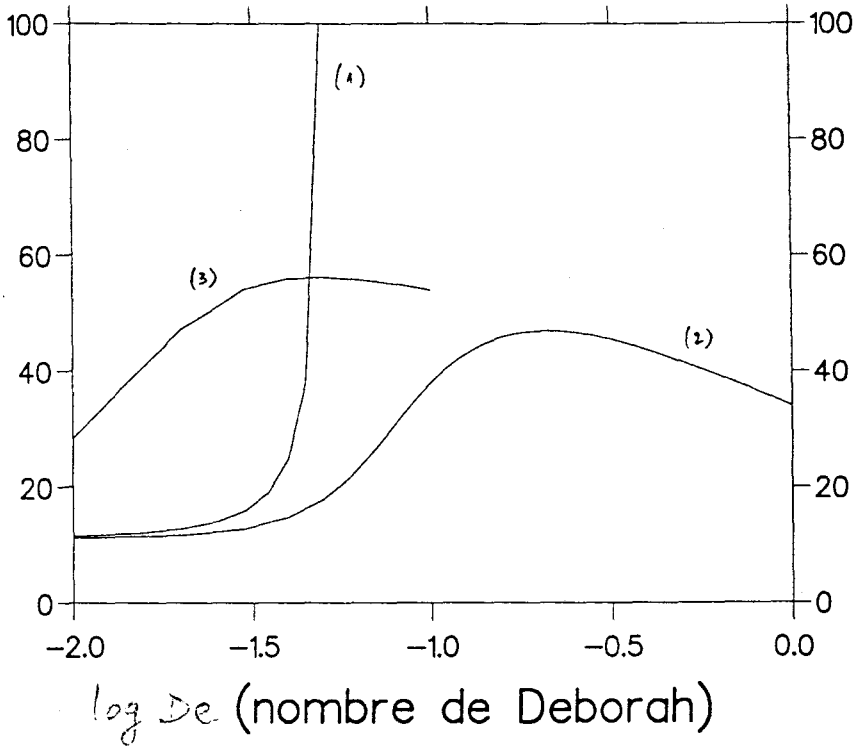


figure 4.2.6. Force d'étirage en fonction du taux d'étirage
EF – isotherme
newtonien (N)
modèle de PTT (1) à (5) / ε = 0.015 – ξ = 0.1
(1): De=0.01, (2): De=0.05, (3): De=0.1, (4): De=0.5, (5): De=1.

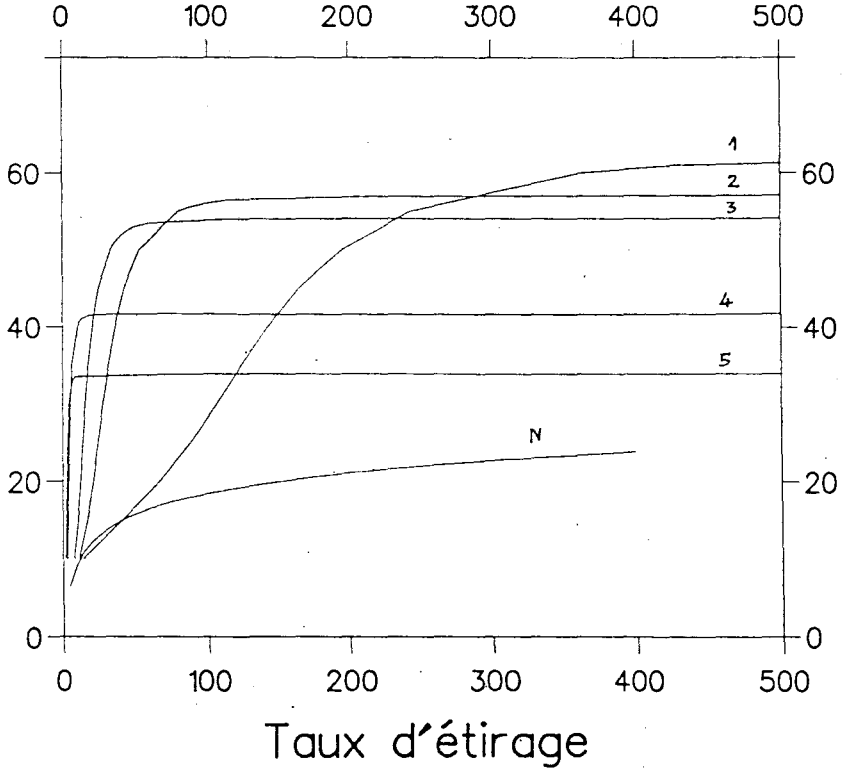
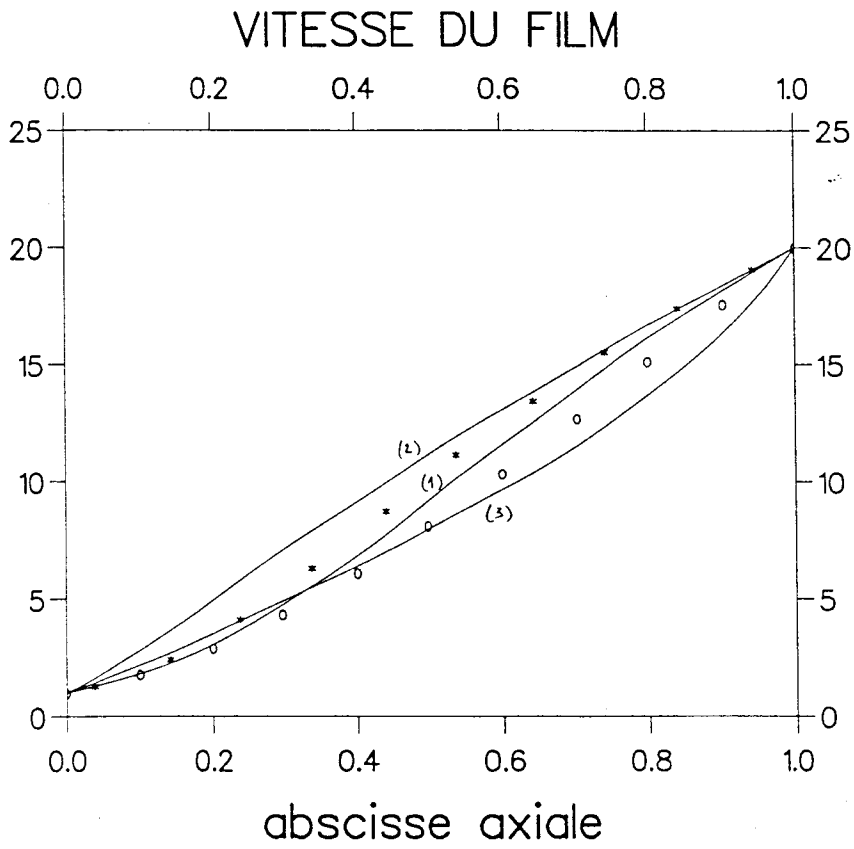


figure 4.2.7. Vitesse du film



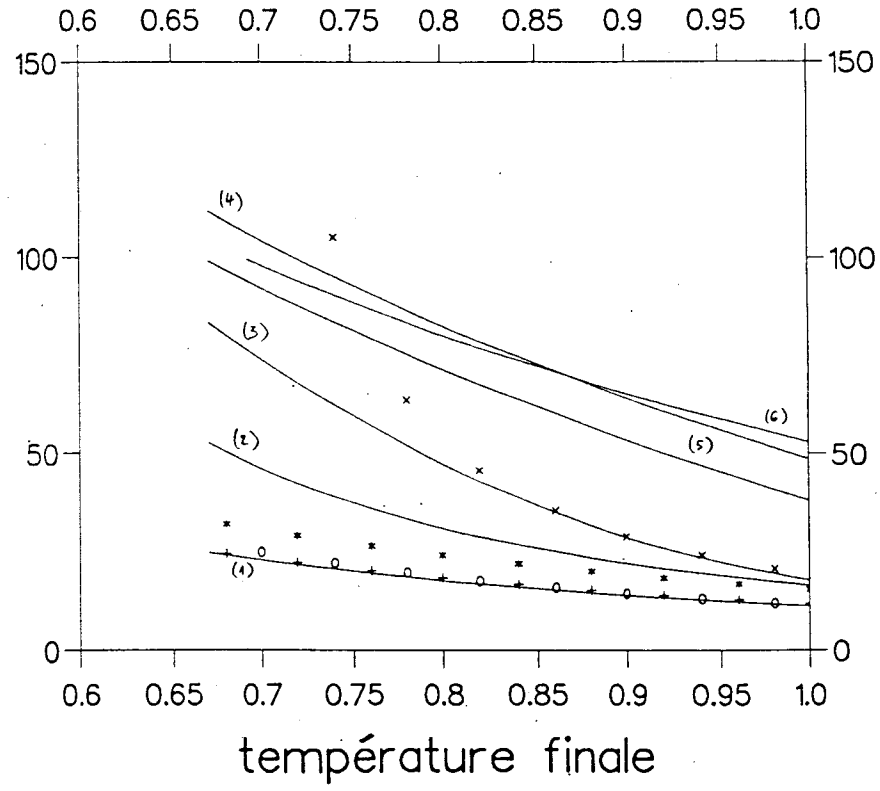
E = 20
s_f= 0.67

(o): newt.

(*): maxwell (De=0

modèle de PTT
(1): De=0.01
(2): De=0.05
(3): De=0.1

figure 4.2.8. Force d'étirage en fonction de la température finale



newtonien
(+): E=20
(*): E=50

maxwell (De=0.01)
(o): E=20
(x): E=50

modèle de PTT
(1): De=0.01 – E=
(2): De=0.01 – E=
(3): De=0.05 – E=
(4): De=0.05 – E=
(5): De=0.1 – E=
(6): De=0.1 – E=

4.3 ANALYSE DE STABILITE

4.3.1 Mise en équations

■ Un régime permanent étant déterminé, la question qui se pose est celle de savoir si ce dernier est stable ou non.

L'approche adoptée est celle de la stabilité linéaire hydrodynamique, consistant à superposer des perturbations infinitésimales à la solution stationnaire puis à étudier leur évolution au cours du temps.

Nous aurons alors deux cas:

- les perturbations s'amortissent: la solution est stable,
- les perturbations s'amplifient: le régime permanent ne peut être maintenu. La solution est instable.

Nous rechercherons des solutions sous la forme:

$$\Phi(x,\tau) = \overline{\Phi}(x)\left[\ 1 + \Phi^*(x,\tau)\ \right] \qquad (4.3.1)$$

pour les variables h, u, s, et:

$$\Phi(x,\tau) = \overline{\Phi}(x) + \Phi^*(x,\tau) \qquad (4.3.2)$$

pour les autres variables (contraintes, extra-contraintes, . . .).

Dans ces deux cas, la perturbation Φ^* se superposant à la solution stationnaire $\overline{\Phi}$ est de la forme:

$$\Phi^*(x,\tau) = \tilde{\Phi}(x)\ e^{\omega\tau} \qquad (4.3.3)$$

avec

ω : fréquence complexe ou valeur propre,

$\tilde{\Phi}$: fonction (ou mode) propre correspondante, complexe également.

La partie réelle de ω représente, en quelque sorte, un amortissement, et la partie imaginaire une fréquence. Nous aurons alors, en fonction de la valeur de la partie réelle de ω:

$\mathbb{R}e(\omega) < 0$	la solution est stable,
$\mathbb{R}e(\omega) > 0$	la solution est instable,
$\mathbb{R}e(\omega) = 0$	la solution est dite neutre.

■ Contrairement aux études que nous avons reportées, nous allons considérer, en plus des perturbations des grandeurs telles que l'épaisseur, la vitesse, ... etc, des petits déplacements transversaux W(z,t) du film (figure 4.3.1).

Nous obtenons alors les nouvelles équations reportées en Annexe B3.

Remarquons que les composantes d_{11} et d_{22} du tenseur des taux de déformation ne sont plus données par les relations 4.1.6a et 4.1.8 précédentes, valables uniquement pour une "ligne moyenne fixe", mais calculées à l'aide d'une méthode identique à celle utilisée par YEOW (B1976) dans le cas du soufflage de gaine (cf. Annexe A4).

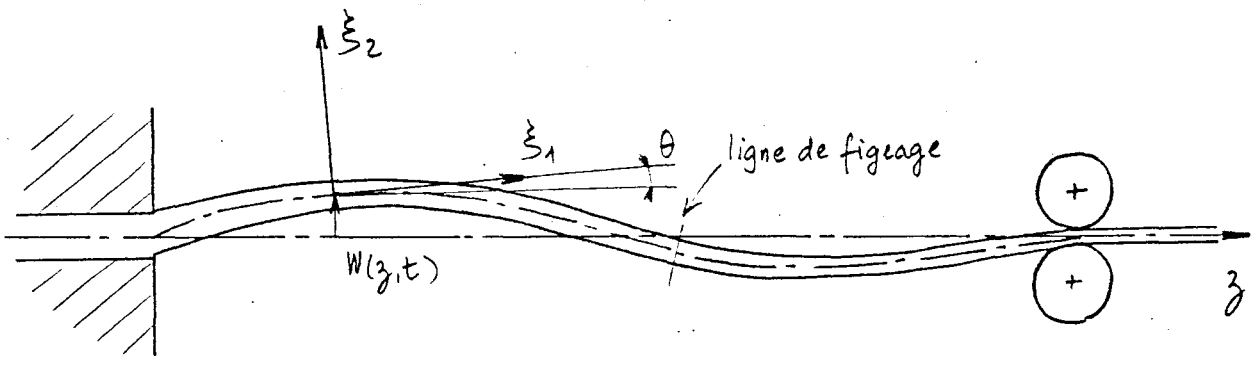
Nous obtenons alors deux systèmes d'équations découplés l'un de l'autre (Annexe B3).

– Le premier système est constitué des équations gouvernant les instabilités de type "Draw Resonance" et dans lesquelles W n'intervient pas. C'est également celui que l'on obtiendrait en considérant une "ligne moyenne" fixe.

– Le deuxième système se réduit à l'équation d'équilibre dynamique transversal du film.

Nous allons considérer successivement ces deux problèmes.

figure 4.3.1. Schématisation



4.3.2 Etude des instabilités d'étirage de type "Draw Resonance"

4.3.2.1 Généralités

• Dans un premier temps, notre objectif est moins d'étudier la stabilité que d'examiner l'ensemble de valeurs propres et valider une technique de calcul en vue d'une application au cas du soufflage de gaine.

Nous nous intéressons aux modes les plus significatifs, c'est-à-dire les moins stables. Les critères étant:

- fiabilité (ne pas en manquer et ne pas en générer artificiellement),
- précision (approcher au mieux ces modes),
- faible coût de calcul.

Pour le moment, nous pouvons tout simplement affirmer que ces modes sont, en principe, ceux de plus basses fréquences (ce qui est le cas pour un système dissipatif).

Nous allons effectuer une étude comparative de différentes méthodes que nous définirons, et ce pour un fluide newtonien ainsi que pour le modèle de Maxwell.

Les inconvénients des méthodes de tir sont bien connus. Notre principal objectif est donc de nous doter d'une méthode "directe" (matricielle).

• Finalement, dans une dernière étape, notre choix d'une méthode étant fait, nous étudierons d'une manière plus détaillée la stabilité dans le cas du modèle de PTT. Nous examinerons également quelques cas particuliers.

4.3.2.2 Equations linéarisées et conditions aux limites

■ Voici les équations vérifiées par les $\tilde{\Phi}$, obtenues après linéarisation (cf. Annexe B1 pour les variables):

– Equation de continuité:

$$\omega \bar{h} \tilde{h} + \bar{u}\, \bar{h} \left(\frac{d\tilde{h}}{dx} + \frac{d\tilde{u}}{dx} \right) = 0 \qquad (4.3.4)$$

– Equation de conservation de la quantité de mouvement:

$$Re\bar{h} \left\{ \omega \bar{u}\tilde{u} + \bar{u} \left[\frac{d}{dx} (\bar{u}\tilde{u}) + \tilde{u} \frac{d\bar{u}}{dx} \right] + \tilde{h}\, \bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} \right\} = \left(\bar{S}\, \bar{h} \right)' \tilde{h}$$

$$+ \left(\bar{S}\, \bar{h} \right) \frac{d\tilde{h}}{dx} + \left(\bar{h} \right)' \left(\tilde{N}_1 - \tilde{N}_2 \right) + \left(\bar{h} \right) \left(\frac{d\tilde{N}_1}{dx} + \frac{d\tilde{N}_2}{dx} \right)$$

(4.3.5)

– Equation de conservation de l'énergie:

$$\omega \bar{s}\tilde{s} + \bar{u} \left[\frac{d}{dx} (\bar{s}\tilde{s}) + \tilde{u} \frac{d\bar{s}}{dx} \right] + \frac{D}{\bar{h}} \left[\bar{s}\tilde{s} - \tilde{h} \left(\bar{s} - s_{air} \right) \right] = 0$$

(4.3.6)

– Relations constitutives:

dans le cas du fluide newtonien:

$$\tilde{N}_i = 2 \left[\bar{\mu}\, \tilde{e}_{ii} + \bar{s}\, \tilde{s}\, \mu'(\bar{s})\, \bar{e}_{ii} \right] \qquad (4.3.7a;b)$$

pour i = 1,2

et dans le cas du modèle de PTT:

$$\tilde{Z}_i + De \left\{ \bar{\chi} \left[\omega \tilde{N}_i + \bar{u} \frac{d\tilde{N}_i}{dx} + \bar{u}\tilde{u} \frac{d\bar{N}_i}{dx} \boxed{\mp} 2 \left(1 - \xi \right) x \right.\right.$$

$$\left.\left. \left(\bar{N}_i \frac{d\bar{u}}{dx} \tilde{u} + \bar{N}_i \bar{u} \frac{d\tilde{u}}{\partial x} + \frac{d\bar{u}}{dx} \tilde{N}_i \right) \right] + \bar{s}\tilde{s}\chi'(\bar{s}) \left[\bar{u} \frac{d\bar{N}_i}{dx} \boxed{\mp} 2\bar{N}_i \left(1 - \xi \right) \frac{d\bar{u}}{dx} \right] \right\}$$

$$= \boxed{\pm} 2 \left[\bar{\mu} \frac{d\bar{u}}{dx} \tilde{u} + \bar{\mu} \bar{u} \frac{d\tilde{u}}{\partial x} + \bar{s}\tilde{s}\mu'(\bar{s}) \frac{d\bar{u}}{dx} \right]$$

(4.3.8a,b)

avec

$$\tilde{Z}_i = \bar{K} \left[\tilde{N}_i + \frac{\varepsilon De}{\bar{\Lambda}} \left(\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 \right) \bar{N}_i - \varepsilon De \left(\bar{N}_1 + \bar{N}_2 \right) \bar{s} \tilde{s} \frac{\Lambda'(\bar{s})}{\bar{\Lambda}^2} \bar{N}_i \right]$$

(4.3.9)

pour i = 1,2

signe supérieur i = 1
signe inférieur i = 2

Dans le cas d'un fluide newtonien et compte-tenu de la forme explicite des relations constitutives, l'équation de conservation de la quantité de mouvement (4.3.5) devient:

$$Re\bar{h} \left\{ \omega\bar{u}\tilde{u} + \bar{u} \left[\frac{d}{dx} (\bar{u}\tilde{u}) + \tilde{u} \frac{d\bar{u}}{dx} \right] + \tilde{h} \bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} \right\} = 4 \left\{ \left(\bar{h}\mu(\bar{s}) \frac{d\bar{u}}{dx} \right)' \tilde{h} \right.$$

$$+ \left(\bar{h}\mu(\bar{s}) \frac{d\bar{u}}{dx} \right) \frac{d\tilde{h}}{dx} + \left(\bar{h}\mu(\bar{s}) \frac{d\bar{u}}{dx} \right)' \tilde{u} + \left(\bar{h}\mu(\bar{s}) \frac{d\bar{u}}{dx} \right) \frac{d\tilde{u}}{dx} + \left(\bar{h}\mu(\bar{s})\bar{u} \right)' \frac{d\tilde{u}}{dx}$$

$$\left. + \left(\bar{h}\mu(\bar{s})\bar{u} \right) \frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} + \left(\bar{h}\bar{s}\mu'(\bar{s}) \frac{d\bar{u}}{dx} \right)' \tilde{h} + \left(\bar{h}\bar{s}\mu'(\bar{s}) \frac{d\bar{u}}{dx} \right) \frac{d\tilde{h}}{dx} \right\}$$

(4.3.10)

Finalement, nous obtenons des systèmes d'ordre:

- 4 pour un fluide newtonien : $\tilde{h}'$ $\tilde{u}'$, $\tilde{s}'$, $\tilde{S}'$
- 5 pour le modèle de PTT: : $\tilde{h}'$, $\tilde{u}'$, $\tilde{s}'$, $\tilde{N}_1'$, $\tilde{N}_2'$.

■ Conditions aux limites

– En sortie de filière, il n'y a aucune perturbation, soit:

en x=0 $\tilde{h}=0$ $\tilde{u}=0$ $\tilde{s}=0$ (4.3.11a,b,c)

et, de plus, pour le modèle de PTT:

$$\tilde{N}_2=0$$

– Par ailleurs, le taux d'étirage est maintenu constant, ce qui se traduit par (Annexe A6):

en x=1 $$\tilde{u} - C_F\, \tilde{s}\, \frac{\bar{s}}{\bar{s}'}\, \frac{\bar{u}'}{\bar{u}} = 0 \qquad (4.3.12)$$

Dans le cas où c'est, au contraire, la force d'étirage qui est maintenue constante, nous aurons (Annexe A6):

en x=1 $$\tilde{S} + \bar{S}\,\tilde{h} - C_F\, \tilde{s}\, \frac{\bar{s}}{\bar{s}'} \left(\bar{S}' + \bar{S}\, \frac{\bar{h}'}{\bar{h}} \right) = 0 \qquad (4.3.13)$$

Le coefficient C_F ci-dessus prend les valeurs suivantes:

$C_F = 1$ fluctuation de la position de la ligne de figeage,

$C_F = 0$ ligne de figeage fixe.

– Les conditions aux limites tenant compte de l'élasticité de la partie solidifiée sont reportées en Annexe A9.

Remarque

La condition 4.3.13 (force d'étirage imposée) est donnée à titre indicatif mais ne permet pas d'obtenir des solutions non-triviales.

Montrons-le dans le cas simple d'un fluide newtonien et des conditions isothermes. Si de plus on néglige l'inertie, nous avons une équation différentielle du second ordre pour la vitesse, soit:

$$\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} + \omega\, e^{-px} \frac{d\tilde{u}}{dx} + \omega\, p\, e^{-px}\, \tilde{u} = \omega\, e^{-px} \frac{d\tilde{u}(0)}{dx} \tag{4.3.14}$$

avec $p = \text{Log } E$

et les conditions aux limites:

$$\tilde{u}(0) = 0 \tag{4.3.15a}$$

$$T_{\nearrow} = 4 \frac{du}{dx} h = \text{Cte} \tag{4.3.15b}$$

Cette dernière se traduisant par:

$$\frac{d\tilde{u}}{dx}(0) = 0 \tag{4.3.16}$$

Nous avons donc une équation différentielle homogène munie de conditions aux limites homogènes. Par conséquent, la solution est nécessairement nulle partout.

4.3.2.3 Techniques de calcul des valeurs propres

4.3.2.3.1 Généralités - Méthodes de résolution

- **Méthodes de résolution**

Nous avons utilisé deux types de méthodes:

- méthodes de tir (itératives),
- méthodes matricielles (directes).

- **Méthodes de tir**

Leur principe est de transformer le "problème aux limites" en un "problème aux valeurs initiales".

Elles consistent alors à intégrer le système d'équations à l'aide d'un premier jeu de conditions aux limites et à faire varier un certain nombre de "paramètres" (dont notamment la valeur propre) jusqu'à vérification d'un deuxième jeu de conditions aux limites.

Nous avons, par ailleurs, considéré deux types de discrétisation des équations à résoudre et, conjointement, deux méthodes de résolution:

- méthodes de Runge-Kutta (intégration pas à pas),
- schémas aux **différences finies** conduisant à la résolution d'un système linéaire.

Dans les deux cas, les deux jeux de conditions aux limites sont les suivants:

- premier jeu: conditions en x=0,
- second jeu : conditions en x=1 (taux d'étirage ou force d'étirage imposé).

Des itérations sur la valeur propre ω seront effectuées jusqu'à vérification de la condition en x=1, et ce par une méthode de Newton-Raphson.

Les conditions aux limites étant homogènes, il nous faudra spécifier des paramètres supplémentaires afin que la solution ne soit pas identiquement nulle. Soit:

- Fluide newtonien: $$\frac{d\tilde{u}(0)}{dx} \neq 0 \qquad (4.3.17a)$$
- Modèle de PTT: $$\left(\tilde{N}_1(0) - \tilde{N}_2(0) \right) \neq 0 \qquad (4.3.17b)$$

Nous avons alors considéré:

$$\frac{d\tilde{u}(0)}{dx} = 1 \ , \qquad \tilde{N}_1(0) = 1, \qquad \tilde{N}_2(0) = 0 \qquad (4.3.17c)$$

Il est facile de montrer que les solutions $\tilde{\Phi}$ sont directement proportionnelles à ces valeurs imposées. Soit:

$$\tilde{\Phi}(x,\tau) = \tilde{C} \ . \ \tilde{\Psi}(x,\tau) \qquad (4.3.18)$$

où $\tilde{C}$ est une constante complexe.

On peut alors établir le système d'équations ainsi que les conditions aux limites vérifiées par les $\tilde{\Psi}(x,\tau)$ et montrer que la solution correspondante est unique.

ω est donc indépendante des valeurs que l'on donne à ces paramètres.

Par ailleurs, le résultat 4.3.18 est la simple traduction du fait que, dans le cadre d'une théorie linéaire, la notion d'amplitude n'existe pas.

- **Méthodes matricielles**

Elles consistent à formuler le problème discrétisé (équations et conditions aux limites) sous la forme:

$$\left[A \right] \left\{ x \right\} = \omega \left[B \right] \left\{ x \right\} \qquad (4.3.19)$$

où $\{x\}$ est le vecteur des inconnues aux points de la discrétisation du domaine, $[A]$ et $[B]$ 2 matrices carrées.

C'est la formulation classique d'un problème aux valeurs propres dit généralisé. Il suffit alors de faire appel à une des différents techniques de résolution existantes.

Nous avons alors utilisé les modules F02BJF et F02AGF de la bibliothèque mathématique NAG, respectivement pour une matrice B quelconque et une matrice B unité, lorsque cela est possible. Ces modules utilisent l'algorithme QZ.

Comme précédemment, les équations seront discrétisées par des méthodes de différences finies.

- Le passage du problème 4.3.19 à la méthode de tir formulée matriciellement est immédiat:

En effet, en adjoignant à 4.3.19 l'une des deux équations 4.3.17a,b, puis en faisant passer les termes en ω au premier membre, nous obtenons:

$$\left[A'(\omega) \right] \left\{ x \right\} = \left\{ b \right\} \qquad (4.3.20)$$

• Les équations doivent être mises sous une forme adéquate dans le cas d'une intégration par une méthode de Runge-Kutta.

Dans les autres cas, elles sont directement discrétisées, sous leur forme initiale.

▪ Schémas aux différences finies

Nous avons considéré les schémas suivants (cf. Annexe A5), communs aux deux méthodes formulées matriciellement:

- type (1): schémas d'ordre 2 (différences centrées),
- type (2): schémas à 5 points (différences centrées): d'ordre 4 pour la dérivée première et d'ordre 3 pour la dérivée seconde,
- type (4): schémas d'ordre 1 (différence amont) pour la dérivée première et d'ordre 2 (différence centrée) pour la dérivée seconde.

▪ Discrétisation du domaine

Remarquons tout d'abord que nous utiliserons, pour simplifier, la terminologie de maillage pour le domaine discrétisé, bien qu'il ne s'agisse pas d'un maillage au sens "classique" du terme.

Celui-ci sera caractérisé par le nombre de points de discrétisation N.

Nous considèrerons:

a) des maillages uniformes: les points de discrétisation ou noeuds sont équidistants.

b) des maillages non-uniformes, pour les besoins spécifiques du § 4.3.2.3.2, quoique nous n'excluons pas, pour l'instant, leur utilisation de façon systématique.

Parmi de tels maillages, nous considèrerons les deux cas suivants:

- maillages "quelconques",
- maillages uniformes par sous-domaines.

▪ Le tableau 4.3.1 récapitule les différentes méthodes utilisées. Chacune d'entre elles a reçu une désignation pour des raisons pratiques.

Méthode	Désignation	Observations
matricielle	MAT1	schémas de type (1)
	MAT2	schémas de type (2)
	MAT4	schémas de type (4)
tir avec résolution d'un système linéaire	TRSL1	schémas de type (1)
	TRSL2	schémas de type (2)
	TRSL4	schémas de type (4)
tir avec intégration pas à pas	TRK1	Runge-kutta d'ordre 1
	TRK4	Runge-Kutta d'ordre 4

tableau 4.3.1. Méthodes de calcul des valeurs propres

4.3.2.3.2 Etude comparative des différentes méthodes

4.3.2.3.2.1 Généralités

Afin d'acquérir une méthodologie de calcul des valeurs propres, nous allons effectuer une étude comparative des différentes méthodes définies précédemment et ce pour:

- un fluide newtonien et le fluide de Maxwell,
- des conditions isothermes et non-isothermes,
- un point de solidification fixe,
- une partie solidifiée indéformable,

et pour différents types de paramétrages.

Nous procèderons de façon à isoler chaque contribution (rhéologie, effets non-isothermes, ...). Ainsi, nous considèrerons successivement les CAS I à VI ci-dessous.

Par ailleurs, les calculs seront effectués dans les conditions suivantes, sauf spécification contraire:

- taux d'étirage imposé,
- maillage uniforme.

Remarquons que si le complexe ω est une valeur propre, son conjugué l'est également. Par la suite, nous ne considèrerons donc que les ω à parties imaginaires positives.

Rappelons que nous avons convenu de qualifier de **première valeur propre** celle qui est la moins stable, conditionnant la stabilité du système considéré.

En ce qui concerne les méthodes matricielles, nous nous attacherons particulièrement à vérifier si le spectre des valeurs propres obtenues est "structuré" et s'il existe une "règle" permettant d'en extraire la première valeur propre.

Peu de résultats concrets et fouillés concernant le calcul de valeurs propres en général sont disponibles. **C'est pourquoi nous avons opté pour une présentation détaillée des nôtres.**

Remarques (cf. tableau ci-dessous)

- Les cas I et II sont identiques. Seule la mise en forme des équations à résoudre est différente d'un cas à l'autre.

- Dans le cas des méthodes de type Runge-Kutta, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est systématiquement utilisée sous forme intégrée, sauf, bien sûr, pour le CAS III.

De même, dans les CAS I et II, on résoud les équations (1) et (3).

DIFFERENTS CAS D'ETUDE

Equations à résoudre

(1) Equation de continuité (4.3.4)
(2) Equation de conservation de la quantité de mouvement (cas général) (4.3.5)
(3) Equation de conservation de la quantité de mouvement (cas d'un fluide newtonien) (4.3.10)
(4) Equation de conservation de l'énergie (4.3.6)
(5),(6) Relations constitutives pour le modèle de PTT (4.3.8a,b)

CAS I Fluide newtonien (paramétrage en $\tilde{u}$)

Termes d'inertie négligés – Isotherme – Equation (3) intégrée – Equation différentielle du second ordre pour la vitesse (4.3.14), en éliminant l'épaisseur $\tilde{h}$.

CAS II Fluide newtonien (paramétrage en $\tilde{h}$ $\tilde{u}$)

Termes d'inertie négligés – Isotherme – Résolution du système (1), (3) Equation (3) non-intégrée: IIa ou intégrée: IIb.

CAS III Fluide newtonien (paramétrage en $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ $\tilde{s}$)

Termes d'inertie pris en compte – Isotherme – Résolution du système (1), (3) – (L'équation (3) ne peut être intégrée).

CAS IV Fluide newtonien (paramétrage en $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ $\tilde{s}$)

Adjonction de l'équation de l'énergie au CAS II – Résolution du système (1), (3), (4).

CAS V Fluide de Maxwell (paramétrage en $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ $\tilde{N}_1$ $\tilde{N}_2$)

Isotherme – Termes d'inertie négligés – Résolution du système (1), (2), (5), (6) – Equation (2) non-intégrée: Va ou intégrée: Vb.

CAS VI Fluide de Maxwell (paramétrage en $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ $\tilde{s}$ $\tilde{N}_1$ $\tilde{N}_2$)

Adjonction de l'équation de l'énergie au CAS V –
Résolution du système (1), (2), (4), (5), (6)

4.3.2.3.2.2 Résultats

a) ETUDE DU CAS I

Pour l'examen de la structure des valeurs propres, nous avons opté pour un taux d'étirage relativement faible (E = 5) et ce pour les raisons suivantes:

- Il s'agit, en principe, d'un cas stable avec une marge confortable (la transition s'effectuant pour un taux d'étirage d'environ 20),

- Nous devons faire en sorte d'affecter le moins possible la précision des calculs qui, pour un nombre de points de discrétisation donné, diminue lorsque le taux d'étirage (donc les gradients) augmente.

- **Méthodes matricielles**

■ La figure 4.3.2 représente les valeurs propres calculées à l'aide des méthodes MAT1, MAT2 et MAT4, pour N = 51.

Les valeurs propres sont ordonnées et sont telles que leurs modules augmentent. Nous pouvons remarquer que la valeur propre la moins stable est systématiquement celle de plus faible module et donc celle de plus faible fréquence également.

Les résultats fournis par les méthodes MAT1 et MAT2 sont tels que la fréquence augmente avec le module. De plus, la stabilité augmente avec la fréquence.

La stabilité ainsi que la fréquence des valeurs propres calculées à l'aide de la méthode MAT4 augmentent dans un premier temps, puis diminuent par la suite. Ainsi, les modes supérieurs sont instables.

L'écoulement n'est pas pour autant instable. En effet, c'est la précision d'obtention de ces modes supérieurs qui est en cause. Il s'agit, en fait, d'une règle générale: plus l'ordre d'une valeur propre augmente, plus la précision avec laquelle celle-ci est obtenue diminue. En comparant les résultats des différentes méthodes, on peut toutefois remarquer que la partie réelle est beaucoup plus affectée que la partie imaginaire.

■ La figure 4.3.3 permet de mettre en évidence l'influence du nombre de points de discrétisation N pour les méthodes MAT2 et MAT4. Notons que les résultats concernant la méthode MAT1 sont similaires à ceux de MAT2.

Les constatations confirment l'effet de la précision sur les valeurs propres:

- la sensibilité des valeurs propres vis-à-vis du nombre de points de discrétisation va en augmentant lorsque l'ordre augmente (ici, l'ordre des modules croissants).

– la partie réelle est beaucoup plus sensible que la partie imaginaire.

Nous pouvons donc affirmer que le nombre de valeurs propres "correctes" est fonction de la précision du calcul, c'est-à-dire:

– l'ordre des schémas,

– le nombre de points de discrétisation.

En d'autres termes, si l'on se fixe une certaine marge d'erreur, on ne doit retenir qu'un certain nombre de valeurs propres, ce nombre augmentant avec la précision du calcul.

A titre de comparaison, le tableau 4.3.2 ci-dessous représente les cinq premières valeurs propres (suivant le module croissant) pour différentes conditions, et résume les précédentes constatations.

METHODE \ N	51	101	201
MAT1	(-2.78,+9.60) (-5.27,+23.1) (-7.12,+36.6) (-8.85,+50.6) (-10.6,+65.3)	(-2.75,+9.62) (-5.05,+23.0) (-6.53,+36.2) (-7.72,+49.4) (-8.78,+62.6)	(-2.75,+9.62) (-5.00,+23.0) (-6.38,+36.1) (-7.43,+49.1) (-8.29,+62.1)
MAT2	(-2.74,+9.62) (-4.95,+23.0) (-6.18,+36.0) (-7.28,+48.5) (-8.99,+61.1)	(-2.75,+9.62) (-4.98,+23.0) (-6.32,+36.1) (-7.29,+49.0) (-8.06,+61.8)	(-2.75,+9.62) (-4.98,+23.0) (-6.33,+36.1) (-7.33,+49.0) (-8.12,+61.9)
MAT4	(-2.23,+9.89) (-1.78,+24.1) (+1.72,+38.0) (+7.61,+51.2) (+15.6,+63.7)	(-2.45,+9.76) (-3.41,+23.6) (-2.40,+37.2) (-.0117,+50.6) (+3.58,+63.8)	(-2.62,+9.69) (-4.21,+23.3) (-4.39,+36.7) (-3.72,+50.0) (-2.35,+63.1)

tableau 4.3.2. Cinq premières valeurs propres
EF – Fluide newtonien – isotherme – inertie négligée
CAS I, $\tilde{u}$ / E = 5

Les résultats fournis par les méthodes MAT1 et MAT2 sont identiques pour la première valeur propre.

Les résultats de MAT4 tendent logiquement vers ceux de MAT1 et MAT2 lorsque le nombre de points de discrétisation augmente. Remarquons toutefois que **le temps de calcul est proportionnel au cube de la taille du système matriciel** et peut devenir rapidement excessif. Notons également que ce temps de calcul est sensiblement indépendant des schémas adoptés.

De ce fait, la méthode MAT4 présente d'emblée un très sérieux handicap.

■ Les calculs ci-dessus ont été effectués pour des "maillages" uniformes. Nous estimons qu'un test plus crucial concernant l'ordonnance des valeurs propres consiste à considérer des domaines non-uniformes ("quelconques" ou uniformes par sous-domaine).

Les valeurs propres restent alors ordonnées comme précédemment. De plus, nous obtenons les mêmes résultats, à la précision près des calculs.

■ A titre indicatif, la figure 4.3.4 représente les premiers modes propres de la vitesse.

La figure 4.3.5 montre l'évolution des valeurs propres avec le taux d'étirage.

La hiérarchie est, à tout moment, respectée. Au-delà d'une certaine valeur du taux d'étirage (20,21 exactement), la partie réelle de la première valeur propre devient positive, indiquant ainsi l'apparition d'une instabilité.

Le respect permanent de la hiérarchie autorise le suivi de la valeur propre la moins stable pour la détermination de la stabilité de l'écoulement.

– **Méthodes de tir**

■ La figure 4.3.6 représente les valeurs propres calculées par les méthodes MAT2 et TRK4. Pour cette dernière, les valeurs initiales sont les résultats de la méthode MAT2.

Nous obtenons les mêmes résultats, à la précision près de chaque méthode (TRK4 étant, "sur le papier", la plus précise).

Remarquons que ces deux méthodes étant de précisions comparables, les premières valeurs propres de MAT2 appartiennent au domaine d'attraction des valeurs propres correspondantes de TRK4.

Le tableau 4.3.3 représente la première valeur propre obtenue à l'aide des méthodes TRK4 et TRK1.

Remarquons que, bien que de précisions comparables, les méthodes MAT4 et TRK1 ne donnent bien évidemment pas, pour de faibles nombres de points de discrétisation, les mêmes résultats.

N METHODE	51	101	201
TRK 1	(-2.33 , 10.3)	(-2.50 , 9.77)	(-2.70 , 9.70)
TRK 4	(-2.74 , 9.62)	(-2.75 , 9.62)	(-2.75 , 9.62)

tableau 4.3.3. Première valeur propre
EF – Fluide newtonien – isotherme – inertie négligée
$\tilde{h}$, $\tilde{u}$ / E = 5

Notons également que l'existence de valeurs parasites n'est pas le "privilège" des méthodes matricielles. En effet, en donnant des valeurs initiales quelconques (par exemple, les valeurs parasites générées par les méthodes matricielles), on obtient des résultats visiblement erronnés.

■ Les méthodes TRSL fournissent exactement les mêmes résultats que les méthodes MAT utilisant les mêmes schémas de discrétisation.

Elles permettent en quelque sorte de valider le module de résolution utilisé pour les méthodes matricielles.

Conclusion partielle

Voici les conclusions à l'issue de cette première analyse:

- la première valeur propre est celle de plus faible module (qui est également celle de plus faible fréquence),
- les méthodes de tir et matricielles sont strictement équivalentes, dans le cas où les valeurs initiales de la méthode de tir se situent dans le domaine d'attraction des valeurs finales et les précisions suffisamment élevées (ordre des schémas et/ou nombre de points de discrétisation).

- l'algorithme matriciel de calcul des valeurs propres d'une matrice donnée fonctionne parfaitement.

En conséquence, les résultats obtenus serviront de référence pour l'étude du cas II.

b) ETUDE DU CAS II

Nous considèrerons, dans un premier temps, le CAS IIa (équation (2) non-intégrée).

- Méthodes matricielles

■ La figure 4.3.7 représente les résultats fournis par les 3 méthodes matricielles.

Les valeurs propres obtenues par la méthode MAT4 restent ordonnées mais selon une "ossature" différente de celle du CAS I. La moins stable demeure toutefois celle de plus faible module. Les premières valeurs propres sont telles que lorsque leurs modules augmentent, leurs fréquences ainsi que leurs stabilités augmentent également.

Aucune ordonnance ne subsiste, à première vue, en ce qui concerne les valeurs propres fournies par les méthodes MAT1 et MAT2.

Remarquons tout d'abord que l'on retrouve les valeurs propres de plus faibles modules calculées précédemment et que, de nouveau, la moins stable demeure celle de plus faible module.

Il apparait, par contre, des valeurs propres dépendant des schémas adoptés et qui sont purement "artificielles" comme le confirmera l'analyse qui suit. Nous conviendrons de les qualifier de **valeurs propres parasites** ou **solutions parasites**.

Il est à noter qu'il existe, parmi de telles valeurs, une branche de valeurs ordonnées.

Ce phénomène est généré par les discrétisations d'ordres élevés adoptées pour ces deux méthodes. Il n'apparait donc pas dans le cas de la méthode MAT4 pour laquelle les ordres des schémas de discrétisations sont "adaptés" à ceux des dérivées.

Remarquons, cependant, que de telles solutions n'existaient pas lors de l'étude du CAS I et ce quelle que soit la méthode matricielle.

L'existence de valeurs parasites, à laquelle il fallait s'attendre, est pour le moins embarassante car, l'ordonnance n'étant plus respectée, aucun critère permettant d'extraire la première valeur propre n'existe, a priori.

En effet, nous sommes dans l'obligation de supposer que la règle précédente n'a plus la moindre raison d'être. Ce qui nous annule le bénéfice du gain en précision.

- Etudions l'influence du domaine discrétisé sur les solutions parasites.

Les figures 4.3.8a (MAT1) et 4.3.8b (MAT4) mettent en évidence l'influence du nombre de points de discrétisation N (les résultats pour la méthode MAT2 sont similaires à ceux de MAT1).

En ce qui concerne MAT1, les valeurs parasites appartenant à la branche ordonnée sont très sensibles à la valeur de N. Leurs fréquences, en particulier, semblent directement liées au nombre de points de discrétisation. Leurs parties réelles, par contre, sont très peu modifiées.

Rappelons que, lors du cas I, nous avons constaté que les parties réelles et imaginaires des vraies solutions se comportaient d'une manière exactement opposée.

En ce qui concerne MAT4, nous retrouvons une sensibilité des valeurs propres par rapport au nombre de points de discrétisation allant en augmentant avec l'ordre de celles-ci.

Examinons à présent l'influence du type de "maillage" sur les résultats.

Les figures 4.3.9a et 4.3.9b représentent la superposition des résultats obtenus respectivement à l'aide des méthodes MAT4 et MAT2 pour différents maillages "quelconques".

La structure des valeurs propres obtenues par MAT4 est inchangée.

A l'inverse, l'effet sur les résultats de MAT2 est proprement saisissant. En effet, nous obtenons véritablement un nuage de points dont il sera bien difficile, à première vue, d'extraire les "vraies" valeurs propres. Notons qu'un constat similaire pouvant être effectué concernant la méthode MAT1, les résultats correspondants n'ont pas été présentés.

Nous pouvons alors faire les constatations suivantes:

- L'existence d'une branche ordonnée de valeurs parasites n'est due qu'à l'uniformité du maillage.

- Dans tous les cas et quel que soit le maillage, les premières valeurs propres de plus faibles modules du cas I sont retrouvées.

■ D'une manière générale, le spectre obtenu est la superposition de 2 spectres:

- spectre réel, tronqué: c'est celui qu'il nous faut extraire,
- spectre artificiel généré par la discrétisation.

La figure 4.3.10 représente une comparaison des valeurs propres pour les CAS I et II. Les résultats, obtenus pour un nombre de points de discrétisation important, permettent d'illustrer parfaitement les propos ci-dessus.

Notons que, dans tous les cas, la valeur propre la plus instable demeure celle de plus faible module.

– Méthode de tir de type TRSL

On retrouve systématiquement les résultats fournis par les méthodes matricielles (dans la limite de la convergence de la méthode de tir) et, en particulier, les valeurs parasites. Celles-ci sont donc définitivement inhérentes au système matriciel et donc à la méthode de discrétisation.

Par ailleurs, ceci confirme encore une fois le bon fonctionnement de l'algorithme matriciel.

– Méthodes MAT - Equation (2) intégrée

Des écarts significatifs concernant les valeurs parasites apparaissent lorsque l'équation d'équilibre axial (2) est intégrée. Cela peut s'expliquer par le changement de l'ordre des termes dans les équations.

Il peut alors apparaitre des valeurs propres plus instables que celle de plus faible module. Ce n'était pas le cas lorsque l'équation (2) n'est pas intégrée. Ce dernier phénomène n'est donc que fortuit.

– Force d'étirage imposée

L'étude de ce cas est révélateur car, en principe (cf. § 4.3.2.2), aucune solution non-triviale n'existe.

Les méthodes matricielles MAT1 et MAT2 fournissent néanmoins des solutions qui coïncident approximativement avec les solutions parasites correspondant au cas où l'on impose le taux d'étirage.

c) ETUDE DU CAS III

Nous ne considèrerons pour ce cas que les méthodes matricielles.

Prenons en compte les termes d'inertie dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Remarquons que dans ce cas et en imposant le taux d'étirage, une formulation de type:

$$[A]\{x\} = \omega \{x\} \qquad (4.3.21)$$

est possible, permettant, en toute logique, d'obtenir des résultats plus précis.

Notons qu'il ne s'agit pas de déterminer l'influence de l'inertie sur la stabilité (qui, vérification faite, s'avère effectivement stabilisante, conformément au § 3.2.2.3) mais d'examiner l'influence de l'adjonction de termes supplémentaires sur l'ordonnance des valeurs propres.

Les résultats que l'on obtient conservent alors la même structure que précédemment, dans le cas où l'équation (2) n'est pas intégrée.

Ce résultat, paradoxal à première vue, est vraisemblablement dû au fait que l'ordre des différents termes ne change pas.

d) Bilan partiel de l'étude des CAS I à III

■ **En prenant les résultats du CAS I en référence**, l'étude de ces trois premiers cas conduit, en ce qui concerne les méthodes matricielles, aux conclusions suivantes:

– De manière générale, au spectre réel, tronqué, se superpose un spectre parasite.

– Ces valeurs parasites dépendent fortement:

  – des schémas de discrétisation adoptés,
  – de la forme que l'on donne aux équations,
  – du domaine discrétisé.

Selon les cas, certaines d'entre elles peuvent être plus instables que la "vraie" première valeur propre. Aucune règle ne peut être énoncée à ce sujet.

– la forme non-intégrée de l'équation d'équilibre axial est celle qui convient le mieux. **C'est celle que nous adopterons pour la suite de cette phase d'analyse.**

– Bien que ne fournissant pas de valeur parasite, la méthode MAT4, trop peu précise, n'offre que de faibles perspectives. En conséquence, nous ne considèrerons, pour la suite de cette phase d'analyse, que les méthodes MAT1 et MAT2.

Nous présenterons alors indifféremment les résultats de l'une ou de l'autre de ces deux méthodes.

– la **règle** (provisoire) veut que la première valeur propre soit systématiquement celle de plus faible module.

■ Les méthodes de tir fournissent les mêmes résultats que les méthodes matricielles pourvu que:

– les précisions des méthodes en question soient suffisamment élevées,
– les valeurs initiales des méthodes de tir appartiennent au domaine d'attraction des solutions finales.

e) ETUDE DU CAS IV

■ Etudions tout d'abord un cas correspondant à un régime permanent isotherme afin d'examiner l'influence de l'adjonction de l'équation de l'énergie.

On obtient alors une série supplémentaire de valeurs propres (figure 4.3.11) par rapport à celles obtenues pour le CAS II.

Ces nouvelles valeurs varient avec le schéma de discrétisation et le maillage et ne peuvent être retrouvées à l'aide des méthodes de tir de type TRSL. Il s'agirait alors de solutions "parasites" de l'équation de l'énergie.

L'examen des modes propres permet de conforter ce point de vue. En effet, à ces valeurs propres correspondent des perturbations de température non-nulles, ce qui est impossible compte tenu de la forme de l'équation de conservation de l'énergie. En effet, celle-ci s'écrit, dans le cas d'un régime permanent isotherme:

$$\omega\, \tilde{s} + \bar{u}\, \frac{d\tilde{s}}{dx} = 0 \,, \qquad (4.3.22a)$$

avec

$$\tilde{s}(0) = 0 \qquad (4.3.22b)$$

et n'admet donc que la solution identiquement nulle.

Par ailleurs, pour les valeurs non-parasites, on retrouve les mêmes valeurs propres de plus faibles modules que lors des cas précédents.

- Etudions à présent la stabilité lorsque le refroidissement augmente.

Ce test est plus crucial et permettra de vérifier la bonne "tenue" de la méthode matricielle.

Par ailleurs, il convient de s'assurer de la validité ou non de la "règle" concernant le choix de la première valeur propre: jusqu'à présent, cette dernière est celle de plus faible module.

Nous allons considérer deux cas de figure, se différenciant l'un de l'autre par la valeur de β.

– Le premier est le suivant:

E	=	50
β	=	25
s_{air}	=	0.15
s_f	=	1 à 0.25

Il s'agit, jusqu'à s_f= 0.5, d'un cas "réaliste" de refroidissement.

Le tableau 4.3.4 montre l'évolution de la première valeur propre en fonction de la température finale s_f ("suivi en continu" à l'aide de TRK4). On retrouve alors l'effet stabilisant associé au refroidissement.

Le tableau 4.3.5 représente les résultats de la méthode MAT2. Les notations, valables par la suite, sont les suivantes:

ω_m	: valeur propre de plus faible module
ω_M	: valeur propre de plus grande partie réelle
ω_1	: "vraie" première valeur propre

Notons que les valeurs propres ci-dessus portent sur la totalité du spectre calculé, y compris le spectre parasite.

Lorsque le refroidissement augmente, il apparait des valeurs propres à parties imaginaires nulles et de relativement faibles parties réelles, si bien qu'une d'entre elles peut devenir celle de plus faible module sans pour autant être la plus instable.

La "règle" précédente est donc bafouée.

s_f \ N	51	101
1.0	(+2.04 , 16.8)	(+2.04 , 16.8)
0.75	(-4.61 , 26.6)	(-4.62 , 26.6)
0.50	(-15.4 , 62.0)	(-15.3 , 62.4)
0.25	(-19.8 , 126.)	(-20.3 , 132.)

Tableau 4.3.4. Méthode TRK4
Fluide newtonien – E = 50 - β = 25 - s_{air} = 0,15

s_f \ ω	ω_m	ω_M	ω_1
1.0	(+2.04 , 16.8)	(+2.04 , 16.8)	(+2.04 , 16.8)
0.75	(-4.58 , 26.6)	(-4.58 , 26.6)	(-4.58 , 26.6)
0.50	(-47.4 , 6.35)	(-15.3 , 62.0)	(-15.3 , 62.0)
0.25	(-49.3 , 0.)	(-26.4 , 117.)	(-26.4 , 117.)

Tableau 4.3.5. Méthode MAT2
Fluide newtonien – E = 50 - β = 25 - s_{air} = 0,15
N = 51, 56, 61, 66, 71

Pour obtenir les valeurs de ω_1 figurant dans le tableau 4.3.5, nous avons alors procédé de la manière suivante, suggérée par les résultats précédents: effectuer différents calculs pour des nombres de points de discrétisation croissants et examiner les valeurs propres qui restent "insensibles" (en fait, celles subissant les variations les plus faibles). Le résultat escompté est le suivant:

- vraies valeurs propres: faible sensibilité, les parties réelles étant toutefois plus sensibles que les parties imaginaires.

- valeurs propres parasites (celles qui sont les moins stables, donc les plus susceptibles de nous induire en erreur): parties imaginaires très sensibles, parties réelles relativement peu sensibles.

Ainsi, les résultats du tableau 4.3.5 ont été obtenus à l'aide des valeurs suivantes:

$$N = 51 - 56 - 61 - 66 - 71$$

Nous avons effectué ces 5 calculs successifs pour mieux examiner l'évolution des valeurs propres. En fait, dans le cas présent, les valeurs:

$$N = 51 - 56$$

auraient pu suffire.

Remarquons qu'il est difficile, voire impossible, de distinguer:

- une "vraie" valeur propre d'ordre élevé,
- une valeur parasite.

En effet, dans les deux cas, la sensibilité vis à vis du maillage est élevée, mais pour des raisons différentes toutefois.

Les figures 4.3.12a;b représentent les valeurs propres obtenues en faisant varier la température finale s_f.

– Le second cas de figure est beaucoup plus "sévère" et permettra par la même occasion de réexaminer un cas de figure pour lequel les résultats publiés dans le cas du filage sont en contradiction: la possible déstabilisation à refroidissement énergique dans le cas d'un fluide newtonien.

E	=	50
β	=	100
s_{air}	=	0.15
s_f	=	1 à 0.25

La figure 4.3.13 représente les résultats de TRK4 pour différents nombres de points de discrétisation. Les courbes s'écartent les unes des autres au fur et à mesure que la température finale diminue (cf. également tableau 4.3.6).

Ainsi, pour N = 51, nous trouvons des instabilités, ce qui n'est pas le cas pour N = 501.

La déstabilisation ne serait donc due qu'à une dégradation de la précision.

Lorsque le refroidissement augmente, il apparait comme précédemment des valeurs propres à parties imaginaires nulles, en ce qui concerne les méthodes matricielles. La détermination de ω_i s'avère impossible en-deça d'une température finale donnée (cf. tableau 4.3.7).

Ce phénomène (perte de précision, mauvais conditionnement du système matriciel) n'est pas imputable aux schémas. Le tableau 4.3.7 présente les résultats pour la méthode MAT2 mais un constat identique peut être effectué pour MAT1.

Augmenter le nombre de points (jusqu'à des valeurs raisonnables) ne semble pas résoudre le problème.

Remarquons toutefois que ces cas se situent en dehors de la plage utile et ne sont donc pas génants. Nous avons délibéremment examiné des cas aussi sévères dans le seul but de cerner les limites des différentes méthodes.

s_f \ N	51	101	501
1.0	(+2.04 , 16.8)	(+2.03 , 16.8)	(+2.03 , 16.8)
0.75	(-15.5 , 99.6)	(-15.1 , 102.)	(-14.9 , 102.)
0.50	(-10.5 , 216.)	(-36.5 , 243.)	(-36.4 , 256.)
0.25	(+206. , 366.)	(+7.32 , 499.)	(-89.3 , 613.)

Tableau 4.3.6. Méthode TRK4
Fluide newtonien – E = 50 - β = 100 - s_{air} = 0,15

s_f \ ω	ω_m	ω_M	ω_1
1.0	(+2.03 , 16.9)	(+2.03 , 16.9)	(+2.03 , 16.9)
0.75	(-34.6 , 0.)	(-14.2 , 98.0)	(-14.2 , 98.0)
0.50	(-87.0 , 0.)	(-3.75 , 4290.)	(*)
0.25	(+1.36 , 0.)	(+3470. , 0.)	(*)

Tableau 4.3.7. méthode MAT2
Fluide newtonien – E = 50 - β = 100 - s_{air} = 0,15

(*): impossibilité

Conclusion partielle

- La première valeur propre n'est plus nécessairement celle de plus faible module.
- D'une manière plus générale, aucune règle ne permet de l'extraire du spectre obtenu.

- Il faut donc se doter d'une méthode y remédiant. Celle que nous avons adoptée consiste:
  - à effectuer, pour des schémas donnés, des calculs pour des maillages à différents nombres de points de discrétisation,
  - puis, à examiner les valeurs propres subissant les variations les plus faibles.

Cette méthode semble convenir.

f) ETUDE DU CAS V

Les figures 4.3.14a et 4.3.14b représentent les valeurs propres obtenues respectivement à l'aide des méthodes matricielles MAT2 et MAT4. Notons que les résultats de MAT4 ne sont donnés qu'à titre indicatif.

Par rapport au CAS II, on obtient une autre branche de valeurs propres, manifestement due aux termes supplémentaires qu'apportent les relations constitutives.

Dans ce qui suit, nous considérerons les résultats de la méthode TRK4 comme référence.

De nouveau, la première valeur propre n'est plus nécessairement celle de plus faible module. Nous avons alors utilisé la même méthode que précédemment (calculs pour différents maillages de différents nombres de points de discrétisation et examen des valeurs subissant les plus faibles variations).

Dans certaines conditions, il apparait des valeurs propres purement réelles moins stables que la première valeur propre, que les méthodes de tir ne permettent pas de retrouver mais ne répondant pas à tous les critères de définition d'une valeur parasite. En effet:

- elles sont fonctions des schémas adoptés,
- elles sont, par contre, "insensibles" à la variation du maillage.

Par exemple:

De = 0,02
E = 20 jusqu'à E_{max} (= 51 dans le cas présent)

Les résultats de la méthode de tir sont reportés dans le tableau 4.3.8, ceux de la méthode matricielle (par exemple MAT2) dans le tableau 4.3.9.

E	ω_1
20.	(-1.12 , 14.8)
40.	(-16.4 , 17.3)
45.	(-41.6 , 30.7)
50.	(-84.5 , 45.9)
50.95	(-124. , 45.9)

Tableau 4.3.8. Méthode TRK4
Fluide de Maxwell – De = 0,02 - N = 51

E \ ω	ω_m	ω_M	ω_1
20.	(-1.12 , 14.7)	(-1.12 , 14.7)	(-1.12 , 14.7)
40.	(-1.88 , 0.)	(-1.88 , 0.)	(-16.4 , 17.2)
45.	(-7.66 , 0.)	(+26.1 , 0.)	(+26.1 , 0.)
50.	(-1.13 , 0.)	(+115. , 0.)	(+115. , 0.)
50.95	(+20.9 , 0.)	(+476. , 0.)	(*)

Tableau 4.3.9. METHODE MAT2
Fluide de Maxwell – De = 0,02

(*) impossibilité

g) ETUDE DU CAS VI

La figure 4.3.15 montre les valeurs propres calculées. Comme dans le cas d'un fluide newtonien, une branche supplémentaire est associée à l'équation de l'énergie.

Les constatations rejoignent celles effectuées précédemment. Considérons par exemple le cas suivant:

E	=	20
De	=	0.01
β	=	25
γ	=	0
s_{air}	=	0.15

s_z	ω_1
1.0	(-.131 , 14.1)
0.75	(-8.25 , 26.8)
0.50	(-20.2 , 56.3)

Tableau 4.3.10 Méthode TRK4
Fluide de Maxwell - Méthode TRK4 - ESSAI 161/(028)
$E = 20 - \gamma = 0.$
$\beta = 25 - s_{air} = 0.15$

s_z \ ω	ω_m	ω_M	ω_1
1.	(-.151 , 14.1)	(-.151 , 14.1)	(-.151 , 14.1)
0.75	(-27.5 , 3.63)	(-8.24 , 26.7)	(-8.24 , 26.7)
0.5	(-6.99 , 0.)	(-6.99 , 0.)	(-20.6 , 55.6)

Tableau 4.3.11. Méthode MAT2
Idem ci-dessus

4.3.2.3.3 Synthèse et discussion – Définition d'une méthodologie de calcul

Nous avons considéré un large éventail de méthodes de calcul des valeurs propres que nous avons toutes pu tester grâce à la simplicité du problème résolu.

Dans ce qui suit, nous allons faire une synthèse des résultats obtenus puis définir une méthodologie de calcul que nous utiliserons pour la suite de notre étude.

- Récapitulons tout d'abord les résultats obtenus:

  - **En ce qui concerne les méthodes matricielles:**

– Les méthodes MAT1 et MAT2, du fait de leurs schémas de discrétisation d'ordres élevés, génèrent, en règle générale, des solutions parasites dépendant **fortement**:

- des schémas en question,
- de la forme que l'on donne aux équations à discrétiser,
- du domaine discrétisé.

et dont celle de plus grande partie réelle peut être indifféremment plus stable ou plus instable que la vraie première valeur propre.

Remarquons que ces solutions ne proviennent pas de l'algorithme de résolution matricielle dont nous nous sommes assuré, fort simplement, du bon fonctionnement.

Le spectre obtenu est donc la superposition:

- du spectre réel, tronqué, mais conservant une certaine structure,
- du spectre parasite.

Il convient, bien évidemment, de ne pas tenir compte de ce dernier.

– Seuls des schémas, tels que ceux de MAT4, dont les ordres sont adaptés aux ordres des dérivées approximées ne génèrent pas de solution parasite. Ainsi, contrairement aux cas précédents, le spectre entier conserve une certaine structure.

Cependant, cela se fait au détriment de la précision.

A ce titre, les résultats du tableau 4.3.2 ne doivent pas faire illusion. En effet, il est attendu une nette dégradation des performances de la méthode dans le cas de systèmes plus complexes.

– Suite à un calcul matriciel à l'aide de MAT1 ou MAT2, aucune règle ne permet d'extraire la première valeur propre du spectre obtenu. En particulier et contrairement à ce que l'on serait en droit de penser, cette dernière n'est ni la valeur propre de plus faible module, ni celle de plus faible fréquence. Dans le cas de MAT4, nous pouvons tout simplement affirmer que la plus instable demeure celle de plus faible module.

- **En ce qui concerne les méthodes de tir:**

– Elles permettent d'obtenir les mêmes résultats que les méthodes matricielles pourvu que:

  – les précisions des méthodes en question soient suffisamment élevées. La précision étant tributaire et de l'ordre des schémas et du nombre de points de discrétisation.

  – les valeurs initiales de la méthode de tir appartiennent au domaine d'attraction des valeurs finales.

- Par ailleurs, en prenant les résultats de la méthode de tir TRK4 en référence, les méthodes matricielles peuvent générer des solutions erronées, ne répondant cependant pas à tous les critères de définition d'une valeur parasite en ce sens où elles sont indépendantes du maillage mais dépendent des schémas considérés. Toutefois, ce phénomène ne survient que dans des conditions "sévères" où, du fait même de la structure des équations, la matrice est, quels que soient les schémas, mal conditionnée.

■ Nous allons à présent à présent définir une méthodologie de calcul en tenant compte des résultats précédents.

1) Méthode générale: calcul des valeurs propres pour un cas quelconque

Des méthodes matricielles, de toute évidence, s'imposent. Examinons chacune des méthodes MAT1, MAT2 et MAT4.

- Méthode MAT4

Le nombre de points de discrétisation permettant d'obtenir une précision convenable conduit à des temps de calcul excessifs.

Les remèdes possibles sont:

  – calculs pour des nombres de points de discrétisation croissants et extrapolation des résultats correspondant à un nombre de points tendant vers l'infini.

  – calcul pour un nombre de points suffisamment élevé et calcul final à l'aide d'une méthode de type TRK4.

Dans ce cas, il se posera le problème de l'appartenance de la valeur initiale ainsi déterminée au domaine d'attraction de la solution finale.

Aucun de ces deux remèdes n'étant convaincant, nous ne retiendrons pas cette méthode.

- Méthodes MAT1 et MAT2

Le gain en précision se fait au détriment de l'existence de solutions parasites. Plusieurs remèdes peuvent être envisagés, afin de ne pas tenir compte de ces dernières:

▪ **Un premier** consiste à mettre à profit la relative insensibilité des vraies solutions vis-à-vis du maillage et des schémas de discrétisation et, à l'inverse, la grande sensibilité des solutions parasites vis-à-vis de ces deux "paramètres".

Nous avons alors deux possibilités:

* Calculs pour une méthode donnée et pour différents maillages. Soient, de nouveau, les deux possibilités suivantes, selon le type de maillage:

– Maillages uniformes, de différents nombres de points de discrétisation.

Cette méthode est celle qui s'est avérée la plus efficace.

Le problème (mineur) qui peut se poser est de "réajuster" la suite:

$$N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}, \ldots$$

des valeurs successives du nombre de points de discrétisation permettant de "détecter" la première valeur propre, la précision se dégradant au fur et à mesure que les conditions deviennent sévères (en fait, les gradients élevés). Ceci survient lorsque l'on augmente le taux d'étirage, le refroidissement, ... etc.

– Différents maillages non-uniformes, "aléatoires".

Bien que séduisante et prometteuse, cette méthode n'est pas toujours des plus fiables, sans doute à cause du fait qu'il est difficile de contrôler le maillage (risque d'avoir des mailles grossières en des endroits ou il faudrait au contraire raffiner, risque d'avoir des mailles contigües trop différentes, ...).

* Calculs pour un maillage donné et pour chaque méthode MAT1 et MAT2:

On choisira alors un maillage uniforme.

■ **Un second** remède consiste à utiliser une méthode de tir de type Runge-Kutta avec comme valeurs initiales les solutions fournies par les méthodes matricielles.

Une "combinaison" est alors envisageable: MAT2 et TRK4.

Toutefois, cette méthode est, on le conçoit aisément, d'un emploi lourd.

Choix final de la méthode utilisée

■ Nous avons finalement opté pour:

Une série de calculs pour une méthode donnée et pour différents maillages:

- maillages uniformes et variation du nombre de points de discrétisation.
- méthode MAT2: cette méthode l'emporte sur MAT1 car, par rapport à cette dernière, elle présente les avantages suivants:
  - précision plus importante, qui plus est non-obtenue au détriment du temps de calcul,
  - à l'issue des calculs successifs pour différents maillages, les variations subies par les solutions réelles sont plus faibles et celles subies par les solutions parasites, plus importantes.

■ Voici également des considérations supplémentaires:

– Nous n'avons, jusqu'à présent, que très peu parlé des modes propres. Leur bonne allure constitue pourtant le garant de la validité de la valeur propre obtenue. Pour cette raison, nous prendrons systématiquement le soin de les examiner.

– Par ailleurs, nous adopterons systématiquement la forme non-intégrée de l'équation d'équilibre axial.

2) Suivi d'une valeur propre en fonction de la variation d'un paramètre

Dans certains cas, ayant pour des valeurs de paramètres, obtenu la première valeur propre suivant la technique générale ci-dessus, une méthode de type Runge-Kutta a été utilisée pour suivre l'évolution de cette dernière en fonction de la variation des paramètres. Une telle technique est alors beaucoup plus économique.

Cependant, elle requiert que:

- le calcul de la solution stationnaire soit aisé et peu coûteux,
- les branches d'évolution de différentes valeurs propres du problème ne se coupent pas. C'est le cas pour l'étirage d'un film plan.

4.3.2.4 Applications

En guise d'applications, nous allons examiner les cas suivants:

- effet de la fluctuation de la position de la ligne de figeage,
- effet de l'élasticité de la partie solidifiée,
- étude de la stabilité dans le cas du modèle de PTT.

■ **Effet de la fluctuation de la position de la ligne de figeage**

La fluctuation de la position de la ligne de figeage est fortement stabilisante lorsque le refroidissement est faible mais devient peu significative par la suite.

Par exemple:

s_f	LIGNE DE FIGEAGE FIXE	LIGNE DE FIGEAGE VAR.
1.	(+2.04, 16.8)	(+2.04, 16.8)
0.95	(+1.26, 18.2)	(-5.16, 29.2)
0.90	(+0.28, 19.7)	(-5.27, 31.4)
0.85	(-0.96, 21.6)	(-5.42, 33.8)
0.80	(-2.55, 23.8)	(-5.60, 36.6)
0.75	(-4.61, 26.6)	(-5.84, 39.8)

Tableau 4.3.12. Effet de la température finale
Fluide newtonien – $E = 50$ – $\beta = 25$ – $s_{air} = 0.15$
TRK4 – $N = 51$

- **Effet de l'élasticité de la partie solidifiée**

Nous retrouvons un effet stabilisant d'autant plus important que le module d'élasticité de la partie solidifiée est faible. Ainsi, par exemple:

$1 / E_M$	ω_1
0	(-5.84 , 39.8)
10^{-4}	(-6.02 , 40.0)
5.10^{-4}	(-6.73 , 40.6)
10^{-3}	(-7.64 , 41.1)
5.10^{-3}	(-12.8 , 42.4)
10^{-2}	(-16.1 , 42.5)

tableau 4.3.13. Effet de la complaisance de la partie solidifiée
Fluide newtonien – $E = 50$ – $\beta = 25$ – $s_f = 0.75$ – $s_{air} = 0.15$

Notons que la complaisance $1/E_M$ est typiquement de l'ordre de 10^{-2} (pour la définition de $1/E_M$, cf. Annexe A9).

- **Modèle de PTT**

Etudions la stabilité dans le cas du modèle de PTT. Il s'agira alors de suivre l'évolution de la première valeur propre.

Ceci a avantageusement été effectué à l'aide d'une méthode TRK4 (la détermination de la solution stationnaire ne posant aucune difficulté particulière).

- **Isotherme**

La figure 4.3.16 représente l'évolution de ω_1 en fonction du nombre de Deborah De et pour un taux d'étirage de 20.

L'évolution que l'on obtient est très irrégulière. L'effet de De est d'abord stabilisant puis déstabilisant au-delà d'une valeur De^{***}. Par la suite, elle devient assez "quelconque".

Il semblerait que l'on ait:

$$De^{***} \simeq De^{*} \text{ ou } De^{**} \text{ (ceux du calcul stationnaire)}$$

La figure 4.3.17 montre l'évolution de ω_1 en fonction du taux d'étirage pour différentes valeurs du nombre de Deborah De.

Lorsque le taux d'étirage augmente, les constatations que l'on peut effectuer sont les suivantes:

- la partie réelle de ω_1 diminue dans un premier temps,
- elle augmente par la suite et devient positive indiquant ainsi l'apparition d'une instabilité,
- elle diminue de nouveau, devient négative puis remonte brutalement pour redevenir positive.

Nous nous sommes particulièrement intéréssé à de dernier phénomène, s'apparentant de prime abord à la stabilisation à taux d'étirage élevés survenant dans le cas d'un fluide de Maxwell (figure 4.3.18).

Nous pouvons alors remarquer les points suivants:

- l'évolution dans cette zone dépend fortement du nombre de points de discrétisation,
- Par ailleurs, on se situe nettement dans la zone de non-validité du modèle de PTT (profil de vitesse comportant une pente en x=1 tendant vers l'infini).

Ainsi, si l'on se limite à la zone de validité du modèle rhéologique, l'évolution de ω_1 demeure régulière. Celle-ci consiste alors en:

- une diminution de la partie réelle,
- puis une augmentation de cette dernière jusqu'à apparition de l'instabilité.

Contrairement au cas d'un fluide de Maxwell, il n'existe donc pas de zone de stabilité à taux d'étirage élevés.

Pour s'en convaincre définitivement, il suffit d'effectuer des calculs pour des nombres de Deborah suffisamment faibles pour lesquels la solution stationnaire demeure correcte, même à taux d'étirage élevés.

Signalons également que dans le cas d'un fluide de Maxwell et lorsque l'on se rapproche du taux d'étirage limite, la partie réelle de ω_1 remonte brutalement (figure 4.3.18). La partie imaginaire, quant à elle, s'annule.

Ce phénomène est, toutefois, différent de celui évoqué pour le modèle de PTT.

Par ailleurs, il n'est plus évident, malgré toutes les précautions que nous avons prises, qu'il s'agisse encore de la même valeur propre.

Le modèle global de l'étirage d'un film plan que nous avons élaboré permet de représenter le procédé de filage ou le procédé d'extrusion de film à plat.

La figure 4.3.19 montre alors la carte de stabilité obtenue. Nous y avons superposé les résultats correspondant à un fluide de Maxwell.

Les résultats présentés ont été obtenus pour les valeurs suivantes:

$$\xi = 0{,}1$$
$$\varepsilon = 0{,}015$$

Un augmentation de l'un de ces deux paramètres produit, en règle générale, un effet déstabilisant.

- **Non-isotherme**

Comme lors des cas précédents, le refroidissement est fortement stabilisant. Aucune instabilité n'apparait dans des conditions réalistes de refroidissement.

4.3.3 Etude des vibrations transversales

Examinons à présent les petits mouvements transversaux W(z,t) du film, considéré comme une membrane fixée à ses deux extrémités (d'une part la sortie de filière et d'autre part les rouleaux d'entrainement (Annexe B4).

Le nombre de Reynolds Re est le seul paramètre adimensionnel intervenant de manière explicite. Les autres paramètres interviennent par l'intermédiaire des coefficients (solution stationnaire).

La résolution est effectuée par une technique matricielle identique à celle définie précédemment.

Dans tous les cas, les valeurs propres sont imaginaires pures (le mouvement est dit neutre. Il est par ailleurs vibratoire) et parfaitement ordonnées (modules et fréquences croissants), indépendamment, en particulier, de la méthode utilisée.

Nous nous sommes alors attaché à calculer les premières fréquences propres.

Celles-ci sont régulièrement espacées.

Re représente l'inertie. Les fréquences diminuent lorsque celle-ci augmente.

A l'inverse, elles augmentent lorsque la tension augmente, ce qui survient dans l'un des cas suivants:

- augmentation du taux d'étirage,
- présence d'un refroidissement,
- augmentation du nombre de Deborah,
- . . . etc.

Les modes propres sont identiques à ceux d'une corde élastique attachée à ses deux extrémités. Le mode i possédant (i-1) "noeuds" et i "ventres" de déplacement.

A titre indicatif, les premières fréquences propres correspondant aux différents cas étudiés (§ 4.2.3.5) sont de l'ordre de **quelques dizaines de hertz**.

4.4 CONCLUSION GLOBALE

■ Dans une première étape, nous avons effectué une étude qualitative de l'étirage d'un film plan à l'aide d'un modèle rhéologique remédiant aux lacunes du modèle de Maxwell.

Bien que perfectible, ce modèle semble convenir, conformément à nos objectifs.

Nous avons, par ailleurs, constaté une prépondérance du refroidissement.

■ La seconde étape a consisté à étudier la stabilité linéaire du régime permanent calculé précédemment.

Après avoir élaboré et testé différentes méthodes, nous avons défini une méthodologie de calcul des valeurs propres.

Nous avons par ailleurs étudié la stabilité en considèrant un modèle de PTT. Les résultats différent sensiblement de ceux correspondant à un fluide de Maxwell. Il convient toutefois de tester leur validité par comparaison avec des résultats expérimentaux.

Notons que les vibrations transversales n'ont aucun rapport avec le problème d'instabilité qui nous intéresse.

En effet, celles-ci sont liées à l'inertie transversale du film, ce qui n'est pas du tout le cas des instabilités d'étirage.

Nous obtenons, en fait, les fréquences propres transversales de la membrane tendue.

figure 4.3.2. Structure des valeurs propres en fonction des schémas de discrétisation
EF – newtonien – isotherme

CAS I, $\tilde{u}$ / Re = 0 – E = 5
N = 51 / (+): MAT1, (*): MAT2, (o): MAT4

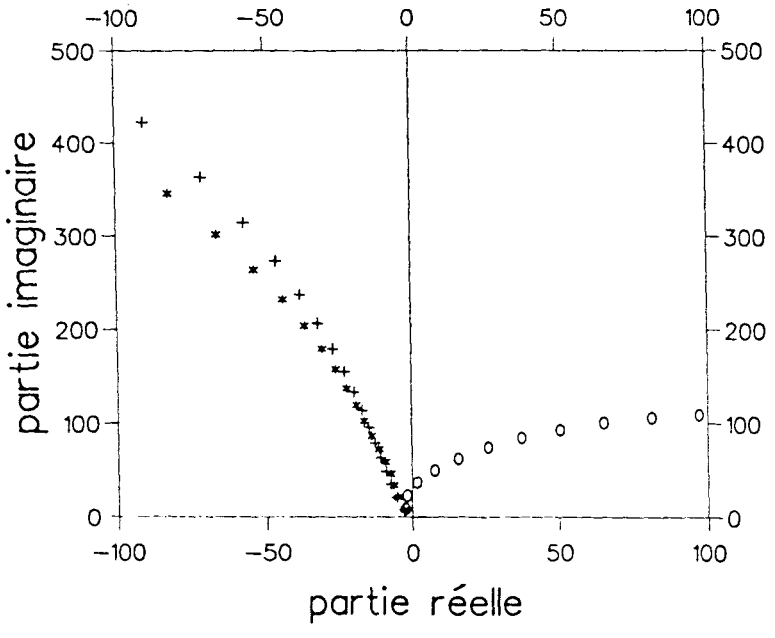


figure 4.3.3. Effet du nombre de points de discrétisation
EF – newtonien – isotherme

CAS I, $\tilde{u}$ / Re = 0 – E = 5
(+): MAT2, (o): MAT4
(1): N = 51, (2): N = 101, (3): N = 201

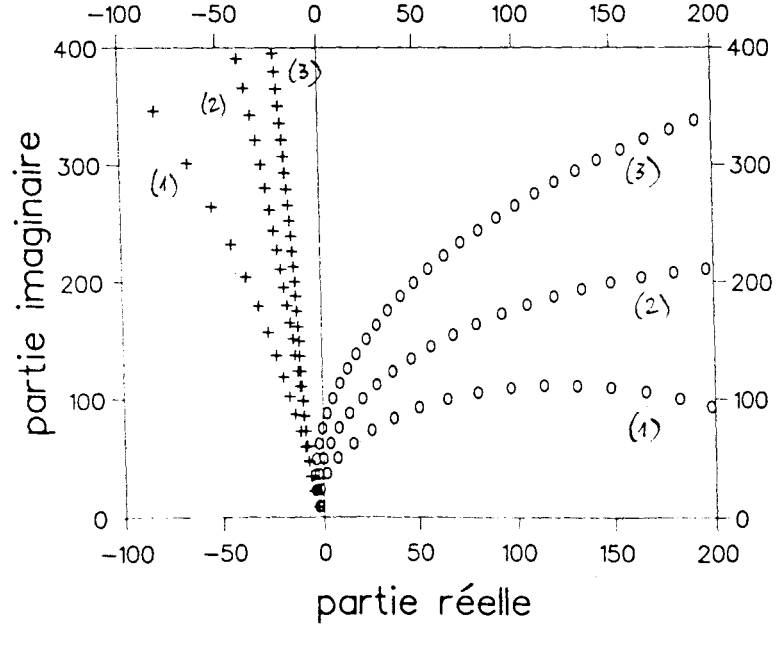
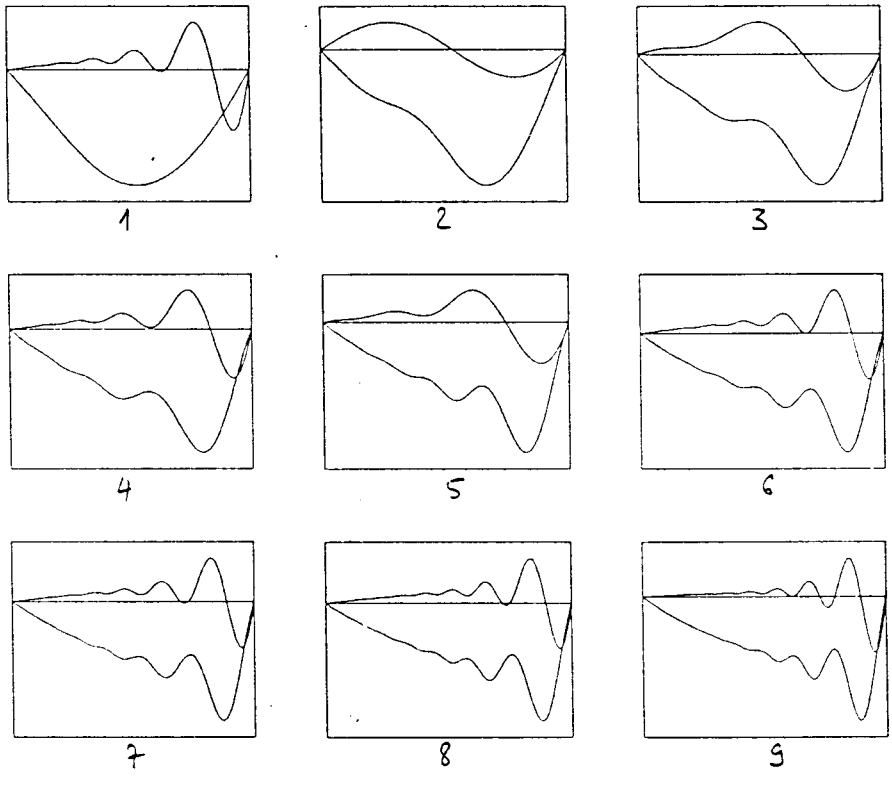


figure 4.3.4. Modes propres (vitesse)
EF – newtonien – isotherme
CAS I, $\tilde{u}$ / Re = 0 – E = 5



MODE=	1	OMEGA=	-.2745534D+01	.9621897D+01
MODE=	2	OMEGA=	-.4975880D+01	.2299342D+02
MODE=	3	OMEGA=	-.6299724D+01	.3607796D+02
MODE=	4	OMEGA=	-.7247376D+01	.4897610D+02
MODE=	5	OMEGA=	-.8011733D+01	.6170164D+02
MODE=	6	OMEGA=	-.8795731D+01	.7427428D+02
MODE=	7	OMEGA=	-.9805886D+01	.8685686D+02
MODE=	8	OMEGA=	-.1107842D+02	.9972202D+02
MODE=	9	OMEGA=	-.1249852D+02	.1130396D+03

figure 4.3.5. Evolution des valeurs propres en fonction du taux d'étirage
EF – newtonien – isotherme

CAS I, $\tilde{u}$ / Re = 0
N = 51 / MAT2
(.): E=5, (+): E=10, (*): E=15, (o): E=20, (x): E=25

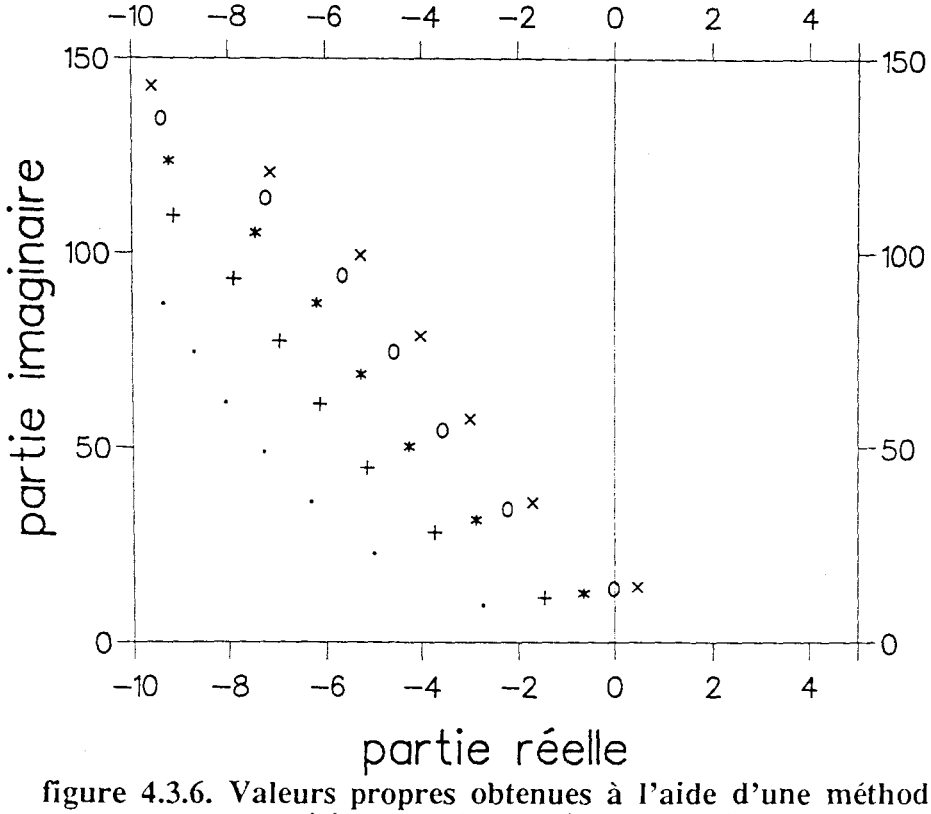


figure 4.3.6. Valeurs propres obtenues à l'aide d'une méthode matricielle et d'une méthode de tir
EF – newtonien – isotherme
Re = 0 – E = 5

N = 201 / (+): TRK4, CAS II, $\tilde{h}$ $\tilde{u}$; (o): MAT2, CAS I, $\tilde{u}$

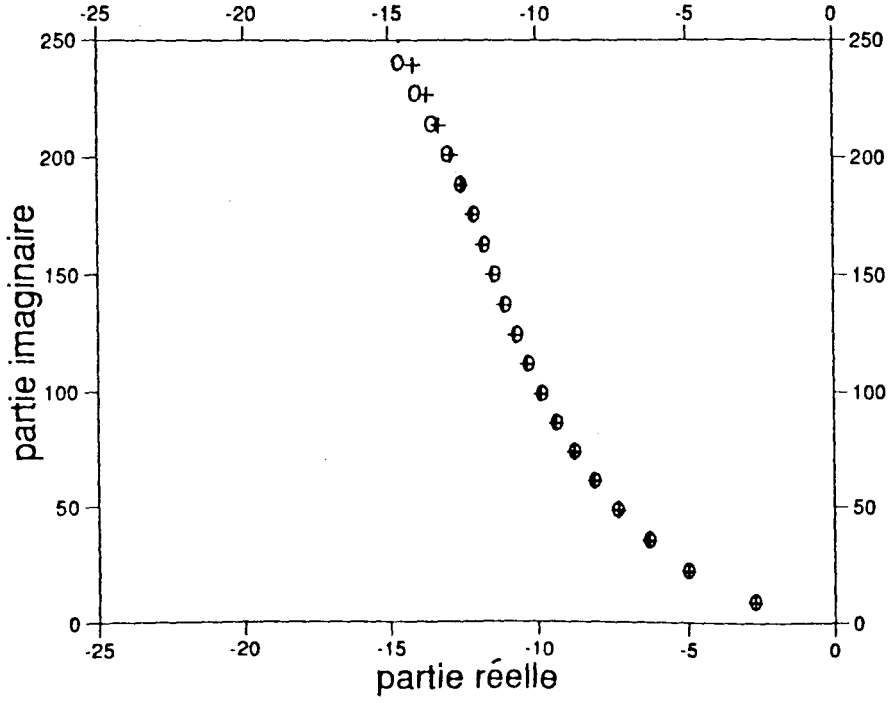


figure 4.3.7. Valeurs propres obtenues à l'aide de différentes méthodes matricielles
EF – newtonien – isotherme
Re = 0 – E = 5

CAS II, $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ / N = 51 / (+): MAT1, (o): MAT2, (*): MAT4

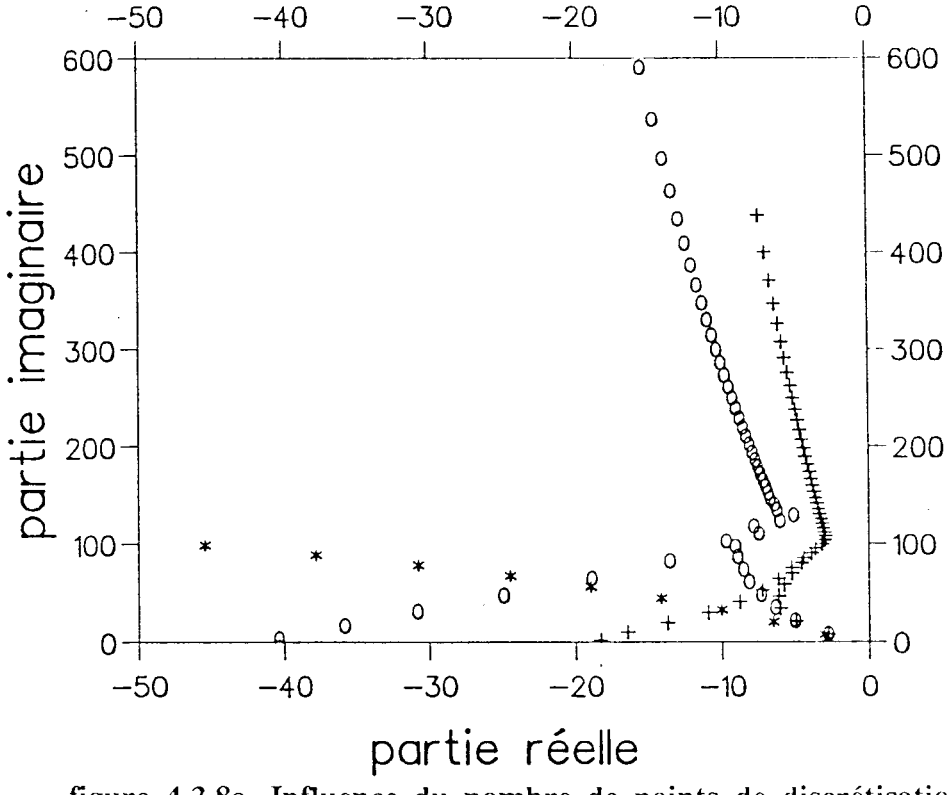


figure 4.3.8a. Influence du nombre de points de discrétisation
EF – newtonien – isotherme

CAS II, $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ / Re = 0 – E = 5
MAT1 / (o): N = 51, (+): N = 101, (*): N = 201

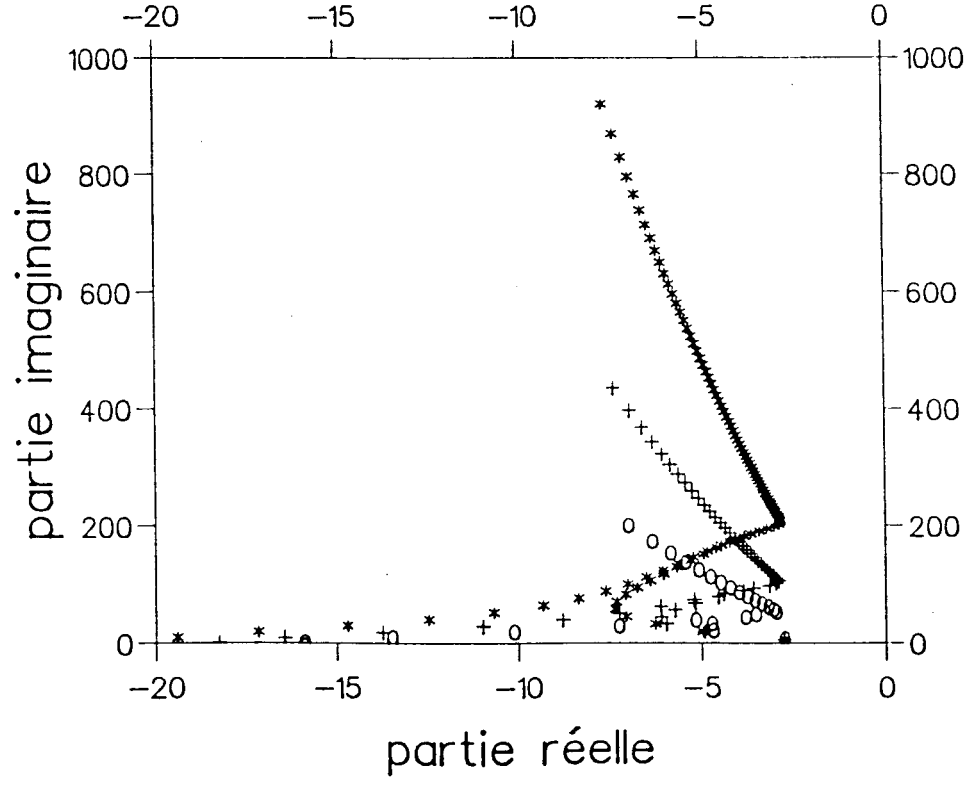


figure 4.3.8b. Influence du nombre de points de discrétisation
EF – newtonien – isotherme

CAS II, $\tilde{h}\ \tilde{u}$ / Re = 0 – E = 5
MAT4 / (o): N = 51, (+): N = 101, (*): N = 201

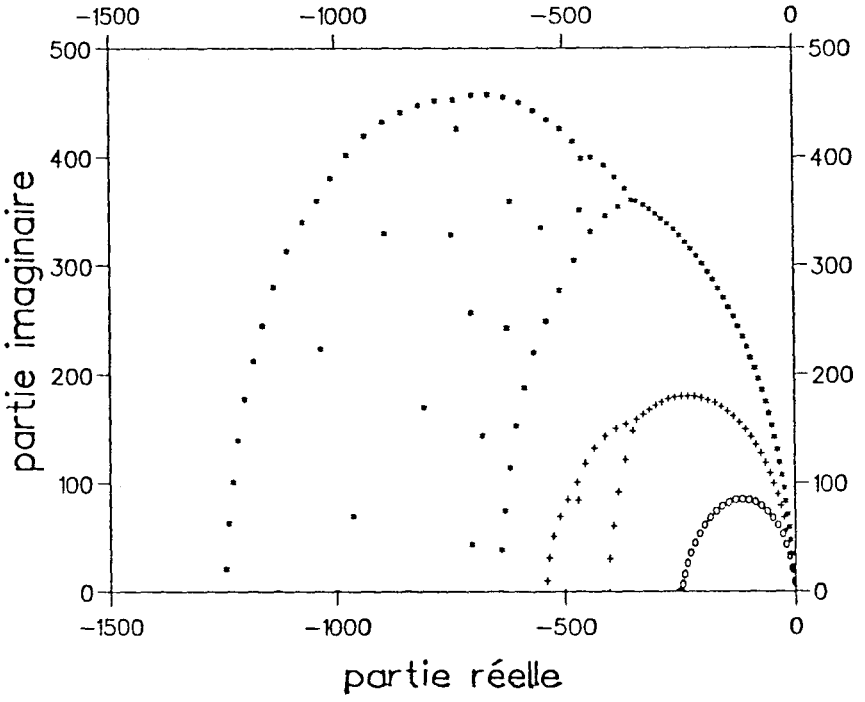


figure 4.3.9a. Influence du domaine discrétisé
EF – newtonien – isotherme

CAS II, $\tilde{h}\ \tilde{u}$ / Re = 0 – E = 5
MAT4 / (o, +, *, x): différents maillages "aléatoires"

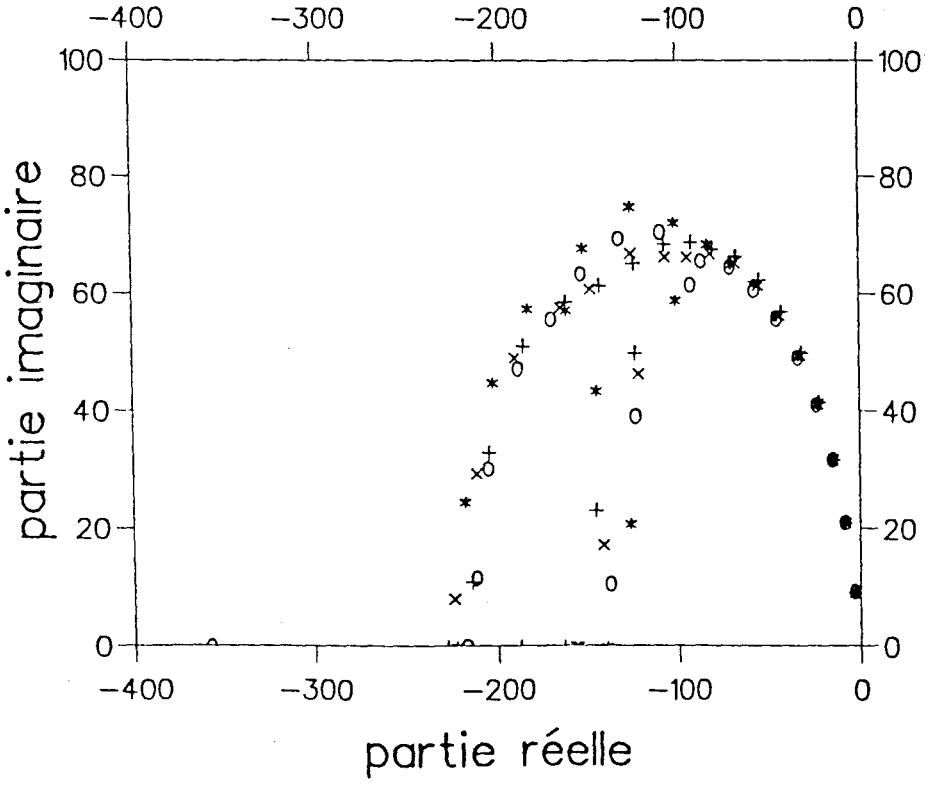


figure 4.3.9b. Influence du domaine discrétisé
EF – newtonien – isotherme
CAS II, $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ / Re = 0 – E = 5
MAT2 / (o, +, *, x): différents maillages "aléatoires"

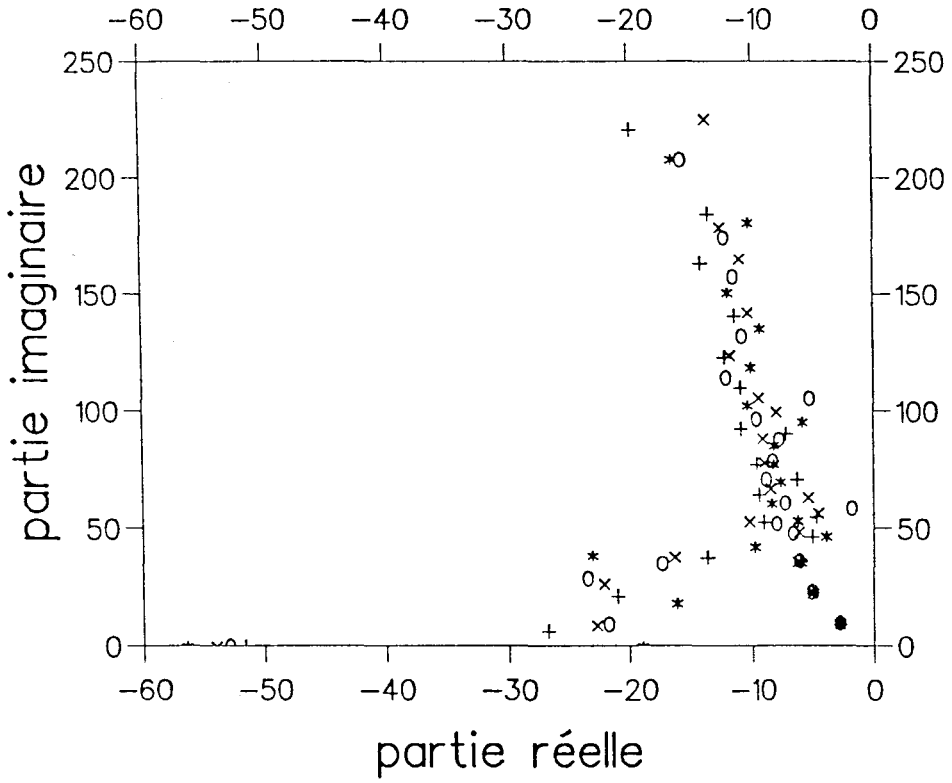


figure 4.3.10. Influence du paramètrage
EF – newtonien – isotherme
Re = 0 – E = 5
N = 201 / MAT2 / (o): $\tilde{u}$, (+): $\tilde{h}$ $\tilde{u}$

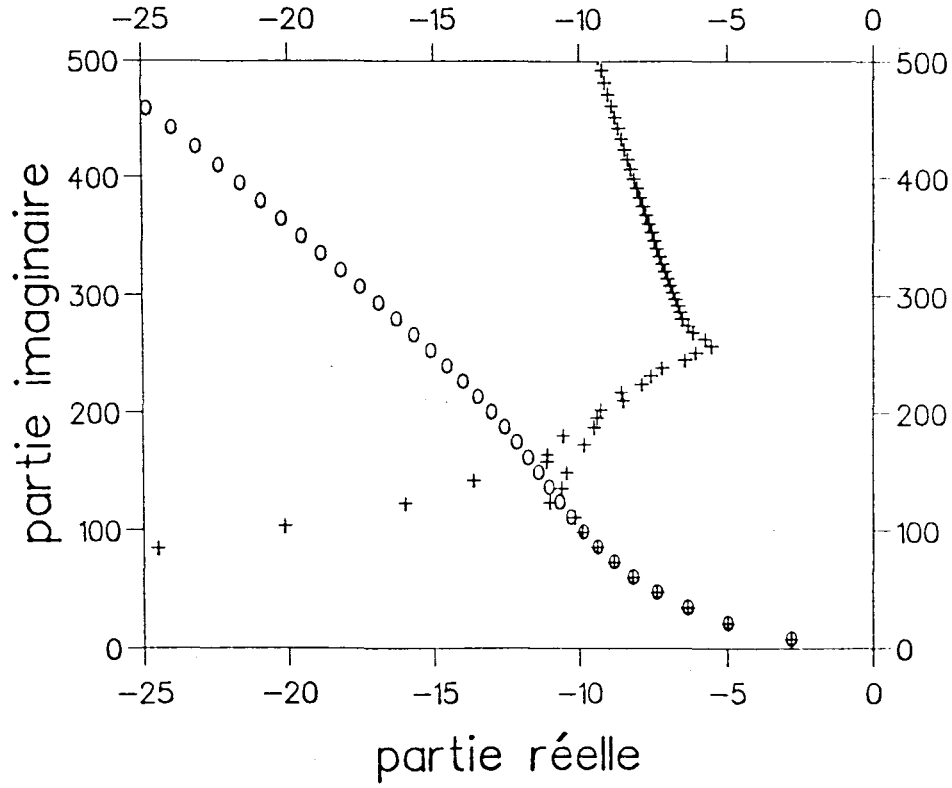


figure 4.3.11. Influence du paramètrage
EF – newtonien – isotherme
Re = 0 – E = 5
N = 51 / MAT2 / (+): CAS II, $\tilde{h}$ $\tilde{u}$, (o): CAS III, $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ $\tilde{s}$

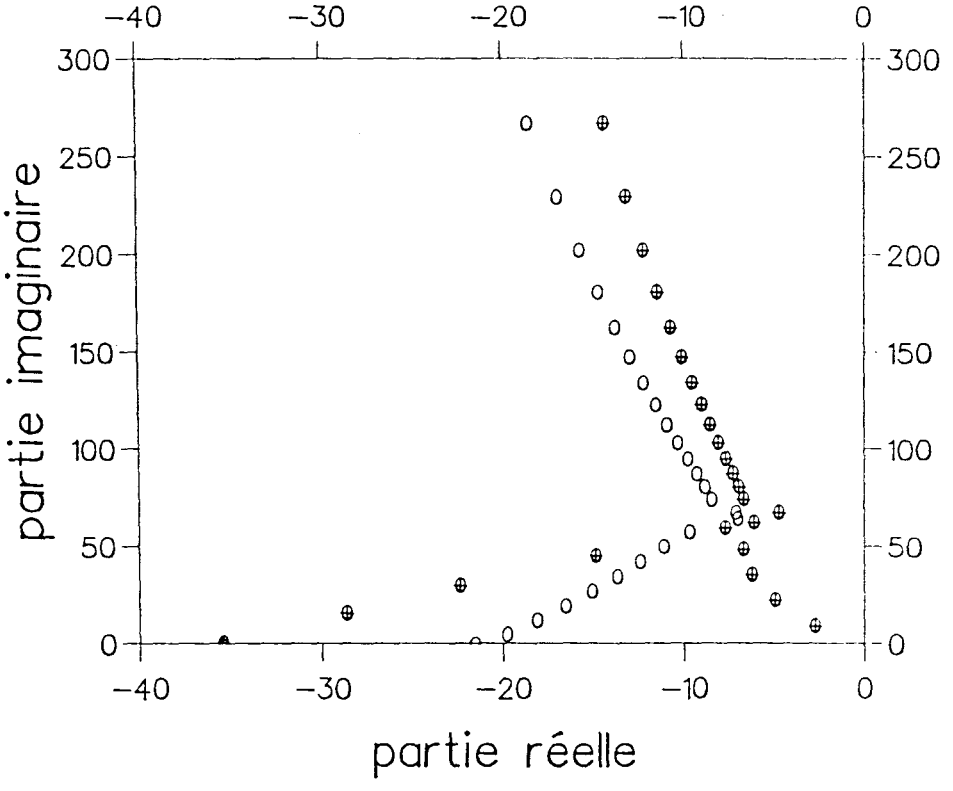


figure 4.3.12a. Evolution des valeurs propres avec la température finale
EF – newtonien – non-isotherme
Re = 0 – E = 20 – β = 25 – s_{air} = 30/200
N = 51 / MAT2 / CAS III, $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ $\tilde{s}$ / T = 1. à 0.5

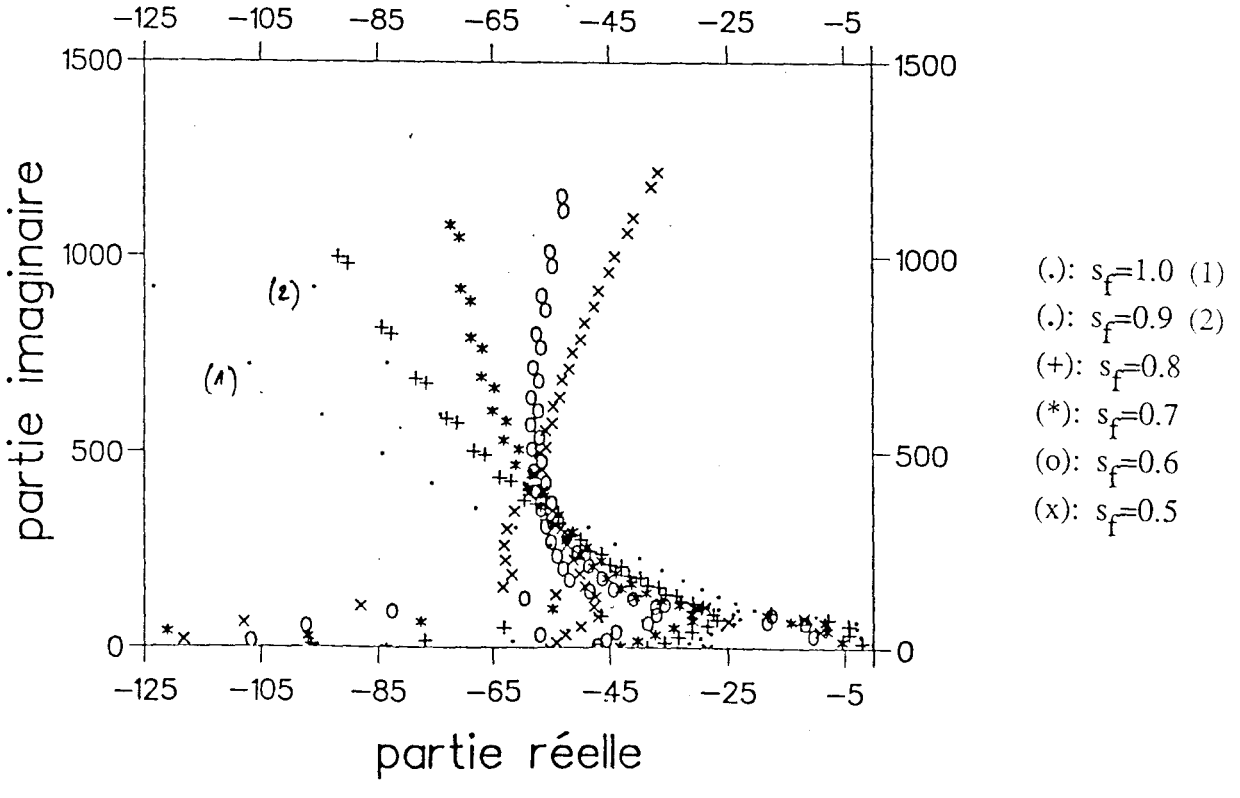


figure 4.3.12b. Valeurs propres
EF – newtonien – non-isotherme
Re = 0 – E = 20 – β = 25 – s_{air} = 30/200

N = 51 / MAT2 / CAS III, $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ $\tilde{s}$ / T = 0.25

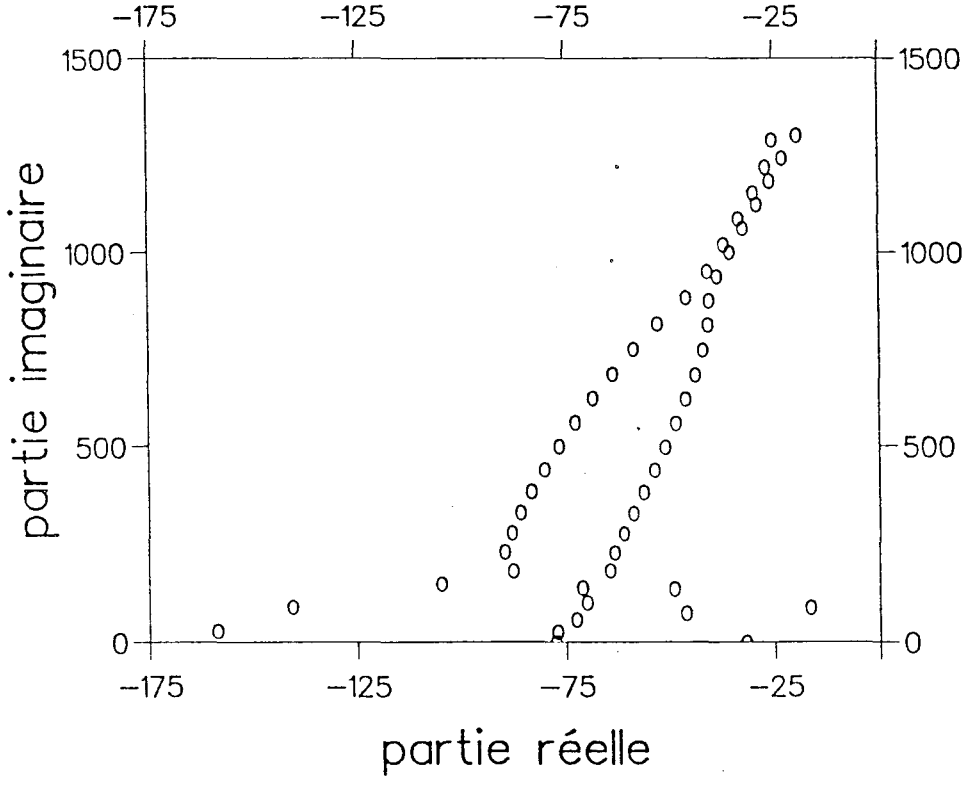


figure 4.3.13. Evolution de la première valeur propre avec la température finale
EF – newtonien – non-isotherme
Re = 0 – E = 50 – β = 100 – s_{air} = 30/200

N = 51 / TRK4 / $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ $\tilde{s}$ / (1): N = 51, (2): N = 101, (3): N = 501

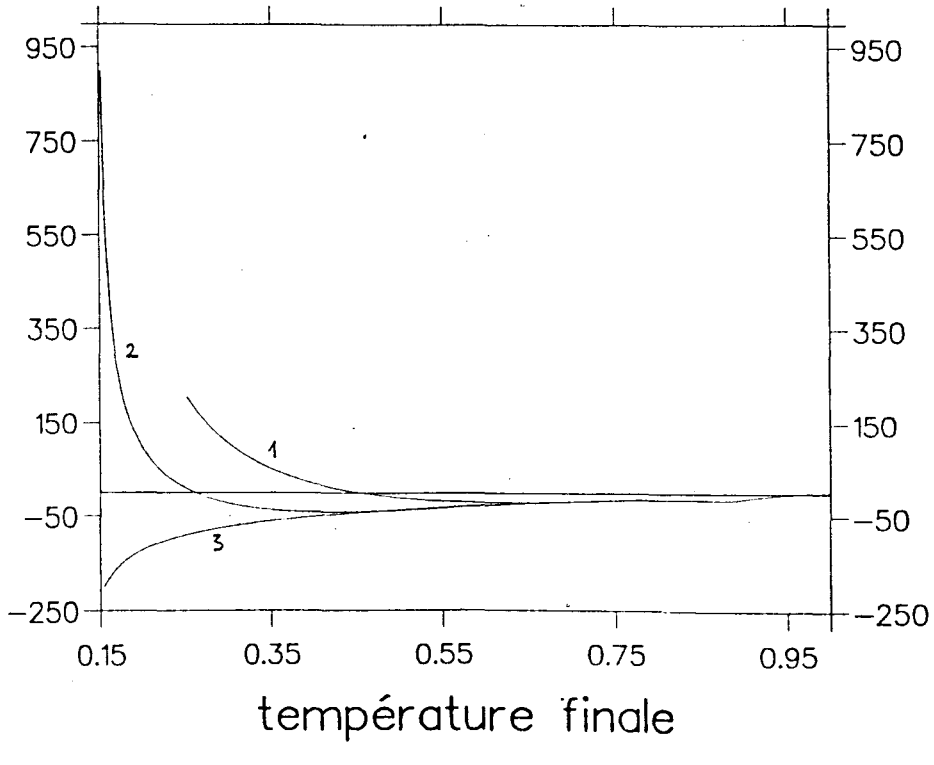


figure 4.3.14a. Valeurs propres
EF – modèle de PTT – isotherme
Re = 0 – E = 5 – De = 0.01
N = 51 / MAT2 / CAS V, $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ $\tilde{N}_1$ $\tilde{N}_2$

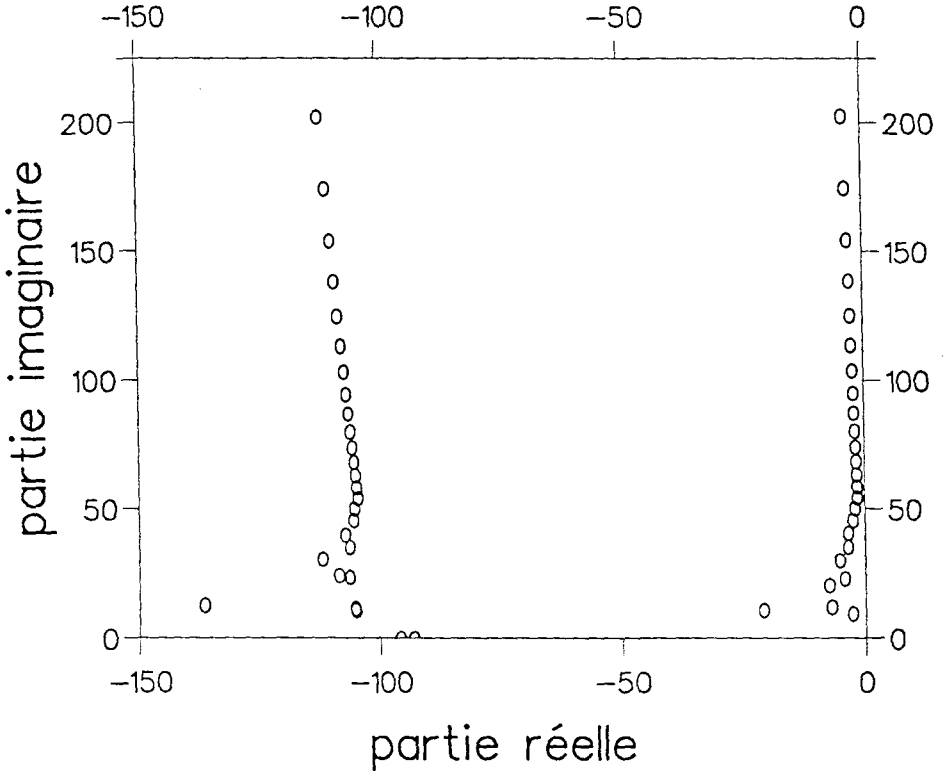


figure 4.3.14b. Valeurs propres
EF – modèle de PTT – isotherme
Re = 0 – E = 5 – De = 0.01
N = 51 / MAT4 / CAS V, $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ $\tilde{N}_1$ $\tilde{N}_2$

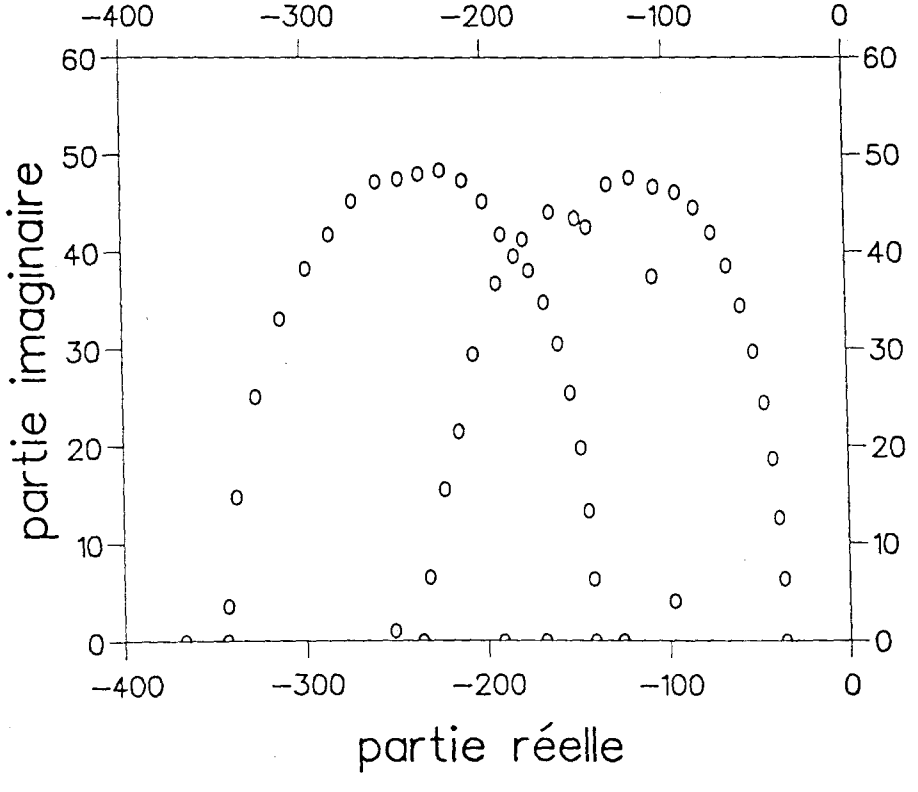


figure 4.3.15. Valeurs propres
EF – modèle de PTT
Re = 0 – E = 5 – De = 0.01
N = 51 / MAT2 / (o): CAS V, $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ $\tilde{N}_1$ $\tilde{N}_2$, (+): CAS VI, $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ $\tilde{s}$ $\tilde{N}_1$ $\tilde{N}_2$

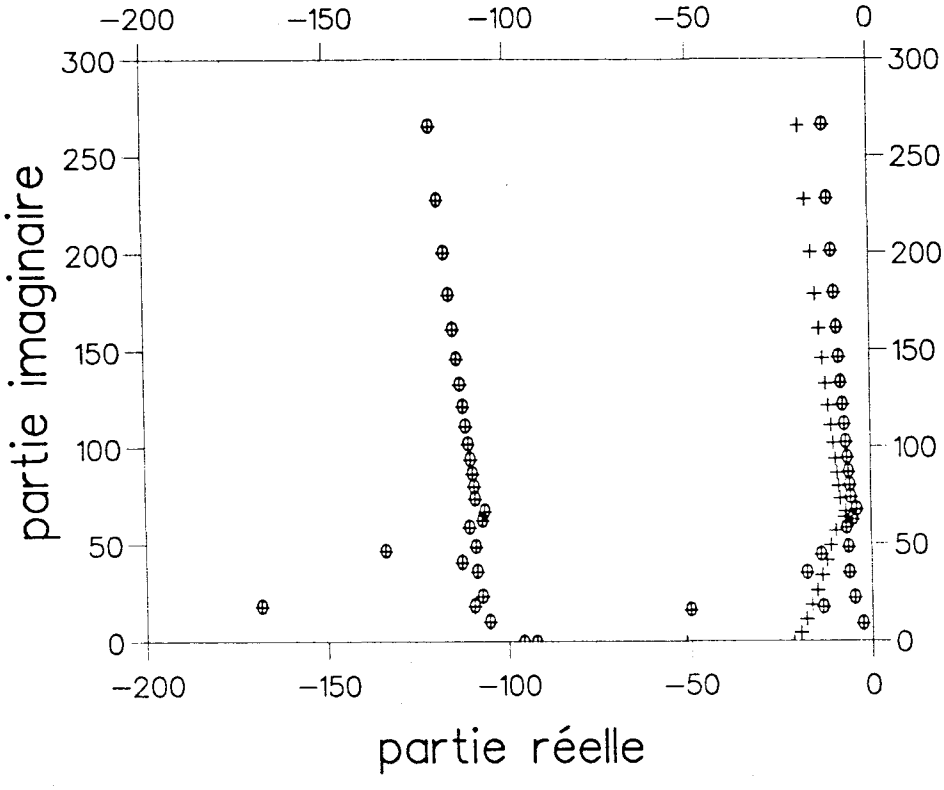


figure 4.3.16. Evolution de la première valeur propre en fonction du nombre de Deborah
EF – modèle de PTT – isotherme
Re = 0 – E = 20
N = 51 / TRK4

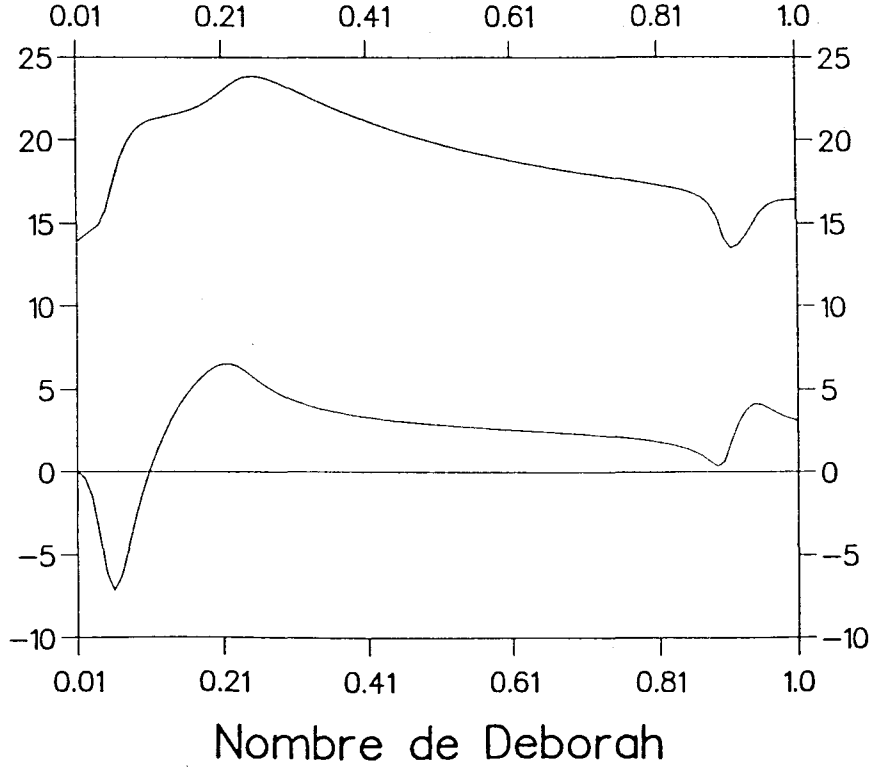


figure 4.3.17. Evolution de la première valeur propre en fonction du taux d'étirage
EF – modèle de PTT – isotherme
Re = 0 - $\varepsilon = 0.015$ - $\xi = 0.1$
N = 51 / TRK4
(1): De=0.05, (2): De=0.1, (3): De=0.2

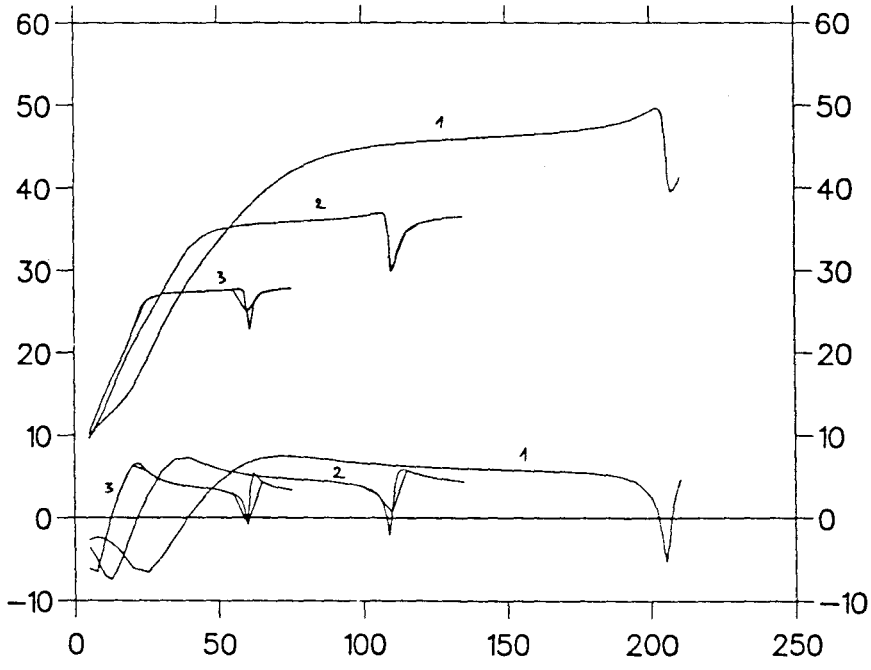


figure 4.3.18. Evolution de la première valeur propre en fonction du taux d'étirage
EF – modèle de Maxwell – isotherme
Re = 0
N = 51 / TRK4

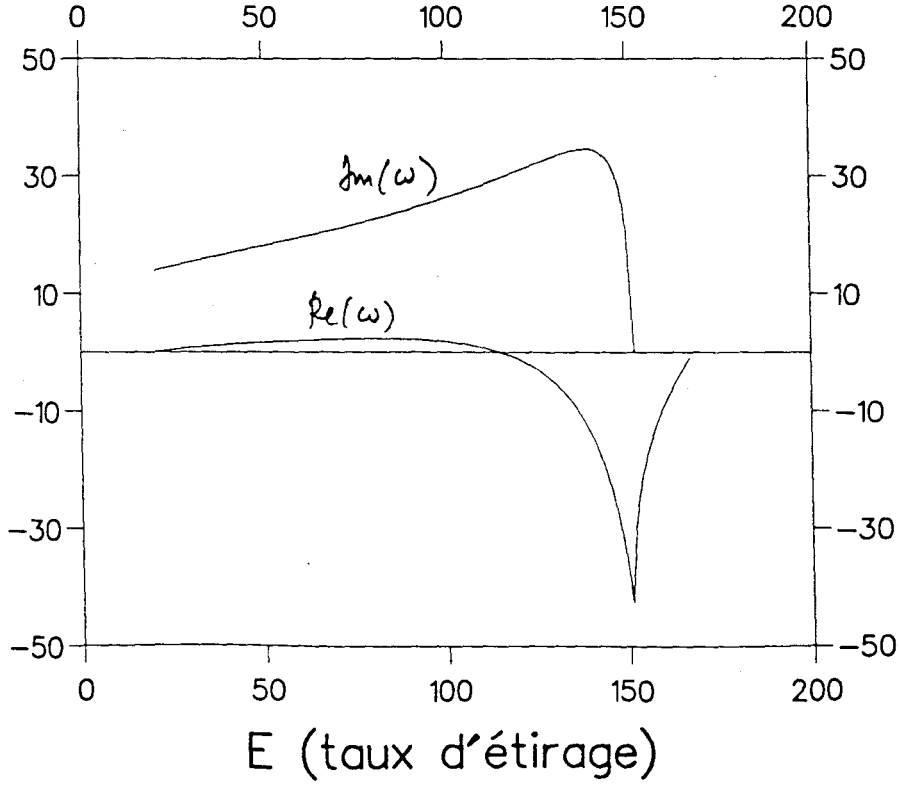
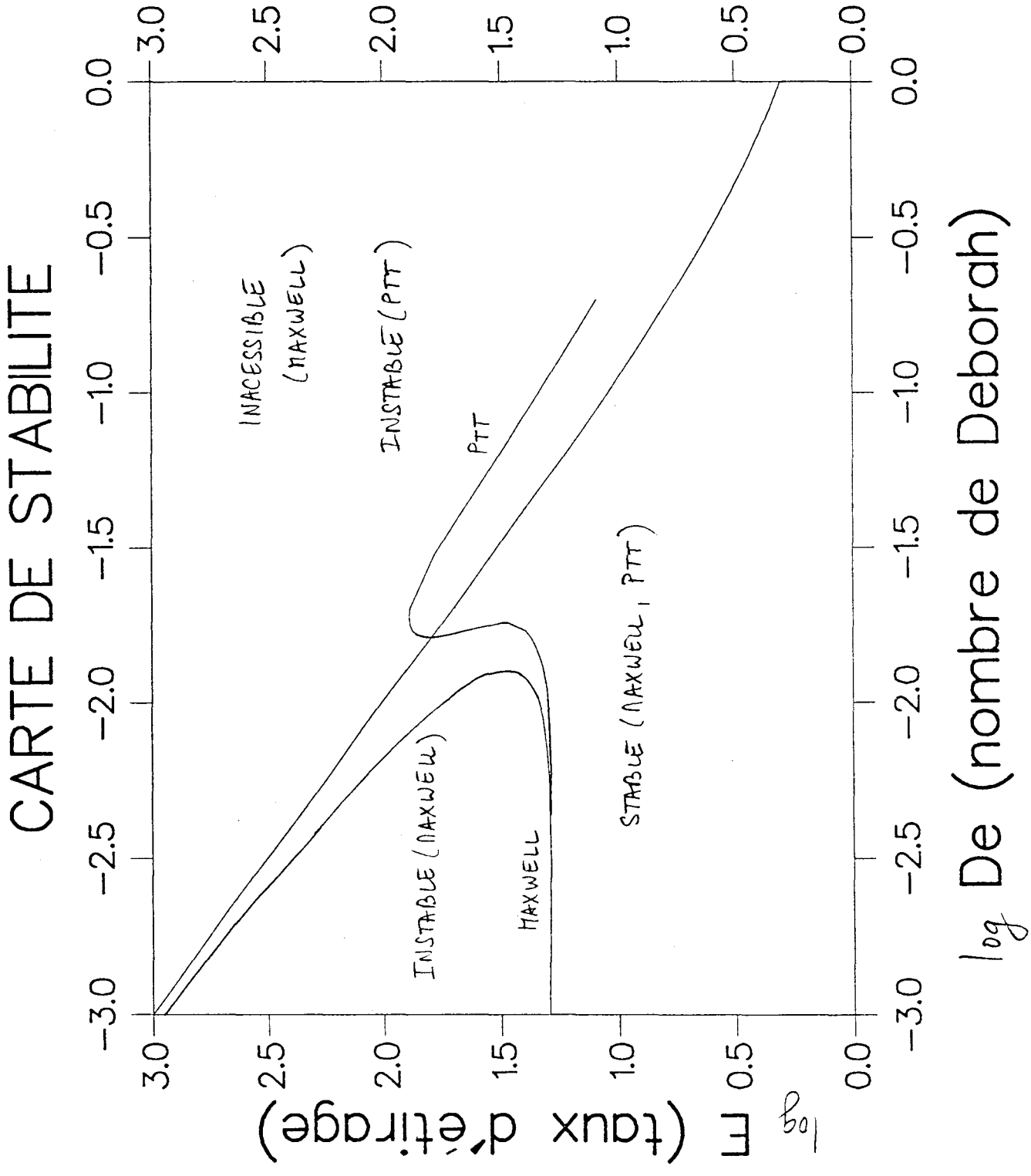


figure 4.3.19. Carte de stabilité
EF – modèle de PTT – isotherme
Re = 0



CHAPITRE 5

ETIRAGE D'UN FILM AVEC SURPRESSION

5. ETIRAGE D'UN FILM AVEC SURPRESSION

5.1 GENERALITES

Une nouvelle variable apparait: la distance, notée a, d'un point du film à une ligne de référence donnée (figure 5.1.1).

Précisons d'emblée qu'en plus de celles relatives au cas d'un film plan, deux conditions aux limites supplémentaires, portant sur cette distance a, sont requises. Nous considèrerons:

- en sortie de filière: spécifier la valeur de a,
- à la ligne de figeage: de nouveau, spécifier a ou, et il s'agit de notre choix définitif, considérer que le film est parallèle à l'axe d'étirage.

Ce choix découle d'une analogie au soufflage de gaine. Il faut toutefois reconnaitre que le problème ainsi posé est sans équivalent d'un point de vue physique.

Remarquons que la position de la ligne de référence est, en fait, arbitraire. Nous la choisirons telle que:

$$a(0) = Z \qquad (5.1.1)$$

Z étant la hauteur de figeage.

Nous définirons un taux de gonflage G:

$$G = \frac{a(Z)}{a_0} \qquad (5.1.2)$$

Ainsi, en l'absence de surpression, le film étant plan, nous aurons G=1 et l'on se ramène au chapitre précédent.

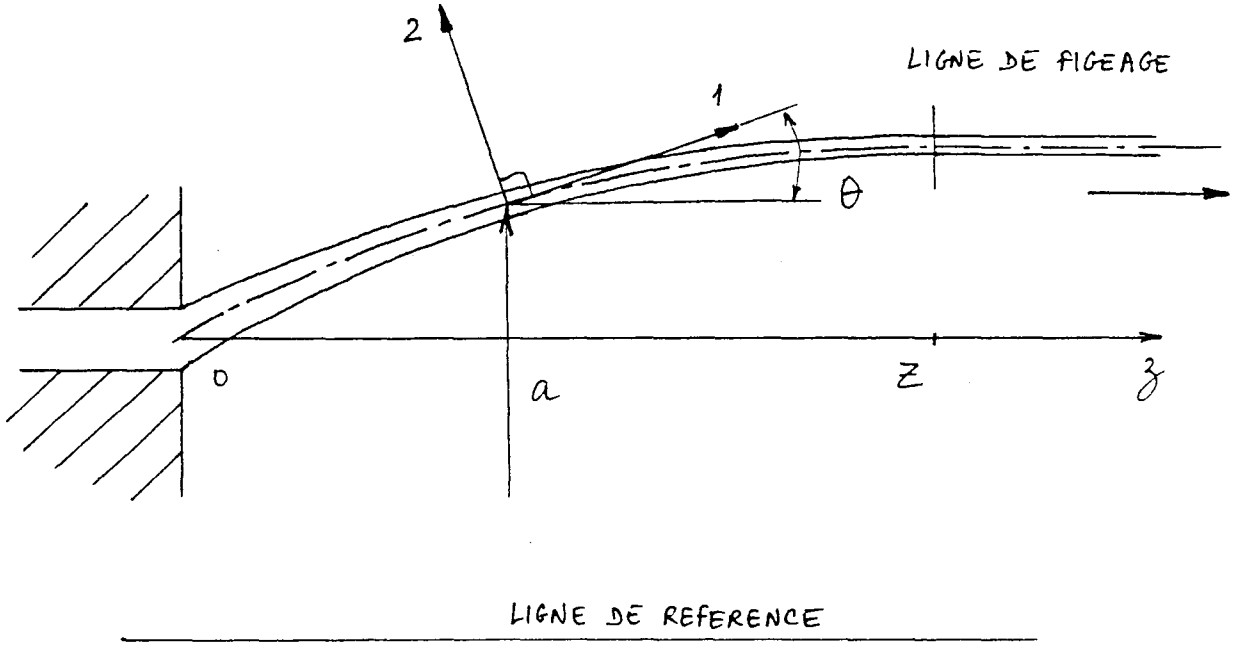
Le présent modèle possède plusieurs similarités avec le soufflage de gaine. Ainsi, on sera amené à consulter à diverses reprises le chapitre 6 correspondant.

5.2 MISE EN EQUATIONS

5.2.1 Equations générales

Nous donnons ci-après les équations du "film mince", les notations étant les mêmes que précédemment.

figure 5.1.1. schématisation de l'étirage d'un film avec surpression



– L'équation de continuité s'écrit,

sous forme générale, à l'aide des composantes du tenseur des vitesses de déformation:

$$d_{11} + d_{22} = 0 \qquad (5.2.1)$$

et sous forme stationnaire:

$$Q_E = H\ V \qquad (5.2.2)$$

– La conservation de la quantité de mouvement se traduit tout d'abord par deux équations d'équilibre des forces s'exerçant sur le film, considéré alors comme une membrane de faible épaisseur. Soit:

a) Equilibre axial:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\ \sigma_{11} H \cos\vartheta - a\ \Delta P\ \right] = 0 \qquad (5.2.3)$$

b) Equilibre normal:

$$\Delta P = \frac{\sigma_{11} H}{\rho_1} \qquad (5.2.4)$$

ρ_1 étant le rayon de courbure local du film donné par:

$$\rho_1 = - \sec^3\vartheta \Big/ \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \qquad (5.2.5)$$

c) nous avons également, en prenant la pression atmosphérique en référence:

$$\sigma_{22} = 0 \qquad (5.2.6)$$

– En stationnaire, les composantes du tenseur des taux de déformation sont:

$$d_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial \xi_1} \simeq \cos\vartheta \frac{\partial V}{\partial z}, \qquad d_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial \xi_2} \simeq \frac{1}{H}\frac{dH}{dt} \qquad (5.2.7a,b)$$

ou encore pour d_{22}, compte-tenu de l'équation de continuité (5.2.1):

$$d_{22} = - d_{11} = - \cos\vartheta \frac{\partial V}{\partial z} \qquad (5.2.8)$$

– L'équation de conservation de l'énergie s'écrit:

$$\rho C_p H \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V\cos\vartheta \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - h_c \left(T - T_{air} \right) \qquad (5.2.9)$$

– Relations constitutives:

dans le cas d'un fluide newtonien, nous avons:

$$\tau_{11} = 2\eta\, d_{11}, \qquad \tau_{22} = 2\eta\, d_{22} \qquad (5.2.10a,b)$$

et pour le modèle de PTT:

$$K\,\tau_{ii} + \lambda\left[\frac{\partial\tau_{ii}}{\partial t} + V\cos\vartheta\,\frac{\partial\tau_{ii}}{\partial z} - 2\left(1-\xi\right)\tau_{ii}\,d_{ii}\right] = 2\eta\,d_{ii} \tag{5.2.11}$$

pour i = 1, 2.

Les répétitions d'indices ne doivent pas être interprétées comme des sommations.

η et λ sont, de nouveau, donnés par les relations 4.1.16 et 4.1.19.

5.2.2 Conditions aux limites

Récapitulons les conditions aux limites:

En sortie de filière (z = 0):

– $a = a_0$, $H = H_0$, $V = V_0$, $T = T_0$ (5.2.12a,b,c,d)

– De plus, pour le modèle de PTT:

$$\tau_{22} / \tau_{11} = 0 \,, \tag{5.2.13}$$

A la ligne de figeage (z=Z):

– Choix de l'une des deux conditions suivantes:

Taux d'étirage imposé: $V = V_f$ (5.2.14a)

ou

Force d'étirage imposée: $\sigma_{11}H = F_Z$ (5.2.14b)

– Comme convenu, le film est parallèle à l'axe d'étirage:

$$\frac{\partial a}{\partial z} = 0 \tag{5.2.15}$$

De nouveau, l'équation d'équilibre axial 5.2.3 est avantageusement intégrée d'une abscisse quelconque z à z = Z, à l'aide des conditions 5.2.14b et 5.2.15. Sa nouvelle forme est alors:

$$\sigma_{11} H \cos\vartheta - \Delta P\ a = F_z - \Delta P\ a_f \qquad (5.2.16)$$

5.2.3 Formulation adimensionnelle

Nous avons reporté les variables et paramètres correspondants en Annexe C1. On consultera également l'Annexe B2. Les équations sont reportées en Annexe C2.

Les paramètres qui interviennent sont:

- le coefficient de transfert D,
- la température de l'air de refroidissement s_{air},
- la force d'étirage T_z,
- la différence de pression B,
- le taux de gonflage G,
- le coefficient β (viscosité),

et pour le modèle de PTT uniquement:

- le nombre de Deborah De,
- le coefficient ζ (temps de relaxation),
- les paramètres ajustables ε et ξ du modèle rhéologique.

5.3 SOLUTION STATIONNAIRE

5.3.1 Equations et conditions aux limites

Nous obtenons un système d'ordre 5 dans le cas du fluide newtonien et d'ordre 6 dans le cas du modèle de PTT.

Les conditions aux limites sont les précédentes, exprimées en termes de variables adimensionnelles.

5.3.2 Procédure de résolution

Les techniques sont celles utilisées pour l'étude du soufflage de gaine et sont exposées au chapitre correspondant (cf. §6.2.2).

5.3.3 Résultats

Nous nous sommes attaché à examiner l'influence du taux de gonflage (que nous avons choisi compris entre 1 et 1,5) en effectuant une comparaison entre le présent cas et celui d'un film plan étiré sur la même distance et subissant le même taux d'amincissement.

Les calculs ont donc été effectués en imposant:

- le taux de gonflage,
- le taux d'amincissement,
- la température finale.

Comme on pouvait s'y attendre, l'allure des profils obtenus est peu significativement différente de celle correspondant à un film plan.

Par ailleurs:

- la différence de pression nécessaire augmente logiquement avec le taux de gonflage.
- par contre, la force d'étirage T_z reste pratiquement inchangée (dans le cas d'un fluide newtonien, on constate une légère diminution).

Nous avons, en fait, compensation mutuelle de deux effets:

- la différence de pression tend à augmenter T_z car la résultante des forces de pression s'exerçant sur le film s'y oppose,
- courbure (constante) du film: son effet est d'accroitre le "trajet" de ce dernier dans la zone d'étirage. Tout se passe comme s'il s'agissait d'un film plan étiré sur une plus grande distance. D'où une tendance à diminuer T_z.

En fait, l'approximation dite "du film mince" est telle que l'on se ramène à l'étirage d'un film plan, avec une hauteur de figeage "équivalente".

5.3.4 Conclusion

La réponse en stationnaire diffère très peu de celle d'un film plan sans surpression et n'apporte donc aucune information supplémentaire.

L'intérêt de ce modèle résidera surtout au niveau de l'analyse de stabilité qui suit.

5.4 ANALYSE DE STABILITE

5.4.1 Mise en équations

5.4.1.1 Généralités

- Nous rechercherons des solutions sous la forme:

$$\Phi(x,\tau) = \overline{\Phi}(x)\left[\ 1 + \Phi^{*}(x,\tau)\ \right] \qquad (5.4.1)$$

pour les variables r, h, u, s et:

$$\Phi(x,\tau) = \overline{\Phi}(x) + \Phi^{*}(x,\tau) \qquad (5.4.2)$$

pour les autres variables (contraintes, vitesses de déformation, ...)

avec

$$\Phi^{*}(x,\tau) = \tilde{\Phi}(x)\ e^{\omega\tau} \qquad (5.4.3)$$

- Nous avons donné lors du § 5.2.1 les équations générales de l'étirage, valables lorsque la position du film est indépendante du temps. Ce n'est plus le cas à présent et il nous faut établir, comme précédemment, les nouvelles composantes du tenseur des vitesses de déformation.

Ces dernières seront, de nouveau, déterminées à l'aide d'une méthode identique à celle de YEOW (B1976).

Une des conséquences de l'approximation du "film mince" est, on le sait, de considérer le film comme étant localement plan, si bien que les résultats obtenus sont identiques à ceux reportés en Annexe A4, établis dans le cas du soufflage de gaine.

Finalement, l'inertie étant négligée, les termes instationnaires proviennent uniquement:

- des nouvelles composantes ci-dessus,
- de l'équation de l'énergie.

5.4.1.2 Equations linéarisées

Nous obtenons les équations linéarisées ci-dessous:

– Equation de continuité:

$$\tilde{e}_{11} + \tilde{e}_{22} = 0 \qquad (5.4.4)$$

– Equation d'équilibre axial:

$$\frac{d}{dx}\left\{ \left(\bar{S}\,\tilde{h} + \tilde{S} \right) \bar{h} \cos\bar{\vartheta} - \bar{S}\,\bar{h} \sin\bar{\vartheta} \cos^2\bar{\vartheta} \frac{d}{dx}\left(\bar{r}\tilde{r} \right) - \bar{r}\left(\bar{B}\tilde{r} + \tilde{B} \right) \right\} = 0 \qquad (5.4.5a)$$

ou, sous forme intégrée:

$$\left\{ \left(\bar{S}\,\tilde{h} + \tilde{S} \right) \bar{h} \cos\bar{\vartheta} - \bar{S}\,\bar{h} \sin\bar{\vartheta} \cos^2\bar{\vartheta} \frac{d}{dx}\left(\bar{r}\tilde{r} \right) - \bar{r}\left(\bar{B}\tilde{r} + \tilde{B} \right) \right\}_{x}^{x_0} = 0 \qquad (5.4.5b)$$

– Equation d'équilibre normal:

$$\left[\bar{S}\,\bar{h}\,\tilde{h} + \bar{h}\,\tilde{S} \right] / \bar{R}_1 - \left[\bar{S}\,\bar{h} \right] \tilde{R}_1^{\,2} / \bar{R}_1 - \tilde{B} = 0 \qquad (5.4.6)$$

avec:

$$\tilde{R}_1 = \bar{R}_1 \left[3 \sin\bar{\vartheta} \cos\bar{\vartheta} \frac{d}{dx}\left(\bar{r}\tilde{r} \right) - \frac{d^2}{dx^2}\left(\bar{r}\tilde{r} \right) / \frac{d^2\bar{r}}{dx^2} \right] \qquad (5.4.7)$$

– Equation de conservation de l'énergie:

$$\omega\,\bar{s}\,\tilde{s} + \bar{u} \cos\bar{\vartheta} \left[\frac{d}{dx}\left(\bar{s}\tilde{s} \right) - \sin\bar{\vartheta} \cos\bar{\vartheta} \frac{d}{dx}\left(\bar{r}\tilde{r} \right) \frac{d\bar{s}}{dx} + \tilde{u} \frac{d\bar{s}}{dx} \right]$$

$$= - \frac{D}{\bar{h}} \left[\bar{s}\tilde{s} - \bar{h}\left(\bar{s} - s_{air} \right) \right] \qquad (5.4.8)$$

– Relations constitutives pour un fluide newtonien:

$$\tilde{N}_i = 2 \left[\bar{\mu}\, \tilde{e}_{ii} + \bar{s}\, \tilde{s}\, \mu'(\bar{s})\, \bar{e}_{ii} \right] \tag{5.4.9a,b}$$

ou

$$\tilde{S} = \tilde{N}_1 - \tilde{N}_2 = 2 \left[\bar{\mu} \left(\tilde{e}_{11} - \tilde{e}_{22} \right) + \bar{s}\, \tilde{s}\, \mu'(\bar{s}) \left(\bar{e}_{11} - \bar{e}_{22} \right) \right] \tag{5.4.9c}$$

– Relations constitutives pour le modèle de PTT:

$$\tilde{Z}_i + De \left\{ \chi(\bar{s}) \left[\omega\, \tilde{N}_i + \bar{u} \cos\bar{\vartheta} \left[\frac{d\tilde{N}_i}{dx} - \sin\bar{\vartheta} \cos\bar{\vartheta} \frac{d}{dx} \left(\bar{r}\tilde{r} \right) \frac{d\bar{N}_i}{dx} \right. \right. \right.$$

$$\left. + \tilde{u} \frac{d\bar{N}_i}{dx} \right] - 2 \left(1 - \xi \right) \left[\bar{N}_i\, \tilde{e}_{ii} + \tilde{N}_i\, \bar{e}_{ii} \right] \Bigg] + \bar{s}\, \tilde{s}\, \chi'(\bar{s}) \Bigg[$$

$$\left. \bar{u} \cos\bar{\vartheta} \frac{d\bar{N}_i}{dx} - 2 \left(1 - \xi \right) \bar{N}_i\, \bar{e}_{ii} \right] \Bigg\} = 2 \left\{ \bar{\mu}(s)\, \tilde{e}_{ii} + \bar{s}\, \tilde{s}\, \mu'(\bar{s})\, \bar{e}_{ii} \right\} \tag{5.4.10a,b}$$

avec:

$$\tilde{Z}_i = \bar{K} \left[\tilde{N}_i + \frac{\varepsilon De}{\bar{\Lambda}} \left(\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 \right) \bar{N}_i - \varepsilon De \left(\bar{N}_1 + \bar{N}_2 \right) \bar{s}\, \tilde{s}\, \frac{\Lambda'(\bar{s})}{\bar{\Lambda}^2} \bar{N}_i \right] \tag{5.4.11}$$

pour i=1,2

– Les composantes $\tilde{e}_{11}$ et $\tilde{e}_{22}$ sont données par:

$$\tilde{e}_{11} = \left[\cos\bar{\vartheta} \frac{d}{dx}(\bar{u}\tilde{u}) - \frac{d\bar{u}}{dx} \sin\bar{\vartheta} \cos^2\bar{\vartheta} \frac{d}{dx}(\bar{r}\tilde{r}) + \omega \sin\bar{\vartheta} \cos\vartheta \frac{d}{dx}(\bar{r}\tilde{r}) \right] \tag{5.4.12a}$$

$$\tilde{e}_{22} = \left[\frac{\bar{u}}{\bar{h}} \frac{d}{dx}(\bar{h}\tilde{h}) \cos\bar{\vartheta} + \frac{\bar{u}}{\bar{h}} \frac{d\bar{h}}{dx} \cos\bar{\vartheta} \left(\tilde{u} - \tilde{h} - \sin\bar{\vartheta} \cos\bar{\vartheta} \frac{d}{dx}(\bar{r}\tilde{r}) \right) + \omega\tilde{h} \right] \tag{5.4.12b}$$

Nous obtenons des systèmes d'ordre:

– 6 pour un fluide newtonien : $\tilde{r}''$, $\tilde{h}'$ $\tilde{u}'$, $\tilde{s}'$, $\tilde{S}'$,

– 7 pour le modèle de PTT: : $\tilde{r}''$, $\tilde{h}'$, $\tilde{u}'$, $\tilde{s}'$, $\tilde{N}_1'$, $\tilde{N}_2'$.

Une "inconnue" supplémentaire apparait: la perturbation $\tilde{B}$ subie par la différence de pression B (relations 5.4.5a, 5.4.5b et 5.4.6). Il faudra donc apporter une équation supplémentaire.

5.4.1.3 Conditions aux limites

Voici les conditions aux limites:

– Absence de perturbation en sortie de filière (x=0):

$$\tilde{r}(0) = \tilde{h}(0) = \tilde{u}(0) = \tilde{s}(0) = 0 \ , \qquad (5.4.13a,b,c,d)$$

et, de plus, pour le modèle de PTT:

$$\tilde{N}_2(0) = 0 \qquad (5.4.14)$$

– A la ligne de figeage, le film n'est plus nécessairement parallèle à l'axe d'étirage. La relation 5.2.15 n'est donc plus valable. De nouveau, par analogie au soufflage de gaine, nous avons considéré:

$$\frac{dr}{d\tau} = 0 \qquad \text{en } x = 1 \ , \qquad (5.4.15)$$

Soit, après linéarisation:

$$\frac{d\tilde{r}}{dx} + \omega \ \tilde{r} \ / \ \bar{u} = 0 \qquad \text{en } x = 1 \ , \qquad (5.4.16)$$

– Taux d'étirage imposé ou force d'étirage imposée (cf. Annexes A6):

(5.4.17)

– Différence de pression imposée: $\tilde{B} = 0$ (5.4.18)

ou

Quantité d'air emprisonnée maintenue constante (Annexe A7): soit, en ne prenant en compte que la partie solidifiée:

$$\left(B + P \right) \tilde{r} + \tilde{B} = 0 \, , \qquad \text{en } x = 1 \tag{5.4.19}$$

où P est la pression ambiante adimensionnelle.

5.4.2 Procédures de résolution

Pour calculer les valeurs propres, nous avons utilisé la méthodologie définie au chapitre 4.

La méthode MAT2 a été adoptée pour la technique matricielle. Les détails concernant la méthode de tir sont fournies dans les Annexes D7, D8 et D9.

Remarquons que, comme dans le cas de l'étirage d'un film plan, aucune solution non-triviale n'existe lorsque l'on impose la force d'étirage au lieu du taux d'étirage.

5.4.3 Résultats

- Nous nous attacherons principalement à mettre en évidence les effets:
  - du taux de gonflage G,
  - des paramètres maintenus constants, en l'occurrence:
    - la différence de pression ou
    - la quantité d'air emprisonnée.

  sur la stabilité.

- Considérons tout d'abord un fluide newtonien, étiré dans des conditions isothermes.

Le tableau 5.4.1 montre l'évolution de la première valeur propre en fonction du taux de gonflage et en imposant la différence de pression B ou la quantité d'air emprisonnée A, le second paramètre imposé étant le taux d'étirage E.

– Lorsque l'on impose la différence de pression B, le taux de gonflage G est déstabilisant.

Il existe, bien évidemment, une continuité par rapport à l'étirage d'un film plan dans le sens où si le taux de gonflage tend vers 1, les résultats relatifs à la première valeur propre tendent vers ceux de l'étirage d'un film plan.

G	(E , B)	(E , A)
1 . 00	(-0.02 , 14.0)	(-0.02 , 14.0)
1 . 25	(+0.71 , 13.1)	(-0.02 , 13.4)
1 . 50	(+3.12 , 9.54)	(-0.02 , 12.1)

tableau 5.4.1. Effet du taux de gonflage sur la stabilité
EFDP – Fluide newtonien – Isotherme
$E = 20 - P = 10^6$

– Lorsque l'on impose, au contraire, la quantité d'air emprisonnée A, la stabilité obtenue, pour un taux de gonflage donné, est supérieure à celle obtenue en imposant la différence de pression B.

La pression ambiante adimensionnelle P intervient alors.

Le tableau 5.4.2 montre son effet sur la première valeur propre. Dans un premier temps, P est fortement stabilisant. Par la suite, la première valeur propre n'est pratiquement plus affectée.

P	ω_1
10^2	(+0.14 , 13.4)
10^3	(-0.00 , 13.4)
10^4	(-0.02 , 13.4)
10^5	(-0.02 , 13.4)
10^6	(-0.02 , 13.4)

tableau 5.4.2. Effet de la pression ambiante
Fluide newtonien – Isotherme – (A , E) fixés
E = 20 – G = 1.25

Notons que, dans le cas présent, P est typiquement de l'ordre de 10^6.

Remarquons que l'augmentation de G demeure déstabilisant lorsque l'on impose A. Au-delà d'une valeur de P, toutefois, cet effet devient insignifiant (c'est le cas pour les résultats du tableau 5.4.1).

Quels que soient les paramètres imposés. Le taux d'étirage E a un effet déstabilisant. Il existe une valeur critique:

- d'autant plus faible que le taux de gonflage est important,
- plus importante dans le cas où l'on impose A par rapport au cas où l'on impose B.

■ Les résultats ci-dessus restent valables dans les cas plus généraux d'un fluide viscoélastique ou d'un écoulement non-isotherme.

Par ailleurs, comme dans le cas de l'étirage d'un film, l'élasticité, représentée par le nombre de Deborah De est stabilisante.

Le refroidissement a un effet fortement stabilisant, si bien qu'en pratique aucune instabilité n'apparait.

Il est alors peu important d'imposer la différence de pression ou la quantité d'air emprisonnée.

De même, la fluctuation de la position de la ligne de figeage ainsi que l'élasticité de la partie solidifiée constituent des facteurs de stabilité.

Enfin, remarquons qu'à tout moment le premier mode propre demeure oscillatoire (sa partie imaginaire ou fréquence est non-nulle).

5.5 CONCLUSION

L'étude du régime stationnaire ne donne pas lieu à une conclusion significativement différente de celle établie à l'issue de l'étirage d'un film plan.

En effet, du fait de l'approximation dite du "film mince", le système se ramène au système équivalent suivant: l'étirage d'un film plan dont la hauteur de figeage est sensiblement égale à l'abscisse curviligne axiale du point de solidification.

Le modèle nous a permis de mettre en évidence l'effet stabilisant associé au contrôle de la quantité d'air emprisonné, par rapport au contrôle de la différence de pression.

Les autres effets (rhéologie du fluide, variation de la température, ...) ne sont pas significativement différents de ceux mis en évidence lors de l'étirage d'un film plan.

Toutefois, l'effet prédominant est, de nouveau, celui, fortement stabilisant, du refroidissement.

Ainsi, aucune instabilité n'apparait dans les conditions réalistes de refroidissement, que l'on impose la différence de pression ou la quantité d'air emprisonnée.

CHAPITRE 6

LE SOUFFLAGE DE GAINE

6. LE SOUFFLAGE DE GAINE

6.1 MISE EN EQUATIONS

6.1.1 Equations générales

Les équations que nous présentons sont celles obtenues à l'aide de l'approximation dite du "film mince".

Soit le repère local en un point quelconque M appartenant à la bulle (figure 6.1.1).

– La conservation du débit s'écrit,

sous forme générale:

$$d_{11} + d_{22} + d_{33} = 0 \qquad (6.1.1a)$$

et sous forme stationnaire:

$$Q_E = 2\pi aHV = Cte \qquad (6.1.1b)$$

– Equations de conservation de la quantité de mouvement:

a) La première équation traduit l'équilibre axial d'un tronçon de bulle compris entre deux plans d'abscisses z et z + dz:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\, 2\pi aH\sigma_{11}\cos\vartheta - \pi\Delta Pa^2 \,\right] = 0 \qquad (6.1.2)$$

b) La deuxième représente l'équilibre des forces suivant la normale $\vec{e}_2$:

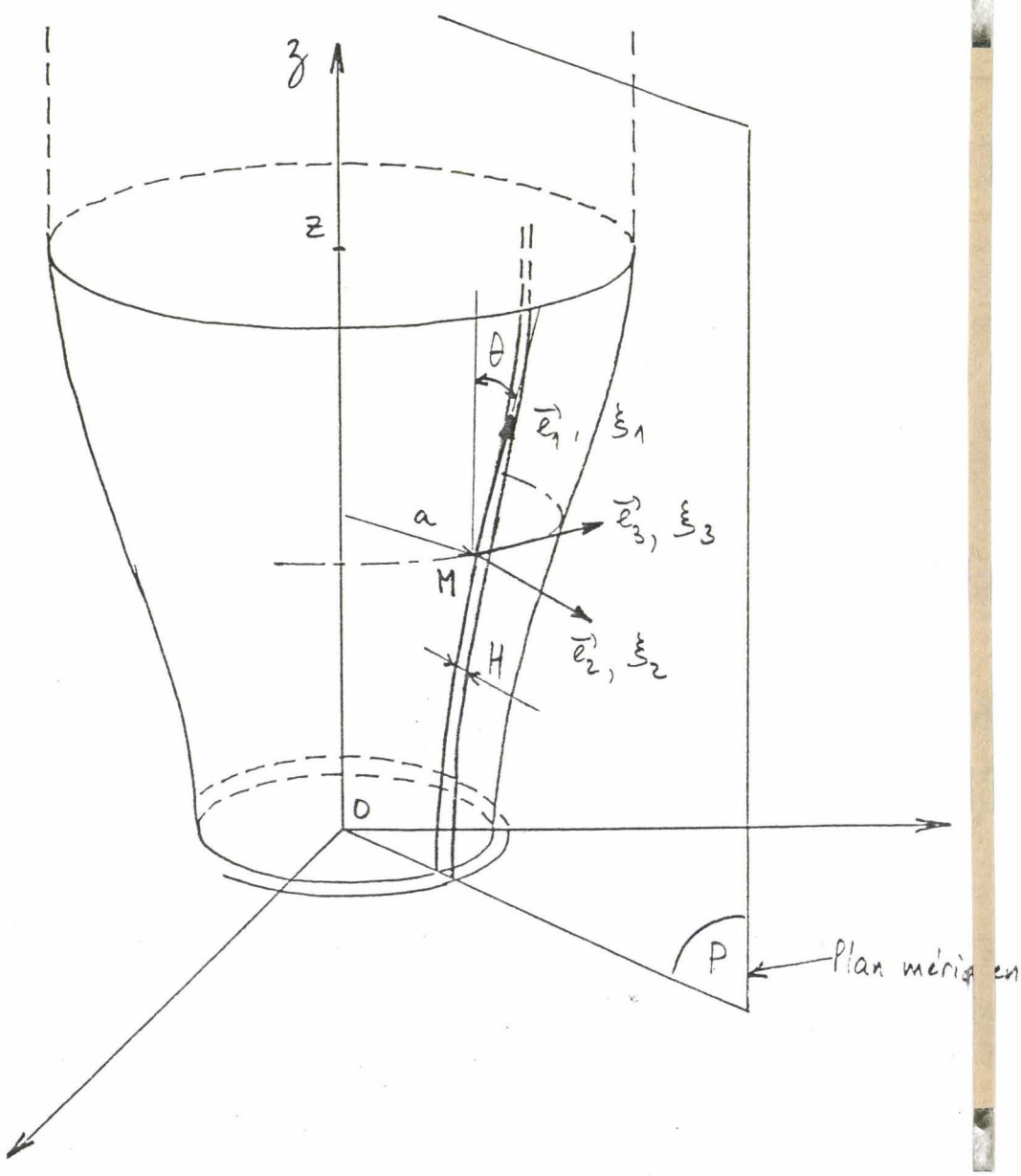
$$\frac{\Delta P}{H} = \frac{\sigma_{11}}{\rho_1} + \frac{\sigma_{33}}{\rho_3} \qquad (6.1.3)$$

ρ_1 et ρ_3 étant les rayons de courbure principaux définis par:

$$\rho_1 = -\sec^3\vartheta \Big/ \frac{d^2a}{dz^2}, \qquad \rho_3 = a\sec\vartheta \qquad (6.1.4a,b)$$

figure 6.1.1

GEOMETRIE DE LA BULLE - REPERAGE



Repère local ($\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$) au point M appartenant à la bulle:

1: direction de l'écoulement,
2: normale au film,
3: direction circonférentielle (ou la binormale).

c) La dernière s'écrit, en prenant la pression atmosphérique en référence:

$$\sigma_{22} = 0 \qquad (6.1.5)$$

– Equation de conservation de l'énergie:

$$\rho C_p H \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V\cos\vartheta \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - h_c \left(T - T_{air} \right) \qquad (6.1.6)$$

– Tenseur des vitesses de déformation en stationnaire:

$$d_{11} = \frac{\partial V_1}{\partial \xi_1}, \quad d_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial \xi_2}, \quad d_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial \xi_3} \qquad (6.1.7a,b,c)$$

d_{22} et d_{33} peuvent également s'écrire:

$$d_{22} = \frac{1}{H} \frac{dH}{dt} = \frac{V\cos\vartheta}{H} \frac{dH}{dz} \qquad (6.1.8a)$$

$$d_{33} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{V\cos\vartheta}{a} \frac{da}{dz} \qquad (6.1.8b)$$

Finalement, compte-tenu de l'équation de continuité 6.1.1a, le tenseur des vitesses de déformation s'écrit:

$$\vec{\vec{d}} = \frac{Q\cos\vartheta}{2\pi a H} \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{H}\frac{dH}{dz} + \frac{1}{a}\frac{da}{dz} \right) & & \\ & \frac{1}{H}\frac{dH}{dz} & \\ & & \frac{1}{a}\frac{da}{dz} \end{pmatrix}$$

(6.1.9)

– Relations constitutives:

Dans le cas d'un fluide newtonien:

$$\tau_{ii} = + 2 \eta d_{ii} \qquad \text{pour } i = 1,2,3 \qquad (6.1.10a,b,c)$$

Dans le cas du modèle de PTT, nous avons:

$$K \tau_{ii} + \lambda \left[\frac{\partial \tau_{ii}}{\partial t} + V\cos\vartheta \frac{\partial \tau_{ii}}{\partial z} - 2\tau_{ii} \left(1 - \xi \right) d_{ii} \right] = + 2\eta d_{ii} \qquad (6.1.11a,b,c)$$

pour i = 1, 2, 3.

De nouveau, les répétitions d'indices ne doivent pas être considérées comme des sommations.

η et λ sont toujours donnés par les relations 4.1.16 et 4.1.19.

6.1.2 Conditions aux limites

Voici les conditions aux limites:

En sortie de filière (z = 0):

– $a = a_0$, $H = H_0$, $V = V_0$, $T = T_0$ (6.1.12a,b,c,d)

– De plus, pour le modèle de PTT:

$$\tau_{22} / \tau_{11} = 0 , \qquad \tau_{33} / \tau_{11} = 0 \qquad (6.1.13a,b)$$

A la ligne de figeage (z=Z):

– Choix de l'une des deux conditions suivantes:

Taux d'étirage imposé: $V = V_f$ (6.1.14a)

Force d'étirage imposée: $2\pi a H \sigma_{11} = F_Z$ (6.1.14b)

– Le rayon de la bulle ne varie plus au-delà de la ligne de figeage. Le film y est donc parallèle à l'axe d'étirage:

$$\frac{\partial a}{\partial z} = 0 \qquad (6.1.15)$$

Comme précédemment, il est avantageux d'intégrer l'équation d'équilibre axial 6.1.2, qui prendra alors la nouvelle forme suivante:

$$2\pi aH\sigma_{11}\cos\vartheta - \pi\Delta Pa^2 = F_z - \pi\Delta Pa_f^2 \qquad (6.1.16)$$

6.1.3 Formulation adimensionnelle

Nous avons reporté les variables et paramètres correspondants en Annexe D1, les équations en Annexe D2.

Les paramètres qui interviennent sont, de nouveau:

- la hauteur de figeage X,
- le coefficient de transfert D,
- la température de l'air de refroidissement s_{air},
- la force d'étirage T_z,
- la différence de pression B,
- le taux de gonflage G,
- le coefficient β (viscosité),

et pour le modèle de PTT uniquement:

- le nombre de Deborah De,
- le coefficient ζ (temps de relaxation),
- les paramètres ajustables ε et ξ du modèle rhéologique.

6.2 SOLUTION STATIONNAIRE

6.2.1 Equations et conditions aux limites

Nous obtenons des systèmes:

- d'ordre 5 pour un fluide newtonien,
- d'ordre 7 pour le modèle de P.T.T.

Les conditions aux limites sont celles spécifiées précédemment.

6.2.2 Procédure de résolution

La méthodologie d'étude est celle définie au § 3.4.

Remarquons toutefois, en ce qui concerne les paramètres, que nous pouvons, d'une manière générale, imposer:

- la hauteur de figeage,
- la température finale ou le coefficient de transfert,
- 2 paramètres parmi:

$$\left(T_{\chi},\ B,\ G,\ M \right)$$

et, par conséquent, calculer ceux restants.

Afin d'offrir la plus grande souplesse d'utilisation, nous avons élaboré une méthode générale de résolution basée sur le principe ci-dessus.

De nouveau, les techniques utilisées sont:

- une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour l'intégration des équations,
- une méthode de Newton-Raphson pour la recherche itérative de chaque paramètre à ajuster.

Les détails sont fournis dans les Annexes D3, D4 et D5.

6.2.3 Résultats

Nous présentons successivement:

- l'analyse de la solution pour les modèles rhéologiques suivants: fluide newtonien, modèle de PTT,
- une comparaison de nos prédictions avec des résultats expérimentaux.

6.2.3.1 Fluide newtonien

- **Isotherme**

Ce cas ayant été intensivement étudié, nous nous bornerons à exposer deux cas particulièrement dignes d'intérêt.

* Des premiers ordres de grandeurs de la force d'étirage ainsi que de la différence de pression peuvent être obtenus en considérant le cas suivant:

$$T_z = 4\ B$$

La bulle obtenue est alors cylindrique. Par ailleurs l'étirage est uniaxial. Les profils d'épaisseur et de vitesse sont exponentiels, comme dans le cas de l'étirage d'un film plan.

Nous avons alors les expressions analytiques suivantes pour la force d'étirage et la différence de pression:

$$T_z = 4\ \mathrm{Log}\ E\ /\ X$$

$$B = \mathrm{Log}\ E\ /\ X$$

* Le cas où la bulle n'est pas gonflée (la différence de pression est nulle) mérite également une attention. Par exemple (tableau 6.2.1):

M	G	T_z	E
10.	0.13	2.56	78.7
8.	0.15	2.33	52.2
6.	0.20	2.02	30.7
4.	0.28	1.58	14.4
2.	0.52	0.81	3.87

tableau 6.2.1
Fluide newtonien - isotherme
X = 5 - B = 0

On obtient un taux de gonflage inférieur à l'unité. De plus, ce dernier diminue lorsque le taux d'étirage augmente. Ce résultat est en accord avec les constatations expérimentales.

Remarquons qu'il faut considérablement augmenter le nombre de points de discrétisation au fur et à mesure que le taux de gonflage diminue, sous peine d'avoir une solution erronnée au voisinage de la ligne de figeage.

- **Non-isotherme**

Considérons à présent le cas réel où l'on a un refroidissement de la bulle.

* Lorsque la température finale diminue, nous retrouvons les principaux résultats du cas plan. Ainsi:

- Les pentes des différents profils en sortie de filière augmentent en valeur absolue. On obtient, par exemple, un départ de plus en plus gonflé de la bulle (figure 6.2.1).

- les contraintes augmentent et il en est donc de même en ce qui concerne la force d'étirage et la différence de pression nécessaires.

Le tableau 6.2.2 ci-dessous représente l'évolution de ces deux paramètres ainsi que celle du coefficient de transfert de chaleur, dans les conditions de la figure 6.2.1.

s_f	D	T_z	B
1.00	0.	2.67	0.233
0.90	0.012	3.21	0.269
0.80	0.024	3.79	0.307
0.70	0.039	4.58	0.361
0.60	0.057	5.64	0.435
0.50	0.078	6.98	0.537

tableau 6.2.2
Fluide newtonien – non-isotherme
$X = 5$ - $G = 3$ - $M = 20$ - $\beta = 25$ – $s_{air} = 30/185$

* L'effet d'une augmentation de β est identique à celui d'une diminution de la température de solidification.

6.2.3.2 Modèle de PTT

- **Isotherme**

* **Effet des paramètres ε et ξ**

De nouveau, le principal apport de ce modèle demeure la limitation de la viscosité élongationnelle apparente quels que soient les cas, pourvu que la valeur de ε soit non-nulle.

Par ailleurs, une augmentation de l'un de ces deux paramètres a systématiquement pour effet de diminuer la force d'étirage.

* **Effet du nombre de Deborah**

En augmentant le nombre de Deborah à partir de la valeur nulle (fluide newtonien), nous pouvons faire les constatations suivantes:

- la pente initiale de la bulle augmente (voir figure 6.2.2). On obtient ainsi un départ de plus en plus gonflé,
- la force d'étirage diminue dans un premier temps puis augmente par la suite (tableau 6.2.3),
- la différence de pression diminue constamment, ce qui met en évidence sa surestimation par le modèle newtonien (tableau 6.2.3).

De	T_z	B
(*) 0.00	2.67	0.233
0.01	2.62	0.228
0.05	2.46	0.214
0.10	2.32	0.201
0.50	1.81	0.137
0.70	1.75	0.118
1.00	1.93	0.104

tableau 6.2.3
Modèle de PTT – isotherme
X = 5 - G = 3 - M = 20 - ε = 0,015 – ξ = 0,1
(*): ε = 0 – ξ = 0

Cette évolution de la force d'étirage n'est pas propre au modèle de PTT. En effet, pour un fluide de Maxwell, on constate une évolution similaire.

En fait, il n'y a pas de règle stricte concernant l'évolution de la contrainte axiale avec le nombre de Deborah. En effet:

- les contraintes sont, dans le cas d'un fluide viscoélastique, fortement liées au champ de vitesse,
- la contrainte axiale et la contrainte circonférentielle sont couplées, ce qui rend sans doute complexes leurs lois d'évolution respectives avec le nombre de Deborah.

- **Non-isotherme**

Les effets de la température de solidification et de β sont identiques à ceux mis en évidence pour un fluide newtonien.

De même, l'effet du paramètre ζ est identique à celui mis en évidence pour l'étirage d'un film plan.

Nous nous sommes plus particulièrement attaché à examiner la solution en simulant des situations réalistes.

En effet, en dépit de la limitation de la viscosité élongationnelle apparente, nous devons nous attendre, comme dans le cas de l'étirage d'un film plan, à des solutions incorrectes lorsque l'on augmente:

- le taux d'étirage à nombre de Deborah fixé,
- ou le nombre de Deborah à taux d'étirage fixé.

Néanmoins, lorsqu'elle a pu être calculée (des difficultés croissantes surviennent au fur et à mesure que le nombre de Deborah augmente), la solution demeure correcte.

Notons pour conclure que si l'on veut comparer les plages de validité des solutions pour le soufflage de gaine et l'étirage d'un film plan, il faut que les deux nombres de Deborah soient définis de la même manière. Nous devons alors, dans le cas du soufflage de gaine, nous baser sur une valeur corrigée:

$$De_{CORRIGEE} = De / X$$

6.2.3.3 Simulation de résultats expérimentaux

A des fins de validation, nous avons, comme d'autres auteurs l'ont fait antérieurement, simulé les essais de GUPTA (B1980) concernant du polystyrène[7] refroidi à l'air ambiant.

Les résultats expérimentaux ainsi disponibles se composent de:

- 4 essais (RUNS 17 à 20) non-isothermes, à taux de gonflage supérieurs à l'unité,
- 10 essais non-isothermes, à taux de gonflage inférieurs à l'unité,
- 5 essais isothermes, à taux de gonflage inférieurs à l'unité (du fait, d'après l'auteur ci-dessus, de l'apparition d'instabilité lorsque l'on augmente le taux de gonflage).

Nous n'avons simulé que la première série de résultats (RUNS 17 à 20), la seule offrant un intérêt pratique.

Nous avons alors considéré les cas suivants:

CAS	FLUIDE	MODULE DE CIS.	VISCOSITE
CAS 1	MAXWELL	$G = 2,5\ G_{GUPTA}$	$\eta = \eta_{GUPTA}$
CAS 2	PTT	$G = C_G\ G_{GUPTA}$	
CAS 3	NEWTONIEN	$G = 0$	

tableau 6.2.4

où $\left(G_{GUPTA}, \eta_{GUPTA} \right)$ et $\left(G, \eta \right)$ sont respectivement les couples de paramètres fournis par GUPTA et utilisés lors de nos calculs. La viscosité η est la même que celle fournie par GUPTA.

L'ensemble des données expérimentales est reporté en Annexe E2.

(7) Notons que ce matériau est peu adapté au soufflage de gaine. Le choix de cet auteur se justifie par le fait que le matériau en question, ayant déja fait l'objet de nombreuses études antérieures, est "parfaitement" caractérisé.

* Le premier cas (CAS 1) a été étudié par LUO et TANNER (B1985) ainsi que par CAIN et DENN (B1988) et nous avons adopté la même valeur de module de cisaillement que ces auteurs.

* Les paramètres ε et ξ du modèle de PTT (CAS 2) ont été déterminés par PHAN-THIEN (A1978). Voici les valeurs:

$$\varepsilon = 0{,}015$$
$$\xi = 0{,}1$$

Par ailleurs, nous retrouvons la nécessité d'ajuster le temps de relaxation, notre modèle rhéologique étant à temps unique. Le coefficient correcteur C_G est donc à déterminer.

* Le dernier cas (CAS 3), traité à titre comparatif, correspond à un fluide newtonien de même caractéristique de viscosité que le polymère considéré.

Voici les résultats que nous avons obtenus:

- en imposant: la température finale, le taux de gonflage et le taux d'amincissement.
- puis en calculant: le coefficient de transfert, la force d'étirage et la différence de pression requis.

* Contrairement aux résultats des auteurs ci-dessus, le premier cas (CAS 1) n'a pu nous donner entière satisfaction.

Ainsi, pour RUN 20, la force d'étirage est correctement prédite, contrairement aux autres profils, notamment le rayon de la bulle.

* En ce qui concerne le CAS 2, nous avons tout d'abord ajusté le facteur correctif C_G en simulant RUN 20. A l'aide du même facteur, nous avons par la suite simulé RUN 17.

La préférence accordée à ce dernier, par rapport aux RUNS 18 et 19 restants, est justifiée par le fait que la force d'étirage mesurée expérimentalement est notablement différente de celles des RUN 18, 19 et 20, malgré des paramètres similaires (tableau 6.2.5).

Le tableau 6.2.5 ci-dessous représente les paramètres que nous avons utilisés pour nos calculs.

RUN	X	G	M	s_f	De	β	ζ
17	8.8	1.7	44.	0.78	0.157	101	-12.5
20	8.6	1.6	46.	0.87	0.200	102	-12.3

tableau 6.2.5. Paramètres des calculs

Nous obtenons alors les résultats suivants:

- RUN 20: le problème est d'obtenir une bonne concordance concernant les différents profils et plus particulièrement:
  - la forme de la gaine,
  - la vitesse du film,
  - les contraintes axiale et circonférentielle.

Néanmoins, la valeur $C_G = 2$ a permis d'obtenir de tels résultats (figures 6.2.3). Remarquons que nous n'avons pas cherché à affiner cette valeur, nous contentant du fait qu'elle est "ronde".

- RUN 17: le rayon et la vitesse sont correctement prédits (figures 6.2.4). La concordance concernant la contrainte axiale est nettement plus précaire (résultat non présenté).

Le tableau 6.2.6 représente les résultats concernant la force d'étirage et la différence de pression.

	CALCUL		EXP.	
	F_z	ΔP	F_z	ΔP
RUN 17	2,32 N	154 Pa	1,43 N	206 Pa
RUN 20	2,43 N	199 Pa	2,13 N	216 Pa

tableau 6.2.6. Comparaison des prédictions numériques et des résultats expérimentaux

* A titre de comparaison, voici les résultats correspondant à un fluide newtonien (CAS 3):

	F_z	ΔP
RUN 17	2,38 N	754 Pa
RUN 20	2,49 N	863 Pa

tableau 6.2.7. Résultats pour un fluide newtonien

Les forces d'étirage sont comparables à celles correspondant au modèle de PTT.

La différence de pression est, de manière désormais classique, très nettement surestimée.

Nous avons, pour RUN 20, reporté les différents profils (figures 6.2.3). L'accord avec les résultats expérimentaux est, comme il fallait s'y attendre, très grossier.

* Les valeurs du coefficient de transfert de chaleur (fluide newtonien ou modèle de PTT) sont approximativement de:

RUN 17	10 $w^2/m°C$
RUN 20	8 $w^2/m°C$

L'examen des profils de température révèle une bonne concordance avec les résultats expérimentaux (remarquons que l'excellent accord obtenu pour RUN 17 est vraisemblablement fortuit). On peut donc conclure que l'hypothèse de coefficient de transfert de chaleur constant, grossier en présence d'un jet d'air, est tout à fait valable dans le cas présent.

Remarquons que ces valeurs représentent approximativement le double de celles trouvées par les autres auteurs (LUO et TANNER (B1985), CAIN et DENN (B1988)). Il s'agit sans nul doute d'une question de définition.

Pour conclure, remarquons que:

- la relative incertitude quant au choix de la hauteur de figeage n'a qu'une faible incidence sur les résultats.

- l'échelle d'expérimentation, réduite, n'est pas neutre en ce qui concerne la confrontation entre nos prédictions et les résultats expérimentaux:

  - elle joue en notre faveur: certaines contributions telles que celle de l'inertie, de la gravité, ... etc sont effectivement négligeables.

  - elle peut pénaliser le modèle newtonien, ce qui est loin de constituer un paradoxe: les effets élastiques sont d'autant plus marqués que le temps de résidence est faible.

6.2.4 Conclusion

■ Bien que relativement limités, les tests concernant le modèle de PTT s'avèrent concluants.

Le principal apport est, de nouveau, une variation plus réaliste des contraintes avec des paramètres tels que le nombre de Deborah ou le taux d'étirage.

Moyennant un choix judicieux du temps de relaxation, les résultats obtenus sont qualitativement corrects.

La question qui se pose est celle de savoir si le coefficient correcteur C_G ne dépend que du matériau et de la nature de l'écoulement considéré.

Pour trancher, il aurait fallu disposer de résultats expérimentaux mettant mieux en évidence l'effet du nombre de Deborah. Par exemple, en fixant:

- la hauteur de figeage,
- le taux de gonflage,
- le taux d'amincissement,

et en faisant varier le débit d'extrusion.

■ Pour les études de stabilité, nous avons néanmoins continué à utiliser conjointement les trois modèles (newtonien, modèle de Maxwell et modèle de PTT), et ce pour des raisons méthodologiques, malgré les lacunes des deux premiers.

figure 6.2.1
Effet de la température finale
sur le rayon de la gaine
SG – newtonien – non-isotherme
$X = 5$ – $G = 3$ – $M = 20$ – $\beta = 25$ – $s_{air} = 30/185$
(1): s_f=1, (2): s_f=0.9, (3): s_f=0.8, (4): s_f=0.7, (5): s_f=0.6, (6): s_f=0.5

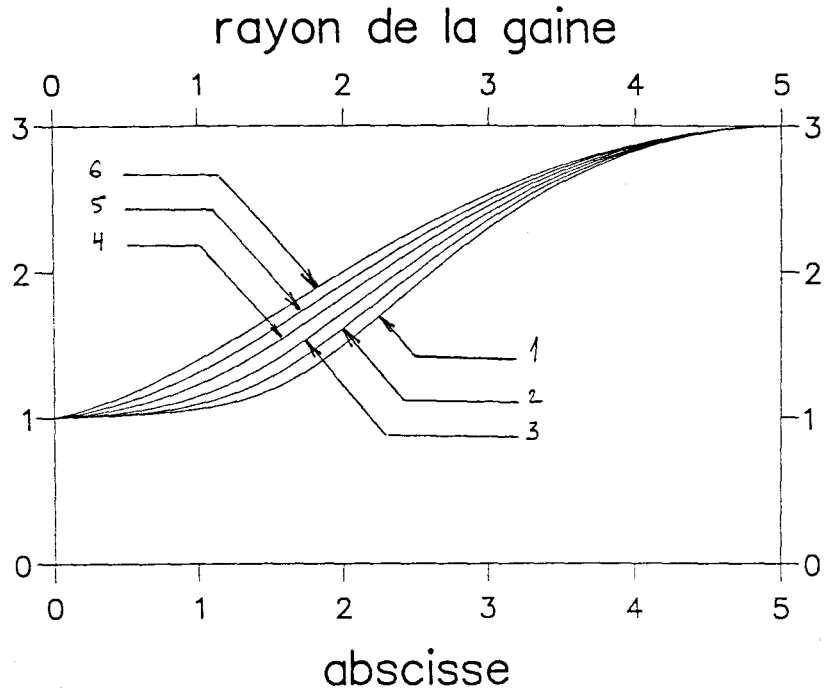


figure 6.2.2
Effet du nombre de Deborah
sur le rayon de la gaine
SG – modèle de PTT – isotherme
$X = 5$ – $G = 3$ – $M = 20$ – $\varepsilon = 0.015$ – $\xi = 0.1$
(1): De = 0.1, (2): De = 0.5, (3): De = 1

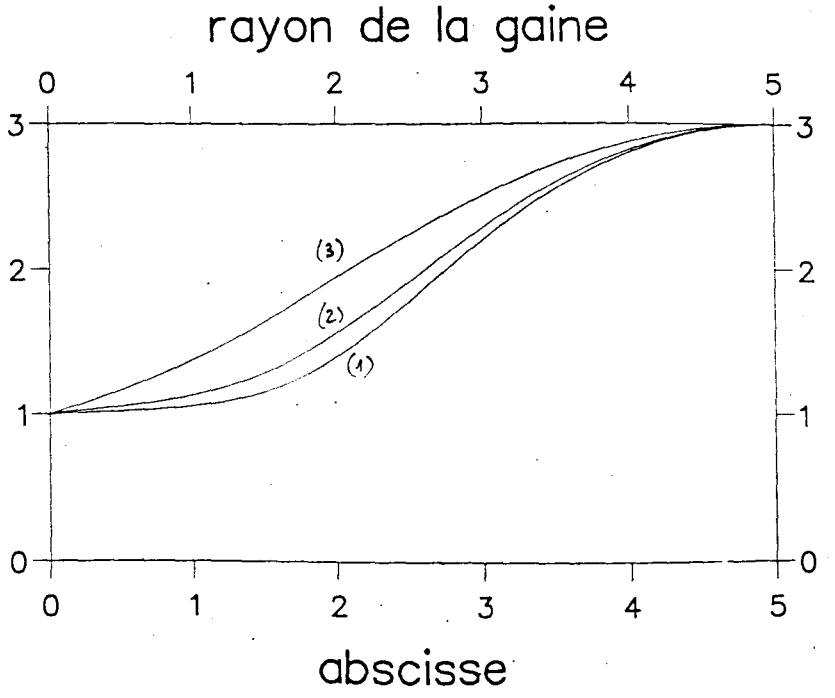


figure 6.2.3a. Comparaison des prédictions numériques et des résultats expérimentaux
RAYON DE LA BULLE, RUN 20
(o) : résultats expérimentaux
(1) : PTT, (2) : newtonien

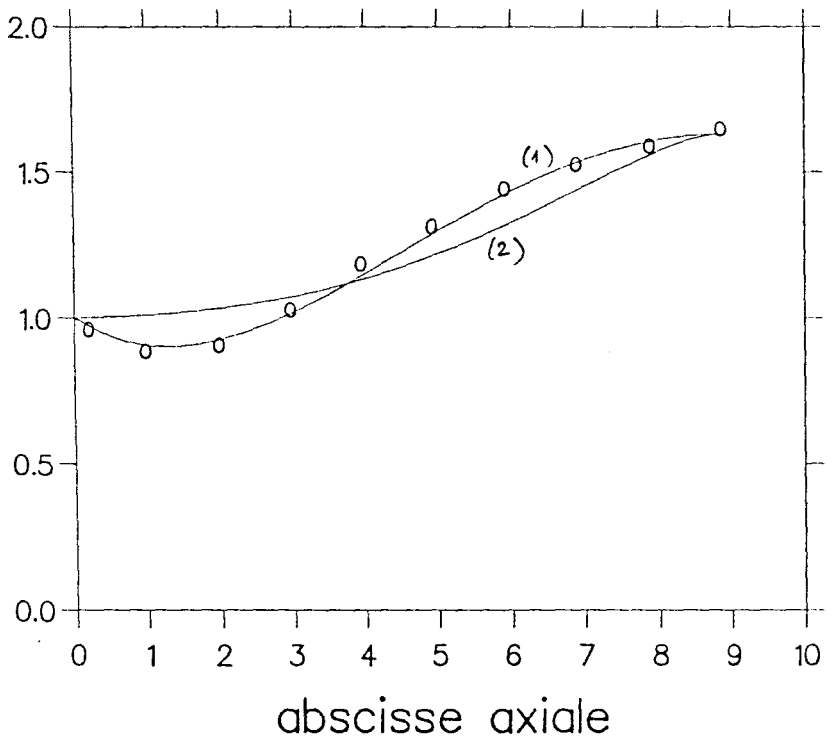


figure 6.2.3b. Comparaison des prédictions numériques et des résultats expérimentaux
VITESSE DU FILM, RUN 20
(o) : résultats expérimentaux
(1) : PTT, (2) : newtonien

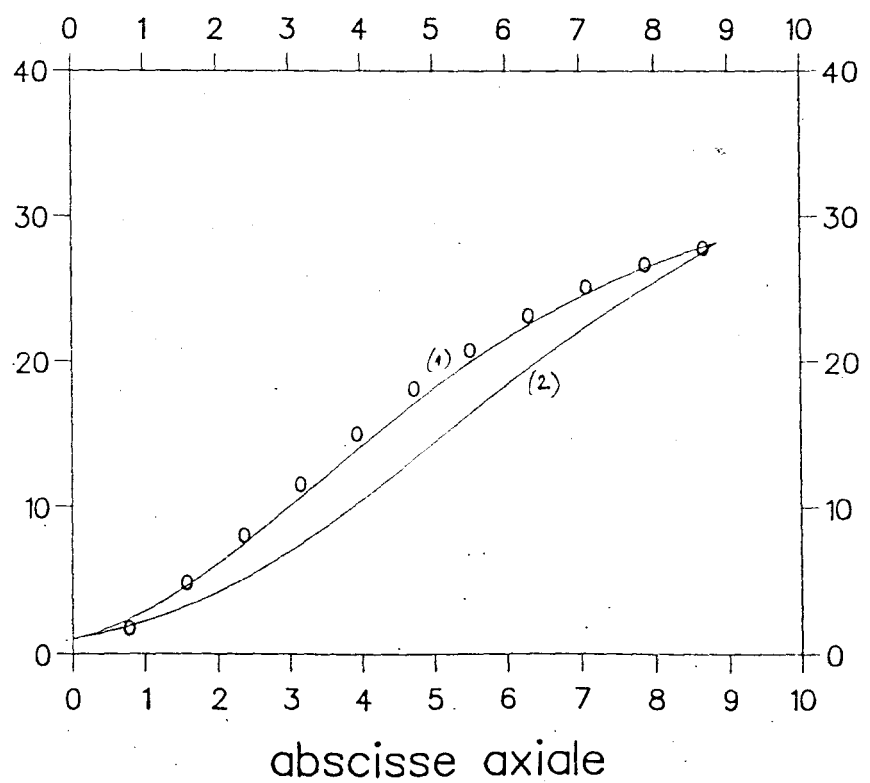


figure 6.2.3c. Comparaison des prédictions numériques et des résultats expérimentaux
TEMPERATURE DU FILM, RUN 20
(o) : résultats expérimentaux
(1) : PTT, (2) : newtonien

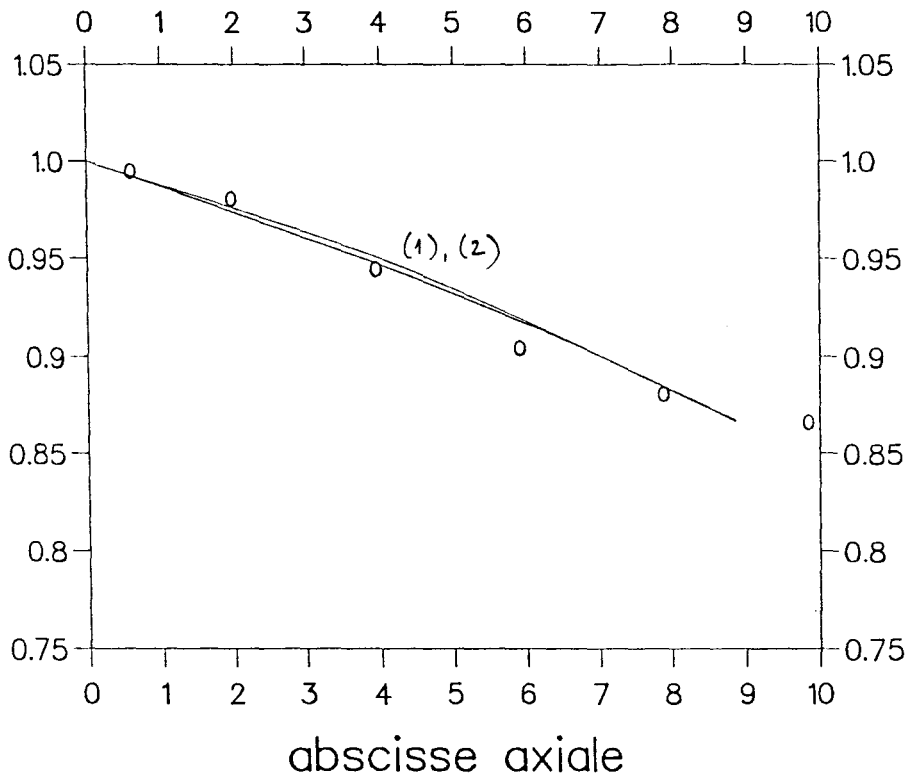


figure 6.2.3d. Comparaison des prédictions numériques et des résultats expérimentaux
CONTRAINTE AXIALE, RUN 20
(o) : résultats expérimentaux
(1) : PTT, (2) : newtonien

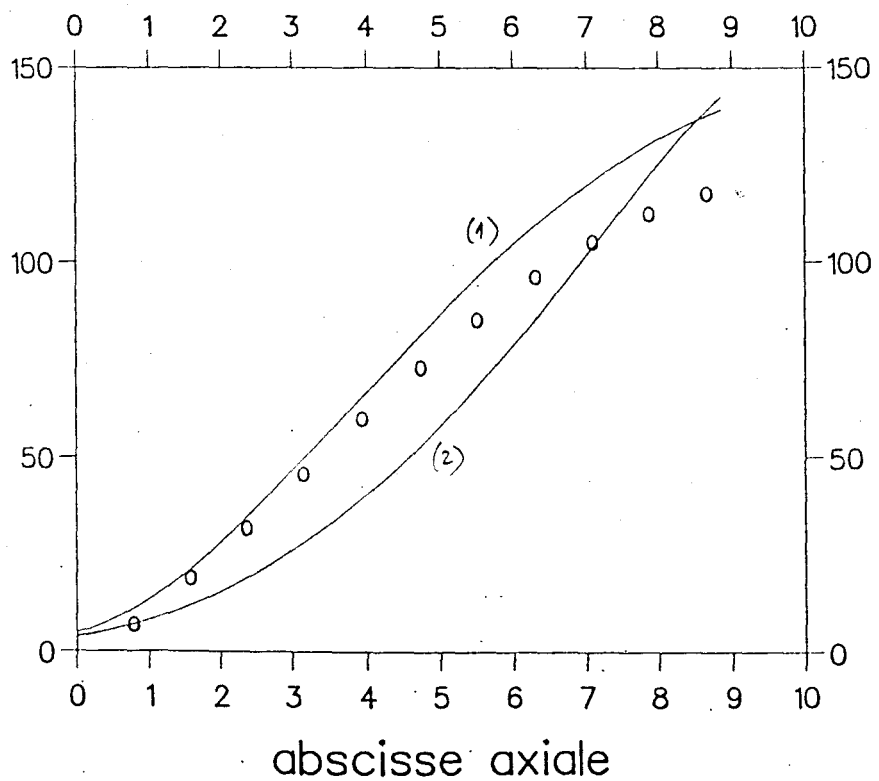


figure 6.2.3e. Comparaison des prédictions numériques et des résultats expérimentaux
VITESSES DE DEFORMATION, RUN 20
(o) : résultats expérimentaux
(1) : PTT, (2) : newtonien

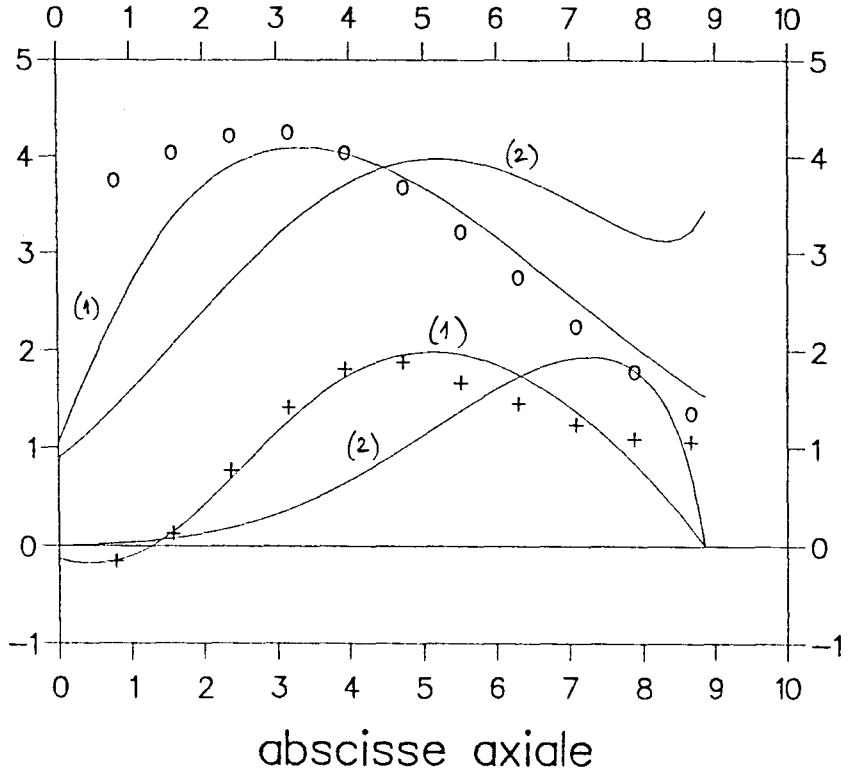


figure 6.2.4a. Comparaison des prédictions numériques et des résultats expérimentaux
RAYON DE LA BULLE, RUN 17
(o) : résultats expérimentaux
(1) : PTT

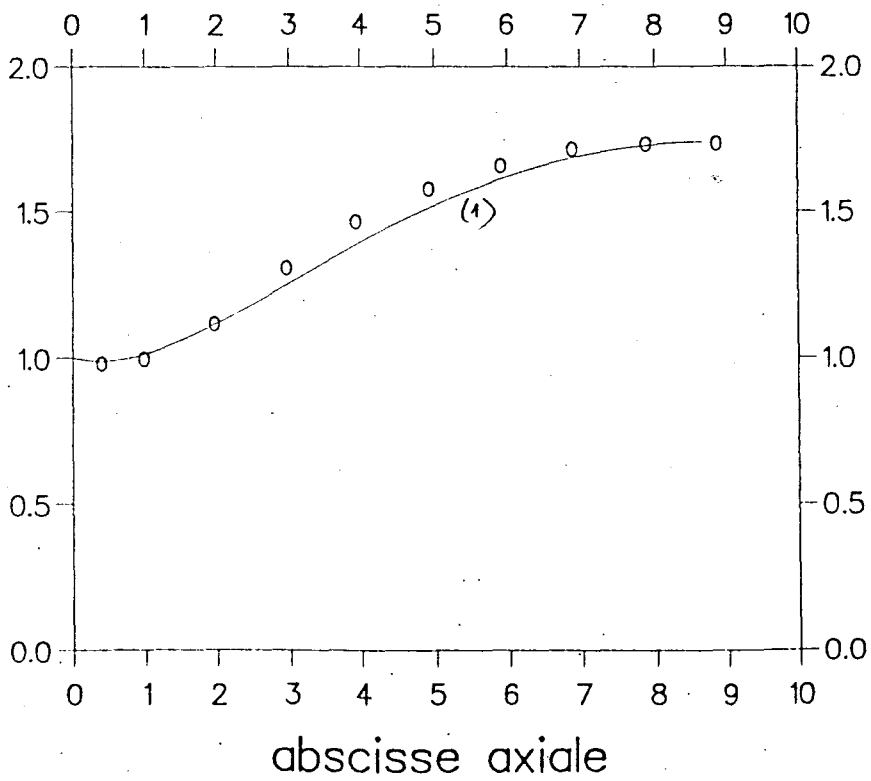


figure 6.2.4b. Comparaison des prédictions numériques et des résultats expérimentaux VITESSE DU FILM, RUN 17
(o) : résultats expérimentaux
(1) : PTT

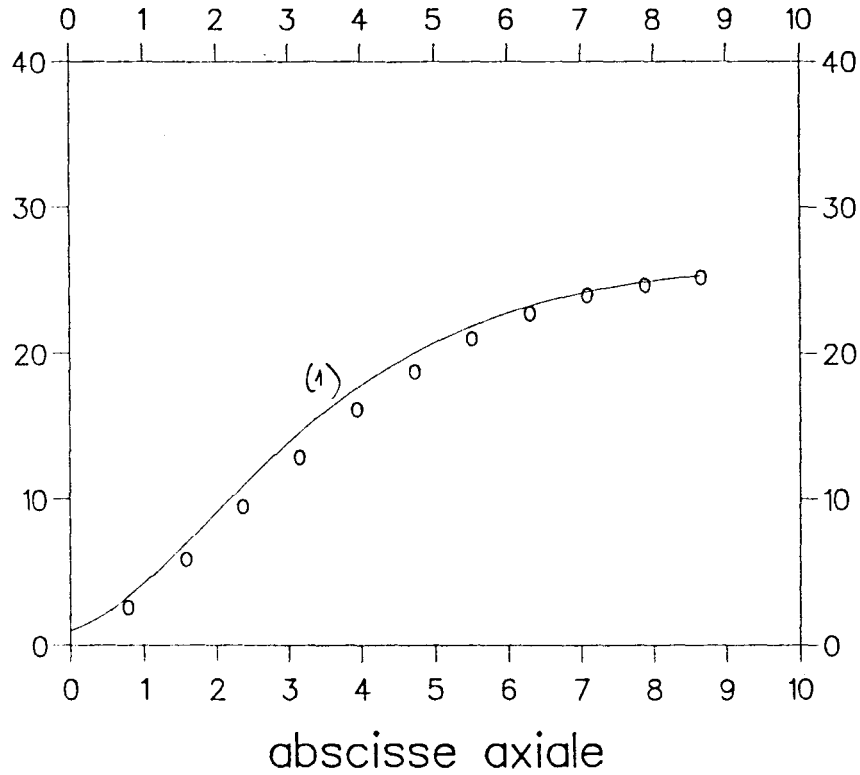
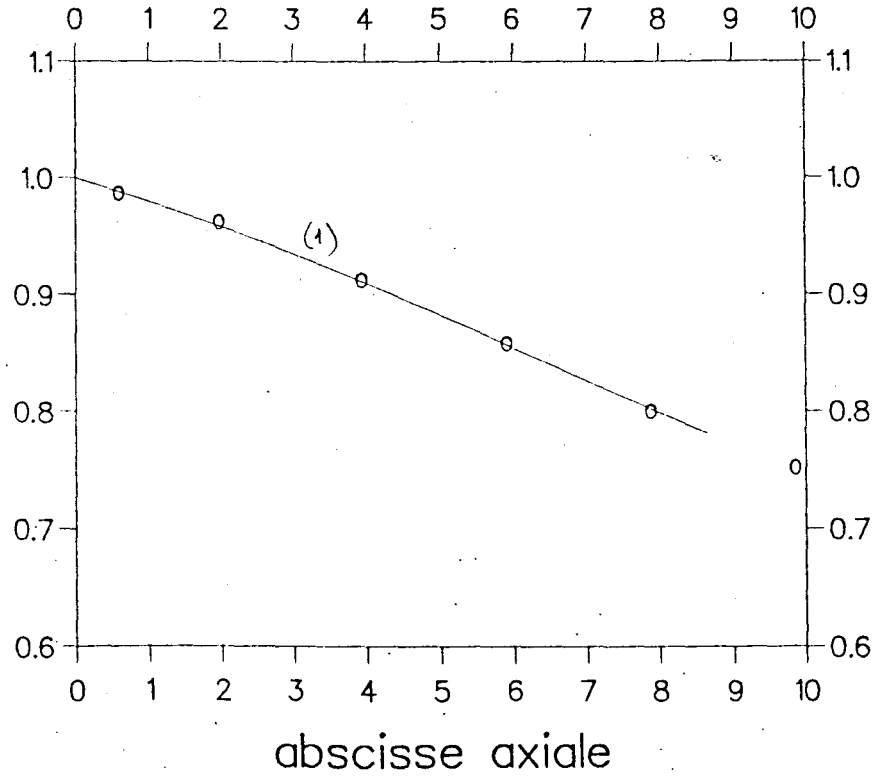


figure 6.2.4c. Comparaison des prédictions numériques et des résultats expérimentaux TEMPERATURE DU FILM, RUN 17
(o) : résultats expérimentaux
(1) : PTT



6.3 ANALYSE DE STABILITE

6.3.1 Mise en équations

6.3.1.1 Généralités

Nous ne considèrerons que des perturbations axisymétriques. Nous rechercherons donc des solutions de la même forme que précédemment (cf. équations (5.4.1) à (5.4.3)).

6.3.1.2 Equations linéarisées

La démarche d'obtention du nouveau système d'équations est identique à celle adoptée dans le cas de l'étirage d'un film avec surpression, notamment en ce qui concerne le calcul des nouvelles composantes du tenseur des vitesses de déformation (cf. Annexe A4).

En linéarisant, nous obtenons le système d'équations reporté en Annexe D6.

Les systèmes sont d'ordre:

- 6 pour un fluide newtonien : $\tilde{r}''$, $\tilde{h}'$ $\tilde{u}'$, $\tilde{s}'$, $\tilde{S}'$
- 8 pour le modèle de PTT: : $\tilde{r}''$, $\tilde{h}'$, $\tilde{u}'$, $\tilde{s}'$, $\tilde{N}_1'$, $\tilde{N}_2'$, $\tilde{N}_3'$

6.3.1.3 Conditions aux limites

Voici les conditions aux limites:

- Absence de perturbation en sortie de filière (x = 0):

$$\tilde{r}(0) = \tilde{h}(0) = \tilde{u}(0) = \tilde{s}(0) = 0 \ , \quad (6.3.1a,b,c,d)$$

et, de plus, pour le modèle de PTT:

$$\tilde{N}_2(0) = 0 \ , \qquad \tilde{N}_3(0) = 0 \qquad (6.3.2a,b)$$

- Au-delà de la ligne de figeage, le film est solidifié et le rayon r ne varie plus. Ce qui se traduit, à la ligne de figeage (x = X), par:

$$\frac{dr}{d\tau} = 0 \qquad \text{en } x = X \ , \qquad (6.3.3a)$$

Soit, après linéarisation:

$$\frac{d\tilde{r}}{dx} + \omega \ \tilde{r} \ / \ \bar{u} = 0 \qquad \text{en } x=X \ , \quad (6.3.3b)$$

- Taux d'étirage imposé ou force d'étirage imposée (cf. Annexe A6 et A9).

(6.3.4a, b)

- Différence de pression imposée: $\tilde{B} = 0$ (6.3.5a)

ou

Quantité d'air emprisonnée maintenue constante (cf. Annexe A7): soit, en ne prenant en compte que la partie solidifiée.

$$2 \left(B + P \right) \tilde{r}_f + \tilde{B} = 0 \ , \qquad (6.3.5b)$$

où P est la pression ambiante adimensionnelle.

6.3.1.4 Procédures de résolution

* Pour calculer les valeurs propres, nous avons, de nouveau, utilisé la méthodologie définie au chapitre 4, à savoir:

- Technique basée sur des méthodes matricielles dans le cas général: nous avons alors utilisé la méthode MAT2,
- Méthode de tir pour le suivi de la première valeur propre en fonction de la variation des paramètres.

Les détails concernant la méthode de tir sont fournis dans les Annexes D7, D8 et D9.

* Conformément au § 4.3.2.3.3, un examen systématique des modes propres a permis de déceler un phénomène non rencontré lors des deux chapitres précédents: dans certaines conditions, non-nécessairement "sévères", il existe des valeurs propres "insensibles" à la variation du maillage, fortement dépendantes des schémas utilisés et non retrouvées par la méthode de tir.

Les modes propres associées présentent systématiquement des allures en "dents de scie", ce qui permet d'éliminer les valeurs propres en question.

* Par ailleurs, voici les différences par rapport au cas plan:

- Existence de solutions non-triviales en imposant la force d'étirage T_Z.

- Paradoxalement, l'obtention des résultats est, d'une manière générale, beaucoup plus aisée que lors des deux chapitres précédents, dans le sens où la précision demeure satisfaisante dans la plage habituelle de paramètres et pour des nombres de points de discrétisation identiques.

6.3.2 Résultats

6.3.2.1 Généralités

■ La méthodologie d'étude est toujours celle décrite au § 3.4

Les paramètres maintenus constants sont les suivants:

- le taux d'étirage E ou la force d'étirage T_Z,
- la différence de pression B ou la quantité d'air emprisonnée A.

Lorsque l'on impose cette dernière, deux paramètres interviennent:

- la pression ambiante P,
- la hauteur totale de la bulle X_T ou, plus significativement, le rapport entre celle-ci et la hauteur de figeage X, couramment de l'ordre de 4 à 5.

Comme pour le cas plan, P est fortement stabilisante dans un premier temps, puis n'affecte pratiquement plus la stabilité par la suite.

Il en est de même en ce qui concerne le rapport X_T / X.

(Des résultats typiques ont été reportés en Annexe D10).

Ainsi, pour nos calculs, nous avons opté pour:

- un rapport X_1/X infini: ce qui revient à supposer que la quantité d'air emprisonné dans la partie biétirée est négligeable devant celle dans la gaine solidifiée,
- la valeur moyenne de P=100.

■

Nous allons, dans une première étape, étudier l'évolution de la première valeur propre afin de déterminer les mécanismes d'apparition des instabilités.

Cette analyse sera effectuée dans le cas d'un fluide newtonien et en isotherme.

Par la suite, nous considèrerons les effets du refroidissement ainsi que de l'élasticité du fluide, en nous limitant à la plage réaliste de valeurs des paramètres tels que le taux de gonflage et le taux d'amincissement.

Finalement, après une **synthèse**, nous allons, à l'aide de nos résultats, rendre compte des résultats expérimentaux disponibles.

6.3.2.2 Fluide newtonien

- **Isotherme**

■ **Analyse des mécanismes d'apparition des instabilités**

a) Nous allons débuter cette première étape par l'étude du cas particulier de la bulle cylindrique:

$$T_z = 4\ B$$

L'écoulement étant élongationnel uniaxial.

Il est alors intéressant d'examiner dans quelle mesure on retrouve les valeurs propres correspondant à l'étirage d'un film plan, sans surpression.

– Une telle comparaison ne peut, bien évidemment, être directement effectuée que pour une hauteur de figeage de X = 1, de par les définitions des variables adimensionnelles dans les deux problèmes en question.

Les valeurs obtenues (tableau 6.3.1) sont comparables à celle du cas plan qui vaut, rappelons le, pour le taux d'étirage considéré (ici E = 5):

$$\omega_{1\ PLAN} = (-2.75,\ 9.62)$$

Notons que le maintien de la force d'étirage au lieu de la vitesse d'étirage ne permet pas d'obtenir des solutions non-triviales.

Lorsque l'on augmente P, A étant imposée, on tend vers la valeur ci-dessus, que l'on retrouve effectivement pourvu que P soit suffisamment élevée.

C'est donc en imposant A que nous avons une équivalence avec le cas plan.

– Faisons varier la hauteur de figeage X (tableau 6.3.1).

Pour clore définitivement le sujet précédent, un test simple et probant consiste à examiner l'évolution du produit (ω_1 . X). Si ce dernier demeure constant, il y a équivalence avec l'étirage d'un film plan.

C'est effectivement le cas lorsque l'on impose A. Les modes propres demeurent donc oscillatoires.

Il en est tout autrement lorsque l'on impose B. De plus, le mode correspondant devient non-oscillatoire puis de nouveau oscillatoire.

Une analyse plus fine met en évidence un phénomène que nous n'avons pas rencontré dans le cas plan: l'intersection de branches d'évolution de valeurs propres.

– Faisons à présent varier le taux d'amincissement M (tableau 6.3.2).

Une augmentation de ce paramètre produit logiquement un effet déstabilisant. Il existe alors une valeur critique au-delà de laquelle des instabilités apparaissent.

Lorsqu'on impose A, la valeur critique en question est sensiblement égale à 20, comme dans le cas de l'étirage d'un film plan et quelle que soit, d'ailleurs, la valeur de la hauteur de figeage, en vertu de la constance du produit (ω_1 . X).

Par ailleurs, la constatation précédente concernant la nature des différents modes reste valable.

lorsque l'on impose B, le mode devient non-oscillatoire au-delà d'une certaine valeur de M, à l'apparition d'une instabilité selon toute vraisemblance.

X	(E , B)	(A , E)
1.	(-2.77, 9.47)	(-2.73, 9.62)
2.	(-0.95, 0.)	(-1.37, 4.81)
3.	(-0.59, 0.)	(-0.91, 3.21)
4.	(-0.75, 0.)	(-0.69, 2.41)
5.	(-0.64, 1.88)	(-0.55, 1.92)

tableau 6.3.1. Effet de la hauteur de figeage
newtonien – isotherme – T_Z = 4B
E = 5 – G = 1 – P = 100

M	(E , B)	(E , A)
5.	(-0.64, 1.88)	(-0.55, 1.92)
10.	(-0.38, 2.30)	(-0.29, 2.36)
15.	(+0.09, 0.)	(-0.13, 2.62)
20.	(+0.67, 0.)	(+0.00, 2.80)

tableau 6.3.2. Effet du taux d'amincissement
Newtonien – isotherme – T_Z = 4 B
X = 5 – G = 1 – P = 100

b) Considérons à présent le cas d'une bulle de forme "quelconque".

Des solutions non-triviales existent désormais lorsque l'on impose la force d'étirage.

Nous avons alors examiné les effets:

- du taux de gonflage,
- du taux d'amincissement,
- de la hauteur de figeage,

respectivement reportés dans les tableaux 6.3.3, 6.3.4 et 6.3.5. Il s'agit de résultats choisis parmi les plus représentatifs.

Le but étant d'établir une carte de stabilité dans "l'hyperplan" (G, M, X).

Voici alors les résultats que nous avons obtenus:

- Lorsque l'on impose le taux d'étirage E (figure 6.3.1):

Pour un taux d'amincissement et une hauteur de figeage donnés, il existe, en général, deux valeurs critiques du taux de gonflage:

- une valeur critique inférieure G_{cinf} en-deçà de laquelle on a une zone d'instabilité et au-delà, une zone de stabilité,
- une valeur critique supérieure G_{csup} au-delà de laquelle on retrouve une zone d'instabilité.

Ces deux valeurs critiques dépendent fortement du second paramètre imposé (B ou A). Il en est de même en ce qui concerne la nature du premier mode propre. Ainsi:

- lorsque l'on impose B:

En-deçà de G_{csup}, le premier mode propre, qu'il soit stable ou instable, est oscillatoire. L'instabilité qui apparait au-delà est, par contre, non-oscillatoire.

Par la suite, si G continue à augmenter, la stabilité augmente de nouveau. Toutefois, on ne retrouve pas un seconde zone de stabilité, la solution stationnaire cessant d'exister au-delà d'une certaine valeur du taux de gonflage.

- lorsque l'on impose A, le premier mode est systématiquement oscillatoire.

Dans les deux cas, l'effet d'une augmentation du taux d'amincissement est d'accroitre G_{cinf} et de réduire G_{csup}, réduisant ainsi la zone de stabilité. Au-delà d'une certaine valeur de M, cette dernière disparait.

Une augmentation de la hauteur de figeage a pour effet, si l'on impose A, d'augmenter G_{cinf} et de réduire G_{csup}.

Si l'on impose B, une augmentation de la hauteur de figeage a pour effet d'augmenter et G_{cinf} et G_{csup}.

ALLURE DES CARTES DE STABILITE (S: stabilité, I : instabilité)
(newtonien – isotherme – X = 5)

figure 6.3.1

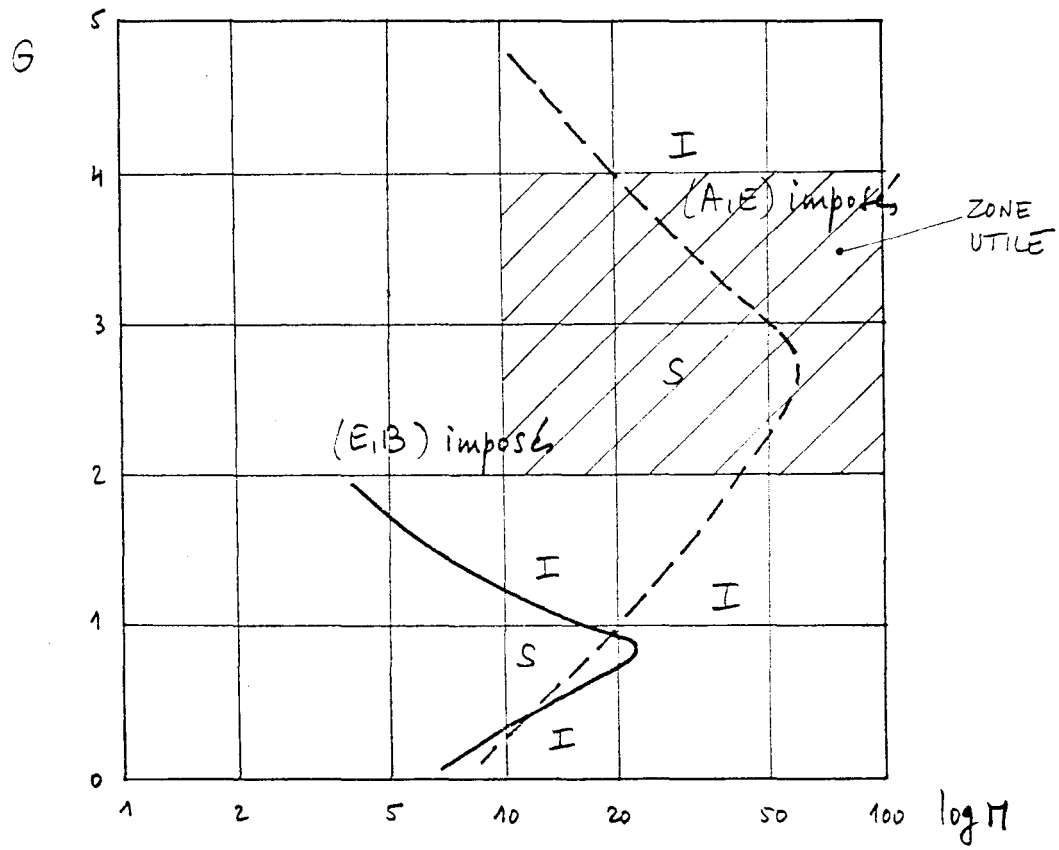
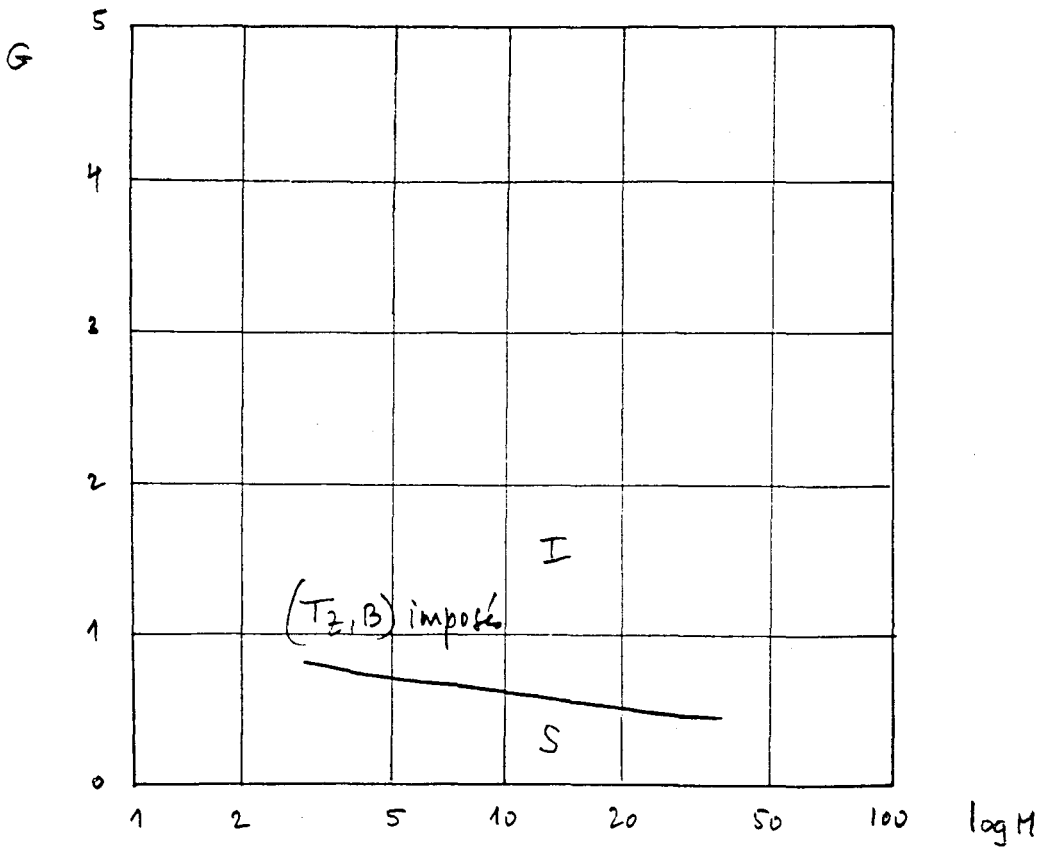


figure 6.3.2



- Lorsque l'on impose (T_Z, B) (figure 6.3.2):

Il existe, de nouveau, une valeur critique G_{cinf} en-deçà de laquelle on a, cette fois-ci, une zone de stabilité et au-delà, une zone d'instabilité.

Par la suite, si G continue à augmenter, la stabilité augmente à nouveau. Toutefois, il n'existe pas de valeur critique supérieure car, comme précédemment, la solution stationnaire cesse d'exister.

Cette valeur critique, relativement faible, diminue légèrement lorsque M augmente. Il en est de même lorsque la hauteur de figeage augmente.

Remarquons que le premier mode propre est, à tout moment, non-oscillatoire.

- Aucune instabilité n'apparait lorsque l'on impose (T_Z, A). Par ailleurs, le premier mode demeure systématiquement oscillatoire.

Une augmentation de M produit, paradoxalement, un effet stabilisant. Une variation similaire de G est tout d'abord stabilisante puis déstabilisante. Celle de la hauteur de figeage est fort logiquement déstabilisante.

Nous n'avons effectué que très peu de calcul. Les cartes de stabilités présentées ne représentent donc que les allures des cartes réelles.

Faisons la **synthèse** des résultats obtenus:

– Nous avons mis en évidence, lorsque l'on impose la quantité d'air emprisonnée A et le taux d'étirage E, une transition continue de l'étirage d'un film plan au soufflage de gaine.

– En pratique, c'est le taux d'étirage que l'on impose. Ainsi, dans la plage réaliste de valeurs des paramètres (aire hachurée sur la figure 6.3.1), en l'occurrence:

- hauteur de figeage: $X \simeq 5$,
- taux de gonflage: $2 \leq G \leq 4$,
- taux d'amincissement: $10 \leq M \leq 100$,

nous avons:

- des instabilités non-oscillatoires lorsque l'on impose la différence de pression.
- lorsque l'on impose la quantité d'air emprisonnée: la bulle est en général stable, sauf pour des valeurs élevées du produit (G . M) ou au-delà d'une valeur critique de M. Les instabilités qui apparaissent alors sont de type oscillatoire.

G	(E', B)	(E , A)	(T_z, B)	(T_z, A)
0 . 25	(+0.32, 3.75)	(+0.37, 3.61)	(-1.42, 0.)	(-2.20, 1.77)
0 . 50	(+0.06, 3.28)	(+0.20, 3.20)	(+0.19, 0.)	(-2.42, 1.80)
0 . 75	(-0.03, 3.02)	(+0.08, 2.97)	(+1.87, 0.)	(-2.52, 5.55)
1 . 00	(+0.67, 0.)	(+0.00, 2.80)	(*)	(*)
1 . 5	(+2.72, 0.)	(-0.10, 2.41)	(+4.07, 0.)	(-1.91, 1.21)
2 .	(+3.05, 0.)	(-0.17, 1.99)	(+3.57, 0.)	(-1.31, 0.82)
3 .	(+2.73, 0.)	(-0.20, 1.24)	(+2.67, 0.)	(-0.83, 0.41)
4 .	(+2.49, 0.)	(-0.07, 0.73)	(+2.58, 0.)	(-0.69, 0.28)

tableau 6.3.3a. Effet du taux de gonflage
Newtonien – isotherme
X = 5 – M = 20 – P = 100

(*) solutions triviales

G	(E , B)	(E , A)	(T_z, B)	(T_z, A)
0 . 25	(+0.08, 3.26)	(+0.01, 3.09)	(-1.73, 0.)	(-1.93, 1.67)
0 . 50	(-0.18, 2.81)	(-0.12, 2.72)	(-0.50, 0.)	(-2.11, 1.76)
0 . 75	(-0.31, 2.55)	(-0.23, 2.52)	(+0.43, 0.)	(-2.52, 1.96)
1 . 00	(-0.38, 2.30)	(-0.29, 2.30)	(*)	(*)
1 . 50	(+0.80, 0.)	(-0.35, 2.02)	(+2.02, 0.)	(-1.57, 1.27)
2 . 00	(+1.20, 0.)	(-0.36, 1.64)	(+2.00, 0.)	(-1.09, 0.90)
2 . 50	(+1.25, 0.)	(-0.32, 1.28)	(+1.81, 0.)	(-0.86, 0.70)
3 . 00	(+1.21, 0.)	(-0.24, 0.99)	(+1.66, 0.)	(-0.75, 0.57)

tableau 6.3.3b. Effet du taux de gonflage
Newtonien – isotherme
X = 5 – M = 10 – P = 100

(*) solutions triviales

BU LILLE

M	(E , B)	(E , A)	(T_z, B)	(T_z, A)
5 .	(+0.48, 0.)	(-0.26, 0.82)	(+1.02, 0.)	(-0.71, 0.71)
10 .	(+1.21, 0.)	(-0.24, 0.99)	(+1.66, 0.)	(-0.75, 0.57)
20 .	(+2.73, 0.)	(-0.20, 1.24)	(+2.67, 0.)	(-0.83, 0.41)
50 .	(+7.27, 0.)	(-0.04, 1.64)	(+4.94, 0.)	(-1.06, 0.17)
100.	(+14.8, 0.)	(+0.14, 1.92)	(+7.95, 0.)	(-1.36, 0.04)

tableau 6.3.4a. Effet du taux d'amincissement
Newtonien – isotherme
X = 5 – G = 3 – P = 100

M	(E , B)	(E , A)	(T_z, B)	(T_z, A)
5 .	(-0.41, 2.34)	(-0.39, 2.23)	(-0.94, 0.)	(-1.84, 1.81)
10 .	(-0.18, 2.81)	(-0.12, 2.72)	(-0.50, 0.)	(-2.11, 1.76)
20 .	(+0.06, 3.28)	(+0.20, 3.20)	(+0.19, 0.)	(-2.42, 1.81)
50 .	(+0.38, 3.92)	(+0.67, 3.79)	(+2.18, 0.)	(-2.91, 1.98)

tableau 6.3.4b. Effet du taux d'amincissement
Newtonien – isotherme
X = 5 – G = 0.5 – P = 100

X	(E , B)	(E , A)	(T_z, B)	(T_z, A)
5 .	(-0.41, 2.34)	(-0.39, 2.23)	(-0.94, 0.)	(-0.70, 4.42)
7.5	(-0.25, 1.56)	(-0.21, 1.50)	(-0.71, 0.)	(-0.44, 2.78)
10 .	(-0.18, 1.17)	(-0.15, 1.14)	(-0.57, 0.)	(-0.40, 1.83)

tableau 6.3.5a. Effet de la hauteur de figeage
Newtonien – isotherme
G = 0.5 – M = 5. – P = 100

X	(E , B)	(E , A)	(T_z, B)	(T_z, A)
5.	(+2.73, 0.)	(-0.20, 1.24)	(+2.67, 0.)	(-0.83, 0.41)
7.5	(+2.64, 0.)	(-0.08, 0.92)	(+3.22, 0.)	(-0.57, 0.82)
10.	(+2.41, 0.)	(-0.07, 0.75)	(+3.53, 0.)	(-0.44, 0.88)

tableau 6.3.5b. Effet de la hauteur de figeage
Newtonien – isotherme
G = 3 – M = 20 – P = 100

- **Instabilités de type "Draw Resonance" lorsque la bulle n'est pas gonflée**

Examinons, à titre d'application, le cas particulier où la bulle n'est pas gonflée (B = 0), en nous limitant au cas réaliste où l'on impose le taux d'étirage.

M	G	E	(E , B)	(E , A)
10.	0.13	78.7	(+0.38, 3.66)	(+0.05, 3.43)
8.	0.15	52.2	(+0.22, 3.39)	(-0.05, 3.16)
6.	0.20	30.7	(+0.02, 3.05)	(-0.17, 2.81)
4.	0.28	14.4	(-0.26, 2.56)	(-0.34, 2.35)
2.	0.52	3.87	(-0.69, 1.70)	(-0.58, 1.64)

tableau 6.3.6. Effet du taux d'étirage
Newtonien – isotherme
X = 5 – B = 0 – P = 100
N = 201-41, 201-51

Il existe un taux d'étirage critique au-delà duquel des instabilités de type oscillatoire apparaissent.

Dans le cas où l'on impose la quantité d'air emprisonnée, ce taux critique est supérieur à celui obtenu en imposant la différence de pression B.

- **Non-isotherme**

* **Effet de la température finale**

Le refroidissement a, logiquement, un effet stabilisant (tableau 6.3.7 ci-dessous).

s_f	D	(E , B)	(E , A)
1.	0.	(+2.73, 0.)	(-0.20, 1.24)
0.9	0.012	(+2.11, 0.)	(-0.38, 1.42)
0.8	0.024	(+1.64, 0.)	(-0.60, 1.67)
0.7	0.039	(+1.27, 0.)	(-0.95, 2.11)
0.6	0.056	(+1.02, 0.)	(-1.27, 2.92)
0.5	0.078	(+0.81, 0.)	(-1.24, 3.87)

tableau 6.3.7. Effet du refroidissement
Newtonien – non-isotherme
$X = 5 - G = 3 - M = 20 - \beta = 25 - s_{air} = 30/185$

Toutefois, cet effet est, contrairement au cas plan (avec ou sans surpression), peu énergique. Si bien que les précédentes instabilités dans les cas où l'on impose la différence de pression subsistent en général.

Nous présentons ci-après une série de résultats comptant parmi les plus représentatifs de ceux obtenus (tableaux 6.3.8 à 6.3.10).

* **Effet de la fluctuation de la position de la ligne de figeage**

La fluctuation de la position de la ligne de figeage n'a, logiquement, aucun effet lorsque l'on impose la force d'étirage.

En imposant, au contraire, le taux d'étirage, nous avons:

- un effet stabilisant d'autant plus marqué que la hauteur de figeage est importante lorsque l'on impose la différence de pression,
- un effet déstabilisant d'autant plus marqué que la hauteur de figeage est faible lorsque que l'on impose la quantité d'air emprisonnée dans la bulle.

* **Effet de l'élasticité de la partie solidifiée**

Comme dans le cas plan, une diminution du module de Young de la gaine solidifiée a pour effet de stabiliser la bulle (tableau 6.3.10).

Précisons que la complaisance $1/E_M$ est typiquement de 10^{-2} (cf. Annexe A9)

M	(E , B)	(E , A)	(T_Z, B)	(T_Z, A)
20.	(+0.80, 0.)	(-1.24, 3.87)	(+2.77, 0.)	(-1.68, 0.)
50.	(+1.86, 0.)	(-1.69, 5.20)	(+6.12, 0.)	(-2.62, 0.)
100.	(+3.66, 0.)	(-2.19, 5.99)	(+11.2, 0.)	(-3.35, 0.)

tableau 6.3.8a. Effet du taux d'amincissement
Newtonien – non-isotherme – sans fluctuation
$X = 5 - G = 3 - s_f = 0.5 - \beta = 25 - s_{air} = 30/185$

M	(E , B)	(E , A)
20.	(+0.56, 0.)	(-0.65, 3.96)
50.	(+1.17, 0.)	(-0.90, 5.59)
100.	(+2.13, 0.)	(-1.21, 6.85)

tableau 6.3.8b. Effet du taux d'amincissement
Newtonien – non-isotherme – avec fluctuation
$X = 5 - G = 3 - s_f = 0.5 - \beta = 25 - s_{air} = 30/185$

FLUCT.	(E , B)	(E , A)	(T_z, B)	(T_z, A)
non	(+0.71, 0.)	(-0.37, 1.64)	(+3.97, 0.)	(-0.34, 1.63)
oui	(+0.17, 0.)	(-0.29, 2.28)	(+3.97, 0.)	(-0.34, 1.63)

tableau 6.3.9. Effet de la fluctuation de la ligne de figeage
Newtonien – non-isotherme
$X = 10 - G = 3 - M = 20 - s_f = 0.5$

$1/E_M$	(E , B)	(E , A)
0.	(+0.56, 0.)	(-0.65, 3.96)
0.01	(+0.55, 0.)	(-0.75, 4.01)
0.05	(+0.48, 0.)	(-1.09, 4.10)
0.1	(+0.41, 0.)	(-1.39, 4.11)

tableau 6.3.10. Effet de l'élasticité de la partie solidifiée
Newtonien – non-isotherme
$X = 5 - G = 3 - M = 20 - s_f = 0.5$

Les différents effets que nous avons mis en évidence, stabilisants en général, ne sont pas très prononcés, si bien que dans la plage réaliste de valeurs de paramètres, nous avons, lorsque l'on impose le taux d'étirage:

- des instabilités lorsque l'on impose la différence de pression,
- une bulle inconditionnellement stable lorsque l'on impose, au contraire, la quantité d'air emprisonné.

6.3.2.3 Modèle de PTT

- **Isotherme**

  * **Effet du nombre de Deborah De**

Une augmentation du nombre de Deborah produit, en général, un effet stabilisant.

Toutefois, lorsque l'on impose (E,B), nous avons un effet légèrement déstabilisant dans un premier temps puis stabilisant par la suite (tableau 6.3.11).

Remarquons que cette évolution n'est pas sans rappeler celle de la force d'étirage qui diminue dans un premier temps et augmente par la suite.

Comme pour le refroidissement, l'effet de l'élasticité n'est pas très marqué.

De	(E , B)	(E , A)
0.	(+2.73, 0.)	(-0.20, 1.24)
0.01	(+2.81, 0.)	(-0.20, 1.22)
0.05	(+2.96, 0.)	(-0.20, 1.22)
0.10	(+2.97, 0.)	(-0.22, 1.22)
0.50	(+2.09, 0.)	(-0.55, 1.20)
1.00	(+1.04, 0.)	(-0.43, 0.)

tableau 6.3.11. Effet du nombre de Deborah
Modèle de PTT – isotherme
X = 5 – G = 3 – M = 20

* **Effet de ε et de ξ**

L'effet d'une augmentation de ces deux paramètres est, en général, déstabilisant. Ainsi, par exemple, par rapport à un fluide de maxwell ($\varepsilon = \xi = 0$):

FLUIDE	(E , B)	(E , A)	(T_Z, B)	(T_Z, A)
MAXWELL	(+2.86, 0.)	(-0.23, 1.23)	(+2.86, 0.)	(-0.64, 0.46)
PTT	(+2.97, 0.)	(-0.22, 1.22)	(+2.87, 0.)	(-0.64, 0.46)

tableau 6.3.12
modèle de PTT – isotherme
X = 5 – G = 3 – M = 20 – De = 0.1

Remarquons que, pour bien mettre en évidence l'effet de ces paramètres, il faut bien évidemment se placer dans des conditions pour lesquelles les deux régimes permanents diffèrent notablement, c'est à dire pour un nombre de Deborah ou pour un taux d'étirage élevé.

Nous ne l'avons toutefois pas effectué car la solution stationnaire obtenue dans le cas du fluide de Maxwell n'étant plus réaliste, la comparaison est dénuée de sens.

- **Non-isotherme**

Les constatations établies lors du cas newtonien restent valables.

De nouveau, nous présentons ci-après quelques résultats comptant parmi les plus représentatifs (tableaux 6.3.13 à 6.3.15).

Signalons que la situation devient quelque peu complexe lorsque le nombre de Deborah augmente, par exemple:

- effet déstabilisant du refroidissement,
- apparition de modes non-oscillatoires lorsque l'on impose la quantité d'air emprisonné A.

De	(E , B)	(E , A)	(T_Z, B)	(T_Z, A)
0 . 1	(+1. 2 5, 0 .)	(-1. 2 1, 3 .95)	(+2. 0 5, 0 .)	(-1. 0 7, 0 .09)
0 . 5	(+0. 6 0, 0 .)	(-0. 4 4, 0 .)	(+0. 7 7, 0 .)	(-1. 5 1, 1 .32)

tableau 6.3.13
Modèle de PTT – non-isotherme – sans fluctuation
X = 5 – G = 3 – M = 20 – T = 0.5 – P = 100
β = 25 – s_{air} = 30/185 – ε = 0.015 – ξ = 0.1

De	G	M	(E , B)	(E , A)
0 . 1	2 .	2 0 .	(+1. 0 3, 0 .)	(-1. 1 2, 5 .22)
0 . 1	3 .	2 0 .	(+1. 1 7, 0 .)	(-0. 7 5, 3 .46)
0 . 1	4 .	2 0 .	(+0. 9 4, 0 .)	(-0. 5 8, 2 .40)
0 . 1	3 .	5 0 .	(+0. 7 4, 0 .)	(-0. 9 8, 0 .)
0 . 5	3 .	2 0 .	(+0. 5 2, 0 .)	(-0. 3 5, 0 .)

tableau 6.3.14
Modèle de PTT – non-isotherme – avec fluctuation
Paramètres = Idem ci-dessus

191

s_f	(E , B)	(E , A)
1.	(+1. 0 4, 0 .)	(-0. 4 3, 0 .)
0 .92	(+0. 7 0, 0 .)	(-0. 3 0, 0 .)
(*)0 .92	(+0. 3 2, 0 .)	(-0. 2 1, 0 .)

tableau 6.3.15
Modèle de PTT – non-isotherme
X = 5 – G = 3 – M = 20 – De = 1.
Autres paramètres: Idem ci-dessus
(*) avec fluctuation

6.3.2.4 Synthèse des résultats obtenus - Discussion Comparaison avec les résultats expérimentaux

■ **Synthèse**

* Le principal résultat obtenu peut s'énoncer de la manière suivante: dans les **conditions réalistes** et en imposant le taux d'étirage, le contrôle de la force d'étirage n'étant jamais adopté en pratique, nous avons:

- stabilité inconditionnelle si l'on impose la quantité d'air emprisonné dans la bulle,
- apparition systématique d'instabilités si l'on impose, au contraire, la différence de pression.

Dans ce dernier cas, les instabilités en question sont non-oscillatoires.

Précisons, afin de dissiper tout équivoque, que l'on peut:

- en imposant (E , B) avoir une bulle stable pour des valeurs de M suffisamment faibles,
- en imposant (A , E) avoir, au contraire, des instabilités en augmentant excessivement M.

* Contrairement au cas plan, avec ou sans surpression, les effets:

- du refroidissement,
- de la rhéologie

ne sont pas très marqués. Il en est de même en ce qui concerne ceux:

- de la fluctuation de la position de la ligne de figeage,
- de l'élasticité de la partie solidifiée.

* Enfin, pour compléter la présente synthèse, quelques résultats graphiques ont été reportés en Annexe D11.

Par ailleurs, à titre comparatif, nous avons reproduit quelques cas de calculs issus de CAIN et DENN (B1988) et comparé nos résultats (première valeur propre) avec ceux de ces derniers. Les conditions sont les suivantes (Annexe D12):

- fluide newtonien,
- écoulement isotherme.

■ Discussion

Avant de rendre compte des résultats expérimentaux, il convient de formuler les quelques remarques suivantes:

* Comme c'est souvent le cas, les calculs effectués ne couvrent pas la totalité de la plage réelle de nombre de Deborah. Les causes sont:

- soit la difficulté d'obtention des solutions stationnaires, difficulté croissante avec le nombre de Deborah,
- soit l'obtention de solutions irréalistes aux nombres de Deborah élévés (que nous n'avons pas pu mettre en évidence).

Toutefois, ceci est peu génant, la rhéologie étant, comme nous l'avons établi, peu significative.

* Nous avons pris en compte:

- la fluctuation de la position de la ligne de figeage,
- l'élasticité de la partie solidifiée,

ce qui devrait permettre de simuler l'ensemble bulle et gaine solidifiée, sans avoir expressément recours à une modélisation de cette dernière.

* Le volume d'air délimité par le film n'est pas totalement clos du fait de l'existence de fuites par entrainement au niveau des galets pinceurs. Ces dernières sont compensées au niveau de l'injection d'air. Il y a sans doute lieu d'en tenir compte pour la détermination du paramètre réellement maintenu constant (quantité d'air ou différence de pression).

* Par ailleurs, nous n'avons considéré que des perturbations axisymétriques. Toutefois, il y a tout lieu de penser que des perturbations non-axisymétriques ne modifieraient pas les résultats d'une manière significative.

■ Comparaison avec les résultats expérimentaux

Nous allons à présent rendre compte, à l'aide de nos prédictions, des résultats expérimentaux de stabilité.

Remarquons que la seule certitude que nous ayons, en ce qui concerne les paramètres maintenus constants, est le contrôle du taux d'étirage.

* **Existence d'un taux d'étirage critique**

(FEIDT (B1983), HAN et SHETTY (B1977))

Nous devons tout d'abord supposer que l'on impose la quantité d'air emprisonnée A.

Nos résultats attribuent effectivement un effet déstabilisant à une augmentation du taux d'étirage. Toutefois, la valeur critique que l'on obtiendrait serait excessivement élevée.

* **Instabilités de type "Draw Resonance" lorsque la bulle n'est pas gonflée**

(MINOSHIMA et WHITE (B1986))

Nos résultats permettent de prédire de tels phénomènes. Les calculs ont été effectués en considérant un fluide newtonien et des conditions isothermes, pour simplifier (tableau 6.3.6). Le cas plus réaliste d'un fluide viscoélastique avec refroidissement ne modifie pas significativement le résultat.

* **Influence du mode d'asservissement**

Lors de son étude expérimentale, FEIDT (B1983) évoque l'impossibilité absolue d'obtenir des instabilités sur une installation munie d'un galet-palpeur détectant, au niveau de la ligne de figeage, tout mouvement de la bulle et agissant en conséquence sur le gonflage de celle-ci.

Ce résultat confirme l'influence du contrôle du gonflage de la bulle sur la stabilité. Le dispositif ci-dessus permettrait alors de contrôler parfaitement la quantité d'air emprisonnée dans la bulle.

* **Instabilités de bulle**

(MINOSHIMA et WHITE (B1986))

– Un résultat ne peut manquer d'interpeller: l'impossibilité, mise en évidence par ces auteurs, d'obtenir une bulle stable pour des taux de gonflage inférieurs à environ 2, sauf cas particuliers.

Ce premier résultat ne joue pas en faveur de nos prédictions. Notons toutefois que ces auteurs ont été les seuls à effectuer un tel constat.

Néanmoins, qualitativement, nous avons prédit l'existence d'un taux de gonflage en-deça duquel des instabilités prennent naissance.

– La plage de variation des temps de relaxation des différents matériaux considérés est très étendue (de 1s à ≈ 25s) mais ne se reflète nullement au niveau des résultats de stabilité.

Une telle insensibilité, par contre, conforte nos résultats.

* **Résultats de GUPTA (B1980)**

A titre indicatif, nous avons déterminé la stabilité des solutions correspondant aux essais de GUPTA (B1980) (RUN 17 et RUN 20) (avec fluctuation de la ligne de figeage).

Conformément à notre principal résultat, les cas où l'on impose B sont systématiquement instables et ceux où l'on impose A systématiquement stables.

Par ailleurs, cet auteur évoque également la difficulté de maintenir une bulle stable en condition isotherme, à moins que le taux de gonflage ne soit très faible (inférieur à 0.5). Ce qui est en désaccord avec les résultats de MINOSHIMA et WHITE ci-dessus, résultats obtenus en présence d'un refroidissement toutefois.

Commentaire

Dans le cas des études expérimentales à faible échelle, un manomètre contrôle généralement la pression de gonflage de la bulle. Ceci ne veut pas pour autant dire que la pression dans la bulle est rigoureusement maintenue constante. En effet, le temps de réponse du manomètre entre en ligne de compte, conditionnant ainsi le mode de conduite du procédé.

D'où une explication plausible des résultats contradictoires obtenus par les différents auteurs.

Par ailleurs, le contrôle de la différence de pression nécessite un temps de réponse infiniment faible, difficile à obtenir. Par conséquent, il est vraisemblable que ce cas ne survienne jamais en pratique. Ceci explique le fait de pouvoir obtenir une bulle stable, quand bien même un manomètre contrôle la pression de gonflage de la bulle.

6.3.3 Conclusion

■ Nous avons mis en évidence, dans le cas d'un fluide newtonien et en isotherme, les mécanismes d'apparition des instabilités.

Par la suite, nous avons tenu compte des effets:

- du refroidissement,
- de l'élasticité du fluide,
- de la fluctuation de la position de la ligne de figeage,
- de l'élasticité de la partie solidifiée,

qui se sont avérés stabilisants, mais peu significativement, à l'inverse du cas plan.

Finalement, le résultat obtenu est le suivant, dans les conditions réalistes et en imposant le taux d'étirage:

- stabilité inconditionnelle si l'on impose la quantité d'air emprisonnée dans la bulle,
- instabilité inconditionnelle si l'on impose, au contraire, la différence de pression.

Les instabilités qui apparaissent sont de type non-oscillatoire.

■ L'ensemble de nos résultats est qualitativement en accord avec les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature.

La grande disparité de ces résultats confirment l'influence du mode de conduite du procédé.

INSTABILITES D'ETIRAGE - CONCLUSION GLOBALE

Récapitulons les résultats obtenus en ce qui concerne les instabilités d'étirage.

■ Nous avons tout d'abord étudié le cas d'un film plan, avec ou sans surpression.

Nous avons alors mis en évidence l'effet stabilisant associé à un contrôle de la quantité d'air emprisonnée par rapport à un contrôle de la différence de pression.

L'effet qui prédomine est toutefois celui, fortement stabilisant, du refroidissement. C'est ce dernier qui l'emporte dans tous les cas et pour un refroidissement réaliste du film, aucune instabilité n'apparait.

Ce résultat est conforme à l'observation expérimentale, en l'absence de surpression.

■ Nous avons par la suite abordé le cas du soufflage de gaine proprement dit.

Les résultats obtenus mettent en exergue la prépondérance du mode de conduite du procédé. Ainsi, dans des conditions réalistes, il y a:

- stabilité inconditionnelle lorsque l'on impose la quantité d'air emprisonnée dans la bulle,
- instabilité inconditionnelle lorsque que l'on impose la différence de pression.

L'effet du refroidissement demeure stabilisant mais, contrairement au cas plan, n'est pas très énergique.

Il semblerait que la présence de la contrainte circonférentielle introduise une certaine "souplesse" de la bulle, contrebalaçant l'effet du refroidissement. De ce point de vue, le cas du film plan avec surpression est fondamentalement différent de celui de la bulle.

■ Les instabilités dont il a été question sont dues à l'étirage subi par le polymère. Nous entendons par là des instabilités uniquement liées au caractère élongationnel de l'écoulement.

Par ailleurs, l'apparition de ces instabilités dépendent de la nature des paramètres de conduite du procédé maintenus constants.

Cette prépondérance du mode de conduite du procédé constitue le principal résultat.

Ce dernier est confirmé par la faible sensibilité des résultats expérimentaux vis-à-vis de la nature du fluide ainsi que leur grande disparité pour des conditions d'expérimentation comparables.

CHAPITRE 7

PRISE EN COMPTE DU JET D'AIR
COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE

7. PRISE EN COMPTE DU JET D'AIR DE REFROIDISSEMENT COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE

7.1 GENERALITES

■ Les chapitres précédents étaient consacrés aux instabilités dues à l'étirage subi par le polymère.

Examinons à présent une autre cause possible: l'interaction entre la bulle et le jet d'air de refroidissement.

Nous abordons alors le problème sous le concept plus général de **couplage fluide-structure**, un tel couplage étant classiquement source d'instabilités.

- le fluide ou "milieu fluide" est constitué du jet turbulent se développant le long de la bulle, celle-ci faisant office de paroi,

- la structure ou "milieu solide" est représentée par la bulle. Elle est du type membrane mince tendue, pressurisée.

La précédente première partie est, à présent, perçue comme une phase de modélisation du milieu solide. Il convient donc, dans un premier temps, d'élaborer celle du milieu fluide, puis de réaliser, par la suite, le couplage proprement dit.

■ Nous admettrons, en ce qui concerne le jet d'air, l'absence de décollement.

Ce qui est effectivement le cas lorsque le jet est appliqué à la base de la gaine[8] (une visualisation de l'écoulement a été effectuée par FEIDT (B1983)).

■ Nous allons, dans une étude bibliographique, dégager quelques approches classiques et rechercher celles qui se rapprochent de notre problème.

(8) Cette technique de refroidissement est celle adoptée pour le PEBD.

7.2 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

7.2.1 Couplage fluide-structure

■ Généralités

Il existe, sous le vocable "couplage fluide-structure", une grande variété de cas de figures, dans lesquels interviennent des phénomènes de natures différentes, chacun d'eux faisant l'objet d'approches elles-mêmes variées.

La classification établie par SAGNER et ROUQUIÉ (F1979), dans le cadre de l'étude des vibrations d'obstacles dans les circuits hydrauliques, peut aisément être généralisée et, de plus, reflète particulièrement la situation qui nous intéresse. Ainsi nous pouvons distinguer les cas suivants:

– Excitation de la structure par l'instabilité de l'écoulement amont:

Il s'agit, dans ce cas, de fluctuations à caractère turbulent. Le spectre est à large bande, le niveau global est proportionnel à la pression dynamique $1/2\rho_{FLUIDE}U^2$ et les gammes de fréquences proportionnelles à U/L, L étant une longueur caractéristique du solide.

– Instabilité de l'écoulement sur l'obstacle lui-même.

– Instabilité (hydro / aéro) élastique dans laquelle un amortissement négatif est associé à l'écoulement.

Les légères vibrations et tremblements observés lors de la mise en oeuvre par soufflage de gaine relèvent manifestement du premier cas de figure. Les instabilités observées, si couplage il y a, relèveraient plutôt du troisième cas.

Nous allons donc examiner ce dernier cas de figure et, en particulier, le flottement de paroi qui y appartient.

■ Flottement de paroi

• L'un des types de problèmes classiques semblant se rapprocher effectivement du nôtre et ayant fait l'objet de nombreux travaux est celui du flottement d'une paroi déformable ("Panel Flutter").

A titre indicatif, nous décrivons ci-après le cas d'une plaque plane placée dans un écoulement d'air qui lui est parallèle (DOWELL (F1969, F1970)):

En-deçà d'une valeur critique de la pression dynamique $q_{CRITIQUE}$ de l'écoulement, on observe des vibrations de nature aléatoire de la plaque. Il s'agit de la réponse de cette dernière aux fluctuations de pression dans la couche limite turbulente. Les amplitudes sont faibles par rapport à l'épaisseur de la plaque et les fréquences peu différentes des fréquences propres de celle-ci.

Au-delà de cette valeur critique, on observe une augmentation rapide de l'amplitude avec q. Le mouvement prend un caractère clairement sinusoïdal et l'amplitude est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la plaque.

Ce même auteur présente quelques exemples de problèmes classiques (DOWELL (F1980)).

Un certain nombre de théories ont été développées (DOWELL (F1969, F1970)), diversement axées sur la modélisation du solide ou du fluide.

Les travaux privilégient les milieux solides tels que les plaques planes et coques cylindriques, associés à des écoulement à grandes vitesses (nombre de Mach de l'ordre de 1 ou plus).

- Abordons, à présent, le cas qui nous intéresse plus directement, en l'occurence celui des **membranes minces**, malheureusement très peu étudié.

Un exemple de problème est celui d'une membrane toroïdale pressurisée (pression P_t), séparée d'une paroi rigide par un écoulement d'air (pression d'alimentation P_c). L'ensemble modélise un véhicule à coussin d'air.

A P_t donnée et lorsque l'on augmente P_c, il apparait un phénomène de flottement de la membrane ("trunk flutter") pour des vitesses de l'ordre de 30 m/s.

HINCHEY et SULLIVAN (F1982) ont modélisé ce problème par une membrane de longueur infinie située à une distance h d'une paroi rigide, avec, en régime non-perturbé:

- un écoulement uniforme entre la paroi et la membrane,
- un fluide au repos de l'autre coté de la membrane.

Ces auteurs ont étudié la stabilité linéaire des petits mouvements transversaux de la membrane, celle-ci étant soumise, d'une part à une tension T_M et, d'autre part, aux forces de pression dues au fluide.

Le fluide est représenté par un modèle d'écoulement potentiel.

Le couplage entre les deux milieux s'effectue de la manière suivante:

- le fluide subit l'influence de la "paroi" par l'intermédiaire d'une condition de glissement sur celle-ci,

- le solide subit l'influence du fluide par l'intermédiaire des forces de pression.

Les potentiels associés aux perturbations de l'écoulement admettent des solutions analytiques et il en est de même des fréquences propres. On peut alors déterminer la vitesse critique au-delà de laquelle apparait l'instabilité. On met en évidence une relation de la forme:

$$U_{CRITIQUE} = f\left(k, T_M\right) \qquad (7.2.1)$$

dans laquelle k est le nombre d'onde axial.

On peut interpréter les phénomènes par l'intermédiaire de deux raideurs, l'une positive associée à la tension dans la membrane, l'autre négative associée à l'écoulement. Le flottement apparait alors lorsque la raideur négative l'emporte sur la première.

NEWMAN (F1982) a procédé de la même façon et a appliqué les résultats à divers cas simples.

WILSON (F1986) a évalué les forces visqueuses instationnaires s'exerçant sur une membrane en oscillation arbitraire mais imposée. La représentation du milieu fluide fait appel à la théorie de la couche limite et, de nouveau, à un modèle d'écoulement potentiel pour l'écoulement extérieur (écoulement principal).

Les résultats permettent d'expliquer le phénomène de flottement et attribuent ainsi un rôle fondamental à la couche limite, contrairement aux études mentionnées précédemment.

L'auteur retrouve alors un résultat établi expérimentalement à l'apparition du flottement d'une membrane:

$$\frac{F}{qS} \simeq 1 \qquad (7.2.2)$$

avec

F : force s'exerçant sur la membrane,
q : pression dynamique de l'écoulement,
S : surface de la membrane.

- **Bilan partiel**

De par les caractéristiques de leurs milieux fluides, les problèmes cités précédemment semblent s'éloigner du nôtre.

Il convient toutefois de s'en assurer avant d'abandonner définitivement le modèle d'écoulement potentiel adopté lors de ces problèmes. A cet effet, la relation expérimentale précédente nous permet d'évaluer l'ordre de grandeur de la vitesse critique de flottement, dans le cas d'un film plan étiré.

Les détails de cette évaluation ont été reportés en Annexe F1.

Il s'avère alors que la vitesse critique en question, sans être excessivement élevée, est systématiquement supérieure à la vitesse nécessaire au refroidissement du film.

Cependant, ayant affaire à un jet pariétal, nous ne pouvons conclure définitivement.

Il nous faut donc élaborer une modélisation adéquate pour ce dernier, le modèle d'écoulement potentiel ne pouvant bien évidemment pas convenir.

En conséquence, nous allons entreprendre une étude bibliographique sur les jets pariétaux en général, et ce afin de dégager des éléments susceptibles de nous guider.

7.2.2 Jets pariétaux turbulents

Les jets pariétaux sont d'une grande importance et ont fait l'objet de nombreux travaux.

Remarquons, tout d'abord, que les différents travaux concernent une paroi fixe. Nous le supposerons pour notre cas, la vitesse du film étant faible devant celle du jet d'air de refroidissement.

Le régime est, le plus souvent, turbulent même à de faibles vitesses, notamment à cause de l'existence d'un bord libre.

La zone d'intérêt est celle, pleinement développée, prenant naissance en aval d'une zone de mélange.

La vitesse est nulle à la paroi ainsi que sur le bord libre. Il existe donc une position où elle est maximale.

Il est alors d'usage de définir l'épaisseur du jet par la distance séparant la paroi du point auquel la vitesse est égale à la moitié de la vitesse maximale (figure 7.4.1).

Les travaux de GLAUERT (G1956) ont constitué une des premières études théoriques sur le sujet. Cet auteur a développé diverses théories et a, par la suite, recherché des profils de similitude (la forme du profil de vitesse ne change pas).

Les études expérimentales de BAKKE (G1957) concernant un jet radial et de SCHWARZ et COSART (G1961) concernant un jet plan ont confirmé l'existence de tels profils.

Le champ de vitesse, quelle que soit l'abscisse longitudinale, peut alors être corrélé par:

- une échelle unique de vitesse U_{max},
- une échelle unique de longueur δ.

Les premières études, parmi lesquelles figurent celles que nous venons de citer, ont concerné des jets se développant sur une surface plane.

Lorsque la surface présente une ou des courbures (longitudinale et/ou transversale), les constatations ci-dessous restent valables (SHARMA (G1981), GUITTON et NEUMAN (G1977), SMITS et al. (G1979)).

Les résultats de ces auteurs soulignent également l'importance de la courbure de la surface sur la structure de la turbulence.

Une conséquence immédiate concerne l'épaisseur du jet, supérieure à celle d'un jet se développant sur une surface plane.

La simulation numérique de tels jets met en avant la prépondérance du modèle de turbulence et notamment son aptitude à appréhender les effets de la courbure (MORRISON et GREGORY-SMITH (G1984), DVORAK (G1973)).

Pour avoir un aperçu général, on pourra également se reporter à la revue de LAUNDER et RODI (G1983).

7.3 BILAN GLOBAL

■ Dans les problèmes classiques de couplage fluide-structure tels que ceux que nous avons reportés, le modèle d'écoulement potentiel est largement adopté en ce qui concerne le milieu fluide, du fait, en premier lieu, de sa simplicité.

De surcroit, les milieux fluides en question se prêtent très bien à une telle modélisation:

- ils sont soit confinés soit suffisamment étendus pour être considérés comme infinis,
- les vitesses mises en jeu sont assez élevées ($\geq$ 50 m/s), voire supersoniques.

On néglige alors la couche limite visqueuse pour ne considérer que l'écoulement "principal".

■ Une telle modélisation ne peut bien évidemment pas représenter le jet d'air de refroidissement.

A l'opposé, un calcul "rigoureux" n'est pas non plus notre propos.

En effet, hormis les complexités inhérentes à un tel calcul, nous estimons qu'il n'est pas indispensable de connaitre la structure "exacte" du jet, compte-tenu de notre objectif d'évaluation, à caractère qualitatif, de la contribution du couplage fluide-structure dans l'existence des instabilités lors du procédé de soufflage de gaine.

■ Il nous faut donc rechercher une autre modélisation.

Après en avoir présenté le principe, nous traiterons successivement les différentes configurations des chapitres précédents.

7.4 MODELISATION DES EFFORTS DUS AU JET D'AIR

7.4.1 Principe

Nous nous intéressons aux efforts "ressentis" par la bulle de par la présence du jet d'air et ce d'un point de vue qualitatif.

La connaissance de la structure du jet (écoulement moyen) permettrait d'exprimer ces derniers, en appliquant le théorème d'Euler.

Nous pouvons alors établir les nouvelles formes que prendront les équations d'équilibre du film.

Tout le problème réside, bien évidemment, dans la détermination de la structure du jet dont nous savons, en particulier, qu'elle dépend fortement des rayons de courbure de la "paroi".

Néanmoins, notre étude peut s'accommoder de résultats approchés qu'une synthèse de différents résultats expérimentaux fournira.

En outre, pour des taux de gonflage réalistes, la forme de la bulle est régulière. Ce qui permettra, en première approximation, de considérer un jet sur une surface conique.

Remarquons que nous ne prenons pas en compte les "perturbations" de la structure du jet dues aux mouvements de la paroi. Le jet "se contente", en fait, de suivre cette dernière. Ceci suppose, en ce qui concerne ces mouvements de la paroi:

- de faibles amplitudes, ce qui est effectivement le cas dans le cadre d'une théorie linéaire,
- des longueurs d'onde importantes, ce qui nous assure que la courbure de la paroi varie faiblement.

7.4.2 Structure du jet - Hypothèses

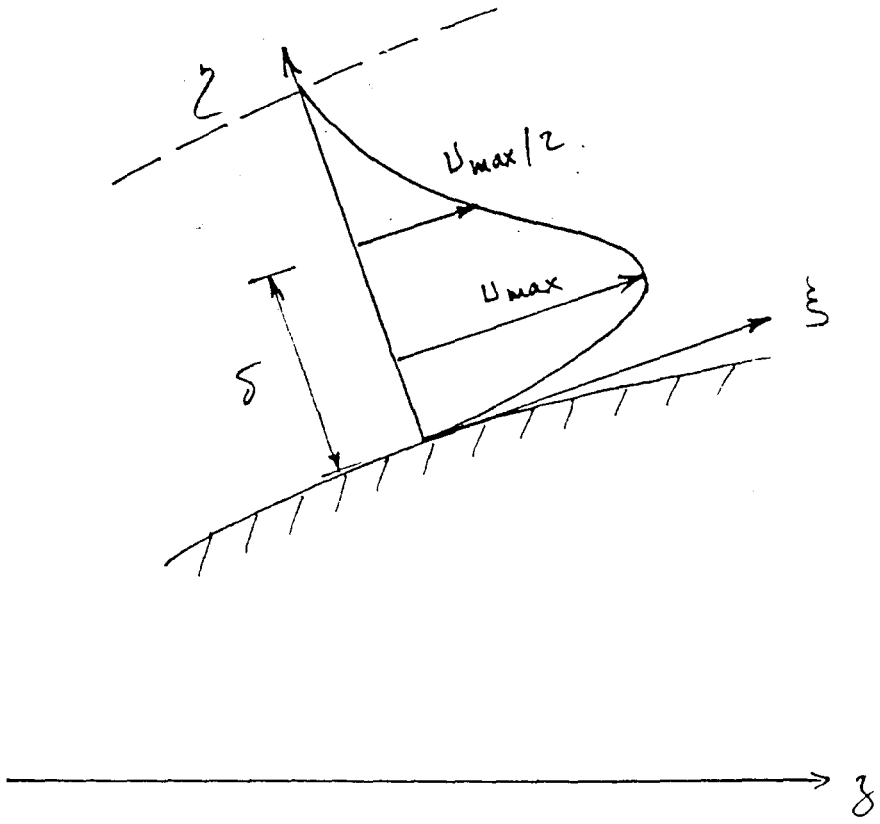
La figure 7.4.1 représente le profil de vitesse typique d'un jet pariétal, avec:

η : coordonnée suivant la normale au film, $0 \leq \eta \leq \eta_F$, η_F correspondant à la frontière libre du jet,

ξ : abscisse curviligne axiale,

δ : épaisseur du jet,

figure 7.4.1. Profil de vitesse d'un jet pariétal



■ Nous ferons les **hypothèses** suivantes:

1) Profil pleinement développé dès la sortie de filière. Ce qui revient à supposer que l'orifice de sortie du jet est situé très en amont de cette dernière ou à négliger la zone de mélange.

2) La vitesse admet des profils de similitude. La structure du jet est alors déterminée par les fonctions suivantes:

* le profil de similitude en question:

$$\frac{U}{U_{max}} = f\left(\eta/\delta = \gamma\right) \quad 0 \le \gamma \le \gamma_F = \eta_F / \delta \qquad (7.4.1)$$

* l'évolution de la vitesse maximale U_{max}:

$$U_{max} = U_{max}(z) \text{ ou } U_{max}(\xi) \qquad (7.4.2)$$

* l'évolution de l'épaisseur:

$$\delta = \delta(z) \quad \text{ou } \delta(\xi) \qquad (7.4.3)$$

3) Le profil de similitude d'un jet axisymétrique n'est pas significativement différent de celui d'un jet plan. Nous avons, en conséquence, opté pour ce dernier (SCHWARZ et COSART (G1961)).

4) Nous supposerons, pour l'épaisseur, une évolution linéaire de la forme:

$$\delta(\xi) = \delta_0 \left[1 + \left(C_E - 1 \right) \frac{\xi}{\xi_f} \right] \qquad (7.4.4)$$

dans laquelle:

δ_0 : épaisseur initiale du jet, que nous prendrons égale à la hauteur de la fente.

ξ_f : abscisse curviligne de la ligne de figeage,

C_E : coefficient d'expansion = $\delta(\xi_f)/\delta_0$

5) Nous supposerons, de plus, que le débit de quantité de mouvement se conserve. Soit:

$$\int_{\Sigma_{air}} \rho_{air} \, U^2 \, d\Sigma_{air} = Cte = \rho_{air} \, U_0^2 \, \Sigma_0 \qquad (7.4.5)$$

avec

Σ_0 : section de l'orifice de sortie du jet d'air,

Σ_{air} : "section transversale" du jet, normalement à la paroi.

Cette hypothèse est assez proche de la réalité, le frottement sur le film ainsi que l'entrainement d'air pouvant être négligés.

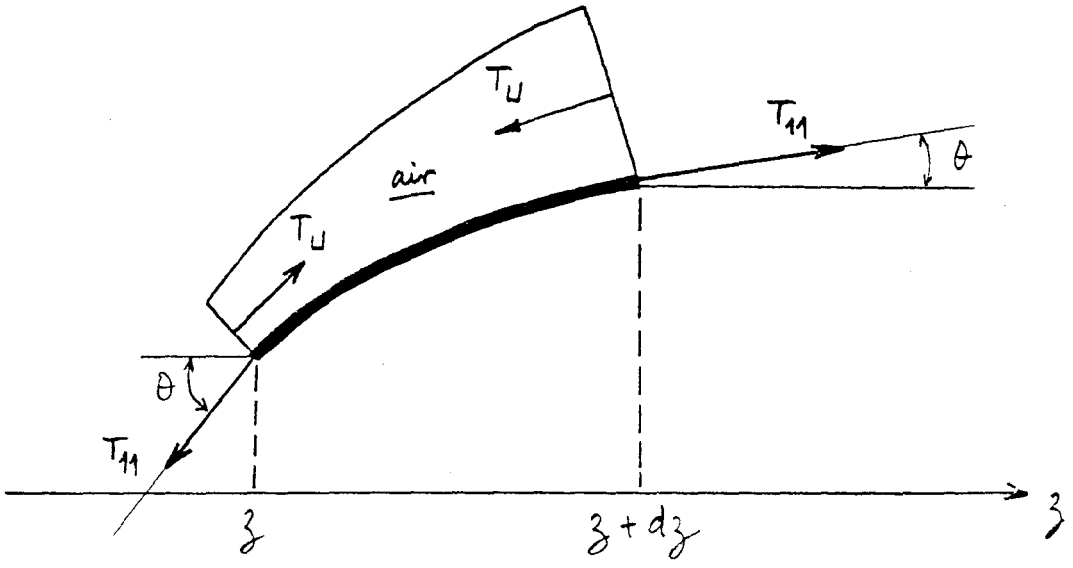
■

L'évolution de l'épaisseur ainsi que le profil de similitude étant donnés, la relation (7.4.5) permettra de calculer la vitesse maximale U_{max} en tout point. Remarquons que ce calcul n'est pas systématiquement indispensable.

7.4.3 Efforts exercés sur le film

■ Illustrons le principe de la modélisation des efforts exercés par le jet dans le cas de la configuration plane.

figure 7.4.2



La portion de film ci-dessus est soumise:

- aux tensions dans le film T_{11},
- éventuellement, aux forces dues à la surpression interne,
- et finalement, de la part du jet, aux "tensions fluides" T_U telles que:

$$T_U = \int_{\eta = 0}^{\eta_{max}} \rho_{air}\, U^2\, d\eta \qquad (7.4.6)$$

Dans le cas de la bulle, la grandeur suivante interviendra:

$$F_U = \int_{\Sigma_{air}} \rho_{air}\, U^2\, d\Sigma_{air} \qquad (7.4.7)$$

■ Comme précédemment, T_U et F_U seront rendues adimensionnelles. D'où, respectivement τ_U et Φ_U.

De possibles paramètres adimensionnels sont:

$$\left(T_U \right)_{z=0} \Big/ T_{Z\ ref}\ , \qquad \left(F_U \right)_{z=0} \Big/ F_{Z\ ref}$$

Cependant, par souci de simplification et afin de ne pas perdre le sens physique, nous garderons la vitesse moyenne de sortie U_0 comme paramètre.

7.4.4 Discussion

Les T_U et F_U représentent, en quelque sorte, des tensions et forces négatives auxquelles seront associées des raideurs négatives.

De ce point de vue, le modèle ainsi élaboré "colle" à la réalité, malgré sa relative simplicité.

Par ailleurs, il s'agit, compte-tenu des petits mouvements de la paroi, d'une modélisation quasi-stationnaire.

7.5 METHODOLOGIE D'ETUDE

Nous présentons ci-après la méthodologie que nous adopterons pour étudier l'effet de la prise en compte des efforts exercés par le jet d'air de refroidissement sur le film.

Précisons tout d'abord que le débit d'air permet d'ajuster la hauteur de figeage, pour un taux de gonflage et un taux d'amincissement donnés. En conséquence, pour une bulle donnée, le débit d'air est fonction du débit d'extrusion.

Néanmoins, dans un premier temps et afin de mieux mettre en évidence les effets intrinsèques des efforts exercés par le jet d'air, nous ferons varier U_0, et ce pour un débit d'extrusion donné.

Un telle analyse peut avantageusement être effectuée pour des conditions isothermes.

Par la suite, nous considèrerons des cas de refroidissement réalistes.

Dans ce cas, faire varier la vitesse revient à faire varier la corrélation reliant cette dernière au coefficient de transfert de chaleur.

Nous ne considèrerons, dans un premier temps, que le cas d'un fluide newtonien. Par la suite, nous traiterons le cas de fluides viscoélastiques si les résultats de l'analyse newtonienne l'exigent.

7.6 ETIRAGE D'UN FILM PLAN

7.6.1 Mise en équations

■ Les forces de viscosité étant négligées, la présence du jet d'air ne modifie pas l'état stationnaire.

Le présent chapitre se limitera donc à l'étude des petits mouvements transversaux W (cf. § 4.3.3) du film autour de sa position d'équilibre. En effet, ces mouvements sont affectés par les efforts dus au jet d'air.

■ L'équilibre dynamique suivant la normale s'écrit cette fois-ci:

$$\rho\, H \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(T_{11} - T_U \right) \frac{\partial W}{\partial z} \right] \qquad (7.6.1)$$

avec

$$T_U = \int_{\eta = 0}^{\eta_F} \rho_{air}\, U^2\, d\eta \qquad \text{tension fluide} \qquad (7.6.2)$$

Par ailleurs, T_U peut s'écrire:

$$T_U = \rho_{air}\, U_{max}^2\, \delta\, K_1 \qquad (7.6.3)$$

avec

$$K_1 = \int_0^{\gamma_F} \left(\frac{U}{U_{max}} \right)^2 d\gamma \qquad (7.6.4)$$

K_1 ne dépend alors que du profil de similitude.

■ Il est facile de voir que la limite de stabilité est donnée par:

$$T_{11} = T_U \qquad (7.6.5)$$

Par ailleurs, nous avons les deux cas suivants:

$T_{11} - T_U > 0$ les ω sont imaginaires. Le système est stable.

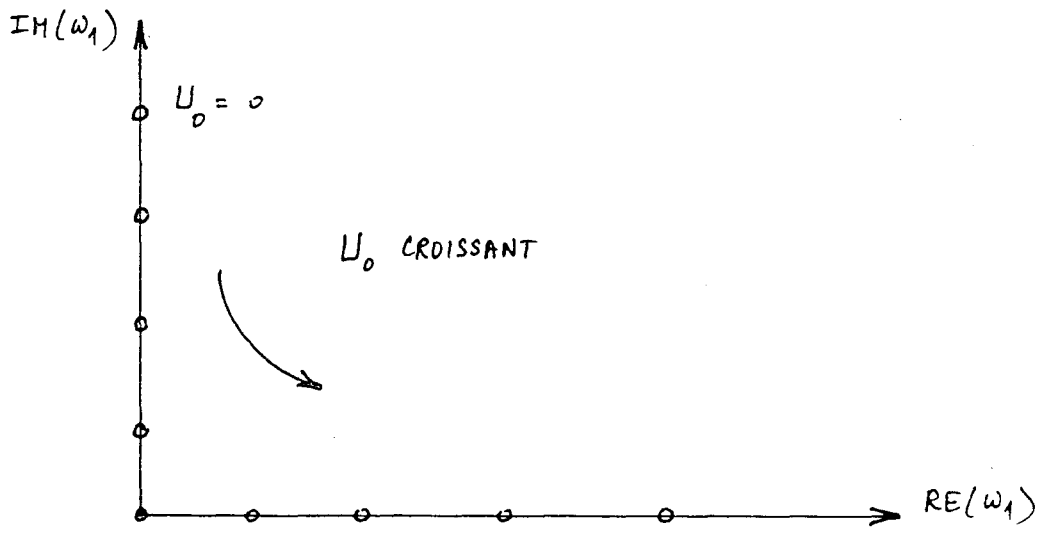
$T_{11} - T_U < 0$ les ω sont réelles. Le système est instable.

7.6.2 Résultats

- Conformément à la méthodologie exposée au § 7.5, faisons varier la vitesse U_0.

Lorsque celle-ci augmente, les valeurs propres (purement imaginaires pour U_0=0) diminuent et deviennent réelles positives, suivant la figure ci-dessous.

figure 7.6.1. Evolution de la première valeur propre en fonction de la vitesse de sortie U_0 de l'écoulement



L'instabilité qui apparait alors n'est pas oscillatoire. Il s'agit plutôt d'un gauchissement ("flambage") du film, la raideur négative associée au jet d'air l'emportant sur celle, positive, associée à la tension dans le film.

En guise d'application, considérons, de nouveau, le cas de refroidissement réaliste qui nous a précédemment servi à évaluer la vitesse critique de flottement:

E	= 20
De	= 0,1
V_0	= 1 cm/s
F_Z	= 20 N/m
h_C	= 20 $w/m^2°C$

tableau 7.6.1

Nous obtenons alors:

$$U_{0\ critique} \simeq 50\ m/s$$

La valeur critique obtenue, relativement importante, excède largement la vitesse nécessaire pour le refroidissement qui est d'environ 3 m/s (cf. Annexe F1).

■ Le débit d'air de refroidissement Q_{air} étant fonction du débit d'extrusion Q_E, le problème peut alors se poser en terme de débit d'extrusion critique.

La question est alors de savoir s'il existe une valeur de débit d'extrusion au delà de laquelle les tensions fluides l'emportent.

Nous avons alors (cf. Annexe F2):

$$T_U = k_1 \left(Q_E \right)^{2/n} \qquad (7.6.6)$$

où l'on a supposé, pour simplifier:

$$h_C = k_3 \left(U_0 \right)^n \qquad (7.6.7)$$

U_0 étant la vitesse de sortie de l'air de refroidissement. En général:

$$1 < n < 1,5 \qquad (7.6.8)$$

Par ailleurs (cf. également Annexe F2):

$$T_{11} = k_6 \, Q_E \qquad (7.6.9)$$

Remarquons que le coefficient k_6 dépend de Q_E dans le cas d'un fluide viscoélastique (par l'intermédiaire du nombre de Deborah).

Considérons de nouveau le cas précédent (tableau 7.6.1).

Nous affectons l'indice (0) aux grandeurs relatives au débit d'extrusion correspondant et que nous qualifions de débit de référence.

Nous avons alors:

$$U_0^{(0)} \simeq 3 \text{ m/s}$$

et

$$T_U^{(0)} \simeq 0{,}1 \text{ N/m}$$

Selon la méthode reportée en Annexe F2, le débit critique $Q_{ECRITIQUE}$ est tel que:

$$\left(\frac{Q_{E\ CRITIQUE}}{Q_E^{(0)}} \right) \simeq 10^7$$

Ce qui est totalement irréaliste.

7.6.3 Conclusion

Il ne peut y avoir d'instabilité liée à la présence du jet d'air de refroidissement.

En effet, pour que ça soit le cas, l'effort exercé par le jet d'air doit être identique à la tension dans le film. Or, cette dernière l'emporte largement.

7.7 ETIRAGE D'UN FILM AVEC SURPRESSION

7.7.1 Mise en équations

En tenant compte des efforts exercés par le jet d'air, nous pouvons établir les deux nouvelles équations d'équilibre suivantes:

– Equilibre axial:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left(T_{11} - T_U\right)\cos\vartheta - a\,\Delta P\right\} = 0 \qquad (7.7.1)$$

– Equilibre normal:

$$\Delta P = \frac{T_{11} - T_U}{\rho_1} \qquad (7.7.2)$$

T_U et K_1 étant définis de la même façon que précédemment (relations 7.6.2, 7.6.3 et 7.6.4).

Remarquons que dès lors où l'on a supposé T_U constante, le coefficient d'expansion C_E n'intervient plus dans les équations.

7.7.2 Calcul stationnaire

Le jet d'air a tendance à "aspirer" le film. Il en résulte qu'à (G, M) fixés et par rapport au cas où la quantité de mouvement du jet d'air est négligée (tableau 7.7.1):

– La force d'étirage garde sensiblement la même valeur,
– la différence de pression diminue au fur et à mesure que la vitesse du jet d'air augmente.

U_0 (m/s)	T_Z	B	τ_U
0.	11.5	5.42	0.
2.	11.5	5.32	0.2
4.	11.5	5.04	0.8
6.	11.5	4.57	1.8
8.	11.5	3.91	3.2
10.	11.5	3.07	5.

tableau 7.7.1. Effet de la vitesse de l'air de ref.
Fluide newtonien – Isotherme
G = 1,25 – M = 20
Autres données, cf. Annexe F3

Lorsque l'on se place dans des conditions réalistes, l'effet évoqué précédemment devient insignifiant.

7.7.3 Analyse de stabilité

Le jet d'air a un effet déstabilisant lorsque l'on impose la différence de pression B (tableau 7.7.2).

Par contre, la stabilité n'est nullement affectée lorsque l'on impose la quantité d'air emprisonnée A.

U_0 (m/s)	(E , B)	(A , E)
0.	(-0.27, 12.5)	(-0.02, 13.43)
4.	(-0.24, 12.5)	(-0.02, 13.43)
8.	(-0.11, 12.4)	(-0.02, 13.43)
12.	(+0.55, 12.0)	(-0.02, 13.43)

tableau 7.7.2. Effet de la vitesse de l'air de ref.
Fluide newtonien – Isotherme
G = 1,2 – M = 15 – P = 10^6
Autres données, cf. Annexe F3

■ Ces constatations restent valables en non-isotherme. Néanmoins, l'effet stabilisant du refroidissement, très énergique, l'emporte sur celui, déstabilisant, du jet d'air.

U_0 (m/s)	(E , B)	(A , E)
0.	(-8.79, 27.3)	(-0.02, 13.43)
4.	(-8.78, 27.3)	(-0.02, 13.43)
8.	(-8.74, 27.2)	(-0.02, 13.43)
12.	(-8.67, 27.1)	(-0.02, 13.43)
16.	(-8.48, 26.9)	(-0.02, 13.43)
20.	(-7.74, 25.6)	(-0.02, 13.43)

tableau 7.7.3. Effet de la vitesse de l'air de ref.
Fluide Newtonien – Non-isotherme
$G = 1{,}25$ – $M = 20$ – $D = 0{,}5$ – $\beta = 25$ – $T \simeq 0{,}6$
Autres données, cf. Annexe F3

Comme nous l'avons remarqué au § 7.5, le calcul ci-dessus correspond, en fait, à différentes valeurs de k_3 (relation 7.6.7), entrainant ainsi différentes valeurs de U_0.

A titre indicatif, pour k_3=4 et n=1.5 (corrélation de PETRIE (B1983)), nous avons $U_0 \simeq 4$m/s.

7.7.4 Conclusion

Lorsque l'on impose le taux de gonflage et le taux d'amincissement, le jet d'air ne modifie pas les grandeurs dans le film.

Ceci est vraisemblablement dû au fait que la forme de cette dernière n'est pas modifiée.

Par contre, la différence de pression nécessaire diminue au fur et à mesure que la vitesse du jet augmente.

Par ailleurs, le jet d'air a un effet déstabilisant lorsque l'on impose la différence de pression mais demeure sans influence lorsque l'on impose, au contraire, la quantité d'air emprisonnée.

Finalement, dans des conditions réalistes de refroidissement, en stationnaire ou concernant la stabilité, les effets du jet d'air demeurent peu importants vis-à-vis de ceux de la variation de température.

7.8 SOUFFLAGE DE GAINE

7.8.1 Mise en équations

Les deux nouvelles équations d'équilibre s'écrivent:

– Equilibre axial:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left[2\pi a\ T_{11} - F_U\right]\cos\vartheta - \Delta P\ \pi\ a^2\right\} = 0 \qquad (7.8.1)$$

– Equilibre normal:

$$\Delta P = \frac{T_{11} - T_U}{\rho_1} + \frac{T_{33}}{\rho_3} \qquad (7.8.2)$$

De nouveau, T_U est défini de la même façon que précédemment. F_U est donné par:

$$F_U = \int_{\Sigma_{air}} \rho\ U^2\ d\Sigma_{air} \qquad (7.8.3)$$

avec:

$$F_U = 2\pi\ \rho\ U_{max}^2\ \delta\left(a\ K_1 + \delta\cos\vartheta\ K_2\right) \qquad (7.8.4)$$

et:

$$K_2 = \int_0^{\gamma_F}\left(\frac{U}{U_{max}}\right)^2 \gamma\ d\gamma \qquad (7.8.5)$$

K_2 ne dépendant, comme K_1, que du profil de similitude.

Remarquons que nous avons à présent:

$$F_U = Cte \qquad (7.8.6)$$

Par ailleurs, le coefficient d'expansion C_E intervient, par l'intermédiaire de T_U.

7.8.2 Calcul stationnaire

Afin de mettre en évidence les effets des efforts exercés par le jet d'air, nous avons considéré un cas isotherme.

Soit l'exemple ci-dessous (tableau 7.8.1). L'essentiel des données est reporté en Annexe F3.

U_0 (m/s)	T_z	B	τ_U	Φ_U
0.	2.67	0.233	0.	0.
2.	2.68	0.233	0.02	0.02
4.	2.70	0.236	0.08	0.08
6.	2.74	0.241	0.18	0.19
8.	2.80	0.247	0.32	0.34
10.	2.87	0.255	0.45	0.47

tableau 7.8.1. Effet de la vitesse de l'air de refroidissement
SG – Fluide newtonien – isotherme
X = 5 – G = 3 – M = 20
F_{zref} = 1.26 N – ΔP_{ref} = 40 Pa

A G et M fixés, une augmentation de la vitesse de l'air de refroidissement a pour effet d'augmenter la force d'étirage ainsi que la différence de pression requises.

Conjointement, on assiste à une diminution de la pente initiale de la bulle.

Par ailleurs, l'influence de l'expansion du jet est insignifiante (nous avons considéré des valeurs comprises entre 2 et 5).

Dans des conditions réalistes de refroidissement, les efforts exercés par le jet d'air deviennent peu importants devant les forces dans le film.

Dans le cas de l'exemple précédent, une variation de U_0 de 0 à 20 m/s (valeur nécessaire pour le refroidissement $U_0 \simeq 4$ m/s) entraine des variations de la force d'étirage et de la différence de pression n'excédant pas 5%.

7.8.3 Analyse de stabilité

■ De nouveau, examinons l'effet des efforts exercés par le jet d'air à l'aide d'un cas isotherme (tableau 7.8.2). Nous n'avons considéré que les cas réalistes où l'on impose le taux d'étirage E.

U_0 (m/s)	(E , B)	(E , A)
0.	(+2.74, 0.)	(-0.20, 1.24)
2.	(+2.77, 0.)	(-0.20, 1.24)
4.	(+2.84, 0.)	(-0.19, 1.23)
6.	(+3.00, 0.)	(-0.17, 1.21)

tableau 7.8.2. Effet de la vitesse de l'air de ref.
Fluide newtonien – isotherme
X = 5 – G = 3 – M = 20
Autres données, cf. Annexe F3

On obtient un effet légèrement déstabilisant, que l'on impose B ou A.

Comme lors des cas précédents, dans les conditions réalistes de refroidissement, l'effet devient insignifiant.

7.8.4 Conclusion

Les effets du jet d'air consistent:

- en ce qui concerne le régime permanent, en une augmentation de la force d'étirage ainsi que de la différence de pression,
- par ailleurs, à déstabiliser la bulle.

Toutefois, les effets ci-dessus deviennent insignifiants lorsque les conditions sont réalistes.

7.9 CONCLUSION GLOBALE

Nous avons, au cours de cette seconde partie, abordé le problème sous l'aspect couplage fluide-structure. Ce vocable désigne, d'une manière générale, l'interaction entre un "milieu fluide" et un "milieu solide".

Dans la majorité des problèmes de ce type traités dans la littérature, le milieu fluide est décrit par un modèle d'écoulement potentiel.

Un tel modèle ne pouvant convenir pour le jet d'air, il nous a fallu rechercher une représentation adéquate.

Après s'être donné la structure du jet grâce à une synthèse de résultats expérimentaux, nous avons opté pour une prise en compte de sa quantité de mouvement dans les équations d'équilibre du film.

Nous avons alors considéré successivement les différents cas de figure précédents, de l'étirage d'un film plan au soufflage de gaine proprement dit. Voici les résultats que nous avons obtenus:

- Dans le cas de l'étirage d'un film plan, le jet d'air produit un effet de déstabilisation transversale.

- Lorsqu'il existe une surpression d'un coté du film, le jet d'air est, de nouveau, déstabilisant lorsque l'on impose la différence de pression mais demeure sans effet lorsque l'on impose la quantité d'air.

- Dans le cas du soufflage de gaine, le jet est également déstabilisant.

Ces différents effets constatés deviennent peu significatifs dès lors que l'on se place dans des conditions réalistes de refroidissement.

Le jet d'air ne peut donc déstabiliser la bulle et les conclusions concernant les instabilités dues à l'étirage demeurent valables.

CHAPITRE 8

CONCLUSION

8. CONCLUSION

■

Le soufflage de gaine est l'un des procédés de mise en forme des matières thermoplastiques les plus importants qui soit. De mise en oeuvre aisée, il permet d'obtenir, de façon économique, des films biétirés dotés d'excellentes propriétés physiques et mécaniques.

Cependant, dans certaines conditions, il apparait des instabilités empêchant toute production correcte car affectant les propriétés du film et pouvant même conduire à la rupture de ce dernier.

Les deux causes possibles sont les suivantes:

- l'étirage subi par le polymère fondu,
- l'interaction de type "couplage fluide-structure" entre la bulle et le jet d'air de refroidissement.

Le présent travail constitue une contribution à l'étude de ce problème de stabilité, problème peu abordé dans la littérature, **l'objectif final étant de mieux maitriser la fabrication**.

L'approche que nous avons adoptée a consisté à effectuer, après une étude bibliographique, une modélisation suivie d'une simulation numérique.

■

Dans un premier temps, après avoir précisé les paramètres de mise en oeuvre, nous avons donné une description des phénomènes d'instabilités en question.

Les observations reportées, qu'elles proviennent d'une étude expérimentale antérieure ou d'études expérimentales publiées dans la littérature, indiquent clairement des instabilités dues à l'étirage subi par le polymère fondu.

De plus, l'interaction avec le jet d'air peut se traduire par différents phénomènes. Voici ceux dont nous avons acquis la certitude:

- légères vibrations ou tremblements dus à la turbulence,
- instabilité vraisemblablement due à une mauvaise répartition du jet sur le pourtour de la bulle.

La possibilité d'instabilités liées à une interaction du type "fluide-structure" n'est cependant pas à exclure.

■ **Le travail se divise ensuite en deux grandes parties:**

- l'étude des instabilités d'étirage,
- l'étude des instabilités liées au couplage fluide-structure.

Nous avons défini un **problème modèle** simple dans les buts suivants:

- meilleure appréhension des phénomènes physiques,
- validation des méthodes d'analyse de par sa simplicité.

Il s'agit de l'étirage d'un film plan extrudé au travers d'une filière plate infiniment large, permettant un traitement en bidimensionnel, avec ou sans différence de pression de part et d'autre du film. L'écoulement est alors élongationnel uniaxial, contrairement au cas du soufflage de gaine où il est élongationnel biaxial.

■ En ce qui concerne l'**étude des instabilités d'étirage**, nous avons tout d'abord effectué une étude bibliographique portant sur:

- les écoulements élongationnels uniaxiaux, de loin les plus étudiés dans cette catégorie d'écoulement,
- le soufflage de gaine proprement dit.

et concernant tant le régime permanent que les phénomènes d'instabilité.

• Les principaux résultats des différentes études reportées et dont nous avons tenu compte sont les suivants:

* Afin de rendre maniable ces différents problèmes d'écoulements à surface libre, il convient d'élaborer un système d'équations monodimensionnelles en se plaçant dans le cadre de l'approximation dite du "film mince", approximation se traduisant par les hypothèses suivantes:

- l'épaisseur du film est faible devant les rayons de courbure,
- l'épaisseur du film est faiblement variable le long de l'axe d'étirage.

* En ce qui concerne l'étude du régime permanent:

– Bien que les polymères à l'état fondu soient caractérisés par une distribution de temps de relaxation, les lois de comportement à dérivation convective de la contrainte et à temps de relaxation unique permettent d'obtenir des résultats qualitativement corrects.

Une condition impérative est toutefois de "corriger" le temps de relaxation, ou plus précisément le module de cisaillement mesuré généralement par voie viscométrique.

Parmi de tels modèles, le modèle de Maxwell traduit le comportement viscoélastique le plus élémentaire. Lors d'un écoulement élongationnel, il présente le défaut suivant: existence d'un taux d'étirage limite pour un nombre de Deborah donné et vice-versa.

– On constate une prépondérance de l'effet du refroidissement due à la forte variation des propriétés physiques du matériau avec la température.

* L'étude de la stabilité de l'étirage d'un filament ou d'un film permet de mettre en évidence les mécanismes élémentaires de l'instabilité d'étirage ou "Draw Resonance":

- apparition au-delà d'un taux d'étirage critique lorsque l'on impose la vitesse d'étirage en un point d'abscisse fixe,
- le phénomène est indépendant de la loi rhéologique et, en particulier, de l'élasticité du fluide.

Par ailleurs, il existe un certain nombre d'effets, tous stabilisants, qui sont associés:

- au refroidissement,
- à l'élasticité du fluide,
- à la fluctuation de la ligne de figeage,
- à l'élasticité de la partie solidifiée.

Le premier étant celui qui prédomine.

En pratique et pour des grandes distances d'étirage, aucune instabilité n'est alors prédite, conformément à l'observation expérimentale.

* L'approche théorique la plus significative concernant les instabilités en soufflage de gaine conclut, dans la plage réaliste de paramètres et en imposant le taux d'étirage, à:

- une instabilité inconditionnelle lorsque l'on impose la différence de pression,
- une stabilité inconditionnelle lorsque l'on impose la quantité d'air emprisonnée.

* Les études de stabilité sont basées sur le formalisme de la stabilité linéaire, consistant à superposer des perturbations infinitésimales à la solution stationnaire et conduisant à un problème aux valeurs propres.

D'une manière générale, le spectre des valeurs propres obtenu à l'aide d'une méthode numérique quelconque dépend **fortement** de la méthode de discrétisation ainsi que du domaine discrétisé. Il apparait, en particulier, des solutions parasites pouvant générer des instabilités artificielles.

- A partir de ces différentes constatations, nous avons tiré les conclusions suivantes:

* Même si l'on reste dans le formalisme de la stabilité linéaire, il est important de définir une méthodologie précise d'obtention des valeurs propres.

* Pour ce faire, le modèle newtonien s'avère indispensable. Malgré sa simplicité, il permet aussi une description des différents phénomènes rencontrés. Cette description sert de guide pour l'interprétation des résultats obtenus avec des modèles plus sophistiqués.

* Il convient d'adopter in finer un modèle rhéologique réaliste. Notre choix s'est porté sur le modèle de PHAN-THIEN et TANNER ou modèle de PTT, pouvant se réduire au modèle de Maxwell pour des valeurs particulières de ses paramètres ajustables.

- Partant de ces conclusions, nous avons ensuite abordé:

  - l'étirage d'un film plan,
  - l'étirage d'un film plan avec une surpression d'un coté du film,
  - le soufflage de gaine proprement dit.

* L'étude du régime permanent pour l'étirage d'un film plan nous a, dans un premier temps, permis de mettre en évidence l'exacerbation des lacunes du modèle de Maxwell en présence d'un refroidissement.

Permettant d'y remédier, le modèle de PTT, étudié par la suite, a fourni de bons résultats:

– Il a permis de prédire un profil de vitesse linéaire et des niveaux de contraintes élevés par rapport à un fluide newtonien de même caractéristiques de viscosité étiré dans les mêmes conditions.

– Il n'existe pas de taux d'étirage limite. Cependant, lorsque ce dernier augmente (ou le nombre de Deborah), les profils deviennent irréalistes, indiquant ainsi une mise en défaut de la loi rhéologique.

* L'analyse des valeurs propres, effectuée dans le cas d'un film plan, a confirmé l'existence de solutions parasites, générées par les méthodes de discrétisation d'ordres élevés. A l'inverse des solutions réelles, ces solutions parasites dépendent fortement:

- des schémas de discrétisation adoptés,
- du domaine discrétisé,
- de la forme que l'on donne aux équations.

Ainsi, le spectre obtenu est la superposition:

- du spectre réel, tronqué,
- du spectre des valeurs parasites.

Nous avons alors élaboré et validé une méthodologie de détermination "exacte" des valeurs propres:

- une technique générale basée sur des méthodes matricielles et fondée sur la faible sensibilité des solutions réelles vis-à-vis du schéma et du domaine discrétisé.

- une méthode de tir permettant de suivre de façon économique l'évolution de la première valeur propre en fonction de la variation des différents paramètres.

* Dans le cas où il existe une surpression d'un coté du film, un paramètre supplémentaire apparait: le taux de gonflage.

Toutefois, la réponse en stationnaire diffère très peu de celle de l'étirage sans surpression.

* Les études de stabilité, que le fluide soit newtonien ou viscoélastique, permettent finalement d'établir les résultats suivants:

- effet déstabilisant du taux d'étirage et du taux de gonflage,
- effet stabilisant associé à un contrôle de la quantité d'air emprisonnée par rapport à un contrôle de la différence de pression,
- effet fortement stabilisant du refroidissement.

C'est ce dernier qui l'emporte et dans le cas d'un refroidissement réaliste du film, aucune instabilité n'apparait.

* Pour le soufflage de gaine proprement dit, nous avons tout d'abord analysé brièvement la solution stationnaire pour les différents modèles rhéologiques considérés.

A des fins de validation, nous avons, par la suite, simulé des résultats expérimentaux comptant parmi les plus complets actuellement.

On retrouve la nécessité de "corriger" la valeur du module de cisaillement. Les tests concernant le modèle de PTT se sont avérés concluants.

Remarquons que, dans le cas du modèle de Maxwell, les résultats que nous obtenons diffèrent de ceux obtenus antérieurement par d'autres auteurs. Les raisons de cet écart restent à analyser.

L'étude de stabilité confirme les résultats obtenus par CAIN et DENN (B1988), à savoir que dans la plage de valeurs adoptées en pratique, il y a:

- stabilité inconditionnelle lorsque l'on impose la quantité d'air emprisonnée,
- instabilité inconditionnelle lorsque que l'on impose la différence de pression.

Remarquons que les effets:

- du refroidissement,
- de l'élasticité du fluide,
- de la fluctuation de la ligne de figeage,
- de l'élasticité de la partie solidifiée.

demeurent stabilisants mais, contrairement au cas plan, ne sont pas très énergiques.

L'ensemble des résultats obtenus permet d'établir un guide de la conduite du procédé si, pour diverses raisons (matière différente notamment), il est utile de s'écarter des réglages "classiques".

■

En ce qui concerne l'**étude du couplage fluide-structure**, comme précédemment, nous avons entrepris une étude bibliographique ayant porté sur ce thème.

• Notre problème se démarque des cas de figures classiques dont les milieux fluides peuvent être représentés par un modèle d'écoulement potentiel qui, de par sa simplicité, est particulièrement indiqué pour une analyse de stabilité.

Une telle modélisation ne peut pas, bien évidemment, convenir pour le jet d'air de refroidissement.

• Nous avons alors effectué une étude bibliographique concernant les jets pariétaux en général afin de dégager des éléments susceptibles de nous guider. Celle-ci a permis de mettre en évidence:

- l'existence de profil de similitude pour la vitesse,

– l'influence de ou des courbures de la surface sur le développement du jet. En particulier, lorsque la surface est gauche, l'épaisseur du jet est supérieure à celle correspondant à une surface plane.

– la prépondérance du modèle de turbulence en ce qui concerne les prédictions numériques.

- Il nous a fallu, par la suite, rechercher une modélisation plus réaliste du milieu fluide.

Nous avons tout d'abord supposé l'absence de décollement.

Finalement, le calcul "exact" du jet étant exclu, une première appproche a consisté à prendre en compte, dans les équations d'équilibre du film, la quantité de mouvement du jet, la structure de ce dernier étant supposée non-perturbée par les petits mouvements de la "paroi".

Nous avons, par ailleurs, considéré que le débit de quantité de mouvement du jet se conserve, en module.

D'une manière générale, le modèle ainsi élaboré associe une raideur négative au jet d'air et "colle" donc à la réalité malgré sa relative simplicité. Par ailleurs, la modélisation est de type quasi-stationnaire.

- Les résultats obtenus sont alors les suivants:

* Dans le cas du film plan sans surpression, il apparait un effet de déstabilisation transversale.

* Dans le cas de l'étirage d'un film avec surpression et pour un taux de gonflage ainsi qu'un taux d'amincissement donnés, la présence du jet d'air modifie la différence de pression mais n'affecte pas la force d'étirage.

L'effet du jet d'air est encore déstabilisant lorsque l'on impose la différence de pression mais ne se fait nullement sentir lorsque l'on impose la quantité d'air emprisonnée.

* Dans le cas du soufflage de gaine:

En stationnaire, l'effet du jet d'air est, en général, de majorer la force d'étirage ainsi que la différence de pression, lorsque l'on impose le taux de gonflage et le taux d'amincissement.

Le jet d'air a, de nouveau, un effet déstabilisant et ce quels que soient les paramètres imposés.

Toutefois, ces effets sont peu importants et nous pouvons finalement affirmer que:

- nous ne sommes en aucun cas en présence d'un phénomène de type flottement de paroi.
- le jet d'air, axisymétriquement réparti, ne peut déstabiliser la bulle.

Ainsi, les conclusions établies lors de l'étude des instabilités d'étirage restent valables.

■

Pour conclure ce travail, résumons les principaux acquis:

* Les instabilités qui apparaissent sont dues à l'étirage subi par le polymère. Nous entendons par là des instabilités uniquement liées au caractère élongationnel de l'écoulement, et à condition que l'on maintienne constants certains paramètres de conduite du processus.

L'interaction entre la bulle et le jet d'air de refroidissement ne peut, en fait, générer d'instabilité tant que l'ensemble demeure axisymétrique.

* La méthodologie de calcul des valeurs propres est acquise et les programmes sont disponibles.

* L'adoption du problème modèle de l'étirage plan s'est avérée fructueuse pour l'ensemble de l'étude et, en particulier, pour le point précédent.

* L'insensibilité des résultats obtenus par rapport aux différents modèles rhéologiques permettent de les considérer comme définitivement acquis.

* Bien que cette étude ait été effectuée avec quelques hypothèses restrictives, il est peu probable que les principaux résultats soient modifiés en relaxant les plus fortes, c'est à dire en prenant en compte:

  - la partie solide de la bulle autrement qu'à travers une hauteur de figeage,
  - des perturbations non-axisymétriques.

■

Par ailleurs, il est important de noter que le soufflage de gaine demeure un problème modèle pour les écoulements élongationnels.

R E F E R E N C E S

A. ECOULEMENTS ELONGATIONNELS UNIAXIAUX

B. SOUFFLAGE DE GAINE

C. MATIERES PLASTIQUES, DIVERS

D. MODELES RHEOLOGIQUES

E. CALCUL DE VALEURS PROPRES

F. COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE

G. JETS PARIETAUX

A. ECOULEMENTS ELONGATIONNELS UNIAXIAUX

AIRD G.R. et YEOW Y.L.
"Stability of Film Casting of Power-Law Liquids".
IEC Fund., **22**, 7 (1983).

ANTURKAR N.R. et CO A.
"Draw Resonance in Film Casting of Viscoelastic Fluids: A Linear Stability Analysis".
J. Non-Newt. Fluid Mech., **28**, 287 (1988)

BERIS A.N. et LIU B.
"Time-Dependent Fiber Spinning Equations. 1. Analysis of the Mathematical Behavior".
J. Non-Newt. Fluid Mech., **26**, 341 (1988)

CHANG J.C. et DENN M.M.
"An Experimental Study of Isothermal Spinning of a Newtonian and a Viscoelastic Liquid".
J. Non-Newt. Fluid Mech., **5**, 369 (1979).

CHANG J.C., DENN M.M. et GEYLING F.T.
"Effects of Inertia, Surface Tension and Gravity on the Stability of Isothermal Drawing of Newtonian Fluids".
IEC Fund., **20**, 147(1981).

DEMAY Y. et AGASSANT J.F.
"Application de la Stabilité Linéaire à l'Etude du Filage Textile Isotherme et Non-Isotherme".
J. Mec. Th. Appl., **1**, 763 (1982).

DEMAY Y. et AGASSANT J.F.
"Experimental Study of the Draw Resonance in Fiber Spinning".
J. Non-Newt. Fluid Mech., **18**, 187 (1985).

DENN M.M. et MARRUCCI G.
"Effect of a Relaxation Time Spectrum on Mechanics of Polymer Melt Spinning".
J. Non-Newt. Fluid Mech., **2**, 159 (1977)

DENN M.M., PETRIE C.J.S. et AVENAS P.
"Mechanics of Steady Spinning of a Viscoelastic Liquid".
AIChE J., **21**, 791 (1975).

DONNELY G.J. et WEINBERGER C.B.
"Stability of Isothermal Fiber Spinning of a Newtonian Fluid".
IEC Fund., **14**, 334 (1975)

FISHER R.J. et DENN M.M.
"A Theory of Isothermal Melt Spinning and Draw Resonance".
AIChE J., **22**, 236 (1976).

FISHER R.J. et DENN M.M.
"Mechanics of Nonisothermal Polymer Melt Spinning".
AIChE J., **23**, 23 (1977).

FISHER R. J., DENN M.M. et TANNER R.I.
"Initial Profil Development in Melt Spinning".
IEC Fund., **19**, 195 (1980).

GAGON D.K. et DENN M.M.
"Computer Simulation of Steady Polymer Melt Spinning"
Polym. Eng. Sci., **21**, 844 (1981)

GUPTA R.K., PUSZYNSKI J. et SRIDHAR T.
"Steady Spinning of the OLdroyd Fluid B. I. Theory".
J. Non-Newt. Fluid Mech., **21**, 99 (1986)

HAN C.D., à compléter
"Studies on Melt Spinning . III. Flow Instabilities in Melt Spinning: Melt Fracture and Draw Resonance".
J. Appl. Polym. Sci., **16**, 3307 (1972).

ISHIHARA H. et KASE S.
"Studies on Melt Spinning. V. Draw resonance as a limit cycle"
J. Appl. Polym. Sci., **19**, 557 (1975).

ISHIHARA H. et KASE S.
"Studies on Melt Spinning. VI. Simulation of Draw Resonance using Newtonian and Power Law Viscosities".
J. Appl. Polym. Sci., **20**, 169 (1976)

KEUNINGS R., CROCHET M.J. et DENN M.M.
"Profile Development in Continuous Drawing of Viscoelastic Liquids".
IEC Fund., **22**, 347 (1983).

MATOVICH M.A. et PEARSON J.R.A.
"Spinning a Molten Threadline (Steady State Isothermal Viscous Flows)".
IEC Fund., **8**, 512 (1969).

NAM S. et BOGUE D.C.
"Dynamics of Steady and Unsteady Melt Spinning"
IEC Fund., **23**, 1 (1984)

PAPANASTASIOU T.C., MACOSKO C.W., SCRIVEN L.E. et ZHAO CHEN
"Fiber Spinning of Viscoelastic Liquid"
AIChE J., **33**, 834 (1987)

PEARSON J.R.A. et MATOVICH M.A.
"Spinning a Molten Threadline (Stability)".
IEC Fund., **8**, 605 (1969).

PEARSON J.R.A., SHAH Y.T. et MHASKAR R.D.
"On the Stability of Fiber Spinning of Freezing Fluids"
IEC Fund., **15**, 31 (1976)

PHAN-THIEN N.P. et CASWELL B.
"A Nearly Elongational Flow Analysis of the Fibre Spinning Flow".
J. Non-Newt. Fluid Mech., **21**, 225 (1986).

SHAH Y.T. et PEARSON J.R.A.
"On the Stability of Nonisothermal Fiber Spinning. General Case".
IEC Fund., **11**, 150 (1972)

WILLIEN J.L., DEMAY Y. et AGASSANT J.F.
"Etude de la Stabilité d'Etirage d'un Fluide Newtonien: Application au Filage Textile et au Filage du Verre".
JMTA, **7**, 719 (1988)

YEOW Y.L.
"On the Stability of Extending Films: a Model for the Film Casting Process".
J. Fluid Mech., **66**, 613 (1974).

B. SOUFFLAGE DE GAINE

CAIN J.J. et DENN M.M.
"Multiplicities and Instabilities in Film Blowing".
Polym. Eng. Sci., **28**, 1527 (1988).

CAO B. et CAMPBELL G.A.
"Viscoplastic-Elastic Modelling of Tubular Blow Film Processing".
AIChE J., **36**, 420 (1990).

FEIDT A.
Rapport de Stage, Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille, Université des Sciences et Techniques de Lille I (1983).

GUPTA R.K.
"A New Non-Isothermal Rheological Constitutive Equation and Its Application to Industrial Film Blowing Processes".
PhD Thesis, University of Delaware (1980).

HAN C.D. et PARK J.Y.
"Studies on Blown Film Extrusion. I. Experimental Determination of Elongational Viscosity".
J. Appl. Polym. Sci., **19**, 3257 (1975a).

HAN C.D. et PARK J.Y.
"Studies on Blown Film Extrusion. II. Analysis of Deformation and Heat Transfer Processes".
J. Appl. Polym. Sci., **19**, 3277 (1975b).

HAN C.D. et PARK J.Y.
"Studies on Blown Film Extrusion. III. Bubble Instability"
J. Appl. Polym. Sci., **19**, 3291 (1975c).

HAN C.D. et SHETTY R.
"Flow Instability in Tubular Film Blowing. 1. Experimental Study".
IEC Fund., **16**, 49 (1977).

KANAI T. et WHITE J.L.
"Kinematics, Dynamics and Stability of the Tubular Film Extrusion of Various Polyethylenes".
Polym. Eng. Sci., **24**, 1185 (1984).

LUO X.L. et TANNER R.I.
"A Computer Study of Film Blowing".
Polym. Eng. Sci., **25**, 620 (1985).

MINOSHIMA W. et WHITE J.L.
"Instability Phenomena in Tubular Film and Melt Spinning of Rheologically Characterized High Density, Low Density and Linear Low Density Polyethylenes".
J. Non-Newt. Fluid Mech., **19**, 275 (1986).

PEARSON J.R.A. et PETRIE C.J.S.
"The Flow of a Tubular Film. Part 1. Formal mathematical representation".
J. Fluid Mech., **40**, 1 (1970a)

PEARSON J.R.A. et PETRIE C.J.S.
"The Flow of a Tubular Film. Part 2. Interpretation of the Model and Discussion of Solution".
J. Fluid Mech., **42**, 609 (1970b).

PETRIE C.J.S.
"A Comparison of Theoretical Predictions with Published Experimental Measurements on the Blown Film Process".
AIChE J., **21**, 275 (1975).

PETRIE C.J.S.
"Film Blowing, Blow Molding and Thermoforming".
"Computational Analysis of Polymer Processing", Chap.7, Applied Science Publishers, New-York (1983).

YEOW Y.L.
"Stability of Tubular Film Flow: a Model of the Film-Blowing Process".
J. Fluid Mech., **75**, 577 (1976).

C. MATIERES PLASTIQUES, DIVERS

AGASSANT J.F., AVENAS P. et SERGENT J.Ph
"La mise en forme des matières plastiques – Approche thermomécanique".
Technique et Documentation (1986)

DENN M.M.
"Issues in Viscoelastic Fluid Mechanics"
Ann. Rev. Fluid Mech., **22**, 13 (1990).

HAN C.D.
"Rheology in polymer processing".
Academic Press, New-York (1976).

MINOSHIMA W. et WHITE J.L.
"A Comparative Experimental Study of the Isothermal Shear and Uniaxial Elongational Rheological Properties of Low Density, High Density and Linear Low Density Polyethylenes".
J. Non-Newt. Fluid Mech., **19**, 251 (1986).

PETRIE C.J.S. et DENN M.M.
Instabilities in Polymer Processing".
AIChE J., **22**, 209 (1976).

D. MODELES RHEOLOGIQUES

ACIERNO D., LA MANTIA F.P., MARRUCCI G. et TITOMANLIO G.
"A Non-Linear Viscoelastic Model with Structure-Dependent Relaxation Times".
J. Non-Newt. Fluid Mech., **1**, 125 (1976)

PHAN-THIEN N.P.
"A Nonlinear Network Viscoelastic Model"
J. Non-Newt. Fluid Mech., **22**, 259 (1978)

PHAN-THIEN N.P. et TANNER R.I.
"A new Constitutive Equation Derived form Network Theory"
J. Non-Newt. Fluid Mech., **2**, 353 (1977)

E. CALCUL DE VALEURS PROPRES

LIU B. et BERIS A.N.
"Time-Dependent Fiber Spinning Equations. 2. Analysis of the Stability of Numerical Approximations".
J. Non-Newt. Fluid Mech., **26**, 363 (1988).

RENARDY et RENARDY
"Linear Stability of PLane Couette Flow of an Upper Convected Maxwell Fluid".
J. Non-Newt. Fluid Mech., **22**, 23 (1986)

VAN SCHAFTINGEN
"The Linear Stability of Numerical Solutions of Some Elementary Viscoelastic Flows".
J. Non-Newt. Fluid Mech., **20**, 271 (1986)

F. COUPLAGE FLUIDE STRUCTURE

DOWELL E.H.
"Aeroelastic Stability of Plates and Shells: An Innocent's Guide to the Literature".
Int. Symp., Union of Theoretical and Applied Mechanics, Herrenalb (1969)

DOWELL E.H.
"Panel Flutter: A Review of the Aeroelastic Stability of Plates and Shells".
AIAA J., **8**, 385 (1970).

DOWELL E.H.
"Flutter of Plates and Shells in Practice".
Proc. Symp., "Practical Experience with Flow Induced Vibrations", Karlsruhe (1979)

HINCHEY M. et SULLIVAN P.
"Kelvin-Helmholtz Stability Analysis of Air Cushion Landing Gear Trunk Flutter".
J. Aircraft, **19**, 94 (1982).

NEWMAN B.G.
"The Aerodynamics of Flexible Membranes".
Proc. Indian Acad. Sci. (Eng. Sci.), **5**, 107 (1982).

SAGNER M. et ROUQUIE G.
"Vibrations d'Obstacles dans les Circuits Hydrauliques".
La Houille Blanche, **3**, 115 (1979).

WILSON D.E.
"The Unsteady Boundary Layer on an Oscillating Thin Membrane".
Fluid Mechanics, Plasma Dynamics and Lasers Conference, Atlanta (1986)

G. JETS PARIETAUX

BAKKE P.
"An Experimental Investigation of a Wall Jet".
J. Fluid Mech., **2**, 467 (1957).

DVORAK F.A.
"Calculation of Turbulent Boundary Layers and Wall Jets over Curved Surfaces".
AIAA J., **11**, 517 (1973).

GLAUERT M.B.
"The Wall Jet".
J. Fluid Mech., **1**, 625 (1956).

GUITTON D.E et NEWMAN B.G.
"Self-Preserving Turbulents Wall Jets over Convex Surfaces".
J. Fluid Mech., **81**, 155 (1977).

LAUNDER B.E. et RODI W.
"The Turbulent Wall Jet - Measurements and Modelling".
Ann. Rev. Fluid Mech., **15**, 429 (1983).

MORISSON J.F. et GREGORY-SMITH D.G.
"Calculation of an Axisymmetric Turbulent Wall Jet over a Surface of Convex Curvature".
Int. J. Heat & Fluid Flow, **5**, 139 (1984).

SCHWARZ W.H. et COSART W.P.
"The Two-Dimensional Turbulent Wall Jet".
J. Fluid Mech., **10**, 481 (1961).

SHARMA R.N.
"Experimental Investigation of Conical Wall Jets".
AIAA J., **19**, 28 (1981).

SMITS A.J., EATON J.A. et BRADSHAW P.
"The Response of Turbulent Boundary Layer to Lateral Divergence".
J. Fluid Mech., **94**, 243 (1979).

ANNEXES

ANNEXES A

DIVERS

A1 MODELES RHEOLOGIQUES DE TYPE OLDROYD

A2 MODELE DE PHAN-THIEN ET TANNER (PTT)

A3 ELONGATION D'UNE EPROUVETTE CYLINDRIQUE

A4 CALCUL DES COMPOSANTES INSTATIONNAIRES DU TENSEUR DES TAUX DE DEFORMATION

A5 SCHEMAS DE DISCRETISATION

A6 CONDITIONS AUX LIMITES AVEC PRISE EN COMPTE DE LA FLUCTUATION DE LA POSITION DE LA LIGNE DE FIGEAGE

A7 CONDITION AUX LIMITES QUANTITE D'AIR MAINTENUE CONSTANTE

A8 METHODES MATRICIELLES - PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS AUX LIMITES

A9 PRISE EN COMPTE DE L'ELASTICITE DE LA PARTIE SOLIDIFIEE

A10 EFFET WEISSENBERG

ANNEXE A1

MODELES RHEOLOGIQUES DE TYPE OLDROYD

Pour un fluide viscoélastique de type Oldroyd, le tenseur des extra-contraintes $\overset{\Rightarrow}{\tau}$ obéit à une loi de la forme:

$$\lambda_1 \frac{\Delta_{abc}}{\Delta t} \overset{\Rightarrow}{\tau} + \overset{\Rightarrow}{\tau} = 2\,\eta \left[\overset{\Rightarrow}{d} + \lambda_2 \frac{\Delta_{a'b'c'}}{\Delta t} \overset{\Rightarrow}{d} \right] \qquad (A1.1)$$

λ_1, η et λ_2 dépendent du matériau et représentent respectivement le temps de relaxation, la viscosité et le temps de retardation.

Pour un tenseur $\overset{\Rightarrow}{J}$ quelconque, nous avons:

$$\frac{\Delta_{abc}}{\Delta t} \overset{\Rightarrow}{J} = \frac{\partial \overset{\Rightarrow}{J}}{\partial t} + V.\nabla \overset{\Rightarrow}{J} - \left(\overset{\Rightarrow}{\omega} . \overset{\Rightarrow}{J} - \overset{\Rightarrow}{J} . \overset{\Rightarrow}{\omega} \right) + a \left(\overset{\Rightarrow}{d} . \overset{\Rightarrow}{J} + \overset{\Rightarrow}{J} . \overset{\Rightarrow}{d} \right)$$

$$+ b \overset{\Rightarrow}{I} \text{ trace} \left(\overset{\Rightarrow}{d} . \overset{\Rightarrow}{J} \right) + c \overset{\Rightarrow}{d} \text{ trace } \overset{\Rightarrow}{J} \qquad (A1.2)$$

avec $\overset{\Rightarrow}{d} = \frac{1}{2} \left(\overset{\Rightarrow}{L} + \overset{\Rightarrow}{L}^t \right)$, $\overset{\Rightarrow}{\omega} = \frac{1}{2} \left(\overset{\Rightarrow}{L} - \overset{\Rightarrow}{L}^t \right)$

et $\overset{\Rightarrow}{L} = \text{grad } \vec{V}$

Il s'agit de la forme la plus générale d'une dérivation temporelle indépendante du repère.

Examinons quelques cas particuliers:

$\frac{\Delta_{000}}{\Delta t}$: dérivée de Jaumann ou dérivée corotationnelle, souvent notée $\frac{D}{Dt}$

$\frac{\Delta_{-100}}{\Delta t}$: dérivation supérieure convective d'Oldroyd, souvent notée $\frac{\delta}{\delta t}$ et que nous noterons $\frac{\Delta}{\Delta t}$

$a = a' = -1$, $b = b' = c = c' = 0$: **fluide d'Oldroyd-B**.

$$\lambda_1 \frac{\Delta}{\Delta t} \overset{\Rightarrow}{\tau} + \overset{\Rightarrow}{\tau} = 2\,\eta \left[\overset{\Rightarrow}{d} + \lambda_2 \frac{\Delta}{\Delta t} \overset{\Rightarrow}{d} \right] \qquad (A1.3)$$

Si, de plus, $\lambda_2 = 0$, nous avons un fluide de Maxwell.

L'équation ci-dessus peut également s'écrire:

$$\vec{\vec{\tau}} = \vec{\vec{\tau}}_S + \vec{\vec{\tau}}_P \qquad \text{(A1.4)}$$

avec

$$\vec{\vec{\tau}}_S = 2\,\eta_S\,\vec{\vec{d}} \qquad \text{(A1.5a)}$$

$$\lambda \frac{\Delta}{\Delta t}\vec{\vec{\tau}}_P + \vec{\vec{\tau}}_P = 2\,\eta_P\,\vec{\vec{d}} \qquad \text{(A1.5b)}$$

Nous avons alors le comportement d'un mélange: solvant newtonien de viscosité η_S et solution polymérique de viscosité η_P.

ANNEXE A2

MODELE DE PHAN-THIEN ET TANNER (PTT)

- **La forme générale** pour un écoulement non-isotherme est:

$$\vec{\vec{\tau}} = \sum_i \vec{\vec{\tau}}^{(i)} \qquad \text{(A2.1)}$$

$$\lambda_i \frac{D}{Dt}\vec{\vec{\tau}}^{(i)} - \vec{\vec{\tau}}^{(i)}\frac{d}{dt}(\text{Log } T) + \phi(T)\,K(\text{tr } \vec{\vec{\tau}}^{(i)})\,\vec{\vec{\tau}}^{(i)} = 2\,G_i\lambda_i\,\vec{\vec{d}} \qquad \text{(A2.2)}$$

λ_i et G_i sont déterminés à partir du spectre de relaxation,

$$\frac{D}{Dt}\vec{\vec{\tau}} = \frac{d}{dt}\vec{\vec{\tau}} - \vec{\vec{\Gamma}}\,.\,\vec{\vec{\tau}} - \vec{\vec{\tau}}\,.\,\vec{\vec{\Gamma}}^t = \frac{\Delta}{\Delta t}\vec{\vec{\tau}} + \xi\left(\vec{\vec{d}}\,.\,\vec{\vec{\tau}} + \vec{\vec{\tau}}\,.\,\vec{\vec{d}}\right) \qquad \text{(A2.3)}$$

$\vec{\vec{\Gamma}} = \vec{\vec{L}} - \xi\,\vec{\vec{d}}$ tenseur gradient de vitesse effectif. (A2.4)

$\vec{\vec{L}}$ tenseur gradient de vitesse,

ξ est un paramètre ajustable déterminé à partir de la viscosité dynamique. C'est une mesure du "shear thinning". Sa valeur est d'environ 0,2 pour le PEBD.

K est uniquement important en écoulement élongationnel. PHAN-THIEN (A1978) propose la forme suivante:

$$K(\mathrm{tr}\ \vec{\tau}^{(i)}) = \exp\left[\frac{\varepsilon}{G_i}\ \mathrm{tr}\ \vec{\tau}^{(i)}\right] \qquad \text{(A2.5)}$$

ε est un paramètre déterminé à partir de la courbe de viscosité élongationnelle. Sa valeur est d'environ 0,01.

T est la température absolue en Kelvin, $\phi(T)$ une fonction de T.

Remarquons qu'en faisant $\varepsilon = \xi = 0$, nous retrouvons les équations correspondant à un fluide de Maxwell.

- Pour un modèle à un temps de relaxation nous avons:

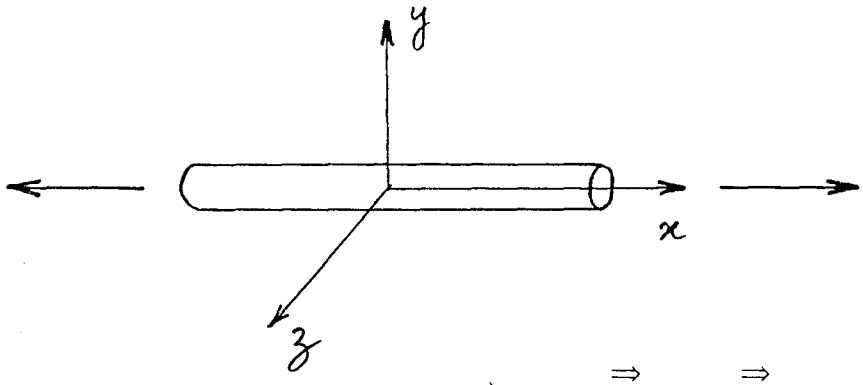
$$\lambda \frac{D}{Dt}\vec{\tau} + K(\mathrm{tr}\ \vec{\tau})\ \vec{\tau} = 2\ G\lambda\ \vec{d} \qquad \text{(A2.6)}$$

$$K(\mathrm{tr}\ \vec{\tau}) = \exp\left[\frac{\varepsilon}{G}\ \mathrm{tr}\ \vec{\tau}\right] \qquad \text{(A2.7)}$$

ANNEXE A3

ELONGATION D'UNE EPROUVETTE CYLINDRIQUE

Soit l'éprouvette en élongation ci-dessous:



Le tenseur des contraintes s'écrit: $\overset{\Rightarrow}{\overset{\Rightarrow}{\sigma}} = - P \overset{\Rightarrow}{I} + 2\eta \overset{\Rightarrow}{d}$

avec

$$\overset{\Rightarrow}{d} = \begin{pmatrix} d_{xx} & & \\ & d_{yy} & \\ & & d_{zz} \end{pmatrix}$$

et

$$d_{xx} + d_{yy} + d_{zz} = 0$$

D'où:

$$d_{yy} = d_{zz} = - \frac{1}{2} d_{xx}$$

Par ailleurs, les relations:

$$\sigma_{yy} = - P + 2\eta \, d_{yy} = 0 \, , \qquad \sigma_{zz} = - P + 2\eta \, d_{zz} = 0$$

permettent de calculer la pression p:

$$P = 2\eta \, d_{yy} = 2\eta \, d_{zz} = - \eta \, d_{xx}$$

Nous avons alors:

$$\sigma_{xx} = - p + 2\eta \, d_{xx} = 3\eta \, d_{xx}$$

D'où la viscosité élongationnelle:

$$\boxed{\eta_E = \frac{\sigma_{xx}}{d_{xx}} = 3\eta}$$

ANNEXE A4

SOUFFLAGE DE GAINE - ANALYSE DE STABILITE CALCUL DES COMPOSANTES INSTATIONNAIRES DU TENSEUR DES VITESSES DE DEFORMATION

- **Repère local en M** $\quad R\left(M, \vec{m}_i\right)$ (figure A4.1)

Soit le système de coordonnées $\left(v^1 = x,\ v^2,\ v^3 = \varphi\right)$

Le vecteur $\vec{OM}$ s'exprime:

$$\vec{OM} = x\vec{k} + r\vec{l} + hv^2\vec{n} \tag{A4.1}$$

où $\quad v^2=0 \quad$ surface intérieure de la gaine,
$\quad v^2=1 \quad$ surface extérieure de la gaine

r étant le rayon de la bulle et h l'épaisseur du film

Les vecteurs du repère naturel sont définis par:

$$\vec{m}_i = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial v^i} \tag{A4.2}$$

D'où

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_x = \left[1 + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right]\vec{t} \tag{A4.3a}$$

$$\vec{m}_2 = \vec{m}_{v^2} = h\vec{n} \tag{A4.3b}$$

$$\vec{m}_3 = \vec{m}_\varphi = r\vec{c} \tag{A4.3c}$$

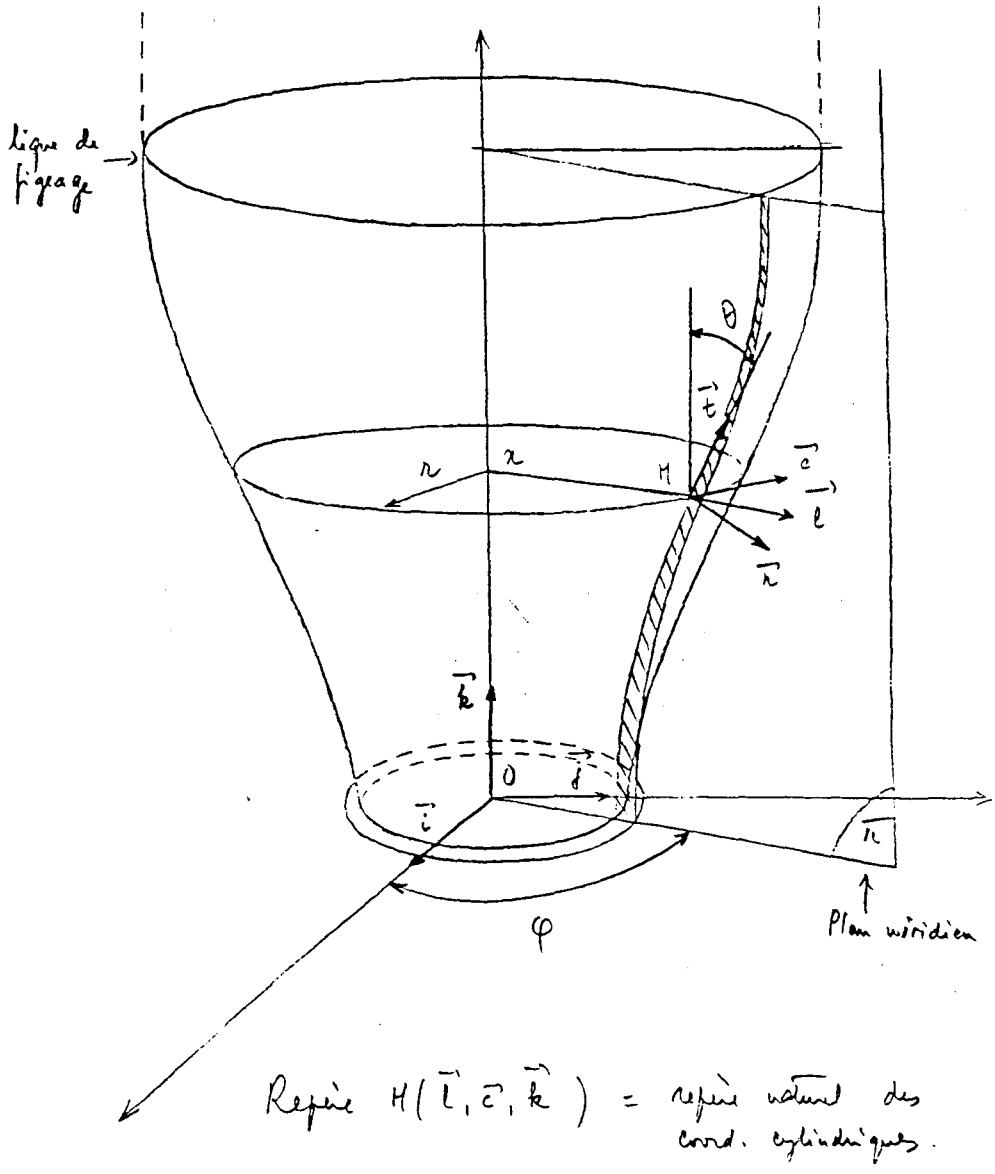
les termes en h ayant été négligés.

- **Composantes du tenseur métrique**

Les composantes $g_{\alpha\beta}$ sont telles que:

$$g_{\alpha\beta} = \vec{m}_\alpha \cdot \vec{m}_\beta \tag{A4.4}$$

figure A4.1. SYSTEME DE COORDONNEES



On obtient alors:

$$\{g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 1+\left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & h^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(A4.5)}$$

que l'on notera également:

$$\{g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} (h_1)^2 & & \\ & (h_2)^2 & \\ & & (h_3)^2 \end{pmatrix} \qquad \text{(A4.6)}$$

En remplaçant r et h par leur expression, puis en linéarisant, on obtient:

$$\{g_{\alpha\beta}\} = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{d\bar{r}}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{d\bar{r}}{dx}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{r}\bar{r}^*\right) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}^2+2\bar{h}\bar{h}^* & 0 \\ 0 & 0 & \bar{r}+2\bar{r}\bar{r}^* \end{pmatrix}$$

(A4.7)

- **Tenseur des vitesses de déformation**

Dans un système de coordonnées où le tenseur métrique $\vec{\vec{g}}$ dépend du temps, les composantes covariantes du tenseur des taux de déformation sont données par la relation suivante:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{ij}}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\left(v_{i;j} + v_{j;i} \right) \qquad \text{(A4.8)}$$

où ";" symbolise la dérivation covariante.

Les composantes mixtes non-nulles sont alors données par les relations ci-dessus:

$$e_{11} = \frac{1}{h_1}\,\frac{\partial h_1}{\partial \tau} + \frac{1}{h_1}\,\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{(A4.9a)}$$

$$e_{22} = \frac{1}{h_2}\,\frac{\partial h_2}{\partial \tau} + \frac{u}{h_1}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\text{Log } h_2\right) \qquad \text{(A4.9b)}$$

$$e_{33} = \frac{1}{h_3}\,\frac{\partial h_3}{\partial \tau} + \frac{u}{h_1}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\text{Log } h_3\right) \qquad \text{(A4.9c)}$$

u étant la vitesse du film.

D'où les composantes e_{11}, e_{22} et e_{33}:

- $$e_{11} = \frac{d\bar{u}}{dx}\cos\bar{\vartheta} + \left[\cos\bar{\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}u^*) - \frac{d\bar{u}}{dx}\sin\bar{\vartheta}\cos^2\bar{\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}r^*) + \omega\sin\bar{\vartheta}\cos\bar{\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}r^*)\right] \qquad \text{(A4.10a)}$$

- $$e_{22} = \frac{\bar{u}}{\bar{h}}\frac{d\bar{h}}{dx}\cos\bar{\vartheta} + \left[\frac{\bar{u}}{\bar{h}}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{h}h^*)\cos\bar{\vartheta} + \frac{\bar{u}}{\bar{h}}\frac{d\bar{h}}{dx}\cos\bar{\vartheta}\left(u^* - h^* - \sin\bar{\vartheta}\cos\bar{\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}r^*)\right) + \omega h^*\right] \qquad \text{(A4.10b)}$$

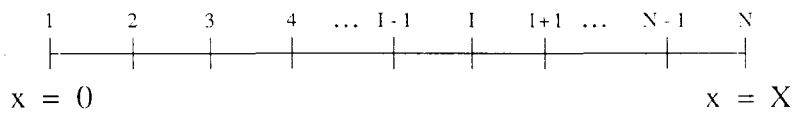
- $$e_{33} = \frac{\bar{u}}{\bar{r}}\frac{d\bar{r}}{dx}\cos\bar{\vartheta} + \left[\frac{\bar{u}}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}r^*)\cos\bar{\vartheta} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}}\frac{d\bar{r}}{dx}\cos\bar{\vartheta}\left(u^* - r^* - \sin\bar{\vartheta}\cos\bar{\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}r^*)\right) + \omega r^*\right] \qquad \text{(A4.10c)}$$

ANNEXE A5

SCHEMAS DE DISCRETISATION

* Discrétisation du domaine

Tout au long du domaine, de longueur X, nous définissons N points de discrétisation ou noeuds, équidistants ou non.



* Schémas de discrétisation

Les dérivées d'une fonction Φ en un noeud I quelconque, approximées à l'aide de schémas aux différences finies, s'écrivent:

$$\Phi'_I = \sum_{K=1}^{5} C_K \, \Phi_K \, , \qquad \Phi''_I = \sum_{K=1}^{5} D_K \, \Phi_K \quad \text{(A5.1a;b)}$$

Le noeud I étant entouré de 5 noeuds d'interpolation définis comme suit:

NOEUD I	1	2	3	4	5
I = 1	1	2	3	4	5
I = 2	1	2	3	4	5
$3 \leq I \leq N-2$	I - 2	I - 1	I	I + 1	I + 2
I = N - 1	N - 4	N - 3	N - 2	N - 1	N
I = N	N - 4	N - 3	N - 2	N - 1	N

Indices des 5 noeuds d'interpolation pour un noeud quelconque I

■ Nous donnons ci-après les valeurs des $C_K.\Delta x$ (première ligne) et des $D_K.(\Delta x)^2$ (seconde ligne) pour un maillage uniforme, Δx étant le pas de discrétisation.

NOEUD K / NOEUD I	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
I = 1	-1	+1			
	+2	-5	+4	-1	
2 ≤ I ≤ N- 1		-1	+1		
		+1	-2	+1	
I = N				-1	+1
		-1	+4	-5	+2

SCHEMAS DE TYPE 4

NOEUD K / NOEUD I	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
I = 1	-3/2	+2	-1/2		
	+2	-5	+4	-1	
2 ≤ I ≤ N-1		-1/2	0	+1/2	
		+1	-2	+1	
I = N			+1/2	-2	+3/2
		-1	+4	-5	+2

SCHEMAS DE TYPE 3

NOEUD K / NOEUD I	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
I = 1	-25/12	+4	-3	+4/3	-1/4
	+35/12	-26/3	+19/2	-14/3	+11/12
I = 2	-1/4	-5/6	+3/2	-1/2	+1/2
	+11/12	-5/3	+1/2	+1/3	-1/12
3 ≤ I ≤ N-2	+1/12	-2/3	0	+2/3	-1/12
	-1/12	+4/3	-5/2	+4/3	-1/12
I = N-1	-1/12	+1/2	-3/2	+5/6	+1/4
	-1/12	+1/3	+1/2	-5/3	+11/12
I = N	+1/4	-4/3	+3	-4	+25/12
	+11/12	-14/3	+19/2	-26/3	+35/12

SCHEMAS DE TYPE 2

- Dans le cas d'un maillage non-uniforme, les coefficients sont calculés par inversion d'un système linéaire.

ANNEXE A6

CONDITIONS AUX LIMITES AVEC PRISE EN COMPTE DE LA FLUCTUATION DE LA POSITION DE LA LIGNE DE FIGEAGE

Soit X_τ la position instantanée du point de solidification, telle que:

$$s(X_\tau) = s_{sol.} \qquad (A6.1)$$

où $s_{sol.}$ est la température de solidification.

Par ailleurs, X_τ s'écrit:

$$X_\tau(\tau) = X + X^* \qquad (A6.2)$$

En linéarisant la relation (A6.1), nous obtenons:

$$X^* = - s^*(X)\ \bar{s}(X)\ /\ \bar{s}'(X) \qquad (A6.3)$$

- **Taux d'étirage imposé**

Si la partie solide ne se déforme pas, nous avons:

$$u(X_\tau) = E \qquad (A6.4)$$

Soit, après linéarisation:

$$u^*(X) = - X^*\ \bar{u}'(X)\ /\ \bar{u}(X) \qquad (A6.5)$$

Finalement, la condition "taux d'étirage imposé" s'écrit:

$$u^*(X) = s^*(X)\ \frac{\bar{s}(X)}{\bar{s}'(X)}\ \frac{\bar{u}'(X)}{\bar{u}(X)} \qquad (A6.6)$$

- **Force d'étirage imposée**

Par exemple, dans le cas du soufflage de gaine:

$$\left(r\ h\ S \right)_{X_\tau} = Cte \qquad (A6.7)$$

D'où, aprés linéarisation:

$$- s^*(X) \frac{\bar{s}(X)}{\bar{s}'(X)} \left[\bar{S}'(X) + \bar{S}(X) \left(\bar{r}'(X) / \bar{r}(X) + \bar{h}'(X) / \bar{h}(X) \right) \right]$$

$$+ \bar{S}(X) \left(r^*(X) + h^*(X) \right) + S^*(X) = 0 \qquad (A6.8)$$

Dans le cas plan, nous aurons:

$$\left(h\ S \right)_{X_\tau} = Cte \qquad (A6.9)$$

Soit:

$$- s^*(X) \frac{\bar{s}(X)}{\bar{s}'(X)} \left[\bar{S}'(X) + \bar{S}(X) \left(\bar{h}'(X) / \bar{h}(X) \right) \right]$$

$$+ \bar{S}(X) \left(h^*(X) \right) + S^*(X) = 0 \qquad (A6.10)$$

ANNEXE A7

CONDITION AUX LIMITES A = CONSTANTE

- Par exemple, dans le cas du soufflage de gaine:

La quantité d'air emprisonnée s'exprime par:

$$A = P_{int}\ VL_{air} \qquad (A7.1)$$

où P_{int} est la pression interne absolue. Le volume d'air emprisonné VL_{air} est donné par:

$$VL_{air} = \int_0^Z \pi\ a^2\ dz + \pi\ a_f^2 \left(L_t - Z \right) \qquad (A7.2)$$

Soit, sous forme adimensionnelle:

$$A = \left(B + P \right) \left\{ \int_0^X r^2\ dx + r_f^2 \left(X_t - X \right) \right\} \qquad (A7.3)$$

D'où, en approximant l'intégrale par une méthode de Simpson, et après linéarisation:

$$C_1\ \tilde{r}_1 + \sum_{I=2}^{N-1} C_I\ \tilde{r}_I + C_N\ \tilde{r}_N + D\ \tilde{B} = 0 \qquad (A7.4)$$

avec:

$$C_1 = \left(B + P \right) \Delta x\ \bar{r}_1^2 \qquad (A7.5a)$$

$$C_I = 2 \left(B + P \right) \Delta x\ \bar{r}_I^2 \qquad \text{pour } 2 \le I \le N-1 \qquad (A7.5b)$$

$$C_N = \left(B + P \right) \left[\Delta x\ \bar{r}_N^2 + 2\ \bar{r}_N^2 \left(X_t - X \right) \right] \qquad (A7.5c)$$

$$D = \frac{\Delta x}{2} \left[\bar{r}_1^2 + 2 \sum_{I=2}^{N-1} \bar{r}_I^2 + \bar{r}_N^2 \right] + \bar{r}_N^2 \left(X_t - X \right) \qquad (A7.5d)$$

si

$$X_t - X >> X \tag{A7.6}$$

alors, on obtient:

$$2 \left(B + P \right) \tilde{r}_N + \tilde{B} = 0 \tag{A7.7}$$

- Un raisonnement analogue donne, dans le cas plan:

$$\left(B + P \right) \tilde{r}_N + \tilde{B} = 0 \tag{A7.8}$$

ANNEXE A8

METHODES MATRICIELLES
PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS AUX LIMITES

Afin de mieux illustrer la prise en compte des conditions aux limites dans le cas des méthodes matricielles, concidérons le cas le plus complet: soufflage de gaine, modèle de PTT, non-isotherme. Les autres cas s'en déduisent aisément.

– Le **système à résoudre** peut se mettre sous la forme:

$$F^{(i)}\left(x , \omega \right) = 0 \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, 7$$

$i = 1$	équation de continuité
$i = 2$	équation d'équilibre normal
$i = 3$	équation d'équilibre axial
$i = 4$	équation de conservation de l'énergie
$i = 5$ à 7	relations constitutives

ω étant la valeur propre.

– Le système discrétisé peut se mettre sous la forme:

$$F_h^{(i)}\left(I , \omega \right) = 0 \qquad \text{pour} \qquad i = 1,2, \ldots, 7 \quad 1 \leq I \leq N$$

N étant le nombre de points de discrétisation.

– Par ailleurs, les **conditions aux limites** sont les suivantes:

<u>En $x = 0$</u>

$\tilde{r} = 0 , \quad \tilde{h} = 0 , \quad \tilde{u} = 0 , \quad \tilde{s} = 0$ CL (1a, b, c, d)

$\tilde{N}_2(0) = 0 , \quad \tilde{N}_3(0) = 0$ CL (2a, b)

<u>En $x = X$</u>

$\dfrac{dr}{d\tau} = 0$ CL (3)

Taux d'étirage ou force d'étirage imposé	CL (4)
Quantité d'air ou différence de pression imposée	CL (5)

– Nous avons alors le système de 7N+1 équations suivantes:

CL (1a);	$F_h^{(1)}$, I = 2 à N - 1;	$F_h^{(1)}$, I = N
CL (1b);	$F_h^{(2)}$, I = 2 à N - 1;	CL (3)
CL (1c);	$F_h^{(3)}$, I = 2 à N - 1;	CL (4)
CL (1d);	$F_h^{(4)}$, I = 2 à N - 1;	$F_h^{(4)}$, I = N
$F_h^{(5)}$, I = 1	$F_h^{(5)}$, I = 2 à N - 1;	$F_h^{(5)}$, I = N
CL (2a)	$F_h^{(6)}$, I = 2 à N - 1;	$F_h^{(6)}$, I = N
CL (2b)	$F_h^{(7)}$, I = 2 à N - 1;	$F_h^{(7)}$, I = N
CL (5)		

ANNEXE A9

PRISE EN COMPTE DE L'ELASTICITE DE LA PARTIE SOLIDIFIEE

(cf. également Annexe A6)

La variation de la longueur de la partie solidifiée s'écrit:

$$V_0 \left\{ \bar{u}(X+X^*) \left[1 + u^*(X+X^*,\tau) \right] - \bar{u}(X) \right\} \qquad (A9.1)$$

Soit, après linéarisation:

$$V_0 \left[\bar{u}(X)u^*(X) + X^*\bar{u}'(X) \right] \qquad (A9.2)$$

On en déduit la variation de la force dans la partie solidifiée:

$$K_M \, \Psi \, V_0 \left[\bar{u}(X)u^*(X) + X^*\bar{u}'(X) \right] \Big/ L_S \qquad (A9.3)$$

avec:

K_M : Module d'élasticité,
Ψ : Section normale,
L_S : Longueur de la partie solidifiée.

Par ailleurs, la variation de la force dans la partie "liquide" s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma_{11} \, \Psi \right) \qquad (A9.4)$$

D'où, en écrivant l'égalité des expressions en (A9.3) et (A9.4), et sous forme adimensionnelle:

En $x = X$,
$$\frac{1}{E_M} \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(S \, \psi \right) = \bar{u}u^* + X^*\bar{u}' \qquad (A9.5)$$

avec:

ψ : section normale adimensionnelle,
E_M : module d'élasticité adimensionnelle donnée par:

$$E_M = \frac{K_M}{\eta_0} \left(\frac{L}{V_0} \right) \frac{L}{L_S} \qquad (A9.6)$$

Sous forme linéarisée, nous obtenons:

Dans le cas axisymétrique:

$$\frac{1}{E_M}\,\omega\left\{\bar{S}\left(r^* + h^*\right) + S^* + X^*\left[\bar{S}' + \bar{S}\left(\bar{r}'/\bar{r} + \bar{h}'/\bar{h}\right)\right]\right\}$$
$$= \bar{u}u^* + X^*\bar{u}' \qquad \text{en } x = X \qquad \text{(A9.7)}$$

Dans le cas plan:

$$\frac{1}{E_M}\,\omega\left\{\bar{S}\left(h^*\right) + S^* + X^*\left[\bar{S}' + \bar{S}\left(\bar{h}'/\bar{h}\right)\right]\right\}$$
$$= \bar{u}u^* + X^*\bar{u}' \qquad \text{en } x = 1 \qquad \text{(A9.8)}$$

Avec: $$X^* = -\,s^*(X)\;\bar{s}(X)\;/\;\bar{s}'(X) \qquad \text{(A9.9)}$$

ANNEXE A10

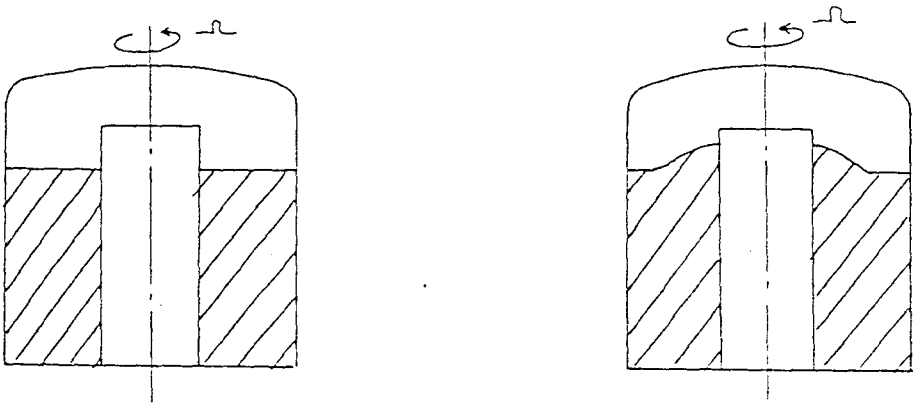
EFFET WEISSENBERG

C'est la tendance que les liquides polymériques ont à "s'écouler vers le centre" dans des appareillages comportant une partie en rotation et une partie fixe.

Dans le cas de l'écoulement de Couette entre deux cylindres ci-dessous, par exemple, il se manifeste par une modification de la surface libre.

L'effet Weissenberg est dû à l'existence de différences de contraintes normales au sein d'écoulements de cisaillement pur.

liquide newtonien **liquide polymérique**



ANNEXE B

ETIRAGE D'UN FILM PLAN

B1 VARIABLES ET PARAMETRES ADIMENSIONNELS

B2 EQUATIONS SOUS FORME ADIMENSIONNELLE

B3 ANALYSE DE STABILITE - CAS GENERAL

B4 PETITS MOUVEMENTS TRANSVERSAUX

ANNEXE B1

VARIABLES ADIMENSIONNELLES

abscisse $x = \dfrac{z}{Z}$

temps $\tau = \dfrac{t\,Z}{V_0}$

vitesse $u = \dfrac{V}{V_0}$

épaisseur $h = \dfrac{H}{H_0}$

température $s = \dfrac{T}{T_0}$

extra-contraintes $N_i = \dfrac{\tau_{ii}\,Z}{\eta_0 V_0}$ pour $i = 1, 2$

contrainte axiale $S = \dfrac{\sigma_{zz}\,Z}{\eta_0 V_0}$

vitesse de déformation $e_{ii} = \dfrac{d_{ii}\,Z}{V_0}$ pour $i = 1, 2$

viscosité $\mu = \dfrac{\eta}{\eta_0}$

module de cisaillement $\Lambda = \dfrac{G}{G_0}$

temps de relaxation $\chi = \dfrac{\lambda}{\lambda_0}$

fréquence complexe $\omega = \dfrac{\Omega\,Z}{V_0}$

PARAMETRES ADIMENSIONNELS

nombre de Reynolds $$Re = \frac{\rho V_0 Z}{\eta_0}$$

nombre de Deborah $$De = \frac{\lambda_0 V_0}{Z}$$

coefficient de transfert $$D = \frac{2 h_c}{\frac{\rho C_p H_0 V_0}{Z}}$$

température de l'air $$s_{air} = T_{air} / T_0$$

force d'étirage $$T_Z = \frac{F_Z}{\frac{\eta_0 V_0 H_0}{Z}}$$

et:

$$\beta = \frac{K_V}{T_0}, \qquad \zeta = K_G T_0, \qquad \alpha = \frac{273}{T_0}$$

ANNEXE B2

EQUATIONS SOUS FORME ADIMENSIONNELLE

- Equation de continuité:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}\left(hu \right) = 0 \qquad \text{(B2.1)}$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement:

$$\mathrm{Reh}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{Sh} \right) \qquad \text{(B2.2)}$$

- Equation de conservation de l'énergie:

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + u\,\frac{\partial s}{\partial x} = -\,\frac{D}{h}\left(s - s_{air} \right) \qquad \text{(B2.3)}$$

- Relations constitutives pour un fluide newtonien:

$$N_1 = 2\mu\, e_{11} \;, \qquad N_2 = 2\mu\, e_{22} \qquad \text{(B2.4a;b)}$$

- Relations constitutives pour le modèle de PTT:

$$K\,N_1 + \mathrm{De}\chi\left[\frac{\partial N_1}{\partial \tau} + u\,\frac{\partial N_1}{\partial x} - 2\left(1 - \xi \right) N_1\,\frac{\partial u}{\partial x} \right] = +\,2\mu\,\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{(B2.5a)}$$

$$K\,N_2 + \mathrm{De}\chi\left[\frac{\partial N_2}{\partial \tau} + u\,\frac{\partial N_2}{\partial x} + 2\left(1 - \xi \right) N_2\,\frac{\partial u}{\partial x} \right] = -\,2\mu\,\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{(B2.5b)}$$

avec $$K = \exp\left[\frac{\varepsilon \mathrm{De}}{\Lambda}\left(N_1 + N_2 \right) \right] \qquad \text{(B2.6)}$$

et:

$$\chi = \frac{\mu}{\Lambda} \qquad \text{(B2.7a)}$$

$$\mu = \exp\left[\beta\left(\frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{1+\alpha} \right) \right] , \qquad \Lambda = \left[1 + \zeta\left(s - 1 \right) \right] \qquad \text{(B2.7b,c)}$$

ANNEXE B3

ANALYSE DE STABILITE - CAS GENERAL

En présence de petits déplacements transversaux de la ligne moyenne du film, les équations prennent la nouvelle forme suivante:

$$d_{11} + d_{22} = 0 \qquad \text{(continuité)}$$

$$\rho H \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial \xi_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\sigma_{11} H \right) \qquad \text{(équilibre axial)}$$

$$\rho H \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{11} H \frac{\partial W}{\partial z} \right) \qquad \text{(équilibre transv.)}$$

$$\rho H C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial \xi_1} \right) = - h_C \left(T - T_{air} \right) \qquad \text{(énergie)}$$

$$\tau_{ii} = 2 \eta d_{ii} \qquad \text{(rel. const. pour un fluide newtonien)}$$

$$K \tau_{ii} + \lambda \left[\frac{\partial \tau_{ii}}{\partial t} + V \frac{\partial \tau_{ii}}{\partial \xi_1} - 2 \left(1 - \xi \right) d_{ii} \right] = 2 \eta d_{ii}$$

(rel. const. pour le modèle de PTT)

avec:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} = \cos\vartheta \frac{\partial}{\partial z} ,$$

Appliquons les résultats précédents (Annexe A4). Nous obtenons alors:

$$e_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{u} \left(1 + u^* \right) \right]$$

$$e_{22} = \frac{\bar{u}}{\bar{h}} \frac{d\bar{h}}{dx} \cos\bar{\vartheta} + \left[\frac{\bar{u}}{\bar{h}} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{h}h^*) \cos\bar{\vartheta} + \frac{\bar{u}}{\bar{h}} \frac{d\bar{h}}{dx} \cos\bar{\vartheta} \left(u^* - h^* \right) + \omega h^* \right]$$

On retrouve alors l'équation de continuité correspondant à un film non-perturbé transversalement.

Par ailleurs, nous avons:

$$\cos\vartheta = \cos\bar{\vartheta} \left[1 - \sin\bar{\vartheta} \cos\bar{\vartheta} \frac{d}{dx} \left(\bar{r} \, \tilde{r} \right) \right]$$

donc $$\cos\vartheta = \cos\bar{\vartheta} = 1$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} = \frac{\partial}{\partial z}$$

Il s'en suit alors deux systèmes totalement découplés:

1) Equations de l'étirage en l'absence de déplacements transversaux,

2) Equilibre dynamique transversal.

ANNEXE B4

PETITS MOUVEMENTS TRANSVERSAUX

L'équation des petits mouvements transversaux W(z,t) s'écrit:

$$\rho\ H\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{11}\ H\ \frac{\partial W}{\partial z}\right) \qquad \text{(B4.1)}$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$W(0) = W(L_T) = 0 \qquad \text{(B4.2a;b)}$$

Soit, sous forme adimensionnelle:

$$Re\ \omega^2\ \tilde{w} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S\ h\ \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad \text{(B4.3)}$$

$$\tilde{w}(0) = \tilde{w}(L_T\ /\ Z) = 0 \qquad \text{(B4.4a;b)}$$

Le nombre de Reynolds Re est donné par:

$$Re = \frac{\rho V_0 L}{\eta_0} \qquad \text{(B4.5)}$$

ANNEXE C

ETIRAGE D'UN FILM AVEC SURPRESSION

C1 VARIABLES ET PARAMETRES ADIMENSIONNELS

C2 EQUATIONS SOUS FORME ADIMENSIONNELLE

ANNEXE C1

VARIABLES ADIMENSIONNELLES

En plus de celles correspondant à un l'étirage d'un film plan, nous avons:

rayon $r = \frac{a}{Z}$

PARAMETRES ADIMENSIONNELS

différence de pression $B = \Delta P \frac{Z^2}{\eta_0 Q}$

coefficient de transfert $D = \frac{2h_c Z}{\rho C_p H_0 V_0}$

force d'étirage $T_Z = \frac{F_Z Z}{\eta_0 Q}$

force d'étirage compensée $T_1 = T_Z - BR$

nombre de Deborah $De = \frac{\lambda_0 V_0}{Z}$

température de l'air $s_{air} = T_{air} / T_0$

et:

$\beta = \frac{K_V}{T_0}$, $\zeta = K_G T_0$, $\alpha = \frac{273}{T_0}$

ANNEXE C2

EQUATIONS SOUS FORME ADIMENSIONNELLE

– équation de continuité:

$$e_{11} + e_{22} = 0 \qquad \text{ou} \qquad u\ h = Cte \qquad \text{(C2.1)}$$

– équation d'équilibre axial:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Sh\cos\vartheta - Br \right) = 0 \qquad \text{(C2.2)}$$

ou, sous forme intégrée:

$$T_z - B\ R = Sh\cos\vartheta - Br \qquad \text{(C2.3)}$$

– équation d'équilibre normal:

$$B = \frac{S\ h}{R_1} \qquad \text{(C2.4)}$$

– équation de conservation de l'énergie:

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + u\ \cos\ \vartheta\ \frac{\partial s}{\partial x} = -\ \frac{D}{h}\left(s - s_{air} \right) \qquad \text{(C2.5)}$$

– Relations constitutives:

pour un fluide newtonien:

$$N_1 = 2\mu\ e_{11}\ , \qquad N_2 = 2\mu\ e_{22} \qquad \text{(C2.6a;b)}$$

et pour le modèle de PTT:

$$K\ N_i + De\chi\left[\frac{\partial N_i}{\partial \tau} + u\ \cos\vartheta\ \frac{\partial N_i}{\partial x} - 2\left(1 - \xi \right) N_i\ e_{ii} \right] = +\ 2\mu\ e_{ii}$$

(C2.7a,b)

avec $$K = \exp\left[\frac{\varepsilon De}{\Lambda}\left(N_1 + N_2 \right) \right] \qquad \text{(C2.8)}$$

ANNEXE D

SOUFFLAGE DE GAINE

D1 VARIABLES ET PARAMETRES ADIMENSIONNELS

D2 EQUATIONS SOUS FORME ADIMENSIONNELLE

D3 MODELE DE PEARSON ET PETRIE

D4 CALCUL DE LA SOLUTION STATIONNAIRE MODELE DE PTT

D5 ORGANIGRAMME DU CALCUL STATIONNAIRE

D6 EQUATIONS LINEARISEES

D7 ORGANIGRAMME DE LA METHODE DE TIR

D8 METHODE DE TIR - FLUIDE NEWTONIEN

D9 METHODE DE TIR - MODELE DE PTT

D10 EFFETS DES PARAMETRES LORSQUE L'ON IMPOSE LA QUANTITE D'AIR EMPRISONNEE DANS LA BULLE

D11 QUELQUES RESULTATS GRAPHIQUES

D12 COMPARAISON DE NOS RESULTATS PAR RAPPORT A CEUX DE CAIN ET DENN (B1988)

ANNEXE D1

VARIABLES ADIMENSIONNELLES

abscisse $x = \dfrac{z}{a_0}$

temps $\tau = \dfrac{t\,a_0}{V_0}$

vitesse $u = \dfrac{V}{V_0}$

épaisseur $h = \dfrac{H}{H_0}$

température $s = \dfrac{T}{T_0}$

extra-containtes $N = \dfrac{\tau\ a_0}{\eta_0 V_0}$

contrainte axiale $S = \dfrac{\sigma_{11}\,a_0}{\eta_0 V_0}$

contrainte radiale $C = \dfrac{\sigma_{33}\,a_0}{\eta_0 V_0}$

vitesse de déformation $e_{ii} = \dfrac{d_{ii}\,a_0}{V_0}$

viscosité $\mu = \dfrac{\eta}{\eta_0}$

module de cisaillement $\Lambda = \dfrac{G}{G_0}$

temps de relaxation $\chi = \dfrac{\lambda}{\lambda_0}$

fréquence complexe $\omega = \dfrac{\Omega\,a_0}{V_0}$

PARAMETRES ADIMENSIONNELS

différence de pression $B = \Delta P \dfrac{\pi a_0^3}{\eta_0 Q}$

coefficient de transfert $D = h_c \dfrac{2\pi a_0^2}{\rho C_p Q}$

force d'étirage $T_z = F_z \dfrac{a_0}{\eta_0 Q}$

force d'étirage compensée $T_1 = T_z - BR^2$

nombre de Deborah $De = \dfrac{\lambda_0 V_0}{a_0}$

température de l'air $s_{air} = T_{air} / T_0$

et:

$\beta = \dfrac{K_V}{T_0}$, $\zeta = K_G T_0$, $\alpha = \dfrac{273}{T_0}$

ANNEXE D2

SOUFFLAGE DE GAINE - EQUATIONS SOUS FORME ADIMENSIONNELLE

- Equation de continuité:

$$r\ h\ u = Cte = 1 \qquad (D2.1)$$

ou

$$e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0 \qquad (D2.2)$$

- Equation d'équilibre normal:

$$\frac{Sh}{R_1} + \frac{Ch}{R_3} = 2B \qquad (D2.3)$$

- Equation d'équilibre axial:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{ rhS\cos\vartheta - Br^2 \right\} = 0$$ ou, sous forme intégrée:

(D2.4)

$$rhS\cos\vartheta = T_1 + Br^2 \qquad (D2.5)$$

- Equation de conservation de l'énergie:

$$h\left(\frac{\partial s}{\partial \tau} + u\cos\vartheta\ \frac{\partial s}{\partial x} \right) = -\ D\left(s - s_{air} \right) \qquad (D2.6)$$

- Relations constitutives pour un fluide newtonien:

$$N_i = 2\ \mu\ e_{ii} \qquad \text{pour } i = 1,2,3 \qquad (D2.7a;b;c)$$

ou encore

$$S = 2\ \mu\left(e_{11} - e_{22} \right) \qquad (D2.8a)$$

$$C = 2\ \mu\left(e_{33} - e_{22} \right) \qquad (D2.8b)$$

- Relations constitutives pour le modèle de PTT:

$$K\ N_i + \chi\ We \left[\frac{\partial N_i}{\partial \tau} + u\cos\vartheta \frac{\partial N_i}{\partial x} - 2 \left(1 - \xi \right) N_i\ e_{ii} \right] = 2\ \mu\ e_{ii} \qquad \text{(D2.9a;b;c)}$$

Nota Les répétitions d'indice ne doivent pas être interprétées comme des sommations

avec

$$K = \exp \left[\frac{\varepsilon De}{\Lambda} \left(N_1 + N_2 + N_2 \right) \right] \qquad \text{(D2.10)}$$

ANNEXE D3

FLUIDE NEWTONIEN
CALCUL DE LA SOLUTION STATIONNAIRE

- $$2r^2 \left(T_1 + Br^2 \right) r'' = 6\mu r' + r \left(1 + r'^2 \right) \left(T_1 - 3Br^2 \right) \qquad \text{(D3.1)}$$

- $$\frac{h}{h'} = - \frac{r'}{2r} - \frac{1}{4\mu} \left(1 + r'^2 \right) \left(T_1 + Br^2 \right) \qquad \text{(D3.2)}$$

- $$s' = - Dr \sqrt{1 + r'^2} \left(s - s_{air} \right) \qquad \text{(D3.3)}$$

avec les conditions aux limites:

$$r(0) = 1\ , \qquad h(0) = 1\ , \qquad s(0) = 1 \qquad \text{(D3.4a;b;c)}$$

$$r'(X) = 0 \qquad \text{(D3.5)}$$

En isotherme, on obtient le modèle de PEARSON et PETRIE.

ANNEXE D4

SOUFFLAGE DE GAINE - FLUIDE DE PTT
CALCUL DE LA SOLUTION STATIONNAIRE

- $$\left(T_1 + Br^2 \right) r'' = Ch \sqrt{1 + r'^2} - 2Br \left(1 + r'^2 \right) \qquad \text{(D4.1)}$$

- $$\left[\chi We \left(1 - 2\xi \right) S + 4 \left(\chi We \left(1 - \xi \right) p + \mu \right) \right] \frac{h'}{h} =$$

$$- K\, Srh \sqrt{1 + r'^2} - \left\{ 2 \left[\chi We \left(1 - \xi \right) p + \mu \right] \right. \qquad \text{(D4.2)}$$

$$\left. + \chi We \left[\left(1 - 2\xi \right) S + C \right] \right\} \frac{r'}{r}$$

- $$s' = - Dr \sqrt{1 + r'^2} \left(s - s_{air} \right) \qquad \text{(D4.3)}$$

- $$\chi We\, p' = - K\, rph \sqrt{1 + r'^2} + 2 \left[\chi We \left(1 - \xi \right) p + \mu \right] \frac{h'}{h} \qquad \text{(D4.4)}$$

- $$\chi We\, C' = - K\, rhC \sqrt{1 + r'^2} + 2\chi We \left(1 - \xi \right) C \frac{r'}{r}$$

$$+ 2 \left[\chi We \left(1 - \xi \right) p + \mu \right] \left(\frac{r'}{r} - \frac{h'}{h} \right) \qquad \text{(D4.5)}$$

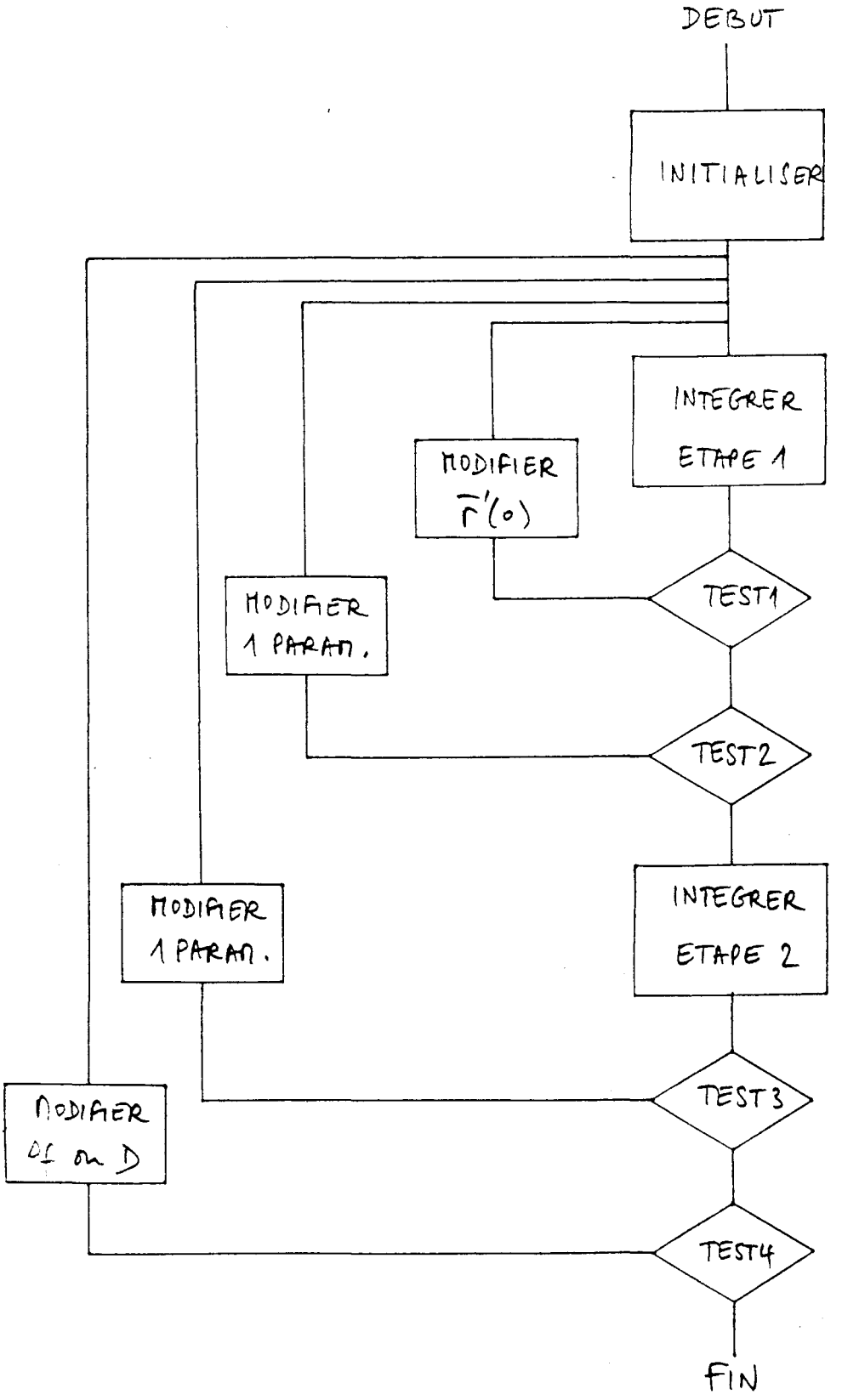
avec

$$K = \exp \left[\frac{\varepsilon We}{\Lambda} \left(S + C + 3N_2 \right) \right] \qquad \text{(D4.6)}$$

- $$S = \left(T_1 + Br^2 \right) \sqrt{1 + r'^2} \Big/ rh \qquad \text{(D4.7)}$$

ANNEXE D5

ORGANIGRAMME DU CALCUL STATIONNAIRE



Commentaires

- **INITIALISER**

  - température finale s_f ou coefficient de transfert D,

  - 2 valeurs parmi $\left(T_Z, B, G, M, E \right)$,

  - angle ϑ en x=0, lorsque l'intégration est effectuée selon les x croissants.

- **INTEGRER**

  Intégration du système d'équations.

  Dans le cas d'un fluide newtonien:
  - Etape 1: calcul du rayon et de la température,
  - Etape 2: calcul de l'épaisseur.

  Modèle de PTT: seule l'étape 1 existe.

- TESTS

  TEST1 : $r'(X) = 0$

  TEST2 : $r(0) = 1$ ou $r(X) = G$, selon le sens d'intégration.

  TEST3 : $h(X) = 1/M$ ou $v(X) = E$

  TEST4 : $s(X) = s_Z$ ou $s(0) = 1$, selon le sens d'intégration.

ANNEXE D6

SOUFFLAGE DE GAINE - EQUATIONS LINEARISEES

CAS GENERAL

- **Equation de continuité**

$$\tilde{e}_{11} + \tilde{e}_{22} + \tilde{e}_{33} = 0 \qquad \text{(D6.1)}$$

- **Equations d'équilibre**

$$\left(\bar{S}\,\bar{h}\tilde{h} + \bar{h}\tilde{S} \right) / \bar{R}_1^{\,2} - \bar{h}\,\bar{S}\tilde{R}_1 / \bar{R}_1^{\,2} + \left(\bar{C}\,\bar{h}\tilde{h} + \bar{h}\tilde{C} \right) / \bar{R}_3 - \bar{h}\,\bar{C}\tilde{R}_3 / \bar{R}_3^{\,2}$$

$$- 2\tilde{B} = 0 \qquad \text{(Equilibre normal)} \qquad \text{(D6.2)}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \bar{r}\bar{h}\cos\bar{\vartheta}\,\tilde{S} + \bar{r}\bar{h}\,\bar{S}\cos\bar{\vartheta} \left[\tilde{r} + \tilde{h} - \sin\bar{\vartheta}\,\cos\bar{\vartheta}\,\frac{d}{dx}\left(\bar{r}\tilde{r} \right) \right] - \right.$$

$$\left. \bar{r}^2 \left(\tilde{B} + 2B\tilde{r} \right) \right\} = 0 \qquad \text{(Equilibre axial)} \qquad \text{(D6.3a)}$$

ou, sous forme intégrée:

$$\tilde{S} = \left\{ \left[\bar{r}\,\bar{h}\,\bar{S}\cos\bar{\vartheta} \left[\tilde{h} + \tilde{r} - \sin\bar{\vartheta}\,\cos\bar{\vartheta}\,\frac{d}{dx}\left(\bar{r}\tilde{r} \right) - \bar{r}^2 \left(\tilde{B} + 2B\tilde{r} \right) \right] \right]_{x}^{x_0} \right.$$

$$\left. + \left[\bar{r}\,\bar{h}\,\bar{S}\cos\bar{\vartheta} \right]_{x_0} \right\} / \left[\bar{r}\,\bar{h}\cos\bar{\vartheta} \right]_x \qquad \text{(D6.3b)}$$

- **Equation de conservation de l'énergie**

$$\bar{\omega}\bar{s}\tilde{s} + \bar{u}\cos\bar{\vartheta} \left[\frac{d}{dx}\left(\bar{s}\tilde{s} \right) - \sin\bar{\vartheta}\,\cos\bar{\vartheta}\,\frac{d}{dx}\left(\bar{r}\tilde{r} \right) \frac{d\bar{s}}{dx} + \tilde{u}\,\frac{d\bar{s}}{dx} \right]$$

$$= - \frac{D}{\bar{h}} \left[\bar{s}\tilde{s} - h \left(\bar{s} - s_{air} \right) \right] \qquad \text{(D6.4)}$$

- **Relations constitutives pour un fluide newtonien**

$$\tilde{N}_i = 2 \left[\mu(\bar{s})\, \tilde{e}_{ii} + \bar{s}\, \tilde{s}\, \mu'(\bar{s})\, \bar{e}_{ii} \right] \qquad \text{pour } i=1,2,3 \qquad \text{(D6.5a,b,c)}$$

ou encore

$$\tilde{S} = 2 \left[\mu(\bar{s}) \left(\tilde{e}_{11} - \tilde{e}_{22} \right) + \bar{s}\, \tilde{s}\, \mu'(\bar{s}) \left(\bar{e}_{11} - \bar{e}_{22} \right) \right] \qquad \text{(D6.6a)}$$

$$\tilde{C} = 2 \left[\mu(\bar{s}) \left(\tilde{e}_{33} - \tilde{e}_{22} \right) + \bar{s}\, \tilde{s}\, \mu'(\bar{s}) \left(\bar{e}_{33} - \bar{e}_{22} \right) \right] \qquad \text{(D6.6b)}$$

- **Relations constitutives pour le modèle de PTT**

$$\tilde{Z}_i + We \left\{ \chi(\bar{s}) \left[\omega\, \tilde{N}_i + \bar{u}\cos\bar{\vartheta} \left[\frac{d\tilde{N}_i}{dx} - \sin\bar{\vartheta}\, \cos\bar{\vartheta}\, \frac{d}{dx} \left(\bar{r}\tilde{r} \right) \frac{d\bar{N}_i}{dx} + \tilde{u}\, \frac{d\bar{N}_i}{dx} \right] \right.\right.$$

$$\left. - 2 \left(1 - \xi \right) \left[\bar{N}_i \tilde{e}_{ii} + \tilde{N}_i \bar{e}_{ii} \right] \right]$$

$$\left. + \bar{s}\, \tilde{s}\, \chi'(\bar{s}) \left[\bar{u}\cos\bar{\vartheta}\, \frac{d\bar{N}_i}{dx} - 2 \left(1 - \xi \right) \bar{N}_i \bar{e}_{ii} \right] \right\}$$

$$= 2 \left\{ \bar{\mu}(s)\, \tilde{e}_{ii} + \bar{s}\, \tilde{s}\, \mu'(\bar{s})\, \bar{e}_{ii} \right\} \qquad \text{pour } i=1,2,3 \qquad \text{(D6.7a;b;c)}$$

avec

$$\tilde{Z}_i = \bar{K} \left[\tilde{N}_i + \left(\frac{\varepsilon De}{\bar{\Lambda}}\, tr(\tilde{N}) - \varepsilon De\, tr(\bar{N})\, \bar{s}\, \tilde{s}\, \frac{\Lambda'(\bar{s})}{\bar{\Lambda}^2} \right) \bar{N}_i \right] \qquad \text{(D6.8)}$$

- **Rayons de courbure**

$$R_1 = \bar{R}_1 \left[3 \sin\bar{\vartheta}\, \cos\bar{\vartheta}\, \frac{d}{dx} \left(\bar{r}\tilde{r} \right) - \frac{d^2}{dx^2} \left(\bar{r}\tilde{r} \right) / \frac{d^2\bar{r}}{dx^2} \right] \qquad \text{(D6.9a)}$$

$$R_3 = \bar{R}_3 \left[\tilde{r} + \sin\bar{\vartheta}\, \cos\bar{\vartheta}\, \frac{d}{dx} \left(\bar{r}\tilde{r} \right) \right] \qquad \text{(D6.9b)}$$

- **Tenseur des taux de déformation**

$$\tilde{e}_{11} = \left[\cos\bar{\vartheta} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}u^*) - \frac{d\bar{u}}{dx} \sin\bar{\vartheta} \cos^2\bar{\vartheta} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}r^*) + \omega \sin\bar{\vartheta} \cos\bar{\vartheta} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}r^*) \right] \tag{D6.10a}$$

$$\tilde{e}_{22} = \left[\frac{\bar{u}}{\bar{h}} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{h}h^*) \cos\bar{\vartheta} + \frac{\bar{u}}{\bar{h}} \frac{d\bar{h}}{dx} \cos\bar{\vartheta} \left(u^* - h^* - \sin\bar{\vartheta} \cos\bar{\vartheta} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}r^*) \right) + \omega h^* \right] \tag{D6.10b}$$

$$\tilde{e}_{33} = \left[\frac{\bar{u}}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}r^*) \cos\bar{\vartheta} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \frac{d\bar{r}}{dx} \cos\bar{\vartheta} \left(u^* - r^* - \sin\bar{\vartheta} \cos\bar{\vartheta} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{r}r^*) \right) + \omega r^* \right] \tag{D6.10c}$$

CAS PARTICULIER

Lorsque le rayon de la bulle est en tout point égal à l'unité, nous aurons:

- Rayon de courbure suivant 1

$$R_1 = - \tilde{r}'' \tag{D6.11}$$

- Equation d'équilibre normal (nouvelle forme):

$$S\ h\ \tilde{r}'' + \frac{C\ h}{R_3} = 2B \tag{D6.12}$$

Soit, sous forme linéarisée:

$$\bar{S}\ \bar{h} \frac{d^2\tilde{r}}{dx^2} + \left[\bar{h} \left(\bar{C}\ \tilde{h} + \tilde{C} \right) \right] / \bar{R}_3 - \frac{\bar{C}\ \bar{h}}{\bar{R}_3} \left[\tilde{r} + \sin\bar{\vartheta} \cos\bar{\vartheta} \cdot \left(\bar{r} \frac{d\tilde{r}}{dx} + \tilde{r} \frac{d\bar{r}}{dx} \right) \right] = 2\ \tilde{B} \tag{D6.13}$$

ANNEXE D7

ANALYSE DE STABILITE - METHODES DE TIR

L'organigramme ci-dessous décrit le principe général de la méthode de tir.

De nouveau, nous retrouvons la nécéssité de spécifier la valeur d'un paramètre supplémentaire:

$\tilde{S}(0) \neq 0$ dans le cas d'un fluide newtonien,

$\tilde{N}_1(0) \neq 0$ dans le cas du modèle de PTT.

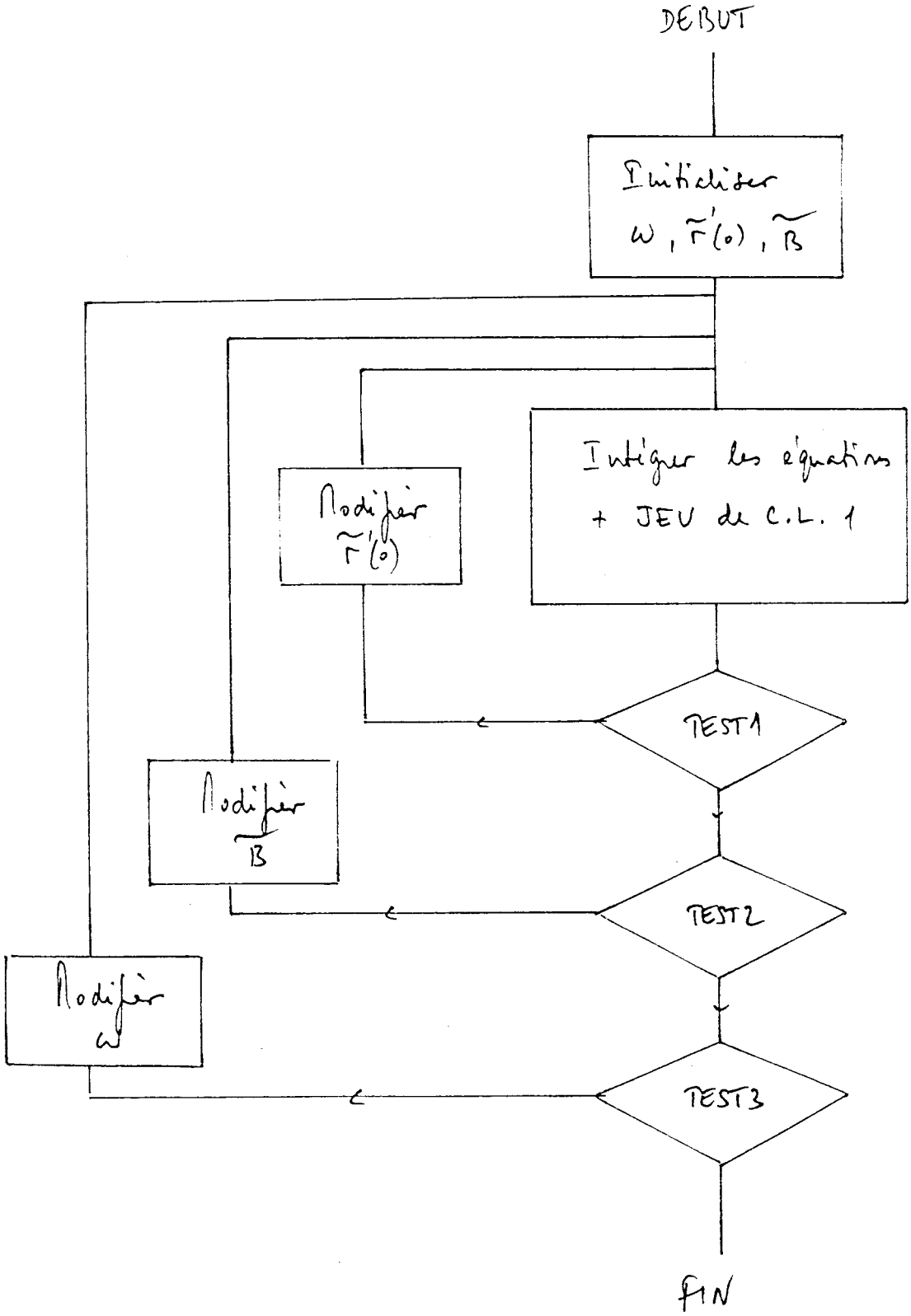
Les différents tests sont:

TEST1 : $\frac{dr}{d\tau} = 0$ en $x = X$

TEST2 : différence pression ou quantité d'air imposée.

TEST3 : taux d'étirage ou force d'étirage imposée.

ORGANIGRAMME DE LA METHODE DE TIR



ANNEXE D8

FLUIDE NEWTONIEN - METHODE DE TIR
MISE EN FORME DU SYSTEME D'EQUATIONS

(cf. Annexe D6)

- définition de $\tilde{d}$	$\frac{d\tilde{r}}{dx}$
- équation donnant $\tilde{e}_{22}$	$\frac{d\tilde{h}}{dx}$
- équation donnant $\tilde{e}_{11}$	$\frac{d\tilde{u}}{dx}$
- équation de l'énergie	$\frac{d\tilde{s}}{dx}$
- rayon de courbure $\tilde{R}_1$	$\frac{d\tilde{d}}{dx}$
- équation donnant $\tilde{e}_{33}$	$\tilde{e}_{33}$ (*)
- équilibre normal	$\tilde{R}_1$
- équilibre axial sous forme intégrée	$\tilde{S}$
- relation constitutive pour $\tilde{S}$, équation de continuité	$\tilde{e}_{22}$
- équation de continuité	$\tilde{e}_{11}$
- équation constitutive pour $\tilde{C}$	$\tilde{C}$ (*)
- rayon de courbure $\tilde{R}_3$	$\tilde{R}_3$ (*)

L'agencement ci-dessus est valable pour l'étirage d'un film avec surpression et pour le soufflage de gaine.

(*): uniquement pour le soufflage de gaine.

ANNEXE D9

SOUFFLAGE DE GAINE - ANALYSE DE STABILITE FLUIDE DE PTT - METHODE DE TIR

(cf. Annexe D6)

- définition de $\tilde{d}$	$\frac{d\tilde{r}}{dx}$
- équation donnant $\tilde{e}_{22}$	$\frac{d\tilde{h}}{dx}$
- équation donnant $\tilde{e}_{11}$	$\frac{d\tilde{u}}{dx}$
- équation de l'énergie	$\frac{d\tilde{s}}{dx}$
- rayon de courbure $\tilde{R}_1$	$\frac{d\tilde{d}}{dx}$
- équation donnant $\tilde{e}_{33}$	$\tilde{e}_{33}$ (*)
- équilibre normal	$\tilde{R}_1$
– équilibre axial sous forme non-intégrée, 2 premières relations const.	$\tilde{e}_{11}$
- équation de continuité	$\tilde{e}_{22}$
- rayon de courbure $\tilde{R}_3$	$\tilde{R}_3$ (*)
- équation constitutive i	$\frac{d\tilde{N}_i}{dx}$ pour i = 1,2,3 pour i = 1,2

L'agencement ci-dessus est valable pour l'étirage d'un film avec surpression et pour le soufflage de gaine.

(*): uniquement pour le soufflage de gaine.

BU LILLE

ANNEXE D10

EFFETS DES PARAMETRES LORSQUE L'ON IMPOSE LA QUANTITE D'AIR EMPRISONNEE

X_T / X	(E , A)
1	(-0.14, 1.20)
2	(-0.18, 1.23)
2	(-0.19, 1.23)
4	(-0.19, 1.24)
5	(-0.19, 1.24)
∞	(-0.20, 1.24)

tableau D10.1. Effet de la hauteur totale de la bulle
Newtonien – isotherme
X = 5 – G = 3 – M = 20 – P = 100

P	(E , A)
0.	(+0.65 0.96)
10^1	(-0.20 1.25)
10^2	(-0.20 1.24)
10^3	(-0.20 1.24)
10^4	(-0.20 1.24)
10^5	(-0.20 1.24)

tableau D10.2. Effet de la pression ambiante
Newtonien – isotherme
X = 5 – G = 3 – M = 20 – X_T / X = ∞

ANNEXE D11

QUELQUES RESULTATS GRAPHIQUES

A titre indicatif, nous donnons ci-après des résultats graphiques concernant le cas le plus complet: modèle de PTT, non-isotherme.

figure D11.1. Valeurs propres
SG – modèle de PTT – non-isotherme
De = 0.1 – X = 5 – G = 3 – M = 20 – D = 0.08 – $s_f \simeq 0.5$
$\beta = 25$ – $\zeta = 0$ – $s_{air} = 30/185$ – $\varepsilon = 0.015$ – $\xi = 0.1$
MAT2, $\tilde{r}$ $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ $\tilde{s}$ $\tilde{N}_1$ $\tilde{N}_2$ $\tilde{N}_3$ – (o): (E,B) fixés, (+): (A,E) fixés, P = 100
avec fluctuation

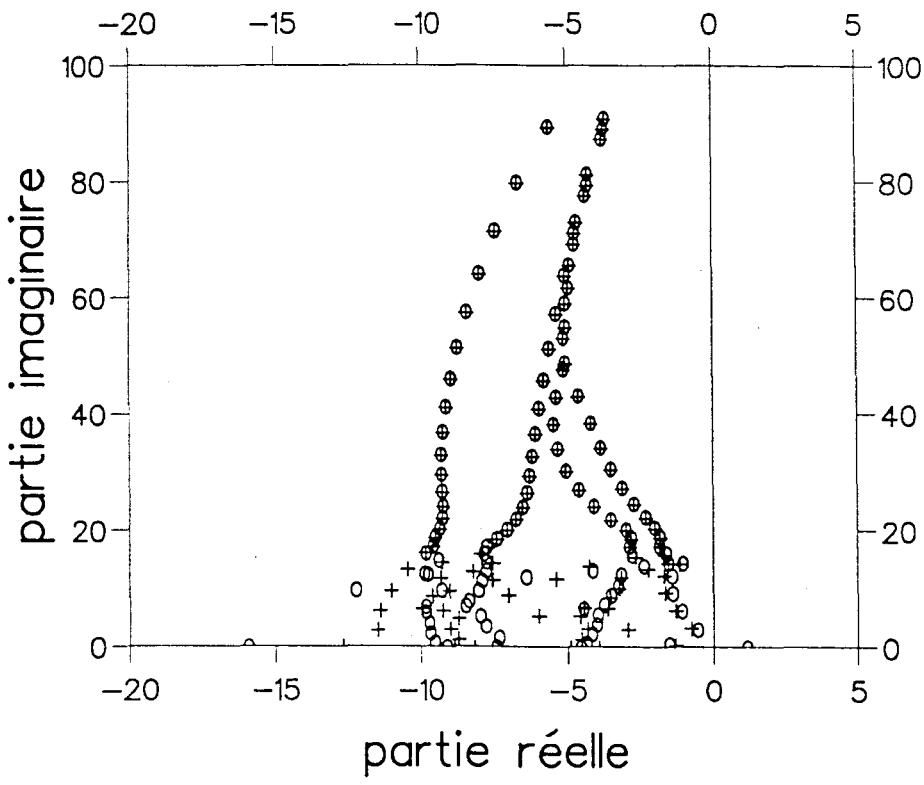
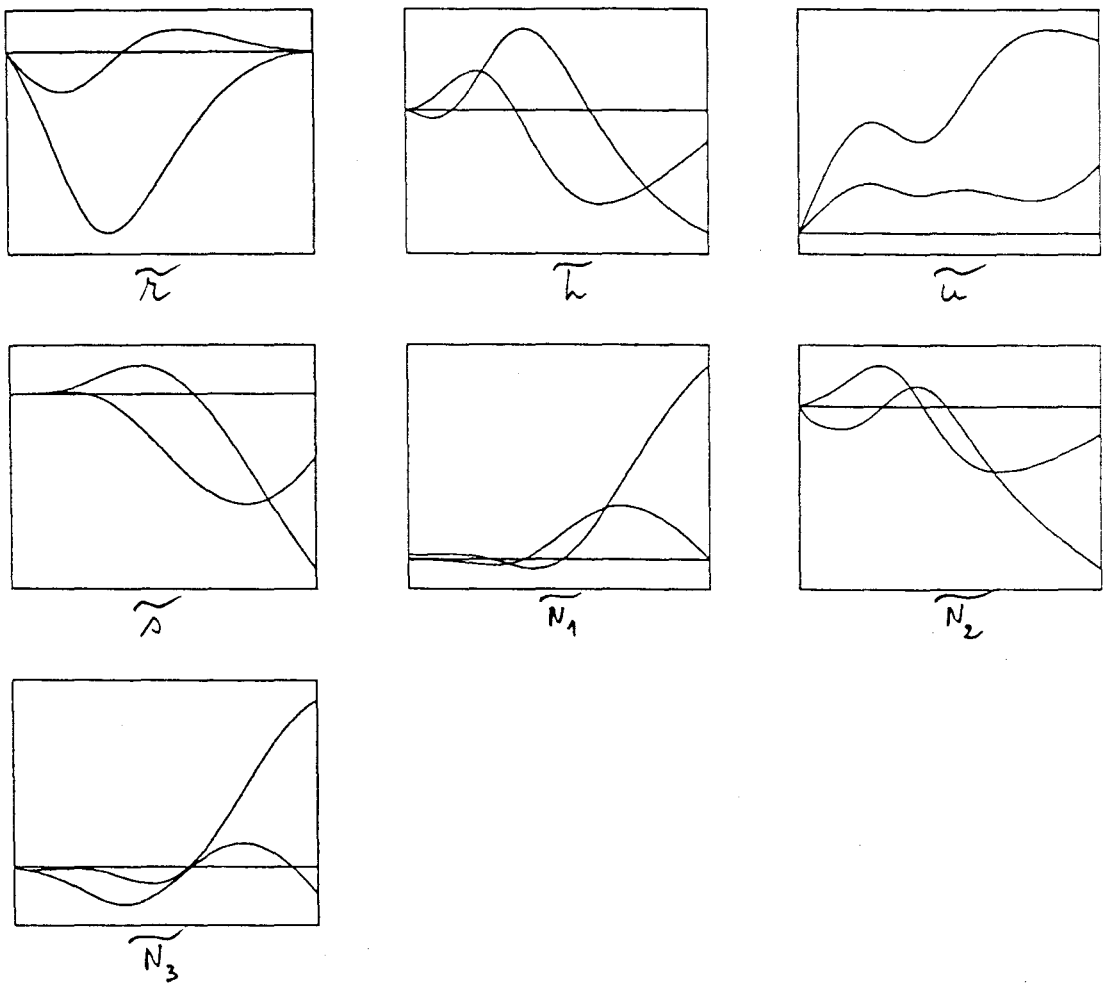


figure D11.2. Modes propres
SG – modèle de PTT – non-isotherme
De = 0.1 – X = 5 – G = 3 – M = 20 – D = 0.08 – $s_f \simeq 0.5$
$\beta = 25$ – $\zeta = 0$ – $s_{air} = 30/185$ – $\varepsilon = 0.015$ – $\xi = 0.1$
MAT2, $\tilde{r}$ $\tilde{h}$ $\tilde{u}$ $\tilde{s}$ $\tilde{N}_1$ $\tilde{N}_2$ $\tilde{N}_3$ – (A,E) fixés, P = 100
avec fluctuation



ANNEXE D12

COMPARAISON DE NOS RESULTATS PAR RAPPORT A CEUX DE CAIN ET DENN (1988)

Nous avons considéré, pour un fluide newtonien et en isotherme, 6 points repérés P1 à P6 dans le plan (G , M) et pour X=5 (tableau D12.1).

Remarquons que les valeurs de G et de M ont été relevés à partir d'un graphique de dimensions relativement réduites. D'où une relative incertitude.

Les résultats sont reportés dans les tableaux D12.2 et D12.3.

la concordance est bonne en général.

Pt	G	M	T_Z	B
P1	2 . 6	5 . 0	1 . 48	0 . 19
P2	3 . 2	1 4 .	2 . 37	0 . 20
P3	0 . 36	5 .	1 . 59	0 . 23
P4	1 . 3	2 . 7	0 . 77	0 . 20
P5	0 . 18	9 . 5	2 . 34	0 . 25
P6	3 . 3	1 9 .	2 . 60	0 . 20

tableau D12.1. POINTS P1 à P6 (CAIN et DENN)
Paramètres et résultats stationnaires
Fluide newtonien - Isotherme
X = 5

Tableau D12.2. RESULTATS DE CAIN ET DENN (B1988)

Pt \ CL	(E , B)	(E , A)	(T_Z, B)	(T_Z, A)
P1	(+0.66, 0.)	(-0.49, 1.05)	(+1.06, 0.)	(-0.81, 0.80)
P2	(+2.07, 0.)	(-0.54, 1.04)	(+1.79, 0.)	(-0.97, 0.55)
P3	(-0.28, 2.51)	(-0.26, 2.36)	(-1.29, 0.)	(-1.43, 1.28)
P4	(-0.78, 0.54)	(-0.51, 1.68)	(0. , 0.)	(-0.67, 1.66)
P5	(+0.24, 3.31)	(+0.12, 2.62)	(-2.19, 0.)	(-1.53, 1.68)
P6	(+2.37, 0.)	(-0.63, 1.06)	(+1.86, 0.)	(-1.02, 0.44)

Tableau D12.3. NOS RESULTATS

Pt \ CL	(E , B)	(E , A)	(T_Z, B)	(T_Z, A)
P1	(+0.46, 0.)	(-0.36, 0.98)	(+1.04, 0.)	(-0.72, 0.80)
P2	(+1.78, 0.)	(-0.20, 0.99)	(+2.04, 0.)	(-0.75, 0.47)
P3	(-0.29, 2.55)	(-0.32, 2.38)	(-1.47, 0.)	(-1.77, 1.71)
P4	(-0.89, 1.33)	(-0.51, 1.67)	(+0.06, 0.)	(-0.67, 1.66)
P5	(+0.21, 3.43)	(+0.02, 3.22)	(-2.28, 0.)	(-1.90, 1.64)
P6	(+2.49, 0.)	(-0.18, 1.04)	(+2.46, 0.)	(-0.75, 0.38)

ANNEXE E

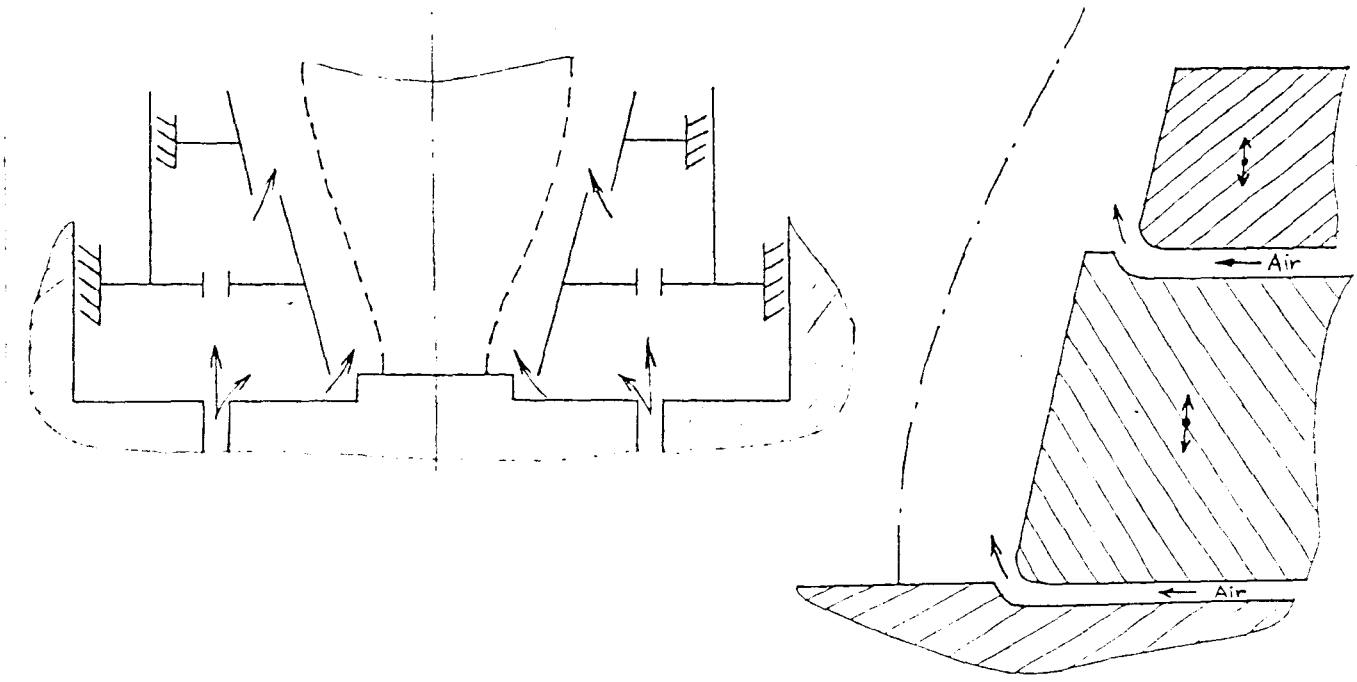
E1 ANNEAU DE REFROIDISSEMENT A DOUBLE FLUX D'AIR

E2 DONNEES EXPERIMENTALES DE GUPTA(B1980)

ANNEXE E1

ANNEAU DE REFROIDISSEMENT A DOUBLE FLUX D'AIR

(Etude expérimentale de FEIDT (B1983))



ANNEXE E2

DONNEES EXPERIMENTALES DE GUPTA (B1980)

- **Polymère**

type	polystyrène		
masse volumique	ρ	=	1050 Kg/m^3
Chaleur spécifique	C_p	=	1910 J/Kg.°C

viscosité

$$\eta = 8{,}8 \times 10^4 \exp\left[18904 \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{443} \right) \right] \quad Pa.s$$

module de cisaillement

$$G = 8 \times 10^4 + \left(393 - T \right) \times 10^3 \quad Pa$$

- **Paramètres de mise en oeuvre**

rayon extérieur de la filière	a_0	=	12,7 mm
entrefer de la filière	H_0	=	1,016 mm
température de l'air de ref.	T_{air}	=	30°C (*)

(*) Il s'agit d'un choix de notre part.

ANNEXES F

F1 EVALUATION DE L'ORDRE DE GRANDEUR DE LA VITESSE CRITIQUE DE FLOTTEMENT

F2 REFROIDISSEMENT D'UN FILM ETIRE

F3 ETUDE D'UN CAS PRATIQUE

ANNEXE F1

EVALUATION DE L'ORDRE DE GRANDEUR DE LA VITESSE CRITIQUE DE FLOTTEMENT

Soit le cas suivant:

E	=	20
De	=	0.1
F_z	=	20 N / m
L	=	0.5 m
h_c	=	20 w / m^2°C

tableau F1.1

La pression dynamique critique s'exprime par:

$$q = \frac{1}{2} \rho_{air} U_0^2 \simeq \frac{F_z}{L}$$

D'où une valeur de:

$$U_0 \simeq 9 \text{ m/s}$$

La vitesse nécéssaire pour le refroidissement est:

- Corrélation de PETRIE (B1983):

$$h_c = 4 \left(U_0 \right)^{1.5} \qquad U_0 = 3 \text{ m/s}$$

- Corrélation de KANAI et WHITE (B1984)

$$h_c = 2.5 \left(U_0 \right)^{1.6} \qquad U_0 = 4 \text{ m/s}$$

Pour 10 N/m $\leq F_z \leq$ 40 N/m, nous avons finalement:

$$6 \text{ m/s} \leq U_{CRITIQUE} \leq 13 \text{ m/s}$$

ANNEXE F2

REFROIDISSEMENT D'UN FILM ETIRE

Nota: Dans ce qui suit, les k_i, sauf spécification contraire, sont des constantes.

■ Le coefficient moyen de transfert de chaleur h_C s'écrit, pour une hauteur de figeage et une température finale donnée:

$$h_C = k_1 \, Q_E \qquad \text{(F2.1)}$$

où Q_E est le débit d'extrusion.

Supposons une corrélation donnant le coefficient de transfert local h de la forme:

$$h = k_2 \left(U_{air} \right)^n \qquad \text{(F2.2)}$$

Pour simplifier, nous supposerons:

$$h_C = k_3 \left(U_0 \right)^n \qquad \text{(F2.3)}$$

où U_0 est la vitesse moyenne de sortie.

De (1) et (3), nous déduisons:

$$U_0 = k_4 \left(Q_E \right)^{1/n} \qquad \text{(F2.4)}$$

D'où l'expression des tensions fluides:

$$T_U = k_5 \left(Q_E \right)^{2/n} \qquad \text{(F2.5)}$$

Par ailleurs, la tension dans le film est donnée par:

$$T_H = k_6 \left(Q_E \right) \qquad \text{(F2.6)}$$

où k_6 est une constante pour un fluide newtonien et variable pour un fluide viscoélastique (à cause du nombre de Deborah, variable également avec le débit si l'on fixe toutes les autres données).

- Soit Q_E^* un débit de base. Plus généralement les grandeurs affectées de l'indice * seront celles relatives à ce cas de base.

Faisons évoluer le débit d'extrusion et examminons l'évolution des tensions T_{11} et T_U.

En supposons k_6 constante, nous aurons:

$$\frac{T_{11}}{T_{11}^*} = \frac{Q_E}{Q_E^*} \qquad \text{(F2.7)}$$

et:

$$\frac{T_U}{T_{11}^*} = \frac{T_U}{T_U^*}\,\frac{T_U^*}{T_{11}^*} = \frac{T_U^*}{T_{11}^*}\left(\frac{Q_E}{Q_E^*}\right)^{2/n} \qquad \text{(F2.8)}$$

Le débit critique est donné par l'égalité:

$$\left(\frac{Q_E}{Q_E^*}\right) = \frac{T_U^*}{T_{11}^*}\left(\frac{Q_E}{Q_E^*}\right)^{2/n} \qquad \text{(F2.9)}$$

ANNEXE F3

ETUDE D'UN CAS PRATIQUE

- **Données**

Rayon de la filière	a_0	=	10 cm
Entrefer de la filière	H_0	=	1 mm
Hauteur de la fente	H_F	=	1 cm
Température d'extrusion	T_0	=	185°C
Vitesse d'extrusion	V_0	=	2 cm/s
Température de l'air	T_{air}	=	30°C
Masse volumique de l'air	ρ_{air}	=	1 Kg/m^3
Masse volumique	ρ	=	1000 Kg/m^3
Viscosité de sortie	η_0	=	10^4 Pl
Coefficient de viscosité	K_V	=	4625 K
Température de solidification	T_f	=	92.5°C
Taux de gonflage	G	=	3
Taux d'amincissement	M	=	20
Hauteur de figeage	X	=	5
	Z	=	0.5 m

UNIVERSITE DES Sc. et Techn. BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE LILLE

- **Résultats stationnaire** (dans le cas du soufflage de gaine)

	REF.	ADIM.	REELLES
FORCE D'ETIRAGE	1.26 N	6.96	8.75 N
DIFF. PRESSION	40 Pa	0.535	20 Pa
COEFF. TRANSFERT	400 w/m^2°C	0.0777	30 w/m^2°C

- Vitesse de soufflage nécessaire au refroidissement:

$$U_0 = 4 \text{ m/s}$$