N⁰ d'ordre : 1011

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Abderrahman MAGHNOUJI

Problèmes elliptiques et paraboliques dans des domaines non-réguliers

Soutenue le 9 décembre 1992 devant la Commission d'Examen :

Président : G. CŒURÉ, Université de Lille
Rapporteurs : P. GRISVARD, Université de Nice
J.M.-S. LUBUMA, Université de Kinshasa
Examinateurs : A. DUVAL, Université de Lille
A.M. CHOLLET, Université de Lille
S. NICAISE, Université de Valenciennes

Je remercie Monsieur le Professeur S. Nicaise le directeur de cette thèse pour ses qualités d'encadreur et ses compétences dans la matière rendant facile la tâche de tout étudiant débutant dans le monde de la recherche.

Je remercie Monsieur G. Coeuré qui a bien voulu présider le jury.

J'exprime toute ma gratitude envers Messieurs P. Grisvard et J. Lubuma qui se sont interessés à ce travvail et y ont apporté leurs remarques fructueuses.

Enfin je suis très reconnaissant envers Mesdames A. Duval et A. M. Chol let qui ont participé à l'examen et au jury de cette thèse.

RESUME

On sait qu'une solution d'un problème aux limites sur un domaine à frontière non régulière admet au voisinage des points singuliers de cette dernière une décomposition en parties régulière et singulière (voir par exemple les travaux de Kondrat'ev, Plamenevskii, Grisvard et Dauge). Ce travail a pour but d'étudier ce comportement pour deux problèmes particuliérs indépendants constituant le chapitre 1 et 2. Signalons que chacun des chapitres est précédé d'une introduction qui indique de facon plus détaillée le contenu de celui-ci dont voici un bref résumé.

Chapitre 1

Nous étudions un exemple de problème mécanique de couplage entre une membrane Ω_1 et une plaque Ω_2. C'est un problème modèle d'interface entre deux opérateurs différentiels d'ordre différent (le Laplacien sur Ω_1 et le Bilaplacien sur Ω_2) sur un domaine polygonal du plan $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Pour ce qui est des opérateurs du même ordre voir [18]-[21].

Nous préciserons les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'opérateur associé sur Ω soit de Fredholm dans les espaces de Hilbert appropriés, lorsque c'est le cas nous donnerons une décomposition en parties régulière et singulière.

Chapitre 2

L'objectif de cette partie consiste en l'étude d'un problème mixte parabolique pour une équation du premier ordre en temps, mais d'ordre pair arbitraire dans les deux variables d'espace. le domaine complet est un cylindre à base polygonal du plan. Il présente donc des singularités d'arrêtes que nous d'écrivons. En fait il est naturel de s'intéresser à cette question car par transformée de Laplace ce problème parabolique se ramene à un problème elliptique sur un polygone. Notre étude est une extension, d'une part aux opérateurs d'ordre quelconque des résultats de M. Moussaoui et B. K. Sadallah [16], P. Grisvard [10] et A. Hammoudi [11] relatifs à l'équation de la chaleur sur un polygone et d'autre part aux domaines non réguliers des travaux de V . S. Agranovich et M. I. Vishic [2] et J. -L. Lions [14], où le domaine spatial considéré est régulier.

Chapter 1

On a coupled problem between the plate equation and the membrane equation on polygons

1.1 Introduction

We introduce a new kind of interface problems on polygonal domains of the plane. The novelty is that the order of the partial differential operators is different on each face. We only study a model problem corresponding to the mechanical example of a coupling between a plate and a membrane. We expect that the methods we developed could be extended to more general problems.

In classical interface problems (see [5,19] and the references cited there), the variational solution has singularities at the common vertices between the interface and the boundary. Therefore, we can expect the same type of results for our problem. Indeed, for interior data in L^2, we can give the decomposition of the variational solution of our problem into a regular part with the optimal regularity and a singular one. The main idea is to use a two steps argument by splitting up two of the interface conditions, and use successively the decomposition results for an inhomogeneous boundary value problem on each face respectively associated with the Laplace operator and the biharmonic one.

For more regular data, we could argue iteratively as before, but this induces too much geometrical conditions (on the angles of the domains). Therefore we prefer a compact perturbation argument as for boundary value problems with non-homogeneous partial differential operators [15,4]. Indeed, we shall see that the difference of order of the operators on the faces will induce interface conditions with non-homogeneous operators (i.e. it is the sum of operators of different order). This argument only holds under some conditions on the Sobolev exponents. One of them is also necessary since we shall show that if this condition fails then the induced operator is not Fredholm.

We finish this paper by solving, in paragraph 6, a differential equation with operator coefficients

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{Au}(t) = e^{\lambda t} t^q f_q \text{ in } \mathbf{R}, \tag{1.1}$$

where A is a closed operator defined on a Hilbert space X, $\lambda \in \mathbf{C}$, $q \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ and $f_q \in X$. As shown in [20] (see also the references cited there), solving 1.1 allows us to solve explicitly some boundary value problems in a infinite cone of $\mathbf{R}^n$ with a right-hand side which is a linear combination of functions of type

$$r^\lambda (\log r)^q \varphi_q(\theta),$$

where (r, θ) are the spherical coordinates, $\lambda \in \mathbf{C}, q \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ and φ_q is regular enough. This result agrees with those of [13].

1.2 Formulation of the problem

Let Ω_1, Ω_2 be two bounded simply connected polygonal domains of the plane such that their boundaries have a common side denoted by Γ. We denote by Γ_1 (resp. Γ_2) the boundary of Ω_1 (resp. Ω_2) except Γ i.e. $\Gamma_j = \partial\Omega_j \setminus \bar{\Gamma}$, for $j = 1, 2$.

For $j = 1, 2$, ν_j will denote the unitary outer normal vector on the boundary $\partial\Omega_j$ of Ω_j and τ_j the unitary tangent vector along $\partial\Omega_j$ so that (ν_j, τ_j) is a direct orthonormal basis. Along the common side Γ, we omit the index by setting $(\nu, \tau) = (\nu_2, \tau_2)$. We shall denote S_{jk}, for $k \in \{1, \ldots, N_j\}$, the vertices of Ω_j, numbered according to the trigonometric orientation for Ω_1 and numbered clockwise for Ω_2; ω_{jk} will be the interior angle at S_{jk}. Moreover, for convenience, we assume that $S_{11} = S_{21}$ and $S_{12} = S_{22}$ belong to $\bar{\Gamma}$ and denote them S_1 and S_2 respectively. We also denote by η_{jk}, a cut-off function equal to 1 in a neighbourhood of S_{jk} and equal to 0 in a neighbourhood of the other vertices. As previously, we may suppose that : $\eta_{11} = \eta_{21} =: \eta_1$ and $\eta_{12} = \eta_{22} =: \eta_2$. Finally, γ_j will denote the trace operator on the boundary $\partial\Omega_j$ of Ω_j; $\gamma_{j\Gamma}$ will be the restriction of γ_j to Γ.

For $E > 0$ and $\sigma \in]0, 1[$ (respectively the Young modulus and the Poisson coefficient of the constitutive material of the plate Ω_2), we set $\rho = E/(1 - \sigma^2)$ and we introduce the boundary operator defined only on Γ

$$Mu = \rho\gamma_{2\Gamma}(\sigma\Delta u + (1 - \sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}),$$

$$Nu = \rho\gamma_{2\Gamma}(\frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} + (1 - \sigma)\frac{\partial^3 u}{\partial \nu \partial \tau^2}).$$

We recall that we use here classical Sobolev spaces i.e. if Ω is a bounded open set of $\mathbf{R}^2$ and s a non-negative integer, then

$$H^s(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in N^2 : |\alpha| \leq s\},$$

its norm being denoted by $\|\cdot\|_{s,\Omega}$. For other definitions, we follow Grisvard's book [9].

We consider the following interface problem (1.2)–(1.8) : given $f_1 \in H^{s_1-1}(\Omega_1)$, $f_2 \in H^{s_2-2}(\Omega_2)$, for s_1, $s_2 \in N$ with $s_2 \geq 2$, the distributed force per unit area acting normally to the surface of Ω_1 and Ω_2, find the displacements $u_1 \in H^{s_1+1}(\Omega_1)$, $u_2 \in H^{s_2+2}(\Omega_2)$, solutions of (1.2)–(1.3) below :

$$\Delta u_1 = f_1 \text{ in } \Omega_1, \tag{1.2}$$

$$\Delta^2 u_2 = f_2 \text{ in } \Omega_2, \tag{1.3}$$

with the stable boundary conditions : we suppose that the membrane is fixed on Γ_1, the plate is clamped on Γ_2, and the displacement is continuous on Γ, i. e.,

$$\gamma_1 u_1 = 0 \text{ on } \Gamma_1, \tag{1.4}$$

$$\gamma_2 u_2 = \gamma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} = 0 \text{ on } \Gamma_2, \tag{1.5}$$

$$\gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2 \text{ on } \Gamma, \tag{1.6}$$

in addition the rotation is free out of the plane of the plate and the transverse shear forces of Ω_1 and Ω_2 are in equilibrium: i. e.,

$$M u_2 = 0 \text{ on } \Gamma, \tag{1.7}$$

$$N u_2 + \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \Gamma. \tag{1.8}$$

We first give the variational formulation of this problem. We set

$$V = \{\vec{u} = (u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2) \text{ fulfilling } (1.4), (1.5) \text{ and } (1.6)\}.$$

It is a Hilbert space equipped with the inner product induced by $H^1(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)$ with the norm

$$\|\vec{u}\|_V = (\|u_1\|^2_{1,\Omega_1} + \|u_2\|^2_{2,\Omega_2})^{1/2}.$$

We define the sesquilinear form a on V as follows :

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = a_1(u_1, v_1) + a_2(u_2, v_2),$$

where we take

$$\begin{aligned} a_1(u_1, v_1) &= \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla \bar{v}_1 dx, \\ a_2(u_2, v_2) &= \rho \int_{\Omega_2} \{\Delta u_2 \Delta \bar{v}_2 - (1-\sigma)(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial x_1 \partial x_2})\} dx. \end{aligned}$$

Lemma 1.1 *For all $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, h_1, $h_2 \in L^2(\Gamma)$, there exists a unique solution $\vec{u} \in V$ of*

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = -\int_{\Omega_1} f_1 \bar{v}_1 dx + \rho \int_{\Omega_2} f_2 \bar{v}_2 dx + \int_\Gamma \{h_1 \gamma_2 \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \nu} - h_2 \gamma_2 \bar{v}_2\} d\sigma, \ \forall \vec{v} \in V. \tag{1.9}$$

Proof : In order to apply the Lax-Milgram lemma, we need to show the continuity and the coerciveness of the form a on V.

The continuity is a direct consequence of the continuity of the form a_j on $H^j(\Omega_j)$ and of the Cauchy-Schwarz inequality.

Owing to inequality (2.15) of [21], we deduce that

$$a(\vec{u},\vec{u}) \geq \min(1,\rho(1-\sigma))\{[u_1]^2_{1,\Omega_1} + [u_2]^2_{2,\Omega_2}\}, \forall \vec{u} \in V,$$

where $[u_j]_{j,\Omega_j}$ denotes the semi-norm of $H^j(\Omega_j)$. But for $\vec{u} \in V$, the boundary conditions (1.4) and (1.5) respectively fulfilled by u_1 and u_2 imply that the norms and the semi-norms are equivalent (see e.g. Theorem I.1.9 of [17]). Therefore the previous estimate leads to the coerciveness of the form a on V. ∎

Let us now show that a solution of (1.9) is a weak solution of (1.2)–(1.8). We follow the arguments of section 1.5.3 of [9]: we introduce the spaces

$$E(\Delta^j, L^2(\Omega_j)) = \{v \in H^j(\Omega_j) : \Delta^j v \in L^2(\Omega_j)\}, j = 1,2,$$

these are Banach spaces for the norms

$$\|v\|_{j,\Omega_j} + \|\Delta^j v\|_{0,\Omega_j}, j = 1,2.$$

Lemma 1.5.3.9 of [9] proves that $D(\bar{\Omega}_1)$ is dense in $E(\Delta, L^2(\Omega_1))$; analogous arguments lead to the density of $D(\bar{\Omega}_2)$ into $E(\Delta^2, L^2(\Omega_2))$.

Lemma 1.2 *The mapping*

$$(u_1,u_2) \to (Mu_2, Nu_2 + \gamma_{1\Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial \nu}),$$

which is defined on $D(\bar{\Omega}_1)\times D(\bar{\Omega}_2)$, has a unique continuous extension as an operator from $E(\Delta, L^2(\Omega_1)) \times E(\Delta^2, L^2(\Omega_2))$ into $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)' \times \tilde{H}^{3/2}(\Gamma)'$ (identifying Γ with a real interval, we recall that $u \in \tilde{H}^s(\Gamma)$ iff $\tilde{u}$, the extension of u by 0 outside Γ, remains in $H^s(\mathbf{R})$).

Proof : Owing to Theorem 1.5.2.8 and Corollary 1.4.4.10 of [9], given $(w_1,w_2) \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{3/2}(\Gamma)$, there exists $\vec{v} = (v_1,v_2) \in V$ satisfying

$$\text{(1.10)} \qquad \begin{cases} \gamma_1 v_1 = \gamma_2 v_2 = w_2 & \text{on } \Gamma, \\ \gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu} = w_1 & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

and

$$\text{(1.11)} \qquad \|\vec{v}\|_V \leq C_1\{\|w_1\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_2\|_{\tilde{H}^{3/2}(\Gamma)}\},$$

where the constant C_1 is independent of w_1, w_2.

For a fixed $\vec{u} = (u_1,u_2) \in D(\bar{\Omega}_1) \times D(\bar{\Omega}_2)$, let us set

$$l(w_1,w_2) = \int_\Gamma \{Mu_2\bar{w}_1 - (Nu_2 + \gamma_{1\Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial \nu})\bar{w}_2\}d\sigma.$$

By integration by parts, we get (see Lemma 2.3 of [21] for the biharmonic operator) :

$$l(w_1, w_2) = a(\vec{u}, \vec{v}) + \int_{\Omega_1} \Delta u_1 \bar{v}_1 dx - \rho \int_{\Omega_2} \Delta^2 u_2 \bar{v}_2 dx. \tag{1.12}$$

Therefore using the continuity of the form a on V and the estimate (1.11), there exists a constant C_2 independant of w_1, w_2 such that

$$|l(w_1, w_2)| \le C_2 \{\|u_1\|_{E(\Delta, L^2(\Omega_1))} + \|u_2\|_{E(\Delta^2, L^2(\Omega_2))}\} \cdot \{\|w_1\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|w_2\|_{\tilde{H}^{3/2}(\Gamma)}\}.$$

By density, we deduce that l is a continuous linear form on $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{3/2}(\Gamma)$. ∎

Let us notice that the Green formula (1.12) still holds for every $v \in V$ fulfilling (1.10) and every $u_1 \in E(\Delta, L^2(\Omega_1))$, $u_2 \in E(\Delta^2, L^2(\Omega_2))$, where the left-hand side has to be understood as a duality bracket.

Lemma 1.3 *Let $\vec{u} \in V$ be the unique solution of (1.9). Then $\vec{u}$ fulfils (1.2) to (1.8).*

Proof : Applying (1.9) with $(v_1, v_2) \in D(\Omega_1) \times D(\Omega_2)$, we see that u_1 (resp. u_2) fulfils (1.2) (resp. (1.3)) in the distributional sense. This also shows that

$$u_1 \in E(\Delta, L^2(\Omega_1)), u_2 \in E(\Delta^2, L^2(\Omega_2)).$$

Therefore, for arbitrary $(w_1, w_2) \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{3/2}(\Gamma)$, comparing (1.9) with (1.12), when $v \in V$ fulfils (1.10), we deduce that

$$\langle M u_2, w_1 \rangle - \langle N u_2 + \gamma_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu}, w_2 \rangle = \int_\Gamma \{h_1 \bar{w}_1 - h_2 \bar{w}_2\} d\sigma.$$

This obviously implies that $\vec{u}$ satisfies (1.7) and (1.8). ∎

1.3 Regularity for interior data in L^2

In this paragraph, we look for conditions on $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, $h_1 \in H^{3/2}(\Gamma)$, $h_2 \in H^{1/2}(\Gamma)$, which ensure that u_1 and u_2 have the optimal regularity i.e. $u_1 \in H^2(\Omega_1)$, $u_2 \in H^4(\Omega_2)$; indeed we shall prove that u_1 and u_2 admit a decomposition into a regular part with the optimal regularity and a finite sum of singular functions. We shall see that this decomposition result will be determined by analogous decomposition results of two decoupled boundary value problems set in Ω_1 and Ω_2. More precisely, the first one is the Dirichlet problem in Ω_1 with non-homogeneous Dirichlet boundary conditions on Γ i.e.

$$\begin{cases} \Delta u_1 = f_1 & \text{in } \Omega_1, \\ \gamma_1 u_1 = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ \gamma_1 u_1 = g & \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{1.13}$$

The second one is the following mixed boundary value problem for the biharmonic operator in Ω_2 :

$$(1.14)\qquad \begin{cases} \Delta^2 u_2 = f_2 & \text{in } \Omega_2, \\ \gamma_2 u_2 = \gamma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} = 0 & \text{on } \Gamma_2, \\ M u_2 = h_1 & \text{on } \Gamma, \\ N u_2 = h_2 & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

The regularity of the solution of problem (1.13) was given in Theorem 5.1.3.5 of [9], while problem (1.14) was studied in Theorem 5.2 of [21] (see also [3]). In order to recall these results, let us define the singular exponents and singular functions of problems (1.13) and (1.14).

For problem (1.13), we set

$$(1.15)\qquad \Lambda_{1k} = \{\frac{m\pi}{\omega_{1k}} : m \in \mathbf{N}\},\ \forall k \in \{1, \dots, N_1\}.$$

For $\lambda \in \Lambda_{1k}$, the associated singular function is

$$\sigma_{lap}^{k\lambda}(r, \theta) = \begin{cases} r^\lambda \sin(\lambda\theta), & \text{if } \lambda \notin \mathbf{N}, \\ r^\lambda \{\ln r \sin(\lambda\theta) + \theta \cos(\lambda\theta)\}, & \text{if } \lambda \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

where (r, θ) are polar coordinates with origin S_{1k} (such that the half-lines $\theta = 0$ and $\theta = \omega_{1k}$ contain the edges containing S_{1k}).

For problem (1.14), in order to avoid too complicated notations, we only recall that the singular exponents are the roots of the following characteristic equation :

$$(1.16)\qquad \sin^2(\lambda - 1)\omega_{2k} + \frac{1-\sigma}{3+\sigma}(\lambda - 1)\sin^2\omega_{2k} - \frac{4}{(1-\sigma)(3+\sigma)} = 0, \text{ for } k = 1, 2,$$

$$(1.17)\qquad \sin^2(\lambda - 1)\omega_{2k} - (\lambda - 1)^2 \sin^2\omega_{2k} = 0, \text{ for } k \in \{3, \dots, N_2\}.$$

We only say that there exists a set Λ_{2k} of roots of the equation (1.16) for $k \leq 2$ and of (1.17) for $k \geq 3$, repeated according to their multiplicity; to each $\lambda \in \Lambda_{2k}$ corresponds a singular function denoted by $\sigma_{bi}^{k\lambda}$ (see [21] for more details). For $k = 1, 2$, the polynomial resolution (cf. § 3.C of [21] and (2.9) of [3]) implies that $\lambda = 2$ induces a singular function given by

$$\sigma_{bi}^{k2}(r, \theta) = r^2\theta + p_k(r, \theta),\ k = 1, 2,$$

where (r, θ) are polar coordinates with origin S_k and p_k is a polynomial of degree 2 (in the cartesian coordinates). Remark that $\sigma_{bi}^{k2} \in H^2(\Omega_2)$. Therefore, for convenience, we shall add $\lambda = 2$ to Λ_{2k}, for $k = 1, 2$ and still denoted it by Λ_{2k}.

Theorem 1.4 *Let $f_1 \in H^{s_1-1}(\Omega_1)$, $g \in H^{s_1+1/2}(\Gamma)$ fulfilling $g(S_1) = g(S_2) = 0$, with $s_1 \in \mathbf{N}$. Suppose that*

$$(1.18)\qquad s_1 \notin \Lambda_{1k}, \forall k = 1, \dots, N_1,$$

then there exists a unique solution $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ of problem (1.13) which admits the following expansion :

$$u_1 = u_{10} + \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{\lambda \in \Lambda_{1k}(s_1)} c_{1k\lambda} \eta_{1k} \sigma_{lap}^{k\lambda}, \tag{1.19}$$

where $u_{10} \in H^{s_1+1}(\Omega_1)$, $c_{1k\lambda} \in C$ depend continuously on f_1 and g, and $\Lambda_{1k}(s_1) = \Lambda_{1k} \cap]0, s_1]$.

Theorem 1.5 *Let $f_2 \in H^{s_2-2}(\Omega_2)$, $h_1 \in H^{s_2-1/2}(\Gamma)$, $h_2 \in H^{s_2-3/2}(\Gamma)$, with $s_2 \in N$, $s_2 \geq 2$. Assume that*

$$\{\lambda \in C : \Re\lambda = s_2 + 1\} \cap \Lambda_{2k} \text{ is empty, } \forall k = 1, \dots, N_2, \tag{1.20}$$

then there exists a unique solution $u_2 \in H^2(\Omega_2)$ of problem (1.14) such that

$$u_2 = u_{20} + \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{\lambda \in \Lambda_{2k}(s_2)} c_{2k\lambda} \eta_{2k} \sigma_{bi}^{k\lambda}, \tag{1.21}$$

where $u_{20} \in H^{s_2+2}(\Omega_2)$, $c_{2k\lambda} \in \mathbf{C}$ depend continuously on f_2, h_1, h_2. Here we denote $\Lambda_{2k}(s_2) = \{\lambda \in \Lambda_{2k} : 1 \leq \Re\lambda < s_2 + 1\}$.

Let us now go back to our boundary value problem (1.2)–(1.8). Far from the interface Γ, we see that it corresponds to (1.13) or (1.14); therefore, the regularity of u_1 and u_2 is given by the previous theorems. Analogous arguments as those developed in the sequel show that u_1 and u_2 have the optimal regularity in a neighbourhood of a point of Γ. Therefore, we only have to study the behaviour of u_1 and u_2 in a neighbourhood of the common vertices of Ω_1 and Ω_2.

Theorem 1.6 *Let $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, $h_1 \in H^{3/2}(\Gamma)$, $h_2 \in H^{1/2}(\Gamma)$ and $\vec{u} = (u_1, u_2) \in V$ be the solution of (1.2) - (1.8). For $k \in \{1, 2\}$, we have*
a) if $\omega_{1k} > \pi$, then u_1 admits the following decomposition in a neighbourhood V_k of S_k :

$$u_1 = u_{10} + c_k \sigma_{lap}^{k\pi/\omega_{1k}} \text{ in } V_k \cap \Omega_1, \tag{1.22}$$

where $u_{10} \in H^2(\Omega_1)$, $c_k \in \mathbf{C}$;
b) if $\omega_{1k} \leq \pi$, then $u_1 \in H^2(V_k \cap \Omega_1)$.

Proof : We may look $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ as the solution of

$$\begin{cases} \Delta u_1 = f_1 & \text{in } \Omega_1, \\ \gamma_1 u_1 = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ \gamma_1 u_1 = \gamma_2 u_2 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{1.23}$$

Since $u_2 \in H^2(\Omega_2)$ and fulfils (1.5), Theorem 1.6.1.5 of [9] implies that

$$\gamma_{2\Gamma} u_2 \in \tilde{H}^{3/2}(\Gamma). \tag{1.24}$$

Therefore, applying Theorem 1.4 with $s_1 = 1$ to problem (1.23), we get the result except if $\omega_{1k} = \pi$. In this last case, (1.24) and Theorem 1.5.1.2 of [9] allow to reduce (1.23) in the neighbourhood $V_k \cap \Omega_1$ to a homogeneous Dirichlet problem with interior data in L^2. Classical regularity results on smooth domains leads to the conclusion. ∎

To study the regularity of u_2, we now use the equations (1.3), (1.5), (1.7) and (1.8) i.e. u_2 is seen as a solution of

$$(1.25)\qquad \begin{cases} \Delta^2 u_2 = f_2 & \text{in } \Omega_2 \cap V_k, \\ \gamma_2 u_2 = \gamma_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu_2} = 0 & \text{on } \Gamma_2 \cap V_k, \\ M u_2 = 0 & \text{on } \Gamma \cap V_k, \\ N u_2 = -\gamma_{1\Gamma} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} & \text{on } \Gamma \cap V_k, \end{cases}$$

in a neighbourhood V_k of S_k.

If $\omega_{1k} \leq \pi$, then $\gamma_{1\Gamma} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \in H^{1/2}(\Gamma \cap V_k)$, and we may directly apply Theorem 1.5 with $s_2 = 2$ to (1.25). But, if $\omega_{1k} > \pi$, only $\gamma_1 \frac{\partial u_{10}}{\partial \nu}$ has the adequate regularity $H^{1/2}$, while the normal derivative of the singular function $\sigma_{lap}^{k\pi/\omega_{1k}}$ has not. The idea is to compute explicitly the contribution of this singular function. By Theorem 1.17 hereafter, there exists a solution $\tau_2^k \in H^2(\Omega_2 \cap V_k)$ of

$$\begin{cases} \Delta^2 \tau_2^k = 0 & \text{in } \Omega_2 \cap V_k, \\ \gamma_2 \tau_2^k = \gamma_2 \frac{\partial \tau_2^k}{\partial \nu_2} = 0 & \text{on } \Gamma_2 \cap V_k, \\ M \tau_2^k = 0 & \text{on } \Gamma \cap V_k, \\ N \tau_2^k = -\gamma_1 \frac{\partial \sigma_{lap}^{k\pi/\omega_{1k}}}{\partial \nu} & \text{on } \Gamma \cap V_k. \end{cases}$$

Therefore, the function u_{21} defined by

$$u_{21} := u_2 - c_k \tau_2^k,$$

belongs to $H^2(\Omega_2 \cap V_k)$ and is a solution of problem (1.14) in $\Omega_2 \cap V_k$ with data $f_2 \in L^2(\Omega_2 \cap V_k), h_1 = 0, h_2 = -\gamma_{1\Gamma} \frac{\partial u_{10}}{\partial \nu} \in H^{1/2}(\Gamma \cap V_k)$. Therefore, applying Theorem 1.5 with $s_2 = 2$ to u_{21}, we obtain the

Theorem 1.7 *Let $\vec{u} = (u_1, u_2) \in V$ be the weak solution of (1.2)- (1.8) with data $f_1 \in L^2(\Omega_1)$, $f_2 \in L^2(\Omega_2)$, $h_1 \in H^{3/2}(\Gamma)$, $h_2 \in H^{1/2}(\Gamma)$. For $k = 1$ or 2, let us suppose that*

$$\{\lambda \in \mathbf{C} : \Re\lambda = 3\} \cap \Lambda_{2k} = \emptyset,$$

then u_2 admits the following decomposition in a neighbourhood of S_k :

$$(1.26)\qquad u_2 = u_{20} + \sum_{\lambda \in \Lambda_{2k}(4)} c_{2k\lambda} \sigma_{bi}^{k\lambda} + c_k \tau_2^k,$$

where $u_{20} \in H^4(\Omega_2)$, $c_{2k\lambda}, c_k \in \mathbf{C}$ and the last term of the right-hand side of (1.26) is zero if $\omega_{1k} \leq \pi$.

1.4 More regular data

In Theorems 1.6 and 1.7, if we increase the regularity of the data, we expect to increase in the same way the regularity of the regular parts. One method is to use the same iterative procedure as in § 3; unfortunately, it imposes too much conditions and is complicated. Therefore, we prefer to use a compact perturbation argument.

We need to introduce the Hilbert spaces

$$A^{(s_1,s_2)} = \{(u_1,u_2) \in H^{s_1+1}(\Omega_1) \times H^{s_2+2}(\Omega_2) \text{ fulfilling (1.4) to (1.6) } \},$$

$$B^{(s_1,s_2)} = H^{s_1-1}(\Omega_1) \times H^{s_2-2}(\Omega_2) \times H^{s_2-1/2}(\Gamma) \times (H^{s_1-1/2}(\Gamma) \cup H^{s_2-3/2}(\Gamma)).$$

The operator $L^{(s_1,s_2)}$ induced by the boundary value problem (1.2) – (1.8) is clearly the following:

$$L^{(s_1,s_2)} : A^{(s_1,s_2)} \to B^{(s_1,s_2)} : \tag{1.27}$$
$$(u_1,u_2) \to (\Delta u_1, \Delta^2 u_2, Mu_2, Nu_2 + \gamma_{1\Gamma}\tfrac{\partial u_1}{\partial \nu}).$$

We look for conditions on s_1, s_2 which ensure that $L^{(s_1,s_2)}$ is a Fredholm operator. To do that we split up $L^{(s_1,s_2)}$ into its principal part $L_0^{(s_1,s_2)}$ and a remainder $L_1^{(s_1,s_2)}$ as follows :

$$L_0^{(s_1,s_2)} : A^{(s_1,s_2)} \to B^{(s_1,s_2)} : \tag{1.28}$$
$$(u_1,u_2) \to (\Delta u_1, \Delta^2 u_2, Mu_2, Nu_2)$$

$$L_1^{(s_1,s_2)} : A^{(s_1,s_2)} \to B^{(s_1,s_2)} : \tag{1.29}$$
$$(u_1,u_2) \to (0,0,0,\gamma_{1\Gamma}\tfrac{\partial u_1}{\partial \nu}).$$

Obviously, we have

$$L^{(s_1,s_2)} = L_0^{(s_1,s_2)} + L_1^{(s_1,s_2)}.$$

Theorem 1.8 *If $s_1 \in [s_2-1, s_2+1]$ and the Fredholm conditions (1.18) and (1.20) hold. Then $L_0^{(s_1,s_2)}$ is a Fredholm operator and*

$$ind\ L_0^{(s_1,s_2)} = -\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{N_j} card\ \Lambda_{jk}(s_j)\,. \tag{1.30}$$

Proof : Let $(f_1,f_2,h_1,h_2) \in B^{(s_1,s_2)}$. We look for a solution $(u_1,u_2) \in V$ of

$$L_0^{(s_1,s_2)}(u_1,u_2) = (f_1,f_2,h_1,h_2)\,. \tag{1.31}$$

But this is equivalent to the fact that u_2 is a solution of (1.14) and u_1 is a solution of (1.13) with $g = \gamma_{2\Gamma}u_2$ on Γ. Therefore, applying Theorem 1.5 to u_2, we deduce that there exists a unique solution $u_2 \in H^2(\Omega_2)$ of (1.13), which admits the decomposition

(1.21). As in Theorem 1.7, looking for u_1, we use this decomposition (1.21) of u_2. For all $k \in \{1,2\}$, $\lambda \in \Lambda_{2k}$, Theorem 1.17 below gives the explicit solution $\sigma_{bi1}^{k\lambda} \in H^1(\Omega_1)$ of (1.32) in a neighbourhood V_k of S_k :

$$\text{(1.32)} \qquad \begin{cases} \Delta\sigma_{bi\ 1}^{k\lambda} = 0 & \text{in } \Omega_1, \\ \gamma_1\sigma_{bi\ 1}^{k\lambda} = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ \gamma_1\sigma_{bi\ 1}^{k\lambda} = \gamma_2\sigma_{bi}^{k\lambda} & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

Furthermore, Theorem 1.4 proves the existence of a unique solution $v_1 \in H^1(\Omega_1)$ of problem (1.13) with data f_1, $g = \gamma_{2\Gamma}u_{20} \in H^{s_2+3/2}(\Gamma) \hookrightarrow H^{s_1+1/2}(\Gamma)$, since $s_1 \leq s_2 + 1$, which admits the decomposition (1.19). Let us notice that in that decomposition (1.19), the coefficients $c_{1k\lambda}$ depend continuously on f_1 and $\gamma_{2\Gamma}u_{20}$; and therefore continuously on f_1, f_2, h_1, h_2. Setting

$$u_1 = v_1 + \sum_{k=1}^{2} \sum_{\lambda\in\Lambda_{2k}(s_2)} c_{2k\lambda}\eta_k\sigma_{bi1}^{k\lambda} \,,$$

we have proven that there exists a unique solution $\vec{u} = (u_1, u_2) \in V$ of (1.31), which admits the decomposition

$$\text{(1.33)} \qquad \vec{u} = \vec{u}_0 + \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{N_j} \sum_{\lambda\in\Lambda_{jk}(s_j)} c_{jk\lambda}\eta_{jk}\vec{\sigma}^{jk\lambda} \,,$$

where $\vec{u}_0 \in A^{(s_1,s_2)}$, $c_{jk\lambda} \in C$ depend continuously on f_1, f_2, h_1, h_2 and we have set

$$\vec{\sigma}^{1k\lambda} = (\sigma_{\text{lap}}^{k\lambda}, 0), \forall\lambda \in \Lambda_{1k}, k \in \{1, \dots, N_1\},$$

$$\vec{\sigma}^{2k\lambda} = (\sigma_{bi1}^{k\lambda}, \sigma_{bi}^{k\lambda}), \forall\lambda \in \Lambda_{2k}, k \in \{1, \dots, N_2\},$$

with the agreement that $\sigma_{bi\ 1}^{k\lambda} = 0$ if $k \geq 3$.

This establishes that if $(f_1, f_2, h_1, h_2) \in B^{(s_1,s_2)}$ is such that

$$\text{(1.34)} \qquad c_{jk\lambda} = 0, \forall\lambda \in \Lambda_{jk}(s_j),$$

then it belongs to the range of $L_0^{(s_1,s_2)}$.

Reciprocally, if such a datum belongs to the range, then there exists a $(u_1, u_2) \in A^{(s_1,s_2)}$ solution of (1.31); then u_2 is a solution of (1.14) and u_1 of (1.13) with $g = \gamma_{2\Gamma}u_2$. Due to Theorem 1.5 and after Theorem 1.4, this implies that if fulfils (1.34). So we have proven that the range of $L_0^{(s_1,s_2)}$ is closed and that (1.30) holds since $L_0^{(s_1,s_2)}$ is clearly injective. ■

Theorem 1.9 *If $s_1 \in]s_2 - 1, s_2 + 1]$ and if (1.18) and (1.20) hold. Then $L^{(s_1,s_2)}$ is a Fredholm operator and*

$$\text{(1.35)} \qquad \text{ind } L^{(s_1,s_2)} = -\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{N_j} \text{card } \Lambda_{jk}(s_j) \,.$$

Proof : The assumption $s_1 > s_2 - 1$ implies that $L_1^{(s_1,s_2)}$ is a compact operator, because $H^{s_1-1/2}(\Gamma)$ is compactly imbedded into $H^{s_2-3/2}(\Gamma)$. Using a classical perturbation theorem (see Theorem IV.5.26 of [12], for instance), we deduce the theorem. ∎

Since we want to give the asymptotic behaviour of the solution of our problem (1.2)–(1.8), we need the singularities of this problem i.e. the singularities of $L^{(s_1,s_2)}$. As M. Dauge in [4] for non-homogeneous operators, we compute them by recurrence starting from the singularities of the principal part $L_0^{(s_1,s_2)}$. In view of (1.33), we see that the singularities of $L_0^{(s_1,s_2)}$ are the $\vec{\sigma}^{jk\lambda}$'s. So we proceed as follows : for $k=1$ or 2, we set

$$\vec{\sigma}_0^{jk\lambda} = \vec{\sigma}^{jk\lambda}, \tag{1.36}$$

and for $p \in N$, $\vec{\sigma}_p^{jk\lambda}$ is a solution of (1.37) hereafter in a neighbourhood V_k of S_k :

$$L_0\vec{\sigma}_p^{jk\lambda} = -L_1\vec{\sigma}_{p-1}^{jk\lambda} \text{ in } \mathrm{C}V_k\,. \tag{1.37}$$

Splitting up $\vec{\sigma}_p^{jk\lambda}$ into its components,

$$\vec{\sigma}_p^{jk\lambda} = (\sigma_{p,1}^{jk\lambda}, \sigma_{p,2}^{jk\lambda}),$$

problem (1.37) is equivalent to (1.38) and (1.39) hereafter solved in that order using Theorem 1.17.

$$\begin{cases} \Delta^2\sigma_{p,2}^{jk\lambda} = 0 & \text{in } \Omega_2 \cap V_k, \\ \gamma_2\sigma_{p,2}^{jk\lambda} = \gamma_2\frac{\partial\sigma_{p,2}^{jk\lambda}}{\partial\nu_2} = 0 & \text{on } \Gamma_2 \cap V_k, \\ M\sigma_{p,2}^{jk\lambda} = 0 & \text{on } \Gamma \cap V_k, \\ N\sigma_{p,2}^{jk\lambda} = -\gamma_1\frac{\partial\sigma_{p-1,1}^{jk\lambda}}{\partial\nu} & \text{on } \Gamma \cap V_k. \end{cases} \tag{1.38}$$

$$\begin{cases} \Delta\sigma_{p,1}^{jk\lambda} = 0 & \text{in } \Omega_1 \cap V_k, \\ \gamma_1\sigma_{p,1}^{jk\lambda} = 0 & \text{on } \Gamma_1 \cap V_k, \\ \gamma_1\sigma_{p,1}^{jk\lambda} = \gamma_2\sigma_{p,2}^{jk\lambda} & \text{on } \Gamma \cap V_k. \end{cases} \tag{1.39}$$

The associated singularity of $L^{(s_1,s_2)}$ is defined by (compare with § 5.C of [4])

$$\vec{\tau}^{jk\lambda} = \eta_k \sum_{\Re\lambda+2p\le s_2+1} \vec{\sigma}_p^{jk\lambda}. \tag{1.40}$$

Let us recall that $\vec{\tau}^{jk\lambda}$ is called a singularity of $L^{(s_1,s_2)}$ because it belongs to V and not to $A^{(s_1,s_2)}$, while $L^{(s_1,s_2)}\vec{\tau}^{jk\lambda}$ belongs to $B^{(s_1,s_2)}$. Let us check this last assumption. From (1.37) and (1.40), it is clear that

$$L^{(s_1,s_2)}\vec{\tau}^{jk\lambda} = L_1\vec{\sigma}_{p_{\max}}^{jk\lambda} \text{ in } \mathrm{C}V_k,$$

where $p_{\max}$ is such that

$$\Re\lambda + 2p_{\max} \le s_2 + 1 < \Re\lambda + 2p_{\max} + 2. \tag{1.41}$$

Therefore, $L^{(s_1,s_2)}\vec{\tau}^{jk\lambda} \in B^{(s_1,s_2)}$ iff

$$\eta_{jk} \cdot \gamma_{1\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} \vec{\sigma}^{jk\lambda}_{p_{\max},1} \in H^{s_2-3/2}(\Gamma). \tag{1.42}$$

In view of the form of $\vec{\sigma}^{jk\lambda}$ and Theorem 1.1, $\gamma_{1\Gamma}\frac{\partial}{\partial\nu}\vec{\sigma}^{jk\lambda}_{p_{\max},1}$ behaves like $r^{\Re\lambda+2p_{\max}-1}$ in a neighbourhood of S_k. So (1.41) leads to the adequate regularity.

Let us finally notice that the above procedure only concerns the singularities induced by S_1 and S_2 (i.e. the $\vec{\sigma}^{jk\lambda}$, for $k = 1$ or 2). Indeed, for $k \geq 3$, $L^{(s_1,s_2)} = L_0^{(s_1,s_2)}$ in a neighbourhood of S_{jk}, so the singularities of $L_0^{(s_1,s_2)}$ are those of $L^{(s_1,s_2)}$ i.e.

$$\vec{\tau}^{jk\lambda} = \eta_{jk}\vec{\sigma}^{jk\lambda}, \forall k \geq 3 .$$

We now recall Lemma B.1 of [4] concerning the relationship between the index and a singularities space.

Lemma 1.10 (M. Dauge, [4]) *Let $A_1 \subset A_0$ and $B_1 \subset B_0$ be two pairs of Hilbert spaces such that A_1 is dense in A_0 and B_1 is dense in B_0. Let M_0 be a Fredholm operator from A_0 into B_0, which may be restricted to a semi-Fredholm operator, denoted by M_1, from A_1 into B_1.*

We suppose that there exists a finite dimensional space E having the following properties :

$$E \subset A_0, \tag{1.43}$$
$$E \cap A_1 = \{0\}, \tag{1.44}$$
$$M_0 E \subset B_1. \tag{1.45}$$

Then the following conditions are equivalent :

(1.46) *M_1 is a Fredholm operator and* $\dim E = indM_0 - indM_1$,

(1.47) *For any $u \in A_0$ such that $Mu \in B_1$, there exists $v \in A_1$ and $w \in E$ such that $u = v + w$.*

We are ready to prove the

Theorem 1.11 *Under the assumptions of Theorem 1.9, given $(f_1, f_2, h_1, h_2) \in B^{(s_1,s_2)}$, there exists a unique solution $\vec{u} \in V$ of problem (1.2) - (1.8), which admits the following decomposition*

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{N_j}\sum_{\lambda\in\Lambda_{jk}(s_j)} c_{jk\lambda}\vec{\tau}^{jk\lambda}, \tag{1.48}$$

where $\vec{u}_0 \in A^{(s_1,s_2)}$ and $c_{jk\lambda} \in C$.

Proof : We apply the previous lemma with

$$A_1 = A^{(s_1,s_2)}, B_1 = B^{(s_1,s_2)}$$
$$A_0 = V, B_0 = V',$$
$$M_0 = \Lambda, M_1 = L^{(s_1,s_2)},$$

where Λ is the natural isomorphism between V and V' defined by

$$< \Lambda\vec{u}, \vec{v} >= a(\vec{u}, \vec{v}), \ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

Actually, $B^{(s_1,s_2)}$ is identified with a subspace of B_0 by the following continuous injection : for $\vec{F} = (f_1, f_2, h_1, h_2) \in B^{(s_1,s_2)}$, we set

$$< \vec{F}, \vec{v} >:= -\int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx + \int_{\Omega_2} f_2 v_2 dx$$
$$+ \int_\Gamma \{h_1 \gamma_1 v_1 - h_2 \gamma_2 \frac{\partial v_2}{\partial \nu}\} d\sigma, \ \forall \vec{v} = (v_1, v_2) \in V.$$

The restriction of M_0 to A_1 is clearly M_1 because Green's formula (1.12) implies that

$$\Lambda\vec{u} = L^{(s_1,s_2)}\vec{u}, \forall \vec{u} \in A^{(s_1,s_2)}.$$

The space $A^{(s_1,s_2)}$ is dense in V because we can prove that the space: $\{(u_1, u_2) \in D(\bar{\Omega}_1) \times D(\bar{\Omega}_2)$ such that the function v defined on $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$ by

$$v = \begin{cases} u_1, & \text{on } \Omega_1 \cup \Gamma \\ u_2, & \text{on } \Omega_2 \end{cases}$$

bellongs to $D(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma)\}$ is dense in V. Since Λ is a isomorphism, we deduce that $\Lambda A^{(s_1,s_2)}$ is dense in V'. This implies the density of $B^{(s_1,s_2)}$ since $\Lambda A^{(s_1,s_2)} \subset B^{(s_1,s_2)}$.

Finally, the space E is the vector space spanned by the $\vec{\tau}^{jk\lambda}$'s, for $j \in \{1,2\}$, $k \in \{1, \ldots, N_j\}$, $\lambda \in \Lambda_{jk}(s_j)$. We have previously checked that it fulfils the assumptions (1.43) - (1.45). ∎

To finish this section, let us show that it is possible to hit the limit case $s_1 = s_2 - 1$.

Theorem 1.12 *Let $s_1 = s_2 - 1$, assume that the conditions (1.18) and (1.20) hold and moreover that the Fredholm condition (1.20) holds for $s_2 - 1$ too. Then the conclusion of Theorem 1.11 still holds.*

Proof : We firstly apply Theorem 1.11 with the same s_1, but with s_2 replaced by $s_2 - 1$. Therefore, the variational solution $\vec{u}$ of (1.2) - (1.8) admits the decomposition (1.48) with $s_2 - 1$ instead of s_2. So the regular part $\vec{u}_0$ has the optimal regularity in Ω_1 but not in Ω_2. The second component of this regular part is actually solution of a boundary value problem (1.14) with data which are the sum of an optimal regularity part and a contribution of the singularities. As in Theorem 1.7, we compute explicitly the solution of this boundary value problem with a singular right-hand side using Theorem 1.17. The regular right-hand side induces a decomposition into a new regular part in $H^{s_2+2}(\Omega_2)$ and singularities of the boundary value problem (1.14) for $\Re\lambda \in [1, s_2+1[$, due to Theorem 1.5.

This allows to show that $L^{(s_1,s_2)}$ is a Fredholm operator of index given by (1.35). At this step, we follow the arguments of Theorem 1.11. ∎

1.5 The non Fredholm property

The aim of this section is to show that in Theorems 1.11 and 1.12, the condition $s_1 \in [s_2-1, s_2+1]$ is optimal. In other words, we shall prove that if this condition fails then the operator $L^{(s_1,s_2)}$ is never a Fredholm operator. The proof of this result is again based on a compact perturbation argument.

In the sequel, we shall need the following technical result :

Lemma 1.13 *Let X, Y be two Hilbert spaces and A a linear operator from X into Y. Suppose that there exists a finite dimensional subspace E of Y such that*

$$R(A) \supset E^{\perp} \tag{1.49}$$

Where $R(A)$ is the range of A, is closed and its codimension is finite.

Proof : Due to (1.49), $R(A)$ admits the following orthogonal decomposition

$$R(A) = (R(A) \cap E) \oplus E^{\perp} .$$

Since $R(A) \cap E$ is a finite dimensional subspace Y, it is closed. Therefore, the previous decomposition implies that $R(A)$ is closed. ∎

In the following, we suppose that $s_1 > s_2 + 1$; the case $s_1 < s_2 - 1$ being treated analogously.

We need to introduce a variant of the operator $L^{(s_1,s_2)}$, which take into account the non-homogeneous interface condition (1.6). We set

$$\hat{A}^{(s_1,s_2)} = \{(u_1, u_2) \in H^{s_1+1}(\Omega_1) \times H^{s_2+2}(\Omega_2) \text{ fulfilling (1.4) and (1.5) }\},$$

$$\hat{H}^{s_2+3/2}(\Gamma) = \{g \in H^{s_2+3/2}(\Gamma) : g(S_1) = g(S_2) = 0\},$$
$$\hat{B}^{(s_1,s_2)} = B^{(s_1,s_2)} \times \hat{H}^{s_2+3/2}(\Gamma),$$
$$\hat{L}^{(s_1,s_2)} : \hat{A}^{(s_1,s_2)} \rightarrow \hat{B}^{(s_1,s_2)} :$$
$$(u_1, u_2) \rightarrow (L^{(s_1,s_2)}(u_1, u_2), \gamma_{2\Gamma} u_2 - \gamma_{1\Gamma} u_1) .$$

Let us notice that Theorem 1.6.1.5 of [9] shows that $\hat{L}^{(s_1,s_2)}$ is well defined.

Lemma 1.14 *Suppose that the angles at the ends of Γ are different from π, then $L^{(s_1,s_2)}$ is a Fredholm operator iff $\hat{L}^{(s_1,s_2)}$ is a Fredholm operator.*

Proof : Clearly, $L^{(s_1,s_2)}$ and $\hat{L}^{(s_1,s_2)}$ are injective; therefore the assertion only concerns their ranges.

$\boxed{\Leftarrow}$ Suppose that $\hat{L}^{(s_1,s_2)}$ is a Fredholm operator. Then there exists a finite dimensional subspace E of $\hat{B}^{(s_1,s_2)}$ such that

$$R(\hat{L}^{(s_1,s_2)}) = E^{\perp} .$$

But this implies that

$$R(L^{(s_1,s_2)}) \supset (PE)^{\perp},$$

where P is the projection in $\hat{B}^{(s_1,s_2)}$ on $B^{(s_1,s_2)}$. Since PE has a finite dimension, Lemma 1.13 allows us to conclude that $L^{(s_1,s_2)}$ is a Fredholm operator.

$\boxed{\Rightarrow}$ Let us now assume that $L^{(s_1,s_2)}$ is Fredholm. As previously, there exists a finite dimensional subspace E_1 of $B^{(s_1,s_2)}$ such that

$$R(L^{(s_1,s_2)}) = E_1^{\perp} .$$

Furthermore, using Theorem 1.6.1.5 of [9] and the assumptions of the lemma, we can prove that the operator

$$\begin{aligned} T : \hat{A}^{s_1,s_2} &\rightarrow \hat{H}^{s_2+3/2}(\Gamma) : \\ (u_1, u_2) &\rightarrow \gamma_{2\Gamma} u_2 - \gamma_{1\Gamma} u_1 \end{aligned}$$

is onto. So it admits a continuous right inverse, denoted it by R.

Let us now fix $(\vec{F}, h) \in \hat{B}^{(s_1,s_2)}$ satisfying

$$(\vec{F} - L^{s_1,s_2} Rh, \vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{v} \in E_1. \tag{1.50}$$

Then there exists $\vec{u} \in A^{(s_1,s_2)}$ such that

$$L^{(s_1,s_2)} \vec{u} = \vec{F} - L^{(s_1,s_2)} Rh.$$

This means that $(\vec{F}, h)$ belongs to the range of $\hat{L}^{(s_1,s_2)}$ because $\vec{v}$ defined by

$$\vec{v} = \vec{u} + Rh,$$

belongs to $\hat{A}^{(s_1,s_2)}$ and fulfils

$$\hat{L}^{(s_1,s_2)} \vec{v} = (\vec{F}, h).$$

Again, Lemma 1.13 implies that $\hat{L}^{(s_1,s_2)}$ is Fredholm since (1.50) is equivalent to

$$(\vec{F}, \vec{v}) - (h, R^* L^{(s_1,s_2)*} \vec{v}) = 0, \forall \vec{v} \in E_1.$$

∎

Theorem 1.15 *Suppose that the angles at the ends of* Γ *are different from* π, *if* $s_1 > s_2 + 1$, *then* $L^{(s_1,s_2)}$ *is not a Fredholm operator.*

Proof : We introduce the operator

$$K : \hat{A}^{(s_1,s_2)} \to \hat{B}^{(s_1,s_2)} : (u_1,u_2) \to (0,0,0,-\gamma_{1\Gamma}\frac{\partial u_1}{\partial \nu},\gamma_{1\Gamma}u_1).$$

Setting

$$\hat{H}^{s_1+1/2}(\Gamma) = \{g \in H^{s_1+1/2}(\Gamma) : g(S_k) = 0, k = 1,2\},$$

we remark that

$$R(K) \subset \{0,0,0\} \times H^{s_1-1/2}(\Gamma) \times \hat{H}^{s_1+1/2}(\Gamma).$$

This implies that K is a compact operator because $\hat{H}^{s_1+1/2}(\Gamma)$ (resp. $H^{s_1-1/2}(\Gamma)$) is compactly imbedded into $\hat{H}^{s_2+3/2}(\Gamma)$ (resp. $H^{s_2-3/2}(\Gamma)$).

Let us suppose that $\hat{L}^{(s_1 s_2)}$ is Fredholm. Then

$$\begin{aligned}\hat{L}^{(s_1,s_2)} + K : \hat{A}^{s_1,s_2} &\to \hat{B}^{(s_1,s_2)} : \\ (u_1,u_2) &\to (\Delta u_1, \Delta^2 u_2, M u_2, N u_2, \gamma_{2\Gamma} u_2)\end{aligned} \tag{1.51}$$

is also Fredholm. This leads to a contradiction since the kernel of $\hat{L}^{(s_1,s_2)} + K$ is not finite-dimensional (indeed u_1 does not satisfy any condition on the interface). ∎

Remark 1.16 The amplitude 2 in the condition $s_1 \in [s_2 - 1, s_2 + 1]$ is exactly the difference between the order of the biharmonic operator and the Laplace operator. This means that if we consider elliptic operators of respective order $2m_1$ and $2m_2$, then the amplitude would be $|2m_1 - 2m_2|$. ∎

1.6 Logarithmico-polynomial resolution

Theorem 1.3 of [13] gives the existence of a solution to the boundary value problems (1.38) and (1.39). Here, following [20], we give another proof of this result, based on the use of the Jordan chains. Indeed, it was shown in [20] how to reduce each of these boundary value problems into an abstract differential equation in a Hilbert space using the change of variable $r = e^t$ and reducing the order. With the particular right-hand side of (1.38) or (1.39), the equivalent differential equation we get is

$$(\frac{\partial}{\partial t} - A)u(t) = e^{\lambda t}\sum_{q=0}^{Q} t^q f_q, \tag{1.52}$$

where A is a closed operator defined in an appropriate Hilbert space X, for some $\lambda \in C$, $Q \in N \cup \{0\}$ and $f_q \in X$, for all $q \in \{0,\dots,Q\}$.

In order to solve (1.38) or (1.39), it is therefore equivalent to solve their corresponding problems (1.52). The case $Q = 0$ was solved in paragraph 4 of [20] in an abstract setting (it was called the polynomial resolution because for $\lambda \in \mathbf{N}$, it corresponds to the resolution of problems (1.38) or (1.39) with polynomial data). We shall extend this technique to the general case $Q \geq 0$.

Let us recall the abstract setting of [20] : X is a Hilbert space, A a closed operator from X into X such that its domain $D(A)$ is also a Hilbert space with its own topology. We assume that there exists a closed subspace Z of X such that $D(A)$ is dense in Z and is compactly imbedded into Z. Finally, the resolvent set of A is assumed to be nonempty.

The first idea to solve (1.52) is to look for a solution u in the same form than the right-hand side i.e.

$$u(t) = e^{\lambda t} \sum_{q=0}^{Q} t^q \varphi_q, \tag{1.53}$$

where $\varphi_q \in D(A)$ are the new unknowns. In that case, problem (1.52) is equivalent to

$$\begin{cases} (\lambda - A)\varphi_q + (q+1)\varphi_{q+1} = f_q, \ q = 0, \ldots, Q-1, \\ (\lambda - A)\varphi_Q = f_Q \end{cases} \tag{1.54}$$

If λ is not an eigenvalue of A, then for arbitrary $f_q \in X$, (1.54) has unique solutions given by

$$\varphi_q = \sum_{l=0}^{Q-q} (-1)^l \frac{(q+l)!}{l!} (\lambda - A)^{-(1+l)} f_{q+l}, \ \forall q = 0, \ldots, Q. \tag{1.55}$$

If λ is an eigenvalue of A, the previous technique fails in general. As in [20], we shall use the associated Jordan basis $\left\{\{\varphi^{\lambda,\mu,k}\}_{k=0}^{K(\lambda,\mu)-1}\right\}_{\mu=1}^{M(\lambda)}$ and the dual Jordan basis $\left\{\{\psi^{\lambda,\mu,k}\}_{k=0}^{K(\lambda,\mu)-1}\right\}_{\mu=1}^{M(\lambda)}$. Let us recall that they fulfil (see Lemma 2.3 of [20]) :

$$(A - \lambda)\varphi^{\lambda,\mu,k} = \varphi^{\lambda,\mu,k-1}, \tag{1.56}$$

$$\langle (A-\lambda)u, \psi^{\lambda,\mu,k} \rangle = \langle u, \psi^{\lambda,\mu,k+1} \rangle, \ \forall u \in D(A), \tag{1.57}$$

$$\langle \varphi^{\lambda,\mu,k}, \psi^{\lambda,\mu',k'} \rangle = \delta_{\mu,\mu'}\delta_{kk'}, \tag{1.58}$$

for every $k = 0, \ldots, K(\lambda,\mu) - 1$, $k' = 0, \ldots, K(\lambda,\mu') - 1$, $\mu, \mu' = 1, \ldots, M(\lambda)$ and the conventions $\varphi^{\lambda,\mu,-1} = 0$ and $\psi^{\lambda,\mu,K(\lambda,\mu)} = 0$.

For all $q \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, let us denote

$$\sigma_q^{\lambda,\mu} = e^{\lambda t} \sum_{l=1}^{K(\lambda,\mu)} \frac{q!}{(l+q)!} t^{l+q} \varphi^{\lambda,\mu,K(\lambda,\mu)-l}. \tag{1.59}$$

Using (1.56), we check that

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right)\sigma_q^{\lambda,\mu} = e^{\lambda t} t^q \varphi^{\lambda,\mu,K(\lambda,\mu)-1}, \ \forall q \in \mathbf{N} \cup \{0\}. \tag{1.60}$$

Now, we look for a solution u of (1.52) in the form

$$u(t) = \sum_{q=0}^{Q}\{e^{\lambda t}t^q\varphi_q + \sum_{\mu=1}^{M(\lambda)} c_{\mu q}\sigma_q^{\lambda,\mu}\}, \tag{1.61}$$

where $\varphi_q \in D(A)$ and $c_{\mu q}$ are unknown. In view of (1.60), problem (1.52) is thus equivalent to

$$(\lambda - A)\varphi_q = f_q - \sum_{\mu=1}^{M(\lambda)} c_{\mu q}\varphi^{\lambda,\mu,K(\lambda,\mu)-1} - (q+1)\varphi_{q+1}, \ \forall q = 0, \ldots, Q, \tag{1.62}$$

with the convention $\varphi_{Q+1} = 0$. Since the range of $A - \lambda$ is the orthogonal of $\ker((A-\lambda)^*) = Sp(\{\psi^{\lambda,\mu,K(\lambda,\mu)-1}\}_{\mu=1}^{M(\lambda)})$, this problem (1.62) has solutions φ_q, $q = 0, \ldots, Q$ iff

$$\langle f_q - \sum_{\mu=1}^{M(\lambda)} c_{\mu q}\varphi^{\lambda,\mu,K(\lambda,\mu)-1} - (q+1)\varphi_{q+1}, \psi^{\lambda,\mu',K(\lambda,\mu')-1}\rangle = 0, \tag{1.63}$$

for all $\mu' = 1, \ldots, M(\lambda), q = 0, \ldots, Q$.

Using the orthogonal conditions (1.58), (1.63) is equivalent to

$$c_{\mu q} = \langle f_q - (q+1)\varphi_{q+1}, \psi^{\lambda,\mu,K(\lambda,\mu)-1}\rangle, \ \forall q = 0, \ldots, Q. \tag{1.64}$$

This means that we solve problem (1.62) by recurrence starting with the value $q = Q$. Indeed, for each q, assuming that φ_{q+1} exists, then taking $c_{\mu q}$ given by (1.64), we deduce the existence of at least one solution φ_q of (1.62). Since φ_Q exists (recall that $\varphi_{Q+1} = 0$), we have proven the

Theorem 1.17 *For all $\lambda \in \mathbf{C}$, $Q \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $\varphi_q \in X$, $q \in \{0, \ldots, Q\}$, there exists a solution $u(t)$ of problem (1.52) in the form*

$$u(t) = \sum_{q=0}^{Q}\{e^{\lambda t}t^q\varphi_q + \sum_{\mu=1}^{M(\lambda)} c_{\mu q}\sigma_q^{\lambda,\mu}\}, \tag{1.65}$$

where the sum over μ disappears if λ is not an eigenvalue of A; otherwise, the $c_{\mu q}$'s are given by (1.64) and the φ_q's are solutions of (1.62).

Chapitre 2

Problèmes paraboliques dans un cylindre à base polygonale

2.1 Introduction

On considère un problème mixte parabolique pour une equation du premier ordre en temps mais d'ordre pair arbitraire dans les deux variables d'espace. Le domaine spatial est un polygone Ω. Pour simplifier l'écriture, on suppose que ce dernier est borné, C^∞ partout sauf à l'origine où il coincide avec G un secteur plan d'ouverture $\omega \in]0, 2\pi]$. On se ramène à un tel ouvert par le procédé classique de localisation au voisinage de chaque sommet du polygone. Les résultats sur ces derniers se déduisent par sommation sur les sommets comme dans le chapitre 1.

Soit s un réel positif tel que si $s < m$, s n'est pas un demi entier. On se donne $g \in H^{s-m}(\Omega)$ et on regarde $v \in \overset{o}{H}{}^m(\Omega)$ dépendant d'un paramètre complexe q avec $\Re q^{2m} \geq 0$, solution du problème auxiliaire :

$$\text{(P.1)} \qquad q^{2m}v + L(z, \partial_z)v = g \text{ dans } \Omega,$$

où L est un opérateur différentiel d'ordre $2m$ à coefficients $C^\infty(\bar{\Omega})$.
Afin de donner une décomposition en parties régulière et singulière de la solution v de (P.1), nous reprenons le parcours du théorème 16.9 de [4] sous des hypothèses différentes car notre objectif est d'étudier le problème parabolique correspondant à (P.1), on suppose donc que l'opérateur L est proprement elliptique (voir [14]) ce qui entraine l'hypothèse de [4], c'est à dire $\partial_y^{2m} + L(z, \partial_z)$ est proprement elliptique en (y, z). Notons que l'inverse n'est pas toujours vrai. D'autre part on considère le paramètre q dans la bande $-\pi/4m \leq \arg q \leq \pi/4m$ au lieu d'une droite, ce qui nécessite des hypothèses supplémentaires (cf. lemme 2.13).

On considère par la suite le problème parabolique ci-dessous dans les espaces appropriés (voir paragraphe 2.2).

$$(P.2)\begin{cases} \partial_t u + L(z,\partial_z)u = f, \text{dans } Q_+ = \Omega \times \mathbf{R}_+, \\ u\,|_{\Omega\times\{0\}} = 0, \\ \partial_z^\alpha u\,|_{\partial\Omega\times\mathbf{R}_+} = 0, \forall\,|\alpha| = 0,\dots,m-1, \end{cases}$$

avec

$$f \in \tilde{H}^{s-m,\frac{s-m}{2m}}(\Omega\times\mathbf{R}_+) := L^2(\mathbf{R}_+, H^{s-m}(\Omega)) \cap \tilde{H}^{\frac{s-m}{2m}}(\mathbf{R}_+, L^2(\Omega)),$$

où $\tilde{H}^s(\mathbf{R}_+, L^2(\Omega))$ désigne l'espace des fonctions définies sur $\Omega\times\mathbf{R}_+$, telles que leur prolongement par 0 pour les $t<0$ est dans l'espace $H^s(\mathbf{R}, L^2(\Omega))$.

La décomposition de la solution $u \in L^2(\mathbf{R}_+, \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)) \cap \tilde{H}^{\frac{s+m}{2m}}(\mathbf{R}_+, L^2(\Omega))$ de (P.2) se déduit à partir de la solution v de (P.1) par la transformée de Fourier-Laplace inverse et s'écrit sous la forme (cf. Théorème 2.21) :

$$\begin{aligned}(2.1)\quad u(z,t) \;&=\; u_R(z,t) + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s}\;\sum_{(j,l)\in\Lambda_s}\;\sum_{i=0}^{j}\Big[\Phi(r,t) *_t \frac{d^i}{dt^i}K^{\lambda,\nu}(t)\sigma_{i,0}^{\lambda,\nu,2jm+l}(z) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{Q}\Phi(r,t) *_t \Psi_n\Big(\frac{d^i}{dt^i}K^{\lambda,\nu}(t)\Big)\sigma_{i,n}^{\lambda,\nu,2jm+l}(z)\Big],\end{aligned}$$

où $u_R \in \tilde{H}^{s+m,\frac{s+m}{2m}}(\Omega\times\mathbf{R}_+)$ est la partie régulière . Les fonctions $t \to K^{\lambda,\nu}(t) \in \tilde{H}^{\frac{s+m-1-\Re\lambda}{2m}}(\mathbf{R}_+)$ sont les coefficients de singularités , le deuxième et le troisième terme sont des blocs de fonctions singulières générées à partir des singularités du problème à paramètre complexe et dépendant réspectivement d'un facteur régularisant et d'un opérateur pseudo-différentiel. Le role du facteur régularisant et de l'opérateur pseudo-différentiel apparait avec le cas particulier où l'opérateur est homogène à coefficients constants que nous traitons par la suite. Dans ce cas nous obtenons des résultats similairesà ceux de [11] relatifs à l'équation de la chaleur, plus précisement (cf. Théorème 2.22) :

$$(2.2)\qquad u(z,t) = u_R(z,t) + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_s}\;\sum_{j\in\hat{\Lambda}_s}\Phi(r,t) *_t \frac{d^j}{dt^j}K_k^{\lambda,\nu}(t)\sigma_k^{\lambda,\nu,2jm}(z),$$

ou bien

$$(2.3)\qquad u(z,t) = u_R^*(z,t) + \psi(r)\sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_s}\;\sum_{j\in\hat{\Lambda}_s}\frac{d^j}{dt^j}K_k^{\lambda,\nu}(t)\sigma_k^{\lambda,\nu,2jm}(z),$$

avec $K_k^{\lambda,\nu} \in \tilde{H}^{\frac{s+m-1-\Re\lambda}{2m}-\epsilon}(\mathbf{R}_+)$ $\forall\epsilon>0$. De plus il existe $\epsilon_0 \geq 0$ assez petit tel que $u_R \in \tilde{H}^{s+m-\epsilon_0,\frac{s+m}{2m}}(\Omega\times\mathbf{R}_+)$ et $u_R^* \in L^2(\mathbf{R}_+, H^{s+m-\epsilon_0}(\Omega))$.

Remarquons que les décompositions (2.2) et (2.3) précédentes privées de l'opérateur pseudo-différentiel sont caractérisées par une réduction de régularité des coefficients $K_k^{\lambda,\nu}$, d'autre part la partie régulière dans la décomposition sans facteur régularisant perd en plus toute sa régularité tangentielle.

2.2 Notations préliminaires

On regroupe dans cette partie, les définitions, notations et hypothèses de base.

a) **Espace de Sobolev non isotrope**

Soient r et s deux réels positifs, notons par I soit $\mathbf{R}_+$, soit $\mathbf{R}$.

Définition 2.1 ([14]. V. 2)
L'espace de Sobolev non isotrope $H^{r,s}(\Omega \times I)$ est défini par

$$H^{r,s}(\Omega \times I) := L^2(I, H^r(\Omega)) \cap H^s\left(I, L^2(\Omega)\right)$$

qui est un Hilbert pour la norme

$$\|u\|_{r,s} = \left\{\int_I \|u(t,.)\|^2_{H^r(\Omega)}\, dt + \|u\|^2_{H^s(I,L^2(\Omega))}\right\}^{1/2}.$$

∎

On définit l'espace,

$$H^{-r,-s}(\Omega \times I) := L^2\left(I, H^{-r}(\Omega)\right) + H^{-s}\left(I, L^2(\Omega)\right)$$

muni de la norme :

$$\|u\| = \{\inf_{u_1+u_2=u} \|u_1\|^2{}_{L^2(I,H^{-r}(\Omega))} + \|u_2\|^2{}_{H^{-s}(I,L^2(\Omega))}\}^{1/2}.$$

Remarquons que $H^{-r,-s}(\Omega \times I)$ est le dual de $H_0^{r,s}(\Omega \times I) := L^2\left(I, \overset{\circ}{H}{}^r(\Omega)\right) \cap H^s(I, L^2(\Omega))$.

Etant donnée une fonction $t \to u(t)$ sur $\mathbf{R}_+$, on fera souvent usage de son prolongement $\tilde{u}(t)$ par zéro pour $t < 0$. Ce qui nous conduit aux définitions :

$$\tilde{H}^s\left(\mathbf{R}_+, L^2(\Omega)\right) := \{u \in H^s\left(\mathbf{R}_+, L^2(\Omega)\right),\quad \tilde{u} \in H^s\left(\mathbf{R}, L^2(\Omega)\right)\},$$

$$\tilde{H}^{r,s}(\Omega \times \mathbf{R}_+) := L^2(\mathbf{R}_+, H^r(\Omega)) \cap \tilde{H}^s\left(\mathbf{R}_+, L^2(\Omega)\right).$$

Nous avons la caractérisation suivante:

Proposition 2.2 ([11]. Prop. 2.5) *Pour $s \geq 0$,*
$\tilde{H}^s(\mathbf{R}_+, L^2(\Omega))$ s'identifie avec l'espace des fonctions $u \in H^s(\mathbf{R}_+, L^2(\Omega))$ qui vérifient

i) $\partial_t^k u(z,0) = 0 \ \forall z \in \Omega$, *pour* $k < s - 1/2$,

ii) $\frac{1}{\sqrt{t}}\partial_t^\mu u \in L^2(\mathbf{R}_+, L^2(\Omega))$, *si* $\mu = s - 1/2$ *est un entier .*

Maintenant pour caractériser $\tilde{H}^{r,s}(\Omega \times \mathbf{R}_+)$ on considère la transformée de Laplace $\mathcal{L}_{t\to p}u$ ou de Fourier $\mathcal{F}_{t\to p}u$ en $p = \xi + i\eta$ définie formellement par

$$\mathcal{L}_{t\to p}u = \int_{R_+} e^{-pt}u(t)\, dt = \mathcal{F}_{t\to\eta}\{e^{-\xi t}\tilde{u}(t)\}.$$

Théorème 2.3 *Lorsque s et r sont deux reéls positifs; $u(x,t) \in \tilde{H}^{r,s}(\Omega \times \mathbf{R}_+)$ si et seulement si la fonction :*

$$\eta \rightarrow \{\|\mathcal{L}_{t\rightarrow p}u\|_{H^r(\Omega)} + (1+|p|)^s\|\mathcal{L}_{t\rightarrow p}u\|_{L^2(\Omega)}\}$$

est dans $L^2(\mathbf{R}_\eta)$ pour tout $p \in \mathbf{C}$ et $p = \xi + \mathrm{i}\eta$ avec $\xi \geq 0$.

On définit l'espace suivant :

Définition 2.4 *Soit E un espace de Banach complexe. On désigne par $\mathcal{H}^2(\mathbf{C}^+, E)$ l'espace des fonctions holomorphes $f\colon \{p \in \mathbf{C} : \Re p > 0\} = C^+ \rightarrow E$ et telle que*

$$\|f\|_{\mathcal{H}^2(\mathbf{C}^+,E)} = \left\{\sup_{\xi>0} \int_{\mathbf{R}} \|f(\xi+\mathrm{i}\eta)\|^2{}_E \, d\eta\right\}^{1/2} < +\infty. \tag{2.4}$$

On munit $\mathcal{H}^2(\mathbf{C}^+, E)$ de la norme (2.4).

Théorème 2.5 ([23]. Théorème 2.4) *Soit $s \in \mathbf{R}$, l'application*

$$\tilde{H}^s(\mathbf{R}_+, E) \ni u \rightarrow (1+p)^s \mathcal{L}_{t\rightarrow p}u \in \mathcal{H}^2(\mathbf{C}^+, E)$$

est un isomorphisme topologique.

On déduit de ce théorème la proposition suivante :

Proposition 2.6 *Soit $r, s \in \mathbf{R}$.*
$u(x,t) \in \tilde{H}^{r,s}(\Omega \times \mathbf{R}_+) := L^2(\mathbf{R}_+, H^r(\Omega)) \cap \tilde{H}^s(\mathbf{R}_+, L^2(\Omega))$ si et seulement si pour $p = \xi + \mathrm{i}\eta$, on a les deux conditions suivantes :

- $\mathcal{L}_{t\rightarrow p}u \in \mathcal{H}^2(\mathbf{C}^+, H^r(\Omega))$,
- $(1+p)^s \mathcal{L}_{t\rightarrow p}u \in \mathcal{H}^2(\mathbf{C}^+, L^2(\Omega))$.

b) **Espace de Sobolev à poids**
La quasi totalité des résultats de cette partie proviennent de l'annexe A de [4].
On note $d_G(x,y)$ la distance dans G , définie comme la borne inférieure de la longueur des arcs contenus dans G et joignant x à y.

Définition 2.7 *Soit $s, \rho \in \mathbf{R}_+, \sigma = s - [s]$ avec $\sigma \in [0,1[$. On désigne par:*

- *$H^s(G,\rho)$ l'espace $H^s(G)$ muni de la norme :*

$$\|\cdot\|_{s,G,\rho} = \{|\cdot|^2_{s,G} + \rho^{2s}\|\cdot\|^2_{0,G}\}^{1/2},$$

avec

$$\begin{cases} |u|^2_{s,G} : & = \sum_{\alpha=[s]} \int_G |\partial^\alpha u(x)|^2 \, dx \quad \text{si } s \text{ est entier}, \\ |u|^2_{s,G} : & = \sum_{\alpha=[s]} \int_{G\times G} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|^2}{d_G(x,y)^{+2\sigma+2}} \, dx\, dy \quad \text{si } s \text{ non entier}. \end{cases}$$

- *pour $\rho \geq 1$, $H^{-s}(G,\rho)$ est le dual de $\overset{\circ}{H}^{s}(G,\rho)$ muni de la norme canonique du dual.*

Proposition 2.8 *Pour $\rho \geq 1$ et $s \in \mathbf{R}_+^*$,*
$H^{-s}(G,\rho) = H^{-s}(G) + L^2(G,\rho^{-s})$ où la norme de $L^2(G,\rho^{-s})$ est donnée par :

$$\|\cdot\|_{L^2(G,\rho^{-s})} = \rho^{-s}\|\cdot\|_{0,G}.$$

La norme dans $H^{-s}(G,\rho)$ est uniformement équivalente à :

$$\left\{\inf_{u_1+u_2=u} \|u_1\|^2_{H^{-s}(G)} + \rho^{-2s}\|u_2\|^2_{0,G}\right\}^{1/2}$$

Proposition 2.9 *Soit v une fonction définie sur G. Notons pour $\rho > 0, x \in G$: $v_\rho(x) = v(\rho x)$. Alors pour tout s dans $\mathbf{R}_+$ ou $s \in \mathbf{R}$ et $\rho \geq 1$*

1. $\|v\|_{s,G} = \rho^{1-s}\|v_\rho\|_{s,G,\rho}$
2. $\|v_{1/\rho}\|_{s,G} = \rho^{1-s}\|v\|_{s,G,\rho}$

Proposition 2.10 *Pour tout $p \in \mathbf{C}, s \in \mathbf{R}_+$ on a les équivalences suivantes :*

1. $\|v\|_{s,G,\sqrt[2m]{1+|p|}} \simeq \|v\|_{s,G}$, *pour $|p| \leq 1$,*
2. $\|v\|_{s,G,\sqrt[2m]{1+|p|}} \simeq \|v\|_{s,G,\sqrt[2m]{|p|}}$, *pour $|p| \geq 1$.*

c) **Hypothèses et notations concernant l'opérateur**

On se donne un opérateur, $L(z,\partial_z) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} a_\alpha(z)\partial_z{}^\alpha$ d'ordre $2m$, proprement elliptique à coefficients $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Soit $L_0(\partial_z)$ la partie principale de $L(z,\partial_z)$ gelée en 0 et $\mathcal{L}(\theta, r\partial_r, \partial_\theta)$ l'écriture en coordonnées polaires , $r = |z|, \theta = z/r$, de l'opérateur $r^{2m}L_0(\partial_z)$.
On désigne par $\mathcal{L}(\lambda)$ l'opérateur $\mathcal{L}(\theta,\lambda,\partial_\theta)$ agissant de $\overset{\circ}{H}^{m}(]0,\omega[)$ dans $H^{-m}(]0,\omega[)$.
Pour $q \in \mathbf{C}$, on pose

$$P(q,z,\partial_z) := q^{2m} + L(z,\partial_z),$$

$$P_0(q,\partial_z) := q^{2m} + L_0(\partial_z).$$

On rappelle les notations de [4], pour $s \geq 0, \lambda \in \mathbf{C}$:

1. $S^{\lambda,s}(G) := \{u = \sum_{q=0}^{Q} r^\lambda (lnr)^q u_q(\theta), q \in \mathbf{N}, u_q \in H^{s+m} \cap \overset{\circ}{H}^{m}(]0,\omega[)\}$,
2. $P^\lambda(G) := \{u \in S^{\lambda,0}(G)$ tel que u est un polynôme en $z\}$,
3. $E^\lambda(G,L) := \{u \in S^{\lambda,0}(G)$ tel que Lu est un polynôme en $z\}$,
4. $J^\lambda := dim[E^\lambda(G,L)/P^\lambda(G)]$.

Définition 2.11 *On dira que l'opérateur L est injectif modulo les polynômes sur $S^{\lambda,s}(G)$ si u est un polynôme dès que $u \in S^{\lambda,s}(G)$ et Lu est un polynôme.*

d) **Les fonctions singulières associées à** $P(q,z,\partial_z)$

Ecrivons $P(q,z,\partial_z) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} b_\alpha(z)\partial_z{}^\alpha$ où $b_\alpha := a_\alpha$ si $|\alpha| \neq 0$ et $a_\alpha + q^{2m}$ si $|\alpha| = 0$.
On fait un développement asymptotique de P au voisinage de 0 sous la forme :

$$P(q,z,\partial_z) = \sum_{j=0}^{J} P_j(q,z,\partial_z) + P_J(q,z,\partial_z)$$

$$P_j(q,z,\partial_z) = \sum_{|\alpha|\leq 2m} \left(\sum_{|\beta|=j+|\alpha|-2m} \partial^\beta b_\alpha(0)\frac{z^\beta}{\beta!} \right) \partial_z{}^\alpha.$$

Grâce à la forme particulière de l'opérateur P en q, pour un développement asymptotique de L similaire, on a :

$$P_j(q,z,\partial_z) = \begin{cases} L_j & \text{si } j \neq 2m \\ \\ L_j + q^{2m} & \text{si } j = 2m. \end{cases}$$

Soit $\lambda \in C$ et $\{\sigma^{\lambda,\nu}, \nu = 1,\ldots,J^\lambda\}$ une base de $E^\lambda(G,L_0)/P^\lambda(G)$. On cherche $S^{\lambda,\nu,i}(q,z)$ tel que pour tout $j \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{i=0}^{j} P_{j-i}S^{\lambda,\nu,i}(q,z) = 0. \tag{2.5}$$

Ainsi formellement :

$$\sum_{j\in\mathbf{N}} P_j\Big(\sum_{i\in\mathbf{N}} S^{\lambda,\nu,i}(q,z)\Big) = 0.$$

Les $S^{\lambda,\nu,i}(q,z)$ s'écrivent alors sous la forme :

$$S^{\lambda,\nu,2mj+l}(q,z) = \sum_{i=0}^{j} q^{2im}\sigma_i{}^{\lambda,\nu,2jm+l}(z), \tag{2.6}$$

où les $\sigma_i{}^{\lambda,\nu,2jm+l}(z) \in S^{\lambda+2jm+l,0}(G)$ existent (voir § 1.6) et sont définies par :

$$(\star)\begin{cases} \sigma_0{}^{\lambda,\nu,0} = \sigma^{\lambda,\nu}, \\ L_0\sigma_i^{\lambda,\nu,2jm+l} = -\sum_{t=2mi}^{2jm+l-1} L_{2mj+l-t}\sigma_i^{\lambda,\nu,t} - \sigma_{i-1}^{\lambda,\nu,2(j-1)m+l}, \\ \\ \sigma_i^{\lambda,\nu,j} = 0 \qquad \text{si } i < 0, \\ \\ j \in \mathbf{N},\ 0 \leq l \leq 2m-1,\ i \leq j. \end{cases}$$

2.3 Problème elliptique avec paramètre complexe

2.3.1 Etude dans un secteur G infini

Soit $B(0,\epsilon) \subset \mathbf{R}^2$ une boule de centre 0 de rayon ϵ. On cherche à préciser la régularité d'une fonction $v(q,.) \in \overset{\circ}{H}{}^m(G)$, à support dans$B(0,\epsilon)$ dépendante d'un paramètre q tel que $\Re q^{2m} \geq 0$ et v solution de

$$(P.1) \qquad P(q,z,\partial_z)v(q,z) = g(q,z) \in H^{s-m}(G).$$

La réponse est donnée par le théorème ci-dessous, dont la démonstration est inspirée de la preuve du théorème 16.9 de [4]. Toutefois dans le but d'étudier le problème parabolique corespondant nous considérons ici un opérateur $L(z,\partial_z)$ proprement elliptique en z. Notons que ${\partial_y}^{2m} + L(z,\partial_z)$ l'est aussi en (y,z). La réciproque n'est pas toujours vraie.
On adopte par la suite les notations que voici :

- $\mathcal{S}_m := \mathbf{R}_+ \setminus \{j - 1/2, j = 1, \ldots, m\}$.
- $M_s := \{(\lambda,\nu)/\lambda \in \mathbf{C}, m-1 < \Re\lambda < s+m-1, \text{ tel que } J^\lambda \neq 0 \ , \nu = 1, \ldots, J^\lambda\}$.
- $\Lambda_s := \{(j,l) \in \mathbf{N} \times \{0,\ldots,2m-1\} : 2jm + l \leq s + m - 1 - \Re\lambda\}$.

Pour l'opérateur L_0 on considère les hypothèses **(H)**, **(H1)** ou **(H2)** :

(H) Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que : $\Re\lambda = s + m - 1$, $L_0(\partial_z)$ est injectif modulo les polynômes sur $S^{\lambda,0}(G)$.

(H1) Il existe $C_1 > 0$ telle que pour tout $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(G)$: $\Re\langle L_0 u, u\rangle \geq C_1 \|u\|^2_{m,G}$ (i.e. L_0 est fortement $\overset{\circ}{H}{}^m(G)$-coercif)

(H2) Pour tout $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(G)$: $\langle L_0 u, u\rangle$ est réel.

Enfin on considére ψ une fonction $C_0{}^\infty(\mathbf{R})$ identiquement egàle à 1 au voisinage de 0.

Théorème 2.12 *Soit $s \in \mathcal{S}_m$.*
Si L_0 vérifie **(H)** *alors toute solution v de $(P.1)$ peut s'ecrire :*

(i) $v(z,q) = w_R^1(z,q) + \psi(r)\sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} b_1^{\lambda,\nu}(q) \sum_{(j,l)\in\Lambda_s} \sum_{i=0}^{j} q^{2im} {\sigma_i}^{\lambda,\nu,2jm+l}(z)$

où pour tout q variant dans un compact K, il existe $C_1 > 0$ (indépendante de q) telle qu'on ait:

$$\|w_R^1\|_{s+m,G} + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} |b_1^{\lambda,\nu}(q)| \leq C_1\{\|g\|_{s-m,G} + \|v\|_{m,G}\}.$$

(ii) Si de plus on a **(H1)** *ou* **(H2)**, *alors*

$$\begin{aligned} v(z,q) &= w_R^2(z,q) + \psi(r|q|) \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} b_2^{\lambda,\nu}(q) \sum_{(j,l)\in\Lambda_s} |q|^{-2mj-l} \times \\ &\quad \sum_{i=0}^{j} q^{2im} {\sigma_i}^{\lambda,\nu,2jm+l}(z|q|) \end{aligned}$$

où pour tout $|q|$ assez grand, il existe $C_2 > 0$ (indépendante de q) telle qu'on ait :

$$\|w_R^2\|_{s+m,G,|q|} + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} |q|^{s+m-1-\Re\lambda} |b_2^{\lambda,\nu}(q)| \leq C_2\|g\|_{s-m,G,|q|}.$$

•*${b_1}^{\lambda,\nu}$ et ${b_2}^{\lambda,\nu}$ sont des coefficients dans* **C**.

Démonstration du point (i): Pour q fixé, le théorème 5.11 de [4] s'applique à v car dans le cas des singularités coniques la propriété d'injectivité modulo les polynômes de $L_0(\partial_z)$ sur $S^{\lambda,0}(G)$ est équivalente à la propriété d'indice de l'opérateur $P(q,z,\partial_z)$ agissant de $H^{s+m} \cap \overset{\circ}{H}{}^m(G)$ dans $H^{s-m}(G)$ (voir [4]) .
Les singularitées sont données en (2.6). Ainsi v admet une décomposition et une estimation similaire au point (i), mais avec une constante C_q dépendante de q, or $q \to P(q,z,\partial_z)$ est continue et donc uniformement continue sur tout compact, C_q peut être choisie uniforme en q.

∎

Lemme 2.13 *Sous l'une des conditions* **(H1)** *ou* **(H2)**,
$P_0(\omega,\partial_z)$ est un isomorphisme de $\overset{\circ}{H}{}^m(G)$ sur $H^{-m}(G)$ pour tout ω tel que $\Re\omega^{2m} \geq 0$.

Démonstration

- Si L_0 vérifie **(H1)**, c'est trivial.
- Si L_0 vérifie **(H2)**, d'après le lemme (8.1) de [4] :

  (2.7) $\quad \forall\epsilon > 0,\ \exists\alpha > 0 : \alpha\|u\|^2_{m,G} \leq \langle(L_0+\epsilon)u,u\rangle, \forall u \in \overset{\circ}{H}{}^m(G).$

  Ce qui entraine que

$$\langle L_0 u,u\rangle^2 \geq \alpha^2\|u\|_m^4 + \epsilon^2\|u\|^4_{0,G} - 2\alpha\epsilon\|u\|^2_{m,G}\|u\|^2_{0,G}.$$

Cette inégalité combinée à

$$\|u\|^2_{m,G}\|u\|^2_{0,G} \leq \alpha\|u\|^4_{m,G} + \frac{1}{\alpha}\|u\|^4_{0,G}$$

donne

$$\langle L_0 u, u\rangle^2 \geq \alpha^2(1-2\epsilon)\|u\|^4_{m,G} + \epsilon(\epsilon-2)\|u\|^4_{0,G}.$$

Comme

$|\langle P_0(\omega,\partial_z)u,u\rangle|^2 = \langle L_0 u, u\rangle^2 + \|u\|^4_{0,G} + 2\Re\omega^{2m}\|u\|^2_{0,G}\langle L_0 u, u\rangle$

et $\Re\omega^{2m} \geq 0$, $\langle L_0 u, u\rangle > 0$

il s'en suit que

$$\begin{aligned} |\langle P_0(\omega,\partial_z)u,u\rangle|^2 &\geq \langle L_0 u, u\rangle^2 + \|u\|^4_{0,G} \\ &\geq \alpha^2(1-2\epsilon)\|u\|^4_{m,G} + (\epsilon-1)^2\|u\|^4_{0,G}. \end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ étant arbitraire, on le choisit strictement inférieur à $1/2$, d'où l'existence d'un $C > 0$ tel que :

$$\forall u \in \overset{o}{H}{}^m(G) : \|P_0(\omega,\partial_z)u\|_{-m,G} \geq C\|u\|^2_{m,G}. \tag{2.8}$$

On obtient une inégalité analogue à (2.8) pour l'adjoint $P_0(\omega,\partial_z)^*$, $P_0(\omega,\partial_z)$ est injectif et à image fermée, la propriété $\ker P_0(\omega,\partial_z)^* = \mathrm{Im}\ P_0(\omega,\partial_z)$ entrainera que $P_0(\omega,\partial_z)$ est aussi surjectif .

∎

Démonstration du théorème 2.12(ii):

On se donne une fonction de troncature $\chi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ qui vaut 1 sur $B(0,1)$ et 0 sur $R^2 \setminus B(0,2)$. Pour un $\epsilon > 0$ fixé, on considère

$$M(q,z,\partial_z) := \chi(z/\epsilon)[P(q,z,\partial_z) - P_0(q,\partial_z)] + P_0(q,\partial_z), \tag{2.9}$$

une extention à G de l'opérateur P.

Par le changement de variable $z \in G \to \rho z \in G$ avec $\rho = \frac{1}{|q|}$, $\omega = \rho q$ l'equation

$$M(q,z,\partial_z)v = g \tag{2.10}$$

devient :

$$M_\rho(z,\partial_z)v_\rho := \rho^{2m}g_\rho \tag{2.11}$$

où

$$\begin{aligned} M_\rho(z,\partial_z) &= \rho^{2m}M(q,\rho z,\frac{\partial_z}{\rho}) \\ &= \omega^{2m} + \sum_{|\alpha|\leq 2m}\rho^{2m-|\alpha|}b_\alpha(\rho z){\partial_z}^\alpha, \end{aligned} \tag{2.12}$$

avec :

$$b_\alpha(\rho z) = \begin{cases} a_\alpha(\rho z)\chi(\frac{\rho z}{\epsilon}) & \text{si } |\alpha| < 2m, \\ \\ [a_\alpha(\rho z) - a_\alpha(0)]\chi(\frac{\rho z}{\epsilon}) + a_\alpha(0) & \text{si } |\alpha| = 2m. \end{cases}$$

Précisons que ρ sera choisi de facon approprié ultérieurement, pour le moment on s'intéresse au cas limite (i.e ρ tend vers 0).

On pose :

$$\begin{aligned} M_0(z, \partial z) &:= \lim_{\rho \to 0} M_\rho(z, \partial z) \\ &= P_0(\omega, \partial_z). \end{aligned}$$

$P_0(\omega, \partial_z) : H^{s+m} \cap \overset{\circ}{H}^m(G) \to H^{s-m}(G)$ est à indice grâce à l'injectivité modulo les polynômes de L_0 . D'après les lemmes 2.13 et 1.10 , il existe $C_0 > 0$ indépendante de $\omega(|\omega| = 1)$ telle qu'on ait

$$\|w_R^0\|_{s+m,G} + \sum_{(\lambda,\nu) \in M_s} |a_1^{\lambda,\nu}(\omega, 0))| \leq C_0 \|h_0\|_{s-m,G}, \tag{2.13}$$

pour tout $w_R^0 \in H^{s+m} \cap \overset{\circ}{H}^m(G)$ et pour

$$h_0 := M_0[w_R^0(z, q) + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu) \in M_s} a_1^{\lambda,\nu}(\omega, 0) R_2^{\lambda,\nu}(z, \omega, 0)],$$

où $R_2^{\lambda,\nu}(z, \omega, 0)$ est défini en (2.14) ci-dessous.

Comme $M_\rho \to M_0$ lorsque ρ tend vers 0, il existe ρ_0 tel que pour $\rho < \rho_0$

$$\|M_0^{-1}(M_\rho - M_0)\|_{\mathcal{L}(\overset{\circ}{H}^m(G), H^{-m}(G))} \leq C < 1,$$

autrement dit ρ peut être choisi suffisamment petit de telle sorte que $M_\rho = M_0[I + M_0^{-1}(M_\rho - M_0)]$ reste un isomorphisme de $\overset{\circ}{H}^m(G)$ sur $H^{-m}(G)$.

D'une facon analogue à § 2.2.d on a :

$$M_{\rho j} = \begin{cases} \rho^j L_j & \text{si } j \neq 2m \\ \\ \rho^j L_j + \omega^{2m} & \text{si } j = 2m. \end{cases}$$

Les fonctions singulières associées à $M_\rho(z, \partial_z)$ s'écrivent donc :

$$R_2^{\lambda,\nu}(z, \omega, \rho) = \sum_{(j,l) \in \Lambda_s} |q|^{-2mj-l} S^{\lambda,\nu,2jm+l}(z, q), \tag{2.14}$$

par l'application du lemme 1.10 à l'équation (2.11), on a :

$$v_\rho(z,q) = w_R^\rho(z,q) + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} a^{\lambda,\nu}(\omega,\rho) R_2^{\lambda,\nu}(z,\omega,\rho) \tag{2.15}$$

avec :

$$\begin{aligned}
h_\rho &= M_\rho\Big(w_R^\rho(z,q) + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} a^{\lambda,\nu}(\omega,\rho)) R_2^{\lambda,\nu}(z,\omega,\rho)\Big) \\
&= (M_\rho - M_0) w_R^\rho \\
&\quad + M_0[w_R^\rho + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} a^{\lambda,\nu}(\omega,\rho)) R_2^{\lambda,\nu}(z,\omega,0)] \\
&\quad + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} a^{\lambda,\nu}(\omega,\rho)[M_\rho(\psi R_2^{\lambda,\nu}(z,\omega,\rho)) - M_0(\psi R_2^{\lambda,\nu}(z,\omega,0))].
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\check{h}_0 :&= M_0(w_R^\rho + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} a^{\lambda,\nu}(\omega,\rho)) R_2^{\lambda,\nu}(z,\omega,0)) \\
&= h_\rho - (M_\rho - M_0) w_R^\rho \\
&\quad - \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} a^{\lambda,\nu}(\omega,\rho)[M_\rho(\psi R_2^{\lambda,\nu}(z,\omega,\rho)) - M_0(\psi R_2^{\lambda,\nu}(z,\omega,0))].
\end{aligned}$$

Ecrivons $M_\rho - M_0$ sous la forme

$M_\rho - M_0 = \sum_{|\alpha|=2m}[a_\alpha(\rho z) - a_\alpha(0)]\chi(\frac{\rho z}{\epsilon})\partial_z^\alpha + \sum_{|\alpha|<2m} \rho^{2m-|\alpha|} a_\alpha(\rho z)\chi(\frac{\rho z}{\epsilon})\partial_z^\alpha$,
grâce à la régularité des coefficients, il existe $k_1 > 0$ telle que

$$\|M_\rho - M_0\|_{\mathcal{L}(H^{s+m}\cap \overset{\circ}{H}{}^m(G), H^{s-m}(G))} \leq k_1 \rho. \tag{2.16}$$

Vu l'expression des singularités, $R_2^{\lambda,\nu}(z,\omega,\rho)$ est C^∞ en ρ donc il existe $k_2 > 0$ telle que

$$\|M_\rho(\psi R_2^{\lambda,\nu}(z,\omega,\rho)) - M_0(\psi R_2^{\lambda,\nu}(z,\omega,0))\| \leq k_2 \rho. \tag{2.17}$$

A l'aide des inégalités (2.13), (2.16) et (2.17)

$$\begin{aligned}
\|w_R^\rho\|_{s+m,G} + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} |a^{\lambda,\nu}(\omega,\rho)| &\leq C_0\{\|h_\rho\|_{s-m,G} \\
&\quad + k_1\rho\|w_R^\rho\|_{s+m,G} + k_2\rho \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} |a^{\lambda,\nu}(\omega,\rho)|\}.
\end{aligned}$$

On choisit ρ tel que, $\rho \sup(k_1,k_2) \leq \frac{1}{2C_0}$ ainsi :

$$\|w_R^\rho\|_{s+m,G} + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} |a^{\lambda,\nu}(\omega,\rho)| \leq 2C_0 \|h_\rho\|_{s-m,G}. \tag{2.18}$$

On pose :

$$\begin{aligned} b_2^{\lambda,\nu}(q) &= a^{\lambda,\nu}(\omega,\rho)|q|^{\lambda}. \\ w_R^2(z) &= w_R^{\rho}(z/\rho). \end{aligned}$$

Par retour aux coordonnées initiales dans (2.15) et (2.18) en appliquant la proposition 2.9, il vient
$v(z,q) = w_R^2(z,q) + \psi(r|q|)\sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} b_2^{\lambda,\nu}(q)\sum_{(j,l)\in\Lambda_s}|q|^{-2mj-l}S^{\lambda,\nu,2jm+l}(z|q|,q)$
avec

$$\|w_R^2\|_{s+m,G,|q|} + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s}|q|^{s+m-1-\Re\lambda}|b_2^{\lambda,\nu}(q)| \leq C_2\|g\|_{s-m,G,|q|}. \qquad \blacksquare$$

2.3.2 Localisation sur le domaine Ω borné

Maintenant, on va préciser la régularite d'une fonction $v(q,.) \in \overset{\circ}{H}{}^{m}(\Omega)$, dépendant d'un paramètre complexe q avec $\Re q^{2m} \geq 0$, et v solution du problème

$$(P.1') \qquad P(q,z,\partial_z)v(q,z) = g(q,z) \text{ dans } \Omega$$

où $g \in H^{s-m}(\Omega,|q|)$

Théorème 2.14 *Soit $s \in \mathcal{S}_m$.*
Si L_0 vérifie (**H**)*, toute solution v de $(P.1')$ peut s'ecrire :*

(i) $v(z,q) = w_R^1(z,q) + \psi(r)\sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} b_1^{\lambda,\nu}(q)\sum_{(j,l)\in\Lambda_s} S^{\lambda,\nu,2jm+l}(z,q)$

où pour tout q variant dans un compact K, il existe $C_1 > 0$ (indépendante de q) telle qu'on ait :

$$\|w_R^1\|_{s+m,\Omega} + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s}|b_1^{\lambda,\nu}(q)| \leq C_1\{\|g\|_{s-m,\Omega} + \|v\|_{m,\Omega}\}$$

(ii) Si de plus on a (**H1**) *ou* (**H2**)

$$v(z,q) = w_R^2(z,q) + \psi(r|q|)\sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} b_2^{\lambda,\nu}(q)\sum_{(j,l)\in\Lambda_s}|q|^{-2mj-l}S^{\lambda,\nu,2jm+l}(z|q|,q),$$

où pour tout $|q|$ assez grand, il existe $C_2 > 0$ (indépendante de q) telle qu'on ait :

$$\|w_R^2\|_{s+m,\Omega,|q|} + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s}|q|^{s+m-1-\Re\lambda}|b_2^{\lambda,\nu}(q)| \leq C_2\|g\|_{s-m,\Omega,|q|}.$$

•$b_1{}^{\lambda,\nu}$ *et* $b_2{}^{\lambda,\nu}$ *sont des coefficients dans* **C**.

Démonstration : Soit ϵ un paramètre fixé et ϕ une fonction $C_0^\infty(\mathbf{R})$ telle que :

$$\phi(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r < \frac{\epsilon}{2}, \\ 0 & \text{si } r > \epsilon. \end{cases}$$

Alors $V = \phi v$ est solution du problème (P.1) posé dans G avec pour second membre $G(q,.) = [L,\phi]v(q,.) + \phi g(q,.) \in H^{s-m}(G,|q|)$.

(i) Soit δ_0 un réel positif.

D'après le Théorème 2.12(i) pour $|q| \leq \delta_0$

$$V(z,q) = W_R^1(z,q) + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} b_1^{\lambda,\nu}(q) \sum_{(j,l)\in\Lambda_s} S^{\lambda,\nu,2jm+l}(z,q) \tag{2.19}$$

et

$$\|W_R^1\|_{s+m,G} + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} |b_1^{\lambda,\nu}(q)| \leq C_1\{\|G\|_{s-m,G} + \|V\|_{m,\Omega}\} \tag{2.20}$$

En posant $w_R^1 = (1-\phi)v + W_R^1$, on a

$$\begin{aligned} \|w_R^1\|_{s+m,\Omega} + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} |b_1^{\lambda,\nu}(q)| \quad &\leq \quad C_1\Big\{\|(1-\phi)v\|_{s+m,\Omega} \\ &+ \quad \|G\|_{s-m,G} + \|V\|_{m,\Omega}\Big\}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Or

$$\begin{aligned} \|G\|_{s-m,G} \quad &= \quad \|[L,\phi]v + \phi g\|_{s-m,G} \\ &\leq \quad \|[L,\phi]v\|_{s-m,G} + C_2\|g\|_{s-m,\Omega}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

$[L,\phi]$ est un opérateur indépendant de q, d'ordre inferieur à $2m-1$ et est de la forme
$\sum_{|\alpha|\leq 2m-1} C_\alpha(z,\phi)\partial_z^\alpha$ avec supp $C_\alpha(z,\phi) \subset H_\epsilon = \{r, \frac{\epsilon}{2} < r < \epsilon\}$,
par conséquent

$$\|[L,\phi]v\|_{s-m,G} \leq C_3\|v\|_{s+m,H_\epsilon}. \tag{2.23}$$

Grâce aux estimations d'Agmon, Douglis et Niremberg [1], on a :

$$\|v\|_{s+m,H_\epsilon} \leq C_4\{\|g\|_{s-m,H_{2\epsilon}} + \|v\|_{m,\Omega}\} \tag{2.24}$$

$$\|(1-\phi)v\|_{s+m,\Omega} \leq C_5\{\|g\|_{s-m,\Omega} + \|v\|_{m,\Omega}\}. \tag{2.25}$$

On déduit de (2.22), (2.23) et (2.24) que

$$\|G\|_{s-m,\Omega} \leq C_6\{\|g\|_{s-m,\Omega} + \|v\|_{m,\Omega}\}. \tag{2.26}$$

L'estimation du théorème découle de (2.21), (2.25) et (2.26).

(ii) on prend $|q| > \delta_0$. On suit un raisonnement similaire à celui qui précéde, en invoquant la décomposition et l'estimation du théorème 2.12(ii).

Les analogues de (2.24) et (2.25) sont données avec poids par ([2].Théorème 5.1).

∎

2.4 Equation parabolique dans Ω

On considère le problème

$$(P.2)\left[\begin{array}{l} \partial_t u + L(z,\partial_z)u = f \text{ dans } Q_+ = \Omega\times\mathbf{R}_+, \\ \\ u\mid_{\Omega\times\{0\}} = 0, \\ \\ \partial_z^\alpha u \mid_{\partial\Omega\times\mathbf{R}_+} = 0, \forall\, |\alpha| = 0,\ldots,m-1. \end{array}\right.$$

2.4.1 Existence et unicité de la solution

On a le résultat suivant :

Théorème 2.15 *On suppose que l'opérateur L est fortement* $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$*- coercif. Pour tout* $f\in\tilde H^{s-m,\frac{s-m}{2m}}(\Omega\times\mathbf{R}_+)$*, il existe une unique solution*

$$u\in L^2\left(\mathbf{R}_+,\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)\right)\cap\tilde H^{\frac{s+m}{2m}}\left(\mathbf{R}_+,L^2(\Omega)\right) \quad de\ (P.2).$$

Démonstration : L'opérateur $[p+L(z,\partial_z)]$ est inversible pour $\Re p\geq 0$. Posons $\mathcal{R}(p,-L) := [p+L(z,\partial_z)]^{-1}$.
D'après le Théorème 7.2.7 de [22], l'opérateur (-L) génère un semi-groupe holomorphe dans $L^2(\Omega)$ et il existe $C>0$ tel que :

$$(2.27)\qquad \|\mathcal{R}(p,-L)\|_{L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)}\leq\frac{C}{1+|p|},\ p\in\mathbf{C},\ \Re p\geq 0.$$

Comme $f\in\tilde H^{s-m,\frac{s-m}{2m}}(\Omega\times\mathbf{R}_+), g(p) := \mathcal{L}_{t\to p}f(t)$ est bien définie et est dans l'espace $\mathcal{H}^2\left(\mathbf{C}^+,H^{s-m}(\Omega,\sqrt[2m]{1+|p|})\right)$ (cf. proposition 2.6).
$v(p) := \mathcal{R}(p,-L)g(p)$ résout le problème (P.1') dans Ω.

Tout d'abord, on a

$$(2.28)\qquad u(t) := \mathcal{L}^{-1}_{p\to t}\mathcal{R}(p,-L)g(p)\in\tilde H^{\frac{s+m}{2m}}\left(\mathbf{R}_+,L^2(\Omega)\right).$$

Ceci résulte de la proposition 2.6 et du fait que la fonction

$$(1+p)^{\frac{s+m}{2m}}\mathcal{R}(p,-L)g(p)\in\mathcal{H}^2\left(\mathbf{C}^+,L^2(\Omega)\right).$$

Car c'est un produit de fonctions holomorphes à valeurs dans $L^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{array}{rcll} M: & = & \sup\limits_{\xi>0}\displaystyle\int_{\mathbf{R}_\eta}\|(1+p)^{\frac{s+m}{2m}}R(p,-L)g(p)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\eta & \\ & \leq & C_1\sup\limits_{\xi>0}\displaystyle\int_{\mathbf{R}_\eta}\|(1+p)^{\frac{s-m}{2m}}g(p)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\eta & (\text{ par } (2.27)). \\ & \leq & C_2\|(1+p)^{\frac{s-m}{2m}}g(p)\|^2_{\mathcal{H}^2(\mathbf{C}^+,L^2(\Omega))} & \\ & < & +\infty & (\text{par hypothèse}). \end{array}$$

Remarquons que u est solution d'un problème de la forme (P.2).
Si $f = 0$ alors $g = 0$ de l'inversibilité de (P.1') dans $L^2(\Omega)$ résulte $u = 0$, d'où l'unicité de la solution .

Montrons ensuite que

$$u(t) \in L^2\left(\mathbf{R}_+, \overset{\circ}{H}^m(\Omega)\right), \tag{2.29}$$

ou de facon équivalente $v(p) \in \mathcal{H}^2(\mathbf{C}^+, \overset{\circ}{H}^m(\Omega))$. Pour cela on a besoin du

Lemme 2.16 *Soit Y et Z deux espaces de Banach et $\Lambda : p \to \Lambda(p)$, une fonction holomorphe d'un ouvert $\Theta \subset \mathbf{C}$ dans $\mathcal{L}(Y, Z)$ telle que $\Lambda(p)$ soit inversible (d'inverse noté $\Lambda^{-1}(p)$).*
Alors : $p \to \Lambda^{-1}(p)$ est holomorphe de Θ dans $\mathcal{L}(Z, Y)$.

On déduit de ce lemme que $\mathcal{R}(p, -L)$ est holomorphe de $\mathbf{C}^+$ dans $\mathcal{L}(H^{-m}(\Omega), \overset{\circ}{H}^m(\Omega))$. Donc $v(p)$ est holomorphe de $\mathbf{C}^+$ dans $\overset{\circ}{H}^m(\Omega)$.
Puisque $\mathcal{R}(p, -L)$ est un isomorphisme de $H^{-m}(\Omega)$ sur $\overset{\circ}{H}^m(\Omega)$ et $g \in \mathcal{H}^2(\mathbf{C}^+, H^{-m}(\Omega))$ on a pour $\Re p \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\|v(p)\|^2_{\mathcal{H}^2(\mathbf{C}^+, \overset{\circ}{H}^m(\Omega))} &= \sup_{\xi > 0} \int_{\mathbf{R}_\eta} \|v(p)\|^2_{\overset{\circ}{H}^m(\Omega)} \, d\eta \\
&\leq C \|g(p)\|^2_{\mathcal{H}^2(\mathbf{C}^+, H^{-m}(\Omega))} \text{ (} C \text{ indépendante de } p), \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Le théorème résulte alors de (2.28) et (2.29). ∎

Remarque 2.17 Si L est autoadjoint, l'inégalité (2.27) est trivialement vérifiée puisque

$$\begin{aligned}
\|(L+p)u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|Lu\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\Re p \langle Lu, u\rangle + |p|^2 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq C(1 + |p|^2)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

∎

Remarque 2.18 Sans perte de généralité, on peut toujours supposer que L est fortement $\overset{\circ}{H}^m(\Omega)$-coercif.

∎

En effet si L est supposé seulement proprement elliptique, il résulte de l'inégalité de Garding qu'il existe $\gamma_0 \geq 0$, $\alpha > 0$, telle que :

$$\forall v \in \overset{\circ}{H}^m(\Omega) : \Re\langle L(z, \partial_z)u, u\rangle + \gamma_0 \|u\|^2_{0,\Omega} \geq \alpha \|u\|^2_{m,\Omega}. \tag{2.30}$$

le changement d'inconnu $\breve{u} = e^{-\gamma t} u$ avec $\gamma \in \mathbf{C}, \Re\gamma \geq \gamma_0$ transforme (P.2) en

$$
(\mathrm{P.2'})\left[\begin{array}{l}
\partial_t \breve{u} + \breve{L}(z,\partial_z)\breve{u} = \breve{f} \text{dans } Q_+ = \Omega \times \mathbf{R}_+, \\
\\
\breve{u} \mid_{\Omega\times\{0\}} = 0, \\
\\
\partial_z^\alpha \breve{u} \mid_{\partial\Omega\times\mathbf{R}_+} = 0,\ \forall\, |\alpha| = 0,\dots,m-1.
\end{array}\right.
$$

où $\breve{L} = \gamma + L(z,\partial_z)$ et $\breve{f} = e^{-\gamma t} f$. ∎

L'analyse précédente, donne le résultat suivant comme analogue des théorèmes 2.15.

Corollaire 2.19 *Pour tout*

$$f \in \tilde{P}^{s-m,\frac{s-m}{2m}}(\gamma_0, \Omega\times\mathbf{R}_+) := \{u,\ e^{-\gamma t}u \in \tilde{H}^{r,s}(\Omega\times\mathbf{R}^+),\ \forall\gamma\in\mathbf{C}, \Re\gamma \geq \gamma_0\};$$

Il existe une unique solution u de (P.2) telle que $e^{-\gamma t}u \in L^2(\mathbf{R}_+, \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)) \cap \tilde{H}^{\frac{s+m}{2m}}(\mathbf{R}_+, L^2(\Omega))$.

2.4.2 Décomposition en parties régulière et singulière

Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ une fonction paire telle que $\psi(r) = 1$ si $r < \delta_0$, et vérifiant :

$$\int_{\mathbf{R}_t} \mathcal{F}^{-1}{}_{\eta\to t}\psi(\sqrt[2m]{|\eta|})\, d\eta = 1.$$

Posons pour $p \in \mathbf{C}$: $\phi(r,p) = \begin{cases} \psi(r) & \text{si } |p| \leq \delta_0, \\ \\ \psi(r\sqrt[2m]{|p|}\,) & \text{si } |p| > \delta_0. \end{cases}$

Lemme 2.20 $\{\Phi(r,t)\}_{0\leq r\leq 1} = \{\mathcal{F}^{-1}{}_{\eta\to t}\phi(r,i\eta)\}_{0\leq r\leq 1}$ *est une famille régularisante quand* $r \longrightarrow 0$
i.e.si $k(t) \in H^s(\mathbf{R})$ *alors*

- $\Phi(r,t) *_t k(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$
- $\Phi(r,t) *_t k(t) \to_{r\to 0} k(t)$ *pour la norme de* $H^s(\mathbf{R})$.

L'objet de ce paragraphe est le:

Théorème 2.21 *On suppose que l'opérateur L est fortement $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$-coercif et vérifie les hypothèses* **(H)** *et* **(H1)** *ou* **(H)** *et* **(H2)**. *Alors pour tout* $f \in \tilde{H}^{s-m,\frac{s-m}{2m}}(\Omega\times\mathbf{R}_+)$ *la solution*

$$u \in L^2\left(\mathbf{R}_+, \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)\right) \cap \tilde{H}^{\frac{s+m}{2m}}\left(\mathbf{R}_+, L^2(\Omega)\right)$$

de (P.2) admet la décomposition :

$$\begin{aligned} u(z,t) &= u_R(z,t) + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} \sum_{(j,l)\in\Lambda_s} \sum_{i=0}^{j} \Big[\Phi(r,t) *_t \frac{d^i}{dt^i} K^{\lambda,\nu}(t) \sigma_{i,0}^{\lambda,\nu,2jm+l}(z) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{Q} \Phi(r,t) *_t \Psi_n\Big(\frac{d^i}{dt^i} K^{\lambda,\nu}(t)\Big) \sigma_{i,n}^{\lambda,\nu,2jm+l}(z) \Big], \end{aligned}$$

où :

- $u_R \in \tilde{H}^{s+m,\frac{s+m}{2m}}(\Omega \times \mathbf{R}_+)$ *est la partie régulière,*
- $K^{\lambda,\nu} \in \tilde{H}^{\frac{s+m-1-\Re\lambda}{2m}}(\mathbf{R}_+)$ *sont les coefficients de singularités,*
- $Q \in \mathbf{N}$,
- *les* $\sigma_{i,n}^{\lambda,\nu,l}(z)$ *sont définies en (2.35) ci-dessous,*
- Ψ_n *est un opérateur-pseudo différentiel sur* $\mathbf{R}$ *dont le symbole est* $\chi(|\eta|)\frac{1}{n!}(\frac{\ln|\eta|}{2m})^n$, *la fonction* $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}_+)$ *étant égale à 1 ou 0 selon que* $|\eta| > \delta_0$ *ou* $|\eta| < \delta_0/2$.

Démonstration : Par la transformée de Laplace partielle par rapport à t, le problème (P.2) devient (P.1') avec paramètre complexe p.
En particulier pour $p = i\eta$ avec $\eta \in \mathbf{R}$, le Théorème 2.14 donne pour la solution v la décomposition :

$$(2.31)\; v(z,i\eta) = w_R^1(z,i\eta) + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} b_1^{\lambda,\nu}(i\eta) \sum_{(j,l)\in\Lambda_s} \sum_{k=0}^{j} (i\eta)^k {\sigma_k}^{\lambda,\nu,2jm+l}(z)$$

et l'estimation

$$\begin{aligned} &\|w_R^1\|_{s+m,\Omega,\sqrt[2m]{1+|\eta|}} + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} (1+|\eta|)^{\frac{s+m-1-\Re\lambda}{2m}} |b_1^{\lambda,\nu}(i\eta)| \\ &\leq C_1\{\|\mathcal{F}_{t\to\eta} f\|_{s-m,\Omega,\sqrt[2m]{1+|\eta|}} + \|v\|_{m,\Omega,\sqrt[2m]{1+|\eta|}}\}, \qquad \text{pour } |\eta| \leq \delta_0, \end{aligned}$$

sous l'hypothèse **(H)**, par contre on a

$$(2.32) \qquad v(z,i\eta) = w_R^2(z,i\eta) \;+\; \psi(r|\eta|) \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} b_2^{\lambda,\nu}(i\eta) \times \sum_{(j,l)\in\Lambda_s} |\eta|^{-2mj-l} \sum_{k=0}^{j} (i\eta)^k {\sigma_k}^{\lambda,\nu,2jm+l}(z|\eta|)$$

ainsi que l'estimation :

$$\|w_R^2\|_{s+m,\Omega,\sqrt[2m]{1+|\eta|}} + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s}(1+|\eta|)^{\frac{s+m-1-\Re\lambda}{2m}}|b_2^{\lambda,\nu}(i\eta)|$$
$$\leq C_2\|\mathcal{F}_{t\to\eta}f\|_{s-m,\Omega,\sqrt[2m]{1+|\eta|}}, \qquad \text{pour } |\eta|>\delta_0,$$

lorsque **(H)** et **(H1)** ou **(H)** et **(H2)** sont satisfaites.
Regroupons les deux décompositions précédentes. Pour cela, dans les singularités en (2.32), on sépare les variables z et η. Les fonctions singulières obtenues par résolution logharithmo-polynômiale (cf. §1.6) sont de la forme:

$$\sigma_i^{\lambda,\nu,2jm+l}(r,\theta) = r^{\lambda+2mj+l}\sum_{t=0}^{Q}\frac{(\ln r)^t}{t!}\phi_{Q-t,i}^{\lambda,\nu,2jm+l}(\theta). \tag{2.33}$$

Donc

$$\sigma_i^{\lambda,\nu,2jm+l}(r|q|,\theta) = |q|^{\lambda+2mj+l}\sum_{n=0}^{Q}\frac{(\ln|q|)^n}{n!}\sigma_{i,n}^{\lambda,\nu,2jm+l}(r,\theta) \tag{2.34}$$

avec

$$\sigma_{i,n}^{\lambda,\nu,2jm+l}(r,\theta) = r^{\lambda+2mj+l}\sum_{t=0}^{Q-n}\frac{(\ln r)^t}{t!}\phi_{Q-n-t,i}^{\lambda,\nu,2jm+l}(\theta) \tag{2.35}$$

et telle que

$$\sigma_{i,0}^{\lambda,\nu,2jm+l}(r,\theta) = \sigma_i^{\lambda,\nu,2jm+l}(r,\theta).$$

Posons ensuite

$$w_R = \begin{cases} w_R^1 & \text{si } |\eta|\leq\delta_0, \\ w_R^2 & \text{si } |\eta|>\delta_0, \end{cases}$$

et

$$C^{\lambda,\nu} = \begin{cases} b_1^{\lambda,\nu} & \text{si } |\eta|\leq\delta_0, \\ b_2^{\lambda,\nu} & \text{si } |\eta|>\delta_0. \end{cases}$$

Il vient de (2.31)–(2.35) que

$$\begin{aligned} v(z,t) &= w_R(z,t) + \phi(r,i\eta)\sum_{(\lambda,\nu)\in M_s}C^{\lambda,\nu}(i\eta)\sum_{(j,l)\in\Lambda_s}\sum_{k=0}^{j}(i\eta)^k \times \\ &\qquad \Big[\sigma_k^{\lambda,\nu,2jm+l}(z) + \chi(|\eta|)\sum_{n=1}^{Q}\frac{1}{n!}\Big(\frac{\ln|\eta|}{2m}\Big)^n\sigma_{k,n}^{\lambda,\nu,2jm+l}(z)\Big]. \end{aligned} \tag{2.36}$$

De plus les estimations se regroupent aussi en :

$$
\begin{aligned}
(2.37) \qquad & \|w_R\|_{s+m,\Omega,\sqrt[2m]{1+|\eta|}} + \sum_{(\lambda,\nu)\in M_s} (1+|\eta|)^{\frac{s+m-1-\Re\lambda}{2m}} |C^{\lambda,\nu}(i\eta)| \\
& \leq C\|\mathcal{F}_{t\to\eta} f\|_{s-m,\Omega,\sqrt[2m]{1+|\eta|}},
\end{aligned}
$$

car L est fortement $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$-coercif, ce qui entraine que $\|v\|_{m,\Omega} \leq c\|\mathcal{F}_{t\to\eta} f\|_{s-m,\Omega}$.

Comme $f \in H^{s-m,\frac{s-m}{2m}}(\Omega \times \mathbf{R}_+)$, l'intégration des deux membres de la relation précédente donne :

$$\int_{\mathbf{R}_\eta} \|w_R(i\eta)\|^2_{s+m,\Omega,\sqrt[2m]{1+|\eta|}}\, d\eta < +\infty$$

et

$$\int_{\mathbf{R}_\eta} (1+|\eta|)^{\frac{s+m-1-\Re\lambda}{m}} |C^{\lambda,\nu}|^2\, d\eta < +\infty.$$

Par transformation de Fourier inverse de chaque terme de (2.36), on a:

$$
\begin{aligned}
u_R(t) &= \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to t} w_R(i\eta) \in \tilde{H}^{s+m,\frac{s+m}{2m}}(\Omega \times \mathbf{R}_+), \\
K^{\lambda,\nu}(t) &= \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to t} C^{\lambda,\nu}(i\eta) \in \tilde{H}^{\frac{s+m-1-\Re\lambda}{m}}(\mathbf{R}_+).
\end{aligned}
$$

Pour $a(\partial)$ un opérateur homogène à coefficients constants de symbole $a(i\eta)$, on sait que formellement :

$$a(\partial)u(t) = [\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to t} a(i\eta)] * u(t),$$

de sorte que pour les termes de (2.36), on a

$$\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to t}[(i\eta)^i C^{\lambda,\nu}(i\eta)\phi(r,i\eta)] = [\frac{d^i}{dt^i} K^{\lambda,\nu}(t)] *_t \Phi(r,t),$$

$$\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to t}[(i\eta)^i C^{\lambda,\nu}(i\eta)\phi(r,i\eta)\psi_n(i\eta)] = \Psi_n(\frac{d^i}{dt^i} K^{\lambda,\nu}(t)) *_t \Phi(r,t).$$

Le théorème est donc démontré . ∎

2.5 Cas d'un opérateur homogène à coefficients constants

Dans ce paragraphe, on fait une fois pour toutes les hypothèses suivantes :

a) $L = L_0$ est un opérateur homogène à coefficients constants, fortement $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$-coercif vérifiant la condition **(H1)** ou **(H2)**.

b) Ω n'a pas de fissure, i.e. ω n'est pas de la forme $2k\pi$, $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

c) $\mathcal{L}(\lambda)$ est inversible pour $\Re\lambda = |\alpha| + 2m$ avec $|\alpha| < s - m - 1$ et $s \in \mathcal{S}_m$, ce qui

est équivalent à l'injectivité modulo les polynômes sur $S^{|\alpha|+2m,0}(G)$ (cf. Définition 2.11). En fait, cette hypothèse permet d'éviter les singularités provenant de la résolution polynomiale .

En vue d'énoncer le résultat analogue au théorème 2.21, nous précisons d'abord la forme des singularités en suivant [6].

Soit $\left(\phi_k^{\lambda,\nu}(\theta)\right)_{\substack{0\le k\le \mathcal{K}(\lambda,\nu)-1,\\ 1\le\nu\le M(\lambda)}}$ un système de chaines de Jordan de $\mathcal{L}(\lambda)$ associé à λ.
On pose :

(2.38)
$$\sigma_k^{\lambda,\nu}(r,\theta) = r^\lambda \sum_{t=0}^{k} \frac{(\ln r)^t}{t!} \phi_{k-t}^{\lambda,\nu}(\theta).$$

On sait que :$L\sigma_k^{\lambda,\nu} = 0$ dans G et $\psi\sigma_k^{\lambda,\nu} \in \overset{\circ}{H}{}^m(G)$. Suivant le schéma § 2.2.d, on définit

$$(\star\star)\left[\begin{array}{ll} \sigma_k^{\lambda,\nu,0} = \sigma_k^{\lambda,\nu}, & \\ & \\ L\sigma_k^{\lambda,\nu,2mj} = -\sigma_k^{\lambda,\nu,2m(j-1)}, & \quad j \ge 1. \end{array}\right.$$

Les singularités du problème associé à l'opérateur $P(q,\partial_z) = q^{2m} + L(\partial_z)$ sont donc (cf. (2.6))
$$S^{\lambda,\nu,2mj}(q,z) := q^{2mj}\sigma_k^{\lambda,\nu,2mj}(z), \;\; j \ge 1.$$

Soit $\Phi(r,t) := \mathcal{L}_{p\to t}^{-1}\varphi(r,p)$.

Théorème 2.22 *Soit $s \in \mathcal{S}_m$.*
Si les conditions **(H)** *et* **(H1)** *ou* **(H)** *et* **(H2)** *sont vérifiées, alors pour tout $f \in \tilde{H}^{s-m,\frac{s-m}{2m}}(\Omega \times \mathbf{R}_+)$, la solution*

$$u \in L^2\left(\mathbf{R}_+, \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)\right) \cap \tilde{H}^{\frac{s+m}{2m}}\left(\mathbf{R}_+, L^2(\Omega)\right)$$

de (P.2) se décompose de deux manières suivantes :

$$u(z,t) = u_R(z,t) + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_s} \sum_{j\in\hat{\Lambda}_s} \Phi(r,t) *_t \frac{d^j}{dt^j} K_k^{\lambda,\nu}(t)\sigma_k^{\lambda,\nu,2jm}(z), \tag{2.39}$$

ou

$$u(z,t) = u_R^*(z,t) + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_s} \sum_{j\in\hat{\Lambda}_s} \frac{d^j}{dt^j} K_k^{\lambda,\nu}(t)\sigma_k^{\lambda,\nu,2jm}(z). \tag{2.40}$$

Avec

- $K_k^{\lambda,\nu} \in \tilde{H}^{\frac{s+m-1-\Re\lambda}{2m}-\epsilon}(\mathbf{R}_+),\ \ \forall\epsilon > 0,$
- $\exists\epsilon_0 \geq 0$ *assez petit tel que* $u_R \in \tilde{H}^{s+m-\epsilon_0,\frac{s+m}{2m}}(\Omega \times \mathbf{R}_+)$ *et* $u_R^* \in L^2(\mathbf{R}_+,\ H^{s+m-\epsilon_0}(\Omega))$,
- $\hat{M}_s := \{(\lambda,\nu,k) : (\lambda,\nu) \in M_s$ *et* $k = 0,\ldots,k(\lambda,\nu)-1\}$,
- $\hat{\Lambda}_s := \{j \in \mathbf{N} :\ (j,0) \in \Lambda_s\}$.

Remarque 2.23 1) Comme le montre (2.39) et (2.40), l'utilisation de Φ ou la non-utilisation modifie la régularité de la partie régulière u_R ou u_R^*.

2) L'opérateur pseudo-différentiel (cf. Théorème 2.21) influence la régularité des coefficients.

■

Le théorème 2.22 se montre à partir des deux théorèmes suivants:

Théorème 2.24 *Sous la condition* **(H)**, *tout* $v \in \overset{\circ}{H}{}^m(G)$ *telle que :* $g := P(q,\partial_z)v \in H^{s-m}(G)$ *s'ecrit :*

(i) $v(z,q) = w_R^1(z,q) + \psi(r)\sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_s} b_{k,1}^{\lambda,\nu}(q)\sum_{j\in\hat{\Lambda}_s} q^{2mj}\sigma_k^{\lambda,\nu,2jm}(z)$,

de plus pour q variant dans un compact K, il existe $C_1 > 0$ (indépendante de q), il existe $\epsilon_0 \geq 0$ tels que :

$$\|w_R^1\|_{s+m-\epsilon_0,G} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in M_s} |b_{k,1}^{\lambda,\nu}(q)| \leq C_1\|g\|_{s-m,G}$$

(ii) Si de plus **(H1)** *ou* **(H2)** *est vérifiée, on a*

$$v(z,q) = w_R^2(z,q) + \psi(r|q|) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_s} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q) \sum_{j\in\hat{\Lambda}_s} q^{2mj}\sigma_k^{\lambda,\nu,2jm}(z),$$

et pour tout $|q|$ assez grand, il existe $C_2 > 0$ (indépendante de q) telle que :

$$\|w_R^2\|_{s+m-\epsilon_0,G,|q|} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_s} |q|^{s+m-1-\epsilon-\Re\lambda}|b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)| \leq C_2\|g\|_{s-m,G,|q|}.$$

Théorème 2.25 *Sous les conditions du théorème 2.24(ii), la décomposition de v et l'estimation se réecrivent comme*

$$(ii')\ v(z,q) = w_R^2(z,q) + \psi(r|q|) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_s} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q) \sum_{j\in\hat{\Lambda}_s} q^{2mj}\sigma_k^{\lambda,\nu,2jm}(z),$$

avec

$$\|w_R^2\|_{s+m-\epsilon_0,G} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_s} |q|^{s+m-1-\epsilon-\Re\lambda}|b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)| \le C_2\|g\|_{s-m,G,|q|}.$$

La démonstration de ce résultat étant très longue et technique, nous structerons notre argumentation en plusieurs lemmes. Nous commencons par considérer le cas particulier où $0 \le s = t < 2m$.

Lemme 2.26 *Sous les conditions du théorème 2.24, tout $v \in \mathring{H}^m(G)$ telle que $g := P(q,\partial_z)v \in H^{t-m}(G)$ avec $0 \le t < 2m$ se décompose selon (i), (ii) et (ii') des Théorèmes 2.24 et 2.25, où $\hat{\Lambda}_s$ se réduit à $\{0\}$.*

Démonstration :
i) Il s'agit d'étudier l'équation

$$L(z,\partial_z)v = g - q^{2m}v \in H^{t-m}(G). \tag{2.41}$$

On applique ([4]. lemme 10.4) en tenant compte des hypothèses supplémentaires considerées ici, ce qui donne :

$$v(z,q) = w_R^1(z,q) + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} b_{k,1}^{\lambda,\nu}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu}(z), \tag{2.42}$$

avec l'estimation

$$\|w_R^1\|_{t+m,G} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} |b_{k,1}^{\lambda,\nu}(q)| \le C_t\|g\|_{t-m,G}. \tag{2.43}$$

ii) Comme pour la preuve du théorème 2.12, on fait le changement de variable $z \to \rho z$, $\omega = \rho q$ avec $\rho = 1/|q|$.
Dans ce cas, $M_\rho(z,\partial_z) = M_0(z,\partial_z)$ et il s'agit d'étudier la solution $v_\rho \in \mathring{H}^m(G)$ de

$$L(z,\partial_z)v_\rho = \rho^{2m}g_\rho - \omega^{2m}v_\rho \in H^{t-m}(G,|q|),\ \ q \text{ fixé}. \tag{2.44}$$

En appliquant à nouveau ([4]. lemme 10.4), on a

$$v_\rho(z,q) = w_{R_t}^\rho(z,q) + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} a_k^{\lambda,\nu}(\omega)\sigma_k^{\lambda,\nu}(z), \tag{2.45}$$

avec

$$\|w_{R_t}^\rho\|_{t+m,G} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} |a_k^{\lambda,\nu}(\omega)| \le C_2\|\rho^{2m}g_\rho\|_{t-m,G}. \tag{2.46}$$

En posant

$$b_{n,2}^{\lambda,\nu}(q) = |q|^{\lambda} \sum_{k=n}^{k(\lambda,\nu)-1} \frac{(\ln|q|)^{k-n}}{(k-n)!} a_k^{\lambda,\nu}(\omega), \tag{2.47}$$

on constate que

$$\sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} a_k^{\lambda,\nu}(\omega)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(|q|z) = \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(z). \tag{2.48}$$

D'autre part

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta_\epsilon : |q| > \delta_\epsilon \Longrightarrow \ln|q| \leq |q|^\epsilon, \tag{2.49}$$

d'où (2.47) donne:

$$\forall\epsilon > 0, |q| > \delta_\epsilon \Rightarrow |q|^{-\Re\lambda-\epsilon}|b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)| \leq \sum_l |a_l^{\lambda,\nu}(\omega)|. \tag{2.50}$$

Par retour au coordonnée initiale z, on a :

$$\begin{aligned} (2.51)\ v(z,q) &= w_{R_t}^2(z,q) + \psi(r|q|) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} a_k^{\lambda,\nu}(\omega)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(|q|z) \quad (\text{ par } (2.45)) \\ &= w_{R_t}^2(z,q) + \psi(r|q|) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(z) \quad (\text{ par } (2.48)), \end{aligned}$$

avec

$$\|w_{R_t}^2\|_{t+m,G,|q|} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} |q|^{s+m-1-\Re\lambda-\epsilon}|b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)| \leq C_2\|g\|_{t-m,G,|q|}. \tag{2.52}$$

ii') De (2.51), il vient que

$$v(z,q) = w_{R_t}^{2*}(z,q) + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(z),$$

où

$$w_{R_t}^{2*} := w_{R_t}^2 + [\psi(r|q|) - \psi(r)] \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(z).$$

La décomposition précédente et la fonction $w_{R_t}^{2*}(z,q)$ ont les proprietés désirées vu le lemme ci-desous. ∎

Lemme 2.27 *Pour $q \geq 1$*

$$\|[\psi(r|q|) - \psi(r)] \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(z)\|_{t+m,G} \leq C\|g\|_{t-m,G,|q|}.$$

Démonstration : Notons $G_{|q|} = \{(r,\theta), r > |q|\}$ et

$$\begin{aligned}
A: &= \|[\psi(r|q|) - \psi(r)] \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(z)\|_{t+m,G} \\
&= |q|^{t+m-1}\|[\psi(r) - \psi(\frac{r}{|q|})] \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(\frac{z}{|q|})\|_{t+m,G,\frac{1}{|q|}} (\text{ par la prop. 2.9 }).
\end{aligned}$$

Puisque sur $G \cap B(0,1) \setminus G_1$, $\psi(r) \equiv \psi(\frac{r}{|q|})$, on a

$$\begin{aligned}
A &= |q|^{t+m-1}\|[\psi(r) - \psi(\frac{r}{|q|})] \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(\frac{z}{|q|})\|_{t+m,G_1,\frac{1}{|q|}} \\
&\leq A_1 + A_2 \\
&= |q|^{t+m-1}\|\psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(\frac{z}{|q|})\|_{t+m,G_1,\frac{1}{|q|}} \\
&+ |q|^{t+m-1}\|\psi(\frac{r}{|q|}) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(\frac{z}{|q|})\|_{t+m,G_1,\frac{1}{|q|}}.
\end{aligned}$$

Les termes

$$\begin{aligned}
A_2: &= \|\psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(z)\|_{t+m,G_{|q|}} \text{ (par changement de variable)} \\
&\leq C\|\psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(z)\|_{t+m,G_1} \text{ (car } |q| \geq 1 \text{ et donc } G_{|q|} \subset G_1), \\
&\leq C \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} |b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)| \text{ (car } \psi\sigma_k^{\lambda,\nu} \text{ est } C^\infty \text{ loin de l'origine, c.à.d dans } G_1 \text{)}, \\
&\leq C \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} |q|^{s+m-\Re\lambda-1-\epsilon}|b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)|. \\
&\leq C\|g\|_{t-m,G,|q|} \qquad \text{(par (2.52)).}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1: &= |q|^{t+m-1}\|\psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} a_k^{\lambda,\nu}(\omega)\sigma_k^{\lambda,\nu,0}(z)\|_{t+m,G_1,\frac{1}{|q|}} \qquad \text{(par (2.48)),} \\
&\leq C|q|^{t+m-1} \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_t} |a_k^{\lambda,\nu}(\omega)|, \\
&\leq C\|g\|_{t-m,G,|q|}.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité résulte de (2.52) ainsi que de l'analogue de (2.49) lorsque $a_k^{\lambda,\nu}(\omega)$ est exprimé en fonction de $b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)$ conformément à (2.47).
Ainsi

$$A \leq C\|g\|_{t-m,G,|q|}.$$

∎

Démonstration du théorème 2.24
Si $s < 2m$ le théorème n'est rien d'autre que le lemme 2.26.
Supposons donc que $s \geq 2m$, on peut trouver $\epsilon_0 \geq 0$ et un entier k tels que $\hat{s} = s - \epsilon_0 = 2km + t,\ 0 \leq t < 2m$ et pour

$$\begin{cases} s_0 = t, \\ s_{j+1} = s_j + 2m,\ j = 0, \dots, k, \end{cases}$$

on ait $\mathcal{L}(\lambda)$ est inversible dès que $\Re\lambda = s_j + m - 1$.

Nous allons maintenant montrer par récurrence sur $j \in \{0, \dots, k\}$, que v vérifie les propriétés **(HR.1)** et **(HR.2)** ci-dessous similaire à celle du lemme 2.26. Ce qui completera la preuve du Théorème 2.24.

Hypothèse de récurrence :

$$\textbf{(HR.1)}\ \left[\begin{array}{l} v = w^1_{R_j} + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} b^{\lambda,\nu}_{k,1}(q) \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_j}} q^{2mi}\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}(z), \\ \text{et pour tout } q \text{ variant dans un compact } K, \text{ il existe } C_{1j} \text{ tel que} \\ \quad \|w^1_{R_j}\|_{s_j+m,G} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} |b^{\lambda,\nu}_{k,1}(q)| \leq C_{1j}\|g\|_{s_j-m,G,|q|}. \end{array}\right.$$

$$\textbf{(HR.2)}\ \left[\begin{array}{l} v = w^2_{R_j} + \psi(r|q|) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} b^{\lambda,\nu}_{k,2}(q) \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_j}} q^{2mi}\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}(z), \\ \text{et pour } |q| \text{ assez grand, il existe } C_{2j} \text{ tel que} \\ \quad \|w^2_{R_j}\|_{s_j+m,G,|q|} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} |q|^{s_j+m-1-\Re\lambda-\epsilon}|b^{\lambda,\nu}_{k,2}(q)| \leq C_{2j}\|g\|_{s_j-m,G,|q|}. \end{array}\right.$$

Rappelons encore que au rang $j = 0$ nous retrouvons les lemmes 2.26 et 2.27.
Supposons les propriétés vraies au rang j, montrons qu'elles le sont pour $j+1$.
Posons

$$v_1(z,q) := \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} b^{\lambda,\nu}_{k,1}(q) \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_{j+1}}} q^{2mi}\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}(z). \tag{2.53}$$

$$v_2 := v - v_1. \tag{2.54}$$

Par hypothèse de récurrence, on aura

$$\begin{aligned} v_2 &= w^1_{R_j} + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} b^{\lambda,\nu}_{k,1}(q) \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_j}} q^{2mi}\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}(z) \\ &\quad - \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} b^{\lambda,\nu}_{k,1}(q) \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_{j+1}}} q^{2mi}\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}(z) \\ &= w^1_{R_j} - \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} b^{\lambda,\nu}_{k,1}(q) \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_{j+1}}\setminus\hat{\Lambda}_{s_j}} q^{2mi}\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}(z). \end{aligned}$$

On en déduit que $v_2 \in H^{s_j+m} \cap \overset{\circ}{H}{}^m(G)$, car $w^1_{R_j} \in H^{s_j+m}(G)$ et pour $i \in \hat{\Lambda}_{s_{j+1}} \setminus \hat{\Lambda}_{s_j}$ on a $\Re\lambda > s_j + m - 1$ et donc $\psi(r)\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}(z) \in H^{s_j+m}(G)$.

La définition du problème (P.1) donne

$$\begin{aligned} Lv_2 &= Lv - Lv_1 \\ &= g - q^{2m} w^1_{R_j} - \sum_{(\lambda,\nu,k)\in \hat{M}_{s_j}} b^{\lambda,\nu}_{k,1}(q) \\ & \Big[\sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_j}} q^{2m(i+1)}\psi(r)\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}(z) + \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_{j+1}}} q^{2mi} L(\psi(r)\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}(z))\Big]. \end{aligned}$$

Le terme

$$\begin{aligned} \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_{j+1}}} q^{2mi} L(\psi\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}) &= \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_{j+1}}} q^{2mi}([L,\psi]\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi} + \psi L\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}) \\ &= \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_{j+1}}} q^{2mi}[L,\psi]\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi} - \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_j}} q^{2m(i+1)}\psi\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}. \end{aligned}$$

D'où

$$Lv_2 = g - q^{2m} w^1_{R_j} - \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} b^{\lambda,\nu}_{k,1}(q) \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_{j+1}}} q^{2mi}[L,\psi]\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi} := \hat{g}. \tag{2.55}$$

Comme $[L,\psi]$ a son support en dehors de 0, $[L,\psi]\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi} \in H^{s_{j+1}-m}(G)$, ce qui implique que $\hat{g} \in H^{s_{j+1}-m}(G)$.
Ainsi $v_2 \in H^{s_j+m} \cap \overset{\circ}{H}{}^m(G)$ résout le problème $Lv_2 = \hat{g} \in H^{s_{j+1}-m}(G)$ et On a d'après le Lemme 10.4 de [4]:

$$v_2 = w^1_{R_{j+1}} + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_{j+1}}\setminus\hat{M}_{s_j}} \gamma^{\lambda,\nu}_{k,j+1}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu}(z) \tag{2.56}$$

avec

$$\|w^1_{R_{j+1}}\|_{s_{j+1}+m,G} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_{j+1}}\setminus\hat{M}_{s_j}} |\gamma^{\lambda,\nu}_{k,j+1}(q)| \le C\|\hat{g}\|_{s_{j+1}-m,G}. \tag{2.57}$$

Notons $\gamma^{\lambda,\nu}_{k,j+1}$ par $b^{\lambda,\nu}_{k,1}$ lorsque $(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_{j+1}}\setminus\hat{M}_{s_j}$. Alors (2.54) et (2.56) montrent que

$$v = w^1_{R_{j+1}} + \psi(r) \;\; \textstyle\sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_{j+1}}} b^{\lambda,\nu}_{k,1} \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_{j+1}}} q^{2mi}\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi} \tag{2.58}$$

et

$$\begin{aligned} A &:= \|w^1_{R_{j+1}}\|_{s_{j+1}+m,G} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_{j+1}}} |b^{\lambda,\nu}_{k,1}| \\ &\le C_1\{\|\hat{g}\|_{s_{j+1}-m,G} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} |b^{\lambda,\nu}_{k,1}|\} \;. \\ &\le C_2\{\|g\|_{s_{j+1}-m,G} + \|w^1_{R_j}\|_{s_{j+1}-m,G} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} |b^{\lambda,\nu}_{k,1}|\} \\ &\le C_3\|g\|_{s_{j+1}-m,G,|q|} \text{ (par hypothèse de récurrence).} \end{aligned}$$

Donc **(HR.1)** est établi.

Passons maintenant à la preuve de **(HR.2)**. L'hypothèse de récurrence **(HR.2)** est vraie pour $j = 0$ c'est le résultat de la deuxième partie du lemme 2.26. Supposons que **(HR.2)** est vraie pour j, montrons qu'elle l'est aussi pour $j+1$. De la même manière que pour le premier cas, on pose $v = v_1 + v_2$ où

$$v_1 = \psi(r|q|) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q) \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_{j+1}}} q^{2mi}\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}(z). \tag{2.59}$$

On se ramène comme précedemment à étudier $v_2 \in H^{s_j+m} \cap \overset{\circ}{H}{}^m(G)$ solution de $Lv_2 = \hat{g} \in H^{s_{j+1}-m}(G,|q|)$, avec

$$\hat{g}(z,q) := g(z,q) - q^{2m}w_{R_j}^2(z,q) - \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q) \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_{j+1}}} q^{2mi}[L,\psi(r|q|)]\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}(z).$$

Pour avoir une estimation convenable des coefficients, on fait de nouveau le changement de variable $z \to \rho z$, $\rho = |q|^{-1}$. On est amené à regarder $v_{2,\rho} \in H^{s_{j+1}-m} \cap \overset{\circ}{H}{}^m(G)$ solution de $Lv_{2,\rho} = \rho^{2m}\hat{g}_\rho \in H^{s_{j+1}-m}(G)$. D'après le lemme 10.4 de [4],

$$v_{2,\rho} = w_{R_{j+1},\rho} + \psi(r) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_{j+1}}\setminus\hat{M}_{s_j}} \gamma_{k,j+1}^{\lambda,\nu}(\omega)\sigma_k^{\lambda,\nu}(z) \tag{2.60}$$

avec :

$$\|w_{R_{j+1},\rho}\|_{s_{j+1}+m,G} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_{j+1}}\setminus\hat{M}_{s_j}} |\gamma_{k,j+1}^{\lambda,\nu}(\omega)| \leq C\|\rho^{2m}\hat{g}_\rho\|_{s_{j+1}-m,G}. \tag{2.61}$$

Notons

$$b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q) := |q|^\lambda \sum_{l=k}^{k(\lambda,\nu)-1} \frac{(\ln|q|)^{l-k}}{(l-k)!}\gamma_{k,j+1}^{\lambda,\nu}(\omega), \text{ pour } (\lambda,\nu,k) \in \hat{M}_{s_{j+1}} \setminus \hat{M}_{s_j}. \tag{2.62}$$

Il en résulte dans les variables initiales que d'une part

$$\begin{aligned} v_2 = w_{R_{j+1}}^2 &+ \psi(r|q|) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_{j+1}}\setminus\hat{M}_{s_j}} \gamma_{k,j+1}^{\lambda,\nu}(\omega)\sigma_k^{\lambda,\nu}(|q|z) \\ = w_{R_{j+1}}^2 &+ \psi(r|q|) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_{j+1}}\setminus\hat{M}_{s_j}} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q)\sigma_k^{\lambda,\nu}(z) \quad (\text{ par } (2.48)) \end{aligned}$$

c.à.d

$$v = w_{R_{j+1}}^2(q,z) + \psi(r|q|) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_{j+1}}} b_{k,2}^{\lambda,\nu}(q) \sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_{j+1}}} q^{2im}\sigma_k^{\lambda,\nu,2mi}(z), \tag{2.63}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
M := & \|w^2_{R_{j+1}}\|_{s_{j+1}-m,G,|q|} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_{j+1}}} |q|^{s_{j+1}+m-1-\Re\lambda-\epsilon}|b^{\lambda,\nu}_{k,2}(q)| \\
\leq & C_1\{\|\hat{g}\|_{s_{j+1}-m,G,|q|} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} |q|^{s_{j+1}+m-1-\Re\lambda-\epsilon}|b^{\lambda,\nu}_{k,2}(q)|\} \\
\leq & C_2\Big(\|g\|_{s_{j+1}-m,G,|q|} \\
+ & |q|^{2m}\Big[\|w^2_{R_j}\|_{s_{j+1}-m,G,|q|} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_j}} |q|^{s_j+m-1-\Re\lambda-\epsilon}|b^{\lambda,\nu}_{k,2}(q)|\Big]\Big) \\
\leq & C_2\|g\|_{s_{j+1}-m,G} + C_jC_2|q|^{2m}\|g\|_{s_j-m,G,|q|} \text{ (hypothèse de récurrence)} \\
\leq & C_{j+1}\|g\|_{s_{j+1}-m,G,|q|}.
\end{aligned}$$

Cette dérnière inégalité s'obtient en utilisant la relation $s_{j+1} - m = s_j + m$. (**HR.2**) est démontré, ce qui termine la preuve du théorème 2.24.

■

Pour prouver le théorème 2.25, on réecrit (2.63) comme

$$v(z,q) = w^{2*}_{R_s}(q,z) + \psi(r|q|) \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_s} b^{\lambda,\nu}_{k,2}(q) \sum_{i\in\hat{\Lambda}_s} q^{2im}\sigma^{\lambda,\nu,2mi}_k(z),$$

où

$$\hat{w}^{2*}_{R_s} := w^2_{R_s} + [\psi(r|q|) - \psi(r)] \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_s\setminus\hat{M}_s} b^{\lambda,\nu}_{k,2}(\omega) \sum_{i\in\hat{\Lambda}_s} q^{2im}\sigma^{\lambda,\nu,2mi}_k.$$

On obtient la conclusion souhaitée par un lemme analogue au lemme 2.27.

■

Voici le dernier lemme préparant la démonstration du Théorème 2.22

Lemme 2.28 *On se place dans les conditions du lemme 2.26. On suppose en outre que g est holomorphe de $\mathbf{C}^+$ à valeurs dans $H^{t-m}(G)$.*
Alors la partie régulière $w^1_{R_t}$ de la solution v est holomorphe de $\mathbf{C}^+$ à valeurs dans $H^{t+m}(G)$. De plus la fonction numérique $b^{\lambda,\nu}_{k,1}$ est holomorphe sur $\mathbf{C}^+$.

Démonstration

i) On désigne par $\mathcal{M}$ la transformée de Mellin, (r,θ) des coordonées polaires. D'après la preuve de ([4]. lemme 10.4).

$$w^1_{R_t}(r,\theta) = \mathcal{M}^{-1}{}_{\lambda\to r}\Big[\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\mathcal{M}_{r\to\lambda}(g - q^{2m}v)\Big] \text{ pour } \Re\lambda = t+m-1.$$

Notons $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(H^{t-m}(G), H^{t+m}(G))$, l'opérateur $\mathcal{M}^{-1}{}_{\lambda\to r}\mathcal{L}^{-1}(\lambda)\mathcal{M}_{r\to\lambda}$ pour $\Re\lambda = t+m-1$, qui est indépendant de q et notons $\hat{g} := g - q^{2m}v$.

Pour $q+h \in \mathbf{C}$, $\Re(q+h)^{2m} \geq 0$ on a

$$\left\|\frac{w^1_{R_t}(q+h)-w^1_{R_t}(q)}{h} - \frac{dw^1_{R_t}(q)}{dq}\right\|_{t+m,G} = \left\|\mathcal{A}\left[\frac{\hat{g}(q+h)-\hat{g}(q)}{h} - \frac{d\hat{g}(q)}{dq}\right]\right\|_{t+m,G}$$
$$\leq C\left\|\frac{\hat{g}(q+h)-\hat{g}(q)}{h} - \frac{d\hat{g}(q)}{dq}\right\|_{t-m,G} \longrightarrow_{h\to 0} 0.$$

Ainsi $w^1_{R_t}$ est holomorphe de $\mathbf{C}^+$ à valeurs dans $H^{t-m}(G)$.

ii) Il est connu (cf.[6]) que le coefficient admet la représentation

$$b^{\lambda,\nu}_{k,1}(q) = \langle \hat{g}(q) - L(\psi M_A(\Pi_A)\hat{g}(q)), K^{\lambda,\nu}_k\rangle_\Omega. \tag{2.64}$$

Le sens des expressions dans (2.64) est

- $A := [t-m-1]$ est la partie entière de $t-m-1$,
- $\Pi_A\hat{g} := \sum_{|\alpha|\leq A}\partial^\alpha\hat{g}(0)\frac{z^\alpha}{\alpha!}$ le developpement de taylor de $\hat{g}$ en 0 à l'ordre A,
- $M_A(\Pi_A\hat{g}) = \sum_{|\alpha|\leq A}\partial^\alpha\hat{g}(0)\frac{w^\alpha}{\alpha!}$, où $w^\alpha \in S^{|\alpha|+2m,0}(G)$ est solution de $Lw^\alpha = z^\alpha$,
- $K^{\lambda,\nu}_k = \psi\tau^{\lambda,\nu}_k - X^{\lambda,\nu}_k$ (indépendante de q) avec $\tau^{\lambda,\nu}_k$. les singulariteés duales définies comme $\sigma^{\lambda,\nu}_k$ à partir d'une chaine duale de Jordan. $X^{\lambda,\nu}_k \in \overset{\circ}{H}{}^m(G)$ est une solution non nulle du problème adjoint
$$L^*X^{\lambda,\nu}_k = L^*(\psi\tau^{\lambda,\nu}_k).$$

La deuxième partie du lemme résulte de (2.64). ■

Remarque 2.29 Pour les mêmes raisons que le lemme 2.28, on a la même conclusion pour $w^2_{R_t}$ et $b^{\lambda,\nu}_{k,2}$.

Démonstration du théorème 2.22 .
On considère la décomposition relative à $|p|\leq\delta_0$ (resp. $|p|>\delta_0$) du théorème 2.24 localisé sur Ω d'une manière analogue à 2.3.2 . On pose $p=q^{2m}$,

$$w_R = \begin{cases} w^1_R & \text{si } |p|\leq\delta_0 \\ w^2_R & \text{si } |p|>\delta_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad C^{\lambda,\nu}_k = \begin{cases} b^{\lambda,\nu}_{k,1} & \text{si } |p|\leq\delta_0 \\ b^{\lambda,\nu}_{k,2} & \text{si } |p|>\delta_0 \end{cases}.$$

Regroupons (i) et (ii) du Théorème 2.24 localisé sur Ω, il vient

$$v(p,z) = w_R(p,z) + \varphi(r,p)\sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_{s_{j+1}}} C^{\lambda,\nu}_k(p)\sum_{i\in\hat{\Lambda}_{s_{j+1}}} p^i\sigma^{\lambda,\nu,2mi}_k(z) \tag{2.65}$$

avec

$$\|w_R\|_{s+m,\Omega,\sqrt[2m]{1+|p|}} + \sum_{(\lambda,\nu,k)\in\hat{M}_s}(1+|p|)^{\frac{s+m-1-\Re\lambda}{2m}-\epsilon}|C^{\lambda,\nu}_k|$$
$$\leq C\|\mathcal{L}_{t\to p}f\|_{s-m,\Omega,\sqrt[2m]{1+|p|}}.$$

D'où

$$
\begin{aligned}
(2.66) \qquad \|w_R\|^2_{\mathcal{H}^2(\mathbf{C}_+,H^{s+m}(\Omega,\sqrt[2m]{1+|p|}))} &= \sup_{\xi>0}\int_{\mathbf{R}_\eta}\|w_R\|^2_{s+m,\Omega,\sqrt[2m]{1+|p|}}\,d\eta \\
&\le C_1\sup_{\xi>0}\int_{\mathbf{R}_\eta}\|g\|^2_{s+m,\Omega,\sqrt[2m]{1+|p|}}\,d\eta \\
&\le C_2\|g\|^2_{\mathcal{H}^2(\mathbf{C}_+,H^{s-m}(\Omega,\sqrt[2m]{1+|p|})} \\
&< +\infty
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\|(1+p)^{\frac{s+m-1-\Re\lambda}{2m}-\epsilon}C_k^{\lambda,\nu}(p)\|^2_{\mathcal{H}^2(\mathbf{C}_+)} &= \sup_{\xi>0}\int_{\mathbf{R}_\eta}(1+|p|)^{\frac{s+m-1-\Re\lambda}{2m}-\epsilon}|C_k^{\lambda,\nu}(p)|^2\,d\eta \\
&\le C_3\|g\|^2_{\mathcal{H}^2(\mathbf{C}_+,H^{s-m}(\Omega,\sqrt[2m]{1+|p|}))} \\
(2.67) \qquad &< +\infty.
\end{aligned}
$$

Ainsi (2.66),(2.67), le lemme 2.28 et la proposition 2.6, montrent que $w_R \in \mathcal{H}^2\left(\mathbf{C}_+, H^{s+m}(\Omega,\sqrt[2m]{1+|p|})\right)$ et $(1+p)^{\frac{s+m-1-\Re\lambda}{2m}-\epsilon}C_k^{\lambda,\nu}(p) \in \mathcal{H}^2(\mathbf{C}_+)$.
Les transformées de Laplace inverse

$$u_R = \mathcal{L}^{-1}_{p\to t}w_R\,, K_k^{\lambda,\nu} = \mathcal{L}^{-1}_{p\to t}C_k^{\lambda,\nu}\,, \Phi(r,t) = \mathcal{L}^{-1}_{p\to t}\varphi(r,p)$$

donne

$$
\begin{aligned}
u_R &\in \tilde{H}^{s+m,\frac{s+m}{2m}}(\Omega\times\mathbf{R}_+), \\
K_k^{\lambda,\nu} &\in \tilde{H}^{\frac{s+m-1-\Re\lambda}{2m}-\epsilon}(\mathbf{R}_+).
\end{aligned}
$$

Appliquant aussi la transformée de Laplace inverse de la partie singulière dans (2.65), on obtient la première partie du théorème.
Finalement, (2.40) se traite de facon similaire à celle ci-dessus où l'on remplace w_R^2 par w_R^{2*}.
On a ainsi completé la démonstration du théorème. ∎

Bibliography

[1] S. Agmon, A. Douglis et L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, II* Com. on pure and applied Math. , 12, 1959, 623-727; ibid 17, 1964, 35-92.

[2] M. S. Agranovitch et M. I. Vishik, *Elliptic problems with a paramater and parabolic problems of general type,* Russian Math. Surveys 19, 1964, 53-157.

[3] H. Blum et R. Rannacher, *On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners,* Math. Meth. in the Appl. Sc. 2 (1980), 556-581.

[4] M. Dauge, *Elliptic boundary value problems in corner domains. Smoothness and asymptotics of solutions,* L.N. in Math., 1341, Springer Verlag (1988).

[5] M. Dauge et S. Nicaise, *Oblique derivative and interface problems on polygonal domains and networks,* Comm. in P.D.E., 14 (1989), 1147-1192.

[6] M. Bourlard, M. Dauge, M.-S. Lubuma et S. Nicaise, *Coefficients des Singularités pour des problèmes aux limites elliptiques sur un Domaine à Points coniques I : Résultats généraux pour le problème de Dirichlet,* RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. , 24 (1990), 27-52.,

[7] M. Bourlard, M. Dauge, M.-S. Lubuma et S. Nicaise, *Coefficients des singularités pour des problèmes aux limites elliptiques sur un domaine à singularités coniques II : Quelques opérateurs particuliers,* RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. , 24 (1990), 343-367.

[8] R. Dautray et JL. Lions, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique* , Volume 7, Paris, MASSON .

[9] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains,* Monographs and Studies in Mathematics 21, Pitman, Boston (1985).

[10] P. Grisvard, *Edge behavior of the solution of an Elliptic problem,* Math.Nachr.132 (1987), 281-299 .

[11] A. Hammoudi, *Equation de la chaleur sur une base polygonale,* Thèse 3ème cycle, Nantes(1987).

[12] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators,* Springer-Verlag (1966).

[13] V.A. Kondratiev, *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points,* Trans. Moscow Math. Soc. 16 (1967), 227-313.

[14] J. L. Lions et E. Magenes , *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* Dunod T1 et T2.

[15] V.G. Maz'ya et B.A. Plamenevskii, *Estimates in Lp and in Holder classes and the Miranda-Agmon maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary,* A.M.S. Trans. (2), Vol. 123 (1984), 1-56.

[16] M. Moussaoui et B. K. sadallah, *Régularité des coefficients de propagation de singularités pour l'équation de la chaleur dans un ouvert plan polygonal,* C.R. Acad. Sc. Paris, Série I, 293 (1981), 297-300.

[17] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,* Masson, Paris (1967).

[18] S. Nicaise, *Problèmes aux limites sur les réseaux deux dimensionnels polygonaux topologiques,* J. Math. Pures et Appl. 67 (1988), p. 93-113.

[19] S. Nicaise, *Polygonal interface problems - Higher regularity results,* Comm. in P.D.E. 15 (1990), 1475-1508.

[20] S. Nicaise, *Differential equations in Hilbert spaces and applications to boundary value problems in nonsmooth domains,* Journ. of Functional Analysis, 96 (1991), 195-218.

[21] S. Nicaise, *Polygonal interface problems for the biharmonic operator,* Pub. IRMA, Lille (1991), Vol. 23, N° XI.

[22] A. Pazy, *Semi groups of linear operators and applications to P.D.E* , Springer Verlag .

[23] H. Schmitz, *On Mellin transforms of generalised functions,* J. Int. Eq. Op. Theory, à paraître.

Contents