

50376
1992
353

60 879

50376
1992
353

USTL

**LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE ET
D'OPTIMISATION**



n° d'ordre : 963

THESE

Nouveau régime

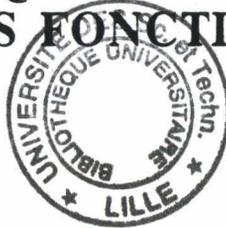
présentée à
l'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en MATHEMATIQUES
par

Mustapha KZAZ

**ACCELERATION DE LA CONVERGENCE
DE LA FORMULE DE QUADRATURE DE GAUSS-JACOBI
DANS LE CAS DES FONCTIONS ANALYTIQUES**



soutenu le 9 octobre 1992 devant la commission d'examen

Membres du jury

| | |
|---------------|--|
| Président : | C. BREZINSKI |
| Rapporteurs : | P. MARONI A.C. MATOS |
| Membres : | J. VAN ISEGHEM B. GERMAIN-BONNE |

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT
ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS, A. DUBRULLE

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

M. P. LOUIS

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

| | |
|---------------------------|---|
| M. CHAMLEY Hervé | Géotechnique |
| M. CONSTANT Eugène | Electronique |
| M. ESCAIG Bertrand | Physique du solide |
| M. FOURET René | Physique du solide |
| M. GABILLARD Robert | Electronique |
| M. LABLACHE COMBIER Alain | Chimie |
| M. LOMBARD Jacques | Sociologie |
| M. MACKE Bruno | Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques |

M. MIGEON Michel
M. MONTREUIL Jean
M. PARREAU Michel
M. TRIDOT Gabriel

EUDIL
Biochimie
Analyse
Chimie appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre
M. BLAYS Pierre
M. BILLARD Jean
M. BOLLLY Bénoni
M. BONNELLE Jean Pierre
M. BOSCO Denis
M. BOUGHON Pierre
M. BOURIQUET Robert
M. BRASSELET Jean Paul
M. BREZINSKI Claude
M. BRIDOUX Michel
M. BRUYELLE Pierre
M. CARREZ Christian
M. CELET Paul
M. COEURE Gérard
M. CORDONNIER Vincent
M. CROSNIER Yves
Mme DACHARRY Monique
M. DAUCHET Max
M. DEBOURSE Jean Pierre
M. DEBRABANT Pierre
M. DECLERCQ Roger
M. DEGAUQUE Pierre
M. DESCHEPPER Joseph
Mme DESSAUX Odile
M. DHAINAUT André
Mme DHAINAUT Nicole
M. DJAFARI Rouhani
M. DORMARD Serge
M. DOUKHAN Jean Claude
M. DUBRULLE Alain
M. DUPOUY Jean Paul
M. DYMENT Arthur
M. FOCT Jacques Jacques
M. FOUQUART Yves
M. FOURNET Bernard
M. FRONTIER Serge
M. GLORIEUX Pierre
M. GOSSELIN Gabriel
M. GOUDMAND Pierre
M. GRANELLE Jean Jacques
M. GRUSON Laurent
M. GUILBAULT Pierre
M. GULLAUME Jean
M. HECTOR Joseph
M. HENRY Jean Pierre
M. HERMAN Maurice
M. LACOSTE Louis
M. LANGRAND Claude

Astronomie
Géographie
Physique du Solide
Biologie
Chimie-Physique
Probabilités
Algèbre
Biologie Végétale
Géométrie et topologie
Analyse numérique
Chimie Physique
Géographie
Informatique
Géologie générale
Analyse
Informatique
Electronique
Géographie
Informatique
Gestion des entreprises
Géologie appliquée
Sciences de gestion
Electronique
Sciences de gestion
Spectroscopie de la réactivité chimique
Biologie animale
Biologie animale
Physique
Sciences Economiques
Physique du solide
Spectroscopie hertzienne
Biologie
Mécanique
Métallurgie
Optique atmosphérique
Biochimie structurale
Ecologie numérique
Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
Sociologie
Chimie-Physique
Sciences Economiques
Algèbre
Physiologie animale
Microbiologie
Géométrie
Génie mécanique
Physique spatiale
Biologie Végétale
Probabilités et statistiques

M. LATTEUX Michel
M. LA VEINE Jean Pierre
Mme LECLERCQ Ginette
M. LEHMANN Daniel
Mme LENOBLE Jacqueline
M. LEROY Jean Marie
M. LHENAFF René
M. LHOMME Jean
M. LOUAGE François
M. LOUCHEUX Claude
M. LUCQUIN Michel
M. MAILLET Pierre
M. MAROUF Nadir
M. MICHEAU Pierre
M. PAQUET Jacques
M. PASZKOWSKI Stéfan
M. PETIT Francis
M. PORCHET Maurice
M. POUZET Pierre
M. POVY Lucien
M. PROUVOST Jean
M. RACZY Ladislas
M. RAMAN Jean Pierre
M. SALMER Georges
M. SCHAMPS Joël
Mme SCHWARZBACH Yvette
M. SEGUIER Guy
M. SIMON Michel
M. SLIWA Henri
M. SOMME Jean
Melle SPIK Geneviève
M. STANKIEWICZ François
M. THIEBAULT François
M. THOMAS Jean Claude
M. THUMERELLE Pierre
M. TILLIEU Jacques
M. TOULOTTE Jean Marc
M. TREANTON Jean René
M. TURRELL Georges
M. VANEECLOO Nicolas
M. VAST Pierre
M. VERBERT André
M. VERNET Philippe
M. VIDAL Pierre
M. WALLART François
M. WEINSTEIN Olivier
M. ZEYTOUNIAN Radyadour

Informatique
Paléontologie
Catalyse
Géométrie
Physique atomique et moléculaire
Spectrochimie
Géographie
Chimie organique biologique
Electronique
Chimie-Physique
Chimie physique
Sciences Economiques
Sociologie
Mécanique des fluides
Géologie générale
Mathématiques
Chimie organique
Biologie animale
Modélisation - calcul scientifique
Automatique
Minéralogie
Electronique
Sciences de gestion
Electronique
Spectroscopie moléculaire
Géométrie
Electrotechnique
Sociologie
Chimie organique
Géographie
Biochimie
Sciences Economiques
Sciences de la Terre
Géométrie - Topologie
Démographie - Géographie humaine
Physique théorique
Automatique
Sociologie du travail
Spectrochimie infrarouge et raman
Sciences Economiques
Chimie inorganique
Biochimie
Génétique
Automatique
Spectrochimie infrarouge et raman
Analyse économique de la recherche et développement
Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

| | |
|-------------------------|--|
| M. ABRAHAM Francis | Composants électroniques |
| M. ALLAMANDO Etienne | Biologie des organismes |
| M. ANDRIES Jean Claude | Analyse |
| M. ANTOINE Philippe | Génétique |
| M. BALL Steven | Biologie animale |
| M. BART André | Génie des procédés et réactions chimiques |
| M. BASSERY Louis | Géographie |
| Mme BATTIAU Yvonne | Systèmes électroniques |
| M. BAUSIERE Robert | Mécanique |
| M. BEGUIN Paul | Physique atomique et moléculaire |
| M. BELLET Jean | Physique atomique, moléculaire et du rayonnement |
| M. BERNAGE Pascal | Sciences Economiques |
| M. BERTHOUD Arnaud | Sciences Economiques |
| M. BERTRAND Hugues | Analyse |
| M. BERZIN Robert | Physique de l'état condensé et cristallographie |
| M. BISKUPSKI Gérard | Algèbre |
| M. BKOUCHE Rudolphe | Biologie végétale |
| M. BODARD Marcel | Biochimie métabolique et cellulaire |
| M. BOHIN Jean Pierre | Mécanique |
| M. BOIS Pierre | Génie civil |
| M. BOISSIER Daniel | Spectrochimie |
| M. BOIVIN Jean Claude | Physique |
| M. BOUCHER Daniel | Biologie appliquée aux enzymes |
| M. BOUQUELET Stéphane | Gestion |
| M. BOUQUIN Henri | Chimie |
| M. BROCARD Jacques | Paléontologie |
| Mme BROUSMICHE Claudine | Mécanique |
| M. BUISINE Daniel | Biologie animale |
| M. CAPURON Alfred | Géographie humaine |
| M. CARRE François | Chimie organique |
| M. CATTEAU Jean Pierre | Sciences Economiques |
| M. CAYATTE Jean Louis | Electronique |
| M. CHAPOTON Alain | Biochimie structurale |
| M. CHARET Pierre | Composants électroniques optiques |
| M. CHIVE Maurice | Informatique théorique |
| M. COMYN Gérard | Composants électroniques et optiques |
| Mme CONSTANT Monique | Psychophysiologie |
| M. COQUERY Jean Marie | Sciences Economiques |
| M. CORLAT Benjamin | Paléontologie |
| Mme CORSIN Paule | Physique nucléaire et corpusculaire |
| M. CORTOIS Jean | Chimie organique |
| M. COUTURIER Daniel | Tectonique géodynamique |
| M. CRAMPON Norbert | Biologie |
| M. CURGY Jean Jacques | Physique théorique |
| M. DANGOISSE Didier | Analyse |
| M. DE PARIS Jean Claude | Composants électroniques et optiques |
| M. DECOSTER Didier | Electrochimie et Cinétique |
| M. DEJAEGER Roger | Informatique |
| M. DELAHAYE Jean Paul | Physiologie animale |
| M. DELORME Pierre | Sciences Economiques |
| M. DELORME Robert | Sociologie |
| M. DEMUNTER Paul | Physique atomique, moléculaire et du rayonnement |
| Mme DEMUYNCK Claire | Informatique |
| M. DENEL Jacques | Physique du solide - cristallographie |
| M. DEPREZ Gilbert | |

| | |
|-------------------------|---|
| M. DERIEUX Jean Claude | Microbiologie |
| M. DERYCKE Alain | Informatique |
| M. DESCAMPS Marc | Physique de l'état condensé et cristallographie |
| M. DEVRAINNE Pierre | Chimie minérale |
| M. DEWAILLY Jean Michel | Géographie humaine |
| M. DHAMELINCOURT Paul | Chimie physique |
| M. DI PERSIO Jean | Physique de l'état condensé et cristallographie |
| M. DUBAR Claude | Sociologie démographique |
| M. DUBOIS Henri | Spectroscopie hertzienne |
| M. DUBOIS Jean Jacques | Géographie |
| M. DUBUS Jean Paul | Spectrométrie des solides |
| M. DUPONT Christophe | Vie de la firme |
| M. DUTHOIT Bruno | Génie civil |
| Mme DUVAL Anne | Algèbre |
| Mme EVRARD Micheline | Génie des procédés et réactions chimiques |
| M. FAKIR Sabah | Algèbre |
| M. FARVACQUE Jean Louis | Physique de l'état condensé et cristallographie |
| M. FAUQUEMBERGUE Renaud | Composants électroniques |
| M. FELIX Yves | Mathématiques |
| M. FERRIERE Jacky | Tectonique - Géodynamique |
| M. FISCHER Jean Claude | Chimie organique, minérale et analytique |
| M. FONTAINE Hubert | Dynamique des cristaux |
| M. FORSE Michel | Sociologie |
| M. GADREY Jean | Sciences économiques |
| M. GAMBLIN André | Géographie urbaine, industrielle et démographie |
| M. GOBLOT Rémi | Algèbre |
| M. GOURIEROUX Christian | Probabilités et statistiques |
| M. GREGORY Pierre | I.A.E. |
| M. GREMY Jean Paul | Sociologie |
| M. GREVET Patrice | Sciences Economiques |
| M. GRIMBLOT Jean | Chimie organique |
| M. GUELTON Michel | Chimie physique |
| M. GUICHAOUA André | Sociologie |
| M. HAIMAN Georges | Modélisation,calcul scientifique, statistiques |
| M. HOUDART René | Physique atomique |
| M. HUEBSCHMANN Johannes | Mathématiques |
| M. HUTTNER Marc | Algèbre |
| M. ISAERT Noël | Physique de l'état condensé et cristallographie |
| M. JACOB Gérard | Informatique |
| M. JACOB Pierre | Probabilités et statistiques |
| M. JEAN Raymond | Biologie des populations végétales |
| M. JOFFRE Patrick | Vie de la firme |
| M. JOURNAL Gérard | Spectroscopie hertzienne |
| M. KOENIG Gérard | Sciences de gestion |
| M. KOSTRUBIEC Benjamin | Géographie |
| M. KREMBEL Jean | Biochimie |
| Mme KRIFA Hadjila | Sciences Economiques |
| M. LANGEVIN Michel | Algèbre |
| M. LASSALLE Bernard | Embryologie et biologie de la différenciation |
| M. LE MEHAUTE Alain | Modélisation,calcul scientifique,statistiques |
| M. LEBFEVRE Yannic | Physique atomique,moléculaire et du rayonnement |
| M. LECLERCQ Lucien | Chimie physique |
| M. LEFEBVRE Jacques | Physique |
| M. LEFEBVRE Marc | Composants électroniques et optiques |
| M. LEFEBVRE Christian | Pétrologie |
| Melle LEGRAND Denise | Algèbre |
| M. LEGRAND Michel | Astronomie - Météorologie |
| M. LEGRAND Pierre | Chimie |
| Mme LEGRAND Solange | Algèbre |
| Mme LEHMANN Josiane | Analyse |
| M. LEMAIRE Jean | Spectroscopie hertzienne |

M. LE MAROIS Henri
 M. LEMOINE Yves
 M. LESCURE François
 M. LESENNE Jacques
 M. LOCQUENEUX Robert
 Mme LOPES Maria
 M. LOSFELD Joseph
 M. LOUAGE Francis
 M. MAHIEU François
 M. MAHIEU Jean Marie
 M. MAIZIERES Christian
 M. MANSY Jean Louis
 M. MAURISSON Patrick
 M. MERIAUX Michel
 M. MERLIN Jean Claude
 M. MESMACQUE Gérard
 M. MESSELYN Jean
 M. MOCHE Raymond
 M. MONTEL Marc
 M. MORCELLET Michel
 M. MORE Marcel
 M. MORTREUX André
 Mme MOUNIER Yvonne
 M. NIAY Pierre
 M. NICOLE Jacques
 M. NOTELET Francis
 M. PALAVIT Gérard
 M. PARSY Fernand
 M. PECQUE Marcel
 M. PERROT Pierre
 M. PERTUZON Emile
 M. PETIT Daniel
 M. PLIHON Dominique
 M. PONSOLLE Louis
 M. POSTAIRE Jack
 M. RAMBOUR Serge
 M. RENARD Jean Pierre
 M. RENARD Philippe
 M. RICHARD Alain
 M. RIETSCH François
 M. ROBINET Jean Claude
 M. ROGALSKI Marc
 M. ROLLAND Paul
 M. ROLLET Philippe
 Mme ROUSSEL Isabelle
 M. ROUSSIGNOL Michel
 M. ROY Jean Claude
 M. SALERNO François
 M. SANCHOLLE Michel
 Mme SANDIG Anna Margarete
 M. SAWERYSYN Jean Pierre
 M. STAROSWIECKI Marcel
 M. STEEN Jean Pierre
 Mme STELLMACHER Irène
 M. STERBOUL François
 M. TAILLIEZ Roger
 M. TANRE Daniel
 M. THERY Pierre
 Mme TJOTTA Jacqueline
 M. TOURSEL Bernard
 M. TREANTON Jean René

Vie de la firme
 Biologie et physiologie végétales
 Algèbre
 Systèmes électroniques
 Physique théorique
 Mathématiques
 Informatique
 Electronique
 Sciences économiques
 Optique - Physique atomique
 Automatique
 Géologie
 Sciences Economiques
 EUDIL
 Chimie
 Génie mécanique
 Physique atomique et moléculaire
 Modélisation,calcul scientifique,statistiques
 Physique du solide
 Chimie organique
 Physique de l'état condensé et cristallographie
 Chimie organique
 Physiologie des structures contractiles
 Physique atomique,moléculaire et du rayonnement
 Spectrochimie
 Systèmes électroniques
 Génie chimique
 Mécanique
 Chimie organique
 Chimie appliquée
 Physiologie animale
 Biologie des populations et écosystèmes
 Sciences Economiques
 Chimie physique
 Informatique industrielle
 Biologie
 Géographie humaine
 Sciences de gestion
 Biologie animale
 Physique des polymères
 EUDIL
 Analyse
 Composants électroniques et optiques
 Sciences Economiques
 Géographie physique
 Modélisation,calcul scientifique,statistiques
 Psychophysiologie
 Sciences de gestion
 Biologie et physiologie végétales

 Chimie physique
 Informatique
 Informatique
 Astronomie - Météorologie
 Informatique
 Génie alimentaire
 Géométrie - Topologie
 Systèmes électroniques
 Mathématiques
 Informatique
 Sociologie du travail

M. TURREL Georges
M. VANDIJK Hendrik
Mme VAN ISEGHEM Jeanine
M. VANDORPE Bernard
M. VASSEUR Christian
M. VASSEUR Jacques
Mme VIANO Marie Claude
M. WACRENIER Jean Marie
M. WARTEL Michel
M. WATERLOT Michel
M. WEICHERT Dieter
M. WERNER Georges
M. WIGNACOURT Jean Pierre
M. WOZNIAK Michel
Mme ZINN JUSTIN Nicole

Spectrochimie infrarouge et raman

Modélisation, calcul scientifique, statistiques
Chimie minérale
Automatique
Biologie

Electronique
Chimie inorganique
géologie générale
Génie mécanique
Informatique théorique

Spectrochimie
Algèbre

REMERCIEMENT

Je tiens tout d'abord à exprimer ma plus grande gratitude envers mon Professeur Claude BREZINSKI, qui a contribué dans ma formation et qui m'a fait découvrir un domaine de recherche si intéressant et dont le champs d'applications est si large. Je le remercie aussi pour l'intérêt particulier qu'il a montré envers ce travail et pour la sympathie qu'il m'a prodiguée.

Je tiens aussi à remercier d'une façon très particulière, Madame le Professeur Jeanette VAN ISEGHEM, qui a suivi avec un très grand intérêt ce travail et dont les suggestions et les conseils m'ont été très précieux.

Je la remercie aussi pour sa gentillesse, sa patience et sa grande disponibilité.

Je remercie aussi les professeurs A.C. MATOS, B. GERMAIN-BONNE et P. MARONI de m'avoir honoré en faisant partie du jury et des suggestions qu'ils m'ont faites.

Je tiens aussi à remercier tous les membres de l'équipe A. N. O ainsi que Mme TAILLY pour la chaleur et la bonne ambiance qu'ils ont fait régner dans le laboratoire.

TABLE DES MATIERES

| | |
|---|----|
| INTRODUCTION | 4 |
| CHAPITRE I: PRELIMINAIRES | 7 |
| 1) NOTATIONS ET INTRODUCTION | 8 |
| 2) PRELIMINAIRES | 10 |
| CHAPITRE II: FONCTION ANALYTIQUE PRESENTANT UNE SINGULARITE ALGEBRIQUE. | 23 |
| 1) INTRODUCTION | 24 |
| 2) FONCTION ADMETTANT UNE SINGULARITE LOGARITHMIQUE. | 25 |
| 3) FONCTION ADMETTANT DES SINGULARITES REELLES. | 41 |
| 4) FONCTION ADMETTANT DES SINGULARITES REELLES AUX BORDS DE L'INTERVALE D'INTEGRATION. | 73 |
| CHAPITRE III: FONCTION ANALYTIQUE POSSEDANT DES POLES A L'EXTERIEUR DE L'INTERVALLE D'INTEGRATION. | 88 |
| 1) INTRODUCTION. | 89 |
| 2) EXPRESSION DE L'ERREUR. | 90 |
| 3) FONCTION AYANT DEUX POLES SIMPLES. | 91 |
| 1) FONCTION AYANT UN POLE SIMPLE UNIQUE. | 91 |
| 2) FONCTION AYANT DEUX POLES SIMPLES CONJUGUES. | 98 |

| | |
|--|-----|
| 3) FONCTION AYANT UNE INFINITE DE POLES SIMPLES OU CONJUGUES. | 103 |
| 4) FONCTION AYANT UN POLE MULTIPLE. | 107 |
| CHAPITRE IV: INTEGRALE A VALEUR PRINCIPALE DE CAUCHY. | 125 |
| 1) INTRODUCTION. | 126 |
| 2) EXPRESSION DE L'ERREUR. | 127 |
| 2) FONCTION ADMETTANT DES SINGULARITES LOGARITHMIQUES OU REELLES. | 132 |
| 3) FONCTION AYANT DES POLES . | 145 |

INTRODUCTION

Soit l'intégrale définie suivante: $S = \int_a^b w(x)f(x)dx$, où a et b sont deux réels quelconques, $w(x) = (x - a)^\alpha(b - x)^\beta$ une fonction poids avec $\alpha, \beta > -1$ et f une fonction analytique dans un domaine contenant l'intervalle $[a, b]$.

Pour un très grand nombre de fonctions, il est impossible de déterminer S par une méthode d'intégration élémentaire. Ce problème pourra être déjoué par l'utilisation d'une des méthodes numériques d'intégration connues.

L'une des méthodes numériques d'intégration les plus puissantes est la méthode de quadrature de type Gauss qui consiste à approximer la fonction f par le polynôme de Lagrange interpolant cette même fonction aux points zéros du polynôme orthogonal par rapport à la fonctionnelle c définie par:

$$c(f) = \int_a^b w(x)f(x)dx.$$

La formule de quadrature est alors donnée par la relation suivante:

$$S = S_n + E_n(f) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n f(x_i^n) + E_n(f),$$

où (x_i^n) sont les zéros du polynôme orthogonal $P_n^{\alpha, \beta}$, les (λ_i^n) sont les nombres de Christoffel correspondants, $E_n(f)$ étant l'erreur de quadrature commise au bout de la $n^{\text{ième}}$ itération.

Bien que cette méthode soit puissante, on a pensé à l'améliorer via des méthodes d'extrapolation pour les trois raisons suivantes:

a) La convergence de la méthode est très lente lorsque la fonction f possède des singularités très proches de l'intervalle d'intégration.

b) Pour calculer le terme S_n , nous avons besoin d'évaluer notre fonction en n points qui sont les zéros du polynôme orthogonal et de connaître les n nombres de Christoffel correspondants.

c) La suite (S_n) ne vérifie pas de relation de récurrence, ce qui fait que l'information obtenue par le calcul du terme S_n ne sera d'aucune utilité pour le calcul du terme S_{n+1} .

Le but de notre présent travail est de construire à partir de la suite initiale (S_n) d'autres suites qui convergent vers la valeur exacte de l'intégrale S plus rapidement que la suite initiale (S_n) .

Pour ce faire, et comme dans toutes les méthodes d'extrapolation, nous avons besoin d'informations sur le développement asymptotique de l'erreur $E_n(f)$ ou de $\Delta S_n = S_{n+1} - S_n$, ou du moins d'informations sur le ou les premiers termes de ce développement.

L'expression classique de $E_n(f) \left(\frac{1}{k_n^2} \frac{f^{(2n)}(\xi_n)}{(2n)!} \right)$ [10, p. 227] présente des inconvénients puisque le nombre ξ_n est une inconnue et qu'il est souvent difficile d'obtenir des dérivées d'ordre élevé de la fonction f . Afin de trouver les premiers termes du développement asymptotique de $E_n(f)$, on utilisera le long de ce travail son expression donnée par Sydov

dans [27] sous la forme d'une intégrale le long d'une courbe fermée L contenant l'intervalle d'intégration $[a, b]$ et à l'intérieur duquel, la fonction f est régulière, à savoir:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) E_n\left(\frac{1}{z-t}\right) dz,$$

où $E_n\left(\frac{1}{z-t}\right)$ désigne l'erreur commise dans la formule de quadrature de Gauss à n points sur l'intervalle $[a, b]$ appliquée à la fonction complexe $t \rightarrow \frac{1}{z-t}$, z appartenant à L . Cette expression de l'erreur a été largement utilisée par les auteurs qui se sont intéressés à évaluer l'erreur commise dans la formule de quadrature de Gauss. Pour cela, ils ont adopté l'une des deux stratégies suivantes:

- La première consiste à majorer $|E_n(f)|$ (voir e. g [6, 7, 9]), majoration qui dépend largement du contour L choisi.
- La deuxième consiste à approximer $E_n(f)$ par une quantité A_n tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} |E_n(f) - A_n| = 0$ et non $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{E_n(f)}{A_n} \right| = 1$ (voir e. g [6, 7]). Numériquement, nous n'arrivons à obtenir que le premier chiffre ou au mieux, les deux premiers chiffres de la valeur exacte de l'erreur.

Dans le CHAPITRE I, nous allons donner et rappeler des résultats concernant les expressions de $E_n(f)$ et de ΔS_n , en utilisant certaines propriétés concernant le comportement asymptotique des polynômes de Jacobi. On présentera ensuite certains résultats d'analyse auxquels nous ferons souvent appel dans les chapitres ultérieurs.

Dans le CHAPITRE II, on s'intéressera aux expressions de $E_n(f)$ et de ΔS_n dans le cas où l'intégrand est une fonction analytique possédant respectivement une singularité logarithmique ou une double branche de singularité réelle. On cherchera, dans ces deux cas de fonctions, à donner des représentations asymptotiques de $E_n(f)$ et de ΔS_n , à partir desquelles on construira d'autres suites qui convergent vers S plus rapidement que la suite initiale (S_n).

Dans le CHAPITRE III, on étudiera le cas où l'intégrand est une fonction analytique possédant respectivement, un pôle simple unique, deux pôles simples conjugués, une infinité de pôles simples ou conjugués et enfin un pôle unique d'ordre de multiplicité $m > 1$. Dans chaque cas de fonction étudiée, on donnera comme dans le CHAPITRE II, des représentations asymptotiques de $E_n(f)$ et de ΔS_n , à partir desquelles on construira des transformations accélérant la convergence de la suite initiale (S_n).

Dans le CHAPITRE IV, on étudiera le cas des intégrales à Valeur Principale de Cauchy, où l'intégrand est une fonction analytique possédant d'une part un pôle simple λ appartenant à l'intérieur de l'intervalle d'intégration, et d'autre part, l'une des singularités des fonctions vues dans les CHAPITRES II et III. Dans ce chapitre, nous commencerons

par préciser la formule de quadrature de Gauss utilisée, pour laquelle nous allons établir l'expression suivante de l'erreur:

$$E_n(f, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_L g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z}\right) dz,$$

où $g(z, \lambda)$ est une fonction régulière dans un domaine contenant l'intervalle d'intégration. On suivra ensuite les mêmes démarches faites dans les CHAPITRES II et III, à savoir donner des représentations asymptotiques de $E_n(f, \lambda)$ et ΔS_n qui seront identiques à une constante multiplicative près à celles trouvées dans les CHAPITRES 2 et 3, puis on donnera des résultats d'accélération de la convergence de la suite (S_n) .

Tous les résultats d'accélération donnés dans les chapitres II, III et IV seront illustrés par des exemples numériques.

Sachant que via un changement de variable approprié, le calcul de l'intégrale $\int_a^b f(x)(x-a)^\beta(b-x)^\alpha dx$, est ramené au calcul de l'intégrale $\int_{-1}^1 f(x)(x+1)^\beta(1-x)^\alpha dx$. On limitera donc notre étude au cas où $a = -1, b = 1$, et $w(x) = (1-x)^\alpha(x+1)^\beta$.

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES

1 Notation et introduction

On utilisera le long de ce travail, les notations suivantes:

* $P_n^{\alpha,\beta}$ le polynôme de Jacobi orthonormal par rapport à la fonctionnelle c définie par: $c(f) = \int_{-1}^1 w(x)f(x)dx$, où $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ avec $\alpha, \beta > -1$.

* a_n le coefficient du terme de plus haut degré de $P_n^{\alpha,\beta}$. Il est donné par:

$$a_n = \frac{(2n)! \Gamma(n+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n(n!)^2 \Gamma(2n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \left(\frac{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$*Q_n^{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{P_n^{\alpha,\beta}(z)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(z)}.$$

*(S_n): la suite obtenue par la formule de quadrature de Gauss-Jacobi appliquée à la fonction f . Elle est donnée par:

$$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i^n f(x_i^n), \text{ avec :}$$

$(\lambda_i^n)_{1 \leq i \leq n}$: les nombres de Christoffel.

$(x_i^n)_{1 \leq i \leq n}$: les racines de $P_n^{\alpha,\beta}$.

* S : la valeur exacte de l'intégrale, i.e. $S = \int_{-1}^1 w(x)f(x)dx$.

* $E_n(f)$: l'erreur commise dans la formule de quadrature de Gauss-Jacobi à n points, i.e. $E_n(f) = S - S_n$.

* $E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right)$: l'erreur commise dans la formule de quadrature de Gauss-Jacobi à n points, avec:

$$\frac{1}{z-\cdot}(t) = \frac{1}{z-t}, \quad \forall t \in [-1, 1].$$

* K la fonction définie sur $\mathcal{C} \setminus [-1, 1]$ par

$$K(z) = \frac{(1-z+\sqrt{z^2-1})^{2\alpha}(1+z-\sqrt{z^2-1})^{2\beta}}{2^{\alpha+\beta}},$$

où la fonction $z \rightarrow \sqrt{z^2-1}$ est définie de telle manière à avoir $|z + \sqrt{z^2-1}| > 1$, $\forall z \in \mathcal{C} \setminus [-1, 1]$.

* E_R l'ellipse ayant pour points focaux les points $z = \pm 1$, et comme longueurs des demi-axes $(R \pm R^{-1})/2$, où $R > 1$.

* $H^\infty(E_R)$ désigne l'ensemble des fonctions régulières à l'intérieur du domaine D définie par E_R et bornées sur E_R .

Dans ce chapitre, nous rappellerons et nous présenterons certains résultats concernant la famille $(P_n^{\alpha,\beta})$ et concernant l'expression $E_n(\frac{1}{z-\cdot})$, puis nous rappellerons l'expression de $E_n(f)$ donnée sous la forme d'une intégrale le long d'une courbe fermée L . Enfin, nous présenterons certains résultats d'analyse auxquels nous ferons souvent appel dans les chapitres suivants, puis nous rappellerons les définitions de l'estimation de l'erreur données par Brezinski dans [2].

2 Préliminaires

Rappelons d'abord le résultat fondamental suivant donné dans [28, p. 196] par Szëgo, et que nous avons adapté pour le cas des polynômes orthonormaux:

Théorème 1

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, et soit α, β deux réels quelconques. Le polynôme orthonormal de Jacobi vérifie l'égalité suivante:

$$P_n^{\alpha, \beta}(z) = \sqrt{\frac{2^{\alpha+\beta}}{2\pi\sqrt{z^2-1}}} \frac{(z + \sqrt{z^2-1})^{n+\frac{1}{2}}}{(1-z+\sqrt{z^2-1})^\alpha (1+z-\sqrt{z^2-1})^\beta} (1 + u_n(z)),$$

avec $(u_n(z))$ une suite uniformément convergente vers zéro sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

On rappelle que a_n désigne le coefficient du terme de plus haut degré de $(P_n^{\alpha, \beta})$.

Lemme 1

La suite (a_n) vérifie les deux propriétés suivantes:

- a) $a_n \sim 2^n \sqrt{\frac{2^{\alpha, \beta}}{\pi}}$.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

Preuve:

a) On rappelle que la suite (a_n) est définie par:

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} f_n(\alpha, \beta)$$

avec:

$$f_n(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \left(\frac{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sachant que [12, p. 131]: $\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n)} \sim n^a$, on a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} &\sim \frac{(2n+1)^{\alpha+\beta}}{(n+1)^{\alpha+\beta}} \sim 2^{\alpha+\beta} \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\beta+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+1)} \\ &\sim \frac{1}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{1}{(n+1)^\beta} \cdot (n+1)^{\alpha+\beta} = 1. \end{aligned}$$

On en déduit alors qu'au voisinage de l'infini, on a:

$$f_n(\alpha, \beta) \sim 2^{\alpha+\beta} \sqrt{\frac{2n + \alpha + \beta + 1}{2^{\alpha+\beta+1}}} \sim \sqrt{n 2^{\alpha+\beta}}.$$

D'autre part, nous avons l'équivalence suivante [12. p. 131]:

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

On obtient finalement:

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} f_n(\alpha, \beta) \sim \frac{1}{2^n} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \sqrt{n 2^{\alpha+\beta}},$$

i. e.

$$a_n \sim 2^n \sqrt{\frac{2^{\alpha+\beta}}{\pi}}.$$

b) De a), on déduit immédiatement que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2.$$

On rappelle que $Q_n^{\alpha, \beta}(z)$ est donnée par: $Q_n^{\alpha, \beta}(z) = \frac{1}{P_n^{\alpha, \beta}(z) P_{n+1}^{\alpha, \beta}(z)}$.

Proposition 1

Soit $(l(n))$ la suite définie par: $\forall n, l(n) = \frac{2^{\alpha+\beta}}{\pi} \left(\frac{2^n}{a_n}\right)^2 - 1$.

Soit K la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ par:

$$K(z) = \frac{(1 - z + \sqrt{z^2 - 1})^{2\alpha} (1 + z - \sqrt{z^2 - 1})^{2\beta}}{2^{\alpha+\beta}}.$$

Alors, il existe une suite $(\delta_n(z))$ qui converge uniformément vers zéro sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ et vérifiant:

$$a) \frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha, \beta}(z) = \frac{4\pi K(z) \sqrt{z^2 - 1}}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+2}} (1 + \delta_n(z)), \forall n, \forall z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1].$$

$$b) \lim_{|z| \rightarrow \infty} \delta_n(z) = l(n), \forall n.$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow \infty} l(n) = 0$.

Preuve:

a) D'après le théorème 1, il existe une suite $(u_n(z))$ qui converge uniformément vers zéro sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ vérifiant:

$$P_n^{\alpha, \beta}(z) = \sqrt{\frac{2^{\alpha+\beta}}{2\pi \sqrt{z^2 - 1}} \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{n+\frac{1}{2}}}{(1 - z + \sqrt{z^2 - 1})^\alpha (1 + z - \sqrt{z^2 - 1})^\beta}} (1 + u_n(z)),$$

donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, on a :

$$P_n^{\alpha, \beta}(z) P_{n+1}^{\alpha, \beta}(z) = \frac{2^{\alpha+\beta}}{2\pi\sqrt{z^2-1}} \frac{(z + \sqrt{z^2-1})^{2n+2}}{(1-z + \sqrt{z^2-1})^{2\alpha} (1+z - \sqrt{z^2-1})^{2\beta}} (1+u_n(z))(1+u_{n+1}(z)),$$

donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} Q_n^{\alpha, \beta}(z) &= \frac{1}{P_n^{\alpha, \beta}(z) P_{n+1}^{\alpha, \beta}(z)} \\ &= \frac{2\pi}{2^{\alpha+\beta}} \frac{\sqrt{z^2-1} (1-z + \sqrt{z^2-1})^{2\alpha} (1+z - \sqrt{z^2-1})^{2\beta}}{(z + \sqrt{z^2-1})^{2n+2}} (1 + u'_n(z)) \\ &= 2\pi \frac{\sqrt{z^2-1} K(z)}{(z + \sqrt{z^2-1})^{2n+2}} (1 + u'_n(z)), \end{aligned}$$

où la suite $(u'_n(z))$ qui est définie par: $u'_n(z) = \frac{1}{(1+u_n(z))(1+u_{n+1}(z))} - 1$, converge uniformément vers zéro sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

On a vu dans le lemme 1, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, donc on pourra écrire: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2(1 + o(1))$.

D'où: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha, \beta}(z) &= 4\pi \frac{\sqrt{z^2-1} K(z)}{(z + \sqrt{z^2-1})^{2n+2}} (1 + u'_n(z))(1 + o(1)) \\ &= 4\pi \frac{\sqrt{z^2-1} K(z)}{(z + \sqrt{z^2-1})^{2n+2}} (1 + \delta_n(z)), \end{aligned}$$

avec: $\delta_n(z) = u'_n(z) + u'_n(z)o(1) + o(1)$ qui converge uniformément vers zéro sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

b) On déduit de a) que:

$$1 + \delta_n(z) = \frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha, \beta}(z) \frac{(z + \sqrt{z^2-1})^{2n+2}}{4\pi\sqrt{z^2-1} K(z)}.$$

Or, lorsque $|z|$ tend vers l'infini, nous avons d'une part:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha, \beta}(z) &= \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{1}{P_n^{\alpha, \beta}(z) P_{n+1}^{\alpha, \beta}(z)} \\ &\sim \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{1}{a_n z^n a_{n+1} z^{n+1}} = \frac{1}{a_n^2 z^{2n+1}}, \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\frac{(z + \sqrt{z^2-1})^{2n+2}}{\sqrt{z^2-1} K(z)} \sim \frac{2^{\alpha+\beta} (2z)^{2n+2}}{z} = 2^{2n+2+\alpha+\beta} z^{2n+1}.$$

On obtient finalement:

$$1 + \delta_n(z) \sim 2^{\alpha+\beta} \left(\frac{2^n}{a_n}\right)^2,$$

i. e.

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \delta_n(z) = l(n).$$

Montrons maintenant que $\lim_{n \rightarrow \infty} l(n) = 0$.

D'après le lemme 1, $a_n \sim 2^n \sqrt{\frac{2^{\alpha+\beta}}{\pi}}$, donc: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{a_n}\right)^2 = \frac{\pi}{2^{\alpha+\beta}}$, ce qui entraîne que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l(n) = \frac{2^{\alpha+\beta}}{\pi} \frac{\pi}{2^{\alpha+\beta}} - 1 = 0.$$

Proposition 2

La série de terme général $\frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha,\beta}(z)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{C} \setminus [-1, 1]$.

Preuve:

Soit K un compact quelconque de $\mathcal{C} \setminus [-1, 1]$, et soit E_{R_0} avec $R_0 > 1$, l'ellipse définissant un domaine D_0 tel que $D_0 \cap K = \emptyset$. D'après la proposition 1, il existe une suite $(\delta_n(z))$ qui converge uniformément vers zéro sur le compact K tel que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha,\beta}(z) = 4\pi K(z) \sqrt{z^2 - 1} \frac{(1 + \delta_n(z))}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+2}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc, $\exists n_0 / \forall n \geq n_0, |\delta_n(z)| \leq 1, \forall z \in K$. Ainsi, $\exists n_0 / \forall n \geq n_0$,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha,\beta}(z) \right| \leq 8\pi |K(z)| \frac{|\sqrt{z^2 - 1}|}{|z + \sqrt{z^2 - 1}|^{2n+2}}, \forall z \in K.$$

Or, d'une part, la fonction $K(z)$ est bornée sur K . D'autre part, pour tout $z \in K$, $\exists R > R_0$ tel que $z \in E_R$, donc:

$$|z + \sqrt{z^2 - 1}| = R, \text{ et } |\sqrt{z^2 - 1}| = \left| \frac{Re^{i\theta} - R^{-1}e^{-i\theta}}{2} \right| \leq \frac{R + R^{-1}}{2} \leq R, \text{ car } R > 1.$$

Ainsi, $\exists M, \exists n_0, \forall n \geq n_0$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha,\beta}(z) \right| \leq \frac{8\pi M}{R^{2n+1}} \leq \frac{8\pi M}{R_0^{2n+1}}, \forall z \in K.$$

Puisque $R_0 > 1$, la série de terme général $\frac{8\pi M}{R_0^{2n+1}}$ est convergente, donc, la série de terme général $\frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha,\beta}(z)$ est uniformément convergente sur le compact K .

Soit la fonction $\frac{1}{z-t}$ où $z \in \mathcal{C} \setminus [-1, 1]$ définie pour tout t dans $[-1, 1]$ par: $\frac{1}{z-t}(t) = \frac{1}{z-t}$.

Désignons par $E_n(\frac{1}{z-\cdot})$ l'erreur commise dans la formule de quadrature de Gauss-Jacobi à n points, i. e.

$$E_n(\frac{1}{z-\cdot}) = \int_{-1}^1 \frac{w(t)}{z-t} dt - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{z-t_i^n}.$$

Proposition 3

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. La suite $E_n(\frac{1}{z-\cdot})$ vérifie les deux relations suivantes:

a) $E_n(\frac{1}{z-\cdot}) = E_{n+1}(\frac{1}{z-\cdot}) + \frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha,\beta}(z)$

b) $E_n(\frac{1}{z-\cdot}) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} Q_k^{\alpha,\beta}(z).$

Preuve:

On propose ici une démonstration différente de celle qui a été donnée par Sydov[27]. Pour cela, on utilisera les notations suivantes:

$$x = z^{-1}, g(x) = \int_{-1}^1 \frac{w(t)}{1-xt} dt = c(\frac{1}{1-xt}).$$

$P_{n,*}^{\alpha,\beta}$: le polynôme unitaire de Jacobi, $\tilde{P}_{n,*}^{\alpha,\beta}(x) = x^n P_{n,*}^{\alpha,\beta}(z)$

a)

$$\begin{aligned} E_n(\frac{1}{z-\cdot}) &= \int_{-1}^1 \frac{w(t)}{z-t} dt - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{z-t_i^n} \\ &= \frac{1}{z} \left(\int_{-1}^1 \frac{w(t)}{1-xt} dt - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{1-xt_i^n} \right) \\ &= \frac{1}{z} \left(c(\frac{1}{1-xt}) - [n-1/n]_g(x) \right). \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} zE_n(\frac{1}{z-\cdot}) &= \left(c(\frac{1}{1-xt}) - [n-1/n]_g(x) \right). \\ zE_{n+1}(\frac{1}{z-\cdot}) &= \left(c(\frac{1}{1-xt}) - [n/n+1]_g(x) \right). \end{aligned}$$

En faisant la différence, on obtient:

$$\begin{aligned} z(E_n(\frac{1}{z-\cdot}) - E_{n+1}(\frac{1}{z-\cdot})) &= [n/n+1]_g(x) - [n-1/n]_g(x) \\ &= \frac{x^{2n} h_n}{\tilde{P}_{n,*}^{\alpha,\beta}(z) \tilde{P}_{n+1,*}^{\alpha,\beta}(z)} \\ &= \frac{h_n}{x P_{n,*}^{\alpha,\beta}(z) P_{n+1,*}^{\alpha,\beta}(z)}. \end{aligned}$$

Or:

$$h_n = c(t^n P_{n,*}^{\alpha,\beta}(t)) = \frac{1}{a_n^2} c(a_n t^n a_n P_{n,*}^{\alpha,\beta}(t)) = \frac{1}{a_n^2} c((P_n^{\alpha,\beta})^2(t)) = \frac{1}{a_n^2}.$$

Donc:

$$\begin{aligned} z \left(E_n \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) - E_{n+1} \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) \right) &= \frac{1}{x a_n^2} \frac{1}{P_{n,*}^{\alpha,\beta}(z) P_{n+1,*}^{\alpha,\beta}(z)} \\ &= \frac{1}{x a_n^2} \frac{a_n a_{n+1}}{P_n^{\alpha,\beta}(z) P_{n+1}^{\alpha,\beta}(z)} \\ &= \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{1}{x} \frac{1}{P_n^{\alpha,\beta}(z) P_{n+1}^{\alpha,\beta}(z)}. \end{aligned}$$

Donc:

$$z \left(E_n \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) - E_{n+1} \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) \right) = z \frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha,\beta}(z),$$

d'où: $E_n \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) = E_{n+1} \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) + \frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha,\beta}(z).$

b) Ce résultat découle immédiatement de a).

Proposition 4

Soit $(l(n))$ la suite définie par: $\forall n, l(n) = \frac{2^{\alpha+\beta}}{\pi} \left(\frac{2^n}{a_n} \right)^2 - 1$. Alors, il existe une suite qui converge uniformément vers zéro sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ et vérifiant:

a) $E_n \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) = \frac{2\pi K(z)}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z)), \forall n, \forall z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1].$

b) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \epsilon_n(z) = l(n), \forall n, \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} l(n) = 0.$

Preuve:

a) Ce résultat a été démontré par Sydov [27].

b) On déduit de a) que

$$1 + \epsilon_n(z) = E_n \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}}{2\pi K(z)}.$$

Or, il a été démontré dans [18] que

$$E_n \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) = \frac{1}{P_n^{\alpha,\beta}(z)} \int_{-1}^1 \frac{w(t) P_n^{\alpha,\beta}(t)}{z - t} dt.$$

Donc

$$1 + \epsilon_n(z) = \frac{2\pi K(z)}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}} \frac{1}{P_n^{\alpha,\beta}(z)} \int_{-1}^1 \frac{w(t) P_n^{\alpha,\beta}(t)}{z - t} dt.$$

Puisque $\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{z}\right)^k$, et que cette série converge uniformément sur $[-1, 1]$ pour $|z| > 1$, nous pourrons écrire que:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{w(t)P_n^{\alpha,\beta}(t)}{z-t} dt &= \frac{1}{z} \int_{-1}^1 w(t)P_n^{\alpha,\beta}(t) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{z}\right)^k dt \\ &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^k}{z^k}, \end{aligned}$$

avec $\alpha_n^k = \int_{-1}^1 w(t)t^k P_n^{\alpha,\beta}(t) dt$.

Puisque $\alpha_n^k = \int_{-1}^1 w(t)t^k P_n^{\alpha,\beta}(t) dt = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$, nous avons:

$$\int_{-1}^1 \frac{w(t)P_n^{\alpha,\beta}(t)}{z-t} dt = \frac{1}{z} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_n^k}{z^k}.$$

Puisque $|P_n^{\alpha,\beta}(t)|$ est majorée sur $[-1, 1]$, on posera: $M_n = \sup\{|P_n^{\alpha,\beta}(t)|, t \in [-1, 1]\}$.

Ainsi, $|\alpha_n^k| \leq \int_{-1}^1 w(t)|t|^k |P_n^{\alpha,\beta}(t)| dt \leq M_n \int_{-1}^1 w(t) dt = M_n c_0$. Nous obtenons ainsi:

$$\int_{-1}^1 \frac{w(t)}{z-t} P_n^{\alpha,\beta}(t) dt = \frac{1}{z} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_n^k}{z^k} = \frac{1}{z^{n+1}} \left(\alpha_n^n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^{n+k+1}}{z^{k+1}} \right).$$

Or, d'une part:

$$\begin{aligned} \alpha_n^n &= \int_{-1}^1 w(t)t^n P_n^{\alpha,\beta}(t) dt \\ &= \frac{1}{a_n} \int_{-1}^1 w(t)a_n t^n P_n^{\alpha,\beta}(t) dt \\ &= \frac{1}{a_n} \int_{-1}^1 w(t) (P_n^{\alpha,\beta})^2(t) dt \\ &= \frac{1}{a_n}, \end{aligned}$$

d'autre part: $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^{n+k+1}}{z^{k+1}} = 0$.

En effet:

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^{n+k+1}}{z^{k+1}} \right| \leq M_n |c_0| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|z|^{k+1}} = M_n c_0 \frac{1}{|z| - 1}$$

quantité qui tend vers zéro lorsque $|z|$ tend vers l'infini. On obtient ainsi l'équivalence suivante lorsque $|z|$ tend vers l'infini:

$$\int_{-1}^1 \frac{w(t)P_n^{\alpha,\beta}(t)}{z-t} dt \sim \frac{1}{a_n z^{n+1}}.$$

Donc:

$$1 + \epsilon_n(z) \sim \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}}{2\pi K(z)} \frac{1}{a_n z^{n+1} P_n^{\alpha, \beta}(z)}.$$

Or, d'une part:

$$\frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}}{2\pi K(z)} \sim \frac{(2z)^{2n+1}}{2\pi} 2^{\alpha+\beta},$$

d'autre part:

$$\frac{1}{a_n z^{n+1} P_n^{\alpha, \beta}(z)} \sim \frac{1}{a_n^2 z^{2n+1}},$$

d'où:

$$1 + \epsilon_n(z) \sim \frac{(2z)^{2n+1}}{2\pi} 2^{\alpha+\beta} \frac{1}{a_n^2 z^{2n+1}} = \left(\frac{2^n}{a_n}\right)^2 \frac{2^{\alpha+\beta}}{\pi}.$$

Ainsi,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (1 + \epsilon_n(z)) = \left(\frac{2^n}{a_n}\right)^2 \frac{2^{\alpha+\beta}}{\pi},$$

i. e. $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \epsilon_n(z) = l(n)$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} l(n) = 0$, a été vue dans la démonstration de la proposition 1. ■

L'expression classique de l'erreur dans la méthode de quadrature de Gauss-Jacobi est donnée par [10, p. 227]

$$E_n(f) = \frac{1}{a_n^2} \frac{f^{(2n)}(\xi_n)}{(2n)!} \text{ où } \xi_n \in]-1, 1[.$$

Cette représentation de $E_n(f)$ est peu pratique vu qu'il est souvent difficile d'obtenir les dérivées f^{2n} et l'impossibilité de connaître ξ_n .

Via la formule de Cauchy, Sydov [27, p. 62] a donné une autre expression de $E_n(f)$ qu'on va rappeler ainsi que sa démonstration dans le cas où $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, avec $\alpha, \beta > -1$ et $[-1, 1]$ comme intervalle d'intégration.

Proposition 5

Soit L un contour fermé définissant un domaine D contenant l'intervalle $[-1, 1]$ dans son intérieur. Soit f une fonction analytique appartenant à $H^\infty(L)$. Alors, on a:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz.$$

Preuve:

En appliquant la méthode de quadrature de Gauss-Jacobi à n points à l'intégrale $S = \int_{-1}^1 w(x)f(x)dx$, on obtient:

$$S = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n f(t_i^n) + E_n(f).$$

Or, f étant dans $H^\infty(L)$ on pourra appliquer la formule de Cauchy, ce qui nous donne:

$$\begin{aligned} \forall t \in [-1, 1] \quad f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{z-t} dz, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad f(t_i^n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{z-t_i^n} dz. \end{aligned}$$

Ainsi, on a d'une part:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 w(t) \left(\int_L \frac{f(z)}{z-t} dz \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) \int_{-1}^1 \left(\frac{w(t)}{z-t} \right) dt dz, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i^n f(t_i^n) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^n \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{z-t_i^n} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{z-t_i^n} \right) dz. \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} E_n(f) &= S - \sum_{i=1}^n \lambda_i^n f(t_i^n) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(f(z) \int_{-1}^1 \frac{w(t)}{z-t} dt \right) dz - \frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{z-t_i^n} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) \left(\int_{-1}^1 \frac{w(t)}{z-t} dt - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{z-t_i^n} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L f(z) E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous allons donner l'expression de $E_n(f)$ et de ΔS_n lorsque le contour d'intégration L est une ellipse E_R .

Proposition 6

Soit E_R l'ellipse de points focaux ± 1 et de longueur des demi-axes $(R \pm R^{-1})/2$ avec $R > 1$. Alors, on a:

$$\begin{aligned} a) E_n(f) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz \\ &= \frac{1}{i} \int_{E_R} \frac{f(z) K(z)}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z)) dz. \\ b) \Delta S_n &= \frac{1}{2i\pi} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_{E_R} f(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) dz \\ &= \frac{1}{i} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_{E_R} \frac{f(z) K(z) \sqrt{z^2 - 1}}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+2}} (1 + \delta_n(z)) dz. \end{aligned}$$

Preuve:

a) Il suffira de remplacer L par E_R dans la proposition précédente, puis remplacer $E_n\left(\frac{1}{z-}\right)$ par son expression donnée dans la proposition 4.

b) D'après a), on a:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz,$$

et

$$E_{n+1}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_{n+1}\left(\frac{1}{z-}\right) dz.$$

En faisant la différence entre ces deux égalités, on obtient:

$$\begin{aligned} \Delta S_n &= E_{n+1}(f) - E_n(f) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) \left(E_{n+1}\left(\frac{1}{z-}\right) - E_n\left(\frac{1}{z-}\right) \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_{E_R} f(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) dz, \text{ d'après la proposition 3.} \end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité, il suffira de remplacer $Q_n^{\alpha, \beta}(z)$ par son expression donnée dans la proposition 1. ■

Dans ce qui suit, nous allons présenter certains résultats d'analyse qui vont servir dans les chapitres suivants.

Proposition 7

Soit $c \geq 1$ et (G_n) une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle $[c, \infty[$ tel que

$$\begin{aligned} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^\infty G_n(t) dt &= 0, \\ b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_c^\infty |G_n(t)| dt}{\left| \int_c^\infty G_n(t) dt \right|} &= 1. \end{aligned}$$

Alors, lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\int_c^\infty G_n(t)(1 + u_n(t)) dt \sim \int_c^\infty G_n(t) dt,$$

où u_n désigne la fonction ϵ_n ou la fonction δ_n .

Preuve:

On va montrer le résultat dans le cas $c = 1$. La démonstration dans le cas $c > 1$ lui sera identique.

Démontrer l'équivalence, revient à montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_1^\infty G_n(t)u_n(t)dt}{\int_1^\infty G_n(t)dt} = 0.$$

Posons:

$$P_n = \int_1^\infty G_n(t)u_n(t)dt, \quad Q_n = \int_1^\infty G_n(t)dt.$$

D'après les propositions 1) et 4), on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_n(t) = l(n), \forall n \in \mathbb{N},$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0, \exists X > 1/\forall t \geq X, |u_n(t)| \leq \epsilon_n + |l(n)|.$$

Soit $\epsilon > 0$, fixé, on a :

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{\int_1^X G_n(t)u_n(t)dt}{\int_1^\infty G_n(t)dt} + \frac{\int_X^\infty G_n(t)u_n(t)dt}{\int_1^\infty G_n(t)dt}.$$

et

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \frac{\int_1^X |G_n(t)u_n(t)|dt}{\int_1^\infty |G_n(t)|dt} + \frac{\int_X^\infty |G_n(t)u_n(t)|dt}{\int_1^\infty |G_n(t)|dt}.$$

Or,

$$\int_X^\infty |G_n(t)u_n(t)|dt \leq (\epsilon + |l(n)|) \int_X^\infty |G_n(t)|dt.$$

Puisque la suite $(u_n(t))_n$ converge vers zéro uniformément sur tout compact de $]1, X]$, on a:

$$\exists n_1/\forall n \geq n_1, |u_n(t)| \leq \epsilon, \forall t \in]1, X].$$

Ainsi: $\int_1^X |G_n(t)||u_n(t)|dt \leq \epsilon \int_1^X |G_n(t)|dt, \forall n \geq n_1$, d'où pour $\epsilon > 0$ fixé, $\exists n_1/\forall n \geq n_1$:

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \epsilon \frac{\int_1^X |G_n(t)|dt}{\int_1^\infty |G_n(t)|dt} + (\epsilon + |l(n)|) \frac{\int_X^\infty |G_n(t)|dt}{\int_1^\infty |G_n(t)|dt}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} |l(n)| = 0$, donc, $\exists n_2 / \forall n \geq n_2, |l_n(t)| \leq \epsilon$. Soit $n_0 = \sup(n_1, n_2)$. $\forall n \geq n_0$, on a :

$$\left| \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq \epsilon \frac{\int_1^X |G_n(t)| dt}{\int_1^\infty |G_n(t)| dt} + 2\epsilon \frac{\int_1^\infty |G_n(t)| dt}{\int_1^\infty |G_n(t)| dt} \leq 3\epsilon \frac{\int_1^X |G_n(t)| dt}{\int_1^\infty |G_n(t)| dt}.$$

Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_1^X |G_n(t)| dt}{\int_1^\infty |G_n(t)| dt} = 1$, d'où $\exists n_3 / \forall n \geq n_3 : \frac{\int_1^X |G_n(t)| dt}{\int_1^\infty |G_n(t)| dt} \leq 1 + \epsilon$, d'où

$\forall n \geq \sup(n_0, n_1, n_2) : \left| \frac{P_n}{Q_n} \right| \leq 3\epsilon(1 + \epsilon)$, i. e. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = 0$. ■

Lemme 3[4, p. 102]

Soit f une fonction continue définie dans un secteur $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Soit r et θ le module et l'argument de z .

a) Si $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ ($\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$), alors $\int f(z) dz$ étendue à l'arc de cercle de centre 0 et de rayon r contenu dans le secteur tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini.

b) Si $\lim_{|z| \rightarrow 0} z f(z) = 0$ ($\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$), alors $\int f(z) dz$ étendue à l'arc de cercle de centre 0 et de rayon r contenu dans le secteur tend vers zéro lorsque r tend vers zéro.

On va rappeler ici la méthode dite de Laplace, qui donne la partie principale des intégrales de la forme :

$$I(t) = \int_0^\infty g(x) e^{th(x)} dx \quad (t \rightarrow \infty).$$

On se limitera au cas où $h(x) = -x$ et t un entier naturel.

Théorème 2[12, p. 122]

Soit $I(n) = \int_0^\infty g(x) e^{-nx} dx$, où g est une fonction continue par morceaux dans $]0, \infty[$ réelle, vérifiant :

- i) $\int_0^\infty |g(x)| e^{-x} dx$ converge.
- ii) $g(x) \sim Ax^\alpha$ au voisinage de zéro avec $\alpha > 1$.

Nous avons alors l'équivalence suivante au voisinage de l'infini :

$$I(n) \sim A \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{n^{\alpha+1}}.$$

Avant de terminer ce chapitre, nous allons rappeler les définitions de l'estimation de l'erreur données par Brezinski dans [2]

Définition

Soit (S_n) une suite convergente vers S , et soit $(D_n)_n$ une suite convergente vers zéro.

a) Si la suite $(\frac{S - S_n}{D_n})$ admet une limite finie différente de 1 et de 0, alors la suite $(D_n)_n$ est dite une bonne estimation de l'erreur de (S_n) .

b) Si la limite de la suite $(\frac{S - S_n}{D_n})$ est égale à 1, alors la suite (D_n) est dite une estimation parfaite de l'erreur de (S_n) .

REMARQUE:

D'après la nouvelle approche des méthodes d'accélération donnée par Brezinski [2], accélérer la convergence de la suite (S_n) , revient à trouver une estimation parfaite de l'erreur. Or, on sait que si la suite (S_n) ne converge pas logarithmiquement, i. e. si $\exists a, b \in \mathbb{R}, a < 1 < b, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} \in [a, b]$, alors, on peut obtenir une estimation parfaite $(D_n)_n$ de l'erreur à partir d'une bonne estimation $(D'_n)_n$ de l'erreur par la procédure θ []: $D_n = -\frac{\Delta S_n}{\Delta D'_n} D'_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite (T_n) définie par: $T_n = S_n + D_n$ vérifie $T_n - S = o(S_n - S)(n \rightarrow \infty)$.

CHAPITRE II

FONCTION ADMETTANT DES SINGULARITES LOGARITHMIQUES OU ALGEBRIQUES

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier le cas de trois types de fonctions analytiques:

1) Le cas de fonctions ayant une singularité logarithmique en un point $z = c > 1$ ou en un point $z = -c < -1$.

2) Le cas de fonctions ayant au plus deux singularités réelles l'une en un point $z = c > 1$ et l'autre en un point $z = -d < -1$, i. e. des fonctions de type:

$$f(x) = (c - x)^\gamma (d + x)^\delta h(x)$$

avec $-1 < \gamma, \delta, h(c), h(-d) \neq 0$.

3) On reprendra le cas 2) avec $c = d = 1$.

Dans chaque cas :

1) On donnera une représentation asymptotique de $S - S_n$ et de ΔS_n .

2) On établira des transformations d'accélération qui ne dépendront que de la singularité de f (i. e. des valeurs de c, d, γ, δ) et non de la fonction h qui sera supposée le long de ce travail un polynôme de degré p .

3) On donnera des exemples numériques qui illustreront l'efficacité des transformations proposées.

2 Fonction admettant une singularité logarithmique

Soit f une fonction analytique présentant une singularité logarithmique en un point $z = c > 1$ ou $z = -c < -1$. La fonction f s'écrira alors sous la forme: $f(z) = \ln(c-z)h(z)$, où $f(z) = \ln(c+z)h(z)$ avec h un polynôme de degré p non nul au point $z = c$.

A) $f(x) = \ln(c-x)h(x)$, $c > 1$, $h(c) \neq 0$.

Soit L la courbe définie par : $L = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup E_R \cup C_r$ avec :

C_r : le cercle de centre $z = c$ et de rayon r .

E_R : l'ellipse de points focaux ± 1 et de longueurs des demi-axes $(R \pm R^{-1})/2$.

Γ_1 et Γ_2 désignent les segments joignant le cercle à l'ellipse, avec Γ_1 au dessus de l'axe des réels et Γ_2 au dessous de cet axe.

II-2-a) Représentation asymptotique de $E_n(f)$ et de ΔS_n

Puisque la fonction $f \in H^\infty(L)$, nous pourrons écrire $E_n(f)$ sous la forme suivante :

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup E_R \cup C_r} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz.$$

Lemme 1

$$a) \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz = 0.$$

$$b) \exists n_0 / \forall n \geq n_0, \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz = 0.$$

preuve:

a) Afin de montrer que l'intégrale le long du cercle C_r tend vers zéro lorsque r tend vers zéro, il suffira de montrer d'après le lemme I-3) que $\lim_{|z| \rightarrow c} (z-c) f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) = 0$.

Or, pour $z \in C_r$, nous avons: $z = c + re^{i\theta}$ avec $0 < \theta < 2\pi$, donc:

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow c} (z-c) f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) &= \lim_{|z| \rightarrow c} (z-c) \ln(c-z)h(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} re^{i\theta} \ln(-c + re^{i\theta})h(c + re^{i\theta}) E_n\left(\frac{1}{c + re^{i\theta} -}\right) \\ &= 0 \cdot h(c) \cdot E_n\left(\frac{1}{c-}\right) = 0. \end{aligned}$$

b) D'après le lemme I-3) il suffira de montrer que:

$$\exists n_0 / \forall n \geq n_0, \lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) = 0.$$

En utilisant l'expression de $E_n(\frac{1}{z-})$ donnée dans la proposition I-4), nous avons

$$z f(z) E_n(\frac{1}{z-}) = 2\pi K(z) \frac{h(z)}{z^p} \frac{z^{p+1} \ln(c-z)}{(z + \sqrt{z^2-1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z)).$$

D'une part, les fonctions $K(z)$ et $\frac{h(z)}{z^p}$ sont bornées. D'autre part,

$$\exists n_1 / \forall n \geq n_1, \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{z^{p+1} \ln(c-z)}{(z + \sqrt{z^2-1})^{2n+1}} = 0$$

et

$$\exists n_2 / \forall n \geq n_2, \lim_{|z| \rightarrow \infty} |1 + \epsilon_n(z)| \leq 2$$

du fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{|z| \rightarrow \infty} \epsilon_n(z)) = 0$. En prenant $n_0 = \sup(n_1, n_2)$, on obtient le résultat. ■

Lemme 2

$$\exists n_0 / \forall n \geq n_0,$$

$$a) E_n(f) = - \int_c^\infty h(t) E_n(\frac{1}{t-}) dt.$$

$$b) \Delta S_n = - \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_c^\infty h(t) Q_n^{\alpha, \beta}(t) dt.$$

Preuve:

a) D'après l'expression de $E_n(f)$ et le lemme 1, nous obtenons :

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) E_n(\frac{1}{z-}) dz \right).$$

En utilisant le changement de variable: $z = c - te^{-i\pi}$ avec t croissant de r à R pour $z \in \Gamma_1$ et $z = c - te^{i\pi}$ avec t décroissant de R à r pour $z \in \Gamma_2$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} f(z) E_n(\frac{1}{z-}) dz &= \int_{\Gamma_1} h(z) \ln(c-z) E_n(\frac{1}{z-}) dz \\ &= -e^{-i\pi} \int_r^R h(c - te^{-i\pi}) \ln(te^{-i\pi}) E_n(\frac{1}{c - te^{-i\pi} -}) dt \\ &= \int_r^R h(c+t) (-i\pi + \ln(t)) E_n(\frac{1}{c+t-}) dt. \\ \int_{\Gamma_2} f(z) E_n(\frac{1}{z-}) dz &= \int_{\Gamma_2} h(z) \ln(c-z) E_n(\frac{1}{z-}) dz \\ &= -e^{i\pi} \int_R^r h(c - te^{i\pi}) \ln(te^{i\pi}) E_n(\frac{1}{c - te^{i\pi} -}) dt \\ &= - \int_r^R h(c+t) (i\pi + \ln(t)) E_n(\frac{1}{c+t-}) dt. \end{aligned}$$

On obtient ainsi:

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz = -2i\pi \int_r^R h(c+t) E_n\left(\frac{1}{c+t-\cdot}\right) dt.$$

En faisant le changement de variable: $y = c + t$, on obtient:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz = - \int_{r+c}^{R+c} h(t) E_n\left(\frac{1}{t-\cdot}\right) dt.$$

Donc, $\exists n_0, \forall n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} E_n(f) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz \right) \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{r \rightarrow 0} \int_{r+c}^{R+c} h(t) E_n\left(\frac{1}{t-\cdot}\right) dt \right) \\ &= - \int_c^\infty h(t) E_n\left(\frac{1}{t-\cdot}\right) dt. \end{aligned}$$

b) D'après a), nous avons:

$$E_n(f) = - \int_c^\infty h(t) E_n\left(\frac{1}{t-\cdot}\right) dt,$$

$$E_{n+1}(f) = - \int_c^\infty h(t) E_{n+1}\left(\frac{1}{t-\cdot}\right) dt.$$

En faisant la différence entre ces deux égalités, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta S_n &= E_n(f) - E_{n+1}(f) \\ &= - \int_c^\infty h(t) \left(E_n\left(\frac{1}{t-\cdot}\right) - E_{n+1}\left(\frac{1}{t-\cdot}\right) \right) dt \\ &= - \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_c^\infty h(t) Q_n^{\alpha, \beta}(t) dt. \end{aligned}$$

REMARQUE:

Sachant que:

$$E_n\left(\frac{1}{t-\cdot}\right) = 2\pi \frac{K(t)}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(t))$$

et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha, \beta}(t) = 4\pi \frac{K(t) \sqrt{t^2 - 1}}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+2}} (1 + \delta_n(t)),$$

nous avons d'après le lemme 2: $\exists n_0, \forall n \geq n_0$,

$$E_n(f) = -2\pi \int_c^\infty h(t) \frac{K(t)}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(t)) dt.$$

En faisant la différence entre ces deux égalités, nous obtenons:

$$\Delta S_n = -4\pi \int_c^\infty h(t) \frac{K(t)\sqrt{t^2-1}}{(t+\sqrt{t^2-1})^{2n+2}} (1+\delta_n(t)) dt.$$

Afin de donner une représentation asymptotique de $E_n(f)$ et de ΔS_n , on donnera la partie principale des intégrales suivantes:

$$J_1(n) = 2\pi \int_c^\infty h(t) \frac{K(t)}{(t+\sqrt{t^2-1})^{2n+1}} dt, \quad J_2(n) = 4\pi \int_c^\infty h(t) \frac{K(t)\sqrt{t^2-1}}{(t+\sqrt{t^2-1})^{2n+2}} dt.$$

Lemme 3

En notant $r = c + \sqrt{c^2-1}$, on obtient les équivalences suivantes au voisinage de l'infini :

$$\begin{aligned} a) J_1(n) &\sim 2\pi h(c) \frac{K(c)\sqrt{c^2-1}}{(2n+1)r^{2n+1}}. \\ b) J_2(n) &\sim \pi \frac{h(c)K(c)}{2nr^{2n}} \left(1 - \frac{2n}{(n+1)r^2} + \frac{n}{(n+2)r^4} \right). \end{aligned}$$

preuve:

Afin de démontrer le résultat, on utilisera comme dans [13, p. 281] le changement de variable: $y = ch(\theta)$, $c = ch(\phi)$ et on remarquera que: $e^\theta = y + \sqrt{y^2-1}$ et que $sh(\theta) = \sqrt{y^2-1}$.

a)

$$\begin{aligned} J_1(n) &= 2\pi \int_c^\infty h(t) \frac{K(t)}{(t+\sqrt{t^2-1})^{2n+1}} dt \\ &= 2\pi \int_\phi^\infty h(ch(\theta)) \frac{K(ch(\theta))}{e^{(2n+1)\theta}} sh(\theta) d\theta \\ &= \frac{2\pi}{e^{(2n+1)\phi}} \int_0^\infty h(ch(\theta+\phi)) \frac{K(ch(\theta+\phi))}{e^{(2n+1)\theta}} sh(\theta+\phi) d\theta. \end{aligned}$$

Soit b un réel positif tel que:

$$\int_0^\infty \frac{|h(ch(\theta+\phi)) K(ch(\theta+\phi))|}{e^{b\theta}} sh(\theta+\phi) e^{-\theta} d\theta \text{ converge.}$$

Puisque au voisinage de zéro, nous avons:

$$\frac{|h(ch(\theta+\phi)) K(ch(\theta+\phi))|}{e^{b\theta}} sh(\theta+\phi) \sim K(c)h(c)\sqrt{c^2-1},$$

on obtient d'après le théorème I-2):

$$\int_0^\infty h(ch(\theta+\phi)) \frac{K(ch(\theta+\phi))}{e^{(2n+1)\theta}} sh(\theta+\phi) d\theta \sim \frac{K(c)h(c)\sqrt{c^2-1}}{2n+1-b} \sim \frac{K(c)h(c)\sqrt{c^2-1}}{2n+1}.$$

Nous obtenons ainsi au voisinage de l'infini:

$$J_1(n) = \frac{2\pi}{r^{2n+1}} \int_0^\infty h(ch(\theta+\phi)) \frac{K(ch(\theta+\phi))}{e^{(2n+1)\theta}} sh(\theta+\phi) d\theta \sim 2\pi h(c) \frac{K(c)\sqrt{c^2-1}}{(2n+1)r^{2n+1}}.$$

$$b) J_2(n) = 4\pi \int_{\phi}^{\infty} h(ch(\theta)) \frac{K(ch(\theta))}{e^{(2n+2)\theta}} sh^2(\theta) d\theta.$$

En remarquant que: $sh^2(\theta) = \frac{(e^{2\theta} - 2 + e^{-2\theta})}{4}$ et en posant:

$$I(n) = \pi \int_{\phi}^{\infty} h(ch(\theta)) \frac{K(ch(\theta))}{e^{n\theta}} d\theta,$$

on obtient:

$$J_2(n) = I(2n) - 2I(2n+2) + I(2n+4).$$

En suivant la même démarche que dans la démonstration de a), on obtient:

$$I(n) = \frac{\pi}{e^{n\phi}} \int_0^{\infty} h(ch(\theta + \phi)) \frac{K(ch(\theta + \phi))}{e^{n\theta}} d\theta \sim \pi h(c) \frac{K(c)}{nr^n}.$$

En d'autres termes, nous avons au voisinage de l'infini:

$$I(n) = \pi h(c) \frac{K(c)}{nr^n} (1 + o(1)).$$

On en déduit alors que:

$$\begin{aligned} J_2(n) &= \pi h(c) K(c) \left(\frac{1}{2nr^{2n}} - \frac{2}{(2n+2)r^{2n+2}} + \frac{1}{(2n+4)r^{2n+4}} \right) + o\left(\frac{1}{nr^{2n}}\right) \\ &= \frac{\pi h(c) K(c)}{2nr^{2n}} \left(1 - \frac{2n}{(n+1)r^2} + \frac{n}{(n+2)r^4} + o(1) \right) \end{aligned}$$

i. e., au voisinage de l'infini, nous avons:

$$J_2(n) \sim \frac{\pi h(c) K(c)}{2nr^{2n}} \left(1 - \frac{2n}{(n+1)r^2} + \frac{n}{(n+2)r^4} \right).$$

Proposition 1

En notant:

$$\begin{aligned} A &= -\pi K(c) h(c), & g(n) &= \frac{1}{2nr^{2n}} \left(1 - \frac{2n}{(n+1)r^2} + \frac{n}{(n+2)r^4} \right), \\ B &= -2A\sqrt{c^2 - 1}, & G(n) &= \frac{1}{(2n+1)r^{2n+1}}, \end{aligned}$$

avec: $r = c + \sqrt{c^2 - 1}$, nous obtenons les équivalences suivantes au voisinage de l'infini:

$$a) E_n(f) \sim BG(n)$$

$$b) \Delta S_n \sim Ag(n).$$

Preuve:

a) Nous avons: $\exists n_0/\forall n \geq n_0$

$$E_n(f) = - \int_c^\infty h(t) E_n\left(\frac{1}{t}\right) dt = -2\pi \int_c^\infty \frac{h(t)K(t)}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(t)) dt.$$

Posons:

$$G_n(t) = 2\pi h(t) \frac{K(t)}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+1}}.$$

D'après le lemme précédent, nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^\infty G_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} J_1(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi h(c) \frac{K(c)\sqrt{c^2 - 1}}{(2n + 1)r^{2n+1}} = 0.$$

De plus, nous avons les équivalences suivantes lorsque n tend vers l'infini:

$$\int_c^\infty |G_n(t)| dt \sim 2\pi |h(c)K(c)| \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{(2n + 1)r^{2n+1}} \sim \left| \int_c^\infty G_n(t) dt \right|.$$

Nous pourrions alors conclure d'après la proposition I-7) que :

$$-2\pi \int_c^\infty \frac{h(t)K(t)}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(t)) dt \sim -2\pi \int_c^\infty \frac{h(t)K(t)}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+1}} dt.$$

Ainsi, nous avons :

$$E_n(f) \sim BG(n).$$

b) L'équivalence $\Delta S_n \sim Ag(n)$ se démontre de la même façon que dans a) en posant cette fois ci:

$$G_n(t) = 4\pi h(t) \frac{K(t)\sqrt{t^2 - 1}}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+2}}.$$

B) $f(x) = \ln(c + x)h(x)$, $c > 1, h(-c) \neq 0$.

Dans ce cas ci, la fonction f admet une singularité logarithmique au point $z = -c < -1$. La courbe L sera définie par: $L = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup E_R \cup C_r$ avec:

C_r : le cercle de centre $z = -c$ et de rayon r .

E_R : l'ellipse de points focaux ± 1 et de longueurs des demi-axes $(R \pm R^{-1})/2$.

Γ_1 et Γ_2 désignent les segments joignant le cercle à l'ellipse avec Γ_1 au dessus de l'axe des réels et Γ_2 au dessous de cet axe.

On montre de la même façon que dans le cas où la singularité est située au point $z = c > 1$ que la valeur de l'intégrale le long du cercle C_r (respectivement l'ellipse E_R)

tend vers zéro lorsque r (respectivement R) tend vers zéro (respectivement vers l'infini).
L'expression de l'erreur se réduit alors à :

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, \quad E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz \right).$$

Lemme 4

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0$$

$$a) E_n(f) = - \int_c^\infty h(-t) E_n\left(\frac{1}{-t-}\right) dt.$$

$$b) \Delta S_n = -\frac{a_{n+1}}{a_n} \int_c^\infty h(-t) Q_n^{\alpha, \beta}(-t) dt.$$

preuve:

a) D'après l'expression de $E_n(f)$ et le lemme 1, nous obtenons:

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, \quad E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz \right).$$

En utilisant le changement de variable $z = -c + te^{-i\pi}$ avec t décroissant de R à r pour $z \in \Gamma_1$ et $z = -c + te^{i\pi}$ avec t croissant de r à R pour $z \in \Gamma_2$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz &= \int_{\Gamma_1} h(z) \ln(c+z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz \\ &= -e^{-i\pi} \int_r^R h(-c + te^{-i\pi}) \ln(te^{-i\pi}) E_n\left(\frac{1}{-c + te^{-i\pi} -}\right) dt \\ &= \int_r^R h(-c-t) (-i\pi + \ln(t)) E_n\left(\frac{1}{-c-t-}\right) dt. \\ \int_{\Gamma_2} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz &= \int_{\Gamma_2} h(z) \ln(c+z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz \\ &= e^{i\pi} \int_r^R h(-c + te^{i\pi}) \ln(te^{i\pi}) E_n\left(\frac{1}{-c + te^{i\pi} -}\right) dt \\ &= - \int_r^R h(-c-t) (i\pi + \ln(t)) E_n\left(\frac{1}{-c-t-}\right) dt. \end{aligned}$$

On obtient ainsi:

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz = -2i\pi \int_r^R h(-c-t) E_n\left(\frac{1}{-c-t-}\right) dt.$$

En faisant le changement de variable: $y = c + t$, on obtient:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz = - \int_{r+c}^{R+c} h(-t) E_n\left(\frac{1}{-t-}\right) dt.$$

Donc, $\exists n_0, \forall n \geq n_0$,

$$E_n(f) = - \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{r \rightarrow 0} \int_{r+c}^{R+c} h(-t) E_n\left(\frac{1}{-t-}\right) dt \right) = - \int_c^\infty h(-t) E_n\left(\frac{1}{-t-}\right) dt.$$

b) D'après a), nous avons:

$$E_n(f) = - \int_c^\infty h(-t) E_n\left(\frac{1}{-t-}\right) dt.$$

$$E_{n+1}(f) = - \int_c^\infty h(-t) E_{n+1}\left(\frac{1}{-t-}\right) dt.$$

En faisant la différence entre ces deux égalités, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \Delta S_n &= - \int_c^\infty h(-t) \left(E_n\left(\frac{1}{-t-}\right) - E_{n+1}\left(\frac{1}{-t-}\right) \right) dt \\ &= - \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_c^\infty h(-t) Q_n^{\alpha, \beta}(-t) dt. \end{aligned}$$

Proposition 2

En notant:

$$\begin{aligned} A &= \pi K(-c) h(-c), & g(n) &= \frac{1}{2nr^{2n}} \left(1 - \frac{2n}{(n+1)r^2} + \frac{n}{(n+2)r^4} \right), \\ B &= 2A\sqrt{c^2-1}, & G(n) &= \frac{1}{(2n+1)r^{2n+1}}, \end{aligned}$$

avec: $r = c + \sqrt{c^2-1}$, nous obtenons les equivalences suivantes au voisinage de l'infini:

a) $E_n(f) \sim BG(n)$

b) $\Delta S_n \sim Ag(n)$.

Preuve:

a) D'après la proposition I-4), nous avons:

$$E_n\left(\frac{1}{-t-}\right) = 2\pi \frac{K(-t)}{(-t + \sqrt{(-t)^2-1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(-t))$$

Sachant que:

$$\sqrt{(-t)^2-1} = \sqrt{-t-1} \cdot \sqrt{-t+1}$$

et

$$-(t+1) = e^{i\pi}(t+1), \quad -(t-1) = e^{i\pi}(t-1),$$

nous avons:

$$\sqrt{(-t)^2-1} = e^{\frac{i\pi}{2}} \sqrt{t+1} \cdot e^{\frac{i\pi}{2}} \sqrt{t-1} = -\sqrt{t^2-1}.$$

Ainsi,

$$E_n\left(\frac{1}{-t-}\right) = -2\pi \frac{K(-t)}{(t + \sqrt{t^2-1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(-t)).$$

Nous pouvons alors montrer de la même façon que dans la proposition 1 que:

$$2\pi \int_c^\infty \frac{h(-t)K(-t)}{(t + \sqrt{t^2-1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(-t)) dt \sim 2\pi \int_c^\infty \frac{h(-t)K(-t)}{(t + \sqrt{t^2-1})^{2n+1}} dt$$

et que

$$2\pi \int_c^\infty \frac{h(-t)K(-t)}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+1}} dt \sim 2\pi \frac{h(-c)K(-c)\sqrt{c^2 - 1}}{(2n + 1)(c + \sqrt{c^2 - 1})^{2n+1}}.$$

Ainsi, nous avons:

$$E_n(f) \sim BG(n).$$

b) D'après la proposition I-1), nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha, \beta}(-t) &= 4\pi \frac{K(-t)\sqrt{(-t)^2 - 1}}{(-t + \sqrt{(-t)^2 - 1})^{2n+2}} (1 + \delta_n(-t)) \\ &= -4\pi \frac{K(-t)\sqrt{t^2 - 1}}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+2}} (1 + \delta_n(-t)). \end{aligned}$$

On montre alors de la même façon que dans la proposition 1, que:

$$\begin{aligned} \Delta S_n &= 4\pi \int_c^\infty h(-t) \frac{K(-t)\sqrt{t^2 - 1}}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+2}} (1 + \delta_n(-t)) dt \\ &\sim 4\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^\infty h(-t) \frac{K(-t)\sqrt{t^2 - 1}}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+2}} dt \\ &\sim \pi \frac{h(-c)K(-c)}{2nr^{2n}} \left(1 - \frac{2n}{(n+1)r^2} + \frac{n}{(n+2)r^4} \right). \end{aligned}$$

En posant:

$$A = \pi K(-c)h(-c), \quad g(n) = \frac{1}{2nr^{2n}} \left(1 - \frac{2n}{(n+1)r^2} + \frac{n}{(n+2)r^4} \right),$$

on trouve le résultat. ■

II-2-b) Accélération de la convergence de la suite (S_n)

Proposition 3

Soit $D_n = -\frac{\Delta S_n}{\Delta g_n} g(n)$. La suite (T_n) définie par $\forall n, T_n = S_n + D_n$, converge vers S plus rapidement que la suite initiale (S_n) .

Preuve:

D'une part, la suite (S_n) est une suite à convergence linéaire. En effet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{n+1}(f)}{E_n(f)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{BG(n+1)}{BG(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(n+1)}{G(n)} = \frac{1}{r^2} < 1.$$

D'autre part, le terme $Ag(n)$ est une bonne estimation de l'erreur de S_n . En effet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(f)}{Ag(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{BG(n)}{Ag(n)} = \frac{(1 + 2\sqrt{c^2 - 1})}{2\sqrt{c^2 - 1}} \neq 0, 1, \infty, \text{ car } c > 1.$$

Ainsi, par application de la procédure θ , [3], le terme $D_n = -\frac{\Delta S_n}{\Delta g(n)}g(n)$ est une estimation parfaite de l'erreur de S_n , d'où le résultat. ■

Dans ce qui suit, nous allons transformer la suite (T_n) en une autre suite (W_n) qui converge vers S plus rapidement que la suite (T_n) . Afin d'obtenir cette transformation, nous avons besoin d'établir le résultat suivant:

Lemme 5

La suite (T_n) est une suite à convergence linéaire avec:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S - T_{n+1}}{S - T_n} = \frac{1}{r^2},$$

où $r = c + \sqrt{c^2 - 1}$.

Preuve:

La suite (T_n) est définie par $\forall n, T_n = S_n - \frac{\Delta S_n}{\Delta g(n)}g(n)$, donc

$$S - T_n = S - S_n + \frac{\Delta S_n}{\Delta g(n)}g(n) = E_n(f) + \frac{g(n)}{\Delta g(n)}\Delta S_n.$$

Or,

$$E_n(f) = -2\pi \int_c^\infty \frac{h(t)K(t)}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+1}}(1 + \epsilon_n(t))dt.$$

$$\Delta S_n = -4\pi \int_c^\infty \frac{h(t)K(t)}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+2}}\sqrt{t^2 - 1}(1 + \delta_n(t))dt.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{\Delta g(n)} = -\frac{r}{2\sqrt{c^2 - 1}}$, on peut écrire: $\frac{g(n)}{\Delta g(n)} = -\frac{r}{2\sqrt{c^2 - 1}}(1 + o(1))$.

D'où:

$$\frac{g(n)}{\Delta g(n)}\Delta S_n = 2\pi \frac{r}{\sqrt{c^2 - 1}} \int_c^\infty \frac{h(t)K(t)}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+2}}\sqrt{t^2 - 1}(1 + \delta'_n(t))dt.$$

Ainsi, en posant: $u_n(t) = \epsilon_n(t) - \frac{r}{\sqrt{c^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t + \sqrt{t^2 - 1}} \delta'_n(t)$, on obtient l'expression suivante:

$$S - T_n = -2\pi \int_c^\infty \frac{h(t)K(t)}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+1}} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{c^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t + \sqrt{t^2 - 1}} + u_n(t)\right) dt.$$

Considérons l'intégrale

$$I(n) = -2\pi \int_c^\infty \frac{h(t)K(t)}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+1}} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{c^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t + \sqrt{t^2 - 1}}\right) dt.$$

Nous allons dans ce qui suit, donner une partie principale de $I(n)$. Pour ce faire, faisons le changement de variable: $t = ch(\theta)$, $c = ch(\phi)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I(n) &= -2\pi \int_{\phi}^{\infty} \frac{h(ch(\theta))K(ch(\theta))}{e^{(2n+1)\theta}} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{c^2-1}} \frac{sh(\theta)}{e^{\theta}}\right) sh(\theta) d\theta \\ &= -2\pi \int_{\phi}^{\infty} \frac{h(ch(\theta))K(ch(\theta))}{e^{(2n+1)\theta}} \left(1 - \frac{r}{2\sqrt{c^2-1}} (1 - e^{-2\theta})\right) sh(\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{c^2-1}} \int_{\phi}^{\infty} \frac{h(ch(\theta))K(ch(\theta))}{e^{(2n+1)\theta}} \left(\frac{1}{r} - re^{-2\theta}\right) sh(\theta) d\theta \end{aligned}$$

En posant: $g(\theta) = h(ch(\theta))K(ch(\theta))\left(\frac{1}{r} - re^{-2\theta}\right)sh(\theta)$, on obtient:

$$I(n) = \frac{\pi}{r^{2n+1}\sqrt{c^2-1}} \int_0^{\infty} g(\theta + \phi) e^{-(2n+1)\theta} d\theta.$$

Soit b un réel positif tel que:

$$\int_0^{\infty} \frac{|g(\theta + \phi)|}{e^{b\theta}} e^{-\theta} d\theta, \text{ converge.}$$

Puisque au voisinage de 0, $g(\theta + \phi) \sim h(c)K(c)\sqrt{c^2-1}\frac{2\theta}{r}$, on a d'après le théorème I-2):

$$I(n) \sim 4\pi h(c)K(c) \frac{1}{r^{2n+2}} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Puisque la suite $(u_n(t))$ vérifie les mêmes propriétés que la suite $(\epsilon_n(t))$, on a:

$$S - T_n \sim I(n)$$

d'où:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S - T_{n+1}}{S - T_n} = \frac{1}{r^2}.$$

Dans ce qui suit, nous allons transformer la suite (T_n) en une autre suite (W_n) qui converge vers S plus rapidement que la suite (T_n) .

On a vu que: $E_n(f) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz$. Or, $E_n\left(\frac{1}{z-}\right) = \frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha,\beta}(z) + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} Q_{n+1}^{\alpha,\beta}(z) + E_{n+2}\left(\frac{1}{z-}\right)$. La série $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{a_i} Q_i^{\alpha,\beta}(z)$ étant uniformément convergente sur tout compact de $\mathcal{C} \setminus [-1, 1]$, on pourra écrire au voisinage de l'infini:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \int_{\Gamma} f(z) Q_n^{\alpha,\beta}(z) + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \int_{\Gamma} f(z) Q_{n+1}^{\alpha,\beta}(z) dz + \int_{\Gamma} f(z) E_{n+2}\left(\frac{1}{z-}\right) dz. \right)$$

i. e.

$$E_n(f) = \Delta S_n + \Delta S_{n+1} + E_{n+2}(f),$$

avec

$$\Delta S_n = Ag(n)(1 + o(1)),$$

$$\Delta S_n = Ag(n)(1 + o(1)),$$

$$E_{n+2}(f) = BG(n+2)(1 + o(1)).$$

Or, $o(g(n)) = o(g(n+1)) = o(G(n+2))$.

Donc, en posant: $L(n) = Ag(n) + Ag(n+1) + BG(n+2)$, on pourra écrire

$$E_n(f) = L(n) + \epsilon(n)L(n) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon(n) = 0.$$

Considérons le système suivant:
$$\begin{cases} S - S_n = L(n) + \epsilon(n)L(n). \\ S - S_{n+1} = L(n+1) + \epsilon(n+1)L(n+1). \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $g(n+1)$, la deuxième équation par $g(n)$, et en faisant la différence entre les deux équations obtenues, on a:

$$S = T_n + AU_n + BY_n + Z_n,$$

avec:

$$U_n = \frac{g^2(n+1) - g(n)g(n+2)}{\Delta g(n)}, \quad Y(n) = \frac{G(n+2)g(n+1) - G(n+3)g(n)}{\Delta g(n)}$$

$$Z_n = \frac{g(n+1)L(n)\epsilon(n) - g(n)L(n+1)\epsilon(n+1)}{\Delta g(n)}.$$

En notant: $a = \frac{(r^2 - 1)^2}{r^4}$, $b_n = \frac{1}{(n+1)}(1 - \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{r^2})$, on a:

$$g(n) = \frac{a}{2nr^{2n}}(1 + b_n \frac{2}{ar^2}).$$

Lemme 6

$$a) \frac{g(n+1)}{g(n)} = \frac{n}{n+1} \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{2}{ar^2} \Delta b_n + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

$$b) \frac{g(n+1)}{g(n)} - \frac{g(n+2)}{g(n+1)} \sim -\frac{1}{n^2 r^2}.$$

Preuve:

Remarquons d'abord que:

$$b_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ i. e. } \exists M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 |nb_n| \leq M.$$

$$\Delta b_n = -\frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(1 - \frac{n+1}{n+3} \cdot \frac{1}{r^2} \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\Delta\left(\frac{n}{n+1}\Delta b_n\right) = O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

a)

$$\begin{aligned} \frac{g(n+1)}{g(n)} &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{2b_{n+1}}{ar^2}\right)}{\left(1 + \frac{2b_n}{ar^2}\right)} \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{2b_{n+1}}{ar^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2b_n}{ar^2} + \left(\frac{2b_n}{ar^2}\right)^2 + o(b_n^2)\right) \text{ rcl.} \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{2\Delta b_n}{ar^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{g(n+1)}{g(n)} - \frac{g(n+2)}{g(n+1)} &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} - \frac{2}{ar^2} \Delta\left(\frac{n}{n+1}\Delta b_n\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \text{ d'après a)} \\ &= -\frac{1}{(n+1)(n+2)r^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ car } \Delta\left(\frac{n}{n+1}\Delta b_n\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right). \text{ rcl.} \end{aligned}$$

Proposition 4

$$\text{Soit } U_n = \frac{g^2(n+1) - g(n)g(n+2)}{\Delta g(n)}.$$

La suite (W_n) définie par: $W_n = T_n - \frac{\Delta T_n}{\Delta U_n} U_n, \forall n$, converge vers S plus vite que la suite (T_n) .

Preuve:

$$\begin{aligned} W_n - S &= T_n - S - \frac{\Delta T_n}{\Delta U_n} U_n \\ &= (T_n - S) \left(1 - \frac{\Delta T_n}{T_n - S} \cdot \frac{U_n}{\Delta U_n}\right) \\ &= (T_n - S) \left(1 - \left(\frac{T_{n+1} - S}{T_n - S} - 1\right) \cdot \frac{U_n}{\Delta U_n}\right). \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n+1} - S}{T_n - S} = \frac{1}{r^2}$, d'après le lemme 5. Il suffira donc pour démontrer la proposition, de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{\Delta U_n} = \frac{r^2}{1 - r^2}$. Or,

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{g^2(n+2) - g(n+1)g(n+3)}{g^2(n+1) - g(n)g(n+2)} \cdot \frac{g(n+1) - g(n)}{g(n+2) - g(n+1)} \\ &= \frac{g(n+2)}{g(n+1)} \cdot \frac{g(n+1)}{g(n+1)} - \frac{g(n+3)}{g(n+2)} \cdot \frac{g(n+1)}{g(n)} - 1 \\ &= \frac{g(n+2)}{g(n+1)} \cdot \frac{g(n+1)}{g(n)} - \frac{g(n+2)}{g(n+1)} \cdot \frac{g(n+2)}{g(n+1)} - 1 \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, on a:

$$\frac{g(n+1)}{g(n)} - \frac{g(n+2)}{g(n+1)} \sim -\frac{1}{n^2 r^2}.$$

$$\frac{g(n+1)}{g(n)} - 1 \sim \frac{1}{r^2} - 1.$$

Donc,

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \sim \frac{1}{r^2} \cdot \frac{-\frac{1}{n^2 r^2}}{-\frac{1}{n^2 r^2}} \cdot \frac{\frac{1}{r^2} - 1}{\frac{1}{r^2} - 1} = \frac{1}{r^2}.$$

Ainsi, on obtient: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{\Delta U_n} = \frac{r^2}{1 - r^2}$, ce qui nous donne le résultat. ■

CONCLUSION:

Les transformations proposées dans ce paragraphe ne dépendent pas de la fonction h , mais uniquement du terme $g(n)$, qui lui-même ne dépend que de n (le nombre d'itérations effectuées) et de la valeur de $r = c + \sqrt{c^2 - 1}$.

Les suites (T_n) et (W_n) correspondent aux suites données dans la première et la deuxième colonne du E-Algorithm [1].

EXEMPLES NUMERIQUES

Considérons les deux exemples suivants:

Ex1: $f(x) = x \ln(c - x), w(x) = 1$.

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | -0.26D+00 | -0.81D-02 | -0.14D-02 |
| 3 | -0.86D-01 | -0.31D-02 | -0.31D-03 |
| 4 | -0.33D-01 | -0.11D-02 | -0.78D-04 |
| 5 | -0.14D-01 | -0.40D-03 | -0.21D-04 |
| 6 | -0.61D-02 | -0.15D-03 | -0.58D-05 |
| 7 | -0.27D-02 | -0.56D-04 | -0.17D-05 |
| 8 | -0.13D-02 | -0.22D-04 | -0.55D-06 |
| 9 | -0.60D-03 | -0.88D-05 | -0.18D-06 |
| 10 | -0.29D-03 | -0.36D-05 | -0.66D-07 |
| 11 | -0.14D-03 | -0.15D-05 | -0.25D-07 |
| 12 | -0.68D-04 | -0.64D-06 | -0.96D-08 |
| 13 | -0.33D-04 | -0.28D-06 | -0.38D-08 |
| 14 | -0.16D-04 | -0.12D-06 | -0.16D-08 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | -0.19D+00 | -0.28D-02 | -0.40D-03 |
| 3 | -0.49D-01 | -0.86D-03 | -0.50D-04 |
| 4 | -0.15D-01 | -0.23D-03 | -0.77D-05 |
| 5 | -0.48D-02 | -0.61D-04 | -0.14D-05 |
| 6 | -0.16D-02 | -0.17D-04 | -0.28D-06 |
| 7 | -0.57D-03 | -0.49D-05 | -0.64D-07 |
| 8 | -0.21D-03 | -0.14D-05 | -0.16D-07 |
| 9 | -0.75D-04 | -0.45D-06 | -0.45D-08 |
| 10 | -0.28D-04 | -0.14D-06 | -0.13D-08 |
| 11 | -0.10D-04 | -0.45D-07 | -0.39D-09 |
| 12 | -0.39D-05 | -0.15D-07 | -0.12D-09 |
| 13 | -0.15D-05 | -0.50D-08 | -0.36D-10 |
| 14 | -0.57D-06 | -0.17D-08 | -0.11D-10 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.142D+00 | -0.292D-02 | 0.145D-03 |
| 3 | -0.306D-01 | -0.327D-03 | -0.990D-05 |
| 4 | -0.765D-02 | -0.667D-04 | -0.142D-05 |
| 5 | -0.206D-02 | -0.144D-04 | -0.209D-06 |
| 6 | -0.578D-03 | -0.327D-05 | -0.365D-07 |
| 7 | -0.167D-03 | -0.772D-06 | -0.728D-08 |
| 8 | -0.494D-04 | -0.189D-06 | -0.157D-08 |
| 9 | -0.149D-04 | -0.479D-07 | -0.355D-09 |
| 10 | -0.452D-05 | -0.125D-07 | -0.828D-10 |
| 11 | -0.139D-05 | -0.331D-08 | -0.198D-10 |
| 12 | -0.432D-06 | -0.894D-09 | -0.484D-11 |
| 13 | -0.135D-06 | -0.245D-09 | -0.121D-11 |
| 14 | -0.424D-07 | -0.683D-10 | -0.306D-12 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.112D+00 | -0.143D-02 | 0.616D-04 |
| 3 | -0.206D-01 | -0.133D-03 | -0.371D-05 |
| 4 | -0.438D-02 | -0.234D-04 | -0.420D-06 |
| 5 | -0.100D-02 | -0.432D-05 | -0.532D-07 |
| 6 | -0.239D-03 | -0.834D-06 | -0.805D-08 |
| 7 | -0.588D-04 | -0.168D-06 | -0.136D-08 |
| 8 | -0.148D-04 | -0.352D-07 | -0.246D-09 |
| 9 | -0.378D-05 | -0.759D-08 | -0.464D-10 |
| 10 | -0.978D-06 | -0.168D-08 | -0.902D-11 |
| 11 | -0.256D-06 | -0.380D-09 | -0.181D-11 |
| 12 | -0.675D-07 | -0.873D-10 | -0.371D-12 |
| 13 | -0.179D-07 | -0.204D-10 | -0.784D-13 |
| 14 | -0.479D-08 | -0.483D-11 | -0.172D-13 |

1.2

Ex2: $f(x) = x^2 \ln(c - x), w(x) = 1$.

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 3 | -0.542D-01 | -0.855D-04 | -0.340D-03 |
| 4 | -0.197D-01 | -0.268D-03 | -0.667D-04 |
| 5 | -0.800D-02 | -0.130D-03 | -0.158D-04 |
| 6 | -0.346D-02 | -0.541D-04 | -0.416D-05 |
| 7 | -0.155D-02 | -0.220D-04 | -0.119D-05 |
| 8 | -0.713D-03 | -0.892D-05 | -0.365D-06 |
| 9 | -0.334D-03 | -0.366D-05 | -0.120D-06 |
| 10 | -0.159D-03 | -0.153D-05 | -0.420D-07 |
| 11 | -0.765D-04 | -0.646D-06 | -0.154D-07 |
| 12 | -0.372D-04 | -0.277D-06 | -0.587D-08 |
| 13 | -0.182D-04 | -0.121D-06 | -0.231D-08 |
| 14 | -0.897D-05 | -0.532D-07 | -0.930D-09 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 3 | -0.336D-01 | 0.278D-03 | -0.863D-04 |
| 4 | -0.954D-02 | -0.671D-05 | -0.108D-04 |
| 5 | -0.301D-02 | -0.982D-05 | -0.172D-05 |
| 6 | -0.101D-02 | -0.383D-05 | -0.323D-06 |
| 7 | -0.350D-03 | -0.129D-05 | -0.695D-07 |
| 8 | -0.125D-03 | -0.422D-06 | -0.166D-07 |
| 9 | -0.452D-04 | -0.138D-06 | -0.426D-08 |
| 10 | -0.166D-04 | -0.455D-07 | -0.115D-08 |
| 11 | -0.619D-05 | -0.152D-07 | -0.326D-09 |
| 12 | -0.233D-05 | -0.511D-08 | -0.948D-10 |
| 13 | -0.881D-06 | -0.174D-08 | -0.283D-10 |
| 14 | -0.336D-06 | -0.599D-09 | -0.860D-11 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 3 | -0.229D-01 | 0.251D-03 | -0.332D-04 |
| 4 | -0.537D-02 | 0.178D-04 | -0.323D-05 |
| 5 | -0.140D-02 | 0.969D-06 | -0.413D-06 |
| 6 | -0.384D-03 | -0.116D-06 | -0.638D-07 |
| 7 | -0.110D-03 | -0.756D-07 | -0.113D-07 |
| 8 | -0.321D-04 | -0.266D-07 | -0.219D-08 |
| 9 | -0.959D-05 | -0.821D-08 | -0.454D-09 |
| 10 | -0.290D-05 | -0.243D-08 | -0.991D-10 |
| 11 | -0.889D-06 | -0.705D-09 | -0.224D-10 |
| 12 | -0.275D-06 | -0.204D-09 | -0.525D-11 |
| 13 | -0.856D-07 | -0.591D-10 | -0.126D-11 |
| 14 | -0.268D-07 | -0.172D-10 | -0.310D-12 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 3 | -0.166D-01 | 0.191D-03 | -0.158D-04 |
| 4 | -0.329D-02 | 0.158D-04 | -0.129D-05 |
| 5 | -0.727D-03 | 0.161D-05 | -0.140D-06 |
| 6 | -0.170D-03 | 0.180D-06 | -0.184D-07 |
| 7 | -0.413D-04 | 0.202D-07 | -0.273D-08 |
| 8 | -0.103D-04 | 0.191D-08 | -0.444D-09 |
| 9 | -0.261D-05 | 0.507D-10 | -0.769D-10 |
| 10 | -0.670D-06 | -0.493D-10 | -0.140D-10 |
| 11 | -0.174D-06 | -0.218D-10 | -0.266D-11 |
| 12 | -0.458D-07 | -0.700D-11 | -0.522D-12 |
| 13 | -0.121D-07 | -0.201D-11 | -0.105D-12 |
| 14 | -0.324D-08 | -0.552D-12 | -0.221D-13 |

1.2

Nous constatons sur ces exemples, que la rapidité de la convergence des suites $(S_n), (T_n), (W_n)$ n'est que très peu affectée si on remplace la fonction h par une autre. Par contre, elle sera très affectée si on varie la valeur de la longueur de la distance qui sépare la singularité de l'intervalle d'intégration. On remarque aussi qu'en changeant la valeur du point $z = c$, le nombre de chiffres exactes données par la méthode d'extrapolation proposée reste constant.

3 Fonction admettant deux singularités réelles

Soit f une fonction analytique admettant au plus deux singularités réelles situées de part et d'autre de l'intervalle d'intégration, i. e. l'une en un point $z = c > 1$ et l'autre en un point $z = -d < -1$. La fonction sera supposée de la forme:

$$f(x) = (c - x)^\gamma (d + x)^\delta h(x), \text{ avec}$$

γ, δ deux réels non entiers strictement plus grands que -1 .

h un polynôme de degré p non nul aux points c et $-d$.

Soit L la courbe fermée définie par:

$$L = E_R \cup C_r(c) \cup C_r(-d) \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

avec:

$C_r(c)$: le cercle de centre $z = c$ et de rayon r .

$C_r(-d)$: le cercle de centre $z = -d$ et de rayon r .

E_R : l'ellipse de points focaux ± 1 et de longueurs des demi-axes $(R \pm R^{-1})/2$.

Γ_1 et Γ_2 désignent les segments joignant le cercle $C_r(c)$ à l'ellipse, avec Γ_1 au dessus de l'axe des réels et Γ_2 au dessous de cet axe.

Γ_3 et Γ_4 désignent les segments joignant le cercle $C_r(-d)$ à l'ellipse, avec Γ_3 au dessus de l'axe des réels et Γ_4 au dessous de cet axe.

II-3-a) Représentation asymptotique de $E_n(f)$ et de ΔS_n

Puisque $f \in H^\infty(L)$, $E_n(f)$ peut s'écrire sous la forme suivante:

$$E_n(f) = \int_L f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz.$$

Dans le lemme qui suit, nous allons montrer successivement que les intégrales le long des cercles $C_r(c)$ et $C_r(-d)$ tendent vers zéro lorsque r tend vers zéro, et que l'intégrale le long de l'ellipse E_R tend vers zéro lorsque R tend vers l'infini.

Lemme 1

$$a) \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r(c) \cup C_r(-d)} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) = 0.$$

$$b) \exists n_0 / \forall n \geq n_0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) = 0.$$

preuve:

a) Afin de montrer que l'intégrale le long de $C_r(c) \cup C_r(-d)$ tend vers zéro lorsque r tend vers zéro, il suffira de montrer d'après le lemme I-3) que

$$\lim_{|z| \rightarrow c} (z-c) f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) = \lim_{|z| \rightarrow d} (z+d) f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) = 0.$$

Or, pour $z \in C_r(c)$, nous avons: $z = c + re^{i\theta}$ avec $0 < \theta < 2\pi$, donc:

$$\begin{aligned} (z-c) f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) &= (z-c)^{\gamma+1} (d+z)^\delta h(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) \\ &= (-re^{i\theta})^{\gamma+1} (d+c+re^{i\theta})^\delta h(c+re^{i\theta}) E_n\left(\frac{1}{c+re^{i\theta}-}\right). \end{aligned}$$

Or, d'une part, $\lim_{r \rightarrow \infty} (-re^{i\theta})^{\gamma+1} = 0$ car $\gamma > -1$, d'autre part,

$\lim_{r \rightarrow \infty} (d+c+re^{i\theta})^\delta h(c+re^{i\theta}) E_n\left(\frac{1}{c+re^{i\theta}-}\right) = (d+c)^\gamma h(c) E_n\left(\frac{1}{c-}\right)$ est finie, d'où le résultat.

De la même façon, on montre que: $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r(-d)} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) = 0$, puisque $\delta > -1$.

b) D'après le lemme I-3), il suffira de montrer que:

$$\exists n_0 / \forall n \geq n_0 \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} z f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) = 0.$$

En d'autres termes, en utilisant les expressions de $E_n(f)$ et de la fonction f , il s'agit de montrer que:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} 2\pi z (c-z)^\gamma (c+z)^\delta K(z) \frac{h(z)}{z^p} \frac{z^{p+1}}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z)) = 0.$$

D'une part, les fonctions $K(z)$ et $\frac{h(z)}{z^p}$ sont bornées. D'autre part,

$$\exists n_1/\forall n \geq n_1 \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{z^{p+1}(c-z)^\gamma(c+z)^\delta}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}} = 0$$

et

$$\exists n_2/\forall n \geq n_2 \lim_{|z| \rightarrow \infty} |1 + \epsilon_n(z_1)| \leq 2$$

du fait que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{|z| \rightarrow \infty} \epsilon_n(z)) = 0.$$

Il suffira donc de prendre $n_0 = \sup(n_1, n_2)$.

Lemme 2

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz \right) = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \int_c^\infty (y-c)^\gamma (y+d)^\delta h(y) E_n\left(\frac{1}{y-}\right) dy.$$

preuve:

i) Soit $z \in \Gamma_1$, nous avons $z = c - xe^{-i\pi}$ avec x qui croît de r vers R . Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) &= -e^{-i\pi} \int_r^R (xe^{-i\pi})^\gamma (d+c+x)^\delta h(c+x) E_n\left(\frac{1}{c+x-}\right) dx \\ &= -e^{-i\pi\gamma} \int_r^R (x)^\gamma (d+c+x)^\delta h(c+x) E_n\left(\frac{1}{c+x-}\right) dx \\ &= -e^{-i\pi\gamma} \int_{r+c}^{R+c} (x-c)^\gamma (d+x)^\delta h(x) E_n\left(\frac{1}{x-}\right) dx. \end{aligned}$$

ii) Soit $z \in \Gamma_2$, nous avons $z = c - xe^{i\pi}$ avec x qui décroît de R vers r . Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) &= -e^{i\pi} \int_R^r (xe^{i\pi})^\gamma (d+c+x)^\delta h(c+x) E_n\left(\frac{1}{c+x-}\right) dx \\ &= -e^{i\pi\gamma} \int_r^R (x)^\gamma (d+c+x)^\delta h(c+x) E_n\left(\frac{1}{c+x-}\right) dx \\ &= -e^{i\pi\gamma} \int_{r+c}^{R+c} (x-c)^\gamma (d+x)^\delta h(x) E_n\left(\frac{1}{x-}\right) dx. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) &= (e^{-i\pi\gamma} - e^{i\pi\gamma}) \int_r^R (x)^\gamma (d+c+x)^\delta h(c+x) E_n\left(\frac{1}{c+x-}\right) dx \\ &= -2i\pi \sin(\pi\gamma) \int_{r+c}^{R+c} (x-c)^\gamma (d+x)^\delta h(x) E_n\left(\frac{1}{x-}\right) dx. \end{aligned}$$

D'où le résultat lorsqu'on fait tendre r vers zéro et R vers l'infini.

Lemme 3

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} f(z) E_n \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) dz \right) = -\frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} \int_d^\infty (y+c)^\gamma (y-d)^\delta h(y) E_n \left(\frac{1}{-y - \cdot} \right) dy.$$

preuve:

i) Soit $z \in \Gamma_3$, nous avons: $z = -d + xe^{i\pi}$ avec x qui décroît de R vers r . Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} f(z) E_n \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) &= e^{i\pi} \int_R^r (xe^{i\pi})^\delta (d+c+x)^\gamma h(-d-x) E_n \left(\frac{1}{-d-x - \cdot} \right) dx \\ &= e^{i\pi\delta} \int_r^R (x)^\delta (d+c+x)^\gamma h(-d-x) E_n \left(\frac{1}{-d-x - \cdot} \right) dx \\ &= e^{i\pi\delta} \int_{r+d}^{R+d} (x+c)^\gamma (x-d)^\delta h(-x) E_n \left(\frac{1}{-x - \cdot} \right) dx. \end{aligned}$$

ii) Soit $z \in \Gamma_4$, nous avons: $z = -d + xe^{-i\pi}$ avec x qui croît de r vers R . Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_4} f(z) E_n \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) &= e^{-i\pi} \int_r^R (xe^{-i\pi})^\delta (d+c+x)^\gamma h(-d-x) E_n \left(\frac{1}{-d-x - \cdot} \right) dx \\ &= -e^{-i\pi\delta} \int_r^R (x)^\delta (d+c+x)^\gamma h(-d-x) E_n \left(\frac{1}{-d-x - \cdot} \right) dx \\ &= -e^{-i\pi\delta} \int_{r+d}^{R+d} (x+c)^\gamma (x-d)^\delta h(-x) E_n \left(\frac{1}{-x - \cdot} \right) dx. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} f(z) E_n \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) &= (e^{i\pi\delta} - e^{-i\pi\delta}) \int_{r+d}^{R+d} (x+c)^\gamma (x-d)^\delta h(-x) E_n \left(\frac{1}{-x - \cdot} \right) dx \\ &= 2i \sin(\pi\delta) \int_{r+d}^{R+d} (x+c)^\gamma (x-d)^\delta h(-x) E_n \left(\frac{1}{-x - \cdot} \right) dx. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Nous pouvons maintenant, en utilisant les lemmes précédents et les deux relations

$$\begin{cases} \Delta S_n = -\Delta E_n(f) \\ \Delta E_n \left(\frac{1}{t - \cdot} \right) = \frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha, \beta}(t) \end{cases} \text{ énoncer le résultat suivant:}$$

Proposition 1

$\exists n_0 / \forall n \geq n_0:$

a)

$$\begin{aligned} E_n(f) &= -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \int_c^\infty (y-c)^\gamma (y+d)^\delta h(y) E_n \left(\frac{1}{y - \cdot} \right) dy \\ &\quad + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} \int_d^\infty (y+c)^\gamma (y-d)^\delta h(-y) E_n \left(\frac{1}{-y - \cdot} \right) dy. \end{aligned}$$

$$b) \quad \Delta S_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_c^\infty (y-c)^\gamma (y+d)^\delta h(y) Q_n^{\alpha,\beta}(y) dy \\ + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_c^\infty (y+c)^\gamma (y-d)^\delta h(-y) Q_n^{\alpha,\beta}(-y) dy.$$

Dans ce qui suit, nous allons donner des représentations asymptotiques de $E_n(f)$ et de ΔS_n . commençons tout d'abord par donner une représentation asymptotique de $E_n(f)$.

Afin d'alléger l'écriture, on utilisera les notations suivantes:

$$J_1(n) = \int_c^\infty (y-c)^\gamma (y+d)^\delta h(y) E_n\left(\frac{1}{y-c}\right) dy \\ J_2(n) = \int_d^\infty (y+c)^\gamma (y-d)^\delta h(-y) E_n\left(\frac{1}{-y-d}\right) dy. \\ I_1(n) = 2\pi \int_c^\infty (y-c)^\gamma (y+d)^\delta h(y) \frac{K(y)}{(y+\sqrt{y^2-1})^{2n+1}} dy. \\ I_2(n) = -2\pi \int_d^\infty (y+c)^\gamma (y-d)^\delta h(-y) \frac{K(-y)}{(y+\sqrt{y^2-1})^{2n+1}} dy.$$

Nous commencerons d'abord par donner les parties principales de $I_1(n)$ et de $I_2(n)$.

lemme 4

En notant $r_1 = c + \sqrt{c^2 - 1}$, $r_2 = d + \sqrt{d^2 - 1}$, on obtient les equivalences suivantes au voisinage de l'infini:

$$a) I_1(n) \sim B_1 G_1(n) \quad \text{avec} \begin{cases} B_1 = 2\pi(\sqrt{c^2-1})^{\gamma+1} (c+d)^\delta h(c) K(c) \Gamma(\gamma+1). \\ G_1(n) = \frac{1}{r_1^{2n+1} (2n+1)^{\gamma+1}}. \end{cases} \\ b) I_2(n) \sim B_2 G_2(n) \quad \text{avec} \begin{cases} B_2 = -2\pi(\sqrt{d^2-1})^{\delta+1} (c+d)^\gamma h(-d) K(-d) \Gamma(\delta+1). \\ G_2(n) = \frac{1}{r_2^{2n+1} (2n+1)^{\delta+1}}. \end{cases}$$

preuve:

a) En faisant le changement de variable $y = ch(\theta)$, $c = ch(\phi)$, on obtient:

$$I_1(n) = 2\pi \int_\phi^\infty (ch(\theta) - ch(\phi))^\gamma (ch(\theta) + d)^\delta h(ch(\theta)) K(ch(\theta)) sh(\theta) e^{-(2n+1)\theta} d\theta.$$

En remarquant que $ch(\theta) - ch(\phi) = 2sh\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)sh\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$, et en notant:

$$F(\theta) = 2\pi \left(2sh\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\right)^\gamma (ch(\theta) + d)^\delta h(ch(\theta)) K(ch(\theta)) sh(\theta),$$

on obtient:

$$I_1(n) = \int_\phi^\infty \frac{F(\theta)}{e^{(2n+1)\theta}} \left(sh\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)\right)^\gamma d\theta = \frac{1}{e^{(2n+1)\phi}} \int_0^\infty \frac{F(\theta+\phi)}{e^{(2n+1)\theta}} \left(sh\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^\gamma d\theta.$$

Soit b le plus petit réel positif tel que $\int_0^\infty \frac{|F(\theta + \phi)|}{e^{b\theta}} \left(sh\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^\gamma e^{-\theta} d\theta$ converge. Puisque au voisinage de zéro nous avons:

$$\frac{F(\theta + \phi)}{e^{b\theta}} \left(sh\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^\gamma \sim F(\phi) \left(\frac{\theta}{2}\right)^\gamma,$$

on peut déduire à partir du théorème I-2), que:

$$\int_0^\infty \frac{F(\theta + \phi)}{e^{(2n+1)\theta}} \left(sh\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^\gamma d\theta \sim \frac{F(\phi)}{2^\gamma} \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{(2n + 1 - b)^{\gamma+1}} \sim \frac{F(\phi)}{2^\gamma} \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{(2n + 1)^{\gamma+1}}.$$

Or,

$$\begin{aligned} F(\phi) &= 2\pi(2sh(\phi))^\gamma (ch(\phi) + d)^\delta h(ch(\phi))K(ch(\phi))sh(\phi) \\ &= 2\pi 2^\gamma (\sqrt{c^2 - 1})^\gamma (c + d)^\delta h(c)K(c)\sqrt{c^2 - 1} \\ &= 2^{\gamma+1} \pi (\sqrt{c^2 - 1})^{\gamma+1} (c + d)^\delta h(c)K(c). \end{aligned}$$

D'où:

$$I_1(n) \sim \frac{2\pi (\sqrt{c^2 - 1})^{\gamma+1} (c + d)^\delta h(c)K(c)\Gamma(\gamma + 1)}{(2n + 1)^{\gamma+1} r_1^{2n+1}}.$$

b) La démonstration est identique. ■

lemme 5

Avec les notations précédentes, nous avons les équivalences suivantes au voisinage de l'infini:

a) $J_1(n) \sim I_1(n).$

b) $J_2(n) \sim I_2(n).$

preuve:

a)

$$\begin{aligned} J_1(n) &= \int_c^\infty (y - c)^\gamma (y + d)^\delta h(y) E_n\left(\frac{1}{y - c}\right) dy \\ &= 2\pi \int_c^\infty (y - c)^\gamma (y + d)^\delta h(y) \frac{K(y)}{(y + \sqrt{y^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(y)) dy \\ &= I_1(n) + 2\pi \int_c^\infty (y - c)^\gamma (y + d)^\delta h(y) \frac{K(y)}{(y + \sqrt{y^2 - 1})^{2n+1}} \epsilon_n(y) dy. \end{aligned}$$

Posons:

$$G_n(y) = 2\pi (y - c)^\gamma (y + d)^\delta h(y) \frac{K(y)}{(y + \sqrt{y^2 - 1})^{2n+1}}.$$

D'après le lemme précédent, la suite de fonctions $(G_n(y))_n$ vérifie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty G_n(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} I_1(n) = 0 \\ \int_c^\infty |G_n(y)| dy \sim |B_1| G_1(n) \sim \left| \int_0^\infty G_n(y) dy \right| \end{array} \right. , \text{ d'où le résultat d'après la proposition 1-7).}$$

b) La démonstration est identique. ■

Proposition 2

Avec les notations précédentes, on a les équivalences suivantes:

Premier cas: $c = d$

a) $\gamma = \delta$ et $B_2 \neq B_1$

$$E_n(f) \sim \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} (B_2 - B_1) G_1(n).$$

b) $\gamma < \delta$

$$E_n(f) \sim -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_1 G_1(n).$$

c) $\gamma > \delta$

$$E_n(f) \sim \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_2 G_2(n).$$

Deuxième cas: $c < d$

Pour tout réel non entier $\gamma, \delta > -1$, on a:

$$E_n(f) \sim -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_1 G_1(n).$$

Troisième cas: $c > d$

Pour tout réel non entier $\gamma, \delta > -1$, on a:

$$E_n(f) \sim \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_2 G_2(n).$$

Preuve:

D'après la proposition 1 et les notations précédentes, on a:

$$E_n(f) = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} J_1(n) + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} J_2(n).$$

Or, on a vu dans les deux lemmes précédents qu'au voisinage de l'infini, nous avons les équivalences suivantes:

$$J_1(n) \sim B_1 G_1(n), \quad J_2(n) \sim B_2 G_2(n).$$

Donc,

$$\begin{aligned} -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}J_1(n) &= -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}B_1G_1(n) + o(G_1(n)). \\ \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi}J_2(n) &= \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi}B_2G_2(n) + o(G_2(n)). \end{aligned}$$

D'où:

$$E_n(f) = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}B_1G_1(n) + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi}B_2G_2(n) + o(G_1(n)) + o(G_2(n)).$$

Premier cas: $c = d$ (ce qui entraîne $r_1 = r_2$).

a) $\gamma = \delta$ (ce qui entraîne $G_1(n) = G_2(n)$.) Donc:

$$E_n(f) = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}(B_2 - B_1)G_1(n) + o(G_1(n)).$$

Puisque $B_2 - B_1 \neq 0$, on a au voisinage de l'infini:

$$E_n(f) \sim \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}(B_2 - B_1)G_1(n).$$

b) $\gamma < \delta$

$\frac{G_2(n)}{G_1(n)} = (2n+1)^{\gamma-\delta}$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_2(n)}{G_1(n)} = 0$, i. e. $G_2(n) = o(G_1(n))$. Ainsi, l'expression de $E_n(f)$ prend la forme suivante:

$$E_n(f) = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}B_1G_1(n) + o(G_1(n)),$$

i. e.,

$$E_n(f) \sim -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi}B_1G_1(n).$$

c) $\gamma > \delta$

$\frac{G_1(n)}{G_2(n)} = (2n+1)^{\delta-\gamma}$, d'où $G_1(n) = o(G_2(n))$. $E_n(f)$ prend la forme suivante:

$$E_n(f) = \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi}B_2G_2(n) + o(G_2(n)),$$

i. e.,

$$E_n(f) \sim \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi}B_2G_2(n).$$

Deuxième cas: $c < d$.

Dans ce cas ci, nous avons $G_2(n) = o(G_1(n))$.

En effet:

$$\begin{aligned} \frac{G_2(n)}{G_1(n)} &= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{2n+1} (2n+1)^{\gamma-\delta} \\ &= e^{(2n+1)\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + (\gamma-\delta)\ln(2n+1)} \\ &= e^{(2n+1)\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + (\gamma-\delta)\frac{\ln(2n+1)}{2n+1}} \\ &\sim e^{(2n+1)\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}. \end{aligned}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{(2n+1)\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} = 0$ car $r_1 < r_2$. Donc:

$$E_n(f) = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_1 G_1(n) + o(G_1(n)),$$

i. e.,

$$E_n(f) \sim -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_1 G_1(n).$$

Troisième cas: $d < c$.

De même, on montre dans ce cas ci que: $G_1(n) = o(G_2(n))$, et on trouve que:

$$E_n(f) \sim \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} B_2 G_2(n).$$

REMARQUE:

Dans le cas où f admettrait une seule singularité réelle, i. e. $\gamma = 0$ ou $\delta = 0$, on obtient:

$$E_n(f) \sim -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_1 G_1(n) \quad (\delta = 0).$$

$$E_n(f) \sim \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} B_2 G_2(n) \quad (\gamma = 0).$$

Dans ce qui suit, nous allons suivre le cheminement précédent afin de donner une partie principale de ΔS_n . Pour cela, nous utiliserons les notations suivantes:

$$J_1(n) = \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_c^\infty (y-c)^\gamma (y+d)^\delta h(y) Q_n^{\alpha,\beta}(y) dy.$$

$$J_2(n) = \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_d^\infty (y+c)^\gamma (y-d)^\delta h(-y) Q_n^{\alpha,\beta}(y) dy.$$

$$I_1(n) = 4\pi \int_c^\infty (y-c)^\gamma (y+d)^\delta h(y) \frac{K(y)\sqrt{y^2-1}}{(y+\sqrt{y^2-1})^{2n+2}} dy.$$

$$I_2(n) = 4\pi \int_d^\infty (y+c)^\gamma (y-d)^\delta h(-y) \frac{K(-y)\sqrt{y^2-1}}{(y+\sqrt{y^2-1})^{2n+2}} dy.$$

Lemme 6

En notant $r_1 = c + \sqrt{c^2 - 1}$, $r_2 = d + \sqrt{d^2 - 1}$,

$$A_1 = -\sin(\pi\gamma) K(c) h(c) (\sqrt{c^2 - 1})^\gamma \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{2^{(\gamma+1)}},$$

$$g_1(n) = \frac{1}{n^{(\gamma+1)} r_1^{2n}} \left(1 - \frac{2}{r_1^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\gamma+1} + \frac{1}{r_1^4} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{\gamma+1} \right),$$

$$A_2 = -\sin(\pi\delta) K(-d) h(-d) (\sqrt{d^2 - 1})^\delta \frac{\Gamma(\delta + 1)}{2^{(\delta+1)}},$$

$$g_2(n) = \frac{1}{n^{(\delta+1)} r_2^{2n}} \left(1 - \frac{2}{r_2^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\delta+1} + \frac{1}{r_2^4} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{\delta+1} \right),$$

on obtient les equivalences suivantes au voisinage de l'infini:

a) $I_1(n) \sim A_1 g_1(n)$.

b) $I_2(n) \sim A_2 g_2(n)$.

preuve:

a) En faisant le changement de variable $y = ch(\theta)$, $c = ch(\phi)$, on obtient:

$$I_1(n) = 4\pi \int_{\phi}^{\infty} (ch(\theta) - ch(\phi))^\gamma (ch(\theta) + d)^\delta h(ch(\theta)) K(ch(\theta)) sh^2(\theta) e^{-(2n+2)\theta} d\theta.$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} ch(\theta) - ch(\phi) &= 2sh\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right)sh\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right), \\ sh^2(\theta) &= \frac{(e^{2\theta} - 2 + e^{-2\theta})}{4}, \end{aligned}$$

et en notant

$$F(\theta) = 2^\gamma \left(sh\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right) \right)^\gamma (ch(\theta) + d)^\delta h(ch(\theta)) K(ch(\theta)),$$

on obtient:

$$I_1(n) = H(n) - 2H(n+1) + H(n+2),$$

où

$$H(n) = \pi \int_{\phi}^{\infty} F(\theta) e^{-2n\theta} \left(sh\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right) \right)^\gamma d\theta.$$

En utilisant les mêmes techniques vues dans la démonstration du lemme 4, on montre que:

$$H(n) \sim \frac{A_1}{r_1^{2n} n^{\gamma+1}}$$

i. e.

$$H(n) = \frac{A_1}{r_1^{2n} n^{\gamma+1}} (1 + o(1)).$$

Ainsi, nous avons:

$$\begin{aligned} I_1(n) &= \frac{A_1}{r_1^{2n} n^{\gamma+1}} - 2 \frac{A_1}{r_1^{2n+2} (n+1)^{\gamma+1}} + \frac{A_1}{r_1^{2n+4} (n+2)^{\gamma+1}} + o\left(\frac{1}{r_1^{2n} n^{\gamma+1}}\right) \\ &= \frac{A_1}{r_1^{2n} n^{\gamma+1}} \left(1 - \frac{2}{r_1^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} + \frac{1}{r_1^4} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\gamma+1}\right) + o\left(\frac{1}{r_1^{2n} n^{\gamma+1}}\right), \end{aligned}$$

i. e.

$$I_1(n) \sim \frac{A_1}{r_1^{2n} n^{\gamma+1}} \left(1 - \frac{2}{r_1^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} + \frac{1}{r_1^4} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\gamma+1}\right).$$

b) La démonstration est identique. ■

Lemme 7

Avec les notations précédentes, on a les équivalences suivantes:

a) $J_1(n) \sim I_1(n)$.

b) $J_2(n) \sim I_2(n)$.

Preuve:

a)

$$\begin{aligned} J_1(n) &= \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_c^\infty (y-c)^\gamma (y+d)^\delta h(y) Q_n^{\alpha,\beta}(y) dy \\ &= 4\pi \int_c^\infty (y-c)^\gamma (y+d)^\delta h(y) \frac{K(y)\sqrt{y^2-1}}{(y+\sqrt{y^2-1})^{2n+2}} (1+\delta_n(y)) dy \\ &= I_1(n) + 4\pi \int_c^\infty (y-c)^\gamma (y+d)^\delta h(y) \frac{K(y)\sqrt{y^2-1}}{(y+\sqrt{y^2-1})^{2n+2}} \delta_n(y) dy. \end{aligned}$$

Posons:

$$G_n(y) = 4\pi (y-c)^\gamma (y+d)^\delta h(y) \frac{K(y)\sqrt{y^2-1}}{(y+\sqrt{y^2-1})^{2n+2}}.$$

D'après le lemme précédent, la suite de fonctions $(G_n(y))_n$ vérifie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty G_n(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} I_1(n) = 0 \\ \int_c^\infty |G_n(y)| dy \sim |A_1| g_1(n) \sim \left| \int_0^\infty G_n(y) dy \right| \end{array} \right., \text{ d'où le résultat d'après la proposition I-7).$$

b) La démonstration est identique. ■

Avec les notations précédentes, on obtient le résultat suivant dans lequel on donne une partie principale de ΔS_n .

Proposition 3

Avec les notations précédentes, on a les équivalences suivantes:

Premier cas: $c = d$

a) $\gamma = \delta$ et $A_2 \neq A_1$

$$\Delta S_n \sim \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} (A_2 - A_1) g_1(n).$$

b) $\gamma < \delta$

$$\Delta S_n \sim -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n).$$

c) $\gamma > \delta$

$$\Delta S_n \sim \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_2 g_2(n).$$

Deuxième cas: $c < d$

Pour tout réel non entier $\gamma, \delta > -1$, on a:

$$\Delta S_n \sim -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n).$$

Troisième cas: $c > d$

Pour tout réel non entier $\gamma, \delta > -1$, on a:

$$\Delta S_n \sim \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_2 g_2(n).$$

Preuve:

D'après la proposition 1 et les notations précédentes, on a:

$$\Delta S_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} J_1(n) + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} J_2(n).$$

Or, on a vu dans les deux lemmes précédents qu'au voisinage de l'infini, nous avons les équivalences suivantes:

$$J_1(n) \sim A_1 g_1(n), \quad J_2(n) \sim A_2 g_2(n).$$

Donc,

$$\begin{aligned} -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} J_1(n) &= -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n) + o(g_1(n)). \\ \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} J_2(n) &= \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} A_2 g_2(n) + o(g_2(n)). \end{aligned}$$

D'où:

$$\Delta S_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n) + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} A_2 g_2(n) + o(g_1(n)) + o(g_2(n)).$$

Premier cas: $c = d$ (ce qui entraîne $r_1 = r_2$).

a) $\gamma = \delta$ (ce qui entraîne $g_1(n) = g_2(n)$.) Donc:

$$\Delta S_n = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} (A_2 - A_1) g_1(n) + o(g_1(n)).$$

Puisque $A_2 - A_1 \neq 0$, on a au voisinage de l'infini:

$$\Delta S_n \sim \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} (A_2 - A_1) g_1(n).$$

b) $\gamma < \delta$

Dans ce cas, nous avons: $g_2(n) = o(g_1(n))$. En effet:

$$\frac{g_2(n)}{g_1(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\gamma-\delta} = 0, \text{ donc,}$$

$$\Delta S_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n) + o(g_1(n)),$$

donc,

$$\Delta S_n \sim -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n).$$

c) $\gamma > \delta$

Dans ce cas, nous avons: $g_1(n) = o(g_2(n))$. En effet:

$$\frac{g_1(n)}{g_2(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\delta-\gamma} = 0, \text{ donc,}$$

$$\Delta S_n = \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} A_2 g_2(n) + o(g_2(n)),$$

donc,

$$\Delta S_n \sim \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} A_2 g_2(n).$$

Deuxième cas: $c < d$.

Dans ce cas ci, nous avons $g_2(n) = o(g_1(n))$. En effet:

$$\begin{aligned} \frac{g_2(n)}{g_1(n)} &= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n n^{\gamma-\delta} \frac{\left(1 - \frac{2}{r_1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} + \frac{1}{r_1^2} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\gamma+1}\right)}{\left(1 - \frac{2}{r_2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\delta+1} + \frac{1}{r_2^2} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\delta+1}\right)} \\ &\sim \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n n^{\gamma-\delta} \frac{\left(1 - \frac{2}{r_1} + \frac{1}{r_1^2}\right)}{\left(1 - \frac{2}{r_2} + \frac{1}{r_2^2}\right)}. \end{aligned}$$

Or, $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n n^{\gamma-\delta} = e^{n \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + (\gamma-\delta) \frac{\ln(n)}{n}} \sim e^{n \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n$. Puisque $r_1 < r_2$ (car $c < d$), on a: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n = 0$, donc: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_2(n)}{g_1(n)} = 0$. On en déduit alors que:

$$\Delta S_n \sim -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n).$$

Troisième cas: $d < c$.

On montre de la même façon que: $g_1(n) = o(g_2(n))$ et on obtient:

$$\Delta S_n \sim \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} A_2 g_2(n).$$

REMARQUE:

Dans le cas où f admettrait une seule singularité réelle, c.à.d $\gamma = 0$ ou $\delta = 0$, on obtient:

$$\Delta S_n \sim -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n) \quad (\delta = 0).$$

$$\Delta S_n \sim \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} A_2 g_2(n) \quad (\gamma = 0).$$

TABLEAU RECAPULATIF

$$r_1 = c + \sqrt{c^2 - 1}$$

$$r_2 = d + \sqrt{d^2 - 1}$$

$$B_1 = 2\pi(\sqrt{c^2 - 1})^{\gamma+1}(c+d)^\delta h(c)K(c)\Gamma(\gamma+1)$$

$$B_2 = -2\pi(\sqrt{d^2 - 1})^{\delta+1}(c+d)^\gamma h(-d)K(-d)\Gamma(\delta+1)$$

$$G_1(n) = \frac{1}{r_1^{2n+1}(2n+1)^{\gamma+1}}$$

$$G_2(n) = \frac{1}{r_2^{2n+1}(2n+1)^{\delta+1}}$$

$$A_1 = \pi K(c) h(c) (\sqrt{c^2 - 1})^\gamma (c+d)^\delta \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2^{(\gamma+1)}}$$

$$A_2 = -\pi K(-d) h(-d) (\sqrt{d^2 - 1})^\delta (c+d)^\gamma \frac{\Gamma(\delta+1)}{2^{(\delta+1)}}$$

$$g_1(n) = \frac{1}{n^{(\gamma+1)}r_1^{2n}} \left(1 - \frac{2}{r_1^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} + \frac{1}{r_1^4} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\gamma+1} \right)$$

$$g_2(n) = \frac{1}{n^{(\delta+1)}r_2^{2n}} \left(1 - \frac{2}{r_2^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\delta+1} + \frac{1}{r_2^4} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\delta+1} \right)$$

| | $E_n(f) \sim V_n$ | $\Delta S_n \sim U_n$ |
|------------------------------|--|--|
| $c = d$ $\gamma = \delta$ | $V_n = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} (B_2 - B_1) G_1(n)$ | $U_n = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} (A_2 - A_1) g_1(n)$ |
| $c = d$ $\gamma < \delta$ | $V_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_1 G_1(n)$ | $U_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n)$ |
| $c = d$ $\gamma > \delta$ | $V_n = \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} B_2 G_2(n)$ | $U_n = \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} A_2 g_2(n)$ |
| $c < d$ | $V_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_1 G_1(n)$ | $U_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n)$ |
| $c > d$ | $V_n = \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} B_2 G_2(n)$ | $U_n = \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} A_2 g_2(n)$ |

II-3-b) Accélération de la convergence de la suite (S_n)

REMARQUE:

La suite (S_n) est une suite à convergence linéaire avec:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1} - S}{S_n - S} = \frac{1}{r_i^2}, \text{ avec } i = 1 \text{ ou } i = 2.$$

En effet, d'après la proposition 2, on a:

si $\begin{cases} (c = d) \text{ et } (\gamma = \delta \text{ et } B_2 \neq B_1 \text{ ou } \gamma < \delta) \\ \text{ou} \\ (c < d) \end{cases}$ alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{n+1}(f)}{E_n(f)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_1(n+1)}{G_1(n)} = \frac{1}{r_1^2} < 1.$$

si $\begin{cases} (c = d) \text{ et } \gamma > \delta \\ \text{ou} \\ (c > d) \end{cases}$ alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{n+1}(f)}{E_n(f)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_2(n+1)}{G_2(n)} = \frac{1}{r_2^2} < 1.$$

Proposition 4

Soit $D_n = -\frac{\Delta S_n}{\Delta g_i(n)} g_i(n)$ avec

$$i = 1 \text{ si } \begin{cases} (c = d) \text{ et } (\gamma \leq \delta) \\ \text{ou} \\ (c < d) \end{cases}, \quad i = 2 \text{ si } \begin{cases} (c = d) \text{ et } (\gamma > \delta) \\ \text{ou} \\ (c > d) \end{cases}$$

Alors, la suite (T_n) définie par $T_n = S_n + D_n$ converge vers S plus vite que la suite (S_n) .

Preuve:

Afin de montrer la proposition, il suffira de montrer que le terme U_n défini dans le tableau récapitulatif est une bonne estimation de l'erreur de la suite (S_n) . En effet, (S_n) étant à convergence linéaire, par application de la procédure Θ à la suite (S_n) , on a:

$$D_n = -\frac{\Delta S_n}{\Delta U_n} U_n = \frac{\Delta S_n}{\Delta g_i(n)} g_i(n),$$

est une estimation parfaite de l'erreur de S_n .

Il suffira donc de montrer que $\frac{E_n(f)}{U_n} \neq 0, 1, \infty$.

$$\text{Or, il est facile de vérifier que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(f)}{U_n} = \begin{cases} 2r_1 \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{(r_1^2 - 1)^2} \neq 0, 1, \infty \\ \text{ou} \\ 2r_2 \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{(r_2^2 - 1)^2} \neq 0, 1, \infty \end{cases}$$

suivant les cas.

Afin d'itérer la procédure, i. e, transformer la suite (T_n) en une suite (W_n) vérifiant: $W_n - S = o(T_n - S)$, nous avons besoin d'établir les trois lemmes suivants:

Lemme 8

La suite $(T_n)_n$ est une suite à convergence linéaire. D'une façon plus précise, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S - T_{n+1}}{S - T_n} = \frac{1}{r_i^2} \quad i = 1 \text{ ou } i = 2.$$

Preuve:

La suite (T_n) est définie par $\forall n, T_n = S_n - \frac{\Delta S_n}{\Delta g_i(n)} g_i(n)$, donc

$$S - T_n = S - S_n + \frac{\Delta S_n}{\Delta g_i(n)} g_i(n) = E_n(f) + \frac{g_i(n)}{\Delta g_i(n)} \Delta S_n.$$

On rappelle que,

$$E_n(f) = -\sin(\pi\gamma)J_1(n) + \sin(\pi\delta)J_2(n),$$

$$\Delta S_n = -\sin(\pi\gamma)J'_1(n) + \sin(\pi\delta)J'_2(n),$$

avec

$$J_1(n) = 2 \int_c^\infty \frac{h(t)K(t)}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+1}} (t - c)^\gamma (t + d)^\delta (1 + \epsilon_n(t)) dt.$$

$$J_2(n) = -2 \int_d^\infty \frac{h(-t)K(-t)}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+1}} (t + c)^\gamma (t - d)^\delta (1 + \epsilon_n(-t)) dt.$$

$$J_1^1(n) = 2 \int_c^\infty \frac{h(t)K(t)\sqrt{t^2 - 1}}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+2}} (t - c)^\gamma (t + d)^\delta (1 + \delta_n(t)) dt.$$

$$J_2'(n) = -2 \int_d^\infty \frac{h(t)K(t)\sqrt{t^2 - 1}}{(t + \sqrt{t^2 - 1})^{2n+2}} (t + c)^\gamma (t - d)^\delta (1 + \delta_n(t)) dt.$$

Supposons que $i = 1$, donc, $\frac{g_1(n)}{\Delta g_1(n)} = -\frac{r_1}{2\sqrt{c^2 - 1}}(1 + o(1))$.

Ainsi, en posant

$$I_1(n) = J_1(n) - \frac{r_1}{2\sqrt{c^2 - 1}}(1 + o(1))J_1'(n)$$

$$I_2(n) = J_2(n) - \frac{r_1}{2\sqrt{c^2 - 1}}(1 + o(1))J_2'(n)$$

on a:

$$S - T_n = -\sin(\pi\gamma)I_1(n) + \sin(\pi\delta)I_2(n)$$

Posons:

$$1 + \delta'_n(t) = (1 + \delta_n(t))(1 + o(1)),$$

$$\delta_n''(t) = \epsilon_n(t) - \frac{r_1}{\sqrt{c^2-1}} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t + \sqrt{t^2-1}} \delta_n'(t).$$

On obtient alors:

$$I_1(n) = 2 \int_c^\infty \frac{h(t)K(t)}{(t + \sqrt{(t^2-1)})^{2n+1}} (t-c)^\gamma (t+d)^\delta \left(1 - \frac{r_1}{\sqrt{c^2-1}} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t + \sqrt{t^2-1}}\right) + \delta_n''(t) dt.$$

$$I_2(n) = -2 \int_d^\infty \frac{h(-t)K(-t)}{(t + \sqrt{(t^2-1)})^{2n+1}} (t+c)^\gamma (t-d)^\delta \left(1 - \frac{r_1}{\sqrt{c^2-1}} \frac{\sqrt{t^2-1}}{t + \sqrt{t^2-1}}\right) + \delta_n''(-t) dt.$$

Posons: $t = ch(\theta)$, $c = ch(\phi)$, $F(\theta) = 2^{\gamma+1} (sh(\frac{\theta+\phi}{2}))^\gamma h(ch(\theta))K(ch(\theta))sh(\theta)$. D'où:

$$\begin{aligned} I_1(n) &= \int_\phi^\infty \frac{F(\theta)}{e^{(2n+1)\theta}} sh^\gamma\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right) \left[1 - \frac{r_1}{\sqrt{c^2-1}} \frac{sh(\theta)}{e^{\theta}} + \delta_n''(ch(\theta))\right] d\theta \\ &= e^{-(2n+1)\phi} \int_0^\infty \frac{F(\theta+\phi)}{e^{(2n+1)\theta}} (sh(\frac{\theta}{2}))^\gamma \left[\frac{r_1}{2\sqrt{c^2-1}} (e^{-2\theta} - 1) + \delta_n''(ch(\theta))\right] d\theta. \end{aligned}$$

Or, au voisinage de l'infini, nous avons:

$$F(\theta+\phi) sh^\gamma\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{r_1}{2\sqrt{c^2-1}} (e^{-2\theta} - 1) \sim -\frac{F(\phi)\theta^{\gamma+1}}{2^\gamma r_1 \sqrt{c^2-1}}.$$

Ainsi,

$$-\sin(\pi\gamma)I_1(n) \sim \frac{A}{r_1^{2n+2}(2n+1)^{\gamma+2}}$$

avec $A = 4\sin(\pi\gamma)h(c)K(c)(c+d)^\gamma(\sqrt{c^2-1})^\gamma\Gamma(\gamma+2)$.

En faisant un raisonnement similaire, on trouve que

$$\sin(\pi\delta)I_2(n) \sim \frac{B}{r_2^{2n+1}(2n+1)^{\delta+1}}$$

avec $B = -2\sin(\pi\delta)h(-d)K(-d)(c+d)^\gamma(\sqrt{d^2-1})^{\delta+1}\Gamma(\delta+1)\left(1 - \frac{r_1\sqrt{d^2-1}}{r_2\sqrt{c^2-1}}\right) \neq 0$.

Puisque $i = 1$, on a: $\frac{1}{r_2^{2n+1}(2n+1)^{\delta+1}} = o\left(\frac{1}{r_1^{2n+2}(2n+1)^{\gamma+2}}\right)$

Ainsi:

$$S - T_n \sim \frac{A}{r_1^{2n+2}(2n+1)^{\gamma+2}}$$

d'où:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S - T_{n+1}}{S - T_n} = \frac{1}{r_1^2}.$$

Lorsque $i = 2$, la démonstration est identique.

Lemme 9

En notant $a = 1 - \frac{1}{r_1^2}$, $b = 1 - \frac{1}{r_2^2}$, on a :

$$\begin{aligned} a) \frac{g_1(n+1)}{g_1(n)} &= \frac{1}{r_1^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} \left(1 - \frac{2(\gamma+1)}{r_1^2 a^2 (n+1)(n+2)} \left(1 - \frac{n+1}{(n+3)r_1^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \\ b) \frac{g_2(n+1)}{g_2(n)} &= \frac{1}{r_2^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\delta+1} \left(1 - \frac{2(\delta+1)}{r_2^2 b^2 (n+1)(n+2)} \left(1 - \frac{n+1}{(n+3)r_2^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Preuve:

a)

$$\begin{aligned} g_1(n) &= \frac{1}{r_1^{2n} n^{\gamma+1}} \left(1 - \frac{2}{r_1^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} + \frac{1}{r_1^4} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\gamma+1}\right) \\ &= \frac{1}{r_1^{2n} n^{\gamma+1}} \left(1 - \frac{2}{r_1^2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma+1} + \frac{1}{r_1^4} \left(1 - \frac{2}{n+2}\right)^{\gamma+1}\right) \\ &= \frac{1}{r_1^{2n} n^{\gamma+1}} \left(1 - \frac{2}{r_1^2} \left(1 - \frac{\gamma+1}{n+1} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r_1^4} \left(1 - \frac{2(\gamma+1)}{n+2} + \frac{2\gamma(\gamma+1)}{(n+2)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{r_1^{2n} n^{\gamma+1}} \left(a^2 + \frac{2(\gamma+1)}{(n+1)r_1^2} \left(1 - \frac{n+1}{(n+2)r_1^2}\right) - \frac{\gamma(\gamma+1)}{r_1^2(n+1)^2} \left(1 - \frac{2}{r_1^2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\right)\right. \\ &\quad \left.+ o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Posons :

$$\alpha_n = \frac{2(\gamma+1)}{r_1^2(n+1)} \left(1 - \frac{n+1}{r_1^2(n+2)}\right),$$

$$\beta_n = -\frac{\gamma(\gamma+1)}{r_1^2(n+1)^2} \left(1 - \frac{2}{r_1^2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2\right).$$

Ainsi, $g_1(n) = \frac{1}{r_1^{2n} n^{\gamma+1}} \left(a^2 + \alpha_n + \beta_n + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$. Donc :

$$\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)} = \frac{1}{r_1^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} \frac{\left(a^2 + \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\left(a^2 + \alpha_n + \beta_n + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}.$$

Or, sachant que :

$$\begin{aligned} \frac{\left(a^2 + \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\left(a^2 + \alpha_n + \beta_n + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} &= \frac{1}{a^2} \left(a^2 + \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{\alpha_n + \beta_n}{a^2} + \frac{\alpha_n^2}{a^4} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a^2} \left(a^2 + \alpha_{n+1} - \alpha_n + \beta_{n+1} - \beta_n + \frac{\alpha_n^2 - \alpha_n \alpha_{n+1}}{a^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right),$$

et que:

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} - \alpha_n &= -\frac{2(\gamma+1)}{r_1^2(n+1)(n+2)} \left(1 - \frac{n+1}{r_1^2(n+3)} \right), \\ \beta_{n+1} - \beta_n &= o\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ \alpha_n^2 - \alpha_n \alpha_{n+1} &= o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{g_1(n+1)}{g_1(n)} &= \frac{1}{r_1^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} \frac{1}{a^2} \left(a^2 + \alpha_{n+1} - \alpha_n + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{r_1^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} \frac{1}{a^2} \left(a^2 - \frac{2(\gamma+1)}{r_1^2(n+1)(n+2)} \left(1 - \frac{n+1}{r_1^2(n+3)} \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right). \end{aligned}$$

b) De la même façon, on montre le résultat du b). ■

Lemme 10

$$\begin{aligned} a) \frac{g_1(n+1)}{g_1(n)} - \frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)} &= -\frac{(\gamma+1)}{r_1^2} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \\ b) \frac{g_2(n+1)}{g_2(n)} - \frac{g_2(n+2)}{g_2(n+1)} &= -\frac{(\delta+1)}{r_2^2} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Preuve:

a) On a vu dans le lemme précédent que:

$$\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)} = \frac{1}{a^2 r_1^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} \left[a^2 - \frac{2(\gamma+1)}{r_1^2(n+1)(n+2)} \left(1 - \frac{n+1}{(n+3)r_1^2} \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

Donc:

$$\begin{aligned} \frac{g_1(n+1)}{g_1(n)} - \frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)} &= \frac{1}{a^2 r_1^2} \left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} \left(a^2 - \frac{2(\gamma+1)}{r_1^2(n+1)(n+2)} \left(1 - \frac{n+1}{(n+3)r_1^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\gamma+1} \left(a^2 - \frac{2(\gamma+1)}{r_1^2(n+2)(n+3)} \left(1 - \frac{n+2}{(n+4)r_1^2} \right) \right) \right] \\ &\quad + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{a^2 r_1^2} \left[a^2 \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\gamma+1} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2(\gamma+1)}{r_1^2(n+2)} \left(\frac{1}{n+3} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{\gamma+1} - \frac{1}{n+3} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\gamma+1} \right) \\
& + \frac{2(\gamma+1)}{r_1^4(n+3)} \left(\frac{1}{n+2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\gamma+1} - \frac{1}{n+4} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{\gamma+1} \right) \Big] \\
& + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Or, d'une part

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} - \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\gamma+1} &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma+1} - \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{\gamma+1} \\
&= \left(1 - \frac{\gamma+1}{n+1} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \left(\frac{1}{n+1}\right)^2\right) \\
&\quad - \left(1 - \frac{\gamma+1}{n+2} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right). \\
&= (\gamma+1) \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&\quad + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 - \frac{1}{n+2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \\
&= -\frac{\gamma+1}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+3} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\gamma+1} - \frac{1}{n+3} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} &= \frac{1}{n+3} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{\gamma+1} - \frac{1}{n+3} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\gamma+1} \\
&= \frac{1}{n+3} \left(1 - \frac{\gamma+1}{n+2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\quad - \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{\gamma+1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&\quad + (\gamma+1) \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right) \\
&\quad + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{-2}{(n+1)(n+3)} + \frac{(\gamma+1)(3n+5)}{(n+1)^2(n+2)(n+3)} \\
&\quad + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{-2}{(n+1)(n+3)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Donc:

$$\frac{2(\gamma+1)}{r_1^2(n+2)} \left(\frac{1}{n+3} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\gamma+1} - \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} \right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

De même, on a :

$$\frac{2(\gamma + 1)}{r_1^4(n + 3)} \left(\frac{1}{n + 2} \left(\frac{n}{n + 1} \right)^{\gamma + 1} - \frac{1}{n + 4} \left(\frac{n + 1}{n + 2} \right)^{\gamma + 1} \right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{g_1(n + 1)}{g_1(n)} - \frac{g_1(n + 2)}{g_1(n + 1)} = -\frac{(\gamma + 1)}{r_1^2} \frac{1}{(n + 1)(n + 2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b) se démontre de la même façon.

Proposition 5

Soit $U_i(n) = \frac{g_i^2(n + 1) - g_i(n)g_i(n + 2)}{\Delta g_i(n)}$ avec $i = 1$ ou $i = 2$.

Le terme $D_n = -\frac{\Delta T_n}{\Delta U_i(n)} U_i(n)$ est une estimation parfaite de l'erreur de T_n .

Preuve:

Soit $(W_n)_n$ la suite définie par: $W_n = T_n - \frac{\Delta T_n}{\Delta U_i(n)} U_i(n)$. Montrons que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n - S}{T_n - S} = 0. \text{ Or,}$$

$$\begin{aligned} W_n - S &= T_n - S - \frac{\Delta T_n}{\Delta U_i(n)} U_i(n) \\ &= T_n - S + \frac{\Delta T_n}{1 - \frac{U_i(n + 1)}{U_i(n)}} \\ &= (T_n - S) \left[1 + \frac{1}{1 - \frac{U_i(n + 1)}{U_i(n)}} \left(\frac{T_{n+1} - S}{T_n - S} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Donc:

$$\frac{W_n - S}{T_n - S} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{U_i(n + 1)}{U_i(n)}} \left(\frac{T_{n+1} - S}{T_n - S} - 1 \right).$$

Or, d'après le lemme 8: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S - T_{n+1}}{S - T_n} = \frac{1}{r_i^2}$.

Afin de montrer le résultat, il suffira de montrer que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_i(n + 1)}{U_i(n)} = \frac{1}{r_i^2}$. or,

$$\frac{U_i(n + 1)}{U_i(n)} = \frac{g_i^2(n + 2) - g_i(n + 1)g_i(n + 3)}{g_i^2(n + 1) - g_i(n)g_i(n + 2)} \cdot \frac{\Delta g_i(n)}{\Delta g_i(n + 1)}$$

$$= \frac{\frac{g_i(n+2)}{g_i(n+1)} \cdot \frac{g_i(n+1)}{g_i(n)} - \frac{g_i(n+3)}{g_i(n+2)} \cdot \frac{g_i(n+2)}{g_i(n+1)} - 1}{\frac{g_i(n+2)}{g_i(n)} - \frac{g_i(n+3)}{g_i(n+1)} - 1}.$$

Or, nous avons d'une part, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_i(n+2)}{g_i(n+1)} = \frac{1}{r_i^2}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{g_i(n+1)}{g_i(n)} - 1}{\frac{g_i(n+2)}{g_i(n+1)} - 1} = \frac{\frac{1}{r_i^2} - 1}{\frac{1}{r_i^2} - 1} = 1$.

D'autre part, nous avons d'après le lemme 10

$$\frac{g_1(n+1)}{g_1(n)} - \frac{g_1(n+2)}{g_1(n+1)} = -\frac{(\gamma+1)}{r_1^2} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\frac{g_2(n+1)}{g_2(n)} - \frac{g_2(n+2)}{g_2(n+1)} = -\frac{(\delta+1)}{r_2^2} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \text{ Donc,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{g_i(n+2)}{g_i(n+1)} - \frac{g_i(n+3)}{g_i(n+2)}}{\frac{g_i(n+2)}{g_i(n)} - \frac{g_i(n+3)}{g_i(n+1)}} = 1.$$

Ce qui nous donne le résultat. ■

CONCLUSION:

Les transformations proposées dans ce paragraphe ne dépendent pas de la fonction h , mais uniquement du terme $g_i(n)$, qui lui même ne dépend que de la valeur de la singularité la plus proche de l'intervalle d'intégration ainsi des valeurs des exposants γ et δ .

Remarquons aussi que les suites (T_n) et (W_n) correspondent aux suites données par la première et seconde colonne du E-Algorithmme [1].

EXEMPLES NUMMERIQUES

Considérons les exemples suivants:

Exem1: $f(x) = x(c-x)^\phi$, $w(x) = 1$, $\phi > -1$.

$\phi = -0.9$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.77D+00 | 0.51D-01 | 0.12D-01 |
| 3 | 0.41D+00 | 0.22D-01 | 0.38D-02 |
| 4 | 0.22D+00 | 0.95D-02 | 0.11D-02 |
| 5 | 0.12D+00 | 0.40D-02 | 0.31D-03 |
| 6 | 0.63D-01 | 0.17D-02 | 0.83D-04 |
| 7 | 0.34D-01 | 0.69D-03 | 0.22D-04 |
| 8 | 0.18D-01 | 0.29D-03 | 0.59D-05 |
| 9 | 0.95D-02 | 0.12D-03 | 0.17D-05 |
| 10 | 0.51D-02 | 0.53D-04 | 0.52D-06 |
| 11 | 0.27D-02 | 0.23D-04 | 0.18D-06 |
| 12 | 0.14D-02 | 0.10D-04 | 0.72D-07 |
| 13 | 0.76D-03 | 0.47D-05 | 0.31D-07 |
| 14 | 0.40D-03 | 0.22D-05 | 0.14D-07 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.45D+00 | 0.20D-01 | 0.23D-02 |
| 3 | 0.19D+00 | 0.60D-02 | 0.39D-03 |
| 4 | 0.78D-01 | 0.17D-02 | 0.59D-04 |
| 5 | 0.32D-01 | 0.51D-03 | 0.85D-05 |
| 6 | 0.13D-01 | 0.15D-03 | 0.13D-05 |
| 7 | 0.55D-02 | 0.47D-04 | 0.22D-06 |
| 8 | 0.22D-02 | 0.15D-04 | 0.56D-07 |
| 9 | 0.92D-03 | 0.48D-05 | 0.18D-07 |
| 10 | 0.38D-03 | 0.16D-05 | 0.64D-08 |
| 11 | 0.15D-03 | 0.55D-06 | 0.23D-08 |
| 12 | 0.64D-04 | 0.19D-06 | 0.82D-09 |
| 13 | 0.26D-04 | 0.67D-07 | 0.28D-09 |
| 14 | 0.11D-04 | 0.24D-07 | 0.99D-10 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.30D+00 | 0.95D-02 | 0.61D-03 |
| 3 | 0.10D+00 | 0.21D-02 | 0.61D-04 |
| 4 | 0.36D-01 | 0.48D-03 | 0.54D-05 |
| 5 | 0.12D-01 | 0.11D-03 | 0.49D-06 |
| 6 | 0.41D-02 | 0.27D-04 | 0.65D-07 |
| 7 | 0.14D-02 | 0.68D-05 | 0.16D-07 |
| 8 | 0.46D-03 | 0.18D-05 | 0.48D-08 |
| 9 | 0.16D-03 | 0.48D-06 | 0.14D-08 |
| 10 | 0.53D-04 | 0.13D-06 | 0.42D-09 |
| 11 | 0.18D-04 | 0.37D-07 | 0.12D-09 |
| 12 | 0.60D-05 | 0.11D-07 | 0.32D-10 |
| 13 | 0.20D-05 | 0.31D-08 | 0.89D-11 |
| 14 | 0.68D-06 | 0.90D-09 | 0.24D-11 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.22D+00 | 0.51D-02 | 0.19D-03 |
| 3 | 0.64D-01 | 0.92D-03 | 0.12D-04 |
| 4 | 0.18D-01 | 0.17D-03 | 0.67D-06 |
| 5 | 0.53D-02 | 0.33D-04 | 0.53D-07 |
| 6 | 0.15D-02 | 0.67D-05 | 0.11D-07 |
| 7 | 0.43D-03 | 0.14D-05 | 0.30D-08 |
| 8 | 0.12D-03 | 0.32D-06 | 0.77D-09 |
| 9 | 0.35D-04 | 0.74D-07 | 0.18D-09 |
| 10 | 0.10D-04 | 0.17D-07 | 0.43D-10 |
| 11 | 0.29D-05 | 0.42D-08 | 0.98D-11 |
| 12 | 0.83D-06 | 0.10D-08 | 0.22D-11 |
| 13 | 0.24D-06 | 0.25D-09 | 0.51D-12 |
| 14 | 0.68D-07 | 0.62D-10 | 0.12D-12 |

1.12

Nous remarquons que pour une valeur de ϕ fixée, la convergence des suites (S_n) , (T_n) , (W_n) est d'autant plus rapide que la singularité de la fonction f est loin de l'intervalle d'intégration.

$$\phi = -0.5$$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.20D+00 | 0.13D-01 | 0.19D-02 |
| 3 | 0.86D-01 | 0.49D-02 | 0.53D-03 |
| 4 | 0.40D-01 | 0.19D-02 | 0.15D-03 |
| 5 | 0.19D-01 | 0.71D-03 | 0.41D-04 |
| 6 | 0.95D-02 | 0.28D-03 | 0.12D-04 |
| 7 | 0.47D-02 | 0.11D-03 | 0.33D-05 |
| 8 | 0.24D-02 | 0.45D-04 | 0.10D-05 |
| 9 | 0.12D-02 | 0.19D-04 | 0.34D-06 |
| 10 | 0.61D-03 | 0.80D-05 | 0.12D-06 |
| 11 | 0.31D-03 | 0.34D-05 | 0.45D-07 |
| 12 | 0.16D-03 | 0.15D-05 | 0.18D-07 |
| 13 | 0.81D-04 | 0.67D-06 | 0.74D-08 |
| 14 | 0.42D-04 | 0.30D-06 | 0.31D-08 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.13D+00 | 0.46D-02 | 0.42D-03 |
| 3 | 0.45D-01 | 0.13D-02 | 0.65D-04 |
| 4 | 0.16D-01 | 0.35D-03 | 0.10D-04 |
| 5 | 0.60D-02 | 0.97D-04 | 0.17D-05 |
| 6 | 0.23D-02 | 0.28D-04 | 0.34D-06 |
| 7 | 0.87D-03 | 0.84D-05 | 0.77D-07 |
| 8 | 0.34D-03 | 0.26D-05 | 0.20D-07 |
| 9 | 0.13D-03 | 0.82D-06 | 0.60D-08 |
| 10 | 0.52D-04 | 0.27D-06 | 0.18D-08 |
| 11 | 0.20D-04 | 0.89D-07 | 0.58D-09 |
| 12 | 0.80D-05 | 0.30D-07 | 0.18D-09 |
| 13 | 0.32D-05 | 0.10D-07 | 0.60D-10 |
| 14 | 0.13D-05 | 0.36D-08 | 0.19D-10 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.95D-01 | 0.21D-02 | 0.13D-03 |
| 3 | 0.27D-01 | 0.46D-03 | 0.13D-04 |
| 4 | 0.79D-02 | 0.98D-04 | 0.14D-05 |
| 5 | 0.24D-02 | 0.22D-04 | 0.18D-06 |
| 6 | 0.75D-03 | 0.51D-05 | 0.33D-07 |
| 7 | 0.24D-03 | 0.13D-05 | 0.71D-08 |
| 8 | 0.76D-04 | 0.32D-06 | 0.17D-08 |
| 9 | 0.24D-04 | 0.84D-07 | 0.42D-09 |
| 10 | 0.78D-05 | 0.22D-07 | 0.11D-09 |
| 11 | 0.25D-05 | 0.62D-08 | 0.27D-10 |
| 12 | 0.82D-06 | 0.17D-08 | 0.70D-11 |
| 13 | 0.27D-06 | 0.49D-09 | 0.18D-11 |
| 14 | 0.87D-07 | 0.14D-09 | 0.48D-12 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.72D-01 | 0.11D-02 | 0.47D-04 |
| 3 | 0.17D-01 | 0.19D-03 | 0.33D-05 |
| 4 | 0.43D-02 | 0.34D-04 | 0.29D-06 |
| 5 | 0.11D-02 | 0.65D-05 | 0.36D-07 |
| 6 | 0.30D-03 | 0.13D-05 | 0.61D-08 |
| 7 | 0.79D-04 | 0.27D-06 | 0.12D-08 |
| 8 | 0.21D-04 | 0.58D-07 | 0.25D-09 |
| 9 | 0.58D-05 | 0.13D-07 | 0.51D-10 |
| 10 | 0.16D-05 | 0.30D-08 | 0.11D-10 |
| 11 | 0.44D-06 | 0.69D-09 | 0.23D-11 |
| 12 | 0.12D-06 | 0.16D-09 | 0.49D-12 |
| 13 | 0.34D-07 | 0.40D-10 | 0.11D-12 |
| 14 | 0.94D-08 | 0.96D-11 | 0.25D-13 |

1.2

$$\phi = 0.5$$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | -0.20D-01 | 0.78D-03 | -0.17D-03 |
| 3 | -0.44D-02 | 0.46D-04 | -0.19D-04 |
| 4 | -0.13D-02 | -0.16D-05 | -0.32D-05 |
| 5 | -0.46D-03 | -0.28D-05 | -0.71D-06 |
| 6 | -0.18D-03 | -0.14D-05 | -0.18D-06 |
| 7 | -0.72D-04 | -0.58D-06 | -0.49D-07 |
| 8 | -0.31D-04 | -0.24D-06 | -0.15D-07 |
| 9 | -0.13D-04 | -0.96D-07 | -0.47D-08 |
| 10 | -0.60D-05 | -0.40D-07 | -0.16D-08 |
| 11 | -0.27D-05 | -0.16D-07 | -0.56D-09 |
| 12 | -0.13D-05 | -0.70D-08 | -0.21D-09 |
| 13 | -0.59D-06 | -0.30D-08 | -0.79D-10 |
| 14 | -0.28D-06 | -0.13D-08 | -0.31D-10 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | -0.16D-01 | 0.51D-03 | -0.67D-04 |
| 3 | -0.28D-02 | 0.32D-04 | -0.52D-05 |
| 4 | -0.67D-03 | 0.23D-05 | -0.63D-06 |
| 5 | -0.19D-03 | 0.37D-07 | -0.96D-07 |
| 6 | -0.56D-04 | -0.63D-07 | -0.18D-07 |
| 7 | -0.18D-04 | -0.30D-07 | -0.36D-08 |
| 8 | -0.58D-05 | -0.11D-07 | -0.83D-09 |
| 9 | -0.20D-05 | -0.37D-08 | -0.20D-09 |
| 10 | -0.69D-06 | -0.12D-08 | -0.53D-10 |
| 11 | -0.24D-06 | -0.41D-09 | -0.14D-10 |
| 12 | -0.87D-07 | -0.14D-09 | -0.40D-11 |
| 13 | -0.32D-07 | -0.46D-10 | -0.11D-11 |
| 14 | -0.12D-07 | -0.16D-10 | -0.33D-12 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | -0.13D-01 | 0.36D-03 | -0.34D-04 |
| 3 | -0.20D-02 | 0.21D-04 | -0.20D-05 |
| 4 | -0.39D-03 | 0.18D-05 | -0.20D-06 |
| 5 | -0.89D-04 | 0.18D-06 | -0.24D-07 |
| 6 | -0.22D-04 | 0.18D-07 | -0.36D-08 |
| 7 | -0.58D-05 | 0.10D-08 | -0.61D-09 |
| 8 | -0.16D-05 | -0.25D-09 | -0.11D-09 |
| 9 | -0.44D-06 | -0.14D-09 | -0.22D-10 |
| 10 | -0.13D-06 | -0.52D-10 | -0.47D-11 |
| 11 | -0.37D-07 | -0.17D-10 | -0.10D-11 |
| 12 | -0.11D-07 | -0.50D-11 | -0.23D-12 |
| 13 | -0.32D-08 | -0.15D-11 | -0.53D-13 |
| 14 | -0.97D-09 | -0.43D-12 | -0.13D-13 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | -0.11D-01 | 0.27D-03 | -0.19D-04 |
| 3 | -0.14D-02 | 0.15D-04 | -0.97D-06 |
| 4 | -0.24D-03 | 0.12D-05 | -0.78D-07 |
| 5 | -0.47D-04 | 0.13D-06 | -0.82D-08 |
| 6 | -0.10D-04 | 0.15D-07 | -0.10D-08 |
| 7 | -0.22D-05 | 0.19D-08 | -0.15D-09 |
| 8 | -0.51D-06 | 0.26D-09 | -0.23D-10 |
| 9 | -0.12D-06 | 0.33D-10 | -0.38D-11 |
| 10 | -0.30D-07 | 0.39D-11 | -0.66D-12 |
| 11 | -0.74D-08 | 0.30D-12 | -0.12D-12 |
| 12 | -0.18D-08 | -0.29D-13 | -0.23D-13 |
| 13 | -0.47D-09 | -0.25D-13 | -0.50D-14 |
| 14 | -0.12D-09 | -0.94D-14 | -0.13D-14 |

1.2

$$\phi = 0.9$$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | -0.44D-02 | 0.31D-03 | -0.50D-04 |
| 3 | -0.67D-03 | 0.26D-04 | -0.39D-05 |
| 4 | -0.16D-03 | 0.34D-05 | -0.54D-06 |
| 5 | -0.50D-04 | 0.55D-06 | -0.99D-07 |
| 6 | -0.17D-04 | 0.98D-07 | -0.22D-07 |
| 7 | -0.64D-05 | 0.17D-07 | -0.55D-08 |
| 8 | -0.25D-05 | 0.22D-08 | -0.15D-08 |
| 9 | -0.10D-05 | -0.22D-09 | -0.46D-09 |
| 10 | -0.43D-06 | -0.37D-09 | -0.15D-09 |
| 11 | -0.19D-06 | -0.23D-09 | -0.49D-10 |
| 12 | -0.83D-07 | -0.12D-09 | -0.17D-10 |
| 13 | -0.37D-07 | -0.58D-10 | -0.61D-11 |
| 14 | -0.17D-07 | -0.27D-10 | -0.23D-11 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | -0.37D-02 | 0.20D-03 | -0.22D-04 |
| 3 | -0.46D-03 | 0.13D-04 | -0.13D-05 |
| 4 | -0.91D-04 | 0.15D-05 | -0.13D-06 |
| 5 | -0.22D-04 | 0.21D-06 | -0.18D-07 |
| 6 | -0.59D-05 | 0.36D-07 | -0.30D-08 |
| 7 | -0.17D-05 | 0.68D-08 | -0.57D-09 |
| 8 | -0.53D-06 | 0.14D-08 | -0.12D-09 |
| 9 | -0.17D-06 | 0.30D-09 | -0.27D-10 |
| 10 | -0.56D-07 | 0.66D-10 | -0.65D-11 |
| 11 | -0.19D-07 | 0.15D-10 | -0.17D-11 |
| 12 | -0.65D-08 | 0.33D-11 | -0.44D-12 |
| 13 | -0.23D-08 | 0.73D-12 | -0.12D-12 |
| 14 | -0.80D-09 | 0.15D-12 | -0.34D-13 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | -0.32D-02 | 0.14D-03 | -0.12D-04 |
| 3 | -0.34D-03 | 0.80D-05 | -0.56D-06 |
| 4 | -0.55D-04 | 0.77D-06 | -0.47D-07 |
| 5 | -0.11D-04 | 0.97D-07 | -0.52D-08 |
| 6 | -0.25D-05 | 0.14D-07 | -0.70D-09 |
| 7 | -0.60D-06 | 0.24D-08 | -0.11D-09 |
| 8 | -0.15D-06 | 0.44D-09 | -0.19D-10 |
| 9 | -0.40D-07 | 0.85D-10 | -0.34D-11 |
| 10 | -0.11D-07 | 0.18D-10 | -0.68D-12 |
| 11 | -0.31D-08 | 0.37D-11 | -0.14D-12 |
| 12 | -0.86D-09 | 0.83D-12 | -0.31D-13 |
| 13 | -0.25D-09 | 0.19D-12 | -0.71D-14 |
| 14 | -0.72D-10 | 0.44D-13 | -0.21D-14 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | -0.28D-02 | 0.11D-03 | -0.72D-05 |
| 3 | -0.26D-03 | 0.52D-05 | -0.29D-06 |
| 4 | -0.36D-04 | 0.43D-06 | -0.20D-07 |
| 5 | -0.62D-05 | 0.48D-07 | -0.19D-08 |
| 6 | -0.12D-05 | 0.63D-08 | -0.22D-09 |
| 7 | -0.24D-06 | 0.92D-09 | -0.28D-10 |
| 8 | -0.53D-07 | 0.15D-09 | -0.41D-11 |
| 9 | -0.12D-07 | 0.25D-10 | -0.64D-12 |
| 10 | -0.27D-08 | 0.45D-11 | -0.10D-12 |
| 11 | -0.65D-09 | 0.85D-12 | -0.18D-13 |
| 12 | -0.16D-09 | 0.17D-12 | -0.31D-14 |
| 13 | -0.38D-10 | 0.34D-13 | -0.22D-15 |
| 14 | -0.95D-11 | 0.72D-14 | 0.22D-15 |

1.2

Nous remarquons, sur ces quatre exemples, que pour des valeurs différentes de ϕ , la vitesse de la convergence des trois suites est d'autant plus grande que la valeur de ϕ est grande. Nous remarquons aussi que lorsqu'on fait croître c et ϕ , la suite (W_n) converge presque de la même façon que la suite (T_n) .

Exem 2: $f(x) = \frac{1}{c^2 - x^2}, w(x) = 1.$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.241D+00 | 0.223D-01 | 0.228D-02 |
| 3 | 0.108D+00 | 0.757D-02 | 0.669D-03 |
| 4 | 0.510D-01 | 0.275D-02 | 0.190D-03 |
| 5 | 0.248D-01 | 0.104D-02 | 0.531D-04 |
| 6 | 0.122D-01 | 0.403D-03 | 0.150D-04 |
| 7 | 0.612D-02 | 0.160D-03 | 0.439D-05 |
| 8 | 0.308D-02 | 0.648D-04 | 0.135D-05 |
| 9 | 0.156D-02 | 0.269D-04 | 0.446D-06 |
| 10 | 0.791D-03 | 0.113D-04 | 0.158D-06 |
| 11 | 0.404D-03 | 0.488D-05 | 0.599D-07 |
| 12 | 0.207D-03 | 0.213D-05 | 0.239D-07 |
| 13 | 0.106D-03 | 0.945D-06 | 0.986D-08 |
| 14 | 0.547D-04 | 0.424D-06 | 0.417D-08 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.146D+00 | 0.811D-02 | 0.435D-03 |
| 3 | 0.515D-01 | 0.199D-02 | 0.718D-04 |
| 4 | 0.190D-01 | 0.518D-03 | 0.116D-04 |
| 5 | 0.713D-02 | 0.142D-03 | 0.199D-05 |
| 6 | 0.272D-02 | 0.406D-04 | 0.386D-06 |
| 7 | 0.105D-02 | 0.121D-04 | 0.895D-07 |
| 8 | 0.407D-03 | 0.372D-05 | 0.241D-07 |
| 9 | 0.159D-03 | 0.118D-05 | 0.713D-08 |
| 10 | 0.625D-04 | 0.383D-06 | 0.221D-08 |
| 11 | 0.246D-04 | 0.127D-06 | 0.702D-09 |
| 12 | 0.974D-05 | 0.430D-07 | 0.225D-09 |
| 13 | 0.387D-05 | 0.147D-07 | 0.730D-10 |
| 14 | 0.154D-05 | 0.512D-08 | 0.238D-10 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.977D-01 | 0.379D-02 | 0.111D-03 |
| 3 | 0.285D-01 | 0.720D-03 | 0.115D-04 |
| 4 | 0.864D-02 | 0.148D-03 | 0.125D-05 |
| 5 | 0.267D-02 | 0.324D-04 | 0.166D-06 |
| 6 | 0.838D-03 | 0.752D-05 | 0.304D-07 |
| 7 | 0.266D-03 | 0.183D-05 | 0.692D-08 |
| 8 | 0.848D-04 | 0.462D-06 | 0.172D-08 |
| 9 | 0.272D-04 | 0.121D-06 | 0.440D-09 |
| 10 | 0.879D-05 | 0.323D-07 | 0.113D-09 |
| 11 | 0.285D-05 | 0.883D-08 | 0.293D-10 |
| 12 | 0.928D-06 | 0.245D-08 | 0.763D-11 |
| 13 | 0.303D-06 | 0.693D-09 | 0.200D-11 |
| 14 | 0.991D-07 | 0.198D-09 | 0.532D-12 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.690D-01 | 0.201D-02 | 0.328D-04 |
| 3 | 0.172D-01 | 0.311D-03 | 0.226D-05 |
| 4 | 0.442D-02 | 0.529D-04 | 0.182D-06 |
| 5 | 0.116D-02 | 0.974D-05 | 0.234D-07 |
| 6 | 0.309D-03 | 0.191D-05 | 0.450D-08 |
| 7 | 0.832D-04 | 0.395D-06 | 0.972D-09 |
| 8 | 0.226D-04 | 0.849D-07 | 0.212D-09 |
| 9 | 0.616D-05 | 0.188D-07 | 0.457D-10 |
| 10 | 0.169D-05 | 0.429D-08 | 0.988D-11 |
| 11 | 0.466D-06 | 0.996D-09 | 0.214D-11 |
| 12 | 0.129D-06 | 0.235D-09 | 0.471D-12 |
| 13 | 0.357D-07 | 0.565D-10 | 0.105D-12 |
| 14 | 0.994D-08 | 0.137D-10 | 0.233D-13 |

1.2

Dans cet exemple, nous avons $c = d, \gamma = \delta,$ et nous obtenons le meme nombre de chiffres exactes et aussi les memes rapports d'accélération que ceux obtenus dans l'exemple précédent correspondant à $\phi = -0.5.$

Exem 3: $f(x) = \frac{x^2}{c^2 - x^2}, w(x) = 1.$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.310D+00 | 0.139D-01 | 0.333D-02 |
| 3 | 0.130D+00 | 0.614D-02 | 0.835D-03 |
| 4 | 0.596D-01 | 0.244D-02 | 0.224D-03 |
| 5 | 0.285D-01 | 0.958D-03 | 0.613D-04 |
| 6 | 0.140D-01 | 0.379D-03 | 0.171D-04 |
| 7 | 0.693D-02 | 0.152D-03 | 0.493D-05 |
| 8 | 0.347D-02 | 0.623D-04 | 0.151D-05 |
| 9 | 0.175D-02 | 0.259D-04 | 0.492D-06 |
| 10 | 0.889D-03 | 0.110D-04 | 0.173D-06 |
| 11 | 0.453D-03 | 0.473D-05 | 0.652D-07 |
| 12 | 0.231D-03 | 0.207D-05 | 0.259D-07 |
| 13 | 0.119D-03 | 0.920D-06 | 0.107D-07 |
| 14 | 0.610D-04 | 0.414D-06 | 0.450D-08 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.210D+00 | 0.403D-02 | 0.828D-03 |
| 3 | 0.689D-01 | 0.148D-02 | 0.114D-03 |
| 4 | 0.246D-01 | 0.432D-03 | 0.175D-04 |
| 5 | 0.910D-02 | 0.124D-03 | 0.294D-05 |
| 6 | 0.344D-02 | 0.364D-04 | 0.564D-06 |
| 7 | 0.132D-02 | 0.110D-04 | 0.127D-06 |
| 8 | 0.508D-03 | 0.341D-05 | 0.332D-07 |
| 9 | 0.198D-03 | 0.109D-05 | 0.955D-08 |
| 10 | 0.774D-04 | 0.356D-06 | 0.289D-08 |
| 11 | 0.304D-04 | 0.119D-06 | 0.903D-09 |
| 12 | 0.120D-04 | 0.403D-07 | 0.286D-09 |
| 13 | 0.476D-05 | 0.139D-07 | 0.917D-10 |
| 14 | 0.189D-05 | 0.483D-08 | 0.297D-10 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.156D+00 | 0.142D-02 | 0.291D-03 |
| 3 | 0.421D-01 | 0.478D-03 | 0.263D-04 |
| 4 | 0.124D-01 | 0.113D-03 | 0.285D-05 |
| 5 | 0.375D-02 | 0.263D-04 | 0.383D-06 |
| 6 | 0.116D-02 | 0.629D-05 | 0.658D-07 |
| 7 | 0.366D-03 | 0.156D-05 | 0.136D-07 |
| 8 | 0.116D-03 | 0.401D-06 | 0.312D-08 |
| 9 | 0.371D-04 | 0.106D-06 | 0.749D-09 |
| 10 | 0.120D-04 | 0.286D-07 | 0.185D-09 |
| 11 | 0.386D-05 | 0.787D-08 | 0.463D-10 |
| 12 | 0.125D-05 | 0.220D-08 | 0.118D-10 |
| 13 | 0.409D-06 | 0.625D-09 | 0.304D-11 |
| 14 | 0.134D-06 | 0.180D-09 | 0.795D-12 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.122D+00 | 0.491D-03 | 0.126D-03 |
| 3 | 0.278D-01 | 0.177D-03 | 0.849D-05 |
| 4 | 0.692D-02 | 0.362D-04 | 0.763D-06 |
| 5 | 0.178D-02 | 0.719D-05 | 0.933D-07 |
| 6 | 0.469D-03 | 0.147D-05 | 0.146D-07 |
| 7 | 0.125D-03 | 0.313D-06 | 0.264D-08 |
| 8 | 0.338D-04 | 0.688D-07 | 0.506D-09 |
| 9 | 0.918D-05 | 0.155D-07 | 0.101D-09 |
| 10 | 0.251D-05 | 0.358D-08 | 0.205D-10 |
| 11 | 0.689D-06 | 0.841D-09 | 0.427D-11 |
| 12 | 0.190D-06 | 0.201D-09 | 0.908D-12 |
| 13 | 0.526D-07 | 0.485D-10 | 0.196D-12 |
| 14 | 0.146D-07 | 0.119D-10 | 0.433D-13 |

1.2

Les résultats d'accélération obtenus sont identiques à ceux obtenus dans l'exemple précédent, bien qu'on ait changé la fonction h .

Exem 4: $f(x) = \sqrt{c^2 - x^2}$, $w(x) = 1$.

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.437D-01 | 0.124D-03 | -0.169D-03 |
| 3 | -0.106D-01 | -0.103D-03 | -0.259D-04 |
| 4 | -0.334D-02 | -0.463D-04 | -0.540D-05 |
| 5 | -0.120D-02 | -0.174D-04 | -0.130D-05 |
| 6 | -0.469D-03 | -0.642D-05 | -0.346D-06 |
| 7 | -0.192D-03 | -0.240D-05 | -0.999D-07 |
| 8 | -0.821D-04 | -0.915D-06 | -0.309D-07 |
| 9 | -0.360D-04 | -0.357D-06 | -0.102D-07 |
| 10 | -0.161D-04 | -0.142D-06 | -0.355D-08 |
| 11 | -0.736D-05 | -0.580D-07 | -0.129D-08 |
| 12 | -0.341D-05 | -0.240D-07 | -0.484D-09 |
| 13 | -0.160D-05 | -0.101D-07 | -0.187D-09 |
| 14 | -0.754D-06 | -0.433D-08 | -0.735D-10 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.336D-01 | 0.130D-03 | -0.595D-04 |
| 3 | -0.660D-02 | -0.270D-04 | -0.583D-05 |
| 4 | -0.165D-02 | -0.101D-04 | -0.794D-06 |
| 5 | -0.468D-03 | -0.290D-05 | -0.132D-06 |
| 6 | -0.143D-03 | -0.812D-06 | -0.258D-07 |
| 7 | -0.457D-04 | -0.232D-06 | -0.568D-08 |
| 8 | -0.152D-04 | -0.678D-07 | -0.137D-08 |
| 9 | -0.518D-05 | -0.204D-07 | -0.353D-09 |
| 10 | -0.180D-05 | -0.627D-08 | -0.953D-10 |
| 11 | -0.639D-06 | -0.197D-08 | -0.266D-10 |
| 12 | -0.229D-06 | -0.632D-09 | -0.765D-11 |
| 13 | -0.832D-07 | -0.206D-09 | -0.225D-11 |
| 14 | -0.305D-07 | -0.681D-10 | -0.674D-12 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.269D-01 | 0.114D-03 | -0.267D-04 |
| 3 | -0.444D-02 | -0.699D-05 | -0.194D-05 |
| 4 | -0.925D-03 | -0.278D-05 | -0.204D-06 |
| 5 | -0.217D-03 | -0.683D-06 | -0.274D-07 |
| 6 | -0.548D-04 | -0.160D-06 | -0.439D-08 |
| 7 | -0.145D-04 | -0.379D-07 | -0.797D-09 |
| 8 | -0.397D-05 | -0.921D-08 | -0.157D-09 |
| 9 | -0.112D-05 | -0.229D-08 | -0.328D-10 |
| 10 | -0.321D-06 | -0.584D-09 | -0.715D-11 |
| 11 | -0.937D-07 | -0.152D-09 | -0.161D-11 |
| 12 | -0.277D-07 | -0.401D-10 | -0.374D-12 |
| 13 | -0.829D-08 | -0.108D-10 | -0.897D-13 |
| 14 | -0.250D-08 | -0.293D-11 | -0.215D-13 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.221D-01 | 0.947D-04 | -0.139D-04 |
| 3 | -0.313D-02 | -0.958D-06 | -0.813D-06 |
| 4 | -0.559D-03 | -0.833D-06 | -0.712D-07 |
| 5 | -0.112D-03 | -0.192D-06 | -0.811D-08 |
| 6 | -0.241D-04 | -0.397D-07 | -0.110D-08 |
| 7 | -0.543D-05 | -0.819D-08 | -0.168D-09 |
| 8 | -0.127D-05 | -0.171D-08 | -0.276D-10 |
| 9 | -0.304D-06 | -0.366D-09 | -0.482D-11 |
| 10 | -0.742D-07 | -0.798D-10 | -0.879D-12 |
| 11 | -0.184D-07 | -0.177D-10 | -0.165D-12 |
| 12 | -0.464D-08 | -0.400D-11 | -0.329D-13 |
| 13 | -0.118D-08 | -0.916D-12 | -0.577D-14 |
| 14 | -0.303D-09 | -0.212D-12 | -0.133D-14 |

1.2

Dans cet exemple, on obtient les mêmes résultats que lorsque $f(x) = x\sqrt{c-x}$.

Exem 5: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(c+x)(\beta-x)}}, w(x) = 1.$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|------------|------------|
| 2 | 0.193D+00 | 0.634D-02 | -0.123D-02 |
| 3 | 0.794D-01 | 0.771D-03 | -0.415D-03 |
| 4 | 0.348D-01 | -0.564D-04 | -0.126D-03 |
| 5 | 0.159D-01 | -0.103D-03 | -0.342D-04 |
| 6 | 0.743D-02 | -0.586D-04 | -0.743D-05 |
| 7 | 0.355D-02 | -0.265D-04 | -0.677D-06 |
| 8 | 0.173D-02 | -0.107D-04 | 0.563D-06 |
| 9 | 0.850D-03 | -0.398D-05 | 0.527D-06 |
| 10 | 0.423D-03 | -0.133D-05 | 0.320D-06 |
| 11 | 0.212D-03 | -0.376D-06 | 0.168D-06 |
| 12 | 0.107D-03 | -0.661D-07 | 0.817D-07 |
| 13 | 0.544D-04 | 0.171D-07 | 0.381D-07 |
| 14 | 0.278D-04 | 0.288D-07 | 0.172D-07 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.152D+00 | 0.243D-02 | 0.370D-03 |
| 3 | 0.610D-01 | 0.915D-03 | 0.341D-03 |
| 4 | 0.269D-01 | 0.515D-03 | 0.146D-03 |
| 5 | 0.126D-01 | 0.268D-03 | 0.520D-04 |
| 6 | 0.608D-02 | 0.129D-03 | 0.171D-04 |
| 7 | 0.300D-02 | 0.587D-04 | 0.542D-05 |
| 8 | 0.150D-02 | 0.262D-04 | 0.171D-05 |
| 9 | 0.755D-03 | 0.115D-04 | 0.541D-06 |
| 10 | 0.383D-03 | 0.507D-05 | 0.175D-06 |
| 11 | 0.195D-03 | 0.224D-05 | 0.584D-07 |
| 12 | 0.100D-03 | 0.997D-06 | 0.202D-07 |
| 13 | 0.513D-04 | 0.447D-06 | 0.732D-08 |
| 14 | 0.264D-04 | 0.202D-06 | 0.276D-08 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.134D+00 | 0.390D-02 | 0.129D-02 |
| 3 | 0.549D-01 | 0.198D-02 | 0.497D-03 |
| 4 | 0.249D-01 | 0.946D-03 | 0.150D-03 |
| 5 | 0.119D-01 | 0.414D-03 | 0.418D-04 |
| 6 | 0.582D-02 | 0.174D-03 | 0.113D-04 |
| 7 | 0.290D-02 | 0.719D-04 | 0.308D-05 |
| 8 | 0.146D-02 | 0.299D-04 | 0.873D-06 |
| 9 | 0.736D-03 | 0.125D-04 | 0.264D-06 |
| 10 | 0.374D-03 | 0.532D-05 | 0.869D-07 |
| 11 | 0.191D-03 | 0.229D-05 | 0.310D-07 |
| 12 | 0.978D-04 | 0.100D-05 | 0.119D-07 |
| 13 | 0.502D-04 | 0.446D-06 | 0.479D-08 |
| 14 | 0.258D-04 | 0.200D-06 | 0.200D-08 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.124D+00 | 0.545D-02 | 0.155D-02 |
| 3 | 0.519D-01 | 0.258D-02 | 0.473D-03 |
| 4 | 0.239D-01 | 0.111D-02 | 0.126D-03 |
| 5 | 0.115D-01 | 0.452D-03 | 0.325D-04 |
| 6 | 0.568D-02 | 0.181D-03 | 0.849D-05 |
| 7 | 0.283D-02 | 0.730D-04 | 0.232D-05 |
| 8 | 0.143D-02 | 0.298D-04 | 0.679D-06 |
| 9 | 0.721D-03 | 0.124D-04 | 0.216D-06 |
| 10 | 0.367D-03 | 0.524D-05 | 0.749D-07 |
| 11 | 0.187D-03 | 0.225D-05 | 0.280D-07 |
| 12 | 0.958D-04 | 0.985D-06 | 0.111D-07 |
| 13 | 0.492D-04 | 0.436D-06 | 0.457D-08 |
| 14 | 0.253D-04 | 0.196D-06 | 0.193D-08 |

1.2

Dans cet exemple, la fonction f n'admet pas des singularités symétriques. Pour des valeurs de β différentes, nous obtenons les mêmes résultats d'accélération, sauf lorsque la valeur de β est trop proche de celle de c , et dans ce cas, la suite (W_n) n'approxime pas la valeur de S mieux que la suite (T_n) .

Exem 6: $f(x) = \frac{\sqrt{\beta - x}}{\sqrt{c + x}}, w(x) = 1.$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.259D+00 | 0.237D-01 | 0.238D-02 |
| 3 | 0.116D+00 | 0.802D-02 | 0.696D-03 |
| 4 | 0.546D-01 | 0.291D-02 | 0.196D-03 |
| 5 | 0.265D-01 | 0.110D-02 | 0.542D-04 |
| 6 | 0.131D-01 | 0.423D-03 | 0.151D-04 |
| 7 | 0.653D-02 | 0.168D-03 | 0.436D-05 |
| 8 | 0.328D-02 | 0.678D-04 | 0.132D-05 |
| 9 | 0.166D-02 | 0.280D-04 | 0.432D-06 |
| 10 | 0.844D-03 | 0.118D-04 | 0.152D-06 |
| 11 | 0.431D-03 | 0.508D-05 | 0.576D-07 |
| 12 | 0.220D-03 | 0.222D-05 | 0.231D-07 |
| 13 | 0.113D-03 | 0.981D-06 | 0.960D-08 |
| 14 | 0.582D-04 | 0.440D-06 | 0.410D-08 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.267D+00 | 0.238D-01 | 0.236D-02 |
| 3 | 0.119D+00 | 0.805D-02 | 0.697D-03 |
| 4 | 0.561D-01 | 0.292D-02 | 0.198D-03 |
| 5 | 0.272D-01 | 0.110D-02 | 0.557D-04 |
| 6 | 0.134D-01 | 0.426D-03 | 0.158D-04 |
| 7 | 0.669D-02 | 0.169D-03 | 0.462D-05 |
| 8 | 0.336D-02 | 0.685D-04 | 0.143D-05 |
| 9 | 0.170D-02 | 0.284D-04 | 0.473D-06 |
| 10 | 0.864D-03 | 0.120D-04 | 0.168D-06 |
| 11 | 0.441D-03 | 0.515D-05 | 0.639D-07 |
| 12 | 0.226D-03 | 0.225D-05 | 0.255D-07 |
| 13 | 0.116D-03 | 0.999D-06 | 0.106D-07 |
| 14 | 0.596D-04 | 0.448D-06 | 0.448D-08 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.274D+00 | 0.240D-01 | 0.240D-02 |
| 3 | 0.122D+00 | 0.812D-02 | 0.719D-03 |
| 4 | 0.574D-01 | 0.296D-02 | 0.206D-03 |
| 5 | 0.278D-01 | 0.112D-02 | 0.581D-04 |
| 6 | 0.137D-01 | 0.434D-03 | 0.165D-04 |
| 7 | 0.684D-02 | 0.172D-03 | 0.483D-05 |
| 8 | 0.344D-02 | 0.699D-04 | 0.149D-05 |
| 9 | 0.174D-02 | 0.290D-04 | 0.491D-06 |
| 10 | 0.883D-03 | 0.122D-04 | 0.174D-06 |
| 11 | 0.450D-03 | 0.527D-05 | 0.659D-07 |
| 12 | 0.231D-03 | 0.230D-05 | 0.263D-07 |
| 13 | 0.118D-03 | 0.102D-05 | 0.108D-07 |
| 14 | 0.609D-04 | 0.458D-06 | 0.460D-08 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.281D+00 | 0.242D-01 | 0.248D-02 |
| 3 | 0.125D+00 | 0.824D-02 | 0.744D-03 |
| 4 | 0.586D-01 | 0.301D-02 | 0.213D-03 |
| 5 | 0.284D-01 | 0.114D-02 | 0.599D-04 |
| 6 | 0.140D-01 | 0.443D-03 | 0.170D-04 |
| 7 | 0.698D-02 | 0.176D-03 | 0.496D-05 |
| 8 | 0.351D-02 | 0.714D-04 | 0.153D-05 |
| 9 | 0.177D-02 | 0.296D-04 | 0.503D-06 |
| 10 | 0.901D-03 | 0.125D-04 | 0.178D-06 |
| 11 | 0.460D-03 | 0.538D-05 | 0.674D-07 |
| 12 | 0.235D-03 | 0.235D-05 | 0.268D-07 |
| 13 | 0.121D-03 | 0.104D-05 | 0.111D-07 |
| 14 | 0.622D-04 | 0.468D-06 | 0.469D-08 |

1.2

Dans cette exemple, nous trouvons des résultats identiques à ceux trouvés dans l'exemple précédent.

4 Fonction analytique ayant des singularités réelles aux points $z = \pm 1$

Soit f une fonction analytique ayant au plus deux singularités réelles, l'une au point $z = 1$ et l'autre au point $z = -1$. f s'écrira alors sous la forme: $f(x) = (1-x)^\gamma(1+x)^\delta h(x)$ avec h une fonction polynômiale non nulle aux points 1 et -1 , γ et δ étant deux réels strictement positifs.

IV-1) Représentation intégrale de $E_n(f)$.

Dans ce qui suit, nous allons exprimer de $E_n(f)$ sous la forme d'une intégrale. Considérons le contour suivant Γ :

$$\Gamma = (\gamma_1 \cup \gamma_3) \cup (\gamma_5 \cup \gamma_7) \cup (\gamma_2 \cup \gamma_6) \cup \gamma_4,$$

avec:

γ_2 et γ_6 : cercles de centres respectifs 1, -1 et de rayon $\frac{r}{2}$.

γ_4 : l'ellipse de points focaux ± 1 et de longueurs des demi-axes $\frac{R \pm 1 R^{-1}}{2}$.

$\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5$ et γ_7 les segments qui joignent les deux cercles à l'ellipse.

Soit n un entier fixé et soit $r > 0$ assez petit tel que:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x_i^n \in [-1 + r, 1 - r].$$

La fonction f étant holomorphe à l'intérieur de Γ et bornée sur Γ , on a d'après la formule de Cauchy:

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1 + r, 1 - r] \quad f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - x} dz. \\ \forall n \in \{1, \dots, n\} \quad f(x_i^n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - x_i^n} dz. \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} E_n(f) &= \int_{-1}^1 w(x) f(x) dx - \sum_{i=1}^n \lambda_i^n f(x_i^n) \\ &= \int_{-1}^{-1+r} w(x) f(x) dx + \int_{1-r}^1 w(x) f(x) dx + \int_{-1+r}^{1-r} w(x) f(x) dx - \sum_{i=1}^n \lambda_i^n f(x_i^n) \\ &= \int_{-1}^{-1+r} w(x) f(x) dx + \int_{1-r}^1 w(x) f(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \left(\int_{-1+r}^{1-r} \frac{w(x)}{z - x} dx - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{z - x_i^n} \right) dz. \end{aligned}$$

En notant: $E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right) = \int_{-1+r}^{1-r} \frac{w(x)}{z-x} dx - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{z-x_i^n}$, on obtient:

$$E_n(f) = \int_{-1}^{-1+r} w(x)f(x)dx + \int_{1-r}^1 w(x)f(x)dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right)dz.$$

Puisque $E_n(f)$ ne dépend pas de r et que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-1}^{-1+r} w(x)f(x)dx = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{1-r}^1 w(x)f(x)dx = 0,$$

on a:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Gamma} f(z)E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right)dz.$$

Lemme 1

$$a) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_2} f(z)E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right)dz = 0.$$

$$b) \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_6} f(z)E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right)dz = 0.$$

$$a) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_4} f(z)E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right)dz = 0.$$

Preuve:

a) Soit $z \in \gamma_2$, on a:

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1+r, 1-r] \quad |z-x| &\geq \frac{r}{2}, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad |z-x_i^n| &\geq \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} |E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right)| &\leq \left| \int_{-1+r}^{1-r} \frac{w(x)}{z-x} dx \right| + \left| \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{z-x_i^n} \right| \\ &\leq \frac{2}{r} \int_{-1+r}^{1-r} w(x) dx + \frac{2}{r} \sum_{i=1}^n \lambda_i^n \quad (\text{car } w \geq 0, \lambda_i^n \geq 0.) \\ &\leq \frac{2}{r} \left(\int_{-1}^1 w(x) dx + \sum_{i=1}^n \lambda_i^n \right) = \frac{4c_0}{r}, \end{aligned}$$

$$\text{avec: } \int_{-1}^1 w(x) dx = c_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n.$$

Montrer a), revient à montrer d'après le lemme I-3 que: $\lim_{|z| \rightarrow 1} (z-1)f(z)E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right) = 0$,

ou encore $\lim_{r \rightarrow 0} (z-1)f(z)E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right) = 0$, avec $z = 1 + \frac{re^{i\theta}}{2}$. Or,

$$\begin{aligned} |(z-1)f(z)E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right)| &= |(z-1)^{\gamma+1}(z+1)^\delta h(z)E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right)| \\ &\leq |z-1|^{\gamma+1} |z+1|^\delta |h(z)| \frac{4c_0}{r} \\ &= \frac{r^\gamma}{2^{\gamma-1}} \left| 2 + \frac{re^{i\theta}}{2} \right|^\delta |h\left(1 + \frac{re^{i\theta}}{2}\right)| c_0, \end{aligned}$$

d'où $\lim_{r \rightarrow 0} (z-1)f(z)E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right) = 0$, car $\gamma > 0$.

b) La démonstration est identique.

c) D'après le lemme I-3, il suffit de montrer que:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} zf(z)E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right) = 0.$$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, on a:

$$\begin{aligned} zf(z)E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right) &= 2\pi K(z)h(z) \frac{z(1-z)^\gamma(1+z)^\delta}{(z + \sqrt{z^2-1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z)) \\ &= 2\pi K(z) \frac{h(z) z^{a+1}(1-z)^\gamma(1+z)^\delta}{z^a (z + \sqrt{z^2-1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z)). \end{aligned}$$

Or, $K(z)$, $\frac{h(z)}{z^a}$, $(1 + \epsilon_n(z))$ sont bornées. De plus,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{z^{a+1}(1-z)^\gamma(1+z)^\delta}{(z + \sqrt{z^2-1})^{2n+1}} = 0 \quad \text{pour } n \text{ assez grand,}$$

d'où,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} zf(z)E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right) = 0,$$

ce qui nous donne le résultat. ■

Finalement, l'expression de l'erreur se réduit :

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\lim_{R \rightarrow 0} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_3 \cup \gamma_5 \cup \gamma_7} f(z)E_n^r\left(\frac{1}{z-}\right) dz \right).$$

En utilisant les mêmes techniques de calcul vues dans le paragraphe 3-1 de ce chapitre, on trouve que:

$$\begin{aligned} E_n(f) &= -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \int_1^\infty (y-1)^\gamma(y+1)^\delta h(y) E_n\left(\frac{1}{y-}\right) dy \\ &\quad + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} \int_1^\infty (y+1)^\gamma(y-1)^\delta h(-y) E_n\left(\frac{1}{-y-}\right) dy. \end{aligned}$$

IV)-2) Représentation asymptotique de $E_n(f)$ et de ΔS_n .

Notons:

$$J_1(n) = \int_1^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) E_n\left(\frac{1}{y-1}\right) dy.$$

$$J_2(n) = \int_1^\infty (y+1)^\gamma (y-1)^\delta h(-y) E_n\left(\frac{1}{-y-1}\right) dy.$$

$$I_1(n) = 2\pi \int_1^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) \frac{K(y)}{(y + \sqrt{y^2 - 1})^{2n+1}} dy.$$

$$I_2(n) = -2\pi \int_1^\infty (y+1)^\gamma (y-1)^\delta h(-y) \frac{K(-y)}{(y + \sqrt{y^2 - 1})^{2n+1}} dy.$$

Nous commencerons d'abord par donner les parties principales de $I_1(n)$ et de $I_2(n)$.

lemme 2

on obtient les equivalences suivantes au voisinage de l'infini:

$$\begin{aligned} a) I_1(n) \sim B_1 G_1(n) & \quad \text{avec} \begin{cases} B_1 = \frac{2\pi}{2^{(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)}} h(1) \Gamma(2\alpha + 2\beta + 2) \\ G_1(n) = \frac{1}{(2n+1)^{(2\alpha+2\gamma+2)}.} \end{cases} \\ b) I_2(n) \sim B_2 G_2(n) & \quad \text{avec} \begin{cases} B_2 = -\frac{2\pi}{2^{(\beta+\delta)-(\alpha+\gamma)}} h(-1) \Gamma(2\beta + 2\delta + 2) \\ G_2(n) = \frac{1}{(2n+1)^{(2\delta+2\beta+2)}.} \end{cases} \end{aligned}$$

preuve:

a) En faisant le changement de variable $y = ch(\theta)$, $c = ch(\phi)$, on obtient:

$$I_1(n) = 2\pi \int_\phi^\infty (ch(\theta) - 1)^\gamma (ch(\theta) + 1)^\delta h(ch(\theta)) K(ch(\theta)) sh(\theta) e^{-(2n+1)\theta} d\theta.$$

En remarquant que $ch(\theta) - 1 = 2sh^2\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right)$, $K(ch(\theta)) = \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} (1 + e^{-\theta})^{2\beta} (1 - e^{-\theta})^{2\alpha}$, et en notant:

$$F(\theta) = \frac{2\pi}{2^{\alpha+\beta-\gamma}} (ch(\theta) + 1)^\delta (1 + e^{-\theta})^{2\beta} h(ch(\theta)),$$

on obtient:

$$I_1(n) = \int_0^\infty \frac{F(\theta)}{e^{(2n+1)\theta}} (1 - e^{-\theta})^{2\alpha} sh^{2\gamma}\left(\frac{\theta}{2}\right) sh(\theta) d\theta.$$

Soit b le plus petit réel positif non nul tel que $\int_0^\infty \frac{|F(\theta)|}{e^{b\theta}} (1 - e^{-\theta})^{2\alpha} sh^{2\gamma}\left(\frac{\theta}{2}\right) sh(\theta) e^{-\theta} d\theta$ converge. Puisque au voisinage de zéro nous avons:

$$\frac{F(\theta)}{e^{b\theta}} (1 - e^{-\theta})^{2\alpha} sh^{2\gamma}\left(\frac{\theta}{2}\right) sh(\theta) \sim \frac{F(0)}{\theta^{2\gamma}} \theta^{2(\alpha+\gamma)+1},$$

on peut deduire à partir du théorème I-2), que:

$$I_1(n) \sim \frac{F(0)}{2^{2\gamma}} \frac{\Gamma(2\alpha + 2\gamma + 2)}{(2n+1 - b)^{2\alpha+2\gamma+2}} \sim \frac{F(0)}{2^{2\gamma}} \frac{\Gamma(2\alpha + 2\gamma + 2)}{(2n+1)^{2\alpha+2\gamma+2}}.$$

Or,

$$F(0) = \frac{2\pi}{2^{\alpha-(\beta+\gamma+\delta)}} h(1)$$

$$\text{D'où, en notant: } \begin{cases} B_1 = \frac{2\pi}{2^{(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)}} h(1) \Gamma(2\alpha + 2\beta + 2), \\ G_1(n) = \frac{1}{(2n+1)^{(2\alpha+2\gamma+2)},} \end{cases}$$

on obtient le résultat.

b) La démonstration est identique. ■

Lemme 3

a) $J_1(n) \sim I_1(n)$.

b) $J_2(n) \sim I_2(n)$.

Preuve:

a) On a vu dans la proposition I-4) que:

$$\forall y \in]1, \infty[\quad E_n\left(\frac{1}{y-}\right) = 2\pi \frac{K(y)}{(y + \sqrt{y^2 + 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(y)).$$

$$\begin{aligned} J_1(n) &= \int_1^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) E_n\left(\frac{1}{y-}\right) dy \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{1+\epsilon}^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) E_n\left(\frac{1}{y-}\right) dy \\ &= 2\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{1+\epsilon}^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) \frac{K(y)}{(y + \sqrt{y^2 + 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(y)) dy \\ &= 2\pi \int_1^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) \frac{K(y)}{(y + \sqrt{y^2 + 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(y)) dy. \end{aligned}$$

En posant: $G_n(y) = 2\pi (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) \frac{K(y)}{(y + \sqrt{y^2 + 1})^{2n+1}}$, on obtient:

$$\int_1^\infty G_n(y) dy \sim |B_1| G_1(n) \sim \left| \int_1^\infty G_n(y) dy \right|,$$

d'où le résultat d'après la proposition I-7).

b) La démonstration est identique. ■

Proposition 1

Soit h un polynôme ne s'annulant pas aux points $z = \pm 1$. En utilisant les notations des lemmes précédents, on obtient:

a) si $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ et $B_1 \sin(\pi\gamma) \neq B_2 \sin(\pi\delta)$, alors on a:

$$E_n(f) \sim \frac{B_2 \sin(\pi\delta) - B_1 \sin(\pi\gamma)}{\pi} G_1(n).$$

b) si $\alpha + \gamma \leq \beta + \delta$, alors on a:

$$E_n(f) \sim -\frac{B_1 \sin(\pi\gamma)}{\pi} G_1(n).$$

c) si $\alpha + \gamma \geq \beta + \delta$, alors on a:

$$E_n(f) \sim \frac{B_2 \sin(\pi\delta)}{\pi} G_2(n).$$

Preuve.

On a vu au début de ce paragraphe que:

$$E_n(f) = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} J_1(n) + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} J_2(n).$$

Or, on a vu dans les deux lemmes précédents qu'au voisinage de l'infini, nous avons les équivalences suivantes:

$$J_1(n) \sim B_1 G_1(n), J_2(n) \sim B_2 G_2(n).$$

Donc,

$$\begin{aligned} -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} J_1(n) &= -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_1 G_1(n) + o(G_1(n)). \\ \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} J_2(n) &= \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} B_2 G_2(n) + o(G_2(n)). \end{aligned}$$

D'où:

$$E_n(f) = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_1 G_1(n) + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} B_2 G_2(n) + o(G_1(n)) + o(G_2(n)).$$

a) $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. Dans ce cas, on a $G_2(n) = G_1(n)$, donc :

$$E_n(f) = \frac{(\sin(\pi\delta)B_2 - \sin(\pi\gamma)B_1)}{\pi} G_1(n) + o(G_1(n)),$$

i. e.

$$E_n(f) \sim \frac{(\sin(\pi\delta)B_2 - \sin(\pi\gamma)B_1)}{\pi} G_1(n).$$

b) $\alpha + \gamma < \beta + \delta$. Dans ce cas, on a $G_2(n) = o(G_1(n))$, donc :

$$E_n(f) = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_1 G_1(n) + o(G_1(n)),$$

i. e.

$$E_n(f) \sim -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_1 G_1(n).$$

c) $\alpha + \gamma > \beta + \delta$. Dans ce cas, on a $G_1(n) = o(G_2(n))$, donc :

$$E_n(f) = -\frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} B_2 G_2(n) + o(G_2(n)),$$

i. e.

$$E_n(f) \sim -\frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} B_2 G_2(n).$$

On va suivre ici le même cheminement afin de donner une partie principale de ΔS_n . En remplaçant c et d par 1 dans la proposition 3-3, on obtient : $\exists n_0 / \forall n \geq n_0$ ■

$$\begin{aligned} \Delta S_n &= -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_1^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) Q_n^{\alpha,\beta}(y) dy \\ &\quad + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_1^\infty (y+1)^\gamma (y-1)^\delta h(-y) Q_n^{\alpha,\beta}(-y) dy. \end{aligned}$$

Notons alors:

$$J_1(n) = \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_1^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) Q_n^{\alpha,\beta}(y) dy.$$

$$J_2(n) = \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_1^\infty (y+1)^\gamma (y-1)^\delta h(-y) Q_n^{\alpha,\beta}(-y) dy.$$

$$I_1(n) = 4\pi \int_1^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) \frac{K(y) \sqrt{(y^2-1)}}{(y + \sqrt{y^2-1})^{2n+2}} dy.$$

$$I_2(n) = 4\pi \int_1^\infty (y+1)^\gamma (y-1)^\delta h(-y) \frac{K(-y) \sqrt{(y^2-1)}}{(y + \sqrt{y^2-1})^{2n+2}} dy.$$

lemme 4

$$\begin{aligned} a) I_1(n) \sim A_1 g_1(n) & \quad \text{avec} \begin{cases} A_1 = \frac{\pi}{2^{3(\alpha+\gamma)+1-(\beta+\delta)}} h(1) \Gamma(2\alpha + 2\beta + 3) \\ g_1(n) = \frac{1}{(n+1)^{(2\alpha+2\gamma+3)}.} \end{cases} \\ b) I_2(n) \sim A_2 g_2(n) & \quad \text{avec} \begin{cases} A_2 = -\frac{\pi}{2^{3(\beta+\delta)+1-(\alpha+\gamma)}} h(-1) \Gamma(2\beta + 2\delta + 3) \\ g_2(n) = \frac{1}{(n+1)^{(2\delta+2\beta+2)}.} \end{cases} \end{aligned}$$

Preuve:

a) En faisant le changement de variable $y = ch(\theta)$, $c = ch(\phi)$, on obtient:

$$I_1(n) = 2\pi \int_0^\infty (ch(\theta) - 1)^\gamma (ch(\theta) + 1)^\delta h(ch(\theta)) K(ch(\theta)) sh^2(\theta) e^{-(2n+2)\theta} d\theta.$$

En remarquant que $(ch(\theta) - 1)^\gamma = 2^\gamma sh^{2\gamma}(\frac{\theta}{2})$, $K(ch(\theta)) = \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} (1 + e^{-\theta})^{2\beta} (1 - e^{-\theta})^{2\alpha}$, et en notant:

$$F(\theta) = \frac{4\pi}{2^{\alpha+\beta-\gamma}} (ch(\theta) + 1)^\delta (1 + e^{-\theta})^{2\beta} h(ch(\theta)),$$

on obtient:

$$I_1(n) = \int_0^\infty \frac{F(\theta)}{e^{(2n+2)\theta}} (1 - e^{-\theta})^{2\alpha} sh^{2\gamma}(\frac{\theta}{2}) sh^2(\theta) d\theta.$$

Soit b le plus petit réel positif non nul tel que $\int_0^\infty \frac{|F(\theta)|}{e^{b\theta}} (1 - e^{-\theta})^{2\alpha} sh^{2\gamma}(\frac{\theta}{2}) sh^2(\theta) e^{-\theta} d\theta$ converge. Puisque au voisinage de zéro nous avons:

$$\frac{F(\theta)}{e^{b\theta}} (1 - e^{-\theta})^{2\alpha} sh^{2\gamma}(\frac{\theta}{2}) sh^2(\theta) \sim \frac{F(0)}{2^{2\gamma}} \theta^{2(\alpha+\gamma)+1},$$

on peut deduire à partir du théorème I-2), que:

$$I_1(n) \sim \frac{F(0)}{2^{2\gamma}} \frac{\Gamma(2\alpha + 2\gamma + 3)}{(2n + 2 - b)^{2\alpha+2\gamma+3}} \sim \frac{F(0)}{2^{2\gamma}} \frac{\Gamma(2\alpha + 2\gamma + 3)}{(2n + 2)^{2\alpha+2\gamma+3}}.$$

Or,

$$F(0) = \frac{4\pi}{2^{(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)}} h(1).$$

Donc :

$$I_1(n) \sim \frac{\pi}{2^{3(\alpha+\gamma)+1-(\beta+\delta)}} h(1) \Gamma(2\alpha + 2\beta + 3) \frac{1}{(n + 1)^{2\alpha+2\gamma+3}},$$

d'ou le résultat.

b) La démonstration est identique. ■

Lemme 5

a) $J_1(n) \sim I_1(n)$.

b) $J_2(n) \sim I_2(n)$.

a) On a vu dans la proposition I-1) que:

$$\forall y \in]1, \infty[\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha,\beta}(y) = 4\pi \frac{K(y) \sqrt{y^2 - 1}}{(y + \sqrt{y^2 + 1})^{2n+2}} (1 + \delta_n(y)).$$

donc

$$\begin{aligned}
J_1(n) &= \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_1^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) Q_n^{\alpha, \beta}(y) dy \\
&= \frac{a_{n+1}}{a_n} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{1+\epsilon}^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) Q_n^{\alpha, \beta}(y) dy \\
&= 4\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{1+\epsilon}^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) \frac{K(y) \sqrt{y^2-1}}{(y + \sqrt{y^2+1})^{2n+2}} (1 + \delta_n(y)) dy \\
&= 4\pi \int_1^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) \frac{K(y) \sqrt{y^2-1}}{(y + \sqrt{y^2+1})^{2n+2}} (1 + \delta_n(y)) dy.
\end{aligned}$$

En posant : $G_n(y) = 4\pi (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) \frac{K(y) \sqrt{y^2-1}}{(y + \sqrt{y^2+1})^{2n+2}}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_1(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty G_n(y) dy = 0, \text{ donc}$$

$$\int_1^\infty |G_n(y)| dy \sim |A_1| g_1(n) \sim \left| \int_1^\infty G_n(y) dy \right|$$

d'où le résultat d'après la proposition I-7).

b) La démonstration est identique. ■

Proposition 2

Soit h un polynôme ne s'annulant pas aux points $z = \pm 1$. En utilisant les notations des lemmes précédents, on obtient :

a) si $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ et $A_1 \sin(\pi\gamma) \neq A_2 \sin(\pi\delta)$, alors on a :

$$\Delta S_n \sim \frac{A_2 \sin(\pi\delta) - A_1 \sin(\pi\gamma)}{\pi} g_1(n).$$

b) si $\alpha + \gamma \leq \beta + \delta$, alors on a :

$$\Delta S_n \sim -\frac{A_1 \sin(\pi\gamma)}{\pi} g_1(n).$$

c) si $\alpha + \gamma \geq \beta + \delta$, alors on a :

$$\Delta S_n \sim \frac{A_2 \sin(\pi\delta)}{\pi} g_2(n).$$

Preuve:

On a vu au début de ce paragraphe que :

$$\Delta S_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} J_1(n) + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} J_2(n).$$

Or, on a vu dans les deux lemmes précédents qu'au voisinage de l'infini, nous avons les equivalences suivantes:

$$J_1(n) \sim A_1 g_1(n), J_2(n) \sim A_2 g_2(n).$$

Donc,

$$\begin{aligned} -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} J_1(n) &= -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n) + o(g_1(n)). \\ \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} J_2(n) &= \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} A_2 g_2(n) + o(g_2(n)). \end{aligned}$$

D'où:

$$\Delta S_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n) + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} A_2 g_2(n) + o(g_1(n)) + o(g_2(n)).$$

a) $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. Dans ce cas, on a $g_2(n) = g_1(n)$, donc :

$$\Delta S_n = \frac{(\sin(\pi\delta)A_2 - \sin(\pi\gamma)A_1)}{\pi} g_1(n) + o(g_1(n)),$$

i. e.

$$\Delta S_n \sim \frac{(\sin(\pi\delta)A_2 - \sin(\pi\gamma)A_1)}{\pi} g_1(n).$$

b) $\alpha + \gamma < \beta + \delta$. Dans ce cas, on a $g_2(n) = o(g_1(n))$, donc :

$$\Delta S_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n) + o(g_1(n)),$$

i. e.

$$\Delta S_n \sim -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n).$$

c) $\alpha + \gamma > \beta + \delta$. Dans ce cas, on a $g_1(n) = o(g_2(n))$, donc :

$$\Delta S_n = \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} A_2 g_2(n) + o(g_2(n)),$$

i. e.

$$\Delta S_n \sim \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} A_2 g_2(n).$$

■

TABLEAU RECAPULATIF

$$B_1 = 2\pi h(1) \frac{\Gamma(2\alpha + 2\gamma + 2)}{2^{(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)}}$$

$$B_2 = -2\pi h(-1) \frac{\Gamma(2\beta + 2\delta + 2)}{2^{(\beta+\delta)-(\alpha+\gamma)}}$$

$$G_1(n) = \frac{1}{(2n + 1)^{2(\alpha+\gamma+1)}}$$

$$G_2(n) = \frac{1}{(2n + 1)^{2(\beta+\delta+1)}}$$

$$A_1 = \pi h(1) \frac{\Gamma(2\alpha + 2\gamma + 3)}{2^{3(\alpha+\gamma)+1-(\beta+\delta)}}$$

$$A_2 = -\pi h(-1) \frac{\Gamma(2\beta + 2\delta + 3)}{2^{3(\beta+\delta)+1-(\alpha+\gamma)}}$$

$$g_1(n) = \frac{1}{(n + 1)^{2\alpha+2\gamma+3}}$$

$$g_2(n) = \frac{1}{(n + 1)^{2\beta+2\delta+3}}$$

| | $E_n(f) \sim V_n$ | $\Delta S_n \sim U_n$ |
|------------------------------|--|--|
| $c = d$ $\gamma = \delta$ | $V_n = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} (B_2 - B_1) G_1(n)$ | $U_n = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} (A_2 - A_1) g_1(n)$ |
| $c = d$ $\gamma < \delta$ | $V_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_1 G_1(n)$ | $U_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n)$ |
| $c = d$ $\gamma > \delta$ | $V_n = \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} B_2 G_2(n)$ | $U_n = \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} A_2 g_2(n)$ |
| $c < d$ | $V_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} B_1 G_1(n)$ | $U_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} A_1 g_1(n)$ |
| $c > d$ | $V_n = \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} B_2 G_2(n)$ | $U_n = \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} A_2 g_2(n)$ |

IV)-3) Accélération de la convergence de la suite (S_n)

REMARQUE:

La suite $(S_n)_n$ est une suite à convergence logarithmique. En effet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S - S_{n+1}}{S - S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_i(n+1)}{G_i(n)} = 1, \text{ avec } i = 1 \text{ ou } 2.$$

Lemme 6

$$a) \Delta G_1(n) \sim -\frac{4(\alpha + \gamma + 1)}{(2n + 1)^{2(\alpha + \gamma + 1) + 1}}.$$

$$b) \Delta G_2(n) \sim -\frac{4(\beta + \delta + 1)}{(2n + 1)^{2(\beta + \delta + 1) + 1}}.$$

Preuve: a)

$$\begin{aligned} \Delta G_1(n) &= \frac{1}{(2n + 3)^{2(\alpha + \gamma + 1)}} - \frac{1}{(2n + 1)^{2(\alpha + \gamma + 1)}} \\ &= \frac{1}{(2n + 3)^{2(\alpha + \gamma + 1)}} \left(1 - \left(\frac{2n + 3}{2n + 1} \right)^{2(\alpha + \gamma + 1)} \right) \\ &= \frac{1}{(2n + 3)^{2(\alpha + \gamma + 1)}} \left(1 - \left(1 + \frac{2}{2n + 1} \right)^{2(\alpha + \gamma + 1)} \right) \\ &= \frac{1}{(2n + 3)^{2(\alpha + \gamma + 1)}} \left(1 - \left(1 + \frac{4(\alpha + \gamma + 1)}{2n + 1} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) \\ &= -\frac{4(\alpha + \gamma + 1)}{(2n + 1)(2n + 3)^{2(\alpha + \gamma + 1)}} + o\left(\frac{1}{n^{2(\alpha + \gamma + 1) + 1}}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta G_1(n) \sim -\frac{4(\alpha + \gamma + 1)}{(2n + 1)(2n + 3)^{2(\alpha + \gamma + 1)}} \sim -\frac{4(\alpha + \gamma + 1)}{(2n + 1)^{2(\alpha + \gamma + 1) + 1}}.$$

b) La démonstration est identique. ■

Proposition 4

Soit $D_n = -\frac{\Delta S_n}{\Delta G_i(n)} G_i(n)$ avec

La suite $(T_n)_n$ définie par: $T_n = S_n + D_n$ converge vers S plus rapidement que la suite $(S_n)_n$.

Preuve:

$$\begin{aligned} T_n - S &= S_n + D_n = (S_n - S) - \left(\frac{\Delta S_n}{\Delta G_i(n)} G_i(n) \right) \\ &= (S_n - S) \left(1 + \frac{G_i(n)}{S - S_n} \frac{\Delta S_n}{\Delta G_i(n)} \right). \end{aligned}$$

Donc:

$$\frac{T_n - S}{S_n - S} = 1 + \frac{G_i(n)}{S - S_n} \frac{\Delta S_n}{\Delta G_i(n)}.$$

Premier cas: $\alpha + \gamma = \beta + \delta$, donc $i = 1$.

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_1(n)}{S - S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_1(n)\pi}{(B_2 \sin(\pi\delta) - B_1 \sin(\pi\gamma))G_1(n)} = \frac{\pi}{(B_2 \sin(\pi\delta) - B_1 \sin(\pi\gamma))}.$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_n}{\Delta G_1(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(A_2 \sin(\pi\delta) - A_1 \sin(\pi\gamma))}{\pi \Delta G_1(n)} g_1(n).$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_1(n)}{\Delta G_1(n)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^{2\alpha+2\gamma+3}}{(n+1)^{2\alpha+2\gamma+3}} \frac{1}{4(\alpha+\gamma+1)} = - \frac{2^{2\alpha+2\gamma+1}}{\alpha+\gamma+1}.$$

$$\text{D'où: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_n}{\Delta G_1(n)} = - \frac{2^{2\alpha+2\gamma+1}}{\pi(\alpha+\gamma+1)} (A_2 \sin(\pi\delta) - A_1 \sin(\pi\gamma)).$$

Finalement:

$$\frac{G_1(n)}{S - S_n} \frac{\Delta S_n}{\Delta G_1(n)} = - \frac{2^{2\alpha+2\gamma+1}}{(\alpha+\gamma+1)} \frac{(A_2 \sin(\pi\delta) - A_1 \sin(\pi\gamma))}{(B_2 \sin(\pi\delta) - B_1 \sin(\pi\gamma))}$$

Or, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, donc:

$$\frac{(A_2 \sin(\pi\delta) - A_1 \sin(\pi\gamma))}{(B_2 \sin(\pi\delta) - B_1 \sin(\pi\gamma))} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{\beta + \delta + 1}{2^{2(\beta+\delta)+1}}$$

Ainsi, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n - S}{S_n - S} = 1 - \frac{2^{2(\alpha+\gamma)+1}}{\alpha+\gamma+1} \frac{\beta + \delta + 1}{2^{2(\beta+\delta)+1}} = 1 - 1 = 0, \text{ car } \alpha + \gamma = \beta + \delta.$$

Deuxième cas: $\alpha + \gamma < \beta + \delta$, donc $i = 1$.

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_1(n)}{S - S_n} = - \frac{\pi}{B_1 \sin(\pi\gamma)}.$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_n}{\Delta G_1(n)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_1 \sin(\pi\gamma)}{\pi} \frac{g_1(n)}{\Delta G_1(n)} = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \frac{2^{2\alpha+2\gamma+1}}{\alpha+\gamma+1} A_1.$$

Ainsi, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n - S}{S_n - S} = 1 - \frac{2^{2(\alpha+\gamma)+1}}{\alpha+\gamma+1} \frac{A_1}{B_1} = 1 - 1 = 0, \text{ car } \frac{A_1}{B_1} = \frac{\alpha+\gamma+1}{2^{2(\alpha+\gamma)+1}}.$$

Troisième cas: $\alpha + \gamma > \beta + \delta$, donc $i = 1$.

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_2(n)}{S - S_n} = - \frac{\pi}{B_2 \sin(\pi\delta)}.$$

$$* \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_n}{\Delta G_2(n)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_2 \sin(\pi\delta)}{\pi} \frac{g_2(n)}{\Delta G_2(n)} = \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} \frac{2^{2\beta+2\delta+1}}{\beta+\delta+1} A_2.$$

Ainsi, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n - S}{S_n - S} = 1 - \frac{2^{2(\beta+\delta)+1} A_2}{\beta + \delta + 1 B_2} = 1 - 1 = 0, \text{ car } \frac{A_2}{B_2} = \frac{\beta + \delta + 1}{2^{2(\beta+\delta)+1}}.$$

EXEMPLE NUMERIQUE.

Soit $f(x) = x(1-x)^\gamma$ avec $\gamma = 0.2, 0.5$ ou 0.9 et $w(x) = 1$.

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ |
|----|-----------|------------|
| 2 | 0.276D-01 | -0.263D-02 |
| 3 | 0.108D-01 | -0.618D-03 |
| 4 | 0.566D-02 | -0.215D-03 |
| 5 | 0.341D-02 | -0.925D-04 |
| 6 | 0.225D-02 | -0.459D-04 |
| 7 | 0.159D-02 | -0.251D-04 |
| 8 | 0.117D-02 | -0.148D-04 |
| 9 | 0.891D-03 | -0.925D-05 |
| 10 | 0.699D-03 | -0.605D-05 |
| 11 | 0.560D-03 | -0.411D-05 |
| 12 | 0.458D-03 | -0.288D-05 |
| 13 | 0.380D-03 | -0.207D-05 |
| 14 | 0.320D-03 | -0.153D-05 |
| 15 | 0.272D-03 | -0.115D-05 |

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ |
|----|-----------|------------|
| 2 | 0.276D-01 | -0.263D-02 |
| 3 | 0.108D-01 | -0.618D-03 |
| 4 | 0.566D-02 | -0.215D-03 |
| 5 | 0.341D-02 | -0.925D-04 |
| 6 | 0.112D-02 | -0.268D-04 |
| 7 | 0.717D-03 | -0.135D-04 |
| 8 | 0.489D-03 | -0.739D-05 |
| 9 | 0.348D-03 | -0.432D-05 |
| 10 | 0.257D-03 | -0.267D-05 |
| 11 | 0.195D-03 | -0.172D-05 |
| 12 | 0.151D-03 | -0.115D-05 |
| 13 | 0.120D-03 | -0.788D-06 |
| 14 | 0.965D-04 | -0.557D-06 |
| 15 | 0.789D-04 | -0.402D-06 |

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ |
|----|-----------|------------|
| 2 | 0.546D-02 | -0.595D-03 |
| 3 | 0.109D-02 | -0.786D-04 |
| 4 | 0.371D-03 | -0.187D-04 |
| 5 | 0.163D-03 | -0.606D-05 |
| 6 | 0.836D-04 | -0.238D-05 |
| 7 | 0.475D-04 | -0.107D-05 |
| 8 | 0.291D-04 | -0.530D-06 |
| 9 | 0.189D-04 | -0.284D-06 |
| 10 | 0.128D-04 | -0.162D-06 |
| 11 | 0.904D-05 | -0.971D-07 |
| 12 | 0.488D-05 | -0.393D-07 |
| 14 | 0.371D-05 | -0.263D-07 |
| 15 | 0.287D-05 | -0.180D-07 |

On remarque que lorsque ϕ croît, la convergence des suites (S_n) et (T_n) devient rapide.

CHAPITRE III

FONCTIONS ANALYTIQUES POSSEDANT DES PÔLES A L'EXTERIEUR DE L'INTERVALLE D'INTEGRATION

INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on va étudier le cas où l'intégrand est une fonction analytique possédant différentes sortes de pôles situés dans $\mathcal{C} \setminus [-1, 1]$.

Dans le paragraphe 1, on donnera l'expression générale de $E_n(f)$ et de ΔS_n dans le cadre mentionné ci dessus.

Dans le paragraphe 2, on étudiera séparément les cas où f admet un pôle simple unique, 2 pôles conjugués, un nombre infini de pôles simples ou conjugués, et enfin un pôle multiple unique.

Dans chaque cas étudié, on donnera une représentation asymptotique de $E_n(f)$ et de ΔS_n à partir desquelles on transformera la suite initiale (S_n) en deux autres suites (T_n) et (W_n) qui convergent vers S plus vite que la suite (S_n) .

Dans le paragraphe 3, on étudiera le cas où le pôle est unique mais d'un ordre de multiplicité m quelconque. En un premier lieu, on donnera des représentations asymptotiques des dérivées d'ordre j des fonctions $F_n(z) = \frac{1}{r^{2n+1}}$ et $A_n(z) = \frac{\sqrt{z^2-1}}{r^{2n+1}}$ où $r = z + \sqrt{z^2-1}$, puis on donnera des représentations asymptotiques de $E_n(f)$ et de ΔS_n . Comme dans les paragraphes précédents, on transformera la suite initiale (S_n) en deux autres suites (T_n) et (W_n) qui convergent vers S plus vite que la suite (S_n) .

On remarquera que dans tous les cas étudiés, les suites (S_n) sont à convergence linéaire avec: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S - S_{n+1}}{S - S_n} = \frac{1}{r_1^2}$ où $r_1 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}$, z_1 étant le pôle de f vérifiant $|r_1| < |r_i|, \forall i \geq 2$. Tous les cas étudiés seront illustrés par des exemples numériques.

1 Expression de l'erreur

Soit f une fonction analytique admettant un certain nombre, fini ou infini de pôles dans $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ qui sont d'un ordre de multiplicité quelconque. On désignera par les z_i les pôles de f avec:

$Z_1 = \{z_i \text{ pôles simples de } f\}$,

$Z_2 = \{z_i \text{ pôles de } f \text{ de multiplicité } k_i\}$.

On désignera par E_R , l'ellipse de points focaux ± 1 , et de longueurs des demi-axes $(R \pm R^{-1})/2$ et $E'_R = E_R - \sum_i C_i(r_i) \cup I_i^1 \cup I_i^2$, avec:

$C_i(r_i)$ est le cercle de centre z_i et de rayon r_i .

I_i^1 et I_i^2 sont les deux segments qui joignent le cercle $C_i(r_i)$ à l'ellipse.

La fonction f étant régulière à l'intérieur de E'_R , on a d'après la proposition I-6):

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E'_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz.$$

En appliquant le théorème des résidus [12, p. 239], on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{E'_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz + \sum_{z_i \in Z_1} \phi(z_i) E_n\left(\frac{1}{z_i-\cdot}\right) \\ &+ \sum_{z_i \in Z_2} \frac{1}{(k_i-1)!} D^{k_i-1} \left((z-z_i)^{k_i} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) \right)_{z=z_i} \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{cases} \phi(z_i) &= \lim_{z \rightarrow z_i} (z-z_i) f(z). \\ D^{k_i} &= \frac{d^{k_i}}{dz^{k_i}}. \end{cases}$$

On obtient ainsi le résultat suivant:

Proposition 1

Soit f une fonction analytique admettant un nombre fini ou infini de pôles simples ou multiples appartenant respectivement aux ensembles Z_1 et Z_2 . Soit $R \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que pour tout z dans $Z_1 \cup Z_2$, z appartenant à l'intérieur de E_R . on a:

a)

$$\begin{aligned} E_n(f) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz - \sum_{z_i \in Z_1} \phi(z_i) E_n\left(\frac{1}{z_i-\cdot}\right) \\ &- \sum_{z_i \in Z_2} \frac{1}{(k_i-1)!} D^{k_i-1} \left((z-z_i)^{k_i} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) \right)_{z=z_i}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \Delta S_n &= \frac{1}{2\pi i} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_{E_R} f(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) dz - \frac{a_{n+1}}{a_n} \sum_{z_i \in Z_1} \phi(z_i) Q_n^{\alpha, \beta}(z_i) \\ &- \frac{a_{n+1}}{a_n} \sum_{z_i \in Z_2} \frac{1}{(k_i-1)!} D^{k_i-1} \left((z-z_i)^{k_i} f(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) \right)_{z=z_i}. \end{aligned}$$

2 Fonction ayant des pôles simples

2-1) Fonction ayant un pôle simple unique.

Soit f une fonction analytique admettant un pôle simple unique z_1 situé dans $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. La fonction f s'écrira alors sous la forme: $f(z) = \frac{h(z)}{z - z_1}$, avec h fonction non nulle au point z_1 et vérifiant l'hypothèse suivante:

$$(H) \quad \exists R \geq |z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}|, h \in H^\infty(E_R).$$

L'expression de l'erreur sera alors:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z}\right) dz - h(z_1) E_n\left(\frac{1}{z_1}\right).$$

2-1-a) Représentation asymptotique de $E_n(f)$ et de ΔS_n .

Proposition 2

Soit $r_1 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}$, avec $z_1 \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

En posant $A = -2\pi K(z_1) h(z_1)$, nous obtenons les équivalences suivantes lorsque n tend vers l'infini:

$$\begin{aligned} a) \quad E_n(f) &\sim \frac{A}{r_1^{2n+1}}. \\ b) \quad \Delta S_n &\sim \frac{2A\sqrt{z_1^2 - 1}}{r_1^{2n+2}}. \end{aligned}$$

Preuve:

a) Soit $R_1 = |r_1| = |z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}|$, et soit $R > R_1$ un réel tel que $h \in H^\infty(E_R)$. On a vu dans la proposition I-4 que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$,

$$E_n\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi \frac{K(z)}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z)).$$

Ainsi,

$$E_n(f) = \frac{1}{i} \int_{E_R} \frac{f(z)K(z)}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z)) dz - 2\pi \frac{h(z_1)K(z_1)}{(z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z_1)).$$

Divisons les deux membres de cette égalité par: $A = -2\pi h(z_1) \frac{K(z_1)}{r_1^{2n+1}}$, et notons I_n le quotient résultant, on obtient alors:

$$\frac{E_n(f)}{A} = I_n = -\frac{1}{2\pi i} \frac{r_1^{2n+1}}{h(z_1)K(z_1)} \int_{E_R} \frac{f(z)K(z)}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z)) dz + (1 + \epsilon_n(z_1)).$$

Notons alors:

$$J_n = -\frac{1}{2\pi i} \frac{r_1^{2n+1}}{h(z_1)K(z_1)} \int_{E_R} \frac{f(z)K(z)}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z)) dz,$$

et montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$.

Soit $l(R)$ la longueur de E_R , $M(R) = \text{Max}\{|f(z)K(z)|, z \in E_R\}$. on a alors:

$$|J_n| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(R)}{|h(z_1)K(z_1)|} \left(\frac{R_1}{R}\right)^{2n+1} \int_{E_R} |1 + \epsilon_n(z)| dz.$$

Puisque la suite $(\epsilon_n(z))$ converge uniformément vers zéro sur tout compact de $\mathcal{C} \setminus [-1, 1]$, on a:

$$\exists n_0 / \forall n \geq n_0 \quad |1 + \epsilon_n(z)| \leq 2, \forall z \in E_R.$$

D'où, avec les notations précédentes, on a:

$$|J_n| \leq \frac{M(R)l(R)}{\pi|h(z_1)K(z_1)|} \left(\frac{R_1}{R}\right)^{2n+1}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Puisque $R_1 < R$, on a: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{R_1}{R}\right)^{2n+1} = 0$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$, ce qui nous donne en définitive: $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$, i.e.

$$E_n(f) \sim -2\pi \frac{h(z_1)K(z_1)}{r_1^{2n+1}}.$$

b) D'après a), la suite (S_n) est une suite à convergence linéaire: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{n+1}(f)}{E_n(f)} = \frac{1}{r_1^2}$.
or,

$$\frac{E_n(f)}{E_{n+1}(f)} = \frac{\Delta S_n + E_{n+1}(f)}{E_{n+1}(f)} = \frac{\Delta S_n}{E_{n+1}(f)} + 1.$$

Donc: $\Delta S_n = E_{n+1}(f) \left(\frac{E_n(f)}{E_{n+1}(f)} - 1 \right)$.

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(f)}{E_{n+1}(f)} - 1 = r_1^2 - 1 \neq 0$, et $E_{n+1}(f) \sim -2\pi \frac{h(z_1)K(z_1)}{r_1^{2n+3}}$, d'où:

$$\begin{aligned} \Delta S_n &\sim (r_1^2 - 1)(-2\pi) \frac{h(z_1)K(z_1)}{r_1^{2n+3}} \\ &= -4\pi \sqrt{z_1^2 - 1} \frac{h(z_1)K(z_1)}{r_1^{2n+3}}. \end{aligned}$$

A partir de cette proposition, nous pouvons maintenant énoncer le résultat d'accélération suivant: ■

Proposition 3

Soit $D_n = (1 + \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - 1}}) \frac{\Delta S_n}{2}$.

La suite (T_n) définie par $T_n = S_n + D_n, \forall n$, converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

Preuve:

D'une part, la suite (S_n) est une suite à convergence linéaire. En effet:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{n+1}(f)}{E_n(f)} = \frac{1}{r_1^2}$ et $|r_1| > 1$. D'autre part, le terme $\frac{2A\sqrt{z_1^2 - 1}}{r_1^{2n+2}}$ est une bonne estimation de l'erreur de S_n . En effet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1^{2n+2}}{2A\sqrt{z_1^2 - 1}} E_n(f) = \frac{r_1}{2\sqrt{z_1^2 - 1}} \neq 0, 1, \infty.$$

Par application de la procédure Θ [2], le terme

$$D_n = - \frac{\Delta S_n}{\Delta \left(\frac{2A\sqrt{z_1^2 - 1}}{r_1^{2n+2}} \right)} \frac{2A\sqrt{z_1^2 - 1}}{r_1^{2n+2}} = (1 + \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - 1}}) \frac{\Delta S_n}{2}$$

est une estimation parfaite de l'erreur de S_n .

lemme 1

La suite $(\frac{\Delta T_{n+1}}{\Delta T_n})$ ne peut avoir 1 comme valeur d'adhérence.

Preuve:

En notant $r_1 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}$ et en posant:

$$u_n = 1 - \frac{\frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} - 1}{\frac{1}{r_1^2} - 1},$$

on a la relation suivante:

$$\frac{\Delta T_{n+1}}{\Delta T_n} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Supposons que 1 est une valeur d'adhérence de la suite $(\frac{\Delta T_{n+1}}{\Delta T_n})$, donc il existe une suite $(n_p)_p$ strictement croissante, tel que:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\Delta T_{n_p+1}}{\Delta T_{n_p}} = 1, \text{ i.e., } \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n_p+1}}{\Delta S_{n_p}} \frac{u_{n_p+1}}{u_{n_p}} = 1.$$

En d'autres termes, nous avons au voisinage de l'infini:

$$\frac{u_{n_{p+1}}}{u_{n_p}} \sim \frac{\Delta S_{n_p}}{\Delta S_{n_{p+1}}}.$$

Or, d'après la proposition 2-2, nous avons: $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n_p}}{\Delta S_{n_{p+1}}} = r_1^2$. On en déduit que:

$\lim_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n_{p+1}}}{u_{n_p}} \right| = |r_1|^2 > 1$. Donc, $\exists p_0 / \forall p \geq p_0, |u_{n_{p+1}}| > |u_{n_p}|$. Or, $\lim_{p \rightarrow \infty} |u_{n_p}| = 0$, d'où la contradiction, car on ne peut avoir une suite positive strictement croissante et convergente vers zéro en même temps. Donc, 1 n'est pas une valeur d'adhérence de la suite $(\frac{\Delta T_{n+1}}{\Delta T_n})$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat d'accélération suivant:

Proposition 4

La suite (T_n) définie par $T_n = S_n - \frac{(\Delta T_n)^2}{\Delta^2 T_n}, \forall n$, converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

Preuve:

Nous avons:

$$\frac{W_n - S}{S_n - S} = \frac{T_n - S}{S_n - S} - \frac{\Delta T_n}{S_n - S} \cdot \left(\frac{1}{\frac{\Delta T_{n+1}}{\Delta T_n} - 1} \right).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n - S}{S_n - S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta T_n}{S_n - S} = 0$, et 1 n'est pas une valeur d'adhérence de la suite $(\frac{\Delta T_{n+1}}{\Delta T_n})$, nous avons le résultat.

REMARQUE:

Les expériences numériques réalisées dans le cas où l'intégrand f possède un pôle complexe non réelle, ont révélé que les transformations proposées dans les propositions 3 et 4 ne sont pas efficaces. Néanmoins, ce cas peut être ramené au cas d'une fonction analytique possédant deux pôles complexes conjugués. En effet: supposons que $z_1 = a + ib$ avec $ab \neq 0$. On a alors:

$$S = \int_{-1}^1 f(x)w(x)dx = \int_{-1}^1 f_1(x)w(x)dx + \int_{-1}^1 f_2(x)w(x)dx,$$

avec: $f_1(x) = h(x) \frac{(x-a)}{(x-a)^2 + b^2}$, et $f_2(x) = h(x) \frac{b}{(x-a)^2 + b^2}$.

Dans le prochain paragraphe, on étudiera exclusivement le cas où $a = 0$ et $b \neq 0$.

EXEMPLES NUMERIQUES.

Exem 1: $f(x) = \frac{1}{x - ia}$, $w(x) = 1$, $a > 0$.

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | 0.114D+01 | -0.164D+00 | 0.598D-02 |
| 3 | -0.887D+00 | -0.559D-01 | -0.306D-03 |
| 4 | 0.404D+00 | -0.165D-01 | -0.191D-03 |
| 5 | -0.249D+00 | -0.501D-02 | 0.152D-03 |
| 6 | 0.130D+00 | -0.162D-02 | -0.602D-04 |
| 7 | -0.747D-01 | -0.454D-03 | 0.434D-04 |
| 8 | 0.406D-01 | -0.160D-03 | -0.110D-04 |
| 9 | -0.227D-01 | -0.396D-04 | 0.158D-04 |
| 10 | 0.125D-01 | -0.165D-04 | -0.178D-05 |
| 11 | -0.696D-02 | -0.304D-05 | -0.521D-05 |
| 12 | 0.385D-02 | -0.188D-05 | -0.247D-06 |
| 13 | -0.213D-02 | -0.124D-06 | -0.166D-06 |

0.2

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | 0.759D+00 | -0.539D-01 | -0.352D-03 |
| 3 | -0.426D+00 | -0.114D-01 | 0.261D-03 |
| 4 | 0.179D+00 | -0.264D-02 | -0.747D-04 |
| 5 | -0.858D-01 | -0.461D-03 | 0.501D-04 |
| 6 | 0.387D-01 | -0.133D-03 | -0.730D-05 |
| 7 | -0.179D-01 | -0.153D-04 | -0.176D-03 |
| 8 | 0.819D-02 | -0.782D-05 | -0.576D-06 |
| 9 | -0.377D-02 | 0.516D-07 | -0.274D-06 |
| 10 | 0.173D-02 | -0.630D-06 | -0.349D-07 |
| 11 | -0.792D-03 | 0.113D-06 | -0.931D-08 |
| 12 | 0.363D-03 | -0.719D-07 | -0.178D-08 |
| 13 | -0.167D-03 | 0.226D-07 | -0.378D-09 |

0.4

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | 0.500D+00 | -0.189D-01 | -0.250D-03 |
| 3 | -0.217D+00 | -0.236D-02 | 0.114D-03 |
| 4 | 0.797D-01 | -0.489D-03 | -0.152D-04 |
| 5 | -0.311D-01 | -0.327D-04 | 0.664D-02 |
| 6 | 0.118D-01 | -0.159D-04 | -0.674D-06 |
| 7 | -0.454D-02 | 0.902D-06 | -0.197D-06 |
| 8 | 0.174D-02 | -0.837D-06 | -0.207D-07 |
| 9 | -0.664D-03 | 0.176D-06 | -0.333D-08 |
| 10 | 0.254D-03 | -0.682D-07 | -0.533D-09 |
| 11 | -0.971D-04 | 0.201D-07 | -0.592D-10 |
| 12 | 0.371D-04 | -0.683D-08 | -0.149D-10 |
| 13 | -0.142D-04 | 0.221D-08 | -0.373D-12 |

0.5

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | 0.330D+00 | -0.711D-02 | -0.934D-04 |
| 3 | -0.115D+00 | -0.454D-03 | 0.608D-04 |
| 4 | 0.363D-01 | -0.112D-03 | -0.280D-05 |
| 5 | -0.118D-01 | 0.286D-05 | -0.851D-06 |
| 6 | 0.378D-02 | -0.310D-05 | -0.529D-07 |
| 7 | -0.122D-02 | 0.509D-06 | -0.604D-08 |
| 8 | 0.391D-03 | -0.157D-06 | -0.759D-09 |
| 9 | -0.125D-03 | 0.380D-07 | -0.416D-10 |
| 10 | 0.403D-04 | -0.104D-07 | -0.135D-10 |
| 11 | -0.129D-04 | 0.278D-08 | 0.742D-12 |
| 12 | 0.415D-05 | -0.763D-09 | -0.437D-12 |
| 13 | -0.133D-05 | 0.211D-09 | 0.795D-13 |

0.6

Pour une valeur de a assez petite, la suite (W_n) n'approxime pas S mieux que la suite (T_n) .

Exem 2: $f(x) = \frac{4(2x^2 - 1)}{5 + 4x}$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|-----------|------------|
| 2 | -0.274D+00 | 0.107D-02 | 0.528D-07 |
| 3 | -0.693D-01 | 0.676D-04 | 0.828D-09 |
| 4 | -0.174D-01 | 0.424D-05 | 0.129D-10 |
| 5 | -0.435D-02 | 0.265D-06 | 0.202D-12 |
| 6 | -0.109D-02 | 0.166D-07 | 0.577D-14 |
| 7 | -0.272D-03 | 0.104D-08 | -0.333D-14 |
| 8 | -0.679D-04 | 0.648D-10 | 0.222D-15 |
| 9 | -0.170D-04 | 0.405D-11 | 0.133D-14 |
| 10 | -0.424D-05 | 0.253D-12 | -0.222D-15 |

Exem 3: $f(x) = \frac{1}{x-c}, W(x) = 1.$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.983D+00 | -0.460D-01 | 0.111D-01 |
| 3 | -0.545D+00 | -0.248D-01 | 0.115D-02 |
| 4 | -0.302D+00 | -0.115D-01 | 0.176D-03 |
| 5 | -0.166D+00 | -0.502D-02 | 0.187D-04 |
| 6 | -0.909D-01 | -0.214D-02 | -0.463D-05 |
| 7 | -0.494D-01 | -0.902D-03 | -0.503D-05 |
| 8 | -0.268D-01 | -0.383D-03 | -0.290D-05 |
| 9 | -0.144D-01 | -0.164D-03 | -0.141D-05 |
| 10 | -0.776D-02 | -0.712D-04 | -0.638D-06 |
| 11 | -0.417D-02 | -0.314D-04 | -0.278D-06 |
| 12 | -0.223D-02 | -0.140D-04 | -0.118D-06 |
| 13 | -0.120D-02 | -0.636D-05 | -0.499D-07 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.535D+00 | -0.212D-01 | 0.339D-03 |
| 3 | -0.233D+00 | -0.686D-02 | 0.164D-04 |
| 4 | -0.999D-01 | -0.207D-02 | -0.520D-05 |
| 5 | -0.424D-01 | -0.616D-03 | -0.297D-05 |
| 6 | -0.178D-01 | -0.186D-03 | -0.108D-05 |
| 7 | -0.744D-02 | -0.576D-04 | -0.347D-06 |
| 8 | -0.310D-02 | -0.184D-04 | -0.105D-06 |
| 9 | -0.129D-02 | -0.601D-05 | -0.312D-07 |
| 10 | -0.534D-03 | -0.202D-05 | -0.927D-08 |
| 11 | -0.221D-03 | -0.691D-06 | -0.278D-08 |
| 12 | -0.914D-04 | -0.240D-06 | -0.848D-09 |
| 13 | -0.378D-04 | -0.849D-07 | -0.264D-09 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.337D+00 | -0.102D-01 | 0.260D-04 |
| 3 | -0.121D+00 | -0.240D-02 | -0.476D-05 |
| 4 | -0.426D-01 | -0.549D-03 | -0.208D-05 |
| 5 | -0.148D-01 | -0.128D-03 | -0.562D-06 |
| 6 | -0.510D-02 | -0.312D-04 | -0.134D-06 |
| 7 | -0.175D-02 | -0.792D-05 | -0.308D-07 |
| 8 | -0.598D-03 | -0.208D-05 | -0.702D-08 |
| 9 | -0.204D-03 | -0.565D-06 | -0.163D-08 |
| 10 | -0.695D-04 | -0.157D-06 | -0.388D-09 |
| 11 | -0.237D-04 | -0.444D-07 | -0.951D-10 |
| 12 | -0.804D-05 | -0.128D-07 | -0.239D-10 |
| 13 | -0.273D-05 | -0.373D-08 | -0.616D-11 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.229D+00 | -0.538D-02 | -0.250D-05 |
| 3 | -0.699D-01 | -0.993D-03 | -0.258D-05 |
| 4 | -0.208D-01 | -0.185D-03 | -0.612D-06 |
| 5 | -0.613D-02 | -0.361D-04 | -0.119D-06 |
| 6 | -0.179D-02 | -0.745D-05 | -0.219D-07 |
| 7 | -0.521D-03 | -0.161D-05 | -0.404D-08 |
| 8 | -0.151D-03 | -0.363D-06 | -0.764D-09 |
| 9 | -0.438D-04 | -0.840D-07 | -0.150D-09 |
| 10 | -0.127D-04 | -0.199D-07 | -0.304D-10 |
| 11 | -0.367D-05 | -0.480D-08 | -0.637D-11 |
| 12 | -0.106D-05 | -0.118D-08 | -0.137D-11 |
| 13 | -0.306D-06 | -0.292D-09 | -0.304D-12 |

1.2

On remarque que les rapports d'accélération sont de plus en plus petits lorsque la singularité s'éloigne de l'intervalle d'intégration.

2-2) Fonction ayant deux pôles simples conjugués.

Comme il a été annoncé dans le paragraphe précédent, nous allons nous intéresser uniquement au cas où l'intégrand est une fonction analytique ayant deux pôles simples conjugués situés sur l'axe des imaginaires purs, z_1 et z_2 avec $z_1 = ib$, b étant un réel strictement positif. La fonction f s'écrira alors sous la forme: $f(z) = \frac{h(z)}{z^2 + b^2}$, avec h une fonction non nulle aux points $z = \pm ib$, et vérifiant l'hypothèse suivante:

$$(H) \quad \exists R \geq b + \sqrt{b^2 - 1}, h \in H^\infty(E_R).$$

D'après la proposition 1-1, l'expression de $E_n(f)$ sera donnée par:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz - \Phi(ib)E_n\left(\frac{1}{ib-}\right) - \Phi(-ib)E_n\left(\frac{1}{-ib-}\right).$$

Or, $\Phi(ib) = -\frac{i}{2b}h(ib)$, et $\Phi(-ib) = \frac{i}{2b}h(-ib)$, d'où:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz - \frac{1}{2bi} \left(h(ib)E_n\left(\frac{1}{ib-}\right) - h(-ib)E_n\left(\frac{1}{-ib-}\right) \right).$$

Nous allons donner maintenant une représentation asymptotique à $E_n(f)$ et à ΔS_n .

Proposition 5

Soit $r_1 = b + \sqrt{b^2 + 1}$, avec $b > 0$, et $A = (-1)^n \frac{\pi}{b} (h(ib)K(ib) + h(-ib)K(-ib))$.

Si $A \neq 0$, nous avons les équivalences suivantes lorsque n tend vers l'infini.

$$\begin{aligned} a) \quad E_n(f) &\sim \frac{A}{r_1^{2n+1}}. \\ b) \quad \Delta S_n &\sim \frac{2A\sqrt{b^2 + 1}}{r_1^{2n+2}}. \end{aligned}$$

Preuve:

a) D'après la proposition I-4), nous avons les deux égalités suivantes:

$$\begin{aligned} h(ib)E_n\left(\frac{1}{ib-}\right) &= 2\pi \frac{h(ib)K(ib)}{i^{2n+1}r_1^{2n+1}}(1 + \epsilon_n(ib)), \\ h(-ib)E_n\left(\frac{1}{-ib-}\right) &= -2\pi \frac{h(-ib)K(-ib)}{i^{2n+1}r_1^{2n+1}}(1 + \epsilon_n(-ib)). \end{aligned}$$

D'où:

$$h(ib)E_n\left(\frac{1}{ib-}\right) - h(-ib)E_n\left(\frac{1}{-ib-}\right) = \frac{2\pi}{i^{2n+1}r_1^{2n+1}} [(h(ib)K(ib) + h(-ib)K(-ib)) (h(ib)K(ib)\epsilon_n(ib) + h(-ib)K(-ib)\epsilon_n(-ib))]$$

Supposons que $h(ib)K(ib) + h(-ib)K(-ib) \neq 0$. Nous avons d'une part:

$$h(ib)K(ib)\epsilon_n(ib) + h(-ib)K(-ib)\epsilon_n(-ib) = o(h(ib)K(ib) + h(-ib)K(-ib)).$$

D'autre part, on peut montrer en suivant les mêmes démarches que dans la Preuve de la proposition 2-2 que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z}\right) dz = o\left(\frac{h(ib)K(ib) + h(-ib)K(-ib)}{r_1^{2n+1}}\right),$$

d'où le résultat.

b) Pour montrer le résultat, il suffit de remarquer que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{1}{r_1^2} \neq 1$ et que

$$\Delta S_n = E_{n+1}(f) \left(\frac{E_n(f)}{E_{n+1}(f)} - 1 \right).$$

Ayant obtenu une représentation asymptotique de $E_n(f)$ et de ΔS_n , nous pouvons énoncer le résultat d'accélération suivant:

Proposition 6

Si $h(ib)K(ib) + h(-ib)K(-ib) \neq 0$, alors la suite (T_n) définie par:

$$T_n = S_n + \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}}\right) \frac{\Delta S_n}{2}, \forall n,$$

converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

Preuve:

D'une part, la suite (S_n) est une suite à convergence linéaire, d'autre part, le terme $v_n = (-1)^{n+1} \frac{2\pi\sqrt{b^2 + 1}}{br_1^{2n+1}} (h(ib)K(ib) + h(-ib)K(-ib))$ est une bonne estimation de l'erreur de S_n , d'où par application de la procédure Θ , on obtient le résultat.

En procédant de la même manière que dans le lemme 2-1, nous pouvons montrer que la suite $\left(\frac{\Delta T_{n+1}}{\Delta T_n}\right)$ n'admet pas 1 comme valeur d'adhérence ce qui nous permet d'énoncer le résultat d'accélération suivant:

Proposition 6

La suite (W_n) définie par $W_n = T_n - \frac{(\Delta T_n)^2}{\Delta^2 T_n}, \forall n$, converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

EXEMPLES NUMERIQUES.

Exem 1: $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, W(x) = 1.$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | 0.838D+01 | -0.275D+01 | 0.124D+01 |
| 3 | -0.102D+02 | -0.144D+01 | -0.130D+00 |
| 4 | 0.446D+01 | -0.563D+00 | 0.623D-01 |
| 5 | -0.394D+01 | -0.273D+00 | -0.113D-01 |
| 6 | 0.219D+01 | -0.117D+00 | 0.280D-02 |
| 7 | -0.167D+01 | -0.543D-01 | -0.143D-03 |
| 8 | 0.103D+01 | -0.243D-01 | -0.331D-03 |
| 9 | -0.734D+00 | -0.109D-01 | 0.339D-03 |
| 10 | 0.475D+00 | -0.503D-02 | -0.201D-03 |
| 11 | -0.327D+00 | -0.221D-02 | 0.163D-03 |
| 12 | 0.216D+00 | -0.104D-02 | -0.714D-04 |
| 13 | -0.147D+00 | -0.445D-03 | 0.692D-04 |

0.2

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | 0.190D+01 | -0.135D+00 | -0.879D-03 |
| 3 | -0.107D+01 | -0.286D-01 | 0.653D-03 |
| 4 | 0.447D+00 | -0.661D-02 | -0.187D-03 |
| 5 | -0.215D+00 | -0.115D-02 | 0.125D-03 |
| 6 | 0.967D-01 | -0.332D-03 | -0.183D-04 |
| 7 | -0.448D-01 | -0.383D-04 | -0.441D-03 |
| 8 | 0.205D-01 | -0.195D-04 | -0.144D-05 |
| 9 | -0.941D-02 | 0.129D-06 | -0.686D-06 |
| 10 | 0.432D-02 | -0.157D-05 | -0.873D-07 |
| 11 | -0.198D-02 | 0.284D-06 | -0.233D-07 |
| 12 | 0.908D-03 | -0.180D-06 | -0.446D-08 |
| 13 | -0.417D-03 | 0.566D-07 | -0.945D-09 |

0.4

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|-----------|
| 2 | 0.380D+01 | -0.548D+00 | 0.199D- |
| 3 | -0.296D+01 | -0.186D+00 | -0.102D- |
| 4 | 0.135D+01 | -0.549D-01 | -0.637D- |
| 5 | -0.832D+00 | -0.167D-01 | 0.508D- |
| 6 | 0.434D+00 | -0.539D-02 | -0.201D- |
| 7 | -0.249D+00 | -0.151D-02 | 0.145D- |
| 8 | 0.135D+00 | -0.532D-03 | -0.367D- |
| 9 | -0.758D-01 | -0.132D-03 | 0.526D- |
| 10 | 0.417D-01 | -0.550D-04 | -0.592D- |
| 11 | -0.232D-01 | -0.101D-04 | -0.174D- |
| 12 | 0.128D-01 | -0.628D-05 | -0.824D- |
| 13 | -0.711D-02 | -0.413D-06 | -0.554D- |

0.3

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | 0.100D+01 | -0.378D-01 | -0.499D-03 |
| 3 | -0.434D+00 | -0.472D-02 | 0.229D-03 |
| 4 | 0.159D+00 | -0.979D-03 | -0.304D-04 |
| 5 | -0.622D-01 | -0.654D-04 | 0.133D-01 |
| 6 | 0.237D-01 | -0.317D-04 | -0.135D-03 |
| 7 | -0.908D-02 | 0.180D-05 | -0.394D-06 |
| 8 | 0.347D-02 | -0.167D-05 | -0.414D-07 |
| 9 | -0.133D-02 | 0.353D-06 | -0.667D-08 |
| 10 | 0.508D-03 | -0.136D-06 | -0.107D-08 |
| 11 | -0.194D-03 | 0.402D-07 | -0.118D-09 |
| 12 | 0.742D-04 | -0.137D-07 | -0.297D-10 |
| 13 | -0.284D-04 | 0.443D-08 | -0.746D-11 |

0.5

Pour des valeurs de a très proche de zéro, la suite (T_n) donne une approximation de S aussi bonne que celle donnée par la suite (W_n) . Pour des valeurs de a assez loin de zéro, on remarque une convergence très rapide des suites (T_n) et (W_n) .

Exem 2: $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.714D+01 | -0.867D+00 | -0.483D-01 |
| 3 | 0.296D+01 | -0.272D+00 | 0.166D-01 |
| 4 | -0.224D+01 | -0.109D+00 | -0.285D-02 |
| 5 | 0.119D+01 | -0.384D-01 | 0.757D-03 |
| 6 | -0.788D+00 | -0.147D-01 | -0.155D-03 |
| 7 | 0.456D+00 | -0.537D-02 | 0.373D-04 |
| 8 | -0.287D+00 | -0.202D-02 | -0.815D-05 |
| 9 | 0.172D+00 | -0.745D-03 | 0.189D-05 |
| 10 | -0.106D+00 | -0.278D-03 | -0.422D-06 |
| 11 | 0.641D-01 | -0.103D-03 | 0.964D-07 |
| 12 | -0.392D-01 | -0.384D-04 | -0.217D-07 |
| 13 | 0.238D-01 | -0.142D-04 | 0.494D-08 |

0.25

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.155D+01 | -0.657D-01 | -0.459D-03 |
| 3 | 0.617D+00 | -0.127D-01 | 0.482D-04 |
| 4 | -0.301D+00 | -0.277D-02 | -0.446D-05 |
| 5 | 0.134D+00 | -0.572D-03 | 0.437D-06 |
| 6 | -0.623D-01 | -0.121D-03 | -0.418D-07 |
| 7 | 0.284D-01 | -0.254D-04 | 0.404D-08 |
| 8 | -0.130D-01 | -0.534D-05 | -0.388D-09 |
| 9 | 0.597D-02 | -0.112D-05 | 0.374D-10 |
| 10 | -0.274D-02 | -0.235D-06 | -0.360D-11 |
| 11 | 0.125D-02 | -0.495D-07 | 0.346D-12 |
| 12 | -0.575D-03 | -0.104D-07 | -0.320D-13 |
| 13 | 0.264D-03 | -0.218D-08 | 0.355D-14 |

0.4

Contrairement à l'exemple précédent, bien que a soit proche de 0, les suites (T_n) et (W_n) approximent bien la valeur de S .

Exem 3: $f(x) = \frac{1-x^2}{a^2+x^2}, w(x) = 1.$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | 0.590D+01 | -0.126D+01 | 0.154D+00 |
| 3 | -0.562D+01 | -0.534D+00 | -0.187D-01 |
| 4 | 0.257D+01 | -0.181D+00 | 0.303D-02 |
| 5 | -0.186D+01 | -0.698D-01 | 0.259D-03 |
| 6 | 0.102D+01 | -0.258D-01 | -0.494D-03 |
| 7 | -0.663D+00 | -0.943D-02 | 0.382D-03 |
| 8 | 0.389D+00 | -0.365D-02 | -0.167D-03 |
| 9 | -0.243D+00 | -0.128D-02 | 0.133D-03 |
| 10 | 0.146D+00 | -0.520D-03 | -0.411D-04 |
| 11 | -0.899D-01 | -0.169D-03 | 0.516D-04 |
| 12 | 0.545D-01 | -0.755D-04 | -0.922D-05 |
| 13 | -0.334D-01 | -0.215D-04 | 0.877D-04 |

0.25

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | 0.220D+01 | -0.156D+00 | -0.102D-01 |
| 3 | -0.124D+01 | -0.331D-01 | 0.758D-02 |
| 4 | 0.519D+00 | -0.767D-02 | -0.217D-03 |
| 5 | -0.249D+00 | -0.134D-02 | 0.145D-04 |
| 6 | 0.112D+00 | -0.385D-03 | -0.212D-05 |
| 7 | -0.520D-01 | -0.445D-04 | -0.512D-06 |
| 8 | 0.238D-01 | -0.227D-04 | -0.167D-07 |
| 9 | -0.109D-01 | 0.150D-06 | -0.796D-08 |
| 10 | 0.501D-02 | -0.183D-05 | -0.101D-09 |
| 11 | -0.230D-02 | 0.329D-06 | -0.270D-10 |
| 12 | 0.105D-02 | -0.209D-06 | -0.517D-11 |
| 13 | -0.483D-03 | 0.656D-07 | -0.110D-12 |

0.4

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | 0.125D+01 | -0.472D-01 | -0.624D-03 |
| 3 | -0.543D+00 | -0.591D-02 | 0.286D-03 |
| 4 | 0.199D+00 | -0.122D-02 | -0.381D-04 |
| 5 | -0.777D-01 | -0.817D-04 | 0.166D-01 |
| 6 | 0.296D-01 | -0.397D-04 | -0.168D-05 |
| 7 | -0.114D-01 | 0.225D-05 | -0.492D-06 |
| 8 | 0.434D-02 | -0.209D-05 | -0.518D-07 |
| 9 | -0.166D-02 | 0.441D-06 | -0.834D-08 |
| 10 | 0.635D-03 | -0.171D-06 | -0.133D-08 |
| 11 | -0.243D-03 | 0.503D-07 | -0.148D-09 |
| 12 | 0.928D-04 | -0.171D-07 | -0.371D-10 |
| 13 | -0.355D-04 | 0.553D-08 | -0.933D-12 |

0.5

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | 0.748D+00 | -0.161D-01 | -0.212D-03 |
| 3 | -0.261D+00 | -0.103D-02 | 0.138D-03 |
| 4 | 0.823D-01 | -0.254D-03 | -0.636D-05 |
| 5 | -0.267D-01 | 0.648D-05 | -0.193D-05 |
| 6 | 0.858D-02 | -0.702D-05 | -0.120D-06 |
| 7 | -0.276D-02 | 0.115D-05 | -0.137D-07 |
| 8 | 0.886D-03 | -0.355D-06 | -0.172D-08 |
| 9 | -0.284D-03 | 0.862D-07 | -0.944D-10 |
| 10 | 0.913D-04 | -0.236D-07 | -0.305D-10 |
| 11 | -0.293D-04 | 0.629D-08 | 0.168D-11 |
| 12 | 0.940D-05 | -0.173D-08 | -0.991D-12 |
| 13 | -0.302D-05 | 0.478D-09 | 0.181D-12 |

0.6

Pour des valeurs de a très proche de zéro, les suites (T_n) et (W_n) approximent S de la même façon. Alors que pour des valeurs de a qui ne sont pas très proches de zéro, (T_n) et (W_n) approximent bien la valeur de S .

3 Fonction ayant une infinité de pôles simples

Soit f une fonction analytique possédant une infinité de pôles simples z_i situés dans $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. On notera $R_i = |r_i| = |z_i + \sqrt{z_i^2 - 1}|, \forall i \in \mathbb{N}$.

Les pôles z_i vont être indexés de telle manière qu'on ait les inégalités suivantes:

$$R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_i \leq \dots$$

Soit $k = \inf\{i/R_i < R_{i+1}\}$. La fonction f s'écrira alors sous la forme suivante:

$$f(z) = \frac{h(z)}{\prod_{i=1}^{\infty} (z - z_i)}, \text{ avec } h \text{ une fonction non nulle aux points } z = z_i, \text{ et vérifiant l'hypothèse}$$

suivante:

$$(H) \quad \exists R > 1, \quad R_k < R < R_{k+1}, \quad h \in H^\infty(E_R).$$

Puisque la fonction f appartient à $H^\infty(E'_R)$, on a d'après la proposition I-6:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E'_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz.$$

Par application du théorème des résidus, nous obtenons:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{E'_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz + \sum_{i=1}^k \Phi(z_i) E_n\left(\frac{1}{z_i-}\right),$$

avec $\Phi(z_i) = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) f(z), i = 1, \dots, k$.

Ainsi:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz - \sum_{i=1}^k \Phi(z_i) E_n\left(\frac{1}{z_i-}\right).$$

De cette égalité, on déduit:

$$\Delta S_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_{E_R} f(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) dz - \frac{a_{n+1}}{a_n} \sum_{i=1}^k \Phi(z_i) Q_n^{\alpha, \beta}(z_i).$$

Le long de ce paragraphe, nous allons limiter notre étude à deux cas: $k = 2$, avec $z_2 = -z_1$, et $k = 1$. Dans les deux cas, nous supposons que z_1 est un réel ou un imaginaire pur.

Pour le premier cas, nous avons le résultat suivant:

Proposition 7

Soit $A = \phi(z_1)K(z_1) - \phi(-z_1)K(-z_1)$. Si $A \neq 0$, alors, nous avons les équivalences suivantes lorsque n tend vers l'infini:

$$a) \quad E_n(f) \sim -2\pi \frac{A}{r_1^{2n+1}}.$$

$$b) \quad \Delta S_n \sim -4\pi \sqrt{z_1^2 - 1} \frac{A}{r_1^{2n+2}}.$$

Preuve:

a) Posons $u_n = -2\pi \frac{A}{r_1^{2n+1}}$. En divisant l'expression de $E_n(f)$ par u_n , on obtient:

$$\frac{E_n(f)}{u_n} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\int_{E_{R_2}} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz}{u_n} - \frac{\sum_{i=1}^2 \Phi(z_i) E_n\left(\frac{1}{z_i-}\right)}{u_n}.$$

i) Montrons d'abord que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} \int_{E_{R_2}} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz = 0.$$

Posons: $I_n = \frac{1}{u_n} \int_{E_{R_2}} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz.$

Sachant que: $E_n\left(\frac{1}{z-}\right) = 2\pi \frac{K(z)}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z))$, on a:

$$I_n = -\frac{r_1^{2n+1}}{A} \int_{E_{R_2}} \frac{f(z) K(z)}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z)) dz.$$

En notant: $M(R) = \text{Max}\{|f(z)K(z)|, z \in E_{R_2}\}$, $l(R)$ la longueur de E_{R_2} , où R est un réel tel que $R_1 \leq R \leq R_2$, nous obtenons, puisque $|z + \sqrt{z^2 - 1}| = R$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} |1 + \epsilon_n(z)| = 1$, $\forall z \in E_{R_2}$:

$$\exists n_0 / \forall n \geq n_0 \quad |I(n)| \leq 4\pi M(R) l(R) \left(\frac{R_1}{R}\right)^{2n+1}.$$

Puisque $R_1 < R$, nous avons: $\lim_{n \rightarrow \infty} |I(n)| = 0.$

ii) Montrons maintenant que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k \Phi(z_i) E_n\left(\frac{1}{z_i-}\right)}{u_n} = -1.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \Phi(z_i) E_n\left(\frac{1}{z_i-}\right) &= 2\pi \sum_{i=1}^2 \frac{\phi(z_i)}{r_i^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z_i)) \\ &= -u_n + 2\pi \sum_{i=1}^2 \frac{\phi(z_i)}{r_i^{2n+1}} \epsilon_n(z_i). \end{aligned}$$

Or, $r_2 = -r_1$, d'où:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\phi(z_i)}{r_i^{2n+1}} \epsilon_n(z_i) = \frac{1}{r_1^{2n+1}} (\phi(z_1) \epsilon_n(z_1) - \phi(-z_1) \epsilon_n(-z_1)).$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\phi(z_i)}{u_n} E_n\left(\frac{1}{z_i - \cdot}\right) = -1 - \frac{(\phi(z_1)\epsilon_n(z_1) - \phi(-z_1)\epsilon_n(-z_1))}{A}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n(z_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n(-z_1) = 0$, nous avons:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k \Phi(z_i) E_n\left(\frac{1}{z_i - \cdot}\right)}{u_n} = -1.$$

De i) et ii), on conclut que: $E_n(f) \sim u_n$, i.e.

$$E_n(f) \sim -2\pi \frac{A}{r_1^{2n+1}}.$$

b) En remarquant que la suite (S_n) est une suite à convergence linéaire avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{n+1}}{E_n} = \frac{1}{r_1^2}$ et que $\Delta S_n = E_{n+1}(f) \left(\frac{E_n}{E_{n+1}} - 1 \right)$, on montre le résultat. ■

Pour le deuxième cas, nous avons la proposition suivante qui se démontre d'une façon similaire.

Proposition 8

Soit $A = \phi(z_1)K(z_1)$. Nous avons les équivalences suivantes lorsque n tend vers l'infini:

$$\begin{aligned} a) E_n(f) &\sim -2\pi \frac{A}{r_1^{2n+1}}. \\ b) \Delta S_n &\sim -4\pi \sqrt{z_1^2 - 1} \frac{A}{r_1^{2n+2}}. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, nous avons le résultat d'accélération suivant:

Proposition 9

$$\text{Soit } D_n = \left(1 + \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - 1}} \right) \frac{\Delta S_n}{2}.$$

a) La suite (T_n) définie par $T_n = S_n + D_n, \forall n$, converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

b) La suite (W_n) définie par $W_n = T_n - \frac{(\Delta T_n)^2}{\Delta^2 T_n}, \forall n$, converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

Preuve:

a) D'une part, la suite (S_n) est une suite à convergence linéaire. D'autre part, le terme $v_n = -4\pi \frac{\sqrt{z_1^2 - 1}}{r_1^{2n+2}} (\phi(z_1)K(z_1) - \phi(-z_1)K(z_1))$ est une bonne estimation de l'erreur de

S_n . En effet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(f)}{v_n} = \frac{r_1}{2\sqrt{z_1^2 - 1}} \neq 1, 0, \infty,$$

d'où, par application de la procédure Θ , le terme

$$D_n = -\frac{\Delta S_n}{\Delta v_n} v_n = \left(1 + \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - 1}}\right) \frac{\Delta S_n}{2}$$

est une estimation parfaite de l'erreur de S_n .

b) En procédant de la même manière que dans le paragraphe 2, nous pouvons montrer que la suite $(\frac{\Delta T_{n+1}}{\Delta T_n})$ n'admet pas 1 comme valeur d'adhérence ce qui nous permet de démontrer b). ■

EXEMPLE NUMERIQUE

$$f(x) = \frac{1}{a + b \sin(x)}, w(x) = 1, c = -\arcsin\left(\frac{a}{b}\right).$$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.249D+01 | -0.110D+00 | -0.601D-03 |
| 3 | -0.101D+01 | -0.269D-01 | -0.104D-03 |
| 4 | -0.400D+00 | -0.688D-02 | -0.308D-04 |
| 5 | -0.156D+00 | -0.182D-02 | -0.942D-05 |
| 6 | -0.604D-01 | -0.499D-03 | -0.268D-05 |
| 7 | -0.232D-01 | -0.142D-03 | -0.727D-06 |
| 8 | -0.889D-02 | -0.416D-04 | -0.193D-06 |
| 9 | -0.340D-02 | -0.126D-04 | -0.512D-07 |
| 10 | -0.130D-02 | -0.390D-05 | -0.138D-07 |
| 11 | -0.494D-03 | -0.123D-05 | -0.377D-08 |
| 12 | -0.188D-03 | -0.396D-06 | -0.106D-08 |
| 13 | -0.717D-04 | -0.129D-06 | -0.304D-09 |

$$c = 1.12$$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.743D-01 | -0.341D-02 | -0.119D-06 |
| 3 | -0.152D-01 | -0.363D-03 | -0.682D-07 |
| 4 | -0.284D-02 | -0.386D-04 | -0.862D-08 |
| 5 | -0.505D-03 | -0.417D-05 | -0.109D-08 |
| 6 | -0.875D-04 | -0.457D-06 | -0.145D-09 |
| 7 | -0.150D-04 | -0.509D-07 | -0.198D-10 |
| 8 | -0.253D-05 | -0.579D-08 | -0.269D-11 |
| 9 | -0.427D-06 | -0.674D-09 | -0.363D-12 |
| 10 | -0.716D-07 | -0.806D-10 | -0.483D-13 |
| 11 | -0.120D-07 | -0.991D-11 | -0.633D-14 |
| 12 | -0.201D-08 | -0.126D-11 | -0.122D-14 |
| 13 | -0.335D-09 | -0.164D-12 | -0.111D-15 |

$$c = 1.43$$

La convergence des suites $(S_n), (T_n), (W_n)$ est d'autant plus rapide que la singularité est loin de l'intervalle d'intégration, mais le rapport d'accélération ne varie pratiquement pas en faisant varier la valeur de c .

4 Fonction ayant un pôle d'ordre k

Soit f une fonction analytique ayant un pôle unique $z_1 \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ de multiplicité k . On notera $R_1 = |z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}| = |r_1|$. La fonction f s'écrira alors sous la forme: $f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_1)^k}$, avec h une fonction non nulle au point $z = z_1$ et vérifiant l'hypothèse suivante:

$$(H) \quad \exists R > |z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}| = |r_1|, h \in H^\infty(E_R).$$

D'après la proposition 1, nous avons:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right) dz - \frac{1}{(k-1)!} D^{k-1} \left(h(z) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right) \right)_{z=z_1},$$

avec $D^{k-1} = \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}$.

En utilisant la relation: $\Delta E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right) = \frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha, \beta}(z)$, on obtient:

$$\Delta S_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_{E_R} f(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) dz - \frac{1}{(k-1)!} \frac{a_{n+1}}{a_n} D^{k-1} \left(h(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) \right)_{z=z_1}.$$

4-1) Préliminaires.

Afin de donner des représentations asymptotiques de ΔS_n et de $E_n(f)$, nous allons établir certains résultats préliminaires pour lesquels, on devrait distinguer les deux cas suivants: $|Re z_1| > 1$ et $|Re z_1| \leq 1$.

Afin de simplifier l'écriture, on notera:

$$g(z) = 2\pi h(z)K(z), \quad A_n(z) = \frac{1}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}}, \quad F_n(z) = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+2}}.$$

On cherchera dans ce qui suit à donner des représentations asymptotiques pour les fonctions $F_n^{(j)}(z)$ et $A_n^{(j)}(z)$.

Premier cas: $|Re z_1| > 1$.

Donnons d'abord le résultat suivant:

Lemme 1

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ vérifiant $|Re z| > 1$ et $|\frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} - 1| < 2$. Alors, nous avons $\forall j \in \mathbb{N}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1} r^n} \right)^{(k)} = (-1)^k \frac{(n+k)!}{(n)!} \frac{1}{(z^2 - 1)^{\frac{k+1}{2}}} \frac{1}{r^n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

Preuve:

Nous allons distinguer deux cas: $Re z > 1$ et $Re z < -1$.

$Re z > 1$.

D'après [16, p. 240], nous avons l'égalité suivante:

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1} r^n} = \int_0^\infty e^{-zt} I_n(t) dt,$$

où, $I_n(t)$ est la fonction de Bessel modifiée d'ordre n . En dérivant les deux membres de cette égalité k fois par rapport à z , on obtient:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1} r^n} \right)^{(k)} &= \left(\int_0^\infty e^{-zt} I_n(t) dt \right)^{(k)} \\ &= (-1)^k \int_0^\infty t^k e^{-zt} I_n(t) dt \\ &= (-1)^k \frac{(n+k)!}{(z^2 - 1)^{\frac{k+1}{2}}} P_k^{-n} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \right) \quad [16, p.196] \end{aligned}$$

où P_k^{-n} est la fonction de Legendre associée de première espèce.

Or, d'après [20, p. 308], pour z vérifiant $\left| \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} - 1 \right| < 2$, on a:

$$P_k^{-n} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \right) = \frac{1}{n! r^n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

On obtient finalement:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1} r^n} \right)^{(k)} = (-1)^k \frac{(n+k)!}{(n)!} \frac{1}{(z^2 - 1)^{\frac{k+1}{2}}} \frac{1}{r^n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).$$

$Re z < -1$.

Soit z tel que $Re z < -1$, on a, $Re(-z) > 1$, d'où d'après [16, p. 240], on a:

$$\frac{1}{\sqrt{(-z)^2 - 1} (-z + \sqrt{(-z)^2 - 1})^n} = \int_0^\infty e^{zt} I_n(t) dt.$$

Or, d'une part, $\sqrt{(-z)^2 - 1} = -\sqrt{z^2 - 1}$, d'autre part, $-z + \sqrt{(-z)^2 - 1} = -(z + \sqrt{z^2 - 1}) = -r$, d'où

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1} r^n} = (-1)^{n+1} \int_0^\infty e^{-zt} I_n(t) dt,$$

En dérivant les deux membres de cette égalité k fois par rapport à z , on obtient:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1} r^n} \right)^{(k)} = (-1)^{n+1} \int_0^\infty t^k e^{zt} I_n(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{n+1} \frac{(n+k)!}{((-z)^2 - 1)^{\frac{k+1}{2}}} P_k^{-n} \left(\frac{-z}{\sqrt{(-z)^2 - 1}} \right) \\
&= (-1)^k \frac{(n+k)!}{(n)!} \frac{1}{(z^2 - 1)^{\frac{k+1}{2}}} \frac{1}{r^n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).
\end{aligned}$$

proposition 1

Soit z un nombre complexe tel que: $|\operatorname{Re}z| > 1$ et $\left| \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} - 1 \right| < 2$. Alors:

a) $A'_n(z) = -(2n+1) \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1} r^{2n+1}}$.

b) $A_n^{(k)}(z) \sim (-1)^k \frac{(2n+k)!}{(2n)!} \frac{1}{(z^2 - 1)^{\frac{k}{2}}} \frac{1}{r^{2n+1}}$.

Preuve:

a) $A'_n(z)$ s'obtient par une simple dérivation de $A_n(z)$.

b) $A'_n(z) = -(2n+1) \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1} r^{2n+1}}$. En dérivant $(k-1)$ fois cette expression, on obtient:

$$\begin{aligned}
A_n^{(k)}(z) &= -(2n+1) \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1} r^{2n+1}} \right)^{(k-1)} \\
&= -(2n+1) (-1)^{k-1} \frac{(2n+k)!}{(2n+1)!} \frac{1}{(z^2 - 1)^{\frac{k}{2}}} \frac{1}{r^{2n+1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= (-1)^k \frac{(2n+k)!}{(2n)!} \frac{1}{(z^2 - 1)^{\frac{k}{2}}} \frac{1}{r^{2n+1}},
\end{aligned}$$

ce qui nous donne le résultat. ■

proposition 2

Soit z un nombre complexe tel que: $|\operatorname{Re}z| > 1$ et $\left| \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} - 1 \right| < 2$. Alors:

a) $F'_n(z) = \frac{z - (2n+2)\sqrt{z^2 - 1}}{\sqrt{z^2 - 1} r^{2n+2}}$.

b) $F_n^{(k)}(z) \sim (-1)^k \frac{(2n+k)!}{(2n)!} \frac{1}{(z^2 - 1)^{\frac{k-1}{2}}} \frac{1}{r^{2n+2}}$.

Preuve:

a) $F'_n(z)$ s'obtient par une simple dérivation de $F_n(z)$.

b) $F'_n(z) = \frac{z - (2n+2)\sqrt{z^2 - 1}}{\sqrt{z^2 - 1} r^{2n+2}}$. En dérivant $(k-1)$ fois cette expression, on obtient:

$$F_n^{(k)}(z) = \left(z \cdot \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1} r^{2n+2}} \right)^{(k-1)} - (2n+2) \left(\frac{1}{r^{2n+2}} \right)^{(k-1)}.$$

or,

$$\left(\frac{1}{r^{2n+2}}\right)^{(k-1)} = -(2n+2) \left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}r^{2n+2}}\right)^{(k-2)}.$$

D'où:

$$\begin{aligned} F_n^{(k)}(z) &= z \left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}r^{2n+2}}\right)^{(k-1)} + (k-1) \left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}r^{2n+2}}\right)^{(k-2)} \\ &\quad + (2n+2)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}r^{2n+2}}\right)^{(k-2)} \\ &= z(-1)^{k-1} \frac{(2n+k+1)!}{(2n+2)!} \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{k}{2}}} \frac{1}{r^{2n+2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\quad + (k-1)(-1)^{k-2} \frac{(2n+k)!}{(2n+2)!} \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{(k-1)}{2}}} \frac{1}{r^{2n+2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\quad + (2n+2)^2 (-1)^{k-2} \frac{(2n+k)!}{(2n+2)!} \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{(k-1)}{2}}} \frac{1}{r^{2n+2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\sim (-1)^k \frac{(2n+k)!}{(2n)!} \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{(k-1)}{2}}} \frac{1}{r^{2n+2}}. \end{aligned}$$

Deuxième cas: $|Rez| \leq 1$.

on va distinguer le cas où $Imz > 0$ et le cas où $Imz < 0$.

premier cas: $Imz > 0$.

Posons alors:

$$\xi = e^{-i\frac{\pi}{2}} z.$$

Ainsi,

$$\sqrt{z^2-1} = e^{i\frac{\pi}{2}} \sqrt{\xi^2+1} \text{ et } z + \sqrt{z^2-1} = e^{i\frac{\pi}{2}} (\xi + \sqrt{\xi^2+1}).$$

D'où en notant: $u = \xi + \sqrt{\xi^2+1}$, on a:

$$A_n(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{1}{u^{2n+1}}, \quad F_n(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{\sqrt{\xi^2+1}}{u^{2n+2}}.$$

deuxième cas: $Imz < 0$.

Posons alors:

$$\xi = e^{i\frac{\pi}{2}} z.$$

Ainsi,

$$\sqrt{z^2-1} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \sqrt{\xi^2+1} \text{ et } z + \sqrt{z^2-1} = e^{-i\frac{\pi}{2}} (\xi + \sqrt{\xi^2+1}).$$

D'où en notant $u = \xi + \sqrt{\xi^2+1}$, on a:

$$A_n(z) = e^{i\frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{1}{u^{2n+1}}, \quad F_n(z) = e^{i\frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{\sqrt{\xi^2+1}}{u^{2n+2}}.$$

Remarquons que dans les deux cas, $Re\xi > 0$.

Lemme 2

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ vérifiant $|Re z| \leq 1$ et $|\frac{z}{\sqrt{z^2-1}} - 1| < 2$. Soit ξ un nombre complexe définie par:

$$\xi = e^{-i\frac{\pi}{2}}z \text{ si } Imz > 0,$$

$$\xi = e^{i\frac{\pi}{2}}z \text{ si } Imz < 0.$$

En notant toujours $u = \xi + \sqrt{\xi^2+1}$ et $r = z + \sqrt{z^2-1}$, on a:

a) Si $Imz > 0$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}u^n}\right)^{(k)} = (-1)^k \frac{(n+k)!}{n!} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(n+k+1)}}{r^n \sqrt{z^2-1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

b) Si $Imz < 0$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}u^n}\right)^{(k)} = (-1)^k \frac{(n+k)!}{n!} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(n+k+1)}}{r^n \sqrt{z^2-1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Preuve:

Puisque $Re\xi > 0$, on a d'après [16, p. 240]

$$\frac{1}{u^n \sqrt{\xi^2+1}} = \int_0^\infty e^{-\xi t} J_n(t) dt,$$

avec: $J_n(t)$ la fonction de Bessel de première espèce d'ordre n . En dérivant k fois par rapport à ξ , on obtient:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}u^n}\right)^{(k)} &= (-1)^k \int_0^\infty (t)^k e^{-\xi t} J_n(t) dt \\ &= (-1)^k \frac{(n+k)!}{(\xi^2+1)^{\frac{k+1}{2}}} P_k^{-n} \left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}\right) \text{ d'après [16, p. 182]} \\ &= (-1)^k \frac{(n+k)!}{n!} \frac{1}{u^n (\xi^2+1)^{\frac{k+1}{2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ d'après [20, p. 1308].} \end{aligned}$$

a) $\xi = ze^{-i\frac{\pi}{2}}$, donc

$$\sqrt{\xi^2+1} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \sqrt{z^2-1} \text{ et } u = e^{-i\frac{\pi}{2}} r.$$

d'où:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}u^n}\right)^{(k)} = (-1)^k \frac{(n+k)!}{n!} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(n+k+1)}}{r^n \sqrt{z^2-1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

b) $\xi = ze^{i\frac{\pi}{2}}$, donc

$$\sqrt{\xi^2 + 1} = e^{i\frac{\pi}{2}}\sqrt{z^2 - 1} \text{ et } u = e^{i\frac{\pi}{2}}r.$$

d'où:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}u^n}\right)^{(k)} = (-1)^k \frac{(n+k)! e^{-i\frac{\pi}{2}(n+k+1)}}{n! r^n \sqrt{z^2 - 1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

proposition 3

Soit z un nombre complexe tel que: $|\operatorname{Re}z| \leq 1$ et $\left|\frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} - 1\right| < 2$. Alors:

$$a) A'_n(z) = -(2n+1) \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1} r^{2n+1}}.$$

$$b) A_n^{(k)}(z) \sim (-1)^k \frac{(2n+k)!}{(2n)!} \frac{1}{(z^2 - 1)^{\frac{k}{2}}} \frac{1}{r^{2n+1}}.$$

Preuve:

a) $A'_n(z)$ s'obtient par une simple dérivation de $A_n(z)$.

b) Nous allons distinguer les deux cas: $\operatorname{Im}z > 0$ et $\operatorname{Im}z < 0$.

Premier cas: $\operatorname{Im}z > 0$.

$$\begin{aligned} A'_n(z) &= -(2n+1) \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1} r^{2n+1}} \\ &= -(2n+1) \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(2n+2)}}{\sqrt{\xi^2 + 1} u^{2n+1}}. \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} A_n^{(k)}(z) &= (-1)^n (2n+1) \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1} u^{2n+1}}\right)^{(k-1)} \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^{k-1} \\ &= (-1)^n (2n+1) (-1)^{k-1} \frac{(2n+k)!}{(2n+1)!} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(2n+k+1)}}{r^{2n+1} \sqrt{z^2 - 1}^{\frac{k}{2}}} e^{-i\frac{\pi}{2}(k-1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= (-1)^{n+k-1} \frac{(2n+k)!}{(2n)!} \frac{e^{i\pi(n+1)}}{r^{2n+1} \sqrt{z^2 - 1}^{\frac{k}{2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= (-1)^k \frac{(2n+k)!}{(2n)!} \frac{1}{r^{2n+1} \sqrt{z^2 - 1}^{\frac{k}{2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Deuxième cas: $\operatorname{Im}z < 0$.

$$\begin{aligned} A'_n(z) &= -(2n+1) \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1} r^{2n+1}} \\ &= -(2n+1) \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(2n+2)}}{\sqrt{\xi^2 + 1} u^{2n+1}}. \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned}
A_n^{(k)}(z) &= (-1)^n(2n+1) \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}u^{2n+1}} \right)^{(k-1)} \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^{k-1} \\
&= (-1)^n(2n+1)(-1)^{k-1} \frac{(2n+k)!}{(2n+1)!} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(2n+k+1)}}{r^{2n+1}\sqrt{z^2-1}^{\frac{k}{2}}} e^{i\frac{\pi}{2}(k-1)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= (-1)^{n+k-1} \frac{(2n+k)!}{(2n)!} \frac{e^{i\pi(n+1)}}{r^{2n+1}\sqrt{z^2-1}^{\frac{k}{2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= (-1)^k \frac{(2n+k)!}{(2n)!} \frac{1}{r^{2n+1}\sqrt{z^2-1}^{\frac{k}{2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right).
\end{aligned}$$

proposition 4

Soit z un nombre complexe tel que: $|Re z| \leq 1$ et $\left| \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} - 1 \right| < 2$. Alors:

a) $F'_n(z) = \frac{z - (2n+2)\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{z^2-1}r^{2n+2}}$.

b) $F_n^{(k)}(z) \sim (-1)^k \frac{(2n+k)!}{(2n)!} \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{(k-1)}{2}}} \frac{1}{r^{2n+2}}$.

Preuve:

a) $F'_n(z)$ s'obtient par une simple dérivation de $F_n(z)$.

b) Nous allons distinguer les deux cas: $Imz > 0$ et $Imz < 0$.

Premier cas: $Imz > 0$.

$$\begin{aligned}
F'_n(z) &= \frac{z}{\sqrt{z^2-1}r^{2n+2}} - \frac{(2n+2)}{r^{2n+2}} \\
&= e^{-i\pi(n+1)} \left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}u^{2n+2}} - \frac{(2n+2)}{u^{2n+2}} \right).
\end{aligned}$$

En dérivant $(k-1)$ fois $F'_n(z)$ par rapport à z , on obtient:

$$\begin{aligned}
F_n^{(k)}(z) &= e^{-i\pi(n+1)} \left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}u^{2n+2}} \right)^{(k-1)} - (2n+2) \left(\frac{1}{u^{2n+2}} \right)^{(k-1)} \right] \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^{k-1} \\
&= (-1)^{n+1} e^{-i\frac{\pi}{2}(k-1)} \left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}u^{2n+2}} \right)^{(k-1)} - (2n+2) \left(\frac{1}{u^{2n+2}} \right)^{(k-1)} \right].
\end{aligned}$$

Or, $\left(\frac{1}{u^{2n+2}} \right)^{(k-1)} = -(2n+2) \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}u^{2n+2}} \right)^{(k-2)}$, d'où:

$$F_n^{(k)}(z) = (-1)^{n+1} e^{-i\frac{\pi}{2}(k-1)} \left[\xi \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}u^{2n+2}} \right)^{(k-1)} + (k-1) \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}u^{2n+2}} \right)^{(k-2)} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left[+(2n+2)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1} u^{2n+2}} \right)^{(k-2)} \right] \\
& = (-1)^{n+1} e^{-i\frac{\pi}{2}(k-1)} \left[(-1)^{k-1} \xi \frac{(2n+k+1)!}{(2n+2)!} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(2n+k+2)}}{(z^2-1)^{\frac{k}{2}} r^{2n+2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right. \\
& + (-1)^{k-2} (k-1) \frac{(2n+k)!}{(2n+2)!} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(2n+k+1)}}{(z^2-1)^{\frac{k-1}{2}} r^{2n+2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
& \left. + (-1)^{k-2} (2n+2)^2 \frac{(2n+k)!}{(2n+2)!} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(2n+k+1)}}{(z^2-1)^{\frac{k-1}{2}} r^{2n+2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right] \\
& \sim (-1)^{n+1} e^{-i\frac{\pi}{2}(k-1)} (-1)^{k-2} (2n+2)^2 \frac{(2n+k)!}{(2n+2)!} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(2n+k+1)}}{(z^2-1)^{\frac{k-1}{2}} r^{2n+2}} \\
& \sim (-1)^{n+1+k} e^{i\frac{\pi}{2}(2n+2)} \frac{(2n+k)!}{(2n)!} \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{k-1}{2}} r^{2n+2}} \\
& = (-1)^k \frac{(2n+k)!}{(2n)!} \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{k-1}{2}} r^{2n+2}}.
\end{aligned}$$

Deuxième cas: $Imz < 0$.

$$\begin{aligned}
F'_n(z) & = \frac{z}{\sqrt{z^2-1} r^{2n+2}} - \frac{(2n+2)}{r^{2n+2}} \\
& = e^{i\pi(n+1)} \left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1} u^{2n+2}} - \frac{(2n+2)}{u^{2n+2}} \right).
\end{aligned}$$

En dérivant $(k-1)$ fois $F'_n(z)$ par rapport à z , on obtient:

$$\begin{aligned}
F_n^{(k)}(z) & = e^{i\pi(n+1)} \left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1} u^{2n+2}} \right)^{(k-1)} - (2n+2) \left(\frac{1}{u^{2n+2}} \right)^{(k-1)} \right] \left(\frac{d\xi}{dz} \right)^{k-1} \\
& = (-1)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{2}(k-1)} \left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1} u^{2n+2}} \right)^{(k-1)} - (2n+2) \left(\frac{1}{u^{2n+2}} \right)^{(k-1)} \right] \\
& = (-1)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{2}(k-1)} \left[\xi \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1} u^{2n+2}} \right)^{(k-1)} + (k-1) \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1} u^{2n+2}} \right)^{(k-2)} \right. \\
& \quad \left. + (2n+2)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\xi^2+1} u^{2n+2}} \right)^{(k-2)} \right] \\
& = (-1)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{2}(k-1)} \left[(-1)^{k-1} \xi \frac{(2n+k+1)!}{(2n+2)!} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(2n+k+2)}}{(z^2-1)^{\frac{k}{2}} r^{2n+2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right. \\
& + (-1)^{k-2} (k-1) \frac{(2n+k)!}{(2n+2)!} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(2n+k+1)}}{(z^2-1)^{\frac{k-1}{2}} r^{2n+2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
& \left. + (-1)^{k-2} (2n+2)^2 \frac{(2n+k)!}{(2n+2)!} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(2n+k+1)}}{(z^2-1)^{\frac{k-1}{2}} r^{2n+2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sim (-1)^{n+1} e^{i\frac{\pi}{2}(k-1)} (-1)^{k-2} (2n+2)^2 \frac{(2n+k)!}{(2n+2)!} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(2n+k+1)}}{(z^2-1)^{\frac{k-1}{2}} r^{2n+2}} \\ &\sim (-1)^k \frac{(2n+k)!}{(2n)!} \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{k-1}{2}} r^{2n+2}}. \end{aligned}$$

4-2) Représentation asymptotique de $E_n(f)$ et de ΔS_n .

Afin de donner des représentations asymptotiques de $E_n(f)$ et de ΔS_n , on donnera d'abord des représentations asymptotiques de $D^{k-1} \left(h(z) E_n \left(\frac{1}{z} \right) \right)_{z=z_1}$ et de $D^{k-1} \left(h(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) \right)_{z=z_1}$. Afin d'y arriver, nous avons besoin des résultats préliminaires suivants:

Lemme 3

Soit $(u_n(z))$ la suite désignant $(\delta_n(z))$ ou $(\epsilon_n(z))$. Alors, pour tout p dans \mathbb{N} , la suite $(u_n^p(z))$ converge uniformément vers zéro sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Preuve:

a) Soit $u_n(z) = \delta_n(z)$ et soit K un compact quelconque de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Puisque les fonctions $Q_n^{\alpha, \beta}(z)$ et $\frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}}{2\pi K(z)\sqrt{z^2 - 1}}$ sont holomorphes dans $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, la fonction $\delta_n(z)$ l'est aussi. De plus, la suite $(\delta_n(z))$ converge uniformément vers zéro sur K . Ainsi, d'après le théorème de Weierstrass, la suite $(\delta_n'(z))$ converge uniformément vers zéro sur K .

Le résultat se démontre facilement par récurrence sur $p > 1$.

b) Soit $u_n(z) = \epsilon_n(z)$ et soit K un compact quelconque de $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Puisque les fonctions $E_n \left(\frac{1}{z} \right)$ et $\frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+2}}{2\pi K'(z)}$ sont holomorphes dans $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, la fonction $\epsilon_n(z)$ l'est aussi. En utilisant des arguments similaires à ce qui précède, on montre le résultat.

Lemme 4

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ tel que $\left| \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} - 1 \right| < 2$. Alors, nous avons les équivalences suivantes en l'infini:

$$a) (g(z) F_n(z))^{(k)} \sim g(z) F_n^{(k)}(z).$$

$$b) (g(z) A_n(z))^{(k)} \sim g(z) A_n^{(k)}(z).$$

Preuve:

a)

$$\begin{aligned} (g(z)F_n(z))^{(k)} &= \sum_{i=0}^k C_k^i g^{(k-i)}(z) F_n^{(i)}(z) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i g^{(k-i)}(z) F_n^{(i)}(z) + g(z) F_n^{(k)}(z). \end{aligned}$$

En divisant les deux termes de cette égalité par $g(z)F_n^{(k)}(z)$, on obtient:

$$\frac{(g(z)F_n(z))^{(k)}}{g(z)F_n^{(k)}(z)} = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i \frac{g^{(k-i)}(z)}{g(z)} \frac{F_n^{(i)}(z)}{F_n^{(k)}(z)} + 1.$$

Or, d'après les propositions 2 et 4, nous avons:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n^{(i)}(z)}{F_n^{(k)}(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^i (2n+i)! (z^2-1)^{\frac{k-1}{2}}}{(-1)^k (2n+k)! (z^2-1)^{\frac{i-1}{2}}} = 0 \text{ car } k > i,$$

d'où le résultat.

b)

$$\begin{aligned} (g(z)A_n(z))^{(k)} &= \sum_{i=0}^k C_k^i g^{(k-i)}(z) A_n^{(i)}(z) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i g^{(k-i)}(z) A_n^{(i)}(z) + g(z) A_n^{(k)}(z). \end{aligned}$$

En divisant les deux termes de cette égalité par $g(z)A_n^{(k)}(z)$, on obtient:

$$\frac{(g(z)A_n(z))^{(k)}}{g(z)A_n^{(k)}(z)} = \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i \frac{g^{(k-i)}(z)}{g(z)} \frac{A_n^{(i)}(z)}{A_n^{(k)}(z)} + 1.$$

Or, d'après les propositions 1 et 3, nous avons:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^{(i)}(z)}{A_n^{(k)}(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^i (2n+i)! (z^2-1)^{\frac{k}{2}}}{(-1)^k (2n+k)! (z^2-1)^{\frac{i}{2}}} = 0 \text{ car } k > i,$$

d'où le résultat.

Lemme 5

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ tel que $|\frac{z}{\sqrt{z^2-1}} - 1| < 2$.

a) $\exists n_1(z, k) / \forall n \geq n_1 \quad D^k(g(z)A_n(z)) \neq 0$.

b) $\exists n_2(z, k) / \forall n \geq n_2 \quad D^k(g(z)F_n(z)) \neq 0$.

Preuve:

a) Rappelons que $A_n(z) = \frac{1}{r^{2n+1}}$ où $r = z + \sqrt{z^2 - 1}$. Soit z un nombre complexe dans $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ tel que $|\frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} - 1| < 2$, et $g(z) \neq 0$. Montrons le résultat suivant par récurrence sur k :

(H_k) : $r^{2n+1} D^k \left(\frac{g(z)}{r^{2n+1}} \right)$ est un polynôme de degré k en n .

$k = 0$: $r^{2n+1} D^0 \left(\frac{g(z)}{r^{2n+1}} \right) = g(z) \neq 0$ est un polynôme de degré 0 en k .

$k = 1$: $r^{2n+1} D' \left(\frac{g(z)}{r^{2n+1}} \right) = g'(z) - \frac{(2n+1)}{\sqrt{z^2 - 1}} g(z)$ est un polynôme de degré 1 en n car $g(z) \neq 0$.

Supposons H_k vraie et montrons H_{k+1} .

$$\begin{aligned} r^{2n+1} D^{k+1} \left(\frac{g(z)}{r^{2n+1}} \right) &= r^{2n+1} D^k \left(\left(\frac{g(z)}{r^{2n+1}} \right)' \right) \\ &= r^{2n+1} D^k \left(\frac{g'(z)}{r^{2n+1}} - \frac{(2n+1)}{\sqrt{z^2 - 1}} \frac{g(z)}{r^{2n+1}} \right) \\ &= r^{2n+1} D^k \left(\frac{g'(z)}{r^{2n+1}} \right) - (2n+1) D^k \left(\frac{1}{r^{2n+1}} \frac{g(z)}{\sqrt{z^2 - 1}} \right). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a:

d'une part $r^{2n+1} D^k \left(\frac{g'(z)}{r^{2n+1}} \right)$ est un polynôme de degré au plus k en n , et d'autre part $(2n+1) D^k \left(\frac{1}{r^{2n+1}} \frac{g(z)}{\sqrt{z^2 - 1}} \right)$ est polynôme de degré k en n .

Ainsi, $r^{2n+1} D^{k+1} \left(\frac{g(z)}{r^{2n+1}} \right)$ est un polynôme de degré $(k+1)$ en n .

(H_k) étant démontré pour tout k dans \mathbb{N} , on pourra affirmer que $r^{2n+1} D^k \left(\frac{g(z)}{r^{2n+1}} \right)$ admet au plus k racines entières, et nous posons:

$n_1(z, k) = 0$, si toutes les racines de $D^k \left(\frac{g(z)}{r^{2n+1}} \right)$ ne sont pas des entiers naturels.

$n_1(z, k) = n_0 + 1$, si n_0 est la plus grande racine entière de $D^k \left(\frac{g(z)}{r^{2n+1}} \right)$. Ainsi,

$\forall n \geq n_1(z, k), D^k \left(\frac{g(z)}{r^{2n+1}} \right) \neq 0$.

b) Le résultat se démontre d'une façon similaire. ■

Proposition 5

Soit $z_1 \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ vérifiant $|\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - 1}} - 1| < 2$. Alors nous avons les équivalences suivantes lorsque n tend vers l'infini:

$$\begin{aligned} a) D^{k-1} \left(h(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) \right)_{z=z_1} &\sim (g(z) F_n(z))_{z=z_1}^{(k-1)}. \\ b) D^{k-1} \left(h(z) E_n \left(\frac{1}{z - \cdot} \right) \right)_{z=z_1} &\sim (g(z) A_n(z))_{z=z_1}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Preuve:

$$a) \text{ Soit } z_1 \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \text{ vérifiant } |\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - 1}} - 1| < 2.$$

Nous avons, $h(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) = g(z) F_n(z) (1 + \delta_n(z))$, où $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. En dérivant cette expression $(k - 1)$ fois, nous obtenons:

$$\begin{aligned} D^{k-1} \left(h(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) \right)_{z=z_1} &= \sum_{p=0}^{k-1} C_{k-1}^p (g(z) F_n(z))_{z=z_1}^{(k-1-p)} (1 + \delta_n(z))_{z=z_1}^{(p)} \\ &= g(z_1) F_n^{(k-1)}(z_1) (1 + \delta_n(z_1)) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{k-1} C_{k-1}^p (g(z) F_n(z))_{z=z_1}^{(k-1-p)} \delta_n^{(p)}(z_1). \end{aligned}$$

D'après le lemme 5 - b), $\exists n_0(z_1, k - 1) / (g(z) F_n(z))_{z=z_1}^{(k-1)} \neq 0, \forall n \geq n_0(z_1, k - 1)$. Ainsi, $\forall n \geq n_0(z_1, k - 1)$, nous avons:

$$\frac{D^{k-1} \left(h(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) \right)_{z=z_1}}{(g(z) F_n(z))_{z=z_1}^{(k-1)}} = \frac{g(z_1) F_n^{(k-1)}(z_1)}{(g(z) F_n(z))_{z=z_1}^{(k-1)}} (1 + \delta_n(z_1)) + \sum_{p=1}^{k-1} C_{k-1}^p \frac{(g(z) F_n(z))_{z=z_1}^{(k-1-p)}}{(g(z) F_n(z))_{z=z_1}^{(k-1)}} \delta_n^{(p)}(z_1).$$

D'une part, nous avons d'après le lemme 4:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(z_1) F_n^{(k-1)}(z_1)}{(g(z) F_n(z))_{z=z_1}^{(k-1)}} (1 + \delta_n(z_1)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \delta_n(z_1)) = 1.$$

D'autre part, nous avons d'après les propositions 1 et 3 et le lemme 3: $\forall p \in \{1, \dots, k - 1\}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^{(p)}(z_1) &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(g(z) F_n(z))_{z=z_1}^{(k-1-p)}}{(g(z) F_n(z))_{z=z_1}^{(k-1)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n + k - 1) \dots (2n + k - p)} = 0, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.

b) se démontre d'une façon similaire. ■

A partir de ces résultats préliminaires, nous pouvons donner des représentations asymptotiques de $E_n(f)$ et de ΔS_n .

Lemme 6

Soit $z_1 \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ vérifiant $|\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - 1}} - 1| < 2$.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz}{D^{k-1}(g(z)A_n(z))_{z=z_1}} = 0.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{E_R} f(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) dz}{D^{k-1}(g(z)F_n(z))_{z=z_1}} = 0.$$

Preuve:

D'après le lemme précédent, il suffira de montrer que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz}{D^{k-1}(g(z)A_n(z))_{z=z_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{E_R} f(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) dz}{D^{k-1}(g(z)F_n(z))_{z=z_1}} = 0.$$

Soit $l(R)$ la longueur de l'ellipse E_R et soit R_1 un réel strictement inférieur à R tel que $z_1 \in E_R$. on a: $|z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}| = R_1$. Rappelons que:

$$|A_n^{(k-1)}(z_1)| \sim \frac{(2n+k-1)!}{(2n)!} \frac{1}{|z_1^2 - 1|^{\frac{k-1}{2}}} \frac{1}{R_1^{2n+1}},$$

$$|F_n^{(k-1)}(z_1)| \sim \frac{(2n+k-1)!}{(2n)!} \frac{1}{|z_1^2 - 1|^{\frac{k-2}{2}}} \frac{1}{R_1^{2n+2}}.$$

a) Soit $M(R) = \text{Max}\{K(z)f(z), z \in E_R\}$.

Rappelons que: $E_n\left(\frac{1}{z-}\right) = 2\pi \frac{K(z)}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}} (1 + \epsilon_n(z))$, où la suite $(\epsilon_n(z))$ converge uniformément vers zéro sur E_R , d'où: $\exists n_0 / \forall n \geq n_0 |1 + \epsilon_n(z)| \leq 2, \forall z \in E_R$. Ainsi:

$$\frac{|\frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz|}{|A_n^{(k-1)}(z_1)|} \leq \frac{2M(R)l(R)}{R^{2n+1}} \frac{1}{|A_n^{(k-1)}(z_1)|}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{2n+1}} \frac{1}{|A_n^{(k-1)}(z_1)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_1^{2n+1}}{R^{2n+1}} \frac{(2n)!}{(2n+k-1)!} |z_1^2 - 1|^{\frac{k-1}{2}} = 0$, car $R_1 < R$, d'où le résultat.

b) Soit $M(R) = \text{Max}\{K(z)f(z)\sqrt{z^2 - 1}, z \in E_R\}$.

Rappelons que: $Q_n^{\alpha, \beta}(z) = 2\pi \frac{K(z)\sqrt{z^2 - 1}}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+2}} (1 + \delta_n(z))$, où la suite $(\delta_n(z))$ converge

uniformément vers zéro sur E_R , d'où: $\exists n_0/\forall n \geq n_0 |1 + \delta_n(z)| \leq 2, \forall z \in E_R$. Ainsi:

$$\frac{|\frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) dz|}{|F_n^{(k-1)}(z_1)|} \leq \frac{2M(R)l(R)}{R^{2n+2}} \frac{1}{|F_n^{(k-1)}(z_1)|}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{2n+2}} \frac{1}{|F_n^{(k-1)}(z_1)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_1^{2n+2}}{R^{2n+2}} \frac{(2n)!}{(2n+k-1)!} |z_1^2 - 1|^{\frac{k-1}{2}} = 0$, car $R_1 < R$, d'où le résultat. ■

Proposition 6

Soit f et g définies par: $f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_1)^k}$ et $g(z) = 2\pi h(z)K(z)$.

a) $E_n(f) \sim -\frac{1}{(k-1)!} D^{k-1}(g(z)A_n(z))_{z=z_1}$.

b) $\Delta S_n \sim -\frac{2}{(k-1)!} D^{k-1}(g(z)F_n(z))_{z=z_1}$.

Preuve:

a) On a vu au début de ce paragraphe que:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right) dz - \frac{1}{(k-1)!} D^{k-1}\left(h(z) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right)\right)_{z=z_1}.$$

En divisant les deux termes de cette égalité par: $-\frac{1}{(k-1)!} D^{k-1}(g(z)A_n(z))_{z=z_1}$ quantité qui est non nulle d'après le lemme 5, et en notant I_n le rapport obtenu, on a:

$$I_n = -\frac{(k-1)! \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right) dz}{2\pi i D^{k-1}(g(z)A_n(z))_{z=z_1}} + \frac{D^{k-1}\left(h(z) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right)\right)_{z=z_1}}{D^{k-1}(g(z)A_n(z))_{z=z_1}}.$$

Or, d'après le lemme 6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right) dz}{D^{k-1}(g(z)A_n(z))_{z=z_1}} = 0,$$

et d'après la proposition 5 et le lemme 4, on a:

$$\frac{D^{k-1}\left(h(z) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right)\right)_{z=z_1}}{D^{k-1}(g(z)A_n(z))_{z=z_1}} \sim \frac{g(z_1)A_n^{k-1}(z_1)}{g(z_1)A_n^{k-1}(z_1)} = 1,$$

donc: $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$, d'où le résultat.

b) On a vu aussi au début de ce paragraphe que:

$$\Delta S_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_{E_R} f(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) dz - \frac{1}{(k-1)!} \frac{a_{n+1}}{a_n} D^{k-1}\left(h(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z)\right)_{z=z_1}.$$

En divisant les deux termes de cette égalité par: $-\frac{2}{(k-1)!}D^{k-1}(g(z)F_n(z))_{z=z_1}$ quantité qui est non nulle d'après le lemme 5, et en notant I_n le rapport obtenu, on a:

$$I_n = -\frac{(k-1)! a_{n+1}}{4\pi i a_n} \frac{\int_{E_R} f(z)Q_n^{\alpha,\beta}(z)dz}{D^{k-1}(g(z)F_n(z))_{z=z_1}} + \frac{1}{2} \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{D^{k-1}(h(z)Q_n^{\alpha,\beta}(z))_{z=z_1}}{D^{k-1}(g(z)F_n(z))_{z=z_1}}.$$

Or, d'après le lemme 6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{E_R} f(z)Q_n^{\alpha,\beta}(z)dz}{D^{k-1}(g(z)F_n(z))_{z=z_1}} = 0,$$

et d'après la proposition 5 et le lemme 4, on a:

$$\frac{D^{k-1}(h(z)Q_n^{\alpha,\beta}(z))_{z=z_1}}{D^{k-1}(g(z)F_n(z))_{z=z_1}} \sim \frac{g(z_1)F_n^{k-1}(z_1)}{g(z_1)F_n^{k-1}(z_1)} = 1.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, on a le résultat. ■

4-3) Accélération de la convergence

Lemme 7

a) La suite (S_n) est une suite à convergence linéaire. Plus exactement, on:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{n+1}(f)}{E_n(f)} = \frac{1}{r_1^2} \text{ avec } r_1 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}.$$

b) Le terme $D_n = D^{k-1}(g(z)F_n(z))_{z=z_1}$ est une bonne estimation de l'erreur de S_n .

Preuve:

a) En utilisant la proposition 6 et le lemme 4, on a:

$$E_n(f) \sim -\frac{1}{(k-1)!}D^{k-1}(g(z)A_n(z))_{z=z_1} \sim -\frac{g(z_1)}{(k-1)!}A_n^{k-1}(z_1).$$

Donc, en utilisant ceci et les propositions 1 et 3, on obtient:

$$\frac{E_{n+1}(f)}{E_n(f)} \sim \frac{A_{n+1}^{k-1}(z_1)}{A_n^{k-1}(z_1)} \frac{(2n+k)(2n+k+1)}{(2n+1)(2n+2)} \frac{1}{r_1^2} \sim \frac{1}{r_1^2}.$$

b) On a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(f)}{D_n} = -\frac{1}{(k-1)!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D^{k-1}(g(z)A_n(z))_{z=z_1}}{D^{k-1}(g(z)F_n(z))_{z=z_1}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{(k-1)!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n^{(k-1)}(z_1)}{F_n^{(k-1)}(z_1)} \\
&= -\frac{1}{(k-1)!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+k-2)(2n+k-1)}{2n(2n-1)} \cdot \frac{1}{r_1 \sqrt{z_1^2 - 1}} \\
&= -\frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{r_1 \sqrt{z_1^2 - 1}} \neq 0, 1, \infty.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme précédent, par application de la procédure Θ , nous obtenons le résultat suivant:

Proposition 7

La suite (T_n) définie par:

$$T_n = S_n - \frac{\Delta S_n}{\Delta D_n} D_n \text{ avec } D_n = D^{k-1}(g(z)F_n(z))_{z=z_1},$$

converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

lemme 8

La suite $(\frac{\Delta T_{n+1}}{\Delta T_n})_n$ ne peut avoir 1 comme valeur d'adhérence.

Preuve:

En posant:

$$U_n = 1 - \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \frac{\Delta D_n}{\Delta D_{n+1}},$$

on a la relation suivante:

$$\Delta T_n = \Delta S_n \frac{D_{n+1}}{\Delta D_n} U_n,$$

donc:

$$\frac{\Delta T_{n+1}}{T_n} = \frac{\Delta S_{n+1}}{\Delta S_n} \frac{D_{n+2}}{D_{n+1}} \frac{D_n}{D_{n+1}} \frac{(\frac{D_{n+1}}{D_n} - 1)}{(\frac{D_{n+2}}{D_{n+1}} - 1)} \frac{U_{n+1}}{U_n}.$$

Or, on a:

$$D_n \sim g(z_1)F_n^{(k-1)}(z_1) \sim (-1)^{(k-1)}g(z_1) \frac{(2n+k-1)!}{(2n)!} \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{k-2}{2}}} \frac{1}{r_1^{2n+2}},$$

donc, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = \frac{1}{r_1^2} \neq 1$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_{n+2}}{D_{n+1}} \frac{D_n}{D_{n+1}} \frac{(\frac{D_{n+1}}{D_n} - 1)}{(\frac{D_{n+2}}{D_{n+1}} - 1)} = 1$

Supposons que 1 est une valeur d'adhérence de la suite $(\frac{\Delta T_{n+1}}{\Delta T_n})_n$, donc il existerait une suite $(n_p)_p$ strictement croissante, tel que:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\Delta T_{n_p+1}}{\Delta T_{n_p}} = 1, \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n_p+1}}{\Delta S_{n_p}} \frac{U_{n_p+1}}{U_{n_p}} = 1.$$

En d'autres termes, nous avons au voisinage de l'infini,

$$\frac{U_{n_{p+1}}}{U_{n_p}} \sim \frac{\Delta S_{n_p}}{\Delta S_{n_{p+1}}}.$$

Or, d'après le lemme 7-a), nous avons: $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\Delta S_{n_p}}{\Delta S_{n_{p+1}}} = r_1^2$. On en déduit que: $\lim_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n_{p+1}}}{U_{n_p}} \right| = |r_1|^2 > 1$. Donc, $\exists p_0 / \forall p \geq p_0, |U_{n_{p+1}}| > |U_{n_p}|$. Or, $\lim_{p \rightarrow \infty} |U_{n_p}| = 0$, d'où la contradiction car on ne peut avoir une suite positive strictement croissante et convergente vers zéro. Donc, 1 n'est pas une valeur d'adhérence de la suite $\left(\frac{\Delta T_{n+1}}{\Delta T_n} \right)_n$. ■

Proposition 8

La suite (W_n) définie par $W_n = T_n - \frac{(\Delta T_n)^2}{\Delta^2 T_n}, \forall n$, converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

Preuve:

Identique à celle de la proposition 2-4.

EXEMPLES NUMERIQUES.

Exem 1: $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-c)^4}$, $w(x) = 1$, $m = 4$.

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|------------|------------|
| 2 | 0.344D+03 | -0.622D+03 | -0.122D+02 |
| 3 | 0.279D+03 | -0.503D+02 | -0.248D+01 |
| 4 | 0.192D+03 | -0.145D+02 | -0.232D+00 |
| 5 | 0.115D+03 | -0.552D+01 | 0.383D-01 |
| 6 | 0.632D+02 | -0.219D+01 | 0.204D-01 |
| 7 | 0.323D+02 | -0.853D+00 | 0.597D-02 |
| 8 | 0.157D+02 | -0.325D+00 | 0.156D-02 |
| 9 | 0.730D+01 | -0.122D+00 | 0.403D-03 |
| 10 | 0.330D+01 | -0.449D-01 | 0.107D-03 |
| 11 | 0.145D+01 | -0.164D-01 | 0.293D-04 |
| 12 | 0.626D+00 | -0.595D-02 | 0.839D-05 |
| 13 | 0.265D+00 | -0.215D-02 | 0.248D-05 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|------------|------------|
| 2 | 0.637D+02 | -0.332D+01 | -0.235D+00 |
| 3 | 0.412D+02 | -0.992D+00 | 0.903D-01 |
| 4 | 0.214D+02 | -0.421D+00 | 0.157D-01 |
| 5 | 0.958D+01 | -0.151D+00 | 0.220D-02 |
| 6 | 0.389D+01 | -0.480D-01 | 0.326D-03 |
| 7 | 0.147D+01 | -0.143D-01 | 0.524D-04 |
| 8 | 0.529D+00 | -0.407D-02 | 0.914D-05 |
| 9 | 0.183D+00 | -0.114D-02 | 0.172D-05 |
| 10 | 0.611D-01 | -0.312D-03 | 0.345D-06 |
| 11 | 0.199D-01 | -0.849D-04 | 0.726D-07 |
| 12 | 0.635D-02 | -0.229D-04 | 0.158D-07 |
| 13 | 0.199D-02 | -0.614D-05 | 0.351D-08 |

1.25

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|------------|------------|
| 2 | 0.195D+02 | 0.190D+00 | -0.399D-01 |
| 3 | 0.102D+02 | -0.668D-01 | 0.134D+00 |
| 4 | 0.421D+01 | -0.368D-01 | 0.120D-02 |
| 5 | 0.149D+01 | -0.112D-01 | 0.983D-04 |
| 6 | 0.476D+00 | -0.284D-02 | 0.106D-04 |
| 7 | 0.142D+00 | -0.668D-03 | 0.133D-05 |
| 8 | 0.402D-01 | -0.151D-03 | 0.187D-06 |
| 9 | 0.109D-01 | -0.332D-04 | 0.286D-07 |
| 10 | 0.288D-02 | -0.722D-05 | 0.461D-08 |
| 11 | 0.740D-03 | -0.155D-05 | 0.774D-09 |
| 12 | 0.186D-03 | -0.330D-06 | 0.133D-09 |
| 13 | 0.458D-04 | -0.697D-07 | 0.235D-10 |

1.35

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|------------|------------|
| 2 | 0.764D+01 | 0.121D+00 | -0.533D-02 |
| 3 | 0.333D+01 | -0.791D-02 | -0.133D-01 |
| 4 | 0.112D+01 | -0.527D-02 | 0.116D-03 |
| 5 | 0.325D+00 | -0.135D-02 | 0.726D-05 |
| 6 | 0.852D-01 | -0.281D-03 | 0.637D-06 |
| 7 | 0.208D-01 | -0.542D-04 | 0.668D-07 |
| 8 | 0.481D-02 | -0.100D-04 | 0.786D-08 |
| 9 | 0.107D-02 | -0.181D-05 | 0.996D-09 |
| 10 | 0.230D-03 | -0.322D-06 | 0.132D-09 |
| 11 | 0.482D-04 | -0.565D-07 | 0.182D-10 |
| 12 | 0.989D-05 | -0.983D-08 | 0.258D-11 |
| 13 | 0.199D-05 | -0.170D-08 | 0.385D-12 |

1.45

Nous remarquons que même pour des valeurs de c assez grandes, la suite (S_n) approxime mal la valeur de S . Remarquons aussi que les rapports d'accélération ne varient pratiquement pas pour des valeurs de c différentes.

CHAPITRE IV

INTEGRALES A VALEUR PRINCIPALE DE CAUCHY

INTRODUCTION

Soit l'intégrale à valeur principale de Cauchy suivante:

$$S(f, \lambda) = \int_{-1}^1 w(x) \frac{f(x)}{x - \lambda} dx, \text{ avec } \lambda \in]-1, 1[.$$

Le problème de l'évaluation de ce type d'intégrales par des méthodes numériques a été étudié par plusieurs auteurs. Des formules de quadratures ont été proposées [11, 14, 17, 21, 22, 23, 24]. La question de la convergence de ces formules a aussi été étudiée [15, 25, 26]. Des majorations de l'erreur de certaines de ces formules ont été données, par exemple dans [29] ou encore une approximation de l'erreur a été donnée par exemple dans [22].

Dans ce chapitre la formule de quadrature que nous allons considérer est une formule de type Gauss donnée par Elliot et Paget dans [14] qui consiste à approximer la fonction f par le polynôme de Lagrange interpolant la fonction f aux points zéros du polynôme orthonormal par rapport à la fonctionnelle c définie par $c(f) = \int_{-1}^1 w(x)f(x)dx$ et au point λ . Une description de cette formule de quadrature ainsi qu'une expression de l'erreur qui sera une variante de celle qui a été donnée dans la proposition I-5, seront données dans le paragraphe 1.

Dans le paragraphe 2, on donnera des représentations asymptotiques de $E_n(f, \lambda)$ et de ΔS_n , lorsque f est une fonction analytique présentant une singularité logarithmique ou une double branche de singularités réelles. A partir de ces informations, on donnera comme au chapitre II des résultats d'accélération que l'on illustrera par des exemples numériques.

Dans le paragraphe 3, on effectuera le même travail réalisé dans le paragraphe 2 pour des fonctions analytiques ayant différentes sortes de pôles situées à l'extérieur de l'intervalle d'intégration.

1 Description de la méthode de quadrature et expression de l'erreur

1-1) Description de la méthode de quadrature

Soit $\lambda \in]-1, 1[$ et soit f une fonction analytique. On notera $S(f, \lambda)$ l'intégrale à valeur principale de Cauchy donnée par:

$$S(f, \lambda) = \int_{-1}^1 w(x) \frac{f(x)}{x - \lambda} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{\lambda - \epsilon} + \int_{\lambda + \epsilon}^1 \right) w(x) \frac{f(x)}{x - \lambda} dx.$$

On rappelle qu'une méthode de quadrature de type Gauss consiste à approximer $S(f, \lambda)$ par une suite (S_n) qui utilise les valeurs de la fonction f aux points zéros du polynôme orthonormal par rapport à la fonctionnelle c définie par $c(f) = \int_{-1}^1 w(x) f(x) dx$.

Dans ce qui suit, nous présenterons la méthode décrite par Hunter dans [21] dans le cas particulier $w(x) = 1$ et reprise par Elliot et Paget dans le cas où $w(x)$ est une fonction poids quelconque nonnégative avec $\int_{-1}^1 w(x) dx > 0$ et $\int_{-1}^1 x^n w(x) dx$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit n un entier naturel fixé et soit $P_n^{\alpha, \beta}$ le polynôme orthonormal de Jacobi. La formule qui va être décrite ici va dépendre largement du fait que λ est un zéro ou non de $P_n^{\alpha, \beta}$.

a) λ n'est pas un zéro de $P_n^{\alpha, \beta}$

La méthode de Hunter consiste à approximer f par le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré inférieur ou égal à n qui interpole la fonction f aux points $(x_i^n, \lambda)_{1 \leq i \leq n}$, i.e.

$$L_n(f, x_i^n) = f(x_i^n) \quad i = 1, \dots, n.$$

$$L_n(f, \lambda) = f(\lambda).$$

Ce polynôme sera défini par:

$$L_n(f, x) = \sum_{i=1}^n \frac{x - \lambda}{x_i^n - \lambda} l_{i,n}(x) f(x_i^n) + \frac{P_n^{\alpha, \beta}(x)}{P_n^{\alpha, \beta}(\lambda)} f(\lambda),$$

avec

$$l_{i,n}(x) = \frac{P_n^{\alpha, \beta}(x)}{(P_n^{\alpha, \beta})'(x_i^n)} \cdot \frac{1}{x - x_i^n},$$

ce qui nous conduit à une formule de quadrature de type Gauss à $(n + 1)$ points définie par la relation suivante: (cf [14, eq(1.8(a))])

$$(A) \quad S_n = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{x_i^n - \lambda} f(x_i^n) + \frac{q_n^{\alpha, \beta}(\lambda)}{P_n^{\alpha, \beta}(\lambda)} f(\lambda),$$

avec: $q_n^{\alpha,\beta}(\lambda) = \int_{-1}^1 w(x) \frac{P_n^{\alpha,\beta}(x)}{x-\lambda} dx$.

b) λ est un zéro de $P_n^{\alpha,\beta}$

Soit n un entier fixé et soit λ une racine de $P_n^{\alpha,\beta}$. Soit $j \in \{1, \dots, n\}$ fixé tel que $\lambda = x_j^n$, la $j^{\text{ième}}$ racine de $P_n^{\alpha,\beta}$. Soit L_n le polynôme de Lagrange de degré inférieur ou égal à n qui interpole la fonction f aux points $(x_i^n)_{1 \leq i \leq n}$, avec cette fois-ci:

$$L_n(f, x_i^n) = f(x_i^n) \quad i = 1, \dots, n.$$

$$L_n'(f, x_j^n) = f'(x_j^n).$$

Ce polynôme est donné par la relation suivante(cf [14, eq(1.7(b))]):

$$L_n(f, x) = \sum_{i=1}^n \frac{((x-\lambda)f(x_i^n) - (x-x_i^n)f(\lambda))}{x_i^n - \lambda} l_{i,n}(x) + l_{j,n}(x)f(x_j^n) + \frac{P_n^{\alpha,\beta}(x)}{(P_n^{\alpha,\beta})'(\lambda)} f'(\lambda)$$

A partir de cette relation, on pourra déduire la formule donnant l'expression de S_n (cf [14, eq(1.8(b))])

$$(B) \quad S_n = \sum_{i=1, i \neq j}^n \frac{1}{x_i^n - \lambda} \left[\lambda_i^n f(x_i^n) - \frac{q_n^{\alpha,\beta}(\lambda)}{(P_n^{\alpha,\beta})'(\lambda)} f(\lambda) \right] + \lambda_j^n f'(\lambda) \\ + \frac{1}{\lambda^2 - 1} \frac{f(\lambda)}{(P_n^{\alpha,\beta})'(\lambda)} \left[(n+1)q_{n+1}^{\alpha,\beta}(\lambda) - \frac{2\lambda}{P_n^{\alpha,\beta}(\lambda)} \right].$$

REMARQUE:

Dans le cas particulier où $w(x) = 1$ et $\lambda = 0$, Hunter a montré dans [21] que S_n prends l'une des deux formes simples suivantes:

$$S_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i^n \frac{f(x_i^n)}{x_i^n} \text{ si } n \text{ est pair,}$$

$$S_n = \lambda_1^n f'(0) + \sum_{i=2}^n \lambda_i^n \frac{f(x_i^n)}{x_i^n} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Avant de donner l'expression de l'erreur commise dans la formule de quadrature de Gauss, on rappellera un théorème de convergence de la suite (S_n) définie par les relations (A) et (B).

Théorème[14, p. 108]

Supposons que f' est continue sur $[-1, 1]$, alors, $\forall \lambda \in]-1, 1[$, nous avons:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S(f, \lambda).$$

REMARQUE:

Etant donné que les fonctions étudiées dans ce chapitre sont régulières sur $[-1,1]$, la convergence de la suite (S_n) sera assurée.

1-2) Expression de l'erreur

L'expression de l'erreur sous la forme des dérivées de la fonction f a été donnée par Elliot et Paget dans [14, p. 305]:

$$E_n(f, \lambda) = \frac{q_n^{\alpha, \beta}(\lambda)}{k_n^{1n}!} f^n(\xi_1) + \frac{h_n}{k_n^{2(2n+1)}!} f^{(2n+1)}(\xi_2), \text{ avec } \xi_1, \xi_2 \in]-1, 1[.$$

Cette expression n'étant pas très pratique, on va donner l'expression de l'erreur comme dans le chapitre I sous la forme d'une intégrale le long d'un contour fermé. Pour ce faire, considérons la fonction $g(x, \lambda)$ définie par:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda} & \text{si } z \neq \lambda \\ f'(\lambda) & \text{si } z = \lambda \end{cases}$$

Lemme 1

Pour tout n dans \mathbb{N} , on a:

$$E_n(f, \lambda) = \int_{-1}^1 w(x)g(x, \lambda)dx - \sum_{i=1}^n \lambda_i^n g(x_i^n, \lambda).$$

Preuve:

D'une part:

$$\int_{-1}^1 w(x)g(x, \lambda)dx = \int_{-1}^1 w(x)\frac{f(x)}{x - \lambda}dx - f(\lambda) \int_{-1}^1 w(x)\frac{1}{x - \lambda}dx,$$

d'autre part:

$$E_n(f, \lambda) = S(f, \lambda) - S_n = \int_{-1}^1 w(x)\frac{f(x)}{x - \lambda}dx - S_n.$$

Il s'agit donc de montrer que: $S_n = f(\lambda) \int_{-1}^1 w(x)\frac{1}{x - \lambda}dx + \sum_{i=1}^n \lambda_i^n g(x_i^n, \lambda)$. On devrait alors distinguer deux cas:

Premier cas: λ n'est pas un zéro de $P_n^{\alpha, \beta}$.

Dans ce cas ci, nous avons:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i^n g(x_i^n, \lambda) &= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{x_i^n - \lambda} f(x_i^n) - f(\lambda) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{x_i^n - \lambda}, \\ S_n &= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{x_i^n - \lambda} f(x_i^n) + f(\lambda) \frac{q_n^{\alpha, \beta}(\lambda)}{P_n^{\alpha, \beta}(\lambda)} \text{ d'après la relation (A),} \end{aligned}$$

d'où:

$$S_n - \sum_{i=1}^n \lambda_i^n g(x_i^n, \lambda) = f(\lambda) \left(\frac{q_n^{\alpha, \beta}(\lambda)}{P_n^{\alpha, \beta}(\lambda)} + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{x_i^n - \lambda} \right).$$

Il s'agit donc de montrer que:

$$\int_{-1}^1 w(x) \frac{1}{x - \lambda} dx = \frac{q_n^{\alpha, \beta}(\lambda)}{P_n^{\alpha, \beta}(\lambda)} + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{x_i^n - \lambda},$$

ce qui est vraie vue la relation (A) et le fait que la méthode de quadrature de Gauss à n points est exacte pour les polynômes de degré plus petit ou égal à $(2n - 1)$.

Deuxième cas: λ est un zéro de $P_n^{\alpha, \beta}$ avec $\lambda = x_j^n$.

Dans ce cas ci, nous avons:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i^n g(x_i^n, \lambda) &= \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{x_i^n - \lambda} f(x_i^n) - f(\lambda) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{x_i^n - \lambda} + \lambda_j^n f'(\lambda). \\ S_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^n - \lambda} \left(\lambda_i^n f(x_i^n) - \frac{q_n^{\alpha, \beta}(\lambda)}{(P_n^{\alpha, \beta})'(x_i^n)} f(\lambda) \right) + \lambda_j^n f'(\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{(P_n^{\alpha, \beta})'(\lambda)} \cdot \frac{f(\lambda)}{\lambda^2 - 1} \left((n+1)q_{n+1}^{\alpha, \beta}(\lambda) - \frac{2\lambda}{P_{n+1}^{\alpha, \beta}(\lambda)} \right), \end{aligned}$$

d'après la relation (B). D'où:

$$\begin{aligned} S_n - \sum_{i=1}^n \lambda_i^n g(x_i^n, \lambda) &= f(\lambda) \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i^n}{x_i^n - \lambda} - \frac{q_n^{\alpha, \beta}(\lambda)}{(P_n^{\alpha, \beta})'(x_i^n)} \cdot \frac{1}{x_i^n - \lambda} \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{(P_n^{\alpha, \beta})'(\lambda)} \cdot \frac{f(\lambda)}{\lambda^2 - 1} \left((n+1)q_{n+1}^{\alpha, \beta}(\lambda) - \frac{2\lambda}{P_{n+1}^{\alpha, \beta}(\lambda)} \right). \end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 w(x) \frac{1}{x - \lambda} dx &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i^n}{x_i^n - \lambda} - \frac{q_n^{\alpha, \beta}(\lambda)}{(P_n^{\alpha, \beta})'(x_i^n)} \cdot \frac{1}{x_i^n - \lambda} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(P_n^{\alpha, \beta})'(\lambda)} \cdot \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left((n+1)q_{n+1}^{\alpha, \beta}(\lambda) - \frac{2\lambda}{P_{n+1}^{\alpha, \beta}(\lambda)} \right). \end{aligned}$$

Or, en utilisant la relation (B) et le fait que la méthode de quadrature de Gauss à n points est exacte pour les polynômes de degré plus petit ou égal à $(2n - 1)$, on a:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 w(x) \frac{1}{x - \lambda} dx &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^n - \lambda} \left(\lambda_i^n - \frac{q_n^{\alpha, \beta}(\lambda)}{(P_n^{\alpha, \beta})'(x_i^n)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(P_n^{\alpha, \beta})'(\lambda)} \cdot \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left((n+1)q_{n+1}^{\alpha, \beta}(\lambda) - \frac{2\lambda}{P_{n+1}^{\alpha, \beta}(\lambda)} \right). \end{aligned}$$

Proposition 1

Soit Γ une courbe fermée définissant un domaine D dans son intérieur contenant l'intervalle $[-1, 1]$, et soit f une fonction analytique appartenant à $H^\infty(\Gamma)$.

Soit $\lambda \in]-1, 1[$ et soit

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda} & \text{si } z \neq \lambda \\ f'(\lambda) & \text{si } z = \lambda \end{cases}$$

alors

$$E_n(f, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right) dz.$$

Preuve:

Vues les propriétés vérifiées par la fonction g , on a via la formule de Cauchy:

$$\begin{aligned} \forall t \in [-1, 1] \quad g(t, \lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(z, \lambda)}{z - t} dz, \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad g(t_i^n, \lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(z, \lambda)}{z - t_i^n} dz. \end{aligned}$$

Ainsi, on a d'une part:

$$\int_{-1}^1 w(x) g(t, \lambda) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \int_L g(z, \lambda) \left(\int_{-1}^1 \frac{w(t)}{z - t} dt \right) dz$$

et d'autre part

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^n g(t_i^n, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_L g(z, \lambda) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{z - t_i^n} \right) dz.$$

d'où, en faisant la différence, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 w(x) g(t, \lambda) dt - \sum_{i=1}^n \lambda_i^n g(t_i^n, \lambda) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L g(z, \lambda) \left(\int_{-1}^1 \frac{w(t)}{z - t} dt - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^n}{z - t_i^n} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right) dz. \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 1

$$\int_{-1}^1 w(x) g(t, \lambda) dt - \sum_{i=1}^n \lambda_i^n g(t_i^n, \lambda) = E_n(f, \lambda),$$

d'où le résultat.

2 Fonction admettant des singularités logarithmiques ou réelles

2-1) Fonction présentant une singularité logarithmique

Soit f une fonction analytique présentant une singularité logarithmique en un point $z = \pm c$ où $c > 1$ et s'écrivant sous la forme:

$$f(z) = \begin{cases} \ln(c-z)h(z) & \text{si la singularité est en } z = c \text{ avec } h(c) \neq 0 \\ \ln(c+z)h(z) & \text{si la singularité est en } z = -c \text{ avec } h(-c) \neq 0, \end{cases}$$

la fonction h étant un polynôme.

Supposons en un premier temps que la singularité est située en $z = c > 1$. Soit Γ la courbe définie dans II-1).

La fonction $g(z, \lambda)$ définie par:

$$g(z, \lambda) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda} & \text{si } z \neq \lambda \\ f'(\lambda) & \text{si } z = \lambda \end{cases}$$

appartient à $H^\infty(\Gamma)$. On pourra alors écrire d'après la proposition I-6),

$$E_n(f, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz.$$

De façon identique à la démonstration du lemme II-1-1), on peut montrer le résultat suivant:

Lemme 2

$$a) \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz = 0.$$

$$b) \exists n_0 / \forall n \geq n_0, \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz = 0.$$

De ce lemme, on déduit le résultat suivant:

$$\exists n_0 / \forall n \geq n_0, E_n(f, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_3} g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz \right).$$

Lemme 3

$$\exists n_0 / \forall n \geq n_0,$$

$$a) E_n(f, \lambda) = - \int_c^\infty \frac{h(t)}{t-\lambda} E_n\left(\frac{1}{t-}\right) dt.$$

$$b) \Delta S_n = - \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_c^\infty \frac{h(t)}{t-\lambda} Q_n^{\alpha, \beta}(t) dt.$$

Preuve:

a) Soit $n \geq n_0$:

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_3} g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_3} \frac{f(z)}{z-\lambda} E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz - \int_{\gamma_1 \cup \gamma_3} \frac{f(\lambda)}{z-\lambda} E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz.$$

D'une part, en utilisant la définition des courbes γ_1 et γ_2 , on vérifie facilement que:

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_3} \frac{f(\lambda)}{z-\lambda} E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz = 0.$$

D'autre part, en remplaçant la fonction $h(z)$ par $\frac{h(z)}{z-\lambda}$ dans la démonstration du lemme II-2-2), on pourra montrer de façon similaire que:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_3} \frac{f(z)}{z-\lambda} E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz &= \int_{\gamma_1 \cup \gamma_3} \ln(z-\lambda) \frac{h(z)}{z-\lambda} E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz \\ &= -2i\pi \int_{r+c}^{R+c} \frac{h(t)}{t-\lambda} E_n\left(\frac{1}{t-\cdot}\right) dt. \end{aligned}$$

D'où par passage à la limite lorsque r tend vers zéro et R tend vers l'infini, on obtient:

$$E_n(f, \lambda) = - \int_c^\infty \frac{h(t)}{t-\lambda} E_n\left(\frac{1}{t-\cdot}\right) dt.$$

b) Sachant que: $\Delta E_n\left(\frac{1}{t-\cdot}\right) = -\frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha, \beta}(t)$, on obtient:

$$\begin{aligned} \Delta S_n &= - \int_c^\infty \frac{h(t)}{t-\lambda} \left[E_n\left(\frac{1}{t-\cdot}\right) - E_{n+1}\left(\frac{1}{t-\cdot}\right) \right] dt \\ &= -\frac{a_{n+1}}{a_n} \int_c^\infty \frac{h(t)}{t-\lambda} Q_n^{\alpha, \beta}(t) dt. \end{aligned}$$

REMARQUE:

Vues les propriétés vérifiées par les fonctions $\frac{h(t)}{t-\lambda}$, $E_n\left(\frac{1}{t-\cdot}\right)$ et $Q_n^{\alpha, \beta}(t)$, on pourra utiliser une démonstration similaire à celle de la proposition II-2-1) afin de trouver le résultat suivant:

Proposition 2

En notant:

$$\begin{aligned} A &= -\pi K(c) \frac{h(c)}{c-\lambda}, & g(n) &= \frac{1}{2nr^{2n}} \left(1 - \frac{2n}{(n+1)r^2} + \frac{n}{(n+2)r^4} \right), \\ B &= -2A\sqrt{c^2-1}, & G(n) &= \frac{1}{(2n+1)r^{2n+1}}, \end{aligned}$$

avec: $r = c + \sqrt{c^2-1}$, nous obtenons les équivalences suivantes au voisinage de l'infini:

$$a) E_n(f) \sim BG(n)$$

$$b) \Delta S_n \sim Ag(n).$$

REMARQUE:

Dans le cas où la singularité de la fonction f est située en un point $z = -c$ à gauche de -1 , on obtient un résultat similaire au précédent avec:

$$A = -\pi K(-c) \frac{h(-c)}{c + \lambda}, \quad g(n) = \frac{1}{2nr^{2n}} \left(1 - \frac{2n}{(n+1)r^2} + \frac{n}{(n+2)r^4} \right),$$

$$B = -2A\sqrt{c^2 - 1}, \quad G(n) = \frac{1}{(2n+1)r^{2n+1}}.$$

En utilisant la proposition 1 et la remarque ci dessus, on pourra montrer de façon similaire à celles des propositions 3 et 4 du paragraphe II-2), le résultat d'accélération suivant:

Proposition 3

En notant: $D_n = -\frac{\Delta S_n}{\Delta g_n} g(n)$ et $U(n) = \frac{g^2(n+1) - g(n)g(n+2)}{\Delta g(n)}$, on a:

a) La suite (T_n) définie par: $T_n = S_n + D_n$ converge vers S plus vite que la suite (S_n) .

b) La suite (W_n) définie par: $W_n = T_n - \frac{\Delta T_n}{\Delta U_n} U_n$ converge vers S plus vite que la suite (T_n) .

EXEMPLES NUMERIQUES

$$f(x) = \frac{\ln(c-x)}{x}, \quad w(x) = 1.$$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.960D-01 | -0.774D-02 | -0.369D-03 |
| 3 | -0.347D-01 | -0.219D-02 | -0.107D-03 |
| 4 | -0.140D-01 | -0.700D-03 | -0.296D-04 |
| 5 | -0.599D-02 | -0.240D-03 | -0.826D-05 |
| 6 | -0.267D-02 | -0.862D-04 | -0.238D-05 |
| 7 | -0.122D-02 | -0.322D-04 | -0.721D-06 |
| 8 | -0.570D-03 | -0.124D-04 | -0.232D-06 |
| 9 | -0.270D-03 | -0.494D-05 | -0.792D-07 |
| 10 | -0.130D-03 | -0.201D-05 | -0.286D-07 |
| 11 | -0.628D-04 | -0.834D-06 | -0.108D-07 |
| 12 | -0.306D-04 | -0.353D-06 | -0.424D-08 |
| 13 | -0.151D-04 | -0.152D-06 | -0.171D-08 |
| 14 | -0.745D-05 | -0.662D-07 | -0.701D-09 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.623D-01 | -0.335D-02 | -0.731D-04 |
| 3 | -0.180D-01 | -0.690D-03 | -0.123D-04 |
| 4 | -0.570D-02 | -0.160D-03 | -0.206D-05 |
| 5 | -0.191D-02 | -0.404D-04 | -0.379D-06 |
| 6 | -0.661D-03 | -0.108D-04 | -0.807D-07 |
| 7 | -0.235D-03 | -0.304D-05 | -0.198D-07 |
| 8 | -0.850D-04 | -0.892D-06 | -0.537D-08 |
| 9 | -0.312D-04 | -0.271D-06 | -0.155D-08 |
| 10 | -0.116D-04 | -0.845D-07 | -0.460D-09 |
| 11 | -0.435D-05 | -0.270D-07 | -0.140D-09 |
| 12 | -0.165D-05 | -0.881D-08 | -0.433D-10 |
| 13 | -0.626D-06 | -0.292D-08 | -0.135D-10 |
| 14 | -0.240D-06 | -0.983D-09 | -0.427D-11 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.434D-01 | -0.174D-02 | -0.175D-04 |
| 3 | -0.104D-01 | -0.282D-03 | -0.185D-05 |
| 4 | -0.274D-02 | -0.521D-04 | -0.216D-06 |
| 5 | -0.758D-03 | -0.106D-04 | -0.332D-07 |
| 6 | -0.217D-03 | -0.230D-05 | -0.669D-08 |
| 7 | -0.635D-04 | -0.528D-06 | -0.155D-08 |
| 8 | -0.189D-04 | -0.127D-06 | -0.374D-09 |
| 9 | -0.573D-05 | -0.316D-07 | -0.921D-10 |
| 10 | -0.175D-05 | -0.811D-08 | -0.228D-10 |
| 11 | -0.542D-06 | -0.213D-08 | -0.571D-11 |
| 12 | -0.169D-06 | -0.570D-09 | -0.144D-11 |
| 13 | -0.528D-07 | -0.155D-09 | -0.365D-12 |
| 14 | -0.167D-07 | -0.430D-10 | -0.888D-13 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.434D-01 | -0.174D-02 | -0.175D-04 |
| 3 | -0.104D-01 | -0.282D-03 | -0.185D-05 |
| 4 | -0.274D-02 | -0.521D-04 | -0.216D-06 |
| 5 | -0.758D-03 | -0.106D-04 | -0.332D-07 |
| 6 | -0.217D-03 | -0.230D-05 | -0.669D-08 |
| 7 | -0.635D-04 | -0.528D-06 | -0.155D-08 |
| 8 | -0.189D-04 | -0.127D-06 | -0.374D-09 |
| 9 | -0.573D-05 | -0.316D-07 | -0.921D-10 |
| 10 | -0.175D-05 | -0.811D-08 | -0.228D-10 |
| 11 | -0.542D-06 | -0.213D-08 | -0.571D-11 |
| 12 | -0.169D-06 | -0.570D-09 | -0.144D-11 |
| 13 | -0.528D-07 | -0.155D-09 | -0.365D-12 |
| 14 | -0.167D-07 | -0.430D-10 | -0.888D-13 |

1.2

Dans cet exemple, $\lambda = 0$, et on remarque que la convergence des suites (S_n) , (T_n) et (W_n) devient de plus en plus rapide lorsque la singularité s'éloigne de l'intervalle d'intégration.

2-2) Fonction présentant une double singularité réelle

Soit f une fonction analytique présentant au plus une double singularité réelle aux points $z = c$ et $z = -d$ avec $c, d > 1$ et s'écrivant sous la forme:

$$f(z) = (c - z)^\gamma (d + z)^\delta h(z),$$

avec, γ, δ deux réels non entiers strictement plus grands que -1, et h un polynôme non nulle aux points c et d .

Soit Γ la courbe définie dans II-3).

La fonction $g(z, \lambda)$ définie par:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda} & \text{si } z \neq \lambda \\ f'(\lambda) & \text{si } z = \lambda \end{cases}$$

appartient à $H^\infty(\Gamma)$. On pourra alors écrire d'après la proposition I-6),

$$E_n(f, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right) dz.$$

De façon identique à la démonstrations du lemme II-3-1), on peut montrer le résultat suivant:

Lemme 4

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_3 \cup \gamma_6} g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right) dz = 0.$

b) $\exists n_0 / \forall n \geq n_0, \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right) dz = 0.$

On obtient alors une nouvelle expression de l'erreur à savoir:

$$\exists n_0 / \forall n \geq n_0, E_n(f, \lambda) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_1 \cup \gamma_3} g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right) dz \right).$$

Proposition 4

$\exists n_0 / \forall n \geq n_0:$

a)

$$E_n(f) = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \int_c^\infty (y - c)^\gamma (y + d)^\delta \frac{h(y)}{y - \lambda} E_n\left(\frac{1}{y - \cdot}\right) dy + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} \int_d^\infty (y + c)^\gamma (y - d)^\delta \frac{h(-y)}{y + \lambda} E_n\left(\frac{1}{-y - \cdot}\right) dy.$$

b)

$$\Delta S_n = -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_c^\infty (y - c)^\gamma (y + d)^\delta \frac{h(y)}{y - \lambda} Q_n^{\alpha, \beta}(y) dy + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_d^\infty (y + c)^\gamma (y - d)^\delta \frac{h(-y)}{y + \lambda} Q_n^{\alpha, \beta}(-y) dy.$$

Preuve:

a) Soit $n \geq n_0$,

$$\int_{(\gamma_2 \cup \gamma_4) \cup (\gamma_5 \cup \gamma_7)} g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz = \int_{(\gamma_2 \cup \gamma_4) \cup (\gamma_5 \cup \gamma_7)} \frac{f(z)}{z-\lambda} E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz - \int_{(\gamma_2 \cup \gamma_4) \cup (\gamma_5 \cup \gamma_7)} \frac{f(\lambda)}{z-\lambda} E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz.$$

D'une part, en utilisant les définitions des courbes $\gamma_2, \gamma_4, \gamma_5$ et γ_7 , on montre facilement que cette dernière intégrale est nulle.

D'autre part, en remplaçant la fonction $h(z)$ par $\frac{h(z)}{z-\lambda}$ dans les lemmes 2 et 3 du paragraphe II-3, on pourra montrer de la même manière que:

$$\int_{\gamma_2 \cup \gamma_4} \frac{f(z)}{z-\lambda} E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz = -2i\pi \sin(\pi\gamma) \int_{r+c}^{R+c} (x-c)^\gamma (x+d)^\delta \frac{h(x)}{x-\lambda} E_n\left(\frac{1}{x-}\right) dx,$$

$$\int_{\gamma_5 \cup \gamma_7} \frac{f(z)}{z-\lambda} E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz = -2i\pi \sin(\pi\delta) \int_{r+d}^{R+d} (x+c)^\gamma (x-d)^\delta \frac{h(-x)}{x+\lambda} E_n\left(\frac{1}{-x-}\right) dx,$$

d'où par passage à la limite lorsque r tend vers zéro et R tend vers l'infini, on obtient le résultat.

b) En utilisant les relations: $\Delta E_n\left(\frac{1}{x-}\right) = -\frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha, \beta}(x)$,
 $\Delta E_n\left(\frac{1}{-x-}\right) = -\frac{a_{n+1}}{a_n} Q_n^{\alpha, \beta}(-x)$ et $\Delta S_n = -\Delta E_n(f)$, on obtient le résultat. ■

En utilisant les mêmes techniques vues dans les démonstrations des propositions, on obtient le résultat suivant:

Proposition 5

Soit $r_1 = c + \sqrt{c^2 - 1}$, $r_2 = d + \sqrt{d^2 - 1}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = -2(\sqrt{c^2 - 1})^{\gamma+1} (c+d)^\delta \frac{h(c)}{c-\lambda} K(c) \Gamma(\gamma+1). \\ G_1(n) = \frac{1}{r_1^{2n+1} (2n+1)^{\gamma+1}}. \\ B_2 = 2(\sqrt{d^2 - 1})^{\delta+1} (c+d)^\gamma \frac{h(-d)}{d+\lambda} K(-d) \Gamma(\delta+1). \\ G_2(n) = \frac{1}{r_2^{2n+1} (2n+1)^{\delta+1}}. \\ A_1 = -\sin(\pi\gamma) K(c) h(c) (\sqrt{c^2 - 1})^\gamma \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2^{(\gamma+1)}}. \\ g_1(n) = \frac{1}{n^{(\gamma+1)} r_1^{2n}} \left(1 - \frac{2}{r_1^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\gamma+1} + \frac{1}{r_1^4} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\gamma+1} \right). \\ A_2 = \sin(\pi\delta) K(-d) h(-d) (\sqrt{d^2 - 1})^\delta \frac{\Gamma(\delta+1)}{2^{(\delta+1)}}. \\ g_2(n) = \frac{1}{n^{(\delta+1)} r_2^{2n}} \left(1 - \frac{2}{r_2^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\delta+1} + \frac{1}{r_2^4} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{\delta+1} \right). \end{array} \right.$$

Premier cas: $c = d$

a) $\gamma = \delta$, $B_2 \neq -B_1$ et $A_2 \neq A_1$

$$E_n(f) \sim \sin(\pi\gamma)(B_2 + B_1)G_1(n).$$

$$\Delta S_n \sim \sin(\pi\gamma)(A_2 + A_1)g_1(n).$$

b) $\gamma < \delta$

$$E_n(f) \sim \sin(\pi\gamma)B_1G_1(n).$$

$$\Delta S_n \sim \sin(\pi\gamma)A_1g_1(n).$$

c) $\gamma > \delta$

$$E_n(f) \sim \sin(\pi\delta)B_2G_2(n).$$

$$\Delta S_n \sim \sin(\pi\delta)A_2g_2(n).$$

Deuxième cas: $c < d$

Pour tout réel non entier $\gamma, \delta > -1$, on a:

$$E_n(f) \sim \sin(\pi\gamma)B_1G_1(n).$$

$$\Delta S_n \sim \sin(\pi\gamma)A_1g_1(n).$$

Troisième cas: $c > d$

Pour tout réel non entier $\gamma, \delta > -1$, on a:

$$E_n(f) \sim \sin(\pi\delta)B_2G_2(n).$$

$$\Delta S_n \sim \sin(\pi\delta)A_2g_2(n).$$

Etant données des représentations asymptotiques de $E_n(f, \lambda)$ et de ΔS_n , on pourra énoncer des résultats d'accélération de la suite (S_n) qui seront similaires à ceux donnés dans II-2-2).

Proposition 6

Soit $D_n = -\frac{\Delta S_n}{\Delta g_i(n)}g_i(n)$ et $U_i(n) = \frac{g_i^2(n+1) - g_i(n)g_i(n+2)}{\Delta g_i(n)}$ avec

$$i = 1 \text{ si } \begin{cases} c = d & \text{et } \gamma \leq \delta \\ \text{ou} \\ c < d \end{cases}$$

ou

$$i = 2 \text{ si } \begin{cases} c = d \text{ et } \gamma \geq \delta \\ \text{ou} \\ c > d \end{cases}$$

a) La suite (T_n) définie par: $T_n = S_n + D_n$ converge vers S plus vite que la suite (S_n) .

b) La suite (W_n) définie par: $W_n = T_n - \frac{\Delta T_n}{\Delta U_i(n)} U_i(n)$ converge vers S plus vite que la suite (T_n) .

EXEMPLES NUMERIQUES.

Exem 1: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{c-x}(\lambda-x)}, w(x) = 1.$
 $\lambda = 0.2$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.113D+00 | 0.750D-02 | 0.377D-03 |
| 3 | 0.408D-01 | 0.182D-02 | 0.621D-04 |
| 4 | 0.152D-01 | 0.471D-03 | 0.101D-04 |
| 5 | 0.574D-02 | 0.129D-03 | 0.176D-05 |
| 6 | 0.220D-02 | 0.368D-04 | 0.348D-06 |
| 7 | 0.851D-03 | 0.109D-04 | 0.809D-07 |
| 8 | 0.331D-03 | 0.337D-05 | 0.217D-07 |
| 9 | 0.130D-03 | 0.107D-05 | 0.638D-08 |
| 10 | 0.509D-04 | 0.347D-06 | 0.197D-08 |
| 11 | 0.201D-04 | 0.115D-06 | 0.620D-09 |
| 12 | 0.796D-05 | 0.389D-07 | 0.198D-09 |
| 13 | 0.316D-05 | 0.133D-07 | 0.632D-10 |
| 14 | 0.126D-05 | 0.463D-08 | 0.214D-10 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|------------|
| 2 | 0.500D-01 | 0.181D-02 | 0.295D-04 |
| 3 | 0.127D-01 | 0.280D-03 | 0.217D-05 |
| 4 | 0.331D-02 | 0.477D-04 | 0.192D-06 |
| 5 | 0.875D-03 | 0.880D-05 | 0.253D-07 |
| 6 | 0.234D-03 | 0.173D-05 | 0.459D-08 |
| 7 | 0.632D-04 | 0.358D-06 | 0.938D-09 |
| 8 | 0.172D-04 | 0.770D-07 | 0.197D-09 |
| 9 | 0.470D-05 | 0.171D-07 | 0.416D-10 |
| 10 | 0.129D-05 | 0.389D-08 | 0.884D-11 |
| 11 | 0.356D-06 | 0.903D-09 | 0.190D-11 |
| 12 | 0.987D-07 | 0.214D-09 | 0.411D-12 |
| 13 | 0.274D-07 | 0.512D-10 | -0.387D-12 |
| 14 | 0.763D-08 | 0.121D-10 | 0.268D-12 |

1.2

$\lambda = 0.5$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.165D+00 | 0.117D-01 | 0.597D-03 |
| 3 | 0.598D-01 | 0.284D-02 | 0.987D-04 |
| 4 | 0.224D-01 | 0.737D-03 | 0.163D-04 |
| 5 | 0.850D-02 | 0.202D-03 | 0.288D-05 |
| 6 | 0.327D-02 | 0.577D-04 | 0.576D-06 |
| 7 | 0.126D-02 | 0.172D-04 | 0.135D-06 |
| 8 | 0.493D-03 | 0.530D-05 | 0.361D-07 |
| 9 | 0.193D-03 | 0.168D-05 | 0.105D-07 |
| 10 | 0.759D-04 | 0.547D-06 | 0.322D-08 |
| 11 | 0.300D-04 | 0.182D-06 | 0.101D-08 |
| 12 | 0.119D-04 | 0.613D-07 | 0.320D-09 |
| 13 | 0.472D-05 | 0.210D-07 | 0.103D-09 |
| 14 | 0.188D-05 | 0.730D-08 | 0.334D-10 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.694D-01 | 0.269D-02 | 0.476D-04 |
| 3 | 0.178D-01 | 0.419D-03 | 0.373D-05 |
| 4 | 0.465D-02 | 0.719D-04 | 0.357D-06 |
| 5 | 0.123D-02 | 0.133D-04 | 0.483D-07 |
| 6 | 0.331D-03 | 0.263D-05 | 0.849D-08 |
| 7 | 0.894D-04 | 0.545D-06 | 0.167D-08 |
| 8 | 0.243D-04 | 0.117D-06 | 0.340D-09 |
| 9 | 0.666D-05 | 0.261D-07 | 0.704D-10 |
| 10 | 0.183D-05 | 0.594D-08 | 0.149D-10 |
| 11 | 0.506D-06 | 0.138D-08 | 0.314D-11 |
| 12 | 0.140D-06 | 0.327D-09 | 0.524D-12 |
| 13 | 0.389D-07 | 0.783D-10 | 0.235D-12 |
| 14 | 0.108D-07 | 0.191D-10 | 0.162D-13 |

1.2

Pour des valeurs de λ différentes, mais non proches de 1, on obtient des résultats identiques.

$\lambda = 0.9$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.435D+00 | 0.381D-01 | 0.231D-02 |
| 3 | 0.163D+00 | 0.953D-02 | 0.401D-03 |
| 4 | 0.621D-01 | 0.253D-02 | 0.721D-04 |
| 5 | 0.239D-01 | 0.705D-03 | 0.141D-04 |
| 6 | 0.926D-02 | 0.205D-03 | 0.308D-05 |
| 7 | 0.361D-02 | 0.617D-04 | 0.754D-06 |
| 8 | 0.142D-02 | 0.192D-04 | 0.202D-06 |
| 9 | 0.557D-03 | 0.614D-05 | 0.578D-07 |
| 10 | 0.220D-03 | 0.201D-05 | 0.172D-07 |
| 11 | 0.870D-04 | 0.671D-06 | 0.526D-08 |
| 12 | 0.346D-04 | 0.228D-06 | 0.164D-08 |
| 13 | 0.138D-04 | 0.784D-07 | 0.517D-09 |
| 14 | 0.549D-05 | 0.273D-07 | 0.166D-09 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.147D+00 | 0.683D-02 | 0.163D-03 |
| 3 | 0.384D-01 | 0.110D-02 | 0.155D-04 |
| 4 | 0.102D-01 | 0.194D-03 | 0.182D-05 |
| 5 | 0.273D-02 | 0.366D-04 | 0.269D-06 |
| 6 | 0.738D-03 | 0.733D-05 | 0.462D-07 |
| 7 | 0.201D-03 | 0.154D-05 | 0.861D-08 |
| 8 | 0.549D-04 | 0.334D-06 | 0.168D-08 |
| 9 | 0.151D-04 | 0.748D-07 | 0.336D-09 |
| 10 | 0.416D-05 | 0.171D-07 | 0.679D-10 |
| 11 | 0.115D-05 | 0.401D-08 | 0.150D-10 |
| 12 | 0.319D-06 | 0.952D-09 | 0.298D-11 |
| 13 | 0.888D-07 | 0.229D-09 | 0.628D-12 |
| 14 | 0.248D-07 | 0.558D-10 | 0.104D-12 |

1.2

$\lambda = 0.99$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.711D+00 | 0.702D-01 | 0.490D-02 |
| 3 | 0.272D+00 | 0.181D-01 | 0.901D-03 |
| 4 | 0.105D+00 | 0.491D-02 | 0.174D-03 |
| 5 | 0.408D-01 | 0.139D-02 | 0.366D-04 |
| 6 | 0.159D-01 | 0.410D-03 | 0.852D-05 |
| 7 | 0.625D-02 | 0.125D-03 | 0.218D-05 |
| 8 | 0.246D-02 | 0.395D-04 | 0.597D-06 |
| 9 | 0.972D-03 | 0.127D-04 | 0.172D-06 |
| 10 | 0.385D-03 | 0.421D-05 | 0.512D-07 |
| 11 | 0.153D-03 | 0.141D-05 | 0.156D-07 |
| 12 | 0.609D-04 | 0.483D-06 | 0.486D-08 |
| 13 | 0.243D-04 | 0.167D-06 | 0.153D-08 |
| 14 | 0.970D-05 | 0.585D-07 | 0.352D-09 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|------------|
| 2 | 0.198D+00 | 0.998D-02 | 0.275D-03 |
| 3 | 0.525D-01 | 0.164D-02 | 0.285D-04 |
| 4 | 0.140D-01 | 0.293D-03 | 0.361D-05 |
| 5 | 0.378D-02 | 0.561D-04 | 0.553D-06 |
| 6 | 0.103D-02 | 0.113D-04 | 0.959D-07 |
| 7 | 0.280D-03 | 0.240D-05 | 0.179D-07 |
| 8 | 0.766D-04 | 0.525D-06 | 0.348D-08 |
| 9 | 0.211D-04 | 0.118D-06 | 0.696D-09 |
| 10 | 0.583D-05 | 0.272D-07 | 0.143D-09 |
| 11 | 0.161D-05 | 0.639D-08 | 0.296D-10 |
| 12 | 0.449D-06 | 0.152D-08 | 0.387D-11 |
| 13 | 0.125D-06 | 0.366D-09 | -0.335D-11 |
| 14 | 0.349D-07 | 0.857D-10 | -0.744D-10 |

1.2

Lorsque λ est très proche de 1, les approximations deviennent moins bonnes que lorsque λ est loin de 1.

3) Fonction présentant une singularité réelle aux points ± 1 .

Soit f une fonction analytique présentant au plus deux singularités réelles aux points $z = \pm 1$ et s'écrivant sous la forme:

$$f(z) = (1 - z)^\gamma (1 + z)^\delta h(z),$$

avec, γ, δ deux réels non entiers strictement plus grands que -1 , et h un polynôme non nul aux points 1 et -1 .

En considérant la courbe Γ décrite dans le paragraphe II-4), et les techniques vues dans ce même paragraphe, on montre que:

$$\begin{aligned} E_n(f) &= -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \int_1^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta \frac{h(y)}{y-\lambda} E_n\left(\frac{1}{y-\lambda}\right) dy \\ &\quad + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} \int_1^\infty (y+1)^\gamma (y-1)^\delta \frac{h(-y)}{y+\lambda} E_n\left(\frac{1}{-y-\lambda}\right) dy. \\ \Delta S_n &= -\frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_1^\infty (y-1)^\gamma (y+1)^\delta h(y) Q_n^{\alpha,\beta}(y) dy. \\ &\quad + \frac{\sin(\pi\delta)}{\pi} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_1^\infty (y+1)^\gamma (y-1)^\delta h(-y) Q_n^{\alpha,\beta}(-y) dy. \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes techniques vues pour la démonstration des propositions 1 et 2 du paragraphe II-4), on pourra montrer le résultat suivant:

Proposition 7

En notant:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{h(1)}{1-\lambda} \frac{\sin(\pi\gamma)}{1} \frac{\Gamma(2\alpha+2\gamma+3)}{2^{3(\alpha+\gamma)+1-(\beta+\delta)}}, & B_1 &= -2 \frac{h(1)}{1-\lambda} \frac{\sin(\pi\gamma)}{1} \frac{\Gamma(2\alpha+2\gamma+2)}{2^{(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)}}, \\ g_1(n) &= \frac{1}{(n+1)^{(2\alpha+2\gamma+3)}}, & G_1(n) &= \frac{1}{(2n+1)^{2(\alpha+\gamma+1)}}, \\ A_2 &= \frac{h(-1)}{1+\lambda} \frac{\sin(\pi\delta)}{1} \frac{\Gamma(2\beta+2\delta+3)}{2^{3(\beta+\delta)+1-(\alpha+\gamma)}}, & B_2 &= 2 \frac{h(-1)}{1+\lambda} \frac{\sin(\pi\delta)}{1} \frac{\Gamma(2\beta+2\delta+2)}{2^{(\beta+\delta)-(\alpha+\gamma)}}, \\ g_2(n) &= \frac{1}{(n+1)^{(2\beta+2\delta+3)}}, & G_2(n) &= \frac{1}{(2n+1)^{2(\beta+\delta+1)}}. \end{aligned}$$

Nous avons les equivalences suivantes au voisinage de l'infini:

(a) Si $\alpha + \gamma = \beta + \delta$, $A_1 + A_2 \neq 0$, $B_1 + B_2 \neq 0$, alors

$$\Delta S_n \sim (A_2 + A_1) g_1(n), \quad E_n(f) \sim (B_2 + B_1) G_1(n).$$

(b) Si $\alpha + \gamma < \beta + \delta$ alors

$$\Delta S_n \sim A_1 g_1(n), \quad E_n(f) \sim B_1 G_1(n).$$

(c) Si $\alpha + \gamma > \beta + \delta$ alors

$$\Delta S_n \sim A_2 g_2(n), \quad E_n(f) \sim B_2 G_2(n).$$

A partir de ce résultat, on pourra énoncer le résultat d'accélération suivant identique à celui donné dans la proposition II-4-

Proposition 8

Soit $D_n = -\frac{\Delta S_n}{\Delta G_i(n)} G_i(n)$ avec

$$i = \begin{cases} 1 = & \text{si } \alpha + \gamma \leq \beta + \delta. \\ 2 = & \text{si } \alpha + \gamma > \beta + \delta. \end{cases}$$

La suite $(T_n)_n$ définie par: $T_n = S_n + D_n$ converge vers S plus rapidement que la suite $(S_n)_n$.

EXEMPLE NUMERIQUE

$$f(x) = \frac{1}{(x-\lambda)\sqrt{1-x}}, w(x) = 1.$$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ |
|----|-----------|-----------|
| 2 | 0.529D+00 | 0.206D-01 |
| 3 | 0.384D+00 | 0.934D-02 |
| 4 | 0.301D+00 | 0.497D-02 |
| 5 | 0.247D+00 | 0.294D-02 |
| 6 | 0.209D+00 | 0.188D-02 |
| 7 | 0.182D+00 | 0.127D-02 |
| 8 | 0.160D+00 | 0.897D-03 |
| 9 | 0.144D+00 | 0.657D-03 |
| 10 | 0.130D+00 | 0.495D-03 |
| 11 | 0.119D+00 | 0.383D-03 |
| 12 | 0.109D+00 | 0.302D-03 |
| 13 | 0.101D+00 | 0.242D-03 |
| 14 | 0.942D-01 | 0.197D-03 |

0.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ |
|----|-----------|-----------|
| 2 | 0.674D+00 | 0.324D-01 |
| 3 | 0.491D+00 | 0.150D-01 |
| 4 | 0.385D+00 | 0.808D-02 |
| 5 | 0.317D+00 | 0.482D-02 |
| 6 | 0.269D+00 | 0.309D-02 |
| 7 | 0.233D+00 | 0.210D-02 |
| 8 | 0.206D+00 | 0.149D-02 |
| 9 | 0.185D+00 | 0.109D-02 |
| 10 | 0.167D+00 | 0.825D-03 |
| 11 | 0.153D+00 | 0.638D-03 |
| 12 | 0.140D+00 | 0.504D-03 |
| 13 | 0.130D+00 | 0.404D-03 |
| 14 | 0.121D+00 | 0.329D-03 |

0.3

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ |
|----|-----------|-----------|
| 2 | 0.931D+00 | 0.580D-01 |
| 3 | 0.682D+00 | 0.278D-01 |
| 4 | 0.536D+00 | 0.153D-01 |
| 5 | 0.442D+00 | 0.922D-02 |
| 6 | 0.375D+00 | 0.597D-02 |
| 7 | 0.326D+00 | 0.408D-02 |
| 8 | 0.288D+00 | 0.291D-02 |
| 9 | 0.258D+00 | 0.214D-02 |
| 10 | 0.234D+00 | 0.162D-02 |
| 11 | 0.213D+00 | 0.126D-02 |
| 12 | 0.196D+00 | 0.992D-03 |
| 13 | 0.182D+00 | 0.798D-03 |
| 14 | 0.169D+00 | 0.650D-03 |

0.5

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ |
|----|-----------|-----------|
| 2 | 0.151D+01 | 0.135D+00 |
| 3 | 0.112D+01 | 0.680D-01 |
| 4 | 0.883D+00 | 0.387D-01 |
| 5 | 0.730D+00 | 0.240D-01 |
| 6 | 0.621D+00 | 0.158D-01 |
| 7 | 0.540D+00 | 0.109D-01 |
| 8 | 0.478D+00 | 0.785D-02 |
| 9 | 0.429D+00 | 0.582D-02 |
| 10 | 0.388D+00 | 0.443D-02 |
| 11 | 0.355D+00 | 0.345D-02 |
| 12 | 0.327D+00 | 0.274D-02 |
| 13 | 0.303D+00 | 0.221D-02 |
| 14 | 0.282D+00 | 0.180D-02 |

0.7

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ |
|----|-----------|-----------|
| 2 | 0.411D+01 | 0.689D+00 |
| 3 | 0.314D+01 | 0.395D+00 |
| 4 | 0.253D+01 | 0.246D+00 |
| 5 | 0.211D+01 | 0.163D+00 |
| 6 | 0.181D+01 | 0.113D+00 |
| 7 | 0.159D+01 | 0.813D-01 |
| 8 | 0.141D+01 | 0.602D-01 |
| 9 | 0.127D+01 | 0.458D-01 |
| 10 | 0.115D+01 | 0.356D-01 |
| 11 | 0.105D+01 | 0.282D-01 |
| 12 | 0.971D+00 | 0.226D-01 |
| 13 | 0.901D+00 | 0.185D-01 |
| 14 | 0.840D+00 | 0.152D-01 |

0.9

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ |
|----|-----------|-----------|
| 2 | 0.280D+02 | 0.106D+02 |
| 3 | 0.230D+02 | 0.762D+01 |
| 4 | 0.196D+02 | 0.573D+01 |
| 5 | 0.171D+02 | 0.444D+01 |
| 6 | 0.151D+02 | 0.351D+01 |
| 7 | 0.136D+02 | 0.283D+01 |
| 8 | 0.123D+02 | 0.232D+01 |
| 9 | 0.113D+02 | 0.192D+01 |
| 10 | 0.104D+02 | 0.161D+01 |
| 11 | 0.961D+01 | 0.136D+01 |
| 12 | 0.895D+01 | 0.116D+01 |
| 13 | 0.837D+01 | 0.993D+00 |
| 14 | 0.786D+01 | 0.859D+00 |

0.99

Pour des valeurs de λ qui ne sont pas très proches de 1, on remarque $S - S_n$ et $S - T_n$ sont assez grandes et qu'elles ne sont pas affectées par la variation de λ , alors que pour des valeurs de λ très proches de 1, les résultats donnés par (S_n) et (T_n) sont mauvais.

3 Fonction analytique ayant des pôles

Dans ce qui suit, nous allons étudier le cas où la fonction f admet un pôle simple unique, deux pôles conjugués, une infinité de pôles simples ou conjugués, puis un pôle multiple unique.

Comme dans le CHAPITRE III, on n'étudiera que le cas où les pôles de f mentionnés ci-dessus sont soit des nombres réels ou des nombres imaginaires purs.

3-1) Fonction admettant un pôle simple unique.

Soit f une fonction analytique admettant un pôle simple unique z_1 dans $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ et s'écrivant sous la forme: $f(z) = \frac{h(z)}{z - z_1}$ avec:

$$(H) \quad \exists R > z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}, h \in H^\infty(E_R).$$

L'expression de l'erreur sera alors la suivante:

$$E_n(f, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z - \cdot}\right) dz - \frac{h(z_1)}{z_1 - \lambda} E_n\left(\frac{1}{z_1 - \cdot}\right).$$

A partir de cette expression de $E_n(f, \lambda)$, nous pourrions donner, comme il l'a été fait dans la proposition III-2-2), la partie principale de $E_n(f, \lambda)$ et de ΔS_n :

Proposition 8

Soit $r_1 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}$, avec $z_1 \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

En posant $A = -2\pi K(z_1) \frac{h(z_1)}{z_1 - \lambda}$, nous obtenons les équivalences suivantes lorsque n tend vers l'infini:

$$\begin{aligned} a) \quad E_n(f, \lambda) &\sim \frac{A}{r_1^{2n+1}}. \\ b) \quad \Delta S_n &\sim \frac{2A\sqrt{z_1^2 - 1}}{r_1^{2n+2}}. \end{aligned}$$

A partir de ce résultat, on pourra montrer de façon similaire à la démonstration de la proposition III-2-3 et la proposition III-2-4, le résultat d'accélération suivant:

Proposition 9

a) La suite (T_n) définie par: $T_n = S_n + \left(1 + \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - 1}}\right) \frac{\Delta S_n}{2}$, converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

b) La suite (W_n) définie par: $W_n = T_n - \frac{(\Delta T_n)^2}{\Delta^2 T_n}$, converge vers S plus rapidement que la suite (T_n) .

EXEMPLES NUMERIQUES.

$$f(x) = \frac{1}{(x - \lambda)(x - c)}, w(x) = 1.$$

$\lambda = 0.1$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.535D+00 | -0.212D-01 | 0.339D-03 |
| 3 | -0.233D+00 | -0.686D-02 | 0.164D-04 |
| 4 | -0.999D-01 | -0.207D-02 | -0.520D-05 |
| 5 | -0.424D-01 | -0.616D-03 | -0.297D-05 |
| 6 | -0.178D-01 | -0.186D-03 | -0.108D-05 |
| 7 | -0.744D-02 | -0.576D-04 | -0.347D-06 |
| 8 | -0.310D-02 | -0.184D-04 | -0.105D-06 |
| 9 | -0.129D-02 | -0.601D-05 | -0.312D-07 |
| 10 | -0.534D-03 | -0.202D-05 | -0.927D-08 |
| 11 | -0.221D-03 | -0.691D-06 | -0.278D-08 |
| 12 | -0.914D-04 | -0.240D-06 | -0.849D-09 |
| 13 | -0.378D-04 | -0.849D-07 | -0.263D-09 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.208D+00 | -0.489D-02 | -0.227D-05 |
| 3 | -0.635D-01 | -0.902D-03 | -0.235D-05 |
| 4 | -0.189D-01 | -0.168D-03 | -0.556D-06 |
| 5 | -0.557D-02 | -0.328D-04 | -0.108D-06 |
| 6 | -0.163D-02 | -0.677D-05 | -0.199D-07 |
| 7 | -0.474D-03 | -0.147D-05 | -0.367D-08 |
| 8 | -0.138D-03 | -0.330D-06 | -0.695D-09 |
| 9 | -0.398D-04 | -0.763D-07 | -0.136D-09 |
| 10 | -0.115D-04 | -0.181D-07 | -0.276D-10 |
| 11 | -0.333D-05 | -0.436D-08 | -0.556D-11 |
| 12 | -0.963D-06 | -0.107D-08 | -0.143D-11 |
| 13 | -0.278D-06 | -0.265D-09 | 0.163D-12 |

1.2

$\lambda = 0.5$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.892D+00 | -0.353D-01 | 0.565D-03 |
| 3 | -0.388D+00 | -0.114D-01 | 0.274D-04 |
| 4 | -0.167D+00 | -0.345D-02 | -0.867D-05 |
| 5 | -0.706D-01 | -0.103D-02 | -0.496D-05 |
| 6 | -0.297D-01 | -0.310D-03 | -0.181D-05 |
| 7 | -0.124D-01 | -0.960D-04 | -0.578D-06 |
| 8 | -0.517D-02 | -0.306D-04 | -0.175D-06 |
| 9 | -0.215D-02 | -0.100D-04 | -0.521D-07 |
| 10 | -0.889D-03 | -0.336D-05 | -0.155D-07 |
| 11 | -0.368D-03 | -0.115D-05 | -0.463D-08 |
| 12 | -0.152D-03 | -0.401D-06 | -0.141D-08 |
| 13 | -0.630D-04 | -0.142D-06 | -0.439D-09 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.327D+00 | -0.769D-02 | -0.357D-05 |
| 3 | -0.998D-01 | -0.142D-02 | -0.369D-05 |
| 4 | -0.298D-01 | -0.264D-03 | -0.874D-06 |
| 5 | -0.876D-02 | -0.516D-04 | -0.170D-06 |
| 6 | -0.256D-02 | -0.106D-04 | -0.313D-07 |
| 7 | -0.745D-03 | -0.230D-05 | -0.577D-08 |
| 8 | -0.216D-03 | -0.518D-06 | -0.109D-08 |
| 9 | -0.626D-04 | -0.120D-06 | -0.214D-09 |
| 10 | -0.181D-04 | -0.284D-07 | -0.434D-10 |
| 11 | -0.524D-05 | -0.686D-08 | -0.884D-11 |
| 12 | -0.151D-05 | -0.168D-08 | -0.217D-11 |
| 13 | -0.437D-06 | -0.417D-09 | -0.353D-12 |

1.2

La variation de λ qui est choisi assez loin de 1, n'affecte pas la convergence des suites (S_n) , (T_n) et (W_n) .

3-2) Fonction admettant deux pôles simples conjugués.

Soit f une fonction analytique ayant deux pôles simples conjugués situés sur l'axe des imaginaires purs z_1 et z_2 avec $z_1 = ib$, b étant un réel strictement positif. La fonction f s'écrira alors sous la forme: $f(z) = \frac{h(z)}{z^2 + b^2}$, avec h une fonction non nulle aux points $z = \pm ib$, et vérifiant l'hypothèse suivante:

$$(H) \quad \exists R \geq b + \sqrt{b^2 - 1}, h \in H^\infty(E_R).$$

L'expression de $E_n(f)$ sera alors donnée par:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-}\right) dz - \Phi(ib)E_n\left(\frac{1}{ib-}\right) - \Phi(-ib)E_n\left(\frac{1}{-ib-}\right),$$

avec

$$\Phi(ib) = \frac{i h(ib)}{2b ib - \lambda}, \quad \Phi(-ib) = -\frac{i h(-ib)}{2b ib + \lambda}.$$

En utilisant les mêmes techniques adoptées pour la démonstration de la proposition III-2-5), on pourra démontrer le résultat suivant:

Proposition 10

Soit $r_1 = b + \sqrt{b^2 + 1}$, avec $b > 0$, et $A = (-1)^n \frac{\pi}{b} (\phi(ib)K(ib) - \phi(-ib)K(-ib))$. Si $A \neq 0$, nous avons les équivalences suivantes lorsque n tends vers l'infini.

$$(a) \quad E_n(f) \sim \frac{A}{r_1^{2n+1}}.$$

$$(b) \quad \Delta S_n \sim \frac{2A\sqrt{b^2 + 1}}{r_1^{2n+2}}.$$

De ce résultat, on pourra déduire le résultat d'accélération suivant:

Proposition 11

$$\text{Soit } D_n = \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}}\right) \frac{\Delta S_n}{2}.$$

(a) La suite (T_n) définie par $T_n = S_n + D_n, \forall n$, converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

(b) La suite (W_n) définie par $W_n = T_n - \frac{(\Delta T_n)^2}{\Delta^2 T_n}, \forall n$, converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

EXEMPLES NUMERIQUES.

$$f(x) = \frac{1}{(x - \lambda)(x^2 + c^2)}, \quad w(x) = 1.$$

$\lambda = 0.2$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|-----------|------------|
| 2 | -0.209D+02 | 0.687D+01 | -0.311D+01 |
| 3 | 0.256D+02 | 0.360D+01 | 0.324D+00 |
| 4 | -0.112D+02 | 0.141D+01 | -0.156D+00 |
| 5 | 0.985D+01 | 0.682D+00 | 0.283D-01 |
| 6 | -0.548D+01 | 0.293D+00 | -0.701D-02 |
| 7 | 0.417D+01 | 0.136D+00 | 0.357D-03 |
| 8 | -0.258D+01 | 0.608D-01 | 0.827D-03 |
| 9 | 0.183D+01 | 0.274D-01 | -0.848D-03 |
| 10 | -0.119D+01 | 0.126D-01 | 0.503D-03 |
| 11 | 0.819D+00 | 0.553D-02 | -0.408D-03 |
| 12 | -0.541D+00 | 0.260D-02 | 0.179D-03 |
| 13 | 0.368D+00 | 0.111D-02 | -0.173D-03 |

0.2

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|-----------|------------|
| 2 | -0.585D+01 | 0.844D+00 | -0.307D-01 |
| 3 | 0.455D+01 | 0.287D+00 | 0.157D-02 |
| 4 | -0.207D+01 | 0.844D-01 | 0.980D-03 |
| 5 | 0.128D+01 | 0.257D-01 | -0.781D-03 |
| 6 | -0.668D+00 | 0.829D-02 | 0.309D-03 |
| 7 | 0.383D+00 | 0.233D-02 | -0.223D-03 |
| 8 | -0.208D+00 | 0.819D-03 | 0.564D-04 |
| 9 | 0.117D+00 | 0.203D-03 | -0.810D-04 |
| 10 | -0.642D-01 | 0.846D-04 | 0.911D-05 |
| 11 | 0.357D-01 | 0.156D-04 | 0.267D-04 |
| 12 | -0.197D-01 | 0.967D-05 | 0.127D-05 |
| 13 | 0.109D-01 | 0.636D-06 | 0.852D-06 |

0.3

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.190D+01 | 0.135D+00 | 0.879D-03 |
| 3 | 0.107D+01 | 0.286D-01 | -0.653D-03 |
| 4 | -0.447D+00 | 0.661D-02 | 0.187D-03 |
| 5 | 0.215D+00 | 0.115D-02 | -0.125D-03 |
| 6 | -0.967D-01 | 0.332D-03 | 0.183D-04 |
| 7 | 0.448D-01 | 0.383D-04 | 0.441D-03 |
| 8 | -0.205D-01 | 0.195D-04 | 0.144D-05 |
| 9 | 0.941D-02 | -0.129D-06 | 0.686D-06 |
| 10 | -0.432D-02 | 0.157D-05 | 0.873D-07 |
| 11 | 0.198D-02 | -0.284D-06 | 0.233D-07 |
| 12 | -0.908D-03 | 0.180D-06 | 0.446D-08 |
| 13 | 0.417D-03 | -0.566D-07 | 0.948D-09 |

0.4

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.690D+00 | 0.260D-01 | 0.344D-03 |
| 3 | 0.299D+00 | 0.326D-02 | -0.158D-03 |
| 4 | -0.110D+00 | 0.675D-03 | 0.210D-04 |
| 5 | 0.429D-01 | 0.451D-04 | -0.916D-02 |
| 6 | -0.163D-01 | 0.219D-04 | 0.930D-06 |
| 7 | 0.626D-02 | -0.124D-05 | 0.272D-06 |
| 8 | -0.239D-02 | 0.116D-05 | 0.286D-07 |
| 9 | 0.916D-03 | -0.243D-06 | 0.460D-08 |
| 10 | -0.350D-03 | 0.941D-07 | 0.735D-09 |
| 11 | 0.134D-03 | -0.277D-07 | 0.817D-10 |
| 12 | -0.512D-04 | 0.942D-08 | 0.218D-10 |
| 13 | 0.196D-04 | -0.305D-08 | 0.188D-11 |

0.5

Lorsque la valeur de c est proche de zéro, la suite (S_n) converge lentement, mais grâce aux suites (T_n) et (W_n) , on obtient une bonne approximation de S .

$$\lambda = 0.9$$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|-----------|------------|
| 2 | -0.887D+01 | 0.291D+01 | -0.132D+01 |
| 3 | 0.108D+02 | 0.153D+01 | 0.137D+00 |
| 4 | -0.472D+01 | 0.596D+00 | -0.659D-01 |
| 5 | 0.417D+01 | 0.289D+00 | 0.120D-01 |
| 6 | -0.232D+01 | 0.124D+00 | -0.297D-02 |
| 7 | 0.177D+01 | 0.575D-01 | 0.151D-03 |
| 8 | -0.109D+01 | 0.258D-01 | 0.350D-03 |
| 9 | 0.777D+00 | 0.116D-01 | -0.359D-03 |
| 10 | -0.503D+00 | 0.532D-02 | 0.213D-03 |
| 11 | 0.347D+00 | 0.234D-02 | -0.173D-03 |
| 12 | -0.229D+00 | 0.110D-02 | 0.756D-04 |
| 13 | 0.156D+00 | 0.471D-03 | -0.732D-04 |

0.2

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|-----------|------------|
| 2 | -0.380D+01 | 0.548D+00 | -0.199D-01 |
| 3 | 0.296D+01 | 0.186D+00 | 0.102D-02 |
| 4 | -0.135D+01 | 0.549D-01 | 0.637D-03 |
| 5 | 0.832D+00 | 0.167D-01 | -0.508D-03 |
| 6 | -0.434D+00 | 0.539D-02 | 0.201D-03 |
| 7 | 0.249D+00 | 0.151D-02 | -0.145D-03 |
| 8 | -0.135D+00 | 0.532D-03 | 0.367D-04 |
| 9 | 0.758D-01 | 0.132D-03 | -0.526D-04 |
| 10 | -0.417D-01 | 0.550D-04 | 0.592D-05 |
| 11 | 0.232D-01 | 0.101D-04 | 0.174D-04 |
| 12 | -0.128D-01 | 0.628D-05 | 0.824D-06 |
| 13 | 0.711D-02 | 0.413D-06 | 0.554D-06 |

0.3

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.176D+01 | 0.125D+00 | 0.816D-03 |
| 3 | 0.989D+00 | 0.265D-01 | -0.606D-03 |
| 4 | -0.415D+00 | 0.613D-02 | 0.173D-03 |
| 5 | 0.199D+00 | 0.107D-02 | -0.116D-03 |
| 6 | -0.897D-01 | 0.308D-03 | 0.169D-04 |
| 7 | 0.416D-01 | 0.356D-04 | 0.409D-03 |
| 8 | -0.190D-01 | 0.181D-04 | 0.134D-05 |
| 9 | 0.873D-02 | -0.120D-06 | 0.636D-06 |
| 10 | -0.400D-02 | 0.146D-05 | 0.810D-07 |
| 11 | 0.184D-02 | -0.263D-06 | 0.216D-07 |
| 12 | -0.843D-03 | 0.167D-06 | 0.414D-08 |
| 13 | 0.386D-03 | -0.525D-07 | 0.877D-09 |

0.4

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|------------|------------|------------|
| 2 | -0.849D+00 | 0.321D-01 | 0.424D-03 |
| 3 | 0.369D+00 | 0.401D-02 | -0.194D-03 |
| 4 | -0.135D+00 | 0.831D-03 | 0.259D-04 |
| 5 | 0.528D-01 | 0.555D-04 | -0.113D-01 |
| 6 | -0.201D-01 | 0.269D-04 | 0.114D-05 |
| 7 | 0.771D-02 | -0.153D-05 | 0.335D-06 |
| 8 | -0.295D-02 | 0.142D-05 | 0.352D-07 |
| 9 | 0.113D-02 | -0.299D-06 | 0.566D-08 |
| 10 | -0.431D-03 | 0.116D-06 | 0.904D-09 |
| 11 | 0.165D-03 | -0.342D-07 | 0.101D-09 |
| 12 | -0.630D-04 | 0.116D-07 | 0.252D-10 |
| 13 | 0.241D-04 | -0.376D-08 | 0.613D-12 |

0.5

Pour une valeur de λ assez proche de 1, on obtient les mêmes résultats que ceux obtenus dans l'exemple précédent.

3-3) Fonction admettant une infinité de pôles simples.

Soit f une fonction analytique possédant une infinité de pôles simples z_i situés dans $\mathcal{C} \setminus [-1, 1]$. On notera $R_i = |r_i| = |z_i + \sqrt{z_i^2 - 1}|, \forall i \in \mathbb{N}$.

Les pôles z_i vont être indexés de telle manière qu'on ait les inégalités suivantes:

$$R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_i \leq \dots$$

Soit $k = \inf\{i/R_i < R_{i+1}\}$. La fonction f s'écrira alors sous la forme suivante:

$$f(z) = \frac{h(z)}{\prod_{i=1}^{\infty} (z - z_i)}, \text{ avec } h \text{ une fonction non nulle aux points } z = z_i, \text{ et vérifiant l'hypothèse}$$

suivante:

$$(H) \quad \exists R > 1, \quad R_k < R < R_{k+1}, \quad h \in H^\infty(E_R).$$

Ainsi, par application du théorème des résidus, nous obtenons:

$$E_n(f, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} g(z, \lambda) E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz - \sum_{i=1}^k \Phi(z_i) E_n\left(\frac{1}{z_i-\cdot}\right).$$

De cette égalité, on déduit:

$$\Delta S_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_{E_R} g(z, \lambda) Q_n^{\alpha, \beta}(z) dz - \frac{a_{n+1}}{a_n} \sum_{i=1}^k \Phi(z_i) Q_n^{\alpha, \beta}(z_i),$$

avec $\phi(z_i) = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) g(z, \lambda) = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) \frac{f(z)}{z - \lambda}$.

Comme dans le paragraphe III-2-3), nous allons limiter notre étude à deux cas: $k = 2$, avec $z_2 = -z_1$, et $k = 1$. Dans les deux cas, nous supposons que z_1 est un réel ou un imaginaire pur. On obtient ainsi des représentations asymptotiques de $E_n(f, \lambda)$ et de ΔS_n identiques à celles données dans les propositions 7 et 8 du paragraphe III-3), à savoir:

Proposition 12

Soit $A = \phi(z_1)K(z_1) - \phi(-z_1)K(-z_1)$. Si $A \neq 0$, alors, nous avons les équivalences suivantes lorsque n tend vers l'infini:

(a) $E_n(f) \sim -2\pi \frac{A}{r_1^{2n+1}}$.

(b) $\Delta S_n \sim -4\pi \sqrt{z_1^2 - 1} \frac{A}{r_1^{2n+2}}$.

Pour le deuxième cas, nous avons:

Proposition 13

Soit $A = \phi(z_1)K(z_1)$. Nous avons les équivalences suivantes lorsque n tend vers l'infini:

$$(a) E_n(f) \sim -2\pi \frac{A}{r_1^{2n+1}}.$$

$$(b) \Delta S_n \sim -4\pi \sqrt{z_1^2 - 1} \frac{A}{r_1^{2n+2}}.$$

Dans les deux cas, nous avons le résultat d'accélération suivant:

Proposition 14

$$\text{Soit } D_n = \left(1 + \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - 1}}\right) \frac{\Delta S_n}{2}.$$

(a) La suite (T_n) définie par $T_n = S_n + D_n, \forall n$, converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

(b) La suite (W_n) définie par $W_n = T_n - \frac{(\Delta T_n)^2}{\Delta^2 T_n}, \forall n$, converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

EXEMPLE NUMERIQUE .

$$f(x) = \frac{\tan}{x}, w(x) = 1, c = \pm \frac{\pi}{2}.$$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|-----------|-----------|
| 2 | 0.418D-01 | 0.264D-03 | 0.199D-06 |
| 3 | 0.563D-02 | 0.190D-04 | 0.142D-07 |
| 4 | 0.744D-03 | 0.153D-05 | 0.944D-09 |
| 5 | 0.975D-04 | 0.136D-06 | 0.669D-10 |
| 6 | 0.127D-04 | 0.129D-07 | 0.514D-11 |
| 7 | 0.165D-05 | 0.127D-08 | 0.421D-12 |
| 8 | 0.215D-06 | 0.130D-09 | 0.355D-13 |
| 9 | 0.279D-07 | 0.136D-10 | 0.266D-14 |
| 10 | 0.361D-08 | 0.145D-11 | 0.444D-15 |

On remarque dans cet exemple, la rapidité de la convergence des suites (S_n) , (T_n) et (W_n) , qui est due au fait que le premier pôle de la fonction tangente $(\pm \frac{\pi}{2})$ est assez loin de l'intervalle d'intégration.

3-4) Fonction admettant un pôle unique multiple.

Soit f une fonction analytique ayant un pôle unique $z_1 \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ de multiplicité k . On notera $R_1 = |z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}| = |r_1|$. La fonction f s'écrira alors sous la forme: $f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_1)^k}$, avec h une fonction non nulle au point $z = z_1$ et vérifiant l'hypothèse suivante:

$$(H) \quad \exists R > |z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}| = |r_1|, h \in H^\infty(E_R).$$

D'après la proposition 1, nous avons:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_R} f(z) E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) dz - \frac{1}{(k-1)!} D^{k-1} \left(h(z) E_n\left(\frac{1}{z-\cdot}\right) \right)_{z=z_1},$$

avec: $D^{k-1} = \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}$.

$$\Delta S_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{a_{n+1}}{a_n} \int_{E_R} f(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z) dz - \frac{1}{(k-1)!} \frac{a_{n+1}}{a_n} D^{k-1} (h(z) Q_n^{\alpha, \beta}(z))_{z=z_1}.$$

En posant:

$$g(z) = 2\pi h(z)K(z), A_n(z) = \frac{1}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+1}}, F_n(z) = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{(z + \sqrt{z^2 - 1})^{2n+2}},$$

on obtient comme dans la proposition III-3-5) sous la condition: $\left| \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - 1}} - 1 \right| < 2$

a) $E_n(f, \lambda) \sim -\frac{1}{(k-1)!} D^{k-1} (g(z)A_n(z))_{z=z_1}$.

b) $\Delta S_n \sim -\frac{2}{(k-1)!} D^{k-1} (g(z)F_n(z))_{z=z_1}$.

A partir de ces équivalences, on peut montrer le résultat d'accélération suivant:

Proposition 15

Soit

a) La suite (T_n) définie par:

$$T_n = S_n - \frac{\Delta S_n}{\Delta D_n} D_n \text{ avec } D_n = D^{k-1} (g(z)F_n(z))_{z=z_1},$$

converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

(b) La suite (W_n) définie par $W_n = T_n - \frac{(\Delta T_n)^2}{\Delta^2 T_n}$, $\forall n$, converge vers S plus rapidement que la suite (S_n) .

EXEMPLES NUMERIQUES .

1) $f(x) = \frac{1}{x(c-x)^2}$, $w(x) = 1$, $k = 2$, $\lambda = 0$.

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|------------|------------|
| 2 | 0.149D+02 | -0.337D+02 | -0.290D+00 |
| 3 | 0.112D+02 | -0.227D+01 | -0.128D-01 |
| 4 | 0.793D+01 | -0.408D+00 | -0.183D-02 |
| 5 | 0.535D+01 | -0.820D-01 | -0.193D-02 |
| 6 | 0.348D+01 | -0.176D-01 | -0.160D-02 |
| 7 | 0.219D+01 | -0.501D-02 | -0.974D-03 |
| 8 | 0.135D+01 | -0.233D-02 | -0.163D-03 |
| 9 | 0.815D+00 | -0.143D-02 | 0.199D-03 |
| 10 | 0.485D+00 | -0.902D-03 | 0.106D-03 |
| 11 | 0.286D+00 | -0.546D-03 | 0.384D-04 |
| 12 | 0.167D+00 | -0.316D-03 | 0.133D-04 |
| 13 | 0.965D-01 | -0.176D-03 | 0.457D-05 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|------------|------------|
| 2 | 0.545D+01 | -0.617D+00 | 0.125D-02 |
| 3 | 0.327D+01 | -0.536D-01 | -0.412D-04 |
| 4 | 0.180D+01 | -0.361D-02 | -0.292D-03 |
| 5 | 0.937D+00 | -0.279D-03 | -0.281D-03 |
| 6 | 0.466D+00 | -0.292D-03 | -0.393D-03 |
| 7 | 0.225D+00 | -0.229D-03 | 0.729D-04 |
| 8 | 0.106D+00 | -0.129D-03 | 0.914D-05 |
| 9 | 0.492D-01 | -0.613D-04 | 0.172D-05 |
| 10 | 0.225D-01 | -0.269D-04 | 0.363D-06 |
| 11 | 0.102D-01 | -0.113D-04 | 0.793D-07 |
| 12 | 0.459D-02 | -0.460D-05 | 0.174D-07 |
| 13 | 0.205D-02 | -0.185D-05 | 0.372D-08 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|------------|------------|
| 2 | 0.270D+01 | -0.738D-01 | 0.111D-03 |
| 3 | 0.134D+01 | -0.248D-02 | -0.124D-03 |
| 4 | 0.605D+00 | 0.204D-04 | -0.104D-03 |
| 5 | 0.257D+00 | -0.133D-03 | -0.212D-03 |
| 6 | 0.104D+00 | -0.965D-04 | 0.115D-04 |
| 7 | 0.412D-01 | -0.433D-04 | 0.124D-05 |
| 8 | 0.159D-01 | -0.164D-04 | 0.180D-06 |
| 9 | 0.606D-02 | -0.570D-05 | 0.282D-07 |
| 10 | 0.228D-02 | -0.191D-05 | 0.445D-08 |
| 11 | 0.848D-03 | -0.628D-06 | 0.667D-09 |
| 12 | 0.313D-03 | -0.204D-06 | 0.839D-10 |
| 13 | 0.115D-03 | -0.663D-07 | 0.428D-11 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|------------|------------|
| 2 | 0.153D+01 | -0.132D-01 | -0.941D-04 |
| 3 | 0.645D+00 | -0.726D-04 | -0.842D-04 |
| 4 | 0.246D+00 | -0.941D-04 | -0.106D-03 |
| 5 | 0.880D-01 | -0.759D-04 | 0.715D-05 |
| 6 | 0.303D-01 | -0.302D-04 | 0.586D-06 |
| 7 | 0.101D-01 | -0.968D-05 | 0.656D-07 |
| 8 | 0.332D-02 | -0.283D-05 | 0.784D-08 |
| 9 | 0.107D-02 | -0.796D-06 | 0.912D-09 |
| 10 | 0.342D-03 | -0.220D-06 | 0.907D-10 |
| 11 | 0.108D-03 | -0.602D-07 | 0.371D-11 |
| 12 | 0.340D-04 | -0.164D-07 | -0.182D-11 |
| 13 | 0.106D-04 | -0.449D-08 | -0.872D-12 |

1.2

La convergence de la suite (S_n) est assez lente, mais les suites (T_n) et (W_n) approximent assez bien la valeur S .

$$2) f(x) = \frac{1}{x(c-x)^3}, w(x) = 1, k = 3, \lambda = 0.$$

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|------------|------------|
| 2 | 0.195D+03 | 0.211D+03 | 0.295D+03 |
| 3 | 0.175D+03 | 0.479D+03 | -0.347D+02 |
| 4 | 0.147D+03 | -0.112D+03 | -0.429D+01 |
| 5 | 0.116D+03 | -0.229D+02 | -0.122D+01 |
| 6 | 0.862D+02 | -0.750D+01 | -0.461D+00 |
| 7 | 0.614D+02 | -0.304D+01 | -0.172D+00 |
| 8 | 0.422D+02 | -0.140D+01 | -0.556D-01 |
| 9 | 0.281D+02 | -0.701D+00 | -0.148D-01 |
| 10 | 0.183D+02 | -0.365D+00 | -0.306D-02 |
| 11 | 0.117D+02 | -0.193D+00 | -0.329D-03 |
| 12 | 0.736D+01 | -0.103D+00 | 0.110D-03 |
| 13 | 0.457D+01 | -0.550D-01 | 0.102D-03 |

1.05

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|------------|------------|
| 2 | 0.437D+02 | -0.477D+03 | -0.137D+01 |
| 3 | 0.330D+02 | -0.738D+01 | -0.218D+00 |
| 4 | 0.222D+02 | -0.144D+01 | -0.608D-01 |
| 5 | 0.136D+02 | -0.428D+00 | -0.139D-01 |
| 6 | 0.785D+01 | -0.158D+00 | -0.196D-02 |
| 7 | 0.429D+01 | -0.643D-01 | -0.663D-04 |
| 8 | 0.226D+01 | -0.268D-01 | 0.613D-04 |
| 9 | 0.116D+01 | -0.112D-01 | 0.273D-04 |
| 10 | 0.581D+00 | -0.465D-02 | 0.844D-05 |
| 11 | 0.286D+00 | -0.192D-02 | 0.225D-05 |
| 12 | 0.139D+00 | -0.794D-03 | 0.545D-06 |
| 13 | 0.663D-01 | -0.326D-03 | 0.119D-06 |

1.1

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|------------|------------|
| 2 | 0.168D+02 | -0.578D+01 | -0.939D-01 |
| 3 | 0.107D+02 | -0.668D+00 | -0.206D-01 |
| 4 | 0.593D+01 | -0.152D+00 | -0.314D-02 |
| 5 | 0.298D+01 | -0.472D-01 | -0.164D-03 |
| 6 | 0.140D+01 | -0.162D-01 | 0.353D-04 |
| 7 | 0.628D+00 | -0.562D-02 | 0.136D-04 |
| 8 | 0.271D+00 | -0.194D-02 | 0.314D-05 |
| 9 | 0.114D+00 | -0.663D-03 | 0.617D-06 |
| 10 | 0.469D-01 | -0.225D-03 | 0.109D-06 |
| 11 | 0.190D-01 | -0.763D-04 | 0.172D-07 |
| 12 | 0.756D-02 | -0.258D-04 | 0.213D-08 |
| 13 | 0.298D-02 | -0.871D-05 | 0.639D-10 |

1.15

| n | $S - S_n$ | $S - T_n$ | $S - W_n$ |
|----|-----------|------------|------------|
| 2 | 0.801D+01 | -0.987D+00 | -0.187D-01 |
| 3 | 0.437D+01 | -0.135D+00 | -0.276D-02 |
| 4 | 0.205D+01 | -0.327D-01 | -0.123D-03 |
| 5 | 0.871D+00 | -0.953D-02 | 0.201D-04 |
| 6 | 0.346D+00 | -0.284D-02 | 0.580D-05 |
| 7 | 0.131D+00 | -0.835D-03 | 0.101D-05 |
| 8 | 0.482D-01 | -0.243D-03 | 0.150D-06 |
| 9 | 0.172D-01 | -0.701D-04 | 0.199D-07 |
| 10 | 0.601D-02 | -0.202D-04 | 0.224D-08 |
| 11 | 0.206D-02 | -0.579D-05 | 0.151D-09 |
| 12 | 0.698D-03 | -0.166D-05 | -0.232D-10 |
| 13 | 0.233D-03 | -0.477D-06 | -0.150D-10 |

1.2

Dans cet exemple aussi, la convergence de la suite (S_n) est assez lente, et nous avons les suites (T_n) et (W_n) qui approximent assez bien la valeur S .

CONCLUSION

Bien que la méthode de quadrature de Gauss soit une méthode puissante pour approximer les intégrales, on a vu le long des exemples numériques donnés dans ce travail que la convergence de la méthode de Gauss est assez lente lorsque la singularité de l'intégrand est très proche de l'intervalle d'intégration.

On est loin de prétendre d'avoir fait le tour complet du problème dans ce présent travail, car il reste de nombreuses questions ouvertes notamment lorsque le pôle de la fonction à intégrer est un nombre complexe quelconque. Il serait aussi intéressant d'étudier le problème de l'accélération de la convergence lorsqu'on change de fonction poids et lorsque les intervalles d'intégration ne sont pas finis.

REFERENCES

- [1] C. BREZINSKI, *A general extrapolation algorithm*, Numer. Math. 35 (1980) pp. 175-187.
- [2] C. BREZINSKI, *A new approach to convergence acceleration methods*, in "Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation", A. Cuyt ed., Reidel, Dordrecht, 1988 pp. 373-405.
- [3] C. BREZINSKI, *Some new convergence acceleration methods*, Math. Comput. 39(1982) pp. 133-145.
- [4] H. CARTAN, *Theorie elementaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Herman, Paris(1961).
- [5] T.H. CHARLES CHEN, *Asymptotic error estimates for Gaussian quadrature formulas*, Math. Comp. 38(1982) pp. 143-152.
- [6] M.M. CHAWLA, *Asymptotic estimates for the error of the Gauss-Legendre quadrature formula*, Comp. J. 11(1968) pp. 339-340.
- [7] M.M. CHAWLA, M.K. JAIN *Asymptotic error estimates for the Gauss quadrature formula*, Math. Comp. 22(1968) pp. 82-90.
- [8] M.M. CHAWLA, M.K. JAIN *Error estimates for Gauss quadrature formulas for analytic functions*, Math. Comp. 22(1968) pp. 82-90.
- [9] M.M. CHAWLA, S. KUMAR *Convergence of quadrature for Cauchy Principal Value Integrals*, Computing. 23(1972) pp. 67-72.
- [10] P.J. DAVIS, P. RABINOWITZ *Methods of Numerical Integration*, Comput. J. 10(1967-1968) pp. 287-289.
- [11] L.M. DELVES *The numerical evaluation of principal value integrals*, Comput. J. 10(1967-1968) pp. 389-391.
- [12] J. DIEUDONNE *Calcul infinitesimal*, Herman, Paris(1968).
- [13] D. ELLIOT, *The evaluation and estimation of the coefficients in Chebyshev series expansion of a function*, Math. Comp. 18(1964) 274-284.
- [14] D. ELLIOT, D.F. PAGET *Gauss type quadrature rules for Cauchy principal value*

- integrals*, Math. Comput. v. 33, 145(1979) pp. 301-309.
- [15] D. ELLIOT, D.F. PAGET *On the convergence of a quadrature rule for evaluating certain principal value integrals*, An addendum, Numer. Math. 25(1976) pp. 287-289.
- [16] A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHITINGER, F.G. TRICOMI *Tables of integrals transforms*, v.1, Mc Graw-Hill, New York(1953).
- [17] F. ERDOGAN, G.D. GUPTA *On the numerical solution of singular solution of singular integral equation*, Quart. Appl. Math. v.29 (1972) pp. 525-534.
- [18] W. GAUTSHI *A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae*, Birkhauser, Basel, (1981) pp. 72-147.
- [19] W. GAUTSHI, R.S. VARGA *Error bounds for Gaussian quadrature of analytic functions*, SIAM. J. Numer. Anal. 20(1983) pp. 1170-1186.
- [20] E.W. HOBSON *The theory of spherical and ellipsoidal Harmonics*, Cambridge Univ. Press. (1955).
- [21] D.B. HUNTER, *Some Gauss-type formulae for the evaluation of Cauchy principal values of integrals*, Numer. Math. 19(1972) pp. 419-424.
- [22] D.F. PAGET, D. ELLIOT, *An algorithm for the numerical evaluation of certain Cauchy principal values of integrals*, Num. Math. v.19(1972) pp. 373-385.
- [23] R. PIESSENS, *Numerical evaluation of Cauchy principal values of integrals*, Bit. v.10(1970) pp. 476-480.
- [24] G.N. PYKHTEEV, *On the evaluation of certain singular integrals with a kernel of the Cauchy type*, J. Appl. Math. Mech. v.23(1959) pp. 1536-1548.
- [25] P. RABINOWITZ, *Convergence results for piecewise linear quadratures for Cauchy principal values integrals*, Math. Comp. 51(1988) pp.741-747.
- [26] P. RABINOWITZ, *Uniform convergence results for Cauchy principal values integrals*, Math. Comput. v.56 194(1991) pp. 731-740.
- [27] B.V. SYDOV, *Error estimates for Gaussian quadrature formulae*, Numer. Math. 29(1977) pp. 59-64.
- [28] G. SZEGO, *Orthogonal polynomials*, 3 rd ed, American Mathematical Society, Prov-

idence. (1967).

- [29] TAKEMITSU HASEGAWA, TATSUO TORII, *An automatic quadrature for Cauchy principal values integrals*, Math. Comput. v.56 194(1991) pp. 741-754.

