

# THESE

présentée à

L'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le grade de

**Docteur en Mécanique**

par

Ahmad GHADDAR

Ingénieur ENSICA



**ETUDE DE LA DEGRADATION DES COQUES EN MATERIAUX COMPOSITES  
UTILISEES DANS LES TRANSDUCTEURS FLEXTENSIONNELS  
A L'AIDE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Soutenue le 30 Mars 1992 devant la commission d'examen

Rapporteurs	M BOINET M PARSY
Examineurs	M BOUCHER M DEBUS M HAMONIC M NONGAILLARD

*A mes parents*

*A mes frères et soeurs*

*A la paix au LIBAN*

*J'exprime ma reconnaissance à Monsieur F. PARSY, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille qui a accepté la présidence de ce jury.*

*Je remercie Monsieur J. BOINET, Docteur d'Etat, d'avoir accepté le rôle de rapporteur et d'avoir jugé ce travail dans une version provisoire.*

*Je tiens à remercier Monsieur le Professeur B. NONGAILLARD et Monsieur D. BOUCHER, Chef du Groupe Technique d'Emission C.E.R.D.S.M, qui ont accepté de participer à ce jury.*

*Ce travail n'aurait vraisemblablement pas abouti sans Monsieur le Professeur J.C. DEBUS et Monsieur B. HAMONIC, Chef du Département d'Acoustique de l'ISEN, qui m'ont apporté un soutien permanent, tant sur le plan scientifique que sur le plan humain. Je leur exprime mon très sincère attachement.*

*J'assure l'ensemble des membres du laboratoire de ma reconnaissance pour leur aide efficace, et plus spécialement B. DUBUS, G. HAW, A. LAVIE et D. QUENTIN.*

*Enfin, je remercie l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord qui m'a permis de réaliser ce travail dans les meilleurs conditions.*

## SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I : <u>CARACTERISTIQUES MECANQUES DES MATERIAUX.....</u>	7
<u>COMPOSITES, UTILISATION DES CES MATERIAUX DANS</u>	
<u>LES TRANSDUCTEURS FLEXTENSIONNELS.</u>	
I - 1 CARACTERISTIQUES MECANQUES DES MATERIAUX COMPOSITES.....	9
I - 1.1 Définition et propriétés des matériaux composites.....	9
I - 1.2 Matrices de rigidité et de souplesse.....	9
I - 1.3 Constantes pratiques.....	11
I - 1.4 Changement de repère.....	12
I - 1.5 Comportement micromécanique d'une couche.....	12
I - 1.6 Détermination des constantes matérielles.....	13
I - 1.6.1 <i>Approche à partir de la mécanique des matériaux.....</i>	13
I - 1.6.2 <i>Approche à l'aide des formulations.....</i>	15
<i>variationnelles de l'élasticité</i>	
I - 1.6.3 <i>Recherche des solutions exactes.....</i>	15
I - 1.6.4 <i>Recherche des solutions en fonction.....</i>	15
<i>de la contiguïté</i>	
I - 1.6.5 <i>Les équations de HALPIN et TSAI.....</i>	20
I - 1.6.6 <i>Formules de PUCK.....</i>	22
I - 1.6.7 <i>Théorie de la société BERTIN.....</i>	23
I - 1.7 Comparaison des méthodes.....	23
I - 1.7.1 <i>Formules analytiques.....</i>	23
I - 1.7.2 <i>Résultats comparatifs.....</i>	24
I - 2 LES DIFFERENTS TYPES D'ENDOMMAGEMENT DES.....	26
MATERIAUX COMPOSITES	
I - 2.1 Généralités.....	26
I - 1.2 Les modes d'endommagement.....	27
I - 3 PERFORMANCE DE TRANSDUCTEURS FLEXTENSIONNELS.....	29
POUR DIFFERENTS MATERIAUX DE COQUE	
I - 3.1 Introduction.....	29
I - 3.2 Utilisation des matériaux composites dans la.....	29
construction de transducteurs flexensionnels	
I - 4 CONCLUSION.....	31

CHAPITRE II : ETUDE DES STRUCTURES EN MATERIAUX COMPOSITES.....33  
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.

II - 1	FORMULATION DES ELEMENTS COMPOSITES.....	35
II - 1.1	Introduction.....	35
II - 1.2	Elément de coque à simple ou double courbure.....	35
II - 1.2.1	<i>Principe</i> .....	35
II - 1.2.2	<i>Systèmes d'axes : définitions et relations</i> .....	36
II - 1.2.3	<i>Calcul de la matrice de rigidité</i> .....	40
II - 1.2.4	<i>Intégration numérique d'un élément multicouche</i> .....	40
II - 1.3	Elément fini coque homogénéisé.....	42
II - 1.3.1	<i>Introduction</i> .....	42
II - 1.3.2	<i>Principe d'homogénéisation</i> .....	42
II - 1.3.3	<i>Elément fini plaque homogénéisé</i> .....	45
II - 1.4	Elément prisme à base triangulaire.....	47
II - 1.4.1	<i>Définition de la géométrie</i> .....	47
II - 1.4.2	<i>Matrice de rigidité d'un élément multicouche</i> .....	48
II - 2	CALCUL DE CONTRAINTES DANS LES STRUCTURES STRATIFIEES.....	49
II - 2.1	Méthode de calcul.....	49
II - 2.2	Critère de rupture.....	50
II - 3	CONCLUSION.....	51

CHAPITRE III : MODELISATION A L'AIDE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.....53  
DE STRUCTURES COMPOSITES : VALIDATION ET RESULTATS.

III - 1	ETUDE DES STRUCTURES EN MATERIAUX COMPOSITES.....	55
III - 1.1	Analyse statique d'une plaque et d'une coque.....	55
III - 1.1.1	<i>Flexion d'une plaque sous pression</i> .....	55
III - 1.1.2	<i>Modélisation d'une coque sphérique sous pression</i> .....	57
III - 1.2	Analyse modale de plaques et de coques.....	58
III - 1.2.1	<i>Analyse modale de plaques</i> .....	58
III - 1.2.2	<i>Analyse modale de cylindres</i> .....	64
III - 1.2.3	<i>Analyse modale de la coque d'un transducteur</i> .....	68
	<i>flexensionnel</i>	
III - 1.2.4	<i>Modélisation d'un transducteur flexensionnel</i> .....	71
	<i>de classe IV</i>	

III - 1.3	Conclusion.....	75
III - 2	CALCUL DE CONTRAINTES.....	75
III - 2.1	Modélisation d'un barreau en matériau composite.....	75
III - 2.1.1	Analyse statique.....	75
III - 2.1.2	Analyse harmonique.....	76
III - 2.2	Poutre encastree chargée à son extrémité.....	78
III - 2.3	Plaque sandwich constituée de couches orthotropes.....	82
III - 2.4	Etude de la coque d'un transducteur flexensionnel.....	85
III - 2.4.1	Etude statique.....	85
III - 2.4.2	Etude modale.....	87
III - 2.5	Conclusion.....	87
CHAPITRE IV -	<u>MODELISATION DE STRUCTURES COMPOSITES ENDOMMAGEES.....</u>	89
IV - 1	ANALYSE MODALE D'UNE POUTRE MULTICOUCHE ENDOMMAGEE.....	91
IV - 1.1	Endommagement par délaminage.....	91
IV - 1.1.1	Modèle analytique.....	91
IV - 1.1.2	Modélisation par éléments finis.....	92
IV - 1.1.3	Résultats.....	93
IV - 1.2	Endommagement par cassure des fibres.....	96
IV - 1.2.1	Modèle analytique.....	96
IV - 1.2.2	Résultats.....	97
IV - 1.3	Conclusion.....	99
IV - 2	ETUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE STRUCTURES ENDOMMAGEES.....	100
IV - 2.1	Analyse modale d'une plaque composite endommagée.....	100
IV - 2.1.1	Description du problème.....	100
IV - 2.1.2	Résultats.....	101
IV - 2.2	Etude du comportement dynamique de la coque d'un.....	111
	transducteur flexensionnel	
IV - 2.2.1	Maillage utilisé.....	111
IV - 2.2.2	Résultats.....	111
IV - 3	CONCLUSION.....	118

<b>CHAPITRE V : <u>ETUDE EXPERIMENTALE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE</u></b> .....	<b>121</b>
<b><u>D'UNE PLAQUE ENDOMMAGEE.</u></b>	
<b>V - 1 DESCRIPTION DES ESSAIS</b> .....	<b>123</b>
<b>V - 1.1 Méthode et principe de mesure</b> .....	<b>123</b>
<b>V - 1.2 Aspects informatiques</b> .....	<b>123</b>
<b>V - 1.2.1 Première étape : estimation des fréquences</b> .....	<b>123</b>
<i>de résonance</i>	
<b>V - 1.2.2 Seconde étape : visualisation des déformées</b> .....	<b>124</b>
<b>V - 1.3 Description de la plaque</b> .....	<b>125</b>
<b>V - 2 COMPARAISON DES RESULTATS NUMERIQUES ET EXPERIMENTAUX</b> .....	<b>126</b>
<b>V - 2.1 Modélisation par éléments finis</b> .....	<b>126</b>
<b>V - 2.2 Résultats</b> .....	<b>127</b>
<b>V - 3 CONCLUSION</b> .....	<b>135</b>
<b><u>CONCLUSION GENERALE</u></b> .....	<b>137</b>
<b><u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u></b> .....	<b>139</b>
<b><u>ANNEXES</u></b> .....	<b>147</b>
<b>ANNEXE I : FONCTIONS DE FORME</b> .....	<b>147</b>
<b>ANNEXE II : LOI DE COMPORTEMENT HOMOGENEISE</b> .....	<b>149</b>

## NOTATIONS

- [B] : matrice des dérivées des fonctions d'interpolation  $H_i$  par rapport au repère local,
- [C] : matrice de la loi de comportement,
- [C<sub>n</sub>] : matrice de la loi de comportement de la n<sup>ième</sup> couche,
- E<sub>f</sub> : module de Young de la fibre,
- E<sub>i</sub> : module de Young dans la direction i,
- E<sub>m</sub> : module de Young de la matrice,
- F : Force,
- G<sub>ij</sub> : module de cisaillement dans le plan ij,
- h : épaisseur de la structure modélisée,
- H<sub>i</sub> : fonctions d'interpolation,
- I : inertie de flexion,
- [J] : matrice de Jacobi,
- [K] : matrice de rigidité,
- [M] : matrice de masse,
- {M} : vecteur des moments résultants,
- {N} : vecteur des efforts,
- n<sub>c</sub> : nombre de couches,
- [P] : matrice de passage du repère réduit au repère local,



[Q] : matrice de la loi de comportement homogénéisé,

[R] : matrice de passage du repère orthotrope au repère local,

r,s,t : système de coordonnées réduites,

[S] : matrice de souplesse,

S : surface de la structure modélisée,

U : énergie de déformation,

t : temps,

u,v,w : déplacements nodaux,

$V_f$  : fraction volumique des fibres,

$V_x, V_y, V_z$  : système cartésien nodal,

X,Y,Z : système de coordonnées globales,

x,y,z : système de coordonnées locales,

$Z_{sm}$  : cote moyenne de la plaque,

$Z_{n_{sm}}$  : cote moyenne de la n<sup>ième</sup> couche,

$\beta$  : constante de Hill,

$\theta_x, \theta_y$  : rotations nodales,

{ $\delta$ } : vecteur des déplacements nodaux,

{ $\epsilon$ } : vecteur déformation,

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  : déformations normales,

$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$  : déformations normales,

$\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$  : déformations transversales,

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  : déformations transversales,

$\nu_{ij}$  : coefficient de Poisson,

$\nu_f$  : coefficient de Poisson de la fibre,

$\nu_m$  : coefficient de Poisson de la matrice,

$\rho$  : masse volumique,

$\{\sigma\}$  : vecteur contrainte,

$\sigma_i$  : contraintes normales,

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$  : contraintes normales,

$\sigma_{xx}^*, \sigma_{yy}^*, \tau_{xy}^*, \tau_{yz}^*$  : contraintes limites de rupture,

$\tau_{12}, \tau_{31}, \tau_{23}$  : contraintes de cisaillement,

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  : contraintes de cisaillement,

$\varphi$  : orientation des fibres,

$\Omega$  : domaine modélisé par éléments finis,

$\omega$  : pulsation,

$\partial$  : symbole de dérivation partielle,

$\wedge$  : symbole de produit vectoriel.

## INTRODUCTION

Les projecteurs électroacoustiques employés actuellement en acoustique sous marine utilisent l'effet piézoélectrique, ou parfois magnétostrictif, pour convertir l'énergie électrique en énergie acoustique. Dans le but d'augmenter les portées de détection, il est nécessaire d'employer des transducteurs offrant des puissances élevées à des fréquences de plus en plus basses tout en ayant des dimensions raisonnables. Cependant, il est difficile de faire progresser simultanément les transducteurs dans toutes ces directions. En effet, la puissance acoustique d'une source monopolaire basse fréquence est proportionnelle, au carré de l'amplitude du déplacement de la surface rayonnante, à l'aire de cette surface et à la fréquence. Compte tenu des caractéristiques précédentes, le concepteur de transducteurs est donc amené à augmenter, soit la surface de rayonnement, soit l'amplitude de vibration des transducteurs.

La plupart des solutions retenues utilisent des vibrations de flexion pour assurer la transmission de l'énergie mécanique au milieu fluide. Lorsque cette flexion est localisée dans la partie inactive, les transducteurs sont de type flexensionnel [1, 2]. Ils exploitent la conversion du mouvement longitudinal ou radial de leur moteur en mouvement de flexion de leur coque pour amplifier notablement la vitesse volumique et la puissance acoustique rayonnée. Ce concept, proposé par H.C. Hayes [3] et développé ensuite par W.J. Toulis, a conduit à définir cinq classes de transducteurs flexensionnels suivant leur géométrie (Fig. 1), toutes destinées à fonctionner en basse fréquence [2, 4].

Un transducteur flexensionnel est composé de deux parties distinctes, la coque et le moteur (Fig. 2). La coque, qui constitue l'élément externe du transducteur peut, à cause de sa forme et de ses dimensions, avoir une ou plusieurs fréquences de résonance dans la bande d'intérêt. Le couplage de ces différents modes est alors susceptible de fournir une largeur de bande de plusieurs octaves. A encombrement donné, la coque peut être réalisée en matériau composite pour réduire la fréquence de résonance, diminuer le facteur de qualité mécanique du transducteur dans l'eau et, en conséquence, augmenter la largeur de bande.

Les transducteurs de type IV et V sont pour le moment les plus utilisés. Ceux de type IV sont composés d'un cylindre ovale et d'une ou plusieurs colonnes de céramiques piézoélectriques ou, parfois de barreaux magnétostrictifs et ont l'avantage de pouvoir être associés simplement. Les transducteurs de type V utilisent les vibrations radiales d'un anneau ou d'un disque de céramique [1].

Bien que sensiblement différents du point de vue de la géométrie, tous les types de flexionnels possèdent les mêmes propriétés (une largeur de bande importante, une puissance par unité de volume élevée, une solidité élevée, un rendement important et un encombrement réduit). Le choix d'un transducteur flexionnel peut se faire suivant deux directions :

- classe du transducteur,
- paramètres géométriques et physiques pour un type de transducteur donné : dimensions et forme, nature des matériaux, conditions de montage.

Par ailleurs, ce choix peut être réalisé pour ajuster ou optimiser des caractéristiques multiples : fréquence de résonance, coefficient de qualité du transducteur immergé (bande passante), puissance acoustique, profondeur d'immersion.

En service, la coque est soumise à des efforts alternés d'amplitude inférieure à sa limite statique de rupture. Elle peut rompre au bout d'un temps plus ou moins long par fatigue. Une compréhension des processus d'endommagement et de fatigue dans les matériaux composites est indispensable pour prédire le comportement, dans le temps, de ces transducteurs. En effet, la fréquence de résonance fondamentale de tels transducteurs étant principalement déterminée par les propriétés de la coque, l'endommagement de cette dernière provoque une variation des fréquences propres, de la rigidité et entraîne, par conséquent, une baisse de la puissance acoustique.

L'objet de cette thèse est d'étudier numériquement l'influence de l'endommagement des coques utilisées dans les transducteurs flexionnels sur les fréquences de résonance. En effet, les matériaux composites s'endommagent par fatigue sous des sollicitations de compression ou de

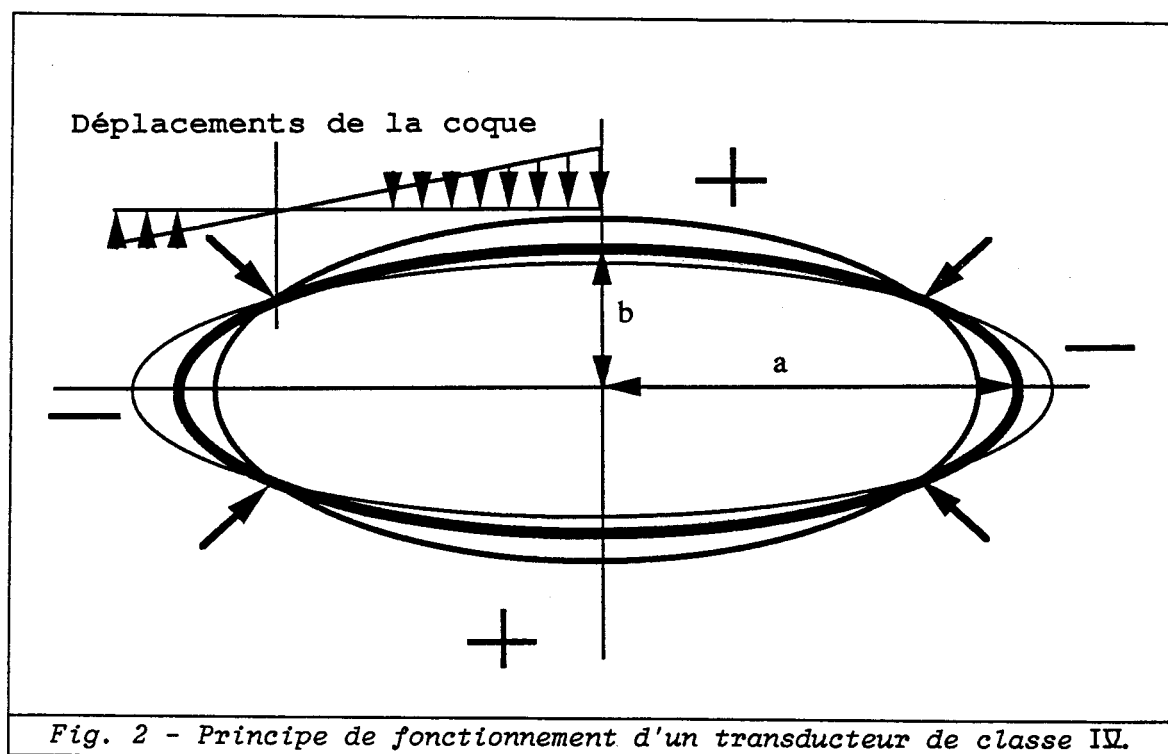
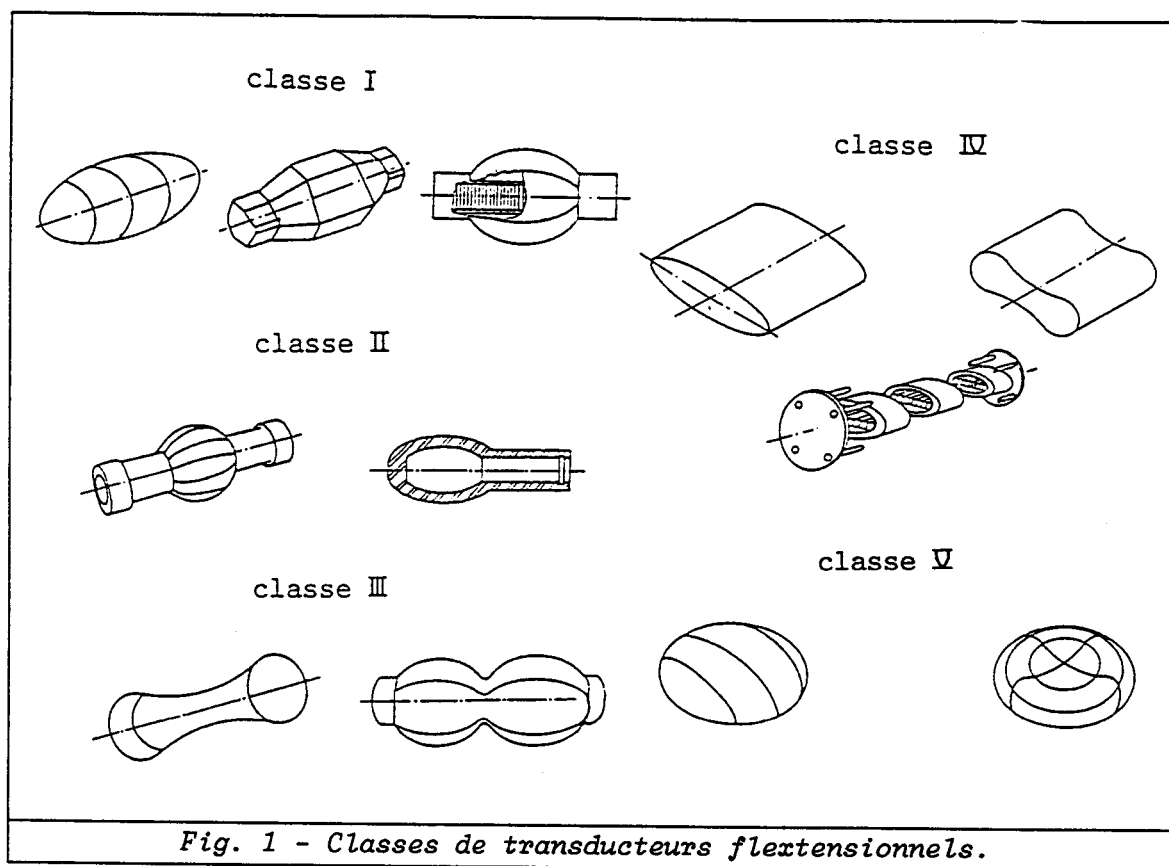
cisaillement en fonction d'un comportement purement aléatoire sauf s'il existe des mécanismes qui concentrent l'endommagement : trou, réduction de largeur, point de concentration de sollicitations. Sous sollicitation cyclique une coque de flexionnel peut s'endommager à la fois en traction-compression et cisaillement ce qui rend le phénomène complexe [5]. Les différents mécanismes possibles résultants sont : rupture des fibres, fissuration de la matrice normalement aux fibres et rupture de l'interface fibre-matrice. Du point de vue résistance des matériaux, le problème principal est alors de décrire correctement les contraintes de cisaillement.

L'étude de la dégradation des coques composites peut s'envisager de façon expérimentale. Cependant, d'une façon générale, la caractérisation expérimentale des matériaux composites et de leur comportement nécessite soit des éprouvettes de grande taille, dans le cas où l'on utilise des techniques dérivées de l'étude des métaux, soit des éprouvettes simples sollicitées dans plusieurs directions, ce qui implique des mesures nombreuses et simultanées. Ces deux techniques sont chères et longues à mettre en oeuvre et la reproductibilité des résultats en service incertaine.

Cette étude peut également être conduite numériquement. Il est cependant rare qu'un modèle simple permette de décrire la rupture en fatigue d'une structure existante. L'approche proposée ici vise (à partir d'une analyse modale de la structure endommagée in situ, et en fonction des résultats d'un calcul numérique par éléments finis) à mettre en évidence de façon qualitative et quantitative le type d'endommagement. Pour parvenir à cet objectif, le code éléments finis ATILA [6, 7] développé à l'Institut Supérieur d'Electronique du Nord a été utilisé. Il permet d'étudier le comportement dans l'air et dans l'eau de transducteurs piézoélectriques et magnétostrictifs. L'utilisation du code pour le calcul de structures composites a mis en évidence la nécessité de développer des éléments nouveaux pour compléter la bibliothèque existante. La détermination du comportement mécanique d'une structure stratifiée nécessite la connaissance du champ de contraintes dans chaque couche. Ce champ permet d'évaluer les seuils de rupture, ainsi que la zone et les couches les plus sollicitées.

Ce rapport est divisé en cinq chapitres. Dans le premier, nous présentons, d'une part les propriétés physiques et mécaniques des matériaux composites et l'intérêt de leur utilisation dans les transducteurs

flexionnels, d'autre part, les mécanismes d'endommagement de ces matériaux. On décrit dans le second chapitre les éléments composites du code et le calcul des contraintes. Au troisième chapitre, nous proposons une série de tests qui valident les éléments développés, par comparaison avec des résultats théoriques et expérimentaux. Les différents modes de rupture des structures composites sont étudiés dans le quatrième chapitre. Dans un premier temps, le comportement d'une poutre multicouche endommagée est modélisé et comparé aux résultats d'un modèle analytique. Pour chaque mode de rupture et différentes séquences d'empilements, l'évolution des fréquences de résonance en fonction de l'amplitude et de la position d'une fissure a ensuite été testée sur une plaque et une coque. Le dernier chapitre concerne des essais réalisés sur une plaque dont on a volontairement coupé une partie des fibres afin de simuler un type de rupture. Les résultats expérimentaux sont comparés aux résultats obtenus par des modèles numériques. Nous concluons en précisant l'intérêt de cette approche pour, à partir d'un comportement en fréquence modifié, déduire le type d'endommagement ayant provoqué la dégradation du fonctionnement du transducteur.







## CHAPITRE I

### CARACTERISTIQUES MECANIQUES DES MATERIAUX COMPOSITES, UTILISATION DE CES MATERIAUX DANS LES TRANSDUCTEURS FLEXTENSIONNELS

*L'objet de ce chapitre est d'étudier les caractéristiques mécaniques des matériaux composites, principalement ceux utilisés dans la réalisation de transducteurs flexensionnels, puis de présenter les différents modes d'endommagement et enfin d'analyser le comportement dynamique des transducteurs flexensionnels de classe IV pour différents matériaux de coque.*



## I - 1 CARACTERISTIQUES MECANQUES DES MATERIAUX COMPOSITES

### I - 1.1 Définition et propriétés des matériaux composites

Les matériaux composites sont des matériaux hétérogènes constitués d'au moins deux phases ayant leur existence propre et arrangées suivant un plan déterminé [8]. On appelle de façon courante *matériaux composites*, des arrangements de fibres, continues ou non, d'un matériau résistant constituant le renfort. Celles-ci sont noyées dans une matrice dont la résistance mécanique est, en général, beaucoup plus faible. Le diamètre de ces fibres est de l'ordre de 5 à 10 microns [9]. Dans une pièce dite unidirectionnelle, c'est-à-dire dans laquelle les fibres sont parallèles entre elles, on trouve de 10 000 à 20 000 fibres par mm<sup>2</sup> de section droite. La matrice conserve la disposition géométrique des fibres et leur transmet les sollicitations auxquelles est soumise la pièce. Le matériau ainsi obtenu est hétérogène et très fortement anisotrope.

Pour définir leurs propriétés mécaniques, les matériaux composites nécessitent un plus grand nombre de caractéristiques que les matériaux classiques. L'origine de ce fait se trouve dans l'anisotropie et, dans une moindre mesure, dans l'hétérogénéité de ces matériaux. En conséquence, la mécanique des matériaux composites, pour prendre en compte de façon complète ce nombre de paramètres, fait appel au calcul matriciel et/ou tensoriel, pour résoudre numériquement les équations de l'élasticité. Les paragraphes qui suivent traitent un certain nombre de notions régissant le comportement général d'un matériau. Ces notions seront utilisées comme éléments de base dans la méthode de calcul adoptée.

### I - 1.2 Matrices de rigidité et de souplesse

Une structure composite est en général constituée de plusieurs couches élémentaires. Chaque couche a un seul type de renforcement et les renforts varient en nature et/ou en direction de couche à couche. Pour chaque couche, la loi de Hooke, ou la loi d'élasticité linéaire [10] s'écrit :

$$\{\sigma\} = [C].\{\epsilon\} \quad (I.1)$$

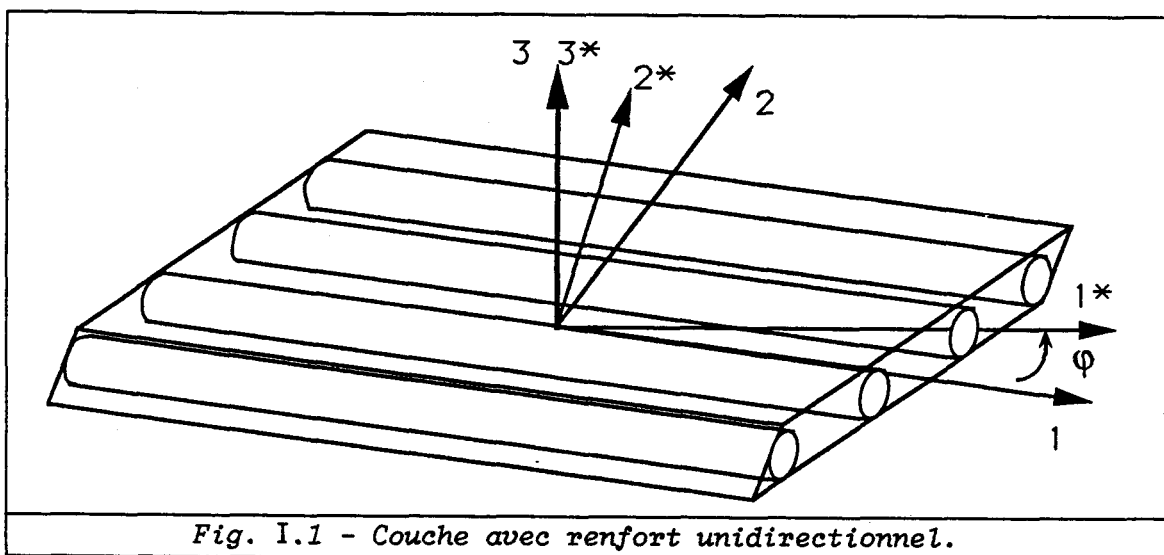
où  $\{\sigma\}$  est le vecteur contrainte,  $\{\epsilon\}$  le vecteur déformation et  $[C]$  la

matrice de loi de comportement. On peut utiliser aussi la relation inverse :

$$\{\epsilon\} = [S] \cdot \{\sigma\} \quad (\text{I.2})$$

où  $[S]$  est la matrice de souplesse ou de compliance. Un matériau élastique sans aucune symétrie est qualifié de triclinique et son comportement élastique est caractérisé par 21 constantes indépendantes. S'il possède trois plans orthogonaux de symétrie, il est qualifié d'orthotrope, le nombre de constantes indépendantes est alors de 9. Lorsque le matériau est isotrope transverse il possède 5 constantes indépendantes. Dans le cas où le plan d'isotropie coïncide avec l'un des plans du système de coordonnées, les constantes non nulles sont au nombre de 9.

Cette dernière configuration est celle utilisée pour décrire les constantes élastiques d'une couche d'un matériau composite dont l'axe 1 est l'axe de la fibre et le plan 2-3 le plan d'isotropie (Fig. I.1).



Dans ce cas :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{22} - C_{23})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.3})$$

$\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  représentent les contraintes normales,  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  et  $\epsilon_3$  sont les déformations associées.  $\tau_{23}$ ,  $\tau_{31}$  et  $\tau_{12}$  sont les contraintes de

cisaillement, les déformations associées étant  $\gamma_{23}$ ,  $\gamma_{31}$  et  $\gamma_{12}$ . Les notations retenues ici sont les notations classiques de la résistance des matériaux.

On peut également écrire les relations inverses à l'aide de l'équation :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (S_{22} - S_{23})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.4})$$

où les  $S_{ij}$  représentent les termes de la matrice de souplesse.

### I - 1.3 Constantes pratiques

Les termes  $C_{ij}$  et  $S_{ij}$  étant difficilement mesurables, il convient de les exprimer en fonction des modules de Young et des coefficients de Poisson. Les composantes de la matrice de souplesse  $[S]$  s'écrivent directement en termes de constantes pratiques :

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (\text{I.5})$$

où :

- $E_i$  est le module de Young dans la direction  $i$ ,
- $G_{ij}$  est le module de cisaillement dans le plan  $ij$ ,
- $\nu_{ij}$  est le coefficient de Poisson, défini pour la déformation longitudinale créée dans la direction  $j$  pour une contrainte de traction uniaxiale dans la direction  $i$  :

$$\nu_{ij} = - \frac{\epsilon_j}{\epsilon_i}$$

et

$$G_{ij} = \frac{E_{ij}}{2(1 + \nu_{ij})} \quad (\text{I.6})$$

Les expressions (I.1), (I.2) et (I.5) sont écrites dans le repère d'orthotropie (repère lié aux fibres) et peuvent s'exprimer dans un repère global en effectuant un changement de repère.

#### I - 1.4 Changement de repère

Dans le cas d'un matériau multicouche, les fibres des différentes couches ont des orientations distinctes. La loi de comportement (I.3) peut s'exprimer sous forme tensorielle dans un repère lié aux fibres :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \quad (\text{I.7})$$

où  $\sigma_{ij}$  et  $\epsilon_{ij}$  sont les composantes des tenseurs des contraintes et des déformations,  $C_{ijkl}$  est le tenseur des constantes élastiques dont la condensation conduit aux relations (I.1) et (I.3). La relation (I.7) s'écrit donc dans un repère différent pour chaque couche, ce qui nécessite de définir un repère unique, lié à l'élément, pour le calcul de la matrice de rigidité. Si l'on désigne par  $\varphi$  l'angle entre l'axe 1 lié à la fibre et l'axe 1\* lié à l'élément, les axes 3 et 3\* étant confondus (Fig. I.1), la matrice d'une rotation élémentaire est définie par :

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{I.8})$$

Dans ce cas, la relation de changement de repère pour le tenseur élastique est donnée par :

$$C_{ijkl} = R_{im} R_{jn} R_{ko} R_{lp} \cdot C_{mnop} \quad (\text{I.9})$$

où  $C_{mnop}$  et  $C_{ijkl}$  sont définis respectivement dans un repère d'orthotropie et dans un repère global.

#### I - 1.5 Comportement micromécanique d'une couche

Les propriétés matérielles d'une couche peuvent représenter son comportement homogénéisé, à l'échelle d'un élément représentatif du volume.

Il faut néanmoins garder présent à l'esprit que le composite est hétérogène et qu'il existe des effets d'interaction entre fibres et matrice dus au fait que les constituants ont des propriétés physiques différentes. L'objet de la micromécanique est, notamment, de prédire les propriétés homogénéisées d'une couche à partir des propriétés matérielles des différents constituants, c'est-à-dire de déterminer les rigidités (ou les souplesses) d'un composite renforcé par fibres en fonction des propriétés matérielles, de la fibre, de la matrice et de leur répartition géométrique, généralement caractérisée par les fractions volumiques. Ce qui conduit à :

$$C_{ij} = C_{ij}(E_f, E_m, \nu_f, \nu_m, V_f, V_m) \quad (\text{I.10})$$

où :

- $E_f$  est le module de Young de la fibre,
- $\nu_f$  est le coefficient de Poisson de la fibre,
- $V_f$  est la fraction volumique des fibres, définie comme le rapport du volume des fibres au volume total,

des définitions analogues étant utilisées pour la matrice à l'aide de l'indice m.

Les hypothèses de base sur lesquelles repose cette approche sont les suivantes [11] :

- a) les fibres sont homogènes, à comportement élastique linéaire isotrope, régulièrement espacées et parallèles,
- b) la matrice est également homogène, isotrope, élastique linéaire,
- c) la couche résultante est macroscopiquement orthotrope et sans pré-contraintes initiales,
- d) la liaison entre fibres et matrice est parfaite et il n'y a pas de porosité.

## I - 1.6 Détermination des constantes matérielles

### I - 1.6.1 Approche à partir de la mécanique des matériaux

Dans l'hypothèse où la déformation dans la direction des fibres (direction 1, Fig. I.1) d'un composite à renfort unidirectionnel est la

même dans les fibres et dans la matrice, un module apparent  $E_1$  peut être défini pour le matériau suivant la relation [11] :

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (\text{I.11})$$

De la même façon, dans la direction transverse, le module apparent  $E_2$  est donné par :

$$E_2 = \frac{E_m}{(V_m + V_f E_m/E_f)} \quad (\text{I.12})$$

Les valeurs du rapport  $E_2/E_m$  pour trois valeurs de  $E_m/E_f$  en fonction de  $V_f$  sont regroupées dans le tableau I.1. On observe que pour 50% de volume de fibres, le module transverse  $E_2$  est deux fois le module de la matrice, même si  $E_f = 10 E_m$ . Cela signifie que les fibres contribuent peu au module transverse, à moins que leur pourcentage volumique soit très élevé.

$\frac{E_m}{E_f} \backslash V_f$	0%	20%	40%	50%	60%	80%	90%	100%
1	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
$\frac{1}{10}$	1,0	1,22	1,56	1,82	2,17	3,57	5,26	10,0
$\frac{1}{100}$	1,0	1,25	1,66	1,98	2,46	4,80	9,17	100,0

Tableau I.1 - Valeurs de  $E_2/E_m$  pour différentes valeurs de  $E_m/E_f$  et  $V_f$ .

Le coefficient de Poisson majeur  $\nu_{12}$  peut être obtenu de la même façon que  $E_1$ , suivant la relation :

$$\nu_{12} = V_f \nu_f + V_m \nu_m \quad (\text{I.13})$$

Enfin, le module de cisaillement  $G_{12}$  ou  $G_{21}$  peut également être déterminé avec une hypothèse semblable, c'est-à-dire en admettant que les contraintes de cisaillement dans les fibres et dans la matrice sont les mêmes. Alors :

$$G_{12} = \frac{G_m}{V_m + V_f G_m/G_f} \quad (\text{I.14})$$

Ces diverses relations constituent la règle des mélanges.



### I - 1.6.2 Approche à l'aide des formulations variationnelles de l'élasticité

Les principes énergétiques de l'élasticité classique ont été utilisés par différents auteurs (CHAMIS et SENDECKYJ [12], PAUL [13]) pour déterminer les limites hautes et basses des modules d'élasticité des matériaux multiphasés. HASHIN et ROSEN [14] ont étendu ces travaux à des matériaux composites renforcés par des fibres. Cependant, les résultats obtenus ne sont généralement ni assez précis, ni directement exploitables, à cause de la répartition aléatoire des fibres dans la matrice.

### I - 1.6.3 Recherche des solutions exactes

La détermination des solutions exactes, à l'aide de méthodes self-consistantes, pour différents cas d'inclusions élastiques, est très difficile. De nombreux modèles, plus ou moins complexes, ont été proposés (ADAMS et TSAI [15], HILL [16], HERMANS [17]) mais correspondent trop peu à la réalité.

### I - 1.6.4 Recherche des solutions en fonction de la contiguïté

Dans la fabrication de composites filamentaires, les fibres sont souvent placées d'une façon aléatoire plutôt que d'une façon régulière (Fig. I.2). L'analyse des modules d'un composite doit donc tenir compte du fait que les fibres se touchent ou non, c'est-à-dire du fait que des fibres peuvent être contiguës et d'autres non. On définit le degré de contiguïté  $C$  tel que  $C = 0$  correspond à une non-contiguïté (fibres isolées) et  $C = 1$  correspond à une contiguïté parfaite (toutes les fibres sont en contact), comme indiqué sur la figure I.3. D'un point de vue analytique, une combinaison linéaire d'une solution pour laquelle toutes les fibres sont isolées les unes des autres ( $C = 0$ ) et d'une solution pour laquelle toutes les fibres sont en contact ( $C = 1$ ) donne un module correct. Dans ce cas, TSAI [18] propose comme valeur pour le module transverse :

$$E_2 = 2[1 - \nu_f + (\nu_f - \nu_m) V_m] \left[ (1 - C) \frac{K_f(2K_m + G_m) - G_m(K_f - K_m) V_m}{(2K_m + G_m) + 2(K_f - K_m) V_m} + C \frac{K_f(2K_m + G_f) + G_f(K_m - K_f) V_m}{(2K_m + G_f) - 2(K_m - K_f) V_m} \right] \quad (I.15)$$

où

$$K_f = \frac{E_f}{2(1-\nu_f)}$$

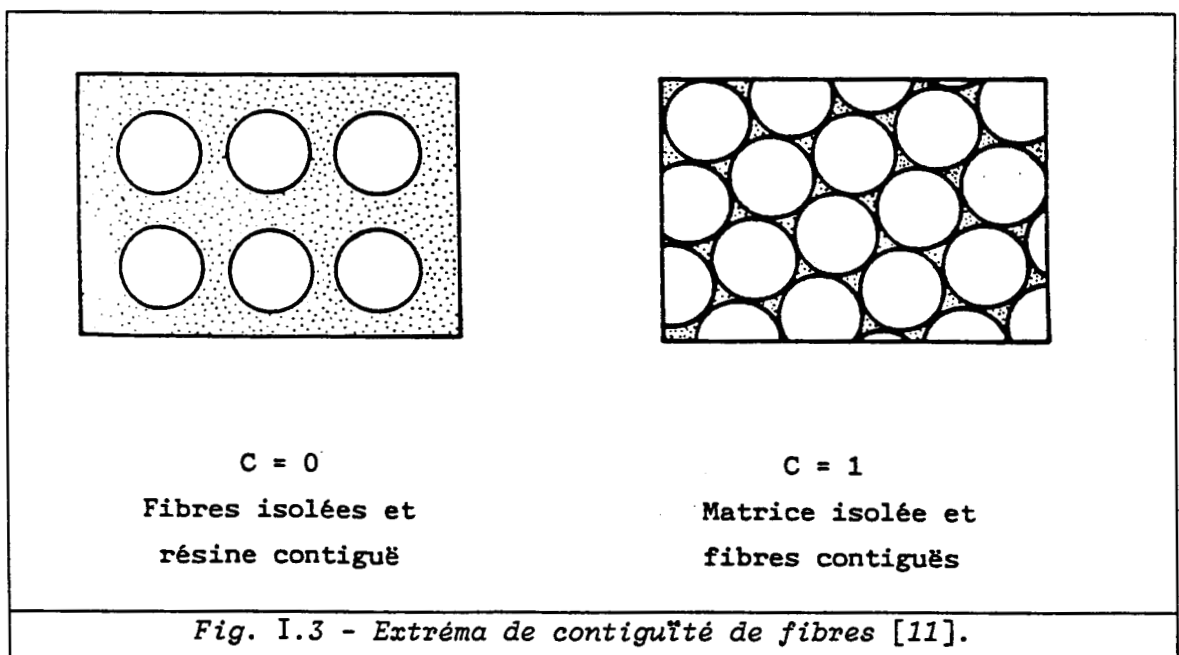
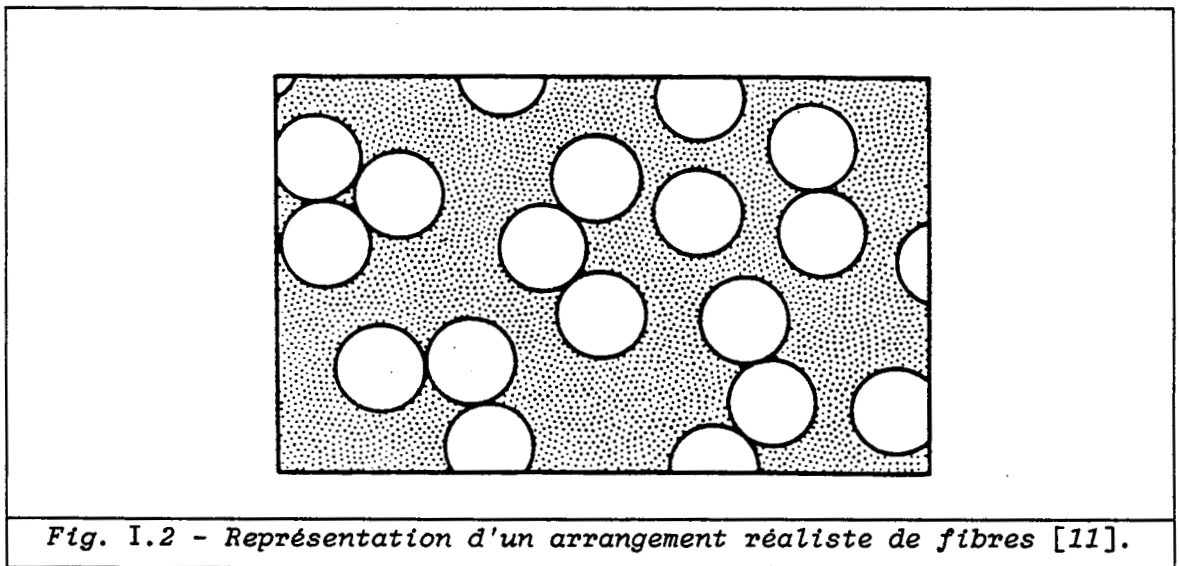
$$K_m = \frac{E_m}{2(1-\nu_m)}$$

$$G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)}$$

$$G_m = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)}$$

(I.16)

dans les équations précédentes, C varie entre 0 et 1.



Pour le coefficient de Poisson majeur, TSAI obtient :

$$\begin{aligned} \nu_{12} = & (1 - C) \frac{K_f \nu_f (2K_m + G_m) V_f + K_m \nu_m (2K_f + G_m) V_m}{K_f (2K_m + G_m) - G_m (K_f - K_m) V_m} \\ & + C \frac{K_m \nu_m (2K_f + G_f) V_m + K_f \nu_f (2K_m + G_f) V_f}{K_f (2K_m + G_m) + G_f (K_m - K_f) V_m} \end{aligned} \quad (I.17)$$

Finalement, la valeur du module de cisaillement est :

$$G_{12} = (1 - C) G_m \frac{2G_f - (G_f - G_m) V_m}{2G_m + (G_f - G_m) V_m} + C G_f \frac{(G_f + G_m) - (G_f - G_m) V_m}{(G_f + G_m) + (G_f - G_m) V_m} \quad (I.18)$$

Enfin, pour le module dans la direction des fibres, TSAI modifie la loi des mélanges pour tenir compte de l'imperfection de l'alignement des fibres et propose :

$$E_1 = k(V_f E_f + V_m E_m) \quad (I.19)$$

le facteur de désalignement  $k$  variant ordinairement de 0,9 à 1.  $k$  est un paramètre expérimental et dépend énormément du procédé de fabrication.

TSAI [18] a réalisé quelques études paramétrées intéressantes pour des composites fibres de verre-résine, avec les propriétés nominales suivantes :  $E_f = 10,6 \times 10^6$  psi,  $\nu_f = 0,22$ ,  $E_m = 5 \times 10^6$  psi et  $\nu_m = 0,35$ . La figure I.4 représente les variations de  $E_1$ ,  $E_2$  et  $G_{12}$  en fonction de  $E_f$ ,  $E_f$  prenant des valeurs  $16,0 \times 10^6$ ,  $10,6 \times 10^6$  et  $6,0 \times 10^6$  psi. La figure I.5 représente les mêmes variations mais avec des valeurs de  $E_m$  valant  $1,2 \times 10^6$ ,  $0,5 \times 10^6$  et  $0,2 \times 10^6$  psi. Enfin la figure I.6 concerne les variations des coefficients de Poisson  $\nu_f$  et  $\nu_m$ . On peut remarquer la grande influence du module d'élasticité des fibres sur le module  $E$

(Fig. I.4). Par contre, le module transverse  $E_2$  n'est influencé nettement que par le module d'élasticité de la résine (Fig. I.5) alors que les coefficients de Poisson n'ont pratiquement pas d'influence (Fig. I.6). TSAI [15] a également expérimenté l'effet d'une variation des valeurs de  $k$  et de  $C$  pour des composites verre-résine ( $\nu_f = 0,22$ ,  $E_f = 10,6 \times 10^6$  psi,  $\nu_m = 0,35$ ,  $E_m = 0,5 \times 10^6$  psi) pour différents pourcentages de résine. Ses résultats, regroupés sur les figures I.7 et I.8, indiquent que la valeur de  $k$  se situe bien entre 0,9 et 1, tandis que la valeur de  $C$  est généralement comprise entre 0 et 0,4.

NB : 1 psi, c'est-à-dire pound/square inch (livre par pouce carré), = 6894,7 Pa.

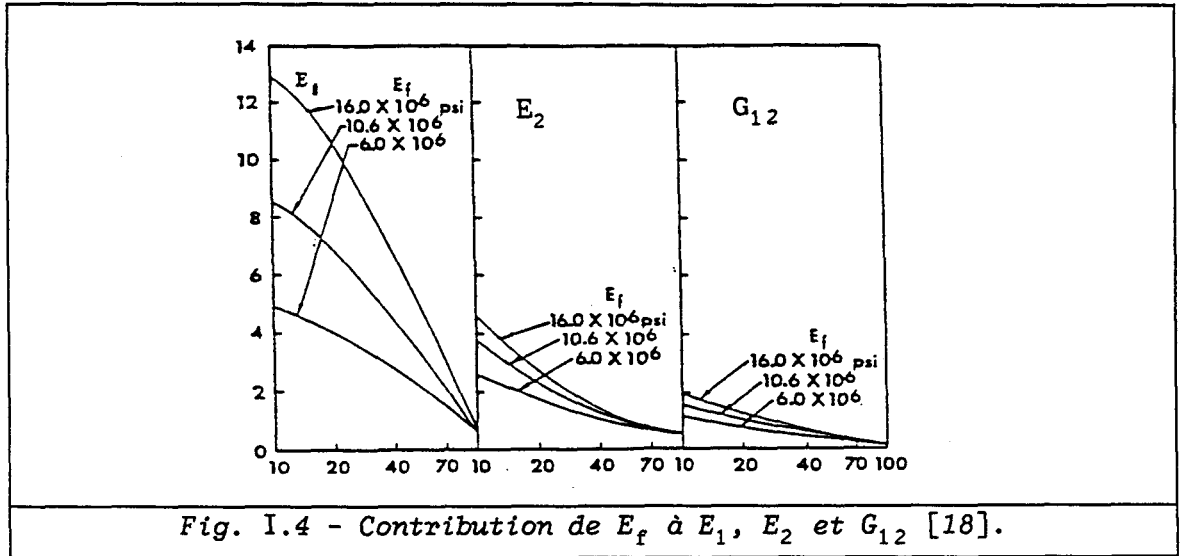


Fig. I.4 - Contribution de  $E_f$  à  $E_1$ ,  $E_2$  et  $G_{12}$  [18].

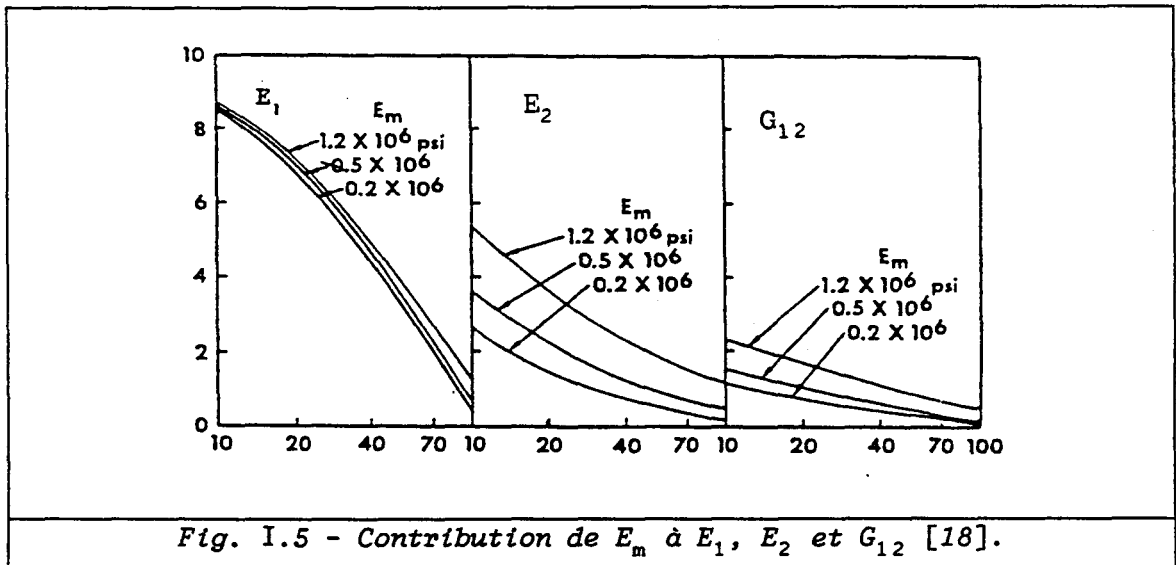


Fig. I.5 - Contribution de  $E_m$  à  $E_1$ ,  $E_2$  et  $G_{12}$  [18].

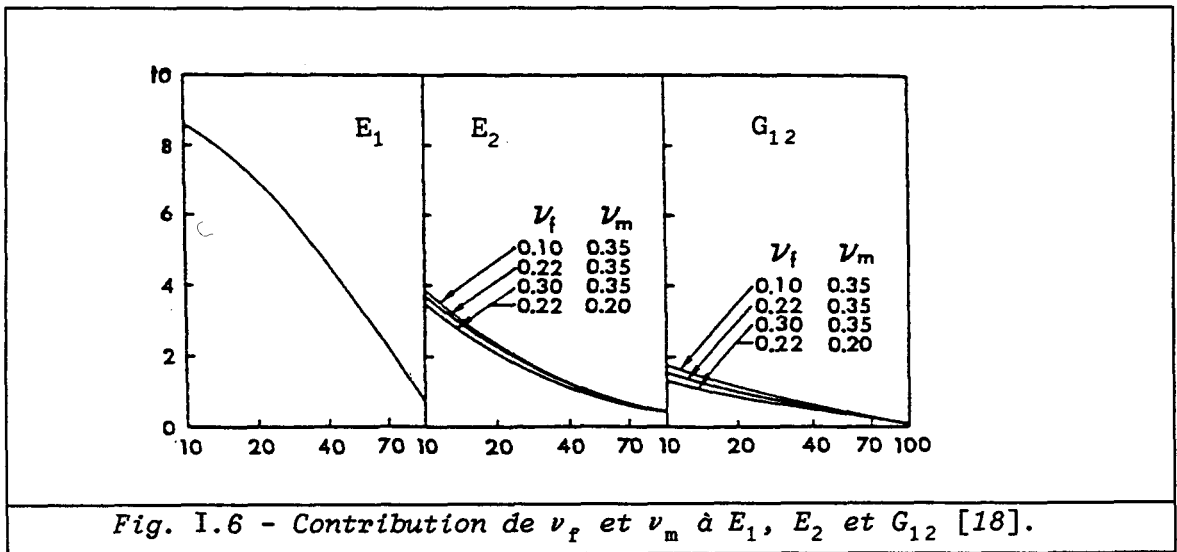
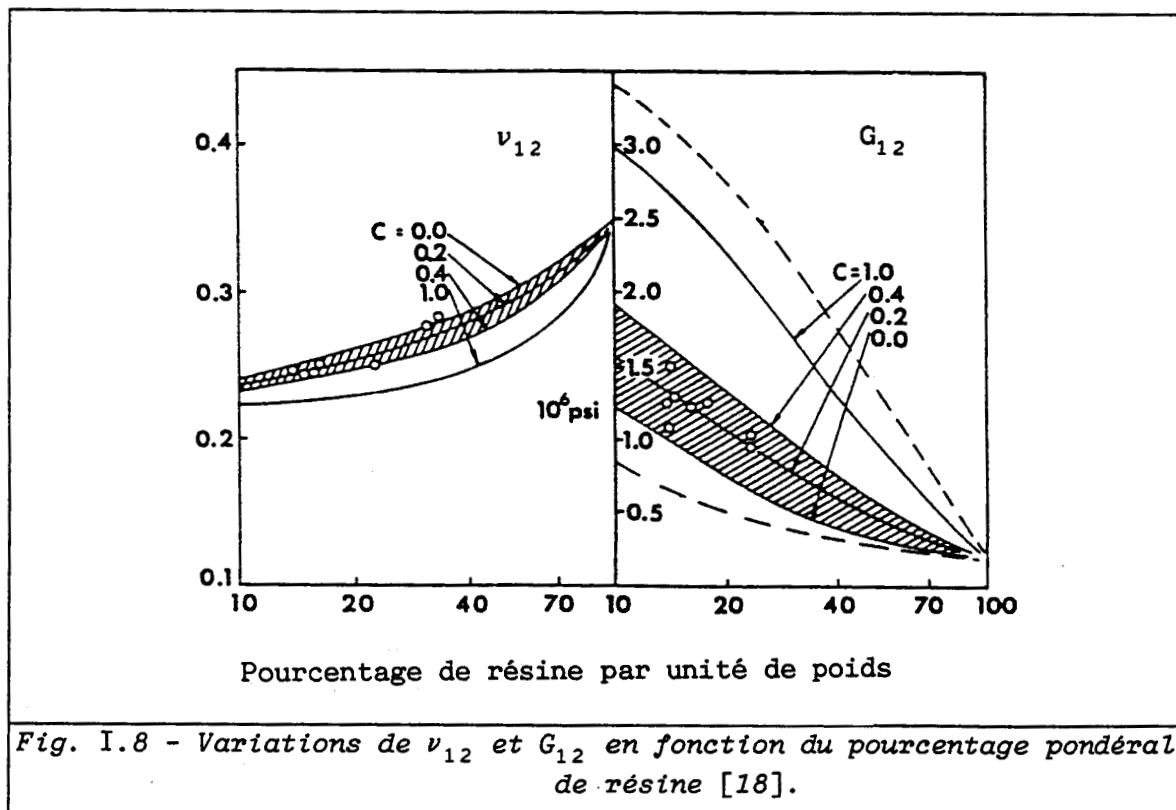
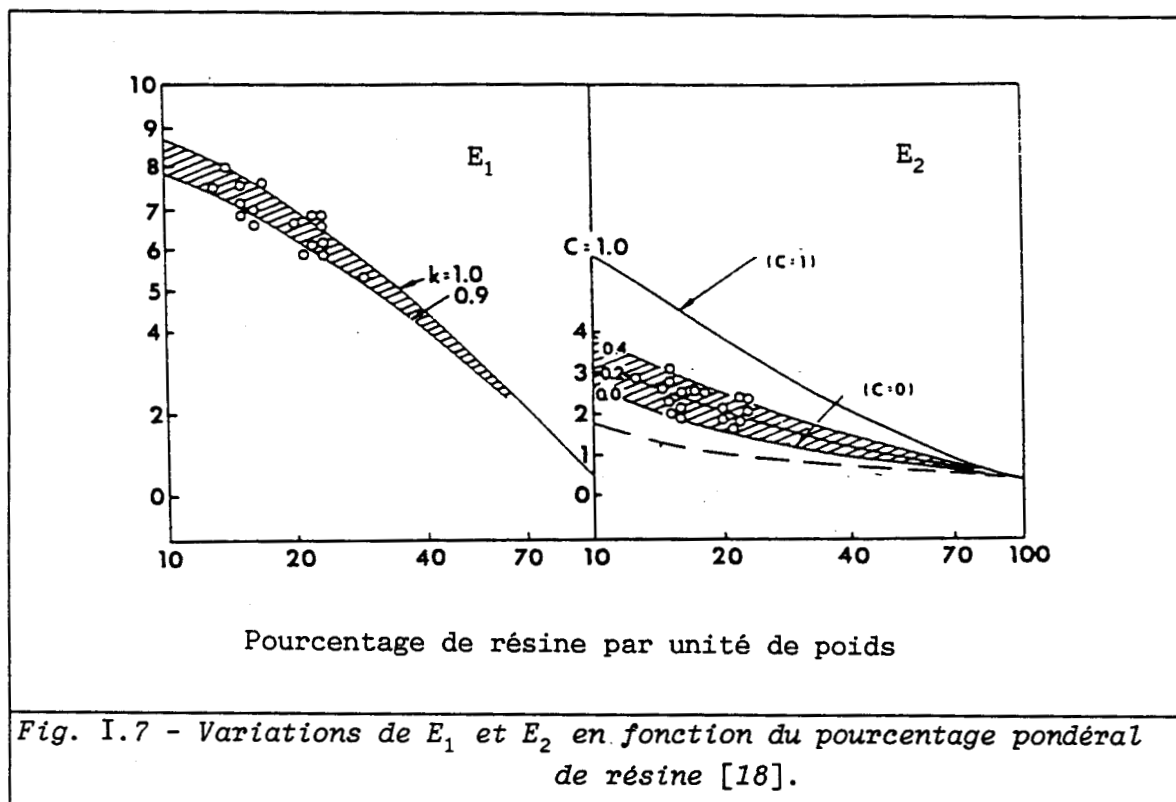


Fig. I.6 - Contribution de  $\nu_f$  et  $\nu_m$  à  $E_1$ ,  $E_2$  et  $G_{12}$  [18].



## I - 1.6.5 Les équations de HALPIN et TSAI

Les résultats de la micromécanique décrits précédemment aboutissent à des équations complexes. De ce fait, HALPIN et TSAI [19] ont développé une procédure d'interpolation qui est une représentation approchée simple des résultats micromécaniques exacts. Cette procédure est assez précise si la fraction volumique de fibres n'approche pas 1. Les relations sont les suivantes :

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (I.20)$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (I.21)$$

et :

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \quad (I.22)$$

où :

$$\eta = \frac{(M_f/M_m) - 1}{(M_f/M_m) + \xi} \quad (I.23)$$

avec :

- M le module concerné du composite ( $E_2$ ,  $G_{12}$  ou  $\nu_{23}$ ),
- $M_f$  le module correspondant de la fibre ( $E_f$ ,  $G_f$  ou  $\nu_f$ ),
- $M_m$  le module correspondant de la matrice ( $E_m$ ,  $G_m$  ou  $\nu_m$ ).

Les expressions de  $E_1$  et  $\nu_{12}$  restent celles fournies par les lois de mélanges.  $\xi$  est une mesure du renfort du composite qui dépend de la géométrie des fibres, de leur répartition et des conditions de chargement. Ses valeurs sont obtenues en comparant les relations (I.22) et (I.23) aux solutions exactes à l'aide d'une technique d'ajustage de courbes.

La seule difficulté dans l'utilisation des équations de HALPIN et TSAI est la détermination d'une valeur convenable de  $\xi$ . HALPIN et TSAI ont acquis des résultats en parfait accord avec les résultats numériques obtenus par ADAMS et DONER [20, 21] pour des fibres circulaires à répartition carrée (fraction volumique de 0,55) en prenant  $\xi = 2$  dans le calcul de  $E_2$  et  $\xi = 1$  dans le calcul de  $G_{12}$  (Fig. I.9 et I.10). Cependant, HEWITT et DE MALHERBE [22] ont remarqué que les équations de HALPIN et TSAI conduisent à une sous-estimation du module de cisaillement  $G_{12}$  des composites à fibres circulaires pour des fractions volumiques de fibres plus grandes que 0,5. Spécifiquement, la sous-estimation est de 30% pour  $V_f = 0,75$  et  $G_f/G_m = 20$ , une valeur réaliste pour des composites verre-résine ou carbone-résine. Ils suggèrent alors que la valeur  $\xi = 1$  soit remplacée par la valeur :

$$\xi = 1 + 40 V_f^{10} \quad (I.24)$$

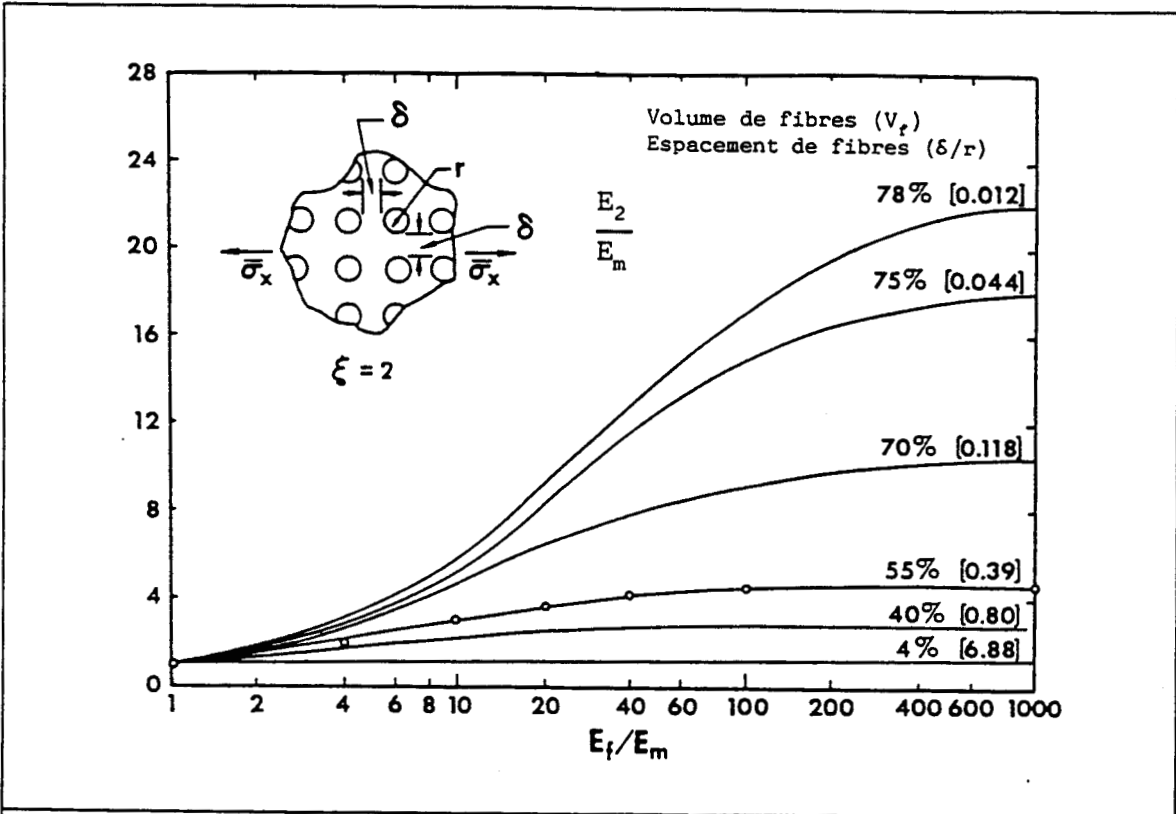


Fig. I.9 - Comparaison des résultats de HALPIN et TSAI (cercles) avec ceux de ADAMS et DONER pour le module de Young  $E_2$  d'un composite à fibres circulaires à répartition carrée [11].

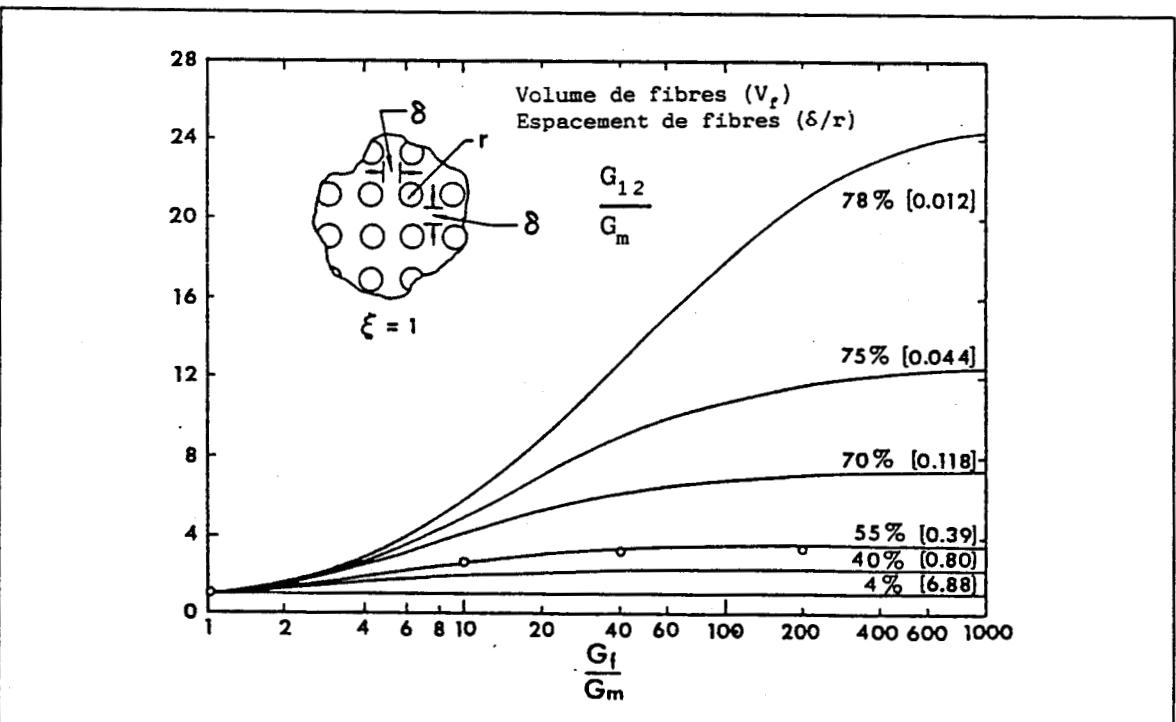
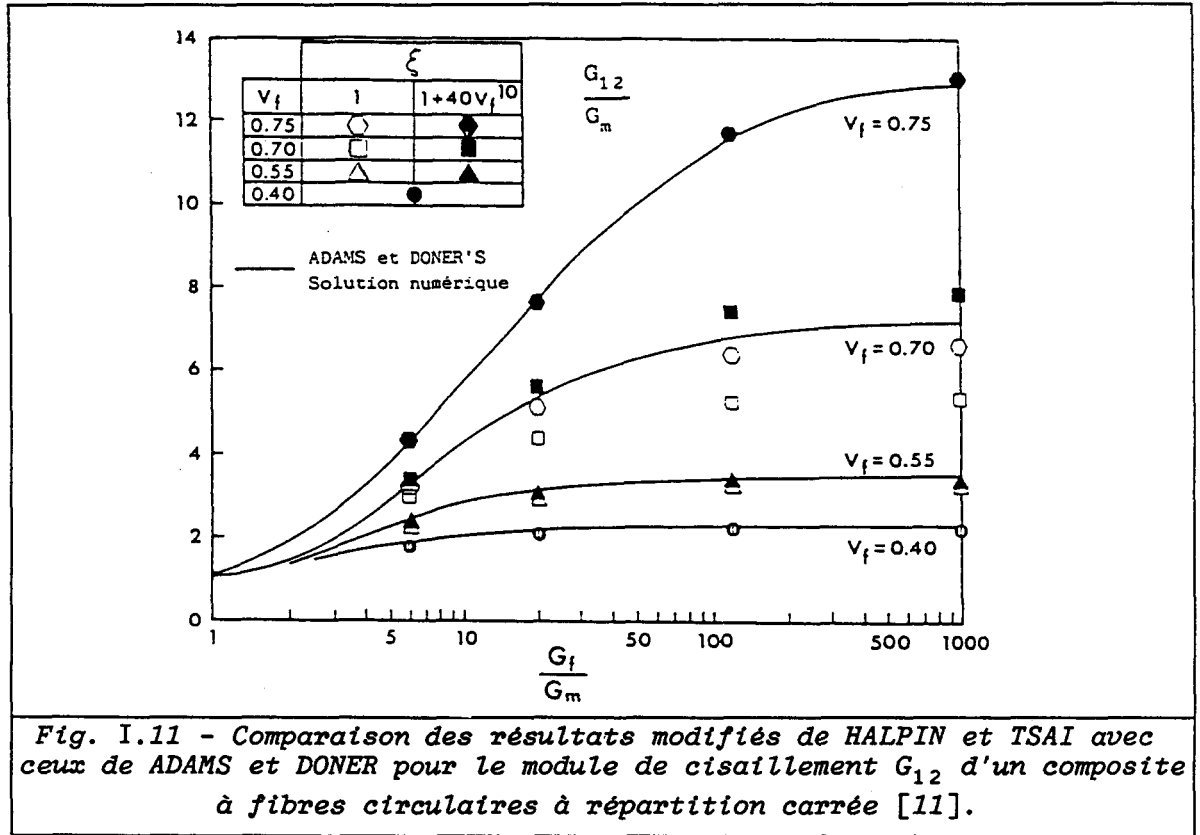


Fig. I.10 - Comparaison des résultats de HALPIN et TSAI (cercles) avec ceux de ADAMS et DONER pour le module de cisaillement  $G_{12}$  d'un composite à fibres circulaires à répartition carrée [11].

Cette relation donne de meilleurs résultats dans les équations de HALPIN et TSAI en comparaison avec les solutions numériques déjà citées de ADAMS et DONER (Fig. I.11).



### I - 1.6.6 Formules de PUCK

A partir de considérations théoriques et par ajustement à des résultats expérimentaux, PUCK [10, 23] propose :

$$E_1 = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \quad (I.25)$$

$$E_2 = \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \frac{1 + 0,85 V_f^2}{(1 - V_f)^{1,25} + V_f \frac{V_f E_m}{E_f (1 - \nu_m^2)}} \quad (I.26)$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \quad (I.27)$$

$$G_{12} = G_m \frac{1 + 0,6 V_f^{0,5}}{(1 - V_f)^{1,25} + V_f \frac{G_m}{G_f}} \quad (I.28)$$



### I - 1.6.7 Théorie de la Société BERTIN

Cette théorie [10] fait aussi appel à la loi des mélanges pour le calcul de  $E_1$  et  $\nu_{12}$ . Par contre, elle diffère de la théorie de PUCK pour les calculs de  $E_2$  et  $G_{12}$  et propose :

$$E_2 = (1 - V_f) \cdot E_m \left( \frac{1 + K_1 + \frac{V_f \cdot C^2}{1 + \nu_m^2}}{2K_1} \right) + V_f \frac{E_m^2}{K_1 E_f} \quad (I.29)$$

avec :

$$K_1 = \left( 1 - \sqrt{V_f} + \sqrt{V_f} \frac{E_m}{E_f} \right)^2$$

$$G_{12} = \frac{1 - V_f}{2K_2} G_m \left( 1 + V_f \left( 1 + \frac{G_m}{G_f} \right)^2 \right) + \frac{(1 - \sqrt{V_f})^2}{2} G_m + \frac{V_f}{K_2} \frac{G_m^2}{G_f} \quad (I.30)$$

avec :

$$K_2 = \left( 1 - \sqrt{V_f} + \sqrt{V_f} \frac{G_m}{G_f} \right)^2$$

Dans les équations précédentes, C est un coefficient voisin de 1.

### I - 1.7 Comparaison des méthodes

Dans cette partie, le calcul des fréquences de résonance d'une plaque monocouche (résine-fibres de verre), simplement supportée, est réalisé pour comparer les différentes méthodes.

#### I - 1.7.1 Formules analytiques

Pour étudier la flexion de cette plaque, on considère un état de contrainte plane tel que :

$$\sigma_3 = 0, \quad \tau_{23} = 0, \quad \tau_{13} = 0 \quad (I.31)$$

Dans ce cas :

$$\epsilon_3 = S_{11} \sigma_1 + S_{12} \sigma_2 \quad (I.32)$$

$$\gamma_{23} = 0, \quad \gamma_{31} = 0$$

et la relation (I.4) devient :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.33})$$

où :

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad S_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}. \quad (\text{I.34})$$

Inversement, les contraintes sont définies par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.35})$$

où :

$$A_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad A_{12} = \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (\text{I.36})$$

$$A_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad A_{66} = G_{12}.$$

Dans le cas d'une plaque orthotrope, les pulsations de résonance sont données par la formule [11] :

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{\rho} \left[ D_{11} \left( \frac{m}{a} \right)^4 + 2 (D_{12} + 2D_{66}) \left( \frac{m}{a} \right)^2 \left( \frac{n}{b} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{n}{b} \right)^4 \right] \quad (\text{I.37})$$

avec :

$$D_{ij} = \frac{A_{ij} h^3}{12} \quad (\text{I.38})$$

a et b étant les dimensions de la plaque rectangulaire,  $\rho$  la masse par unité de surface, h l'épaisseur de la plaque, m et n des entiers définissant les différents modes de résonance.

### I - 1.7.2 Résultats comparatifs

Les différentes méthodes permettant de déterminer les coefficients de la matrice de rigidité ont été testées pour une plaque de longueur a = 20 cm, de largeur b = 30 cm et d'épaisseur = 9 mm. Le pourcentage de

fibres de verre en volume est 35%. La masse volumique est  $1575 \text{ kg/m}^3$ . Les propriétés des fibres et de la résine sont  $E_f = 0,730 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\nu_f = 0,23$  et  $E_m = 0,290 \times 10^{10} \text{ Pa}$ ,  $\nu_m = 0,344$ . Les quatre premières fréquences de résonance de la plaque sont données dans le tableau I.2. Les colonnes "Halpin", "Puck", "Bertin" correspondent aux équations de HALPIN et TSAI (I-1.6.5) PUCK (I-1.6.6) et BERTIN (I-1.6.7). La colonne "Mécanique" correspond à l'approche du paragraphe I-1.6.1. La colonne "Ekvall" correspond à une version modifiée de l'approche mécanique [20]. Enfin, la méthode de TSAI (I-1.6.4) a été utilisée avec des coefficients de contiguïté valant respectivement : 0,0, 0,2, 0,4 et 1,0. Compte-tenu du fait que, d'après les essais, les valeurs de C se situent entre 0,2 et 0,4, on peut remarquer que la formule de HALPIN et TSAI donne des résultats de qualité voisine, sinon souvent supérieure, à la qualité de ceux obtenus avec les autres méthodes.

	Halpin	Mécanique	Ekvall	Bertin	Puck
F <sub>1</sub>	343,5	301,8	332,8	365,7	348,9
F <sub>2</sub>	874,0	838,0	865,9	899,3	882,6
F <sub>3</sub>	954,8	779,0	926,4	1026,0	962,7
F <sub>4</sub>	1808,0	1771,0	1809,0	1835,0	1817,0

Tsai				
------	--	--	--	--

	C = 0	C = 0,2	C = 0,4	C = 1
F <sub>1</sub>	319,1	345,0	366,9	419,7
F <sub>2</sub>	856,4	880,3	900,8	955,5
F <sub>3</sub>	836,3	928,4	1009,0	1225,0
F <sub>4</sub>	1790,0	1809,0	1827,0	1895,0

Tableau I.2 - Fréquences en Hz obtenues selon différentes méthodes.

Sur la même plaque et dans les mêmes conditions, a été testé l'effet du pourcentage de fibres, compte-tenu de la modification apportée par HEWITT et DE MALHERBE (I-1.6.5), lorsque ce pourcentage devient supérieur à 50%. Les résultats, indiqués dans le tableau I.3, montrent nettement l'importance de cet effet.

Halpin et Tsai				
V % Fréq.	40 %	50 %	70 %	90 %
F <sub>1</sub>	366	409	521	735
F <sub>2</sub>	933	1036	1249	1564
F <sub>3</sub>	1019	1149	1510	2236
F <sub>4</sub>	1932	2141	2540	3023

Adams et Doner				
V % Fréq.	40 %	50 %	70 %	90 %
F <sub>1</sub>	366	410	539	819
F <sub>2</sub>	933	1036	1279	1723
F <sub>3</sub>	1019	1150	1535	2349
F <sub>4</sub>	1932	2142	2574	3211

Tableau I.3 - Fréquences en fonction du pourcentage volumique.

## I - 2 LES DIFFERENTS TYPES D'ENDOMMAGEMENT DES MATERIAUX COMPOSITES

### I - 2.1 Généralités

L'endommagement d'un matériau est défini comme la modification de ses propriétés provoquée par l'application répétée d'efforts, modification pouvant entraîner la rupture d'une pièce soumise à des efforts bien inférieurs à la charge statique de rupture.

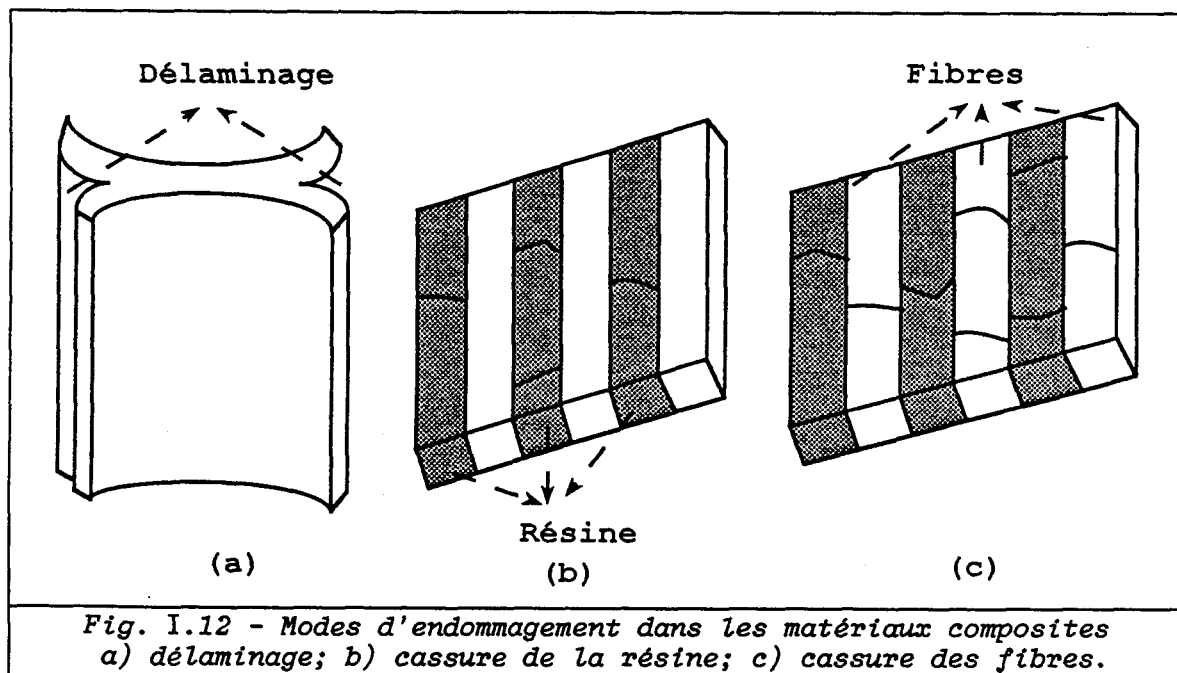
Dans le cas de la résistance statique, c'est le dépassement d'un niveau de contrainte qui entraîne la rupture lors de l'application de l'effort. Dans le cas de la fatigue, c'est à un niveau d'effort donné, le nombre d'applications de cet effort qui entraîne la rupture. Le phénomène de fatigue est de nature probabiliste, il est marqué par des écarts-types importants, particulièrement en ce qui concerne le nombre de cycles à initiation. Par exemple, des éprouvettes identiques, tirées de la même coulée, usinées et essayées avec le plus grand soin rompent à des nombres de cycles très différents lorsqu'elles sont toutes soumises à un effort variable de même amplitude [25].

La principale difficulté d'analyse des mécanismes de rupture dans les matériaux composites est due aux interférences entre les causes des endommagements qui produisent des effets aléatoires. En effet, un matériau composite soumis à des efforts de flexion cyclique peut s'endommager à la fois en traction, compression et cisaillement, ce qui rend le phénomène complexe. Il faut noter que l'endurance des matériaux composites est fonction d'une part des propriétés des éléments constitutifs et d'autre part de la séquence d'empilement des fibres.

### I - 2.2 Les modes d'endommagement

D'une manière générale, les modes d'endommagement des matériaux composites peuvent être classés en trois catégories (Fig. I.12) [26] :

- délaminage,
- cassure de la matrice,
- cassure des fibres.



Le délaminage est le mode de rupture qui correspond à la séparation entre plis. Il est initié par des surcontraintes à l'interface entre deux couches de fibres d'orientations différentes (d'une couche à l'autre). Une singularité géométrique est généralement à l'origine de ce phénomène (proximité d'un bord, d'un trou, d'un raccord angulaire entre structure,...).

Des essais [27], ont montré que ce défaut apparaît le premier dans les stratifiés, son apparition est accompagné de la rupture matricielle pour les couches orientées à plus de 60° de la direction de sollicitation. Pour les autres orientations, il entraîne des apparitions de défauts dans les couches adjacentes, défauts qui peuvent se propager dans et à travers celles-ci et atteindre les intercouches. Cette détérioration peut avoir plusieurs causes [28], notamment :

- un état de contrainte complexe à l'interface, consécutif par exemple à un flambement local,
- un choc, qui ne laisse aucune trace apparente en surface, peut entraîner des délaminages internes,
- un mode de sollicitation entraînant le décollement de couches (traction à l'interface).

Le délaminage progresse donc essentiellement par fissuration interlaminaire [27], il entraîne ainsi des résistances à la rupture plus faibles :

- en résistance statique,
- en fatigue sous compression cyclique.

La cassure de la matrice constitue un endommagement important car elle se produit fréquemment et affecte le matériau dans son ensemble. Elle ne se propage que suivant la direction des fibres, dans un pli transversal du stratifié. Les conséquences essentielles de ce mode d'endommagement sont :

- réduction des caractéristiques du matériau (rigidité, résistance),
- accélération de la dégradation par l'environnement (absorption d'humidité, cycle thermique).

L'endommagement des renforts et/ou des fibres ne se produit qu'au moment de la rupture totale de la couche [26]. Entre ces différents modes, la décohésion entre fibres et matrice peut apparaître et entraîner la dégradation de l'interface fibre-matrice. Cette décohésion dépend notamment de la contrainte de cisaillement à l'interface [29]. La rupture du composite combine tous ces types d'endommagement.

Enfin, ces dommages sont internes, même dans le cas de la fatigue, contrairement à ce que l'on observe pour les métaux [29]. Les critères

d'endommagement et de rupture des composites doivent nécessairement prendre en compte l'aspect tridimensionnel. Du point de vue phénoménologique, l'étude de l'endommagement fait appel au moyen d'observation classique, la microscopie, mais également à des moyens d'observation spécifiques, la radiographie, la tomographie ou l'holographie qui permettent mieux que la microscopie, des observations tridimensionnelles.

### **I - 3 PERFORMANCE DE TRANSDUCTEURS FLEXTENSIONNELS POUR DIFFERENTS MATERIAUX DE COQUE**

#### **I - 3.1 Introduction**

En acoustique sous marine, l'évolution des systèmes sonar vers les basses fréquences (100 Hz à quelques KHz) et les fortes puissances (plusieurs KWA), afin d'augmenter les portées de détection (plusieurs centaines de Km), a conduit au développement de transducteurs originaux susceptibles de fournir une puissance importante dans un encombrement réduit pour un poids raisonnable. Parmi ces solutions, l'utilisation des transducteurs flexensionnels semble être un bon compromis [30].

#### **I - 3.2 Utilisation des matériaux composites dans la construction de transducteurs flexensionnels**

Les matériaux composites du fait des propriétés exceptionnelles des fibres (verre, kevlar, graphite) possèdent de très bons rapports résistance/poids et rigidité/poids dans la direction des fibres par rapport à des matériaux classiques. Leur utilisation comme matériau constitutif de la coque des transducteurs flexensionnels permet, pour un encombrement donné, de diminuer sensiblement la fréquence de résonance du transducteur, d'augmenter la largeur de bande et de diminuer le facteur de qualité mécanique dans l'eau. Les différents paramètres et les propriétés physiques de deux transducteurs flexensionnels de classes IV, de forte puissance sont présentés dans le tableau I.4. On note que le transducteur utilisant une coque en composite verre-résine (CVR) a un bon rapport poids/puissance, est capable de fournir une puissance acoustique élevée en basse fréquence et est relativement moins encombrant pour une fréquence donnée [30].

La fréquence de résonance du mode fondamental d'un tel transducteur est

principalement déterminée par les propriétés de la coque (forme, modules de Young longitudinal et transversal, densité). Le matériau idéal permettant d'obtenir une fréquence de résonance basse, a une rigidité faible et une densité élevée. Toutefois, une coque de faible densité est requise pour maximiser la largeur de bande et le rendement. Pour quelques matériaux utilisés dans la fabrication des coques de flexionnel, l'effet sur la fréquence de leur emploi est indiqué au tableau I.5. Les coques en composite verre-résine permettent d'obtenir des fréquences significativement plus basses que celles fournies par des coques en aluminium ou en acier. Le choix du type de matériau dépend également des performances exigées, du coût du flexionnel et de l'encombrement. Les performances des différents matériaux utilisés classiquement dans la fabrication de coques de transducteurs flexionnels sont indiquées au tableau I.6.

Propriétés et paramètres physiques	transducteur 1	transducteur 2
Dimensions (mm x mm x mm)	470 x 470 x 220	500 x 500 x 160
Matériau de coque	aluminium	CVR
Poids (Kg)	75	148
Fréquence de résonance dans l'eau (Hz)	800	350
Réponse par volts (dB, ref. 1 $\mu$ Pa/V à 1 m)	136	138
Niveau d'émission maximum (dB, ref. 1 $\mu$ Pa à 1 m)	206	207
Facteur de qualité mécanique dans l'eau Q	7	4
Rendement supérieur à (%)	50	80

Tableau I.4 - Caractéristiques de deux transducteurs flexionnels [30].

Matériau	Résistance	Densité	Raideur	Fréquence	Largeur de bande
Aluminium	moyenne	basse	moyenne	moyenne	moyenne
Acier	élevée	élevée	élevée	moyenne	étroite
Titane	élevée	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne
CVR	moyenne	basse	basse	basse	large
Plastique	basse	basse	basse	basse	large
Carbone	élevée	basse	élevée	élevée	large
Fibre	élevée	moyenne	élevée	élevée	large
Al-Kevlar					

Tableau I.5 - Matériaux de coque et leurs effets sur la fréquence [31].



Matériau	Niveau d'émission	Largeur de bande	Coût	Taille Poids
Verre 'E'	faible	moyenne	faible	faible
Verre 'S'	moyen	moyenne	faible	moyen
Graphite	moyen	large	moyen	élevé
Aluminium	moyen	moyenne	moyen	moyen
Acier	élevé	étroite	moyen	grand
Matériau composite à matrice métallique	variable	variable	élevé	variable

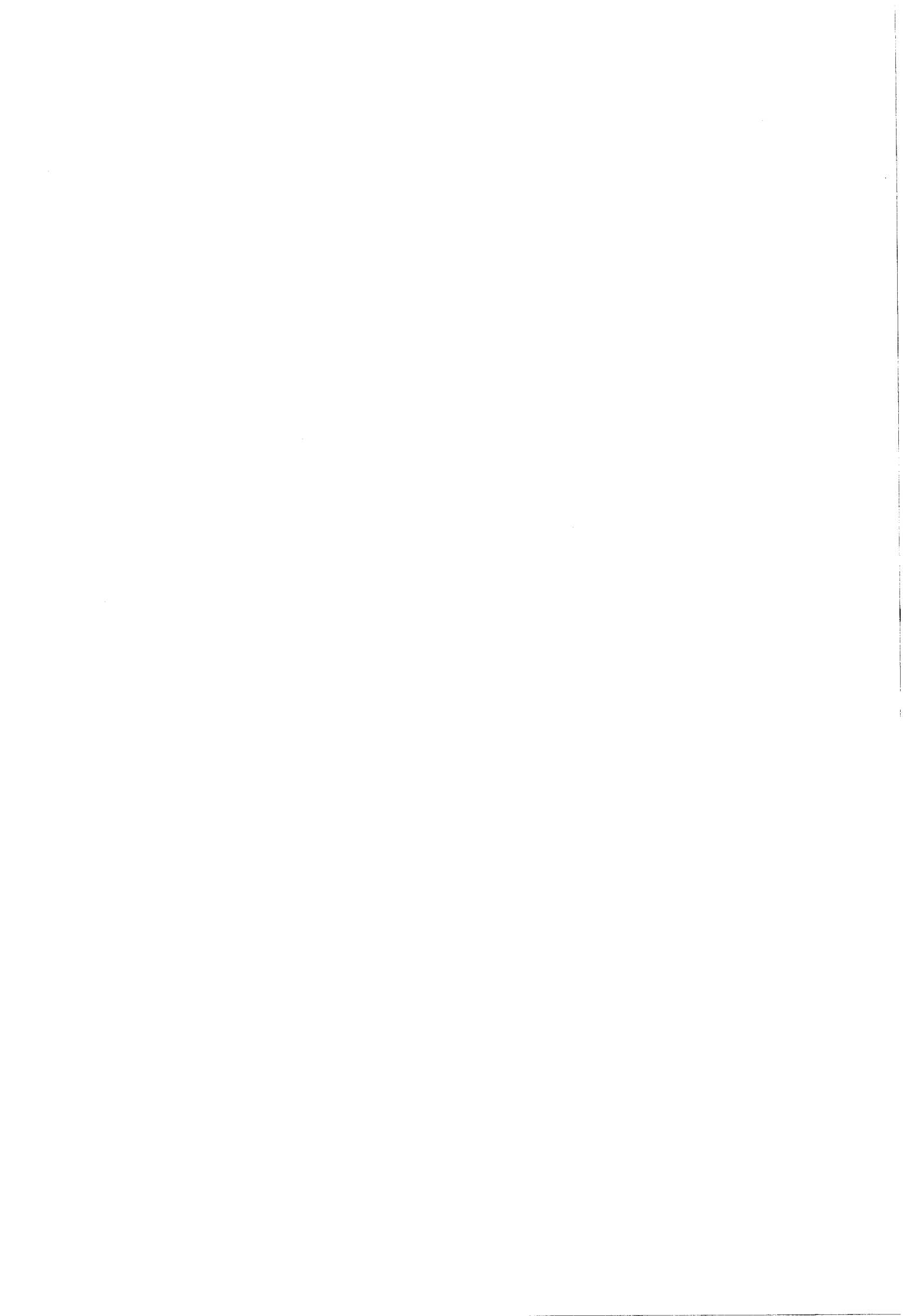
Tableau I.6 - Matériaux de coque et leurs performances [32].

L'utilisation des matériaux composites, comme matériau constitutif de la coque des transducteurs flexionnels permet donc, d'une part d'obtenir une fréquence de résonance basse et une largeur de bande importante, d'autre part de conserver un encombrement raisonnable et un coût faible. La tenue en service des transducteurs implique fiabilité et résistance à la dégradation sous sollicitations thermiques, mécaniques ou hydrodynamiques plus ou moins complexes. En effet, la dégradation du matériau due à la fatigue provoque une chute de la rigidité, une accélération de l'endommagement et entraîne, en général, une baisse de la fréquence propre et de la puissance acoustique.

#### I - 4 CONCLUSION

Les paramètres requis pour modéliser une structure sont les modules de Young, le coefficient de Poisson, la densité des fibres et de la matrice, le pourcentage de fibres en volume, l'orientation des fibres et le nombre de couches. La relation entre les propriétés des matériaux constitutifs et les caractéristiques globales, homogénéisées du composite, est assurée par un modèle micromécanique. Le modèle de HALPIN et TSAI utilisé dans le cadre de cette thèse est un modèle externe et peut être aisément remplacé dans les éléments finis développés.

Ces éléments permettent, d'une part de simuler le comportement dynamique d'une structure stratifiée soumise à des sollicitations variables, d'autre part de calculer les champs de déplacements et de contraintes dans chaque couche. A partir de ces champs on peut évaluer les seuils d'endommagement, ainsi que la zone et les couches les plus sollicitées.



## CHAPITRE II

### ETUDE DES STRUCTURES EN MATERIAUX COMPOSITES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

*On présente dans la première partie de ce chapitre la formulation d'éléments finis multicouches : l'élément tridimensionnel dégénéré de coque épaisse avec cisaillement transverse, l'élément de coque homogénéisé défini à partir de l'élément précédent et l'élément prisme à base triangulaire. La deuxième partie est consacrée à la présentation de la formulation du calcul des contraintes dans ces éléments composites.*



## II - 1 FORMULATIONS DES ELEMENTS COMPOSITES

### II - 1.1 Introduction

Le code éléments finis ATILA permet l'étude de transducteurs piézoélectriques à symétrie axiale ou complètement tridimensionnels. Ce code contient des éléments mécaniques, piézoélectriques, magnétostrictifs, fluides, des éléments interfaces fluide-structure et des éléments rayonnants. Initialement les éléments composites utilisés dans ce code étaient :

- Un hexaèdre isoparamétrique à 20 noeuds, possédant 3 degrés de liberté par noeud, susceptible de décrire des structures à simple courbure.
- Un quadrilatère isoparamétrique à 8 noeuds, permettant des analyses à symétrie axiale, ou en déformation plane.

Afin de compléter cette bibliothèque d'éléments composites, nous avons développé trois éléments multicouches : un élément de coque [33, 34] à simple ou à double courbure. Le calcul de la matrice de rigidité se fait en additionnant les matrices de rigidité de chaque couche. Cette opération nécessitant un temps de calcul très important (fonction du nombre de couches), un élément de coque monocouche [35-37] équivalent au multicouche a été incorporé dans la bibliothèque. Enfin, un élément prisme à base triangulaire a été développé.

### II - 1.2 Elément de coque à simple ou double courbure

#### II - 1.2.1 Principe

Cet élément est obtenu à partir d'un hexaèdre à 20 noeuds pour lequel on suppose (Fig. II.1) :

- une variation linéaire dans l'épaisseur des déplacements  $u$  et  $v$ ,
- une contrainte selon l'épaisseur  $\sigma_{zz} = 0$  découlant de la théorie des coques [38],
- que les termes dépendant de  $\epsilon_{zz}$  sont négligeables dans l'énergie interne de déformation.

Ceci permet d'aboutir à un élément de coque à 8 noeuds avec 5 degrés de liberté par noeud, les 3 déplacements  $u, v, w$  et les 2 rotations  $\theta_x, \theta_y$ .

### II - 1.2.2 Systèmes d'axes : définitions et relations

La construction de cet élément est fondée sur quatre systèmes d'axes qui sont : un système cartésien global pour les coordonnées nodales OXYZ, un système cartésien local Mxyz pour la définition des déformations et des contraintes, un système de coordonnées curvilignes  $r, s, t$  pour les fonctions de forme et pour la définition de la surface moyenne, enfin un système cartésien local et nodal ( $V_{x_i}, V_{y_i}, V_{z_i}$ ). La coordonnée curviligne  $t$  dans la direction de l'épaisseur varie entre -1 et +1, elle est normale à la surface moyenne. Tous ces systèmes sont représentés sur la figure II.1 et construits comme suit :

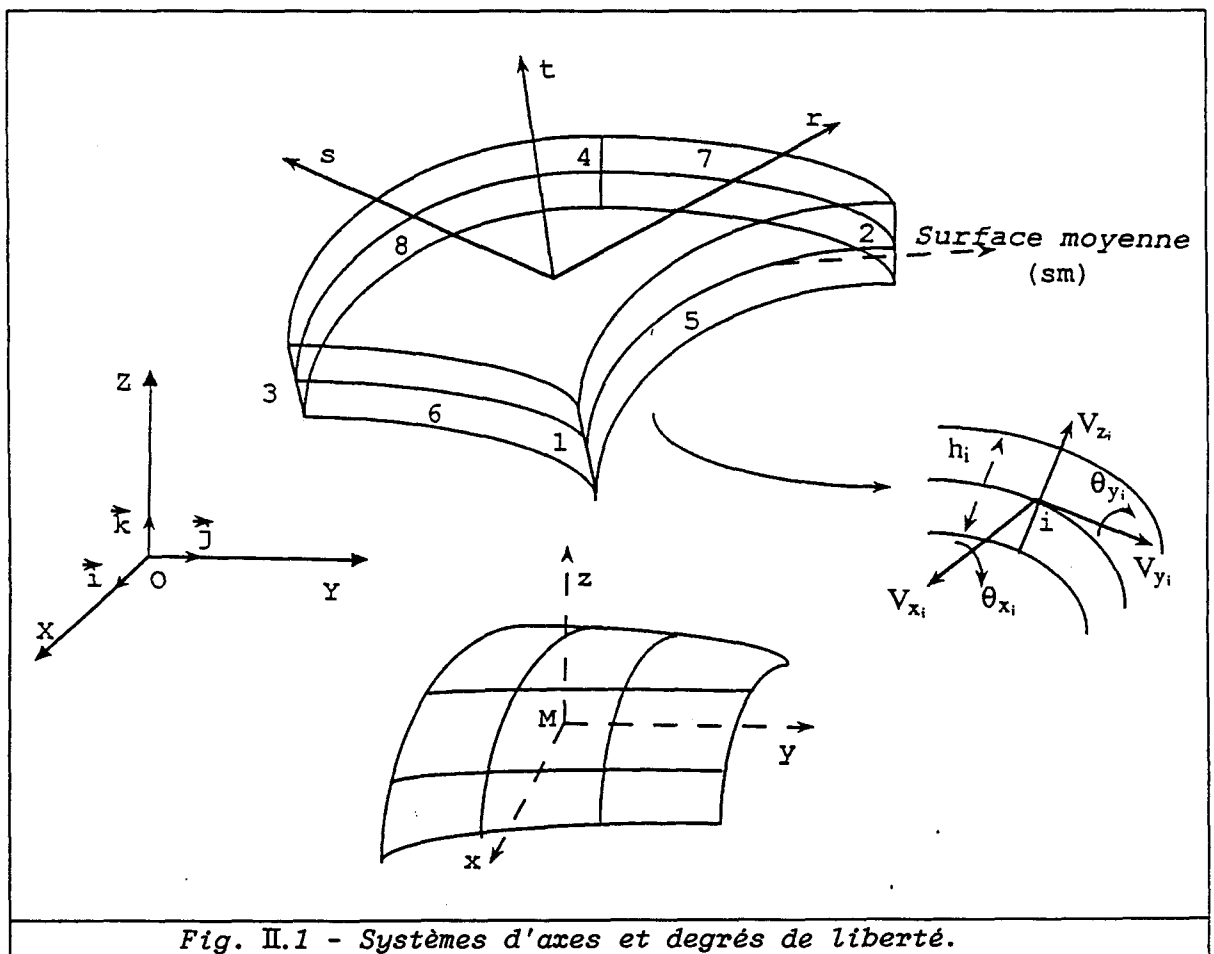


Fig. II.1 - Systèmes d'axes et degrés de liberté.

\* LE SYSTEME LOCAL

En tout point de la surface moyenne, un vecteur  $\{V_z\}$  est défini comme étant le produit vectoriel de deux vecteurs tangents aux courbes à  $t$  et  $s$  constants, soit :

$$\{v_z\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} \\ \frac{\partial Y}{\partial r} \\ \frac{\partial Z}{\partial r} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial s} \\ \frac{\partial Y}{\partial s} \\ \frac{\partial Z}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

ce vecteur est orthogonal au vecteur :

$$\{v_x\} = \left\{ \frac{\partial X}{\partial r}, \frac{\partial Y}{\partial r}, \frac{\partial Z}{\partial r} \right\}^T \quad (\text{II.2})$$

l'exposant T indique une transposition.

Le trièdre est complété par le vecteur :

$$\{v_y\} = \{v_z\} \wedge \{v_x\} \quad (\text{II.3})$$

on normalise ces trois vecteurs en les divisant par leur longueur, pour obtenir le système local :

$$[P] = [\{v_x\}, \{v_y\}, \{v_z\}]. \quad (\text{II.4})$$

\* LE SYSTEME NODAL

C'est le système local cartésien associé à chaque noeud dont l'origine est située sur la surface moyenne. Les quantités  $\Delta X_i$ ,  $\Delta Y_i$  et  $\Delta Z_i$ , définies au noeud  $i$ , sont obtenues à partir des coordonnées des noeuds de la surface supérieure et ceux de la surface inférieure de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= X_{\text{sup}} - X_{\text{inf}} \\ \Delta Y_i &= Y_{\text{sup}} - Y_{\text{inf}} \\ \Delta Z_i &= Z_{\text{sup}} - Z_{\text{inf}} \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

où les indices sup et inf indiquent respectivement la surface supérieure et la surface inférieure.

On construit le vecteur :

$$\{v_{z_i}\} = \frac{\{\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i\}^T}{\sqrt{\Delta X_i^2 + \Delta Y_i^2 + \Delta Z_i^2}} \quad (\text{II.6})$$

puis le vecteur  $\{v_{x_i}\}$  parallèle au plan XOZ tel que :

$$\{v_{x_i}\} = \frac{\{j\} \wedge \{v_{z_i}\}}{\|\{j\} \wedge \{v_{z_i}\}\|} \quad (\text{II.7})$$

où  $\|\{j\} \wedge \{v_{z_i}\}\|$  est la norme du vecteur,  $\{j\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ .

Si le vecteur  $\{v_{x_i}\}$  est parallèle à la direction OY il est alors remplacé par :

$$\{v_{x_i}\} = \frac{\{i\} \wedge \{v_{z_i}\}}{\|\{i\} \wedge \{v_{z_i}\}\|} \quad (\text{II.8})$$

où  $\{i\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ .

Comme précédemment le trièdre est complété par le produit vectoriel :

$$\{v_{y_i}\} = \frac{\{v_{z_i}\} \wedge \{v_{x_i}\}}{\|\{v_{z_i}\} \wedge \{v_{x_i}\}\|} \quad (\text{II.9})$$

$\{v_{z_i}\}$  est perpendiculaire à la surface moyenne au noeud  $i$ ,  $\{v_{y_i}\}$  et  $\{v_{x_i}\}$  définissent en ce noeud les rotations  $\theta_{x_i}$  et  $\theta_{y_i}$ .

#### \* GEOMETRIE DE L'ELEMENT

Un point quelconque de la coque est repéré par :

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 H_i(r,s) \cdot \left( \frac{1+t}{2} \cdot \begin{Bmatrix} X_{\text{sup}} \\ Y_{\text{sup}} \\ Z_{\text{sup}} \end{Bmatrix} + \frac{1-t}{2} \cdot \begin{Bmatrix} X_{\text{inf}} \\ Y_{\text{inf}} \\ Z_{\text{inf}} \end{Bmatrix} \right) \quad (\text{II.10})$$

ce qui s'écrit encore :

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 H_i(r,s) \cdot \begin{Bmatrix} X_{\text{sm}} \\ Y_{\text{sm}} \\ Z_{\text{sm}} \end{Bmatrix} + \frac{t}{2} \cdot \sum_{i=1}^8 H_i(r,s) \cdot h_i \cdot \{v_{z_i}\} \quad (\text{II.11})$$



où l'indice sm indique la surface moyenne. Les  $H_i$  sont les fonctions de forme de l'élément quadratique usuel à 8 noeuds (annexe I).  $\{V_{z_i}\}$  est le vecteur unitaire normal en ce noeud, suivant l'épaisseur  $h_i$  de la coque en ce noeud.

\* CHAMP DE DEPLACEMENTS DE L'ELEMENT

A la définition de la géométrie de l'élément de coque correspond un champ de déplacement, qui en chaque point  $i$  de la surface moyenne est défini par les 3 déplacements et les 2 rotations  $\theta_{x_i}$  autour de  $\{V_{x_i}\}$  et  $\theta_{y_i}$  autour de  $\{V_{y_i}\}$ . Les déplacements s'expriment en fonction des variables nodales sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 H_i(r,s) \cdot \begin{Bmatrix} u_{sm} \\ v_{sm} \\ w_{sm} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sum_{i=1}^8 H_i(r,s) \cdot h_i \cdot (\theta_{x_i} \cdot \{V_{x_i}\} - \theta_{y_i} \cdot \{V_{y_i}\}) \quad (\text{II.12})$$

où  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont les composantes du déplacement au point considéré. Le calcul de la déformation nécessite de différencier l'équation précédente par rapport à  $x$ ,  $y$  et  $z$ . En remarquant que :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} & \frac{\partial v}{\partial Z} & \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix} = [J^{-1}] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial w}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial w}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

et

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Z}{\partial r} \\ \frac{\partial X}{\partial s} & \frac{\partial Y}{\partial s} & \frac{\partial Z}{\partial s} \\ \frac{\partial X}{\partial t} & \frac{\partial Y}{\partial t} & \frac{\partial Z}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

où  $[J]$  est la matrice de Jacobi.

Le vecteur déformation  $\{\epsilon\}$  peut alors être calculé à partir de l'expression matricielle du déplacement, celle-ci peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\{\epsilon\} = [B] \cdot \{\delta\} \quad (\text{II.15})$$

où  $[B]$  désigne la matrice formée par les dérivées des fonctions d'interpolation par rapport au repère local.

### II - 1.2.3 Calcul de la matrice de rigidité

L'approche utilisée pour construire cet élément découle d'une formulation variationnelle. L'expression de l'énergie de déformation  $U$  dans un domaine  $\Omega$  peut s'écrire [39] sous la forme suivante :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\epsilon\}^T \cdot \{\sigma\} \cdot d\Omega \quad (\text{II.16})$$

la contrainte étant exprimée en fonction des déformations et les déformations en fonction des déplacements. En conséquence :

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \cdot \left( \int_{\Omega} [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot d\Omega \right) \cdot \{\delta\} \quad (\text{II.17})$$

La matrice de rigidité  $[K^{(e)}]$  élémentaire s'écrit à partir de l'énergie de déformation :

$$[K^{(e)}] = \int_{\Omega^{(e)}} [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot d\Omega^{(e)} \quad (\text{II.18})$$

où  $\Omega^{(e)}$  est le volume de l'élément  $e$  et  $[C]$  est la matrice de la loi de comportement dans le repère local.

La matrice  $[B]$  dépendant de  $r$ ,  $s$  et  $t$ , l'intégration suivant  $x$ ,  $y$  et  $z$  est transformée en intégration suivant  $r$ ,  $s$  et  $t$ . Le domaine d'intégration étant, dans ce cas, ramené à un cube dont les côtés varient entre  $-1$  et  $+1$ . La matrice de rigidité  $[K^{(e)}]$  devient alors :

$$[K^{(e)}] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot \det(J) \cdot dr \cdot ds \cdot dt \quad (\text{II.19})$$

où  $\det(J)$  désigne le déterminant de la matrice de Jacobi  $[J]$ .

### II - 1.2.4 Intégration numérique d'un élément multicouche

La coque en matériau composite est supposée constituée d'un empilement de couches homogènes. Chaque couche est représentée suivant le type du matériau, selon une loi de comportement.

La matrice  $[K^{(e)}]$  s'écrit alors:

$$[K^{(e)}] = \sum_{n=1}^{n_c} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} [B_n]^T \cdot [C_n] \cdot [B_n] \cdot \det(J) \cdot dt \cdot dr \cdot ds \quad (\text{II.20})$$

où  $n_c$  est le nombre de couches et  $[C_n]$  la matrice de la loi de comportement de la  $n^{\text{ième}}$  couche de l'élément  $e$ . Cette matrice dépend de l'orientation de la fibre et de la courbure de la couche.

Si l'on utilise une intégration numérique de Gauss [40], cette relation s'écrit :

$$[K^{(e)}] = \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{m_g} \sum_{k=1}^{p_g} [F^{(e)}(r_i, s_j, t_k^*)] \quad (\text{II.21})$$

où :

$$[F^{(e)}(r_i, s_j, t_k^*)] = \frac{[B_n(r_i, s_j, t_k^*)]^T \cdot [C_n(r_i, s_j, t_k^*)] \cdot [B_n(r_i, s_j, t_k^*)] \cdot \det(J) \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \alpha_k^*}{[B_n(r_i, s_j, t_k^*)]^T \cdot [C_n(r_i, s_j, t_k^*)] \cdot [B_n(r_i, s_j, t_k^*)] \cdot \det(J) \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j \cdot \alpha_k^*} \quad (\text{II.22})$$

$r_i$  et  $s_i$  sont les coordonnées des points de Gauss dans l'intervalle  $[-1, +1]$ ,  $\alpha_i$  et  $\alpha_j$  sont les poids de Gauss dans le même intervalle. Par ailleurs, le choix du nombre de points d'intégration ( $n_g$ ,  $m_g$  et  $p_g$ ) dépend des expressions polynomiales de l'élément. Le calcul de la matrice de rigidité a été effectué en utilisant 3 points de Gauss dans les directions  $r$ ,  $s$  et 2 points dans la direction  $t$  (suivant l'épaisseur).

Pour une couche dont les ordonnées extrêmes réduites selon l'axe  $t$  sont  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , on a :

$$t_k^* = \frac{t_{n+1} + t_n}{2} + \frac{t_{n+1} - t_n}{2} t_k \quad (\text{II.23})$$

et :

$$\alpha_k^* = \frac{t_{n+1} - t_n}{2} \alpha_k \quad (\text{II.24})$$

$t_k$  et  $\alpha_k$  étant respectivement les points et poids de Gauss dans l'intervalle  $[-1, +1]$ .

De façon identique, la matrice de masse cohérente s'écrit :

$$[M^{(e)}] = \sum_{n=1}^{n_c} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} [H']^T \cdot [\rho_n] \cdot [H'] \cdot \det(J) \cdot dt \cdot dr \cdot ds \quad (\text{II.25})$$

Avec :  $[\rho_n] = \rho_n \cdot [I]$  où  $[I]$  est la matrice identité d'ordre 3

$$[H'] = \frac{1+t}{2} \cdot \sum_{i=1}^8 [H_i] \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{1+t} & 0 & 0 & l_{i1} & l_{i2} \\ 0 & \frac{2}{1+t} & 0 & m_{i1} & m_{i2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{1+t} & n_{i1} & n_{i2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.26})$$

où  $l_{i1}$ ,  $m_{i1}$ ,  $n_{i1}$  et  $l_{i2}$ ,  $m_{i2}$ ,  $n_{i2}$  sont les cosinus directeurs des vecteurs  $\{V_{x_i}\}$  et  $\{V_{y_i}\}$ , soit :

$$\{V_{x_i}\} = \begin{Bmatrix} l_{i1} \\ m_{i1} \\ n_{i1} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{V_{y_i}\} = \begin{Bmatrix} l_{i2} \\ m_{i2} \\ n_{i2} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

Pour l'intégration, il suffit de se reporter à l'intégration de la matrice de rigidité précédemment calculée.

## II - 1.3 Elément fini de coque homogénéisé

### II- 1.3.1 Introduction

Le calcul des matrices de rigidité d'un matériau multicouche se fait, en général, en exprimant la matrice de rigidité de chaque couche. La matrice de rigidité totale s'obtient alors par addition des matrices élémentaires :

$$[K^{(e)}] = \sum_{n=1}^{n_c} [K_n^{(e)}] \quad (\text{II.28})$$

Ce calcul nécessite un temps important, fonction du nombre de couches. La méthode d'homogénéisation consiste à calculer un élément monocouche équivalent au multicouche. Elle a l'avantage d'une part, d'éviter le calcul des matrices de rigidité de chaque couche, d'autre part, de donner des informations précises sur les contraintes. Cette méthode est développée par plusieurs auteurs [35-37]. Les grandes lignes de celle-ci sont présentées dans les paragraphes suivants.

### II - 1.3.2 Principe d'homogénéisation

Cet élément est construit à partir d'une formulation

variationnelle. Les efforts et les moments de l'épaisseur totale s'obtiennent en additionnant les efforts et les moments élémentaires. Nous appelons matrice de loi de comportement homogénéisé, la matrice reliant les efforts et les moments au vecteur déformation  $\{\epsilon\}$ . Cette analyse peut se faire en utilisant l'élément de coque précédemment développé.

#### \* LOI DE COMPORTEMENT HOMOGENEISE

Le calcul de la matrice  $[B]$  fait apparaître une variation cubique selon l'axe  $z$ . La relation (II.15) reliant le vecteur  $\{\delta\}$  des déplacements nodaux au vecteur déformation  $\{\epsilon\}$  s'écrit alors :

$$\{\epsilon\} = \left( [B^0] + z.[B^1] + z^2.[B^2] + z^3.[B^3] \right) . \{\delta\} \quad (\text{II.29})$$

ou encore :

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^0\} + z.\{\epsilon^1\} + z^2.\{\epsilon^2\} + z^3.\{\epsilon^3\} \quad (\text{II.30})$$

avec :

$$\{\epsilon^q\} = [B^q].\{\delta\} \quad q = 0,1,2,3 \quad (\text{II.31})$$

Les matrices  $[B^q]$  et les vecteurs  $\{\epsilon^q\}$  sont indépendants de la coordonnée du système local  $z$ .

De même, l'énergie de déformation exprimée en (II.16) peut s'écrire :

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_S \int_{-h/2}^{+h/2} \left( \{\epsilon^0\}^T + z.\{\epsilon^1\}^T + z^2.\{\epsilon^2\}^T + z^3.\{\epsilon^3\}^T \right) . \{\sigma\} . dz . dS \quad (\text{II.32})$$

où  $h$  est l'épaisseur du matériau multicouche et  $S$  sa surface moyenne.

Partant de la relation précédente on peut aboutir aux efforts de l'épaisseur totale du stratifié (Fig. II.2), qui sont définis comme suit :

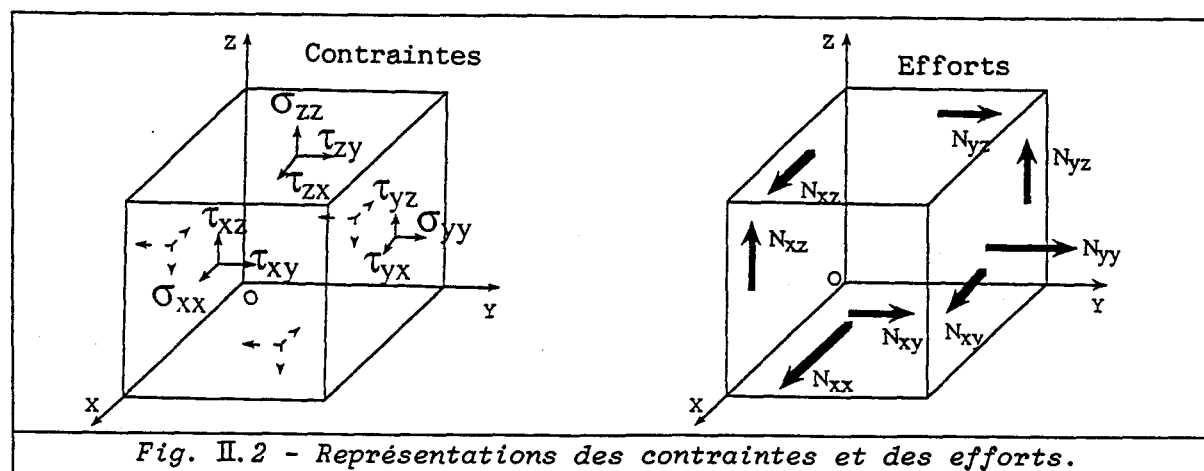


Fig. II.2 - Représentations des contraintes et des efforts.

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} . dz \quad (\text{II.33})$$

où  $\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T$  et  $\{N\} = \{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, N_{xz}, N_{yz}\}^T$ .  $\{N\}$  représente le vecteur d'effort moyen exercé sur toute l'épaisseur et pour une largeur unité. C'est donc la force par unité de largeur.

De même, on aboutit aux moments résultants d'ordre 0, 1 et 2 de la façon suivante :

$$\{M^q\} = \int_{-h/2}^{+h/2} \{\sigma\} . z^{q+1} . dz \quad q = 0, 1, 2 \quad (\text{II.34})$$

Avec  $\{M^q\} = \{M_{xx}^q, M_{yy}^q, M_{xy}^q, M_{xz}^q, M_{yz}^q\}^T$ .

En utilisant la relation (I.3) qui relie les contraintes aux déformations. Les efforts et les moments peuvent être définis à partir des déformations  $\{\epsilon^q\}$  par la relation matricielle suivante :

$$\{\hat{\sigma}\} = [Q] . \{\hat{\epsilon}\} \quad (\text{II.35})$$

où  $\{\hat{\sigma}\} = \{\{N\}, \{M^0\}, \{M^1\}, \{M^2\}\}^T$  est le vecteur contenant les efforts et les moments,  $\{\hat{\epsilon}\} = \{\{\epsilon^0\}, \{\epsilon^1\}, \{\epsilon^2\}, \{\epsilon^3\}\}^T$  et  $[Q]$  est la matrice de la loi de comportement homogénéisé ou la loi de comportement global. Ces termes dépendent des caractéristiques mécaniques des matériaux, de l'épaisseur de chaque couche et de la séquence d'empilement des différentes couches.

Cependant, l'énergie de déformation  $U$  peut s'écrire sous la forme :

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{\hat{\epsilon}\}^T . [Q] . \{\hat{\epsilon}\} . dS \quad (\text{II.36})$$

L'expression de la matrice de rigidité élémentaire s'écrit alors :

$$[K^{(e)}] = \int_S [\hat{B}]^T . [Q] . [\hat{B}] . dS \quad (\text{II.37})$$

où  $[\hat{B}] = [B^0], [B^1], [B^2], [B^3]^T$ .

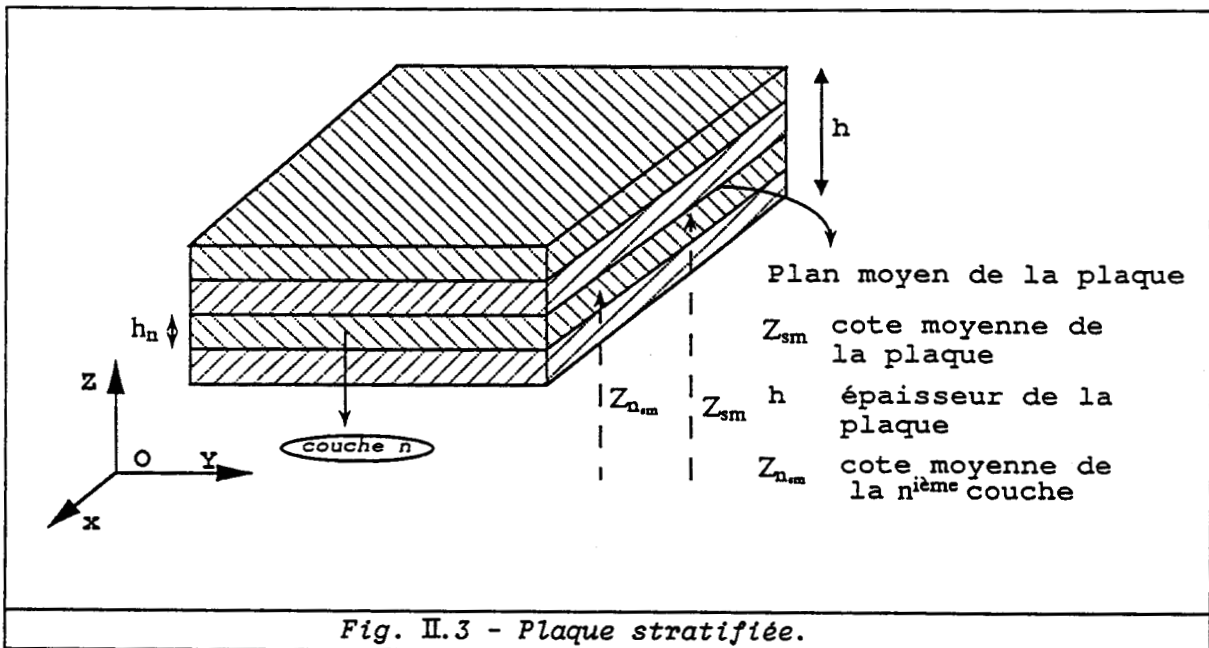
La détermination de  $[K^{(e)}]$  revient à évaluer une intégrale de surface indépendante de  $z$ . Le temps du calcul de cette matrice de rigidité est

indépendant du nombre de couches. Les coefficients de la matrice de la loi de comportement homogénéisé  $[Q]$  sont donnés en annexe II.

### II - 1.3.3 Elément fini plaque homogénéisé

Dans le cas d'une plaque dont le plan moyen est parallèle au plan XOY, le passage du repère global au repère local s'effectue par une translation (Fig. II.3). La relation (II.10) est remplacée par :

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^8 H_i(r,s) \cdot X_{s,m} \\ \sum_{i=1}^8 H_i(r,s) \cdot Y_{s,m} \\ Z_{s,m} + \frac{t}{2} \cdot h \end{Bmatrix} \quad (\text{II.38})$$



Dans ces conditions, la forme de vecteur de déformation  $\{\epsilon\}$  (relation II.30), se réduit à :

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^0\} + z \cdot \{\epsilon^1\} \quad (\text{II.39})$$

et la relation (II.35) reliant les efforts et les moments aux déformations

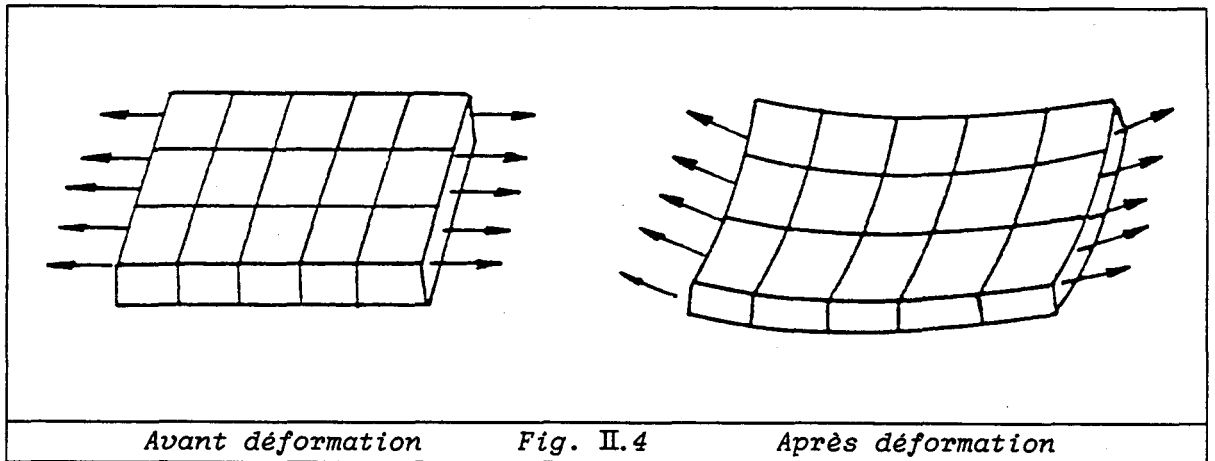
sera :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx}^0 \\ M_{yy}^0 \\ M_{xy}^0 \\ N_{xz} \\ N_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1(i,j) & Q_2(i,j) & 0 & 0 \\ \text{(sym)} & Q_3(i,j) & 0 & 0 \\ \text{(sym)} & \text{(sym)} & Q_1(4,4) & 0 \\ & & 0 & Q_1(5,5) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \epsilon_{xx}^1 \\ \epsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

où  $i$  et  $j = 1, 2, 3$ . Les sous-matrices  $Q_1(i, j)$ ,  $Q_2(i, j)$  et  $Q_3(i, j)$  sont définies dans l'annexe II.

\* PHENOMENES DE COUPLAGE :

Pour une plaque composite quelconque, les relations II.40 montrent qu'il existe un phénomène de couplage entre les efforts de membrane et de flexion. Les sous-matrices  $Q_1(i, j)$  et  $Q_2(i, j)$  représentent les termes de couplage entre les efforts dans le plan et les déformations hors du plan. En effet, un effort de traction dans le plan moyen peut entraîner une flexion de la plaque (Fig. II.4).



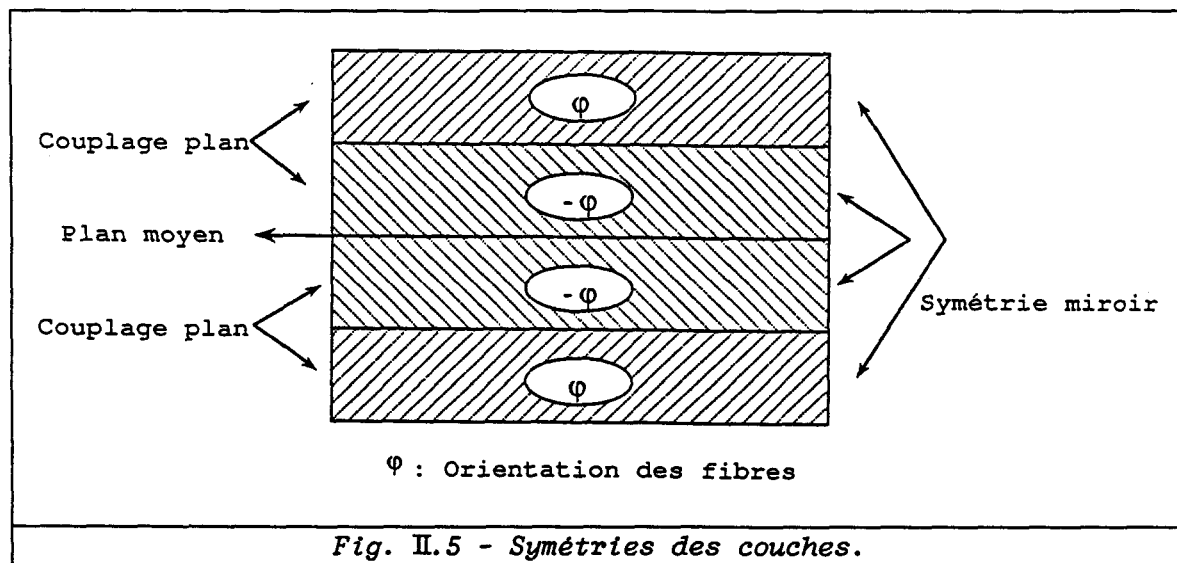
Ce couplage provient de la sous-matrice  $Q_2(i, j)$  qui s'écrit sous la forme :

$$Q_2(i, j) = \sum_{n=1}^{n_c} h_n \cdot Z_{n_{sm}} \cdot (C_{ij})_n \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.41})$$

où  $h_n$  et  $Z_{n_{sm}}$  sont respectivement l'épaisseur et la cote moyenne de la  $n^{\text{ième}}$  couche (Fig. II.3).



Pour supprimer ce couplage on annule cette sous-matrice en fabriquant la plaque de façon à ce que les couches symétriques par rapport au plan moyen soient identiques. La symétrie d'une telle plaque est appelée symétrie miroir (Fig. II.5). De même, les coefficients  $Q_1(3,1)$  et  $Q_1(3,2)$  montrent qu'il existe un couplage entre effort normal et distorsion angulaire. Pour éliminer ce couplage il faut annuler ces deux termes. Il suffit donc qu'il existe dans la plaque autant de couches orientées suivant une direction faisant un angle  $\varphi$  que de couches orientées suivant une direction faisant un angle  $-\varphi$  (Fig. II.5). La position des couches dans l'épaisseur n'a par conséquent aucune influence.



L'élimination du couplage membrane-flexion nécessite, chaque fois que l'on désire orienter une couche suivant une direction faisant un angle  $\varphi$ , de disposer une autre couche suivant la direction  $\varphi$  pour respecter la symétrie miroir, et deux couches suivant les directions  $-\varphi$  pour éliminer le couplage plan.

## II - 1.4 Élément prisme à base triangulaire

### II - 1.4.1 Définition de la géométrie

L'élément composite prismatique à base triangulaire est un prisme à 15 noeuds, la construction de cet élément est faite à l'aide des coordonnées réduites  $r$ ,  $s$  et  $t$ . Le passage de ces coordonnées aux coordonnées réelles  $x$ ,  $y$  et  $z$  du repère local étant réalisé à l'aide des fonctions d'interpolation (Fig. II.6).

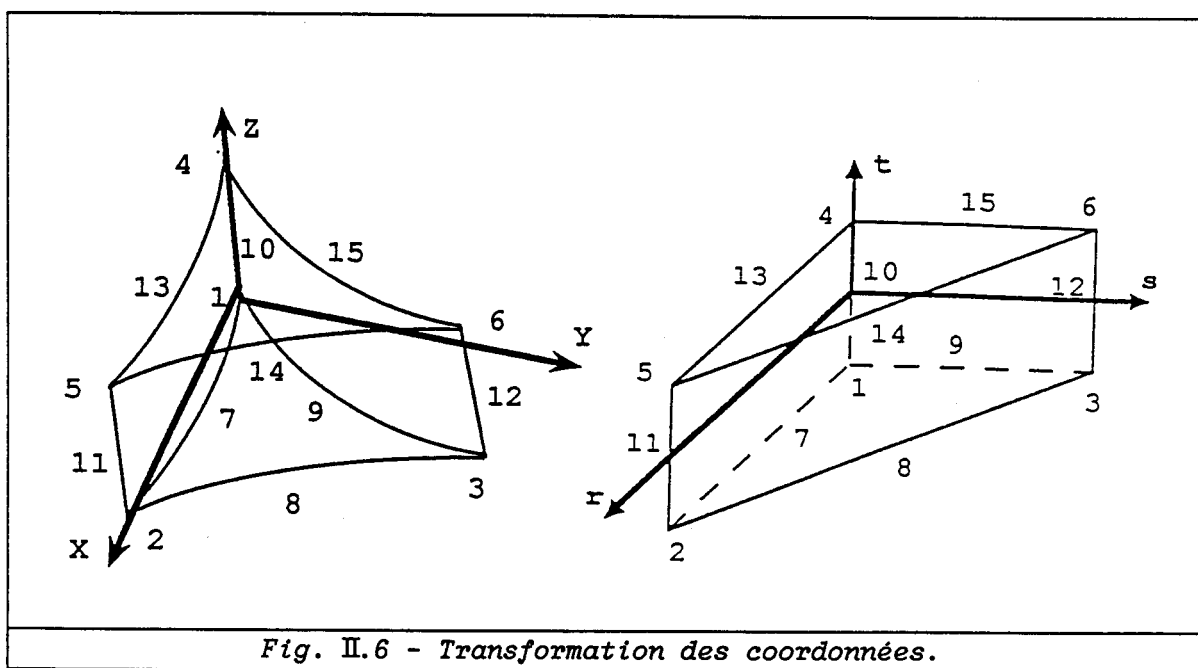


Fig. II.6 - Transformation des coordonnées.

#### II - 1.4.2 Matrice de rigidité d'un élément multicouche

La matrice de rigidité de l'élément se calcule de façon standard par la relation (II.18).

Dans le repère local, la matrice de rigidité  $[K^{(e)}]$  devient alors :

$$[K^{(e)}] = \int_{-1}^{+1} \int_0^{+1} \int_0^{+1} [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot \det(J) \cdot dr \cdot ds \cdot dt \quad (\text{II.42})$$

On procède au changement de variables  $r = \frac{1 + r^*}{2}$  et  $s = \frac{1 - r}{2} (s^* + 1)$  pour transformer l'intégrale sur un prisme en une intégrale sur un cube (méthode de Gauss-Radau [40]).

L'intégrale (II.42) devient :

$$[K^{(e)}] = \int_{-1}^{+1} \left( \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot \det(J) \cdot \frac{1 - r^*}{8} \cdot dr^* \cdot ds^* \right) \cdot dt \quad (\text{II.43})$$

La coque en composite est supposée constituée d'un empilement de couches homogènes, chacune des couches est représentée suivant le type du matériau par une loi de comportement.

La matrice  $[K^{(e)}]$  s'écrit alors :

$$[K^{(e)}] = \sum_{n=1}^{n_c} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} [B_n]^T \cdot [C_n] \cdot [B_n] \cdot \det(J) \cdot dt \right) \frac{1 - r^*}{8} \cdot dr^* \cdot ds^* \quad (\text{II.44})$$

$[C_n]$  est la matrice de la loi de comportement de la  $n^{\text{ième}}$  couche de l'élément  $e$ . Trois points de Gauss dans chaque direction sont nécessaires à l'intégration exacte des expressions polynomiales de cet élément.

De façon identique, la matrice de masse cohérente s'écrit :

$$[M^{(e)}] = \sum_{n=1}^{n_c} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} [H']^T \cdot [\rho_n] \cdot [H'] \cdot \det(J) \cdot dt \right) \cdot \frac{1 - r^*}{8} \cdot dr^* \cdot ds^* \quad (\text{II.45})$$

avec :

$$[\rho_n] = \rho_n \cdot [I], \quad [H'] = \sum_{i=1}^{15} H_i \cdot [I]$$

où  $[I]$  est une matrice identité d'ordre 3 et  $H_i$  sont les fonctions de forme de l'élément prisme à 15 noeuds (annexe I).

## II - 2 CALCUL DE CONTRAINTES DANS LES STRUCTURES STRATIFIEES

Le calcul des contraintes par la méthode des éléments finis est présenté dans un premier temps. Dans un second temps, le critère de rupture de Hill est présenté. Ce critère permet de calculer les seuils d'endommagement dans chaque couche.

### II - 2.1 Méthode de calcul

Dans le repère local les contraintes et les déformations sont liées par la relation (I.1). Dans le cas d'un matériau composite constitué d'un empilement de couches homogènes, le vecteur des contraintes dans le plan  $xoy$  (Fig. II.3) de la  $n^{\text{ième}}$  couche  $\left\{ \{\sigma^{(n)}\}_{xoy} = \left\{ \sigma_{xx}^{(n)}, \sigma_{yy}^{(n)}, \sigma_{xy}^{(n)} \right\}^T \right\}$  s'écrit alors dans un repère local de la façon suivante :

$$\{\sigma^{(n)}\}_{xoy} = [C_n] \cdot [B_n] \cdot \{\delta\} \quad (\text{II.46})$$

Les couches étant distinctes, leurs propriétés sont constantes dans l'épaisseur de chaque couche, ce qui entraîne une discontinuité du vecteur des contraintes  $\{\sigma^{(n)}\}_{xoy}$  à travers l'interface (Fig. II.3). Par contre, l'équilibre entre les éléments de matière de part et d'autre de l'interface, se traduit par la continuité des contraintes de cisaillement transversal ( $\tau_{xz}^{(n)}$ ,  $\tau_{yz}^{(n)}$ ) et de la contrainte normale  $\sigma_{zz}^{(n)}$ . Ces contraintes seront donc calculées par intégration partielle des équations d'équilibre [41, 42] :

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(n)} &= - \int_{-\frac{h}{2}}^z \left( \frac{\partial \sigma_{xx}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(n)}}{\partial y} \right) \cdot dz \\ \tau_{yz}^{(n)} &= - \int_{-\frac{h}{2}}^z \left( \frac{\partial \tau_{xy}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(n)}}{\partial y} \right) \cdot dz \\ \sigma_{zz}^{(n)} &= - \int_{-\frac{h}{2}}^z \left( \frac{\partial \tau_{xz}^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(n)}}{\partial y} \right) \cdot dz \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Il a été démontré [43] que les points où le calcul des contraintes est le plus précis sont généralement les points de Gauss de l'élément [40]. Pour déterminer le vecteur des contraintes au noeud, la technique de lissage la plus simple consiste à effectuer la moyenne des contraintes calculées pour les différents éléments auxquels ce noeud appartient. Cette technique donne généralement de bons résultats. Cependant, différents auteurs [44, 45] ont montré que le calcul des contraintes est optimal aux points de Gauss d'intégration réduite, les valeurs nodales des contraintes pouvant être obtenues alors par un simple algorithme d'extrapolation. Cette technique n'a pas été utilisée dans le cadre de cette étude. Dans la suite, les contraintes sont calculées dans chaque couche aux points de Gauss.

## II - 2.2 Critère de rupture

Les critères de rupture doivent faire intervenir les contraintes principales et les caractéristiques d'anisotropie du matériau. Ces critères s'appliquent couche par couche dans les axes locaux d'orthotropie. Citons

parmi les plus utilisés le critère de Hill [28] qui prend en compte le tenseur des contraintes dans son ensemble et la limite de rupture du matériau, son expression est une extension du critère de Von-Mises (II.48) :

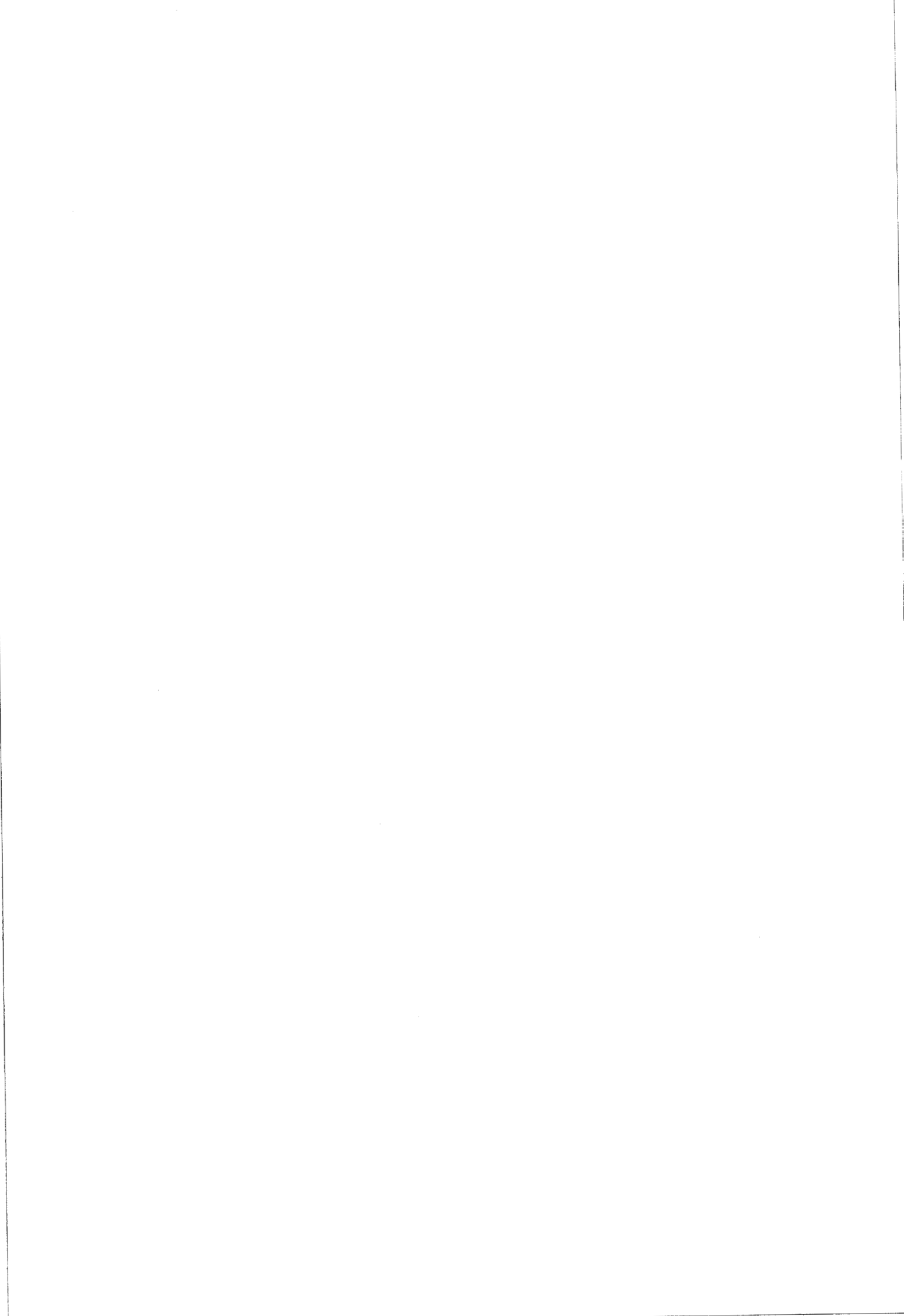
$$\left(\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^*}\right)^2 + \frac{\sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2}{\sigma_{yy}^{*2}} - \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^{*2}} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \sigma_{zz} \cdot \sigma_{yy} \left(\frac{1}{\sigma_{xx}^{*2}} - \frac{2}{\sigma_{yy}^{*2}}\right) + \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}{\tau_{xy}^{*2}} + \frac{\tau_{yz}^2}{\tau_{yz}^{*2}} \leq \beta$$

où  $\beta$  ( $\beta < 1$ ) représente la constante de Hill.  $\sigma_{xx}^*$ ,  $\sigma_{yy}^*$ ,  $\tau_{xy}^*$  et  $\tau_{yz}^*$  sont les contraintes limites de rupture; l'évolution de ces contraintes en fonction du nombre de cycles de sollicitation à la rupture est obtenue expérimentalement et représentée par le diagramme de Wöhler [5]. Ce critère est bien adapté aux matériaux réalisés avec des fibres unidirectionnelles dans une matrice époxy [46].

## II - 3 CONCLUSION

Les éléments finis développés dans ce chapitre complètent avantageusement la bibliothèque d'éléments composites existants. L'élément de coque et l'élément coque homogénéisé sont parfaitement équivalents dans le cas de structures à géométries planes (plaques). Cela est dû au fait que la valeur de la cote moyenne de chaque couche ( $Z_{n_{sm}}$ ) peut être calculée exactement. Dans les autres cas de structures, cette cote est calculée par rapport au centre de l'élément.

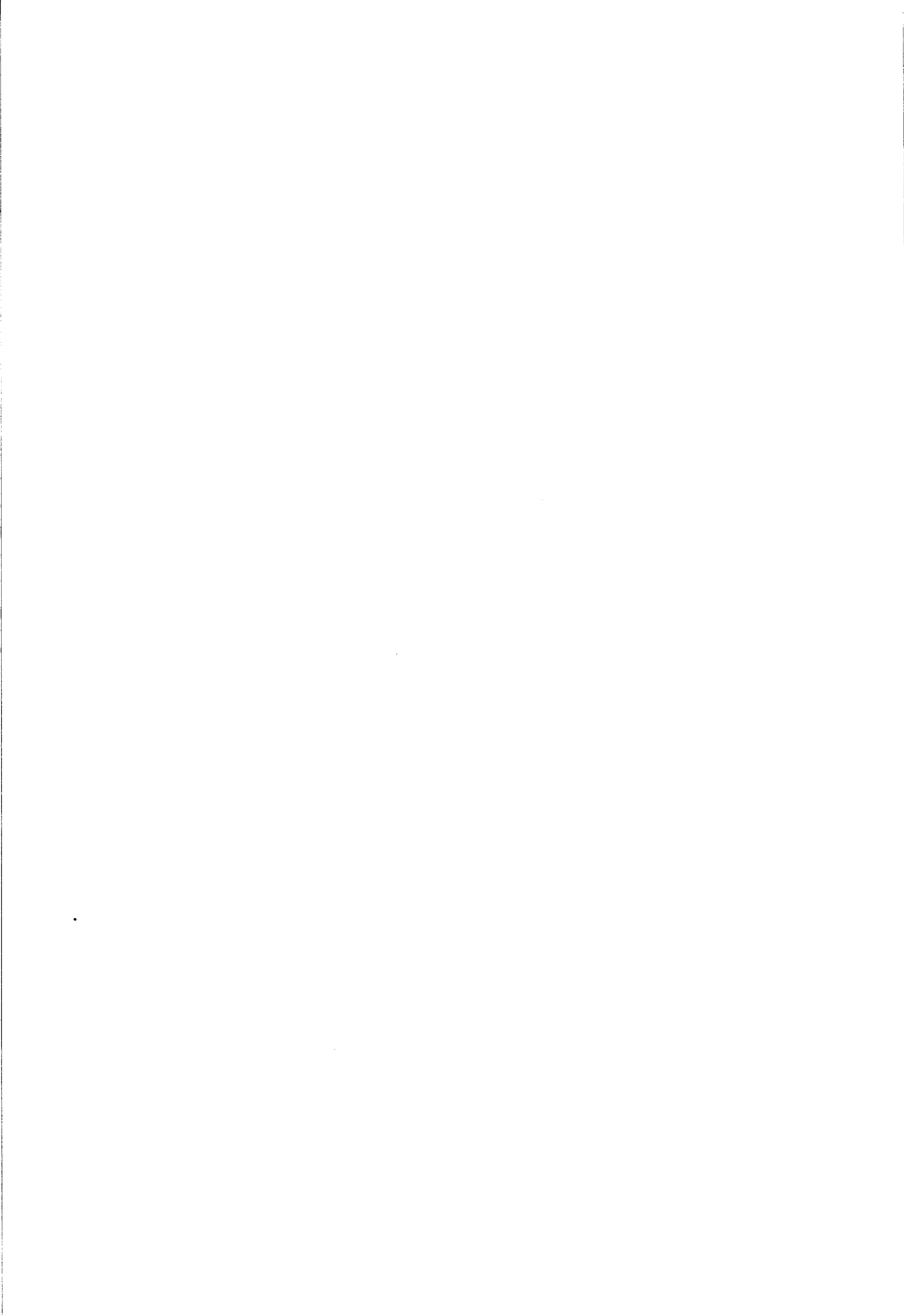
Dans le chapitre suivant nous proposons une série de tests pour valider les éléments développés ainsi que le calcul de contraintes.



## CHAPITRE III

### MODELISATION A L'AIDE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DE STRUCTURES COMPOSITES : VALIDATION ET RESULTATS

*On décrit dans ce chapitre une partie des tests effectués pour valider le comportement des éléments multicouches incorporés au programme ATILA. On présente dans un premier temps, l'étude du comportement statique et dynamique de plaques ou coques en matériaux composites. On teste dans un second temps, la validation du calcul des contraintes sur des structures stratifiées (poutre et plaque). Enfin, le comportement dynamique d'une coque utilisée dans la réalisation d'un transducteur flexionnel est étudié.*





### III - 1 ETUDE DES STRUCTURES EN MATERIAUX COMPOSITES

Afin de valider le comportement statique et dynamique des éléments finis développés, plusieurs tests ont été effectués. Pour chaque exemple nous comparons les résultats numériques à des résultats analytiques ou expérimentaux [47]. Les calculs ont été conduits sur un ordinateur IBM 3090 VF avec processeur vectoriel et 32 Mo de mémoire réelle.

#### III - 1.1 Analyse statique d'une plaque et d'une coque

##### III - 1.1.1 Flexion d'une plaque sous pression

On considère une plaque carrée de côté  $L = 254$  mm, d'épaisseur  $h = 12,7$  mm et constituée de 3 couches, dont les fibres sont alternées à  $0^\circ/90^\circ$  (Fig. III.1). La couche centrale a une épaisseur deux fois plus grande que les autres. Cette plaque est simplement appuyée et chargée par une pression  $P$  ( $P = P_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$ ). Elle admet deux plans de symétrie orthogonaux, seul le quart de celle-ci a été discrétisé. Pour tester la convergence, trois maillages ont été utilisés pour chaque élément (coque, prisme et coque homogénéisé). Les résultats obtenus sont comparés à une solution analytique [48].

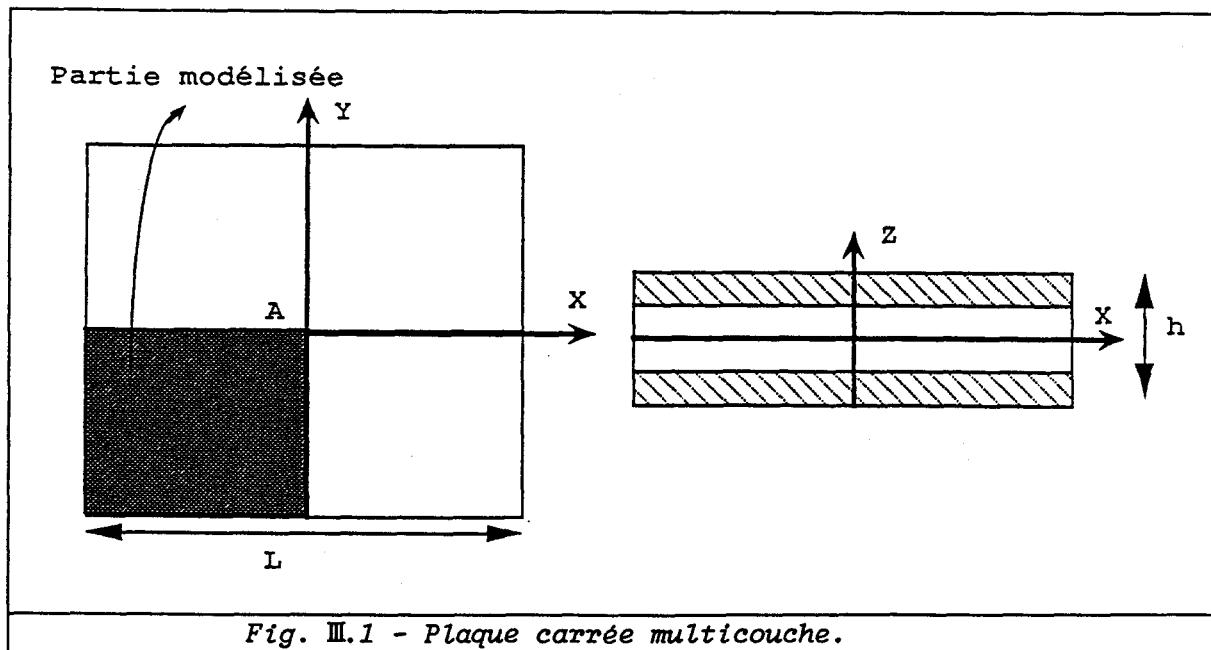


Fig. III.1 - Plaque carrée multicouche.

Les caractéristiques mécaniques de la plaque sont les suivantes :

$$E_{yy} = 7,03 \times 10^4 \text{ Pa} \quad \frac{E_{xx}}{E_{yy}} = 25 \quad \frac{G_{xy}}{E_{yy}} = 0,5$$

$$\frac{G_{yz}}{E_{yy}} = 0,2 \quad \nu_{xy} = \nu_{xz} = 0,25 \quad \nu_{yz} = 0,01$$

On désigne par  $\bar{W}$  la flèche normalisée au point A :

$$\bar{W} = \frac{W \pi^4 h^3}{12 P_0 L^4} \bar{P}$$

avec :

$$\bar{P} = \frac{4G_{xy} + (E_{xx} + E_{yy}(1 + 2\nu_{yz}))}{1 - \nu_{xy}\nu_{xz}}$$

et  $W$  la flèche au point A.

La correspondance entre la valeur analytique et la solution calculée par éléments finis est satisfaisante, notamment pour l'élément de coque (Tableau III.1). L'élément homogénéisé donne les mêmes résultats que ceux obtenus avec l'élément de coque classique, cette correspondance est normale, ces deux éléments étant parfaitement équivalents pour ce type de structure (plaques). D'autre part, le tableau III.2 montre pour chaque élément et pour différents maillages le temps de calcul  $t$ . Le champ de déplacement du quart de la structure est représenté à la figure III.2.

Elément Maillage	Coque	Prisme	Coque	Prisme
	$\bar{W}$	$\bar{W}$	écart %	écart %
3 x 3	1,10	1,09	7,0	8,0
4 x 4	1,13	1,12	5,0	6,0
5 x 5	1,15	1,14	3,0	4,0
Analytique	1,18	1,18	-	-

Tableau III.1 - Analyse statique d'une plaque composite.

Elément Maillage	Coque	Prisme	Coque homogénéisée
	$t$ (seconde)	$t$ (seconde)	$t$ (seconde)
3 x 3	3,0	6,9	2,3
4 x 4	5,0	11,8	3,9
5 x 5	6,5	19,1	4,3

Tableau III.2 - Temps de calcul.

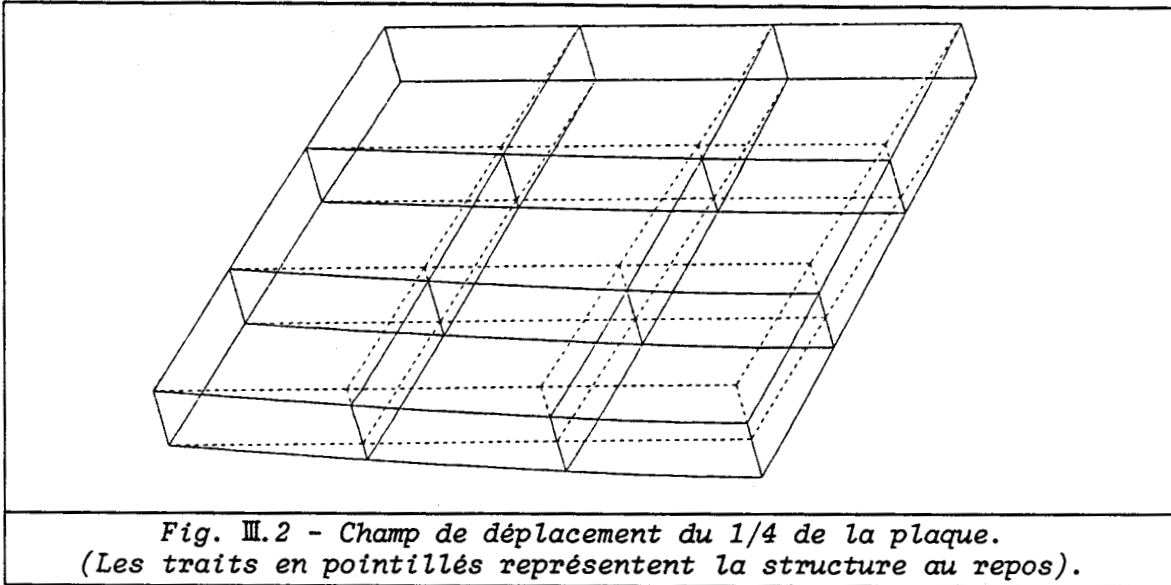


Fig. III.2 - Champ de déplacement du 1/4 de la plaque.  
(Les traits en pointillés représentent la structure au repos).

### III - 1.1.2 Modélisation d'une coque sphérique sous pression

On considère une coque sphérique (Fig. III.3) simplement supportée, formée d'un matériau orthotrope et soumise à une pression uniforme  $P$ . La solution de ce problème est donnée par J.N. REDDY [49] et S.M. YUNUS [50]. Nous utilisons les données numériques fournies dans [49] :

$$E_{xx} = 25 \times 10^6 \text{ Pa} \quad \frac{E_{xx}}{E_{yy}} = 25 \quad G_{xz} = G_{xy} = 0,5E_{yy} \quad R = 300 \text{ mm}$$

$$G_{yz} = 0,2E_{yy} \quad \nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu_{yz} = 0,01 \quad h = 15 \text{ mm} \quad a = 150 \text{ mm}$$

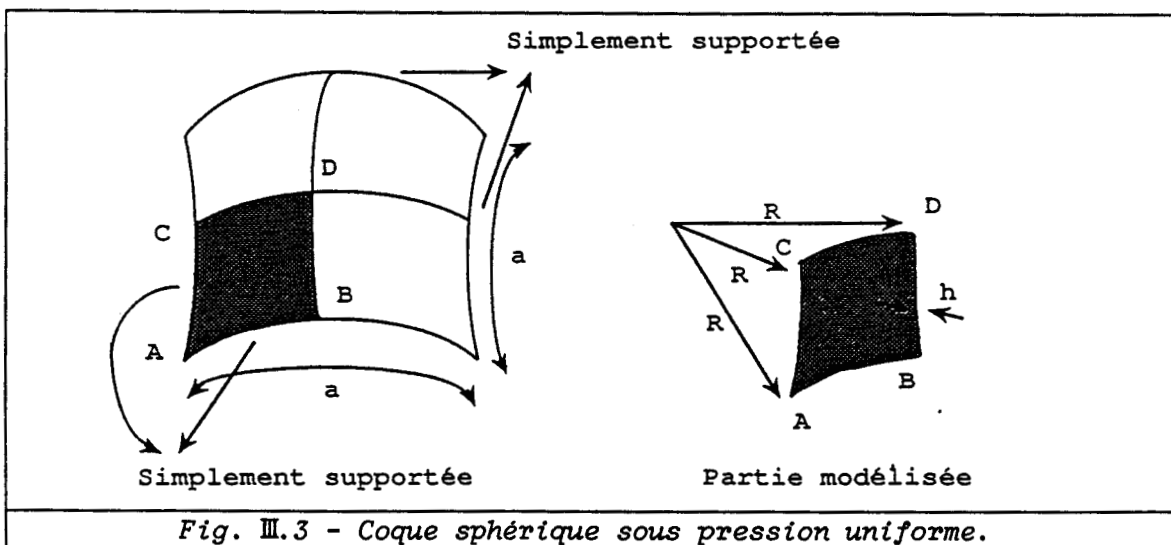


Fig. III.3 - Coque sphérique sous pression uniforme.

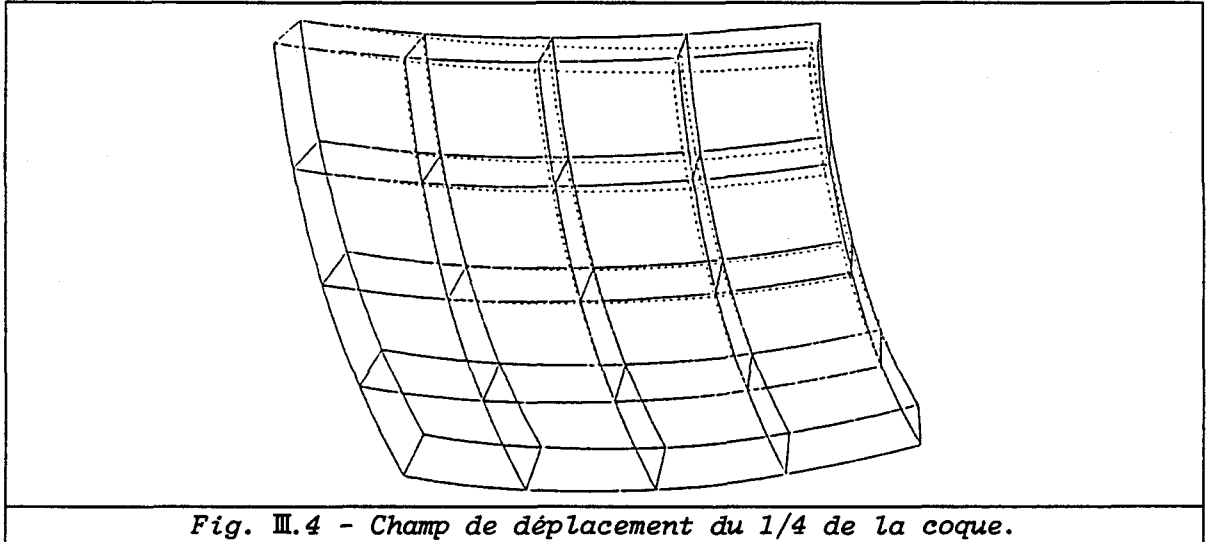
La coque est constituée de deux couches dont les fibres sont orientées à  $0^\circ/90^\circ$ . Pour des raisons de symétrie, seul 1/4 de la structure a été

discrétisé par un maillage de  $4 \times 4$  éléments, ce qui conduit à un nombre de degrés de liberté de 273 pour l'élément de coque et 404 pour l'élément prisme.

Elément Analytique	Coque $\bar{w}$	Prisme $\bar{w}$	Coque homogénéisée $\bar{w}$	Coque écart %	Prisme écart %	Coque homogénéisée écart %
0,126	0,132	0,118	0,133	4,9	6,5	5,5

Tableau III.3 - Comparaison des résultats numériques et analytique.

Le tableau III.3 présente la valeur du déplacement radial normalisée  $\bar{w}$  ( $\bar{w} = \frac{Wh^3 E_{yy}}{Pa^4}$ ) au point D pour les éléments : coque, prisme et coque homogénéisé. La comparaison entre les valeurs calculées et la solution analytique est satisfaisante quelque soit le type d'élément. On note que l'écart entre les valeurs obtenues par l'élément de coque et l'élément de coque homogénéisé n'est pas significatif. Le champ de déplacement du 1/4 de la coque est représenté à la figure III.4.



### III - 1.2 Analyse modale de plaques et de coques

#### III - 1.2.1 Analyse modale de plaques

Il s'agit de deux plaques rectangulaires composées de fibres de verre et de résine époxy [47]. Les dimensions et les caractéristiques de

ces plaques sont résumées dans le tableau III.4.

Plaque	Longueur L (mm)	Largeur l (mm)	Epaisseur h (mm)	Masse volumique kg/m <sup>3</sup>	Orientation des fibres	Nombre couches	% de verre
1	302,0	200,0	10,3	1931,0	0°	29	53,2
2	299,0	200,3	9,8	1734,0	± 28°	24	41,6

Tableau III.4 - Caractéristiques des plaques.

Les caractéristiques mécaniques de la fibre de verre E et de la résine sont les suivantes :

Module de Young	: $E_f = 0,730 \times 10^{11}$ Pa (fibre)
	: $E_m = 0,290 \times 10^{10}$ Pa (résine)
Coefficient de Poisson	: $\nu_f = 0,22$
	: $\nu_m = 0,35$
Masse volumique	: $\rho_f = 2540$ kg/m <sup>3</sup>
	: $\rho_m = 1100$ kg/m <sup>3</sup>

Ces plaques admettent deux plans de symétrie orthogonaux, seul 1/4 de structure a été modélisé (Fig. III.5). En utilisant les conditions aux limites de symétrie et d'antisymétrie du champ de déplacement, quatre combinaisons sont nécessaires pour calculer le spectre complet des fréquences de résonance. Si les axes OX, OY et OZ sont orientés suivant la longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque, un mode symétrique par rapport au plan YOZ et antisymétrique par rapport au plan XOZ sera noté comme mode SA (symétrique-antisymétrique).

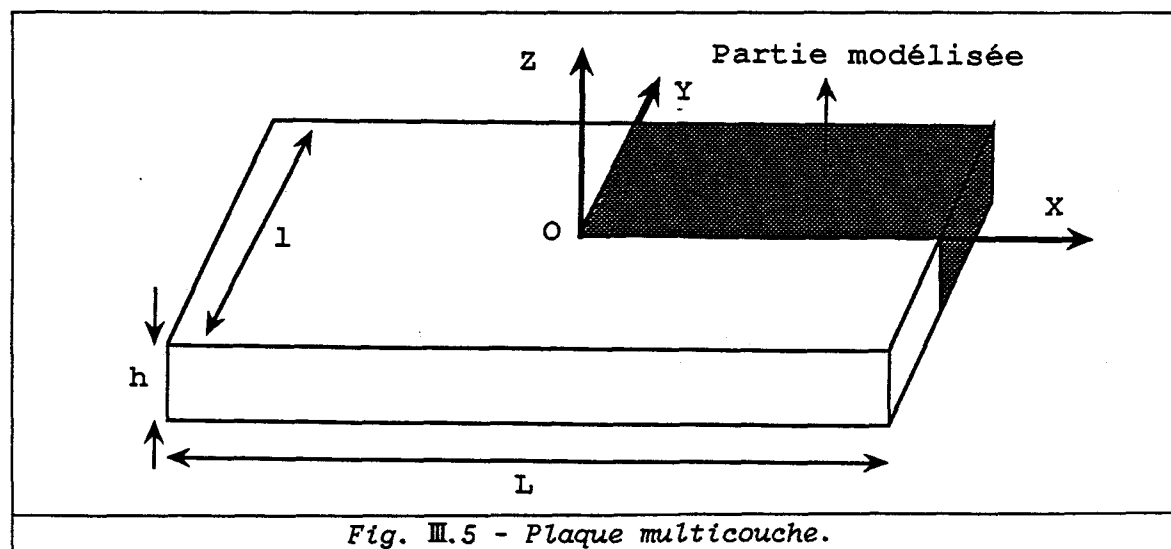


Fig. III.5 - Plaque multicouche.

Pour 1'élément coque le maillage utilise 3x3 éléments, ce qui conduit à un

nombre de degrés de liberté maximal de 172 dans le cas d'une analyse de type SS (symétrique-symétrique). Pour l'élément prisme, le maillage utilise 21 éléments, fournissant ainsi 227 degrés de liberté, toujours dans le cas d'une analyse de type SS. Les tableaux III.5 et III.6 présentent les valeurs numériques et expérimentales [47] des premières fréquences de résonance, pour les conditions aux limites précédemment énoncées. On remarque un bon accord entre ces valeurs, en particulier, l'élément de coque fournit des

Elément Mode	Coque (Hz)	Prisme (Hz)	Exp. (Hz)	Coque écart %	Prisme écart %
SS1	532	534	524	1,5	1,8
SS2	642	654	658	2,4	0,6
SA1	767	735	754	1,7	2,6
AS1	831	823	848	2,0	2,9
SS3	1371	1347	1393	1,9	3,3
AA2	1656	1653	1641	0,9	0,7
AS3	2257	2265	2277	0,8	0,5
SA3	2409	2625	2484	3,0	5,3

Tableau III.5 - Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour la plaque 1.

Elément Mode	Coque (Hz)	Prisme (Hz)	Exp. (Hz)	Coque écart %	Prisme écart %
AA1	340	347	341	0,3	1,7
SS1	369	357	378	2,3	2,6
SS2	601	599	618	2,7	3,0
AS2	1133	1132	1140	0,6	0,7
SS3	1517	1591	1442	4,9	9,3
SS4	2182	2167	2148	1,5	0,8
SA4	2646	2859	2660	0,5	6,9

Tableau III.6 - Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour la plaque 2.

résultats satisfaisants tout en ayant un nombre de degrés de liberté inférieur à l'élément prisme.

Comme dans l'analyse statique, l'élément coque et l'élément homogénéisé donnent les mêmes résultats. Le temp de calcul des 8 premières fréquences de résonance est indiqué dans le tableau III.7. Ce dernier montre que le temps de calcul est plus faible pour l'élément homogénéisé. Deux spectres de vibration sont présentés (Figs. III.8 et III.9) pour les deux plaques. L'étude est portée sur le domaine [200 Hz, 5200 Hz].

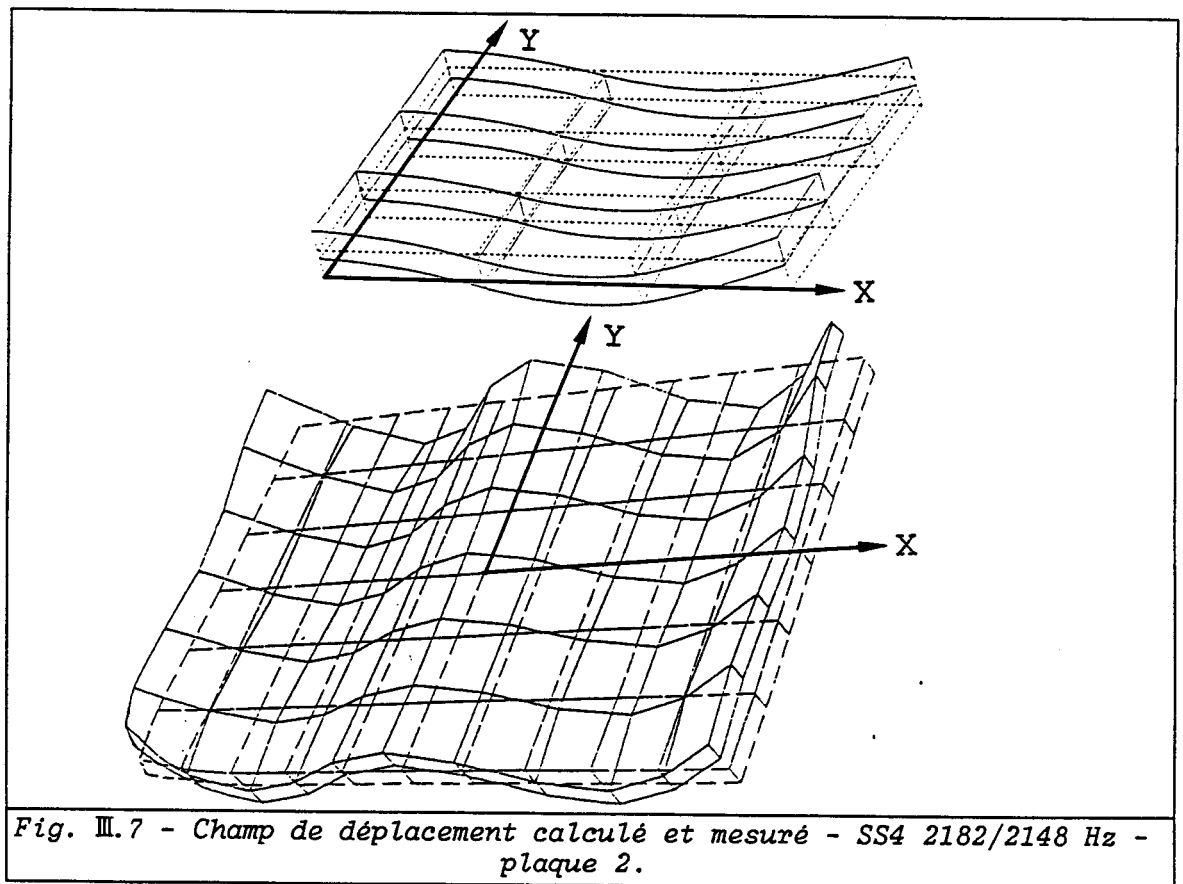
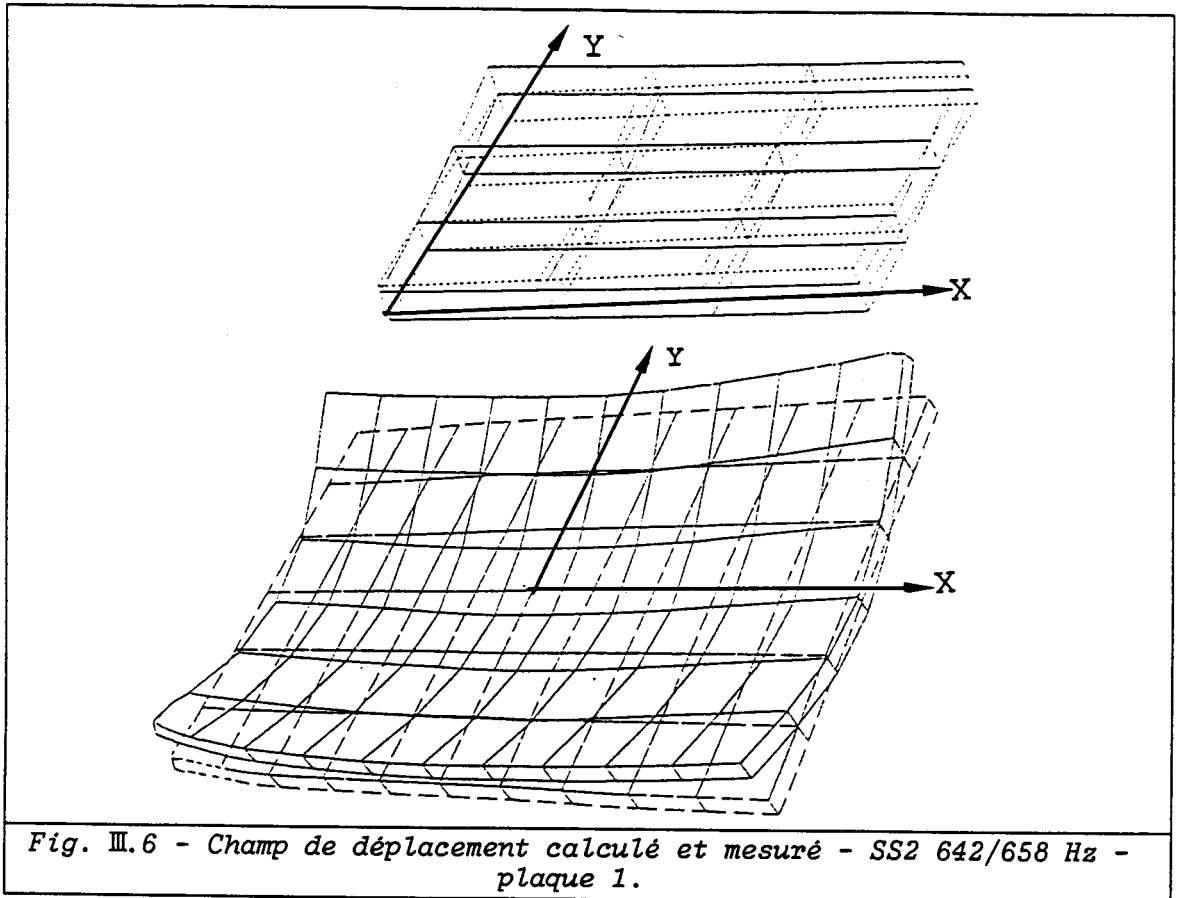
Elément de coque t (seconde)	Elément prisme t (seconde)	Elément de coque homogénéisé t (seconde)
8,5	23,0	5,4

Tableau III.7 - Temps de calcul.

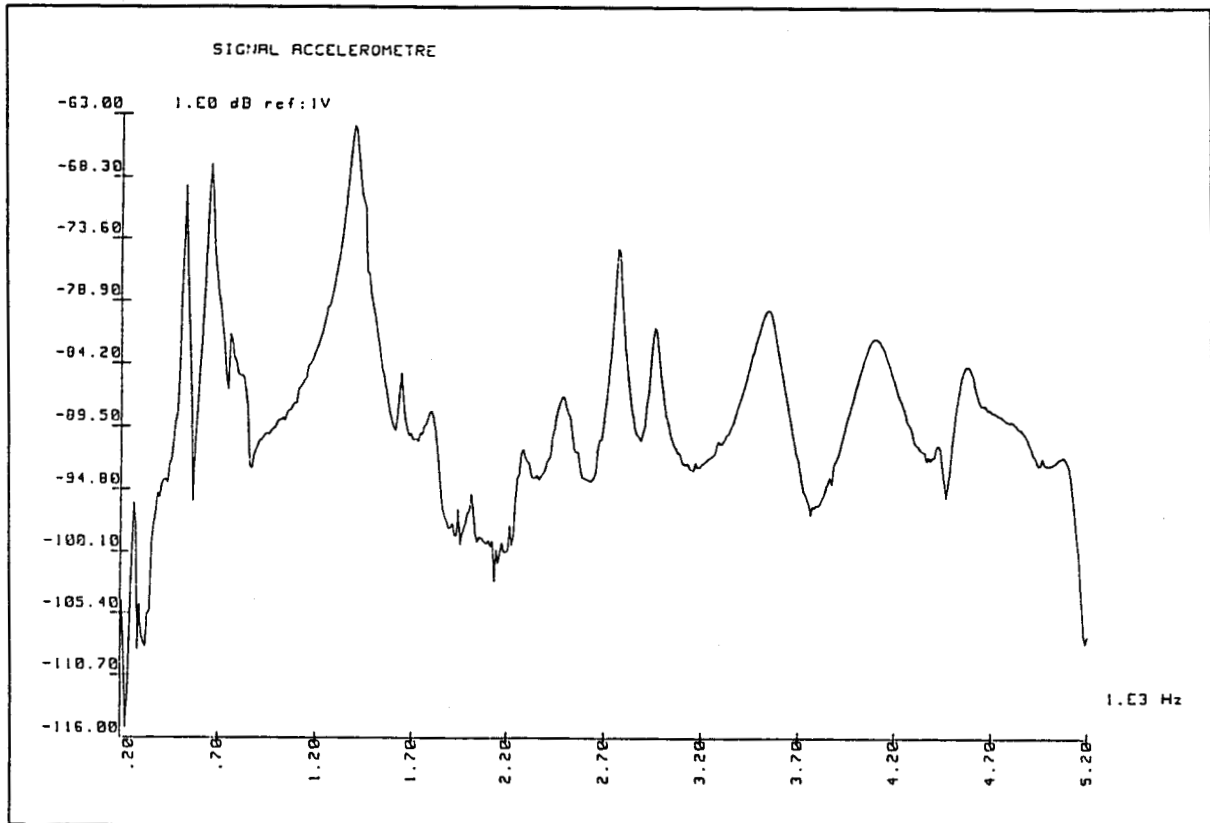
D'autre part, l'influence du nombre de couches ou de plis a été testée numériquement dans le cas particulier de la plaque 2, pour les modes symétriques-symétriques. On peut constater, à l'aide du tableau III.8, que cette influence devient négligeable au-delà de 10 ou 12 couches. Ces résultats, confirmés dans d'autres cas, autorise à limiter arbitrairement le nombre de couches lorsqu'il est supérieur à 12 et à économiser ainsi le temps de calcul.

Elément de coque						Elément prisme					
Nombre de couches	SS1 (Hz)	SS2 (Hz)	SS3 (Hz)	SS4 (Hz)	SS5 (Hz)	Nombre de couches	SS1 (Hz)	SS2 (Hz)	SS3 (Hz)	SS4 (Hz)	SS5 (Hz)
2	340	582	1358	1968	3005	2	320	579	1394	1904	3220
4	363	596	1484	2139	3116	4	349	594	1548	2112	3539
8	368	600	1513	2178	3131	8	356	598	1587	2161	3611
10	369	601	1517	2182	3133	10	357	599	1591	2167	3619
12	369	601	1519	2184	3134	12	357	599	1594	2170	3624
16	369	601	1521	2187	3135	16	357	599	1596	2173	3628

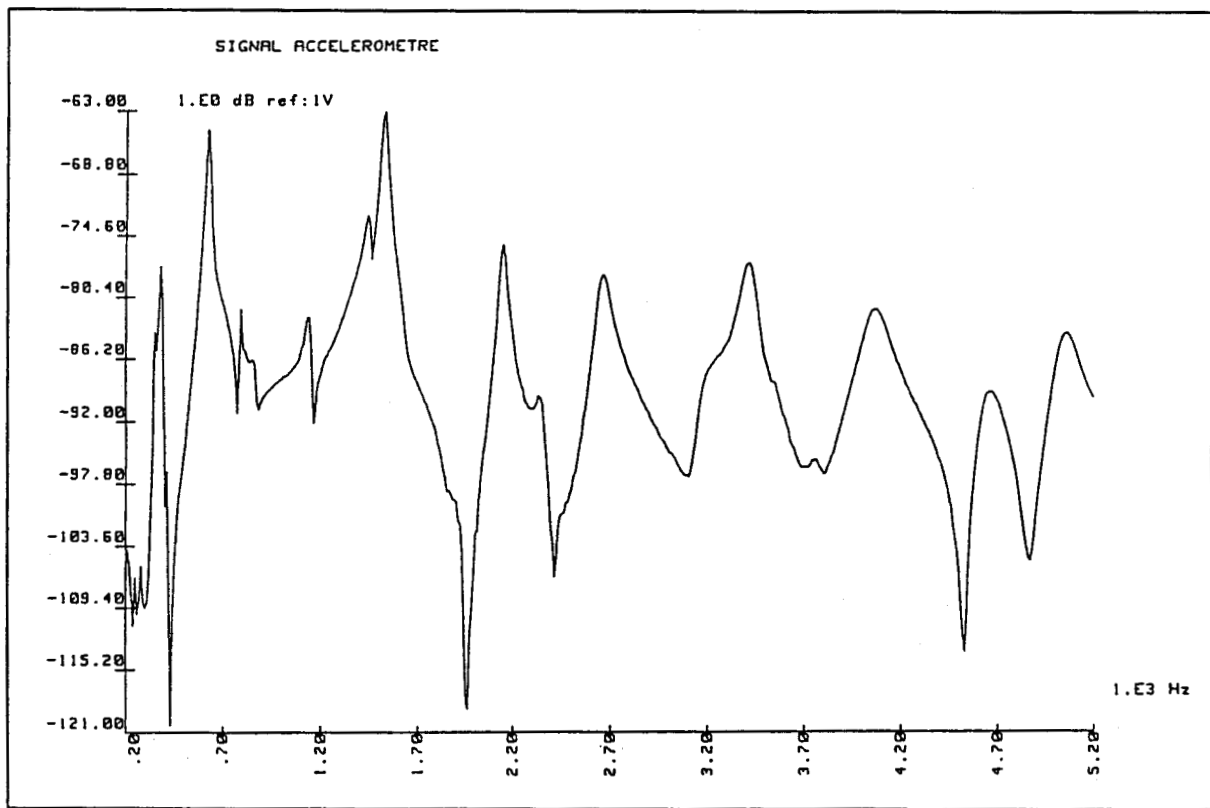
Tableau III.8 - Evolution des fréquences en fonction du nombre de couches.







*Fig. III.8 - Plaque N° 1 : spectre de vibration mesuré.*



*Fig. III.9 - Plaque N° 2 : spectre de vibration mesuré.*

### III - 1.2.2 Analyse modale de cylindres

Deux cylindres composés de fibres de verre et de résine époxy ont été modélisés. Les conditions de symétrie ont été exploitées (Fig. III.10). Si les axes OX, OY sont deux axes radiaux orthogonaux et OZ l'axe longitudinal du cylindre, la condition notée SAS, correspond à une symétrie par rapport au plan XOY, une antisymétrie par rapport au plan YOZ et une symétrie par rapport au plan ZOX. On étudie de cette façon 1/8 du cylindre (1/4 de section et 1/2 hauteur). Le spectre complet des modes de résonance du cylindre est obtenu avec 6 combinaisons de conditions aux limites (SSS, ASS, SAA, SAS, ASA, AAA). Le maillage utilisé comporte 4 éléments suivant la circonférence et 2 éléments suivant la génératrice. Pour un analyse de type SSS on obtient, avec un maillage utilisant les éléments de coque puis des éléments prismatiques respectivement 159 et 266 degrés de liberté. Le tableau III.9 indique les caractéristiques des ces cylindres.

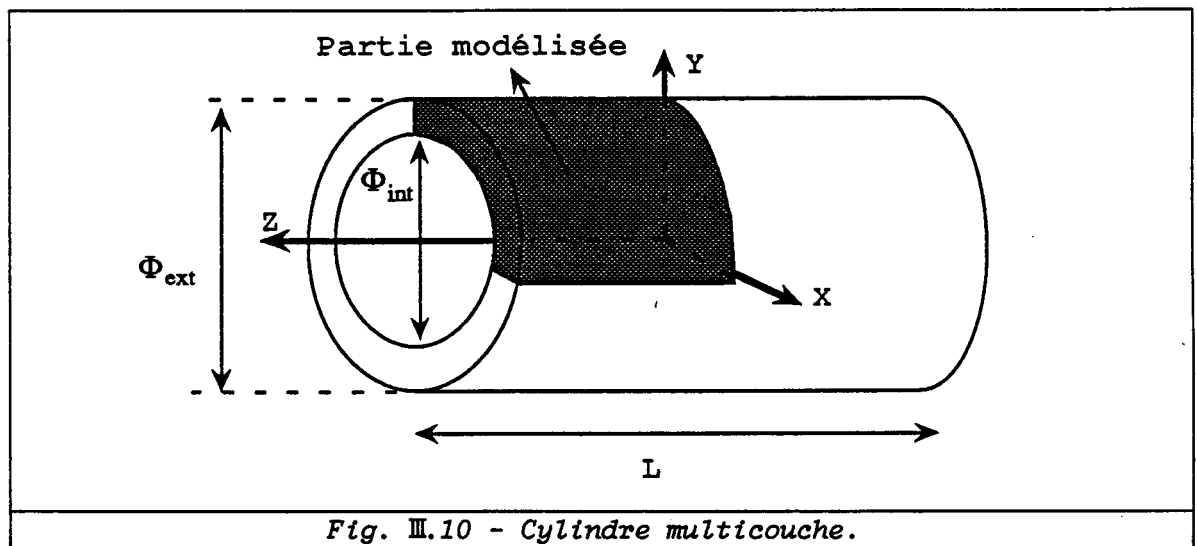


Fig. III.10 - Cylindre multicouche.

Cylindre	Diamètre intérieur $\Phi_{int}$ (mm)	Diamètre extérieur $\Phi_{ext}$ (mm)	Hauteur L (mm)	Masse volumique kg/m <sup>3</sup>	Orientation des fibres	Nombre couches	% de verre
1	150,5	172,3	301,0	1943,0	$\pm 89^\circ$	1	48,5
2	150,6	170,6	301,0	1746,0	$\pm 75^\circ$	44	42,9

Tableau III.9 - Caractéristiques des cylindres.

Les résultats obtenus (tableaux III.10 et III.11) sont satisfaisants, les écarts entre les résultats numériques et expérimentaux varient entre 0,1% et 11% quelque soit le type d'élément. Dans ces tableaux, les modes notés AXI sont des modes à symétrie axiale.

Elément Mode	Coque (Hz)	Prisme (Hz)	Coque homogénéisée (Hz)	Exp. (Hz)	Coque écart %	Prisme écart %	Coque homogénéisée %
SSS1	951	921	840	907	3,7	1,5	7,4
ASS1	956	965	860	919	4,0	4,7	6,4
SSS2	1680	1693	1525	1699	1,1	0,3	10,3
SAS2	2579	2402	2551	2484	3,8	3,3	2,7
SAS3	2788	2844	3768	2746	1,5	2,2	7,6
AXI1	3810	3809	4318	3686	3,3	3,2	2,2
SSS5	4595	4579	4307	4517	1,7	1,3	4,4
AXI3	8844	8391	8467	8832	0,1	5,0	4,1

Tableau III.10 - Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour le cylindre 1.

Elément Mode	Coque (Hz)	Prisme (Hz)	Coque homogénéisée (Hz)	Exp. (Hz)	Coque écart %	Prisme écart %	Coque homogénéisée %
SSS1	807	787	820	742	8,0	5,7	10,5
ASS1	835	849	840	771	7,6	9,0	8,9
SSS2	1612	1644	1531	1649	2,3	0,3	7,7
SAS1	2198	2163	2116	2054	6,5	5,0	3,0
ASA1	2241	2258	2142	2082	7,0	7,8	2,9
SAS2	2510	2534	2426	2365	5,7	6,6	3,0
ASS2	3007	3027	2913	3133	4,0	3,3	7,0
ASS3	4078	4124	3977	3850	5,9	6,6	3,3

Tableau III.11 - Comparaison des résultats numériques et expérimentaux pour le cylindre 2.

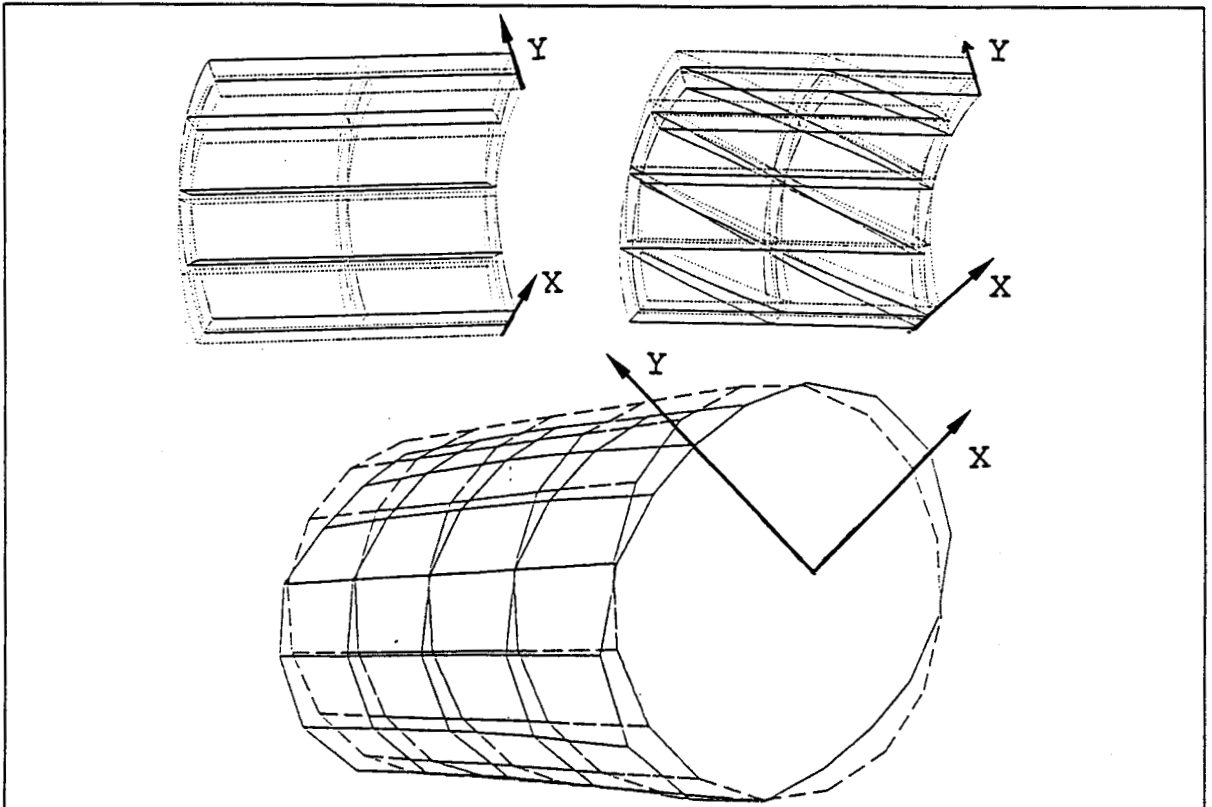


Fig. III.11 - Champ de déplacement calculé et mesuré SSS1 951/921/907 Hz cylindre 1.

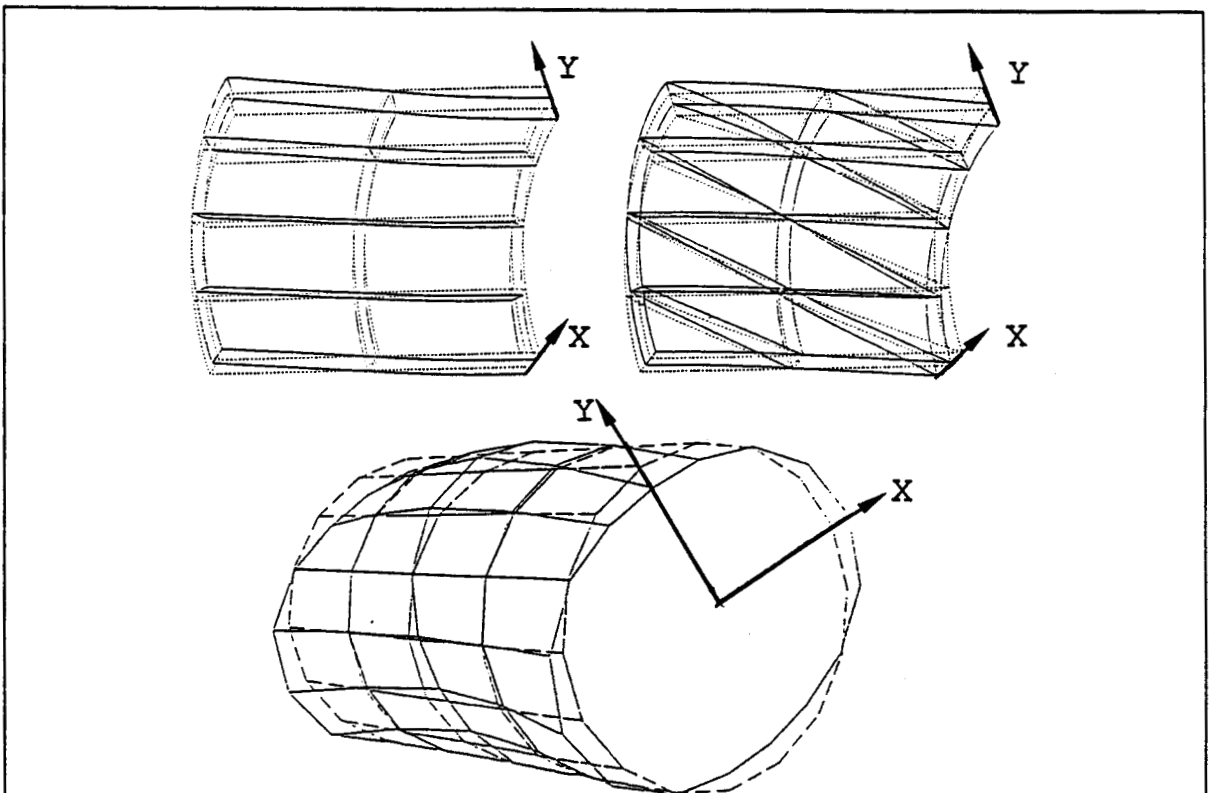
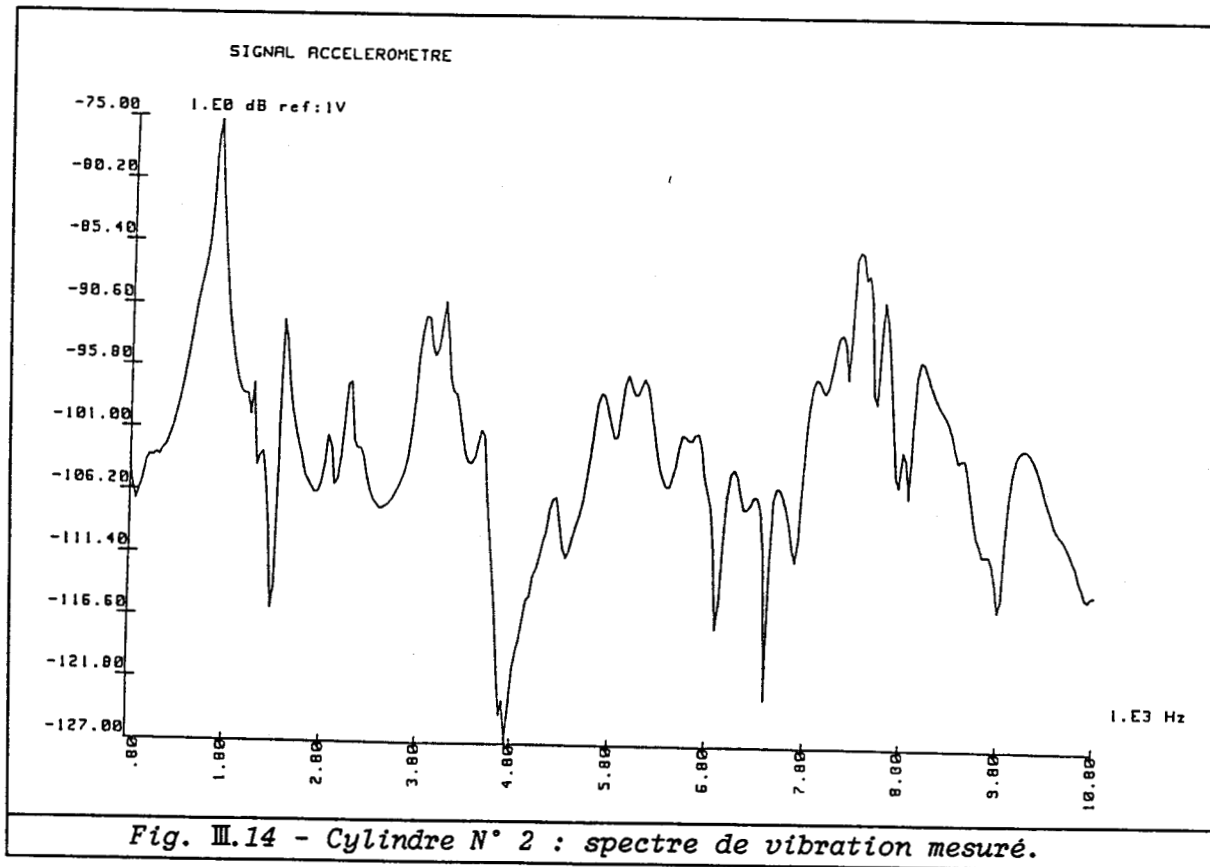
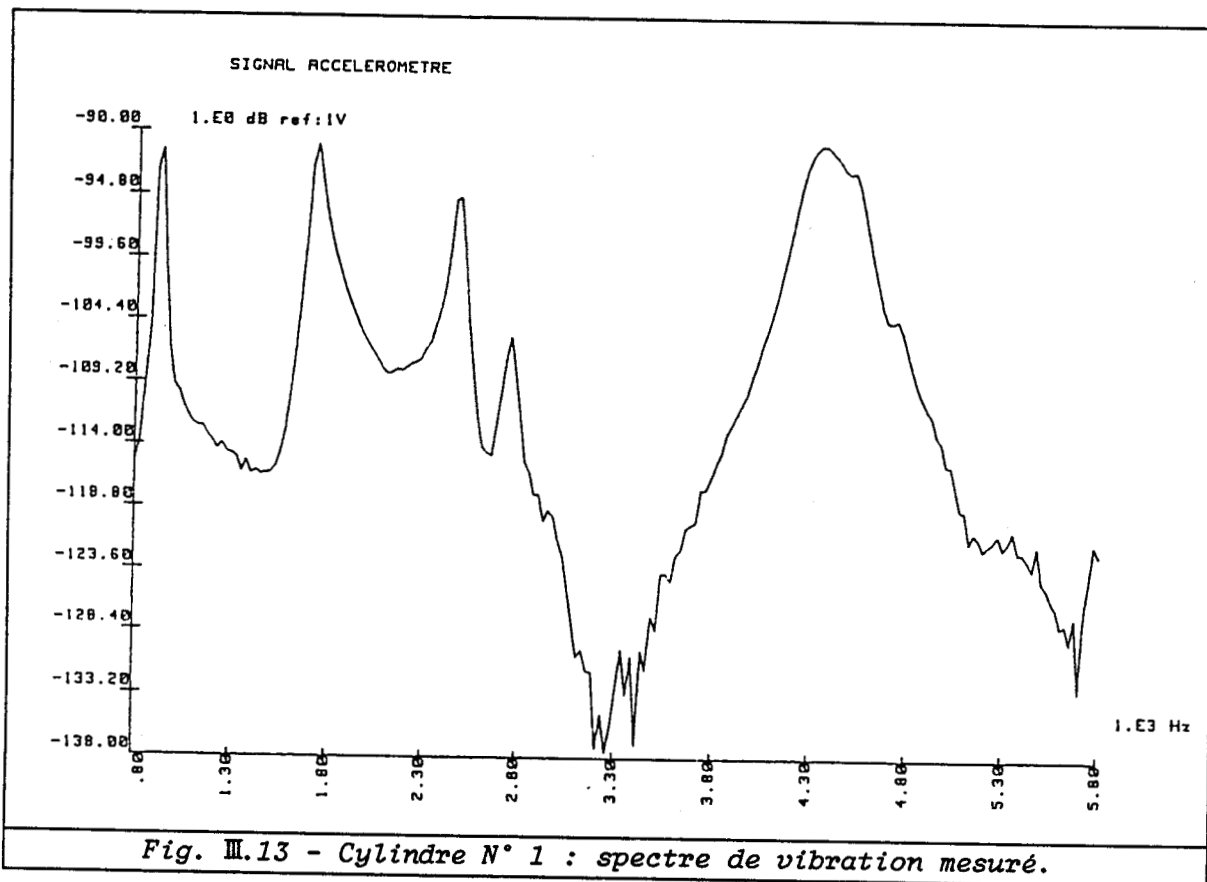


Fig. III.12 - Champ de déplacement calculé et mesuré SSS2 1660/1693/1699 Hz cylindre 1.

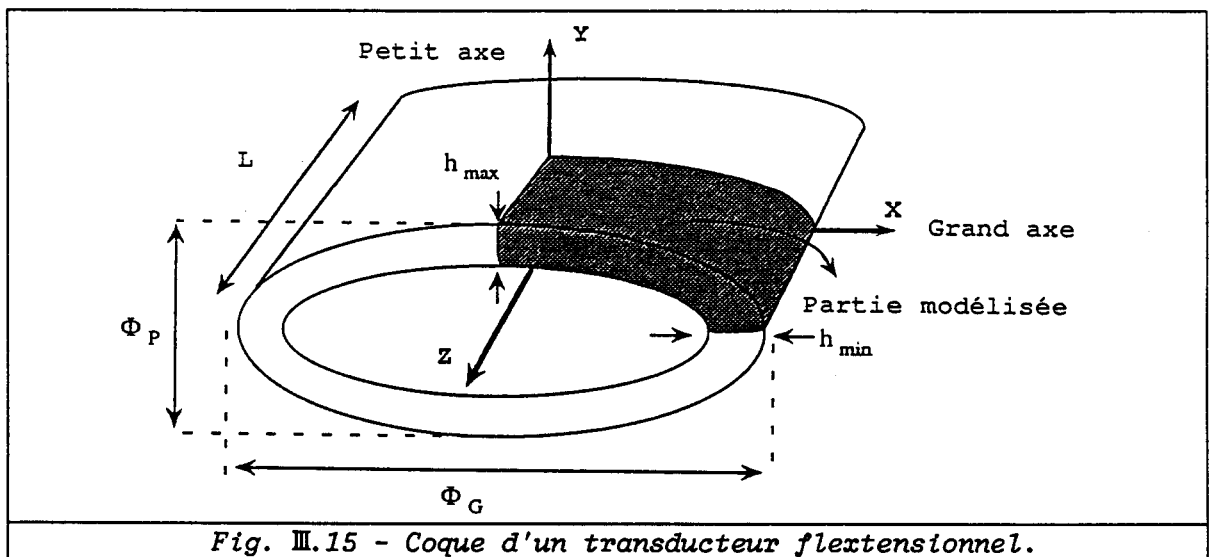


### III - 1.2.3 Analyse modale de la coque d'un transducteur flexionnel

Cette coque est un cylindre droit à section elliptique (Fig. III.15). Elle est composée de fibres de verre et de résine époxy. L'orientation des fibres est de  $\pm 83^\circ$  par rapport à la génératrice. Compte-tenu du fait que l'épaisseur n'est pas constante, le pourcentage volumique du verre varie entre 37% et 49%. La masse volumique de cette coque est de  $1748 \text{ Kg/m}^3$ . Les caractéristiques géométriques de cette coque sont :

$$L = 81,0 \text{ mm}, \quad h_{\max} = 12,0 \text{ mm}, \quad h_{\min} = 9,0 \text{ mm}$$

$$\Phi_G = 518,0 \text{ mm}, \quad \Phi_P = 184,0 \text{ mm}.$$



Le maillage utilisé est défini par un découpage à  $10 \times 1$  éléments pour  $1/4$  de la section et  $1/2$  hauteur (Fig. III.15). En utilisant le même système d'axes que pour les cylindres, quatre combinaisons de conditions aux limites (SS, SA, AS, AA) ont été exploitées pour obtenir l'ensemble des modes ayant un plan de symétrie par rapport à XOY. Les modes antisymétriques ne sont pas exploités car ils se trouvent dans une bande de fréquence trop élevée. Le calcul a été réalisé dans le cas d'une analyse SS avec 211 degrés de liberté pour l'élément de coque et 375 degrés de liberté pour l'élément prisme. Le temps de calcul pour les 8 premières fréquences de résonance est indiqué dans le tableau III.11. Les résultats sont regroupés dans le tableau III.12. Les écarts entre la théorie et l'expérience varient de 0,1% à 7%.

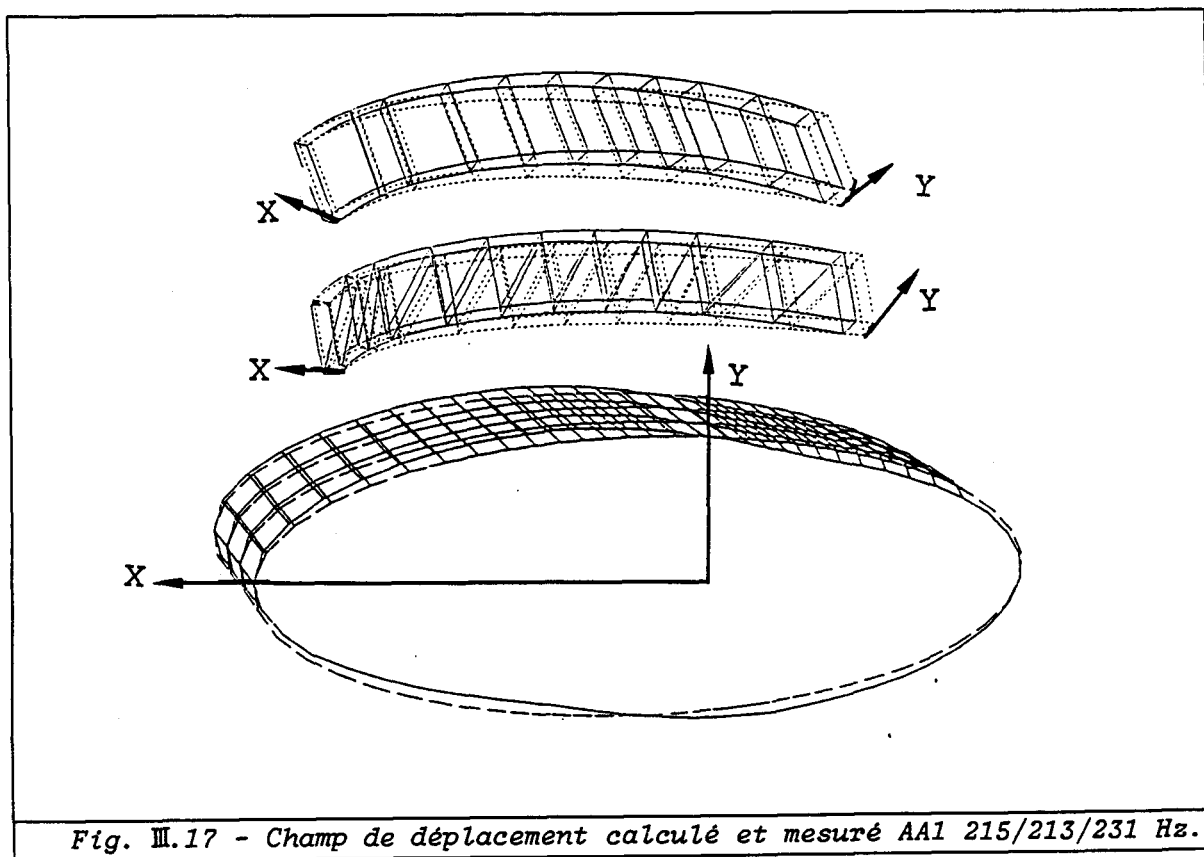
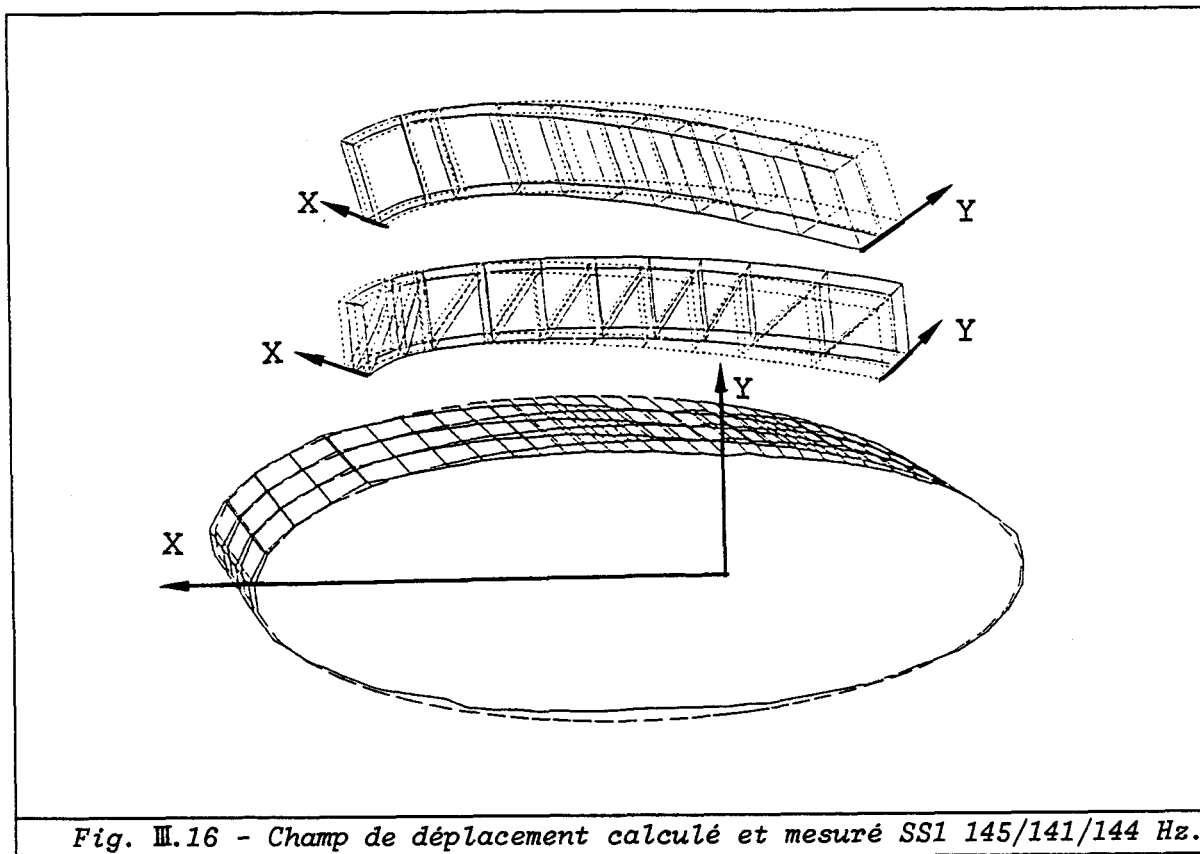
Elément de coque t (seconde)	Elément prisme t (seconde)	Elément de coque homogénéisé t (seconde)
10,2	6,9	32,1

Tableau III.11 - Temps de calcul.

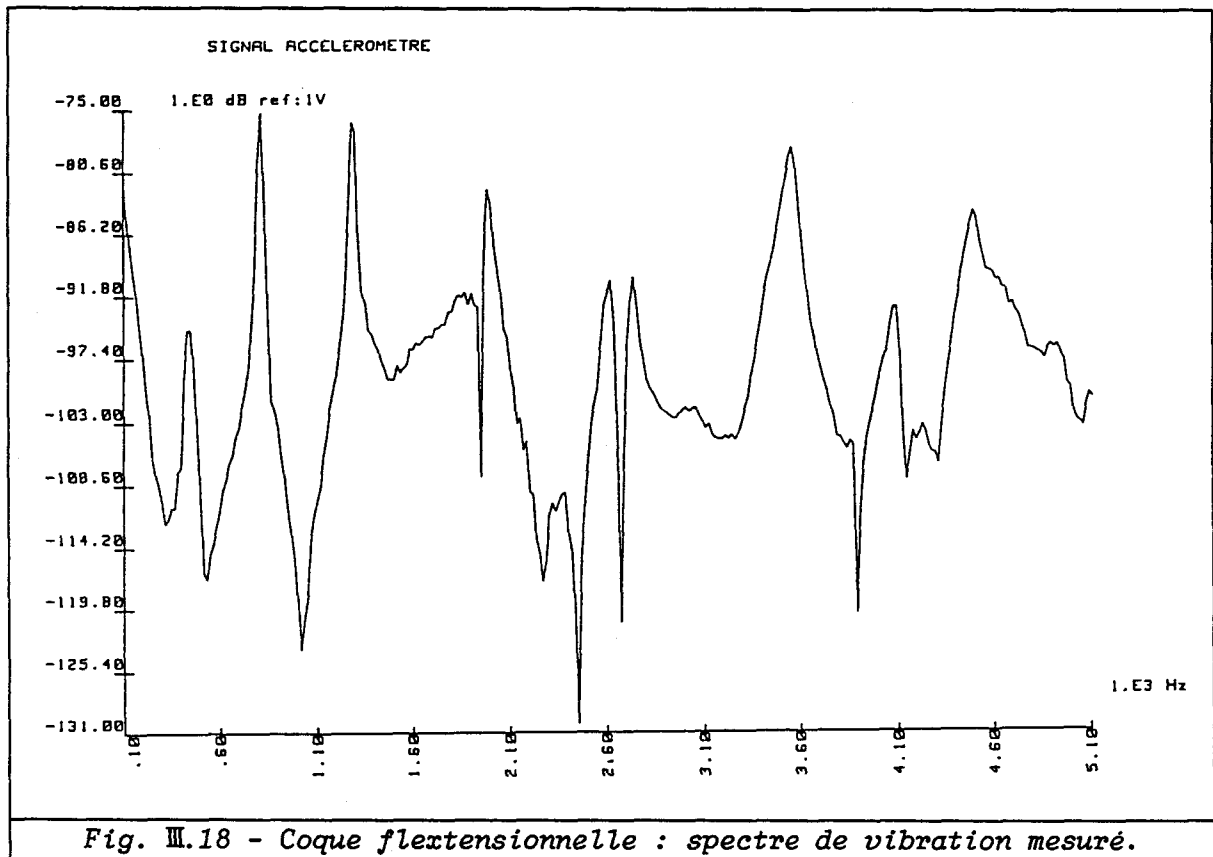
Les figures III.16 et III.17 présentent le champ de déplacement calculé et mesuré pour les modes SS1 et AA1. Le spectre de vibration mesuré est présenté à la figure III.18.

Elément Mode	Coque (Hz)	Prisme (Hz)	Coque homogénéisée (Hz)	Exp. (Hz)	Coque écart %	Prisme écart %	Coque homogénéisée écart %
SS1	145	141	145	144	0,7	2,0	0,7
AA1	215	213	215	231	6,9	0,4	6,9
AS1	421	413	418	413	1,9	0,0	1,2
SA1	417	412	415	433	3,6	4,8	4,1
SS2	826	813	822	812	1,7	0,1	1,2
AA2	846	837	843	847	0,1	1,1	0,5
SA2	1337	1327	1335	1291	3,4	2,7	2,2
AA3	1972	1961	1963	1933	2,0	1,4	2,5

Tableau III.12 - Comparaison des résultats numériques et expérimentaux.





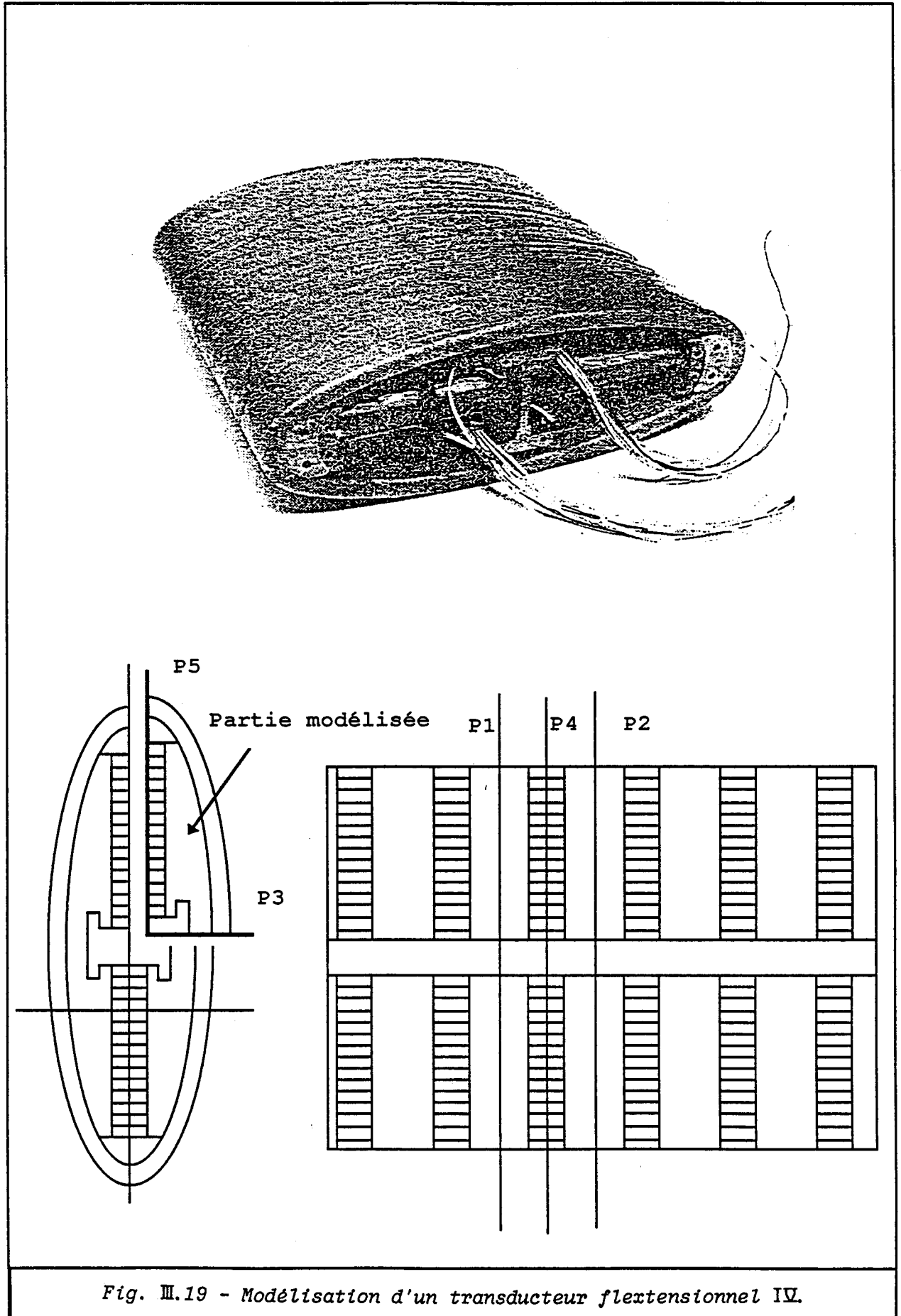


### III - 1.2.4 Modélisation d'un transducteur flexensionnel de classe IV

Le transducteur flexensionnel est décrit sur la figure III.19. Il comporte [51] :

- une coque cylindrique, à section elliptique, composée de fibres de verre et de résine époxy,
- 12 colonnes de céramiques, comportant chacune 28 anneaux, montées en parallèles. La céramique est de type X5105. Au centre de chaque colonne se trouve une tige de précontrainte en acier,
- une pièce centrale en AU4G,
- deux embouts (inserts) assurant le raccordement des colonnes de céramiques et de la coque. Ces embouts sont constitués de plusieurs pièces, en acier et en AU4G.

Pour des raisons évidentes de taille du problème numérique, le



modèle est réduit à un moteur et à la partie correspondante de la coque. Pour tenir compte du reste de la structure, les deux plans  $P_1$  et  $P_2$  normaux à la génératrice de la coque et qui délimitent la partie retenue dans le modèle sont considérés comme des plans de symétrie, c'est-à-dire leurs points n'ont pas de déplacement normal et sont contraints de rester dans les plans. Dès lors, le maillage est réduit à 1/8 du modèle retenu seulement, délimité par trois plans  $P_3$ ,  $P_4$  et  $P_5$ , le plan  $P_3$  contenant les axes de symétrie de tous les moteurs, les plans  $P_4$  et  $P_5$  étant les plans médiateurs du modèle retenu orthogonaux à  $P_3$ . Dans tous les cas, le champ de déplacement est supposé symétrique par rapport à  $P_3$ ,  $P_4$  et  $P_5$ , puisque seuls les modes couplés électriquement sont intéressants.

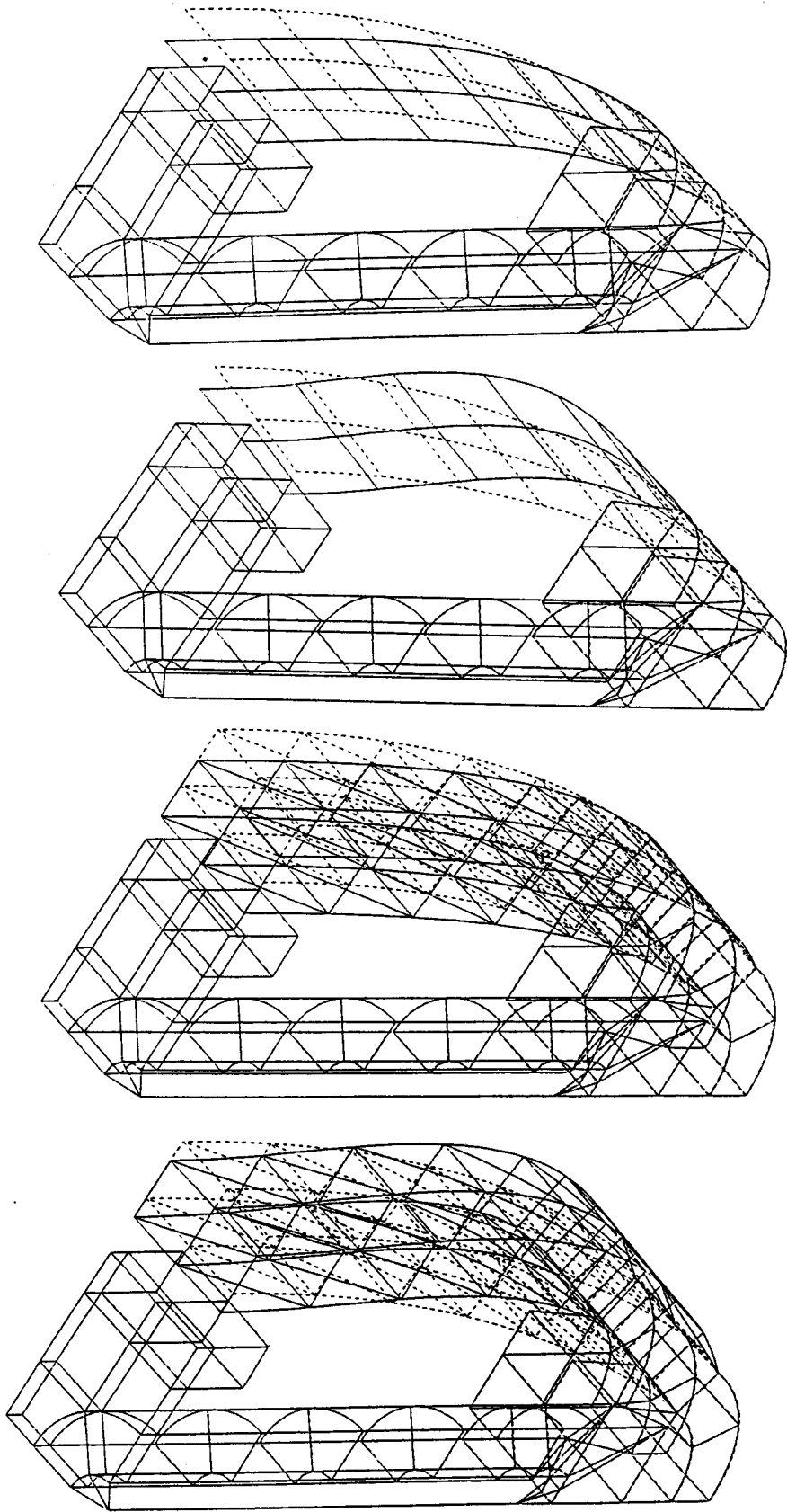
Chaque partie du transducteur est maillée comme suit :

- la coque en matériaux composites contient 40 éléments prismes et 20 éléments coques. Chaque élément contient 12 plis, nombre à partir duquel l'augmentation du nombre de plis est sans effet sur les fréquences de résonance,
- la colonne de céramique est modélisée par 8 éléments hexaèdres à 20 noeuds,
- la partie centrale est maillée par 9 éléments hexaèdres à 20 noeuds,
- le raccord est maillé par 8 éléments hexaèdres à 20 noeuds et 6 éléments prismes à 15 noeuds,
- la tige de précontrainte est modélisée par 11 éléments à 2 noeuds.

Les résultats de l'analyse modale du transducteur complet sont regroupés dans le tableau III.13 pour les quatre premiers modes. L'écart entre ces valeurs est inférieur à 10%. La figure III.20 présente la déformée des deux premiers modes.

Elément Mode	Prisme (1206 ddl) Hz	Coque (934 ddl) Hz	Hexaèdre (1133 ddl) Hz
1	833	871	848
2	1727	1655	1750
3	3647	3442	3650
4	3744	3635	3988

Tableau III.13 - Comparaison des fréquences propres.



*Fig. III.20 - Champ de déplacement des deux premiers modes.*

### III - 1.3 Conclusion

Les Résultats des différents tests présentés dans cette partie ont permis de valider les éléments incorporés au code ATILA. Ils montrent l'intérêt d'utiliser l'élément homogénéisé pour obtenir une précision satisfaisante pour un temps de calcul minimum. Par ailleurs, l'élément coque a été utilisé et validé pour analyser la diffusion acoustique d'ondes planes par des structures de géométries complexes [52].

## III - 2 CALCUL DES CONTRAINTES

Nous présentons dans cette partie, trois tests de calcul de contraintes. Ces tests permettent d'évaluer la précision des résultats obtenus et d'examiner les points particuliers liés aux structures composites : influence de la séquence d'empilement, discontinuité des contraintes planes aux interfaces. Enfin, nous étudions le comportement d'une coque utilisée dans la réalisation d'un transducteur flexionnel.

### III - 2.1 Modélisation d'un barreau en matériau composite

#### III - 2.1.1 Analyse statique

Le barreau a une dimension grande devant les deux autres. Il est de longueur  $L = 10$  cm et de section  $S = 1$  cm<sup>2</sup>. Une des extrémités est fixe, l'autre est chargée par une pression uniforme  $P$  (Fig. III.21). Ce barreau est constitué de 4 couches fibres de verre-résine époxy. Leurs caractéristiques mécaniques sont données au paragraphe III-1.2.1. La contrainte et le déplacement suivant  $x$  sont donnés par :

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{S} , \quad U_{xx} = \frac{1}{E_{xx}} \cdot \sigma_{xx} \cdot x \quad (\text{III.1})$$

où  $S$  est la section droite du barreau et  $E_{xx}$  le module de Young suivant  $x$ . Le premier maillage utilise 5 éléments de type coque. Le deuxième maillage utilise 11 éléments prismes à 15 noeuds (Fig. III.22). Les contraintes sont calculées dans chaque couche aux points de Gauss, elles varient selon la séquence d'empilement. Pour un empilement quelconque (sans symétrie), la pression appliquée peut entraîner une flexion et une distorsion angulaire du barreau, ceci est dû au phénomène de couplage (couplage plan, couplage flexion-membrane). Pour un empilement présentant une symétrie miroir et

ayant le même nombre de couches à  $+\varphi$  et  $-\varphi$ , la contrainte  $\sigma_{xx}$  est la même dans toutes les couches, car dans ce cas, le phénomène de couplage ne se produit pas. La comparaison des valeurs théoriques et des résultats du calcul par éléments finis montre une précision meilleure que 3% pour l'ensemble des valeurs (tableau III.14).

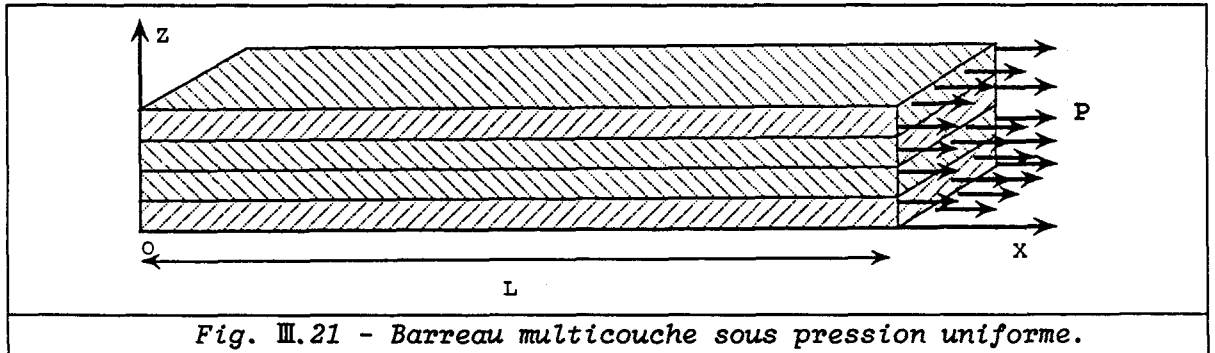


Fig. III.21 - Barreau multicouche sous pression uniforme.

	Coque	Prisme	Analytique	Ecart %
$\sigma_{xx}$ ( $10^6$ Pa)	3	3	3	0
$U_{xx \max}$ ( $10^{-6}$ m)	9,55	9,54	9,3	2

Tableau III.14 - Analyse statique d'un barreau en matériau composite.

### III - 2.1.2 Analyse harmonique

Pour une sollicitation sinusoïdale, le déplacement axial s'exprime par [53] :

$$U_{xx} = \left( A \cdot \sin\left(\frac{\omega x}{a}\right) + B \cdot \cos\left(\frac{\omega x}{a}\right) \right) \cdot e^{j\omega t} \quad (\text{III.2})$$

où

$$a = \sqrt{\frac{E_{xx}}{\rho}} \quad (\text{III.3})$$

est la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans le barreau,  $\omega$  désigne la pulsation, A et B sont des constantes d'intégration.

A partir des conditions aux limites  $U_{xx} = 0$  en  $x=0$ ,  $\sigma_{xx} = P/S$  en  $x=L$  et de l'équation (III.1), la contrainte normale s'exprime sous la forme :

$$\sigma_{xx} = \frac{E_{xx} \cdot U_{xx} \cdot \omega \cdot \cos\left(\frac{\omega x}{a}\right)}{a \cdot \sin\left(\frac{\omega L}{a}\right)} \quad (\text{III.4})$$

Les maillages sont identiques à ceux utilisés pour l'analyse statique. Le champ de déplacement du barreau est obtenu à 3 kHz (Fig. III.22). La correspondance entre les valeurs théoriques de la contrainte et les valeurs calculées en différents points du barreau (Fig. III.23) est satisfaisante sur toute la longueur.

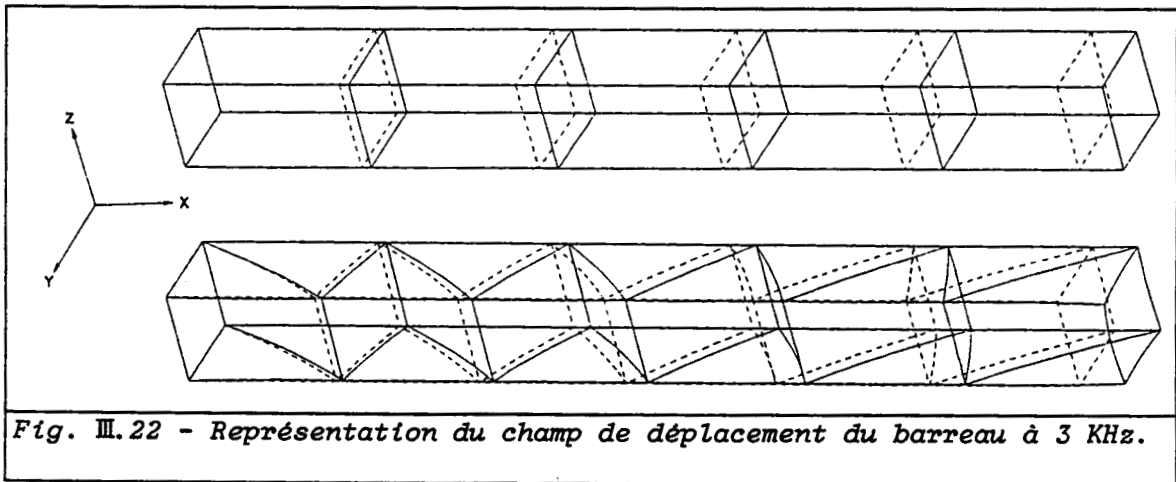


Fig. III.22 - Représentation du champ de déplacement du barreau à 3 KHz.

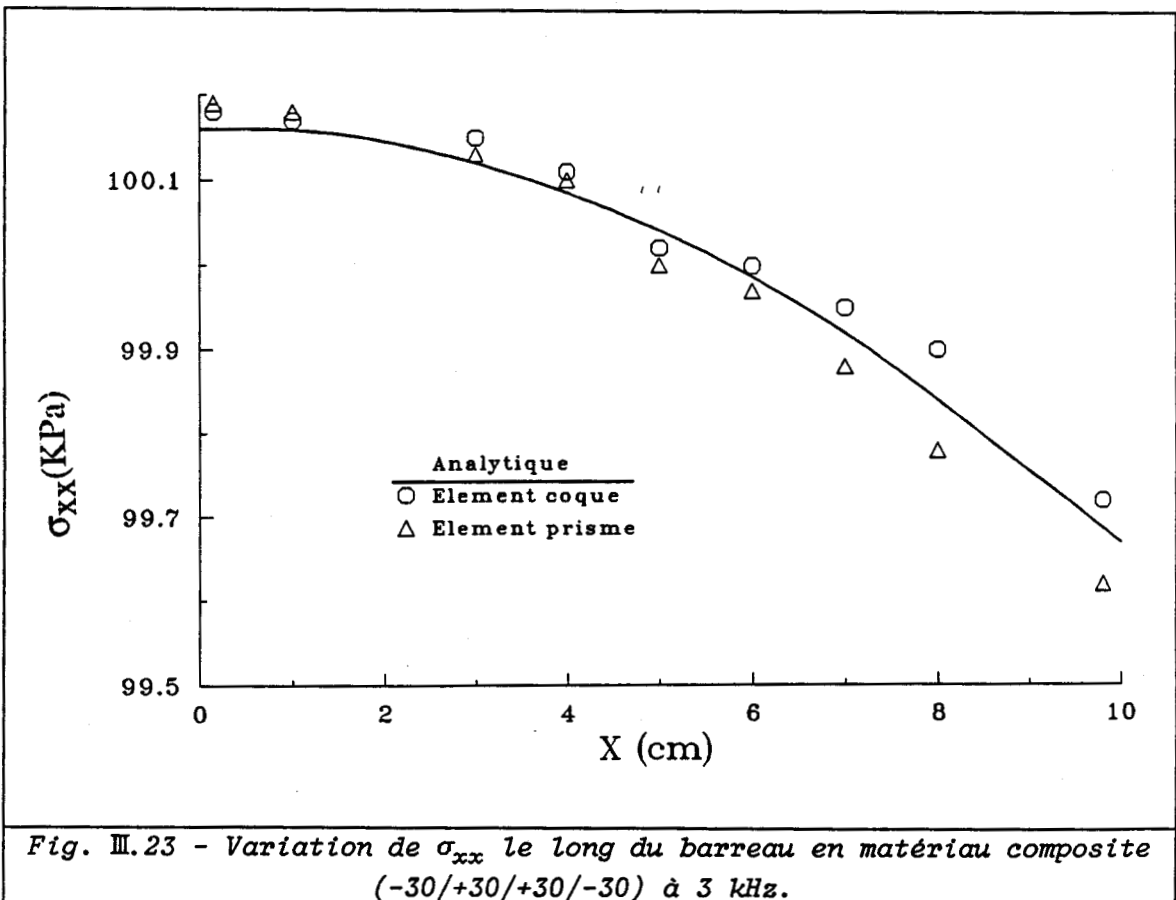


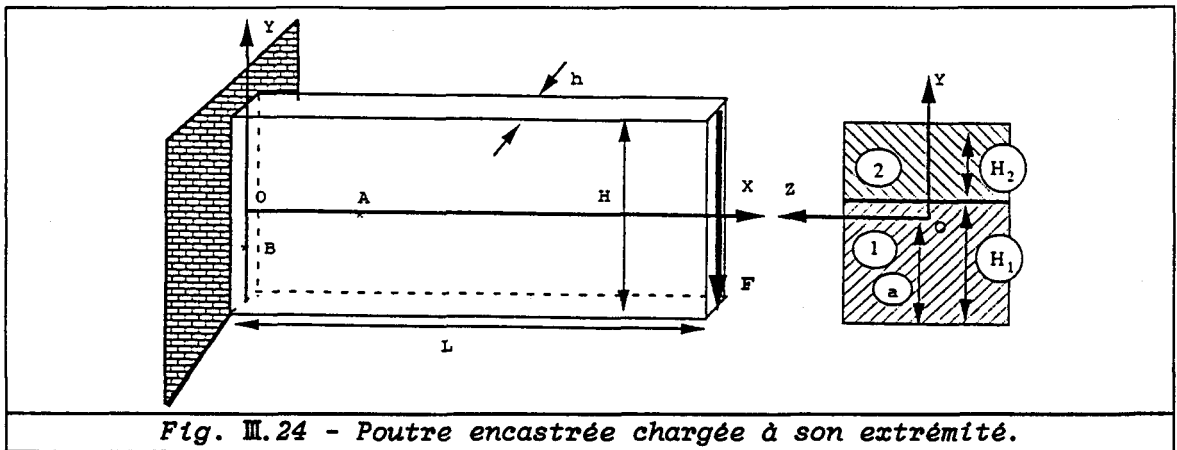
Fig. III.23 - Variation de  $\sigma_{xx}$  le long du barreau en matériau composite (-30/+30/+30/-30) à 3 kHz.

### III - 2.2 Poutre encastrée chargée à son extrémité

La poutre est encastrée en  $x = 0$  et soumise à une force  $F$  en  $x = L$ ,  $L$  étant la longueur de la poutre. Elle est constituée de deux couches de matériaux différents (Fig. III.24). Les matériaux sont élastiques isotropes, de modules de Young longitudinaux  $E_1$  et  $E_2$  et de modules de cisaillements  $G_1$  et  $G_2$ . Les caractéristiques mécaniques et géométriques utilisées sont :

$$h = 4 \text{ mm}, \quad L = 100 \text{ mm}, \quad H_1 = 6 \text{ mm}, \quad H_2 = 4 \text{ mm}, \quad F = 300 \text{ N}$$

$$E_1 = 1,75 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad E_2 = 7,0 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad G_1 = 0,7 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad G_2 = 2,8 \times 10^9 \text{ Pa}.$$



La flèche maximale  $W$  est donnée par [28] :

$$W = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot (E_1 I_1 + E_2 I_2)} \quad (\text{III.5})$$

$I_1, I_2$  représentent le moment d'inertie de la section droite 1 respectivement 2 par rapport à l'axe neutre.

La position de l'axe neutre est donnée par [28] :

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{(E_1 - E_2) \cdot H_1^2 + E_2 \cdot (H_1 + H_2)^2}{E_1 + E_2} \right) \quad (\text{III.6})$$

La contrainte  $\sigma_{xx}$  et la contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$  s'écrivent :

$$\sigma_{xx(i)} = \frac{F \cdot E_i}{(E_1 I_1 + E_2 I_2)} (L - X) \cdot Y \quad i = 1, 2 \quad (\text{III.7})$$



$$\tau_{xy} = \frac{F}{2} \frac{E_1}{(E_1 I_1 + E_2 I_2)} (a^2 - Y^2) \quad -a \leq Y \leq H_1 - a \quad (\text{III.8})$$

$$\tau_{xy} = \frac{F}{2} \frac{E_2}{(E_1 I_1 + E_2 I_2)} \left( (H_1 + H_2 - a)^2 - Y^2 \right) \quad H_1 - a \leq Y \leq H_1 + H_2 + a \quad (\text{III.9})$$

Les maillages utilisés comprennent, pour l'élément de coque 5 éléments suivant la longueur et 10 éléments pour l'élément prisme. Pour chacun d'eux, la structure déformée est représentée sur la figure III.25. La différence entre la flèche calculée et le résultat de la théorie de l'élasticité est inférieure à 5%. Le centre élastique est obtenu avec une précision meilleure que 2% (tableau III.15).

	Elément coque	Elément prisme	Solution analytique
W (m)	$6,09 \times 10^{-3}$	$6,09 \times 10^{-3}$	$6,40 \times 10^{-3}$
a (m)	$3,10 \times 10^{-3}$	$3,10 \times 10^{-3}$	$3,16 \times 10^{-3}$

Tableau III.15 - Comparaison des résultats numériques et analytique.

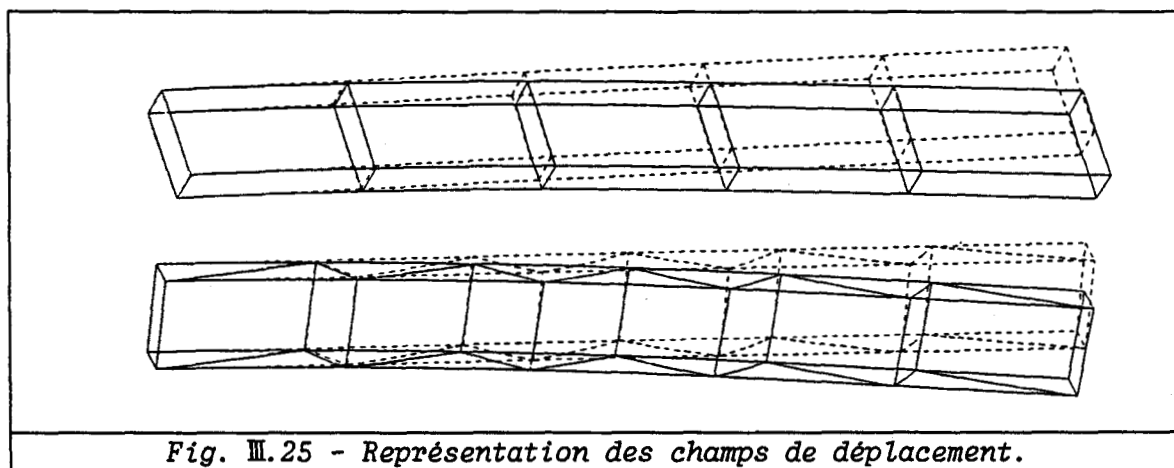
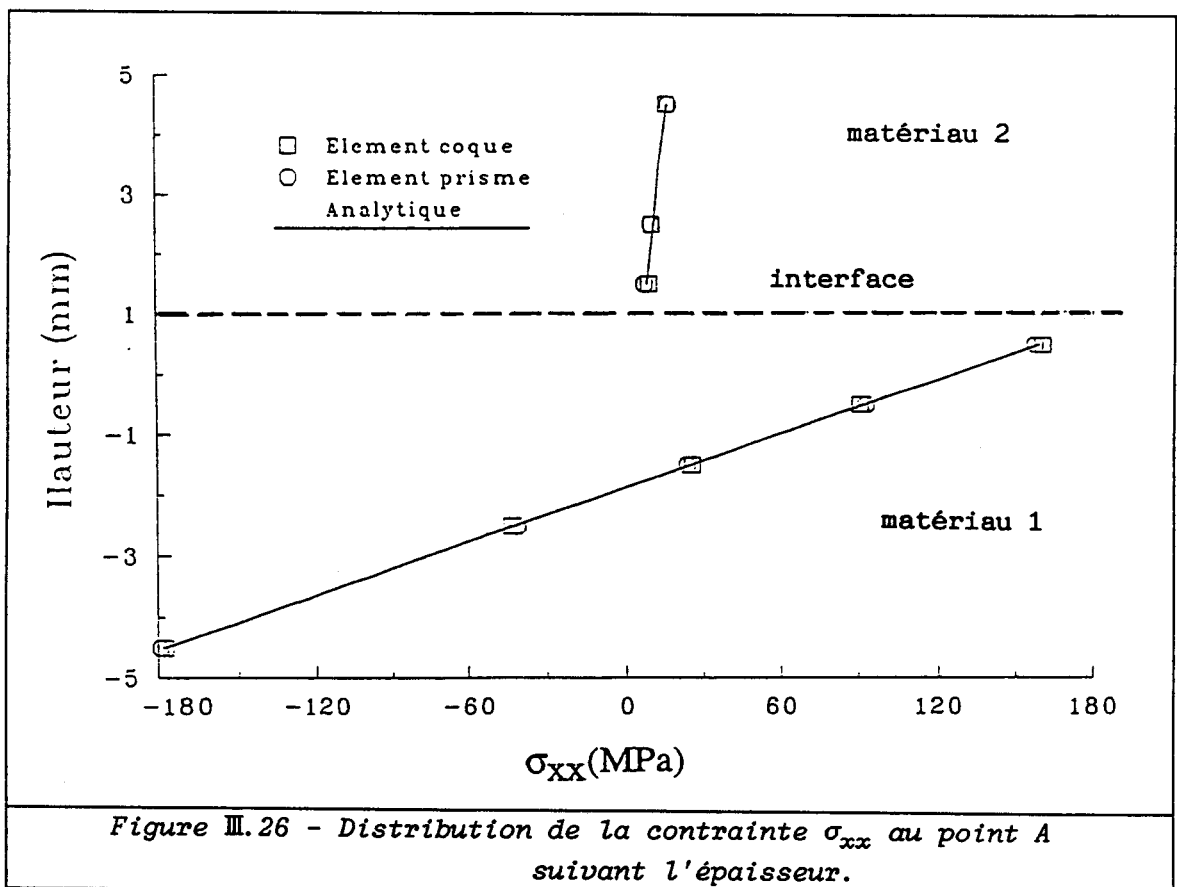


Fig. III.25 - Représentation des champs de déplacement.

Les figures III.26 et III.27 représentent respectivement les distributions de contrainte  $\sigma_{xx}$  suivant l'épaisseur et sa variation le long de la poutre. Cette contrainte est discontinue à travers l'interface comme le montre la figure III.26. Elle est maximale au voisinage de l'encastrement ( $X=0$ ) et nulle à l'autre extrémité de la poutre ( $X=L$ ) (Fig. III.27). La correspondance entre les valeurs théoriques et les valeurs calculées en différents points de la poutre est satisfaisante, pour les deux types d'éléments.

La répartition de la contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$  suivant la hauteur est

parabolique (Fig. III.28). Cette contrainte est maximale au voisinage de l'axe neutre et nulle sur les faces supérieure et inférieure de la poutre. D'autre part, l'écart est très important notamment au voisinage du centre élastique et à l'interface. Pour comprendre ces écarts, il faut noter que le modèle théorique utilisé suppose un chargement parabolique à l'extrémité libre et un mode de fixation, à l'autre extrémité, qui ne s'oppose pas à la distorsion de son plan. Si ces conditions ne sont pas parfaitement vérifiées, des modifications notables peuvent intervenir dans les contraintes locales.



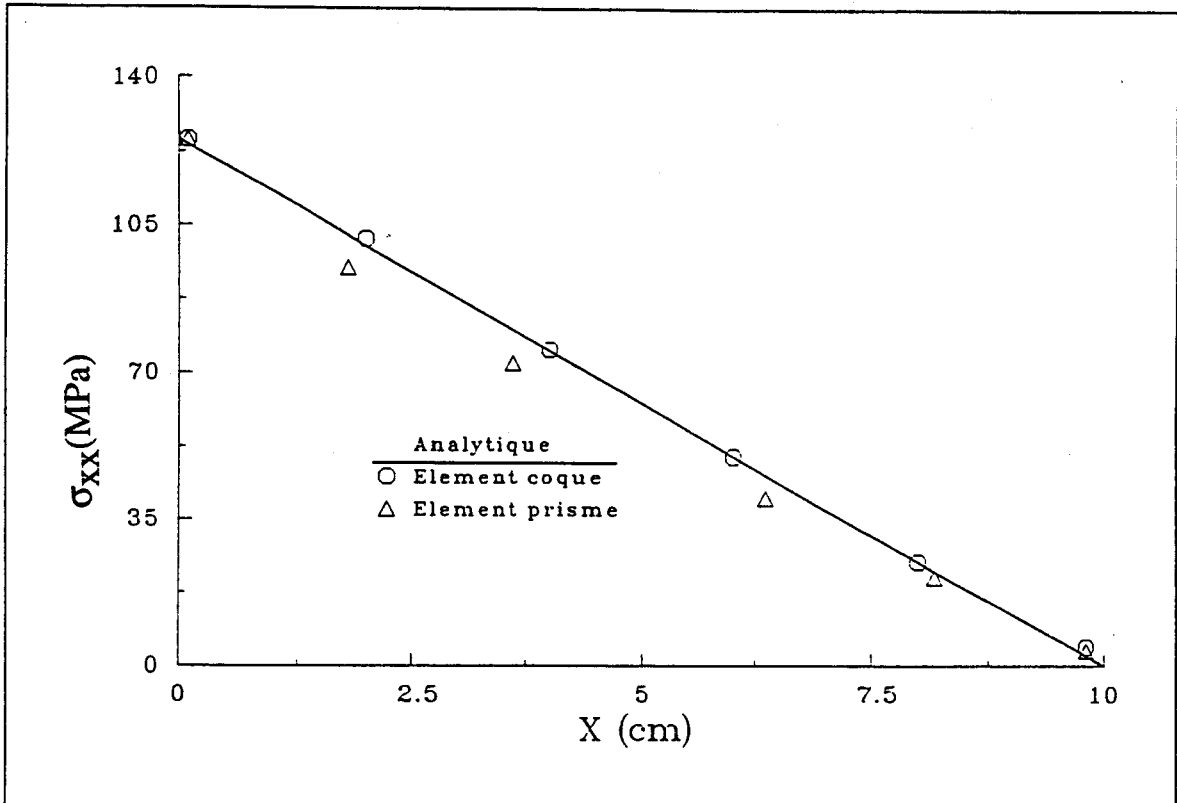


Fig. III.27 - Variation de  $\sigma_{xx}$  au point B le long de la poutre.

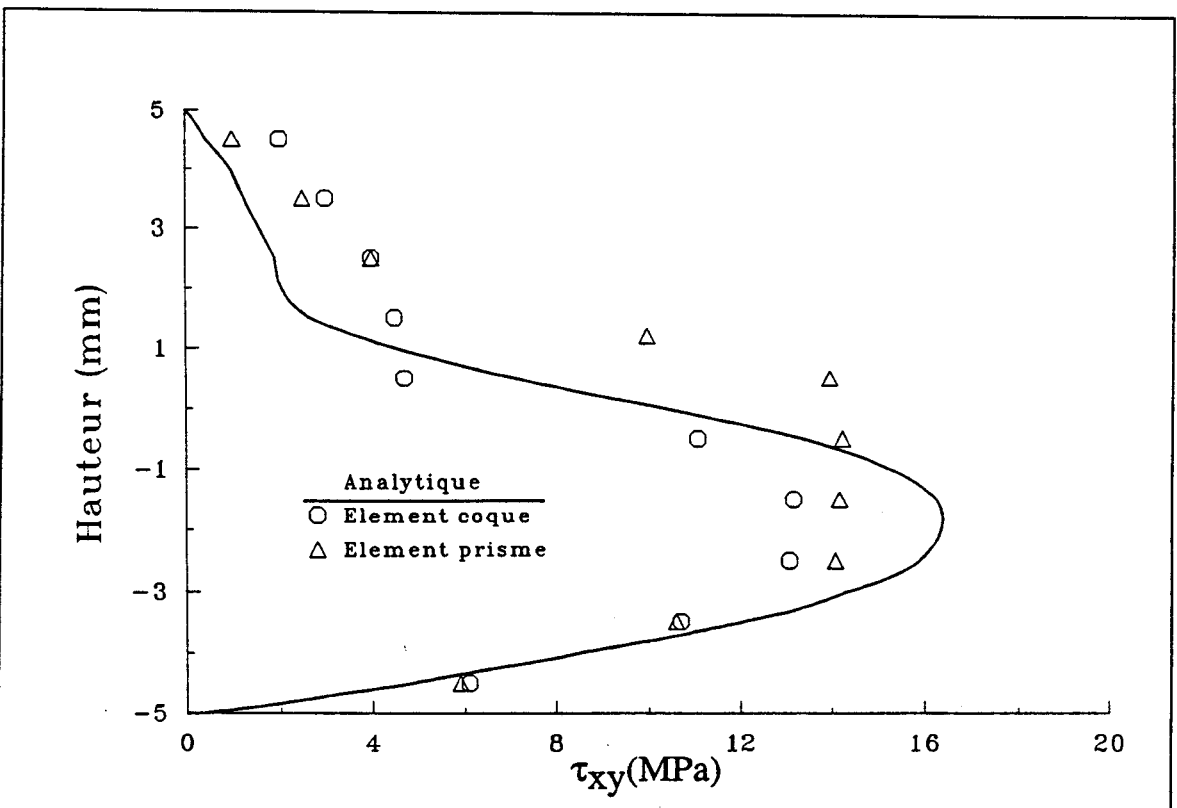


Fig. III.28 - Distribution de la contrainte  $\tau_{xy}$  suivant l'épaisseur.

### III - 2.3 Plaque sandwich constituée de couches orthotropes

On étudie ici une plaque sandwich carrée simplement appuyée, de côté  $L = 20$ . cm et d'épaisseur  $h = 5$ . cm. Les peaux sont en résine époxy renforcée par des fibres de graphite et le coeur en nid d'abeilles est en résine renforcée par des fibres de verre. Les peaux sont orthotropes, leurs axes d'orthotropie sont parallèles aux axes du plan de la plaque (Fig. III.29). Les caractéristiques mécaniques de peaux sont [54] :

$$\begin{aligned} E_{xx} &= 1,75 \times 10^{11} \text{ Pa} & E_{zz} = E_{yy} &= 7,0 \times 10^9 \text{ Pa} & \nu_{xy} = \nu_{yz} &= 0,25 \\ G_{xy} &= 3,5 \times 10^9 \text{ Pa} & G_{yz} &= 1,4 \times 10^9 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Le coeur est isotrope transverse, d'épaisseur  $h_c$  et de caractéristiques mécaniques :

$$\begin{aligned} E_{xx} = E_{yy} &= 2,8 \times 10^8 \text{ Pa} & E_{zz} &= 3,5 \times 10^9 \text{ Pa} & G_{xy} &= 1,12 \times 10^8 \text{ Pa} \\ G_{xz} = G_{yz} &= 4,2 \times 10^8 \text{ Pa} & \nu_{xy} = \nu_{zx} = \nu_{zy} &= 0,25 \end{aligned}$$

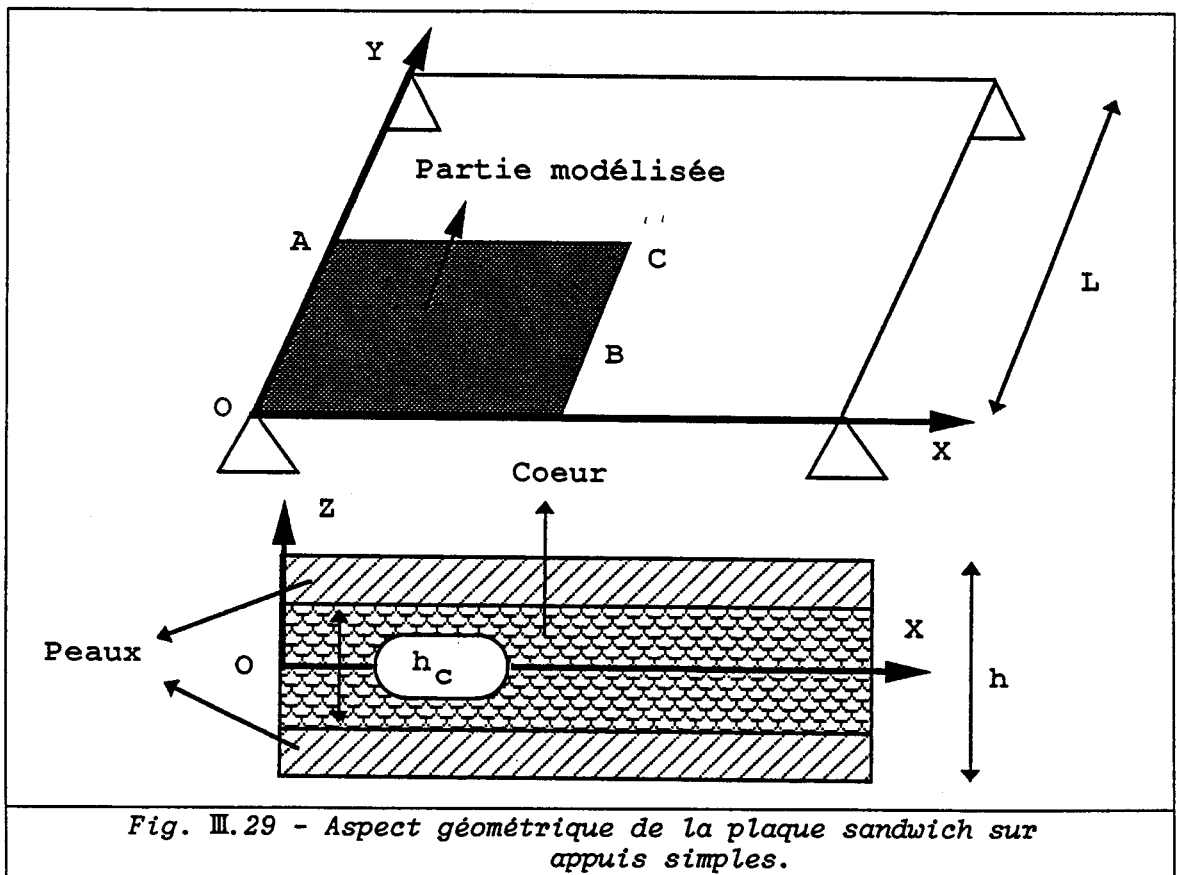
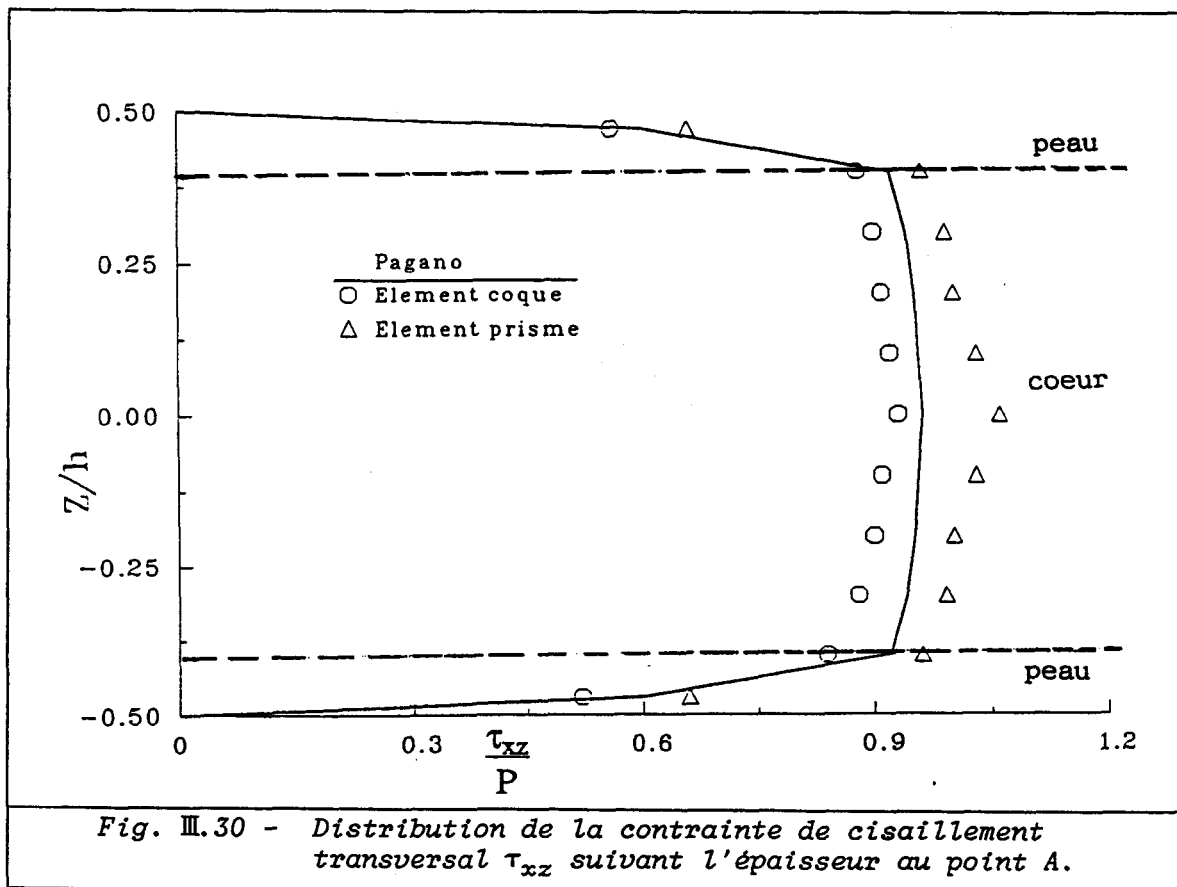


Fig. III.29 - Aspect géométrique de la plaque sandwich sur appuis simples.

Cette plaque est soumise à une charge  $P$  ( $P = P_0 \sin(\pi \frac{X}{a}) \cdot \sin(\pi \frac{Y}{a})$ ). Elle admet deux plans de symétrie orthogonaux, seul  $1/4$  de celle-ci a été discrétisé par un maillage de  $3 \times 3$  éléments pour chaque type d'élément. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la solution de PAGANO [55]. On remarque que les valeurs numériques obtenues correspondent à celles données par PAGANO. Les écarts entre résultats numériques (Figs. III.30 à III.32) et analytiques sont inférieures à 11% quelque soit le type d'élément. Toutefois, comme on peut le remarquer (Fig. III.31), la contrainte  $\tau_{xy}$  est discontinue à travers l'interface, par contre les contraintes  $\tau_{xz}$  et  $\sigma_{zz}$  sont continues (Figs. III.30 et III.32). Le plan neutre est le plan de symétrie ( $Z=0$ ) de la plaque (Fig. III.31). La répartition de contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  est parabolique suivant l'épaisseur et, par conséquent, le coeur est le plus sollicité en cisaillement car cette contrainte y est maximale (Fig. III.30). Les peaux sont plus sollicités en traction-compression.



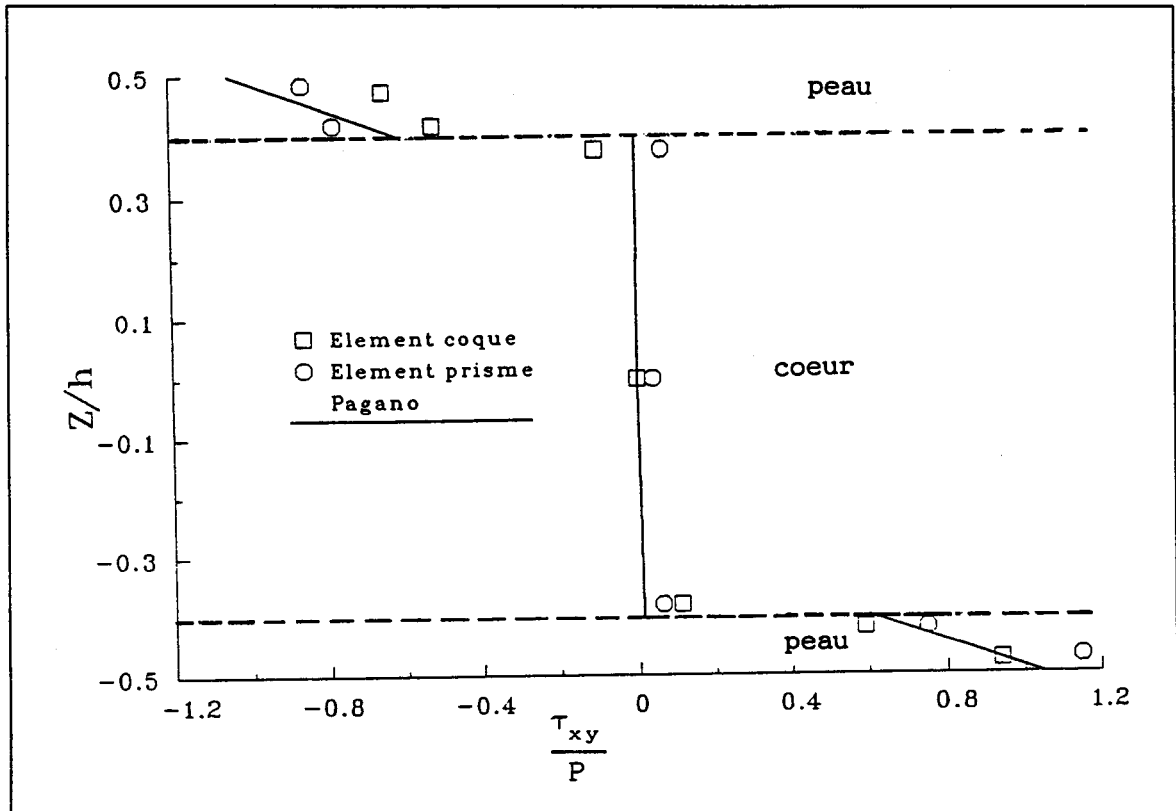


Fig. III.31 - Distribution de la contrainte  $\tau_{xy}$  suivant l'épaisseur au point B.

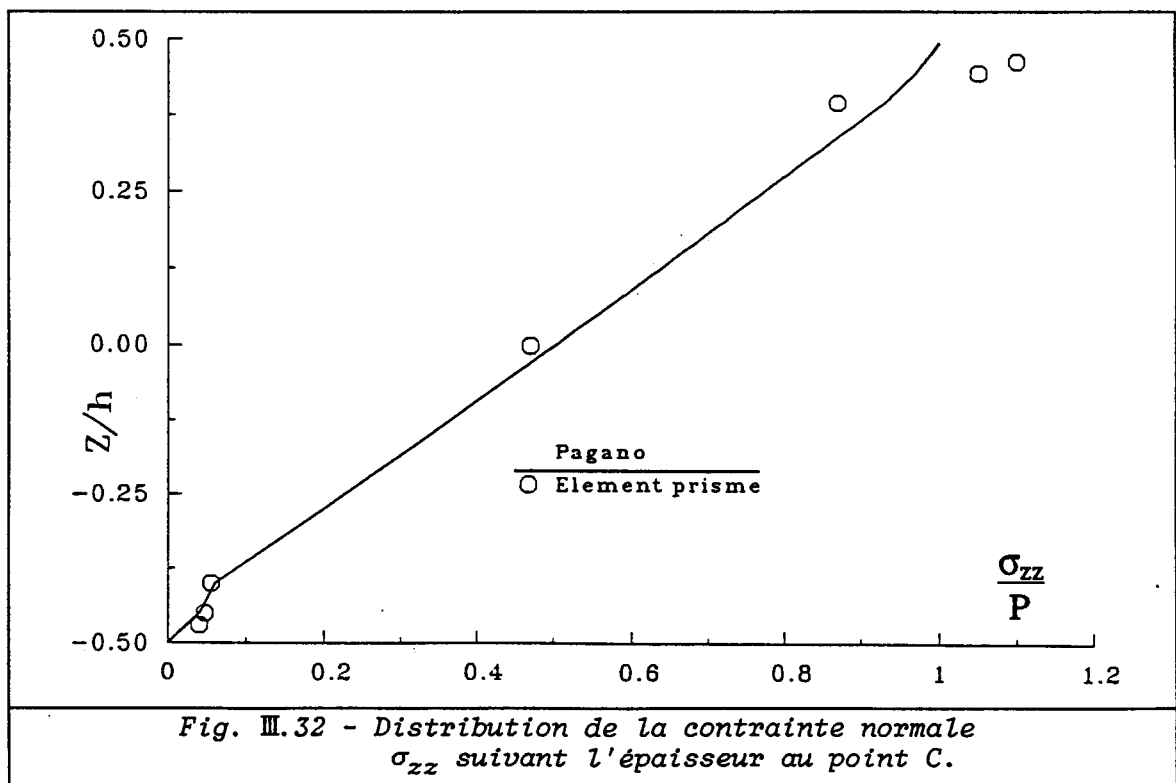


Fig. III.32 - Distribution de la contrainte normale  $\sigma_{zz}$  suivant l'épaisseur au point C.

### III - 2.4 Etude de la coque d'un transducteur flexensionnel

#### III - 2.4.1 Etude statique

Lorsque un transducteur est immergé, la pression appliquée induit des contraintes hydrostatiques supplémentaires. Pour simuler cet effet, une pression uniforme a été appliquée sur la surface extérieure de la coque. Le champ des contraintes et la constante de HILL (II.48) ont été calculés pour chaque couche. Le maillage est identique à celui utilisé pour l'analyse modale. Les valeurs de limites de rupture adoptées dans les modélisations sont reproduites au tableau III.16 [28]. On remarque des valeurs différentes entre les contraintes de rupture en traction et compression à cause du phénomène de microflambement des fibres dans la matrice.

Contrainte de rupture	(MPa)
Traction longitudinale	1250
Compression longitudinale	600
Traction transversale	35
Compression transversale	141
Cisaillement dans le plan de la fibre	63
Cisaillement interlaminaire	80

Tableau III.16 - Limites de rupture de fibres de verre.

La figure III.33 présente l'évolution de la constante de Hill suivant le grand axe de la coque et pour plusieurs couches. Elle montre que la partie la plus sollicitée est à l'extrémité du grand axe, notamment pour les couches extrêmes (couche intérieure et couche extérieure). Ceci est attribué d'une part, au moment de flexion important à cet endroit, d'autre part à la présence d'une grande déformation longitudinale engendrée dans les couches extrêmes. La partie la moins affectée est le noeud de déplacement de la coque ( $X=0,18$  m). Les couches moyennes sont les plus sollicitées car les contraintes de cisaillement y sont maximales, les autres contraintes étant nulles.

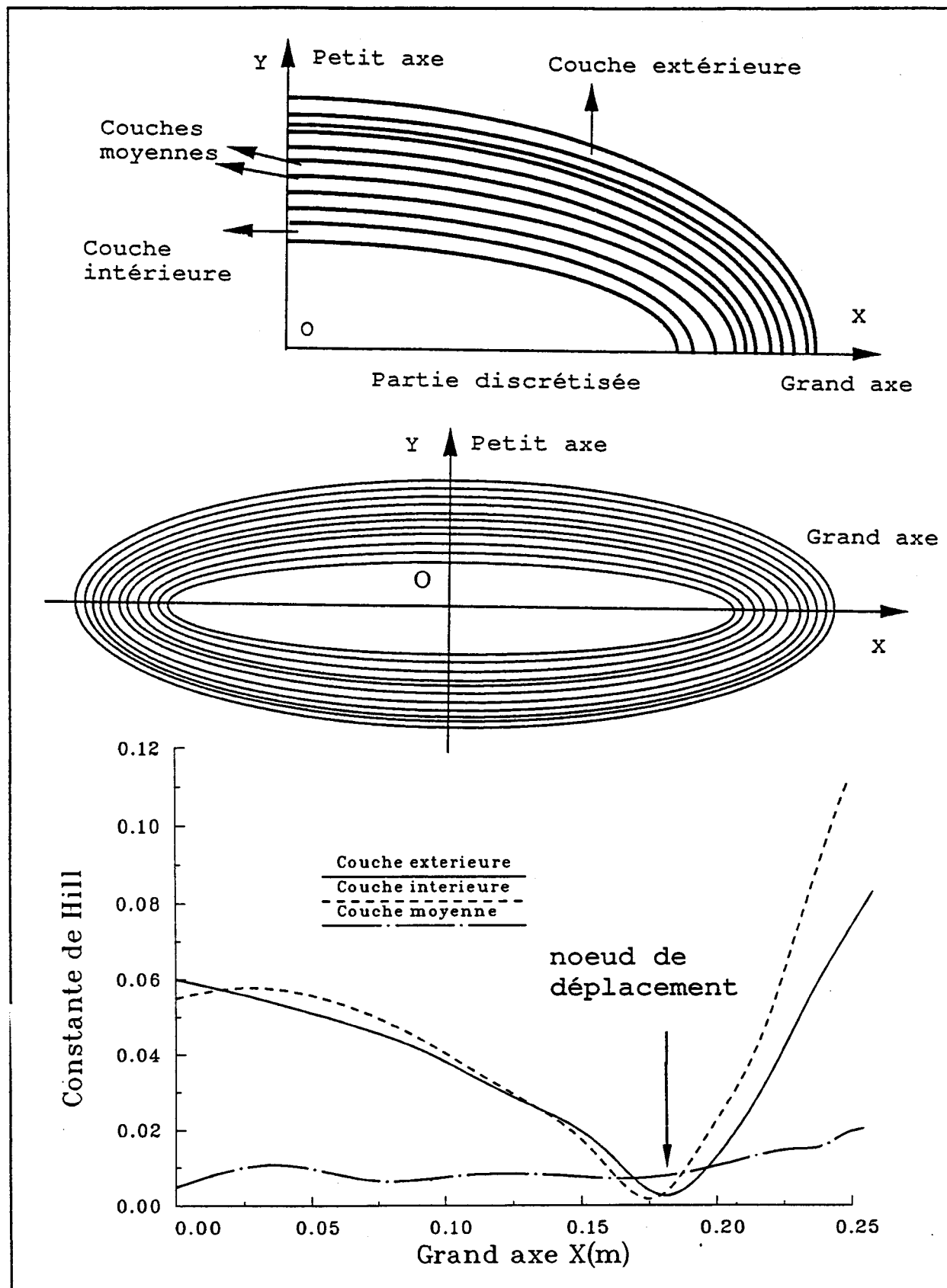


Fig. III.33 - Analyse statique de la coque d'un transducteur flexionnel.

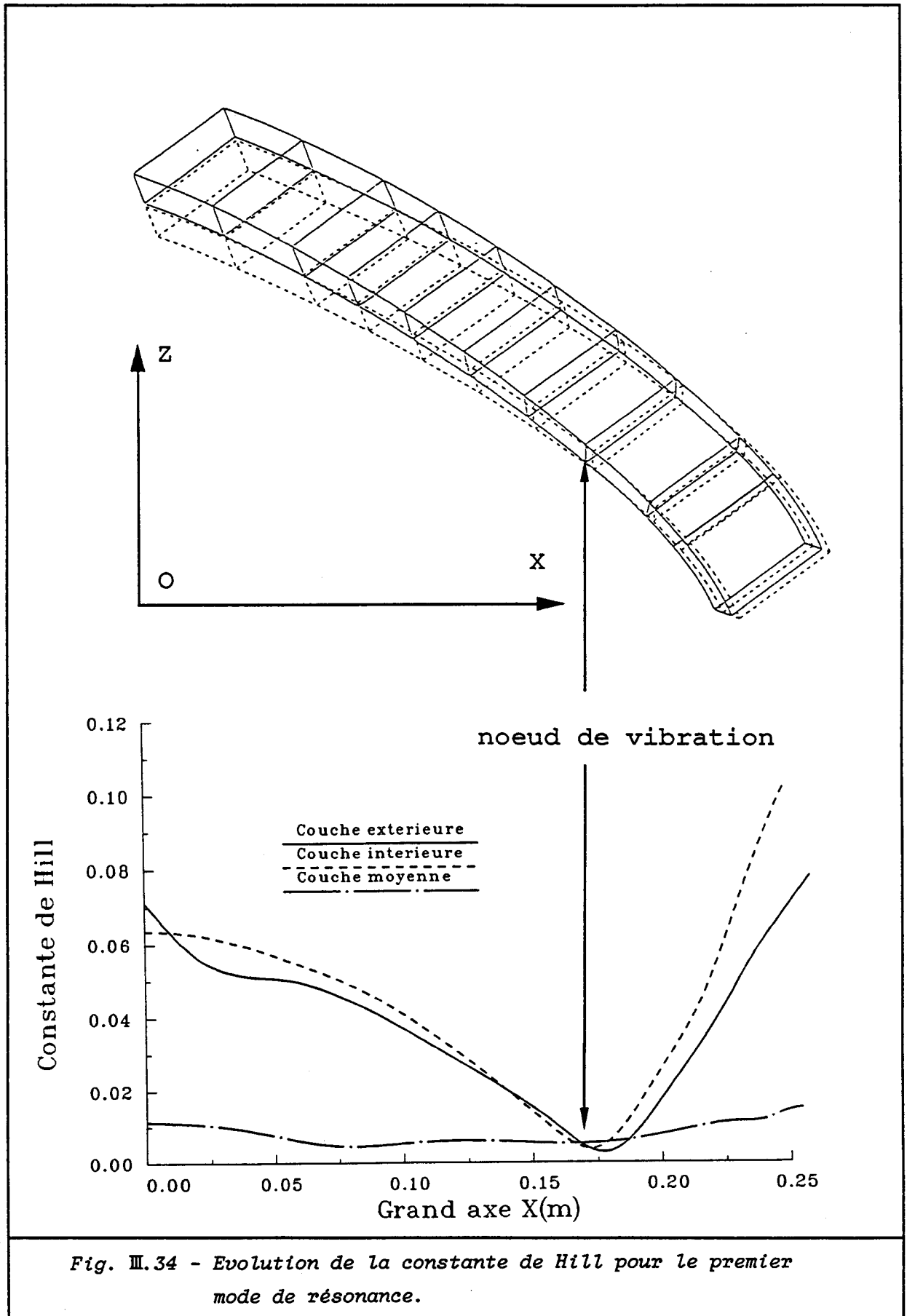


### *b) Etude modale*

Le comportement mécanique de coque a été étudié dans l'air pour la première fréquence de résonance. Ce mode correspond à la fréquence de fonctionnement du transducteur. Le champ de déplacement et l'évolution de la constante de Hill sont représentés à la figure III.34. Cette dernière montre que la zone la plus sollicitée est située à l'extrémité du grand axe. Cela est dû au moment de flexion qu'elle subit. De même, comme dans l'analyse statique, les couches les plus affectées sont les couches extrêmes.

### III - 2.5 Conclusion

Le calcul des contraintes a été développé et testé pour l'ensemble des éléments multicouches. La concordance entre valeurs calculées et solutions analytiques est satisfaisante pour toutes les contraintes. Dans la pratique, les valeurs fondamentales à connaître sont celles aux interfaces car la détérioration des structures stratifiées se produit presque toujours au niveau des interfaces par arrachement des couches (délaminage). Comme les valeurs calculées aux interfaces dans l'ensemble sont satisfaisantes, on peut donc conclure que cette approche numérique permet de prédire la zone et les couches les plus sollicitées.



## CHAPITRE IV

### MODELISATION DES STRUCTURES COMPOSITES ENDOMMAGEES

*Ce chapitre a pour objet l'analyse du comportement dynamique des structures composites endommagées. Dans la première partie, nous présentons un modèle analytique décrivant le comportement d'une poutre multicouche endommagée. Les solutions analytiques sont comparées aux résultats de calcul par éléments finis. Dans la deuxième partie, l'étude est étendue à d'autres structures (plaque, coque faisant partie d'un transducteur flexionnel). Pour chaque mode de rupture et pour différentes séquences d'empilements, nous avons calculé l'évolution des fréquences propres en fonction de l'amplitude et de la position de la fissure.*



#### IV - 1 ANALYSE MODALE D'UNE POUTRE MULTICOUCHE ENDOMMAGÉE

Dans le premier chapitre, les différents modes de rupture (cassure des fibres, cassure de la matrice, délaminage) conduisant à l'endommagement d'un matériau stratifié ont été présentés. Cette partie analyse l'effet de ces modes sur le comportement dynamique d'une poutre. L'évolution avec l'endommagement des fréquences propres de la poutre est présentée pour chaque mode de rupture. Les résultats du calcul par éléments finis sont comparés à des solutions issues d'un modèle analytique [56].

##### IV - 1.1 Endommagement par délaminage

###### IV - 1.1.1 Modèle analytique

On considère une poutre multicouche de longueur  $L = 20$  cm et d'épaisseur  $h = 1$  cm, appuyée à ses extrémités et délaminée parallèlement à son plan moyen. Elle est constituée de fibres de verre et de résine époxy. Cette poutre peut être divisée en quatre segments suivant les notations de la figure IV.1 :

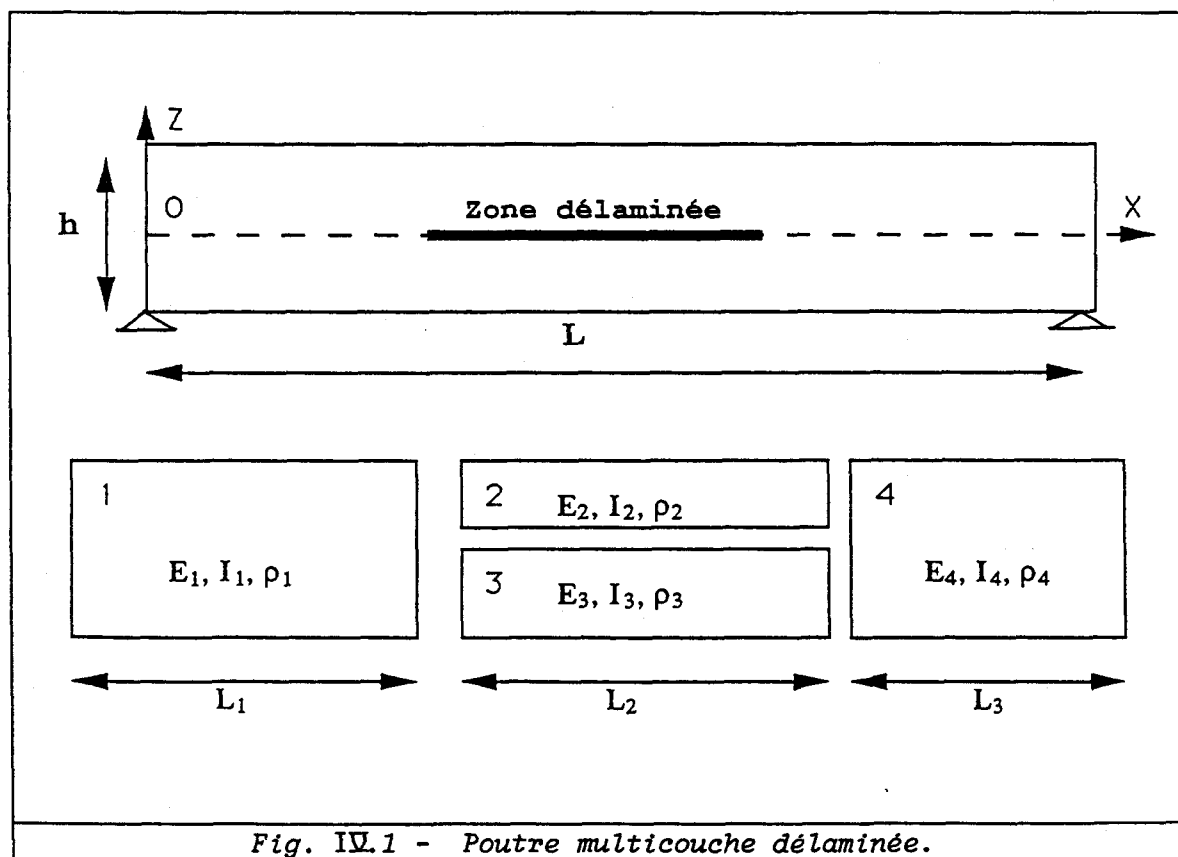


Fig. IV.1 - Poutre multicouche délaminée.

$E_i$  et  $I_i$  sont respectivement la rigidité longitudinale et l'inertie de flexion,  $\rho_i$  la densité linéique de masse du segment  $i$ .  $L_2$  désigne la longueur de la fissure.

A partir des équations d'équilibre, de compatibilité des déformations, des moments de flexion et des conditions aux limites, on obtient un système linéaire d'équations :

$$[D(\kappa)].\{H\} = \{0\} \quad (\text{IV.1})$$

$[D]$  est une matrice qui dépend des dimensions de la poutre, de ses caractéristiques mécaniques et de la variable  $\kappa$  définie par :

$$\kappa_i^4 = \frac{\rho_i}{E_i I_i} \cdot \omega^2 \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{IV.2})$$

$\omega$  désigne la pulsation.  $\{H\}$  est un vecteur représentant les coefficients d'intégration.

Pour admettre d'autres solutions que la solution triviale  $\{H\} = \{0\}$  ce système doit être non cramérien. Pour chaque valeur de  $\kappa$ , le déterminant de la matrice  $[D]$  est calculé numériquement. Les modes de flexion sont alors obtenus lorsque, pour deux valeurs adjacentes de  $\kappa$ , le déterminant change de signe. Les modes calculés se répartissent entre les modes de flexion de la poutre et les modes de vibrations des lèvres de la fissure appelés également modes supplémentaires. L'identification de ces modes s'effectue en prescrivant un mouvement identique pour les lèvres de la fissure, de manière à supprimer les modes supplémentaires. Les modes obtenus après résolution de ce système sont les modes de flexion.

#### IV - 1.1.2 Modélisation par éléments finis

Pour des raisons de symétrie, seule la moitié de la poutre a été modélisée. Le maillage utilisé comporte 5 éléments suivant la longueur et 2 éléments suivant l'épaisseur. La prise en compte de la fissure a été réalisée en écartant les noeuds appartenant à la frontière de la fissure (Fig. IV.2).

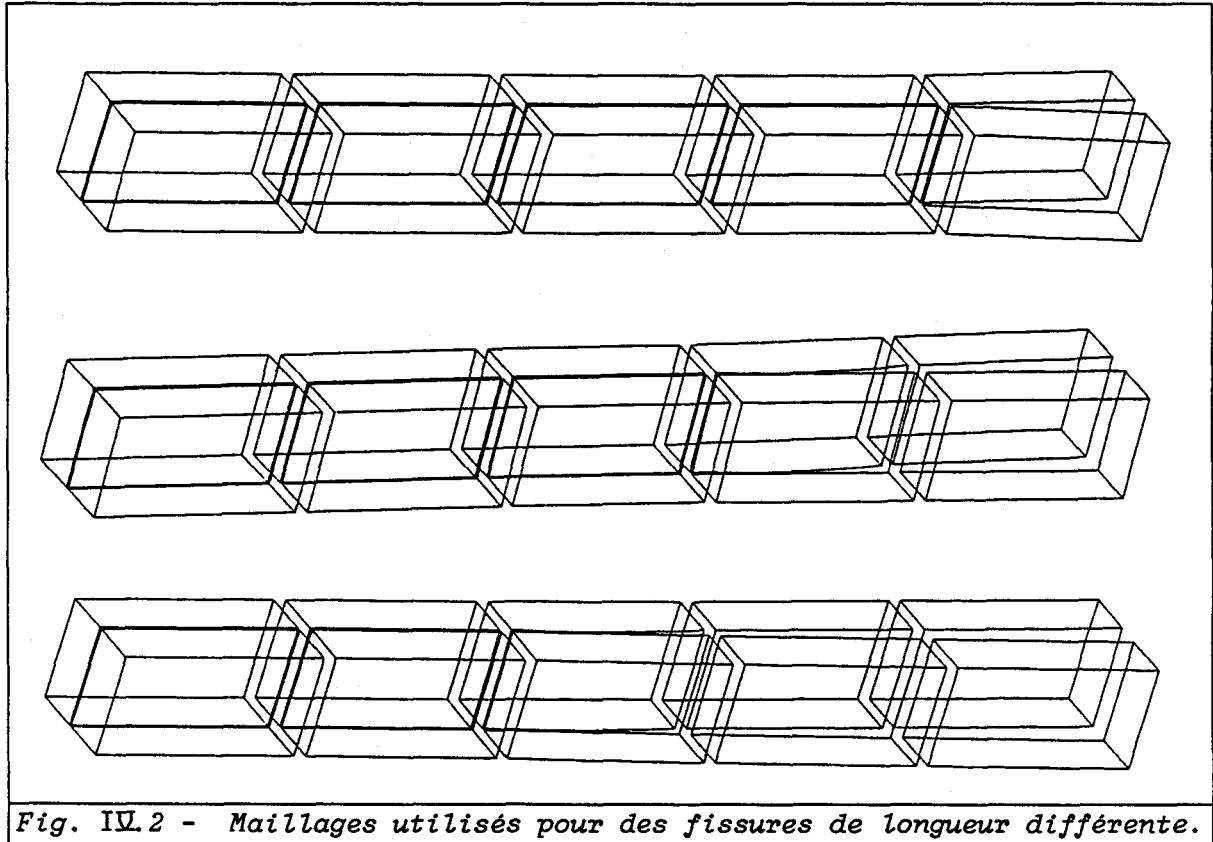


Fig. IV.2 - Maillages utilisés pour des fissures de longueur différente.

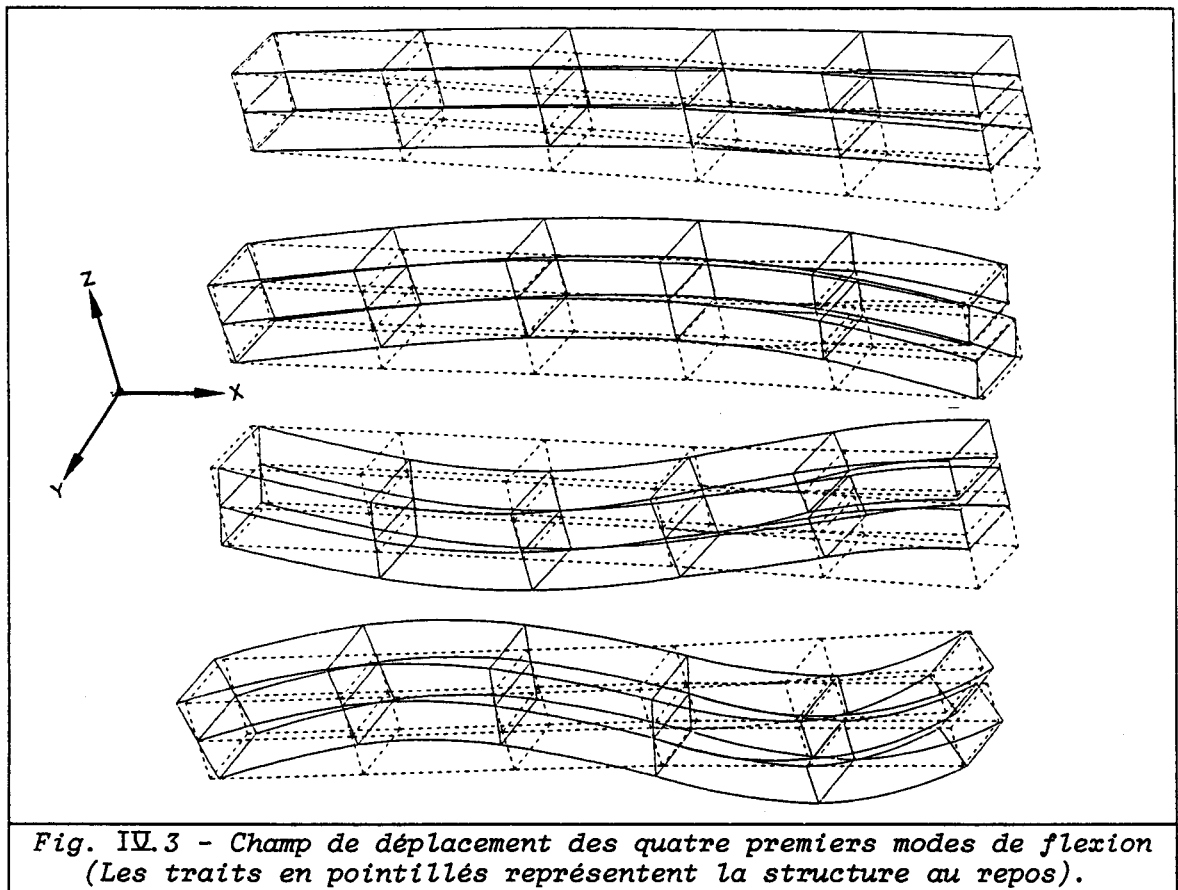
#### IV - 1.1.3 Résultats

Nous avons calculé, en fonction de la fissure, l'évolution de la fréquence des quatre premiers modes de flexion de la poutre (Fig. IV.3). Les résultats obtenus sont reportés sur la figure IV.4. Les écarts entre les résultats numériques et analytiques sont inférieurs à 18%. D'autre part, le champ de contraintes le long de la poutre a été calculé pour ces quatre premiers modes. La répartition des contraintes au sein de la structure varie avec la courbure de la poutre en vibration. L'augmentation de courbure entraîne une augmentation de la contrainte de cisaillement par rapport à la contrainte normale. Les modes propres d'ordre plus élevé ont une courbure plus importante et sont, par conséquent, plus sollicités en cisaillement.

L'analyse de ces résultats montre que dans le cas de fissures de petites dimensions, la fréquence la plus importante est obtenue pour le quatrième mode car la fissure se situe dans un plan nodal ( $\tau_{xz}$  maximum). Dans le même cas, cette variation est moins grande pour le deuxième mode propre car la contrainte de cisaillement engendrée par la zone endommagée est plus faible. En ce qui concerne le premier mode, sa fréquence est peu affectée

car la fissure se trouve sur le ventre de vibration ( $\tau_{xz}$  minimum). De même, la fréquence du troisième mode marque au départ une légère décroissance, puis elle diminue plus vite quand la fissure atteint les noeuds de vibration.

Il apparaît donc que les variations des fréquences de résonance de la poutre dépendent d'une part de la dimension et de la localisation de la fissure, d'autre part des contraintes de cisaillement modifiées par la zone endommagée. Par exemple, la variation de la quatrième fréquence de résonance est importante quand la fissure se situe dans un plan nodal. Ensuite, elle est moins importante quand la fissure se propage dans une zone où les contraintes de cisaillement sont faibles. Enfin, cette variation est importante quand la fissure atteint d'autres noeuds de vibration.



Cependant, l'effet du dédoublement de la poutre dans son épaisseur, produit des modes supplémentaires (Fig. IV.5) qui sont les modes de vibrations des lèvres de la fissure. Les fréquences de ces modes décroissent progressivement lors de la propagation de la fissure, la comparaison entre les valeurs obtenues par le modèle analytique et le calcul par éléments



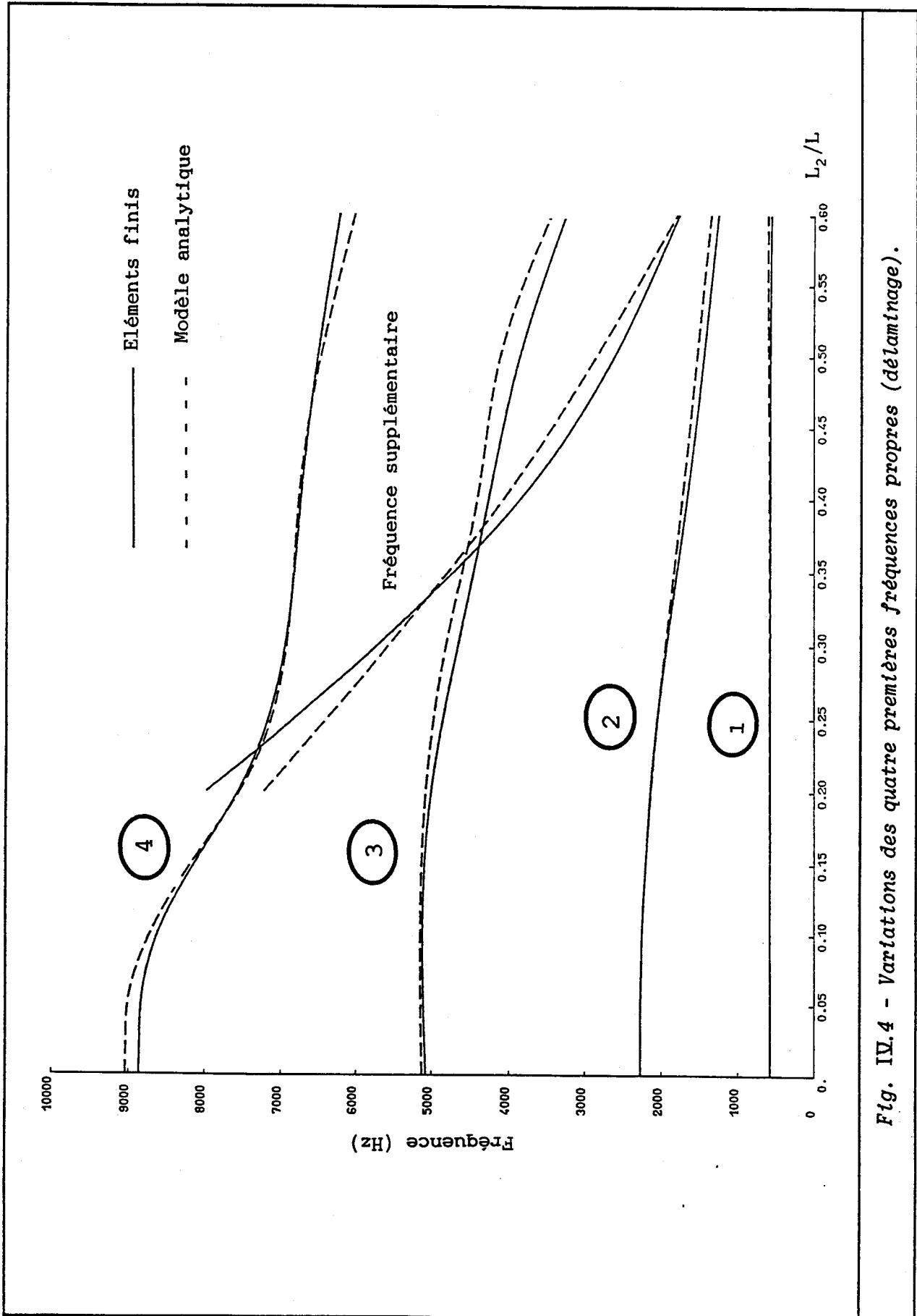
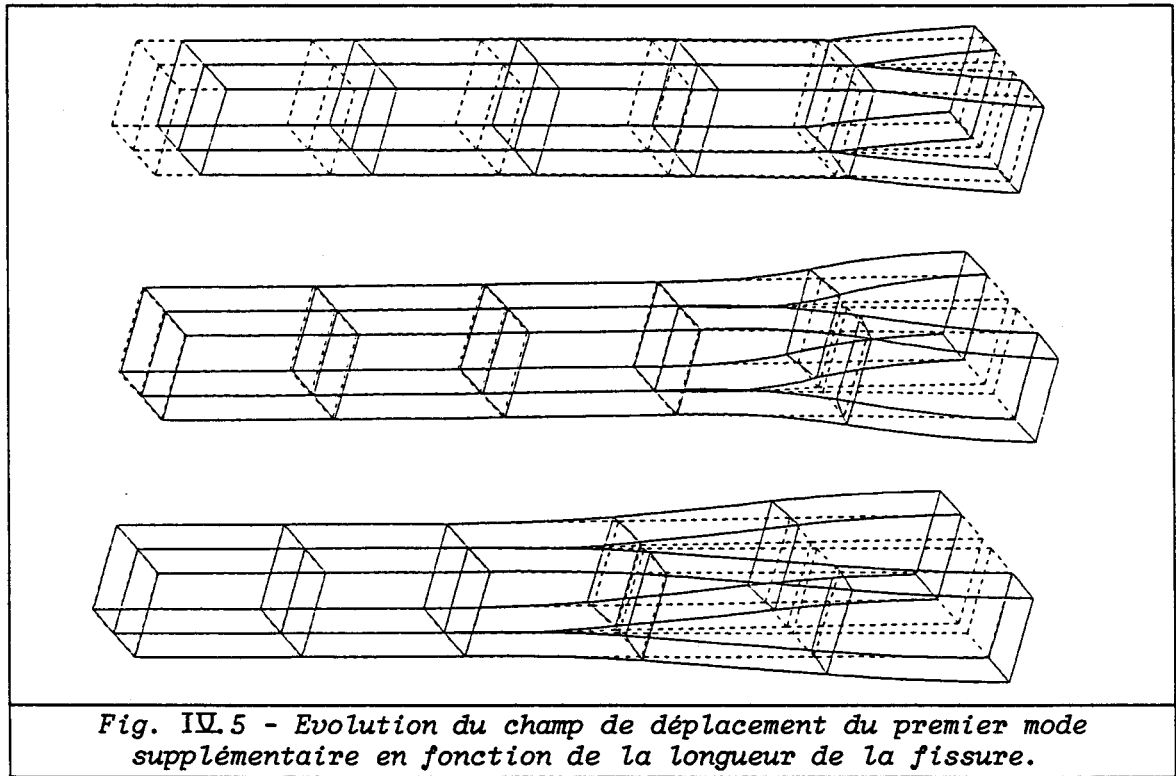


Fig. IV.4 - Variations des quatre premières fréquences propres (délaminage).

finis est très satisfaisante. On note que ces modes supplémentaires peuvent être couplés avec d'autres modes de vibration notamment à haute fréquence.

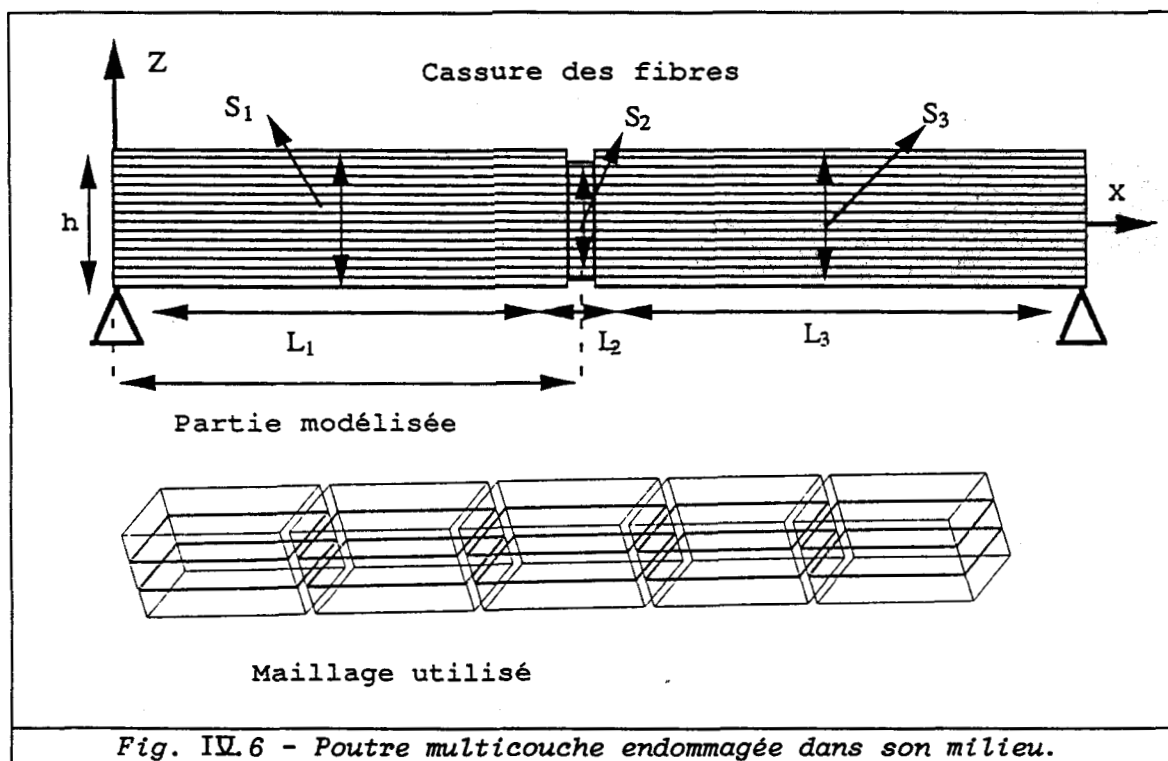


## IV - 1.2 Endommagement par cassure des fibres

### IV - 1.2.1 Modèle analytique

Dans ce cas, la poutre étudiée est simplement appuyée à ses extrémités et la zone endommagée se trouve dans une section située en son milieu (figure IV.6). Cette poutre peut être divisée en trois segments, la longueur du deuxième segment ( $L_2$ ) est très petite devant les autres. La cassure des fibres ou des couches se traduit par une réduction de la section  $S_2$ .

Le calcul des modes de flexion est identique à celui du problème précédent. La modélisation par éléments finis a porté sur la moitié de la poutre pour des raisons de symétrie. Le maillage utilisé comporte 5 éléments suivant la longueur et 3 éléments suivant l'épaisseur. La prise en compte de la fissure a été réalisée, en libérant un certain nombre de noeuds appartenant à la frontière de la fissure.



#### IV - 1.2.2 Résultats

Nous avons reporté sur la figure IV.7 l'évolution des fréquences des quatre premiers modes de flexion de la poutre en fonction du nombre de couches endommagées. Les écarts entre les résultats numériques et analytiques sont inférieurs à 15%. On note que le premier et troisième modes dont les déformées sont symétriques par rapport au plan  $X = L/2$ , sont les plus affectés car la zone endommagée située au milieu de la poutre est le ventre de vibration de ces modes et par conséquent l'endroit où la contrainte  $\sigma_{xx}$  est maximale. La fréquence du premier mode baisse de 23% quand 75% des couches sont cassées. Pour le même endommagement, la fréquence du troisième mode diminue de 16%. Cette différence est due à la variation de la répartition des contraintes d'un mode à un autre. La contrainte normale  $\sigma_{xx}$  engendrée par la poutre excitée sur le premier mode est plus importante que celle engendrée par la même poutre sur le troisième.

Par contre, le deuxième et le quatrième modes dont les déformées sont antisymétriques par rapport au plan  $X = L/2$ , ne sont pas affectés car la fissure est située dans un plan nodal où la contrainte  $\sigma_{xx}$  est nulle.

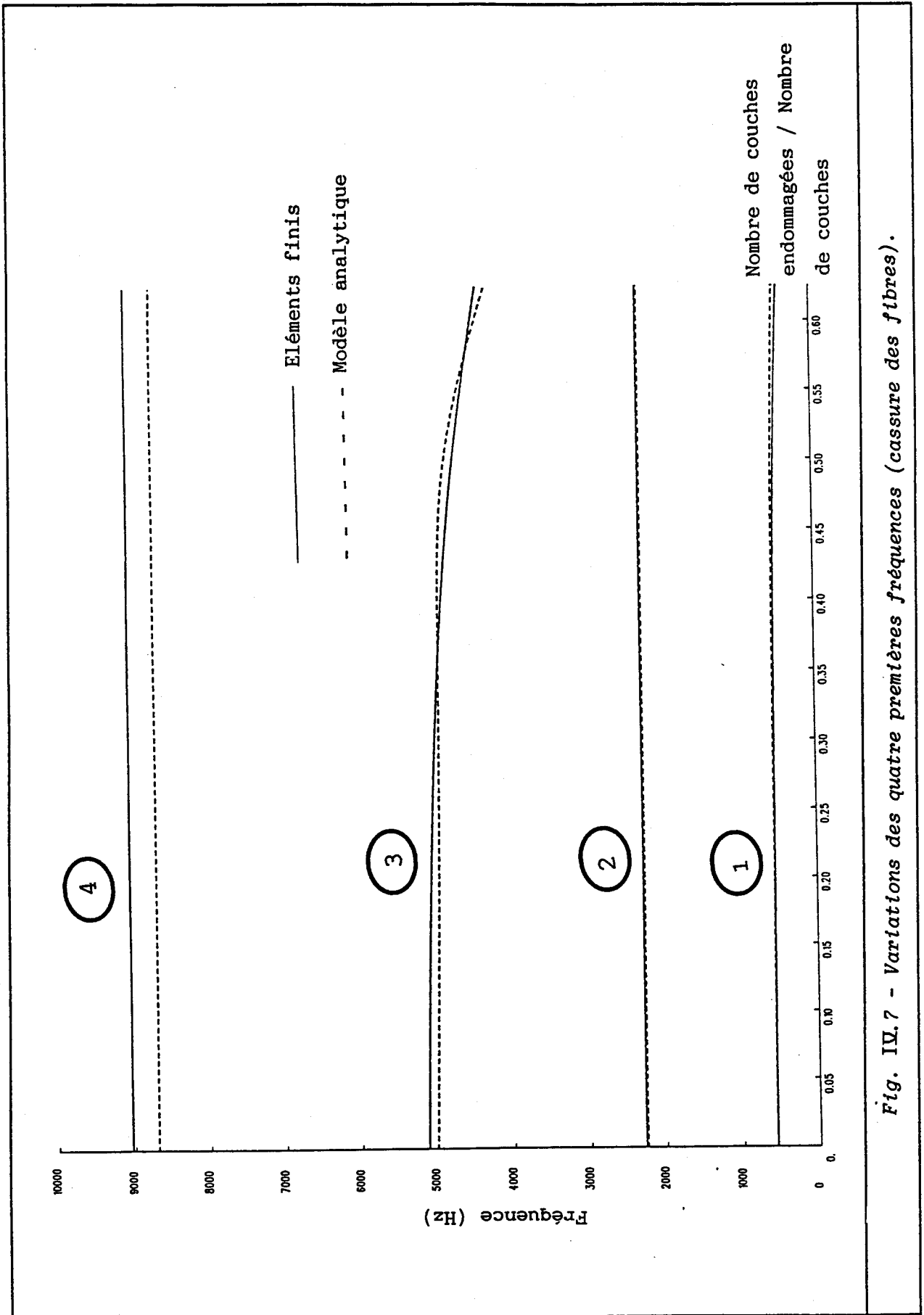


Fig. IV.7 - Variations des quatre premières fréquences (cassure des fibres).

### IV - 1.3 Conclusion

Cette étude a permis de valider l'utilisation de la méthode des éléments finis pour analyser l'endommagement des structures composites. Cette modélisation numérique a donné des résultats satisfaisants sur l'évolution du comportement dynamique de toutes les structures étudiées. Les écarts observés (Figs. IV.4 et IV.7) entre les résultats numériques et analytiques sont dus aux modèles utilisés. Le modèle analytique repose sur la théorie des poutres et est donc unidimensionnel. Le calcul numérique utilise des éléments tridimensionnels et est par conséquent, plus exact a priori. Les figures IV.4 et IV.7 fournissent des informations précises sur la fissure (dimension, localisation), ainsi que sur le mode d'endommagement associé (délaminage, cassure des fibres). Elles montrent que chaque modification au sein du matériau provoque des variations de sa réponse modale. Le tableau IV.1 résume les différents résultats obtenus à partir des exemples étudiés et montre l'effet de l'endommagement sur les quatre premiers modes de flexion.

Mode Endommagement	Premier mode	Deuxième mode	Troisième mode	Quatrième mode
Délaminage	pas d'effet	baisse de la fréquence de 37%	baisse de la fréquence de 33%	baisse de la fréquence de 34%
Cassure des fibres	baisse de la fréquence de 23%	pas d'effet	baisse de la fréquence de 16%	pas d'effet

Tableau IV.1 - Variations maximales des fréquences en fonction de l'endommagement (délaminage  $L_2/L = 0,6$  ; Cassure des fibres : nombre de couches endommagées / nombre total de couches = 0,65).

En conclusion, les variations des fréquences de résonance dépendent d'une part du mode d'endommagement (délaminage, cassure des fibres), d'autre part, de la fissure (dimension, localisation). Dans le cas du délaminage, ces variations sont fonction des contraintes de cisaillement modifiées par la zone endommagée. Par contre, dans le cas de cassure des fibres, elles sont fonction des contraintes normales.

## IV - 2 ETUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DE STRUCTURES ENDOMMAGEES

L'objectif de cette partie est d'étudier le comportement dynamique de structures composites endommagées pour lesquelles il n'existe pas de modèles analytiques connus (plaque et coque d'un transducteur flexionnel). Pour chaque mode de rupture et pour différentes séquences d'empilements, nous avons calculé la variation des fréquences propres en fonction de la longueur de la fissure.

### IV - 2.1 Analyse modale d'une plaque composite endommagée

#### IV - 2.1.1 Description du problème

La structure étudiée est une plaque carrée d'épaisseur  $h = 3$  cm et de côté  $L = 20$  cm. Elle est constituée de fibres de verre et de résine époxy. Les endommagements (délaminage, cassure des fibres, cassure de la matrice) sont supposés avoir lieu dans le plan moyen (Fig. IV.8). Pour des raisons de symétrie seul 1/4 de la plaque a été modélisé. Le maillage utilisé comporte 18 éléments (Fig. IV.8). Cette plaque est supposée libre à ses extrémités. La prise en compte de la fissure a été réalisée, en écartant les noeuds appartenant à la frontière de la fissure.

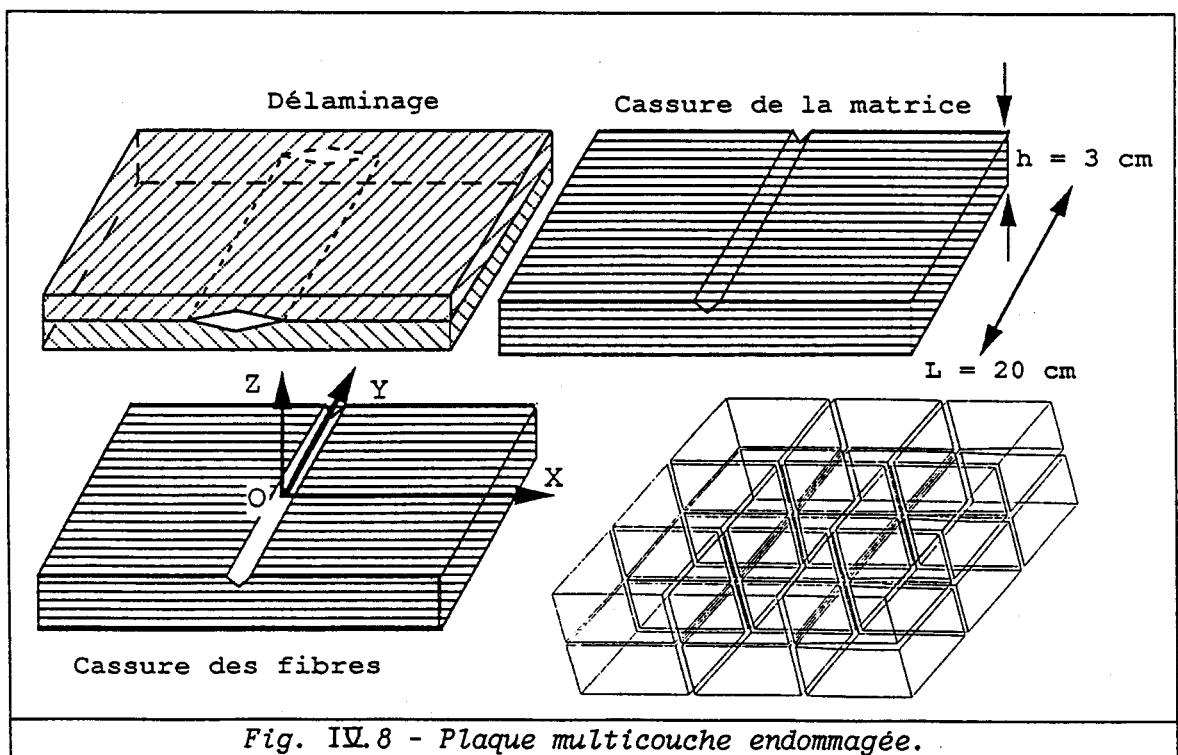


Fig. IV.8 - Plaque multicouche endommagée.

## IV - 2.1.2 Résultats

Les figures IV.9 à IV.11 montrent l'évolution des huit premières fréquences de résonance de la plaque en fonction de la longueur du délaminage, du nombre de couches rompues ou lorsque la matrice est cassée. Le tableau IV.2 indique pour chaque mode d'endommagement la variation de fréquence de résonance. Un mode symétrique par rapport au plan YOZ et antisymétrique par rapport au plan XOZ sera noté SA (symétrique-antisymétrique).

Mode propre	AA1	SS1	AS1	SS2	SA1	AA2	SA2	SS3
Mode d'endommagement	%	%	%	%	%	%	%	%
Délaminage	7	16	10	9	13	0	26	17
Cassure des fibres	4	0	0	67	43	8	0	17
Cassure de la matrice	1	0	0	25	18	2	0	8

Tableau IV.2 - Variations maximales des huit premières fréquences de résonance (Orientation des fibres par rapport à l'axe OX:  $\varphi = 0^\circ$ ).

L'analyse de ces résultats montre que la variation la plus importante est associée à la rupture des fibres. Cet effet s'explique par la résistance des fibres plus élevée que celle de la matrice. De plus, cette variation dépend de la déformée de chaque mode propre, les modes propres dont la déformée varie avec l'abscisse X (Fig. IV.12-a) sont les plus affectés dans le cas d'un endommagement par cassure des fibres et de la matrice (Tableau IV.2 ; modes SS2 et SA1). La cause de ces variations est attribuée à la réduction de rigidité dans la direction OX. La baisse de fréquence la plus importante concerne les modes ayant un ventre de vibration dans la zone endommagée (Fig. IV.10 et IV.11 ; mode SS2), car la contrainte normale  $\sigma_{xx}$  est maximale dans cette zone. Par contre, les modes ayant une ligne nodale située sur la zone endommagée ne sont pas affectés (Fig. IV.10 et IV.11 ; modes AA1 et AS1).

Cependant, la fréquence des modes propres dont la déformée varie avec l'abscisse Y (Fig. IV.12-b) est inchangée (Tableau IV.2 ; mode SS1), la diminution de rigidité dans la direction OX ne les affectant pas. Les modes ayant une variation de déformée selon l'abscisse X et l'ordonnée Y (Fig. IV.12-c) sont quand à eux peu affectés (Tableau IV.2 ; mode SS3).

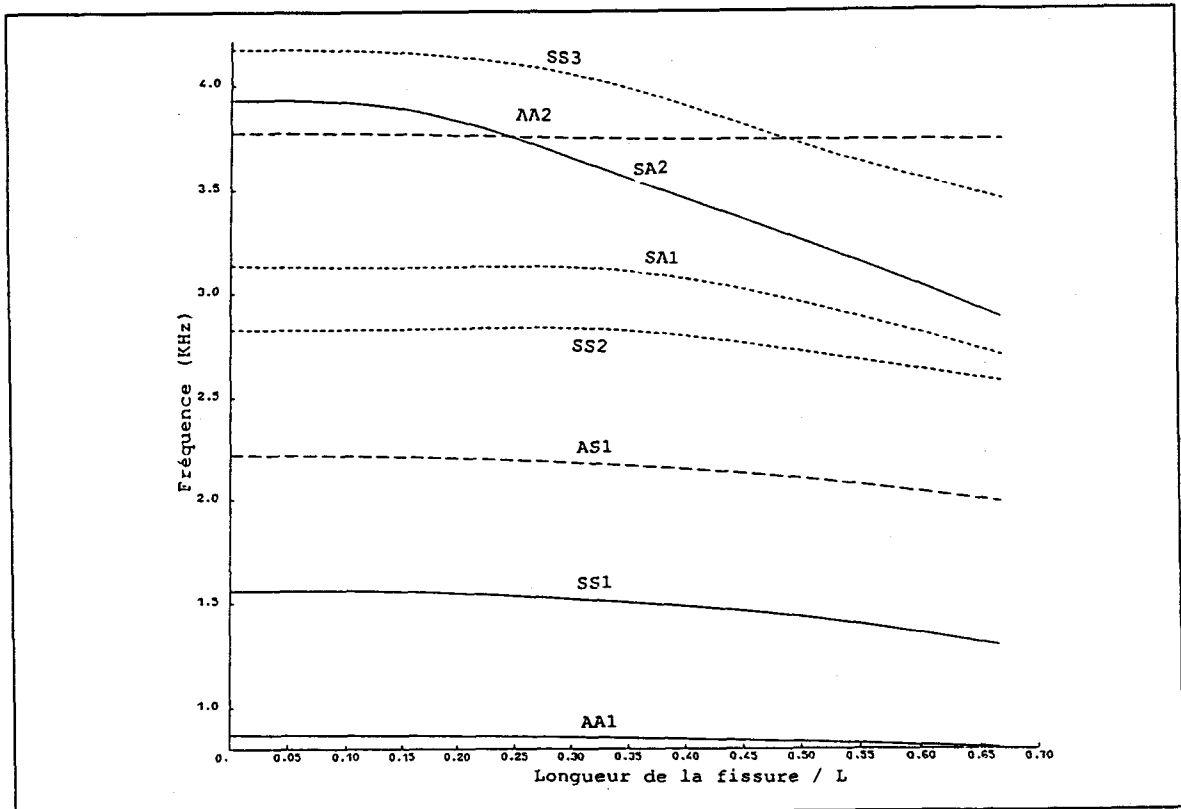


Fig. IV.9 - Evolution des huit premières fréquences en fonction de la longueur de la fissure (délaminage).

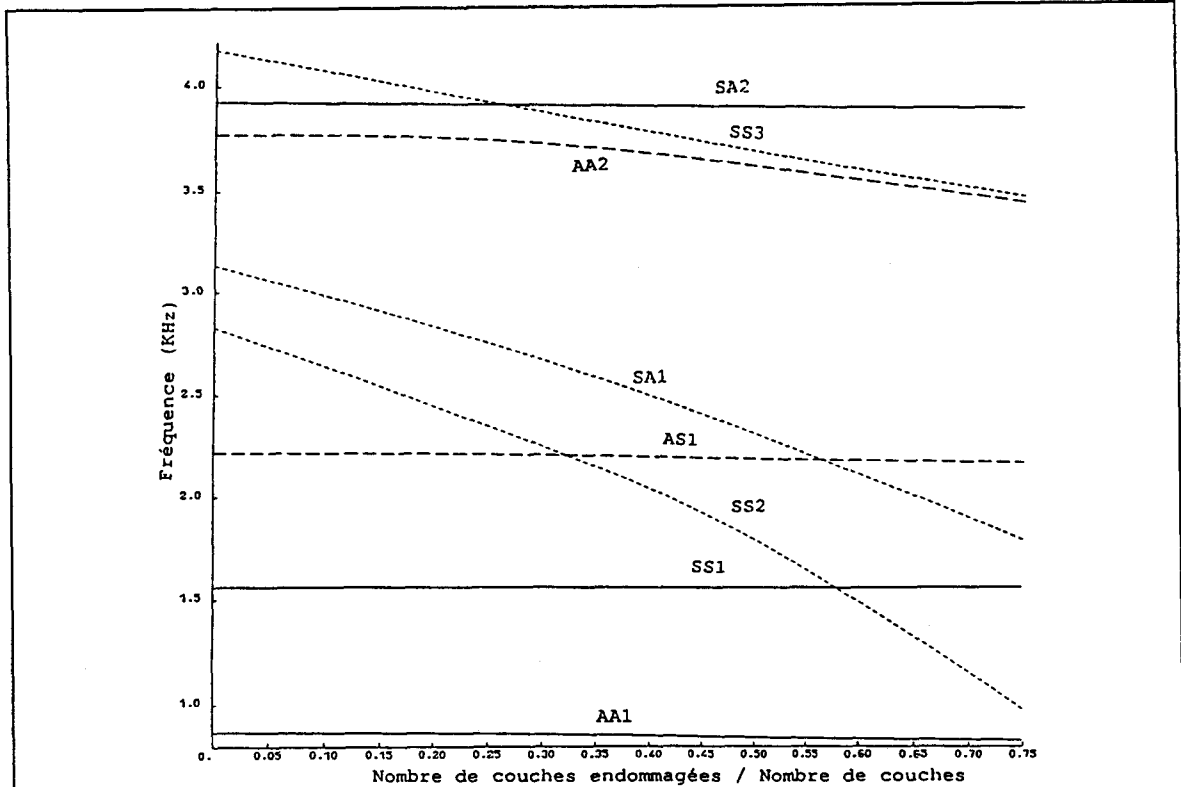
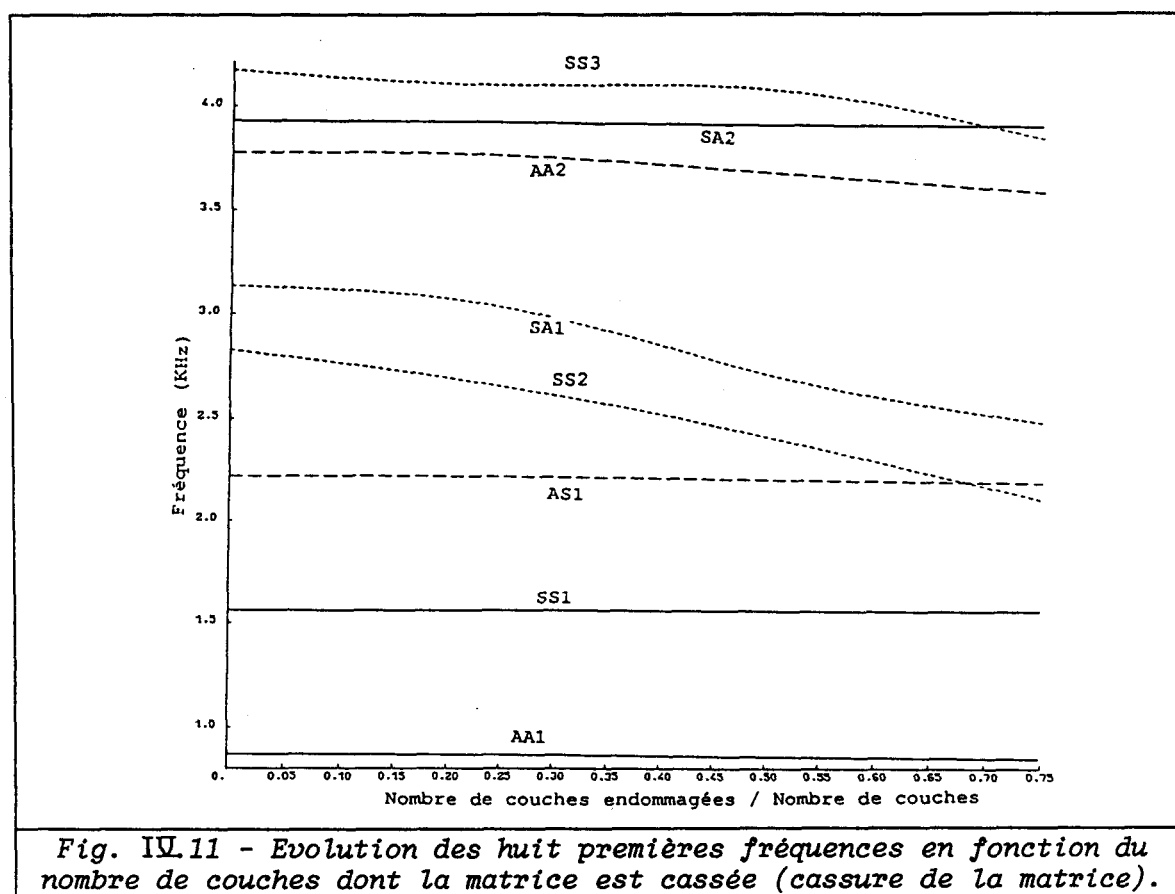


Fig. IV.10 - Evolution des huit premières fréquences en fonction du nombre de couches endommagées (cassure des fibres).

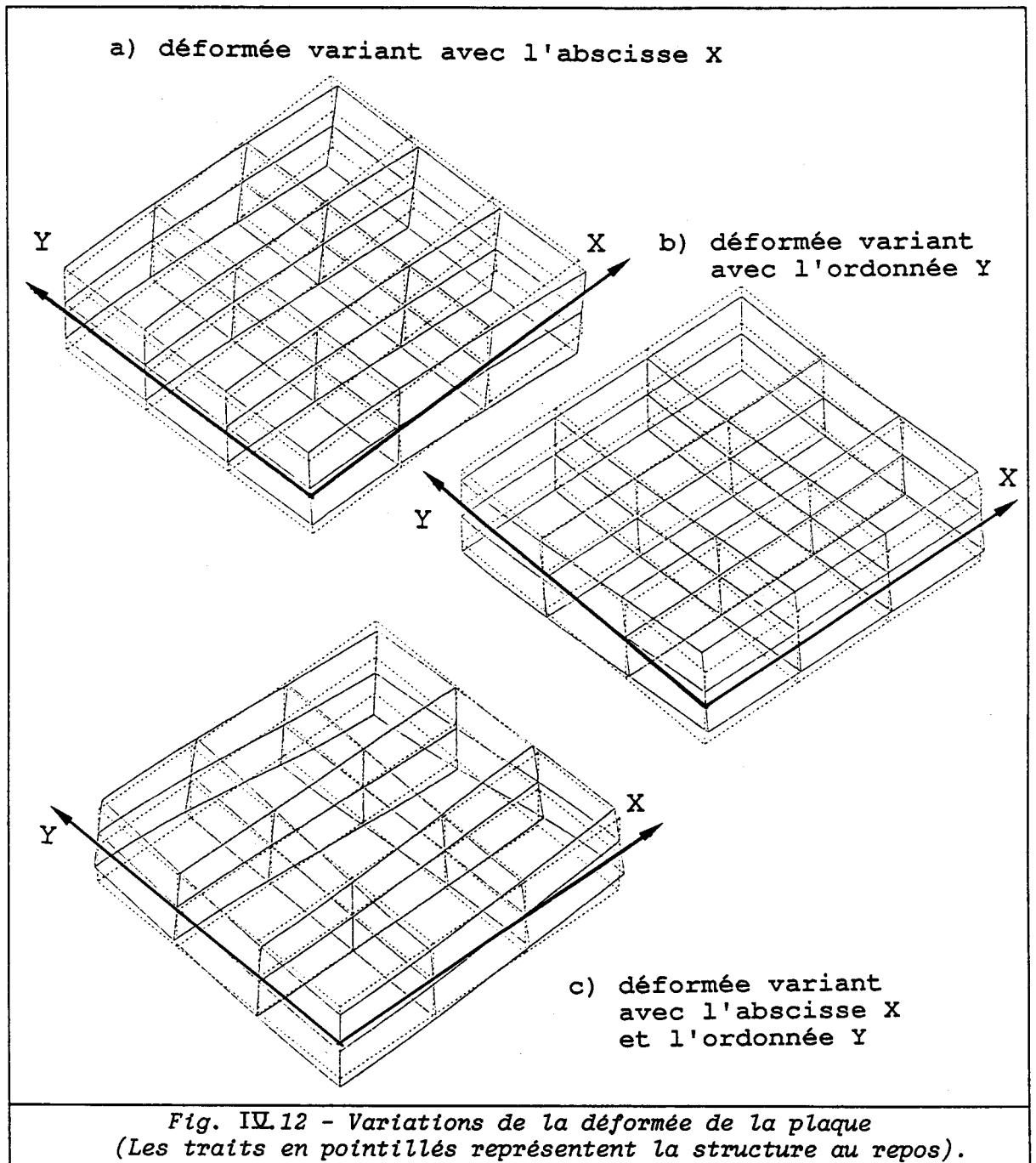




Par ailleurs, la variation des fréquences dépend des rigidités directionnelles, elles mêmes fonction de l'orientation des fibres. Les figures IV.13 et IV.14 montrent, pour différentes séquences d'empilements, l'évolution de la fréquence normée SS2 en fonction de la longueur de la fissure. Celle-ci est obtenue en divisant la fréquence de la plaque endommagée par celle de la plaque intègre. On note que la déformée de ce mode varie avec l'abscisse X et que son ventre de vibration se situe dans la zone endommagée. Le tableau IV.3 présente les variations de cette

Orientation des fibres	$\pm 0^\circ$	$\pm 30^\circ$	$\pm 45^\circ$	$\pm 60^\circ$
Mode d'endommagement	%	%	%	%
Délaminage	9	8	10	8
Cassure des fibres	67	35	25	12
Cassure de la matrice	25	15	10	6

Tableau IV.3 - Variations maximales de la fréquence du mode SS2.



fréquence en fonction de la séquence d'empilement. Il montre que la baisse est plus importante lorsque la fissure est perpendiculaire aux fibres pour des modes dont la déformée varie dans une direction parallèle à celles-ci. En effet, la diminution des fréquences des modes dont la déformée varie avec l'abscisse X est moins importante lorsque la direction des fibres s'écarte de l'axe OX. La réduction de rigidité suivant cet axe en est la cause (Tableau IV.3).

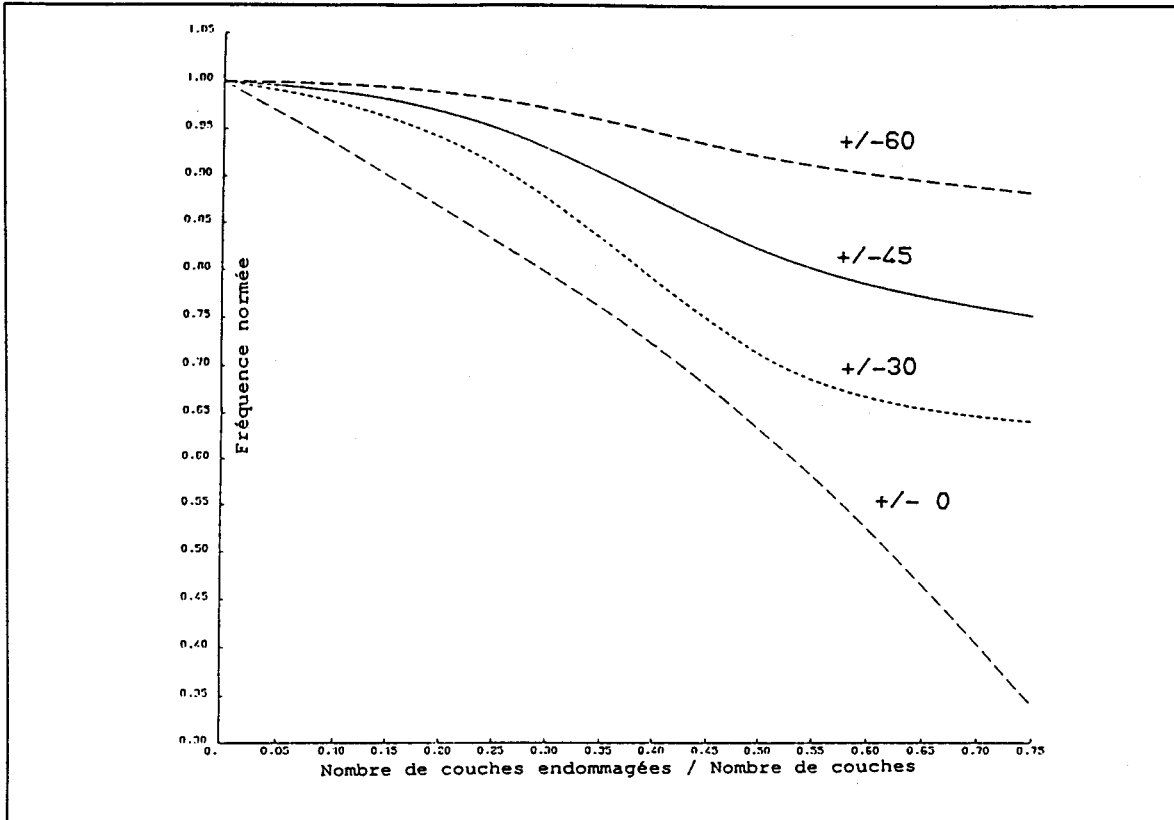


Fig. IV.13 - Evolution de la fréquence normée SS2 en fonction du nombre de couches endommagées et pour plusieurs séquences d'empilements (cassure des fibres).

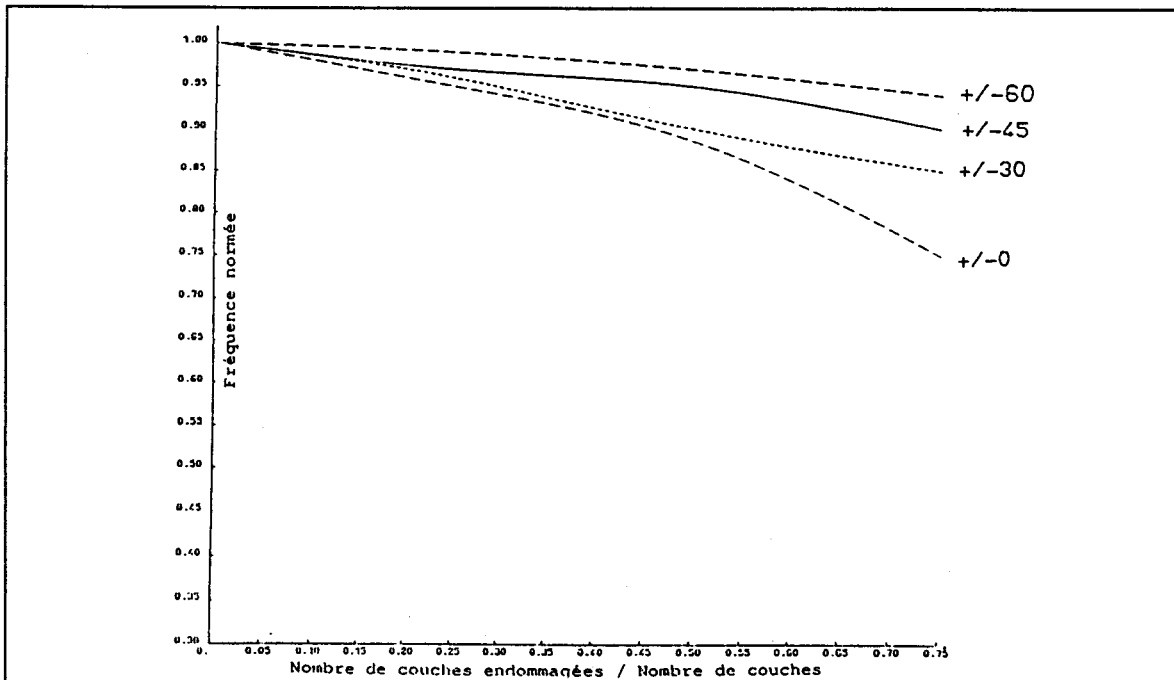


Fig. IV.14 - Evolution de la fréquence normée SS2 en fonction du nombre de couches dont la matrice est cassée et pour plusieurs séquences d'empilements (cassure de la matrice).

Dans le cas de l'endommagement par délaminage, la séparation totale le long de l'axe OY de la plaque entraîne une baisse de ses fréquences de résonance. Cette baisse varie d'un mode à un autre, elle est fonction des contraintes de cisaillement modifiées par la zone endommagée. La baisse la plus importante est obtenue pour les modes ayant une variation de déformée avec l'abscisse X et l'ordonnée Y (Fig. IV.9 ; modes SA1, SA2 et SS3). Cette baisse de fréquence est grande, même dans le cas d'une fissure de petite dimension pour le mode SA2. En effet, la fréquence de ce dernier diminue de l'ordre de 26%, parce que les contraintes de cisaillement associées à la plaque excitée sur ce mode sont plus importantes.

L'effet du dédoublement de la plaque dans son épaisseur, produit des modes supplémentaires (modes de vibration des lèvres de la fissure), dont les fréquences de résonance décroissent progressivement lors de l'accroissement de la fissure. Ces fréquences dépendent également de l'orientation des fibres. Elles diminuent quand l'écart des fibres par rapport à l'axe OX augmente (Fig. IV.15), à cause de la baisse de rigidité dans cette direction (OX).

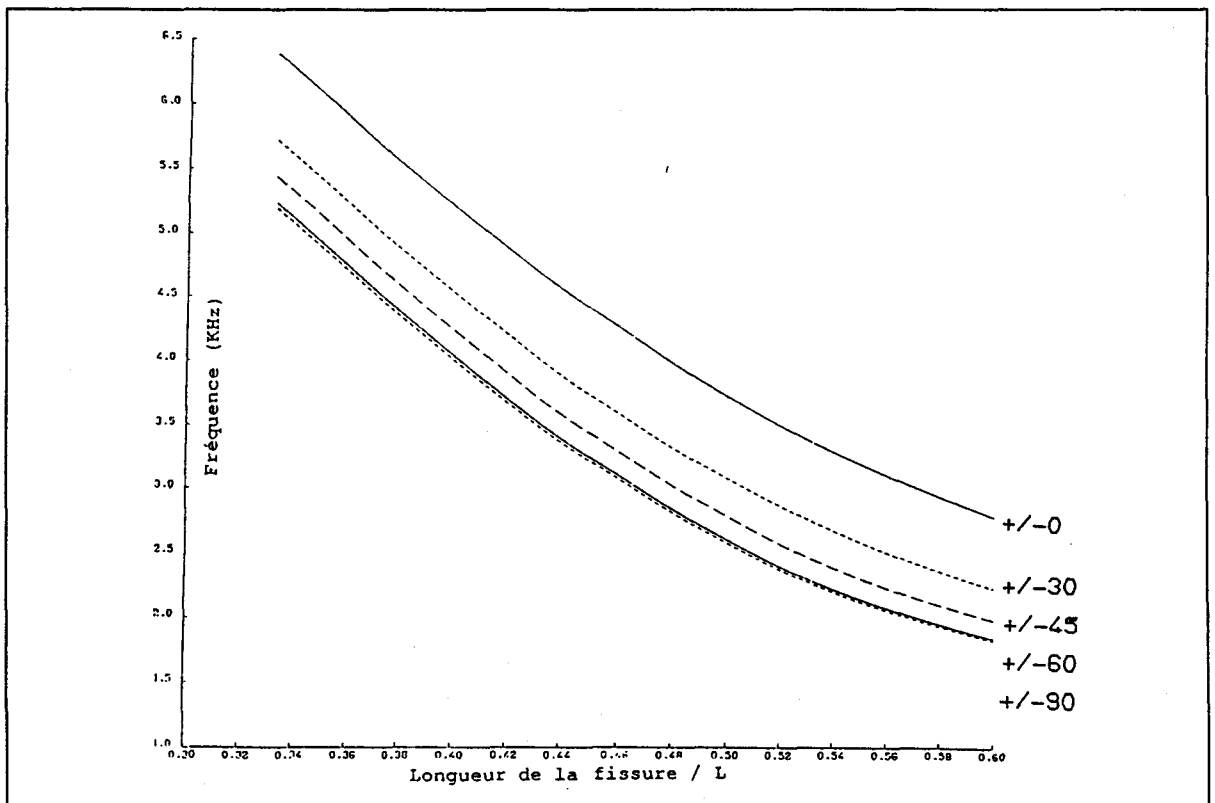
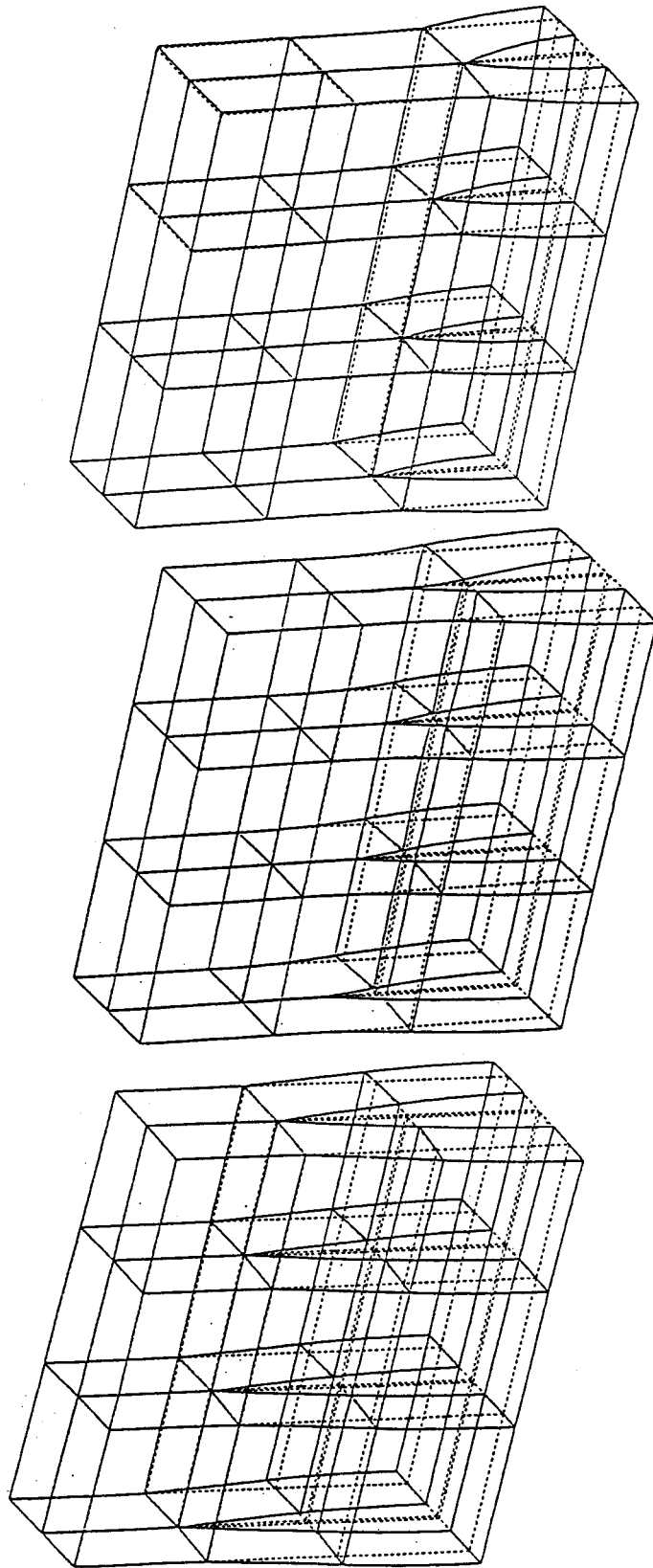


Fig. IV.15 - Evolution de la première fréquence supplémentaire en fonction de la longueur de la fissure et pour plusieurs séquences d'empilements.



*Fig. IV.16 - Champ de déplacement du premier mode supplémentaire du quart de la plaque en fonction de la longueur de la fissure.*

On note également que les variations de rigidités directionnelles entraînent des croisements de modes (Fig. IV.9 ; modes SS3 et AA2) et (Fig. IV.10 ; modes SS1 et SS2), qui apparaissent en particulier pour des fissures de grandes dimensions.

D'autre part, la variation des fréquences dépend de la zone endommagée. Le tableau IV.4 présente les variations des huit premières fréquences de résonance pour trois zones délaminées (Fig. IV.17).

Mode	Zone endommagée							
	AA1 %	SS1 %	AS1 %	SS2 %	SA1 %	AA2 %	SA2 %	SS3 %
(a)	2	4	3	1	1,5	0,6	9	5,5
(b)	0	4	1	2	2	0	10	2
(c)	11	6	14	3	6	6	12	10

Tableau IV.4 - Variations des huit premières fréquences de résonance pour trois zones délaminées (Orientation des fibres  $\varphi = 0^\circ$  ;  $L/d = 0,33$ ).

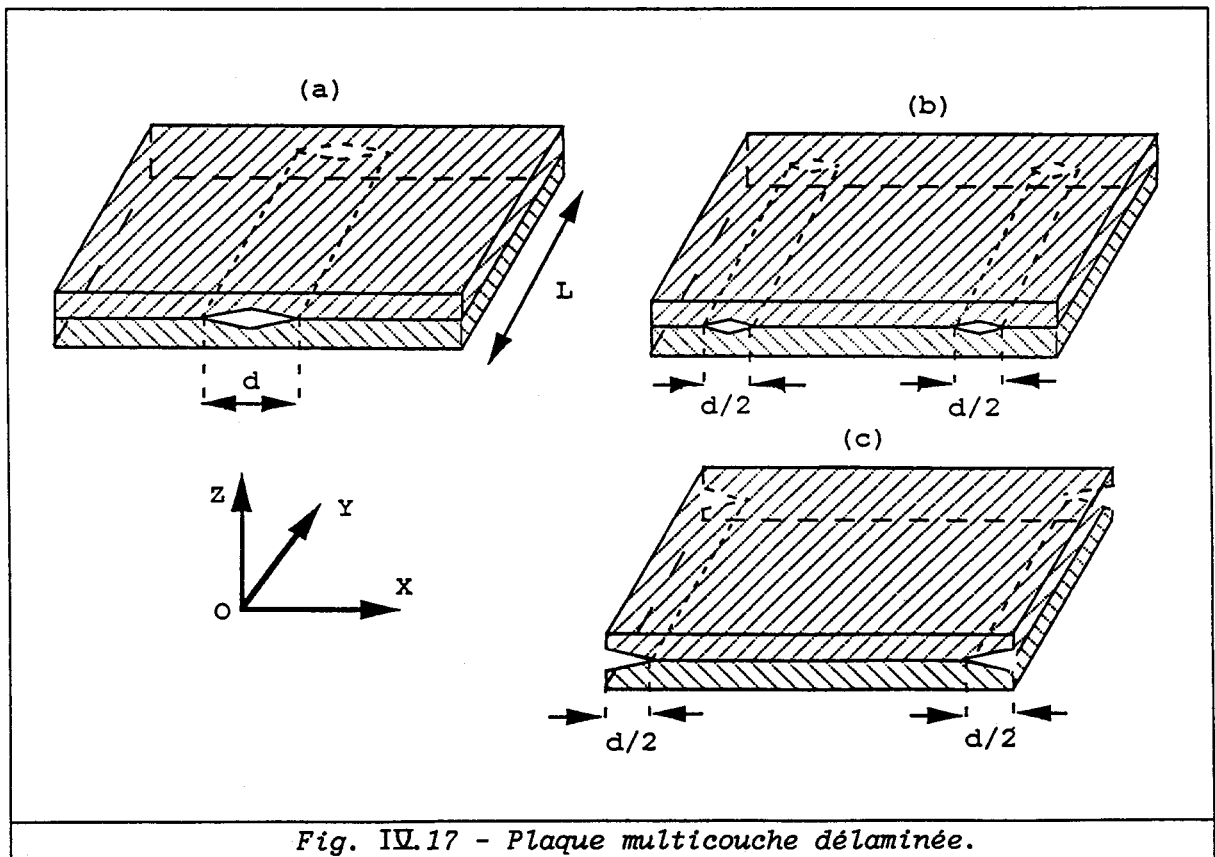
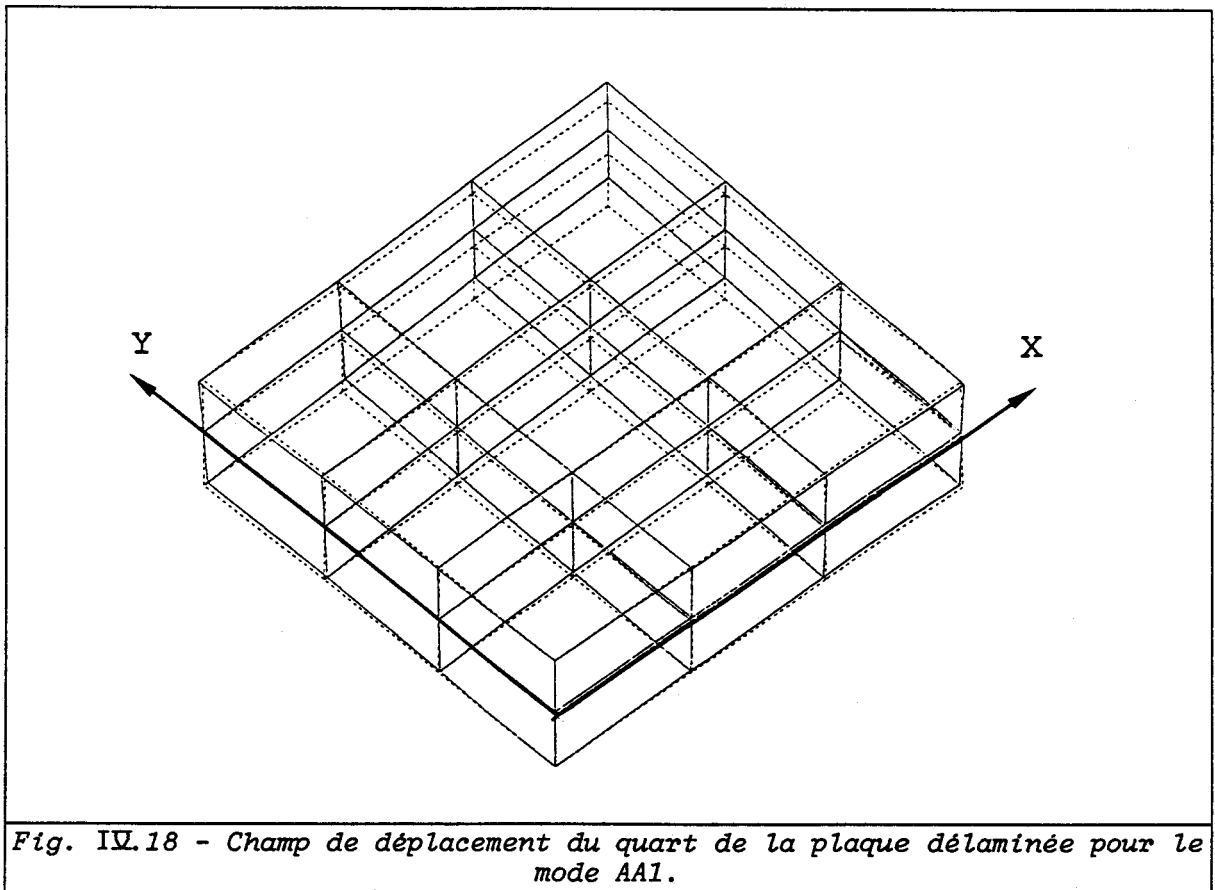


Fig. IV.17 - Plaque multicouche délaminée.

On remarque que la baisse de la fréquence de résonance est plus importante lorsque le bord de la plaque est délaminé (Fig. IV.17-c). Ceci s'explique du fait qu'une extrémité de la fissure est libre. Cette baisse de la fréquence est plus grande, pour les modes ayant une variation de déformée

selon l'abscisse X (Tableau IV.4, SS2), lorsque la fissure s'éloigne du ventre de vibration. La baisse des fréquences des modes ayant une variation de déformée selon l'ordonnée Y (Tableau IV.4, SS1) ne dépend pas de la localisation de la fissure. Ceci est dû à la répartition uniforme de contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  suivant l'axe OX.

En conclusion, l'évolution des fréquences de résonance d'une plaque composite endommagée dépend de l'amplitude de la fissure, de la localisation de la zone endommagée, de la séquence d'empilement et de la nature du matériau qui la constitue. Dans le cas du délaminage, les variations des fréquences sont fonction des contraintes de cisaillement modifiées par la zone endommagée. La diminution la plus significative affecte la fréquence des modes propres SA2 et SS3. Par contre, dans le cas d'une cassure des fibres ou de la matrice, ces variations sont fonction des contraintes normales. Les fréquences des modes SS2 et SA1 sont les plus affectées.



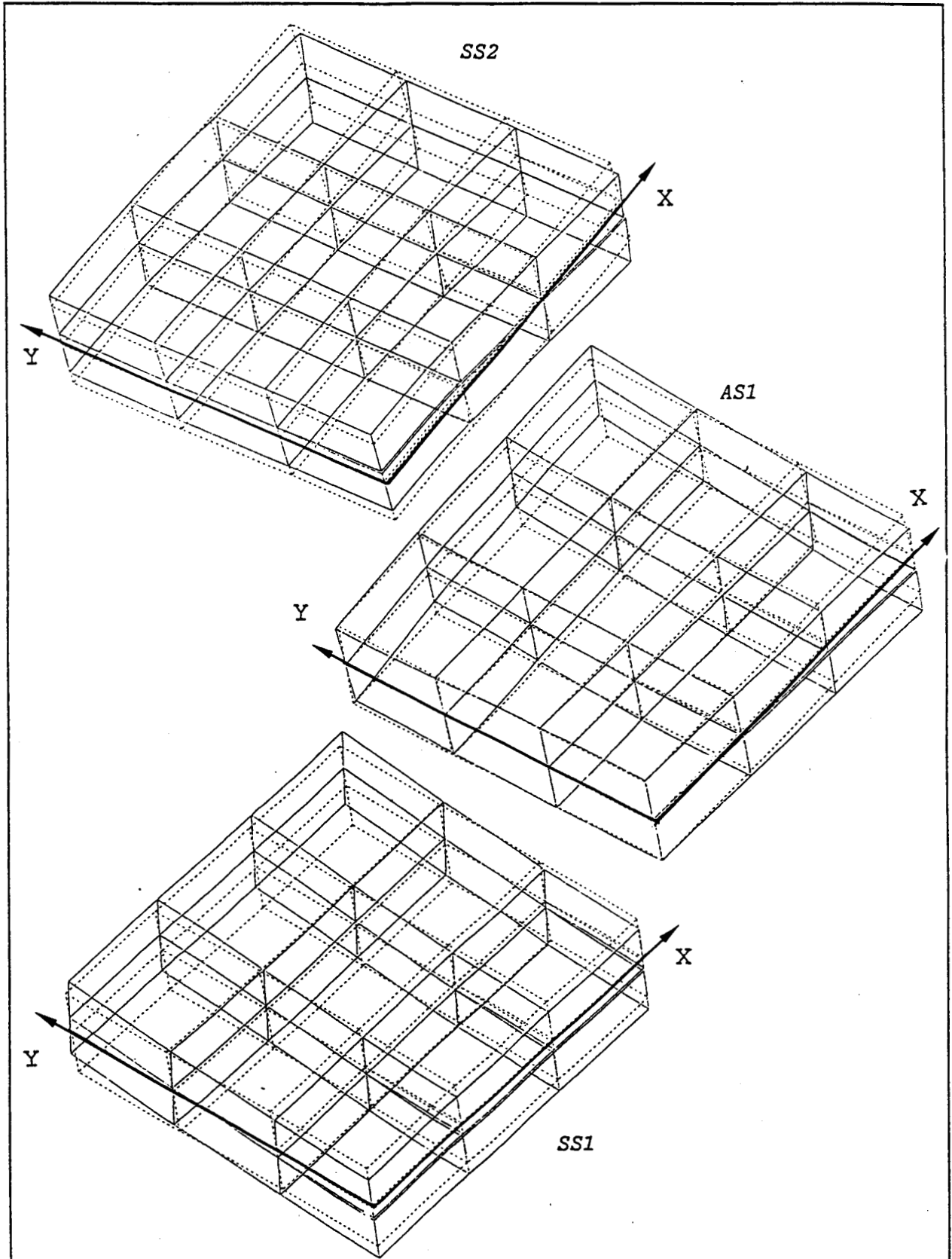


Fig. IV.19 - Champ de déplacement du quart de la plaque pour les modes SS1, AS1 et SS2.



## IV - 2.2 Etude du comportement dynamique de la coque d'un transducteur flexensionnel

### IV - 2.2.1 Maillage utilisé

La structure analysée est la coque d'un transducteur flexensionnel en matériau composite (Fig. IV.20). Pour des raisons de symétrie, seule la moitié de la structure a été modélisée. Le maillage utilisé comporte 28 éléments. Comme précédemment, la prise en compte de la fissure a été réalisée en écartant les noeuds appartenant à la frontière de la fissure.

### IV - 2.2.2 Résultats

On présente dans le tableau IV.5, pour chaque mode de rupture, les variations des huit premières fréquences de résonance de la coque. Un mode symétrique par rapport au plan YOZ et antisymétrique par rapport au plan XOY sera noté SA (symétrique-antisymétrique).

Mode propre	AS1	SS1	AA1	SA1	SS2	AS2	SA2	SS3
Mode d'endommagement	%	%	%	%	%	%	%	%
Délaminage	15	16	20	22	19	27	19	25
Cassure des fibres	0	37	0	14	10	0	4	7
Cassure de la matrice	0	15	0	5	4	0	1,5	3

Tableau IV.5 - Variations maximales des huit premières fréquences de résonance (Orientation des fibres  $\varphi = 0^\circ$ ).

La variation des fréquences de résonance est liée au mode de vibration. Dans le cas de la cassure de la matrice (Fig. IV.21) et des fibres (Fig. IV.22), la fréquence des modes propres dont la déformée varie avec l'abscisse X (Fig. IV.23-a) est la plus affectée. En effet, la diminution de fréquence la plus importante est obtenue pour les modes SS1, SA1, SS2 et SS3 parce que la zone endommagée se situe sur le ventre de vibration. Le mode SS1 est le plus affecté car la contrainte normale associée à la coque excitée sur son mode AS1 est la plus importante. En ce qui concerne les modes AS1, AA1 et AS2, leurs fréquences sont inchangées parce qu'ils ont une ligne nodale située dans la zone endommagée. On note

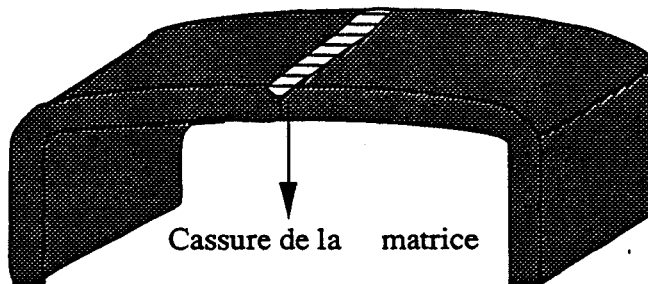
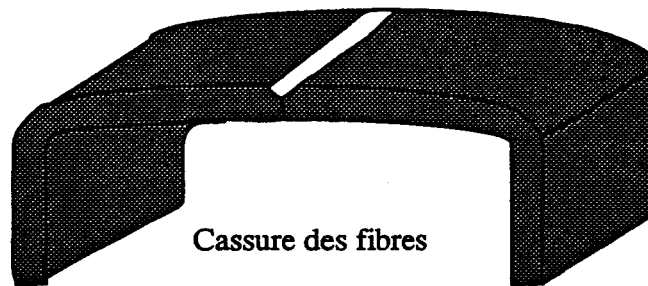
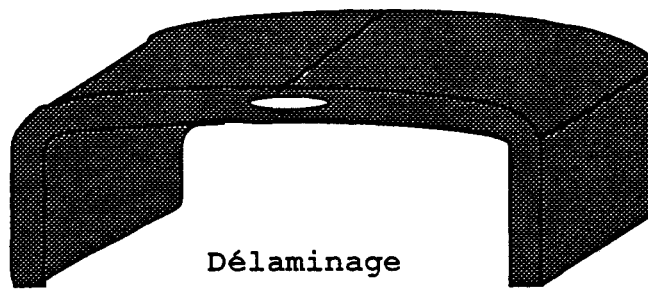
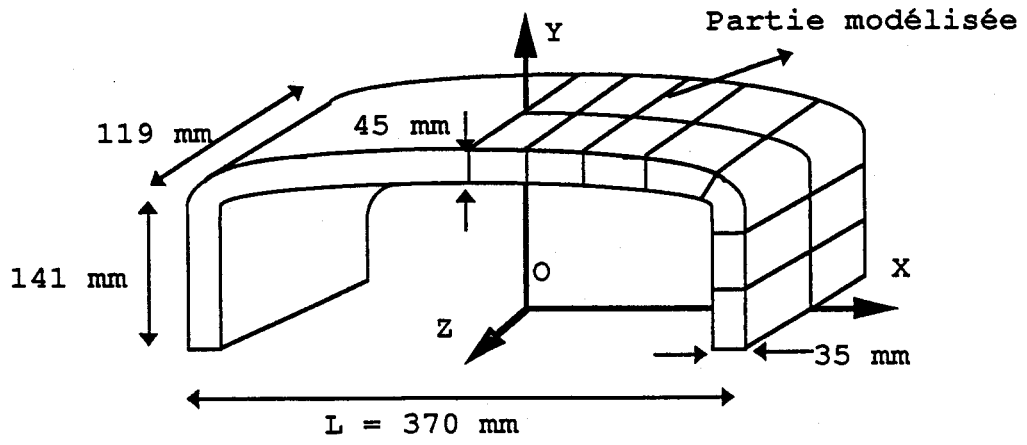


Fig. IV.20 - Coque multicouche endommagée.

également que la baisse des fréquences des modes dont la déformée varie avec l'abscisse X et l'azimut Z (Fig. IV.23-b), est peu importante (mode SA2). De plus, la variation des fréquences dépend des rigidités directionnelles, elles mêmes fonction de l'orientation des fibres. Les figures IV.24 et IV.25 montrent, pour différentes séquences d'empilements, l'évolution de la fréquence normée SS1 en fonction de la longueur de la fissure. Le tableau IV.6 indique les variations de cette fréquence en fonction de la séquence d'empilement. La baisse de fréquence des modes propres dont la déformée varie avec l'abscisse X, est moins importante quand la direction des fibres s'écarte de l'axe OX. La cause est la diminution de rigidité dans cette direction.

Orientation des fibres Mode d'endommagement	$\pm 0^\circ$ %	$\pm 30^\circ$ %	$\pm 45^\circ$ %	$\pm 60^\circ$ %
Délaminage	16	17	13	14
Cassure des fibres	37	30	25	24
Cassure de la matrice	15	12	10	9

Tableau IV.6 - Variations maximales de la fréquence de résonance SS1.

Dans le cas de l'endommagement par délaminage, la figure IV.26 montre que tous les modes sont affectés. De même, la baisse des fréquences de résonance dépend de la déformée de la structure excitée, elle est fonction des contraintes de cisaillement modifiées par la zone endommagée. Les modes AS2 et AA1 sont les plus sensibles pour des fissures de petites dimensions car la zone endommagée se situe dans un plan nodal.

La figure IV.27 montre les variations de la fréquence du premier mode supplémentaire en fonction de la longueur de la fissure et pour différentes séquences d'empilement des fibres. Ces variations diminuent quand l'écart entre la direction des fibres et l'axe OX augmente, à cause de la baisse de rigidité dans cette direction.

Le croisement des modes ne se produit que dans le cas des fissures de grandes dimensions (Fig. IV.23 ; modes AS1 et AA1 ; modes SS1 et AA1) à cause de la faible variation de rigidité directionnelle.

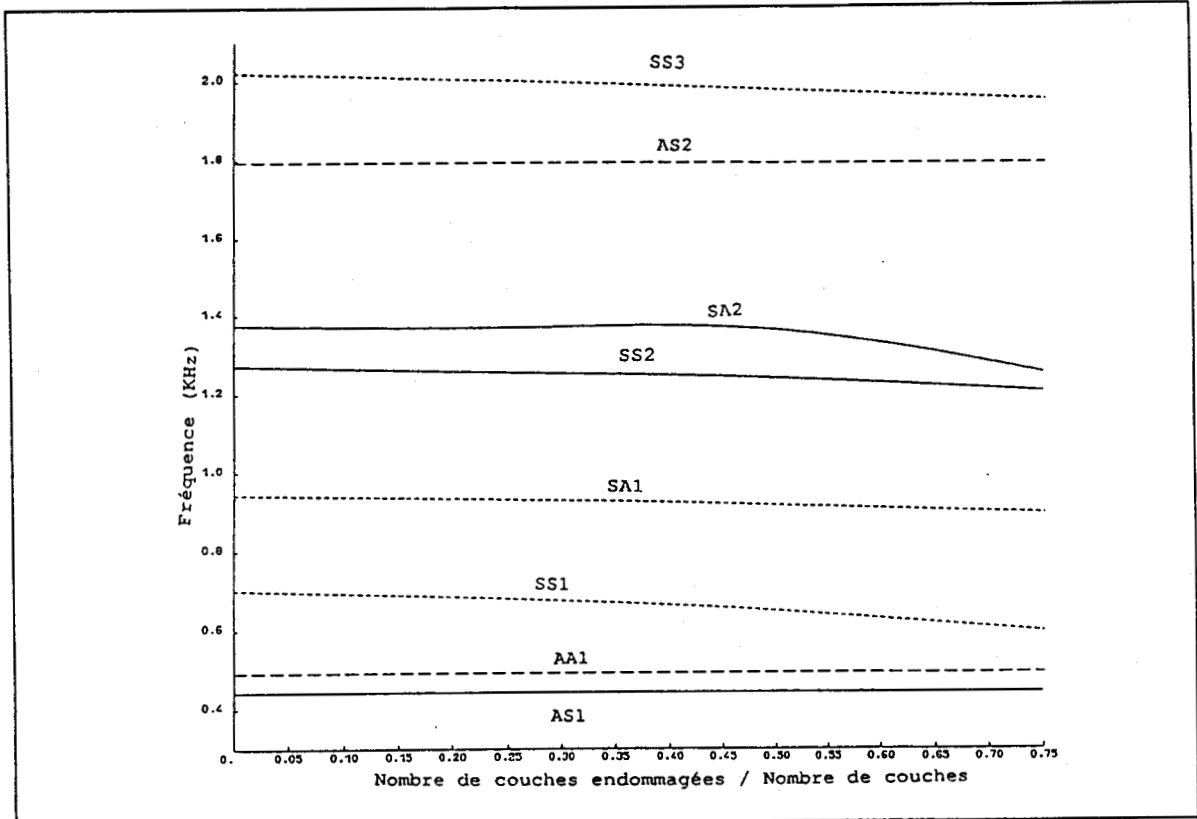


Fig. IV.21 - Evolution des huit premières fréquences en fonction du nombre de couches endommagées (cassure de la matrice).

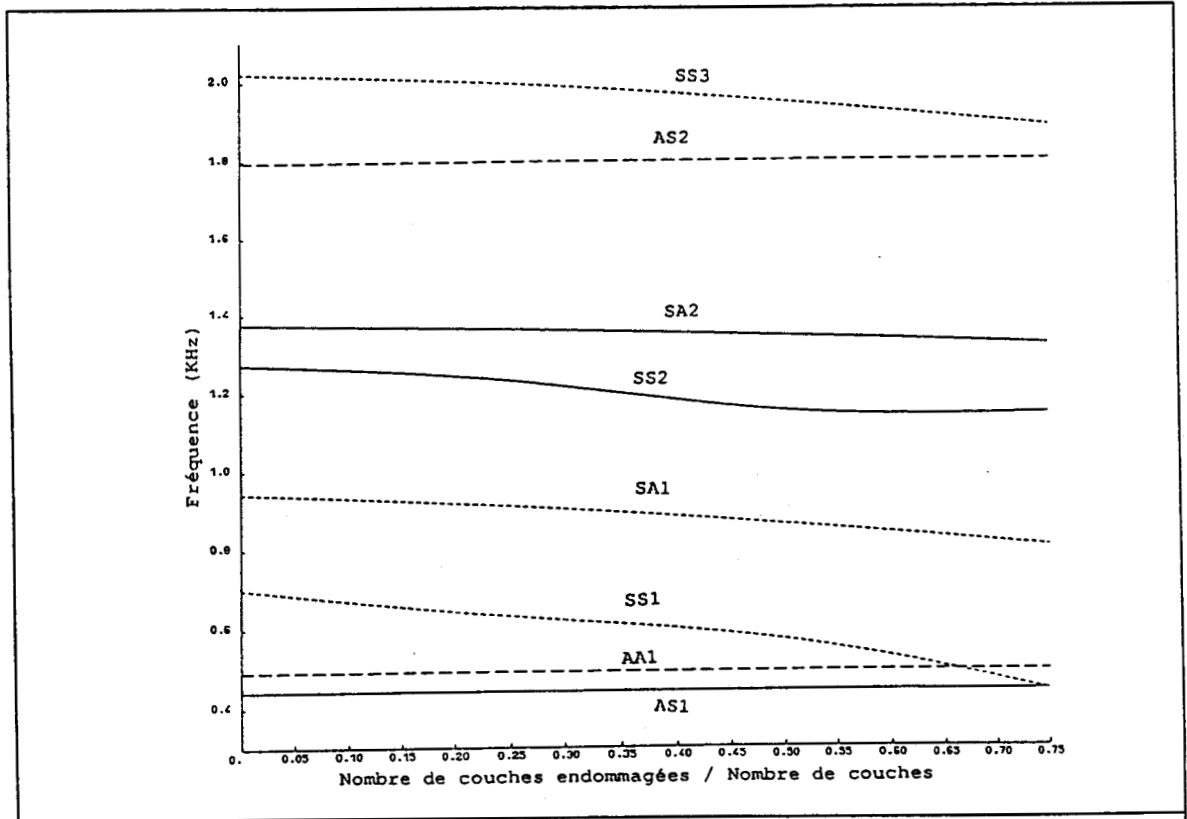
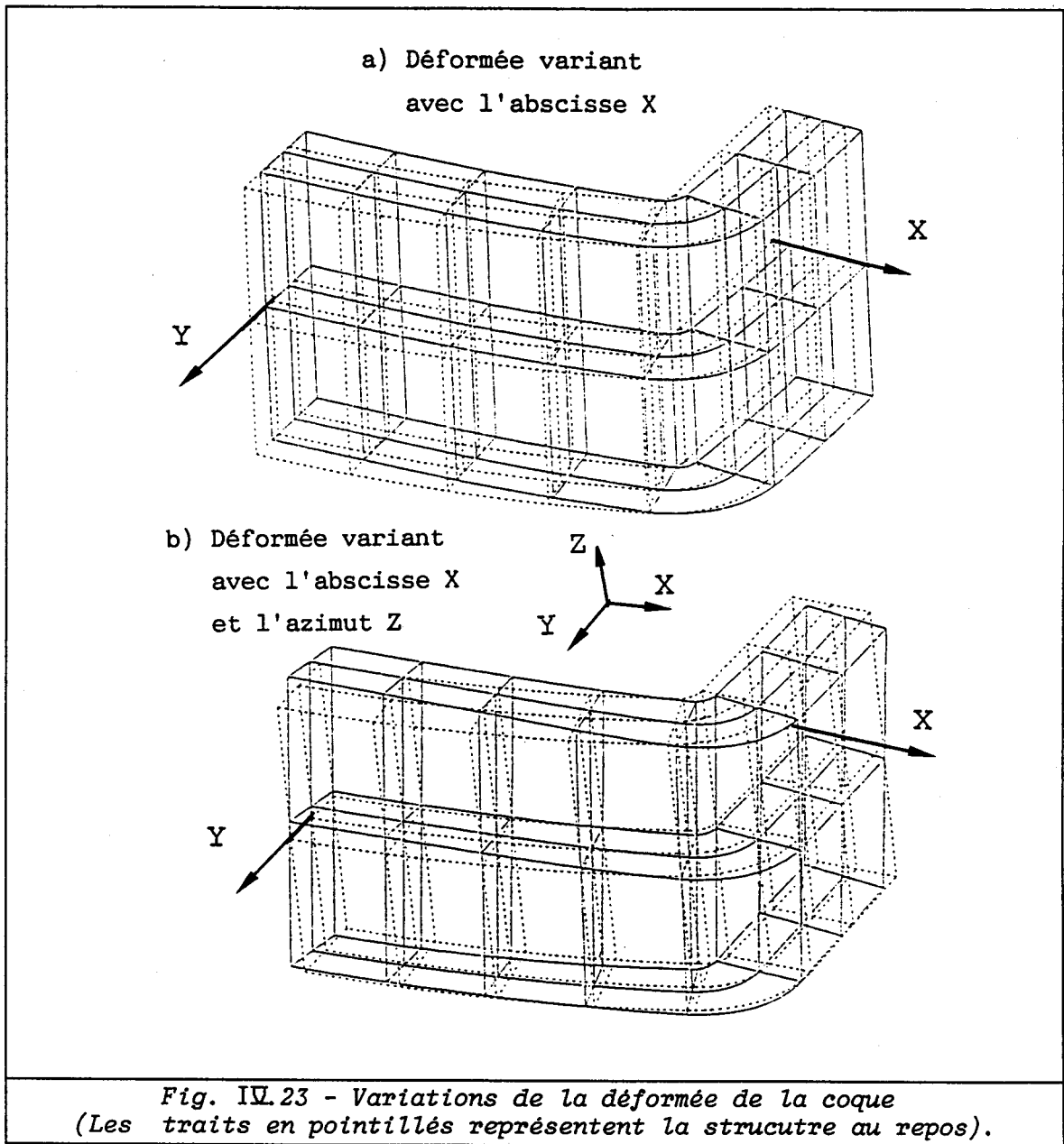


Fig. IV.22 - Evolution des huit premières fréquences en fonction du nombre de couches endommagées (cassure des fibres).



En conclusion, l'endommagement par délaminage de la coque d'un transducteur flexionnel provoque une baisse des fréquences propres, notamment pour des fissures de grandes dimensions. La baisse du mode fondamental (AS1) atteint 15% de sa valeur initiale quand la longueur de la fissure est  $0.7L$  et que les fibres sont parallèles à l'axe  $OX$ . Dans le cas des autres modes de rupture, le mode fondamental n'est pas affecté. Seuls les modes ayant un ventre de vibration coïncidant avec la zone endommagée montrent une variation notable de fréquence.

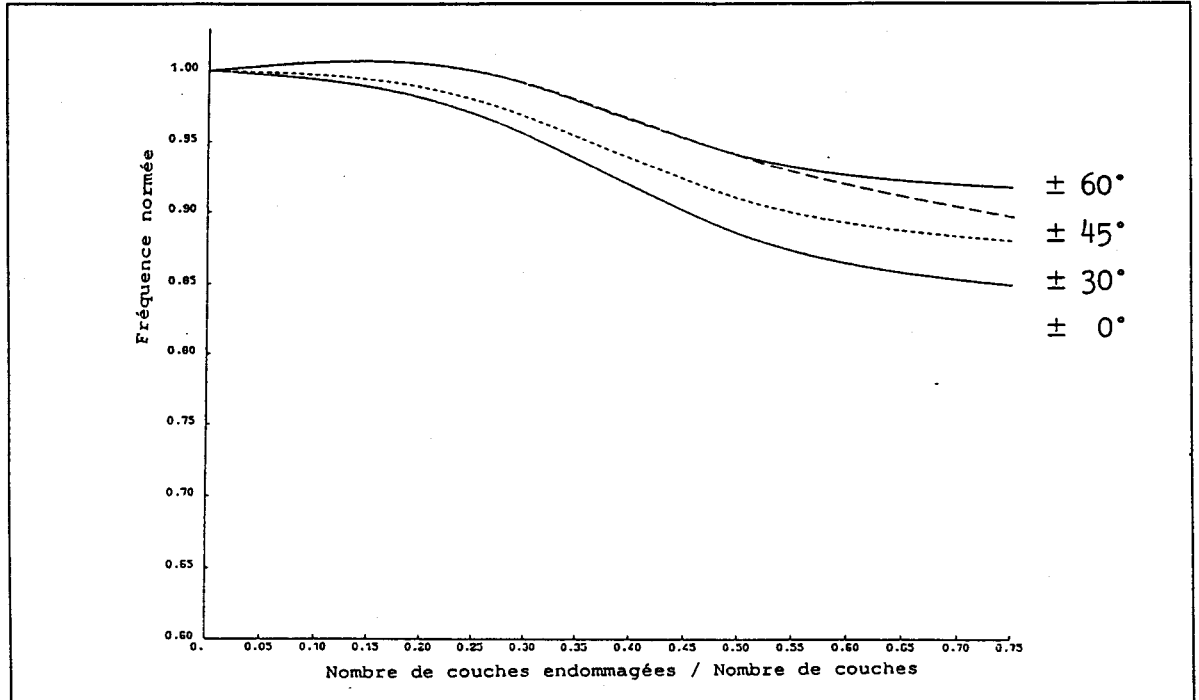


Fig. IV.24 - Evolution de la fréquence normée SS1 en fonction du nombre de couches endommagées et pour plusieurs séquences d'empilement (cassure de la matrice).

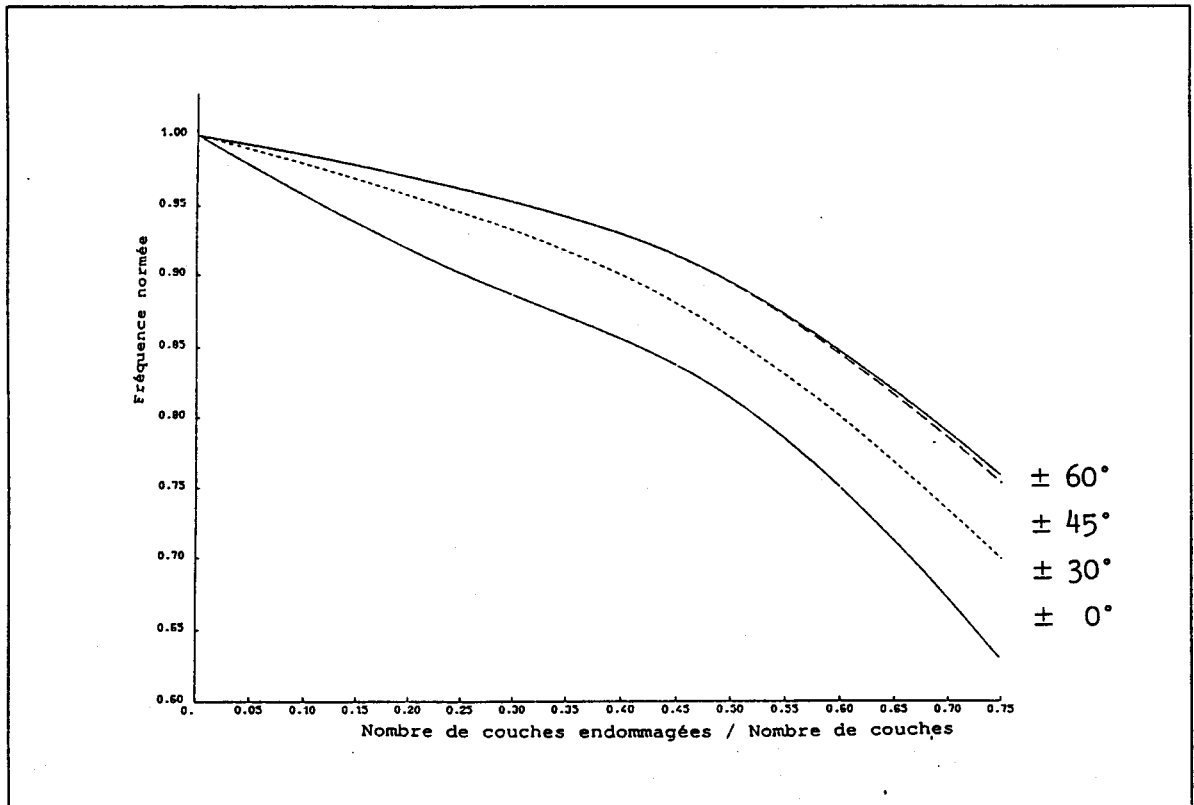


Fig. IV.25 - Evolution de la fréquence normée SS1 en fonction du nombre de couches endommagées et pour plusieurs séquences d'empilement (cassure des fibres).

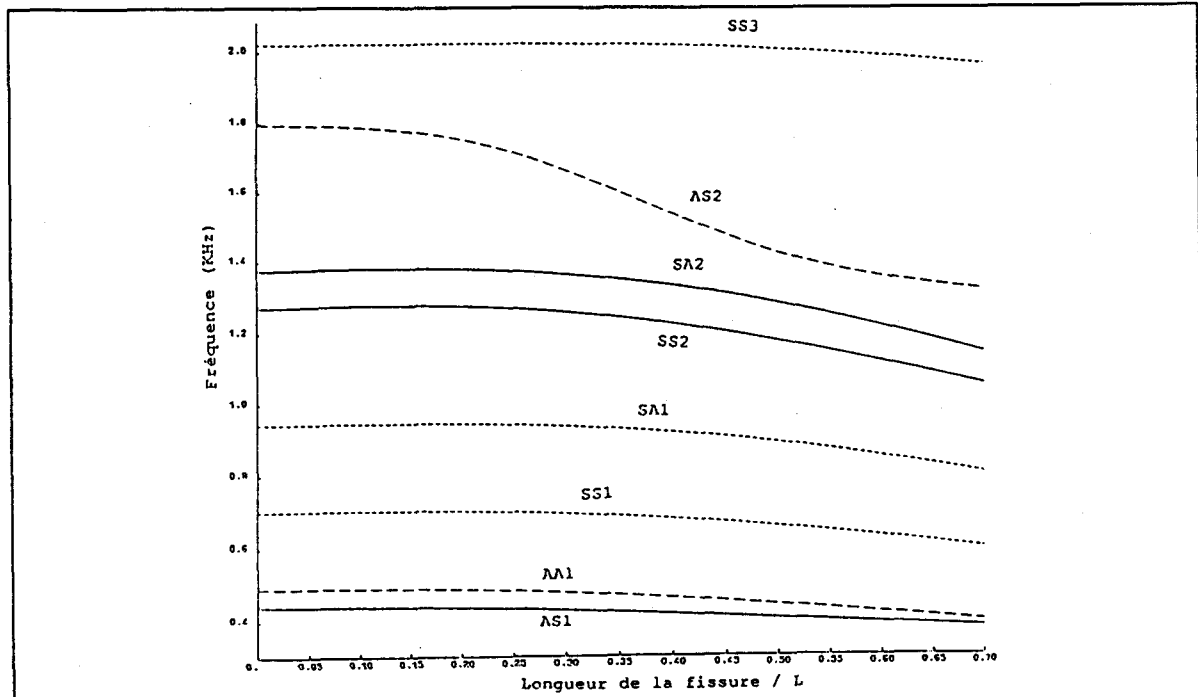


Fig. IV.26 - Evolution des huit premières fréquences en fonction de la longueur de la fissure (délamination).

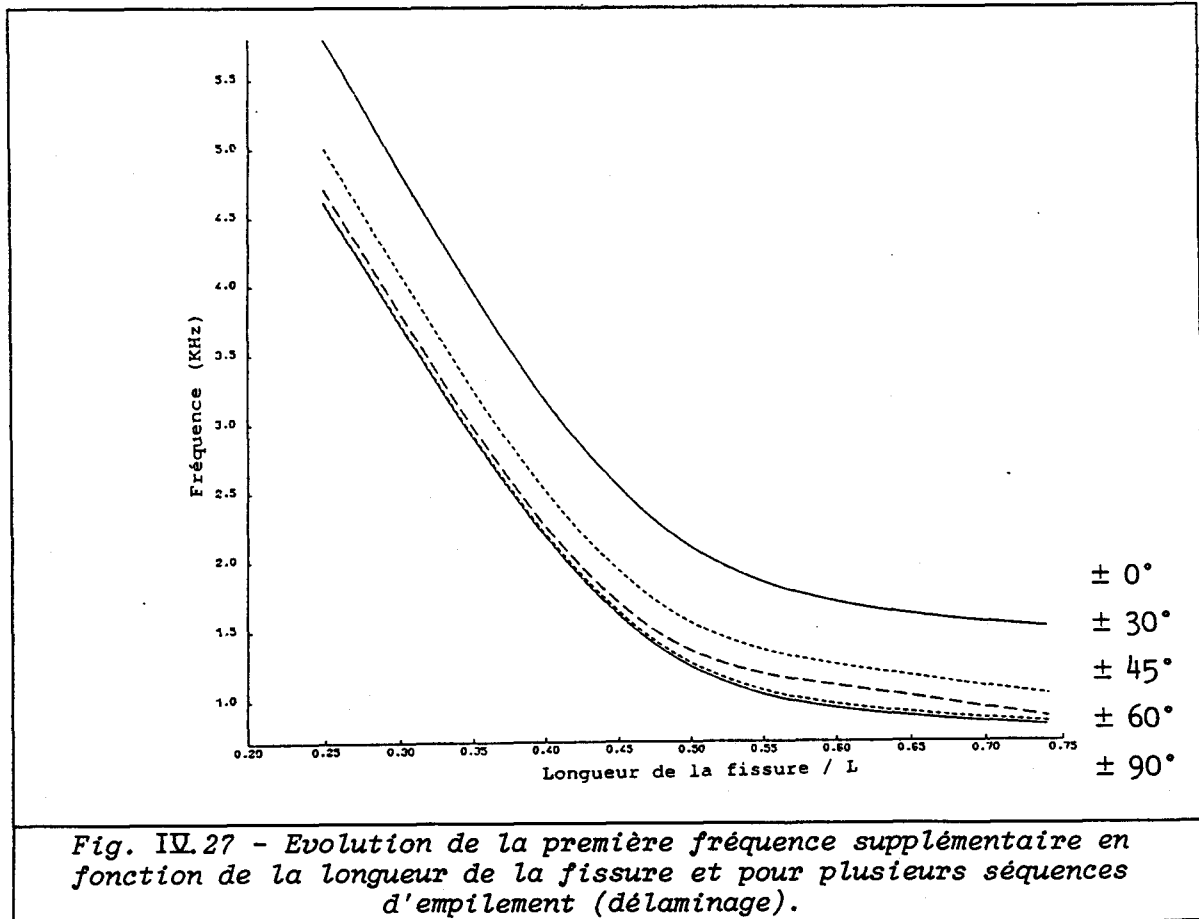


Fig. IV.27 - Evolution de la première fréquence supplémentaire en fonction de la longueur de la fissure et pour plusieurs séquences d'empilement (délamination).

#### IV - 3 CONCLUSION

Les résultats présentés dans ce chapitre montrent que la variation des fréquences de résonance dépend essentiellement du type d'endommagement, de la déformée de la structure excitée et des contraintes modifiées par la zone endommagée. Dans le cas du délaminage, ces variations sont fonction des contraintes de cisaillement modifiées par la zone délaminée. Dans le cas de cassure des fibres, elles sont fonction des contraintes normales. De plus, certains modes propres sont plus affectés que d'autres. Ainsi une analyse modale permet d'évaluer, d'une part l'état réel du matériau (dimensions de la fissure), d'autre part le mode d'endommagement associé. Enfin, cette approche numérique permet d'étudier des structures de géométrie quelconque, constituées de matériaux de nature diverse et soumises à des sollicitations complexes. Les résultats présentés montrent la précision et l'efficacité de cette approche.



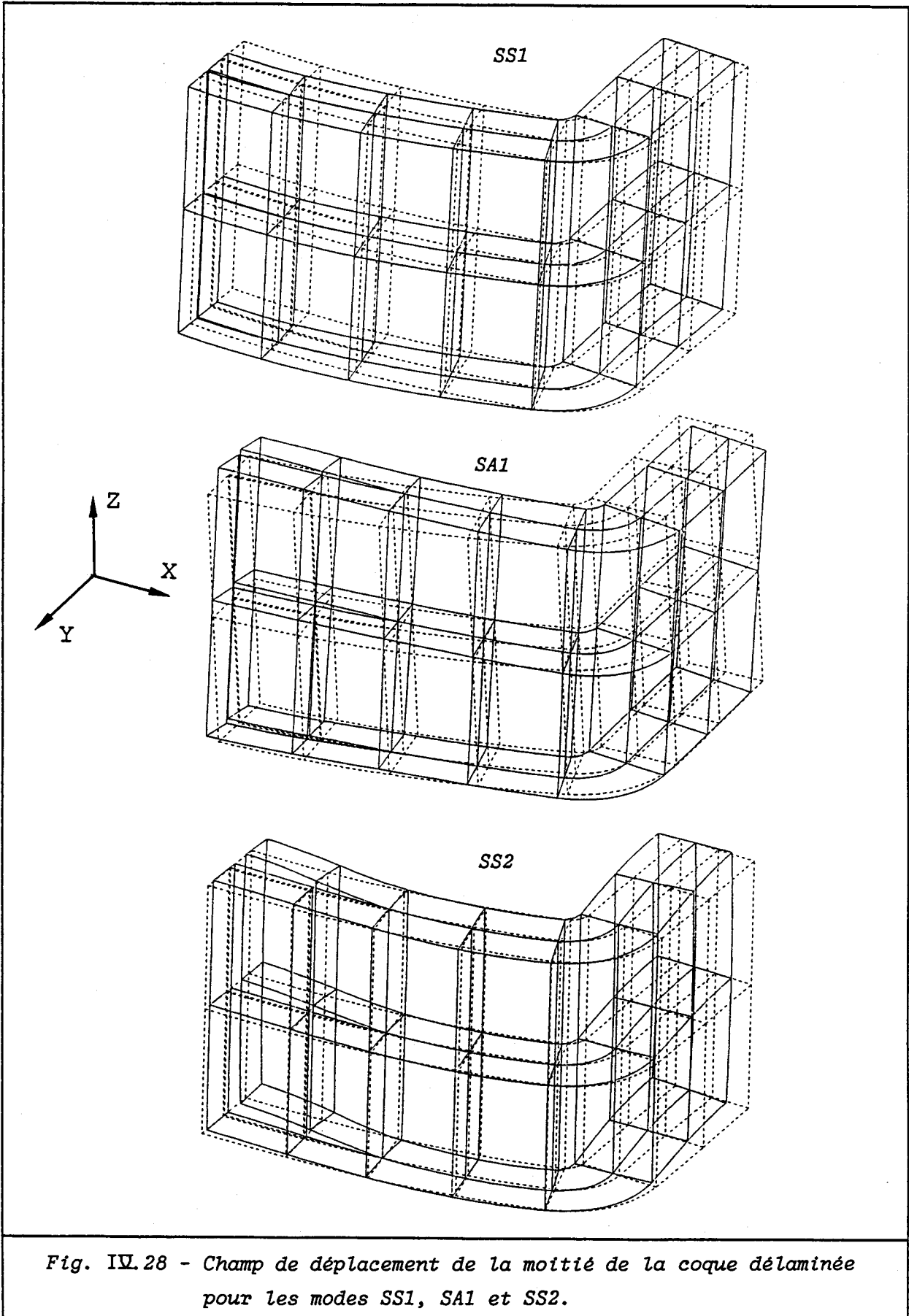


Fig. IV.28 - Champ de déplacement de la moitié de la coque délaminée pour les modes *SS1*, *SA1* et *SS2*.

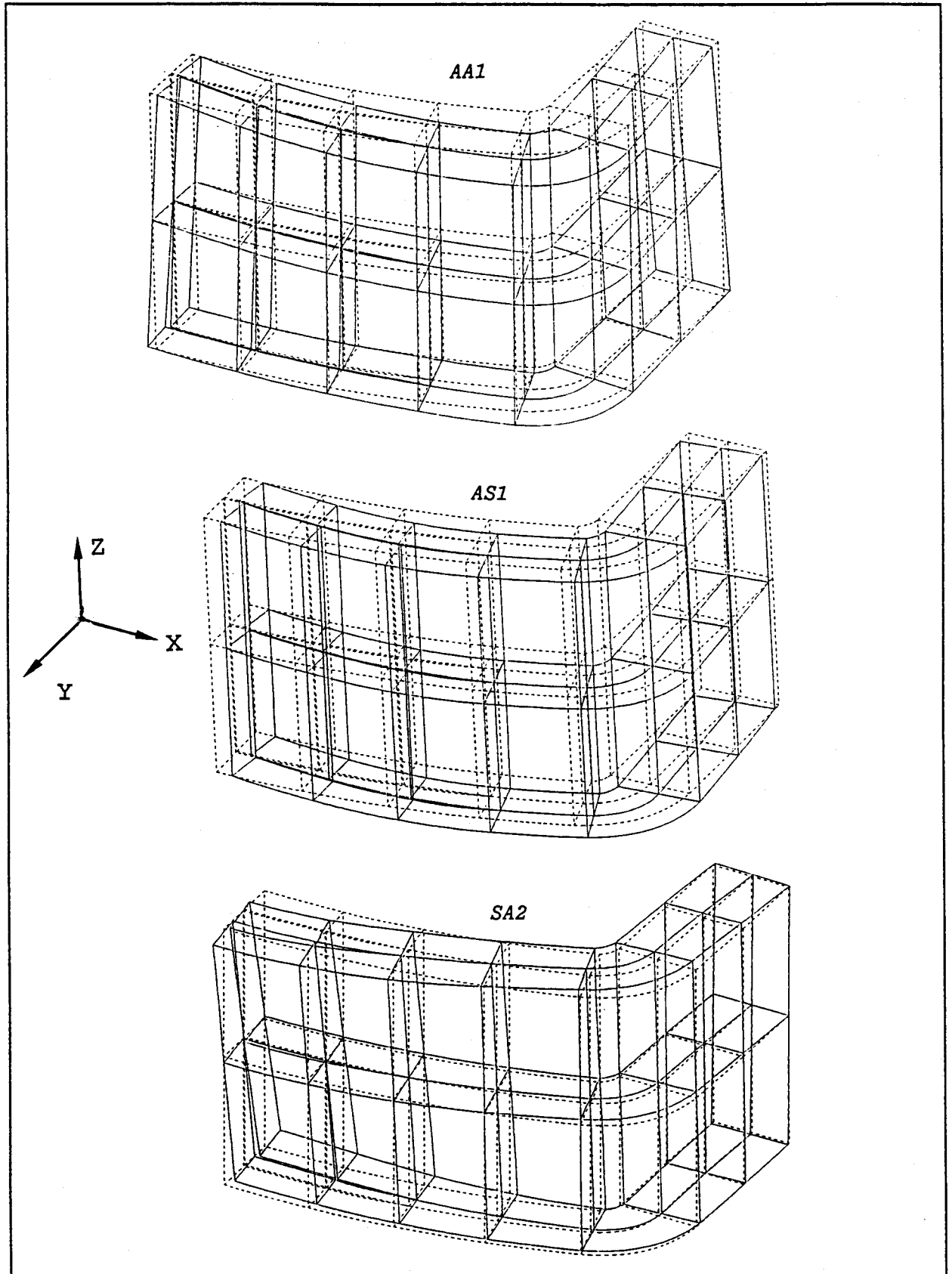


Fig. IV.29 - Champ de déplacement de la moitié de la coque délamifiée pour les modes AA1, AS1 et SA2.

## CHAPITRE V

### ETUDE EXPERIMENTALE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UNE PLAQUE ENDOMMAGEE

*L'objet de ce chapitre est de comparer des résultats numériques à des résultats expérimentaux, pour une plaque endommagée, de façon à valider l'approche numérique proposée. Le calcul de la variation des modes propres en fonction de l'amplitude de la fissure est présenté dans la seconde partie ainsi que la comparaison aux résultats expérimentaux.*



## V - 1 DESCRIPTION DES ESSAIS

### V - 1.1 Méthode et principe de mesure

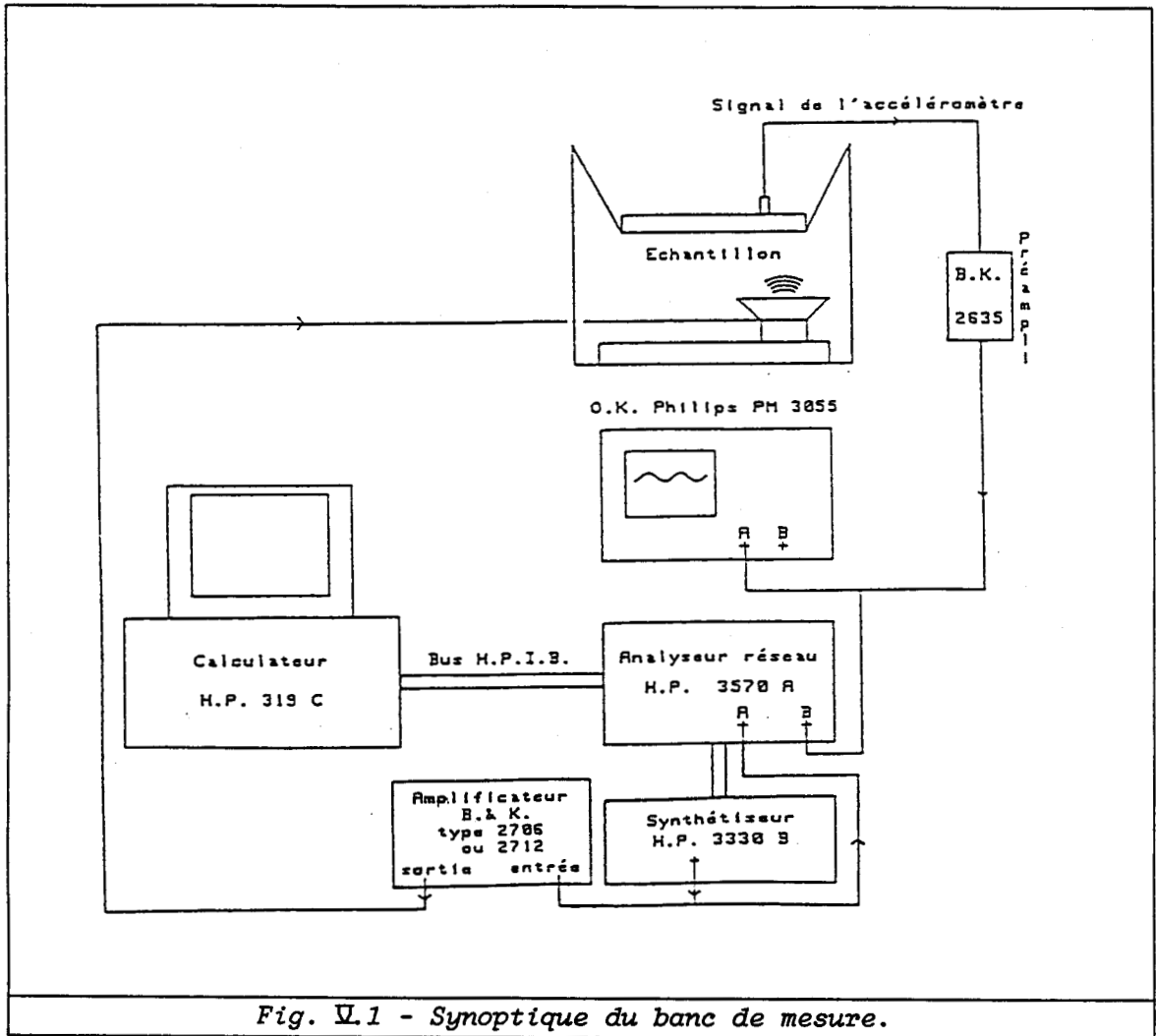
Pour obtenir les fréquences propres et le champ de déplacement des différents modes d'une structure mécanique, le dispositif expérimental schématisé ci-après (Fig. V.1) a été employé. Les résonances sont excitées par un haut-parleur et sont détectées par un accéléromètre qui, pour ne pas perturber le déplacement du point de mesure, doit avoir une taille et une masse négligeables par rapport à la plaque. Le dispositif permet une analyse depuis quelques dizaines de Hertz jusqu'à quarante kilohertz environ. L'excitation est transmise par un couplage très lâche (air) qui ne perturbe pas les modes analysés. De plus, en laissant fixe la position de l'excitation par rapport à la structure et en déplaçant l'accéléromètre, une analyse de l'amplitude et de la phase permet le relevé du champ de déplacement. La structure est supportée par des fils de nylon. Compte-tenu de l'amortissement intrinsèque relativement élevé de la plaque étudiée, la perturbation occasionnée par le support est faible, sinon négligeable.

### V - 1.2 Aspects informatiques

L'acquisition des nombreuses informations nécessaires et leur exploitation est facilitée par un logiciel développé au laboratoire, caractérisé par une forte interactivité, une grande flexibilité des opérations réalisées et une visualisation graphique efficace des résultats (représentation animée ou non des objets etc...). Le déroulement normal d'une analyse comporte deux étapes détaillées ci-après.

#### V - 1.2.1 Première étape : estimation des fréquences de résonance

Lors de cette étape, le signal détecté par l'accéléromètre, placé en un point de référence sur la structure, est enregistré tandis que la fréquence d'excitation évolue progressivement entre des limites choisies. Une représentation graphique de la variation avec la fréquence de l'amplitude de vibration du point concerné est alors produite. Ensuite, utilisant une procédure interactive de multi-fenêtrage, on isole les résonances et des acquisitions affinées sont effectuées dans les bandes



retenues. Puis, les valeurs des fréquences de résonances sont affichées. Un autre point de référence peut alors être choisi et la démarche réitérée jusqu'à 10 fois pour permettre des recoupements ultérieurs. A l'issue de ces opérations, on peut visualiser un tableau liant points de référence et fréquences qui procure une estimation immédiate de la répétabilité des mesures.

#### V - 1.2.2 Seconde étape : visualisation des déformées

Lors de cette étape, on déplace l'accéléromètre sur un réseau de points préalablement repérés à la surface de la structure. Pour chaque position, l'amplitude de vibration normale est mesurée, à toutes les fréquences de résonance déterminées lors de la première étape et

sélectionnées par l'opérateur. Par ailleurs, l'opérateur choisit dans le programme une représentation graphique de la structure qui est mise à l'écran et qui comporte, sous forme d'un maillage, le réseau des points de mesure. Dès lors, pour chaque fréquence retenue, le calculateur peut, à l'aide des déplacements mesurés, superposer à l'image de la structure au repos l'image de la structure déformée (mode) ou produire une animation de ce déplacement. En outre, le programme permet :

- un choix des angles d'observation,
- une confirmation visuelle à l'écran de la position de l'accéléromètre sur la structure, au cours de l'acquisition,
- une édition graphique documentée.

Cette technique conduit, dans la grande majorité des cas, à une détermination du mode concerné.

### V - 1.3 Description de la plaque

La structure analysée est une plaque rectangulaire en matériau composite, dont les caractéristiques mécaniques et géométriques ont été données dans le troisième chapitre (Tableau III.4 ; plaque N°1). Les fibres ont tout d'abord été coupées suivant la largeur de la plaque tout en conservant la même profondeur de fissure (Fig. V.2). Pour six longueurs différentes de la fissure, nous avons déterminé les fréquences de résonance de la plaque fissurée. Puis, les fibres ont été coupées suivant l'épaisseur, la longueur de la fissure occupant dans ce cas toute la largeur de la plaque. La mesure et le calcul des modes ont été réalisés pour cinq profondeurs différentes de la fissure.

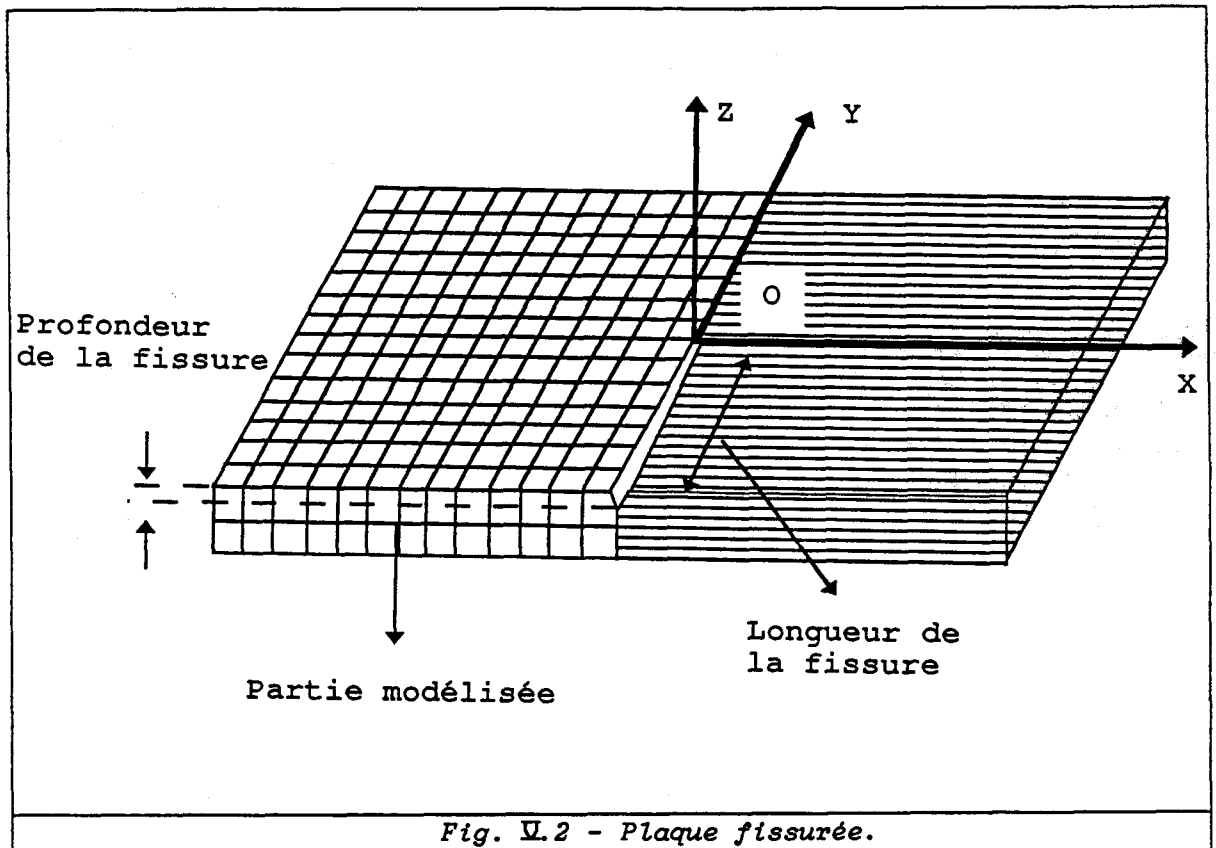


Fig. V.2 - Plaque fissurée.

## V - 2 COMPARAISON DES RESULTATS NUMERIQUES ET EXPERIMENTAUX

### V - 2.1 Modélisation par éléments finis

La plaque admettant un plan de symétrie orthogonal au plan de la plaque, seule la moitié de la structure a été modélisée. En utilisant les conditions aux limites de symétrie et d'antisymétrie du champ de déplacement par rapport au plan YOZ, deux combinaisons sont nécessaires pour reproduire le spectre complet des fréquences de résonance. Le maillage utilise un découpage à  $6 \times 12 \times 2$  éléments, ce qui conduit à un nombre maximal de degrés de liberté de 2700. Comme précédemment, la prise en compte de la fissure a été réalisée, en libérant un certain nombre de noeuds correspondants à la frontière de la fissure.



## V - 2.2 Résultats

Nous avons calculé la variation des fréquences de résonance en fonction de la longueur d'une fissure de profondeur constante. Les résultats théoriques et expérimentaux sont représentés sur les figures V.3 et V.4 ; l'accord entre valeurs calculées et mesurées est satisfaisant. D'autre part, le tableau V.1 indique les baisses des fréquences de résonance de la plaque en fonction des dimensions de la fissure. Un mode symétrique par rapport au plan YOZ et antisymétrique par rapport au plan XOZ sera noté comme SA (symétrique-antisymétrique).

Mode propre Dimensions de la fissure	AA1	SS1	SS2	AS2	AA2	SS3	SA4	SS4
	%	%	%	%	%	%	%	%
Longueur 200 mm Profondeur 2,5 mm	0	10	0	0	0	1,5	3	5
Longueur 200 mm Profondeur 7,5 mm	0	50	0	0	0	6	16	25

Tableau V.1 - Baisses des fréquences de résonance (résultats expérimentaux).

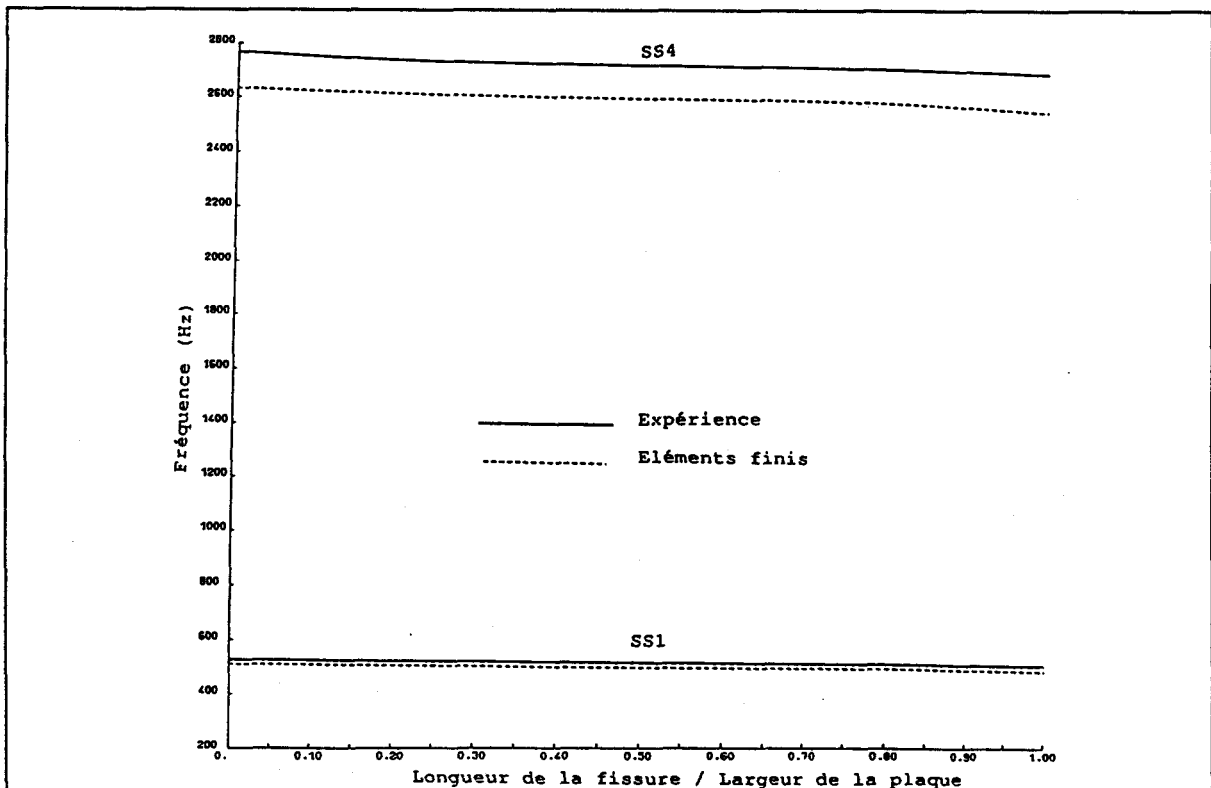
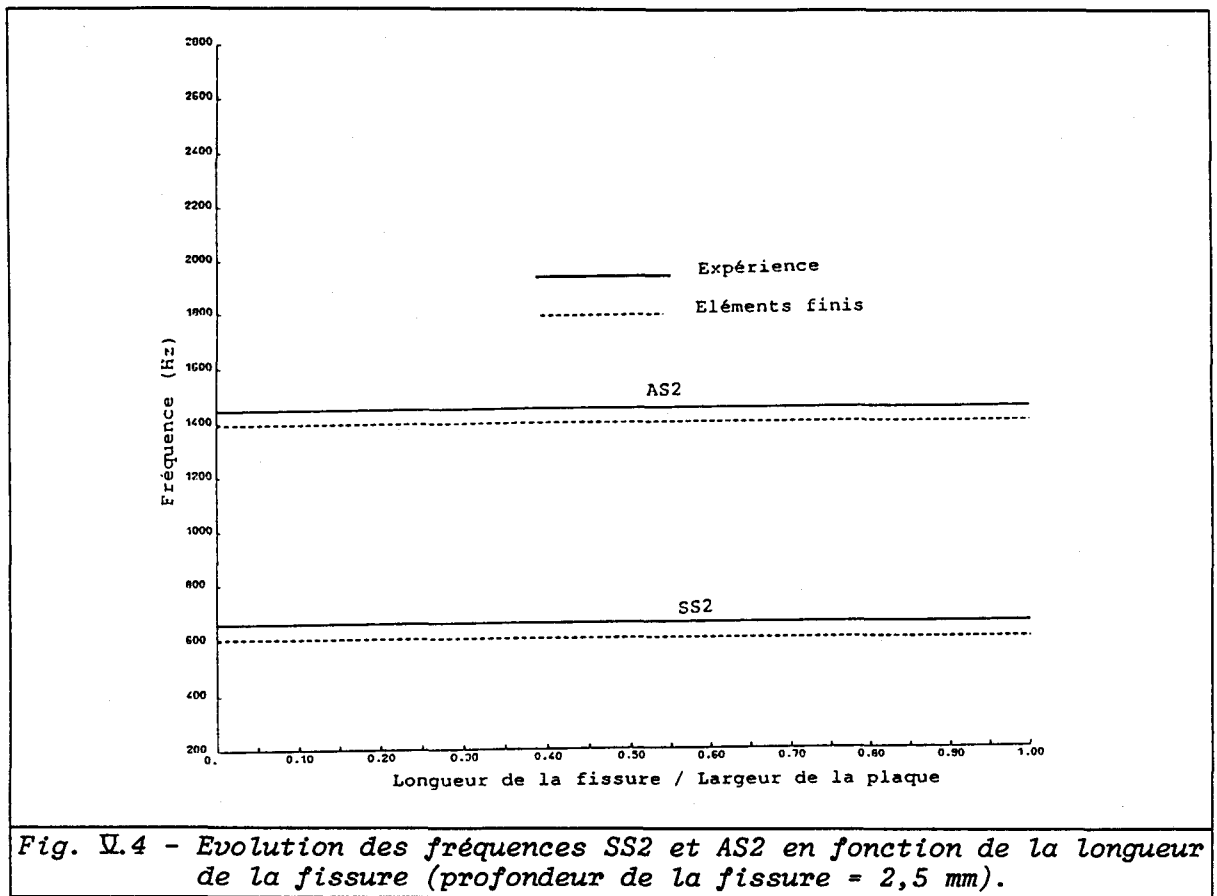


Fig. V.3 - Evolution des fréquences SS1 et SS4 en fonction de la longueur de la fissure (profondeur de la fissure = 2,5 mm).

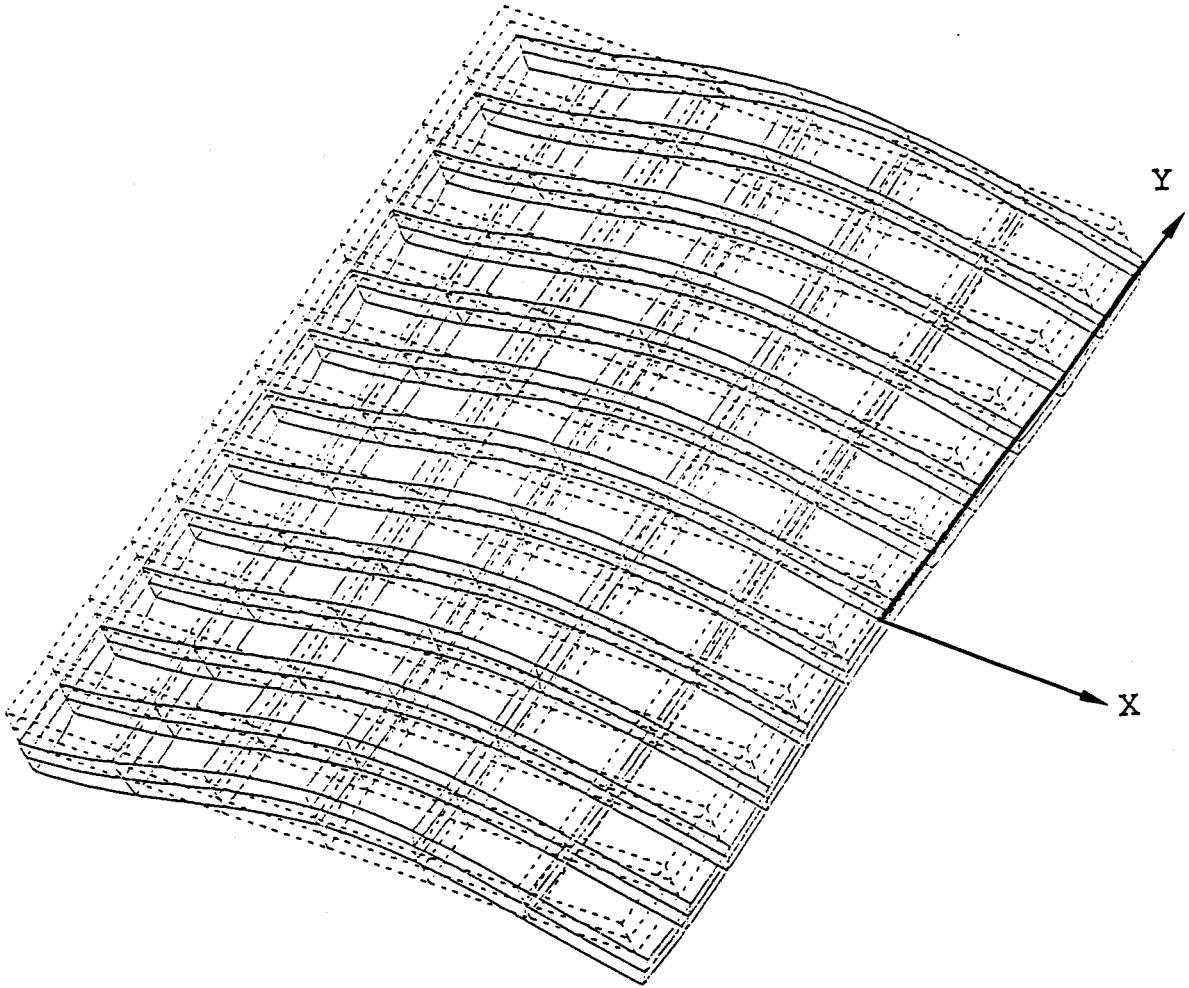


L'examen de ces résultats montre une réduction de la fréquence des modes dont les déformées varient avec l'abscisse X (Fig. V.5). En effet, les valeurs des modes SS1 et SS4 diminuent respectivement de l'ordre de 10% et de 5% (Tableau V.1). Néanmoins, les fréquences des modes ayant une ligne nodale à l'endroit fissuré (modes antisymétriques par rapport au plan YOZ; Fig. V.6), ne varient pas (Tableau V.1 ; modes AA1, AS2 et AA2) car la contrainte normale  $\sigma_{xx}$  est nulle à l'endroit fissuré.

Cependant, les modes dont les déformées varient avec l'ordonnée Y (Fig. V.7) ont une fréquence inchangée (Tableau V.1 ; mode SS2), la baisse de rigidité dans la direction OX ne les affectant pas. En ce qui concerne les modes dont les déformées varient avec l'abscisse X et l'ordonnée Y (Fig. V.8), leurs fréquences sont peu affectées (Tableau V.1 ; mode SS3).

De même, les résultats théoriques et expérimentaux de l'évolution des fréquences de résonance de la plaque, en fonction de la profondeur de la fissure sont reportés sur les figures V.9 à V.10. Les modes affectés sont

E.F. (1/2 plaque) : 2500 Hz



ventre de vibration

Exp. (plaque entière) : 2710 Hz

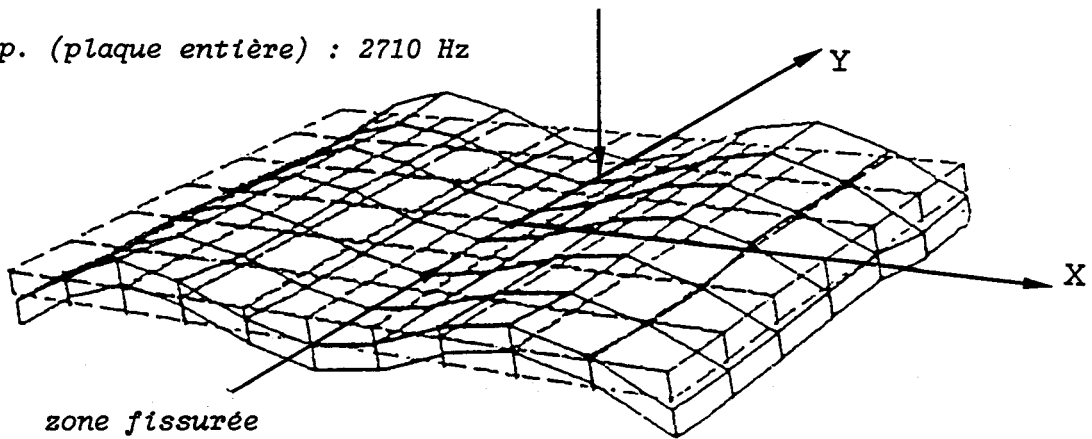


Fig. V.5 - Mode SS4 (profondeur de la fissure = 2,5 mm).

E.F. (1/2 plaque) : 1395 Hz

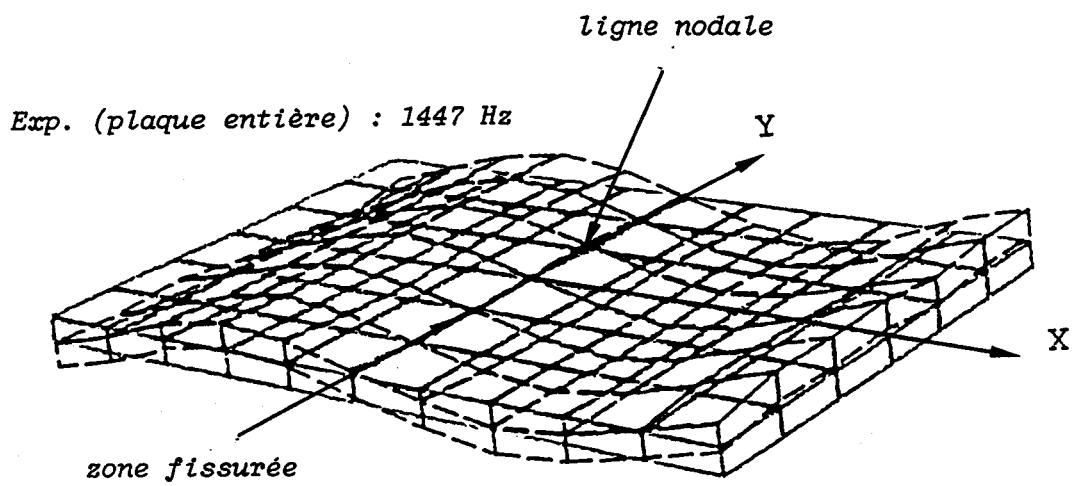
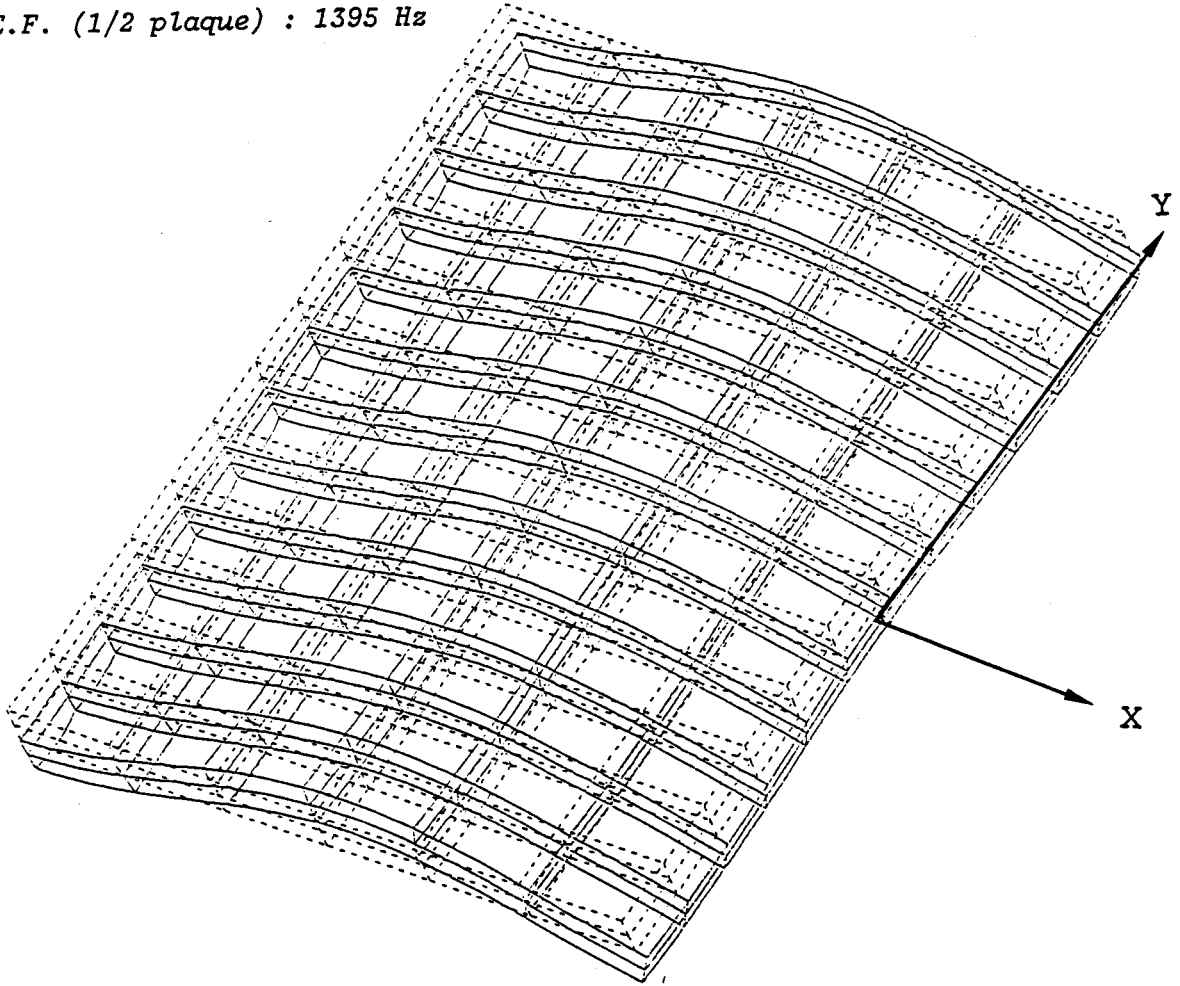
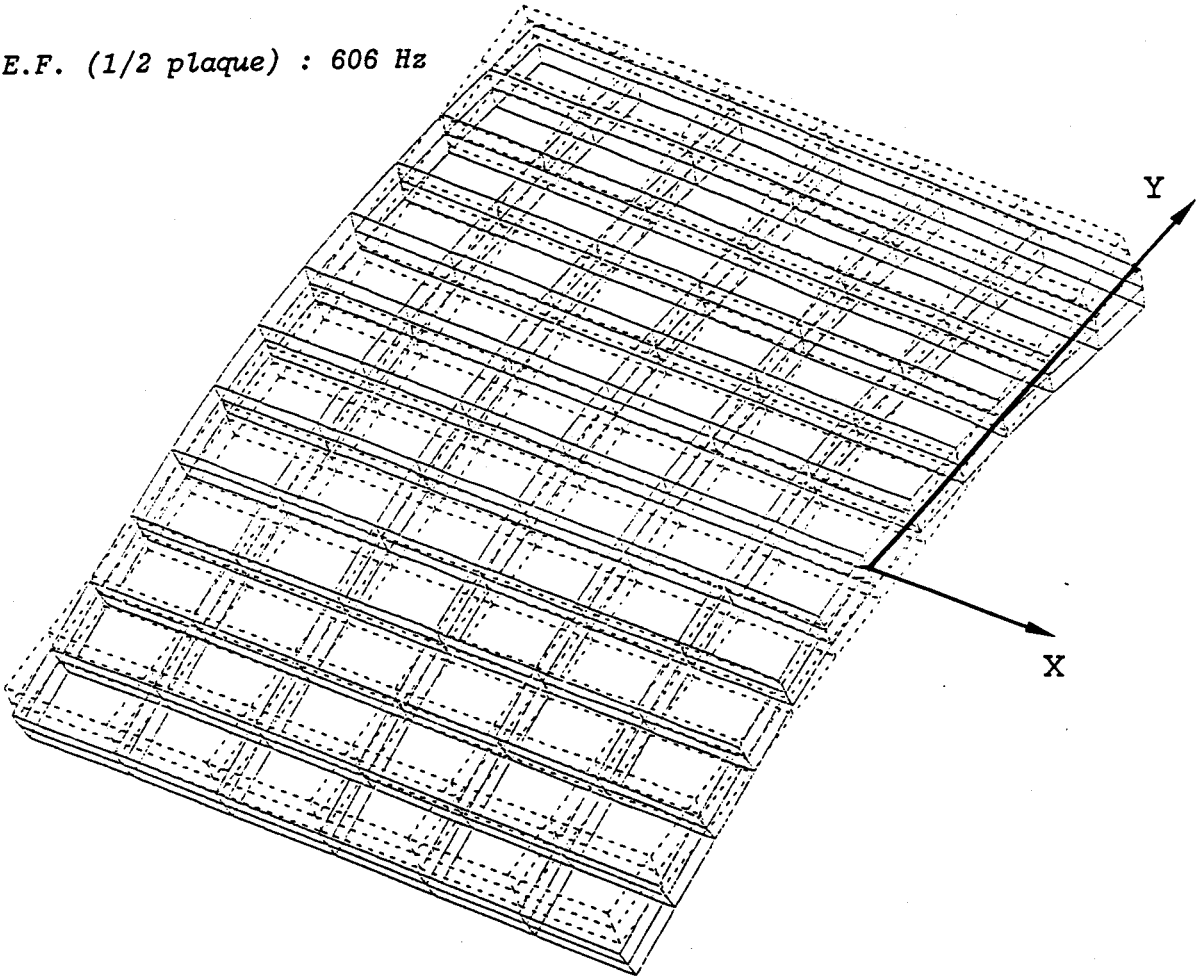


Fig. V.6 - Mode AS2 (profondeur de la fissure = 5,0 mm).

E.F. (1/2 plaque) : 606 Hz



Exp. (plaque entière) : 658 Hz

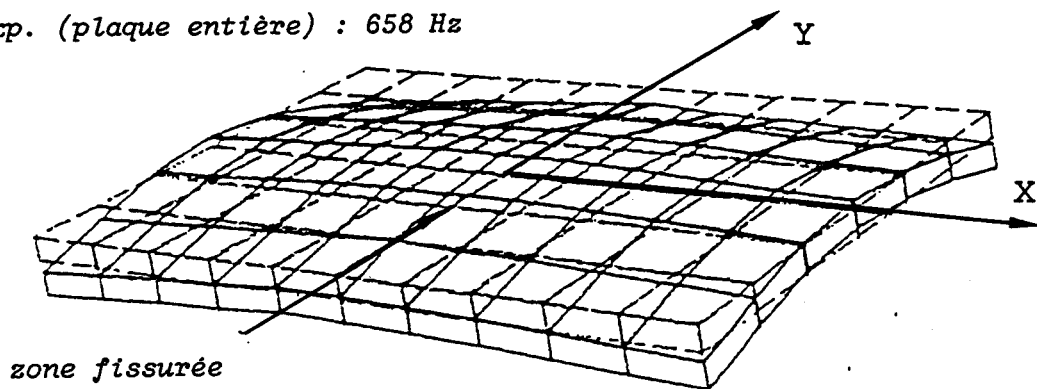
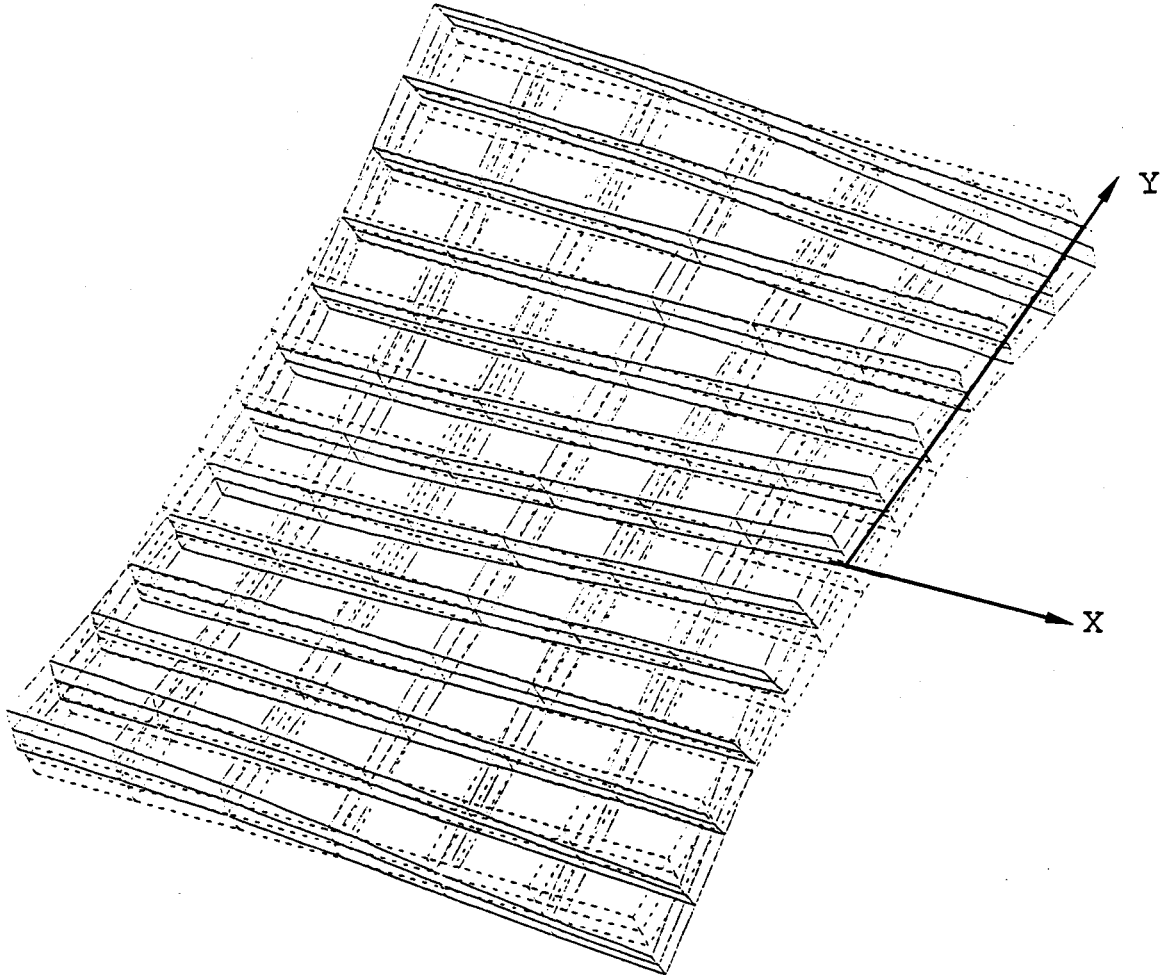


Fig. V.7 - Mode SS2 (profondeur de la fissure = 5,0 mm).

E.F. (1/2 plaque) : 1248 Hz



Exp. (plaque entière) : 1380 Hz

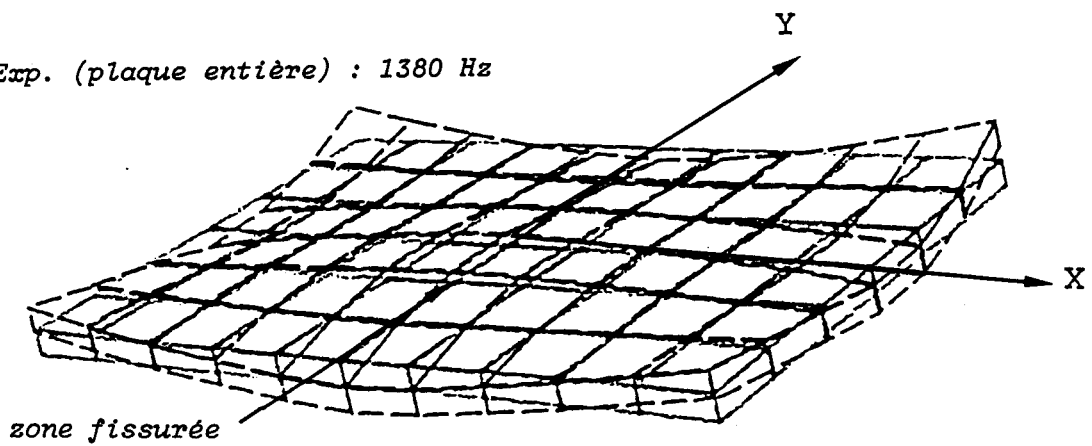


Fig. V.8 - Mode SS3 (profondeur de la fissure = 2,5 mm).

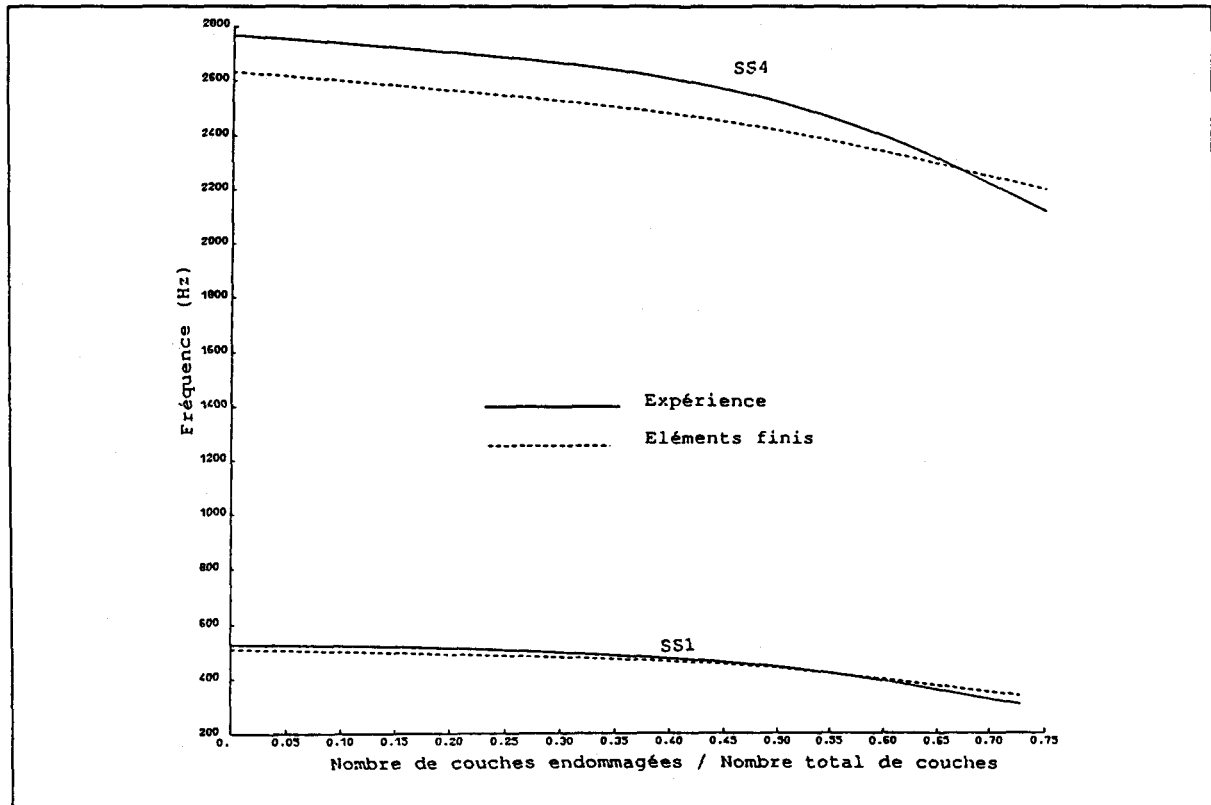


Fig. 9 - Evolution des fréquences SS1 et SS4 en fonction du nombre de couches endommagées.

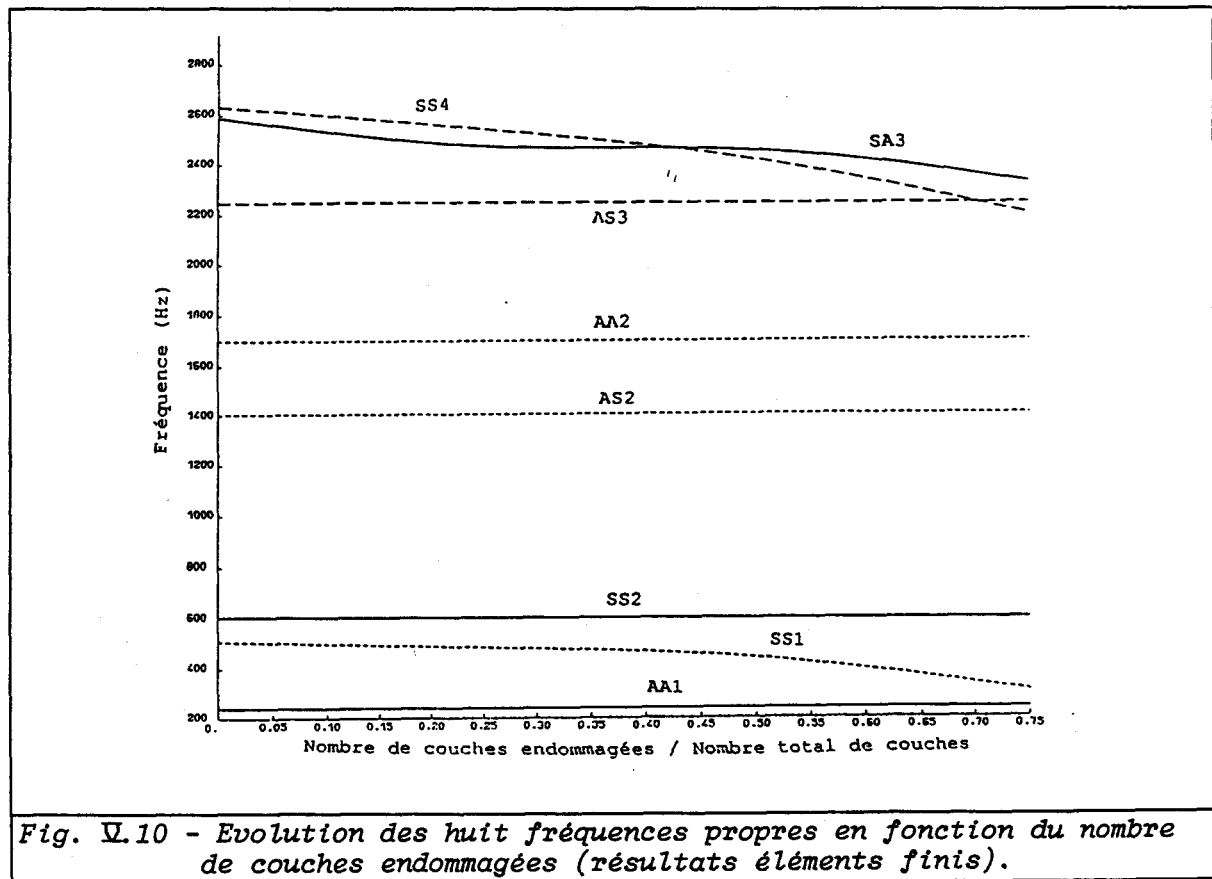
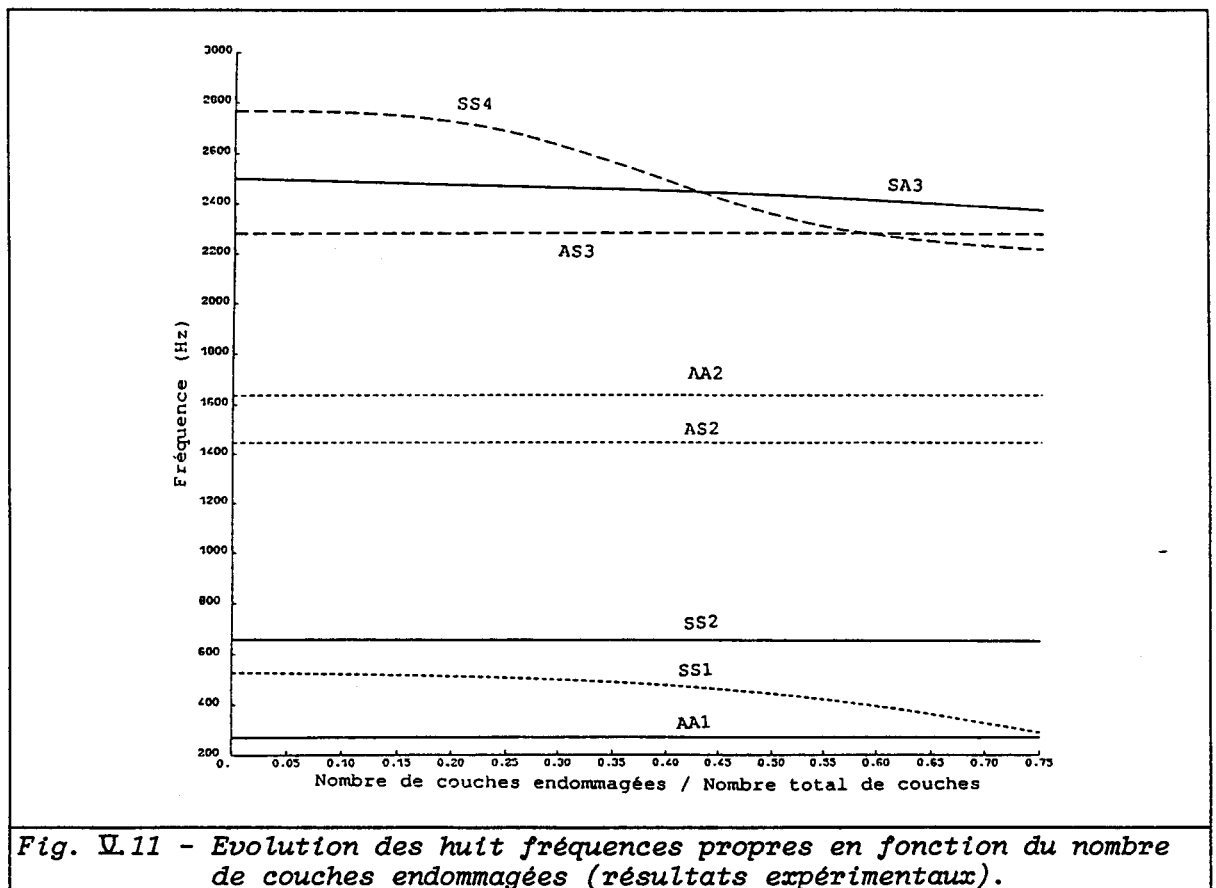


Fig. 10 - Evolution des huit fréquences propres en fonction du nombre de couches endommagées (résultats éléments finis).

toujours les modes dont les déformées varient avec l'abscisse X et n'ayant pas une ligne nodale à l'endroit fissuré (Fig. V.9). Les fréquences de ces modes diminuent plus vite, notamment dans le cas des fissures profondes. Cette diminution atteint 50% pour le mode SS1 et 25% pour le mode SS4. La différence est due à la variation de la répartition des contraintes d'un mode à un autre. En effet, la contrainte normale  $\sigma_{xx}$  engendrée par la plaque excitée sur le mode SS1, est plus importante que celle engendrée par la même plaque sur le mode SS4.

On note également que les variations des rigidités directionnelles ( $E_{xx}$ ,  $E_{yy}$ ) entraînent des croisements de modes, qui apparaissent en particulier dans le cas des fissures de grandes dimensions. Ce croisement se fait en général entre les modes affectés et non affectés. Ainsi, les modes (SS1, AA1), (SS4, SA3) et (SS2, SA1) se croisent pour des fissures de grandes profondeurs (Fig. V.11 et V.10).



Dans le cas d'une cassure totale des fibres (la plaque est coupée en deux parties égales), seules les fréquences des modes dont les déformées ne varient qu'avec l'ordonnée Y sont conservées, parce que la rigidité suivant l'axe OY n'est pas modifiée.



Les figures V.5 à V.8, représentent les déformées mesurées et calculées par éléments finis. Chaque figure comporte deux dessins. Le dessin du bas correspond au champs de déplacement mesuré et représente toute la structure. Le dessin du haut est le résultat du calcul par éléments finis et représente la moitié de la plaque. Ces figures montrent un bon accord entre les déformées calculées et mesurées. Dans la comparaison, il faut tenir compte de l'indétermination des phases respectives (0 ou 180 degrés), c'est-à-dire d'un changement possible de signe. La figure V.12 montre l'effet de la fissure sur la déformée de la structure. Cet effet modifie les courbures des modes affectés. On notera en particulier la présence de points anguleux aux ventres de vibration.

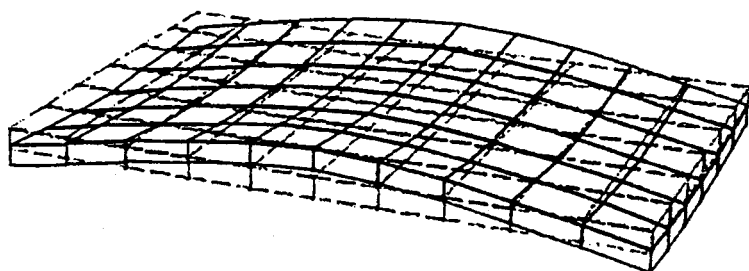
### V - 3 CONCLUSION

Ce chapitre a permis d'analyser l'effet de la rupture des fibres sur le comportement dynamique de structures en matériaux composites. La comparaison entre les valeurs expérimentales et les résultats du calcul par éléments finis montre une bonne description des phénomènes observés. Si l'on excepte les modes ayant une ligne nodale à l'endroit fissuré, tous les modes dont les déformées varient suivant une direction perpendiculaire à la fissure, sont affectés. La diminution de la fréquence est fonction de la contrainte normale modifiée par la zone endommagée, elle est maximale quand la fissure est située sur le ventre de vibration (la contrainte normale est maximale). Par ailleurs, les différences de variation de rigidité directionnelle ( $E_{xx}$ ,  $E_{yy}$ ) provoquent des croisements de mode. Ces croisements ne se produisent que dans le cas de fissures de grande dimension. On note également, une modification des déformées des modes affectés, notamment au voisinage de la fissure.

Il apparaît donc que les variations des fréquences de résonance dépendent de la dimension de la fissure, de sa localisation et de la structure endommagée (dimensions, matériaux). Cette variation affecte certains modes plus que d'autres. Cette dernière propriété peut être utilisée pour déterminer la localisation et la taille de la fissure à partir des variations de mode mesurées.

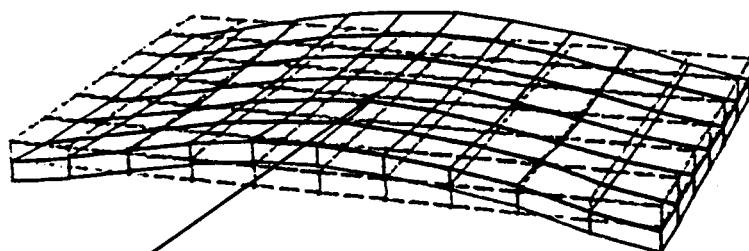
sans fissure

$F = 526 \text{ Hz}$



profondeur de la fissure = 3,86 mm

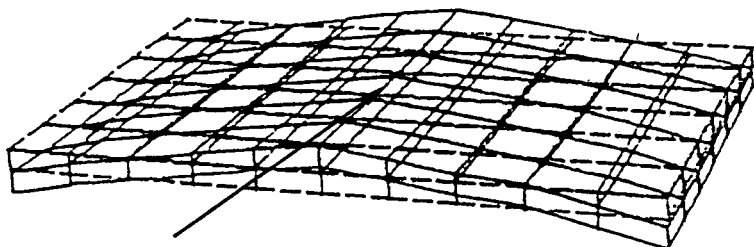
$F = 505 \text{ Hz}$



zone fissurée

profondeur de la fissure = 6,43 mm

$F = 376 \text{ Hz}$



zone fissurée

profondeur de la fissure = 7,72 mm

$F = 290 \text{ Hz}$

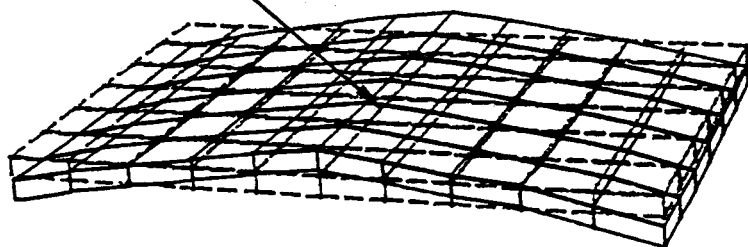


Fig. V.12 - Evolution de la déformée du mode SS1 en fonction de la profondeur de la fissure.

## CONCLUSION

Dans cette thèse, la modélisation à l'aide de la méthode des éléments finis du comportement dynamique des structures composites endommagées, a été proposée. Elle a permis de déterminer, en fonction des dimensions de la fissure, la variation des fréquences de résonance d'une structure en matériaux composites.

Les principaux résultats obtenus sont les suivants :

Des éléments finis spécifiques incorporés dans le code ATILA permettent de modéliser des structures en matériaux composites et de calculer les contraintes dans chaque couche du stratifié. Les constantes élastiques du matériau homogénéisé sont déduites des caractéristiques des fibres et de la matrice à partir du modèle de Halpin et Tsai. Les tests présentés dans la troisième partie de ce rapport valident la capacité de ces éléments à modéliser de telles structures et à évaluer leur seuils d'endommagement. L'analyse statique et l'analyse modale des structures tests ont montré un bon accord avec des résultats analytiques et expérimentaux. Ces résultats confirment l'intérêt d'utiliser l'élément homogénéisé pour obtenir une précision satisfaisante avec un temps de calcul minimum.

La méthode des éléments finis a été appliquée avec succès à la modélisation du comportement des structures endommagées. Cette validation a été menée en comparant les résultats numériques avec les résultats issus d'un modèle analytique ou de mesures. De plus, les résultats de calcul ont permis une analyse fine du comportement dynamique des structures étudiées, notamment la coque d'un transducteur flexionnel : existence des modes supplémentaires (modes de vibration des lèvres de la fissure), variations des fréquences de résonance pour chaque mode de rupture, influence de la séquence d'empilement des fibres...

La variation des fréquences de résonance a été associée directement à la géométrie de la fissure et au champ de contraintes de la structure

pour le mode considéré. Il est, par conséquent, possible de prévoir directement les modes influencés par une géométrie de fissure donnée d'une part et, de déterminer la localisation et la taille de la fissure à partir des variations des fréquences de résonance d'autre part.

Les perspectives d'extension de ce travail peuvent être divisées en trois thèmes majeurs :

La variation des fréquences de résonance d'une structure endommagée peut être calculée et représentée sur des abaques. Ces derniers permettent d'estimer, à partir des variations des fréquences de résonance mesurées, la taille de la fissure et sa localisation.

Dans le but de valider cette approche numérique, ce travail peut se poursuivre, par une campagne d'essais sur la coque d'un transducteur flexionnel immergée et pour différents modes d'endommagement.

Une étude expérimentale des contraintes pour vérifier les résultats obtenus par le calcul éléments finis. Cette étude nécessite l'installation de jauge d'extensométrie dans chaque couche au moment de la fabrication des matériaux composites [57, 58].

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. **B. Hamonic**  
"Contribution à l'étude du rayonnement de transducteurs utilisant les vibrations de coque mince", Thèse de doctorat en Mécanique, Université des Sciences et Techniques de Lille (1987).
2. **B. Hamonic, J.C. Debus, J.N. Decarpigny**  
"Conception et modélisation de projecteurs sonar basse fréquence", J. Phys., 51, C2, 345-348 (1990).
3. **K.D. Rolt**  
"History of the flextensional electroacoustic transducer", J. Acoust. Soc. Am., 87, 1340-1349 (1990).
4. **J.R. Oswin, J. Dunn**  
"Frequency, power and depth performance of class IV flextensional transducers", Proceedings of the International Workshop on power sonic and ultrasonic transducers design, Ed. B. Hamonic, J.N. Decarpigny, Springer-Verlag, 121-133 (1989).
5. **C. Bathias**  
"La fatigue des matériaux composites à hautes performances", Matériaux et techniques, Mai (1990).
6. **J.N. Decarpigny**  
"Application de la méthode des éléments finis à l'étude de transducteurs piézoélectriques", Thèse de doctorat ès sciences physiques, Université des Sciences et Techniques de Lille (1984).
7. **B. Hamonic, J.C. Debus, H. Tourneur, D. Boucher**  
"Composite structure vibration analysis using the finite element method", J. Acoust. Soc. Am., Suppl. 1, 83, (1988).
8. **J. Rouchon**  
Matériaux composites pour structures d'aéronefs, Cours ENSICA (1980).
9. "Matériaux composites, Direction Centrale Technique" - N° 1135 - Ed. Aérospatiale (1986).

10. J. Weiss, C. Bord  
Les matériaux composites II, Ed. L'Usine Nouvelle (1983).
11. R.M. Jones  
Mechanics of composite materials, Ed. H.P.C. New York (1975).
12. C.C. Chamis, G.P. Sendekyj  
"Critical on theories predicting thermoelastic properties of fibrous composites", J. Composite Materials, July (1968).
13. B. Paul  
"Prediction of elastic constants of multiphase materials", Trans. of Metallurgical Society of A.I.M.E., February (1960).
14. Z. Hashin, B.W. Rosen  
"The elastic moduli of fiber reinforced materials", J. Appl. Mech., June (1964) ; Errata, March (1965).
15. D.F. Adams, S.W. Tsai  
"The influence of random filament packing on the elastic properties of composite materials", J. Composite Materials, July (1969).
16. R. Hill  
"Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials : self-consistent model", J. Mech. Phys. Solids, August (1965).
17. J.J. Herman  
"The elastic properties of fiber reinforced materials when the fibres are aligned", Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch., Amsterdam, Série B, 70, N° 1 (1969).
18. S.W. Tsai  
"Structural behavior of composite materials", NASA CR-71, July (1964).
19. J.C. Halpin, S.W. Tsai  
"Effects of environmental factors on composite materials", AFML-TR (1969).

20. D.F. Adams, D.R. Doner  
"Transverse normal loading of a unidirectional composite", J. Composite Materials, April (1967).
21. D.F. Adams, D.R. Doner  
"Longitudinal shear loading of a unidirectional composite", J. Composite Materials, January (1961).
22. R. Hewitt, M.C. De Malherbe  
"An approximation for the longitudinal shear modulus of continuous fibre composites", J. Composite Materials, April (1970).
23. M. Geier, D. Duedal  
Guide pratique des matériaux composites, Ed. Lavoisier (1985).
24. J.C. Ekvall  
"Elastic properties of orthotropic monofilament composites", ASME Paper 61-AV-56, Aviation Conference, Los Angeles (1961).
25. J.L. Engerand  
"Fatigue et vieillissement des structures", Cours ENSICA (1985).
26. K. Kamimura  
"Modélisation théorique de la croissance d'endommagement appliquée à la théorie des plaques stratifiées", J. de mécanique théorique et appliquée, 4, N°4, 537-553 (1985).
27. G. Bernhart, J.M. Thomas  
"Prévision du délaminage d'un composite multicouche", 3ème Congrès International sur les méthodes numériques de l'ingénieur 1983, 3, 677-683, Ed. Pluralis Paris (1983).
28. D. Gay  
Matériaux composites, Ed. Hermès (1987).
29. C. Bathias  
"Endommagement des matériaux composites : mécanismes et mise en évidence", Actes des colloques sur les matériaux composites, Lyon (1990).

30. J.N. Decarpigny, B. Hamonic, O.B. Wilson  
"The design of low-frequency underwater acoustic projectors : present status and future trends", IEEE J. of Oceanic Engng., 16, N° 1, 107-122 (1991).
31. J.F. Bowler  
"Flexensionel transducers and their applications", Conference Papers Technology and Applications MCM, (1990).
32. G. Bromfield  
"Class IV flexensional transducers", Proceedings of the International Workshop on Power Transducers for Sonics and Ultrasonics, Toulon, France, (1990).
33. S. Ahmad  
Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements", Int. J. Numer. Meth. Engng., 2, 419-451 (1970).
34. R.R. Kumar, Y.V.K. Sadasiva Rao  
"Free vibrations of multilayered thick composite shells", Computers & Structures, 28, 717-722 (1988).
35. B. Whang  
"Laminated orthotropic plates and shallow shells", Computers & Structures, 1, 465-493 (1971).
36. B. Peseux, S. Dubigeon  
"Equivalent homogeneous finite element for composite materials via Reissner principle. Part I : finite element for plates", Int. J. Numer. Meth. Engng., 31, 1477-1495 (1991).
37. B. Peseux, S. Dubigeon  
"Equivalent homogeneous finite element for composite materials via Reissner principle. Part II : finite element for shells", Int. J. Numer. Meth. Engng., 31, 1497-1509 (1991).
38. J.L. Meek  
"Computer methods in structural analysis", Ed. FN SPON New York (1991).



39. J.F. Imbert  
Analyse des structures par éléments finis, Ed. Cepadues (1984).
40. G. Dhatt, G. Touzot  
Une présentation de la méthode des éléments finis, Ed. Maloine (1981)
41. A. Tessler, E. Saether  
"A computationally viable higher-order theory for laminated composite plates", Int. J. Numer. Meth. Engng., 31, 1069-1086 (1991).
42. J.F. Lerooy  
"Calcul des contraintes de cisaillement transversales dans les structures modérément épaisses", Thèse de doctorat en Mécanique, Institut National Polytechnique de Lorraine (1983).
43. G. Cantin, Ph. Trompette  
"Calcul des structures par éléments finis statique et dynamique", Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur, Cours IPSI, (1990)
44. O.C. Zienkiewicz  
La méthode des éléments finis, Ed. MacGraw-Hill (1979).
45. T. Moan  
"Experiences with orthogonal polynomials and best numerical integration formulas on a triangle, with particular reference to finite element approximations", Z.A.M.M. 54, 501-508 (1974).
46. S. Laroze, J.J. Barreau  
Mécanique des structures, Tome II, Ed. Masson (1985).
47. J.C. Debus, H. Tourneur, B. Hamonic, J.N. Decarpigny  
"Caractérisation acoustique d'un composite G.R.P", G.E.R.D.S.M. Convention C. 86.48.826.334, (1988).
48. S. Panda, R. Natarajan  
"Analysis of laminated composite shell structures by finite element method", Computers & Structures, 19, 69-79 (1981).

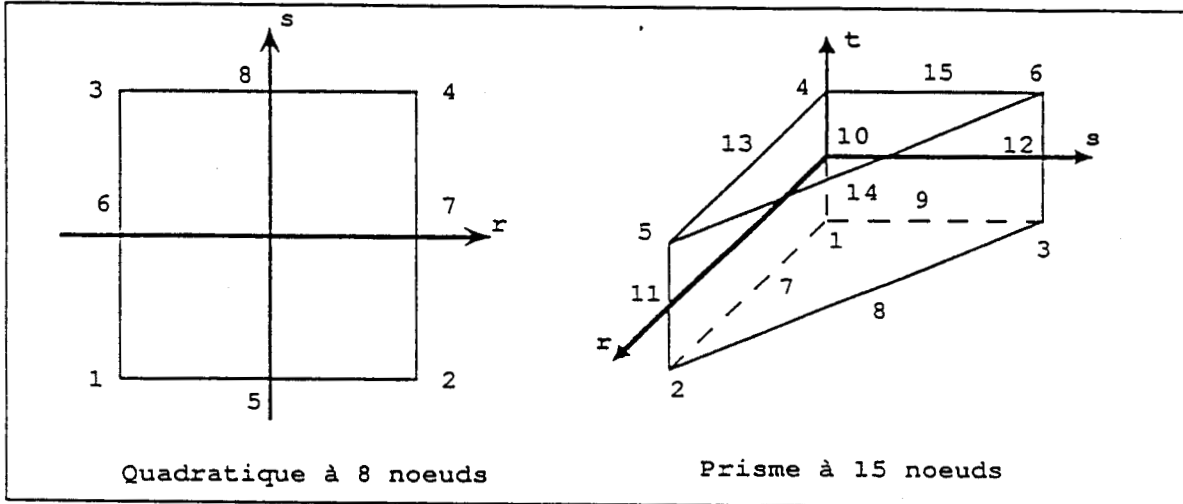
49. J.N. Reddy  
"Exact solution of moderately thick laminated shell", J. Eng. Mech. Div. ASCE 110, 794-809 (1984).
50. S.M. Yunus, P.C. Kohnke  
"An efficient through-thickness integration scheme in an unlimited layer doubly curved isoparametric composite shell element", Int. J. Numer. Meth. Engng., 16, 2777-2793 (1989).
51. J.C. Debus, J.N. Decarpigny, B. Hamonic  
"Etude et réalisation d'un transducteur flexensionnel de classe IV à coque en GRP", Convention C.86.48.826.334 avec G.E.R.D.S.M., Juillet (1988).
52. A. Lavie, B. Dubus  
"Modélisation de la diffraction acoustique d'une onde incidente plane par une structure élastique à l'aide d'une méthode mixte éléments finis-équations intégrales", Deuxième Congrès Français d'Acoustique Arcachon France (1992).
53. B. Dubus  
"Analyse des limitations de puissance des transducteurs piézoélectriques", Thèse de doctorat en sciences des matériaux, Université des Sciences et Techniques de Lille (1989).
54. P.D. Tuan  
"Théories des plaques sandwiches élastiques anisotropes", Thèse de doctorat en mécanique appliquée à la construction", Université de Technologie de Compiègne (1976).
55. N.J. Pagano  
"Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", J. Composite Materials, 4, 20-34 (1970).
56. J.J. Tracy, G.C. Pardoen  
"Effect of delamination on the natural frequencies of composite laminates", J. Composite Materials, 23, 1200-1215 (1989).

57. "Strain gage applications on composites", Applications Note, Measurements Group, Inc. Raleigh, North Carolina 27611 - Micromesures VISHAY.
  
58. "Comment choisir les accessoires d'extensométrie par jauges électriques", Documentation Technique - Catalogue A - 110 - 1 - F, Micromesures VISHAY.



## ANNEXE I

## FONCTIONS DE FORME



\* Fonctions de forme de l'élément quadratique à 8 noeuds :

$$H_1 = \frac{-r}{4} (1-r)(1-s)$$

$$H_2 = \frac{r}{4} (1+r)(1-s)$$

$$H_3 = \frac{-r}{4} (1-r)(1+s)$$

$$H_4 = \frac{r}{4} (1+r)(1+s)$$

$$H_5 = \frac{1}{2} (1-r^2)(1-s)$$

$$H_6 = \frac{1}{2} (1-r)(1-s^2)$$

$$H_7 = \frac{1}{2} (1+r)(1-s^2)$$

$$H_8 = \frac{1}{2} (1-r^2)(1+s)$$

\* Fonctions de forme de l'élément prisme à 15 noeuds :

$$H_7 = 2r(1-r-s)(1-t)$$

$$H_{10} = (1-r-s)(1-t^2)$$

$$H_8 = 2rs(1-t)$$

$$H_{11} = r(1-t^2)$$

$$H_9 = 2s(1-r-s)(1-t)$$

$$H_{12} = s(1-t^2)$$

$$H_{13} = 2r(1-r-s)(1+t)$$

$$H_{14} = 2rs(1+t)$$

$$H_{15} = 2s(1-r-s)(1+t)$$

$$H_1 = \frac{1}{2} (1-r-s)(1-t) - \frac{1}{2} (H_7 + H_9 + H_{10})$$

$$H_2 = \frac{1}{2} r(1-t) - \frac{1}{2} (H_7 + H_{11} + H_8)$$

$$H_3 = \frac{1}{2} s(1-t) - \frac{1}{2} (H_9 + H_8 + H_{12})$$

$$H_4 = \frac{1}{2} (1+t)(1-s-r) - \frac{1}{2} (H_{13} + H_{10} + H_{15})$$

$$H_5 = \frac{1}{2} r(1+t) - \frac{1}{2} (H_{14} + H_{11} + H_{13})$$

$$H_6 = \frac{1}{2} s(1+t) - \frac{1}{2} (H_{14} + H_{12} + H_{15})$$

## ANNEXE II

## LOI DE COMPORTEMENT HOMOGENEISE

La relation matricielle (II.35) reliant les vecteurs  $\{\epsilon^q\}$  aux efforts  $\{N\}$  et aux moments  $\{M^q\}$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_0 \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix}_{(20,1)} = \begin{matrix} Q_1(i,j) & Q_2(i,j) & Q_3(i,j) & Q_4(i,j) \\ \text{(sym)} & Q_3(i,j) & Q_4(i,j) & Q_5(i,j) \\ \text{(sym)} & \text{(sym)} & Q_5(i,j) & Q_6(i,j) \\ \text{(sym)} & \text{(sym)} & \text{(sym)} & Q_7(i,j) \end{matrix}_{(20,20)} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ \epsilon^1 \\ \epsilon^2 \\ \epsilon^3 \end{Bmatrix}_{(20,1)}$$

Les termes des sous-matrices de la matrice de loi de comportement homogénéisé sont :

$$Q_1(i,j) = \sum_{n=1}^{n_c} h_n \cdot (C_{ij})_n,$$

$$Q_2(i,j) = \sum_{n=1}^{n_c} Z_{n_{sm}} \cdot h_n \cdot (C_{ij})_n$$

$$Q_3(i,j) = \sum_{n=1}^{n_c} \left( \frac{h_n^3}{12} + h_n \cdot Z_{n_{sm}}^2 \right) \cdot (C_{ij})_n, \quad Q_4(i,j) = \sum_{n=1}^{n_c} h_n \cdot Z_{n_{sm}} \cdot \left( Z_{n_{sm}}^2 + \frac{h_n^2}{4} \right) \cdot (C_{ij})_n$$

$$Q_5(i,j) = \sum_{n=1}^{n_c} h_n \cdot \left( Z_{n_{sm}}^4 + \frac{Z_{n_{sm}}^2 \cdot h_n^2}{2} + \frac{h_n^4}{80} \right) \cdot (C_{ij})_n$$

$$Q_6(i,j) = \sum_{n=1}^{n_c} h_n \cdot Z_{n_{sm}} \cdot \left( Z_{n_{sm}}^4 + \frac{5}{8} \cdot Z_{n_{sm}}^3 + \frac{h_n^4}{80} \right) \cdot (C_{ij})_n$$



$$Q_7(i,j) = \sum_{n=1}^{n_c} h_n \cdot \left( Z_{n_{sm}}^6 + \frac{5}{4} \cdot Z_{n_{sm}}^4 \cdot h_n^2 + \frac{3}{16} \cdot Z_{n_{sm}}^2 \cdot h_n^4 + \frac{h_n^6}{448} \right) \cdot (C_{ij})_n.$$

Où  $i$  et  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ .  $C_{ij}$  désigne les coefficients non nuls de la matrice de la loi de comportement du matériau isotrope transverse.  $h_n$  et  $Z_{n_{sm}}$  sont respectivement l'épaisseur (Fig. II.3) et la cote moyenne de la  $n^{\text{ième}}$  couche.

**Résumé de thèse**

L'utilisation des matériaux composites dans la construction des coques de transducteurs flexensionnels est relativement récente. Les sollicitations dynamiques appliquées sont susceptibles d'altérer le comportement du matériau multicouche et, par conséquent, de modifier leur réponse en fréquence. Cette thèse propose une approche numérique basée sur la méthode des éléments finis, pour prédire, en fonction de la dégradation des coques en matériaux composites, le comportement de ces transducteurs endommagés.

Dans un premier temps, une description des caractéristiques mécaniques des matériaux composites et des différents modes d'endommagement est présentée. Puis des éléments finis, incorporés dans le code ATILA, permettant de modéliser des structures en matériaux composites et de calculer les contraintes dans le stratifié ont été testés. Dans un second temps, une modélisation du comportement dynamique de plusieurs structures tests endommagées est proposée. Les résultats obtenus par éléments finis sont en accord avec les résultats de modèles analytiques ou de mesures. Ils mettent en évidence la fiabilité de cette approche pour déterminer la localisation et la taille de la fissure à partir des variations des fréquences de résonance. Cette approche doit permettre à partir d'une analyse modale in situ sur les premiers modes de la structure une mise en évidence, de façon qualitative et quantitative, du type d'endommagement.

**Mots-clés**

Matériau composite

*Composite material*

Champ de contraintes

*Stress field*

Méthode des éléments finis

*Finite element method*

Transducteur flexensionnel

*Flexensional transducer*

Endommagement

*Damage*