

50376
1992
71

62219

50376
1992
71

N° d'ordre : 873

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE FLANDRES
ARTOIS

pour obtenir le

DOCTORAT en ELECTRONIQUE

par

Abdelmalik TALEB-AHMED

ETUDE DE TECHNIQUES DE REPRESENTATION 3D D'OBJETS BIOLOGIQUES
A PARTIR D'ACQUISITIONS RADIOLOGIQUES X ET IRM . APPLICATIONS EN
NEURORADIOLOGIE ET MORPHOGENESE CEPHALIQUE



Soutenue le 21 février 1992 devant la commission d'examen

Membre du Jury :

L. Raczy
I. Magnin
H. Vu Thien
J.P. Dubus
J.G Postaire
H. Blocquel
J. Clarisse

Président
Rapporteur
Rapporteur
Directeur de thèse
Examineur
Examineur
Examineur

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Mesures Automatiques de l'Université des Sciences et Technique de Lille Flandres Artois

Je tiens à exprimer tout d'abord ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur J.P DUBUS qui a assuré la direction de cette étude, pour son aide constante et efficace à la réalisation de ce travail . Je le remercie de la confiance qu'il a investie en moi, du soutien qu'il m'a apporté .

Je suis particulièrement reconnaissant envers Monsieur le Professeur L.RACZY pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury .

Je remercie vivement Madame I.MAGNIN responsable du groupe de travail reconstruction et représentation 3D du GDR traitement du signal et des images au CNRS et le Professeur H.VU.THIEU du Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris, pour l'honneur qu'ils m'ont fait de donner leur avis sur ce travail et leur accord pour la soutenance .

Je remercie également Monsieur le Professeur J. POSTAIRE pour avoir bien voulu examiner nos travaux . .

Je remercie aussi le Docteur H. BLOCQUEL professeur à la faculté dentaire de Lille et le docteur J.CLARISSE professeur de neuroradiologie du CHR de Lille qui ont bien voulu faire partie de cette commission d'examen et siéger dans le jury .

Je remercie le docteur J.F DELEUME et J.PRUVO pour l'enthousiasme qu'ils ont manifesté à nos travaux et la promotion qu'ils en ont faite en terme d'application à la mise en évidence des anomalies vasculaires de la représentation 3D de l'arbre artériel du cou .

Je remercie le docteur M.C ROUSSET pour la qualité de l'évaluation et de l'étude du logiciel d'application à la morphogenèse céphalique que nous avons conçu .

Je les remercie tous trois pour leur action au développement d'une collaboration de recherche

SOMMAIRE .

INTRODUCTION.

1

1ere PARTIE

APERCU SUR LES METHODES D'ACQUISITION DANS LES SYSTEMES D'IMAGERIE MEDICALE, ET SUR LES METHODES DE REPRESENTATION ET VISUALISATION 3D

Chapitre 1 : Systèmes d'acquisitions.

1-L'ACQUISITION DES DONNEES DANS LES SYSTEMES D'IMAGERIE MEDICALE.	4
1-1-Radiologie Conventiionnelle.	4
1-2-Radiologie Numérique	4
1-2-1-Angiographie Numérisée.	4
1-3-Imagerie Tomographique Numérisée.	6
1-3-1-Tomographie par Rayon X.	6
1-3-1-1-Principe.	6
1-3-2-Tomographie par Emission.	9
1-3-2-1-Tomographie par Emission Gamma.	9
1-3-2-2-Tomographie par Positons.	10
1-3-3-Imagerie par Résonance Magnétique.	10
1-4-Conclusions.	11

Chapitre 2 : Fonctionnalités d'une station d'images 3D.

2-FONCTIONNALITES GENERALES D'UNE STATION D'IMAGES 3D EN IMAGERIE MEDICALE.	
2-1-Préparation des données.	13
2-2- Génération de la base de données.	14
2-3-Module de représentation.	14
2-4-Visualisation Manipulation.	15
2-5-Fonctionnalités applicatives.	15
2-5-1-Dans le cadre d'une biopsie.	15
2-5-2- Application en morphogénèse.	16

Chapitre 3 : Modélisation géométrique de scènes tridimensionnelles.

3-MODELISATION GEOMETRIQUE DE SCENES TRIDIMENSIONNELLES	17
3-1-Classification	17
3-2-Modélisation fil de fer	20
3-2-1-Propriétés	21
3-2-2- Inconvénients	21
3-2-3-Conclusion .	23
3-3-Modèles surfaciques	23
3-3-1-Modélisation par facettes planes	23
3-3-1-1-Principe	23
3-3-1-2-Propriétés	24
3-3-1-3-Conclusion	25
3-3-2-Surface de révolution	25

3-3-3-Approximation par facettes	25
3-3-4-Modélisation par surface gauche	26
3-3-4-1-Introduction	26
A) Courbes paramétriques	28
B) Equation paramétrique d'une courbe cubique	29
C) Surface paramétrique	29
3-3-4-2-Les surfaces de formes libres	31
3-3-4-2-1-Surface de Coons	32
3-3-4-2-2-Surface de Bézier	33
3-3-4-2-3-B.Splines	38
3-3-4-2-4-Béta.Splines	43
3-3-4-2-5-Comparaison des différentes approches	45
3-4-Représentations volumiques	46
3-4-1-Introduction	46
3-4-2-La famille de primitives solides	47
3-4-3-Composition arborescente de solides ou CSG	47
3-4-3-1-Primitives de volume	47
3-4-3-2-Opérations sur les primitives	49
3-4-4-Génération de solides par balayage (SWEEPING)	51
3-4-4-1-Les cônes ou cylindres généralisés	52
3-4-5-La représentation par frontière ou par limites	52
3-4-6-L'énumération spatiale	54
3-4-6-1-La représentation par tableau à trois dimensions	54
3-4-6-2-Arbre octal	55
3-5-Modèles hybrides	58
3-6-Conversion entre modèles	59
3-7-Les modèles récursifs	61
3-7-1-Fractals	61
3-7-2-Graptal	63
3-7-3-Les systèmes à particules	64

Chapitre 4 : Modèle de visualisation .

4-PROBLEMES DE VISUALISATIONS	66
4-1-Introduction	66
4-2-Techniques de visualisation de scènes tridimensionnelles	67
4-2-1-Les transformations géométriques	67
4-2-1-1-Mathématiques projectives	67
4-3-Eliminations de parties cachées	69
4-3-1-Paramètres de choix	72
4-4-Les modèles d'éclairément	74
4-4-1-Introduction	74
4-4-2-Les modèles d'éclairéments empiriques	75
4-4-3-Autres modèles	77
4-5-Modèles d'interpolation	77
4-5-1-Le modèle de GOURAUD	78
4-5-2-Le modèle de PHONG	78

Chapitre 5 : Choix du modèle de représentation 3D pour les applications envisagées .

5-CHOIX DU MODELE DE REPRESENTATION 3D POUR LES APPLICATIONS ENVISAGEES	80
5-1-Paramètres de choix	80
5-2-Conclusions	84

2eme Partie .

ETUDE DE LA REPRESENTATION 3D D'UNE STRUCTURE VASCULAIRE A PARTIR DE LA RECONSTRUCTION 2D D'UN SCANNER IRM

Chapitre 1 : Chaîne fonctionnelle de représentation 3D à partir de coupes parallèles.

1-INTRODUCTION	87
1-2-Acquisition de données	90
1-3-Préparation des données	91
1-4-Base de données 3D	92
1-4-1-Etablissement de l'arbre artériel	93
1-4-1-1-Notion de graphe	94
1-4-1-2-Représentation du graphe par liste d'adjacence	94
1-4-2-Echantillonnage des coupes	97
1-4-2-1-Exposé du principe de l'échantillonnage des coupes	98
1-4-3-Organisation de la base de données 3D	103
1-4-4-Description des structures	105

Chapitre 2 : Triangulation .

2-LE MODELE DE DESCRIPTION	106
2-1-Triangulation	107
2-1-1-Introduction	107
2-2-Cas d'objets convexes	107
2-2-1-Triangulation de DELAUNAY	107
2-2-2-Définition	108
2-3-Cas d'objets définis par un ensemble de coupes parallèles ou de coupes méridiennes	109
2-3-1-Les méthodes optimales	111
2-3-1-1-La recherche de la triangulation optimale dans un graphe	111
2-3-2-Les méthodes heuristiques	113
2-4-Détection des liaisons multiples	115
2-5-Triangulation de contours simples centrés ou pas,convexe ou faiblement concave	115
2-5-1-Exposé du problème	115
2-5-2-Méthode proposée	116
2-6-Triangulation de contours multiples	118
2-6-1-Première solution	119
2-6-1-2-Modification de la base de données	121
2-6-2-Deuxième méthode	122
2-6-3-Description de la structure de données	123
2-7-Présentation des résultats	124
2-7-1-Discussion	124
2-8-Conclusion	125

3eme Partie

ETUDE DE LA REPRESENTATION 3D PAR RECONSTRUCTION 2D D'UNE STRUCTURE CEPHALO DENTAIRE A PARTIR DE CLICHES ORTHOGRAPHIQUES

X

Chapitre 1 : Orthogonalisation .

1-ORTHOGONALISATION	127
---------------------	-----

1-1-Introduction	127
1-2-Environnement matériel	130
1-3-Orthogonalisation du latéralis par rapport au frontalis	131
1-3-1-Positionnement du frontalis	131
1-3-2-Positionnement du latéralis par rapport au frontalis	132
1-4-Prépositionnement de l'axialis	133
1-4-1-Détermination analytique de la rotation et de la translation	135
1-4-1-1-Positionnement du problème	135
1-4-2-Positionnement définitif de l'axialis	138
1-4-3-Résultat de l'orthogonalisation	139
1-5-Conclusion	139
1-6-Etalonnage	140
 Chapitre 2 : Mesures et prétraitement .	
2-REPERAGE DE POINTS ANATOMIQUES	141
 Chapitre 3 : Calcul de volume .	
3-CALCUL DE VOLUME ET DE SURFACE	143
3-1-Le calcul de surface plane parallèle au plan de visualisation	143
3-2-Le calcul de volume par la méthode des voxels	143
3-3-Le calcul du volume par MONTE CARLO	143
3-3-1-Description mathématique	144
3-3-2-Expérimentation	145
3-4-Conclusion	147
 Chapitre 4 : Méthodes de reconstruction .	
4-RECONSTRUCTION 3D D'ELEMENTS DE LA MACHOIRE	148
4-1-Introduction	148
4-2-Reconstruction par la méthode des voxels	148
4-3-Reconstruction par la méthode des ellipses	149
4-4-Expérimentation	150
4-5-Conclusion sur la reconstruction par les sections elliptiques	151
 Chapitre 5 : Extrapolation des profils de densité .	
5-RECONSTRUCTION A L'AIDE D'UN MODELE	152
5-1-Méthode proposée	152
5-1-1-Extrapolation des courbes de densité	152
5-1-2-Cas du contour du modèle plus grand que le contour objet réel	154
5-1-3-Modification de l'amplitude	155
5-1-3-1-Exemple	156
5-1-4-Considération sur le bruit	158
 Chapitre 6 : Choix de l'algorithme de reconstruction .	
6-RECONSTRUCTION D'UNE SURFACE A PARTIR DE SES COURBES DE DENSITE	160
6-1-Introduction	160
6-1-1-Méthodes de reconstruction directe	160
6-1-1-1-Méthode de SHI-KUO CHANG et C.K CHOW	160
6-1-1-2-Méthode de la courbe médiane de Z. D.BAI	161
6-1-1-3-Méthode par les ellipses de PELLOT	161

6-1-2-Méthodes de reconstruction indirecte	162
6-1-2-1-L'algorithme de ONNASCH et HEINTZEIN	163
6-1-2-2-L'algorithme de SLUMP et GERBRANDS	163
6-1-2-3-L'algorithme de PELLOT	163
6-1-2-4-L'algorithme de YANG	163
6-2-Présentation de l'algorithme de programmation	164
6-2-1-Ambiguïté: description mathématique du problème	166
6-2-2-Réseau orienté: introduction à la notion du graphe	167
Chapitre 7 : Recherche du flot à coût minimum .	
7-PROBLEME DE PLOTS DANS LES GRAPHS: FLOT MAXIMUM. FLOT A COUT MINIMUM	169
7-1-Introduction: les différents problèmes de flots dans les graphes	169
7-2-Recherche d'un flot maximum dans un graphe	171
7-2-1-Principe de l'algorithme	171
7-2-2-Graphe d'écart	172
7-3-Exemple: recherche du flot maximum dans un graphe	173
7-4-Flot à coût minimum	180
7-4-1-Considération sur le bruit	180
7-4-1-1-Introduction	180
7-4-2-Construction de la fonction de coûts	181
7-4-3-Flot maximum à coût minimum (cas des courbes de densité non bruitées)	182
7-4-3-1-Introduction	182
7-4-3-2-Description mathématique du problème	182
7-4-3-4-Construction du graphe d'écart	182
7-4-3-3-1-Enoncé de l'algorithme	183
7-4-3-4-Exemple d'application : Recherche du flot maximum à coût minimum	184
7-4-4-Flot moyen à coût minimum (cas des courbes de densité bruitées)	189
7-4-4-1-Introduction	189
7-4-4-2-Description mathématique	189
7-4-4-3-Définition des limites des courbes de densité	189
7-4-4-4-Calculs des coûts des arcs de la source et du puits	190
7-4-4-5-Construction du graphe d'écart	191
7-4-4-6-Recherche du plus court chemin	191
7-4-4-6-1-Enoncé de l'algorithme	191
7-4-4-7-Reconstruction approximative	192
7-4-4-8-Exemple d'application : Recherche du flot à coût minimum	192
7-5-Expérimentation	199
7-5-1-Résultats	199
7-5-2-Discussion	
CONCLUSION .	202
ANNEXE 1	204
ANNEXE 2	206
BIBLIOGRAPHIE	207

INTRODUCTION

En quinze ans, l'imagerie de diagnostic a connu une véritable révolution technique qui a conduit à un bouleversement de la pratique médicale . Non seulement les techniques dites de visualisation sont devenues de plus en plus précises, de plus en plus riches en informations mais elles sont devenues pour les médecins de plus en plus indispensables voire incontournables avant toute décision thérapeutique .

Cette mutation nous paraît tenir à des raisons à la fois subjectives et objectives. Parmi les premières, existe sans doute un phénomène de civilisation général qui tend à privilégier l'image par rapport au texte, mais aussi l'idée que la représentation d'une entité pathologique nous en donne la meilleure compréhension . Pour les secondes on peut citer ou rappeler que dans plus de la moitié des cas d'hospitalisation, les techniques d'imagerie ont pour le diagnostic un rôle indispensable .

Les systèmes de radiologie tels que les scanners X, IRM, nucléaires, acoustiques possèdent aujourd'hui des logiciels de reconstruction et de représentation 3D très performants .

Seulement ces systèmes sont encore à l'heure actuelle très chers, et leurs fonctions sont figées, de sorte que les données et les résultats de traitement ne sont pas accessibles aux médecins qui souhaitent les manipuler pour leurs besoins de recherches .

A l'instigation des services de radiologie et d'odontologie du CHR de LILLE il nous a été confiée l'étude d'un système autonome complémentaire capable à partir de données disponibles sur les systèmes d'acquisition, de représenter de reconstruire et de manipuler, en 3D des objets biologiques et de permettre des mesures diverses .

Le système doit être d'un emploi très souple, il doit être ouvert et permettre l'évolution et l'apport des fonctions nouvelles utiles aux médecins, il doit pouvoir s'adapter à diverses applications biomédicales nécessitant une représentation 3D d'objets . Le système a été étudié à partir des problèmes posés par deux demandes distinctes .

L'une concerne la représentation en 3D de l'arbre vasculaire du cou à partir des clichés issus de la reconstruction 2D d'un scanner IRM, l'autre concerne la reconstruction et la représentation en 3D des objets de l'appareil dontofacial à partir de trois clichés orthographiques X

Dans une première partie nous énumérons les principes des différents systèmes d'acquisition en imagerie médicale, nous présentons les contraintes propres à chacun d'eux et nous donnons des exemples d'utilisation de ces images 3D dans différents domaines médicaux . Nous faisons ressortir de ces applications les fonctionnalités de base que devraient posséder la majeure partie des systèmes . Ces fonctions seront développées dans le cadre de cette étude .

Nous faisons ensuite une description de l'état de l'art dans le domaine de la modélisation géométrique 3D, et nous constatons que l'agencement des données acquises sur un organe quelconque est un problème ouvert lorsqu'il est nécessaire de classer cet organe en fonction de sa forme .

Une des opérations les plus importantes en synthèse d'image, est certainement l'étape de visualisation . Elle est fondamentale et doit être étudiée avec soin . Nous rappelons donc les techniques de génération d'images de scènes 3D .

Dans une deuxième partie nous appliquons ces concepts pour présenter et décrire une

chaîne fonctionnelle de représentation tridimensionnelle de l'arbre vasculaire du cou à partir de coupes parallèles issues de la reconstruction 2D d'un scanner IRM . Cette représentation tient compte des critères précédents et a l'avantage de bien se prêter à une architecture matérielle .

La représentation et la visualisation d'un objet 3D de haute qualité exigent un échantillonnage homogène dans l'espace . Dans le cas où les données acquises sur l'objet sont un ensemble de coupes parallèles, le problème consiste à extraire les points pertinents qui constitueront les sommets des facettes planes de l'enveloppe convexe de l'objet . L'échantillonnage à partir de clichés radiologiques est généralement peu ou pas abordé dans la littérature spécialisée . Pour cela nous proposons et détaillons une nouvelle technique simple d'échantillonnage d'un contour quelconque présentant ou non des concavités . Il est à noter que cette méthode conserve toutes les informations initiales de l'objet comme par exemple, la continuité de la forme géométrique, les relations topologique (connexité).

Les données acquises sur l'organe à modéliser se présentent sous la forme de tableaux de valeurs représentant des images de coupes . Le problème consiste alors à joindre un ensemble de contours parallèles pour définir une surface qui les enveloppe . On s'oriente souvent vers une triangulation de la surface . Dans un premier temps nous exposons les différentes méthodes qui permettent de résoudre ce problème . Dans un deuxième temps nous présentons les solutions originales que nous avons développées au cours de cette étude dans le cas où l'ensemble de points est distribué en contours parallèles, et qui s'appliquent sur un très grand nombre de configurations possibles .

Enfin nous présentons et discutons des résultats de la représentation 3D, effectuée par une solution logicielle qui exécute séquentiellement les étapes sur une station composée autour d'un micro-ordinateur .

Dans la troisième partie, nous présentons l'étude que nous avons entreprise pour la reconstruction de la dentition chez l'enfant en morphogenèse céphalique .

Pour cela, nous présentons une méthode pour l'orthogonalisation automatique de clichés radiographiques pris selon trois incidences . Cette solution a le mérite d'améliorer les techniques actuelles essentiellement manuelles . Ensuite nous proposons un certain nombre d'outils que nous avons réalisés (tracé de trièdre, mesure de distances, d'angles, de surfaces, et de volumes) indispensables au médecin pour compléter le dossier de son patient .

Après avoir proposé deux algorithmes très simples et très rapides pour la reconstruction de la dentition chez un enfant, nous présentons la méthode à flot maximum et à coût minimum que nous avons utilisée pour la reconstruction d'un objet à partir d'un très faible nombre de projections et de ses profils de densités . Au préalable nous aurons fait une synthèse des différents algorithmes existants . L'originalité de notre approche est triple :

-1) Dans son utilisation, dans le cas de radiographie rayon X.

-2) Dans sa présentation, à l'aide de graphe d'écart .

-3) Dans la proposition d'une méthode dite "d'extrapolation de courbes de densités" dans le cas où l'on ne possède pas les niveaux de gris de l'objet à reconstruire . C'est le cas pour les radiographies X de la dentition .

Les résultats obtenus sont présentés et discutés à la fin du chapitre sept, nous illustrons les résultats sur des modèles tracés manuellement et sur une série de modèles physiques

réels.

En conclusion nous discutons les perspectives de poursuite de ce travail en fonction des besoins en biomédical .

1ERE PARTIE

**APERCU SUR LES METHODES D'ACQUISITION DANS
LES SYSTEMES D'IMAGERIE MEDICALE, ET SUR LES
METHODES DE REPRESENTATION ET
VISUALISATION 3D**

Chapitre 1 : Systèmes d'acquisition

Si jusqu'aux années 1970, l'exploration du corps humain n'a pratiquement été possible qu'à l'aide des appareils de radiologie X, on assiste depuis une vingtaine d'années à une véritable révolution dans les systèmes d'imagerie [Amie 82] [Grem 87] [Imbe 85] permettant ainsi aux médecins de disposer d'une panoplie de techniques (fig 1), parfois concurrentes, mais le plus souvent complémentaires (radiologie conventionnelle, radiologie numérisée, tomodensitométrie, endoscopie, échographie acoustique [Gros 78] [Gree 82, 83]...) .

Trois techniques d'imagerie ont bouleversé l'imagerie médicale à la fois par leurs immenses possibilités et leurs rapports avec l'informatique qui est indispensable pour l'élaboration même des images . Ces techniques sont :

- >L'imagerie tomographique numérisée .
- >L'angiographie .
- >L'imagerie par résonance magnétique .

Nous allons dans ce chapitre présenter les caractéristiques de ces principales méthodes et mettre en avant leurs contraintes propres .

1-L'ACQUISITION DES DONNEES DANS LES SYSTEMES D'IMAGERIE MEDICALE

1-1-Radiologie conventionnelle [Barr 72] [Capp 81] .

La radiologie conventionnelle utilise les propriétés d'absorption différentielle des rayons X par les différentes structures du corps (notamment les parties dures par rapport aux parties molles), pour produire une image de projection qui est recueillie sur une surface sensible au rayonnement X .

La radiologie X représente 70% des actes d'imagerie diagnostique et couvre trois domaines:

- Les systèmes simples sur cliché (pour l'étude des thorax,des membres du bassin,...) .
- Les systèmes à amplification de brillance (pour l'étude du système intestinal ou appareil urinaire) .
- Les systèmes très spécialisés (pour l'exploration cardio-vasculaire par exemple) .

La radiologie conventionnelle comporte certaines limites bien connues, on peut citer notamment:

- Les problèmes d'investigation en profondeur .
- L'échelle des contrastes noir et blanc limitée .

1-2-Radiologie numérique

La radiologie numérique est un développement de la radiologie conventionnelle dans lequel l'image recueillie est numérisée et traitée par les techniques informatique . Un développement particulier est l'Angiographie numérisée .

1-2-1-Angiographie numérisée [Bout 85] [Buon 81] [Chil 81] [Duco 80] [Manc 83] [Mist 78, 81] [Yang 89]

La technique consiste à réaliser une première image numérique, qui est ensuite conservée dans la mémoire de l'ordinateur . On injecte un produit de contraste par voie veineuse ou artérielle et un second cliché est pris . L'ordinateur opère alors une soustraction des parties communes aux deux clichés

Les images obtenues peuvent ensuite être améliorées par une technique numérique de rehaussement du contraste. En cas de "bougé" du patient, des algorithmes spécifiques permettent de recalculer les images avant soustraction.

Panorama des différents systèmes d'imagerie classés en fonction des agents physiques utilisés

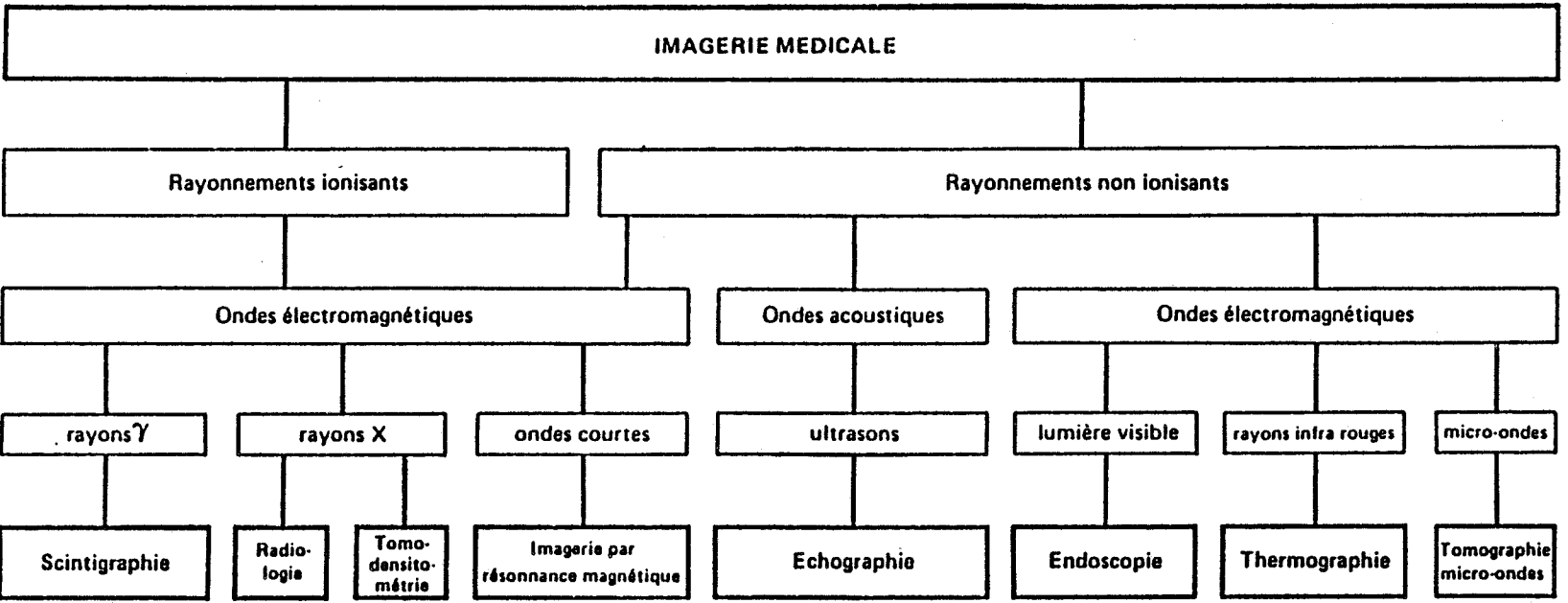


Figure 1 : panorama des différents systèmes d'imagerie (tiré de Arago 3 [Arag 86]).

Chapitre 1 : Systèmes d'acquisition

L'angiographie numérisée permet par simple injection intraveineuse d'un produit de contraste, de visualiser la plupart des systèmes artériels .

1-3-Imagerie tomographique numérisée

Elles regroupent quatre grandes familles :

-->La tomодensitométrie (TDM) ou scanographie qui permet de visualiser une coupe du corps où les tissus sont discriminés par leur coefficient d'atténuation des rayons X .

-->La tomoscintigraphie à positons (PT) qui réalise pour une coupe du corps la carte de localisation des isotopes .

-->La tomoscintigraphie à photon unique (SPT) qui effectue le même type de carte pour un émetteur de photons gamma .

-->L'imagerie par résonance magnétique (IRM) [Gada 79] qui permet de visualiser une coupe du corps où les tissus sont discriminés par les différences de densité des protons et de leur temps de relaxation magnétique .

Nous allons reprendre, plus en détail, ces différentes techniques .

1-3-1-Tomographie par rayon x [Barr 84] [Giba 83] [Herm 79] [Houn 76] [Luo 86] [Naha 81] [Tour 78] .

La tomographie par rayon X est l'une des premières révolutions majeures apportées par l'informatique à l'imagerie médicale . Ce succès résulte d'une part de la qualité des informations qu'elle apporte (très bon contraste entre les tissus, séparation des structures apparaissant superposées au niveau des radiographies) et d'autre part de sa quasi-innocuité .

1-3-1-1-Principe

La Tomographie par rayon X consiste à mesurer, dans un plan de coupe, le coefficient d'atténuation linéaire proportionnel à la densité des tissus .

Un examen scanner se décompose en trois parties :

-a)Acquisition de données par projection de rayons X .

-b)Reconstruction des coupes densitométriques à l'aide d'opérations de calcul numérique à partir des données de projection mesurées .

-c)Visualisation des coupes .

Nous allons reprendre ces différentes étapes .

-a)Acquisition des données .

Le système d'acquisition est un ensemble "source-détecteur" capable de tourner autour du patient (fig 2).

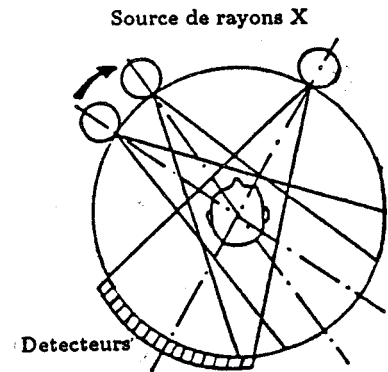
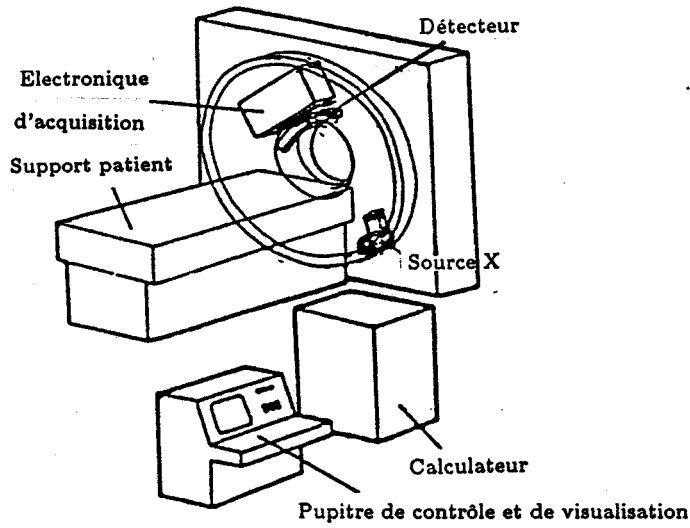


Figure 2 : architecture et système d'acquisition

Dans un plan de coupe, l'information permettant de remonter à la distribution des densités est l'atténuation du faisceau de rayon X due à la traversée du corps absorbant (fig 3).

Principes mis en œuvre dans les différentes générations de scanographiques

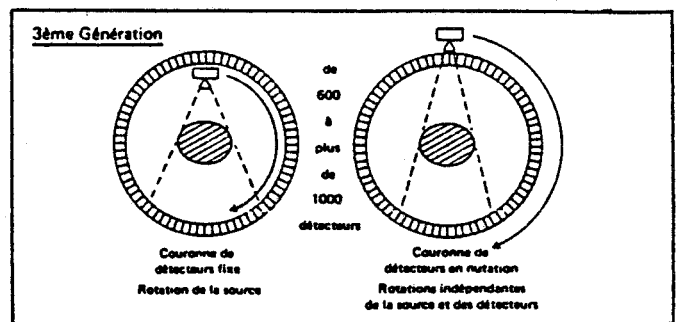
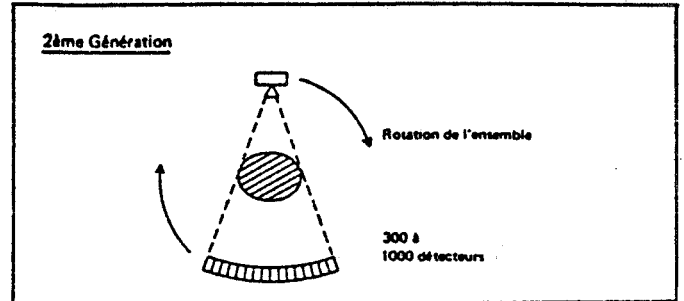
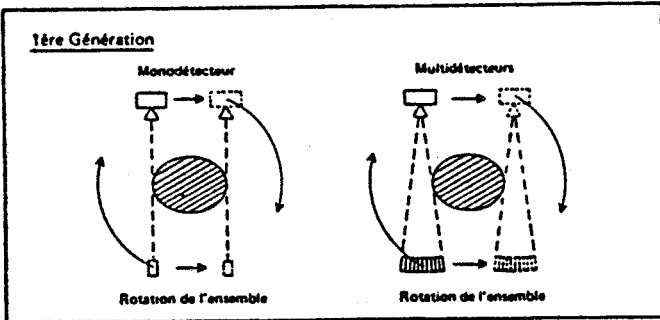


Figure 3 : différents principes d'acquisitions

Si on appelle $\mu(x,y)$ la répartition du coefficient d'atténuation linéaire des tissus traversés, et si on considère l'hypothèse d'un rayonnement monochromatique d'énergie E infiniment fin, le flux de photons transmis ϕ est donné par la loi de Lambert-Beer.

$$\phi = \phi_0 \exp \left(- \int \mu(x,y) ds \right)$$

Chapitre 1 : Systèmes d'acquisition

dans le cas où ϕ_θ est la projection acquise en un point r parallèle à une direction θ le flux de photons transmis s'écrit:

$$\phi = \phi_0 \exp (- \rho_\theta (r))$$

$$\text{avec } \rho_\theta (r) = \log (\phi / \phi_0)$$

-b) Reconstruction des coupes.

Il existe deux types de méthodes :

->Les méthodes par transformées [Herm 80] [Lewi 79] : basées sur des formules analytiques d'inversion.

->Les méthodes d'expansion de série [Cens 83] qui présentent le problème en terme d'analyse numérique .

Ces méthodes possèdent des avantages indéniables que l'on peut citer :

-1)Reconstruction des images de haut contraste(os par rapport aux tissus mous) .

-2)Adaptation à la tomographie par émission et à certains nouveaux modèles d'acquisition de données .

-3)Reconstruction d'images tridimensionnelles .

-4)Reconstruction à partir de projections incomplètes .

c)Visualisation.

L'étape précédente permet d'obtenir la matrice des densités (généralement 256*256 ou 512*512 pixels sur 12 bits) . La visualisation de cette image des densités des tissus pose un problème dû au fait de la dynamique importante de l'image (4096 niveaux) . Il est nécessaire d'effectuer un prétraitement afin de la normaliser .

L'écran de visualisation ne permet de visualiser que 256 niveaux de gris à la fois si bien que l'utilisateur doit choisir un niveau et une fenêtre de contraste pour analyser l'image sans perdre de l'information . La console de diagnostic permet un certain nombre de traitements (mesures ponctuelles de la densité, mesures de distances,....) .

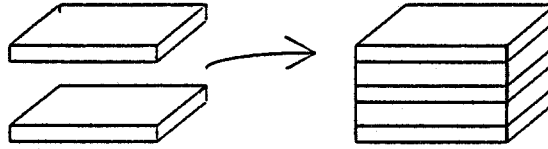
Les différents scanners X produisent des images avec une épaisseur de coupes de 1 à 10mm, une résolution de 0.5 à 1mm, les images pouvant varier entre 256*256 ou 512*512 pixels sur 12 bits .

Remarque.

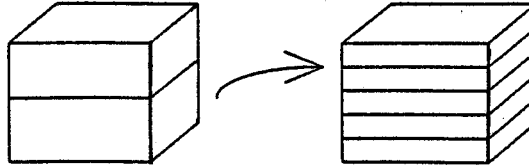
En théorie, le scanner X permet, grâce à l'empilement de coupes successives, d'échantillonner tout un volume de manière homogène selon 3 directions de l'espace, condition idéale pour avoir des reconstructions 3D de bonne qualité .

Mais en réalité, les coupes ne sont pas fines et jointives, elles sont le plus souvent épaisses jointives ou non jointives (fig 3a), il est donc nécessaire pour respecter les conditions d'un échantillonnage isotrope, de recourir à des techniques dites d'interpolation [Luo 86] [Jann 88] .

- Premier cas : Coupes disjointes



- Deuxième cas : coupes épaisses jointives



- Troisième cas : coupes épaisses se chevauchant

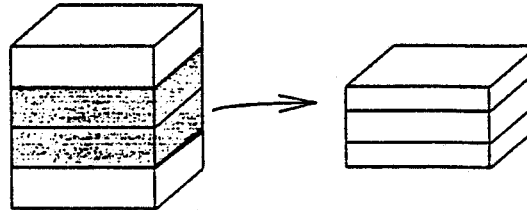


Figure 3a : problème d'échantillonnage isotrope

1-3-2-Tomographie par émission.

1-3-2-1-Tomographie par émission de gamma.[Aubr 79] [Beso 81] [Voge 78]

Cette technique consiste à injecter une source radioactive associée à une substance qui dépend de l'organe à explorer, puis à détecter les photons gamma émis par le traceur à l'aide, par exemple d'une caméra γ (fig 4) .

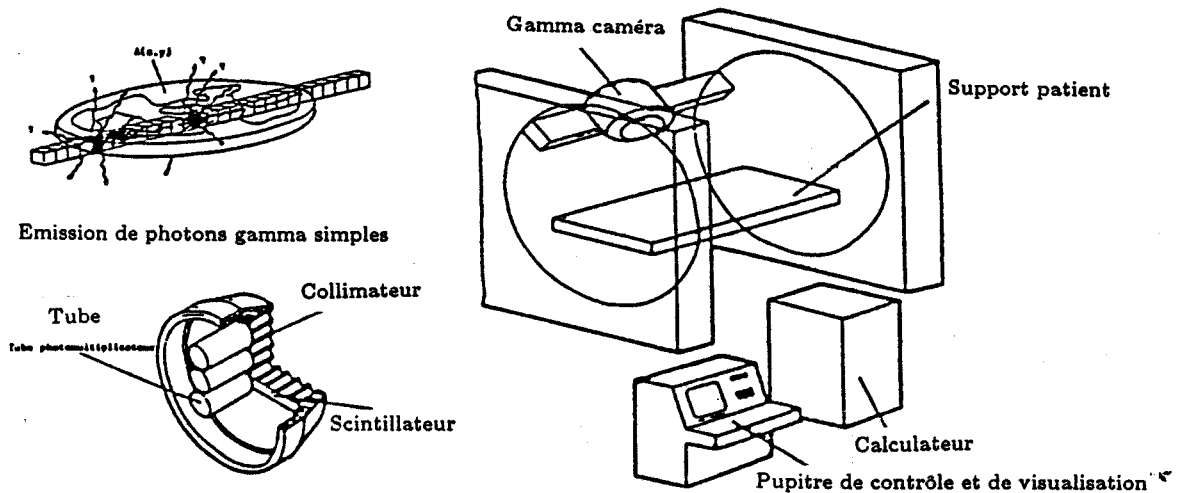


Figure 4 : système à émission de gamma

Les systèmes de tomographie par émission permettent le calcul de la répartition du traceur dans des plans de coupe et, par reconstruction, dans tout un volume . La source dans ce cas est un radioélément gamma, le détecteur est une gamma caméra montée sur

Chapitre 1 : Systèmes d'acquisition

un bâti lui permettant de tourner autour du patient . On effectue une série de prises de vue selon une quarantaine d'incidences différentes, un colimateur est utilisé pour faire la détection des photons dans une seule direction en éliminant tous les rayons gamma hors de cette direction .

Les images produites ont une résolution faible 64×64 ou 128×128 pixels sur 8 bits, l'acquisition reste moyenne et l'équipement est extrêmement couteux . L'intérêt réside dans l'acquisition de toutes les coupes d'un organe qui s'effectue en une seule rotation autour du patient .

I-3-2-2-Tomographie par positons [Jone 80] [Mueh 75] [Sous 79] .

Elle consiste à détecter la présence d'isotopes émetteurs de positons Bêta (ces isotopes sont utilisés comme traceur et ont une masse égale à la masse de l'électron) . La présence de ce positon ne peut être mise en évidence directement, en effet lors de son émission il interagit avec un électron et les deux particules s'annihilent en libérant de l'énergie sous la forme de deux photons émis dans deux directions opposées(fig 5) .

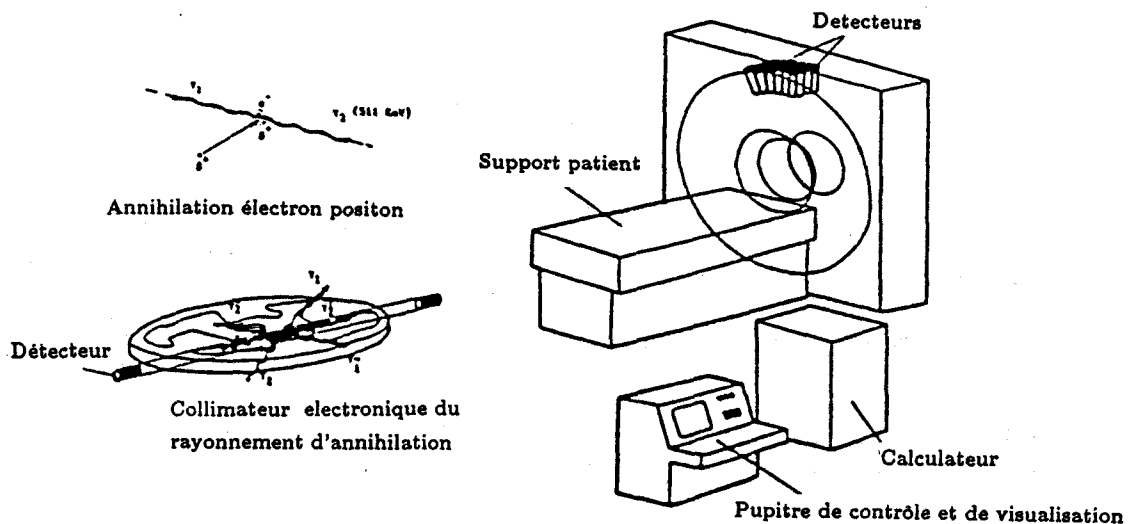


Figure 5 : système à positons

C'est cette énergie qui va être détectée à l'aide de deux détecteurs situés de part et d'autre du sujet..

Les systèmes de tomographie par positon sont différents des systèmes de tomographie à émission sur plusieurs points que l'on peut rappeler :

- 1) La physique et l'électronique de détection sont très différentes
- 2) Volume d'exploration plus faible (de l'ordre de sept coupes)
- 3) Meilleure résolution spatiale (6mm).
- 4) Echantillonnage non homogène dans les trois directions (épaisseur de coupes environ 3cm).
- 5) Coût plus élevé .

Ces raisons limitent la diffusion de cette technique hors du cadre de la recherche .

1-3-3-Imagerie par résonance magnétique [Bell 81] [Bloc 46] [Desg 81] [Hins 83] [Pyke 82].

Le principe de cette technique est de créer une dispersion spatiale de l'échantillon en lui appliquant un gradient de champ magnétique . C'est à dire un champ dont l'intensité va varier le long d'une direction linéaire donnée . La fréquence de résonance des spins est proportionnelle à l'intensité du champ magnétique . Ce gradient va créer une dispersion

en fréquences telle que chaque élément du volume de l'échantillon sera codé par une fréquence de résonance. Celle-ci est spécifique de la position de l'élément sur l'axe du gradient (fig 6 et 6').

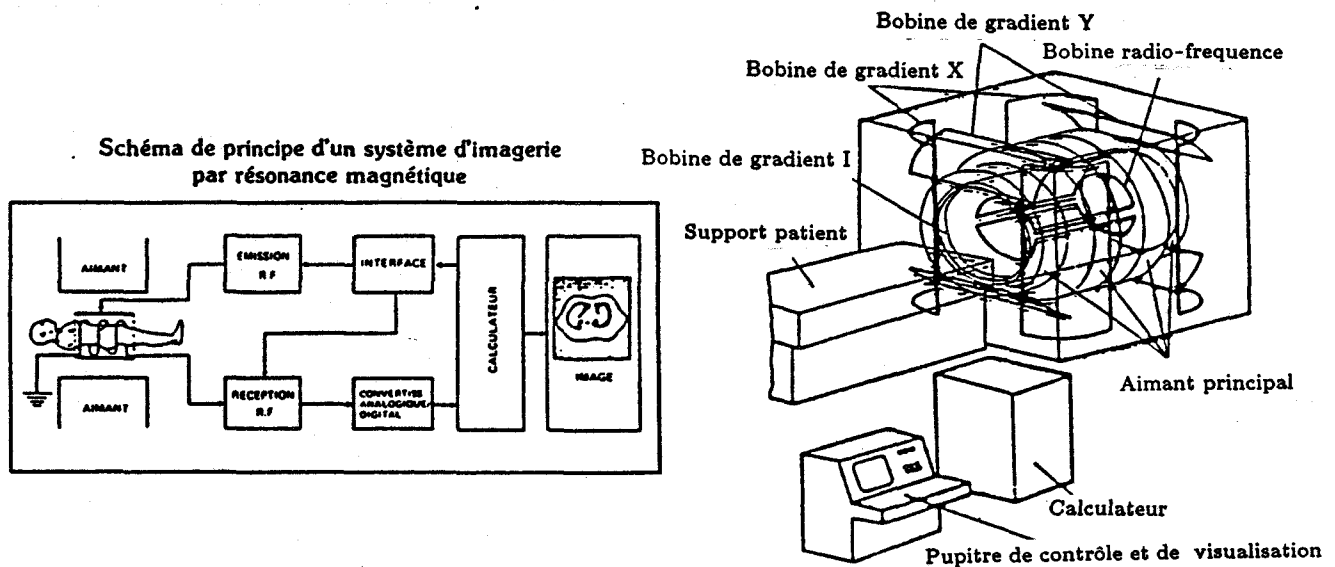


Figure 6 et 6' système et principe de IRM

Les performances du système IRM sont d'un grand intérêt.

- 1) Résolution spatiale de l'ordre de 0.5 à 1 mm (équivalent au scanner).
- 2) Bon contraste entre les tissus mous.
- 3) Visualisation 3D.
- 4) Obtention d'image pour des positions et des orientations quelconques.
- 5) Taille des images 128*128 ou 256*256 pixels.

1-4-Conclusion.

Les techniques d'imagerie présentées (fig 7) permettent l'établissement de la cartographie 3D de la répartition d'un paramètre caractéristique à l'intérieur d'un volume (coefficient d'atténuation linéaire relié à la densité des tissus en SCANNER X, concentration en éléments radioactifs en tomographie d'émission...).

Ces techniques sur le plan théorique permettent de considérer des conditions d'échantillonnage isotrope dans les trois directions de l'espace ce qui en pratique, pour un certain nombre de raisons (acquisition des données coupe par coupe, durée d'examen,...) n'est plus le cas (série de coupes, souvent épaisses et pas forcément jointives).

Les systèmes brièvement décrits ci-dessus, permettent d'obtenir des images bidimensionnelles numériques d'objets quelconques. Il serait donc intéressant de pouvoir disposer d'une représentation tridimensionnelle de ces images. Dans l'optique de l'étude et du développement d'un instrument d'imagerie médicale nous allons essayer d'en dégager des fonctionnalités de base. Pour cela nous présenterons les fonctionnalités générales à développer dans toutes applications en imagerie médicale 3D puis les applications particulières mises en oeuvre au sein du laboratoire (Geste Assisté par Ordinateur, application en morphogénèse, compression...).

Avantages et inconvénients respectifs des différentes méthodes d'imagerie

Système d'imagerie	Source	Risque reconnu	Résolution en volume	Différenciation des tissus	Remarques générales	Capacité requise de l'utilisateur
Radiologie conventionnelle	Rayon X	Forte irradiation	Très bonne (< 1 mm)	Faible en général. Bonne qualité de l'examen des os	Qualité moyenne de l'image en général	Moyenne
Radiologie numérique	Rayons X	Irradiation	Bonne (~1 mm)	Assez bonne	Grand intérêt pour l'angiographie. Se substitue à des examens complexes, désagréables et coûteux	Assez élevée
Scanographe	Rayons X	Irradiation	Très bonne (1 x 1 mm)	Bonne (0.5%)	Reconstitution à la demande de coupes	Faible
Médecine nucléaire	Rayons γ et β^+	Faible irradiation	Moyenne (5 à 6 mm)	Très bonne dans certains cas	Spécificité des informations obtenues (métaboliques, fonctionnelles)	Forte
I.R.M.	Champ électromagnétique	Nul	Très bonne	Très bonne pour les tissus mous	Moyenne de coupes dans tous les plans. Possibilités d'études métaboliques	Moyenne
Echographie	Ultrasons	Nul	Bonne (1 à 2 mm)	Bonne (perfectible)	Grande flexibilité d'emploi (adaptabilité, mobilité)	Forte

Figure 7 : avantages et inconvénients des différentes méthodes d'imagerie (tiré de Arag 3)

2-FONCTIONNALITES GENERALES D'UNE STATION D'IMAGES 3D EN IMAGERIE MEDICALE.

Une station d'image 3D utilisée dans le domaine médical doit nécessairement posséder un certain nombre de primitives de base agencées selon un scénario particulier . Ce scénario se décompose généralement en une suite d'étapes disposées selon le schéma classique suivant : (fig.8) que l'on peut regrouper en quatre blocs principaux : préparation des données, génération des bases 3D, visualisation, manipulation .

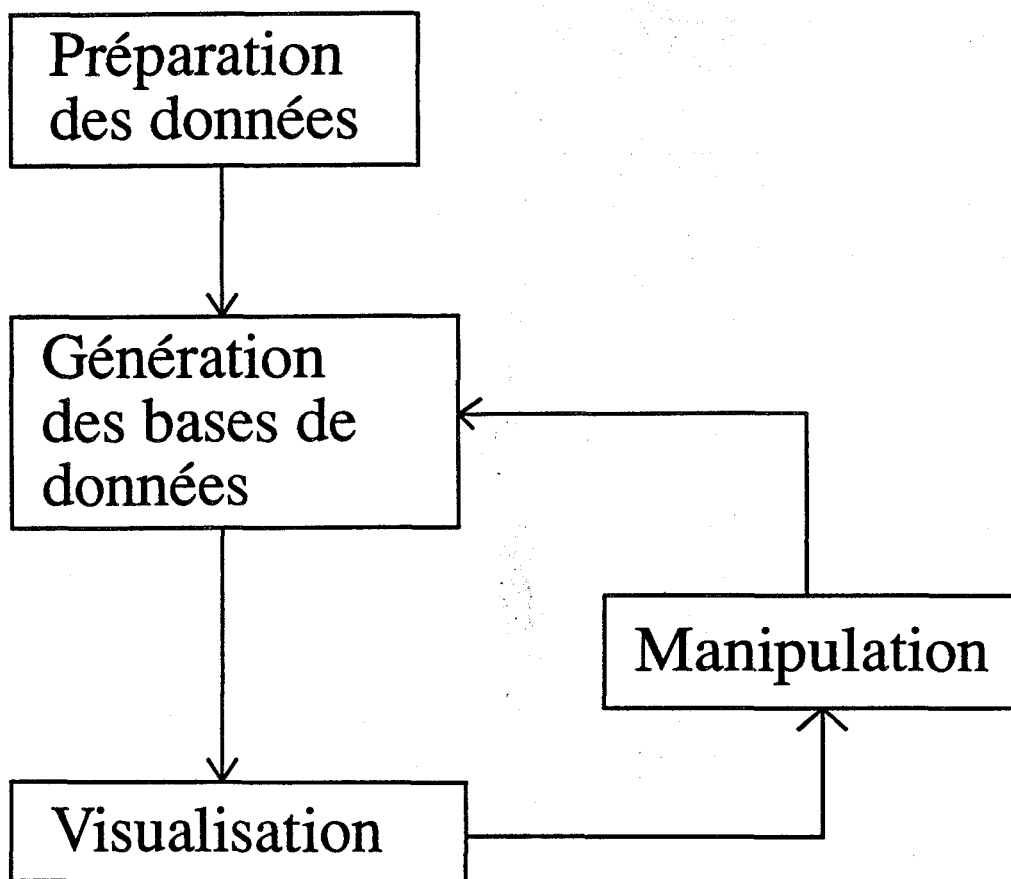


Figure 8

L'interaction entre ces différentes étapes est liée à la nature de la représentation adoptée .

Il comprend aussi des utilitaires non spécifiques dont nous n'aborderons pas l'étude ici (archivage,....) .

Dans le cadre de notre travail, l'étude a porté sur des données de départ issues de deux sources différentes :

- 1) Une série de clichés contenant des coupes parallèles scanner X ou IRM, de l'arbre vasculaire du cou .
- 2) Trois clichés radiologique X représentant un crâne dans trois incidences différentes: (latéralis, frontalis, axialis) .

2-1-Préparation des données.

C'est une partie très importante dans le processus mis en oeuvre pour la visualisation 3D . Il consiste d'abord à initialiser tous les paramètres qui devront être considérés comme constants par la suite (étalonnage, zoom,...) puis effectuer l'extraction des

Chapitre 2 : Fonctionnalités d'une station d'images 3D

régions qui nous intéressent, ce qui suppose l'élaboration de critères de segmentation . Dans le cas où les structures obtenues après acquisition sont très contrastées par rapport à leur environnement (os par rapport aux tissus mous, veines par rapport au tissu environnant) cette opération ne présente pas de difficulté . Un simple seuillage, éventuellement complété par des conditions portant sur les gradients peut suffire . Dans le cas contraire le problème est plus délicat .

Dans notre étude, seuls les clichés radiographiques posent un problème . Bien que les structures à étudier sont des structures osseuses la méthode d'acquisition ne permet pas une segmentation automatique (dû à la superposition des diverses structures) . On peut envisager trois approches possibles pour résoudre ces problèmes de segmentation

-1)Réaliser une segmentation manuelle (à l'aide d'une souris ou d'un stylo) c'est une des approches que nous avons adoptée dans le cadre de la station de travail que nous avons développée . Cette technique est fastidieuse car le médecin doit effectuer cette opération sur tous les clichés, mais elle a le mérite d'être très sûre car le praticien peut sélectionner au mieux les zones lésionnelles . Bien évidemment il faut au plus tôt automatiser le processus ne serait-ce que dans l'optique d'une utilisation clinique, en laissant tout de même la possibilité au médecin d'intervenir.

-2)Réaliser une segmentation semi-automatique ceci est une des voies explorée au laboratoire afin de développer des outils et méthodes de segmentations appliquées à l'imagerie médicale . Ce sont des techniques de segmentation que l'on qualifiera de semi-automatiques en ce sens qu' une partie du processus se fera sur la base de critères et d'attributs spécifiques (même moyenne, même variance, ...), et dans les zones litigieuses il faudra l'intervention du médecin pour décider .

La qualité de la segmentation sera essentiellement liée à celles des critères et attributs mis en oeuvre, la qualité des données de départ intervenant pour beaucoup dans le résultat final .

-3)Enfin la dernière voie correspond à une approche complètement automatisée à la fois pour les structures osseuses mais aussi pour les organes mous . Cette phase dans ce contexte aussi général n'est pas concevable à notre avis sans l'aide de certaines informations a priori (modèle de l'organe par exemple) et de techniques de l'IA.

2-2-Génération de la base de données 3D.

L'étape relative à la préparation de données quelle que soit la méthode utilisée, implique la saisie et la gestion d'un nombre important d'informations . Il parait donc souhaitable, avant même de choisir un modèle de représentation, d'éliminer cette information redondante et de conserver, selon un critère donné les points pertinents essentiels à la définition de la scène . C'est justement un de nos objectifs puisque notre travail doit s'effectuer sur une petite station . Cette opération sera réalisée par la fonction échantillonnage.

C'est aussi à ce niveau que les données nécessaires aux modules supérieurs (visualisation, manipulation) sont évaluées et calculées (normale,...) .

2-3-Module de représentation.

Les informations géométriques de "base" doivent être modélisées afin de rendre possible la représentation d'objets en 3D sur lesquels portera le geste médical ou chirurgical . Il est donc nécessaire, pour mener à bien cette étape, de faire un bilan des différentes familles de modélisation et définir les paramètres prioritaires qui influenceront le choix du modèle .

Chapitre 2 : Fonctionnalités d'une station d'images 3D

Il faut noter que la stratégie développée par la suite dépendra essentiellement du choix judicieux effectué du modèle de représentation .

2-4-Visualisation et manipulation.

Ce sont les tâches primordiales à réaliser en synthèse d'image 3D . La compréhension du modèle est facilitée dès lors qu'un caractère dynamique apparaît dans les images . D'où l'intérêt de développer des procédures interactives permettant, de déplacer les sources de lumière, de changer de point de vue(ce qui revient à tourner et translater le ou les objets 3D), de réaliser des effets de transparence, etc.....

Par ailleurs il faut que le modèle puisse générer, non pas un seul objet, mais plusieurs, sur une même image . Des méthodes de superposition sont alors nécessaires, ce qui peut-être fait à l'aide des algorithmes de suppression de parties cachées.

Il est alors nécessaire de rechercher, l'adéquation entre le souhait d'un degré d'interactivité maximum, et le souci d'une base de données raisonnable, ceci dans l'optique d'intégrer les fonctionnalités générales développées précédemment, en vue d'une application médicale .

Il faut tenir compte aussi de la complexité supplémentaire apportée par les applications spécifiques .

2-5-Fonctionnalités applicatives

2-5-1-Dans le cadre d'une biopsie. [Holl 90]

Les progrès réalisés en imagerie permettent de connaître très précisément la localisation dans un espace à trois dimensions de structures que l'on désire atteindre à l'aide de moyens variés (aiguilles, rayonnement,..) ou dont on souhaite modifier chirurgicalement la forme et les rapports avec d'autres structures .

Quelle que soit la structure (ou l'organe) à laquelle on s'adresse, trois types de problèmes doivent être considérés .

-->Repérage de la cible .

-->Définir la trajectoire de l'outil .

-->Guidage de l'outil vers l'organe lors de l'intervention .

-Le repérage de la cible repose essentiellement sur l'exploitation visuelle du volume 3D dans son environnement . La désignation du point visé est effectuée soit au moyen d'un curseur situé dans le plan image ou directement dans la scène 3D .

-La définition de la trajectoire est réalisée en recherchant le chemin le plus court passant par le point visé, les trajectoires plus complexes sont parfois nécessaires, dans le cas où il est impératif d'éviter des organes sensibles ne pouvant en aucun cas être touchés, ou de la minimisation des intersections entre les outils et les organes .

Cette tâche est effectuée à l'aide d'outils graphiques rudimentaires, guidés dans l'espace 3D .

-Guidage de l'intervention : dans le cas d'une biopsie le guidage de l'intervention se fera après intégration de toutes les données en présence(issues de divers capteurs) . Ce guidage peut être une simple proposition de trajectoire (ce qui laisse le chirurgien entièrement libre de ses gestes)ou alors une robotisation complète du geste (prévoir dans ce cas de figure toutes les sécurités nécessaires) .

2-5-2-Application en morphogénèse .

Les difficultés liées à ce domaine sont voisines de celles de la CFAO en mécanique et électronique .

Dans le cas des prothèses dentaires l'orthodontiste est confronté à une alternative possible .

- Utilisation de produits existants issus d'une gamme proposée par les constructeurs .
- Conception de produits personnalisés adaptés à la pathologie de chaque patient .

Dans le dernier cas la démarche est la suivante:

-->Saisie des formes .

-->Visualisation 3D .

-->Conception .

-->Fabrication .

-a)Saisie des formes .

La saisie des formes s'effectue de deux manières possibles :

-Soit en réalisant une empreinte externe .

-Soit en s'appuyant sur les sources d'imagerie médicale . Il faut alors dans ce cas porter un soin particulier à l'acquisition (la durée ne devant pas être un facteur pénalisant), et à la précision de la forme obtenue(facteur essentiel).

-b)Visualisation.

Les organes sont représentés à l'aide de techniques classiques (filaire, facettes, voxels,.. pour plus de détail voir le chapitre 3) le choix bien évidemment dépendra du problème à traiter et de la méthode de saisie . Le résultat sera fortement influencé par les algorithmes développés et par l'architecture des systèmes informatiques utilisés.

-c)Conception et fabrication.

La conception, spécifique de ce type d'application, à pour objectif de conformer prothèse et organe.

Il sera nécessaire d'utiliser du matériel très performant qui devra répondre à la fois à trois impératifs :

-1)Rejet minime (facteur qui dépend essentiellement de l'environnement concerné) .

-2)Résistant (pour réduire les interventions ultérieures sur le patient) .

-3)Coût faible (pour généraliser cette opération) .

Nous venons de dégager les fonctionnalités générales que doivent posséder diverses applications en imagerie médicale 3D . Chacune d'elles nécessitera en plus le développement d'outils spécifiques dans l'optique d'une utilisation particulière .

L'étape suivante consiste à choisir le modèle de représentation qui réponde aux attentes générales définies plus haut .

Nous allons pour cela dans le chapitre trois effectuer un rapide tour d'horizon des différents modèles de représentations existants.

Ce chapitre trois constitue une revue bibliographique des méthodes de modélisation de scènes tridimensionnelles . En effet nous avons dû rassembler et classer ces méthodes qui se trouvent décrites et développées dans une grande quantité d'articles et d'ouvrages . Cette revue conduit à un classement qui permet de mieux choisir le modèle de représentation en fonction de son application

3-MODELISATION GEOMETRIQUE DE SCENES TRIDIMENSIONNELLES .

La modélisation géométrique est un ensemble de méthodes utilisées pour décrire les caractéristiques géométriques d'un objet . Lorsque nous construisons un modèle de quelque chose nous créons une représentation de cette entité.

Le but de ce chapitre est de présenter très clairement mais de façon succincte les approches classiques permettant de modéliser un solide et ceci dans un contexte général . L'objectif est de fournir au lecteur un schéma le plus complet possible sur les différents modèles existants, mais aussi les éléments scientifiques préalables à une bonne compréhension des idées développées par la suite .

Son intérêt réside donc dans sa présentation et son aspect didactique . Nous essayerons pour cela de dégager les qualités et les défauts de chacun des modèles que nous aborderons, afin d'isoler les contraintes à respecter et éventuellement les limitations dues à la nature et la forme de l'objet à visualiser .

Cette étude conduit naturellement à une classification des différents modèles existants, à l'aide d'une structure arborescente .

Nous évoquerons en outre les mécanismes de conversion entre les différentes représentations, problème dont l'importance est liée à la limitation de chacun des types de modélisation .

Le modèle géométrique est le centre du système de modélisation, son choix est fonction du type d'objet que nous voulons visualiser et des critères généraux suivants (fig 9) :

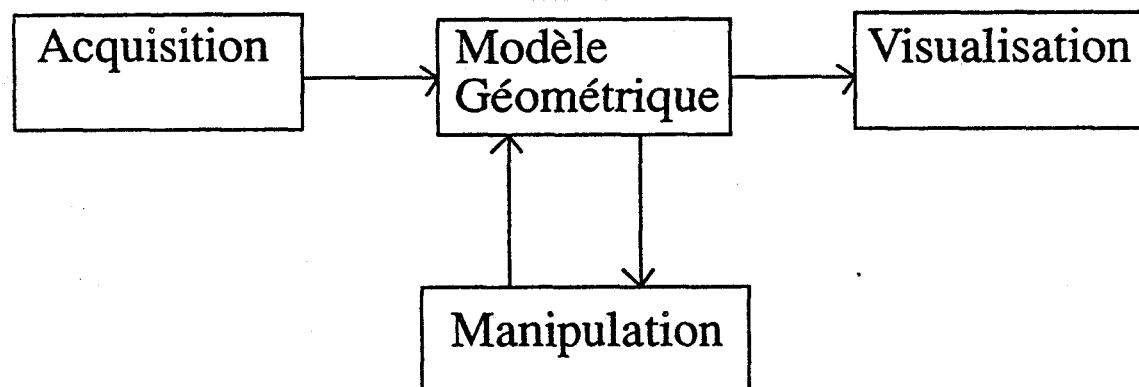


Figure 9 : système de modélisation .

-->L'acquisition : l'objet peut être conçu soit à partir d'un système graphique interactif, soit à partir d'un langage de description .

-->La visualisation : le choix du modèle dépendra du système de génération de l'image (temps réel ou pas) et de la qualité de la scène à obtenir .

-->La manipulation : concerne toutes les opérations de calcul, d'analyse, de déformation que nous voulons effectuer sur le modèle de l'objet .

3-1-Classification

Bien entendu, il n'existe pas un modèle géométrique universel qui permet de répondre aux critères énoncés précédemment, d'où la nécessité de disposer de plusieurs représentations différentes du même objet afin de répondre aux contraintes précédentes .

On recense figure 10, quatre grandes familles de modèle géométrique .

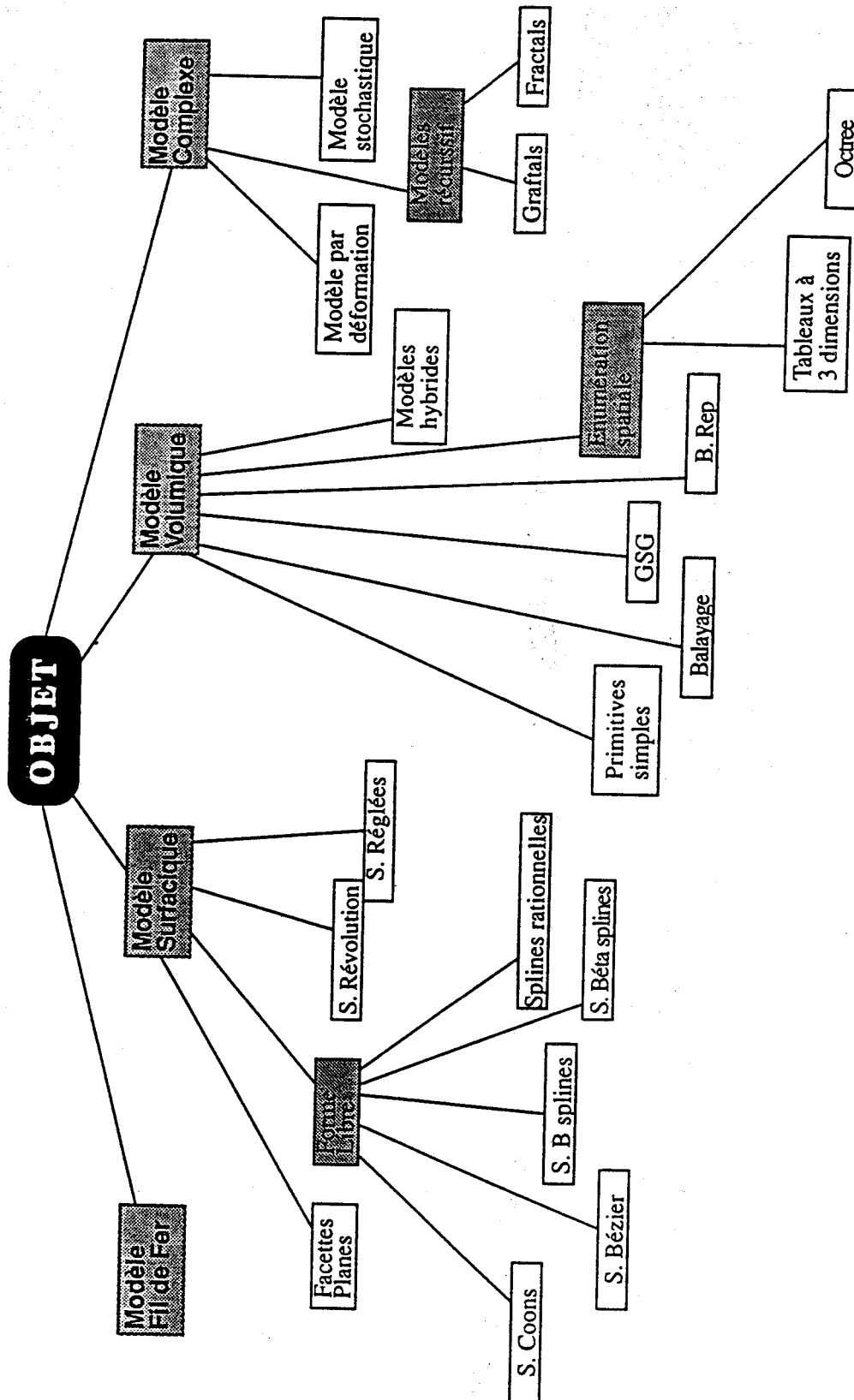


Figure 10 : les quatre familles de modèle géométrique

-->Le modèle fil de fer .

Le premier conçu, l'objet est constitué d'un ensemble de segments de droites .

-->Le modèle surfacique .

l'objet est en général constitué d'un ensemble de morceaux de surface ("patch") .

-->Le modèle volumique .

l'objet est constitué d'un ensemble de primitives simples .

-->Les modèles complexes.

concernent les objets non définissables géométriquement .

A travers ces divers modèles, pour un objet donné on peut relever trois types de complexités présentes à des degrés différents

-Complexité combinatoire .

-Complexité dimensionnelle .

-Complexité analytique .

-1)Complexité combinatoire .

Du fait du nombre élevé d'éléments qu'il contient un objet peut être complexe même si la forme de ses éléments sont individuellement très simples à décrire (fig 11) .

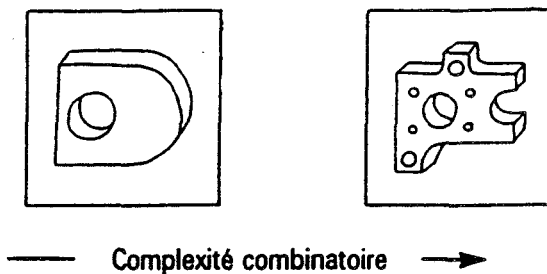


Figure 11 : complexité combinatoire

-2)Complexité dimensionnelle .

La définition d'un objet peut parfois être difficile à appréhender selon les orientations que ces formes peuvent prendre . Certaines hypothèses dans beaucoup de cas permettent de limiter cette complexité (objet plan, pas d'arêtes vives,..) (fig 12) .

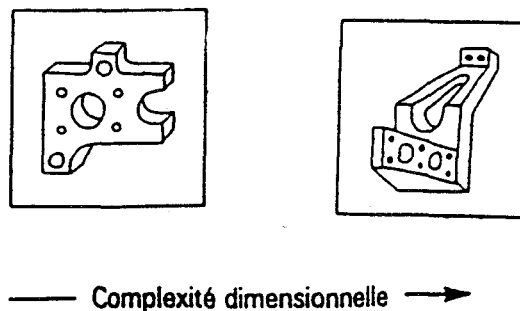


Figure 12 : complexité dimensionnelle

-3)Complexité analytique .

La forme algébrique d'un objet composé de plusieurs éléments, peut être aussi bien

simple que complexe (fig 13).

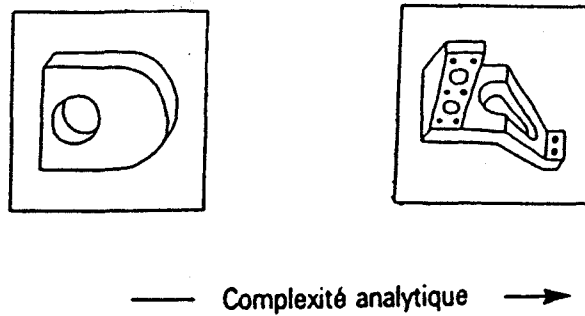


Figure 13 : complexité analytique

Après cette courte introduction, nous comprenons mieux l'intérêt de passer en revue les différents problèmes liés à la modélisation et au soin qu'il est nécessaire d'y apporter pour la suite de notre étude . Le chapitre deux sera donc agencé selon le degré croissant de complexité des modèles présentés .

Dans tous les cas il nous paraît important de remarquer que l'interprétation d'une scène quelle qu'elle soit est finalement obtenue au terme d'une modélisation des informations géométriques de "base" .

3-2-Modélisation fil de fer ("wire frame") ou filaire ou par les limites [Hegr 87] [Lieb 88] [Newm 79] [Pero 88] [Requ 80, 83] [Roge 76] [Schw 87] [Wood 86].

Dans ce modèle, les seules données sont les coordonnées (x,y,z) des sommets, et les arêtes les joignant .

La méthode classique consiste à dresser la liste des coordonnées des sommets (chaque sommet porte un numéro) et la liste des arêtes (chaque arête est définie par les numéros des sommets qui la bordent (fig 14) .

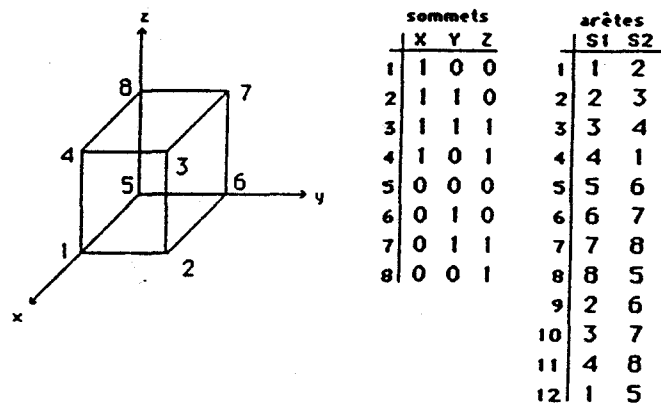


Figure 14 : principe de la modélisation filaire

Ce modèle, bien qu'étant un modèle tridimensionnel, est peu puissant . Les informations conservées sont de deux types :

- Géométriques : coordonnées des sommets .
- Topologiques : arêtes en fonction des sommets .

3-2-1-Propriétés.

C'est le plus simple de tous les modèles, il nécessite un minimum de place mémoire et un coût de calcul très faible, de plus l'étape de visualisation s'effectue rapidement .

3-2-2-Inconvénients.

Cette technique malheureusement fait apparaître trop d'inconvénients pour être utilisée . On peut notamment citer:

-->L'ambiguïté, rien ne distingue le vide du plein (fig 15) .

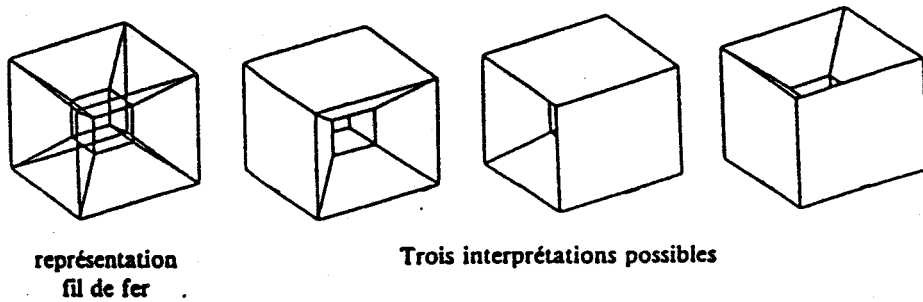


Figure 15 : Problème d'ambiguïté .

-->Possibilité de créer des structures tout à fait irréalisables (fig 16) .

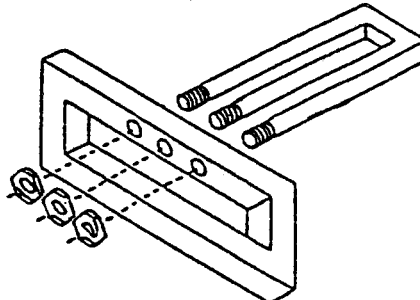


Figure 16 : problème de création d'objet irréalisable

-->Impossibilité de faire certains calculs triviaux (masse, volume.) (fig 17) .

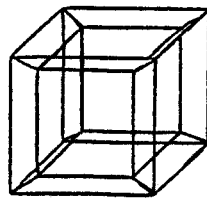


Figure 17 : problème de calcul

-->Problème de l'élimination des parties cachées non résolu (fig 18) .

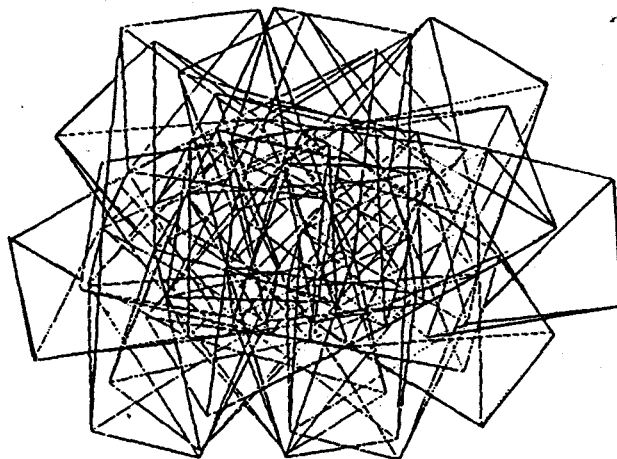


Figure 18 : problème de l'élimination des parties cachées .

-->Impossibilité d'affirmer que le résultat définit toujours un solide .

Remarque.

Pour atténuer les effets de ces propos on introduit parfois certaines contraintes qui facilitent les calculs.

Par exemple si nous visualisons le modèle avec un blanc à l'endroit où une droite coupe une autre droite située devant elle, nous réduisons l'ambiguïté de la modélisation (fig 19)

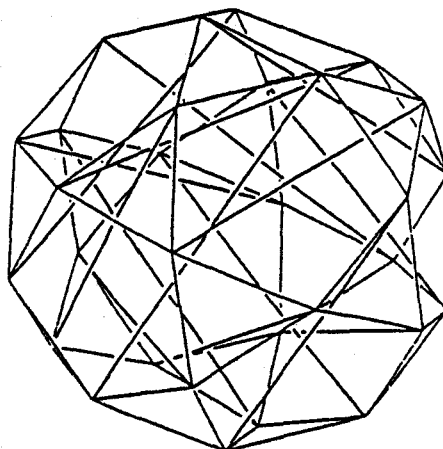


Figure 19 : solution à l'ambigüité .

Les surfaces qui définissent un solide doivent en particulier être fermées, orientables, bornées, être d'un seul morceau et ne doivent pas se couper entre elles .

Une autre méthode, pour suggérer la distance relative entre l'observateur et les divers composants de l'objet, consiste à représenter les parties les plus lointaines par des traits plus fins (ou des couleurs différentes) que celles plus proches : c'est l'effet de relief (fig20)

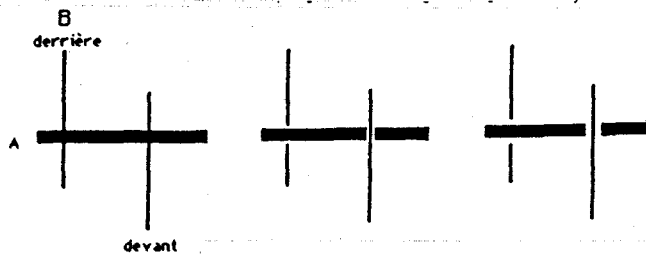


Figure 20 : effet de relief .

Limite.

Evidemment, ces contraintes deviennent inefficaces devant la complexité de la scène suivante (fig 21).

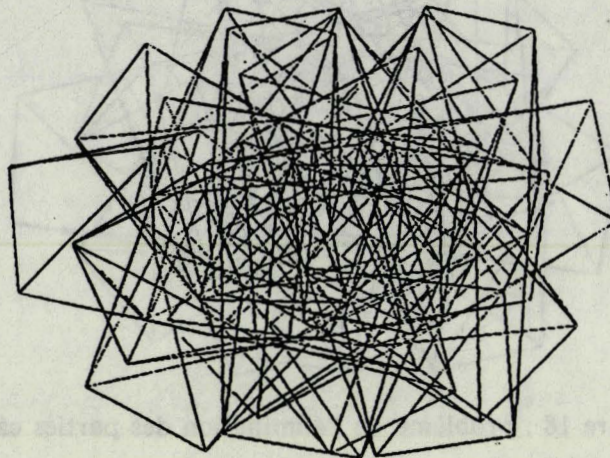


Figure 21 : inefficacité de certaine solution.

3-2-3-Conclusion.

Ce type de modèle ne peut convenir que dans le cas de la visualisation en temps réel de séquences d'animation lors de la période de mise au point ou lorsque l'on souhaite avoir une idée de l'objet à visualiser.

3-3-Modèles surfacique

Pour des applications particulières en synthèse d'images, la connaissance exhaustive de l'information volume d'un objet n'est pas indispensable et peut être remplacée par celle de la surface, ceci grâce notamment à la propriété que possède la vision humaine qui permet d'appréhender les formes d'un objet par l'intermédiaire uniquement de sa surface. D'où l'importance de ces représentations en synthèse d'images 3D.

3-3-1-Modélisation par facettes planes [Fole 82] [Gard 82] [Hegr 87] [Luca 83] [Requ 80, 83] [Roge 76] [Wood 86]

L'objet est représenté par sa surface, les éléments structurés sont des polygones (appelés facettes) dont la réunion approche la surface de l'objet .

3-3-1-1-Principe .

Les éléments à visualiser sont donc des facettes, il suffit pour cela de dresser la liste des sommets de l'espace à 3 dimensions sur lesquels s'appuient les arêtes, et la liste des facettes . Une facette est définie par la liste des sommets qui bordent un contour (fig 22) .

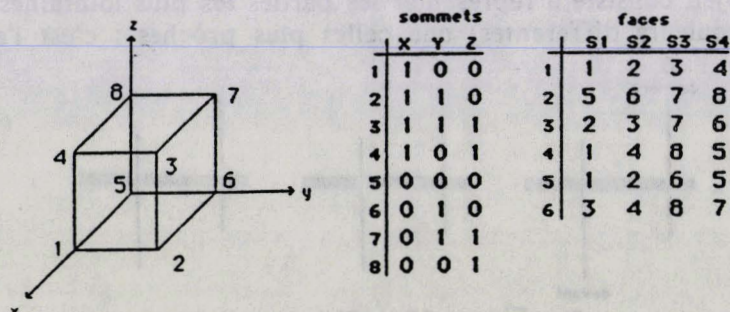


Figure 22 : principe de la modélisation à l'aide de facettes

Chapitre 3 : Modélisation géométrique de scènes tridimensionnelles

Elle doit en outre posséder une aire non nulle et l'union de toutes les faces doit reconstruire la surface .

L'information qui est associée aux composantes de la surface (sommets, faces) est de deux ordres :

-Géométrique : qui inclut la dimension et l'emplacement dans l'espace de chaque composante .

-Topologique : qui permet de connaître la relation entre les éléments .

On peut toutefois dans le cadre d'un rendu plus réaliste ajouter des informations supplémentaires (couleur, texture,..) .

3-3-1-2-Propriétés .

C'est un modèle quasi-universel, beaucoup d'algorithmes (d'élimination de parties cachées, d'éclairages,...)ont été développés pour son traitement . Cette technique offre l'avantage d'être relativement simple à mettre en oeuvre.

-Assez peu coûteuse en place mémoire .

-C'est encore actuellement la méthode la plus utilisée pour représenter des objets en synthèse d'images .

On relève quand même des inconvénients :

-Il faut s'assurer de la coplanarité des facettes obtenues.

-Possibilité de créer des facettes suspendues ou non connectées (fig 23).

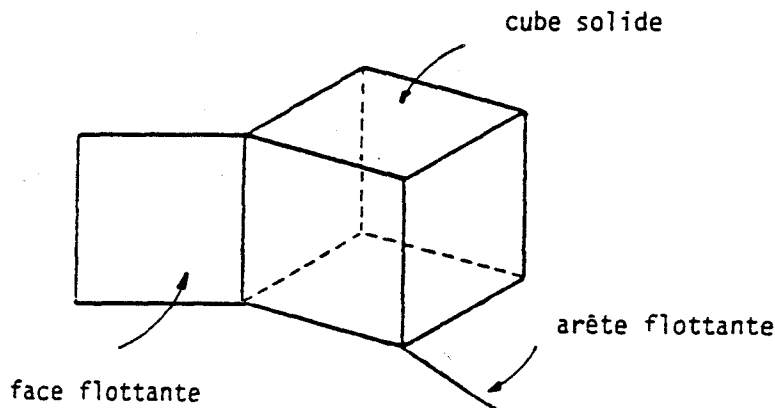


Figure 23 : création d'une face suspendue

-Une certaine redondance de l'information (sommets pouvant appartenir à plusieurs facettes en même temps) .

-Inadaptée à l'analyse ou à la manipulation des volumes .

-enfin, en raison de l'approximation du premier ordre qui est faite, les objets, les profils, de certaines courbures paraissent segmentées (fig 24).

Remarque .

Comme précédemment pour palier à certains défauts on introduit des contraintes :

-Pour s'affranchir du problème de coplanarité on peut utiliser uniquement des facettes triangulaires (qui sont toujours planes).

-Se servir d'astuces informatiques (exemple pointeurs) pour diminuer les données à

traiter.

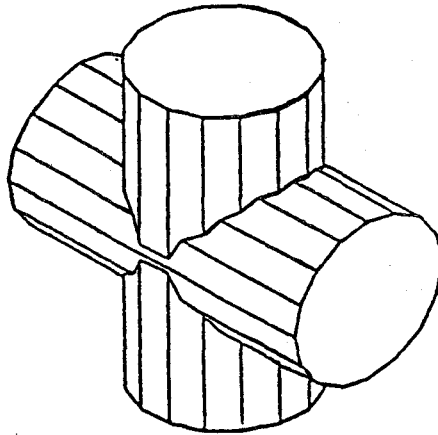


Figure 24 : Objet au profil segmenté

3-3-1-3-Conclusion .

Ce modèle est très intéressant dans les applications où seule la notion de surface est importante, par contre la notion de volume n'est pas définie .

3-3-2-Les surfaces simples de révolution [Gard 83] [Luca 83] [Requ 80, 83] [Wood86]

Elles concernent tous les objets tels que sphère, cylindre, cône,.. qui peuvent être représentés à l'aide de fonctions mathématiques simples, décrivant leur surface. On peut citer à titre d'exemple le cylindre qui est modélisé par son rayon (r) sa hauteur (h) et son axe de révolution (fig 25).

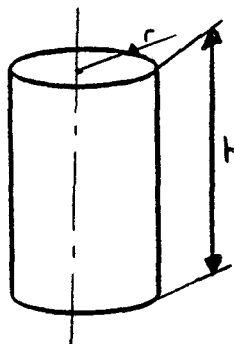


Figure 25 : surface de révolution

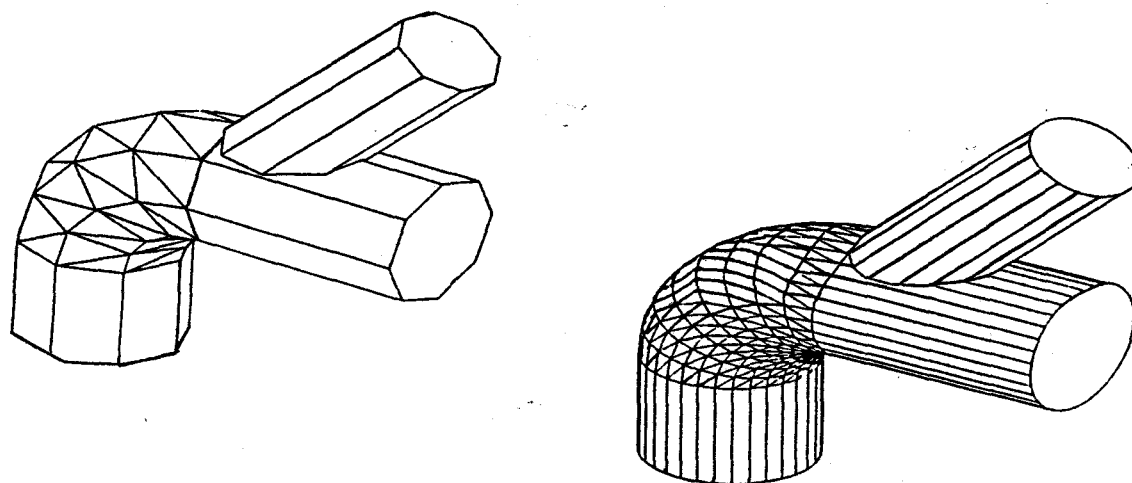
3-3-3-Approximation par facettes

Il existe aussi des méthodes de reconstruction (méthodes de triangulation) qui s'appuient généralement sur une base de données facettes . Elles permettent de définir une approximation polyédrale de la surface étudiée . Un certain nombre de solutions à ces problèmes ont été proposées dans la littérature. Elles se divisent en deux catégories :

- Celles dont l'ensemble des points donnés est absolument quelconque et aucune condition de connectivité n'est explicite (Voronöi, Delaunay [Bois 81, 82, 84] [Faug 84] [Herm 82])
- Celles dont l'ensemble des points est partitionné en sous-ensembles plans qui sont les

-Celles dont l'ensemble des points est partitionné en sous-ensembles plans qui sont les intersections de la surface cherchée par des plans de coupe parallèles [Fuch 77] [Kepp 75] [Cook 82] [Orou 81] .

Un des inconvénients majeurs de ces méthodes est la difficulté d'automatiser le processus dans le cas d'objets de forme complexe (fig 26) . Nous verrons dans la deuxième partie, les différentes techniques existantes, et nous proposerons des solutions originales à ces problèmes.



Approximation par facettes

Figure 26 : triangulation d'un objet .

3-3-4-Modélisation par surface gauche.

3-3-4-1-Introduction

Nombreux sont les produits manufacturés qui possèdent des surfaces (ou courbes) dites complexes ou de forme libre ("free form surfaces"), difficilement définissables à l'aide d'un ensemble de primitives classiques(sphères, plans, ...) . Tout le monde connaît les étuis à lunettes, le téléphone, un coeur artificiel, une voilure d'avion,....

Pour représenter de tels objets, il est nécessaire de faire appel à une définition plus fine des surfaces délimitant ces volumes . En particulier, ces modèles doivent posséder quelques qualités indispensables, il s'agit entre autre :

-->Du contrôle global ou local de la forme .

-->De la qualité de lissage .

-->Propriétés de continuités .

On distingue en fait deux approches différentes qui conduisent à des difficultés différentes .

-Si l'on désire interpoler une courbe ou une surface à partir d'un ensemble de points échantillonnés donnés, le problème est alors de trouver une représentation plus synthétique, et permettant le calcul de points intermédiaires de cet ensemble d'échantillons .

-Si l'on désire qu'une courbe ou surface ne passe pas par tous les points, mais seulement

manipuler aisément la courbe ou la surface jusqu'à ce qu'elle corresponde à la forme souhaitée .

Remarque.

-Si l'on procède par interpolation, le résultat sera d'autant meilleur que la fréquence d'échantillonnage sera plus élevée . De plus il est très fréquent de voir des phénomènes de rebonds lors de la visualisation . Bien entendu la quantité d'informations à stocker sera elle aussi, plus importante . On peut citer quelques techniques d'interpolation bien connues : interpolation linéaire, interpolation de Lagrange, interpolation d'Hermite [Besa 89] [Bézi 77] [Dony 86] [Faug 84] [Marr 76] .

-Si l'on procède par approximation interactive la courbe ou la surface résultante ne passera pas forcément par tous les points donnés, mais ceux ci permettront de contrôler la courbe et le nombre total de points requis sera bien inférieur à celui nécessaire pour l'interpolation.

La forme la plus utilisée pour décrire des courbes ou des surfaces est la représentation paramétrique . Elle est utilisée pour deux raisons :

-1)Elle limite la quantité de calculs nécessaires .

-2)La gestion des points est plus simple . Ce mode d'expression apporte un inestimable supplément de souplesse.

Avant de définir les principaux types de surfaces "de forme libre (free form surface) " nous allons à titre de rappel redéfinir .

-Une courbe paramétrique .

-Une surface paramétrique .

-Une surface cubique paramétrique .

Cela nous permettra de mieux comprendre "les courbes gauches " .

-A) Courbes paramétriques .

Equation paramétrique d'un segment (droite) passant par deux points:

-Soient P_0, P_1 (fig 27) ces deux points dans l'espace de dimension R^2

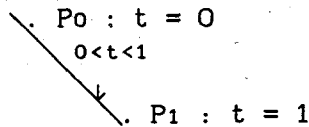


Figure 27 : droite paramétrique

$$P_0 = (x_0, y_0)$$

$$P_1 = (x_1, y_1)$$

L'équation du segment s'écrit :

$$P(t) = (P_1 - P_0)t + P_0 = P_0 + t \langle P_0 P_1 \rangle$$

où $\langle P_0 P_1 \rangle$ est le vecteur directeur

qui peut se mettre sous la forme :

$$P(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{avec } 0 < t < 1, \quad t \text{ étant le paramètre de cette droite}$$

$$\text{d'ou } x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t$$

$$\text{d'ou } y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)t$$

Dans le cas où l'on considère un espace de dimension n (R^n)

$$P(t) = C + t \langle C D \rangle \quad (1)$$

Un point P appartiendra à la droite, s'il se trouve sur le prolongement du vecteur $\langle C D \rangle$, où C et D sont définis par :

$$C = (P_{n-1}, P_{n-2}, \dots, P_1, P_0)$$

$$D = (P_n, P_{n-1}, \dots, P_2, P_1)$$

Notation matricielle.

$$P(t) = \begin{bmatrix} t + 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix} = T * A$$

T : matrice primitive du polynome de base de degré 1

A : matrice de 2 lignes et n colonnes

A matrice déterminée en spécifiant deux vecteurs de contraintes

sur l'équation (1).

-B)Equation paramétrique d'une courbe cubique .

Soient P_0, P_1, P_2, P_3 ces quatre points et $P(t)$ l'équation paramétrique de la courbe (fig 28):

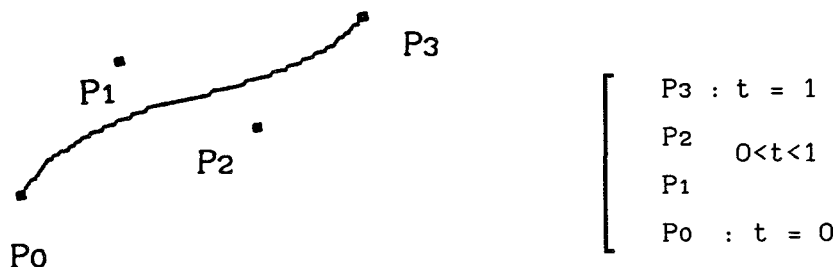


Figure 28 courbe cubique

$$\begin{aligned}
 P(t) &= Dt^3 + Ct^2 + Et + F \\
 &= [t^3 \quad t^2 + t + 1] \cdot B_2 \quad (2) \\
 &= T \cdot B_2
 \end{aligned}$$

B_2 matrice de 4 lignes et de n colonnes .

Pour avoir B_2 il suffit de préciser 4 vecteurs de contraintes sur l'équation (2) au niveau de la position des points et de leur tangentes respectives .

Les courbes bicubiques sont les courbes polynomiales de plus bas degré qui permettent à la fois de définir la position et la tangente de deux points distincts .(ce qui facilite la concaténation de deux segments cubiques avec continuité des tangentes aux points de raccord)

-C)Surface paramétrique .

Définition .

A titre de rappel, signalons la forme de représentation paramétrique d'une surface.

$$F(v,w) = (x(v,w), y(v,w), z(v,w)) \quad \text{Les paramètres } v,w \in [0,1]$$

Les quatre coins de la surface (Patch) sont obtenus en substituant

dans $F(v,w)$ les paramètres v,w par $[0, 1]$

$$\begin{aligned}
 P_{00} &= F(0,0) \\
 P_{01} &= F(0,1) \\
 P_{10} &= F(1,0) \\
 P_{11} &= F(1,1)
 \end{aligned}$$

Il en résulte que le fait de fixer deux paramètres nous permet de définir un point : $P_{i,j} = F(v_i,w_j)$

Chapitre 3 : Modélisation géométrique de scènes tridimensionnelles

De la même façon, les quatre côtés qui joignent les quatre sommets sont obtenus en imposant un paramètre, l'autre étant laissé libre.

$$(P_{00}, P_{01}) = F(0, w) \quad w \in [0, 1]$$

$$(P_{00}, P_{10}) = F(v, 0) \quad v \in [0, 1]$$

$$(P_{10}, P_{11}) = F(1, w) \quad w \in [0, 1]$$

$$(P_{11}, P_{01}) = F(v, 1) \quad v \in [0, 1]$$

Surface Paramétrique

De même le fait de fixer un seul paramètre nous permet de définir une courbe .

$$P_{i0}, P_{i1} = F(v_i, w) \quad w \in [0, 1] \quad \text{pour } i \text{ donné}$$

$$P_{0j}, P_{1j} = F(v, w_j) \quad v \in [0, 1] \quad \text{pour } j \text{ donné}$$

Pour i ou j variable on a une famille de courbes $i, j \in [0, 1]$

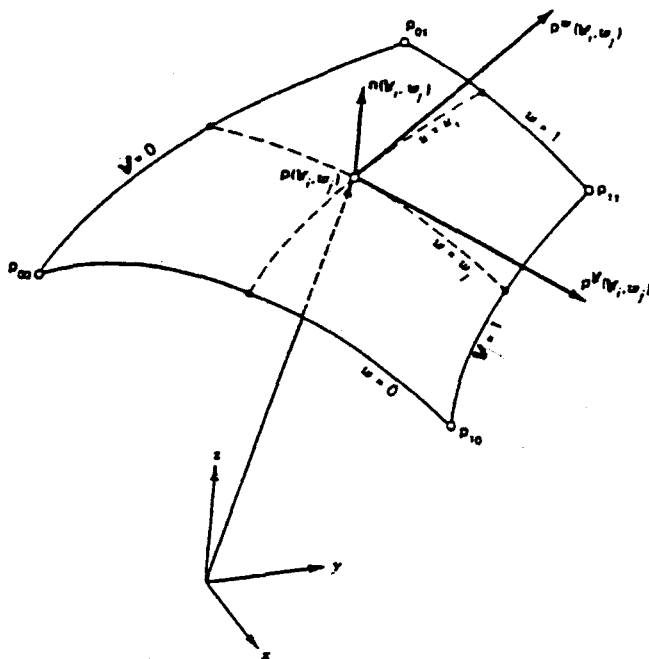


Figure 29 : courbe et surface

La surface (fig 29) paramétrique correspondante est la suivante:

$$F(v, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{ij} v^i w^j \quad v, w \in [0, 1]$$

Vecteur tangent, vecteur normal

Si nous reprenons la surface précédente au point $P(v_i, w_j)$ nous pouvons

définir les vecteurs tangents suivants:

$$P^v (v_i, w_j) = \frac{\delta F}{\delta v} (v_i, w_j)$$

$$P^w (v_i, w_j) = \frac{\delta F}{\delta w} (v_i, w_j)$$

Nous en déduisons le vecteur normal en ce point par l'expression suivante :

$$N (v_i, w_j) = \frac{P^v(v_i, w_j) \cdot P^w(v_i, w_j)}{| P^v(v_i, w_j) \cdot P^w(v_i, w_j) |}$$

Remarque

Les fonctions x , y (éventuellement z en trois dimensions) de V et W sont des fonctions polynomiales.

Les raisons de ce choix sont les suivantes :

-L'emploi de ces fonctions, permet d'obtenir une approximation aussi précise que nécessaire d'une surface.

-Les coefficients de ces fonctions ont une interprétation géométrique simple.

-Un simple produit matriciel (ou tensoriel) permet la détermination des points sur la surface.

3-3-4-2-Les surfaces de " forme libre "

Au cours de ces vingt dernières années, de nouveaux types de surfaces ont été développés . Elles ont permis de prendre en compte à la fois .

-La complexité sans cesse croissante des objets à modéliser.

-L'amélioration du dialogue entre l'utilisateur et le modèle.

Pour cela ont été développées:

-Les surfaces de Coons, qui sont les premières à avoir vu le jour, elles ont eu le privilège d'initier le processus de modélisation des surfaces, et rendu possible le calcul d'une surface à l'aide des techniques matricielles.

-les surfaces de Bezier, qui sont les premières à être utilisées de façon ergonomique dans les domaines aéronautiques et automobiles . Elles offrent l'avantage de donner une très bonne approximation d'un contour polygonal.

-les surfaces de B.splines, qui sont une généralisation récente des surfaces de Bézier, ont une popularité qui vient du fait que ces

surfaces allient la maniabilité des surfaces de Bézier à la stabilité le long de la courbe . De plus l'influence de chaque point de contrôle est limité à une portion de la surface totale (et non sur la surface entière ce qui est le cas des surfaces de Bezier)

-Les surfaces bêta-splines qui sont une généralisation des B.splines uniformes bicubiques.

-Les B.splines rationnelles, et les surfaces triangulaires permettent pour les premières une plus grande unité de modélisation, et pour les deuxièmes la prise en compte d'un réseau de contrôle et non plus une simple matrice.

3-3-4-2-1-SURFACE DE COONS [Bézi 74] [Coon 67] [Hegr 87]
[Requ 83] [Schw 87] [Sequ 87] [Wood 86]

Une telle surface a été proposée pour la première fois par Coons (1967), qui a introduit deux idées fondamentales:

- 1) On considère une représentation paramétrique de la surface de l'objet, ceci afin de modéliser toutes sortes de formes indépendamment de la matrice et de la position du système de coordonnées
- 2) On adoptera une approche par morceau que l'on opposera à une représentation de la surface entière de l'objet par une seule fonction paramétrée plus lourde et plus compliquée à manipuler . Dans ce dernier cas toute modification d'un seul point se répercutera sur le restant de la surface (ce qui souvent n'est pas souhaitable).

Principe

Il suffit de définir une surface par une juxtaposition de primitives appelées facettes gauches ou carreaux de surfaces ("patches") . Chaque carreau possède quatre courbes frontières qui le définissent entièrement.

L'expression des surfaces de Coons se fait à partir des polynomes d'Hermite (cubique) suivants .

$$\begin{aligned} F_{00}(t) &= 2t^2 - 3t^3 + 1 \\ F_{01}(t) &= -2t^3 + 3t \\ F_{10}(t) &= t^3 - 2t^2 + t \\ F_{11}(t) &= t^3 - t^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Pour alléger et simplifier l'écriture nous adopterons l'écriture matricielle .

Une représentation paramétrique de la surface est alors

$$M(t, v) = N_t P_{ij} N_v^T \quad i, j = 0 \text{ ou } 1 .$$

ou le vecteur ligne N_t est égal à :

$$N_t = [F_{00}(t), F_{01}(t), F_{10}(t), F_{11}(t)]$$

$$N_v^t = \begin{bmatrix} F_{00}(v) \\ F_{01}(v) \\ F_{10}(v) \\ F_{11}(v) \end{bmatrix} \quad N_v^t \text{ transposée de la matrice ligne } N_t$$

$P_{i,j}$ et la matrice des conditions aux limites 4 lignes 4 colonnes .
 Cette matrice est définie selon les 4 points limites, les 8 dérivées partielles d'ordre 1 et les 4 dérivées partielles mixtes d'ordre 2 en ces points limites . Ce qui revient à la matrice P en quatre parties distinctes .

$$P_{i,j} = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix}$$

A contient les 4 coins limites .

B contient les dérivés de A par rapport à t .

C contient les dérivés de A par rapport à v .

D contient la double dérivation de A par rapport à v et t .

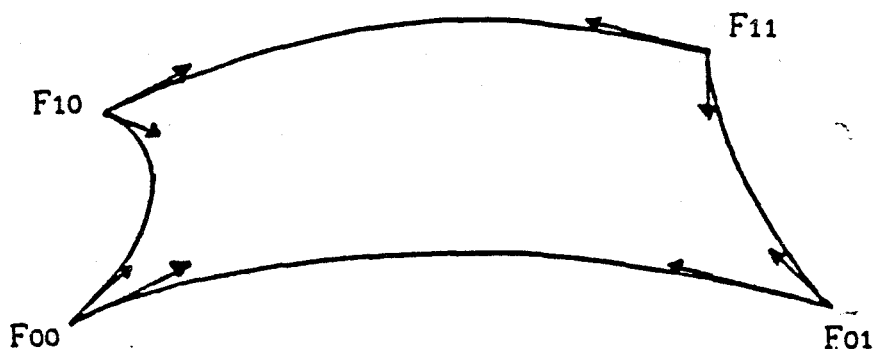


Figure 30 : surface de Coons

Le principal inconvénient de cette technique réside dans la difficulté de déterminer les fonctions $M(t,v)$ à partir de l'objet à représenter . L'allure générale de la surface (fig 30) dépend de paramètres difficilement manipulables dans un contexte interactif .

3-3-4-2-2-Surface de Bézier [Bart 88] [Bezi 72, 74, 86]
 [Fole 82] [Hegr 87] [Newm 79] [Pavl 82] [Schw 87] [Sequ 87]

Crée par P. Bézier (ingénieur chez Renault), cette méthode utilise aussi le découpage des surfaces en carreaux, elle est basée sur les polygones d'approximation de Bernstein . C'est aussi la première fois que l'on voit apparaître les notions de points guide ou contrôle . Les fonctions utilisées offrent entre autre l'avantage de se prêter à une bonne approximation d'un contour polygonal . Les points en général n'appartenant pas à la surface, agiront comme un "aimant" sur la portion de la surface qui se trouve près de lui.

Chapitre 3 : Modélisation géométrique de scènes tridimensionnelles

On définit une courbe ou une surface de Bézier à partir des polynômes de Bernstein.

$$B_{i,n}(t) = C_i^n t^i (1-t)^{n-i} \quad \text{avec } 0 \leq t \leq 1$$

De la même manière que précédemment pour la simplicité et la clarté de l'exposé on utilise la notation matricielle .

Pour cela on introduit la matrice ligne B_n dont les éléments sont les $n+1$ polynômes de Bernstein d'ordre n :

$$B_n = \left[B_{0,n}(t), B_{1,n}(t), \dots, B_{n,n}(t) \right]$$

et la matrice P (i ligne et j colonnes) dont les éléments constituent la matrice des points guide du Patch

$$P = \begin{bmatrix} P_{0,0} & & P_{0,j} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & \\ & & \\ P_{i,0} & & P_{i,j} \end{bmatrix}$$

La forme paramétrique d'une surface de Bézier, dont les points sont inscrits dans la matrice P s'écrit.

$$P(t, s) = B_n \cdot P \cdot B_m^T$$

B_m^T étant la matrice transposée de B_m .

En ce qui concerne la courbe de Bézier, il suffit pour cela de donner à t ou s une valeur constante et de faire varier l'autre paramètre . La matrice P est définie par un vecteur colonne de $n+1$ éléments, et le résultat s'écrit :

$$P(t) = B_n \cdot P$$

-a) Surface de Bézier bicubique

C'est une surface définie par 16 points de contrôle ($n=3, m=3$), dans ce cas les matrices B et P s'écrivent :

$$B_n = \left[(1-t)^3 \quad 3t(1-t)^2 \quad 3t^2(1-t)t^3 \right]$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$P(t,s) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0,0} & \dots & P_{0,3} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{3,0} & \dots & P_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-S)^3 \\ \vdots \\ S^3 \end{bmatrix}$$

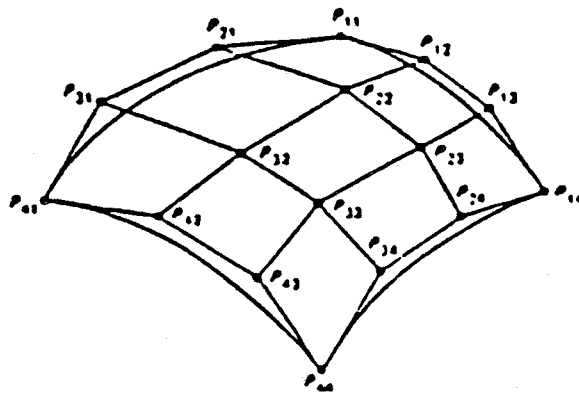


Figure 31 : surface de Bézier

-b) Courbe de Bézier

Dans ce cas $n = 3$ et $s = 0$ d'ou $P(t) = B \cdot P$

$$P(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

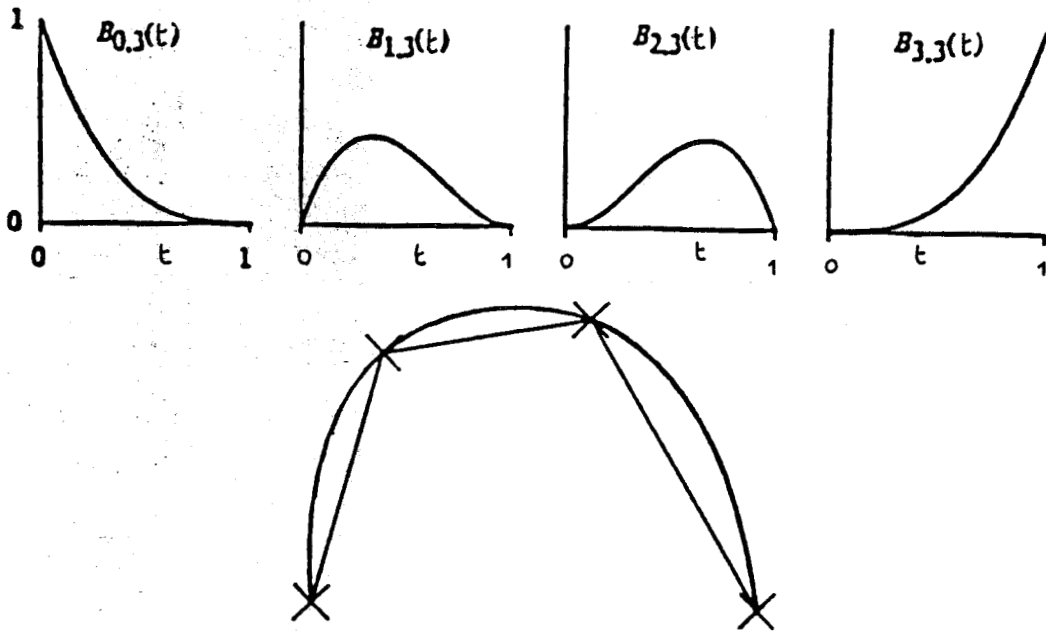


Figure 32 : courbe de Bézier

-c) Propriétés

- Le moindre changement dans la position d'un des points de contrôle provoque une déformation globale de la courbe ou surface.
- La courbe ou la surface ainsi définie sera toujours contenue à l'intérieur du contour polygonal convexe extrême déterminé par l'ensemble des points de contrôle.
- La courbe ou surface est tangente au côtés du polygone en ses points extrêmes (fig 33) (2 pour la courbe, 4 pour la surface) .

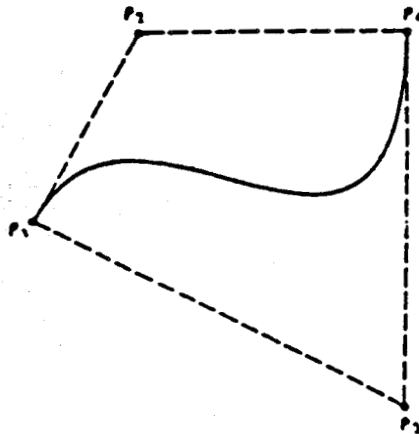


Figure 33 : courbe tangente en ses points extrêmes

Une évaluation rapide des courbes de Bézier peut être obtenue par l'algorithme de subdivision . L'idée consiste à chercher des points de contrôle intermédiaires, au lieu de calculer une succession de points sur la courbe.

Soient P_0, P_1, P_2, P_3 les quatre points de la courbe C (fig 34), définis

par leur coordonnées x,y (éventuellement z en trois dimension) on veut trouver.

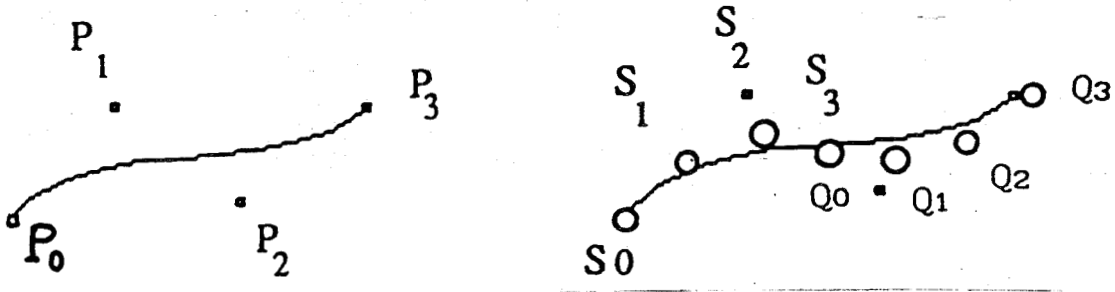


Figure 34 : évaluation par subdivision

S_0, S_1, S_2, S_3 de C_1 et Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 de C_2 tels que C_1 soit la première moitié de la courbe C et C_2 la seconde moitié.

$$\begin{aligned}
 S_0 &= P_0 \\
 S_1 &= P_0/2 + P_1/2 \\
 S_2 &= P_0/4 + P_1/2 + P_2/4 \\
 S_3 &= P_0/8 + 3P_1/8 + 3P_2/8 + P_3/8
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= P_0/8 + 3P_1/8 + 3P_2/8 + P_3/8 \\
 Q_1 &= P_1/4 + P_2/2 + P_3/4 \\
 Q_2 &= P_2/2 + P_3/2 \\
 Q_3 &= P_3
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix} 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

les nouveaux points de contrôle sont plus près de la courbe. Ceci est équivalent au diagramme suivant.

$$\begin{array}{cccc}
 S_0 = P_0 & & P_1 & & P_2 & & P_3 = Q_3 \\
 \\
 S_1 = \frac{(P_0+P_1)}{2} & & & & \frac{(P_1+P_2)}{2} & & \frac{(P_2+P_3)}{2} = Q_2 \\
 \\
 S_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{P_0}{2} + P_1 + \frac{P_2}{2} \right] & & & & Q_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{P_1}{2} + P_2 + P_3 \right] \\
 \\
 Q_0 = S_3 = \frac{1}{2} \left[\frac{P_0}{4} + \frac{3}{4} P_1 + \frac{3}{4} P_2 + \frac{P_3}{2} \right]
 \end{array}$$

Ceci se généralise pour une courbe de degré n

$$S_i = \sum_{r=0}^i C_i^r P_r / 2^i \quad i=0,1,\dots,n$$

$$Q_i = \sum_{r=i}^n C_{n-r}^n P_r / 2^{d-1} \quad i=0,1,\dots,n$$

Remarque .

Une courbe de Bézier fermée s'obtient en donnant au premier point de contrôle (p_0) et au dernier point (p_n) de contrôle la même valeur .

3-3-4-2-3-B.Splines [Bart 86] [Besa 89] [Boeh 84] [Boor 78]
 [Cast 85] [Dahm 82 83 84] [Fari 86] [Fole 82] [Greg 83 84]
 [Prat 84] [Requ 83] [Ries 73] [Sabl 83] [Schw 87]
 [Sequ 87] [Till 83]

La théorie sur les fonctions B.splines a été proposée pour la première fois en 1973 par RIESNFELD. Les B.splines sont une généralisation et une extension de la méthode de Bézier, elles permettent la modélisation des objets de forme très complexe, qui sont difficilement modélisables par des surfaces de Bézier . Les B.splines sont fondées sur le même type de porteuse que les courbes (ou surfaces) de Bézier, mais l'influence de chaque point de la porteuse est limitée à une portion de la courbe totale, d'où son intérêt principal, de pouvoir modifier localement un point de contrôle sans entraîner de perturbation sur l'ensemble de la courbe (ou surface) .

Les B.splines ne sont qu'un sous ensemble d'une famille de courbes appelées splines, qu'il nous faudra définir en premier, puis nous établirons la forme générale de la représentation paramétrique des courbes et surfaces B.splines . Nous en énoncerons les principales propriétés pour enfin détailler plus précisément les B.splines cubiques uniformes qui dans la majorité des cas offre une solution aux problèmes posés.

-a) Fonction Splines

Rappel : Fonction Polynômiale par intervalles

Une fonction Polynômiale par intervalles est composée d'une suite de fonctions polynômiales $P_0(t), P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t)$, définie respectivement dans un intervalle t . L'axe t est (fig 35) découpé en un certain nombre de morceaux juxtaposés .

Ce qui permet d'utiliser des fonctions de degré peu élevé sans limiter les points de contrôle . Les valeurs $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ sont appelées les noeuds et définissent les raccords (entre les différents morceaux) . Les raccords sont effectués en respectant les propriétés de la fonction désiré .

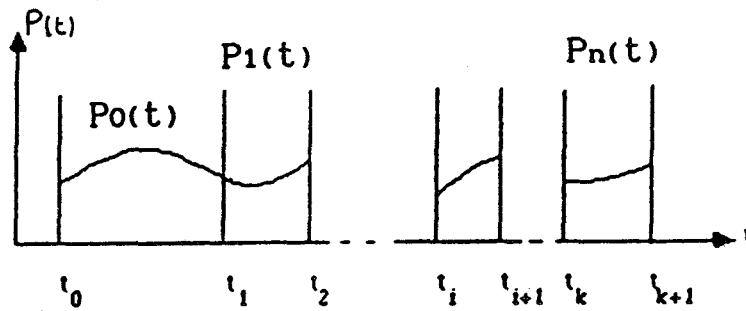


Figure 35 : découpage de l'axe t

L'intérêt des fonctions splines c'est de bien se prêter à la définition par intervalles, d'avoir un contrôle local et leur degré est indépendant du nombre de points de contrôle .

La fonction splines de degré j et d'ordre k, est une fonction polynomiale par intervalles de degré j, définie sur n intervalles par :

$$P(t)=P_i(t) \quad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}] \quad i=0,1,\dots,n-1$$

P(t) est composé d'une suite de fonctions polynomiales.

$$P_0(t), P_1(t), P_2(t), \dots, P_n(t) \quad t \in [0, \dots, t_n]$$

et satisfait aux conditions suivantes qui exigent la continuité de la $k^{\text{ième}}$ la dérivé.

$$P_i^{(k)}(t_i) = P_{i+1}^{(k)}(t_i) \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{et } k = 0, 1, \dots, l-1$$

Remarque

On parlera de fonctions splines uniformes si :

$$t = t_0 = t_1 = \dots, t_n = C^{te}$$

-b) Courbes Splines

Soit un ensemble de n+1 points de contrôle P_i la représentation générale de la courbe B.splines d'ordre k est donnée par

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t)$$

Comme dans la formulation de Bézier $P_i (i=0, n+k)$ représente l'ensemble des points de contrôle (des vecteurs coordonnées des points de la porteuse) et les $N_{i,k}(t)$ les fonctions de base B.splines . Ils sont définis comme suit:

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t-t_i) \cdot N_{i,k-1}(t)}{t_{i+k-1} - t_i} + \frac{(t_{i+k} - t) \cdot N_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k} - t_{i+1}}$$

Chapitre 3 : Modélisation géométrique de scènes tridimensionnelles

On constate que les $N_{i,k}(t)$ sont définis à l'aide de deux autres polynômes d'ordre $k-1$.

Le processus de récurrence doit commencer quelque part et le premier polynôme de la spline est en fait défini différemment:

$$N_{i,k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

-Les t_i sont des nœuds qui relient la variable t aux points de contrôle P_i .

-L'intervalle $[t_i, t_{i+k}]$ est appelé support de la B.splines

- k (l'ordre) contrôle le degré $(k-1)$ du polynôme résultant en n .

-Contrairement aux courbes et surfaces de Bezier, le domaine de définition des fonctions $N_{i,k}$ ne se limite pas au segment $[0,1]$, mais s'étend sur un ensemble de segments contigus $[t_i, t_{i+1}]$.

-Les deux choix les plus courants pour les vecteurs nœuds (t_i) sont:

-1) B.Splines uniformes et non périodiques (courbe ouverte) définie par $n+1$ points, on a :

$$t_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i < k \\ i - k + 1 & \text{si } k \leq i \leq n \\ n - k + 2 & \text{si } i > n \end{cases}$$

t variant de $[0, n-k+2]$ pour avoir toute la courbe.

-2) B.Splines uniformes et périodiques (courbe fermée) définie par $n+1$ points, on a :

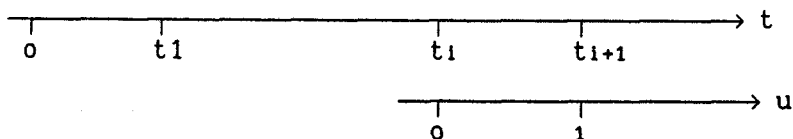
$$t_i = i \quad \text{et} \quad N_{i,k}(t) = N_{0,k}(t+i+n+1) \text{ modulo } (n+1)$$

t variant de $[0, n+1]$ pour avoir toute la courbe.

Remarque.

Au lieu de découper l'axe t en intervalles quelconques, on peut effectuer une subdivision en intervalles identiques afin de simplifier les calculs.

A l'axe t suivant



On associe une variable normalisée u , définie sur chaque segment $[t_i, t_{i+1}]$ et qui varie toujours entre $[0, 1]$ quelque soit i . On passe de t à u et réciproquement en posant:

$$t_i = iT \quad \text{et} \quad u = (t - t_i)/T$$

La formulation des B.Splines devient alors :

$$\begin{aligned} N_{i,0}(u) &= 1 && \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ N_{i,0}(u) &= 0 && \text{ailleurs} \end{aligned}$$

$$N_{i,k}((i+u)T) = \frac{u}{k} N_{i,k-1} + \frac{k+1-u}{k} N_{i+1,k-1}$$

On pose $T = 1$ et $i = 0$ on obtient alors la fonction B.Splines $\overline{N_{0,k}(u)}$ normalisée que nous continuerons d'appeler $N_{0,k}(u)$.

$$N_{0,k}(u) = \frac{u}{k} N_{0,k-1} + \frac{k+1-u}{k} N_{1,k-1}$$

Pour trouver les autres B.Splines on effectue un décalage de l'origine.

$$N_{i,k}(u) = N_{0,k}(u-i)$$

Dans le référentiel, l'expression d'une fonction d'un autre intervalle, s'obtient à partir de :

$$\begin{aligned} N_{i+1,k}(u) &= N_{i,k}(u-1) \\ N_{i-1,k}(u) &= N_{i,k}(u+1) \end{aligned}$$

-c) Surfaces Splines

En ce qui concerne les surfaces (fig 36), nous avons :

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,k}(v)$$

Où $P_{i,j}$ représente les $(n+1)(m+1)$ points de contrôle et $N_{i,k}(u)$, $N_{j,k}(v)$ les fonctions de base B.splines (K étant l'ordre).

Comme précédemment nous allons définir, en utilisant l'écriture matricielle les différentes composantes dans le cas où l'on s'intéresse à une bicubique ($k = 4$, ordre).

$$P(u,v) = G_u T_s P T_s^T G_v^T$$

-Les vecteurs lignes G_u , G_v représentent la base Canonique des fonctions polynomiales en u et v (qui varient entre $[0,1]$). Ils sont définis par les vecteurs lignes suivants.

$$G_u = [1 \ u \ u^2 \ u^3] \quad \text{et} \quad G_v = [1 \ v \ v^2 \ v^3]$$

les coefficients du produit matriciel sont donnés par la matrice T dont l'expression est la suivante.

$$T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Enfin la matrice P des points de contrôle(4lignes,4colonnes) s'écrit

$$P = \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{bmatrix}$$

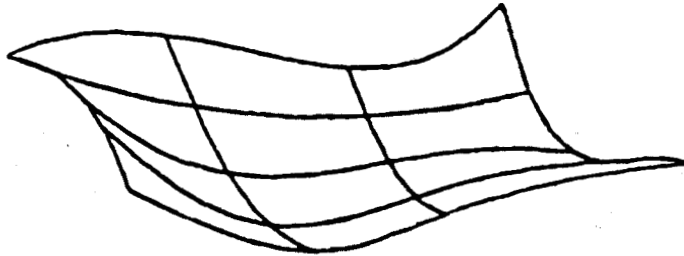


Figure 36 : surface splines

Bien entendu les courbes B.splines (fig 36) cubiques constituent un cas particulier des surfaces B.splines, elles s'obtiennent en ramenant la matrice P (4 lignes, 4 colonnes) en un simple vecteur colonne, ce qui donne .

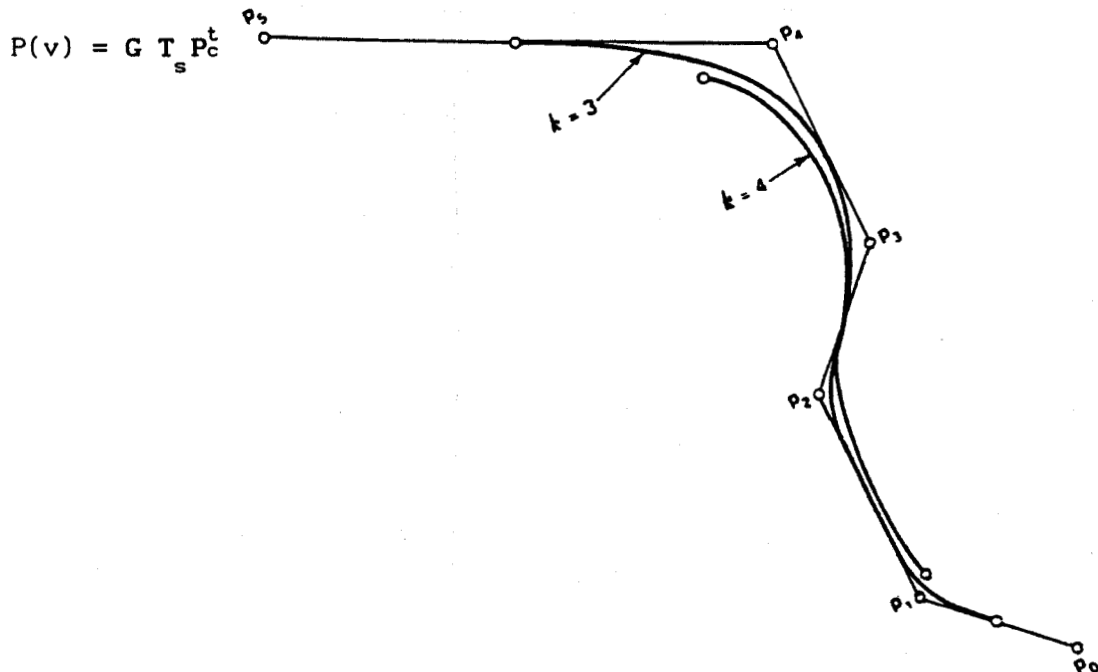


Figure 37 : courbes splines

-d) Conclusion

L'utilisation des Beziers et des B.splines convient bien pour la création interactive des surfaces (ou courbes) et possèdent la propriété fondamentale d'être toujours contenues dans le polygone convexe extrême déterminé par l'ensemble des points de contrôle.

La conséquence immédiate de la propriété de l'enveloppe convexe est la large exploitation dans les Algorithmes de visualisation et de calculs d'intersections (Algorithmes d'élimination de parties cachées, le tracé de rayon, Algorithmes d'éclairage...). Enfin les surfaces de Bézier (ou courbe de Bézier) ont un support global, et passent par les points limites. Par contre les surfaces B.splines (ou courbes B.splines) ont un support local, ce qui permet d'effectuer des ajustements sans perturber le reste du modèle, et ne passent pas en général par les points limites.

3-3-4-2-4-BETA SPLINES [Bart 88] [Lieb 88] [Schw 87] [Sequ 87]

Les Béta.Splines sont en fait une généralisation du modèle des B.splines cubiques. Elles sont basées sur la continuité de la tangente et sur celle du lieu des centres de courbures (continuité géométrique). Ces contraintes sont moins contraignantes que les contraintes de continuité des dérivées première et seconde. Les Béta.Splines introduisent deux nouveaux paramètres β_1, β_2 représentant respectivement le biais et la tension de la courbe ou de la surface. Les propriétés que nous allons illustrer seront celles des courbes Béta splines, sachant que la généralisation aux surfaces s'effectuera comme précédemment.

La courbe Béta.Spline s'obtient de manière semblable à la courbe B.Splines. Elle est donnée par l'équation paramétrique.

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,k}(u)$$

Où P_i est une liste de points de contrôle présentée sous la forme d'un vecteur ligne.

$$P_i = [P_0, P_1, \dots, P_n]$$

et le vecteur ligne $B_{i,k}$ est défini par des fonctions Béta Splines

$$B_{i,k} = [B_{0,3}(\beta_1, \beta_2, u), B_{1,3}(\beta_1, \beta_2, u), B_{2,3}(\beta_1, \beta_2, u), B_{3,3}(\beta_1, \beta_2, u)]$$

les fonctions qui composent le vecteur $B_{i,k}$ assurent la continuité du vecteur tangent et celle du vecteur de courbure. On donne alors la représentation symbolique suivante des segments de base pour.

$$B_0(u) = \frac{1}{\delta} 2u^3$$

$$B_1(u) = \frac{1}{\delta} [2 + 6\beta_1 u + (3\beta_2 + 6\beta_1^2)u^2 - (2\beta_2 + 2\beta_1^2 + 2\beta_1 + 2)u^3]$$

$$B_2(u) = \frac{1}{\delta} [(\beta_2 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1) + (6\beta_1^3 - 6\beta_1)u - (3\beta_2 + 6\beta_1^3 + 6\beta_1^2)u^2 + (2\beta_2 + 2\beta_1^2 + 2\beta_1^3 + 2\beta_1)u^3]$$

$$B_3(u) = \frac{1}{\delta} [2\beta_1^3 - 6\beta_1^3 u + 6\beta_1^3 u^2 - 2\beta_1^3 u^3]$$

dans laquelle : $\delta = \beta_2 + 2\beta_1^3 + 4\beta_1^2 + 4\beta_1 + 2$ et $0 \leq u \leq 1$

Il convient d'observer que si nous introduisons les conditions suivantes $\beta_1 = 1$ $\beta_2 = 0$, nous nous ramenons à la définition des B.splines cubiques.

-a) Influence du paramètre bêta 1 (β_1)

En faisant croître β_1 , nous augmentons la vitesse d'inclinaison de rotation du vecteur tangent au point de raccordement. β_1 permet en fait de contrôler la symétrie de la courbe. C'est à dire que la courbe continuera dans la direction de la tangente en demeurant plus proche de celle-ci dans le segment situé à droite. Par contre si β_1 décroît (< 1) la courbe suit la tangente d'avantage avant le point de raccordement (fig 38).

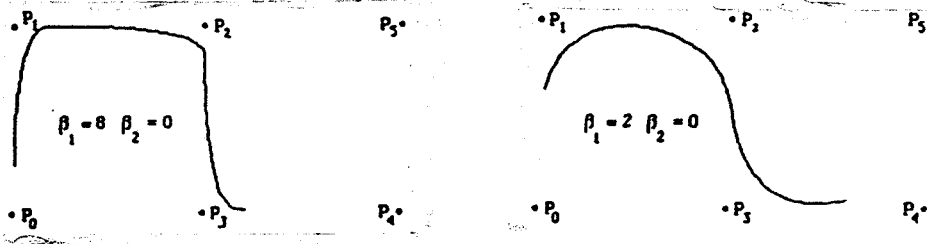


Figure 38 : effet de β_1 .

-b) Influence du paramètre bêta 2 (β_2)

Il permet de contrôler la distance entre la courbe et le polygone des points de contrôle. Pour β_2 croissant la courbe tend vers le polygone du point de contrôle et s'y identifie pour $\beta_2 = \infty$. L'expérience montre que seul le terme de tension (β_2) est le plus important (fig 39).

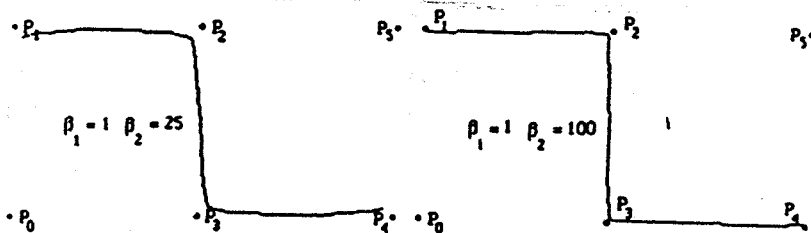


Figure 39 : influence de β_2

3-3-4-2-5-COMPARAISON DES DIFFERENTES APPROCHES .

Pour conclure cette description nous allons faire un bilan succinct des principales propriétés de chacune de ces modélisations.

-les surfaces de Coons représentent un premier pas vers la modélisation de solides limités par des surfaces de formes libre. Les conditions aux limites sur les quatre coins étant définies, le calcul ne pose aucune difficulté . Par contre l'allure générale de la surface dépend de paramètres difficiles à manipuler

-En ce qui concerne les surfaces de Bézier, B.splines, Béta splines, elles ont en commun les propriétés suivantes .

-Indépendance vis à vis du système d'axe utilisé .

-Permettent une déformation interactive du modèle .

-Continue, dérivable .

-Contenues dans l'enveloppe convexe définie par les points de contrôle

Elles se différencient :

-Par leur complexité de calculs .

-Par leur support .

-Et le passage par leur points extrêmes .

-Les B.Splines et Béta.Splines ont un support local, ce qui permet des déformations locales du modèle .

-Les Béziers ont un support global, ce qui entraîne une déformation du modèle complet pour un simple ajustement d'un point de contrôle.

-Leur complexité :

Les B.splines cubiques et Béta splines sont les plus rapides à calculer.

Les surfaces de Bézier deviennent trop lourdes et difficilement contrôlables à partir d'un certain degré.

-Leur passage par les points de contrôle :

Les surfaces de Bézier passent toujours par leurs points limites et leurs tangentes en ces points peuvent être aisément contrôlées.

les B.Splines et Béta.Splines ne passent pas en général par leurs points de contrôle.

3-4-Représentations Volumiques [Ball 82] [Boll 86] [Jare 84] [Lee 82] [Requ 80, 83] [Wood 86]

3-4-1-Introduction

Ces méthodes tentent d'approcher le volume de l'objet à l'aide d'éléments structurés tridimensionnels. Cette modélisation de solide ("Solid modelling") permet d'éviter certains problèmes causés par les représentations surfaciques. En particulier il est très délicat de s'assurer qu'un objet défini par des facettes planes ou gauches correspond effectivement à un objet tridimensionnel réel : Comment s'assurer qu'il n'y a pas de trous dans la surface, pas d'aberrations topologiques, pas de branches ou faces pendantes, etc... . Naturellement, ces problèmes d'ambiguïté ne se posent plus si l'objet est constitué de primitives non plus surfaciques mais volumiques.

Pour avoir une modélisation géométrique de haut niveau, il est nécessaire que le modèle solide possède les propriétés suivantes :

-La rigidité : un solide doit avoir une forme invariante, indépendante de sa position ou de son orientation.

-La finitude : un solide occupe une partie finie de l'espace.

-La tridimensionnalité homogène : un solide doit avoir un intérieur sans partie "ballantes" (arêtes ou faces).

-La fermeture : l'application des opérations booléennes sur les solides doivent être des lois de composition internes (ces opérations appliquées aux solides, ne doivent pas donner d'autres solides).

-Finitude d'une description: un solide doit être décrit à l'aide d'un nombre fini d'éléments.

-Déterminisme des frontières : la frontière d'un solide doit définir sans ambiguïté ce qui est à l'intérieur du solide.

Il est à signaler que plusieurs modèles d'un même objet sont possibles, et que les modèles différents pour des objets appartenant à un même ensemble peuvent coexister, ce qui pose, d'un point de vue informatique, des problèmes de cohérence.

Les principaux modèles de représentation de solide :

Nous allons examiner les principales méthodes possibles pour construire le modèle d'un objet. Il est bien évident qu'il ne s'agit que des méthodes les plus utilisées et que nous ne prétendons pas à l'exhaustivité.

Nous distinguons cinq approches différentes de modélisation de solides qui sont très souvent liées à la manière dont l'utilisateur les crée.

-La famille de Primitives solides .

-La composition arborescente de solides : **CONSTRUCTIVE SOLID GEOMETRY(CGS)**.

-La génération de solides par balayage : **SWEEPING** .

-La représentation par frontière : **BOUNDARY REPRESENTATION (BREP)** .

-L'énumération spatiale.

3-4-2-La Famille de Primitives Solide . [Herg 87] [Pero 88] [Requ 80, 83] [Sequ 87]

Principe :

On dispose pour cela d'un ensemble de familles de solides de base, appelées primitives solides . L'objet est identifié par un n-uplet qui d'une part, précise à quelle famille appartient l'objet et d'autre part, donne la liste des paramètres permettant de le définir .

Exemple (cylindre, R,L) désigne une famille "cylindre" dont l'élément est défini par deux paramètres de dimensions:

-Le rayon du cylindre R .

-La longueur du cylindre L. La figure ci-dessous illustre cette famille (fig 40) :

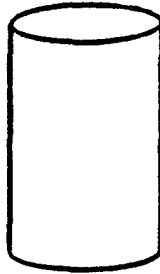


Figure 40 : cylindre

Par leur principe, ces schémas sont uniques, non ambigus et triviaux à valider. Par contre cette représentation de solide possède deux inconvénients principaux. D'une part il n'y a pas de moyen de composition de solides des différentes familles pour former des objets plus complexes. D'autre part les propriétés des solides obtenues sont difficilement calculables ; d'où la limitation d'un tel modèle dans le cadre d'une utilisation interactive.

3-4-3-Composition arborescente de solides ou CSG :(CONSTRUCTIVE SOLID GEOMETRY) [Ball 82] [Boll 86] [Faug 83] [Fole 82] [Gard 83] [Requ 83] [Trou 87]

La géométrie pour la construction de solide (CSG) utilise un ensemble de primitives de volumes, dont on paramètre les dimensions que l'on dispose dans l'espace à l'aide de transformations géométriques et d'opérations bien connues de la théorie des ensembles. La démarche est analogue à celle de l'artisan qui désire construire une maquette . Mais grâce à l'utilisation de l'ordinateur ses possibilités sont plus grandes . On peut citer :

- La durée de réalisation d'une opération devient négligeable
- Paramétrisation de primitives
- Structuration du modèle
- Stockage du modèle

3-4-3-1-Primitives de volume :

Les primitives de volume sont les éléments de base de ce "jeu de construction" . Elles sont de trois sortes :

-1)Les primitives élémentaires .

Elles sont les éléments de base simples, tels les pavés, les sphères, les cylindres, les cônes, les parallélépipèdes, etc... (fig 41) .

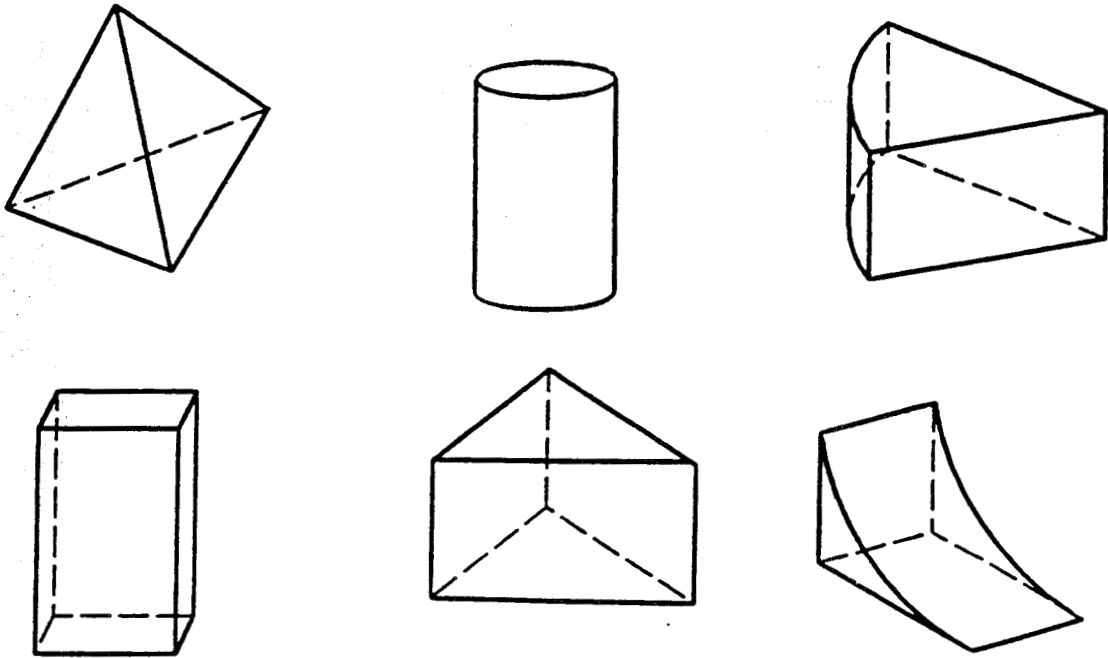


Figure 41 : primitives élémentaires .

-2) Les primitives complexes

Elles sont obtenues à partir de primitives élémentaires de façon à ne pas avoir à redéfinir les éléments de base de la construction d'un modèle dans une configuration particulière: parmi ces primitives on peut citer : surfaces raccordées, les cylindres évidés, les roues dentées etc... qui sont paramétrées de la même manière que les primitives élémentaires (fig 42).

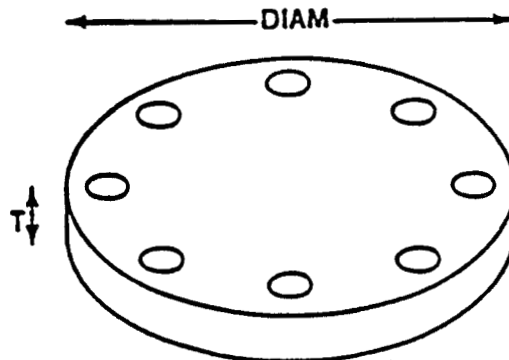


Figure 42 : roue dentée

-3) Les demi-espaces .

En dehors de primitives simples et complexes que nous venons d'aborder, il est possible d'utiliser comme primitive l'intersection de demi-espace : plans, cylindriques, sphériques, etc...

La figure 43 montre qu'une boîte peut être représentée comme l'intersection régularisée de 6 demi-espaces plans.

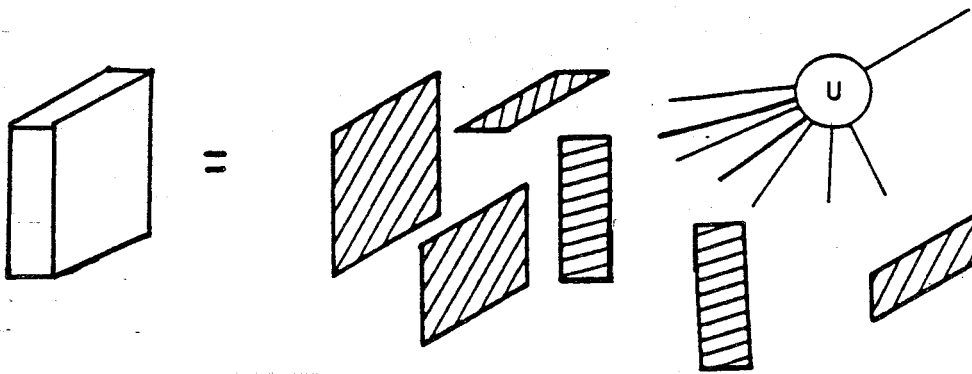


Figure 43 : objet défini par des demi-espaces

Rappel .

Soit $P(x,y,z) = 0$ l'équation d'une surface de (E) . Cette surface définit deux demi-espaces, à savoir d'une part l'ensemble des points (x,y,z) tels que $P(x,y,z) < 0$, et d'autre part l'ensemble des points (x,y,z) tels que $P(x,y,z) > 0$. Des demi-espaces particulièrement utilisés sont ceux pour lesquels la surface en question est un plan.

3-4-3-2-Opérations sur les primitives .

Elles permettent la manipulation des primitives à l'aide d'opérations usuelles. On distingue essentiellement deux types d'opérations :

-1) Par balayage : (le balayage par rotation ou par translation par exemple) [Requ 83]

-2) Opérateurs de compositions [Wall 82]

Ce sont en fait des opérations bien connues de la théorie des ensembles : elles permettent de réaliser l'assemblage de volumes à l'aide des opérations suivantes : union, différence, intersection, collage...) (fig 44)

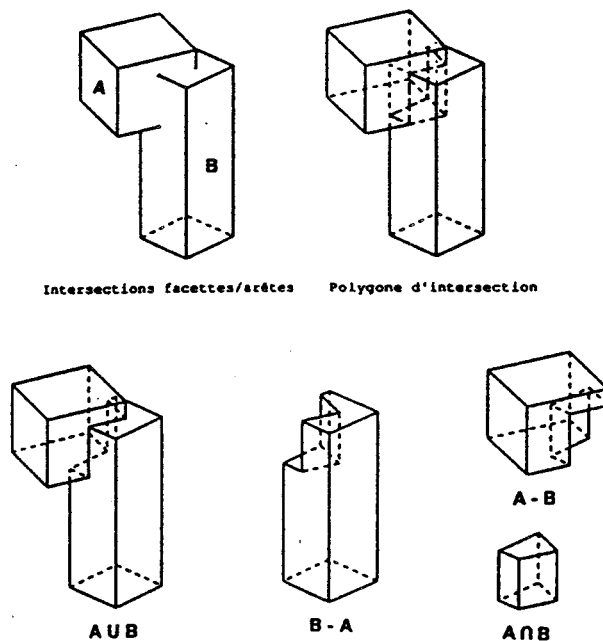


Figure 44 : exemples d'opérations

Comme nous l'avons souligné précédemment, l'aspect essentiel d'une telle approche est la structuration du modèle. Ceci a une très grande importance. En effet une représentation interne de l'objet construit selon cette idée permet de l'associer à un arbre binaire, dont

les feuilles correspondent chacune à une primitive, et où les noeuds internes représentent des opérations ensemblistes (intersection, union, différence...) portant sur les feuilles ou sur les combinaisons déjà obtenues à partir des feuilles (fig 45). La racine de l'arbre représente alors l'objet lui-même tel qu'il résulte de la combinaison des primitives.

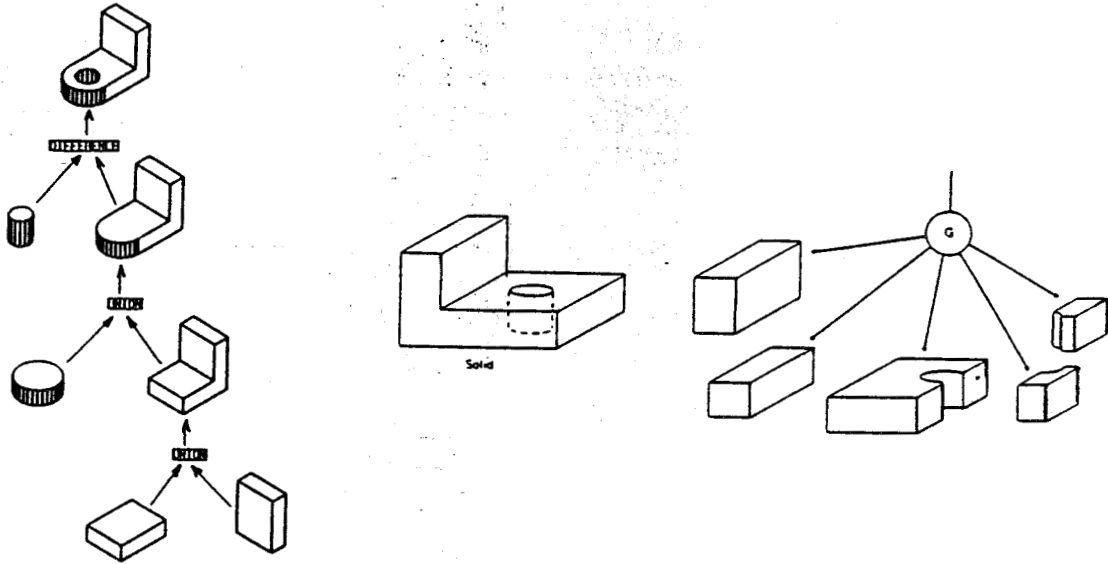


Figure 45 : représentation par arbre

La représentation de solides par cette méthode n'est pas unique, en effet en utilisant les mêmes primitives et deux séquences d'opérations différentes, nous aboutissons à deux modèles différents (fig 46).

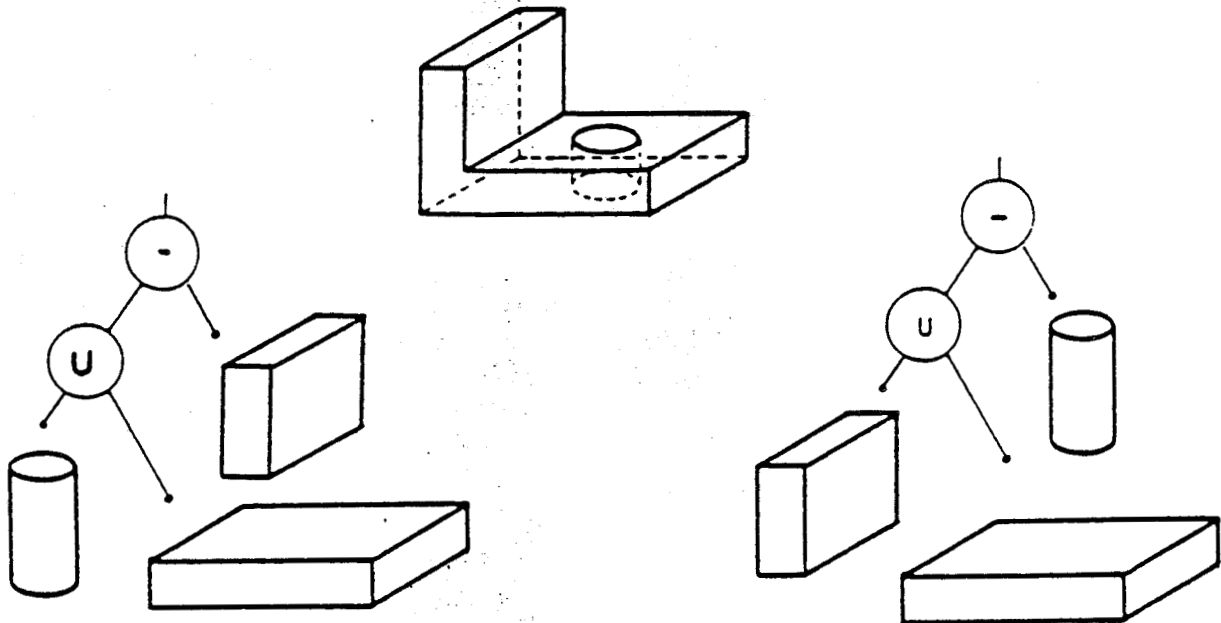


Figure 46 : problème d'unicité .

Remarque .

Dans le cas de demi-espaces, les familles de l'arbre CSG sont des demi-espaces auxquels sont associés une orientation et une position dans l'espace.

Les opérations booléennes usuelles (\cap , \cup , \setminus) ne sont pas des lois de composition interne, ceci conduit à des ambiguïtés . La notion de solide résultant n'est plus respectée, on voit apparaître des phénomènes de solides dégénérés (faces ou arête "ballantes") (fig 47).

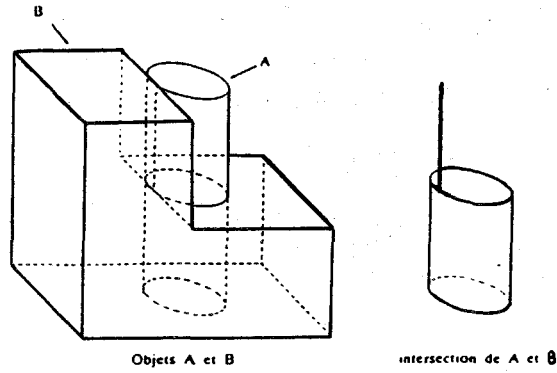


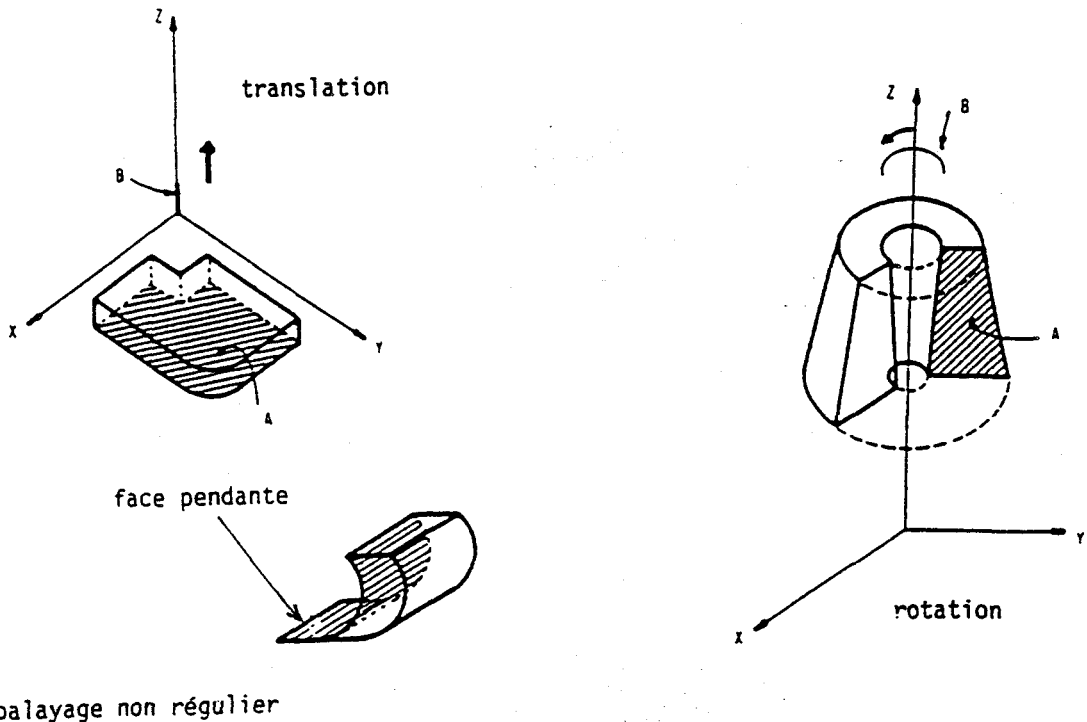
Figure 48 : problème de dégénérescence

Il convient donc de donner aux opérateurs d'intersection et de différence une définition qui n'est pas exactement la définition géométrique. Par exemple si deux solides sont tangents par une surface, le résultat de leur intersection ne doit pas être une face, mais il doit être nul. C'est pour cela que l'on introduit de nouvelles opérations booléennes "régulières" \cap^* , \cup^* , \setminus^*

3-4-4-Génération de solides par balayage:(SWEEPING) [Baar 86] [Ball 82] [Besa 89] [Boll 86] [Luca 83] [Newe 77] [Ponc 83]

Les méthodes de balayage généralisées ("Generalized sweeping") sont basées sur le principe suivant. Soit un ensemble E de l'espace (P), se déplaçant le long d'une trajectoire D et se déformant éventuellement au fur et à mesure de son déplacement. L'ensemble va "balayer" un volume V qui peut être alors représenté de manière particulièrement concise par la donnée de E, par V et par des règles de déformations de E le long de D.

On peut alors citer deux exemples simples de balayages généralisés: les translations et les rotations généralisées (fig 49 et fig 50).



balayage non régulier

Figures 49 et 50 : exemples de balayages

Des cas particulièrement intéressants de translation généralisée sont constitués par les "cônes (ou cylindriques) généralisés".

3-4-4-1-Les cônes ou cylindres généralisés.[Argi 76] [Ball 82] [Marr 78] [Requ 80, 83]

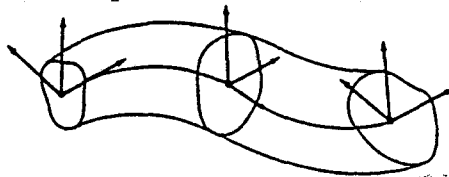
Principe :

On définit un cylindre généralisé comme étant le volume généré par une surface balayant l'espace le long d'une courbe, cette surface étant paramétrée par l'abscisse curviligne de cette courbe.

La représentation d'un CG (Cylindre Généralisé) n'est pas aussi évidente qu'il n'y paraît, en effet si l'axe d'une courbe 3D est facile à manipuler et à stocker, il est nécessaire en général de définir le repère de Frenet de l'axe et de représenter paramétriquement dans ce repère la surface balayante. Pour cela on restreint souvent à ce modèle :

- Un axe droit ou circulaire [Shaf 83]
- Les surfaces balayantes polygonales ou circulaire
- Ou les deux

Potentiellement c'est la représentation la plus générale et la plus puissante actuellement . Elle décrit même des objets manufacturés flexibles tels que les tuyaux. (fig 51)



un cylindre généralisé quelconque, et quelques-uns de ses repères de Frenet

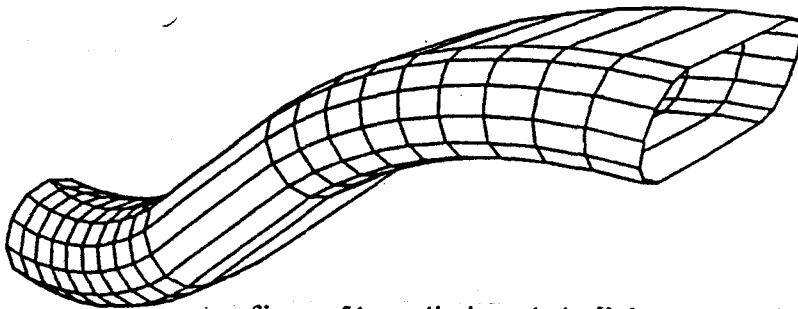


figure 51 : cylindre généralisé et ses repères

De plus, les liens avec l'image sont assez forts : on peut constater que l'axe d'un cylindre généralisé (CG) de section symétrique se projette sur le squelette de la projection du cylindre.

Néanmoins, l'inconvénient majeur est le manque d'outils algorithmiques dont on dispose pour le calcul des propriétés géométriques, pour réaliser des opérations booléennes et pour la visualisation.

3-4-5-La représentation par frontière ou par limites (Brep : BOUNDARY REPRESENTATION. [Baer 79] [Ball 82] [Baum 72] [Req 83] [Gard 83]

Dans cette approche la définition de volume intrinsèque n'est plus utilisée (centre, rayon,

équation pour une sphère), elle consiste en fait à représenter le solide par ses surfaces extérieures, c'est à dire à définir chaque composante du modèle à partir de ses éléments frontières (fig 52).

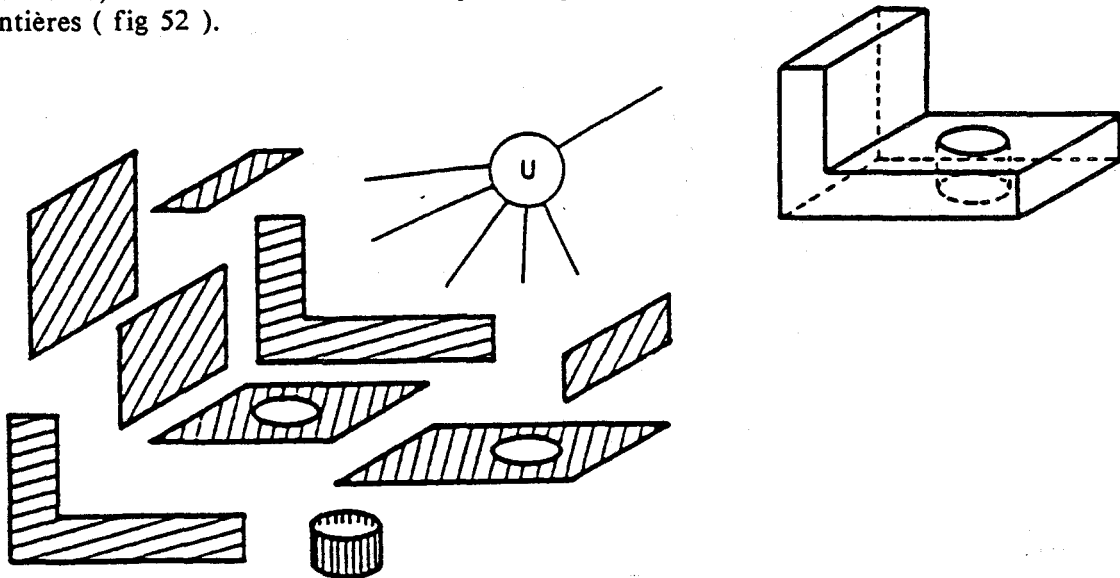


Figure 52 : objet défini par ses limites .

La frontière étant formée d'un ensemble de faces, reliées entre elles par des arêtes(edges) et les arêtes se joignent par l'intermédiaire de leur sommet (vertices). Ces éléments (faces , arêtes,sommets) définissent la topologie du solide. On associe à ces éléments topologiques des attributs géométriques, les liens entre ces différentes entités sont exprimés par les arcs d'un graphe de connexion, le graphe "RSV"(Région,Segment,Vertices) en français le graphe SAF (Sommets,Arêtes,Faces) .

Dans cette définition on constate la redondance informatique de données topologiques (arêtes,sommets) définies plus d'une fois, ceci entraîne en général une lourdeur de manipulations et une possible source d'erreurs qu'il est nécessaire d'éliminer .

La validité d'une représentation par frontière n'est pas un problème trivial, il est nécessaire que la surface de l'objet vérifie quelques contraintes d'intégrité, afin de définir sans ambiguïté un intérieur et un extérieur, on peut notamment citer :

- la vérification de l'équation de Euler généralisée :

$$v - e + f - h + 2r - 2b = 0$$

où v est le nombre de sommets (Vertex)

e est le nombre d'arêtes

f est le nombre de faces

h est le nombre de trous sur les faces

r est le nombre de trous à travers l'objet

b est le nombre de parties disjointes de l'objet

remarque .

Pour les solides simples comme,les cubes,prismes nous avons l'équation simplifiée suivante

$$f + v = e + 2 .$$

Ce qui se traduit par les deux faits suivants

-1)l'absence de faces et d'arêtes pendantes

-2)les faces ne doivent pas s'intersecter ailleurs que sur les arêtes explicitement recensées.

Les Brep ne sont pas toutes identiques, elles se différencient essentiellement au niveau de la qualité de leurs primitives élémentaires. Le critère est alors le degré admis pour les faces. Certaines Brep (Boundary Representation) n'admettent que des faces planes, d'autres autorisent les quadriques, enfin les plus générales utilisent des surfaces libres (Béziers, B.splines..)

Mais des problèmes peuvent néanmoins subsister quant à la définition des faces pour certains objets.

3-4-6-L'énumération spatiale :[Ball 82] [Jan 88] [Luo 86] [Requ 83]

Le Voxel élément de volume

Les images que nous manipulons découpent l'espace bidimensionnel de l'écran en un pavage de carrés élémentaires les pixels (pictures éléments). De la même façon, en trois dimensions, la scène à représenter est supposée contenue dans un volume cubique (univers) constituée d'une multitude de cubes élémentaires : des voxels (volume élément) ou obel (objet élément).

Les voxels ont alors une taille variable, selon ce que nous désirons ou ce que nous permet la capacité de la mémoire de l'ordinateur . Ils sont caractérisés par leur dimension et leur position (coordonnées d'un point) à l'intérieur de l'univers (fig 53).

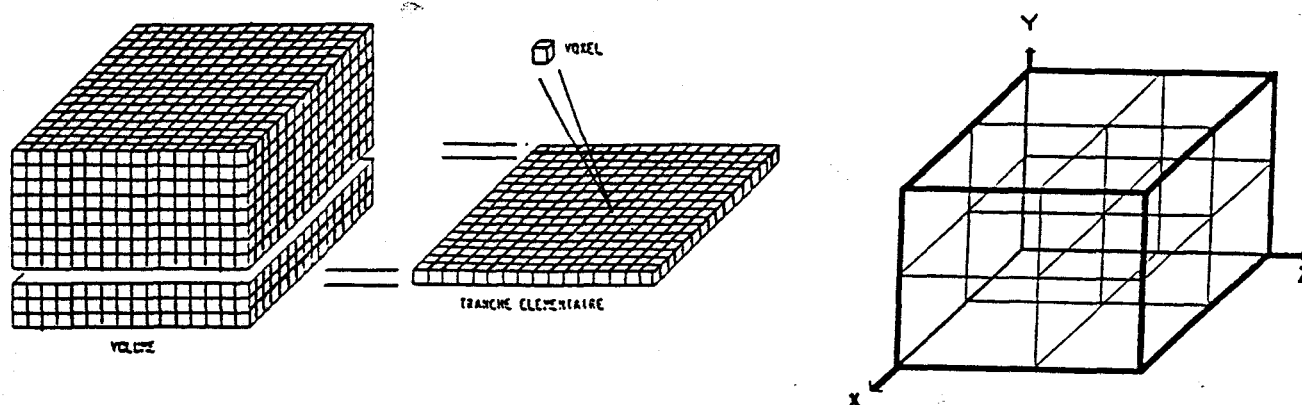


Figure 53 : le voxel

La modélisation d'un objet solide par énumération spatiale regroupe en fait deux méthodes qui supposent l'espace discrétisé :

-1)La représentation par tableau à trois dimensions appelé PEARY (Picture Element Array).

-2)La représentation par OCTREE.

3-4-6-1-La représentation par tableau à trois dimensions [Aman 85] [Anto 88] [Jann 88] [Pero 88] .

Le solide est modélisé à l'aide d'un simple tableau de triplet (X_i, Y_i, Z_i) dont les points élémentaires (voxel) sont marqués si de la matière s'y trouve. Les points sont généralement ordonnés et cet ordre correspond à l'ordre de parcours.

Le tableau le plus simple est le Peary binaire, il consacre un bit à chaque voxel,

l'information qu'il lui est associée permet de différencier le vide du plan. Rien n'empêche de consacrer un nombre de bits plus important, si ce n'est l'occupation mémoire résultante .

pour un Peary binaire associé à une mémoire image de 512 x 512 l'espace mémoire doit être de 512x512x512, soit 16 Moctets.

pour un Peary à niveaux de gris associé à une mémoire image de 512 x 512 l'espace mémoire doit être de 512x512x512, soit 128 Moctets.

Cette représentation simple à obtenir ne pose aucun problème de validité, elle permet entre autre de calculer facilement les propriétés physiques de l'objet (volume, centre de gravité, appartenance d'un point au solide) et de réaliser les opérations booléennes (qui sont faites ici voxel par voxel), en contre partie les seuls problèmes sont:

-1)Celui de l'aliasage (effet de marches d'escalier dans l'image) .

-2)La qualité et la précision de visualisation qui dépendent uniquement de la taille mémoire associée au Peary.

-3)Invariance en translation mais pas en rotation (voxels rarement cubiques, ils sont souvent de forme parallélépipédique rectangle).

Le degré de précision de cette méthode étant

-1)Lié à la classe des solides que l'on désire modéliser .

-2)Au volume d'informations à stocker et à traiter ; les objets représentés avec cette technique seront principalement des objets modulaires (architecture ...).

Une amélioration intéressante de cette méthode est l'approche par arbre octal.

3-4-6-2-Arbre Octal . [Ball 82] [Besa 89] [Gard 83] [Jann 88] [Meag 82] [Requ 82]

Nous venons de mettre en évidence la notion de voxel pour modéliser un volume, par ailleurs nous avons constaté qu'une telle modélisation nécessitait un volume d'informations conséquent et se caractérisait par une absence totale de structuration,c'est pour remédier à cela qu'il a été défini la notion d'Octree.

L'arbre octal (en anglais Octree) est une structure de données hiérarchique introduite pour la première fois en 1980. C'est l'extension à 3 dimensions de l'arbre quaternaire (en anglais quadtree), structure utilisée pour modéliser les images 2D.

L'octree et le quadtree permettent d'effectuer une décomposition hiérarchique de l'espace, dans le cas de l'objet 2 ou 3D, la généralisation à des dimensions supérieures sont possibles.

Nous allons d'abord commencer par définir la notion de quadtree, l'intérêt de cette description sera double, d'une part, ce sera la prise de connaissance d'un certain type de codage d'une image, d'autre part, cela permettra de mieux comprendre le principe du codage par arbre octal.

-a)Le Quadtree [Anto 88] [Fole 82] [Lieb 88] [Same 84] [Toum 88] .

Soit l'exemple de la figure 54

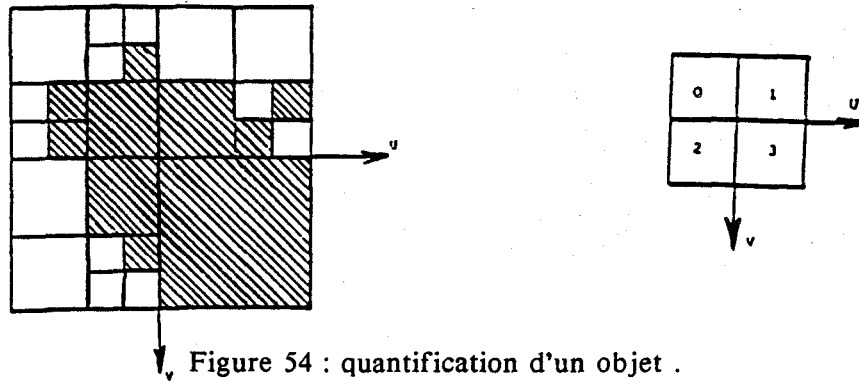


Figure 54 : quantification d'un objet .

Ce dessin va être quantifié à l'aide d'un quadrillage par des petits carrés de même taille que les pixels. Pour chaque carré vide (respectivement plein) ou recouvert à moins de 50%, on associe la valeur 0. L'étape suivante va consister à structurer l'image spatialement à l'aide d'un arbre dont chaque noeud a quatre fils.

Le principe est le suivant , on associe à la racine de l'arbre l'image tout entière, puis si tous les pixels de cette image ont la même valeur (0 ou 1),le processus d'analyse s'arrête . Sinon on la divise en quatre sous images de taille identique . Ces quatre sous-images sont associées au quatre fils de niveau 1, auquel on applique de nouveau le processus . Le processus s'arrêtera soit à un noeud homogène soit lorsque à force de subdiviser, on atteint la résolution de l'image .

La figure 55 montre le découpage de l'image de la figure 54 et son quadtree associé .

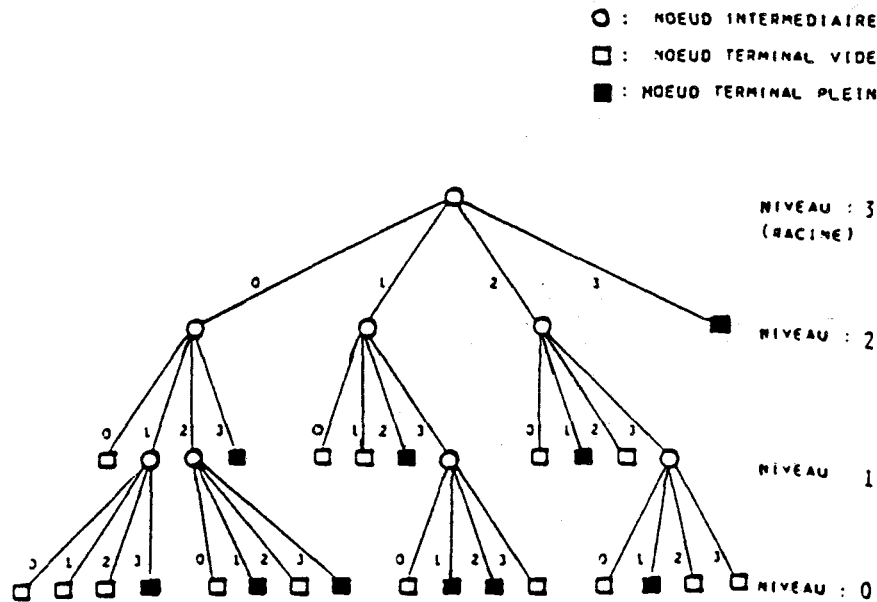


figure 55 : quadtree associé à la figure 50

Le codage utilisé ici dans le cas d'une image binaire est facilement transposable aux autres types d'images, il suffit pour cela de préciser la critère de choix (zone uniforme, même variance, même écart...) . A l'aide de cette modélisation on voit illustrer les propriétés de compaction et de structuration spatiale d'une image binaire . L'utilisation d'un quadtree ramène cette description à la manipulation de seulement 28 feuilles .

Ceci est très important, en particulier lorsque l'on désire ne traiter qu'une partie d'image

. Il suffit alors de ne considérer que l'information contenue dans le sous arbre correspondant du quadtree. Ce qui permet de réduire fortement les opérations nécessaires au traitement .

-b)Octree . [Aman 85] [Anto 88] [Ball 82] [Hegr 87] [Jann 88] [Lieb 88] [Luo 86] [Meag 81, 82] [Sequ 87] [Yau 84]

Principe du codage

Nous allons d'abord supposer que le volume numérique à représenter est binaire. Chaque voxel ne peut donc prendre que 2 valeurs notées V (vide) et P (plein). En outre le volume total qui circonscrit les objets est cubique de côté 2m (fig 56).

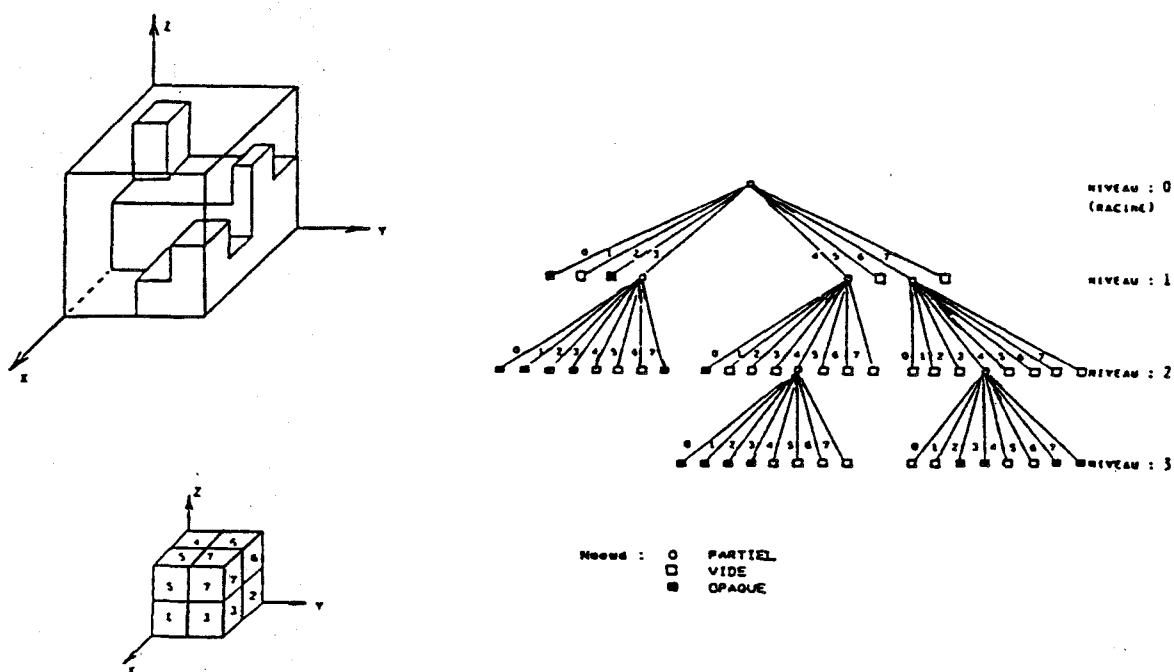


Figure 56 : objet et son octree

Si tous les voxels du cube sont V (resp P), le volume dans son ensemble peut être représenté par un arbre comportant un seul noeud (la racine), auquel on affecte la valeur V (resp P) . On dit dans ce cas que le cube est homogène de type V (resp P) . Par contre si le volume n'est pas homogène, il est subdivisé en 8 sous cubes de côté 2m-1. Le noeud associé au volume original (c'est à dire la racine de l'arbre) reçoit alors l'attribut M (mixte et possède 8 fils, associés chacun à l'un des sous-cubes que l'on vient de définir) . Si l'un de ses sous cubes est homogène de type V (resp P) le noeud associé sera une feuille d'attribut V (resp P), dans le cas contraire on réitère le processus qui ne s'arrêtera que lorsque les sous cubes rencontrés seront homogènes, de type P ou V. Ou dans le cas où l'on 'aura atteint la résolution de l'espace . Si l'on a un cube de côté 2m, on admet que le processus s'arrête après, au plus un état de subdivision et que les sous cubes associés à l'étape m sont des voxels homogènes.

Un arbre octal peut donc être décrit comme un K arbre complet (K=8) on rappelle qu'un K.arbre est un arbre dont chaque noeud possède au plus K. fils. Un K arbre complet est un K. arbre pour lequel le nombre de fils d'un noeud non terminal est exactement K.

Ces fils étant alors numérotés de 0 à $K-1$. De la même façon, un arbre quaternaire (quadtree) est un arbre complet ($K=4$). De même que précédemment nous pouvons généraliser ce codage à une matrice d'informations non binaire .

-c)Arbre octal à niveau de gris

La règle gouvernant le processus récursif de subdivision est toujours lié à la notion d'homogénéité, le volume à traiter n'étant plus binaire. Le ou les critères d'homogénéité sont différents ; on peut citer à titre d'exemple :

- 1)Tous les voxels du volume ont exactement la même valeur.
- 2)L'écart type des valeurs des voxels du volume est compris entre deux valeurs données

Quoiqu'il en soit l'arbre résultant possèdera de manière générale beaucoup plus de noeuds de niveau élevé qu'un arbre binaire classique. Les propriétés énoncées dans le cas du quadtree (la Compaction et la structuration spatiale du modèle), s'appliquent de la même façon aux octrees.

L'occupation mémoire d'un octree est bien naturellement moindre que celle d'un tableau à 3D. Certaines opérations sont facilitées (accélérée) par le fait que les voxels peuvent être considérés comme des volumes englobant une portion de l'objet . C'est ainsi que des tests de collision ou des calculs de volume peuvent être effectués très rapidement (cas de éliminations des parties cachées, modèles d'éclairément, tracé de rayon).

La taille d'un octree ne dépend pas de la matière de l'objet à modéliser mais essentiellement de son volume . Ce qui n'est pas le cas des autres modeleurs qui sont limités par la complexité des surfaces . Les octrees offrent la possibilité de traiter des niveaux plus ou moins fin, en contrôlant simplement le niveau dans lequel on souhaite descendre dans l'arbre .

De nombreux problèmes restent ouverts et font l'objet d'étude à ce sujet on peut citer :

- 1)Conversion automatique entre modèles
- 2)Construction de machines spécialisées
- 3)Opérations logiques sur plusieurs octrees

3-5-Modèles hybrides [Hegr 87] [Sequ 87] .

Aucun modèle n'est meilleur qu'un autre sur tous les points, il semble donc être intéressant de croiser plusieurs modèles pour éventuellement combiner leurs qualités respectives . Ceci peut être réalisé en utilisant des solutions appelées hybrides.

Par exemple si nous créons un objet à l'aide de la technique par balayage (ou extrusion), l'obtention de sa représentation par frontière serait utile pour faciliter sa visualisation, et un arbre octal permettrait de calculer aisément ses propriétés physiques .

Autres exemples si nous modélisons des objets à l'aide d'un arbre de construction afin d'occuper une très faible place mémoire, les failles de ces arbres représentées par leurs limites permettrait une facilité plus grande pour la visualisation.

On peut encore citer des croisements entre CSG (Construtive Solyd Géométry) et octree ou Brep et octree

Ces approches simples dans leurs principes posent néanmoins quelques difficultés en particulier :

- 1) Homogénéisation du modèle
- 2) Développement d'algorithmes pour une représentation unique.

Ces remarques mettent en évidence la nécessité de disposer de techniques de Conversion entre les différentes représentations de solides. La question est alors de savoir s'il est possible de passer facilement d'un modèle à un autre.

3-6-Conversion entre modèles :

La figure 57 montre les possibilités algorithmiques actuelles de Conversion entre modèles les plus couramment utilisées .

- Les flèches en trait gras indiquent une conversion exacte .
- Celles en trait fin indiquent une approximation .

On peut constater que le passage du modèle à facettes vers le modèle de fil de fer est évident :

-Il suffit pour cela de parcourir la liste des faces et de produire pour chaque face, la liste des arêtes qui la bordent ; moyennant le respect de certaines contraintes : une arête ne peut apparaître plusieurs fois.

-Par contre le passage automatique du modèle filaire au modèle à facettes est impossible (sauf cas particuliers) ceci est dû au fait que les propriétés topologiques sont inexistantes dans la représentation filaire .

-On peut toujours d'un arbre octal passer à un ensemble de facettes, il suffit d'engendrer pour chaque voxel les faces situées à l'extérieur de l'objet. Dans le sens inverse la procédure est un peu plus délicate et nécessite la mise en oeuvre d'algorithmes plus complexes.

-Il est possible de passer d'un modèle de forme libre à un modèle à base de facettes planes, la réciproque est aussi vraie.

-Il est également possible de passer de tout modèle, au modèle par énumération spatiale en admettant une certaine approximation qui dépend de la finesse de l'énumération.

-On constate aussi que l'on peut passer de tout modèle au modèle par les limites. Ces informations sont très utiles en CAO et infographie (ou la plupart des Algorithmes de visualisation supposent connues les surfaces de l'objet), car la visualisation est plus rapide lorsque le contour est explicitement connu.

CONVERSIONS ENTRE MODELES

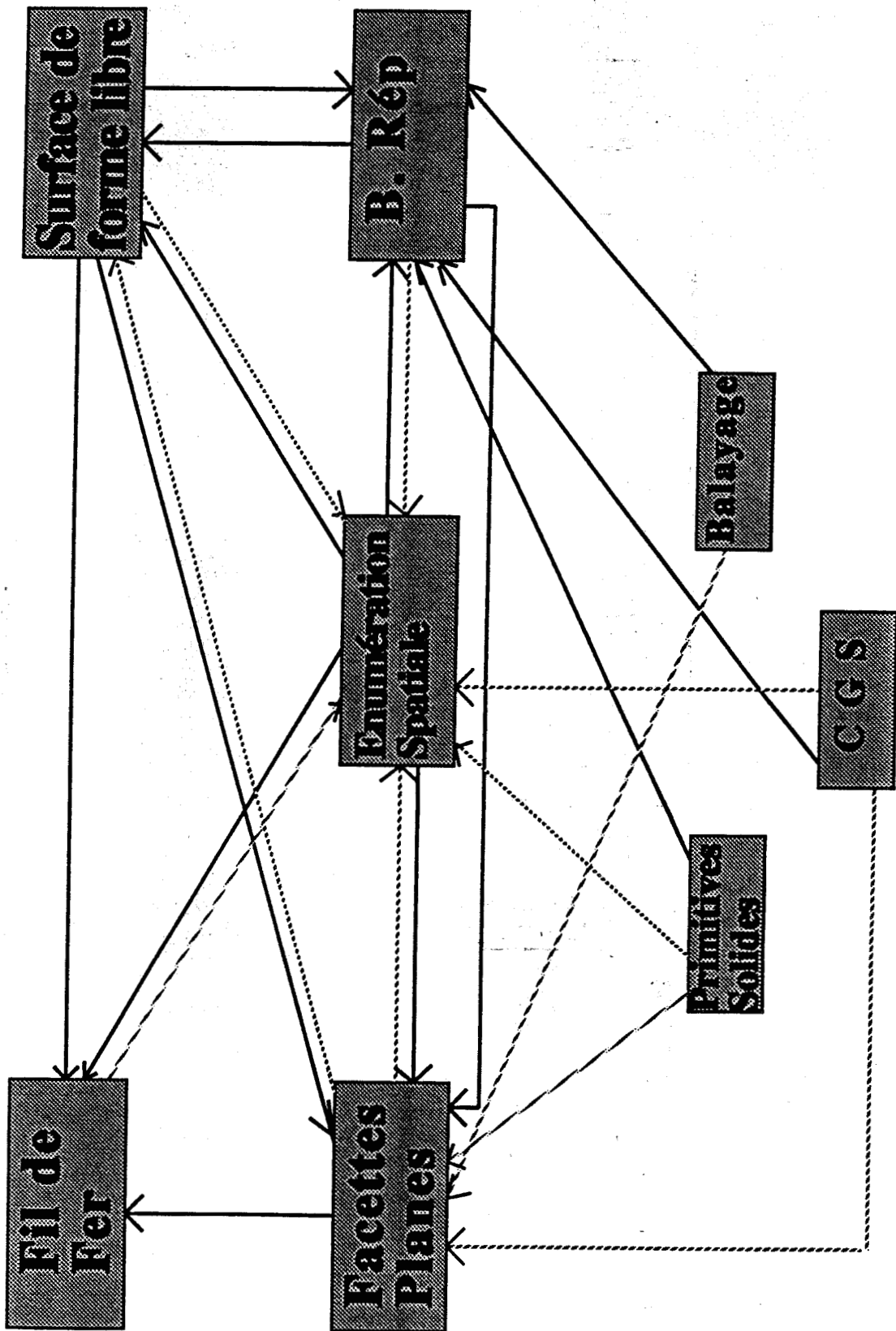


Figure 57 : conversion entre les différents modèles

3-7-Les modèles récursifs :

En première approximation si nous voulons cerner ce domaine, nous dirons que cela concerne tout objet ou structure naturelle (montagne, feu, plante) non définissable à l'aide des primitives géométriques classiques.

Ils regroupent en fait plusieurs techniques que nous n'aborderons pas en totalité mais plutôt par le biais de trois méthodes les plus connues : Fractals, Graphtals, système de particules.

3-7-1-FRACTALS [Bret 88] [Four 82] [Mand 68, 75, 77, 84] [Max 81] [Mode 80] [Nasr 90] [Pero 88] .

La géométrie fractale a été pour la première fois introduite par B. Mandelbrot en 1975 qui a proposé une réflexion sur la description et la représentation des objets naturels en termes de brisures, et non plus comme c'était le cas depuis toujours, en termes de continuité . En effet les modèles continus ont l'avantage de la simplicité et peuvent servir de base à une première approximation d'une description discontinue (moyennant des termes correcteurs). Par contre ils échouent dès lors qu'ils utilisent cette même approche pour les objets naturels compliqués et irréguliers.

L'invariance d'échelle est l'une des propriétés caractéristiques de la Géométrie fractale . On retrouve les mêmes éléments géométriques et la même structure quelle que soit l'échelle d'observation.

Certains côtés de bord de mer ont la même propriété . Elles présentent le même aspect quelle que soit l'échelle d'observation . Sans repère Il est pratiquement impossible d'affirmer, si l'on observe un détail ou la côte toute entière .

Dans la géométrie classique, ce n'est plus le cas . Prenons un carré observons le de suffisamment loin, pour le voir dans sa totalité. Maintenant si l'on regarde de très près, on verra une surface, une arête ou un coin, mais rien ne pourra nous indiquer que c'est un carré.

En fait les objets Fractals présentent autant d'information dans un détail que dans leur ensemble .

-a) Dimension d'homothétie :

Une droite étant invariante pour toute homothétie de rapport non nul dont le centre lui appartient et étant de dimension 1, alors un segment peut être pavé en N segments, chaque partie se déduisant du tout par une homothétie de rapport : $r(n) = 1/N$

De même si on découpe un rectangle, dimension 2, en N parties, chaque partie se déduisant du tout par une homothétie de rapport : $r(n) = 1/N^{1/2}$

Pour un cube, dimension 3, si on la découpe en N parties chaque partie se déduira du tout par une homothétie de rapport : $r(n) = 1/N^{1/3}$

Si on applique le même procédé dans le cas d'un objet fractal de dimension D, on trouve : $r(n) = 1/N^{1/D}$, où D est la dimension fractale qui est donnée par : $D = \log(N)/\log(1/r)$

Dans le cas d'une courbe de Van Koch N=4 (un segment est remplacé par quatre segments) alors $r = 1/3$ rapport d'une itération à la suivante, la dimension fractale est : $D = \log 4 / \log 3$.

Remarque :

Avec les fractals se trouve généralisée cette notion de dimension qui peut prendre des valeurs fractionnaires (d'où l'adjectif fractal) et même irrationnelles.

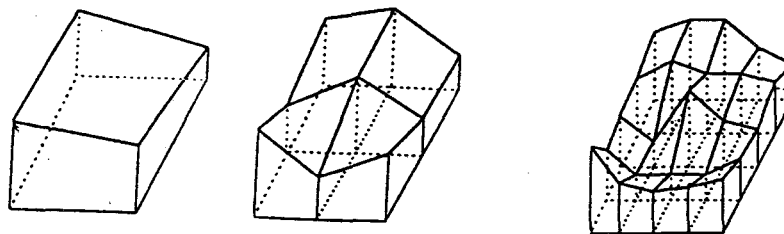
-b) Modèles stochastiques .

Les objets autosimilaires sont assez rares dans la nature . Un objet déduit par une homothétie interne, ne signifie pas que chacun de ses détails (ou éléments) se déduit exactement de l'ensemble Par une réduction dans un certain rapport, mais signifie que le processus qui a généré telle ou telle partie est semblable à l'ensemble sans l'être tout à fait . On dira alors qu'il sont statistiquement autosimilaires.

Il est évident que la connaissance des phénomènes physiques à l'origine de tel objet ou détail n'est pas possible lorsque trop d'éléments complexes sont en jeu . On peut par ailleurs construire des modèles stochastiques, dont la validité est corroborée par l'expérience . On introduit la notion de hasard pour représenter des phénomènes dont l'aspect final donne l'apparence d'une certaine irrégularité, mais qui dans leur structure interne garde le résultat d'un processus déterministe . C'est le cas pour la représentation de terrains ou de massifs montagneux

Principe :

On prend comme base un rectangle (ou un triangle). Pour chaque sommet du rectangle on détermine en tirant des nombres au hasard 4 élévations. Ce qui permet de représenter une surface. Si cette surface ne se projette pas sur un seul Pixel de l'écran et si elle n'est pas plane à un epsilon près, on subdivise le rectangle de base en 4 sous rectangles . Cette opération crée 5 nouveaux points . A chacun de ces points est affectée une hauteur en utilisant, de la même façon, des nombres aléatoires. Le processus est ainsi répété récursivement à chaque itération. . Pour que le résultat obtenu ne soit pas uniquement du bruit, c'est à dire que pour que l'on ait effectivement un massif montagneux la valeur de h doit soit croître soit décroître tout au long de l'opération (fig 58).



Construction récursive de terrains

Figure 58 : exemple de reconstruction à l'aide de fractals

Le degré de précision sera essentiellement fonction du niveau de récursivité choisi . Il ne pourra être inférieur à la limite de résolution de l'écran : taille du pixel .

De nombreux domaines s'intéressent à la géométrie fractale, et l'on voit de plus en plus d'applications :

-Applications médicales (réseaux neuronaux, fréquence du battement cardiaque) [Gold 90][Free 87] .

-Applications industrielles (étude de réseaux d'asservissement urbain, modélisation de surfaces) [Ferr 90] [Thib 87] .

- Synthèse d'images (côtés de bord de mer, motifs artistiques) [Mand 75, 77, 83, 84]

-Compression d'images

Cependant les applications fractales demeurent essentiellement au niveau des laboratoires, ceci à cause de l'énorme diversité des Algorithmes qui génèrent des images fractales : en fait il n'existe pas une technique générale mais plutôt un ensemble de recettes plus ou moins adaptées à certains cas.

Il faut retenir que les fractals reposent sur deux concepts fondamentaux : *l'homothétie interne et le processus aléatoire*. Le premier veut dire que chaque partie est semblable au tout, le second, signifie que cette ressemblance a lieu modulo un bruitage aléatoire.

3-7-2-Graphal [Smit 84] [Stev 78] [Fu 80] [Denk 85].

Il utilise une approche plus formelle, en ce sens où l'on essaie de reproduire les mêmes règles auxquelles la nature est confrontée . Pour cela on utilise la notion de langage qui, permet d'approximer et d'interpréter au mieux la façon dont procède la nature pour créer ses structures les plus complexes .

Ces idées ont été largement utilisées pour la représentation des plantes et des arbres, dans le double sens du mot arbre : au sens naturel de plantes et au sens informatique de hiérarchisation . En effet les croissances naturelles des arbres s'effectuent par l'exécution d'un programme basé sur un modèle donné .

Le langage utilisé est en fait une grammaire qui est composée d'un ensemble de mots formé à partir d'un alphabet, d'axiomes de départ et de règles de réécriture, qui associe, lors de la présentation de chaque élément de l'alphabet, une partie élémentaire d'un arbre ou d'une plante . Le langage auquel on se réfère dans ce cas est celui utilisé par Smith [Smi 84] appelé les L.systèmes défini par le processus de production suivant :

on considère l'alphabet $0,1,\{,\},[,]$ où 0 est l'axiome initial et où les 4 règles de productions sont :

0 -----> 1 {0}1{0}0 .

1-----> 11 .

{-----> { .

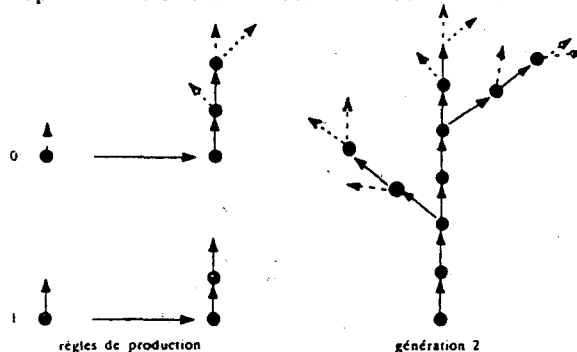
}-----> } .

[-----> [.

]----->] .

Voici un exemple de mots construit : Génération 2 : 11{1{0}1{0}0}11[1]0]1{0}1{0}0

Ce qui donne les représentations arborescentes suivantes lors de la visualisation (fig 59).



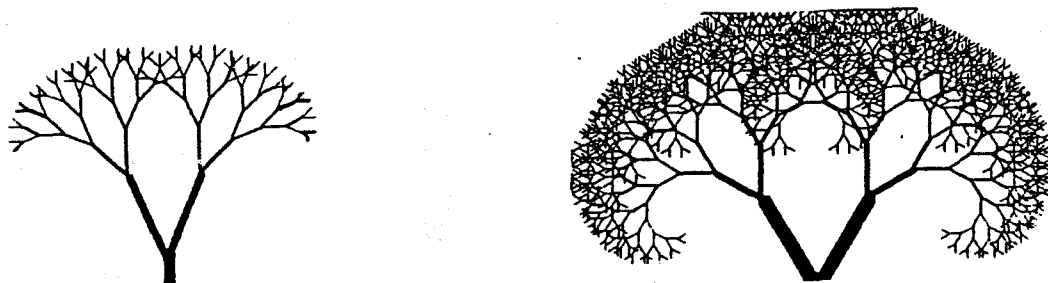


Figure 59 : exemple de tracé

Dans les formulations précédentes, si l'on pose $L(n)$ comme étant le mot d'ordre n , l'application de la première règle de production permet d'obtenir le mot $L(n+1)$ par la relation :

$$L(n+1) = 1^{2^n} [1(n)] 1^{2^n} [L(n)] L(n)$$

En posant $L(0) = 1$

et 1^{2^n} est la suite de 2^n symboles 1

Pour $n=0$ on retrouve le mot de génération 1 . En effet

$$\begin{aligned} L(0) &= 1^{2^0} [1(0)] 1^{2^0} [L(0)] L(0) \\ &= 1 [0] 1 [0] 0 \end{aligned}$$

On peut, pour compléter le langage introduire des angles, des Bourgeons, des fleurs....., il sera alors nécessaire de posséder des connaissances botaniques ne serait ce que pour la qualité des visualisations recherchée .

3-7-3-Les systèmes à particules [Bret 88] [Pero 88] [Reev 83] .

Ils ont été introduits [Ree 83] de façon formelle pour générer des objets à l'aide de processus stochastiques, de manière à casser la régularité des structures à représenter : En fait sont concernés tous les objets flous, mal définis, très irréguliers et complexes . Cela regroupe tous les phénomènes dont la forme, la couleur, la dimension, la position, évoluent sans cesse au cours du temps (feu, fumée, explosion...)

Les particules élémentaires qui définissent un objet sont caractérisées par un certain nombre de paramètres tels que :

- Volume élémentaire qu'elle engendre
- Position spatiale dans le temps
- Vecteur vitesse, vecteur accélération, lors du mouvement
- couleur transparence
- date d'apparition et de disparition
- processus aléatoire

Chapitre 3 : Modélisation géométrique de scènes tridimensionnelles

Le contrôle de particules est effectué à l'aide de processus stochastiques valables dans des intervalles spécifiques. Par exemple si l'on considère NP le nombre de particules existant à un instant donné, alors N_p est défini par : $N_{Pi} = MNP_i + \text{Rand}() + DV_i$

- MNP_i est le nombre moyen de particules pour l'image i .
- $\text{Rand}()$ est une variable aléatoire de l'intervalle $(-1, 1)$.
- DV_i est un nombre donnant le domaine de variation pour l'image i .

Dans le cas où l'on doit tenir compte de la surface occupée par le système de particules on a alors : $N_{Pi} = (MNP_{is} + \text{Rand}() + DV_{is}) \cdot DIMS$

- MNP_{is} est le nombre moyen de particules par unité de surface
- $\text{Rand}()$ est une variable aléatoire de l'intervalle
- DV_{is} est un nombre donnant le domaine de variation pour l'image i par unité de mesure
- $DIMS$ est la dimension de la surface de l'objet occupée dans l'image.

Ceci est très important car cela permet de générer qu'un petit nombre de particules pour un objet éloigné ou petit et un grand nombre dans le cas contraire.

Les autres paramètres (couleur, vitesse...) d'un système de particules sont obtenus de la même façon.

L'intérêt d'une telle modélisation est grande sur beaucoup de points :

- Qualité de l'image visualisée
- Traitement d'images complexes
- Conception structure et hiérarchisée des objets à représenter ce qui permet de contrôler le niveau de détail à atteindre.
- Les problèmes d'élimination de parties cachées sont supprimées (car les particules sont en fait des points lumineux dont les intensités s'ajoutent lorsqu'elles se superposent).

Par contre ce qui limite encore leur utilisation, c'est la quantité mémoire disponible et le coût en durée dans les cas de scènes ou d'objets complexes.

Bien entendu, les modèles complexes (non définissables géométriquement) sont nombreux. Les répertoires sont fastidieux, mais il nous a semblé intéressant de s'attarder sur les représentations les plus typiques (**Fractals, Graphals, Systèmes à particules**) .

Les recherches futures restent grandement ouvertes dans ce domaine .Elles nécessitent la disposition de machines puissantes .

Après ce rapide tour d'horizon des principales familles de modélisations nous allons aborder les problèmes liés à la visualisation réaliste (élimination des parties cachées, modèles d'éclairages, modèles de lissages,..) . Mais avant cela nous allons rappeler quelques notions liées à la visualisation 3D .

4-PROBLEMES DE VISUALISATION

4-1-Introduction

A l'heure actuelle, les techniques de visualisation développées ont eu des répercussions considérables sur la communication homme-machine, principalement dans le domaine de l'imagerie. L'entité image est devenue un outil de communication puissant et un vecteur culturel privilégié (TV, vidéo,...). Elle permet en effet une compréhension facile et immédiate. L'introduction de la troisième dimension dans les processus médicaux et industriels d'exploitations de données et l'avènement de l'image dans l'univers de l'informatique ont conduit à se poser deux sortes de questions:

-Comment représenter les informations issues de l'étape d'acquisition (voir chap. 3)

-Comment visualiser ces données pour permettre un rendu réaliste de haute qualité.

C'est ce que nous allons aborder dans ce chapitre . Pour cela, il est nécessaire de définir et développer un certain nombre d'outils et d'opérations indispensables à bonne mise en oeuvre de cette étape.

Une des opérations communes à toute application 3D est l'étape de visualisation . Les techniques utilisées pour les simulation du 3D sur une image plane sont les mêmes quelque soit le modèle . Les autres opérations sont plus dépendantes du modèle choisi . Nous présenterons donc les différentes techniques de génération d'images de synthèse.

Remarque .

Lorsque l'on parle de visualisation ou d'imagerie ou d'infographie, ou encore de synthèse d'images 3D, nous faisons référence à la projection des surfaces de tous les objets ou parties d'objets, appartenant à la scène 3D observée, visible par un observateur fictif, sur un plan dit plan d'observation ou écran graphique de type raster.

-Perception de 3D sur une image plane:

L'image que nous visualisons sur l'écran n'est en fait qu'une représentation bidimensionnelle d'une scène tridimensionnelle . Les divers paramètres ou informations permettant une perception visuelle de la nature 3D de la scène sont:

*La perspective : plus les objets seront proches de l'observateur, plus ils apparaîtront grands . Inversement, plus ils seront éloignés plus ils apparaîtront petits .

*L'occlusion : les objets les plus proches de l'observateur cachent la vue des autres objets situés derrière eux.

*L'ombrage de surface : la lumière en un point résulte des positions respectives des sources d'éclairage, de l'observateur et du point considéré .

*L'ombrage en profondeur : l'éclairage diminue en fonction de la distance à la lumière .

*La texture.

*La transparence.

*La stéréoscopie : chaque oeil perçoit une image légèrement différente, décalée l'une de l'autre d'un angle d'environ six degrés . Le cerveau interprète la différence entre les deux images et génère la sensation de relief.

Tout système de visualisation 3D devra essayer de restituer au mieux, ces différents effets.

4-2-Techniques de visualisation de scènes tridimensionnelles [Bret 88] [Fole 82] [Lieb 88] [Newm 79] [Roge 76] [Schw 87] [Wood 86] .

La représentation d'un modèle d'objet tridimensionnel sur un écran graphique, passe généralement par la résolution des problèmes suivants :

- 1) Transformations géométriques (translation, rotation, mise à l'échelle), projections parallèles ou perspectives .
- 2) Clipping : découpage des objets par rapport au champ de l'observation.
- 3) Elimination des parties cachées.
- 4) Calcul des ombres portées.
- 5) Calcul de l'éclairage et de la transparence.
- 6) Antialiasing ("effets de marches" d'escaliers).
- 7) Projection des textures sur les surfaces.

Selon l'application envisagée, il n'est pas nécessaire de simuler tous les effets. Nous allons faire un rapide tour d'horizon de ces différents problèmes .

4-2-1-Les transformations géométriques .

La modélisation, la manipulation et la visualisation d'images 3D font appel à la géométrie analytique en 3D et les transformations de coordonnées (translation, rotation, changement d'échelle) . L'intérêt de ces méthodes, est qu'elles peuvent être représentées par une matrice de transformation, ce qui permet de traduire des transformations complexe par simples opérations sur des matrices .

4-2-1-1-Mathématiques projectives.

De tous temps les architectes, dessinateurs, artistes, ingénieurs, ont cherché à dominer les difficultés et les contraintes du problème de la représentation d'objet ou, de scène 3D sur un support 2D en synthèses d'images, aussi nous sommes confrontés à ces problèmes. La transformation qui associe à un point de l'écran à un point de la scène 3D est appelée projection plane. Elle est définie par un centre de projection (ou point de vue) et un plan de projection (ou plan de visualisation).

On peut utiliser deux types de projection :

-a) Projections perspectives :

Elle est définie par un centre de projection (le point de vue) et par un plan de projection (donné par un point de référence R du plan projection et par une normale à ce plan) .

Dans cette technique les résultats visualisés sont très bons, le processus est identique à celui de l'oeil humain, par contre certaines anomalies, qui tout en renforçant le réalisme par effet de profondeur, distordent les formes et les proportions . On peut citer (fig 60)

-->L'effet de raccourcissement

-->Les points de fuite

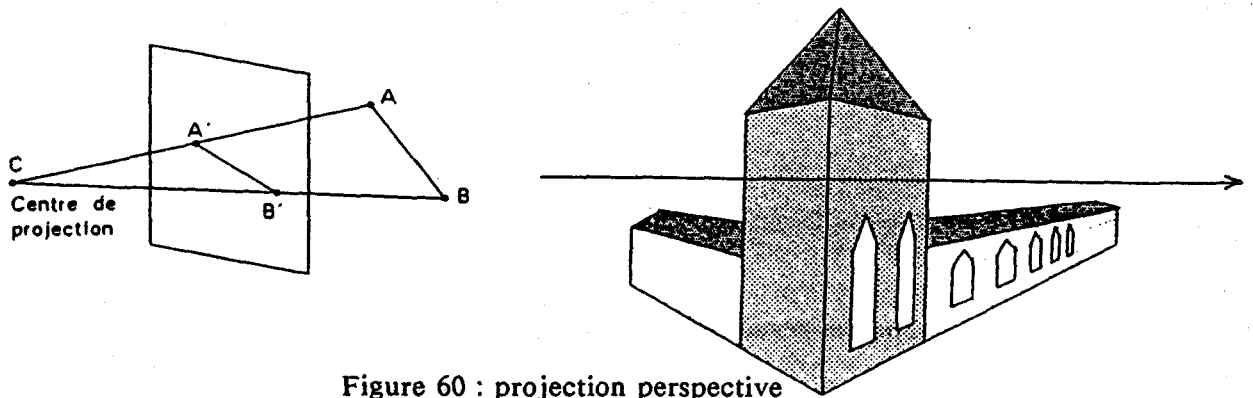


Figure 60 : projection perspective

-b) Projections parallèles :

Dans ce cas le point de projection est situé à l'infini, on y distingue deux classes :

-Les projections orthogonales ou axiométriques, (fig 61) où le plan de projection est perpendiculaire à la direction de la projection .

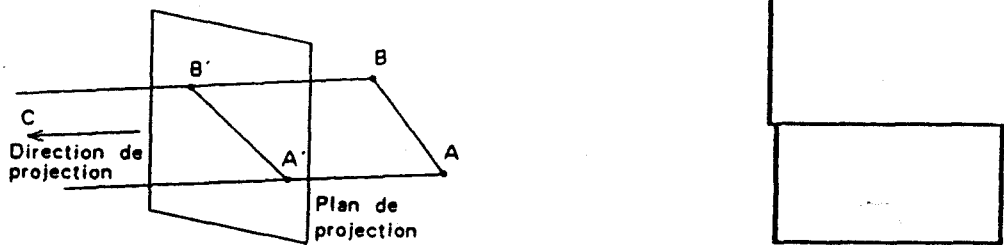


Figure 61 : projection parallèle .

-Les projections obliques, où le plan de projection n'est plus perpendiculaire à la direction de la projection.

Les techniques sont souvent appliquées par les dessinateurs architectes et ingénieurs, elles conservent les angles et les distances mais elles ont l'inconvénient de nécessiter plusieurs projections de l'objet pour sa représentation complète et fidèle.

-c) Le "clipping" ou fenêtrage.

La visualisation en trois dimensions d'un objet ou d'un modèle nécessite la définition d'un plan de projection d'un centre de projection, et d'un volume de visualisation défini par une pyramide . La pyramide d'observation (fig 62) est déterminée par un sommet (l'observateur) et une base intermédiaire (l'écran) .

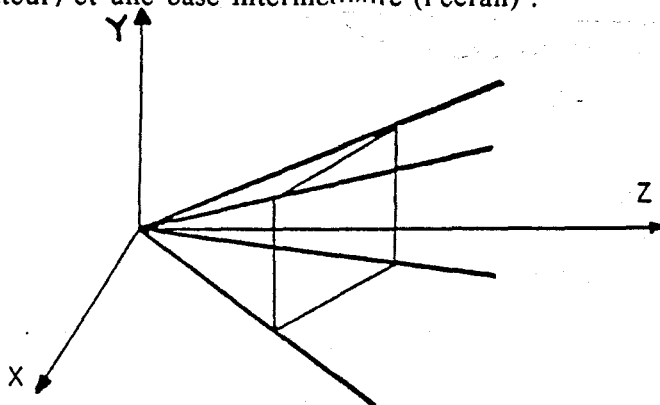


Figure 62 : clipping .

Tout objet ou partie d'objet qui n'appartient pas à cette pyramide est éliminé.

Remarque .

on associe généralement à la pyramide un volume fini délimité soit par un parallélépipède rectangle dans le cas de projections parallèles ou axiométriques, ou un tronc de pyramide pour les projections perspectives (fig 63) .

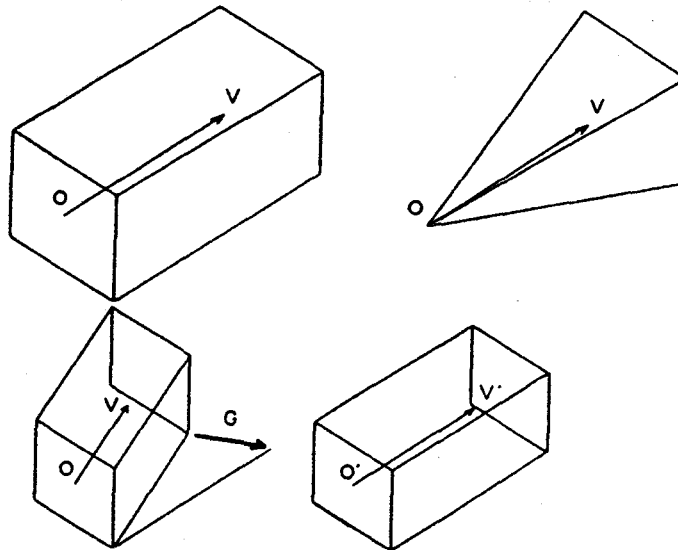


Figure 63 : pyramide de visualisation

Nous venons d'évoquer un certain nombre de problèmes lorsque l'on désire visualiser une image . Nous allons maintenant présenter les méthodes qui nous permettent d'obtenir une image de qualité .

4-3-Eliminations de parties cachées

Ils existe dans la littérature un grand nombre d'algorithmes d'éliminations de parties cachées. On ne peut pas dire que l'un deux est fondamentalement meilleur que les autres. Chacun à ses caractéristiques et ses avantages propres qui font qu'il sera choisi plutôt qu'un autre pour une application bien spécifique.

La diversité de ces algorithmes est due principalement aux différents modèles de description et de visibilité utilisés et à leur espace de calcul.

La phase d'élimination des parties cachées dans le processus de synthèse d'image est très importante. Elle permet d'obtenir le modèle de visibilité (fig 64), des objets ou parties d'objets, c'est à dire la description de l'image que l'on veut visualiser.

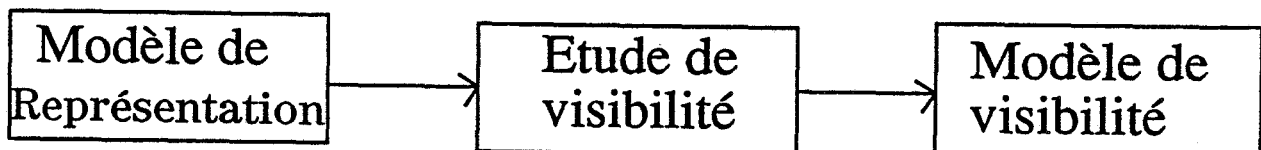


Figure 64 : étape de visualisation .

On distingue généralement trois grandes familles d'algorithmes d'élimination de parties cachées : (fig 65)

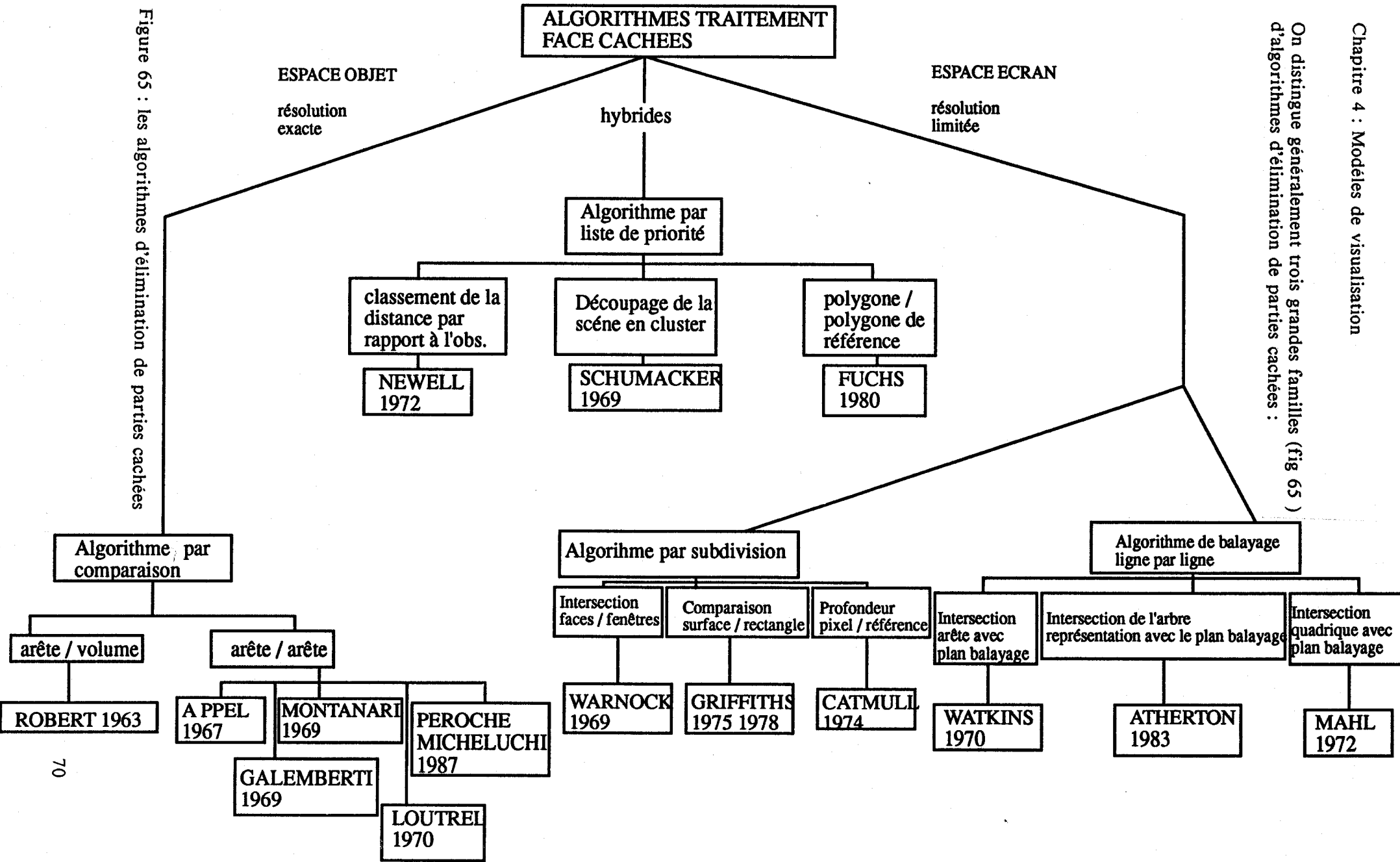


Figure 65 : les algorithmes d'élimination de parties cachées

-Ceux qui opèrent dans l'espace image [Athe 83] [Grif 75, 78] [Warn 69] [Watk 70] .
Les calculs sont alors effectués avec une résolution qui dépend de l'unité (ou dispositif) d'affichage . Ces algorithmes sont ainsi appelés : "à résolution limitées". Ils répondent à la question :

Tel point de l'écran appartient-il à l'image de la partie visible de l'objet ? . Ces algorithmes permettent la représentation d'images réalistes par remplissage de tâches et autorisent la visualisation des intersections entre facettes.

-Ceux qui opèrent dans l'espace objet. [Appe 67] [Gali 69] [Lout 70] [Mich 87] [Robe 63]
Les calculs sont réalisés, indépendamment de l'unité d'affichage, et avec une précision au moins équivalente à celle avec laquelle les objets sont définis. Ces algorithmes sont aussi appelés "à haute résolution". Ils répondent à la question : Tel partie de l'objet est-elle visible? Ces algorithmes sont orientés vers l'élimination des lignes cachées et sont plus spécialement destinés à traiter des images devant être visualisées sur un écran à balayage cavalier ou sur une table traçante .

-Enfin ceux qui opèrent dans les deux espaces.[Catm 74] [Fuch 80] [Newe 72] [Shum 69].
Un premier calcul est effectué dans l'espace objet afin d'évaluer une liste de priorités puis on passe dans l'espace image pour générer l'image sur l'écran. Cette méthode a donc les propriétés des deux sous espaces objet et image. Du premier elle tire la précision de calcul et du second elle utilise la structure discrète en pixel .

Remarque .

La diversité des algorithmes (fig 65) ne les empêche pas d'utiliser des notions de base identiques que nous allons rappeler. L'emploi de ces notions a été introduit pour optimiser les durées de calculs et simplifier les algorithmes.

-1)Notion de tri géométrique pour définir un ordre de priorité entre les objets

-2)Notion de cohérence : les objets structurés ne se modifient que très légèrement lorsque certains paramètres varient très peu.Les formes de cohérence les plus utilisées sont :

-->Cohérence de face :

Les faces ou facettes étant petites par rapport à la dimension de l'écran, lorsqu'une partie sera visible (ou invisible) la face toute entière le sera également .

-->Cohérence d'objet :

Une scène peu mobile peut être partitionnée en "cluster" (groupes d'objets) n'entrant pas en conflit en ce qui concerne leurs conditions de visibilité .

-->Cohérence entre image :

Les images successives d'une scène illustrant un mouvement, sont très peu différentes.

-->Cohérence d'arêtes :

La visibilité d'une arête (ou l'invisibilité) ne peut changer que si elle intersecte une autre arête.

-->Cohérence de ligne de balayage ligne par ligne :

Certains algorithmes utilisent les propriétés de balayage d'un écran type TV (bas en haut, gauche à droite), un segment (ou arête) actif intersecté par cette ligne, l'est encore à la ligne suivante, sauf lorsqu'il devient passif.

-->Cohérence d'aire :

Pour une fenêtre d'étude si une face englobe cette fenêtre, alors il est inutile de chercher la visibilité des autres faces .

Chapitre 4 : Modèles de visualisation

-->Cohérence de projection :

Deux faces superposées dans le plan XY, après projection auront des profondeurs différentes.

-->Cohérence de profondeurs :

Pour un point donné de l'écran, la liste de priorités obtenue ne variera que très peu dans son voisinage.

Ce rapide tour d'horizon de quelques algorithmes d'élimination de parties cachées nous a permis de souligner les points essentiels suivants :

- Il n'existe pas d'algorithme universel
- Il existe des approches différentes pour résoudre le problème des parties cachées
- La dépendance entre le choix de l'algorithme et le modèle géométrique utilisé (ce qui limite en général la complexité de la scène à traiter, en effet, les techniques présentées n'opèrent que sur des scènes modélisées de manière unique, donc si l'on veut évaluer des scènes mixtes (contenant des modèles d'objets différents volumique, surfacique...) il est nécessaire d'effectuer (quand cela est possible) un prétraitement (très coûteux) sur les objets, pour se ramener à un modèle "unique".

4-3-1-Paramètres de choix :

Nous pouvons extrapoler, à partir de ce travail de synthèse sur l'élimination des parties cachées, un ensemble de caractéristiques critères, contraintes et paramètres susceptibles de nous guider dans le choix de l'algorithme à utiliser (fig 66), on peut citer notamment :

- 1)Le type de scène à traiter ; il est apparu que certaines techniques sont très restrictives quant à la nature des objets à évoluer (solides, surfaces gauches...)
- 2)Prétraitement de la scène ; il est parfois nécessaire de modifier la scène initiale pour permettre à l'algorithme de travailler dans des conditions optimales (détecter les éléments se coupant, choisir la forme de la fenêtre d'étude, découpage en boîte indépendante)
- 3)La complexité de programmation : de par leur principe certains algorithmes sont plus faciles à programmer que d'autres. La seule différence est de tendre vers des équations entièrement parallélisables
- 4)Exploitation temps réel : Elle est essentiellement liée à la simplicité de l'algorithme . Néanmoins il peut arriver que pour une scène particulière, des algorithmes initialement lourds s'avèrent plus rapide. elle reste donc un critère décisif dans le choix d'une stratégie de travail .
- 5)La taille mémoire : certains algorithmes simples dans leur essence demande une taille mémoire importante, toutefois ce problème devient de moins en moins contraignant grâce notamment au progrès technologique.
- 6)Qualité de l'image : elle dépendra uniquement de la manière dont l'algorithme travaille . Certain privilégieront un dessin au trait, d'autre une image.
- 7)Transparence, ombres portées : permet d'avoir une qualité de l'image irréprochable, ceci n'est malheureusement pas possible avec tous les algorithmes existants . L'information disponible en sortie n'étant pas exploitable pour ce type de problème.

Pour terminer nous proposons un tableau résumé des principaux critères de comparaison, qui peuvent guider dans le choix d'une méthode d'élimination de parties cachées (fig 66)

TABLEAU COMPARATIF DE QUELQUES ALGORITHMES D'ELIMINATION DE PARTIES CACHEES

	GALIMBERTI APPEL	NEWELL	WARNOCK	WATKINS	Z BUFFER	RAY TRACING
éléments de la scene	objets polyédriques non intersécants	objets polyédriques faces polygonales	facettes planes	facettes planes	quelconque	quelconque
prétraitement	oui	non	oui	non	non	non
complexité de programmation	moyen	moyen	moyen	complexe	simple	simple
effets de transparence ou ombrage	non	oui	non	non	oui	oui
précision	quelconque	dépend de l'écran	dépend de l'écran	dépend de l'écran	dépend de l'écran	dépend de l'écran
dessin au trait	très bon	mauvais	moyen	bon	bon	moyen
image	non	Très bonne	moyen	bonne	Très bonne	Très bonne

Figure 66 : tableau résumé des principaux critères de comparaisons
L'étape d'élimination résolue il nous reste à aborder le problème du choix du modèle d'éclaircement .

4-4-LES MODELES D'ECLAIREMENT

4-4-1-Introduction

Lorsqu'on désire visualiser une image de synthèse on doit pouvoir répondre à deux questions :

- Que voit-on?
- Quel aspect cela a-t-il?

L'étape d'élimination de parties cachées nous a permis de répondre à la première question. Nous allons pour solutionner la seconde rappeler les principaux concepts et techniques permettant d'obtenir une image tridimensionnelle synthétique réaliste.

La lumière au contact d'un objet peut être soit absorbée, réfléchi, ou transmise . Le principale phénomène à considérer est sans aucun doute la réflexion. En effet c'est essentiellement la lumière réfléchi qui rend visible l'objet. Les modèles qui traduisent ce comportement sont relativement complexes, à cause du grand nombre de phénomènes qu'ils intègrent.

La lumière réfléchi se divise en deux composantes :

- La réflexion diffuse .
- La réflexion spéculaire .

La qualité d'une image dépendra essentiellement d'un choix judicieux au niveau de l'éclairage. Ce choix est étroitement lié :

- Aux sources de lumières présentes dans la scène
- A la distance et à la position de l'observateur
- A la quantité de la lumière émise
- A la nature des surfaces éclairées

La prise en compte de ces différents facteurs dans un modèle global dit modèle d'éclairage peut se faire de manière plus ou moins complexe et conduit à des images d'apparence plus ou moins réaliste.

On recense deux familles de modèles d'éclairage :

- Les modèles empiriques .
- Les modèles analytiques [Cohé 85, 86] [Hall 86] [Imme 86] [Nish 85] .

Dans cette présentation de modèles d'éclairage on n' abordera que les modèles empiriques . Ils sont les plus couramment utilisés, et ils offrent l'avantage de donner une image de très bonne qualité pour un coût de calcul très raisonnable . Contrairement aux modèles analytiques, qui offrent les meilleures images, mais pénalise la durée et le coût de calcul .

Nous donnons néanmoins une bibliographie pour le lecteur intéressé .

Dans les paragraphes suivants, on considère successivement la modélisation des effets d'éclairage sur un point et l'analyse des méthodes pour appliquer cette modélisation au calcul de l'éclairage de surfaces.

4-4-2-Les modèles d'éclairéments empiriques .

L'éclairément en un point x s'exprime sous sa forme la plus générale par la relation suivante : $I(x) = I_a(x) + I_d(x) + I_s(x)$ où

- $I_a(x)$ correspond à la lumière ambiante .
- $I_d(x)$ correspond à la lumière diffuse .
- $I_s(x)$ correspond à la lumière spéculaire .

nous allons détailler l'expression de chacune des composantes :

-a)Composante ambiante [Fole 82] [Roge 76].

Le terme $I_a(x) = K_a \cdot I_a$, représente la composante de la lumière ambiante, c'est une illumination globale provenant des autres objets.

I_a étant l'énergie de la lumière ambiante
 K_a constante de diffusion de l'objet

$I_a(x)$ ne dépend pas de la position du point x

Remarque :

Dans un modèle d'éclairément si on ne tient pas compte de la composante ambiante, alors tout objet qui n'est pas directement éclairé sera considéré noir.

-b)Composante diffuse [Bret 88] [Fole 82] [Trou 87] [Newm 79] [Roge 76] [Wood 84].

$$I_d(x) = k_d I_p \cos\alpha \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

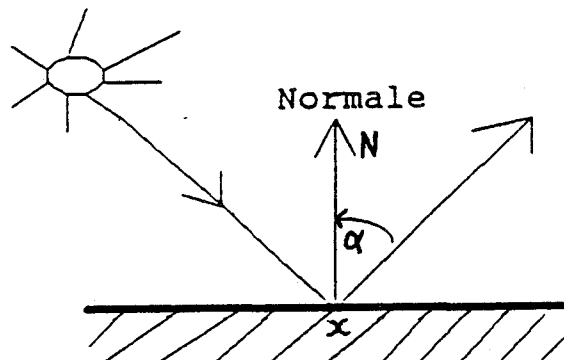


Figure 67 : calcul de la composante diffuse

K_d : coefficient de réflexion diffuse qui dépend du matériau de l'objet

I_p : lumière incidente due à la source p

α : angle d'incidence entre la normale N et L le vecteur reliant le point x à la source lumineuse.

$I_d(x)$ représente la composante diffuse de la lumière émise par la source ponctuelle p . Si le rayon lumineux tombe sur une surface mate, il se réfléchit dans toutes les directions sans exception, la surface semble avoir la même brillance quelque soit l'angle de vue. Ce qui explique l'utilisation de la loi dite du Cosinus de Lambert.

-c)Composante spéculaire [Phon 75].

$$I_s(x) = w(i) I_p \cos^{ns}(\beta)$$

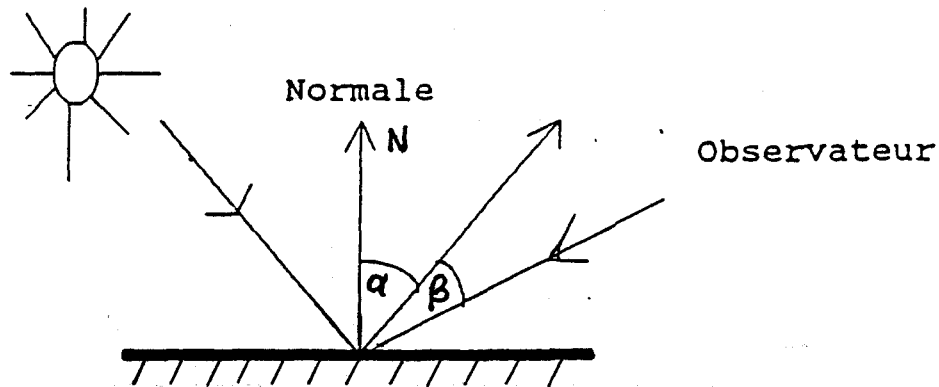


Figure 68 : calcul de la composante spéculaire

- $W(i)$ correspond à la proportion de lumière qui est réfléchiée de manière spéculaire . Il dépend de la nature de la surface considérée.

- ns est un exposant qui définit la distribution spatiale de la lumière spatiale. Il dépend de la surface, il varie entre 1 et 2000 (surfaces métalliques).

- β :représente l'angle entre la direction d'observation V et la direction de la réflexion principale R .

$I_s(x)$ représente la composante spéculaire . La réflexion spéculaire est observée sur les surfaces brillantes, l'énergie réfléchiée n'est pas la même dans toutes les directions de l'espace. Elle est maximale au voisinage immédiat de la direction principale de réflexion (donnée par la loi de Descartes : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion) et décroît plus ou moins vite selon la matière de la surface, lorsqu'on s'écarte de la direction principale cette variation peut être modélisée par un terme en $\cos^{ns}\beta$

Ce modèle représenté n'est autre que celui de Phong [Phon 75] qui est certainement le plus utilisé en synthèse d'image. Il prend en compte les principaux phénomènes physiques qui sont en jeu, sans pour autant aller au fond des choses. Il reste néanmoins un modèle de nature empirique.

Remarque :

Les modèles décrits précédemment ne prennent pas en compte les distances des objets à la source d'éclairage et à l'observation. Or il est logique que deux objets parallèles à des profondeurs différentes ne présentent pas le même éclairage.

Pour traduire ce phénomène, Warnock [Warn 69] a introduit la fonction $F(d) = 1/d$ où d est la distance entre le point de surface considérée et la source L , dans la composante diffuse et spéculaire .

Foley et VanDam [Fole 82] ont proposé soit la fonction $f(d) = 1/d^2$ ou $f(d) = 1/(d+k)$ où k est une constante .

le modèle complet est alors :

$$I(x) = K_a I_a + F_d \left[k_d I_p \cos\alpha + w(i) I_p \cos^{ns}(\beta) \right]$$

En pratique, choisir $f(d) = 1/(d+k)$ donne les meilleurs résultats.

Si plusieurs sources lumineuses interviennent dans la scène alors :

$$I(x) = K_a I_a + F_d \left[k_d \sum_{p=1}^m I_p \cos\alpha + w(i) \sum_{p=1}^m I_{p_1} \cos^{ns}(\beta) \right]$$

-d) Transparence [Fole 82] [Jann 88] [Roge 76] [Trou 87] .

L'image vue à travers un objet translucide est distordue en fonction de l'indice de réfraction de la géométrie de sa surface, et sa couleur est modifiée en fonction du rôle de filtre optique joué par cet objet. L'éclairement en un point d'une surface translucide est calculée comme combinaison linéaire de la lumière qu'il réfléchit et de celle réfléchi par un objet immédiatement situé derrière lui (fig 69) :

$$I_t = K_t I_a + (1 - K_t) I_b \quad (\text{fig })$$

- I_a intensité en A .

- I_b intensité en B

- K_t coefficient de transparence en A (entre 0 et 1)

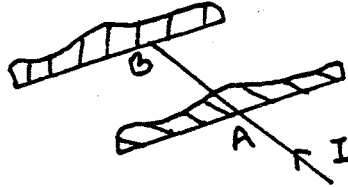


Figure 69 : transparence .

Pour $K_t = 0$ l'objet est parfaitement transparent (invisible) .

Pour $K_t = 1$ il est opaque .

Si l'on tient compte de la contribution due à la transparence, l'éclairement en un point x est donné par :

$$I(x) = I_a(x) + I_d(x) + I_s(x) + I_t(x)$$

4-4-3-Autre modèles .

-On peut citer le modèle de Blinn [Blin 77] qui suppose la surface constituée d'une multitude de facettes microscopiques . Une facette est assimilée à un miroir parfait .

-Le modèle proposé par Warn [Warn 83] permet de prendre en compte les sources lumineuses directionnelles (spot) .

-Cook et Torrance [Cook et Tora 82] ont repris et développé le modèle proposé par Blinn . Les résultats sont remarquables, mais très coûteux en calculs .

-Whitted [Whit 80] quant à lui propose un modèle qui prend en compte les réfractions dues aux objets transparents et la lumière indirecte transmise entre les différents objets de la scène .

4-5-Modèles d'interpolation .

Nous venons de présenter plusieurs modèles qui nous ont donné l'éclairement en un point d'une surface, si on suppose la normale constante pour un objet composé de facettes planes le résultat est peu réaliste (problème de facétisation) . Il s'agit donc de pouvoir calculer l'éclairement en tous points d'une surface . Pour cela ont été introduits les modèles d'interpolation ou de lissage, le modèle de Gouraud [Gour 71] et le modèle de Phong [Phon 75], qui permettent d'obtenir une image de meilleure qualité .

Dans les deux cas on suppose l'objet composé de facettes .

4-5-1-Le modèle de GOURAUD [Gour 71].

Le principe est le suivant (fig 70) :

- 1)Calculer la normale de chaque facette .
- 2)Déterminer pour chaque sommet d'une facette la normale, en prenant la moyenne des normales aux facettes incidentes au sommet en question.
- 3)Calculer les intensités en tous les sommets .
- 4)L'intensité en tous point de la facettes est calculée par interpolation linéaire sur les valeurs aux sommets .

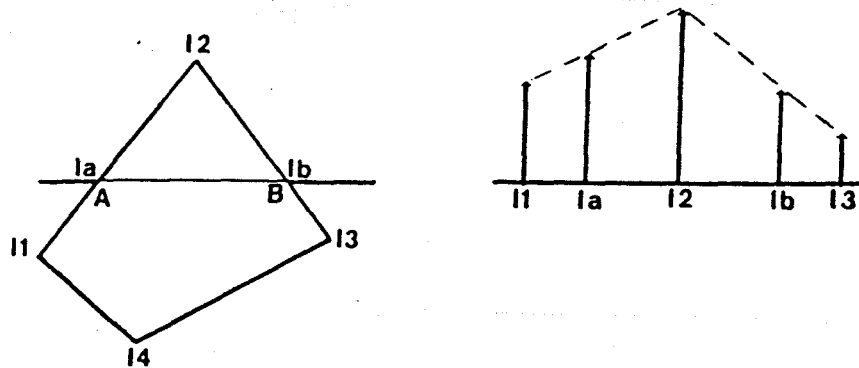


Figure 70 : lissage de Gouraud

Remarque

L'interpolateur de Gouraud est une technique d'une grande simplicité, elle permet d'obtenir une surface éclairée continue, d'apparence lisse .Cependant elle possède un certain nombre d'inconvénients :

- Les surfaces traitées doivent être convexes .
- Apparition d'artefacts, dus au principe même de la méthode qui porte sur les éclairagements .
- L'impossibilité de simuler des surfaces brillantes (très mauvais rendu des réflexions spéculaires) .
- Production de bandes de Mach sur certains bords de facettes

4-5-2-Le modèle de PHONG [Phon 75].

Le principe est le suivant (fig 71) :

- 1)Calculer la normale de chaque facette .
- 2)Déterminer pour chaque sommet d'une facette la normale, en prenant la moyenne des normales aux facettes incidentes au sommet en question.

-3) Calculer la normale en tous points de la facette par une interpolation bilinéaire à partir des normales aux sommets.

-4) Calculer l'intensité en tous points de la facette en utilisant par exemple la loi de Lambert .

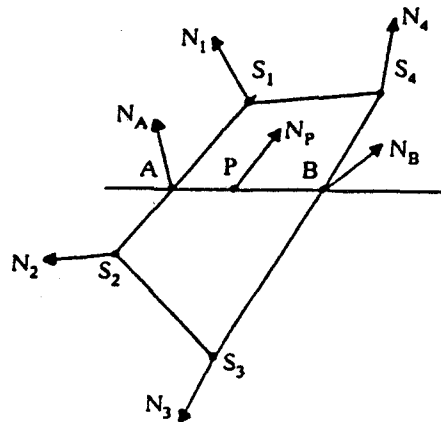


Figure 71 : lissage de Phong

Remarque

L'intérêt de cette méthode réside dans le fait que pour chaque point on calcule une normale, l'image est donc de meilleure qualité . La méthode évite la plupart des défauts dus à l'interpolateur de Gouraud . Les reflets spéculaires sont possibles dans ce cas . Malheureusement elle est plus coûteuse en durée de calculs et la surface à traiter doit être aussi convexe .

Après ces différents rappels (modèles de représentations, problèmes de visualisation, problèmes de l'élimination des parties cachées, modèles d'éclairéments, modèles de lissages) nous allons essayer de dégager un certain nombre de critères qui en fonction des contraintes de l'application envisagée (morphogénèse et représentation d'objets biologiques), nous permettent de choisir le modèle de représentation et le modèle de visualisation le mieux adapté .

5-CHOIX DU MODELE DE REPRESENTATION 3D POUR LES APPLICATIONS ENVISAGEES.

L'analyse des différents modèles de représentation et de visualisation d'objets 3D, que nous venons d'exposer nous permet de constater les points suivants :

-Il n'existe pas de modèle idéal .

-Le choix d'un modèle est fortement lié à l'application à développer et à de nombreux paramètres .

-Mais on peut trouver une représentation "optimale" dans le cadre d'une application donnée et selon les contraintes qui en découlent.

Nous allons énumérer et préciser les paramètres ou contraintes générales dépendant de l'application visée pour réaliser le meilleur choix possible du modèle de description . Nous résumerons ensuite à l'aide de tableaux comparatifs, les divers avantages et inconvénients des différents modèles, et nous dresserons les besoins des deux applications, pour la reconstruction d'artères, et la reconstruction de la mâchoire, envisagées dans le cadre de cette étude.

5-1-Paramètres de choix :

-a)La méthodologie générale retenue doit fournir un bon équilibre entre la compacité des données et la rapidité d'exécution des fonctions , qui peut être néanmoins rompu au profit de l'une ou de l'autre selon l'application visée (représentation 3D de arbre vasculaire du cou ou la reconstruction et la représentation 3D des objets de l'appareil dontho facial).

-b)La compacité et la rapidité étant généralement liées, privilégier un des deux paramètres défavoriserait l'autre.

-c)La nécessité d'une certaine interactivité entre le système et l'utilisateur influencera grandement l'orientation d'une implantation machine.

-d)La construction du modèle doit être réalisée très facilement quelle que soit la nature de la base de données (tableaux 3D, coupes, équations...) .

-e)Entre le modèle obtenu et la base de données initiale il ne doit avoir que peu ou pas de pertes d'informations . Le choix du modèle doit permettre l'exécution de différentes opérations géométriques classiques (translation, rotation,....) .

-f)Le calcul de différentes propriétés mathématiques (volume, masse, surface, distances, angles,...)

-g)Une visualisation rapide et de haute qualité de la base de données.

-h)La résolution des divers problèmes de synthèse d'image (parties cachées, ombrage...) .

Privilégier un ou des critère(s) donné (s), peut entraîner dans certains cas, l'abandon d'un ou des autres critères .

Pour une application donnée, il faudra sélectionner les critères qui répondent le mieux à la solution envisagée.

Le but de cette étude est la manipulation de base de données 3D, issues de sources d'images médicales différentes .

Chapitre 5 : Choix du modèle de représentation 3D pour les applications envisagées

A l'aide de tableaux comparatifs, nous avons essayé de dresser les caractéristiques essentielles, des divers modèles existants, et des besoins de deux applications médicales particulières. Avant d'introduire ces tableaux il convient de préciser certains points :

-1)Le jugement de ces tableaux est à prendre avec précaution .

-2)La recherche de caractéristiques générales pour une représentation, par exemple, n'est pas toujours facile.

-3)On peut toujours trouver d'autres caractéristiques ou critères pour une représentation particulière ou une application différente.

-4)Les besoins ou critères que nous avons retenus ne doivent pas être pris comme impératifs ; mais plutôt comme un moyen pour lequel il est possible de se fixer une règle de décision.

-5)Ces tableaux enfin devront être consultés non pas pour donner un jugement définitif mais comme des outils pour l'aide à la décision dans le cadre du choix d'une représentation en fonction de l'application visée.

Les tableaux (fig 72 et fig 73) nous ont permis de mettre en lumière un certain nombre d'avantages et d'inconvénients de différentes méthodes de modélisation, ils ont aussi montré les besoins nécessaires et les orientations souhaitables à développer dans le cadre des deux applications envisagées (morphogénèse et représentation d'objets biologiques).

Hormis les modèles complexes, les deux types de représentation les plus utilisées sont :

-Les représentations interactives (surfaces de forme libre, CSG, Brep) qui sont la base des systèmes de CAO.

-Les représentations automatiques (Voxels, Facettes) qui effectuent l'agencement dans l'espace tridimensionnel, des données acquises sur un objet. Dans le cas de la modélisation des organes du corps humain.

Dans les deux cas évoqués précédemment la représentation met en jeu, des principes, des critères, des volumes de données et des traitements différents .

Pour l'approche CAO, l'objectif principal est la création de modèles d'objets qui puissent être facilement modifiés (coût au long de la conception) et exploités (pour la fabrication). Ces modèles ainsi conçus à partir de primitives mises à la disposition du concepteur (cube, cylindre, éléments frontières ou carreaux de surface) seront facilement structurés et organisés sous forme de blocs.

En ce qui concerne les approches automatiques, l'objectif est d'effectuer un ensemble de relations élémentaires sur un volume important de données réelles (obtenues à partir d'un objet). Le modèle ainsi conçu sera peu structuré (hormis les méthodes octrees) et présenté sous forme redondante (d'où l'intérêt de posséder un algorithme qui puisse supprimer l'information redondante) . On distingue essentiellement dans cette approche : la modélisation par facettes (triangulaires ou quadrilatères gauchés) et la modélisation à l'aide des Voxels (octrees).

Critères	Fli de fer	Facettes	SF libre	GSG	Balayage	Limite	Octrie Binaire	Liste de Voxels	Fractals	Gratit	Syal. Partic.	Tableau 3D
Occupation mémoire	faible	faible	faible	moyen	moyen	moyen	moyen	important	important	important	important	important
Facilité de mise en oeuvre	très grande	moyenne	moyenne	grande	grande	grande	moyen	grande	faible	moyenne	moyenne	très grande
Information de surface	nulle	grande	grande	faible	grande	grande	grande	grande	moyenne	moyenne	moyenne	grande
Information de volume	nulle	nulle	nulle	grande	grande	grande	totale	faible	grande	grande	grande	totale
Opération Booléenne	nulle	nulle	nulle	très facile	moyen	très moyen	facile	nulle	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne
Résolution	faible	faible	faible	faible	faible	faible	grande	grande	grande	grande	grande	faible
Accès avec le voisinage	faible	faible	faible	faible	moyen	grand	moyen	grand	très faible	moyenne	très faible	grande
Calcul Géométrique	impossible ou difficile	difficile	difficile	possible	possible	possible	possible	possible	possible	possible	possible	possible
Modélisation de surface	nulle	facile	facile	facile	faible	faible	moyen	faible	grand	grand	grand	faible
Modélisation de volume	nulle	facile	facile	facile	faible	faible	grand	grand	grand	grand	grand	grand
Facilité de visualisation	facile	facile	moyenne	moyenne	faible	grande	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne	moyenne
Qualité de visualisation	moyenne	moyenne	grande	moyen	grande	grande	grande	moyenne	grande	grande	grande	moyenne
Elimination des parties cachées	très difficile	facile	moyen	difficile	difficile	facile	facile	facile	moyenn	moyenn	moyenn	facile
Implantation machine	faible	moyenne	faible	moyenne	faible	moyenne	grande	grande	faible	faible	faible	moyenne
Conversion entre modèle	grande	grande	faible	très faible	faible	grande	grande	moyenne	très faible	très faible	très faible	moyenne
Précision modèle et objet réel	faible	moyenne	bonne	moyenne	moyenne	grande	grand	moyenne	grand	grand	grand	moyenne
Faisabilité de l'objet	aucune	aucune	faible	sure	grande	grande	sure	faible	sure	sure	faible	moyenne
Mesure	faible	moyenne	moyenne	faible	moyenne	grande	grande	faible	sure	sure	sure	moyenne

Figure 72 : Tableau comparatif des différents modèles de représentation

	MORPHOGENESE	CHIRURGIE OPERATIONNELLE
Qualite de la visualisation	<i>important</i>	<i>indispensable</i>
Manipulation	<i>indispensable</i>	<i>important</i>
Modification de la surface	<i>moyen</i>	<i>faible</i>
Information en volume	<i>important</i>	<i>indispensable</i>
Calcul de Propriétés Analyse	<i>important</i>	<i>important</i>
Segmentation	<i>important</i>	<i>important</i>
Temps réel	<i>important</i>	<i>indispensable</i>
Utilisation	<i>référence pour la conception</i>	<i>aide à la décision</i>

Figure 73 : besoins des deux applications envisagées

Dans les applications de notre cas l'approche CAO ne convient pas parce que les primitives disponibles ne rendent pas compte de la réalité et les méthodes par carreaux de surface sont très lourdes et compliquées à développer .

Nous avons donc choisi d'utiliser des techniques de représentation appartenant à la classe des approches automatiques

Nous allons rappeler brièvement les avantages et inconvénients respectifs des deux représentations de l'approche automatique les plus utilisées dans les applications médicales, afin d'être à même de choisir celle que nous développerons dans le cadre de cette étude.

-a)Représentation par voxels

Les représentations par Voxels permettent une modulation de la qualité de visualisation par modification de la taille des voxels . Elles permettent d'effectuer simplement le calcul des volumes mais elles nécessitent pour le calcul des surfaces une conversion en représentation surfacique, elles demandent en outre une quantité importante de mémoire, et introduisent une perte d'information due à l'échantillonnage lors de la phase d'acquisition (voir chapitre 1) . Elles sont mieux adaptées à une reconstruction directe 3D qu'à une représentation 3D à partir de reconstruction 2D par coupes parallèles parce que dans ce dernier cas il n'existe pas d'informations entre les coupes .

-b)Représentation par facettes

Les représentations par facettes permettent une réduction de l'occupation mémoire de la base de donnée, et aussi une visualisation rapide.

Dans le cas où l'on désire une modélisation très précise,d'objet complexe il est alors nécessaire de disposer d'un plus grand nombre d'informations ce qui porterait préjudice à leur emploi (place mémoire à réserver). D'où la nécessité, dans l'optique d'une plus grande précision, de développer un outil qui permette de réduire la masse d'informations, sans pour autant nuire à la qualité de visualisation (algorithme d'échantillonnage que nous avons développé).

Un inconvénient commun à toutes les modélisations surfaciques, est la perte de l'information de volume.

5-2-conclusion

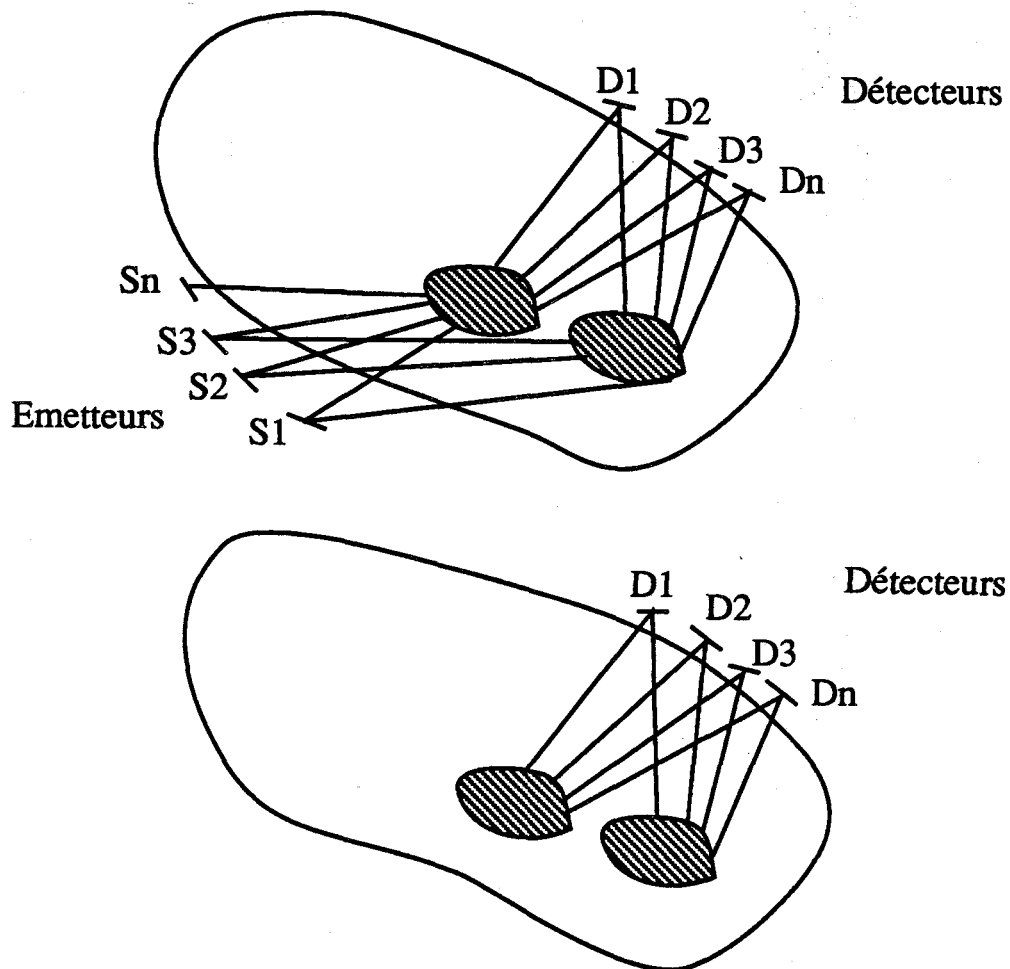
A l'issue de cette étude et en regard des applications envisagées, nous avons choisi la représentation des données à l'aide de facettes triangulaires . Elles correspondent bien aux critères suivants :

- Faible encombrement mémoire .
- Assez bonne précision (calcul effectué dans l'espace objet).
- Implementation machine temps réel possible .
- Facilité d'exécution des calculs géométriques (volume, masse,.surface..) .
- Information sur la normale à la surface .
- Manipulation et visualisation du ou des volumes.

Ce chapitre nous a permis de choisir une représentation répondant aux exigences posées. Dans la seconde et troisième partie, nous allons aborder les deux applications que nous avons développées, en présentant des solutions originales aux problèmes rencontrés .

A l'instigation des professeurs Francke, Blocquel, Lemaitre, Clarisse, Houdas, du CHR de LILLE nous avons orienté notre travail sur les méthodes de représentation 3D d'objets biologiques .

On peut d'une façon générale schématiser le concept de reconstruction 3D par le modèle suivant (fig 76):



Le milieu est soit excité par des émetteurs extérieurs (électriques, magnétiques, rayonnement X) soit par des produits injectés . Les composantes D_i du champ sont recueillies par une série de détecteurs .

Dans le cas d'excitation par des émetteurs extérieurs on peut considérer que les composantes du champ résultent de la superposition du champ direct des émetteurs et du champ produit par la réunion de la distribution d'émetteurs interne correspondant aux éléments du volume du milieu biologique dans lesquels ont été induits des éléments dipolaires (éléments de courant par exemple) . Dans le cas des produits injectés les composantes du champ résultent de la superposition des champs élémentaires produits par la distribution des émetteurs internes .

Dans tous les cas on peut ramener très schématiquement l'expression des composantes

élémentaires du champ à la formule générale .

$$D_i = \sum_{\text{ensemble des sources}} G(\text{caracté du milieu}) \cdot F(\text{fonct de trans})$$

La fonction de transmission résulte de la solution générale d'une équation de transmission

La fonction G contient les inconnues à déterminer comme par exemple la nature des tissus composant chaque élément de volume aux coordonnées x,y,z du milieu. Il s'agit de la résolution du problème inverse que l'on appelle dans le sens le plus large la reconstruction 3D .

Jusqu'à présent dans les scanners X et IRM la reconstruction est réalisée en 2D dans chaque plan (x,y) d'ordonnée z . On dispose donc d'une série de coupes parallèles à partir desquelles on effectue une reconstruction surfacique 3D .

La deuxième partie de notre thèse décrit l'étude que nous avons faite d'un système de représentation 3D d'une structure vasculaire à partir des coupes scanner IRM issues d'une reconstruction 2D .

Compte tenu de l'expérience que nous avons acquise sur la technique développée dans cette deuxième partie, nous avons étudié un système de représentation 3D par reconstruction 2D d'une structure céphalo dentaire, à partir de clichés orthoradiographiques X . Cette étude est développée dans la troisième partie

2EME PARTIE

**ETUDE DE LA REPRESENTATION 3D D'UNE
STRUCTURE VASCULAIRE A PARTIR DE LA
RECONSTRUCTION 2D D'UN SCANNER IRM**

1-INTRODUCTION .

Pour juger de la présence d'une pathologie, dans une structure vasculaire, il est nécessaire d'apprécier un certain nombre de critères parmi lesquels on peut citer :

- Aspect morphologique de la lésion .
- Préciser la topographie de la lésion .

Pour établir un diagnostic, outre les examens biologiques classiques, l'imagerie tridimensionnelle apparaît actuellement comme un outil d'appoint indispensable . Elle permet justement d'étudier de confronter et d'analyser des informations morphologiques et topographiques de structures quelconques.

L'intérêt d'une telle démarche est triple : diagnostique, pronostique, thérapeutique.

-Sur le plan du diagnostic :

L'appréciation qualitative des données sur une image (cliché) est souvent insuffisante même pour un observateur entraîné. Il est alors nécessaire de reconstituer la morphologie tridimensionnelle de l'organe étudié (ce n'est pas toujours facile, ni même possible) Afin de trouver un anévrisme ou une malformation des vaisseaux cérébraux . Il faut donc développer une technique précise (sensibilité voisine de 95% pour caractériser une pathologie vraie), rapide (en regard de la technique d'acquisition) et objective.

-Sur le plan pronostique :

Selon la taille de la position de la pathologie il faut être capable de prévoir l'évolution de la maladie .

-Sur le plan thérapeutique :

surveillance post-thérapeutique des malformations vasculaires .

Sur ces trois points une reconstruction tridimensionnelle est d'un apport médical considérable.

De nombreuses méthodes ont été proposées dans la littérature pour résoudre le problème de la reconstruction 3D de vaisseaux [Bari 85] [Garr 88]. On distingue deux approches :

L'approche locale qui consiste à partir d'une ou deux projections à caractériser la pathologie de la zone lésionnelle sélectionnée ou délimitée par le médecin.

L'approche globale qui recherche à reconstruire l'arbre artériel, tel que le réseau cérébral, à l'aide de primitives classiques (CSG, voxels, facettes) ou à l'aide de techniques faisant appel à des méthodes d'intelligence artificielle.

Malheureusement les solutions logicielles proposées sur les instruments utilisés actuellement en milieux hospitaliers, pèchent par leur manque de convivialité, faibles fonctionnalités et absence d'interactivités.

Nous proposons dans le cadre de cette étude une chaîne fonctionnelle de représentation tridimensionnelle qui tient compte des critères précédents et qui a l'avantage de bien se prêter à une architecture matérielle. Nous présentons les résultats de représentation effectuée par une solution qui exécute séquentiellement les étapes sur une petite station composée d'un micro ordinateur . L'application porte sur la représentation en 3D d'un ensemble de reins et sur celle de l'arbre artériel cérébral.

La source d'acquisition employée, dans le cas des vaisseaux cérébraux est : L'IRM ou

Artériographie cérébrale . La technique la plus utilisée à l'heure actuelle est sans aucun doute L'IRM car elle offre l'avantage d'être atraumatique contrairement à l'Artériographie. Nous proposons figure la un tableau comparatif de ces deux techniques

	Technique utilisée	Produit de contraste	Cathétérisme (KT)	Type d'acquisition	Durée	Préparation du malade	Risque de la technique	Visualisation
Angiographie IRM	IRM	Pas de produit	Aucune	Toutes les artères en une seule fois	15 mn	Aucune	Nul à ce jour	Multiples incidences
Artériographie (cérébrale classique)	Rayons X	Iode	KT	Une artère à la fois	1 à 2h	Anesthésie générale	* Problème dû au rayon X * KT * Ematomes Iode	Projections 2 ou 3 incidences

Figure 1a : tableau comparatif entre L'IRM et Artériographie

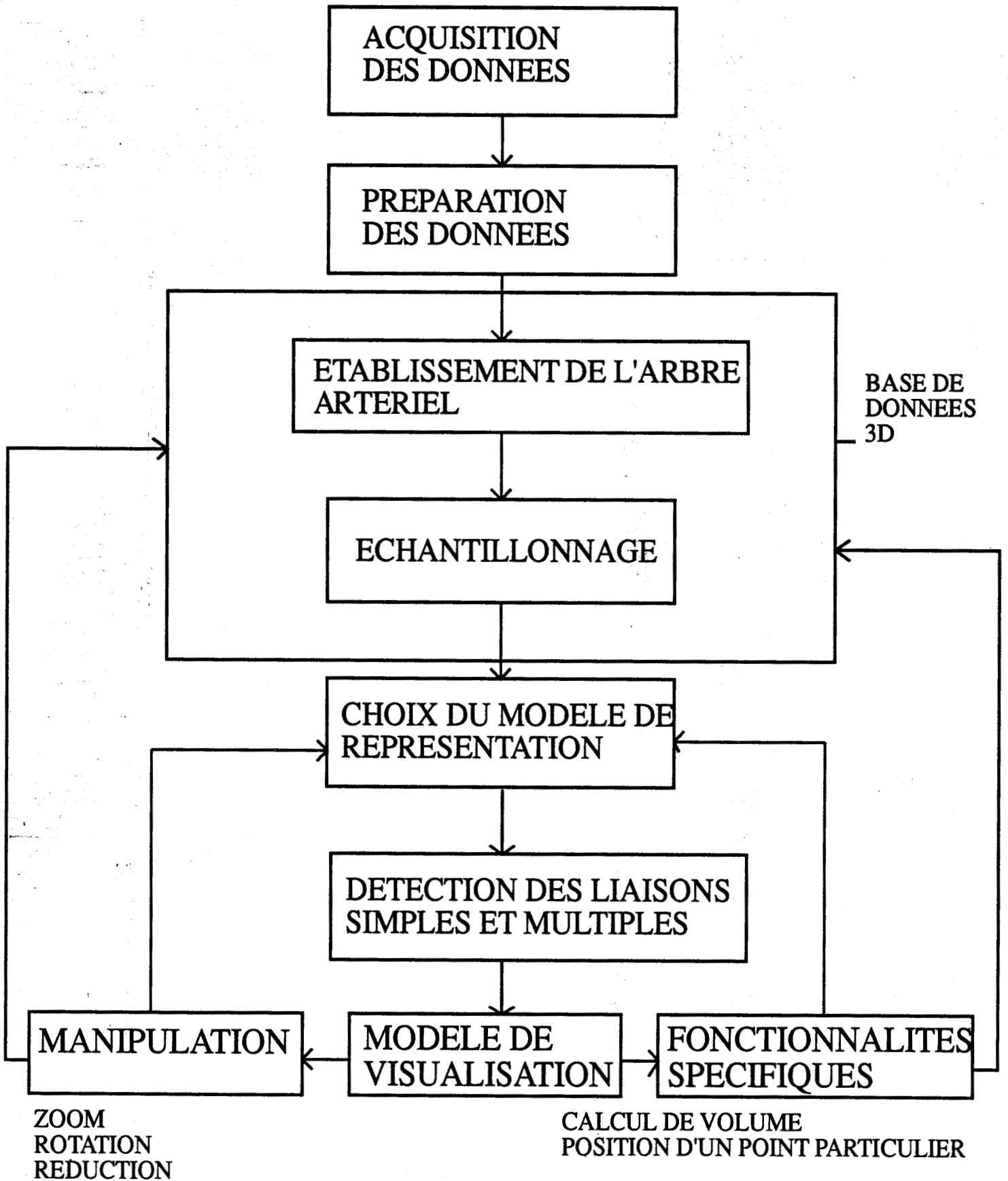


Figure 2 : chaîne de représentation 3D

La technique utilisée pour obtenir les différentes coupes des vaisseaux est une technique dite de temps de passage ("Time of Flight ") Elle est basée sur le contraste spontané entre les protons mobiles du sang circulant à travers les vaisseaux et les protons immobiles des tissus . Elle consiste à mettre en évidence un hypersignal vasculaire par renforcement paradoxal [Dele 90]. En effet le signal est uniquement intense dans les vaisseaux, et paradoxal car seul le signal des vaisseaux est paradoxalement plus intense que celui des tissus environnants .

Les clichés contiennent les différentes coupes parallèles de l'objet que l'on veut étudier.

La chaîne de représentation tridimensionnelle d'une application en imagerie médicale peut être la suivante (fig 2):

Nous allons par la suite détailler les différentes fonctions de cette chaîne de représentation tridimensionnelle .

1-2-Acquisition des données .

Le support de travail est constitué d'un ensemble de coupes parallèles d'une résolution de 512*512 codées sur 8 bits . Une étude préalable des informations imprimées sur le clichés est indispensable pour permettre la reconstruction 3D des artères qui y sont contenues . Ces informations sont :

- des informations dimensionnelles ou géométriques de profondeur.
- Des informations médicales (identification du patient) . . .
- Des informations techniques sur les paramètres d'acquisition de la coupe .

A chaque acquisition on enregistre la position en Z de chaque coupe . Il faut rappeler que le radiologue réalise sa série de clichés selon une plage de profondeurs qui peut varier de -Z1 à + Z3 . .

On enregistre aussi le facteur d'échelle de chaque coupe pour étalonner les images en calculant le nombre de pixels par centimètre .

L'image est numérisée à l'aide d'une carte d'acquisition PIP de Matrox . L 'architecture de cette carte est la suivante (fig 3a, 3b, 3c):

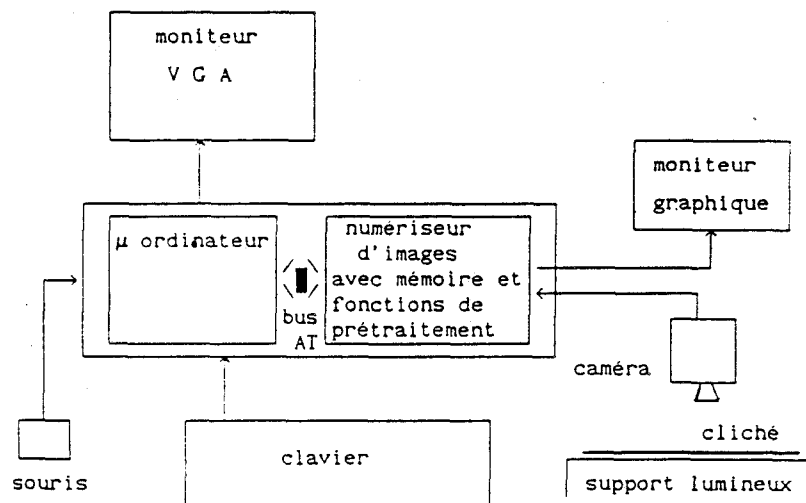


Figure 3a : architecture générale .

Le numériseur d'images est une carte PIP noir et blanc de chez Matrox, son architecture est la suivante (fig 3b) .

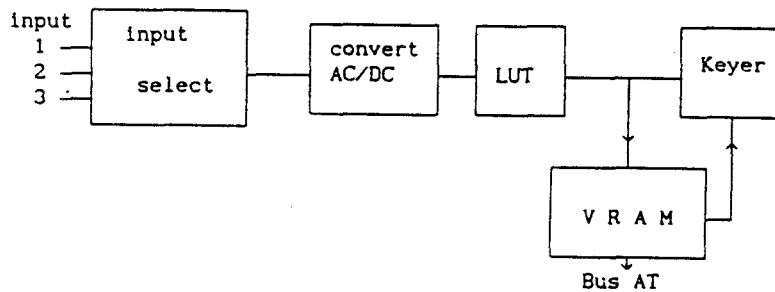


Figure 3b architecture de la carte d'acquisition .

La mémoire Vram possède une taille de 1024Koctets dont la répartition d'adressage 2D est donnée figure 3c .

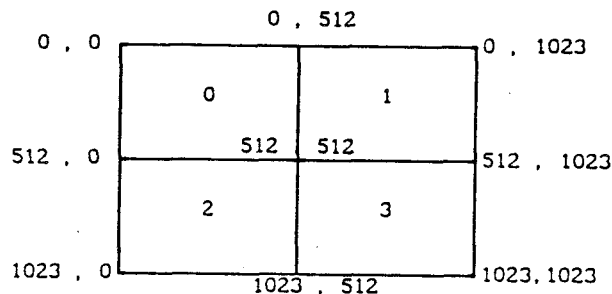


Figure 3c : configuration mémoire carte acquisition .

La mémoire peut donc contenir soit quatre images de format 512*512 pixels, soit une image 1024*1024 pixels . Pour une résolution maximale nous avons décidé de travailler sur les quatre plans (0 , 1 , 2 , 3) images contenant chacune une image 512*512 pixels .

1-3-Préparation des données

La préparation des données est composée d'un seuillage de l'image 2D suivi d'une extraction de contour .

Etant donné le fort contraste qui existe entre les tissus et l'intérieur de la section des vaisseaux, l'extraction des contours peut s'effectuer à l'aide d'un simple seuillage .

Le seuil α_1 est soit déterminé une fois pour toute pour tous les clichés, ceci n'est vrai que si tous les clichés ont été pris avec les mêmes paramètres (contraste , zoom , α_1), soit choisi pour chaque plan de coupe par l'utilisateur en fonction de l'histogramme des niveaux de gris .

Nous avons aussi développé une technique de seuillage interactif qui consiste à choisir à la fois les bornes N1 et N2 qui représentent la largeur de la plage de niveau de gris à seuiller et la possibilité de déplacer la position de cette plage le long de l'axe des abscisse . (fig4) .

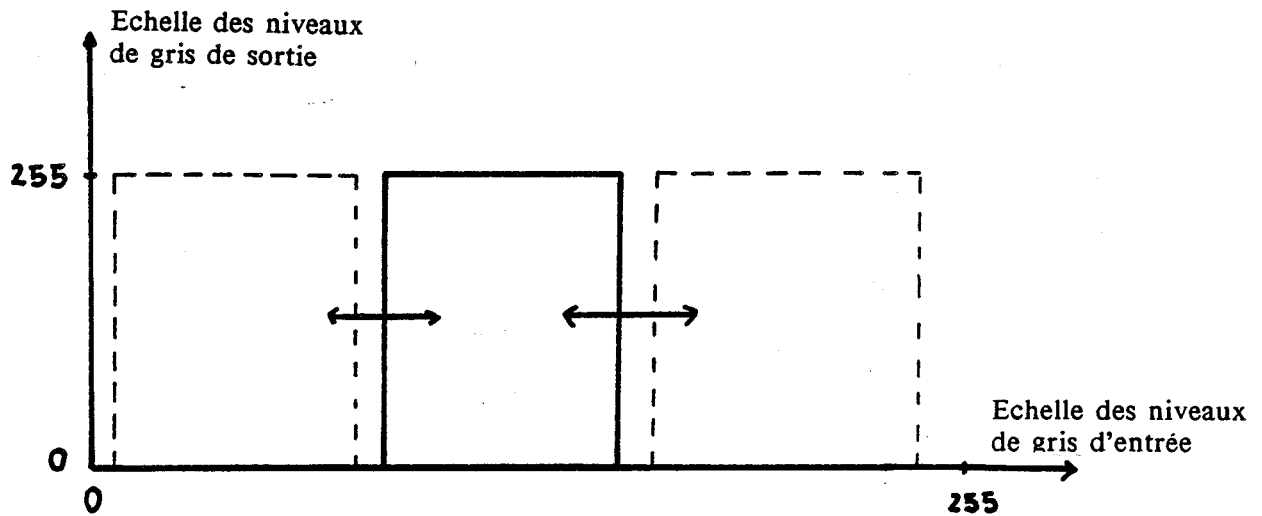


Figure 4 seuillage interactif

Le graphe de la figure 4 est visualisé sur l'écran du moniteur graphique en superposition de l'image numérisée . L'utilisateur peut ainsi seuiller l'image en connaissant la valeur des seuils choisis .

L'extraction du contour des cellules obtenues après seuillage s'effectue par une méthode classique de suivi de contour .

Pour cela l'utilisateur place manuellement un germe à l'intérieur des cellules qu'il choisit.. Cette opération peut être automatisée mais l'option manuelle permet à l'utilisateur d'extraire seuls les vaisseaux souhaités . Par exemple lorsque leurs sections sont très petites, une opération automatique ne permet pas de les distinguer du bruit .

Chaque point du contour d'une cellule est défini par ses coordonnées (x,y) alors qu'une seule ordonnée z est stockée pour tous les points d'une même cellule ce qui réduit l'encombrement de la base de données 3D .

1-4-Base de données 3D.

Elle est le résultat des étapes suivantes :

- Etablissement de l'arbre artériel .
- Echantillonnage .

Nous allons reprendre séparément chacune de ces étapes .

D'une manière générale cette base de donnée doit permettre la gestion d'un ensemble d'objets indépendants et quelconques.

Chaque objet pouvant être défini par un ensemble de coupes simples ou complexes (sections multiples dans le même plan) . Elle doit permettre une manipulation facile des données (accessibilité, exploitation) et des éventuelles mises à jour, soit en incorporant de nouveaux objets, soit en modifiant la description d'un objet (rajout d'une coupe..)

Cette base de donnée est donc essentiellement évolutive : toute structure de type figée (tableau prédimensionné) est incompatible . une structure de base de donnée de type arborescence convient particulièrement à ce genre d'application.

1-4-1-Etablissement de l'arbre artériel .

Un arbre est constitué d'un ensemble d'éléments appelés noeuds . Un de ces noeuds est choisi pour constituer la racine . Tous les noeuds sont liés par une relation dite de parenté induisant parmi eux une structure hiérarchique .

Chaque noeud représente un contour de l'objet (son centre de gravité) et chaque noeud est relié à son ou ses successeurs à l'aide d'une branche de l'arbre .

Des exemples d'applications dans le cas du rein et de l'arbre artériel sont schématisés sur les figures 5 et 6 .



Figure 5 : cas d'un objet simple

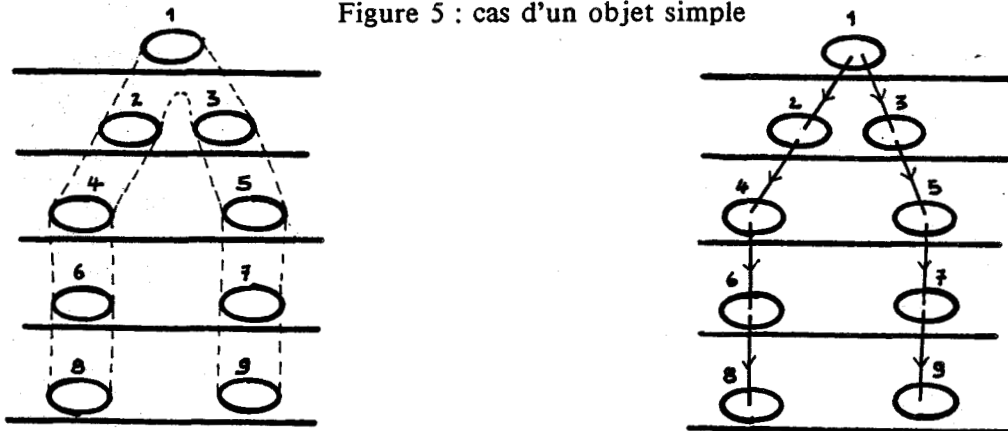


Figure 6 : cas d'un objet présentant des embranchement

Le cas de l'arbre vasculaire reste tout de même plus complexe puisque dans certaines configurations deux artères peuvent se rejoindre (fig 7).



Figure 7 : cas d'un objet complexe .

Dans ce cas la notion d'arbre devient plus générale et conduit à la notion de graphe orienté .

1-4-1-1-Notion de graphe .

Un graphe est déterminé par les données suivantes :

--D'un ensemble X dont les éléments sont appelés des sommets ou des noeuds . On supposera que les sommets sont numérotés de 1 à n .

-D'un ensemble U dont les éléments sont des couples ordonnés de noeuds appelés des arcs ou des arêtes .

En pratique chaque contour est représenté par un noeud et chaque noeud est lié à un ou deux noeuds par une arête ascendante ou descendante .

On peut rencontrer trois types de graphes (fig 8a, 8b, 8c) . Le graphe de la figure 8.a est un cas particulier de la figure 8.b . Ce dernier correspond exactement au problème des vaisseaux que nous traitons .

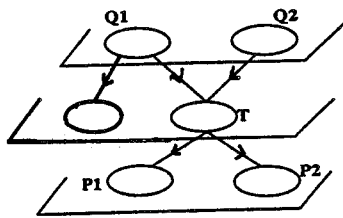


Figure 8a : arbre

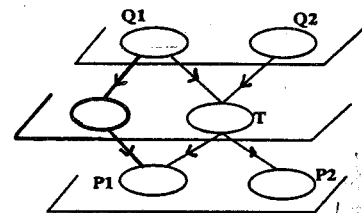


Figure 8b : graphe orienté

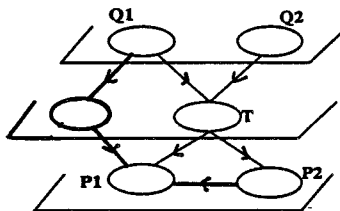


Figure 8c : graphe orienté sans circuit : G.O.S.C

Figure 8a, 8b, 8c : différents types de graphe .

Par contre la figure 8.c n'apparaît jamais, dans notre cas, puisqu'il n'existe aucune relation entre des noeuds appartenant à une même coupe.

Dans ce type de modélisation chaque noeud est défini à l'aide d'une relation successeur et précédente . Pour traduire les liens entre les noeuds des différentes coupes nous avons choisi d'utiliser une représentation du graphe par une liste d'adjacence.

1-4-1-2-Représentation du graphe par liste d'adjacence.

La liste d'adjacence relative à un noeud T appartenant à la coupe i situé à l'altitude Z_i est une liste de relations de tous les noeuds adjacents au noeud T.

On séparera les noeuds P appartenant à la coupe $i-1$ et les noeuds Q appartenant à la coupe $i+1$ situés respectivement à l'altitude Z_{i-1} et Z_{i+1} comme il est montré sur la figure 9 .

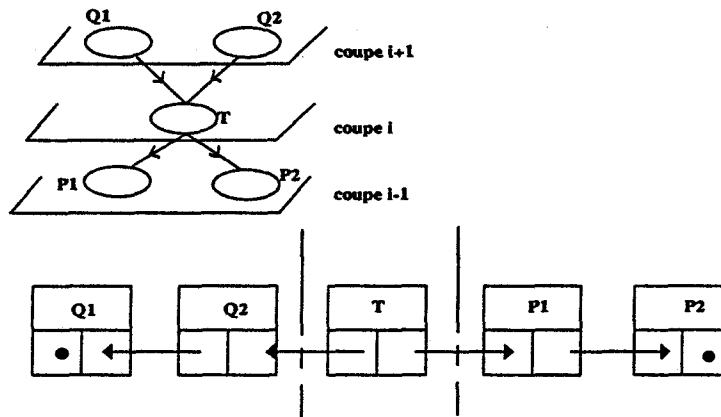


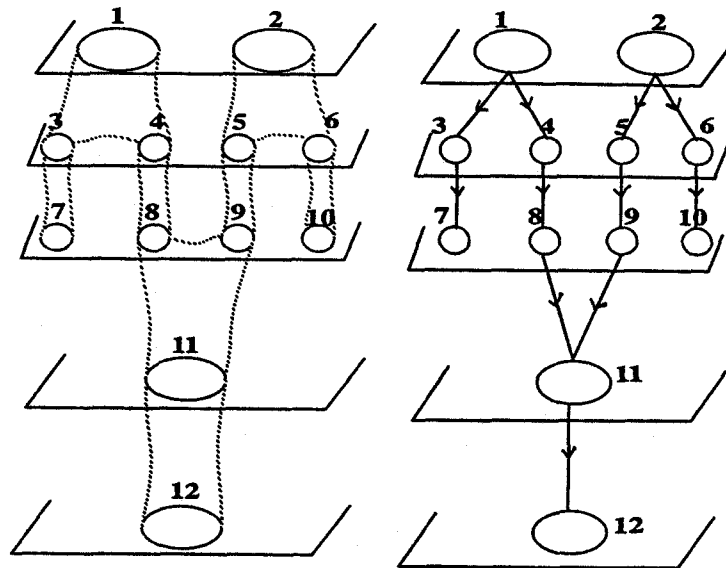
Figure 9 : liste d'adjacence relative au noeud T .

La cellule T (coupe i) de la figure 9a possède deux prédécesseurs (deux cellules mères) les cellules P1 et P2 (coupe i-1) et deux successeurs (deux cellules filles) les cellules Q1 et Q2 (coupe i + 1) .

La figure 9b illustre la représentation des cellules en mémoire appelée liste d'adjacence . On lit cette représentation de la façon suivante :

La cellule T pointe l'ensemble des cellules successeurs Qi et l'ensemble des cellules prédécesseurs Pi . La dernière cellule Qi est affectée d'un identificateur de fin objet à droite et la dernière cellule Pi d'un identificateur de fin à gauche .

La figure 10c illustre la structure de données relative à l'arbre vasculaire 10a . Pour permettre d'ajouter et de supprimer des noeuds, le graphe final, associé à l'objet à reconstruire est défini par un tableau dynamique (possibilités de rajouter ,de supprimer des noeuds)de cellules d'en tête indicées par les noeuds A chaque cellule en tête est associée une liste d'adjacence.



Définition d'un objet à l'aide d'un graphe

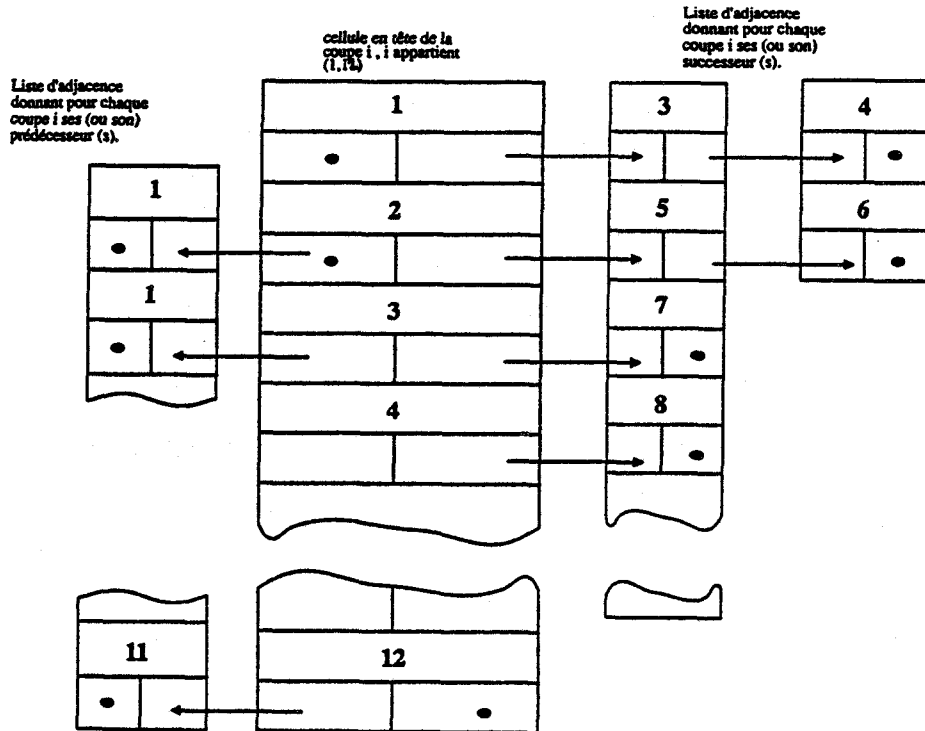


Figure 10 : graphe plus liste d'adjacence relative à chaque coupe .

Cette présentation à l'aide de graphe et de liste d'adjacence à le mérite de permettre à tous les niveaux de connaître pour un noeud donné ses successeurs ou ses prédécesseurs, ce qui facilite toute modification .

Pratiquement pour réaliser la liste d'adjacence de chaque cellule, on indique pour deux coupes successives C_i et C_{i+1} à l'altitude Z_i respectivement Z_{i+1} les relations de parenté entre les différentes cellules (cellule mère, cellule fille) . On répète l'opération pour toutes les cellules de chaque coupe (fig 11) . Cette opération a été réalisée manuellement elle est en cours d'automatisation .

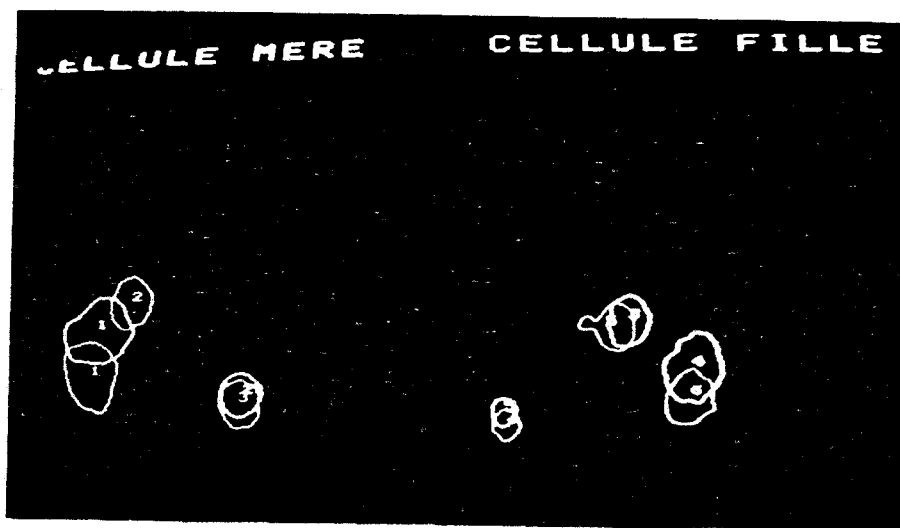


Figure 11 : chaînage .

Chapitre 1 : Chaîne fonctionnelle de représentation 3D à partir de coupes parallèles .

Dans l'analyse de scène 3D, il est indispensable d'avoir recours à un mode de représentation en mémoire des informations caractérisant les objets . Or, les méthodes que l'on utilise pour représenter les objets demandent des volumes de stockage souvent très importants . Le stockage et la gestion de tels ensembles de données dans un système ou dans un réseau posent en soi des problèmes (compression de données, optimisation de temps d'accès, etc..) . Il est possible de développer certaines méthodes efficaces de structuration, en particulier en faisant une exploration particulière des propriétés de ces données .

Nous avons choisi la prise en compte de quatre critères particuliers pour la mise en oeuvre de notre structure de données Ces critères sont :

-Compression maximale (réalisée grâce à l'algorithme d'échantillonnage que nous avons développé) .

-Rapidité de traitement .

-Facilité d'accès à un élément donné .

-Adaptation au problème posé .

La prise en compte du premier critère a donné lieu au développement d' une technique simple d'échantillonnage de contour quelconque présentant ou non des concavités, basée sur le contrôle de la différence relative entre la surface du contour et celle du polygone dont les sommets sont les points échantillonnés

Pour les autres critères plusieurs structures de données sont possibles . Nous présenterons celle que nous avons choisie dans le cas de notre application ..

1-4-2-Echantillonnage des coupes .

Dans un certain nombre d'applications de reconstruction 3D d'objets, les données sont constituées par un ensemble de contours fermés qui se présentent comme la juxtaposition de pixels allumés d'épaisseur un pixel . Chaque objet à reconstruire est obtenu à l'aide d'un ensemble de 20 à 50 coupes selon les objets avec une résolution dans le plan image de $256 * 256$ ou $512 * 512$. Chaque coupe fermée unique ou multiple est définie par un contour constitué en moyenne par un nombre de 500 à 1000 points .

La base de données correspondante contient un grand nombre d'informations géométriques redondantes . Pour envisager une réelle utilisation en milieu clinique il est nécessaire réduire cette masse d'information .

Pour la représentation 3D, soit par triangulation, soit par modélisation surfacique, il est nécessaire de ne retenir que quelques points pertinents de chaque coupe. Dans ce cas la base de données peut être très réduite . Mais, le polygone de la courbe qui s'appuie sur ces points ne sera qu'une représentation approximative de la forme de chaque coupe, et par conséquent de la forme de l'objet...

Par contre, si l'on veut obtenir une représentation très fidèle de l'objet, il faut conserver un grand nombre de points sur chaque coupe. Mais dans ce cas la base de données est très grande.

Le choix de nombre de points retenus sur chaque coupe de l'objet à reconstruire résulte d'un compromis entre la nécessité de rendre la forme de l'objet la plus fidèle possible et le souhait de disposer d'une base de données de taille raisonnable.

Nous avons mis en oeuvre une méthode d'échantillonnage basée sur un critère objectif qui permet d'éliminer le plus grand nombre possible de points de la base de données tout en respectant la forme fidèle de l'objet.

L'algorithme mis au point offre l'avantage d'une part, de justifier la nature des points retenus de chaque coupe par un contrôle sur l'écart entre la surface reconstruite, d'autre part, de bien s'adapter à une implémentation dans une architecture matérielle que nous décrivons . Nous présentons à l'aide d'une simulation, les résultats de l'application de cet algorithme sur diverses formes de contours tests et dans le cas de notre étude .

1-4-2-1-Exposé du principe de l'échantillonnage des coupes .

La méthode est adaptée au cas de la reconstruction par triangulation où la courbe de chaque coupe est approximée par un polygone composé des segments de droites qui relie les points échantillonnés deux à deux (fig 12a).

On suppose (figure 12b) que les deux points A et B sont deux points retenus du contour échantillonné. On fait l'hypothèse qu'entre ces deux points, s'ils sont suffisamment rapprochés, le contour est pratiquement confondu à un arc de cercle de rayon R appartenant à un secteur d'angle α .

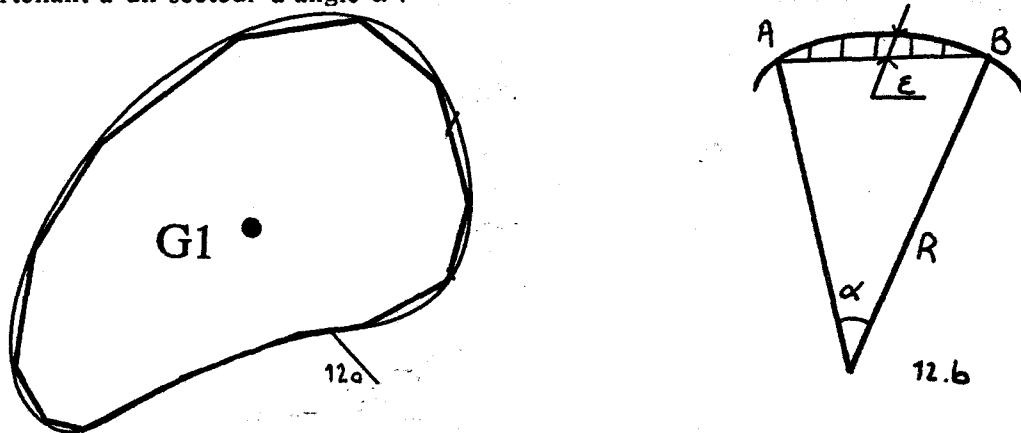


Figure 12

Le segment AB qui relie les deux points A et B forme avec l'arc AB une surface S qui représente l'erreur absolue sur la surface du contour due à l'échantillonnage. L'erreur ϵ est donnée par la relation :

$$\epsilon = (\text{surface réelle} - \text{surface approximative}) / \text{surface réelle} .$$

$$\epsilon = 1 - \sin \alpha / \alpha$$

Si α est petit, le développement de $\sin \alpha$ à l'ordre 2 permet d'écrire : $\epsilon = (\alpha^2 / 3!) + \gamma(\alpha)$.

$\gamma(\alpha)$ représente l'erreur due à l'approximation . L'angle α qui donne une erreur relative de 1% sur ϵ est égale à $\pi/13$. Si l'on choisit un angle de $\alpha = \pi/16$, $\gamma(\alpha)$ est égal à $2,11 \cdot 10^{-4}$. On peut donc affirmer que pour toute erreur relative ϵ inférieure à 1% sur la surface S entre la courbe de chaque coupe et son approximée par un polygone dont les sommets sont les points échantillonnés, l'angle α du vecteur formé par deux points échantillonnés et le centre de coordonnée O est donné par la relation : $\alpha = K \sqrt{\epsilon}$

Un angle α égal $\pi/16$ satisfait ces conditions.

Si on examine deux secteurs adjacents définis par les points échantillonnés (figure 13) les tangentes aux points A, B et D forment entre elles un angle égal à α . Il en résulte que pour échantillonner la courbe fermée d'une coupe on ne retient que les points où la tangente à la courbe est perpendiculaire à un axe pouvant prendre n directions faisant un angle α entre elles (figure 13).

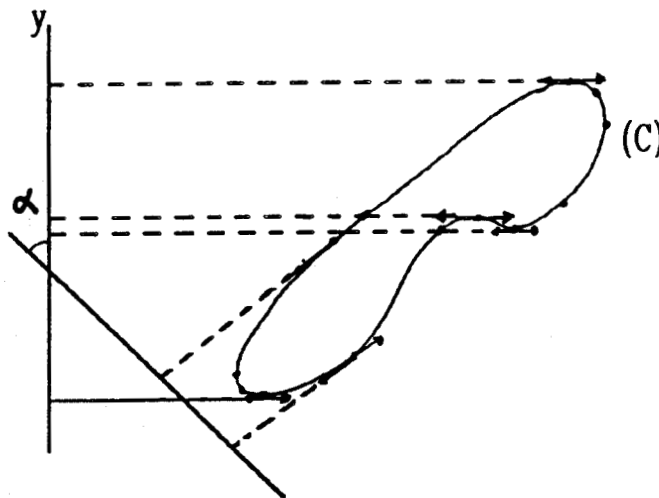
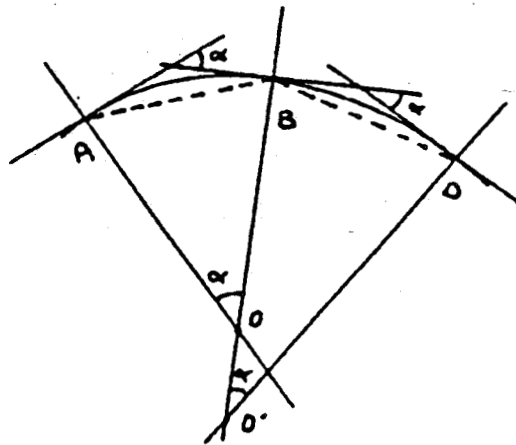


Figure 13 :

Cette méthode offre l'avantage de définir la courbe formée par des points rapprochés dans les régions à rayon de courbure et plus éloignés dans les régions à grand rayon de courbure.

Soient dans un environnement 3x3 trois points B, A, C consécutifs appartenant à la courbe (C). Il existe 6 positions possibles de ces trois points pour lesquelles la courbe est tangente en A à une direction horizontale. Ces 6 positions sont représentées figure 14.

	A		
B		C	

	A	C	
B			

	B	A	
			C

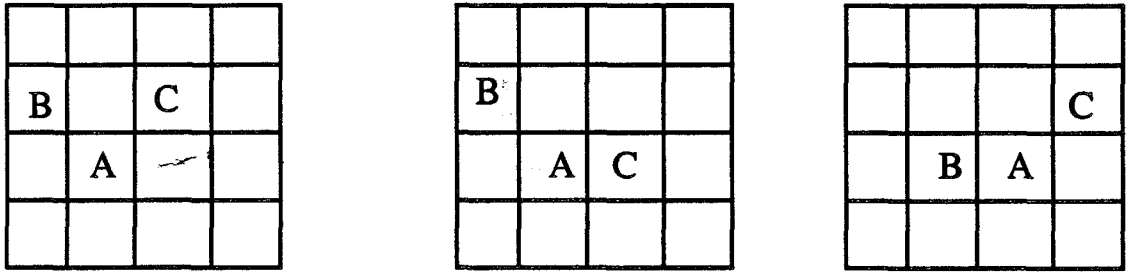


Figure 14 :

Dans l'environnement 3x3, soient x_i, y_i les coordonnées du point i , i appartient à $\{B,A;C\}$. Le point A est échantillonné si les ordonnées des points B, A et C satisfont les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
 & (y_A - y_B < 0 \quad \text{et} \quad y_A - y_C \geq 0) \\
 & (y_A - y_B \leq 0 \quad \text{et} \quad y_A - y_C > 0) \\
 & (y_A - y_B \geq 0 \quad \text{et} \quad y_A - y_C < 0) \\
 & (y_A - y_B > 0 \quad \text{et} \quad y_A - y_C \leq 0)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Il existe également 6 positions possibles de 3 points B, A, C appartenant à (C) pour lesquelles (C) est tangente en A à une direction verticale . Ces 6 positions sont celles de la figure 12 qui ont subi une rotation de $\pi/2$.

Le point A est échantillonné si les abscisses des points B, A, C satisfont les conditions (1) où l'ordonnée y_i du point i est remplacée par son abscisse x_i .

L'efficacité de cet algorithme est indépendante de la forme de la courbe à traiter (convexe ou concave) (fig 15a, 15b, 15c).

Dans la figure 15a est représentée un contour qui possède des concavités différentes, on constate que les points échantillonnés se situent en grand nombre dans les concavités à faible rayon de courbure et en petit nombre dans les concavités à grand rayon de courbure .

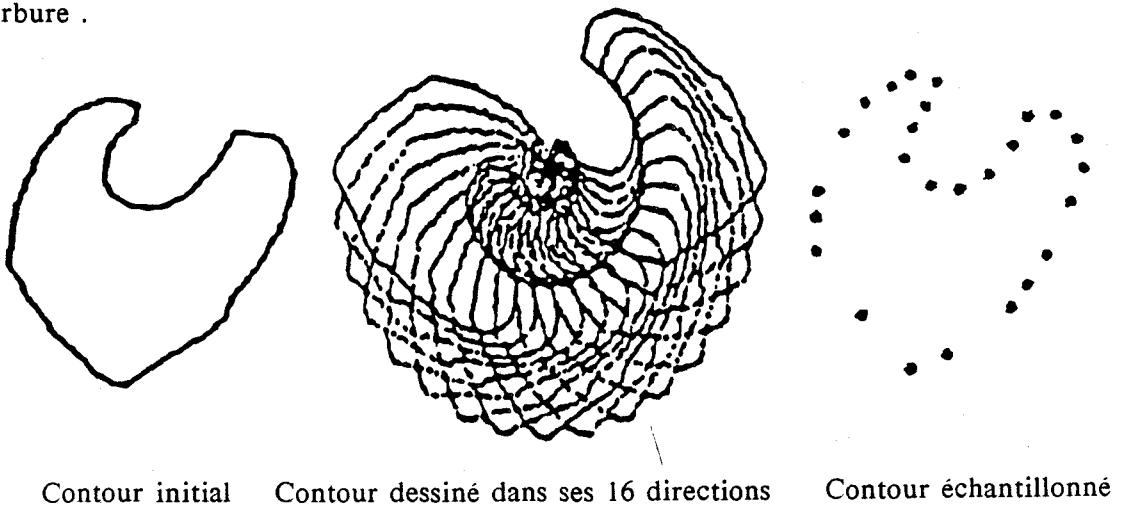


Figure 15a :

Dans la figure 15b est représentée un contour qui possède des brusques variations de concavités (bruit), on constate dans ce cas que les points échantillonnés ont du mal à suivre cette brusque variation .

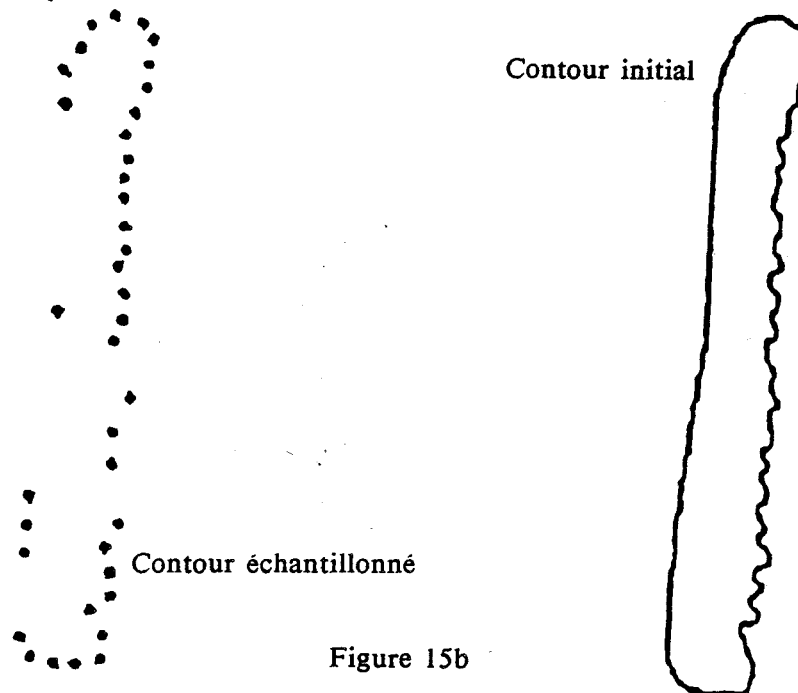


Figure 15b

Dans la figure 15c est représentée un contour tiré d'un cliché IRM, on constate dans ce cas que les points échantillonnés sont une bonne image du contour initial .

Figure 15c :

Cette opération d'échantillonnage est réalisée sous forme logicielle . Nous avons étudié une réalisation possible sous forme matérielle . Le résultat de cette étude a conduit l'architecture représentée figure 16 .

Le principe de fonctionnement est exposé en tenant des conditions des relations (6) sur les ordonnées (tangentes horizontales). Les points de la courbe (C) sont matérialisés en mémoire M1 et M'1 respectivement par les valeurs de leurs ordonnées et de leurs abscisses rangées successivement, en commençant par les coordonnées d'un point

quelconque de (C) et en tournant sur (C) dans le sens direct.

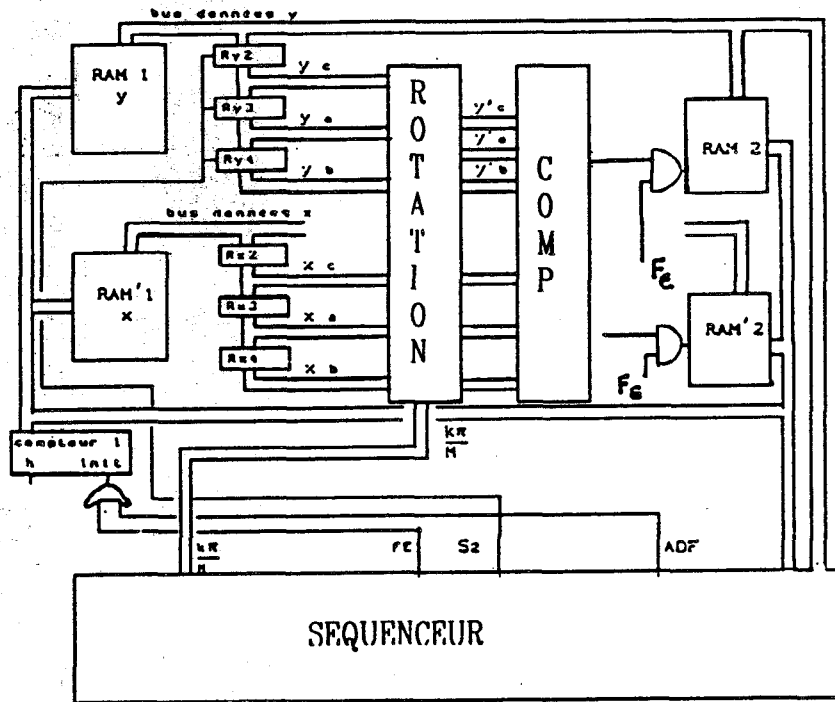


figure 16 :architecture proposée

La recherche des points de contact avec une direction donnée consiste à pratiquer une rotation de (C) d'un angle $k\alpha = k\pi/M$ (M est égal au nombre de directions des tangentes) et pour chaque triplet B, A, C de points successifs de (C), à ne retenir le point A comme appartenant au contour échantillonné que si les relations (1) sont vérifiées.

Pour une valeur de k : ($k\alpha = k\pi/M$), le processeur isole les coordonnées des trois points consécutifs B, A, C appartenant à (C) dans deux registres à décalage R1 et R'1. Un opérateur de rotation effectue l'opération (2) simultanément sur les 3 points B, A, C

$$y'_i = x_i \sin(k\pi/M) + y_i \cos(k\pi/M) \quad (2) \quad i \text{ appartient à } [A, B, D]$$

Le schéma de principe de l'opérateur de rotation est celui de la figure 17.

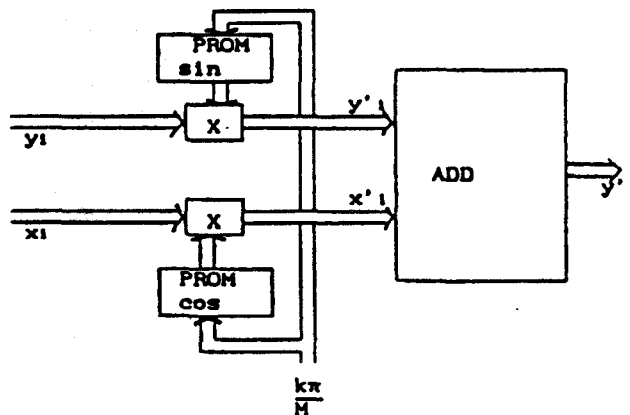


Figure 17 :opération de rotation

Un comparateur exécute (figure 18) les tests définis par les relations (1) effectuées sur les ordonnées y'_A , y'_B , y'_C . Si les relations (1) sont vérifiées pour un triplet, l'ordonnée y_A est mémorisée dans la mémoire résultat M2. Sinon, le processeur exécute le décalage du triplet B, A, C d'une position dans le registre à décalage R1, (B prend la place de A, A prend la place de C et des nouvelles coordonnées prennent la place de B). Après balayage complet de (C) , le paramètre k est incrémenté et l'opération recommence.

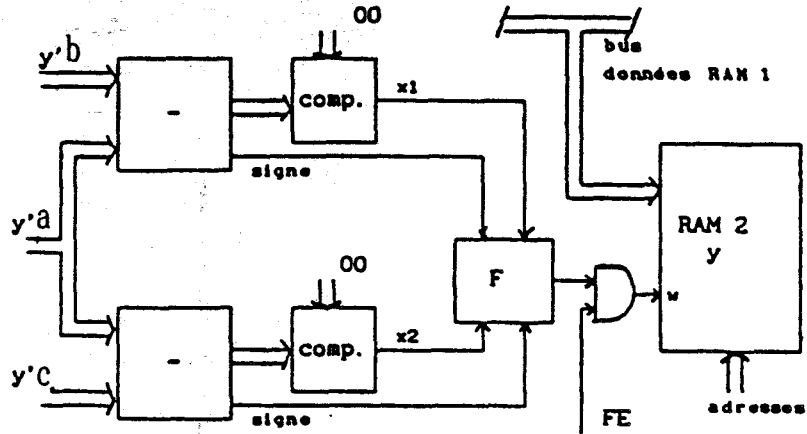


Figure 18 : comparateur :

L'expression de la fonction F est obtenue à partir de la table de vérité aux variables x_1 , x_2 , s_1 , s_2 qui traduit les conditions (1).

On remarque qu'à la fin de toutes les opérations (pour les 16 directions) la mémoire M2 ne contient que les coordonnées des points échantillonnés. Ces coordonnées sont situées exactement aux mêmes adresses que dans la mémoire M1.

Un séquenceur rythme les diverses opérations (figure 19).

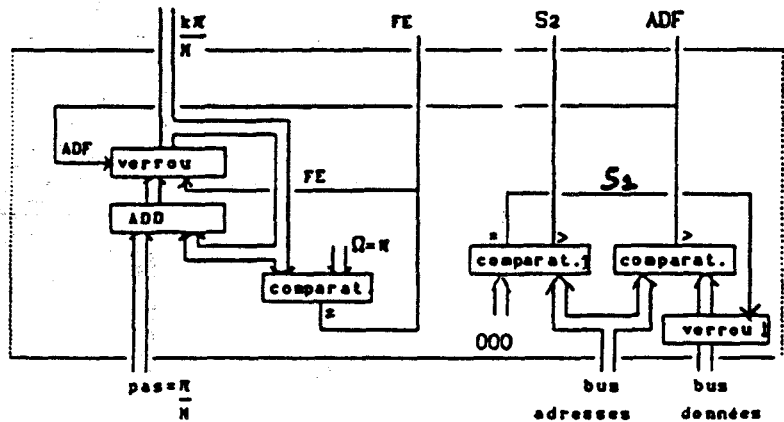


Figure 19 : séquenceur

D'autres méthodes d'échantillonnage ont été étudiées au laboratoire [Choq 91] . Elles diffèrent de la méthode précédente, elles ont des performances concurrentes et elles modulent la distance entre les points échantillonnés en fonction du rayon de courbure .

1-4-3-Organisation de la base de données 3D .

Après l'étape d'échantillonnage on dispose d'une base de données 3D constituée par les

coordonnées des points échantillonnés associés à chaque contour de chaque coupe . A chaque contour est associée une liste d'adjacence et l'ensemble des contours de toutes les coupes est représenté par un graphe . Chaque noeuds du graphe est représenté par l'ensemble des points échantillonnés appartenant à un contour .

Par ailleurs pour la représentation 3D, l'ensemble des points échantillonnés constituera l'ensemble des sommets sur lesquels s'appuient les facettes de triangulation ou constituera l'ensemble des points de contrôle des courbes ou surfaces gauches paramétrées (Bézier, Splines,....).

L'organisation en mémoire de cette base de données est constituée d'un ensemble de structures . Nous rappelons [Kern 85] qu'une structure est une liste de variables de types différents (entier, flottant, structure..) regroupées sous un même nom d'identificateur . Cette description est beaucoup plus avantageuse pour les manipulations de ce type de données qu'un tableau qui ne connaît qu'un seul type de variable . Il convient donc pour la gestion de la base de donnée de définir le descriptif complet des structures permettant suivant les artères définies précédemment la meilleure gestion de cette base .

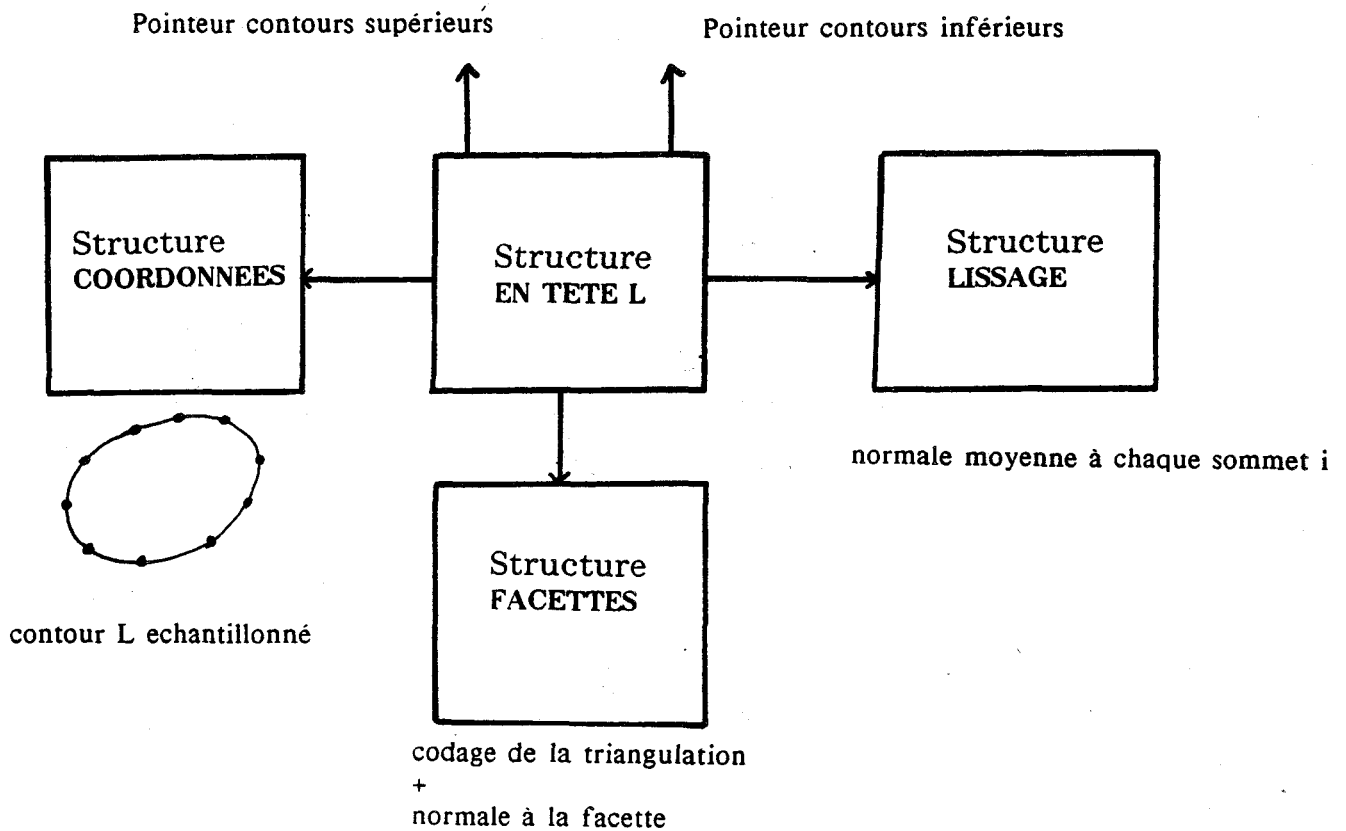


Figure 20

Notre choix s'est porté sur la configuration suivante (fig 20) :

A chaque structure en tête correspondant à un contour sont associées trois structures .

- Une structures Coordonnées .
- Une structure Facette .
- Une structure lissage .

Nous allons reprendre la description de la cellule en tête et de ses structures associées .

1-4-3-1-Description des structures .

La structure EN_TETE contient les informations sur:

- La position z du contour
- Son centre de gravité.
- L'adresse ou les adresses des cellules arrières.
- L'adresse ou les adresses des cellules avants.

Son rôle est essentiel puisqu'elle permet d'établir les liaisons entre les différentes cellules. C'est autour d'elle que s'organise les structures qui vont suivre.

La structure COORDONNEE :

Elle regroupe les coordonnées en x et y des sommets du contour issus de l'étape de préparation des données . Ces points sont rangés à partir du point d'abscisse ou d'ordonnée minimale lus et dans le sens des aiguilles d'une montre. A l'issue de l'étape d'échantillonnage du contour ce rangement n'est nullement modifié, et les points sont placés dans la structure COORDONNEE_ECHANT.

La structure FACETTE :

Elle contient :

-Les informations relatives à la reconstruction par facettes triangulaires . De la même façon nous avons défini un codage particulier des liaisons constituant une facette triangle pour diminuer et faciliter les temps d'accès à la base de données . Nous reprendrons la définition de cette structure lors du chapitre triangulation .

-L'information de la normale extérieure définie par ses coordonnées x_n, y_n, z_n (valeurs normées).

La structure LISSAGE .

Elle contient les informations nécessaires au rendu réaliste . Pour chaque sommet du contour est associé la valeur de la normale . Cette normale est la moyenne des normales dont les facettes supérieures et inférieures ont un sommet confondu avec le sommet correspondant.

Nous venons de définir notre base de données, nous allons maintenant choisir la technique la mieux adaptée pour la représentation 3D des artères vasculaires .

2-LE MODELE DE DESCRIPTION .

Lorsqu'une zone ou une région de l'image est extraite il faut pouvoir décrire sa forme, de façon à ce que les informations géométriques de base puissent être modélisées et permettre une représentation tridimensionnelle, sur laquelle portera les différentes opérations .

On peut distinguer dans les applications médicales deux grandes classes de ce type de problème .

-La représentation volumique [Jann 88] [Luo 86] [Anto 88] [Bari 84].

L'objet est défini par exemple à l'aide de voxels (octree, bintree, tableau de voxels,...) . Dans ces méthodes seul le volume importe . Le volume occupé par le voxel est fonction de la résolution adoptée et donc de la précision de description . La restriction concerne essentiellement le nombre de cellules élémentaires nécessaires pour décrire le volume de l'objet .

la représentation surfacique [Sequ 87] [Orou 81] [Wen 88].

L'objet est défini par exemple à l'aide de facettes planes, patches, un réseau ou maillage polygonal (triangulation) .

Le modèle de représentation 3D sera choisi en fonction des caractéristiques de l'application, de la nature de la base de données, et des critères suivants :

-Place mémoire disponible .

-Degré de précision souhaité .

-Complexité de la représentation .

-Visualisation (qualité, rapidité) .

-Manipulation (rotation, translation, zoom, .réduction..)

C'est ainsi que notre choix s'est porté sur la représentation surfacique; et plus particulièrement sur la triangulation .

En effet la triangulation est avantageuse car :

-C'est une méthode de construction d'une base de données facettes .Chaque sommet d'un triangle est un sommet obtenu par l'algorithme d'échantillonnage que nous avons développé

-La description est typiquement 1000 fois plus compacte que la description à l'aide de voxels.

-Elle à l'avantage d'être rapide et de donner une bonne approximation de l'enveloppe reconstruite .

-Elle fournit une interpolation entre les coupes qui évite les artefacts de repliement (marche d'escalier) .

L'inconvénient majeur est la difficulté à automatiser le processus dans le cas de contours quelconques (nous verrons pour cela les solutions que nous apportons) .

2-1-Triangulation .

2-1-1-Introduction :

Il est toujours possible d'effectuer un maillage triangulaire sur un ensemble quelconque de points répartis sur une surface. Cette capacité de facettes triangulaires à s'adapter à toute topologie offre la possibilité d'utiliser les caractéristiques géométriques d'un objet pour partitionner les bases de données et en obtenir une meilleure représentation. De plus, les facettes triangulaires s'adaptent à la complexité des surfaces mieux que les techniques par Patches (carreaux) de Bézier [Wen 88] ou Splines [Sequ 87] [Bech 89], et permettent un contrôle plus fin de la forme des surfaces. Toutes ces qualités montrent bien l'intérêt des facettes triangulaires pour la représentation de surfaces.

En effet, les facettes triangulaires ont été largement utilisées dans l'approximation et l'interpolation de points échantillonnés, problème courant dans l'analyse numérique et la géométrie calculatoire. Il existe un nombre abondant de méthodes dans la littérature qui se proposent, à partir d'un ensemble de points échantillonnés, d'en obtenir une triangulation . La plupart des méthodes publiées construisent une surface d'interpolation par une triangulation complète de l'ensemble des points donnés.

Il existe deux approches différentes selon la nature des informations en présence . Le cas d'objets convexes et le cas d'objets constitués de coupes parallèles.

2-2-Cas d'objets convexes .

-Si l'on ne connaît aucune structure a priori sur l'objet, le problème général consiste alors à trouver la surface polyédrale convenable passant par un ensemble E de points répartis arbitrairement dans l'espace [Bois 83] [Herm 82] [Watt 81] . Ces méthodes s'identifient à la triangulation de Delaunay [Bois 84] . Pour ces méthodes, les principales questions qui se posent sont :

Qu'est ce qu'une bonne triangulation ?

Quelle caractéristique doit elle posséder ?

O'rourke [Orou 81] a suggéré comme caractéristique d'une bonne triangulation le critère de surface minimale . Ce critère est essentiellement local et rien ne permet d'affirmer que la surface polyédrale résultante est bien minimale .

Boissonnat [Bois 84] part du même principe que O'rourke, et propose une méthode de "sculpture" sur la triangulation de Delaunay . Pour cela il associe un poids à chaque simplex (triangle) . Parmi l'ensemble des simplex on élimine celui dont le poids est le plus faible . La complexité de cet algorithme est inférieure à celui de O'rourke .

2-2-1-Triangulation de Delaunay :

Nous rappelons ici brièvement le principe de la triangulation de Delaunay et quelques unes de ses propriétés. Pour une description plus approfondie et plus complète, on pourra consulter [Bois 81, 82, 84] [Chas 91] [Faug 84] [Herm 82] [Lee 80] [Prep 85] . On considérera la triangulation de Delaunay dans un plan.

2-2-2.1 Définition :

Soit un ensemble de points $M = \{p_1, \dots, p_n\}$, $N > 3$ dans un plan Euclidien E^2 , et $d(p_i, p_j)$ la distance euclidienne entre deux points p_i et p_j . A chaque point, nous pouvons alors associer une région du plan $R(i)$ définie par :

$\{ p \in E^2 \mid d(p, p_i) \leq d(p, p_j), \text{ pour } j = 1, \dots, N, \text{ et } j \text{ différent de } i \}$ qui est le lieu des points qui sont plus proches du point p_i , que de tous les autres points. Cette région est appelée le polygone de Voronoï associé au point p_i . L'ensemble de ces polygones associés à tous les points de M forme alors une partition du plan E . Cette partition est appelée *partition de Voronoï*.

On peut donner une interprétation géométrique des polygones de Voronoï. En effet, considérons n points, où chaque point représente le centre d'un cercle. On suppose que les rayons de ces cercles croissent régulièrement vers l'extérieur à partir de leur centre et avec la même vitesse de croissance. Dès que deux cercles se touchent, ils s'arrêtent de croître au point de contact. Au bout d'un certain moment, chaque cercle sera en contact avec ses voisins, et seulement ceux dont le centre se trouvent sur l'enveloppe convexe de M pourront croître à l'infini. La forme résultante du polygone entourant chaque centre et formé par les tangentes aux cercles en leur point de concours est appelée la partition de Voronoï.

En d'autres termes les polygones de Voronoï sont constitués par les médiatrices des bipoints qui réunissent chaque point et ses voisins.

A partir des polygones de Voronoï, on peut définir une relation de voisinage entre les points de M : deux points p_i et p_j sont dits voisins si leur polygone de Voronoï respectif partagent un même côté. Avec cette notion de voisinage, en reliant les points voisins dans P , on obtient alors une triangulation de P , connue sous le nom de *triangulation de Delaunay*.

On voit que la partition de Voronoï et la triangulation de Delaunay sont les constructions duales l'une de l'autre au sens de la relation de voisinage précédente. La figure 21 montre un exemple de partition de Voronoï et sa duale, la triangulation de Delaunay.

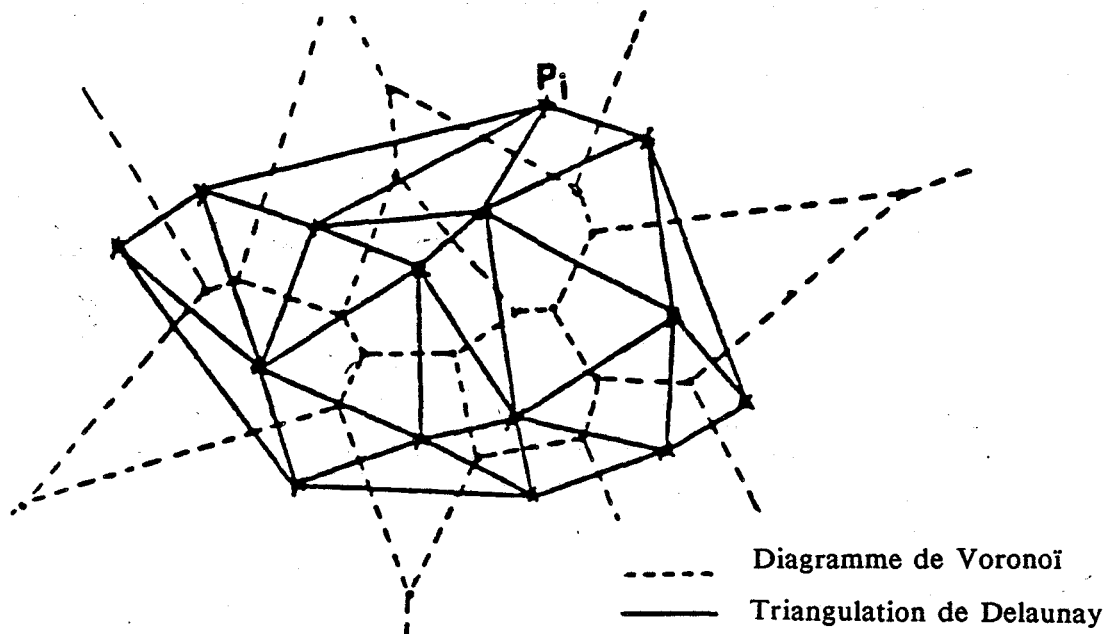


Figure 21 : diagramme de voronoï et triangulation de delaunay

Chapitre 2 : Triangulation

La triangulation de Delaunay possède de nombreuses propriétés . Nous en rappelons deux importantes :

-Cette triangulation vérifie le critère du "Max-Min angle " . Ce critère maximise le plus petit angle de chacun des simplex de la triangulation . Cela permet de minimiser l'apparition de simplex allongés, et donne ainsi des simplex les plus équilatéraux possibles

-Dans une triangulation de delaunay, le cercle circonscrit d'un triangle ne contient aucun autre sommet de la triangulation

Dans la pratique, la triangulation de delaunay s'effectue de façon itérative . On commence la triangulation avec un nombre réduit de points puis progressivement on ajoute un point et on recommence [Chas 91] .

2-3-Cas d'objets définis par un ensemble de coupes parallèles ou de coupes méridiennes .

Le problème de la triangulation d'un objet 3D a été abordé d'une façon satisfaisante, dans les seuls cas particuliers où une structure a priori est fournie sur les points. Différents algorithmes ont été proposés qui traitent le cas particulier où les points sont mesurés sur des coupes parallèles .

Même dans ce cas particulier le problème n'est pas très bien résolu dans certaines configurations : par exemple dans le cas où les coupes ne sont pas très homogènes (la densité des points sur des coupes consécutives est trop différente) ou encore si le nombre des régions détectées sur deux coupes adjacentes est différent .

-Dans les domaines comme la tomographie numérique ou la résonance magnétique en médecine les points mesurés sur l'objet sont sur des coupes planes parallèles . Une méthode simple consiste à trouver un algorithme de triangulation pour deux coupes parallèles adjacentes, et à appliquer cette opération sur l'ensemble des coupes prises deux à deux. La triangulation globale est alors considérée comme une juxtaposition de l'ensemble des triangulations des coupes adjacentes .

Le problème consiste alors à relier deux contours consécutifs par des facettes triangulaires. On peut diviser les différentes solutions en deux grandes classes : les méthodes optimales et les méthodes heuristiques .

Avant de présenter quelques méthodes de triangulation nous allons rappeler les propriétés que possède toute triangulation .

Soit C_k et C_{k-1} deux contours situés à l'altitude Z_k et Z_{k-1} . Le contour C_k possède m points ordonnés $E_1 (P_1, \dots, P_i, \dots, P_m)$ avec $1 \leq i \leq m$ et le contour C_{k-1} possède n points ordonnés $E_2 (Q_1, \dots, Q_j, \dots, Q_n)$ avec $1 \leq j \leq n$. .

Un ensemble de facettes triangulées reliant les deux contours C_k et C_{k-1} peut être défini à l'aide d'une liste ordonnée d'arêtes ayant les propriétés suivantes :

-Soit $P_i Q_j$ l'arête de la facette appartenant à la triangulation, alors l'arête $P_{i+1} Q_j$ ou $P_i Q_{j+1}$ doit aussi appartenir à la facette (fig 22) .

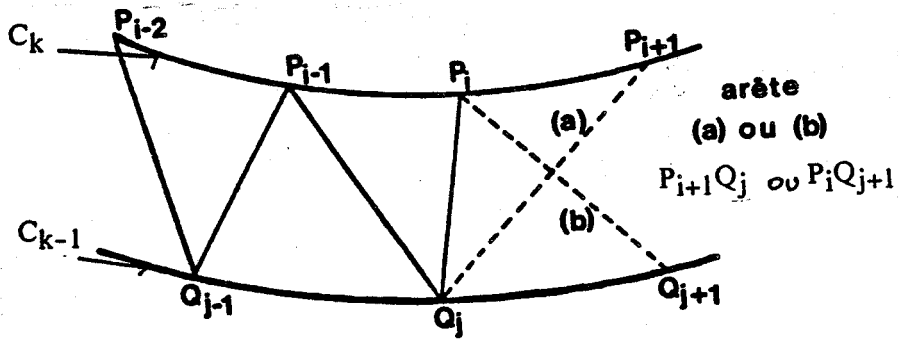


Figure 22 :

-Tout point du contour C_k (respectivement C_{k-1}) doit être relié à au moins un point du contour C_{k-1} (respectivement C_k) . c'est à dire que chaque arête possède une extrémité sur C_k et C_{k-1} (fig 23) .

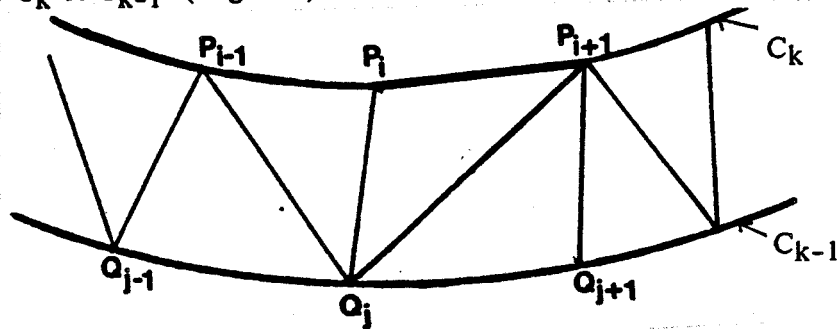


Figure 23 :

-Les arêtes utilisées pour la triangulation ne doivent pas se croiser (fig 24) .

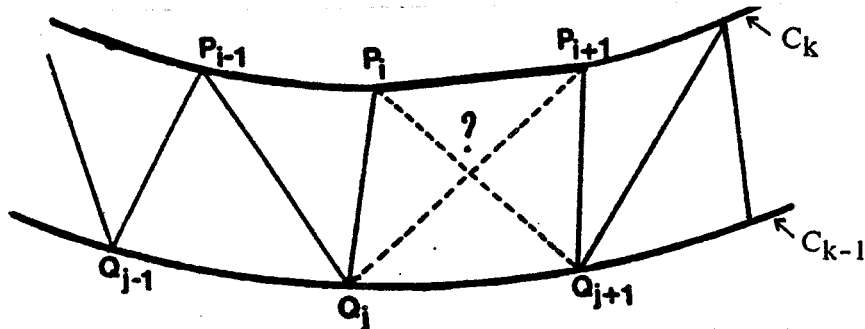


Figure 24 :

-L'orientation d'une facette triangulée est définie par son vecteur normal (fig 25) . C'est à dire que si la facette est définie par les sommets $P_i P_{i+1} Q_j$ (respectivement $P_i Q_j Q_{j+1}$) la normale extérieure est donnée par : $N = P_i P_{i+1} \wedge P_i Q_j$ (respectivement $P_i Q_j \wedge P_i Q_{j+1}$) .

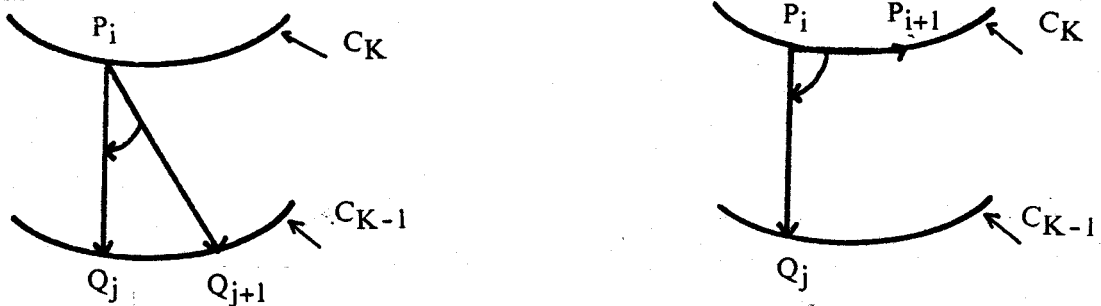


Figure 25 :

2-3-1-Les méthodes Optimales

Les méthodes optimales fournissent les meilleures triangulations parmi toutes les solutions possibles . Cette optimisation se fait dans ce cas en ayant une approche non plus locale, autour du triangle courant, mais globale sur tous les arrangements (triangulation) possibles entre les points P_i et Q_j de deux contours consécutifs .

La première solution spécifique à ce type de problème a été développée par Keppel [Kepp 75]. Elle consiste à rendre maximum le volume du polyèdre délimité par la surface comprise entre deux contours convexes . Le critère de volume maximum est certainement celui qui donne la meilleure optimisation . Malheureusement cette méthode a deux inconvénients :

-Lorsque l'on a des contours concaves il est nécessaire de les décomposer en contours convexes (ces prétraitements sont non triviaux et peuvent devenir très lourds) .

-Si deux contours consécutifs sont concaves il n'existe pas de solution de triangulation pour les décompositions des contours devenus convexes .

Fuch, Kedem, Uselton, [Fuch 77] proposent pour leur part, comme critère d'optimisation, de minimiser la somme des aires des triangles à reconstruire . Cette approche a l'avantage de simplifier grandement l'algorithme de Keppel, trop complexe pour les objets concaves .

Pauchon [Pau 83] quant à lui propose pour le critère d'optimisation, de minimiser la somme des longueurs des arêtes qui relient un contour à l'autre . Les résultats sont très satisfaisants, quelle que soit la nature du contour, concave ou convexe . Malheureusement il suppose que les régions à trianguler doivent avoir le même nombre de points .

Enfin Gholizadeh [Ghol 85] améliore la méthode proposée par Pauchon en utilisant l'algorithme de Christofield " Nearest neighbour rule" [Chri 80] pour le choix du critère. Les résultats obtenus sont très satisfaisants .

Toutes les méthodes précédentes sont basées sur la construction d'un graphe dont chacun des chemins correspond à un arrangement possible de facettes et le problème revient alors à trouver un chemin de coût minimal dans ce graphe au sens du critère choisi .

Nous allons rappeler le principe de construction de ce graphe .

2-3-1-1-La recherche de la triangulation optimale dans un graphe .

Cette recherche passe d'abord par la construction du graphe relatif à deux contours adjacents. Soit G le graphe, il est défini par :

-Un ensemble X dont les éléments sont appelés sommet ou noeud . Le nombre de sommets donnera l'ordre du graphe .

-Un ensemble U dont les éléments u sont des couples ordonnés de sommets ou noeuds appelés arcs .

Soit la figure 26 suivante . $E_1 = (P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_m)$ représente la liste ordonnée des points du contour C_1 d'altitude Z_1 , et $E_2 = (Q_1, Q_2, \dots, Q_j, \dots, Q_n)$ la liste ordonnée des points du contour C_2 parallèle à C_1 et situé à l'altitude Z_{1+1} .

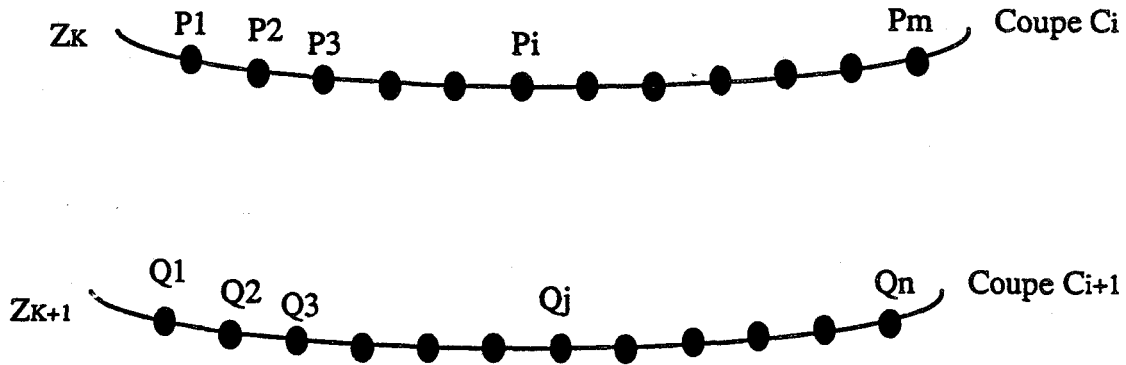


Figure 26 :

Le graphe $G[X,U]$ associé au contours C_1 et C_2 est le graphe dont le sommet X_{ij} représente un segment P_iQ_j joignant le point P_i de E_1 au point Q_j de E_2 . On appelle (X_{ij}, X_{ik}) l'arc qui joint le sommet X_{ij} au sommet X_{ik} . Cet arc représente en fait le triangle $P_iQ_jQ_k$.

La triangulation (T) du contour C_1 et C_2 est la recherche dans G (fig 27) d'un chemin qui relie X_{11} (extrémité initiale) à X_{mn} (extrémité finale) . Le nombre de chemins possible dans ce graphe est important il est donné par :

$$T(m,n) = \frac{[(m-1) + (n-1)]!}{(m-1)! (n-1)!}$$

$P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad \dots \quad P_m$

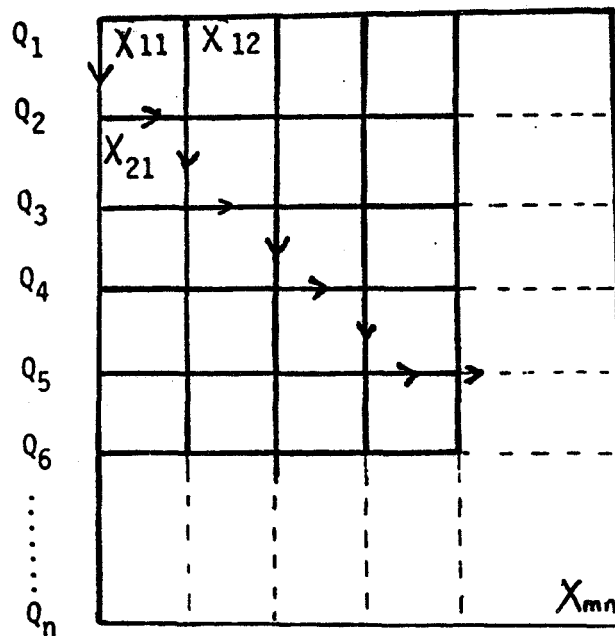


Figure 27:

Il faut maintenant choisir parmi toutes ces triangulations celle qui va approximer le mieux l'enveloppe désirée . Pour cela il suffit d'associer un coût aux arcs (arêtes) de G et de déterminer le plus court chemin reliant X_{11} à X_{mn} au sens de ce coût :

Soit $L(u)$ le coût que l'on associe à l'arc u de U du graphe $G[X,U]$.La recherche du plus court chemin entre l'extrémité initiale X_{11} du graphe G , et l'extrémité finale X_{mn}

Chapitre 2 : Triangulation

consiste à trouver un chemin P tel que : $L(P) = (\text{somme des } L(u) \text{ de tous les arcs de } P)$ soit minimum .

La difficulté est de trouver le coût idéal à associer à chaque arc u qui donnera la meilleure optimisation .

Dans le cas de contours contenant des concavités ces méthodes sont en général très lourdes et complexes à mettre en oeuvre, on préfère alors utiliser des méthodes heuristiques .

2-3-2-les méthodes heuristiques.

Une surface optimale n'est pas toujours visuellement acceptable . Les méthodes heuristiques fournissent des solutions non optimales mais généralement visuellement correctes et avec des durées de calculs plus acceptables .

Le principe de la triangulation consiste à construire des facettes en fonction d'un critère local de décision .

Pour Christiansen et Sederberg [Chri 78] la triangulation est effectuée séquentiellement en choisissant parmi deux arêtes possibles pour construire une facette celle qui est la plus courte (au sens d' une distance) . Lorsque les contours sont trop dissemblables, en forme et en taille, la triangulation est guidée interactivement .

-L'algorithme Cook et Batnitsky [Cook 83] consiste à tracer pour deux contours consécutifs la ligne joignant leur deux barycentres (centroïdes) et à ne choisir pour la triangulation que l'arête dont l'orientation est la plus voisine de cette ligne .

-On peut citer encore Ganapathy [Gana 82] qui réalise d'abord un prétraitement sur les contours afin que leur périmètre soit égal puis choisi pour deux contours consécutifs la facette minimale .

En fait tous ces algorithmes ont en commun les inconvénients suivants :

-Les contours doivent avoir la même orientation .

-Les contours doivent être généralement mutuellement centrés .

-Les contours doivent être peu ou pas déformés (problème de concavité), sinon seul une intervention de l'utilisateur permet de corriger les erreurs .

-Ces algorithmes ne prennent pas en compte les liaisons multiples . C'est à dire relier un contour situé à l'altitude Z_k à un ensemble de contours situés à l'altitude Z_{k+1} .

Ekoule [Ekou 87] a proposé un algorithme qui permet de résoudre un certain nombre des inconvénients précédents .

-Dans le cas de la triangulation de contours simples et convexes la triangulation s'effectue en deux étapes .

Soit deux contours C_k et C_{k+1} . On relie le point P_i du contour C_k possédant le nombre de points le plus faible au point le plus proche (critère de la longueur minimale) de C_{k+1} . La seule restriction est que la recherche doit se réaliser dans le voisinage de Q_j et que ce voisinage doit être orienté dans le même sens que celui de P_i .

Dans la deuxième étape on relie les points restant du contour C_{k+1} au contour C_k . Pour cela, soient quatre points Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 , consécutifs de C_{k+1} qui n'ont pas été reliés, et

P_i et P_j les points les plus proches de C_k . On va connecter Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 à P_i ou P_j suivant la valeur de leur distance.

Dans le cas de contours concaves il peut alors exister des liaisons incorrectes (fig 28).

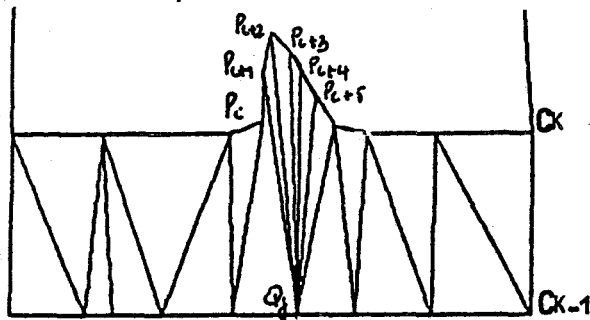


Figure 28 :

Dans ce cas Ekoulé [Ekou 87] propose de traiter les contours avant de les trianguler. Ce traitement consiste à détecter les concavités et les traduire sous forme arborescente. La racine représente le contour initial, les noeuds sont des concavités d'ordre n . Puis on projette les concavités sur l'enveloppe convexe du contour initial et on réalise la triangulation. Ensuite on effectue la transformation inverse.

Cette solution nécessite quant même une hypothèse restrictive, les enveloppes initiales des deux contours doivent être très voisines (c'est à dire qu'elles doivent avoir des enveloppes convexes similaires).

L'inconvénient de cette approche réside dans la lourdeur de l'opération.

En ce qui concerne les liaisons multiples Ekoule [Ekou 87] propose la solution suivante. Soit C_k le contour situé à l'altitude Z_k et $C_{k+1}, C_{k+2}, \dots, C_{kn+1}$, n contours situés à l'altitude Z_{k+1} , l'idée consiste à décomposer cette liaison multiple en une unique liaison C_k' . C_k' est défini par le polygone qui passe par les barycentres $B_{k+1}, B_{k+2}, \dots, B_{kn+1}$ des différents sous contours [Grah 72]. C_k' est ensuite interpolée et positionnée à l'altitude $1/2 (Z_k - Z_{k+1})$. Puis on réalise la triangulation entre C_k et C_k' , et entre C_k' et $C_{k+1}, C_{k+2}, \dots, C_{kn+1}$. La première difficulté est de trouver le bon polygone qui interpole $C_{k+1}, C_{k+2}, \dots, C_{kn+1}$, et ensuite de supposer que des contours issus d'une même composante de l'objet aient sensiblement la même position sur leur coupe respective.

En faisant abstraction des hypothèses restrictives, les solutions proposées par Ekoule [Ekou 87] donnent en général des résultats visuellement acceptables.

A titre d'information on peut encore citer les méthodes basées sur la modulation de la densité du maillage triangulaire. Ces approches utilisent cette fois non plus l'entité facette mais les primitives gauches ("Patch de Béziérs [Boeh 84], facettes de Gregory [Greg 83, 84] [Wen 88], Splines [Fari 86], modèles rationnels [Pieg 87] [Van 78]). Ces méthodes ne peuvent travailler que sur des points répartis sur un réseau topologiquement rectangulaire, elles fonctionnent de manière itérative et nécessitent des algorithmes particuliers car elles introduisent des termes rationnels.

A l'issue de cette courte synthèse, qui ne se veut pas exhaustive, sur un certain nombre d'algorithmes de triangulation, nous proposons dans le cadre de cette étude un certain nombre de solutions simples et originales utilisant une approche heuristique permettant:

Chapitre 2 : Triangulation

-D'éliminer les problèmes notés dans la liaison simple d'une paire de contours non mutuellement centrés (effet de vrille ou de torsion).

-De solutionner de manière simple le problème des contours multiples .

-Et surtout d'opérer de manière automatique sans intervention extérieure.

La triangulation dans le cas de liaisons simples et de liaisons multiples ne s'effectue pas de la même manière . Cette distinction passe par une étape préliminaire qui consiste à détecter les liaisons multiples des liaisons simples .

2-4-Détection des liaisons multiples

Cette opération est réalisée automatiquement . on parcourt la base de données et pour deux coupes consécutives on regarde les différents liens de parentés . Si une mère a plus d'une fille on est en présence d'une liaison multiple . Dans ce cas on sait que la reconstruction à ce niveau sera particulière (un contour à relier à plusieurs contours) .

2-5-Triangulation de contours simples centrés ou pas, convexe ou faiblement concave

2-5-1-Exposé du problème

Le critère d'optimisation utilisé est un critère local de distance minimale entre deux points appartenant à des contours parallèles . L'intérêt de cette approche c'est quelle est rapide et permet d'obtenir une bonne approximation du volume de l'objet recherché. Malheureusement cette méthode présente certaines limitations pour les configurations suivantes (fig 29) .

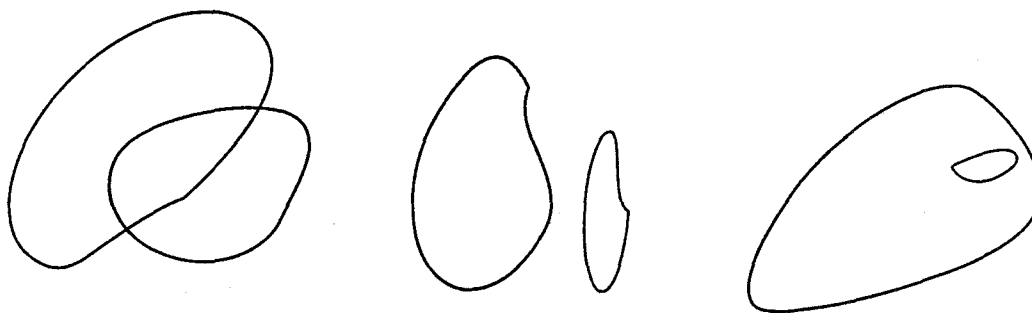


Figure 29 :

En effet, soient deux contours C_k et C_{k+1} ,il suffit qu'à partir de l'arête $\langle P_i; Q_j \rangle$ la distance $d(\langle P_i; Q_{j+1} \rangle)$, respectivement $d(\langle P_{i+1}, Q_j \rangle)$ soit toujours inférieure aux distances $d(\langle P_{i+k}, Q_j \rangle)$ k variant de 1 à $(m - i)$, respectivement $d(\langle P_i, Q_{j+k} \rangle)$ k variant de 1 à $(n - j)$. Dans ce cas la triangulation va se refermer sur l'arête $\langle P_i; Q_j \rangle$, la surface reconstruite ne correspondra plus alors à celle désirée. Il apparaît des phénomènes de recouvrement ou de vrilles. (fig 30)

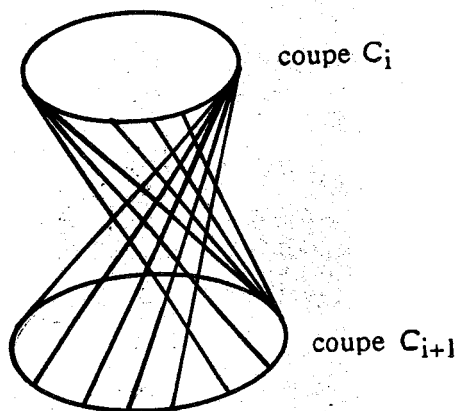


Figure 30 : effet de vrille

2-5-2-Méthode proposée [Dufre 91]

L'idée première de notre méthode consiste à superposer les deux contours C_k et C_{k+1} afin de se ramener au cas de la triangulation de contours centrés. La translation est par définition une transformation invariante, pour la forme du contour.

-Soient deux contours C_1 et C_2 définis par deux ensembles de points distincts $E_1 = (P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_m)$ i variant $1, \dots, m$ et $E_2 = (Q_1, Q_2, \dots, Q_j, \dots, Q_n)$ j variant de $1, \dots, n$ (fig 31).

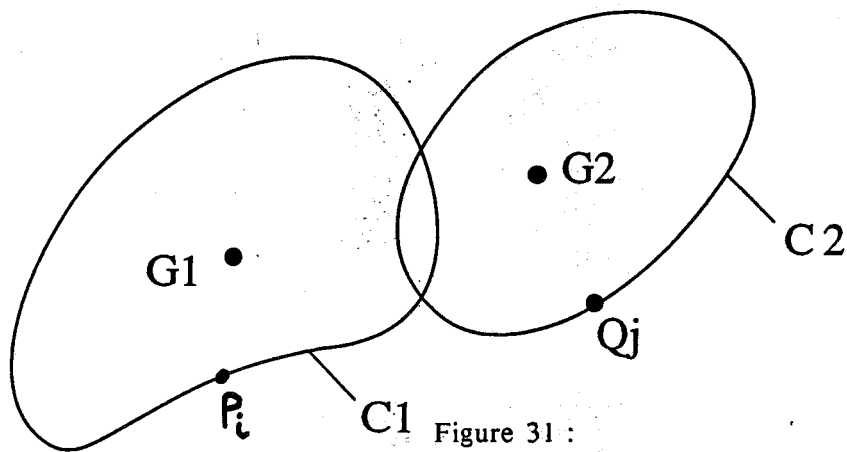


Figure 31 :

Ces contours sont situés respectivement à l'altitude Z_1, Z_2 ($Z_1 < Z_2$) et soient G_1, G_2 leurs centres de gravité respectifs. La superposition de la coupe 2 sur la coupe 1 sera réalisée en ramenant G_2 sur G_1 , chaque point Q_j de G_2 sera translaté de la valeur du vecteur G_1G_2 (fig 32).

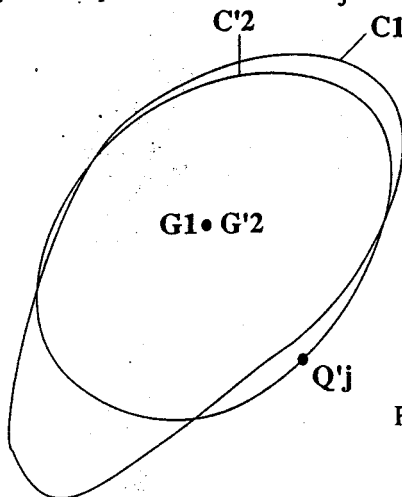


Figure 32 . Superposition de $C_1 C_2$

Chapitre 2 : Triangulation

On définit ainsi un nouvel ensemble de points C'_2 tel que :

$$Q'_{jx} = Q_{jx} + dx$$

$$\text{avec } (G_1G_2)^T = | dx \ dy |$$

$$Q'_{jy} = Q_{jy} + dy$$

La triangulation est alors réalisée sur deux contours mutuellement centrés (C_1 et C'_2) en utilisant le critère de distance minimale classique : $\text{Min} [d(\langle P_i, Q_{j+1} \rangle), d(\langle P_{i+1}, Q_j \rangle)]$, que l'on peut écrire sous la forme :

$$d(\langle P_i, Q'_{j+1} \rangle, \langle P_{i+1}, Q'_j \rangle) \text{ au lieu de } d(\langle P_i, Q_{j+1} \rangle, \langle P_{i+1}, Q_j \rangle)$$

En pratique, on commence par relier les deux premiers points ordonnés P_1 et Q'_1 des contours C_1 et C'_2 (situés dans la fonction `COORDONNEE_ECHAN`). On cherche l'arête de longueur minimale entre $P_1Q'_2$ et Q'_1P_2 . Soit $P_1Q'_2$ cette arête, on construit alors la facette $(P_1Q'_1, P_1Q'_2)$. Ensuite on relie Q'_2P_2 et on cherche l'arête de longueur minimale entre $P_2Q'_3$ et Q'_2P_3 . Cette procédure s'applique jusqu'à atteindre les deux derniers points des contours respectifs C_1 et C'_2 (fig 33).

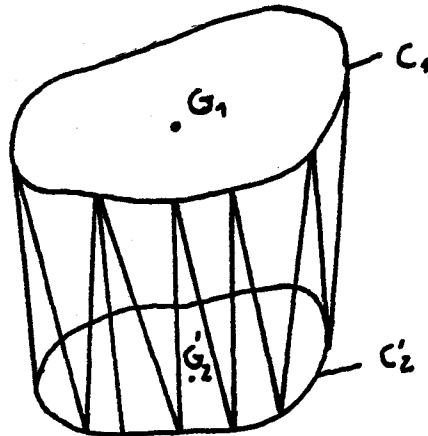


Figure 33 : triangulation de C_1 et C'_2

A l'issue de la triangulation il ne reste plus qu'à ramener le contour C'_2 à sa position d'origine C_2 par une translation inverse de vecteur $-G_1G_2$ (fig 34).

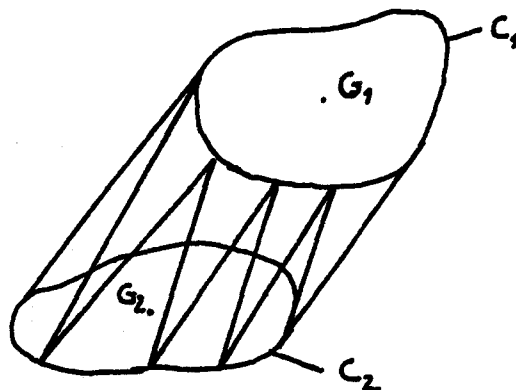


Figure 34 : résultat final .

Remarque .

Si l'on veut appliquer cette technique, il faut au préalable savoir distinguer les contours intersécants ou disjoints des contours centrés . Pour cela on propose d'évaluer un degré de recouvrement .

Il est défini de la manière suivante .

Soient X_{min_1} , X_{max_1} , (respectivement Y_{min_1} , Y_{max_1}) la plus petite et la plus grande valeur des abscisses (respectivement des ordonnées) de C_1 .

De même soient X_{min_2} , X_{max_2} , (respectivement Y_{min_2} , Y_{max_2}) la plus petite et la plus grande valeur des abscisses (respectivement des ordonnées) de C_2 .

Ces coordonnées définissent deux rectangles qui circonscrivent les contours C_1 et C_2 (fig 35) .

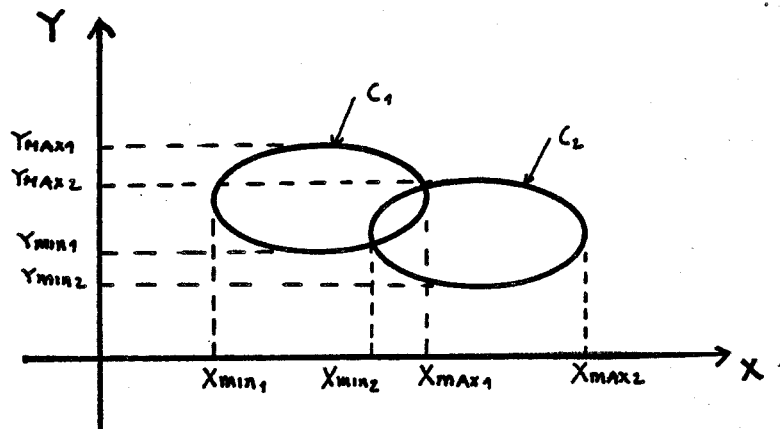


Figure 35 : rectangle défini par les coordonnées extrêmes de C_1 et C_2

Le degré de superposition de C_1 et C_2 est l'aire délimitée par l'intersection de ces deux rectangles .

Ce degré est donné par les rapports suivants :

$$T_x = d(X_{max_1}, X_{min_2}) / d(X_{max_2}, X_{min_1}) \quad \text{si } d(X_{max_1}, X_{min_2}) < d(X_{max_2}, X_{min_1})$$

T_x est le taux de recouvrement selon x .

$$T_y = d(Y_{max_1}, Y_{min_2}) / d(Y_{max_2}, Y_{min_1}) \quad \text{si } d(Y_{max_1}, Y_{min_2}) < d(Y_{max_2}, Y_{min_1})$$

T_y est le taux de recouvrement selon y .

On obtient deux valeurs comprises entre 0 et 1 . Elles sont comparées à un seuil T appelé degré de recouvrement limite .

Les contours sont considérés comme intersécants ou disjoints si l'un au moins des deux taux est inférieur à T . La valeur pratique de T est fixée inférieure ou égale à 0,5 .

2-6-Triangulation de contours multiples :

Dans le cadre de la représentation 3D de l'arbre vasculaire du cou, la liaison d'un contour unique à deux sous contours (embranchement) est un problème fréquent. Ce type de situation pose un problème puisque l'on n'a aucun renseignement sur la nature et la position du raccordement.

La reconstruction du volume entre les différents contours nécessite donc une extrapolation de ce raccordement (fig 36).

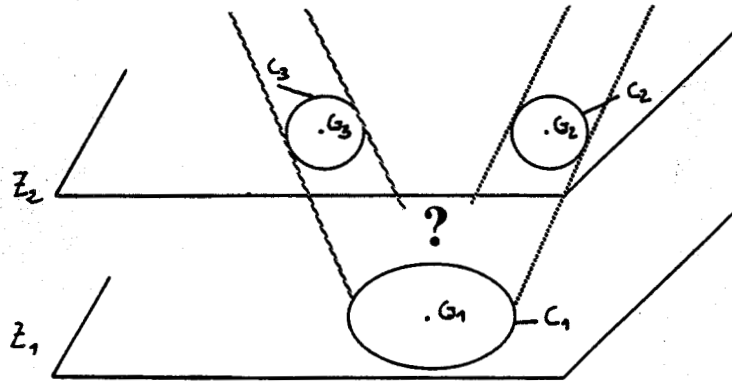


Figure 36 : Problème des liaisons multiples

Nous proposons dans le cadre de cette étude deux méthodes originales pour résoudre ce problème de bifurcation .

Le principe de la méthode consiste à chercher à diviser le contour C_1 en deux sous-contours SC'_1 et SC''_1 séparés par un segment de droite P_1P_2 (fig 37).

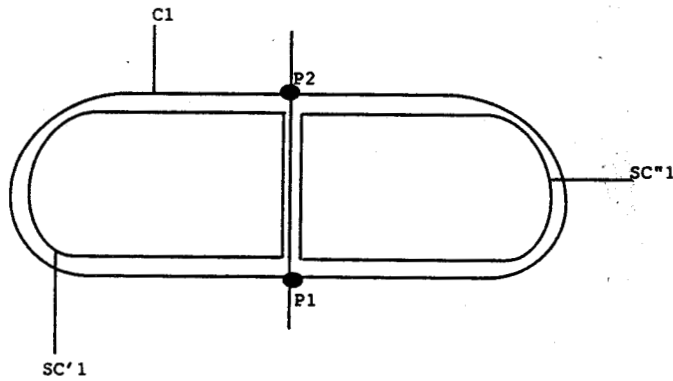


Figure 37 : division du contour C_1

2-6-1-Première solution .

La détermination de la position des points P_1 et P_2 sur le contour C_1 est illustrée sur la figure 38.

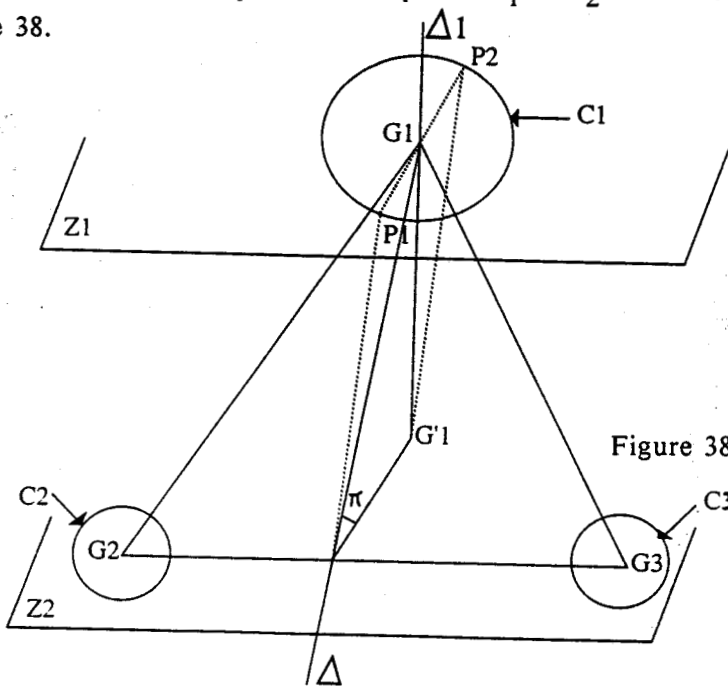


Figure 38: détermination de P_1 et P_2

Le principe consiste à faire passer une droite Δ_1 perpendiculaire à Z_1 (plan de coupe) par le barycentre G_1 de C_1 . Dans l'espace, les points P_1 et P_2 appartiennent à C_1 , résultent de l'intersection avec Z_2 du plan vertical π formé par la bissectrice Δ de l'angle (G_1G_2, G_1G_3) et par la droite Δ_1

La figure 39 représente la projection C'_1 sur le plan Z_2 du contour C_1 , de son centre de gravité G_1 et des points P_1 et P_2 respectivement repérés dans Z_2 par C'_1, G'_1, P'_1, P'_2 .

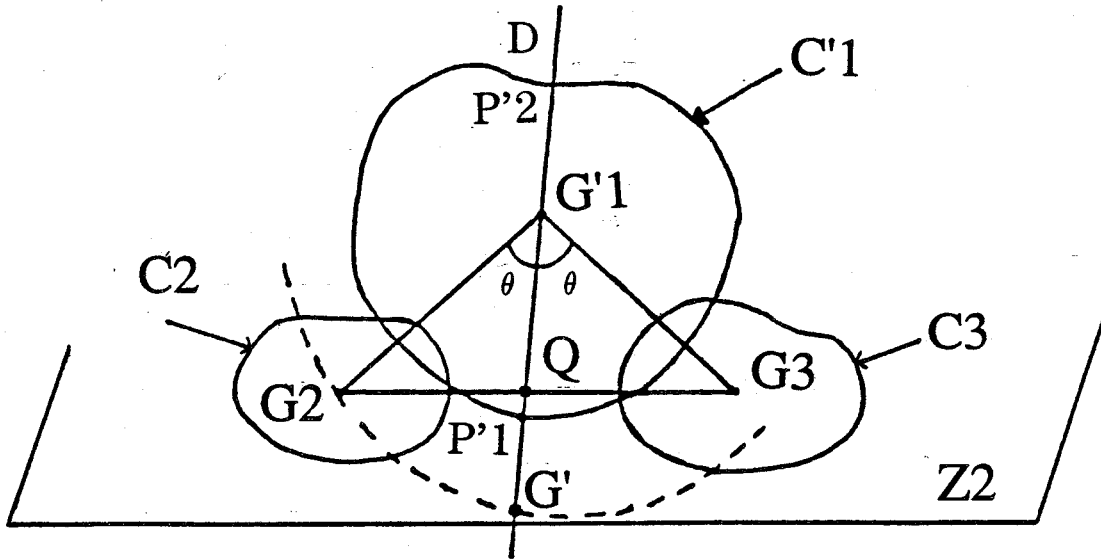


Figure 39 : Projection dans le plan Z_2 de C_1

Dans le plan de projection Z_2 , on trace la droite D bissectrice de l'angle (G'_1G_2, G'_1G_3) . D coupe le segment G_2G_3 en Q . Pour un contour C_1 régulier, le segment $P'_1P'_2$ partage C_1 en deux sous contours SC'_1 et SC''_1 à peu près de même taille.

La détermination analytique des coordonnées de P_1 et P_2 C_1 dans Z_1 s'effectue en remarquant que :

$$xp'_1 = xp_1$$

$$yp'_1 = yp_1$$

$$Zp_1 = Zp_2 = Z_2$$

Soit G' le point obtenu par rotation dans Z_2 de G_2 de centre G'_1 de rayon G'_1G_2 et d'angle $\theta = (G'_1G_2, G'_1P'_1)$. G' appartient à D . Ses composantes sont données par l'expression :

$$\begin{pmatrix} x'_G \\ y'_G \\ x'_G \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_{G_1} \\ y'_{G_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{G_2} - x'_{G_1} \\ y_{G_2} - x'_{G_1} \\ z_{G_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur directeur de la droite D d'équation $ax + by = 0$ est donnée par :

$$(G'_1 G')^T = | -b, a |$$

Les coordonnées des points P_1 et P_2 résultent de l'intersection de la droite D et du contour C'_1 connus. Le résultat type de cette première méthode après triangulation est illustrée figure 40

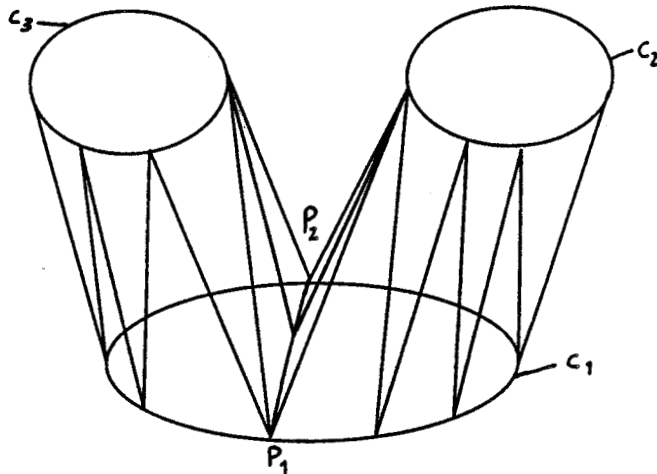


Figure 40 : résultat

Le segment $P_1 P_2$ qui divise le contour C_1 en deux sous contours SC'_1 et SC''_1 est ensuite échantillonné avec un pas égal à celui utilisé pour le contour C_1 .

Le contour SC'_1 (respectivement SC''_1) est constitué d'une partie des échantillons de C_1 plus des échantillons de la droite $P_1 P_2$ (fig 41) .

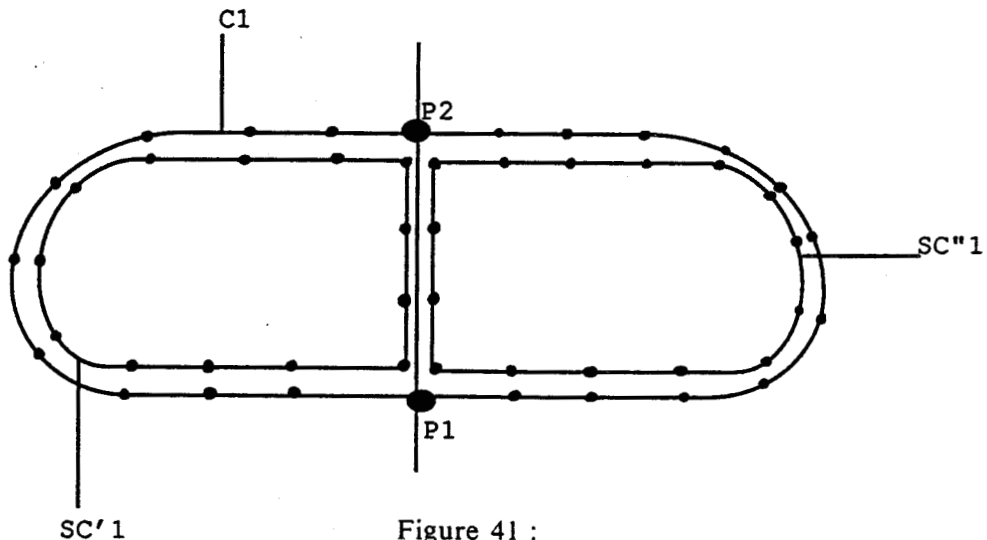


Figure 41 :

2-6-1-2-Modification de la base de données .

Lorsque les contours SC'_1 et SC''_1 sont créés, leur rangement dans la base de données s'effectue automatiquement par une simple modification de la liste d'adjacence (fig 42).

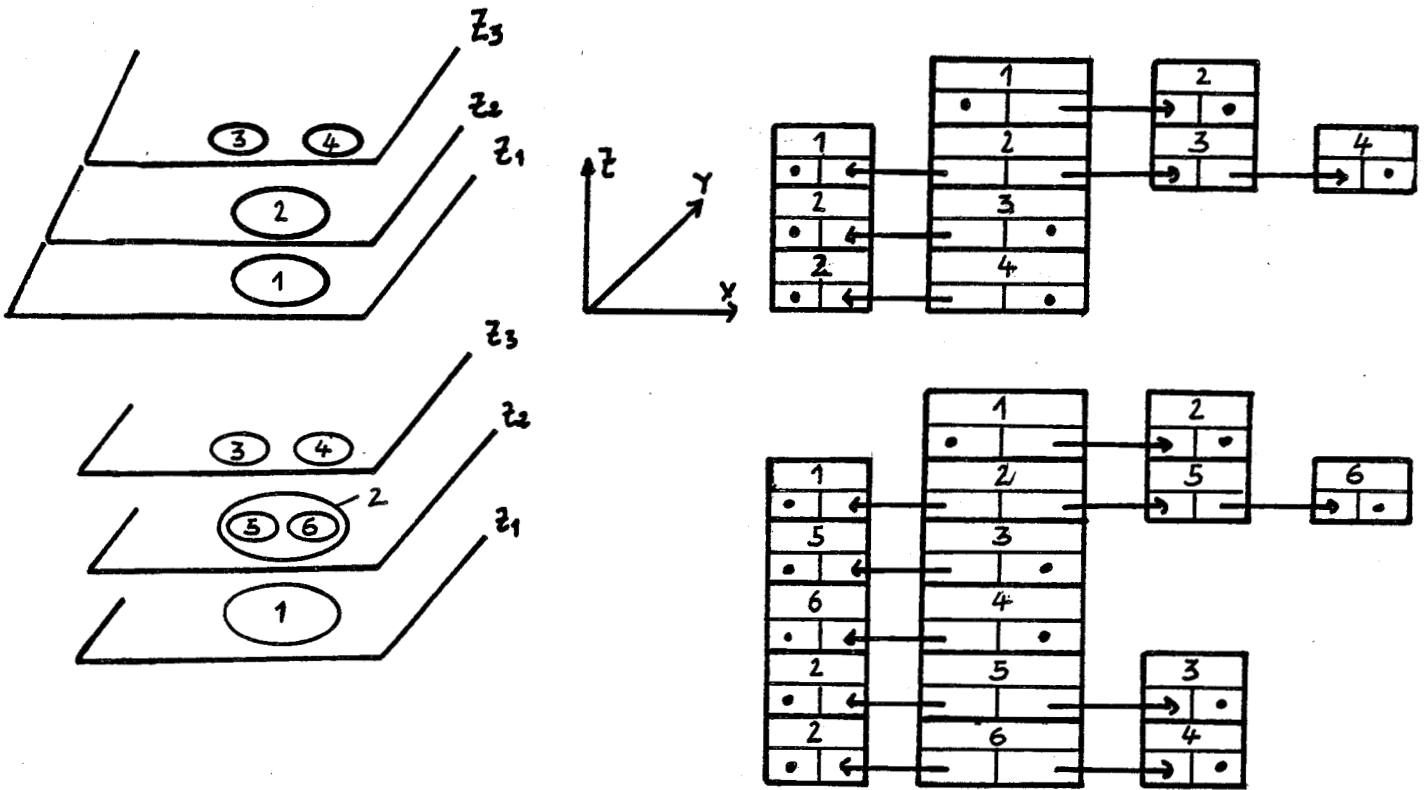


Figure 42 :

2-6-2-Deuxième méthode

La deuxième méthode permet d'atténuer l'effet d'encoche observable figure . Elle consiste à créer un noeud I qui par triangulation permet de combler l'encoche figure . Si l'on se réfère à la figure le point I peut être choisi appartenant au plan π formé par les segments G_1Q et $G_1G'_1$ et situé sur le segment $G_1G'_1$ à l'ordonnée z comprise entre $Z_{G_1} - Z_{G'_1}$, telle que : $Z = Z_{G'_1} + k (Z_{G_1} - Z_{G'_1})$. avec $0 < k < 1$

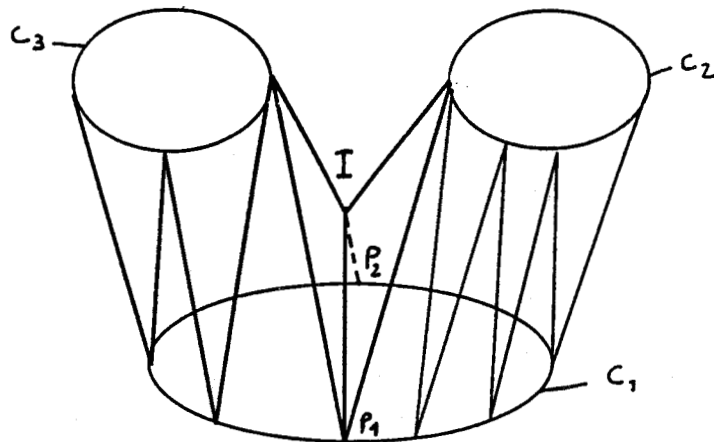


Figure 43 : résultat

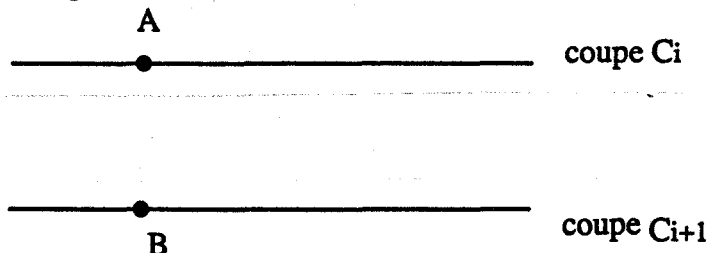
Chapitre 2 : Triangulation

La valeur de k est déterminée en fonction de la forme du col que l'on souhaite donner au niveau de la bifurcation.

Une bonne valeur est $k \neq 0,5$

2-6-3-Description de la structure de données FACETTE

Une facette triangulaire est définie par ses trois sommets A, B, C (fig 44).



Si A, B, C sont des indices sommets, il faut définir des liaisons constituant une facette .
Si A appartient à la coupe C_i et B appartient à la coupe C_{i+1} pour l'indice C, il existe quatre cas .

$C = A + 1$ ou $C = B + 1$.

En fin de contour (fig 45)

$C = 1$ si C appartient à la coupe C_i ou $C = 1$ si C appartient à la coupe C_{i+1}

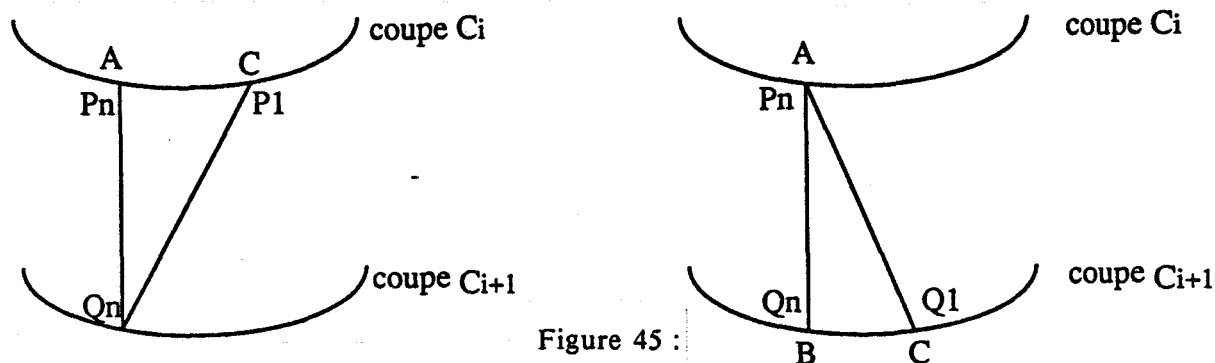


Figure 45 :

Si nous affectons un code de 2 bits pour le troisième sommets tel que :

$C=1$ correspond à $A + 1$

$C=2$ correspond à $B + 1$

$C=3$ correspond à 1 (sur le contour C_i)

$C=4$ correspond à 1 (sur le contour C_{i+1})

Nous obtenons en mémoire la constitution des liaisons formant la facette (fig 46) .

INDICE COUPE i	INDICE COUPE $i+1$	TYPE TRIANGLE
------------------	--------------------	---------------

Les indices des points correspondent à la base de données sommets (Structure COORDONNEES-ECHANT) Le nombre de points que peut contenir un contour échantillonné ne peut excéder 255 . Nous pouvons coder ses indices sur 1 octet .

Pour ne pas se restreindre au niveaux des formes possibles des facettes, nous coderons le type de triangle sur 1 octet également .

Pour terminer cette identification il faut aussi définir la normale extérieure à chaque facette . Si ses coordonnées x_n , y_n , z_n , sont normées, leurs valeurs vont varier entre -1 et +1 . La précision prise sur cette normale est de l'ordre du millièème . L'espace en mémoire nécessaire pour ce codage final est représenté figure 47):



Figure 47 :

2-7-Présentation des résultats .

L'application des algorithmes de triangulation précédents proposés en C ont été appliqués à la reconstruction automatique d'objets de forme complexe :

-Les artères cérébrales du cou .

-Le rein

Les artères cérébrales du cou sont constituées d'un ensemble de 36 coupes parallèles de 1mm d'épaisseur . Chaque coupe est ensuite numérisée à l'aide de la carte d'acquisition Pip . On applique un algorithme de détection et de suivi de contour . Les contours sont extraits des différentes coupes, ils sont chaînés, échantillonnés et ordonnés dans la base de données . On détecte les liaisons multiples dans la base de données et la triangulation peut alors s'effectuer.

L'étape d'échantillonnage permet de réduire tous les contours bruts d'un facteur en moyenne supérieure à 10, en général le contour triangulé comporte un nombre moyen de 10 à 30 points .

L'analyse des photographies figure 48 montre que l'on rencontre les différents types de liaisons suivantes : liaison simple, entre contours centrés, ou intersécants, ou disjoints, faiblement concaves, ou convexes et liaison entre un et deux contours .

La surface obtenue est représentée sous sa forme filaire ou en rendu réaliste . Les phases, dans ce cas, sont élimination de parties cachées (algorithme de Newell [Newe 72]), suivi par un algorithme d'ombrage (l' algorithme de Gouraud [Gour 74]) . Ce choix est lié essentiellement à la base de données constituée uniquement de facettes .

L'examen de ces photographies montre que les différentes procédures de liaisons ont fonctionné correctement, notamment en ce qui concerne la liaison entre contours disjoints, intersecants, et les liaisons multiples .

Les résultats montrent l'intérêt d'une telle approche pour la localisation de pathologies ou lésions particulières. Cette méthode bien entendu s'inscrit dans un ensemble de démarches possibles pour la constitution d'un dossier médical ou bien le suivi médical du patient.

2-7-1-Discussion

Nous allons essayé d'évaluer ces résultats, pour la reconstruction 3D d'organes issus de coupes parallèles dans le cadre d'une utilisation clinique, en fonction des critères de choix évoqués dans la premier partie .

Chapitre 2 : Triangulation

Occupation mémoire:

-Dans le cadre de cette étude le coût des algorithmes est très raisonnable et notamment grâce à l'algorithme d'échantillonnage .

Considérons un examen comportant 20 coupes, chaque coupe est constituée de 6 cellules . Le nombre de points par cellule est en moyenne de 200 .

Le coût total de la représentation, pour un tronc de l'artère avec bifurcations, (hormis l'étape de visualisation) pour cet examen est de 80 Koctets .

Le coût .

La durée de calcul, pour l'examen précédent, est pour l'instant de 20 mn sur un AT de 12Mhz . Cette durée est essentiellement due à l'étape pénalisante d'acquisition (positionnement de chaque clichés l'un par rapport à l'autre) et de chaînage des différentes coupes . Les autres étapes n'interviennent que très peu(de l'ordre de 1% dans la durée) .

Nous étudions actuellement la phase d'automatisation de cette représentation .

le degré de précision

Il est à notre avis le critère essentiel . Il est lié dans notre cas :

-A l'opération de recalage des clichés (superposition de repères sur les clichés) .

-Et à la distance inter coupes (effet de marche d'escaliers) .

La précision actuelle reste néanmoins très bonne (l'erreur peut être estimée inférieure au millimètre, valeur de la surface du bruit sur les clichés) . Elle peut être accrue grâce à l'accès aux données brutes du système d'acquisition .

La qualité de visualisation .

Nous avons laissé à l'utilisateur le choix entre la visualisation filaire et une visualisation par rendu réaliste .

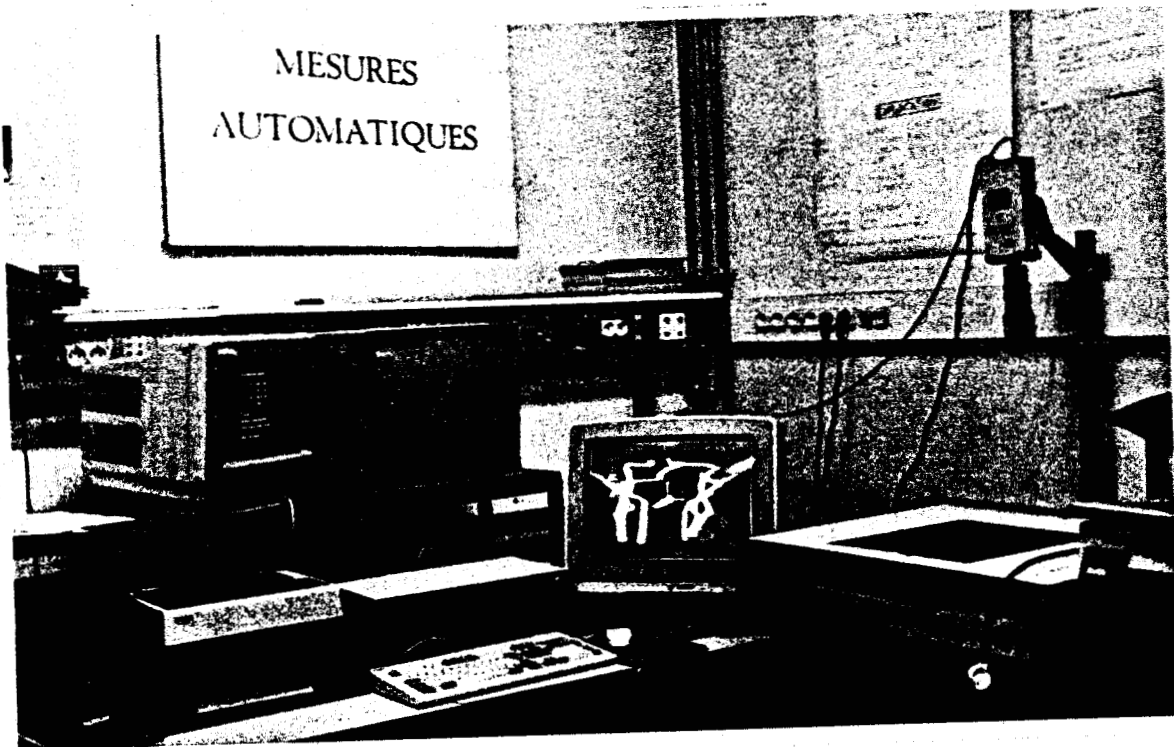
L'interactivité .

Nous avons créé un certain nombre d'utilitaires (rotation, translation, agrandissement, réduction, calcul de volume, de surface,.....) qui offrent à l'utilisateur la possibilité de visualiser l'artère cérébrale sous diverses incidences .

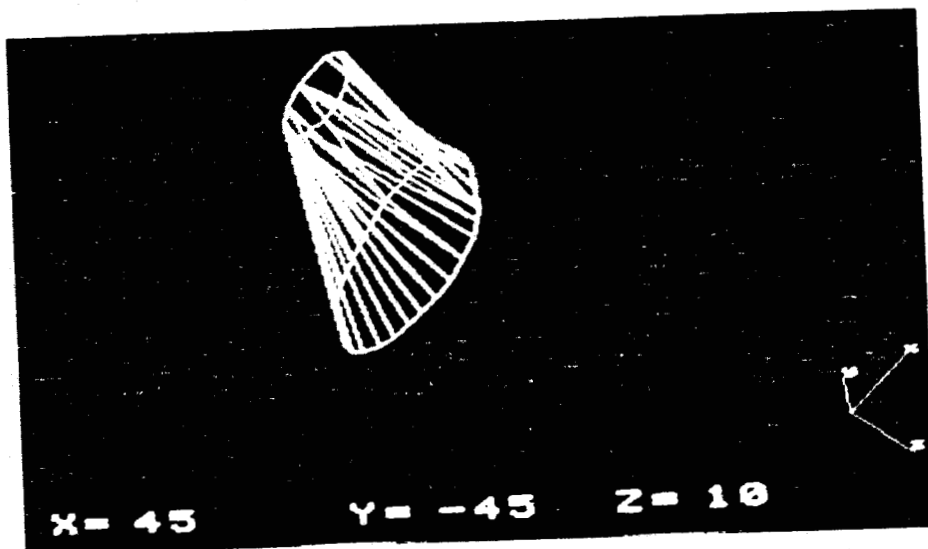
2-8-Conclusion

Nous avons proposé dans cette étude un certain nombre d'algorithmes pour la représentation en trois dimensions, de l'enveloppe polyédrale d'un objet quelconque défini à partir d'une série de coupes parallèles issues d'IRM.

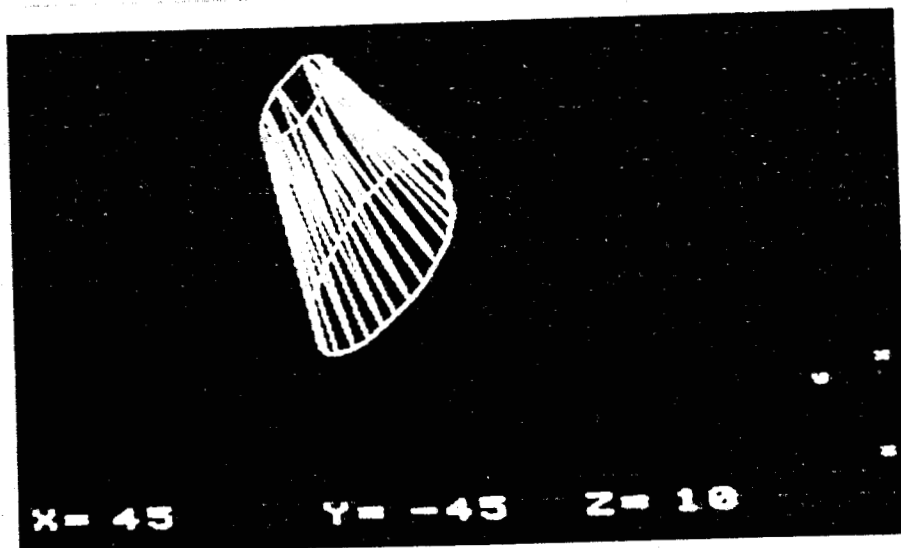
Ces solutions sont entièrement adaptées à la représentation de formes simples ou bifurquées (artères cérébrales possédant une simple bifurcation). La base de données mise en oeuvre convient très bien à la chaîne fonctionnelle développée et présente l'intérêt de se prêter à une réalisation matérielle .

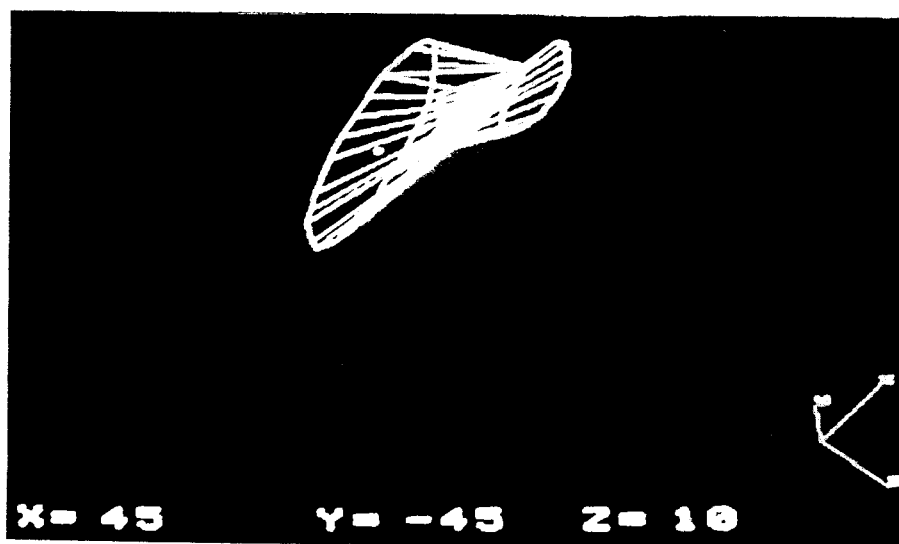


STATION DE TRAVAIL

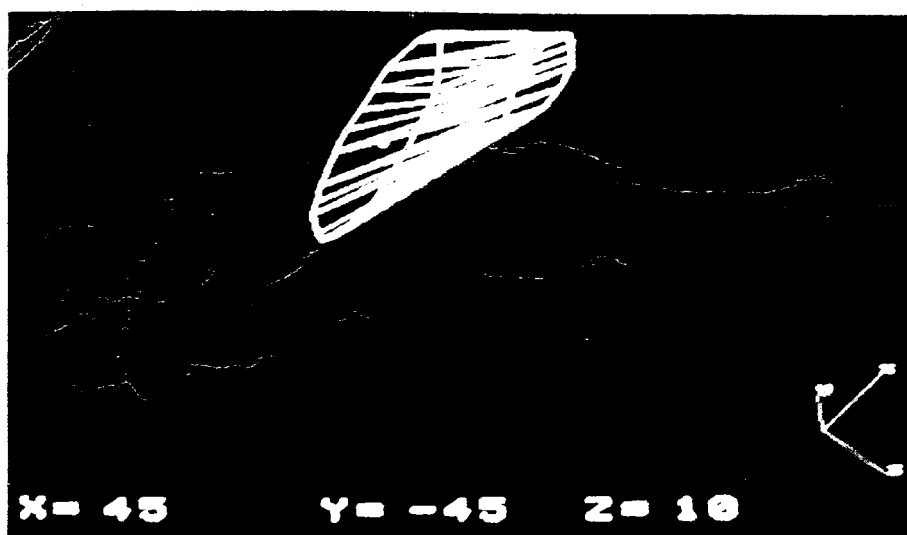


EXEMPLE DE MAUVAISE TRIANGULATION ET DE BONNE PAR NOTRE METHODE



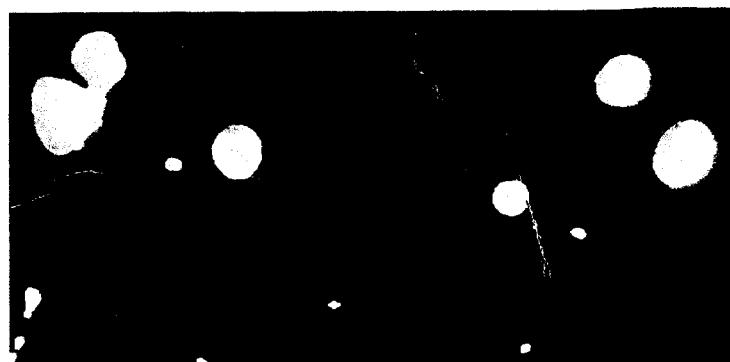
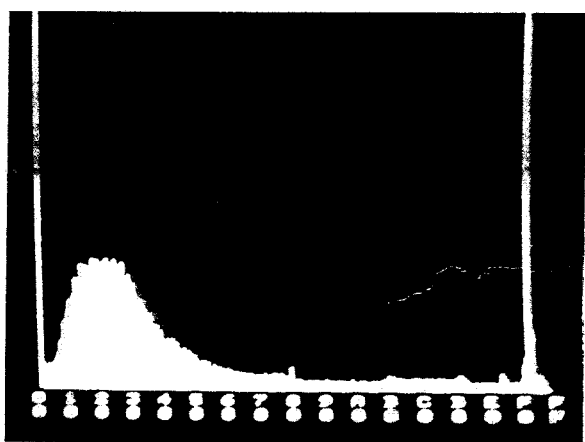


EXEMPLE DE MAUVAISE TRIANGULATION



SOLUTION PROPOSEE

ILLUSTRATIONS DE QUELQUES ETAPES DE LA REPRESENTATION 3D DEVELOPPEE

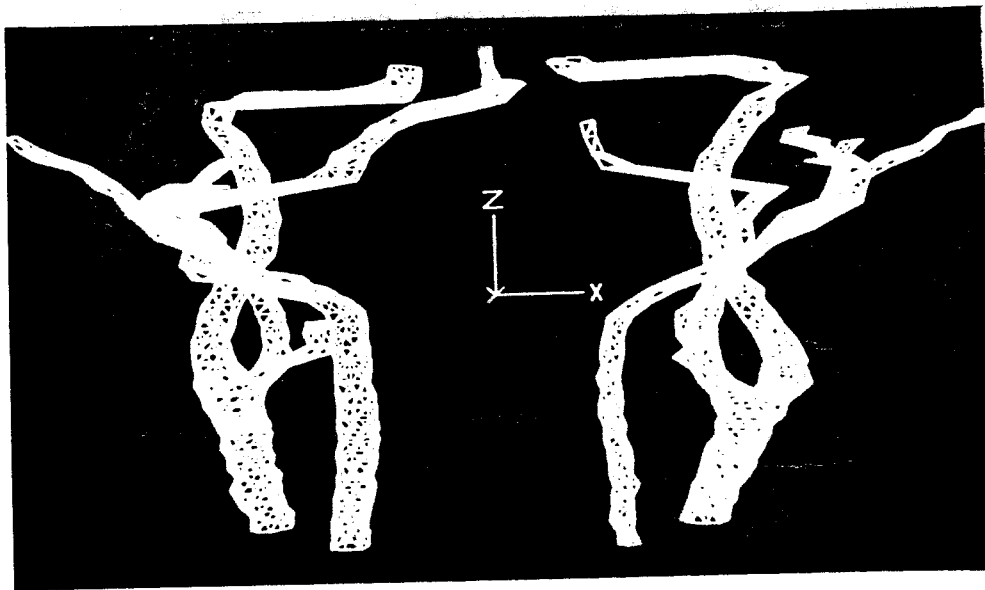


DETECTION DES CELLULES

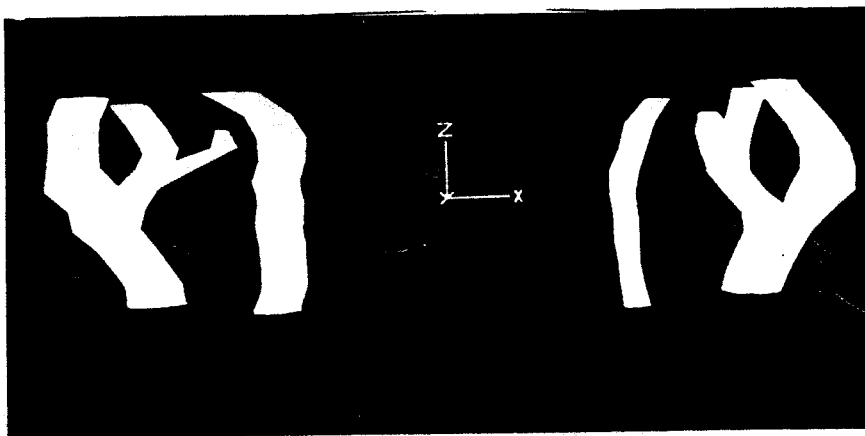


ETAPE D'ECHANTILLONNAGE

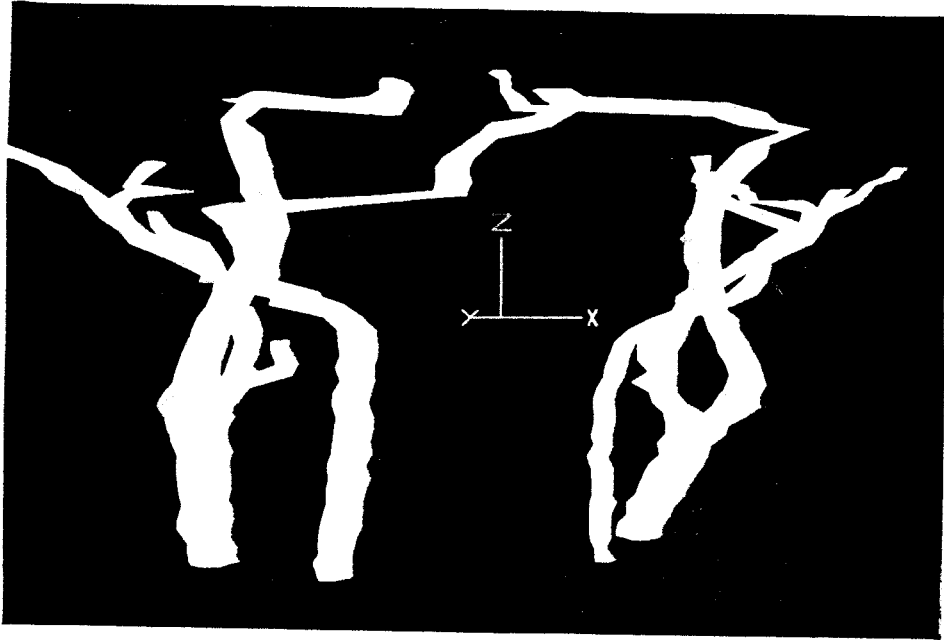
DETAIL FILAIRE D'UNE BIFURCATION



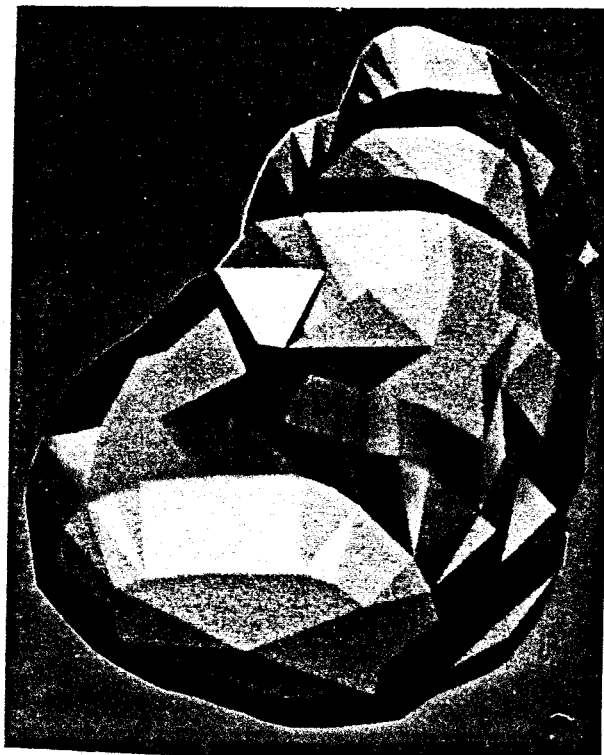
REPRESENTATION FILAIRE 3D DES ARTERES



REPRESENTATION PAR RENDU REALISTE



REPRESENTATION PAR RENDU REALISTE DES ARTERES



APPLICATION DANS LE CAS DU REIN

3EME PARTIE

**ETUDE DE LA REPRESENTATION 3D PAR
RECONSTRUCTION 2D D'UNE STRUCTURE CEPHALO
DENTAIRE A PARTIR DE CLICHES
ORTHOGRAPHIQUES X**

Chapitre 1 : Orthogonalisation des clichés

Les problèmes liés à l'orthopédie donto faciale sont proches de ceux de la conception et de la fabrication assistée par ordinateur en mécanique et en électronique. Un certain nombre d'orthodontistes estiment que la correction de la dentition sur un enfant ne doit pas se faire lorsque la croissance est terminée, mais au contraire elle doit accompagner l'évolution faciale du sujet . La solution que l'on propose en général au patient est le port d'une prothèse, les deux choix auxquels les médecins sont confrontés sont :

-1)utiliser des produits existants issus d'une gamme figée mise à la disposition par les constructeurs.

-2)concevoir des produits personnalisés adaptés à la constitution de chaque patient.

En ce qui concerne le second choix , le problème consiste alors à concevoir et à rechercher une méthodologie pour systématiser une telle correction sur un enfant au cours de sa croissance. L'un des outils lui permettant de résoudre ces problèmes consiste à effectuer une reconstruction 3D de la mâchoire de l'enfant à partir de clichés radiographiques . Cette opération passe par un certain nombre d'étapes distinctes :

-Orthogonalisation .

-Prétraitement et tracé de repères .

-Calcul de surface et de volume .

-Reconstruction 3D .

Nous allons dans cette partie présenter le logiciel que nous avons développé . Nous aborderons chacune des étapes précédentes en énonçant les difficultés rencontrées et en proposant des solutions originales .

1-ORTHOGONALISATION

1-1-Introduction .

L'orthodontiste utilise deux types d'images, les clichés provenant du scanner, et les clichés radiographie rayon X . En général les radiographies rayon X sont actuellement les plus utilisées par les praticiens, d'une part parce qu'elles offrent l'avantage d'être accessibles (prix de revient très faible) d'autre part parce qu'il existe un stock d'archives et enfin le stockage de trois radiographies est plus facile que celui d'un ensemble de coupes scanner . C'est pour cela qu'à la demande du professeur BLOCQUEL nous avons été amené dans le cadre de cette étude à nous intéresser à la reconstruction à partir de radiographies prises à divers ages.

Les radiographies dont on dispose sont constituées de trois télé-crânes pris suivant trois directions :

-De face : Le frontalis .

-De coté : Le latéralis .

-De dessous : L'axialis (fig 1) .

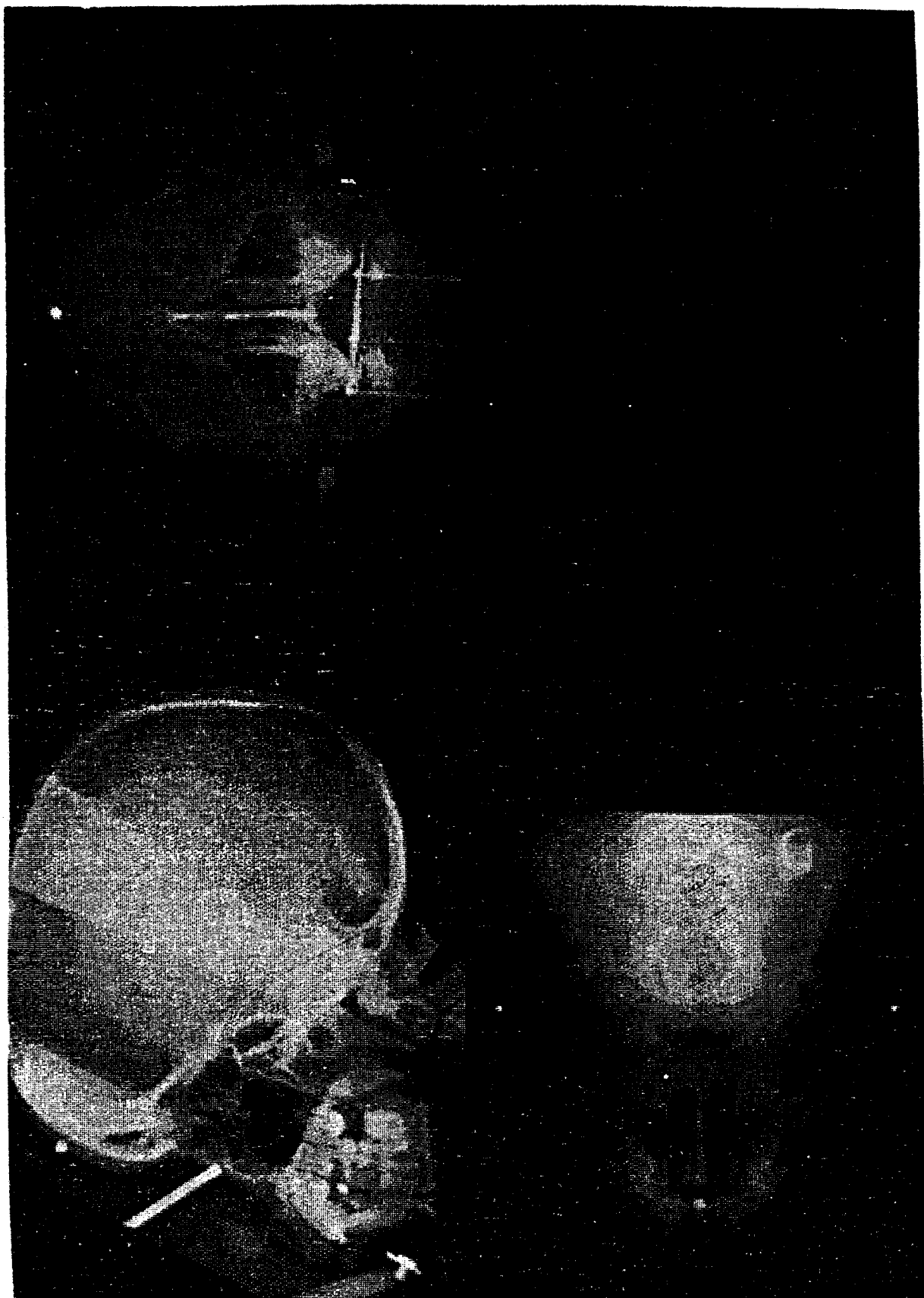


Figure 1 : radiographies des tête-crânes .

Chapitre 1 : Orthogonalisation des clichés

Malheureusement ces trois clichés ne sont pas perpendiculaires entre eux . La première étape va donc consister à orthogonaliser les radiographies entre elles . Ce que nous appelons orthogonalisation est en réalité une opération connue en traitement d'image type stéréovision sous le nom de recadrage caméra .

Le but de l'opération d'orthogonalisation consiste à disposer les trois vues de telle façon qu'en repérant un point quelconque du crâne sur deux vues, ce point soit automatiquement positionné sur la troisième vue .

Compte tenu de la façon dont ont été prises les vues, le patient peut, en théorie, bouger selon les six axes de l'espace (1,2,3,A,B,C) : (fig 2) .

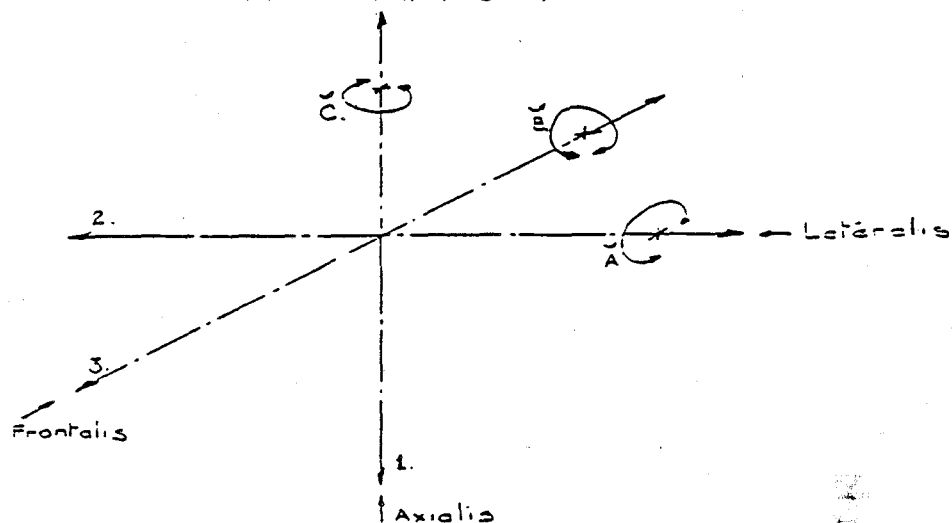


Figure 2 : les différents mouvements possibles .

Cependant, ces mouvements sont limités de différentes façons . Pour les vues Frontalis et Latéralis, des "olives" (tiges métalliques fixées sur un casque) sont placées dans les conduits auditifs, interdisant au patient les translations 1, 2 et 3 ainsi que les rotations B et C . Seule la rotation selon A de la tête du patient a pu être rendue possible entre la prise du cliché frontalis et latéralis .

Pour la vue Axialis, le maintien des olives n'est plus possible et, en plus d'une deuxième rotation selon A, il existe une translation selon 3 . Les translations 1 et 2 et la rotation selon C ne sont pas à prendre en compte . La rotation selon B sera considérée comme négligeable, le patient étant guidé par le radiologue avant la prise de vue .

Pour orthogonaliser les vues il faut se donner des repères, visibles sur les trois clichés . Ces repères doivent matérialiser un solide qui ne s'est pas déformé au cours des prises de vue . On peut pour cela choisir des repères anatomiques : extrémité des incisives, sommets des condyles, par exemple . Le défaut de ce procédé est que l'aspect des images est tel que ces points ne sont pas toujours repérables sur les trois vues . Pour faciliter l'opération d'orthogonalisation nous avons proposé de constituer un solide indéformable à l'aide de trois billes métalliques apposées sur la tête du patient avant les prises de vues : une au niveau de chaque tempe et une dans l'axe du front (fig 3)

Cependant, pour permettre une orthogonalisation des clichés qui ont été pris avant la pratique systématique actuelle de la pose des trois billes, nous avons mis au point des fonctions de rehaussement d'images .

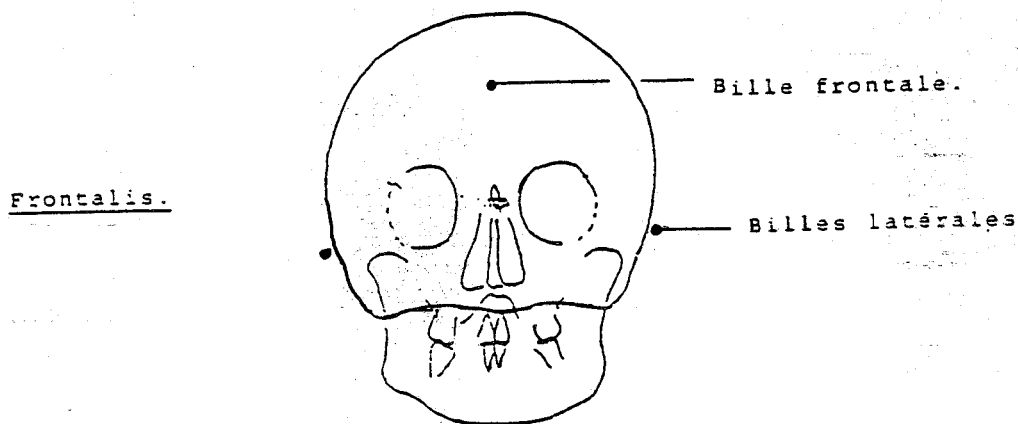


Figure 3 : apposition des repères .

Des moyens graphiques manuels, utilisant les règles de bases du dessin industriel, ont été jusqu'à présent mis à la disposition des orthodontistes pour réaliser cette orthogonalisation. Toutefois, ces moyens requerraient une manipulation fastidieuse. Le but de cette partie est donc d'informatiser cette opération par :

-Une saisie et projection sur écran d'image caméra .

-Une superposition graphique écran (overlay) permettant le positionnement des télécrânes sous la caméra .

-Une mise en mémoire des images acquises .

Cette informatisation passe par le développement d'un logiciel souple, interactif et facilement utilisable par le médecin, et qui allège au maximum la technique existante

1-2-Environnement matériel .

Nous disposons pour cette étude une station d'acquisition d'images dont l'architecture est donnée ci-dessous (fig 4) .

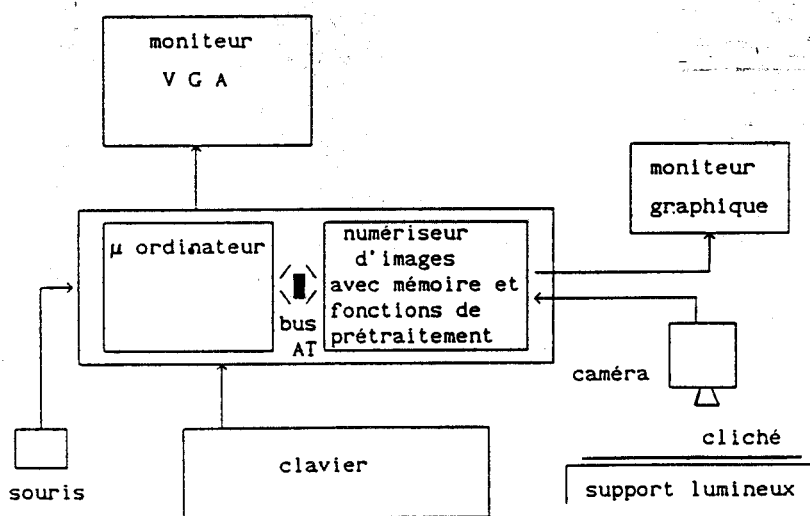


Figure 4 : architecture générale .

Le numériseur d'images est une carte PIP noir et blanc de chez Matrox, son architecture est la suivante (fig 5) .

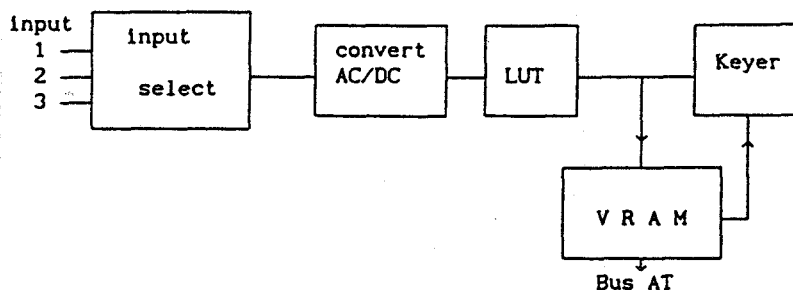


Figure 5 architecture de la carte d'acquisition .

La mémoire Vram possède une taille de 1024Koctets dont la répartition d'adressage 2D est donnée figure 6 .

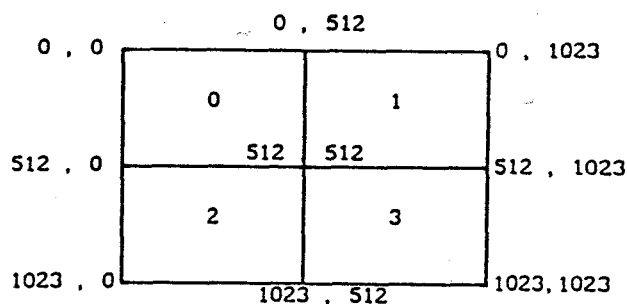


Figure 6 : configuration mémoire carte acquisition .

On voit sur cette figure que la mémoire peut contenir soit quatre images de format 512*512 pixels, soit une image 1024*1024 pixels . Pour une résolution maximale nous avons décidé de travailler sur les quatre plans (0, 1, 2, 3) images contenant chacun une image 512*512 pixels .

1-3-Orthogonalisation du Latéralis par rapport au Frontalis;

1-3-1-Positionnement du Frontalis.

Le cliché retenu pour le point de départ et de référence est le Frontalis parce que :

-L'axe des olives est parfaitement visible sur ce cliché.

-Le passage vers le Latéralis ou Axialis des coordonnées des billes est relativement aisé.

Pour le positionnement du Frontalis, une ligne verticale est tracée sur l'écran graphique . Cette ligne permet de centrer approximativement le télé-crâne . Ce centrage grossier est cependant nécessaire pour éviter tout problème de report d'axe dans l'Axialis (voir positionnement Axialis).

L'axe des olives doit coïncider avec une deuxième ligne horizontale écran que l'on translate verticalement avec la souris . Lorsque cette opération est terminée, on repère les coordonnées des billes . L'image (fig 7) est mise en mémoire dans le cadran 3 .

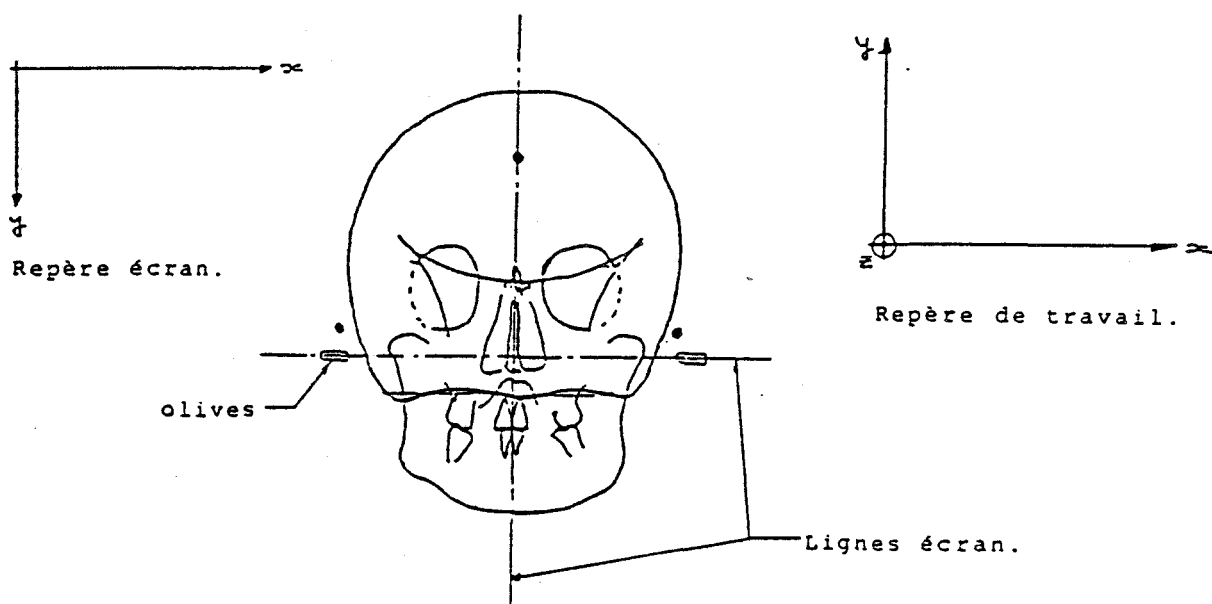


Figure 7 : positionnement du Frontalis .

Les objets repérés sont donc : Axe des olives, bille frontale, billes latérales .

1-3-2-Positionnement du Latéralis par rapport au Frontalis.

A partir des ordonnées y du Frontalis, sont tracées sur l'écran relatif au plan du cliché latéralis .

- Une ligne d'ordonnée axe des olives.
- Une ligne d'ordonnée bille frontale.
- Une ligne d'ordonnée bille joue droite.
- Une bille d'ordonnée bille joue gauche.

Par rotation du télé-crâne Latéralis autour de l'axe des olives, on fait manuellement sur le négascope coïncider l'axe de la bille frontale avec la ligne horizontale supérieure . Après cette opération le cliché latéralis ainsi positionné est dit orthogonalisé par rapport au frontalis .

L'image du cliché latéralis orthogonalisé par rapport au frontalis (fig 8) est stockée dans la mémoire de la carte d'acquisition Pip (plan 2) .

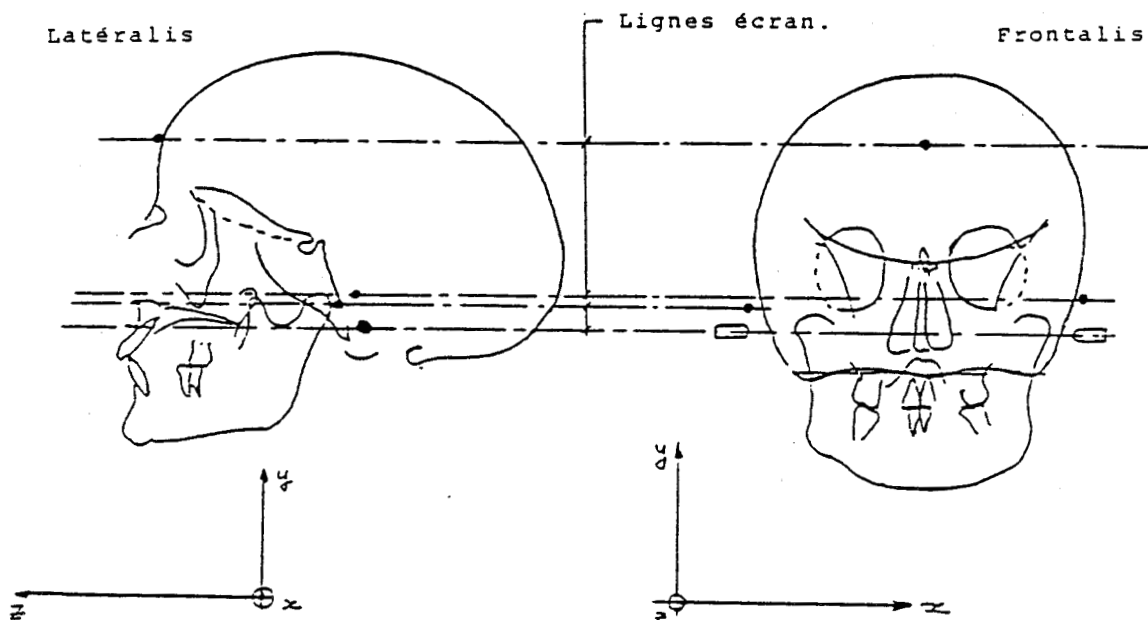


Figure 8 : positionnement du Latéralis par rapport au Frontalis.

Les objets repérés sont alors : Axe des olives, bille frontale, billes latérales.

1-4-Prépositionnement de l'Axialis.

Le maintien des olives est trop douloureux pour le patient lors de la prise de vue du télé-crâne Axialis, le repère des olives n'est donc plus exploitable sur ce cliché. Les abscisses x_0 , x_1 , x_2 des billes sur les joues et sur le Front dans le plan du cliché frontalis se reportent dans le plan du clichés axialis suivant trois axes horizontaux d'abscisses dans ce plan x'_0 , x'_1 , x'_2 (fig 9).

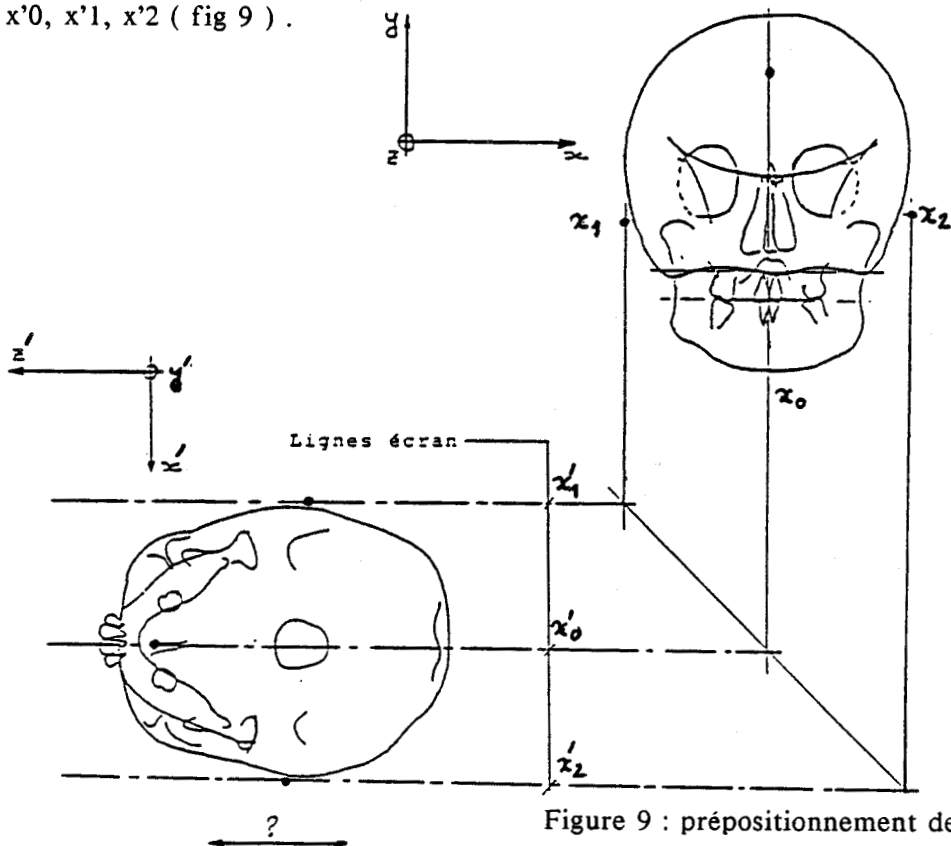


Figure 9 : prépositionnement de l'axialis

Lorsque l'on fait apparaître le plan axialis sur l'écran image, ces trois axes horizontaux sont tracés automatiquement par le logiciel . Pour cela étant donné que les pixels sont de taille rectangulaire ($\Delta x * \Delta y$) les coordonnées suivant l'axe Ox' dans le plan axialis seront déterminées en multipliant les coordonnées suivant l'axe Ox dans le plan frontalis par le facteur $k = (\Delta y / \Delta x)$.

L'utilisateur positionne le cliché axialis de façon à faire correspondre les billes avec les axes horizontaux d'abscisses $x'0, x'1, x'2$, tandis que leurs positions suivant l'axe Oz' reste indéterminées . L'image du cliché axialis, positionné arbitrairement sur l'axe Oz' peut être numérisée dans la mémoire de la Pip (plan n° 1) . Il s'agit maintenant de faire correspondre les éléments du cliché axialis avec ceux du cliché latéralis .

Les éléments du cliché axialis correspondent dans le plan de l'axialis à la projection des éléments du cliché latéralis sur le plan horizontal $z'Ox'$. Il faut donc faire correspondre les coordonnées suivant Oz'' de chaque élément du cliché latéralis (par exemple les billes) avec leurs coordonnées suivant Oz' dans le plan axialis en faisant subir à l'image du cliché latéralis un mouvement de translation et de rotation . Cette opération de correspondance de l'axialis et du latéralis par rotation translation du latéralis est appelée orthogonalisation du latéralis par rapport à l'axialis .

L'ensemble de ces deux opérations d'orthogonalisation permet d'établir une correspondance de coordonnées entre un point anatomique vu sur un cliché de la vue axialis et le même point vu sur le cliché frontalis . Ces deux vues sont ainsi repérées par rapport à la vue latéralis prise comme référence . Pour cela (fig 10) :

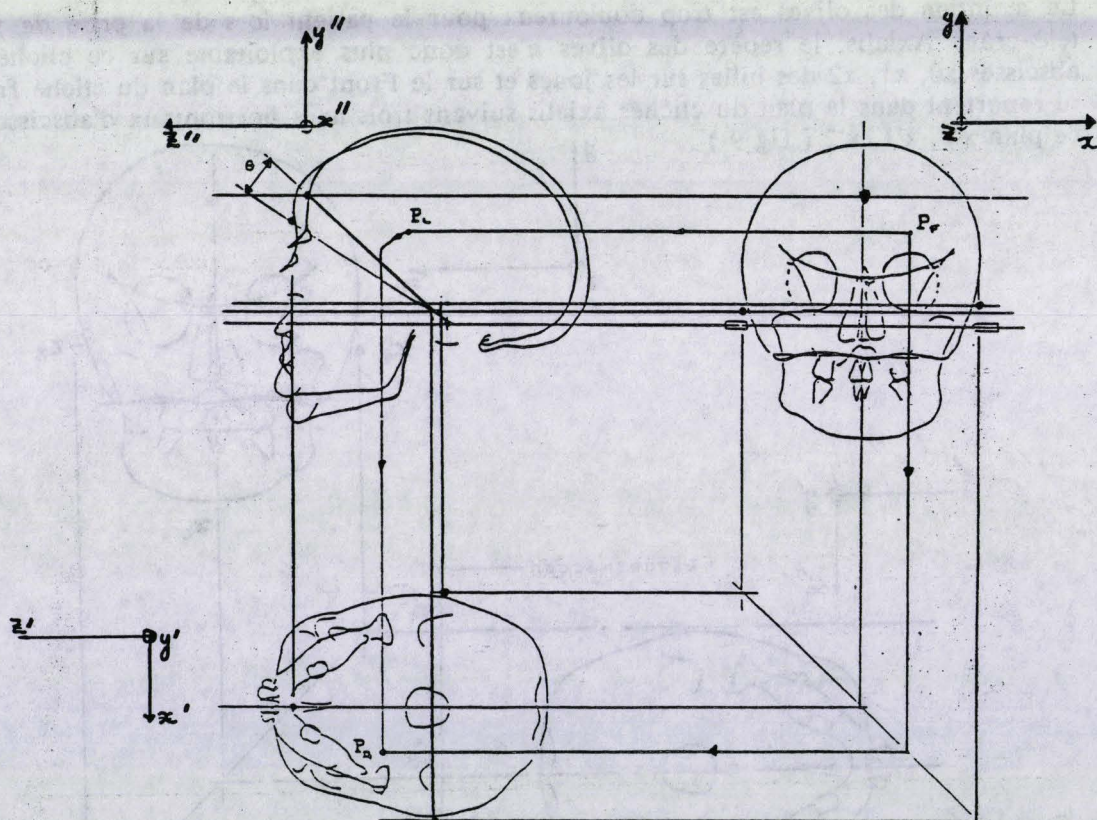


Figure 10 : position du frontalis et axialis par rapport au latéralis

On remonte les coordonnées d'un point suivant Oz' de l'axialis vers la vue latéralis, on

fait subir une rotation d'angle θ du latéralis pour obtenir sa coordonnée Oy sur le cliché frontalis . La position de ce point sur le cliché frontalis est obtenue à l'intersection de l'horizontale d'ordonnée Oy et de la verticale d'abscisse Ox relevée depuis le cliché axialis

L'angle de rotation θ et les coordonnées (x_0, y_0) du vecteur translation du cliché latéralis lors de l'orthogonalisation par rapport à l'axialis peuvent être déterminés d'une façon analytique ou d'une façon manuelle plus simple voire plus pratique .

1-4-1-Détermination analytique de la rotation et de la translation

1-4-1-1-Position du problème .

L'orthogonalisation du latéralis par rapport du frontalis a permis de déterminer la position du point A représentant l'axe des olives et la position du point B représentant la bille frontale fig (11) .

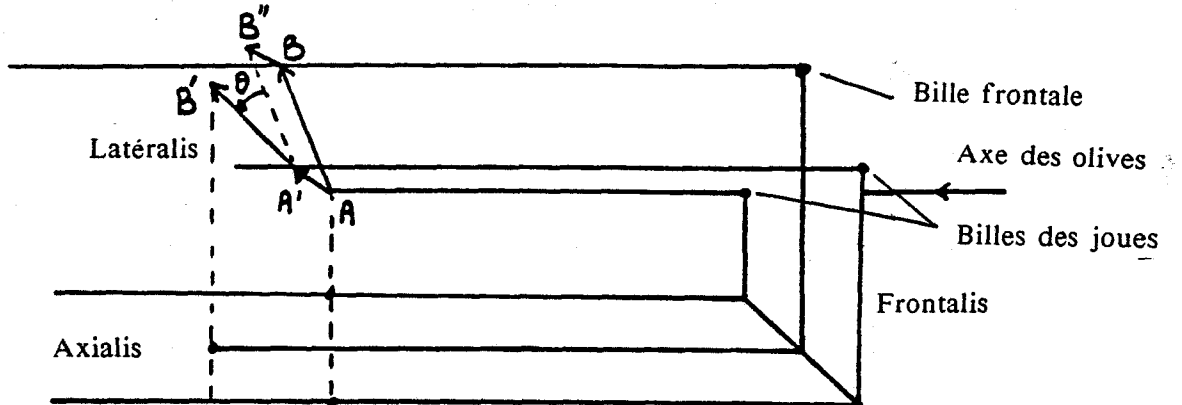


Figure 11

L'orthogonalisation du latéralis par rapport à l'axialis fait déplacer les positions de l'olive et de la bille frontale aux points A' et B' respectivement .

Dans cette opération les vecteurs \overline{AB} et $\overline{A'B'}$ ont la même norme, et l'un se déduit de l'autre par une translation $T = \overline{AA'} = \overline{BB'}$ et une rotation d'un angle θ .

La détermination des valeurs de θ et des projections x_0 et y_0 du vecteur \vec{T} s'énonce de la façon suivante (fig 12) .

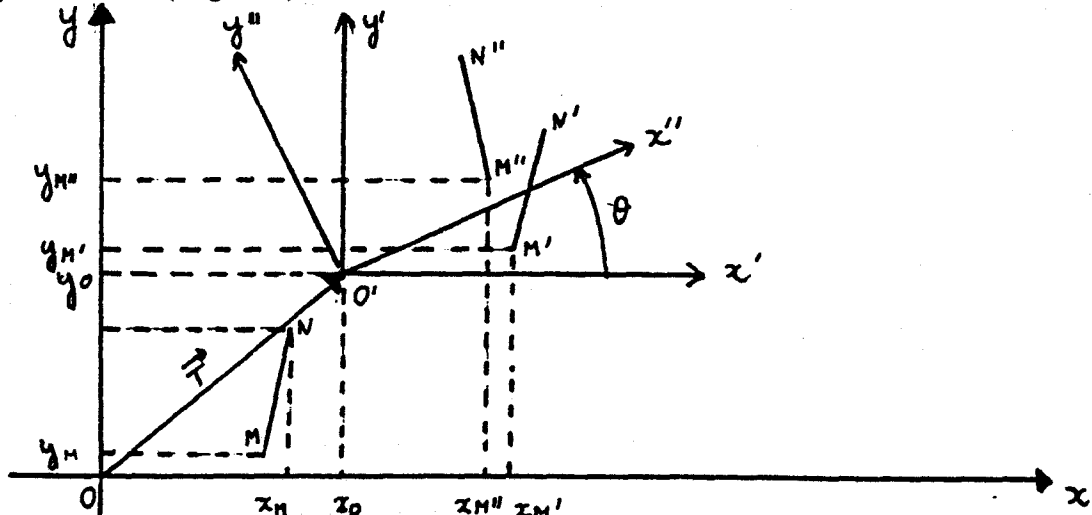


Figure 12

On dispose d'un point de coordonnées connues: $M(x_M, y_M)$ et d'un point M'' de coordonnées connues: $M''(x_{M''}, y_{M''})$ dans le repère (xoy) . On recherche x_0, y_0 et pour

qu'après une rotation de $-\theta$ du point M'' autour de o' et une translation de $-\vec{T}$ telle que $\vec{T} = ix_0 + jy_0$, l'ensemble du vecteur $O'M''$ se confond avec OM et inversement.

Il faut que (x_M, y_M) dans le repère $xoy = (x'_M, y'_M)$ dans le repère $x'o'y' = (x''_M, y''_M)$ dans le repère $x''o'y''$.

Nous pouvons établir les équations suivantes:

Par rapport au repère $x'o'y'$.

$$-x'_M = x''_M \cos\theta - y''_M \sin\theta$$

$$-y'_M = y''_M \cos\theta + x''_M \sin\theta$$

or

$$-x''_M = x'_M + x_0$$

$$-y''_M = y'_M + y_0$$

d'où

$$-x_M = x_M \cos\theta - y_M \sin\theta + x_0$$

$$-y_M = y_M \cos\theta + x_M \sin\theta + y_0$$

Il en est de même pour le point N :

$$-x_N = x_N \cos\theta - y_N \sin\theta + x_0$$

$$-y_N = y_N \cos\theta + x_N \sin\theta + y_0$$

Nous sommes en présence de 4 inconnues : $\cos\theta$, $\sin\theta$, x_0 , y_0 .

Les quatre équations peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{vmatrix} x''_M \\ y''_M \\ x''_N \\ y''_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_M & -y_M & 1 & 0 \\ y_M & x_M & 0 & 1 \\ x_N & -y_N & 1 & 0 \\ y_N & x_N & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Les valeurs $\cos\theta$ et $\sin\theta$ représentent la même inconnue θ , il est alors possible de supprimer la première ligne de la matrice. L'équation est de la forme :

$$\vec{V}_1 = (M) \vec{V}_2$$

avec

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} y_M'' \\ x_N'' \\ y_N'' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Nous recherchons :

$$\vec{V}_2 = (M)^{-1} \vec{V}_1$$

La matrice 3.3 inversée est :

$$\frac{1}{x_N'' - x_M''} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ y_M'' & 1 & y_N'' \\ -x_N'' & 0 & 2x_N'' - x_M'' \end{vmatrix}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} \sin\theta \\ x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x_N'' - x_M''} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ y_M'' & 1 & y_N'' \\ -x_N'' & 0 & 2x_N'' - x_M'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_M'' \\ x_N'' \\ y_N'' \end{vmatrix}$$

$$\sin\theta = \frac{y_N'' - y_M''}{x_N'' - x_M''} \quad \theta = \arcsin \left[\frac{y_N'' - y_M''}{x_N'' - x_M''} \right]$$

$$x_0 = \frac{y_M'' y_N'' + x_N'' + y_M'' y_N''}{x_N'' - x_M''} = \frac{y_N'' (y_M'' + y_N'') x_N''}{x_N'' - x_M''}$$

$$y_0 = \frac{-x_M'' y_N'' + y_N'' (2x_N'' - x_M'')}{x_N'' - x_M''}$$

Dans la pratique :

-a) $x_N - x_M$ est mesurée par la position sur Oz' des coordonnées des billes des joues et du front sur le cliché axialis .

-b) $y_N - y_M$ est mesuré par la projection sur Oy des coordonnées des billes des joues et du front sur le cliché frontal

-c) on en déduit θ

Au cours de notre étude, il est apparu une solution plus simple et plus facile à mettre en oeuvre pour déterminer ces deux inconnues . Lors du prépositionnement de l'axialis on repère les cotes z des billes des joues (le repère des olives étant supprimé) dans le repère $x'Oz'$ et on ramène trois lignes verticales sur le cliché latéralis orthogonalisé par rapport au frontalis . De la même façon, lors de l'orthogonalisation du latéralis par rapport au frontalis on connaît la cote y, et en z de l'axe des olives, on ramène sur le latéralis une ligne horizontale d'ordonnée y . On positionne définitivement le latéralis pour que ces repères (billes des joues plus axe des olives) correspondent avec les lignes de rappel issues du frontalis et latéralis (fig 13) .

Le calculateur détermine alors la différence des cotes z de l'axe des olives du "Latéralis par rapport au Frontalis" et de l'axe des olives du "Latéralis par rapport à l'Axialis". La translation est ainsi compensée et l'axe de rotation est le même pour les deux vues Latéralis. L'algorithme tient compte du signe de cette translation.

-Les coordonnées de la bille frontale du Latéralis par rapport au frontalis ainsi que les coordonnées de la bille frontale du Latéralis par rapport à l'Axialis étant connues, l'axe de rotation étant le même dans les deux vues, le logiciel calcule l'angle de rotation.

Remarque .

Puisque la translation est compensée et l'angle de rotation calculé, il n'est pas nécessaire de stocker l'image Latéralis par rapport à l'Axialis en mémoire.

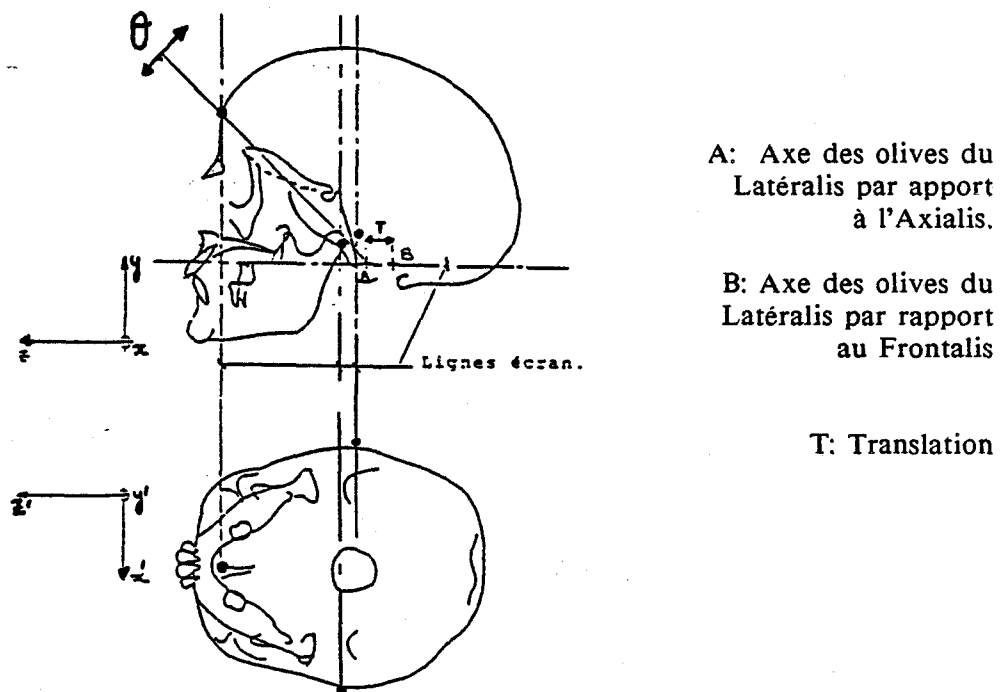


Figure 13 : détermination de la translation et de la rotation:

Les opérations de repérage sont : Axe des olives, bille frontale .

1-4-2-Positionnement définitif de l'Axialis.

Les cotes z des billes de l'Axialis sont corrigées à l'aide de la translation calculée précédemment. Trois lignes verticales écran de cotes z Axialis ainsi que trois lignes horizontales écran d'abscisse x billes Axialis sont tracées. Le télé-crâne Axialis est

positionné sous la caméra selon les repères (fig 14).
L'image de l'Axialis est stockée dans le cadran 1 de la mémoire Pip.

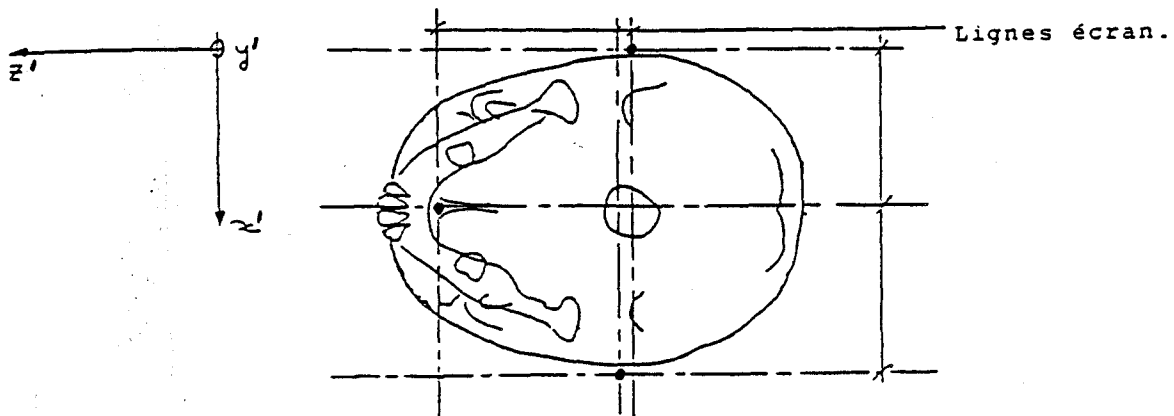


Figure 14 : positionnement définitif de l'Axialis:

1-4-3-Résultat de l'orthogonalisation.

L'angle de rotation θ étant connu, un point repéré dans le Frontalis puis dans le Latéralis sera automatiquement reporté (par calcul de rotation) dans l'Axialis . Toutes les combinaisons sont possibles dès qu'un point est repéré dans deux vues .

Nous avons alors trois images stockées en mémoire:

- Cadran 0: disponible.
- Cadran 1: Axialis.
- Cadran 2: Latéralis par rapport au Frontalis.
- Cadran 3: Frontalis.

1-5-Conclusion

En conclusion de cette opération d'orthogonalisation, nous rappelons les différentes manipulations nécessaires:

- Positionnement du Frontalis.
- Positionnement du Latéralis par rapport au Frontalis.
- Prépositionnement de l'Axialis.
- Repérage sur le Latéralis par rapport à l'Axialis de la bille frontale et de l'axe des olives afin de déterminer la rotation et la translation.
- Positionnement définitif de l'Axialis.

Nous rappelons aussi les hypothèses préliminaires:

- Pas de rotation autour de l'axe z entre le Frontalis et Latéralis.

-Pas de rotation autour de l'axe y entre le Frontalis et l'axialis.

Ce logiciel nous a permis d'acquérir l'expérience de l'opération d'orthogonalisation par une utilisation systématique de la part des orthodontistes . Les résultats obtenus permettent d'envisager pour l'avenir l'écriture d'un logiciel capable de pratiquer automatiquement ces opérations d'orthogonalisation sans aucune intervention manuelle .

1-6-Etalonnage .

Il reste une étape importante à réaliser à la suite de l'orthogonalisation, c'est l'étape d'étalonnage .

Pour effectuer des calculs de distances sur les vues précédemment mémorisées il faut établir une correspondance entre les distances mesurées sur l'écran en nombre de pixels et les distances réelles entre les objets (les radiographies représentent les projections du crâne en vraie grandeur) .

Pour effectuer cet étalonnage on fait la numérisation d'une échelle graduée en millimètres et disposée sous la caméra . Par pointage sur l'écran à l'aide de la souris d'une distance quelconque sur cette échelle on convertit automatiquement le nombre de pixels par centimètre dans la direction verticale .

Les clichés étant orthogonalisés et étalonnés, nous allons présenter un certain nombre d'utilitaires que nous avons développés et mis à la disposition de l'utilisateur pour compléter le dossier d'étude de son patient .

2-REPERAGE DE POINTS ANATOMIQUES .

Lors de l'étude d'un patient les orthodontistes ont besoin d'effectuer un certain nombre de repérages de tracés et de mesures, à partir des différents clichés . En particulier l'utilisateur doit pouvoir :

- Visualiser un cliché quelconque dont l'image et prétraitée ou non .
- Repérer et ou tracer un point anatomique particulier . Le tracé du point sur deux ou trois vues doit être reporté automatiquement dans la troisième vue .
- Tracer un segment repéré par ses extrémités .
- Tracer sur un cliché un segment passant par un point et tangent au contour d'un objet .
- Effacer un point ou un segment .
- Effectuer les tracés des points et des segments dans un ordre indifférent .
- Mesurer des distances entre deux points dans l'espace.
- Mesurer l'angle que font deux segments quelconques .
- Représenter en trois dimensions les tracés effectués avec possibilité :d'agrandissement, de réduction, de rotation, de translation,....
- Les fonctionnalités ont été organisées conformément au graphe de la figure 15 .

Le logiciel interactif correspondant ne présente pas d'originalités particulières, hormis :

- Une organisation et un partitionnement en fonctions élémentaires en suivant des règles de conception d'atelier de génie logiciel qui permet une maintenance plus aisée .
- Quelques solutions techniques que nous décrivons brièvement en annexe 1 en ce qui concerne notamment :
 - >Le tracé des segments et des points en surimpression sur l'écran image sans destruction de l'information . En effet le numériseur utilisé ne permet pas de surimpression graphique sur des images acquises .
 - >Le rehaussement des images des clichés pour permettre une visualisation plus aisée des points anatomiques .

Les figures 16 illustrent le résultat du rehaussement d'une radiographie à l'aide de la formule de Wallis [Prat 78] qui s'énonce (voir annexe 2) :

$$G(i, j) = [F(i, j) - \bar{F}(i, j)] \left[\frac{A\sigma_d}{A\sigma(i, j) + \sigma_d} \right] + [\alpha md + (1-\alpha) \bar{F}(i, j)]$$

Pour le logiciel que nous avons mis au point nous avons choisi des valeurs standard de :
 $\alpha = 0,5$ $A=10$ $md=160$ $\sigma_d=70$

le médecin a donc le choix entre plusieurs outils de prétraitement mis à sa disposition . Nous allons utiliser ces fonctionnalités pour réaliser des mesures de volume dans le chapitre suivant .

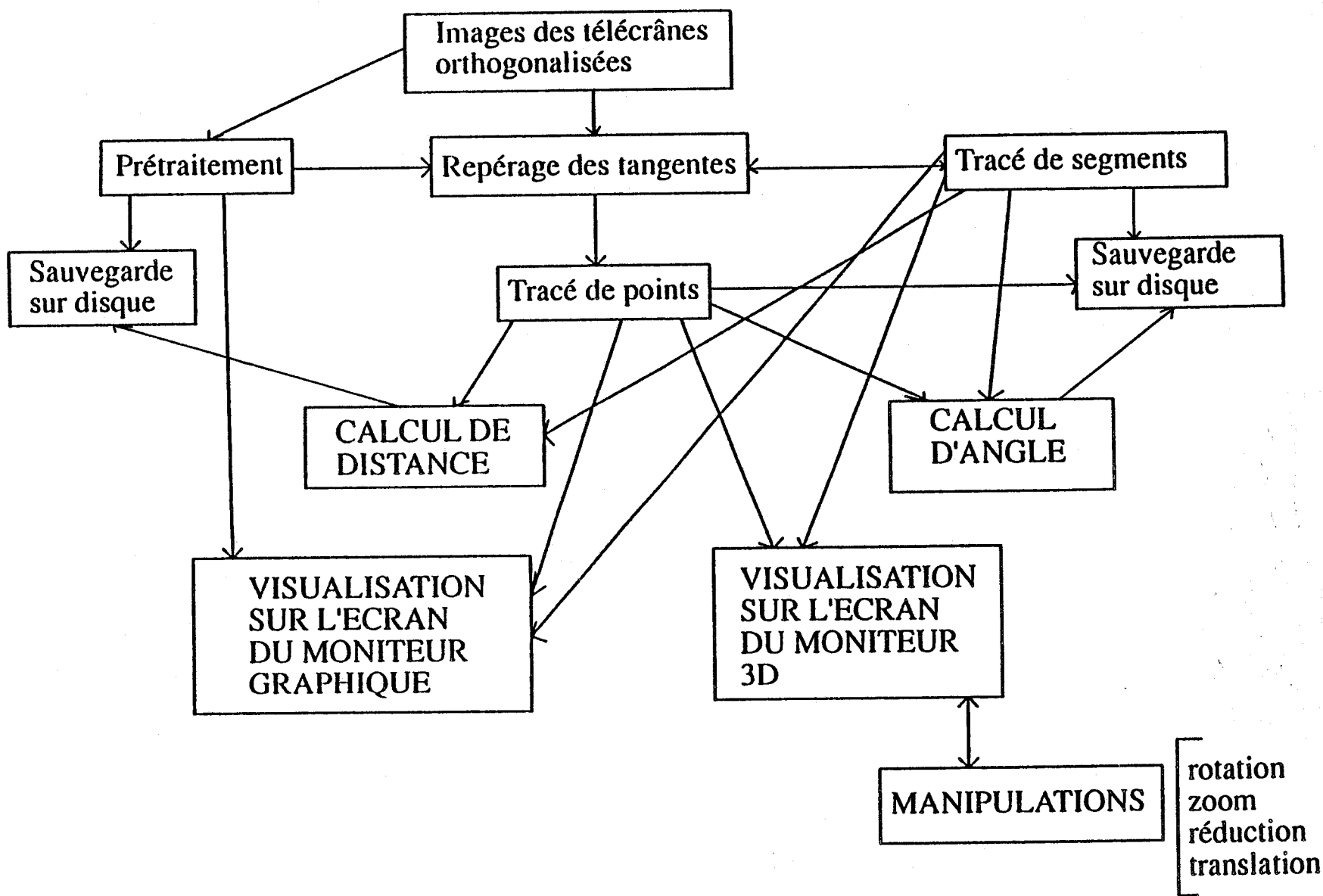


Figure 15 : fonctionnalités développées .

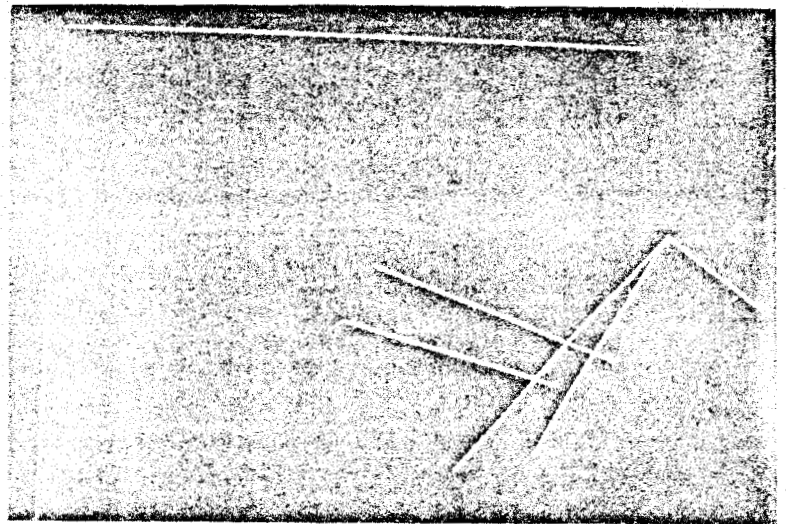
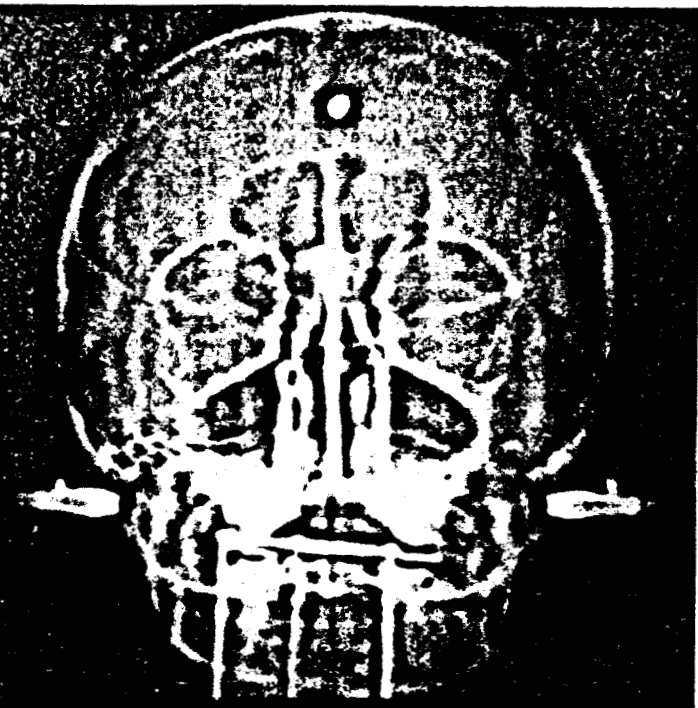


Figure 16 : rehaussement des clichés et tracé de trièdres

3-CALCUL DE VOLUME, ET DE SURFACE

Nous allons passer en revue dans ce chapitre les méthodes classiques de calcul de volume et de surface. Nous décrirons les limites de ces méthodes et des moyens pour accélérer leur calcul.

3-1-Le calcul de surface plane parallèle au plan de visualisation.

La surface plane à calculer est tracée à l'aide de la souris sur l'un des clichés. Connaissant la surface d'un pixel (obtenu lors de la phase d'étalonnage) et le nombre de pixels contenu dans la surface, on en déduit la valeur de la surface. La méthode utilisée pour connaître le nombre de pixels à l'intérieur du contour est basée sur l'algorithme de Smith [Smit 79].

3-2-Le Calcul de volume par la méthode des voxels

Le calcul de volume peut s'effectuer dans notre cas à partir des contours de ses projections prises sous trois incidences orthogonales. La méthode utilisée est une méthode dérivée de la description volumique d'un objet : la méthode des voxels.

Connaissant le volume d'un voxel, on va déterminer le nombre de voxels appartenant au volume que l'on veut calculer. Pour ce faire on va projeter chaque voxel sur les plans des contours. On décidera alors de l'appartenance du voxel au volume si ses trois projections appartiennent aux trois contours projetés.

La méthode des voxels comporte trois inconvénients majeurs :

-Des calculs importants .

-Un manque de précision sur la valeur du volume réel étant donné le faible nombre de projections . L'estimation de la précision a été décrite dans le chapitre quatre sur la reconstruction par la méthode des voxels.

-Une durée de calcul importante

Cette durée de calcul est due au fait qu'il faut parcourir plusieurs fois le tableau de coordonnées des points du contour . On peut la réduire en augmentant la taille du voxel au détriment de la précision et en effectuant un tri préalable de ces données de façon à regrouper celles qui ont des coordonnées communes, associé à une recherche dichotomique des points du contour .

Cependant cette recherche demeure lente et coûteuse . Nous avons préféré mettre au point un technique statistique qui exploite la méthode de Monté Carlo, qui à notre connaissance ne semble pas encore avoir été utilisée pour cette application .

3-3-Le calcul du volume par MONTE CARLO [Brez 88]

Dans le calcul du volume par Monté Carlo on génère de façon aléatoire les coordonnées des voxels. On teste alors l'appartenance au volume recherché de chaque voxel généré . Connaissant le nombre N_v de voxels générés dans le volume de référence V_r (volume contenant le volume recherché), et le nombre N_o de voxels générés appartenant à l'objet on en déduit le volume V_o approximatif de l'objet par la relation : $V_o = (N_o/N_v) V_r$.

Le générateur de nombres aléatoires doit avoir une densité de probabilité uniforme . On considérera tous les points du volume élémentaire comme équiprobables . La génération de nombres aléatoires est basée sur la conversion numérique d'un compteur bouclé . Le code binaire qui décrit le bouclage a un polynôme associé primitif . Il en résulte, que le compteur décrit cycliquement la liste des 2^n codes binaires de n bits et la probabilité

d'apparition de chaque mot code est la même . La densité de probabilité des nombres aléatoires générés est donc en principe uniforme ..

3-3-1-Description mathématique .

Soit une variable aléatoire de moyenne \bar{x} et d'écart type σ , on veut calculer expérimentalement une valeur approchée \tilde{x} de \bar{x} ainsi que de σ . Pour cela on effectue un certain nombre d'expériences, chacune d'elles nous fournissant une réalisation x_i de la variable aléatoire x .

Le problème qui se pose est le suivant : comment estimer \bar{x} et σ à partir de n réalisations $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ de la variable aléatoire x

Soit \tilde{x} la moyenne arithmétique (ou moyenne estimée) de l'échantillon $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$, on a :

$$\tilde{x} = (1/n) \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

\tilde{x} est elle même une variable aléatoire car sa valeur change de façon aléatoire lorsque l'on change d'échantillon statistique . Exprimons la moyenne de x :

On a $E(\tilde{x}) = 1/n \cdot \sum_{i=1}^n \tilde{x} = \bar{x}$ on a un estimateur non biaisé

de même $\sigma_{\tilde{x}}^2 = 1/n^2 \cdot \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \sigma/n^2$

Lorsque n est grand (le nombre d'expériences) l'écart type de \tilde{x} est inférieur à l'écart type d'une réalisation x_i . On démontre (inégalité de Bienaymé Chebyshev) que :
 $\text{pr} (|\tilde{x} - x| > a \cdot \sigma/\sqrt{n}$ a est un nombre quelconque .

x est donc une bonne approximation de \tilde{x} , on en déduit qu'il est fort probable que \tilde{x} appartient à $[\bar{x} - a (\sigma/\sqrt{n}), \bar{x} + a (\sigma/\sqrt{n})]$.

Plus n est grand, meilleure est l'approximation de \bar{x} . Etudions maintenant l'approximation de σ^2 . Posons :

$$S_0^2 = 1/n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad 1)$$

On a $E(S_0^2) = \sigma^2$

On ne peut utiliser cette formule que si l'on connaît exactement \bar{x} . On remplace donc \bar{x} par \tilde{x} dans cette formule :

$$S_1^2 = 1/n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2 \quad 2)$$

La relation 2) est une approximation par défaut de la relation 1) . Pour palier à cet inconvénient on peut diviser par $n-1$ au lieu de n . D'ou

$$S^2 = 1/(n-1) \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2$$

$$S^2 = n/n-1 \cdot [E(x_i^2) - \tilde{x}^2] \text{ avec } E(x_i^2) = 1/n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

S ainsi calculée est une variable aléatoire et sa moyenne est égale à σ^2 .

On choisit une variable tout ou rien . Soit x_i une expérience, $x_i = 1$ si le voxel appartient au volume, sinon $x_i = 0$. on peut calculer le volume statistique à partir de la moyenne arithmétique \bar{x} de l'échantillon statistique (x_1, x_2, \dots, x_n) . Ce volume est égal au rapport entre le nombre de valeurs x_i égales à 1 et le nombre total de x_i . On suppose le volume de référence égal à l'unité .

l'approximation du volume sera d'autant meilleure que la taille de l'échantillon statistique sera plus grande .

Lorsque l'on renouvelle le calcul plusieurs fois sur une série d'expérience X_i d'échantillon (x_1, x_2, \dots, x_n) de même taille on constate que \bar{x} est elle même une variable aléatoire, et l'écart type de la moyenne de cette VA est selon le calcul précédent, quand le nombre N d'expériences est grand, beaucoup plus petit que celui d'une expérience unique .

3-3-2-Expérimentations .

Nous avons d'abord testé les méthodes sur une figure géométrique tracée à la main. Cette figure est un cube .

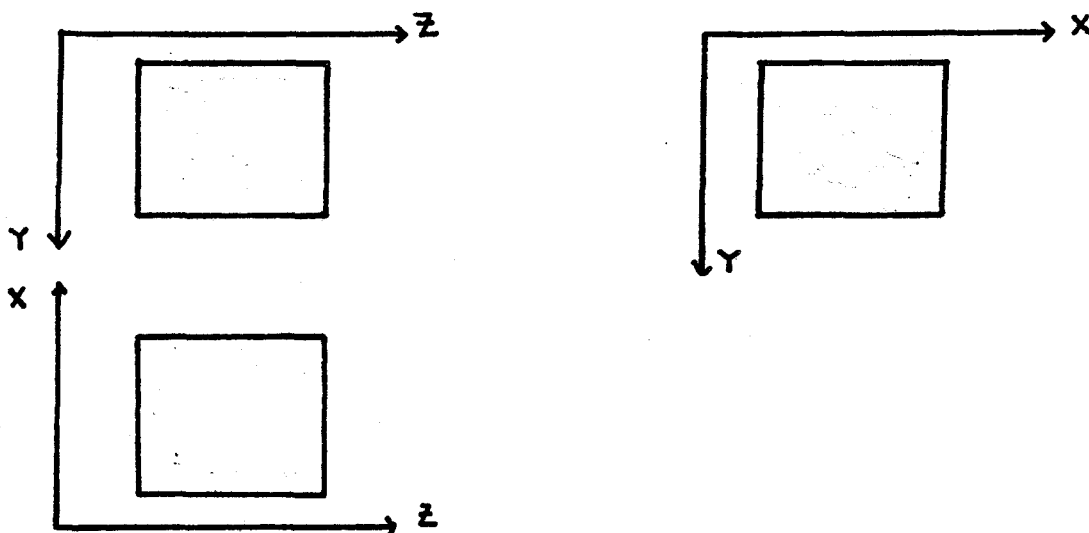


Figure 16 : cube

La méthode par les voxels nous donne : 816 voxels comptés

Dans la méthode par Monté carlo, pour un volume élémentaire de 1000, on génère 500 coordonnées aléatoirement . On compte alors 398 voxels appartenant au volume . Le volume par Monté carlo nous donne $V = (398/500) 1000 = 796$. soit un pourcentage d'erreur par rapport à la méthode des voxels de :

$$\text{Erreur} = ((816 - 796) / 816) 100 = 2.45 \%$$

La durée de calcul, sur un micro-ordinateur 286-16Mhz, est de l'ordre de 4 secondes par la méthode des voxels . Elle est inférieure à la seconde par la méthode de Monté carlo

Autre exemple .

La méthode par les voxels nous donne : 5348 voxels comptés

Dans la méthode par Monté carlo pour un volume élémentaire de 8000, on génère 500 coordonnées aléatoirement . On compte alors 324 voxels appartenant au volume . Le volume par Monté carlo nous donne $V = (324/500) 8000 = 5184$. soit un pourcentage d'erreur par rapport à la méthode des voxels de :

$$\text{Erreur} = ((5348 - 5184) / 5348) 100 = 3,08 \%$$

La durée de calcul est de l'ordre de 13 secondes par la méthode des voxels . Elle est inférieure à 3 secondes par la méthode de Monté carlo

Nous avons ensuite appliqué cette méthode pour des volumes relevés à partir de deux clichés, les résultats sont donnés figure 17).

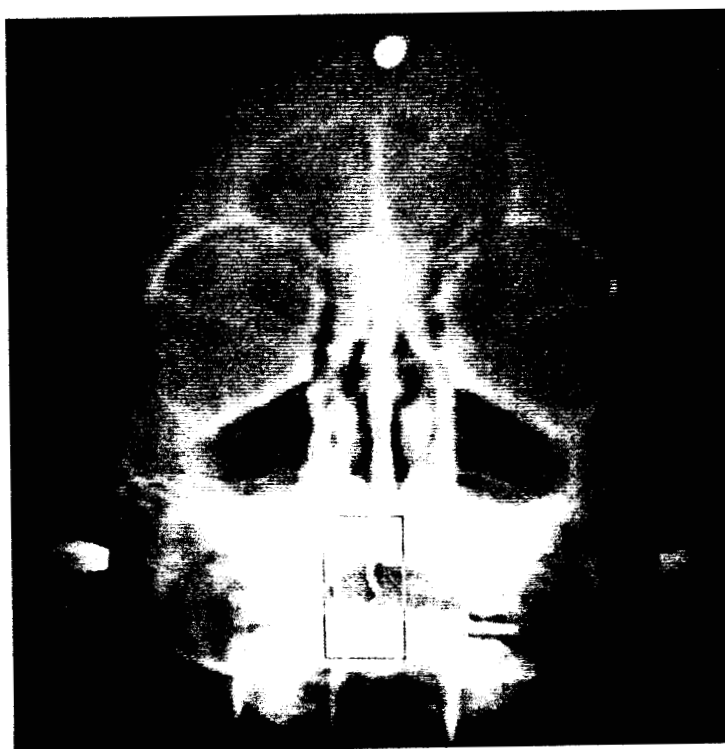


Figure 17 : quelques résultats

Le volume estimé par la méthode des voxels est de l'ordre de $0,86\text{cm}^3$ pour une durée de 2,40 minutes, par contre la méthode de Monté Carlo donne un volume de l'ordre de $0,821\text{cm}^3$ pour une durée d'environ 40 secondes

3-4-Conclusion

Les résultats obtenus par Monté carlo nous permettent d'avoir un bon ordre de grandeur du volume recherché, pour une durée de calcul environ 4 fois plus faible que pour les voxels .

La croissance de la mâchoire chez l'enfant s'effectue dans les trois dimensions . Il est difficile d'apprécier l'évolution de la croissance à partir de ces trois seules projections . On envisage dans le chapitre suivant de reconstruire un certain nombre de dents en trois dimensions pour permettre une meilleure analyse qualitative de la déformation de la mâchoire au cours de la croissance .

4-RECONSTRUCTION 3D d'ELEMENTS DE LA MACHOIRE

4-1-Introduction .

L'information dont on dispose est un ensemble de trois clichés radiographiques du crâne. L'objet 3D est alors défini par des images 2D , et il s'agit de le reconstruire en trois dimensions .

Dans ce chapitre nous allons essayer d'exposer la démarche et les conclusions qui nous ont amené à choisir la méthode de reconstruction que nous avons développée .

Dans notre cas , on dispose de projections de la dent prise sous trois incidences " pseudo orthogonale " : une vue de face , une vue de profil et une vue de dessous . Nous avons développé, dans un premier temps, le cas de la reconstruction des dents de la mâchoire . Ensuite nous avons appliqué la méthode sur le cas d'autres volumes .

La première idée a consisté à utiliser la primitive voxel pour la reconstruction, puis en raison des résultats obtenus nous avons choisi l'hypothèse de la forme elliptique souvent rencontrée dans les applications biomédicales . Finalement en comparant ces deux méthodes nous avons décidé de reconstruire les dents en s'appuyant sur un modélé

Nous allons reprendre ces différentes étapes .

4-2-Reconstruction par la méthode des voxels .

On définit un volume de base, contenant la dent à reconstruire, que l'on divise en volumes élémentaires : les voxels . Pour la reconstruction on utilise une technique analogue à celle du calcul du volume .On décidera qu'un voxel appartient au volume de la dent si ses projections appartiennent aux projections de la dent . Dans ce cas on enregistre ses coordonnées.

Néanmoins une telle méthode demande un grand nombre de projections pour avoir une représentation assez fidèle . Dans notre cas, nous disposons de trois projections et la reconstruction ne peut se faire que conformément à la technique illustrée par la figure 18.

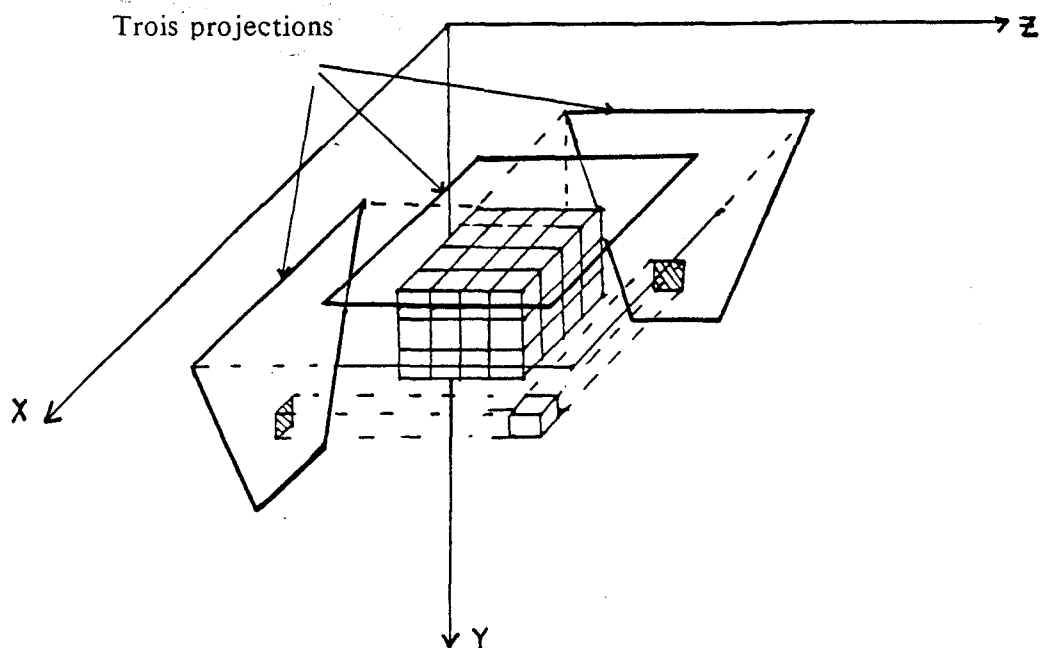


Figure 18 : contours définis sur les trois projections .

-Dans la méthode par les voxels le coût des algorithmes est très élevé, il dépend de la précision désirée . la précision évolue comme la taille de l'objet et la taille mémoire varie proportionnellement au cube de la taille de l'objet . Cependant la suggestion de la taille mémoire tend à s'estomper au fur et à mesure que la maîtrise de la technologie progresse et permet des tailles mémoires de plus en plus importantes . Entre 1982 et 1992 la taille mémoire des micro-ordinateurs très courants a chaque année doublé et le coût du Moctet a été réduit de moitié environ . En 1991 la taille mémoire moyenne est de 32Moctets, le coût du Moctet est égal au prix de 42Kg de pain .

Souvent il existe un effet de superposition des dents sur le cliché axial et il arrive que l'on ne puisse pas attribuer un profil à la dent à reconstruire . Dans ce cas, compte tenu que pour les dents il est très difficile d'exploiter la notion de densité, il faut se donner à priori une forme de section . La forme de la section qui ressemble le plus à celle d'une canine ou d'une incisive est une ellipse . Cette forme elliptique est souvent employée dans les applications biomédicales .

4-3-Reconstruction par la méthode des ellipses .

Nous sommes parti de ce constat pour effectuer une reconstruction d'une dent dont les contours sont réguliers.

Le principe de la reconstruction consiste simplement pour diverses ordonnées y à inscrire une ellipse d'équation $x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$ dans le rectangle de dimension $2a, 2b$ défini par les lignes de rappel issues des deux projections (fig 19) .

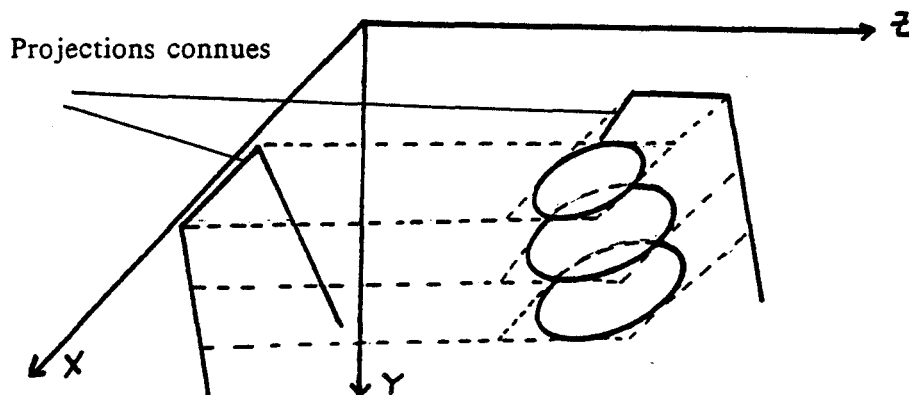


figure 19 : reconstruction par la méthode des ellipses

-Dans le cas de la méthode par les ellipses le problème de l'espace mémoire ne se pose pas.

L'hypothèse de la forme elliptique n'est vraie que pour certaines dents (incisives, canines). Elle n'apporte pas de solution globale mais elle permet de résoudre une partie du problème .

Remarque.

Dans le cas de la méthode des voxels ou de celle des ellipses il reste une zone que l'on ne pourra d'écrire par manque d'informations (fig 20) . Si la dent peut être supposée "symétrique " la difficulté est résolue.

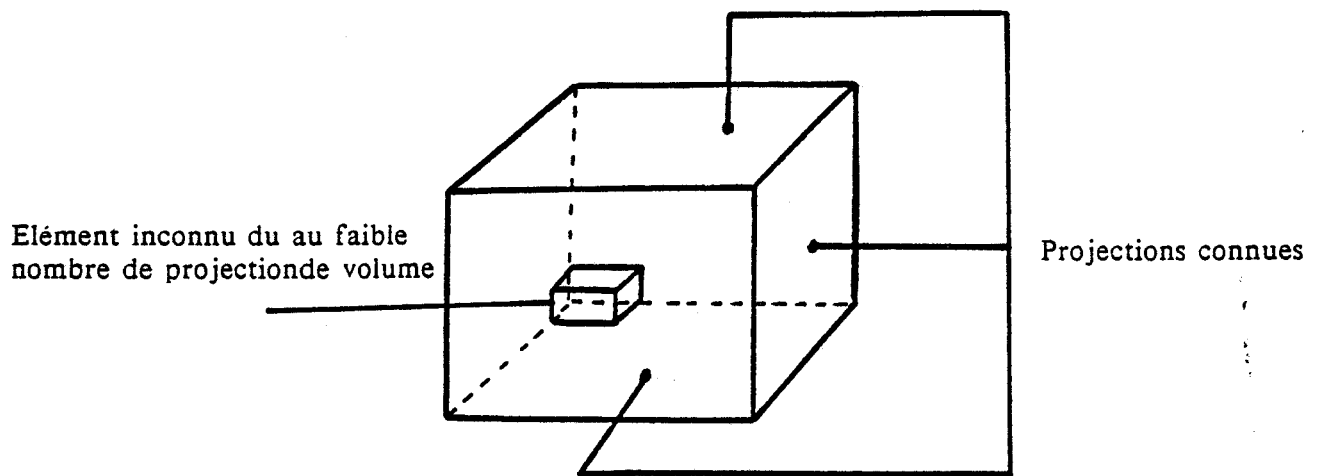
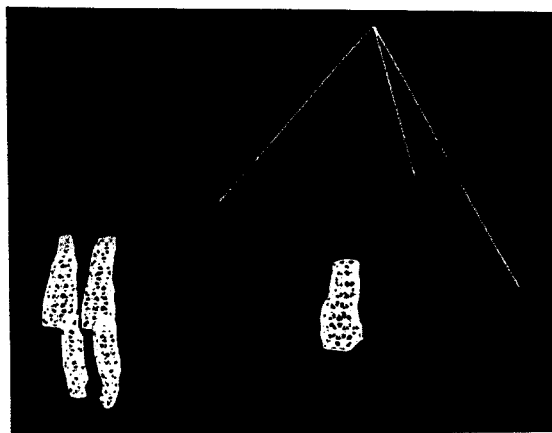
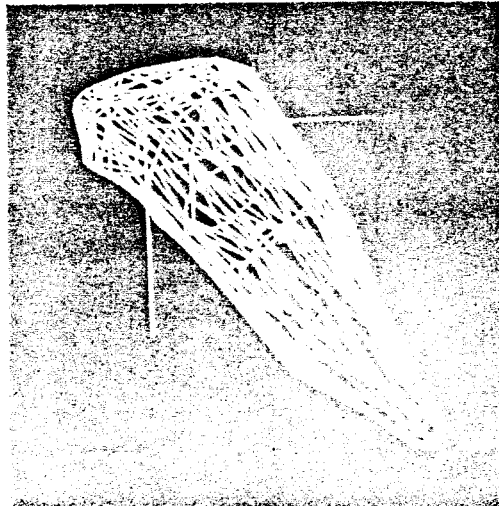


Figure 20 :

4-4-Expérimentation .

Nous présentons un certain nombre de reconstructions de dents à l'aide de la méthode des ellipses (fig 21) et nous donnons la durée de chaque opération. .



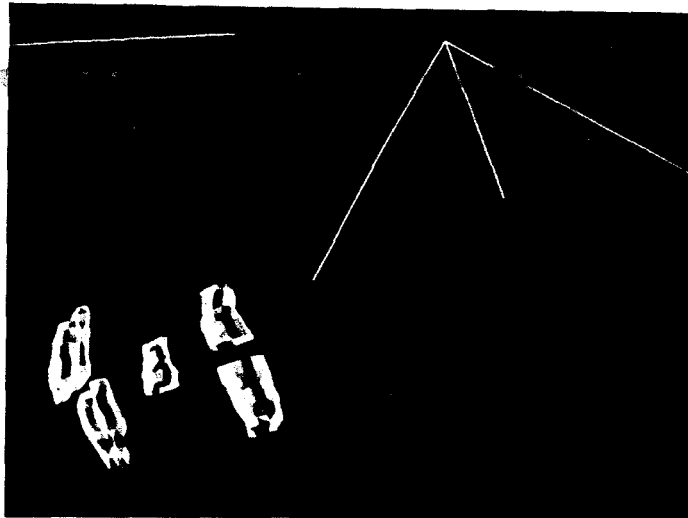
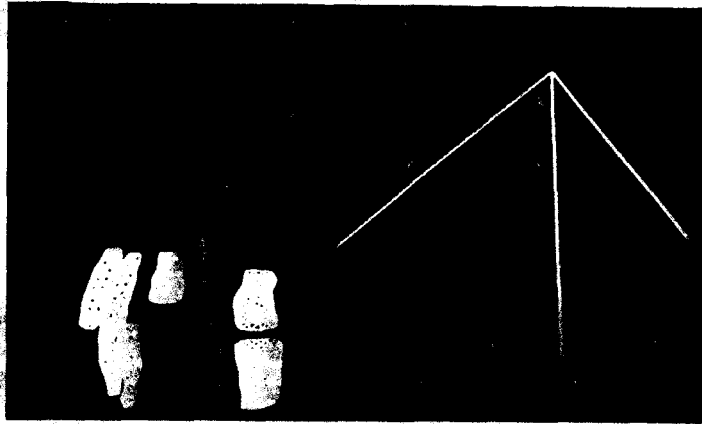


Figure 21 : exemples de reconstructions à l'aide de la méthode des ellipses.

4-5-conclusion sur la reconstruction par les sections elliptiques

La méthode de reconstruction à l'aide des ellipses est une méthode simpliste . Elle offre cependant l'avantage de donner un rendu réaliste à peu près satisfaisant pour les incisives et les canines . Par contre ce n'est pas une méthode rigoureuse et nous avons décidé de développer une étude de reconstruction qui utilise un modèle .

Par ailleurs nous avons créé un certain nombre d'utilitaires qui offrent à l'utilisateur la possibilité de visualiser plusieurs dents et les repères anatomiques (trièdres) associés, et ceux ci sous diverses incidences .

5-RECONSTRUCTION A L'AIDE D'UN MODELE

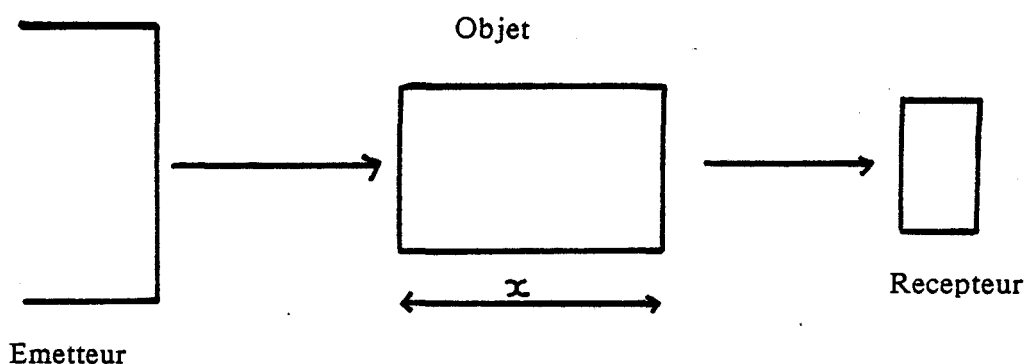
Le modèle que nous avons utilisé est une dent extraite d'un dentier modèle et représentée par une succession de tranches parallèles . On va ramener le problème de la reconstruction 3D, à celui d'une suite de reconstructions 2D.

Chaque coupe du modèle définie à une altitude donnée est supposée avoir une dimension nominale . Le principe de la reconstruction consiste à modifier la taille de la coupe modèle pour que ses projections coïncident aux projections de la coupe correspondante de la dent vraie visible sur les clichés orthogonaux .

Le premier problème consiste à trouver une solution simple qui permette d'extrapoler les courbes de densités de la surface recherchée à partir d'un modèle et de ses courbes de densités.

5-1-Méthode proposée

Dans notre cas la source d'acquisition est une source rayon X (fig 22) . En général à la traversée d'un objet homogène d'épaisseur x , le rayonnement monochromatique X est partiellement absorbé . Son intensité résultante est :



$$I = I \exp (-\mu x)$$

μ : est le coefficient d'absorption linéaire.

I : est l'intensité de rayonnement au départ.

x : épaisseur de l'objet .

Dans certains cas on peut (angiographie) exploiter des profils dit de densités pour tenir compte de l'épaisseur de l'objet traversé par le rayonnement pour pratiquer une technique de reconstruction .

Dans notre cas les objets se superposent sur les radiographies et on ne peut mettre en évidence les profils de densités d'un seul objet à la fois .

Nous avons essayé de contourner cette difficulté en nous servant des profils de densité des coupes du modèle pour les modeler de telle sorte que leurs projections coïncident avec celles de l'objet réel .

La technique que nous proposons a été baptisée technique d'extrapolation .

5-1-1-Extrapolation des courbes de densité

Soit une dent connue que l'on appelle modèle . On effectue une découpe de ce modèle en un ensemble de tranches parallèles . Chacune des sections fournit deux profils de densité(fig23)

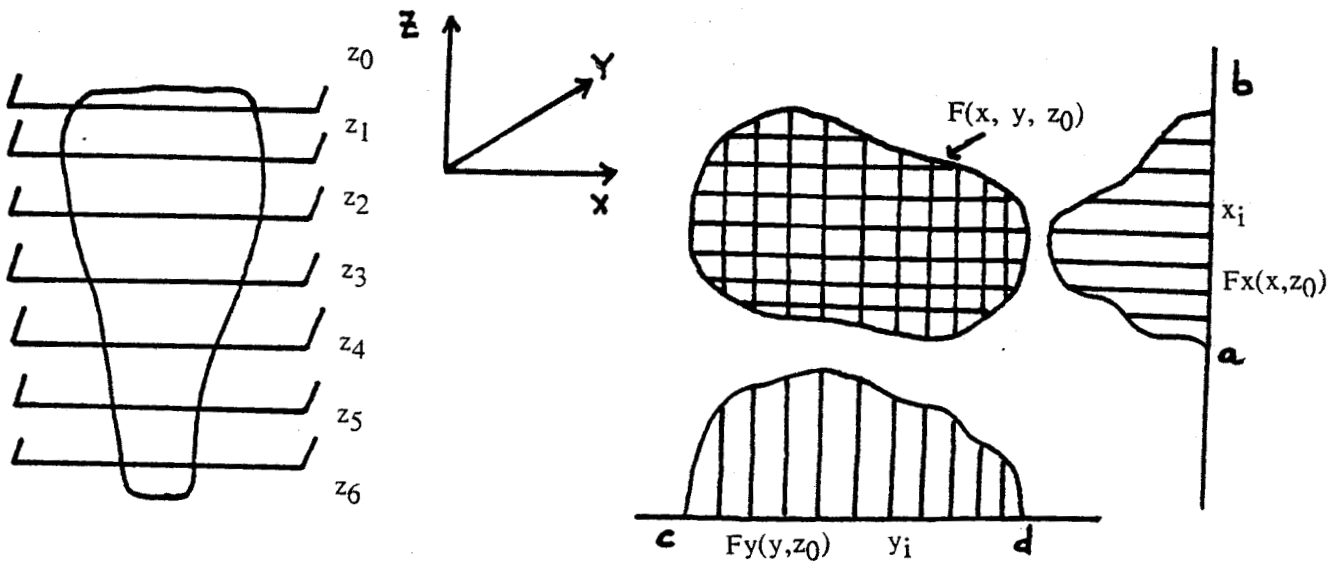


Figure 23 : modèle et ses profils de densité .

La seule information disponible à partir des clichés sont les contours de la dent réelle sous incidences orthogonales . L'opération d'extrapolation consiste à dilater ou comprimer la largeur et l'amplitude des courbes de densité de la dent modèle de façon à ce quelles correspondent aux contours de la dent réelle (fig 24) .

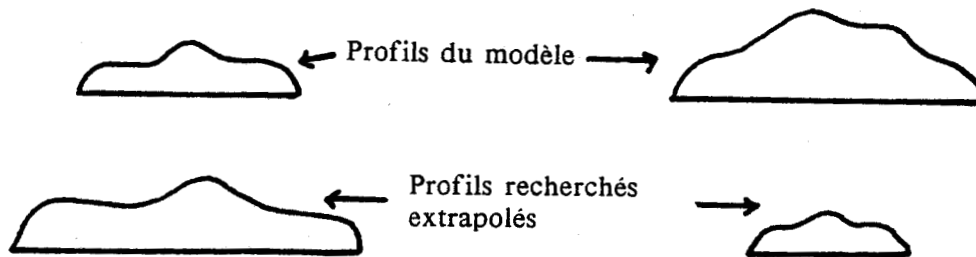


Figure 24 : extrapolation des courbes de densité

Considérons une section du modèle définie comme suit :

Pour l'ordonnée $z=z_0$ la section Sz_0 est décrite par la fonction $f(x_i, y_j, z_0)$ où x_i, y_j, z_0 sont des entiers . x_i appartient à $[a, b]$ et y_j appartient à $[c, d]$, a, b, c, d sont des entiers (fig)

La fonction $f(x_i, y_j, z_0)$ prend la valeur 1 ou 0 suivant que le point de coordonnées (x, y) se trouve ou non à l'intérieur de la surface .

On associe à cette la fonction la courbe de densité discrète suivant x :

$$F_x(x_i, z_0) = \sum_{y_i=c}^d f(x_i, y_i, z_0) \quad x_i \in [a, b]$$

Et la courbe de densité suivant y :

$$F_y(y_i, z_0) = \sum_{x_i=a}^b f(x_i, y_i, z_0) \quad y_i \in [c, d]$$

Soient $[a', b']$ et $[c', d']$ les limites extrêmes de la section droite de la dent réelle sur les axes ox et oy .

On reconstruit les profils de densité $F'_x(x_i, z_0)$ et $F'_y(y_j, z_0)$ de la dent réelle à partir de ceux de la dent modèle .

Pour cela on effectue une opération dite d'extrapolation qui consiste à enlever ou à ajouter des échantillons sur les profils de densité du modèle suivant que les limites du contour de la dent réelle sont supérieures ou inférieures à celles du modèle .

Le nombre de raies à ajouter ou à enlever sur les profils du modèle est égal à $|(b-a)-(b'-a')|$ sur $F_x(x_j, z_0)$ et à $|(c-d)-(c'-d')|$ sur $F_y(y_j, z_0)$.

On suppose en première approximation que la densité de probabilité de ressemblance, entre la forme du modèle et celle de la dent réelle, décroît depuis le barycentre vers l'extrémité.

Pour cette raison on choisit les échantillons à enlever ou à ajouter en les répartissant symétriquement sur les segments $[a,b]$ et $[c,d]$ en partant des extrémités et en allant vers le centre.

On voit que cette méthode n'est valable que dans le cas où le modèle a une dimension voisine de l'objet réel. Sinon on peut fixer une loi de probabilité de ressemblance. Par exemple on peut supposer une loi linéaire croissante des bords vers le centre ou une loi gaussienne centrée sur le barycentre. On pondère alors le pas entre les raies à enlever ou ajouter proportionnellement à cette loi de probabilité.

Nous n'avons développé que la première méthode parce qu'elle suffisait dans les cas rencontrés jusqu'à présent.

L'opération d'extrapolation comporte deux étapes. L'étape de modification du nombre d'échantillons et l'étape de modification de l'amplitude de ces échantillons.

Nous allons donner les détails de la 1ère étape de l'opération d'extrapolation à l'aide d'un exemple en considérant le cas où le contour du modèle est plus grand que le contour de la dent réelle, et ceux de la 2ème étape dans le cas où le modèle est plus petit que le contour de la dent réelle.

5-1-2-Cas du contour du modèle plus grand que le contour de l'objet réel.

les calculs vont être effectués en considérant le profil de densité suivant x .

soit le profil de densité suivant x de la dent modèle à $z=z_0$ et $[a',b']$ l'excursion du contour de la dent réelle (fig 25)

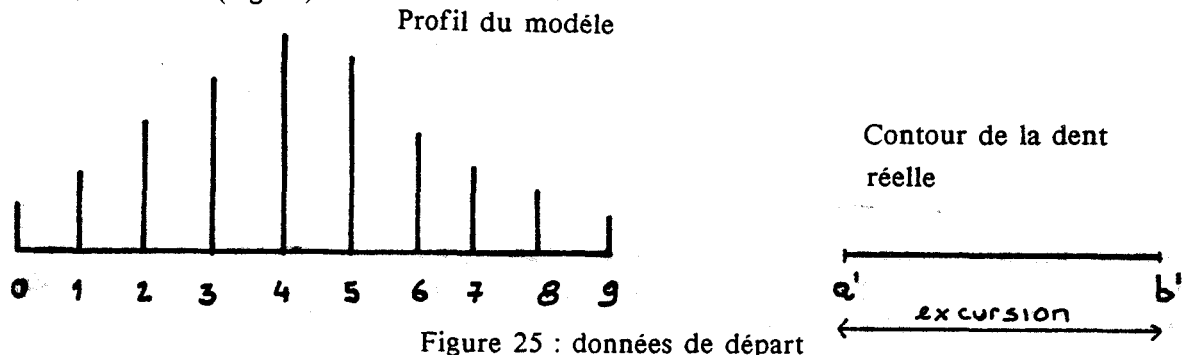


Figure 25 : données de départ

Le nombre de raies du profil du modèle est par exemple égal à 10.

le nombre de raies du profil de la dent réelle est inconnu, mais l'excursion est par exemple égale à 6.

l'algorithme d'extrapolation est le suivant :

-a) Chercher le nombre de raies à enlever.

Le nombre de raies à enlever est donné par :

$$\text{nombre} = \text{nbre raies modèle} - \text{nbre raies possibles contour dent réelle} = 4$$

-b) Définir le pas sur le modèle pour choisir les raies à enlever

$$\text{Pas} = \text{Entier}(0.5 + \text{nombre de raies du modèle} / (\text{le nombre de raies à enlever} + 1)) = 2$$

-c) Enlever 4 raies sur le modèle avec un pas de 2 .

Pour ne pas déséquilibrer l'opération on commence de part et d'autre du modèle, et on assure ainsi une certaine symétrie du contour recherché . Dans le cas contraire la modification portera sur l'une des extrémités du modèle et le contour réel résultant n'aura plus la même forme que le modèle .

La 1ère étape d'extrapolation va permettre :

-De conserver les raies les plus proches du centre de gravité , qui sont celles dont l'existence est la plus probable .

-d'éliminer les raies extrêmes les moins probables .

Le résultat est donné figure 26 .

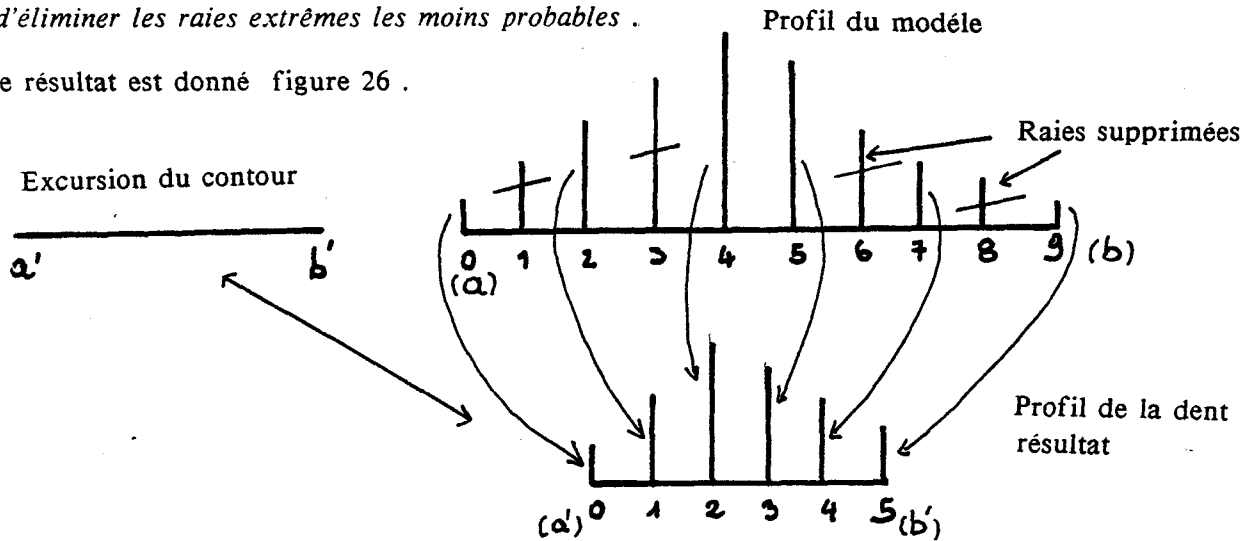


Figure 26 : résultat de l'extrapolation .

En pratique le pas est généralement toujours supérieur ou égal à deux . Dans le cas où il est égal à un (cas extrême) le contour réel est alors très proche du modèle et le nombre de raies à modifier est toujours égal à deux .

Remarque .

Dans le cas où le nombre de raies à modifier est impair, pour respecter le principe de symétrie de l'opération d'extrapolation on n'enlèvera ou n'ajoutera que le nombre pair immédiatement inférieur au nombre de raies calculé .

5-1-3-Modification de l'amplitude .

Nous avons présenté la technique nous permettant de modifier la largeur des courbes de densité nous allons maintenant aborder le problème de l'amplitude de ces raies.

Lorsque l'on modifie la courbe de densité en largeur (augmentation ou réduction du nombre d'échantillons) la modification sur l'amplitude ne suit pas forcément la même loi il faut donc aussi réajuster l'amplitude des raies pour garder une certaine homogénéité entre la largeur et la hauteur.

Nous avons donc défini un facteur multiplicatif correctif K . Ce facteur va, de la même manière, augmenter ou réduire l'amplitude des raies en s'appuyant toujours sur le modèle .

Dans le cas où le contour de l'objet réel est supérieur au modèle, le facteur K_x est donné par: $K_x = (b' - a' / b - a)$.

Où $(b' - a')$ représente la largeur de la courbe de densité du contour réel et $(b - a)$ représente la largeur de la courbe de densité du contour réel

Dans le cas où le contour est inférieur au modèle Kx est donné par $Kx = (b - a / b' - a')$:

Le même raisonnement s'applique pour le profil de densité suivant y

5-1-3-1-Exemple

Cas du contour du modèle plus petit que le contour de l'objet réel .

Le nombre de raies du profil du modèle est par exemple égal à 6 .

Le nombre de raies du profil de la dent recherchée est inconnu, mais l'excursion est par exemple égale à 10 .

L'algorithme est le suivant :

-a) Chercher le nombre de raies à ajouter :

Le nombre de raies à ajouter est donné par :

$$\text{nombre} = \text{nbre raies modèle} - \text{nbre raies possibles contour dent réelle} = 4$$

-b) Définir le pas sur le contour pour ajouter les raies .

$$\text{pas} = \text{Entier} (0.5 + (\text{nombre de raies du modèle} / \text{nombre de raies à ajouter} + 1)) + 1 = 2$$

Ajouter 4 raies sur le contour avec un pas de 2 .

On procédera de manière symétrique de la même façon que précédemment, pour ne pas déséquilibrer le contour recherché (fig 27). L'information supplémentaire va être localisée sur les extrémités du contour , lieu où la probabilité d'existence d'une raie est la plus faible , donc l'erreur sera minimisée.

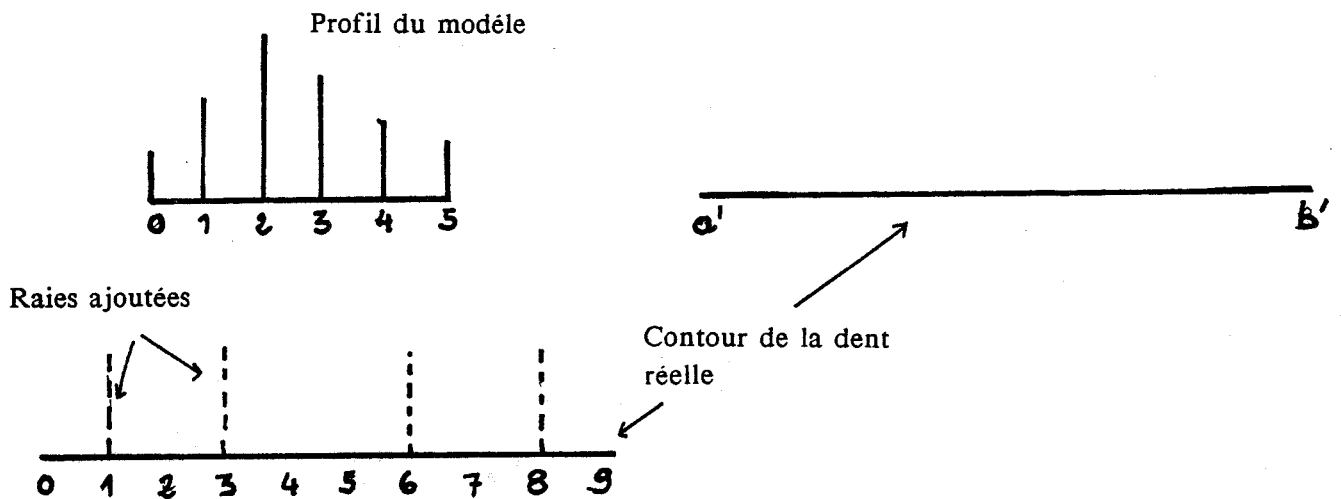


figure 27 : ajout de raies

Il suffit ensuite de compléter le contour à l'aide du modèle en commençant par le barycentre et en s'éloignant vers les extrémités. (fig 28)

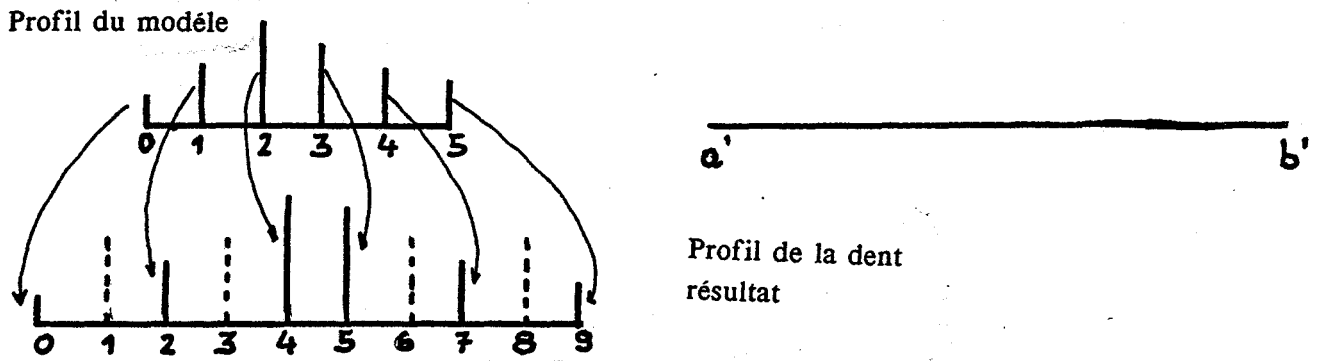


Figure 28 : résultat final

Les raies que l'on ajoute ont une amplitude qui va dépendre de leur voisinage immédiat . Dans ce cas en première approximation on affectera à l'amplitude de ces raies la valeur moyenne des amplitudes des raies qui les encadrent .

Soit : $A'x'_i = (Ax_{i-1} + Ax_i) / 2$ (fig 29) :

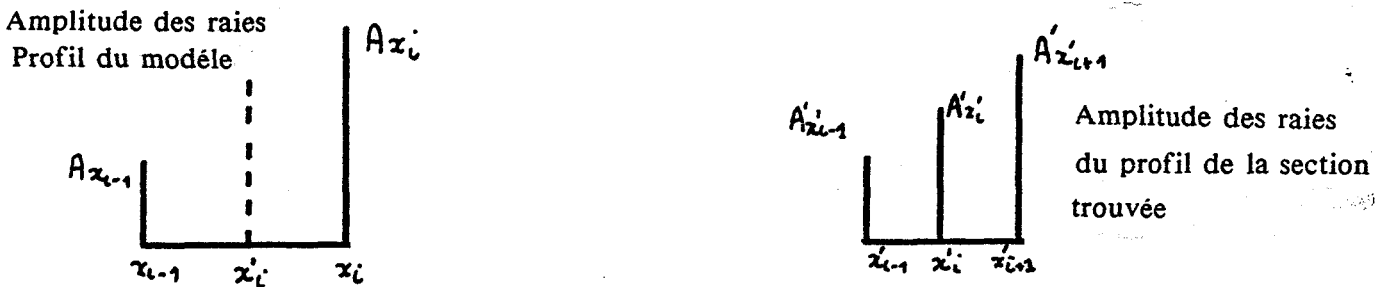


Figure 29 : modification de l'amplitude d'une raie

L'opération finale consiste à moduler l'ensemble des amplitudes du contour par le facteur K précédemment défini, d'où dans notre exemple : $Kx = 10 / 6 = 5/3$ (fig 30)

Remarque.

Dans le cas où le nombre de raies, du contour de la dent réelle, à ajouter est égal au nombre de raies du modèle, on se trouve dans la configuration suivante où deux raies du contour de la dent réelle à modifier sont adjacentes (fig 31) .

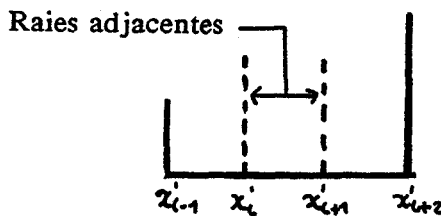


Figure 31 : raies adjacentes

On ne peut en première approximation attribuer une amplitude à ces raies .

On propose alors dans ce cas de figure de forcer l'amplitude de la raie du contour de la dent réelle d'abscisse $x'_i=i$ (respectivement $x'_{i+1}=i+1$) à la valeur de l'amplitude connue de la raie d'abscisse $x'_{i-1}=i-1$ (respectivement $x'_{i+2}=i+2$) et l' autre raie d'abscisse $x'_{i+1}=i+1$ (respectivement $x'_i=i$) est obtenue de la manière classique :

$$A'x'_{i+1} = (Ax'_{i+1} + A'x'_{i+2}) / 2 \text{ (respectivement } A'x'_i = (A'x'_{i-1} + A'x'_{i+1}) / 2 \text{) (fig 33)}$$

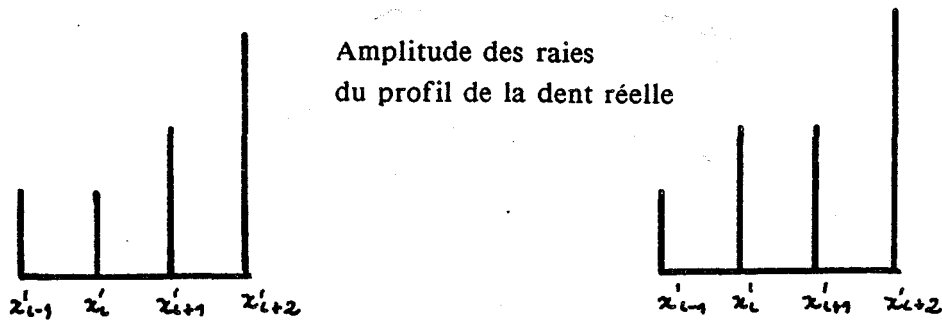


Figure 33 : résultat

5-1-4-Considération sur le bruit

Jusqu'à présent nous n'avons pas tenu compte de la présence du bruit . Généralement le bruit sur les radiographies est dû en majorité :

- Au faible contraste entre les différents objets et à leur superposition .
- A la qualité de la numérisation
- Aux erreurs de quantification.. .
- A la segmentation

Toutes ces erreurs vont se répercuter dans la phase de segmentation où les contours seront détectés avec une erreur ϵ . Cette erreur permet d'encadrer le contour réel par deux sous contours distants de ϵ (fig 34)

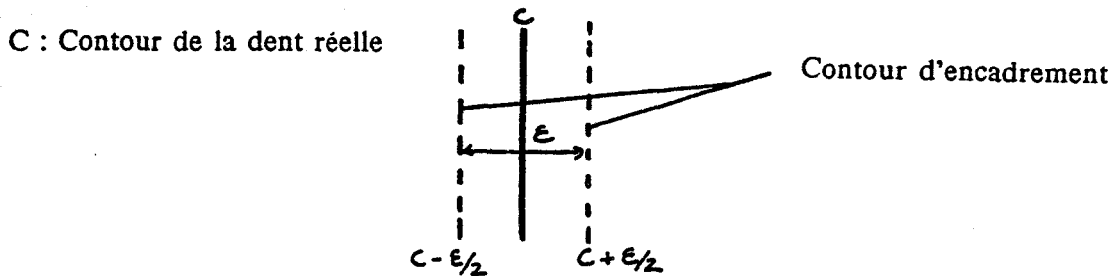


Figure 34 : contour réel

On peut alors associer à cet encadrement une infinité de contours qui vont donner une infinité de courbes de densité possibles . De la même façon la méthode d'extrapolation proposée engendre des erreurs sur les courbes de densités résultantes . Ces courbes de densités peuvent être considérés comme une solution possible parmi l'ensemble des solutions qui correspondent au contours appartenant à $[C - \epsilon/2 , C + \epsilon/2]$

Si on suppose un bruit poissonnien [Yang 89] [Slum 82] chaque point des deux profils de densité est encadré par une limite inférieure et une limite supérieure . On peut encadrer chaque profil de densité par deux courbes(fig 35) d'abscisses à l'origine situées à $x_i - \sqrt{x_i}$ et $x_i + \sqrt{x_i}$ et d'amplitude $A + \sqrt{A}$ et $A - \sqrt{A}$.

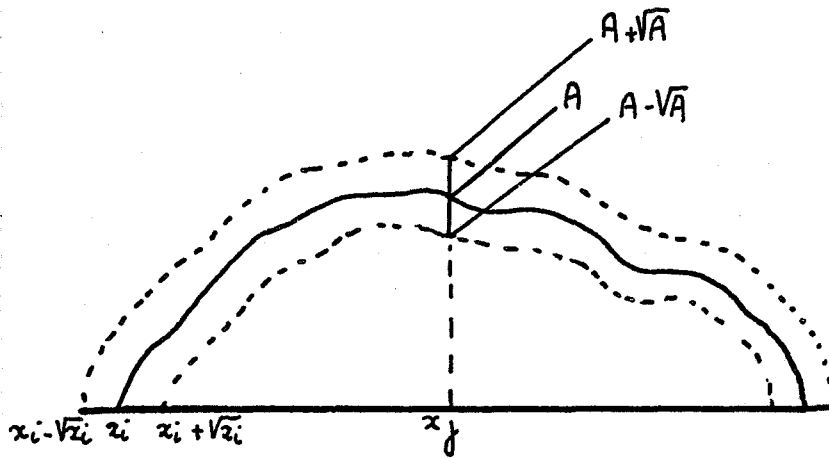


Figure 35 : encadrement d'un profil de densité

Les courbes de densité extrapolées conviendront pour la reconstruction si elles sont comprises dans l'intervalle défini par la limite inférieure et la limite supérieure .

Pour cette reconstruction le contour réel est inconnu, donc on ne connaît pas l'excursion maximale et minimale des courbes de densité réelles .

Mais nous avons utilisé un autre critère pour valider les profils de densité extrapolés . En effet, pour que la reconstruction soit possible il faut qu'il existe entre les deux courbes de densités extrapolées suivant x et suivant y une différence de surface relative inférieure à 30%.

Lorsque les deux courbes de densité ont des surfaces égales on dit qu'elles sont compatibles .

Pour réaliser notre reconstruction, nous avons choisi un méthode parmi celles qui la permettent lorsque les profils de densité sont bruités (non compatibles) .

Dans le chapitre suivant nous faisons une étude critique des différentes méthodes de reconstruction et nous choisissons celle qui convient le mieux aux contraintes que nous nous sommes fixées .

6-RECONSTRUCTION D'UNE SURFACE A PARTIR DE SES COURBES DE DENSITE

6-1-Introduction

En général pour avoir une bonne reconstruction il faut disposer d'un grand nombre de projections . Les algorithmes sont alors compliqués et les coûts de calculs très importants . Il est montré que si l'on s'intéresse aux objets sous leur aspect binaire, le problème de la reconstruction peut alors être simplifié et seulement quelques projections orthogonales sont suffisantes pour obtenir une bonne reconstruction approximative .

Malheureusement il n'y a pas de solution unique dans ce genre de problème, il est nécessaire d'introduire certaines hypothèses pour réduire l'ambiguïté apportée par le modèle binaire . Suivant le type d'hypothèse utilisée, les méthodes de reconstruction sont divisées en deux classes

1) Les méthodes de reconstructions directes utilisant les hypothèses sur la forme de la section elle-même.

2) Les méthodes de reconstruction indirectes faisant appel aux informations supposées connues a priori ou aux modèles prédéterminés en considérant les bases physiologiques.

Nous allons rappeler le principe d'un certain nombre d'algorithmes pour justifier le choix de la solution que nous avons adoptée, en ce qui concerne la reconstruction en 2D de la dentition .

6-1-1-Méthodes de reconstruction directes

La connaissance a priori la plus couramment utilisée et la plus triviale, est l'approximation de la symétrie géométrique, de la section de l'objet à reconstruire.

6-1-1-1-Méthode de Shi-Kuo Chang et C.K Chow [Chan 73]

Dans cette méthode on suppose chaque tranche à reconstruire convexe et symétrique. Le contour d'une surface convexe et symétrique, peut être déterminé par deux projections et une partie du contour. Nous allons décrire la méthode de reconstruction à partir de l'exemple figure 36 qui représente deux contours symétriques par rapport à l'origine .

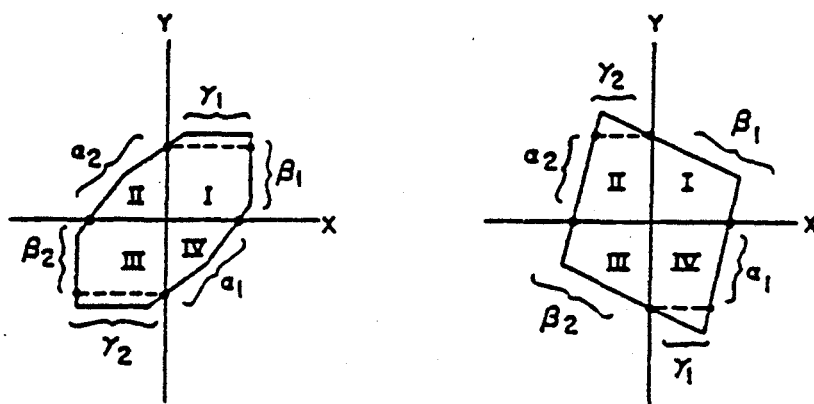


Figure 36 : méthode de Chang et Chow

On suppose α_1 connue, l'objet convexe et symétrique et on dispose des courbes de densité. On déduit α_2 de α_1 par symétrie. On connaît alors β_2 à partir de α_1 , β_1 à partir de α_2 utilisant les courbes de densité. On en déduit γ_1 à partir de α_1 et β_1 , γ_2 à partir de α_2 et β_2 par les courbes de densité. En définitif le problème de la reconstruction est réduit au problème du choix de α_1 . On va déterminer la forme et la position de α_1 en effectuant une reconstruction pour chaque α_1 . On choisira le α_1 qui permet d'obtenir un objet convexe et symétrique dont les courbes de densité diffèrent le moins possible des courbes initiales. Cette technique est simple mais très contraignante sur la forme de l'objet à reconstruire. Cependant elle a été utilisée pour la reconstruction du ventricule gauche.

6-1-1-2-Méthode de la courbe médiane de Z.D.bai [bai 86] [Yang 89]

Si on considère une surface à reconstruire $f(x,y,z_0)$, la courbe médiane est l'ensemble des milieux de segments. Les segments sont définis comme l'ensemble des points de $f(x,y,z_0)$ à x fixé (fig 37) contenus à l'intérieur du contour (segment AB). Connaissant la courbe médiane et l'un des deux profils de densité on reconstruit la surface. La technique de reconstruction est basée sur le calcul de la courbe médiane. On modélise la courbe médiane à partir d'un polynôme. Le calcul des coefficients du polynôme se fait de façon itérative. Pour chaque valeur de coefficient on reconstruit la surface à partir d'une courbe de densité. On calcule ensuite l'erreur quadratique entre la deuxième courbe de densité connue et celle calculée à partir de la surface reconstruite. On décide de la valeur des coefficients pour une erreur quadratique minimale. Cependant les contours de la surface à reconstruire doivent être réguliers et la courbe médiane doit croître ou décroître de façon monotone. Cette hypothèse permet de réduire l'ambiguïté mais elle est très contraignante pour la surface à reconstruire.

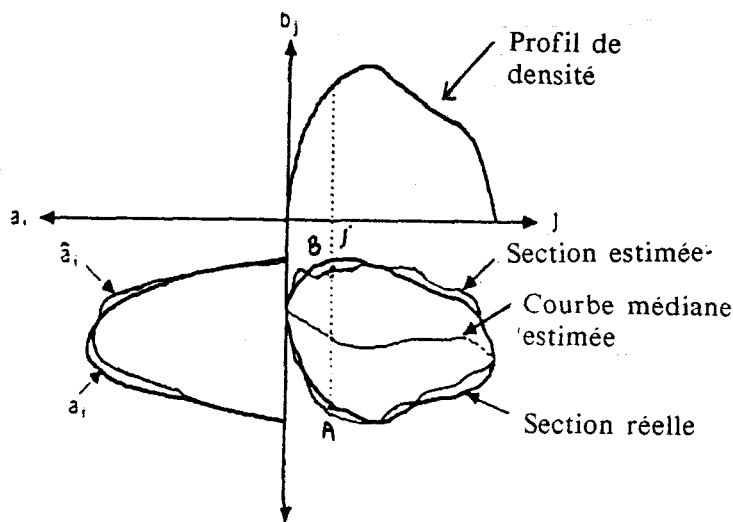


Figure 37 : courbe médiane

6-1-1-3-Méthode par les ellipses de Pellot [Pell 90]

Dans cette méthode on suppose chaque section convexe, symétrique et de forme elliptique (ou mono elliptique au niveau de la bifurcation). Le principe consiste à définir l'ellipse la mieux adaptée aux profils de densité correspondant à une altitude donnée dans le vaisseau et de rechercher, par optimisation suivant le critère des moindres carrés les coordonnées du centre de l'ellipse X Y grand axe A et petit axe B ainsi que l'orientation de l'ellipse E (fig 38)

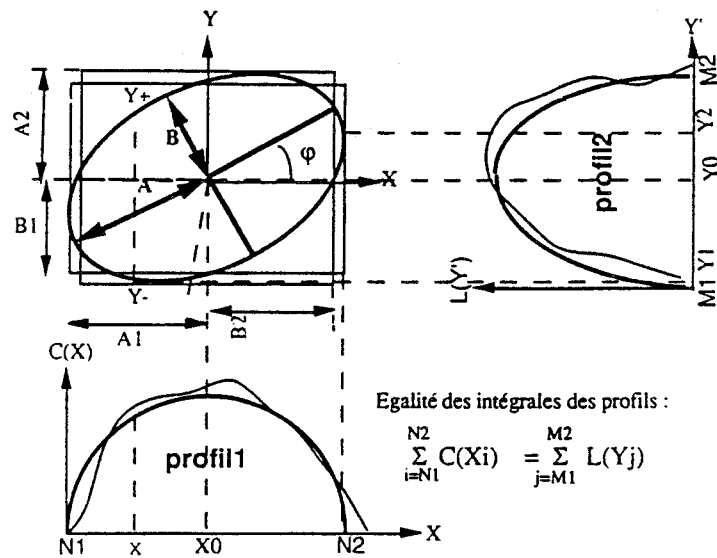


Figure 38 : méthode des ellipses

Les résultats obtenus exceptés au niveau de l'embranchement sont bons.

6-1-2-Méthodes de reconstruction indirectes

Elles consistent à considérer l'objet 3D comme l'empilement de multiples tranches transversales 2D, chacune des sections transversales fournissant deux profils de projections 1D (profils de densité fig 39).

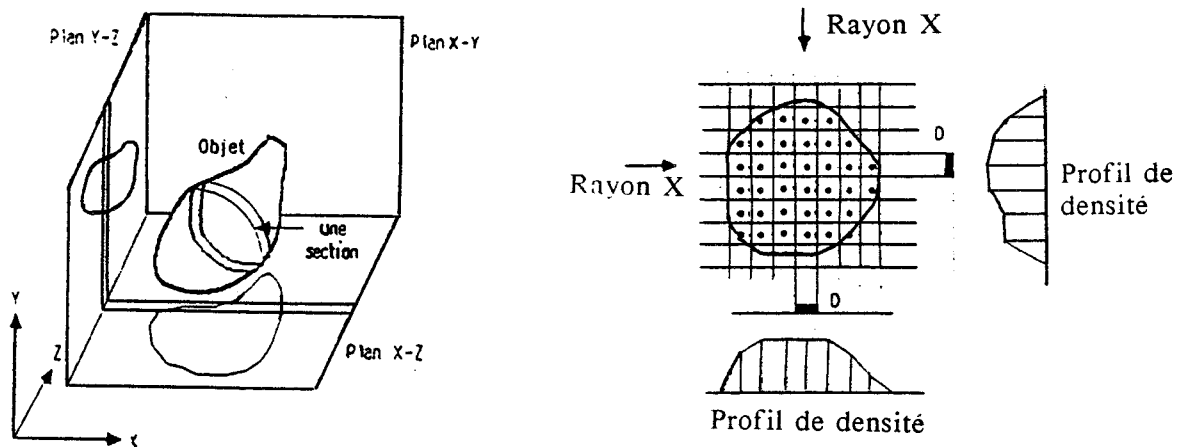


Figure 39 : profils de densité

Chaque section 2D est considérée comme une matrice binaire, La forme de l'objet est alors déterminée en la reproduisant section par section. La reconstruction tridimensionnelle est réduite à de multiples reconstructions bidimensionnelles.

Ces méthodes nécessitent la modélisation de l'objet, le modèle étant choisi à partir de connaissances à priori sur l'anatomie, la physiologie ou toute autre propriété morphologique de l'objet.

6-1-2-1-L'algorithme de Onnasch et Heintzein [Onna 76, 78]

L'algorithme de Onnasch et Heintzen, développé pour la reconstruction du ventricule gauche ou droit, utilise comme modèle une base de données obtenue après les études sous les formes de différents ventricules ou bien, la même section reconstruite dans la phase cardiaque précédente, combinée avec la section spatialement adjacente. L'ensemble des deux profils mesurés et le modèle choisi produisent une matrice de probabilité à partir de laquelle la matrice binaire est dérivée de telle façon que les profils soient reproduits et que la matrice binaire soit la plus contigüe possible.

6-1-2-3-L'algorithme de Slump et Gerbrands [Slum 82].

Slump et Gerbrands ont proposé une autre méthode qui consiste à utiliser comme modèle binaire la section issue de la phase cardiaque précédente. Celle-ci est ensuite transformée en une matrice de coûts dont les valeurs des points sont calculées en fonction de la forme locale du contour de cette section. A partir de là, ils ont adopté un algorithme de flot maximal de coût minimal qui a pour but de maximiser la ressemblance entre la matrice à reconstruire et la section de la phase précédente en vue d'obtenir une solution optimale concernant ce modèle. Cette méthode donne normalement des résultats prometteurs si la section de la phase précédente du modèle est valable. Ses points faibles résident dans la lourdeur de calcul, la nécessité d'une mémoire importante et la présence des éléments isolés après la reconstruction.

6-1-2-4-L'algorithme de Pellot [Pell 90].

L'algorithme de Pellot développé pour la reconstruction des bifurcations vasculaires dans le cas d'images angiographiques numérisées. Au lieu de chercher la ressemblance maximale avec un modèle, à partir d'une solution de départ choisie parmi l'ensemble des solutions possibles, correspondant aux deux projections observées, on part d'un modèle idéaliste qui simule un vaisseau parfait. Cette solution initiale est un modèle qui ne respecte pas de façon obligatoire exactement les projections. Le modèle choisi est un cylindre généralisé, composé de sections elliptiques. La solution initiale est ensuite déformée par des transformations élémentaires (ajout, ou retrait d'un pixel, de contour à chaque itération) pour approcher le plus possible des données observées. Cette solution proposée n'a pas encore été simulée à notre connaissance. Le critère d'optimisation (recuit simulé) consisterait à minimiser une fonctionnelle d'énergie, dans laquelle toutes les contraintes morphologiques et physiques peuvent être introduites.

6-1-2-4-L'algorithme de YANG [Yang 89].

L'algorithme de Yang utilise le principe de la recherche du flot maximal de coût minimal. Le modèle pour la reconstruction est la section précédente reconstruite. Dans cette approche on associe à chaque élément de la section un coût, qui traduit les contraintes de ressemblance avec la section adjacente précédemment reconstruite. Le processus d'optimisation consiste à minimiser le coût. L'inconvénient majeur est dû au fait du principe même de la méthode, (elle s'appuie sur la section précédente reconstruite). Les erreurs commises lors de la reconstruction d'une section se propagent aux suivantes.

Après avoir passé en revue un certain nombre de méthodes de reconstruction, le choix de la méthode que nous allons utiliser va dépendre essentiellement des hypothèses de départ. Dans notre cas ces hypothèses sont :

- Pas de symétrie particulière de l'objet à reconstruire .
- Nous possédons des courbes de densité bruitées .

-Utilisation d'un modèle pour la reconstruction

Pour ces raisons nous avons préféré une méthode de type indirecte . L'algorithme employé est celui de Slump repris par Yang . L'intérêt de cet algorithme réside dans le processus d'optimisation . Ce processus s'appuie sur une fonction de coût qui est obtenue à partir d'un modèle . L'originalité de notre approche est :

-Dans l'application au cas de clichés radiographiques .

-Présentation d'une méthode qui permet d'obtenir les profils de densité par modelage d'un modèle de dent idéale .

-Dans l'utilisation d'un modèle vrai (contrairement à ;Slump et Yang qui utilisaient pour modèle la section précédente ou la section appartenant à une autre phase cardiaque).

Dans l'utilisation de la notion de graphe des écarts par la reconstruction d'objets à partir de ses courbes de densité .

-Proposer un exposé détaillé et didactique du développement de l'algorithme utilisé . En effet il est rare de trouver un exposé détaillé de la méthode de reconstruction appliquant la recherche opérationnelle .

6-2-Présentation de l'algorithme de programmation.

L'algorithme que nous utilisons est celui appliqué par Yang [Yang 89] et Slump[Slum 82]. Pour une section binaire donnée, la solution initiale du processus de reconstruction est une solution quelconque dans l'ensemble des solutions possibles, respectant les profils de densités du contour de la dent réelle à reconstruire. Cette solution possède un flot de capacités maximale, et elle est optimisée par petites modifications locales, en tenant compte des informations a priori sur la géométrie de la structure; Ces informations sont contenues dans une fonction de coût, qui traduit des contraintes de ressemblance avec la section correspondante du modèle (idéaliste) . Le processus d'optimisation consistant à minimiser le coût .

Le problème se formule alors par la recherche du flot maximum a coût minimum dans un réseau orienté .

L'algorithme de flot à coût minimum s'effectue en plusieurs étapes (fig 40). Ces étapes sont composées de plusieurs algorithmes, que nous allons présenter rapidement avant de les reprendre par la suite plus en détail .

Suite à l'acquisition du modèle, nous pouvons soit travailler avec les courbes de densité bruitées ou non bruitées (extrapolés à partir du modèle) . Le cas des profils de densité non bruités correspond en fait à un cas théorique et ce cas ne va servir qu'à valider les algorithmes mis au point .

En effet connaissant parfaitement une surface on essaie de la reconstruire à partir seulement de ses courbes de densité et d'un modèle .En premier lieu on superpose les centres de gravité des profils de densité (du modèle et de la surface réelle), on calcule la fonction de coût à partir du modèle . Ensuite on cherche une solution de flot maximum qui respecte les contraintes de capacités des profils de densité, enfin à partir de la fonction de coût on optimise la solution . Le résultat obtenu est comparé à la surface de départ . On peut alors définir le degré de conformité entre la surface reconstruite et son original par la relation due à Chang et Shelton [Chan 71] .

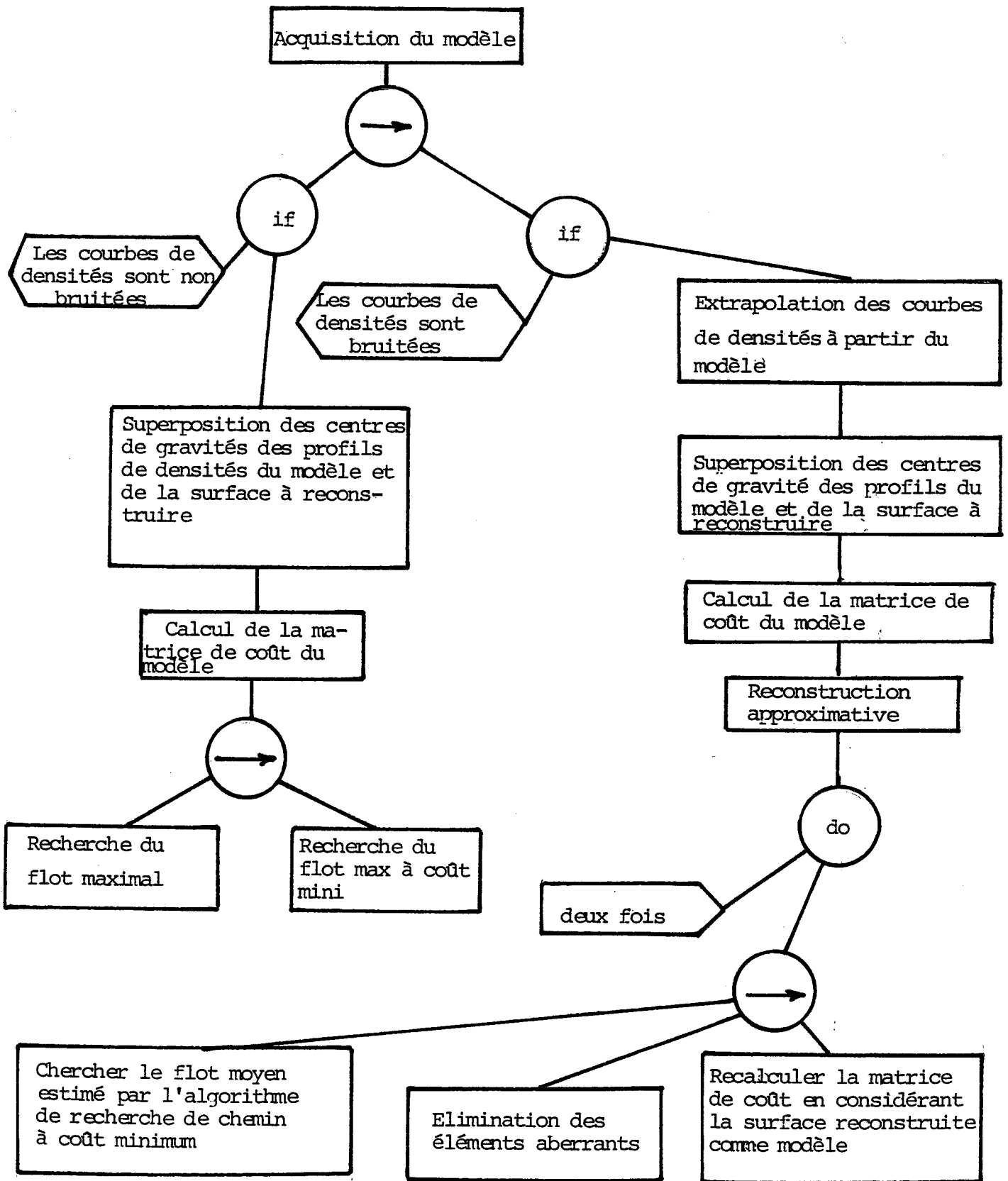


Figure 40 : arbre programmatique

Dans le cas de profils de densité bruités, qui correspondent à la réalité . La première étape consiste à extrapoler les profils de densité de la surface recherchée en s'appuyant sur un modèle . On superpose ensuite les centres de gravité des profils de densité (du modèle et de la surface réelle), et on calcule la fonction de coût à partir du modèle . On recherche une solution de départ à l'aide de l'algorithme de reconstruction approximative. On va faire tendre le flot de cette solution vers un flot estimé déduit à partir des courbes de densité bruités, ensuite on optimise la solution à l'aide de la fonction de coût

Ces algorithmes sont empruntés à la théorie des graphes, et nécessitent au préalable quelques précisions, notamment sur la représentation d'une surface et de ses courbes de densité par un graphe.

On considère un objet décomposé en une succession de sections parallèles. On connaît pour chaque section sa projection orthogonale . Un objet 3D peut être représenté par une fonction $f(x,y,z)$ qui prend les valeurs 1 ou 0 suivant que le point de coordonnées x,y,z se trouve ou non à l'intérieur de la surface. On définit alors les projections de l'objet par:

$$F_y(x, y) = \int f(x, y, z) dx$$

$$F_x(x, y) = \int f(x, y, z) dy$$

Pour $z=z_0$ fixé $F_x(x,z_0)$ et $F_y(y,z_0)$ représente les profils de densité et $f(x,y,z_0)$ la surface à reconstruire.

6-2-1-Ambigüité: description mathématique du problème.

Soit une matrice (m, n) représentant $f(x,y,z_0)$ une section de l'objet . La matrice X est composée des éléments $x(i,j)$ appartenant à $[0, 1]$. Les sommes des éléments de la ligne i et de la colonne j de X sont représentées respectivement par $a(i)$ et $b(j)$. Le problème de la reconstruction consiste à estimer les éléments $x(i,j)$ de X à partir des équations :

$$\sum_{j=1}^n x(i, j) = a(i) \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x(i, j) = b(j) \quad j=1, \dots, n \tag{1}$$

Où $a(i)$ avec $(i=1, \dots, m)$ représente $F_x(x,z_0)$

et $b(j)$ avec $(j=1, \dots, n)$ représente $F_y(y,z_0)$

Il est évident que les équations précédentes ne sont pas indépendantes car:

$$\sum_{i=1}^m a(i) = \sum_{j=1}^n b(j)$$

Ces relations traduisent l'égalité de la surface à reconstruire avec la surface des courbes de densité.

Malheureusement le problème n'est pas déterminé (fig 41) .

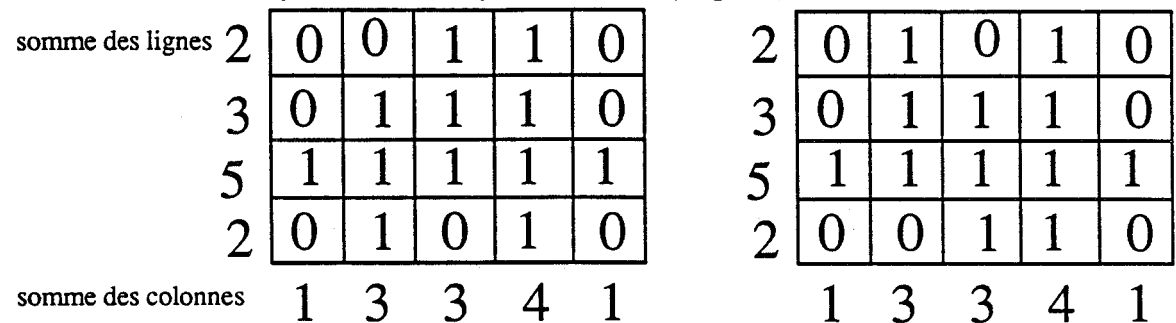


Figure 41 : ambigüité

C'est-à-dire qu'il peut y avoir une solution, plusieurs solutions, ou aucune, car l'estimation de $m * n$ variables $x(i,j)$ de X appartenant à $[0,1]$ se fait à partir de $m+n-1$ équations indépendantes.

D'où l'intérêt d'introduire un critère de ressemblance (le modèle) dans le processus de reconstruction . Pour cela le processus d'optimisation va consister à minimiser une fonction de coût Z . Cette fonction de coût est donnée par :

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c(i,j) .x(i,j) \quad (2)$$

Où $c(i,j)$ est un coefficient appelé le coût que l'on associe à chaque élément $x(i,j)$ de la matrice X . La matrice de coût C est de même taille que X . Elle est composée des éléments $c(i,j)$.

Minimiser le coût total dans Z c'est rechercher le maximum de ressemblance entre les équations (1) et la section à reconstruire .

Lorsque l'on attribue des nombres entiers au coût, la résolution de (2) soumise aux contraintes (1), devient un problème de programmation linéaire, ou encore un problème de transport de HITCHCOCK [Hit 41]. Les algorithmes dans ce cas sont nombreux [Roy 60] [Klei 67, 73] [Ford 56, 59, 62] [Fulk 59, 61] [Busa 61] [Benn 73] [Mino 86] [Gond 85] [Rose 86] [Ribe 83] [Dant 60] [Floy 62] .

Cependant, la restriction sur les variables appartenant à $[0,1]$ permet de traiter ce problème comme celui du flot dans un réseau orienté. Nous allons pour cela rappeler certains concepts sur la théorie des flots dans un réseau orienté.

6-2-2-Réseau orienté: introduction à la notion de graphe.

Un graphe G consiste en un ensemble de noeuds $[X]$ et d'arcs $[U]$ connectés à ces noeuds (fig 42) .

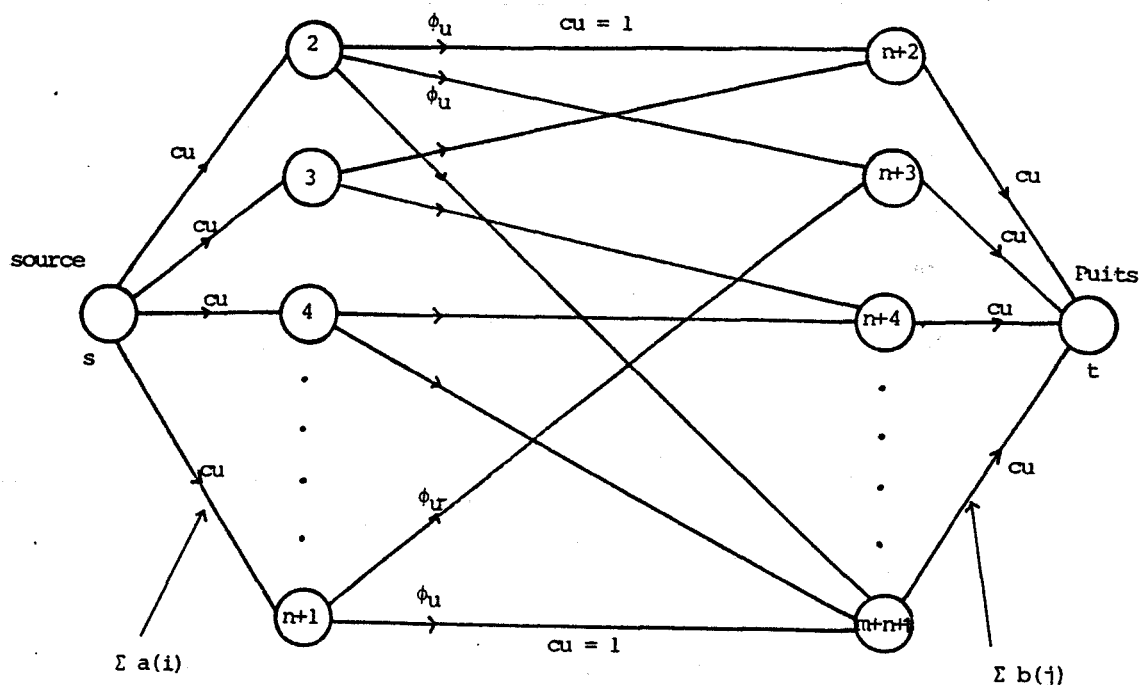


Figure : 42

Chapitre 6 : Choix de l'algorithme de reconstruction

On utilise X_i pour qualifier les noeuds $|X|$ et $u(i,j)$ pour qualifier l'arc orienté $|U|$ direct qui va du noeud X_i vers le noeud X_j . Il y a dans le réseau deux sommets spéciaux, la source S et le puits T et deux ensembles de sommets intermédiaires. Le premier ensemble possède m sommets X_i ($i=2, \dots, n+1$) la source S est connectée avec chacun de ses sommets. Le deuxième ensemble possède n sommets X_j ($j=n+2, \dots, m+n+1$), chaque sommet est connecté au puits T . De plus il y a des arcs intermédiaires allant de chaque sommet du premier ensemble vers tous les sommets du second ensemble.

On associe à chaque arc du graphe une capacité c_{ij} . Chaque arc peut transporter un flot φ (nombre entier d'unité de flot, ici égale à 1) inférieur ou égal à la capacité qui lui est associée. On affecte également à chaque arc intermédiaire du réseau un coût $c(i,j)$.

Les capacités des arcs issus de S allant vers les sommets X_i ($i=2, \dots, n+1$) sont affectées aux sommes des lignes $a(i)$ ($i=1, \dots, m$). Les capacités des arcs issus des sommets X_j ($j=n+2, \dots, m+n+1$) orientés vers le puits T sont affectées aux sommes des colonnes $b(j)$ ($j=1, \dots, n$). Les capacités des arcs intermédiaires $u(i,j)$ reliant le sommet X_i au sommet X_j sont mises à un. Ce qui traduit pour chaque arc $u(i,j)$ la même probabilité d'exister. Les flux courants circulant sur les arcs intermédiaires (valeur=0 ou valeur=1) correspondent aux éléments de la matrice à reconstruire en question.

Après ce bref rappel sur la notion de réseau orienté, nous allons aborder le problème des flots dans les graphes.

7-PROBLEMES DE FLOTS DANS LES GRAPHES : FLOT MAXIMUM . FLOT A COUT MINIMUM .

7-1-Introduction : Les différents problèmes de flots dans les graphes.

Un des exemples les plus classiques, et qui est à l'origine de la notion de flot dans un graphe, est celui du courant électrique continu parcourant un réseau de dipôle. L'intérêt actuel de la notion de flot provient du fait qu'elle permet la modélisation d'un nombre considérable de problèmes concrets; citons ici les problèmes de transport (routier, aérien, ferroviaire), des réseaux de communication, la gestion des stocks, les problèmes d'ordonnancement, d'affectation de tâches , etc.

Nous allons rappeler comment il est possible d'utiliser la notion de flot pour résoudre le problème de reconstruction d'une matrice binaire qui passe par la recherche du chemin de coût minimum pour lequel l'algorithme de Ford Fulkerson [Ford, Fulkerson 56] est bien adapté

Considérons un graphe orienté connexe $G = [X, U]$ comportant $|X|$ sommets et $|U|$ arcs . Un flot dans G est un vecteur à M composantes $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_u)^t$ appartenant à R^M (fig 43)

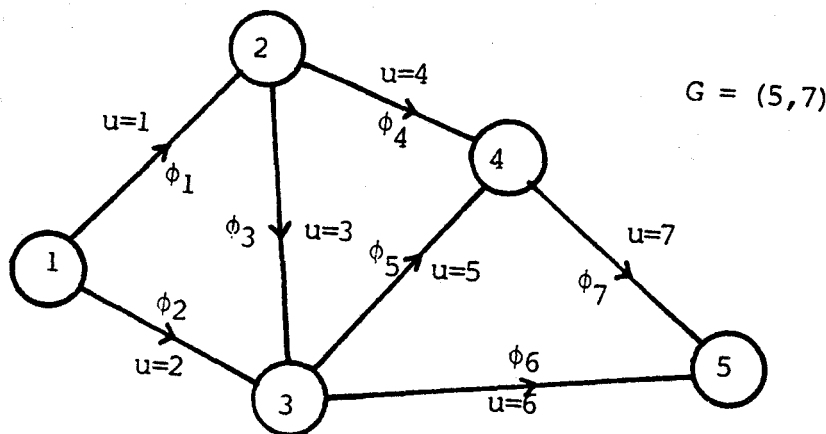


Figure : 43

Tel que, en tout sommet i appartenant à X de G , la première loi de Kirchoff soit vérifiée . soit :

$$\sum_{u \in W^+(i)} \varphi_u = \sum_{u \in W^-(i)} \varphi_u \quad u \in N \text{ et } W^+ + W^- = U \quad 1)$$

Où W^+ indique l'ensemble des arcs entrants dans un sommet et W^- indique l'ensemble des arcs sortants d'un sommet .

Pour u appartenant à U , la composante u du vecteur φ . est appelée quantité de flot, ou flux sur l'arc u .

La relation (1) exprime le fait que la somme des flux entrants en un sommet, est égale à la somme des flux sortants de ce sommet. (Loi de conservation du flot).

Dans le modèle le plus général, on associera à chaque arc u appartenant à U de G , l'entité représentée figure 44

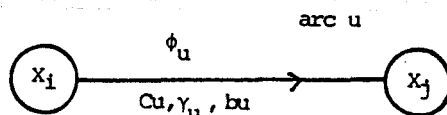


Figure 44 :

- un nombre $c_u > 0$, appelé borne supérieure de flux ou simplement capacité de l'arc u ;
 - un nombre $b_u > 0$, appelé borne inférieure de flux sur l'arc u ;
 - une fonction $\Gamma_u(\varphi_u)$ donnant le coût de passage d'un flux de valeur φ_u sur l'arc u .
- Etant donné un flot φ_u dans G , le coût total associé sera défini par :

$$\Gamma(\varphi) = \sum_{u \in U} \gamma_u(\varphi_u)$$

Remarque

La résolution du problème général du flot à coût minimum consiste à trouver un flot φ_u qui minimise le coût total $\Gamma(\varphi)$ en satisfaisant aux contraintes de borne supérieure et inférieure de flux sur tous les arcs

L'objectif de ce chapitre est de présenter des algorithmes efficaces permettant de résoudre les problèmes de flots suivants :

- Le problème du **flot maximum**.
- Le problème général du **flot de coût minimum** (avec fonctions de coût linéaires) .

L'intérêt de cette présentation est qu'elle se fera à l'aide de la notion de graphe d'écart contrairement aux articles classiques qui utilisent essentiellement une notation matricielle . La présentation en sera plus didactique et moins contraignante .

-a) Le problème du **flot maximum**.

On suppose dans ce cas que l'on a distingué deux sommets particuliers, le sommet S appelé source et le sommet T appelé puits reliés par un arc (t,s) appelé arc de retour auquel on affectera la valeur $u = 0$ (fig 45)

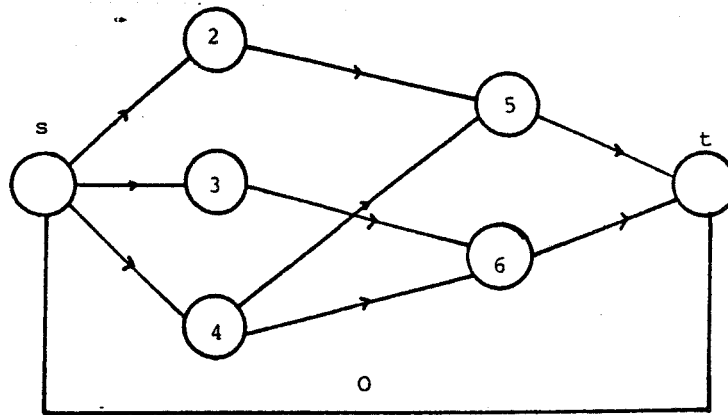


Figure 45 :

Chaque arc u appartenant à U autre que l'arc de retour est muni d'une capacité (borne supérieure de flux) $c_u > 0$ et d'une borne inférieure de flux b_u égale à 0 ($b_u = 0$). L'objectif consiste à maximiser la valeur du flux sur l'arc de retour . Ce problème peut être vu comme un cas particulier du modèle général où les coûts γ_u sont identiquement nuls sur tous les arcs intermédiaires (soit tous les arcs intermédiaires équiprobables), sauf l'arc de retour sur lequel le coût est unitaire est donné par : $\gamma_0 = -1$.

-b)Le problème général du **flot de coût minimum** avec fonctions de coût linéaires.

Dans ce problème les fonctions de coût $\gamma(\varphi_u)$ sont de la forme $\gamma_u \cdot \varphi_u$ où γ_u est le coût

de passage d'une unité de flux sur l'arc u (les coûts unitaires γ_u peuvent être de signe quelconque).

7-2-Recherche d'un flot maximum dans un graphe:

7-2-1-Principe de l'algorithme.

Soit $G=[X,U]$ un graphe orienté (fig 46) dans lequel chaque arc u appartenant U est muni d'une capacité $c_u > 0$, et de deux sommets particuliers S (source) et T (puits).

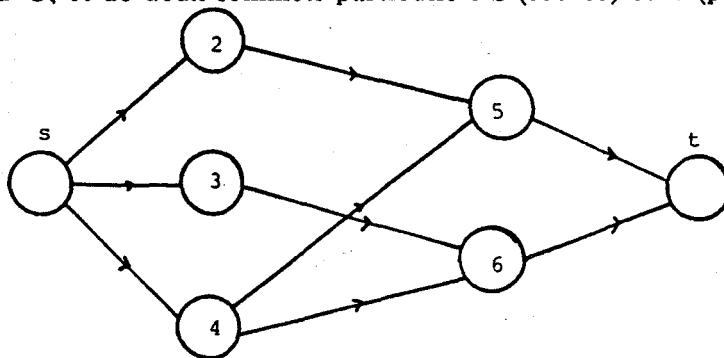


Figure 46 :

Soit $G^0=[X,U]$ le graphe (fig 47) déduit de G en rajoutant un arc (t,s) dont les extrémités initiale et terminale sont respectivement T et S .

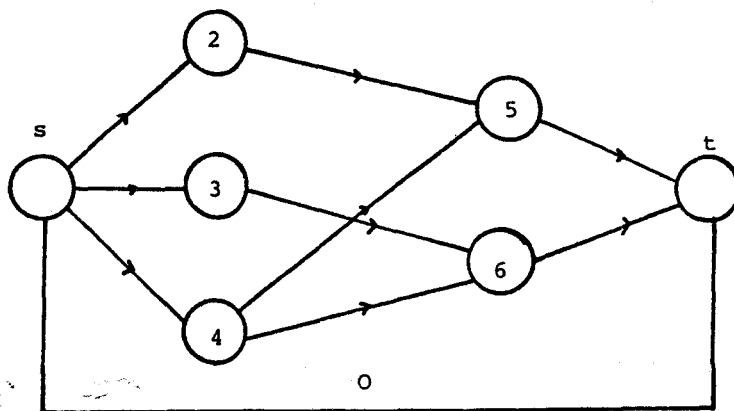


Figure 47 :

On dit que le vecteur $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_u)^t$, est un flot de S à T et de valeur φ_0 dans G si et seulement si le vecteur $\varphi' = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_u)^t$ est un flot dans G^0 . Dans ce cas et uniquement dans ce cas pour le vecteur $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_u)^t$ les lois de conservation aux noeuds sont vérifiées en tous les sommets de G , y compris aux sommets S et T où l'on a:

$$\sum_{u \in W^+(s)} \varphi_u = \sum_{u \in W^-(t)} \varphi_u = \varphi_0$$

La quantité φ_0 est appelée valeur du flot circulant entre S et T dans G . Le problème du flot maximum de S à T dans G muni des capacités c_u (u appartenant à U) revient alors à déterminer un flot : $\varphi' = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_u)^t$ dans G^0 vérifiant sur chaque arc de G les contraintes de capacités : $0 \leq \varphi_u \leq c_u$ pour tout $u = 1, \dots, U$, et tel que la composante φ_0 sur l'arc de retour (t,s) soit maximale.

7-2-2-Graphe d'écart.

Par définition, le graphe d'écart associé à un flot φ vérifiant les contraintes de bornes est le graphe $\bar{G}(\varphi) = [X, \bar{U}(\varphi)]$ ayant le même ensemble de sommets G et dont l'ensemble des arcs, $\bar{U}(\varphi)$ est constitué de la façon suivante:

A chaque arc $u=(i,j)$ appartenant à U de G , on fait correspondre au plus deux arcs de $\bar{G}(\varphi)$:

$u^+ = (i,j)$ si $0 \leq \varphi_u < cu$ (φ_u peut être nul)

$u^- = (i,j)$ si $0 < \varphi_u \leq cu$ (φ_u est différent de 0).

Autrement dit :

-si il existe un arc non saturé dans G il lui correspondra u^+ et u^- dans \bar{G}

-si il existe dans G un arc u est tel que $\varphi_u=0$ il ne lui correspondra qu'un seul arc u^+ dans \bar{G}

-si il existe dans G un arc u est tel que $\varphi_u=cu$ il ne lui correspondra qu'un seul arc u^- dans \bar{G}

Chacun des arcs est muni d'une capacité (capacité résiduelle) égale à :

$cu - \varphi_u > 0$ pour l'arc u^+ s'il existe .

$\varphi_u > 0$ pour l'arc u^- s'il existe .

Le théorème suivant montre l'intérêt de la notion de graphe d'écart pour caractériser un flot de valeur maximale.

Théorème 1:

Soit φ un flot de S à T dans G , compatible avec les capacités cu , et soit $\bar{G}(\varphi)$ le graphe d'écart associé à φ .

Une condition nécessaire et suffisante pour que le flot φ soit maximum est qu'il n'existe pas de chemin de s à t dans $\bar{G}(\varphi)$. C'est à dire qu'il n'y a plus arcs non saturés ($\varphi_u < cu$)

Autrement dit s'il existe au moins un arc non saturé dans \bar{G} le flot φ peut être augmenté car il n'est pas maximal .

La notion de graphe d'écart ne permet pas seulement de vérifier l'optimalité d'une solution, elle suggère aussi une méthode pour améliorer une solution optimale .

En effet, soit φ un flot de S à T dans G , de valeur φ_0 , qui ne vérifie pas la solution du théorème 1, Il existe alors un chemin P de S à T dans le graphe d'écart $\bar{G}(\varphi)$, qui correspond sur G à une chaîne L joignant les deux sommets S et T .

Par définition du graphe d'écart :

Si la chaîne L , parcourue de S vers T dans G , emprunte un arc $u=(i,j)$ dans le sens direct dans \bar{G} , alors nécessairement $\varphi_u < cu$.

Si elle emprunte un arc $u=(i,j)$ dans le sens inverse dans \bar{G} (de j vers i , c'est à dire sortant du sommet j) alors nécessairement $\varphi_u > 0$.

Notons L^+ l'ensemble des arcs de L parcourus dans le sens direct, et L^- l'ensemble des arcs de L parcourus dans le sens inverse.

Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit (ε étant la capacité du chemin P), effectuons alors les transformations:

$$\varphi'_u = \varphi_u + \varepsilon \quad , \quad \text{pour } u \text{ appartenant à } L^+$$

$$\varphi'_u = \varphi_u - \varepsilon \quad , \quad \text{pour } u \text{ appartenant à } L^-$$

Ces transformations préservent les conditions de conservation du flot en chaque sommet autre que S et T. Par ailleurs, pour les sommets S et T, on a :

$$\sum_{u \in W^+(s)} \varphi'_u = \sum_{u \in W^-(t)} \varphi'_u = \varphi_0 + \varepsilon$$

Ce qui montre que la valeur du flot (le flux sur l'arc de retour) a été augmentée de ε .

On déduit alors directement de ce qui précède un algorithme de résolution pour le problème du flot maximum.

-a) Initialisations $t = 0$.

Partir d'un graphe $G(\varphi)$ initial qui est compatible avec les contraintes de capacités maximales ($\varphi_u < c_u$ sur chaque noeud du graphe)

sinon on peut partir d'un graphe G de flot initial nul $\varphi^0 = (0, 0, 0, \dots, 0)$.

-b) Construction du graphe d'écart $\bar{G}(\varphi)$ à partir de $G(\varphi)$.

-Si $\varphi_u < c_u$ dans G , on fera correspondre dans \bar{G} deux arcs tels que

$u^+ = (i, j)$ et on lui associe la capacité $c_u - \varphi_u > 0$.

$u^- = (i, j)$ et on lui associe la capacité $\varphi_u > 0$

-Si $\varphi_u = 0$ dans G , on fera correspondre dans \bar{G} , $u^+ = (i, j)$.

-Si $\varphi_u = c_u$ dans G , on fera correspondre dans \bar{G} , $u^- = (i, j)$.

c) Iteration courante t : Rechercher un chemin de S à T dans le graphe d'écart $\bar{G}(\varphi^t)$

- S'il n'en n'existe pas, alors fin. Le flot φ^t est maximum

- S'il en existe, soit P^t un tel chemin on augmente la valeur du flot dans G (flux sur l'arc de retour) de ε .

d) Changement de flot

- Soit ε la capacité du chemin P^t sur le graphe d'écart, ici $\varepsilon^t = 1$.

Le flot φ^{t+1} est donné par :

$$-\varphi_u^{t+1} = \varphi_u^t + \varepsilon^t \quad \text{si } u^+ \text{ appartenant à } P^t.$$

$$-\varphi_u^{t+1} = \varphi_u^t - \varepsilon^t \quad \text{si } u^- \text{ appartenant à } P^t.$$

$$-\varphi_0^{t+1} = \varphi_0^t + \varepsilon^t.$$

- Si le flot est maximum dans G , alors fin.

- Sinon retourner en c).

Nous allons illustrer cet algorithme à l'aide d'un exemple.

7-3-Exemple : Recherche du flot maximum dans un graphe.

La section à reconstruire est définie par ses deux profils de densité (fig 48) ai, bj tels que :

$$\begin{aligned} \sum x(i,j) &= a_i & i=1, \dots, m \\ \sum x(i,j) &= b_j & j=1, \dots, n \end{aligned}$$

$x(i,j)$ sont les éléments de la section à reconstruire, ils appartiennent à $[0,1]$

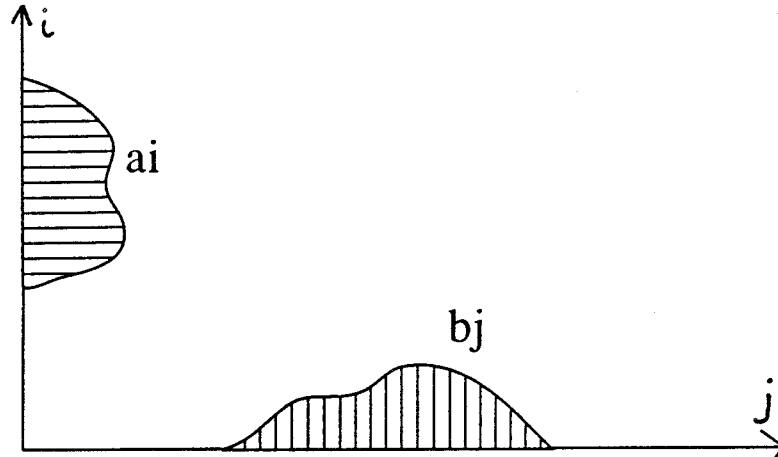


Figure 48 : profils de densité

Où a_i représente la Somme des Eléments de la Ligne i noté : SEL .
 Où b_j représente la Somme des Eléments de la Colonne j noté : SEC .

Dans notre exemple la section à reconstruire est définie par quatre lignes et cinq colonnes dont les éléments SEL sont donnés par : 2 3 5 2, et les éléments SEC sont donnés par : 1 3 3 4 1 .

Le flot maximum qui peut circuler sur l'arc de retour φ_0 du graphe G est donné $\sum a_i=12$ (ou $\sum b_j$)

On doit estimer les éléments $x(i,j)$ à partir de a_i et b_j . Le graphe G de la section à reconstruire est illustrée figure 49, où le nombre de ses sommets X_i est donné par le nombre de lignes(quatre), et le nombre de ses sommets X_j est donné par le nombre de colonnes(cinq).

X_i varie entre $i=2, 3, 4, 5, \dots, n$ ($n=5$). Et X_j varie entre $j = n+1, \dots, n + m$ ($m = 5$)
 Le sommet 1 est le sommet source noté S et le sommet 11 est le sommet puits noté T

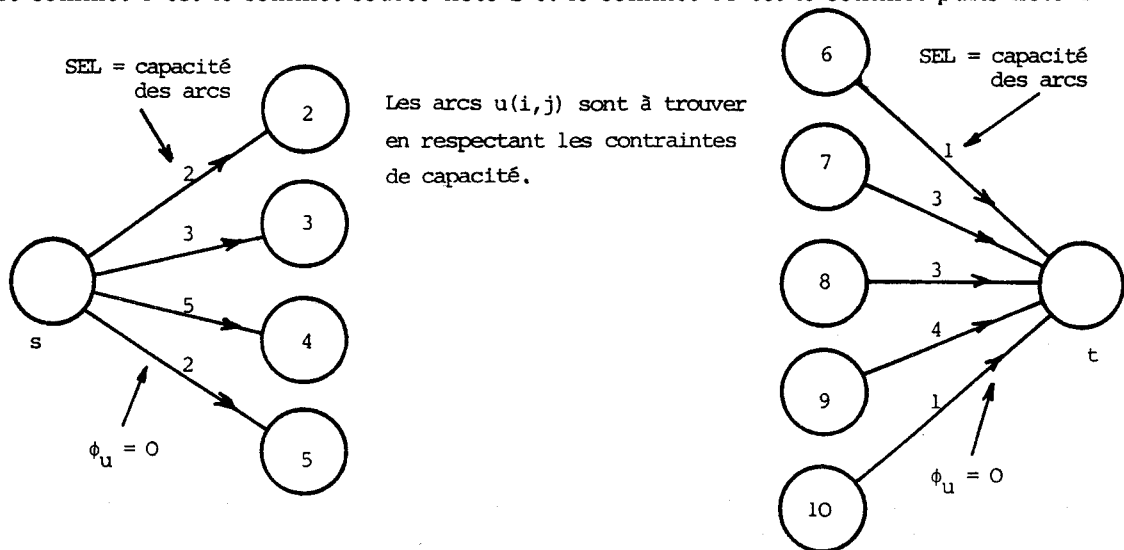


Figure 49 : graphe de G

-1ère Etape : Initialisation.,

Connaissant les contraintes de capacité de chaque arc on va construire un graphe G qui est une solution possible de départ (voir algorithme fig 50).

On crée un arc $u(i,j)$ tant que pour chaque sommet les contraintes de capacité sont vérifiées .On obtient le graphe suivant (fig 51).

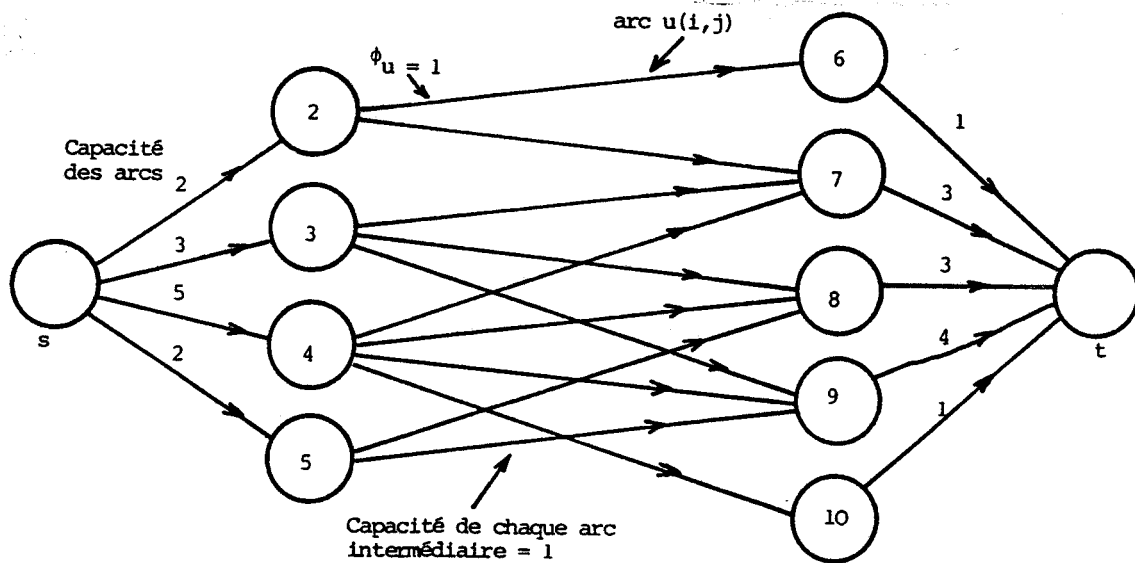


Figure 51 : graphe de l'étape d'initialisation .

A l'issue de cette 1ere étape le flot obtenu sur l'arc de retour φ_0 est donné par $\sum a_i = 11$. La solution n'est donc pas maximale, nous allons essayer de l'obtenir .

-2ème Etape :Construction du graphe d'écart

Rappel .

A chaque arc $u=(i,j)$ appartenant à U de G, on fait correspondre au plus deux arcs de $\bar{G}(\varphi)$:

$u^+ = (i,j)$ si $0 \leq \varphi_u < c_u$ (φ_u peut être nul)

$u^- = (i,j)$ si $0 < \varphi_u \leq c_u$ (φ_u est différent de 0) .

Autrement dit :

-si il existe un arc non saturé dans G il lui correspondra u^+ et u^- dans \bar{G}

-si il existe dans G un arc u est tel que $\varphi_u=0$ il ne lui correspondra qu'un seul arc u^+ dans \bar{G}

-si il existe dans G un arc u est tel que $\varphi_u=c_u$ il ne lui correspondra qu'un seul arc u^- dans \bar{G}

Chacun des arcs est muni d'une capacité (capacité résiduelle) égale à :

$c_u - \varphi_u > 0$ pour l'arc u^+ s'il existe .

$\varphi_u > 0$ pour l'arc u^- s'il existe .

On construit le graphe d'écart (fig 52) de la solution de départ du graphe G. Pour simplifier nous n'avons représenté que les arcs intermédiaires ou le flux (φ_u) est égal à 0

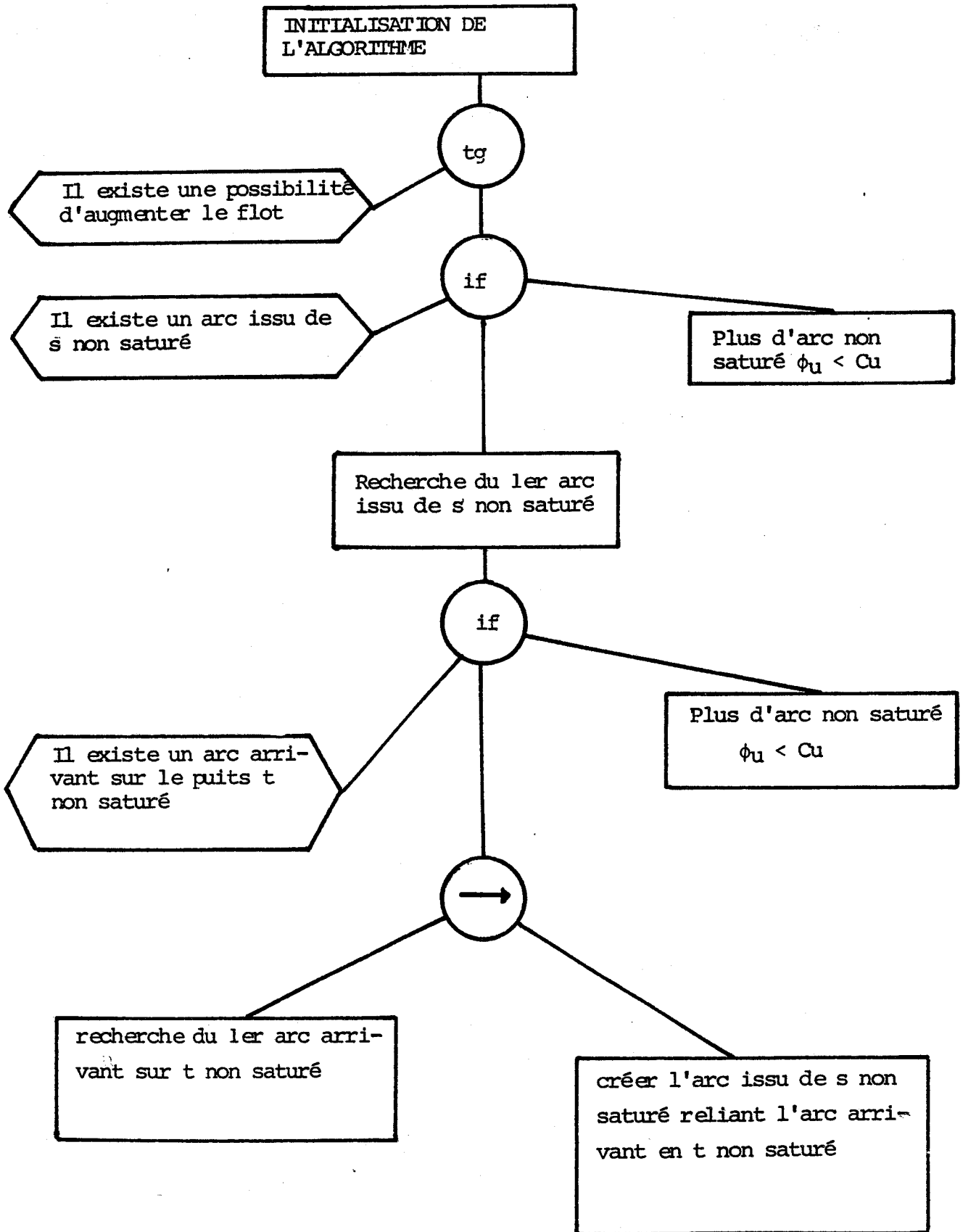


Figure 50 : algorithme d'initialisation

-1ère Etape : Initialisation,.

Connaissant les contraintes de capacité de chaque arc on va construire un graphe G qui est une solution possible de départ (voir algorithmme fig 50).

On crée un arc $u(i,j)$ tant que pour chaque sommet les contraintes de capacité sont vérifiées .On obtient le graphe suivant (fig 51).

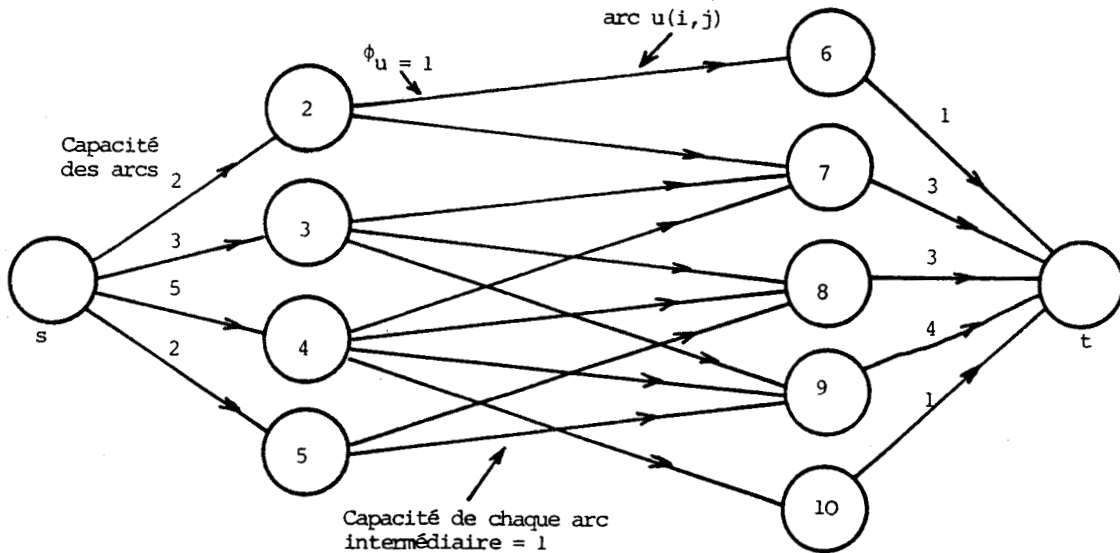


Figure 51 : graphe de l'étape d'initialisation .

A l'issue de cette 1ere étape le flot obtenu sur l'arc de retour φ_0 est donné par $\sum a_i = 11$. La solution n'est donc pas maximale, nous allons essayer de l'obtenir .

-2ème Etape :Construction du graphe d'écart

Rappel .

A chaque arc $u=(i,j)$ appartenant à U de G, on fait correspondre au plus deux arcs de $\bar{G}(\varphi)$:

- $u^+ = (i,j)$ si $0 \leq \varphi_u < c_u$ (φ_u peut être nul)
- $u^- = (i,j)$ si $0 < \varphi_u \leq c_u$ (φ_u est différent de 0) .

Autrement dit :

- si il existe un arc non saturé dans G il lui correspondra u^+ et u^- dans \bar{G}
- si il existe dans G un arc u est tel que $\varphi_u=0$ il lui correspondra qu'un seul arc u^+ dans \bar{G}
- si il existe dans G un arc u est tel que $\varphi_u=c_u$ il lui correspondra qu'un seul arc u^- dans \bar{G}

Chacun des arcs est muni d'une capacité (capacité résiduelle) égale à :

$c_u - \varphi_u > 0$ pour l'arc u^+ s'il existe .

$\varphi_u > 0$ pour l'arc u^- s'il existe .

On construit le graphe d'écart (fig 52) de la solution de départ du graphe G. Pour simplifier nous n'avons représenté que les arcs intermédiaires ou le flux (φ_u) est égal à 0

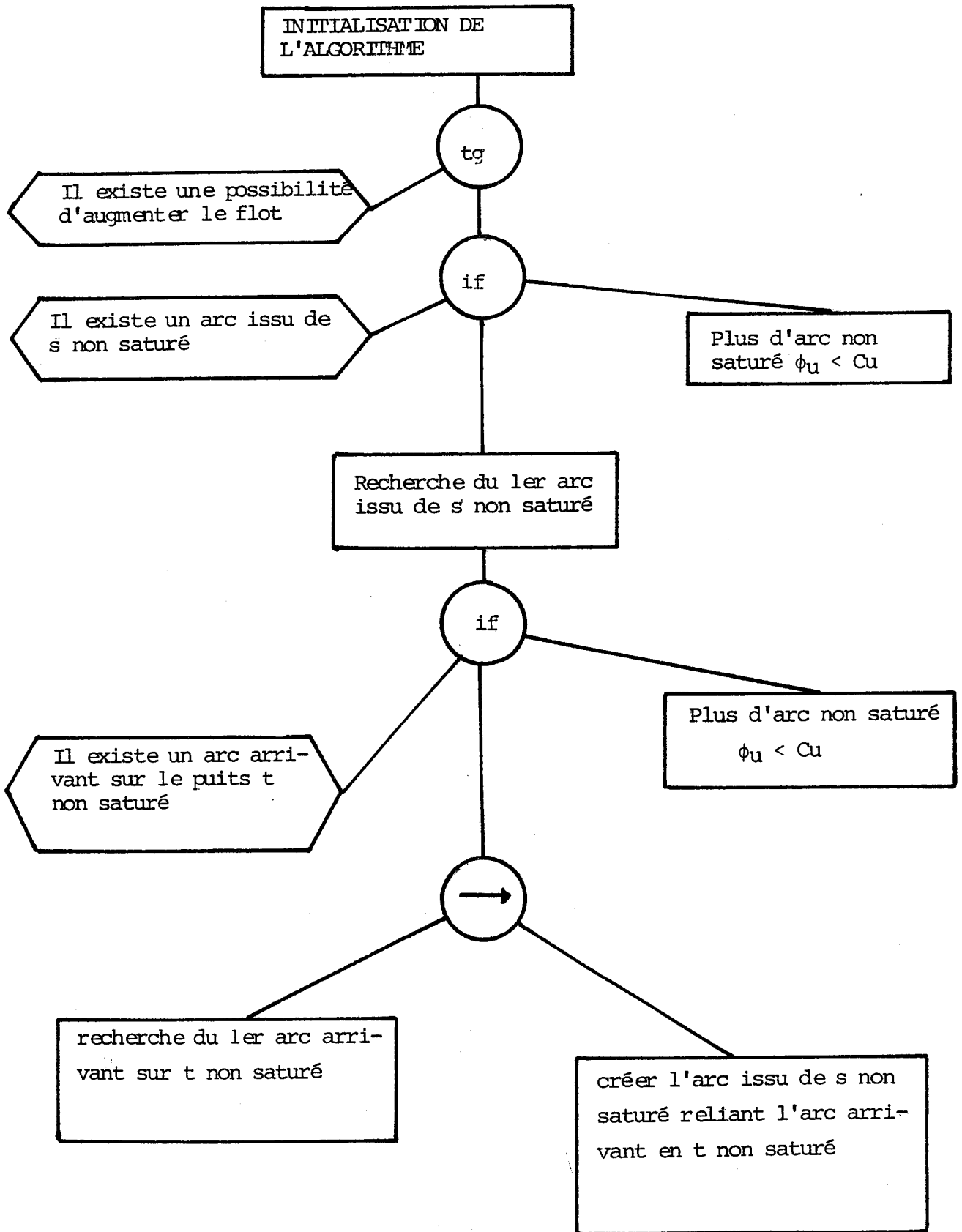


Figure 50 : algorithme d'initialisation

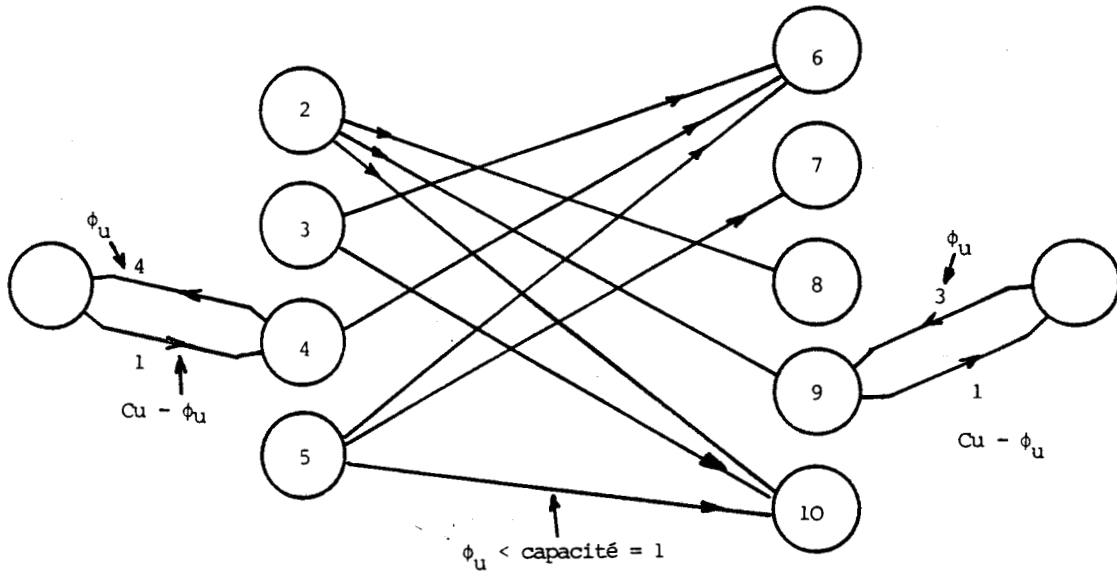


Figure 52 : construction du graphe d'écart .

3ème Etape :Rechercher d'un chemin P

On va chercher dans le graphe d'écart \bar{G} si il existe un chemin P qui part de S et qui atteint T(fig 53). On utilise pour cela l'algorithme illustré par l'arbre de la figure 54 .

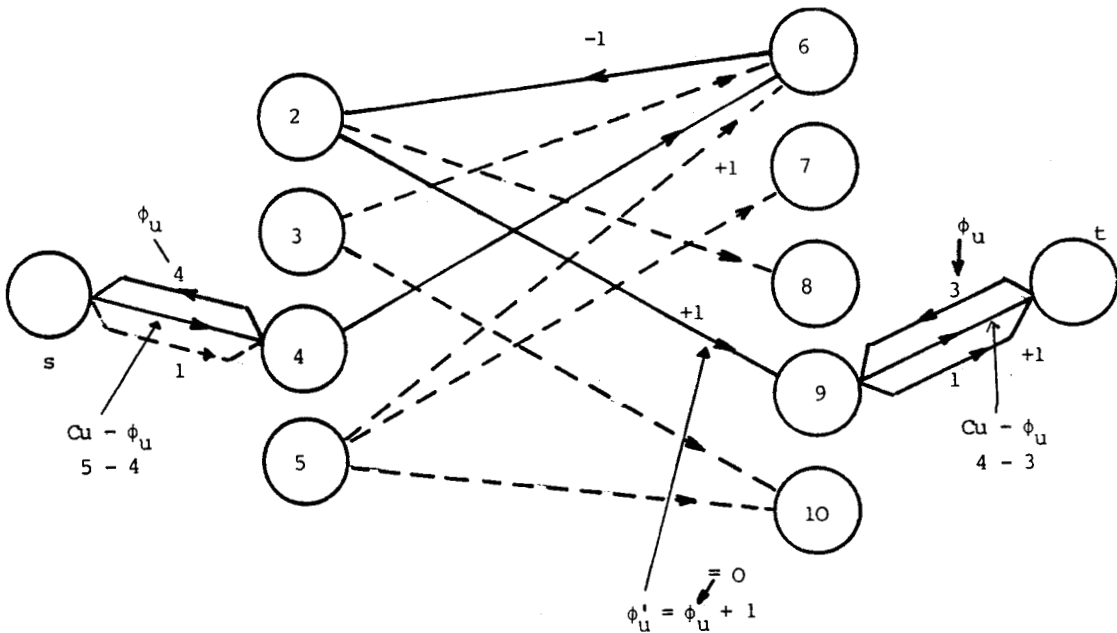
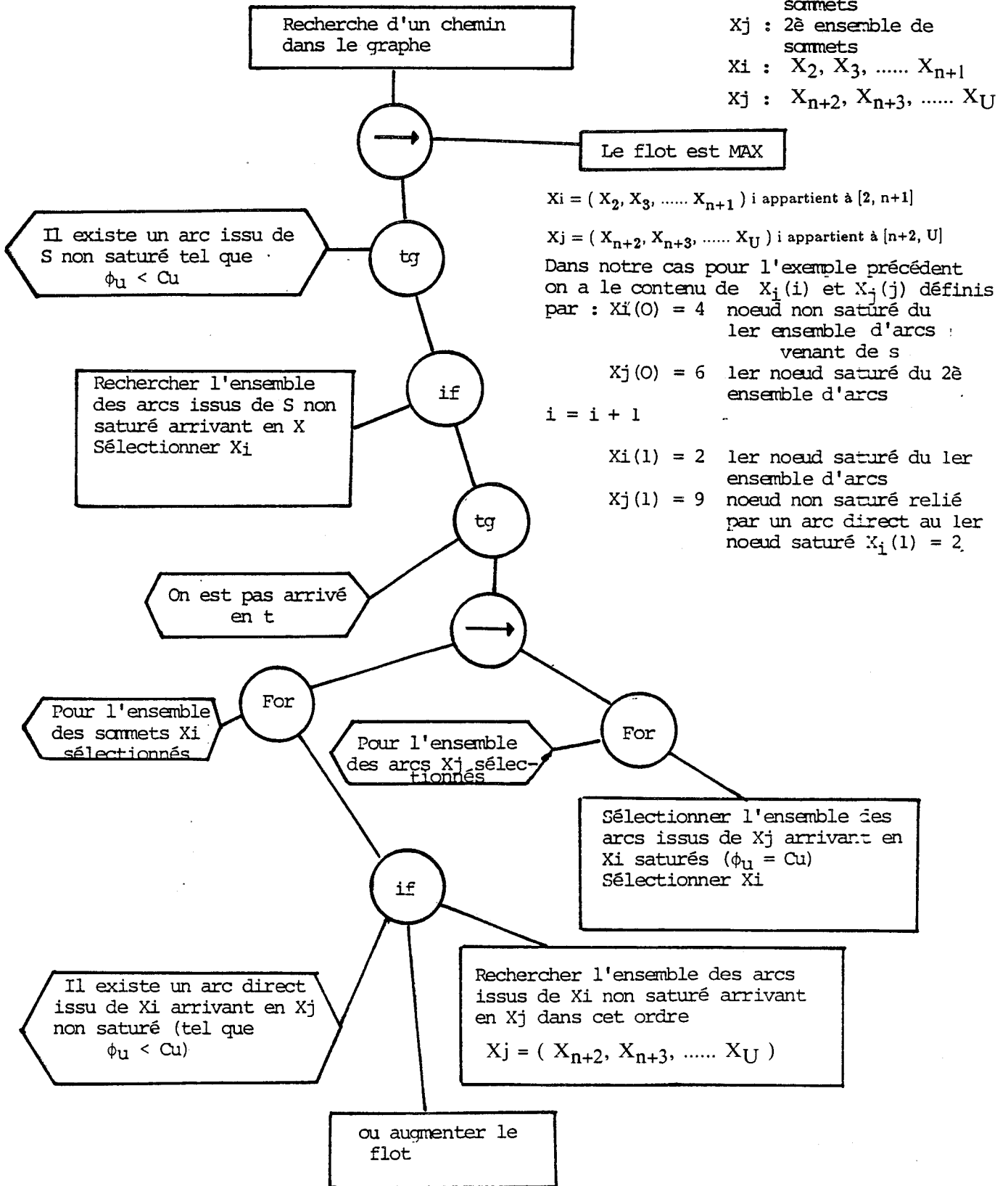


Figure 53 : recherche du chemin P.

Lorsque l'on a trouvé ce chemin P dans \bar{G} , on associe à chacun des arcs u du chemin P un flux de valeur $\varphi_u = +1$ si l'arc $u(i,j)$ est un arc direct et un flux de valeur $\varphi_u = -1$ si l'arc $u(i,j)$ est un arc indirect.

On va maintenant revenir dans le graphe G et effectuer les substitutions dues au chemin P trouvé dans \bar{G} .

S : la source
 X_i : 1er ensemble de sommets
 X_j : 2è ensemble de sommets
 X_i : X_2, X_3, \dots, X_{n+1}
 X_j : $X_{n+2}, X_{n+3}, \dots, X_U$



$X_i = (X_2, X_3, \dots, X_{n+1})$ i appartient à $[2, n+1]$
 $X_j = (X_{n+2}, X_{n+3}, \dots, X_U)$ i appartient à $[n+2, U]$
 Dans notre cas pour l'exemple précédent on a le contenu de $X_i(i)$ et $X_j(j)$ définis par :
 $X_i(0) = 4$ noeud non saturé du 1er ensemble d'arcs venant de s
 $X_j(0) = 6$ 1er noeud saturé du 2è ensemble d'arcs
 $i = i + 1$
 $X_i(1) = 2$ 1er noeud saturé du 1er ensemble d'arcs
 $X_j(1) = 9$ noeud non saturé relié par un arc direct au 1er noeud saturé $X_i(1) = 2$.

Figure 54 : recherche du chemin P

4ème Etape :Substitution :

A tout arc direct du chemin P dans \bar{G} on associe dans G un nouvel arc $u(i,j)$, et à tout arc indirect du chemin P, on enlève l'arc correspondant dans G (fig 55).

le chemin P trouvé

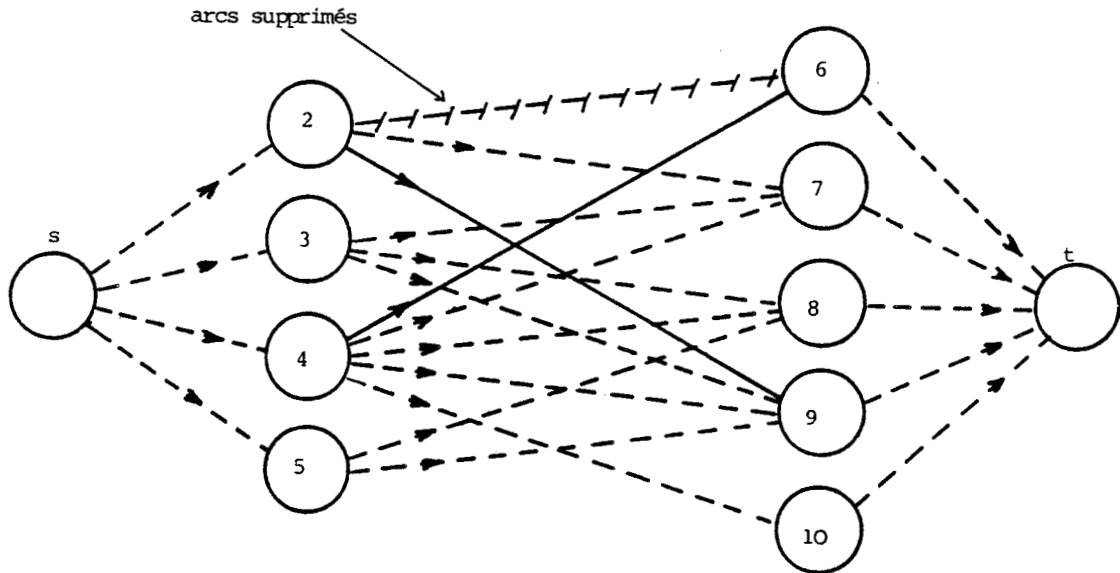


Figure 55 : substitution .

Le chemin P dans G est constitué des sommets suivants :

S vers 4 (arc direct $\varphi_u = 1$) . 4 vers 6 (arc direct $\varphi_u = 1$) . 6 vers 2 (arc indirect $\varphi_u = -1$).
 2 vers 9 (arc direct $\varphi_u = 1$) . 9 vers T (arc direct $\varphi_u = 1$) (fig 56).

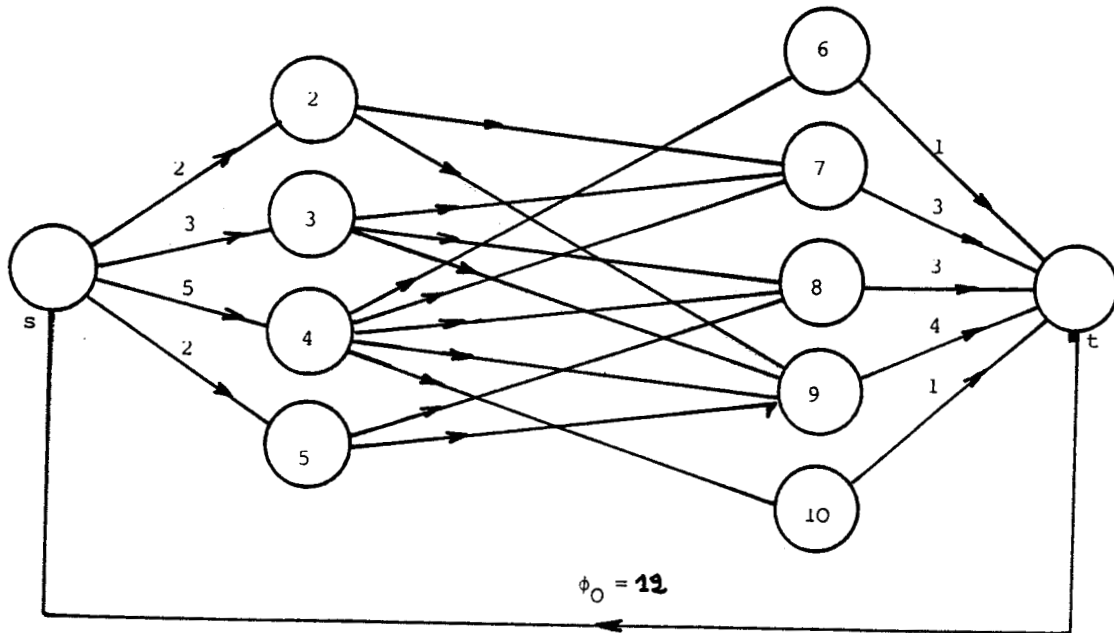


Figure 56: chemin P dans G

Le flot initial sur l'arc de retour avait pour valeur $\varphi_0 = 11$, il est vient d'être augmenté d'une unité $\varepsilon = 1$, donc $\varphi_0 = 12 = \varphi_0 \cdot \max$

La figure 57 représente le graphe \bar{G} résultant . Il n'existe plus de chemin possible allant de s vers t dans $G(\varphi)$. Le flot est donc maximum

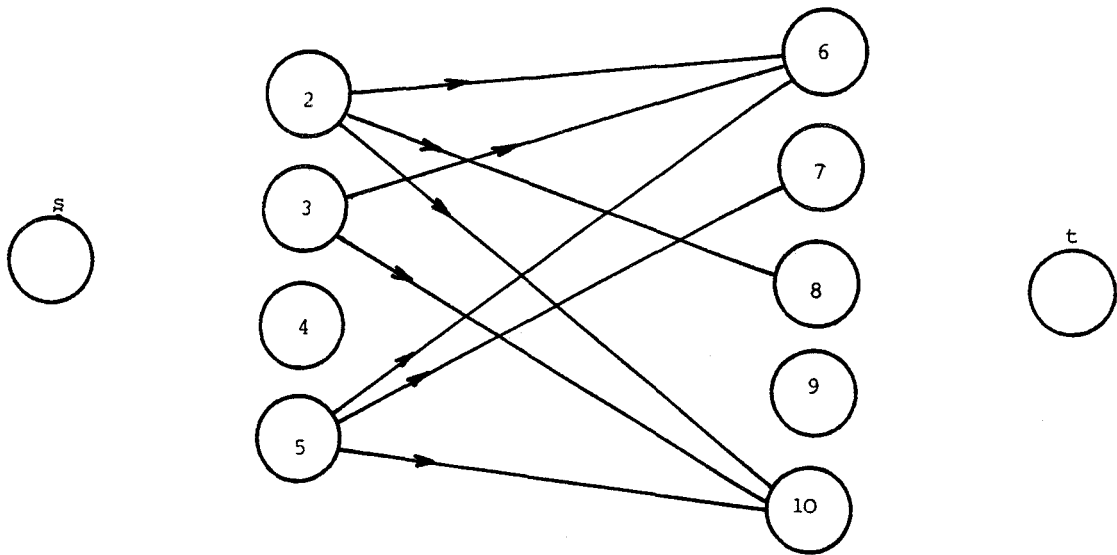


Figure 57 : graphe \bar{G} .

Nous venons de calculer le flot maximum, pour un graphe G associé à une surface codée par une matrice binaire à reconstruire . Nous rappelons que, dans la pratique, le graphe G est construit à partir des courbes de densité qui résultent de l'opération d'extrapolation. Le calcul du flot maximum conduit à une solution parmi toutes les solutions possibles de la reconstruction de la surface d'une coupe de l'objet réel .

Il faut maintenant optimiser le résultat en augmentant la ressemblance entre la surface obtenue par le calcul du flot maximum dans le graphe G et celle du modèle .

Cette opération est effectuée par des modifications locales sur la surface à reconstruire en tenant compte des informations a priori obtenues à partir du modèle . Ces informations sont contenues dans la fonction de coût caractérisée par la matrice $C(i,j)$ des coûts du modèle . Lorsque l'on calcule les éléments de cette matrice de coût on constate comme le montre l'exemple ci-dessous (fig 59) qu'elle possède des valeurs de coût très faibles aux positions des éléments qui appartiennent à la surface du modèle et des coûts élevés ailleurs .

Si on reporte les valeurs de la matrice de coût du modèle dans le graphe G associé à la surface à reconstruire (obtenue par le flot maximum), on voit bien que l'on obtiendra une ressemblance de la surface à construire avec celle du modèle pour un chemin qui conduit dans le graphe G à un coût minimum .

Cette procédure est celle que nous allons décrire dans le chapitre suivant . Après avoir cité les deux méthodes de recherche de chemin de distance minimale, et justifié l'introduction du bruit dans notre cas, nous développerons sur deux exemples la technique de recherche du coût minimum .

Chapitre 7 : Recherche du flot à coût minimum

Modèle.

0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	1	1	1	1
0	1	0	1	0

6	4	0	0	5
4	0	0	0	3
0	0	0	0	0
4	0	2	0	4

Matrice de coût de Slump
Matrice de coût de Yang

14	12	0	1	13
12	2	0	1	11
1	2	0	2	1
12	1	10	1	12

Figure 59: matrice de coût

7-4-Flot à coût minimum .

Il existe deux méthodes pour la recherche du flot maximum à coût minimum .

-La première approche, celle de Klein [Klei 67,73] puis reprise par Bennington [Benn 73], consiste à chercher dans un premier temps le flot maximum puis dans un deuxième temps à optimiser la solution à l'aide d'un critère de coût minimum . Cette méthode est couramment utilisée dans le cas de courbes de densités non bruitées . En effet on est capable dans ce cas de trouver un flot maximum .

-La deuxième méthode, celle de Roy [Roy 70] puis reprise par Busacker et Gowen [Busa 61], consiste à augmenter successivement le flot à coût minimum (dans le cas de courbes non bruitées on va tendre vers le flot maximum à coût minimum , dans le cas contraire on va tendre vers un flot moyen à coût minimum) .

L'intérêt de cette méthode réside dans le fait qu'elle converge vers un flot de coût minimum que l'on peut se fixer même dans le cas de courbes bruitées . Nous allons utiliser une variante de cette algorithmme pour la reconstruction de surface à partir de courbes de densités bruitées.

7-4-1-Considération sur le bruit

7-4-1-1-Introduction

En réalité les données des projections sont toujours bruitées il est possible d'effectuer une reconstruction approximative en incorporant le bruit à notre problème. Le principe de cette approche est d'associer un coût coefficient non seulement aux arcs intermédiaires du graphe d'écart mais aussi aux arcs sortant du sommet source et aux arcs arrivant au sommet puits , en fonction des caractéristiques du bruit . Le flot total circulant de la source au puits est estimé à partir des deux profils de densité extrapolés . La solution optimale est obtenue en minimisant le coût total pour transporter le flot à travers le réseau .

Malheureusement à cause du bruit, le flot au départ de la source n'est plus égal au flot arrivant sur le puits (fig 60).

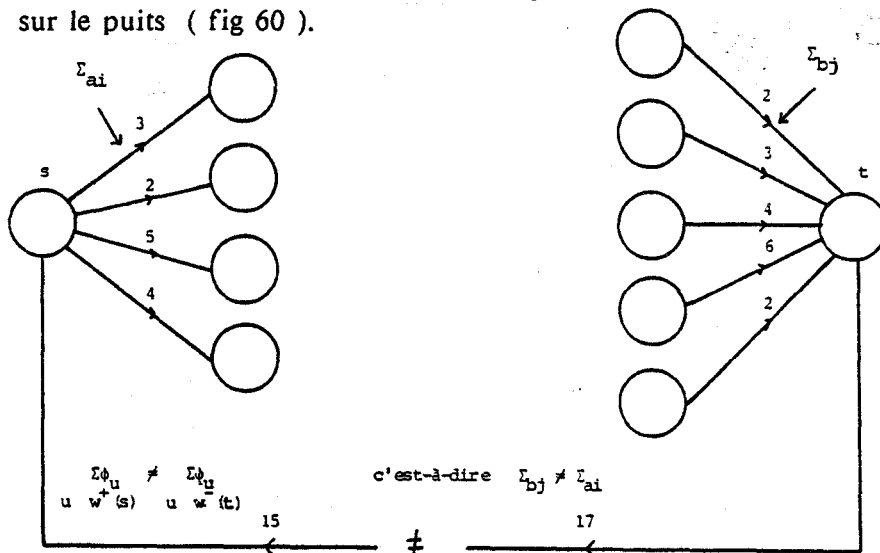


Figure 60 : incompatibilité des profils de densité

En effet les courbes de densités ne sont plus compatibles entre elles La somme des lignes est différente de la somme des colonnes . On ne peut plus définir un flot maximum mais un flot moyen (ou flot estimé) qui est donné par :

Flot moyen = (somme des flots lignes + somme des flots lignes)1\2

Chapitre 7 : Recherche du flot à coût minimum

On augmentera le flot à chaque fois d'une unité jusqu'à ce que l'on atteigne le flot moyen sur l'arc de retour .

Nous allons pour les deux approches présenter un algorithme pour la reconstruction de surface à partir des courbes de densité bruitées ou non . Auparavant nous allons calculer la matrice de coût coefficient .

7-4-2-Construction de la fonction de coûts .

Pour construire la fonction de coûts, on utilise la méthode de Sumpl [Slum 82] modifiée par Yang [Yang 89] . Le principe consiste à calculer les coûts de tout les points en fonction de la forme locale du contour du modèle.

-Pour cela on commence à calculer les coûts pour les points du modèle de valeur 0 , soit $C'(i,j)$ la matrice .

-Puis on exprime les coûts pour les points du modèle de valeur 1 , soit $C''(i,j)$ la matrice correspondante .

-Finalement la fonction de coûts associés aux points du modèle est donnée par :
 $C(i,j) = C'(i,j) + C''(i,j)$.

Remarque .

L'intérêt de l'amélioration apportée par Yang c'est qu'elle va affecter un coût très faible pour les points proches du barycentre (ceux dont la probabilité d'existence est la plus grande) et un coût qui va en augmentant pour les autres points. Contrairement à l'algorithme de Slump où le coût pour le barycentre et pour les autres points du modèle dont la valeur est égale à un est identique (fig 61)

0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
1	1	1	1	1
0	1	0	1	0

Modèle

6	4	0	0	5
4	0	0	0	3
0	0	0	0	0
4	0	2	0	4

Matrice obtenue par la méthode de SLUMP

7	7	0	1	7
7	2	0	1	7
1	2	0	2	1
7	1	7	1	7

C'_{ij}

7	5	0	0	6
5	0	0	0	4
0	0	0	0	0
5	0	3	0	5

C_{ij}

14	12	0	1	13
12	2	0	1	11
1	2	0	2	1
12	1	10	1	12

Matrice obtenue par la méthode de Yang

Figure 61: exemple pour un modèle donné de la fonction de coûts de Sumpl et de Yang

7-4-3-Flot maximum à coût minimum (cas des courbes de densité non bruitées)

7-4-3-1-Introduction :

L'idée principale de cet algorithme consiste, à partir d'un flot initial (solution de base) de valeur maximale à chercher à déterminer, dans le graphe G , un flot de coût minimum. Ceci est équivalent à chercher, dans le graphe d'écart \bar{G} , des circuits orientés de coûts négatifs.

On rappelle qu'un circuit orienté est une séquence de sommets et d'arcs dans laquelle le dernier sommet est le même que le premier.

Le coût d'un chemin est la somme des coûts associés aux arcs le long du chemin ayant un flux $\varphi_u = 0$ moins la somme des coûts associés aux arcs transportant un flux $\varphi_u = 1$. Si le coût du chemin est négatif, on dit qu'il est un chemin orienté de coût négatif.

L'intérêt d'une telle recherche est que la complémentation binaire le long d'un tel chemin (changer $\varphi_u = 0$ en $\varphi_u = 1$ et $\varphi_u = 1$ en $\varphi_u = 0$) ne change pas la valeur du flot mais le coût total du graphe est diminué, c'est à dire que la solution obtenue est optimisée.

7-4-3-2-Description mathématique du problème .

Soit $G = [X, U]$ un graphe connexe . Le graphe est dit connexe si tous les sommets du graphe sont accessibles par un chemin à partir d'un sommet donné i dont les arcs sont munis de deux nombres b_u et c_u respectivement borne inférieure et borne supérieure du flux sur l'arc u . On distingue encore γ_u le coût de passage d'une unité de flot sur l'arc u .

On recherche un flot $\varphi = (\varphi_u)$ compatible (c'est à dire $b_u \leq \varphi_u \leq c_u$) et de coût total minimum :

$$\langle \gamma, \varphi \rangle = \sum_{u \in U} \gamma_u \varphi_u \quad \text{minimum}$$

Si on appelle φ^k le flot à l'itération k . Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un flot φ^k compatible avec les contraintes de capacité : $b_u \leq \varphi_u \leq c_u$ (pour tous u appartenant à N) soit de coût minimum, est qu'il n'existe pas de chemin de coût négatif (relativement aux coûts γ) dans le graphe d'écart $\bar{G}(\varphi^k)$.

7-4-3-3-Construction du graphe d'écart

On part de la solution initiale à flot φ^k max issue du graphe G . Soit $\bar{G}(\varphi^k)$ le graphe d'écart relatif à φ^k

On attribue aux arcs de $\bar{G}(\varphi^k)$ les coûts $c(i,j)$ et les capacités c_u suivantes :

-Si $u = (i,j) \in U$ et $b_u \leq \varphi_u < c_u$ dans G , alors dans \bar{G} l'arc $u^+ = (i,j)$ a un coût $\bar{c}(i,j) = c(i,j)$ et une capacité : $\bar{c}u^+ = c_u - \varphi_u > 0$;

-Si $u = (i,j) \in U$ et $b_u < \varphi_u \leq c_u$ dans G , alors dans \bar{G} l'arc $u^- = (i,j)$ a un coût $\bar{c}(i,j) = -c(i,j)$ et une capacité : $\bar{c}u^- = \varphi_u - b_u > 0$;

Remarque .

Ici la borne inférieure est nulle

La deuxième étape consiste à trouver un sommet initial du chemin de coût négatif dans le graphe d'écart \bar{G} obtenu à partir de G

7-4-3-3-1-Énoncé de l'algorithme

a) Initialisation

On définit une matrice $L(i,j)$ de taille $U \times U$ formée des éléments $l(i,j)$ dont la valeur est égale au coût du passage d'un sommet i quelconque à un sommet j quelconque du graphe d'écart $\bar{G}(\varphi^k)$

On va d'abord répertorier dans la matrice $L(i,j)$ tous les chemins possibles du graphe d'écart,

- Pour $i = 2, \dots, U$ et $j = 2, \dots, U$. On initialise la matrice $L(i,j)$ à ∞ , puis on exécute la procédure :

- Si $(i=j)$ alors $l(i,j) := 0$.

Pour tous les arcs tels que $(i \text{ différent de } j)$ du graphe d'écart faire : $l(i,j) :=$ longueur de l'arc (i,j)

- Si l'arc $u = (i,j) \in U$ de \bar{G} a un flux $\varphi_u = 0$ alors : $l(i,j) := c(i,j)$

- Si l'arc $u = (i,j) \in U$ de \bar{G} a un flux $\varphi_u = 1$ alors : $l(i,j) := -c(i,j)$.

$c(i,j)$ sont les coûts de la fonction $C(i,j)$ associés à chaque arc $u \in U$ obtenus à partir du modèle.

b) Détection d'un chemin de longueur négative (détection d'un noeud appartenant à un circuit de coût négatif).

Pour cela il faut chercher dans le graphe d'écart, si il existe une distance (coût) plus courte pour aller de i en i en passant par un sommet intermédiaire k . Si c'est le cas et si $i=j$ avec la valeur de la distance négative alors il existe un chemin de longueur négative et le sommet i est un noeud de ce chemin.

On doit alors effectuer l'algorithme suivant :

pour $k=2, \dots, U$

pour $i=2, \dots, U$ et $j=2, \dots, U$

on calcule la distance $l(i,k) + l(k,j)$

- Si $l(i,k) + l(k,j) < l(i,j)$ et si $i=j$ avec $l(i,k) + l(k,j) < 0$

Alors il existe un chemin de longueur strictement négatif et i est un de ces noeuds, en effet si $i = j$ on a bien un chemin orienté (on est revenu sur le sommet de départ).

c) Complémentation .

Lorsque l'on a trouvé dans \bar{G} le chemin $\bar{\mu}$ de longueur négatif et le noeud de départ correspondant, si ε est la capacité du chemin $\bar{\mu}$, on définit le flot φ^{k+1} par : $\varphi^{k+1} = \varphi^k + \varepsilon \bar{\mu}$

Soit :

$$\varphi_u^{k+1} = \varphi_u^k + \varepsilon u \text{ si } u^+ \text{ appartient à } \bar{\mu}$$

$$\varphi_u^{k+1} = \varphi_u^k - \varepsilon u \text{ si } u^- \text{ appartient à } \bar{\mu}$$

On peut constater que le flot associé à \bar{G} n'a pas changé puisque la propriété du chemin de coût négatif est qu'il est orienté (il commence et termine par le même noeud) donc φ^k de \bar{G} (φ^k) égal à φ^{k+1} . Par contre le coût associé à $G(\varphi^k)$ est moindre .

Il suffit alors de rechercher tous les chemins de coût négatif dans $\bar{G}(\varphi^k)$, d'opérer les complémentations dans G , pour obtenir finalement une solution optimale, mais toujours de flot maximum (solution de départ).

7-4-3-4-Exemple d'application : Recherche du flot maximum à coût minimum :

Soit la section à reconstruire définie par les courbes de densité suivantes (fig 62)

$$\sum a_i = 2, 2, 3, 2, 2 . \quad \sum b_j = 2, 5, 3, 1 .$$

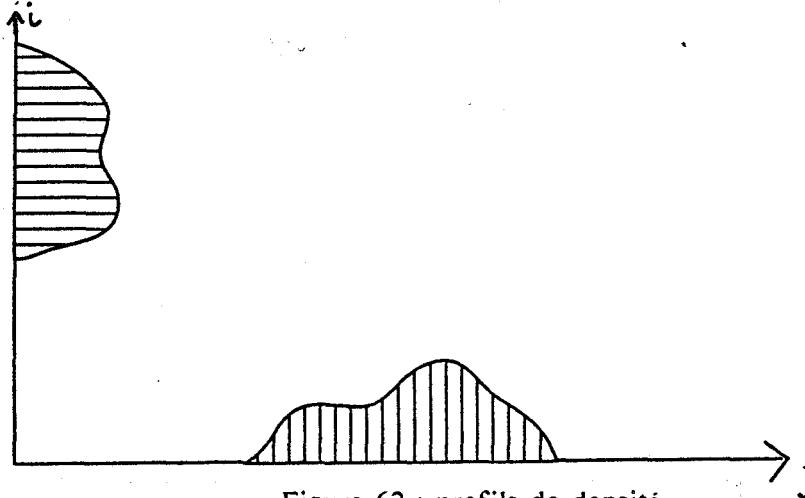


Figure 62 : profils de densité

Le graphe obtenu à partir des courbes de densités est donné (fig 63) :

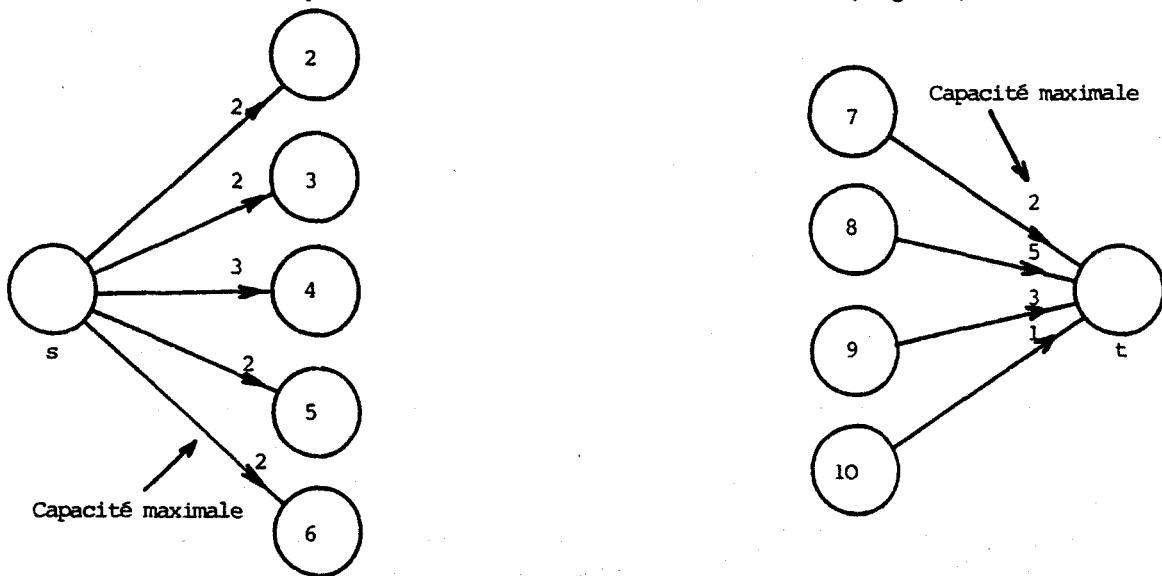


Figure 63 : graphe G

Le modèle utilisé à la même taille que la section à reconstruire (fig 64) :

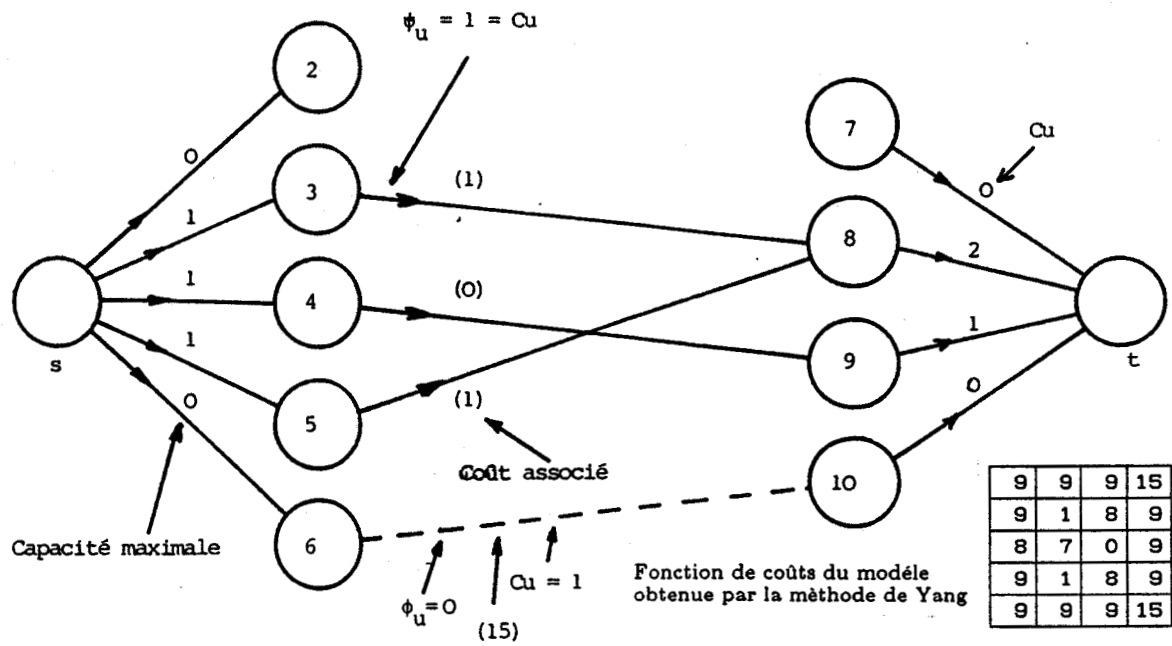


Figure 64

On suppose dans cet exemple la solution initiale de flot φ_0 déjà obtenue et de valeur $\varphi_u = \varphi_u \text{ max}$ le coût de cette solution est la somme de tous les coûts des arcs intermédiaires dont $\varphi_u = 1$, on trouve un coût égal à 71 . Le graphe de cette solution est celui de la figure 65 :

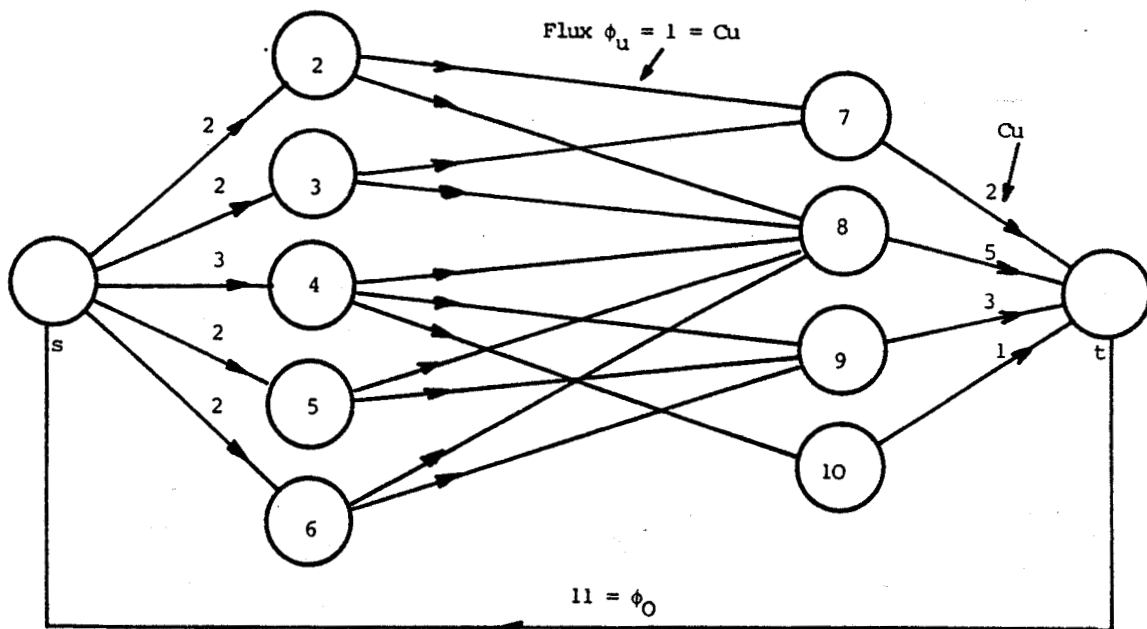


Figure 65 : graphe de la solution initiale

Pour obtenir les coûts de G il faut superposer les centres de gravité des profils de densités du modèle et de la section à reconstruire . A chaque arc $u(i,j)$ reliant le sommet X_i ($i=2, \dots, n$) au sommet X_j ($j=n+1, \dots, U$) est associé un coût.

Nous allons maintenant à partir de la solution initiale à flux maximal optimiser cette solution en recherchant un chemin de coût minimum.

1ere étape : Construction du graphe d'écart

Elle consiste à construire le graphe d'écart (fig 66) de la solution initiale à flux max Rappel .

-Si $u = (i,j) \in U$ et $bu \leq \varphi_u < cu$ dans G , alors dans \bar{G} l'arc $u^+ = (i,j)$ a un coût $\bar{c}(i,j) = c(i,j)$ et une capacité : $\bar{c}u^+ = cu - \varphi_u > 0$;

-Si $u = (i,j) \in U$ et $bu < \varphi_u \leq cu$ dans G , alors dans \bar{G} l'arc $u^- = (i,j)$ a un coût $\bar{c}(i,j) = -c(i,j)$ et une capacité : $\bar{c}u^- = \varphi_u - bu > 0$;

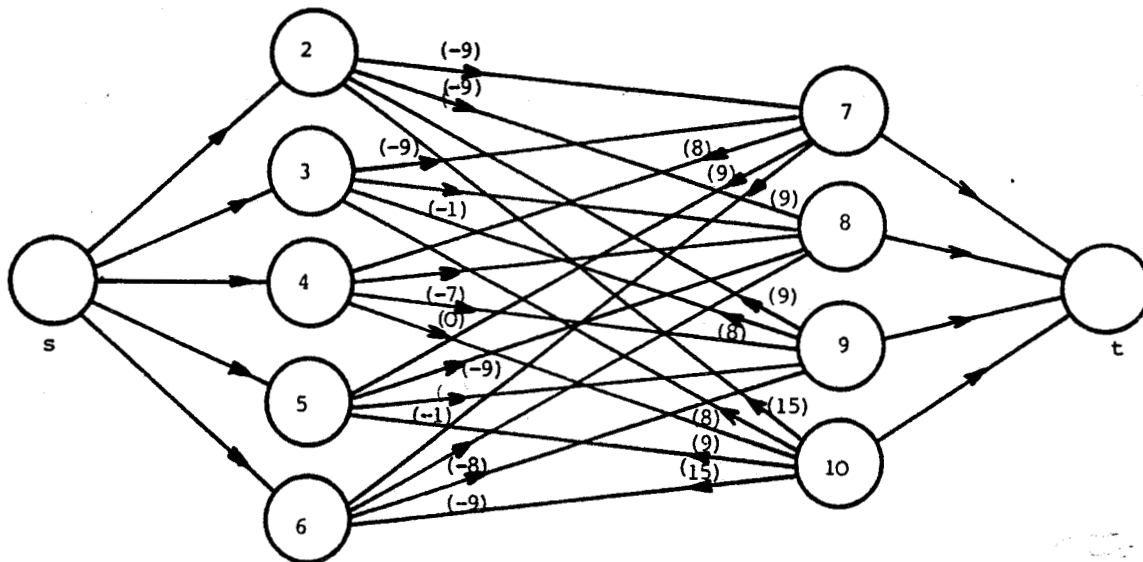


Figure 66 : graphe d'écart

La recherche d'un chemin à coût minimum passe par la recherche d'un chemin $\bar{\mu}$ à coût négatif dans \bar{G} . Pour cela il suffit de trouver un sommet de ce chemin et de remonter le chemin :

2eme étape : Recherche d'un chemin à coût minimum .

On définit la matrice $L(i,j)$ de taille $U*U$ formée des éléments $l(i,j)$ dont la valeur est égale au coût de passage d'un sommet i quelconque à un sommet j quelconque.

Initialisation de la matrice $L(i,j)$ de tous les chemins possibles du graphe d'écart \bar{G} (fig 67), il suffit de suivre l'algorithme décrit figure 68 :

2	0	999	999	999	999	-9	-9	999	999
3	999	0	999	999	999	-9	-1	999	999
4	999	999	0	999	999	999	-7	0	-9
5	999	999	999	0	999	999	-1	-8	999
6	999	999	999	999	0	999	-9	-9	999
7	999	999	8	9	9	0	999	999	999
8	999	999	999	999	999	999	0	999	999
9	9	8	999	999	999	999	999	0	999
10	15	9	999	9	15	999	999	999	0
i/j	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Figure 67 : matrice $L(i,j)$

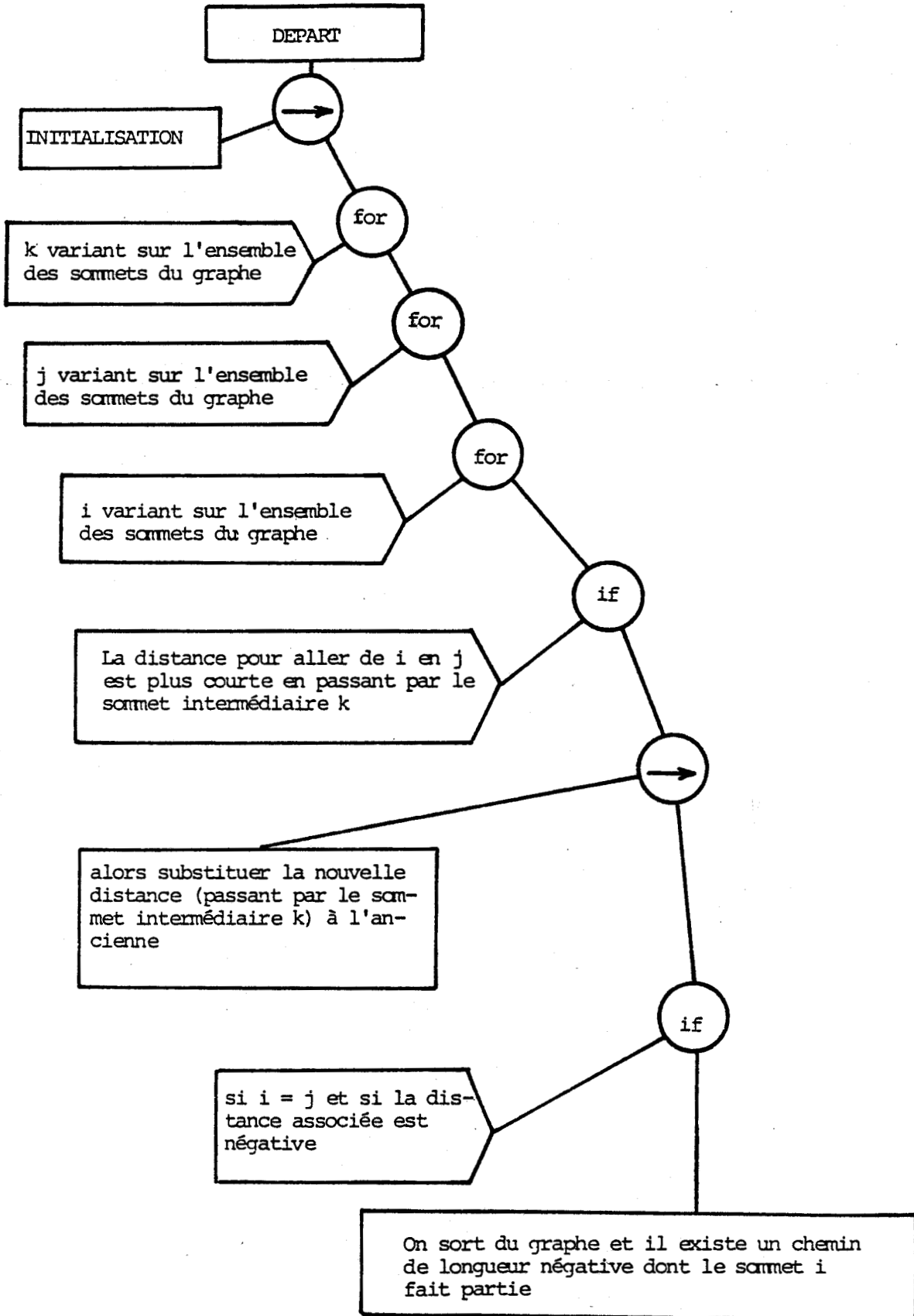


Figure 69 : algorithme de recherche du chemin de longueur négatif .

On vient de trouver l'un des noeuds du circuit de longueur négative. Il suffit dans les graphes d'écarts précédents (c'est à dire les matrices $L(i,j)$) de trouver tous les noeuds du chemin $\bar{\mu}$ à longueur (coût) négative.

Exemple pour $i = 9$ et $j = 7$ on fait varier k et on regarde si $l_{9,k} + l_{k,7} < 0$ si oui on a encore un noeud de ce chemin. On s'arrête dès que l'on peut aller de S à T avec ce chemin.

Pour $k=3$ on a encore un noeud de ce chemin, en effet $l_{9,3} + l_{3,7} = 8 - 9 = -1$. De même pour $k=6$ on a $l_{9,6} + l_{6,7} = 0 - 9 = -9$. Le chemin final $\bar{\mu}$ est trouvé puisque que l'on peut passer de S à T .

On rappelle les noeuds du chemin $\bar{\mu}$ trouvés : $S, 3, 7, 6, 9, T$.

3eme étape : Complémentation binaire.

Il ne reste plus qu'à effectuer la substitution suivante dans le graphe G . Dans le chemin $\bar{\mu}$ de longueur négative on complémente $\varphi_u = 0$ en $\varphi_u = 1$ et $\varphi_u = 1$ en $\varphi_u = 0$.

Le coût final du graphe G (fig 71) est la somme des coûts des arcs intermédiaires dont $\varphi_u = 1$, on trouve un coût égal à 70 (inférieur à 71 initialement).

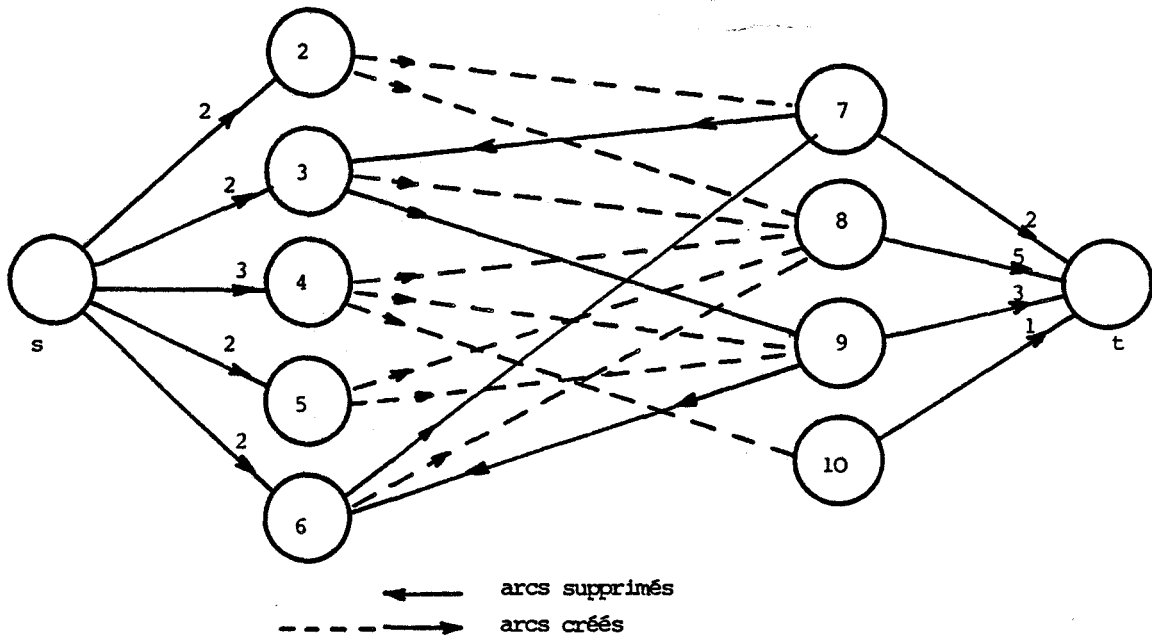


Figure 71 : Graphe G résultant

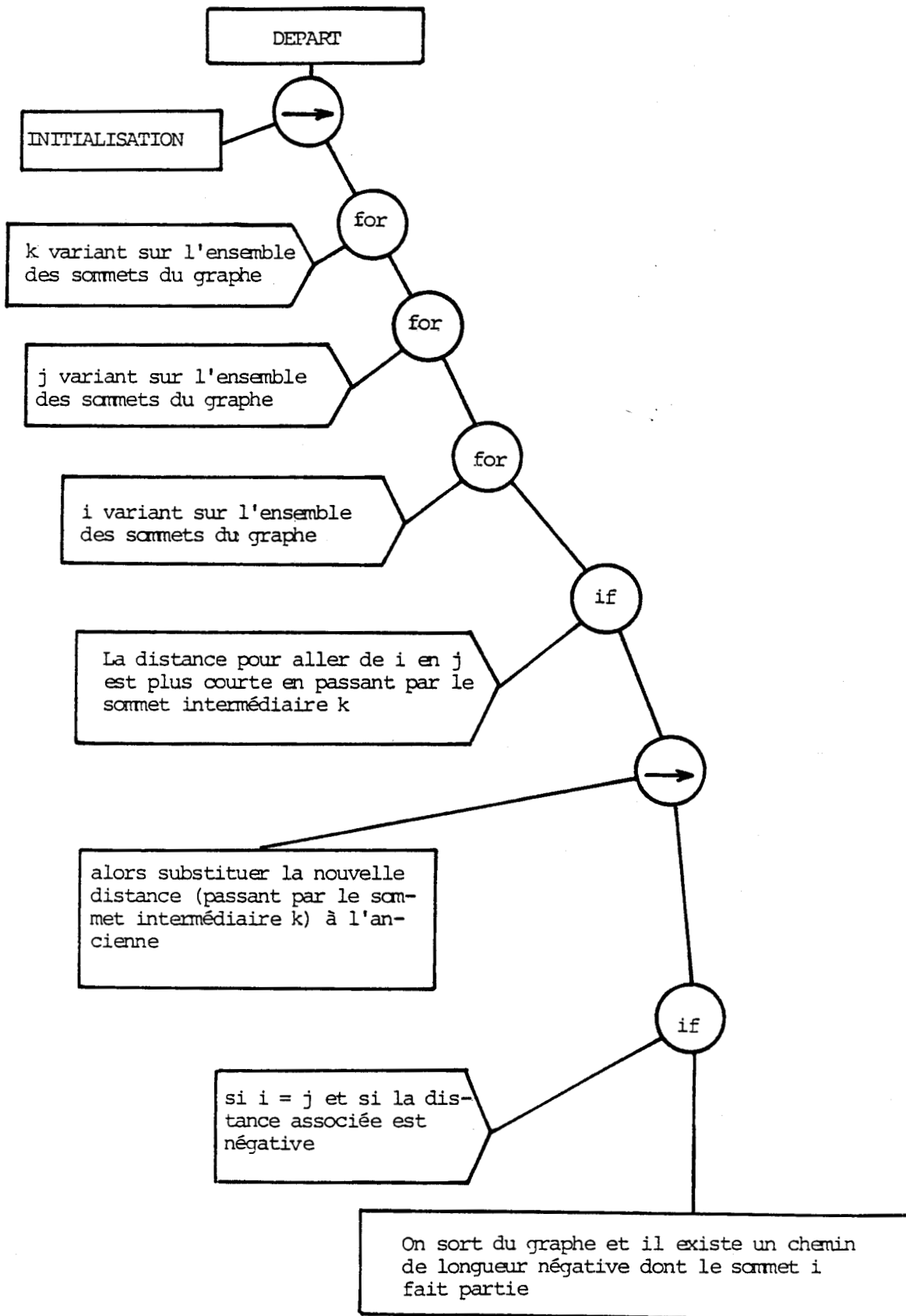


Figure 69 : algorithme de recherche du chemin de longueur négatif .

On vient de trouver l'un des noeuds du circuit de longueur négative. Il suffit dans les graphes d'écarts précédents (c'est à dire les matrices $L(i,j)$) de trouver tous les noeuds du chemin $\bar{\mu}$ à longueur (coût) négative.

Exemple pour $i = 9$ et $j = 7$ on fait varier K et on regarde si $l_{(9,k)} + l_{(k,7)} < 0$ si oui on a encore un noeud de ce chemin. On s'arrête dès que l'on peut aller de S à T avec ce chemin.

Pour $k=3$ on a encore un noeud de ce chemin, en effet $l_{9,3} + l_{3,9} = 8 - 9 = -1$. De même pour $k=6$ on a $l_{9,7} + l_{7,9} = 0 - 9 = -9$. Le chemin final $\bar{\mu}$ est trouvé puisque que l'on peut passer de S à T .

On rappelle les noeuds du chemin $\bar{\mu}$ trouvés : $S, 3, 7, 6, 9, T$.

3eme étape : Complémentation binaire.

Il ne reste plus qu'à effectuer la substitution suivante dans le graphe G . Dans le chemin $\bar{\mu}$ de longueur négative on complémente $\varphi_u = 0$ en $\varphi_u = 1$ et $\varphi_u = 1$ en $\varphi_u = 0$.

Le coût final du graphe G (fig 71) est la somme des coûts des arcs intermédiaires dont $\varphi_u = 1$, on trouve un coût égale à 70 (inférieur à 71 initialement).

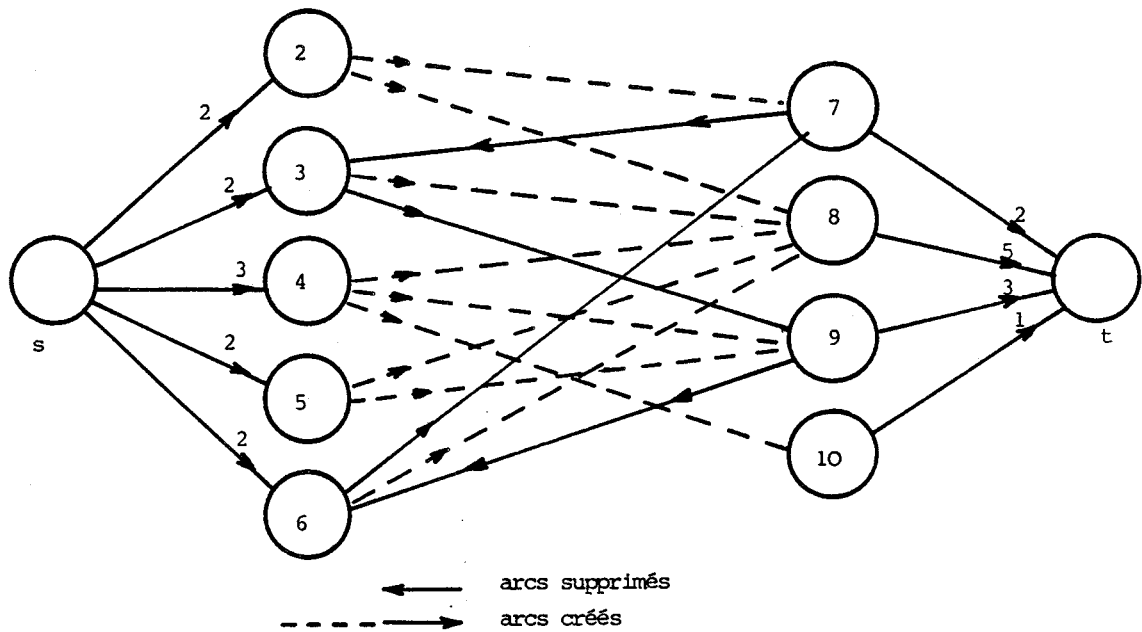


Figure 71 : Graphe G résultant

7-4-4-Flot moyen à coût minimum

7-4-4-1-Introduction

L'idée de cet algorithme consiste, à partir d'une solution initiale possédant un flux non nul (due à la reconstruction approximative), à rechercher un flot de S (sommet source) à T (sommet puits) de valeur φ^k imposée et de coût minimal parmi l'ensemble de tous les flots de S à T de valeur φ^k .

Ceci revient à chercher dans \bar{G} (graphe d'écart) l'ensemble des chemins optimaux (si ils existent), de S (sommet source) à T (sommet puits) de valeur minimum pour le flux courant et à augmenter la valeur du flot d'une unité de flux dans le graphe G lorsque l'on emprunte les arcs de ce chemin.

7-4-4-2-Description mathématique.

Soit $G = [X, U]$ un graphe (connexe) de flot φ_1 d'entrée S (sommet source) et de sortie T (sommet puits), à chaque arc $u = (i, j)$ appartenant à U on associe deux nombres $c_u = 0$ et $c(i, j) =$. On construit dans G un flot φ_2 ($\varphi_1 < \varphi_2$) de coût minimal parmi tous les flots de valeur φ_2 , puis un flot φ_3 ($\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$) de coût minimal parmi tous les flots de valeur φ_3 , etc jusqu'à atteindre φ^k de coût minimal dans G.

Remarque .

Un flot φ^k est un flot de coût minimal parmi tous les flots de valeurs φ^k si et seulement si dans le graphe d'écart associé à φ^k $\bar{G}(\varphi^k)$ il n'existe pas de circuit de coût négatif .

Les coûts associés à l'ensemble des arcs (arcs intermédiaires plus les arcs de la source plus les arcs du puits) est dû au fait que les courbes de densité proviennent de projections incompatibles :

$$\sum_{i=1}^m a(i) \neq \sum_{j=1}^n b(j)$$

On va d'abord définir les limites inférieures et supérieures des projections, c'est à dire les limites dans les quelles sont comprises les courbes de densités réelles .

7-4-4-3-Définition des limites des courbes de densité .

On trouve généralement dans la littérature [Tana 76] [John 77] [Slum 82] [Yang 89] [Herm 73] l'hypothèse suivante : le bruit sur l'amplitude des courbes de densités et sur leur largeur (due à la segmentation) est un bruit de type poissonien.

Un modèle simple de bruit poissonien considère l'erreur commise sur l'amplitude des profils de densités prise entre (fig 72)

-la valeur de l'amplitude + la racine de cette valeur .

-la valeur de l'amplitude - la racine de cette valeur.

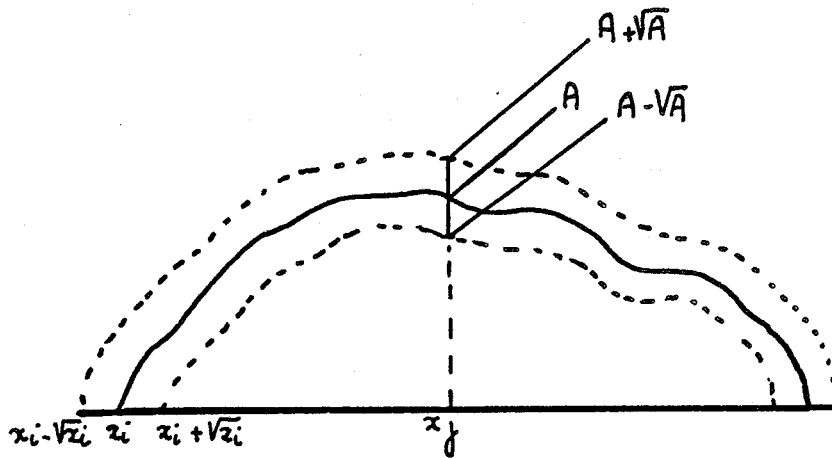


Figure 72

Le même raisonnement s'applique pour la largeur des courbes de densités .

Généralement les courbes de densités réelles seront toujours comprises entre ses deux limites . Une autre modification apportée par le bruit est la valeur du flot à transporter de la source au puits . En effet cette valeur n'est plus définie comme étant exactement la somme des flux entrants ou la somme des flux sortants mais plutôt comme le Flot moyen donné par : Flot moyen estimé = $1/2 (\Sigma a_i + \Sigma b_j)$

7-4-4-4-Calculs des coûts des arcs de la source et du puits

Les coûts des arcs de la source et du puits sont obtenus de la façon suivante :

-La limite inférieure des arcs de la source est :

$$S_i^l = \max (0, a_i - \sqrt{a_i}) \quad i = 1, \dots, m$$

-La limite supérieure des arcs de la source est :

$$S_i^u = \min (n, a_i + \sqrt{a_i}) \quad i = 1, \dots, m$$

-La limite inférieure des arcs du puits est :

$$W_j^l = \max (0, b_j - \sqrt{b_j}) \quad j = 1, \dots, n$$

-La limite supérieure des arcs du puits est :

$$W_j^u = \min (0, b_j + \sqrt{b_j}) \quad j = 1, \dots, n$$

On appelle $K(i,j)$ les coûts associés, aux arcs sortants de la sources et aux arcs entrants dans le puits . Dans le cas où l'on raisonne sur le ième arc du puits, on associe aux coûts la règle suivante :

$K(i,j) = p_1$	si $y_i \leq W_i^l$	$W_i^l \leq i \leq a_i$ $b_i \leq i \leq W_i^u$
$K(i,j) = p_2$	si	
$K(i,j) = p_3$	si $i = b_i$	
$K(i,j) = p_4$	si	
$K(i,j) = p_5$	sinon	

Avec $p_1=0$ $p_2=4$ $p_3=16$ $p_4=48$ $p_5=\infty$

Ces coûts-coefficient sont choisis de façon que les flux des arcs de la source et du puits

correspondent le mieux aux deux projections . Il ne reste plus qu'à exprimer les coûts des arcs intermédiaires .

7-4-4-5-Construction du graphe d'écart .

On considère φ un flot de la solution initiale . Au couple $(G = [X, U], \varphi)$ on associe le graphe d'écart $(\bar{G} = [X, \bar{U}], \varphi)$. $G(\varphi)$ a même ensemble de sommets X que G et à tout arc intermédiaire $u=(i,j)$ appartenant à G on attribue aux arcs intermédiaires de $\bar{G}(\varphi)$ les coûts et les capacités suivantes:

-soit φ le flux non nul circulant sur arc $u=(i,j)$ de G appartenant à U de la source (resp du puits) .

On associe à l'arc $u=(j,i)$ de \bar{G} appartenant à U un coût $K(j,i)=-K(i,j)$ et une capacité $\bar{c}u^- = cu$.

-Si l'arc de G n'est pas saturé, alors on associe à l'arc $u=(i,j)$ de \bar{G} appartenant à U , un coût $K(i,j)=K(i,j)$ et une capacité $\bar{c}u^+ = cu - \varphi_u$

7-4-4-6-Recherche du plus court chemin

On recherche dans le graphe d'écart un chemin optimal allant de la source au puits, pour lequel, dans G , le flot est augmenté d'une unité de flux . Pour cela on va recenser dans le graphe d'écart tous les chemins de coût minimum, empruntant les sommets intermédiaires, allant de la source vers tous les autres sommets . On choisira les chemins pour lesquels le flot est modifié dans G , tant que le flot moyen n'est pas atteint .

7-4-4-6-1-Enoncé de l'algorithme

-a)Recenser tous les chemins possibles, de S à T empruntant les sommets intermédiaires ,dans le graphe d'écart .

-b)Choisir parmi tous ces chemins celui dont le coût est minimum .

-c)Modifier le flux circulant le long des arcs de ce chemin dans le graphe G ($\varphi = 1$ pour les arcs directs et $\varphi = 0$ pour les arcs inverses)

-d)Tant que le flot moyen n'est pas atteint on retrace de nouveau le graphe d'écart (dont le flot est donné étape -c)) et on retourne en -a) .

Sinon terminé : on a atteint le flot moyen fixé à coût minimum .

remarque .

Cet algorithme ne fonctionne pas lorsqu'il existe un chemin de coût négatif dans le graphe d'écart \bar{G} .

Dans ce cas nous proposons la solution suivante :

Si l'on détecte un chemin de coût négatif on substitue dans ce chemin les flux $\varphi= 0$ en flux $\varphi= 1$ et inversement . l'algorithme peut ainsi continuer jusqu'à atteindre la valeur du flot moyen estimé .

7-4-4-7-Reconstruction approximative

On peut commencer l'algorithme proposé précédemment en partant d'une solution initiale nulle ($\varphi^0=(0,0,\dots,0)$), trouver ensuite une solution possible puis minimiser le coût total. Malheureusement dans ce cas la solution optimale concernant la matrice de coût pourrait ne pas être unique. Pour cela on utilise une technique dite de reconstruction approximative [Slum 82].

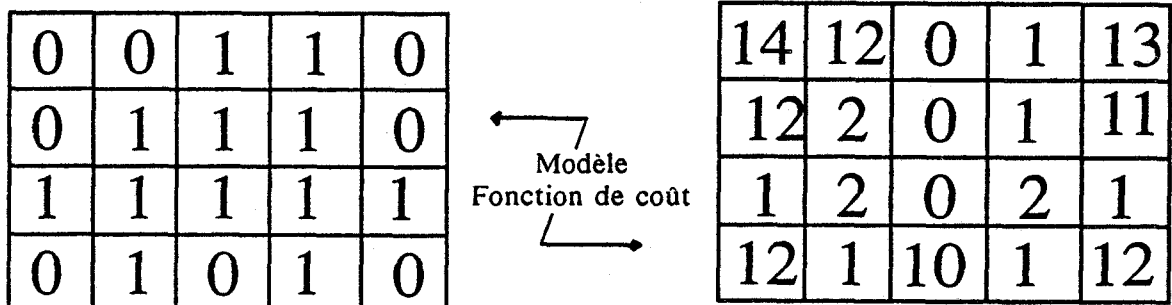
Le principe de la méthode est basé sur la matrice de coût. Elle va consister, en partant d'un flot nul, à augmenter le flot à partir de critères basés sur la matrice de coût (matrice calculée à partir du modèle). On augmente le flot de cette manière tant que les courbes de densité obtenues par la reconstruction approximative sont inférieures ou égales aux courbes de densité de la surface à reconstruire.

remarque .

L'intérêt d'une telle reconstruction est quelle permet de reconstruire exactement la surface recherchée quand le modèle et la surface ont des profils de densités identiques. Malheureusement cette reconstruction est d'autant plus approximative que le modèle sera très différent de l'objet à reconstruire.

7-4-4-8-Exemple d'application de recherche d'un flot à coût minimum

On donne un modèle et sa fonction de coûts associées (fig 73)



La section à reconstruire est définie par ses courbes de densité bruitées suivante .

$$\Sigma_{ai} = 3, 2, 5, 4 .$$

$$\Sigma_{bj} = 2, 3, 4, 6, 2 .$$

On a bien Σ_{ai} différent de Σ_{bj} . Le flot estimé moyen est donné par la relation suivante:
Flot moyen estimé = $1/2 (\Sigma_{ai} + \Sigma_{bj}) = 15$

Le graphe de la section à reconstruire déduit des courbes de densité bruitées est donné figure 74

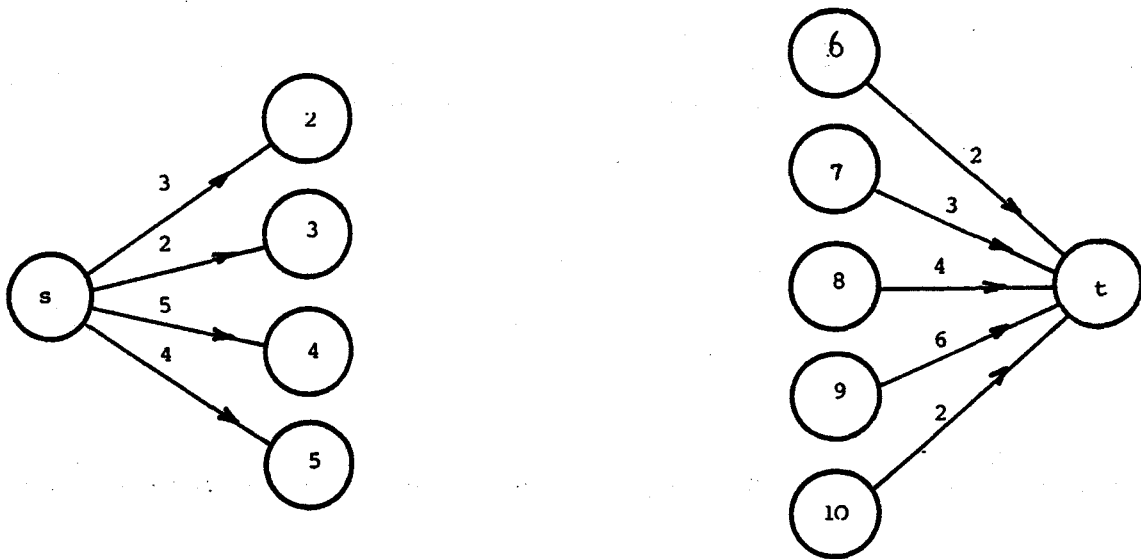
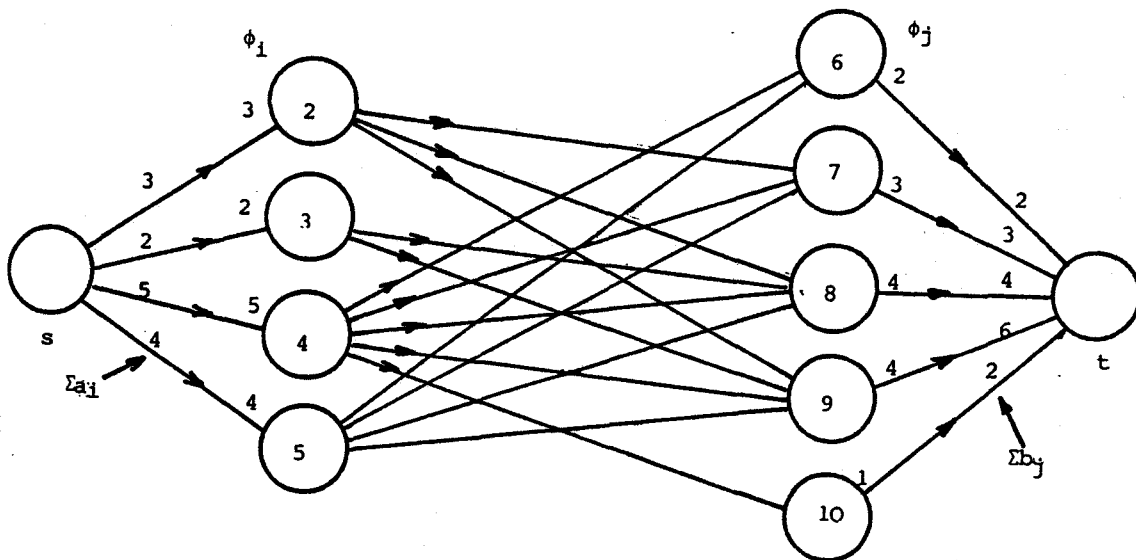


Figure 74 : graphe de la section à reconstruire

Dans cet exemple on suppose la solution approximative (solution de départ) déjà obtenue, le graphe correspondant est (fig 75). On constate que pour cette solution de départ seuls deux noeuds sont non saturés (le noeud 9, et le noeud 10). le flot actuellement transporté est égal à $1/2$ (Σ des flux actuels sortants de la source + Σ des flux actuels arrivant sur le puits) = 14 . Le flot est donc inférieur au flot estimé



Σa_i et Σb_j = les courbes de densités de départ
 ϕ_i et ϕ_j = les flux actuels

Figure 75 : graphe de la solution approximative .

1ere étape : Calcul du coût sur les arcs partants de la source et les arcs arrivants au puits de la section à reconstruire .

Soit ϕ_v le flux sur le jème arc de la source (arc qui relie S à 3) si la valeur de ce flux est égal à la valeur du flux possible pouvant circuler (il est donné par Σa_i) dans ce cas le

coût de cet arc est donné par $K(i,j) = 16$. Dans le cas contraire on exprime S_i^l, S_j^u , (respectivement W_i^l, W_j^u), les limites inférieures et supérieures des arcs de la source (respectivement du puits) et l'on cherche si une des égalités est vérifiées (du paragraphe 6-4-4-4) . Exemple pour le noeud 9 relié au puits on a la valeur du flux actuel égal à 4, la valeur du flux permis (il est donné par Σb_j) est égal à 6, d'où $W_i^l \leq \varphi_v \leq b_j$. Le coût de cet arc est égal à $k(i,j) = 4$.(fig 76)

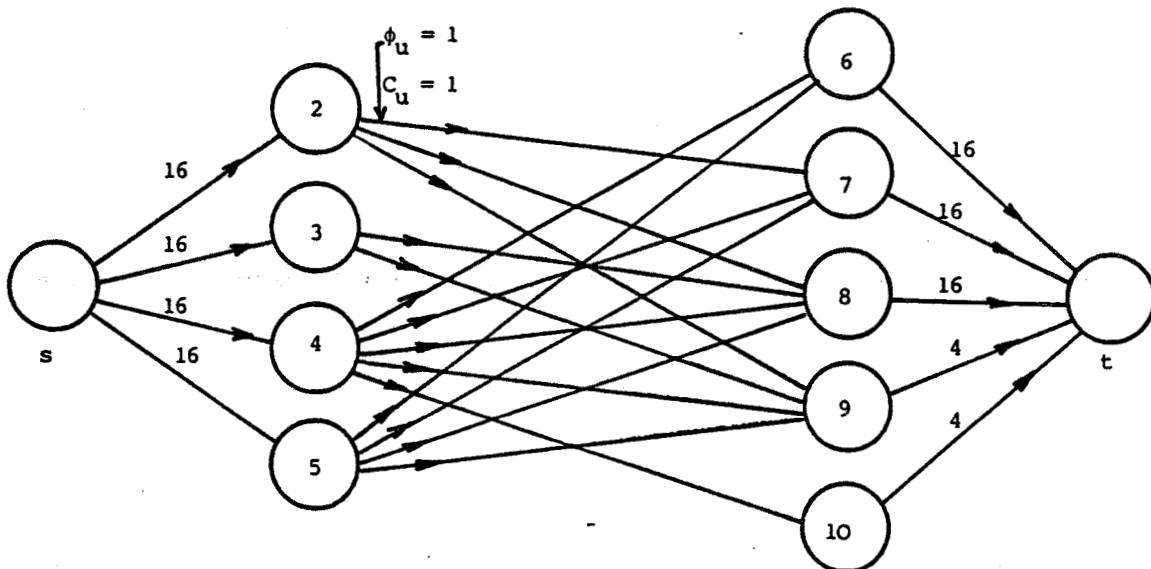


Figure 76

2eme étape : Calcul du coût des arcs intermédiaires de la section à reconstruire ..

Il est obtenu à l'aide de la fonction de coût déterminée pour le modèle .

Le graphe G de la solution approximative et des différents coûts associés à chaque arc est (fig 77)

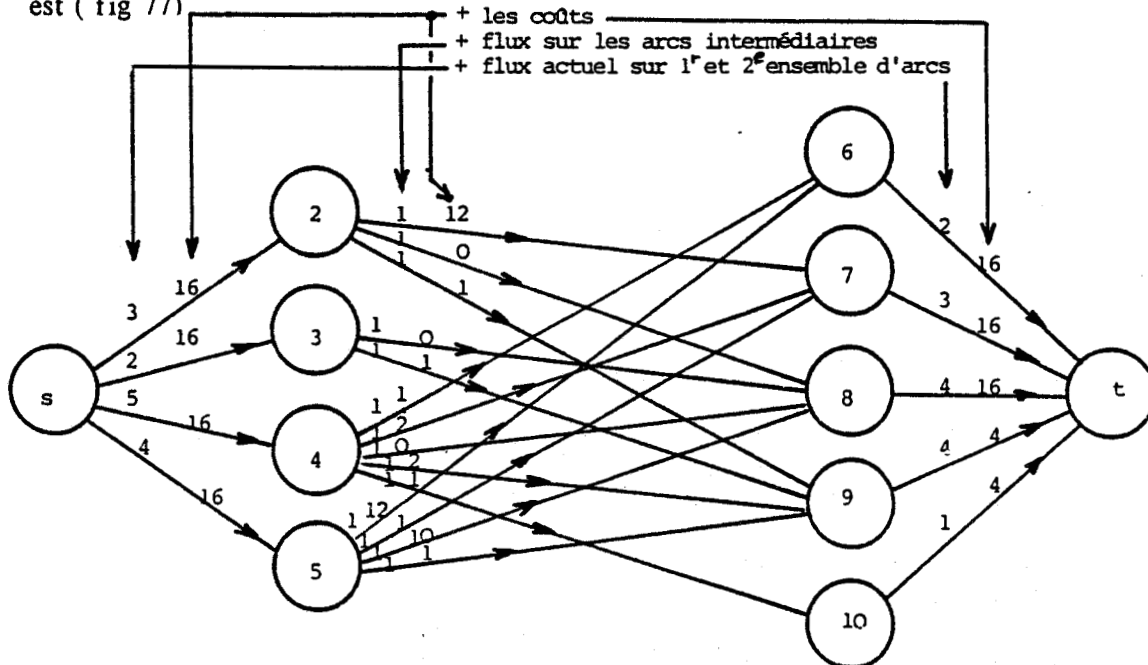


Figure 77 : graphe de G plus les coûts .

3eme étape : Construction du graphe d'écart G

Rappel .

-soit φ le flux non nul circulant sur arc $u=(i,j)$ de G appartenant à U de la de la source (resp du puits) .

On associe à l'arc $u=(j,i)$ de \bar{G} appartenant à U un coût $K(j,i)=-K(i,j)$ et une capacité $\bar{c}_u = c_u$.

-Si l'arc de G n'est pas saturé, alors on associe à l'arc $u=(i,j)$ de \bar{G} appartenant à U , un coût $K(i,j)=K(i,j)$ et une capacité $\bar{c}_u^+ = c_u - \varphi_u$

On obtient le graphe suivant (fig78)

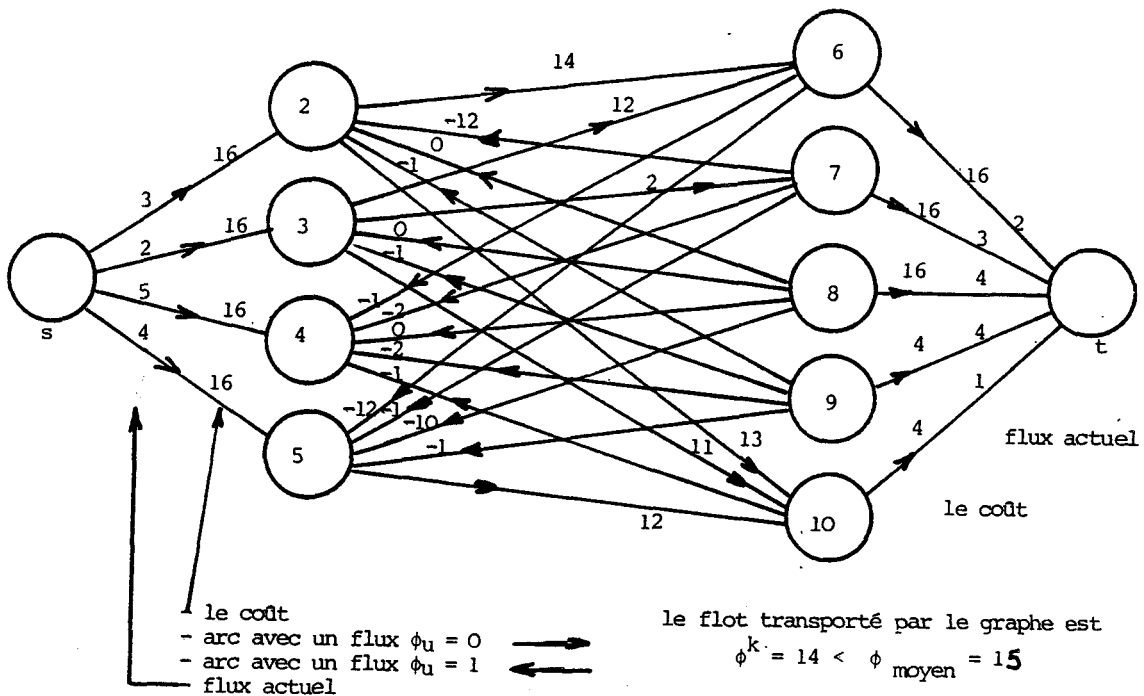


Figure 78: graphe d'écart

4eme étape : Recherche d'un chemin à coût minimum qui augmente le flux transporté

On commence par recenser tous les chemins possibles de S à T . Ces chemins sont illustrés par la matrice figure 79 . Nous allons donner un exemple de cette opération de recensement .

On est au sommet source S (1) et on veut aller au sommet puits (11) en passant par le sommet intermédiaire 1 . Si on regarde le graphe d'écart de la figure 78 .

- De 1 on peut aller en 1 avec un coût de 0 que l'on mémorise .
- De 1 on peut aller en 2 avec un coût de 16 que l'on mémorise .
- De 1 on peut aller en 3 avec un coût de 16 que l'on mémorise .
- De 1 on peut aller en 4 avec un coût de 16 que l'on mémorise .
- De 1 on peut aller en 5 avec un coût de 16 que l'on mémorise .
- De 1 on ne peut aller directement en 6, le coût est alors ∞ , que l'on mémorise .

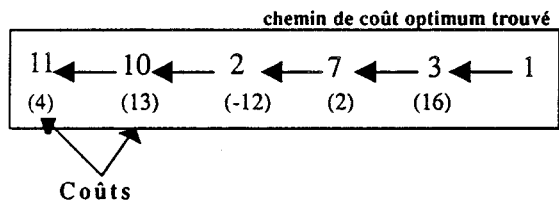
Chapitre 7 : Recherche du flot à coût minimum

- De 1 on ne peut aller directement en 7 le coût est alors ∞ , que l'on mémorise .
- De 1 on ne peut aller directement en 8, le coût est alors ∞ , que l'on mémorise .
- De 1 on ne peut aller directement en 9 le coût est alors ∞ , que l'on mémorise .
- De 1 on ne peut aller directement en 10, le coût est alors ∞ , que l'on mémorise .
- De 1 on ne peut aller directement en 11 (puits) , le coût est alors ∞ , que l'on mémorise.

i/j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1/0	1/16	1/16	1/16	1/16	6/∞	7/∞	8/∞	9/∞	10/∞	11/∞
2	1/0	1/16	1/16	1/16	1/16	2/30	7/∞	8/∞	9/∞	2/19	11/∞
3	1/0	1/16	1/16	1/16	1/16	3/28	3/18	8/∞	9/∞	3/27	11/∞
4	1/0	1/16	1/16	1/16	1/16	3/28	3/18	8/∞	9/∞	3/27	11/∞
5	1/0	1/16	1/16	1/16	1/16	3/28	3/18	8/∞	9/∞	3/27	11/∞
6	1/0	1/16	1/16	6/16	1/16	3/28	3/18	8/∞	9/∞	3/27	6/44
7	1/0	7/6	1/16	6/16	1/16	3/28	3/18	8/∞	9/∞	3/24	6/44
2	1/0	7/6	1/16	6/16	1/16	2/20	3/18	8/∞	9/∞	2/19	6/44
3	1/0	7/6	1/16	1/16	1/16	2/20	3/18	8/∞	9/∞	2/19	6/44
4	1/0	7/6	1/16	1/16	1/16	2/20	3/18	8/∞	9/∞	2/19	6/44
5	1/0	7/6	1/16	1/16	1/16	2/20	3/18	8/∞	9/∞	2/19	6/44
6	1/0	7/6	1/16	1/16	6/8	2/20	3/18	8/∞	9/∞	2/19	6/44
5	1/0	7/6	1/16	1/16	6/8	2/20	3/18	8/∞	9/∞	2/19	6/44
6	1/0	7/6	1/16	1/16	6/8	2/20	3/18	8/∞	9/∞	2/19	6/36
7	1/0	7/6	1/16	1/16	6/8	2/20	3/18	8/∞	9/∞	2/19	7/34
8	1/0	7/6	1/16	1/16	6/8	2/20	3/18	8/∞	9/∞	2/19	7/34
9	1/0	7/6	1/16	1/16	6/8	2/20	3/18	8/∞	9/∞	2/19	7/34
10	1/0	7/6	1/16	6/16	6/8	2/20	3/18	8/∞	9/∞	2/19	10/23
11	1/0	7/6	1/16	6/16	6/8	2/20	3/18	8/∞	9/∞	2/19	10/23

SOMMETS INTERMÉDIAIRES

sommet initial / coût associé



le coût de cette chaîne améliorante est 23

- Les chemins de coût minimum
- 2 → 1 → FIN
 - 3 → 1 → FIN
 - 4 → 1 → FIN
 - 5 → 1 → FIN
 - 6 → 3 → 1 → FIN
 - 7 → 3 → 1 → FIN
 - 2 → 7 → 3 → 1 → FIN
 - 3 → 1 → FIN
 - 4 → 1 → FIN
 - 5 → 1 → FIN
 - 6 → 2 → 7 → 3 → 1 → FIN
 - 5 → 6 → 2 → 7 → 3 → 1 → FIN
 - 6 → 2 → 7 → 3 → 1 → FIN
 - 7 → 3 → 1 → FIN
 - 8 → FIN
 - 9 → FIN
 - 1 → 10 → 2 → 7 → 3 → 1 → FIN
 - 11 → 10 → 2 → 7 → 3 → 1 → FIN

Figure 79 : recensement des chemin possibles

On est maintenant au sommet source 1 et on veut aller au sommet puits 11 en passant par le sommet intermédiaire 2. Si on regarde le graphe d'écart figure 78 .

- De 1 en passant par 2 pour aller en 11 en utilisant 1 le coût est ∞ . (arc indirect de 2 vers 1) . Le coût n'est pas mémorisé, car il est supérieur au coût en mémoire précédent (sa valeur était de 0) .
- De 1 en passant par le sommet intermédiaire 2 pour aller en 11 en utilisant 2 le coût est 16, on ne mémorise pas car le coût est identique au coût initial 16.
- De 1 en passant par le sommet intermédiaire 2 pour aller en 11 en utilisant 3 le coût est infini car pas d'arc direct de 2 en 3. On ne mémorise pas .
- pour 4, 5, 7, 8, 9, 11 pas de changement.
- De 1 en passant par le sommet intermédiaire 2 pour aller en 11 en utilisant 6, il existe un arc direct avec un coût de 30 or précédemment il était infini, donc on mémorise ce nouveau coût plus petit.
- De 1 en passant par 2 pour aller en 11 en utilisant 10 il existe un arc direct avec un coût de 29 or précédemment il était infini, donc on mémorise ce nouveau coût plus petit.

Cette opération est réalisée sur le graphe d'écart en utilisant tour à tour tous les sommets (2, , 11) comme sommets intermédiaires et on évalue les différents chemins possibles et leur coût respectif.

A la fin on choisit le chemin dont le coût est minimum, Ce chemin va permettre d'augmenter le flot d'une unité ϵ sur le graphe G (fig 80) .

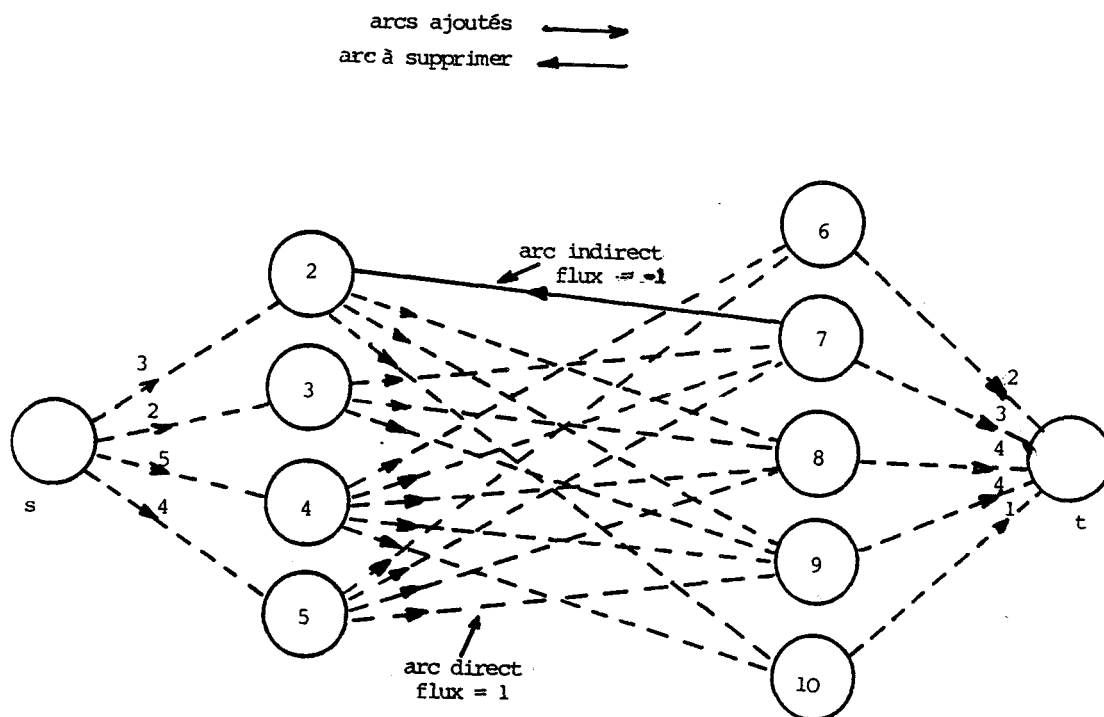


figure 80 : graphe G résultant .

A partir de cet exemple on voit comment on peut établir l'arbre programmatique du logiciel qui a été écrit au laboratoire . Cet algorithme est celui de la figure 79'.

Nous avons illustré à l'aide de trois exemples les algorithmes qui permettent de chercher un chemin à coût minimum dans un graphe donné . Nous allons maintenant appliquer ces algorithmes sur des sections physiques

7-5-Expérimentation

L'expérimentation a été réalisée dans un premier temps sur des surfaces tracées manuellement sur l'écran du moniteur. Ces surfaces sont de formes et tailles variables afin d'étudier la validité des algorithmes. Le critère de comparaison utilisé est celui de Chang et Shelton [Chan 71]. Il s'exprime par la relation suivante :

$$R = \frac{\sum_i^m \sum_j^n MO(i,j) - MX(i,j)}{\sum_i^m \sum_j^n MO(i,j)} \cdot 100\%$$



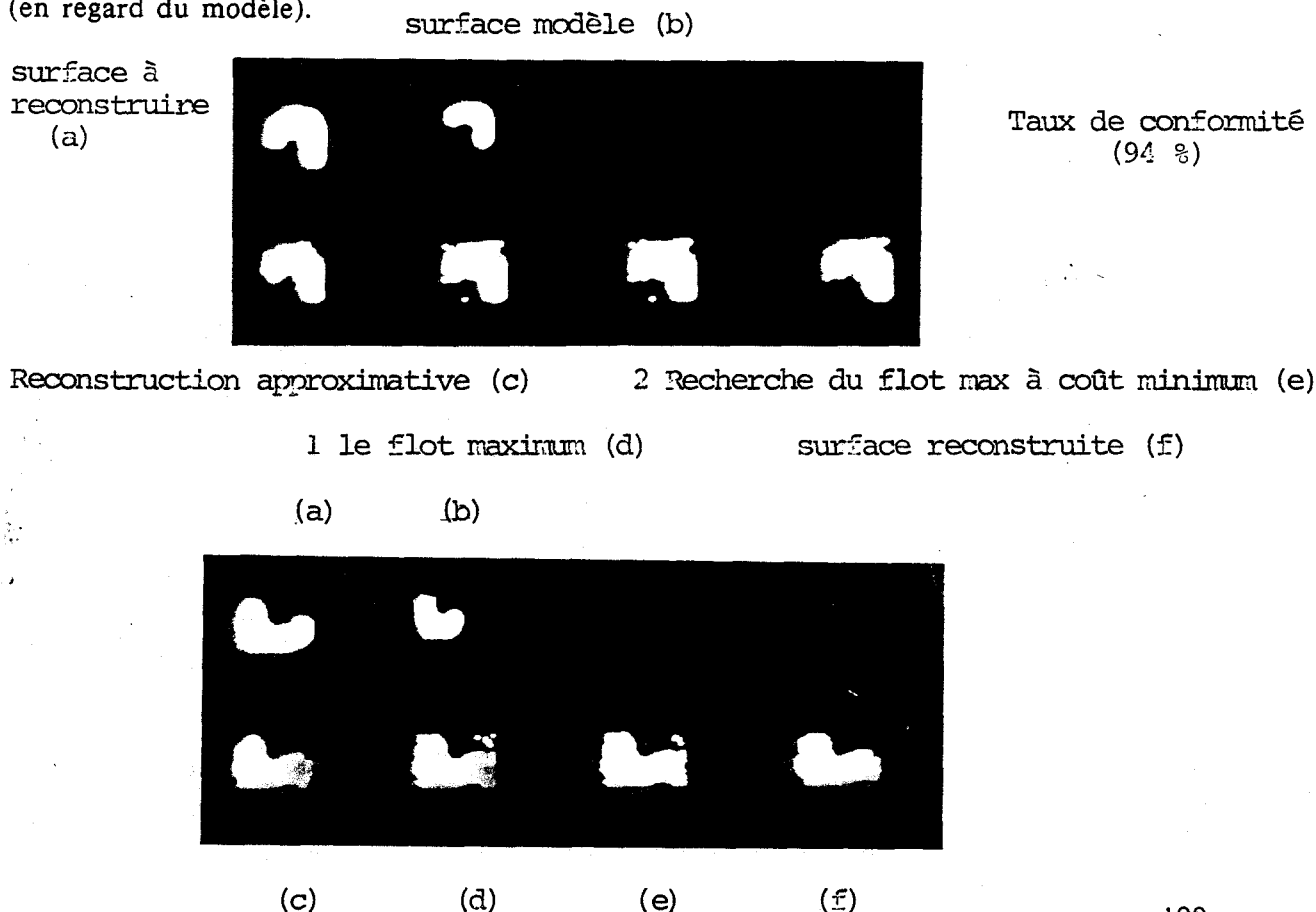
où M.O(i,j) est la matrice origine.
M.X(i,j) est la matrice reconstruite.

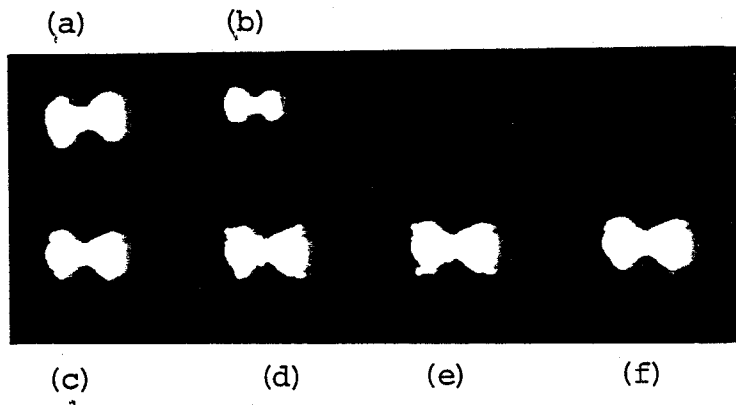
7-5-1-RESULTATS

Dans un premier temps nous avons testé les algorithmes mis en oeuvre pour cela nous sommes partis d'une surface de forme quelconque que nous connaissions, et à l'aide d'un modèle (et de sa matrice de coût associée) nous avons essayé de reconstruire la surface correspondante.

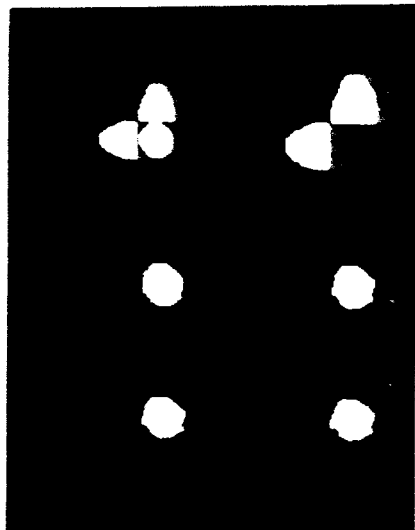
Dans tous les cas (figures 81) nous obtenons un taux de conformité compris entre 93% et 100%, quelle que soit la forme de la surface à reconstruire.

Dans un deuxième temps, nous sommes partis du modèle défini par ses profils de densités, et des deux seules projections bruitées connues de la surface à reconstruire. Nous avons cherché d'abord les courbes de densités bruitées de la surface à reconstruire (par la méthode d'extrapolation) en nous aidant du modèle, puis nous avons appliqué l'algorithme de reconstruction en présence du bruit. Les résultats (figures 82) obtenus sont visuellement acceptables et la forme reconstruite est très proche de celle de la réalité (en regard du modèle).



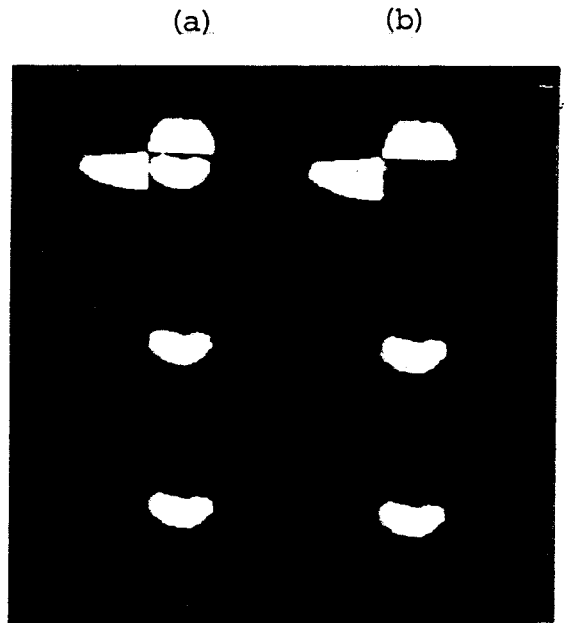


(a) modèle + profils de densité



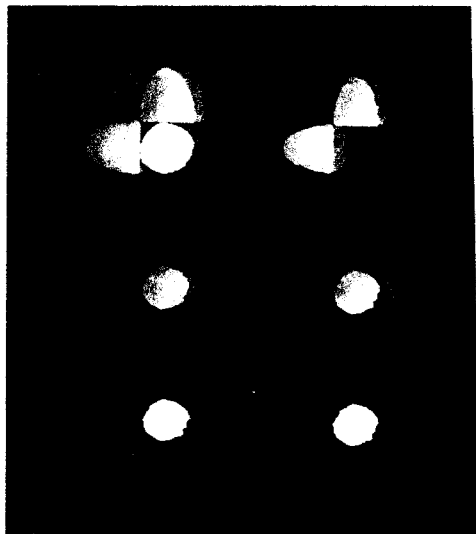
(b) profils de densité du contour extrapolé

(c) section finale reconstruite



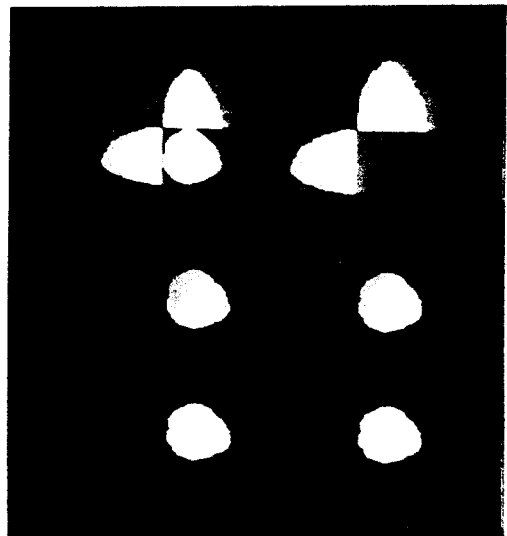
(c)

(a) (b)

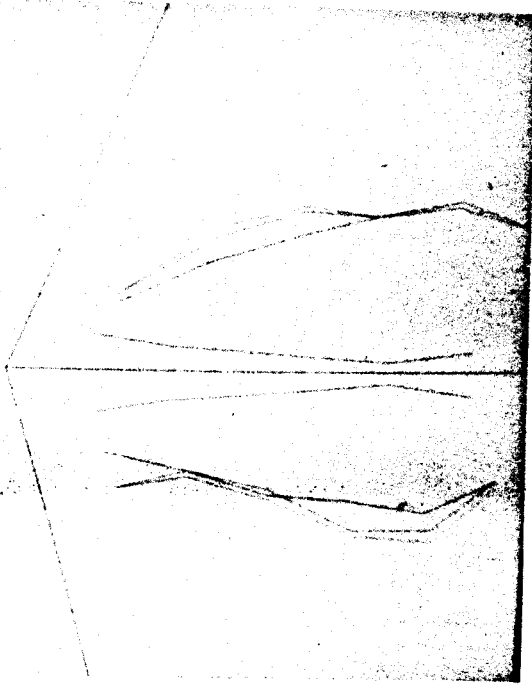


(c)

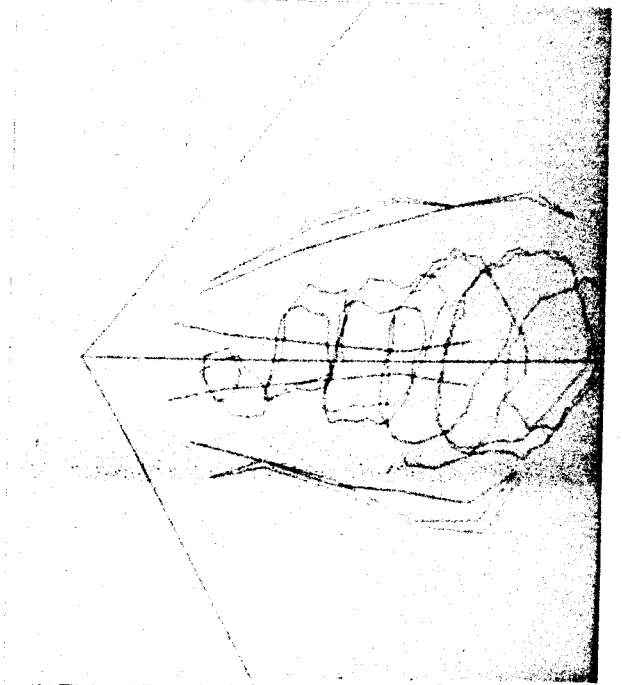
(a) (b)



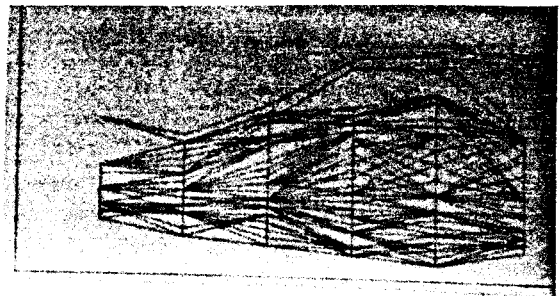
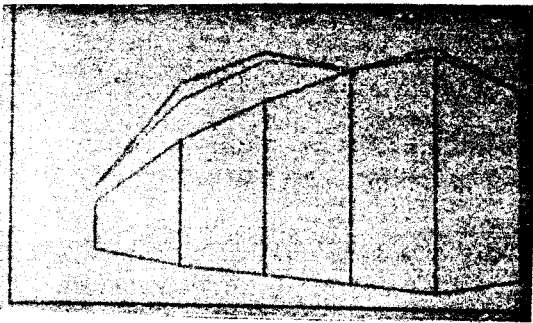
(c)



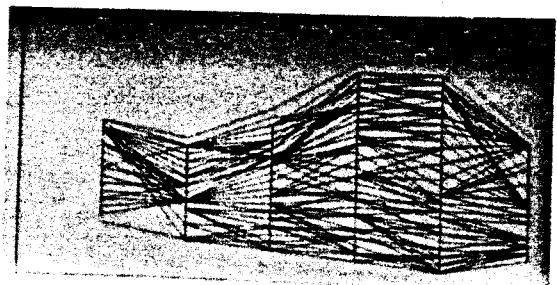
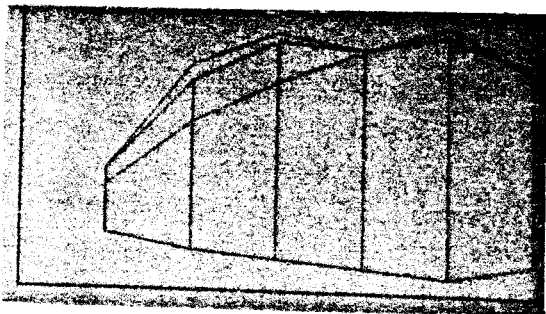
En vert : le profil du modèle
En rouge : les profils obtenus



En bleu : les profils souhaités
du contour recherché



Représentation 3D de la dent modèle en vert et de la dent reconstruite en rouge



7-5-3-Discussion

Nous allons essayer d'évaluer nos résultats, pour la reconstruction 3D de dents dans le cadre d'une utilisation clinique, en fonction des critères de choix évoqués dans la première partie .

Occupation mémoire:

Bien qu'actuellement les algorithmes sont coûteux en place mémoire (dû à la place mémoire nécessaire aux différentes matrices intermédiaires pour la recherche du coût minimum) . Cette préoccupation ne peut constituer un handicap, car les progrès technologiques sont tels que demain une station de type personnelle pourra rivaliser en espace mémoire avec une grosse station d'aujourd'hui .

Le coût .

La durée de calcul est bien supérieure à celle du calcul par la méthode des ellipses. A titre de comparaison la reconstruction par la méthode des ellipses conduit, pour une section quelconque, à une durée inférieure sur un micro-ordinateur 286-16Mhz au dixième de seconde . Par contre la reconstruction par la méthode de recherche d'un chemin à coût minimum conduit à une durée environ 100 fois supérieure (de l'ordre de la seconde sur un micro-ordinateur 486-33Mhz) . En effet pour cette méthode la durée est étroitement liée :

- A la forme de la surface à reconstruire (symétrique ou non, fortement concave,...) .
- A la taille de la surface à reconstruire qui conditionne la taille des matrices de travail . .
- Des astuces et de l'expérience du programmateurs .
- Et de l'architecture sur laquelle elle travaille (architectures spécifiques, parallèles, ...).

le degré de précision

Les algorithmes mis en oeuvre entraînent indéniablement une certaine perte d'informations difficilement chiffrable . En effet les courbes de densités sur lesquelles s'appuient la reconstruction ne sont plus compatibles (dû à la présence du bruit) . On ne cherche plus un flot maximum mais un flot moyen estimé à partir des profils de densités bruités . Ce flot sera d'autant plus proche du flot maximum que les courbes de densités sont très voisines . Néanmoins le degré de précision de la méthode est à notre avis bien plus élevé que celui de la méthode des voxels ou bien de celui de la méthode des ellipses . Le principe même de la méthode est de se servir d'un modèle, et la reconstruction sera d'autant plus précise que la surface du modèle utilisée sera très proche de la surface à reconstruire .

La qualité de visualisation .

Les dents reconstruites semblent très voisines des dents modèles et on n'observe pas de discontinuités ou d'artefacts particuliers .

L'interactivité .

Nous avons laissé aux médecins le choix entre la visualisation filaire et une visualisation par rendu réaliste, les outils créés permettent aux médecins de visualiser la dent reconstruite et son modèle sous diverses incidences .

Chapitre 7 : Recherche du flot à coût minimum

Dans cette 3ème partie, nous avons au cours de cette étude proposé des solutions pour la reconstruction 3D de dents à partir de clichés radiographiques X . Ces solutions ont été complétées par un certain nombre de fonctionnalités spécifiques (calcul de volume, calcul de surface, d'angle, de distance, tracé de trièdre, visualisation simultanée de plusieurs organes,)

Les résultats expérimentaux obtenus sur les clichés radiographiques montrent qu'à l'heure actuelle la reconstruction par les ellipses offre le rapport qualité rapidité le plus avantageux bien que la reconstruction par l'utilisation d'un modèle et de ses profils de densités reste pour l'instant une des méthodes pour l'avenir .

CONCLUSION

L'étude que nous avons menée a consisté à développer les étapes d'une chaîne fonctionnelle de représentation et de reconstruction 3D, d'objets biologiques à partir de diverses données issues de reconstructions scanner . Les fonctions de cette chaîne viennent en complément des fonctions qui existent dans les logiciels des scanners .

Dans un premier temps nous avons effectué une synthèse bibliographique pour rassembler et classer les différentes méthodes de représentation et visualisation 3D entrant dans le cadre de la synthèse de scènes 3D fixes et mobiles . Cette étude nous a permis d'acquérir la maîtrise de certains algorithmes de représentation et reconstruction 3D .

Dans un deuxième temps nous avons développé une chaîne fonctionnelle de représentation 3D. Cette chaîne comporte plusieurs étapes agencées selon un scénario défini à partir des formulations des demandes des utilisateurs et d'un certain nombre de critères soulignés lors de l'étude bibliographique réalisée dans la première partie . Ces différents critères sont :

-Durée de calcul , occupation mémoire, qualité des images, manipulation sur les objets biologiques représentés (rotation, translation, agrandissement, réduction,), fonctionnalités spécifiques (calcul de volume, calcul de surface, calcul de distances, calcul d'angles,..), interactivité .

Le schéma actuellement arrêté de la chaîne de représentation pour les objets définis à partir de coupes parallèles, comporte ::

- Une étape d'acquisition des données issues de la reconstruction 2D .
- Une étape de préparation des données .
- Une étape d'élaboration de la base de données 3D .
- Une étape du choix du modèle de représentation 3D .
- Une étape de visualisation 3D .

Les difficultés rencontrées pour la conception d'une telle chaîne qui nous ont amené à proposer quelques solutions tant sur le plan des méthodes de représentation que sur le plan des calculs entrant dans les techniques de reconstruction .

En particulier pour la représentation d'une structure vasculaire nous avons mis au point :

- Un algorithme d'échantillonnage de courbes fermées quelconques .
- Une base structurée de données 3D qui permet de gérer n'importe quel objet biologique.
- Un algorithme de triangulation, pour les contours disjoints ou intersécants .
- Un algorithme simple de triangulation, pour des objets présentant dans un plan de coupe des liaisons simples, et dans un autre plan de coupe des liaisons doubles .
- Un certain nombre d'utilitaires (translation, rotation, zoom, calcul de volume....)

Pour le cas de reconstruction d'une structure céphalo dentaire nous avons mis au point :

Conclusion générale

-Une technique qui permet d'orthogonaliser des clichés pris sous des incidences quelconques .

-Une technique rapide et précise de calcul de volume (méthode de Monté Carlo)

La mise au point d'un algorithme de reconstruction à partir de deux ou trois projections orthogonales, la méthode des ellipses .

Une reconstruction d'objet à l'aide d'une reconstitution des courbes de densités par une technique d'extrapolation à partir des profils de densité d'un modèle .

-La reconstruction des objets est effectuée par implémentation de la technique connue de flot à coût minimum à laquelle nous avons apporté une solution au problème du blocage de l'algorithme lorsqu'il existe un chemin de coût négatif . Cette solution consiste à détecter ce chemin et à le compléter .

Il demeure des domaines ouverts qui peuvent constituer des perspectives de poursuite de travaux dans ces domaines, on peut citer :

-L'automatisation de certaines opérations, notamment l'orthogonalisation des clichés radiographiques, l'étape de recalage des différentes coupes , l'étape de chaînage des différents contours pour la représentation d'artères .

-L'étude d'algorithmes de triangulation dans le cas de structures complexes (ramifications et distorsions de formes des vaisseaux).

-L'étude d'algorithmes de reconstruction d'objets à partir de deux projections dans le cas où les contours sont non connexes ou troués .

-La détection et la segmentation automatique d'objets peu contrastés .

L'investissement et l'expérience que nous avons acquise en synthèse 3D peut être appliquée également à d'autres domaines tels que les transmissions de scènes 3D .

-Le choix des coûts coefficients, et l'étude plus poussée du bruit dans la recherche du flot à coût minimum .

ANNEXES

Cette technique est la même pour le tracé des segments, des tangentes et des points.

Nous disposons d'une fonction de gestion de la souris dans la mémoire de l'écran image mise au point au laboratoire. Cette gestion consiste à afficher une croix en surbrillance à la position de la souris sur l'écran.

Le niveau de gris d'un pixel de coordonnées (x,y) de l'image sur l'écran image est représenté en mémoire par un code de 8 bits (256 niveaux)

On sait que la fonction d'autocorrélation $C(\alpha, \beta)$ d'une image naturelle peut être modélisée par une relation de type :

$$C(\alpha, \beta) = \exp(-C_1|\alpha| - C_2|\beta|)$$

avec $C_1 = 0.04$ et $C_2 = 0.035$, pour une image télévision standard CCIR .

Cela signifie que la probabilité, pour que le voisinage d'un pixel ait la même valeur de niveau de gris que ce pixel, est proche de 1.

Il en résulte qu'en général (sauf sur les contours francs) un pixel brillant se situe dans une zone brillante et un pixel sombre se situe dans une zone sombre. C'est le cas des radiographies où les contours sont en général flous.

Nous avons donc basé la fonction de marquage les points d'un segment sur cette propriété des images naturelles.

Elle consiste à compléter à 1 le code du pixel à marquer.

Ce procédé a pour effet de donner au pixel marqué un niveau de gris plus sombre lorsqu'initialement le pixel est fort brillant (niveau de gris > 128) et un niveau de gris plus brillant lorsqu'initialement le pixel est sombre (niveau de gris initial < 128) Après marquage le pixel se différencie nettement sur l'écran. Le problème est que le marquage s'estompe lorsque le niveau de gris initial d'un pixel s'approche du niveau moyen 128. Mais ce cas est relativement rare sur une image radiographique.

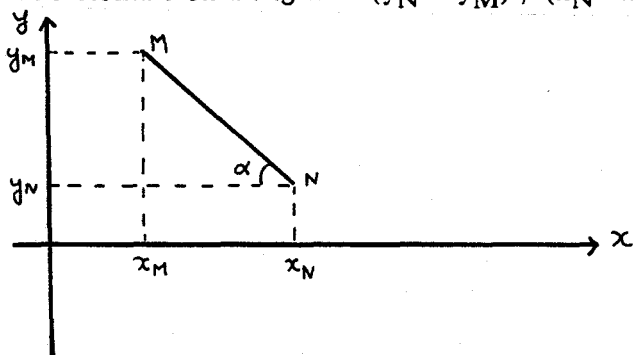
L'effacement d'un point consiste à recomplémenter à 1 l'octet représentant son niveau de gris. On retrouve ainsi l'image initiale sans perte d'information.

Le tracé d'un segment consiste à marquer successivement ses deux points extrémités. Le tracé s'effectue en marquant les pixels situés sur la droite qui joint ces extrémités.

Le tracé d'une tangente est effectué par la fonction "tracé d'une corde".

Le tracé d'une corde consiste à marquer un point unique M de coordonnées (x_M, y_M) . Après ce marquage la fonction trace, à chaque déplacement de la souris aux coordonnées (x,y) , un segment qui joint le point M point de coordonnées (x,y) . Ce procédé donne l'impression que l'utilisateur tire un cordeau.

Le tracé d'un segment ou d'une corde présente des difficultés lorsque ce tracé est proche d'une horizontale ou proche d'une verticale. En effet soit à tracer le segment MN. Les coordonnées de M et de N sont : (x_M, y_M) et (x_N, y_N) . Si le segment est incliné d'un angle α sur l'horizontale on a : $\text{tg } \alpha = (y_N - y_M) / (x_N - x_M)$



Annexe 1

Le tracé d'un segment consiste, par exemple, pour chaque colonne de pixels d'abscisse x_i , comprise entre x_M et x_N à déterminer l'ordonnée $y_i = y_M + \operatorname{tg} \alpha (x_i - x_M)$

On voit que pour un segment vertical $x_M = x_N$ entraîne une indétermination sur $\operatorname{tg} \alpha$.

Pour dévier cet inconvénient autour du point d'extrémité M on partage le plan en quatre zones (fig 1).

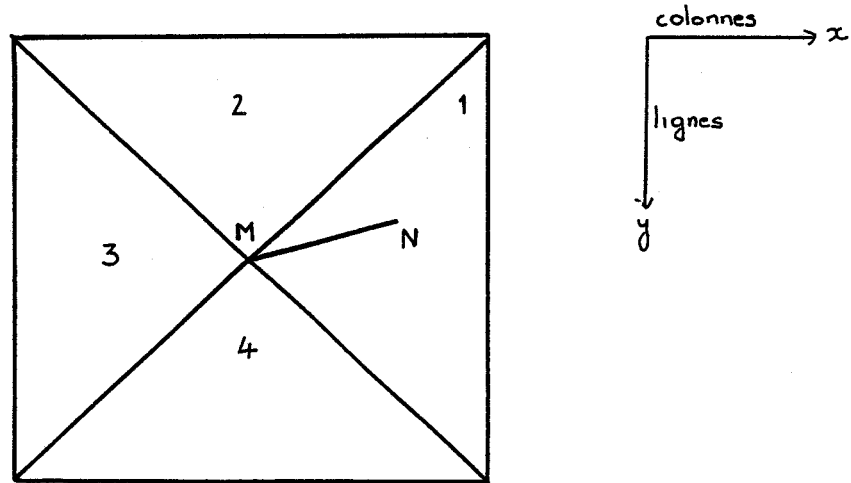


Figure 1 : partage du plan

Lorsque le point courant extrémité N est situé dans les zones 2 et 4, on a la relation :

$$-1 \leq \operatorname{tg} \beta = (x_N - x_M) / (y_N - y_M) \leq 1 .$$

Et le logiciel marque les points i du segment MN de coordonnées $x_i y_j$, après avoir calculé pour chaque ordonnée y_i comprise entre y_M et y_N l'abscisse x_i donnée par :

$$x_i = x_M + \operatorname{tg} \beta (y_i - y_M) .$$

Lorsque le point courant extrémité N est situé dans les zones 1 et 3, on a la relation :

$$-1 < \operatorname{tg} \alpha = (y_N - y_M) / (x_N - x_M) < 1 .$$

Et le logiciel marque les points i du segment MN de coordonnées $x_i y_j$, après avoir calculé pour chaque abscisse x_i comprise entre x_M et x_N l'ordonnée y_i donnée par :

$$y_i = y_M + \operatorname{tg} \alpha (x_i - x_M) .$$

Formule de Wallis

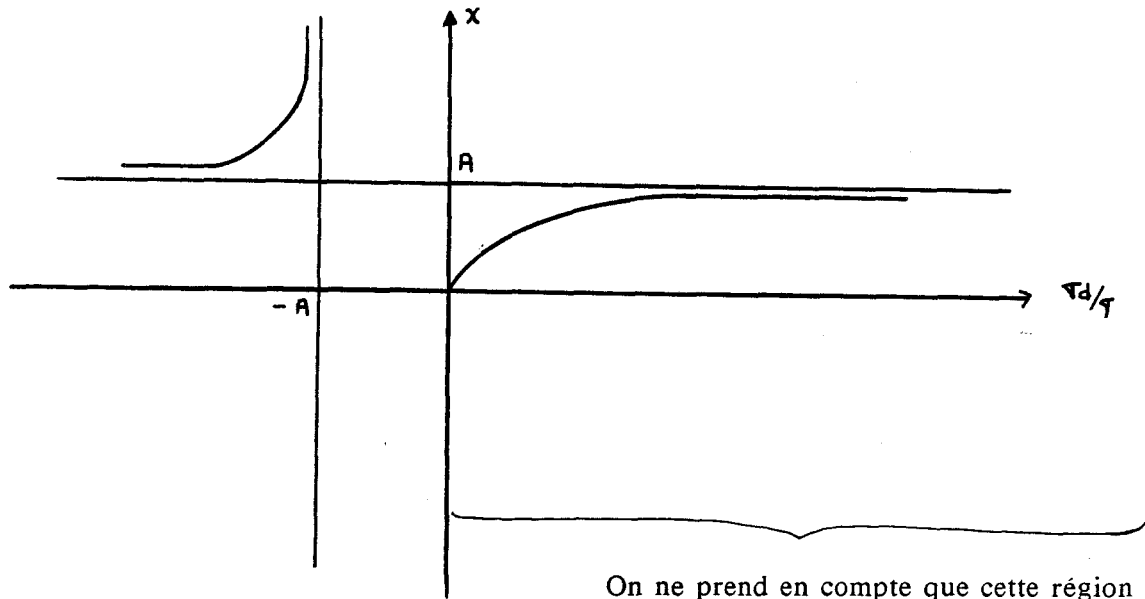
Wallis [Pratt 78] a suggéré une généralisation de l'opérateur de différenciation statistique pour le rehaussement de l'image . Cet opérateur est défini par :

$$G(i, j) = [F(i, j) - \bar{F}(i, j)] \left[\frac{A\sigma_d}{A\sigma(i, j) + \sigma_d} \right] + [\alpha md + (1-\alpha) \bar{F}(i, j)]$$

Où md et σ_d représentent la valeur moyenne souhaitée et l'écart type. A est un facteur de gain de la différence entre le niveau de gris d'un pixel et le niveau de gris moyen de son voisinage .

Le premier terme $F(i, j) - \bar{F}(i, j)$ représente la différence entre la valeur d'un pixel et la valeur moyenne de son voisinage défini par un bloc $P \times P$ ($15 < P < 21$) . La valeur de ce terme peut être négative . On en tient compte en prenant la valeur absolue .

Pour analyser le deuxième terme on pose : $x = A\sigma_d / (A\sigma(i, j) + \sigma_d)$ et on trace le graphe de $x = f(\sigma_d / \sigma)$ (fig 2)



Ce graphe montre que la valeur du deuxième terme évolue entre 0 et A .

L'examen du troisième terme ($\alpha md + (1 - \alpha)\bar{F}(i, j)$) montre que le facteur α donne, suivant sa valeur, à la valeur moyenne de l'image résultat soit une dominance de md soit une dominance du niveau de gris de l'image originale .

La durée de calcul du rehaussement de Wallis est proportionnelle à :

$N^2 ((2P + 7) \text{ additions} + (P + 7) \text{ multiplication} + \text{une racine}) \# (P + 13 \text{ multiplication}) N^2$.

Où P est la dimension de la zone sur laquelle sont calculés la moyenne et l'écart type, N est la dimension de l'image totale .

Sur un micro-ordinateur 32 bits à 33Mhz cette opération dure moins d'une minute pour une image 512.512 pixels, avec $P = 21$.

BIBLIOGRAPHIE

Références bibliographiques

- [ABRA 61] A. ABRAGAM . Les principes du magnetisme nucléaire . Presse universitaire de France . 1961
- [AMAN 85] J.L. AMANS, P. DARIER . Processing and display of medical three dimensional arrays of numerical data using octree encoding . SPIE, Vol 593, Medical imaging Processing . 1985 .
- [AMAN 85] J.L. AMANS, E. CAMPAGNOLO, Ph. GARDERET . Imagerie Médicale : Méthodes de reconstruction et Techniques Instrumentales 5ème Congrès AFCET/EDI/INRIA Reconnaissance des formes et Intelligence Artificielle (Thème 2), 1985, pp 55-119.
- [AMIE 82] M. AMIEL . De l'image conventionnelle au scanographe . Actualité en radiodiagnostic nouvelle technologie . MASSON pp 5-23 , 1982
- [ANTO 88] M. ANTOINE . Les techniques algorithmiques du codage octree appliquées à l'analyse de volumes tridimensionnels de données numériques .Thèse Grenoble I . 1988 .
- [APPE 67] A. APPEL . the notion of quantitative invisibility and machine rendering of solides . Proc. ACM National Conf . 1967, pp 387-393 .
- [ARAG 86] ARAGO 3 . L'imagerie médicale . Observatoire Français des techniques avancées . Rapport de synthèse du groupe imagerie médicale. 1986 .
- [ARGI 76] G.J ARGIN, T.O BINFORD . Computer description of curved objects . IEEE 1976, C25 n°4, pp 4
- [ATAL 87] D. ATALTON, SM GOLDWASSER, RA REYROLDS, ES WALSH . Volume rendering algorithms for the presentation of 3D medical data Proc .NCGA 87 III 1987 pp 119-128
- [ATHE 81] P.R. ATHERTON : A Method of Interactive Visualisation of CAD Surface Model on a Color Video Display, Computer Graphics SIGGRAPH-ACM, Vol.15, Num.3, Août 1981.
- [ATHE 83] P.R. ATHERTON, "A scan-line hidden surface removal procedure for constructive solid geometry", Computer Graphics, Vol 17, n°3, pp 73-82.
- [AUBR 79] F. AUBRY F; C. BERCHE . Tomographie par émission gamma. Principaux aspects technologiques. J. Fr. Biophys. Med. Nucl. 1979, Vol 2, pp 241-248.
- [AYAC 83] N. AYACHE .Un système de vision bidimensionnelle ou robotique industrielle. Thèse Parys Orsay 1983
- [BAAR 84] A.H BAAR . .Global and local deformation of solid primitives .Computer graphic ACM 1984
- [BAAR 86] A.H BAAR . .Ray tracing deformed surfaces Comp. Graph 1986 . Vol 20, n°4, pp 287-296 .
- [BAER 79] A. BAER, C. EASTMAN and M. HENRION 1979, 'Geometric modelling : a survey'. Computer-Aided Design, Vol.11, N0 5, pp. 253-72
- [BAI 86] Z.D.BAI KRISHANAIH P.R, RAO C.R, REDDY P.C, SUN Y.N ZHAO L.C. Reconstruction of left ventricule from two orthogonal projections based on theorem of equal divisor curves . Technical Repport Pittsburg 1986 .

Références bibliographiques

- [BALA 85] A. BALARER, DBUCH . Abrégé de prothèse adjointe partielle. Masson 1985
- [BALL 84] AA BALL, DJT STORRY . Recursively generated B-splines surfaces . C.A.D. 1984
- [BALL 78] D.H BALLARD . An approach to knowledge directed image analysis . Computer Vision System Academic Press 271, pp 281 1978 .
- [BALL 81] D.H BALLARD Strip trees : a hierarchical representation for curves Com. ACM . 1981, Vol 24 n°5, pp 310-321 .
- [BALL 82] D.H BALLARD, C.M BROWNS . Computer vision . Printice-Hall 1982
- [BARI 84] C. BARRILOT . Methode de reconstruction tridimensionnelle et de synthèse d'images appliquées à la représentation des structures morphologiques en médecine . Thèse RENNES I 1984
- [BARI 85] C. BARRILOT . GIBAUD SCARABIN COATRIEUX . 3D reconstruction of blood vessels IEEE Computer Graphics and Applications cVol 5 n°12 p 13 1985
- [BARN 74] R. BARNHILL, R. RIESENFELD .. Computer aided geometric design . Academic Press . 1973I
- [BARR 84] A.H. BARR, "Global and local deformations of solid primitives", Computer Graphics, 18 (3), july 1984, 21-30.
- [BARR 72] BARRETT H. H., GAREWAL K., WILSON D.T. :A Spatially-Codex X-Ray Source. Radiology, 1972, 104, 429-430.
- [BARS 83] BARSKY BAETTY .Local control of bias and tension in beta splines .Computer graphic . 1983, n°17, pp 193-218 .
- [BARS 85] BARSKY DEROSE .Aspend base of the beta-spline curve and surface representation .IEEE computer graphic April 5 1985, pp 46-57 .
- [BART 86] R. H. BARTELS, J.C. BEATY and B.A. BARSKY, "Introduction to the use of splines in freeform curve and surface design", Siggraph 86, course note n 4, Dallas, 1986.
- [BART 88] R.H BARTELS, J.C BEATY, B.A. BARSKY. B-SPLINES mathématiques et C A O . Tome 6,7 1988 HERMES
- [BAUM 72] B. BAUMGART, "Winged-edge polyhedron representation", Stanford Artificial Intelligence Report CS-320, 1972.
- [BAUM 75] B.G. BAUMGART . A polyhedron representation for computer vision . Proceedings of the (US) National Computer Conference, Anaheim US . 1975 , pp 589-96
- [BECH 89] D.BECHMANN Définition et manipulation de primitives surfaciques de forme libre . Thèse Stasbourg 1989 .
- [BELL 81] BELLOSI A. : Quelques effets des champs magnétiques in vivo. J.B.M.N., 1981, Vol 5, n°2, p 117-123.
- [BENN 73] BENNINGTON G.E . An efficient minimal cost flow algorithm Management Science Vol 19,n°9 1042,1051

Références bibliographiques

- [BERG 88] P. BERGE, Y. POUREAU ..L'ordre dans le chaos . Hermann 1988
- [BESA 89] J.E BESANCON .La vision par ordinateur en deux et trois dimensions . Eroylles 1989
- [BESO 81] BESOZZI M.C. , RIZI H.R., ROGERS W.L., CLINTHORNE N., PITT B., THRALL J., KEYES J. M. Jr : Rotating gamma camera ECT of TI-201 in the human heart. J. Nucl. Med. 1981, 22, pp 11.
- [BEZI 72] P. BEZIER . Emploi des machines à commande numérique . MASSON 1970 PARIS . Translated by R.A FORREST, A.F PANKHURST . Numerical control mathematical and applications . J. WILEY and Sons Ltd. LONDON 1972 .
- [BEZI 73]P. BEZIER 1973, 'UNISURF system : principes, programme, language'. In computer Languages for Numerical Control, J. Hatvany (ed), North-Holland (Proceedings of the PROLAMAT 73 Conference, Budapest (Hungary)), pp. 417-26
- [BEZI 74] P BEZIER .Mathematical and pratical possibilities of UNISURF . Comp. Aided Geom. Design . Edited by E. BARNHILL and R.F RIESENFELD . Academic Press, New York. 1974, pp 127-154 .
- [BEZI 77] P BEZIER .Essai de définition numérique des courbes et des surfaces experimentales Thèse Université de PARIS VI;1977
- [BEZI 86] P.BEZIER, Mathematiques et CAO 4, Courbes et surfaces Hermès, Paris, 1986.
- [BINH 89] BINH PHAM .Conic B-splines for curve fitting;avisufying approch .C.V.G.A.I.P. 1989, Vol 45, pp117 125.
- [BLIN 77] J.F. BLINN, "Models of light reflection for computer synthesized pictures", ACM Computer . 1977, Vol 11, n°2, pp 192-198.
- [BLIN 82] J.F. BLINN, "A Generalization of Algebraic Surface Drawing", ACM Transactions on graphics. 1982, Vol 1, n°3, pp 235-256.
- [BLOC 46] F. BLOCH : Nuclear induction. Phys. Rev., 1946, Vol 70, pp 460-471.
- [BOEH 84] W. BOEHM . On efficiency of knot insertion algorithms . computer aided geometric design . 1984, Vol 1 .
- [BOIS 81] J.D.BOISSONNAT, O.D FAUGERAS . Triangulation of 3D objects . 7th Inter. J. Conf. on Art. Int. Vancouver . 1981, pp 24-28 .
- [BOIS 82] J.D.BOISSONNAT. Representation of objects by triangulation points in 3D space . Proceedings of Intern. Conf. on Pattern Recognition, 1982, pp 830-833 .
- [BOIS 84] J.D.BOISSONNAT. Geometric structures for three dimensionnel shape representation ACM trans on graphics. oct 1984, Vol 3, n°4 .
- [BOIS 84] JD BOISSONNAT . Representing 2D and 3D shapes whith the delaunay .triangulation .Proc IEEE ICASSP 1984, pp 745-748 .
- [BOIS 84] JD BOISSONNAT . La triangulation de Delaunay et la représentation des formes bi et tridimensionnelles . INRIA 1984
- [BOIS 86] J.D.BOISSONNAT .Shape reconstitution from planar cross section . INRIA

Références bibliographiques

rapport n° 546 PARIS Rocquencourt 07/86

[BOLL 86] H. BOLLON . Contrôle hiérarchique en vision par ordinateur . Thèse INP GRENOBLE 1986

[BONT 84] P. BONTON . Intégration d'un logiciel de morphologie mathématique dans un système de traitement d'images à plusieurs niveaux de gris. Mémoire ingénieur Clermont II 1984

[BOOT 74] B.N BOOTS . Delaunay triangles, an alternative approach to point pattern analysis . Proc. of Ass. of American Geograph . 1974, Vol 6, n°8, pp 26-29 .

[BOOR 78] C. DE BOOR . A practical guide to splines. Springer 1978

[BOUA 87] S. BOUAKAZ . Approche stochastique de segmentation un modèle de coopération entre primitive région et primitives frontières . Thèse I.N.P Grenoble 1987

[BOUK 70] W.J BOUKNIGHT . A Procedure for Generation of Three Dimensional Half Tone Computer Graphics Representations, Communication of ACM . Septembre 1970, Vol. 13, Num. 9,

[BOUL 80] P. BOULLE . Etude et réalisation d'algorithmes pour la visualisation composées de facettes planes . Thèse INP Grenoble 1980

[BOUT 85] T.E BOUTLEY . Digital angiography of the heart . Ed Mosby company TORANTO, 1985.

[BOUZ 84] R. BOUZEFRANE . Etude comparative d'algorithmes de traitement de surfaces gauches, élimination des parties cachées par subdivision . thèse doctorat 3eme cycle universite de RENNES 1984

[BOUZ 86] R. BOUZEFRANE, D. PLEMENOS et X; PUEYO, "Les grandes familles d'algorithmes de visualisation 3D", Revue internationale de CFAO et d'Infographie, 1(2), Hermès, 1986, pp 61-93.

[BRET 84] M.BRET :L'imagerie numerique animee Thèse PARIS VIII juin 1984

[BRET 88] M.BRET :Images de synthèse DUNOD 1988 .

[BREZ 88] C. BREZINSKI . Algorithmique numerique . Ed. Marketing . 1988

[BUDI 79] T.F BUDINGER, G.T GULLBERG, R.H HUESMAN . : Emission Computed tomography. In Topics Applied Physics, Vol 32, Image reconstruction from projections, (G.T. Herman Ed), pp. 147-246, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1979.

[BUON 81] E.BUONOCORE, T.F MEANEY, G.P BORKOWSKI . Digital Substraction angiography of the abdominal Aorta and renal arteries . Radiology, 1981, 139, p281-286

[BUSA 61] G; BUSACKER and P.J GOWEN . A procedure for determining a family of minimal cost network flow pattern . O.R.O Technical report University of Hopkins 1961

[BUSA 65] G; BUSACKER and T.L. SAATY, Finite Graphs and Networks : An Introduction with Applications, Mc Graw-Hill, New York, 1965.

[CAPP 81] M.P CAPP : Radiological imaging. 2000 A.D. Radiology, 1981, n°138, pp 541-550.

Références bibliographiques

[CAST 87] S. CASTAN . Systeme de visualisation actuel tridimensionnel a parametrisation directe des surfaces .1987 TOULOUSE .

[CAST 85] P.DE CASTELJAU . Formes à pôles . Collection mathématiques et C.A.O . HERMES 1985 .

[CATM 74] E.E. CATMULL, "A subdivision algorithm for computer display of curved surfaces" PH. D. Thesis University of UTAH, Computer Science Department, Salt Lake City, UTAH, 1974.

[CENS 83] Y. CENSOR . Finite series expansion reconstruction methods . Proceeding of IEEE, vol 71, 3, 1983, p409-419 .

[CHAN 71] S .K. CHANG, The reconstruction of binary patterns from their projections, Comm. ACM 14. 1971, pp 21-25

[CHAN 73] S.K CHANG and C.K. CHOW, The reconstruction of three-dimensional objects from two orthogonal projections and its application to cardiac cineangiography, IEE Trans. Computers C-22, 1973, pp 18-28.

[CHAN 71] S.K. CHANG and G.L. SHELTON, Two algorithms for multiple-view binary pattern reconstruction. IEEE Trans. Syst. Man, Cybernet. SMC-1, 1971, 90-94.

[CHAS 91] J.M CHASSERY, M. MELKEMI . Diagramme de voronoï appliqué à la segmentation d'images et à la détection d'événements en imagerie multi-sources . T.S Vol 8, n°3, pp 155

[CHAW 85] ALNA CHAWATI .Grenoble 1985
Processus de classification séquentiels par arborescents pour l'aide au diagnostic

[CHER 87] G. CHERBIT FRACTALS, dimensions non entières applications . MASSON 1987

[CHIL 81] W.A CHILCOTRE, M.T MODIC, W.A PALICEK, J.R LITTLE. Digital subtraction angiography of carotid arteries . Radiology, 1981, 139, p 287-295

[CHOQ 91] J.B CHOQUEL . Architecture matérielles en vue de l'échantillonnage d'un contour graphique . D.E.A électronique LILLE 1991

[CHRI 78] H.N CHRISTIANSEN, T.W SEDERBERG . Conversion of complex contour line definitions into polygonal element mosaics . Comp. Graph. 1978, Vol 12, n°3, pp 187-192.

[CHRI 80] N. CHRISTOFIELDS, A. MINGOZZ . Combinational optimisation . ed. J. Willey and Sons 1980.

[CINQ 87] P. CINQUIN .Morphoscopie et modelisation continue d'images . tridimensionnelles .6th congress AFCET RFIA ANTIBES 1987, pp 543-550

[CLAY] D. CLAYSSSEN, D. LOBSTEIN, J. ZEITOUN .Les nouvelles images introduction à l'images informatique . DUNOD 1987

[COHE 85] M.F. COHEN, D.P. GREENBERG, "The hemi-cube : a radiosity solution for complex environments", Computer Graphics . 1985, Vol 19, n°3, pp 31-40.

[COHE 86] M.F. COHEN, D.P. GREENBERG, D.S IMMEL, P.J BROCK . An efficient

Références bibliographiques

- radiosity approach for realistic image synthesis . IEEE Comp. Graph. and Appli . 1986 .
- [COOK 81] P.N COOK . Three dimensional reconstruction from surface contour for head C.T examinations , journal of Computer Assited Tomography 1981 Vol5 n°1 60,67
- [COOK 82] P.N COOK . The use of three dimensional reconstruction algoritms . Automedia. 1982, Vol 4, pp 3-12 .
- [COOK 82] R.L. COOK and K.E. TORRANCE, "A reflectance model for computer graphics", ACM Transactions on Graphics. 1982, Vol 1, n°1, pp 7-24.
- [COOK 83] L.T COOK, S.J DWYER, S. BATNITSKY, K.R LEE . A 3D display system for diagnostic imaging application . IEEE Computer graphic and applications . 1983, Vol 3, n°5, pp 13-19
- [COQU 84] S. COQUILLART . Représentation de paysage et tracé de rayon . Thèse St Etienne 1984
- [COON 64] S.A. COONS, Surafces for computer aided design . Mechanical Engineering Dept . Massachusetts Institute of Technologi . Cambridge . MASSON 1964.
- [COON 67] S.A. COONS, "Surafces for computer aided design of space forms", Technical Report MAC-TRI-41, MIT Cambridge, Mass, june 1967.
- [COON 67] S.A. COONS and B. HERZOG 1967, Surfaces for computer-aided aircraft design. Procéedings of the AIAA 4th Annual Meeting and Technical Display, Anaheim US AIAA Paper 67-895.
- [CHRI 78] CHRISTIANSEN H.N SEDEBERG T.W . Conversion of complex contour line definitions into polygonal element mosaic Computer Graphics 1978, Vol 12 n°3 pp 187 192 .
- [DAHM 82] W.DAHMEN, C.A MECHELLI . Multivariate Splines . a new approach . IBM Research Report, New York 1982.
- [DAHM 83] W.DAHMEN, C.A MECHELLI . Some results on box splines . IBM Research Report , New York 1983.
- [DAHM 84] W.DAHMEN, C.A MECHELLI . Subdivision algorithms for the generation of box splines surfeces . IBM Research Report , New York 1984.
- [DANT 60] G.B DANTZIG . On the shortest path through a network . Manag. Science . 1960, Vol 6, pp 187-190 .h
- [DELA 34] B.DELAUNAY .Sur la sphere vide bul. ACAD URSS class sci.nat. 1934, pp 793-800
- [DELE 90] J.F DELEUME . Le renforcement paradoxal en imagerie par resonance magnetique . Thèse en médecine LILLE 1990
- [DENK 85] S. DENKO, L. HODGES, B. NAYLOR . Construction of fractal object with iterated function system . Pro. SIGGRAPH'85 . Colmp. Graph 1985, Vol 19, n°3 pp 271-278 .
- [DESG 81] A. DESGREZ . Le phénomène de résonance magnétique nucléaire. J.B.M.N., 1981, Vol 5, 2, pp 61-66.

Références bibliographiques

[DONY 86] R. DONY. Elimination des parties cachées MASSON 1986

[DOYO 82] Y.DOYON, P. SCHMIDT, M. AMIEL . Actualité en radiodagnostic, nouvelles technologie . MASSON 1982

[DREB 88] R. DREBIN, L. CARPENTER, P HARAKAN . Volume rendering. SIGGRAPH 88 1988, pp 65-74

[DUCO 80] M. DUCOS DE LAHITTE, J.P MARC-VERGNES, A. GUIRAUD . Intravenous angiography of extra-cranial cerebral arteries . Radiology, 1980, 137, pp 705-711.

[DUFRE 91] F. DUFRENOIS . Etude et réalisation d'un procede de reconstruction 3D à partir de coupes parallèles scanner et IRM, application aux cas du rein et de l'arbre vasculaire cérébral . Rapport de D.E.A électronique , LILLE . 1991 .

[EKOU 82] EKOULE A.,PEYRIN F.,ODET.C .A triangulation algorithm for surface display in biomedical engineering Proc EUSIPCO 1982, pp 801-804

[EKOU 87] EKOULE A.,PEYRIN F.,ODET.C .Description d'une procedure de triangulation entierement automatique .Proceeding cognitiva 87 pp 88-95,paris,1987

[FARI 83] FARIN.G Smooth interpolation to scattered 3D data . in BARNHILL BOEHM edited, Surfaces in CAGD, Holland 1983. pp 43-63

[FARI 85] FARIN.G Modified clough tocher interpolant . Computer Aided Geometric Design Vol 2, pp 19-27. 1985

[FARI 86] G. FARIN . Triangular Bernstein-BEZIER patches . Comp. Aid. Geom. Des . 1986, Vol 3, pp 83-127 .

[FARI 87] FARIN.G . Algorithms and new trends SIAM; Ed Geometric modellong . Philadelphia . 1987

[FAUG 84] O.D FAUGERAS, M. HEBERT, P. MUSSI, O.D BOISSONNAT . Polyhedral approximation of 3D objects without holes .Comp. Vis. Grap. and Im. Proc. 1984, Vol 25, pp 169-183 .

[FAUG 85] O.D FAUGERAS, M. HEBERT .The representation, recognition and positioning of 3D shapes from range data ? Pro. of the 4th Scadinavian Conf. on Im. Analysis. Trondheim, Norway, 1985, pp 253-272. .

[FERR 90] M.FERRETI La physique fractale rencontre le monde industriel .Science et Technologie n°26 1990.

[FLOY 62] R.W FLOYD . Algorithm 47, shortest path . Comm. of the ACM . 1962, Vol 5, pp 345 .

[FOLE 82] J.D. FOLEY and A. VAN DAM . Fundamentals of interactive computer grafics. Edition Wesley . 1982

[FORD 56] L.R. FORD and D.R. FULKERSON. Maximal flow through a network . Canad. J. of Math . 1956,p399 .

[FORD 57] L.R. FORD , Jr., and D.R. FULKERSON . A simple alorihm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem, Canad. J. Math. 9,

Références bibliographiques

1957, pp 210-218.

[FORD 59] L.R. FORD , Jr., and D.R. FULKERSON . A network flow feasibility theorem and combinatorial application . Canad. J. Math. 1959, Vol 11, pp 440-450 .

[FORD 62] L.R. FORD , Jr., and D.R. FULKERSON , Flows in Networks, Princeton Uni. Press, Princeton, N.J., 1962.

[FORD 67] L.R. FORD, FULKERSON . J-C- ARINAL .Flows in networks . GAUTHIER VILLARS PARIS 1967

[FORR 72] A.R. FORREST 1972 'On Coons and other methods for the representation of curved surfaces'. Computer Graphics and Image Processing Vol 1, pp. 341-59

[FORR 72] A.R. FORREST 1972, 'Interactive interpolation and approximation by Bézier polynomials'. Computer Journal Vol. 15, N0 1, pp. 71-9

[FOUR 82] A. FOURNIER, D. FUSSEL, L. CARPENTER . Computer rendering of stochastic models Comm. ACM. 1982, Vol 25, pp 371-384 .

[FREE 87]] FREEMAN.W . How brains make chaos in order to make sense of world . Behavioral and brain Sciences . 1987 n°10, pp 161-195

[FREY 60] R. REYMANN, M. SOUTIF . La spectroscopie hertzienne . DUNOD PARIS 1960 .

[FUCH 77] H. FUCHS, Z.M KEDEM, S.P USELTON . Optimal surface reconstruction from planar contours . Comm. ACM 1977, vol 20, pp 693-702

[FUCH 80] H. FUCHS, Z. M. KEDEM, B.F. NAYLOR "On visible surface generation by a priori tree structures", Computer Graphics, 14(3), 1980, pp 124-133.

[FU 80] K.S FU . Syntactic image modeling using stochastic tree grammars . Comp. Graph. and Imag. Proc. 1980, Vol 12, pp 136-152 .

[FULK 59] D.R FULKERSON . Increasing the capacity of network, the parametric budget problem . Mana. Scien. 1959, Vol 5, n°4, pp 472-483.

[FULK 61] D.R FULKERSON . An out-of-kilter method for minimal cost flow problems, J. S.I.A.M. 1961, Vol 9, n°1, pp 18-27 .

[GADO 79] M.H GADO, M.E PHELPS, R.E COLEMAN . Reconstruction tomography in diagnostic radiology and nuclear medicine . University Park Press, Baltimore, 1979 .

[GALI 69] R. GALIMBERTI, U. MONTANARI, "An algorithm for hidden line elimination", Comm. ACM 1969, 12(4), 206-211.

[GANA 82] S. GANAPATHYS, T.G DENNEHY . new general triangulation methode for planar contours .Computer graphic ACM . 1982, Vol 16, n°3, pp 69-75 .

[GARD 82] Y. GARDAN . Element méthodologique pour la réalisation de C.F.A.O et leur introduction dans les entreprises . Thèse INP GRENOBLE 1982 .

[GARD 83] Y. GARDAN, M. LUCAS . Techniques graphiques interactives ert C.A.O . HERMES 1983

Références bibliographiques

- [GARR 88] M. GARREAU . Signal, image et intelligence artificielle, application à la décomposition d'un signal électromyographique et à la reconstruction et l'étiquetage 3D de structure vasculaire . thèse de docteur. RENNES I . 1988 .
- [GORD 85] GARDON REYNOLDS . Image space shading of 3D objets. C.V.G.A.I.P. 1985, n°29, pp 361-376
- [GENT 91] G. GENTIL, E.TOSAN . Les fractales, un outil pour la synthèse d'image MICAD 91, 306.320
- [GENT 90] G. GENTIL . Modélisation de fractales par IFS. Journée GROSPAN , Saint Etienne 1990.
- [GHAZ 85] D.GHAZANFARPOUR . Synthèse d'images et antialiasage .thèse de docteur ingénieur, école des mines de Saint-Etienne nov.85
- [GHOL 85] B. GHOLIZADEH . Représentation par triangulation de la surface d'objets tridimensionnels . Thèse ENST PARIS 1985
- [GIBA 83] B. GIBAUD . Etude et réalisation d'un systhèse d'analyse d'informations radiologiques 3D tomodensitométriques, stéréotaxiques et stéréoscopiques . Thèse de docteur ingénieur, RENNES I , 1983
- [GOLD 90] A. GOLDBERGER, D.RIGNEY . Chaos et fractales en physiologie humaine . Pour la Science n° 150, 1990
- [GOND 85] M. GONDRAN, M. MINOUX . Graphes et algorithmes .EYROLLES 1985
- [GOUR 71] H. GOURAUD, "Continous shading of curved surface", IEEE Trans. Comput., 20(6), 1971, 623-628.
- [GRAH 72] L. GRAHAM . An efficient algorithm for determining the convex hull of finite planar set , Information Processing Letters, 1972, pp 132-133
- [GREE 82] J.F.GREENLEAF . Three Dimensional Imaging in Ultrasound Int. Conf. on Sys. Sciences Hawaiï 1982, pp. 425-434.
- [GREE 83] J.F.GREENLEAF . Computerized Tomography with Ultrasound Proceeding of IEEE, vol. 71,no 3, March 1983, pp 330-336.
- [GREG 83] J.A GREGORY . C^1 rectangular and non rectangular surface taches . Surfaces in Comp. Aid. Geom. Desio. 1983
- [GREG 84] J.A GREGORY, J. HAHN . Interpolation to boundary data on the simplex . Surfaces in Comp. Aid. Geom. Desio. 1984
- [GREM 87] F.GREMY . Informatique médicale introduction à la méthodologie en médecine et santé publique . MEDECINE SCIENCES FLAMMARION 1987
- [GRIF 75] J.G. GRIFFITHS . A data structure fort elimination of hidden surface by patch subdivision .. Computer Aided Design. 1975, Vol 10, n°1, pp 65-73.
- [GRIF 78] J.G. GRIFFITHS .A surface display algorihm . Computer Aided Design . 1978, Vol 10, n°1, pp 65-73.
- [GROS 78] E.P GROSSMANN . Positron emission tomography . J.Nucl. Med 1978, Vol

Références bibliographiques

12, pp 350-358 .

[HALL 86] R. HALL . A characterization of illumination models and shading techniques . The visual Computer . 1986, Vol 2 , pp 268-277

[HEBE 83] M. HEBERT .Reconnaissance de formes tridimensionnelles .Thèse de 3eme cycle ORSAY 1983

[HEGR 85] G. HEGRON, Synthèse d'image : algorithmes élémentaires, Dunod Informatique, 1985.

[HEGR 87] G. HEGRON, Modelisation 3D. Cours d'infographie 3d Bandol I.N.R.I.A 1987.

[HERM 73] T. HERMAN . Reconstruction of binary patterns from a few projections . Int. Comp. Symp. Amsterdam . 1973, pp 371-379 .

[HERM 79] G.T. HERMAN, H.K. LIU Three-Dimensional Display of Human Organs from Computed Tomograms Comp. Graph. & Im. Proc. vol. 9 1979; pp. 1-21.

[HERM 79] G.T HERMAN : Image reconstruction from projections. Springer Verlag, 1979.

[HERM 80] G.T. HERMAN, Image Reconstruction from Projections : the fundamentals of computerized tomography . Academic Press 1980.

[HERM 85] C. HERMAN . Surface shading in the cuberville environnement . computer graphic and application . 1985, Vol 5, n°33

[HERM 80] F.HERMELINE . Une methode automatique de maillage en dimension N . Thèse PARIS 1980

[HERM 82] HERMELINE F. . Triangulation automatique d'un polyhedre en dimension N RAIRO analyse numérique 1982 vol 16, n°3, pp211-242

[HINS 83] W.S HINSHAW, A.H LENT. An introduction to NMR imaging, from the bloch equation to the imaging equation. Proceeding of IEEE, Vol 71, n°3, 1983, p 338-350.

[HITC 41] HITCHCOCK F.L The distribution of product from several sources to numerous localities J;Math Phys. 1941, Vol 20, pp 224 .

[HOLL 91] A. HOLLEBECQ . Etude d'un système de reconstruction 3D à partir de clichés de coupes scanner X, application à la biopsie assistée apr ordinateur . Mémoire ingénieur, Lille 1, 1991 .

[HOUN 76] G.N HOUNSFIELD . Picture quality of Computed Tomography. Am. J. Roentgenol., 1976, 127, pp 3-9.

[HULL 85] J. HULLMAN . Structure de données et leur représentation en mémoire . Dunod 1985.

[IBM 85] Centre scientifique IBM France Images medicales et Visualisation 3D . Compte rendu de la journée. .13 Novembre 1985

[IMBE 85] J.IMBERT . Les hopitaux en France . P.U.F 1985

Références bibliographiques

- [IMME 86] D.S. IMMEL, M.F. COHEN and D.P. GREENBERG, "A radiosity method for non-diffuse environments", ACM Computer Graphics . 1986, Vol 20, n°3, pp 133-142.
- [JANN 88] D. JANNIN . Modélisation visualisation et manipulation de données volumiques par arbre octal en imagerie médicales. Thèse RENNES I . 1988
- [JARE 84] G.E.M. JARERD and VARADY 1984, 'Synthesis of volume modelling and sculptured surfaces in BUILD'. Proceedings of CAD-84, Brighton (UK), pp. 481-95
- [JIYE 85] JIYE SHAO Three dimensional algebraic reconstruction from mutually orthogonal projections . OPTK . 1985, Vol 71, pp 142.148
- [JOHN 77] S.A. JOHNSON, Total body exposure, pixel size and signal to noise ratio considerations for three dimensional X-ray attenuation reconstructions : A convolutional derivation of reconstruction photon statistics . Reconstruction Tomography in Diagnostic Radiology and Nuclear Medicine, pp. 199-214, University Park Press, Baltimore, 1977.
- [JONE 80] T. JONES . Posotron emission tomography and measurements of regional tissue function in man . Br. Med. Bull. 1980, Vol 36, pp 231-236.
- [JOUR 84] M. JOURLIN, B. LAGET. Contribution de la morphologie directionnelle à la reconnaissance des Formes . Rapport St Etienne 1984
- [JIVE 85] JIYE SHAO Three dimensional algebraic reconstruction from mutually orthogonal projections . OPTK vol 71, 142.148. 1985
- [KAUF 88] KAUFMAN BAKALOSH . Memory and processing architecture for 3D voxel based imagery .Computer graphic & application nov. 88 (10 23)
- [KEPP 75] E.KEPPEL . Approximation complex surfaces by triangulation of contour lines .IBM J. of Reseach. and Devel. 1975, Vol 19, pp 2-11.
- [KLEI 67] M. KLEIN, A primal method for minimal cost flows with applications to the assignment and transportation problems, Manag. Sci. . 1967, Vol 14, pp 205-220
- [KLEI 73] M. KLEIN, Finding négative cycles. INFOR . 1973, Vol 11, n°1, pp 59-65
- [KOCH 84] KOCHANEK DHU BARTELS RH .Interpolating splines with local tension,and bias control .Computer graphic ACM 1984
- [KERN 85] W. KERNIGHAN . Le langage C . MASSON 1985
- [LAUT 86] A. LAUTION . Abrégé d'ordonnée dentaire. .Masson 1986
- [LEE 80] D.T LEE, B. SHATCHER . Two algorithms for constructing Delaunay triangulation . Int. J. Comp. Inform . Sci .1980, Vol 9, n°3, pp 219-242 .
- [LEE 82] Y.T. LEE and A.A.G. REQUICHA 1982, 'Algorithmes for computing the volume and other integral properties of solids. Communications of the ACM, Vol. 25, NO. 9 (Part 1 : pp. 635-41, Part 2 : 642-50)
- [LELA 84] S. LELANDAIS . Réalisation et premiere exploitation d'un systeme de numerisation de forme 3D Thèse de 3eme cycle,université de compiegne 1984
- [LEVY 87] J. LEVY. Shape approximation by fractal objets. Euro Graphic 87

Références bibliographiques

[LEWI 83] R.M. LEWITT . Reconstruction Algorithms, transform methods . Proceeding of IEEE . March 1983 ,vol.71, n°3 , pp 390-408.

[LIEB 88] T.LIEBING ,H. ROTHLSBERGER .Infographie et applications . Masson 1988

[LOUT 70] P.P. LOUTREL, "A solution to the hidden line problem for computer drawn polyhedra", IEEE Trans. on Computers . 1970, Vol 19, n°3,pp 205-213.

[LUCA 77] LUCAS M. : Contribution à l'Etude des Techniques de Communication Graphique avec un Ordinateur Elements de Base des Logiciels Graphiques Interactifs, Thèse Grenoble INP 1977.

[LUCA 82] M. LUCAS .La réalisation des logiciels graphiques interactifs .Collection de la direct des études et recherches d'électricité . Eyrolles 1982

[LUCA 83] M. LUCAS, Y. GARDAN . Techniques graphiques interactives ert C.A.O . HERMES 1983

[LUO 86] L. LUO . Reconstruction tridimensionnelle en imagerie médicale à partir de coupes parallèles application en imagerie scanner X et IRM.Thèse RENNES I 1986

[MARR 78] D. MARR . Representing visual information .a computationnal approach . C.V.S 1978, pp 61-80 .

[MAIL 88] P.G. MAILLOT .Un algorithme d'elimination de faces cachées en nombres entiers,base sur l'algorithme de trace de BRESENHAM .Acte du MICAD (591-605)

[MANC 83] R. MANCOSVSKI Medical Imaging Systems Prentice-Hall, 1983, 256 pages.

[MAND 68] B. MANDELBROT and J.W. WALLIS . Fractional brownian motions, fractional noises, and applications, SIAM review, 10, 1968, pp 422-437.

[MAND 75] B. MANDELBROT . On geometry of homogeneous turbulence, with stree on fractazl dimension of iso-surfaces of scalars . J. fluid. Mechanics. 1975, Vol 72, n°2, pp 401-416 .

[MAND 77] B. MANDELBROT, Fractals : form, chance, and dimension, W.H. Freeman and Co, Francisco, 1977.

[MAND 84] B. MANDELBROT .Les objets fractals . Flammarion 1984

[MANT 82] M. MANTYLA, "A solid modeler with Euler oprators", IEEE Computer Graphics and Aplications . 1982, Vol 2, n°7, pp 17-31.

[MANT 83] M.MANTYLA, "Set oprations of GXB", Computer Graphics Forum, 2 (2/3), august 1983, pp 122-134.

[MART 82] MARTINEZ F. .Vers une approche systematique de la synthese d'image:aspects logiciel et materiel .These d'etat nov.82 universite GRENOBLE

[MART 84] F. MARTINEZ, La synthèse d-images, concepts, logiciels et matériels .Editions Editest, 1986. .

[MART 86] F. MARTINEZ,"Comparaison et évaluation des architectures de systèmes de synthèse d'images", Revue de CFAO et d'Infographie . 1986, Vol 1, n°1, pp 45-62

Références bibliographiques

- [MAX 81] N. MAX . Vectirized procedural models for natural terrains, waves and islands in sunset . Proc. SIGGRAPH'81 . 1981, Vol 15, n°3, pp 317-324 .
- [MEAG 80] D. MEAGHER, "Octree encoding : a new technique for the representation, manipulation and display of arbitrary 3D objects by computer", Technical Report IPL-TR-80-111, Image Processing Laboratory, Rensselaer Plytechnic Institute, october 1980.
- [MEAG 81] D. MEAGHER , "Octree generation, analysis and manipulation . Tech. report IPL-TR-027 . Polytechnic institue Troy, New York . 1981 .
- [MEAG 82] D. MEAGHER , "Geometric modeling using octree encoding", Computer Graphics and Image Processing. 1982, Vol 19, n°2, pp 129-147.
- [MEAG 84] D.J. MEAGHER A new Mathematics for Solids Processing Computer Graphics World Oct. 1984, pp.75-88.
- [NEWM 79] W.M. NEWMANN, R.F. SPROULL, Principles of interactive computer graphics, Mac-Graw-Hill, 1979.
- [MICH 87] D. MICHELUCCI, "Constructions de BREP, problème d'imprécision", Thèse, Ecole des Mines, Saint Etienne.1987
- [MICH 87] D. MICHELUCCI et B. PEROCHE, "Représentation interactive d'arbres CSG", Actes de MICAD 87, pp 535-548.
- [MING 89] L. XIE-MING . Contribution à la vision dynamique Reconstruction d'objet 3D polydriques par une caméra mobile . Thèse docteur d'Université ,Rennes I 1989
- [MINO 86] M. MINOUX. Graphes algorithmes logiciel . DUNOD 1986
- [MIST 78] C.A MISTRETTA . Computerized fluoroscopy techniques for non-invasive cardiovascular imaging SPIE recent and future developments in medical imaging 1978, 152, p 65-71 .
- [MIST 81] C.A MISTRETTA, A.B CRUMMY, C.M STROTHER . Digital angiography : perspective . Radiology, 1981, 139, p 237-276 .
- [MJEZ 84] J. MJEZEQUEL . Outils pour l'expérimentation d'algorithmes distribués sur machines parallèles . Thèse Rennes I 1984
- [MODE 80] J.W MODESTINO, R.W FRIES . Stochastic image models generated by random tesslations in plane . Comp. Graph. and Imag. Proc . 1980,Vol 12, pp 74-98 .
- [MUEH 75] G. MUEHLLEHNER . Positron camera with extended counting rate capability . J. Nucl. Med 1975, 16, p 653-657 .
- [NAHA 81] D. NAHAMEO, C.R. CRAXFORD, A.C. KAK .Design Constraints and Reconstruction Algorithms for Traverse-Continuous-Rotate CT Scanners. Radiology . 1981, 139
- [NASR 90] J.M NASR . Fractals et synthèse d'images naturelles . Eyrolles 1990.
- [NEWM 79] W.M NEWMAN, R.F. SPROULL . Principles of interactive computer graphics . MacGraw Hill 1979 .
- [NEWE 72] M.E. NEWELL, R.G NEWELL, T.L. SANCHA, "A new approach to the

Références bibliographiques

- shaded picture problem", Proceedings ACM National Conference, 1972, Vol 43.
- [NEVE 77] R.G NEWELL, T.J SANCHA, R.G WILLIAMSON, J.O HILES . The design of system for CAD . in CAD system , edited by J.J ALLEN Holland, 1976, pp 12-42 .
- [NISH 85] T. NISHITA, N. EIHACHIRO . Continuous one representation of three dimensional objects taking account of shadows and interreflections . Comp. Grap. 1985, Vol 19, n°3, pp 22-30 .
- [ONNA 76] G.W. ONNASCH . HEINTZEN P.H . A new approach for the reconstruction of the right or left ventricle from biplane angiocardigraphic recording . Comp Cardio . 1976, pp 67,73.
- [ONNA 78] G.W. ONNASCH. A concept for the approximative reconstruction of the right or left ventricle from biplane angiograms, in Roentgen-Video-Techniques for Dynamic Studies of Structure and Function of the Heart and Circulation (P. H. Heintzen and J.H. Bürsch, Eds.), Thieme Verlag, Stuttgart, 1978, pp. 235-242 .
- [OROU 81] O'ROUKE J. Triangulation of minimal area as 3D object model, Proc of the 1981 int . Joint. Conf on Artificial Intelligence . 1981, pp 664-666 .
- [PAUC 83] E. PAUCHON . Numerisation et modelisation automatique d'objet 3D . Thèse Université PARIS sud orsay 21 sept 83
- [PAVL 82] T. PAVLIDIS, Graphics and Image Processing, Springer-Verlag, 1982.
- [PELL 90] C.PELLOT HERMENT A SIGELLE M PERONNEAU P GAUX JC . Modélisation des bifurcations vasculaires par traitement des images d'angiographie numérisée . ITBM . 1990, Vol 11, n°5, pp 567-581 ..
- [PERO 88] B. PEROCHE, J. ARGENCE, D. GHAZANFARPOUR, D. MICHELUCCI . La synthèse d'images . HERMES . 1988
- [PHON 75] B.T. PHONG, "Illumination for computer generated pictures", Comm. ACM. 1975, Vol 18, n°6, pp 311-317.
- [PIEG 87] L. PIEGL Geometric continuity and shape Parameters . computer Aided Design . 1987, Vol 19, n°10, pp 566-567.
- [PIEG 87] L. PIEGL Tangent plan continuity between triangular Bezier patches in G.FARIN Edited SIAM Philadelphia . 1987.
- [PIXI 89] PIXIM . Actes Proceedisings . 1989
- [PLAS 87] R.A. PLASTOCK, G. KALLKY . Infographie, cours et problemes . SCHAUM MAC GRAW HILL 1987
- [POLI 89] C. POLISSU . Charly un gestionnaire de vision pour la CAD en architecture. Thèse Aix Marseille III 1989
- [PONC 83] J PONCE . Representation et manipulation d'objet tridimenssionnel .Thèse de 3eme cycle ORSAY 1983
- [PRAT 84] M.J PRATT . Smooth parametric surface approxiamtions to discrete data . Surface in CAGD'84 , edited by R.E BARNHILL and W. BOEHM, Amsterdam, 1985, pp 165-171 .

Références bibliographiques

- [PRAT 78] W.K PRATT . Digital image processing . Edition J. Wiley and Sons New York . 1978 .
- [PREP 85] F.P PREPARÀTA, M.I SHAMOS . Introduction to computational geometry . New York, Springer Verlag 1985
- [PUE 84] X. PUEYO .Etude comparative d'algorithmes de traitement de surfaces gauches:elimination des parties cachées par balayages lignes par lignes. These doctorat 3eme cycle RENNES octobre 1984
- [PYKE 82] I. PYKETT Les Applications Médicales de la Résonnance Magnétique Nucléaire Pour la Science, juillet 1982, pp. 48-59.
- [QUAN 89] L. QUAN . Contribution de la vision monoculaire à la perception tridimensionnelle . Thèse INPL NANCY 1989
- [REBO 91] S. REBOUL . Conception et faisabilité d'un système d'étude en morphogenèse cephalique, application de techniques de reconstruction 3D de la dentition. Rapport de D.E.A électronique ,LILLE 1991 .
- [REEV 83] W.T REEVES . Particule systems, a technique for modeling a class of fuzzy objects. Comp. Graph . 1983, Vol 17, n°3, pp 359-376 .
- [REQU 80] A.A.G. REQUICHA .Representations of rigid solids : theory methods and systems. ACM Computer Surveys, 1980,Vol. 12, n° 4, pp. 437-64
- [REQU 83] A.A.G. REQUICHA .Toward o theory of geometric tolerancing . Int\$. Jour. of Robotics Reseach . 1983, Vol 2, n°4, pp 45-60
- [RIBE 83] C.D.C.C RIBEIRO . algorithmes de recherche de plus courts chemins avec contraintes : étude théorique, implementation et parallélisation . Thèse de docteur, ENST PARIS, 1983
- [RIES 73] R.F RIESENFELD . Application of B.splines approxiamtion to geometric problems of compiuter aided design . PhD Thesis, University Siracuse, New York, 19723
- [ROBE 63] L.G. ROBERTS, "Machine perception of three dimensional solids", MIT Lincoln Laboratory, TR 315, 1963.
- [ROGE 76] D.F. ROGERS, J.A. ADAMS, Mathematical elements for computer grafics, Mac-Graw-Hill, New-York, 1976.
- [ROGE 85] D.F ROGERS . Procedural elements for computer graphics MC Graw hill 1985
- [ROSE 86] ROSEAUX .Exercices et problèmes résolus de recherche opérationnelle .Tome 1 MASSON 1986 .
- [ROSS 86] ROSSIGNAC and REQUICHE Depth buffering display techniques for constructive solid geometry .Computer graphics and applications sept 1986 (29 39)
- [ROY 84] M.A. ROY .Une approche generale des techniques pour la synthese .d'images par ordinateur Thèse de 3eme cycle universite de RENNES 1984
- [ROY 59] B. ROY . Cheminement et connexité dans les graphes, application aux problèmes d'ordonancement . Thèse d'état 1960, Publiée pr METRA

Références bibliographiques

- [ROY 60] B. ROY . Contribution de la théorie des graphes à l'étude des problèmes d'ordonnancement . Comm. à la 2eme Conf. Int. sur la Rech. Ope. DUNOD. 1960. pp 109-125
- [ROY 70] B. ROY . Algèbre moderne et théorie des graphes . Tome 2 , DUNOD PARIS 1970 .
- [SABI 83] M.A SABIN . Non rectangular surfaces patches suitable for inclusion in a B.spline surface . Proc. Eur. edited by P.J.W TEN HAGEN, 1983, pp 57-69 .
- [SABL 83] P. SABLONNIER . Base de Bernstein et approximation splines . Thèse 1983 . LILLE
- [SAME 84] H. SAMET, "The quadtree and related hierarchical data structures", Computer Surveys. june 1984, Vol 16, n°2, pp 187-260.
- [SCHI 85] F. SHMITT, B. GHOLIZADEH . An adaptive polyhedral approximation of digitized surfaces. SPIE Proceeding Vol 595 of conference on computer vision for robots, Cannes 1985.
- [SCHI 90] F. SHMITT, H. BOROUCHAKI . Algorithme rapide de triangulation de Delaunay dans R_n , Journée géométrie algorithmique . INRIA . 1990, pp 131-133 .
- [SCHU 69] R.A. SHUMACKER, B. BRAND M; GILLILAND, W. SHARP, "Study for applying computer generated images to visual simulations", US Air Force Human Resources Laboratory, TR-69-14, 1969.
- [SCHW 87] P.SCHWEIZER . Infographie Vol 1 et 2 . Presses polytechniques Romandes, 1987
- [SEQU 82] J. SEQUIERA . Etude et développement d'un algorithme sur le problème surfaces cachées . Thèse ENST PARIS, 1982
- [SEQU 87] J. SEQUEIRA . Modélisation interactive d'objet de forme complexe à partir de données hétérogènes Thèse d'état Université Besançon 1987
- [SHAF 83] S.A SHAFER, T. KANADE . The theory of straight homogeneous generalised cylinders . I.U 1983
- [SLUM 82] C.SLUMP GERBRANDS . A new approach for the reconstruction of the left ventricle from two projections . Computer Graphics and images Processing . Vol 18 18,36 1982
- [SMIT 79] A.R SMITH . Tint fill . Proc. SIGGRAPH-ACM 1979, pp 276-283 .
- [SMIT 84] A.R SMITH . Plants fractals and formal languages . Comp. Graph. 1984, vol18, n°3, pp 1-19
- [SOUS 79] F. SOUSSALINE, A.K TODD-POKROPEK, D. PLUMMER, D. COMAR . The physical performances of a single slice positron tomographic system and preliminary results in a clinical environment . Eur . J. Nucl. Med 1979, 4, p 237-249 .
- [SUTH 74] I.E. SUTHERLAND, R.F. SPROULL and R.A. SCHUMACKER 1974, 'A characterisation of ten hidden-surface algorithms'. ACM Computing Surveys, Vol. 6, n°1, pp. 1-55

Références bibliographiques

- [STEV 86] E. STEVE . Free-form curves on your microcomputer . Byte magazine . 1986, pp 225-230
- [STEV 78] P.S STEVENS . Les formes dans la nature, SEUIL PARIS 1978 .
- [TALO] J.Y TALON . Génération et amélioration de maillage pour éléments finis en 2 et 3 dimensions . Thèse I.N.P Grenoble 1987
- [TALE 91] A. TALEB-AHMED, J.B CHOQUEL, F. WAUQUIER, J.P DUBUS . Algorithme d'échantillonnage pour la reconstruction 3D d'objets définis par des coupes parallèles et implémentation par une architecture de traitement temps réel .GRETSI, 1991
- [TALE 91] A. TALEB-AHMED, F. DUFRENOIS, J.B CHOQUEL, J.P DUBUS . Methode de reconstruction tridimensionnelle de scène d'objets de formes bifurquées à partir de coupes à plans parallèles . Festival 3D, Premier Symposium International de l'Image en Relief . PARIS, 1991 .
- [TALE 91] A. TALEB-AHMED, S. REBOUL, F.SALOME, J.P DUBUS . Methode de reconstruction tridimensionnelle indirecte de la dentition à partir de deux clichés radiographiques en incidence orthogonale . Festival 3D, Premier Symposium International de l'Image en Relief . PARIS, 1991 .
- [TALE 91] A. TALEB-AHMED, F. DUFRENOIS, J.F. DELEUME, J.B CHOQUEL, J.P DUBUS . Methode de reconstruction tridimensionnelle de scène d'objets de formes bifurquées à partir de coupes à plans parallèles . Congrès d'Imagerie Médicale IRM et Echographie, Nouvelles Techniques et Applications . ANGERS 1991 .
- [TANA 76] E. TANAKA and T.A. INUMA, Correction functions and statistical noises in transverse section picture reconstruction, Comput. Biol. Med.. 1976, Vol 6, pp 295-306.
- [THAL 83] THALMANN . Informatique graphique concepts et techniques . Gaetan Morin 1983
- [THIB 87] S. THIBAUT . Modélisation morpho-fonctionnelle des assarnissement urbain à l'aide du concept de dimension fractale . Thèse INSA Lyon 1987
- [THOR 84] R.THORAVAL . Modélisation et visualisation d'objets tridimensionnels décrits par un ensemble de coupes parallèles Rapprt IMI INFO NANTES 1984
- [TILL 83] W. TILLER Rational B.splines for curve and surface representation . IEEE Comp. Grap. and Appli . 1983
- [TOUC 87] J.B. TOUCHARD .Images numeriques .NATHAN 1987
- [TOUM 88] J.J TOUMAZET . Traitement d'image sur micro-ordinateur . Sibex 1988 .
- [TOOR 67] K. TORRANCE and E. SPARROW, " Theotay for off-specular reflection from roughened surfaces", J. Opt. Soc. Am . 1967, Vol 57, n°9, pp 1105-1114.
- [TOUR 78] TOURNIER E. : Performances et dimensions d'un tomographe à rayons X. Colloque sur les Techniques Tomographiques par rayons X et par Emetteurs Gamma et Psitrons, Grenoble, 1978.
- [TROU 87] Y. TROUSSET, F. SCHMITT .Lancer de rayon actif sur un volume numérique. Coll Image Trait synthese, techno & application . Mai 1987

Références bibliographiques

- [TROU 87] Y. TROUSSET . Visualisation d'objets médicaux tridimensionnels .Thèse ENST Paris 1987
- [TUAN]LE TUAN P; : Approche Théorique d'une Technique ; Perspective et Ombre Calculées, Thèse de Docteur-Ingénieur, ENST PARIS ..
- [VAN 78] A. VAN OOSTEROM . Triangulating the human torso . Comp. Journ. 1978, Vol 21, n°3, pp 253-258
- [VAN 86] J.M VAN THONE . Techniques de balayage et élimination des parties cachées . Thèse Paris 6 . 1985
- [VILL 83] VILLA FANO PINO . Méthodes de représentation pour la visualisation de Volumes numériques . Thèse INP Grenoble 1983
- [VINC 89] P. VINCENT Nouvelles architectures d'ordinateurs . Processus et système d'exploitation. EDITEST 1989
- [VOGE 78] R.A VOGEL, D KIRCH, M LEFREE. A new method of multiplanar emission tomography using a seven pinhole collimator and an anger scintillation camera . . Nucl. Med 1978, 19, p 648-654 .
- [WALL 89] K WALL,P DAMELSON .A fast sequential methode for polygonal approximation of digitized curves . CVGAIP .1989, Vol. 28, pp 220-227
- [WALL 82] A.F. WALLIS and J.R. WOODMARK 1982, 'Graphical input to a Boolean solid modeller'. Proceedings of the CAD-84 Conference, Brighton (UK), pp. 681_8
- [WALT 89] G. WALTON .A note on graphic editing of cuved line drawings .C.V.G.A.I.P.1989, Vol 45, pp 61-67 .
- [WARN 83] D. WARN Lighting control for synthetic images . Comp. Grap. ACM . 1983, Vol 17, n°3, pp 13-21
- [WARN 69] J.E. WARNOCK, "A hidden surface algorihm for computer generated half-tone pictures", University of Utah, Tr 4-5, Comp. Scien. Department, 1969.
- [WATK 70] G.S. WATKINS, "A real time visible surface algorithm", University of Utah, UTEC-CSC, 1977, pp 70-101.
- [WATT 81] P.F .WATTSON .Computing the n dimentional delaunay tesslation with application to VORONOI polytopes .the computer journal . 1981, Vol 24, n°2 1981
- [WAYN 83] WAYNE TILLER . Rational B-splines for curves and surface representation .Computer graphic and application Sept 83. pp 61-69 .
- [WEN 88] WEN HUI DU Etude sur la représentation de surface complexes : application à la reconstruction de surfaces échantillonnées . ENST PARIS 1988
- [WHIT 80] T. WHITTED, "An improved illumination model for shaded display", Comm. ACM. 1980, Vol 23, n°6, pp343-349.
- [WILL 85] P.J WILLIS . A review of recent hidden surface removal techniques . INIST CNRS . 1985
- [WOLF 88] S. WOLFRAN . Mathematica, a system for doind mathematics by computer .

Références bibliographiques

Addison-Wesley publishing Company . 1988 .

[WOOD 86] J.R WOODWARD . Calcul des formes par ordinateur .MASSON 1988

[YANG 89] R.L YANG Traitement numérique des angiogrammes vodéodensitométrie et reconstruction d'images en 3D à partir de deux projections orthogonales . Thèse CNAM PARIS 1989

[YAU 84] M.M. YAU . generating quadtree of cross section from octree . Comp. Vis. Grap. and Imag. Proc . 1984, Vol 27, pp 221-238 .



RESUME

Les systèmes de radiologie tels que les scanners X, IRM, nucléaires, acoustiques possèdent aujourd'hui des logiciels de reconstruction et de représentation 3D très performants .

Seulement ces systèmes ont leurs fonctions figés conformes à des protocoles cliniques et les résultats des traitements ne permettent pas aux médecins d'obtenir des informations utiles à leurs besoins de recherche .

Le travail présenté est relatif à l'étude d'une classe de systèmes complémentaires capables à partir des données d'acquisition radiographiques de reconstruire, représenter et de manipuler en 3D des objets biologiques pour effectuer des mesures diverses (investigations profondes, geste assistés par ordinateur, conception de prothèses....)

La première partie consiste en une étude bibliographique des différentes méthodes de modélisation et de visualisation 3D .

La deuxième partie est relative à l'étude d'une chaîne fonctionnelle de représentation 3D d'objets biologiques à partir de coupes parallèles issues d'une reconstruction 2D .

Dans le cas de l'application en neuroradiologie de la représentation 3D du réseau vasculaire du cou, nous présentons des solutions originales que nous avons développées sur une méthode d'échantillonnage de contours de formes 2D quelconques, sur une base de données structurée et sur des algorithmes de triangulation de formes 3D bifurquées .

La troisième partie est relative à l'étude de la représentation 3D d'objets de la mâchoire à partir de 3 clichés orthographiques .

Après l'exposé d'une méthode d'orthogonalisation des clichés que nous avons mise au point, nous présentons l'étude de la représentation 3D en ramenant le problème à celui de la reconstruction 2D suivi de la méthode de représentation 3D décrite dans la deuxième partie .

La reconstruction 2D est rendue pratiquement impossible quand on ne dispose que les contours des objets sur les clichés orthographiques sans connaître les profils de densité. C'est par exemple le cas de la reconstruction des dents à partir de radiographies X . Dans ce cas nous proposons une solution qui consiste à se servir des profils de densité de modèles associés aux contours relevés sur les clichés radiographiques .

Nous développons cette méthode à l'aide d'un algorithme de flot à coût minimum dont nous discutons les résultats et nous donnons des exemples de reconstruction en morphogénèse céphalique .



MOTS CLES .

Modélisation 3D, Visualisation 3D, Traitement d'images, Triangulation, Reconstruction 2D, Graphes, Réseaux orientés, Flot maximum à coût minimum .