

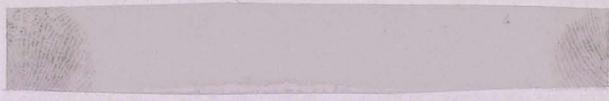
62187

USTL

LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE  
ET D'OPTIMISATION



50376  
1992  
91



50376  
1992  
91

n° d'ordre : 885

# THESE

Nouveau régime

présentée à  
l'Université des Sciences et Technologies de Lille  
pour obtenir le titre de  
DOCTEUR en MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES  
par

Jean-Luc BAUCHAT

## ETUDE DU RACCORDEMENT GEOMETRIQUE G<sup>2</sup> DE SURFACES RATIONNELLES MISES SOUS FORME (SBR)



soutenue le 13 mars 1992 devant la commission d'examen

### Membres du jury

- |                      |   |
|----------------------|---|
| Président :          | C. BREZINSKI                                |
| Rapporteurs :        | P. JEANNIN<br>A. LE MEHAUTE                 |
| Membres :            | P.J. LAURENT<br>F. LOUAGE<br>P. SABLONNIERE |
| Directeur de thèse : | J.C. FIOROT                                 |

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT  
ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS, A. DUBRULLE

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

M. P. LOUIS

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du solide
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. MACKE Bruno	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques

M. MIGEON Michel  
M. MONTREUIL Jean  
M. PARREAU Michel  
M. TRIDOT Gabriel

EUDIL  
Biochimie  
Analyse  
Chimie appliquée

### PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre  
M. BLAYS Pierre  
M. BILLARD Jean  
M. BOLLLY Bénoni  
M. BONNELLE Jean Pierre  
M. BOSCO Denis  
M. BOUGHON Pierre  
M. BOURIQUET Robert  
M. BRASSELET Jean Paul  
M. BREZINSKI Claude  
M. BRIDOUX Michel  
M. BRUYELLE Pierre  
M. CARREZ Christian  
M. CELET Paul  
M. COEURE Gérard  
M. CORDONNIER Vincent  
M. CROSNIER Yves  
Mme DACHARRY Monique  
M. DAUCHET Max  
M. DEBOURSE Jean Pierre  
M. DEBRABANT Pierre  
M. DECLERCQ Roger  
M. DEGAUQUE Pierre  
M. DESCHEPPER Joseph  
Mme DESSAUX Odile  
M. DHAINAUT André  
Mme DHAINAUT Nicole  
M. DJAFARI Rouhani  
M. DORMARD Serge  
M. DOUKHAN Jean Claude  
M. DUBRULLE Alain  
M. DUPOUY Jean Paul  
M. DYMENT Arthur  
M. FOCT Jacques Jacques  
M. FOUQUART Yves  
M. FOURNET Bernard  
M. FRONTIER Serge  
M. GLORIEUX Pierre  
M. GOSSELIN Gabriel  
M. GOUDMAND Pierre  
M. GRANELLE Jean Jacques  
M. GRUSON Laurent  
M. GULBAULT Pierre  
M. GUILLAUME Jean  
M. HECTOR Joseph  
M. HENRY Jean Pierre  
M. HERMAN Maurice  
M. LACOSTE Louis  
M. LANGRAND Claude

Astronomie  
Géographie  
Physique du Solide  
Biologie  
Chimie-Physique  
Probabilités  
Algèbre  
Biologie Végétale  
Géométrie et topologie  
Analyse numérique  
Chimie Physique  
Géographie  
Informatique  
Géologie générale  
Analyse  
Informatique  
Electronique  
Géographie  
Informatique  
Gestion des entreprises  
Géologie appliquée  
Sciences de gestion  
Electronique  
Sciences de gestion  
Spectroscopie de la réactivité chimique  
Biologie animale  
Biologie animale  
Physique  
Sciences Economiques  
Physique du solide  
Spectroscopie hertzienne  
Biologie  
Mécanique  
Métallurgie  
Optique atmosphérique  
Biochimie structurale  
Ecologie numérique  
Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques  
Sociologie  
Chimie-Physique  
Sciences Economiques  
Algèbre  
Physiologie animale  
Microbiologie  
Géométrie  
Génie mécanique  
Physique spatiale  
Biologie Végétale  
Probabilités et statistiques

M. LATTEUX Michel  
M. LAVEINE Jean Pierre  
Mme LECLERCQ Ginette  
M. LEHMANN Daniel  
Mme LENOBLE Jacqueline  
M. LEROY Jean Marie  
M. LHENAFF René  
M. LHOMME Jean  
M. LOUAGE Francis  
M. LOUCHEUX Claude  
M. LUCQUIN Michel  
M. MAILLET Pierre  
M. MAROUF Nadir  
M. MICHEAU Pierre  
M. PAQUET Jacques  
M. PASZKOWSKI Stéfan  
M. PETIT Francis  
M. PORCHET Maurice  
M. POUZET Pierre  
M. POVY Lucien  
M. PROUVOST Jean  
M. RACZY Ladislas  
M. RAMAN Jean Pierre  
M. SALMER Georges  
M. SCHAMPS Joël  
Mme SCHWARZBACH Yvette  
M. SEGUIER Guy  
M. SIMON Michel  
M. SLIWA Henri  
M. SOMME Jean  
Melle SPIK Geneviève  
M. STANKIEWICZ François  
M. THIEBAULT François  
M. THOMAS Jean Claude  
M. THUMERELLE Pierre  
M. TILLIEU Jacques  
M. TOULOTTE Jean Marc  
M. TREANTON Jean René  
M. TURRELL Georges  
M. VANEECLOO Nicolas  
M. VAST Pierre  
M. VERBERT André  
M. VERNET Philippe  
M. VIDAL Pierre  
M. WALLART Francis  
M. WEINSTEIN Olivier  
M. ZEYTOUNIAN Radyadour

Informatique  
Paléontologie  
Catalyse  
Géométrie  
Physique atomique et moléculaire  
Spectrochimie  
Géographie  
Chimie organique biologique  
Electronique  
Chimie-Physique  
Chimie physique  
Sciences Economiques  
Sociologie  
Mécanique des fluides  
Géologie générale  
Mathématiques  
Chimie organique  
Biologie animale  
Modélisation - calcul scientifique  
Automatique  
Minéralogie  
Electronique  
Sciences de gestion  
Electronique  
Spectroscopie moléculaire  
Géométrie  
Electrotechnique  
Sociologie  
Chimie organique  
Géographie  
Biochimie  
Sciences Economiques  
Sciences de la Terre  
Géométrie - Topologie  
Démographie - Géographie humaine  
Physique théorique  
Automatique  
Sociologie du travail  
Spectrochimie infrarouge et raman  
Sciences Economiques  
Chimie inorganique  
Biochimie  
Génétique  
Automatique  
Spectrochimie infrarouge et raman  
Analyse économique de la recherche et développement  
Mécanique

## PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ABRAHAM Francis	Composants électroniques
M. ALLAMANDO Etienne	Biologie des organismes
M. ANDRIES Jean Claude	Analyse
M. ANTOINE Philippe	Génétique
M. BALL Steven	Biologie animale
M. BART André	Génie des procédés et réactions chimiques
M. BASSERY Louis	Géographie
Mme BATTIAU Yvonne	Systèmes électroniques
M. BAUSIERE Robert	Mécanique
M. BEGUIN Paul	Physique atomique et moléculaire
M. BELLET Jean	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. BERNAGE Pascal	Sciences Economiques
M. BERTHOUD Arnaud	Sciences Economiques
M. BERTRAND Hugues	Analyse
M. BERZIN Robert	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. BISKUPSKI Gérard	Algèbre
M. BKOUCHE Rudolphe	Biologie végétale
M. BODARD Marcel	Biochimie métabolique et cellulaire
M. BOHIN Jean Pierre	Mécanique
M. BOIS Pierre	Génie civil
M. BOISSIER Daniel	Spectrochimie
M. BOIVIN Jean Claude	Physique
M. BOUCHER Daniel	Biologie appliquée aux enzymes
M. BOUQUELET Stéphane	Gestion
M. BOUQUIN Henri	Chimie
M. BROCARD Jacques	Paléontologie
Mme BROUSMICHE Claudine	Mécanique
M. BUISINE Daniel	Biologie animale
M. CAPURON Alfred	Géographie humaine
M. CARRE François	Chimie organique
M. CATTEAU Jean Pierre	Sciences Economiques
M. CAYATTE Jean Louis	Electronique
M. CHAPOTON Alain	Biochimie structurale
M. CHARET Pierre	Composants électroniques optiques
M. CHIVE Maurice	Informatique théorique
M. COMYN Gérard	Composants électroniques et optiques
Mme CONSTANT Monique	Psychophysiologie
M. COQUERY Jean Marie	Sciences Economiques
M. CORIAT Benjamin	Paléontologie
Mme CORSIN Paule	Physique nucléaire et corpusculaire
M. CORTOIS Jean	Chimie organique
M. COUTURIER Daniel	Tectonique géodynamique
M. CRAMON Norbert	Biologie
M. CURGY Jean Jacques	Physique théorique
M. DANGOISSE Didier	Analyse
M. DE PARIS Jean Claude	Composants électroniques et optiques
M. DECOSTER Didier	Electrochimie et Cinétique
M. DEJAEGER Roger	Informatique
M. DELAHAYE Jean Paul	Physiologie animale
M. DELORME Pierre	Sciences Economiques
M. DELORME Robert	Sociologie
M. DEMUNTER Paul	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
Mme DEMUYNCK Claire	Informatique
M. DENEL Jacques	Physique du solide - cristallographie
M. DEPREZ Gilbert	

M. DERIEUX Jean Claude	Microbiologie
M. DERYCKE Alain	Informatique
M. DESCAMPS Marc	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie minérale
M. DEWAILLY Jean Michel	Géographie humaine
M. DHAMELINCOURT Paul	Chimie physique
M. DI PERSIO Jean	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. DUBAR Claude	Sociologie démographique
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie hertzienne
M. DUBOIS Jean Jacques	Géographie
M. DUBUS Jean Paul	Spectrométrie des solides
M. DUPONT Christophe	Vie de la firme
M. DUTHOIT Bruno	Génie civil
Mme DUVAL Anne	Algèbre
Mme EVRARD Micheline	Génie des procédés et réactions chimiques
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FARVACQUE Jean Louis	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. FAUQUEMBERGUE Renaud	Composants électroniques
M. FELIX Yves	Mathématiques
M. FERRIERE Jacky	Tectonique - Géodynamique
M. FISCHER Jean Claude	Chimie organique, minérale et analytique
M. FONTAINE Hubert	Dynamique des cristaux
M. FORSE Michel	Sociologie
M. GADREY Jean	Sciences économiques
M. GAMBLIN André	Géographie urbaine, industrielle et démographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOURIEROUX Christian	Probabilités et statistiques
M. GREGORY Pierre	I. A. E.
M. GREMY Jean Paul	Sociologie
M. GREVET Patrice	Sciences Economiques
M. GRIMBLOT Jean	Chimie organique
M. GUELTON Michel	Chimie physique
M. GUICHAOUA André	Sociologie
M. HAIMAN Georges	Modélisation, calcul scientifique, statistiques
M. HOUDART René	Physique atomique
M. HUEBSCHMANN Johannes	Mathématiques
M. HUTTNER Marc	Algèbre
M. ISAERT Noël	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JACOB Pierre	Probabilités et statistiques
M. JEAN Raymond	Biologie des populations végétales
M. JOFFRE Patrick	Vie de la firme
M. JOURNAL Gérard	Spectroscopie hertzienne
M. KOENIG Gérard	Sciences de gestion
M. KOSTRUBIEC Benjamin	Géographie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
Mme KRIFA Hadjila	Sciences Economiques
M. LANGEVIN Michel	Algèbre
M. LASSALLE Bernard	Embryologie et biologie de la différenciation
M. LE MEHAUTE Alain	Modélisation, calcul scientifique, statistiques
M. LEBFEVRE Yannic	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. LECLERCQ Lucien	Chimie physique
M. LEFEBVRE Jacques	Physique
M. LEFEBVRE Marc	Composants électroniques et optiques
M. LEFEVRE Christian	Pétrologie
Melle LEGRAND Denise	Algèbre
M. LEGRAND Michel	Astronomie - Météorologie
M. LEGRAND Pierre	Chimie
Mme LEGRAND Solange	Algèbre
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LEMAIRE Jean	Spectroscopie hertzienne

M. LE MAROIS Henri	Vie de la firme
M. LEMOINE Yves	Biologie et physiologie végétales
M. LESCURE François	Algèbre
M. LESENNE Jacques	Systèmes électroniques
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
Mme LOPES Maria	Mathématiques
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU François	Sciences économiques
M. MAHIEU Jean Marie	Optique - Physique atomique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MANSY Jean Louis	Géologie
M. MAURISSON Patrick	Sciences Economiques
M. MERIAUX Michel	EUDIL
M. MERLIN Jean Claude	Chimie
M. MESMACQUE Gérard	Génie mécanique
M. MESSELYN Jean	Physique atomique et moléculaire
M. MOCHE Raymond	Modélisation, calcul scientifique, statistiques
M. MONTEL Marc	Physique du solide
M. MORCELLET Michel	Chimie organique
M. MORE Marcel	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. MORTREUX André	Chimie organique
Mme MOUNIER Yvonne	Physiologie des structures contractiles
M. NIAY Pierre	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. NICOLE Jacques	Spectrochimie
M. NOTELET Francis	Systèmes électroniques
M. PALAVIT Gérard	Génie chimique
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie organique
M. PERROT Pierre	Chimie appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie animale
M. PETIT Daniel	Biologie des populations et écosystèmes
M. PLIHON Dominique	Sciences Economiques
M. PONSOLLE Louis	Chimie physique
M. POSTAIRE Jack	Informatique industrielle
M. RAMBOUR Serge	Biologie
M. RENARD Jean Pierre	Géographie humaine
M. RENARD Philippe	Sciences de gestion
M. RICHARD Alain	Biologie animale
M. RIETSCH François	Physique des polymères
M. ROBINET Jean Claude	EUDIL
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROLLAND Paul	Composants électroniques et optiques
M. ROLLET Philippe	Sciences Economiques
Mme ROUSSEL Isabelle	Géographie physique
M. ROUSSIGNOL Michel	Modélisation, calcul scientifique, statistiques
M. ROY Jean Claude	Psychophysiologie
M. SALERNO François	Sciences de gestion
M. SANCHOLLE Michel	Biologie et physiologie végétales
Mme SANDIG Anna Margarete	
M. SAWERYSYN Jean Pierre	Chimie physique
M. STAROSWIECKI Marcel	Informatique
M. STEEN Jean Pierre	Informatique
Mme STELLMACHER Irène	Astronomie - Météorologie
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLIEZ Roger	Génie alimentaire
M. TANRE Daniel	Géométrie - Topologie
M. THERY Pierre	Systèmes électroniques
Mme TJOTTA Jacqueline	Mathématiques
M. TOURSEL Bernard	Informatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du travail

M. TURREL Georges  
M. VANDIJK Hendrik  
Mme VAN ISEGHEM Jeanine  
M. VANDORPE Bernard  
M. VASSEUR Christian  
M. VASSEUR Jacques  
Mme VIANO Marie Claude  
M. WACRENIER Jean Marie  
M. WARTEL Michel  
M. WATERLOT Michel  
M. WEICHERT Dieter  
M. WERNER Georges  
M. WIGNACOURT Jean Pierre  
M. WOZNIAK Michel  
Mme ZINN JUSTIN Nicole

Spectrochimie infrarouge et raman

Modélisation, calcul scientifique, statistiques

Chimie minérale

Automatique

Biologie

Electronique

Chimie inorganique

géologie générale

Génie mécanique

Informatique théorique

Spectrochimie

Algèbre

# REMERCIEMENTS

Cette thèse a été réalisée au sein du laboratoire A.N.O. de l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

J'exprime ma gratitude à Monsieur C. BREZINSKI qui a accepté de présider mon jury.

Je suis particulièrement reconnaissant au Professeur J. C. FIOROT pour le sujet qu'il m'a proposé; ses conseils, son enthousiasme et son suivi du travail m'ont accompagné depuis le début de cette étude.

Je remercie vivement Messieurs P. JEANNIN et A. LE MEHAUTE d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je suis très reconnaissant à Messieurs P.J. LAURENT, P. SABLONNIERE et F. LOUAGE qui ont accepté d'être membres du jury.

Monsieur F. LOUAGE, directeur du Centre de Lille de l'E.N.S.A.M. m'a fortement encouragé à entreprendre cette recherche, de même que mes collègues du laboratoire LCRMAO. Je leur exprime mes remerciements.

à Claudine

à Samuel

à Matthieu

à mes parents

# INTRODUCTION

La demande industrielle toujours plus grande de modélisation et de réalisation de formes variées et précises (carrosseries d'automobiles, ailes d'avion, aubages de turbines, pièces mécaniques, objets anatomiques, ...) a stimulé la recherche mathématique en géométrie algorithmique.

En amont de toute démarche de C.A.O. visant à fabriquer un objet, se posent les questions suivantes:

- Comment déterminer les courbes et les surfaces utiles pour construire le modèle mathématique de l'objet? Les caractéristiques géométriques des courbes et surfaces retenues sont très importantes. Par exemple, la régularité du champ des normales aux frontières de l'objet est souhaitée pour des questions d'accostage d'outils en usinage, pour des problèmes de réflexion et de réfraction en synthèse d'images, ...
- Comment représenter ces courbes et surfaces pour leur utilisation informatique en C.F.A.O. ?
- Quel modèle englobe le plus grand nombre de courbes et de surfaces simples, offrant une grande richesse au concepteur?

Face à de tels enjeux, depuis 1950, les travaux mathématiques sur les courbes et les surfaces n'ont cessé de se développer, en interaction avec les progrès de l'informatique.

Essentiellement fondés sur des formulations polynomiales, à une ou plusieurs variables, ces travaux ont conduit aux représentations "Bézier" ou "spline" qui sont présentes dans de nombreux logiciels industriels.

Cependant des courbes et surfaces simples et utiles ( cercle, conique, sphère, quadrique) échappent à cette représentation et sont seulement approchées par le modèle polynomial.

D'où l'apparition de travaux sur les courbes et surfaces rationnelles dès 1967. C'est en 1986 que Fiorot et Jeannin ont proposé un modèle de représentation des courbes et surfaces rationnelles contrôlées par un ensemble de *vecteurs massiques*, un vecteur massique étant un point pondéré ou un vecteur pur de l'espace dans lequel sont plongées les courbes et les surfaces. Dans "*Courbes et surfaces rationnelles. Applications à la CAO*" ([34]), ils montrent l'identité entre les courbes (respectivement surfaces) rationnelles et les courbes (*BR*) (respectivement les surfaces (*SBR*)).

Le travail réalisé se place dans le cadre précédent : c'est une contribution à l'étude du raccordement  $G^2$  entre surfaces rationnelles mises sous forme (*SBR*).

Dans le chapitre 1, nous rappelons des définitions et résultats de [34] sur les surfaces (*SBR*) rectangulaires et triangulaires.

Le but poursuivi consiste à construire une surface composite régulière formée de surfaces (*SBR*) convenablement raccordées.

Au chapitre 2, nous proposons une définition du raccord géométrique  $G^2$  entre deux surfaces notées  $S_l$  et  $S_r$ , le long de leur frontière commune : ces deux surfaces partagent la même normale unitaire et la même quadrique osculatrice de sorte que la surface composite ne présente pas d'arête vive. Les deux invariants géométriques utilisés (normale unitaire et quadrique osculatrice) sont étudiés grâce à l'application de Gauss. Nous obtenons des conditions analytiques exprimées en termes simples sur les paramétrisations des surfaces  $S_l$  et  $S_r$ . Ces résultats, appliqués au cas de surfaces  $S_l$  et  $S_r$  qui sont des  $\Pi\Omega$ - projetées de surfaces de l'espace "au-dessus", conduisent d'une part à une condition nécessaire et suffisante de raccord  $G^1$ , d'autre part à une condition nécessaire et suffisante de raccord  $G^2$ .

Dans le chapitre 3, ces deux CNS sont traduites en termes de vecteurs massiques lorsque  $S_l$  et  $S_r$  sont des surfaces (*SBR*) rectangulaires, c'est à dire des  $\Pi\Omega$ - projetées de surfaces polynomiales. Des conditions nécessaires et suffisantes sont obtenues pour le raccord  $G^1$ , qui englobent des conditions

suffisantes connues. Ces résultats sont exploités pour établir entre les vecteurs massiques des relations qui traduisent le raccord  $G^2$ .

Le chapitre 4 est consacré à l'étude complète d'un exemple de raccordement  $G^2$  de deux quadriques . Il illustre en détail les résultats du chapitre 3.

Le chapitre 5 reprend l'étude des CNS de raccordement  $G^2$  d'une part de deux surfaces polynomiales ( $SBP$ ) triangulaires , d'autre part de deux surfaces ( $SBR$ ) triangulaires.

Le chapitre 6 illustre le raccordement  $G^2$  entre une surface ( $SBR$ ) triangulaire et une surface ( $SBR$ ) rectangulaire.

En conclusion , la traduction des CNS de raccordement  $G^1$  et  $G^2$  par des relations entre les vecteurs massiques dans le cas des surfaces ( $SBR$ ) , et à fortiori par des relations entre les points de contrôle dans le cas des surfaces polynomiales , donne un aspect algorithmique au raccordement . A partir d'une surface donnée , on peut en construire une autre de manière à ce que l'ensemble ait de bonnes propriétés de continuité.

ETUDE  
DU RACCORDEMENT GEOMETRIQUE  $G^2$   
DE SURFACES RATIONNELLES  
MISES SOUS FORME (*SBR*) .

## TABLE DES MATIERES

<b>Chapitre 1 :</b> Les courbes ( $BR$ ) et les surfaces ( $SBR$ )	page 9
<b>Chapitre 2 :</b> Aspects projectifs du raccordement $G^2$ entre deux surfaces	page 35
<b>Chapitre 3 :</b> Raccordement $G^i$ , $i \in \{0, 1, 2\}$ entre deux surfaces ( $SBR$ ) rectangulaires	page 64
<b>Chapitre 4:</b> Un exemple complet	page 91
<b>Chapitre 5 :</b> Raccordement $G^i$ , $i \in \{0, 1, 2\}$ entre deux surfaces ( $SBR$ ) triangulaires	page 122
<b>Chapitre 6:</b> Exemple de triangle ( $SBR$ ) raccordé $G^2$ à un carreau ( $SBR$ )	page 151
<b>Annexe</b>	page 159
<b>Bibliographie</b>	page 165

# PREMIER CHAPITRE

## Les courbes ( $BR$ ) et les surfaces ( $SBR$ )

1. L'espace des vecteurs massiques page 10
2. Quelques remarques sur les courbes ( $BP$ ) et les courbes ( $BR$ ) page 12
3. Surface rationnelle définie sur le carré  $[0, 1]^2$   
à l'aide d'un réseau de vecteurs massiques page 15
4. Élévation de hauteur et de largeur page 23
5. Surfaces ( $SBP$ ) triangulaires page 25
6. Surfaces ( $SBR$ ) triangulaires page 32

# Les courbes ( $BR$ ) et les surfaces ( $SBR$ )

Depuis l'année 1986 , Fiorot et Jeannin ont développé un nouveau modèle de représentation des courbes et des surfaces rationnelles contrôlées par des vecteurs massiques( [31] , [32] , [33] , [34] , [35] ) . Un vecteur massique est un point pondéré ou un vecteur de l'espace dans lequel sont plongées les courbes et les surfaces .Le travail présenté concerne les *courbes* ( $BR$ ) et les *surfaces* ( $SBR$ ) qu'ils ont définies et étudiées . Dans ce chapitre, à partir de l'ouvrage [34] , les notations sont introduites , les définitions des courbes ( $BR$ ) et des surfaces ( $SBR$ ) sont présentées et leurs principales propriétés rappelées .

## 1 L'espace des vecteurs massiques

### 1.1 Rappels

Soit  $\mathcal{E}$  (resp  $\mathcal{F}$ ) un espace affine de dimension 3 (resp 4) ,  $\vec{\mathcal{E}}$  (resp  $\vec{\mathcal{F}}$  ) l' espace vectoriel associé tels que  $\mathcal{E}$  (resp  $\vec{\mathcal{E}}$ ) soit un hyperplan de  $\mathcal{F}$  (resp  $\vec{\mathcal{F}}$  ). On désigne par  $\hat{\mathcal{E}}$  , l'espace projectif réel associé à  $\mathcal{E}$ . On considère un point  $\Omega$  de  $\mathcal{F}$  n'appartenant pas à  $\mathcal{E}$ .

Soit  $\hat{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \times \mathbb{R}^*) \cup \vec{\mathcal{E}}$  l'espace vectoriel des **vecteurs massiques**.

Fiorot et Jeannin montrent que l'application :

$$\hat{\Omega} : \hat{\mathcal{E}} \longrightarrow \vec{\mathcal{F}} \text{ définie par : } \begin{aligned} \hat{\Omega}(A, \alpha) &= \alpha \cdot \vec{\Omega A} \quad ; \text{ notée } \hat{\Omega}(A, \alpha) = \vec{\Omega A} \\ \hat{\Omega}(\vec{a}) &= \vec{a} \end{aligned}$$

est une bijection de  $\hat{\mathcal{E}}$  sur  $\vec{\mathcal{F}}$  et qu'elle "transporte" sur  $\hat{\mathcal{E}}$  la structure d'espace vectoriel de  $\vec{\mathcal{F}}$ .

Pour  $a$  et  $b$  dans  $\hat{\mathcal{E}}$  , et  $\lambda$  dans  $\mathbb{R}$  ,les opérations  $\oplus$  et  $*$  sont définies par :

$$a \oplus b = \hat{\Omega}^{-1} (\hat{\Omega}(a) + \hat{\Omega}(b))$$

$$\lambda * a = \hat{\Omega}^{-1} (\lambda \cdot \hat{\Omega}(a))$$

$\hat{\mathcal{E}}$  est alors un espace vectoriel et  $\hat{\Omega}$  un isomorphisme entre  $\hat{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{F}}$ .

Soit l'application de  $\hat{\mathcal{E}}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $\chi(A, \alpha) = \alpha$   
 $\chi(\vec{a}) = 0$

Cette application  $\chi$  est une forme linéaire appelée **masse**.

Par ailleurs,  $\Pi$ , la **projection naturelle** de  $\hat{\mathcal{E}} \setminus \{0\}$  sur  $\vec{\mathcal{E}}$  est définie par :

$$\Pi : \hat{\mathcal{E}} \setminus \{0\} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$$

$$\Pi(A, \alpha) = A$$

$$\Pi(\vec{a}) = (\vec{a})_{\infty}$$

La **projection conique** de sommet  $\Omega$ , notée  $\Pi\Omega$ , est l'application :

$$\Pi\Omega : \mathcal{F} \setminus \{\Omega\} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}, \text{ définie par}$$

$$\Pi\Omega(\vec{v}) = m, \text{ tel que } \vec{\Omega m} \text{ soit colinéaire à } \vec{v}.$$

On utilisera souvent la propriété suivante ([34], Proposition 1.2.2.3, page 20).

**Proposition 1.1.1** : *La projection naturelle et la projection conique sont reliées par :  $\Pi = \Pi\Omega \circ \hat{\Omega}$*

**Remarque :**

Dans la suite, on pourra identifier  $\mathcal{F}$  à  $\vec{\mathcal{F}}$  en identifiant le point  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{F}$  et le vecteur  $\vec{\Omega\mathcal{P}}$ .

## 1.2 Notations employées dans le travail

Un vecteur massique est désigné par une minuscule latine, soit  $a, r, l$ .

Sa masse,  $\chi(a), \chi(r), \chi(l)$  est notée par la minuscule grecque correspondante, soit  $\alpha, \rho, \lambda$ .

Sa  $\Pi$ -projection, point de  $\hat{\mathcal{E}}$ , est notée par la majuscule droite correspondante, soit  $A, R, L$ .

Son image par l'isomorphisme  $\hat{\Omega}$  est notée par une majuscule ronde, soit  $\mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{L}$ .

Les relations suivantes résument toutes ces notations.

$$a \in \hat{\mathcal{E}} \quad ; \quad \hat{\Omega}(a) = \vec{\Omega\mathcal{A}}$$

$$\chi(a) = \alpha \quad ; \quad \vec{\Omega\mathcal{A}} = \alpha \cdot \vec{\Omega A} \quad (\text{si } \alpha \neq 0)$$

$$r \in \hat{\mathcal{E}} \quad ; \quad \hat{\Omega}(r) = \vec{\Omega\mathcal{R}}$$

$$\chi(r) = \rho \quad ; \quad \vec{\Omega\mathcal{R}} = \rho \cdot \vec{\Omega R} \quad (\text{si } \rho \neq 0)$$

$$l \in \hat{\mathcal{E}} \quad ; \quad \hat{\Omega}(l) = \vec{\Omega\mathcal{L}}$$

$$\chi(l) = \lambda \quad ; \quad \vec{\Omega\mathcal{L}} = \lambda \cdot \vec{\Omega L} \quad (\text{si } \lambda \neq 0)$$

## 2 Quelques rappels succincts sur les courbes $(BP)$ et les courbes $(BR)$

### 2.1 Définition d'une courbe $(BP)$

Les courbes de Bézier polynomiales ont été étudiées par de nombreux auteurs ([7], [8], [9], [18], [19], [29], [30]) et leur définition est rappelée ici.

**Définition 2.1.1** : Soit  $P = \{P_i, 0 \leq i \leq n\}$  un polygone formé de  $(n + 1)$  points d'un espace affine  $\mathcal{E}$ .

Alors la courbe de Bézier polynomiale de polygone  $P$ , dit de contrôle, est décrite par le point

$$B(t) = \sum_{i=0}^{i=n} B_i^n(t) P_i, \quad t \in [0, 1]$$

où  $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$  est le  $i$ ème polynôme de Bernstein.

Cette courbe est notée  $BP[P_0, P_1, \dots, P_n; [0, 1]]$  ou, plus brièvement,  $BP[P; [0, 1]]$ .

## 2.2 Définition d'une courbe (BR).

### Définition 2.2.1 :

Soit un ensemble de  $n + 1$  vecteurs massiques non tous nuls :

$$a = \{a_i, 0 \leq i \leq n\} ; (a \subset \hat{\mathcal{E}})$$

La courbe B-rationnelle, (BR) en abrégé, de polygone massique de contrôle  $a$ , est décrite par le point

$$A(t) = \Pi(BP[a_0, a_1, \dots, a_n; [0, 1]](t))$$

Cette courbe est notée  $BR[a_0, a_1, \dots, a_n; [0, 1]]$ , ou, plus brièvement,  $BR[a; [0, 1]]$ .

Le nombre  $n$  de côtés du polygone  $a$  est appelé la longueur de la courbe  $BR[a; [0, 1]]$ .

Pour faciliter certaines écritures, la notation  $A = BR[a_i, 0 \leq i \leq n; [0, 1]]$  sera aussi utilisée pour désigner la courbe  $BR[a; [0, 1]]$ .

## 2.3 Autres formulations

Soit  $a(t) = BP[a_0, a_1, \dots, a_n; [0, 1]](t)$ , la courbe de Bézier de  $\hat{\mathcal{E}}$ , de polygone de contrôle  $a$ .

Elle est décrite par le point

$$a(t) = \sum_{i=0}^{i=n} B_i^n(t) * a_i, \quad t \in [0, 1]$$

Dans ([34], 2.2.5, page 50) Fiorot et Jeannin établissent le résultat qui suit :

### Proposition 2.3.1 :

Avec les notations :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}$$

$$\chi(a_i) = \alpha_i \quad ; \quad \hat{\Omega}(a_i) = \Omega \vec{\mathcal{A}}_i$$

$$\chi(a(t)) = \alpha(t) \quad ; \quad \hat{\Omega}(a(t)) = \Omega \vec{\mathcal{A}}(t)$$

deux courbes (BP) peuvent être définies:

- l'une dans  $\mathbb{R}$  , paramétrée par :

$$\alpha(t) = BP[\alpha_i, 0 \leq i \leq n; [0, 1]](t)$$

- l'autre dans  $\mathcal{F}$  , paramétrée par :

$$\Omega \vec{\mathcal{A}}(t) = BP[\mathcal{A}_i, 0 \leq i \leq n; [0, 1]](t)$$

Soit  $A = BR[a_0, a_1, \dots, a_n; [0, 1]]$  Alors :

$$\text{Si } \alpha(t) \neq 0 : \Omega \vec{\mathcal{A}}(t) = \alpha(t) \cdot \Omega \vec{\mathcal{A}}(t)$$

$$\text{Si } \alpha(t) = 0 : \Omega \vec{\mathcal{A}}(t) = \sum_{i=0}^{i=n} B_i^n(t) \cdot \Omega \vec{\mathcal{A}}_i$$

$$\text{Dans ce cas : } \begin{cases} \Omega \vec{\mathcal{A}}(t) \in \vec{\mathcal{E}} \\ A(t) = (\Omega \vec{\mathcal{A}}(t))_{\infty} \text{ dans le cas où } \Omega \vec{\mathcal{A}}(t) \neq \vec{0} \end{cases}$$

## 2.4 Obtention des dérivées d'une courbe (BR).

Dans le cas où  $\alpha(t)$  est différent de 0 , la formule de Leibniz appliquée à la relation de la proposition précédente permet le calcul de toutes les dérivées de la fonction  $A$ . En particulier notre étude utilisera les deux premières dérivées qui s'expriment par :

$$\alpha^2(t) \frac{dA}{dt} = \alpha(t) \frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} - \frac{d\alpha(t)}{dt} \Omega \vec{\mathcal{A}}(t).$$

$$\alpha^2(t) \frac{d^2 A}{dt^2} = [\alpha(t) \frac{d^2 \mathcal{A}(t)}{dt^2} - \frac{d^2 \alpha(t)}{dt^2} \Omega \vec{\mathcal{A}}(t)] - 2 \frac{d\alpha(t)}{dt} [\alpha(t) \frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} - \frac{d\alpha(t)}{dt} \Omega \vec{\mathcal{A}}(t)].$$

Les expressions ci-dessus sont intéressantes car les dérivées de courbes (BP) qui interviennent dans les seconds membres sont faciles à obtenir à partir des polygones de contrôle de ces courbes (BP) ([30]).

## 2.5 Algorithme de calcul.

Le calcul de  $BP[P_0, P_1, \dots, P_n; [0, 1]](t)$  utilise un algorithme robuste , appelé l'Algorithme de De Casteljaou ( [9] , [19] , [29] , [30] , [46] ) .

### 3 Surface Rationnelle définie sur le carré $[0, 1]^2$ à l'aide d'un réseau de vecteurs massiques.

#### 3.1 Surface (*SBP*) rectangulaire.

$m$  et  $n$  sont deux entiers positifs donnés.

##### Définition 3.1.1 :

Etant donné un réseau  $E = \{E_{ij} ; 0 \leq i \leq m ; 0 \leq j \leq n\}$  de points d'un espace affine  $\mathcal{E}$ ,

$SBP[E; [0, 1]^2]$  est la surface décrite par le point:

$$SBP[E; [0, 1]^2](u, v) = \sum_{i=0}^{i=m} \sum_{j=0}^{j=n} B_i^m(u) B_j^n(v) E_{ij}.$$

Cette surface est appelée surface de Bézier ([7], [8], [9]) polynomiale, en abrégé, surface (*SBP*) de réseau  $E$ , définie sur  $K = [0, 1]^2$ .

Dans la définition ci-dessus:  $B_i^m(u) = \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i}$  est le  $i$ ème polynôme de Bernstein de degré  $m$ . La surface rectangulaire (*SBP*) ainsi définie est parfois appelée carreau de Bézier et, dans de nombreux logiciels de CAO, elle constitue un outil standard pour la modélisation des surfaces composites ([3], [61], [62]).

#### 3.2 Obtention des dérivées d'un paramétrage d'une surface (*SBP*)

Le travail présenté étudie le raccordement géométrique entre deux surfaces; la connaissance, sur la frontière commune, des valeurs des dérivées partielles des paramétrages représentant ces surfaces sera indispensable.

### 3.2.1 Résultat de base : dérivées d'une courbe (BP) .

La démonstration de la proposition suivante peut être trouvée dans ([30] , [46] ).

$\Delta\alpha_j = \alpha_{j+1} - \alpha_j$  désigne la la différence progressive , et  $\Delta^k = \underbrace{\Delta(\Delta(\dots))}_{k \text{ fois}}$  .

#### Proposition 3.2.1 :

Soit la courbe  $B = BP[\alpha_0, \dots, \alpha_n; [0, 1]]$  , définie dans un espace affine  $\mathcal{E}$  .

$$\forall t \in [0, 1] , B(t) = \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(t)\alpha_j$$

Alors les dérivées de la fonction  $B$  sont données par les expressions suivantes:

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} , \frac{d^k B}{dt^k}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{j=n-k} B_j^{n-k}(t)\Delta^k \alpha_j$$

$$\forall k > n , \frac{d^k B}{dt^k}(t) = 0$$

### 3.2.2 Application aux surfaces (SBP).

La définition des dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables , et la forme tensorielle de la fonction définissant une surface (SBP) conduisent au résultat suivant:

**Proposition 3.2.2 :** Soit la surface (SBP) définie dans un espace affine  $\mathcal{E}$  par:

$$E(u, v) = \sum_{i=0}^{i=m} \sum_{j=0}^{j=n} B_i^m(u)B_j^n(v)E_{ij}$$

Alors les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction  $E$  sont liées au réseau de contrôle  $E$  par les relations suivantes:

$$\frac{\partial E}{\partial u}(u, v) = m \sum_{i=0}^{i=m-1} \sum_{j=0}^{j=n} B_i^{m-1}(u)B_j^n(v)(E_{(i+1)j} - E_{ij}).$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}(u, v) = m(m-1) \sum_{i=0}^{i=m-2} \sum_{j=0}^{j=n} B_i^{m-2}(u) B_j^n(v) (E_{(i+2)j} - 2E_{(i+1)j} + E_{ij}).$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v}(u, v) = mn \sum_{i=0}^{i=m-1} \sum_{j=0}^{j=n-1} B_i^{m-1}(u) B_j^{n-1}(v) [(E_{(i+1)(j+1)} - E_{i(j+1)}) - (E_{(i+1)j} - E_{ij})].$$

Dans cette proposition les formules sont explicitées . Pour des questions de concision , la notation suivante est utilisée :

$$\Delta^{kl} E_{ij} = \Delta_1^k (\Delta_2^l E_{ij}) = \Delta_2^l (\Delta_1^k E_{ij})$$

l'indice 1 ( resp 2 ) indiquant que la différence progressive est prise par rapport au premier (resp second ) indice. Les résultats obtenus ci-dessus pour les dérivées d'une courbe (BP) conduisent à :

$$\frac{\partial E}{\partial u}(u, v) = m \sum_{i=0}^{i=m-1} \sum_{j=0}^{j=n} B_i^{m-1}(u) B_j^n(v) \Delta^{10} E_{ij}.$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}(u, v) = m(m-1) \sum_{i=0}^{i=m-2} \sum_{j=0}^{j=n} B_i^{m-2}(u) B_j^n(v) \Delta^{20} E_{ij}.$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v}(u, v) = mn \sum_{i=0}^{i=m-1} \sum_{j=0}^{j=n-1} B_i^{m-1}(u) B_j^{n-1}(v) \Delta^{11} E_{ij}.$$

En particulier , sur les bords de la surface (SBP) :

$$\frac{\partial E}{\partial u}(0, v) = m \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) (E_{1j} - E_{0j}).$$

$$\frac{\partial E}{\partial u}(1, v) = m \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) (E_{mj} - E_{(m-1)j}).$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}(0, v) = m(m-1) \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) (E_{2j} - 2.E_{1j} + E_{0j}).$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v}(0, v) = mn \sum_{j=0}^{j=n-1} B_j^{n-1}(v) [(E_{1(j+1)} - E_{0(j+1)}) - (E_{1j} - E_{0j})].$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}(1, v) = m(m-1) \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) (E_{mj} - 2E_{(m-1)j} + E_{(m-2)j}).$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v}(1, v) = mn \sum_{j=0}^{j=n-1} B_j^{n-1}(v) [(E_{m(j+1)} - E_{(m-1)(j+1)}) - (E_{mj} - E_{(m-1)j})].$$

### 3.3 Algorithme de De Casteljaou

L'algorithme de DeCasteljau ([19], [29], [56]), déjà évoqué pour les courbes ( $BP$ ), permet le calcul de  $E(u, v)$ .

En effet, on peut écrire :

$$E(u, v) = \sum_{i=0}^{i=m} B_i^m(u) \left[ \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) E_{ij} \right]$$

ou encore en posant

$$Q_i(v) = \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) E_{ij}$$

$$E(u, v) = \sum_{i=0}^{i=m} B_i^m(u) Q_i(v)$$

Alors  $E(u, v)$  se calcule en utilisant  $(m+1)$  fois l'algorithme de De Casteljaou pour l'obtention des points  $Q_i(v)$  et une autre fois pour celle de  $E(u, v)$  proprement dit ce qui donne, en outre, un vecteur du plan tangent à la surface ( $SBP$ ) au point  $E(u, v)$ .

De même,

$$E(u, v) = \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) \left[ \sum_{i=0}^{i=m} B_i^m(u) E_{ij} \right]$$

en posant

$$R_j(u) = \sum_{i=0}^{i=m} B_i^m(u) E_{ij}$$

$$E(u, v) = \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) R_j(u)$$

Le calcul de  $E(u, v)$  utilise alors  $(n + 1)$  fois l'algorithme de De Casteljau pour l'obtention des points  $R_j(u)$  et une autre fois pour celle de  $E(u, v)$  proprement dit et il donne un autre vecteur du plan tangent à la surface ( $SBP$ ) au point  $E(u, v)$ .

Donc, il est possible de déterminer facilement un point de la surface ainsi que le vecteur normal unitaire en ce point et ceci est d'une grande utilité pour de nombreuses situations pratiques (usinage ou traitement d'images) ([3], [4], [61]).

### 3.4 Définition d'une surface ( $SBP$ ) rectangulaire.

Dans [34], au chapitre 6, les surfaces rationnelles sont introduites par les définitions qui sont rappelées ici.

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers donnés, dimensions d'un réseau massique  $a$  de  $\hat{\mathcal{E}}$ :

$$a = \{a_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}.$$

Alors ces vecteurs massiques forment le réseau de contrôle d'une surface ( $SBP$ ) de  $\hat{\mathcal{E}}$  donnée par :

$$SBP[a; [0, 1]^2](u, v) = \sum_{i=0}^{i=m} \sum_{j=0}^{j=n} B_i^m(u) B_j^n(v) * a_{ij}$$

ou encore, selon les notations adoptées:

$$a(u, v) = SBP[a_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n; [0, 1]^2](u, v)$$

Fiorot et Jeannin ([34], paragraphe 6.3 page 163) posent :

#### Définition 3.4.1 :

*La surface B-rationnelle, en abrégé ( $SBP$ ) de réseau massique*

$a = \{a_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$  est décrite par le point

$$A(u, v) = \Pi(SBP[a; [0, 1]^2](u, v)).$$

Cette surface est dite rectangulaire de longueur  $m$  et de largeur  $n$ , définie sur le domaine  $[0, 1]^2$ .

En d'autres termes :

$$SBR[a; [0, 1]^2] = \Pi \circ SBP[a; [0, 1]^2].$$

ou bien encore, pour  $(u, v)$  élément de  $[0, 1]^2$  :

$$\begin{aligned} SBR[a_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n; [0, 1]^2](u, v) \\ = \Pi\{SBP[a_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n; [0, 1]^2](u, v)\} \end{aligned}$$

cf la figure 1

### 3.5 Autre formulation.

Soit  $\hat{\Omega}(a_{ij}) = \overline{\Omega \mathcal{A}_{ij}}$ ,  $0 \leq i \leq m$ ,  $0 \leq j \leq n$

$\{\mathcal{A}_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$  est donc un réseau de points de  $\mathcal{F}$ .

Alors :

**Proposition 3.5.1 :**

En utilisant la propriété  $\Pi = \Pi \Omega \circ \hat{\Omega}$ , la surface (SBR) définie plus haut s'écrit encore :

$$\begin{aligned} SBR[a_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n; [0, 1]^2] \\ = \Pi \Omega \{SBP[\mathcal{A}_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n; [0, 1]^2]\} \end{aligned}$$

En détaillant cette formulation, avec les notations adoptées plus haut, il vient :

**Proposition 3.5.2 :**

En posant :

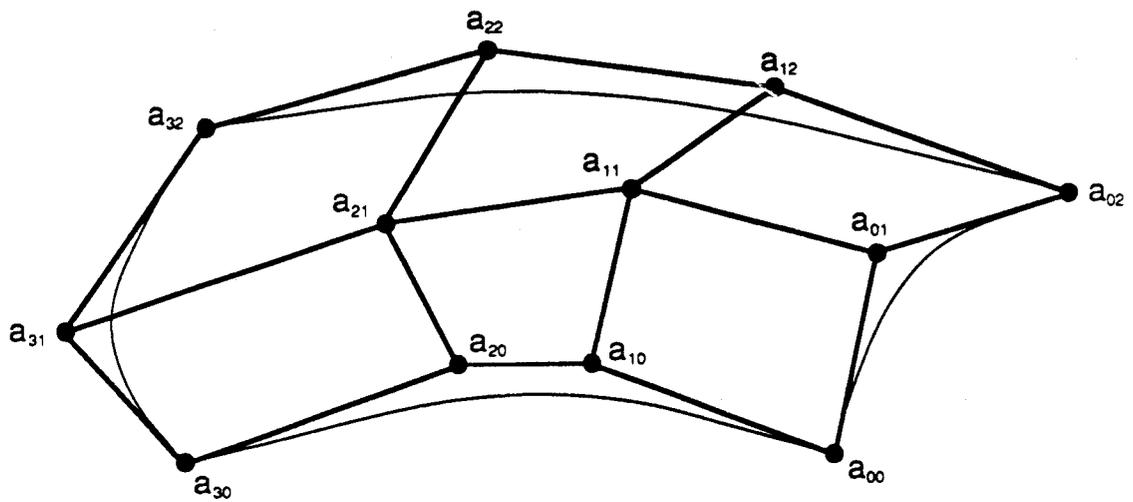
$$\mathcal{A}(u, v) = SBP[\mathcal{A}_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n; [0, 1]^2](u, v) \text{ et}$$

$$\alpha(u, v) = SBP[\alpha_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n; [0, 1]^2](u, v)$$

alors,

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2 \mid \alpha(u, v) \neq 0, \overline{\Omega \mathcal{A}}(u, v) = \alpha(u, v) \cdot \overline{\Omega \mathcal{A}}(u, v)$$

Chapitre1 - Figure1



$$\begin{aligned}
 a(u,v) &= \bigoplus_{i=0}^m \bigoplus_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) * a_{ij} \\
 &= \text{SBP} [a_{ij}; [0, 1]^2] (u,v)
 \end{aligned}$$

La  $\pi$ -Projection de la surface a est la  $\text{SBR} [a_{ij}; [0, 1]^2]$

Définition d'une surface (SBP) rectangulaire.

Dans l'espace des vecteurs massiques

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2 \mid \alpha(u, v) = 0, \quad \overline{\Omega\mathcal{A}}(u, v) = \sum_{i=0}^{i=m} \sum_{j=0}^{j=n} B_i^m(u) B_j^n(v) \overline{\Omega\mathcal{A}}_{ij}$$

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2 \mid \alpha(u, v) = 0, \quad \begin{cases} \overline{\Omega\mathcal{A}}(u, v) \in \overline{\mathcal{E}} \\ A(u, v) = (\overline{\Omega\mathcal{A}}(u, v))_\infty \text{ lorsque } \overline{\Omega\mathcal{A}}(u, v) \neq \vec{0} \end{cases}$$

Cette proposition sera utilisée pour obtenir les dérivées partielles en un point à distance finie d'une surface (SBR), en appliquant la formule de Leibniz et les résultats rappelés en 3.2 pour les surfaces (SBP).

### 3.6 Explicitation de la valeur en un point de $\mathcal{E}$ de la surface (SBR) $A$ .

Fiorot et Jeannin donnent ([34], 6.3.1.5, page 164) l'expression détaillée de  $A(u, v)$

**Proposition 3.6.1 :**

$a = \{a_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$  est le réseau massique de la surface (SBR). Soit  $(u, v)$  les coordonnées du point courant du domaine des paramètres.

On pose:

$$I = \{(i, j) : a_{ij} \text{ est un point pondéré}\}$$

$$\bar{I} = \{(i, j) : a_{ij} \text{ est un vecteur "pur" de } \overline{\mathcal{E}}\}$$

$$a_{ij} = (A_{ij}, \alpha_{ij}), (A_{ij}, \alpha_{ij}) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}^* \text{ pour } (i, j) \in I$$

$$a_{ij} = \vec{a}_{ij}, \vec{a}_{ij} \in \overline{\mathcal{E}} \text{ pour } (i, j) \in \bar{I}$$

$$\alpha(u, v) = \sum_{(i,j) \in I} \alpha_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v)$$

Avec ces notations, la formulation explicite de  $A(u, v)$  est indiquée ci-dessous.

Si  $\alpha(u, v) \neq 0$  alors

$$A(u, v) = \frac{1}{\alpha(u, v)} \left[ \sum_{(i,j) \in I} \alpha_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) A_{ij} + \sum_{(i,j) \in \bar{I}} B_i^m(u) B_j^n(v) \vec{a}_{ij} \right]$$

Si  $\alpha(u, v) = 0$  et :

$$\text{si } \vec{A} = \sum_{(i,j) \in I} \alpha_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \vec{A}_{ij} + \sum_{(i,j) \in \bar{I}} B_i^m(u) B_j^n(v) \vec{a}_{ij} \neq \vec{0}$$

alors  $A(u, v) = (\vec{A})_\infty$

En outre  $\alpha(u, v)$  est la masse de  $SBP[a; [0, 1]^2](u, v)$ .

### 3.7 Résultat fondamental.

Il y a identité des surfaces rationnelles et des surfaces (*SBR*) et ,  
en particulier :

**Théorème 3.7.1** : *Toute surface rationnelle sur  $[0, 1]^2$  est une surface (*SBR*) sur  $[0, 1]^2$  et réciproquement.*

Les techniques d'obtention du réseau massique d'une surface rationnelle quelconque sur  $[0, 1]^2$  sont détaillées dans [34] (6.3.2 , page 166) . Les vecteurs du réseau massique sont appelés vecteurs de contrôle. Leur donnée définit entièrement la surface et leur stockage se réduit à quelques scalaires ( par exemple 16 pour les quadriques entières ) Les surfaces rectangulaires (*SBR*) offrent donc à un utilisateur de CAO , un outil facile à manipuler et très riche (sphères , quadriques ,tore , bande de Moebius ,etc ) ( [34]).

### 3.8 Cas particulier.

Lorsque  $\vec{I} = \emptyset$  on retrouve les carreaux de Bézier rationnels classiques ( [28], [25], [53]) En outre une surface (*SBP*) est une surface (*SBR*) particulière , avec  $\vec{I} = \emptyset$  et toutes les masses égales à 1.

### 3.9 Transformée projective d'une surface (*SBR*).

#### 3.9.1 Rappel

Une transformation linéaire  $\vec{T}$  de  $\vec{\mathcal{F}}$  induit une transformation  $T$  sur  $\tilde{\mathcal{E}}$  (que l'on peut assimiler à l'ensemble des droites vectorielles de  $\vec{\mathcal{F}}$ ).

**Définition 3.9.1**  $T$  est appelée transformation projective de  $\tilde{\mathcal{E}}$  , issue de la transformation linéaire  $\vec{T}$  de  $\vec{\mathcal{F}}$  .

Plus précisément :

si  $m$  est un point de  $\tilde{\mathcal{E}}$  tel que le vecteur  $\vec{v}$  dirige la droite  $(\Omega m)$   
 $m' = T(m)$  signifie que le vecteur  $\vec{T}(\vec{v})$  dirige la droite  $(\Omega m')$  .

Dans [6] et dans [34] , il est rappelé que les transformations affines ( bi-  
jections qui conservent le barycentre ) sont des transformations projectives  
particulières.

Rappelons simplement ici un résultat très important de [34] (8.1.3 , page  
196)

**Proposition 3.9.1** *La transformée projective d'une surface (SBR) est une  
nouvelle surface (SBR).*

*Plus précisément ,*

*si  $A(u, v) = SBR[a_{ij}, 0 \leq i \leq m; 0 \leq j \leq n; [0, 1]^2](u, v)$*

*alors :  $T(A(u, v)) = SBR[\hat{T}(a_{ij}), 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n, [0, 1]^2](u, v)$*

*où  $\hat{T}$  est la transformation linéaire de  $\hat{\mathcal{E}}$  donnée par  
 $\hat{T} = \hat{\Omega}^{-1} \circ \vec{T} \circ \hat{\Omega}$  , appelée transmuée de  $\vec{T}$  par  $\hat{\Omega}^{-1}$  .*

## 4 Elévation de longueur et de largeur.

### 4.1 Cas des courbes (BP).

Le résultat classique qui suit est rappelé sans démonstration :

**Proposition 4.1.1 :**

*Toute courbe (BP) de longueur  $n$  peut s'exprimer comme une courbe (BP)  
de longueur  $(n + 1)$  .*

$$\text{Si } \forall u \in [0, 1] , C(u) = BP[E; [0, 1]](u) = \sum_{i=0}^{i=n} B_i^n(u) E_i$$

$$\text{alors } \forall u \in [0, 1] , C(u) = BP[P; [0, 1]](u) = \sum_{i=0}^{i=n+1} B_i^{n+1}(u) P_i ,$$

*et le nouveau réseau de longueur  $(n + 1)$  ,  $P = \{P_i, 0 \leq i \leq n + 1\}$  est défini  
par:*

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n + 1\} , P_i = \frac{i}{n+1} E_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} E_i$$

avec la convention :  $\frac{i}{n+1}E_{i-1} = 0$  si  $i = 0$

et  $\frac{n+1-i}{n+1}E_i = 0$  si  $i = n + 1$ .

## 4.2 Cas des surfaces rectangulaires définies sur $[0, 1]^2$

Le résultat précédent permet d'élever la largeur et la longueur du réseau d'une surface (SBP) et conduit à la

### Proposition 4.2.1 :

La surface (SBP), de longueur  $m$  et de largeur  $n$ , contrôlée par le réseau  $E = \{E_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$ , définie plus haut par :

$$SBP[E; [0, 1]^2](u, v) = \sum_{i=0}^{i=m} \sum_{j=0}^{j=n} B_i^m(u) \cdot B_j^n(v) E_{ij}$$

( $E_{ij}$  éléments d'un espace affine  $\mathcal{E}$ ), peut s'écrire sous la forme d'une surface (SBP) de longueur  $(m + 1)$  et de largeur  $n$ .

Plus précisément:

il existe un réseau  $F = \{F_{ij}, 0 \leq i \leq m + 1, 0 \leq j \leq n\}$  dans  $\mathcal{E}$

défini par  $F_{ij} = \frac{i}{m+1}E_{(i-1)j} + \frac{m+1-i}{m+1}E_{ij}$   
tel que:

$$SBP[E; [0, 1]^2] = SBP[F; [0, 1]^2]$$

c'est à dire ,

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2$$

$$SBP[E; [0, 1]^2](u, v) = \sum_{i=0}^{i=m+1} \sum_{j=0}^{j=n} B_i^{m+1}(u) B_j^n(v) F_{ij}$$

La convention suivante est indispensable à la cohérence de la notation:

$$\frac{i}{m+1}E_{(i-1)j} = 0 \text{ si } i = 0 \text{ et } \frac{m+1-i}{m+1}E_{ij} = 0 \text{ si } i = m + 1 .$$

Preuve:

Il suffit d'utiliser les expressions du paragraphe 3.1 et le résultat sur les courbes .

La proposition suivante s' établit de la même façon .

**Proposition 4.2.2 :**

*Il existe un nouveau réseau ,G, de longueur m et de largeur (n + 1) ,*

$G = \{G_{ij} , 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n + 1\}$  dans  $\mathcal{E}$

défini par  $G_{ij} = \frac{j}{n+1} E_{i(j-1)} + \frac{n+1-j}{n+1} E_{ij}$

tel que :

$SBP[E; [0, 1]^2] = SBP[G; [0, 1]^2]$  , c'est à dire ,

$$\forall (u, v) \in [0, 1]^2$$

$$SBP[E; [0, 1]^2](u, v) = \sum_{i=0}^{i=m} \sum_{j=0}^{j=n+1} B_i^m(u) B_j^{n+1}(v) G_{ij}$$

La convention suivante est indispensable à la cohérence de la notation :

$$\frac{j}{n+1} E_{i(j-1)} = 0 \text{ si } j = 0 \text{ et } \frac{n+1-j}{n+1} E_{ij} = 0 \text{ si } j = n + 1 .$$

Ces résultats seront utilisés dans notre travail , dans les chapitres 3 et 5 , pour ramener les réseaux massiques de contrôle de deux surfaces  $S_l$  et  $S_r$  aux mêmes dimensions  $m$  et  $n$  .

## 5 Surfaces (SBP) triangulaires

### 5.1 Notations

De nombreux auteurs ont étudié les surfaces polynomiales définies sur des triangles ( [8] , [55] , [46] , [47] , [19] , [25] , [26] , [23] ) .

Dans [34] , (p 144), Fiorot et Jeannin définissent les surfaces triangulaires (*SBR*) et les principaux résultats sont indiqués ici.

Le plan des paramètres  $\mathcal{P}$  est rapporté à un repère barycentrique  $(a, b, c)$  et l'espace  $\mathcal{E}$  , supposé de dimension 3 , est rapporté au repère cartésien  $(\Omega_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les coordonnées barycentriques du point courant de  $\mathcal{P}$  sont notées  $u, v, w$  avec la relation  $u + v + w = 1$ . Les coordonnées du point courant de  $\mathcal{E}$  sont notées  $x, y, z$ .

On notera  $\Delta_n$  le "maillage simplicial" donné par :

$$\Delta_n = \{(i, j, k) \mid (i, j, k) \in \mathbb{N}^3; i + j + k = n\}$$

cf la figure 2

## 5.2 Résultat de base.

Dans [34] , page 154 et 155 , le résultat fondamental qui suit est établi.

### Proposition 5.2.1 :

*Soit  $S$  une application polynomiale de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{E}$  , de degré  $n$ .*

*Alors il existe un réseau de points de  $\mathcal{E}$  , soit  $E = \{E_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n\}$  tels que :*

$$\forall (u, v, w) \mid u + v + w = 1 , S(u, v, w) = \sum_{(i, j, k) \in \Delta_n} B_{ijk}^n(u, v, w) E_{ijk}$$

$$\text{avec } B_{ijk}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$$

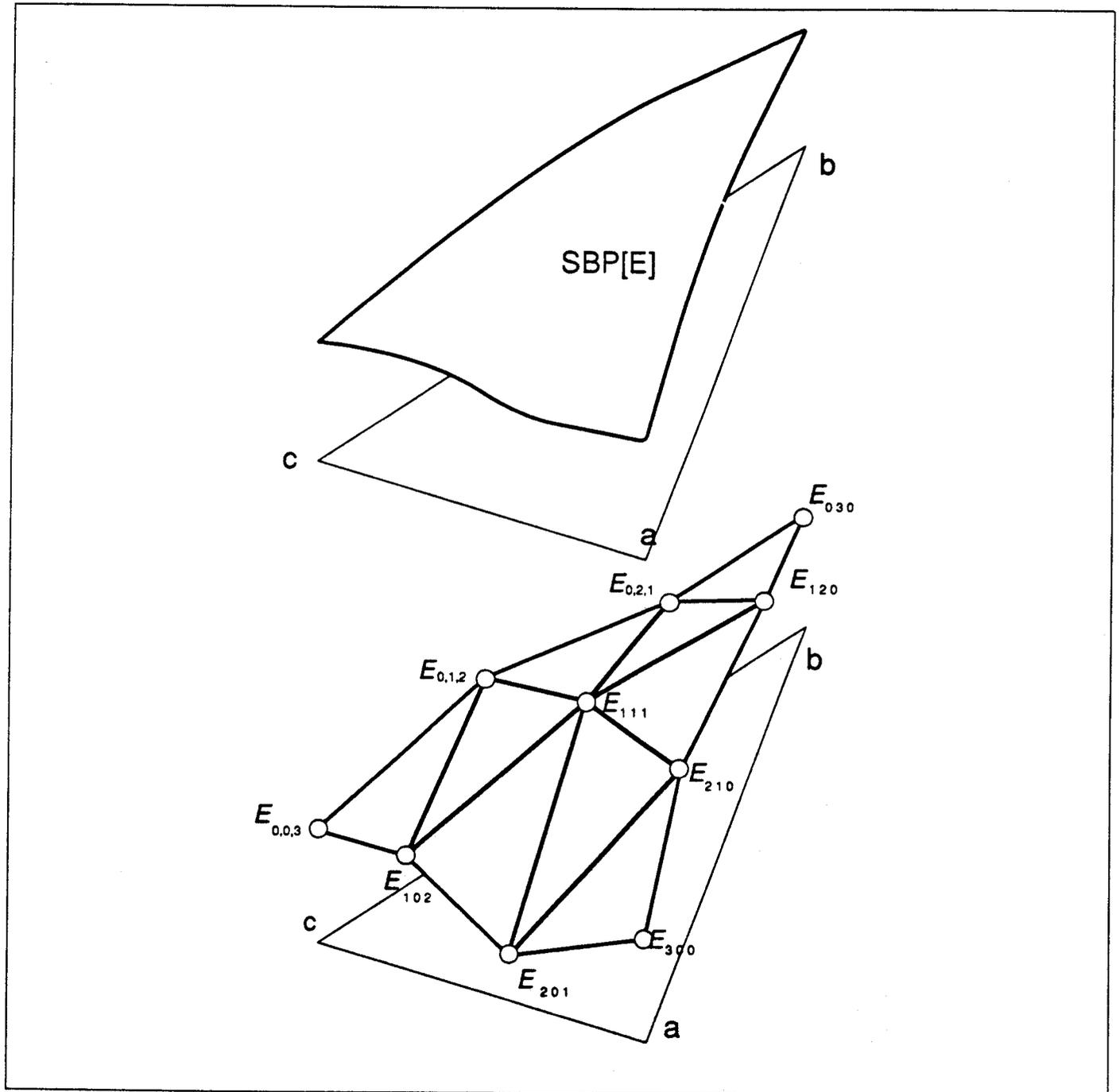
La pratique de l'obtention des  $E_{ijk}$  associés à la surface  $S$  , application polynomiale quelconque de  $\mathcal{P}$  dans  $\mathcal{E}$  est détaillée dans [34] page 155.

## 5.3 Remarque.

Les polynômes  $\{B_{ijk}^n, (i, j, k) \in \Delta_n\}$  , constituent une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré  $n$  en  $(u, v, w)$  .

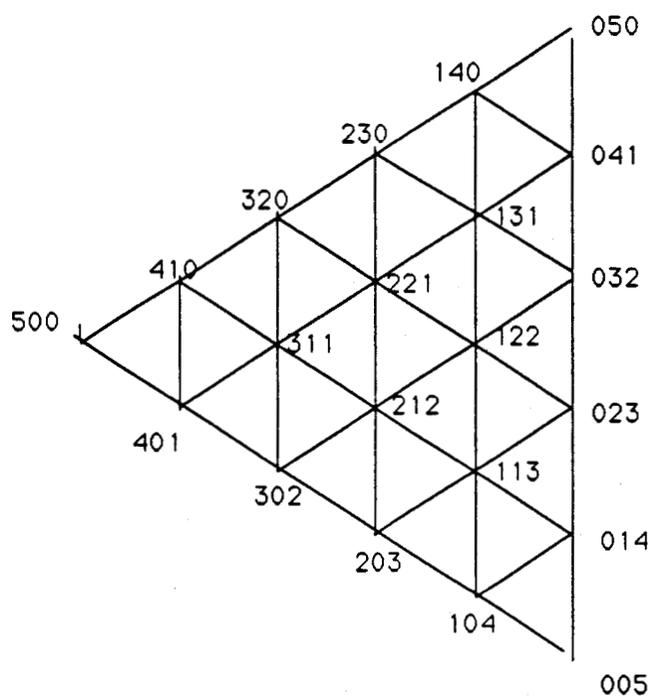
La dimension de cet espace est  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

Chapitre 1 - figure 2



Surface triangulaire (SBP) de hauteur 3.

Chapitre 1 - figure 2



Le maillage simplicial associé à  $n = 5$

## 5.4 Définition d'une surface (*SBP*) triangulaire de hauteur $n$ .

**Définition 5.4.1 :**

$E$  désigne le réseau de points de  $\mathcal{E}$ ,  $\{E_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n\}$ .

Alors la surface (*SBP*), triangulaire de hauteur  $n$ , contrôlée par  $E$  est décrite par le point :

$$S(u, v, w) = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_n} B_{ijk}^n(u, v, w) E_{ijk}$$

$$\forall (u, v, w) \mid u + v + w = 1.$$

$S$  est notée  $SBP[E]$ .

$$SBP[E, \mathcal{D}] = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_n} B_{ijk}^n E_{ijk}$$

désigne la restriction de cette surface au domaine  $\mathcal{D}$  du plan des paramètres.

## 5.5 Triangle (*SBP*) de hauteur $n$ .

Lorsque les coordonnées barycentriques  $(u, v, w)$  (telles que  $u + v + w = 1$ ) vérifient en plus  $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$ , le domaine des paramètres est limité au triangle  $(abc)$  dans  $\mathcal{P}$  et le point  $SBP[E](u, v, w)$  décrit une partie de la surface  $SBP[E]$  qui sera appelée triangle (*SBP*) contrôlé par  $E$ . Cette surface triangulaire est contenue dans l'enveloppe convexe des points de contrôle. Dans le chapitre 5 l'étude du raccordement  $G^2$  entre deux tels triangles sera présentée.

## 5.6 Elévation de la hauteur.

### 5.6.1 Résultat de base.

Une surface (*SBP*) triangulaire de hauteur  $n$  peut être représentée comme une surface (*SBP*) triangulaire de hauteur  $(n + 1)$  et le lien entre les deux réseaux de contrôle est donné par la

**Proposition 5.6.1 :**

Soit  $S = SBP[E]$  avec  $E = \{E_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n\}$  ( $E \subset \mathcal{E}$ ).

Alors  $S = SBP[D]$  où le nouveau réseau de contrôle, de hauteur  $(n + 1)$ ,  
 $D = \{D_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_{n+1}\}$  ( $D \subset \mathcal{E}$ ).  
 est déduit du réseau  $E$  par les relations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (i, j, k) \in \Delta_{n+1} \\ D_{ijk} = \frac{i}{n+1} E_{(i-1)jk} + \frac{j}{n+1} E_{i(j-1)k} + \frac{k}{n+1} E_{ij(k-1)} \\ \text{avec la convention :} \\ \frac{i}{n+1} E_{(i-1)jk} = 0 \text{ si } i = 0 \\ \frac{j}{n+1} E_{i(j-1)k} = 0 \text{ si } j = 0 \\ \frac{k}{n+1} E_{ij(k-1)} = 0 \text{ si } k = 0 \end{array} \right.$$

**Preuve :** Il suffit d'écrire :

$$S(u, v, w) = (u + v + w) \sum_{(i,j,k) \in \Delta_n} B_{ijk}^n(u, v, w) E_{ijk}$$

car  $u + v + w = 1$ .

En utilisant les trois résultats qui suivent la proposition est immédiatement obtenue par des changements d'indices:

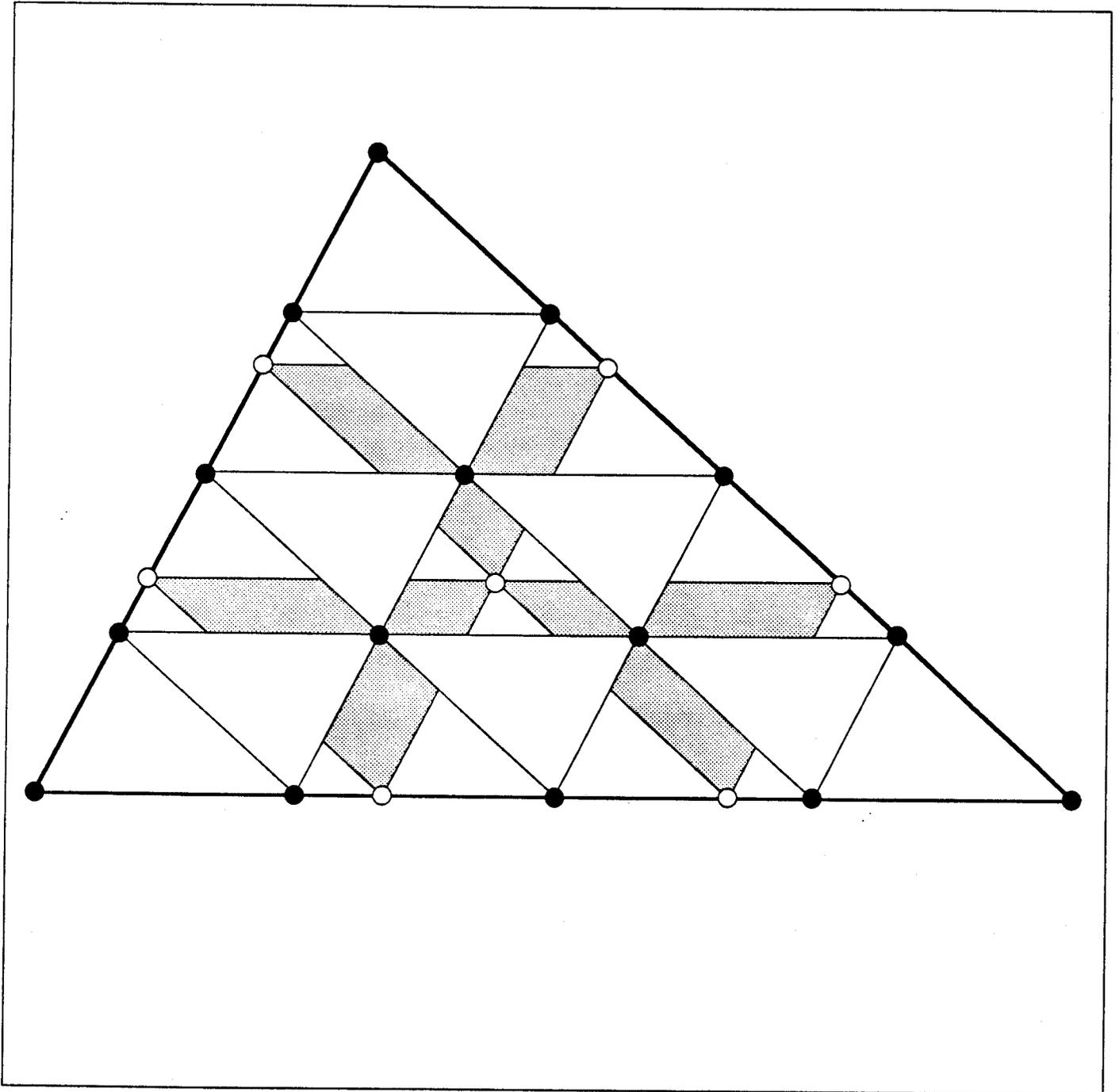
$$u B_{ijk}^n(u, v, w) = \frac{i+1}{n+1} B_{(i+1)jk}^{n+1}(u, v, w)$$

$$v B_{ijk}^n(u, v, w) = \frac{j+1}{n+1} B_{i(j+1)k}^{n+1}(u, v, w)$$

$$w B_{ijk}^n(u, v, w) = \frac{k+1}{n+1} B_{ij(k+1)}^{n+1}(u, v, w)$$

cf la figure 3

Chapitre 1 : Figure 3:



Elévation de hauteur.

28 bis

Cette proposition sera utilisée dans le chapitre 5 , pour ramener à une même hauteur deux triangles (*SBR*) que l'on désire raccorder  $G^2$ .

### 5.6.2 Notation.

La notation suivante a été introduite dans [16] .

Le nouveau réseau  $D$  obtenu à partir du réseau  $E$  par une élévation de hauteur est noté:

$$D = (E \rightarrow 1), \text{ et par conséquent,}$$

$$D_{ijk} = (E \rightarrow 1)_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_{n+1}.$$

De même ,  $(E \rightarrow 2)_{ijk} = (D \rightarrow 1)_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_{n+2}$  définit un nouveau réseau  $(E \rightarrow 2)$  , de hauteur  $(n + 2)$ , contrôlant la surface  $S$  qui s'exprime alors comme une (*SBP*) de hauteur  $(n + 2)$ .

Et , pout tout entier positif ,  $p$  , on peut exprimer la surface  $S$  comme une (*SBP*) de hauteur  $(n + p)$  , contrôlée par le réseau de points :

$$(E \rightarrow p) = \{(E \rightarrow p)_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_{n+p}\}.$$

Ce réseau se construit en appliquant  $p$  fois la proposition précédente.

## 5.7 Algorithme de De Casteljaou

La relation de récurrence :

$$B_{ijk}^n(u, v, w) = uB_{(i-1)jk}^{n-1}(u, v, w) + vB_{i(j-1)k}^{n-1}(u, v, w) + wB_{ij(k-1)}^{n-1}(u, v, w)$$

permet d' établir l'algorithme suivant( [18] , [9] , [26] , [55]):

**Proposition 5.7.1** *Algorithme de De Casteljaou ([34] page 158 ):*

*Initialisation:*

*Pour*  $(i, j, k) \in \Delta_n$  ,  $E_{ijk}^0 \leftarrow E_{ijk}$

*Calcul:*

*Pour*  $l = 1$  à  $n$

*Pour*  $i = 0$  à  $n - l$

*Pour*  $j = 0$  à  $n - l - i$  faire :

$k \leftarrow n - l - i - j$  ;

$$E_{ijk}^l \leftarrow u.E_{(i+1)jk}^{l-1} + v.E_{i(j+1)k}^{l-1} + w.E_{ij(k+1)}^{l-1} ;$$

Résultat:

$$SPB[E](u, v, w) = E_{000}^n$$

Le plan passant par  $E_{100}^{n-1}, E_{010}^{n-1}, E_{001}^{n-1}$  est le plan tangent.

cf la figure 4

## 5.8 Dérivées d'une surface (SBP) triangulaire.

Toutes les techniques de dérivation seront détaillées dans le chapitre 5. Ici, seuls quelques résultats fondamentaux sont donnés.

### 5.8.1 Calcul des dérivées

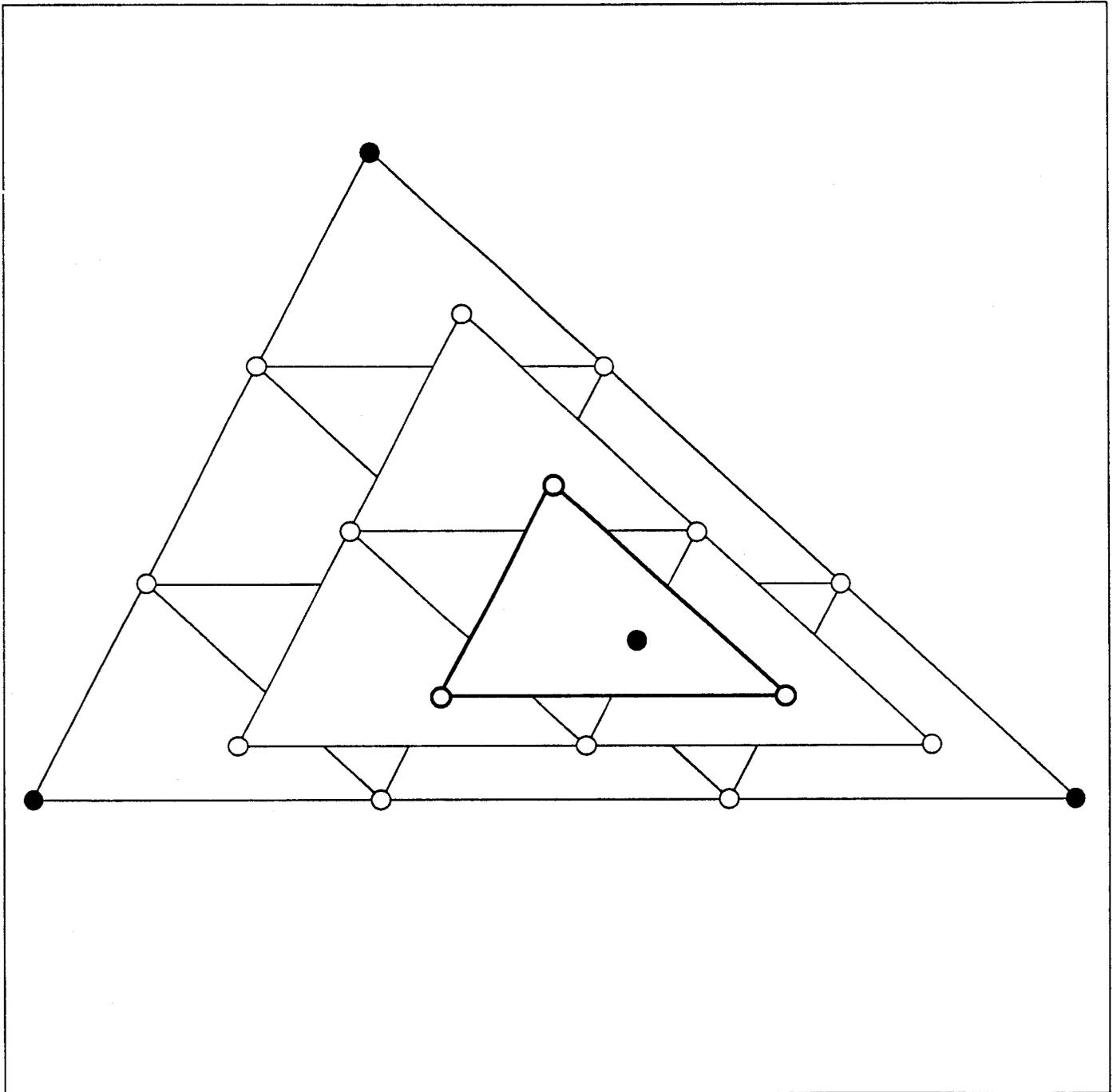
$$S(u, v, w) = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_n} B_{ijk}^n(u, v, w) E_{ijk}$$

$$\frac{\partial S}{\partial u}(u, v, w) = \sum_{\substack{(i,j,k) \in \Delta_n \\ i \geq 1}} \frac{n!}{(i-1)!j!k!} u^{i-1} v^j w^k E_{ijk}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u^2}(u, v, w) = \sum_{\substack{(i,j,k) \in \Delta_n \\ i \geq 2}} \frac{n!}{(i-2)!j!k!} u^{i-2} v^j w^k E_{ijk}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}(u, v, w) = \sum_{\substack{(i,j,k) \in \Delta_n \\ i \geq 1, j \geq 1}} \frac{n!}{(i-1)!(j-1)!k!} u^{i-1} v^{j-1} w^k E_{ijk}$$

Chapitre 1 -Figure 4



Algorithme de De Casteljau.

### 5.8.2 Valeurs des dérivées sur le bord ( $u = 0$ ).

En particulier, sur le bord du triangle ( $SBP$ ) associé à  $u = 0$ , en observant qu'alors  $v + w = 1$  :

$$S(0, v, w) = BP[E_{0j(n-j)}, 0 \leq j \leq n; [0, 1]](v)$$

$$\frac{\partial S}{\partial u}(0, v, w) = n \sum_{(1,j,k) \in \Delta_n} \binom{n-1}{j} v^j w^k E_{1jk}$$

$$\frac{\partial S}{\partial u}(0, v, w) = nBP[E_{1j(n-j-1)}, 0 \leq j \leq n-1; [0, 1]](v)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u^2}(0, v, w) = n(n-1) \sum_{(2,j,k) \in \Delta_n} \binom{n-2}{j} v^j w^k E_{2jk}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u^2}(0, v, w) = n(n-1)BP[E_{2j(n-j-2)}, 0 \leq j \leq n-2; [0, 1]](v)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u \cdot \partial v}(0, v, w) = n(n-1) \sum_{(2,j,k) \in \Delta_n} \binom{n-2}{j} v^j w^k E_{1(j+1)k}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u \cdot \partial v}(0, v, w) = n(n-1)BP[E_{1(j+1)(n-j-2)}, 0 \leq j \leq n-2; [0, 1]](v)$$

Et des formules analogues s'obtiennent en permutant les trois coordonnées  $u, v, w$  et les trois indices  $i, j, k$ .

## 6 Surface (*SBR*) triangulaire.

Des techniques analogues à celles du cas rectangulaire conduisent à la définition des surfaces (*SBR*) triangulaires ([34] ,6.3.1.2, page 163)

Soit un entier  $n$  , un repère  $(a, b, c)$  du plan des paramètres  $\mathcal{P}$  est donné ainsi qu' un réseau  $r$  de  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  vecteurs massiques de  $\hat{\mathcal{E}}$  , soit ,

$$r = \{r_{ijk} , (i, j, k) \in \Delta_n\}.$$

**Définition 6.0.1 :**

*La surface B-rationnelle associée au réseau massique triangulaire  $r$  et définie sur le domaine  $\mathcal{D}$  du plan  $\mathcal{P}$  est définie par:*

$$R(u, v, w) = \Pi(SBP[r, \mathcal{D}](u, v, w)) , (u, v, w) \in \mathcal{D}$$

où

$$SBP[r, \mathcal{D}](u, v, w) = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_n} B_{ijk}^n(u, v, w) * r_{ijk}$$

représente la surface de Bézier de  $\hat{\mathcal{E}}$  contrôlée par le réseau  $r$ .

Cette surface B-rationnelle est notée  $R = SBR[r, \mathcal{D}]$  et dite triangulaire de hauteur  $n$ .

La proposition suivante découle immédiatement des définitions de la section 1-1:

On note  $\chi(r_{ijk}) = \rho_{ijk}$  et  $\hat{\Omega}(r_{ijk}) = \overline{\Omega} \mathcal{R}_{ijk}$

**Proposition 6.0.1 :**

En posant  $\rho(u, v, w) = SBP[\rho_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}](u, v, w)$

et  $\mathcal{R}(u, v, w) = SBP[\mathcal{R}_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}](u, v, w)$

*La définition*

$$SBR[r, \mathcal{D}] = \Pi\Omega(SBP[\mathcal{R}_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}])$$

de la surface  $SBR[r, \mathcal{D}]$  , entraîne :

$$\forall(u, v, w) \mid \rho(u, v, w) \neq 0, \overline{\Omega R}(u, v, w) = \rho(u, v, w) \cdot \overline{\Omega R}(u, v, w)$$

$$\forall(u, v, w) \mid \rho(u, v, w) = 0, \overline{\Omega R}(u, v, w) = \sum_{(i, j, k) \in \Delta_n} B_{ijk}^n(u, v, w)_{ijk} \overline{\Omega R}_{ijk}$$

$$\forall(u, v, w) \mid \rho(u, v, w) = 0, \begin{cases} \overline{\Omega R}(u, v, w) \in \tilde{\mathcal{E}} \\ R(u, v, w) = (\overline{\Omega R}(u, v, w))_{\infty} \text{ lorsque } \overline{\Omega R}(u, v, w) \neq \vec{0} \end{cases}$$

Cette proposition permet de calculer les dérivées en tout point à distance finie d'une ( $SBR$ ), à partir des résultats précédemment vus pour les surfaces triangulaires ( $SBP$ ).

## 6.1 Valeur en un point de $\mathcal{E}$ de la $SBR[r; \mathcal{D}]$

Fiorot et Jeannin donnent ([34] , 6.3.1.5 , page 165) la forme explicite de  $R(u, v, w)$  par la :

### Proposition 6.1.1 :

Soit  $r = \{r_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n\}$  le réseau massique de la ( $SBR$ )

En posant:

$$I = \{(i, j, k) : r_{ijk} \text{ est un point pondéré}\}$$

$$\bar{I} = \{(i, j, k) : r_{ijk} \text{ est un vecteur "pur" de } \tilde{\mathcal{E}}\}$$

$$r_{ijk} = (R_{ijk}, \rho_{ijk}), (R_{ijk}, \rho_{ijk}) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}^* \text{ pour } (i, j, k) \in I$$

$$r_{ijk} = r_{ijk}, r_{ijk} \in \tilde{\mathcal{E}} \text{ pour } (i, j, k) \in \bar{I}$$

et

$$\rho(u, v, w) = \sum_{(i, j, k) \in I} \rho_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w)$$

la formulation explicite de  $R(u, v, w)$  est donnée par les expressions ci-dessous

Si  $\rho(u, v, w) \neq 0$  alors

$$R(u, v, w) = \frac{1}{\rho(u, v, w)} \left[ \sum_{(i,j,k) \in I} \rho_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w) R_{ijk} + \sum_{(i,j,k) \in I} B_{ijk}^n(u, v, w) r_{ijk} \right]$$

si  $\rho(u, v, w) = 0$  et

$$\text{Si } \vec{R} = \sum_{(i,j,k) \in I} \rho_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w) \vec{R}_{ijk} + \sum_{(i,j,k) \in I} B_{ijk}^n(u, v, w) r_{ijk} \neq \vec{0}$$

$$\text{alors } R(u, v, w) = (\vec{R})_\infty$$

De plus  $\rho(u, v, w)$  est la masse de  $SBP[r, \mathcal{D}](u, v, w)$ .

## 6.2 Triangle ( $SBR$ ) de hauteur $n$ et de réseau massique $r$

Lorsque les coordonnées barycentriques  $(u, v, w)$  (telles que  $u + v + w = 1$ ) vérifient en plus  $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$ , le point  $SBR[r, \mathcal{D}](u, v, w)$  décrit une portion de la surface  $SBR[r]$  qui sera appelée triangle ( $SBR$ ) de réseau massique  $r$ . Dans le chapitre 5, le raccordement  $G^2$  entre deux tels triangles sera étudié.

# DEUXIEME CHAPITRE

## Aspects projectifs du raccordement $G^2$ entre deux surfaces.

1. Les définitions géométriques fondamentales.	page 36
1.1 Le raccord géométrique $G^2$ .	page 37
1.2 Autre définition.	page 39
2. Conditions analytiques	page 39
2.1 Notations.	page 40
2.2 Raccord $G^0$ .	page 40
2.3 Raccord $G^1$ .	page 41
2.4 Raccord $G^2$ .	page 43
3. Application au cas où L et R sont $\Pi\Omega$ - projetées de fonctions définies dans $\mathcal{F}$ .	page 49
3.1 Notations et hypothèses.	page 49
3.2 Raccord $G^0$ entre $S_l$ et $S_r$ .	page 51
3.3 Raccord $G^1$ entre $S_l$ et $S_r$ .	page 51
Théorème de raccord $G^1$	page 52
3.3 Raccord $G^2$ entre $S_l$ et $S_r$ .	page 55
Théorème de raccord $G^2$	page 56
4. Conclusion	page 61
4.1 Conclusion	page 61
4.2 Une remarque concernant la reparamétrisation	page 61

# Aspects projectifs du Raccordement $G^2$ entre deux surfaces

Dans ce chapitre, les définitions des raccords  $G^1$  et  $G^2$  sont posées. Pour deux surfaces de  $\mathcal{E}$  définies comme  $\Pi\Omega$  - projetées de "surfaces de  $\mathcal{F}$ ", deux théorèmes sont établis :

- l'un donnant une condition nécessaire est suffisante de raccord  $G^1$ ,
- l'autre donnant une condition nécessaire et suffisante de raccord  $G^2$ .

## 1 Les définitions géométriques fondamentales.

$\mathcal{E}$  désigne l'espace affine associé à  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $\Delta$  un domaine plan polygonal fermé et  $S$  une surface régulière définie par une paramétrisation  $F$  de classe  $\mathcal{C}^k, k \geq 2$ .

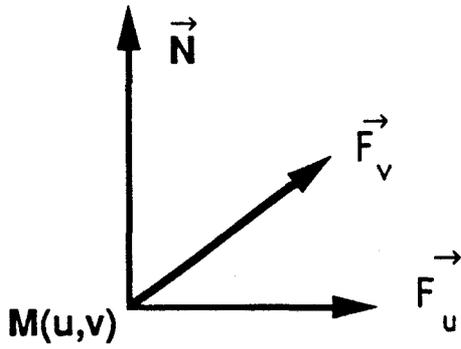
$$F : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto F(u, v)$$

Le plan tangent  $\Pi_P(S)$  à la surface  $S$  au point  $P = F(u, v)$ , est entièrement déterminé par le point  $P$  et le vecteur normal unitaire :

$$\vec{N}(u, v) = \frac{F_u(u, v) \wedge F_v(u, v)}{\|F_u(u, v) \wedge F_v(u, v)\|}$$

Le vecteur  $\vec{N}(u, v)$  sera noté  $N(P)$ . Son support est une droite indépendante de la paramétrisation choisie pour représenter la surface  $S$ . Un changement de paramétrisation de la surface  $S$  peut maintenir le vecteur normal unitaire ou le transformer en son opposé: des précautions d'orientation sont nécessaires. (cf la figure 1)

Chapitre 2- figure 1

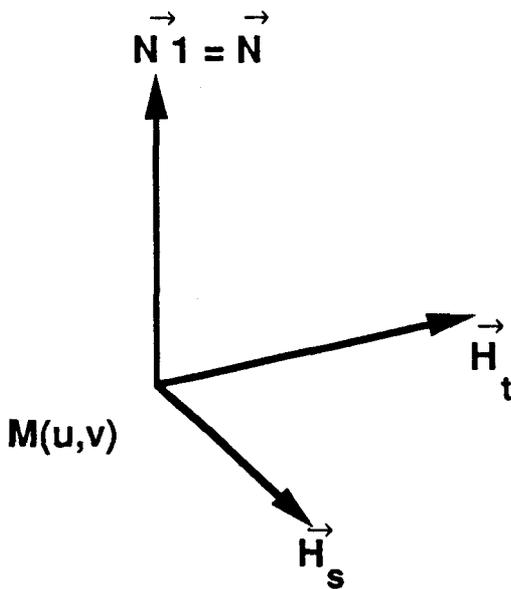


Trièdre direct

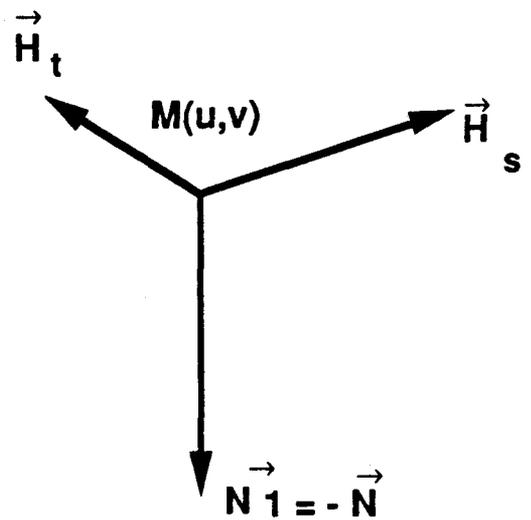
Un changement de paramètres  
donne  $F(u,v) = H(s,t)$

$\vec{N}$  est le vecteur normal unitaire associé au premier paramétrage  $F(u,v)$

$\vec{N}_1$  est le vecteur normal unitaire associé au second paramétrage  $H(s,t)$



Le vecteur normal unitaire est maintenu



Le vecteur normal unitaire est changé en son opposé

Effet d'un changement de paramètres sur le vecteur normal unitaire

Les définitions de départ de ce chapitre se fondent sur l'application de Gauss de la surface  $S$  ([24]). L'application de Gauss de la surface  $S$  associée au point  $P$  le vecteur normal unitaire  $N(P)$ . C'est une application de  $S$  vers la sphère unité  $\Sigma$ , dont la différentielle au point  $P$ , peut être considérée comme une application de  $\Pi_P(S)$  vers  $\Pi_P(S)$ .

$$dN(P) : \Pi_P(S) \longrightarrow \Pi_P(S)$$

Nous rappelons que  $dN(P)$  est une application linéaire et autoadjointe ([24]). De plus, les valeurs propres de  $dN(P)$  sont les courbures principales de  $S$  en  $P$  et les vecteurs propres de  $dN(P)$ , orthogonaux, sont les directions principales de courbure de  $S$  en  $P$  : ces éléments sont aussi des notions géométriques indépendantes de la paramétrisation choisie pour représenter la surface  $S$ .

La valeur de l'application de Gauss de  $S$  au point  $P$  et celle de sa différentielle  $dN(P)$  jouent un rôle majeur dans la définition ci-dessous de la continuité  $G^2$ .

### 1.1 Le raccord géométrique $G^2$ .

Soit  $S_l$  et  $S_r$ , deux surfaces régulières de l'espace  $\mathcal{E}$  données par des paramétrisations de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$  sur les domaines polygonaux fermés du plan des  $(u, v)$   $\Delta_l$  et  $\Delta_r$ .

$$L : \begin{array}{l} \Delta_l \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto L(u, v) \end{array}$$

Le vecteur normal associé à cette paramétrisation est alors :

$$\vec{N}^l(u, v) = \frac{L_u(u, v) \wedge L_v(u, v)}{\|L_u(u, v) \wedge L_v(u, v)\|}$$

$$\text{et } R : \begin{array}{l} \Delta_r \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto R(u, v) \end{array}$$

Le vecteur normal associé à cette paramétrisation est alors :

$$\vec{N}^r(u, v) = \frac{R_u(u, v) \wedge R_v(u, v)}{\|R_u(u, v) \wedge R_v(u, v)\|}$$

De Rose ([22]), Farin ([27]), Gregory ([40], [41]), Hahn ([42]) et Peters ([52]) ont, entre autres, donné des définitions de la continuité géométrique entre deux surfaces et les relations (1), (2) ci-dessous sont courantes.

**Définition 1.1.1 : La continuité  $G^2$**

Soit une paramétrisation régulière d'un côté  $\Upsilon_r$  de  $\Delta_r$ :

$$\Theta_r : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Alors  $S_l$  et  $S_r$  se raccordent avec la continuité  $G^2$  le long de  $\Gamma = R(\Upsilon_r)$  si :

(i) il existe une paramétrisation régulière d'un côté  $\Upsilon_l$  de  $\Delta_l$ :

$$\Theta_l : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

telle que la relation suivante de continuité  $G^0$  soit vérifiée:

$$\forall s \in [0, 1] , L(\Theta_l(s)) = R(\Theta_r(s)) \quad (1)$$

Sous cette condition, la courbe frontière  $\Gamma$  est aussi donnée par  $\Gamma = L(\Upsilon_l)$

(ii) La relation suivante de continuité  $G^1$ , avec maintien de l'orientation, est vérifiée :

$$\forall s \in [0, 1] , N^l[L(\Theta_l(s))] = \epsilon N^r[R(\Theta_r(s))] \quad (2)$$

$N^l$  et  $N^r$  désignant les champs respectifs de vecteurs normaux unitaires sur  $S_l$  et  $S_r$ .

(iii) La relation suivante de continuité  $G^2$  est vérifiée :

$$\forall s \in [0, 1] , dN^l[L(\Theta_l(s))] = \epsilon dN^r[R(\Theta_r(s))] \quad (3)$$

le réel  $\epsilon$  étant égal à 1 (respectivement égal à  $(-1)$ ), lorsque l'orientation induite sur la frontière de  $\Delta_l$  par la paramétrisation  $\Theta_l$  du côté  $\Upsilon_l$  et celle induite sur la frontière de  $\Delta_r$  par la paramétrisation  $\Theta_r$  du côté  $\Upsilon_r$  sont opposées (respectivement identiques).

Cette précaution d'orientation est destinée à éviter que la courbe frontière  $\Gamma$  ne soit une arête vive de la surface composite formée par la réunion de  $S_l$  et  $S_r$ .

cf les figures 2,3,4

## 1.2 Remarque : autre définition.

Gregory ([41]) donne une définition pour  $G^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , faisant intervenir un reparamétrage  $\varphi : V(\Upsilon_r) \rightarrow \mathbb{R}^2$  où  $V(\Upsilon_r)$  désigne un voisinage de  $\Upsilon_r$ .

La  $G^k$ -continuité est alors donnée par :

### Définition 1.2.1 :

Les deux surfaces  $S_l$  et  $S_r$  se raccordent avec la continuité géométrique  $G^k$  le long de  $\Gamma = R(\Upsilon_r)$ , s'il existe un voisinage  $V(\Upsilon_r)$  de  $\Upsilon_r$ , un ouvert  $V_1$  de  $\mathbb{R}^2$  et un difféomorphisme de classe  $C^k$ ,  $\varphi : V(\Upsilon_r) \rightarrow V_1$  tel que :

(i)  $\varphi \circ \Theta_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un paramétrage d'un côté de  $\Delta_l$  (et en outre,  $\varphi$  envoie les points extérieurs de  $\Delta_r$  à l'intérieur de  $\Delta_l$ ).

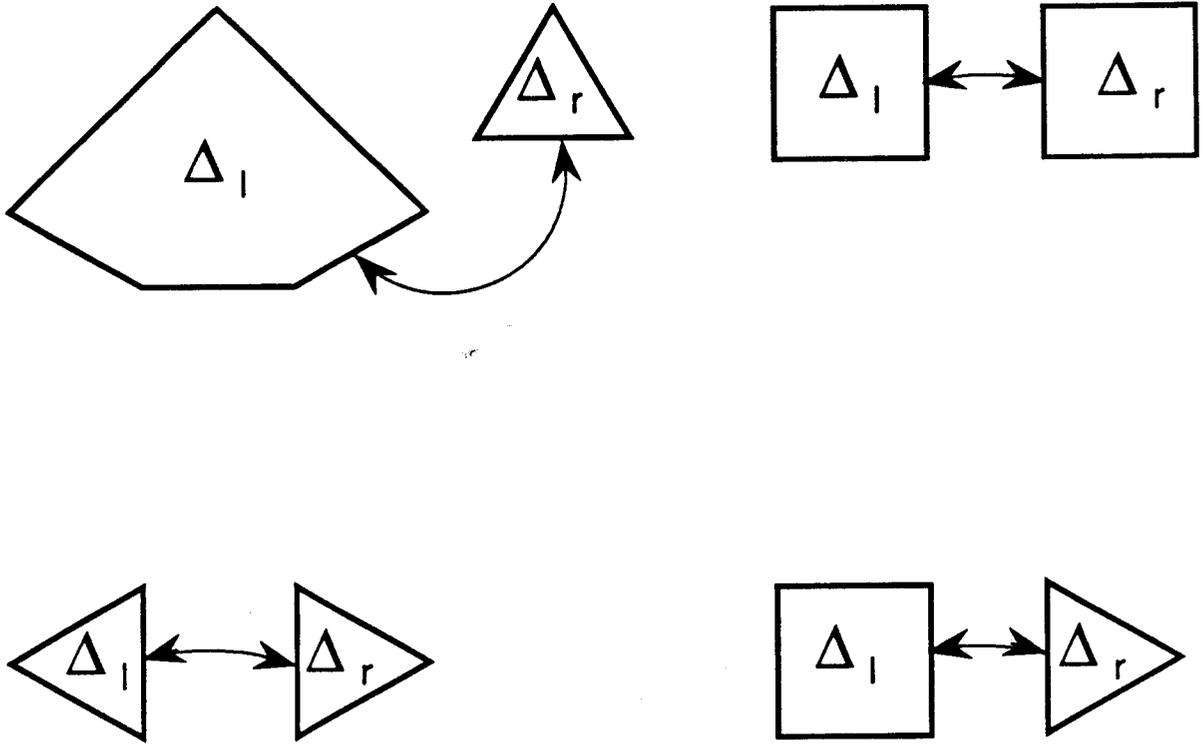
(ii)  $\forall i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $\forall s \in [0, 1]$ ,  $\partial^i R(\Theta_r(s)) = \partial^i (L \circ \varphi)(\Theta_r(s))$

Dans toute la suite c'est la définition 1.1 qui est adoptée. Dans ([20]) et ([42]), des résultats similaires à ceux de ce travail sont obtenus à partir de la définition 1-2. De plus M.L. Mazure ([51]) a traité le problème du contact géométrique d'ordre  $p$  entre deux surfaces en un point.

## 2 Conditions analytiques pour un certain choix des fonctions $\Theta_r$ et $\Theta_l$ .

Un choix très simple des fonctions  $\Theta_r$  et  $\Theta_l$  conduit aux formulations analytiques qui seront utilisées dans la suite du travail.

Chapitre 2 - figure 2

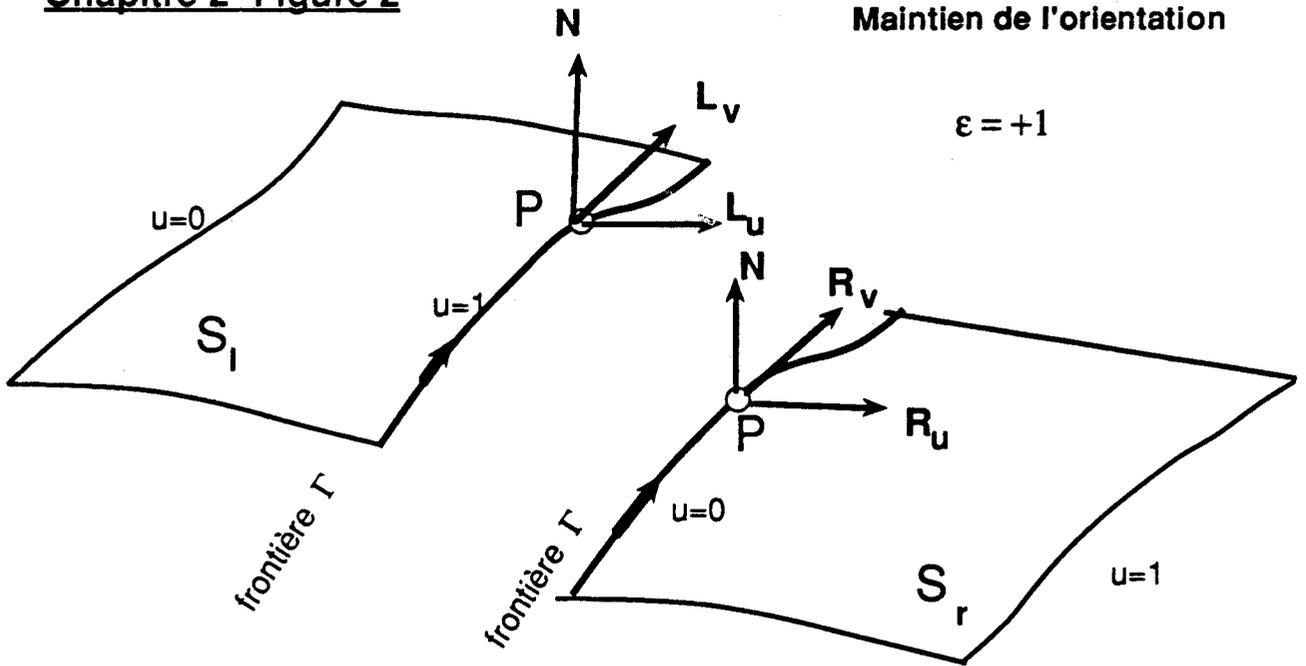


Domaines polygonaux des paramètres  
dans le plan (u,v).

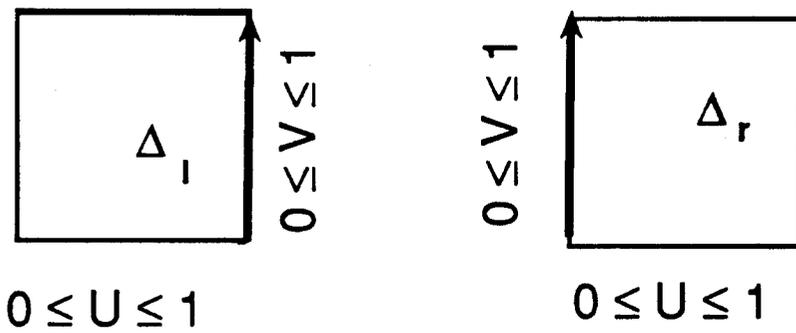
**Chapitre 2- Figure 2**

Maintien de l'orientation

$\epsilon = +1$



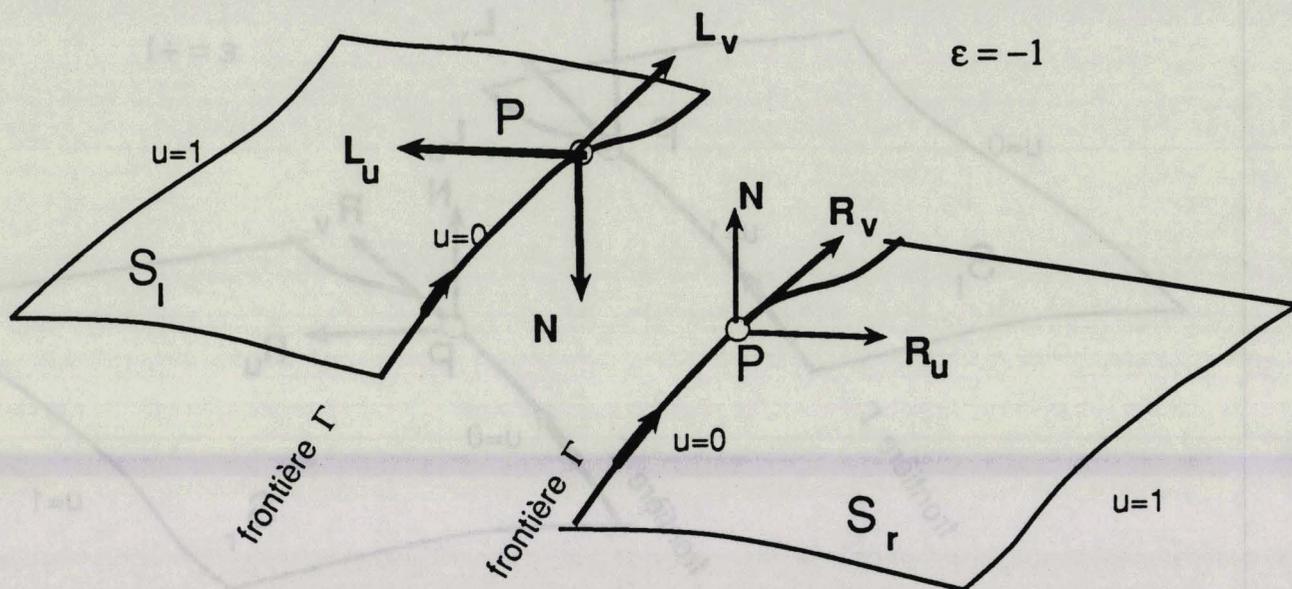
Domaines des paramètres



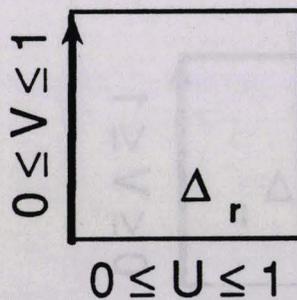
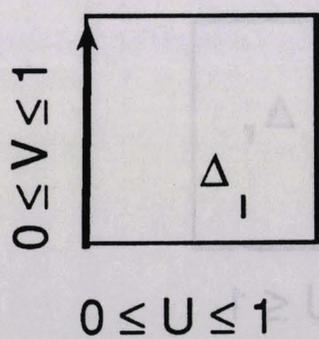
Raccord  $G^2$  entre deux surfaces.

Chapitre 2 - figure 3

Changement de l'orientation



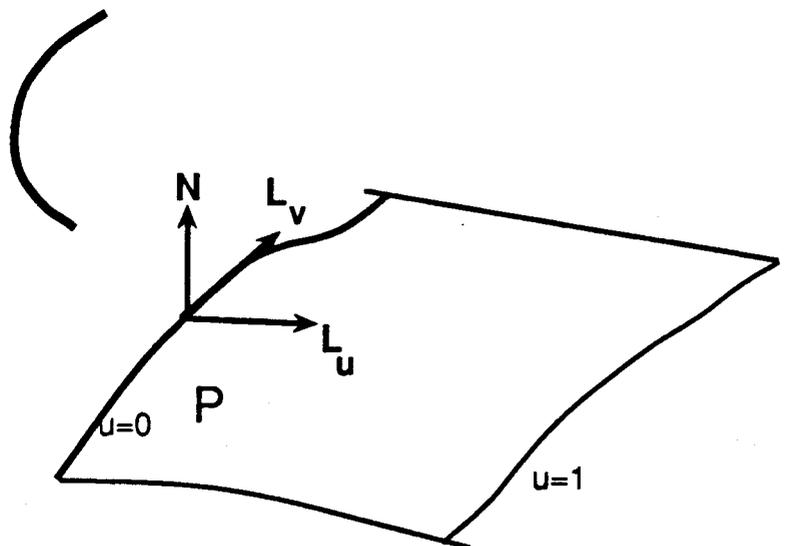
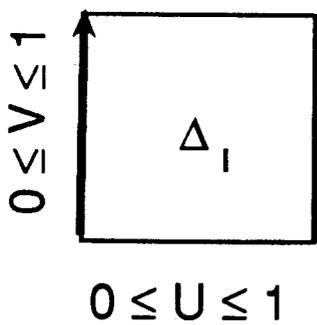
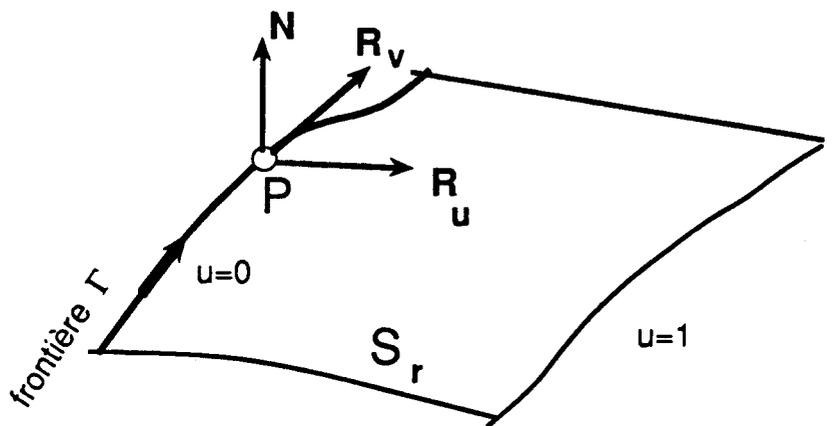
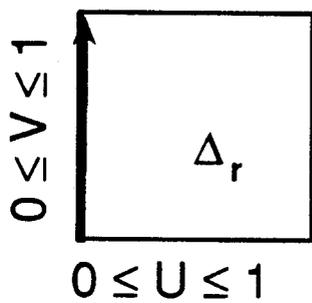
Domaines des paramètres



Raccord  $G^2$  entre deux surfaces.

Chapitre 2 - figure 4

Faire coïncider les vecteurs normaux donne une arête vive.

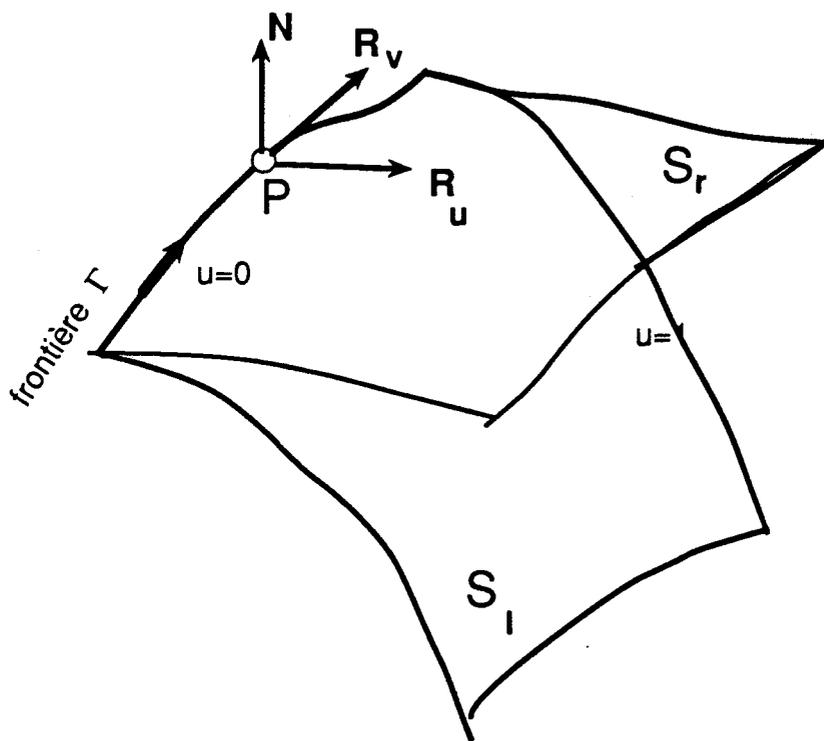
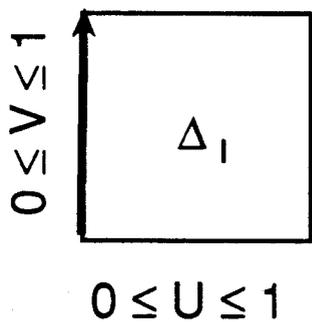
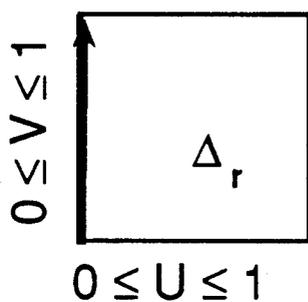


Domaines des paramètres

Raccord  $G^2$  entre deux surfaces.

Chapitre 2 - figure 4

Faire coïncider les vecteurs normaux donne une arête vive.



Domaines des paramètres

Raccord  $G^2$  entre deux surfaces.

## 2.1 Notations

Dans le plan des paramètres , contenant  $\Delta_l$  et  $\Delta_r$ , un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est choisi de sorte que :

$\Upsilon_l = \{(u_0, v), 0 \leq v \leq 1\}$  et  $\Upsilon_r = \{(0, v), 0 \leq v \leq 1\}$ .  $u_0$  étant un réel fixé.

En d'autres termes ,  $\Theta_r(s) = (0, s)$  et  $\Theta_l(s) = (u_0, s)$  : les deux côtés  $\Upsilon_l$  et  $\Upsilon_r$  sont verticaux dans le plan des paramètres  $(u, v)$ . Cette situation n'est pas la plus générale , mais elle suffit pour notre étude du raccordement  $G^i$  ,  $i \in \{0, 1, 2\}$  entre surfaces  $(SBR)$  rectangulaires ou triangulaires .

cf la figure 5

Cela explique la convention simple suivante qui va faciliter les écritures: lorsque les arguments ne sont pas explicitement indiqués , nous prenons  $(0, v)$  pour la fonction  $R$  ainsi que ses dérivées et nous prenons  $(u_0, v)$  pour la fonction  $L$  ainsi que ses dérivées. Le réel  $\epsilon$  est déterminé dans  $\{-1, 1\}$  par la définition 1.1.1 .

## 2.2 Raccord $G^0$

### 2.2.1 Condition de raccord $G^0$

**Proposition 2.2.1 :**

*La condition géométrique (1) est réalisée si :*

$$\forall v \in [0, 1] , L(u_0, v) = R(0, v) \quad (4)$$

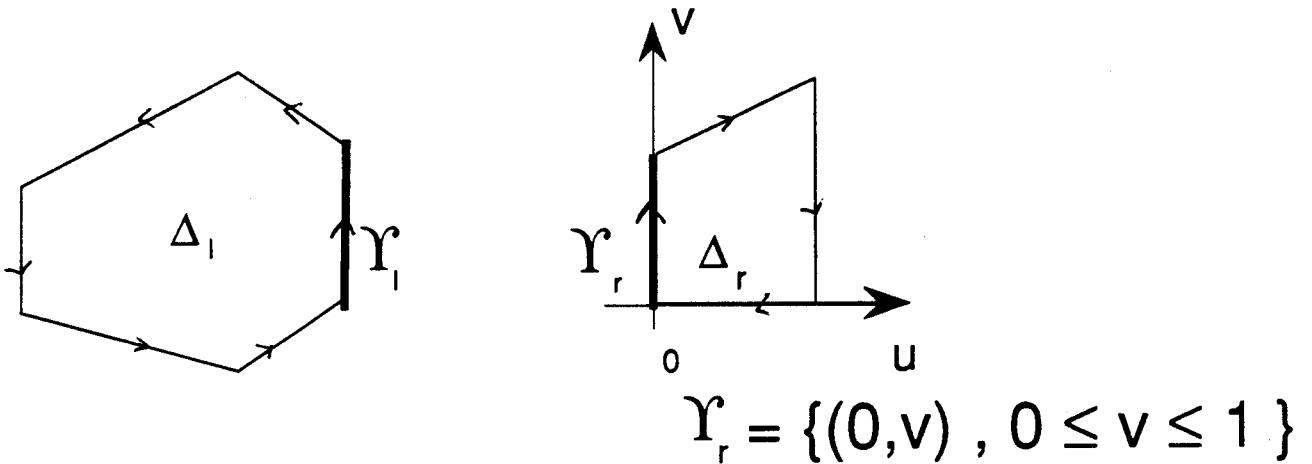
Le bord commun  $\Gamma$  est alors paramétré par la fonction  $C$  de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}^3$  définie par :

$$\forall v \in [0, 1] , C(v) = L(u_0, v)$$

### 2.2.2 Condition plus générale de raccord $G^0$

La condition (4) est déjà très particulière. Comme l'ont signalé ([20]) et ([49]), une formulation plus générale du raccord  $G^0$  s'écrit :

Chapitre 2 - figure 5



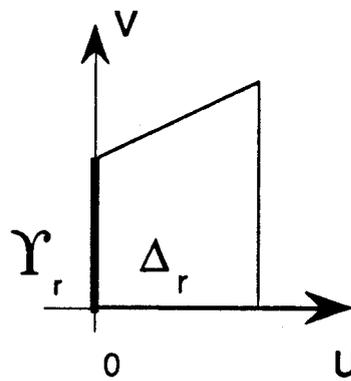
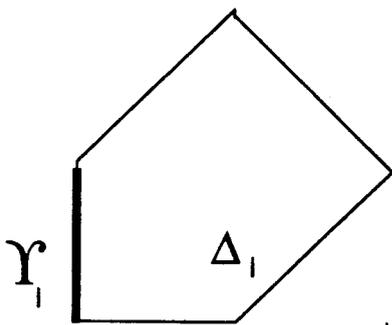
$$\gamma_l = \{ (u_0, v) , 0 \leq v \leq 1 \}$$

$$\varepsilon = +1$$

car les bords des deux domaines ont des orientations opposées.

Situation de l'étude.

Chapitre 2 \_figure 5



$$\Gamma_r = \{ (0, v) , 0 \leq v \leq 1 \}$$

$$\Gamma_l = \{ (u_0, v) , 0 \leq v \leq 1 \}$$

$$\varepsilon = -1$$

car les bords des deux domaines ont des orientations identiques

Situation de l'étude.

$\exists \eta : [0, 1] \longrightarrow [0, 1], \text{ bijection}$

vérifiant  $\eta(0) = 0, \eta(1) = 1$  (5)

telle que  $\forall v \in [0, 1], L(u_0, v) = R(0, \eta(v))$

Pour raccorder des surfaces polynomiales entre elles,  $\eta$  est une fonction polynomiale, et si elle est du premier degré, c'est forcément l'identité ([20]).

Pour raccorder des surfaces rationnelles entre elles,  $\eta$  est une fonction rationnelle, par exemple ([49])

$$\eta(v) = \frac{\alpha v}{v + \alpha - 1}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha(\alpha - 1) > 0.$$

Un exemple du chapitre 4 illustrera ce paragraphe.

## 2.3 Raccord $G^1$

**Proposition 2.3.1** *Sous l'hypothèse que la condition (4) est réalisée, la relation (2), définissant le raccord  $G^1$  équivaut à l'existence de deux fonctions réelles arbitraires de classe  $C^1$ :*

$$a : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^*,$$

et  $b : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  telles que:

$$\forall v \in [0, 1], \epsilon a(v) > 0$$

$$\forall v \in [0, 1], R_u(0, v) = a(v)L_u(u_0, v) + b(v)L_v(u_0, v) \quad (6)$$

**Preuve:**

- La condition (4) entraîne une première relation entre les dérivées partielles de  $L$  et de  $R$  sur  $\Upsilon_I$ :

$$\forall v \in [0, 1], R_v(0, v) = L_v(u_0, v)$$

- Condition nécessaire: La condition (2) est supposée vérifiée.

Le plan tangent à  $S_l$  au point régulier  $P = C(v)$  est engendré par  $L_u(u_0, v)$  et  $L_v(u_0, v)$ . La relation (2) signifie que c'est aussi le plan tangent en  $P$  à  $S_r$ , dont le vecteur particulier  $R_u(0, v)$  est, par conséquent, combinaison linéaire de  $L_u(u_0, v)$  et  $L_v(u_0, v)$ .

Donc il existe bien deux fonctions  $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

et  $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\forall v \in [0, 1], R_u(0, v) = a(v)L_u(u_0, v) + b(v)L_v(u_0, v)$$

En outre la condition (2) impose de préserver l'orientation du vecteur normal unitaire:

$$\epsilon \frac{R_u(0, v) \wedge R_v(0, v)}{\|R_u(0, v) \wedge R_v(0, v)\|} = \frac{L_u(u_0, v) \wedge L_v(u_0, v)}{\|L_u(u_0, v) \wedge L_v(u_0, v)\|}$$

Donc  $\epsilon a(v) > 0$ .

( $a(v)$  est différent de 0 à cause de la régularité de  $S_r$  et  $\epsilon a(v) > 0$  pour maintenir l'orientation.) En outre les fonctions  $a$  et  $b$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  pour que  $R_u(0, v)$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$  (les paramétrisations  $L$  et  $R$  ont été supposées de classe  $\mathcal{C}^2$ ).

- La condition suffisante se prouve immédiatement en reprenant la définition du vecteur normal unitaire.

### 2.3.1 Remarque

Une notation matricielle, faisant intervenir toutes les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions  $L$  et  $R$ , traduit les conditions analytiques du raccord  $G^1$  établies plus haut :

sous l'hypothèse que la condition (4) est réalisée, la relation (2), définissant le raccord  $G^1$  équivaut à l'existence de deux fonctions réelles arbitraires de classe  $\mathcal{C}^1$  :

$$a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^*$$

$$\text{et } b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ telles que:}$$

$\forall v \in [0, 1]$  ,  $\epsilon a(v) > 0$  et

$$\begin{bmatrix} R_u(0, v) \\ R_v(0, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(v) & b(v) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_u(u_0, v) \\ L_v(u_0, v) \end{bmatrix}$$

### 2.3.2

Farin ([25], [27]) a donné la condition nécessaire et suffisante de raccord  $G^1$ :

$$\det(L_u(u_0, v), L_v(u_0, v), R_u(0, v)) = 0$$

qui est utilisée par de nombreux auteurs([23], [49], [59]). Cette condition ne cherche pas à maintenir l'orientation du plan tangent.

## 2.4 Raccord $G^2$

### 2.4.1 Condition de raccord $G^2$

**Proposition 2.4.1 :**

*Les conditions (4) de raccord  $G^0$  et (6) de raccord  $G^1$  étant réalisées, la relation (3) de raccord  $G^2$  équivaut à l'existence de deux fonctions arbitraires de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ ,*

*$e_1^*$  et  $f_1^*$ , de classe  $C^0$  telles que:*

$$\forall v \in [0, 1] ,$$

$$R_{uu}(0, v) - a^2(v)L_{uu}(u_0, v) - 2a(v)b(v)L_{uv}(u_0, v) - b^2(v)L_{vv}(u_0, v) \quad (7)$$

$$= e_1^*(v)L_u(u_0, v) + f_1^*(v)L_v(u_0, v)$$

**Preuve :**

Dans le repère local  $\{L_u(u_0, v), L_v(u_0, v)\}$  , la différentielle de l'application de Gauss de  $S_i$  au point  $P = C(v)$  est représentée par la matrice :

$$M_l = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}, \text{ appelée Matrice de Weingarten ( [24], [21], [58] )}$$

avec:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2} ; & g_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ g_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2} ; & g_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{aligned} \quad (8)$$

expressions dans lesquelles  $E, F$  et  $G$ , coefficients de la première forme fondamentale de  $S_l$  au point  $P$  dans le repère  $\{L_u(u_0, v), L_v(u_0, v)\}$  sont donnés par:

$$E = \langle L_u, L_u \rangle \text{ (Produit scalaire);}$$

$$F = \langle L_v, L_u \rangle;$$

$$G = \langle L_v, L_v \rangle$$

Les coefficients  $e, f$ , et  $g$  sont ceux de la seconde forme fondamentale de  $S_l$  au point  $P$  dans le repère  $\{L_u(u_0, v), L_v(u_0, v)\}$ ; ils sont donnés par:

$$e = \langle N^l, L_{uu} \rangle ;$$

$$f = \langle N^l, L_{uv} \rangle$$

$$g = \langle N^l, L_{vv} \rangle$$

Le vecteur normal et toutes les dérivées partielles qui apparaissent dans ces formules sont pris au point  $P$ .

De la même façon, dans le repère local  $\{R_u(0, v), R_v(0, v)\}$  la différentielle de l'application de Gauss de  $S_r$  au point  $P = C(v)$  est représentée par la matrice

$$M_r = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix},$$

avec:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{f^*F^* - e^*G^*}{E^*G^* - (F^*)^2} ; & d_{12} &= \frac{g^*F^* - f^*G^*}{E^*G^* - (F^*)^2} \\ d_{21} &= \frac{e^*F^* - f^*E^*}{E^*G^* - (F^*)^2} ; & d_{22} &= \frac{f^*F^* - g^*E^*}{E^*G^* - (F^*)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

expressions dans lesquelles  $E^*, F^*$  et  $G^*$ , coefficients de la première forme fondamentale de  $S_r$  au point  $P$  dans le repère  $\{R_u(0, v), R_v(0, v)\}$  sont donnés par:

$$\begin{aligned}
E^* &= \langle R_u, R_u \rangle \text{ (Produit scalaire);} \\
F^* &= \langle R_v, R_u \rangle; \\
G^* &= \langle R_v, R_v \rangle
\end{aligned}$$

Les coefficients  $e^*$ ,  $f^*$ , et  $g^*$  sont ceux de la seconde forme fondamentale de  $S_r$  au point  $P$  dans le repère  $\{R_u(0, v), R_v(0, v)\}$ ; ils sont donnés par:

$$\begin{aligned}
e^* &= \langle N^r, R_{uu} \rangle; \\
f^* &= \langle N^r, R_{uv} \rangle \\
g^* &= \langle N^r, R_{vv} \rangle
\end{aligned}$$

Or la condition (6) traduite en notation matricielle :

$$\begin{bmatrix} R_u(0, v) \\ R_v(0, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(v) & b(v) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_u(u_0, v) \\ L_v(u_0, v) \end{bmatrix}$$

équivalente à :  $N^l = \epsilon N^r$ , donne la matrice de passage entre les deux repères locaux  $\{L_u(u_0, v), L_v(u_0, v)\}$  et  $\{R_u(0, v), R_v(0, v)\}$  au point  $P$ , soit :

$$\begin{bmatrix} a(v) & 0 \\ b(v) & 1 \end{bmatrix}$$

Tous les éléments sont en place pour traduire la condition (3) de raccord  $G^2$ , signifiant que les matrices  $M_l$  et  $\epsilon M_r$  sont semblables :

$$\epsilon M_r = \begin{bmatrix} a(v) & 0 \\ b(v) & 1 \end{bmatrix}^{-1} M_l \begin{bmatrix} a(v) & 0 \\ b(v) & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Après calculs on obtient l'expression suivante pour la matrice  $\epsilon a(v)M_r$  :

$$\begin{bmatrix} a(v)g_{11} + b(v)g_{12} & g_{12} \\ -a(v)b(v)g_{11} + a^2(v)g_{21} - b^2(v)g_{12} + a(v)b(v)g_{22} & -b(v)g_{12} + a(v)g_{22} \end{bmatrix}$$

La condition (10) équivaut alors aux relations (11), (12), (13) et (14) ci-dessous.

$$\epsilon a(v)d_{11} = a(v)g_{11} + b(v)g_{12} \quad (11)$$

$$\epsilon a(v)d_{12} = g_{12} \quad (12)$$

$$\epsilon a(v)d_{21} = -a(v)b(v)g_{11} + a^2(v)g_{21} - b^2(v)g_{12} + a(v)b(v)g_{22} \quad (13)$$

$$\epsilon a(v)d_{22} = -b(v)g_{12} + a(v)g_{22} \quad (14)$$

De plus, les conditions (4) et (6), supposées satisfaites, donnent :

$$E^* = a^2 E + 2abF + b^2 G$$

$$F^* = aF + bG$$

$$G^* = G$$

$$\text{et donc } E^*G^* - (F^*)^2 = a^2(EG - F^2)$$

En posant  $N = N^l$ , vecteur normal unitaire à  $S_l$  au point  $P = C(v)$ , et en utilisant  $N = \epsilon N^r$ ,  $N^r$  étant le vecteur normal unitaire à  $S_r$  au point  $P = C(v)$ , il vient:

$$g^* = \epsilon g \text{ car } \langle N, R_{vv} \rangle = \langle N, L_{vv} \rangle$$

(la relation  $R_{vv}(0, v) = L_{vv}(u_0, v)$  découle de (4) )

$$f^* = \epsilon(a(v)f + b(v)g)$$

$$\text{car } \langle N, R_{uv}(0, v) \rangle = a(v) \langle N, L_{uv}(u_0, v) \rangle + b(v) \langle N, L_{vv}(u_0, v) \rangle$$

(la relation  $R_{uv}(0, v) = a(v)L_{uv}(u_0, v) + b(v)L_{vv}(u_0, v) + a'(v)L_u(u_0, v) + b'(v)L_v(u_0, v)$  découle de (6) et, en outre,

$$\langle N, L_u \rangle = \langle N, L_v \rangle = 0)$$

Alors les relations (12) et (14) découlent de (4) et (6), et, par conséquent (4), (6), (11) et (13) constituent une CNS de raccord  $G^2$  entre les deux surfaces  $S_l$  et  $S_r$  au point  $P = C(v)$ .

### Traitement des égalités (11) et (13)

- Après multiplication des deux membres par  $a^2[EG - F^2]$ , l'égalité (11) devient :  $\epsilon(f^*F^* - e^*G^*) = a^2(fF - eG) + ab(gF - fG)$

ou encore, en tenant compte des formes obtenues ci-dessus pour  $f^*$ ,  $F^*$  et  $G^*$ :  $\epsilon^2(af + bg)(aF + bG) - \epsilon e^*G = a^2(fF - eG) + ab(gF - fG)$

soit , comme  $\epsilon^2 = 1$  ,  $(\epsilon e^* - a^2 e - 2abf - b^2 g)G = 0$

Or  $G = \langle L_v , L_v \rangle$  est différent de zéro car le point  $P = C(v)$  est supposé être un point régulier de la surface  $S_l$ .

Donc l'égalité (11) équivaut à  $(\epsilon e^* - a^2 e - 2abf - b^2 g) = 0$ .

- En ce qui concerne l'égalité (13), une multiplication des deux membres par  $a^2[EG - F^2]$  amène:

$$\epsilon(e^* F^* - f^* E^*) = -a^2 b(fF - eG) + a^3(eF - fE) - ab^2(gF - fG) + a^2 b(fF - gE)$$

ou encore, en tenant compte des formes obtenues ci-dessus pour  $f^*$  ,  $F^*$  et  $G^*$ :

$$\begin{aligned} & \epsilon e^*(aF + bG) - \epsilon^2(a f + b g)(a^2 E + 2abF + b^2 G) \\ & = -a^2 b(fF - eG) + a^3(eF - fE) - ab^2(gF - fG) + a^2 b(fF - gE). \end{aligned}$$

ce qui conduit à :  $(\epsilon e^* - a^2 e - 2abf - b^2 g)(aF + bG) = 0$

- Donc vérifier les deux égalités (11) et (13) équivaut à :

$$(\epsilon e^* - a^2 e - 2abf - b^2 g) = 0$$

Cette condition s'écrit aussi :

$$\forall v \in [0, 1] , \epsilon e^* = a^2(v)e + 2a(v)b(v)f + b^2(v)g$$

et signifie :

$$\langle N, R_{uu} - a^2(v)L_{uu} - 2a(v)b(v)L_{uv} - b^2(v)L_{vv} \rangle = 0$$

relation équivalente à (7) car le plan tangent  $\Pi_P$  au point  $P$  en  $S_l$  et  $S_r$  est engendré par les vecteurs  $L_u(u_0, v)$  et  $L_v(u_0, v)$ . De plus comme  $L$  et  $R$  sont deux paramétrisations de classe  $C^2$ , les fonctions  $e_1^*$  et  $f_1^*$  sont continues.

### 2.4.2 Notation matricielle

Sous l'hypothèse que les conditions (4) et (6) sont réalisées, la relation (3), définissant le raccord  $G^2$ , équivaut à l'existence de deux fonctions  $e_1^*$  et  $f_1^*$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  continues telles que

$$\forall v \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} R_{uu}(0, v) \\ R_{uv}(0, v) \\ R_{vv}(0, v) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a^2(v) & 2a(v)b(v) & b^2(v) \\ 0 & a(v) & b(v) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{uu}(u_0, v) \\ L_{uv}(u_0, v) \\ L_{vv}(u_0, v) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} e_1^*(v) & f_1^*(v) \\ a'(v) & b'(v) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_u(u_0, v) \\ L_v(u_0, v) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

### 2.4.3 Cas particulier

Si  $\epsilon = 1$ ,  $a = 1$  et  $b = 0$  on trouve  $e^* = e$  c'est à dire

$$R_{uu}(0, v) - L_{uu}(u_0, v) \in \Pi_P$$

Dans ces conditions, demander le raccord  $C^2$  entre les surfaces  $S_l$  et  $S_r$  est une condition plus forte que de demander le raccord  $C^1$  et la vérification de (7).

### 2.4.4 Condition plus symétrique

La relation (7) est certes intéressante lorsque, dans une démarche de C.A.O., on veut construire la surface  $S_r$  à partir de la surface  $S_l$ , en cherchant à réaliser un raccord  $G^2$ . Cependant, dans une étude purement géométrique, les surfaces  $S_l$  et  $S_r$  jouent le même rôle.

En fait, une formulation plus symétrique, équivalente, peut être obtenue ([20]). En effet (6) entraîne :

$$\forall v \in [0, 1],$$

$$R_{uv}(0, v) = a(v)L_{uv}(u_0, v) + b(v)L_{vv}(u_0, v) + a'(v)L_u(u_0, v) + b'(v)L_v(u_0, v)$$

Le terme  $b^2(v)L_{vv}(u_0, v)$  peut être remplacé dans (7), par :

$b^2(v)L_{vv}(u_0, v) = b(v)R_{uv}(0, v) - a(v)b(v)L_{uv}(u_0, v) - a'(v)b(v)L_u(u_0, v) - b'(v)b(v)L_v(u_0, v)$   
 d'où le résultat :

**Proposition 2.4.2 :**

*La relation (6) étant réalisée, la condition (7) équivaut à l'existence de deux fonctions continues arbitraires,*

$e_2^* : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $f_2^* : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\begin{aligned}
 \forall v \in [0, 1] , \\
 R_{uu}(0, v) - a^2(v)L_{uu}(u_0, v) - a(v)b(v)L_{uv}(u_0, v) - b(v)R_{uv}(0, v) & \quad (16) \\
 = e_2^*(v)L_u(u_0, v) + f_2^*(v)L_v(u_0, v)
 \end{aligned}$$

### 3 Application au cas où $L$ et $R$ sont des $\Pi\Omega$ -projetées de fonctions définies dans $\mathcal{F}$ .

#### 3.1 Notations et hypothèses .

Ici,  $\mathcal{E}$  désigne l'espace affine associé à  $\mathbb{R}^3$ .

Ce paragraphe étudie, de façon très générale, le raccordement entre deux surfaces  $S_l$  et  $S_r$ , définies comme  $\Pi\Omega$ -projetées de "surfaces de  $\mathcal{F}$ ".

Les deux surfaces  $S_l$  et  $S_r$ , supposées **régulières**, sont données par des paramétrisations  $L$  et  $R$  projetées par  $\Pi\Omega$  de fonctions  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$ , supposées de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 2$ .

$$\mathcal{L} : \Delta_l \longrightarrow \mathcal{F}$$

$$(u, v) \mapsto \mathcal{L}(u, v)$$

et

$$\mathcal{R} : \Delta_r \longrightarrow \mathcal{F}$$

$$(u, v) \mapsto \mathcal{R}(u, v)$$

Cette situation se produit, en particulier, lorsque  $L$  et  $R$  sont des paramétrages de surfaces ( $SBR$ ). Dans ce cas  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$  sont des fonctions polynomiales.

$\mathcal{R}_1 = (\Omega_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  désigne un repère de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{\Omega}_1)$  le repère "au-dessus" dans  $\vec{\mathcal{F}}$  ([34]).

Les notations sont reprises du chapitre 1.

On pose  $l(u, v) = \hat{\Omega}^{-1}(\mathcal{L}(u, v))$  et  $r(u, v) = \hat{\Omega}^{-1}(\mathcal{R}(u, v))$ .

La convention adoptée au chapitre 1 (section 1-2) donne:

$$\begin{aligned} \Pi(l(u, v)) &= L(u, v); \quad \chi(l(u, v)) = \lambda(u, v); \quad \hat{\Omega}(l(u, v)) = \vec{\Omega}\mathcal{L}(u, v) \\ \Pi(r(u, v)) &= R(u, v); \quad \chi(r(u, v)) = \rho(u, v); \quad \hat{\Omega}(r(u, v)) = \vec{\Omega}\mathcal{R}(u, v) \end{aligned}$$

### 3.1.1 Hypothèses .

Le raccordement est étudié en des **points à distance finie**, ce qui amène à poser les hypothèses suivantes :

$$\forall v \in [0, 1], \mathcal{L}(u_0, v) \neq \Omega \text{ et } \Pi\Omega(\mathcal{L}(u_0, v)) \in \mathcal{E}$$

et

$$\forall v \in [0, 1], \mathcal{R}(0, v) \neq \Omega \text{ et } \Pi\Omega(\mathcal{R}(0, v)) \in \mathcal{E}$$

Alors, sous ces hypothèses :

$$\forall v \in [0, 1], \lambda(u_0, v) \neq 0$$

$$\forall v \in [0, 1], \rho(0, v) \neq 0$$

### 3.1.2 Rappel des formules de dérivation

Le rappel porte sur le calcul des dérivées d'une fonction  $A : [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ , définie comme  $\Pi\Omega$ -projetée d'une fonction de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$

$$\mathcal{A} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}$$

et s'étend facilement au calcul des dérivées partielles en  $(u_0, v)$  de la fonction  $L$  et en  $(0, v)$  de la fonction  $R$ .

$$\left. \begin{array}{l} a : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathcal{E}} \\ u \mapsto a(v) \end{array} \right\} \text{ est une application de } [0, 1] \text{ dans } \hat{\mathcal{E}} \text{ et}$$

$$\left. \begin{array}{l} A : [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathcal{E}} \\ u \mapsto A(v) \end{array} \right\} \text{ sa } \Pi \text{-projetée.}$$

Alors en désignant par  $\alpha(u)$  la masse de  $a(u)$ , et en supposant  $\alpha(u) \neq 0$

$$\hat{\Omega}(a(u)) = \alpha(u) \cdot \vec{\Omega}A(u) \text{ ou encore, avec nos conventions de notation :}$$

$$\hat{\Omega}(a(u)) = \vec{\Omega}A(u)$$

$\left. \begin{array}{l} \mathcal{A}: [0, 1] \longrightarrow \mathcal{F} \\ u \mapsto \mathcal{A}(u) \end{array} \right\}$  étant une application de  $[0, 1]$  dans  $\mathcal{F}$ .

$\alpha$  et  $\mathcal{A}$  étant supposées de classe  $C^k$ ,  $k \geq 2$ , les dérivées de  $\mathcal{A}$  sont liées à celles de  $\alpha$  et de  $\mathcal{A}$  par:

$$\alpha^2(u)\mathcal{A}'(u) = (\alpha(u)\mathcal{A}'(u) - \alpha'(u)\mathcal{A}(u))$$

$$\alpha^2(u)\mathcal{A}''(u) = (\alpha(u)\mathcal{A}''(u) - \alpha''(u)\mathcal{A}(u)) - 2\frac{\alpha'(u)}{\alpha(u)}(\alpha(u)\mathcal{A}'(u) - \alpha'(u)\mathcal{A}(u))$$

### 3.2 Raccord $G^0$ entre $S_l$ et $S_r$ .

#### 3.2.1 Condition nécessaire et suffisante.

**Proposition 3.2.1 :**

*La condition (4) équivaut à*

$$\forall v \in [0, 1] \quad , \quad \Pi\Omega(\mathcal{L}(u_0, v)) = \Pi\Omega(\mathcal{R}(0, v)) \quad (17)$$

La courbe  $\Gamma$ , frontière commune entre  $S_l$  et  $S_r$  est alors paramétrée par  $C(v) = \Pi\Omega(\mathcal{L}(u_0, v))$ .

En général,  $\mathcal{L}(u_0, v) \neq \mathcal{R}(0, v)$

cf la figure 6

#### 3.2.2 Remarque

Dans de nombreux papiers ([49]) le raccord  $G^0$  est traduit par la condition suffisante :

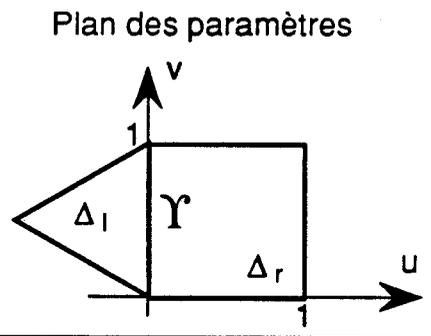
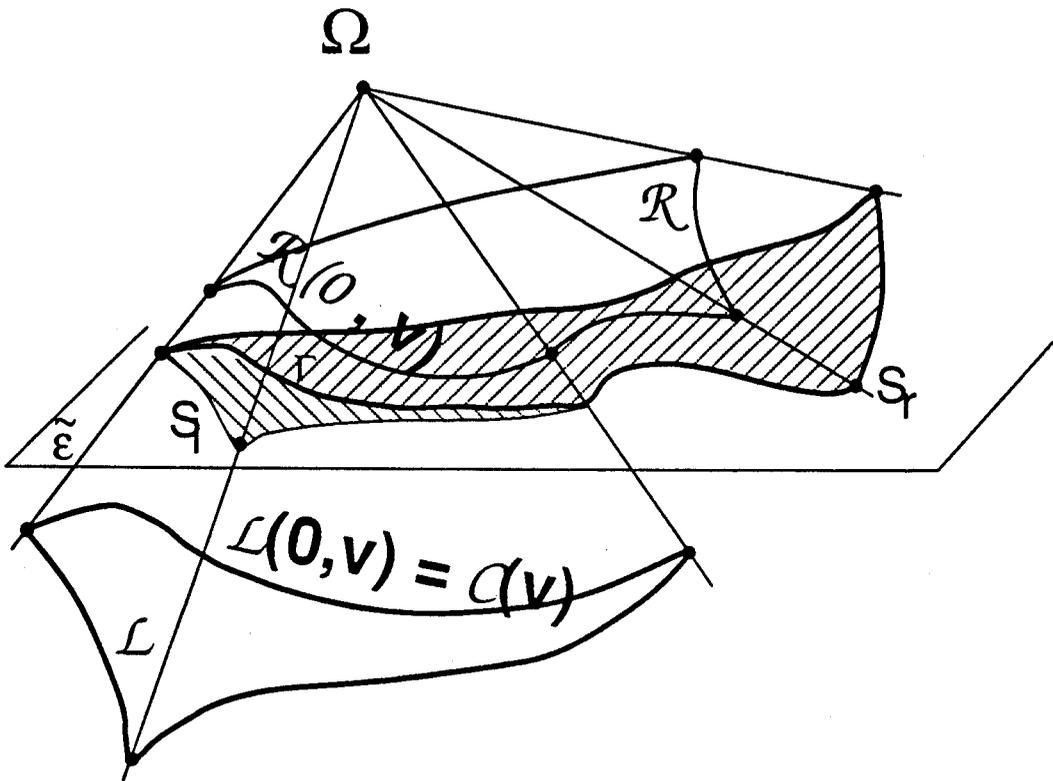
$$\forall v \in [0, 1] \quad , \quad \mathcal{L}(u_0, v) = \mathcal{R}(0, v) \quad (18)$$

qui est plus restrictive que (17).

### 3.3 Raccord $G^1$ entre $S_l$ et $S_r$ le long de $\Gamma$

Les conditions (4) et (6) traduisent le raccord  $G^1$  entre  $S_l$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma$ . Une condition équivalente portant sur les paramétrisations  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$  va maintenant être établie:

Chapitre 2 - Figure 6



Raccordement de deux surfaces

$\Pi\Omega$  - Projetées.

### **Théorème 3.3.1 :**

*Sous l'hypothèse que la relation (17) est vérifiée, il y a équivalence entre la condition (6) et l'existence de quatre fonctions de classe  $C^1$ ,  $f_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant:*

$$\begin{aligned} \forall v \in [0, 1], \\ \epsilon \lambda(u_0, v) \rho(0, v) f_2(v) f_1(v) < 0 \text{ et} \end{aligned} \quad (19)$$

$$f_1(v) \mathcal{R}_u(0, v) + f_2(v) \mathcal{L}_u(u_0, v) + f_3(v) \mathcal{L}_v(u_0, v) + f_4(v) \mathcal{L}(u_0, v) = 0$$

#### **3.3.1 Condition nécessaire**

Les formules de dérivation présentées dans la section 3-1 donnent:

$$\lambda^2(u_0, v) L_u(u_0, v) = \lambda(u_0, v) \mathcal{L}_u(u_0, v) - \lambda_u(u_0, v) \mathcal{L}(u_0, v)$$

$$\lambda^2(u_0, v) L_v(u_0, v) = \lambda(u_0, v) \mathcal{L}_v(u_0, v) - \lambda_v(u_0, v) \mathcal{L}(u_0, v)$$

$$\rho^2(0, v) \mathcal{R}_u(0, v) = \rho(0, v) \mathcal{R}_u(0, v) - \rho_u(0, v) \mathcal{R}(0, v)$$

Pour tout  $v$  élément de  $[0, 1]$ , la relation (6) :

$$\mathcal{R}_u(0, v) = a(v) L_u(u_0, v) + b(v) L_v(u_0, v)$$

peut être multipliée par le réel non nul  $\rho^2(0, v) \lambda^2(u_0, v)$  et devient:

$$\lambda^2(u_0, v) [\rho(0, v) \mathcal{R}_u(0, v) - \rho_u(0, v) \mathcal{R}(0, v)] = a(v) \rho^2(0, v) [\lambda(u_0, v) \mathcal{L}_u(u_0, v) - \lambda_u(u_0, v) \mathcal{L}(u_0, v)] + b(v) \rho^2(0, v) [\lambda(u_0, v) \mathcal{L}_v(u_0, v) - \lambda_v(u_0, v) \mathcal{L}(u_0, v)].$$

En observant que la condition (17) entraîne  $\mathcal{R}(0, v) = \frac{\rho(0, v)}{\lambda(u_0, v)} \mathcal{L}(u_0, v)$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lambda^2(u_0, v) \rho(0, v) \mathcal{R}_u(0, v) - a(v) \rho^2(0, v) \lambda(u_0, v) \mathcal{L}_u(u_0, v) - b(v) \rho^2(0, v) \lambda(u_0, v) \mathcal{L}_v(u_0, v) \\ + [a(v) \rho^2(0, v) \lambda_u(u_0, v) + b(v) \rho^2(0, v) \lambda_v(u_0, v) - \lambda(u_0, v) \rho(0, v) \rho_u(0, v)] \mathcal{L}(u_0, v) \\ = 0_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

Donc la relation (6) entraîne l'existence de quatre fonctions qui ne s'annulent pas simultanément :

$f_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$f_1(v) = \lambda^2(u_0, v) \rho(0, v)$$

$$f_2(v) = -a(v)\rho^2(0, v)\lambda(u_0, v)$$

$$f_3(v) = -b(v)\rho^2(0, v)\lambda(u_0, v)$$

$$f_4(v) = a(v)\rho^2(0, v)\lambda_u(u_0, v) + b(v)\rho^2(0, v)\lambda_v(u_0, v) - \lambda(u_0, v)\rho(0, v)\rho_u(0, v)$$

telles que:

$$\forall v \in [0, 1], \quad (20)$$

$$f_1(v)\mathcal{R}_u(0, v) + f_2(v)\mathcal{L}_u(u_0, v) + f_3(v)\mathcal{L}_v(u_0, v) + f_4(v)\mathcal{L}(u_0, v) = 0$$

avec en outre  $\epsilon\lambda(u_0, v)\rho(0, v)f_2(v)f_1(v) < 0$ . Comme les fonctions  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$  sont supposées de classe  $\mathcal{C}^2$  et que les fonctions  $a$  et  $b$  de (6) sont de classe  $\mathcal{C}^1$ , les fonctions  $f_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  sont aussi de classe  $\mathcal{C}^1$ .

### 3.3.2 Condition suffisante et obtention des fonctions $a(v)$ et $b(v)$ de la condition (6)

Les relations (17) et (19) sont supposées réalisées.

En prenant la quatrième composante (masse) dans le repère  $\mathcal{B}$  de la relation (19) il vient:

$$f_1(v)\rho_u(0, v) + f_2(v)\lambda_u(u_0, v) + f_3(v)\lambda_v(u_0, v) + f_4(v)\lambda(u_0, v) = 0$$

Comme les points de  $\Gamma$  sont supposés à distance finie :

$$\forall v \in [0, 1], \lambda(u_0, v) \neq 0$$

Alors la relation (19) entraîne:

$$\lambda(u_0, v)[f_1(v)\mathcal{R}_u(0, v) + f_2(v)\mathcal{L}_u(u_0, v) + f_3(v)\mathcal{L}_v(u_0, v) + f_4(v)\mathcal{L}(u_0, v)] - [f_1(v)\rho_u(0, v) + f_2(v)\lambda_u(u_0, v) + f_3(v)\lambda_v(u_0, v) + f_4(v)\lambda(u_0, v)]\mathcal{L}(u_0, v) = 0$$

Après réorganisation des termes et en observant que  $\mathcal{L}(u_0, v) = \frac{\lambda(u_0, v)}{\rho(0, v)}\mathcal{R}(0, v)$ , nous obtenons:

$$f_1(v) \frac{\lambda(u_0, v)}{\rho(0, v)} \rho^2(0, v) R_u(0, v) + f_2(v) \lambda^2(u_0, v) L_u(u_0, v) \\ + f_3(v) \lambda^2(u_0, v) L_v(u_0, v) = 0$$

De ce fait, après division par le réel non nul  $f_1(v) \lambda(u_0, v) \rho(0, v)$  :

$$\forall v \in [0, 1], R_u(0, v) = -\frac{\lambda(u_0, v) f_2(v)}{\rho(0, v) f_1(v)} L_u(u_0, v) - \frac{\lambda(u_0, v) f_3(v)}{\rho(0, v) f_1(v)} L_v(u_0, v)$$

ce qui traduit la condition (6) de raccord  $G^1$ .

avec les fonctions  $a$  et  $b$  de classe  $C^1$  déterminées par:

$$\forall v \in [0, 1], a(v) = -\frac{\lambda(u_0, v) f_2(v)}{\rho(0, v) f_1(v)}$$

(Le produit  $\epsilon f_1(v) f_2(v) \lambda(u_0, v) \rho(0, v)$  étant négatif,  $\epsilon a(v)$  est positif.)

$$\forall v \in [0, 1], b(v) = -\frac{\lambda(u_0, v) f_3(v)}{\rho(0, v) f_1(v)}$$

En particulier, avec la condition suffisante (18) de raccord  $G^0$ ,  $\lambda(u_0, v) = \rho(0, v)$  et on obtient les formes simples :

$$a(v) = -\frac{f_2(v)}{f_1(v)} \quad (21)$$

$$b(v) = -\frac{f_3(v)}{f_1(v)} \quad (22)$$

### 3.3.3 Démarche de C.A.O.

Dans une démarche de C.A.O., la surface  $S_l$  et les deux domaines de paramètres  $\Delta_l$  et  $\Delta_r$  sont donnés et il s'agit de construire  $S_r$ , raccordée  $G^1$  à  $S_l$ . Dans ce cas les fonctions  $a$  et  $b$  (ou bien encore les fonctions  $f_1, f_2, f_3, f_4$ ) sont à considérer comme des paramètres de forme laissés à l'appréciation de l'utilisateur.

### 3.3.4 Forme des fonctions $f_i$ , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

La relation (19) peut être considérée comme un système linéaire (4,4), homogène, aux inconnues  $f_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , dont les "vecteurs colonnes",  $\mathcal{R}_u(0, v)$ ,  $\mathcal{L}_u(u_0, v)$ ,  $\mathcal{L}_v(u_0, v)$  et  $\mathcal{L}(u_0, v)$  sont dans l'espace  $\vec{\mathcal{F}}$ .

Comme le montre le traitement de l'annexe 1, si le système  $\{\mathcal{L}_u(u_0, v), \mathcal{L}_v(0, v), \mathcal{L}(u_0, v)\}$  est libre,

à un facteur près, les quatre fonctions  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  sont entièrement déterminées par la connaissance des deux surfaces  $S_l$  et  $S_r$  raccordées  $G^1$ .

L'étude du raccordement de deux morceaux de parabolöide, traitée au chapitre 4, donne un exemple de calcul de ces fonctions-coefficients. Le chapitre 6 donne un autre exemple sur une sphère.

## 3.4 Raccord $G^2$ entre $S_l$ et $S_r$ le long de $\Gamma$

Ajouter aux conditions (17) et (6) la condition (7) définit le raccord  $G^2$  entre  $S_l$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma$ .

### 3.4.1 Expression des dérivées utiles prises au point $(0, v)$ pour $R$ et au point $(u_0, v)$ pour $L$ .

Revenons à la condition (6) de raccord  $G^1$  :

$R_u = aL_u + bL_v$  qui est équivalente à :

$$(\rho^2 R_u) = \frac{\rho^2}{\lambda^2} \lambda^2 (aL_u + bL_v)$$

Donc

$$(\rho R_u - \rho_u R) = \frac{\rho^2}{\lambda^2} [a(\lambda \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L}) + b(\lambda \mathcal{L}_v - \lambda_v \mathcal{L})].$$

Exprimons les différents termes de (7) en fonction des paramétrages  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{F}$ .

$$\lambda^2 L_{uu} = (\lambda \mathcal{L}_{uu} - \lambda_{uu} \mathcal{L}) - 2 \frac{\lambda_u}{\lambda} (\lambda \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L})$$

$$\lambda^2 L_{vv} = (\lambda \mathcal{L}_{vv} - \lambda_{vv} \mathcal{L}) - 2 \frac{\lambda_v}{\lambda} (\lambda \mathcal{L}_v - \lambda_v \mathcal{L})$$

$$\rho^2 R_{uu} = (\rho \mathcal{R}_{uu} - \rho_{uu} \mathcal{R}) - 2 \frac{\rho_u}{\rho} (\rho \mathcal{R}_u - \rho_u \mathcal{R}) \text{ ou encore}$$

$$\rho^2 R_{uu} = (\rho \mathcal{R}_{uu} - \rho_{uu} \mathcal{R}) - 2 \frac{\rho_u}{\rho} \frac{\rho^2}{\lambda^2} [a(\lambda \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L}) + b(\lambda \mathcal{L}_v - \lambda_v \mathcal{L})]$$

En calculant  $\frac{\partial}{\partial v}(\lambda^2 L_u) = \frac{\partial}{\partial v}(\lambda \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L})$  il vient:

$$2\lambda \lambda_v L_u + \lambda^2 L_{uv} = (\lambda_v \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L}_v) + (\lambda \mathcal{L}_{uv} - \lambda_{uv} \mathcal{L})$$

ce qui donne

$$\lambda^2 L_{uv} = (\lambda_v \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L}_v) + (\lambda \mathcal{L}_{uv} - \lambda_{uv} \mathcal{L}) - 2 \frac{\lambda_u}{\lambda} (\lambda \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L})$$

### 3.4.2 Condition nécessaire et suffisante de raccord $G^2$ .

Le théorème suivant exprime les conditions requises sur les paramétrages  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$  pour obtenir le raccord  $G^2$  entre les surfaces  $S_l$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma$ .

#### Théorème 3.4.1 :

Les relations (17) et (6) étant acquises, la condition (7) de raccord  $G^2$  entre  $S_l$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma$  équivaut à l'existence de quatre fonctions de classe  $C^0$ ,  $h_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , définies de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $h_1(v) \neq 0$ , vérifiant :

$$\forall v \in [0, 1],$$

$$h_1(v) \left( \frac{\lambda(u_0, v)}{\rho(0, v)} \mathcal{R}_{uu} - a^2 \mathcal{L}_{uu} - 2ab \mathcal{L}_{uv} - b^2 \mathcal{L}_{vv} \right) + h_2(v) \mathcal{L}_u + h_3(v) \mathcal{L}_v + h_4(v) \mathcal{L} = 0 \quad (23)$$

**Condition nécessaire** Après multiplication par le réel non nul  $\lambda^2$  la condition (7) pour un point à distance finie s'écrit :

$$\lambda^2 \left[ \frac{\rho^2}{\rho^2} R_{uu} - a^2 L_{uu} - 2ab L_{uv} - b^2 L_{vv} - e_1^* L_u - f_1^* L_v \right] = 0$$

Comme  $\Pi\Omega(\mathcal{R}(0, v)) = \Pi\Omega(\mathcal{L}(u_0, v))$ , nécessairement  $\mathcal{R}(0, v) = \frac{\rho(0, v)}{\lambda(u_0, v)}\mathcal{L}(u_0, v)$

Après remplacement des différents termes, la condition (7) s'écrit:

$$\begin{aligned} & \{\lambda[\frac{\lambda}{\rho}\mathcal{R}_{uu} - a^2\mathcal{L}_{uu} - 2ab\mathcal{L}_{uv} - b^2\mathcal{L}_{vv} + p_1(v)\mathcal{L}_u] \\ & - [\frac{\lambda}{\rho}\rho_{uu} - a^2\lambda_{uu} - 2ab\lambda_{uv} - b^2\lambda_{vv} + p_1(v)\lambda_u]\mathcal{L} \} \quad (24) \\ & - 2ab\{\lambda_v\mathcal{L}_u - \lambda_u\mathcal{L}_v\} + p_2(v)\{\lambda\mathcal{L}_v - \lambda_v\mathcal{L}\} = 0 \end{aligned}$$

expression dans laquelle

$p_1(v)$  est le coefficient de  $(\lambda\mathcal{L}_u - \lambda_u\mathcal{L})$  donné par :

$$p_1(v) = -2a\frac{\rho_u}{\rho} + 2a^2\frac{\lambda_u}{\lambda} + 2ab\frac{\lambda_v}{\lambda} - e_1^*(v)$$

$$\text{et } p_2(v) = -2b\frac{\rho_u}{\rho} + 2b^2\frac{\lambda_v}{\lambda} - f_1^*(v)$$

En posant  $h_1(v) = \lambda(u_0, v)$ , ( $h_1(v) \neq 0$  car  $\lambda(u_0, v) \neq 0$ )

$$h_2(v) = \lambda(u_0, v)p_1(v) - 2a(v)b(v)\lambda_v(u_0, v)$$

$$h_3(v) = 2a(v)b(v)\lambda_u(u_0, v) + p_2(v)\lambda(u_0, v) \text{ et}$$

$$h_4(v) = -[\frac{\lambda(u_0, v)}{\rho(0, v)}\rho_{uu} - a^2\lambda_{uu} - 2ab\lambda_{uv} - b^2\lambda_{vv} + p_1(v)\lambda_u] - p_2(v)\lambda_v,$$

la relation (24) s'écrit:

$$\forall v \in [0, 1],$$

$$h_1(v)[\frac{\lambda(u_0, v)}{\rho(0, v)}\mathcal{R}_{uu} - a^2\mathcal{L}_{uu} - 2ab\mathcal{L}_{uv} - b^2\mathcal{L}_{vv}] + h_2(v)\mathcal{L}_u + h_3(v)\mathcal{L}_v + h_4(v)\mathcal{L} = 0$$

De plus, compte-tenu des hypothèses de régularité sur les surfaces  $S_l$  et  $S_r$ , les fonctions  $h_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  sont continues.

**Condition suffisante :**

La relation (23) est supposée réalisée avec  $h_1(v) \neq 0$ . Cherchons à établir la relation (7) de raccord  $G^2$ . La quatrième composante dans la base  $\mathcal{B}$  de

$$h_1(v) \left( \frac{\lambda(u_0, v)}{\rho(0, v)} \mathcal{R}_{uu} - a^2 \mathcal{L}_{uu} - 2ab \mathcal{L}_{uv} - b^2 \mathcal{L}_{vv} \right) \\ + h_2(v) \mathcal{L}_u + h_3(v) \mathcal{L}_v + h_4(v) \mathcal{L}$$

est nulle, soit :

$$h_1(v) \left( \frac{\lambda(u_0, v)}{\rho(0, v)} \rho_{uu} - a^2 \lambda_{uu} - 2ab \lambda_{uv} - b^2 \lambda_{vv} \right) \\ + h_2(v) \lambda_u + h_3(v) \lambda_v + h_4(v) \lambda = 0$$

Alors, le vecteur  $\mathcal{D}(v)$  suivant de  $\mathcal{F}$  est nul pour tout  $v \in [0, 1]$ :

$$\mathcal{D}(v) = h_1(v) \lambda(u_0, v) \left( \frac{\lambda(u_0, v)}{\rho(0, v)} \mathcal{R}_{uu} - a^2 \mathcal{L}_{uu} - 2ab \mathcal{L}_{uv} - b^2 \mathcal{L}_{vv} \right) \\ + h_2(v) \lambda(u_0, v) \mathcal{L}_u + h_3(v) \lambda(u_0, v) \mathcal{L}_v + h_4(v) \lambda(u_0, v) \mathcal{L} \\ - \left\{ h_1(v) \left( \frac{\lambda(u_0, v)}{\rho(0, v)} \rho_{uu} - a^2 \lambda_{uu} - 2ab \lambda_{uv} - b^2 \lambda_{vv} \right) \right. \\ \left. + h_2(v) \lambda_u + h_3(v) \lambda_v + h_4(v) \lambda \right\} \mathcal{L}$$

Nous utilisons, une fois encore,  $\mathcal{L}(u_0, v) = \frac{\lambda(u_0, v)}{\rho(0, v)} \mathcal{R}(0, v)$ . Dans l'expression du vecteur  $\mathcal{D}(v)$  nous ajoutons et retranchons une combinaison linéaire des vecteurs  $\lambda \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L}$  et  $\lambda \mathcal{L}_v - \lambda_v \mathcal{L}$ .

En appelant  $\alpha$  la fonction continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\alpha(v) = 2ah_1 \left( \frac{\rho_v}{\rho} - a \frac{\lambda_u}{\lambda} - b \frac{\lambda_v}{\lambda} \right)$$

$$\mathcal{D}(v) = h_1(v) \frac{\lambda^2}{\rho^2} \left[ (\rho \mathcal{R}_{uu} - \rho_{uu} \mathcal{R}) - 2 \frac{\rho_u}{\rho} (\rho \mathcal{R}_u - \rho_u \mathcal{R}) \right] \\ - h_1(v) a^2 \left[ (\lambda \mathcal{L}_{uu} - \lambda_{uu} \mathcal{L}) - 2 \frac{\lambda_u}{\lambda} (\lambda \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L}) \right] \\ - 2h_1(v) ab \left[ (\lambda_v \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L}_v) + (\lambda \mathcal{L}_{uv} - \lambda_{uv} \mathcal{L}) - 2 \frac{\lambda_v}{\lambda} (\lambda \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L}) \right] \\ - h_1(v) b^2 \left[ (\lambda \mathcal{L}_{vv} - \lambda_{vv} \mathcal{L}) - 2 \frac{\lambda_v}{\lambda} (\lambda \mathcal{L}_v - \lambda_v \mathcal{L}) \right] \\ + h_2(v) [\lambda \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L}] + h_3(v) [\lambda \mathcal{L}_v - \lambda_v \mathcal{L}] \\ + \alpha(v) [\lambda \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L}] + \frac{b}{a} \alpha(v) [\lambda \mathcal{L}_v - \lambda_v \mathcal{L}]$$

(le terme  $(\lambda_v \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L}_v)$  a été décomposé sous la forme :

$$(\lambda_v \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L}_v) = \frac{\lambda_u}{\lambda} [\lambda \mathcal{L}_u - \lambda_u \mathcal{L}] - \frac{\lambda_v}{\lambda} [\lambda \mathcal{L}_v - \lambda_v \mathcal{L}]$$

Ecrire  $\mathcal{D}(v) = 0$  équivaut à :

$$h_1(v) \left[ \frac{\lambda^2}{\rho^2} \rho^2 R_{uu} - a^2 \lambda^2 L_{uu} - 2ab \lambda^2 L_{uv} - b^2 \lambda^2 L_{vv} \right]$$

$$+ [h_2(v) + \alpha(v)] \lambda^2 L_u + [h_3(v) + \frac{b}{a} \alpha(v)] \lambda^2 L_v = 0$$

Après division par le réel non nul  $h_1(v) \lambda^2(u_0, v)$ , on obtient la relation (7)

avec:

$$e_1^*(v) = -\frac{h_2(v) + \alpha(v)}{h_1(v)} \text{ et } f_1^*(v) = -\frac{ah_3(v) + b\alpha(v)}{ah_1(v)}$$

Le théorème 3-4-2 est donc prouvé .

Remarque:

Lorsque c'est la condition (18) qui est réalisée, au lieu de (17), alors

$$\frac{\rho(0, v)}{\lambda(u_0, v)} = 1$$

### 3.4.3 Choix particulier pour les fonctions coefficients

**Proposition 3.4.1** *Le choix suivant où  $a$  et  $b$  sont des fonctions de classe  $C^1$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , vérifiant  $ea > 0$  :*

$$f_1 = 1, f_2 = -a, f_3 = -b, f_4 = 0$$

$$h_1 = 1, h_2 = 0, h_3 = 0, h_4 = 0,$$

correspond au raccord  $G^2$  entre les "surfaces au dessus", dans  $\mathcal{F}$ , données par les paramétrisations  $\mathcal{L}$ , définie sur  $\Delta_l$  et  $\mathcal{R}$ , définie sur  $\Delta_r$ . La projection  $\Pi\Omega$  conserve ce raccord.

**Preuve:**

Le raccord  $G^0$  " au dessus " signifie que

$$\forall v \in [0, 1], \mathcal{R}(0, v) = \mathcal{L}(u_0, v)$$

et donc, pour les masses:

$$\forall v \in [0, 1], \rho(0, v) = \lambda(u_0, v)$$

Il est évident que la projection  $\Pi\Omega$  conserve ce raccord :

$$\forall v \in [0, 1], R(0, v) = L(u_0, v)$$

Le raccord  $G^1$  " au dessus " se traduit par l'existence de deux fonctions  $a$  et  $b$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telles que :

$$\begin{aligned} \forall v \in [0, 1] \\ \epsilon a(v) > 0 \\ \mathcal{R}_u(0, v) = a(v)\mathcal{L}_u(u_0, v) + b(v)\mathcal{L}_v(u_0, v) \end{aligned} \quad (25)$$

Alors, en prenant la dernière composante dans la base  $\mathcal{B}$  de la relation (25) :

$$\forall v \in [0, 1], \rho_u(0, v) = a(v)\lambda_u(u_0, v) + b(v)\lambda_v(u_0, v)$$

donc:

$$\begin{aligned} \rho^2(0, v)R_u(0, v) &= \rho(0, v)\mathcal{R}_u - \rho_u(0, v)\mathcal{R}(0, v) \\ &= \lambda(u_0, v)[a(v)\mathcal{L}_u(u_0, v) + b(v)\mathcal{L}_v(u_0, v)] - [a(v)\lambda_u(u_0, v) + b(v)\lambda_v(u_0, v)]\mathcal{L}(u_0, v) \\ &= a(v)[\lambda\mathcal{L}_u - \lambda_u\mathcal{L}] + b(v)[\lambda\mathcal{L}_v - \lambda_v\mathcal{L}] \end{aligned}$$

la condition (6) de raccord  $G^1$  dans  $\mathcal{E}$  est alors réalisée:

$$\forall v \in [0, 1], R_u(0, v) = a(v)L_u(u_0, v) + b(v)L_v(u_0, v)$$

Remarque : la réalisation du raccord  $G^1$  " au dessus " est une forme de relation (19) avec  $f_1 = 1; f_2(v) = -a(v); f_3(v) = -b(v)$  et  $f_4(v) = 0$ . le produit  $\epsilon\lambda(u_0, v)\rho(0, v)f_1(v)f_2(v) = -\lambda^2(u_0, v)\epsilon a(v)$  est bien négatif et le théorème 3-3-1 assure que le raccord  $G^1$  est réalisé " en dessous ", dans  $\mathcal{E}$ .

Le raccord  $G^2$  " au dessus " se traduit par l'existence de deux nouvelles fonctions continues  $e_1^*$  et  $f_1^*$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\mathcal{R}_{uu} - a^2(v)\mathcal{L}_{uu} - 2a(v)b(v)\mathcal{L}_{uv} - b^2(v)\mathcal{L}_{vv} = e_1^*(v)\mathcal{L}_u + f_1^*(v)\mathcal{L}_v$$

cette relation est une forme de relation (23) avec  $h_1 = 1; h_2 = -e_1^*; h_3 = -f_1^*$  et  $h_4 = 0$  et le théorème 3-4-2 assure que le raccord  $G^2$  est aussi réalisé en dessous, dans  $\mathcal{E}$ .

## 4 Conclusion

### 4.1

Les deux théorèmes généraux obtenus dans ce chapitre sont des conditions nécessaires et suffisantes respectivement de raccord  $G^1$  et  $G^2$  ; elles vont être utilisées dans les chapitres 3 et 5 pour établir des conditions sur les réseaux massiques des surfaces ( $SBR$ ) à relier : les conditions très générales (19) et (23) seront alors exploitées en tenant compte de la forme polynomiale des fonctions  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$ .

### 4.2 Une remarque concernant la reparamétrisation

Supposons qu'il existe deux fonctions  $\varphi$  et  $\theta$ :

$$\begin{aligned}\varphi &: [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1] \\ \theta &: [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]\end{aligned}$$

définissant un  $C^2$  difféomorphisme  $\Phi$  :

$$\begin{aligned}\Phi &: [0, 1]^2 && \longrightarrow [0, 1]^2 \\ &(u, v) && \longrightarrow (\varphi(u, v), \theta(u, v)) \\ &\Phi(0, v) = (1, v)\end{aligned}$$

Alors la condition de raccord  $G^0$  :  $R(0, v) = L[\varphi(0, v), \theta(0, v)]$  ,  $\forall v \in [0, 1]$  implique:

$$\forall v \in [0, 1] ,$$

$$R_v(0, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0, v)L_\varphi[\varphi(0, v), \theta(0, v)] + \frac{\partial \theta}{\partial v}(0, v)L_\theta[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \quad (26)$$

#### 4.2.1 Raccord $G^1$ :

Le raccord  $G^1$  entre  $S_l$  et  $S_r$  se traduit par l'existence de deux fonctions arbitraires  $a$  ,  $\epsilon a > 0$  et  $b$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall v \in [0, 1] , R_u(0, v) = a(v)L_\varphi[\varphi(0, v), \theta(0, v)] + b(v)L_\theta[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \quad (27)$$

Cette condition est plus générale que celle qui exprime l'égalité au point  $(0, v)$  des différentielles des fonctions  $R(u, v)$  et  $L[\varphi(u, v), \theta(u, v)]$ , soit :

$$\forall v \in [0, 1], \partial R(0, v) = \partial L[\varphi(0, v), \theta(0, v)]$$

En effet cette dernière équation équivaut à (26) (déduite du raccord  $G^0$ ) et (28) ci-dessous :

$$R_u(0, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0, v) L_\varphi[\varphi(0, v), \theta(0, v)] + \frac{\partial \theta}{\partial u}(0, v) L_\theta[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \quad (28)$$

#### 4.2.2 Raccord $G^2$ :

Observons maintenant que même si  $a(v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0, v)$  et  $b(v) = \frac{\partial \theta}{\partial u}(0, v)$ , le raccord  $G^2$  défini en 1-1 est plus général que celui qui est traduit par l'égalité:

$$\forall v \in [0, 1], \partial^2 R(0, v) = \partial^2 L[\varphi(0, v), \theta(0, v)]$$

Les raccords  $G^0$  et  $G^1$  impliquent que :

$$\forall v \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} R_{vv}(0, v) &= \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0, v) \right]^2 L_{\varphi\varphi}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] + \left[ \frac{\partial \theta}{\partial v}(0, v) \right]^2 L_{\theta\theta}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \\ &+ 2 \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0, v) \frac{\partial \theta}{\partial v}(0, v) L_{\varphi\theta}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}(0, v) L_\varphi[\varphi(0, v), \theta(0, v)] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2}(0, v) L_\theta[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \end{aligned} \quad (29)$$

et aussi :

$$\forall v \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} R_{uv}(0, v) &= \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0, v) \right] \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0, v) \right] L_{\varphi\varphi}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] + \left[ \frac{\partial \theta}{\partial u}(0, v) \right] \left[ \frac{\partial \theta}{\partial v}(0, v) \right] L_{\theta\theta}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \\ &+ \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0, v) \frac{\partial \theta}{\partial v}(0, v) + \frac{\partial \theta}{\partial u}(0, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(0, v) \right] L_{\varphi\theta}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}(0, v) L_\varphi[\varphi(0, v), \theta(0, v)] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}(0, v) L_\theta[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \end{aligned} \quad (30)$$

Nous supposons  $a(v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0, v)$  et  $b(v) = \frac{\partial \theta}{\partial u}(0, v)$

Le raccord  $G^2$  entre  $S_l$  et  $S_r$  se traduit par l'existence de deux fonctions arbitraires  $e_1^*$ , et  $f_1^*$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que la relation (31) ci-dessous soit vérifiée:

$$\forall v \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} R_{uu}(0, v) &= a^2(v)L_{\varphi\varphi}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] + 2a(v)b(v)L_{\theta\varphi}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \\ &+ b^2(v)L_{\theta\theta}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \\ &+ e_1^*(v)L_{\varphi}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] + f_1^*(v)L_{\theta}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \end{aligned} \quad (31)$$

Cette condition est plus riche que celle qui exprime l'égalité au point  $(0, v)$  des différentielles secondes des fonctions  $R(u, v)$  et  $L[\varphi(u, v), \theta(u, v)]$ , soit :

$$\forall v \in [0, 1], \quad \partial^2 R(0, v) = \partial^2 L[\varphi(0, v), \theta(0, v)]$$

en effet cette dernière égalité se traduit par (29), (30) et (32) définie ci-dessous:

$$\begin{aligned} \forall v \in [0, 1], \\ R_{uu}(0, v) &= a^2(v)L_{\varphi\varphi}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] + 2a(v)b(v)L_{\theta\varphi}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \\ &+ b^2(v)L_{\theta\theta}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \\ &+ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(0, v)L_{\varphi}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2}(0, v)L_{\theta}[\varphi(0, v), \theta(0, v)] \end{aligned} \quad (32)$$

L'ensemble des conditions (29),(30) et (31) est plus général que (29),(30) et (32).

## TROISIEME CHAPITRE

Raccordement  $G^i$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$  entre deux surfaces ( $SBR$ )  
rectangulaires.

1. Introduction.	page 65
1.1 Notations.	page 65
1.2 Hypothèse de travail.	page 66
1.3 Cadre du travail.	page 66
2. Raccord $G^0$ entre les surfaces ( $SBR$ ) $S_l$ et $S_r$ .	page 68
3. Raccord $G^1$ entre les surfaces ( $SBR$ ) $S_l$ et $S_r$ .	page 69
3.1 Cas général.	page 70
3.2 Remarque concernant les degrés de liberté.	page 73
3.3 Première condition suffisante de raccord $G^1$ .	page 73
3.4 Deuxième condition suffisante de raccord $G^1$ .	page 75
4. Raccord $G^2$ entre $S_l$ et $S_r$ .	page 79
4.1 Cas général.	page 79
4.2 Remarque concernant les degrés de liberté.	page 86
4.3 Utilisation de la condition suffisante du paragraphe 3.4	page 86

# Raccordement $G^i$ , $i \in \{0, 1, 2\}$ entre deux surfaces ( $SBR$ ) rectangulaires

## 1 Introduction

### 1.1 Notations et hypothèses

Dans tout ce chapitre  $\Delta_l = [0, 1]^2$ ,  $\Delta_r = [0, 1]^2$ .

$\vec{\mathcal{E}} = \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{\mathcal{E}} = \tilde{\mathbb{R}}^3$ ,

$\mathcal{R}_1 = (\Omega_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  désigne un repère de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{\Omega}_1)$  le repère "au-dessus" dans  $\vec{\mathcal{F}}$  ([34]).

$m$  et  $n$  sont deux entiers positifs donnés.

$S_l$  est la surface ( $SBR$ ) de réseau massique  $\{l_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$ ; elle est donnée par le paramétrage :

$$L(u, v) = SBR[l_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n; [0, 1]^2](u, v).$$

$S_r$  est la surface ( $SBR$ ) de réseau massique  $\{r_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$ ; elle est donnée par le paramétrage :

$$R(u, v) = SBR[r_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n; [0, 1]^2](u, v).$$

Remarque : comme il a été indiqué au chapitre 1, sans perte de généralité, les deux réseaux massiques

$\{l_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$  et  $\{r_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}$  peuvent être supposés de mêmes dimensions, soit la longueur  $m$  et la largeur  $n$ . Si tel n'était pas le cas, des élévations de longueur permettraient de s'y ramener.

Soit  $\hat{\Omega}(l_{ij}) = \vec{\Omega} \vec{\mathcal{L}}_{ij}$  et  $\chi(l_{ij}) = \lambda_{ij}$ .

Alors  $\forall (u, v) \in [0, 1]^2, L(u, v) = \Pi\Omega(\mathcal{L}(u, v))$   
avec  $\mathcal{L}(u, v) = SBP[\mathcal{L}_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n; [0, 1]^2](u, v)$

En outre , si  $\lambda(u, v) = SBP[\lambda_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n; [0, 1]^2](u, v)$  n'est pas nul :  
 $\Omega\mathcal{L}(u, v) = \lambda(u, v) \cdot \vec{\Omega}L(u, v)$  .

De même pour la surface  $S_r$  :

soit  $\hat{\Omega}(r_{ij}) = \vec{\Omega}\mathcal{R}_{ij}$  et  $\chi(r_{ij}) = \rho_{ij}$  .  
Alors  $\forall (u, v) \in [0, 1]^2, R(u, v) = \Pi\Omega(\mathcal{R}(u, v))$   
avec  $\mathcal{R}(u, v) = SBP[\mathcal{R}_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n; [0, 1]^2](u, v)$

Si  $\rho(u, v) = SBP[\rho_{ij}, 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n; [0, 1]^2](u, v)$  n'est pas nul :  
 $\vec{\Omega}\mathcal{R}(u, v) = \rho(u, v) \cdot \vec{\Omega}R(u, v)$

## 1.2 Hypothèse

Les surfaces  $S_l$  et  $S_r$  seront raccordées en des points à distance finie , ce qui explique les hypothèses suivantes :  
 $\forall v \in [0, 1]$  ,

$\mathcal{L}(1, v) \neq \Omega$  et  $\Pi\Omega(\mathcal{L}(1, v)) \in \mathcal{E}$  et

$\mathcal{R}(0, v) \neq \Omega$  et  $\Pi\Omega(\mathcal{R}(0, v)) \in \mathcal{E}$

## 1.3 Cadre du travail

Le choix suivant pour les fonctions  $\Theta_l$  et  $\Theta_r$  du chapitre 2 conduit à une formulation très répandue dans l'étude du raccordement  $G^i$  ,  $i \in \{0, 1, 2\}$  entre deux surfaces rectangulaires

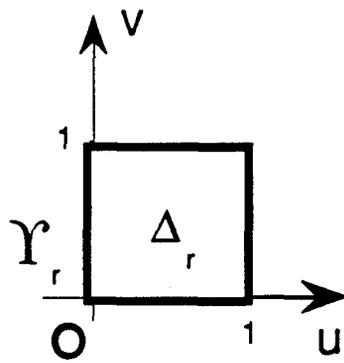
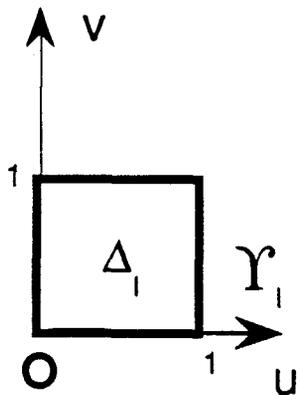
( [2], [14], [15], [23] ) :

$\Theta_l(v) = (1, v)$  et  $\Theta_r(v) = (0, v)$  ,  $v \in [0, 1]$  .

Comme le montre la figure 1 , ce choix donne  $\epsilon = 1$  selon la convention de la définition 1-1 du chapitre 2.

Le raccord  $G^2$  entre  $S_l$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma = R(\Upsilon_r)$  se traduit par :

Chapitre 3, figure 1



$$\Gamma_r = \{(0, v), 0 \leq v \leq 1\}$$

$$\Gamma_l = \{(1, v), 0 \leq v \leq 1\}$$

$$\varepsilon = +1$$

car les bords des deux domaines ont des orientations opposées

**Raccordement entre (SBR) rectangulaires**

•

$$\forall v \in [0, 1], L(1, v) = R(0, v)$$

et cette égalité définit un paramétrage de la courbe frontière  $\Gamma$ , soit  $C(v) = L(1, v)$ ;  $v \in [0, 1]$ .

•

$$\forall v \in [0, 1], N^l(1, v) = N^r(0, v)$$

•

$$\forall v \in [0, 1], dN^l(1, v) = dN^r(0, v)$$

Alors, les conditions nécessaires et suffisantes obtenues au chapitre 2 s'écrivent

**Proposition 1.3.1 :**

*Pour le raccord  $G^0$  :*

$$\forall v \in [0, 1], L(1, v) = R(0, v)$$

*Pour le raccord  $G^1$  :*

$$\forall v \in [0, 1], N^l(1, v) = N^r(0, v)$$

équivalent à l'existence de quatre fonctions de classe  $C^1$ ,  $\{f_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall v \in [0, 1], \\ \lambda(1, v)\rho(0, v)f_1(v)f_2(v) < 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$f_1(v)\mathcal{R}_u(0, v) + f_2(v)\mathcal{L}_u(1, v) + f_3(v)\mathcal{L}_v(1, v) + f_4(v)\mathcal{L}(1, v) = 0$$

*Pour le raccord  $G^2$  :*

$$\forall v \in [0, 1], dN^l(1, v) = dN^r(0, v)$$

équivalent à l'existence de quatre fonctions continues  $h_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  définies de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que

$$h_1(v) \neq 0 \\ \forall v \in [0, 1],$$

$$h_1(v) \left( \frac{\lambda(1, v)}{\rho(0, v)} \mathcal{R}_{uu}(0, v) - a^2 \mathcal{L}_{uu}(1, v) - 2ab \mathcal{L}_{uv}(1, v) - b^2 \mathcal{L}_{vv}(1, v) \right) \\ + h_2(v) \mathcal{L}_u(1, v) + h_3(v) \mathcal{L}_v(1, v) + h_4(v) \mathcal{L}(1, v) = 0 \quad (2)$$

$$\text{avec } a(v) = -\frac{\lambda(1, v) f_2(v)}{\rho(0, v) f_1(v)} \text{ et } b(v) = -\frac{\lambda(1, v) f_3(v)}{\rho(0, v) f_1(v)}$$

## 2 Raccord $G^0$ entre les surfaces (SBR) $S_l$ et $S_r$

Le raccord se fait le long de  $\Gamma$ , frontière commune entre  $S_l$  et  $S_r$ .

et la condition de raccord  $G^0$  s'exprime par :

$$\forall v \in [0, 1], L(1, v) = R(0, v) \quad (3)$$

(cf la figure 2)

Nous avons :

$$L(1, v) = BR[l_{mj}, 0 \leq j \leq n; [0, 1]](v) \\ R(0, v) = BR[r_{0j}, 0 \leq j \leq n; [0, 1]](v)$$

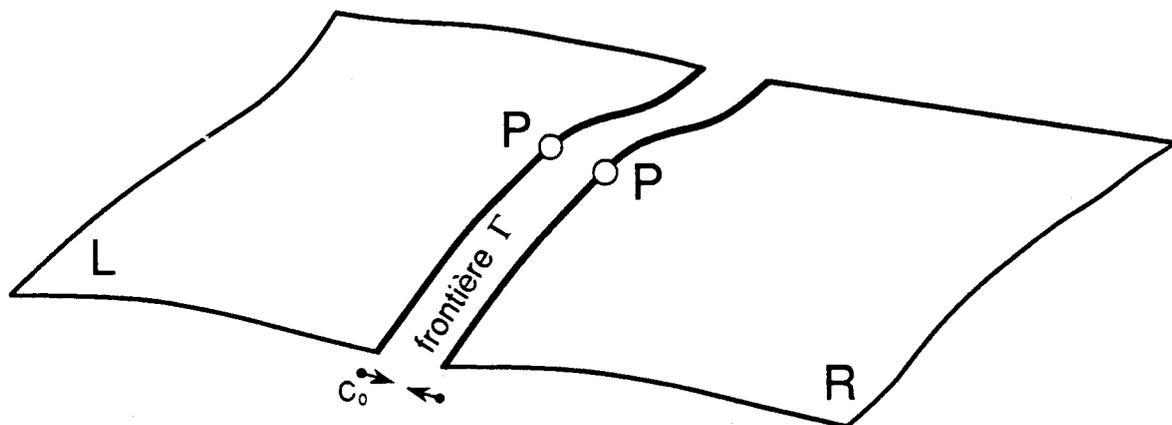
Nous traduisons la condition  $G^0$  i.e. l'égalité des deux courbes (BR) ci-dessus par la "proportionnalité" de leurs polygones massiques de contrôle:

**Proposition 2.0.2** *Le raccord  $G^0$  entre les surfaces  $S_l$  et  $S_r$  est réalisé s'il existe un réel  $\alpha$  non nul tel que*

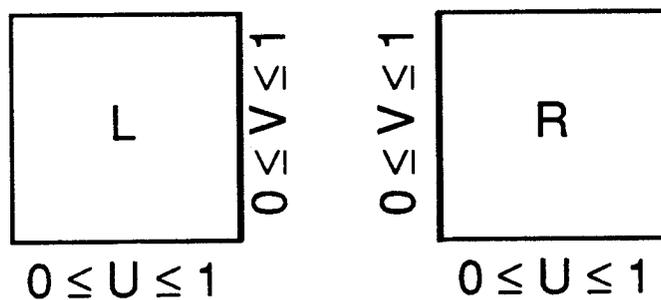
$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, l_{mj} = \alpha * r_{0j} \quad (4)$$

En fait, après multiplication éventuelle de tous les vecteurs massiques du réseau  $\{l_{ij}\}$  par le scalaire  $\frac{1}{\alpha}$ , nous travaillerons avec la condition:

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, l_{mj} = r_{0j} \quad (5)$$



Domaines des paramètres



Raccord  $G^0$  entre deux surfaces.

### 3 Raccord $G^1$ entre $S_l$ et $S_r$ le long de $\Gamma$

Pour toute la suite du chapitre , la condition (5) est supposée .

En outre , l'hypothèse ,  $\Pi\Omega(\mathcal{L}(1, v) \in \mathcal{E}$  assure que

$\forall v \in [0, 1], L(1, v)$  est à distance finie c'est à dire  $\lambda(1, v) \neq 0$  .

Pour des questions de commodité , notons  $c_j$  le vecteur massique  $l_{mj} = r_{0j}$

et aussi  $\hat{\Omega}(c_j) = \overline{\Omega}C_j$ .

Alors la courbe frontière  $\Gamma$  est paramétrée par  $C(v)$

avec  $C(v) = BR[c_j, 0 \leq j \leq n; [0, 1]](v)$  i.e.

$C(v) = \Pi\Omega(C(v))$  où  $C(v) = BP[C_j, 0 \leq j \leq n; [0, 1]](v)$

Il s'agit de traduire en termes de réseaux massiques la condition (1) .

Les définitions des courbes ( $BR$ ) et des surfaces ( $SBR$ ) donnent , ici , des renseignements algébriques supplémentaires sur les fonctions qui interviennent dans cette relation :

$\mathcal{L}(1, v) = BP(\mathcal{L}_{mj}, 0 \leq j \leq n; [0, 1]](v)$

est une courbe de  $\mathcal{F}$  polynomiale de degré  $n$  .

$$\mathcal{L}_v(1, v) = C'(v) = n \sum_{j=0}^{j=n-1} B_j^{n-1}(v) \Delta^1 C_j$$

est une courbe de  $\mathcal{F}$  polynomiale de degré  $n - 1$  .

$$\mathcal{L}_u(1, v) = m \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) (\mathcal{L}_{mj} - \mathcal{L}_{(m-1)j})$$

est une courbe de  $\mathcal{F}$  polynomiale de degré  $n$  .

$$\mathcal{R}_u(0, v) = m \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) (\mathcal{R}_{1j} - \mathcal{R}_{0j})$$

est une courbe de  $\mathcal{F}$  polynomiale de degré  $n$  .

### 3.1 Cas général du raccord $G^1$ entre $S_l$ et $S_r$

Dans cette section , le système  $\mathcal{S}$  suivant, de trois vecteurs de  $\mathcal{F}$ , est supposé libre .

$$\mathcal{S} = (\mathcal{L}_u(1, v), \mathcal{L}_v(1, v), \mathcal{C}(v))$$

En annexe 1, nous montrons qu' à une fonction multiplicative non nulle près, les fonctions  $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$  ont une forme bien déterminée , à savoir :

$f_1(v)$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $3n - 1$

$f_2(v)$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $3n - 1$

$f_3(v)$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $3n$

$f_4(v)$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $3n - 1$

Il existe donc des coefficients réels  $\alpha_{ik}, i \in \{1, 2, 4\}; 0 \leq k \leq (3n - 1)$ , et  $\alpha_{3k}, 0 \leq k \leq 3n$  tels que :

$$\forall v \in [0, 1], \forall i \in \{1, 2, 4\}, f_i(v) = \sum_{k=0}^{k=3n-1} \alpha_{ik} B_k^{3n-1}(v)$$

$$\forall v \in [0, 1], f_3(v) = \sum_{k=0}^{k=3n} \alpha_{3k} B_k^{3n}(v)$$

En décomposant le domaine des indices ,

$\{(j, k) \mid 0 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq (3n - 1)\}$  en trois zones et en posant  $k + j = p$ , nous obtenons l'écriture suivante pour le terme  $f_1(v)\mathcal{R}_u(0, v)$ :

$$f_1(v)\mathcal{R}_u(0, v) = \sum_{k=0}^{k=3n-1} \alpha_{1k} B_k^{3n-1}(v) m \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) \Delta^{10} \mathcal{R}_{0j}$$

$$= m \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{j=0}^{j=p} \alpha_{1(p-j)} \Delta^{10} \mathcal{R}_{0j} B_j^n(v) B_{(p-j)}^{3n-1}(v)$$

$$+m \sum_{p=n+1}^{p=3n-1} \sum_{j=0}^{j=n} \alpha_{1(p-j)} \Delta^{10} \mathcal{R}_{0j} B_j^n(v) B_{(p-j)}^{3n-1}(v)$$

$$+m \sum_{p=3n}^{p=4n-1} \sum_{j=p-3n+1}^{j=n} \alpha_{1(p-j)} \Delta^{10} \mathcal{R}_{0j} B_j^n(v) B_{(p-j)}^{3n-1}(v)$$

En observant que  $B_j^n(v) B_{(p-j)}^{3n-1}(v) = \frac{\binom{n}{j} \binom{3n-1}{p-j}}{\binom{4n-1}{p}} B_p^{4n-1}(v)$ :

nous obtenons l'écriture suivante pour  $f_1(v) \mathcal{R}_u(0, v)$  :

$$m \sum_{p=0}^{p=4n-1} \frac{1}{\binom{4n-1}{p}} B_p^{4n-1}(v) \sum_{j=\text{Max}(0, p-3n+1)}^{j=\text{Min}(p, n)} \binom{n}{j} \binom{3n-1}{p-j} \alpha_{1(p-j)} \Delta^{10} \mathcal{R}_{0j}$$

et de la même façon pour le terme  $f_2(v) \mathcal{L}_u(1, v)$  :

$$\sum_{p=0}^{p=4n-1} \frac{m}{\binom{4n-1}{p}} B_p^{4n-1}(v) \sum_{j=\text{Max}(0, p-3n+1)}^{j=\text{Min}(p, n)} \binom{n}{j} \binom{3n-1}{p-j} \alpha_{2(p-j)} \Delta^{10} \mathcal{L}_{(m-1)j}$$

et pour le terme  $f_4(v) \mathcal{C}(v)$  :

$$\sum_{p=0}^{p=4n-1} \frac{1}{\binom{4n-1}{p}} B_p^{4n-1}(v) \sum_{j=\text{Max}(0, p-3n+1)}^{j=\text{Min}(p, n)} \binom{n}{j} \binom{3n-1}{p-j} \alpha_{4(p-j)} \mathcal{C}_j$$

Le terme  $f_3(v) \cdot \mathcal{L}_v(1, v)$  s'écrit :

$$n \sum_{p=0}^{p=4n-1} \frac{1}{\binom{4n-1}{p}} B_p^{4n-1}(v) \sum_{j=\text{Max}(0, p-3n)}^{j=\text{Min}(p, (n-1))} \binom{n-1}{j} \binom{3n}{p-j} \alpha_{3(p-j)} \Delta \mathcal{C}_j$$

Alors la condition (1) s'écrit dans la base de Bernstein  $\{B_p^{4n-1}; 0 \leq p \leq (4n-1)\}$

$$\sum_{p=0}^{p=4n-1} \frac{1}{\binom{4n-1}{p}} B_p^{4n-1}(v) \mathcal{D}_p = 0$$

expression dans laquelle

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_p = & \sum_{j=\text{Max}(0, p-3n+1)}^{j=\text{Min}(p, n)} \binom{n}{j} \binom{3n-1}{p-j} [\alpha_{1(p-j)} m \Delta^{10} \mathcal{R}_{0j} + \alpha_{2(p-j)} m \Delta^{10} \mathcal{L}_{(m-1)j} + \alpha_{4(p-j)} \mathcal{C}_j] \\ & + n \sum_{j=\text{Max}(0, p-3n)}^{j=\text{Min}(p, (n-1))} \binom{n-1}{j} \binom{3n}{p-j} \alpha_{3(p-j)} \Delta \mathcal{C}_j \end{aligned}$$

D'où le résultat très général :

**Proposition 3.1.1 :**

Les surfaces  $S_l$  et  $S_r$  sont supposées raccordées  $G^0$ , par la condition (5). Une condition nécessaire et suffisante de raccord  $G^1$  entre ces surfaces est l'existence de coefficients réels :

$\{\alpha_{ik}, i \in \{1, 2, 4\}; 0 \leq k \leq (3n-1)\}$   
et  $\{\alpha_{3k}, 0 \leq k \leq 3n\}$  tels que

$$\forall p \in \{0, \dots, 4n-1\}; \mathcal{D}_p = 0_{\mathcal{F}}$$

ce qui se détaille par la relation

$$\begin{aligned} & \sum_{j=\text{Max}(0, p-3n+1)}^{j=\text{Min}(p, n)} \binom{n}{j} \binom{3n-1}{p-j} [\alpha_{1(p-j)} m \Delta^{10} \mathcal{R}_{0j} + \alpha_{2(p-j)} m \Delta^{10} \mathcal{L}_{(m-1)j} + \alpha_{4(p-j)} \mathcal{C}_j] \\ & + n \sum_{j=\text{Max}(0, p-3n)}^{j=\text{Min}(p, (n-1))} \binom{n-1}{j} \binom{3n}{p-j} \alpha_{3(p-j)} \Delta \mathcal{C}_j = 0_{\mathcal{F}} \end{aligned} \quad (6)$$

ou de manière équivalente , en termes de vecteurs massiques:

$$\sum_{j=\text{Max}(0,p-3n+1)}^{j=\text{Min}(p,n)} \binom{n}{j} \binom{3n-1}{p-j} [\alpha_{1(p-j)} m \Delta^{10} r_{0j} + \alpha_{2(p-j)} m \Delta^{10} l_{(m-1)j} + \alpha_{4(p-j)} c_j]$$

$$+n \sum_{j=\text{Max}(0,p-3n)}^{j=\text{Min}(p,(n-1))} \binom{n-1}{j} \binom{3n}{p-j} \alpha_{3(p-j)} \Delta c_j = 0_{\hat{\mathcal{E}}}$$

### 3.2 Remarque

Cette condition , comprend beaucoup de "degrés de liberté" .

Il y a  $(9n)$  coefficients  $\alpha_{ik}, i \in \{1, 2, 4\}; 0 \leq k \leq (3n - 1)$

et  $3n + 1$  coefficients  $\alpha_{3k}, 0 \leq k \leq 3n$  arbitraires . En outre la condition nécessaire et suffisante de la proposition donne un système de  $4n$  relations destinées à calculer les  $n + 1$  vecteurs massiques  $\{r_{1j}, 0 \leq j \leq n\}$  . Des conditions de compatibilité vont s'avérer nécessaires pour mener ce calcul à son terme. Quelques exemples sont développés maintenant , correspondant

à des choix particuliers des fonctions  $f_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  .

### 3.3 Première condition suffisante de raccord $G^1$

Le jeu suivant de fonctions a été choisi pour obtenir un résultat figurant dans ([2]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \alpha_1 \\ f_2 = \alpha_2 \end{array} \right\} \text{ tels que } a(v) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_3 = \alpha_3 \\ f_4 = \alpha_4 \end{array} \right.$$

$(\alpha_i, i \in \{1, 2, 3, 4\})$  étant un quadruplet de réels vérifiant  $\alpha_1 \alpha_2 < 0$  .

Une simple élévation de longueur sur  $\mathcal{L}_v(1, v)$  amène :

$$\mathcal{L}_v(1, v) = \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) [(n-j)(C_{j+1} - C_j) + j(C_j - C_{j-1})]$$

La relation (1) est alors exprimée dans la base de Bernstein  $\{B_j^n, 0 \leq j \leq n\}$ , et devient :

$$\forall v \in [0, 1],$$

$$\sum_{j=0}^{j=n} \{\alpha_1 m(\mathcal{R}_{1j} - \mathcal{R}_{0j}) + \alpha_2 m(\mathcal{L}_{mj} - \mathcal{L}_{(m-1)j}) + \alpha_3[(n-j)(\mathcal{C}_{j+1} - \mathcal{C}_j) + j(\mathcal{C}_j - \mathcal{C}_{j-1})] + \alpha_4 \mathcal{C}_j\} B_j^n(v) = 0$$

Cette égalité équivaut à :

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\},$$

$$\{\alpha_1 m(\mathcal{R}_{1j} - \mathcal{R}_{0j}) + \alpha_2 m(\mathcal{L}_{mj} - \mathcal{L}_{(m-1)j}) + \alpha_3[(n-j)(\mathcal{C}_{j+1} - \mathcal{C}_j) + j(\mathcal{C}_j - \mathcal{C}_{j-1})] + \alpha_4 \mathcal{C}_j\} = 0$$

D'où le résultat suivant, après application de  $\hat{\Omega}^{-1}$

**Proposition 3.3.1 :**

*Pour réaliser la condition (1) de raccord  $G^1$  entre les surfaces  $S_l$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma$ , il suffit qu'il existe des constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  telles que :*

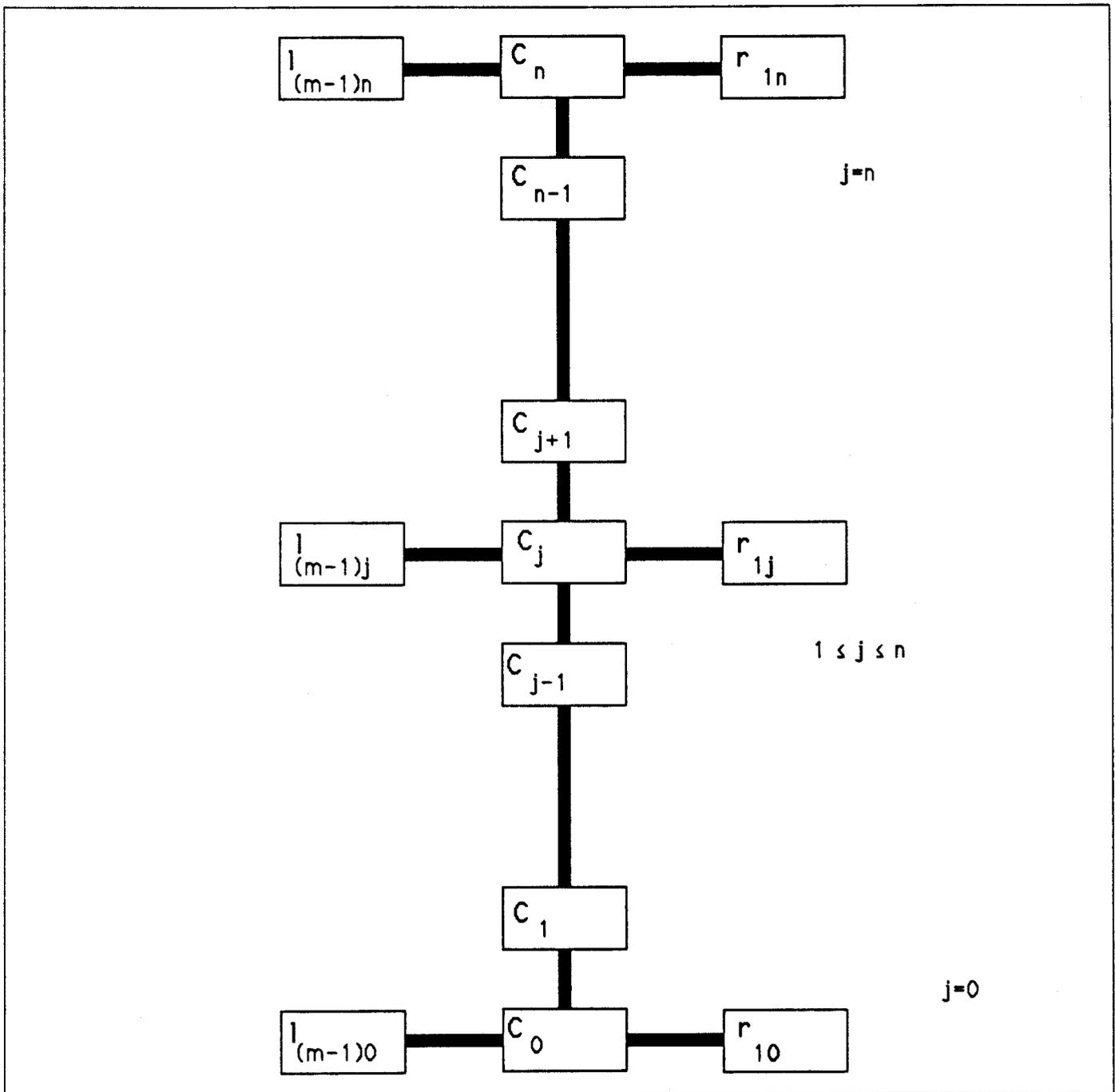
$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, \tag{7}$$

$$\{\alpha_1 m(r_{1j} - r_{0j}) + \alpha_2 m(l_{mj} - l_{(m-1)j}) + \alpha_3[(n-j)(c_{j+1} - c_j) + j(c_j - c_{j-1})] + \alpha_4 c_j\} = 0$$

La figure 3 montre quels sont les vecteurs massiques concernés par ce raccord  $G^1$

Remarque : La formule précédente ne perd pas de généralité si l'on suppose que l'un des coefficients  $\alpha_i, i \in \{1, 2\}$  est égal à 1. Elle donne donc 3 degrés de liberté.

Figure 3 - Chapitre 3



Vecteurs massiques concernés par la relation (7) du chapitre 3 pour le raccord G1 entre deux carreaux (SBR).  
 Les coefficients amènent trois degrés de liberté.

### 3.4 Deuxième Condition suffisante de raccord $G^1$

Comme l'ont fait les auteurs de ([23] , [49] , [59] ) , on peut remplacer l'élevation de longueur de la courbe  $(BP)$   $\mathcal{L}_v(1, v)$  par la multiplication du facteur  $\mathcal{L}_v(1, v)$  par un polynôme du premier degré , ce qui donne un degré de liberté supplémentaire.

Alors , le choix suivant est proposé pour les fonctions  $f_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \alpha_1 \\ f_2 = \alpha_2 \\ f_3 = \frac{\alpha_{31}}{n}(1 - v) + \frac{\alpha_{32}}{n}v \\ f_4 = \alpha_4 \end{array} \right\} \text{ tels que } a(v) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > 0$$

$(\alpha_i, i \in \{1, 2, 4\})$  ,  $\alpha_{31}$  ,  $\alpha_{32}$  étant éléments de  $\mathbb{R}$  .

On utilise alors :

$$(1 - v)B_j^{n-1}(v) = \frac{n-j}{n}B_j^n(v) \text{ et } vB_j^{n-1}(v) = \frac{j+1}{n}B_{j+1}^n(v)$$

Avec ce choix de fonctions coefficients , la relation (1) s'écrit :

$$\forall v \in [0, 1]$$

$$\sum_{j=0}^{j=n} \{ \alpha_1 m(\mathcal{R}_{1j} - \mathcal{R}_{0j}) + \alpha_2 m(\mathcal{L}_{mj} - \mathcal{L}_{(m-1)j}) + \alpha_4 \mathcal{C}_j \\ + \alpha_{31} \frac{n-j}{n} (\mathcal{C}_{j+1} - \mathcal{C}_j) + \alpha_{32} \frac{j}{n} (\mathcal{C}_j - \mathcal{C}_{j-1}) \} B_j^n(v) = 0$$

Cette relation équivaut à :

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\},$$

$$\{ \alpha_1 m(\mathcal{R}_{1j} - \mathcal{R}_{0j}) + \alpha_2 m(\mathcal{L}_{mj} - \mathcal{L}_{(m-1)j}) + \alpha_4 \mathcal{C}_j$$

$$+\alpha_{31} \frac{n-j}{n} (C_{j+1} - C_j) + \alpha_{32} \frac{j}{n} (C_j - C_{j-1}) \} = 0$$

D'où le résultat suivant , après application de  $\hat{\Omega}^{-1}$  :

**Proposition 3.4.1 :**

*Pour réaliser la condition (1) de raccord  $G^1$  entre les surfaces  $S_l$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma$ , il suffit qu'il existe des constantes réelles :*

*$(\alpha_i, i \in \{1, 2, 4\})$ ,  $\alpha_{31}$ ,  $\alpha_{32}$  telles que*

$$\begin{aligned} \forall j \in \{0, 1, \dots, n\} \\ \{ \alpha_1 m(r_{1j} - r_{0j}) + \alpha_2 m(l_{mj} - l_{(m-1)j}) + \alpha_4 c_j \\ + \alpha_{31} \frac{n-j}{n} (c_{j+1} - c_j) + \alpha_{32} \frac{j}{n} (c_j - c_{j-1}) \} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

cf la figure 4

**3.4.1 Remarque**

Cette proposition , d'apparence voisine , de la précédente amène quatre degrés de liberté , donc est plus générale .

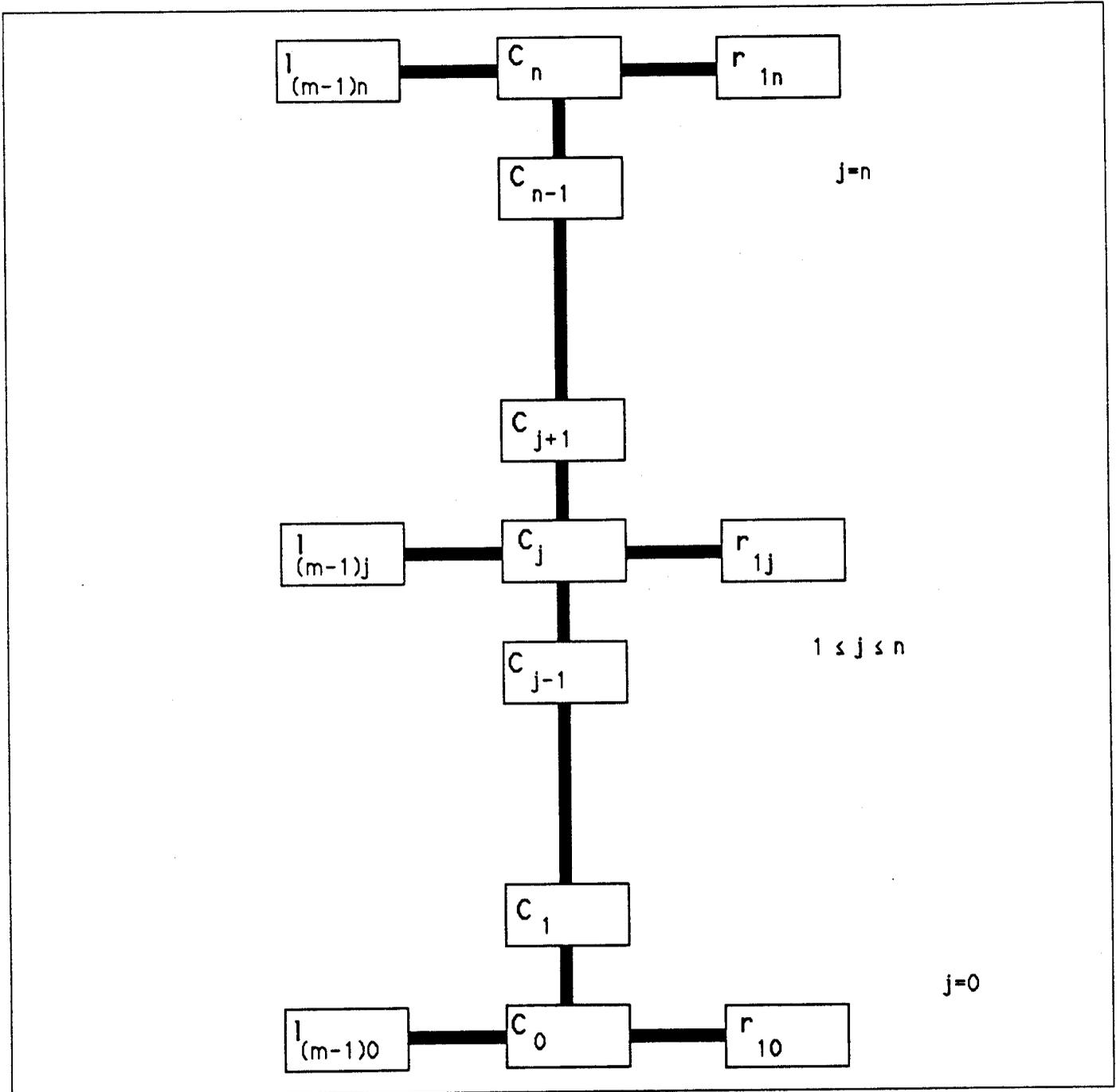
**3.4.2 Interprétation lorsque tous les vecteurs massiques de  $S_l$  sont des points pondérés**

Dans ce paragraphe , tous les vecteurs massiques des réseaux de contrôle de  $S_l$  et  $S_r$  sont supposés être des points pondérés , c'est à dire :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0, 1, \dots, m\} \quad , \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n\} \\ l_{ij} = (L_{ij}, \lambda_{ij}) \\ r_{ij} = (R_{ij}, \rho_{ij}) \end{aligned}$$

Dans ce cas le polygone massique de contrôle de  $\Gamma$  est aussi formé de points pondérés :

Figure 4 - Chapitre 3



Vecteurs massiques concernés par la relation (8) du chapitre 3 pour le raccord G1 entre deux carreaux (SBR). Les coefficients donnent quatre degrés de liberté.

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}, c_j = (C_j, \gamma_j)$$

Alors , l'expression analytique de  $\hat{\Omega}$  donnée dans ([34] , 1. 2. 2.4 page 21) permet les écritures suivantes :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, m\}, \forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\Omega \vec{\mathcal{L}}_{ij} = \lambda_{ij} \Omega_1 \vec{L}_{ij} + \lambda_{ij} \Omega \vec{\Omega}_1$$

$$\Omega \vec{\mathcal{R}}_{ij} = \rho_{ij} \Omega_1 \vec{R}_{ij} + \rho_{ij} \Omega \vec{\Omega}_1$$

$$\Omega \vec{\mathcal{C}}_j = \gamma_j \Omega_1 \vec{C}_j + \gamma_j \Omega \vec{\Omega}_1$$

**Proposition 3.4.2** *La condition suffisante de raccord  $G^1$  :*

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$$

$$\{\alpha_1 m (\mathcal{R}_{1j} - \mathcal{R}_{0j}) + \alpha_2 m (\mathcal{L}_{mj} - \mathcal{L}_{(m-1)j}) + \alpha_4 \mathcal{C}_j$$

$$+ \alpha_{31} \frac{(n-j)}{n} (\mathcal{C}_{j+1} - \mathcal{C}_j) + \alpha_{32} \frac{j}{n} (\mathcal{C}_j - \mathcal{C}_{j-1})\} = 0$$

se traduit :

- par la relation suivante sur les masses :

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1 m (\rho_{1j} - \rho_{0j}) + \alpha_2 m (\lambda_{mj} - \lambda_{(m-1)j}) + \alpha_4 \gamma_j \\ & + \alpha_{31} \frac{(n-j)}{n} (\gamma_{j+1} - \gamma_j) + \alpha_{32} \frac{j}{n} (\gamma_j - \gamma_{j-1})\} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

- par la relation suivante sur les points :

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1 m \rho_{1j} (R_{1j} - C_j) + \alpha_2 m \lambda_{(m-1)j} (C_j - L_{(m-1)j}) \\ & + \alpha_{31} \frac{(n-j)}{n} \gamma_{j+1} (C_{j+1} - C_j) + \alpha_{32} \frac{j}{n} \gamma_j (C_j - C_{j-1})\} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

**Preuve :** Soit  $\mathcal{V}$  le point de  $\mathcal{F}$  défini par :

$$\mathcal{V} = \left\{ \alpha_1 m(\mathcal{R}_{1j} - \mathcal{R}_{0j}) + \alpha_2 m(\mathcal{L}_{mj} - \mathcal{L}_{(m-1)j}) + \alpha_4 \mathcal{C}_j \right. \\ \left. + \alpha_{31} \frac{(n-j)}{n} (\mathcal{C}_{j+1} - \mathcal{C}_j) + \alpha_{32} \frac{j}{n} (\mathcal{C}_j - \mathcal{C}_{j-1}) \right\}$$

Ce point  $\mathcal{V}$  est identifié au vecteur  $\vec{\Omega\mathcal{V}}$  de  $\mathcal{F}$  et

la relation  $\vec{\Omega\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{F}}$  signifie que chacune des composantes dans la base  $\mathcal{B}$  du

vecteur  $\vec{\Omega\mathcal{V}}$  est nulle .

Soient  $\{v_k ; 1 \leq k \leq 4\}$  ces quatre composantes . Alors

$$\vec{\Omega\mathcal{V}} = \sum_{k=1}^{k=3} v_k \vec{e}_k + v_4 \vec{\Omega\Omega_1}$$

$$v_4 = \left\{ \alpha_1 m(\rho_{1j} - \rho_{0j}) + \alpha_2 m(\lambda_{mj} - \lambda_{(m-1)j}) + \alpha_4 \gamma_j \right.$$

$$\left. + \alpha_{31} \frac{(n-j)}{n} (\gamma_{j+1} - \gamma_j) + \alpha_{32} \frac{j}{n} (\gamma_j - \gamma_{j-1}) \right\}$$

Donc la relation  $v_4 = 0$  équivaut à (9) .

La nullité du vecteur  $\vec{\Omega\mathcal{V}}$  entraîne aussi celle de

$$\sum_{k=1}^{k=3} v_k \vec{e}_k$$

ce qui se traduit par :

$$\left\{ \alpha_1 m(\rho_{1j} R_{1j} - \rho_{0j} R_{0j}) + \alpha_2 m(\lambda_{mj} L_{mj} - \lambda_{(m-1)j} L_{(m-1)j}) + \alpha_4 \gamma_j C_j \right.$$

$$\left. + \alpha_{31} \frac{(n-j)}{n} (\gamma_{j+1} C_{j+1} - \gamma_j C_j) + \alpha_{32} \frac{j}{n} (\gamma_j C_j - \gamma_{j-1} C_{j-1}) \right\} = 0$$

Comme  $\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$  ,  $c_j = r_{0j}$  et  $c_j = l_{mj}$  ,

$$\begin{cases} \forall j \in \{0, 1, \dots, n\} \\ \gamma_j = \lambda_{mj} & L_{mj} = C_j \\ \gamma_j = \rho_{0j} & R_{0j} = C_j \end{cases}$$

Alors ,

$$\sum_{k=1}^{k=3} v_k \vec{e}_k = 0 \text{ entraîne } \sum_{k=1}^{k=3} v_k \vec{e}_k - v_4.C_j = 0$$

qui se traduit sur les points par :

$$\{\alpha_1 m \rho_{1j}(R_{1j} - C_j) + \alpha_2 m \lambda_{(m-1)j}(C_j - L_{(m-1)j}) \\ + \alpha_{31} \frac{(n-j)}{n} \gamma_{j+1}(C_{j+1} - C_j) + \alpha_{32} \frac{j}{n} \gamma_j(C_j - C_{j-1})\} = 0$$

C'est la relation (10) .

Remarques:

- Nous retrouvons ici des résultats donnés par Liu ([49]).
- Dans le cas où les deux surfaces  $S_l$  et  $S_r$  sont des (SBP) , le choix  $\alpha_4 = 0$  redonne une condition suffisante de raccord  $G^1$  qui a été utilisée par Du ([23]).

## 4 Raccord $G^2$ entre $S_l$ et $S_r$ le long de $\Gamma$

### 4.1 Rappel des conditions et traitement du cas général

Il s'agit , maintenant , de traduire en termes de vecteurs massiques la condition (2) de raccord  $G^2$ :

Selon le résultat rappelé en tête de ce chapitre , et comme  $\frac{\lambda(1,v)}{\rho(0,v)} = 1$  , à cause de la condition (5) ,

les surfaces  $S_l$  et  $S_r$  sont raccordées  $G^2$  le long de  $\Gamma$  si et seulement si il existe quatre fonctions polynomiales  $h_1, h_2, h_3, h_4$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathcal{R}$  telles que

$$\forall v \in [0, 1] , h_1(v) \neq 0$$

$$\forall v \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} & h_1(v)(\mathcal{R}_{uu}(0, v) - a^2(v)\mathcal{L}_{uu}(1, v) - 2a(v)b(v)\mathcal{L}_{uv}(1, v) - b^2(v)\mathcal{L}_{vv}(1, v)) \\ & + h_2(v)\mathcal{L}_u(1, v) + h_3(v)\mathcal{L}_v(1, v) + h_4(v)\mathcal{C}(v) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

En dérivant une fois de plus les expressions suivantes , obtenues au paragraphe 2 :

$$\mathcal{C}(v) = BP(\mathcal{C}_j, 0 \leq j \leq n; [0, 1])(v)$$

$$\mathcal{L}_v(1, v) = n \sum_{j=0}^{j=n-1} B_j^{n-1}(v) \Delta \mathcal{C}_j$$

$$\mathcal{L}_u(1, v) = m \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) (\mathcal{L}_{mj} - \mathcal{L}_{(m-1)j})$$

$$\mathcal{R}_u(0, v) = m \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) (\mathcal{R}_{1j} - \mathcal{R}_{0j})$$

il vient :

$$\mathcal{L}_{vv}(1, v) = n(n-1) \sum_{j=0}^{j=n-2} B_j^{n-2}(v) \Delta^2 \mathcal{C}_j$$

(Remarquons que  $\mathcal{L}_{vv}(1, v) = \mathcal{C}''(v)$  )

$$\mathcal{L}_{uu}(1, v) = m(m-1) \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) \Delta^{20} \mathcal{L}_{(m-2)j}$$

définit une courbe de  $\mathcal{F}$  polynomiale de degré  $n$ .

$$\mathcal{R}_{uu}(0, v) = m(m-1) \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) \Delta^{20} \mathcal{R}_{0j}$$

définit une courbe de  $\mathcal{F}$  polynomiale de degré  $n$ .

$$\mathcal{L}_{uv}(1, v) = mn \sum_{j=0}^{j=n-1} B_j^{n-1}(v) [\Delta^{10} \mathcal{L}_{(m-1)(j+1)} - \Delta^{10} \mathcal{L}_{(m-1)j}]$$

définit une courbe de  $\mathcal{F}$  polynomiale de degré  $n-1$ .

La condition nécessaire et suffisante (6) de raccord  $G^1$  est supposée réalisée

avec pour  $i \in \{1, 2, 4\}$ , :

$$f_i(v) = \sum_{k=0}^{k=3n-1} \alpha_{ik} B_k^{3n-1}(v)$$

et

$$f_3(v) = \sum_{k=0}^{k=3n} \alpha_{3k} B_k^{3n}(v).$$

Alors, compte-tenu des résultats du chapitre 2 :

$$R_u(1, v) = a(v)L_u(1, v) + b(v)L_v(1, v)$$

avec  $a(v) = -\frac{f_2(v)}{f_1(v)}$  qui a été supposé positif strictement, et  $b(v) = -\frac{f_3(v)}{f_1(v)}$ .

La relation (2) multipliée par la fonction non nulle  $f_1^2(v)$  s'écrit :

$$\forall v \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} & h_1(v)[f_1^2(v)\mathcal{R}_{uu}(0, v) - f_2^2(v)\mathcal{L}_{uu}(1, v) - 2f_2(v)f_3(v)\mathcal{L}_{uv}(1, v) - f_3^2(v)\mathcal{L}_{vv}(1, v)] \\ & + h_2(v)f_1^2(v)\mathcal{L}_u(1, v) + h_3(v)f_1^2(v)\mathcal{L}_v(1, v) + h_4(v)f_1^2(v)\mathcal{C}(v) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Reprenant les notations de l'annexe 1 , nous posons :

$$\mathcal{V}_1 = f_1^2(v)\mathcal{R}_{uu}(0, v) - f_2^2(v)\mathcal{L}_{uu}(1, v) - 2f_2(v)f_3(v)\mathcal{L}_{uv}(1, v) - f_3^2(v)\mathcal{L}_{vv}(1, v)$$

$$\mathcal{V}_2 = f_1^2(v)\mathcal{L}_u(1, v)$$

$$\mathcal{V}_3 = f_1^2(v)\mathcal{L}_v(1, v)$$

$$\mathcal{V}_4 = f_1^2(v)\mathcal{C}(v)$$

Les fonctions vectorielles  $\mathcal{V}_1$  ,  $\mathcal{V}_2$  ,  $\mathcal{V}_4$  sont polynomiales de degré  $7n - 2$  et la fonction vectorielle  $\mathcal{V}_3$  est polynomiale de degré  $7n - 3$  , ce qui se traduit sous la forme :

$$\mathcal{V}_i = \sum_{j=0}^{j=7n-2} B_j^{7n-2}(v)\mathcal{V}_{ij} , i \in \{1, 2, 4\}$$

et

$$\mathcal{V}_3 = \sum_{j=0}^{j=7n-3} B_j^{7n-3}(v)\mathcal{V}_{3j}$$

$$\mathcal{V}_{1j} , \mathcal{V}_{2j} , \mathcal{V}_{4j} , \mathcal{V}_{3j}$$

étant des points de  $\mathcal{F}$  déterminés à partir des points des réseaux de définition des surfaces  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$ .

(La convention adoptée dans tout le travail conduit à poser  $\bar{\Omega}\mathcal{V}_{ij}=\hat{\Omega}(v_{ij})$  avec  $v_{ij} \in \hat{\mathcal{E}}$ .)

Alors , la relation

$$\sum_{q=1}^{q=4} h_q(v)\mathcal{V}_q = 0$$

détermine les quatre fonctions  $\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$  à une fonction multiplicative près , à savoir :

$h_q, q \in \{1, 2, 4\}$  sont des polynômes de degré  $21n - 7$  et  $h_3$  est un polynôme de degré  $21n - 6$  .

Il existe donc des coefficients réels :

$\{\beta_{ik}, i \in \{1, 2, 4\}; 0 \leq k \leq (21n - 7)\}$  et  $\{\beta_{3k}, 0 \leq k \leq 21n - 6\}$  tels que :

$$\forall v \in [0, 1], \forall i \in \{1, 2, 4\}, h_i(v) = \sum_{k=0}^{k=21n-7} \beta_{ik} B_k^{21n-7}(v)$$

$$\forall v \in [0, 1], h_3(v) = \sum_{k=0}^{k=21n-6} \beta_{3k} B_k^{21n-6}(v)$$

En décomposant le domaine des indices ,

$\{(j, k) \mid 0 \leq j \leq 7n - 2, 0 \leq k \leq (21n - 7)\}$  en trois zones et en posant  $k + j = p$  , nous obtenons l'écriture suivante pour le terme  $h_1(v) \cdot \mathcal{V}_1$ :

$$\begin{aligned} h_1(v) \cdot \mathcal{V}_1 &= \sum_{k=0}^{k=21n-7} \beta_{1k} B_k^{21n-7}(v) \cdot \sum_{j=0}^{j=7n-2} B_j^{7n-2}(v) \mathcal{V}_{1j} \\ &= \sum_{p=0}^{p=7n-2} \sum_{j=0}^{j=p} \beta_{1(p-j)} \mathcal{V}_{1j} B_j^{7n-2}(v) B_{(p-j)}^{21n-7}(v) + \sum_{p=7n-1}^{p=21n-7} \sum_{j=0}^{j=7n-2} \beta_{1(p-j)} \mathcal{V}_{1j} B_j^{7n-2}(v) B_{(p-j)}^{21n-7}(v) \\ &\quad + \sum_{p=21n-6}^{p=28n-9} \sum_{j=p-21n+7}^{j=7n-2} \beta_{1(p-j)} \mathcal{V}_{1j} B_j^{7n-2}(v) B_{(p-j)}^{21n-7}(v) \end{aligned}$$

En observant que  $B_j^{7n-2}(v)B_{(p-j)}^{21n-7}(v) = \frac{\binom{7n-2}{j}\binom{21n-7}{p-j}}{\binom{28n-9}{p}}B_p^{28n-9}(v)$ :

le terme  $h_1(v).\mathcal{V}_1$  s'écrit:

$$\sum_{p=0}^{p=28n-9} \frac{1}{\binom{28n-9}{p}} B_p^{28n-9}(v) \sum_{j=\text{Max}(0,p-21n+7)}^{j=\text{Min}(p,7n-2)} \binom{7n-2}{j} \binom{21n-7}{p-j} \beta_{1(p-j)} \mathcal{V}_{1j}$$

et de la même façon pour le terme  $h_2(v).\mathcal{V}_2$  :

$$\sum_{p=0}^{p=28n-9} \frac{1}{\binom{28n-9}{p}} B_p^{28n-9}(v) \sum_{j=\text{Max}(0,p-21n+7)}^{j=\text{Min}(p,7n-2)} \binom{7n-2}{j} \binom{21n-7}{p-j} \beta_{2(p-j)} \mathcal{V}_{2j}$$

et pour le terme  $h_4(v).\mathcal{V}_4$  :

$$\sum_{p=0}^{p=28n-9} \frac{1}{\binom{28n-9}{p}} B_p^{28n-9}(v) \sum_{j=\text{Max}(0,p-21n+7)}^{j=\text{Min}(p,7n-2)} \binom{7n-2}{j} \binom{21n-7}{p-j} \beta_{4(p-j)} \mathcal{V}_{4j}$$

le terme  $h_3(v).\mathcal{V}_3$  s'écrit :

$$\sum_{p=0}^{p=28n-9} \frac{1}{\binom{28n-9}{p}} B_p^{28n-9}(v) \sum_{j=\text{Max}(0,p-21n+6)}^{j=\text{Min}(p,(7n-3))} \binom{7n-3}{j} \binom{21n-6}{p-j} \beta_{3(p-j)} \mathcal{V}_{3j}$$

Alors la condition ( 2) de raccord  $G^2$  s'écrit dans la base de Bernstein  $\{B_p^{28n-9}; 0 \leq p \leq (28n-9)\}$  :

$$\sum_{p=0}^{p=28n-9} \frac{1}{\binom{28n-9}{p}} B_p^{28n-9} \mathcal{H}_p = 0$$

expression dans laquelle

$$\mathcal{H}_p = \sum_{j=\text{Max}(0, p-21n+7)}^{j=\text{Min}(p, 7n-2)} \binom{7n-2}{j} \binom{21n-7}{p-j} [\beta_{1(p-j)} \mathcal{V}_{1j} + \beta_{2(p-j)} \mathcal{V}_{2j} + \beta_{4(p-j)} \mathcal{V}_{4j}]$$

$$+ \sum_{j=\text{Max}(0, p-21n+6)}^{j=\text{Min}(p, 7n-3)} \binom{7n-3}{j} \binom{21n-6}{p-j} \beta_{3(p-j)} \mathcal{V}_{3j}$$

D'où le résultat très général :

**Proposition 4.1.1 :**

Les surfaces  $S_l$  et  $S_r$  sont supposées raccordées  $G^0$ , par la condition (5) et  $G^1$  par la condition (6). Une Condition nécessaire et suffisante de raccord  $G^2$  entre ces surfaces est l'existence de coefficients réels :

$\{\beta_{ik}, i \in \{1, 2, 4\}; 0 \leq k \leq (21n - 7)\}$   
 et  $\{\beta_{3k}, 0 \leq k \leq 21n - 6\}$  tels que

$$\forall p \in \{0, \dots, 28n - 9\}; \mathcal{H}_p = 0_{\mathcal{F}}$$

ce qui se détaille par la relation

$$\sum_{j=\text{Max}(0, p-21n+7)}^{j=\text{Min}(p, 7n-2)} \binom{7n-2}{j} \binom{21n-7}{p-j} [\beta_{1(p-j)} \mathcal{V}_{1j} + \beta_{2(p-j)} \mathcal{V}_{2j} + \beta_{4(p-j)} \mathcal{V}_{4j}]$$

$$+ \sum_{j=\text{Max}(0, p-21n+6)}^{j=\text{Min}(p, 7n-3)} \binom{7n-3}{j} \binom{21n-6}{p-j} \beta_{3(p-j)} \mathcal{V}_{3j} = 0_{\mathcal{F}}$$

ou de manière équivalente, en termes de vecteurs massiques:

$$\sum_{j=\text{Max}(0,p-21n+7)}^{j=\text{Min}(p,7n-2)} \binom{7n-2}{j} \binom{21n-7}{p-j} [\beta_{1(p-j)}v_{1j} + \beta_{2(p-j)}v_{2j} + \beta_{4(p-j)}v_{4j}]$$

$$+ \sum_{j=\text{Max}(0,p-21n+6)}^{j=\text{Min}(p,7n-3)} \binom{7n-3}{j} \binom{21n-6}{p-j} \beta_{3(p-j)}v_{3j} = 0_{\hat{\varepsilon}}$$

## 4.2 Remarque

Cette condition , comprend de nombreux "degrés de liberté" .  
 Il y a  $63n - 18$  coefficients  $\beta_{ik}, i \in \{1, 2, 4\}; 0 \leq k \leq (21n - 7)$   
 et  $21n - 5$  coefficients  $\beta_{3k}, 0 \leq k \leq 21n - 6$  arbitraires .Mais la proposition  
 précédente fournit un système de  $(28n - 8)$  équations destinées à calculer la  
 seconde rangée de vecteurs massiques  $\{r_{2j} \ 0 \leq j \leq n\}$  . Dans une perspective  
 de C.A.O. des conditions de compatibilité seront nécessaires.

Des conditions suffisantes peuvent être trouvées dans les références [2] et [59]

## 4.3 Utilisation de la condition suffisante de raccord $G^1$ du paragraphe 3-4

La condition suffisante (8) de raccord  $G^1$  est supposée réalisée .

Alors , compte-tenu des remarques du chapitre 2 :

$$R_u(1, v) = a(v)L_u(1, v) + b(v)L_v(1, v)$$

avec  $a(v) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$  qui a été supposé positif strictement .

$$\text{et } b(v) = -\frac{\alpha_{31}}{n\alpha_1}(1 - v) - \frac{\alpha_{32}}{n\alpha_1}v$$

$$\text{Alors } a^2(v) = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2$$

$$a(v)b(v) = \frac{\alpha_{31}\alpha_2}{n\alpha_1^2}(1 - v) + \frac{\alpha_{32}\alpha_2}{n\alpha_1^2}v$$

$$\text{et } b^2(v) = \left(\frac{\alpha_{31}}{n\alpha_1}\right)^2(1 - v)^2 + 2\frac{\alpha_{31}\alpha_{32}}{(n\alpha_1)^2}v(1 - v) + \left(\frac{\alpha_{32}}{n\alpha_1}\right)^2v^2$$

Considérons les calculs intermédiaires suivants qui expriment les différentes expressions dans la base de Bernstein de degré  $n$ .

$$(1 - v)B_j^{n-1}(v) = \frac{n-j}{n}B_j^n(v) \text{ (nul pour } j = n \text{) ,}$$

$$vB_j^{n-1}(v) = \frac{j+1}{n}B_{j+1}^n(v) \text{ (nul pour } j = -1 \text{)}$$

$$(1 - v)^2B_j^{n-2}(v) = \frac{(n-j)(n-j-1)}{n(n-1)}B_j^n(v) \text{ (nul pour } j = n \text{ et } j = n - 1 \text{)}$$

$$v(1 - v)B_j^{n-2}(v) = \frac{(j+1)(n-j-1)}{n(n-1)}B_{j+1}^n(v) \text{ (nul pour } j = n - 1 \text{ et } j = -1 \text{)}$$

$$v^2B_j^{n-2}(v) = \frac{(j+1)(j+2)}{n(n-1)}B_{j+2}^n(v) \text{ (nul pour } j = -2 \text{ et } j = -1 \text{)}$$

Alors , avec de simples changements d'indices, nous obtenons :

$$(1 - v)\mathcal{L}_{uv}(1, v) = m \sum_{j=0}^{j=n} (n - j)[(\mathcal{L}_{m(j+1)} - \mathcal{L}_{(m-1)(j+1)}) - (\mathcal{L}_{mj} - \mathcal{L}_{(m-1)j})]B_j^n(v)$$

ou encore

$$(1 - v)\mathcal{L}_{uv}(1, v) = m \sum_{j=0}^{j=n} (n - j)[(\mathcal{C}_{j+1} - \mathcal{L}_{(m-1)(j+1)}) - (\mathcal{C}_j - \mathcal{L}_{(m-1)j})]B_j^n(v)$$

$$v\mathcal{L}_{uv}(1, v) = m \sum_{j=0}^{j=n} j[(\mathcal{L}_{mj} - \mathcal{L}_{(m-1)j}) - (\mathcal{L}_{m(j-1)} - \mathcal{L}_{(m-1)(j-1)})]B_j^n(v)$$

ou encore

$$v\mathcal{L}_{uv}(1, v) = m \sum_{j=0}^{j=n} j[(\mathcal{C}_j - \mathcal{L}_{(m-1)j}) - (\mathcal{C}_{j-1} - \mathcal{L}_{(m-1)(j-1)})]B_j^n(v)$$

et

$$(1 - v)^2\mathcal{L}_{uv}(1, v) = \sum_{j=0}^{j=n} (n - j)(n - j - 1)(\mathcal{C}_{j+2} - 2\mathcal{C}_{j+1} + \mathcal{C}_j)B_j^n(v)$$

$$v(1-v)\mathcal{L}_{vv}(1,v) = \sum_{j=0}^{j=n} j(n-j)(\mathcal{C}_{j+1} - 2\mathcal{C}_j + \mathcal{C}_{j-1})B_j^n(v)$$

$$v^2\mathcal{L}_{vv}(1,v) = \sum_{j=0}^{j=n} j(j-1)(\mathcal{C}_j - 2\mathcal{C}_{j-1} + \mathcal{C}_{j-2})B_j^n(v)$$

En reprenant les conventions du chapitre 1 pour signifier des différences progressives, le terme :

$$(\mathcal{R}_{uu} - a^2(v)\mathcal{L}_{uu} - 2a(v)b(v)\mathcal{L}_{uv} - b^2(v)\mathcal{L}_{vv})$$

peut s'exprimer dans la base de Bernstein

$\{B_j^n; j \in \{0, \dots, n\}\}$  par :

$$(\mathcal{R}_{uu} - a^2(v)\mathcal{L}_{uu} - 2a(v)b(v)\mathcal{L}_{uv} - b^2(v)\mathcal{L}_{vv}) = \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v)\mathcal{A}_j$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_j = & m(m-1)\Delta^{20}\mathcal{R}_{0j} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 m(m-1)\Delta^{20}\mathcal{L}_{(m-2)j} - 2\frac{\alpha_{32}\alpha_2}{n\alpha_1^2}mj(\Delta^{10}\mathcal{L}_{(m-1)j} \\ & - \Delta^{10}\mathcal{L}_{(m-1)(j-1)}) - 2\frac{\alpha_{31}\alpha_2}{n\alpha_1^2}m(n-j)(\Delta^{10}\mathcal{L}_{(m-1)(j+1)} - \Delta^{10}\mathcal{L}_{(m-1)j}) \\ & - \left(\frac{\alpha_{31}}{n\alpha_1}\right)^2(n-j)(n-j-1)\Delta^2\mathcal{C}_j - 2\frac{\alpha_{31}\alpha_{32}}{(n\alpha_1)^2}j(n-j)\Delta^2\mathcal{C}_{j-1} - \left(\frac{\alpha_{32}}{n\alpha_1}\right)^2j(j-1)\Delta^2\mathcal{C}_{j-2} \end{aligned}$$

### 4.3.1 Condition suffisante de raccord $G^2$

Les fonctions  $\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$  sont choisies de la manière suivante :

$$h_1(v) = 1$$

$$h_2(v) = \beta_2$$

$$h_4(v) = \beta_4$$

$$h_3(v) = \beta_{31}(1-v) + \beta_{32}v$$

( $\{\beta_i, i \in \{2, 4, \dots\}\}$ ,  $\beta_{31}, \beta_{32}$  étant des réels).

Comme il a déjà été vu :

$$h_3(v)\mathcal{L}_v(1, v) = \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v)[(n-j)\beta_{31}\Delta\mathcal{C}_j + j\beta_{32}\Delta\mathcal{C}_{j-1}]$$

Alors pour réaliser la condition de raccord  $G^2$ , il suffit de vérifier :  
 $\forall v \in [0, 1]$ ,

$$\sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v)[\mathcal{A}_j + \beta_2 m \Delta^{10} \mathcal{L}_{(m-1)j} + \beta_4 \mathcal{C}_j + (n-j)\beta_{31}\Delta\mathcal{C}_j + j\beta_{32}\Delta\mathcal{C}_{j-1}] = 0$$

d'où :

**Proposition 4.3.1** : *Sachant que la condition (5) et la condition (8) sont réalisées, une condition suffisante de raccord  $G^2$  entre les deux surfaces  $S_l$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma$  consiste en l'existence de quatre scalaires réels  $\{\beta_i, i \in \{2, 4, \}, \beta_{31}, \beta_{32}\}$  tels que :*

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad (13)$$

$$\mathcal{A}_j + \beta_2 m \Delta^{10} \mathcal{L}_{(m-1)j} + \beta_4 \mathcal{C}_j + (n-j)\beta_{31}\Delta\mathcal{C}_j + j\beta_{32}\Delta\mathcal{C}_{j-1} = 0_{\mathcal{F}}$$

ou, de manière équivalente, en terme de vecteurs massiques :

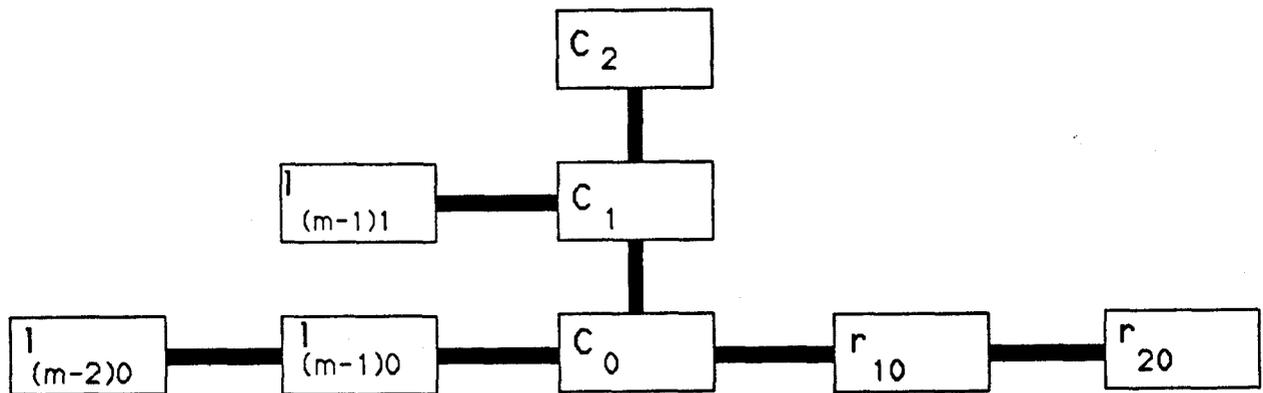
$$\forall j \in \{0, \dots, n\} \quad a_j + \beta_2 m \Delta^{10} l_{(m-1)j} + \beta_4 c_j + (n-j)\beta_{31}\Delta c_j + j\beta_{32}\Delta c_{j-1} = 0_{\hat{\mathcal{E}}} \quad (14)$$

#### 4.3.2 Remarque : nouveaux degrés de liberté .

Dans les deux conditions suffisantes (13) et (14) les coefficients  $\beta_i, i \in \{2, 3, 4, 5\}$  sont de nouveaux degrés de liberté laissés à l'utilisateur .

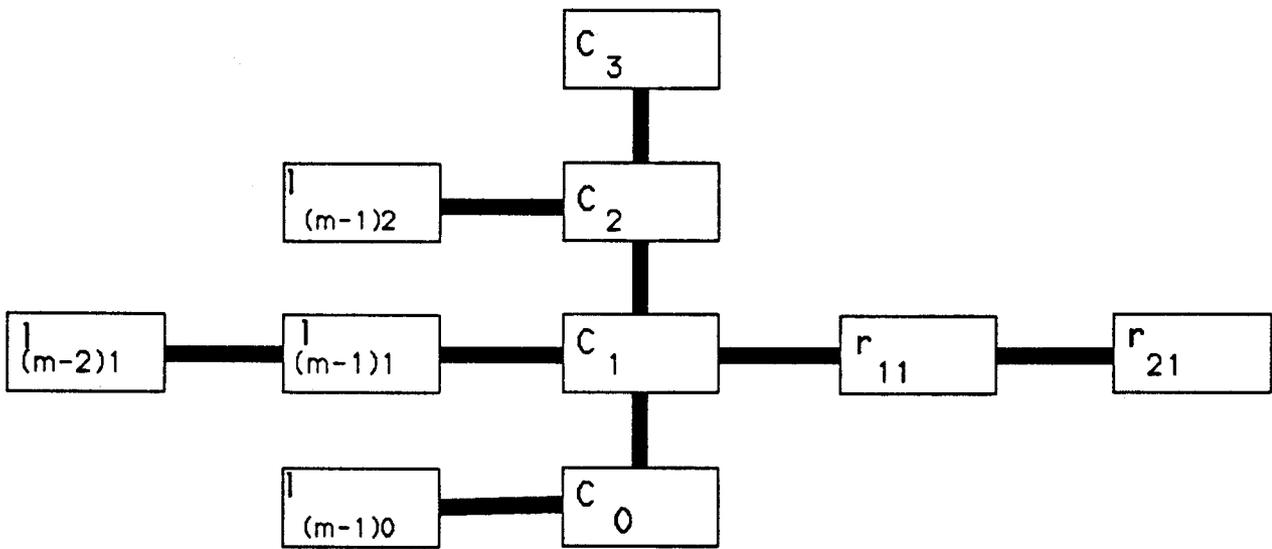
La figure 5 montre quels sont les vecteurs massiques concernés par les relations (13) et (14) .

Figure 5-chapitre 3



Vecteurs massiques concernés par la relation (13) du chapitre 3 (condition suffisante de raccord G2 entre deux carreaux (SBR)).  
 $j=0$  ( Le cas  $j = n$  est similaire )

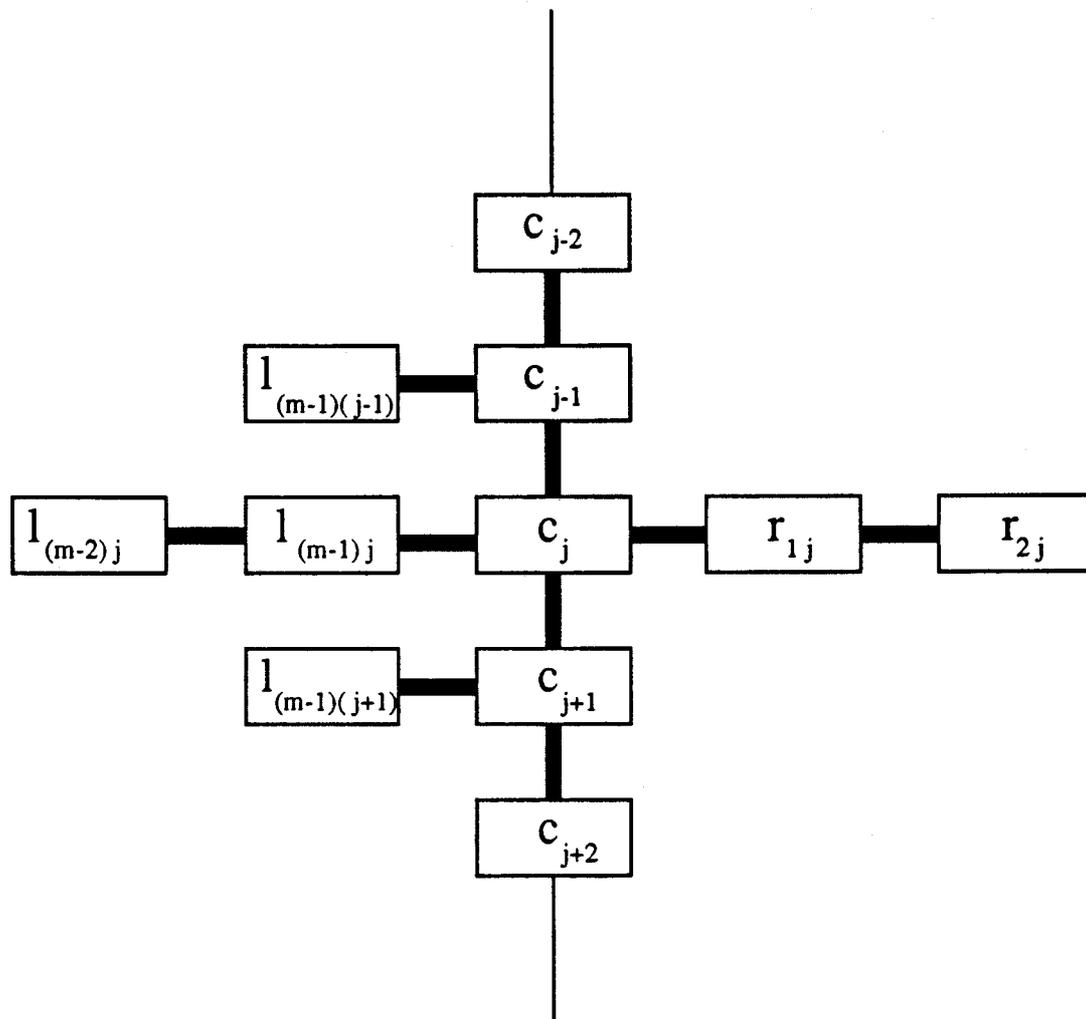
Figure 5 - Chapitre 3



Vecteurs massiques concernés par la relation (13) du chapitre 3 (condition suffisante de raccord G2 entre deux carreaux (SBR)).

$j = 1$  ( Le cas  $j = n-1$  est similaire)

**Figure 5-chapitre3**



**Vecteurs massiques concernés par la relation (13) du chapitre 3  
 $2 \leq j \leq n-2$**

### 4.3.3 Aspect algorithmique

Il est clair que la condition ( 12) donne un moyen de construire la deuxième rangée de vecteurs massiques de  $S_r$  , soit tous les vecteurs  $r_{2j}, j \in \{0, \dots, n\}$  . Les propositions ci-dessus indiquent quels sont les coefficients en jeu .

Tous les résultats obtenus dans ce chapitre vont maintenant être illustrés par un exemple complet , dont le développement constitue le chapitre 4.

# QUATRIEME CHAPITRE

## Un exemple complet.

1. Raccordement de deux morceaux de paraboloides.	page 92
1.1 Définition de la surface ( <i>SBR</i> ) $S_r$ .	page 93
1.2 Définition de la surface ( <i>SBR</i> ) $S_l$ .	page 95
1.3 Raccord $G^0$ entre $S_l$ et $S_r$ .	page 96
1.4 Raccord $G^1$ entre $S_l$ et $S_r$ .	page 102
1.5 Interprétation en termes de vecteurs massiques.	page 105
1.6 Raccord $G^2$ entre $S_l$ et $S_r$ .	page 110
2. Construction d'une nouvelle ( <i>SBR</i> ) raccordée $G^2$ à $S_l$ .	page 113
2.1 Raccord $G^0$ .	page 114
2.2 Raccord $G^1$ .	page 114
2.3 Raccord $G^2$ .	page 116
2.4 Résultat final: réseau massique de la nouvelle ( <i>SBR</i> ).	page 118
2.5 Autre surface $S_r$ possible.	page 118
3. Conclusion.	page 121

# Un exemple complet

## 1 Raccordement de deux morceaux de parabolöide

$\mathcal{E}$  est l'espace affine associé à  $\mathbb{R}^3$  et  $\tilde{\mathcal{E}}$  son complété projectif

Soit le repère affine  $\mathcal{R}_1 = (\Omega_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  et un repère "au-dessus".

$$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{\Omega}_1)$$

Dans cet exemple nous allons considérer deux morceaux du parabolöide

$$S \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = s^2 + t^2 - 1 \end{cases}$$

$S_l$  est le morceau de  $S$  défini sur le quadrangle  $Q_l = \{s \geq 0; t \geq 0; s + t \leq 1; 2s - t \leq 1\}$  ;

c'est la restriction du parabolöide à  $Q_l$ .

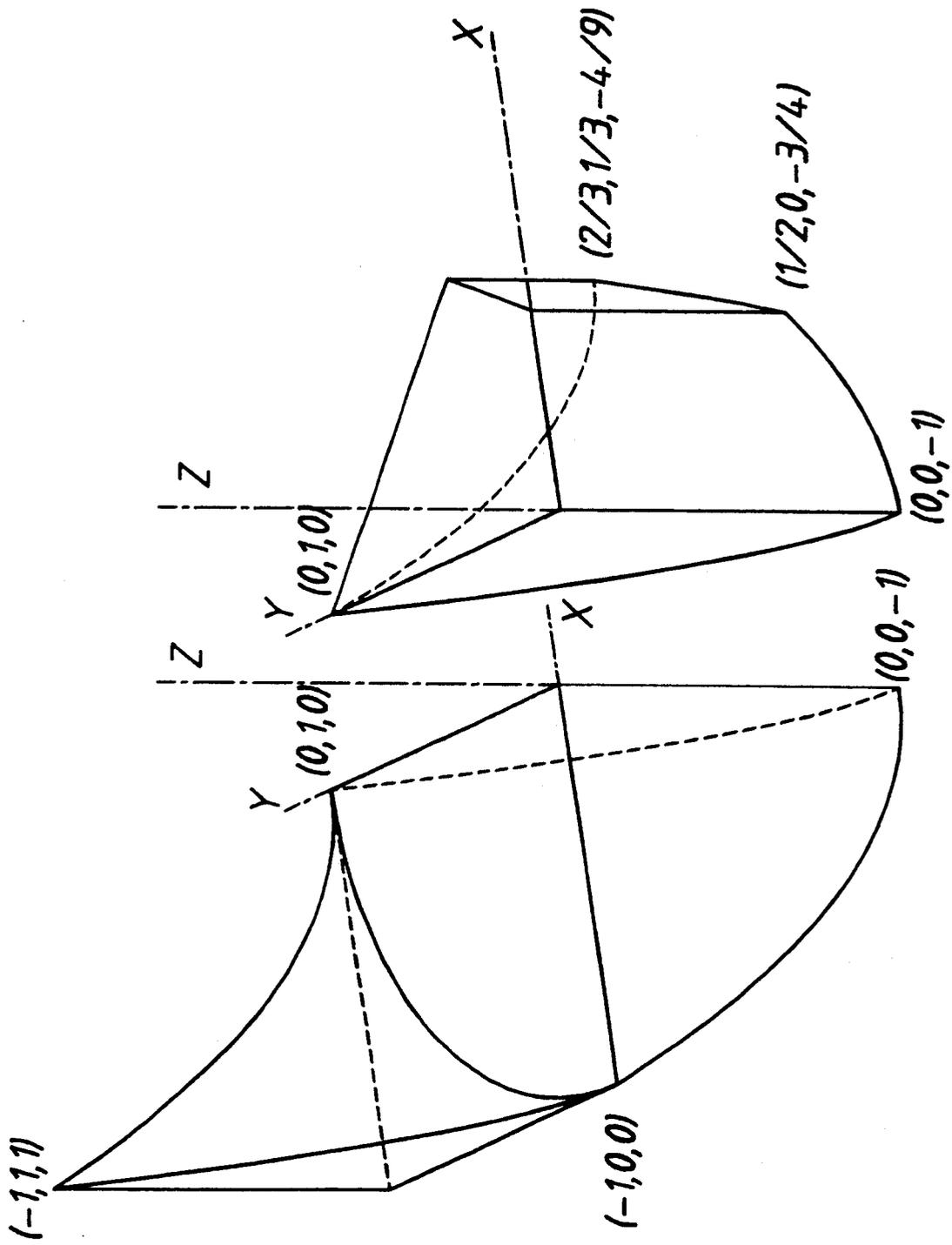
$S_r$  est le morceau de  $S$  défini sur le quadrangle  $Q_r = \{-1 \leq s \leq 0; 0 \leq t \leq 1\}$  ; c'est la

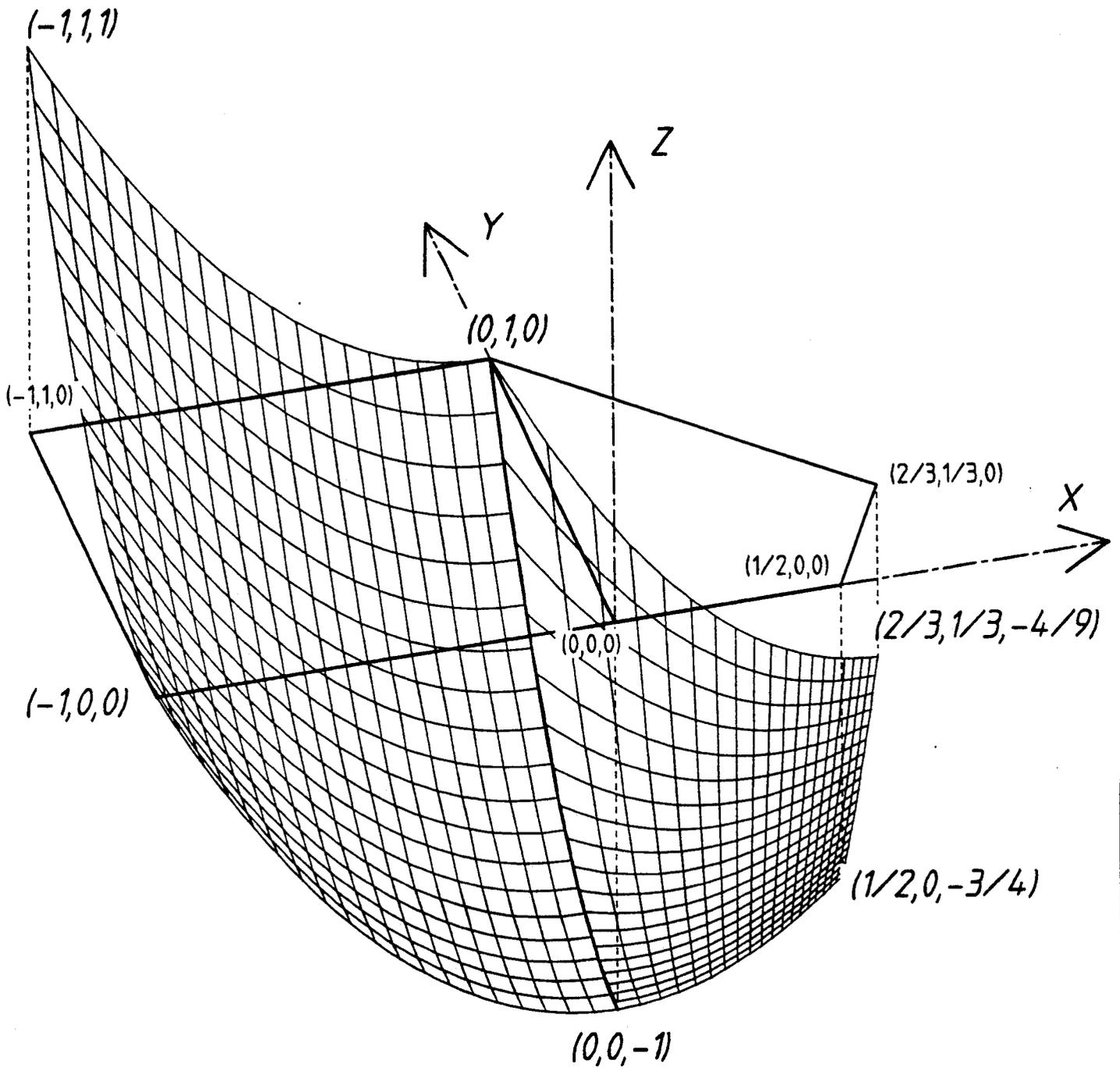
restriction du parabolöide à  $Q_r$ .

La frontière commune  $\Gamma$  entre  $S_l$  et  $S_r$  est l'arc de parabole paramétré par:

$$x = s, y = 0, z = s^2 - 1, s \in [0, 1]$$

cf la figure 1





Nous allons illustrer le chapitre 3 en mettant en évidence les différentes fonctions qui expriment les raccords  $G^0$ ,  $G^1$  et  $G^2$  entre deux surfaces ( $SBR$ ) définies sur  $[0, 1]^2$ . Pour cela, sachant que  $S_l$  et  $S_r$  ont toutes les bonnes propriétés de raccordement le long de leur frontière commune, nous les reparamétrisons de manière à nous retrouver dans le cadre des hypothèses du chapitre 3 : les deux surfaces doivent être des ( $SBR$ ) définies sur  $[0, 1]^2$  et le raccordement se fait en  $(1, v)$  pour  $S_l$  et en  $(0, v)$  pour  $S_r$ .

### 1.1 Réseau massique de $S_r$

Sur  $\{(u, v) / 0 \leq u \leq 1; 0 \leq v \leq 1\}$ ,

$S_r$  est donnée par le paramétrage polynomial suivant :

$$\begin{cases} x = -u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 - 1 \end{cases}$$

$S_r$  est alors une surface ( $SBP$ ) et donc une surface ( $SBR$ ) contrôlée par un réseau massique formé de points pondérés par des masses égales à 1.

$$S_r = SBR\{r_{ij}, 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2; [0, 1]^2\}$$

où les  $r_{ij}$  sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

$j \setminus i$	0	1	2
2	$((0,1,0);1)$	$((-\frac{1}{2},1,0);1)$	$((-1,1,1);1)$
1	$((0,\frac{1}{2},-1);1)$	$((-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1);1)$	$((-1,\frac{1}{2},0);1)$
0	$((0,0,-1);1)$	$((-\frac{1}{2},0,-1);1)$	$((-1,0,0);1)$

**Preuve:** Toutes les masses sont égales à 1. Mettons sous forme (SBP) la surface polynomiale

donnée par le paramétrage :

$$\begin{cases} x = -u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 - 1 \end{cases}$$

Alors la surface  $S_r$  est paramétrée sur  $[0,1]^2$  par

$$R(u, v) = \sum_{i=0}^{i=2} \sum_{j=0}^{j=2} B_i^2(u) B_j^2(v) R_{ij}$$

Cette écriture s'obtient par la technique présentée dans [ 34 ] , 6.1.2.2 , page 148 et , en

observant que:

$$\begin{cases} -u = -(\frac{1}{2}B_1^2(u) + B_2^2(u))(B_0^2(v) + B_1^2(v) + B_2^2(v)) \\ v = (B_0^2(u) + B_1^2(u) + B_2^2(u))(\frac{1}{2}B_1^2(v) + B_2^2(v)) \\ u^2 + v^2 - 1 = B_2^2(u)(B_0^2(v) + B_1^2(v) + B_2^2(v)) + (B_0^2(u) + B_1^2(u) + B_2^2(u))B_2^2(v) \\ -(B_0^2(u) + B_1^2(u) + B_2^2(u))(B_0^2(v) + B_1^2(v) + B_2^2(v)) \end{cases}$$

## 1.2 Réseau massique de $S_l$

Dans [ 34 ] , Proposition 7.4.1 , page 190 , Fiorot et Jeannin déterminent une transformation projective qui transforme un quadrangle plan convexe en un carré .Suivant leur méthode , nous déterminons

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

qui amène le carré  $[0, 1]^2$  sur le quadrangle convexe  $Q_l$  .

cf la figure 2

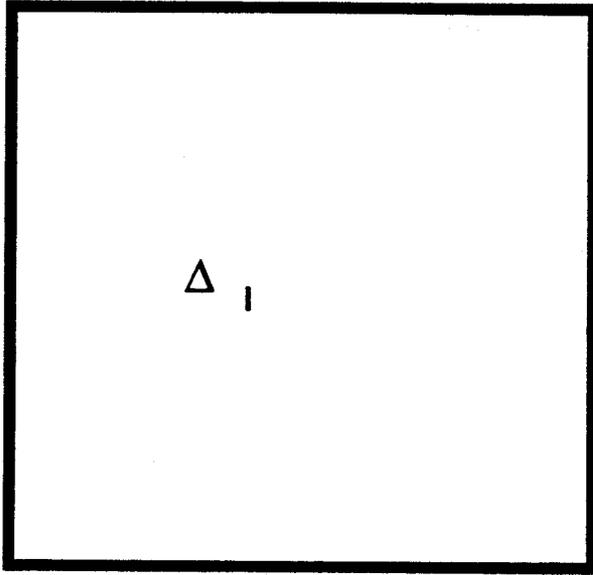
Alors  $S_l = SBR[l_{ij}, 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2; [0, 1]^2]$  et le réseau massique de la (SBR)  $S_l$  est donné par le tableau suivant:

### 1.2.1 Réseau massique de la (SBR) $S_l$

$j \setminus i$	0	1	2
2	$((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{9}); 9)$	$((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}); 3)$	$((0, 1, 0); 1)$
1	$((\frac{7}{12}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{3}); 12)$	$((\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, -1); 5)$	$((0, \frac{1}{2}, -1); 2)$
0	$((\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{4}); 16)$	$((\frac{1}{4}, 0, -1); 8)$	$((0, 0, -1); 4)$

D(0,1)

C (1,1)

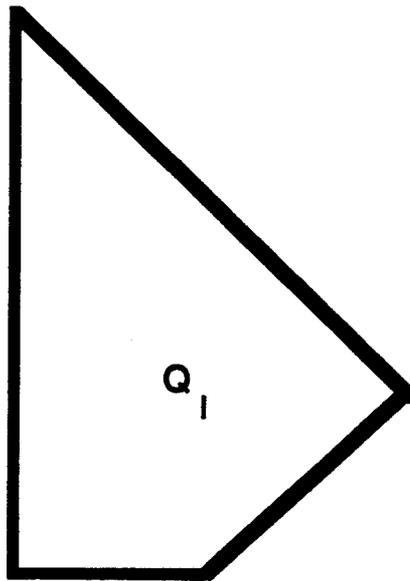


Chapitre 4-figure 2

A(0,0)

B(1,0)

C(0,1)



D(2/3,1/3)

B(0,0)

A(1/2,0)

**Transformation d'un quadrangle convexe en le carré [0,1]X[0,1]**

95-bis

Rappelons les notations du chapitre 1 :

$$L(u, v) = \Pi\Omega(\mathcal{L}(u, v)) , \text{ où}$$

$$\mathcal{L}(u, v) = SBP[\mathcal{L}_{ij}, 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2; [0, 1]^2], \text{ les } \mathcal{L}_{ij} \text{ étant donnés par } \Omega\vec{\mathcal{L}}_{ij} = \hat{\Omega}(l_{ij})$$

( $L(1, v)$  paramètre la frontière commune  $\Gamma$ .)

### 1.2.2 Tableau des $\mathcal{L}_{ij}$

$j \setminus i$	0	1	2
2	(6,3,-4,9)	(1,2,-2,3)	(0,1,0,1)
1	(7,2,-8,12)	( $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -5, 5$ )	(0,1,-2,2)
0	(8,0,-12,16)	(2,0,-8,8)	(0,0,-4,4)

### 1.3 Raccord $G^0$

Géométriquement , les deux surfaces (*SBR*)  $S_l$  et  $S_r$  sont deux morceaux contigus d'un même paraboloides donc sont raccordés avec la continuité géométrique  $G^2$ . (figure 1) (En fait ces deux surfaces sont raccordées avec la continuité  $G^k$  , pour tout entier  $k$ .)

Les paramétrisations précédentes des (*SBR*)  $S_l$  et  $S_r$  donnent deux représentations de  $\Gamma$ :

- En se plaçant sur  $S_r$  , la courbe  $\Gamma$  est paramétrée par:

$C_r(v) = R(0, v)$  et les résultats établis pour les bords des surfaces  
( $SBR$ ) donnent:

$$R(0, v) = BR[r_{0j}, 0 \leq j \leq 2; [0, 1]](v)$$

$$R(0, v) = \Pi\Omega\left(\sum_{j=0}^{j=2} B_j^2(v)\mathcal{R}_{0j}\right)$$

avec :  $\mathcal{R}_{00} = (0, 0, -1, 1)$  ,  $\mathcal{R}_{01} = (0, \frac{1}{2}, -1, 1)$  et  $\mathcal{R}_{02} = (0, 1, 0, 1)$

$$R(0, v) = (0, v, -1 + v^2) , 0 \leq v \leq 1$$

- En se plaçant sur  $S_l$  , la courbe  $\Gamma$  est paramétrée par:  $C_l(v) = L(1, v)$

et

$$L(1, v) = BR[l_{2j}, 0 \leq j \leq 2; [0, 1]](v)$$

$$= \Pi\Omega(0, 2v(1-v) + v^2, -4(1-v)^2 - 4v(1-v), 4(1-v)^2 + 4v(1-v) + v^2)$$

car , selon le tableau du paragraphe 1.2 .2 ,

$$\mathcal{L}_{20} = (0, 0, -4, 4) , \mathcal{L}_{21} = (0, 1, -2, 2) \text{ et } \mathcal{L}_{22} = (0, 1, 0, 1)$$

$$\text{Soit , } L(1, v) = \Pi\Omega(0, 2v - v^2, -4(1 - v), (v - 2)^2)$$

et donc  $L(1, v) = (0, \frac{v}{2-v}, \frac{-4(1-v)}{(2-v)^2})$ .

Le raccord  $G^0$  se vérifie en mettant en évidence la bijection  $\eta$  de  $[0, 1]$  sur  $[0, 1]$  donnée par

$$\eta(v) = \frac{v}{2-v}$$

signalée au chapitre 2, condition (5) et correspondant à la valeur  $\alpha = -1$ .

Nous avons :

$$\forall v \in [0, 1], L(1, v) = R(0, \eta(v))$$

Par un changement de paramètre, nous revenons à la condition (3) du chapitre 3 :

$$\forall v \in [0, 1], L(1, v) = R(0, v)$$

### 1.3.1 Reparamétrage de $S_l$

$$w = \frac{v}{2-v} \text{ équivaut à } v = \frac{2w}{1+w}.$$

Des relations

$$B_2^2(v) = \frac{4B_2^2(w)}{(1+w)^2}, \quad B_1^2(v) = \frac{2B_1^2(w)}{(1+w)^2}, \quad B_0^2(v) = \frac{B_0^2(w)}{(1+w)^2}$$

et de :

$$\mathcal{L}(u, v) = \sum_{i=0}^{i=2} \sum_{j=0}^{j=2} B_i^2(u) B_j^2(v) \mathcal{L}_{ij}$$

il vient :

$$\mathcal{L}(u, v) = \mathcal{G}^*(u, w)$$

avec :

$$\mathcal{G}^*(u, w) = \frac{1}{(1+w)^2} \left( \sum_{i=0}^{i=2} \sum_{j=0}^{j=2} B_i^2(u) B_j^2(w) \mathcal{G}_{ij} \right) = \frac{1}{(1+w)^2} \mathcal{G}(u, w)$$

Nous obtenons ainsi une nouvelle surface de  $\mathcal{F}$ , paramétrée par la fonction polynôme  $\mathcal{G}$  dont  $S_i$  est la  $\Pi\Omega$ -projection. Les  $\mathcal{G}_{ij}$  sont des points de  $\mathcal{F}$  obtenus, à partir du tableau des  $\mathcal{L}_{ij}$  en gardant la ligne  $j = 0$ , en multipliant la ligne  $j = 1$  par 2 et la ligne  $j = 2$  par 4. Le résultat est indiqué par le tableau ci-dessous:

### 1.3.2 Tableau obtenu à partir du tableau des $\mathcal{L}_{ij}$ : le tableau des $\mathcal{G}_{ij}$

$j \setminus i$	0	1	2
2	(24,12,-16,36)	(4,8,-8,12)	(0,4,0,4)
1	(14,4,-16,24)	(3,3,-10,10)	(0,2,-4,4)
0	(8,0,-12,16)	(2,0,-8,8)	(0,0,-4,4)

Alors, en posant  $g_{ij} = \hat{\Omega}^{-1}(\Omega \vec{\mathcal{G}}_{ij})$ ,  $0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2$ , nous obtenons  $g_{ij} = 2^j l_{ij}$ , ce que nous savons pour les courbes ([36],[57]). Voici le tableau des  $g_{ij}$  :

$j \setminus i$	0	1	2
2	$((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{9}); 36)$	$((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}); 12)$	$((0, 1, 0); 4)$
1	$((\frac{7}{12}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{3}); 24)$	$((\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, -1); 10)$	$((0, \frac{1}{2}, -1); 4)$
0	$((\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{4}); 16)$	$((\frac{1}{4}, 0, -1); 8)$	$((0, 0, -1); 4)$

La surface  $S_i$  est identique à la (SBR) de réseau massique  $\{g_{ij}, 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2\}$  de paramétrage :

$$G(u, v) = SBR[g_{ij}, 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2; [0, 1]^2](u, v), (u, v) \in [0, 1]^2$$

Le paramétrage associé pour la courbe frontière  $\Gamma$  entre  $S_i$  et  $S_r$  est alors  $\forall v \in [0, 1], C_g(v) = BR[g_{2j}, 0 \leq j \leq 2; [0, 1]](v)$

$$= \Pi\Omega(0, 4v(1-v) + 4v^2, -4(1-v)^2) - 8v(1-v), 4) = (0, v, -1 + v^2)$$

Donc, avec ce nouveau réseau, la condition (3) du chapitre 3 exprimant le raccord  $G^0$  est vérifiée, soit:

$$\forall v \in [0, 1], G(1, v) = R(0, v)$$

Nous avons  $g_{2j} = 4r_{0j}$  pour  $0 \leq j \leq 2$ . En multipliant tous les vecteurs massiques  $g_{ij}$  par  $\frac{1}{4}$  ce qui donne un nouveau tableau de vecteurs massiques,  $l_{ij}^* = \frac{1}{4}g_{ij}$ , nous aurons l'égalité des polygones de contrôle des (BR) qui paramètrent  $\Gamma$ .

Cela permet de revenir à la condition (5) du chapitre 3, de raccord  $G^0$ .

Les notations adoptées conduisent à poser :  $\Omega \vec{\mathcal{L}}_{ij}^* = \hat{\Omega} (l_{ij}^*)$

### 1.3.3 Tableau des $\mathcal{L}_{ij}^*$ :

$j \setminus i$	0	1	2
2	(6,3,-4,9)	(1,2,-2,3)	(0,1,0,1)
1	( $\frac{7}{2}$ ,1,-4,6)	( $\frac{3}{4}$ , $\frac{3}{4}$ , $-\frac{5}{2}$ , $\frac{5}{2}$ )	(0, $\frac{1}{2}$ ,-1,1)
0	(2,0,-3,4)	( $\frac{1}{2}$ ,0,-2,2)	(0,0,-1,1)

Ce tableau donne un nouveau réseau de contrôle de la (SBR)  $S_i$  soit

$$l^* = \{l_{ij}^*, 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2\} \quad (l_{ij}^* = \hat{\Omega}^{-1} (\mathcal{L}_{ij}^*))$$

Voici le tableau des  $l_{ij}^*$ :

$j \setminus i$	0	1	2
2	$((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{9}); 9)$	$((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}); 3)$	$((0, 1, 0); 1)$
1	$((\frac{7}{12}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{3}); 6)$	$((\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, -1); \frac{5}{2})$	$((0, \frac{1}{2}, -1); 1)$
0	$((\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{4}); 4)$	$((\frac{1}{4}, 0, -1); 2)$	$((0, 0, -1); 1)$

$$S_l = SBR[l_{ij}^*, 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2; [0, 1]^2]$$

Un nouveau paramétrage de la surface  $S_l$ , sur  $[0, 1]^2$  est alors:

$$L^*(u, v) = \Pi\Omega(\mathcal{L}^*(u, v))$$

avec

$$\mathcal{L}^*(u, v) = \sum_{i=0}^{i=2} \sum_{j=0}^{j=2} B_i^2(v) B_j^2(v) \mathcal{L}_{ij}^*$$

#### 1.4 Raccord $G^1$

Les réseaux massiques de contrôle sont maintenant :

- à gauche  $\{l_{ij}^*, 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2\}$  pour la surface  $S_l$
- à droite  $\{r_{ij}, 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2\}$  pour la surface  $S_r$

La condition  $\forall j \in \{0, 1, 2\}$ ,  $l_{2j}^* = r_{0j}$  entraîne  $\rho(0, v) = \lambda(1, v)$ .

Quelles sont les fonctions  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant la relation (1) ci-dessous, traduisant le raccord  $G^1$ ?

$$\forall v \in [0, 1], f_1(v)\mathcal{R}_u(0, v) + f_2(v)\mathcal{L}^*_u(1, v) + f_3(v)\mathcal{L}^*_v(1, v) + f_4(v)\mathcal{C}(v) = 0 \quad (1)$$

En exprimant les composantes de  $\mathcal{R}_u(0, v)$ ,  $\mathcal{L}^*_u(1, v)$ ,  $\mathcal{L}^*_v(1, v)$  et  $\mathcal{C}(v)$  dans le repère  $\mathcal{B}$  des vecteurs de  $\mathcal{F}$ , les fonctions  $f_1(v)$ ,  $f_2(v)$ ,  $f_3(v)$  et  $f_4(v)$  sont solutions d'un système homogène (4,4).

Les représentations paramétriques de  $\mathcal{R}_u(0, v)$ ,  $\mathcal{L}^*_u(1, v)$ ,  $\mathcal{L}^*_v(1, v)$  et  $\mathcal{C}(v)$  s'obtiennent à partir des tableaux 1.1 et 1.3.3 précédents et des résultats de dérivation vus antérieurement.

Rappelons que :

$$\mathcal{C}(v) = (0, v, -1 + v^2, 1)$$

$$\mathcal{L}^*_v(1, v) = (0, 1, 2v, 0)$$

$$\mathcal{L}^*_u(1, v) = 2 \sum_{j=0}^{j=2} B_j^2(v)(\mathcal{L}^*_{2j} - \mathcal{L}^*_{1j})$$

Voici le tableau donnant les valeurs de  $2(\mathcal{L}^*_{2j} - \mathcal{L}^*_{1j})$  :

j	$2(\mathcal{L}^*_{2j} - \mathcal{L}^*_{1j})$
2	$(-2, -2, 4, -4)$
1	$(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 3, -3)$
0	$(-1, 0, 2, -2)$

Alors , dans le repère  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{F}$  :

$$\mathcal{L}^*_u(1, v) = (-(1-v)^2 - 3v(1-v) - 2v^2, -v(1-v) - 2v^2,$$

$$2(1-v)^2 + 6v(1-v) + 4v^2, -2(1-v)^2 - 6v(1-v) - 4v^2)$$

$$= (-1-v, -v(1+v), 2+2v, -2-2v)$$

$$= (1+v)(-1, -v, 2, -2)$$

De même :

$$\mathcal{R}_u(0, v) = 2 \sum_{j=0}^{j=2} B_j^2(v)(\mathcal{R}_{1j} - \mathcal{R}_{0j})$$

Voici le tableau donnant les valeurs de  $2(\mathcal{R}_{1j} - \mathcal{R}_{0j})$  :

j	$2(\mathcal{R}_{1j} - \mathcal{R}_{0j})$
2	(-1, 0, 0, 0)
1	(-1, 0, 0, 0)
0	(-1, 0, 0, 0)

De ce fait ,  $\mathcal{R}_u(0, v) = (-1, 0, 0, 0)$  et  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  sont solutions du système suivant :

$$\begin{bmatrix} -1 & -(1+v) & 0 & 0 \\ 0 & -v(1+v) & 1 & v \\ 0 & 2(1+v) & 2v & v^2-1 \\ 0 & -2(1+v) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+v) \\ 1 \\ -v(1+v) \\ 2(1+v) \end{pmatrix} \cdot f_2$$

### 1.5 Interprétation de ces fonctions coefficients en termes de vecteurs massiques

**Situation générale** Supposons connue une surface rectangulaire  $S_l$  , (*SBR*) de réseau massique  $\{l_{ij} \ 0 \leq i \leq m \ 0 \leq j \leq n\}$ . Cherchons à construire une nouvelle surface  $S_r$  rectangulaire , (*SBR*) de réseau massique  $\{r_{ij} \ 0 \leq i \leq m \ 0 \leq j \leq n\}$  raccordée  $G^1$  à  $S_l$  , dans les mêmes conditions qu'au chapitre 3 , avec les fonctions coefficients trouvées ci-dessus dans la relation de raccord  $G^1$ .

Nous utilisons:

$$f_1(v) = -(1+v) = -B_0^1(v) - 2B_1^1(v),$$

$$f_2(v) = 1 = B_0^1(v) + B_1^1(v),$$

$$f_3(v) = -v(1+v) = -\frac{1}{2}[B_1^2(v) + 4B_2^2(v)],$$

$$f_4(v) = 2(1+v) = 2B_0^1(v) + 4B_1^1(v).$$

L'égalité :

$$B_j^n(v)B_q^k(v) = \frac{\binom{n}{j} \binom{q}{k}}{\binom{p+q}{j+k}} B_{j+k}^{p+q}(v)$$

appliquée aux différents termes permet d'exprimer la relation de raccord  $G^1$

$$f_1(v)\mathcal{R}_u(0, v) + f_2(v)\mathcal{L}_u(1, v) + f_3(v)\mathcal{L}_v(1, v) + f_4(v)\mathcal{L}(1, v) = 0.$$

dans la base de Bernstein de degré  $n+1$ .

En effet:

$$f_1(v)\mathcal{R}_u(1, v) = -m \sum_{j=0}^{j=n+1} \left[ \frac{n+1-j}{n+1} \Delta^{10} \mathcal{R}_{0j} + \frac{2j}{n+1} \Delta^{10} \mathcal{R}_{0(j-1)} \right] B_j^{n+1}$$

$$f_2(v)\mathcal{L}_u(1, v) = m \sum_{j=0}^{j=n+1} \left[ \frac{n+1-j}{n+1} \Delta^{10} \mathcal{L}_{(m-1)j} + \frac{j}{n+1} \Delta^{10} \mathcal{L}_{(m-1)(j-1)} \right] B_j^{n+1}$$

$$f_3(v)\mathcal{L}_v(1, v) = -\frac{n}{2} \sum_{j=0}^{j=n+1} \left[ \frac{2j(n-j+1)}{n(n+1)} \Delta \mathcal{C}_{j-1} + 4 \frac{j(j-1)}{n(n+1)} \Delta \mathcal{C}_{j-2} \right] B_j^{n+1}$$

$$f_4(v)\mathcal{L}(1,v) = \sum_{j=0}^{j=n+1} \left[ \frac{2(n+1-j)}{n+1} C_j + \frac{4j}{n+1} C_{j-1} \right] B_j^{n+1}$$

Le raccord  $G^1$ , associé aux fonctions-coefficients  $f_1, f_2, f_3$ , et  $f_4$  se traduit sur les réseaux massiques des deux surfaces  $S_l$  et  $S_r$  par:

$$\begin{aligned} \forall j \in \{0, 1, \dots, n+1\}, \\ -m \left[ \frac{n+1-j}{n+1} \Delta^{10} \mathcal{R}_{0j} + \frac{2j}{n+1} \Delta^{10} \mathcal{R}_{0(j-1)} \right] \\ + m \left[ \frac{n+1-j}{n+1} \Delta^{10} \mathcal{L}_{(m-1)j} + \frac{j}{n+1} \Delta^{10} \mathcal{L}_{(m-1)(j-1)} \right] \\ - \left[ \frac{j(n-j+1)}{(n+1)} \Delta C_{j-1} + 2 \frac{j(j-1)}{(n+1)} \Delta C_{j-2} \right] + 2 \frac{(n-j+1)}{n+1} C_j + 4 \frac{j}{n+1} C_{j-1} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Comme le montre la figure 3, en prenant  $j = 0$  dans cette relation, nous obtenons  $\mathcal{R}_{10}$ , puis pour  $j$  de 1 à  $n$ , nous calculons  $\mathcal{R}_{1j}$  à partir du réseau de  $S_l$  et du point déjà calculé  $\mathcal{R}_{1(j-1)}$ . Il reste alors à vérifier la relation ci-dessus pour la valeur  $j = n+1$ , ce qui impose une condition de compatibilité sur les points du réseau de  $S_l$ .

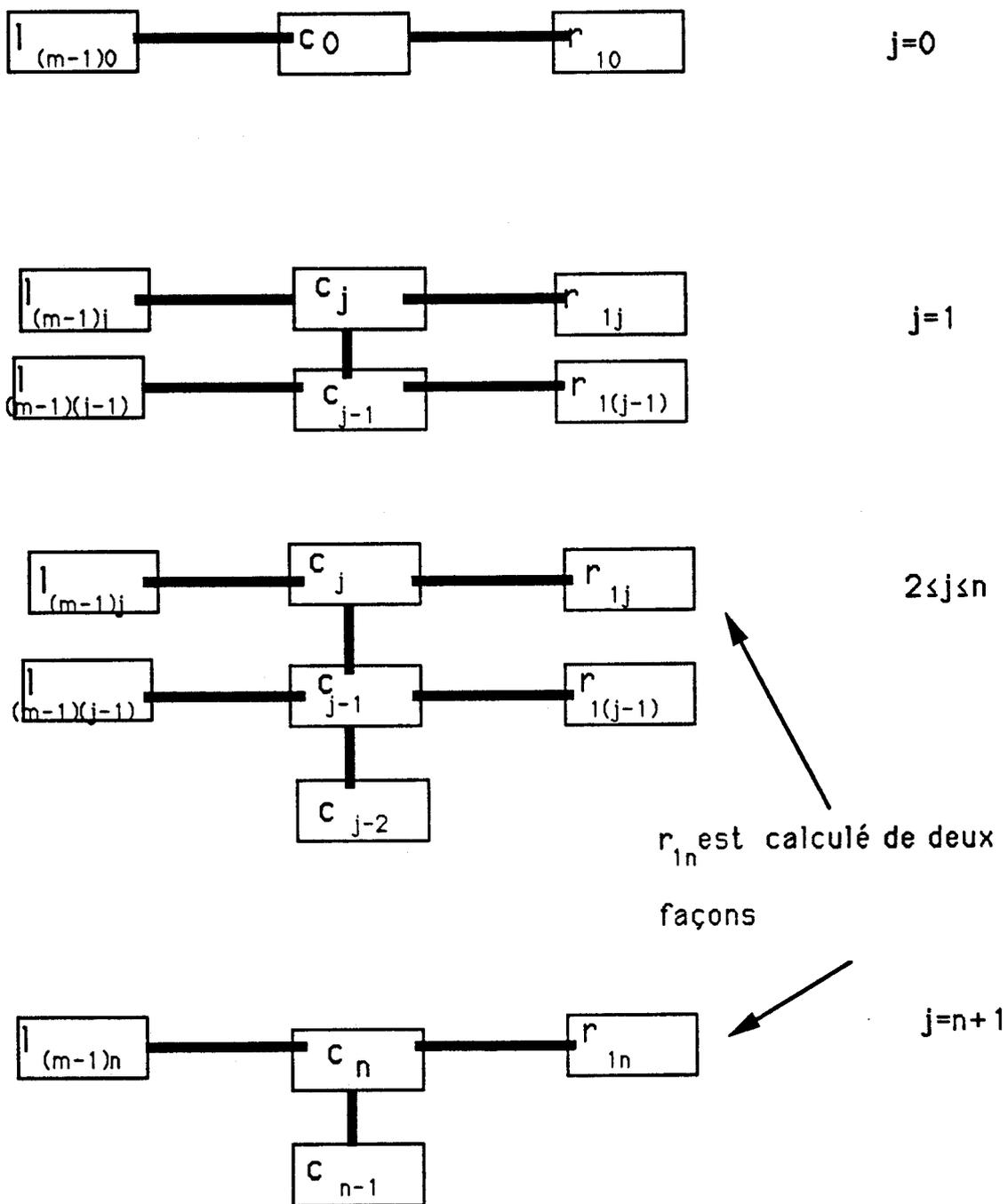
cf la figure 3

**Vérification de la condition de compatibilité pour la (SBR) de réseau massique  $l^*$**

Pour notre exemple  $m = n = 2$  et le réseau  $l^*$  est défini au paragraphe 1.3.3.

Nous allons construire  $\mathcal{R}_{10}$ ,  $\mathcal{R}_{11}$ , et ensuite vérifier que les relations ci-dessus prises pour  $j = 2$  et  $j = 3$  donnent la même valeur pour  $\mathcal{R}_{12}$

Chapitre 4 - figure 3



Les relations entre les réseaux massiques de  $S_l$  et  $S_r$  pour le raccord  $G_1$

**Traitement de la relation(2) pour  $j = 0$ :**

$$\mathcal{R}_{10} = \mathcal{R}_{00} + \mathcal{L}^*_{20} - \mathcal{L}^*_{10} + \mathcal{L}^*_{20}$$

$$\mathcal{R}_{10} = ((0, 0, -1, 1) + (-\frac{1}{2}, 0, 1, -1) + (0, 0, -1, 1)) = (-\frac{1}{2}, 0, -1, 1)$$

**Traitement de la relation(2) pour  $j = 1$**

$$\frac{4}{3}\mathcal{R}_{11} = \frac{4}{3}\mathcal{R}_{01} - \frac{4}{3}[\mathcal{R}_{10} - \mathcal{R}_{00}] + \frac{4}{3}[\mathcal{L}^*_{21} - \mathcal{L}^*_{11}] + \frac{2}{3}[\mathcal{L}^*_{20} - \mathcal{L}^*_{10}]$$

$$-\frac{2}{3}[\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_0]\frac{4}{3}[\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_0]:$$

$$\mathcal{R}_{11} = (0, \frac{1}{2}, -1, 1) - (-\frac{1}{2}, 0, 0, 0) + (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$$

$$+\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}, 0, 1, -1) - \frac{1}{2}(0, \frac{1}{2}, 0, 0) + (0, \frac{1}{2}, -2, 2)$$

$$\mathcal{R}_{11} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1)$$

**Traitement de la relation(2) pour  $j = 2$ :**

$$-\Delta^{10}\mathcal{R}_{02} - 4\Delta^{10}\mathcal{R}_{01} + \Delta^{10}\mathcal{L}^*_{12} + 2\Delta^{10}\mathcal{L}^*_{11} + 3\mathcal{C}_1 + 2\mathcal{C}_0 = 0$$

$$\mathcal{R}_{12} = (0, 1, 0, 1) - 4(-\frac{1}{2}, 0, 0, 0) + (-1, -1, 2, -2) + 2(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) + 3(0, \frac{1}{2}, -1, 1) + 2(0, 0, -1, 1)$$

$$\mathcal{R}_{12} = (-\frac{1}{2}, 1, 0, 1)$$

**Traitement de la relation(2) pour  $j = 3$ :**

$$-4\Delta^{10}\mathcal{R}_{02} + 2\Delta^{10}\mathcal{L}^*_{12} - 4(\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1) + 4\mathcal{C}_2 = 0$$

$$\mathcal{R}_{12} = \mathcal{R}_{02} + \frac{1}{2}[\mathcal{L}^*_{22} - \mathcal{L}^*_{12}] + \mathcal{C}_1$$

$$\mathcal{R}_{12} = (0, 1, 0, 1) + \frac{1}{2}(-1, -1, 2, -2) + (0, \frac{1}{2}, -1, 1) = (-\frac{1}{2}, 1, 0, 1)$$

Nous retrouvons la valeur calculée plus haut.

**Conclusion** Cet exemple nous éclaire sur trois aspects du raccord  $G^1$ :

- Etant données deux surfaces  $(SBR)$ ,  $S_l$  et  $S_r$ , raccordées  $G^1$ , il existe des fonctions coefficients  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$ , liées aux deux surfaces telles que:

$$f_1(v)\mathcal{R}_u(0, v) + f_2(v)\mathcal{L}_u(1, v) + f_3(v)\mathcal{L}_v(1, v) + f_4(v)\mathcal{L}(1, v) = 0.$$

- Si maintenant une nouvelle surface  $(SBR)$ ,  $\Sigma_l$ , est donnée quelconque, le jeu de fonctions coefficients précédemment déterminées ne convient pas toujours pour construire une surface  $\Sigma_r$   $(SBR)$  raccordée  $G^1$  à  $\Sigma_l$ . Des conditions de compatibilité portant sur les vecteurs massiques du réseau de  $\Sigma_l$  s'imposent.
- Dans une démarche de C.A.O. on peut se donner la surface  $(SBR)$ ,  $\Sigma_l$  et une famille de fonctions polynomiales, dépendant de paramètres (qui sont les coefficients de ces fonctions). Les relations de compatibilité signalées au chapitre 3, paragraphe 3.2, imposent certaines conditions entre les paramètres. Par exemple si on veut raccorder  $G^1$  une surface  $\Sigma_r$ ,  $(SBR)$  de dimensions  $m$  et  $n$ , à une surface  $\Sigma_l$  donnée,  $(SBR)$  de dimensions  $m$  et  $n$ , dans les conditions du chapitre 3, avec pour

fonctions  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  des polynômes de degrés respectifs 1(2 coefficients), 0 (1 coefficients), 2(3 coefficients) et 1(2 coefficients) , la relation de raccord  $G^1$  sera exprimée dans la base des Bernstein de degré  $n + 1$  et donc nous obtiendrons  $n + 2$  relations pour déterminer les  $n + 1$  vecteurs massiques  $\{r_j; 0 \leq j \leq n\}$ . Une relation sera écrite entre les 8 coefficients des polynômes  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$ . Ainsi nous obtenons des situations de raccord  $G^1$  plus générales que celles du paragraphe 3.3 du chapitre 3 et nous mettons en évidence des dispositions nouvelles entre les réseaux massiques gauche et droit ( figure 3).

- Des remarques analogues sont possibles sur les fonctions coefficients du raccord  $G^2$ .

## 1.6 Raccord $G^2$

Compte tenu des résultats du chapitre 3 , les fonctions  $a$  et  $b$  de la relation :

$$\forall v \in [0, 1] , R_u(0, v) = a(v).L_u^*(1, v) + b(v).L_v^*(1, v)$$

s'obtiennent par :  $a(v) = -\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1+v}$  , ( $\epsilon a(v) \geq 0$ ) et  $b(v) = -\frac{f_3}{f_1} = -v$

Ces deux fonctions seront utiles pour l'étude du raccord  $G^2$  entre  $S_l$  et  $S_r$ .

Il s'agit maintenant de trouver les fonctions  $h_1, h_2, h_3$  et  $h_4$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall v \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} h_1(v)(\mathcal{R}_{uu}(0, v) - a^2(v)\mathcal{L}^*_{uu}(1, v) - 2a(v)b(v)\mathcal{L}^*_{uv}(1, v) - b^2(v)\mathcal{L}^*_{vv}(1, v)) \\ + h_2(v)\mathcal{L}^*_u(1, v) + h_3(v)\mathcal{L}^*_v(1, v) + h_4(v)\mathcal{L}^*(1, v) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

On procède comme au paragraphe 1-4 pour établir un système homogène (4, 4) , vérifié par  $h_1, h_2, h_3$  et  $h_4$  .

$$\mathcal{R}_{uu}(0, v) = 2 \sum_{j=0}^{j=2} B_j^2(v) \Delta^{20} \mathcal{R}_{0j} = (0, 0, 2, 0)$$

compte-tenu du tableau ci-dessous.

j	$2\Delta^{20}\mathcal{R}_{0j}$
2	(0, 0, 2, 0)
1	(0, 0, 2, 0)
0	(0, 0, 2, 0)

$$\mathcal{L}^*_{uu}(1, v) = 2 \sum_{j=0}^{j=2} B_j^2(v) \Delta^{20} \mathcal{L}^*_{0j}$$

$$= (2(1-v)^2 + 8v(1-v) + 8v^2, 0, 0, 2(1-v)^2 + 8v(1-v) + 8v^2)$$

$$= (2(1+v)^2, 0, 0, 2(1+v)^2)$$

compte -tenu du tableau ci-dessous.

j	$2\Delta^{20}\mathcal{L}^*_{0j}$
2	(8 , 0 , 0 , 8 )
1	(4 , 0 , 0 , 4 )
0	(2 , 0 , 0 , 2 )

Or , d'après la section ci-dessus :

$$\mathcal{L}^*_u(1, v) = (1 + v)(-1, -v, 2, -2)$$

$$\text{donc } \mathcal{L}^*_{uv}(1, v) = (-1, -1 - 2v, 2, -2)$$

$$\text{en outre } \mathcal{L}^*_{vv}(1, v) = \mathcal{C}^n(v) = (0, 0, 2, 0)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{R}_{uu}(0, v) - a^2(v)\mathcal{L}^*_{uu}(1, v) - 2a(v)b(v)\mathcal{L}^*_{uv}(1, v) - b^2(v)\mathcal{L}^*_{vv}(1, v)) \\ &= \left( \frac{-2 - 4v}{1 + v}, \frac{-2v(1 + 2v)}{1 + v}, 2 - 2v^2 + \frac{4v}{1 + v}, \frac{-2 - 6v}{1 + v} \right) \end{aligned}$$

Les valeurs de  $\mathcal{L}^*_u(1, v)$ ,  $\mathcal{L}^*_v(1, v)$  et  $\mathcal{C}(v)$  ont déjà été calculées :

$$\mathcal{L}^*_u(1, v) = (1 + v).(-1, -v, 2, -2)$$

$$\mathcal{C}(v) = (0, v, v^2 - 1, 1)$$

$$\mathcal{L}^*_v(1, v) = (0, 1, 2v, 0)$$

Alors les fonctions  $h_1, h_2, h_3$  et  $h_4$  de la relation (3) sont solutions du système (4,4) suivant:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2+4v}{1+v} & -(1+v) & 0 & 0 \\ -2\frac{v(1+2v)}{1+v} & -v(1+v) & 1 & v \\ 2-2v^2+\frac{4v}{1+v} & 2(1+v) & 2v & v^2-1 \\ -\frac{2+6v}{1+v} & -2(1+v) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ce qui donne pour  $v \in [0, 1]$ ,

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2+4v}{(1+v)^2} \\ 2v \\ -2 \end{pmatrix} h_1 = \begin{pmatrix} (1+v)^2 \\ -(2+4v) \\ 2v(1+v)^2 \\ -2(1+v)^2 \end{pmatrix} \frac{h_1}{(1+v)^2}$$

## 2 Construction d'une nouvelle (*SBR*) raccordée $G^2$ à $S_l$

Le but de ce paragraphe est la construction d'une nouvelle (*SBR*) définie sur

$Q = \{(u, v) / 0 \leq u \leq 1; 0 \leq v \leq 1\}$  qui soit raccordée  $G^2$  à  $S_l$ .

Cette (*SBR*) sera notée, comme dans tout le travail,  $S_r$ , et définie par le réseau massique

$\{r_{ij}, 0 \leq i \leq 2; 0 \leq j \leq 2\}$ .

On pose  $\hat{\Omega}(r_{ij}) = \Omega \bar{R}_{ij}$  pour  $0 \leq i \leq 2; 0 \leq j \leq 2$

Il s'agit de construire le réseau massique de  $S_r$  à partir de celui de  $S_l$ .

Les différents  $l_{ij}, 0 \leq i \leq 2; 0 \leq j \leq 2$  sont donnés par le tableau du paragraphe 1-2-1 .

Les différents  $\mathcal{L}_{ij}, 0 \leq i \leq 2; 0 \leq j \leq 2$  sont donnés par le tableau du paragraphe 1-2-2 .

## 2.1 Raccord $G^0$

La condition suffisante (3) vue dans le chapitre 4 amène immédiatement:

$$\forall j \in \{0, 1, 2\}, \quad r_{0j} = l_{2j}$$

La première rangée du réseau massique de  $S_r$  est donc déterminée .

## 2.2 Raccord $G^1$

Dans notre exemple  $m = 2$  et  $n = 2$  et , en reprenant les notations du chapitre III nous allons utiliser la condition suffisante (6) du chapitre 4 , qui va permettre de construire la deuxième rangée du réseau massique de  $S_r$ .

$$\text{Le choix (arbitraire) } \begin{cases} f_1(v) = -\frac{1}{2} \\ f_2(v) = \frac{1}{2} \\ f_3(v) = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}(1-v) \\ f_4(v) = 1 \end{cases}$$

conduit à la relation suivante , dans laquelle  $C_j = \mathcal{L}_{mj}$

$$\forall j \in \{0, 1, 2\}$$

$$C_j + (C_j - \mathcal{L}_{(m-1)j}) - (\mathcal{R}_{1j} - C_j) + \frac{2-j}{2}(C_{j+1} - C_j) + \frac{j}{2}(C_j - C_{j-1}) = 0 \quad (4)$$

### 2.2.1 Cas où $j = 0$

On obtient  $\mathcal{R}_{10} = 2\mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_1 - \mathcal{L}_{(m-1)0}$

c'est à dire  $\mathcal{R}_{10} = (0, 0, -8, 8) + (0, 1, -2, 2) - (2, 0, -8, 8)$

$$\mathcal{R}_{10} = (-2, 1, -2, 2)$$

$$r_{10} = \left(-1, \frac{1}{2}, -1\right); 2$$

### 2.2.2 Cas où $j = 1$

On obtient  $\mathcal{R}_{11} = 3\mathcal{C}_1 + \frac{1}{2}(\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_0) - \mathcal{L}_{(m-1)1}$

c'est à dire  $\mathcal{R}_{11} = (0, 3, -6, 6) + (0, \frac{1}{2}, 2, -\frac{3}{2}) - (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -5, 5)$

$$\mathcal{R}_{11} = \left(-\frac{3}{2}, 2, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$r_{11} = \left(3, -4, -2\right); -\frac{1}{2}$$

### 2.2.3 Cas où $j = 2$

On obtient  $\mathcal{R}_{12} = 4\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1 - \mathcal{L}_{(m-1)2}$

c'est à dire  $\mathcal{R}_{12} = (0, 4, 0, 4) - (0, 1, -2, 2) - (1, 2, -2, 3)$

$$\mathcal{R}_{12} = (-1, 1, 4, -1)$$

$$r_{12} = \left(1, -1, -4\right); -1$$

## 2.3 Raccord $G^2$

La condition suffisante (11) du chapitre 3 va donner la troisième rangée de vecteurs massiques du réseau de  $S_r$ . Les fonctions coefficients  $h_k, 1 \leq k \leq 4$  sont des " degrés de liberté ".

L'exemple traité correspond au choix ( arbitraire ) :

$$\begin{cases} h_1 = 1 \\ h_2 = 0 \\ h_3 = 0 \\ h_4 = 0 \end{cases}$$

En outre  $a(v) = -\frac{f_2}{f_1} = 1$  et  $b(v) = \frac{f_3}{f_1} = (1 - v) + v$

Donc , avec les notations du chapitre 3, pour réaliser le raccord  $G^2$  il suffit d'imposer

$$\begin{aligned} \forall j \in \{0, 1, 2\}, \\ m(m-1)\Delta^{20}\mathcal{R}_{0j} - m(m-1)\Delta^{20}\mathcal{L}_{(m-2)j} - 2mj(\Delta^{10}\mathcal{L}_{(m-1)j} - \Delta^{10}\mathcal{L}_{(m-1)(j-1)}) \\ - 2m(n-j)(\Delta^{10}\mathcal{L}_{(m-1)(j+1)} - \Delta^{10}\mathcal{L}_{(m-1)j}) \\ -(n-j)(n-j-1)\Delta^2\mathcal{C}_j - 2j(n-j)\Delta^2\mathcal{C}_{j-1} - j(j-1)\Delta^2\mathcal{C}_{j-2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Pour la situation étudiée dans cet exemple,  $m = 2$  et  $n = 2$  , ce qui amène la relation

$$\begin{aligned} \forall j \in \{0, 1, 2\}, \\ 2\{\Delta^{20}\mathcal{R}_{0j} - \Delta^{20}\mathcal{L}_{0j} - 2j(\Delta^{10}\mathcal{L}_{1j} - \Delta^{10}\mathcal{L}_{1(j-1)}) - 2(2-j)(\Delta^{10}\mathcal{L}_{1(j+1)} - \Delta^{10}\mathcal{L}_{1j})\} \\ -(2-j)(2-j-1)\Delta^2\mathcal{C}_j - 2(2-j)\Delta^2\mathcal{C}_{j-1} - j(j-1)\Delta^2\mathcal{C}_{j-2} = 0 \end{aligned}$$

### 2.3.1 Cas où $j = 0$

$$2(\Delta^{20}\mathcal{R}_{00} - \Delta^{20}\mathcal{L}_{00} - 4(\Delta^{10}\mathcal{L}_{11} - \Delta^{10}\mathcal{L}_{10}) - \Delta^2\mathcal{C}_0) = 0$$

$$\text{Alors } \mathcal{R}_{20} = (-4, 2, -4, 4) - (4, 0, -16, 16) + (8, 0, -12, 16)$$

$$+(-6, -2, 12, -12) - (-8, 0, 16, -16) + (0, -1, 0, 1)$$

$$\mathcal{R}_{20} = (2, -1, -4, 9)$$

$$r_{20} = ((\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{4}{9}); 9)$$

### 2.3.2 Cas où $j = 1$

$$2(\Delta^{20}\mathcal{R}_{01} - \Delta^{20}\mathcal{L}_{01} - 2(\Delta^{10}\mathcal{L}_{11} - \Delta^{10}\mathcal{L}_{10}) - 2(\Delta^{10}\mathcal{L}_{12} - \Delta^{10}\mathcal{L}_{11}) - \Delta^2\mathcal{C}_0) = 0$$

$$\text{Alors } \mathcal{R}_{21} = (-3, 4, 2, -1) - (3, 3, -10, 10) + (7, 2, -8, 12) + (-2, -2, 4, -4)$$

$$-(-4, 0, 8, -8) + (0, -1, 0, 1)$$

$$\mathcal{R}_{21} = (3, 0, 16, 6)$$

$$r_{21} = ((\frac{1}{2}, , 0, \frac{8}{3}); 6)$$

### 2.3.3 Cas où $j = 2$

$$2(\Delta^{20}\mathcal{R}_{02} - \Delta^{20}\mathcal{L}_{02} - 4(\Delta^{10}\mathcal{L}_{12} - \Delta^{10}\mathcal{L}_{11}) - \Delta^2\mathcal{C}_0) = 0$$

$$\mathcal{R}_{22} = (-2, 2, 8, -2) - (2, 4, -4, 6) + (6, 3, -4, 9) + (-4, -4, 8, -8) - (-6, -2, 12, -12) + (0, -1, 0, 1)$$

$$\mathcal{R}_{22} = (4, -2, 4, 6)$$

$$r_{22} = ((\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}); 6)$$

## 2.4 Résultat final

La surface ( $SBR$ ) rectangulaire de longueur 2 et de largeur 2 donnée par le réseau massique ci-dessous est raccordée  $G^2$  avec  $S_i$  le long de la frontière  $\Gamma$

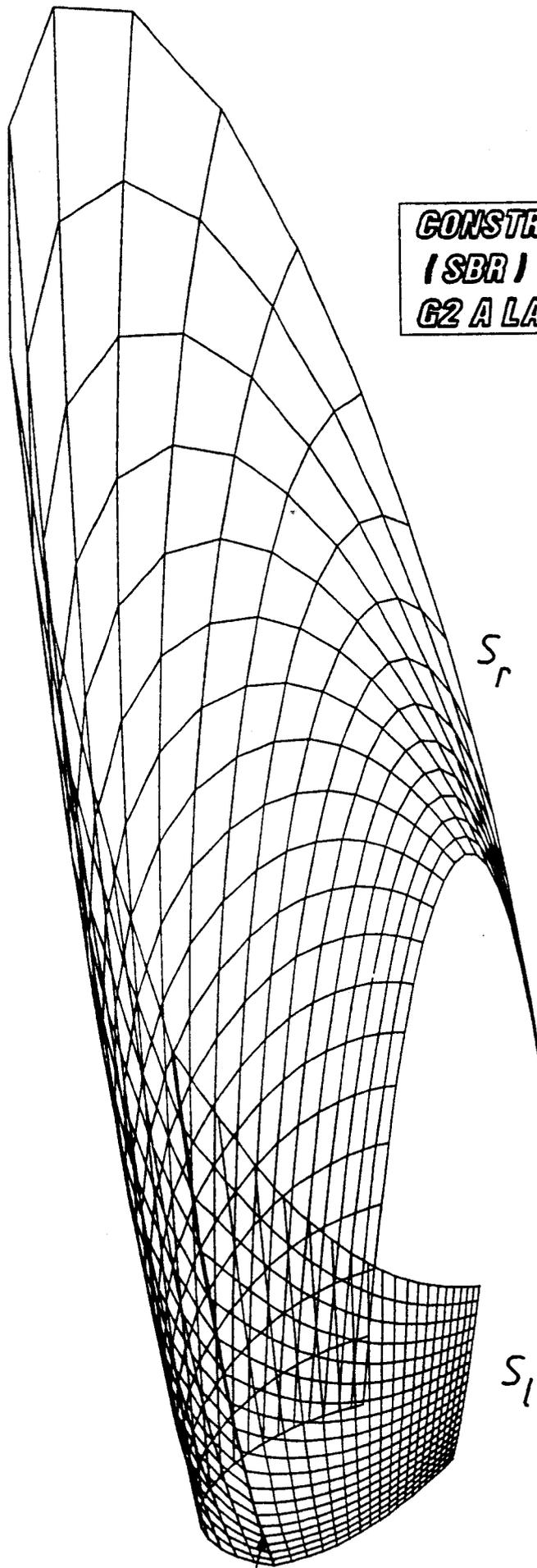
$j \setminus i$	0	1	2
2	$((0, 1, 0); 1)$	$((1, -1, -4); -1)$	$((\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}); 6)$
1	$((0, \frac{1}{2}, -1); 2)$	$((3, -4, -2); -\frac{1}{2})$	$((\frac{1}{2}, 0, \frac{8}{3}); 6)$
0	$((0, 0, -1); 4)$	$((-1, \frac{1}{2}, -1); 2)$	$((\frac{2}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{4}{9}); 9)$

cf la figure 4

## 2.5 Autre surface $S_r$ possible

### 2.5.1 Remarque sur les degrés de liberté

Dans le traitement de cet exemple les fonctions  $f_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  et



**CONSTRUCTION D'UNE  
(SBR) Sr RACCORDEE  
G2 A LA (SBR) S1**

$S_r$

$S_1$

**Zone de contact**

$h_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  sont laissés à l'appréciation de l'utilisateur et peuvent être considérés comme des paramètres de forme dont le choix judicieux permet de réaliser certaines contraintes.

### 2.5.2 Obtention de vecteurs purs dans le réseau massique de $S_r$

Le choix de ces coefficients peut amener des vecteurs massiques purs dans le réseau qui définit la surface  $S_r$ . Par exemple, le choix  $\left\{ \begin{array}{l} f_1(v) = -\frac{1}{2} \\ f_2(v) = \frac{1}{2} \\ f_3(v) = \frac{1}{2}(1-v) \\ f_4(v) = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$  pour que  $a(v) = -\frac{f_2(v)}{f_1(v)}$  reste positif

donne d'une part  $a(v) = -\frac{f_2}{f_1} = 1$  et  $b(v) = -\frac{f_3}{f_1} = 1 - v$ ,

d'autre part,

$$\forall j \in \{0, 1, 2\}$$

$$-(\mathcal{R}_{1j} - C_j) + (C_j - \mathcal{L}_{1j}) + \frac{2-j}{2}(C_{j+1} - C_j) + \frac{1}{2}C_j = 0$$

$$\text{ou encore } \mathcal{R}_{1j} = \frac{5}{2}C_j - \mathcal{L}_{1j} + \frac{2-j}{2}(C_{j+1} - C_j)$$

$$\mathcal{R}_{10} = \frac{5}{2}(0, 0, -4, 4) - (2, 0, -8, 8) + (0, 1, 2, -2)$$

$$\mathcal{R}_{10} = (-2, 1, 0, 0)$$

$$\text{et } r_{10} = \overrightarrow{(-2, 1, 0)}$$

$$\mathcal{R}_{11} = \frac{5}{2}(0, 1, -2, 2) - \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -5, 5\right) + \frac{1}{2}(0, 0, 2, -1)$$

$$\mathcal{R}_{11} = \left(-\frac{3}{2}, 1, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

$$r_{11} = ((3, -2, -2); -\frac{1}{2})$$

$$\mathcal{R}_{12} = \frac{5}{2}(0, 1, 0, 1) - (1, 2, -2, 3) = (-1, \frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2})$$

$$r_{12} = ((2, -1, -4); -\frac{1}{2})$$

Calculons maintenant la seconde rangée de vecteurs massiques de  $S_r$  en prenant, pour le raccord  $G^2$ , les fonctions coefficients :  $h_1 = 1$  ;  $h_2 = h_3 = h_4 = 0$

La condition suffisante de raccord  $G^2$  :  $\mathcal{R}_{uu} - a^2 \mathcal{L}_{uu} - 2ab \mathcal{L}_{uv} - b^2 \mathcal{L}_{vv} = 0_{\mathcal{F}}$  se traduit dans la base de Bernstein de degré 2 et conduit à :

$$\forall j \in \{0, 1, 2\},$$

$$(\mathcal{R}_{2j} - 2\mathcal{R}_{1j} + \mathcal{R}_{0j}) - (\mathcal{L}_{2j} - 2\mathcal{L}_{1j} + \mathcal{L}_{0j})$$

$$-2(2-j)((\mathcal{L}_{2(j+1)} - \mathcal{L}_{1(j+1)}) - (\mathcal{L}_{2j} - \mathcal{L}_{1j})) - \frac{(2-j)(1-j)}{2}(\mathcal{C}_{j+2} - 2\mathcal{C}_{j+1} + \mathcal{C}_j) = 0$$

$$\text{d'où, après calculs, } \mathcal{R}_{20} = (-1, 0, 2, 3) \text{ et } r_{20} = ((-\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}); 3)$$

$$\mathcal{R}_{21} = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3, 4) \text{ et } r_{21} = ((\frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}); 4)$$

$$\mathcal{R}_{22} = (2, 0, 4, 2) \text{ et } r_{22} = ((1, 0, 2); 2)$$

## 2.6 Résultat final

La surface ( $SBR$ ) rectangulaire de longueur 2 et de largeur 2 donnée par le réseau massique ci-dessous est raccordée  $G^2$  avec  $S_i$  le long de la frontière  $\Gamma$

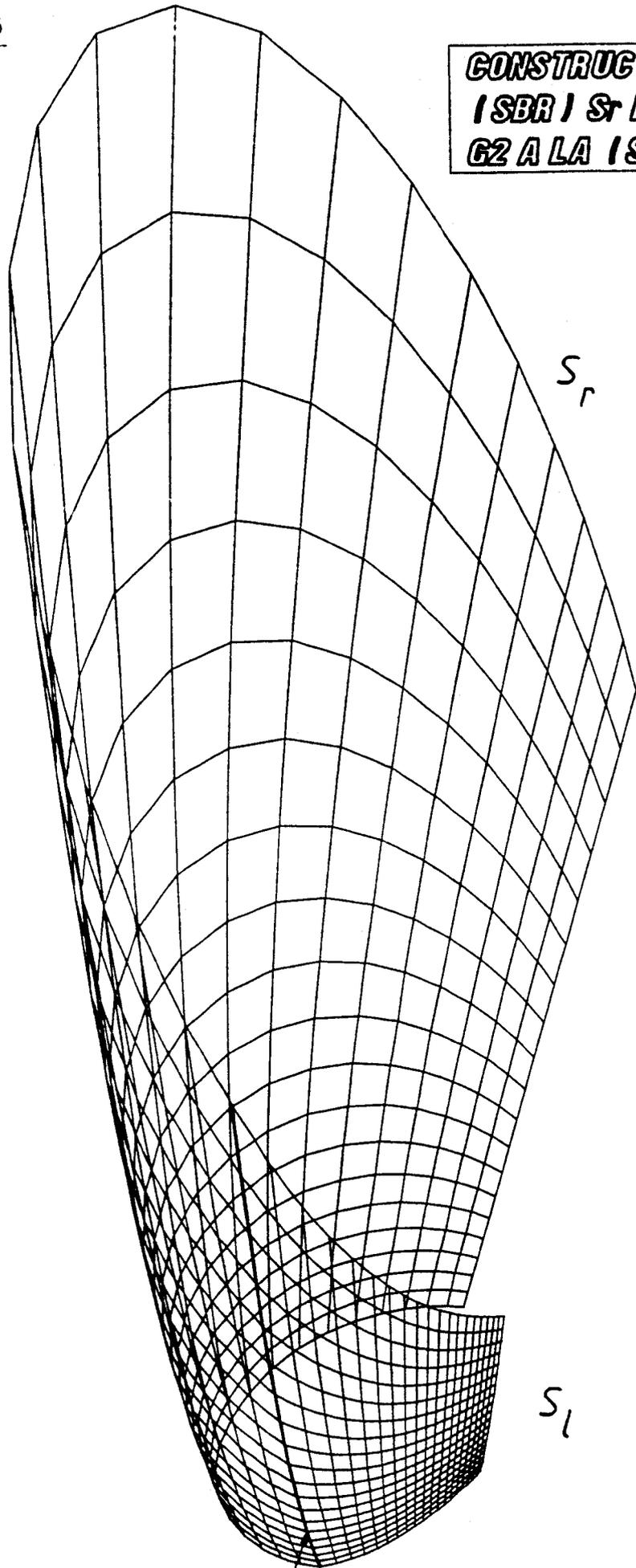
$j \setminus i$	0	1	2
2	$((0,1,0);1)$	$((2,-1,-4);-\frac{1}{2})$	$(1,0,2);2)$
1	$((0,\frac{1}{2},-1);2)$	$((-3,2,2);-\frac{1}{2})$	$((\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{3}{4});4)$
0	$((0,0,-1);4)$	$(-2,\bar{1},0)$	$((-\frac{1}{3},0,\frac{2}{3});3)$

cf la figure 5

## 3 Conclusion

Les principaux théorèmes obtenus ont été illustrés dans ce chapitre , les conditions nécessaires de raccordement dans le paragraphe 1 et des conditions suffisantes dans le paragraphe 2 . Un autre exemple , illustrant le raccord  $G^2$  entre une surface ( $SBR$ ) rectangulaire et une surface ( $SBR$ ) triangulaire sera présenté au chapitre 6 .

**CONSTRUCTION D'UNE  
|SBR| S<sub>r</sub> RAGGORDEE  
G2 A LA |SBR| S<sub>l</sub>**



$S_r$

$S_l$

Zone de contact

# CINQUIEME CHAPITRE

Raccordement  $G^i$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$  entre deux surfaces (*SBR*) triangulaires.

1. Notation	page 123
2. Raccord $G^2$ entre deux triangles ( <i>SBP</i> de hauteur $n$ ).	page 123
2.1 Choix des paramétrages des bords de raccordement.	page 125
2.2 Raccord $G^0$ .	page 125
2.3 Raccord $G^1$ .	page 125
2.4 Raccord $G^2$ .	page 128
2.5 Condition suffisante de raccord $G^2$ entre deux triangles ( <i>SBP</i> ).	page 130
3. Cas de deux triangles ( <i>SBR</i> ).	page 131
3.1 Raccord $G^0$ .	page 133
3.2 Cas simple de raccord $G^2$ .	page 133
3.3 Raccord $G^1$ : cas général.	page 134
3.3.1 Première condition suffisante.	page 135
3.3.2 Examen critique.	page 138
3.3.3 Ecriture de la condition de compatibilité.	page 138
3.4 Autre condition suffisante de raccord $G^1$ (Élévation de hauteur).	page 140
3.5 Raccord $G^2$ .	page 142
3.6 Figures illustrant le raccord $G^2$ .	page 147
3.7 Construction d'un triangle ( <i>SBR</i> ) de hauteur $n + 2$ raccordé $G^2$ au triangle $S_l$ .	page 147

# Raccordement $G^i$ $i \in \{0, 1, 2\}$ entre surfaces ( $SBR$ ) triangulaires

## 1 Notations

Les principales définitions ont déjà été introduites au paragraphe 5 du chapitre 1.

Le plan des paramètres  $\mathcal{P}$  est rapporté à un repère barycentrique  $(a, b, c)$  et l'espace  $\mathcal{E}$ , supposé de dimension 3, est rapporté au repère cartésien  $(\Omega_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Les coordonnées barycentriques du point courant de  $\mathcal{P}$  sont notées  $u, v, w$  ( $u + v + w = 1$ ).

Les coordonnées du point courant de  $\mathcal{E}$  sont notées  $x, y, z$ .  
 $n$  est un entier positif.

On notera  $\Delta_n$  le "maillage simplicial" déterminé par :

$$\Delta_n = \{(i, j, k) \mid (i, j, k) \in \mathbb{N}^3 ; i + j + k = n\}.$$

Dans le plan des paramètres  $\mathcal{P}$ , nous désignons par  $\mathcal{D}$  le domaine défini par:  
 $\{(u, v, w) \mid u + v + w = 1, u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0\}$

## 2 Raccord $G^2$ entre deux triangles ( $SBP$ ) de hauteur $n$

Dans ce paragraphe, le cas polynomial sera traité. Des résultats sur le raccord  $G^2$  entre deux ( $SBP$ ) triangulaires seront établis et les techniques de dérivation mises en oeuvre prépareront l'étude du raccordement entre deux surfaces ( $SBR$ ) triangulaires.

- $S_l$  est le triangle (*SBP*) de hauteur  $n$ , défini par le réseau de points de  $\mathcal{E}$ ,  $\{L_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n\}$ .

En coordonnées barycentriques, cette surface est paramétrée par:

$L_1(u, v, w) = SBP[L_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; D](u, v, w)$  (Cf chapitre 1, section 5)

$$L_1(u, v, w) = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_n} B_{ijk}^n(u, v, w) L_{ijk}$$

avec

$$B_{ijk}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$$

Comme  $u + v + w = 1$  on pose  $L(u, v) = L_1(u, v, 1 - u - v)$

paramétrage de  $S_l$  défini sur  $\Delta_l = \{(u, v) \mid u + v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$

- $S_r$  est le triangle (*SBP*) de hauteur  $n$  défini par le réseau de points de  $\mathcal{E}$ ,  $\{R_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n\}$ .

En coordonnées barycentriques, il est paramétré par:

$R_1(u, v, w) = SBP[R_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; D](u, v, w)$ . (Cf chapitre 1)

$$R_1(u, v, w) = \sum_{(i,j,k) \in \Delta_n} B_{ijk}^n(u, v, w) R_{ijk}$$

Comme  $u + v + w = 1$  on pose  $R(u, v) = R_1(u, v, 1 - u - v)$

paramétrage de  $S_r$  défini sur  $\Delta_r = \{(u, v) \mid u + v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$

Comme il a été indiqué au chapitre 1, on ne restreint pas la généralité du problème en supposant que les deux réseaux de points de contrôle sont de même hauteur  $n$ . Des élévations de hauteur permettent toujours de se ramener à cette situation.

Il s'agit de traduire sur les réseaux de contrôle les conditions (4), (6) et (7) vues au chapitre 2.

## 2.1 Choix des fonctions $\Theta_l$ et $\Theta_r$

Dans ce chapitre

$$\Theta_l(v) = (0, v) , \quad \Theta_r(v) = (0, v)$$

Alors , selon les notations du chapitre 2,  $\Upsilon_l = \Upsilon_r = \{(0, v) , v \in [0, 1] \}$ .

Les bords des deux domaines de paramètres  $\Delta_l$  et  $\Delta_r$  sont alors orientés dans le même sens (sens rétrograde ) et , dans ce cas , le paramètre  $\epsilon$  du chapitre 2 est égal à  $-1$ .

cf la figure 1

## 2.2 Raccord $G^0$

La condition de raccord  $G^0$  est donnée par la relation :

$$\forall v \in [0, 1] , L(0, v) = R(0, v) \quad (1)$$

Le bord commun  $\Gamma$  est alors paramétré par :

$$\forall v \in [0, 1] , C(v) = L(0, v)$$

Nous avons:

$$L(0, v) = BP[L_{0j(n-j)}, 0 \leq j \leq n; [0, 1]](v)$$

$$R(0, v) = BP[R_{0j(n-j)}, 0 \leq j \leq n; [0, 1]](v).$$

La condition (1) équivaut donc à:

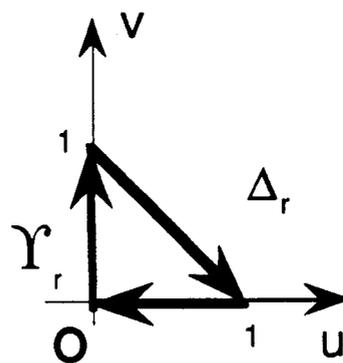
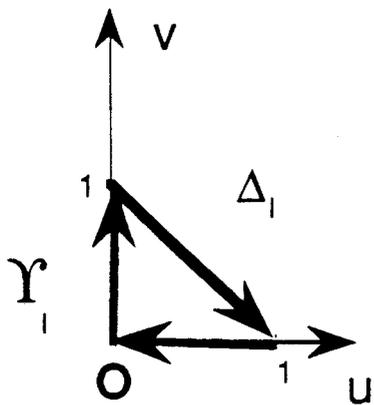
$$\forall j \in \{0, \dots, n\} , L_{0j(n-j)} = R_{0j(n-j)} \quad (2)$$

Lorsque la condition (2) est vérifiée ,  $C_j = L_{0j(n-j)}$  est la notation retenue pour désigner les points de contrôle du bord  $\Gamma$  .

## 2.3 Raccord $G^1$ entre $S_l$ et $S_r$

Il s'agit de traduire la condition (4) du chapitre 2 c'est à dire d'exprimer en termes de points de contrôle , l'existence de deux fonctions  $a : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  , vérifiant  $\forall v \in [0, 1] , a(v) < 0$  (car  $\epsilon = -1$ ), et  $b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

Chapitre 5\_figure 1



$$Y_r = \{ (0, v) , 0 \leq v \leq 1 \}$$

$$Y_l = \{ (0, v) , 0 \leq v \leq 1 \}$$

$$\varepsilon = -1$$

car les bords des deux domaines ont des orientations identiques

Raccordement entre (SBR) triangulaires

$$\forall v \in [0, 1], R_u(0, v) = a(v)L_u(0, v) + b(v)L_v(0, v) \quad (3)$$

Cette condition équivaut à :

$$\forall v \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R_1}{\partial u}(0, v, 1 - v) - \frac{\partial R_1}{\partial w}(0, v, 1 - v) \\ &= a(v)\left[\frac{\partial L_1}{\partial u}(0, v, 1 - v) - \frac{\partial L_1}{\partial w}(0, v, 1 - v)\right] + b(v)\left[\frac{\partial L_1}{\partial v}(0, v, 1 - v) - \frac{\partial L_1}{\partial w}(0, v, 1 - v)\right] \end{aligned}$$

Or, les règles de dérivation rappelées au chapitre 1 donnent :

$$\frac{\partial L_1}{\partial u}(0, v, w) = n \sum_{(1,j,k) \in \Delta_n} \binom{n-1}{j} L_{1jk} v^j w^k$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial u}(0, v, 1 - v) = nBP[L_{1j(n-j-1)}, 0 \leq j \leq n-1; [0, 1]](v)$$

De même,

$$\frac{\partial L_1}{\partial w}(0, v, w) = n \sum_{(1,j,k) \in \Delta_n} \binom{n-1}{j} L_{0j(k+1)} v^j w^k$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial w}(0, v, 1 - v) = nBP[L_{0j(n-j)}, 0 \leq j \leq n-1; [0, 1]](v)$$

De même,

$$\frac{\partial L_1}{\partial v}(0, v, w) = n \sum_{(1,j,k) \in \Delta_n} \binom{n-1}{j} L_{0(j+1)k} v^j w^k$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial v}(0, v, 1 - v) = nBP[L_{0(j+1)(n-j-1)}, 0 \leq j \leq n-1; [0, 1]](v)$$

Des expressions analogues s'obtiennent sur la fonction  $R_1$  :

$$\frac{\partial R_1}{\partial u}(0, v, w) = n \sum_{(1,j,k) \in \Delta_n} \binom{n-1}{j} R_{1jk} v^j w^k$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial u}(0, v, 1 - v) = nBP[R_{1j(n-j-1)}, 0 \leq j \leq n-1; [0, 1]](v)$$

De même :

$$\frac{\partial R_1}{\partial w}(0, v, w) = n \sum_{(1,j,k) \in \Delta_n} \binom{n-1}{j} R_{0j(k+1)} v^j w^k$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial w}(0, v, 1-v) = nBP[R_{0j(n-j)}, 0 \leq j \leq n-1; [0,1]](v)$$

Donc la condition de raccord  $G^1$  entre  $S_l$  et  $S_r$  peut être exprimée dans la base de Bernstein  $\{B_j^{n-1}, 0 \leq j \leq (n-1)\}$  par :

**Proposition 2.3.1 :**

*La condition (3) de raccord  $G^1$  entre  $S_l$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma$  équivaut à l'existence de deux fonctions  $a$  et  $b$  :  $a : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^{-*}$  et  $b : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :*

$$\begin{aligned} & \forall v \in [0,1] , \\ & n \sum_{(1,j,k) \in \Delta_n} [R_{1jk} - R_{0j(k+1)}] B_j^{n-1}(v) \\ & = n \sum_{(1,j,k) \in \Delta_n} \{a(v)[L_{1jk} - L_{0j(k+1)}] + b(v)[L_{0(j+1)k} - L_{0j(k+1)}]\} B_j^{n-1}(v) \end{aligned}$$

En tenant compte de la condition (2) et en choisissant pour fonctions  $a$  et  $b$  deux constantes  $\alpha (< 0)$  et  $\beta$ , cette proposition devient :

**Proposition 2.3.2 :**

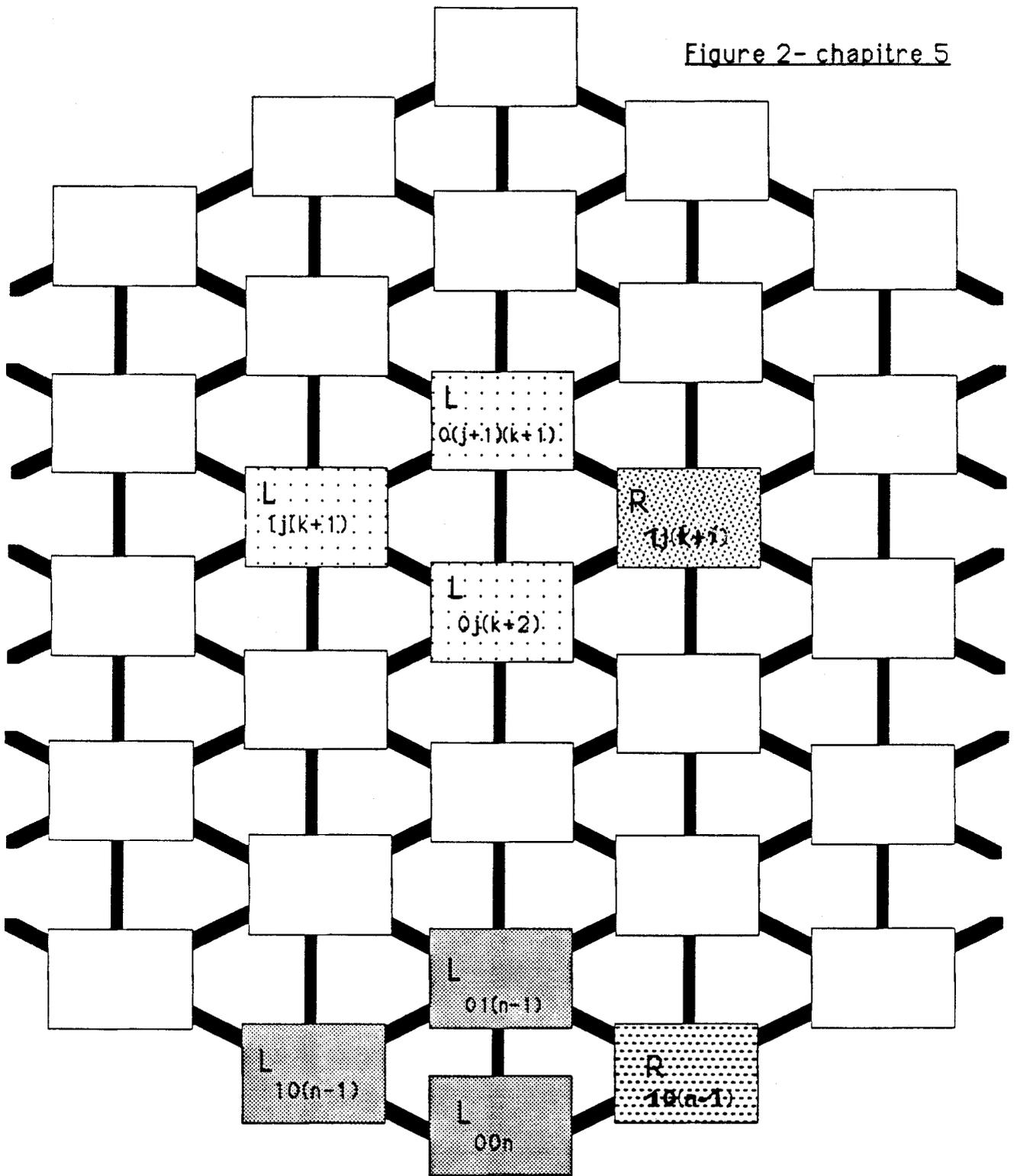
*Lorsque la condition (2) est acquise, une condition suffisante de raccord  $G^1$  entre  $S_l$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma$  s'obtient en réalisant :*

$$\begin{aligned} & \forall (j,k) \in \mathbb{N}^2 \mid (1,j,k) \in \Delta_n \\ & R_{1jk} - L_{0j(k+1)} = \alpha[L_{1jk} - L_{0j(k+1)}] + \beta[L_{0(j+1)k} - L_{0j(k+1)}] \end{aligned} \quad (4)$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes réelles avec  $\alpha < 0$ .

Le résultat précédent permet de construire la deuxième rangée des points du réseau de contrôle de la surface  $S_r$ .

cf la figure 2



$$2+j+k = n$$

Raccordement G1 entre deux triangles (SBP) (Relation(4) chapitre 5 )

## 2.4 Raccord $G^2$ entre $S_l$ et $S_r$ le long de $\Gamma$

L'existence de deux fonctions  $e_1^*$  et  $f_1^*$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant la relation (5) ci-dessous exprime le raccord  $G^2$  entre  $S_l$  et  $S_r$ , le long de  $\Gamma$ .

$$\forall v \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} & (R_{uu}(0, v) - a^2(v)L_{uu}(0, v) - 2a(v)b(v)L_{uv}(0, v) - b^2(v)L_{vv}(0, v)) \\ & = e_1^*(v)L_u(0, v) + f_1^*(v)L_v(0, v) \end{aligned} \quad (5)$$

La poursuite des calculs du paragraphe 2.3 donne :

$$L_{uu}(0, v) = \left( \frac{\partial^2 L_1}{\partial u^2}(0, v, 1-v) - 2 \frac{\partial^2 L_1}{\partial u \partial w}(0, v, 1-v) + \frac{\partial^2 L_1}{\partial w^2}(0, v, 1-v) \right),$$

$$\begin{aligned} L_{uv}(0, v) &= \frac{\partial^2 L_1}{\partial u \partial v}(0, v, 1-v) - \frac{\partial^2 L_1}{\partial u \partial w}(0, v, 1-v), \\ & - \frac{\partial^2 L_1}{\partial v \partial w}(0, v, 1-v) + \frac{\partial^2 L_1}{\partial w^2}(0, v, 1-v). \end{aligned}$$

$$L_{vv}(0, v) = \frac{\partial^2 L_1}{\partial v^2}(0, v, 1-v) - 2 \frac{\partial^2 L_1}{\partial v \partial w}(0, v, 1-v) + \frac{\partial^2 L_1}{\partial w^2}(0, v, 1-v)$$

Des expressions analogues s'obtiennent pour  $R$  :

$$R_{uu}(0, v) = \frac{\partial^2 R_1}{\partial u^2}(0, v, 1-v) - 2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial u \partial w}(0, v, 1-v) + \frac{\partial^2 R_1}{\partial w^2}(0, v, 1-v)$$

Les techniques de dérivation relatives aux paramétrages des surfaces (*SBP*) triangulaires vues au chapitre 1 donnent :

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial u^2}(0, v, w) = n(n-1) \sum_{(2,j,k) \in \Delta_n} \binom{n-2}{j} L_{2jk} v^j w^k$$

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial u^2}(0, v, 1-v) = n(n-1) BP[L_{2j(n-j-2)}, 0 \leq j \leq n-2; [0, 1]](v)$$

De même ,

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial w^2}(0, v, w) = n(n-1) \sum_{(2,j,k) \in \Delta_n} \binom{n-2}{j} L_{0j(k+2)} v^j w^k$$

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial w^2}(0, v, 1 - v) = n(n - 1)BP[L_{0j(n-j)}, 0 \leq j \leq n - 2; [0, 1]](v)$$

De même ,

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial v^2}(0, v, w) = n(n - 1) \sum_{(2,j,k) \in \Delta_n} \binom{n-2}{j} L_{0(j+2)k} v^j w^k$$

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial v^2}(0, v, 1 - v) = n(n - 1)BP[L_{0(j+2)(n-j-2)}, 0 \leq j \leq n - 2; [0, 1]](v)$$

Et aussi ,

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial u \partial v}(0, v, w) = n(n - 1) \sum_{(2,j,k) \in \Delta_n} \binom{n-2}{j} L_{1(j+1)k} v^j w^k$$

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial u \partial v}(0, v, 1 - v) = n(n - 1)BP[L_{1(j+1)(n-j-2)}, 0 \leq j \leq n - 2; [0, 1]](v)$$

De même ,

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial u \partial w}(0, v, w) = n(n - 1) \sum_{(2,j,k) \in \Delta_n} \binom{n-2}{j} L_{1j(k+1)} v^j w^k$$

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial u \partial w}(0, v, 1 - v) = n(n - 1)BP[L_{1j(n-j-1)}, 0 \leq j \leq n - 2; [0, 1]](v)$$

Et encore ,

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial v \partial w}(0, v, w) = n(n - 1) \sum_{(2,j,k) \in \Delta_n} \binom{n-2}{j} L_{0(j+1)(k+1)} v^j w^k$$

$$\frac{\partial^2 L_1}{\partial v \partial w}(0, v, 1 - v) = n(n - 1)BP[L_{0(j+1)(n-j-1)}, 0 \leq j \leq n - 2; [0, 1]](v)$$

Des expressions analogues s'obtiennent pour les dérivées partielles de la fonction  $R_1$ , d'où une nouvelle écriture de la condition (5), en utilisant la base de Bernstein  $\{B_j^{n-2}, 0 \leq j \leq n - 2\}$  :

**Lemme 2.4.1 :**

*L'expression :*

$$R_{uu}(0, v) - a^2(v)L_{uu}(0, v) - 2a(v)b(v)L_{uv}(0, v) - b^2(v)L_{vv}(0, v)$$

*s'écrit:*

$$n(n - 1) \sum_{(2,j,k) \in \Delta_n} G_{jk} B_j^{n-2}$$

avec  $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2 \mid (2, j, k) \in \Delta_n$ ,

$$\begin{aligned} G_{jk} = & R_{2jk} - 2R_{1j(k+1)} + R_{0j(k+2)} - a^2(v)[L_{2jk} - 2L_{1j(k+1)} + L_{0j(k+2)}] \\ & - 2a(v)b(v)[L_{1(j+1)k} - L_{1j(k+1)} - L_{0(j+1)(k+1)} + L_{0j(k+2)}] - b^2(v)[L_{0(j+2)k} \\ & - 2L_{0(j+1)(k+1)} + L_{0j(k+2)}] \end{aligned}$$

## 2.5 Condition suffisante de raccord $G^2$ entre les deux triangles (SBP) $S_l$ et $S_r$ .

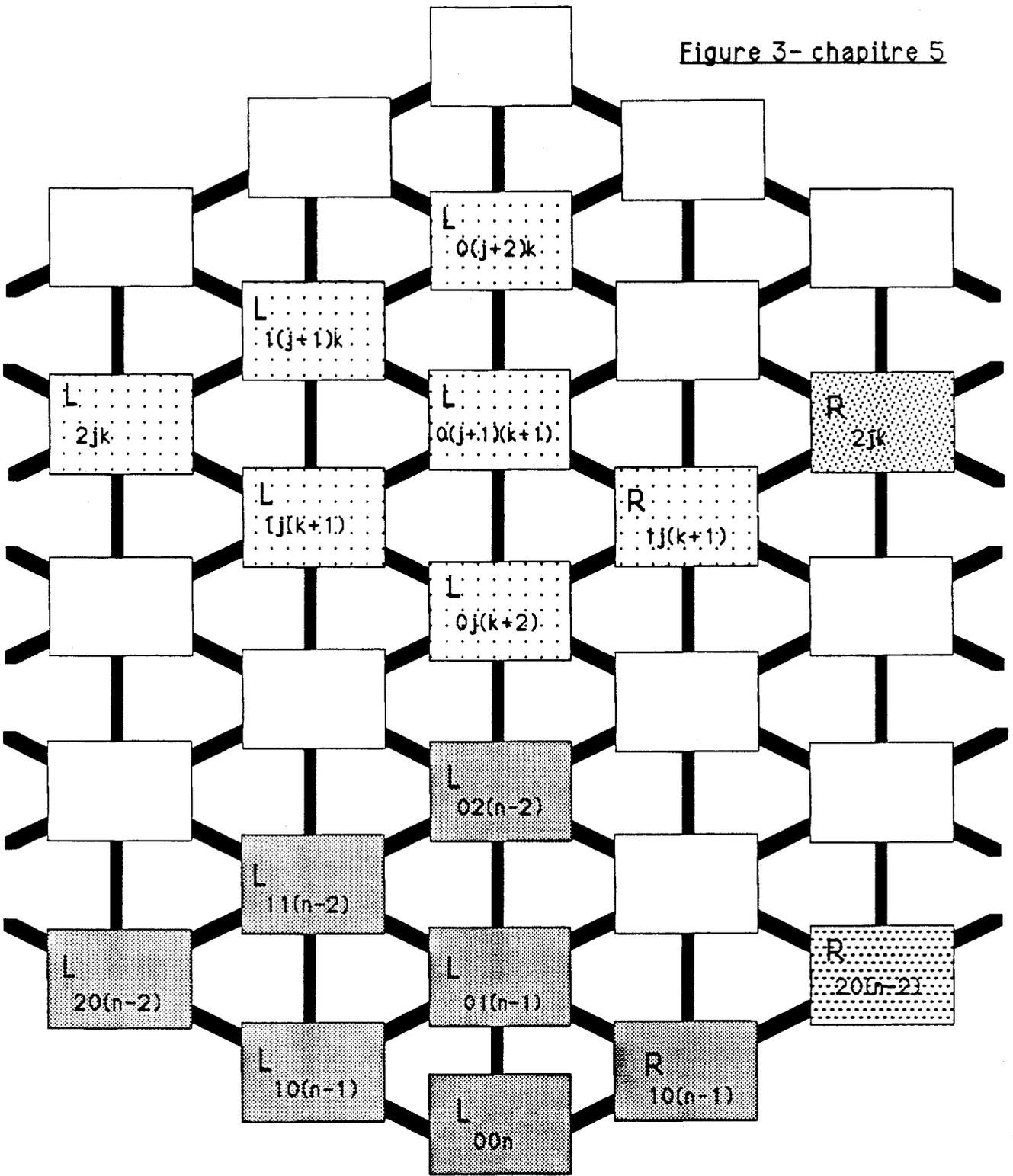
**Proposition 2.5.1** Une condition suffisante de raccord  $G^2$  entre les deux triangles (SBP)  $S_l$  et  $S_r$  s'obtient en ajoutant aux conditions (2) et (4) la relation suivante:

$$\forall (j, k) \mid (2, j, k) \in \Delta_n$$

$$\begin{aligned} & R_{2jk} - 2R_{1j(k+1)} + R_{0j(k+2)} - \alpha^2(L_{2jk} - 2L_{1j(k+1)} + L_{0j(k+2)}) \\ & - 2\alpha\beta(L_{1(j+1)k} - L_{1j(k+1)} - L_{0(j+1)(k+1)} + L_{0j(k+2)}) \\ & - \beta^2(L_{0(j+2)k} - 2L_{0(j+1)(k+1)} + L_{0j(k+2)}) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes réelles vérifiant  $\alpha < 0$ .

Figure 3- chapitre 5



$$2+j+k = n$$

Raccordement G2 entre deux triangles (SBP) (Relation(6) chapitre 5)

**Preuve:** Il suffit de choisir  $e_1^*(v) = 0$  et  $f_1^*(v) = 0$ .

Avec d'autres fonctions  $e_1^*$  et  $f_1^*$ , on obtiendrait de nouvelles conditions suffisantes.

**cf la figure 3** Les figures 2 et 3 montrent quels sont les points de contrôle concernés par le raccord  $G^2$ . Le réseau de contrôle de la surface  $S_l$  étant connu, (2) permet de construire la première rangée de points du réseau de  $S_r$ , (4) la seconde rangée et (6) la troisième.

### 3 Cas de deux triangles ( $SBR$ ).

L'étude est reprise dans cette section avec  $S_l$  et  $S_r$  deux surfaces rationnelles.  $n$  est un entier positif donné.

On notera toujours  $\Delta_n$  le "maillage simplicial" déterminé par :

$$\Delta_n = \{(i, j, k) \mid (i, j, k) \in \mathbb{N}^3; i + j + k = n\}$$

- $S_l$  est le triangle ( $SBR$ ) de hauteur  $n$  défini par le réseau massique,  $g = \{l_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n\}$  et, en coordonnées barycentriques, il est paramétré par:

$$L_1(u, v, w) = SBR[l_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}](u, v, w). \text{ (Cf chapitre 1)}$$

Comme  $u + v + w = 1$  on pose  $L(u, v) = L_1(u, v, 1 - u - v)$  paramétrage de  $S_l$

$$\text{défini sur } \Delta_l = \{(u, v) \mid u + v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$$

Pour la suite des calculs, nous rappelons la proposition suivante exposée au chapitre 1:

**Proposition 3.0.2 :**

$$SBR[g, D] = \Pi(SBP[l_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}])$$

et aussi:

$$SBR[g, D] = \Pi\Omega(SBP[\mathcal{L}_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}])$$

Donc, en posant  $\lambda_1(u, v, w) = SBP[\lambda_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}](u, v, w)$

et  $\mathcal{L}_1(u, v, w) = SBP[\mathcal{L}_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}](u, v, w)$ ,

lorsque  $\lambda_1(u, v, w) \neq 0$  :

$$\bar{\Omega}\bar{L}_1(u, v, w) = \lambda_1(u, v, w). \bar{\Omega}\bar{\mathcal{L}}_1(u, v, w)$$

La formule de Leibniz , appliquée à cette dernière écriture , permet de calculer toutes les dérivées du paramétrage  $L$  de la  $(SBR) S_l$  .

De plus la condition  $\lambda_1(u, v, w) \neq 0$  est réalisée en tous les points de  $S_l$  à distance finie et en particulier sur la frontière commune  $\Gamma$  où se fera le raccord , conformément aux hypothèses retenues au chapitre 2 .

Pour la suite des calculs , nous utilisons :

$$L(u, v) = \Pi\Omega(\mathcal{L}(u, v)) ,$$

avec , dans  $\mathcal{F}$  ,  $\mathcal{L}(u, v) = \mathcal{L}_1(u, v, 1 - u - v)$  de masse

$$\lambda(u, v) = \lambda_1(u, v, 1 - u - v).$$

- $S_r$  est le triangle  $(SBR)$  de hauteur  $n$  défini par le réseau massique ,  $d = \{r_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n\}$  et , en coordonnées barycentriques , il est paramétré par:

$$R_1(u, v, w) = SBR[r_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}](u, v, w). \text{(Cf chapitre 1)}$$

Comme  $u + v + w = 1$  on pose  $R(u, v) = R_1(u, v, 1 - u - v)$  paramétrage de  $S_r$  .

défini sur  $\Delta_r = \{(u, v) \mid u + v \leq 1, u \geq 0, v \geq 0\}$

De la même façon que pour  $S_l$  :

$$\textbf{Proposition 3.0.3} \quad SBR[d, D] = \Pi(SBP[r_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}])$$

et aussi:

$$SBR[d, D] = \Pi\Omega(SBP[\mathcal{R}_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}])$$

En posant  $\rho_1(u, v, w) = SBP[\rho_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}](u, v, w)$

et  $\mathcal{R}_1(u, v, w) = SBP[\mathcal{R}_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}](u, v, w)$

lorsque  $\rho_1(u, v, w) \neq 0$  :

$$\bar{\Omega}R_1(u, v, w) = \rho_1(u, v, w). \bar{\Omega}\mathcal{R}_1(u, v, w)$$

Cette proposition , associée à la formule de Leibniz permet de calculer toutes les dérivées du paramétrage  $R$  de la  $(SBR) S_r$  , le long du bord commun  $\Gamma$  supposé à distance finie.

Pour la suite des calculs , nous utilisons :

$$R(u, v) = \Pi\Omega(\mathcal{R}(u, v)) ,$$

avec , dans  $\mathcal{F}$  ,  $\mathcal{R}(u, v) = \mathcal{R}_1(u, v, 1 - u - v)$  , de masse

$$\rho(u, v) = \rho_1(u, v, 1 - u - v).$$

Les fonctions  $\Theta_l$  et  $\Theta_r$  sont choisies de la même manière qu'au paragraphe 2 et , donc  $\epsilon = -1$  .

### 3.1 Raccord $G^0$

Les notations ci-dessous seront utilisées dans toute la suite du chapitre:

$$l_1(u, v, w) = SBP[l_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}](u, v, w)$$

et  $l(u, v) = l_1(u, v, 1 - u - v)$  ,  $(u, v) \in \Delta_l$

De même ,  $r_1(u, v, w) = SBP[r_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n; \mathcal{D}](u, v, w)$

et  $r(u, v) = r_1(u, v, 1 - u - v)$  ,  $(u, v) \in \Delta_r$

La condition générale de raccord  $G^0$  a été obtenue au chapitre 2 :

$$\forall v \in [0, 1] \text{ , } \Pi(l(0, v)) = \Pi(r(0, v)) \quad (7)$$

Nous l'utiliserons sous la forme affaiblie :

$$\forall v \in [0, 1] \text{ , } l(0, v) = r(0, v) \quad (8)$$

Pour vérifier (8) , il suffit de réaliser la condition suivante qui sera retenue dans la suite du chapitre :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2 \mid (0, j, k) \in \Delta_n \text{ , } r_{0jk} = l_{0jk} \quad (9)$$

Rappelons la notation  $c_j = l_{0j(n-j)}$  .

La condition (9) entraîne  $\forall v \in [0, 1]$  ,  $\rho(0, v) = \lambda(0, v)$

### 3.2 Cas simple de raccord $G^2$ entre les triangles ( $SBR$ ) $S_l$ et $S_r$

La condition (9) est supposée satisfaite . Alors , d'après la proposition 3.4.1 du chapitre 2 , pour obtenir le raccord  $G^2$  entre les deux ( $SBR$ )  $S_l$  et  $S_r$  le long de leur frontière commune  $\Gamma$  , il suffit de réaliser le raccord  $G^2$  "au

dessus", c'est à dire entre les "surfaces triangulaires (SBP) de  $\mathcal{F}$ " de paramétrages respectifs  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$ .

Dans ce cas, l'application des propositions du paragraphe 2 de ce chapitre, aux paramétrages polynomiaux  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$ , donne des conditions suffisantes de raccordement  $G^i$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ .

### 3.3 Raccord $G^1$ : cas général

Il s'agit de traduire sur les réseaux massiques  $g$  et  $d$  le résultat du chapitre 2 qui est rappelé ici:

#### Proposition 3.3.1 :

Si la condition (9) est réalisée et avec la notation  $l(0, v) = c(v)$ , le raccord  $G^1$  entre les surfaces  $S_l$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma$  équivaut à l'existence de quatre fonctions

$f_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que:

$$\forall v \in [0, 1], \\ f_1(v) \cdot \mathcal{R}_u(0, v) + f_2(v) \cdot \mathcal{L}_u(0, v) + f_3(v) \cdot \mathcal{L}_v(0, v) + f_4(v) \cdot \mathcal{C}(v) = 0$$

$$\epsilon f_1(v) \cdot f_2(v) < 0$$

Des calculs analogues à ceux de la section 2 donnent la forme équivalente suivante :

$$\forall v \in [0, 1], \\ f_1(v) \left[ \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u}(0, v, 1-v) - \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial w}(0, v, 1-v) \right] \\ + f_2(v) \cdot \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial u}(0, v, 1-v) - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial w}(0, v, 1-v) \right] \\ + f_3(v) \cdot \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v}(0, v, 1-v) - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial w}(0, v, 1-v) \right] + f_4(v) \mathcal{L}_1(0, v, 1-v) = 0 \quad (10)$$

Remarquons que:

$\mathcal{L}_1(0, v, 1 - v)$  est un polynôme en  $v$  de degré  $n$ .

et que les trois fonctions :

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u}(0, v, 1 - v) - \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial w}(0, v, 1 - v) \right],$$

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial u}(0, v, 1 - v) - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial w}(0, v, 1 - v) \right],$$

$$\text{et } \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v}(0, v, 1 - v) - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial w}(0, v, 1 - v) \right]$$

sont des polynômes en  $v$  de degré  $(n - 1)$ .

### 3.3.1 Première condition suffisante

Une première condition de raccord  $G^1$  entre  $S_i$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma$  est établie dans cette section, en adoptant le choix suivant pour les fonctions coefficients de la relation (10) :

$$\forall v \in [0, 1], \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, 3\} . \\ f_i(v) = \alpha_i v + \beta_i(1 - v) & (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2 \\ f_4(v) = \alpha_4 & \alpha_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La condition  $f_1(v)f_2(v) > 0$  équivaut à :

$$\alpha_1 \alpha_2 B_2^2(v) + \frac{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1}{2} B_1^2(v) + \beta_1 \beta_2 B_0^2(v) > 0 .$$

Cette condition équivaut à

$$\begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 > 0, & \beta_1 \beta_2 > 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 > \left( \frac{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1}{2} \right)^2 \end{cases}$$

**Remarque technique :**  $v B_j^{n-1}(v) = \frac{j+1}{n} B_{j+1}^n(v)$

$$(1 - v) B_j^{n-1}(v) = \frac{n-j}{n} B_j^n(v)$$

Après réorganisation des indices , nous en déduisons , pour tout  $n$ -uplet de réels  $\{u_j, 0 \leq j \leq n-1\}$ :

$$n(\alpha_i v + \beta_i(1-v)) \sum_{j=0}^{j=n-1} u_j B_j^{n-1}(v) = \sum_{j=0}^{j=n} (\alpha_i j u_{j-1} + \beta_i(n-j)u_j) B_j^n(v)$$

avec la convention

$$j u_{j-1} = 0 \text{ si } j = 0 \text{ et } (n-j)u_j = 0 \text{ si } j = n$$

**Expression de la condition de raccord  $G^1$  dans la base de Bernstein**

: La remarque ci-dessus , appliquée sur les trois premiers termes de l'égalité (10) de raccord  $G^1$  donne :

$$\begin{aligned} & f_1(v) \mathcal{R}_u(0, v) \\ &= \sum_{j=0}^{j=n} [\alpha_1 j (\mathcal{R}_{1(j-1)(n-j)} - \mathcal{R}_{0(j-1)(n-j+1)}) + \beta_1(n-j) (\mathcal{R}_{1j(n-j-1)} - \mathcal{R}_{0j(n-j)})] B_j^n(v) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_2(v) \mathcal{L}_u(0, v) \\ &= \sum_{j=0}^{j=n} [\alpha_2 j (\mathcal{L}_{1(j-1)(n-j)} - \mathcal{L}_{0(j-1)(n-j+1)}) + \beta_2(n-j) (\mathcal{L}_{1j(n-j-1)} - \mathcal{L}_{0j(n-j)})] B_j^n(v) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_3(v) \mathcal{L}_v(0, v) \\ &= \sum_{j=0}^{j=n} [\alpha_3 j (\mathcal{L}_{0j(n-j)} - \mathcal{L}_{0(j-1)(n-j+1)}) + \beta_3(n-j) (\mathcal{L}_{0(j+1)(n-j-1)} - \mathcal{L}_{0j(n-j)})] B_j^n(v) \end{aligned}$$

Rappelons que :

$$\mathcal{C}(v) = \sum_{j=0}^{j=n} \mathcal{C}_j B_j^n(v)$$

La condition (10) équivaut à :

$$\forall v \in [0, 1] ,$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{j=n} [\alpha_1 j (\mathcal{R}_{1(j-1)(n-j)} - \mathcal{R}_{0(j-1)(n-j+1)}) + \beta_1 (n-j) (\mathcal{R}_{1j(n-j-1)} - \mathcal{R}_{0j(n-j)})] B_j^n(v) \\ & + \sum_{j=0}^{j=n} [\alpha_2 j (\mathcal{L}_{1(j-1)(n-j)} - \mathcal{L}_{0(j-1)(n-j+1)}) + \beta_2 (n-j) (\mathcal{L}_{1j(n-j-1)} - \mathcal{L}_{0j(n-j)})] B_j^n(v) \\ & + \sum_{j=0}^{j=n} [\alpha_3 j (\mathcal{L}_{0j(n-j)} - \mathcal{L}_{0(j-1)(n-j+1)}) + \beta_3 (n-j) (\mathcal{L}_{0(j+1)(n-j-1)} - \mathcal{L}_{0j(n-j)})] B_j^n(v) \\ & + \alpha_4 \sum_{j=0}^{j=n} C_j \cdot B_j^n(v) = 0 . \end{aligned}$$

La condition (9) de raccord  $G^0$  donne:

$$\forall j \in \{0, \dots, n\} ,$$

$$C_j = \mathcal{L}_{0j(n-j)} \text{ et } C_j = \mathcal{R}_{0j(n-j)}$$

Une réorganisation des termes et l'application de  $\hat{\Omega}^{-1}$ , conduisent au résultat suivant qui tient compte du raccord  $G^0$ .

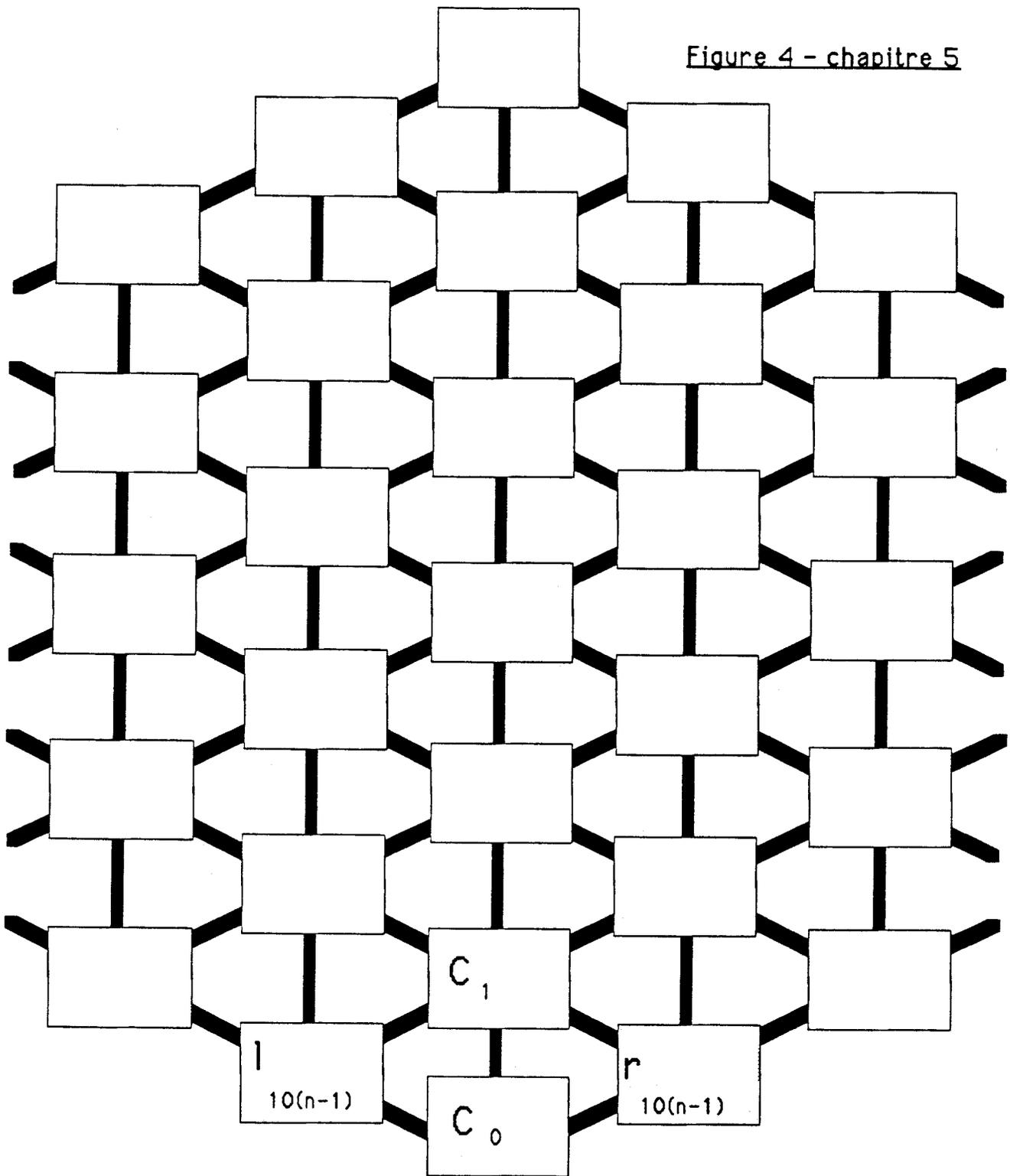
**Proposition 3.3.2 :**

Sachant que la condition (9) est réalisée, une condition suffisante de raccord  $G^1$  entre les surfaces  $S_l$  et  $S_r$  est donnée par l'existence de 7 constantes  $\{\alpha_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$  et  $\{\beta_i, i \in \{1, 2, 3\}\}$  telles que :

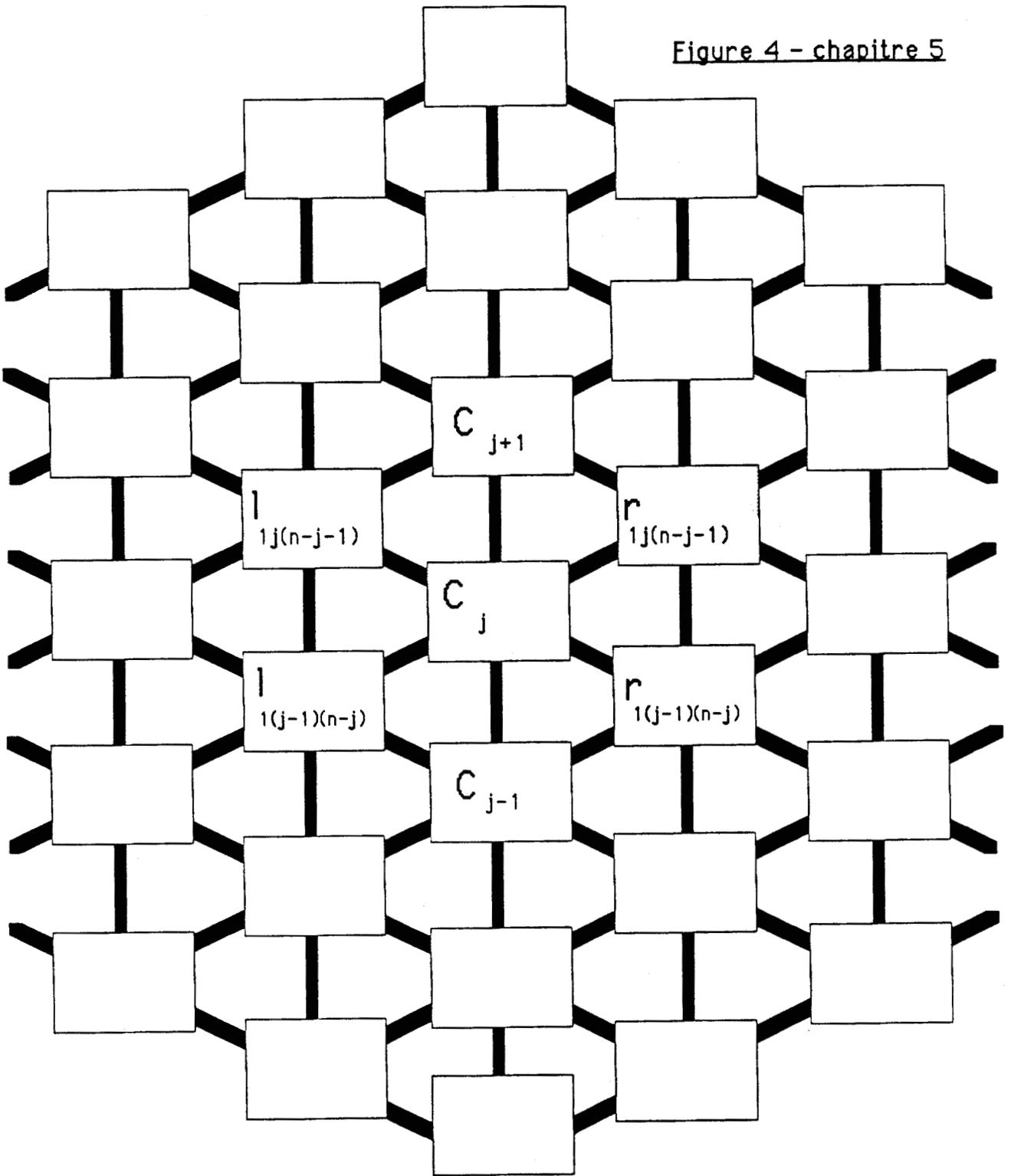
$$\begin{aligned} & \forall j \in \{0, \dots, n\} , \\ & \alpha_1 j (r_{1(j-1)(n-j)} - c_{j-1}) + \beta_1 (n-j) (r_{1j(n-j-1)} - c_j) \\ & + [\alpha_2 j (l_{1(j-1)(n-j)} - c_{j-1}) + \beta_2 (n-j) (l_{1j(n-j-1)} - c_j)] \\ & + [\alpha_3 j (c_j - c_{j-1}) + \beta_3 (n-j) (c_{j+1} - c_j)] + \alpha_4 c_j = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

cf la figure 4 (Il faut veiller à ce que  $a(v) = -\frac{f_2}{f_1}$  reste négatif.)

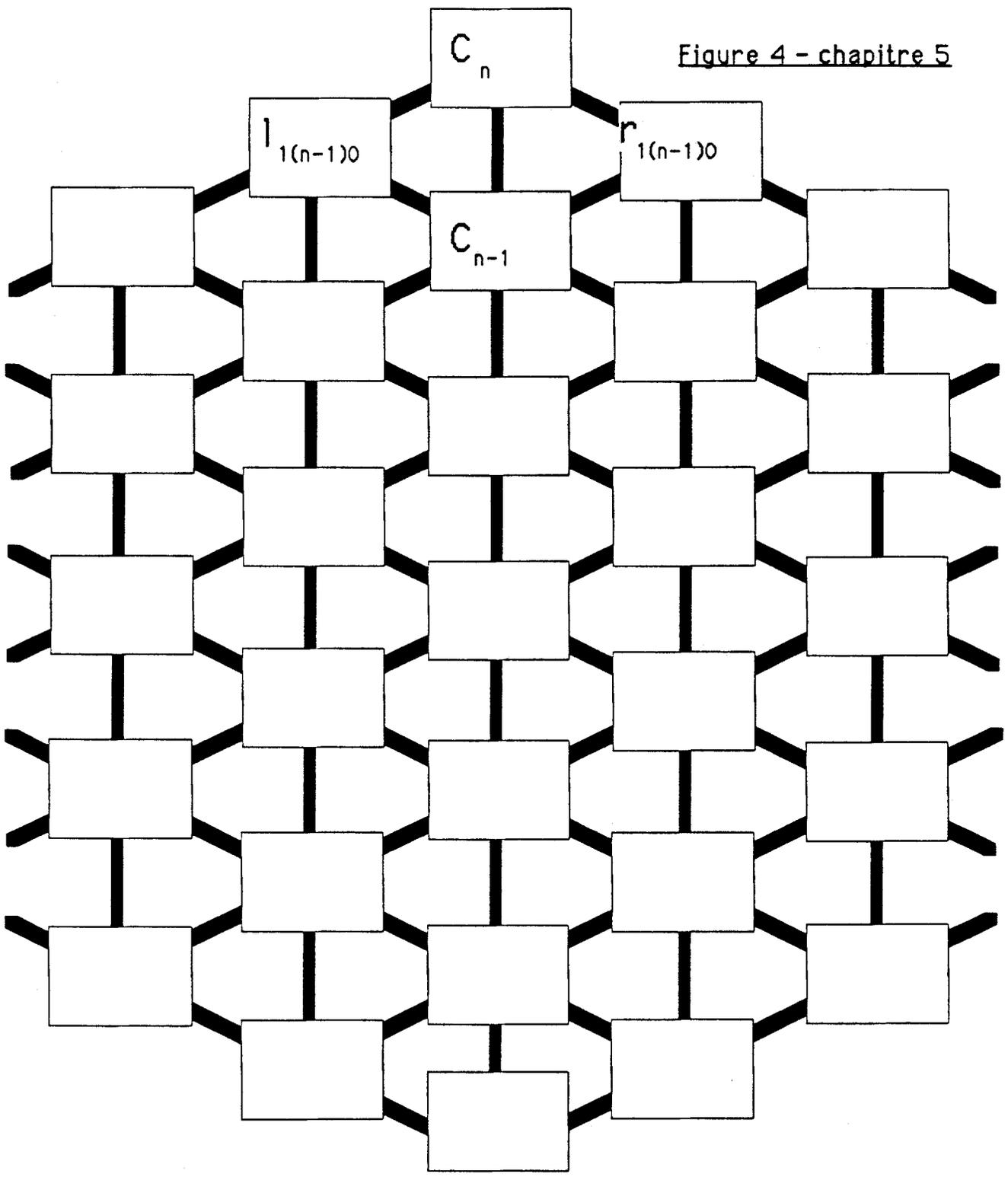
Figure 4 - chapitre 5



Raccordement  $G^1$  entre deux triangles (SBR) (Relation(11) chapitre 5 pour  $j = 0$  ).



Raccordement  $G^1$  entre deux triangles (SBR) (Relation(11) chapitre 5 pour  $1 \leq j \leq n-1$ ). Une condition de compatibilité s'impose



Raccordement  $G^1$  entre deux triangles (SBR) (Relation(11) chapitre pour  $j = n$  ). Une condition de compatibilité s'impose

### 3.3.2 Examen critique de cette proposition

La proposition précédente, d'origine algébrique constitue, en fait un système  $(\Sigma)$  de  $n + 1$  équations aux  $n$  vecteurs massiques inconnus  $\{r_{1j(n-j-1)}; 0 \leq j \leq n - 1\}$ . Ce système est manifestement surdéterminé et n'admet de solutions que si une condition de compatibilité est réalisée, portant sur les vecteurs massiques. Traduite sur les quatre composantes des vecteurs massiques, cette condition impose quatre relations entre les constantes  $\{\alpha_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$  et  $\{\beta_i, i \in \{1, 2, 3\}\}$ : la condition suffisante de la proposition 3.3.2 semble peu commode à utiliser.

### 3.3.3 Ecriture de la condition de compatibilité

Le réseau massique  $g$  est supposé connu et il s'agit de déterminer un réseau massique  $d$  assurant le raccordement  $G^1$  entre les surfaces  $S_l$  et  $S_r$ . La première rangée de ce réseau est donnée par la relation (9).

En revenant dans  $\mathcal{F}$ , et en faisant varier  $j$  de 0 à  $n - 1$ , la proposition précédente permet le calcul de  $\mathcal{R}_{10(n-1)}$ , puis  $\mathcal{R}_{11(n-2)}$ ,  $\dots$ , puis  $\mathcal{R}_{1(n-1)0}$ .

Il reste alors une relation à vérifier, correspondant à la valeur  $j = n$ . Cette relation est compatible avec les  $n$  précédentes si et seulement si quatre déterminants caractéristiques sont nuls, chacun d'eux étant associé à une composante dans la base  $\mathcal{B}$ , soit, plus précisément :

$$\forall k \in \{1, 2, 3, 4\}, \det(M_k) = 0$$

$M_k$  étant la matrice  $(n + 1, n + 1)$  suivante :

$$\begin{bmatrix} n\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & v_k^0 \\ \alpha_1 & (n-1)\beta_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & v_k^1 \\ 0 & 2\alpha_1 & (n-2)\beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & v_k^2 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & j\alpha_1 & (n-j)\beta_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & v_k^j \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-2)\alpha_1 & 2\beta_1 & 0 & v_k^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (n-1)\alpha_1 & \beta_1 & v_k^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n\alpha_1 & v_k^n \end{bmatrix}$$

les réels  $\{v_k^j, 1 \leq k \leq 4, 0 \leq j \leq n\}$  désignant les coordonnées dans la

base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{F}$ , au dessus de  $(\Omega_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  des  $(n+1)$  vecteurs connus de  $\mathcal{F}$ ,  
 $\{\mathcal{V}_j, 0 \leq j \leq n\}$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_j = & -[\alpha_2 j (\mathcal{L}_{1(j-1)(n-j)} - \mathcal{C}_{j-1}) + \beta_2 (n-j) (\mathcal{L}_{1j(n-j-1)} - \mathcal{C}_j)] \\ & + \alpha_1 j \mathcal{C}_{(j-1)} + \beta_1 (n-j) \mathcal{C}_j \\ & - [\alpha_3 j (\mathcal{C}_j - \mathcal{C}_{j-1}) + \beta_3 (n-j) (\mathcal{C}_{j+1} - \mathcal{C}_j)] - \alpha_4 \mathcal{C}_j \end{aligned}$$

**Lemme 3.3.1** *En développant le déterminant de la matrice  $M_k$  en utilisant une méthode de Gauss, nous montrons que la condition de compatibilité s'écrit:*

$$\sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \binom{n}{n-k} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^k \mathcal{V}_{n-k} = 0$$

(12)

### Corollaire

**Proposition 3.3.3** *La condition de compatibilité trouvée ci-dessus est vérifiée pour le choix suivant des coefficients:*

$$\begin{cases} \alpha_4 = 0 \\ \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} \end{cases}$$

ce qui correspond aux fonctions :

$$\begin{cases} f_i(v) = \beta_i \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} v + (1-v)\right) \quad i \in \{1, 2, 3\} \\ f_4(v) = 0 \end{cases}$$

Preuve: Nous utilisons la propriété :

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (n-j+1) \binom{n}{j-1} = j \binom{n}{j}$$

Soit  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  :

dans la condition (12), le coefficient de  $(\mathcal{L}_{1(j-1)(n-j)} - \mathcal{C}_{j-1})$  est :

$$(-1)^{n-j+1} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{n-j} [j \alpha_2 \binom{n}{j} - (n-j+1) \beta_2 \binom{n}{j-1} \frac{\alpha_1}{\beta_1}]$$

$$= (-1)^{n-j+1} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{n-j} \frac{1}{\beta_1} j \binom{n}{j} [\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2] = 0$$

celui de  $(C_j - C_{j-1})$  est:

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-j+1} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{n-j} [j \alpha_3 \binom{n}{j} - (n-j+1) \beta_3 \binom{n}{j-1}] \frac{\alpha_1}{\beta_1} \\ &= (-1)^{n-j+1} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{n-j} \frac{1}{\beta_1} j \binom{n}{j} [\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3] = 0 \end{aligned}$$

celui de  $C_{(j-1)}$  est :

$$(-1)^{j+1} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)^{n-j} [j \alpha_1 \binom{n}{j} - (n-j+1) \beta_1 \binom{n}{j-1}] \frac{\alpha_1}{\beta_1} = 0$$

Alors, la relation de raccord  $G^1$  :

$$\begin{aligned} & \forall v \in [0, 1] , \\ & f_1(v) \mathcal{R}_u(0, v) + f_2(v) \mathcal{L}_u(0, v) + f_3(v) \mathcal{L}_v(0, v) + f_4(v) \mathcal{C}(v) = 0 \end{aligned}$$

peut être simplifiée par  $(\frac{\alpha_1}{\beta_1} v + (1-v))$  et s'écrit:

$$\beta_1 \mathcal{R}_u + \beta_2 \mathcal{L}_u + \beta_3 \mathcal{L}_v = 0_{\mathcal{F}}$$

égalité qui exprime le raccord  $G^1$  dans  $\mathcal{F}$  entre les surfaces paramétrées par  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$  avec des fonctions coefficients qui sont constantes. Nous retrouvons les conditions de la proposition 2.3.2.

### 3.4 Autre condition suffisante de raccord $G^1$

Elle sera obtenue en réalisant une élévation de hauteur sur le réseau  $g$  et en choisissant les fonctions  $f_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  constantes :

$$\forall v \in [0, 1] , \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \\ f_i(v) = \alpha_i & \alpha_i \in \mathbb{R} \\ \alpha_1 \alpha_2 > 0 \end{cases}$$

La surface  $S_r$  sera recherchée comme une ( $SBR$ ) de hauteur  $n+1$ , de réseau massique :

$$d = \{r_{ijk} , (i, j, k) \in \Delta_{n+1}\}.$$

Rappelons que:

$$\mathcal{C}(v) = \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) \mathcal{C}_j$$

En outre :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u}(0, v, 1 - v) - \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial w}(0, v, 1 - v) \right] \\ &= (n + 1) \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) [\mathcal{R}_{1j(n-j)} - \mathcal{R}_{0j(n+1-j)}] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial u}(0, v, 1 - v) - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial w}(0, v, 1 - v) \right] \\ &= (n + 1) \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) [(\mathcal{L} \rightarrow 1)_{1j(n-j)} - (\mathcal{L} \rightarrow 1)_{0j(n+1-j)}] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v}(0, v, 1 - v) - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial w}(0, v, 1 - v) \right] \\ &= (n + 1) \sum_{j=0}^{j=n} B_j^n(v) [(\mathcal{L} \rightarrow 1)_{0(j+1)(n-j)} - (\mathcal{L} \rightarrow 1)_{0j(n+1-j)}] . \end{aligned}$$

Alors , le traitement de la condition:

$$\begin{aligned} & f_1(v) \left[ \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial u}(0, v, 1 - v) - \frac{\partial \mathcal{R}_1}{\partial w}(0, v, 1 - v) \right] \\ &+ f_2(v) \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial u}(0, v, 1 - v) - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial w}(0, v, 1 - v) \right] \\ &+ f_3(v) \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial v}(0, v, 1 - v) - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial w}(0, v, 1 - v) \right] + f_4(v) \mathcal{C}(v) = 0 \end{aligned}$$

et l'application de  $\hat{\Omega}^{-1}$  , donnent le résultat ci-après:

**Proposition 3.4.1 :**

En supposant réalisée la condition (9), une condition suffisante de raccord  $G^1$  entre  $S_l$  et  $S_r$  se traduit par l'existence de quatre constantes  $\{\alpha_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$  telles que :

$$\alpha_1 \alpha_2 > 0$$

$$\forall j \in \{0, \dots, n\} ,$$

$$\alpha_1[r_{1j(n-j)} - r_{0j(n+1-j)}] + \alpha_2[(l \rightarrow 1)_{1j(n-j)} - (l \rightarrow 1)_{0j(n+1-j)}] + \alpha_3[(l \rightarrow 1)_{0(j+1)(n-j)} - (l \rightarrow 1)_{0j(n+1-j)}] + \frac{\alpha_4}{n+1} c_j = 0$$

Comme les points du bord

$$\mathcal{R}_{0j(n+1-j)} = \frac{j}{n+1} \mathcal{L}_{0(j-1)(n+1-j)} + \frac{n+1-j}{n+1} \mathcal{L}_{0j(n-j)} , 0 \leq j \leq n+1 ,$$

sont connus par la relation (9) , la proposition permet le calcul de

$$\{\mathcal{R}_{1j(n-j)} , 0 \leq j \leq n\} .$$

cf la figure 5

**3.4.1 Nombre de degrés de liberté**

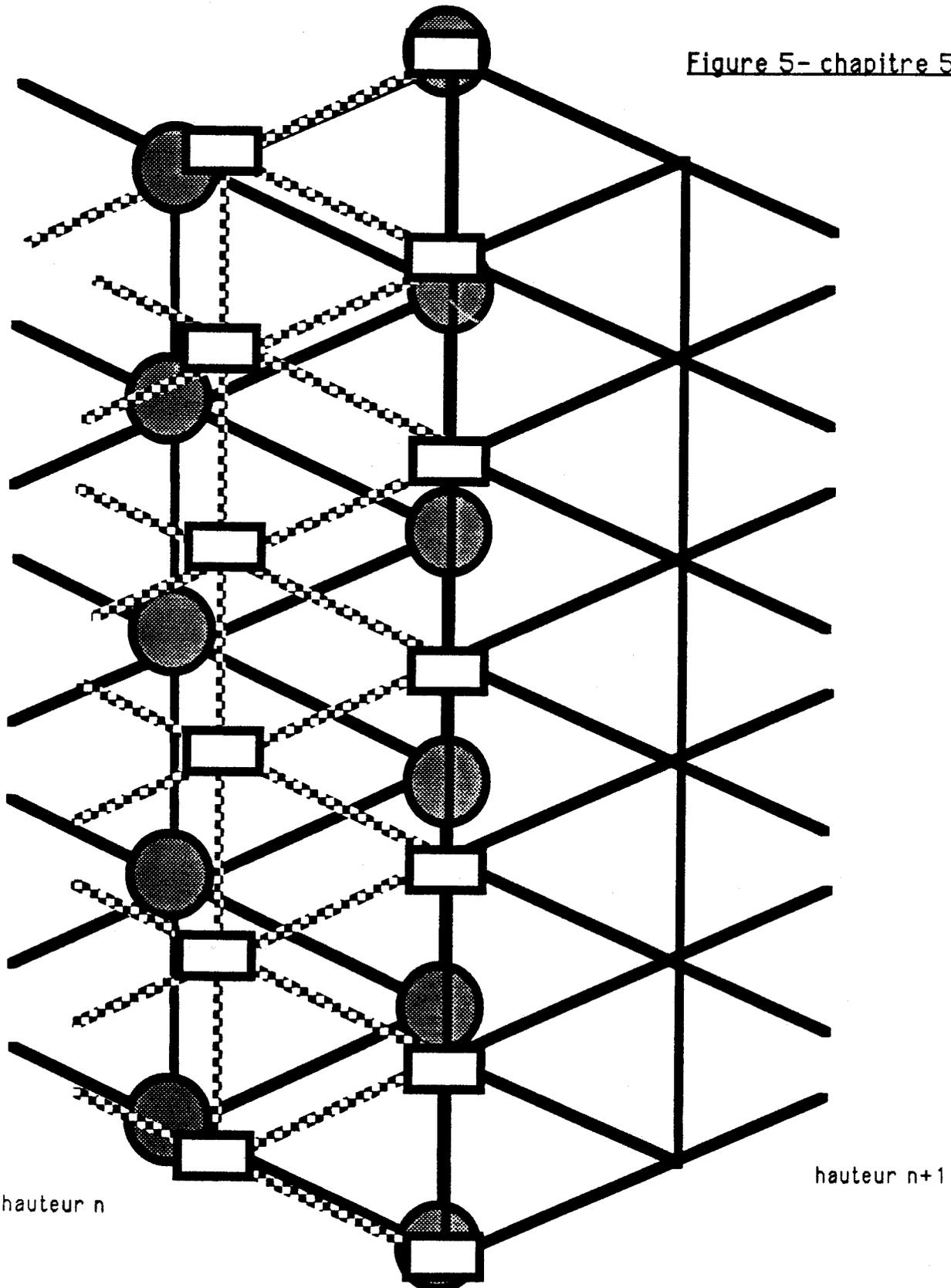
Cette proposition donne 3 degrés de liberté car  $\alpha_1 = 1$  ne restreint pas la généralité du problème . En outre il faut veiller à ce que  $a(v) = -\frac{f_2}{f_1}$  reste négatif. On construit une surface  $S_r$  rationnelle de hauteur  $(n+1)$  et rien ne peut assurer qu'il est possible de la ramener à une hauteur  $n$ .

**3.5 Raccord  $G^2$** 

Traduisons sur les réseaux massiques  $d$  et  $g$  le théorème général vu au chapitre 2: Dans un premier temps ces deux réseaux sont supposés de hauteur  $n$ .

La condition de raccord  $G^2$  entre  $S_l$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma$  équivaut à l'existence de quatre fonctions  $h_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  définies de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  , ( $h_1(v) \neq 0$ ) telles que :

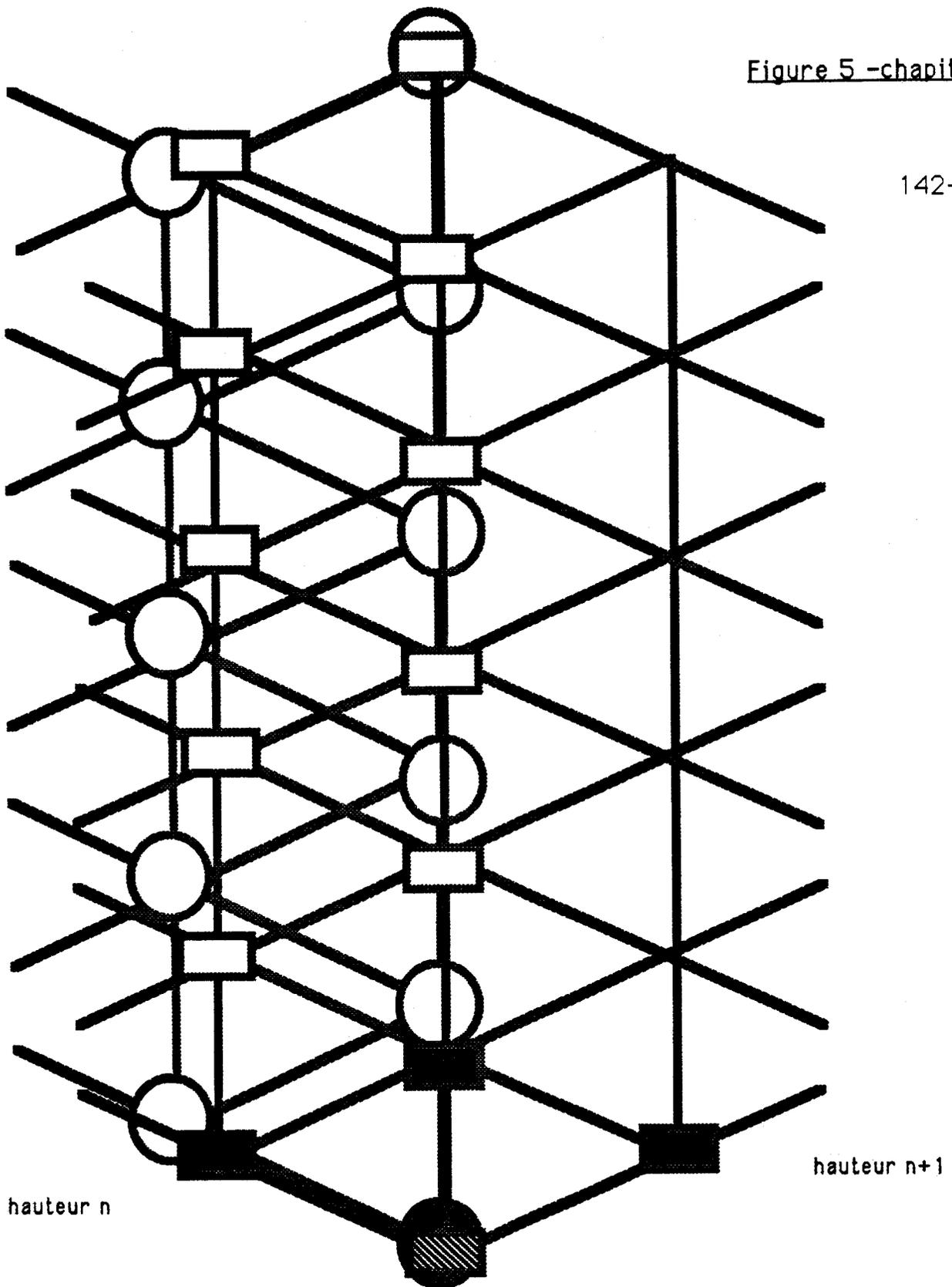
Figure 5- chapitre 5



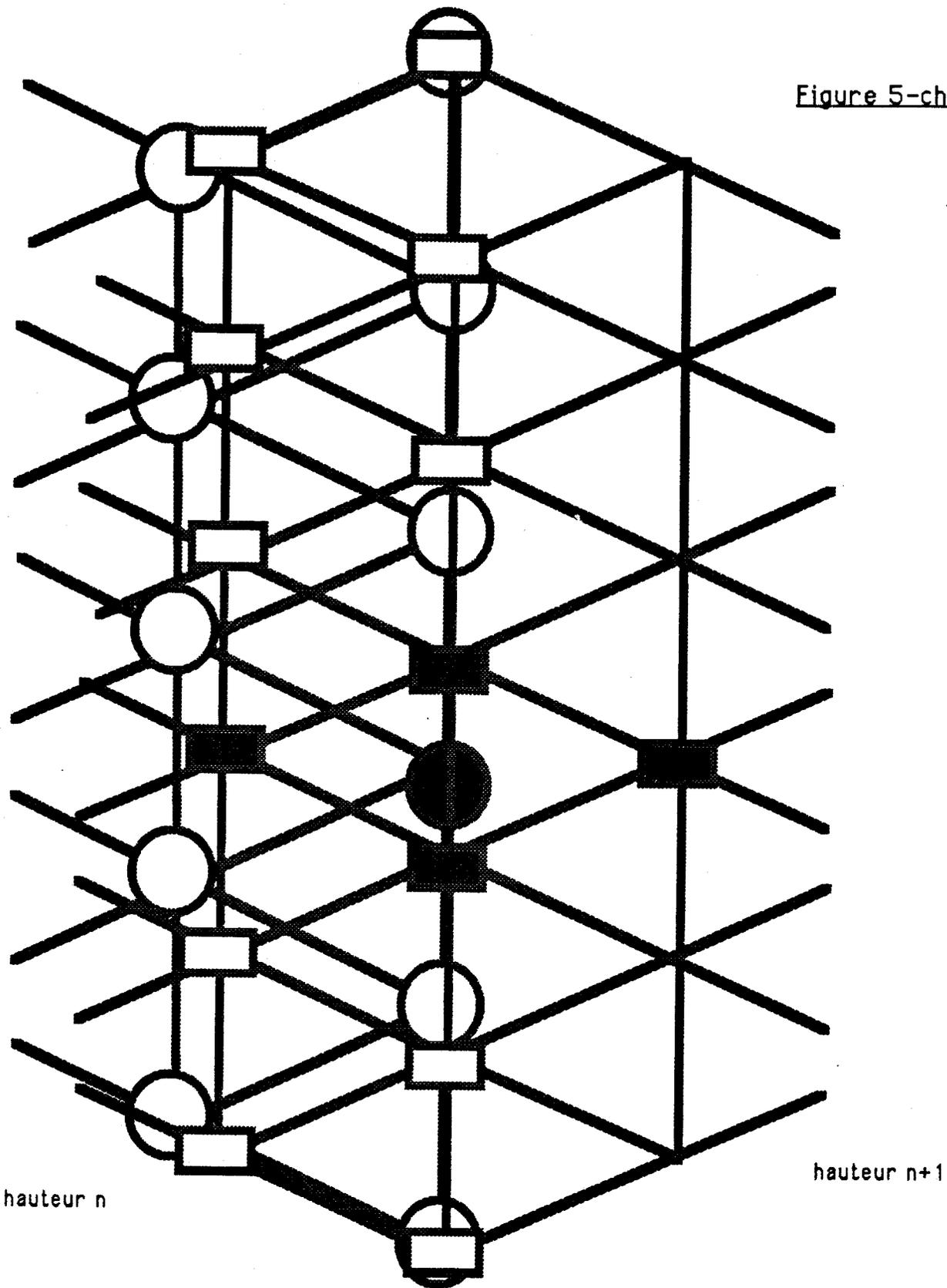
hauteur n

hauteur n+1

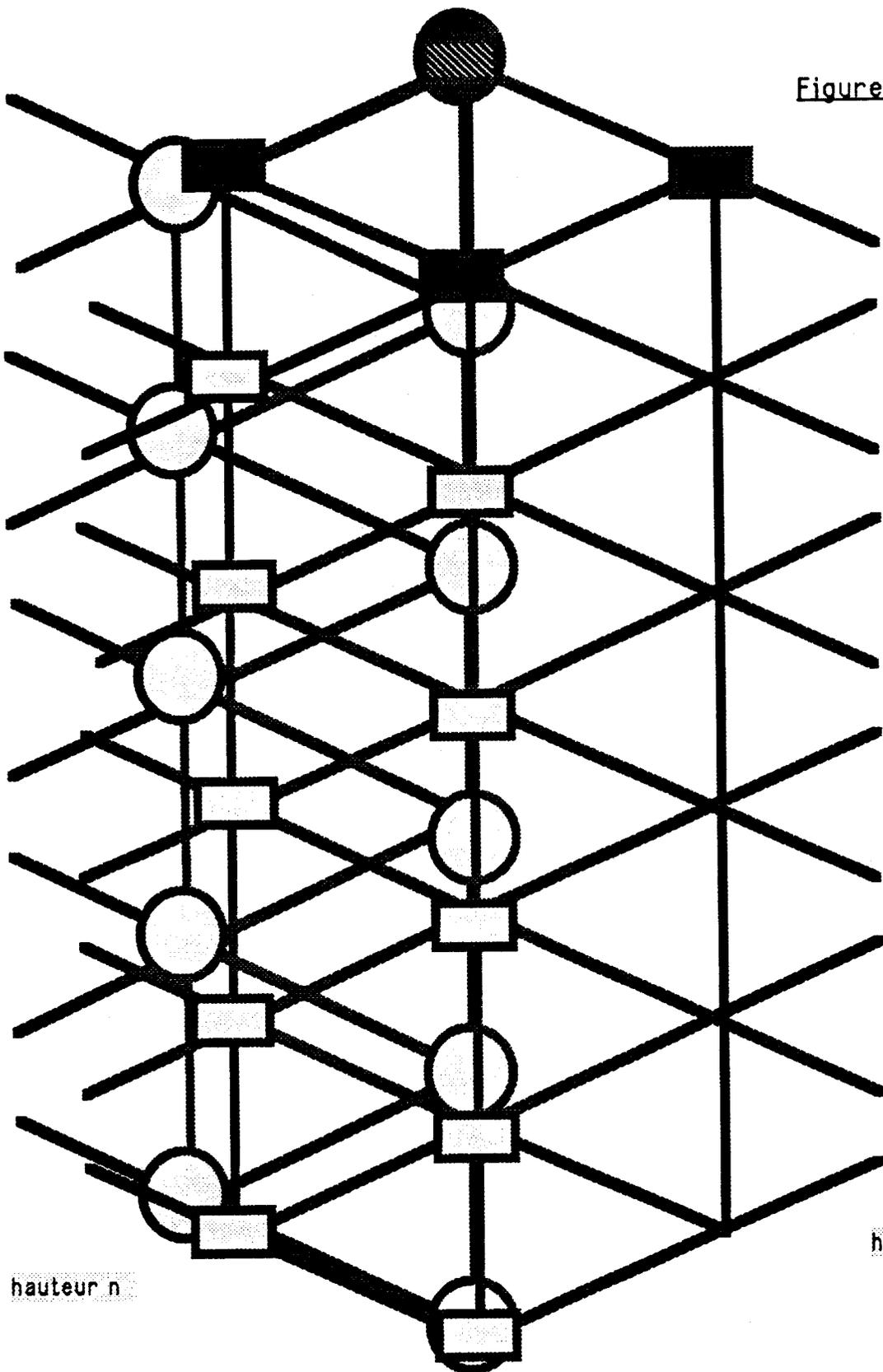
Elévation de hauteur à gauche et obtention de la première rangée du réseau massique de la surface triangle(SBR) de droite :(rectangles blancs)



Obtention de la deuxième rangée de vecteurs massiques de la surface (SBR)  $S_r$ , à partir des deux réseaux de la surface  $S_l$ . ( $j=0$ )  
D'après la proposition 3.4.1 du chapitre 5



Obtention de la deuxième rangée de vecteurs massiques de la surface (SBR)  $S_r$ , à partir des deux réseaux de la surface  $S_l$ . (j quelconque)  
D'après la proposition 3.4.1 du chapitre 5



hauteur n

hauteur n+1

Obtention de la deuxième rangée de vecteurs massiques de la surface (SBR)  $S_r$ , à partir des deux réseaux de la surface  $S_l$ . ( $j = n$ )  
 D'après la proposition 3.4.1. du chapitre 5

$\forall v \in [0, 1]$ ,

$$h_1(v) \left( \frac{\lambda(0,v)}{\rho(0,v)} \cdot \mathcal{R}_{uu}(0,v) - a^2 \mathcal{L}_{uu}(0,v) - 2ab \mathcal{L}_{uv}(0,v) - b^2 \mathcal{L}_{vv}(0,v) \right) \\ + h_2(v) \mathcal{L}_u(0,v) + h_3(v) \mathcal{L}_v(0,v) + h_4(v) \mathcal{C}(v) = 0$$

Ici, à cause de la condition (9),  $\frac{\lambda(0,v)}{\rho(0,v)} = 1$ .

De plus on sait que :

$$\mathcal{R}_{uu}(0,v) - a^2(v) \cdot \mathcal{L}_{uu}(0,v) - 2a(v)b(v) \mathcal{L}_{uv}(0,v) - b^2(v) \mathcal{L}_{vv}(0,v) \\ = n(n-1) \sum_{(2,j,k) \in \Delta_n} \mathcal{G}_{jk} B_j^{n-2},$$

avec

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2 \mid (2,j,k) \in \Delta_n \\ \mathcal{G}_{jk} = \mathcal{R}_{2jk} - 2\mathcal{R}_{1j(k+1)} + \mathcal{R}_{0j(k+2)} - a^2(v) [\mathcal{L}_{2jk} - 2\mathcal{L}_{1j(k+1)} + \mathcal{L}_{0j(k+2)}] \\ - 2a(v)b(v) [\mathcal{L}_{1(j+1)k} - \mathcal{L}_{1j(k+1)} - \mathcal{L}_{0(j+1)(k+1)} + \mathcal{L}_{0j(k+2)}] \\ - b^2(v) [\mathcal{L}_{0(j+2)k} - 2\mathcal{L}_{0(j+1)(k+1)} + \mathcal{L}_{0j(k+2)}]$$

**Remarque:** Le choix  $h_4(v) = 0$  donne le raccord  $G^2$  entre les deux surfaces (SBP) de  $\mathcal{F}$ , triangulaires de hauteur  $n$ , paramétrées par  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{R}$ . La proposition 2.5.1 donne une condition suffisante pour réaliser un tel raccord lorsqu'on choisit en plus  $h_2(v) = 0$  et  $h_3(v) = 0$ .

### 3.5.1 Première condition suffisante de raccord $G^2$

**Remarque technique:**  $v^2 B_j^{n-2}(v) = \frac{(j+1)(j+2)}{n(n-1)} B_{j+2}^n(v)$

$$v(1-v) B_j^{n-2}(v) = \frac{(j+1)(n-j-1)}{n(n-1)} B_{j+1}^n(v)$$

$$(1-v)^2 B_j^{n-2}(v) = \frac{(n-j)(n-j-1)}{n(n-1)} B_j^n(v)$$

Alors, étant donné le triplet de réels  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ , des réorganisations d'indices conduisent à la formule générale suivante, valable pour des coefficients réels  $(u_j, 0 \leq j \leq n-2)$  quelconques:

$$\begin{aligned}
& n(n-1) \left[ \sum_{j=0}^{j=n-2} u_j B_j^{n-2}(v) \right] [\alpha v^2 + \beta v(1-v) + \gamma(1-v)^2] \\
&= \sum_{j=0}^{j=n} [\alpha j(j-1)u_{j-2} + \beta j(n-j)u_{j-1} + \gamma(n-j)(n-j-1)u_j] B_j^n(v)
\end{aligned}$$

avec la convention :

$\forall l \in \mathbb{N}$ ,  $ka_l = 0$  si  $k = 0$ .

### 3.5.2 Raccord $G^2$ entre $S_l$ et $S_r$

Dans cette section, le choix du paragraphe (3.3.1) est conservé pour les fonctions coefficients de la relation du raccord  $G^1$  :

$$\forall v \in [0, 1], \begin{cases} \forall i \in \{1, 2, 3\} \\ f_i(v) = \alpha_i v + \beta_i(1-v) & (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2 \\ f_4(v) = \alpha_4 & \alpha_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Alors  $a(v) = -\frac{f_2(v)}{f_1(v)}$  et  $b(v) = -\frac{f_3(v)}{f_1(v)}$ .

Les fonctions  $h_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  sont choisies de la manière suivante:

$$\begin{cases} \forall v \in [0, 1] \\ h_1(v) = f_1^2(v) \\ \forall i \in \{2, 3, \} \\ h_i(v) = \gamma_i v + \delta_i(1-v) & (\gamma_i, \delta_i) \in \mathbb{R}^2 \\ h_4(v) = \gamma_4 & \gamma_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Le choix de  $h_1$  est motivé dans un but de simplification.

Il s'agit maintenant de trouver une condition sur les vecteurs massiques pour que la relation suivante soit satisfaite :

$$\begin{aligned}
& \forall v \in [0, 1] , \\
& [\alpha_1 v + \beta_1(1 - v)]^2 \mathcal{R}_{uu}(0, v) - [\alpha_2 v + \beta_2(1 - v)]^2 \mathcal{L}_{uu}(0, v) \\
& - 2[\alpha_2 v + \beta_2(1 - v)][\alpha_3 v + \beta_3(1 - v)] \mathcal{L}_{uv}(0, v, 1 - v) \\
& - [\alpha_3 v + \beta_3(1 - v)]^2 \mathcal{L}_{vv}(0, v) + [\gamma_2 v + \delta_2(1 - v)] \mathcal{L}_u(0, v) \\
& + [\gamma_3 v + \delta_3(1 - v)] \mathcal{L}_v(0, v) + \gamma_4 \mathcal{C}(v) = 0
\end{aligned}$$

En utilisant les relations vues au début du chapitre , tout peut être exprimé dans la base de Bernstein  $\{B_j^n, j \in \{0, \dots, n\}\}$  , ce qui donne , après application de  $\hat{\Omega}^{-1}$  :

$$\begin{aligned}
& \forall j \in \{0, \dots, n\} , \\
& [\alpha_1^2 j(j-1)[r_{2(j-2)(n-j)} - 2r_{1(j-2)(n-j+1)} + r_{0(j-2)(n-j+2)}] \\
& + 2\beta_1 \alpha_1 j(n-j)[r_{2(j-1)(n-j-1)} - 2r_{1(j-1)(n-j)} + r_{0(j-1)(n-j+1)}] \\
& + \beta_1^2 (n-j)(n-j-1)[r_{2j(n-j-2)} - 2r_{1j(n-j-1)} + r_{0j(n-j)}] \\
& - \alpha_2^2 j(j-1)[l_{2(j-2)(n-j)} - 2l_{1(j-2)(n-j+1)} + l_{0(j-2)(n-j+2)}] \\
& - 2\beta_2 \alpha_2 j(n-j)[l_{2(j-1)(n-j-1)} - 2l_{1(j-1)(n-j)} + l_{0(j-1)(n-j+1)}] \\
& - \beta_2^2 (n-j)(n-j-1)[l_{2j(n-j-2)} - 2l_{1j(n-j-1)} + l_{0j(n-j)}] \\
& - 2\{\alpha_2 \alpha_3 j(j-1)[l_{1(j-1)(n-j)} - l_{1(j-2)(n-j+1)} - l_{0(j-1)(n-j+1)} + l_{0(j-2)(n-j+2)}] \\
& + (\beta_3 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_3) j(n-j)[l_{1j(n-j-1)} - l_{1(j-1)(n-j)} - l_{0j(n-j)} + l_{0(j-1)(n-j+1)}] \\
& + \beta_2 \beta_3 (n-j)(n-j-1)[l_{1(j+1)(n-j-2)} - l_{1j(n-j-1)} - l_{0(j+1)(n-j-1)} + l_{0j(n-j)}]\} \\
& - \alpha_3^2 j(j-1)[l_{0j(n-j)} - 2l_{0(j-1)(n-j+1)} + l_{0(j-2)(n-j+2)}] \\
& - 2\beta_3 \alpha_3 j(n-j)[l_{0(j+1)(n-j-1)} - 2l_{0j(n-j)} + l_{0(j-1)(n-j+1)}] \\
& - \beta_3^2 (n-j)(n-j-1)[l_{0(j+2)(n-j-2)} - 2l_{0(j+1)(n-j-1)} + l_{0j(n-j)}] \\
& + \gamma_2 j[l_{1(j-1)(n-j)} - l_{0(j-1)(n-j+1)}] + \delta_2 (n-j)[l_{1j(n-j+1)} - l_{0j(n-j)}] \\
& + \gamma_3 j[l_{0j(n-j)} - l_{0(j-1)(n-j+1)}] + \delta_3 (n-j)[l_{0(j+1)(n-j+1)} - l_{0j(n-j)}] \\
& + \gamma_4 l_{0j(n-j)} = 0
\end{aligned}$$

Les indices qui n'appartiennent pas à  $\Delta_n$  sont des notations de commodité sans importance dans les calculs car les coefficients des termes où ils seraient susceptibles d'intervenir s'annulent.

D'où le résultat obtenu après réorganisation des termes:

**Proposition 3.5.1 :**

Sachant que les conditions (9) de raccord  $G^0$  et (11) de raccord  $G^1$  sont réalisées, une condition suffisante de raccord  $G^2$  entre les deux surfaces  $S_l$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma$  est acquise par l'existence de 5 constantes arbitraires  $\{\gamma_i, i \in \{2, 3, 4\}\}$  et  $\{\delta_i, i \in \{2, 3\}\}$  telles que:

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}$$

$$\begin{aligned} & \alpha_1^2 j(j-1)[r_{2(j-2)(n-j)} - 2r_{1(j-2)(n-j+1)} + r_{0(j-2)(n-j+2)}] \\ & + 2\beta_1 \alpha_1 j(n-j)[r_{2(j-1)(n-j-1)} - 2r_{1(j-1)(n-j)} + r_{0(j-1)(n-j+1)}] \\ & + \beta_1^2 (n-j)(n-j-1)[r_{2j(n-j-2)} - 2r_{1j(n-j-1)} + r_{0j(n-j)}] \\ & - \alpha_2^2 j(j-1)l_{2(j-2)(n-j)} - 2\beta_2 \alpha_2 j(n-j)l_{2(j-1)(n-j-1)} \\ & - \beta_2^2 (n-j)(n-j-1)l_{2j(n-j-2)} \\ & + [2\alpha_2^2 j(j-1) + 2\alpha_2 \alpha_3 j(j-1)]l_{1(j-2)(n-j+1)} \\ & + [4\beta_2 \alpha_2 j(n-j) - 2\alpha_2 \alpha_3 j(j-1) + 2(\beta_3 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_3)j(n-j) + \gamma_2 j]l_{1(j-1)(n-j)} \\ & + [2\beta_2^2 (n-j)(n-j-1) - 2(\beta_3 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_3)j(n-j) \\ & + 2\beta_2 \beta_3 (n-j)(n-j-1) + \delta_2 (n-j)]l_{1j(n-j-1)} \\ & - 2\beta_2 \beta_3 (n-j)(n-j-1)l_{1(j+1)(n-j-2)} \\ & + [-\alpha_2^2 j(j-1) - 2\alpha_2 \alpha_3 j(j-1) - \alpha_3^2 j(j-1)]l_{0(j-2)(n-j+2)} \\ & + [-2\beta_2 \alpha_2 j(n-j) + 2\alpha_2 \alpha_3 j(j-1) - 2(\beta_3 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_3)j(n-j)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\alpha_3^2 j(j-1) + 2\beta_3 \alpha_3 j(n-j) - \gamma_2 j - \gamma_3 j] l_{0(j-1)(n-j+1)} \\
& + [-\beta_2^2 (n-j)(n-j-1) + 2(\beta_3 \alpha_2 + \beta_2 \alpha_3) j(n-j) - 2\beta_2 \beta_3 (n-j)(n-j-1) \\
& - \alpha_3^2 j(j-1) + 4\beta_3 \alpha_3 j(n-j) - \beta_3^2 (n-j)(n-j-1) \\
& - \delta_2 (n-j) + \gamma_3 j - \delta_3 (n-j) + \gamma_4] l_{0j(n-j)} \\
& + [\delta_3 (n-j) + 2\beta_3^2 (n-j)(n-j-1) \\
& - 2\beta_3 \alpha_3 j(n-j) - 2\beta_2 \beta_3 (n-j)(n-j-1)] l_{0(j+1)(n-j+1)} \\
& - \beta_3^2 (n-j)(n-j-1) l_{0(j+2)(n-j-2)} \\
& = 0
\end{aligned}$$

### 3.6 Figure 6

Cette figure montre que la proposition précédente permet le calcul des vecteurs massiques de la deuxième rangée soit :

$\{r_{2j(n-j-2)}, 0 \leq j \leq n-2\}$  En effet pour  $j = 0$  on obtient le vecteur massique  $r_{20(n-2)}$

puis, pour  $j = 1$  on obtient le vecteur massique  $r_{21(n-3)}$  dans un calcul utilisant la valeur de  $r_{20(n-2)}$

Enfin, pour  $j \geq 2$  on obtient  $r_{2j(n-j-2)}$  dans un calcul faisant intervenir les deux vecteurs massiques  $r_{2(j-1)(n-j-1)}$  et  $r_{2(j-2)(n-j)}$ .

Cependant cette condition suffisante est difficile à utiliser car elle constitue, en fait un système de  $n+1$  équations aux  $(n-1)$  vecteurs massiques inconnus  $\{r_{2j(n-j-2)}, 0 \leq j \leq n-2\}$ .

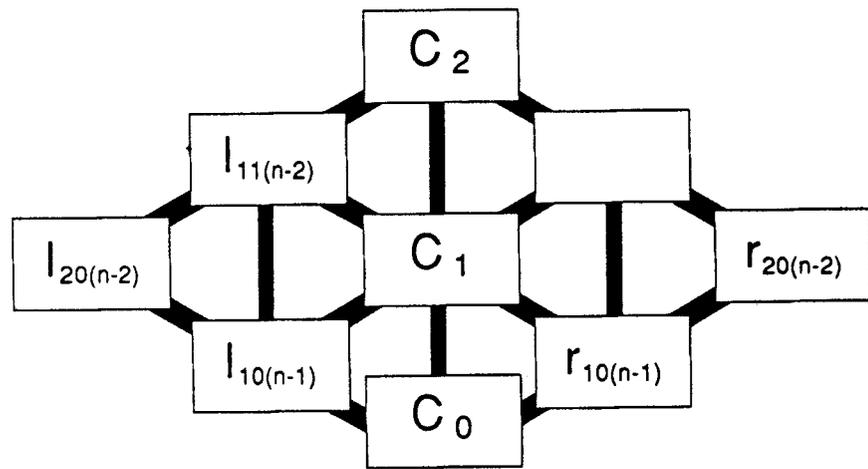
Il y a deux conditions de compatibilité à satisfaire ce qui amène huit relations (non linéaires) entre les constantes qui interviennent.

### 3.7 Construction d'un triangle (SBR) de hauteur $n+2$ , raccordé $G^2$ au triangle $S_l$

Deux élévations de hauteur sont réalisées sur le réseau massique de contrôle du triangle (SBR)  $S_l$  et, alors, on obtient trois réseaux massiques de contrôle pour ce triangle (SBR) :

Figure 6-chapitre 5

Proposition 3.5.1. du chapitre 5

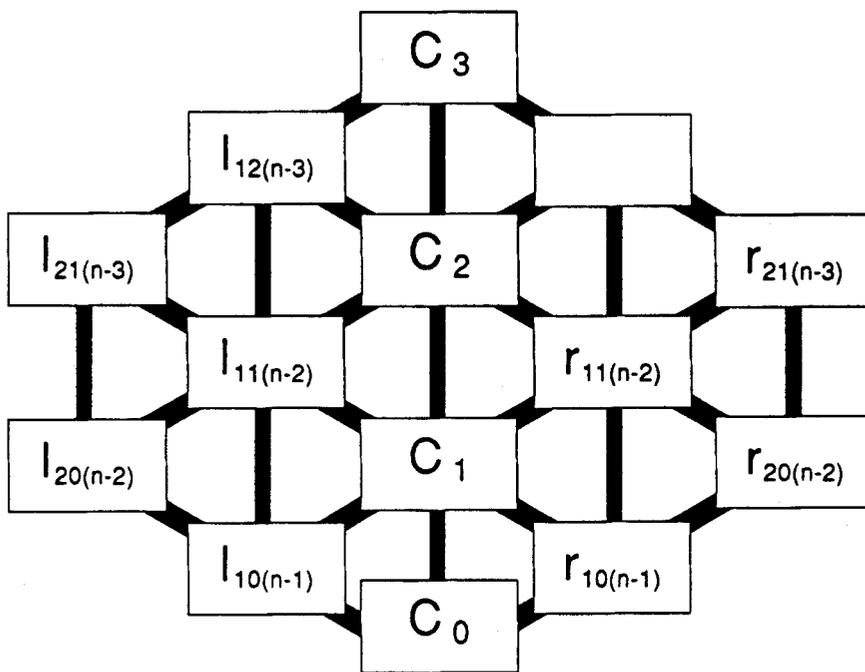


$j = 0$

Raccord  $G^2$  entre deux triangles (SBR)  
Obtention de  $r_{20(n-2)}$

147-bis

**Figure 6 - chapitre 5**



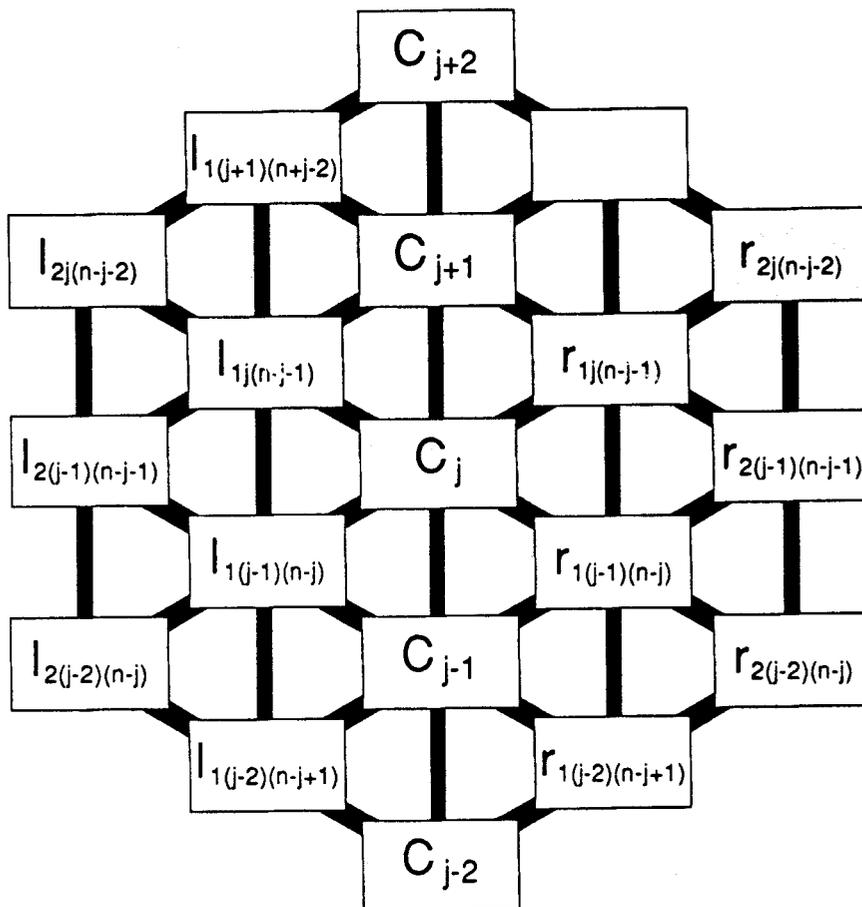
$$j = 1$$

Raccord  $G^2$  entre deux triangles (SBR)

Obtention de  $r_{21(n-3)}$  à partir de la proposition 3.5.1. chapitre 5

**Figure 6 - chapitre 5**

Proposition 3.5.1 du chapitre 5

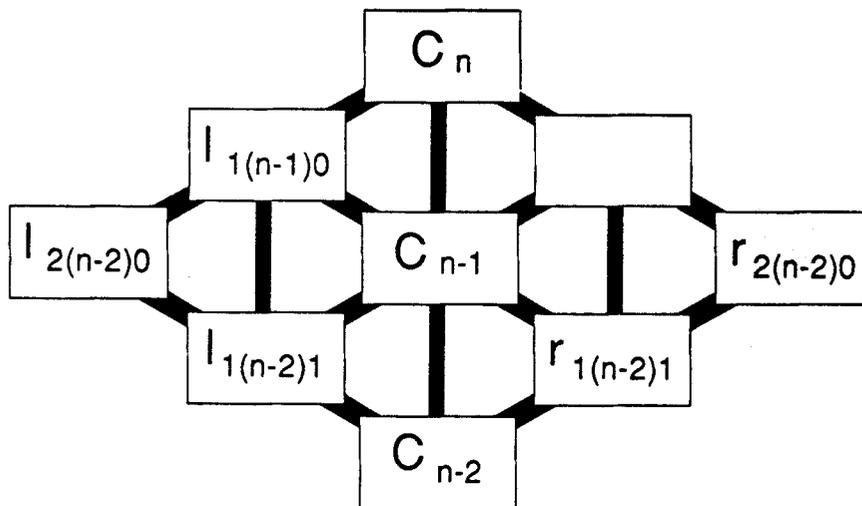


$$2 \leq j \leq n-2$$

Raccord  $G^2$  entre deux triangles SBR  
 Obtention de  $r_{2j(n-j-2)}$

**Figure 6 - chapitre 5**

Proposition 3.5.1 du chapitre 5



Il y a deux relations de compatibilité :

$(j = n)$

$j = (n-1)$  posent des problèmes et exigent une condition de compatibilité.

$$\begin{aligned} & \{ljk \quad , \quad (i, j, k) \in \Delta_n\} \\ & \{(l \rightarrow 1)ijk \quad , \quad (i, j, k) \in \Delta_{n+1}\} \\ & \{(l \rightarrow 2)ijk \quad , \quad (i, j, k) \in \Delta_{n+2}\} \end{aligned}$$

Le passage du premier réseau massique aux deux autres est expliqué au chapitre 1.

Alors , avec nos notations nous pouvons exprimer de trois façons  $\mathcal{L}_1(u, v, w)$ :

$$\mathcal{L}_1(u, v, w) = SBP[\mathcal{L}_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_n](u, v, w) \text{ (formulation 0)}$$

$$\mathcal{L}_1(u, v, w) = SBP[(\mathcal{L} \rightarrow 1)_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_{n+1}](u, v, w) \text{ (formulation 1)}$$

$$\mathcal{L}_1(u, v, w) = SBP[(\mathcal{L} \rightarrow 2)_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_{n+2}](u, v, w) \text{ (formulation 2)}$$

Dans la relation générale de raccord  $G^2$  ,

$$\forall v \in [0, 1],$$

$$h_1(v) \left( \frac{\lambda(0,v)}{\rho(0,v)} \mathcal{R}_{uu}(0, v) - a^2 \mathcal{L}_{uu}(0, v) - 2ab \mathcal{L}_{uv}(0, v) - b^2 \mathcal{L}_{vv}(0, v) \right)$$

$$+ h_2(v) \mathcal{L}_u(0, v) + h_3(v) \mathcal{L}_v(0, v) + h_4(v) \mathcal{C}(v) = 0$$

d'une part , on cherche  $S_r$  comme une ( $SBR$ ) de hauteur  $(n+2)$  , d'autre part, on choisit les fonctions coefficients constantes (notées  $h_i$  ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) et, la formulation de la fonction  $\mathcal{L}_1$  qui permet l'écriture de chacun des termes sous forme ( $BP$ ) de longueur  $n$ .

Donc , à partir du réseau  $\{\mathcal{L}_{ijk} , (i, j, k) \in \Delta_n\}$  on construit le réseau  $\{\mathcal{R}_{ijk} , (i, j, k) \in \Delta_{n+2}\}$  de la façon suivante:

### 3.7.1 Raccord $G^0$

La condition (9) est réalisée si:  $\mathcal{R}_{0jk} = (\mathcal{L} \rightarrow 2)_{0jk} , \forall (j, k) \mid (0, j, k) \in \Delta_{n+2}$

La première rangée du réseau  $\{\mathcal{R}_{ijk} , (i, j, k) \in \Delta_{n+2}\}$  est déterminée.

### 3.7.2 Raccord $G^1$

Les fonctions  $\{f_i , i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$  sont choisies constantes et de façon similaire à la démonstration de la proposition 3.4.1:

$$f_1 f_2 > 0$$

$$\begin{aligned} \forall (j, k) \in \mathbb{N}^2 \mid (1, j, k) \in \Delta_{n+2} \\ -f_1 \mathcal{R}_{1jk} = -f_1 [(\mathcal{L} \rightarrow 2)_{0j(n+2-j)}] \\ + f_2 [(\mathcal{L} \rightarrow 2)_{1j(n+1-j)} - (\mathcal{L} \rightarrow 2)_{0j(n+2-j)}] \\ + f_3 [(\mathcal{L} \rightarrow 2)_{0(j+1)(n+1-j)} - (\mathcal{L} \rightarrow 2)_{0j(n+2-j)}] + \frac{f_4}{n+2} (\mathcal{L} \rightarrow 1)_{0j(n+1-j)} \end{aligned}$$

Cette égalité donne la rangée  $\{\mathcal{R}_{1j(n+1-j)}, 0 \leq j \leq n+1\}$ .

### 3.7.3 Raccord $G^2$

Ici les fonctions  $a$  et  $b$  sont des constantes soit

$a = -\frac{f_2}{f_1}$  et  $b = -\frac{f_3}{f_1}$ . Les fonctions  $h_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  sont choisies constantes avec  $h_1 \neq 0$ .

$\mathcal{R}_{uu}(0, v) - a^2 \mathcal{L}_{uu}(0, v) - 2ab \mathcal{L}_{uv}(0, v) - b^2 \mathcal{L}_{vv}(0, v)$  calculé avec la formulation 2 de  $\mathcal{L}_1$  est une courbe (BP) de hauteur  $n$ .

$\mathcal{L}_u(0, v)$  et  $\mathcal{L}_v(0, v)$ , calculés avec la formulation 1 sont des (BP) de hauteur  $n$ .

$\mathcal{C}(v)$ , calculé avec la formulation 0 est une (BP) de hauteur  $n$ .

D'où la proposition suivante permettant de calculer la troisième rangée de points du réseau  $\{\mathcal{R}_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_{n+2}\}$ :

**Proposition 3.7.1** *La condition de raccord  $G^2$  entre les triangles (SBR)  $S_l$  et  $S_r$  se traduit par les  $n$  relations aux  $n$  inconnues  $\{\mathcal{R}_{2j(n-j)}, 0 \leq j \leq n\}$  :*

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2 \mid (0, j, k) \in \Delta_n,$$

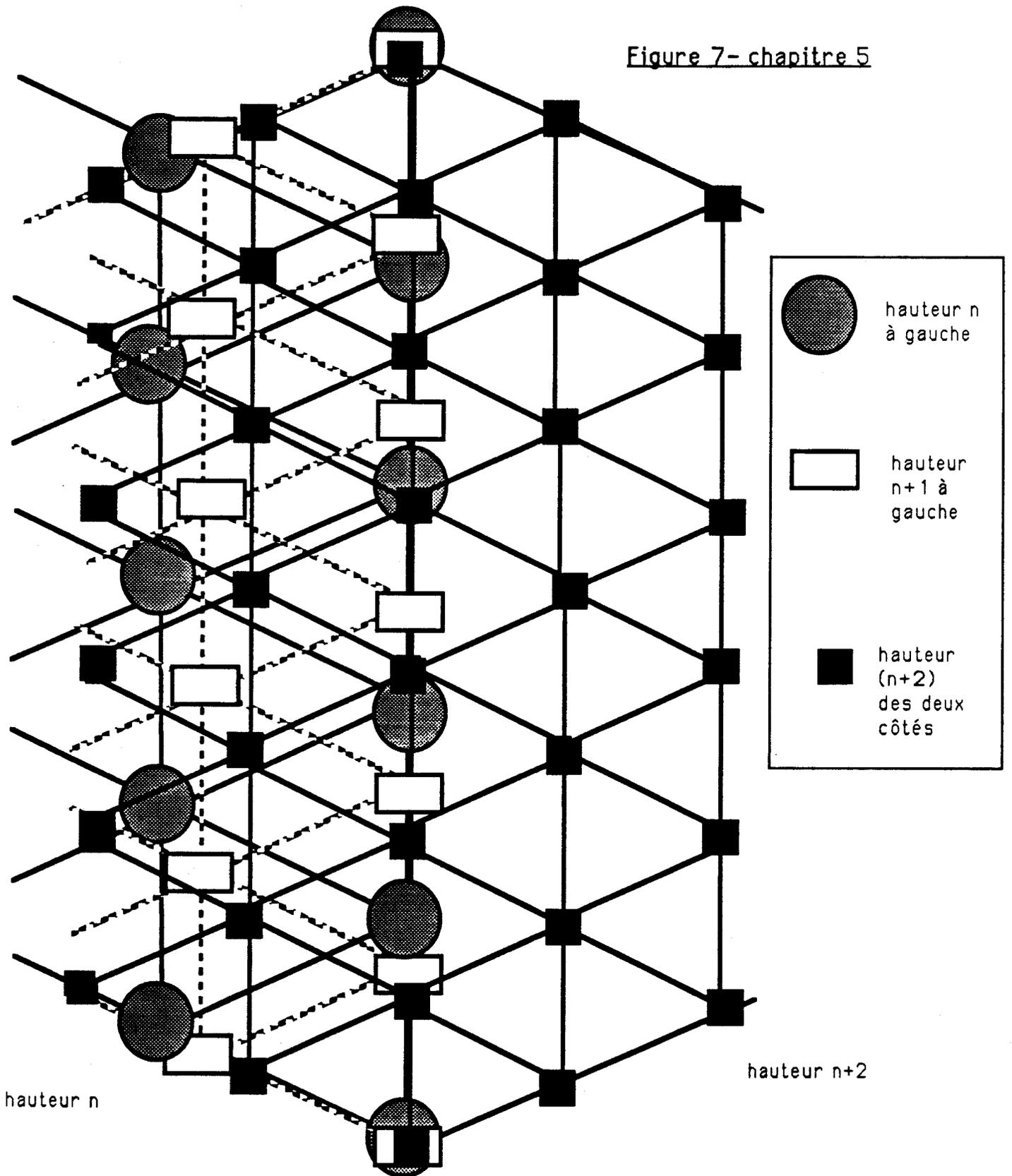
$$\begin{aligned} h_1(n+2)(n+1)[\mathcal{R}_{2jk} - 2\mathcal{R}_{1j(k+1)} + \mathcal{R}_{0j(k+2)}] \\ - a^2[(\mathcal{L} \rightarrow 2)_{2jk} - 2(\mathcal{L} \rightarrow 2)_{1j(k+1)} + (\mathcal{L} \rightarrow 2)_{0j(k+2)}] \\ - 2ab[(\mathcal{L} \rightarrow 2)_{1(j+1)k} - (\mathcal{L} \rightarrow 2)_{1j(k+1)} - (\mathcal{L} \rightarrow 2)_{0(j+1)(k+1)} + (\mathcal{L} \rightarrow 2)_{0j(k+2)}] \\ - b^2[(\mathcal{L} \rightarrow 2)_{0(j+2)k} - 2(\mathcal{L} \rightarrow 2)_{0(j+1)(k+1)} + (\mathcal{L} \rightarrow 2)_{0j(k+2)}] \\ + h_2(n+1)[(\mathcal{L} \rightarrow 1)_{1jk} - (\mathcal{L} \rightarrow 1)_{0j(k+1)}] \\ + h_3(n+1)[(\mathcal{L} \rightarrow 1)_{0(j+1)k} - (\mathcal{L} \rightarrow 1)_{0j(k+1)}] \\ + h_4 \mathcal{L}_{0jk} = 0 \end{aligned}$$

cf la figure 7

#### 3.7.4 Remarque

La surface  $S_r$  obtenue est de hauteur  $(n + 2)$  et , à priori , ne pourra pas être ramenée à la hauteur  $n$ .

Figure 7- chapitre 5



Double élévation de hauteur à gauche et obtention de la troisième rangée du réseau massique de la surface triangle(SBR) de droite :(triangles)

## SIXIEME CHAPITRE

### Exemple de triangle ( $SBR$ ) raccordé $G^2$ à un carreau ( $SBR$ ).

1. La sphère comme surface ( $SBR$ ) rectangulaire.  
Définition de  $S_r$ . page 152
  
2. La sphère comme surface ( $SBR$ ) triangulaire de hauteur 2.  
Définition de  $S_l$ . page 154
  
3. Etude du raccord  $G^2$  entre les surfaces  $S_l$  et  $S_r$ . page 156

## Exemple de triangle (*SBR*) raccordé $G^2$ à un carré (*SBR*)

### 1 La sphère comme surface (*SBR*) rectangulaire

L'espace affine associé à  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{E}$ , est rapporté au repère  $(\Omega_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$   
( $\Sigma$ ) est la sphère de centre  $\Omega_1$  et de rayon 1.

Fiorot et Jeannin ([34], paragraphe 6.3.2 page 166) montrent que la sphère ( $\Sigma$ ) est le support d'une surface (*SBR*) rectangulaire. Quelques éléments de leur démonstration sont rappelés ici.

La droite joignant le point  $C(0,0,1)$  et un point  $(u,v)$  du plan  $x\Omega_1y$  coupe la sphère unité en  $\sigma(u,v)$ , de coordonnées:

$$\begin{aligned}x &= \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \\y &= \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \\z &= \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}\end{aligned}$$

(Il suffit pour le vérifier de déterminer l'équation paramétrique de la droite en question

$$x = \lambda u ; y = \lambda v ; z = 1 - \lambda ; \lambda \in \mathbb{R}$$

La relation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  amène aussitôt  $\lambda = 0$  ou bien  $\lambda = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}$ )

Alors ( $\Sigma$ ) est le support de la surface  $\sigma$ , rationnelle, de  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  dans  $\tilde{\mathcal{E}}$  telle que

$$\begin{aligned}
X &= 2UT \\
Y &= 2VT \\
Z &= U^2 + V^2 - T^2 \\
W &= U^2 + V^2 + T^2
\end{aligned}$$

Et , en notant  $\mathcal{S}(u, v)$  le point de  $\mathcal{F}$  de coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}
X &= 2u \\
Y &= 2v \\
Z &= u^2 + v^2 - 1 \\
W &= u^2 + v^2 + 1
\end{aligned}$$

on obtient  $\sigma(u, v) = \Pi\Omega(\mathcal{S}(u, v))$  . De ce fait , comme  $\mathcal{S}$  est une surface ( $SBP$ ) de longueur 2 et de largeur 2 dans l'espace  $\mathcal{F}$  , Fiorot et Jeannin mettent la surface ( $\Sigma$ )

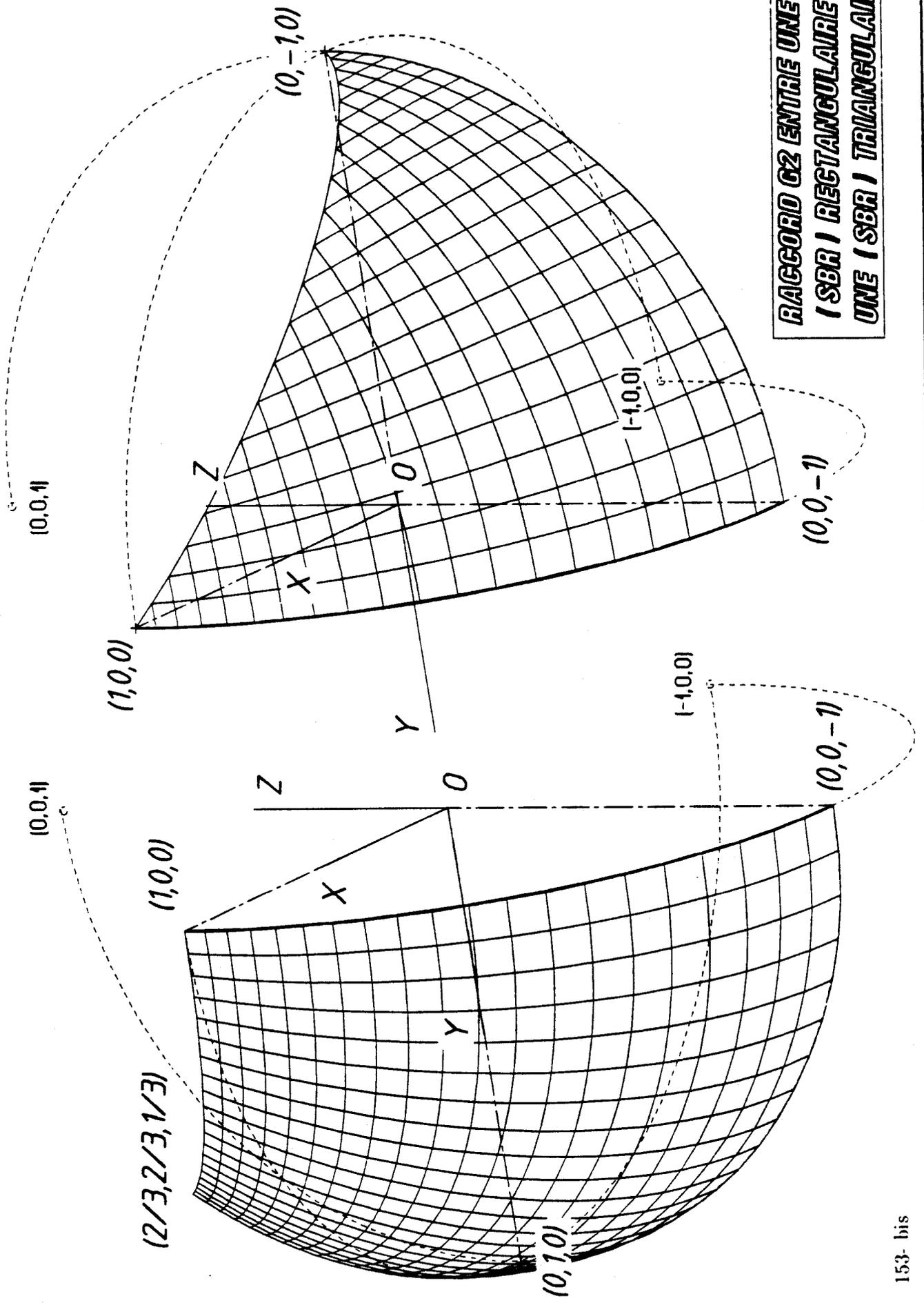
sous la forme de surface ( $SBR$ ) rectangulaire dont le réseau massique  $r$  est donné par le tableau suivant:

$j \setminus i$	0	1	2
2	$((0,0,-1);1)$	$((0,1,-1);1)$	$((0,1,0);2)$
1	$((1,0,-1);1)$	$((1,1,-1);1)$	$((\frac{1}{2},1,0);2)$
0	$((1,0,0);2)$	$((1,\frac{1}{2},0);2)$	$((\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3});3)$

Pour l'exemple développé ,  $S_r$  désigne le carreau ( $SBR$ ) défini sur  $[0, 1]^2$  par le réseau massique  $r$  ainsi obtenu -cf la figure 1.

En reprenant les notations du chapitre 1 on obtient le paramétrage  $R$  suivant pour la surface  $S_r$

$$R(u, v) = \Pi\Omega(\mathcal{R}(u, v))$$



avec  $\mathcal{R}(u, v) = SBP[\mathcal{R}_{ij}, 0 \leq i \leq 2, 0 \leq j \leq 2; [0, 1]^2](u, v)$

les  $\mathcal{R}_{ij}$ , définis par  $\hat{\Omega}(r_{ij}) = \Omega \vec{\mathcal{R}}_{ij}$  étant donnés par le tableau:

$j \setminus i$	0	1	2
2	(0,0,-1,1)	(0,1,-1,1)	(0,2,0,2)
1	(1,0,-1,1)	(1,1,-1,1)	(1,2,0,2)
0	(2,0,0,2)	(2,1,0,2)	(2,2,1,3)

## 2 La sphère unité comme surface (SBR) triangulaire de hauteur 2

Les principaux points de ce paragraphe sont extraits de [34] page 169.

( $\Sigma$ ) désigne toujours la sphère unité et on prend le repère barycentrique de  $\mathbb{R}^2$

( $a, b, c$ ) défini par  $a = (1, 0)$ ;  $b = (0, 1)$  et  $c = (0, 0)$ .

En utilisant les relations  $\lambda = u$ ;  $\mu = v$  et  $\nu = 1 - u - v$ , le point de  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{S}(u, v)$ , défini précédemment, possède les coordonnées cartésiennes:

$$X = 2\lambda$$

$$Y = 2\mu$$

$$Z = \lambda^2 + \mu^2 - 1$$

$$W = \lambda^2 + \mu^2 + 1$$

soit encore, en tenant compte de  $\lambda + \mu + \nu = 1$ :

$$X = 2\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\lambda\nu$$

$$Y = 2\mu^2 + 2\lambda\mu + 2\mu\nu$$

$$Z = -(\nu^2 + 2\lambda\mu + 2\lambda\nu + 2\mu\nu)$$

$$W = 2\lambda^2 + 2\mu^2 + \nu^2 + 2\lambda\mu + 2\lambda\nu + 2\mu\nu$$

Ceci amène la relation :

$$\sigma(u, v) = \Pi\Omega\left(\sum_{(i,j,k) \in \Delta_2} B_{ijk}^2(\mu, \nu, \lambda) \mathcal{E}_{ijk}\right)$$

où les points de  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{E}_{ijk}$  sont donnés par:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{E}_{200} = (0, 2, 0, 2) & \mathcal{E}_{110} = (0, 1, -1, 1) & \mathcal{E}_{020} = (0, 0, -1, 1) \\ & \mathcal{E}_{101} = (1, 1, -1, 1) & \mathcal{E}_{011} = (1, 0, -1, 1) \\ & & \mathcal{E}_{002} = (2, 0, 0, 2) \end{array}$$

Comme la sphère ( $\Sigma$ ) est symétrique par rapport au plan  $x\Omega_1z$ , en changeant toutes les deuxièmes coordonnées en leurs opposés, on obtient un autre réseau massique triangulaire de hauteur 2 pour la sphère unité.

Soit alors  $S_l$  le triangle ( $SBR$ ) défini par le réseau massique obtenu à partir des points  $\mathcal{L}_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_2$  donnés par:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{L}_{200} = (0, -2, 0, 2) & \mathcal{L}_{110} = (0, -1, -1, 1) & \mathcal{L}_{020} = (0, 0, -1, 1) \\ & \mathcal{L}_{101} = (1, -1, -1, 1) & \mathcal{L}_{011} = (1, 0, -1, 1) \\ & & \mathcal{L}_{002} = (2, 0, 0, 2) \end{array}$$

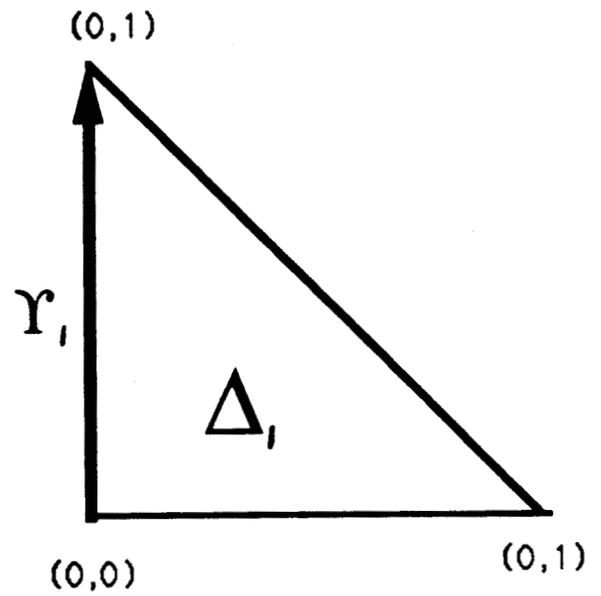
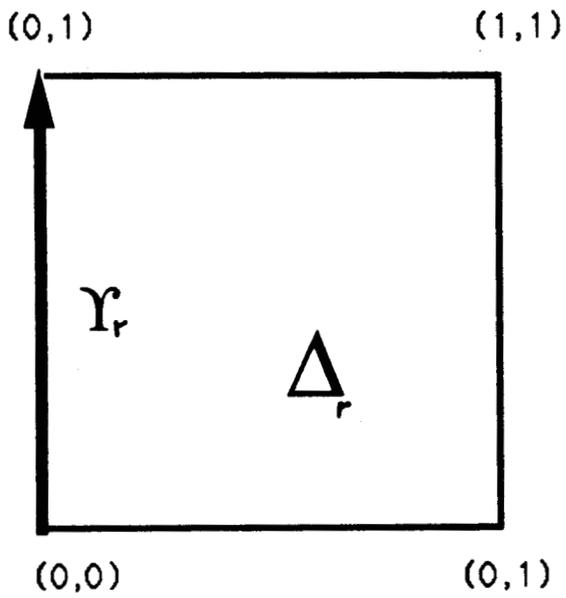
Les notation suivantes sont reprises du chapitre 6:

$$\mathcal{L}_1(u, v, w) = SBP[\mathcal{L}_{ijk}, (i, j, k) \in \Delta_2](u, v, w).$$

$$L_1(u, v, w) = \Pi\Omega(\mathcal{L}_1(u, v, w)).$$

Un paramétrage de  $S_l$  sur  $\Delta_l = \{(u, v) \mid u + v \leq 1, u \geq 0; v \geq 0\}$  est donné par  $L(u, v) = L_1(u, v, 1 - u - v)$

Chapitre 6 - Figure 2



Les orientations des frontières des domaines sont identiques

donc  $\mathcal{E} = -1$

Les domaines de paramètres pour l'exemple du chapitre 6

### 3 Etude du raccord entre les surfaces $S_l$ et $S_r$

Dans ce paragraphe  $\Delta_l = \{(u, v) \mid u + v \leq 1, u \geq 0; v \geq 0\}$   
 et  $\Delta_r = [0, 1]^2$

Le côté commun des deux domaines de paramètres sur lequel le raccord est étudié est  $\Upsilon = \{(0, v) \mid v \in [0, 1]\}$ ; comme le montre la figure 2, ce côté induit la même orientation sur les frontières des deux domaines  $\Delta_r$  et  $\Delta_l$  et la valeur de  $\epsilon$  est  $-1$

Les deux surfaces  $S_l$  et  $S_r$  admettent pour support la sphère unité et, en outre, partagent la frontière commune  $\Gamma$ , quart de cercle défini par:  
 $y = 0; x^2 + z^2 = 1; -1 \leq z \leq 0; 0 \leq x \leq 1$

Donc, les deux surfaces  $S_l$  et  $S_r$  sont raccordées  $G^2$  le long de  $\Gamma$ .

#### 3.1 Raccord $G^0$ entre $S_l$ et $S_r$

Ici comme le montrent les tableaux des vecteurs massiques

$$\forall j \in \{0, 1, 2\} \quad \mathcal{L}_{0j(2-j)} = \mathcal{R}_{0j}$$

De ce fait, en reprenant nos notations,  $\forall v \in [0, 1], L(0, v) = R(0, v)$

Le raccord  $G^0$  est manifestement réalisé.

#### 3.2 Raccord $G^1$ entre les surfaces $S_l$ et $S_r$

##### 3.2.1 $S_l$ et $S_r$ partagent le même plan tangent le long de $\Gamma$

Il s'agit, dans cette section, de rechercher les quatre fonctions  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :

$$\forall v \in [0, 1], \quad f_1(v)\mathcal{R}_u(0, v) + f_2(v)\mathcal{L}_u(0, v) + f_3(v)\mathcal{L}_v(0, v) + f_4(v)\mathcal{C}(v) = 0 \quad (1)$$

Dans le repère  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{C}(v) = (2(1-v)^2 + 2v(1-v), 0, -2v(1-v) - v^2, 1 + (1-v)^2)$$

$$\mathcal{C}(v) = (2(1-v), 0, -v(2-v), 1 + (1-v)^2)$$

$$\text{Alors } \mathcal{L}_v(0, v) = (-2, 0, -2(1-v), -2(1-v)).$$

Les résultats vus sur les triangles (*SBR*) donnent:

$$\mathcal{L}_u(0, v) = 2BP[(\mathcal{L}_{1j(1-j)} - \mathcal{L}_{0j(2-j)}), 0 \leq j \leq 1; [0, 1]](v)$$

$$\mathcal{L}_u(0, v) = 2[(1-v)(\mathcal{L}_{101} - \mathcal{L}_{002}) + v(\mathcal{L}_{110} - \mathcal{L}_{011})]$$

$$\mathcal{L}_u(0, v) = (-2, -2, -2(1-v), -2(1-v))$$

En utilisant les résultats vus sur les (*SBR*) rectangulaires, on obtient:

$$\mathcal{R}_u(0, v) = 2BP[\Delta^{10}\mathcal{R}_{0j}, 0 \leq j \leq 2; [0, 1]](v)$$

$$\mathcal{R}_u(0, v) = (0, 2, 0, 0)$$

Alors les fonctions  $f_1, f_2, f_3$  et  $f_4$  vérifiant la relation (1), sont solutions du système suivant:

$$\begin{cases} -2f_2 - 2f_3 + 2(1-v)f_4 = 0 \\ 2f_1 - 2f_2 = 0 \\ -2(1-v)f_2 - 2(1-v)f_3 - v(2-v)f_4 = 0 \\ -2(1-v)f_2 - 2(1-v)f_3 + (1 + (1-v)^2)f_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où le résultat : } \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot f_2(v).$$

D'après le chapitre 2,

$$\forall v \in [0, 1], R_u(0, v) = a(v)L_u(0, v) + b(v).L_v(0, v)$$

avec

$$a(v) = -\frac{f_2}{f_3} \text{ et } b(v) = -\frac{f_4}{f_3}$$

ou encore

$$a(v) = -1 \text{ et } b(v) = 1$$

Nous observons que  $\forall v \in [0, 1], \epsilon a(v) > 0$ , ce qui est attendu pour le raccord  $G^1$ .

### 3.3 Raccord $G^2$ entre $S_l$ et $S_r$ le long de $\Gamma$

$$\mathcal{L}_{uv}(0, v) = 2(\mathcal{L}_{110} - \mathcal{L}_{101} - \mathcal{L}_{011} + \mathcal{L}_{002}) = (0, 0, 2, 2)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{vv}(0, v) &= 2(\mathcal{L}_{020} - 2\mathcal{L}_{011} + \mathcal{L}_{002}) = (0, 0, 2, 2) \\ \mathcal{L}_{uu}(0, v) &= 2(\mathcal{L}_{200} - 2\mathcal{L}_{101} + \mathcal{L}_{002}) = 2(0, 0, 2, 2)\end{aligned}$$

Les résultats connus pour les surfaces rectangulaires donnent:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{uu}(0, v) &= 2BP[\Delta^{20}\mathcal{R}_{0j}, 0 \leq j \leq 2; [0, 1]](v) \\ \mathcal{R}_{uu}(0, v) &= (0, 0, 2, 2)\end{aligned}$$

On en déduit sans difficulté:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{uu}(0, v) - a^2(v)\mathcal{L}_{uu}(0, v) - 2a(v)b(v)\mathcal{L}_{uv}(0, v) - b^2(v)\mathcal{L}_{vv}(0, v) \\ = (0, 0, 2, 2) - (0, 0, 4, 4) + 2(0, 0, 2, 2) - (0, 0, 2, 2) \\ = (0, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure aussitôt au raccord  $G^2$  entre les surfaces  $S_l$  et  $S_r$  le long de  $\Gamma$ .

Ici, comme le système  $\{\mathcal{L}_u(0, v), \mathcal{L}_v(0, v), \mathcal{L}(0, v)\}$  est libre, les fonctions de la relation (23) du chapitre 2 sont:

$$\begin{aligned}h_1 &= 1 ; \\ h_2 &= 0 ; \\ h_3 &= 0 ; \\ h_4 &= 0.\end{aligned}$$

## Chapitre 7 : Annexe I

Les notations de cette partie annexe sont celles du premier chapitre.  $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{R}}^3$ .  
L'espace affine  $\mathcal{E}$  est muni du repère  $(\Omega_1, e_1, e_2, e_3)$ .

Dans  $\tilde{\mathcal{F}}$ , on note  $\mathcal{B}$  le repère associé, soit  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, \Omega\tilde{\Omega}_1\}$

Soit  $\vec{V} = v_1.e_1 + v_2.e_2 + v_3.e_3 + v_4.\Omega\tilde{\Omega}_1$  un vecteur de  $\tilde{\mathcal{F}}$ .

On désigne par  $\vec{V} = v_1.e_1 + v_2.e_2 + v_3.e_3$  sa projection sur  $\tilde{\mathcal{E}}$  parallèlement au vecteur  $\Omega\tilde{\Omega}_1$ .

### 1 Lemme 1

**Lemme 1** Si  $\{\vec{V}_i, 1 \leq i \leq 4\}$  est un système de rang 3, de quatre fonctions vectorielles polynomiales de  $[0, 1]$  dans  $\tilde{\mathcal{F}}$ , linéairement dépendantes. tel que le système extrait  $\{\vec{V}_i, 2 \leq i \leq 4\}$  est libre et que  $\text{Det}(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4) \neq 0$ , alors les fonctions  $\{f_i, 1 \leq i \leq 4\}$ , non toutes nulles, vérifiant la relation :

$$\forall v \in [0, 1], \quad f_1(v)\vec{V}_1 + f_2(v)\vec{V}_2 + f_3(v)\vec{V}_3 + f_4(v)\vec{V}_4 = O_{\tilde{\mathcal{F}}} \quad (1)$$

sont bien déterminées à une fonction  $q(v)$ , facteur multiplicatif près, non nulle:

$$f_1(v) = -q(v). \text{Det}(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4)$$

$$f_2(v) = q(v). \text{Det}(\vec{V}_1, \vec{V}_3, \vec{V}_4)$$

$$f_3(v) = q(v). \text{Det}(\vec{V}_2, \vec{V}_1, \vec{V}_4)$$

$$f_4(v) = q(v). \text{Det}(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1)$$

Preuve: On suppose  $v$  fixé quelconque dans  $[0, 1]$ .

La relation (1) peut être considérée comme un système linéaire de quatre équations aux quatre inconnues  $\{f_i, 1 \leq i \leq 4\}$ , homogène et de rang 3.

De ce fait , il y a indétermination d'ordre 1 et l'espace des solutions est de dimension 1.

L'hypothèse : le système extrait  $\{\vec{V}_i, 2 \leq i \leq 4\}$  est libre conduit à choisir pour inconnues principales les trois inconnues  $\{f_i, 2 \leq i \leq 4\}$  et à laisser le choix de  $f_1(v)$  libre.

Alors , comme le déterminant  $Det(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4) \neq 0$  , les formules de Cramer, appliquées au système "principal":

$f_2(v).\vec{V}_2 + f_3(v).\vec{V}_3 + f_4(v).\vec{V}_4 = -f_1(v).\vec{V}_1$  donnent directement:

$$f_2(v) = -f_1(v) \frac{Det(\vec{V}_1, \vec{V}_3, \vec{V}_4)}{Det(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4)}$$

$$f_3(v) = -f_1(v) \cdot \frac{Det(\vec{V}_2, \vec{V}_1, \vec{V}_4)}{Det(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4)}$$

$$f_4(v) = -f_1(v) \cdot \frac{Det(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_1)}{Det(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4)}$$

$$f_1(v) = f_1(v) \cdot \frac{Det(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4)}{Det(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4)}$$

ce qui donne le résultat du théorème en posant  $q(v) = -\frac{f_1(v)}{Det(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4)}$

### 1.1 Remarque

En raison de l'hypothèse :  $Det(\vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4) \neq 0$ , la fonction  $f_1$  est différente de la fonction nulle.

### 1.2 Remarque

Supposons que les fonctions vectorielles  $\{\vec{V}_i, 1 \leq i \leq 4\}$  soient polynomiales de degrés respectifs  $n_i$  ,  $1 \leq i \leq 4$ .

Alors , au facteur multiplicatif près  $q(v)$  , on peut dire que :

$f_1$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n_2 + n_3 + n_4$

$f_2$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n_1 + n_3 + n_4$

$f_3$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n_2 + n_1 + n_4$

$f_4$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n_2 + n_3 + n_1$

## 2 Application

Dans le travail présenté, on prendra, comme dans le chapitre 2 :

$\vec{V}_1$  fonction polynomiale de degré  $n$

$$\vec{V}_2 = \mathcal{L}_u(u_0, v)$$

$$\vec{V}_3 = \mathcal{L}_v(u_0, v)$$

$$\vec{V}_4 = \mathcal{C}(v)$$

$\mathcal{L}$  désignant une fonction polynomiale de degré  $n$  par rapport à la variable  $v$ :

$$\mathcal{L} : \Delta_I \longrightarrow \vec{\mathcal{F}}.$$

avec les hypothèses :

$\{(u_0, v), v \in [0, 1]\}$  est un côté de  $\Delta_I$

$$\mathcal{C}(v) = \mathcal{L}(u_0, v)$$

$\forall v \in [0, 1] \{ \mathcal{L}_u(u_0, v), \mathcal{L}_v(u_0, v) \}$  est libre.

En reprenant le lemme ci-dessus, nous obtenons:

**Corollaire 1** Si le système  $\{ \mathcal{L}_u(u_0, v), \mathcal{L}_v(u_0, v), \mathcal{L}(u_0, v) \}$  est libre et que les quatre fonctions, non toutes nulles,  $\{ f_i, 1 \leq i \leq 4 \}$  de  $[0, 1]$  dans  $R$  vérifient:

$$f_1 \cdot \vec{V}_1 + f_2 \mathcal{L}_u(u_0, v) + f_3 \mathcal{L}_v(u_0, v) + f_4 \mathcal{C}(v) = 0$$

alors, à un facteur multiplicatif près non nul,

$f_1$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $3n - 1$ ,

$f_2$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $3n - 1$ ,

$f_3$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $3n$ ,

$f_4$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $3n - 1$ .

## 3 Lemme 2

Dans cette section, soit  $\vec{V} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + v_3 \cdot e_3 + v_4 \cdot \Omega \bar{\Omega}_1$  un vecteur de  $\vec{\mathcal{F}}$   
On désigne par  $\vec{Z} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2$  sa projection sur le sous-espace vectoriel engendré par  $\{e_1, e_2\}$ .

**Lemme 2** Si  $\{ \vec{V}_i, 1 \leq i \leq 4 \}$  est un système de rang 2, de quatre fonctions vectorielles polynomiales de  $[0, 1]$  dans  $\vec{\mathcal{F}}$ , linéairement dépendantes, tel que le système extrait  $\{ \vec{V}_i, 1 \leq i \leq 2 \}$  est libre et que  $\text{Det}(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2) \neq 0$ ,

alors il existe des fonctions, non toutes nulles, vérifiant la relation :

$$\forall v \in [0, 1], \quad f_1(v) \cdot \vec{V}_1 + f_2(v) \cdot \vec{V}_2 + f_3(v) \cdot \vec{V}_3 + f_4(v) \cdot \vec{V}_4 = \vec{O}_F \quad (2)$$

En outre, les quatre fonctions  $\{f_i, 1 \leq i \leq 4\}$  sont déterminées par la connaissance de deux fonctions non nulles, quelconques :

$q$  et  $r$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  grâce aux relations:

$$f_1(v) = q(v) \cdot \det(\vec{Z}_3, \vec{Z}_2) + r(v) \cdot \det(\vec{Z}_4, \vec{Z}_2)$$

$$f_2(v) = q(v) \cdot \det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_3) + r(v) \cdot \det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_4)$$

$$f_3(v) = -q(v) \cdot \det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)$$

$$f_4(v) = -r(v) \cdot \det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)$$

Preuve: On suppose  $v$  fixé quelconque dans  $[0, 1]$

La relation (2) peut être considérée comme un système linéaire de quatre équations aux quatre inconnues  $\{f_i, 1 \leq i \leq 4\}$ , homogène et de rang 2. De ce fait il y a indétermination d'ordre 2 et l'espace des solutions est de dimension 2.

Le système extrait  $\{\vec{V}_i, 1 \leq i \leq 2\}$  est libre, ce qui conduit à choisir pour inconnues principales les deux inconnues  $\{f_i, 1 \leq i \leq 2\}$  et à laisser le choix de  $f_3(v), f_4(v)$  libre.

Alors, comme le déterminant  $\det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)$  est non nul, les formules de Cramer appliquées au système "principal":

$$f_1(v) \cdot \vec{Z}_1 + f_2(v) \cdot \vec{Z}_2 = -f_3(v) \cdot \vec{Z}_3 - f_4(v) \cdot \vec{Z}_4$$

donnent directement:

$$f_1(v) = -f_3(v) \cdot \frac{\det(\vec{Z}_3, \vec{Z}_2)}{\det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)} - f_4(v) \cdot \frac{\det(\vec{Z}_4, \vec{Z}_2)}{\det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)}$$

$$f_2(v) = -f_3(v) \cdot \frac{\det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_3)}{\det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)} - f_4(v) \cdot \frac{\det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_4)}{\det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)}$$

$$f_3(v) = f_3(v) \cdot \frac{\det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)}{\det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)}$$

$$f_4(v) = f_4(v) \cdot \frac{\det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)}{\det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)}$$

ce qui donne le résultat du théorème en posant  $q(v) = -\frac{f_3(v)}{\det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)}$

et  $r(v) = -\frac{f_4(v)}{\det(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)}$

### 3.1 Remarque

Supposons que les fonctions vectorielles  $\{\vec{V}_i, 1 \leq i \leq 4\}$  soient polynomiales de degrés respectifs  $n_i, 1 \leq i \leq 4$ .

Alors, en choisissant  $q(v) = 1$  et  $r(v) = 1$ , on peut réaliser la condition (2) avec des fonctions  $\{f_i, 1 \leq i \leq 4\}$  vérifiant:

$f_1$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $\text{Sup}(n_3 + n_2, n_4 + n_2)$

$f_2$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $\text{Sup}(n_1 + n_3, n_1 + n_4)$

$f_3$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n_1 + n_2$

$f_4$  est polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n_1 + n_2$

## 4 Application

Nous reprenons les notations de la section 2 et, à une numérotation près, nous appliquons le lemme ci-dessus.

Supposons que le système  $\{\mathcal{V}_1, \mathcal{L}_u(u_0, v), \mathcal{L}_v(u_0, v), \mathcal{L}(u_0, v)\}$  soit de rang 2, le système  $\{\mathcal{L}_u(u_0, v), \mathcal{L}_v(u_0, v)\}$  étant libre.

**Corollaire 2** Les quatre fonctions, non toutes nulles,  $\{f_i, 1 \leq i \leq 4\}$  de  $[0, 1]$  dans  $R$  vérifiant :

$$f_1 \cdot \vec{V}_1 + f_2 \cdot \mathcal{L}_u(u_0, v) + f_3 \cdot \mathcal{L}_v(u_0, v) + f_4 \mathcal{L}(v) = 0$$

peuvent être choisies de la manière suivante:

$f_1$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $2n - 1$ ,

$f_2$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $2n - 1$ ,

$f_3$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $2n$ ,

$f_4$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $2n - 1$ .

### 4.1 Remarque

Exemple où le système  $\{\mathcal{L}_u(u_0, v), \mathcal{L}_v(u_0, v), \mathcal{L}(u_0, v)\}$  est lié et le système  $\{\mathcal{L}_u(u_0, v), \mathcal{L}_v(u_0, v)\}$  est libre

On choisit la fonction  $\mathcal{L}$  suivante et  $u_0 = 0$ .

$$\mathcal{L}(u, v) = \left(\frac{1}{2} - v + v^2(u - 1)^2, -1 - u + 3v - 6uv, \frac{1}{2} - v + v^2(u - 1)^2, \frac{1}{2} - v + v^2(u - 1)^2\right)$$

$$\mathcal{L}(0, v) = \left(\frac{1}{2} - v + v^2, -1 + 3v, \frac{1}{2} - v + v^2, \frac{1}{2} - v + v^2\right)$$

$$\mathcal{L}_u(0, v) = (-2v^2, -1 - 6v, -2v^2, -2v^2)$$

$$\mathcal{L}_v(0, v) = (-1 + 2v, 3, -1 + 2v, -1 + 2v)$$

Alors ,  $\forall v \in [0, 1]$ ,

2.  $\mathcal{L}(0, v) + \mathcal{L}_u(0, v) + \mathcal{L}_v(0, v) = 0$  et de plus  $\{\mathcal{L}_u(0, v), \mathcal{L}_v(0, v)\}$  est libre

# Bibliographie

## References

- [1] Bauchat, J.L. , Aspects projectifs du raccordement  $G^2$  entre deux surfaces , Journées "Courbes et surfaces", C.I.R.M. - Luminy , 25-29 mars 1991.
- [2] Bauchat , J.L , J.C. Fiorot and P. Jeannin ,  $G^1$  and  $G^2$  continuity of (SBR) surfaces in *Curves and surfaces* , P.J. Laurent , A. Le Méhauté and L.L. Schumaker (eds) , Academic Press , New York 1991.
- [3] Bauchat , J.L. , A.L. Defretin , A. Wattellier , De la modélisation à la réalisation - L'expérience du centre ENSAM de Lille , Journées sur les surfaces gauches ou la mathématisation des formes , CCIC CLuny , 13-14 décembre 1989 .
- [4] Bauchat , J.L. , A.L. Defretin , G.Caignaert , A.S Gallet , Decaux, La modélisation de pièces anatomiques : apport des B-splines à la réalisation d'une prothèse de hanche personnalisée , Congrès de la société française de Biomécanique , CCIC , Cluny , 18 , 19 septembre 1990 .
- [5] Bauchat , J.L. , Les modèles géométriques utilisés en CAO , Colloque franco-québécois sur l'enseignement et le transfert de technologie de production assisté par ordinateur , ENSAM-Lille , 5-6-7-8- décembre 1988.
- [6] Berger , *Géométrie.1-Action de groupes-Espaces affines et projectifs* , Cedic/Fernand Nathan , 1977.
- [7] Bézier , P. , Procédé de définition numérique des courbes et des surfaces non mathématiques , Système Unisurf , Automatisation , 13 , 1968.

- [8] Bézier , P. , Essais de définition numérique des courbes et surfaces expérimentales , Thèse d'état , Université de Paris VI , 1977.
- [9] Bézier , P. , *Courbes et surfaces* , collection Mathématiques et CAO , vol 4 , Hermès , Paris , 1984.
- [10] Barsky , B.A. , R.H. Bartels , J.C.Beatty , *B-splines* , collection Mathématiques et CAO , vol 4 , Hermès , Paris , 1988 .
- [11] Barsky , B.A. , The Beta Splines : A local representation based on shape parameters and fundamental geometric measures , PhD dissertation , University of Utah , Salt Lake City , 1981 , also available as *Computer Graphics and Geometric Modeling using Beta-splines* , Springer , Tokyo, 1987.
- [12] Barsky , B.A. , T.D DeRose , Geometric continuity of parametric curves, Tech report UCB/CDS 84/205 , Computer science division , University of California , Berkeley , 1984.
- [13] Boehm , W. , G. Farin , J. Kahmann , A survey of curves and surfaces methods in CAGD , CAGD , 1 , 1984 , 1-60.
- [14] Canonne , J.C. , Une condition nécessaire et suffisante de raccordement  $C^k$  de surfaces rationnelles , Journées "Courbes et surfaces", C.I.R.M.-Luminy , 25-29 mars 1991.
- [15] Canonne , J.C. , J.C. Fiorot , Une condition nécessaire et suffisante de raccordement  $C^k$  de surfaces rationnelles , C.R.Académie Sciences Paris, t 312 , série I , 897 - 901 , 1991.
- [16] Canonne , J.C. , J.C. Fiorot and P. Jeannin ,  $C^k$  continuity of (SBR) surfaces in *Curves and surfaces* , P.J. Laurent , A. Le Méhauté and L.L. Schumaker (eds) , Academic Press , New York 1991.
- [17] Canonne , J.C. , J.C. Fiorot , P. Jeannin , Une condition nécessaire et suffisante de raccordement  $C^k$  de courbes rationnelles , C.R. Académie des Sciences Paris , 312 , série I , 171 -176 , 1991
- [18] De Casteljaou, P.,  
Outillage , méthode de calcul , *André Citroën Automobiles* , S.A. , Paris , 1959.

- [19] De Casteljaou , P. , *Formes à Pôles* , collection Mathématiques et CAO, vol 2 , Hermès , Paris , 1985.
- [20] Degen , W.L.F. , Explicit continuity conditions for adjacent Bézier surfaces patches , *Computer Aided Geometric Design* , Volume 7 , 181-189, june 1990.
- [21] Demazure , M. , Points de vue sur une surface générique , *Comptes rendus des journées X-UPS de géométrie* , revue *Quadrature* , Numéro 5 , 9-18 , 1990 .
- [22] DeRose , A.D , Geometric continuity : a parametrisation independent measure of continuity for computer aided geometric design , Report UCB/CSD 86/255 , August 1985.
- [23] Du Wen Hui , Etude sur la représentation des surfaces complexes : application à la reconstruction de surfaces échantillonnées , Thèse de doctorat, Sup Télécom , Paris , 1988.
- [24] Do Carmo , M. , *Differential Geometry of curves and surfaces* , Prentice Hall , 1970.
- [25] Farin , G. , *Curves and surfaces for computer aided geometric design. A practical guide* , Second edition , Academic press , 1990 .
- [26] Farin , G. , Triangular Bernstein Bézier Patches , *CAGD* , 3 , 83-127 , 1986 .
- [27] Farin , G. , A construction for Visual  $C^1$  continuity of polynomial surfaces patches , *Computer Graphics and Image Processing* , 20, 272-282, 1982 .
- [28] Faux , I.E. , M.J. Pratt , *Computational Geometry for design and manufacture* , Ellis Horwood , Chichester , 1979.
- [29] Fiorot , J.C. , Cours de DEA , USTLFA , 1988-89.
- [30] Fiorot , J.C. , Courbes Bézier , Journées "Courbes et surfaces BEZIER/B-Splines" , A.T.P. "Outils mathématiques et informatiques des Modèles géométriques" , INSA Rennes , 11-12-13 mai 1987 .

- [31] Fiorot , J.C. , P.Jeannin , Courbes Bézier rationnelles , *XIX<sup>ème</sup> Congrès National d'Analyse Numérique* , Port Barcarès , France , 26-30 mai 1986.
- [32] Fiorot , J.C. , P.Jeannin , Nouvelle description et calcul des courbes et surfaces rationnelles à l'aide de points et vecteurs de contrôle , *C.R.Acad.Sci. , Paris* , 305 , Série I , 435-440, 1987 .
- [33] Fiorot , J.C. , P.Jeannin , Surfaces rationnelles sur un carré contrôlées par des points pondérés et des vecteurs , *C.R.Acad.Sci. , Paris* , 306 , Série I , 87-92, 1988 .
- [34] Fiorot , J.C. , P. Jeannin , *Courbes et Surfaces rationnelles .Applications à la C.A.O.* , Coll RMA 12 , Masson , Paris , 1989.
- [35] Fiorot , J.C. , P. Jeannin , B-rational curves and surfaces , N-rational splines , in *Curves and surfaces* , P.J. Laurent , A. Le Méhauté and L.L. Schumaker (eds) , Academic Press , New York 1991.
- [36] Fiorot , J.C. , Taleb , Reparametrizations of polynomial and rational curves , in *Curves and surfaces* , P.J. Laurent , A. Le Méhauté and L.L. Schumaker (eds) , Academic Press , New York 1991.
- [37] Goldman , R.N. , B.A. Barsky , On Beta-continuous functions and their application to the construction of geometrically continuous curves and surfaces , in *Mathematical methods in CAGD* , T. Lyche and L. Schumaker(eds) , 1989 , 299-311.
- [38] Goldman , R.N , L.A. Michelli , Algebraic aspects of geometric continuity , in *Mathematical methods in CAGD* , T. Lyche and L. Schumaker(eds) , 1989 , 313-332 .
- [39] Goodman , T.N.T. , Constructing piecewise rational curves with Frenet frame continuity , *Computer Aided Geometric Design* , North Holland, Volume 7 , june1990 , 15-31.
- [40] Gregory , J. , J. Hahn , Geometric continuity and convex combinaison patches , *CAGD* , 4 , 79-89 , 1987.
- [41] Gregory , J.A. , Geometric continuity , in *Mathematical methods in CAGD* , T. Lyche and L. Schumaker(eds) , 353-371 , 1989.

- [42] Hahn, J., Geometric continuous patch complexes , Computer Aided Geometric Design , North Holland, volume 6 , 55-67 , 1989
- [43] Hohmeyer , M.E. , B.A. Barsky , Rational continuity parametric , geometric and Frenet framecontinuity of rational curves , ACM transactions on graphics , vol 8-4 , 335-359 , 1989.
- [44] Lasser , D. , A. Purucker , B-spline Bézier representation of rational geometric splines-curves , internal report , Universität Kaiserslautern , January 1990 .
- [45] Laurent , P.J. , Continuité Géométrique , A.T.P. "Outils mathématiques et informatiques des Modèles géométriques" , Grenoble , 21-22-23 novembre 1988.
- [46] Le Méhauté , A. , Cours de D.E.A. USTLFA , 1988-1989 .
- [47] Le Méhauté , A. , Surfaces polynomiales définies par morceaux sur des triangles, Journées "Courbes et surfaces BEZIER/B-Splines" , A.T.P. "Outils mathématiques et informatiques des Modèles géométriques" , INSA Rennes , 11-12-13 mai 1987 .
- [48] Le Méhauté , A. , Raccordement de surfaces définies par morceaux, Journées "Courbes et surfaces BEZIER/B-Splines" , A.T.P. "Outils mathématiques et informatiques des Modèles géométriques" , INSA Rennes , 11-12-13 mai 1987 .
- [49] Liu , D. ,  $GC^1$  continuity conditions between two adjacent rational Bézier surfaces patches , , Computer Aided Geometric Design , Volume 7 , 151-163 , june 1990.
- [50] *Mathematical methods in CAGD* , T.Lyche and L. Schumaker (eds) , Academic press , 1989.
- [51] Mazure , M. L. , Deux notions de contact géométrique d'ordre  $p$  de deux surfaces en un point , Journées "Courbes et surfaces" , C.I.R.M.-Luminy, 25-29 mars 1991.
- [52] Peters , J.. , Smooth mesh interpolation with cubic patches , Computer aided design , vol 22 , 109-120 , 1990 .

- [53] Piegl , L. , W. Tiller , Curve and surface constructions using rational B-spline , Computer aided design 19 , 485-498 , 1987 .
- [54] Pottmann , H. , Projectively invariant classes of geometric continuity for CAGD , CAGD , vol 6 , 307-321 , 1989.
- [55] Sablonnière , P. , Bases de Bernstein et approximants splines , Thèse , Université des sciences et techniques de Lille , 1982.
- [56] Sablonnière , P. , Produits tensoriels de Bézier/B-splines , Journ ées "Courbes et Surfaces" , A.T.P. "Outils mathématiques et informatiques des Modèles géométriques" , INSA Rennes , 11-12-13 mai 1987.
- [57] Taleb , S. , Incidence du paramétrage sur le contrôle des courbes rationnelles , Thèse Université des Sciences et techniques de Lille - Flandres - Artois , laboratoire A.N.O. , IEEA,1991
- [58] Valiron , G. , *Cours d'analyse mathématique-Equations fonctionnelles et applications* , Seconde édition , J .Gabay , 1989.
- [59] Vinacua , A. , Brunet , A construction for  $VC^1$  continuity of rational Bézier patches , in *Mathematical methods in CAGD* , T. Lyche and L. Schumaker(eds) , 1989 , 601-611.
- [60] Wassum , Conditions for geometric continuity of curves and surfaces , Congrès Curves and surfaces , Chamonix , 20-27 june 1990.
- [61] Wattellier , A. , Modélisation d'une pompe centrifuge , Colloque franco-québécois sur l'enseignement et le transfert de technologie de production assisté par ordinateur , ENSAM-Lille , 5-6-7-8- décembre 1988.
- [62] Wattellier , A. , Conception et réalisation de surfaces complexes. Problèmes rencontrés. Application aux turbo-machines. Journées "Courbes et surfaces" , C.I.R.M.-Luminy , 25-29 mars 1991.



**TITRE : Etude du raccordement géométrique  $G^2$  entre surfaces rationnelles mises sous forme (SBR).**

Le travail présenté est une contribution à l'étude des raccordements géométriques  $G^1$  et  $G^2$  entre surfaces rationnelles mises sous forme (SBR): il s'agit de construire une surface composite régulière formée de surfaces (SBR) convenablement raccordées.

Une définition des raccords géométriques  $G^1$  et  $G^2$  entre deux surfaces est proposée. Les conditions analytiques obtenues conduisent, lorsqu'elles sont appliquées au cas de deux surfaces qui sont des  $\Pi\Omega$ -projetées, à des conditions nécessaires et suffisantes portant sur les paramétrisations des surfaces "au dessus".

Ces CNS sont traduites en termes de vecteurs massiques pour exprimer les raccords  $G^1$  et  $G^2$  entre deux (SBR) rectangulaires ou triangulaires qui, par définition, sont des  $\Pi\Omega$ -projetées de surfaces polynomiales.

Plusieurs exemples illustrent en détail les résultats obtenus: le raccordement géométrique  $G^2$  de deux quadriques et le raccordement d'une (SBR) rectangulaire à une (SBR) triangulaire.

Les relations obtenues permettent de traduire un problème continu de géométrie différentielle par des conditions portant sur les réseaux massiques de contrôle.

**TITLE : Study of the  $G^2$  geometrical continuity between rational surfaces put into (SBR) form.**

This work is a contribution to the study of  $G^1$  and  $G^2$  geometrical continuity between rational surfaces put into (SBR) form. The aim is to determine a smooth piecewise rational surface from (SBR) patches suitably joined.

A definition of the  $G^1$  and  $G^2$  continuity between two surfaces is proposed. The analytical conditions obtained lead to, when applied to the case of two surfaces which are  $\Pi\Omega$ -projections, necessary and sufficient conditions pertaining on the parametrizations of the "above" surfaces.

These necessary and sufficient conditions are expressed in terms of massic vectors to express the  $G^1$  and  $G^2$  continuity between two (SBR) patches either rectangular or triangular, which are, by definition,  $\Pi\Omega$ -projections of polynomial surfaces.

Several examples illustrate the results obtained: the  $G^2$  geometrical join between two quadrics and the join between a rectangular and a triangular (SBR).

The resulting relations allow the expression of a continuous problem of differential geometry in terms of conditions pertaining on the controlling massic nets.