

55376
1992
7

55376
1992
7

N° d'ordre : 1019

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

THESE DE DOCTORAT

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de



DOCTEUR EN MECANIQUE

par

Rachid KHIRI



**ONDES, TOURBILLONS ET CHAOS DANS LES
ECOULEMENTS ISOCHORES.**

Membres du jury :

A. DYMENT, Professeur, Université de LILLE I, Président.

J.P. GERMAIN, Professeur, Institut de Mécanique de GRENOBLE, Rapporteur.

J.S. DARROZES, Professeur, E.N.S.T.A. de PALAISEAU, Rapporteur.

R. Kh. ZEYTOUNIAN, Professeur, Université de LILLE I, Examineur.

S. GODTS, Maître de Conférences, E.N.S.I. de VALENCIENNES, Examineur.

Soutenue le 17 décembre 1992



Je tiens à remercier Messieurs R.ZEYTOUNIAN, professeur à l'Université de LILLE I, et St.GODTS, maitre de conférences à l'INSIMEV, qui ont dirigé et suivi ce travail dans son évolution avec une attention toute particulière.

Je remercie vivement le professeur A.DYMENT qui m'a fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse.

Je remercie Messieurs les professeurs J.S.DARROZES et J.P.GERMAIN qui m'ont fait l'honneur de s'intéresser à mon travail et ont accepté de le juger.

Je me permets de rendre hommage à ma famille ainsi qu'à mes amis et mes collègues pour leur confiance et leur encouragement durant la réalisation de ce travail.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
PREMIERE PARTIE : ECOULEMENTS ISOCHORES DANS UN CANAL AVEC FOND CURVILIGNE	
CHAPITRE.I : <u>Un modèle mathématique pour l'écoulement isochore</u>	4
I.1- Les équations d'EULER pour l'écoulement isochore	5
I.1.1- Approximation isochore	5
I.1.2- Equations de base	5
I.2- Conditions aux limites	6
I.3- Introduction de la fonction de courant	7
I.3.1- Obtention d'une équation en ψ	7
I.3.2- Prise en compte des conditions limites à l'infini amont	8
I.4- Variation d'altitude entre deux lignes de courant	10
I.5- Equations adimensionnelles	12
I.6- Conclusion	14
CHAPITRE.II : <u>Modèles d'ondes</u>	15
II.1- Modèle de base	16
II.2- Changement de coordonnées	17
II.2.1- Cas linéaire	19
II.2.2- Cas des ondes longues	20
II.2.3- Cas de "BOUSSINESQ"	20
II.3- Obtention du système différentiel de base	21
II.3.1- Système linéaire d'ordre n	22
II.3.2- Une solution exacte	23
II.3.3- Système non-linéaire d'ordre 1	24
II.3.4- Conclusion	25

II.4-	Etude numérique	26
II.4.1-	Analyse des résultats numériques	27
II.4.2-	Perturbations des fonctions de courant (cas linéaire)	27
II.4.3-	Lignes de courant (cas non-linéaire)	28
II.4.4-	Conclusion	29

DEUXIEME PARTIE : ECOULEMENT INSTATIONNAIRE, ISOCHORE ET VISQUEUX

CHAPITRE.III : Ecoulement isochore à viscosité dynamique dépendante de l'altitude 39

III.1-	Formulation du problème	40
III.2-	Equation du tourbillon	41
III.3-	L'écoulement amont	42
III.4-	Equations adimensionnées	43
III.5-	Modélisation asymptotique	45
III.6-	Equation de dispersion	48
III.7-	Interaction entre trois ondes	49
III.8-	Sens de propagation des ondes dans le plan (k,l)	50
III.9-	Equations d'amplitudes	53
III.9.1-	Une échelle de temps lent	53
III.9.2-	Système dynamique à trois équations ...	54
III.10-	Solutions stationnaires et stabilité	62
III.10.1-	Solutions stationnaires	62
III.10.2-	Résolution de l'équation caractéristique et stabilité	65
III.11-	Conclusion	66

CHAPITRE.IV : Analyse numérique du système dynamique à trois équations 67

IV.1-	Résultats numériques. Attracteurs	68
IV.2-	Application de la section de Poincaré	70
IV.3-	Application de premier retour	71
IV.4-	Diagramme de bifurcation	72

IV.5- Interprétation de quelques résultats	74
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	88
ANNEXES	91
REFERENCES	96

NOTATIONS PRINCIPALES

(u, v, w)	: composantes de la vitesse \vec{U} dans le repère (O, x, y, z)
g	: accélération de la pesanteur
t	: temps
p, ρ, T	: pression, masse volumique, température
C_p, C_v	: coefficients de chaleurs spécifiques à volume constant et pression constante
γ, R	: rapport des coefficients C_p et C_v , constante des gas
L_0, h_0, H_0	: longueur du relief, hauteur du relief, hauteur du canal
$h(x/L_0)$: équation du relief
$\psi, \bar{\psi}$: fonctions de courant
z_∞	: altitude d'une ligne de courant à l'infini amont
$\hat{\psi}(x, z)$: différence d'altitude entre les lignes de courant $\psi(x, z)$ et $\psi(-\infty, z_\infty)$
ξ, η, δ	: coordonnées x, z et la fonction $\hat{\psi}(x, z)$ adimensionnées
$\beta, \varepsilon, \nu, \sigma$: paramètres sans dimensions
λ_0	: longueur caractéristique des ondes internes
B_0, σ	: nombre de Boussinesq, nombre de Froude
ϕ	: $\phi = \delta - (1-z)h(x)$
$\varphi_n(x)$: coefficients de la décomposition de $\phi(x, z)$ en série de Fourier de sinus
$A, B, C, D, E, F, H, \lambda, K_0$: constantes de calcul
μ	: viscosité dynamique
u_0	: vitesse de l'écoulement au repos
$l_a, u_a, t_a, \mu_a, \rho_a$: grandeurs caractéristiques d'adimensionnalisation
ρ_0, μ_0, α	: constantes positives
γ^*, N	: nombre de Froude, nombre de Brünt-Väisälä
ψ^*, ρ^*, μ^*	: perturbations respectives de la fonction de courant, de la densité et de la viscosité dynamique
ε	: nombre très petit devant 1
M, L	: opérateurs différentiels
A_n, A, B, C	: Amplitudes complexes ou réelles

A_n^* : complexe conjugué de A_n
 σ_n, \vec{K}_n : fréquence de propagation d'onde, vecteur d'onde
 $|K_n|$: module du vecteur \vec{K}_n
 k_n, l_n : longueurs d'onde longitudinale et verticale
 θ_n : $\theta_n = k_n x + l_n z - \sigma_n t$
 Ω_n : $\Omega_n = \sigma_n - u_0 k_n$
 Cg_n : vitesse de groupe verticale d'ondes
 T : temps lent
 ϕ_n : phase
 Re : nombre de Reynolds
 b, b' : constantes

INTRODUCTION

Les écoulements isochores (à masse volumique constante le long d'une trajectoire) sont gouvernés par des équations qui, dans le cas non-visqueux, s'obtiennent à partir de celles d'Euler pour un fluide compressible pesant en admettant que la conservation de l'entropie spécifique le long d'une trajectoire peut-être, avec une bonne approximation, remplacée par celle de la masse volumique. Comme conséquence l'équation de continuité montre que cet écoulement isochore est nécessairement à divergence de la vitesse nulle. En fait, cette approximation est intimement liée à l'hypothèse d'une "faible" compressibilité et on pourra consulter à ce sujet le livre de R.Zeytounian de 1990 (chapitre 9).

On trouvera diverses applications de ce système isochore non visqueux dans le livre de C.S.Yih de 1980. La thèse de doctorat d'état de 1969 de R.Zeytounian est aussi consacrée aux écoulements isochores qui apparaissent en aval et autour d'un fond curviligne dans un canal limité supérieurement par un plan parallèle à la vitesse uniforme à l'amont. C'est justement ce problème (plan à deux dimensions) que nous considérons ici, dans ce mémoire de thèse, dans la première partie.

Dans cette première partie on considère, d'une part, le problème linéaire et, d'autre part, le problème non-linéaire lorsque le fond curviligne est caractérisé par une épaisseur relativement importante.

En partant d'une formulation exacte du problème plan stationnaire (non visqueux) nous ramenons, à partir d'une transformation (rendant le canal à parois parallèles) et de la technique de Galerkin (d'après l'altitude et en tirant profit des conditions homogènes sur les parois), le problème à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires (selon la coordonnée horizontale) non-linéaires à coefficients variables.

Divers cas particuliers de ce système sont considérés dans ce travail de thèse (cas linéaire, cas des ondes longues et de Boussinesq).

Dans le cas linéaire on considère un système de 10 équations, ce qui permet de calculer numériquement diverses configurations d'ondes autour et en aval du fond curviligne (le fond curviligne

étant limité à une portion finie du fond du canal).

Pour le cas non-linéaire nous nous sommes limités, pour l'instant au cas d'une seule équation (un seul mode dans la décomposition à la Galerkin). Cette équation non-linéaire a été résolue numériquement et les résultats des calculs sont présentés sous forme de lignes de courant de l'amont vers l'aval décrivant l'écoulement dans le canal curviligne.

La seconde partie de ce mémoire de thèse est relative à la résolution numérique du problème instationnaire en tenant compte des termes de la viscosité.

En s'inspirant d'un travail de M.Ibrahim (1987), qui a considéré le cas non-visqueux, nous avons construit pour le problème visqueux un système dynamique à trois amplitudes. Ce système a été obtenu à partir d'une technique d'échelle multiple, après élimination des termes séculaires. Il s'avère que ce système dynamique de trois équations peut se ramener à celui considéré par D.W.Hughes et M.R.E.Proctor (1990).

Mais à la différence de D.W.Hughes et M.R.E.Proctor nous avons fait une analyse numérique et surtout un calcul numérique afin de mettre en évidence les scénarios de transition vers le chaos via les bifurcations.

Divers attracteurs étranges ont ainsi été mis en évidence et on pourra à ce sujet consulter les figures se trouvant à la fin de la seconde partie de ce travail.

On trouvera dans les " conclusions et perspectives " divers développements de ce travail de thèse qui sont à l'heure actuelle en cours.

PREMIERE PARTIE

**ECOULEMENTS ISOCHORES DANS UN CANAL AVEC
FOND CURVILIGNE**

CHAPITRE.I : UN MODELE MATHEMATIQUE POUR L'ECOULEMENT ISOCHORE

I.1 LES EQUATIONS D' EULER POUR L'ÉCOULEMENT ISOCHORE

I.1.1 APPROXIMATION ISOCHORE

Lorsque l'on effectue l'approximation dite isochore (un écoulement isochore est un écoulement au cours duquel la masse volumique reste constante sur les trajectoires) on considère des écoulements quasi-incompressibles et stratifiés en altitude [1],[2] .

En effet, si l'on considère les équations d'Euler, l'approximation isochore consiste à effectuer dans ces équations le passage à la limite suivant:

$$\gamma \longrightarrow \infty \quad , \quad M_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \gamma M_\infty^2 = 0(1) \quad ;$$

où $\gamma \longrightarrow \infty$ veut dire : $C_v \longrightarrow 0$ et $C_p = 0(1)$.

Ainsi la conservation de l'entropie spécifique, $DS/Dt = 0$, est remplacée par la conservation de ρ le long des trajectoires (isochores) en écoulement adiabatique :

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad .$$

En conséquence, l'équation de continuité devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad .$$

Il faut noter que l'incompressibilité de l'écoulement, qui s'exprime par $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$, n'est pas une conséquence des propriétés physiques du fluide (qui reste compressible), mais elle est liée uniquement aux propriétés cinématiques de l'écoulement isochore considéré .

I.1.2 EQUATIONS DE BASE

On considère dans cette étude l'écoulement isochore bidimensionnel et stationnaire (adiabatique) d'un fluide parfait (à C_p constant et $C_v=0$). Les équations, qui découlent des équations d' Euler , régissant cet écoulement dans le plan (x,z) s'écrivent, pour la vitesse \vec{U} , la pression p et la masse volumique ρ , sous la forme suivante:

$$(I,1a) \quad \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \quad ,$$

$$(I,1b) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad ,$$

$$(I,1c) \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad .$$

Dans ce système il faut noter que:

$$\vec{U} = u\vec{l} + w\vec{k} \quad , \quad \vec{g} = -g\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{l} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

où (\vec{l}, \vec{k}) est une base orthonormée du repère lié au plan (x, z) .

Notons aussi que:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad ,$$

car l'écoulement est stationnaire.

Si on se place dans un repère cartésien (o, \vec{l}, \vec{k}) lié au plan de l'écoulement (x, z) , les équations scalaires correspondantes au système (I,1) s'écrivent:

$$(I,2a) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad ,$$

$$(I,2b) \quad u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \quad ,$$

$$(I,2c) \quad u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad ,$$

$$(I,2d) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad .$$

I.2 CONDITIONS AUX LIMITES

On suppose l'existence d'un écoulement de base tel qu'à l'infini amont z_{∞} désigne l'altitude d'une ligne de courant, d'abscisse $x = x_{\infty} = -\infty$, $U_{\infty}(z_{\infty})\vec{l}$ la vitesse, $p_{\infty}(z_{\infty})$ la pression et $\rho_{\infty}(z_{\infty})$ la masse volumique.

L'écoulement isochore, décrit par le système d'équations (I,2),

est supposé prendre place dans un canal de fond curviligne, limité supérieurement par une paroi placée en $z=H_0$; où H_0 est la hauteur caractéristique du canal là où le fond est plat ($z=0$). La partie curviligne du fond du canal est supposée localisée au voisinage de $x=0$, entre les abscisses $x=-L_0/2$ et $x=L_0/2$; L_0 étant la longueur caractéristique du relief dont l'équation est :

$$(I,3) \quad z = h_0 h(x/L_0) \quad ,$$

où $h_0 = \text{Max}|h(x/L_0)|$ pour $x \in [-L_0/2, L_0/2]$.

Ce relief sert d'obstacle perturbant l'écoulement rentrant de l'infini amont dans le canal curviligne.

I.3 INTRODUCTION DE LA FONCTION DE COURANT.

I.3.1 OBTENTION D'UNE EQUATION EN $\psi(x,z)$

Nous allons introduire dans le système (I,2), à la place de la vitesse (u,w) , la fonction de courant ψ . Ceci permet d'une part de réduire le nombre d'inconnues dans le système (I,2) et d'autre part de ramener l'étude de l'écoulement perturbé par le relief à l'étude des lignes de courant perturbées au-dessus et en aval de l'obstacle.

La fonction de courant est définie par les relations classiques :

$$(I,4) \quad u = - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ,$$

puisque $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$.

Si on désigne par $\omega(x,z)$ le tourbillon, alors ω s'écrira en fonction de ψ sous la forme :

$$\omega(x,z) = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial z} = \Delta \psi \quad ,$$

où $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$ est le Laplacien plan .

Soit $q(x,z)$ la fonction définie par :

$$(I,5) \quad q^2 = u^2 + w^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 ,$$

si on élimine la pression p des deux équations (I,2a) et (I,2b), du système (I,2), on obtient l'équation suivante:

$$(I,6) \quad u \frac{\partial\omega}{\partial x} + w \frac{\partial\omega}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} (q^2/2) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} (q^2/2) + \frac{g}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial x} = 0 .$$

Des équations (I,2c) et (I,4) se déduit la dépendance de ρ en ψ : $\rho = \rho(\psi)$; de ce fait on peut remplacer l'équation (I,6) par l'équation suivante:

$$u \frac{\partial\omega}{\partial x} + w \frac{\partial\omega}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial\psi} \left[u \frac{\partial}{\partial x} (q^2/2) + w \frac{\partial}{\partial z} (q^2/2) \right] + w \frac{g}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial\psi} = 0 .$$

En utilisant l'opérateur

$$\vec{U} \cdot \vec{\nabla} = u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

cette dernière équation s'écrit:

$$\left(u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\omega + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial\psi} (q^2/2 + gz) \right) = 0 .$$

On déduit de cette équation que le membre dérivé est constant le long d'une ligne de courant . Après avoir remplacé q par son expression (I,5) on obtient l'équation en ψ suivante :

$$(I,7) \quad \Delta\psi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial\psi} \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 \right) + gz \right) = \kappa(\psi) ,$$

où $\kappa(\psi)$ est une fonction de ψ seule, qui doit être déterminée par les conditions aux limites en amont de l'écoulement (lorsque $x \rightarrow -\infty$ et $z = z_\infty$).

I.3.2 PRISE EN COMPTE DES CONDITIONS LIMITES A L'INFINI AMONT

A l'infini amont de l'écoulement considéré

(c'est-à-dire pour $x \rightarrow -\infty$ et $z=z_\infty$), on est en présence d'un écoulement plan parallèle. Ainsi on a :

$$(I,8) \quad u=U_\infty(z_\infty) \quad , \quad w=0 \quad \text{et} \quad \rho=\rho_\infty(z_\infty) \quad ,$$

où U_∞ est la distribution de vitesse en amont de l'écoulement. Dans ce cas, de la première des relations (I,4) on peut déduire, pour la fonction de courant ψ , la relation suivante :

$$(I,9) \quad \psi = -\int_0^{z_\infty} U_\infty(z) dz = \psi_\infty(z_\infty) \quad ,$$

c'est-à-dire qu'il existe une relation fonctionnelle de la forme :

$$z_\infty = \psi_\infty^{-1}(\psi) = z_\infty(\psi) \quad .$$

Afin de déterminer la fonction $\mathcal{H}(\psi)$, écrivons l'équation (I,7) pour l'écoulement à l'infini amont en utilisant les relations (I,4) et (I,8); il vient alors pour $\mathcal{H}(\psi_\infty)$:

$$\mathcal{H}(\psi_\infty) = -\frac{dU_\infty}{dz_\infty} + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{d\rho_\infty}{d\psi_\infty} \left(\frac{U_\infty^2}{2} + gz_\infty(\psi_\infty) \right) \quad ,$$

où U_∞ , ρ_∞ et z_∞ sont des fonctions de ψ_∞ . Mais $\mathcal{H}(\psi)$ n'étant fonction que de ψ seule, il est évident que l'on doit avoir aussi:

$$(I,10) \quad \mathcal{H}(\psi) = U_\infty \frac{dU_\infty}{d\psi} + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{d\rho_\infty}{d\psi} \left(\frac{U_\infty^2}{2} + gz_\infty(\psi) \right) \quad ,$$

avec

$$u=U_\infty(z_\infty(\psi)) \quad \text{et} \quad \rho=\rho_\infty(z_\infty(\psi)) \quad .$$

On notera que: $\frac{dU_\infty}{dz_\infty} = \frac{dU_\infty}{d\psi_\infty} \frac{d\psi_\infty}{dz_\infty} = U_\infty \frac{dU_\infty}{d\psi_\infty}$ d'après (I,9) .

Ainsi on a à la place de l'équation (I,7) l'équation en ψ suivante:

$$(I,11) \quad \Delta\psi + \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\partial \rho_\infty}{\partial \psi} \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right) + gz \right) = U_\infty \frac{dU_\infty}{d\psi} +$$

$$\frac{1}{\rho_\infty} \frac{d\rho_\infty}{d\psi} \left(\frac{U_\infty^2}{2} + gz_\infty(\psi) \right)$$

qui est l'équation établie en 1935 par Dubreil-Jacotin [3] et en 1953 par Long [4]. On pourra à ce sujet consulter le chapitre 9 du livre de R.Zeytounian de 1990 [10] .

I.4 VARIATION D'ALTITUDE ENTRE DEUX LIGNES DE COURANT

On remarque que l'étude de la perturbation d'une ligne de courant par le fond curviligne du canal revient à l'étude de la variation d'altitude entre deux lignes de courant . Introduisons donc, dans cette étude, la fonction $\hat{\psi}(x,z)$ définie par:

$$(I,12) \quad \hat{\psi}(x,z) = z - z_\infty$$

qui est la variation (avec dimensions) de l'altitude de la ligne de courant dans l'écoulement perturbé par le fond curviligne du canal, relativement à sa position dans l'écoulement de base à l'infini amont.

Grâce à la relation (I,12) on peut passer de ψ à $\hat{\psi}$ et obtenir à la place de l'équation (I,11) l'équation en $\hat{\psi}(x,z)$ suivante:

$$(I,13) \quad \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial z^2} - \frac{g}{U_\infty^2 \rho_\infty} \frac{d\rho_\infty}{dz_\infty} \hat{\psi} = \left(\frac{1}{2} \frac{d \text{Ln}(\rho_\infty U_\infty^2)}{dz_\infty} + \frac{dU_\infty}{d\psi} \right) \left(\left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right)^2 \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right) + U_\infty \frac{dU_\infty}{d\psi}$$

où Ln désigne le Logarithme népérien.

Notons que si $U_\infty = U_0 = \text{constante}$, alors de la relation (I,9) on déduit:

$$z_{\infty}(\psi) = -\frac{\psi}{U_0} \quad ,$$

et dans ce cas on a simplement:

$$(I,14) \quad \hat{\psi}(x,z) = z + \frac{\psi}{U_0} \quad .$$

L'équation (I,13) devient alors:

$$(I,15) \quad \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial z^2} - \frac{g}{U_0^2 \rho_{\infty}} \frac{d\rho_{\infty}}{dz_{\infty}} \hat{\psi} = \frac{1}{2} \frac{d \text{Ln}(\rho_{\infty} U_0^2)}{dz_{\infty}} \left[\left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right] \quad .$$

A cette équation (I,15) il faut associer des conditions aux limites (en x et en z). Celles-ci proviennent d'une part de la nature de l'écoulement à l'amont et d'autre part des conditions de glissement sur le fond curviligne et la paroi plane $z=H_0$. Ainsi on doit imposer les conditions suivantes à l'équation (I,15):

$$(I,16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\psi}(x, h_0 h(x/L_0)) = h_0 h(x/L_0) \quad , \quad x \in [-1/2, +1/2] \quad , \\ \hat{\psi}(-\infty, z_{\infty}) = 0 \quad , \\ \hat{\psi}(x, H_0) = 0 \quad , \\ |\hat{\psi}(x, z)| < +\infty \quad \text{pour } x \rightarrow \infty \quad . \end{array} \right.$$

La première condition de (I,16) exprime le glissement des lignes de courant sur le relief, la deuxième condition montre que l'écoulement est non perturbé à l'amont et la troisième condition exprime la rigidité de la paroi refermant le canal. La dernière condition étant la seule que l'on puisse imposer (du point de vue physique) du fait de l'apparition d'ondes en aval.

Un cas simple de l'équation (I,15) est celui obtenu pour:

$$\rho_{\infty}(z_{\infty}) = \rho_{\infty}(0) \exp(-gz_{\infty}/RT_{\infty}(0))$$

avec

$$-\frac{g}{\rho_{\infty}} \frac{d\rho_{\infty}}{dz_{\infty}} = \frac{g^2}{RT_{\infty}(0)} = N_{\infty}^2 .$$

N_{∞}^2 étant le carré du nombre de Brünt-Väisälä .

Dans ce cas l'équation (I,15) est à coefficients constants:

$$(I,17) \quad \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial z^2} + \frac{(g/U_0)^2}{RT_{\infty}(0)} \frac{d\rho_{\infty}}{dz_{\infty}} \hat{\psi} = \frac{1}{2} \frac{g}{RT_{\infty}(0)} \left(\left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right)^2 \right. \\ \left. \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right) .$$

I.5 EQUATIONS ADIMENSIONNELLES

Au niveau de l'équation (I,17) s'introduisent différentes échelles de longueurs caractéristiques (Zeytounian (1990)):

i) trois échelles externes liées à la géométrie du problème : L_0 , H_0 et h_0 , où

L_0 : longueur du relief,

H_0 : hauteur du canal,

h_0 : hauteur maximale du relief.

ii) deux paramètres $RT_{\infty}(0)/g$ et $RT_{\infty}(0)/(g/U_0)^2$ qui sont des échelles internes liées aux ondes stationnaires qui apparaissent en aval.

Soit λ_0 la longueur d'onde de ces ondes internes stationnaires, qui sont essentiellement des ondes de gravité, puisque l'approximation isochore filtre les ondes acoustiques internes courtes [2]. On prendra h_0 comme amplitude caractéristique de ces ondes, étant donné qu'elles existent grâce à la présence du relief.

Nous pouvons alors effectuer la non-dimensionnalisation suivante:

$$(I,18) \quad \xi = \frac{x}{\lambda_0} , \quad \eta = \frac{z}{H_0} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{\hat{\psi}}{h_0} .$$

Dans ce cas l'équation (I,17) prend la forme adimensionnelle suivante :

$$\frac{H_0^2}{\lambda_0^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial \eta^2} + \frac{H_0^2}{RT_\infty(0)} \left(\frac{g}{U_0}\right)^2 \delta + \frac{1}{2} \frac{gh_0}{RT_\infty(0)} \left(\frac{H_0^2}{\lambda_0^2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial \eta}\right)^2 \right) - \frac{gH_0}{RT_\infty(0)} \frac{\partial \delta}{\partial \eta} = 0$$

où

$$\left(\frac{g}{U_0}\right)^2 = \frac{g^2}{R^2 T_\infty^2(0)} \frac{RT_\infty(0)}{U_0^2} = \frac{1}{H_0^2} \frac{B_0^2}{\gamma M_\infty^2}$$

avec

$$B_0 = \frac{gH_0}{p_\infty/\rho_\infty} = \frac{gH_0}{RT_\infty(0)} \quad \text{et} \quad \gamma M_\infty^2 = \frac{U_0^2}{RT_\infty(0)}$$

M_∞ est un nombre semblable à un nombre de Mach, et B_0 un nombre semblable à un nombre de Boussinesq (d'après [2]).

Posons:

$$\hat{M} = \gamma M_\infty^2$$

M_∞ est petit devant 1 et $\gamma = C_p/C_v$ est grand devant 1 (puisque pour C_p fixé on a $C_v = 0$); d'où l'équation adimensionnelle ci-dessus devient:

$$\frac{H_0^2}{\lambda_0^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial \eta^2} + \frac{B_0^2}{\hat{M}^2} \delta + \frac{1}{2} \frac{B_0 h_0}{H_0} \left(\frac{H_0^2}{\lambda_0^2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial \eta}\right)^2 \right) - B_0 \frac{\partial \delta}{\partial \eta} = 0$$

Dans cette équation les paramètres, sans dimensions, qui sont apparus sont notés de la façon suivante:

$$(I, 19) \quad \beta = \frac{L_0}{\lambda_0}, \quad \varepsilon = \frac{H_0}{L_0}, \quad \nu = \frac{h_0}{H_0}, \quad \sigma = \frac{B_0}{\hat{M}}$$

Et par conséquent, en adoptant ces notations, l'équation adimensionnelle précédente pour δ s'écrit sous la forme suivante:

$$(I,20) \quad \varepsilon^2 \beta^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial \eta^2} + \sigma^2 \delta + \frac{1}{2} \nu B_0 \left(\varepsilon^2 \beta^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial \eta} \right)^2 \right) - B_0 \frac{\partial \delta}{\partial \eta} = 0$$

Notons que le nombre $\sigma = B_0 / M$ est semblable à un nombre de Froude. A cette équation (I,20) il faut associer les conditions aux limites (sans dimensions) suivantes (obtenues à partir des conditions (I,16)) :

$$(I,21) \quad \begin{cases} \delta(x, \nu h(x/\beta)) = h(x/\beta) , & x \in [-1/2, +1/2] , \\ \delta(-\infty, z_\infty) = 0 , \\ \delta(x, 1) = 0 , \\ |\delta(x, z)| < +\infty & \text{pour } x \rightarrow \infty . \end{cases}$$

Si nous effectuons dans la relation (I,14) l'adimensionnalisation des fonctions ψ , ψ et z suivante:

$$\psi = U_0 H_0 \bar{\psi} , \quad \psi = h_0 \delta \quad \text{et} \quad z = H_0 \eta .$$

La relation (I,14) peut alors s'écrire :

$$(I,22) \quad \bar{\psi}(\xi, \eta) + \eta = \nu \delta(\xi, \eta) .$$

I.6. CONCLUSION

Il nous faut chercher des solutions $\delta(\xi, \eta)$, quand elles existent, de l'équation (I,20) en tenant compte des conditions (I,21) et par la suite, il serait intéressant de construire les trajectoires $\bar{\psi}(\xi, \eta) = \text{constante}$ en fonction de la valeur des paramètres ν , ε , σ et B_0 . Cette étude fera l'objet du chapitre II suivant .

CHAPITRE. II : MODELES D'ONDES

II.1 MODELE DE BASE

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux phénomènes d'ondes régis par le système (I,20)-(I,21). Notons que plusieurs auteurs se sont intéressés à la recherche de solutions, quand elles existent, de cette équation écrite quelquefois sous une autre forme; en particulier Long en 1953 [4] et R.K.Zeytounian en 1969 [5].

Le centre de notre intérêt est de rechercher pour ce problème des solutions ξ -périodiques. On étudiera aussi l'influence des paramètres $\beta, \epsilon, \nu, \sigma$ ainsi que celle du relief $\eta = \nu h(x/\beta)$ sur les perturbations des fonctions de courant $\bar{\psi}(\xi, \eta)$ correspondantes aux solutions $\delta(\xi, \eta)$ du problème (I,20)-(I,21). A cette fin on se placera dans un cas particulier où la longueur des ondes internes λ_0 est de l'ordre de grandeur de la longueur caractéristique du relief L_0 , c'est-à-dire $\beta=1$. Par la suite on adoptera cette hypothèse et dans ce cas l'équation en $\delta(\xi, \eta)$ (I,20) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$(II,1) \quad \begin{aligned} \epsilon^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \delta}{\partial \eta^2} + \sigma^2 \delta(\xi, \eta) + \frac{\nu B_0}{2} \left(\epsilon^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial \eta} \right)^2 \right) \\ - B_0 \frac{\partial \delta}{\partial \eta} = 0 \end{aligned}$$

avec les conditions limites (I,21) qui deviennent:

$$(II,2) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \delta(\xi, \eta) = h(\xi) & \text{en} & \eta = \nu h(\xi) \quad , \quad \xi \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right] \\ \delta(\xi, \eta) = 0 & \text{en} & \eta = 1 \quad , \\ \delta(\xi, \eta) = 0 & \text{en} & \xi = -\infty \quad , \\ |\delta(\xi, \eta)| < \infty & \text{en} & \xi = +\infty \quad . \end{array} \right.$$

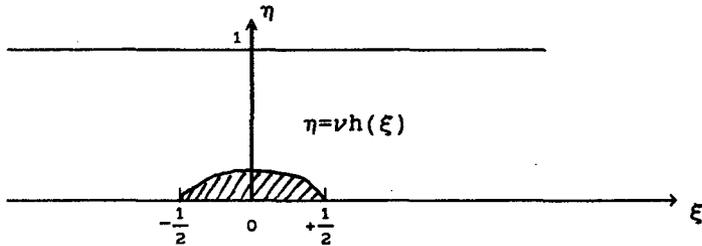


Fig.1 : Forme du canal dans lequel s'effectue l'écoulement autour de l'obstacle $\eta = \nu h(\xi)$.

Notons que l'équation du relief vérifie $h(-\infty) \approx 0$.

II.2 CHANGEMENT DE COORDONNEES

Le problème (II,1)-(II,2) qui est non-linéaire ne possède pas de solutions analytiques , par conséquent une résolution numérique est la seule qui puisse donner des solutions acceptables dans le cas général .

La résolution numérique sera confrontée à plusieurs difficultés lesquelles ont été discutées par R.Kh.Zeytounian [2] .

Les non-linéarités du problème (II,1)-(II,2) existent, pour deux raisons différentes: La première raison est due au terme quadratique $[\varepsilon^2(\partial\delta/\partial\xi)^2 + (\partial\delta/\partial\eta)^2]$ et la seconde raison est liée à la dépendance non-linéaire de la condition limite sur le relief, d'équation $\eta = \nu h(\xi)$, (première condition de (II,2)).

Notons aussi la difficulté provenant de la dernière condition de (II,2) qui n'est pas facilement réalisable au cours des calculs numériques.

Pour toutes ces raisons on va essayer de rendre ce problème, "sans relief", comme pour un écoulement s'effectuant dans un canal délimité par deux parois parallèles fixes placées en $z=0$ et $z=1$; z étant une nouvelle variable qu'on définit par la suite .

Pour cela on introduit, à la place des variables ξ et η , de nouvelles variables x et z (ces variables ont déjà été utilisées auparavant, mais on les reprend ici pour éviter l'utilisation d'un grand nombre de variables; toute confusion avec les anciennes variables x et z étant de toute évidence impossible) définies par

les relations suivantes:

$$(II,3) \quad x = \xi \quad , \quad z = \frac{\eta - \nu h(\xi)}{1 - \nu h(\xi)} \quad .$$

Posons alors pour $\delta(\xi, \eta)$ le changement suivant :

$$(II,4) \quad \delta(\xi, \eta) = \phi(x, z) + (1-z)h(x) \quad .$$

Le changement de variables indépendantes (II,3) nous impose , pour la dérivation, les relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} + \left(\nu \frac{z-1}{1-\nu h(x)} \frac{dh}{dx} \right) \frac{\partial}{\partial z} \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{1-\nu h(x)} \frac{\partial}{\partial z} \quad .$$

En tenant compte des dérivations ci-dessus et en substituant les relations (II,3) et (II,4) dans l'équation (II,1) on obtient une équation aux dérivées partielles du second ordre en $\phi(x, z)$, où les coefficients sont variables:

$$(II,5) \quad \epsilon^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + A \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + \frac{1}{2} \nu \epsilon^2 B_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + C \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} +$$

$$D \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + E \frac{\partial \phi}{\partial z} - F \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sigma^2 \phi = H(x, h(x)) \quad .$$

Les expressions des coefficients A, B, C, D, E, F et H sont données ci-dessous par les formules suivantes:

$$A = (1 + \epsilon^2 \nu^2 (1-z)^2 h'^2(x)) (1 - \nu h(x))^{-2} ,$$

$$B = -\nu \epsilon^2 \frac{1-z}{1-\nu h(x)} h'(x) \quad ,$$

$$C = \epsilon^2 \nu^2 B_0 (z-1) (1-\nu h(x))^{-1} h'(x) \quad ,$$

$$D = \frac{\nu B_0}{2} (1 + \epsilon^2 \nu^2 (1-z)^2 h'^2(x)) (1-\nu h(x))^{-2} \quad ,$$

$$E = \left(\nu \varepsilon^2 ((1-\nu h(x))h''(x) + 2\nu h'(x)^2)(z-1) - B_0 \varepsilon^2 \nu^2 (1-z) h'^2(x) - B_0 \right) (1-\nu h(x))^{-2} ,$$

$$F = C/\nu ,$$

$$H = \varepsilon^2 (z-1)h''(x)(1-\nu h(x))^{-1} - 2\nu \varepsilon^2 (1-z)(1-\nu h(x))^{-2} h'^2(x) - \frac{\nu B_0 \varepsilon^2}{2} (z-1)^2 (1-\nu h(x))^{-2} h'^2(x) - B_0 (1-\frac{\nu}{2}h(x))(1-\nu h(x))^{-2} h(x) - \sigma^2 (1-z)h(x) .$$

Pour l'équation (II,5) on a les conditions limites homogènes suivantes, qui découlent des conditions (II,2) :

$$(II,6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \phi(x,z) = 0 & \text{en } z = 0 \text{ et } z = 1 , \quad x \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}] \\ \phi(x,z) = 0 & \text{en } x = -\infty , \\ |\phi(x,z)| < \infty & \text{en } x = +\infty . \end{array} \right.$$

Pour cette équation (II,5) on va considérer, en fonction des paramètres ε , ν et B_0 , trois cas qui correspondent à des modèles d'ondes différents.

II.2.1. CAS LINEAIRE.

Dans ce cas on suppose que la profondeur du canal H_0 est très grande devant la hauteur maximale du relief h_0 ($h_0 \ll H_0$) .

$$(II,7) \quad \nu \longrightarrow 0 , \quad \varepsilon, B_0 \text{ et } \sigma \text{ sont fixés .}$$

A la place de (II,5) on obtient une équation aux dérivées

linéaire du second ordre à coefficients constants:

$$(II,8) \quad \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - B_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} + \sigma^2 \phi = H(x) \quad ,$$

où
$$H(x) = (z-1)(\varepsilon^2 h''(x) + \sigma^2 h(x)) - B_0 h(x) \quad ,$$

Ce cas est significatif pour des reliefs de hauteur faible (la longueur du relief est grande devant sa hauteur, $\nu\varepsilon = h_0/L_0 \rightarrow 0$, puisque $\varepsilon=O(1)$).

II.2.2 CAS DES ONDES LONGUES.

On suppose que la hauteur caractéristique du canal H_0 est très petite devant la longueur du relief L_0 (c'est-à-dire devant la longueur des ondes internes, puisque $\beta=1$):

$$H_0 \ll L_0 \quad ,$$

ce cas correspond au passage à la limite suivant:

$$(II,9) \quad \varepsilon \longrightarrow 0 \quad ; \quad \nu, B_0 \text{ et } \sigma \text{ fixés.}$$

On obtient, à la place de (II,5), une équation différentielle ordinaire non-linéaire du second ordre où la variable x joue le rôle d'un paramètre (par l'intermédiaire du relief $h(x)$) :

$$(II,10) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\nu B_0}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - B_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} + \sigma^2 (1-\nu h(x))^2 \phi =$$

$$- h(x) \left[\sigma^2 (1-z) (1-\nu h(x))^2 + B_0 \left(1 - \frac{1}{2} \nu h(x) \right) \right] \quad .$$

II.2.3 CAS DE BOUSSINESQ

L'approximation de Boussinesq correspond au passage à la limite suivant:

$$(II,11) \quad B_0 \longrightarrow 0 \quad \text{avec } \sigma \text{ fixé} \quad .$$

Si on suppose que ε et ν sont aussi fixés, on obtient à la place

de (II,5) une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre à coefficients variables.

$$(II,12) \quad \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + A \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + E \frac{\partial \phi}{\partial z} + \sigma^2 \phi = H \quad ,$$

où

$$E = \nu \varepsilon^2 ((1-\nu h(x))h''(x) + 2\nu h'(x)^2)(1-\nu h(x))^{-2} \quad ,$$

$$H = (z-1) \left(\varepsilon^2 (h''(x)(1-\nu h(x)) + 2\nu h'(x)^2)(1-\nu h(x))^{-2} + \sigma^2 h(x) \right) .$$

A ces équations (II,8), (II,10) et (II,12) il faut associer les conditions aux limites homogènes (II,6).

II.3 OBTENTION D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL DE BASE.

Une technique mathématique de résolution de l'équation (II,5), avec les conditions homogènes en $z=0$ et $z=1$ consiste à décomposer la perturbation de la fonction de courant $\phi(x,z)$ en série de Fourier :

$$(II,13) \quad \phi(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \sin(n\pi z) \quad ,$$

où les coefficients $\varphi_n(x)$ dépendent uniquement de la variable x . Grâce à la procédure de Galerkin qui permet de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à un système d'équations différentielles ordinaires, on aboutit aux équations que vérifient les coefficients $\varphi_n(x)$ de la décomposition de Fourier [6]. En effet cette méthode consiste à remplacer l'expression (II,13) de $\phi(x,z)$ dans l'équation (II,5) qu'on multiplie par $\sin(m\pi z)$, en suite la nouvelle équation obtenue est intégrée en z entre 0 et 1.

Les conditions d'orthogonalité, d'après la décomposition (II,13), sont:

$$\int_0^1 \sin(n\pi z) \sin(m\pi z) dz = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n=m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_0^1 \cos(n\pi z) \sin(m\pi z) dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n=m \\ -\frac{m}{(n^2 - m^2)} [1 - (-1)^{n+m}] & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Le système d'équations différentielles d'ordre n pour les fonctions $\varphi_n(x)$ est alors de la forme :

$$(II,14) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{p=1}^{p=n} \left\{ \varepsilon^2 I_{mp}^1 \frac{d^2 \varphi_p}{dx^2} + (\pi C_3 p J_{mp}^2 + C_7 I_{mp}^2) \frac{d\varphi_p}{dx} + \sum_{q=1}^n \left[\right. \right. \\ & C_4 I_{mpq}^1 \frac{d\varphi_p}{dx} \frac{d\varphi_q}{dx} + \pi C_6 I_{mpq}^2 \varphi_q \frac{d\varphi_p}{dx} + \left(\pi^2 \frac{C_5}{C_2} J_{mpq}^1 + \right. \\ & \left. \left. \pi^2 \frac{C_5 C_1}{C_2} J_{mpq}^3 \right) p q \varphi_p \varphi_q \right] + \left(- \left(\pi^2 \frac{C_1}{C_2} I_{mp}^3 + \frac{\pi^2}{C_2} I_{mp}^1 \right) p^2 + \right. \\ & \left. \left(\pi C_8 J_{mp}^2 + \pi C_9 J_{mp}^3 + \pi C_{10} J_{mp}^1 + \sigma^2 I_{mp}^1 \right) p \right) \varphi_p \left. \right\} = C_{11} I_{mp}^2 \\ & + C_{11} I_m^2 + C_{12} I_m^3 + C_{13} I_m^1 . \end{aligned} \right.$$

où $m = 1, 2, \dots, n$.

Toutes les expressions explicites des coefficients de cette équation différentielle en $\varphi_n(x)$ sont données dans l'Annexe 1.

A ce système (II,14) il faut associer les conditions limites , qui découlent de (II,6) , et que doivent vérifier les fonctions $\varphi_n(x)$:

$$(II,15) \quad \varphi_n(-\infty) = 0 \quad \text{et} \quad |\varphi_n(+\infty)| < \infty .$$

II.3.1 SYSTEME LINEAIRE D'ORDRE N

Dans le cas linéaire, lorsque $\nu \rightarrow 0$, à la place du système différentiel (II,14) on obtient un système d'équations linéaires pour $\varphi_n(x)$:

$$\begin{aligned}
 (II,16) \quad & \varepsilon^2 \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + (\sigma^2 - 1^2 \pi^2) \varphi_1 - B_0 \sum_{k=1}^{1-1} \frac{2k1}{(1^2 - k^2)} (1 - (-1)^{1+k}) \varphi_k \\
 & - B_0 \sum_{k=1+1}^{\nu} \frac{21k}{(1^2 - k^2)} (1 - (-1)^{1+k}) \varphi_k = - \frac{2\varepsilon^2}{1\pi} h''(x) - \\
 & \frac{2}{1\pi} \left[\sigma^2 + B_0 (1 - (-1)^1) \right] h(x) \quad ,
 \end{aligned}$$

où $l = 1, 2, \dots, n$.

A ce système sont associées les conditions (II,15).

Une solution générale exacte de ce système à l'ordre n ne paraît pas évidente, néanmoins une solution à l'ordre 1 est possible.

II.3.2 UNE SOLUTION EXACTE

Lorsqu'on se limite pour le système linéaire (II,16) à un seul mode ($n=1$) on a l'équation différentielle suivante:

$$(II,17) \quad \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} + \frac{\sigma^2 - \pi^2}{\varepsilon^2} \varphi_1 = - \frac{2}{\pi} \left(h''(x) + \frac{2B_0 + \sigma^2}{\varepsilon^2} h(x) \right) \quad ,$$

cette équation a pour solution la fonction suivante, qui satisfait aux conditions (II,15) en $x=-\infty$ et $x=+\infty$:

$$(II,18) \quad \varphi_1(x) = - \frac{2}{\pi\lambda} \int_{-\infty}^x \sin\lambda(x-y) (h''(y) + K_0 h(y)) dy \quad ,$$

où

$$\lambda = \varepsilon^{-1} (\sigma^2 - \pi^2)^{1/2} \quad , \quad K_0 = \frac{2B_0 + \sigma^2}{\varepsilon^2} \quad .$$

On doit choisir $\sigma^2 > \pi^2$ puisqu'on cherche des solutions bornées, dans le cas contraire les solutions croissent exponentiellement lorsque $x \rightarrow \infty$ or ces solutions ont été éliminées par la seconde des conditions limites (II,15).

Pour un relief d'équation :

$$h(y) = \begin{cases} h_0(1+\cos(2\pi y))/2 & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \text{ et } h_0 \ll 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

φ_1 s'écrit:

$$\varphi_1(x) = 0 \quad \text{pour } x \in \left[-\infty, \frac{1}{2}\right],$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = & -\frac{1}{\pi} \left[\frac{4\pi^2 - K_0}{4\pi^2 - \lambda^2} + \frac{K_0}{\lambda^2} \right] \cos\lambda(x+1/2) - \frac{1}{\pi} \frac{4\pi^2 - K_0}{4\pi^2 - \lambda^2} \cos 2\pi x \\ & + \frac{1}{\pi} \frac{K_0}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\text{pour } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) = & -\frac{1}{\pi} \left[\frac{4\pi^2 - K_0}{4\pi^2 - \lambda^2} + \frac{K_0}{\lambda^2} \right] \cos\lambda + \frac{4\pi}{\lambda^2} \cos\lambda(x+1/2) + \frac{1}{\pi} \frac{4\pi^2 - K_0}{4\pi^2 - \lambda^2} \\ & + \frac{4\pi + K_0}{\pi\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\text{pour } x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right].$$

II.3.3 SYSTEME NON-LINEAIRE D'ORDRE 1 .

Le système d'équations (II,14) étant très compliqué pour un grand nombre de modes on s'intéresse ici uniquement au cas simple où ce système comporte une seule composante $\varphi_1(x)$; dans ce cas ce système se réduit à l'équation différentielle non-linéaire suivante:

$$(II,19) \quad \epsilon^2 \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + A \left(\frac{d\varphi_1}{dx} \right)^2 + B\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx} + C\varphi_1^2 + D \frac{d\varphi_1}{dx} + E\varphi_1 = H(x)$$

où les coefficients A, B, C, D, E et H sont :

$$A = \frac{4}{3\pi} \nu B_0 \varepsilon^2$$

$$B = -\frac{8}{9\pi} \nu^2 B_0 \varepsilon^2 h'(x) [1 - \nu h(x)]^{-1}$$

$$C = \frac{\pi}{3} \nu B_0 [1 - \nu h(x)]^{-2} [2 + \nu^2 \varepsilon^2 (1 - 4/9\pi^2) h'(x)]$$

$$D = -\nu \varepsilon^2 (1 - B_0/2) h'(x) [1 - \nu h(x)]^{-1}$$

$$E = \sigma^2 - \pi^2 [1 - \nu h(x)]^{-2} - \frac{1}{2} \nu \varepsilon^2 [1 - \nu h(x)]^{-1} h''(x) - \\ (\pi^2/3 + 1/2 + B_0^2/2) \nu^2 \varepsilon^2 [1 - \nu h(x)]^{-2} h'(x)^2$$

$$H = -\frac{2\varepsilon^2}{\pi} \left[[1 - \nu h(x)]^{-1} h''(x) + 2\nu(1 + B_0/4 - B_0/\pi^2) [1 - \nu h(x)]^{-2} h'(x)^2 \right] \\ - 4B_0/\pi [1 - \nu h(x)/2] [1 - \nu h(x)]^{-2} h(x) - \frac{2\sigma^2}{\pi} h(x)$$

Pour les ondes longues, quand ε tend vers zéro, on obtient à la place de l'équation (II,19) l'équation algébrique suivante :

$$(II,20) \quad \varphi_1^2 + \frac{3}{2} \frac{[1 - \nu h(x)]^2 \sigma^2 - \pi^2}{\pi \nu B_0} \varphi_1 = H(x)$$

avec

$$H(x) = -\frac{3}{\pi^2 \nu B_0} h(x) \left\{ [1 - \nu h(x)]^2 \sigma^2 + 2B_0 [1 - \nu h(x)/2] \right\}$$

La solution triviale de cette dernière équation (II,20) peut-être une solution test pour les calculs numériques de la solution de l'équation non-linéaire (II,19) .

II.3.4 CONCLUSION

La difficulté dans la méthode de Galerkin utilisée pour obtenir le système d'équations différentielles (II,14) réside dans sa troncature c'est-à-dire dans le choix du nombre de modes

significatifs de façon à obtenir une solution suffisamment représentative du problème régi par les équations (II,5) et les conditions (II,6). Il est raisonnable de penser que plus la troncature sera élevée, plus la solution approchée obtenue aura de réalité physique. Dans le cas du système linéaire (II,16) on a essayé de prendre un grand nombre de modes ($n=10$); par contre pour le système (II,14) on s'est contenté d'un seul mode ($n=1$) étant donné la difficulté des calculs.

II.4 ETUDE NUMERIQUE

Quand on a écrit la solution (II,18) de l'équation différentielle particulière (II,17) on a rejeté, évidemment, les solutions correspondantes à des nombres $\sigma > \pi$ étant donné que pour $x \rightarrow -\infty$ ces solutions ne tendent pas vers zéro et qu'elles ne seront pas bornées sur toute la droite infinie $-\infty \leq x \leq +\infty$. C'est la raison pour laquelle, on a obtenu uniquement la solution particulière (II,18) satisfaisant les conditions aux limites (II,15). Donc, pour toute résolution numérique de systèmes non-linéaires du type (II,14) ou systèmes linéaires du type (II,16) on doit s'assurer que σ est supérieur à $n\pi$ afin d'éviter les solutions non bornées.

Dans un premier temps, on va chercher des solutions numériques approchées, $\varphi_n(x)$, du système linéaire (II,16) avec les conditions (II,15) et on tracera les courbes correspondantes à:

$$\delta(x,z) = \phi(x,z) + (1-z)h(x) \quad \text{où} \quad \phi(x,z) = \sum_n \varphi_n(x) \sin(n\pi z).$$

Dans un deuxième temps, on se place dans la cas dit non-linéaire ($\nu \neq 0$) et on cherche des solutions numériques approchées de l'équation (II,19) avec les conditions (II,15) et il sera intéressant dans ce cas de tracer les lignes de courant correspondantes à $\bar{\psi}(\xi, \eta) = \text{constante}$, où évidemment:

$$\bar{\psi}(\xi, \eta) = \eta - \nu \delta(\xi, \eta) \quad .$$

La méthode de calcul numérique utilisée dans les deux cas est celle de Runge-Kutta [8], d'ordre quatre et à pas constant, utilisée en général pour la résolution des systèmes d'équations différentielles.

En ce qui concerne les paramètres du problème ν , ϵ , B_0 et σ , à chaque fois qu'on fait varier l'un d'eux on laisse fixes les

autres pour étudier l'influence de chaque paramètre sur l'écoulement considéré.

II.4.1 ANALYSE DES RESULTATS NUMERIQUES

Nous présentons dans cette section quelques figures construites à partir de résultats numériques pour un profil du relief donné par:

$$h(x) = \begin{cases} h_0(1+\cos 2\pi x)/2 & \text{si } |x| < 1/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Nous donnons au paramètre h_0 la valeur 0.2 pour la résolution du système différentiel linéaire (II,16) et la valeur 0.5 pour la résolution de l'équation différentielle non-linéaire (II,19). Les paramètres ν , ε , B_0 et σ prennent différentes valeurs afin d'illustrer leurs influences. Nous présentons uniquement des figures pour deux valeurs distinctes de chaque paramètre .

Le domaine d'intégration est $R \times [0,1]$ mais on indiquera sur les figures seulement une partie significative du domaine $(x,z) \in [-1/2, 2] \times [0, 0.5]$ pour le cas linéaire ($\nu=0$) et $(x,z) \in [-1/2, 3] \times [0, 1]$ pour le cas non-linéaire ($\nu \neq 0$) .

II.4.2 PERTURBATIONS DES FONCTIONS DE COURANT

On calcule ici les solutions $\varphi_n(x)$ du système linéaire (II,16) pour 10 modes et on trace les perturbations $\delta(x,z) = (1-z)h(x) + \sum_{n=1}^{10} \varphi_n(x) \sin(n\pi z)$, pour chaque valeur de z entre 0 et 1.

La figure 3a représente la comparaison entre les courbes $\delta(x,0.5)$ correspondantes respectivement aux solutions des équations (II,17) et (II,20) pour $\nu=0.25$; les paramètres ε , B_0 et σ ont respectivement les valeurs 1, 1 et 2π . On voit bien que si ν tend vers zéro les deux courbes vont se confondre, par contre si ν s'éloigne de zéro ces deux courbes vont avoir tendance à s'éloigner l'une de l'autre.

La figure 3b montre la comparaison entre les courbes $\delta(x,z)$, à l'altitude $z=0.5$, relatives aux solutions de l'équation algébrique (II,20) et à l'équation (II,19) pour un ε petit ($\varepsilon=0.1$); les

paramètres B_0 et σ gardent les mêmes valeurs qu'auparavant. Ceci permet évidemment de vérifier la validité de la méthode numérique utilisée pour résoudre l'équation (II,19) et par la suite le système différentiel (II,16).

La figure 4 illustre l'influence du paramètre σ sur la perturbation de la fonction de courant $\delta(x,z)$ solution du système (II,16) pour $n=10$ modes à l'altitude $z=0.5$ et pour $\epsilon=B_0=1$. Nous remarquons que plus σ est grand (le nombre de modes est fixé à $n=10$) plus l'amplitude de $\delta(x,z)$ après le relief devient petite et donc pour des σ très grands, les lignes $\delta(x,z)$ seront des droites parallèles aux parois du canal.

Sur les figures 5 et 6 on voit respectivement l'influence des paramètres B_0 et ϵ sur la perturbation $\delta(x,z)$ à l'altitude $z=0.5$ et pour $\sigma=13\pi$. On remarque sur la figure 6 que plus ϵ est petit plus les ondes $\delta(x,z)$ deviennent longues.

Notons que la traçe du relief sur toutes les figures précédentes est le segment $[-1/2, 1/2]$ à l'altitude $z=0$.

II.4.3 LIGNES DE COURANT

On cherche ici, pour les raisons qu'on a donné auparavant, une solution $\varphi_1(x)$ du système différentiel réduit à une seule équation (II,19) et ensuite on trace les fonctions de courant $\bar{\psi}(x,z) = \text{constante}$ où $\bar{\psi}(x,z) = z - \nu\delta(x,z)$, avec $\delta(x,z) = (1-z)h(x) + \varphi_1(x)\sin\pi z$.

Dans un premier temps on étudie, en présence d'un seul obstacle dans le canal, l'influence des paramètres ν , B_0 , ϵ et σ sur la nature des lignes de courant $\bar{\psi}(x,z)$ et dans un deuxième temps on fixe ces paramètres et on regarde l'influence de l'interaction entre deux reliefs de profils différents. On prend comme deuxième relief celui dont l'équation s'écrit:

$$h(x) = \begin{cases} h_1(1/2 - |x|) & \text{si } |x| < 1/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où h_1 est une constante donnée.

On voit sur la figure 7 que dès que ν commence à devenir de l'ordre de 1 il y a apparition de lignes de courant fermées,

appelées tourbillons, qui traduisent l'état d'un écoulement "turbulent", ce qui est naturellement le cas en présence d'un relief de hauteur relativement importante par rapport à la profondeur du canal.

Les figures 8 et 9 illustrent l'influence des nombres B_0 et ε pour $\sigma=2\pi$ et $\nu=0.25$, alors que les figures 10 montrent l'influence de la présence de deux reliefs proches de profils différents. On remarque qu'en présence d'un relief raide (peu régulier) l'écoulement est "plus turbulent" en aval du relief que dans le cas d'un relief plus régulier (exemple: le profil du premier relief).

Sur la figure 10a on voit apparaître des tourbillons après le deuxième relief qui vont rester indéfiniment dans l'écoulement aval, par contre sur la figure 10b ces tourbillons apparaissent au-dessus du relief et disparaissent aussitôt après et on voit s'établir un écoulement ressemblant à celui se trouvant en amont de ce relief .

II.4.4 CONCLUSION

On remarque dans la représentation graphique (figures 7 à 10) des lignes de courant $\bar{\psi}(x,z)=\text{constante}$, autour du fond curviligne d'équation $z=\nu h(x)$ ($\nu \neq 0$), l'absence des lignes de courant fermées en amont de l'obstacle, même quand la hauteur du relief n'est pas très petite devant la profondeur du canal. Ceci est dûe, surtout, au fait que la méthode numérique utilisée permet de calculer $\bar{\psi}(x,z)$ uniquement aux noeuds de la maille suivante et jamais en ceux de la maille d'avant . Ce qui rend impossible l'influence de l'aval sur l'amont de l'écoulement .

En effet, une méthode de différences centrées ou de volumes finies serait plus adéquate, mais vu l'absence dans les conditions (II,15) de conditions aux limites finies à l'aval de l'écoulement on n'a pas pu adopter de telles méthodes .

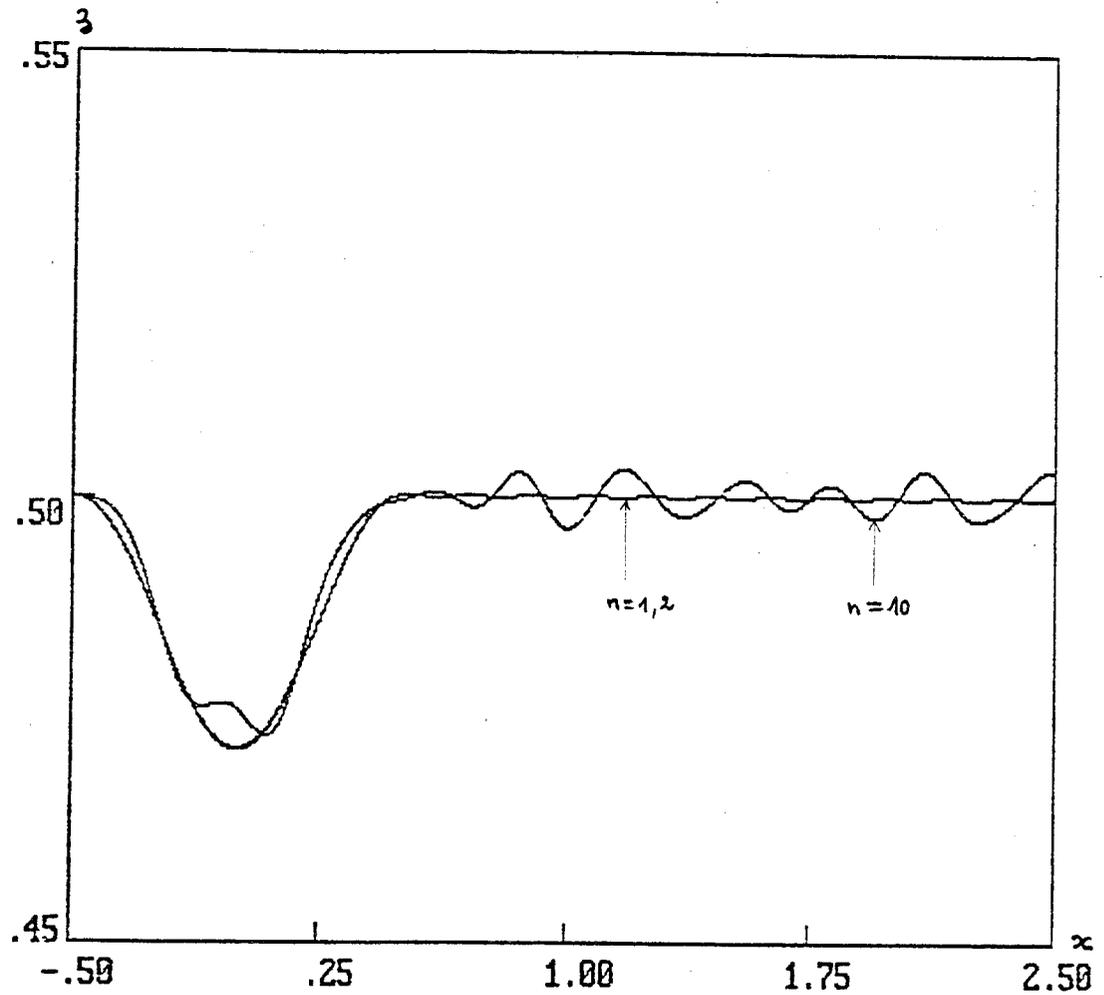


Fig.2 : Représentation de la comparaison entre les trois courbes correspondantes aux solutions du système différentiel (II,16) à l'altitude $z=0.5$ pour des nombres de modes $n=1,2$ et 10 et pour les valeurs des paramètres suivantes: $\varepsilon=B_0=1$, $\sigma=11\pi$ et $h_0=0.2$.

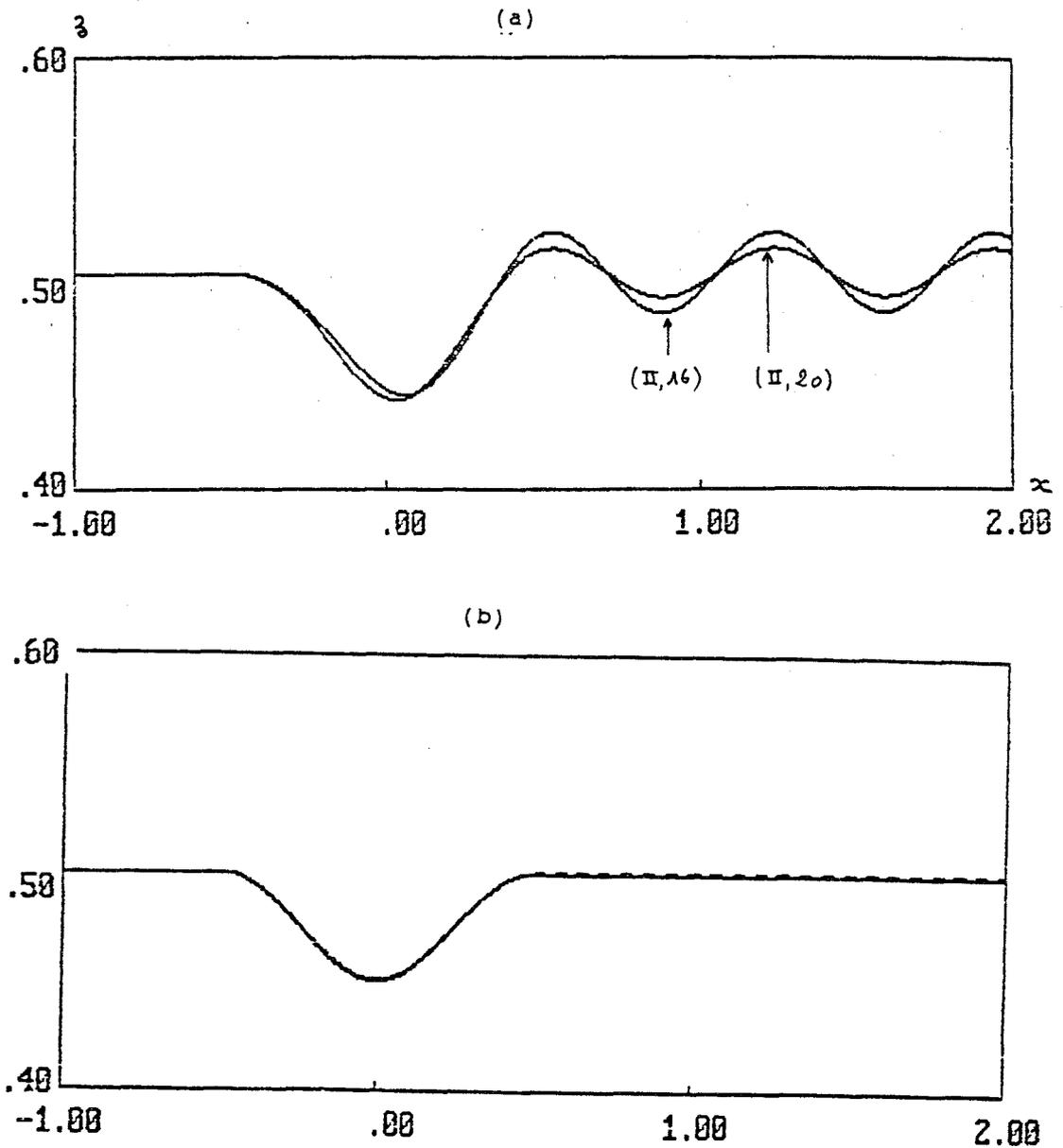


Fig. 3 : Représentation de la perturbation de la fonction de courant $\delta(x, z)$ (pour $n=1$) en fonction de l'abscisse x à l'altitude $z=0.5$ pour les valeurs des paramètres : $\nu=0.25$, $B_0=1.$, $\sigma=3\pi$, $h_0=0.2$

- (a) comparaison entre la solution de (II, 16) et de (II, 20) pour $\epsilon=1.$
- (b) comparaison entre la solution de (II, 20) et de (II, 19) pour $\epsilon=0.1$

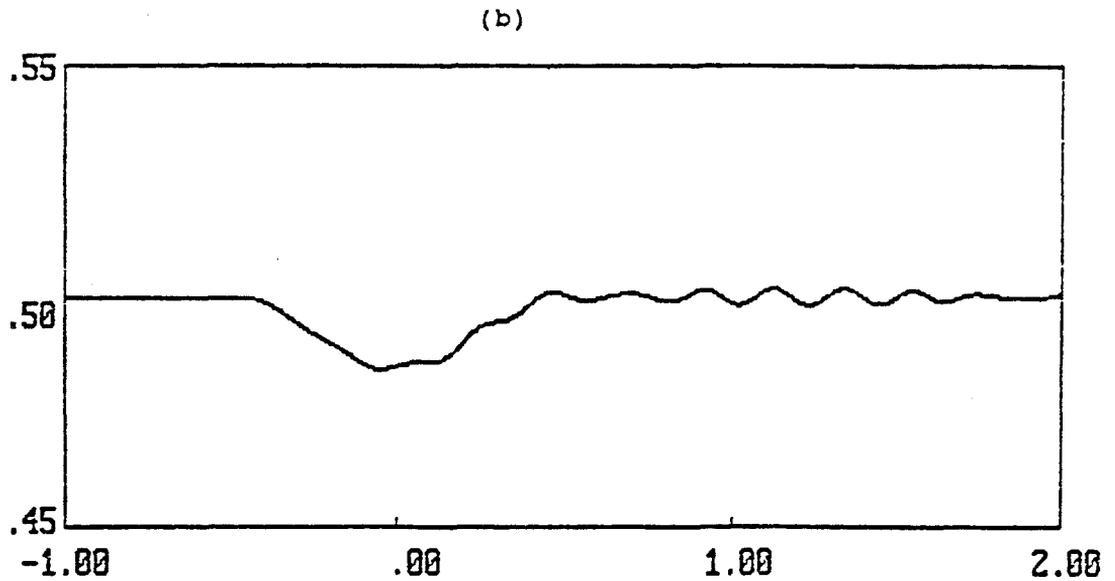
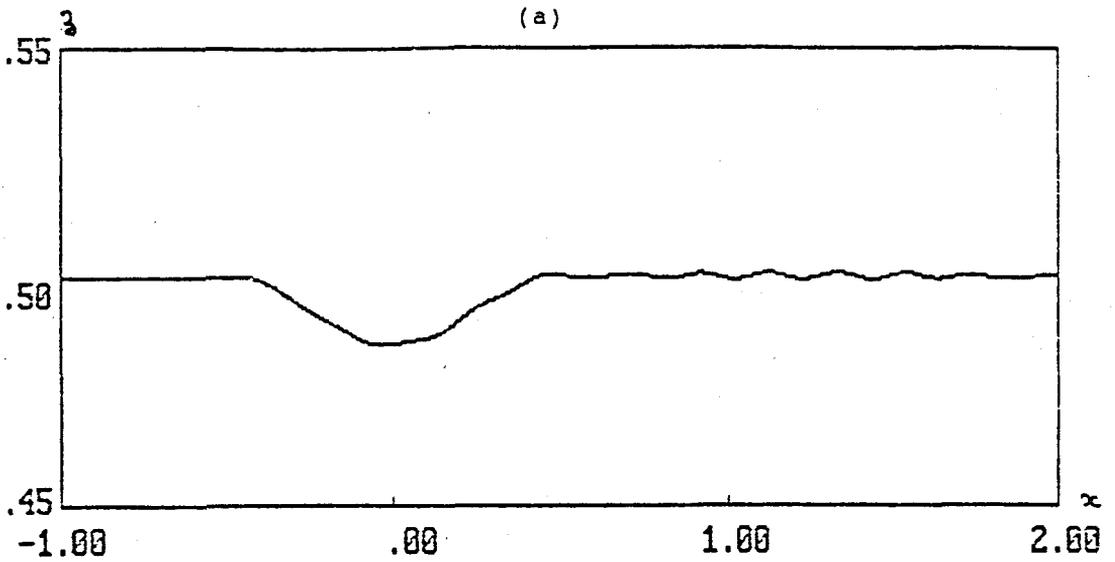


Fig. 4 : Représentation de $\delta(x, z)$ (pour $n=10$) à l'altitude $z=0.5$ sous l'influence de σ pour les valeurs des paramètres : $\epsilon=1.$, $B_0=1.$, $h_0=0.2$

(a) courbe correspondante à $\sigma=13\pi$,
 (b) courbe correspondante à $\sigma=11\pi$.

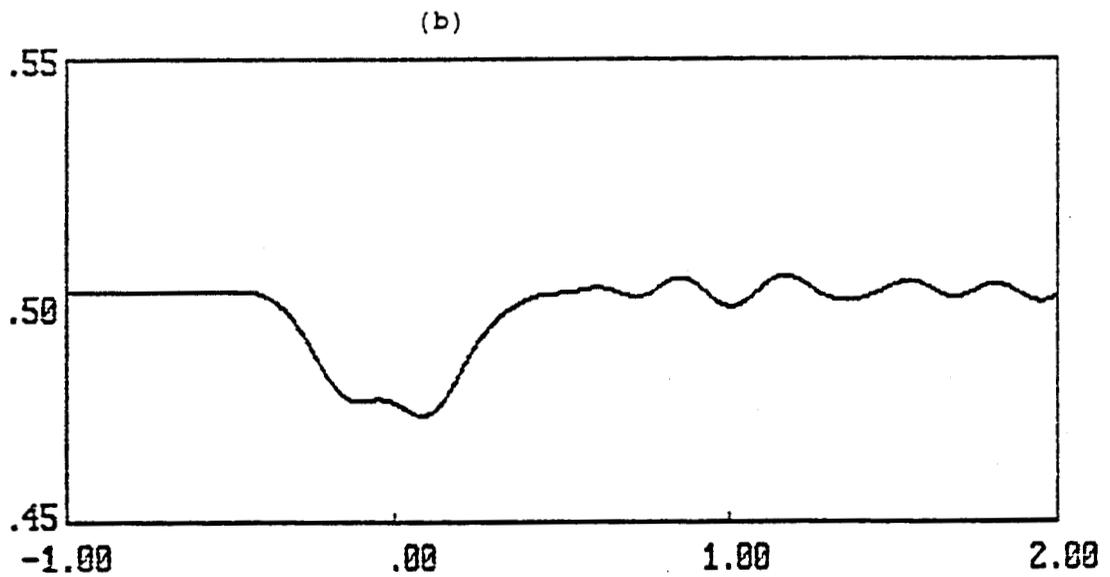
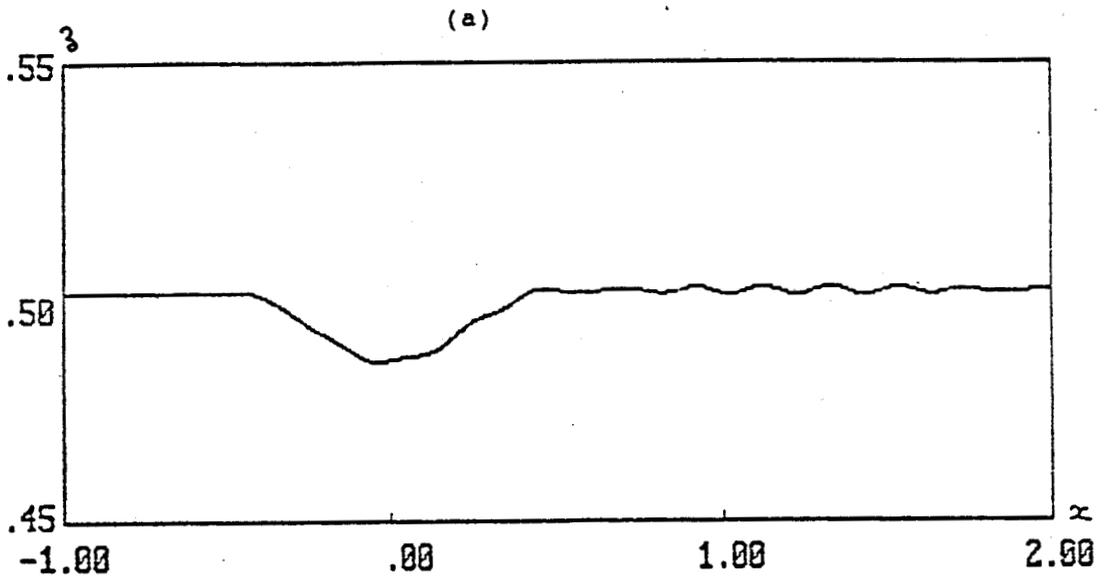
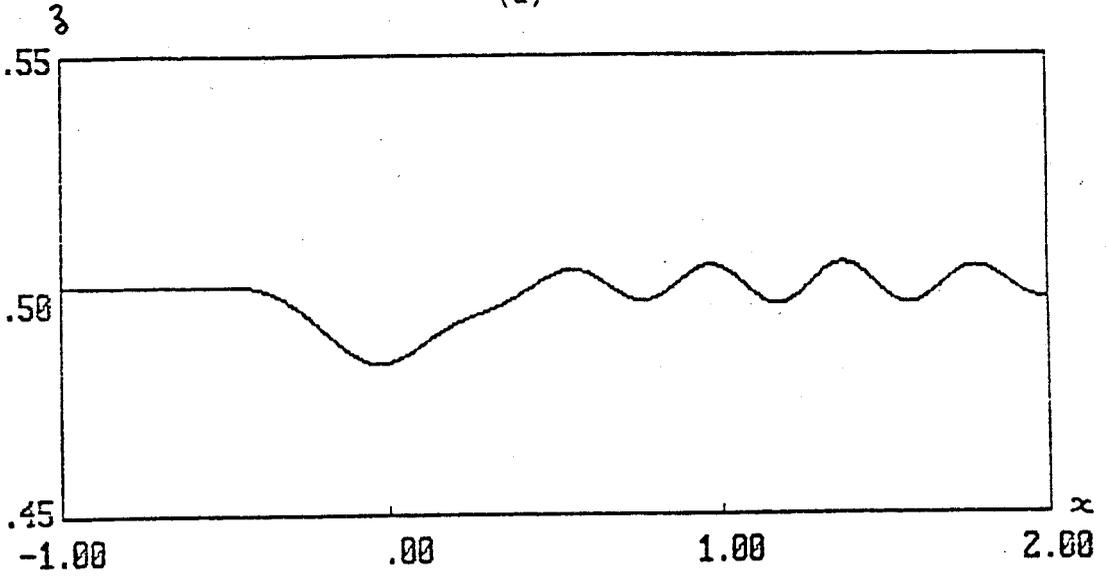


Fig. 5 : Représentation de $\delta(x, q)$ (pour $n=10$) à l'altitude $q=0.5$ sous l'influence de B_0 pour les valeurs des paramètres: $\varepsilon = 1.$, $\sigma = 13\pi$, $h_0 = 0.2$

- (a) courbe correspondant à $B_0 = 0.$
 (b) courbe correspondant à $B_0 = 2.$

(a)



(b)

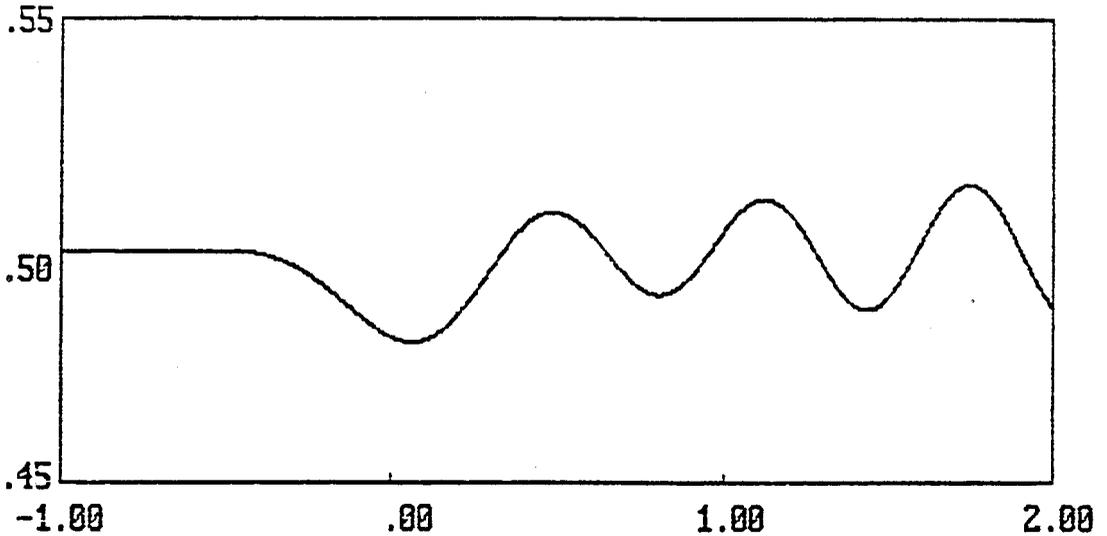


Fig. 6 : Représentation de $\delta(x, \zeta)$ (pour $n=10$) à l'altitude $\zeta=0.5$ sous l'influence de ϵ pour les valeurs des paramètres : $B_0=1.$, $\sigma=13\pi$, $h_0=0.2$

(a) courbe correspondante à $\epsilon=2.$
(b) courbe correspondante à $\epsilon=3.$

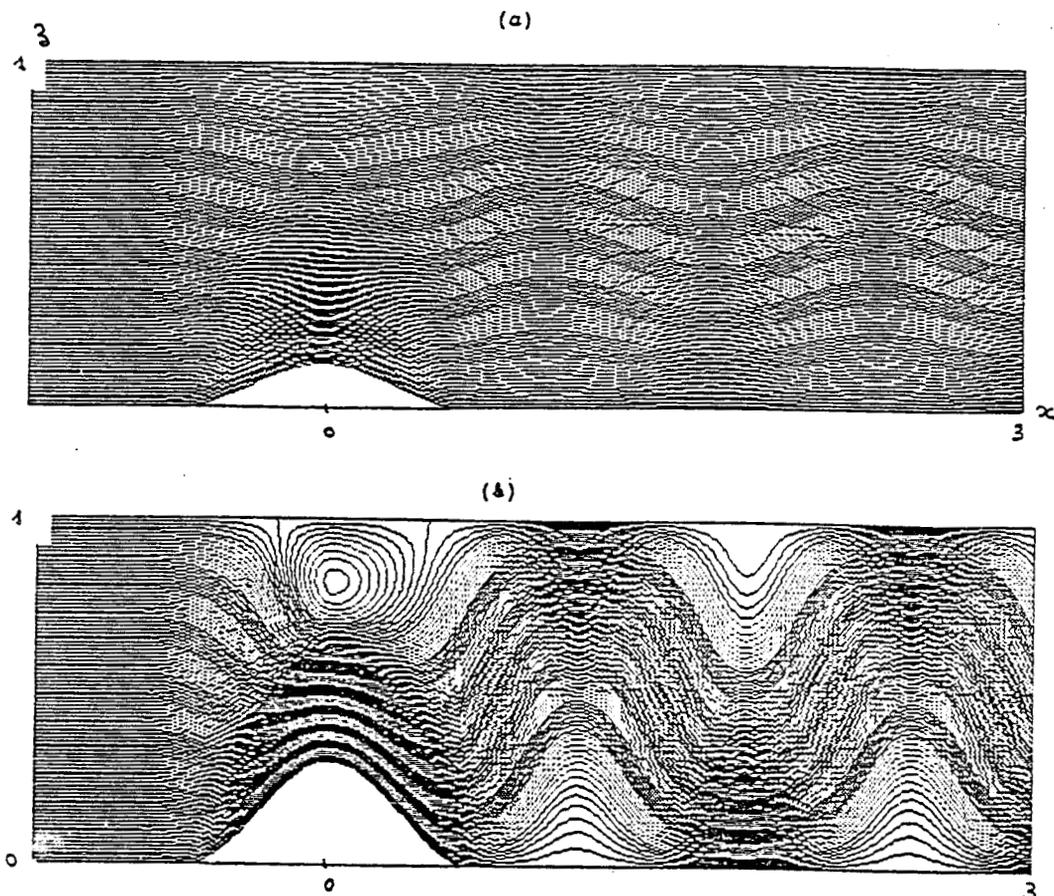


Fig. 7 : Représentation des fonctions de courant $\bar{\psi}(\alpha, \eta) = cte$ dans le canal autour du relief d'équation $vh(\alpha) = v(1 + \cos(2\pi\alpha)) / 2$
 (a) correspond à $v=0.25$, $\sigma=2\pi$, $\varepsilon=B_0=1$ et $h_0=0.5$
 (b) correspond à $v=0.6$, $\sigma=2\pi$, $\varepsilon=B_0=1$ et $h_c=0.5$

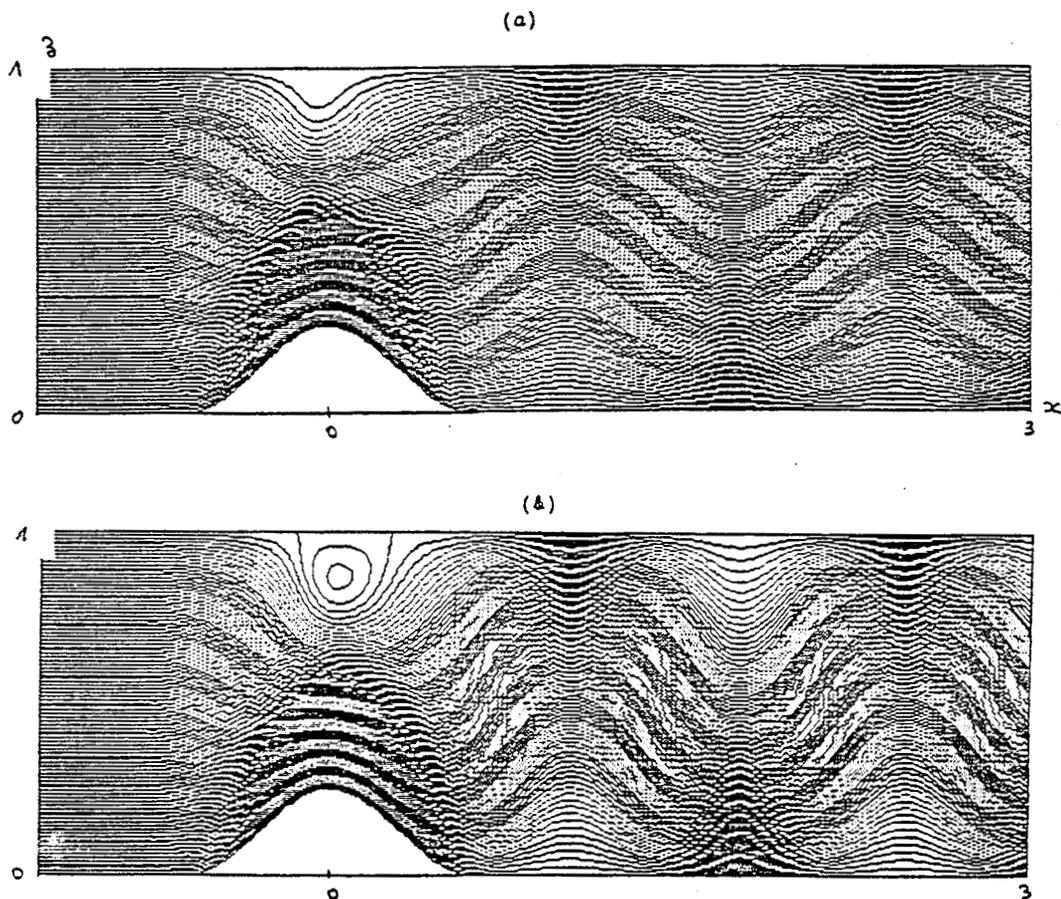


Fig. 8 : Représentation des fonctions de courant $\bar{\psi}(x, z) = cte$ dans le canal autour du relief d'équation $vh(x) = v(1 + \cos(2\pi x))/2$
 (a) correspond à $\sigma = 2\pi$, $\nu = 0.5$, $\epsilon = B_0 = 1$ et $h_0 = 0.5$
 (b) correspond à $\sigma = 4\pi$, $\nu = 0.5$, $\epsilon = B_0 = 1$ et $h_0 = 0.5$

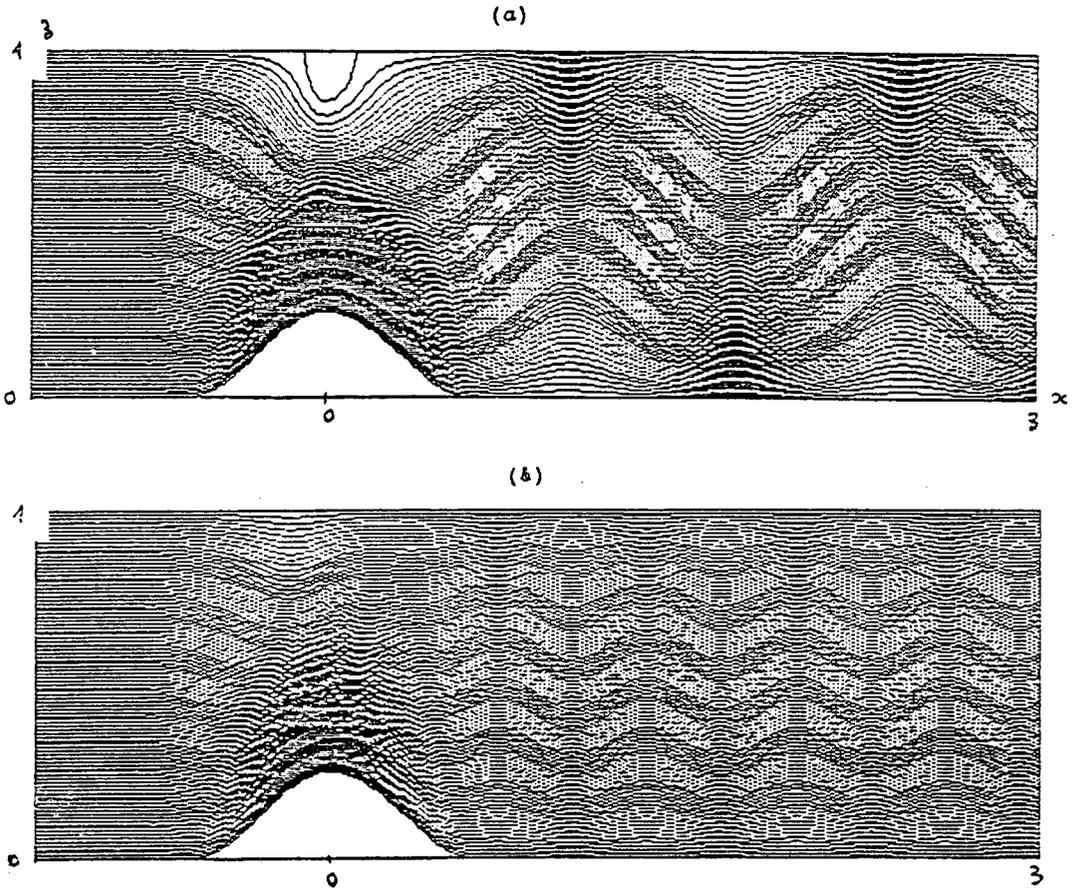


Fig. 9 : Représentation des fonctions de courant $\bar{\psi}(x, z) = cte$ dans le canal autour du relief d'équation $vh(x) = v(1 + \cos(2\pi x))/2$
 (a) correspond à $B_0 = 0$, $v = 0.5$, $\varepsilon = 1$, $\sigma = 2\pi$ et $h_0 = 0.5$
 (b) correspond à $B_0 = 2$, $v = 0.5$, $\varepsilon = 1$, $\sigma = 2\pi$, et $h_0 = 0.5$

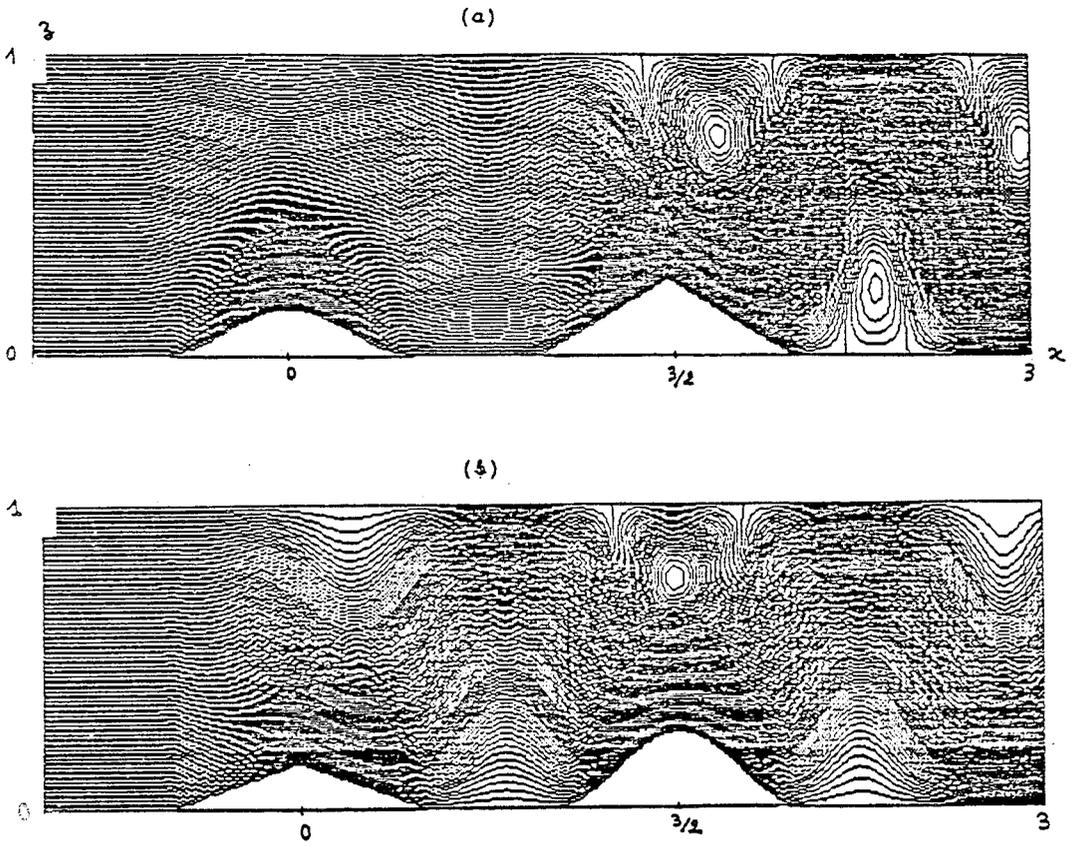


Fig.10 : Représentation des fonctions de courant $\bar{\psi}(x,y)=cte$ dans le canal en présence de deux reliefs pour les valeurs des paramètres : $\nu=0.5$, $B_0=c=1$ et $\sigma=2\pi$
 (a) correspond à $h_0=0.3$ et $h_1=0.5$
 (b) correspond à $h_0=0.5$ et $h_1=0.3$

DEUXIEME PARTIE

ECOULEMENT INSTATIONNAIRE, ISOCHORE ET VISQUEUX

**CHAPITRE.III : ECOULEMENT VISQUEUX A VISCOSITE DYNAMIQUE
DEPENDANTE DE L'ALTITUDE**

III.1 FORMULATION DU PROBLEME

Sous les hypothèses formulées au début du premier chapitre les équations (avec dimensions) de l'écoulement d'un fluide visqueux isochore, bidimensionnel (plan x-z) et rotationnel s'écrivent pour la vitesse \vec{U} , la pression p et la masse volumique ρ (lorsque la viscosité dynamique μ est fonction de l'altitude z) sous la forme suivante :

$$(III,1a) \quad \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} + \vec{\nabla} p = \rho \vec{g} + \mu \vec{\nabla}^2(\vec{U}) + \frac{d\mu}{dz} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial z} + \vec{\nabla}(\vec{U} \cdot \vec{k}) \right),$$

$$(III,1b) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad ,$$

$$(III,1c) \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad ,$$

où le premier terme de l'équation (III,1a) représente l'accélération de la masse et le troisième la force de gravité apparente (accélération gravitationnelle) .

Les effets de viscosité sont pris en compte par le deuxième membre de l'équation (III,1a), où $\mu=\mu(z)$ est le coefficient de viscosité dynamique supposé dépendant de z, le long de tout ce chapitre III. Dans le système (III,1) il faut noter que :

$$\vec{U} = u\vec{i} + w\vec{k} \quad , \quad \vec{g} = -g\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

où (\vec{i}, \vec{k}) est une base orthonormée du repère lié au plan (x,z) .
Notons aussi que :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{U}$$

est la dérivée particulaire dans le repère lié au plan (x,z) .

Si on se place dans un repère cartésien (o, \vec{i}, \vec{k}) , lié au plan de l'écoulement (x, z) , les équations du système (III,1) s'écrivent pour u, w, p et ρ :

$$(III,2a) \quad \rho \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta(u) + \frac{d\mu}{dz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) ,$$

$$(III,2b) \quad \rho \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \Delta(w) - \rho g + 2 \frac{d\mu}{dz} \frac{\partial w}{\partial z} ,$$

$$(III,2c) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ,$$

$$(III,2d) \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0 ,$$

où Δ est l'opérateur de Laplace défini par :

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

III.2 EQUATION DU TOURBILLON

De la troisième équation (III,2c) du système (III,2), on déduit l'existence d'une fonction de courant $\psi(t, x, z)$ définie par les relations :

$$(III,3) \quad u = - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{et} \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x} .$$

En remplaçant les composantes u et w de la vitesse dans le système (III,2) par leurs expressions définies par (III,3) et en éliminant la pression des deux premières équations du système (III,2), on obtient une équation pour $\psi(t, x, z)$:

$$\begin{aligned}
 (III,4a) \quad & \rho \frac{D}{Dt} \Delta \psi + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + g \frac{\partial \rho}{\partial x} \\
 & = \mu \Delta^2 \psi + \mathcal{H}(\psi, \mu)
 \end{aligned}$$

où $\mathcal{H}(\psi, \mu)$ est une fonction qui s'annule si μ est indépendant de z ,

$$\mathcal{H}(\psi, \mu) = \frac{d\mu}{dz} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta \psi + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(- \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial z} \right) \right) + 2 \frac{d^2 \mu}{dz^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}$$

On verra par la suite que l'influence de ce terme $\mathcal{H}(\psi, \mu)$ dans l'équation (III,4a), sera négligeable grâce à un choix judicieux de ρ et μ , à l'amont de l'écoulement et des développements asymptotiques de ψ , ρ et μ .

L'équation du tourbillon (III,4a) et l'équation de continuité :

$$(III,4b) \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

sont suffisantes pour décrire notre écoulement c'est-à-dire la connaissance des deux fonctions ψ et ρ .

III.3 ÉCOULEMENT AMONT

Le système formé des équations (III,4a) et (III,4b), qui est fortement non-linéaire, décrit la propagation d'ondes de gravité. Pour simplifier ce problème, la théorie de " la faible non-linéarité " [9] sera utilisée pour décrire les effets d'amplitudes finies.

L'état hydrostatique à l'infini amont de l'écoulement est décrit, pour les composantes de la vitesse, par :

$$\bar{u} = u_0 = \text{constante} \quad \text{et} \quad \bar{w} = 0$$

et la densité est prise sous une forme stratifiée stable en altitude :

$$\bar{\rho} = \rho_0 e^{-\alpha z}$$

où ρ_0 et α sont des constantes positives .

En effet , dans cette étude , seuls les effets non-linéaires dans la propagation verticale des ondes (selon l'axe des z) de faible stratification sont considérés .

Un paramètre important lié aux équations (III,4a) et (III,4b) est la fréquence de Brünt-Väisälä, N , définie par :

$$N^2 = - \frac{g}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = \frac{g}{H}$$

où $H = \frac{1}{\alpha}$ est la longueur caractéristique liée à la stratification de la densité (masse volumique $\bar{\rho}$) .

III.4 EQUATIONS ADIMENSIONNEES

On cherche à non-dimensionner les équations (III,4a) et (III,4b), où ne figurent plus la pression p . A cet effet ; on considère les échelles suivantes :

l_a pour la longueur ,

u_a pour la vitesse ,

t_a pour le temps ,

ρ_a pour la masse volumique ,

μ_a pour la viscosité dynamique ,

$u_a l_a$ pour la fonction de courant .

La non-dimensionnalisation est faite de la façon suivante :

$$(III,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x, z = l_a(x^*, z^*) \quad , \quad \psi = u_a l_a (-u_0 z^* + \psi^*) \quad , \\ \rho = \rho_0 \bar{\rho}^* + \rho_a \rho^* \quad \text{et} \quad \mu = \mu_0 + \mu_a \mu^* \quad , \end{array} \right.$$

où les grandeurs avec astérisque sont des grandeurs sans

dimensions. $\rho_0 \bar{\rho}^*$ est la densité amont, μ_0 (μ_0 est une constante positive) la viscosité dynamique amont, $\rho_a \rho^*$, $\mu_a \mu^*$ et $u_a \psi^*$ sont respectivement les perturbations de la densité, de la viscosité dynamique et de la fonction de courant en aval.

Introduisons les nouvelles grandeurs, ainsi définies, dans les équations (III,4a) et (III,4b). Si on note les grandeurs sans dimensions de la même façon qu' auparavant (on supprime les astérisques) et si on fait le choix suivant :

$$t_a = \frac{l_a}{u_a} \quad , \quad \rho_a = \gamma^* \rho_0 \quad , \quad \mu_a = \gamma^* \mu_0$$

$$\gamma^* = \frac{u_a^2}{g l_a} \quad (\text{nombre de Froude au carré})$$

$$\bar{\rho} = \rho_0 e^{-\alpha^* z^*} = \rho_0 \bar{\rho}^* \quad ,$$

avec

$$\alpha^* = \frac{l_a}{H} \quad ,$$

alors les équations (III,4a,4b) s'écrivent sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} & (1 + \gamma \rho / \bar{\rho}) \left[\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - (-u_0 - \frac{\partial \psi}{\partial z}) \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi \right] + \gamma \frac{\partial}{\partial x} (\rho / \bar{\rho}) \left[\right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} - (-u_0 - \frac{\partial \psi}{\partial z}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right] + \left[-\alpha + \gamma \frac{\partial}{\partial z} (\rho / \bar{\rho}) - \right. \\ (III,6a) & \left. \alpha \gamma \rho / \bar{\rho} \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial z} + (-u_0 - \frac{\partial \psi}{\partial z}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial x} (\rho / \bar{\rho}) = \\ & \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\mu_0}{\rho_0} \frac{1}{l_a u_a} \left[(1 + \gamma \mu) \Delta^2 \psi + (1 / \mu_0) \mathcal{H}(\psi, \mu) \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\rho / \bar{\rho}) - (-u_0 - \frac{\partial \psi}{\partial z}) \frac{\partial}{\partial x} (\rho / \bar{\rho}) + (-\alpha / \gamma + \frac{\partial}{\partial z} (\rho / \bar{\rho})) \\ (III,6b) & - \alpha \rho / \bar{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad , \end{aligned}$$

avec

$$\frac{1}{\mu_0} \mathcal{H}(\psi, \mu) = \gamma \frac{d\mu}{dz} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \Delta \psi + 2 \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial z} \right) + \gamma \frac{d^2 \mu}{dz dz} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} ,$$

On voit apparaître dans ces équations (III,6a) et (III,6b) deux nouveaux paramètres, $\rho_0 \lambda \alpha / \mu_0$, qui est le nombre de Reynolds : Re et α / γ , qui est le carré du nombre de Brünt-Väisälä : N^2 .

$\mathcal{H}(\psi, \mu)$ est une fonction qui sera négligeable quand on prendra en compte la faible stratification du fluide et la "petitesse" des amplitudes .

III.5 MODELISATION ASYMPTOTIQUE

Dans ce qui suit une faible stratification du fluide est importante et de ce fait on va considérer que α est petit, ($\alpha \ll 1$). Le système d'équations (III,6) est non-linéaire et pour le simplifier, la théorie de la "faible non-linéarité" est utilisée pour étudier les effets de "petites amplitudes" .

Le problème (III,6) contient, maintenant, trois paramètres :

- Amplitude d'onde ; qu'on va noter : ε ,
- Paramètre de stratification : α ,
- Nombre de Reynolds : Re .

Les deux paramètres ε et α sont petits devant 1 tandis que $Re \gg 1$. Suite à ces hypothèses , on va écrire les fonctions et paramètres principaux du système (III,6) de la façon suivante [10] :

$$\left\{ \frac{\rho}{\bar{\rho}} , \mu , \psi \right\} = \varepsilon \left\{ \hat{\rho}, \hat{\mu}, \hat{\psi} \right\} ,$$

et on admet les deux relations de similitude suivantes :

$$\alpha = \varepsilon a \quad \text{et} \quad \hat{Re} = \varepsilon Re \quad ,$$

avec a et \hat{Re} de l'ordre de 1 afin d'obtenir de (III,6) un système cohérent .

Etant donné que $\alpha = \varepsilon a \ll 1$, développons $1/\bar{\rho}$ au voisinage de 0 :

$$(\bar{\rho})^{-1} = e^{\alpha z} = 1 + \alpha z + \dots = 1 + \varepsilon a z + O(\varepsilon^2)$$

En gardant les mêmes notations pour ψ , ρ , μ et Re (on enlève les

chapeaux) et après quelques simplifications on obtient le nouveau système (III,7) suivant, à la place du système (III,6) :

$$\begin{aligned}
 & (1 + a\varepsilon^2 N^{-2} \rho) \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \varepsilon (-u_0 + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial z}) \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi + \varepsilon^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi \right] \\
 & + \varepsilon^2 a N^{-2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \varepsilon (-u_0 + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial z}) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \\
 \text{(III,7a)} \quad & + (-ac + \varepsilon^2 a N^{-2} \frac{\partial \rho}{\partial z} - \varepsilon^3 a^2 N^{-2}) \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \varepsilon (-u_0 + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial z}) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right. \\
 & \left. + \varepsilon^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial z} \right] + \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial x} = \varepsilon \bar{e}^{-1} \left[\varepsilon (1 + \varepsilon a N^{-2} \mu) (1 + \varepsilon a z + 0(\varepsilon^2)) \Delta^2 \psi \right. \\
 & \left. + (1 + \varepsilon a z + 0(\varepsilon^2)) (1/\mu_0) \mathcal{H}(\varepsilon \psi, \varepsilon \mu) \right] ,
 \end{aligned}$$

$$\text{(III,7b)} \quad -\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} - \varepsilon (-u_0 + \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial z}) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \varepsilon (-N^2 + \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial z} - \varepsilon^2 a N^{-2} \rho) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

où

$$\begin{aligned}
 (1/\mu_0) \mathcal{H}(\varepsilon \psi, \varepsilon \mu) &= \varepsilon^2 a N^{-2} \frac{\partial \mu}{\partial z} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \varepsilon \Delta \psi + 2\varepsilon \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial z} \right) \right) \\
 &+ \varepsilon^3 a N^{-2} \frac{d^2 \mu}{dz dz} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} = 0(\varepsilon^2) .
 \end{aligned}$$

Si maintenant l'on introduit les opérateurs différentiels suivants

$$\frac{d_0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} ,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \psi = \mathcal{J}(\psi, \Delta \psi) ,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial z} = \mathcal{J}(\rho, \psi) ,$$

où $\frac{d_0}{dt}$ est la dérivée particulière et \mathcal{J} l'opérateur Jacobien.

On peut réécrire le système (III,7) sous la forme condensée suivante :

$$(III,8a) \quad \frac{d\sigma}{dt}\Delta\psi + \frac{\partial\rho}{\partial x} + \epsilon \left[\mathcal{J}(\psi, \Delta\psi) - a \frac{d\sigma}{dt} \frac{\partial\psi}{\partial z} - R\bar{\epsilon}^1 \Delta^2\psi \right] + 0(\epsilon^2) = 0$$

$$(III,8b) \quad \frac{d\sigma}{dt}\rho - N^2 \frac{\partial\psi}{\partial x} = \epsilon \mathcal{J}(\rho, \psi) + 0(\epsilon^2)$$

où l'on explicite uniquement les termes d'ordres ϵ^0 et ϵ^1 .

Ce dernier système (III,8), de deux équations, est un système pour les inconnues recherchées ψ et ρ . On voit qu'à l'ordre 0 en ϵ , ρ est complètement déterminé en fonction de ψ à partir de l'équation (III,8a).

Dérivons l'équation (III,8a) par $\frac{d\sigma}{dt}$ et remplaçons $\frac{d\sigma}{dt}\rho$ dans l'équation obtenue par son expression déduite de l'équation (III,8b). Dans ce cas, il vient :

$$(III,9a) \quad \frac{d\sigma^2}{dt dt} \Delta\psi + N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial x} = \epsilon \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{J}(\psi, \rho) + \frac{d\sigma}{dt} \mathcal{J}(\Delta\psi, \psi) + a \frac{d\sigma^2}{dt dt} \frac{\partial\psi}{\partial z} + R\bar{\epsilon}^1 \frac{d\sigma}{dt} \Delta^2\psi \right] + 0(\epsilon^2)$$

On peut représenter les équations (III,8a) et (III,9a) sous une forme plus concise :

$$(III,10a) \quad L\psi = \epsilon \left[M + a \frac{d\sigma^2}{dt dt} \frac{\partial\psi}{\partial z} + R\bar{\epsilon}^1 \frac{d\sigma}{dt} \Delta^2\psi \right] + 0(\epsilon^2)$$

$$(III,10b) \quad \frac{d\sigma}{dt}\rho - N^2 \frac{\partial\psi}{\partial x} = \epsilon \mathcal{J}(\rho, \psi) + 0(\epsilon^2)$$

où L est l'opérateur différentiel linéaire définie par :

$$(III,11) \quad L = \frac{d_0^2}{dt^2} \Delta + N^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} ,$$

et M l'opérateur différentiel non-linéaire définie par :

$$(III,12) \quad M = \frac{\partial}{\partial x} J(\psi, \rho) + \frac{d_0}{dt} J(\Delta \psi, \psi) .$$

III.6 EQUATION DE DISPERSION

Supposons que la solution $\psi(t, x, z)$ du système (III,10) se présente sous la forme d'une onde [11] :

$$(III,13) \quad \psi(t, x, z) = A_n \exp\{i(k_n x + l_n z - \sigma_n t)\} + c.c. ,$$

où k_n est la longueur d'onde longitudinale , l_n la longueur d'onde verticale et σ_n la fréquence de propagation des ondes .

L'équation de dispersion du système (III,4) est la relation obtenue entre k_n , l_n et σ_n en écrivant que ψ est solution du système linéaire ($\varepsilon = 0$) associé au système (III,10); c'est-à-dire

$$(III,14) \quad L\psi = 0 ,$$

ce qui implique d'après (III,13):

$$(\sigma_n - u_0 k_n)^2 (k_n^2 + l_n^2) - N^2 k_n^2 = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, 3$$

soit :

$$(III,15) \quad \sigma_n - u_0 k_n = \pm \frac{N k_n}{(k_n^2 + l_n^2)^{1/2}} \quad ; \quad n = 1, 2, 3 .$$

Cette équation est l'équation de dispersion .

III.7 INTERACTION ENTRE TROIS ONDES

On sait , d'après (Phillips , 1966) [12] que trois ondes de gravité internes , de petites amplitudes sont capables d' un échange d' énergie significatif provenant des conditions de résonance :

$$K_1 + K_2 + K_3 = 0 \quad , \quad (K_n = k_n \vec{l} + l_n \vec{k} , n=1,2,3)$$

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad ,$$

si elles sont satisfaites . K_n et σ_n sont respectivement les vecteurs d'ondes et les fréquences de propagation .

Toutes les fréquences doivent satisfaire la relation de dispersion (III,15):

$$\sigma_n = \Omega(K_n) \quad , \quad \text{avec} \quad \Omega(K_n) = \pm \frac{Nk_n}{(k_n^2 + l_n^2)^{1/2}} \quad ; \quad n = 1,2,3 .$$

Si les trois ondes en interaction :

$$(III,16) \quad A_n \exp(i\theta_n) + \text{c.c.} \quad ,$$

où $n = 1,2,3$; c.c. signifiant "complexes conjugués" et

$$\theta_n = k_n x + l_n z - \sigma_n t \quad ,$$

forment une triade résonante alors :

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \quad .$$

Soit encore :

$$(III,17a) \quad k_1 + k_2 + k_3 = 0 \quad ,$$

$$(III,17b) \quad l_1 + l_2 + l_3 = 0 \quad ,$$

$$(III,17c) \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0 \quad .$$

Chaque onde de fréquence σ_n doit satisfaire à la relation de dispersion (III,15) [11] , donc on aura pour σ_n , k_n et l_n ($n = 1, 2, 3$) les conditions complémentaires suivantes :

$$(III,18a) \quad \Omega_1^2 (k_1^2 + l_1^2) - N^2 k_1^2 = 0 \quad ,$$

$$(III,18b) \quad \Omega_2^2 (k_2^2 + l_2^2) - N^2 k_2^2 = 0 \quad ,$$

$$(III,18c) \quad \Omega_3^2 (k_3^2 + l_3^2) - N^2 k_3^2 = 0 \quad .$$

où $\Omega_n = \sigma_n - u_0 k_n$, $n = 1, 2, 3$.

On remarque d'après les relations (III,17a) et (III,17c) que Ω_n vérifie la relation complémentaire suivante:

$$(III,18d) \quad \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0 \quad .$$

III.8 SENS DE PROPAGATION DES ONDES DANS LE PLAN (k,l)

D'après le système , définissant les fréquences de propagation σ_n en fonction des nombres d'ondes k_n et l_n , (III,18) on a deux possibilités :

i) Soit toutes les ondes sont associées à la même branche pour la relation de dispersion . Supposons que toutes les fréquences sont munies du signe négatif :

$$\Omega_n = - \frac{Nk_n}{|K_n|} \quad , \quad n = 1, 2, 3 \quad .$$

ii) Soit l'une des ondes appartient à une branche différente , par exemple :

$$\Omega_1 = - \frac{Nk_1}{|K_1|} \quad , \quad \Omega_2 = - \frac{Nk_2}{|K_2|} \quad , \quad \Omega_3 = + \frac{Nk_3}{|K_3|} \quad .$$

Rappelons que :

$$K_n = k_n \vec{l} + l_n \vec{k} \quad \text{et} \quad |K_n| = (k_n^2 + l_n^2)^{1/2} \quad .$$

Pour la suite de cette étude on va adopter le premier cas . En effet pour retrouver le deuxième cas il suffit de remplacer $|K_3|$ par $-|K_3|$.

On définit la vitesse de groupe verticale d'ondes, de fréquence Ω_n , par :

$$(III, 19) \quad Cg_n = - \frac{\Omega l_n}{|K_n|^2} \quad , \quad n = 1, 2, 3 \quad .$$

A partir de l'équation (III,18d) , il est clair que la valeur absolue de l'une des fréquences ($|\Omega_1|$ par exemple) est égale à la somme des valeurs absolues des deux autres fréquences , c'est-à-dire :

$$(III, 20) \quad |\Omega_1| = |\Omega_2| + |\Omega_3| \quad .$$

Si l'on considère que l'onde primaire , de fréquence Ω_1 , se propage dans le premier quadrant du plan (k, l) (voir la figure 1), et si la fréquence Ω_1 est négative , d'après (III,18) et (III,20)

$$(III,20) \quad |\Omega_1| = |\Omega_2| + |\Omega_3| \quad .$$

Si l'on considère que l'onde primaire , de fréquence Ω_1 , se propage dans le premier quadrant du plan (k,l) (voir la figure 1), et si la fréquence Ω_1 est négative , d'après (III,18) et (III,20) les fréquences Ω_2 et Ω_3 sont positives :

$$(II,21) \quad \Omega_1 < 0 \quad , \quad \Omega_2 > 0 \quad \text{et} \quad \Omega_3 > 0 \quad .$$

Il apparait , pour le sens de propagation des membres de la triade (K_1 , K_2 , K_3) , deux possibilités ,soit les trois ondes se propagent dans le même sens ou deux d'entre elles se propagent en sens inverse de la troisième .

La première possibilité s'avère impossible d'après (III,21) , la deuxième possibilité montre que Cg_2 et Cg_3 sont négatifs ou l'un des deux au moins; en effet:

de la relation $\Omega_n = -Nk_n/|K_n|$ et les inégalités (III,21) on déduit que:

$$k_1 > 0 \quad , \quad k_2 < 0 \quad , \quad k_3 < 0 \quad \text{et} \quad l_1 > 0$$

puisque l'onde de fréquence Ω_1 se propage dans le premier quadrant du plan (k,l) . Et donc de l'équation (III,19) on déduit: $Cg_1 > 0$. Si $Cg_2 < 0$ alors $l_2 > 0$ et donc $Cg_3 > 0$; En effet $l_2 > 0$ et $l_1 > 0$ implique $l_3 < 0$ d'après l'équation (III,17b) .

Si on suppose que Cg_3 est négative on montrera de la même façon que Cg_2 est positive. Par la suite on adoptera le choix :

$$Cg_2 < 0 \quad ; \quad Cg_1 > 0 \quad \text{et} \quad Cg_3 > 0 \quad .$$

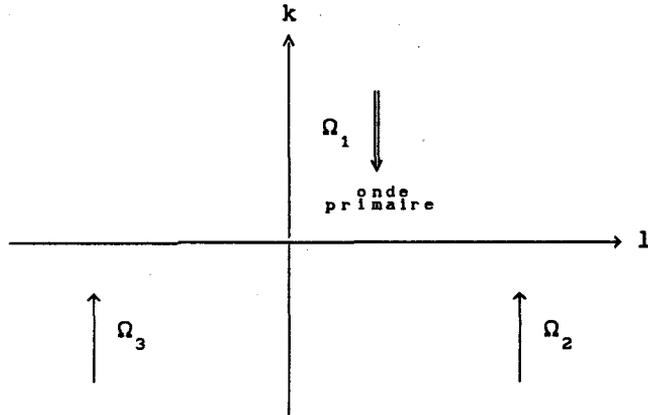


Fig1 : Sens de propagation des membres de la triade (K_1, K_2, K_3) dans le plan (k, l) .

III.9 EQUATIONS D'AMPLITUDES

III.9.1 UNE ECHELLE DE TEMPS LENT

Nous allons introduire une échelle de temps lent , pour pouvoir prévoir les phénomènes d'attracteurs étranges et les scénarios chaotiques qui peuvent se produire pour des temps très grands .

$$(III,22) \quad T = \epsilon t \quad ,$$

où

t : temps rapide ,

T : temps lent .

La dérivation par rapport au temps t dans le nouveau système de variables (x, z, t, T) se fait de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x, z} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x, z, T} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T} \Big|_{x, z, t} \quad .$$

Si l'opérateur différentiel linéaire défini par (III,11) s'écrit dans les variables $(x, z, t) : \mathbb{L}(k, l, \sigma)$, il s'écrira dans les nouvelles variables $(x, z, t, T) : \mathbb{L}(k, l, \sigma + i\varepsilon \frac{\partial}{\partial T})$.

Pour faire apparaître l'opérateur linéaire $\mathbb{L}(k, l, \sigma)$ dans l'expression de $\mathbb{L}(k, l, \sigma + i\varepsilon \frac{\partial}{\partial T})$, on fait un développement de Taylor de $\mathbb{L}(k, l, \sigma + i\varepsilon \frac{\partial}{\partial T})$ pour ε très petit [13] . Pour cela , posons :

$$\mathbb{L}(k, l, \sigma) = \mathbb{L}_0 \quad ,$$

et on a pour une solution ψ de type (III,16) :

$$\mathbb{L}_0(k, l, \sigma) = \Omega^2(k^2 + l^2) - N^2 k^2 = 0 \quad .$$

$$\mathbb{L}(k, l, \sigma + i\varepsilon \frac{\partial}{\partial T}) = \mathbb{L}_0 + i\varepsilon \frac{\partial \mathbb{L}_0}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial T} + 0(\varepsilon^2) \quad .$$

En introduisant la nouvelle expression de $\mathbb{L}(k, l, \sigma + i\varepsilon \frac{\partial}{\partial T})$ et le temps lent d'après (III,22) dans les équations (III,14a) et (III,14b), on obtient :

$$(III,23a) \quad \mathbb{L}_0 \psi = -i\varepsilon \frac{\partial \mathbb{L}_0}{\partial \sigma} \frac{\partial \psi}{\partial T} + \varepsilon M + \varepsilon a \frac{d\sigma^2}{dt dt} \frac{\partial \psi}{\partial z} + R \bar{\varepsilon} \frac{d\sigma}{dt} \Delta^2 \psi + 0(\varepsilon^2)$$

$$(III,23b) \quad \frac{d\sigma}{dt} \rho - N^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = \varepsilon J(\rho, \psi) - \varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial T} + 0(\varepsilon^2) \quad .$$

III.9.2 SYSTEME DYNAMIQUE A TROIS AMPLITUDES

Introduisons maintenant dans les équations (III,23) les développements asymptotiques en ε de ψ et ρ suivants (à x, z et T fixés) :

$$(III,24a) \quad \psi = \psi^{(0)} + \varepsilon \psi^{(1)} + \dots \quad ,$$

$$(III,24b) \quad \rho = \rho^{(0)} + \varepsilon \rho^{(1)} + \dots \quad .$$

En substituant (III,24a) et (III,24b) dans les équations (III,23a) et (III,23b) , il résulte qu'à l'ordre $\varepsilon^{(0)}$ on a :

$$(III,25a) \quad L_0 \psi^{(0)} = 0 \quad ,$$

$$(III,25b) \quad \frac{d\rho^{(0)}}{dt} - N^2 \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial x} = 0 \quad .$$

De (III,16) avec (III,22) , on déduit que $\psi^{(0)}$ s'écrit :

$$(III,26) \quad \psi^{(0)}(x,z,t,T) = A_1(T) \exp(i\theta_1) + A_2(T) \exp(i\theta_2) + \\ A_3(T) \exp(i\theta_3) + c.c. \quad ,$$

où

$$\theta_n = k_n x + l_n z - \sigma_n t \quad ; \quad n = 1,2,3 \quad .$$

L'amplitude $A_n(T)$ ($n = 1,2,3$) étant supposée fonction, uniquement, du temps lent T .

En substituant l'expression (III,26) dans l'équation (III,25b), on obtient après une intégration par rapport au temps rapide t l'expression suivante pour $\rho^{(0)}$:

$$(III,27) \quad \rho^{(0)}(x,z,t,T) = - N^2 \left(\frac{k_1}{\Omega_1} A_1(T) \exp(i\theta_1) + \right. \\ \left. \frac{k_2}{\Omega_2} A_2(T) \exp(i\theta_2) \right. \\ \left. \frac{k_3}{\Omega_3} A_3(T) \exp(i\theta_3) \right) + c.c.$$

A l'ordre $\varepsilon^{(1)}$ on a :

$$(II, 28) \quad \mathbb{L}_0 \psi^{(0)} = M_0 - i \frac{\partial \mathbb{L}_0}{\partial \sigma} \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial T} + a \frac{d\sigma^2}{dt dt} \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z} + R\bar{e}^{-1} \frac{d\sigma}{dt} \Delta^2 \psi^{(0)}$$

où

$$(III, 29) \quad \begin{aligned} M_0 &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{J}(\psi^{(0)}, \rho^{(0)}) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{J}(\Delta \psi^{(0)}, \psi^{(0)}) \\ &= -i \left\{ \Omega_1 \left[K_2^2 - K_3^2 - N^2 \frac{k_1 k_3}{\Omega_1} \left(\frac{k_3}{\Omega_3} - \frac{k_2}{\Omega_2} \right) (k_3 l_2 - l_2 k_3) \right] A_2^*(T) A_3^*(T) e^{i\theta_1} \right. \\ &\quad + \Omega_2 \left[K_1^2 - K_3^2 - N^2 \frac{k_2 k_3}{\Omega_2} \left(\frac{k_3}{\Omega_3} - \frac{k_1}{\Omega_1} \right) (k_1 l_3 - l_1 k_3) \right] A_1^*(T) A_3^*(T) e^{i\theta_2} \\ &\quad \left. + \Omega_3 \left[K_1^2 - K_2^2 - N^2 \frac{k_3 k_2}{\Omega_3} \left(\frac{k_2}{\Omega_2} - \frac{k_1}{\Omega_1} \right) (k_1 l_2 - l_1 k_2) \right] A_1^*(T) A_2^*(T) e^{i\theta_3} \right\} \\ &\quad + \text{c.c.} \end{aligned}$$

$A_n^*(T)$ étant le complexe conjugué de $A_n(T)$. On a aussi :

$$(III, 30a) \quad -i \frac{\partial \mathbb{L}_0}{\partial \sigma} \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial T} = -2i \left(\Omega_1 K_1^2 \frac{\partial A_1}{\partial T} e^{i\theta_1} + \Omega_2 K_2^2 \frac{\partial A_2}{\partial T} e^{i\theta_2} + \Omega_3 K_3^2 \frac{\partial A_3}{\partial T} e^{i\theta_3} \right) + \text{c.c.} ,$$

$$(III, 30b) \quad a \frac{d\sigma^2}{dt dt} \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial z} = -ia \left(l_1 \Omega_1^2 A_1(T) e^{i\theta_1} + l_2 \Omega_2^2 A_2(T) e^{i\theta_2} + l_3 \Omega_3^2 A_3(T) e^{i\theta_3} \right) + \text{c.c.} ,$$

et

$$(III, 30c) \quad R\bar{e}^{-1} \frac{d\sigma}{dt} \Delta^2 \psi^{(0)} = -i R\bar{e}^{-1} \left(\Omega_1 K_1^4 A_1(T) e^{i\theta_1} + \Omega_2 K_2^4 A_2(T) e^{i\theta_2} + \Omega_3 K_3^4 A_3(T) e^{i\theta_3} \right) + \text{c.c.} .$$

En tenant compte des expressions précédentes (III,29)-(III,30), les termes séculaires sont éliminés de (III,28) si, on a les trois relations suivantes pour les amplitudes $A_1(T)$, $A_2(T)$, $A_3(T)$ et leurs conjugués complexes A_1^* , A_2^* et A_3^* :

$$(III,31) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_1}{dT} = - \frac{k_2 l_3 - k_3 l_2}{2K_1^2} \left[N^2 \frac{k_1}{I_1} \left(\frac{k_2}{\Omega_2} - \frac{k_3}{\Omega_3} \right) + K_3^2 - K_2^2 \right] A_2^* A_3^* \\ \quad - \left(a \frac{l_1 \Omega_1}{2K_1^2} + \frac{K_1^2}{2\text{Re}} \right) A_1 \\ \\ \frac{dA_2}{dT} = - \frac{k_1 l_3 - k_3 l_1}{2K_2^2} \left[N^2 \frac{k_2}{I_2} \left(\frac{k_1}{\Omega_1} - \frac{k_3}{\Omega_3} \right) + K_1^2 - K_3^2 \right] A_1^* A_3^* \\ \quad - \left(a \frac{l_2 \Omega_2}{2K_2^2} + \frac{K_2^2}{2\text{Re}} \right) A_2 \\ \\ \frac{dA_3}{dT} = - \frac{k_1 l_2 - k_2 l_1}{2K_3^2} \left[N^2 \frac{k_3}{I_3} \left(\frac{k_1}{\Omega_1} - \frac{k_2}{\Omega_2} \right) + K_1^2 - K_2^2 \right] A_1^* A_2^* \\ \quad - \left(a \frac{l_3 \Omega_3}{2K_3^2} + \frac{K_3^2}{2\text{Re}} \right) A_3 \end{array} \right.$$

On sait que :

$$\frac{l_n \Omega_n}{K_n^2} = - Cg_n, \quad n = 1, 2, 3$$

et on pose :

$$(III,32) \left\{ \begin{array}{l} R_1 = - \frac{k_2 l_3 - k_3 l_2}{2K_1^2} \left[N^2 \frac{k_1}{I_1} \left(\frac{k_2}{\Omega_2} - \frac{k_3}{\Omega_3} \right) + K_3^2 - K_2^2 \right] , \\ R_2 = - \frac{k_1 l_3 - k_3 l_1}{2K_2^2} \left[N^2 \frac{k_2}{I_2} \left(\frac{k_1}{\Omega_1} - \frac{k_3}{\Omega_3} \right) + K_1^2 - K_3^2 \right] , \\ R_3 = - \frac{k_1 l_2 - k_2 l_1}{2K_3^2} \left[N^2 \frac{k_3}{I_3} \left(\frac{k_1}{\Omega_1} - \frac{k_2}{\Omega_2} \right) + K_1^2 - K_2^2 \right] . \end{array} \right.$$

Dans ce cas, le système d'équations différentielles (III,31) en $A_1, A_1^*, A_2, A_2^*, A_3$ et A_3^* s'écrira :

$$(III,33) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA_1}{dT} = R_1 A_2^* A_3^* + \frac{1}{2} \left(aCg_1 - \frac{K_1^2}{Re} \right) A_1 , \\ \frac{dA_2}{dT} = R_2 A_1^* A_3^* + \frac{1}{2} \left(aCg_2 - \frac{K_2^2}{Re} \right) A_2 , \\ \frac{dA_3}{dT} = R_3 A_1^* A_2^* + \frac{1}{2} \left(aCg_3 - \frac{K_3^2}{Re} \right) A_3 . \end{array} \right.$$

Avec R_2 et R_3 qui sont exprimés, maintenant, sous la forme vectorielle suivante :

$$(III,34) \left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{K_3 \wedge K_2}{2K_1^2} \mathcal{J} \left[N^2 \frac{k_1}{I_1} \left(\frac{k_2}{\Omega_2} - \frac{k_3}{\Omega_3} \right) + K_3^2 - K_2^2 \right] , \\ R_2 = \frac{K_3 \wedge K_1}{2K_2^2} \mathcal{J} \left[N^2 \frac{k_2}{I_2} \left(\frac{k_1}{\Omega_1} - \frac{k_3}{\Omega_3} \right) + K_1^2 - K_3^2 \right] , \\ R_3 = \frac{K_2 \wedge K_1}{2K_3^2} \mathcal{J} \left[N^2 \frac{k_3}{I_3} \left(\frac{k_1}{\Omega_1} - \frac{k_2}{\Omega_2} \right) + K_1^2 - K_2^2 \right] . \end{array} \right.$$

où \vec{J} est le vecteur unitaire de la perpendiculaire au plan (x,z) ,
 et \wedge le produit vectoriel .

On a remarqué que R_n ($n = 1,2,3$) peut se mettre sous une forme plus judicieuse (voir Annexe 2) :

$$(III,36) \quad R_n = \frac{b'}{K_n^2} \Omega_n \quad , \quad n = 1,2,3 \quad ;$$

avec

$$(III,36) \quad b' = \frac{|K_1| + |K_2| + |K_3|}{18\Omega_1\Omega_2\Omega_3} \left\{ (K_1 \wedge K_3 + K_2 \wedge K_1 + K_3 \wedge K_2) \vec{J} \right\} \left\{ \Omega_1\Omega_2(|K_1| - |K_2|) + \Omega_2\Omega_3(|K_2| - |K_3|) + \Omega_1\Omega_3(|K_3| - |K_1|) \right\} .$$

Transformons le système (III,33) , en tenant compte du changement d'amplitudes suivant :

$$(III,37) \quad A = A_1|K_1| \quad , \quad B = A_2|K_2| \quad , \quad C = A_3|K_3| \quad ;$$

Ce système prend alors la forme :

$$(III,38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dT} = b\Omega_1 B^* C^* + \frac{1}{2} \left(aCg_1 - \frac{K_1^2}{Re} \right) A \quad , \\ \frac{dB}{dT} = b\Omega_2 A^* C^* + \frac{1}{2} \left(aCg_2 - \frac{K_2^2}{Re} \right) B \quad , \\ \frac{dC}{dT} = b\Omega_3 A^* B^* + \frac{1}{2} \left(aCg_3 - \frac{K_3^2}{Re} \right) C \quad , \end{array} \right.$$

où

$$(III,39) \quad b = \frac{b'}{|K_1||K_2||K_3|} \quad .$$

Etant donné qu'en toute généralité les amplitudes sont complexes,

deux cas sont possibles, selon que les amplitudes sont complexes ou réelles .

1^{er} cas : Les amplitudes sont complexes .

Si on pose :

$$(III,40) \quad A = |A|e^{i\phi_1} \quad , \quad B = |B|e^{i\phi_2} \quad , \quad C = |C|e^{i\phi_3}$$

avec $|A|$, $|B|$ et $|C|$ les modules des amplitudes; ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 les phases. Le système (III,36) s'écrit (en gardant les mêmes notations pour les amplitudes) :

$$(III,41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dT} = b\Omega_1 BC \cos\theta + \frac{1}{2} \left(aCg_1 - \frac{K_1^2}{Re} \right) A \quad , \\ \frac{dB}{dT} = b\Omega_2 AC \cos\theta + \frac{1}{2} \left(aCg_2 - \frac{K_2^2}{Re} \right) B \quad , \\ \frac{dC}{dT} = b\Omega_3 AB \cos\theta + \frac{1}{2} \left(aCg_3 - \frac{K_3^2}{Re} \right) C \quad , \\ A \frac{d\phi_1}{dT} = - b\Omega_1 BC \sin\theta \quad , \\ B \frac{d\phi_2}{dT} = - b\Omega_2 AC \sin\theta \quad , \\ C \frac{d\phi_3}{dT} = - b\Omega_3 AB \sin\theta \quad , \end{array} \right.$$

où

$$(III,42) \quad \phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \quad .$$

2^{ème} cas : Les amplitudes sont réelles .

Si les amplitudes sont réelles alors ces amplitudes et leurs complexes conjugués sont identiques et par conséquent le système (III,38) devient :

$$(III,43) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dT} = b\Omega_1 BC + \frac{1}{2}(aCg_1 - \frac{K_1^2}{Re})A \quad , \\ \frac{dB}{dT} = b\Omega_2 AC + \frac{1}{2}(aCg_2 - \frac{K_2^2}{Re})B \quad , \\ \frac{dC}{dT} = b\Omega_3 AB + \frac{1}{2}(aCg_3 - \frac{K_3^2}{Re})C \quad . \end{array} \right.$$

On considère par la suite , uniquement le cas des amplitudes réelles . Le cas complexe ne fera pas , pour le moment , l'objet d'une étude dans ce travail .

Introduisons, dans le système (III,43), le changement d'amplitudes suivant :

$$(III,44) \left\{ \begin{array}{l} A' = \frac{2b(\Omega_2 \Omega_3)^{1/2}}{(-aCg_3 + K_3^2/Re)} A \quad , \quad B' = \frac{2b(-\Omega_1 \Omega_3)^{1/2}}{(-aCg_3 + K_3^2/Re)} B \quad , \\ C' = \frac{2b(-\Omega_1 \Omega_2)^{1/2}}{(-aCg_3 + K_3^2/Re)} C \quad , \quad T' = \frac{1}{2}(-aCg_3 + K_3^2/Re)T \quad . \end{array} \right.$$

Dans ce cas on retrouve un système dynamique à trois équations classique pour les amplitudes A(T), B(T) et C(T) :

$$(III,45) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA'}{dT'} = -B'C' + \alpha A' \quad , \\ \frac{dB'}{dT'} = A'C' - \beta B' \quad , \\ \frac{dC'}{dT'} = A'B' - C' \quad , \end{array} \right.$$

où interviennent deux paramètres :

$$(III,46) \quad \alpha = \frac{aCg_1 Re - K_1^2}{(-aCg_3 Re + K_3^2)} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-aCg_2 Re + K_2^2}{(-aCg_3 Re + K_3^2)}$$

III.10 SOLUTIONS STATIONNAIRES ET STABILITE

III.10.1 SOLUTIONS STATIONNAIRES

Du point de vue de la physique le cas le plus intéressant , pour le système (III,45) , est celui d ' un mode primaire A linéairement instable (ici $\alpha > 0$) et d ' une amplitude B lentement décroissante (ici $0 < \beta < 1$). En effet pour $\beta > 1$, le problème peut être traité avec une simple échelle de temps .

Du fait que β est positive et Cg_2 négative résulte que l'expression $-aCg_3 Re + K_3^2$ est positive .

Dans le cadre des hypothèses simplificatrices faites (en gardant les mêmes notations A, B, C et T qu'auparavant) le comportement dynamique considéré est décrit par trois équations différentielles ordinaires , qui définissent donc un flot dans un espace de phases à trois dimensions A, B, C :

$$(III,47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dT} = -BC + \alpha A \\ \frac{dB}{dT} = AC - \beta B \\ \frac{dC}{dT} = AB - C \end{array} \right. ,$$

où α et β sont définies par (III,46) .

Le système (III,47) est de type dissipatif (le volume n' est pas conservé) si le champ des vitesses a une divergence négative :

$$\frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{dA}{dT} \right) + \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{dB}{dT} \right) + \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{dC}{dT} \right) = \alpha - \beta - 1$$

c'est-à-dire que la condition ci-dessous doit-être satisfaite :

$$(III,48) \quad \alpha - \beta < 1 .$$

Nous sommes ici en présence d ' une caractéristique propre aux systèmes dissipatifs : l'aire de tout ensemble de conditions initiales donné diminue en moyenne au cours du temps . Ce que l'on

exprime souvent en disant que le "flot" contracte les aires dans l'espace des phases [14] .

Cette réduction peut s'opérer de diverses manières . Néanmoins une confusion qu'il faut éviter est de croire que contraction des aires est obligatoirement synonyme de contraction des longueurs . Or il n'en est rien , la conservation des aires peut être assurée par une divergence dans une direction, s'il y a simultanément convergence dans une autre direction . De même ici, la contraction des aires peut être obtenue :

non seulement par réduction de toutes les longueurs ; mais aussi par diminution de certaines d'entre elles accompagnée de l'augmentation , évidemment moins rapide , d'une autre .

Cette remarque est très importante , car elle montre que la possibilité de divergence des trajectoires de phases dans une direction subsiste , même lorsqu' on a affaire à un système dissipatif . Inutile de dire que la manière dont s'effectue la contraction des aires , et sa vitesse , sont essentielles du point de vue de la description dynamique .

Pour satisfaire à la condition (III,48) sur α et β , et les conditions $\alpha > 0$ et $0 < \beta < 1$ il faut imposer au paramètre de contrôle Re la contrainte suivante :

$$(III,49) \quad \frac{K_1^2}{aCg_1} < Re < \text{Inf} \left\{ \frac{K_3^2}{aCg_3} , \frac{K_3^2 - K_2^2}{a(Cg_3 - Cg_2)} , \frac{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2}{a(Cg_1 + Cg_2 + Cg_3)} \right\}$$

Une fois établi , le flot (III,47) peut bien entendu faire l'objet d'une étude en soi , indépendamment de toute référence à son origine "hydrodynamique" . Comme il n'est pas intégrable dans le cas général , la détermination de ses solutions passe par une résolution numérique sur ordinateur , une fois fixés les paramètres a , Cg_n , K_n et Re ($n = 1,2,3$) .

Si à un instant donné ($T = 0$) , on considère un ensemble de conditions initiales occupant un volume $\omega(0)$, alors les extrémités trajectoires issues de ce volume rempliront au temps T un volume $\omega(T)$ égal à :

$$\omega(T) = \omega(0)\exp((\alpha-\beta-1)T) \quad .$$

Ainsi le volume décroît continuellement au cours du temps . A ce propos il vaut la peine de remarquer que le modèle (III,47) étant un flot dans \mathbb{R}^3 , cette contraction exponentielle du volume interdit a priori l'existence d'un attracteur du type tore T^2 . En effet le volume intérieur de ce tore devrait être globalement conservé par le flot , ce qui serait en contradiction avec la propriété établie ci-dessus .

Les solutions stationnaires du flot (III,47) sont, par définition, telles que :

$$\frac{dA}{dT} = \frac{dB}{dT} = \frac{dC}{dT} = 0 \quad ,$$

ce qui nous donne , pour le triplet (A,B,C) , les solutions suivantes (points fixes) :

$$(0,0,0) \quad , \quad (\sqrt{\beta}, \sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha\beta}) \quad , \quad (\sqrt{\beta}, -\sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha\beta}) \quad , \quad (-\sqrt{\beta}, \sqrt{\alpha}, -\sqrt{\alpha\beta}) \quad \text{et} \\ (-\sqrt{\beta}, -\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha\beta}) \quad .$$

Nous pouvons tester , pour une perturbation infinitésimale $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})\exp(-\sigma T)$ des points fixes, la stabilité de cette solution stationnaire (A_{st}, B_{st}, C_{st}) en écrivant que :

$$A = A_{st} + \hat{A}e^{-\sigma T} \quad , \quad B = B_{st} + \hat{B}e^{-\sigma T} \quad , \quad C = C_{st} + \hat{C}e^{-\sigma T} \quad ,$$

et en substituant dans le système (III,47) il vient pour σ l'équation caractéristique du 3^{ème} degré qui découle de l'annulation du déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} \alpha+\sigma & -\sqrt{\alpha\beta} & -\sqrt{\alpha} \\ \sqrt{\alpha\beta} & \sigma-\beta & \sqrt{\beta} \\ \sqrt{\alpha} & \sqrt{\beta} & \sigma-1 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

soit :

$$(III,50) \quad -\sigma^3 + (1+\beta-\alpha)\sigma^2 + 4\alpha\beta = 0 \quad .$$

III.10.2 RESOLUTION DE L'EQUATION CARACTERISTIQUE ET STABILITE

L'équation (III,50) peut s'écrire :

$$(III,51a) \quad -\sigma^3 + p\sigma^2 + q = 0$$

où $p = 1+\beta-\alpha$ et $q = 4\alpha\beta$.

Cette équation cubique peut se mettre sous la forme d'une équation cubique sans terme du second ordre :

$$(III,51b) \quad z^3 + 3Pz + 2Q = 0$$

en considérant les changements suivants :

$$\sigma = z + \frac{p}{3} \quad , \quad 3P = -\frac{p^2}{3} \quad \text{et} \quad 2Q = -q - \frac{2p^3}{27} .$$

En général une solution réelle de l'équation (III,51b) est donnée par :

$$z = \left[Q + \sqrt{Q^2 + P^3} \right]^{1/3} - \left[-Q + \sqrt{Q^2 + P^3} \right]^{1/3} .$$

Comme

$$Q^2 + P^3 = \frac{q^2}{4} + \frac{qp^3}{27} > 0 \quad \text{et} \quad P < 0 .$$

cette solution va s'écrire plus exactement :

$$(III,52) \quad z_1 = \left[Q + \sqrt{Q^2 + P^3} \right]^{1/3} + \left[Q - \sqrt{Q^2 + P^3} \right]^{1/3} .$$

On constate que la solution (III,52) est positive et donc il en est de même pour $\sigma_1 = z_1 + p/3$.

Maintenant qu'on a une racine de l'équation (III,51a) on va chercher les deux autres en divisant celle-ci par $\sigma - \sigma_1$; ce qui nous donne l'équation du second ordre suivante :

$$(III,53) \quad \sigma^2 + (\sigma_1 - p)\sigma + \sigma_1^2 - p\sigma_1 = 0$$

Le discriminant D de cette équation est :

$D = (p - \sigma_1)(p + 3\sigma_1)$, où $p + 3\sigma_1 > 0$ et σ_1 étant solution de (III,51a) on a :

$-\sigma_1^3 + p\sigma_1^2 + q = 0$, soit encore $(p - \sigma_1)\sigma_1^2 = -q < 0$, car $q > 0$.

On conclut donc que l'expression $p - \sigma_1$ est négative et par conséquent D aussi. De ce fait les solutions de l'équation (III,53) sont complexes :

$$(III,54) \quad \sigma_2 = \frac{p - \sigma_1 + i\sqrt{D}}{2} , \quad \sigma_3 = \frac{p - \sigma_1 - i\sqrt{D}}{2} .$$

Ainsi, deux racines de l'équation (III,50), σ_2 et σ_3 , ont une partie réelle négative, donc les points fixes sont toujours instables .

III.11 CONCLUSION

L'objectif du prochain chapitre est de rendre compte de l'évolution du système dissipatif décrit par le flot (III,47) . Ce système contient le paramètre Re (paramètre de contrôle) , qu' il est possible de faire varier dans de plus ou moins larges proportions en accord avec la contrainte (III,49). Dans ce cas on obtiendra divers comportements du système (III,47). Du fait de la contrainte (III,49) sur Re les trajectoires resteront dans un volume borné de l'espace des phases. Ainsi, dans ce volume fini, le flot (III,47) étant dissipatif, les trajectoires convergeront vers un attracteur borné .

CHAPITRE.IV : ANALYSE NUMERIQUE DU SYSTEME DYNAMIQUE
A TROIS EQUATIONS

IV.1 RESULTATS NUMERIQUES. ATTRACTEURS

Le système (III,47) est un système d'équations non-linéaires couplées d'aspect simple est néanmoins non-intégrable (analytiquement) dans le cas général (voir à ce sujet [15]). Par contre, à l'aide d'un ordinateur on peut résoudre numériquement à partir de valeurs initiales $(A(0),B(0),C(0))$, en calculant pas à pas, par la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre, le flot $A(T)$, $B(T)$, $C(T)$ et en construisant ainsi les trajectoires correspondantes (le pas d'intégration dans le temps étant pris égal à 10^{-3}). Pour cela on fixe les valeurs des paramètres (constantes du système) a , Cg_n et K_n ($n=1,2,3$) et on utilise Re comme paramètre de contrôle .

Pour les faibles valeurs de Re , les solutions sont stables et les trajectoires projetées sur un plan (A,C) ou un plan (A,B) décrivent des orbites bien régulières autour des points fixes. En revanche , lorsque Re devient assez grand mais inférieur à la valeur de 2540 (par exemple pour une valeur de Re de 2450) , les trajectoires projetées sur le plan (A,C) décrivent des orbites irrégulières autour des points D et D' ; ceux-ci sont des points fixes instables du flot (III,47) (voir figure 3a.) .

Dans cette étude les calculs ont été effectués pour une triade (K_1, K_2, K_3) fixe pour la simple raison que les calculs sont plus aisés pour un seul paramètre variable à la fois. On remarque qu'en faisant varier la valeur de a , l'intervalle de variation du paramètre Re change ainsi que les valeurs des amplitudes des attracteurs mais le comportement du flot (A,B,C) dans le temps reste identique à celui correspondant à $a=0.25$. Tous les calculs correspondent aux valeurs suivantes des paramètres :

$$a=.25 \quad , \quad K_1^2=2.08 \quad , \quad K_2^2=1.04 \quad , \quad K_3^2=5.8$$

$$Cg_1=5.15 \times 10^{-1} \quad , \quad Cg_2=-4.58 \times 10^{-3} \quad , \quad Cg_3=1.08 \times 10^{-3} \quad .$$

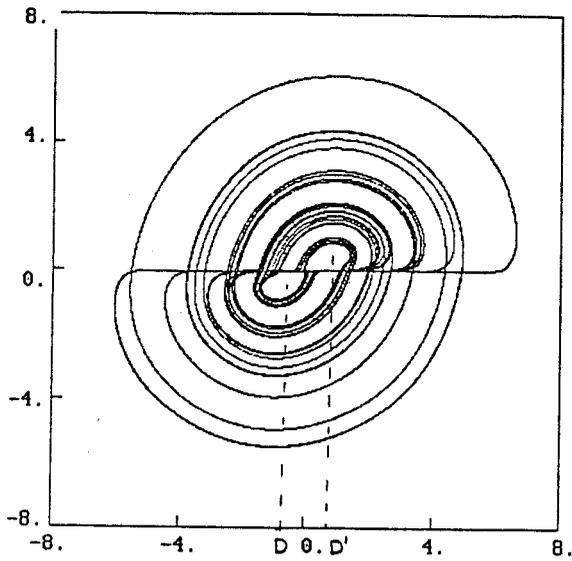


Fig.2a :Projection d'une portion de trajectoire sur le plan (A,C) de l'espace des phases pour $Re=2450$.
D et D' sont les points fixes instables .

La figure 2b montre que l'évolution temporelle de $A(T)$ -par exemple- présente l'allure irrégulière d'un comportement chaotique. On note l'évolution très désordonnée tantôt autour d'une moyenne \bar{A} , tantôt autour de \bar{A}' ; \bar{A} et \bar{A}' sont les coordonnées des points fixes D et D' dans l'espace $(A(T),T)$.

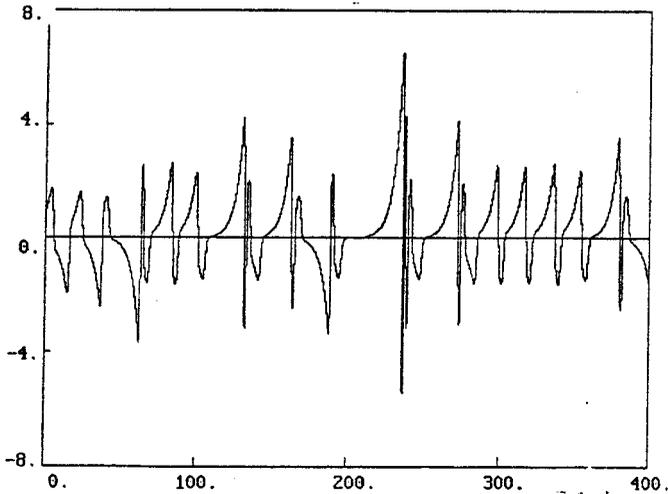


Fig.2b :Représentation de l'amplitude $A(T)$ pour $Re=2450$.

Pour des valeurs de départ $(A(0), B(0), C(0))$ prises au hasard, les trajectoires correspondantes sont très rapidement attirées dans une région formée de l'ensemble des trajectoires tournantes autour de D et D' . Cet attracteur, associé à une dynamique chaotique, est un attracteur étrange.

IV.2 APPLICATION DE LA SECTION DE POINCARÉ

La section de Poincaré des trajectoires par un plan $A=x_0$ est représentée sur la figure 3a. A première vue, la section se compose de segments et d'arcs correspondants chacun à un sens donné de rotation autour de chacun des points fixes instables D et D' . Ce fait indique que les trajectoires s'inscrivent, pratiquement, sur une surface et pourrait donc faire croire que la dimension de l'attracteur est égale à 2. En réalité il n'en est rien. Si on perce ce feuillet (apparemment bidimensionnel), on rencontre une structure complexe composée d'un grand nombre de feuillets et d'arcs très serrés. Ainsi, notre attracteur n'est pas "tout à fait" une surface mais n'est pas non plus un volume, en effet les feuillets n'ont pas d'extension transverse et sont séparés par du vide [14],[16].

En général le plan de coupe peut-être quelconque mais un choix approprié permet d'obtenir des sections facilement exploitables. Pour notre exemple de la figure 3a, le plan de coupe est $A=2.8$ et on considère uniquement les points de ce plan tels que : $dA/dT < 0$.

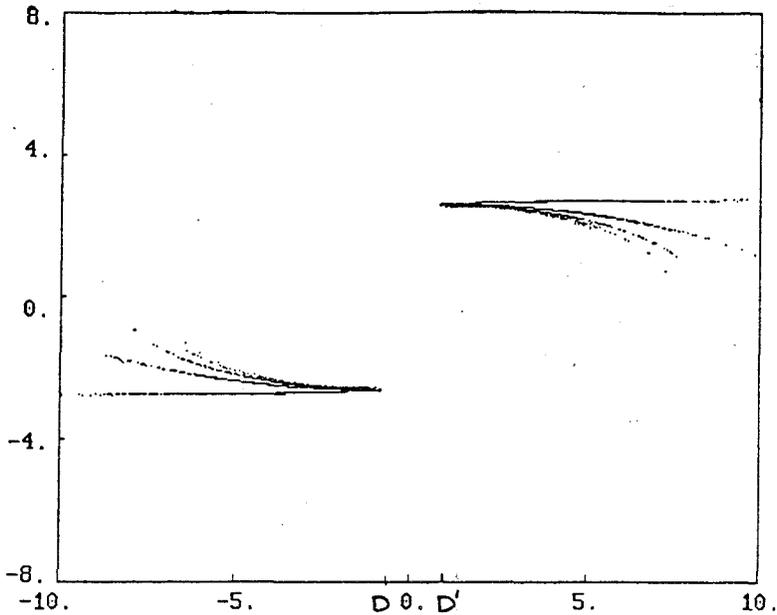


Fig. 3a : Section de Poincaré de l'attracteur pour $Re=2450$

IV.3 APPLICATION DE PREMIER RETOUR

Pour mieux discuter l'allure de la section de Poincaré d'une telle solution du flot tridimensionnel (III,47) on est amené à réduire ce flot non-linéaire en considérant une application unidimensionnelle (application de premier retour) du type :

$$|A_{k+1}| = f(|A_k|) \quad ,$$

reliant la coordonnée $|A_{k+1}|$ d'un point au temps $(k+1)T'$ à celle $|A_k|$ de son antécédent au temps kT' (T' étant une période pour le temps T).

Traçons tout d'abord le graphe de f (numériquement) pour une valeur donnée de Re , par exemple $Re=2450$. Il est facile de voir (fig.3b) que cette courbe passe par un minimum $|A_{min}|=1.416$. A l'aide de ce graphe étudions le comportement de l'application à partir d'une condition initiale quelconque A_0 . On constate sur la figure 3b que l'itération converge vers le point d'abscisse A^* , intersection de la première bissectrice et de la courbe représentative de f , quelque soit l'abscisse de départ A_0 choisie.

Donc pour une valeur de A voisine d'un point fixe l'itération conduit en A^* . Ceci veut dire que tout écart par rapport au point fixe, aussi faible soit-il, se trouve amplifié au cours de l'itération et éloigné de ce point fixe qui est donc instable. Dans le cas contraire, le point fixe A^* , vers lequel converge toute itération est un point fixe stable, c'est-à-dire un attracteur.

Pour préciser qu'à chaque étape de l'itération on retrouve ce même point fixe, on dit que cet attracteur est de période 1, l'unité de temps T étant implicitement assimilée à une étape de l'itération. Ou bien encore, cela revient à prendre pour unité de temps la période du cycle limite dont ce point fixe constitue une section de Poincaré.

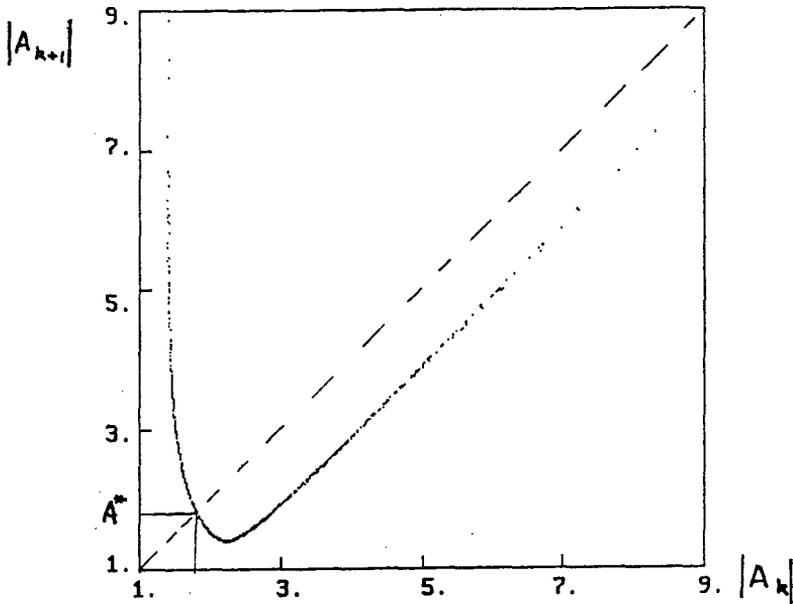


Fig.3b : Application de premier retour pour $Re=2450$.

IV.4 DIAGRAMME DE BIFURCATION

La situation décrite par la figure 3b n'est pas la seule possible. La courbe $f(|A_k|)$ dépend, en effet, de la valeur du paramètre Re . En faisant varier ce paramètre, on modifie cette courbe, ce qui peut avoir des conséquences décisives sur la suite

des itérés.

En augmentant progressivement le paramètre Re de l'application de premier retour, un phénomène de doublement de période s'installe et va se répéter à l'infini, suivant une cascade de bifurcations dont chacune s'accompagne du doublement de période associé à une instabilité dite sous-harmonique [16] .

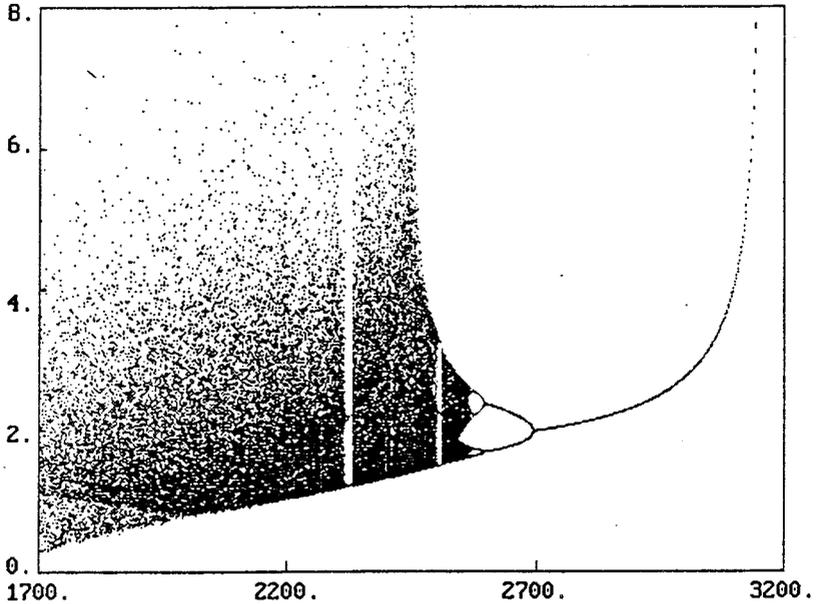


Fig.4 :Diagramme de bifurcation du flot (III,47)
Les itérés $|A_{\max}|$ en fonction de Re .

Au fur et à mesure que Re décroît ,on observe une succession d'attracteurs périodiques de périodes 2^p , où p est un entier variant de zéro jusqu'à l'infini (pour $0 < Re \leq 21328$). Une propriété remarquable des valeurs de Re associées à cette cascade de bifurcations est qu'elles forment une suite croissante convergente vers un point d'accumulation Re_{∞} , dont la valeur est obtenue numériquement: $Re_{\infty} = 2550$.

IV.5 INTERPRETATION DE QUELQUES RESULTATS

Le tableau ci-après donne les valeurs du paramètre Re correspondant aux premiers éléments de la cascade sous-harmonique:

Période de l'attracteur	Valeur de Re au point de bifurcation
$1 \times 2^0 = 1$	$Re \in [2590., 21328.]$
$1 \times 2^1 = 2$	$Re \in]2570., 2590.[$
$1 \times 2^2 = 4$	$Re = 2570.$
⋮	⋮

Un graphe représentant comment la valeur de (l'une des variables A, B, C ; par exemple A) $A(T)$ associée à chaque point d'un attracteur varie en fonction du paramètre Re permet de visualiser la cascade qui vient d'être décrite (voir fig.4). Les premières bifurcations, de périodiques $T, 2T, 4T$ apparaissent très nettement. Et puis après, les bifurcations deviennent rapidement trop proches les unes des autres pour qu'il soit possible de les distinguer, si Re est représenté selon une échelle linéaire.

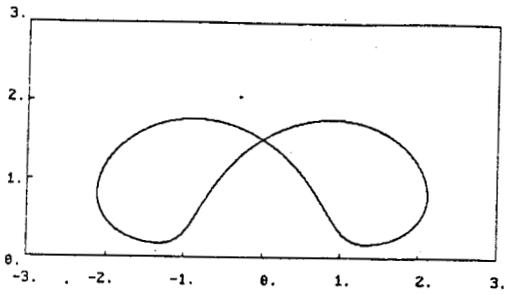
Sur le graphe, au delà du point d'accumulation Re_{∞} , apparaissent différentes zones, certaines plus claires, d'autres plus foncées. Une analyse plus fine permet de rendre compte que, dans cette région, alternent des attracteurs périodiques et des attracteurs étranges.

Quand le nombre Re (qui joue dans ce problème le rôle du paramètre de contrôle) diminue, à partir de 21 328., on constate que la solution du flot (III,47) a un comportement périodique dans le temps jusqu'à $Re=2550$. Ce comportement périodique est associé à un cycle limite, qui se caractérise par son amplitude, $A(T)$ par exemple, et sa période (voir fig.5).

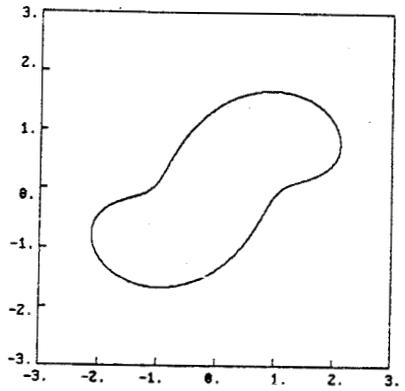
Puis si Re continue de décroître, ce régime périodique a une seule fréquence perd sa stabilité, ce qui est traduit par la première bifurcation sur le diagramme de bifurcations (en lisant, bien sûr, dans le sens décroissant de l'axe des Re) à l'avantage d'un régime périodique à plusieurs fréquences: deux, quatre, huit et etc ... ; (voir fig.4).

Par variation continue du paramètre Re , les solutions périodiques changent peu à peu et perdent à leurs tours leur stabilité. Un régime chaotique s'installe, ce qui est traduit par un nuage de points sur le diagramme. A ce comportement est associé un attracteur étrange représenté dans les deux plans (A,B) et (A,C) et une amplitude qui fluctue d'une façon irrégulière autour d'une amplitude moyenne (voir fig.12). En continuant de diminuer Re , le régime chaotique finit par disparaître pour $Re = 2320$ au profit du retour d'un régime périodique, première raie claire dans la région foncée sur le diagramme de bifurcation .

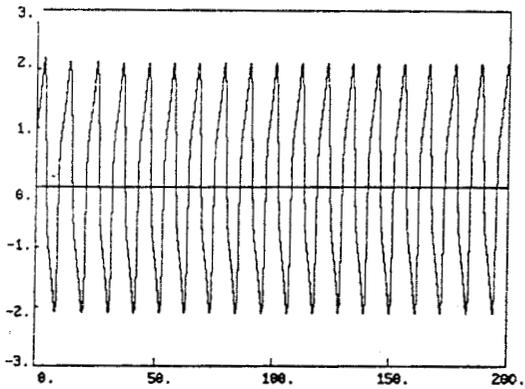
Les figures 14 montrent que cet attracteur est bien périodique . En diminuant encore Re , ce régime périodique disparaît à son tour à l'avantage d'un régime chaotique etc Quand Re atteint la valeur $Re=1700$ et au delà , les solutions $A(T)$, $B(T)$ et $C(T)$ deviennent stationnaires (points fixes) .



(a)



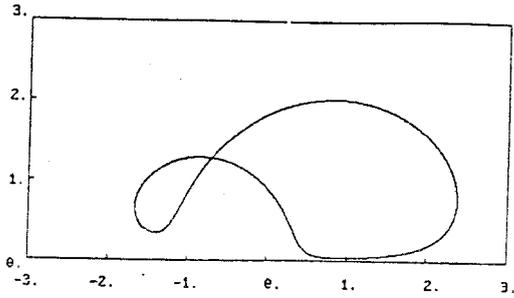
(b)



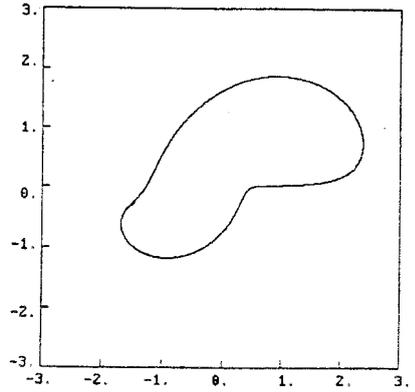
(c)

Fig.5 : (a) et (b) représentent successivement les orbites dans les plans (A,B) et (A,C) , (c) représente l'amplitude A en fonction du temps T pour $Re=2800$.

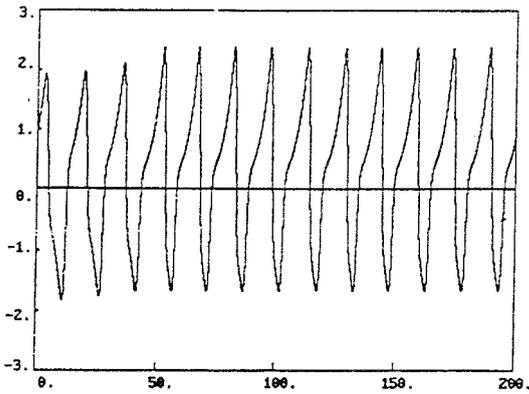
On remarque que la solution est symétrique .



(a)

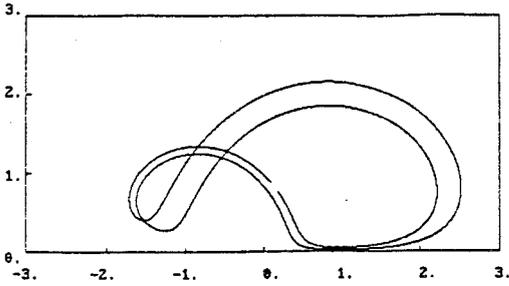


(b)

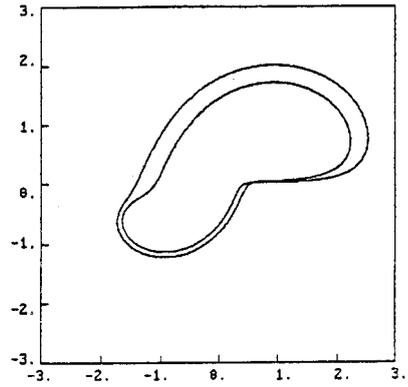


(c)

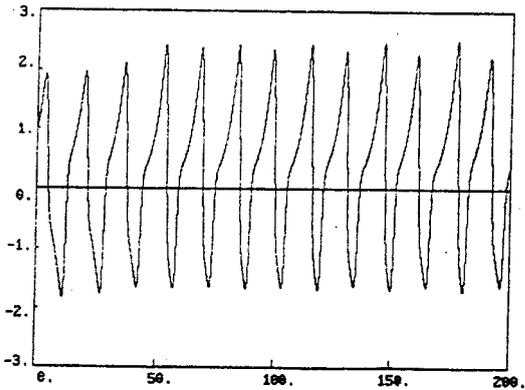
Fig. 6 : (a) et (b) représentent successivement les orbites dans les plans (A,B) et (A,C) , (c) représente l'amplitude A en fonction du temps T pour $Re=25.90$.
La solution devient asymétrique .



(a)

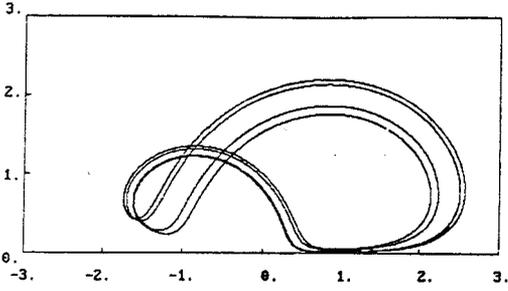


(b)

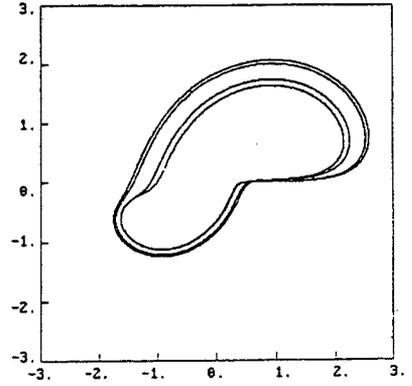


(c)

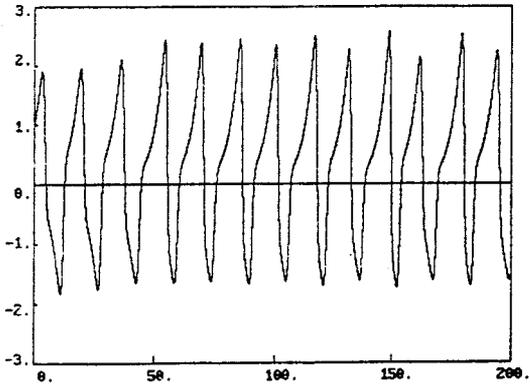
Fig. 7 : (a) et (b) représentent successivement les orbites dans les plans (A,B) et (A,C) , (c) représente l'amplitude A en fonction du temps T pour $Re=2580$.
La solution double sa période .



(a)

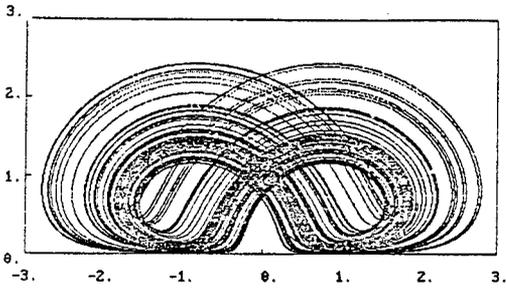


(b)

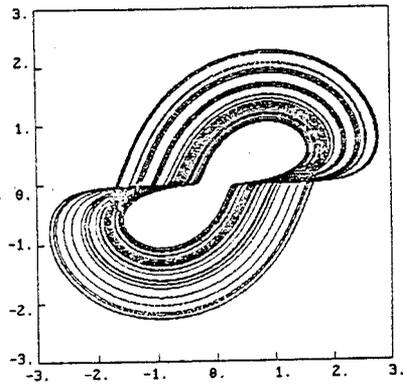


(c)

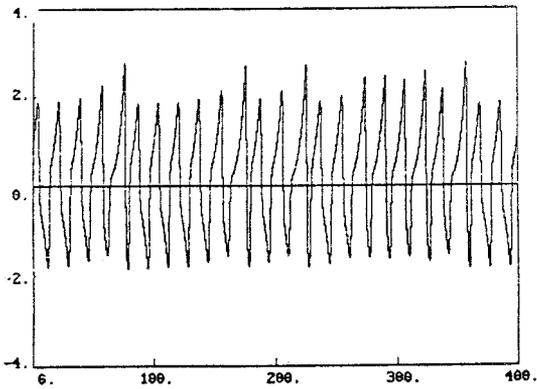
Fig. 8 : (a) et (b) représentent successivement les orbites dans les plans (A,B) et (A,C) , (c) représente l'amplitude A en fonction du temps T pour $Re=2570$. La solution devient de période quatre .



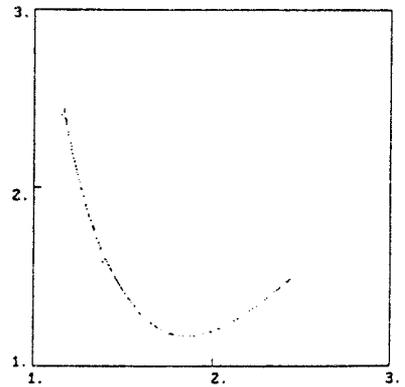
(a)



(b)

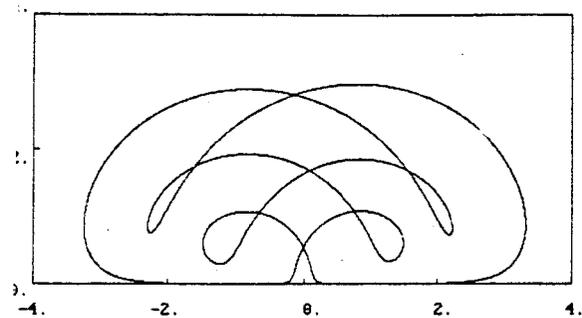


(c)

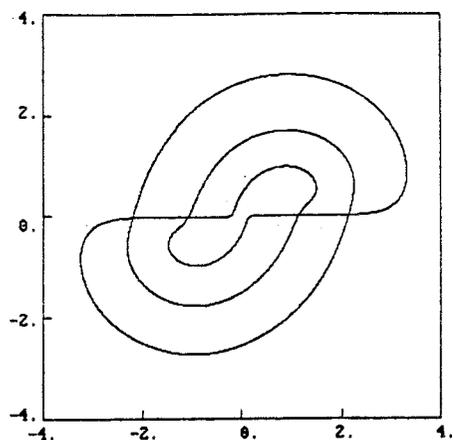


(d)

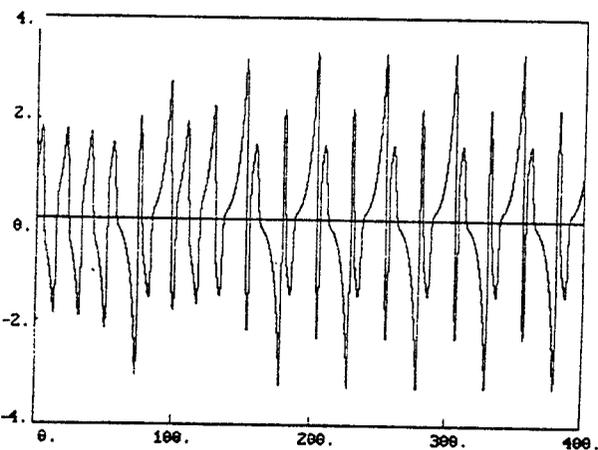
Fig. 9 : (a) et (b) représentent successivement les orbites dans les plans (A,B) et (A,C) , (c) représente l'amplitude A en fonction du temps T pour $Re=2540$. (d) représente l'application de premier retour pour $|A|$. La solution devient apériodique .



(a)

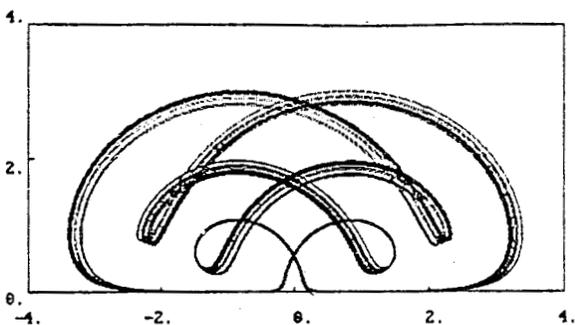


(b)

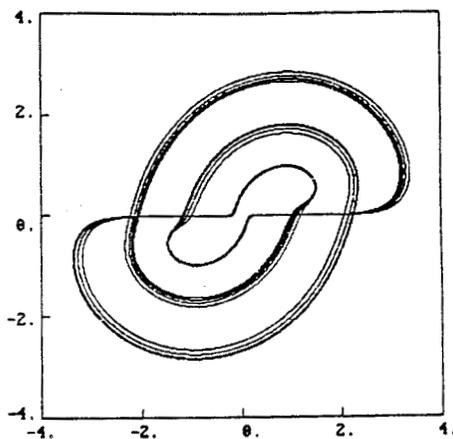


(c)

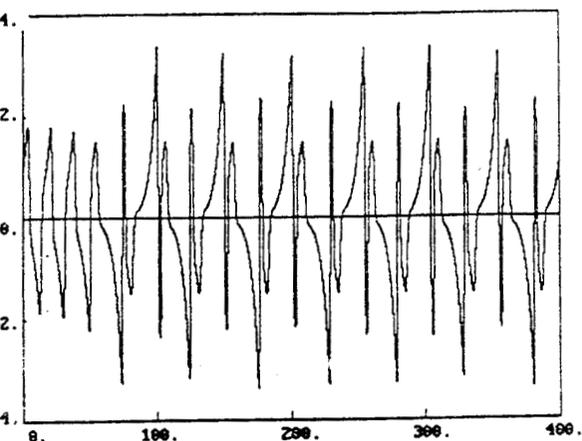
Fig.10 : (a) et (b) représentent successivement les orbites dans les plans (A,B) et (A,C) , (c) représente l'amplitude A en fonction du temps T pour $Re=2503$.
La solution est de nouveau périodique .



(a)

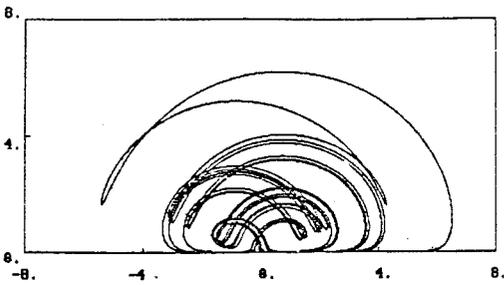


(b)

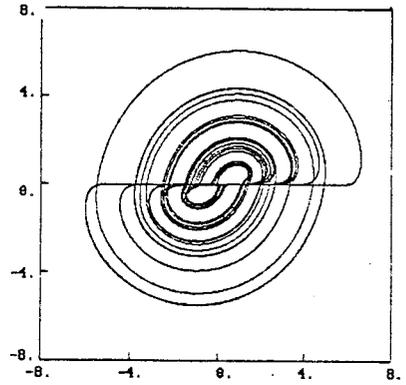


(c)

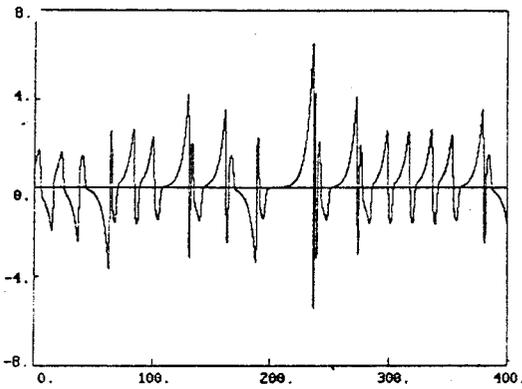
Fig.11 : (a) et (b) représentent successivement les orbites dans les plans (A,B) et (A,C) , (c) représente l'amplitude A en fonction du temps T pour $Re=2500$.
La solution est périodique a plusieurs périodes .



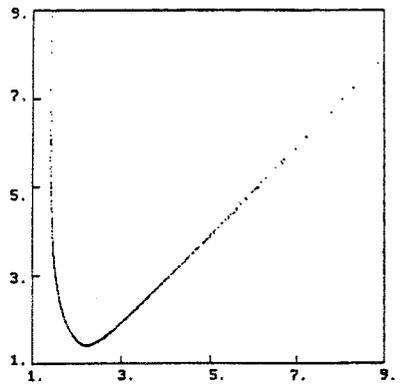
(a)



(b)

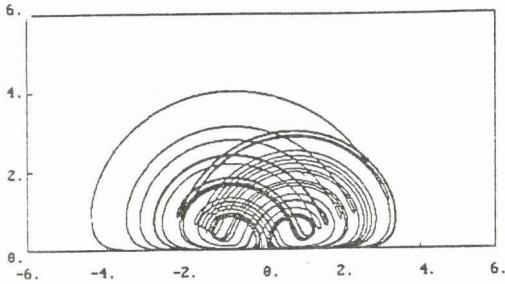


(c)

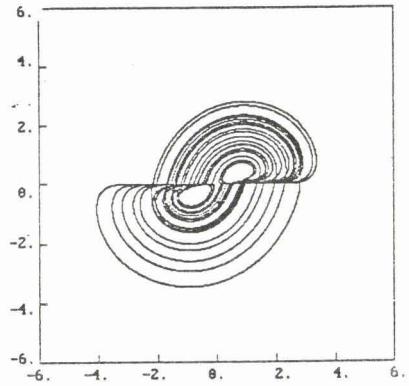


(d)

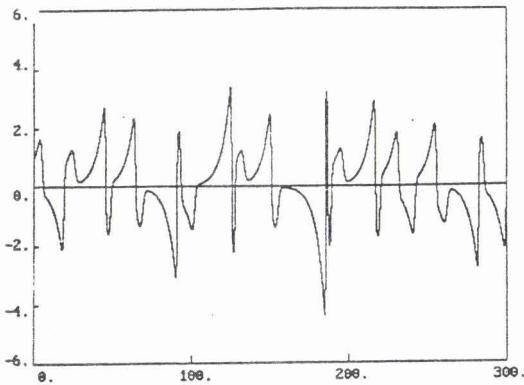
Fig.12 : (a) et (b) représentent successivement les orbites dans les plans (A,B) et (A,C) , (c) représente l'amplitude A en fonction du temps T pour $Re=2450$.(d) représente l'application de premier retour pour $|A|$. La solution est chaotique .



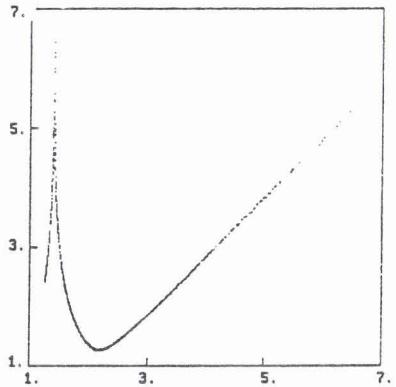
(a)



(b)

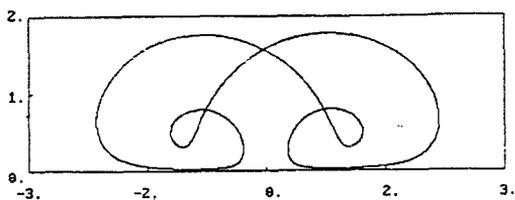


(c)

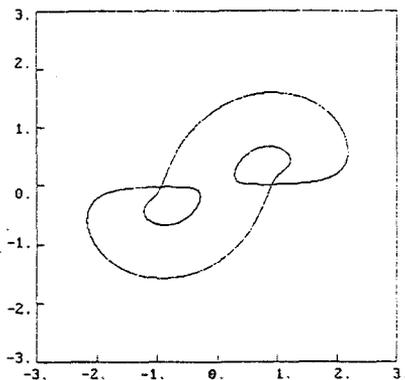


(d)

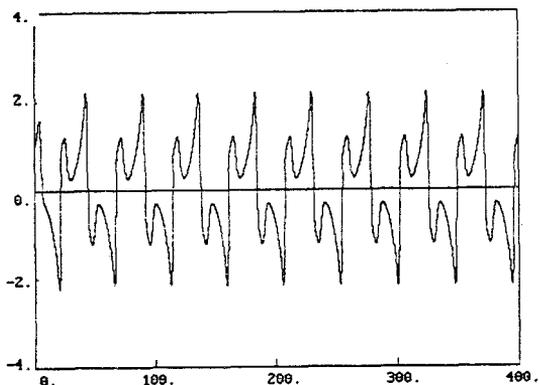
Fig.13 : (a) et (b) représentent successivement les orbites dans les plans (A,B) et (A,C) , (c) représente l'amplitude A en fonction du temps T pour $Re=2360$. (d) représente l'application de premier retour . La solution est encore chaotique .



(a)

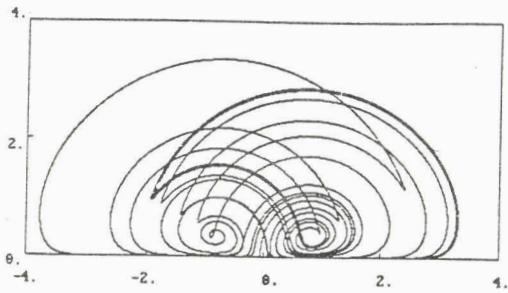


(b)

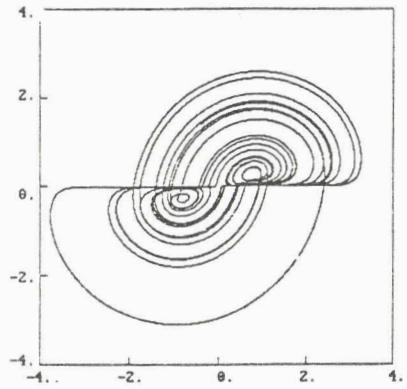


(c)

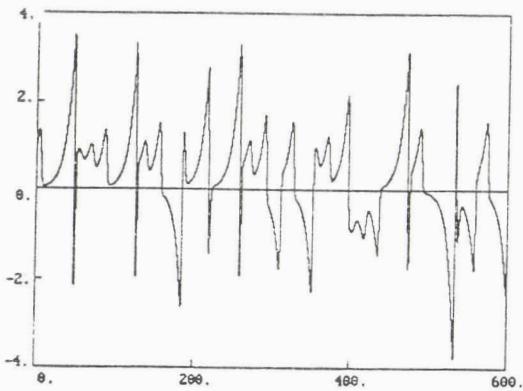
Fig.14 : (a) et (b) représentent successivement les orbites dans les plans (A,B) et (A,C) , (c) représente l'amplitude A en fonction du temps T pour $Re=2320$. La solution devient de nouveau périodique .



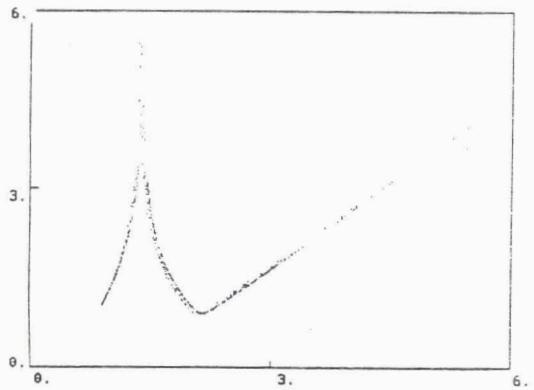
(a)



(b)

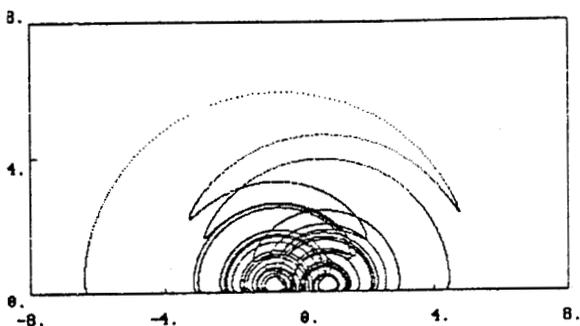


(c)

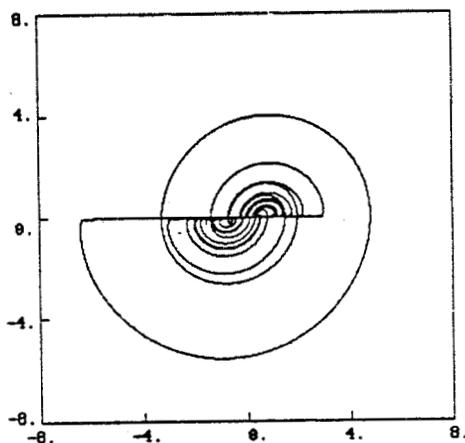


(d)

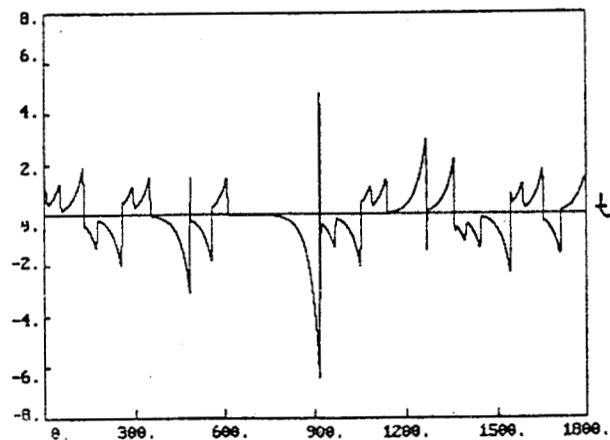
Fig.15 : (a) et (b) représentent successivement les orbites dans les plans (A,B) et (A,C) , (c) représente l'amplitude A en fonction du temps T pour $Re=2100$. (d) représente l'application de premier retour pour $|A|$. La solution est apériodique (chaotique).



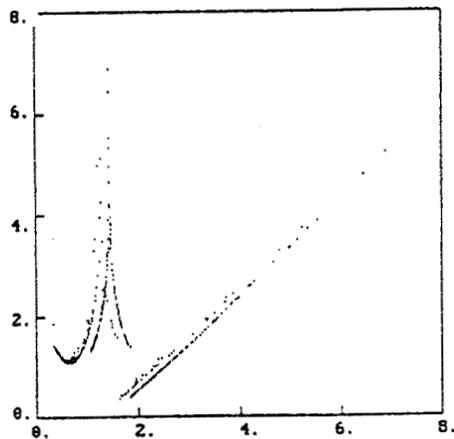
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig.16 : (a) et (b) représentent successivement les orbites dans les plans (A,B) et (A,C) , (c) représente l'amplitude A en fonction du temps T pour $Re=1750$. (d) représente l'application de premier retour pour $|A|$. La solution est chaotique .

**CONCLUSION
ET
PERSPECTIVES**

Dans la première partie de ce travail de thèse, on a étudié le problème d'un écoulement, bidimensionnel, stationnaire et isochore d'un fluide non visqueux au-dessus d'un obstacle arbitraire en le ramenant, par la méthode de Galerkin, à la résolution d'un système d'équations différentielles non-linéaires par rapport à la variable horizontale .

On a distingué deux cas : le premier correspond à $\nu=0$ (c.a.d que la hauteur de l'obstacle est négligeable devant la hauteur du canal) et dans ce cas on a un système différentiel linéaire à n équations. Afin de visualiser l'écoulement dans le canal, on a pris un nombre de modes égal à 10 et on a tracé les courbes caractérisant les perturbations des lignes de courant, le relief étant représenté par sa trace entre les abscisses $-1/2$ et $1/2$. Le deuxième cas correspond à $\nu \neq 0$, on obtient dans ce cas un système différentiel non-linéaire d'ordre n dont les coefficients, qui dépendent de la variable horizontale, sont très compliqués. Dans un premier temps on a pris $n=1$ et on a tracé , pour cet exemple, les lignes de courant au-dessus et en aval de l'obstacle. A partir du système différentiel non-linéaire obtenu on peut poursuivre le calcul et tracer les lignes de courant correspondantes, pour $\nu \neq 0$, en choisissant des troncatures de plus en plus élevées pour mettre en évidence l'influence du choix d'un grand nombre de modes dans la décomposition de Galerkin. Ce travail est à l'heure actuelle en cours.

Dans la deuxième partie , on a étudié le problème d'un écoulement plan, instationnaire et isochore d'un fluide visqueux en ramenant, par la modélisation asymptotique et la technique d'échelle multiple, le système d'équations aux dérivées partielles décrivant cet écoulement à un système dynamique à trois amplitudes. Ces amplitudes correspondent aux amplitudes de trois ondes en interaction dont les fréquences de propagation obéissent à une relation de dispersion.

On a étudié les différents comportements, dans le temps, de ce modèle en fonction de Re (analogue à un nombre de Reynolds) et, éventuellement, des conditions initiales. Ces études ont révélé une grande diversité de résultats.

Parmi toutes les dynamiques possibles selon les valeurs de R_0 , ce système peut avoir un cycle limite. Pour $R_0=2320$, par exemple, des conditions initiales prises au hasard conduisent, après des transitoires, à des oscillations parfaitement régulières comme on peut le constater sur la figure IV.14 . Pour d'autres valeurs de R_0 , par exemple $R_0=2450$, on observe un comportement chaotique des amplitudes qui, naturellement, fait penser à un régime turbulent comme on peut le voir sur la figure IV.12 .

Il est évident qu'un système à grand nombre de degrés de liberté peut être le siège du chaos, puisque la dimension de l'espace des phases doit nécessairement être supérieure à celle de l'attracteur. Il serait donc intéressant, dans un prochain travail, de reprendre cette étude dans le cas du système différentiel d'ordre 6 (III,41); les solutions seront sans doute dans ce cas plus significatives .

Les perspectives futures pour ce travail sont:

1) Augmenter le nombre de modes pour le cas non-linéaire ($n=2,3$, ect..) au niveau du système (II,14).

2) Préciser le cas linéaire, avec un mode, en calculant le second terme δ_1 du développement en ν :

$$\delta = \delta_0 + \nu\delta_1 + \dots ,$$

et comparer les calculs numériques effectués à partir de cette équation obtenue pour δ_1 , avec le calcul correspondant au cas non-linéaire (avec $n=1$) pour des ν "assez grands".

3) Augmenter le nombre d'amplitudes dans le système dynamique (III,47) en considérant cinq ondes en interaction.

4) Analyser et calculer les solutions, dans le cas des amplitudes complexes, pour le système (III,41).

ANNEXES

Expressions des coefficients de l'équation (II,14)

On donne ici les coefficients de l'équation différentielle (II,14) en fonction des dérivées $h' = dh(x)/dx$, $h'' = d^2h(x)/dx^2$ et les nombres ν , B_0 , ε , m , p , et q . m , p et q sont des entiers naturels.

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \nu^2 \varepsilon^2 h'^2, & C_2 &= (1-\nu h)^2, & C_3 &= -2\nu \varepsilon^2 h' (1-\nu h)^{-1}, & C_4 &= \nu B_0 \varepsilon^2 / 2, \\
 C_5 &= \nu B_0 / 2, & C_6 &= -\nu^2 B_0 \varepsilon^2 h' (1-\nu h)^{-1}, & C_7 &= \nu B_0 \varepsilon^2 h' (1-\nu h)^{-1}, \\
 C_8 &= -\nu \varepsilon^2 [(1-\nu h)h'' + 2\nu h'^2] (1-\nu h)^{-2}, & C_9 &= -\nu^2 B_0 \varepsilon^2 h'^2 (1-\nu h)^{-2}, \\
 C_{10} &= -B_0 (1-\nu h)^{-2}, & C_{11} &= -\varepsilon^2 h'' (1-\nu h)^{-1} - 2\nu \varepsilon^2 h'^2 (1-\nu h)^{-2} - \sigma^2 h, \\
 C_{12} &= -\frac{1}{2} \nu B_0 \varepsilon^2 h'^2 (1-\nu h)^{-2}, & C_{13} &= -B_0 h (1-\nu h / 2) (1-\nu h)^{-2},
 \end{aligned}$$

$$I_{mp}^1 = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq p \\ \frac{1}{4} & \text{si } m = p \end{cases}, \quad J_{mp}^1 = \begin{cases} \frac{m}{\pi} (m^2 - p^2) [1 - (-1)^{m+p}] & \text{si } m \neq p \\ 0 & \text{si } m = p \end{cases},$$

$$I_{mp}^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi^{-2} [(m-p)^{-2} - (m+p)^{-2}] [1 - (-1)^{m+p}] & \text{si } m \neq p \\ \frac{1}{4} & \text{si } m = p \end{cases},$$

$$J_{mp}^2 = \begin{cases} \pi m (m^2 - p^2) & \text{si } m \neq p \\ \frac{1}{4\pi m} & \text{si } m = p \end{cases}, \quad I_{mp}^3 = \begin{cases} \pi^{-2} [(p-m)^{-2} - (p+m)^{-2}] & \text{si } m \neq p \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \pi^{-1} m^{-2} & \text{si } m = p \end{cases}$$

$$J_{mp}^3 = \begin{cases} \pi m^{-1} (m^2 - p^2)^{-1} - \pi^{-3} [(p-m)^{-3} + (p+m)^{-3}] [1 - (-1)^{m+p}] & \text{si } m \neq p \\ \frac{1}{4\pi m} & \text{si } m = p \end{cases},$$

$$I_{mpq}^1 = \int_0^1 \sin(m\pi z) \sin(p\pi z) \sin(q\pi z) dz, \quad J_{mpq}^1 = \int_0^1 \sin(m\pi z) \cos(p\pi z) \cos(q\pi z) dz$$

$$I_{mpq}^2 = \int_0^1 (1-z) \sin(m\pi z) \cos(p\pi z) \sin(q\pi z) dz \quad ,$$

$$J_{mpq}^3 = \int_0^1 (1-z)^2 \sin(m\pi z) \cos(p\pi z) \cos(q\pi z) dz \quad ,$$

$$I_m^1 = \frac{1}{\pi m} [1 - (-1)^m] \quad , \quad I_m^1 = \frac{1}{\pi m} [1 - (-1)^m] \quad ,$$

$$I_m^3 = \frac{1}{m\pi} - 2\pi^{-3} m^{-3} [1 - (-1)^m] \quad \text{où } m, p, q \in \mathbb{N}^* \quad .$$

Obtention de la relation (III,35)

On sait que R_1 s'écrit :

$$R_1 = \frac{K_3 \wedge K_2}{2K_1^2} \vec{j} [(|K_2| - |K_3|) (|K_1| + |K_2| + |K_3|)] , \text{ où } K_n = k_n \vec{i} + 0 \vec{j} + 1_n \vec{k}.$$

On va transformer cette expression de R_1 sous la forme (III,35).

i) On peut écrire, tout d'abord,

$$K_3 \wedge K_2 = \frac{1}{3} [K_1 \wedge K_3 + K_2 \wedge K_1 + K_3 \wedge K_2] , \text{ en effet :}$$

et

$$\begin{aligned} K_1 \wedge K_3 + K_2 \wedge K_1 + K_3 \wedge K_2 &= K_2 \wedge (K_3 - K_2) + K_3 \wedge K_2 \\ &= -(K_2 + K_3) \wedge (K_3 - K_2) + K_3 \wedge K_2 \\ &= -K_2 \wedge K_3 + K_3 \wedge K_2 + K_3 \wedge K_2 \end{aligned}$$

ii) puis

$$\begin{aligned} |K_2| - |K_3| &= \frac{1}{3\Omega_2\Omega_3} [\Omega_1\Omega_2 (|K_1| - |K_2|) + \Omega_2\Omega_3 (|K_2| - |K_3|) + \\ &\quad \Omega_1\Omega_3 (|K_3| - |K_1|)] . \end{aligned}$$

Maintenant, sachant que :

$$\Omega_n |K_n| = -Nk_n , \quad n=1,2,3 \quad \text{et} \quad \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0$$

on a d'une part :

$$\Omega_1 |K_1| + \Omega_2 |K_2| + \Omega_3 |K_3| = 0 ,$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \Omega_1\Omega_2 (|K_1| - |K_2|) + \Omega_2\Omega_3 (|K_2| - |K_3|) + \Omega_1\Omega_3 (|K_3| - |K_1|) &= \Omega_1\Omega_2 |K_1| \\ - \Omega_1\Omega_2 |K_2| + \Omega_2\Omega_3 |K_2| - \Omega_2\Omega_3 |K_3| + \Omega_1\Omega_3 |K_3| - \Omega_1\Omega_3 |K_1| \\ &= \Omega_2 (-\Omega_2 |K_2| - \Omega_3 |K_3|) + (\Omega_2 + \Omega_3)\Omega_2 |K_2| + \Omega_2\Omega_3 |K_2| - \Omega_2\Omega_3 |K_3| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\Omega_2 + \Omega_3) \Omega_3 |K_3| + \Omega_3 (\Omega_2 |K_2| + \Omega_3 |K_3|) \\
& = - \Omega_2^2 |K_2| - \Omega_2 \Omega_3 |K_3| + \Omega_2^2 |K_2| + \Omega_2 \Omega_3 |K_2| + \Omega_2 \Omega_3 |K_2| \\
& \quad - \Omega_2 \Omega_3 |K_3| - \Omega_2 \Omega_3 |K_3| - \Omega_3^2 |K_3| + \Omega_2 \Omega_3 |K_2| + \Omega_3^2 |K_3| \\
& = 3 \Omega_2 \Omega_3 (|K_2| - |K_3|) .
\end{aligned}$$

De ce fait on déduit de i) et ii) la nouvelle expression de R_1 suivante:

$$R_1 = \frac{|K_1| + |K_2| + |K_3|}{18 \Omega_2 \Omega_3 |K_1|^2} \left[(K_1 \wedge K_3 + K_2 \wedge K_1 + K_3 \wedge K_2) \cdot \vec{j} \right] \left[\Omega_1 \Omega_2 (|K_1| - |K_2|) + \Omega_2 \Omega_3 (|K_2| - |K_3|) + \Omega_1 \Omega_3 (|K_3| - |K_1|) \right]$$

$$b' = b' \frac{\Omega_1}{|K_1|^2} ,$$

avec

$$b' = \frac{|K_1| + |K_2| + |K_3|}{18 \Omega_1 \Omega_2 \Omega_3} \left[(K_1 \wedge K_3 + K_2 \wedge K_1 + K_3 \wedge K_2) \cdot \vec{j} \right] \left[\Omega_1 \Omega_2 (|K_1| - |K_2|) + \Omega_2 \Omega_3 (|K_2| - |K_3|) + \Omega_1 \Omega_3 (|K_3| - |K_1|) \right] ,$$

ce qui est en accord avec (III,35) et (III,36) lorsque $n=1$.

Un calcul analogue pour R_2 et R_3 nous permet de généraliser ce résultat pour R_n ($n=1,2,3$):

$$R_n = b' \frac{\Omega_n}{|K_n|^2} , \quad n=1,2,3 .$$

REFERENCES

- [1] C.S.YIH (1980)
Stratified Flows. Academic Press, London .
- [2] R.Kh.ZEYTOUNIAN (1991)
Meteorological Fluid Dynamics. Lecture Notes in Physics,
m5. Springer-Verlag, Heidelberg.
- [3] M.L.DUBREIL-JACOTIN (1935)
Atti Accad. Lincei Rend. Cl.Sci.Fis.Mat.Nat(6) .
- [4] R.R.LONG (1953)
Some aspects of the flow of stratified fluids. I.A
Theoretical investigation. Tellus,5,42-57 .
- [5] R.ZEYTOUNIAN (1969)
Etudes des phénomènes d'ondes dans les écoulements
stationnaires d'un fluide stratifié non-visqueux.
Thèse de Doctorat d'Etat, Paris .
- [6] Ph.M.MORSE & H.FESHBACH (1953)
Methods of theoretical physics. Mcgraw-Hill .
- [7] E.A.CODDINGTON & N.LEVINSON (1955)
Theory of ordinary differential equations. Mcgraw-Hill .
- [8] M.SIBONY & J.CL.MARDON (1988)
Approximations et équations différentielles. Edition
Hermann,Paris.
- [9] G.B.WHITHAM (1974)
Linear and nonlinear waves . J.Wiley & sons.
- [10] R.ZEYTOUNIAN (1990)
Asymptotic Modeling of Atmospheric Flows.
Springer Verlag, Heidelberg.

- [11] M.S.LONGUET-HIGGINS (1962)
Resonant interactions between planetary waves.
J.F.M, 12, 321-332.
- [12] O.M.PHILLIPS
(1966): The dynamic of the upper ocean. Cambridge.
(1981): Wave interaction, the evolution of an idea.
J.F.M,106,215-227.
- [13] M.M.IBRAHIM (1987)
Effect of nonlinearity on atmospheric gravity waves.
Journal of the Atmospheric Sciences,44,4,707-720.
- [14] Y.POMEAU & P.MANNEVILLE (1980)
Intermittent transition to turbulence in dissipative
dynamical systems. Comm.Math.Phys,74,p-189.
- [15] D.W.HUGHES & M.R.E.PROCTOR (1990)
A low-order model of the shear instability of convection:
chaos and the effect of noise. Nonlinearity 3, 127-153.
- [16] P.BERGE , Y.POMEAU & CH.VIDAL (1984)
L'ordre dans le chaos. Edition Hermann, Paris.
- [17] R.KHIRI, S.GODTS & R.ZEYTOUNIAN (1992)
Isochoric wave motions: bifurcation and chaotic behavior.
Doit paraitre dans " Russian journal of computational
mechanics", (Moscow).



MOTS CLES

APPROXIMATION ISOCHORE
ONDES DE RELIEF
MODELISATION ASYMPTOTIQUE

SYSTEMES DYNAMIQUES
STABILITE
ATTRACTEURS ETRANGES

RESUME

Dans la première partie de ce mémoire, on montre comment on peut, à partir des équations d'Euler écrites pour un écoulement isochore, construire des modèles d'ondes en fonction des divers paramètres sans dimensions. L'écoulement étant stationnaire et s'effectuant dans un canal de fond curviligne, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'action dynamique du fond curviligne sur cet écoulement. Les équations obtenues sont résolues numériquement et les résultats des calculs sont présentés sous forme de lignes de courant décrivant l'écoulement dans le canal au-dessus et en aval de la partie curviligne.

Dans la seconde partie, on considère un écoulement isochore et instationnaire d'un fluide visqueux, où la viscosité dynamique est lentement variable en fonction de l'altitude.

En cherchant une solution sous la forme d'une onde à trois amplitudes et en utilisant une méthode d'échelle multiple nous avons construit, pour ce problème, un système dynamique à trois équations. Une analyse numérique de ce système nous a permis de chercher des solutions périodiques et mettre en évidence les scénarios de transition vers le chaos via les bifurcations.

