USTL

LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE ET D'OPTIMISATION

n° d'ordre : 1115

ESE

au régime

présentée à
l'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en MATHEMATIQUES
par

Abdeslem Hafid BENTBIB

TRANSFORMATIONS DE SUITES D'INTERVALLES EN VUE DE L'ACCELERATION DE LA CONVERGENCE

soutenue le 24 juin 1993 devant la commission d'examen

Membres du jury

Président :	C. BREZINSKI, Professeur à l'U.S.T.L.
Rapporteurs :	F. CORDELLIER, Professeur à l'Université de Lille III
	J. GILEWICZ, Professeur à l'Université de Toulon
Membres :	B. GERMAIN-BONNE, Professeur à l'U.S.T.L.

Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Optimisation, UFR IEEA - M3, USTL,
59655 Villeneuve d'Ascq - Cedex - FRANCE.

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNOLOGIES DE LILLE

DOYENS HONORAIRES DE L'ANCIENNE FACULTE DES SCIENCES

M. H. LEFEBVRE, M. PARREAU

PROFESSEURS HONORAIRES DES ANCIENNES FACULTES DE DROIT ET SCIENCES ECONOMIQUES, DES SCIENCES ET DES LETTRES

MM. ARNOULT, BONTE, BROCHARD, CHAPPELON, CHAUDRON, CORDONNIER, DECUYPER, DEHEUVELS, DEHORS, DION, FAUVEL, FLEURY, GERMAIN, GLACET, GONTIER, KOURGANOFF, LAMOTTE, LASSERRE, LELONG, LHOMME, LIEBAERT, MARTINOT-LAGARDE, MAZET, MICHEL, PEREZ, ROIG, ROSEAU, ROUELLE, SCHILTZ, SAVARD, ZAMANSKI, Mes BEAUJEU, LELONG.

PROFESSEUR EMERITE

M. A. LEBRUN

ANCIENS PRESIDENTS DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE

MM. M. PARREAU, J. LOMBARD, M. MIGEON, J. CORTOIS, A.DUBRULLE

PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

M. P. LOUIS

PROFESSEURS - CLASSE EXCEPTIONNELLE

M. CHAMLEY Hervé	Géotechnique
M. CONSTANT Eugène	Electronique
M. ESCAIG Bertrand	Physique du solide
M. FOURET René	Physique du solide
M. GABILLARD Robert	Electronique
M. LABLACHE COMBIER Alain	Chimie
M. LOMBARD Jacques	Sociologie
M. MACKE Bruno	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques

M. MIGEON Michel	EUDIL
M. MONTREUIL Jean	Biochimie
M. PARREAU Michel	Analyse
M. TRIDOT Gabriel	Chimie appliquée

PROFESSEURS - 1ère CLASSE

M. BACCHUS Pierre	Astronomie
M. BIAYS Pierre	Géographie
M. BILLARD Jean	Physique du Solide
M. BOILLY Bénoni	Biologie
M. BONNELLE Jean Pierre	Chimie-Physique
M. BOSCQ Denis	Probabilités
M. BOUGHON Pierre	Algèbre
M. BOURIQUET Robert	Biologie Végétale
M. BRASSELET Jean Paul	Géométrie et topologie
M. BREZINSKI Claude	Analyse numérique
M. BRIDOUX Michel	Chimie Physique
M. BRUYELLE Pierre	Géographie
M. CARREZ Christian	Informatique
M. CELET Paul	Géologie générale
M. COEURE Gérard	Analyse
M. CORDONNIER Vincent	Informatique
M. CROSNIER Yves	Electronique
Mme DACHARRY Monique	Géographie
M. DAUCHET Max	Informatique
M. DEBOURSE Jean Pierre	Gestion des entreprises
M. DEBRABANT Pierre	Géologie appliquée
M. DECLERCQ Roger	Sciences de gestion
M. DEGAUQUE Pierre	Electronique
M. DESCHEPPER Joseph	Sciences de gestion
Mme DESSAUX Odile	Spectroscopie de la réactivité chimique
M. DHAINAUT André	Biologie animale
Mme DHAINAUT Nicole	Biologie animale
M. DJAFARI Rouhani	Physique
M. DORMARD Serge	Sciences Economiques
M. DOUKHAN Jean Claude	Physique du solide
M. DUBRULLE Alain	Spectroscopie hertzienne
M. DUPOUY Jean Paul	Biologie
M. DYMENT Arthur	Mécanique
M. FOCT Jacques Jacques	Métallurgie
M. FOUQUART Yves	Optique atmosphérique
M. FOURNET Bernard	Biochimie structurale
M. FRONTIER Serge	Ecologie numérique
M. GLORIEUX Pierre	Physique moléculaire et rayonnements atmosphériques
M. GOSSELIN Gabriel	Sociologie
M. GOUDMAND Pierre	Chimie-Physique
M. GRANELLE Jean Jacques	Sciences Economiques
M. GRUSON Laurent	Algèbre
M. GUILBAULT Pierre	Physiologie animale
M. GUILLAUME Jean	Microbiologie
M. HECTOR Joseph	Géométrie
M. HENRY Jean Pierre	Génie mécanique
M. HERMAN Maurice	Physique spatiale
M. LACOSTE Louis	Biologie Végétale
M. LANGRAND Claude	Probabilités et statistiques

M. LATTEUX Michel	Informatique
M. LAVEINE Jean Pierre	Paléontologie
Mme LECLERCQ Ginette	Catalyse
M. LEHMANN Daniel	Géométrie
Mme LENOBLE Jacqueline	Physique atomique et moléculaire
M. LEROY Jean Marie	Spectrochimie
M. LHENAFF René	Géographie
M. LHOMME Jean	Chimie organique biologique
M. LOUAGE Françis	Electronique
M. LOUCHEUX Claude	Chimie-Physique
M. LUCQUIN Michel	Chimie physique
M. MAILLET Pierre	Sciences Economiques
M. MAROUF Nadir	Sociologie
M. MICHEAU Pierre	Mécanique des fluides
M. PAQUET Jacques	Géologie générale
M. PASZKOWSKI Stéfan	Mathématiques
M. PETIT Francis	Chimie organique
M. PORCHET Maurice	Biologie animale
M. POUZET Pierre	Modélisation - calcul scientifique
M. POVY Lucien	Automatique
M. PROUVOST Jean	Minéralogie
M. RACZY Ladislas	Electronique
M. RAMAN Jean Pierre	Sciences de gestion
M. SALMER Georges	Electronique
M. SCHAMPS Joël	Spectroscopie moléculaire
Mme SCHWARZBACH Yvette	Géométrie
M. SEGUIER Guy	Electrotechnique
M. SIMON Michel	Sociologie
M. SLIWA Henri	Chimie organique
M. SOMME Jean	Géographie
Melle SPIK Geneviève	Biochimie
M. STANKIEWICZ François	Sciences Economiques
M. THIEBAULT François	Sciences de la Terre
M. THOMAS Jean Claude	Géométrie - Topologie
M. THUMERELLE Pierre	Démographie - Géographie humaine
M. TILLIEU Jacques	Physique théorique
M. TOULOTTE Jean Marc	Automatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du travail
M. TURRELL Georges	Spectrochimie infrarouge et raman
M. VANEECLOO Nicolas	Sciences Economiques
M. VAST Pierre	Chimie inorganique
M. VERBERT André	Biochimie
M. VERNET Philippe	Génétique
M. VIDAL Pierre	Automatique
M. WALLART Françis	Spectrochimie infrarouge et raman
M. WEINSTEIN Olivier	Analyse économique de la recherche et développement
M. ZEYTOUNIAN Radyadour	Mécanique

PROFESSEURS - 2ème CLASSE

M. ABRAHAM Francis	
M. ALLAMANDO Etienne	Composants électroniques
M. ANDRIES Jean Claude	Biologie des organismes
M. ANTOINE Philippe	Analyse
M. BALL Steven	Génétique
M. BART André	Biologie animale
M. BASSERY Louis	Génie des procédés et réactions chimiques
Mme BATTIAU Yvonne	Géographie
M. BAUSIERE Robert	Systèmes électroniques
M. BEGUIN Paul	Mécanique
M. BELLET Jean	Physique atomique et moléculaire
M. BERNAGE Pascal	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. BERTHOUD Arnaud	Sciences Economiques
M. BERTRAND Hugues	Sciences Economiques
M. BERZIN Robert	Analyse
M. BISKUPSKI Gérard	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. BKOUCHE Rudolphe	Algèbre
M. BODARD Marcel	Biologie végétale
M. BOHIN Jean Pierre	Biochimie métabolique et cellulaire
M. BOIS Pierre	Mécanique
M. BOISSIER Daniel	Génie civil
M. BOIVIN Jean Claude	Spectrochimie
M. BOUCHER Daniel	Physique
M. BOUQUELET Stéphane	Biologie appliquée aux enzymes
M. BOUQUIN Henri	Gestion
M. BROCARD Jacques	Chimie
Mme BROUSMICHE Claudine	Paléontologie
M. BUISINE Daniel	Mécanique
M. CAPURON Alfred	Biologie animale
M. CARRE François	Géographie humaine
M. CATTEAU Jean Pierre	Chimie organique
M. CAYATTE Jean Louis	Sciences Economiques
M. CHAPOTON Alain	Electronique
M. CHARET Pierre	Biochimie structurale
M. CHIVE Maurice	Composants électroniques optiques
M. COMYN Gérard	Informatique théorique
Mme CONSTANT Monique	Composants électroniques et optiques
M. COQUERY Jean Marie	Psychophysiologie
M. CORIAT Benjamin	Sciences Economiques
Mme CORSIN Paule	Paléontologie
M. CORTOIS Jean	Physique nucléaire et corpusculaire
M. COUTURIER Daniel	Chimie organique
M. CRAMPON Norbert	Tectolique géodynamique
M. CURGY Jean Jacques	Biologie
M. DANGOISSE Didier	Physique théorique
M. DE PARIS Jean Claude	Analyse
M. DECOSTER Didier	Composants électroniques et optiques
M. DEJAEGER Roger	Electrochimie et Cinétique
M. DELAHAYE Jean Paul	Informatique
M. DELORME Pierre	Physiologie animale
M. DELORME Robert	Sciences Economiques
M. DEMUNTER Paul	Sociologie
Mme DEMUYNCK Claire	Physique atomique, moléculaire et du rayonnement
M. DENEL Jacques	Informatique
M. DEPREZ Gilbert	Physique du solide - christallographie

M. DERIEUX Jean Claude	Microbiologie
M. DERYCKE Alain	Informatique
M. DESCAMPS Marc	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. DEVRAINNE Pierre	Chimie minérale
M. DEWAILLY Jean Michel	Géographie humaine
M. DHAMELINCOURT Paul	Chimie physique
M. DI PERSIO Jean	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. DUBAR Claude	Sociologie démographique
M. DUBOIS Henri	Spectroscopie hertzienne
M. DUBOIS Jean Jacques	Géographie
M. DUBUS Jean Paul	Spectrométrie des solides
M. DUPONT Christophe	Vie de la firme
M. DUTHOIT Bruno	Génie civil
Mme DUVAL Anne	Algèbre
Mme EVRARD Micheline	Génie des procédés et réactions chimiques
M. FAKIR Sabah	Algèbre
M. FARVACQUE Jean Louis	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. FAUQUEMBERGUE Renaud	Composants électroniques
M. FELIX Yves	Mathématiques
M. FERRIERE Jacky	Tectonique - Géodynamique
M. FISCHER Jean Claude	Chimie organique, minérale et analytique
M. FONTAINE Hubert	Dynamique des cristaux
M. FORSE Michel	Sociologie
M. GADREY Jean	Sciences économiques
M. GAMBLIN André	Géographie urbaine, industrielle et démographie
M. GOBLOT Rémi	Algèbre
M. GOURIEROUX Christian	Probabilités et statistiques
M. GREGORY Pierre	I.A.E.
M. GREMY Jean Paul	Sociologie
M. GREVET Patrice	Sciences Economiques
M. GRIMBLOT Jean	Chimie organique
M. GUELTON Michel	Chimie physique
M. GUICHAOUA André	Sociologie
M. HAIMAN Georges	Modélisation,calcul scientifique, statistiques
M. HOUDART René	Physique atomique
M. HUEBSCHMANN Johannes	Mathématiques
M. HUTTNER Marc	Algèbre
M. ISAERT Noël	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. JACOB Gérard	Informatique
M. JACOB Pierre	Probabilités et statistiques
M. JEAN Raymond	Biologie des populations végétales
M. JOFFRE Patrick	Vie de la firme
M. JOURNEL Gérard	Spectroscopie hertzienne
M. KOENIG Gérard	Sciences de gestion
M. KOSTRUBIEC Benjamin	Géographie
M. KREMBEL Jean	Biochimie
Mme KRIFA Hadjila	Sciences Economiques
M. LANGEVIN Michel	Algèbre
M. LASSALLE Bernard	Embryologie et biologie de la différenciation
M. LE MEHAUTE Alain	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. LEBFEVRE Yannic	Physique atomique,moléculaire et du rayonnement
M. LECLERCQ Lucien	Chimie physique
M. LEFEBVRE Jacques	Physique
M. LEFEBVRE Marc	Composants électroniques et optiques
M. LEFEVRE Christian	Pétrologie
Melle LEGRAND Denise	Algèbre
M. LEGRAND Michel	Astronomie - Météorologie
M. LEGRAND Pierre	Chimie
Mme LEGRAND Solange	Algèbre
Mme LEHMANN Josiane	Analyse
M. LEMAIRE Jean	Spectroscopie hertzienne

M. LE MAROIS Henri	Vie de la firme
M. LEMOINE Yves	Biologie et physiologie végétales
M. LESCURE François	Algèbre
M. LESENNE Jacques	Systèmes électroniques
M. LOCQUENEUX Robert	Physique théorique
Mme LOPES Maria	Mathématiques
M. LOSFELD Joseph	Informatique
M. LOUAGE Francis	Electronique
M. MAHIEU François	Sciences économiques
M. MAHIEU Jean Marie	Optique - Physique atomique
M. MAIZIERES Christian	Automatique
M. MANSY Jean Louis	Géologie
M. MAURISSON Patrick	Sciences Economiques
M. MERIAUX Michel	EUDIL
M. MERLIN Jean Claude	Chimie
M. MESMACQUE Gérard	Génie mécanique
M. MESSELYN Jean	Physique atomique et moléculaire
M. MOCHE Raymond	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. MONTEL Marc	Physique du solide
M. MORCELLET Michel	Chimie organique
M. MORE Marcel	Physique de l'état condensé et cristallographie
M. MORTREUX André	Chimie organique
Mme MOUNIER Yvonne	Physiologie des structures contractiles
M. NIAY Pierre	Physique atomique,moléculaire et du rayonnement
M. NICOLE Jacques	Spectrochimie
M. NOTELET Francis	Systèmes électroniques
M. PALAVIT Gérard	Génie chimique
M. PARSY Fernand	Mécanique
M. PECQUE Marcel	Chimie organique
M. PERROT Pierre	Chimie appliquée
M. PERTUZON Emile	Physiologie animale
M. PETIT Daniel	Biologie des populations et écosystèmes
M. PLIHON Dominique	Sciences Economiques
M. PONSOLLE Louis	Chimie physique
M. POSTAIRE Jack	Informatique industrielle
M. RAMBOUR Serge	Biologie
M. RENARD Jean Pierre	Géographie humaine
M. RENARD Philippe	Sciences de gestion
M. RICHARD Alain	Biologie animale
M. RIETSCH François	Physique des polymères
M. ROBINET Jean Claude	EUDIL
M. ROGALSKI Marc	Analyse
M. ROLLAND Paul	Composants électroniques et optiques
M. ROLLET Philippe	Sciences Economiques
Mme ROUSSEL Isabelle	Géographie physique
M. ROUSSIGNOL Michel	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. ROY Jean Claude	Psychophysiologie
M. SALERNO Françis	Sciences de gestion
M. SANCHOLLE Michel	Biologie et physiologie végétales
Mme SANDIG Anna Margarette	
M. SAWERYSYN Jean Pierre	Chimie physique
M. STAROSWIECKI Marcel	Informatique
M. STEEN Jean Pierre	Informatique
Mme STELLMACHER Irène	Astronomie - Météorologie
M. STERBOUL François	Informatique
M. TAILLIEZ Roger	Génie alimentaire
M. TANRE Daniel	Géométrie - Topologie
M. THERY Pierre	Systèmes électroniques
Mme TJOTTA Jacqueline	Mathématiques
M. TOURSEL Bernard	Informatique
M. TREANTON Jean René	Sociologie du travail

M. TURREL Georges	Spectrochimie infrarouge et raman
M. VANDIJK Hendrik	
Mme VAN ISEGHEM Jeanine	Modélisation,calcul scientifique,statistiques
M. VANDORPE Bernard	Chimie minérale
M. VASSEUR Christian	Automatique
M. VASSEUR Jacques	Biologie
Mme VIANO Marie Claude	
M. WACRENIER Jean Marie	Electronique
M. WARTEL Michel	Chimie inorganique
M. WATERLOT Michel	géologie générale
M. WEICHERT Dieter	Génie mécanique
M. WERNER Georges	Informatique théorique
M. WIGNACOURT Jean Pierre	
M. WOZNIAK Michel	Spectrochimie
Mme ZINN JUSTIN Nicole	Algèbre

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur B. GERMAIN-BONNE, c'est avec beaucoup de compétence et de gentillesse qu'il m'a guidé au cours de ce travail. Il n'aura ménagé ni son temps ni son ardeur et aura toujours su répondre à mes interrogations.

C'est grâce à Monsieur le Professeur C. BREZINSKI que j'ai découvert et apprécié l'accélération de la convergence. Aussi je le remércie tout particulièrement de l'honneur qu'il me fait en président ce jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur F. CORDELLIER, Professeur à l'Université de Lille III, et Monsieur J. GILEWICZ Professeur à l'Université de Toulon, qui se sont intéressés à ce travail et y ont apporté des commentaires pertinents et suggestifs.

Je remercie également tous les membres de l'équipe d'Analyse Numérique et d'Optimisation de l'Université des Siences et Technologies de Lille, ainsi que tous mes amis.

Je dédie ce travail à mes parents.

Contents

0.1 Introduction

En arithmétique exacte, l'ensemble $I\!R$ des nombres réels est infini, non dénombrable. Par contre si on note F le sous-ensemble fini de $I\!R$ des réels représentés sur une machine donnée (précision finie), F est fini. Considérons un ordinateur effectuant ses calculs en numération binaire, représentant les réels selon le mode de virgule flottante normalisé codée sur n bits de mantisse. D'une façon générale nous désignons par m la mantisse et e l'exposant. On peut écrire alors un nombre-machine x de F par :

$$x = \pm m \cdot 2^e.$$

Notons x^1, x^2 les deux nombres machine immédiatement supérieur et inférieur à x. Par exemple dans le cas de la représentation des nombres par troncature on a :

(1) Si x n'est pas une puissance de 2, alors :

$$\begin{aligned} x^1 &= x - 2^{e-n} \\ \text{et} \quad & \\ x^2 &= x + 2^{e-n}. \end{aligned}$$

(2) Si x est une puissance de 2, on a deux cas :

<u>1^{er} cas :</u> si $x > 0$ alors,

$$\begin{aligned} x^1 &= x - 2^{e-n-1} \\ \text{et} \quad & \\ x^2 &= x + 2^{e-n} \end{aligned}$$

<u>$2^{ème}$ cas :</u> si $x < 0$ alors,

$$\begin{aligned} x^1 &= x - 2^{e-n} \\ \text{et} \quad & \\ x^2 &= x + 2^{e-n-1}. \end{aligned}$$

x^1 et x^2 s'obtiennent en retranchant ou en ajoutant un 1 en dernière position de la mantisse et en normalisant le résultat.

Le nombre machine x est le représentant sur ordinateur de tous les réels appartenant à l'intervalle semi-ouvert $X = [x, x^2[$. Pour qu'on puisse travailler avec des intervalles fermés, si on pose $\bar{x} = x^2 - \varepsilon$ (ε positif très petit devant la longeur $l = x^2 - x$ de X), et si on prend à la place de X l'intervalle fermé $\bar{X} = [x, \bar{x}]$, alors à tout les nombres machine

x on fait correspondre un intervalle fermé $\bar{X}$, dont tout les éléments sont représentés par x sur ordinateur.

Dans ce travail, nous étudions dans quelle mesure les concepts (et méthodes) d'accélération de convergence définis pour les suites de nombres réels, peuvent s'étendre à des suites d'intervalles. Le point de départ est une constatation simple et bien connue : la notion de limite, celle d'accélération peuvent se définir en théorie, mais ne correspondent pas aux conditions pratiques de mise en oeuvre sur ordinateur, où le nombre d'itérations est nécessairement fini et où chaque terme s_n d'une suite est lui même approché par un nombre-machine ayant un nombre fini de digits. L'idée naturelle est alors la suivante : associer à un nombre-machine un intervalle. Ce qui nous conduit à un lien entre suite de nombres-machine et suite d'intervalles. Maintenant si on part d'une suite réelle (s_n) de limite s, en représentant cette suite sur ordinateur, on obtient une suite finie de nombres-machine $(s_n^*)_{n<N}$, où N est l'indice à partir duquel (s_n) est représentée par le nombre-machine s^* représentant s (c'est le cas idéal). N sera appelé indice de stationnarité de la suite (s_n) et s^* sera considéré comme "la limite" de la suite de nombres-machine $(s_n^*)_{n<N}$. A cette suite de nombres-machine $(s_n^*)_{n<N}$, on fait correspondre une suite d'intervalles (S_n) (par exemple par le lien qu'on a défini au début de cette introduction) de limite S, à laquelle on associe le même indice de stationnarité N, indice à partir duquel on a $S_n \bigcap S \neq \emptyset$. Il ne s'agit pas pour nous dans ce travail d'étudier d'une façon précise l'accélération de la convergence de suites de nombres-machines, mais on a trouvé là une motivation pour généraliser la théorie d'accélération de la convergence aux suites d'intervalles qui dans la plupart des cas (sauf si on restreint le problème en imposant à la suite de rapports d'accélération (R_n) de converger au sens de Hausdorff vers l'intervalle-point 0, dans ce cas on a accélération de la convergence) est vu comme une "amélioration" ou une "contraction" du comportement de la suite d'intervalles (S_n). De même qu'en accélération de convergence de suites réelles on est obligé d'imposer $s_n \neq s$, en accélération de convergence de suites d'intervalles on impose $S_n \bigcap S = \emptyset$pour $n < N$. Par ailleurs, on s'est intéressé aussi aux suites d'intervalles d'indice de stationnarité infini, ce cas nous a paru utile dans le sens où il généralise certain résultats d'accélération de convergence et de contraction de suites réelles aux suites d'intervalles.

PLAN :

Au chapitre I, on rappelle les notions d'arithmétique d'intervalles nécessaires telles qu'elles figurent dans le livre de MOORE et celui de SENDOV; on définit une distance sur l'ensemble des intervalles finis $S(\mathbb{R})$, on définit alors la convergence de suites d'intervalles et la notion de segment-limite. On montre aussi des propriétés importantes pour la suite du travail.

Au chapitre II, on étudie l'amélioration du comportement de suites d'intervalles. On définit l'indice de stationnarité d'une suite d'intervalles (S_n) de segment-limite $S \in S(\mathbb{R})$, on définit les transformations de suites d'intervalles. On étudie les suites d'indice de stationnarité fini, on définit dans ce cas là la linéarité et on donne un théorème d'amélioration du comportement pour une suite d'intervalles par le procédé Δ^2-AITKEN suivi d'exemples numériques. On étudie aussi les suites d'indice de stationnarité infini; on donne dans ce cas la définition de la linéarité et on donne un théorème contraction pour le procédé Δ^2-AITKEN suivi d'exemples numériques. On définit aussi la convergence logarithmique et la notions d'intervalles plus fines et plus larges.

Au chapitre III, on étudie une généralisation aux suites d'intervalles des deux procédés standards $n^{\underline{o}}1$ et $n^{\underline{o}}2$ de GERMAIN-BONNE. On retrouve ainsi le Δ^2-AITKEN à partir du procédé standard $n^{\underline{o}}2$ avec un théorème de contraction équivalent à celui obtenu par calcul direct au chapitre II. On donne aussi un théorème de contraction pour le Θ_2-Algorithme à partir du procédé standard $n^{\underline{o}}2$ suivi d'exemples numériques où on compare le Δ^2-AITKEN avec le Θ_2-Algorithme.

Chapter 1

ANALYSE DES INTERVALLES

1.1 Arithmétique des intervalles

Ce paragraphe reprend les notions classiques sur l'arithmétique d'intervalles définis dans [11] et [12].

Soit $I\!R$ l'ensemble des nombres réels, $I\!R =]-\infty, +\infty[$. Et soit $\overline{I\!R}$ l'ensemble des nombres réels obtenu en joignant $-\infty$ et $+\infty$, $\overline{I\!R} = [-\infty, +\infty]$.

Notation :

Soient $a^1, a^2 \in \overline{I\!R}$; on note :

- L'intervalle $[a^1, a^2]$: L'ensemble $\{x \in \overline{I\!R}\colon\ a^1 \leq x \leq a^2\}$
- $S(\overline{I\!R})$: L'ensemble de tous ces intervalles
- $S(I\!R)$: L'ensemble des intervalles finis (i.e., a^1, $a^2 \in I\!R$).

Attention ! il faut distinguer dans ce travail, la notation x^2 qui représente l'extrémité droite d'un intervalle avec celle du carré d'un nombre x noté $(x)^2$. La notation x^1 représente l'extrémité gauche d'un intervalle.

Lorsque la longeur $l = a^2 - a^1$ de l'intervalle $[a^1, a^2]$ est strictement positive, celui-ci sera appelé intervalle **propre**. L'intervalle $[a, a]$ noté a est appelé intervalle **dégénéré**. Lorsque $a^2 < a^1$ alors $\overline{[a^1, a^2]}=\emptyset$.

Remarque :

. On remarque que :

$$I\!R \subset S(I\!R) \subset S(\overline{I\!R}).$$

1.1.1 Opérations sur les intervalles

Nous rappelons ici l'arithmétique sur $S(\overline{\mathbb{R}})$ bien que dans la suite du travail on n'utilisera que $S(\mathbb{R})$.

Soit $*$ une des opérations arithmétiques $(+,-,.,/)$. Et soit $A, B \in S(\overline{\mathbb{R}})$.

On pose $A = [a^1, a^2]$ et $B = [b^1, b^2]$ où $a^i,\ b^i \in \overline{\mathbb{R}} \quad i = 1,2$ avec $a^1 \leq a^2$ et $b^1 \leq b^2$. Alors on définit par $A * B$ l'ensemble:

$$\{x \in \overline{\mathbb{R}}, x = \alpha * \beta \text{ avec } \alpha \in A \text{ et } \beta \in B\}.$$

$A * B$ est un élément de $S(\overline{\mathbb{R}})$. **Par convention :** s'il existe α dans A, β dans B tels que $\alpha * \beta$ est indéfini dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors $A * B = [-\infty, +\infty]$. Par exemple : si B contient 0, alors $A/B = [-\infty, +\infty]$, si A et B contiennent tout les deux $+\infty$, alors $A - B = [-\infty, +\infty]$.

Si $A,\ B \in S(R)$ (i.e., A et B des intervalles finis), alors pour détérminer explicitement l'intervalle $C = A * B$, on utilise l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \quad \alpha * \beta \end{aligned}$$

f est continue sur son domaine de définition D_f. Lorsque $A \times B \subset D_f$ on a $C = A * B = f(A \times B)$.

Soient $(a^i, b^j)_{i\,j=1,2}$ les quatre sommets du rectangle $A \times B$; alors on peut voir facilement que $C = A * B = [c^1, c^2]$ où :

$$c^1 = \min_{i,j=1,2}\{f(a^i, b^j)\} \text{ et } c^2 = \max_{i,j=1,2}\{f(a^i, b^j)\}.$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} A + B &= [a^1 + b^1, a^2 + b^2] \\ A - B &= [a^1 - b^2, a^2 - b^1] \\ A.B &= \left[\min_{i,j=1,2}\{a^i.b^j\}, \max_{i,j=1,2}\{a^i.b^j\}\right] \end{aligned}$$

Et

$$\frac{A}{B} = \begin{cases} [-\infty, +\infty] \text{ si } 0 \in B \\ \left[\min_{i,j=1,2}\{\frac{a^i}{b^j}\}, \max_{i,j=1,2}\{\frac{a^i}{b^j}\}\right] \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exemples :

- $[1,2] + [3,5] = [4,7]$
- $[1,2] - [3,5] = [-4,-1]$
- $[1,2].[3,5] = [3,10]$
- $\frac{[1,2]}{[3,5]} = \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right].$

Remarque :

Lorsque $0 \notin B = [b^1, b^2]$ on a :

$$\frac{A}{B} = \frac{[a^1, a^2]}{[b^1, b^2]} = [a^1, a^2].\left[\frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^1}\right]$$

On peut voir facilement que l'addition et la multiplication sont commutatives et associatives sur $S(I\!R)$. Si A, B, et C sont dans $S(I\!R)$ alors on a :

$$A + B = B + A$$

$$A.B = B.A$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A.(B.C) = (A.B).C$$

0 et 1 sont les éléments neutres respectivement pour l'addition et la multiplication.

$$0 + A = A + 0 = A$$

et

$$1.A = A.1 = A.$$

Par contre la distributivité de la multiplication parrapport à l'addition n'est pas toujours assurée.

Contre-exemple :

$$[1,2].([1,2]-[1,2]) = [1,2].[-1,1] = [-2,2]$$

par contre,

$$[1,2].[1,2]-[1,2].[1,2] = [1,4]-[1,4] = [-3,3].$$

Propriété 1.1.1

Soient A, B et C des éléments de $S(\mathbb{R})$. Alors on a :

$$A.(B+C) \subseteq A.B + A.C$$

et on a égalité seulement si A est un intervalle dégénéré.

Preuve.

$$A.(B+C) = \{a.(b+c) \text{ tel que } (a,b,c) \in A \times B \times C\}$$

$$= \{a.b + a.c \text{ tel que } (a,b,c) \in A \times B \times C\}$$

et

$$A.B + A.C = \{a.b + a'.c \text{ tel que } (a,a',b,c) \in A \times A \times B \times C\}.$$

D'où l'inclusion voulue. Il est clair qu'on n'aura égalité que si $A = [a,a] = a \in \mathbb{R}$.

∎

On peut voir aussi que l'opposé et l'inverse d'un intervalle n'existent que s'il est dégénéré.

$$[1,2]-[1,2] = [-1,1] \neq 0$$

et

$$\frac{[1,2]}{[1,2]} = \left[\frac{1}{2},2\right] \neq 1.$$

On peut voir aussi facilement la propriété suivante :

Propriété 1.1.2

Soient A, B, C et D des éléments de $S(I\!R)$ tel que $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$. Alors on a :

$$A + B \subseteq C + D \quad ; \quad A - B \subseteq C - D$$

$$A.B \subseteq C.D \quad \text{et} \quad \frac{A}{B} \subseteq \frac{C}{D} \quad (\text{ si } 0 \notin D)$$

1.1.2 Distance sur $S(I\!R)$

Soient $A,\ B \in S(I\!R)$, $A = [a^1, a^2]$ et $B = [b^1, b^2]$. On pose :

$$d(A,B) = max\,\{|\ a^1 - b^1\ |, |\ a^2 - b^2\ |\}.$$

C'est la distance de **Hausdorff** entre deux fermés de $I\!R$.

$$d(A,B) = max\left\{\max_{x\in A}\left\{\min_{y\in B}(|\ x-y\ |)\right\}, \max_{y\in B}\left\{\min_{x\in A}(|\ x-y\ |)\right\}\right\}.$$

$(S(I\!R), d)$ est un espace métrique complet [12].

1.1.3 Ordre sur $S(I\!R)$

Soient $A, B \in S(I\!R)$. On va dire que $A \leq B$ si $a \leq b$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$. Cet ordre n'est pas total; en effet soient $A, B \in S(I\!R)$ tel que l'intersection $A \bigcap B$ est un intervalle propre, alors on a ni $A \leq B$ ni $B \leq A$.

Remarque :

Si $A = [a^1, a^2]$, $B = [b^1, b^2]$ alors on a :

$$A \leq B \Longleftrightarrow a^2 \leq b^1.$$

1.2 Suites d'intervalles

Dans cette partie nous définissons des notions et nous montrons des propriétés nécessaires pour la suite du travail.

Les suites d'intervalles sont une généralisation naturelle des suites scalaires, construites par la donnée d'une application φ qui à chaque entier naturel n fait correspondre un intervalle $S_n \in S(I\!R)$,

$$\varphi : \ I\!N \longrightarrow S(I\!R)$$

$$n \longmapsto S_n.$$

On note par S_n l'intervalle $[s_n^1, s_n^2]$ où $s_n^1, s_n^2 \in I\!R$ avec $s_n^1 \leq s_n^2$. Finalement une suite d'intervalles (S_n) est la donnée de deux suites scalaires (s_n^1) et (s_n^2) vérifiant, $\forall n \in I\!N$: $s_n^1 \leq s_n^2 \quad (S_n = [s_n^1, s_n^2])$.

Attention ! Dans tous ce travail, on ne considèrera que des suites d'intervalles (S_n) dont chaque terme S_n est un intervalle fini (i. e. $s_n^1, s_n^2 \in I\!R$).

1.2.1 Convergence de suites d'intervalles

Définition 1.2.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles et $S \in S(I\!R)$. Par définition, on dit que la suite d'intervalles (S_n) **converge** *vers l'intervalle S au sens de la distance de Hausdorff, si $\lim\limits_{n \to \infty} d(S_n, S) = 0$.*

Proposition 1.2.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles. (S_n) est convergente au sens de Hausdorff si et seulement si les deux suites réelles (s_n^1) et (s_n^2) sont convergentes.

Preuve.

On sait que $d(S_n, S) = max\,\{\mid s_n^1 - s^1 \mid, \mid s_n^2 - s^2 \mid\}$ où $S_n = [s_n^1, s_n^2]$ et $S = [s^1, s^2]$. D'où l'équivalence suivante :

$$\left(\lim_{n \to \infty} d(S_n, S) = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n \to \infty} (s_n^1) = s^1 \text{ et } \lim_{n \to \infty} (s_n^2) = s^2\right).$$

C'est ce qu'il faut démontrer.

■

Remarque :

Si la suite d'intervalles (S_n) est convergente au sens de la distance de Hausdorff, alors on a :

$$\lim_{n \to \infty} (S_n) = \left[\lim_{n \to \infty} (s_n^1), \lim_{n \to \infty} (s_n^2)\right].$$

Proposition 1.2.2

Soit (S_n) une suite d'intervalles vérifiant :

$$\forall n \in I\!N,\ S_{n+1} \subset S_n$$

(S_n) est une suite d'intervalles décroissante au sens de l'inclusion. Alors (S_n) est convergente au sens de Hausdorff et on a :

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Preuve.

On pose $S_n = [s_n^1, s_n^2]$ avec $s_n^1 \leq s_n^2$. On a :

$$(S_{n+1} \subset S_n) \Longrightarrow \left(s_n^1 \leq s_{n+1}^1 \text{ et } s_{n+1}^2 \leq s_n^2\right).$$

Ce qui signifie que la suite (s_n^1) est croissante majorée et (s_n^2) décroissante minorée; donc elles sont toutes les deux convergentes. On pose $\lim_{n\to\infty}(s_n^1) = s^1$ et $\lim_{n\to\infty}(s_n^2) = s^2$; on a alors :

$$\lim_{n\to\infty}(S_n) = S = [s^1, s^2] = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n.$$

C'est ce qu'il faut démontrer.

■

1.2.2 Le segment-limite

Soit (S_n) une suite d'intervalles. On appelle **segment-limite** de (S_n) noté $Slim(S_n)$, l'intersection de tous les intervalles W_n définis par :

$$\forall n \in I\!N,\ W_n = \bigvee_{p=n}^{\infty} S_p = \bigcap\left\{B \in S(I\!R),\ \text{ tel que } \bigcup_{p=n}^{\infty} S_p \subseteq B\right\}.$$

$W_n = \bigvee_{p=n}^{\infty} S_p$ est le plus petit intervalle contenant tous les S_p à partir de $p = n$ et jusqu'à l'infini.

$$Slim(S_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigvee_{p=n}^{\infty} S_p\right).$$

Remarque :

On se retrouve avec deux notions différentes de limite de suite d'intervalles :

1). la limite au sens de Hausdorff qui est équivalente à la convergence de deux suites de nombres réels.

2). le segment-limite qui est une intersection infinie de termes d'une suite d'intervalles décroissante au sens de l'inclusion, qui comme nous allons le voir est une notion plus générale.

Définition 1.2.2

Une suite d'intervalles (S_n) *sera dite bornée, s'il existe un intervalle* I *tel que pour tout* $n \in I\!N, S_n \subseteq I$

Il s'ensuit une proposition évidente :

Proposition 1.2.3

Une suite d'intervalles (S_n) *est bornée, si et seulement si les deux suites réelles* (s_n^1) *et* (s_n^2) *sont bornées.*

Propriété 1.2.1

Soit (S_n) *une suite d'intervalles. Le segment-limite* $S = Slim(S_n)$ *est un intervalle fini (i.e.,* $S = Slim(S_n) \in S(I\!R)$ *) si et seulement si* (S_n) *est bornée.*

Preuve.

On a $Slim(S_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n$ où (W_n) est la suite d'intervalles décroissante au sens de l'inclusion définie par :

$$W_n = \bigvee_{p=n}^{\infty} S_p.$$

On pose $W_n = [w_n^1, w_n^2]$, on a alors :

$$S = Slim(S_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n = \lim_{n\to\infty}(W_n) = \left[\lim_{n\to\infty}(w_n^1), \lim_{n\to\infty}(w_n^2)\right].$$

Or (S_n) est bornée est équivalent à (W_n) bornée. Ce qui est aussi équivalent à $\lim_{n\to\infty}(w_n^1)$ et $\lim_{n\to\infty}(w_n^2)$ existent (la suite (w_n^1) est croissante et la suite (w_n^2) est décroissante).

■

Lemme 1.2.1

Soient (X_n) et (Y_n) deux suites d'intervalles vérifiant $\forall n \in I\!N,\ X_n \subseteq Y_n$. Alors on a $Slim(X_n) \subseteq Slim(Y_n)$.

Preuve.

On a $Slim(X_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ et $Slim(Y_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ où $U_n = \bigvee_{p=n}^{\infty} X_p$ et $V_n = \bigvee_{p=n}^{\infty} Y_p$.
Or on a $\forall p \in I\!N,\ X_p \subseteq Y_p$ donc $\forall n \in I\!N,\ U_n \subseteq V_n$. D'où $Slim(X_n) \subseteq Slim(Y_n)$.

■

Soit $(S_n) = (s_n)$ $(S_n = [s_n, s_n] = s_n \in I\!R)$ une suite d'intervalles dégénérés. On définit deux suites réelles (x_n) et (y_n) par :

$$\forall n \in I\!N,\quad x_n = min\{s_p, p \geq n\} \qquad \text{et} \qquad y_n = max\{s_p, p \geq n\}.$$

Lorsque la suite réelle (s_n) est bornée on a; (x_n) est une suite croissante majorée et (y_n) est une suite décroissante minorée. On appelle **limite inférieure** (respectivement **limite supérieure**) de la suite (s_n), la limite de (x_n) qu'on note par $\underline{lim}(s_n)$ (respectivement la limite de (y_n) qu'on note par $\overline{lim}(s_n)$) .

Lemme 1.2.2

*Soit (S_n) une suite d'intervalles dégénérés $(S_n) = (s_n) \in I\!R$ (i.e., $\forall n \in I\!N,\ S_n = [s_n, s_n] = s_n \in I\!R$),
alors on a :*

$$Slim(S_n) = [\underline{lim}(s_n), \overline{lim}(s_n)]\,.$$

Preuve.

Soit (Z_n) la suite d'intervalles définie par :

$$\forall n \in I\!N,\ \ Z_n = [x_n, y_n] \quad (x_n \leq y_n) \text{ où } x_n = min\{s_p, p \geq n\} \text{ et } y_n = max\{s_p, p \geq n\}.$$

On a $\forall n \in I\!N, s_n \in Z_n$ donc $S_n \subseteq Z_n$. D'après le lemme précédent on aura $Slim(S_n) \subseteq Slim(Z_n)$. Or on a :

$$Slim(Z_n) = \lim_{n\to\infty}(Z_n) = \left[\lim_{n\to\infty}(x_n), \lim_{n\to\infty}(y_n)\right] = [\underline{lim}(s_n), \overline{lim}(s_n)]\,.$$

Donc $Slim(S_n) \subseteq [\underline{lim}(s_n), \overline{lim}(s_n)]$.

Montrons maintenant l'inclusion dans le sens inverse :

$$\begin{aligned}
\alpha \in \,]\underline{lim}(s_n), \overline{lim}(s_n)[\; &\Longrightarrow \alpha \in \left]\lim_{n\to\infty}(x_n), \lim_{n\to\infty}(y_n)\right[\\
&\Longrightarrow \forall n \in I\!N, \;\; \alpha \in [x_n, y_n] \\
&\Longrightarrow \forall n \in I\!N, \;\; \alpha \in Z_n \\
&\Longrightarrow \forall n \in I\!N, \;\; \alpha \in \bigvee_{p=n}^{\infty} S_p \\
&\Longrightarrow \alpha \in Slim(S_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigvee_{p=n}^{\infty} S_p\right).
\end{aligned}$$

D'où l'égalité voulue.

■

Remarque :

$Slim(s_n) = [\underline{lim}(s_n), \overline{lim}(s_n)]$ est le plus petit intervalle contenant toutes les valeurs d'adhérence de (s_n).

Proposition 1.2.4

Soit (S_n) une suite d'intervalles bornée, $S_n = [s_n^1, s_n^2]$ où (s_n^1) et (s_n^2) sont deux suites réelles bornées telles que $\forall n \in I\!N$, $s_n^1 \leq s_n^2$. Alors on a :

$$Slim(S_n) = [\underline{lim}(s_n^1), \overline{lim}(s_n^2)]\,.$$

Preuve.

Soient $x_n^1 = min\{s_p^1, p \geq n\}$ et $x_n^2 = max\{s_p^2, p \geq n\}$. Il est clair qu'on a $\forall n \in I\!N$, $x_n^1 \leq x_n^2$. On pose $X_n = [x_n^1, x_n^2]$; on a bien $\forall n \in I\!N$, $S_n \subseteq X_n$. Donc d'après le lemme 1.2.1, on a $Slim(S_n) \subseteq Slim(X_n)$.

Reciproquement :

D'après le lemme 1.2.2, on a :

$$Slim(s_n^1) = [\underline{lim}(s_n^1), \overline{lim}(s_n^1)] \subseteq Slim(S_n)$$

et

$$Slim(s_n^2) = [\underline{lim}(s_n^2), \overline{lim}(s_n^2)] \subseteq Slim(S_n).$$

Or $Slim(X_n) = \lim\limits_{n \to \infty}(X_n) = \left[\lim\limits_{n \to \infty}(x_n^1), \lim\limits_{n \to \infty}(x_n^2)\right] = \left[\underline{lim}(s_n^1), \overline{lim}(s_n^2)\right]$, donc on a $Slim(X_n) \subseteq Slim(S_n)$.

D'où le résultat : $Slim(S_n) = Slim(X_n) = [\underline{lim}(s_n^1), \overline{lim}(s_n^2)]$.

■

Remarque

Le segment-limite qui vient d'une définition ensembliste, possède une caractérisation analogue à la limite au sens de Hausdorff, mais il ne s'agit plus de limite de deux suites de nombres réels, mais seulement d'une limite inférieure et d'une limite supérieure. Il en découle de la propriété ci-dessus, que la limite au sens de Hausdorff est un cas particulier du segment-limite.

Théorème 1.2.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles qui converge au sens de la distance de Hausdorff, alors on a :

$$Slim(S_n) = \lim_{n \to \infty}(S_n).$$

Preuve.

On a $Slim(S_n) = [\underline{lim}(s_n^1), \overline{lim}(s_n^2)]$. La suite (S_n) est convergente équivaut à ce que les suites réelles (s_n^1) et (s_n^2) convergent, donc $\underline{lim}(s_n^1) = \lim\limits_{n \to \infty}(s_n^1)$ et $\overline{lim}(s_n^2) = \lim\limits_{n \to \infty}(s_n^2)$. Or $\lim\limits_{n \to \infty}(S_n) = \left[\lim\limits_{n \to \infty}(s_n^1), \lim\limits_{n \to \infty}(s_n^2)\right]$, donc $Slim(S_n) = \lim\limits_{n \to \infty}(S_n)$.

■

Théorème 1.2.2

Soient (X_n) et (Y_n) deux suites d'intervalles, et soit $*$ une des opérations arithmétiques. On suppose que pour tout $n \in I\!N$, $X_n * Y_n$ existe. Alors on a :

$$Slim(X_n * Y_n) \subseteq Slim(X_n) * Slim(Y_n)$$

et on a égalité si l'une au moins des deux suites d'intervalles (X_n) ou (Y_n) converge.

Preuve.

En effet, si on pose $X_n = [x_n^1, x_n^2]$ et $Y_n = [y_n^1, y_n^2]$, on a :

$$X_n * Y_n = \left[\min_{i,j=1,2} \{x_n^i * y_n^j\}, \max_{i,j=1,2} \{x_n^i * y_n^j\} \right].$$

Posons $Z_n = [z_n^1, z_n^2] = X_n * Y_n$. Les valeurs d'adhérence de la suite réelle $z_n^{(i,j)} = x_n^i * y_n^j$ sont toutes de la forme $w^{(i,j)} = u^i * v^j$ (on est dans le cas de suites bornées) où u^i est une valeur d'adhérence de (x_n^i) et v^j une valeur d'adhérence de (y_n^j). On a , $u^i \in Slim(X_n)$ et $v^j \in Slim(Y_n)$ (en effet $Slim(X_n)$ est le plus petit intervalle contenant toutes les valeurs d'adhérences des deux suites réelles (x_n^1) et (x_n^2)), donc $w^{(i,j)} = u^i * v^j \in Slim(X_n) * Slim(Y_n)$. D'où $Slim(Z_n) \subseteq Slim(X_n) * Slim(Y_n)$.

Lorsque la suite d'intervalles (X_n) converge au sens de la distance de Hausdorff, on aura tout simplement $u^i = \lim_{n\to\infty}(x_n^i)$ pour $i = 1, 2$ et donc, $w^{(i,j)} = \lim_{n\to\infty}(x_n^i) * \underline{lim}(y_n^j)$ sera une valeur d'adhérence de la suite réelle $z_n^{(i,j)} = x_n^i * y_n^j$ et aussi $\widetilde{w}^{(i,j)} = \lim_{n\to\infty}(x_n^i) * \overline{lim}(y_n^j)$ sera une valeur d'adhérence de la même suite. Or dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} Slim(X_n) * Slim(Y_n) &= \left[\min_{i,j=1,2} \left\{ \lim_{n\to\infty}(x_n^i) * \underline{lim}(y_n^j), \lim_{n\to\infty}(x_n^i) * \overline{lim}(y_n^j) \right\} \right. \\ &\quad \left. ; \max_{i,j=1,2} \left\{ \lim_{n\to\infty}(x_n^i) * \underline{lim}(y_n^j), \lim_{n\to\infty}(x_n^i) * \overline{lim}(y_n^j) \right\} \right]. \end{aligned}$$

D'où lorsque (X_n) converge (ou bien (Y_n) converge) on a :

$$Slim(X_n * Y_n) = Slim(X_n) * Slim(Y_n).$$

Ce qui finie la démonstration du théorème.

■

On a comme conséquence de ce théorème le corollaire suivant :

Corollaire 1.2.1

Soient (S_n) une suite d'intervalles et I un intervalle vérifiant pour tout n, $I * S_n$ existe. Alors on a :

$$Slim(I * S_n) = I * Slim(S_n).$$

Remarque :

Les deux théorèmes 1.2.1 et 1.2.2 sont donnés dans le livre de SENDOV [12], avec des démonstrations différentes de celles données ici.

Conclusion : Parmi les propositions et théorèmes cités dans ce chapitre, nous sembles importantes pour la suite du travail : la proposition 1.2.4, les deux théorèmes 1.2.1 et 1.2.2 ainsi que le corollaire 1.2.1.

Chapter 2

TRANSFORMATIONS DE SUITES D'INTERVALLES EN VUE DE L'ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous proposons une définition du comportement linéaire et de contraction pour une suite d'intervalles (S_n) de segment-limite S (pour rester dans le cas le plus général, nous avons voulu dans ce travail utiliser le segment-limite au lieu de la limite au sens de Hausdorff, sauf dans le cas où les deux notions coincident).

Rappelons que le concept de contraction pour les suites de nombres réels a été défini par C. BREZINSKI en 1989 dans [5].

Une première idée est de faire passer les formules habituelles pour les suites de réels ($\varrho_n = \frac{s_{n+1} - s}{s_n - s}$ pour le rapport d'erreurs, $\delta_n = \frac{s_{n+2} - s_{n+1}}{s_{n+1} - s_n}$ pour le rapport de différences et $r_n = \frac{t_n - t}{s_n - s}$ pour le rapport d'accélération) au cas de suites d'intervalles (c'est à dire, en terme d'intervalles : $E_n = \dfrac{S_{n+1} - S}{S_n - S}$ pour le rapport d'erreurs, $D_n = \dfrac{S_{n+2} - S_{n+1}}{S_{n+1} - S_n}$ pour le rapport de différences et $R_n = \dfrac{T_n - T}{S_n - S}$ pour le rapport d'accélération). Mais on se rend compte tout de suite que l'on se heurte aux problèmes suivants :

Lorsque le segment-limite S de la suite d'intervalles (S_n) est propre, un élément ϱ_n de E_n, s'écrit $\varrho_n = \frac{s_{n+1} - s}{s_n - s'}$ où $s_{n+1} \in S_{n+1}$, $s_n \in S_n$ et $s, s' \in S$, et il n'y a aucune raison d'avoir $s = s'$. De même un élément δ_n de D_n, s'écrit $\delta_n = \frac{s_{n+2} - s_{n+1}}{s'_{n+1} - s_n}$ ($s_{n+1} \neq s'_{n+1}$), et pour $r_n \in R_n$: $r_n = \frac{T(s_n, ...) - s}{s'_n - s'}$ ($s_n \neq s'_n$ et $s \neq s'$). Dans ce cas là on n'aura plus de relations entre (ϱ_n), (δ_n) et (r_n), des relations du genre :

$$\delta_n = \varrho_n.\frac{1-\varrho_{n+1}}{1-\varrho_n} \qquad \text{ou} \qquad r_n = \varrho_n.\frac{\varrho_{n+1}-\varrho_n}{\varrho_n.\varrho_{n+1}-2.\varrho_n+1}.$$

Lorsque le segment-limite S de la suite d'intervalles (S_n) est dégénéré ($S = s \in I\!R$), si on pose $S_n = [s_n^1, s_n^2]$, $T_n = [t_n^1, t_n^2]$ et $T = t \in I\!R$, alors on a:

$$R_n = \frac{T_n - t}{S_n - s} = \frac{[t_n^1 - t, t_n^2 - t]}{[s_n^1 - s, s_n^2 - s]} = \left[\min_{i,j=1,2}\left\{\frac{t_n^i - t}{s_n^j - s}\right\}, \max_{i,j=1,2}\left\{\frac{t_n^i - t}{s_n^j - s}\right\}\right].$$

Si on prend comme définition de l'accélération de convergence : la suite d'intervalles (R_n) converge au sens de Hausdorff vers l'intervalle-point 0. Cela est équivalent à ce que les suites réelles $(r_n^{(i,j)})$ définies par $r_n^{(i,j)} = \dfrac{t_n^i - t}{s_n^j - s}$ (pour $i, j = 1, 2$) convergent vers 0, ce qui signifie que les suites réelles (t_n^1) et (t_n^2) convergent simultanément plus vite que (s_n^1) et (s_n^2). Cela ramène notre problème à celui d'accélération de convergence de suites réelles, ce qui n'est pas notre objectif.

Remarquons qu'on peut envisager d'adopter aussi la définition $r_n = \dfrac{d(T_n, T)}{d(S_n, S)}$ converge vers 0 (d est la distance de Hausdorff), mais cette définition nous ramène aussi au cas de suites de nombres réels.

Par ailleurs, nous avons été amené, lorsque le segment-limite S de la suite d'intervalles (S_n) est propre, à remplacer la notion habituelle de limite par une notion non asymptotique : c'est l'indice de stationnarité (que nous définissons dans le paragraphe 2.2) qui remplace l'infini théorique.

2.2 Indice de stationnarité N

Soit $(S_n) \in S(I\!R)$ une suite d'intervalles admettant un segment-limite fini $S \in S(I\!R)$, $Slim(S_n) = S$.

On pose, $S_n = [s_n^1, s_n^2]$ et $S = [s^1, s^2]$ où

$$s_n^1 = \min\{x \in S_n\} \qquad s^1 = \min\{x \in S\}$$

$$s_n^2 = \max\{x \in S_n\} \qquad s^2 = \max\{x \in S\}$$

<u>Remarque :</u>

$Slim(S_n) = S$ est un intervalle fini ($s^1, s^2 \in I\!R$) si et seulement si la suite d'intervalles (S_n) est bornée.

Définition 2.2.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles admettant un segment-limite fini S. On appelle **indice de stationnarité** *N de (S_n), le plus petit entier naturel (s'il existe) vérifiant:*

$$n \geq N \Longrightarrow S_n \cap S \neq \emptyset.$$

Lorsque $\forall M \in \mathbb{N}, \exists n \geq M$ tel que $S_n \cap S = \emptyset$, alors par définition l'indice de stationnarité de (S_n) est infini.

Remarque :

Cette définition nous assure de l'existence d'un indice de stationnarité N (fini ou non) pour toute suite d'intervalles (S_n) admettant un segment-limite fini.

Hypothèse :

Dans tout ce qui suit, on suppose que la suite d'intervalles (S_n) de segment-limite fini S et d'indice de stationnarité N vérifie l'hypothèse H suivante :

$$H : \quad n < N \Longrightarrow S_n \cap S = \emptyset \quad \text{(pour } N \text{ fini ou non).}$$

Remarque :

L'hypothèse H ci-dessus est nécessaire pour pouvoir éviter les divisions par zéro dans le rapport d'erreurs (E_n) et le rapport d'accélération (R_n) qui vont être définis ultérieurement.

Une propriété importante des suites d'intervalles (S_n) qui convergent au sens de Hausdorff (cas particulier du segment-limite) vers un intervalle propre S est la suivante :

Propriété 2.2.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles convergente au sens de la distance de Hausdorff. Si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ où S est un intervalle propre, alors (S_n) admet un indice de stationnarité N fini.

Preuve.

On pose $S_n = [s_n^1, s_n^2]$ et $S = [s^1, s^2]$.

$$(\lim_{n\to\infty} S_n = S) \Longleftrightarrow (\lim_{n\to\infty} s_n^1 = s^1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} s_n^2 = s^2).$$

S est un intervalle propre, donc $l = s^2 - s^1 > 0$. Pour $\varepsilon = l$, il existe $\eta \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq \eta \Longrightarrow \max(|s_n^1 - s^1|, |s_n^2 - s^2|) < \varepsilon \ (*).$$

Si on suppose que $S_n \bigcap S = \emptyset$ et si $|s_n^1 - s^1| < \varepsilon$, alors $S_n < S$ (i.e., $s_n^1 \leq s_n^2 < s^1 < s^2$) et donc on a :

$$|s_n^2 - s^2| = s^2 - s_n^2 = (s^2 - s^1) + (s^1 - s_n^2) = \varepsilon + (s^1 - s_n^2).$$

Or $s^1 - s_n^2 > 0$ donc $|s_n^2 - s^2| > \varepsilon$. Ceci est contradictoire avec (*). Donc $S_n \bigcap S \neq \emptyset$ pour $n \geq \eta$, ce qui prouve que $N \leq \eta$.

■

<u>Remarque :</u>

Dans la propriété précédente, l'hypothèse (S_n) convergente au sens de Hausdorff est nécessaire. En effet, si on suppose seulement que (S_n) possède un segment-limite S intervalle propre, alors la propriété ne sera plus valable.

<u>Exemple :</u>

Soit (S_n) définie par :

$$S_{2n} = \left[1 + \frac{1}{2n+1}, 1 + \frac{1}{2n}\right] \text{ et } S_{2n+1} = \left[-1 - \frac{1}{2n+1}, -1 - \frac{1}{2n+2}\right].$$

On a $Slim(S_n) = S = [-1, +1]$ est un intervalle propre et pourtant l'indice de stationnarité de cette suite est infini : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \bigcap [-1, +1] = \emptyset$.

2.3 Transformation de suites d'intervalles

Pour éviter d'alourdir et les notations et le texte, on va confondre la <u>notation</u> de la transformation de suites d'intervalles avec celle de la fonction qui la représente. Attention ! à ne pas confondre la notation T d'une transformation avec le segment-limite T d'une suite d'intervalles (T_n).

Définition 2.3.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles et soit $(Z_n^i)_{1 \leq i \leq q}$ q suites d'intervalles auxiliaires qui seront précisées selon les cas. Etant donné $(p \geq 0)$, on note $\mathbb{P}_{n,p}$ le pavé $S_n \times S_{n+1} \times ... \times S_{n+p}$ de $\mathbb{R}^{p+1}$ et $\mathbb{Z}_{n,q}$ le pavé $Z_n^1 \times Z_n^2 \times ... \times Z_n^q$ de $\mathbb{R}^q$.

On note $s_{n,p} = (s_n, ..., s_{n+p})$ un élément de $\mathbb{P}_{n,p}$ et $z_{n,q} = (z_n^1, ..., z_n^q)$ un élément de $\mathbb{Z}_{n,q}$.

On appelle **transformation** *de la suite (S_n), le passage permettant d'obtenir une suite d'intervalles (T_n) à partir de (S_n) par une fonction*

$$\begin{array}{rlcl} T: & \mathbb{R}^{p+q+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (s_{n,p}, z_{n,q}) \in \mathbb{P}_{n,p} \times \mathbb{Z}_{n,q} & \longmapsto & t_n = T(s_{n,p}, z_{n,q}) \end{array}$$

telle que T est continue sur $\mathbb{P}_{n,p} \times \mathbb{Z}_{n,q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

La suite d'intervalles (T_n) obtenue par $T_n = T(\mathbb{P}_{n,p} \times \mathbb{Z}_{n,q})$ est appelée **suite transformée** *de (S_n) par la transformation T.*

Remarque :

$T_n = T(\mathbb{P}_{n,p} \times \mathbb{Z}_{n,q})$ est bien un intervalle, car c'est l'image par une application continue d'un pavé de $\mathbb{R}^{p+q+1}$.

Définition 2.3.2

Une transformation T sera dite régulière pour (S_n) si la suite transformée (T_n) vérifie :

$$Slim(T_n) = Slim(S_n).$$

2.4 Suites d'indice de stationnarité fini

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite fini S et d'indice de stationnarité fini N.

Hypothèse :

Dans tout ce qui suit on suppose que la suite d'intervalles (S_n) vérifie l'hypothèse H' suivante :

$$H' \;:\; \forall n < N, S_n \bigcap S_{n+i} = \emptyset \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Rappelons qu'on suppose l'hypothèse H : $\forall n < N$, $S_n \bigcap S = \emptyset$.

Remarque :

L'hypothèse H' ci-dessus nous est nécessaire pour éviter les divisions par zéro dans le calcul du rapport de différences (D_n) de (S_n) qu'on va définir dans ce chapitre, et pour arriver à écrire explicitement (E_n) et (D_n) comme c'est le cas dans la proposition 2.4.1.

2.4.1 Comportement linéaire

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite fini S et d'indice de stationnarité fini N, vérifiant les hypothèses H et H'.

On pose : $S_n = [s_n^1, s_n^2]$ et $S = [s^1, s^2]$.

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & I\!R \times I\!R \times I\!R & \longrightarrow & I\!R \\ & & (x, y, z) & \longmapsto & \dfrac{x-y}{z-y} \end{array}$$

Le domaine de définition de f est : $D_f = \{(x, y, z) \in I\!R^3 / z \neq y\}$.
f est de classe C^1 sur son domaine D_f.

Remarque :

On a $\forall n < N$:

$$S_{n+1} \times S \times S_n \subset D_f \text{ et } S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n \subset D_f.$$

En effet, les deux hypothèses H et H' nous donnent :

Pour tout $n < N$ on a : $S_n \bigcap S_{n+1} = \emptyset$ et $S_n \bigcap S = \emptyset$.

Notations et définitions :

On note dans tout ce qui suit, E_n l'intervalle de rapport d'erreurs et D_n l'intervalle de rapport de différences définis par :

$$\begin{aligned} E_n &= f(S_{n+1} \times S \times S_n) \\ &= \left\{ \varrho_n \in I\!R / \ \varrho_n = \frac{s_{n+1} - s}{s_n - s}, \ (s_{n+1}, s, s_n) \in S_{n+1} \times S \times S_n \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_n &= -f(S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n) \\ &= \left\{ \delta_n \in I\!R / \ \delta_n = \frac{s_{n+2} - s_{n+1}}{s_{n+1} - s_n}, \ (s_{n+2}, s_{n+1}, s_n) \in S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n \right\}. \end{aligned}$$

Pour $i,j,k = 1,2$ on pose :

s_l^i est l'une des deux extrémités de l'intervalle S_l où $l \in I\!N$, selon que $i = 1$ ou $i = 2$.

$$\varrho_n^{(i,j,k)} = f(s_{n+1}^i, s^j, s_n^k) = \frac{s_{n+1}^i - s^j}{s_n^k - s^j}$$

et

$$\delta_n^{(i,j,k)} = f(s_{n+2}^i, s_{n+1}^j, s_n^k) = \frac{s_{n+2}^i - s_{n+1}^j}{s_{n+1}^j - s_n^k}.$$

La proposition suivante donne la forme explicite de E_n et D_n, pour $n < N$.

Proposition 2.4.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite S et d'indice de stationnarité N vérifiant les hypothèses [redacted]t H'. Alors pour $n < N$, le minimum et le maximum de f sur $S_{n+1} \times S \times S_n$ et sur $S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n$ sont atteints respectivement sur l'un des huit sommets de chaque pavé. C'est à dire, on a :

$$E_n = [\min_{i,j,k=1,2}\{\varrho_n^{(i,j,k)}\} \quad , \quad \max_{i,j,k=1,2}\{\varrho_n^{(i,j,k)}\} \quad]$$

$$D_n = [\min_{i,j,k=1,2}\{\delta_n^{(i,j,k)}\} \quad , \quad \max_{i,j,k=1,2}\{\delta_n^{(i,j,k)}\} \quad].$$

<u>Preuve</u>

Pour $f(x,y,z) = \dfrac{x-y}{z-y}$ on a,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{z-y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x-z}{(z-y)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y-x}{(z-y)^2}.$$

Sous les hypothèses H et H' on a $S_n \bigcap S = \emptyset$ et $S_n \bigcap S_{n+i} = \emptyset$(pour $i = 1,2$), pour $n < N$ les dérivées partiélles de f $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ ne s'annulent ni sur $S_{n+1} \times S \times S_n$ ni sur $S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n$. Donc, si $v_n^{(i,j,k)}$: $(s_{n+1}^i, s^j, s_n^k)_{i,j,k=1,2}$ représentent les huit sommets de $S_{n+1} \times S \times S_n$ on a :

$$\inf_{(x,y,z)\in S_{n+1}\times S\times S_n}\{f(x,y,z)\} = \min_{i,j,k=1,2}\{f(v_n^{(i,j,k)})\}$$

et

$$\sup_{(x,y,z)\in S_{n+1}\times S\times S_n}\{f(x,y,z)\} = \max_{i,j,k=1,2}\{f(v_n^{(i,j,k)})\},$$

$f(v_n^{(i,j,k)})$ n'est que le rapport d'erreur $\varrho_n^{(i,j,k)} = \dfrac{s_{n+1}^i - s^j}{s_n^k - s^j}$. On trouve ainsi E_n sous la forme explicite donnée ci-dessus. Même chose pour $S_{n+2}\times S_{n+1}\times S_n$ pour trouver D_n.

■

Définition 2.4.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite fini S et d'indice de stationnarité N fini. On dit que (S_n) est à **comportement linéaire** *à partir d'un indice $M \le N-1$, si E_n et D_n sont inclus dans $[-1,+1[$ pour $M \le n \le N-1$.*

Remarque :

Pour $n \le N-2$, $0 \notin E_n$. En effet, pour $n \le N-2$ $0 \notin E_n$ équivaut à $S_{n+1}\bigcap S = \emptyset$, ce qui est vrai d'après l'hypothèse H.

Proposition 2.4.2

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite fini S et d'indice de stationnarité N fini vérifiant les hypothèses H et H'. Supposons qu'il existe $M \le N-2$ tel que, pour tout $M \le n \le N-1$ on a $E_n \subset [-1,1[$ alors on a :

($D_n \subset [-1,1[$ pour $M \le n \le N-2$) si et seulement si

($\varrho_{n+1}^{(i,j,j)}\varrho_n^{(j,j,k)} - 2\varrho_n^{(j,j,k)} + 1 > 0$ pour $i,j,k = 1,2$ et $M \le n \le N-2$).

Où $\varrho_{n+1}^{(i,j,j)} = \dfrac{s_{n+2}^i - s^j}{s_{n+1}^j - s^j}$ *et* $\varrho_n^{(j,j,k)} = \dfrac{s_{n+1}^j - s^j}{s_n^k - s^j}$.

Preuve.

On peut voir facilement que :

$$\delta_n^{(i,j,k)} = \varrho_n^{(j,j,k)}\,\frac{1-\varrho_{n+1}^{(i,j,j)}}{1-\varrho_n^{(j,j,k)}}.$$

Pour $M \le n \le N-2$, on a E_n et E_{n+1} sont inclus dans $[-1,1[$. Donc pour $i,j,k = 1,2$, $\varrho_n^{(j,j,k)}$ et $\varrho_{n+1}^{(i,j,j)}$ appartiennent à $[-1,1[$. On veut montrer que $D_n \subset [-1,1[$ si et seulement si $\varrho_{n+1}^{(i,j,j)}\varrho_n^{(j,j,k)} - 2\varrho_n^{(j,j,k)} + 1 > 0$ pour $i,j,k = 1,2$.

On sait que $D_n = \left[\min_{i,j,k=1,2}\{\delta_n^{(i,j,k)}\}, \max_{i,j,k=1,2}\{\delta_n^{(i,j,k)}\}\right]$, on montre facilement que :

$$(\delta_n^{(i,j,k)} \geq -1) \Longleftrightarrow (\varrho_n^{(j,j,k)}.\varrho_{n+1}^{(i,j,j)} \leq 1).$$

Or $\varrho_n^{(j,j,k)}$ et $\varrho_{n+1}^{(i,j,j)}$ appartiennent à $[-1,1[$, donc on a bien $\varrho_n^{(j,j,k)}.\varrho_{n+1}^{(i,j,j)} \leq 1$ et ceci Pour tout $M \leq n \leq N-2$ et $i,j,k = 1,2$.

Il faut voir maintenant quand on a : $\delta_n^{(i,j,k)} < 1$ pour $M \leq n \leq N-2$ et $i,j,k = 1,2$.

On a :

$$\begin{aligned}
\delta_n^{(i,j,k)} < 1 &\Longleftrightarrow \varrho_n^{(j,j,k)} \frac{1-\varrho_{n+1}^{(i,j,j)}}{1-\varrho_n^{(j,j,k)}} < 1 \\
&\Longleftrightarrow \varrho_{n+1}^{(i,j,j)}.\varrho_n^{(j,j,k)} - 2\varrho_n^{(j,j,k)} + 1 > 0
\end{aligned}$$

D'où la démonstration de la proposition.

■

Propriété 2.4.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite fini S, d'indice de stationnarité N fini et de suite d'intervalles de rapport de différences (D_n). Alors on a :

$$1 \notin D_n \Longleftrightarrow 0 \notin S_{n+2} - 2.S_{n+1} + S_n.$$

Preuve.

$D_n = -f(S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n)$ où $f(x,y,z) = \dfrac{x-y}{z-y}$

$$\begin{aligned}
1 \in D_n &\Longleftrightarrow \exists (s_{n+2}, s_{n+1}, s_n) \in S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n : \frac{s_{n+2}-s_{n+1}}{s_{n+1}-s_n} = 1 \\
&\Longleftrightarrow \exists (s_{n+2}, s_{n+1}, s_n) \in S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n : s_{n+2} - 2.s_{n+1} + s_n = 0 \\
&\Longleftrightarrow 0 \in S_{n+2} - 2.S_{n+1} + S_n.
\end{aligned}$$

■

Propriété 2.4.2

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite fini S, d'indice de stationnarité N fini et de suite d'intervalles de rapport de différences (D_n). Si $1 \notin D_n$ alors on a :

$\left(\varrho_{n+1}^{(i,j,j)} \varrho_n^{(j,j,k)} - 2\varrho_n^{(j,j,k)} + 1 > 0 \text{ pour } i,j,k = 1,2\right)$ *si et seulement si*

$(\exists (s_{n+2}, s_{n+1}, s_n, s) \in S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n \times S$ *tel que* $\Delta^2 s_n.(s_n - s) > 0)$

où $\Delta^2 s_n = s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n$.

Preuve.

On pose $g(x,y,z,t) = (x - 2.y + z).(z - t)$. On a :

$$g(S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n \times S) \subseteq (S_{n+2} - 2.S_{n+1} + S_n).(S_n - S).$$

Or $0 \notin (S_n - S)$ (car $S_n \bigcap S = \emptyset$) et $0 \notin S_{n+2} - 2.S_{n+1} + S_n$ (car $1 \notin D_n$) donc $0 \notin (S_{n+2} - 2.S_{n+1} + S_n).(S_n - S)$ qui est un intervalle. Or un intervalle fermé ne contenant pas 0 est soit négatif soit positif, donc $g(S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n \times S)$ garde un même signe. (positif ou négatif). Donc s'il existe $(s_{n+2}, s_{n+1}, s_n, s)$ dans $S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n \times S$ vérifiant $g(s_{n+2}, s_{n+1}, s_n, s) = \Delta^2 s_n.(s_n - s) > 0$, alors $g(S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n \times S) > 0$.

$$\begin{aligned}
g(s_{n+2}, s_{n+1}, s_n, s) > 0 &\iff (s_{n+2} - 2.s_{n+1} + s_n).(s_n - s) > 0 \\
&\iff \frac{s_{n+2} - s_{n+1}}{s_{n+1} - s_n} > 0 \\
&\iff \frac{s_{n+2} - s}{s_{n+1} - s}.\frac{s_{n+1} - s}{s_n - s} - 2.\frac{s_{n+1} - s}{s_n - s} + 1 > 0 \\
&\iff \varrho_{n+1}.\varrho_n - 2.\varrho_n + 1 > 0.
\end{aligned}$$

■

Les propriétés 2.4.2 et 2.4.2 donnent des interprétations simples, la première à $1 \notin D_n$, la deuxième à la condition $\left(\varrho_{n+1}^{(i,j,j)}\varrho_n^{(j,j,k)} - 2\varrho_n^{(j,j,k)} + 1 > 0 \text{ pour } i,j,k = 1,2\right)$.

Théorème 2.4.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite fini S, d'indice de stationnarité fini N vérifiant les hypothèses H et H', telle que $D_{N-1} \subset [-1,1[$ et il existe $M \leq N-2$ vérifiant pour $M \leq n \leq N-1$ on a $E_n \subset [-1,1[$. Alors (S_n) est à comportement linéaire si et seulement si pour tout $M \leq n \leq N-2$ on a :

$$\varrho_{n+1}^{(i,j,j)}.\varrho_n^{(j,j,k)} - 2.\varrho_n^{(j,j,k)} + 1 > 0 \textit{ pour } i,j,k = 1,2.$$

Preuve.

La démonstration du théorème est évidente d'après la définition de la linéarité et la proposition 2.4.2 .

■

2.4.2 Le procédé Δ^2-Aitken

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite fini S et d'indice de stationnarité fini N. Le procédé Δ^2-Aitken est donné par la transformation T représentée par :

$$\begin{array}{rcl} T \ : \ S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) & \longmapsto & \dfrac{s_n s_{n+2} - (s_{n+1})^2}{s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n} \end{array}$$

Remarquons que pour la transformation T, $p = 2$ et $q = 0$. En effet $\mathbb{P}_{n,p} = \mathbb{P}_{n,2} = S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2}$ et on n'utilise pas de suites d'intervalles auxiliaires $(Z_n^i)_{1 \leq i \leq q}$ (voir paragraphe 2 de ce chapitre).

Le domaine de T, $D_T = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : z - 2y + x = 0\}$. La suite (T_n) transformée de la suite (S_n) par le Δ^2-Aitken est donnée par :

$$\begin{aligned} T_n &= T(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2}) \\ &= \left\{ t_n = T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = \frac{s_n s_{n+2} - (s_{n+1})^2}{s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n}, \ (s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) \in S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \right\}. \end{aligned}$$

Rappelons la définition de (E_n) et (D_n) respectivement la suite d'intervalles rapport d'erreurs et rapport de différences de (S_n) de segment-limite S :

$$E_n = \left\{ \varrho_n \in \mathbb{R} / \ \varrho_n = \frac{s_{n+1} - s}{s_n - s}, \ (s_{n+1}, s, s_n) \in S_{n+1} \times S \times S_n \right\}$$

$$D_n = \left\{ \delta_n \in \mathbb{R} / \ \delta_n = \frac{s_{n+2} - s_{n+1}}{s_{n+1} - s_n}, \ (s_{n+2}, s_{n+1}, s_n) \in S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n \right\}.$$

Propriété 2.4.2

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite fini S, d'indice de stationnarité fini N et de suite d'intervalles rapport de différences (D_n). Alors on a :

Pour tout $n < N$, $(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \subset D_T) \Longleftrightarrow (1 \notin D_n)$.

Preuve.

$S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \subset D_T \Longleftrightarrow 0 \notin S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n$.
D'après la propriété 2.4.1, on a :

$0 \notin S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n \Longleftrightarrow 1 \notin D_n$. D'où la démonstration de la propriété.

■

Remarque :

La condition $1 \notin E_n$ est équivalente à $S_n \bigcap S_{n+1} = \emptyset$, ce qui est supposé vérifié dans ce travail d'après l'hypothèse H'.

En effet; $E_n = \bigcup_{s \in S} \frac{S_{n+1} - s}{S_n - s}$.

$$1 \in E_n \iff \exists s \in S \text{ telque : } 1 \in \frac{S_{n+1} - s}{S_n - s}$$

$$\iff \exists (s_{n+1}, s_n, s) \in S_{n+1} \times S_n \times S \text{ telque : } 1 = \frac{s_{n+1} - s}{s_n - s}$$

$$\iff S_n \bigcap S_{n+1} \neq \emptyset.$$

Remarque :

Soit I un intervalle ne contenant pas zéro. On dit que I est de signe positif, s'il est du côté positif de la droite réelle, sinon on dira que I est de signe négatif.

Propriété 2.4.3

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite fini S, d'indice de stationnarité fini N et de suite d'intervalles rapport d'erreurs et rapport de différences (E_n) et (D_n).

Pour $n < N$, si $0 \notin E_n$, alors les intervalles E_n et D_n ont même signe.

Preuve.

On sait que $\delta_n = \varrho_n \frac{1 - \varrho_{n+1}}{1 - \varrho_n}$ où $\delta_n = \frac{s_{n+2} - s_{n+1}}{s_{n+1} - s_n}$, $\varrho_{n+1} = \frac{s_{n+2} - s}{s_{n+1} - s}$ et $\varrho_n = \frac{s_{n+1} - s}{s_n - s}$ avec $(s_{n+2}, s_{n+1}, s_n, s)$ appartenant à $S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n \times S$.

$1 \notin E_n$ donc $1 - E_n$ a un signe constant, par conséquent $\frac{1 - \varrho_{n+1}}{1 - \varrho_n}$ est strictement positif. Donc δ_n a le même signe que ϱ_n. Or lorsque $0 \notin E_n$, ϱ_n garde un même signe donc δ_n aussi.

■

Proposition 2.4.3

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite fini S, d'indice de stationnarité fini N, de suite d'intervalles rapport de différences (D_n). Et soit (T_n) la transformée *de (S_n) par le procédé Δ^2-Aitken. Supposons que pour $n < N$, $1 \notin D_n$. Alors on a :*

$$T_n = \left[\min_{i,j,k=1,2} t_n^{(i,j,k)}, \max_{i,j,k=1,2} t_n^{(i,j,k)}\right]$$

où $t_n^{(i,j,k)} = T(s_n^i, s_{n+1}^j, s_{n+2}^k) = \dfrac{s_n^i s_{n+2}^k - (s_{n+1}^j)^2}{s_{n+2}^k - 2s_{n+1}^j + s_n^i}$ $\qquad i, j, k = 1, 2.$

$v_n^{(i,j,k)} : (s_n^i, s_{n+1}^j, s_{n+2}^k)_{i,j,k=1,2}$ *représentent les huit sommets de $S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2}$.*

<u>Preuve.</u>

Calculons les trois dérivées partielles de la fonction représentant le procédé Δ^2-Aitken, $T(x,y,z) = \dfrac{xz - y^2}{z - 2y + x}$. On a :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{(y-z)^2}{(z-2y+x)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{2(x-y)(z-y)}{(z-2y+x)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{(x-y)^2}{(z-2y+x)^2}.$$

Pour $n < N$ on a, $\dfrac{\partial T}{\partial x}$, $\dfrac{\partial T}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial T}{\partial z}$ ne s'annulent pas sur $S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2}$. Donc T atteint son maximum et son minimum sur l'un des huit sommets de $S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2}$. C'est à dire,

$$\inf_{(x,y,z)\in S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2}} \{T(x,y,z)\} = \min_{i,j,k=1,2} \{T(v_n^{(i,j,k)})\}$$

et

$$\sup_{(x,y,z)\in S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2}} \{T(x,y,z)\} = \max_{i,j,k=1,2} \{T(v_n^{(i,j,k)})\}$$

Ce qui termine la démonstration.

■

2.4.3 Rapport d'accélération

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite fini S et d'indice de stationnarité N. Pour $n < N$, on définit l'intervalle rapport d'accélération de la suite (S_n) transformée par le procédé Δ^2-Aitken par :

$$R_n = \left\{ r_n = \frac{T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - s}{s_n - s}, \text{ où } (s_{n+2}, s_{n+1}, s_n, s) \in S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n \times S \right\}$$

Remarque :

On a voulu garder le nom "intervalle rapport d'accélération" de R_n, pour rappeler le sens des éléments r_n de R_n.

Définition 2.4.2

La transformation T **améliore le comportement** *de (S_n), s'il existe un entier $M \leq N-1$ vérifiant pour $M \leq n \leq N-1$, $R_n \subset]-1,1[$.*

Proposition 2.4.4

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite fini S et d'indice de stationnarité N. Et soit (T_n) la transformée de (S_n) par le procédé Δ^2-Aitken. On pose pour $s_n \in S_n$, $R(s_n) = \bigcup_{s \in S} \dfrac{T(\{s_n\} \times S_{n+1} \times S_{n+2}) - s}{s_n - s}$.

Pour $n \leq N-1$, $R(s_n)$ est un intervalle pour tout $s_n \in S_n$, et on a : $R(s_n) = [r^1(s_n),\ r^2(s_n)]$ où

$$r^1(s_n) = \min_{i,j,k=1,2} \left\{ r^{(i,j,k)}(s_n) \right\} \text{ et } r^2(s_n) = \max_{i,j,k=1,2} \left\{ r^{(i,j,k)}(s_n) \right\}$$

$$\text{avec} \quad r^{(i,j,k)}(s_n) = \frac{T(s_n, s_{n+1}^j, s_{n+2}^k) - s^i}{s_n - s^i} \quad i,j,k = 1,2$$

Preuve.

On pose $T(s_n) = T(\{s_n\} \times S_{n+1} \times S_{n+2})$ et $F(x,y) = \dfrac{x-y}{s_n - y}$. Lorsque $n < N$, $T(s_n) \times S \subset D_F$, F est continue sur son domaine de définition, donc $R(s_n) = F(T(s_n) \times S)$ est un intervalle. On pose $R(s_n) = [r^1(s_n),\ r^2(s_n)]$.

$$R(s_n) = \bigcup_{s \in S} \frac{T(\{s_n\} \times S_{n+1} \times S_{n+2}) - s}{s_n - s}.$$

On pose $R(s_n, s) = \dfrac{T(s_n) - s}{s_n - s}$, $(s_n, s) \in S_n \times S$. D'après la proposition 2.3.3 on peut écrire :

$$T(s_n) = \left[\min_{j,k=1,2} \{T(v^{(.,j,k)}(s_n))\}, \max_{j,k=1,2} \{T(v^{(.,j,k)}(s_n))\} \right]$$

où $v^{(.,j,k)}(s_n)$: $(s_n, s_{n+1}^j, s_{n+2}^k)_{j,k=1,2}$ représentent les quatre sommets de $\{s_n\} \times S_{n+1} \times S_{n+2}$. Donc $R(s_n, s) = [r^1(s_n, s), r^2(s_n, s)]$ où,

$$r^1(s_n,s) = \min_{j,k=1,2}\left\{\frac{T(s_n,s^j_{n+1},s^k_{n+2})-s}{s_n-s}\right\}$$

$$= \min_{j,k=1,2}\left\{\frac{(s^k_{n+2}-s)-\dfrac{(s^j_{n+1}-s)^2}{(s_n-s)}}{s^k_{n+2}-2s^j_{n+1}+s_n}\right\}$$

et

$$r^2(s_n,s) = \max_{j,k=1,2}\left\{\frac{T(s_n,s^j_{n+1},s^k_{n+2})-s}{s_n-s}\right\}$$

$$= \max_{j,k=1,2}\left\{\frac{(s^k_{n+2}-s)-\dfrac{(s^j_{n+1}-s)^2}{(s_n-s)}}{s^k_{n+2}-2.s^j_{n+1}+s_n}\right\}$$

On pose $g(x,y) = \dfrac{(a-x)-\dfrac{(b-x)^2}{(y-x)}}{a-2b+y}$ où $a = s^k_{n+2}$ et $b = s^j_{n+1}$. On a

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-(y-b)^2}{(a-2b+y)(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{((b-y)(ab-2b^2-(2a-3b)x+ay-xy))}{(2b-a-y)^2(y-x)^2}$$

Pour $n < N$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ ne s'annule pas sur $S \times S_n$, donc :

$$r^1(s_n) = \min_{i=1,2}\{r^1(s_n,s^i)\}$$

et

$$r^2(s_n) = \max_{i=1,2}\{r^2(s_n,s^i)\}.$$

On pose :

$$r^{(i,j,k)}(s_n) = \left\{\frac{(s^k_{n+2}-s^i)-\dfrac{(s^j_{n+1}-s^i)^2}{(s_n-s^i)}}{s^k_{n+2}-2s^j_{n+1}+s_n}\right\} \qquad i,j,k=1,2.$$

Alors on a,

$$r^1(s_n) = \min_{i,j,k=1,2}\left\{r^{(i,j,k)}(s_n)\right\}$$

et

$$r^2(s_n) = \max_{i,j,k=1,2} \left\{ r_{(i,j,k)}(s_n) \right\}.$$

Ce qui termine la démonstration de la proposition.

■

On pose pour $s_n \in S_n$ $\rho_n^{(j,i,.)}(s_n) = \dfrac{s_{n+1}^j - s^i}{s_n - s^i}$ et $\rho_{n+1}^{(k,i,j)} = \dfrac{s_{n+2}^k - s^i}{s_{n+1}^j - s^i}$ où $i, j, k = 1, 2$.

Théorème 2.4.2

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite fini S et d'indice de stationnarité fini N. Et soit M un entier vérifiant $M \leq N-2$. Si (S_n) est à comportement linéaire à partir de M alors, le procédé Δ^2-Aitken améliore le comportement de (S_n) si et seulement si :

$$\forall M \leq n \leq N-1 \ , \ \forall s_n \in S_n \quad 2\rho_n^{(j,i,.)}(s_n) \left[\rho_n^{(j,i,.)}(s_n) - \rho_{n+1}^{(k,i,j)}\right] < \left(\rho_n^{(j,i,.)}(s_n) - 1\right)^2.$$

Preuve.

Avec $\rho_n^{(j,i,.)}(s_n) = \dfrac{s_{n+1}^j - s^i}{s_n - s^i}$ et $\rho_{n+1}^{(k,i,j)} = \dfrac{s_{n+2}^k - s^i}{s_{n+1}^j - s^i}$ où $i, j, k = 1, 2$.

Il est facile de vérifier les égalités suivantes :

$$r^{(i,j,k)}(s_n) = \rho_n^{(j,i,.)}(s_n) \left[1 - \frac{1 - \rho_{n+1}^{(k,i,j)}}{1 - \delta_n^{(k,j,.)}(s_n)}\right] \qquad (1)$$

et

$$\delta_n^{(k,j,.)}(s_n) = \rho_n^{(j,i,.)}(s_n) \frac{1 - \rho_{n+1}^{(k,i,j)}}{1 - \rho_n^{(j,i,.)}(s_n)} \qquad (2)$$

où

$$\delta_n^{(k,j,.)}(s_n) = \frac{s_{n+2}^k - s_{n+1}^j}{s_{n+1}^j - s_n}.$$

A partir de (1) et (2) on peut voir que

$$r^{(i,j,k)}(s_n) = \rho_n^{(j,i,.)}(s_n) \left[\frac{\rho_{n+1}^{(k,i,j)} - \rho_n^{(j,i,.)}(s_n)}{\rho_n^{(j,i,.)}(s_n)\rho_{n+1}^{(k,i,j)} - 2\rho_n^{(j,i,.)}(s_n) + 1}\right]$$

Or (S_n) est à convergence linéaire, donc $\rho_n^{(j,i,.)}(s_n)\rho_{n+1}^{(k,i,j)} - 2\rho_n^{(j,i,.)}(s_n)+1 > 0$ pour $i,j,k = 1,2$ et ceci pour tout $s_n \in S_n$.

Or $R(s_n) = \left[\min_{i,j,k=1,2}\left\{r^{(i,j,k)}(s_n)\right\}, \max_{i,j,k=1,2}\left\{r^{(i,j,k)}(s_n)\right\}\right]$, donc :

$$R(s_n) \subset]-1,1[\iff \text{Pour } i,j,k = 1,2 : -1 < r^{(i,j,k)}(s_n) < 1$$

On a d'une part,

$$r^1(s_n) < 1 \iff \left(\rho_n^{(j,i,.)}(s_n) - 1\right)^2 > 0.$$

Ce qui est vrai car $E_n \subset [-1,1[$. D'autre part,

$$r^1(s_n) > -1 \iff \text{pour } i,j,k = 1,2 : \; r^{(i,j,k)}(s_n) > -1$$

$$\iff 2\rho_n^{(j,i,.)}(s_n)\left[\rho_n^{(j,i,.)}(s_n) - \rho_{n+1}^{(k,i,j)}\right] < \left(\rho_n^{(j,i,.)}(s_n) - 1\right)^2.$$

■

Remarque 1:

Il est facile de voir que $0 \in R(s_{N-1})$ et ceci pour tout $s_{N-1} \in S_{N-1}$; il suffit pour cela de remarquer que $0 \in E_{N-1}$.

Remarque 2:

S'il existe $s_n \in S_n$ et $i,j,k = 1,2$ tel que, $\rho_n^{(j,i,.)}(s_n)\rho_{n+1}^{(k,i,j)} - 2\rho_n^{(j,i,.)}(s_n) + 1 < 0$, alors $r^{(i,j,k)}(s_n) > 1$ et donc R_n ne sera pas inclus dans $]-1,1[$ (i.e., pas d'amélioration possible pour (S_n) par le Δ^2-Aitken).

Constatation :

La complexité des calculs nous a empêché d'aller plus loin dans le cadre de suites d'intervalles d'indice de stationnarité fini. D'alleurs on a fait une tentative dans ce sens pour le Θ_2-Algorithme, mais on était bloqué du fait qu'on n'a pas pu arriver à un résultat du même genre que la proposition 2.4.4.

2.4.4 Exemples Numériques

Pour les exemples suivants, on construit la suite d'intervalles (S_n) par la donnée d'une suite réelle (s_n) qui converge vers s et d'une précision $\varepsilon > 0$. $S_n = [s_n^1, s_n^2]$ est calculé par:

$$S_n = [s_n - \frac{\varepsilon}{2} * |s_n|, s_n + \frac{\varepsilon}{2} * |s_n|].$$

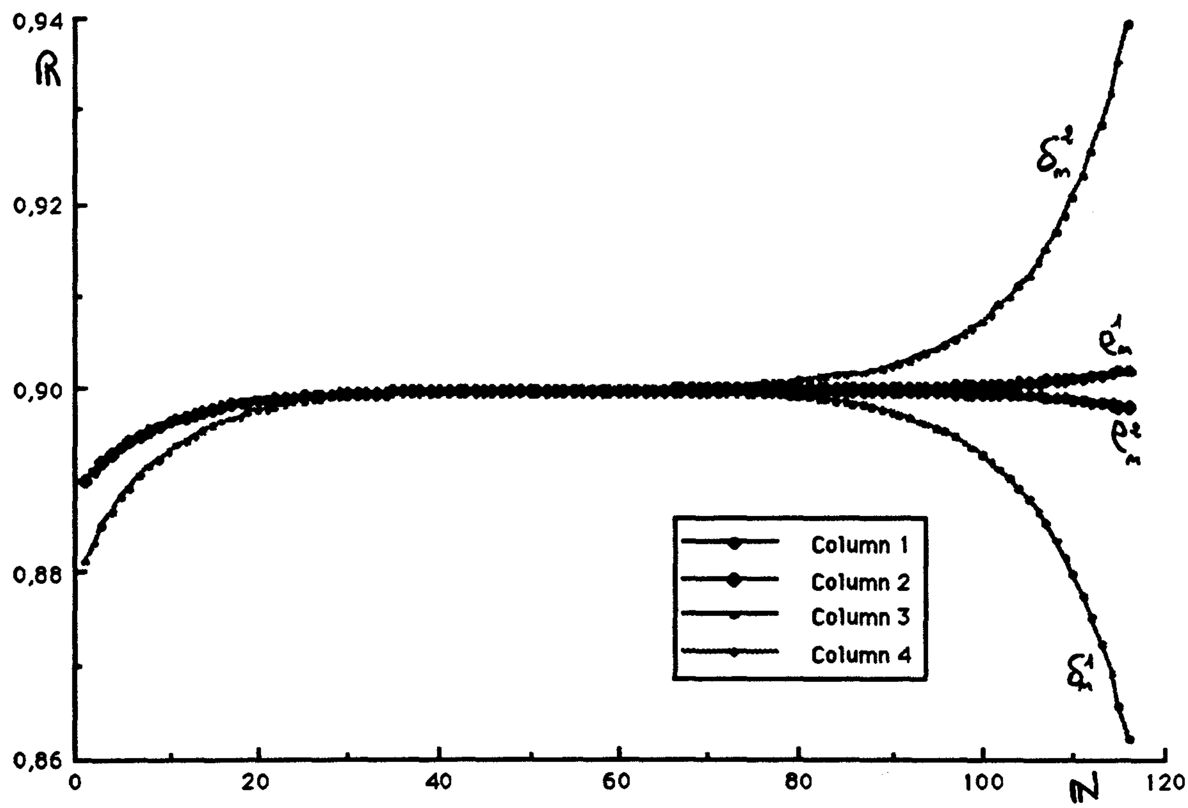
La suite d'intervalles (S_n) converge vers $S = [s - \frac{\varepsilon}{2} * |s|, s + \frac{\varepsilon}{2} * |s|]$.
Dans nos programmes $R_n = \bigcup_{x \in S_n} R(x)$ sera approché par $R_n = R(s_n^1) \cup R(s_n) \cup R(s_n^2)$.

Exemple 2.4.1

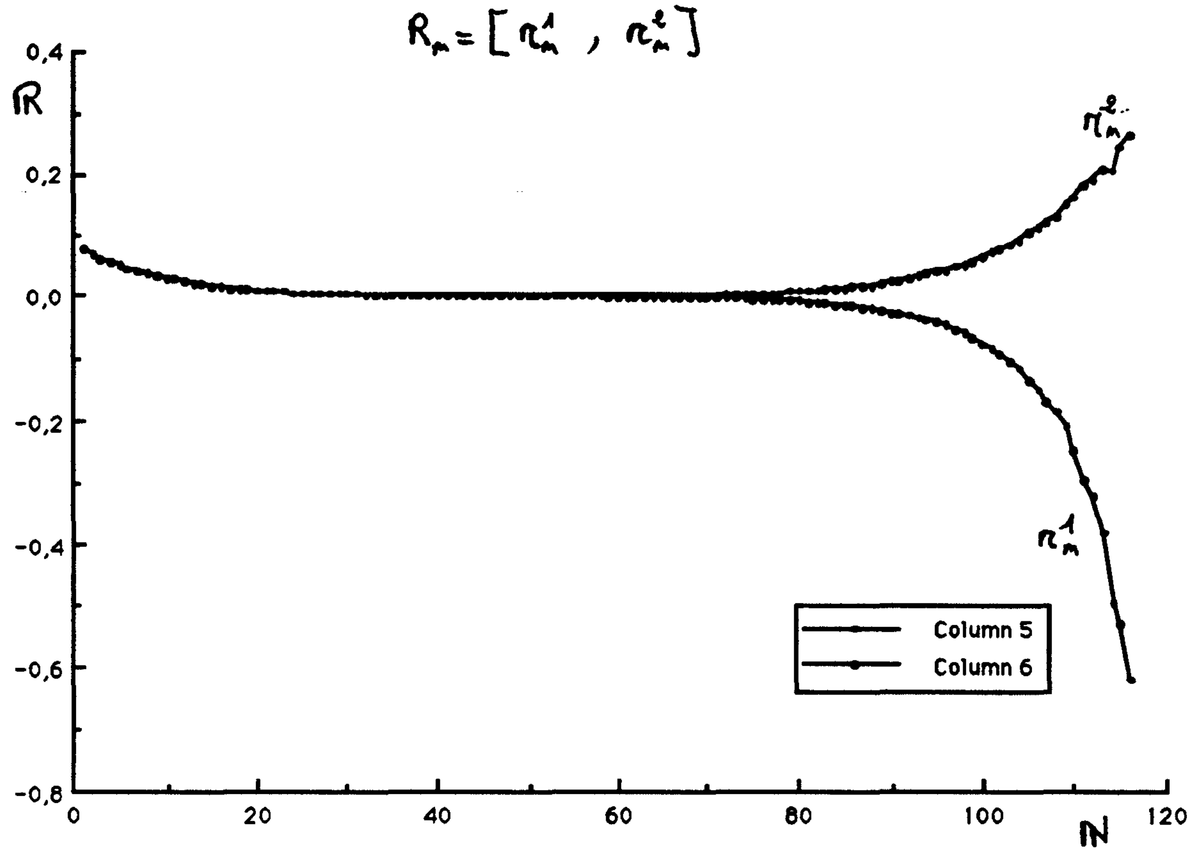
Pour $s_1 = 0.9$ et $s_n = 1 + 0.1 * (s_{n-1} - 1)^2 + 0.9 * (s_{n-1} - 1)$. Pour $\varepsilon = 10^{-9}$ on a $N = 117$ et (S_n) converge linéairement vers S. Cet exemple montre que le Δ^2-Aitken améliore le comportement de la suite d'intervalles (S_n).

Les courbes suivantes représentent (E_n) et (D_n) respectivement la suite d'intervalles de rapport d'erreurs et celle de rapport de différences

$$E_n = [\rho_n^1, \rho_n^2] \quad , \quad D_n = [\delta_n^1, \delta_n^2]$$



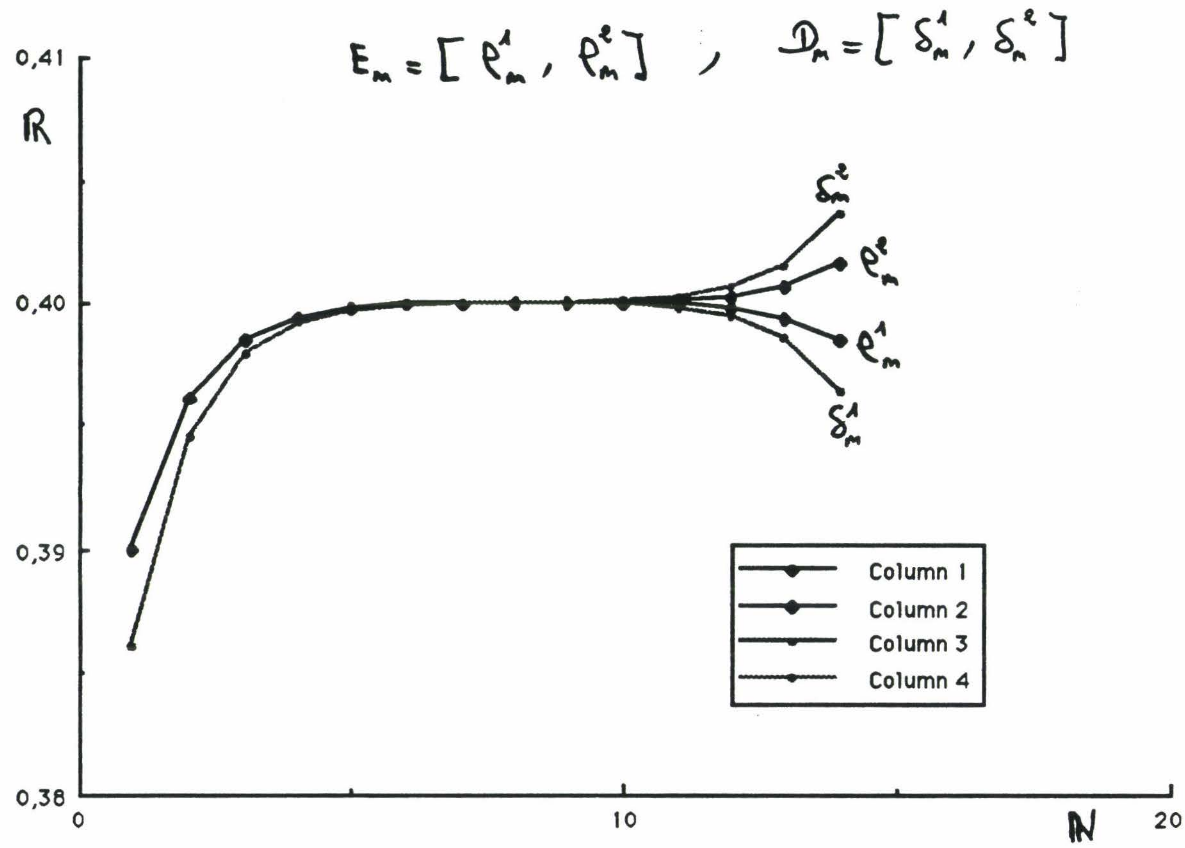
La courbe suivante représentent (R_n), rapport d'accélération de (S_n) par rapport au Δ^2-Aitken.



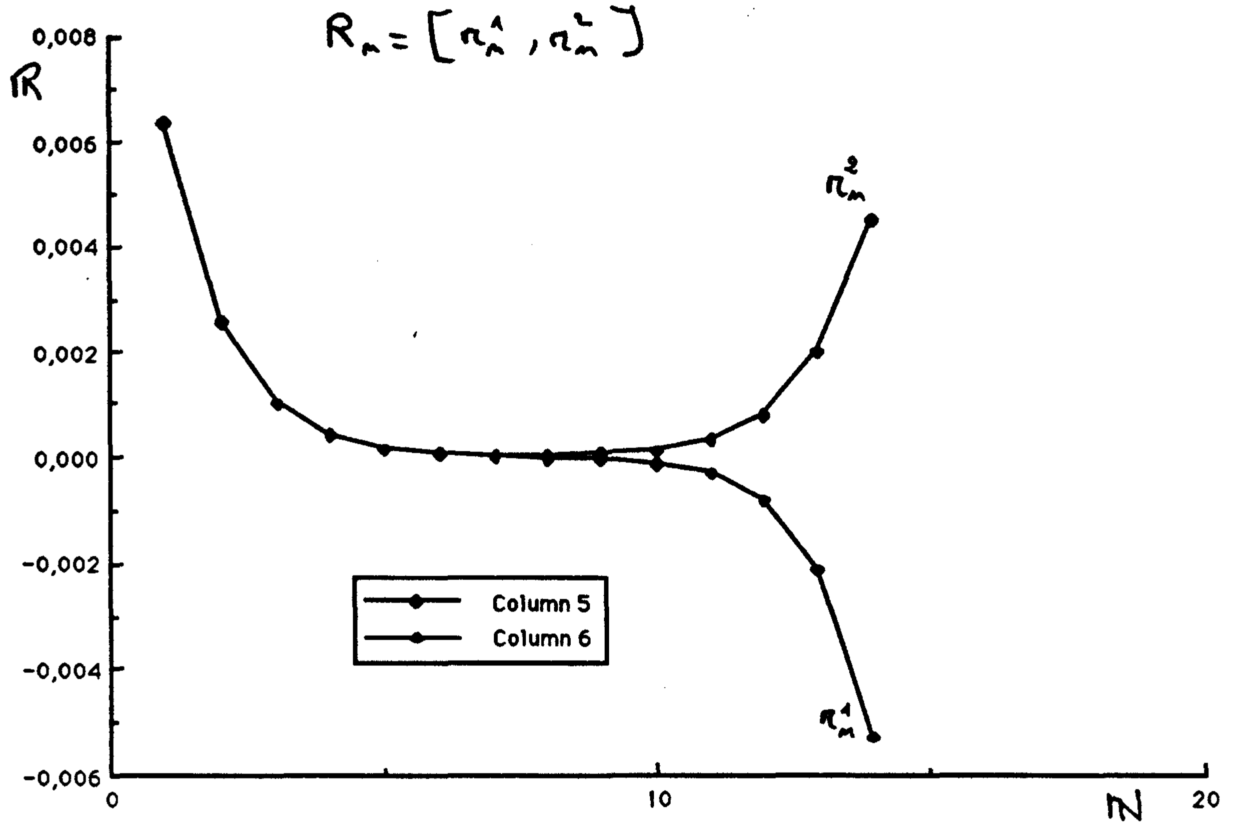
Exemple 2.4.2

Pour $s_1 = 0.9$ et $s_n = 1 + 0.1 * (s_{n-1} - 1)^2 + 0.4 * (s_{n-1} - 1)$. Si $\varepsilon = 10^{-9}$ alors on a $N = 15$ et (S_n) converge linéairement vers S. Cet exemple montre que le Δ^2-Aitken améliore le comportement de la suite d'intervalles (S_n).

Les courbes suivantes représentent (E_n) et (D_n) respectivement la suite d'intervalles de rapport d'erreurs et celle de rapport de différences



La courbe suivante représentent (R_n), rapport d'accélération de (S_n) par rapport au Δ^2-Aitken.

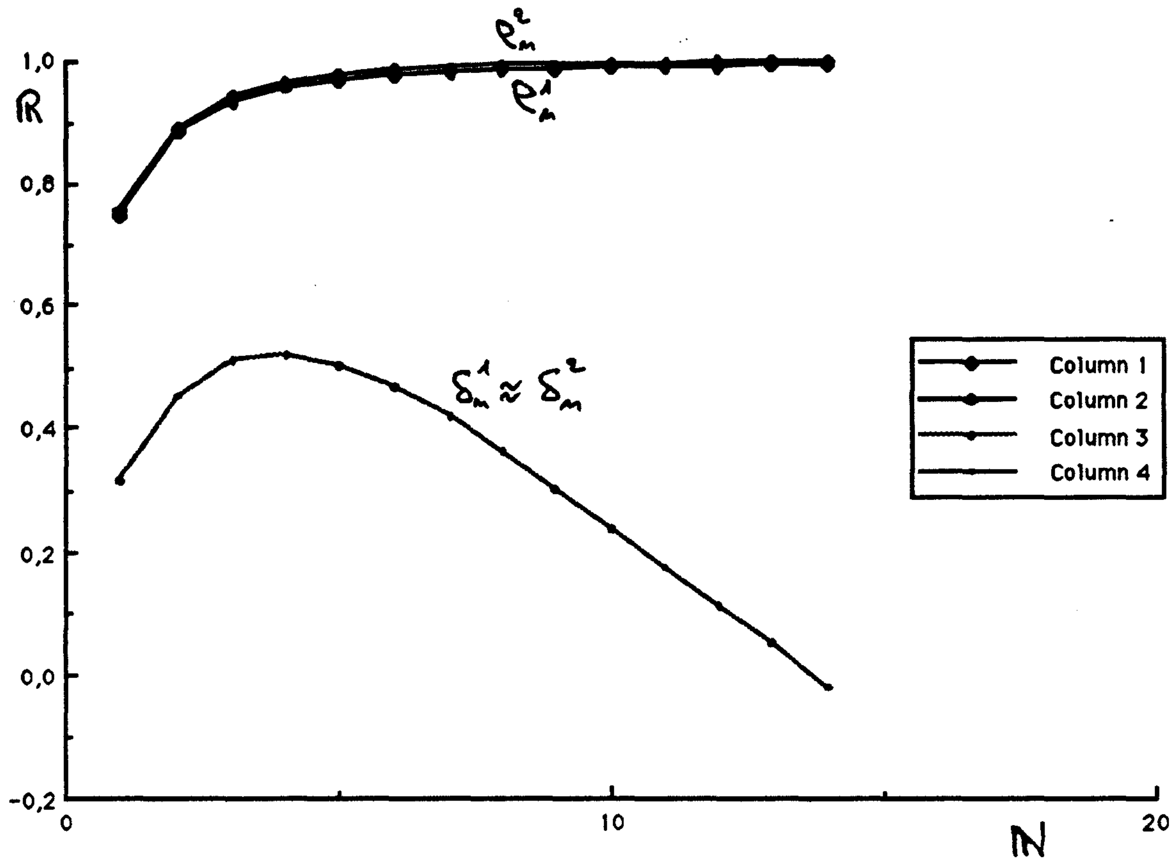


Exemple 2.4.3

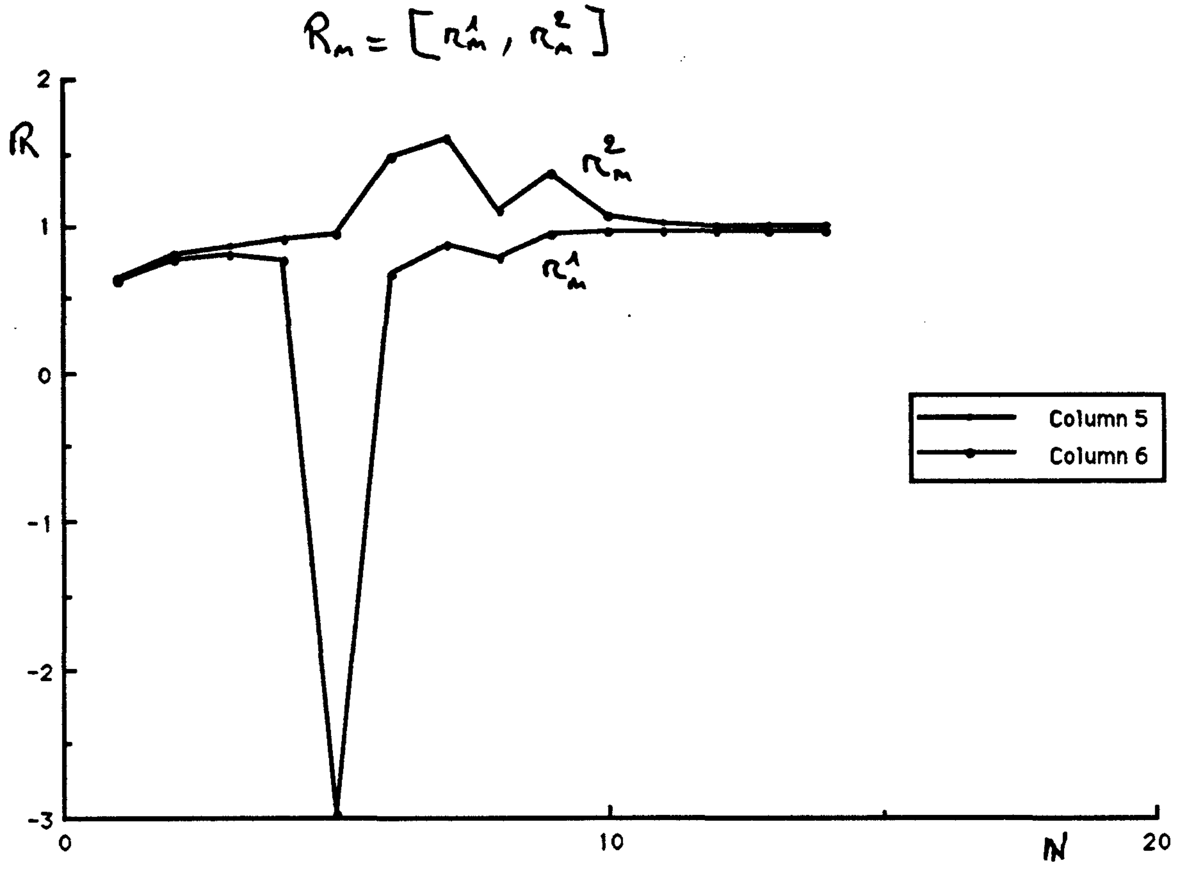
Pour $s_n = 1 + \frac{1}{n}$. Si $\varepsilon = 4 * 10^{-3}$ alors on a $N = 15$. La suite d'intervalles (S_n) converge vers S d'une façon non linéaire. Cet exemple montre que le Δ^2-Aitken n'améliore pas le comportement de la suite d'intervalles (S_n).

Les courbes suivantes représentent (E_n) et (D_n) respectivement la suite d'intervalles de rapport d'erreurs et celle de rapport de différences

$E_n = [\rho_n^1, \rho_n^2]$, $D_n = [\delta_n^1, \delta_n^2]$



La courbe suivante représentent (R_n), rapport d'accélération de (S_n) par rapport au Δ^2-Aitken.



Conclusion :

Lorsque l'indice de stationnarité N d'une suite d'intervalles est fini, il est inutile de travailler au delà de celui-ci, car on risquerait par exemple de faire des divisions par zéro ou de trouver des résultats non significatifs.

2.5 Suites d'indice de stationnarité infini

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité $N = +\infty$.

Remarque :

Dans le cas de dégénérésence du segment-limite S de (S_n), la limite au sens de Hausdorff et le segment-limite de (S_n) coinsident.

On pose $S_n = [s_n^1, s_n^2]$ avec $s_n^1 \leq s_n^2$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} s_n^1 = \lim_{n\to\infty} s_n^2 = s.$$

Pour les mêmes raisons que dans la première partie de ce chapitre, on suppose que (S_n) vérifie les hypothèses H et H' qui deviennent dans le cas d'indice de stationnarité N infini :

Hypothèses :

$$H : \forall n \in I\!N, \quad S_n \bigcap S = \emptyset (\text{ i.e., } s \notin S_n \text{ }).$$

$$H' : \forall n \in I\!N, \quad S_n \bigcap S_{n+i} = \emptyset \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Propriété 2.5.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$. Pour toute suite de nombres réels (s_n) définie par $\forall n \in I\!N, s_n \in S_n$, on a : (s_n) est convergente et $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

Preuve.

En effet, pour tout $n \in I\!N$ on a :

$$s_n^1 \leq s_n \leq s_n^2 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(s_n^1) \leq \lim_{n\to\infty}(s_n) \leq \lim_{n\to\infty}(s_n^2).$$

Or $\lim_{n\to\infty} s_n^1 = \lim_{n\to\infty} s_n^2 = s$, donc (s_n) est convergente et $\lim_{n\to\infty}(s_n) = s$.

■

2.5.1 Convergence linéaire

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$ (donc convergente au sens de Hausdorff).

On pose :

$$f : \quad I\!R^3 \longrightarrow I\!R$$

$$(x, y, z) \longmapsto \frac{x - y}{z - y}$$

$D_f = \{(x, y, z) \in I\!R^3 \text{ telque } y \neq z\}$

Rappelons qu'on a l'hypothèse H ($\forall n \in I\!N,\ S_n \bigcap S = \emptyset$) et l'hypothèse H' ($\forall n \in I\!N,\ S_n \bigcap S_{n+i} = \emptyset$ pour $i = 1,2$). Donc $\forall n \in I\!N,\ S_{n+1} \times S \times S_n \subset D_f$ et $S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n \subset D_f$.

On construit ainsi deux suites d'intervalles (E_n) et (D_n) définies par :

$$\forall n \in I\!N,\ E_n = f(S_{n+1} \times S \times S_n) \text{ et } D_n = f(S_{n+2} \times S_{n+1} \times S_n).$$

E_n et D_n représentent respectivement le rapport d'erreurs et le rapport de différences de (S_n).

Définition 2.5.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$. (S_n) sera dite à **convergence linéaire** *si :*

$$0 \notin Slim(E_n) \subset [-1,1[\text{ et } Slim(D_n) \subset [-1,1[.$$

Notation :

On note LIN, l'ensemble des suites d'intervalles de segment-limite dégénéré et d'indice de stationnarité infini, à convergence linéaire.

La propriété suivante que nous allons voir, permet d'approcher une généralisation du résultat connu dans le cas des suites réels : si la suite de rapport d'erreurs converge vers un point différent de 1, alors la suite de rapport de différences converge vers le même point.

Propriété 2.5.2

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$. Et soient E_n et D_n respectivement le rapport d'erreurs et le rapport de différences de (S_n). Si $Slim(E_n) \subset [0,1[$, alors on a :

$$Slim(E_n) \subseteq Slim(D_n).$$

<u>Preuve.</u>

Un élément δ_n de D_n peut s'écrire, $\delta_n = \varrho_n.\dfrac{1-\varrho_{n+1}}{1-\varrho_n}$.

Supposons que $Slim(E_n) = E = [\varrho^1, \varrho^2] \subset [0,1[$. On sait que ϱ^1 et ϱ^2 sont des valeurs d'adhérence respectivement de (ϱ_n^1) et (ϱ_n^2) donc il existe φ et ψ tels que :

$$\lim_{n\to\infty}(\varrho^1_{\varphi(n)}) = \varrho^1 \text{ et } \lim_{n\to\infty}(\varrho^2_{\psi(n)}) = \varrho^2$$

$\delta^1_{\varphi(n)} = \varrho^1_{\varphi(n)}.\dfrac{1-\varrho^1_{\varphi(n)+1}}{1-\varrho^1_{\varphi(n)}}$
et
$\delta^2_{\psi(n)} = \varrho^2_{\psi(n)}.\dfrac{1-\varrho^2_{\psi(n)+1}}{1-\varrho^2_{\psi(n)}}$
admettent respectivement,

$$\delta^1 = \varrho^1.\frac{1-\varrho'^1}{1-\varrho^1} \quad \text{et} \quad \delta^2 = \varrho^2.\frac{1-\varrho'^2}{1-\varrho^2}$$

comme valeurs d'adhérence, où ϱ'^1 et ϱ'^2 sont deux valeurs d'adhérence respectivement de $(\varrho^1_{\varphi(n)+1})$ et $(\varrho^2_{\psi(n)+1})$.

ϱ'^1 et ϱ'^2 appartiennent à $[\varrho^1, \varrho^2]$, donc $\delta^1 \leq \varrho^1$ et $\delta^2 \geq \varrho^2$. Or δ^1 et δ^2 appartiènnent à $Slim(D_n)$ donc $Slim(E_n) \subseteq Slim(D_n)$.

■

En se basant sur une démonstration analogue a celle ci-dessus, on peut voir l'équivalent dans le cas de suites d'intervalles du résultat connu (dans le cas de suites de nombres réels) cité juste avant la propriété ci-dessus.
Résultat :

On peut voir que lorsque $0,1 \notin Slim(E_n)$, alors on a :

$$Slim(E_n) \bigcap Slim(D_n) \neq \emptyset.$$

Remarque :

Toutes les suites d'intervalles appartenant à l'ensemble LIN, vérifient le résultat ci-dessus.

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini vérifiant les hypothèses H et H'. E_n et D_n respectivement le rapport d'erreurs et le rapport de différences de (S_n). On pose :

$$\varrho^{(i,j)}_{n+1} = \frac{s^i_{n+2}-s}{s^j_{n+1}-s} \qquad \varrho^{(j,k)}_n = \frac{s^j_{n+1}-s}{s^k_n - s} \text{ et } \delta^{(i,j,k)}_n = \frac{s^i_{n+2}-s^j_{n+1}}{s^j_{n+1}-s^k_n}.$$

On a alors la proposition suivante:
Proposition 2.5.1

S'il existe M tel que, $\forall n \geq M$, $E_n \subset [-1,1[$. Alors on a pour $n \geq M$:

$(D_n \subset [-1,1[) \Longleftrightarrow (\varrho^{(i,j)}_{n+1}\varrho^{(j,k)}_n - 2\varrho^{(j,k)}_n + 1 > 0$ Pour $i,j,k = 1,2)$,

où $\varrho_{n+1}^{(i,j)} = \dfrac{s_{n+2}^i - s}{s_{n+1}^j - s}$ *et* $\varrho_n^{(j,k)} = \dfrac{s_{n+1}^j - s}{s_n^k - s}$.

Preuve.

On sait que $D_n = [\min_{i,j,k=1,2}\{\delta_n^{(i,j,k)}\}, \max_{i,j,k=1,2}\{\delta_n^{(i,j,k)}\}]$ où $\delta_n^{(i,j,k)} = \dfrac{s_{n+2}^i - s_{n+1}^j}{s_{n+1}^j - s_n^k}$.

Or on peut écrire, $\delta_n^{(i,j,k)} = \varrho_n^{(j,k)}.\dfrac{1-\varrho_{n+1}^{(i,j)}}{1-\varrho_n^{(j,k)}}$. Où on a,

$\varrho_{n+1}^{(i,j)} = \dfrac{s_{n+2}^i - s}{s_{n+1}^j - s}$ et $\varrho_n^{(j,k)} = \dfrac{s_{n+1}^j - s}{s_n^k - s}$.

$(D_n \subset [-1,1[) \Longleftrightarrow (\delta_n^{(i,j,k)} \in [-1,1[$ pour $i,j,k = 1,2)$.

A partir de cette équivalence et en utilisant l'hypothèse $E_n \subset [-1,1[$, on montre la proposition.

■

Lemme 2.5.1

$(Slim(E_n) \subset]-1,1[) \Longrightarrow (\exists M$ *tel que :* $\forall n \geq M, E_n \subset]-1,1[)$.

Preuve.

On suppose $E_n = [\varrho_n^1, \varrho_n^2]$, on sait que $Slim(E_n) = [\underline{lim}(\varrho_n^1), \overline{lim}(\varrho_n^2)]$.

$\underline{lim}(\varrho_n^1) > -1 \Longrightarrow \exists M_1$ tel que : $\forall n \geq M_1, \varrho_n^1 > -1$
et
$\overline{lim}(\varrho_n^2) < 1 \Longrightarrow \exists M_2$ tel que : $\forall n \geq M_2, \varrho_n^2 < 1$.

On pose $M = max(M_1, M_2)$, on a $\forall n \geq M$, $E_n \subset]-1,1[$.

■

Reprenant les notations définies juste avant la proposition 2.5.1, on a alors la proposition suivante :

Proposition 2.5.2

Si $Slim(E_n) \subset [-1,1[$, *alors :*

$Slim(D_n) \subset [-1,1[$ ***si et seulement si toutes les valeurs d'adhérence de la suite*** $(V_n^{(i,j,k)})$ *définie par :*

$V_n^{(i,j,k)} = \left(\varrho_{n+1}^{(i,j)}\varrho_n^{(j,k)} - 2\varrho_n^{(j,k)} + 1\right)$

sont strictement positives et ceci pour tout $i,j,k=1,2$ *(i.e.,* $Slim(V_n^{(i,j,k)})>0$ *).*

Preuve.

On sait que $D_n = [\min_{i,j,k=1,2}\{\delta_n^{(i,j,k)}\}, \max_{i,j,k=1,2}\{\delta_n^{(i,j,k)}\}]$.

$(Slim(D_n) \subset [-1,1[) \iff (Slim\{\delta_n^{(i,j,k)}\} \subset [-1,1[$ pour $i,j,k=1,2)$

Or $\delta_n^{(i,j,k)} = \varrho_n^{(j,k)}.\dfrac{1-\varrho_{n+1}^{(i,j)}}{1-\varrho_n^{(j,k)}}$, donc toute valeur d'adhérence $\delta^{(i,j,k)}$ de la suite $(\delta_n^{(i,j,k)})$ peut s'écrire :

$\delta^{(i,j,k)} = \varrho^{(j,k)}.\dfrac{1-\varrho^{(i,j)}}{1-\varrho^{(j,k)}}$ où $\varrho^{(i,j)}$ et $\varrho^{(j,k)}$ sont des valeurs d'adhérence respectivement des suites $(\varrho_n^{(i,j)})$ et $(\varrho_n^{(j,k)})$. Avec l'hypothèse $Slim(E_n) \subset [-1,1[$ on a :

$$\left(\delta^{(i,j,k)} \in [-1,1[\right) \iff \left(\varrho^{(i,j)}\varrho^{(j,k)} - 2\varrho^{(j,k)} + 1 > 0\right).$$

Or toute valeur d'adhérence de la suite $(V_n^{(i,j,k)})$ est de la forme $V^{(i,j,k)} = \varrho^{(i,j)}\varrho^{(j,k)} - 2\varrho^{(j,k)} + 1$, d'où la démonstration de la proposition.

■

Posons $\varrho_{n+1}^{(i,j)} = \dfrac{s_{n+2}^i - s}{s_{n+1}^j - s}$ $\varrho_n^{(j,k)} = \dfrac{s_{n+1}^j - s}{s_n^k - s}$ et $\delta_n^{(i,j,k)} = \dfrac{s_{n+2}^i - s_{n+1}^j}{s_{n+1}^j - s_n^k}$. D'après la définition 2.5.1 de la convergence linéaire et la proposition 2.5.2, on a le théorème suivant :

Théorème 2.5.1

Soit (S_n) *une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré* $S = s \in I\!R$ *et d'indice de stationnarité infini vérifiant les hypothèses* H *et* H'*. Si la suite d'intervalles* (E_n) *de rapport d'erreurs de* (S_n) *vérifie* $0 \notin Slim(E_n) \subset [-1,1[$, *alors* (S_n) *est à convergence linéaire si et seulement si toutes les valeurs d'adhérence de la suite* $(V_n^{(i,j,k)})$ *définie par :*

$$V_n^{(i,j,k)} = \left(\varrho_{n+1}^{(i,j)}\varrho_n^{(j,k)} - 2\varrho_n^{(j,k)} + 1\right)$$

sont strictement positives et ceci pour tout $i,j,k=1,2$ *(i.e.,* $Slim(V_n^{(i,j,k)})>0$ *).*

2.5.2 Transformation de suites d'intervalles

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini. On suppose qu'on est dans le cas de transformations de suites d'intervalles T, n'utilisant pas de suites auxiliaires $(Z_n^i)_{1\leq i\leq q}$ $(q = 0)$ et utilisant $p+1$ termes successifs de (S_n).

$$\begin{array}{rlcl} T: & S_n \times S_{n+1} \times ... \times S_{n+p} \subset \mathbb{R}^{p+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s_{n,p} = (s_n, ..., s_{n+p}) & \longmapsto & t_n = T(s_{n,p}) \end{array}$$

(voir paragraphe II de ce chapitre). T fonction continue sur son domaine de définition D_T.

Le lemme et la proposition qui suivent, nous donnent des résultats dans le cas où $T(s, s, ..., s)$ existe.

Lemme 2.5.2

Supposons que $T(s, s, ..., s)$ existe, T continue en ce point et $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \times S_{n+1} \times ... \times S_{n+p} \subset D_T$. Alors pour toute suite de vecteurs (τ_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \tau_n \in S_n \times S_{n+1} \times ... \times S_{n+p},$$

(τ_n) est convergente et $\lim_{n\to\infty} T(\tau_n) = T(s, s, ..., s)$.

Preuve.

On a $\lim_{n\to\infty} (\tau_n) = \tau = (s, s, ..., s)$, donc d'après la continuité de T, on a :

$$\lim_{n\to\infty} T(\tau_n) = T(s, s, ..., s).$$

■

Proposition 2.5.3

Supposons que $T(s, s, ..., s)$ existe, T continue en ce point et $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \times S_{n+1} \times ... \times S_{n+p} \subset D_T$. On considère la suite d'intervalles (T_n) Transformée de la suite (S_n) par T, $T_n = T(S_n \times S_{n+1} \times ... \times S_{n+p})$. Alors le segment-limite de (T_n) est est dégénéré et $Slim(T_n) = \lim_{n\to\infty} (T_n) = t = T(s, s, ..., s) \in \mathbb{R}$.

Preuve.

Posons $T_n = [t_n^1, t_n^2]$ où $t_n^i = T(\tau_n^i)$ pour $i = 1, 2$, avec $\tau_n^i = (s_{0,n}^i, s_{1,n}^i, ..., s_{p,n}^i) \in S_n \times S_{n+1} \times ... \times S_{n+p}$. D'après le lemme précédent on a :

$$\lim_{n\to\infty} T(\tau_n^i) = T(s, s, ..., s) \text{ pour } i = 1, 2.$$

Par conséquent $\lim_{n\to\infty} (T_n) = t = T(s, s, ..., s)$.

■

Autre démonstration :

On donne la démonstration pour $p = 1$. Soit $T_n = [t_n^1, t_n^2]$ avec $t_n^1 = T(\alpha_n, \beta_n)$, $t_n^2 = T(\gamma_n, \delta_n)$ où $\alpha_n, \beta_n \in S_n$ and $\gamma_n, \delta_n \in S_{n+1}$

$$\begin{aligned} |\alpha_n - s| &\leq |\alpha_n - s_n^1| + |s_n^1 - s| \\ &\leq |s_n^2 - s_n^1| + |s_n^1 - s| \\ &\leq |s_n^2 - s| + |s - s_n^1| + |s_n^1 - s| \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists M(\varepsilon)$ tel que $\forall n > M(\varepsilon)$, $|s_n^i - s| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour $i = 1, 2$.
Alors on a $|\alpha_n - s| < \varepsilon$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = s^*$.

De la même façon on montre que :

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = s, \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = s \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = s.$$

D'après le lemme 2.5.2 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^i = t = T(s, s)$ pour $i = 1, 2$. C'est ce qu'il faut démontrer.

■

Rappel :

On rappele la définition de la régularité telle qu'elle a été définie dans le paragraphe 2.3 de ce chapitre (définition 2.3.2) : T sera dite régulière pour (S_n) si la suite d'intervalles (T_n) transformée de (S_n) par T vérifie $Slim(T_n) = Slim(S_n)$.

Remarque :

Dans ce paragraphe on travaille avec des suites d'intervalles (S_n) de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$, donc la régularité d'une transformation T pour (S_n) revient à dire que la suite d'intervalles (T_n) transformée de (S_n) par T est convergente au sens de Hausdorff et sa limite c'est s.

Définition 2.5.2

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini. On dit que la transformation T de (S_n) est **contractante**, *si la suite d'intervalles (R_n) définie par :*

$$R_n = \left\{ r_n = \frac{T(s_n, s_{n+1}, ..., s_{n+p}) - s}{s_n - s},\ s_{n+i} \in S_{n+i}\ i = 0, ..., p \right\} \textit{ vérifie :}$$

$$Slim(R_n) \subset]-1,+1[.$$

2.5.3 Procédé Δ^2-Aitken

Le procédé Δ^2-Aitken est la transformation représentée par la fonction :

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{x.z-(y)^2}{z-2.y+x} \end{array}$$

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in \mathbb{R}$ et d'indice de stationnarité infini vérifiant les hypothèses H et H'. D_n le rapport de différence de (S_n). Alors on a la propriété suivante :

Propriété 2.5.3

Si $1 \notin Slim(D_n)$, alors la suite d'intervalles (T_n) définie par $T_n = T(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2})$ admet un segment-limite dégénéré et $Slim(T_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(T_n) = s$.

Preuve.

On a :

$$T(x,y,z) = \frac{x.z-(y)^2}{z-2.y+x} = x - \frac{x-y}{\dfrac{z-y}{x-y}+1}.$$

Donc,

$$T_n = \left\{T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = s_n - \frac{s_n - s_{n+1}}{1-\frac{s_{n+2}-s_{n+1}}{s_{n+1}-s_n}},\ s_{n+i} \in S_{n+i}\ 0 \le i \le 2\right\}$$

$$T_n = \left\{s_n - \frac{s_n - s_{n+1}}{1-\delta_n},\ s_{n+i} \in S_{n+i}\ 0 \le i \le 2\right\}.$$

On a $t_n = s_n - \dfrac{s_n - s_{n+1}}{1-\delta_n}$ on peut écrire que, $T_n \subseteq S_n - \dfrac{S_n - S_{n+1}}{1-D_n}$. En passant au segment-limite on a,

$$Slim(T_n) \subseteq s - \frac{s-s}{1-Slim(D_n)}.$$

Or d'après les hypothèses $1 \notin Slim(D_n)$ donc $Slim(T_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(T_n) = s$.

■

Comme conséquence immédiate de cette propriété, on a le résultat suivant :

Proposition 2.5.4

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini vérifiant les hypothèses H et H'. (D_n) suite de rapport de différences de (S_n). Si $1 \notin Slim(D_n)$, alors la transformation Δ^2-Aitken est régulière pour (S_n).

Théorème 2.5.2

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini vérifiant les hypothèses H et H'. Si (S_n) est à convergence linéaire, alors on a :

Le procédé Δ^2-Aitken est une contraction pour la suite d'intervalles (S_n) si et seulement si, pour toute suite réelle $(s_n) \in (S_n)$, la suite réelle $(W^{(i,j)}(s_n))$ (où $i, j = 1, 2$) définie par :

$$W^{(i,j)}(s_n) = 2\varrho_n^{(j,.)}(s_n)\left[\varrho_n^{(j,.)}(s_n) - \varrho_{n+1}^{(i,j)}\right] - \left(\varrho_n^{(j,.)}(s_n) - 1\right)^2$$

ne possède que des valeurs d'adhérence strictement négatives (i.e., $Slim\{W^{(i,j)}(s_n)\} < 0$).

$$\text{où} \quad \varrho_n^{(j,.)}(s_n) = \frac{s_{n+1}^j - s}{s_n - s} \quad \text{et} \quad \varrho_{n+1}^{(i,j)} = \frac{s_{n+2}^i - s}{s_{n+1}^j - s}.$$

<u>Preuve</u>

On pose $R_n = \left\{ r_n = \dfrac{T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - s}{s_n - s},\ s_{n+i} \in S_{n+i}\ i = 0, 1, 2 \right\}$.

Pour $s_n \in S_n$ on a :

$$R(s_n) = \left\{ r(s_n) = \frac{T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - s}{s_n - s},\ s_{n+1} \in S_{n+1},\ s_{n+2} \in S_{n+2} \right\}$$

$$R(s_n) = \frac{T(\{s_n\} \times S_{n+1} \times S_{n+2}) - s}{s_n - s}$$

$$= [r^1(s_n), r^2(s_n)]$$

où $r^1(s_n) = \min\limits_{i,j=1,2}\{r^{(i,j)}(s_n)\}$ et $r^2(s_n) = \max\limits_{i,j=1,2}\{r^{(i,j)}(s_n)\}$ avec :

$$r^{(i,j)}(s_n) = \varrho_n^{(j,.)}(s_n).\frac{\varrho_{n+1}^{(i,j)} - \varrho_n^{(j,.)}(s_n)}{\varrho_n^{(j,.)}(s_n).\varrho_{n+1}^{(i,j)} - 2.\varrho_n^{(j,.)}(s_n) + 1}$$

où $\varrho_n^{(j,.)}(s_n) = \dfrac{s_{n+1}^j - s}{s_n - s}$ et $\varrho_{n+1}^{(i,j)} = \dfrac{s_{n+2}^i - s}{s_{n+1}^j - s}$.

On a $R_n = \bigcup_{s_n \in S_n} R(s_n)$, donc on a :

$$R_n \subset]-1,1[\iff \forall s_n \in S_n,\ R(s_n) \subset]-1,1[$$

$$\iff \forall s_n \in S_n,\ -1 < r^{(i,j)}(s_n) < 1 \text{ pour } i,j = 1,2.$$

Et par conséquence on a :

$$Slim(R_n) \subset]-1,1[\iff \forall s_n \in S_n,\ Slim(R(s_n)) \subset]-1,1[$$

$$\iff \forall s_n \in S_n,\ Slim\{r^{(i,j)}(s_n)\} \subset]-1,1[\text{ pour } i,j = 1,2.$$

Soit (s_n) suite réelle telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n \in S_n$ et soient $i,j = 1,2$. $Slim\{r^{(i,j)}(s_n)\} \subset]-1,1[$ équivaut à : toute valeur d'adhérence de la suite $(r^{(i,j)}(s_n))$ est dans $]-1,1[$. Or toute valeur d'adhérence de $(r^{(i,j)}(s_n))$ est de la forme :

$$r^{(i,j)} = \varrho^{(j,.)}.\frac{\varrho^{(i,j)} - \varrho^{(j,.)}}{\varrho^{(j,.)}.\varrho^{(i,j)} - 2.\varrho^{(j,.)} + 1}$$

où $\varrho^{(j,.)}$ et $\varrho^{(i,j)}$ sont des valeurs d'adhérence respectivement des suites réelles $(\varrho_n^{(j,.)}(s_n))$ et $(\varrho_{n+1}^{(i,j)})$. Or d'après la linéarité de (S_n) on a $\varrho^{(j,.)}.\varrho^{(i,j)} - 2.\varrho^{(j,.)} + 1 > 0$. Donc on a,

$$r^{(i,j)} < 1 \iff \left[\varrho^{(j,.)}\right]^2 - 2.\varrho^{(j,.)} + 1 = \left(\varrho^{(j,.)} - 1\right)^2 > 0$$

ce qui est toujours vrai car $\varrho^{(j,.)} \in [-1,1[$.

$$r^{(i,j)} > -1 \iff W^{(i,j)} = 2.\varrho^{(j,.)}.\left[\varrho^{(j,.)} - \varrho^{(i,j)}\right] - \left(\varrho^{(j,.)} - 1\right)^2 < 0$$

ceci équivaut à $Slim\{w^{(i,j)}(s_n)\} < 0$.

■

Proposition 2.5.5

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in \mathbb{R}$ et d'indice de stationnarité infini vérifiant les hypothèses H et H'. Si (S_n) est à convergence linéaire alors le rapport d'accélération (R_n) de la suite d'intervalles (S_n) par rapport au procédé Δ^2-Aitken vérifie : $0 \in Slim(R_n)$

<u>Preuve.</u>

On pose $R_n = \left\{ r_n = \dfrac{T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - s}{s_n - s},\ s_{n+i} \in S_{n+i}\ i = 0,1,2 \right\}$.

Pour $s_n \in S_n$ on a :

$$R(s_n) = \left\{ r(s_n) = \frac{T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - s}{s_n - s},\ s_{n+1} \in S_{n+1},\ s_{n+2} \in S_{n+2} \right\}$$

$$R(s_n) = \frac{T(\{s_n\} \times S_{n+1} \times S_{n+2}) - s}{s_n - s}$$

$$= [r^1(s_n), r^2(s_n)]$$

où $r^1(s_n) = \min_{i,j=1,2} \{r^{(i,j)}(s_n)\}$ et $r^2(s_n) = \max_{i,j=1,2} \{r^{(i,j)}(s_n)\}$ avec :

$$r^{(i,j)}(s_n) = \varrho_n^{(j,.)}(s_n). \frac{\varrho_{n+1}^{(i,j)} - \varrho_n^{(j,.)}(s_n)}{\varrho_n^{(j,.)}(s_n).\varrho_{n+1}^{(i,j)} - 2.\varrho_n^{(j,.)}(s_n) + 1}$$

où $\varrho_n^{(j,.)}(s_n) = \dfrac{s_{n+1}^j - s}{s_n - s}$ et $\varrho_{n+1}^{(i,j)} = \dfrac{s_{n+2}^i - s}{s_{n+1}^j - s}$.

On a $R_n = \bigcup_{s_n \in S_n} R(s_n)$. Or toute valeur d'adhérence de $(r^{(i,j)}(s_n))$ est de la forme :

$$r^{(i,j)} = \varrho^{(j,.)}. \frac{\varrho^{(i,j)} - \varrho^{(j,.)}}{\varrho^{(j,.)}.\varrho^{(i,j)} - 2.\varrho^{(j,.)} + 1}$$

où $\varrho^{(j,.)}$ et $\varrho^{(i,j)}$ sont des valeurs d'adhérence respectivement des suites réelles $(\varrho_n^{(j,.)}(s_n))$ et $(\varrho_{n+1}^{(i,j)})$. Or d'après la linéarité de (S_n) on a $0 \notin Slim(E_n)$ (supposons par exemple que $Slim(E_n) > 0$) donc $\varrho^{(j,.)} > 0$. D'autre part $\varrho^{(j,.)}.\varrho^{(i,j)} - 2.\varrho^{(j,.)} + 1 > 0$ et $(\varrho^{(i,j)} - \varrho^{(j,.)})$ change de signe suivant qu'on choisit par exemple (i,j) tel que $\varrho^{(i,j)} = \varrho^1$ ou bien $\varrho^{(i,j)} = \varrho^2$, où ϱ^1 et ϱ^2 sont respectivement la borne inférieure et supérieure de $Slim(E_n)$. $Slim(E_n) = [\varrho^1, \varrho^2]$, $(\varrho^1 - \varrho^{(j,.)}) \leq 0$ et $(\varrho^2 - \varrho^{(j,.)}) \geq 0$. Donc $0 \in Slim(R_n)$.

■

Exemples Numériques :

Pour les exemples suivants, on construit la suite d'intervalles (S_n) par la donnée d'une suite réelle (s_n) qui converge vers s et d'une précision $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. $S_n = [s_n^1, s_n^2]$ est calculé par:

$$S_n = [s_n - \varepsilon * min(|s_n - s_{n+1}|, |s_n - s|), s_n + \varepsilon * min(|s_n - s_{n+1}|, |s_n - s|)].$$

La suite d'intervalles (S_n) converge vers $S = s \in \mathbb{R}$. Par construction l'indice de stationnarité N est infini.

Dans nos programmes $R_n = \bigcup_{x \in S_n} R(x)$ sera approché par $R_n = R(s_n^1) \cup R(s_n) \cup R(s_n^2)$.

Exemple 2.5.1

On prend $s_1 = 0.9$, $s_n = 1 + 0.1 * (s_{n-1} - 1)^2 + 0.2 * (s_{n-1} - 1)$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$. La suite d'intervalles (S_n) converge linéairement vers $S = s = 1$. Cet exemple montre que le

Δ^2-Aitken est une contraction pour la suite d'intervalles (S_n).

interval	a	b
S_1	$0.8730000000000000D+00$	$0.9270000000000000D+00$
T_1	$0.9960380896895040D+00$	$0.1013706244190672D+01$
E_1	$0.1096165354330720D+00$	$0.3298452054794533D+00$
D_1	$0.8094558128005640D-01$	$0.4357811198416050D+00$
R_1	$-.1877567697352404D+00$	$0.4232806363004883D-01$
S_{10}	$0.9999999391180790D+00$	$0.9999999647525720D+00$
T_{10}	$0.9999999969500190D+00$	$0.1000000009022860D+01$
E_{10}	$0.1157894706897204D+00$	$0.3454545356042660D+00$
D_{10}	$0.8571428170739900D-01$	$0.4666666461346460D+00$
R_{10}	$-.2559863435816530D+00$	$0.6345577446483250D-01$
S_{11}	$0.9999999878236160D+00$	$0.9999999929505143D+00$
T_{11}	$0.1000000000000000D+01$	$0.1000000000000000D+01$
E_{11}	$0.1157894740681200D+00$	$0.3454545569083591D+00$
D_{11}	$0.8571429278526254D-01$	$0.4666667115804650D+00$
R_{11}	$0.0000000000000000D+00$	$0.0000000000000000D+00$

<u>Exemple 2.5.2</u>

Pour $s_n = e^{-n}$ et $\varepsilon = \frac{1}{5}$, on a (S_n) converge linéairement vers $S = s = 0$.

Cet exemple montre que le Δ^2-Aitken est une contraction pour la suite d'intervalles (S_n).

interval	a	b
S_1	$0.3213706095844763D+00$	$0.4143882727584082D+00$
T_1	$-.1544373329966300D+00$	$0.3957874948861140D-01$
E_1	$0.2853016072966660D+00$	$0.4743586428375320D+00$
D_1	$0.2098316235087752D+00$	$0.6449708627019840D+00$
R_1	$-.4805583596966533D+00$	$0.9645968202006841D-01$
S_{100}	$0.3249768675051440D-43$	$0.4190383276990232D-43$
T_{100}	$-.1561703503876283D-43$	$0.4002288213352861D-44$
E_{100}	$0.2853016072966660D+00$	$0.4743586428375320D+00$
D_{100}	$0.2098316235087752D+00$	$0.6449708627019840D+00$
R_{100}	$-.4805583596966530D+00$	$0.9645968202006844D-01$
S_{190}	$0.2662864554842041D-82$	$0.3433605347101670D-82$
T_{190}	$-.1279661822569250D-82$	$0.3279480014506180D-83$
E_{190}	$0.2853016072966660D+00$	$0.4743586428375320D+00$
D_{190}	$0.2098316235087753D+00$	$0.6449708627019840D+00$
R_{190}	$-.4805583596966530D+00$	$0.9645968202006840D-01$

Exemple 2.5.3

On prend $s_1 = 1$, $s_n = s_{n-1} - 0.005 * (s_{n-1})^2$ et $\varepsilon = \frac{1}{3}$. La suite d'intervalles (S_n) converge vers s d'une façon non linéaire. Cet exemple montre que le Δ^2-Aitken n'est pas une contraction pour la suite d'intervalles (S_n). En effet $\forall n \in I\!N$ $1 \in R_n$.

interval	a	b
S_1	0.9983333333333334D+00	0.1001666666666670D+01
T_1	0.4979204764353093D+00	0.1009489145043870D+01
E_1	0.9916971297836940D+00	0.9983138981636060D+00
D_1	0.2003699871268230D+00	0.4891505982809250D+01
R_1	0.4987393097815321D+00	0.1007809462606191D+01
S_{25}	0.8910752369358462D+00	0.8937298445850320D+00
T_{25}	0.4445448489273010D+00	0.8999311109437940D+00
E_{25}	0.9925875803565480D+00	0.9984971838110770D+00
D_{25}	0.2003330432969760D+00	0.4903036670507130D+01
R_{25}	0.4988759770691540D+00	0.1006938636318720D+01
S_{50}	0.8014287960780274D+00	0.8035754950568284D+00
T_{50}	0.3999113558805552D+00	0.8085711869706813D+00
E_{50}	0.9933321124045370D+00	0.9986499788051160D+00
D_{50}	0.2003016485244613D+00	0.4912697026787181D+01
R_{50}	0.4989899784151141D+00	0.1006216829587990D+01

2.5.4 Suites à convergence logarithmique

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini. Et soit (E_n) la suite d'intervalles de rapports d'erreurs de (S_n).

$$E_n = f(S_{n+1} \times S \times S_n) \text{ où } f(x,y,z) = \frac{x-y}{z-y}.$$

Définition 2.5.3

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini. E_n le rapport d'erreurs de (S_n). On dit que (S_n) est à **convergence logarithmique** *si la suite d'intervalles (E_n) vérifie $Slim(E_n) = 1$.*

Remarque :

On a voulu donner ici une définition de la convergence logarithmique de suites d'intervalles, généralisant celle de suites de nombres réelles. On se rend vite compte de la difficulté d'obtenir des propriétés théoriques, du fait que 1 peut appartenir à E_n.

<u>Exemple :</u>

Considérons un ouvert O de $I\!R$, un réelle s appartenant à cet ouvert, un intervalle $S_0 = [s_0^1, s_0^2]$ ($s_0^1 < s_0^2$) inclus dans O, une application $f : O \subset I\!R \longrightarrow I\!R$ de classe C^p (le p qu'il faut).

On suppose que f vérifie :

$$1: \ f(s) = s$$

$$2: \ f'(s) = 1$$

$$3: \ f' \text{ ne s'annule pas dans } O$$

$$4: \ f' \text{ admet un minimum local en } s$$

((3) et (4)) $\Longrightarrow$ (f est strictement croissante sur l'ouvert O.)

((2) et (4)) $\Longrightarrow$ ($f' < 1$ sur un côté de s dans O. et $f' > 1$ de l'autre côté).

(On veut dire par un côté de s dans O. l'un des deux ouverts suivants : $O_1 = \{x \in O \text{ tel que } x < s\}$; $O_2 = \{x \in O \text{ tel que } x > s\}$).

On va choisir S_0 inclus dans le côté de s où $f' < 1$. On va supposer en plus que les extrémités de l'intervalle $S_0 = [s_0^1, s_0^2]$ vérifient $s_0^2 < f(s_0^1)$.

Construisons maintenant la suite d'intervalles, (S_n) définie par :

$$\begin{aligned} S_0 &= [s_0^1, s_0^2] \\ S_{n+1} &= f(S_n) \end{aligned}$$

On suppose que f et S_0 vérifient les hypothèses précédents. f croissante, donc $S_{n+1} = f(S_n) = f([s_n^1, s_n^2]) = [f(s_n^1), f(s_n^2)]$ ($s_{n+1}^1 = f(s_n^1)$ et $s_{n+1}^2 = f(s_n^2)$).

L'hypothèse $s_0^2 < f(s_0^1) = s_1^1$ nous permêt d'avoir $S_n \bigcap S_{n+1} = \emptyset$et $s \notin S_n$. On a alors (s_n^1) et (s_n^2) convergent logarithmiquement vers s [9], $Slim(S_n) = \lim_{n\to\infty}(S_n) = S = s \in I\!R$ et on peut énoncer le lemme suivant :

Lemme 2.5.3

$$Slim(E_n) = [1, 1] = 1.$$

<u>Preuve.</u>

f est croissante et $s_0^2 < f(s_0^1) = s_1^1$ donc $f(s_0^2) = s_1^2 < f(s_1^1) = s_2^1$ et par reccurence on a, $\forall n \in I\!N \; s_n^2 < s_{n+1}^1$, c'est à dire $S_n < S_{n+1}$.

$E_n = \left[\min_{i,j=1,2}\left\{\varrho_n^{(i,j)}\right\}, \max_{i,j=1,2}\left\{\varrho_n^{(i,j)}\right\}\right]$ où $\varrho_n^{(i,j)} = \dfrac{s_{n+1}^j - s}{s_n^i - s}$.

On a :

$$\varrho_n^{(1,1)} = \frac{s_{n+1}^1 - s}{s_n^1 - s} \quad \varrho_n^{(1,2)} = \frac{s_{n+1}^2 - s}{s_n^1 - s}$$

$$\varrho_n^{(2,1)} = \frac{s_{n+1}^1 - s}{s_n^2 - s} \quad \varrho_n^{(2,2)} = \frac{s_{n+1}^2 - s}{s_n^2 - s}.$$

$$(s - s_{n+1}^1 > s - s_{n+1}^2) \implies (\varrho_n^{(1,1)} > \varrho_n^{(1,2)} \text{ et } \varrho_n^{(2,1)} > \varrho_n^{(2,2)})$$

$$(s - s_n^1 > s - s_n^2) \implies (\varrho_n^{(2,1)} > \varrho_n^{(1,1)} \text{ et } \varrho_n^{(2,2)} > \varrho_n^{(1,2)}).$$

Donc on a :

$$\min_{i,j=1,2}\left\{\varrho_n^{(i,j)}\right\} = min\left\{\varrho_n^{(1,2)}\ ,\ \varrho_n^{(2,2)}\right\} = \varrho_n^{(1,2)}$$

et

$$\max_{i,j=1,2}\left\{\varrho_n^{(i,j)}\right\} = max\left\{\varrho_n^{(1,1)}\ ,\ \varrho_n^{(2,1)}\right\} = \varrho_n^{(2,1)}.$$

Donc $E_n = \left[\varrho_n^{(1,2)}, \varrho_n^{(2,1)}\right]$.

Montrons que $Slim(E_n) = 1$:

Pour cela il faut montrer que :

$$Slim\left\{\varrho_n^{(1,2)}\right\} = \lim_{n\to\infty}(\varrho_n^{(1,2)}) = 1$$

et

$$Slim\left\{\varrho_n^{(2,1)}\right\} = \lim_{n\to\infty}(\varrho_n^{(2,1)}) = 1.$$

$$\begin{aligned}\varrho_n^{(1,2)} &= \frac{s_{n+1}^2 - s}{s_n^1 - s}\\ &= \frac{s_{n+1}^2 - s}{s_n^2 - s}.\frac{s_n^2 - s}{s_{n-1}^2 - s}.\frac{s_{n-1}^2 - s}{s_n^1 - s}\end{aligned}$$

La suite (s_n^2) est à convergence logarithmique donc :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_{n+1}^2 - s}{s_n^2 - s} = \lim_{n\to\infty}\frac{s_n^2 - s}{s_{n-1}^2 - s} = 1.$$

On pose, $v_n^{(1,2)} = \dfrac{s_{n-1}^2 - s}{s_n^1 - s}$ pour $n \geq 1$, on a alors $Slim(\varrho_n^{(1,2)}) = Slim(v_n^{(1,2)})$.

$$\forall n \in I\!N,\ \varrho_n^{(1,2)} = \frac{s_{n+1}^2 - s}{s_n^1 - s} < 1 \implies Slim(\varrho_n^{(1,2)}) \leq 1$$
et
$$\forall n \in I\!N,\ v_n^{(1,2)} = \frac{s_{n-1}^2 - s}{s_n^1 - s} > 1 \implies Slim(v_n^{(1,2)}) \geq 1.$$
D'où $Slim(\varrho_n^{(1,2)}) = 1$.

D'autres parts :

$$\begin{aligned}\varrho_n^{(2,1)} &= \frac{s_{n+1}^1 - s}{s_n^2 - s} \\ &= \frac{s_{n+1}^1 - s}{s_{n+1}^2 - s}.\frac{s_{n+1}^2 - s}{s_n^2 - s}.\end{aligned}$$

Posons $u_n^{(2,1)} = \dfrac{s_{n+1}^1 - s}{s_{n+1}^2 - s}$, on a $\varrho_n^{(2,1)} = u_n^{(2,1)}.\varrho_n^{(2,2)}$. Or $\lim\limits_{n\to\infty}(\varrho_n^{(2,2)}) = 1$, donc $Slim(\varrho_n^{(2,1)}) = Slim(u_n^{(2,1)})$.

$$\forall n \in I\!N,\ \varrho_n^{(2,1)} = \frac{s_{n+1}^1 - s}{s_n^2 - s} < 1 \implies Slim(\varrho_n^{(2,1)}) \leq 1$$
et
$$\forall n \in I\!N,\ u_n^{(2,1)} = \frac{s_{n+1}^1 - s}{s_{n+1}^2 - s} \geq 1 \implies Slim(u_n^{(2,1)}) \geq 1.$$
Donc $Slim(\varrho_n^{(2,1)}) = 1$. On en conclus que $Slim(E_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(E_n) = 1$.

■

Comme conséquence directe de ce lemme, on énonce la proposition suivante :

Proposition 2.5.6

La suite d'intervalles construite par $S_{n+1} = f(S_n)$ et $S_0 \in S(I\!R)$ (f et S_0 vérifiant les hypothèses précédents) est à convergence logarithmique.

2.5.5 Suites d'intervalles plus fines et plus larges

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini.

Définitions 2.5.4

1: On dit qu'une suite $(T_n) \in S(I\!R)$ est <u>plus fine</u> que (S_n) si on a : $\forall n \in I\!N$, $T_n \subset S_n$.

2: Une suite $(T_n) \in S(\mathbb{R})$ sera dite **plus large** *que (S_n) si on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \subset T_n$.*

Proposition 2.5.7

Une suite $(T_n) \in S(\mathbb{R})$ plus fine que (S_n) est elle même convergente et $\lim_{n\to\infty}(T_n) = \lim_{n\to\infty}(S_n) = s$.

Preuve.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \subseteq S_n \implies Slim(T_n) \subseteq Slim(S_n) = \lim_{n\to\infty}(S_n) = s$$

$$\implies Slim(T_n) = \lim_{n\to\infty}(T_n) = s.$$

■

Remarque :

Si l'indice de stationnarité de (S_n) est infini, alors l'indice de stationnarité de toute suite plus fine est infini.

Proposition 2.5.8

Supposons que (S_n) soit à convergence linéaire, alors toute suite (T_n) plus fine est elle même à convergence linéaire.

Preuve.

Soient E_n et E'_n les rapports d'erreur respectivement de (S_n) et (T_n). On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n \subseteq S_n \implies \forall n \in \mathbb{N},\ E'_n \subseteq E_n$$

Donc $Slim(E'_n) \subseteq Slim(E_n)$. De la même façon, si on considère D_n et D'_n les rapports de diffèrence respectivement de (S_n) et (T_n), on a $Slim(D'_n) \subseteq Slim(D_n)$. (S_n) est à convergence linéaire, donc $0 \notin Slim(E_n) \subseteq [-1,1[$ et $Slim(D_n) \subseteq [-1,1[$, ce qui sera aussi vrai pour (E'_n) et (D'_n). Donc (T_n) est elle même à convergence linéaire.

■

Proposition 2.5.9

Soit T une transformation de suites d'intervalles. Si T est une contraction pour une suite plus large que (S_n), alors T est une contraction pour (S_n).

Preuve.

Soit $(\overline{S}_n)$ une suite plus large que (S_n), $(\overline{R}_n)$ son rapport d'accélération par rapport à T, On a :

$$\forall n \in I\!N,\ S_n \subseteq \overline{S}_n \implies \forall n \in I\!N,\ R_n \subseteq \overline{R}_n$$

$$\implies \forall n \in I\!N,\ Slim(R_n) \subseteq Slim(\overline{R}_n).$$

Supposons que T est une contraction pour $(\overline{S}_n)$, alors on a $Slim(\overline{R}_n) \subset]-1,1[$. Donc on en déduit que $Slim(R_n) \subseteq]-1,1[$.

∎

Proposition 2.5.10

Soit T une transformation de suites d'intervalles telle que T est une contraction pour (S_n). Alors il existe une suite d'intervalles $(\overline{S}_n)$ plus large que (S_n) telle que T est une contraction pour $(\overline{S}_n)$.

<u>Preuve.</u>

$$T : (S_n \times S_{n+1} \times ... \times S_{n+p}) \times (Z_n^1 \times Z_n^2 \times ... \times Z_n^q) \subset (I\!R^{p+1} \times I\!R^q) \longrightarrow I\!R$$

$$I\!P_{n,p} = S_n \times S_{n+1} \times ... \times S_{n+p} \text{ et } Z\!\!Z_{n,q} = Z_n^1 \times Z_n^2 \times ... \times Z_n^q.$$

Considérons la fonction r définie par :

$$\begin{array}{rlcl} r: & I\!P_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q} \subset I\!R^{p+1} \times I\!R^q & \longrightarrow & I\!R \\ & (s_{n,p}, z_{n,q}) & \longmapsto & r(s_{n,p}, z_{n,q}) = \dfrac{T(s_{n,p}, z_{n,q}) - s}{s_n - s}. \end{array}$$

La suite (R_n) représentant le rapport d'accélération de (S_n) est donnée par : $R_n = r(I\!P_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q})$.

$R_n \subset \overline{R}_n = r(\overline{I\!P}_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q})$ où $\overline{I\!P}_{n,p} = \overline{S}_n \times \overline{S}_{n+1} \times ... \times \overline{S}_{n+p}$.

T une contraction pour (S_n) donc $Slim(R_n) \subset]-1,1[$, ce qui est équivalent à l'existence d'un rang M tel que, pour tout $n \geq M$ $R_n \subset]-1,1[$.

Pour $n \geq M$ on a :

$R_n = r(I\!P_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q}) \subset]-1,1[$. Donc si on note par $O \subset I\!R^{p+q+1}$ l'ouvert $r^{-1}(]-1,1[)$, on a $I\!P_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q}$ est un compact inclus dans O. O est ouvert donc il existe $(\overline{S}_n)$ telle que :

$$I\!P_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q} \subset \overline{I\!P}_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q} \subset O \text{ Où } \overline{I\!P}_{n,p} = \overline{S}_n \times \overline{S}_{n+1} \times ... \times \overline{S}_{n+p}.$$

La suite $(\overline{S}_n)$ est plus large que (S_n) et vérifie :

$$R_n = r(\mathbb{P}_{n,p} \times \mathbb{Z}_{n,q}) \subset \overline{R}_n = r(\overline{\mathbb{P}}_{n,p} \times \mathbb{Z}_{n,q}) \subset r(O) \subseteq]-1,1[.$$

Donc $Slim(R_n) \subseteq Slim(\overline{R}_n) \subset]-1,1[$. Donc T est bien une contraction pour $(\overline{S}_n)$.

■

Conclusion :

Si on impose dans la théorie de contraction de suites d'intervalles de segment-limite dégénéré et d'indice de stationnarité infini donnée dans ce chapitre à la suite d'intervalles (R_n) de rapport d'accélération de converger au lieu d'admettre seulement un segment-limite, alors on obtient une généralisation de l'accélération de convergence de suites scalaires ([3] et [4]) au cas de suites d'intervalles. Mais dans ce cas là la généralisation est limitée car on restreint le problème en imposant à (R_n) de converger.

D'un autre côté on peut voir cette théorie comme une généralisation au cas de suites d'intervalles du concept de contraction défini par C. BREZINSKI en 1989 dans [5].

Les résulats donnés pour la notion de suites plus fines et de suites plus larges, nous permettent de remarquer que le concept de contraction est quelquefois plus pratique à appliquer pour une suite plus fine.

Chapter 3

PROCÉDÉS STANDARD D'ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE

Dans ce chapitre on donne une généralisation des procédés standards $n^0 1$ et $n^0 2$ de GERMAIN-BONNE, voir [7].

Dans tous les résultats de ce chapitre, on prend (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini.

Pour les mêmes raisons que dans le chapitre précédent, dans ce chapitre on suppose que (S_n) vérifie les hypothèses H et H' suivantes :

Hypothèses :

$$H : \forall n \in I\!N, \ \ S_n \bigcap S = \emptyset (\text{ i.e., } s \notin S_n \text{ }).$$

$$H' : \forall n \in I\!N, \ \ S_n \bigcap S_{n+i} = \emptyset \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

3.1 Généralisation des procédés standards $n^0 1$ et $n^0 2$

3.1.1 Notations et définitions

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini. Soit T une transformation de la suite d'intervalles (S_n), représentée par (on reprend les notations du paragraphe 3 du chapitre précédent) :

$$\begin{array}{rcll} T: & I\!P_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q} \subset I\!R^{p+q+1} & \longrightarrow & I\!R \text{ (continue)} \\ & (s_{n,p}, z_{n,q}) & \longmapsto & t_n = T(s_{n,p}, z_{n,q}) \end{array}$$

telle que la suite (T_n) transformée de (S_n) par la transformation T et définie par :

$\forall n \in I\!N,\ T_n = T(I\!P_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q})$ vérifie, $Slim(T_n) = \lim_{n\to\infty}(T_n) = t \in I\!R$.

T sera dite **régulière** si $t = s$ (c'est la même définition que celle du chapitre précèdent).

Définissons :

$$\begin{aligned}
c(s_{n,p}, z_{n,q}) &= \frac{s_n - s}{T(s_{n,p}, z_{n,q}) - t} \\
a(s_{n,p+1}, z_{n,q}, z_{n+1,q}) &= \frac{s_{n+1} - s_n}{T(s_{n+1,p}, z_{n+1,q}) - T(s_{n,p}, z_{n,q})} \\
b(s_{n,p+1}, z_{n,q}, z_{n+1,q}) &= \frac{a(s_{n,p+1}, z_{n,q}, z_{n+1,q})}{c(s_{n,p}, z_{n,q})}
\end{aligned}$$

où $s_{n,p+1} \in I\!P_{n,p+1} = S_n \times S_{n+1} \times ... \times S_{n+p} \times S_{n+p+1}$ et $z_{n,q} \in Z\!\!Z_{n,q} = Z_n^1 \times Z_n^2 \times ... \times Z_n^q$. $s_{n+1,p} \in I\!P_{n+1,p}$ et $s_{n,p} \in I\!P_{n,p}$ sont donnés par la relation :

$$\begin{aligned}
s_{n,p+1} &= (s_n, s_{n+1}, ..., s_{n+p}, s_{n+p+1}) \in I\!P_{n,p+1} \\
&= (s_{n,p}, s_{n+p+1}) \in I\!P_{n,p} \times S_{n+p+1} \\
&= (s_n, s_{n+1,p}) \in S_n \times I\!P_{n+1,p}.
\end{aligned}$$

On pose, $C_n = c(I\!P_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q})$ et $B_n = b(I\!P_{n,p+1} \times Z\!\!Z_{n,q} \times Z\!\!Z_{n+1,q})$. On construit ainsi deux suites d'intervalles (C_n) et (B_n). c, a et b sont associés à la transformation T qui les défini.

Remarque :

$C_n = R_n^{-1} = \{c_n = r_n^{-1}\ ;\ r_n \in R_n\}$ où R_n est l'intervalle rapport d'accélération défini dans le chapitre précédent.

Définition 3.1.1

1 : *La transformation T est une* **contraction** *pour la suite d'intervalles* (S_n) *si* $Slim(R_n) \subset]-1, +1[$.

2 : *La transformation T* **garde la convergence** *de la suite d'intervalles* (S_n) *si* $Slim(C_n) = C \in S(I\!R)$ *et* $0 \notin C$.

3 : *La transformation T* **garde la vitesse de convergence** *de la suite d'intervalles* (S_n) *si* T *garde la convergence de* (S_n) *et de plus* $Slim(B_n) = B \in S(I\!R)$ *avec* $1 \in B$.

Notations :

On note $I\!T_1\{(S_n)\}$, l'ensemble des transformations T qui gardent la convergence de (S_n). Et $I\!T_2\{(S_n)\}$, l'ensemble des transformations T qui gardent la vitesse de convergence de (S_n).

3.1.2 Procédé standard $n^0 1$

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini. Et soit $\tilde{T} : I\!P_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q} \subset I\!R^{p+q+1} \longrightarrow I\!R$ une transformation de (S_n) telle que la suite d'intervalles $(\tilde{T}_n)$ transformée de (S_n) par $\tilde{T}$ admet un segment-limite dégénéré $\tilde{t} \in I\!R$. Définissons :

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(s_{n,p}, z_{n,q}) &= \frac{s_n - s}{\tilde{T}(s_{n,p}, z_{n,q}) - \tilde{t}} \\
\tilde{a}(s_{n,p+1}, z_{n,q}, z_{n+1,q}) &= \frac{s_{n+1} - s_n}{\tilde{T}(s_{n+1,p}, z_{n+1,q}) - \tilde{T}(s_{n,p}, z_{n,q})} \\
\tilde{b}(s_{n,p+1}, z_{n,q}, z_{n+1,q}) &= \frac{\tilde{a}(s_{n,p+1}, z_{n,q}, z_{n+1,q})}{\tilde{c}(s_{n,p}, z_{n,q})}
\end{aligned}$$

On pose, $\tilde{C}_n = \tilde{c}(I\!P_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q})$ et $\tilde{B}_n = \tilde{b}(I\!P_{n,p+1} \times Z\!\!Z_{n,q} \times Z\!\!Z_{n+1,q})$. On construit ainsi deux suites d'intervalles $(\tilde{C}_n)$ et $(\tilde{B}_n)$.

On suppose que $\tilde{T} \in I\!T_1\{(S_n)\}$. C'est à dire, $Slim(\tilde{C}_n) = \tilde{C} = [\tilde{c}^1, \tilde{c}^2] \not\ni 0$. On pose :

$$\tilde{C}' = |\tilde{C}| = [\tilde{c}'^1, \tilde{c}'^2].$$

Soit T la Transformation de (S_n) définie par :

$$\begin{array}{rlcl}
T : & I\!P_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q} \times Z_n^{q+1} \subset I\!R^{p+q+2} & \longrightarrow & I\!R \\
& (s_{n,p}, z_{n,q}, z_n^{q+1}) & \longmapsto & t_n = s_n - z_n^{q+1}(\tilde{T}(s_{n,p}, z_{n,q}) - \tilde{t})
\end{array}$$

où $\forall n \in I\!N$, $Z_n^{q+1} = \tilde{C}$ et $\tilde{t} = Slim(\tilde{T}_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\tilde{T}_n) \in I\!R$.

Proposition 3.1.1 (Procédé standard $n^0 1$)

La transformation T définie ci-dessus est régulière pour (S_n) et on a :

T est une contraction pour (S_n) si et seulement si $\tilde{c}'^2 - \tilde{c}'^1 < \tilde{c}'^1$ (i.e., la longueur de l'intervalle $\tilde{C}'$ est inférieure à la distance qui le sépare de l'origine). De plus 0 appartient

au segment-limite de la suite d'intervalles rapport d'accélération (i.e., $0 \in Slim(R_n)$).

Preuve.

Régularité de T :

On a $T = \left\{t_n = s_n - z_n^{q+1}(\tilde{T}(s_{n,p}, z_{n,q}) - \tilde{t})\ ;\ (s_{n,p}, z_{n,q}) \in I\!P_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q} \text{ et } z_n^{q+1} \in Z_n^{q+1} = \tilde{C}\right\}$ donc :

$$T_n \subset S_n - \tilde{C}.(\tilde{T}_n - \tilde{t}).$$

En passant au segment-limite on a :

$$Slim(T_n) \subset Slim(S_n) - \tilde{C}.(Slim(\tilde{T}_n) - \tilde{t}) = \{s\}.$$

Donc $Slim(T_n) = t = s$, d'ou la régularité de T.

Contraction :

Soit (R_n) la suite d'intervalles de rapports d'accélération de (S_n) par rapport à la transformation T :

$$R_n = \left\{r_n = \frac{T(s_{n,p}, z_{n,q}, z_n^{q+1}) - s}{s_n - s} \text{ où } (s_{n,p}, z_{n,q}, z_n^{q+1}) \in I\!P_{n,p} \times Z\!\!Z_{n,q} \times \tilde{C}\right\}$$

avec $s_n = p_1(s_{n,p})$ où p_1 est la première projection $(p_1(x_0, x_1, ..., x_p) = x_0)$.

On a $r_n = \dfrac{T(s_{n,p}, z_{n,q}, z_n^{q+1}) - s}{s_n - s} = 1 - z_n^{q+1}\dfrac{\tilde{T}(s_{n,p}, z_{n,q}) - \tilde{t}}{s_n - s}$, donc en passant aux intervalles on a :

$$\begin{aligned} R_n &= 1 - Z_n^{q+1}.\tilde{R}_n \\ &= 1 - \tilde{C}.\tilde{R}_n \\ &= 1 - \frac{\tilde{C}}{\tilde{C}_n} \ (\text{ car } \tilde{R}_n = \frac{1}{\tilde{C}_n}). \end{aligned}$$

En passant au segment-limite on aura :

$$\begin{aligned} Slim(R_n) &= 1 - \frac{\tilde{C}}{Slim(\tilde{C}_n)} \\ &= 1 - \frac{\tilde{C}}{\tilde{C}}. \end{aligned}$$

On peut diviser par $(\tilde{C}_n)$ au moins à partir d'un certain rang, car $0 \notin Slim(\tilde{C}_n) = \tilde{C}$ et donc $0 \notin \tilde{C}_n$ à partir d'un certain rang.

$$
\begin{aligned}
Slim(R_n) &= 1 - \frac{\tilde{C}}{\tilde{C}} \\
&= 1 - \frac{|\tilde{C}|}{|\tilde{C}|} (\text{ car } 0 \notin \tilde{C}).
\end{aligned}
$$

Donc on a :

$$
\begin{aligned}
Slim(R_n) &= 1 - \frac{[\tilde{c}'^1, \tilde{c}'^2]}{[\tilde{c}'^1, \tilde{c}'^2]} \\
&= \left[\frac{\tilde{c}'^1 - \tilde{c}'^2}{\tilde{c}'^1}, \frac{\tilde{c}'^2 - \tilde{c}'^1}{\tilde{c}'^2}\right].
\end{aligned}
$$

Il est évident que $0 \in Slim(R_n)$. D'autres parts on a :

$\frac{\tilde{c}'^2 - \tilde{c}'^1}{\tilde{c}'^2} < 1 \Longleftrightarrow -\tilde{c}'^1 < 0$, ce qui est vrai car $\tilde{C}' > 0$.

$\frac{\tilde{c}'^1 - \tilde{c}'^2}{\tilde{c}'^1} > -1 \Longleftrightarrow \tilde{c}'^2 - \tilde{c}'^1 < \tilde{c}'^1$.

Donc $(Slim(R_n) \subset]-1, 1[) \Longleftrightarrow (\tilde{c}'^2 - \tilde{c}'^1 < \tilde{c}'^1)$. C'est ce qu'il faut démontrer.

■

3.1.3 Procédé standard $n^0 2$

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in \mathbb{R}$ et d'indice de stationnarité infini. Et soit $\tilde{T}$ une transformation de (S_n) telle que $\tilde{T} \in \mathbb{T}_2\{(S_n)\}$. C'est à dire :

$\tilde{T} : \mathbb{P}_{n,p} \times \mathbb{Z}_{n,q} \subset \mathbb{R}^{p+q+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $Slim(\tilde{C}_n) = \tilde{C} = [\tilde{c}^1, \tilde{c}^2] \not\ni 0$ et il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tels que $Slim(\tilde{B}_n) = \tilde{B} = [1-\alpha, 1+\beta]$.

Soit T la transformation de (S_n) définie par :

$$
T : \quad \mathbb{P}_{n,p+1} \times \mathbb{Z}_{n,q} \times \mathbb{Z}_{n+1,q} \subset \mathbb{R}^{p+2q+2} \longrightarrow \mathbb{R}
$$

$$
(s_{n,p+1}, z_{n,q}, z_{n+1,q}) \longmapsto t_n = s_n - (s_{n+1} - s_n) \frac{\tilde{T}(s_{n,p}, z_{n,q}) - \tilde{t}}{\tilde{T}(s_{n+1,p}, z_{n+1,q}) - \tilde{T}(s_{n,p}, z_{n,q})},
$$

où $\tilde{t} = \lim_{n \to \infty} (\tilde{T}_n) \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.1.2 **(Procédé standard $n^0 2$)**

La transformation T définie ci-dessus est régulière pour (S_n) et on a :

T est une contraction pour (S_n) si et seulement si $\alpha, \beta < 1$. De plus 0 appartient au segment-limite de la suite d'intervalles rapport d'accélération (i.e., $0 \in Slim(R_n)$).

Preuve.

Régularité de T :

$$\begin{aligned} T(s_{n,p+1}, z_{n,q}, z_{n+1,q}) &= s_n - (s_{n+1} - s_n) \frac{\tilde{T}(s_{n,p}, z_{n,q}) - \tilde{t}}{\tilde{T}(s_{n+1,p}, z_{n+1,q}) - \tilde{T}(s_{n,p}, z_{n,q})} \\ &= s_n - (s_{n+1} - s_n) . \frac{\tilde{T}(s_{n,p}, z_{n,q}) - \tilde{t}}{s_n - s} . \frac{s_{n+1} - s_n}{\tilde{T}(s_{n+1,p}, z_{n+1,q}) - \tilde{T}(s_{n,p}, z_{n,q})} . \end{aligned}$$

Donc $T(s_{n,p+1}, z_{n,q}, z_{n+1,q}) = s_n - (s_{n+1} - s_n).\tilde{b}(s_{n,p+1}, z_{n,q}, z_{n+1,q})$. D'où en passant aux intervalles on a :

$T_n \subset S_n - (S_{n+1} - s).\tilde{B}_n$, et en passant au segment-limite on a :

$Slim(T_n) \subset Slim(S_n) - (Slim(S_n) - s) .Slim(\tilde{B}_n)$.

Or $Slim(S_n) = \lim_{n \to \infty} (S_n) = s \in I\!R$ et $Slim(\tilde{B}_n) = \tilde{B} \in S(I\!R)$ (i.e., $\tilde{B}$ est un intervalle fini), donc $Slim(T_n) = \lim_{n \to \infty} (T_n) = t = s$. D'où la régularité de T.

Contraction :

On a, $T(s_{n,p+1}, z_{n,q}, z_{n+1,q}) = s_n - (s_{n+1} - s_n).\tilde{b}(s_{n,p+1}, z_{n,q}, z_{n+1,q})$.

$$\frac{T(s_{n,p+1}, z_{n,q}, z_{n+1,q}) - s}{s_n - s} = 1 - \tilde{b}(s_{n,p+1}, z_{n,q}, z_{n+1,q}).$$

Donc (R_n), la suite d'intervalles de rapports d'accélération de (S_n) par rapport à la transformation T, peut s'écrire : $R_n = 1 - \tilde{B}_n$. En passant au segment-limite on a $Slim(R_n) = 1 - Slim(\tilde{B}_n)$. Or $Slim(\tilde{B}_n) = [1 - \alpha, 1 + \beta]$, $\alpha, \beta \in I\!R^+$, donc $Slim(R_n) = 1 - [1 - \alpha, 1 + \beta] = [-\beta, \alpha]$. Donc on a contraction si et seulement si $\alpha, \beta < 1$.

■

3.2 Le procédé Δ^2-Aitken

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini. Et soit $\tilde{T}$ la transformation de (S_n) définie par :

$$\begin{array}{lll} \tilde{T} & : S_n \times S_{n+1} \subset I\!R^2 & \longrightarrow I\!R \\ & (s_n, s_{n+1}) & \longmapsto \tilde{t}_n = \Delta s_n = s_{n+1} - s_n \end{array}$$

Remarque :

Pour la transformation $\tilde{T}$, $p = 1$ et $q = 0$. C'est à dire on utilise deux termes successifs de la suite (S_n) sans suites auxiliaires.

Propriété 3.2.1

La suite d'intervalles $(\tilde{T}_n)$ définie par $\tilde{T}_n = \tilde{T}(S_n \times S_{n+1})$ est convergente et $\lim_{n\to\infty}(\tilde{T}_n) = \tilde{t} = 0$.

Preuve.

$\tilde{T}_n = \tilde{T}(S_n \times S_{n+1}) = S_{n+1} - S_n$. En passant au segment-limite on a, $Slim(\tilde{T}_n) = Slim(S_{n+1}) - Slim(S_n)$. Or $Slim(S_{n+1}) = Slim(S_n) = \lim_{n\to\infty}(S_n) = s \in I\!R$, donc $Slim(\tilde{T}_n) = \lim_{n\to\infty}(\tilde{T}_n) = \tilde{t} = 0$.

■

Remarque :

La suite d'intervalles $(\tilde{T}_n)$ possède un indice de stationnarité infini (i.e., $\forall n \in I\!N$, $\tilde{t} = 0 \notin \tilde{T}_n$).

En effet, d'après l'hypothèse H' on a : $\forall n \in I\!N$, $S_n \bigcap S_{n+1} = \emptyset$. Donc $\tilde{T}_n = S_{n+1} - S_n$ ne contient pas zéro et ceci pour tout $n \in I\!N$.

Proposition 3.2.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini. Si la suite d'intervalles (S_n) est à convergence linéaire, alors la transformation $\tilde{T}$ est dans $I\!T_2\{(S_n)\}$.

Preuve.

Pour la transformation $\tilde{T}$ on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(s_n, s_{n+1}) &= \frac{s_n - s}{\tilde{T}(s_n, s_{n+1}) - 0} \\
&= \frac{s_n - s}{s_{n+1} - s_n} \\
\tilde{a}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) &= \frac{s_{n+1} - s_n}{\tilde{T}(s_{n+1}, s_{n+2}) - \tilde{T}(s_n, s_{n+1})} \\
&= \frac{1}{\dfrac{\Delta s_{n+1}}{\Delta s_n} - 1} \\
\tilde{b}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) &= \frac{\tilde{a}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}{\tilde{c}(s_n, s_{n+1})} \\
&= \frac{\varrho_n - 1}{\delta_n - 1} \\
&= \frac{(1 - \varrho_n)^2}{\varrho_n \varrho_{n+1} - 2\varrho_n + 1}.
\end{aligned}$$

Les suites d'intervalles $(\tilde{C}_n)$ et $(\tilde{B}_n)$ sont données par, $\tilde{C}_n = \tilde{c}(S_n \times S_{n+1})$ et $\tilde{B}_n = \tilde{b}(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2})$.

Pour montrer que $\tilde{T} \in \mathbb{T}_2\{(S_n)\}$, il faut et il suffit de voir que $Slim(\tilde{C}_n) = \tilde{C} \in S(\mathbb{R})$ et $Slim(\tilde{B}_n) = \tilde{B} \in S(\mathbb{R})$ avec $0 \notin \tilde{C}$ et $1 \in \tilde{B}$.

1 : Montrons que $Slim(\tilde{C}_n)$ existe et ne contient pas 0 :

$$\tilde{c}(s_n, s_{n+1}) = \frac{1}{\varrho_n - 1} \iff \tilde{C}_n = \frac{1}{E_n - 1}$$

et

$$\tilde{C}_n = \frac{1}{E_n - 1} \implies Slim(\tilde{C}_n) = \tilde{C} = \frac{1}{Slim(E_n) - 1} \quad (1 \notin Slim(E_n)).$$

D'après la convergence linéaire de la suite d'intervalles (S_n), on a $1 \notin Slim(E_n)$ donc $Slim(\tilde{C}_n) = \tilde{C} = \dfrac{1}{Slim(E_n) - 1}$ est un intervalle fini, et il est clair que $0 \notin \tilde{C}$.

2 : Montrons que $Slim(\tilde{B}_n) = \tilde{B}$ existe et $1 \in \tilde{B}$:

$$\tilde{b}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = \frac{\varrho_n - 1}{\delta_n - 1} \implies \tilde{B}_n \subseteq \frac{E_n - 1}{D_n - 1}.$$

Donc en passant au segment-limite on a :

$$Slim(\tilde{B}_n) = \tilde{B} \subseteq \frac{Slim(E_n) - 1}{Slim(D_n) - 1}.$$

Or $1 \notin Slim(D_n)$, donc $Slim(\tilde{B}_n) = \tilde{B}$ est un intervalle fini.

Montrons maintenant que $1 \in Slim(\tilde{B}_n)$:

On a $\tilde{b}_n = \dfrac{(1-\varrho_n)^2}{\varrho_n\varrho_{n+1} - 2\varrho_n + 1}$ où $\varrho_n = \dfrac{s_{n+1} - s}{s_n - s}$ et $\varrho_{n+1} = \dfrac{s_{n+2} - s}{s_{n+1} - s}$.

$1 - \tilde{b}_n = \dfrac{\varrho_n(\varrho_{n+1} - \varrho_n)}{\varrho_n\varrho_{n+1} - 2\varrho_n + 1}$. D'après la linéarité de (S_n), $v_n = \varrho_n\varrho_{n+1} - 2\varrho_n + 1 > 0$ et $Slim(v_n) > 0$, on a aussi $0 \notin Slim(E_n)$ donc à partir d'un certain rang (ϱ_n) garde un même signe. Or la suite (u_n) définie par $u_n = \varrho_{n+1} - \varrho_n$ admet $u' = \varrho' - \varrho^1$ et $u'' = \varrho'' - \varrho^2$ comme valeurs d'adhérence ($Slim(E_n) = [\varrho^1, \varrho^2]$), où ϱ' et ϱ'' sont deux valeurs d'adhérence de (ϱ_{n+1}) (ϱ' et $\varrho'' \in [\varrho^1, \varrho^2]$), donc $u' \geq 0$ et $u'' \leq 0$. Par conséquent $0 \in 1 - \tilde{B}$. Donc $1 \in Slim(\tilde{B}_n) = \tilde{B}$.

■

Remarque :

$1 \in Slim(\tilde{B}_n) = \tilde{B}$, donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tels que $Slim(\tilde{B}_n) = \tilde{B} = [1 - \alpha, 1 + \beta]$.

Théorème 3.2.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite $S = s \in \mathbb{R}$ et d'indice de stationnarité infini. Posons $w(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = 2\varrho_n.(\varrho_n - \varrho_{n+1}) - (\varrho_n - 1)^2$ où $\varrho_n = \dfrac{s_{n+1} - s}{s_n - s}$ et $\varrho_{n+1} = \dfrac{s_{n+2} - s}{s_{n+1} - s}$, (W_n) est la suite d'intervalles définie par $W_n = w(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2})$.

Si la suite d'intervalles (S_n) est à convergence linéaire, Alors le Δ^2-Aitken est une contraction pour (S_n) si et seulement si $Slim(W_n) = W < 0$. De plus $0 \in Slim(R_n)$.

Preuve.

$(S_n) \in LIN$, donc la transformation $\tilde{T} : (s_n, s_{n+1}) \longmapsto \Delta s_n = s_{n+1} - s_n$ appartient à $\mathbb{T}_2\{(S_n)\}$, ceci d'après la proposition précédente. D'après le procédé standard $n^0 2$ on a :

$$T: \quad S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) \longmapsto t_n = s_n - (s_{n+1} - s_n)\frac{\tilde{T}(s_n, s_{n+1}) - \tilde{t}}{\tilde{T}(s_{n+1}, s_{n+2}) - \tilde{T}(s_n, s_{n+1})}$$

$$(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) \longmapsto t_n = s_n - \frac{(\Delta s_n)^2}{\Delta^2 s_n} \quad (\text{ ici } \tilde{t} = 0)$$

où $\Delta s_n = s_{n+1} - s_n$ et $\Delta^2 s_n = \Delta(\Delta s_n) = s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n$ (T n'est que le Δ^2-Aitken), est une contraction pour (S_n) si et seulement si $Slim(\tilde{B}_n) = \tilde{B} = [1-\alpha, 1+\beta]$ avec $\alpha, \beta < 1$. On pose :

$$\tilde{b}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = \frac{\tilde{T}(s_n, s_{n+1}) - \tilde{t}}{s_n - s} . \frac{s_{n+1} - s_n}{\tilde{T}(s_{n+1}, s_{n+2}) - \tilde{T}(s_n, s_{n+1})}$$

$$= \frac{(1-\varrho_n)^2}{\varrho_n \varrho_{n+1} - 2\varrho_n + 1}$$

où $\varrho_n = \dfrac{s_{n+1} - s}{s_n - s}$ et $\varrho_{n+1} = \dfrac{s_{n+2} - s}{s_{n+1} - s}$.

On pose $\tilde{B}_n = \tilde{b}(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2})$. $\tilde{T} \in \mathbb{T}_2\{(S_n)\}$, donc $1 \in Slim(\tilde{B}_n) = \tilde{B}$, il existe alors $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tels que $Slim(\tilde{B}_n) = \tilde{B} = [1-\alpha, 1+\beta]$. T est une contraction pour (S_n) si et seulement si $\alpha, \beta < 1$.

$$1 - \tilde{b}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = \frac{\varrho_n(\varrho_{n+1} - \varrho_n)}{\varrho_n \varrho_{n+1} - 2\varrho_n + 1}.$$

D'après la linéarité de (S_n), $Slim(v_n) > 0$ où $v_n = \varrho_n \varrho_{n+1} - 2\varrho_n + 1$.

$\dfrac{\varrho_n(\varrho_{n+1} - \varrho_n)}{\varrho_n \varrho_{n+1} - 2\varrho_n + 1} < 1 \iff (\varrho_n - 1)^2 > 0$ ce qui est toujours vrai car $Slim(E_n) \subset [-1, 1[$.

$$\frac{\varrho_n(\varrho_{n+1} - \varrho_n)}{\varrho_n \varrho_{n+1} - 2\varrho_n + 1} > -1 \iff 2\varrho_n.(\varrho_n - \varrho_{n+1}) - (\varrho_n - 1)^2 < 0.$$

On pose $w(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = 2\varrho_n.(\varrho_n - \varrho_{n+1}) - (\varrho_n - 1)^2$ où $\varrho_n = \dfrac{s_{n+1} - s}{s_n - s}$ et $\varrho_{n+1} = \dfrac{s_{n+2} - s}{s_{n+1} - s}$. Soit (W_n) la suite d'intervalles définie par : $W_n = w(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2})$. Alors on a,

$$\Big(1 - Slim(\tilde{B}_n) = [-\beta, \alpha] \subset]-1, 1[\Big) \iff (Slim(W_n) = W < 0)$$

■

Remarque :

On retrouve à partir du procédé standard $n^0 2$, le théorème (3.2.1) de contraction pour le Δ^2-Aitken, équivalent à celui obtenu par la méthode directe au chapitre II (théorème 2.5.2).

3.3 Le Θ_2-algorithme

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini. On suppose que (S_n) vérifie les hypothèses H et H' définies au début de ce chapitre. On note $\widehat{T}$ la transformation représentant le procédé Δ^2-Aitken définie par :

$$\widehat{T} : \; S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \subset I\!R^3 \longrightarrow I\!R$$

$$(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) \longmapsto \hat{t}_n = s_n - \frac{(\Delta s_n)^2}{\Delta^2 s_n}$$

$$\widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = s_n - \frac{(\Delta s_n)^2}{\Delta^2 s_n} = \frac{s_n.s_{n+2} - (s_{n+1})^2}{s_{n+2} - 2.s_{n+1} + s_n}.$$

Soit Z la transformation qui donne le Θ_2-Algorithme représentée par :

$$Z : \; S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \times S_{n+3} \subset I\!R^4 \longrightarrow I\!R$$

$$(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) \longmapsto z_n = s_n + \frac{s_n - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}{\dfrac{\widehat{T}(s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}{s_{n+1} - s_n} - 1},$$

Le Θ_2-Algorithme du initialement à LUBKIN [10], a été redécouvert et étudié par de nombreux auteurs : BREZINSKI [3], CORDELLIER [6], GERMAIN-BONNE [7]... Ce procédé à la particularité d'accélérer les suites de nombres réels à convergence linéaire et en outre certaines suites de nombres réels à convergence logarithmique.

On pose :

$$\hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = \frac{s_n - s}{\widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - s}$$

$$\hat{b}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) = \frac{s_{n+1} - s_n}{\widehat{T}(s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})} \; \frac{\widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - s}{s_n - s}.$$

On construit deux suites d'intervalles $(\widehat{C}_n)$ et $(\widehat{B}_n)$ définies par : $\forall n \in I\!N$,

$$\widehat{C}_n = \hat{c}(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2})$$

$$\widehat{B}_n = \hat{b}(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \times S_{n+3}).$$

Soient les hypothèses H_1, H_2 et H_3 définies par :

- $H_1 : Slim(\widehat{C}_n) = \widehat{C} \not\ni 0$
- $H_2 : Slim(\widehat{B}_n) = \widehat{B} \ni 1$ et $0 \notin \widehat{B}$
- $H_3 : \widehat{C}^{-1} \cap \widehat{B} = \emptyset$.

Remarque :

L'hypothèse H_1 est l'équivalent dans le cas scalaire de $\lim_{n\to\infty}(\frac{s_n - s}{t_n - t}) = c \neq 0$. L'hypothèse H_2 est l'équivalent dans le cas scalaire de $\lim_{n\to\infty}(\frac{s_n - s}{t_n - t}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{s_{n+1} - s_n}{t_{n+1} - t_n}) = c \neq 0$. Et en fin l'hypothèse H_3 est l'équivalent dans le cas scalaire de $\lim_{n\to\infty}(\frac{s_{n+1} - s_n}{t_{n+1} - t_n}) = a \neq 1$, voir [7] (attention! dans cette remarque c et a sont deux nombres réels et n'ont rien à voir avec le c et le a correspondant à une transformation T donnée, définis au début de ce chapitre).

D'après la définition de $\mathbb{T}_2\{(S_n)\}$ au début de ce chapitre on a la proposition suivante :

Proposition 3.3.1

$$(H_1, H_2 \text{ et } H_3) \iff (\widehat{T} \in \mathbb{T}_2\{(S_n)\} \text{ avec } 0 \notin \widehat{B} \text{ et } \widehat{C}^{-1} \cap \widehat{B} = \emptyset).$$

D'après les définitions de $\hat{c}$ et de $\hat{b}$ ci-dessus on a :

Proposition 3.3.2

$$(\ H_2,\ H_3\ ) \Longrightarrow (\ 1 \notin \widehat{C}\ ).$$

Proposition 3.3.3

$$H_1 \Longrightarrow (S_n) \notin LIN.$$

Preuve.

En effet si $(S_n) \in LIN$ alors $0 \in Slim(\widehat{R}_n) = \widehat{R} \in S(\mathbb{R})$, et donc $\widehat{C} = \frac{1}{\widehat{R}} = [-\infty, \infty] \notin S(\mathbb{R})$. D'où la contradiction avec l'hypothèse H_1.

■

Proposition 3.3.4

((S_n) vérifie H_1) $\Longrightarrow$ ($\hat{T}$ est régulière pour (S_n)).

Preuve.

On suppose que (S_n) vérifie H_1, alors on a :

$$\hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = \frac{s_n - s}{\hat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - s} \Longrightarrow \hat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - s = \frac{s_n - s}{\hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}.$$

Remarquons qu'on peut diviser par $\hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})$ au moins à partir d'un certain rang car d'après H_1, $0 \notin Slim(\hat{C}_n)$. Donc on a, $(\hat{T}_n - s) \subseteq \dfrac{S_n - s}{\hat{C}_n}$. Ce qui donne en passant au segment-limite :

$$(Slim(\hat{T}_n) - s) \subseteq \frac{Slim(S_n) - s}{Slim(\hat{C}_n)} = \{0\}.$$

D'où $Slim(\hat{T}_n) = \lim_{n\to\infty}(\hat{T}_n) = \hat{t} = s$, c'est à dire que $\hat{T}$ est régulière pour (S_n).

■

Posons $v(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = \varrho_n\varrho_{n+1} - 2\varrho_n + 1$ où $\varrho_n = \dfrac{s_{n+1} - s}{s_n - s}$. On définit la suite d'intervalles (V_n) par : $V_n = v(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2})$.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.3.5

Supposons que $0 \notin Slim(E_n)$. Alors on a :
((S_n) vérifie l'hypothèse H_1) $\Longrightarrow$ ($0 \in Slim(V_n)$).

Preuve.

On pose $v(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = \varrho_n\varrho_{n+1} - 2\varrho_n + 1$ et $u(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = \varrho_n(\varrho_{n+1} - \varrho_n)$ où $\varrho_n = \dfrac{s_{n+1} - s}{s_n - s}$. Alors on a $\hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = \dfrac{v(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}{u(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}$. On construit deux suites d'intervalles (U_n) et (V_n) par :

$$\forall n \in I\!N, \quad \begin{array}{l} U_n = u(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2}) \\ V_n = v(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2}). \end{array}$$

La condition $0 \notin Slim(E_n)$ nous donne $0 \in Slim(U_n)$, en effet $u(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = \varrho_n(\varrho_{n+1} - \varrho_n)$ où (ϱ_n) garde un même signe à partir d'un certain rang, par contre $(\varrho_{n+1} - \varrho_n)$

change de signe à l'infini. Or si on suppose que $0 \notin Slim(V_n)$, on aura $0 \in Slim(\widehat{C}_n)$. Ce qui est contradictoire avec H_1.

■

La proposition ci-dessus nous permet de montrer le résultat suivant :

Proposition 3.3.6

Supposons que $0 \notin Slim(E_n)$. Alors on a :
$((S_n)$ vérifie l'hypothèse $H_1) \Longrightarrow (1 \in [Slim(E_n) \bigcup Slim(D_n)])$.

Preuve.

$$E_n = \left\{ \varrho_n = \frac{s_{n+1} - s}{s_n - s} \text{ tel que } (s_n, s_{n+1}) \in S_n \times S_{n+1} \right\}$$

$$D_n = \left\{ \varrho_n = \frac{s_{n+2} - s_{n+1}}{s_{n+1} - s_n} \text{ tel que } (s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) \in S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \right\}.$$

On peut écrire $\delta_n = \varrho_n . \dfrac{\varrho_{n+1} - 1}{\varrho_n - 1}$. Supposons que $1 \notin [Slim(E_n) \bigcup Slim(D_n)]$:

$1 \notin Slim(D_n) \Longrightarrow (\delta_n - 1)$ garde un même signe à l'infini suivant que $Slim(D_n) > 1$ ou $Slim(D_n) < 1$.

$$\delta_n - 1 = \frac{\varrho_n . \varrho_{n+1} - 2.\varrho_n + 1}{\varrho_n - 1}.$$

Or $1 \notin Slim(E_n)$, donc $(\varrho_n - 1)$ garde lui aussi un même signe à partir d'un certain rang. On peut conclure donc $v(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = \varrho_n \varrho_{n+1} - 2.\varrho_n + 1$ garde un même signe à partir d'un certain rang (i.e., $0 \notin Slim(V_n)$). Ceci contredit la proposition précédente qui affirme qu'au contraire on a $0 \in Slim(V_n)$.

■

Remarque :

La proposition 3.3.6 nous permet de voir un résultat plus général que celui donné par la proposition 3.3.3.

Considérons la transformation T définie par :

$$\begin{aligned} T : \quad & S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \subset \mathbb{R}^3 && \longrightarrow && \mathbb{R} \\ & (s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) && \longmapsto && t_n = s_n - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}). \end{aligned}$$

$T_n = T(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2})$.

Proposition 3.3.7

$$H_1 \Longrightarrow (T_n) \textit{ est convergente et } \lim_{n\to\infty}(T_n) = t = 0.$$

Preuve.

$T_n = \left\{s_n - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) \text{ tel que } (s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) \in S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2}\right\} \subseteq S_n - \widehat{T}_n$ donc $Slim(T_n) \subseteq Slim(S_n) - Slim(\widehat{T}_n) = 0$, car d'après la régularité de $\widehat{T}$ (proposition 3.3.4) $Slim(S_n) = Slim(\widehat{T}_n)$. D'où $Slim(T_n) = \lim_{n\to\infty}(T_n) = t = 0$.

■

Propriété 3.3.1

Si (S_n) vérifie l'hypothèse H_1, alors on a :

1 : *L'indice de stationnarité de $(\widehat{T}_n)$ est infini.*
2 : *L'indice de stationnarité de (T_n) est infini.*

Preuve.

Il suffit de montrer (1), car (1) $\Longrightarrow$ (2) (en effet $T_n \subseteq S_n - \widehat{T}_n$).

Montrons (1) :

Supposons que l'indice de stationnarité N de $(\widehat{T}_n)$ est fini, alors $\forall n \geq N$, $s \in \widehat{T}_n$. Donc pour chaque $n \geq N$, $\exists(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) \in S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2}$ tel que $\widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) = s$, donc $s_n - s = \hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}).\left(\widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - s\right) = 0$. Donc on aurait l'indice de stationnarité de (S_n) est fini, ce qui contredit les hypothèses de ce chapitre.

■

Proposition 3.3.8

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite dégénéré $S = s \in \mathbb{R}$ et d'indice de stationnarité infini. Si (S_n) vérifie H_1, H_2 et H_3, alors la transformation T définie par :

$$\begin{array}{rlcl} T: & S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) & \longmapsto & t_n = s_n - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}). \end{array}$$

garde la vitesse de convergence de (S_n) (i.e., $T \in \mathbb{T}_2\{(S_n)\}$).

Preuve.

Posons :

$$\begin{aligned} c(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) &= \frac{s_n - s}{T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - 0} \\ et & \\ b(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) &= \frac{s_{n+1} - s_n}{T(s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})} \; \frac{T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - 0}{s_n - s}. \end{aligned}$$

On considère les suites d'intervalles (C_n) et (B_n) définies par :

$C_n = c(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2})$ et $B_n = b(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \times S_{n+3})$.

Pour montrer que $T \in \mathbb{T}_2\{(S_n)\}$, il faut et il suffit de montrer que :

$$\begin{cases} 1: & Slim(C_n) = C \not\ni 0 \\ 2: & Slim(B_n) = B \ni 1 \end{cases}$$

1 : Montrons que $Slim(C_n) = C \not\ni 0$:

$$\begin{aligned} c(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) &= \frac{s_n - s}{T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - 0} = \frac{s_n - s}{s_n - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})} \\ &= \frac{1}{1 - \dfrac{\widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - s}{s_n - s}} \\ &= \frac{1}{1 - \hat{c}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}. \end{aligned}$$

En passant aux intervalles on aura, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$C_n = \dfrac{1}{1 - \widehat{C}_n^{-1}} = \dfrac{1}{1 - \widehat{R}_n}$ où $\widehat{R}_n = \widehat{C}_n^{-1}$ est le rapport d'accélération de (S_n) par raport à la transformation $\widehat{T}$ (C_n existe car d'après les hypothèses H_1, H_2 et H_3 $\{0,1\} \notin Slim(\widehat{C}_n) = \widehat{C}$ donc à partir d'un certain rang $\{0,1\} \notin \widehat{C}_n$).

En passant au segment-limite on a :

$C = Slim(C_n) = \dfrac{1}{1 - Slim(\widehat{R}_n)} = \dfrac{1}{1 - \widehat{R}}$ où $\widehat{R} = Slim(\widehat{R}_n) = Slim(\widehat{C}_n^{-1}) = \widehat{C}^{-1}$. De même ici $C = Slim(C_n)$ est un intervalle fini car d'après les hypothèses H_1, H_2 et H_3 $\{0,1\} \notin Slim(\widehat{C}_n) = \widehat{C}$, de plus il est clair que $0 \notin C = Slim(C_n)$.

2 : Montrons maintenant que $Slim(B_n) = B \ni 1$:

$$b(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) = \frac{s_{n+1} - s_n}{T(s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})} \; \frac{T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - 0}{s_n - s}$$

$$= \frac{s_{n+1} - s_n}{(s_{n+1} - s_n) - (\widehat{T}(s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}))} \; \frac{s_n - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}{s_n - s}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - s}{s_n - s}}{1 - \dfrac{\widehat{T}(s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}{s_{n+1} - s_n}}$$

$$= \frac{1 - \hat{c}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}{1 - \hat{d}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3})}$$

$$b(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) = \frac{1 - \hat{c}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}{1 - \hat{d}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3})} \qquad (*)$$

Où $\hat{d}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) = \dfrac{s_{n+1} - s_n}{\widehat{T}(s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}$.

On a aussi : $\hat{d}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) = \hat{b}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}).\hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) \quad (**)$.

Donc en passant aux intervalles on a :

$$(*) \Longrightarrow B_n \subseteq \frac{1 - \widehat{C}_n^{-1}}{1 - \widehat{D}_n^{-1}}$$

où $\widehat{D}_n = \hat{d}(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \times S_{n+3})$.

Et $(**) \Longrightarrow \widehat{D}_n^{-1} \subseteq \widehat{B}_n^{-1}.\widehat{C}_n^{-1}$

$$\Longrightarrow Slim(\widehat{D}_n^{-1}) \subseteq Slim(\widehat{B}_n^{-1}).Slim(\widehat{C}_n^{-1}) = \left[Slim(\widehat{B}_n)\right]^{-1}.\left[Slim(\widehat{C}_n)\right]^{-1}.$$

D'autre part :

$$B_n \subseteq \frac{1 - \widehat{C}_n^{-1}}{1 - \widehat{D}_n^{-1}} \Longrightarrow Slim(B_n) \subseteq \frac{1 - Slim(\widehat{C}_n^{-1})}{1 - Slim(\widehat{D}_n^{-1})}$$

Or on a :

$$\frac{1 - Slim(\widehat{C}_n^{-1})}{1 - Slim(\widehat{D}_n^{-1})} = \frac{1 - \left[Slim(\widehat{C}_n)\right]^{-1}}{1 - \left[Slim(\widehat{D}_n)\right]^{-1}}$$

$$= \frac{1 - \widehat{C}^{-1}}{1 - \widehat{D}^{-1}}$$

et $Slim(\widehat{D}_n^{-1}) \subseteq \dfrac{\widehat{C}^{-1}}{\widehat{B}} \not\ni 1$ (car d'après H_3 $\widehat{C}^{-1} \bigcap \widehat{B} = \emptyset$), donc $B = Slim(B_n)$ est bien un intervalle fini.

Montrons maintenant que $1 \in Slim(B_n)$:

On a $b(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - 1 = \dfrac{\hat{b}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - 1}{\hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - \hat{b}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3})}$. Posons $Slim(\widehat{B}_n) = \widehat{B} = [\hat{b}^1, \hat{b}^2] \ni 1$, alors $b^1 - 1 = \dfrac{(\hat{b}^1)^{-1} - 1}{\hat{c}^1 - (\hat{b}^1)^{-1}}$ et $b^2 - 1 = \dfrac{(\hat{b}^2)^{-1} - 1}{\hat{c}^2 - (\hat{b}^2)^{-1}}$ sont deux valeurs d'adhérences de $(b(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - 1)$, où $\hat{c}^1$, $\hat{c}^2 \in \widehat{C}$. D'après H_3, $\widehat{C} \bigcap \widehat{B}^{-1} = \emptyset$($\widehat{B}^{-1} = [(\hat{b}^2)^{-1}, (\hat{b}^1)^{-1}]$ car d'après H_2 $0 \notin \widehat{B}$) donc, $\left(\hat{c}^1 - (\hat{b}^1)^{-1}\right) . \left(\hat{c}^2 - (\hat{b}^2)^{-1}\right) > 0$.

D'autre part $1 \in Slim(\widehat{B}_n) = \widehat{B} = [\hat{b}^1, \hat{b}^2]$ donc on a aussi $1 \in \widehat{B}^{-1} = [(\hat{b}^2)^{-1}, (\hat{b}^1)^{-1}]$ et par conséquent on a $\left((\hat{b}^1)^{-1} - 1\right) . \left((\hat{b}^2)^{-1} - 1\right) \leq 0$. Donc le produit $(b^1 - 1) . (b^2 - 1) \leq 0$. Or b^1, $b^2 \in Slim(B_n) = B$ il s'en suit donc que $1 \in Slim(B_n) = B$.

■

On pose $Slim(B_n) = B = [1 - \alpha, 1 + \beta]$ avec α, $\beta \in I\!R^+$.

Soit $y(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) = \hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - 2.\hat{b}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) + 1$, (Y_n) la suite d'intervalles définie par :

$$\forall n \in I\!N, \quad Y_n = y(S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \times S_{n+3}).$$

L'hypothèse H_3, $\widehat{C}^{-1} \bigcap \widehat{B} = \emptyset$(oubien $\widehat{C} \bigcap \widehat{B}^{-1} = \emptyset$) nous donne deux cas possibles : $\widehat{C} > \widehat{B}^{-1}$ ou bien $\widehat{C} < \widehat{B}^{-1}$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.3.9

- *Si* $\widehat{C} > \widehat{B}^{-1}$ *alors,* α, $\beta < 1$ *si et seulement si* $Slim(Y_n) = Y > 0$.
- *Si* $\widehat{C} < \widehat{B}^{-1}$ *alors,* α, $\beta < 1$ *si et seulement si* $Slim(Y_n) = Y < 0$.

Preuve.

$$\alpha, \beta < 1 \iff 1 - Slim(B_n) = Slim(1 - B_n) = [-\beta, \alpha] \subset]-1, 1[$$

$$\iff Slim(B_n) - 1 = Slim(B_n - 1) = [-\alpha, \beta] \subset]-1, 1[.$$

On peut écrire un élément de $B_n - 1$ sous la forme,

$$b(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - 1 = \frac{\hat{b}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - 1}{\hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - \hat{b}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3})}.$$

<u>1^{er} cas :</u> $\hat{C} > \hat{B}^{-1}$:

On a d'une part :

$$-1 < b(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - 1 \iff 1 > \frac{1 - \hat{b}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3})}{\hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - \hat{b}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3})}$$

$$\iff \hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - \hat{b}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) > 1 - \hat{b}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3})$$

$$\iff \hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) > 1$$

$$\iff \hat{C}_n > 1$$

ce qui est vrai au moins à partir d'un certain rang, car $\hat{C} > \hat{B}^{-1}$ et $1 \in \hat{B}$.

D'autre part :

$$b(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - 1 < 1 \iff \frac{\hat{b}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - 1}{\hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - \hat{b}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3})} < 1$$

$$\iff \hat{c}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - 2\hat{b}^{-1}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) + 1 > 0$$

$$\iff y(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) > 0$$

$$\iff Y_n > 0$$

Donc dans ce cas, $Slim(B_n - 1) \subset]-1, 1[$ si et seulement si $Slim(\hat{Y}_n) = Y > 0$.

<u>2^{eme} cas :</u> $\hat{C} < \hat{B}^{-1}$:

On peut montrer de la même façon que le 1^{er} cas que :

$$-1 < b(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - 1 < 1 \iff \hat{Y}_n < 0.$$

Donc dans ce cas là, $Slim(B_n - 1) \subset]-1,1[$ si et seulement si $Slim(Y_n) = Y < 0$. D'où la démonstration de la proposition.

■

D'après cette proposition on a le théorème suivant :

Théorème 3.3.1

Soit (S_n) une suite d'intervalles de segment-limite $S = s \in I\!R$ et d'indice de stationnarité infini. Si (S_n) vérifie H_1, H_2 et H_3, alors le Θ_2-algorithme est une contraction pour (S_n) si et seulement si $Slim(Y_n) = Y > 0$ ou bien $Slim(Y_n) = Y < 0$ suivant que $\widehat{C} > \widehat{B}^{-1}$ ou $\widehat{C} < \widehat{B}^{-1}$. De plus 0 est dans le segment-limite de la suite d'intervalles de rapport d'accélération.

Preuve.

La proposition 3.3.8 affirme que T est dans $I\!T_2\{(S_n)\}$, donc d'après la proposition 3.1.2 du paragraphe I de ce chapitre, la transformation Z de (S_n) définie par :

$$Z : \quad S_n \times S_{n+1} \times S_{n+2} \times S_{n+3} \subset I\!R^4 \longrightarrow I\!R$$

$$(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) \longmapsto z_n = s_n - (s_{n+1} - s_n)\frac{T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}) - 0}{T(s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - T(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}$$

$$z_n = s_n + \frac{s_n - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}{\dfrac{\widehat{T}(s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}{s_{n+1} - s_n} - 1},$$

est une contraction pour (S_n) si et seulement si $Slim(B_n) = B = [1 - \alpha, 1 + \beta]$ avec $0 \leq \alpha, \beta < 1$. D'après la proposition precédente, α, $\beta < 1$ si et seulement si $Slim(Y_n) = Y > 0$ oubien $Slim(Y_n) = Y < 0$ suivant que $\widehat{C} > \widehat{B}^{-1}$ ou $\widehat{C} < \widehat{B}^{-1}$.

$$Z(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) = s_n + \frac{s_n - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}{\dfrac{\widehat{T}(s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}) - \widehat{T}(s_n, s_{n+1}, s_{n+2})}{s_{n+1} - s_n} - 1}$$

où $\widehat{T}$ est la transformation représentant le Δ^2-Aitken. Z est bien la transformation qui représente le Θ_2-Algorithme. D'où la démonstration du théorème.

■

Remarque :

La complexité des calculs nous a empéché de donner un théorème de contraction pour le Θ_2-Algorithme en procédant d'une façon directe, comme ce qu'on a fait dans le chapitre II pour le procédé Δ^2-Aitken. Par contre, en utilisant le procédé standard $n^0 2$, l'intermediaire Δ^2-Aitken nous a permis d'une façon indirecte de montrer ce résultat.

3.4 Exemples Numériques

Pour les exemples numériques qui suivent, on construit la suite d'intervalles (S_n) de telle façon qu'elle converge vers $S = s = 0$ et qu'elle admette un indice de stationnarité infini. On calcule successivement, la suite d'intervalles $(\widehat{T}_n)$ transformée par le Δ^2-Aitken, la suite d'intervalles (Z_n) transformée par le Θ_2-Algorithme , le rapport d'erreurs (E_n) de (S_n), le rapport de différences (D_n) de (S_n), la condition de contraction par le Δ^2-Aitken $(x_n) < 0$ où (x_n) est donnée par $x_n = Max\{x^{(i,j)}(s_n); s_n \in S_n \text{ et } i,j = 1,2\}$,$(x^{(i,j)}(s_n))$ est définie par,

$$\begin{aligned} x^{(i,j)}(s_n) &= 2\rho_n^{(j,.)}(s_n)\left[\rho_n^{(j,.)}(s_n) - \rho_{n+1}^{(i,j)}\right] - \left(\rho_n^{(j,.)}(s_n) - 1\right)^2 \\ &= -\frac{s_n^2 + 2s_n(s_{n+2}^i - s_{n+1}^j - s) + s_{n+1}^j(4s - s_{n+1}^j) - 2s_{n+2}^i s}{(s_n - s)^2} \end{aligned}$$

et finalement $\widehat{R}_n$, R_n les rapports d'accélération respectivement par rapport au Δ^2-Aitken et au Θ_2-Algorithme .

<u>Exemple 3.4.1</u>

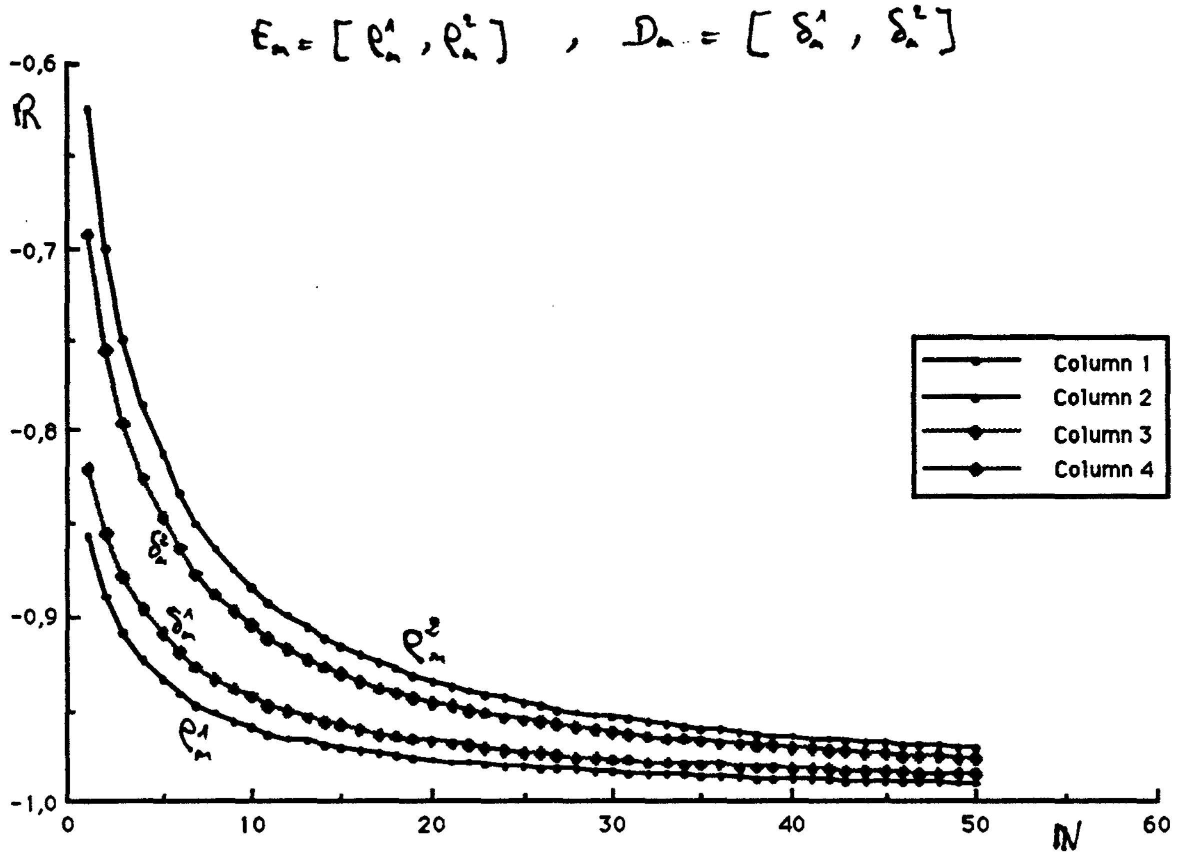
Soit (S_n) la suite d'intervalles définie par, $S_{2n} = [\frac{1}{2\alpha n + \beta}, \frac{1}{2\alpha n + \gamma}]$ et $S_{2n+1} = [\frac{-1}{2\alpha n + \alpha + \gamma}, \frac{-1}{2\alpha n + \alpha + \beta}]$ où α, β et γ des réels positifs vérifiant $\beta > \gamma$ (dans cet exemple on prend $\alpha = 0.1, \beta = 0.2$ et $\gamma = 0.15$). Dans ce cas la suite d'intervalles (S_n) converge linéairement vers $S = s = 0$. Cet exemple montre que le Δ^2- Aitken et le Θ_2-Algorithme donnent la même contraction pour la suite d'intervalles (S_n).

Par exemple, pour $s_n = \frac{s_n^1 + s_n^2}{2} \in S_n$ on a

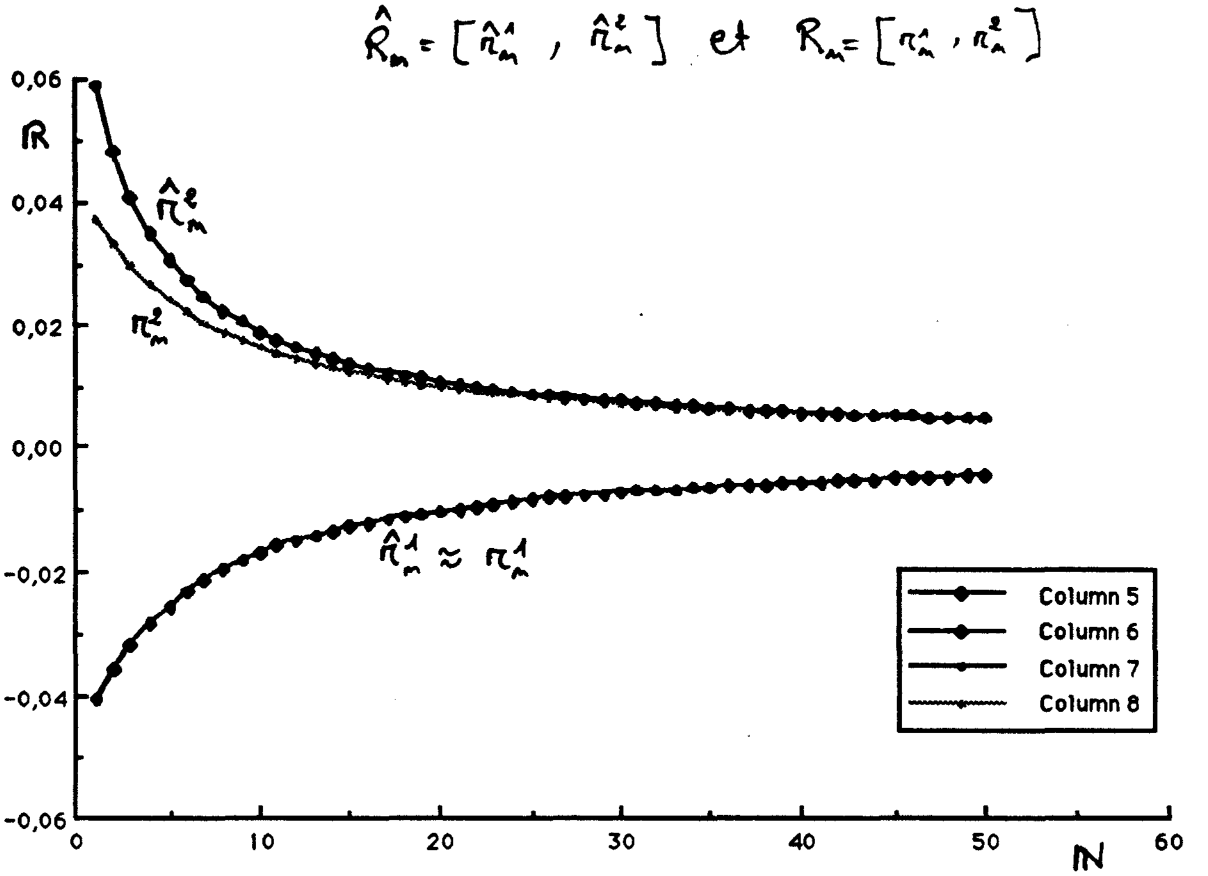
$$x^{(2,1)}(s_n) = -\frac{8631 + 19416n + 17107(n)^2 + 7370(n)^3 + 1552(n)^4 + 128(n)^5}{(n+3)^2(2n+7)(4n+7)}$$ qui est strictement négatif.

On remarque que $0 \in R_n \approx \widehat{R}_n \subset]-1, +1[$.

. Les courbes suivantes représentent (E_n) et (D_n) respectivement la suite d'intervalles de rapport d'erreurs et celle de rapport de différences



Les courbes suivantes représentent $(\widehat{R}_n)$ et (R_n), respectivement rapport d'accélération de (S_n) par rapport au Δ^2-Aitken et le Θ_2-Algorithme.

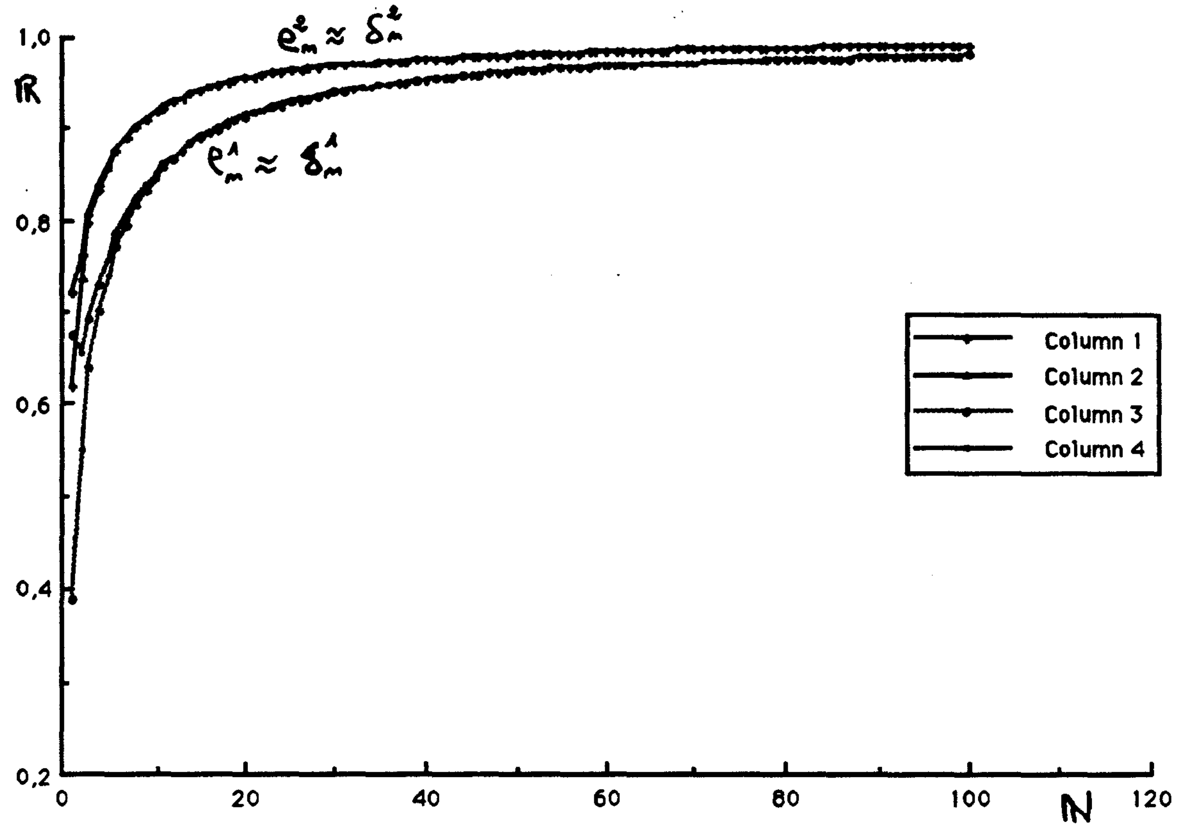


Exemple 3.4.2

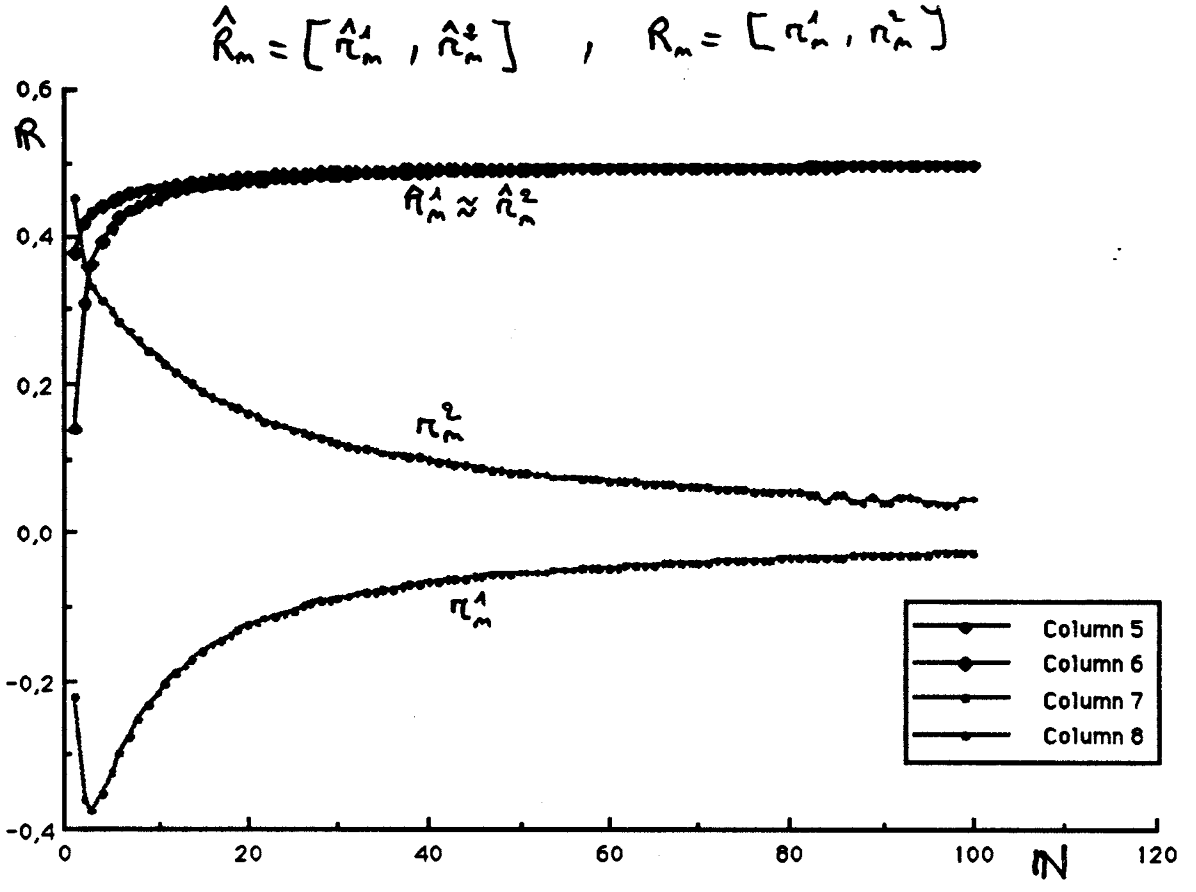
Soient $s_n = 1 + \frac{1}{n}$, $\varepsilon_n = \frac{1}{n^4}$ et (S_n) la suite d'intervalles définie par : $S_n = [s_n - \varepsilon_n, s_n + \varepsilon_n]$. Dans ce cas la suite d'intervalles (S_n) converge linéairement vers $S = s = 0$. Cet éxemple montre que le Δ^2- Aitken n'est pas une contraction pour (S_n), par contre le Θ_2-Algorithme l'est.

Les courbes suivantes représentent (E_n) et (D_n) respectivement la suite d'intervalles de rapport d'erreurs et celle de rapport de différences

$E_m = [\rho_m^1, \rho_m^2]$, $\mathcal{D}_m = [\delta_m^1, \delta_m^2]$



Les courbes suivantes représentent $(\widehat{R}_n)$ et (R_n), respectivement rapport d'accélératio de (S_n) par rapport au Δ^2-Aitken et le Θ_2-Algorithme.

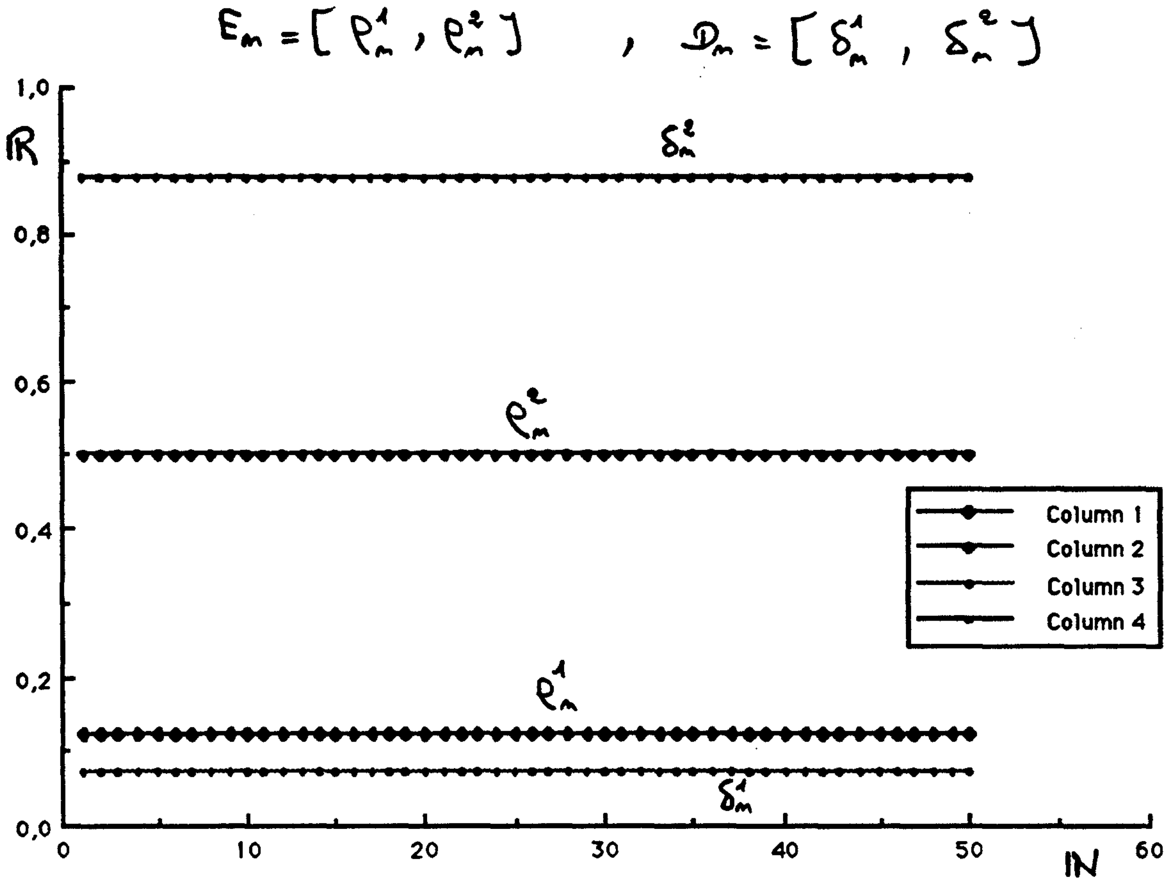


Exemple 3.4.3

Soit $s_n = 2^{-n}$. On construit (S_n) par, $S_n = [s_n^1, s_n^2] = [s_{2n+1}, s_{2n}]$. Cet exemple montre que ni le Δ^2-Aitken ni le Θ_2-Algorithme ne sont des contractions pour (S_n). Effectivement ni la condition du théorème 3.2.1 ni les hypothèses H_1, H_2 et H_3 ne sont vérifiées.

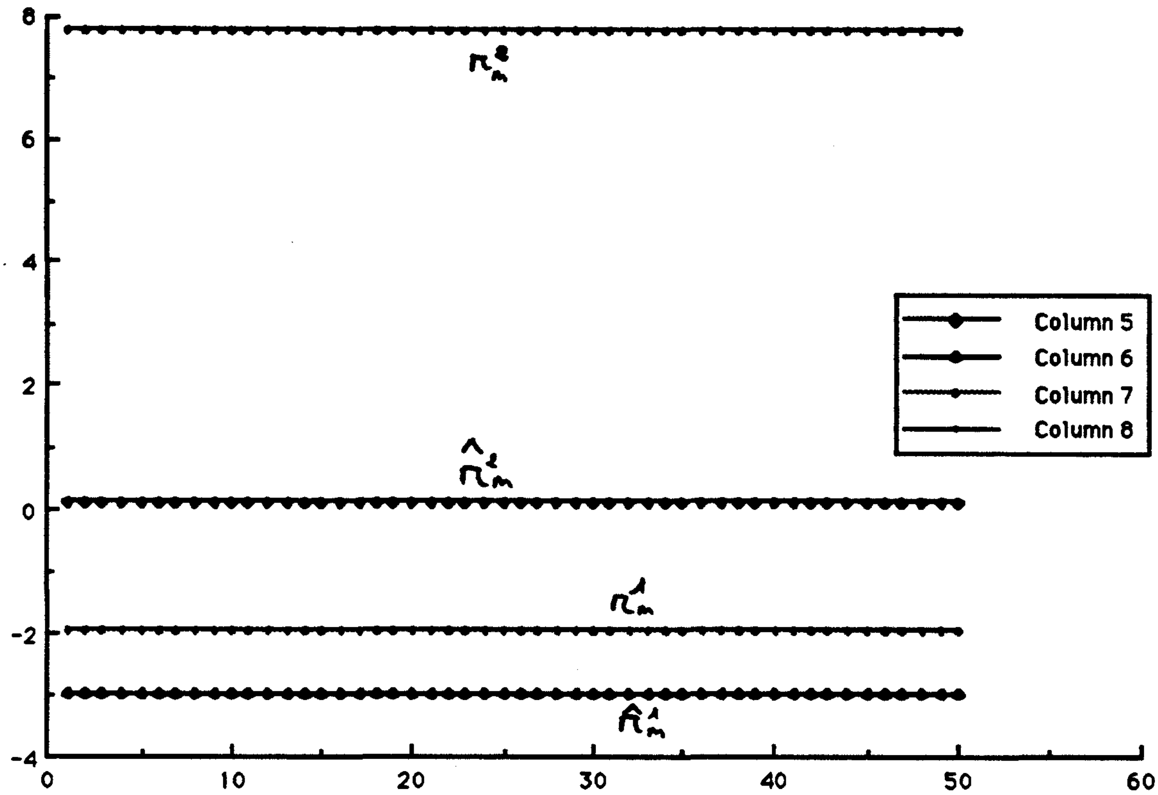
Par exemple, pour $s_n = s_n^1 \in S_n$ on a $x^{(1,2)}(s_n) = \dfrac{1}{8} > 0$.

Les courbes suivantes représentent (E_n) et (D_n) respectivement la suite d'intervalles de rapport d'erreurs et celle de rapport de différences



Les courbes suivantes représentent $(\widehat{R}_n)$ et (R_n), respectivement rapport d'accélération de (S_n) par rapport au Δ^2-Aitken et le Θ_2-Algorithme.

$\hat{R}_m = [\hat{r}^1_m , \hat{r}^2_m]$, $R_m = [r^1_m , r^2_m]$



Conclusion :

Les résultats d'amélioration du comportement d'une suite d'intervalles d'indice de stationnarité fini [1] traités au chapitre II de ce travail, peuvent avoir une application (dans un cadre bien particulier) aux suites de nombres-machine [8] et ceci en identifiant un nombre-machine donné avec un intervalle fermé dont tout les éléments sont représentés sur ordinateur par ce même nombre-machine. D'un autre côté, dans tous les résultats de contractions qu'on a donné pour les suites d'intervalles de segment-limite dégénéré et d'indice de stationnarité infini [2], on a en plus la propriété : 0 appartient au segment-limite de la suite d'intervalles de rapport d'accélération. Ceci nous permet de voir ces résultats, lorsqu'on impose à la suite d'intervalles de rapport d'accélération de converger au sens de Hausdorff (cas particulier du segment-limite), comme une généralisation au cas des suites d'intervalles des même résultats connus dans le cadre de l'accélération de la convergence de suites de nombres réels ([3] et [4]), si non ils peuvent être interpretés comme une généralisation au suites d'intervalles du concept de contraction [5].

Bibliography

[1] A. H. BENTBIB, *Acceleration of convergence of interval sequence, Journal of Computational and Applied Mathematics, à paraître.*

[2] A. H. BENTBIB, *Standard processes for acceleration of convergence of interval sequence, Journal of Numerical Algorithms, soumis.*

[3] C. BREZINSKI, Accélération de la convergence en analyse numérique, Springer-Verlag, New-York, 1977.

[4] C. BREZINSKI, Algorithmes d'accélération de la convergence, Technip, Paris, 1978.

[5] C. BREZINSKI, *Contraction properties of sequence transformations, Numerische Mathematik, 54, 565-574 (1989).*

[6] F. CORDELLIER, *Sur la régularité des procédés Δ^2- Aitken et W de Lubkin. Padé Approximation and its application, L. Wuytack ed, Lecture Notes in Math. 765, Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg. New-York, 20-35 (1979).*

[7] B. GERMAIN-BONNE, Estimation de la limite de suites et formalisation de procédés d'accélération de convergence, thèse Doctorat es sciences mathèmatiques. Universite de lille1, 1978.

[8] B. GERMAIN-BONNE, *Convergence acceleration of number-machine sequences, Journal of Computational and Applied Mathematics, 32, 83-88 (1990).*

[9] C. KOWALEWSKI, Possibilités d'accélération de la convergence logarithmique, thèse Doctorat 3^{eme} cycle. Universite de lille1, 1981.

[10] S. LUBKIN, *A method of Summing infinite Series, J. of Research of N.B.S, Vol 48 N^0 3, 228-254 (1952).*

[11] R. E. MOORE, Interval analysis, Series in automatic computation, Prentice-Hall, Wisconsin, 1966.

[12] BL. SENDOV, Hausdorff approximations, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.