50376
1993
195

50376
1993
195

# THESE

DETOU

présentée à

**l'Université des Sciences et Technologies de Lille**

pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR EN MATHEMATIQUES**

# APPROXIMATION DIOPHANTIENNE ET IRRATIONALITE DE LA SOMME DE CERTAINES SERIES DE NOMBRES RATIONNELS

UNIVERSITE DES Sc. et Techn. BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE LILLE

par

Daniel DUVERNEY

UNIVERSITE DES Sc. et Techn. BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE LILLE

Jury :

Monsieur le Professeur P. Bundschuh, Université de Cologne
(Président et Rapporteur)

Monsieur le Professeur J.P. Bézivin, Université de Caen
(Rapporteur)

Monsieur le Professeur C. Brezinski, Université de Lille 1

Monsieur le Professeur M. Huttner, Université de Lille 1
(Directeur de Thèse)

Monsieur le Professeur M. Langevin, Université de Lille I

Monsieur le Professeur G. Rhin, Université de Metz

Monsieur le Professeur M. Waldschmidt, Université de Paris 6

# AVANT-PROPOS

Cette thèse a été réalisée et mise au point à l'Université de Lille Flandres Artois, sous la direction de Monsieur Marc Huttner, qui m'a fait profiter de son expérience en approximation diophantienne. Il m'est agréable de le remercier ici pour son aide durant tout ce travail.

Depuis le moment où il a été au courant de mes premières recherches, Monsieur Michel Waldschmidt, Professeur à l'Université de Paris VI, n'a cessé de m'encourager et de me soutenir, et je ne saurais lui témoigner assez de gratitude. Il peut être considéré comme le parrain de cette thèse, et celle-ci lui est respectueusement dédiée.

Monsieur Jean-Paul Bézivin, Professeur à l'Université de Caen, a bien voulu accepter d'être Rapporteur, ce dont je lui suis infiniment reconnaissant. Sa correspondance et ses critiques constructives m'ont permis de progresser et d'augmenter mes connaissances des problèmes d'irrationalité.

Je remercie vivement Monsieur Peter Bundschuh, Professeur à l'Université de Cologne, d'avoir également accepté d'être Rapporteur, dans un domaine où il est un des plus éminents spécialistes. J'espère que les résultats présentés ci-après me rendront digne de la confiance qu'il m'a témoignée.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Claude Brezinski, Professeur à l'Université de Lille Flandres Artois. Je lui dois toutes mes connaissances quant aux rapports entre approximants de Padé et polynômes orthogonaux, et j'ai beaucoup apprécié ses encouragements à poursuivre mes propres travaux sur ces rapports, qui constituent la deuxième partie de ma thèse.

Je remercie également Monsieur Georges Rhin, Professeur à l'Université de Metz, qui m'a encouragé dès le début de mes travaux sur l'irrationalité, sans cesser, depuis, de me témoigner son estime.

Monsieur Jean-Pierre Serre, Professeur au Collège de France, m'a fourni de nombreux renseignements sur les problèmes de densité des suites de nombres premiers, et je lui exprime ma gratitude pour la confiance qu'il m'a témoignée.

Lors de sa venue à Lille, j'ai eu avec Monsieur le Professeur A. Schinzel une très enrichissante discussion mathématique, portant notamment sur les propriétés de divisibilité des suites $A^n - B^n$ . On trouvera des résultats de cette discussion dans cette thèse, et je l'en remercie vivement.

Monsieur Michel Langevin, Professeur à l'Université de Lille Flandres Artois, m'a beaucoup aidé ; je lui sais beaucoup de gré de sa disponibilité à mon égard, et de la considération qu'il a toujours manifestée pour mes recherches.

Je remercie Mesdames Anne Duval et Jeannette van Iseghem, Professeurs à l'Université de Lille Flandres Artois, pour l'attention qu'elles ont portée à mon travail et les nombreuses connaissances mathématiques que je leur dois, ainsi que Monsieur Daniel Bertrand, Professeur à l'Université de Paris VI, pour ses stimulantes suggestions.

Il est très problable que cette thèse n'aurait jamais vu le jour si j'étais resté à Bourges, loin de tout centre universitaire de quelque importance. Je tiens donc à exprimer toute ma reconnaissance à l'Inspection Générale de Mathématiques, et notamment à Messieurs Legrand (Doyen), Dablanc et Ovaert, pour m'avoir proposé, à la rentrée 1990, un poste en Classe Préparatoire à HEC à Douai, me permettant de fréquenter régulièrement l'Université de Lille Flandres Artois. Je n'oublierai jamais, notamment, la courtoisie et la gentillesse avec lesquelles Monsieur Dablanc m'avait reçu rue de Grenelle lorsque j'y étais venu pour exposer mes problèmes.

Je remercie enfin Madame Ginette Doclot, responsable de la bibiothèque de l'UFR de Mathématiques de l'Université de Lille Flandres Artois, pour l'aide qu'elle m'a apportée dans mes recherches bibliographiques, et Mademoiselle Myriam Varlamoff, qui a réalisé la dactylographie de cette thèse, et assuré depuis plusieurs années la frappe de mes articles de manière dévouée, rapide et particulièrement compétente.

# INTRODUCTION

Le but de ce travail est de démontrer l'irrationalité des sommes de certaines séries de nombres rationnels, en utilisant des approximations diophantiennes explicites de ces sommes.

En d'autre termes, soit $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{Q}$, et soit à démontrer que $x \notin \mathbb{Q}$. Nous chercherons à construire explicitement une suite $q_n = \frac{r_n}{s_n}$, $r_n \in \mathbb{Z}$, $s_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, convergeant "rapidement" vers $x$ ; le résultat le plus simple à ce sujet est le suivant :

*(R) Si* $0 < |s_n x - r_n| \leq \varepsilon_n$, *avec* $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, *alors* $x$ *est irrationnel.*

Ce critère résulte immédiatement du fait qu'*une suite d'entiers naturels non nuls ne peut tendre vers zéro.* Et sa *réciproque* est vraie [74].

*(R') Si* $x$ *est irrationnel, il existe une suite* $(r_n, s_n) \in \mathbb{Z}_n \times (\mathbb{Z}_n - \{0\})$ *telle que* $|s_n x - r_n| \neq 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty} |s_n x - r_n| = 0$.

On remarquera que (R) reste vrai si on remplace $\mathbb{Q}$ par $K = \mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ et $\mathbb{Z}$ par l'anneau $A$ des entiers de $K$, car il est bien connu que $A$ est *discret* pour la topologie induite par la valeur absolue ordinaire dans $\mathbb{C}$.

Une légère modification de ce raisonnement permet de conclure à l'irrationalité de la somme de certaines séries de rationnels convergeant dans $\mathbb{Q}_p$, le corps des nombres $p$-adiques.

Le fait qu'une suite d'entiers non nuls ne puisse tendre vers zéro est un des outils essentiels en théorie des nombres [73], et nous en ferons un usage systématique. Même les remarquables démonstrations de J.P. Bézivin, qui semble ouvrir une voie nouvelle en obtenant des résultats d'irrationalité par une autre technique que celle de l'approximation diophantienne ([9], [10]), reposent sur l'usage de cet outil, par l'intermédiaire de critères pour la rationalité de la somme d'une série formelle (critère de Borel-Dwork, par exemple [2]).

On peut distinguer, *grosso modo*, cinq méthodes pour construire des approximations diophantiennes explicites de la somme d'une série ; dans cette thèse, nous utiliserons la première et la troisième.

**a)** Le plus simple consiste à approcher $x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ $(a_n \in \mathbb{Q})$ par ses *sommes*

*partielles* $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. La classique démonstration de l'irrationnalité de $e$ est un exemple d'utilisation de cette technique, qui permet de prouver aussi l'irrationalité de $\sum_{n=0}^{+\infty} q^{-n^2}$, $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geq 2$, comme J. Liouville l'a signalé [54]. Ces deux exemples sont d'ailleurs des cas particuliers de séries de Engel ([60], [36]).

**b)** On peut essayer d'approximer $x$ par des *fractions continues* ; l'exemple le plus célèbre d'utilisation de cette méthode est la démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-3}$ par R. Apéry [26].

**c)** Lorsque $x = f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^n$, $f_n \in \mathbb{Q}$, on peut essayer de déterminer des *approximants de Padé* de $f(z)$ (qui conduisent d'ailleurs à des fractions continues [59] ; voir [16] pour l'aspect historique de la question), ou des approximants de types Padé ([15], [I7]). Hermite a démontré la transcendance de $e$ en utilisant des approximants de Padé simultanés des séries $\exp(\alpha_1 z), \exp(\alpha_2 z), \ldots, \exp(\alpha_n z)$ ([66], par exemple). Plus récemment, les approximants de Padé ont été remis à l'honneur en théorie des nombres par G.V. Chudnovsky ([24], [25]), et utilisés par P. Borwein [13], M. Huttner ([47], [48], [49]), et T. Stihl [69], parmi beaucoup d'autres. Il est à noter que G.V. Chudnovsky et M. Huttner utilisent les équations différentielles vérifiées par certaines fonctions pour obtenir leurs approximants de Padé.

**d)** Encore dans le cas où $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^n$, $f_n \in \mathbb{Q}$, $z \in \mathbb{Q}^*$, on peut chercher une *approximation de* $f(z)$ *par une série de polynômes de Newton*, c'est à dire :

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} A_\nu \, P_\nu(z), \qquad \text{avec } P_\nu(z) = \prod_{k=1}^{\nu} (z - z_k), \; A_\nu \in \mathbb{C},$$

où les $z_\nu$ sont des nombres complexes à choisir.

Cette méthode a été utilisée par P. Bunchschuh ([18], [19], [20]) pour obtenir des résultats d'irrationalité sur la fonction $q$-hypergéométrique :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(a+b)(aq+b)\ldots(aq^n+b)}.$$

**e)** Une dernière méthode, utilisée entre autres par F. Beukers [7], G. Rhin ([62], [63]), M. Hata [44], P. Borwein [14], consiste à se donner, a priori, un $\varepsilon_n$ *sous forme*

*d'intégrale*, de façon à ce que :

$$\varepsilon_n = \int_C f_n(z)dz = \alpha_n x + \beta_n, \qquad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q},$$

$C$ étant un chemin convenablement choisi dans le plan complexe. Le choix de $f_n$ et de $C$ est, naturellement, loin d'être évident ! L'intégrale sur un contour peut être remplacée par une intégrale double, ou triple.

Dans cette thèse, nous démontrerons un certain nombre de nouveaux résultats d'irrationalité, concernant principalement des valeurs de *q-fonctions*, c'est à dire de cas particuliers de fonctions $q$-hypergéométriques [37].

Elle se compose de trois parties.

Dans la *première partie*, nous approximons des séries par leurs sommes partielles pour démontrer les résultats suivants :

**Résultat n° 1** : Soit $x_q = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{-n^2}$, $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geq 2$. Alors $x_q$ n'est pas quadratique : $\forall (A, B, C) \in \mathbb{Z}^3$ :

$$(A, B, C) \neq (0, 0, 0) \Rightarrow Ax_p^2 + Bx_p + C \neq 0.$$

**Résultat n° 2** : Soit la série $p$-adique : $y_p = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p^{mn^2}$ avec $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, $a_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $|a_n| \leq M$. Alors $y_p$ n'est pas quadratique : $\forall (A, B, C) \in \mathbb{Z}^3$.

$$(A, B, C) \neq (0, 0, 0) \Rightarrow Ay_p^2 + By_p + C \neq 0.$$

La *deuxième partie* est purement algébrique : nous y introduisons la notion de $U$-dérivation (déjà considérée par M. Ward [76]), qui généralise à la fois la dérivation ordinaire et la $q$-dérivation [34]. Nous étudions quelques unes de ses propriétés ($U$-formule de Taylor, $U$-racines d'ordre $k$ d'un polynôme), puis nous les utilisons pour calculer explicitement la diagonale de la table de Padé des séries formelles : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X^n}{u_n}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X^n}{u_1 u_2 \dots u_n}$, où la suite $(u_n)$ est arithmético-géométrique.

Dans la *troisième partie*, nous utilisons la $U$-dérivation et les approximants de Padé étudiés dans la deuxième partie pour obtenir des résultats d'irrationalité. Par exemple :

**Résultat n° 3** : Si $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geq 2$ et $r \in \mathbb{Z}$, $0 < r^2 \leq |q|$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{q^n - r} \notin \mathbb{Q}$.

**Résultat n° 4** : Soit $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ la suite des nombres premiers dans $\mathbb{N}$, soit $z \in \mathbb{Q}^*$, et $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geq 2$. Alors

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{p_1 p_2 \cdots p_n \, q^{\frac{n(n+1)}{2}}} \notin \mathbb{Q}.$$

Chacun des chapitres de cette thèse est constitué d'un article légèrement remanié : deux d'entre eux sont acceptés pour publication (le chapitre 1, Partie I, dans *Acta Arithmetica* ; le chapitre 3, Partie II, dans *Les Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*). Les autres sont tous soumis pour examen dans diverses revues.

# PREMIERE PARTIE

# EXEMPLES D'APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES PAR LES SOMMES PARTIELLES

# CHAPITRE 1

# PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES D'UNE SÉRIE LIÉE AUX FONCTIONS THÉTA

## 1 - Introduction

Soit $q \in \mathbb{Z}, |q| \geq 2$. Nous définissons

$$x_q = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{-n^2} \tag{1}$$

Il est clair que $x_q$ est un nombre irrationnel, puisque son développement $q$-adique est formé d'une suite non périodique de 0 et de 1.

J. Liouville a démontré l'irrationalité de $x_q$ en l'approximant par les sommes partielles de la série qui le définit [54].

L'étude des propriétés arithmétiques de $x_q$ s'est poursuivie grâce à l'introduction de la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{-\frac{n(n+1)}{2}} z^n \tag{2}$$

On peut citer, sur ce sujet, les travaux de L. Tschakaloff [71], de P. Bundschuh [20], de P. Bundschuh et M. Waldschmidt [22]. Pour une bibliographie plus complète sur ce sujet, on pourra consulter [21].

En particulier, P. Bundschuh dans [20] a démontré que $x_q$ n'est pas un nombre de Liouville.

Très récemment, P. Borwein a prouvé dans [14] que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{q^n + r} \notin \mathbb{Q}$, si $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq -q^n$. On en déduit que $x_q^2 - x_q$ est irrationnel ([43], Th. 312, p. 258).

Les nombres $x_q$ se trouvent liés de manière très simple à la fonction $\theta_3$ de Jacobi, puisque l'on a ([23], p. 65) :

$$2x_q = 1 + \theta_3\left(0, \frac{\log q}{i\pi}\right) \tag{3}$$

Dans ce chapitre, nous démontrons le résultat suivant :

**Théorème 1.** Soit $q \in \mathbb{Z}, |q| \geq 2$. Alors :

$$x_q = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{-n^2} \qquad \text{est non quadratique.}$$

P. Erdös conjecture par ailleurs dans [33] que, si $n_k$ est une suite d'entiers vérifiant $n_k > ck^2$, alors $\sum_{k=1}^{+\infty} q^{-n_k}$ est non quadratique. Cette conjecture pourrait peut-être se démontrer par une méthode analogue à celle utilisée ici, bien que cela paraisse, a priori, beaucoup plus difficile.

Pour démontrer le théorème 1, nous utiliserons le critère d'irrationalité suivant:

**Théorème 2.** Soit $q \in \mathbb{Z}, |q| \geq 2$. Soit $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

a) $a(n) \neq 0$ pour une infinité de valeurs de $n$.

b) Pour $n$ assez grand, $|a(n)| \leq r(n)$, avec

$b_1$) $r(n) > 0$

$b_2$) $\limsup \dfrac{r(n+1)}{r(n)} < |q|$.

c) Il existe une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$, et des entiers $n_k \in \mathbb{N}$, tels que :

$c_1$) $a(n_k+1) = a(n_k+2) = \cdots = a(n_k+k) = 0$

$c_2$) $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{r(n_k+k+1)}{|q|^k} = 0$

Soit $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a(n)}{q^n}$. Alors si $x = \dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$ , on a pour $k$ assez grand :

$$\boxed{\alpha q^{n_k} - \beta \sum_{n=0}^{n_k} a(n) q^{n_k - n} = 0} \tag{4}$$

La démonstration du théorème 2 sera donnée au paragraphe 2. Remarquons seulement que ce critère est basé tout simplement sur l'approximation de $x$ par ses sommes partielles et nous n'introduisons, par conséquent, aucun outil nouveau.

Il existe d'autres résultats d'irrationalité pour les séries $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a(n)}{q^n}$ comportant beaucoup de termes nuls. On peut citer les deux théorèmes suivants :

**Théorème 3.** [39] Si $a(n) \in \mathbb{N}$ pour tout $n \geq 1$, et si $a(n)$ est non nul pour une infinité de valeurs de $n$, avec :

$$\sum_{k=1}^{n} a(k) = o(n), \tag{5}$$

alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(n)}{q^n}$ est irrationnel pour tout entier $q \geq 2$.

**Théorème 4.** [32] Soit $a(1) < a(2) < \cdots$ une suite d'entiers satisfaisant $\lim_{n\to\infty}[a(n+1) - a(n)] = +\infty$. Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} a(n)q^{-a(n)}$ est irrationnel pour tout entier $q \geq 2$.

Aucun de ces deux théorèmes ne peut s'appliquer au cas qui nous occupe, même pour $q \geq 2$. Supposons, en effet, que $x_q$ soit quadratique, c'est à dire qu'il existe $A, B, C \in \mathbb{Z}, A \neq 0$, tels que :

$$Ax_q^2 + Bx_q + C = 0 \tag{6}$$

Ecrivons : $x_q = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{l(n)}{q^n}$ avec $l(n) = 1$ si $n$ est le carré d'un entier naturel, $l(n) = 0$ sinon.

Alors $x_q^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} l(k)l(n-k)q^{-n}$.

Des considérations bien connues ([43], p. 258 ; [34], p. 219) montrent que :

$$x_q^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\rho(n)}{q^n} \tag{7}$$

où $\rho(n)$ désigne le nombre de décompositions de $n$ en somme des carrés de deux entiers positifs.

Alors (6) devient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A\,\rho(n) + B\,l(n)}{q^n} + C = 0 \tag{8}$$

On se ramène donc à prouver l'irrationalité de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(n)}{q^n}$, avec $a(n) = A\rho(n) + B\,l(n)$. Puisque $a(n)$ peut changer de signe, ni le théorème 3 ni le théorème 4 ne

peuvent être utilisés. Ils ne peuvent même pas permettre de démontrer que $x_q^2$ est irrationnel. C'est clair pour le théorème 4 ; en ce qui concerne le théorème 3, on sait que ([43], p. 270, th. 339)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(1)+\rho(2)+\cdots+\rho(n)}{n} = \frac{\pi}{4}. \tag{9}$$

La condition (5) n'est donc pas vérifiée.

Il nous faudra, pour appliquer le théorème 2, un lemme assez fin sur la répartition des zéros de la fonction $\rho(n)$. Ce lemme sera énoncé et démontré au paragraphe 4. Sa démonstration utilise de manière essentielle le résultat suivant, dû à Y. Linnik [53] :

**Théorème 5.** Soit $u_n = \zeta n + \chi$, avec $\zeta, \chi \in \mathbb{N}$ , $\zeta$ et $\chi$ premiers entre eux, et $0 < \chi < \zeta$. Soit $p(\zeta, \chi)$ le plus petit nombre premier de la suite arithmétique $u_n$. Il existe une constante absolue $L$ (constante de Linnick) telle que :

$$p(\zeta, \chi) \leq \zeta^L \tag{10}$$

pour $\zeta$ assez grand.

La constante $L$ est effectivement calculable. On sait par exemple que $L \leq 20$ [41]. Mais nous n'aurons pas besoin de cette estimation.

Le plan de ce chapitre est le suivant : dans le paragraphe 2, nous démontrons le théorème 2. Dans le paragraphe 3, nous donnons un exemple pédagogique d'application du théorème 2. Cet exemple nous permettra de motiver la forme générale du lemme technique sur les zéros de $\rho(n)$. L'énoncé et la longue démonstration de ce lemme occuperont le paragraphe 4. Dans le paragraphe 5 enfin, nous démontrerons le théorème 1.

## 2 - Démonstration du théorème 2

Si $\beta x - \alpha = 0$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, alors :

$$\alpha q^{n_k} - \beta \sum_{n=0}^{n_k} a(n) q^{n_k - n} = \beta q^{n_k} \sum_{n=n_k+1}^{+\infty} \frac{a(n)}{q^n}$$

D'où, en vertu de $(c_1)$ :

$$\alpha q^{n_k} - \beta \sum_{n=0}^{n_k} a(n) q^{n_k - n} = \beta q^{n_k} \sum_{n=n_k+k+1}^{+\infty} \frac{a(n)}{q^n} \tag{11}$$

Utilisant b), nous obtenons :

$$\left|\alpha q^{n_k} - \beta \sum_{n=0}^{n_k} a(n) q^{n_k - n}\right| \leq |\beta|\,|q|^{n_k} \sum_{n=n_k+k+1}^{+\infty} \frac{r(n)}{|q|^n}$$

D'après l'hypothèse $b_2$), on peut trouver $\eta \in ]0, |q|[$ tel que $\dfrac{r(n+1)}{r(n)} \leq \eta$ pour $n$ assez grand. Mais $n_k$ tend vers l'infini avec $k$ en vertu de a), donc pour $k$ assez grand :

$$\begin{aligned}\left|\alpha q^{n_k} - \beta \sum_{n=0}^{n_k} a(n) q^{n_k - n}\right| &\leq |\beta|\,|q|^{n_k} \sum_{n=n_k+k+1}^{+\infty} \frac{r(n_k+k+1)\eta^{n-(n_k+k+1)}}{|q|^n} \\ &\leq |\beta|\,|q|^{n_k} \frac{r(n_k+k+1)}{|q|^{n_k+k+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\eta}{|q|}\right)^n \\ &\leq \frac{|\beta|}{|q|-\eta} \frac{r(n_k+k+1)}{|q|^k}\end{aligned}$$

Pour $k$ assez grand, l'hypothèse $c_2$) et le fait que le membre de gauche de cette inégalité est entier entraînent que :

$$\alpha q^{n_k} - \beta \sum_{n=0}^{n_k} a(n) q^{n_k - n} = 0, \qquad C.Q.F.D.$$

*Remarque.* Dans le cas où tous les termes de la série sont positifs, c'est à dire $q \geq 2$ et $a(n) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, on peut conclure que $x$ est irrationnel (il suffit de reporter le résultat obtenu dans l'égalité (11)). Mais dans le cas général, on ne peut espérer qu'une contradiction de type arithmétique, faisant intervenir la notion de divisibilité. C'est ce qui apparaîtra nettement dans l'exemple simple que nous étudions maintenant.

## 3 - Un exemple pédagogique

**Théorème 6.** Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres premiers de $\mathbb{N}$. Soit $q \in \mathbb{Z}, |q| \geq 2$. Alors :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n q^{-p_n} \qquad \text{est irrationnel.}$$

*Démonstration.* Avant de démontrer ce théorème, remarquons qu'il ne peut se déduire du théorème 4, puisque l'on ne connait pas $\liminf(p_{n+1} - p_n)$ (voir par

exemple [64], p. 191 et suivantes). Il ne peut non plus se déduire du théorème 3, même si $q > 0$, car si nous posons

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(n)}{q^n}$$

avec $a(n) = n$ si $n$ est premier et $a(n) = 0$ si $n$ est composé nous avons

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a(i) = \frac{1}{n}\sum_{p\leq n} p \geq \frac{1}{n}\sum_{\frac{n}{2}\leq p\leq n} p \geq \frac{1}{2}\left(\pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Démontrons maintenant le théorème 6. Nous prenons $r(n) = n$ et nous utilisons le résultat élémentaire suivant [61] :

**Lemme 1.** Pour une infinité d'entiers $n$, on a :

$$p_{n+1} - p_n \geq 1.7 \log\ p_n.$$

Il résulte immédiatement de ce lemme qu'il existe une suite de nombres premiers $n_k$ telle que :

$$a(n_k + 1) = a(n_k + 2) = \cdots = a(n_k + k) = 0 \quad \text{avec } k \geq \frac{3}{2}\log\ n_k.$$

On a donc $n_k \leq \exp\left(\frac{2}{3}k\right)$, et puisque $\exp\frac{2}{3} < 2$, on a $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} \dfrac{r(n_k+k+1)}{|q|^k}$ $= 0$.

Donc si $x = \dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, on a pour $k$ assez grand, en vertu du théorème 2 :

$$\alpha q^{n_k} - \beta \sum_{n=0}^{n_k} a(n) q^{n_k - n} = 0.$$

Posons $\beta = q^\gamma \beta'$, où $q$ ne divise par $\beta'$. Alors

$$\alpha q^{n_k - \gamma} - \beta' \sum_{n=0}^{n_k} a(n) q^{n_k - n} = 0.$$

On en déduit que $q$ divise $\beta' a(n_k) = \beta' n_k$. Puisque $n_k$ est premier, $q$ divise $\beta'$, et cette contradiction démontre le théorème 6.

## 4 - Un lemme sur les zéros de la suite $\rho(n)$

**Lemme 2.** Soit $\delta \in \mathbb{N}^*$, et soit $a \in ]0,1[$. On désigne par $p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$ la suite des nombres premiers de $\mathbb{N}$ qui sont congrus à 3 modulo 4, $p_1$ étant choisi de façon que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n^2} \leq \frac{a}{2}. \tag{12}$$

Alors il existe un entier $m_0 = m_0(a,\delta)$ et une constante $L$ (constante de Linnick, voir théorème 5 ci-dessus) tels que, pour tout $k = p_1 p_2 \ldots p_m, m \geq m_0$, il existe $n_k \in \mathbb{N}$ tel que :

a) $\rho(n_k - \delta) = \cdots = \rho(n_k - 1) = \rho(n_k + 1) = \cdots = \rho(n_k + k) = 0$
b) $\rho(n_k) = 2$
c) $l(n_k - \delta) = \cdots = l(n_k) = \cdots = l(n_k + k) = 0$
d) $n_k \leq 4^L \exp(4L\, p_{2[ak]})$.

*Démonstration.* Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, et tout nombre premier $p$, nous notons $\nu_p(x)$ la valuation $p$-adique de $x$.

Pour $h \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathbb{P}_h = \{p_1, p_2 \ldots, p_h\}$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, notons $k = k(m) = p_1 p_2 \ldots p_m$.

### Première étape

a) Soit $\mathbb{M}_m = \{n \in \{1,2,\ldots,k\} / \exists p \in \mathbb{P}_m / \nu_p(n) > 0\}$. En vertu de la formule du crible ([65], p. 22 ; [43], th. 261, p. 234) :

$$\operatorname{card} \mathbb{M}_m = \sum_i \left[\frac{k}{p_i}\right] - \sum_{i \neq j} \left[\frac{k}{p_i p_j}\right] + \cdots + (-1)^{m+1} \left[\frac{k}{p_1 p_2 \ldots p_m}\right]$$

Or $\nu_p(k) > 0, \forall p \in \mathbb{P}_m$, donc :

$$\operatorname{card} \mathbb{M}_m = k - k\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_m}\right) \tag{13}$$

b) Soit $\mathbb{H}_m = \{n \in \{1,2,\ldots,k\} / \exists p \in \mathbb{P}_m / \nu_p(n) \geq 2\}$.

On a : $\operatorname{card} \mathbb{H}_m \leq \left[\frac{k}{p_1^2}\right] + \left[\frac{k}{p_2^2}\right] + \cdots + \left[\frac{k}{p_m^2}\right]$.

En utilisant (12), on obtient : $\operatorname{card}(\mathbb{H}_m) \leq k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i^2} \leq \frac{a}{2} k$.

c) Soit $\mathbb{I}_m = \{n \in \{1,2,\dots,k\}/\exists p \in \mathbb{P}_m/\nu_p(n) = 1\}$. On a card $\mathbb{I}_m =$ card $\mathbb{M}_m -$ card $\mathbb{H}_m$. Donc : card $(\mathbb{I}_m) \geq k\left(1 - \frac{a}{2} - \prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right)$. Mais le produit infini $\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ diverge vers 0 car la série $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{p_i}$ diverge. Donc il existe un entier $m_1 = m_1(a)$ tel que :

$$\forall m \geq m_1 \qquad \boxed{\text{card}\,\mathbb{I}_m \geq k(1-a)} \tag{14}$$

d) Il en résulte que, pour $m \geq m_1$, tous les éléments de $\{1,2,\dots,k\}$ sont divisibles par un facteur $p \in \mathbb{P}_m$ avec un exposant 1 exactement (et ne sont donc pas des sommes de deux carrés, [43], p. 299, th. 366), sauf $N = N(m)$ d'entre eux que nous noterons $u_1 < u_2 < \cdots < u_N$, et on a en vertu de (14) :

$$\forall m \geq m_1 \qquad \boxed{N \leq ak} \tag{15}$$

**Deuxième étape**

a) Nous construisons maintenant $k = k(m)$ nombres entiers <u>consécutifs</u> $e_m + 1, e_m + 2, \dots, e_m + k$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad m \geq m_1 \quad &\Rightarrow \forall i \in \{1,2,\dots,k\}, \exists p \in \mathbb{P}_{m+N}, \\ &\text{tel que } \nu_p(e_m + i) = 1. \end{aligned} \tag{16}$$

On procède de la façon suivante : soit d'abord $r_1 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\begin{cases} 0 \leq r_1 < 2p_{m+1} \\ \nu_{p_{m+1}}\left[r_1(p_1p_2\dots p_m)^2 + u_1\right] = 1 \end{cases} \tag{17}$$

Puis soit $r_h (1 \leq h \leq N)$ défini par récurrence par :

$$\begin{cases} 0 \leq r_h < 2p_{m+h} \\ \nu_{p_{m+h}}\left[r_h(p_1p_2\dots p_{m+h-1})^2 + r_{h-1}(p_1p_2\dots p_{m+h-2})^2 + \cdots \right. \\ \qquad \left. + r_1(p_1p_2\dots p_m)^2 + u_h\right] = 1 \end{cases} \tag{18}$$

Nous posons :

$$\boxed{\begin{aligned} e_m = r_N\left(p_1p_2\cdots p_{m+N-1}\right)^2 + r_{N-1}\left(p_1p_2\cdots p_{m+N-2}\right)^2 + \cdots \\ + r_1\left(p_1p_2\cdots p_m\right)^2 \end{aligned}} \tag{19}$$

Soit $i \in \{1,2,\dots,k\}$.

Il est clair par construction que, si $j \in \{1,2,\dots,m\}, e_m + i \equiv i \left[p_j^2\right]$. Donc si $i \in \mathbb{I}_m, \exists p \in \mathbb{P}_m$, tel que $\nu_p(e_m + i) = 1$. Si $i \notin \mathbb{I}_m$, il existe $h \in \{1,2,\dots,N\}$ tel que $i = u_h$ ; on a alors :

$$e_m + i \equiv r_h \left(p_1 p_2 \dots p_{m+h-1}\right)^2 + \dots + r_1 \left(p_1 p_2 \dots p_m\right)^2 + u_h \ \left[p_{m+h}^2\right]$$

donc $\nu_{p_{m+h}}(e_m + i) = 1$ en vertu de (18).

Par conséquent, le nombre $e_m$ défini par (19) vérifie bien (16).

b) On peut majorer $e_m$, puisque $r_h < 2p_{m+h}, \forall h \in \{1,2,\dots,N\}$ :

$$\begin{aligned} e_m &\leq 2p_{m+N}(p_1 p_2 \dots p_{m+N-1})^2 + 2p_{m+N-1}(p_1 p_2 \dots p_{m+N-2})^2 + \dots \\ &\qquad + 2p_{m+1}(p_1 p_2 \dots p_m)^2 \\ e_m &\leq 2(p_1 p_2 \dots p_{m+N})^2 \left[\frac{1}{p_{m+N}} + \frac{1}{p_{m+N-1}p_{m+N}^2} + \dots + \frac{1}{p_{m+1}p_{m+2}^2 \dots p_{m+N}^2}\right] \\ e_m &\leq 2(p_1 p_2 \dots p_{m+N})^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{3 \cdot 3^{2N-2}}\right) \end{aligned}$$

Donc

(20) $$\boxed{e_m \leq (p_1 p_2 \dots p_{m+N})^2}$$

**Troisième étape**

Soit maintenant

$$\mathbb{J}_m = \{j \in \mathbb{N} / \forall i \in \{1,2,\dots,k\}, \exists p \in \mathbb{P}_{m+N} \text{ tel que } \nu_p(j+i) = 1\}.$$

$\mathbb{J}_m$ est non vide puisqu'il contient $e_m$. Soit $q_m$ le plus petit élément de $\mathbb{J}_m$. On a alors :

(21) $$\boxed{\begin{cases} q_m \leq (p_1 p_2 \dots p_{m+N})^2 \\ \forall p \in \mathbb{P}_{m+N}, \quad \nu_p(q_m) \neq 1 \end{cases}}$$

**Quatrième étape**

a) Notons $v_1 < v_2 < \dots < v_M$ les éléments de $\{1,2,\dots,\delta\}$ tels que : $\forall j \in \{1,2,\dots,M\}, \forall p \in \mathbb{P}_{m+N}, \nu_p(q_m - v_j) \neq 1$.

On a donc : $\boxed{M \leq \delta}$

De même que dans l'étape 2, nous construisons la suite $r'_i$ par les relations suivantes :

$$(22)\qquad \begin{cases} 0 \leq r'_1 < 2p_{m+N+1} \\ \nu_{p_{m+N+1}}\left[r'_1(p_1p_2\dots p_{m+N})^2 + q_m - v_1\right] = 1 \end{cases}$$

Puis par récurrence, pour $1 \leq h \leq M-1$, nous posons :

$$(23)\qquad \begin{cases} 0 \leq r'_h < 2p_{m+N+h} \\ \nu_{p_{m+N+h}}\left(r'_h(p_1p_2\dots p_{m+N+h-1})^2 + r'_{h-1}(p_1p_2\dots p_{m+N+h-2})^2 + \cdots\right. \\ \qquad\qquad \left. + r'_1(p_1p_2\dots p_{m+N})^2 + q_m - v_h\right) = 1 \end{cases}$$

Nous imposons à $r'_M$ des conditions supplémentaires ; pour cela, nous notons $\mathbb{L}_{m+N} = \{p \in \mathbb{P}_{m+N} / \nu_p(q_m) = 2\}$.

Soit $T$ vérifiant le système de congruences :

$$\begin{cases} T(p_1p_2\dots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_1p_2\dots p_{m+N+M-2})^2 + \cdots \\ \qquad + r'_1(p_1p_2\dots p_{m+N})^2 + q_m - v_M \equiv 0 \quad [p_{m+N+M}] \qquad (24) \\ T(p_{m+N+1}p_{m+N+2}\dots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_{m+N+1}\cdots p_{m+N+M-2})^2 + \cdots \\ \qquad + r'_1 \equiv 0 \qquad [p] \qquad \text{si } p \in \mathbb{L}_{m+N} \qquad (25) \\ T(p_{m+N+1}p_{m+N+2}\dots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_{m+N+1}\cdots p_{m+N+M-2})^2 + \cdots \\ \qquad + r'_1 \equiv 1 \qquad [p] \qquad \text{si } p \in \mathbb{P}_{m+N} \setminus \mathbb{L}_{m+N} \qquad (26) \end{cases}$$

On sait ([43], th. 121, p. 95), que l'on peut prendre $T$ solution de ce système, et vérifiant :

$$0 \leq T \leq p_1p_2\dots p_{m+N}p_{m+N+M}.$$

Soit $H = T(p_1p_2\dots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_1p_2\dots p_{m+N+M-2})^2 + \cdots + r'_1(p_1p_2\dots p_{m+N})^2 + q_m - v_M$ (voir congruence (24)).

Nous posons $r'_M = T$ si $H$ n'est pas un multiple de $p^2_{m+N+M}$, et $r'_M = T + p_1p_2\dots p_{m+N}p_{m+N+M}$ si $H$ est un multiple de $p^2_{m+N+M}$.

Il est clair alors que $r'_M$ vérifie les conditions suivantes (27) :

$$\begin{cases} 0 \leq r'_M \leq 2(p_1p_2\dots p_{m+N}p_{m+N+M}) \\ \nu_{p_{m+N+M}}(r'_M(p_1p_2\dots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_1p_2\dots p_{m+N+M-2})^2 + \cdots \\ \qquad + r'_1(p_1p_2\dots p_{m+N})^2 + q_m - v_M) = 1 \\ \nu_p\left[r'_M(p_{m+N+1}p_{m+N+2}\dots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_{m+N+1}\cdots p_{m+N+M-2})^2\right. \\ \qquad \left. + \cdots + r'_1\right] \geq 1 \qquad \text{si } p \in \mathbb{L}_{m+N} \\ \nu_p\left[r'_M(p_{m+N+1}p_{m+N+2}\dots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_{m+N+1}\cdots p_{m+N+M-2})^2\right. \\ \qquad \left. + \cdots + r'_1\right] = 0 \qquad \text{si } p \in \mathbb{P}_{m+N} \setminus \mathbb{L}_{m+N} \end{cases}$$

b) Posons maintenant

$$t_m = r'_M(p_1p_2\dots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_1p_2\dots p_{m+N+M-2})^2 + \dots + r'_1(p_1p_2\dots p_{m+N})^2 + q_m \tag{28}$$

Par construction :

$$\forall i \in \{-\delta, -\delta+1, \dots, -1, 1, 2, \dots, k\}, \exists p \in \mathbb{P}_{m+N+M}, \text{ tel que : } \nu_p(t_m + i) = 1. \tag{29}$$

c) Par ailleurs, en vertu de l'avant-dernière condition de (27) : $\forall p \in \mathbb{L}_{m+N}$, $\nu_p(t_m) = 2$, car on a alors $\nu_p(q_m) = 2$ et $\nu_p(t_m - q_m) \geq 3$.

Si $p \in \mathbb{P}_{m+N} \setminus \mathbb{L}_{m+N}$, deux cas peuvent se produire car $\nu_p(q_m) \neq 1$ grâce à (21) :

$\alpha$) $\nu_p(q_m) = 0$, auquel cas $\nu_p(t_m) = 0$.

$\beta$) $\nu_p(q_m) \geq 3$ ; alors $\nu_p(t_m) = 2$ à cause de la dernière condition de (27) qui implique $\nu_p(t_m - q_m) = 2$.

On a donc $\forall p \in \mathbb{P}_{m+N}$, $\nu_p(t_m) = 0$ ou 2.

De plus, $\forall m \geq \delta, \forall i \in \{m+N+1, \dots, m+N+M\}, \nu_{p_i}(t_m) = 0$ car il existe un entier $j, 1 \leq j \leq M$, tel que $\nu_{p_i}(t_m - v_j) = 1$.

Finalement, nous avons donc :

(30) Pour $m$ assez grand : $\forall p \in \mathbb{P}_{m+N+M}$, $\nu_p(t_m) = 0$ ou 2.

d) Nous majorons maintenant $t_m$ à partir de (21), (22), (23), (27) :

$$\begin{aligned} t_m \leq\ & 2(p_1p_2\dots p_{m+N}p_{m+N+M})(p_1p_2\dots p_{m+N+M-1})^2 \\ & + 2p_{m+N+M-1}(p_1p_2\dots p_{m+N+M-2})^2 + \dots \\ & + 2p_{m+N+1}(p_1p_2\dots p_{m+N})^2 + (p_1p_2\dots p_{m+N})^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$t_m = o\left[(p_1p_2\dots p_{m+N+M})^4\right] \tag{31}$$

**Cinquième étape**

a) Soit maintenant $\eta = \eta(m) \in \{0, 1, 2, 3\}$, tel que

$$\eta(p_1p_2\dots p_{m+N+M})^4 + t_m \equiv 1 \qquad [4] \tag{32}$$

Pour $s \in \mathbb{N}$, considérons :

$$w_s = 4(p_1 p_2 \dots p_{m+N+M})^4 s + \eta(p_1 p_2 \dots p_{m+N+M})^4 + t_m. \tag{33}$$

On a d'abord (34) : $\forall s \in \mathbb{N}, w_s \equiv 1$ [4]. De plus, en vertu de (29) :

$$\forall s \in \mathbb{N}, \forall i \in \{-\delta, -\delta+1, \dots, -1, 1, 2, \dots, k\}, \exists p \in \mathbb{P}_{m+N+M}, \text{ tel que : } \nu_p(w_s + i) = 1. \tag{35}$$

b) Soit $D$ le plus grand diviseur commun à $4(p_1 p_2 \dots p_{m+N+M})^4$ et $\eta(p_1 p_2 \dots p_{m+N+M})^4 + t_m$. En utilisant (30) et (32), on voit que, pour $m$ assez grand :

$$D = \prod_{i=1}^{m+N+M} p_i^{\alpha_i}, \qquad \text{avec} \quad \alpha_i = 0 \quad \text{ou } 2. \tag{36}$$

c) Posons $w_s = D(\zeta s + \chi)$, avec $(\zeta, \chi) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. En vertu de (31), puisque $\eta \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a $\chi < \zeta$ pour $m$ assez grand. On peut alors utiliser le théorème 5 : il existe un nombre premier $p(\zeta, \chi)$ et un entier naturel $\sigma$ tels que

$$w_\sigma = D \cdot p(\zeta, \chi) \leq D \left[ \frac{4(p_1 p_2 \dots p_{m+N+M})^4}{D} \right]^L \tag{37}$$

Nous posons (38) : $n_k = n_{k(m)} = w_\sigma$. Nous avons donc, puisque $L \geq 1$ :

$$n_k \leq \left[ 4(p_1 p_2 \dots p_{m+N+M})^4 \right]^L \tag{39}$$

Par ailleurs, $D \equiv 1$ [4] d'après (36), et $n_k \equiv 1$ [4] d'après (34) et (38). Ainsi $p(\zeta, \chi) \equiv 1$ [4], d'où l'on déduit que $p(\zeta, \chi)$ est une somme de deux carrés. De plus, puisque la décomposition de $D$ ne contient que des facteurs premiers qui ne sont pas somme de deux carrés (voir (36)), on a :

$$\rho(n_k) = \rho[p(\zeta, \chi)] = 2 \tag{40}$$

(voir [43], formule (16.9.5) et th. 278, p. 242).

Si nous regroupons (35) et (40), nous obtenons les conclusions a), b) et c) du lemme 2. Il reste à démontrer la majoration d).

**Sixième (et dernière) étape**

a) En utilisant le théorème des nombres premiers dans les suites arithmétiques ([38], p. 70), on obtient :

$$m + N + M \sim \frac{1}{2} \frac{p_{m+N+M}}{\log\ p_{m+N+M}} \quad \text{lorsque } m \longrightarrow +\infty. \tag{41}$$

Donc

$$m + N + M \leq \frac{p_{m+N+M}}{\log\ p_{m+N+M}} \quad \text{pour } m \geq m_2. \tag{42}$$

Utilisant (39) et (42), nous obtenons :

$$n_k \leq 4^L (p_{m+N+M})^{4L(m+N+M)} \leq 4^L \exp[4L\ p_{m+N+M}] \tag{43}$$

b) Mais on a aussi : $k = p_1 p_2 \ldots p_m \geq p_1^m$, donc

$$m \leq \frac{\log\ k}{\log\ p_1} \tag{44}$$

Et puisque $M \leq \delta$, utilisant (15) et (44), nous obtenons $m + N + M \leq \frac{\log\ k}{\log\ p_1} + ak + \delta$, si bien que, pour $m \geq m_3$ :

$$m + N + M \leq 2[ak] \tag{45}$$

Reportons ce résultat dans (43), nous obtenons :

$$n_k \leq 4^L \exp(4L\ p_{2[ak]}),$$

ce qui achève la démonstration du lemme 2.

## 5 - Démonstration du théorème 1

Supposons qu'il existe $A, B, C \in \mathbb{Z}, A \neq 0$, tels que $Ax_q^2 + Bx_q + C + 0$.

Nous allons utiliser le théorème 2 avec $a(n) = A\rho(n) + Bl(n)$, et montrer que nous aboutissons à une contradiction.

a) Puisque $A \neq 0$, nous pouvons choisir $\delta$ tel que $q^\delta$ ne divise pas $2A$. Nous choisissons de plus $a \in ]0, 1[$ tel que

$$32L - \frac{\log |q|}{8a} < 0. \tag{46}$$

b) Majorons maintenant : $|a(n)| \leq |A|\,\rho(n) + |B|$. On sait que :

$$\rho(n) \leq d(n) \leq \exp\left[\frac{\log\ n}{\log\ \log\ n}\right] \tag{47}$$

pour $n$ assez grand ([43], p. 262, th. 317 et §18-7, p. 270).

Nous pouvons donc écrire $|a(n)| \leq r(n), \forall n \geq n_0$ avec

$$r(n) = \exp\left(\frac{2\log\ n}{\log\ \log\ n}\right) \tag{48}$$

c) Nous appliquons le lemme 2, $a$ et $\delta$ étant définis ci-dessus. On a :

$$n_k + k + 1 \leq 4^L \exp(4Lp_{2[ak]}) + k + 1. \tag{49}$$

Or, en utilisant le théorème des nombres premiers dans les suites arithmétiques, on a pour $k$ assez grand :

$$\frac{1}{4}\frac{p_{2[ak]}}{\log\ p_{2[ak]}} \leq 2ak \leq \frac{p_{2[ak]}}{\log\ p_{2[ak]}}. \tag{50}$$

Pour $k$ assez grand, (49) entraîne donc

$$n_k + k + 1 \leq \exp(8Lp_{2[ak]}).$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\log x}{\log\log x}$ étant croissante pour $x \geq e^e$, on obtient :

$$\begin{aligned}\log\ r(n_k + k + 1) &= \frac{2\ \log(n_k + k + 1)}{\log\ \log(n_k + k + 1)} \\ &\leq \frac{16Lp_{2[ak]}}{\log\ 8L + \log\ p_{2[ak]}}.\end{aligned}$$

Donc pour $k$ assez grand :

$$r(n_k + k + 1) \leq \exp\left(32L\frac{p_{2[ak]}}{\log\ p_{2[ak]}}\right) \tag{51}$$

d) Posons $x = \dfrac{p_{2[ak]}}{\log\ p_{2[ak]}}$. Alors $x$ tend vers l'infini avec $k$. En utilisant (50) et (51), on obtient : $\dfrac{r(n_k + k + 1)}{|q|^k} \leq \dfrac{\exp(32Lx)}{|q|^{\frac{x}{8a}}}$, d'où $\dfrac{r(n_k + k + 1)}{|q|^k} \leq \exp\left(\left(32L - \dfrac{\log|q|}{8a}\right)x\right)$ et puisque $a$ vérifie (46), $\lim_{k\to\infty} \dfrac{r(n_k + k + 1)}{|q|^k} = 0$.

e) Il est clair par ailleurs que $\lim_{k\to\infty} \frac{r(n+1)}{r(n)} = 1$. Comme $a(n_k+1) = a(n_k+2) = \cdots = a(n_k+k)$ en vertu du lemme 2, le théorème 2 s'applique, et on obtient, pour $k = k(m)$ assez grand

$$Cq^{n_k} - \sum_{n=0}^{n_k} a(n)q^{n_k-n} = 0.$$

Utilisant les a), b) et c) du lemme 2, on obtient

$$Cq^{n_k} - 2A - \sum_{n=0}^{n_k-\delta-1} a(n)q^{n_k-n} = 0.$$

On en conclut que $q^{\delta+1}$ divise $2A$, ce qui contredit le choix de $\delta$. Le théorème 1 est donc démontré.

# CHAPITRE 2 :

# UNE PROPRIÉTÉ ARITHMÉTIQUE DU NOMBRE $p$-ADIQUE $\sum_{n=0}^{+\infty} a(n)p^{mn^2}$

## 1 - Enoncé des résultats

Soit $p \in \mathbb{N}$, $p$ premier. On conjecture [21] que le nombre $p$-adique $x_p = \sum_{n=0}^{+\infty} p^{n^2}$ est transcendant. Dans ce chapitre, nous démontrons un théorème qui permet de conclure que $x_p$ est non quadratique. La méthode utilisée est celle de [29] (voir chapitre 1), c'est à dire exploite le fait que la suite $\rho(n)$ comptant le nombre de décompositions de $n$ en somme des carrés de deux entiers positifs contient "beaucoup de zéros" (voir le lemme ci-dessous). On ne peut donc espérer démontrer la transcendance de $x_p$ par ce moyen.

Nous démontrons le résultat suivant :

**Théorème.** Soit $p \in \mathbb{N}$, $p$ premier. Soit $m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Soit $\{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, avec :

a) $a(n) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
b) $|a(n)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Soit $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a(n)p^{mn^2} \in \mathbb{Q}_p$.
Alors $\forall P \in \mathbb{Q}[X]$, $\deg P \leq 2$, $P \neq 0$, on a : $P(y) \neq 0$

*Démonstration.* Posons $q = p^m$, et écrivons :

$$(1) \qquad y = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell(n)q^n \quad \text{avec} \quad \ell(n) = a(k) \quad \text{si } n = k^2, \quad k \in \mathbb{N}$$
$$\ell(n) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Alors :

$$(2) \qquad y^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_a(n)q^n.$$

avec :

$$\rho_a(n) = \sum_{k=0}^{n} \ell(k)\ell(n-k).$$

Il résulte de l'hypothèse b) du théorème que $|\rho_a(n)| \leq M^2\rho(n)$, où $\rho(n)$ désigne le nombre de décompositions $n = \alpha^2 + \beta^2$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$. Le lemme suivant est tout fait analogue au lemme 2 de [29] (voir chapitre 1), et nous le démontrerons dans le paragraphe 3 :

**Lemme.** Soit $\delta \in \mathbb{N} - \{0\}$, et soit $h \in ]0,1[$. On désigne par $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ la suite des nombres premiers de $\mathbb{N}$ congrus à 3 modulo 4, consécutifs, $p_1$ étant choisi de façon que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n^{-2} \leq \frac{h}{2}. \tag{3}$$

Alors il existe un entier $m_0 = m_0(h, \delta)$ et une constante $L$ (constante de Linnik [41]) tels que, pour tout $k = k(m) = p_1 p_2 \ldots p_m, m \geq m_0$, il existe $(n_k, n'_k) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant :

a) $\rho(n_k + i) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n'_k + \delta + 1\} \setminus \{n'_k + 1\}$.
b) $\rho(n_k + n'_k + 1) = 2$.
c) $\ell(n_k + i) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2 \ldots, n'_k + \delta + 1\}$.
d) $n_k \leq 4^L exp(4Lp_{2[hk]})$.
e) $k \leq n'_k$.

## 2 - Démonstration du théorème

Démontrons maintenant que $y$ est non quadratique. Supposons qu'il existe $A, B, C \in \mathbb{Z}$, avec $A \neq 0$, tels que $Ay^2 + By + C = 0$. Alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (A\rho_a(n) + B\ell(n))q^n + C = 0. \tag{4}$$

Dans le lemme, nous choisissons $h \in ]0,1[$ tel que :

$$64L\, h < \log q, \tag{5}$$

et $\delta \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que $\forall (u, v) \in \mathbb{N}^2$, $q^{\delta+1}$ ne divise pas $2Aa(u)a(v)$ dans $\mathbb{Z}$ (ceci est possible en vertu des hypothèses a) et b) du théorème).

Si nous introduisons la suite $n_k$ dans (4), nous obtenons grâce à a) du lemme :

$$\sum_{n=0}^{n_k} (A\rho_a(n) + B\ell(n))q^n + C = -\sum_{n=n_k+n'_k+1}^{+\infty} (A\rho_a(n) + B\ell(n))q^n. \tag{6}$$

On a :

$$\nu_p\left[-\sum_{n=n_k+n'_k+1}^{+\infty} (A\rho_a(n) + B\ell(n))q^n\right] \geq m(n_k + k + 1). \tag{7}$$

Par ailleurs, soit $g_k = \sum_{n=0}^{n_k}(A(\rho_a(n) + B\ell(n))q^n + C$ ; alors $g_k \in \mathbb{Z}$, et on peut le majorer en valeur absolue :

$$|g_k| \leq \sum_{n=0}^{n_k}(|A|M^2\rho(n) + |B|M)q^n + |C|$$

Or on sait ([43] p. 262, th. 317, et §18-7, p. 270) que

$\rho(n) \leq exp\dfrac{\log n}{\log\log n}$, donc :

$$|g_k| \leq (|A|\,M^2 + |B|\,M)exp\frac{\log n_k}{\log\log n_k} \cdot \frac{q^{n_k+1}}{q-1} + |C|\,.$$

Donc il existe $K \in ]0, +\infty[$ tel que, pour $k$ assez grand :

$$|g_k| \leq q^{n_k + \frac{1}{\log q}\frac{\log n_k}{\log\log n_k} + K} \tag{8}$$

Supposons $g_k \neq 0$. On déduit de (8) que :

$$\nu_p(g_k) \leq m\left(n_k + \frac{1}{\log q}\frac{\log n_k}{\log\log n_k} + K\right). \tag{9}$$

Mais si nous utilisons le théorème des nombres premiers dans la suite arithmétique $4n+3$, nous obtenons pour $k$ assez grand :

$$\frac{1}{4}\frac{p_{2[hk]}}{\log p_{2[hk]}} \leq 2hk \leq \frac{p_{2[hk]}}{\log p_{2[hk]}} \tag{10}$$

et par suite, en vertu de d) du lemme :

$$\frac{\log n_k}{\log\log n_k} \leq \frac{\log 4^L + 4Lp_{2[hk]}}{\log(\log 4^L + 4Lp_{2[hk]})} \leq 64Lhk \quad \text{pour } k \text{ assez grand.}$$

En reportant ce résultat dans (9), on obtient :

$$\nu_p(g_k) \leq m\left(n_k + \frac{64hL}{\log q}k + K\right).$$

Grâce au choix de $h$, cette inégalité contredit (6) et (7) pour $k$ assez grand. Donc $g_k = g_{k(m)} = 0$ pour $m$ assez grand, et on obtient alors :

$$0 = g_{k(m+1)} - g_{k(m)} = \sum_{n=n_{k(m)}+1}^{n_{k(m+1)}} (A\rho_a(n) + B\ell(n))q^n = 0.$$

En utilisant a), b), c) du lemme, il vient, pour un entier $r$ compris entre 1 et $n_k + n'_k$ :

$$2A\,a(r)a(n_k+n'_k+1-r)+\sum_{n=n_{k(m)}+n'_{k(m)}+\delta+2}^{n_{k(m+1)}}(A\rho_a(n)+B\ell(n))q^{n-n_{k(m)}-n'_{k(m)}-1}=0.$$

Donc $q^{\delta+1}$ divise $2A\,a(r)a(n_k+n'_k+1-r)$, ce qui contredit le choix de $\delta$, et achève la démonstration.

## 3 - Démonstration du lemme

Nous effectuons la démonstration du lemme avec la notation "a" à la place de "h".

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, et tout nombre premier $p$, nous notons $\nu_p(x)$ la valuation $p$-adique de $x$.

Pour $h \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathbb{P}_h = \{p_1, p_2 \dots, p_h\}$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, notons $k = k(m) = p_1 p_2 \dots p_m$.

### Première étape

a) Soit $\mathbb{M}_m = \{n \in \{1,2,\dots,k\}/\exists p \in \mathbb{P}_m/\nu_p(n) > 0\}$. En vertu de la formule du crible ([43], th. 261, p. 234) :

$$\text{card}\,\mathbb{M}_m = \sum_i \left[\frac{k}{p_i}\right] - \sum_{i\neq j}\left[\frac{k}{p_i p_j}\right] + \dots + (-1)^{m+1}\left[\frac{k}{p_1 p_2 \dots p_m}\right]$$

Or $\nu_p(k) > 0, \forall p \in \mathbb{P}_m$, donc :

$$\text{card}\,\mathbb{M}_m = k - k\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right) \tag{13}$$

b) Soit $\mathbb{H}_m = \{n \in \{1,2,\dots,k\}/\exists p \in \mathbb{P}_m/\nu_p(n) \geq 2\}$.

On a : $\text{card}\,\mathbb{H}_m \leq \left[\frac{k}{p_1^2}\right] + \left[\frac{k}{p_2^2}\right] + \dots + \left[\frac{k}{p_m^2}\right]$.

Donc : $\text{card}\,(\mathbb{H}_m) \leq k\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i^2} \leq \frac{a}{2}k$.

c) Soit $\mathbb{I}_m = \{n \in \{1,2,\dots,k\}/\exists p \in \mathbb{P}_m/\nu_p(n) = 1\}$. On a $\text{card}\,\mathbb{I}_m = \text{card}\,\mathbb{M}_m - \text{card}\,\mathbb{H}_m$. Donc : $\text{card}\,(\mathbb{I}_m) \geq k\left(1-\frac{a}{2}-\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\right)$. Mais

le produit infini $\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$ diverge vers 0 car la série $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{p_i}$ diverge. Donc il existe un entier $m_1 = m_1(a)$ tel que :

$$\forall m \geq m_1 \qquad \boxed{\text{card}\,\mathbb{I}_m \geq k(1-a)} \tag{14}$$

d) Il en résulte que, pour $m \geq m_1$, tous les éléments de $\{1, 2, \ldots, k\}$ sont divisibles par un facteur $p \in \mathbb{P}_m$ avec un exposant 1 exactement (et ne sont donc pas des sommes de deux carrés, [43], p. 299, th. 366), sauf $N = N(m)$ d'entre eux que nous noterons $u_1 < u_2 < \cdots < u_N$, et on a en vertu de (14) :

$$\forall m \geq m_1 \qquad \boxed{N \leq ak} \tag{15}$$

**Deuxième étape**

a) Nous construisons maintenant $k = k(m)$ nombres entiers <u>consécutifs</u> $e_m + 1, e_m + 2, \ldots, e_m + k$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad m \geq m_1 \quad &\Rightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}, \exists p \in \mathbb{P}_{m+N}, \\ &\text{tel que } \nu_p(e_m + i) = 1. \end{aligned} \tag{16}$$

On procède de la façon suivante : soit d'abord $r_1 \in \mathbb{N}$, tel que

$$\begin{cases} 0 \leq r_1 < 2p_{m+1} \\ \nu_{p_{m+1}}\left[r_1(p_1 p_2 \ldots p_m)^2 + u_1\right] = 1 \end{cases} \tag{17}$$

Puis soit $r_h (1 \leq h \leq N)$ défini par récurrence par :

$$\begin{cases} 0 \leq r_h < 2p_{m+h} \\ \nu_{p_{m+h}}\left[r_h(p_1 p_2 \ldots p_{m+h-1})^2 + r_{h-1}(p_1 p_2 \ldots p_{m+h-2})^2 + \cdots \right. \\ \qquad \left. + r_1(p_1 p_2 \ldots p_m)^2 + u_h\right] = 1 \end{cases} \tag{18}$$

Nous posons :

$$\boxed{\begin{aligned} e_m = r_N\left(p_1 p_2 \cdots p_{m+N-1}\right)^2 + r_{N-1}\left(p_1 p_2 \cdots p_{m+N-2}\right)^2 + \cdots \\ + r_1\left(p_1 p_2 \cdots p_m\right)^2 \end{aligned}} \tag{19}$$

Soit $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Il est clair par construction que, si $j \in \{1,2,\ldots,m\}, e_m + i \equiv i \left[p_j^2\right]$. Donc si $i \in \mathbb{I}_m, \exists p \in \mathbb{P}_m$, tel que $\nu_p(e_m + i) = 1$. Si $i \notin \mathbb{I}_m$, il existe $h \in \{1,2,\ldots,N\}$ tel que $i = u_h$ ; on a alors :

$$e_m + i \equiv r_h \left(p_1 p_2 \ldots p_{m+h-1}\right)^2 + \cdots + r_1 \left(p_1 p_2 \ldots p_m\right)^2 + u_h \ \left[p_{m+h}^2\right]$$

donc $\nu_{p_{m+h}}(e_m + i) = 1$ en vertu de (18).

Par conséquent, le nombre $e_m$ défini par (19) vérifie bien (16).

b) On peut majorer $e_m$, puisque $r_h < 2p_{m+h}, \forall h \in \{1,2,\ldots,N\}$ :

$$e_m \leq 2p_{m+N}(p_1 p_2 \ldots p_{m+N-1})^2 + 2p_{m+N-1}(p_1 p_2 \ldots p_{m+N-2})^2 + \cdots + 2p_{m+1}(p_1 p_2 \ldots p_m)^2$$

$$e_m \leq 2(p_1 p_2 \ldots p_{m+N})^2 \left[\frac{1}{p_{m+N}} + \frac{1}{p_{m+N-1}p_{m+N}^2} + \cdots + \frac{1}{p_{m+1}p_{m+2}^2 \cdots p_{m+N}^2}\right]$$

$$e_m \leq 2(p_1 p_2 \ldots p_{m+N})^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 3^{2N-2}}\right)$$

Donc

(20) $$\boxed{e_m \leq (p_1 p_2 \ldots p_{m+N})^2}$$

**Troisième étape**

On note $q_m = e_m + n'_k + 1$ le plus petit élément de

$$\mathbb{J}_m = \{i \in \mathbb{N} / i \geq e_m + k + 1 / \forall p \in \mathbb{P}_{m+N}, \nu_p(i) \neq 1\}.$$

Par construction, on a $n'_k \geq k$ et :

(21) $$\forall j \in \{1,2,\ldots,n'_k\}, \quad \exists p \in \mathbb{P}_{m+N}, \nu_P(e_m + j) = 1.$$

**Quatrième étape**

a) Notons $v_1 < v_2 < \cdots < v_M$ les éléments de $\{1,2,\ldots,\delta\}$ tels que : $\forall j \in \{1,2,\ldots,M\}, \forall p \in \mathbb{P}_{m+N}, \nu_p(q_m + v_j) \neq 1$.

On a donc : $\boxed{M \leq \delta}$

De même que dans l'étape 2, nous construisons la suite $r'_i$ par les relations suivantes :

(22) $$\begin{cases} 0 \leq r'_1 < 2p_{m+N+1} \\ \nu_{p_{m+N+1}} \left[r'_1 (p_1 p_2 \ldots p_{m+N})^2 + q_m + v_1\right] = 1 \end{cases}$$

Puis par récurrence, pour $1 \leq h \leq M-1$, nous posons :

$$(23)\quad \begin{cases} 0 \leq r'_h < 2p_{m+N+h} \\ \nu_{p_{m+N+h}}\left(r'_h(p_1p_2\dots p_{m+N+h-1})^2 + r'_{h-1}(p_1p_2\dots p_{m+N+h-2})^2 + \cdots \right. \\ \qquad \left. + r'_1(p_1p_2\dots p_{m+N})^2 + q_m + v_h\right) = 1 \end{cases}$$

Nous imposons à $r'_M$ des conditions supplémentaires ; pour cela, nous notons $\mathbb{L}_{m+N} = \{p \in \mathbb{P}_{m+N} / \nu_p(q_m) = 2\}$.

Soit $T$ vérifiant le système de congruences :

$$\begin{cases} T(p_1p_2\dots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_1p_2\dots p_{m+N+M-2})^2 + \cdots \\ \qquad + r'_1(p_1p_2\dots p_{m+N})^2 + q_m + v_M \equiv 0 \quad [p_{m+N+M}] \qquad (24) \\ T(p_{m+N+1}p_{m+N+2}\dots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_{m+N+1}\cdots p_{m+N+M-2})^2 + \cdots \\ \qquad + r'_1 \equiv 0 \qquad [p] \qquad \text{si } p \in \mathbb{L}_{m+N} \qquad (25) \\ T(p_{m+N+1}p_{m+N+2}\dots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_{m+N+1}\cdots p_{m+N+M-2})^2 + \cdots \\ \qquad + r'_1 \equiv 1 \qquad [p] \qquad \text{si } p \in \mathbb{P}_{m+N} \setminus \mathbb{L}_{m+N} \qquad (26) \end{cases}$$

On sait ([43], th. 121, p. 95), que l'on peut prendre $T$ solution de ce système, et vérifiant :

$$0 \leq T \leq p_1p_2\dots p_{m+N}p_{m+N+M}.$$

Soit $H = T(p_1p_2\dots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_1p_2\dots p_{m+N+M-2})^2 + \cdots + r'_1(p_1p_2\dots p_{m+N})^2 + q_m + v_M$ (voir congruence (24)).

Nous posons $r'_M = T$ si $H$ n'est pas un multiple de $p^2_{m+N+M}$, et $r'_M = T + p_1p_2\dots p_{m+N}p_{m+N+M}$ si $H$ est un multiple de $p^2_{m+N+M}$.

Il est clair alors que $r'_M$ vérifie les conditions suivantes (27) :

$$\begin{cases} 0 \leq r'_M \leq 2(p_1p_2\dots p_{m+N}p_{m+N+M}) \\ \nu_{p_{m+N+M}}(r'_M(p_1p_2\dots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_1p_2\dots p_{m+N+M-2})^2 + \cdots \\ \qquad + r'_1(p_1p_2\dots p_{m+N})^2 + q_m + v_M) = 1 \\ \nu_p\left[r'_M(p_{m+N+1}p_{m+N+2}\cdots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_{m+N+1}\cdots p_{m+N+M-2})^2\right. \\ \qquad \left. + \cdots + r'_1\right] \geq 1 \qquad \text{si } p \in \mathbb{L}_{m+N} \\ \nu_p\left[r'_M(p_{m+N+1}p_{m+N+2}\cdots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_{m+N+1}\cdots p_{m+N+M-2})^2\right. \\ \qquad \left. + \cdots + r'_1\right] = 0 \qquad \text{si } p \in \mathbb{P}_{m+N} \setminus \mathbb{L}_{m+N} \end{cases}$$

b) Posons maintenant

$$(28)\quad \begin{aligned} t_m = {} & r'_M(p_1p_2\dots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_1p_2\dots p_{m+N+M-2})^2 \\ & + \cdots + r'_1(p_1p_2\dots p_{m+N})^2 + e_m \end{aligned}$$

Par construction :

$$(29) \qquad \forall i \in \{1,2,\dots,n'_k, n'_k+2,\dots,n'_k+\delta+1\}, \quad \exists p \in \mathbb{P}_{m+N+M}, \text{ tel que : } \nu_p(t_m+i)=1.$$

(*) Et $t_m + n'_k + 1 = r'_M(p_1p_2\cdots p_{m+N+M-1})^2 + r'_{M-1}(p_1p_2\cdots p_{m+N+M-2})^2 + \cdots + r'_1(p_1p_2\cdots p_{m+N})^2 + q_m$.

c) En vertu de l'avant-dernière condition de (27) : $\forall p \in \mathbb{L}_{m+N}, \nu_p(t_m+n'_k+1) = 2$, car on a alors $\nu_p(q_m)=2$ et $\nu_p(t_m+n'_k+1-q_m) \geq 3$.

Si $p \in \mathbb{P}_{m+N} \setminus \mathbb{L}_{m+N}$, deux cas peuvent se produire car $\nu_p(q_m) \neq 1$ par définition de $q_m$ :

$\alpha)$ $\nu_p(q_m)=0$, auquel cas $\nu_p(t_m+n'_k+1)=0$.

$\beta)$ $\nu_p(q_m) \geq 3$ ; alors $\nu_p(t_m+n'_k+1)=2$ à cause de la dernière condition de (27) qui implique $\nu_p(t_m+n'_k+1-q_m)=2$.

On a donc $\forall p \in \mathbb{P}_{m+N}$, $\nu_p(t_m+n'_k+1)=0$ ou 2.

De plus, $\forall m \geq \delta, \forall i \in \{m+N+1,\dots,m+N+M\}, \nu_{p_i}(t_m+n'_k+1)=0$ car il existe un entier $j, 1 \leq j \leq M$, tel que $\nu_{p_i}(t_m+n'_k+1+v_j)=1$.

Finalement, nous avons donc :

(30) Pour $m$ assez grand : $\forall p \in \mathbb{P}_{m+N+M}$, $\nu_p(t_m+n'_k+1)=0$ ou 2.

d) Nous majorons maintenant $t_m$ à partir de (20), (22), (23), (27) :

$$\begin{aligned} t_m &\leq 2(p_1p_2\cdots p_{m+N}p_{m+N+M})(p_1p_2\cdots p_{m+N+M-1})^2 \\ &\quad + 2p_{m+N+M-1}(p_1p_2\cdots p_{m+N+M-2})^2 + \cdots \\ &\quad + 2p_{m+N+1}(p_1p_2\cdots p_{m+N})^2 + (p_1p_2\cdots p_{m+N})^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$(31) \qquad t_m = o\left[(p_1p_2\cdots p_{m+N+M})^4\right]$$

## Cinquième étape

a) Soit maintenant $\eta = \eta(m) \in \{0,1,2,3\}$, tel que

$$(32) \qquad \eta(p_1p_2\cdots p_{m+N+M})^4 + t_m + n'_k + 1 \equiv 1 \qquad [4]$$

Pour $s \in \mathbb{N}$, considérons :

$$(33) \qquad w_s = 4(p_1p_2\cdots p_{m+N+M})^4 s + \eta(p_1p_2\cdots p_{m+N+M})^4 + t_m.$$

On a d'abord (34) : $\forall s \in \mathbb{N}, w_s + n'_k + 1 \equiv 1$ [4]. De plus, en vertu de (29) :

$$\forall s \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n'_k, n'_k + 2, \ldots, n'_k + \delta + 1\}, \exists p \in \mathbb{P}_{m+N+M}, \text{ tel que : } \nu_p(w_s + i) = 1. \tag{35}$$

b) Soit $D$ le plus grand diviseur commun à $4(p_1 p_2 \ldots p_{m+N+M})^4$ et $\eta(p_1 p_2 \ldots p_{m+N+M})^4 + t_m + n'_k + 1$. En utilisant (30) et (32), on voit que, pour $m$ assez grand :

$$D = \prod_{i=1}^{m+N+M} p_i^{\alpha_i}, \qquad \text{avec} \quad \alpha_i = 0 \quad \text{ou } 2. \tag{36}$$

c) Posons $w_s + n'_k + 1 = D(\zeta s + \chi)$, avec $(\zeta, \chi) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. En vertu de (31), puisque $\eta \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a $\chi < \zeta$ pour $m$ assez grand. On peut alors utiliser le théorème de Linnik [41] : il existe un nombre premier $p(\zeta, \chi)$ et un entier naturel $\sigma$ tels que

$$w_\sigma + n'_k + 1 = D \cdot p(\zeta, \chi) \leq D \left[ \frac{4(p_1 p_2 \ldots p_{m+N+M})^4}{D} \right]^L \tag{37}$$

Nous posons (38) : $n_k = n_{k(m)} = w_\sigma$. Nous avons donc, puisque $L \geq 1$ :

$$n_k \leq \left[ 4(p_1 p_2 \ldots p_{m+N+M})^4 \right]^L \tag{39}$$

Par ailleurs, $D \equiv 1$ [4] d'après (36), et $n_k + n'_k + 1 \equiv 1$ [4] d'après (34) et (38). Ainsi $p(\zeta, \chi) \equiv 1$ [4], d'où l'on déduit que $p(\zeta, \chi)$ est une somme de deux carrés. De plus, puisque la décomposition de $D$ ne contient que des facteurs premiers qui ne sont pas somme de deux carrés (voir (36)), on a :

$$\rho(n_k + n'_k + 1) = \rho[p(\zeta, \chi)] = 2 \tag{40}$$

(voir [43], formule (16.9.5) et th. 278, p. 242).

Si nous regroupons (35) et (40), nous obtenons les conclusions a), b) et c) du lemme 2. Il reste à démontrer la majoration d).

**Sixième (et dernière) étape**

a) En utilisant le théorème des nombres premiers dans les suites arithmétiques ([9], p. 70), on obtient :

$$m + N + M \sim \frac{1}{2} \frac{p_{m+N+M}}{\log\ p_{m+N+M}} \quad \text{lorsque } m \longrightarrow +\infty. \tag{41}$$

Donc

$$m + N + M \leq \frac{p_{m+N+M}}{\log\ p_{m+N+M}} \quad \text{pour } m \geq m_2. \tag{42}$$

Utilisant (39) et (42), nous obtenons :

$$n_k \leq 4^L (p_{m+N+M})^{4L(m+N+M)} \leq 4^L \exp[4L\ p_{m+N+M}] \tag{43}$$

b) Mais on a aussi : $k = p_1 p_2 \ldots p_m \geq p_1^m$, donc

$$m \leq \frac{\log\ k}{\log\ p_1} \tag{44}$$

Et puisque $M \leq \delta$, utilisant (15) et (44), nous obtenons $m + N + M \leq \frac{\log\ k}{\log\ p_1} + ak + \delta$, si bien que, pour $m \geq m_3$ :

$$m + N + M \leq 2[ak] \tag{45}$$

Reportons ce résultat dans (43), nous obtenons :

$$n_k \leq 4^L \exp(4L\ p_{2[ak]}),$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

# DEUXIEME PARTIE

# ETUDE ALGEBRIQUE DE LA U-DERIVATION

# CHAPITRE 3 :

# $U$-DERIVATION

## 1 - Introduction.

La célèbre démonstration de la transcendance de $e$ par C. Hermite, ainsi que plusieurs de celles qui l'ont suivie, notamment celle de P. Gordan [40], utilisent de manière essentielle le polynôme :

$$H_n(X) = X^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{k}(X - z_i)\right)^n . \tag{1}$$

L'intérêt de ce polynôme est qu'il admet $z_1, z_2 \dots, z_k$ comme racines, chacune avec l'ordre de multiplicité $n$ ; ce qui implique, en vertu de la *formule de Taylor* , que $H_n(X + z_i)$ est de valuation $n$.

En vue d'adapter la démonstration de P. Gordan à d'autres séries que celle de l'exponentielle, nous cherchons à généraliser cette propriété de $H_n$ ; pour ce faire, nous nous plaçons dans l'algèbre $K[[X]]$ des séries formelles à coefficients dans un corps commutatif arbitraire $K$, et nous commençons par définir ce qu'est la $U$-dérivation dans $K[[X]]$ et étudier quelques-unes de ses propriétés. Il est à noter que cette notion n'est vraiment nouvelle : elle a été introduite par M. Ward dans [76] avec d'autres notations. Tous les résultats du paragraphe II se trouvent également dans [76]. Cependant, il ne semble pas que l'étude des $U$-racines d'ordre $k$ d'un polynôme (voir paragraphe 3) ait été développée jusqu'à présent.

**Définition 1.** Soit $U = \{u_1, u_2 \dots, u_n, \dots\}$ une suite d'éléments non nuls de $K$. Soit $f \in K[[X]]$, avec $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$. La $U$-dérivée de $f$ est la série formelle définie par :

$$\boxed{\partial_U f(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n X^{n-1}}$$

**Exemple 1.** Si $u_n = n$, alors $\partial_U = \dfrac{d}{dX}$, opérateur de dérivation sur l'anneau différentiel $K[[X]]$ ([51]). L'hypothèse $u_n \neq 0$ exige ici que la caractéristique de $K$ soit nulle.

**Exemple 2.** Soit $q \in K$, avec $q^n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Soit $u_n = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$. Alors

$$\partial_U f(X) = \frac{f(qX) - f(X)}{X(q-1)}.$$

Dans le cas où la série $f$ est à coefficients dans $\mathbb{C}$, de rayon de convergence non nul, on reconnait un cas particulier de l'opérateur de $q$-dérivation ([50] ; [34], p. 37). La dérivation ordinaire en est un cas limite, pour $q = 1$.

**Définition 2.** Soit $U = \{u_1, u_2 \dots, u_n, \dots\}$ une suite d'éléments non nuls de $K$. La série formelle

$$\boxed{exp_U X = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{\mathcal{U}^n}}$$

avec $\mathcal{U}^0 = 1$ et $\mathcal{U}^n = u_1 u_2 \dots u_n$ pour $n \geq 1$, s'appelle *la série $U$-exponentielle.*

**Exemple 3.** Si $u_n = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ (voir exemple 2), on pose classiquement : $[n]_q! = \mathcal{U}^n$. On obtient la série $q$-exponentielle, bien connue ([34], [37]). Certaines de ses propriétés arithmétiques s'obtiennent à partir de sa table de Padé ([75], [12]).

Il est immédiat que, pour toute suite $U$ d'éléments de $K^*, exp_U X$ est le *seul invariant* de $\partial_U$.

## 2 - La formule de Taylor.

**a)** Nous définissons d'abord le *$U$-binôme de Newton* ; soit $U = \{u_1, u_2 \dots, u_n, \dots\}$ une suite d'éléments non nuls de $K$. On pose :

$$\boxed{U_n^p = \frac{\mathcal{U}^n}{\mathcal{U}^p \mathcal{U}^{n-p}},} \quad 0 \leq p \leq n. \tag{2}$$

**Exemple 4.** Lorsque $u_n = n$, on obtient les *coefficients binomiaux* : $U_n^p = \binom{n}{p}$. Lorsque $u_n = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, on obtient les coefficients *$q$-binomiaux* :

$$U_n^p = \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{n_q!}{p_q!(n-p)_q!} = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1)\dots(q^{n-p+1} - 1)}{(q^p - 1)(q^{p-1} - 1)\dots(q - 1)}$$

**Définition 3.** Le *U-binôme de Newton* d'ordre $n$ est le polynôme de $K[X,Y]$ défini par

$$\boxed{(X \oplus Y)_U^n = \sum_{p=0}^{n} U_n^p X^p Y^{n-p}}$$

On peut substituer facilement $(X \oplus Y)_U$ à $X$ dans une série formelle de $K[[X]]$, pour obtenir une série formelle de $K[[X,Y]]$ ; on procède ainsi : si $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, on pose :

$$\boxed{f(X \oplus Y)_U = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (X \oplus Y)_U^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} a_n U_n^p X^p Y^{n-p}} \tag{3}$$

La *série génératrice* de $(X \oplus Y)_U^n$ est alors donnée par la

**Proposition 1.** $X, Y, Z$ étant des indéterminées :

$$\boxed{exp_U[(X \oplus Y)_U Z] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(X \oplus Y)_U^n Z^n}{\mathcal{U}^n} = exp_U(XZ)\, exp_U(YZ)}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} exp_U(XZ) \cdot exp_U(YZ) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{n} \frac{X^p}{\mathcal{U}^p} \frac{Y^{n-p}}{\mathcal{U}^{n-p}} \right) Z^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{n} \frac{\mathcal{U}^n}{\mathcal{U}^p \mathcal{U}^{n-p}} X^p Y^{n-p} \right) \frac{Z^n}{\mathcal{U}^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(X \oplus Y)_U^n Z^n}{\mathcal{U}^n}, \quad \text{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

Plus généralement, nous définissons, pour $j \geq 2$ :

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_j)_U^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_j=n} \frac{\mathcal{U}^n}{\mathcal{U}^{k_1} \mathcal{U}^{k_2} \ldots \mathcal{U}^{k_j}} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_j^{k_j} \tag{4}$$

On vérifie que :

$$\boxed{[(X_1 \oplus \cdots \oplus X_{j-1})_U \oplus X_j)]_U^n = (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{j-1} \oplus X_j)_U^n .} \tag{5}$$

D'où l'on déduit aisément :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{j} exp_U(X_k Z) = exp_U[(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_j)_U Z]}. \tag{6}$$

**b)** On a, pour la $U$-dérivation, la généralisation suivante de la *formule de Taylor* [76] :

**Proposition 2.** Soient $X$ et $Y$ deux indéterminées, et soit $f \in K[[X]]$. Alors :

$$\boxed{f(X \oplus Y)_U = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial_U^n f(Y)}{\mathcal{U}^n} X^n}$$

*Démonstration.* Par linéarité, il suffit de démontrer cette formule lorsque $f(X) = X^k, k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \partial_U^n f(X) &= \frac{\mathcal{U}^k}{\mathcal{U}^{k-n}} X^{k-n} \quad \text{si} \quad 0 \leq n \leq k. \\ \partial_U^n f(X) &= 0 \qquad\qquad\quad \text{si} \quad n > k. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} (X \oplus Y)_U^k &= \sum_{n=0}^{k} \frac{\mathcal{U}^k}{\mathcal{U}^n \mathcal{U}^{k-n}} X^n Y^{k-n} \\ &= \sum_{n=0}^{k} \frac{\mathcal{U}^k}{\mathcal{U}^{k-n}} \frac{Y^{k-n}}{\mathcal{U}^n} X^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial_U^n f(Y)}{\mathcal{U}^n} X^n, \quad \text{cqfd.} \end{aligned}$$

### 3 - $U$-racines d'ordre $k$ d'un polynôme.

**Définition 4.** Soit $P \in K[X]$, et soit $a \in K$. On dit que $a$ est une *$U$-racine d'ordre de multiplicité $n$* du polynôme $P$ si :

$$\boxed{P(a) = \partial_U P(a) = \cdots = \partial_U^{n-1} P(a) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_U^n P(a) \neq 0}$$

Nous cherchons à résoudre le *problème* suivant :

($\mathcal{P}$) La suite $U$ étant donnée, $z_1, z_2 \dots, z_k \in K$, $n_1, n_2 \dots, n_k \in \mathbb{N} - \{0\}$ étant donnés, construire $P \in K[X]$, admettant $z_1, z_2 \dots, z_k$ comme $U$-racines, avec les ordres de multiplicité respectifs $n_1, n_2 \dots, n_k$.

Ce problème peut s'étudier en résolvant un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients de $P$ et dont les équations sont les relations $P(z_i) = \partial_U P(z_i) = \cdots = \partial_U^{n_i - 1} P(z_i) = 0$. Bien que cette méthode puisse conduire à des résultats arithmétiques, nous l'écartons ici car nous cherchons des propriétés plus profondes de la $U$-dérivation.

Nous n'obtiendrons cependant des résultats intéressants que dans le cas où $U$ vérifie une relation de récurrence linéaire.

**a)** La première idée que l'on peut avoir est la suivante : le fait que $z_1, z_2 \dots, z_k$ soient des racines d'ordre de multiplicité $n$ du polynôme $H_n$ définie en (1) résulte immédiatement de la formule donnant la *dérivée d'un produit* . Nous allons montrer que, malheureusement, une formule de ce type n'existe pas, en général, pour la $U$-dérivation.

**Définition 5.** Soit $L$ un anneau intègre. On dit que $\Delta : L \to L$ est une pseudo-dérivée de $L$ si $\Delta(x + y) = \Delta(x) + \Delta(y), \forall x, y \in L$, et s'il existe $\varphi : L \to L, \varphi \neq 0$, telle que

$$\forall x, y, \in L, \quad \Delta(xy) = \Delta x \cdot y + \varphi(x) \cdot \Delta y.$$

**Théorème 1.** Les seules $U$-dérivées de $K[[X]]$ qui sont des pseudo-dérivées sont obtenues pour les suites :

(i) $u_n = \alpha n \quad (\alpha \in K^*)$ et alors $\varphi f(X) = f(X)$,

(ii) $u_n = \alpha \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \quad (\alpha \in K^*)$ et alors $\varphi f(X) = f(qX)$,

(iii) $u_n = \alpha \quad (\alpha \in K^*)$ et alors $\varphi f(X) = f(0)$.

*Démonstration.* Soit $\partial_U$ une $U$-dérivée qui soit une pseudo-dérivée. Alors on a la relation :

$$(7) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \partial_U(X \cdot X^n) = u_{n+1} X^n = u_1 X^n + \varphi(X) u_n X^{n-1}.$$

Si $u_n$ est non constante, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0+1} \neq u_1$. Alors en utilisant (7) on obtient :

$(u_{n_0+1} - u_1) X^{n_0} = u_{n_0} \varphi(X) X^{n_0 - 1}$, si bien que $\varphi(X) = qX$, $q \in K^*$. Reportant dans (7) nous obtenons : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_1 + q u_n$, d'où : $u_n = \alpha n + \beta$ (cas où $q = 1$) ou bien $u_n = \alpha q^n + \beta \quad (q \neq 1)$.

Dans le cas où $u_n = \alpha n + \beta$, reportant dans (7), on obtient : $(\alpha n + \alpha + \beta)X^n = (\alpha + \beta)X^n + (\alpha n + \beta)X^n$. Donc $\beta = 0$ et $u_n = \alpha n$.

Dans le cas où $u_n = \alpha q^n + \beta$, un calcul analogue montre que $\beta = -\alpha$.

Donc si $\partial_U$ est une pseudo-dérivée, alors $u_n = \alpha n$ ou $u_n = \alpha \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, ou $u_n = \alpha, \alpha \in K^*$.

La réciproque (et le calcul de $\varphi$ dans les 3 cas) ne présente pas de difficulté, et le théorème 1 est démontré.

L'argument utilisé pour justifier le fait que $z_1, z_2 \ldots, z_k$ sont racines d'ordre $n$ de $H_n$ ne peut donc s'utiliser, pour résoudre le problème $(\mathcal{P})$, que dans le cas de la $q$-dérivation. On sait alors (et c'est d'ailleurs facile à vérifier) que le polynôme :

$$(8) \qquad \boxed{(X - z)_q^n = (X - z)(X - zq)\ldots(X - zq^{n-1})}$$

vérifie : $\delta_q(X - z)_q^n = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}(X - z)_q^{n-1}$,
et par suite $z$ est $U$-racine d'ordre $n$ de $(X - z)_q^n$. Dans ce cas, en posant $n = Max\ n_k$ :

$$(9) \qquad \boxed{H_{n_1, n_2 \ldots, n_k, q}(X) = X^{n-1}(X - z_1)_q^{n_1}(X - z_2)_q^{n_2}\ldots(X - z_k)_q^{n_k}}$$

est la généralisation naturelle de $H_n$ défini en (1) et résout le problème $(\mathcal{P})$.

**b)** Nous procédons autrement, et résolvons maintenant le problème $(\mathcal{P})$ dans le cas où $U$ *vérifie une relation de récurrence linéaire* à coefficients dans $K$. Alors $u_n = \sum_{i=1}^{N} P_i(n) q_i^n$, où les $q_i$ sont des éléments de la clôture algébrique $\overline{K}$ de $K$, deux à deux distincts et $P_i \in \overline{K}[X]$, pour $i = 1, 2, \ldots, N$, avec $d_i = deg\ P_i$.

Soit $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in K[[X]]$. On suppose que $f$ est de valuation supérieure ou égale à $k$. Calculons $\partial_U f, \partial_U^2 f, \ldots, \partial_U^{k-1} f$, en tenant compte du fait que $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$ :

$$\partial_U f(X) = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_{i_1}(n) q_{i_1}^n X^{n-1}$$

$$\partial_U^2 f(X) = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_{i_1}(n) P_{i_2}(n-1) q_{i_1}^n q_{i_2}^{n-1} X^{n-2}$$

et, plus généralement, pour $1 \leq j \leq k-1$ :

$$\partial_U^j f(X) = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_j=1}^{N} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_{i_1}(n) \ldots P_{i_j}(n-j+1) q_{i_1}^n \ldots q_{i_j}^{n-j+1} X^{n-j}.$$

Introduisons maintenant *la base des polynômes factoriels* $F_0(X) = 1; F_1(X) = X; F_2(X) = X(X-1); \ldots F_n(X) = X(X-1)\ldots(X-n+1)$.

Alors $P_{i_1}(n)\ldots P_{i_j}(n-j+1)$ est un polynôme en $n$ de degré $d_{i_1} + d_{i_2} + \cdots + d_{i_j}$, si bien qu'il existe des éléments $\beta_h(j, i_1, \ldots, i_j)$ de $\overline{K}$ tels que

$$\partial_U^j f(X) = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_j=1}^{N} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{h=0}^{d_{i_1}+d_{i_2}+\cdots+d_{i_j}} \beta_h(j, i_1, \ldots, i_j) F_h(n) q_{i_1}^n \ldots q_{i_j}^{n-j+1} X^{n-j}.$$

Mais on a $F_h(n) = 0$ pour $n = 0, \ldots, h-1$, (si $h \geq 1$), donc :

$$\partial_U^j f(X) = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_j=1}^{N} \sum_{h=0}^{d_{i_1}+d_{i_2}+\cdots+d_{i_j}} \sum_{n=h}^{+\infty} a_n \beta_h(j, i_1, \ldots, i_j) F_h(n) q_{i_1}^n \ldots q_{i_j}^{n-j+1} X^{n-j}$$

et par conséquent :

$$\partial_U^j f(X) = \sum_{i_1=1}^{N} \cdots \sum_{i_j=1}^{N} \sum_{h=0}^{d_{i_1}+d_{i_2}+\cdots+d_{i_j}} \alpha_h(j, i_1, \ldots, i_j) f^{(h)}(q_{i_1} \ldots q_{i_j} X) X^{h-j}$$

où $\alpha_h(j, i_1, \ldots, i_j) \in \overline{K}$, et $f^{(h)}$ désigne la dérivée (ordinaire) d'ordre $h$ de $f$. Pour que $a$ soit une $U$-racine d'ordre $k$ de $f$, il *suffit donc* d'annuler tous les $f^{(h)}(q_{i_1} \ldots q_{i_j} X)$ pour $X = a$ et $h = 0, 1, \ldots, d_{i_1} + \cdots + d_{i_j}$.

Nous concluons donc :

**Théorème 2.** Supposons que $U$ vérifie une relation de récurrence linéaire à coefficients dans $K$, avec $u_n = \sum_{i=1}^{N} P_i(n) q_i^n$, $q_i \in \overline{K}$, $P_i \in \overline{K}[X]$, $deg P_i = d_i$. Soit $i_1, i_2 \ldots, i_j$ une combinaison (avec répétitions possibles) de $j$ éléments de $\{1, 2, \ldots, N\}$ ; soit $\Gamma_k$ l'ensemble de ces combinaisons pour $j = 1, 2, \ldots, k-1$.

Soient $z_1, \ldots, z_m$ des éléments de $K$, et $k_1, \ldots, k_m$ des entiers naturels non nuls. Soit $E_{k_i}$ la famille de polynômes définie, pour $i = 1, 2, \ldots, m$, par :

$$E_{k_i} = \{(X - z_i)\} \cup \left\{(X - q_{i_1} z_i)^{d_{i_1}+1} / i_1 \in \Gamma_2\right\} \cup \ldots$$
$$\cup \left\{(X - q_{i_1} \ldots q_{i_{k_i-1}} z_i)^{d_{i_1}+\ldots+d_{i_{k_i-1}}+1} / (i_1, i_2 \ldots, i_{k_i-1}) \in \Gamma_{k_i}\right\}.$$

Alors le polynôme :

$$P(X) = X^{k-1} \operatorname*{PPCM}_{Q \in E_{k_1} \cup \ldots \cup E_{k_m}} [Q(X)] \qquad (k = Max(k_1, k_2 \ldots, k_m))$$

admet $z_1, z_2 \ldots, z_m$ pour $U$-racines, avec les ordres de multiplicité respectifs $k_1, k_2$, $\ldots, k_m$.

**Exemple 5.** Dans le cas où $u_n$ est arithmético-géométrique, c'est à dire vérifie une relation de récurrence du type

$$u_{n+1} = qu_n + r \qquad (q \in K^*), \tag{10}$$

il est facile de voir que le polynôme $H_{n_1, n_2 \ldots, n_k, q}$ défini en (9) résout le problème $(\mathcal{P})$.

**Exemple 6.** Considérons une suite $U$ de la forme :

$$u_n = a_{0,n} + a_{1,n} \cdot n + a_{2,n} n^2 + \cdots + a_{d,n} n^d,$$

où les suites $A_i = \{a_{i,0}; a_{i,1}; \ldots; a_{i,n}; \ldots\}$ sont *périodiques* dans $K$. Une telle suite est appelée *polynôme arithmétique* par E. Ehrhart, qui en donne comme exemple les *entiers d'Euler* $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n, \ldots$ définis par

$$\prod_{k=1}^{+\infty} (1 - X^k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k X^{\alpha_k}$$

où $\varepsilon_k$ est la suite $1, -1, -1, +1, +1$, périodique de période 4 à partir du rang 1 ([30]).

Notons $T$ le plus petit commun multiple des périodes des $A_i$ $(0 \leq i \leq d)$, et supposons $d \geq 1$. On appelle $d$ le *degré* de $U$, et $T$ sa *période* .

Puisque $a_{i,n+T} = a_{i,n}$,il existe des éléments $\alpha_{i,1}; \alpha_{i,2}; \ldots; \alpha_{i,T}$ de $\overline{K}$ tels que :

$$a_{i,n} = \alpha_{i,1} \omega_1^n + \alpha_{i,2} \omega_2^n + \cdots + \alpha_{i,T} \omega_T^n,$$

où $\Omega_T = \{\omega_1, \omega_2 \dots, \omega_T\}$ désigne le groupe des racines $n$-ièmes de 1 dans $\overline{K}$. Par suite :

$$u_n = R_1(n)\omega_1^n + R_2(n)\omega_2^n + \cdots + R_T(n)\omega_T^n$$

où $R_i \in \overline{K}[X]$ et l'un au moins des $R_i$ est de degré $d$.

Pour que $z_1, z_2 \dots, z_N$ soient des $U$-racines d'ordre $k$ du polynôme $P$, il suffit donc que $P^{(h)}(\omega z_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, N$, tout $\omega \in \Omega_T$ et tout $h = 0, 1, \dots, d(k-1)$ (car $\Omega_T$ est stable par multiplication). Donc on peut prendre :

$$P_k(X) = X^k \left[(X - \omega_1 z_1) \dots (X - \omega_T z_1)(X - \omega_1 z_2) \dots \right.$$
$$\left. (X - \omega_T z_2) \dots (X - \omega_1 z_N) \dots (X - \omega_T z_N)\right]^{d(k-1)+1}$$

Finalement, on peut conclure :

**Proposition 3.** Soit $U$ un polynôme arithmétique de degré $d$, de période $T$. Alors :

$$P_k(X) = X^{k+h} \left(\left(X^T - z_1^T\right)\left(X^T - z_2^T\right) \dots \left(X^T - z_N^T\right)\right)^{d(k-1)+1}$$

admet, pour tout $h \geq 0, z_1, z_2 \dots, z_N$ comme $U$-racines, avec des ordres de multiplicité égaux à $k$.

## 4 - $U$-dérivation et produit de Hadamard.

Dans ce paragraphe, nous donnons une autre démonstration du théorème 2.

**a)** Nous introduisons le $U$-opérateur d'Euler dans $K[[X]]$

$$\boxed{\theta_U = X\partial_U} \tag{11}$$

Cet opérateur s'interprête très simplement comme un produit de Hadamard dans $K[[X]]$. Rappelons que le produit de Hadamard $f \odot g$ de $f$ et $g$ est défini par

$$(f \odot g)(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n X^n,$$
$$\text{si} \quad f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \qquad \text{et} \qquad g(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n. \tag{12}$$

(pour une étude algébrique du produit de Hadamard, voir [6] et [8] ; pour une étude analytique, [11], p. 20).

Posons $U(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n X^n$.

On obtient immédiatement :

(13) $$\boxed{\theta_U f(X) = (U \odot f)(X)}$$

**b)** Prolongeons la suite $U$ sur $\mathbb{Z}^-$, en posant

(14) $$\forall n \in \mathbb{Z}^-, \quad u_n = 0.$$

Posons également

(15) $$\forall k \in \mathbb{Z} : \qquad (U+k) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+k} X^n.$$

(par suite $U(X) = (U+0)(X)$).

Puis considérons $m, p \in \mathbb{N}$, et $f \in K[[X]]$. Alors

$$\begin{aligned}\theta_U^m(X^p f(X)) &= \underbrace{U \odot U \odot U \cdots \odot U \odot}_{m \text{ fois}} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^{n+p} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (u_{n+p})^m X^{n+p} \\ &= X^p \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (u_{n+p})^m X^n.\end{aligned}$$

En utilisant (15), nous obtenons :

(16) $$\boxed{\theta_U^m(X^p f) = X^p \theta_{U+p}^m f.}$$

Donc :

(17) $$\forall P \in K[X] : \qquad \boxed{P(\theta_U)(X^p f) = X^p P(\theta_{U+p}) f}$$

Cette relation est bien connue dans le cas $u_n = n$ (dérivation ordinaire) et $u_n = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ ($q$-dérivation). Elle s'utilise par exemple pour trouver l'équation aux $q$-différences vérifiée par la série $q$-hypergéométrique ([50], §2 et 5).

**c)** Pour terminer, soit $f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$. Alors :

$$\partial_U^k f(X) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n u_n u_{n-1} \dots u_{n-k+1} X^{n-k}.$$

Il en résulte

$$X^k \partial_U^k f(X) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n u_n u_{n-1} \dots u_{n-k+1} X^n.$$

D'où, grâce à (15) :

$$(18) \qquad \forall k \in \mathbb{N} : \quad \boxed{\begin{aligned} X^k \partial_U^k f(X) &= U \odot (U-1) \odot \cdots \odot (U-k+1) \odot f(X) \\ &= \theta_U \theta_{U-1} \dots \theta_{U-k+1} f(X). \end{aligned}}$$

**Exemple 7.** Si la suite $U$ vérifie une relation de récurrence linéaire, alors $(U-j)(X)$ est une fraction rationnelle, qui se décompose dans $\overline{K}[X]$ sous la forme

$$(19) \qquad (U-j)(X) = E_j(X) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_{ij}}{(X-q_i)^{d_i}}$$

(avec les notations du paragraphe 3)). Le polynôme $E_j$ est de degré inférieur ou égal à $j$. Il n'intervient donc pas dans le produit de Hadamard de la formule (18), dès lors que la valuation de $f$ est supérieure ou égale à $k$. Comme il est bien connu que le produit de Hadamard de deux fractions rationnelles est une fraction rationnelle dont les pôles sont les produits des pôles, on obtient une autre démonstration du théorème 2, et on comprend pourquoi les suites qui vérifient une relation de récurrence linéaire jouent un rôle privilégié : *leur série génératrice* $U(X)$ est une *fraction rationnelle.*

Pour terminer, un point de terminologie : on peut penser que le terme "$U$-dérivation" prête à confusion, dans la mesure où une dérivation devrait toujours posséder une formule de Leibnitz ([27], p. 41).

On a vu que ce n'est presque jamais le cas pour la $U$-dérivation (théorème 1). Cependant, le terme de "$U$-dérivation" s'impose à cause de la *formule de Taylor* et de la théorie des $U$-racines multiples. On sait que l'on peut, par exemple, introduire les dérivées successives d'un polynôme $P$ grâce au développement de $P(X+a)$ ([72], p. 63 ; [45], p.5). Comme le terme "$U$-dérivation" contient le préfixe "$U-$" et ne peut donc être confondu avec une autre dérivation, il me paraît devoir être conservé : on prendra seulement garde qu'il n'existe pas, en général, de formule pour la $U$-dérivée d'un produit.

# CHAPITRE 4 :

# APPROXIMANTS DE PADE ET $U$-DERIVATION

## 1 - Introduction.

**a)** Le but de ce chapitre est de montrer comment obtenir explicitement la diagonale de la table de Padé de certaines séries formelles. La méthode proposée se base sur la notion de $U$-dérivation, développée dans le chapitre précédent, et elle est *purement algébrique* ; nous cherchons, en effet, à résoudre le problème suivant :

Soit $K$ un corps commutatif, et soit $f \in K[[X]]$. Trouver $P, Q \in K[X]$, avec $\deg P \leq n, \deg Q \leq n$ et $R \in K[[X]]$, tels que :

$$Q(X)f(X) - P(X) = X^{2n+1}R(X).$$

**b)** Nous introduisons les notations suivantes ([28], ou chapitre précédent) :

Soit $U = \{u_1, u_2 \dots, u_n, \dots\}$ une suite d'éléments de $K^*$. Nous posons :

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathcal{U}^n = u_1 u_2 \dots u_n & \text{si} \quad n \in \mathbb{N} - \{0\} \\ \mathcal{U}^0 = 1 \end{cases}$$

Nous notons $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1 \dots, \mathcal{U}_n, \dots\}$.

Cas particulier : Soit $q \in K^*$, et soit :

$$(2) \qquad u_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$$

Alors $\mathcal{U}^n$ se note généralement $[n]_q!$. En particulier : $[n]_1! = n!$.

Revenant au cas général, nous posons également : $U_n^p = \dfrac{\mathcal{U}^n}{\mathcal{U}^p \mathcal{U}^{n-p}}$

Dans le cas où $u_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$, $U_n^p$ se note généralement $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q$.

Ainsi : $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q = \dfrac{[n]_q!}{[p]_q!\,[n-p]_q!}$.

Bien entendu : $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_1 = \binom{n}{p}$.

Nous utiliserons *la formule du binôme de Cauchy* ([34], [37]) sous la forme suivante:

$$\text{Soit} \qquad H_n(X) = (X-1)(X-q)\dots(X-q^{n-1}) \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}$$
$$H_0(X) = 1.$$

Alors :

$$(3) \qquad \boxed{H_n(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{\frac{p(p-1)}{2}} X^{n-p}}$$

**c)** Considérons la série *U-logarithme* et la série *U-exponentielle*, définies, pour toute suite $U$ d'éléments de $K^*$, par :

$$(4) \qquad L_U(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X^n}{u_n}$$

$$(5) \qquad \exp_U(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{\mathcal{U}^n}.$$

On observe que :

$$(6) \qquad \exp_U(x) = 1 + L_U(X).$$

Nous obtiendrons les approximants de Padé de $L_U(X)$et $\exp_U(X)$ dans le cas où la suite $U$ est arithmético-géométrique, c'est à dire vérifie une relation de récurrence de la forme :

$$(7) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n + r, \qquad (q,r) \in K^* \times K$$

Nous poserons : $\begin{cases} c = a & \text{si } u_n = an + b \\ c = b(1-q) & \text{si } u_n = aq^n + b, q \neq 1 \end{cases}$

La méthode utilisée consiste à construire une suite de polynômes orthogonaux formels pour une forme linéaire $\zeta$ sur $K[X]$ ; elle se situe donc dans un cadre bien connu ([15], [17]). Nous la développerons cependant de manière complètement autonome, en suivant la démarche adoptée par K. Alladi et M.L. Robinson pour obtenir les approximants de Padé de $\log(1+z)$ [1].

Les approximants de Padé obtenus dans les théorèmes 4 et 6 ci-après sont connus dans certains cas particuliers : en ce qui concerne le $U$-logarithme, dans les cas $u_n = an + b$ ([58], [55] chap. XIII) et $u_n = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ ($q \in \mathbb{C} - \{1\}$, [12]). Pour la $U$-exponentielle, dans les cas $u_n = an + b$ ([55], chapitre XIV), $u_n = q^n - 1$ ([75], [12]), $u_n = q^n$ [12].

Pour des applications en théorie des nombres, voir [1], [13], [75].

**d)** Le plan du chapitre est le suivant : dans le paragraphe 2, nous ferons un bref rappel sur les notions de $U$-dérivation et de $U$-racine d'ordre $k$ d'un polynôme (pour plus de détails, voir [28] ou le chapitre précédent). Dans le paragraphe 3, nous introduirons les $U$-intégrales et reprendrons la démarche de K. Alladi et M.L. Robinson pour associer une suite de polynômes orthogonaux formels aux approximants de Padé. Nous déterminerons ensuite explicitement cette suite de polynômes dans le cas où $u_n$ est arithmético-géométrique et en déduirons les approximants de Padé de $L_U(X)$ dans ce cas (paragraphe 4). Dans le paragraphe 5, nous effectuerons le lien entre $U$-racines d'ordre $k$ et approximants de Padé de $\exp_U(X)$, ce qui nous permettra de déterminer explicitement ces approximants quand $U$ est arithmético-géométrique. Pour terminer, nous nous placerons (paragraphe 6) dans un corps valué $(K, |\ \ |)$, et montrerons comment exprimer les $U$-intégrales sous forme de séries lorsque $u_n = aq^n + b$, $q \neq 1$ ; nous en déduirons, à titre d'exemple, un majorant du reste des approximants de Padé calculés au paragraphe 4.

## 2 - $U$-dérivation.

**a)** Soit $U = \{u_1, u_2 \dots, u_n, \dots\}$ une suite d'éléments de $K^*$. La *$U$-dérivée* de $f \in K[[X]]$ est définie par :

$$\text{(8)} \qquad \text{Si} \quad f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n, \quad \text{alors} \quad \partial_U f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n X^{n-1}.$$

Un cas particulier important est celui où $U$ vérifie (2). Dans ce cas, nous noterons $\partial_U = \delta_q$. En particulier, $\delta_1$ est la dérivation ordinaire.

$\delta_q$ est la *$q$-dérivation*. Voir [34].

**b)** Soit $P \in K[X]$, et soit $a \in K$. On dit que $a$ est une $U$-racine d'ordre $k$ de $P$ si :

$$\begin{cases} P(a) = \partial_U P(a) = \cdots = \partial_U^{k-1} P(a) = 0 \\ \partial_U^k P(a) \neq 0. \end{cases}$$

Nous aurons essentiellement besoin, dans ce qui suit, du résultat suivant, qui est un cas particulier du théorème 2 de [28] (voir chapitre précédent) :

**Proposition 1.** Soit $U$ vérifiant (7), et soit, pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ :

$$G_n(X) = X^n(X-1)(X-q)\dots(X-q^{n-1}) = X^n H_n(X).$$

Alors $G_n$ admet 1 comme $U$-racine d'ordre $n$, et de plus :

$$\partial_U^n G_n\left(\frac{1}{q}\right) = \left(\frac{c}{q}\right)^n [n]_q!.$$

*Démonstration.* Posons $G_n(X) = \sum_{k=n}^{2n} a_k X^k$, et supposons $q \neq 1$. Alors, pour $0 \leq j \leq n$ :

$$\partial_U^j G_n(X) = \sum_{k=n}^{2n} a_k u_k u_{k-1} \dots u_{k-j+1} X^{k-j}$$

$$\partial_U^j G_n(X) = \frac{1}{X^j q^{\frac{j(j-1)}{2}}} \sum_{k=n}^{2n} a_k (aq^k + b)(aq^k + bq) \dots (aq^k + bq^{j-1}) X^k.$$

Puisque $H_n(1) = H_n(q) = \dots = H_n(q^{n-1}) = 0$, on a :

$$\partial_U^j G_n(1) = 0 \qquad \text{pour } j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Et : $\partial_U^n G_n\left(\frac{1}{q}\right) = q^n \sum_{k=n}^{2n} a_k b^n \frac{1}{q^k} = (bq)^n G_n\left(\frac{1}{q}\right)$, d'où le résultat.

La démonstration est analogue si $q = 1$. On observe dans ce cas que :

$$\partial_U^j G_n(X) = \sum_{k=n}^{2n} a_k (ak + b)(a(k-1) + b) \dots (a(k-j+1) + b) X^{k-j}$$

et $\partial_U^j G_n(1) = 0$ pour $j = 0, 1, \dots, n-1$, car $H_n(1) = H_n'(1) = \dots = H_n^{(n-1)}(1) = 0$; de plus :

$$\partial_U^n G_n(1) = a^n G_n^{(n)}(1) = a^n \, n!, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

### 3 - Approximants de Padé du $U$-analogue du logarithme.

**a)** Soit $U = \{u_1, u_2 \dots, u_n\}$ une suite d'éléments de $K^*$.

Soit $H \in K[X]$ une $U$-primitive du polynôme $P$ (c'est à dire que $\partial_U H = P$). On pose pour $\alpha, \beta \in K$ :

$$\boxed{\int_\alpha^\beta P(z) d_U z = [H(z)]_\alpha^\beta = H(\beta) - H(\alpha)} \tag{9}$$

On définit une forme bilinéaire symétrique sur $K[X]$ en posant :

$$\boxed{\langle P, Q \rangle_U = \int_0^1 P(z) Q(z) d_U z} \tag{10}$$

On suppose dans ce qui suit qu'il existe une base $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de *polynômes orthogonaux formels* pour $\langle \ , \ \rangle_U$, plus précisément (voir [17]) :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Phi_n(X) = \sum_{m=0}^{n} \varphi_{m,n} X^m, \quad \varphi_{n,n} \neq 0. \\ \forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad n \neq p \Rightarrow \langle \Phi_n, \Phi_p \rangle_U = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Soit enfin $f(z,X)=\sum_{n=0}^{+\infty} F_n(z)X^n \in K[z][[X]]$. On pose :

$$\boxed{\int_0^1 f(z,X)d_U z = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 F_n(z)d_U z\right)X^n} \tag{12}$$

Il est clair à partir de (12) que :

$$\boxed{L_U(X) = X\int_0^1 \frac{1}{1-zX}d_U z} \tag{13}$$

**b)** Soit $m \in \mathbb{N}-\{0\}$. Calculons en suivant [1] :

$$\begin{aligned} X^{m+1}\int_0^1 \frac{z^m}{1-zX}d_U z &= X\int_0^1 \frac{d_U z}{1-zX} - X\int_0^1 \frac{1-(zX)^m}{1-zX}d_U z \\ &= L_U(X) - \int_0^1\left(\sum_{k=1}^{m} z^{k-1}X^k\right)d_U z \\ &= L_U(X) - \sum_{k=1}^{m}\frac{X^k}{u_k} \end{aligned} \tag{14}$$

Soit maintenant $P(X)=\sum_{n=0}^{m} a_m X^m$. Avec la convention $\sum_{k=1}^{0}=0$, on obtient après multiplication de (14) par $a_m$ et sommation :

$$X^{n+1}\int_0^1 \frac{P(z)d_U z}{1-zX} = \left(X^n\sum_{m=0}^{n}\frac{a_m}{X^m}\right)L_U(X) - \sum_{n=0}^{m}a_m\sum_{k=1}^{m}\frac{X^{n+k-m}}{u_k} \tag{15}$$

En remplaçant $P$ par $\Phi_n$ défini par (11), on déduit de (15) la diagonale de la table de Padé de $L_U(X)$ :

**Théorème 1.** $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$Q_n(X)L_U(X) - P_n(X) = X^{2n+1}R_n(X),$$

avec :

$$\begin{cases} Q_n(X) = X^n\Phi_n\left(\dfrac{1}{X}\right) \\ P_n(X) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n}\varphi_{m,n}\sum_{k=1}^{m}\frac{X^{n+k-m}}{u_k} \\ R_n(X) = \dfrac{1}{X^n}\displaystyle\int_0^1 \frac{\Phi_n(z)d_U z}{1-zX} \end{cases} \tag{16}$$

*Démonstration.* Ceci résulte directement de (15) et (12), et du fait que $\langle X^p, \Phi_n \rangle_U = 0$ pour $0 \leq p < n$.

## 4 - Cas des suites arithmético-géométriques.

On dispose alors d'une *formule d'intégration par parties* pour la $U$-dérivation :

**Théorème 2.** Supposons que $U$ vérifie (7), et soient $f, g \in K[X]$, avec $g(0) = 0$. Alors $\forall (\alpha, \beta) \in K^2$ :

$$\boxed{\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathbf{S}}} f(qz)\partial_U g(z) d_U z = [f(z)g(z)]_\alpha^\beta - c \cdot \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathbf{S}}} \delta_q f(z) g(z) d_U z}$$

avec $c = a$ si $u_n = an + b$; $c = b(1-q)$ si $u_n = aq^n + b$, $q \neq 1$.

*Démonstration.* a) Nous supposons d'abord que $q \neq 1$.

Soit $h(X) = \sum_{n=1}^{N} h_n X^n$. On vérifie facilement que :

$$\partial_U h(X) = \frac{ah(qX) + bh(X)}{X} \tag{17}$$

Par conséquent $\forall k \in \mathbb{N}$ :

$$\partial_U (X^k h(X)) = \frac{a(qX)^k h(qX) + bX^k h(X)}{X}. \tag{18}$$

Mais d'après (17), on a aussi : $ah(qX) = X\partial_U h(X) - bh(X)$. D'où en reportant dans (18) :

$$\partial_U (X^k h(X)) = (qX)^k \partial_U h(X) + b(1 - q^k) X^{k-1} h(X).$$

Et par linéarité :

$$\partial_U [f(X)g(X)] = f(qX)\partial_U g(X) + c\delta_q f(X) \cdot g(X) \tag{19}$$

**b)** Si $q = 1$, alors :

$$\partial_U h(X) = ah'(X) + b\frac{h(X)}{X}, \tag{20}$$

où $h'$ désigne la dérivée usuelle de $h$. Donc :

$$\partial_U X^k h(X) = aX^k h'(X) + (ak + b) X^{k-1} h(X) \tag{21}$$

Puisque $ah'(X) = \partial_U h(X) - b\frac{h(X)}{X}$, on obtient en procédant comme au a) :

$$\partial_U [f(X)g(X)] = f(X)\partial_U g(X) + c\delta_1 f(X) \cdot g(X) \tag{22}$$

**c)** La formule d'intégration par parties résulte immédiatement de (19) et (22).

**Théorème 3.** Si la suite $U$ vérifie (7), alors :

$$\Phi_n(X) = \partial_U^n [X^n H_n(X)] = \partial_U^n \left[X^n (X-1)(X-q)\dots(X-q^{n-1})\right]$$

vérifie (11).

*Démonstration.* Il suffit de prouver :

$$\overset{1}{\underset{0}{\mathbf{S}}} X^k \Phi_n(X) d_U X = 0 \qquad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{23}$$

Posons $G_n(X) = X^n H_n(X)$. En vertu de la proposition 1, on a :

$$\begin{cases} G_n(1) = \partial_U G_n(1) = \cdots = \partial_U^{n-1} G_n(1) = 0 \\ G_n(0) = \partial_U G_n(0) = \cdots = \partial_U^{n-1} G_n(0) = 0. \end{cases}$$

(23) s'obtient alors facilement en $U$-intégrant $\overset{1}{\underset{0}{\mathbf{S}}} X^k \partial_U^n G_n(X) d_U X$, $k$ fois par parties, et le théorème 5 est démontré.

Nous avons donc obtenu la diagonale de la table de Padé de $L_U(X)$ dans le cas où $U$ est arithmético-géométrique :

**Théorème 4.** Soit $U$ vérifiant (7). Alors :

$$Q_n(X) L_U(X) - P_n(X) = X^{2n+1} R_n(X),$$

avec :

$$\begin{cases} Q_n(X) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p u_{2n-p} u_{2n-p-1} \dots u_{n-p+1} \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{\frac{p(p-1)}{2}} X^p & (24) \\ P_n(X) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} u_{n+m} u_{n+m-1} \dots u_{m+1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q \\ \qquad\qquad q^{\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{X^{n+k-m}}{u_k} & (25) \\ R_n(X) = c^n [n]_q! \overset{1}{\underset{0}{\mathbf{S}}} \dfrac{z^n (1-z)(q-z)\dots(q^{n-1}-z)}{(1-zX)(q-zX)\dots(q^n-zX)} d_U z & (26) \end{cases}$$

*Démonstration.* Pour obtenir (24) et (25), on remarque que, en vertu de (3) :

$$\boxed{\Phi_n(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p u_{2n-p} u_{2n-p-1} \dots u_{n-p+1} \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{\frac{p(p-1)}{2}} X^{n-p}} \tag{27}$$

et on applique le théorème 1.

En ce qui concerne (26), on observe qu'une récurrence élémentaire conduit à : $\forall q \in K^*$ :

$$\boxed{\delta_q^k\left(\frac{1}{1-zX}\right) = \frac{[k]_q!X^k}{(1-zX)(1-qzX)\dots(1-q^kzX)}} \tag{29}$$

la $q$-dérivée étant prise par rapport à $z$.

En utilisant l'expression de $R_n(X)$ donnée par le théorème 1 :

$$R_n(X) = \frac{1}{X^n}\overset{1}{\underset{0}{\mathbf{S}}}\frac{\Phi_n(z)}{1-zX}d_Uz,$$

et la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} R_n(qX) &= \frac{1}{(qX)^n}\overset{1}{\underset{0}{\mathbf{S}}}\frac{\Phi_n(z)}{1-(qz)X}d_Uz \\ &= \frac{1}{(qX)^{n-1}}(-c)\overset{1}{\underset{0}{\mathbf{S}}}\frac{\partial_U^{n-1}(z^nH_n(z))}{(1-zX)(1-qzX)}Xd_Uz \\ &= \frac{-c}{q^n}V_n(X) \end{aligned}$$

Nous recommençons la même opération sur $V_n(X)$, et (26) s'ensuit par récurrence, en utilisant (29).

*Remarque 1.* Le théorème 6 donne également la diagonale de la table de Padé de $L_U(X)$ si $u_n = a\omega^n + b\eta^n$, puisque dans ce cas :

$$L_U(X) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{aq^n+b}\left(\frac{X}{\eta}\right)^n, \qquad \text{avec} \quad q = \frac{\omega}{\eta}. \tag{30}$$

*Remarque 2.* Si on travaille dans $\mathbb{C}$, on peut remarquer que les polynômes $\Phi_n$ sont des polynômes de Jacobi pour $q = 1$, ou leur $q$-analogue pour $q \neq 1$ [37]. L'expression de $\Phi_n$ dans le théorème 3 équivaut évidemment à la formule de Rodrigues.

*Remarque 3.* Les approximants de Padé de $L_q(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+q+\dots+q^n}$ obtenus par P. Borwein ([12], théorème 3) peuvent se déduire de l'expression de $\Phi_n$ donnée au théorème 5 ci-dessus, et de la formule de Leibniz pour $\delta_q$ [34] :

$$\delta_q^n\left[f(x)g(x)\right] = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{-n(n-k)}(\delta_q^{n-k}f)(q^kx)(\delta_q^kg)(x). \tag{31}$$

*Remarque 4.* S'il existe $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ tel que $q^k = 1$, il est immédiat que $[n]_q! = 0$ pour $n \geq k$, donc $R_n = 0$ en vertu de (26) et $L_U(X)$ est une *fraction rationnelle*. Dans le cas contraire, on a :

**Proposition 2.** Soit $q \in K^*$ avec $q^k \neq 1, \forall k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Alors la table de Padé de $L_U$ est *normale*, c'est à dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \qquad R_n(0) \neq 0.$$

*Démonstration.* En utilisant (26), on obtient avec les notations de la proposition 1 :

$$R_n(0) = c^n [n]_q!\, q^{-\frac{n(n+1)}{2}} \int_0^1 (-1)^n G_n(z) d_U z.$$

Nous notons $Z_n$ la $U$-primitive de $G_n$ qui s'annule pour $X = 0$, et nous voulons démontrer que $Z_n(1) \neq 0$.

(i) Supposons d'abord $q \neq 1$. Alors $G_n(X) = \dfrac{aZ_n(qX) + bZ_n(X)}{X}$ en vertu de (17).

Si $Z_n(1) = 0$, on en déduit $Z_n(q) = 0$ car $G_n(1) = 0$. Puis $Z_n(q^2) = 0$ car $G_n(q) = 0$ et par récurrence $Z_n(q^k) = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$. On a donc $Z_n(X) = X^{n+1}\alpha \prod_{k=0}^{n}(X - q^k)$, ce qui est impossible car $\deg Z_n = 2n + 1$. Donc $Z_n(1) \neq 0$.

(ii) Supposons maintenant $q = 1$. Alors on a (voir (20)) :

$$\partial_U Z_n(X) = G_n(X) = aZ_n'(X) + b\frac{Z_n(X)}{X}.$$

Si $Z_n(1) = 0$, on obtient $Z_n'(1) = 0$ car $G_n(1) = 0$ et en $U$-dérivant encore : $Z_n''(1) = \cdots = Z_n^{(n)}(1) = 0$. Ainsi : $Z_n(X) = X^{n+1}\alpha(X-1)^{n+1}$, ce qui amène encore une contradiction avec le degré de $Z_n$. Donc $Z_n(1) \neq 0$ dans ce cas, et la proposition 2 est démontrée.

*Remarque 5.* Il résulte immédiatement de la normalité de la table de Padé de $L_U$ que les $\Phi_n$ vérifient une relation de récurrence du type :

$$\Phi_{n+1}(X) = (A_n X + B_n)\Phi_n(X) + C_n \Phi_{n-1}(X) \tag{32}$$

où $A_n, B_n, C_n$ peuvent s'expliciter facilement ([17], Théorème 4.1).

## 5 - Approximants de Padé de la série $U$-exponentielle.

Pour obtenir le dénominateur du $[n/n]$ approximant de Padé de $\exp_U X$, il suffit de construire une suite $\Psi_n$ de polynômes orthogonaux pour $< \ , \ >_{\mathcal{U}}$. Le théorème suivant relie les $U$-racines à cette suite de polynômes orthogonaux :

**Théorème 5.** Si 1 est $U$-racine d'ordre $n$ de

$$P_n(X) = X^n \sum_{k=0}^{n} a(n,k) X^k, \qquad \text{avec } a(n,n) \neq 0,$$

alors $\Psi_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{U}^{n+k} a(n,k) X^k$ est une suite de polynômes orthogonaux formels pour $< \ , \ >_{\mathcal{U}}$, et réciproquement.

*Démonstration.* Pour $0 \leq m < n$, calculons :

$$\begin{aligned} \int_0^1 X^m \Psi_n(X) d_{\mathcal{U}} X &= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{U}^{n+k} a(n,k) \frac{1}{\mathcal{U}^{m+k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_{n+k} u_{n+k-1} \cdots u_{m+k+2} a(n,k) \end{aligned}$$

(le produit des $n-m-1$ termes consécutifs figurant dans cette somme étant égal à 1 si $m = n-1$).

Donc

$$\int_0^1 X^m \Psi_n(X) d_U X = \partial_U^{n-m-1} P(1). \tag{33}$$

Le théorème 5 résulte directement de cette relation.

Le problème des $U$-racines étant bien résolu dans le cas où $U$ est arithmético-géométrique (proposition 1), on obtient sous forme explicite la diagonale de la table de Padé de la série $U$-exponentielle dans ce cas :

**Théorème 6.** Si $U$ vérifie (7), et $q^k \neq 1$, $\forall k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ , on a :

$Q_n(X) \exp_U X - P_n(X) = X^{2n+1} R_n(X)$, avec :

(34)

$$\begin{cases} Q_n(X) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{\frac{p(p-1)}{2}} \mathcal{U}^{2n-p} X^p \\ P_n(X) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{n-m} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q q^{\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}} u_{n+m} u_{n+m-1} \cdots u_{k+1} X^{n+k-m} \\ R_n(X) = \dfrac{\mathcal{U}^n}{[n]_q!} X^{2n+1} \displaystyle\int_0^1 z^n (z-1)(z-q) \ldots (z-q^{n-1}) (\delta_q^n \exp_U) \left( \frac{zX}{q^n} \right) d_U z \end{cases}$$

De plus, la table de Padé de $\exp_U X$ est *normale*.

*Démonstration.* En vertu du théorème 5, de la proposition 1 et de la formule du $q$-binôme de Cauchy (3), on a :

$$\Psi_n(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{\frac{p(p-1)}{2}} \mathcal{U}^{2n-p} X^{n-p}$$

ce qui amène $Q_n$ et $P_n$ grâce au théorème 1.

Pour obtenir l'expression de $R_n$, on calcule $S_n(X) = X^{n+1} \overset{1}{\underset{0}{\mathbf{S}}} \Phi_n(z) \exp_U(zX) d_U z$ grâce à des intégrations par parties successives. On observe d'abord que $S_n(X) = \gamma_n X^{2n+1} + \cdots$ avec $\gamma_n \neq 0$, en vertu de l'orthogonalité des $\Phi_n$ et de la proposition 2.

Appliquons la formule d'intégration par parties (Théorème 2) avec : $g(z) = \exp_U(zX) - 1$; $f(z) = \Phi_n\left(\frac{z}{q}\right)$. On obtient :

$$X^{n+1} \overset{1}{\underset{0}{\mathbf{S}}} \Phi_n(z) \exp_U(zX) d_U z = X^n \Phi_n\left(\frac{1}{q}\right) (exp_U X - 1) - \frac{c}{q} X^n \overset{1}{\underset{0}{\mathbf{S}}} (\delta_q \Phi_n)\left(\frac{z}{q}\right) (exp_U(zX) - 1) d_U z$$

On recommence en posant :

$$g(z) = \exp_U zX - \frac{zX}{u_1} - 1 \quad ; \quad f(z) = (\delta_q \Phi_n)\left(\frac{z}{q^2}\right)$$

En répétant l'opération $(n+1)$ fois, la $U$-intégrale finit par s'annuler, puisque $\deg \Phi_n = n$. On obtient :

$$A_n(X) \exp_U X - B_n(X) = X^{n+1} \overset{1}{\underset{0}{\mathbf{S}}} \Phi_n(z) \exp_U(zX) d_U z$$

où $A_n$ et $B_n$ sont des polynômes de degré $n$, avec :

$$A_n(X) = \Phi_n\left(\frac{1}{q}\right) X^n + \cdots$$

Puisque $S_n(0) \neq 0$, il y a unicité (à un facteur près) de l'approximant de Padé : on obtient donc, en utilisant la proposition 1 et en identifiant les termes de plus haut degré dans $A_n$ et $Q_n$ :

$$X^{2n+1} R_n(X) = \left(-\frac{1}{c}\right)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\mathcal{U}^n}{[n]_q!} X^{n+1} \overset{1}{\underset{0}{\mathbf{S}}} \Phi_n(z) \exp_U(zX) d_U z$$

Procédons alors comme dans le théorème 4.

Posons $T_n(X) = \frac{1}{X^n} \int_0^1 \Phi_n(z) \exp_U(zX) d_U z$.

En vertu de la formule d'intégration par parties :

$$T_n(qX) = \frac{1}{(qX)^n} \int_0^1 \Phi_n(z) \exp_U qzX \, d_U z$$
$$= \frac{-c}{q^n} \cdot \frac{1}{X^{n-1}} \int_0^1 \partial_U^{n-1}(z^n H_n(z))(\delta_q \exp_U)(zX) d_U z$$

On recommence avec $V_n(X) = \frac{1}{X^{n-1}} \int_0^1 \partial_U^{n-1}(z^n H_n(z))(\delta_q \exp_U)(zX) d_U z$ et on obtient $R_n(X)$ par récurrence.

*Remarque 6.* On retrouve la formule obtenue par R. Walliser pour $R_n$ [75] dans le cas où $u_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$ si, dans (35), on effectue des intégrations par parties successives suivant la formule :

$$\int_0^1 \delta_q f(z) g(z) d_q z = [f(z)g(z)]_0^1 - \int_0^1 f(qz) \delta_q g(z) d_q z,$$

en prenant $g(z) = \exp_q z$, et en utilisant le fait que

$$q \eta_q \delta_q = \delta_q \eta_q \qquad (\text{avec } \eta_q f(z) = f(qz)).$$

## 6 - Majoration des $U$-intégrales dans le cas où $U$ est arithmético-géométrique.

En vue des applications en théorie des nombres, nous montrons comment majorer $\int_0^1 f(x,z) d_U z$ lorsque $f \in K[z][[x]], (K, |\ \ |)$ étant un *corps valué* (en pratique, $K = \mathbb{C}$ ou $K = \mathbb{Q}_p, p$ premier), dans le cas où $u_n = aq^n + b$, $|q| \neq 1$.

Pour $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in K, |q| \neq 1$, on note $\mathcal{C}_0(R)$ l'ensemble des fonctions $f$ définies dans $B(0,R) = \{z \in K / |z| < R\}$, à valeurs dans $K$, *continues en 0.*

La $U$-dérivée de $f \in \mathcal{C}_0(R)$ est définie sur $B(0, R|q|^{-1}) - \{0\}$ par :

$$\partial_U f(z) = \frac{af(qz) + bf(z) - (a+b)f(0)}{z} \tag{36}$$

Lorsque $f$ est *analytique* dans $B(0,R)$, il y a bien sûr coïncidence entre (36) et (8).

**Théorème 7.** On suppose $|q| > 1$ et $\left|\frac{a}{b}\right| \geq 1$. Alors , pour tout $f \in \mathcal{C}_0(R)$, il existe une *unique fonction* $F \in \mathcal{C}_0(R\,|q|)$ vérifiant :

(a) $F(0) = 0$

(b) $\forall z \in B(0,R) - \{0\} : \quad \partial_U F(z) = f(z)$

Et on a :

$$\boxed{F(z) = \frac{z}{aq} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{b}{aq}\right)^n f\left(\frac{z}{q^{n+1}}\right)} \tag{37}$$

*Démonstration.* $\alpha$) Démontrons d'abord l'unicité. Soient $F$ et $G$ deux éléments de $\mathcal{C}_0(R\,|q|)$ vérifiant (a) et (b). On a alors en vertu de (36) : $\forall z \in B(0,R) - \{0\}$ :

$$aF(qz) + bF(z) = aG(qz) + bG(z)$$

Posons $H = F - G$ ; alors $\forall z \in B(0,R) - \{0\}$ :

$$aH(qz) = -bH(z)$$

Par suite : $\forall z \in B(0,R\,|q|) - \{0\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$H(z) = \left(-\frac{b}{a}\right)^n H\left(\frac{z}{q^n}\right).$$

Lorsque $n$ tend vers $+\infty$, puisque $\left|-\frac{a}{b}\right|^n \leq 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{z}{q^n} = 0$, on obtient $H(z) = 0$, C.Q.F.D.

$\beta$) Montrons maintenant que la fonction $F$ définie par (37) est bien dans $\mathcal{C}_0(R\,|q|)$ et vérifie (a) et (b). Soit $z \in B(0,R\,|q|)$.

Puisque $f \in \mathcal{C}_0(R)$, il existe $M(z) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|f\left(\frac{z}{q^{n+1}}\right)\right| \leq M(z) \quad \text{et} \quad \lim_{z\to 0} M(z) = 0.$$

$F$ est donc définie sur $B(0,R\,|q|)$, $F(0) = 0$ et :

$$|F(z)| \leq \left|\frac{z}{aq}\right| \cdot \frac{1}{1 - \left|\frac{b}{aq}\right|} M(z), \quad \forall z \in B(0,R\,|q|)$$

Ce qui implique que $F$ est continue en 0.

Calculons maintenant : $\forall z \in B(0, R\,|q|) - \{0\}$ (et même dérivable) :

$$\begin{aligned}\partial_U F(z) &= \frac{1}{z}\left(z\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{b}{aq}\right)^n f\left(\frac{z}{q^n}\right) + \frac{bz}{aq}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{b}{aq}\right)^n f\left(\frac{z}{q^{n+1}}\right)\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{b}{aq}\right)^n f\left(\frac{z}{q^n}\right) - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{b}{aq}\right)^{n+1} f\left(\frac{z}{q^{n+1}}\right)\\ &= f(z),\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

*Remarque 1.* Par la même méthode, on obtient un résultat analogue lorsque $\left|\frac{a}{b}\right| \leq 1$ et $|q| < 1$. L'expression de $F(z)$ est alors :

$$F(z) = \frac{z}{b}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{aq}{b}\right)^n f(zq^n). \tag{38}$$

Cette dernière formule généralise celle donnée par J. Thomae ([70], [34], [37]), dans un cadre légèrement différent.

*Remarque 2.* Si nous supposons $f$ *analytique* au voisinage de 0, c'est à dire :

$$\forall z \in B(0, R) : \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{39}$$

et si nous utilisons (37), nous obtenons immédiatement la jolie formule sommatoire suivante :
Si $|q| > 1$ et $\left|\frac{a}{b}\right| \geq 1$, si $z \in B(0, |q|\,R)$ :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{z^n}{aq^n + b} = \frac{1}{aq}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{b}{aq}\right)^n f\left(\frac{z}{q^{n+1}}\right)} \tag{40}$$

A titre d'exemple, nous utilisons maintenant le théorème 7 pour majorer le reste de l'approximant de Padé du $U$-logarithme (Théorème 4) dans le cas où :

$K = \mathbb{C}, |q| > 1, \left|\frac{a}{b}\right| \geq 1.$

Pour $|x| \leq 1$, la fonction de la variable $z$ :

$$f(z, x) = \frac{z^n(1-z)(q-z)\ldots(q^{n-1}-z)}{(1-zx)(q-zx)\ldots(q^n-zx)}.$$

est analytique dans $B(0,1)$. Donc :

$$\left|\mathop{\mathbf{S}}_{0}^{1} f(z,x)d_U z\right| \leq \left|\frac{1}{aq}\right| \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{b}{aq}\right|^n \left|f\left(\frac{1}{q^{n+1}}, x\right)\right|.$$

Mais pour $|z| \leq \dfrac{1}{|q|}$ et $|x| \leq 1$, on a :

$$|f(z,x)| \leq \frac{|q|^{-n} |q|^{\frac{n(n-1)}{2}} (1+|q|^{-1})(1+|q|^{-2})\dots(1+|q|^{-n})}{|q|^{\frac{n(n+1)}{2}} (1-|q|^{-1})(1-|q|^{-2})\dots(1-|q|^{-n-1})}.$$

En utilisant le fait que $\forall x \in [-|q|^{-1}, |q|^{-1}]$ :

$x - \dfrac{|q|}{2(|q|-1)}x^2 \leq \log(1+x) \leq x$, on obtient facilement

$$\frac{[(1+|q|^{-1})(1+|q|^{-2})\dots(1+|q|^{-n})]^2}{(1-|q|^{-1})(1-|q|^{-2})\dots(1-|q|^{-n-1})} \leq \ell(q), \tag{41}$$

$$\text{avec } \ell(q) = \exp\left(\frac{3}{|q|-1} + \frac{|q|}{2(|q|-1)} \frac{1}{|q|^2-1}\right)$$

Ainsi, on peut majorer le reste de l'approximant de Padé de $L_U(x)$ donné par le théorème 4, pour $u_n = aq^n + b$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| \geq 1$, $|q| > 1$, et $|x| \leq 1$, par :

$$\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{\ell(q)}{|aq|-|b|} |q|^{\frac{n(n-3)}{2}} |b|^n |x|^{2n+1}}. \tag{42}$$

# TROISIEME PARTIE

# U-DERIVATION ET APPROXIMATION DIOPHANTIENNE

## CHAPITRE 5 :

# SUR L'IRRATIONALITÉ DE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{q^n - r}$

L'irrationalité de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q^n - 1}$ a été établie par P. Erdös dans [31] pour $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Plus récemment, P. Borwein a démontré l'irrationalité de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q^n - r}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{q^n - r}$ pour $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geq 2$, et $r \in \mathbb{Q}^*$ [14]. Dans ce chapitre, nous démontrons le résultat suivant :

**Théorème.** Soit $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geq 2$, et $r = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}^*$. Posons $u_n = aq^n - b$, et notons :

$$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} / p \text{ premier } / \exists n \in \mathbb{N},\ p \text{ divise } u_n\}.$$

Pour toute partie finie $\mathbb{F}$ de $\mathbb{P}$, soit :

$$d(\mathbb{F}) = \prod_{p \in \mathbb{F}} p^{\frac{1}{p-1}}.$$

Supposons qu'il existe une partie finie $\mathbb{F}$ de $\mathbb{P}$, telle que $\frac{|b|^2}{|q|\, d(\mathbb{F})} < 1$.

Alors $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{q^n - r} \notin \mathbb{Q}$.

*Démonstration.* Posons $U = \{u_1, u_2 \dots, u_n, \dots\}$ et, avec les notations de la deuxième partie, $L_U(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{u_n}$. Il a été démontré dans le chapitre 4, th. 4, que:

$$Q_n(x) L_U(x) - P_n(x) = x^{2n+1} R_n(x) \tag{1}$$

avec :

$$(2) \qquad Q_n(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p u_{2n-p} u_{2n-p-1} \cdots u_{n-p+1} \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{\frac{p(p-1)}{2}} x^p$$

(3)

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} u_{n+m} u_{n+m-1} \cdots u_{m+1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q q^{\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}} \sum_{k=1}^{m} \frac{x^{n+k-m}}{u_k}$$

De plus, si $\left|\frac{a}{b}\right| \geq 1$, ce que nous supposons pour l'instant, on a (chapitre 4, formule (42)), pour $|x| \leq 1$ :

$$(4) \qquad |R_n(x)| \leq \frac{\ell(q)}{|aq| - |b|} |q|^{\frac{n(n-3)}{2}} |b|^n$$

où $\ell(q)$ ne dépend ni de $x$, ni de $n$.

Il est facile de vérifier (en utilisant par exemple le fait que $\partial_U L_U(x) = \frac{1}{1-x}$ et la formule (17) du chapitre 4) que :

$$(5) \qquad aL_U(x) = \frac{x}{q-x} + bL_U\left(\frac{x}{q}\right)$$

Si bien que, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ :

$$L_U\left(\frac{x}{q^n}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{b^{k+1}} \frac{x}{q^{n-k} - x} + \frac{a^n}{b^n} L_U(x).$$

Pour $x = r = \frac{b}{a}$, nous obtenons :

$$(6) \qquad L_U\left(\frac{b}{aq^n}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{b^{k+1}} \frac{1}{aq^{n-k} - b} + \frac{a^n}{b^n} L_U\left(\frac{b}{a}\right).$$

Remplaçons $x$ par $\frac{b}{aq^n}$ dans (1). La proposition 2 du chapitre 4, le lemme 2 de [1] et la majoration (4) permettent d'écrire, pour une infinité de valeurs de $n$ :

(7)

$$0 < \left| Q_n\left(\frac{b}{aq^n}\right) \frac{a^n}{b^n} L_U\left(\frac{b}{a}\right) - Q_n\left(\frac{b}{aq^n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{b^{k+1}} \frac{1}{aq^{n-k} - b} - P_n\left(\frac{b}{aq^n}\right) \right| \leq$$

$$\frac{\ell(q)}{|aq| - |b|} \left(\frac{|b|}{|a|\,|q|^n}\right)^{2n+1} |q|^{\frac{n(n-3)}{2}} |b|^n.$$

Pour toute partie finie $\mathbb{F}$ de $\mathbb{P}$ et $n$ assez grand, soit $D_n(\mathbb{F}) = \prod_{p\in\mathbb{F}} p^{[\frac{n}{p-1}]-1}$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}, D_n(\mathbb{F})$ divise $u_{k+1}u_{k+2}\dots u_{k+n}$ en vertu du petit théorème de Fermat, et $\frac{1}{D_n(\mathbb{F})}\prod_{k=1}^{n}(aq^k - b)$ est multiple commun à $aq-b, aq^2-b, \dots, aq^n-b$. Si nous multiplions l'encadrement (7) par : $T_n = \frac{1}{[D_n(\mathbb{F})]^2}\left|\prod_{k=1}^{n}(aq^k-b)\right| |q|^{n^2} |a|^n |b|^n$, nous obtenons donc :

$$0 < \left|\alpha_n L_U\left(\frac{b}{a}\right) - \beta_n\right| < C \cdot \frac{|b|^{4n}\left|\prod_{k=1}^{n}(aq^k-b)\right|}{[D_n(\mathbb{F})]^2 |a|^n |q|^{\frac{n}{2}(n+5)}}$$

avec $\alpha_n \in \mathbb{Z}, \beta_n \in \mathbb{Z}$, et $C$ ne dépend pas de $n$.

Or : $\left|\prod_{k=1}^{n}(aq^k-b)\right| \leq \gamma |a|^n |q|^{\frac{n(n+1)}{2}}$ où $\gamma$ ne dépend pas de $n$.

Donc : $0 < \left|\alpha_n L_U\left(\frac{b}{a}\right) - \beta_n\right| < K\left(\frac{|b|^2}{d(\mathbb{F})|q|}\right)^{2n}$, ce qui démontre le théorème pour $\left|\frac{a}{b}\right| \geq 1$. Si $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$, soit $h \in \mathbb{N}$ tel que $\left|\frac{aq^h}{b}\right| \geq 1$. D'après (6), il suffit de prouver que $L_U\left(\frac{b}{aq^h}\right) \notin \mathbb{Q}$. Mais ceci est vrai car, d'après ce qui précède, $L_V\left(\frac{b}{aq^h}\right) \notin \mathbb{Q}$, avec $v_n = aq^h q^n - b$. La démonstration du théorème est donc complète.

Nous énonçons deux corollaires immédiats.

**Corollaire 1.** Si la densité de $\mathbb{P}$ est strictement positive, $x$ est irrationnel.

En effet, dans ce cas, la série $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\log p}{p-1}$ diverge.

On ne sait malheureusement démontrer que la densité de $\mathbb{P}$ est strictement positive que dans un très petit nombre de cas [52]. Si l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie, alors $x$ est irrationnel [46]. Sur ce sujet, voir aussi [68].

**Corollaire 2.** Soit $r \in \mathbb{Z} - \{0\}$ et $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geq 2$. Si $r^2 \leq |q|$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{q^n - r}$ est irrationnel.

En effet, $d(\mathbb{F}) > 1$, $\forall \mathbb{F}$ partie finie de $\mathbb{P}$. Le théorème démontré dans cette

note permet a priori d'étudier l'irrationalité de $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{q^n - r}$ lorsque $q$ et $r$ sont donnés numériquement.

**Exemples.** a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n - 2}$ est irrationnel. En effet, 5 divise $3^3 - 2$, et $4 < 3 \cdot 5^{\frac{1}{4}}$.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{4^n - 3}$ est irrationnel ; on observe que 11, 13, 23, 37, 47 et 59 divisent respectivement $4^4 - 3$, $4^2 - 3$, $4^4 - 3$, $4^{13} - 3$, $4^{21} - 3$, $4^{25} - 3$. Pour $F = \{11, 13, 23, 37, 47, 59\}$ on a $4 \cdot d(\mathbb{F}) > 9$, et le théorème s'applique.

## CHAPITRE 6 :

# A PROPOS DE LA SERIE $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{q^n - 1}$

### 1 - Introduction.

Le but de ce chapitre est de généraliser certains résultats obtenus par P. Borwein dans [13] et [14].

Pour tout corps de nombres $K$, on désignera par $R$ l'anneau des entiers de $K$.

Nous démontrerons essentiellement le résultat suivant :

**Théorème 1.** Soit $K = \mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ ou $K = \mathbb{Q}$. Soit $q \in K$, avec $q = \frac{r}{s}$, $r, s \in R$. On suppose que :

$$\delta = \frac{\log|s|}{\log|r|} < \frac{1}{4}\left(3 - \sqrt{5 + \frac{24}{\pi^2}}\right) \tag{1}$$

Soit $x \in R - \{0\}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{q^n - 1}$.

Alors $f(x) \notin K$. Plus précisément, il existe une constante strictement positive $C_1(q)$ telle que :

$$\forall \gamma \in R, \qquad |f(x) - \gamma| \geq C_1(q)\,|den\ \gamma|^{-\omega} \tag{2}$$

où $den\ \gamma$ désigne le dénominateur de $\gamma$, et :

$$\omega = 1 + 2 \cdot \frac{2\delta^2 - 4\delta + \frac{5}{2} + \frac{3}{\pi^2}}{4\delta^2 - 6\delta + 1 - \frac{6}{\pi^2}} \tag{3}$$

Pour certaines valeurs particulières de $x$, on peut obtenir un résultat un peu meilleur (essentiellement lorsque $x$ est une racine de l'unité). En particulier pour $x = 1$.

**Théorème 2.** Soit $K = \mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ ou $K = \mathbb{Q}$, et soit $q \in K$ avec $q = \frac{r}{s}$, $r, s \in R$. On suppose que

$$\delta = \frac{\log|s|}{\log|r|} < \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{\pi^2}\right) \tag{4}$$

Alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q^n - 1} \notin K$. Plus précisément, il existe une constante $C_2(q) > 0$ telle que :

$$\forall \gamma \in R, \qquad \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q^n - 1} - \gamma\right| \geq C_2(q)\,|den\ \gamma|^{-\omega} \tag{5}$$

avec

$$\omega = 1 + \frac{2 + \frac{6}{\pi^2} + \frac{1 + \frac{3}{\pi^2} - \delta}{1 - 2\delta}}{1 - \frac{3}{\pi^2} - 3\delta} \tag{6}$$

Le théorème 2 est à comparer au premier résultat d'irrationalité concernant la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{q^n - 1}$, obtenu par P. Erdös [31].

On en déduit par exemple le résultat suivant : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{21^n - 2^n} \notin \mathbb{Q}$.

## 2 - Deux lemmes techniques.

**Lemme 1.** Soit $K$ un corps de nombres quelconque, soit $R$ l'anneau de ses entiers, et soient $r, s \in R$, avec $|r| > |s| > 0$. Alors il existe un multiple commun $H_n$ dans $R$ aux nombres $r - s, r^2 - s^2, \ldots, r^n - s^n$, vérifiant :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad |H_n| \leq |r|^{\frac{3}{\pi} n^2 + o(n^{1+\varepsilon})}. \tag{7}$$

*Démonstration.* Soit $\Phi_d$ le polynôme cyclotomique d'ordre $d$. On sait que :

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x).$$

Donc : $r^n - s^n = \prod_{d|n} r^{\varphi(d)} \Phi_d(\frac{s}{r})$,
où $\varphi(d)$ désigne l'indicateur d'Euler.

Il en résulte immédiatement que le nombre $H_n$ défini par :

$$H_n = \prod_{d=1}^{n} r^{\varphi(d)} \Phi_d\left(\frac{s}{r}\right) \tag{8}$$

est un multiple commun à $r - s, r^2 - s^2, \ldots, \ldots r^n - s^n$. Il reste à obtenir la majoration (7).

On sait que [5] :

$$\left|\Phi_d\left(\frac{s}{r}\right)\right| \leq \exp\left(d^{\frac{c}{\log\log d}}\right)\left[1 + \left|\frac{s}{r}\right| + \cdots + \left|\frac{s}{r}\right|^{\varphi(d)}\right]$$

où $c$ est une constate.

Donc :

$$|H_n| \leq |r|^{\sum_{d=1}^{n} \varphi(d)} |r|^{\frac{1}{\log|r|} \sum_{d=1}^{n} d^{\frac{c}{\log\log d}}} \frac{1}{1 - \left|\frac{s}{r}\right|}.$$

Mais on a ([43], p. 268) : $\sum_{d=1}^{n} \varphi(d) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + 0(n \log n)$, et il est facile de voir que,

$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{d=1}^{n} d^{\frac{c}{\log\log d}} = o(n^{1+\varepsilon})$.

Ainsi (7) est démontrée.

**Remarque 1.** Si $R$ est factoriel, il n'est pas difficile de démontrer que $H_n$ donné par (8) est le P.P.C.M. de $r - s, r^2 - s^2, \ldots, r^n - s^n$ : il suffit d'utiliser l'irréductibilité du polynôme cyclotomique [4] et l'identité de Bezout pour prouver que $r^{\varphi(d)}\Phi_d(\frac{s}{r})$ et $r^{\varphi(d')}\Phi_{d'}(\frac{s}{r})$ sont premiers entre eux si $d \neq d'$.

**Remarque 2.** Pour majorer $|H_n|$, on aurait pu utiliser une formule générale de M. Mignotte ([56], corollaire 1).

Cette formule aurait seulement donné $\frac{3}{2} + \varepsilon$ à la place de $1 + \varepsilon$ dans (7), mais cela aurait été suffisant pour la suite.

**Lemme 2.** Soit $x \in \mathbb{C}$, et $A \in \mathbb{R}, A > 1$. On suppose qu'il existe deux suites $P_n$ et $Q_n$ d'éléments de $R$ ($R$ anneau des entiers de $K$, $K = \mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ ou $K = \mathbb{Q}$) vérifiant :

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{vmatrix} Q_n & P_n \\ Q_{n+1} & P_{n+1} \end{vmatrix} \neq 0$.

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ |Q_n x - P_n| \leq A^{-\beta n^2 + o(n^2)},\ \beta > 0.$

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ |Q_n| \leq A^{\alpha n^2 + o(n^2)},\ \alpha > 0.$

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall \gamma \in R, \quad |x - \gamma| \geq C\,|den\ \gamma|^{-\frac{\alpha}{\beta}-1}.$$

*Démonstration.* Elle est tout à fait analogue à celle du lemme 3 de [1] par exemple, et nous l'omettons.

### 3 - Démonstration du théorème 1.

Les approximants de Padé de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{q^n - 1}$ ont été obtenus dans le chapitre 4. On a, en posant $u_n = q^n - 1$ :

$$0 < |Q_n(x)\,f(x) - P_n(x)| \leq C_3(q)\,|q|^{\frac{n(n-3)}{2}}\,|x|^{2n+1} \tag{9}$$

pour tout $x \in \mathbb{C}$, $|x| \leq 1$, avec $C_3(q)$ constante strictement positive ne dépendant que de $q$, et :

$$Q_n(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p u_{2n-p} u_{2n-p-1} \cdots u_{n-p+1} \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{\frac{p(p-1)}{2}} x^p \tag{10}$$

(11)

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} u_{n+m} u_{n+m-1} \cdots u_{m+1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q q^{\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}} \sum_{k=1}^{m} \frac{x^{n+k-m}}{u_k}$$

Posons $\quad \sigma = 1 - 2\dfrac{\log|s|}{\log|r|} = 1 - 2\delta$ (12)

En vertu de (1), on a $\quad \sigma > 0.$ (13)

Nous suivons la démarche de P. Borwein dans [13], et remarquons que :

$$f\left(\frac{x}{q^{[\sigma n]}}\right) = f(x) - \sum_{k=1}^{[\sigma n]} \frac{x}{q^k - x},$$

où $[\sigma n]$ est la partie entière de $\sigma n$.

Nous reportons ceci dans (9), pour obtenir :

$$0 < \left| Q_n\left(\frac{x}{q^{[\sigma n]}}\right) f(x) - Q_n\left(\frac{x}{q^{[\sigma n]}}\right) \sum_{k=1}^{[\sigma n]} \frac{x}{q^k - x} - P_n\left(\frac{x}{q^{[\sigma n]}}\right) \right| \tag{14}$$

$$\leq C_3(q)\,|x|^{2n+1}\,|q|^{\frac{n(n-3)}{2} - [\sigma n](2n+1)}$$

Si nous posons $q = \frac{r}{s}$ et $x = \frac{\alpha}{\beta}$, avec $r, s, \alpha, \beta \in R$, une vérification fastidieuse mais sans difficulté montre que :

$$h_n = Q_n\left(\frac{x}{q^{[\sigma n]}}\right) \beta^n r^{n[\sigma n]} s^{\frac{n(3n+1)}{2}} \frac{H_n L_n}{J_n} \in R$$

$$\ell_n = \left[ Q_n\left(\frac{x}{q^{[\sigma n]}}\right) \sum_{k=1}^{[\sigma n]} \frac{x}{q^k - x} + P_n\left(\frac{x}{q^{[\sigma n]}}\right) \right] \beta^n \, r^{n[\sigma n]} \, s^{\frac{n(3n+1)}{2}} \frac{H_n L_n}{J_n} \in R$$

où l'on a noté :
$H_n$ = un multiple commun à $(r-s), (r^2-s^2), \ldots, (r^n - s^n)$;
$L_n$ = un multiple commun à $(\beta r - \alpha s), (\beta r^2 - \alpha s^2), \ldots, (\beta r^{[\sigma n]} - \alpha s^{[\sigma n]})$ ;
$J_n = \prod_{k=1}^{n} (r^k - s^k)$.

(La multiplication par $H_n$ sert à chasser les dénominateurs $u_k$ dans l'expression (11) de $P_n(x)$ ; la multiplication par $L_n$ sert à chasser les dénominateurs de la somme $\sum_{k=1}^{[\sigma n]} \frac{x}{q^k - x}$ ; la multiplication par $s^{\frac{n(3n+1)}{2}}$ sert à chasser les dénominateurs des coefficients de $Q_n$ et $P_n$ ; enfin, ceci étant fait, on peut tout diviser par $J_n$, qui divise tous les produits $\prod_{k=1}^{n} (r^{k+h} - s^{k+h})$, $\forall h \in \mathbb{N}$ [19]).

On a, en vertu du lemme 1 :

$$|H_n| \leq |r|^{\frac{3}{\pi^2} n^2 + o(n^{1+\epsilon})} \tag{15}$$

Par ailleurs, en prenant $L_n = \prod_{k=1}^{[\sigma n]} (\beta r^k - \alpha s^k)$, on a :

$$|L_n| \leq |r|^{\frac{\sigma^2 n^2}{2} + 0(n)} . \tag{16}$$

et il est facile de vérifier que :

$$|J_n| = |r|^{\frac{n^2}{2} + 0(n)} . \tag{17}$$

On obtient ainsi, en multipliant (14) par $\beta^n \, r^{n[\sigma n]} \, s^{\frac{n(3n+1)}{2}} \frac{H_n L_n}{J_n}$ :

$$0 < |h_n f(x) - \ell_n| \leq \frac{|s|^{(2\sigma+1)n^2 + 0(n)}}{|r|^{(-\frac{\sigma^2}{2} + \sigma - \frac{3}{\pi^2})n^2 + o(n^{1+\epsilon})}} .$$

Utilisant $\delta = \frac{\log |s|}{\log |r|}$ et $\sigma = 1 - 2\delta$, il vient finalement :

$$0 < |h_n f(x) - \ell_n| \leq |r|^{-\frac{1}{2}(4\delta^2 - 6\delta + 1 - \frac{6}{\pi^2})n^2 + o(n^{1+\epsilon})} \tag{18}$$

En vertu de (1), on a : $4\delta^2 - 6\delta + 1 - \frac{6}{\pi^2} > 0$, ce qui prouve que $f(x) \notin K$.

Pour calculer la mesure d'irrationalité (3), il suffit de majorer $|h_n|$ et d'utiliser le lemme 2.

A partir de l'inégalité (10) de [13], on obtient, pour $|x| \leq 1$ :

$$|Q_n(x)| \leq C_3(q)\,|q|^{\frac{3}{2}n^2+o(n)} \tag{19}$$

(comparer les termes dominants du dénominateur de l'approximant de Padé proposé par P. Borwein [13], th. 1, (a), et celui proposé plus haut, formule (10)).

Utilisant (15), (16), (17), on en déduit facilement :

$$|h_n| \leq |r|^{(2\delta^2-4\delta+\frac{5}{2}+\frac{3}{\pi^2})n^2+o(n^{1+\epsilon})},$$

ce qui amène (3) et (4) grâce au lemme 2.

### 4. Démonstration du théorème 2.

Elle est identique à la précédente, sauf que l'on prend :

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{1+\frac{3}{\pi^2}-\delta}{1-2\delta}. \tag{20}$$

Puisque $0 \leq \delta < \frac{1}{3}\left(1-\frac{3}{\pi^2}\right)$, on a $0 < \sigma < 1$.

La multiplication par $L_n$ est ici inutile, et on obtient l'encadrement suivant :

$$0 < |h'_n f(1) - \ell'_n| \leq |r|^{-\frac{1}{2}(1-\frac{3}{\pi^2}-3\delta)n^2+o(n^{1+\epsilon})} \tag{21}$$

ce qui prouve l'irrationalité de $f(1)$.

Comme majoration de $|h'_n|$, on obtient :

$$|h'_n| \leq |r|^{(1+\frac{1}{2}\frac{1+\frac{3}{\pi^2}-\delta}{1-2\delta}+\frac{3}{\pi^2})n^2+o(n^{1+\epsilon})}$$

ce qui achève la démonstration grâce au lemme 2.

# CHAPITRE 7 :

# QUELQUES CAS D'IRRATIONALITÉ DES VALEURS DE FONCTIONS $U$-EXPONENTIELLES

Dans ce chapitre, nous généralisons la démonstration de la transcendance de $e$ par P. Gordan ([40] ; [43], p. 170), pour obtenir un critère d'irrationalité (théorème 2-1 ci après). Nous en donnons une application en prouvant l'irrationalité de $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{v_1 v_2 \dots v_n q^{n(n+1)/2}}$, lorsque $z, q$ et $v_n$ vérifient des hypothèses convenables (voir le théorème 4-1).

## 1 - Notations.

Soit $U = \{u_1, u_2 \dots, u_n, \dots\}$ une suite de nombres complexes non nuls. On pose $\mathcal{U}^\circ = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\} : \qquad \mathcal{U}^n = u_1 \cdot u_2 \cdots u_n \qquad \mathcal{U}^{-n} = [\mathcal{U}^n]^{-1} \tag{1-1}$$

Considérons la fonction $f$ de la variable complexe définie par :

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\mathcal{U}^n}} \tag{1-2}$$

Nous supposons que cette série vérifie le critère de d'Alembert. Un calcul facile montre alors que :

$$\limsup_{k \in \mathbb{N}} \left( \sum_{i=k+1}^{+\infty} \left|u_{k+1}^{-1}\right| \dots \left|u_i^{-1}\right| |z|^{i-k} \right) < \infty,$$

et on pose :

$$\boxed{Mf(z) = \operatorname*{Sup}_{k \in \mathbb{N}} \sum_{i=k+1}^{+\infty} \left|u_{k+1}^{-1}\right| \dots \left|u_i^{-1}\right| |z|^{i-k}} \tag{1-3}$$

Pour une suite donnée $U$, on définit le $U$-binôme de Newton par :

$$(X \oplus Y)^n = \sum_{k=0}^{n} U_n^k X^k Y^{n-k} \tag{1-4}$$

où :

$$U_n^k = \mathcal{U}^n \mathcal{U}^{-k} \mathcal{U}^{k-n} \tag{1-5}$$

Soit maintenant $P \in \mathbb{C}[X]$ :

$$P(X) = \sum_{p=0}^{n} a_p X^p.$$

On pose

$$P(\mathcal{U}) = \sum_{p=0}^{n} a_p \mathcal{U}^p \tag{1-6}$$

$$P(X \oplus Y) = \sum_{p=0}^{n} a_p (X \oplus Y)^p \tag{1-7}$$

$$P(\mathcal{U} \oplus z) = \sum_{p=0}^{n} a_p (\mathcal{U} \oplus z)^p = \sum_{p=0}^{n} a_p \sum_{k=0}^{p} \mathcal{U}^p \mathcal{U}^{k-p} z^{p-k} \tag{1-8}$$

$$|P|(X) = \sum_{p=0}^{n} |a_p| X^p \tag{1-9}$$

## 2 - Un critère d'irrationalité.

**Théorème 2-1.** Soit $K = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$. Soit $A$ l'anneau des entiers de $K$. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\mathcal{U}^n}$, et $a, b \in K$. Supposons qu'il existe $P \in K[X]$, tel que :

$$aP(\mathcal{U}) + bP(\mathcal{U} \oplus z) \in A - \{0\} \tag{2-2}$$

$$|b| \cdot Mf(z) \cdot |P|(|z|) < 1. \tag{2-3}$$

Alors $a + bf(z) \neq 0$.

*Démonstration.* Un calcul facile conduit à

$$\mathcal{U}^k f(z) = (\mathcal{U} \oplus z)^k + \mathcal{U}^k \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathcal{U}^{-i} z^i \tag{2-4}$$

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$. On déduit de (2-4) que :

$$P(\mathcal{U}) f(z) = P(\mathcal{U} \oplus z) + \sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{U}^k \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathcal{U}^{-i} z^i.$$

Supposons que $a + bf(z) = 0$. Alors $aP(\mathcal{U}) + bP(\mathcal{U}) f(z) = 0$, d'où

$$aP(\mathcal{U}) + bP(\mathcal{U} \oplus z) + b \sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{U}^k \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathcal{U}^{-i} z^i = 0.$$

Donc :

$$|aP(\mathcal{U}) + bP(\mathcal{U} \oplus z)| \leq |b| \sum_{k=0}^{N} |a_k| \, |z|^k \sum_{i=k+1}^{+\infty} \left|u_{k+1}^{-1}\right| \ldots \left|u_i^{-1}\right| |z|^{i-k}.$$

Par suite, en utilisant (1-3) et (2-3), nous obtenons :

$$|aP(\mathcal{U}) + bP(\mathcal{U} \oplus z)| \leq |b| \cdot Mf(z) \cdot |P|(|z|) < 1.$$

Mais ceci est impossible, car $x \in A$ et $|x| < 1 \Rightarrow x = 0$ ([57], th. 2-1, p. 46). Contradiction avec (2-2).

### 3 - $U$-Derivation.

Rappelons la définition suivante (voir chapitre 3 ou [28]).

**Définition 3-1.** Soit $f(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ une série formelle à coefficients complexes. La $U$-dérivée de $f$ est définie par :

$$\partial_U f(X) = \sum_{n \geq 1} a_n u_n X^{n-1}.$$

La $U$-formule de Taylor s'énonce, dans le cas d'un polynôme (chapitre 3, ou [28], proposition 2) :

**Proposition 3-2.** Soit $P$ un polynôme de degré $N$. Alors :

$$\boxed{P(X \oplus z) = P(z) + \frac{\partial_U P(z)}{\mathcal{U}^1} X + \frac{\partial_U^2 P(z)}{\mathcal{U}^2} X^2 + \cdots + \frac{\partial_U^N P(z)}{\mathcal{U}^N} X^N.}$$

On en déduit immédiatement le résultat suivant :

**Corollaire 3-3.** Soit $P$ un polynôme de degré $N \geq n$. Alors $P(X \oplus z)$ sera de valuation supérieure ou égale à $n$ (relativement à $X$) si, et seulement si :

$$\boxed{P(z) = \partial_U P(z) = \cdots = \partial_U^{n-1} P(z) = 0.}$$

De plus, dans ce cas :

$$\boxed{P(\mathcal{U} \oplus z) = \sum_{k=n}^{N} \partial_U^k P(z).}$$

## 4 - Une application du théorème 2-1.

**Théorème 4-1.** Soit $K = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$. Soit $A$ l'anneau des entiers de $K$. Soit $m \in A$, $|m| > 1$. Soit $V = \{v_1, v_2 \dots, v_n, \dots\}$ une suite d'éléments de $A$, vérifiant les trois propriétés suivantes :

(4-1-1) $$|v_n| = exp(o(n))$$

(4-1-2) Il existe une partie infinie $P = \{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots\}$ de l'ensemble des idéaux premiers de $A$, et une suite $N = \{n_1, n_2, \dots\}$ entiers naturels, tels que $v_{n_i} \in \mathfrak{P}_i$ pour tout $i$, et $v_n \notin \mathfrak{P}_i$ si $n < n_i$.

(4-1-3) Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, il existe une infinité de $n_i \in N$ tels que $v_n \notin \mathfrak{P}_i$ pour $n_i < n \leq n_i + q$.

Soit $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{v_1 v_2 \dots v_n m^{\frac{n(n+1)}{2}}}$.

Alors, si $z \in K^*$, $f(z) \notin K$.

**Corollaire 1.** Soit $m \in A, |m| > 1$, et $h \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Alors, si $z \in K^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n!)^h m^{\frac{n(n+1)}{2}}} \notin K$.

Le corollaire 1 est un résultat connu ; voir [67], [10], [42]. Il semble cependant que le résultat suivant soit nouveau :

**Corollaire 2.** Soit $m \in A, |m| > 1$. Soit $p_1, p_2 \ldots, p_n, \ldots$ la suite des nombres premiers dans $\mathbb{N}$. Alors, si $z \in K^*, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{p_1 p_2 \ldots p_n m^{\frac{n(n+1)}{2}}} \notin K$.

Il est probable que, si $z \in K^*, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{p_1 p_2 \ldots p_n} \notin K$, mais cela est sûrement beaucoup plus difficile à démontrer.

La démonstration du théorème 4-1 repose sur quatre lemmes ; les démonstrations des lemmes 4-2 et 4-7 sont élémentaires, et laissées au lecteur.

**Lemme 4-2.** Pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\mathcal{U}_h^n}, \quad z \in A - \{0\},$$

où $u_{n,h} = u_{n+h}$ et $\mathcal{U}_h^n = u_{1,h} \cdot u_{2,h} \ldots u_{n,h}$.

S'il existe $a \in A$ et $b \in A - \{0\}$ tel que $a + bf(z) = 0$, alors :

(4-3) $$a_h + b_h f_h(z) = 0, \quad \forall h \in \mathbb{N}^*, \quad \text{avec :}$$

(4-4) $$a_h = \mathcal{U}^h \left( a + b \sum_{n=0}^{h-1} \frac{z^n}{\mathcal{U}^n} \right) \in A$$

(4-5) $$b_h = bz^h \in A - \{0\}$$

**Lemme 4-6.** Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $A$, tel que $\mathcal{U}^{h+1} \notin \mathfrak{P}, b \notin \mathfrak{P}$ et $z \notin \mathfrak{P}$. Alors $a_h \notin \mathfrak{P}$, ou $a_{h+1} \notin \mathfrak{P}$.

*Démonstration du Lemme 4-6.* Si $a_h \in \mathfrak{P}$ et $a_{h+1} \in \mathfrak{P}$,comme $u_{h+1} \notin \mathfrak{P}$, on a : $\mathcal{U}^h \left( a + b \sum_{n=0}^{h-1} \frac{z^n}{\mathcal{U}^n} \right) \in \mathfrak{P}$ et $\mathcal{U}^h \left( a + b \sum_{n=0}^{h} \frac{z^n}{\mathcal{U}^n} \right) \in \mathfrak{P}$. Si l'on soustrait ces deux nombres, on obtient $bz^h \in \mathfrak{P}$, contradiction.

**Lemme 4-7.** Soit $P_n(X) = X^{n-1} \sum_{k=0}^{n} \Gamma_n^k z^{n-k} X^k$. Alors

$$P_n(z) = \partial_U P_n(z) = \ldots = \partial_U^{n-1} P_n(z) = 0$$

si, et seulement si, les $\Gamma_n^k$ sont solution du système :

$$\begin{cases} \Gamma_n^0 + & \Gamma_n^1 + \cdots + & \Gamma_n^n = 0 \\ u_{n-1}\Gamma_n^0 + & u_n\Gamma_n^1 + \cdots + & u_{2n-1}\Gamma_n^n = 0 \\ \vdots & & \\ u_{n-1}\ldots u_1\Gamma_n^0 + u_n\ldots u_2\Gamma_n^1 + & \cdots + u_{2n-1}\ldots u_{n+1}\Gamma_n^n = 0 \end{cases}$$

**Lemme 4-8.** Soit $M = (\alpha_{ij}), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+1$ une matrice à coefficients dans $A$. Alors le système :

$$M \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_n^o \\ \Gamma_n^1 \\ \vdots \\ \Gamma_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4-9}$$

admet une solution $(\Gamma_n^o, \Gamma_n^1, \ldots, \Gamma_n^n)$ vérifiant :

$$\Gamma_n^i \in A \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{4-10}$$

$$0 < Max\ |\Gamma_n^i| \leq n^{n/2} H^n, \quad \text{avec} \quad H = Max\ |\alpha_{ij}| \tag{4-11}$$

De plus, si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de $A$ et $\alpha_{ij} \in \mathfrak{P}$ pour tout $(i,j)$ vérifiant $2 \leq j \leq i$, avec $\alpha_{j-1,j} \notin \mathfrak{P}$ pour tout $j \in \{2, \ldots, n+1\}$, alors $\Gamma_n^0 \notin \mathfrak{P}$.

*Démonstration du lemme 4-8.* D'après un résultat élémentaire d'algèbre linéaire, le système (4-9) admet pour solution :

$$\Gamma_n^k = (-1)^k \Delta_{n,k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

où $\Delta_{n,k}$ est le déterminant obtenu en supprimant la $(k+1)$-ième colonne de $M$. Donc (4-10) est triviale, et (4-11) s'obtient en majorant $|\Delta_{n,k}|$ par la méthode de Hadamard [35].

La seconde partie du lemme résulte du fait que, sous la diagonale de $\Delta_{n,0}$, on n'a que des zéros modulo $\mathfrak{P}$, alors que les termes de la diagonale sont non nuls modulo $\mathfrak{P}$.

*Démonstration du théorème 4-1.* Nous pouvons supposer $z \in A$ (sinon, nous remplaçons $v_n$ par $v_n \cdot den(z)$). Nous utilisons le lemme 4-7 avec la suite $U_h$ (voir lemme 4-2), et $u_n = v_n m^n$. Nous obtenons que les $\Gamma_n^k$ sont solution du système (4-12) :

$$\begin{cases} \Gamma_n^0 + & \Gamma_n^1 + \cdots + & \Gamma_n^n = 0 \\ v_{n-1+h}\Gamma_n^0 + & v_{n+h}m\Gamma_n^1 + \cdots + & v_{2n-1+h}m^n\Gamma_n^n = 0 \\ \vdots & & \\ v_{n-1+h}\ldots v_{1+h}\Gamma_n^0 + v_{n+h}\ldots v_{2+h}m^{n-1}\Gamma_n^1 + & \cdots + v_{2n-1+h}\ldots v_{n+1+h}m^{(n-1)n}\Gamma_n^n = 0 \end{cases}$$

Posons :

$$L_n = Max(|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|), \tag{4-13}$$

supposons $h > n$, et utilisons le lemme 4-8. Nous obtenons que (4-12) admet une solution $(\Gamma_n^0, \Gamma_n^1, \ldots, \Gamma_n^n)$, avec $\Gamma_n^k \in A$, et :

$$\left|\Gamma_n^k\right| \leq n^{\frac{n}{2}} |m|^{n^3} (L_{3h})^{n^2} \tag{4-14}$$

Supposons $a + bf(z) = 0$, avec $(a, b) \in A^2$. Considérons le polynôme :

$$P_{h,n}(X) = \frac{X^{n-1}}{m^{(n-1)h}} \sum_{k=0}^{n} \Gamma_n^k z^{n-k} X^k. \tag{4-15}$$

Nous cherchons un majorant de $|b_h| \cdot M(f_h) \cdot |P_{h,n}|(|z|)$ (voir théorème 2-1). On voit facilement que $M(f_h) \leq B$, avec $B = \sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n |m|^{-\frac{n(n+1)}{2}}$. Par conséquent, nous obtenons, grâce à (4-14) :

$$|b_h| \cdot M(f_h) \cdot |P_{h,n}|(|z|) \leq |b| |z|^h B \frac{|z|^{2n-1}}{|m|^{(n-1)h}} (n+1) n^{\frac{n}{2}} |m|^{n^3} (L_{3h})^{n^2}$$

Mais il résulte de (4-1-1) que $L_{3h} = exp(h\varepsilon(h))$, avec $\lim_{h \to \infty} \varepsilon(h) = 0$, et nous obtenons :

$$|b_h| \cdot M(f_h) \cdot |P_{h,n}|(|z|) \leq |b| B |z|^{2n-1} (n+1) n^{\frac{n}{2}} |m|^{n^3} \left[ \frac{|z|}{|m|^{(n-1)}} exp(n^2 \varepsilon(h)) \right]^h.$$

Choisissons $n$ tel que $\dfrac{|z|}{|m|^{(n-2)}} \leq \dfrac{1}{2}$.

Un tel $n$ étant maintenant fixé, il existe $h_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$h \geq h_0 \Rightarrow |b_h| \cdot M(f_h) \cdot |P_{h,n}|(|z|) < 1.$$

Nous choisissons $h$ tel que $h > n$ et $n + h = n_i, n_i$ vérifiant *les deux conditions* (4-1-2) et (4-1-3) avec $q = n$. Il résulte alors du lemme 4-8 que $\Gamma_n^0 \notin \mathfrak{P}_i$. Par ailleurs, on peut supposer que $z \notin \mathfrak{P}_i, m \notin \mathfrak{P}_i$, et $b \notin \mathfrak{P}_i$ en choisissant un $n_i$ assez grand. Nous pouvons aussi supposer que $a_h \notin \mathfrak{P}_i$ (sinon, nous remplaçons $n$ par $n-1, h$ par $h+1$, et utilisons le lemme 4-2). Il résulte de tout ce qui précéde que la condition (2-3) est satisfaite.

Vérifions maintenant la condition (2-2). On a :

$$P_{n,h}(\mathcal{U}_h) = \frac{1}{m^{(n-1)h}} \sum_{k=0}^{n} \Gamma_n^k z^{n-k} \mathcal{U}_h^{n+k-1}.$$

Or $u_{h,n}$ est toujours divisible par $m^h$, donc $P_{n,h}(\mathcal{U}_h) \in A$. De plus, le terme correspondant à $k = 0$ n'appartient pas à $\mathfrak{P}_i$ (hypothèse 4-1-2), tandis que les autres termes appartiennent à $\mathfrak{P}_i$ (ils contiennent $v_{n+h} = v_{n_i}$). Donc $P_{n,h}(\mathcal{U}_h) \notin \mathfrak{P}_i$.

Notons $(X \oplus Y)^n$ le $U_h$-binôme de Newton, et appliquons le corollaire 3-3. Nous obtenons :

$$P_{n,h}(\mathcal{U}_h \oplus z) = \frac{1}{m^{h(n-1)}} \sum_{k=n}^{2n-1} \partial_{U_h}^k Q_{n,h}(z),$$

où $Q_{n,h}(X) = X^{n-1} \sum_{j=0}^{n} \Gamma_n^j z^{n-j} X^j \in A[X]$.

Mais chacun des $\partial_{U_h}^k Q_{n,h}(z)$ contient le produit d'au moins $n$ termes consécutifs de la suite $U_h$, y compris $u_{n+h}$. Donc $P_{n,h}(\mathcal{U}_h \oplus z) \in \mathfrak{P}_i$.

Comme $a_h \notin \mathfrak{P}_i$, $P_{n,h}(\mathcal{U}_h) \notin \mathfrak{P}_i$ et $P_{n,h}(\mathcal{U}_h \oplus z) \in \mathfrak{P}_i$, on a :

$$a_h P_{n,h}(\mathcal{U}_h) + b_h P_{n,h}(\mathcal{U}_h \oplus z) \notin \mathfrak{P}_i.$$

Donc la condition (2-2) est vérifiée, et le théorème 4-1 est complètement démontré.

# Références bibliographiques


[1] K. Alladi and M.L. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. Reine Angew. Math. **318** (1980), 137-155.

[2] Y. Amice, *Les nombres p-adiques*, P.U.F. (1975).

[3] R. André-Jeannin, *Irrationalité de la somme des inverses de certaines séries récurrentes*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, 539-541.

[4] J.M. Arnaudiès, *L'irréductibilité des polynômes cyclotomiques*, R.M.S. (Octobre 1991).

[5] P.T. Bateman, *Note on the coefficients of the cyclotomic polynomial*, Bul. Amer. Math. Soc. **35** (1945), 1180-1181.

[6] B. Benghazou, *Algèbres de Hadamard*, Bull. Soc. Math. France 28 (1970), 209-252.

[7] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 268-272.

[8] J.P. Bézivin, *Sur les propriétés arithmétiques du produit de Hadamard*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, vol XI, n°1 (1990).

[9] J.P. Bézivin, *Indépendance linéaire des valeurs des solutions transcendantes de certaines équations fonctionnelles I*, Manuscripta Math. **61** (1988), 103-129.

[10] J-P. Bézivin, *Indépendance linéaire des valeurs des solutions transcendantes de certaines équations fonctionnelles II*, Acta Arith. LV (1990), 233-240.

[11] L. Bieberbach, *Analytische Fortsetzung*, Springer-Verlag, 1955.

[12] P. Borwein, *Padé Approximants for the q-Elementary Functions*, Constr. Approx, 4 (1988), 391-402.

[13] P. Borwein, *On the Irrationality of* $\sum(1/(q^n+r))$, J. Number Theory 37, 1991, p. 253-259.

[14] P. Borwein, *On the irrationality of certain series*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **112** (1992), 141-146.

[15] C. Brezinski, *Padé Type Approximation and General Orthogonal Polynomials*, vol. 50, International Series of Numerical Mathematics, Birkhaüser, 1980.

[16] C. Brezinski, *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer Series Comp. Mathematics, Springer-Verlag, 1987.

[17] C. Brezinski and J. Van Iseghem, *Padé Approximations*, Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet and J.L. Lions Editors, North Holland.

[18] P. Bundschuh, *Arithmetische Untersuchungen unendlicher Produkte*, Inventiones Math. **6** (1969), 275-295.

[19] P. Bundschuh, *Ein Satz über ganze Funktionen und Irrationalitätsaussagen*, Inventiones Math. **9** (1970), 175-184.

[20] P. Bundschuh, *Verschärfung eines arithmetischen Satzes von Tschakaloff*, vol. 33, Fasc. 1, Portugal Math., 1974, p. 1-47.

[21] P. Bundschuh, *Quelques résultats arithmétiques sur les fonctions thêta de Jacobi*, Publications mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie no64, Fasc. 1, Groupe d'étude sur les problèmes diophantiens, 1983/ 84.

[22] P. Bundschuh and M. Waldschmidt, *Irrationality results for theta functions by Gel'fond--Schneider's method*, Acta Arith. **53** (1989), 289-307.

[23] K. Chandrasekharan, *Elliptic functions, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag, 281, 1985.

[24] G.V. Chudnovsky, *Approximations de Padé explicites pour les solutions des équations différentielles linéaires fuchsiennes*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 290, Série I, 135 (1980).

[25] G.V. Chudnovsky, *Lecture Notes in Mathematics n° 1052*, Number Theory, Springer-Verlag, New York (1982).

[26] H. Cohen, *Irrationalité de $\zeta(3)$ selon Apéry*, Séminaire de théorie des nombres (5 Octobre 1978), Grenoble.

[27] P.M. Cohn, *Free Rings and their Relations*, Academic Press, 1985.

[28] D. Duverney, *U-dérivation*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse **XIII** no. 3 (1992).

[29] D. Duverney, *Propriétés arithmétiques d'une série liée aux fonctions thêta*, Acta Arith. (à paraître).

[30] E. Ehrhart, *Les entiers d'Euler*, Bulletin de l'A.P.M.E.P., n° 323, (1980), 217-226.

[31] P. Erdös, *On arithmetical properties of Lambert Series*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **12** (1948), 63-66.

[32] P. Erdös, *Sur l'irrationalité d'une certaine série*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 292, 1981, p. 765-768.

[33] P. Erdös, *On the irrationality of certain series : problems and results*, in New advances in Transcendence theory, edited by A. Baker, Cambridge University Press, 1988, p. 102-109.

[34] H. Exton, *q-Hypergeometric functions and Applications*, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1983.

[35] E. Fischer, *Über den Hadamardschen Determinantensatz*, Arch. Math. (Basel) 13 (1908), 32-40.

[36] J. Galambos, *Approximation of real numbers by Infinite Series*, Lecture Notes in Mathematics 502, Springer-Verlag (1976).

[37] G. Gaspar and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, Cambridge University Press, 1990.

[38] A. Gelfond et Y. Linnik, *Méthodes élémentaires dans la théorie analytique des nombres*, Gauthier-Villars, 1965.

[39] S. Golomb, *A new Arithmetic function of Combinatorial Significance*, J. of Number Theory 5, 1973, p. 218-223.

[40] P. Gordan, *Transcendenz von e und $\pi$*, Math. Ann. 43 (1893), 222-224.

[41] S. Graham, *On Linnik's constant*, Acta Arithm. 39, 1981, p. 163-179.

[42] M. Haas, *Über die lineare Unabhängigkeit von Werten einer speziellen Reihe*, Arch. Math. 56 (1991), 148-162.

[43] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An introduction to the theory of Numbers*, Oxford Science Publications, Fifth Edition (1979).

[44] M. Hata, *Rational approximations to $\pi$ and some other numbers*, Yoshida College, Kyoto University (Feb. 26, 1992).

[45] Y. Hellegouarch, *Calcul différentiel galoisien*, Prépublication n°42, Dépt de Math. et Mécanique, Université de Caen (1989).

[46] C. Hooley, *On Artin's conjecture*, J. Reine Angew. Math. **225** (1967), 209-220.

[47] M. Huttner, *Problème de Riemann et irrationalité d'un quotient de deux fonctions hypergéométriques de Gauss*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 302, Série I, n°17 (1986).

[48] M. Huttner, *Monodromie et approximation diophantienne d'une constante liée aux fonctions elliptiques*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 304, Série I, n°12 (1987).

[49] M. Huttner, *Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques*, J. Number Theory 26 (1987).

[50] F.H. Jackson, *q-difference equations*, Amer. J. Math. 32 (1910), 305-314.

[51] I. Kaplanski, *An introduction to differential Algebra*, Hermann, 1957.

[52] J.C. Lagarias, *The set of primes dividing the Lucas numbers has density 2/3*, Pacific J. Math. **118** (1985), 2, 449-461.

[53] Yu. V. Linnik, *Sur le plus petit nombre premier dans une progression arithmétique (en russe)*, Mat. Sbornik, 15 (57), 1944, p. 139-178.

[54] J. Liouville, *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, J. Math. Pures et Appl., (1), 16, 1851, p. 133-142.

[55] Y.L. Luke, *The special Functions and their Approximations*, Academic Press, 1969.

[56] M. Mignotte, *An Inequality about Irreducible Factors of Integer Polynomials*, J. Number Theory **30** (1988), 156-166.

[57] W. Narkiewicz, *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, Springer-Verlag, 1990.

[58] H. Padé, *Sur les développements en fractions continues de la fonction $F(h, 1, h', u)$ et la généralisation de la théorie des fonctions sphériques*, C.R. Acad. Sci. Paris, 141, 1905, p. 819-821.

[59] H. Padé, *Oeuvres*, éditées par C. Brezinski, Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard, Paris, 1984.

[60] O. Perron, *Irrationalzahlen (Deuxième Edition)*, Chelsea Publishing Company.

[61] B. Powell and E. Schafer, *Difference between consecutive primes*, Amer. Math. Monthly, 91, 1984, p. 310-311.

[62] G. Rhin, *Mesures d'irrationalité de* log.2, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux, Année 1984-1985 (11 Janvier 1985).

[63] G. Rhin, *Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité*, in Progr. in Math. 71, Birklaüser (1987), 155-164.

[64] P. Ribenboïm, *The book of prime numbers records*, Springer-Verlag, 1984.

[65] H.J. Ryser, *Mathématiques combinatoires*, Dunod, 1969.

[66] C.L. Siegel, *Transcendental Numbers*, Princeton, 1949.

[67] T. Skolem, *Some theorems on irrationality and linear independence*, Den 11te Skandinaviske Matematikerkongress Trondheim (1949), 77-98.

[68] P.J. Stephens, *An average result for Artin's conjecture*, Mathematika **16** (1969), 178-188.

[69] T. Stihl, *Arithmetische Eigenschaften spazieller Heinescher Reihen*, Math. Ann. **268** (1984), 21-41.

[70] J. Thomae, *Beiträge zur Theorie der durch die Heinesche Reihe...*, J. Reine Angew. Math. 70, 1869, p. 258-281.

[71] L. Tschakaloff, *Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} x^{\nu} a^{-\frac{1}{2}\nu(\nu-1)}$, Math. Ann. 80, 1921, p. 62-74.

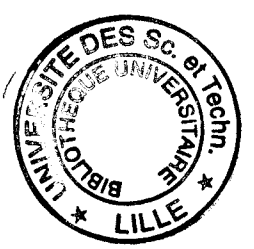
[72] B.L. van der Waerden, *Modern Algebra*, Frederick Ungar Publishing Co., 1949.

[73] M. Waldschmidt, *Transcendence Methods*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics n°52, 1979.

[74] M. Waldschmidt, *Les débuts de la théorie des nombres trasnscendants*, vol. 4, Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, Université Paris VI, 1983, p. 93-115.

[75] R. Walliser, *Rationale Approximation des q-Analogons der Exponentialfunktion und Irrationalitätsaussagen für diese Funktion*, Arch. Math., vol. 44, 1985, p. 59-64.

[76] M. Ward, *A calculus of sequences*, Amer. J. Math., 58, 1936, p. 255-266.



# TABLE DES MATIERES


Avant-Propos 1

Introduction 3

Première Partie : Exemples d'Approximations Diophantiennes par les sommes partielles 7
Chapitre 1 : Propriétés arithmétiques d'une série liée aux fonctions thêta 8
Chapitre 2 : Une propriété arithmétique du nombre $p$-adique $\sum_{n=0}^{+\infty} a(n)p^{mn^2}$ 23

Deuxième Partie : Etude algébrique de la $U$-Dérivation 33
Chapitre 3 : $U$-Dérivation 34
Chapitre 4 : Approximants de Padé et $U$-Dérivation 45

Troisième Partie : $U$-Dérivation et Approximation Diophantienne 60
Chapitre 5 : Sur l'irrationalité de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{q^n - r}$ 61
Chapitre 6 : A propos de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{q^n - 1}$ 65
Chapitre 7 : Quelques cas d'irrationalité des valeurs de fonctions $U$-exponentielles 71

Références Bibliographiques 79



UNIVERSITE DES Sc. et Techn. BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE LILLE