

50376
1993
238

50376
1993
238

N° d'ordre : 1161

THESE DE DOCTORAT
présentée à
L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE
LILLE
U.F.R. DE MATHEMATIQUES
pour obtenir le Grade de
DOCTEUR EN MECANIQUE
par

Michel DEBRUYNE



**Etude critique de la méthode des
relations intégrales et de son application
en hypersonique**

Soutenue le 27 septembre 1993

devant la Commission d'examen

Membres du Jury :

Président : M. DYMENT, Professeur à l'U.S.T.L.

Rapporteurs : M. ALZIARY DE ROQUEFORT, Professeur à l'Université de Poitiers.
M. LENGRAND, Directeur de recherches au C.N.R.S. Meudon.

Membres : M. MERLEN, Professeur à l'U.S.T.L.
M. DURAND, Ingénieur au C.N.E.S.
M. JACQUOTTE, Directeur du groupe 6 de la D.R.E.T.
M. VEUILLOT, Chef de Division à l'O.N.E.R.A.

Je dois la réussite de mon travail à l'affection et à la patience de
ma femme, Nathalie.

Je suis très heureux de lui dédier cette thèse.

Avant-propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé à l'Institut de Mécanique des Fluides de Lille (I.M.F.L.), établissement de l'Office National des Etudes et de la Recherche Aérospatiale (O.N.E.R.A.) et entre dans le cadre des contrats financés par la Direction des Recherches, Etudes et Techniques (D.R.E.T.). Je remercie les responsables de ces organismes d'avoir mis à ma disposition tous les moyens techniques et financiers nécessaires qui m'ont permis de réaliser cette étude, en particulier, Monsieur Jacquotte, directeur du groupe 6 de la D.R.E.T., qui a bien voulu faire partie du jury.

Je sais gré à Monsieur Bahurel, directeur de l'I.M.F.L. de m'avoir accueilli dans son établissement.

Je remercie Monsieur Dymont, professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, chef du groupe de Mécanique des Fluides Fondamentale à l'I.M.F.L., pour m'avoir intégré au sein de son équipe ainsi que pour sa participation au jury de la Commission d'examen.

Une recherche scientifique n'est jamais l'œuvre absolue de celui qui la présente. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Merlen, professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, collaborateur extérieur à l'I.M.F.L., grâce à qui cette thèse a pu voir le jour. Il a fortement contribué à ce travail et n'a ménagé ni son temps ni sa peine pour me permettre de résoudre et de clarifier de nombreux problèmes. Il m'a suggéré de nombreuses idées, sans lesquelles je n'aurais pu progresser dans cette étude. Qu'il me soit permis ici de lui témoigner mon entière reconnaissance et ma profonde estime.

Je remercie Monsieur Alziary de Roquefort, professeur à l'Université de Poitiers qui, après m'avoir enseigné la Mécanique des Fluides à l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, a consacré une partie de son temps à rédiger un rapport sur le contenu de ce mémoire. Je suis heureux d'avoir aujourd'hui l'occasion de lui témoigner ma reconnaissance pour la manière avec laquelle il a suivi mon parcours.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Lengrand, directeur de recherches au Centre National de Recherches Scientifiques de Meudon (C.N.R.S.), président du Groupement de Recherche Hypersonique d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et d'avoir ainsi témoigné son intérêt pour ce travail.

Je remercie également Monsieur Durand, ingénieur du Centre National d'Etudes Spatiales (C.N.E.S.) et Monsieur Veillot, chef de Division à l'O.N.E.R.A. pour avoir bien voulu participer au jury.

Qu'il me soit aussi permis de remercier l'ensemble du groupe de Mécanique des Fluides Fondamentale de l'I.M.F.L. et plus particulièrement Monsieur Fabre, ingénieur qui, grâce à son soutien, a contribué à l'aboutissement de ce travail. Je tiens également à remercier les membres du groupe informatique et en particulier Monsieur Masek pour l'aide qu'il m'a apportée.

Table des matières

Avant-propos	3
Notations principales	9
Liste des figures	11
Introduction	14
I Méthode des relations intégrales. Problème modèle	17
1 Méthode des relations intégrales	19
1.1 Introduction	19
1.2 Présentation de la méthode	20
1.3 Principe de la M.I.R.	21
1.4 Evolutions de la méthode	23
1.4.1 M.I.R. à deux variables	23
1.4.2 M.I.R. à trois variables	24
1.4.3 Choix des fonctions f_n	25
1.5 Caractéristiques principales	26
2 Application à la couche limite	29
2.1 Equations de départ	29
2.2 Mise en œuvre de la méthode	31
2.3 Méthode de Dorodnitsyn	32
2.3.1 Principe de la méthode	32
2.3.2 Systèmes différentiels	34
2.4 Méthode modifiée	36
2.4.1 Différence avec la méthode de Dorodnitsyn	36
2.4.2 Systèmes différentiels	37
2.5 Cas test	41
2.5.1 Solutions de Falkner et Skan	41
2.5.2 Comparaison du calcul numérique avec les solutions de Falkner et Skan	44

2.6	Conclusion et perspectives	49
2.6.1	Performances de la M.I.R.	49
2.6.2	Nouvelle forme d'approximation	50
2.6.3	Variation de la hauteur de bande	52
II	Problème des ondes de choc détachées	55
3	Equations générales	57
3.1	Introduction	57
3.2	Equations de l'écoulement	59
3.3	Adimensionnalisation et changement de variables	60
3.4	Domaine d'intégration et conditions aux frontières	61
4	Equations de la M.I.R.	63
4.1	Méthode générale	63
4.2	Initialisation	66
4.3	Obtention des coefficients du système différentiel	66
4.3.1	Méthode générale	66
4.3.2	Approximation à une bande	69
4.3.3	Approximation à deux bandes	70
4.3.4	Approximation à trois bandes	72
5	Mise en œuvre de la M.I.R.	75
5.1	Approximation à une bande en écoulement plan	75
5.1.1	Problème de l'initialisation	75
5.1.2	Déroulement du programme	77
5.2	Approximation à une bande en écoulement méridien	77
5.2.1	Calcul des dérivées initiales	77
5.2.2	Initialisation et problème de la singularité	79
5.2.3	Déroulement du programme	80
5.3	Approximation à deux bandes	81
5.3.1	Initialisation du calcul	81
5.3.2	Utilisation de la fonction de courant	83
5.3.3	Écoulement plan	84
5.3.4	Écoulement méridien	85
5.3.5	Accélération des deux dichotomies imbriquées	87
6	Résultats	89
6.1	Écoulement plan : approximation à une bande	89
6.2	Écoulement méridien : approximation à une bande	89
6.2.1	Écoulement autour d'une sphère	90
6.2.2	Écoulement autour d'un ellipsoïde	91
6.2.3	Écoulement autour d'un corps en loi de puissance	92
6.3	Approximation à deux bandes	93
6.3.1	Écoulement plan : le cylindre	93

6.3.2	Écoulement méridien : la sphère	94
6.4	Conclusion	95
III Analyse mathématique du problème		99
7	Traitement mathématique des équations d'Euler	101
7.1	Généralités	101
7.2	Le cas stationnaire	102
7.2.1	Particularités des équations de Belotserkovsky	102
7.2.2	Calcul de la matrice $\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial u}$	103
7.2.3	Etude de la matrice $\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial u}$	104
7.2.4	Calcul des pentes de caractéristiques au voisinage de la ligne singulière	106
7.2.5	Passage en (ζ, θ)	108
7.3	Le terme instationnaire	109
7.3.1	Calcul de la matrice $\frac{\partial g(u)}{\partial u}$	110
7.3.2	Etude de la matrice $\frac{\partial g(u)}{\partial u}$	111
Conclusion générale		113
IV Annexes		117
A Méthode de Newton		119
B Coefficients A_n		121
B.1	Méthode de Dorodnitsyn	121
B.1.1	Approximation à deux bandes $N = 2$	121
B.1.2	Approximation à trois bandes $N = 3$	122
B.1.3	Approximation à quatre bandes $N = 4$	122
B.2	Méthode modifiée	123
B.2.1	Approximation à deux bandes $N = 2$	123
B.2.2	Approximation à trois bandes $N = 3$	124
B.2.3	Approximation à quatre bandes $N = 4$	124
B.3	Troisième méthode	125
B.3.1	Approximation à deux bandes $N = 2$	125
C Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre à pas variable		126
D Emoussement : M.I.R. à une bande		129
D.1	Sphère $M_\infty = 3$	129
D.2	Sphère $M_\infty = 4$	131
D.3	Sphère $M_\infty = 6$	132
D.4	Sphère $M_\infty = 10$	133

D.5	Ellipsoïde $b/a = 0,5$ $M_\infty = 3$	134
D.6	Ellipsoïde $b/a = 0,5$ $M_\infty = 4$	135
D.7	Ellipsoïde $b/a = 0,5$ $M_\infty = 6$	136
D.8	Ellipsoïde $b/a = 0,5$ $M_\infty = 10$	137
D.9	Ellipsoïde $b/a = 1,5$ $M_\infty = 3$	138
D.10	Ellipsoïde $b/a = 1,5$ $M_\infty = 4$	139
D.11	Ellipsoïde $b/a = 1,5$ $M_\infty = 6$	140
D.12	Ellipsoïde $b/a = 1,5$ $M_\infty = 10$	141
D.13	Corps en loi de puissance $2/3$ $M_\infty = 3$	142
D.14	Corps en loi de puissance $2/3$ $M_\infty = 4$	143
D.15	Corps en loi de puissance $2/3$ $M_\infty = 6$	144
D.16	Corps en loi de puissance $2/3$ $M_\infty = 10$	145
E	Emoussement : M.I.R. à deux bandes	146
E.1	Cylindre $M_\infty = 3$	146
E.2	Cylindre $M_\infty = 4$	147
E.3	Cylindre $M_\infty = 5$	148
E.4	Sphère $M_\infty = 3$	149
E.5	Sphère $M_\infty = 4$	150
E.6	Sphère $M_\infty = 6$	151
E.7	Sphère $M_\infty = 10$	152
	Bibliographie	153
	Figures	157

Notations principales

Caractères romains :

a^*	Vitesse du son adimensionnée définie par (4.7).
C_f	Coefficient de frottement pariétal défini par (2.36).
d	Hauteur de la bande intermédiaire.
D	Grandeur définie par (4.6).
e	Energie interne.
E	Différence maximale entre deux intégrations définie par (5.1).
E_0, E_n	Grandeurs définies par (4.6).
E_r	Erreur relative définie par (2.37).
f, f_n	Fonctions de poids.
\mathcal{F}	Vecteur défini par (7.4).
g	Grandeur définie par (3.1).
G_n	Grandeur définie par (4.6).
\mathcal{G}	Vecteur défini par (7.15).
h	Grandeur définie par (3.2).
H	Grandeur définie par (3.1).
H_t	Enthalpie totale.
M_∞	Nombre de mach à l'infini amont.
N	Degré d'approximation de la méthode intégrale.
p	Pression.
Q	Vecteur défini par (7.4).
r	Rayon polaire.
r_0	Rayon polaire du corps.
r_1	Rayon polaire du choc.
r_2	Rayon polaire de la ligne intermédiaire ($N = 2$).
S	Grandeur définie par (3.1).
t	Grandeur définie par (3.2).
t	Temps.
u, v	Projections de la vitesse.
u_e	Vitesse à l'extérieur de la couche limite.
U	Vecteur défini par (7.4).
\mathcal{V}	Vecteur défini par (7.5).
w	Module de la vitesse.
w_∞	Vitesse à l'infini amont.
w_{max}	Vitesse maximale de l'écoulement.

x, y

Coordonnées cartésiennes.

Caractères grecs :

α	Racine réelle définie par (2.29).
$\beta\pi$	Angle du dièdre.
γ	Rapport des chaleurs spécifiques du gaz.
δ	Petit paramètre défini par (7.9).
δ_1	Épaisseur adimensionnée de déplacement (2.12).
δ_2	Épaisseur adimensionnée de quantité de mouvement (2.13).
$\Delta, \Delta_1, \Delta_2$	Frontières du domaine d'intégration.
Δ_{3b}, Δ_{4b}	Discriminants du chapitre 2.
$\Delta_{\mathcal{F}}, \Delta_{\mathcal{G}}, \Delta_{\mathcal{H}}$	Discriminants du chapitre 7.
ϵ	Distance entre le choc et le corps sur un rayon polaire.
ζ	Grandeur définie par (4.1).
η	Grandeur définie par (2.6).
θ	Angle polaire dans le repère (O_1, x, y) (figure 26).
θ^*	Position de la singularité.
$\theta_a, \theta_b, \theta_c, \theta_d, \theta_a^{bis}$	Bornes des intervalles d'utilisation des développements.
Θ	Grandeur définie par (2.14).
ϑ	Angle polaire dans le repère (O_2, X, Y) (figure 26).
$\lambda_{\mathcal{F}}^+, \lambda_{\mathcal{F}}^-$	Valeurs propres définies par (7.7) et (7.8).
$\lambda_{\mathcal{H}}^+, \lambda_{\mathcal{H}}^-$	Valeurs propres définies par (7.11) et (7.12).
ν	Viscosité cinématique.
ξ	Grandeur définie par (2.5).
ρ	Masse volumique.
σ	Angle du choc avec la vitesse à l'infini amont.
τ	Grandeur définie par (3.2).
ϕ	Fonction d'entropie.
Φ	Fonction de Falkner et Skan définie par (2.32).
χ	Variable de similitude interne définie par (2.31).
ψ	Fonction de courant.

Indices et exposants :

Le tilde indique les variables dimensionnées.

L'indice ∞ correspond aux conditions d'écoulement à l'infini amont.

L'indice i correspond aux conditions initiales d'intégration en $\theta = 0$.

L'exposant j caractérise la géométrie de l'écoulement :

- $j = 0$: écoulement plan.
- $j = 1$: écoulement méridien.

Liste des figures

- Figure 1 : Domaine d'intégration : division en bandes ou en sous-régions.
- Figure 2 : Couche limite : notations principales et solution de Falkner-Skan.
- Figure 3 : Comparaison de $1/\Theta$ avec son approximation $N = 3$: $\beta = 0$ et $\beta = -0,19$.
- Figure 4 : Comparaison des deux méthodes : approximation à deux, trois, et quatre bandes.
- Figure 5 : Profils de vitesse : gradient de pression négatif et nul $\beta = 1$ et $\beta = 0$.
- Figure 6 : Profils de vitesse : gradient de pression positif $\beta = -0,10$ et $\beta = -0,15$.
- Figure 7 : Test de convergence : méthode de Dorodnitsyn et méthode modifiée.
- Figure 8 : Approximation à deux bandes. Comparaison des trois méthodes.
- Figure 9 : Variation de la hauteur de bande : approximation de Dorodnitsyn à deux bandes.
- Figure 10 : Formes de la ligne sonique et des caractéristiques limites.
- Figure 11 : Emoussement : notations principales et division du domaine d'intégration.
- Figure 12 : Approximation à deux bandes : notations et utilisation de la fonction de courant.
- Figure 13 : Passage de la singularité en écoulement plan $N = 1$.
- Figure 14 : Passage de la singularité en écoulement méridien $N = 1$.
- Figure 15 : Passage des deux singularités en écoulement plan $N = 2$.
- Figure 16 : Passage des deux singularités en écoulement méridien $N = 2$.
- Figure 17 : Accélération des deux dichotomies imbriquées.
- Figure 18 : Écoulement autour d'un cylindre $N = 1$: forme du choc et pression sur le corps.
- Figure 19 : Écoulement autour d'un cylindre $N = 1$: isomachs.
- Figure 20 : Écoulement autour d'un cylindre $N = 1$: carte de pression.
- Figure 21 : Écoulement autour d'une sphère $N = 1$: forme du choc et pression sur le corps.

- Figure 22 : Ecoulement autour d'une sphère $N = 1$: isomachs.
- Figure 23 : Ecoulement autour d'une sphère $N = 1$: carte de pression.
- Figure 24 : Comparaison des différentes méthodes intégrales : écoulement autour d'une sphère à $M_\infty = 6$.
- Figure 25 : Distance de détachement du choc pour une sphère.
- Figure 26 : Repère d'intégration.
- Figure 27 : Distance de détachement du choc suivant la forme de l'ellipsoïde $N = 1$.
- Figure 28 : Ecoulement autour d'un ellipsoïde $b/a = 0,5$ et $N = 1$: forme du choc et pression sur le corps.
- Figure 29 : Ecoulement autour d'un ellipsoïde $b/a = 0,5$ et $N = 1$: isomachs.
- Figure 30 : Ecoulement autour d'un ellipsoïde $b/a = 1,5$ et $N = 1$: forme du choc et pression sur le corps.
- Figure 31 : Ecoulement autour d'un ellipsoïde $b/a = 1,5$ et $N = 1$: isomachs.
- Figure 32 : Comparaison des différentes méthodes des relations intégrales : écoulement autour d'un ellipsoïde $b/a = 0,5$ à $M_\infty = 6$.
- Figure 33 : Distance de détachement du choc suivant l'exposant de la loi de puissance $N = 1$.
- Figure 34 : Ecoulement autour d'un corps en loi de puissance $2/3$ et $N = 1$: forme du choc et pression sur le corps.
- Figure 35 : Ecoulement autour d'un corps en loi de puissance $2/3$ et $N = 1$: isomachs.
- Figure 36 : Ecoulement autour d'un cylindre $N = 2$: forme du choc et pression sur le corps.
- Figure 37 : Ecoulement autour d'un cylindre $N = 2$: isomachs.
- Figure 38 : Ecoulement autour d'un cylindre $N = 2$: carte de pression.
- Figure 39 : Comparaison des différentes méthodes des relations intégrales : écoulement autour d'un cylindre à $M_\infty = 3$ et à $M_\infty = 5$.
- Figure 40 : Comparaison des isomachs $N = 1$ et $N = 2$: écoulement autour d'un cylindre à $M_\infty = 3$.
- Figure 41 : Ecoulement autour d'une sphère $N = 2$: forme du choc et pression sur le corps.
- Figure 42 : Ecoulement autour d'une sphère $N = 2$: isomachs.
- Figure 43 : Ecoulement autour d'une sphère $N = 2$: carte de pression.
- Figure 44 : Ecoulement autour d'une sphère $N = 2$: carte de masse volumique.
- Figure 45 : Ecoulement autour d'une sphère $N = 2$: carte de température.
- Figure 46 : Ecoulement autour d'une sphère $N = 2$: lignes de courant.

- Figure 47 : Comparaison des différentes méthodes des relations intégrales : écoulement autour d'une sphère à $M_\infty = 6$.
- Figure 48 : Comparaison des isomachs $N = 1$ et $N = 2$: écoulement autour d'une sphère à $M_\infty = 6$.
- Figure 49 : Variation du rapport de chaleur spécifique γ à $M_\infty = 4$.

Introduction

Au cours des années 1950 à 1970, plusieurs méthodes de résolution d'équations aux dérivées partielles ont été développées en U.R.S.S. : citons par exemple, les techniques de Godounov [1] et de Dorodnitsyn [2]. Ne disposant pas, alors, d'ordinateurs rapides et puissants, capables de résoudre directement ces systèmes, les techniques de simplification étaient essentiellement basées sur l'étude analytique approfondie des équations régissant les problèmes. Il était alors nécessaire de connaître parfaitement la physique des phénomènes étudiés pour être capable de modéliser certains termes de façon judicieuse.

Puis, durant les vingt dernières années, la puissance des ordinateurs n'a cessé de croître avec l'évolution technologique. Leur capacité mémoire et leur vitesse de calcul ont tellement augmenté que l'on a cherché à résoudre des problèmes de plus en plus complexes. Les aspects analytiques de la méthode de Godounov et les approches de Dorodnitsyn ont été abandonnées et remplacées par des approximations numériques, non plus basées essentiellement sur les connaissances physiques du phénomène mais sur une discrétisation des équations. De ce fait, peu à peu les physiciens ont laissé leur place aux numériciens qui ont développé des codes de calculs de plus en plus élaborés intégrant directement les équations aux dérivées partielles et capable de prendre en compte de nombreux phénomènes. Mais cette complexité entraîne de grandes difficultés de mise en œuvre : s'il existe pour intégrer des équations aux dérivées partielles de nombreuses méthodes, aucune n'est universelle et chaque problème reste un cas particulier. Chaque code est développé pour résoudre un système bien spécifique et le seul moyen de validation des résultats reste la comparaison avec l'expérience.

Finalement, l'option choisie est celle de ramener la résolution des équations aux dérivées partielles à celle de gros système linéaires, ce qui nécessite d'importantes machines. Leur coût en temps de calcul ne permet pas toujours à l'utilisateur de s'assurer de la fiabilité des méthodes (par exemple, en ce qui concerne la convergence avec le raffinement de grille) et les résultats obtenus restent souvent peu précis, surtout lorsque l'on traite des phénomènes sensibles comme le cas des décollements de couches limites ou des ondes de choc dans les écoulements supersoniques.

L'autre philosophie consiste à ramener le problème à la résolution d'un système différentiel ordinaire. L'intérêt pour ces théories simplificatrices des équations aux dérivées partielles renaît car elles nécessitent peu de place mémoire. De plus, elles sont très fiables car l'approximation numérique se ramène à un problème différentiel ordinaire dont l'existence et le comportement de la solution sont établis. Bien sûr, les différentes approximations nécessaires ne permettent pas de traiter les cas les

plus généraux mais ces méthodes ne cherchent pas à concurrencer les techniques numériques. Elles en sont plutôt le complément et sont destinées à être des outils peu coûteux pour utilisateurs à faibles moyens. Elles peuvent par exemple servir en avant-projet ou comme cas-test.

Nous présentons ici, l'étude critique d'une de ces techniques: la Méthode des Relations Intégrales (M.I.R.). Ce travail est structuré de la manière suivante :

- La première partie est une présentation générale de la M.I.R. et son application à un problème modèle. Elle se décompose ainsi :
 - Dans le chapitre 1, un rapide tour d'horizon des différentes techniques de résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles est effectué afin de bien pouvoir situer la M.I.R. Puis, on explique le principe mathématique sur lequel s'appuie cette méthode et nous donnons également ses principales caractéristiques.
 - Afin de bien comprendre l'idée directrice de cette technique, nous traitons dans le chapitre 2, le problème de la couche limite bidimensionnelle laminaire stationnaire incompressible. Nous suivons tout d'abord le raisonnement de Dorodnitsyn. Le choix des approximations effectuées par celui-ci est discuté ce qui nous amène à proposer une nouvelle forme de modélisation.
- Dans la deuxième partie de cette étude, nous nous intéressons à un autre problème de la mécanique des fluides qui a été également résolu grâce à la M.I.R. : le calcul de l'onde de choc détachée devant un obstacle émoussé placé dans un écoulement supersonique.
 - Le chapitre 3 formule le problème de l'émoussement de façon à permettre l'application de la M.I.R. Une adimensionnalisation et un changement de variables sont effectués. Puis le domaine d'intégration est fixé et les conditions aux frontières sont posées.
 - L'application de la M.I.R. est alors exposée dans le chapitre 4. Les diverses modélisations sont détaillées et les systèmes différentiels explicités dans les cas des différentes approximations à une, deux et trois bandes.
 - Dans le chapitre 5, nous exposons tous les problèmes rencontrés lors de la résolution des systèmes différentiels. Nous traitons en premier lieu le cas de l'approximation à une bande et le problème des équations indéterminées sur l'axe de symétrie de l'écoulement. Puis nous expliquons les techniques d'initialisation et de passage de la singularité. Le cas de l'approximation à deux bandes est détaillé d'une façon similaire.
 - La présentation des différents résultats pour les approximations à une et deux bandes fait l'objet du chapitre 6. Les distances de détachement sont tabulées. La position de choc, la pression sur le corps et les différentes cartes sont commentées.

- Dans la dernière partie, nous présentons une étude des équations d'Euler plus particulièrement appliquées à l'é moussment afin d'essayer de cerner certains comportements de la M.I.R. .
- Finalement, un résumé des techniques numériques utilisées (méthode de Newton et de Runge-Kutta à pas variable) ainsi que différents tableaux contenant les résultats de calcul sont donnés dans les annexes.

Partie I

Méthode des relations intégrales. Problème modèle

Chapitre 1

Méthode des relations intégrales

1.1 Introduction

La plupart des problèmes de la physique sont régis par des équations différentielles. Les méthodes numériques de résolution des systèmes différentiels ordinaires sont maintenant bien connues. Le problème est plus délicat si on cherche à résoudre des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Dans ce domaine, on peut classer les techniques de résolution en trois grandes catégories :

- **Méthode des différences finies :**

C'est sûrement la plus utilisée. Elle permet de résoudre des systèmes linéaires ou non linéaires, elliptiques, paraboliques ou hyperboliques. Les dérivées sont remplacées par des différences finies. On utilise en général des schémas linéaires implicites pour assurer la convergence et, de ce fait, augmenter la vitesse de calcul. A chaque pas, un système linéaire algébrique contenant parfois plusieurs centaines d'inconnues est résolu. Les programmes sont donc assez complexes et nécessitent des places mémoires importantes.

- **Méthode des caractéristiques :**

Elle permet de résoudre uniquement les systèmes hyperboliques. Sa précision est souvent meilleure que la méthode des différences finies. En général, elle est souvent plus facile à mettre en œuvre car elle utilise des maillages fixes. Mais ceux-ci le sont dans un système transformé qu'il faut ensuite reconvertir en maillage physique. Cette opération prend du temps car il s'agit en fait d'une résolution supplémentaire d'un système d'équations locales, en particulier, en trois dimensions. Une solution intermédiaire plus intéressante est celle des schémas de Godounov [1] qui résolvent localement le problème sur des caractéristiques à l'intérieur de mailles du type différences finies.

Cependant, la méthode des caractéristiques cesse d'être applicable dès lors que les caractéristiques d'une famille se croisent. Il apparaît alors des discontinuités telles que les ondes de choc, qu'il faut traiter à part. Cette méthode convient donc principalement aux problèmes stationnaires si le nombre de discontinuités est petit.

- **Méthode directe et méthode des relations intégrales :**

Comme les moyens de résolution des systèmes différentiels ordinaires sont bien connus, les méthodes permettant grâce à certaines approximations de transformer un système d'équations aux dérivées partielles en un système différentiel ordinaire sont également très intéressantes. C'est dans cette catégorie que se classent la méthode des relations intégrales et la méthode directe. Comme la méthode de différences finies, elles peuvent servir à résoudre des problèmes du type elliptique, parabolique et hyperbolique mais également le cas des problèmes mixtes.

D'une façon générale, la résolution numérique des équations aux dérivées partielles nécessite des codes de calcul complexes et des capacités mémoires importantes.

1.2 Présentation de la méthode

La méthode des relations intégrales (M.I.R.) a été élaborée par Dorodnitsyn [2] à partir de 1956 et elle a été présentée au Premier Congrès International des Sciences Aéronautiques à Madrid en 1958. Par la suite, elle a été utilisée avec succès pour résoudre de nombreux problèmes de mécanique des fluides comme celui de la couche limite laminaire incompressible [3] ou compressible [4], les écoulements supersoniques autour de corps émoussés en gaz parfait ou en gaz réel [5].

Parmi toutes les méthodes qui ramènent la résolution d'équations aux dérivées partielles à des systèmes différentiels ordinaires, les plus développées sont la méthode directe et la méthode des relations intégrales. Sur le plan numérique, leur intérêt principal consiste à n'avoir à résoudre que des systèmes différentiels ordinaires pour lesquels les schémas donnent une approximation aussi précise que l'on veut, d'une solution dont l'existence est démontrée. C'est donc au stade analytique que se fait le véritable travail d'approximation et c'est ici que résident à la fois la force et la faiblesse de ces méthodes. Faiblesse car en imposant a priori la forme de la solution sur une base fonctionnelle tronquée, on introduit une erreur que l'on ne peut pas contrôler comme dans le cas des techniques à base de discrétisation. En revanche, si la solution exacte s'y prête, c'est-à-dire si sa projection dans le sous espace fonctionnel choisi est une bonne approximation, alors le calcul numérique atteint des performances inégalables par les méthodes classiques.

Dans la méthode directe classique, la région d'intégration est divisée en bandes (figure 1a) et la dérivée partielle par rapport à l'une des deux variables (on considère pour simplifier un problème à deux variables) est remplacée par une relation aux différences finies laquelle est basée sur une formule d'interpolation. La valeur de la fonction en chaque point est calculée avec les valeurs de la fonction sur les bandes voisines. On obtient alors un système différentiel ordinaire qui peut être résolu facilement. Malheureusement pour obtenir une bonne résolution le nombre de bandes doit être assez important.

La M.I.R. est une généralisation de la méthode directe et s'apparente aux méthodes spectrales. En effet on multiplie les équations aux dérivées partielles par

des fonctions de "poids". Puis les fonctions à intégrer sont approximées par leur développement sur une base fonctionnelle. Les équations ainsi transformées sont ensuite intégrées analytiquement suivant une variable et se réduisent alors à un système différentiel ordinaire suivant l'autre variable. La région d'intégration est également divisée en bandes par des lignes dont la forme dépend en général des conditions aux limites. Une certaine liberté dans le choix de la base d'approximation et des fonctions de poids permet d'obtenir une solution proche de la réalité avec un petit nombre de bandes, ce qui, en pratique, est très efficace.

Dans cet esprit, Dorodnitsyn a généralisé cette méthode en adaptant les fonctions de poids au comportement attendu des fonctions approximées. Le système différentiel ordinaire donne alors une solution encore plus précise que la M.I.R. simple et cela avec encore moins de bandes. Il va de soi que le choix des fonctions de poids est alors intimement lié à la connaissance physique du phénomène étudié.

1.3 Principe de la M.I.R.

Pour appliquer la M.I.R., le système initial d'équations aux dérivées partielles doit être écrit sous une forme conservative. Ceci est toujours possible pour les principes de conservation. Dans un cas à deux variables, le système initial se présente de la façon suivante :

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} P_i(x, y, u_1, \dots, u_k) + \frac{\partial}{\partial y} Q_i(x, y, u_1, \dots, u_k) = L_i(x, y, u_1, \dots, u_k)$$

pour $i = 1, 2, 3, \dots, k$

Les u_i sont les k fonctions inconnues et P_i, Q_i, L_i sont des fonctions connues des deux variables indépendantes x, y et des u_1, \dots, u_k .

Nous supposons le domaine d'intégration compris entre les abscisses $x = a, x = b$ et les ordonnées $y = 0, y = \Delta(x)$ (figure 1a). On peut avoir :

$$\begin{aligned} a &\longrightarrow +\infty \\ b &\longrightarrow -\infty \\ \text{ou } \Delta(x) &= cste \end{aligned}$$

Le système est fermé par k conditions aux frontières $x = a$ et $x = b$ et aussi k conditions en $y = 0$ et $y = \Delta(x)$. Le cas d'une frontière $y = \Delta(x)$ inconnue peut être traité à condition de disposer d'une équation supplémentaire liant la fonction Δ à la solution du problème. De plus, certaines conditions aux frontières peuvent être remplacées par des conditions de régularité de la solution.

En multipliant chaque équation du système (1.1) par une fonction continue par morceaux $f(y)$ et en intégrant de $y = 0$ à $y = \Delta(x)$, nous obtenons les équations de départ de la méthode des relations intégrales (1.2).

$$(1.2) \quad \frac{d}{dx} \int_0^{\Delta(x)} f(y) P_i dy - \frac{d\Delta}{dx}(x) f(\Delta) P_{i,\Delta} + f(\Delta) Q_{i,\Delta} - f(0) Q_{i,0}$$

$$-\int_0^{\Delta(x)} \frac{df}{dy}(y) Q_i dy = \int_0^{\Delta(x)} f(y) L_i dy$$

avec $P_{i,\Delta}$ valeur de P_i en $y = \Delta(x)$ c'est-à-dire

$$P_{i,\Delta} = P_i[x, \Delta(x), u_1(x, \Delta(x)), \dots, u_k(x, \Delta(x))]$$

et de même pour $Q_{i,\Delta}$. La valeur de Q_i pour $y = 0$ est, de la même façon, notée $Q_{i,0}$. La fonction $f(y)$ peut avoir un nombre fini de discontinuités du premier ordre. On écrit alors :

$$\int_0^{\Delta(x)} \frac{df}{dy}(y) Q_i dy = \int_0^{f(\Delta(x))} Q_i d(f(y))$$

Dans le cas d'une approximation à N bandes, on procède alors de la manière suivante : la région d'intégration est divisée en N bandes par $N - 1$ lignes, entre les limites $y = 0$ et $y = \Delta(x)$. Les lignes ont pour équations (figure 1a) :

$$y_n(x) = \frac{n}{N} \Delta(x) \quad n \in \{1, \dots, N - 1\}$$

$$y_0 = 0 \quad \text{et} \quad y_N = \Delta(x)$$

Les fonctions P_i, Q_i, L_i sont interpolées de façon à permettre le calcul analytique des intégrales de l'équation (1.2). Par exemple, on peut écrire P_i de la forme :

$$(1.3) \quad P_i(x, y, u_1, \dots, u_k) \simeq \sum_{m=0}^N p_{i,m}(x) Z_m(y)$$

Les $Z_m(y)$ forment la base d'interpolation et les $p_{i,m}$ sont les projections des P_i sur cette base. C'est à ce stade que se joue une part de la précision de la méthode car elle sera d'autant plus importante que le choix des Z_m sera adapté. Les $N + 1$ coordonnées $p_{i,m}$ sont calculées en résolvant un système algébrique $(N + 1) \times (N + 1)$ connaissant les $N + 1$ valeurs $P_{i,n}$ de la fonction P_i sur chaque ligne qui divise le domaine d'intégration. Le système algébrique est le suivant :

$$(1.4) \quad P_{i,n} = P_i[x, y_n(x), u_1(x, y_n(x)), \dots, u_k(x, y_n(x))] = \sum_{m=0}^N p_{i,m}(x) Z_m(x)$$

$$\text{pour} \quad n \in \{0, 1, \dots, N\}$$

Les fonctions Q_i, L_i sont représentées de la même manière.

Maintenant pour chaque équation d'indice i , on choisit un système de N fonctions de poids linéairement indépendantes $f_n(y)$.

$$(1.5) \quad \{f_n(y)\}_i = \{f_1(y), f_2(y), \dots, f_N(y)\}_i$$

On peut les choisir éventuellement identiques pour toutes les équations.

On écrit alors une relation intégrale (1.2) avec chaque fonction $f_n(y)$ du système (1.5). On obtient donc kN relations intégrales linéairement indépendantes. Puis on

remplace les fonctions P_i, Q_i, L_i par leurs expressions correspondantes (1.3), pour permettre le calcul analytique des intégrales.

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \int_0^{\Delta(x)} f_n(y) P_i dy &\simeq \sum_{m=0}^N C_{n,m} p_{i,m}(x) \\ \int_0^{\Delta(x)} \frac{df_n}{dy}(y) Q_i dy &\simeq \sum_{m=0}^N D_{n,m} q_{i,m}(x) \\ \int_0^{\Delta(x)} f_n(y) L_i dy &\simeq \sum_{m=0}^N C_{n,m} l_{i,m}(x) \end{aligned}$$

Les $C_{n,m}, D_{n,m}$ sont des coefficients numériques qui dépendent du choix de la base d'interpolation et des fonctions $f_n(y)$:

$$\begin{aligned} C_{n,m} &= \int_0^{\Delta(x)} f_n(y) Z_m(y) dy \\ D_{n,m} &= \int_0^{\Delta(x)} \frac{df_n}{dy}(y) Z_m(y) dy \end{aligned}$$

En substituant les expressions (1.6) dans les relations intégrales, on obtient un système de kN équations différentielles ordinaires en x :

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \sum_{m=0}^N C_{n,m} \frac{dp_{i,m}}{dx} - \frac{d\Delta}{dx}(x) f_n(\Delta) P_{i,\Delta} + f_n(\Delta) Q_{i,\Delta} - f_n(0) Q_{i,0} \\ - \sum_{m=0}^N D_{n,m} q_{i,m} = \sum_{m=0}^N C_{n,m} l_{i,m} \end{aligned}$$

avec $i \in \{1, \dots, k\}$ et $n \in \{1, \dots, N\}$

Ce système approximant est fermé par les mêmes conditions aux frontières que (1.1). Comme il est formé uniquement d'équations différentielles ordinaires, il peut être intégré simplement par une méthode numérique usuelle.

En pratique, l'intégration se déroule de la manière suivante : supposons connues les valeurs de u_i pour $x = 0$. On calcule les valeurs $P_{i,n}, Q_{i,n}, L_{i,n}$ des fonctions P_i, Q_i, L_i sur chaque ligne en $x = 0$. On en déduit, à cette abscisse, les valeurs des $p_{i,m}, q_{i,m}, l_{i,m}$ en résolvant le système linéaire formé par (1.4). En intégrant alors numériquement de $x = 0$ à $x = \delta x$ les kN équations différentielles ordinaires (1.7), on obtient $p_{i,m}, q_{i,m}, l_{i,m}$ à l'abscisse δx et donc grâce à (1.4) les $P_{i,n}, Q_{i,n}, L_{i,n}$ puis les $u_i(\delta x)$. Il suffit de poursuivre de proche en proche l'intégration pour obtenir le champ u_i complet.

1.4 Evolutions de la méthode

1.4.1 M.I.R. à deux variables [2]

Plusieurs autres formes de la méthode des relations intégrales existent. On peut, par exemple, intégrer suivant x plutôt que suivant y . On effectue le changement de

variables $x, \kappa = \frac{y}{\Delta(x)}$. La frontière inconnue $y = \Delta(x)$ se transforme alors en une droite parallèle à Ox . Après avoir approximé les fonctions suivant x , on intègre le long de lignes $\kappa = cste$.

Une autre variante consiste à diviser le domaine d'intégration par deux réseaux de lignes respectivement entre les limites $x = a$ et $x = b$ et entre $y = 0$ et $y = \Delta(x)$. Cela revient à faire un maillage de la région d'intégration (figure 1b). L'intégration est faite suivant les deux directions x et y . Les équations intégrales ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta(x)} [f(b, y)P_i(b, y) - f(a, y)P_i(a, y)]dy - \int_a^b \int_0^{\Delta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)P_i(x, y)dx dy \\ & + \int_a^b [f(x, \Delta)Q_i(x, \Delta) - f(x, 0)Q_i(x, 0)]dx - \int_a^b \int_0^{\Delta(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)Q_i(x, y)dx dy \\ & = \int_a^b \int_0^{\Delta(x)} f(x, y)L_i(x, y)dx dy \end{aligned}$$

On interpole alors les fonctions P_i, Q_i, L_i à partir de modèles à deux variables. Le système approximant devient alors un système algébrique non linéaire ou un système d'équations transcendantes dont la résolution est effectuée numériquement.

1.4.2 M.I.R. à trois variables

L'idée d'étendre la M.I.R. au cas tridimensionnel est également abordée par Dorodnitsyn dans [2]. Deux approches principales sont proposées. Supposons que le système différentiel initial se présente sous forme conservative :

$$\frac{\partial}{\partial x}P_i(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y}Q_i(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z}R_i(x, y, z) = L_i(x, y, z)$$

pour $i = 1, 2, 3, \dots, k$

P_i, Q_i, R_i, L_i sont des fonctions connues des trois variables indépendantes x, y, z .

Dans le premier cas, on choisit des fonctions poids $f(x, y)$ et on intègre suivant les deux variables (par exemple, pour $x \in [0, \Delta_1(z)]$ et pour $y \in [0, \Delta_2(z)]$). En utilisant les formules des intégrales doubles, on obtient les expressions :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \int_0^{\Delta_1(z)} \int_0^{\Delta_2(z)} f(x, y)R_i(x, y, z)dx dy - \int_0^{\Delta_1(z)} \frac{d\Delta_2}{dz}(z)f(x, \Delta_2)R_i(x, \Delta_2, z)dx \\ & - \int_0^{\Delta_2(z)} \frac{d\Delta_1}{dz}(z)f(\Delta_1, y)R_i(\Delta_1, y, z)dy + \int_0^{\Delta_1(z)} f(x, \Delta_2)Q_i(x, \Delta_2, z)dx \\ & - \int_0^{\Delta_1(z)} f(x, 0)Q_i(x, 0, z)dx + \int_0^{\Delta_2(z)} f(\Delta_1, y)P_i(\Delta_1, y, z)dy \\ & - \int_0^{\Delta_2(z)} f(0, y)P_i(0, y, z)dy = \int_0^{\Delta_1(z)} \int_0^{\Delta_2(z)} f(x, y)L_i(x, y, z)dx dy \end{aligned}$$

Comme en (1.3), on interpole P_i, Q_i, R_i, L_i mais sous la forme :

$$P_i(x, y, z) = \sum_{m=0}^N p_{i,m}(z) Z_m(x, y)$$

On peut alors calculer analytiquement les intégrales et obtenir un système différentiel ordinaire suivant la troisième variable z .

La deuxième méthode consiste à garder des fonctions poids d'une seule variable et à intégrer suivant celle-ci. Par exemple, en intégrant suivant z dans $[0, \Delta(x, y)]$, on aboutit aux relations intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\Delta(x,y)} f(z) P_i(x, y, z) dz &- \frac{\partial \Delta}{\partial x} f(\Delta) P_i(x, y, \Delta) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\Delta(x,y)} f(z) Q_i(x, y, z) dz &- \frac{\partial \Delta}{\partial y} f(\Delta) Q_i(x, y, \Delta) \\ &+ f(\Delta) R_i(x, y, \Delta) - f(0) R_i(x, y, 0) \\ - \int_0^{\Delta(x,y)} \frac{df}{dz}(z) R_i(x, y, z) dz &= \int_0^{\Delta(x,y)} f(z) L_i(x, y, z) dz \end{aligned}$$

On développe alors les fonctions P_i, Q_i, R_i, L_i de la façon suivante :

$$P_i(x, y, z) = \sum_{m=0}^N p_{i,m}(x, y) Z_m(z)$$

et on transforme le système tridimensionnel aux dérivées partielles en un système bidimensionnel auquel on applique la méthode des relations intégrales à deux variables. On peut également résoudre ce système grâce à des techniques de caractéristiques ou de différences finies.

1.4.3 Choix des fonctions f_n

Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe 1.3 sur le principe de la M.I.R. , chaque équation du système différentiel initial (1.1) est multipliée par une fonction de poids $f_n(y)$. En fait, le choix des $f_n(y)$ est guidé, soit par le type de méthode choisie, soit par la connaissance physique du phénomène. Citons deux exemples particuliers usuels de familles $f_n(y)$:

- **Les Dirac :**

Les fonctions $f_n(y)$ sont définies à partir des Dirac.

$$f_n(y) = \delta(y - y_n) \text{ pour } n \in \{1, \dots, N\}$$

On obtient alors la méthode directe : les dérivées suivant y sont remplacées par des expressions de différences finies suivant le choix de la méthode d'interpolation.

• **Les fonctions portes :**

La famille $f_n(y)$ est définie de la manière suivante :

$$f_n(y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } y < y_{n-1} \\ 1 & \text{pour } y_{n-1} \leq y \leq y_n \\ 0 & \text{pour } y > y_n \end{cases}$$

Ce choix conduit à la méthode usuelle des relations intégrales. Les expressions (1.2) s'écrivent alors de la forme particulière suivante :

$$\frac{d}{dx} \int_{y_{n-1}}^{y_n} P_i dy - \frac{dy_n}{dx} P_{i,n} + \frac{dy_{n-1}}{dx} P_{i,n-1} + Q_{i,n} - Q_{i,n-1} = \int_{y_{n-1}}^{y_n} L_i dy$$

On peut également retenir d'autres types de fonctions f_n de manière à mieux les adapter à la physique du problème. En effet, le terme $\int_0^{\Delta(x)} f_n(y) P_i dy$ peut être considéré comme un produit scalaire si les fonctions sont de carrés intégrables. Pour le calculer, on utilise un développement tronqué de P_i sur la base d'interpolation $Z_m(x)$. Si la famille $f_n(y)$ est mal choisie, les termes négligés du développement de P_i entraînent une erreur importante sur ce produit scalaire. Il faut alors augmenter le nombre de bandes N pour obtenir une bonne précision. En revanche, si les fonctions f_n sont adaptées au comportement de P_i , le produit scalaire est obtenu précisément avec peu de termes et on peut diminuer le nombre de bandes.

1.5 Caractéristiques principales

Le principal avantage de la méthode des relations intégrales réside dans le fait que la recherche de la solution s'effectue en deux étapes simples et totalement indépendantes :

- Réduction analytique du système exact en un système approximant d'équations différentielles ordinaires.
- Résolution numérique du système différentiel ordinaire approximant.

Dans la construction du système approximant, le choix de la direction d'intégration et de la forme d'approximation a une très grande importance. Il se trouve que la solution obtenue donne une distribution plus précise des fonctions inconnues dans la direction de l'intégration du système approximant que dans la direction suivant laquelle elles ont été développées analytiquement. Le choix de la direction d'intégration numérique doit être fait suivant le comportement envisagé des fonctions approximées. Il est donc indiqué de choisir l'interpolation dans la direction où les fonctions sont les plus lisses, et, l'intégration numérique dans la direction où les fonctions varient le plus vite.

En ce qui concerne la forme d'interpolation, les fonctions de bases de la méthode d'interpolation doivent former un système de Chebishev. La forme des développements doit prendre en compte au maximum l'évolution des fonctions représentées et,

en particulier, leurs symétries et leurs comportements asymptotiques. On utilise dans la plupart des cas les interpolations polynomiales ou trigonométriques, en particulier si on intègre analytiquement les équations dans la direction d'interpolation.

De plus, l'expérience a montré dans la résolution de nombreux problèmes concrets que la méthode des relations intégrales atteint une grande précision, même quand le domaine d'intégration est divisé en un petit nombre de bandes.

Il est difficile de donner une explication théorique sur la surprenante haute précision de la méthode des relations intégrales. Les formules d'interpolation pour les dérivées et pour les intégrales sont capables d'avoir des précisions similaires en fonction de la largeur de bande. Le fait est qu'en pratique, on ne peut pas utiliser un nombre important de bandes (seul cas où l'erreur tend vers zéro). Il est donc préférable de choisir la méthode qui donne la plus grande précision expérimentale avec les plus larges bandes, donc avec le plus petit nombre d'équations à résoudre. Pour un petit nombre de points d'interpolation, la précision d'un calcul d'intégrale peut être essentiellement plus grande que celle de celui d'une dérivée. En fait, de par son principe, la précision de la M.I.R. est entièrement dépendante de l'interpolation analytique initiale. Tout dépend de la capacité du type de fonction choisie à représenter précisément la solution exacte. Supposons, par exemple, que cette dernière présente des points d'inflexion, il est clair qu'une approximation polynomiale de degré inférieur à trois ne pourra rendre compte de cette propriété. La précision de la méthode constatée après calcul sera mauvaise. On voit donc que la M.I.R. doit être validée par la comparaison avec l'expérience ou avec des solutions analytiques. En revanche, là où elle donne des résultats fiables, elle les obtient pour des temps de calcul et des places mémoires inégalables.

La convergence de la méthode des relations intégrales, dans le cas général d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires, n'a pas été démontrée. Dans certains cas particuliers linéaires (méthode directe) elle a pu être prouvée [6]. Habituellement on teste la convergence en évaluant la décroissance de la différence entre deux approximations successives. En pratique, dans les problèmes de dynamique des gaz, il faut qu'un modèle à deux ou trois bandes donne une précision suffisante pour que la M.I.R. soit réellement très avantageuse.

Chapitre 2

Application à la couche limite

Le problème de la couche limite laminaire stationnaire bidimensionnelle est un bon exemple d'application de la méthode des relations intégrales. Dans le cas d'un fluide visqueux incompressible, ce calcul a été développé par Dorodnitsyn [2]. Par la suite, Pavlovsky a poursuivi cette étude dans [4] où il traite le cas des fluides visqueux compressibles. Fletcher et Holt ont étudié le cas turbulent [7][8] en utilisant une version modifiée de la M.I.R. .

Nous traitons ici le problème laminaire non seulement pour illustrer la méthode mais pour faire apparaître certains aspects généraux qui sont éludés dans la littérature scientifique.

2.1 Equations de départ

Les hypothèses faites sur l'écoulement sont les suivantes :

- L'écoulement est permanent et laminaire.
- Il est isovolume : $\rho = cste$.
- Il est bidimensionnel. On utilise les coordonnées curvilignes x et y associées au corps (figure 2a) et comme l'épaisseur de la couche limite est petite par rapport au rayon de courbure de la paroi, les équations écrites dans le repère local ont la même forme qu'en coordonnées cartésiennes.

Dans ces conditions, les équations de Navier-Stokes sont au nombre de deux et s'écrivent :

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right)$$

où ν est le coefficient de viscosité dynamique.

Avec les hypothèses classiques de couche limite, on obtient les équations de Prandtl. Dans ces équations, la couche limite est supposée occuper l'espace compris entre $y = 0$ et $y = +\infty$:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0$$

$$(2.2) \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}$$

où $u_e(x)$ est la vitesse de l'écoulement à l'extérieur de la couche limite. On reconnaît en (2.1) l'équation de conservation de la masse.

Aux frontières $y = 0$ et $y = +\infty$ on écrit :

- la condition d'adhérence à la paroi :

$$(2.3) \quad \forall x \geq 0 \quad \tilde{u}(x, 0) = \tilde{v}(x, 0) = 0$$

- le raccordement avec la solution extérieure :

$$(2.4) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{u}(x, y) = u_e(x)$$

On effectue le changement de variables de Lees-Dorodnitsyn [9] avec l'objectif de chercher par la suite des solutions à similitude interne :

$$(2.5) \quad \xi = \int_0^x u_e(x) dx$$

$$(2.6) \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \int_0^y u_e(x) dy$$

et on introduit les nouvelles fonctions inconnues :

$$u = \frac{\tilde{u}}{u_e}$$

$$v = \frac{\tilde{v}}{u_e \sqrt{\nu}}$$

On remarquera qu'il ne s'agit pas, pour v , d'une adimensionnalisation. Comme u_e n'est fonction que de x , on démontre facilement que dans le système de coordonnées (ξ, η) , on a $\frac{\partial u_e}{\partial \eta} = 0$ et donc que u_e n'est fonction que de ξ . Les équations (2.1),(2.2) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(v + \frac{\eta u}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \right) &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(v + \frac{\eta u}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{(1 - u^2)}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

En posant $q = v + \frac{\eta}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} u$, on obtient le système :

$$(2.7) \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \eta} = 0$$

$$(2.8) \quad u \frac{\partial u}{\partial \xi} + q \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} (1 - u^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

et les conditions aux limites (2.3),(2.4) s'écrivent :

$$(2.9) \quad \forall \xi \geq 0 \quad u(\xi, 0) = q(\xi, 0) = 0$$

$$(2.10) \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} u(\xi, \eta) = 1$$

2.2 Mise en œuvre de la méthode

Rappelons tout d'abord la méthode intégrale de Von Karman. En soustrayant l'équation (2.8) de l'équation (2.7) multipliée par $(1 - u)$ et en intégrant suivant η de zéro à l'infini, on obtient l'équation suivante :

$$(2.11) \quad \frac{d}{d\xi} \int_0^\infty u(1 - u) d\eta + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \int_0^\infty (1 - u^2) d\eta = \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}$$

Si on utilise les définitions classiques de l'épaisseur adimensionnée de déplacement δ_1 et de l'épaisseur adimensionnée de quantité de mouvement δ_2 :

$$(2.12) \quad \delta_1 = \int_0^\infty (1 - u) d\eta$$

$$(2.13) \quad \delta_2 = \int_0^\infty u(1 - u) d\eta$$

on voit que le problème se ramène à la résolution d'une équation différentielle ordinaire en ξ pour δ_2 .

$$\frac{d\delta_2}{d\xi} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} (\delta_2 + \delta_1) = \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}$$

Pour résoudre cette équation, il faut par exemple, imposer le profil de vitesse $u(\eta)$.

La méthode des relations intégrales, appliquée à la couche limite, est une généralisation de la méthode de Von Karman. L'obtention d'une relation intégrale s'effectue de la même manière mais au lieu de multiplier par $(1 - u)$ l'équation (2.7), on la multiplie par une fonction de poids $f(u)$. Cette fonction $f(u)$ doit néanmoins vérifier les propriétés suivantes :

- $f(u)$ tend "assez vite" vers zéro quand η tend vers l'infini : par exemple, de la même manière que $(1 - u)$.
- $f(u)$ est au moins deux fois dérivable.

De façon identique à la méthode de Von Karman, on intègre suivant η , de 0 à l'infini, et on aboutit à l'équation intégrale :

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^\infty u f(u) d\eta = \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \int_0^\infty \frac{df}{du}(u)(1-u^2) d\eta - \frac{df}{du}(0) \left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} - \int_0^\infty \frac{d^2 f}{du^2}(u) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 d\eta$$

En notant :

$$(2.14) \quad \Theta = \left[\frac{\partial u}{\partial \eta} \right]^{-1} \quad \text{et} \quad \Theta_0 = \left[\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \right]^{-1}$$

l'équation intégrale s'écrit finalement :

$$(2.15) \quad \frac{d}{d\xi} \int_0^1 \Theta u f(u) du = \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \int_0^1 \Theta (1-u^2) \frac{df}{du}(u) du - \frac{1}{\Theta_0} \frac{df}{du}(0) - \int_0^1 \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 f}{du^2}(u) du$$

Avec $f(u) = (1-u)$, l'équation intégrale (2.15) se simplifie et s'identifie à l'équation de Von Karman (2.11). Le problème revient donc à l'intégration de cette équation différentielle si le profil de vitesse u est obtenu par ailleurs.

En fait, la méthode des relations intégrales substitue à la fonction $u(\eta)$, c'est-à-dire à $\Theta(u)$, ses valeurs inconnues sur un nombre fini N de lignes u_n sur lesquelles $u = \text{cste}$. On choisit alors N fonctions f_n et on intègre analytiquement suivant u les N équations (2.15) correspondantes. On obtient alors un nombre suffisant d'équations différentielles pour calculer les valeurs de Θ sur les lignes $u_n = \text{cste}$. Pour mettre en œuvre la méthode, il faut connaître explicitement $\Theta(u)$.

2.3 Méthode de Dorodnitsyn

2.3.1 Principe de la méthode

Pour pouvoir calculer analytiquement les intégrales de l'équation (2.15), il faut modéliser les inconnues $\Theta(u)$ et $1/\Theta(u)$. Pour cela Dorodnitsyn propose de choisir :

$$\frac{1}{\Theta} = (1-u)\mathcal{P}(u)$$

où $\mathcal{P}(u)$ est une fonction continue et bornée entre 0 et 1. Un tel choix assure que $\frac{1}{\Theta} = \frac{\partial u}{\partial \eta}$ tende vers zéro en $u = 1$ et, de ce fait, garantit le raccord avec la solution extérieure.

Le processus d'approximation intervient alors directement dans le choix de $\mathcal{P}(u)$. Guidé par la nécessité d'aboutir à des équations analytiques simples, Dorodnitsyn adopte une forme polynômiale pour $\mathcal{P}(u)$. La modélisation de $1/\Theta$ s'écrit donc :

$$\frac{1}{\Theta} = (1-u) \sum_{m=0}^{N-1} a_m u^m$$

Le degré du polynôme constitue donc le choix du niveau d'approximation de la fonction continue $\mathcal{P}(u)$. A ce stade, la M.I.R. s'assimile aux méthodes de type spectral et n'est discutable que du point de vue du choix de la base fonctionnelle d'approximation pour $\mathcal{P}(u)$.

Plus discutable est le choix de Dorodnitsyn de doter $\Theta(u)$ d'un développement de la forme :

$$\Theta = \frac{1}{1-u} \sum_{m=0}^{N-1} b_m u^m$$

plutôt que d'utiliser la formule exacte de $(1/\Theta)^{-1}$. Les fonctions Θ et $1/\Theta$ ainsi modélisées ne coïncident que sur les N lignes choisies car les coefficients (a_m, b_m) sont obtenus à partir des valeurs Θ_n de Θ sur les N lignes $u_n = cste$ par la résolution des deux systèmes algébriques $N \times N$:

$$(2.16) \quad \frac{1}{\Theta_n} = (1-u_n) \sum_{m=0}^{N-1} a_m u_n^m$$

$$(2.17) \quad \Theta_n = \frac{1}{(1-u_n)} \sum_{m=0}^{N-1} b_m u_n^m \quad \text{pour } n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Les coefficients (a_m, b_m) dépendent de ξ et constituent, après les intégrations numériques, les $2 \times N$ fonctions inconnues du problème.

Passons maintenant au choix des fonctions $f_n(u)$. Pour conserver les simplifications obtenues par la méthode de Von Karman tout en assurant l'intégrabilité explicite en u des expressions (2.15), Dorodnitsyn choisit :

$$f_n(u) = (1-u)^{n+1} \quad \text{pour } n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

A partir de l'équation différentielle (2.15) et en remplaçant f par les fonctions f_n , on obtient alors N équations en a_m, b_m .

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^1 u(1-u)^n \sum_{m=0}^{N-1} b_m u^m du = -\frac{n+1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \int_0^1 (1+u)(1-u)^n \sum_{m=0}^{N-1} b_m u^m du +$$

$$\frac{n+1}{\Theta_0} - n(n+1) \int_0^1 (1-u)^n \sum_{m=0}^{N-1} a_m u^m du$$

$$\text{avec } n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Ces équations associées à (2.16)(2.17) permettent de résoudre le problème.

En pratique, il est plus commode de substituer directement aux a_m, b_m leurs expressions en fonction des Θ_n obtenues par résolution de (2.16),(2.17). On aboutit alors à un système différentiel ordinaire en $\frac{d\Theta_n}{d\xi}$ de N équations à N inconnues.

2.3.2 Systèmes différentiels

Approximation à une bande

La plus élémentaire des approximations se limite à la seule bande que constitue la couche limite dans son ensemble. Les N lignes se réduisent à une seule qui est le corps $u_0 = 0$. La fonction Θ est donc entièrement déterminée par sa valeur Θ_0 en $u_0 = 0$ car le polynôme $\mathcal{P}(u)$ est de degré 0. Les fonctions $1/\Theta$ et de Θ s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Theta} &= \frac{1}{\Theta_0}(1-u) \\ \Theta &= \frac{\Theta_0}{1-u}\end{aligned}$$

La seule fonction $f_0(u)$ intervenant dans le problème est $(1-u)$ qui donne une seule et unique équation différentielle du type (2.15) :

$$(2.18) \quad \frac{d\Theta_0}{d\xi} + \frac{3}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \Theta_0 = \frac{2}{\Theta_0}$$

Approximation à deux bandes

Dans le cas de l'approximation à deux bandes, il faut deux lignes caractérisées par deux valeurs de u . Comme la forme choisie pour approximer $1/\Theta$ assure le raccord en $u = 1$ avec la solution extérieure, en choisissant $u_0 = 0$ et $u_1 = 1/2$, le polynôme $\mathcal{P}(u)$ de degré 1 est entièrement déterminé par Θ_0 et Θ_1 . Ces deux bandes de même largeur dans le domaine (x, u) conduisent évidemment à une bande pariétale plus fine que la seconde dans le domaine physique.

Après résolution des deux systèmes algébriques 2×2 (2.16) et (2.17), on obtient les expressions de $1/\Theta$ et Θ :

$$(2.19) \quad \begin{aligned}\frac{1}{\Theta} &= (1-u) \left[\frac{1}{\Theta_0}(1-2u) + \frac{4u}{\Theta_1} \right] \\ \Theta &= \frac{1}{1-u} [\Theta_0(1-2u) + u\Theta_1]\end{aligned}$$

En intégrant alors l'équation (2.15) avec $f_0(u) = (1-u)$ puis avec $f_1(u) = (1-u)^2$, on arrive au système différentiel :

$$(2.20) \quad \begin{aligned}\frac{d\Theta_0}{d\xi} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} (9\Theta_0 + 7\Theta_1) &= \frac{34}{\Theta_0} - \frac{32}{\Theta_1} \\ \frac{d\Theta_1}{d\xi} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} (4\Theta_0 + 6\Theta_1) &= \frac{20}{\Theta_0} - \frac{16}{\Theta_1}\end{aligned}$$

Approximation à trois bandes

Les valeurs de u fixées sont les suivantes : $u_0 = 0$, $u_1 = 1/3$ et $u_2 = 2/3$. La fonction $\mathcal{P}(u)$ est un polynôme de degré 2. Les différentes fonctions $f_n(u)$ servant à intégrer l'équation intégrale (2.15) sont successivement $(1 - u)$, $(1 - u)^2$, $(1 - u)^3$. Dorodnitsyn obtient en approximant $1/\Theta$ par :

$$\frac{1}{\Theta} = (1 - u)(a_0 + a_1u + a_2u^2)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\Theta_0} \\ a_1 &= -\frac{9}{2\Theta_0} + \frac{9}{\Theta_1} - \frac{9}{2\Theta_2} \\ a_2 &= \frac{9}{2\Theta_0} - \frac{27}{2\Theta_1} + \frac{27}{2\Theta_2} \end{aligned}$$

et Θ par :

$$(2.21) \quad \Theta = \frac{1}{1 - u}(b_0 + b_1u + b_2u^2)$$

avec

$$(2.22) \quad \begin{aligned} b_0 &= \Theta_0 \\ b_1 &= \frac{1}{2}(-9\Theta_0 + 8\Theta_1 - \Theta_2) \\ b_2 &= \frac{3}{2}(3\Theta_0 - 4\Theta_1 + \Theta_2) \end{aligned}$$

le système différentiel qui devient :

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \frac{d\Theta_0}{d\xi} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \left(\frac{67}{2}\Theta_0 + 40\Theta_1 - \frac{7}{2}\Theta_2 \right) &= \frac{225}{\Theta_0} - \frac{234}{\Theta_1} + \frac{9}{\Theta_2} \\ \frac{d\Theta_1}{d\xi} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \left(\frac{67}{12}\Theta_0 + \frac{28}{3}\Theta_1 + \frac{13}{12}\Theta_2 \right) &= \frac{39}{\Theta_0} - \frac{51}{2} \frac{1}{\Theta_1} - \frac{12}{\Theta_2} \\ \frac{d\Theta_2}{d\xi} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \left(-\frac{83}{6}\Theta_0 - \frac{52}{3}\Theta_1 + \frac{31}{6}\Theta_2 \right) &= \frac{99}{\Theta_0} + \frac{120}{\Theta_1} - \frac{15}{\Theta_2} \end{aligned}$$

Approximation à quatre bandes

Les valeurs de u fixées sont : $u_0 = 0$, $u_1 = 1/4$, $u_2 = 1/2$, $u_3 = 3/4$. La fonction $\mathcal{P}(u)$ est donc un polynôme de degré 3 et les fonctions $f_n(u)$ sont successivement $(1 - u)$, $(1 - u)^2$, $(1 - u)^3$, $(1 - u)^4$. L'approximation de $1/\Theta$ s'écrit :

$$\frac{1}{\Theta} = (1 - u)(a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3)$$

avec

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\Theta_0} \\
a_1 &= -\frac{22}{3\Theta_0} + \frac{16}{\Theta_1} - \frac{12}{\Theta_2} + \frac{13}{3\Theta_3} \\
a_2 &= \frac{16}{\Theta_0} - \frac{160}{3\Theta_1} + \frac{64}{\Theta_2} - \frac{32}{\Theta_3} \\
a_3 &= -\frac{32}{3\Theta_0} + \frac{128}{3\Theta_1} - \frac{64}{\Theta_2} + \frac{128}{3\Theta_3}
\end{aligned}$$

et celle de Θ :

$$(2.24) \quad \Theta = \frac{1}{1-u}(b_0 + b_1u + b_2u^2 + b_3u^3)$$

avec

$$\begin{aligned}
(2.25) \quad b_0 &= \Theta_0 \\
b_1 &= \frac{1}{3}(-22\Theta_0 + 27\Theta_1 - 9\Theta_2 + \Theta_3) \\
b_2 &= 16\Theta_0 - 30\Theta_1 + 16\Theta_2 - 2\Theta_3 \\
b_3 &= \frac{1}{3}(-32\Theta_0 + 72\Theta_1 - 48\Theta_2 + 8\Theta_3)
\end{aligned}$$

On aboutit au système différentiel suivant :

$$\begin{aligned}
(2.26) \quad \frac{d\Theta_0}{d\xi} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} (97\Theta_0 + 129\Theta_1 - 31\Theta_2 + 3\Theta_3) &= \\
&\quad \frac{940}{\Theta_0} - \frac{3424}{3} \frac{1}{\Theta_1} + \frac{280}{\Theta_2} - \frac{96}{\Theta_3} \\
\frac{d\Theta_1}{d\xi} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \left(\frac{137}{72}\Theta_0 + \frac{75}{8}\Theta_1 + \frac{43}{8}\Theta_2 - \frac{23}{72}\Theta_3 \right) &= \\
&\quad \frac{133}{6} \frac{1}{\Theta_0} + \frac{244}{9} \frac{1}{\Theta_1} - \frac{139}{3} \frac{1}{\Theta_2} - \frac{4}{\Theta_3} \\
\frac{d\Theta_2}{d\xi} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \left(-\frac{37}{2}\Theta_0 - \frac{45}{2}\Theta_1 + \frac{17}{2}\Theta_2 + \frac{1}{2}\Theta_3 \right) &= \\
&\quad -\frac{532}{3} \frac{1}{\Theta_0} + \frac{688}{3} \frac{1}{\Theta_1} - \frac{52}{\Theta_2} + \frac{16}{3} \frac{1}{\Theta_3} \\
\frac{d\Theta_3}{d\xi} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \left(\frac{177}{8}\Theta_0 + \frac{195}{8}\Theta_1 - \frac{149}{8}\Theta_2 - \frac{41}{8}\Theta_3 \right) &= \\
&\quad \frac{433}{2} \frac{1}{\Theta_0} - \frac{1060}{3} \frac{1}{\Theta_1} + \frac{175}{\Theta_2} - \frac{36}{\Theta_3}
\end{aligned}$$

2.4 Méthode modifiée

2.4.1 Différence avec la méthode de Dorodnitsyn

La forme de l'équation intégrale (2.15) avec les fonctions Θ et $1/\Theta$ sous les

signes d'intégration a conduit Dorodnitsyn à utiliser une approximation de $1/\Theta$ de la forme :

$$\frac{1}{\Theta} = (1 - u) \sum_{m=0}^{N-1} a_m u^m$$

et pour Θ :

$$\Theta = \frac{1}{1 - u} \sum_{m=0}^{N-1} b_m u^m$$

Comme ces deux fonctions ont des formes polynômiales, l'intégration analytique est très simple. Mais, il est évident que la fonction $1/\Theta$ ne coïncide avec l'inverse de la fonction Θ que sur les N bandes $u_n = cste$. La figure 3 nous montre la différence entre $1/\Theta$ et son approximation pour deux calculs de couche limite dans le cas de la similitude interne de Falkner et Skan qui sera détaillée par la suite.

Cependant cette approche dénature le problème en ce sens que le système différentiel à résoudre n'est une approximation de l'équation (2.15) que sur les lignes $u_n = cste$. Pour tester la cohérence de la M.I.R. et sa convergence avec le nombre de bandes, nous proposons donc d'écrire $1/\Theta$ comme suit :

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{1 - u}{\sum_{m=0}^{N-1} b_m u^m}$$

Ainsi le problème reste une approximation de (2.15) sur l'ensemble du domaine d'intégration.

Comme $\int_0^1 \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 f}{du^2}(u) du$ dernier terme de l'équation intégrale (2.15), est nul pour l'approximation à une bande, notre approche ne se distingue de celle de Dorodnitsyn que pour un nombre de bandes strictement supérieur à un.

2.4.2 Systèmes différentiels

Approximation à deux bandes

D'après (2.19) l'expression de $1/\Theta$ est la suivante :

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{1 - u}{\Theta_0(1 - 2u) + u\Theta_1}$$

On obtient le système différentiel en intégrant par des techniques standards, soit :

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \frac{d\Theta_0}{d\xi} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} (9\Theta_0 + 7\Theta_1) &= \frac{42}{\Theta_0} + \frac{48}{\Theta_1 - 2\Theta_0} + \\ &48 \frac{(\Theta_0 - \Theta_1)}{(\Theta_1 - 2\Theta_0)^2} \ln \left(\frac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta_0} \right) \\ \frac{d\Theta_1}{d\xi} + \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} (4\Theta_0 + 6\Theta_1) &= \frac{24}{\Theta_0} + \frac{24}{\Theta_1 - 2\Theta_0} + \\ &24 \frac{(\Theta_0 - \Theta_1)}{(\Theta_1 - 2\Theta_0)^2} \ln \left(\frac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta_0} \right) \end{aligned}$$

Approximation à trois bandes

Avec (2.21) $1/\Theta$ devient :

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{1-u}{b_0 + b_1 u + b_2 u^2}$$

Les expressions de b_0, b_1, b_2 sont toujours celles calculées dans l'approximation de Dorodnitsyn (2.22).

En revanche, le système différentiel se complique. On obtient après de longs et fastidieux calculs :

$$\begin{aligned}
 3 \frac{d\Theta_0}{d\xi} - 4 \frac{d\Theta_1}{d\xi} + 5 \frac{d\Theta_2}{d\xi} &= -\frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} (9\Theta_0 - 4\Theta_1 + 11\Theta_2) + \frac{24}{\Theta_0} \\
 \frac{d\Theta_0}{d\xi} + 2 \frac{d\Theta_1}{d\xi} + 2 \frac{d\Theta_2}{d\xi} &= -\frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} (17\Theta_0 + 24\Theta_1 + 9\Theta_2) + \frac{120}{\Theta_0} - \\
 &\quad 40 \left(\frac{5\Theta_2 - 16\Theta_1 + 9\Theta_0}{\Theta_2 - 4\Theta_1 + 3\Theta_0} \right) \mathcal{H} + \\
 &\quad \left(\frac{40}{\Theta_2 - 4\Theta_1 + 3\Theta_0} \right) \ln \left(\frac{\Theta_0 - 2\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_0} \right) \\
 (2.28) \quad \frac{d\Theta_0}{d\xi} + 4 \frac{d\Theta_1}{d\xi} + \frac{d\Theta_2}{d\xi} &= -\frac{6}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} (7\Theta_0 + 10\Theta_1 + \Theta_2) + \frac{360}{\Theta_0} \\
 &\quad + 80 \left(\frac{5\Theta_2 - 16\Theta_1 + 9\Theta_0}{(\Theta_2 - 4\Theta_1 + 3\Theta_0)^2} \right) \ln \left(\frac{\Theta_0 - 2\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_0} \right) \\
 &\quad - \frac{480}{\Theta_2 - 4\Theta_1 + 3\Theta_0} \\
 &\quad - 80 \left(\frac{13\Theta_2^2 + 160\Theta_1^2 + 45\Theta_0^2 - 88\Theta_2\Theta_1 + 42\Theta_2\Theta_0 - 168\Theta_1\Theta_0}{(\Theta_2 - 4\Theta_1 + 3\Theta_0)^2} \right) \mathcal{H}
 \end{aligned}$$

En posant :

$$\Delta_{3b} = -\frac{9}{4}\Theta_0^2 - 16\Theta_1^2 - \frac{1}{4}\Theta_2^2 + \frac{3}{2}\Theta_0\Theta_2 + 12\Theta_0\Theta_1 + 4\Theta_1\Theta_2$$

on a :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{3b}}} \left(\arctan \frac{5\Theta_2 - 16\Theta_1 + 9\Theta_0}{2\sqrt{\Delta_{3b}}} - \arctan \frac{-\Theta_2 + 8\Theta_1 - 9\Theta_0}{2\sqrt{\Delta_{3b}}} \right)$$

si $\Delta_{3b} > 0$,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\sqrt{-\Delta_{3b}}} \ln \left[\frac{(5\Theta_2 - 16\Theta_1 + 9\Theta_0 - 2\sqrt{-\Delta_{3b}})(-\Theta_2 + 8\Theta_1 - 9\Theta_0 + 2\sqrt{-\Delta_{3b}})}{(5\Theta_2 - 16\Theta_1 + 9\Theta_0 + 2\sqrt{-\Delta_{3b}})(-\Theta_2 + 8\Theta_1 - 9\Theta_0 - 2\sqrt{-\Delta_{3b}})} \right]$$

si $\Delta_{3b} < 0$.

Approximation à quatre bandes

On conserve toujours l'approximation (2.24) de Dorodnitsyn pour la fonction Θ . On a donc pour $1/\Theta$:

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{1-u}{b_0 + b_1u + b_2u^2 + b_3u^3}$$

Les coefficients b_0, b_1, b_2, b_3 sont identiques à ceux calculés avec la première méthode (2.25).

En revanche, pour obtenir le système différentiel, on doit maintenant trouver l'intégrale d'une fonction inverse d'un polynôme du troisième degré. On décompose donc en éléments simples ce polynôme qui admet nécessairement trois racines dans le corps des complexes. Comme les coefficients b_m sont réels, ces racines sont deux à deux conjuguées. Une racine réelle notée α existe donc nécessairement. Elle est calculée numériquement par une méthode de Newton (annexe A). On peut écrire la décomposition en éléments simples de la façon suivante :

$$(2.29) \quad \frac{1}{b_0 + b_1u + b_2u^2 + b_3u^3} = \frac{A}{u - \alpha} + \frac{Bu + C}{b_3u^2 + (b_2 + \alpha b_3)u + (b_1 + \alpha b_2 + \alpha^2 b_3)}$$

avec

$$A = \frac{1}{3\alpha^2 b_3 + 2\alpha b_2 + b_1}$$

$$B = \frac{-b_3}{3\alpha^2 b_3 + 2\alpha b_2 + b_1}$$

$$C = \frac{-2\alpha b_3 - b_2}{3\alpha^2 b_3 + 2\alpha b_2 + b_1}$$

Le système différentiel devient :

$$13 \frac{d\Theta_3}{d\xi} - 18 \frac{d\Theta_2}{d\xi} + 27 \frac{d\Theta_1}{d\xi} - 7 \frac{d\Theta_0}{d\xi} = -\frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} (28\Theta_3 - 33\Theta_2 + 72\Theta_1 - 7\Theta_0) + \frac{90}{\Theta_0}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_3}{d\xi} + \frac{d\Theta_2}{d\xi} + 3 \frac{d\Theta_1}{d\xi} &= -\frac{2}{3u_e} \frac{du_e}{d\xi} (7\Theta_3 + 9\Theta_2 + 45\Theta_1 + 14\Theta_0) \\ &+ \frac{120}{\Theta_0} - 120 [\mathcal{A}(J_0 - J_1) \\ &+ \mathcal{B}(I_1 - I_2) + \mathcal{C}(I_0 - I_1)] \end{aligned}$$

(2.30)

$$\begin{aligned} 4 \frac{d\Theta_3}{d\xi} + 18 \frac{d\Theta_2}{d\xi} + 36 \frac{d\Theta_1}{d\xi} + 5 \frac{d\Theta_0}{d\xi} &= -\frac{3}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} (11\Theta_3 + 39\Theta_2 + 225\Theta_1 + 103\Theta_0) \\ &+ \frac{3780}{\Theta_0} - 7560 [\mathcal{A}(J_0 - 2J_1 + J_2) \\ &+ \mathcal{B}(I_1 - 2I_2 + I_3) + \mathcal{C}(I_0 - 2I_1 + 3I_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta_3}{d\xi} + 9\frac{d\Theta_2}{d\xi} + 27\frac{d\Theta_1}{d\xi} + 5\frac{d\Theta_0}{d\xi} &= -\frac{4}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} (4\Theta_3 + 12\Theta_2 + 180\Theta_1 + 98\Theta_0) \\ &+ \frac{5040}{\Theta_0} - 15120 [\mathcal{A}(J_0 - 3J_1 + 3J_2 - J_3) \\ &+ \mathcal{B}(I_1 - 3I_2 + 3I_3 - I_4) \\ &+ \mathcal{C}(I_0 - 3I_1 + 3I_2 - I_3)] \end{aligned}$$

Les coefficients $I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, J_0, J_1, J_2, J_3$ apparaissent lors de l'intégration du terme

$$\int_0^1 \frac{(1-u)f''(u)}{(b_0 + b_1u + b_2u^2 + b_3u^3)} du$$

dans l'équation intégrale (2.15). En posant :

$$\Delta_{4b} = (b_2 + \alpha b_3)^2 - 4b_3(b_1 + \alpha b_2 + \alpha^2 b_3),$$

les expressions des I_i sont les suivantes :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{du}{b_3u^2 + (b_2 + \alpha b_3)u + (b_1 + \alpha b_2 + \alpha^2 b_3)} \\ \text{si } \Delta_{4b} > 0 &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_{4b}}} \ln \frac{[b_3(\alpha + 2) + b_2 - \sqrt{\Delta_{4b}}] [b_2 + \alpha b_3 + \sqrt{\Delta_{4b}}]}{[b_3(\alpha + 2) + b_2 + \sqrt{\Delta_{4b}}] [b_2 + \alpha b_3 - \sqrt{\Delta_{4b}}]} \\ \text{si } \Delta_{4b} < 0 &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta_{4b}}} \left[\arctan \frac{b_3(\alpha + 2) + b_2}{\sqrt{-\Delta_{4b}}} - \arctan \frac{b_2 + \alpha b_3}{\sqrt{-\Delta_{4b}}} \right] \\ I_1 &= \int_0^1 \frac{udu}{b_3u^2 + (b_2 + \alpha b_3)u + (b_1 + \alpha b_2 + \alpha^2 b_3)} \\ &= \frac{1}{2b_3} \ln \frac{b_1 + (1 + \alpha)b_2 + (1 + \alpha + \alpha^2)b_3}{b_1 + \alpha b_2 + \alpha^2 b_3} - \frac{\alpha b_3 + b_2}{2b_3} I_0 \\ I_2 &= \int_0^1 \frac{u^2 du}{b_3u^2 + (b_2 + \alpha b_3)u + (b_1 + \alpha b_2 + \alpha^2 b_3)} \\ &= \frac{1}{b_3} - \frac{b_1 + \alpha b_2 + \alpha^2 b_3}{b_3} I_0 - \frac{b_2 + \alpha b_3}{b_3} I_1 \\ I_3 &= \int_0^1 \frac{u^3 du}{b_3u^2 + (b_2 + \alpha b_3)u + (b_1 + \alpha b_2 + \alpha^2 b_3)} \\ &= \frac{1}{2b_3} - \frac{b_1 + \alpha b_2 + \alpha^2 b_3}{b_3} I_1 - \frac{b_2 + \alpha b_3}{b_3} I_2 \\ I_4 &= \int_0^1 \frac{u^4 du}{b_3u^2 + (b_2 + \alpha b_3)u + (b_1 + \alpha b_2 + \alpha^2 b_3)} \\ &= \frac{1}{3b_3} - \frac{b_1 + \alpha b_2 + \alpha^2 b_3}{b_3} I_2 - \frac{b_2 + \alpha b_3}{b_3} I_3 \end{aligned}$$

et les coefficients J_i s'écrivent :

$$J_0 = \int_0^1 \frac{du}{u - \alpha} = \ln \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{u du}{u - \alpha} = 1 + \alpha J_0$$

$$J_2 = \int_0^1 \frac{u^2 du}{u - \alpha} = \frac{1}{2} + \alpha J_1$$

$$J_3 = \int_0^1 \frac{u^3 du}{u - \alpha} = \frac{1}{3} + \alpha J_2$$

2.5 Cas test

2.5.1 Solutions de Falkner et Skan

Pour tester la convergence de la M.I.R. appliquée aux équations de la couche limite, Dorodnitsyn utilise le cas simple de l'écoulement autour d'un dièdre étudié par Falkner et Skan (figure 2b).

L'intégration des différents systèmes différentiels (2.18)(2.20)(2.23)(2.26) et (2.27)(2.28)(2.30) pour la méthode modifiée exige des conditions initiales au moins sur chaque bande. Dans le cas des solutions de Falkner-Skan, les conditions initiales dégènèrent. Grâce à la similitude interne, le calcul est possible par la seule donnée de $u(\xi)$ et les systèmes différentiels se transforment en équations algébriques indépendantes de ξ .

En effet, dans le cas de l'écoulement autour d'un dièdre, la vitesse extérieure est en loi de puissance :

$$u_e(x) = \mathcal{K}x^m \quad \text{ou} \quad u_e(\xi) = \mathcal{K}^{\frac{1}{m+1}}(m+1)^{\frac{m}{m+1}}\xi^{\frac{m}{m+1}}$$

et donc

$$\frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} = \frac{\beta}{2\xi} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{2m}{1+m}$$

Le paramètre $\beta\pi$ correspond à l'angle du dièdre (figure 2b). L'intervalle de variation de β est $] -0,199; 2[$. La borne supérieure provient de la géométrie du problème : pour $\beta > 2$ il n'y a plus d'écoulement correspondant. Pour $\beta < -0,199$, la solution de Falkner-Skan n'a plus de sens car la résolution des équations de couche limite n'est valable que si la composante u de la vitesse reste positive. La couche limite décolle dès le point d'arrêt et le coefficient de frottement s'annule. Le cas $\beta = 0$ est l'écoulement autour d'une plaque plane sans incidence et sans gradient longitudinal de pression (solution de Blasius). Si $\beta = 1$, on a une plaque plane placée perpendiculairement à l'écoulement uniforme amont c'est-à-dire pratiquement l'écoulement au voisinage d'un point d'arrêt.

A cause de la similitude interne, la solution du problème ne dépend que d'une seule variable χ :

$$(2.31) \quad \chi = y \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}} = \frac{\eta}{\sqrt{2\xi}}$$

En posant :

$$(2.32) \quad \Phi'(\chi) = \frac{\tilde{u}(x, y)}{u_e(x)}$$

les équations (2.5)(2.6) se transforment pour aboutir à l'équation différentielle de Falkner et Skan.

$$(2.33) \quad \Phi''' + \Phi\Phi'' + \beta(1 - \Phi'^2) = 0$$

avec comme conditions aux limites : $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$ et $\Phi'(\infty) = 1$.

La vitesse u est une fonction uniquement de χ à cause de la similitude interne et on obtient pour Θ :

$$\Theta^{-1} = \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \frac{du}{d\chi}$$

Quand u est constant, χ l'est aussi et on peut écrire sur chaque ligne $u_n = cste$:

$$(2.34) \quad \Theta_n = A_n \sqrt{\xi} \quad \text{et} \quad \frac{d\Theta_n}{d\xi} = \frac{A_n}{2\sqrt{\xi}}$$

où les A_n sont des constantes.

Les différents systèmes différentiels des paragraphes 2.3.2 et 2.4.2 se transforment en systèmes algébriques non linéaires grâce à (2.34).

Ainsi pour la méthode de Dorodnitsyn, on obtient :

- Approximation à une bande.

$$(1 + 3\beta)A_0 = \frac{4}{A_0}$$

- Approximation à deux bandes.

$$(1 + 9\beta)A_0 + 7\beta A_1 = \frac{68}{A_0} - \frac{64}{A_1}$$

$$4\beta A_0 + (1 + 6\beta)A_1 = \frac{40}{A_0} - \frac{32}{A_1}$$

- Approximation à trois bandes.

$$\left(1 + \frac{67}{2}\beta\right) A_0 + 40\beta A_1 - \frac{7}{2}\beta A_2 = \frac{450}{A_0} - \frac{468}{A_1} + \frac{18}{A_2}$$

$$\frac{67}{2}\beta A_0 + \left(1 + \frac{28}{3}\beta\right) A_1 + \frac{13}{12}\beta A_2 = \frac{78}{A_0} - \frac{51}{A_1} - \frac{24}{A_2}$$

$$-\frac{83}{6}\beta A_0 - \frac{52}{3}\beta A_1 + \left(1 + \frac{31}{6}\beta\right) A_2 = \frac{198}{A_0} + \frac{240}{A_1} - \frac{30}{A_2}$$

- Approximation à quatre bandes.

$$\begin{aligned}
 (1 + 97\beta)A_0 + 129\beta A_1 - 31\beta A_2 + 3\beta A_3 &= \frac{1880}{A_0} - \frac{6848}{A_1} \\
 &\quad + \frac{560}{A_2} - \frac{192}{A_3} \\
 \frac{137}{72}\beta A_0 + \left(1 + \frac{75}{8}\beta\right)A_1 + \frac{43}{8}\beta A_2 - \frac{23}{72}\beta A_3 &= \frac{133}{3A_0} + \frac{488}{9A_1} \\
 &\quad - \frac{278}{3A_2} - \frac{8}{A_3} \\
 (2.35) \quad -\frac{37}{2}\beta A_0 - \frac{45}{2}\beta A_1 + \left(1 + \frac{17}{2}\beta\right)A_2 + \frac{1}{2}\beta A_3 &= -\frac{1064}{3A_0} + \frac{1376}{3A_1} \\
 &\quad - \frac{104}{A_2} + \frac{16}{3A_3} \\
 \frac{177}{8}\beta A_0 + \frac{195}{8}\beta A_1 - \frac{149}{8}\beta A_2 + \left(1 + \frac{41}{8}\beta\right)A_3 &= \frac{443}{A_0} - \frac{2120}{3A_1} \\
 &\quad + \frac{350}{A_2} - \frac{72}{A_3}
 \end{aligned}$$

La méthode modifiée du paragraphe 2.4.2 donne :

- Approximation à deux bandes.

$$\begin{aligned}
 (1 + 9\beta)A_0 + 7\beta A_1 &= \frac{84}{A_0} + \frac{96}{A_1 - 2A_0} + 96 \frac{A_0 - A_1}{(A_1 - 2A_0)^2} \ln \left(\frac{A_1 - A_0}{A_0} \right) \\
 4\beta A_0 + (1 + 6\beta)A_1 &= \frac{48}{A_0} - \frac{48}{A_1 - 2A_0} + 48 \frac{A_0 - A_1}{(A_1 - 2A_0)^2} \ln \left(\frac{A_1 - A_0}{A_0} \right)
 \end{aligned}$$

- Approximation à trois bandes.

$$\begin{aligned}
 3(1 + 3\beta)A_0 - 4(1 + \beta)A_1 + (5 + 11\beta)A_2 &= \frac{48}{A_0} \\
 (1 + 17\beta)A_0 + 2(1 + 12\beta)A_1 + (2 + 9\beta)A_2 &= \frac{240}{A_0} \\
 + \left(\frac{80}{A_2 - 4A_1 + 3A_0} \right) \ln \left(\frac{A_0 - 2A_1 + A_2}{A_0} \right) \\
 - 80 \left(\frac{5A_2 - 16A_1 + 9A_0}{A_2 - 4A_1 + 3A_0} \right) \mathcal{H} \\
 (1 + 42\beta)A_0 + 4(1 + 15\beta)A_1 + (1 + 6\beta)A_2 &= \frac{720}{A_0} \\
 + 160 \left(\frac{5A_2 - 16A_1 + 9A_0}{(A_2 - 4A_1 + 3A_0)^2} \right) \ln \left(\frac{A_0 - 2A_1 + A_2}{A_0} \right) \\
 - \frac{960}{A_2 - 4A_1 + 3A_0}
 \end{aligned}$$

$$-160 \left(\frac{13A_2^2 + 160A_1^2 + 45A_0^2 - 88A_2A_1 + 42A_2A_0 - 168A_1A_0}{(A_2 - 4A_1 + 3A_0)^2} \right) \mathcal{H}$$

• Approximation à quatre bandes.

$$(13 + 28\beta)A_3 - (18 + 33\beta)A_2 + (27 + 72\beta)A_1 - (7 + 7\beta)A_0 = \frac{180}{A_0}$$

$$\begin{aligned} (1 + \frac{14}{3}\beta)A_3 + (1 + 6\beta)A_2 + (3 + 30\beta)A_1 + \frac{28}{3}\beta A_0 = \\ \frac{240}{A_0} - 240 [\mathcal{A}(J_0 - J_1) + \mathcal{B}(I_1 - I_2) + \mathcal{C}(I_0 - I_1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4 + 33\beta)A_3 + (18 + 117\beta)A_2 + (36 + 675\beta)A_1 + (5 + 309\beta)A_0 = \\ \frac{7560}{A_0} - 15120 [\mathcal{A}(J_0 - 2J_1 + J_2) + \mathcal{B}(I_1 - 2I_2 + I_3) \\ + \mathcal{C}(I_0 - 2I_1 + 3I_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + 16\beta)A_3 + (9 + 48\beta)A_2 + (27 + 720\beta)A_1 + (5 + 392\beta)A_0 = \\ \frac{10080}{A_0} - 30240 [\mathcal{A}(J_0 - 3J_1 + 3J_2 - J_3) + \mathcal{B}(I_1 - 3I_2 + 3I_3 - I_4) \\ + \mathcal{C}(I_0 - 3I_1 + 3I_2 - I_3)] \end{aligned}$$

Dans les approximations à trois et quatre bandes de la méthode modifiée, les expressions de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{H}, I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, J_0, J_1, J_2, J_3$ sont identiques à celles calculées au paragraphe 2.4.2 en substituant les A_n aux Θ_n .

2.5.2 Comparaison du calcul numérique avec les solutions de Falkner et Skan

Pour chaque approximation, la quantité la plus significative est le coefficient A_0 . Il est directement relié au coefficient de frottement à la paroi par :

$$(2.36) \quad C_f = \frac{\tau_0}{1/2\rho u_e^2} = \frac{2\nu}{u_e^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \Big|_{y=0} = 2\sqrt{\nu} \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0}$$

c'est-à-dire dans le cas de Falkner-Skan,

$$C_f = \sqrt{\frac{2\nu}{\xi}} \Phi''(0)$$

et pour les solutions de la M.I.R. :

$$C_f = \frac{2}{A_0} \sqrt{\frac{\nu}{\xi}}$$

Ce résultat est indépendant du nombre de bandes de l'approximation.

L'intégration numérique de l'équation de Falkner-Skan (2.33) ne pose pas de problèmes. On obtient facilement $\Phi''(0)$ et donc la valeur exacte de A_0 :

$$A_{0exact} = \frac{\sqrt{2}}{\Phi''(0)}$$

On peut donc tester la précision des différentes approximations de la M.I.R. en comparant les résultats obtenus avec les solutions exactes du problème. L'erreur relative est définie par :

$$(2.37) \quad E_r = \left| \frac{A_{0M.I.R.} - A_{0exact}}{A_{0exact}} \right|$$

Tous les systèmes algébriques sont résolus par une méthode de Newton (annexe A). Les résultats obtenus sont les suivants :

Approximation à une bande

β	A_0 exact	A_0 1 bande	E_r en %
-0,190	16,50157270	3,04997141	81,517
-0,150	6,53634499	2,69679945	58,741
-0,145	6,19490330	2,66076042	57,049
-0,140	5,89904461	2,62622866	55,482
-0,130	5,40967925	2,56073760	52,663
-0,120	5,01920330	2,50000000	50,191
-0,100	4,42952521	2,39045722	46,033
-0,050	3,53268472	2,16930458	38,593
0,000	3,01152804	2,00000000	33,588
0,250	1,93214184	1,51185789	21,752
0,500	1,52446261	1,26491106	17,025
0,750	1,29691823	1,10940039	14,458
1,000	1,14735332	1,00000000	12,842
1,250	1,03962661	0,91766294	11,731
1,500	0,95734530	0,85280287	10,920
1,750	0,89187669	0,80000000	10,301
2,000	0,83819245	0,75592895	9,814

Comme on le constate, les résultats obtenus avec cette approximation sont très grossiers.

Approximation à deux bandes

β	A_0 exact	A_0 2 bandes Dorodnitsyn	E_r en %	A_0 2 bandes modifiée	E_r en %
-0,190	16,50157270				
-0,150	6,53634499				
-0,100	6,19490330				
-0,050	3,53268472	3,92919795	11,295	3,62586726	18,143
0,000	3,01152804	3,15539240	4,777	3,02876160	0,572
0,250	1,93214184	1,93820165	0,314	1,86057201	3,704
0,500	1,52446261	1,52373377	0,048	1,45582345	4,502
0,750	1,29691823	1,29558670	0,103	1,23543294	4,740
1,000	1,14735332	1,14617125	0,103	1,09195790	4,828
1,250	1,03962661	1,03867292	0,092	0,98907944	4,862
1,500	0,95734530	0,95659100	0,079	0,91068255	4,874
1,750	0,89187669	0,89128132	0,067	0,84838363	4,876
2,000	0,83819245	0,83772144	0,056	0,79733524	4,874

Dans le cas de l'approximation à deux bandes, la technique de Dorodnitsyn est particulièrement précise pour les cas où le gradient de pression est négatif ($\beta > 0$). La méthode modifiée donne une erreur relative sensiblement constante mais plus importante sauf pour le cas de la plaque plane sans incidence (figure 4a).

On peut donc en conclure que la méthode de Dorodnitsyn à deux bandes profite d'un heureux concours de circonstances. En effet, l'approximation correcte des équations (2.15) donne dans l'ensemble un moins bon résultat pour A_0 . Cela signifie que l'approximation de Θ par un polynôme du deuxième degré est une moins bonne approximation de la solution que ne le laissent penser les résultats de Dorodnitsyn. Mais en ne liant l'expression de $1/\Theta$ à celle de Θ que sur les lignes $u = cste$, Dorodnitsyn atténue involontairement l'effet à la paroi de cette mauvaise approximation.

De plus, on trouve le décollement à environ $\beta = -0,095$ pour les deux techniques et donc beaucoup plus tôt que dans la théorie de Falkner-Skan. La valeur minimale de β obtenue confirme donc qu'un développement du deuxième degré pour Θ ne peut approximer correctement les cas de forts gradients de pression positifs.

Approximation à trois bandes

Le degré trois de l'approximation de Θ et de $1/\Theta$ semble nettement mieux convenir aux cas de gradient de pression positifs $\beta < 0$ car la division de la couche limite en trois bandes permet d'obtenir le décollement à une valeur de β très proche de la limite théorique $\beta = -0,199$.

De façon générale, les erreurs relatives des deux techniques sont faibles pour $\beta > 0$ ce qui correspond aux gradients de pression négatifs (figure 4b). Par contre pour les cas $\beta < 0$, l'erreur augmente rapidement surtout à l'approche du décollement. Contrairement à l'approximation à deux bandes, la méthode modifiée est ici deux fois plus précise que celle de Dorodnitsyn. Notre technique qui utilise l'approximation

correcte de $1/\Theta$ commence donc à être plus efficace que celle de Dorodnitsyn qui connaît des résultats parfois aléatoires comme pour $\beta = -0,05$.

β	A_0 exact	A_0 3 bandes Dorodnitsyn	E_r en %	A_0 3 bandes modifiée	E_r en %
-0,190	16,50157270	7,01626849	57,481	8,77196322	46,841
-0,150	6,53634499	5,53344210	15,343	6,10643919	6,577
-0,145	6,19490330	5,38255122	13,113	5,86549066	5,317
-0,140	5,89904461	5,23846757	11,198	5,64329284	4,335
-0,130	5,40967925	4,96977834	8,131	5,24969281	2,957
-0,120	5,01920330	4,72544714	5,852	4,91446224	2,086
-0,100	4,42952521	4,30188346	2,881	4,37900990	1,140
-0,050	3,53268472	3,53392970	0,035	3,51904066	0,386
0,000	3,01152804	3,03313877	0,718	3,00545504	0,202
0,250	1,93214184	1,94215921	0,518	1,93033441	0,094
0,500	1,52446261	1,52867359	0,276	1,52329907	0,076
0,750	1,29691823	1,29911933	0,170	1,29612707	0,061
1,000	1,14735332	1,14868381	0,116	1,14679471	0,049
1,250	1,03962661	1,04051335	0,085	1,03921832	0,039
1,500	0,95734530	0,95797802	0,066	0,95703776	0,032
1,750	0,89187669	0,89235101	0,053	0,89163902	0,027
2,000	0,83819245	0,83856138	0,044	0,83800473	0,022

Approximation à quatre bandes

Lors de la comparaison de nos résultats de l'approximation à quatre bandes avec ceux de la méthode de Dorodnitsyn, nous avons été confrontés à un fait inattendu. D'une part nos résultats étaient plus proches de ceux de Falkner et Skan que ceux calculés avec les équations de Dorodnitsyn, mais d'autre part ils étaient souvent moins bons que ceux publiés par Dorodnitsyn. En d'autres termes, les solutions que nous avons calculées avec les équations de Dorodnitsyn (2.35) étaient différentes de celles publiées par Dorodnitsyn lui-même. Après avoir effectué de multiples vérifications, modifié les méthodes de résolution, nous sommes parvenus à la conclusion que les résultats publiés en [2] [3] ne pouvaient être solutions des équations de Dorodnitsyn. En effet, quoique Dorodnitsyn ne publie que les valeurs de A_0 , il est possible de montrer numériquement que ces valeurs publiées ne sont pas solutions des équations (2.35). Il suffit pour cela de fixer A_0 et β et de résoudre trois des équations quelconques (2.35). On obtient alors des valeurs A_1, A_2, A_3 qui ne sont pas solutions de la quatrième équation pour la valeur fixée de A_0 . Il arrive même qu'on ne trouve pas de solution du tout. Il semble donc que les résultats publiés en [2] [3] soient erronés et trop optimistes quant à la bonne convergence de la méthode de Dorodnitsyn. Nous présentons donc trois types de résultats : ceux publiés dans [2] [3], ceux obtenus avec la technique de Dorodnitsyn et ceux calculés avec la méthode modifiée (figure 4c).

β	A_0 publié 4 bandes Dorodnitsyn	E_r en %	A_0 4 bandes Dorodnitsyn	E_r en %	A_0 4 bandes modifiée	E_r en %
-0,190	11,74536058	28,822				
-0,150	6,66711114	2,000				
-0,145			7,70952563	24,449	6,27781642	1,338
-0,140			6,72597461	14,018	5,95997584	1,032
-0,130			5,78493247	6,936	5,44080151	0,575
-0,120			5,22312227	4,063	5,03356031	0,286
-0,100	4,49337228	1,441	4,50591947	1,724	4,42940491	0,003
-0,050			3,54723823	0,412	3,52736768	0,150
0,000	3,01286493	0,044	3,01851327	0,232	3,00740710	0,137
0,250			1,93504458	0,150	1,93091401	0,064
0,500	1,52471564	0,016	1,52580865	0,088	1,52378183	0,045
0,750			1,29761306	0,056	1,29647011	0,035
1,000	1,14726263	0,008	1,14775270	0,035	1,14703725	0,028
1,250			1,03987696	0,024	1,03939390	0,022
1,500	0,95721260	0,014	0,95751335	0,018	0,95716836	0,018
1,750			0,89199582	0,013	0,89173862	0,015
2,000	0,83807544	0,014	0,83828073	0,011	0,83808240	0,013

Mis à part les résultats publiés, les deux méthodes trouvent le décollement aux environs de $\beta = -0,145$. Elles sont néanmoins toutes les deux plus précises que les approximations à trois bandes. La méthode modifiée donne maintenant une valeur de A_0 très proche de la valeur exacte même dans le cas où le gradient de pression est positif ($\beta < 0$) alors que la technique de Dorodnitsyn reste très grossière.

Profils de vitesse

Le coefficient de frottement pariétal n'est pas l'unique paramètre caractérisant la précision et la convergence de la M.I.R. On peut également comparer les profils de vitesse qui sont eux aussi parfaitement connus dans le cas de Falkner et Skan.

Que cela soit pour la technique de Dorodnitsyn ou la nôtre, on obtient le profil de vitesse en intégrant la relation :

$$\frac{\partial \eta}{\partial u} = \Theta(u)$$

Comme pour les deux méthodes, on a :

$$\Theta(u) = \frac{1}{1-u} \sum_{m=0}^{N-1} b_m u^m$$

on aboutit facilement à :

$$\eta(u) = - \left(\sum_{m=0}^{N-1} b_m \right) \ln(1-u) - \sum_{m=1}^{N-1} \left(\sum_{l=m}^{N-1} b_l \right) \frac{u^m}{m}$$

soit pour le cas de l'approximation à quatre bandes :

$$\eta(u) = -(b_0 + b_1 + b_2 + b_3) \ln(1 - u) - (b_1 + b_2 + b_3)u - (b_2 + b_3) \frac{u^2}{2} - b_3 \frac{u^3}{3}$$

Les expressions de b_n sont celles obtenues en substituant dans (2.24) les Θ_n par les A_n . On peut alors comparer les profils de vitesse obtenus pour différentes valeurs de β en fonction du nombre de bandes (figures 5 et 6). Comme on le remarque, les profils calculés avec la M.I.R. correspondent à ceux trouvés par Falkner et Skan pour $\beta > 0$ (figure 5) et diffèrent légèrement pour les cas de gradient de pression positif (figure 6). De plus ils ne sont pas ou peu modifiés avec l'augmentation du nombre de bandes.

Le fait que la méthode modifiée présente ce défaut qui apparaît également dans celle de Dorodnitsyn, montre que le problème provient de la modélisation de Θ . Ceci justifie aussi l'impossibilité de calculer les cas de gradient de pression positif jusqu'à $\beta = -0,19$ pour $N = 2$ et $N = 4$. En effet, pour un nombre faible de bandes, il est facile de montrer analytiquement que la forme choisie, est incompatible avec l'équation de Falkner-Skan (2.33). En guise d'illustration, prenons le cas le plus simple de la M.I.R. à une bande où les deux méthodes s'identifient. On modélise le gradient de vitesse dans la couche limite par :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \frac{du}{d\chi} = \frac{(1-u)}{b_0}$$

Ce qui correspond à l'équation différentielle suivante :

$$\Phi'' + \frac{\sqrt{2\xi}}{b_0} \Phi' = \frac{\sqrt{2\xi}}{b_0}$$

qui s'intègre facilement pour obtenir :

$$u(\chi) = \Phi' = 1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{2\xi}\chi}{b_0}\right)$$

et qui n'est manifestement pas solution de (2.33). On voit que la modélisation initiale de Θ conduit à une famille de solutions numériques qui exclut certaines solutions exactes des équations de Prandtl.

2.6 Conclusion et perspectives

2.6.1 Performances de la M.I.R.

L'amélioration proposée dans ce chapitre augmente la précision du calcul. De plus, comme le montre la figure 7, notre méthode converge de façon progressive lorsque le nombre de bandes augmente alors que ce n'est pas toujours le cas de celle de Dorodnitsyn, souvent meilleure à deux bandes qu'à trois. De même, pour le cas de la plaque plane ($\beta = 0$), le résultat est plus précis à trois qu'à quatre bandes.

D'une manière générale, les deux techniques de M.I.R. à quatre bandes sont largement suffisantes pour les cas où $\beta \geq -0,14$ en ce qui concerne le coefficient de frottement à la paroi ($E_r \leq 1\%$ pour la technique modifiée). Grâce à son exceptionnelle rapidité et à sa précision, la méthode modifiée est attrayante si on ne s'intéresse qu'aux valeurs pariétales. En revanche, il est exclu de demander ces méthodes, avec ce type d'approximation, une description fine de l'écoulement au sein de la couche limite, comme le montre l'étude des profils de vitesse pour les cas où $\beta < -0,14$.

D'autres évolutions de la M.I.R. ont été étudiées. Fletcher et Holt dans [8] proposent des fonctions de poids de la forme :

$$f_n = \sum_{l=1}^n a_l (1-u)^l$$

qui ont l'avantage grâce à un choix convenable des a_l d'être orthogonales. Cela permet d'atteindre des ordres d'approximations plus grands. Pour tester leur méthode sur les solutions de Falkner et Skan, ils intègrent les systèmes différentiels en $\frac{d\Theta}{d\xi}$ avec comme conditions initiales un profil en loi de puissance au lieu de résoudre les systèmes algébriques. Les résultats publiés par ces auteurs concernent exclusivement le coefficient de frottement à la paroi. Comme leur méthode ne remet pas en cause la modélisation initiale de $1/\Theta$, on comprend pourquoi ils s'abstiennent de présenter les profils de vitesse. En effet, malgré le très grand nombre de bandes possibles avec leur technique (jusqu'à $N = 14$), il n'est pas possible de converger vers la solution de Falkner et Skan pour les raisons mises en évidence dans ce chapitre.

2.6.2 Nouvelle forme d'approximation

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe sur les profils de vitesse, il faut éviter de modéliser $1/\Theta$ d'une façon rigide qui aboutit à une famille réduite de solutions en forme exponentielle de l'équation :

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1-u}{\sum_{m=0}^{N-1} b_m u^m}$$

Le problème vient du choix de la modélisation de $1/\Theta$ en $(1-u)/\mathcal{P}(u)$. La forme $(1-u)\mathcal{P}(u)$ est plus générale et peut approximer n'importe quelle fonction continue bornée entre 0 et 1 ce qui n'est pas le cas pour les approximations précédentes. Il semble donc préférable de conserver cette unique approximation et on aboutit à une troisième technique d'application de la M.I.R. aux équations de Prandtl.

On écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Theta} &= (1-u) \sum_{m=0}^{N-1} a_m u^m \\ \Theta &= \frac{1}{(1-u) \sum_{m=0}^{N-1} a_m u^m} \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de repartir des équations intégrales (2.15) pour obtenir de nouveaux systèmes différentiels. Cette technique complique encore plus l'intégration

analytique des équations (2.15) que la méthode modifiée mais avec beaucoup de patience, nous obtenons, dans le cas de l'approximation à deux bandes, le nouveau système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\Theta_1^2(\Theta_1 - 6\Theta_0)}{2(2\Theta_0 - \Theta_1)^2(4\Theta_0 - \Theta_1)} + \frac{\Theta_1^2(2\Theta_0 + \Theta_1)}{4(2\Theta_0 + \Theta_1)^3} \ln \left(\frac{4\Theta_0 - \Theta_1}{\Theta_1} \right) \right\} \frac{d\Theta_0}{d\xi} + \\ & \left\{ \frac{4\Theta_0^3}{(2\Theta_0 - \Theta_1)^2(4\Theta_0 - \Theta_1)} - \frac{\Theta_0^2\Theta_1}{(2\Theta_0 + \Theta_1)^3} \ln \left(\frac{4\Theta_0 - \Theta_1}{\Theta_1} \right) \right\} \frac{d\Theta_1}{d\xi} = \\ & - \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \frac{\Theta_0\Theta_1}{2(2\Theta_0 - \Theta_1)} \left\{ 1 + \frac{4\Theta_0 - 3\Theta_1}{2(2\Theta_0 - \Theta_1)} \ln \left(\frac{4\Theta_0 - \Theta_1}{\Theta_1} \right) \right\} + \frac{1}{\Theta_0} \\ & \left\{ - \frac{3\Theta_0\Theta_1^2}{2(2\Theta_0 - \Theta_1)^3} + \frac{\Theta_1^2(8\Theta_0^2 - \Theta_1^2 + 4\Theta_0\Theta_1)}{4(2\Theta_0 + \Theta_1)^4} \ln \left(\frac{4\Theta_0 - \Theta_1}{\Theta_1} \right) \right\} \frac{d\Theta_0}{d\xi} + \\ & \left\{ \frac{\Theta_0^2(\Theta_0 + \Theta_1)}{(2\Theta_0 - \Theta_1)^3} + \frac{\Theta_0^2\Theta_1(\Theta_1 - 8\Theta_0)}{4(2\Theta_0 + \Theta_1)^4} \ln \left(\frac{4\Theta_0 - \Theta_1}{\Theta_1} \right) \right\} \frac{d\Theta_1}{d\xi} = \\ & \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \frac{\Theta_0\Theta_1}{(2\Theta_0 - \Theta_1)^2} \left\{ \Theta_0 - \Theta_1 - \frac{16\Theta_0^2 + 3\Theta_1^2 - 16\Theta_0\Theta_1}{4(2\Theta_0 - \Theta_1)} \ln \left(\frac{4\Theta_0 - \Theta_1}{\Theta_1} \right) \right\} \\ & + \frac{2}{\Theta_0} - \frac{4\Theta_0 + \Theta_1}{3\Theta_0\Theta_1} \end{aligned}$$

Dans le cas particulier de l'écoulement autour d'un dièdre, grâce à la similitude interne, ce système différentiel se simplifie et on obtient les deux équations algébriques :

$$\begin{aligned} & \left\{ - \frac{A_1}{2(2A_0 - A_1)} + \frac{4A_0 - 3A_1}{2(2A_0 - A_1)} \beta \right\} \ln \left(\frac{4A_0 - A_1}{A_1} \right) + 1 + \beta = \\ & \frac{4(2A_0 - A_1)}{A_0^2 A_1} \\ & \left\{ \frac{-A_1^3 - 8A_0^2 A_1 + 6A_0 A_1^2}{8(2A_0 - A_1)^2} + \frac{16A_0^2 + 3A_1^2 - 16A_0 A_1}{4(2A_0 - A_1)} \beta \right\} \ln \left(\frac{4A_0 - A_1}{A_1} \right) + \\ & \frac{A_0}{2} - \beta(A_0 - A_1) = \frac{(2A_0 - A_1)^2(-8A_0 + 10A_1)}{3A_0^2 A_1^2} \end{aligned}$$

Elles sont résolues par la méthode de Newton comme pour les systèmes précédents (annexe A).

Contrairement aux deux techniques précédentes, cette approximation à deux bandes permet d'obtenir le point de décollement vers $\beta = -0,19$ comme le prévoit la théorie de Falkner et Skan. Mais comparant ces résultats avec ceux du premier tableau du paragraphe 2.5.2, on constate que l'on a perdu de la précision sur le coefficient de frottement pariétal pour les cas $\beta > 0$ par rapport à la méthode de Dorodnitsyn. Par contre, cette nouvelle technique est plus précise que celle proposée au paragraphe 2.4.1.

β	A_0 exact	A_0 calculé	E_r en %
-0,190	16,50157270	13,24536385	19,733
-0,150	6,53634499	5,80572108	11,177
-0,100	4,42952521	4,14963042	6,319
-0,050	3,53268472	3,38078061	4,230
0,000	3,01152804	2,91473846	3,214
0,250	1,93214184	1,90626621	1,339
0,500	1,52446261	1,51209404	0,811
0,750	1,29691823	1,28953890	0,569
1,000	1,14735332	1,14239816	0,432
1,250	1,03962661	1,03604414	0,344
1,500	0,95734530	0,95462073	0,284
1,750	0,89187669	0,88972672	0,241
2,000	0,83819245	0,83644766	0,208

La figure 8 présente les profils de vitesse obtenus avec cette technique. Bien qu'ils diffèrent légèrement de la solution exacte pour $\beta < 0$, on arrive néanmoins à les calculer ce qui n'était pas le cas avec les deux autres méthodes.

Il faudrait donc essayer les cas à trois et quatre bandes pour confirmer cette amélioration. En effet, les approximations à trois et quatre bandes doivent nécessairement s'approcher encore plus près des profils de Falkner-Skan puisque la forme retenue $(1-u)\mathcal{P}(u)$ du développement de $1/\Theta$ peut approximer toute solution continue pour $u \in [0, 1[$ c'est-à-dire pour $\eta \in [0, +\infty[$. Le problème consiste donc à calculer les deux premiers termes des équations intégrales (2.15), mais une fois ce travail effectué, on peut aboutir à une technique rapide et précise d'intégration des équations de la couche limite bidimensionnelle stationnaire laminaire incompressible.

2.6.3 Variation de la hauteur de bande

Une autre perspective possible, toujours dans le but d'étudier le comportement de la M.I.R., consiste à paramétrer la hauteur des bandes. Cela complique un peu les calculs mais comme on dispose dans le cas de Falkner-Skan des solutions exactes, on peut étudier les variations de la précision suivant les largeurs des bandes pour les deux méthodes.

Dans le cas de la technique de Dorotnitsyn à deux bandes, cela reste assez simple. On choisit $u_0 = 0$ et $u_1 = d$. Les expressions de Θ et de $1/\Theta$ s'écrivent alors :

$$\Theta = \frac{1}{1-u} \left[\Theta_0 + \frac{(1-d)\Theta_1 - \Theta_0}{d} u \right]$$

$$\frac{1}{\Theta} = (1-u) \left[\frac{1}{\Theta_0} + \left(\frac{1}{d(1-d)\Theta_1} - \frac{1}{d\Theta_0} \right) u \right]$$

et on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} (3d-2)\frac{d\Theta_0}{d\xi} + 2(1-d)\frac{d\Theta_1}{d\xi} &= -\frac{1}{u_e}\frac{du_e}{d\xi} [(9d-5)\Theta_0 + 5(1-d)\Theta_1] + \frac{6d}{\Theta_0} \\ (2d-1)\frac{d\Theta_0}{d\xi} + (1-d)\frac{d\Theta_1}{d\xi} &= -\frac{1}{u_e}\frac{du_e}{d\xi} [2(8d-3)\Theta_0 + 6(1-d)\Theta_1] \\ &\quad + \frac{12d+4}{\Theta_0} - \frac{4}{(1-d)\Theta_1} \end{aligned}$$

Dans le cas des solutions à similitude interne, ce système dégénère et on aboutit aux deux équations algébriques :

$$\begin{aligned} (3d-2)A_0 + 2(1-d)A_1 &= -\beta [(9d-5)A_0 + 5(1-d)A_1] + \frac{12d}{A_0} \\ (2.38) \quad (2d-1)A_0 + (1-d)A_1 &= -\beta [2(8d-3)A_0 + 6(1-d)A_1] \\ &\quad + \frac{24d+8}{A_0} - \frac{8}{(1-d)A_1} \end{aligned}$$

Après résolution par la technique de Newton de (2.38), on peut tracer l'erreur relative E_r de la méthode définie par (2.37) en fonction du paramètre d . Comme on peut le constater sur la figure 9, E_r est minimale pour différentes valeurs de d suivant l'angle du dièdre $\beta\pi$. Il faudrait appliquer cette variation de hauteur de bande à l'approximation à deux bandes de la méthode modifiée puis sur les systèmes à trois et quatre bandes. Regarder si on retrouve un comportement similaire et essayer de trouver un critère de minimisation de l'erreur en fonction par exemple de β ou du profil initial de vitesse. De plus, il faudrait voir comment appliquer cela dans les cas d'écoulements non auto semblables.

D'autres perspectives sont envisageables. On peut, par exemple, étudier le cas tridimensionnel avec la M.I.R. en essayant de résoudre les équations de la couche limite incompressible sur les surfaces de courant. De même, il serait intéressant d'envisager le cas turbulent qui a été traité avec la méthode d'orthogonalisation des fonctions f_n par Fletcher et Holt [8]. Finalement, on pourrait envisager d'appliquer cette technique au problème du 2.6.2 .

L'ensemble des coefficients A_n pour les différentes méthodes résolues dans ce chapitre sont détaillés dans l'annexe B suivant le type d'approximation.

Partie II

Problème des ondes de choc détachées

Chapitre 3

Equations générales

3.1 Introduction

Le problème du calcul d'ondes de choc détachées se pose pour les engins à nez arrondis volant en régime supersonique. En fait, l'époussetage est une des meilleures solutions pour faire face aux problèmes posés par l'évacuation des flux de chaleur importants qui règnent dans cette partie de l'obstacle à cause des frottements et de la vitesse élevée. La connaissance de l'écoulement autour du corps épousseté est donc primordiale dans la conception de véhicule supersonique ou hypersonique. Elle a, de ce fait, suscité de nombreux calculs (dissipation, couche limite, ...).

Mathématiquement, l'écoulement supersonique autour d'un corps épousseté est un problème aux limites pour un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires de type mixte elliptique-hyperbolique. Ce changement de nature est la principale difficulté du problème. Dans tout le domaine subsonique le problème est elliptique. Tous les points de cette région sont interdépendants. Ce caractère s'étend dans la partie supersonique limitée par la ligne sonique et les caractéristiques limites qui sont les lignes de Mach tangentes à la ligne sonique. On sait que la forme de ces caractéristiques dépend de la géométrie de l'obstacle et du nombre de Mach amont [10] (figure 10). Le caractère transsonique de cette région doit être pris en compte : en effet, une perturbation dans ce domaine affecte non seulement la forme de la ligne sonique mais aussi toute la région subsonique. Au delà de la zone transsonique, l'écoulement est supersonique et le problème devient hyperbolique. On peut toujours le calculer par une méthode de caractéristiques dès que les conditions sur la ligne sonique et sur les caractéristiques limites sont connues. L'efficacité du calcul de tels époussetages dépend donc principalement du traitement des parties sub et transsoniques.

En plus du caractère mixte de l'écoulement, une autre difficulté surgit du fait qu'une des frontières n'est pas connue a priori. En effet, la position du choc devant l'obstacle doit être déterminée par le calcul.

Plusieurs types d'approches ont été utilisés pour résoudre le problème de l'onde de choc détachée. On distingue trois idées principales.

- **Les méthodes stationnaires directes :**

La méthode des relations intégrales se classe dans cette catégorie. elle est du type "shock fitting". La donnée est la forme géométrique de l'obstacle. On résoud les équations d'Euler stationnaires. Il faut appliquer les conditions aux limites sur un choc dont la forme est inconnue.

- **Les méthodes instationnaires directes :**

L'idée de base des méthodes instationnaires consiste à partir d'une situation initiale définie arbitrairement dans tout le domaine d'intégration et à lui appliquer les équations de l'écoulement instationnaire pour en suivre l'évolution dans le temps. L'obstacle et la vitesse infinie amont restant fixes. La solution tend alors asymptotiquement vers l'état stationnaire. Ces méthodes s'apparentent aux méthodes de relaxation de Southwell et la résolution du système instationnaire est en général effectuée par une méthode de différences finies.

- **Les méthodes inverses :**

Elles supposent la forme du choc connue et cherchent l'obstacle correspondant. On a donc toutes les conditions aux limites connues sous une forme classique de Cauchy. Elles utilisent alors des développements analytiques pour déterminer l'écoulement et la paroi de l'obstacle. Ces méthodes ont deux désavantages. Le premier est d'ordre mathématique : il y a des difficultés de convergence car on ne peut pas être sûr à l'avance que l'obstacle se placera dans le rayon de convergence des développements analytiques des données initiales. Le deuxième est d'ordre pratique : il faut de nombreux tâtonnements avant de trouver la forme de l'onde de choc appropriée si c'est le corps qui est donné. Ceci est d'autant plus difficile qu'expérimentalement on remarque que des modifications importantes au niveau de la géométrie de l'émoussement entraînent des formes de choc très voisines. Le problème étant mathématiquement mal posé, on peut donc craindre que ces méthodes manquent de précision dans la détermination de la forme de l'obstacle. De plus, si les méthodes inverses s'adaptent bien à la détermination de corps de forme régulière, elles manquent de souplesse lorsque l'on veut obtenir des écoulements autour d'obstacles dont la courbure évolue rapidement.

Citons également, pour mémoire, les méthodes approchées qui permettent d'obtenir certains aspects particuliers de l'écoulement. Par exemple la distance de détachement ϵ_i (figure 11a) de l'onde de choc par rapport au nez d'un obstacle symétrique a fait l'objet de nombreuses évaluations. Li et Geiger [11] proposent une solution à densité constante fournissant ϵ_i pour un corps à nez sphérique de rayon R :

$$\epsilon_i = \frac{KR}{1 + \sqrt{\frac{8K}{3}}}$$

où $K = \rho_{amont} / \rho_{aval}$ est le rapport des masses volumiques respectives amont et aval sur l'onde de choc. Ce paramètre traduit les effets du nombre de Mach amont.

Pour le cylindre, Hayes et Probstein [12][13] aboutissent à une expression de ϵ_i pour K petit qui s'écrit :

$$\epsilon_i = \frac{1}{2}KR \left[\ln \frac{4}{3K} + K \ln \frac{4}{3K} + O\left(K^2 \ln \frac{1}{K}\right) \right]$$

Outre la distance de détachement, la position du point sonique sur le corps peut également être prévue par ces méthodes analytiques approximatives. En admettant que la pression suit la loi Newtonienne à partir du point d'arrêt, on a :

$$\frac{p(\theta)}{p(0)} = \cos^2 \theta$$

Comme le rapport $\frac{p(M=1)}{p(0)}$ est connu en fonction du rapport des chaleurs spécifiques, pour un gaz parfait, la position du point sonique sur l'obstacle est facilement obtenue.

3.2 Equations de l'écoulement

Nous allons étudier l'écoulement supersonique autour d'un corps émoussé à symétrie plane ou de révolution et d'équation polaire $r = r_0(\theta)$ connue. L'espace compris entre l'onde détachée et le corps est appelé couche de choc. La forme du corps doit être suffisamment régulière pour empêcher l'apparition de chocs internes. Le problème consiste à déterminer la position de cette onde ainsi que les grandeurs physiques de l'écoulement dans la couche de choc (figure 11a).

L'écoulement est stationnaire, le gaz, supposé non visqueux, est thermodynamiquement parfait de rapport de chaleurs spécifiques γ . Nous faisons également l'hypothèse que l'écoulement est sans incidence. Le système qui régit l'écoulement est composé des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie qui se présentent sous forme vectorielle de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\tilde{\rho}\vec{V}) &= 0 \\ \operatorname{rot}\vec{V} \wedge \vec{V} + \frac{1}{2}\operatorname{grad}\tilde{V}^2 + \frac{1}{\tilde{\rho}}\operatorname{grad}\tilde{p} &= 0 \\ \vec{V}\operatorname{grad}\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} &= 0 \end{aligned}$$

Dans un système de coordonnées polaires, ces équations s'écrivent dans le plan méridien :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}}(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{r}(\tilde{r}\sin\tilde{\theta})^j) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}}(\tilde{\rho}\tilde{v}(\tilde{r}\sin\tilde{\theta})^j) &= 0 \\ \tilde{u}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{r}} &= -\frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} \\ \tilde{u}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\tilde{u}\tilde{v}}{\tilde{r}} &= -\frac{1}{\tilde{\rho}\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\theta}} \end{aligned}$$

avec $j = 0$ dans le cas de l'écoulement plan et $j = 1$ pour la symétrie de révolution.

Afin de pouvoir appliquer la méthode des relations intégrales de Dorodnitsyn à ce système d'équations, il faut l'écrire sous une forme conservative. Dans l'équation de quantité de mouvement en projection radiale, en faisant apparaître un terme de la forme $\partial(\tilde{p} + \tilde{\rho}\tilde{u}^2)/\partial\tilde{r}$ et en utilisant l'équation de conservation de la masse, on obtient facilement :

$$\frac{\partial}{\partial\tilde{r}} \left(\tilde{r}(\tilde{p} + \tilde{\rho}\tilde{u}^2)(\tilde{r} \sin \tilde{\theta})^j \right) + \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}} \left(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v}(\tilde{r} \sin \tilde{\theta})^j \right) = (\tilde{r} \sin \tilde{\theta})^j \left(\tilde{\rho}\tilde{v}^2 + (j+1)\tilde{p} \right)$$

L'équation de la dynamique en projection orthoradiale est remplacée par l'équation de Bernoulli :

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \right) + \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) = \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \left(\frac{\tilde{p}_{t\infty}}{\tilde{\rho}_{t\infty}} \right)$$

On introduit en plus la fonction de courant $\tilde{\psi}$ définie à partir de l'équation de conservation du débit masse :

$$d\tilde{\psi} = (\tilde{r} \sin \tilde{\theta})^j \tilde{\rho} \left(\tilde{v}d\tilde{r} - \tilde{r}\tilde{u}d\tilde{\theta} \right)$$

La conservation de l'entropie sur une particule peut s'écrire à l'aide de la fonction d'entropie $\tilde{\phi}$ qui ne dépend que de la fonction de courant $\tilde{\psi}$ et qui est définie par :

$$\tilde{\phi}(\tilde{\psi}) = \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}^\gamma}$$

Le système d'équations qui régit l'écoulement peut s'écrire alors de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} \left(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{r}(\tilde{r} \sin \tilde{\theta})^j \right) + \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}} \left(\tilde{\rho}\tilde{v}(\tilde{r} \sin \tilde{\theta})^j \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} \left(\tilde{r}(\tilde{p} + \tilde{\rho}\tilde{u}^2)(\tilde{r} \sin \tilde{\theta})^j \right) + \frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}} \left(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v}(\tilde{r} \sin \tilde{\theta})^j \right) &= (\tilde{r} \sin \tilde{\theta})^j \left(\tilde{\rho}\tilde{v}^2 + (j+1)\tilde{p} \right) \\ \frac{d\tilde{\psi}}{d\tilde{\theta}} &= (\tilde{r} \sin \tilde{\theta})^j \tilde{\rho} \left(\tilde{v} \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{\theta}} - \tilde{r}\tilde{u} \right) \\ \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \right) + \frac{1}{2}(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) &= \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right) \left(\frac{\tilde{p}_{t\infty}}{\tilde{\rho}_{t\infty}} \right) \end{aligned}$$

3.3 Adimensionnalisation et changement de variables

Les équations précédentes sont mises sous forme adimensionnée à l'aide des grandeurs suivantes : $r_0(0)$ pour la longueur, la vitesse maximale de l'écoulement w_{max} définie par $w_{max}^2 = \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \right) \left(\frac{\tilde{p}_{t\infty}}{\tilde{\rho}_{t\infty}} \right)$, la masse volumique à l'infini amont ρ_∞ et la pression $\rho_\infty w_{max}^2$.

En effectuant ensuite le changement de variable suivant :

$$(3.1) \quad S = \rho uv (r \sin \theta)^j, \quad H = (p + \rho u^2)(r \sin \theta)^j, \quad g = ((j+1)p + \rho v^2)(r \sin \theta)^j$$

$$(3.2) \quad h = \tau u (r \sin \theta)^j, \quad t = \tau v (r \sin \theta)^j, \quad \tau = (1 - w^2)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

où $w^2 = u^2 + v^2$ et en utilisant la relation,

$$\rho = \tau \phi^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

on peut écrire le système d'équations sous la forme :

$$(3.3) \quad \frac{\partial r h}{\partial r} + \frac{\partial t}{\partial \theta} = 0$$

$$(3.4) \quad \frac{\partial r H}{\partial r} + \frac{\partial S}{\partial \theta} = g$$

$$(3.5) \quad \frac{d\psi}{d\theta} = (r \sin \theta)^j \rho \left(v \frac{dr}{d\theta} - r u \right)$$

et l'équation de l'énergie :

$$p = \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) (1 - w^2) \rho$$

3.4 Domaine d'intégration et conditions aux frontières

Le domaine d'intégration de ce système est limité par l'obstacle d'équation $r_0(\theta)$ et par l'onde de choc dont la position est à déterminer (figure 11a). On écrit l'équation du choc sous la forme :

$$r = r_1(\theta) = r_0(\theta) + \epsilon(\theta)$$

où $\epsilon(\theta)$ est la distance polaire entre le corps et le choc. Comme ϵ n'est pas connu, il faut une équation de fermeture. Si nous notons $y(x)$ l'équation du choc en coordonnées cartésiennes, en écrivant : $\frac{dy}{dx} = \tan \sigma$, nous obtenons facilement une relation imposée par la géométrie du choc :

$$(3.6) \quad \frac{d\epsilon}{d\theta} = -(\epsilon + r_0) \cotg(\sigma + \theta) - \frac{dr_0}{d\theta}$$

On limitera le domaine de calcul entre $\theta = 0$ et $\theta = \theta_{max}$ en choisissant θ_{max} suffisamment grand pour inclure la zone transsonique.

Les conditions aux frontières sont obtenues en exprimant les propriétés suivantes :

- Sur le corps $r = r_0$:

– Condition de glissement :

$$u_0 = \left(\frac{v_0}{r_0} \right) \frac{dr_0}{d\theta}$$

- Invariance de l'entropie sur le corps qui forme une ligne de courant avec la partie de l'axe de symétrie située en amont du point d'arrêt.

$$(3.7) \quad \phi_0 = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1}{w_\infty^2} \right)^\gamma \left[w_\infty^2 - (1 - w_\infty^2) \frac{(\gamma - 1)^2}{4\gamma} \right]$$

- Sur le choc $r = r_1$:

Les lois de conservation permettent d'obtenir toutes les grandeurs physiques en fonction de w_∞ , vitesse infinie amont, et de l'angle de la pente du choc σ (figure 11a) :

$$(3.8) \quad \begin{aligned} p_1 &= \frac{2}{\gamma + 1} \left[w_\infty^2 \sin^2 \sigma - (1 - w_\infty^2) \frac{(\gamma - 1)^2}{4\gamma} \right] \\ \rho_1 &= \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \left(\frac{w_\infty^2 \sin^2 \sigma}{1 - w_\infty^2 \cos^2 \sigma} \right) \\ \phi_1 &= \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^\gamma \left(\frac{1 - w_\infty^2 \cos^2 \sigma}{w_\infty^2 \sin^2 \sigma} \right)^\gamma \\ &\quad \left[w_\infty^2 \sin^2 \sigma - (1 - w_\infty^2) \frac{(\gamma - 1)^2}{4\gamma} \right] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} u_1 &= -w_{x1} \cos \theta + w_{y1} \sin \theta \\ v_1 &= w_{x1} \sin \theta + w_{y1} \cos \theta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} w_{x1} &= w_\infty \left[1 - \frac{2}{\gamma + 1} \left(\sin^2 \sigma - \frac{1}{M_\infty^2} \right) \right] \\ w_{y1} &= w_\infty \frac{2}{\gamma + 1} \left(\sin^2 \sigma - \frac{1}{M_\infty^2} \right) \cot \sigma \end{aligned}$$

où M_∞ est le nombre de Mach au loin, relié à w_∞ par :

$$M_\infty^2 = \frac{2w_\infty^2}{(\gamma - 1)(1 - w_\infty^2)}$$

On détermine la fonction de courant ψ par la hauteur entre l'axe de symétrie et la ligne de courant amont entrant dans le choc à l'angle polaire θ .

$$(3.9) \quad \psi = w_\infty (r_0 + \epsilon) \sin \theta \frac{(r \sin \theta)^j}{j + 1}$$

Nous obtenons ainsi un système fermé, que nous allons traiter dans la suite par la méthode de relations intégrales.

Chapitre 4

Equations de la M.I.R.

4.1 Méthode générale

Le calcul de l'écoulement mixte subsonique-supersonique autour d'un corps à nez arrondi en utilisant la méthode développée par Dorodnitsyn a été essentiellement mise au point par Belotserkovsky. Il a été le premier à résoudre ce problème de façon satisfaisante pour un cylindre [14][15] puis dans le cas d'un écoulement méridien pour une sphère et pour des ellipsoïdes particuliers [16][17]. Par la suite, il a proposé pour le cas de la sphère des solutions en gaz réel à l'équilibre et hors équilibre [5].

D'autres auteurs ont également utilisé la méthode des relations intégrales pour résoudre le problème de l'émoussement et en particulier Diringer [18] qui a utilisé des coordonnées curvilignes au lieu des coordonnées polaires préconisées par Belotserkovsky. L'utilisation des coordonnées curvilignes lui a permis de traiter des cas où le corps possède une discontinuité de courbure.

C'est aux équations de conservation de la masse (3.3) et de quantité de mouvement (3.4) écrites sous forme de divergence que l'on va appliquer cette technique de résolution d'équations aux dérivées partielles.

Une nouvelle variable est utilisée pour décrire la couche de choc :

$$(4.1) \quad \zeta = \frac{r - r_0(\theta)}{\epsilon(\theta)} \quad \text{avec} \quad \zeta \in [0, 1]$$

Dans le cas d'une approximation d'ordre N , la région entre le corps et le choc est divisée en N bandes successives (figure 11b), de largeur égale par des lignes $\zeta_n = cste$ d'équations :

$$r_n(\theta) = r_0(\theta) + \zeta_n \epsilon(\theta)$$

avec

$$\zeta_n = \frac{N - n + 1}{N} \quad \text{pour} \quad n \in \{1, 2, \dots, N + 1\}$$

- Pour $n = 1$ soit $\zeta_n = 1$, on a l'équation du choc
- Pour $n = N + 1$ soit $\zeta_n = 0$, on a celle du corps.

Pour appliquer la technique de Dorodnitsyn, on choisit les N fonctions de poids $f_n(r)$ de la façon suivante :

$$f_n(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r < r_0 & \text{soit } \zeta < 0 \\ 1 & \text{pour } r_0 \leq r \leq r_n & \text{soit } 0 \leq \zeta \leq \zeta_n \\ 0 & \text{pour } r > r_n & \text{soit } \zeta > \zeta_n \end{cases}$$

L'intégration des équations aux dérivées partielles (3.3)(3.4) s'effectue donc analytiquement suivant r , du corps jusqu'à la frontière des bandes successives. On obtient les équations intégrales suivantes :

$$\frac{d}{d\theta} \int_{r_0}^{r_n} t(r, \theta) dr - \left(t_n \frac{dr_n}{d\theta} - t_0 \frac{dr_0}{d\theta} \right) + r_n h_n - r_0 h_0 = 0$$

$$\frac{d}{d\theta} \int_{r_0}^{r_n} S(r, \theta) dr - \left(S_n \frac{dr_n}{d\theta} - S_0 \frac{dr_0}{d\theta} \right) + r_n H_n - r_0 H_0 = \int_{r_0}^{r_n} g(r, \theta) dr$$

qui peuvent également s'écrire en utilisant la variable ζ :

$$(4.2) \quad \frac{d}{d\theta} \epsilon(\theta) \int_0^{\zeta_n} t(\zeta, \theta) d\zeta - \frac{dr_0}{d\theta} (t_n - t_0) + r_0 (h_n - h_0) + \zeta_n \left(t_n \frac{d\epsilon}{d\theta} + \epsilon(\theta) h_n \right) = 0$$

$$(4.3) \quad \frac{d}{d\theta} \epsilon(\theta) \int_0^{\zeta_n} S(\zeta, \theta) d\zeta - \frac{dr_0}{d\theta} (S_n - S_0) + r_0 (H_n - H_0) + \zeta_n \left(S_n \frac{d\epsilon}{d\theta} + \epsilon(\theta) H_n \right) = \epsilon(\theta) \int_0^{\zeta_n} g(\zeta, \theta) d\zeta$$

pour $n \in \{1, 2, \dots, N\}$

où S_n est la valeur de S sur la ligne $\zeta_n = cste$ et de même pour les variables t, h, H, r .

Les fonctions S, t et g se trouvant dans les intégrales sont approximées par un polynôme en ζ de degré N .

$$(4.4) \quad \begin{aligned} S(\zeta, \theta) &= \sum_{m=0}^N a_m(\theta) \zeta^m \\ t(\zeta, \theta) &= \sum_{m=0}^N b_m(\theta) \zeta^m \\ g(\zeta, \theta) &= \sum_{m=0}^N c_m(\theta) \zeta^m \end{aligned}$$

Les coefficients $a_m(\theta), b_m(\theta), c_m(\theta)$ sont obtenus par combinaison linéaire des valeurs S_n, t_n, g_n des inconnues S, t et g sur les lignes intermédiaires $\zeta_n = cste$ en résolvant

trois systèmes algébriques $(N + 1) \times (N + 1)$:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} S_n &= \sum_{m=0}^N a_m(\theta) \zeta_n^m \\ t_n &= \sum_{m=0}^N b_m(\theta) \zeta_n^m \\ g_n &= \sum_{m=0}^N c_m(\theta) \zeta_n^m \quad \text{pour } n \in \{0, 1, \dots, N\} \end{aligned}$$

Dans le cas d'une approximation d'ordre N , les inconnues auxiliaires S_n, t_n, h_n, H_n, g_n définies en (3.1)(3.2) sont utilisées pour calculer les inconnues physiques primaires $\epsilon, \sigma, u_n, v_n, \psi_n$. Avec la méthode des relations intégrales de Dorodnitsyn, on se contente du système différentiel ordinaire que forment les équations (4.2)(4.3) après avoir calculé les intégrales grâce aux approximations (4.4). Mais dans le cas présent, en dérivant les définitions (3.1)(3.2) et en utilisant les relations intégrales, on peut aboutir à un système d'équations différentielles ordinaires régissant les inconnues primaires de la forme suivante :

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\theta} &= F \\ \frac{dv_0}{d\theta} &= \frac{E_0}{D} \\ \frac{d\psi_n}{d\theta} &= \rho_n \left[v_n \frac{dr_n}{d\theta} - r_n u_n \right] \\ \frac{du_n}{d\theta} &= G_n \\ \frac{dv_n}{d\theta} &= \frac{E_n}{[a^{*2} + (2u_n^2/\gamma + 1)] - w_n^2} \end{aligned}$$

$$(4.7) \quad \text{où } a^* = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} \quad \text{est la vitesse locale du son.}$$

Ce système est complété par l'équation (3.6) qui donne la position du choc en déterminant la distance ϵ . Les coefficients F, E_0, D, G_n et E_n sont des fonctions connues de S_n, t_n, h_n, H_n, g_n , des inconnues principales et des dérivées $\frac{dS_n}{d\theta}, \frac{dt_n}{d\theta}$ obtenues grâce aux relations intégrales, sauf pour $\frac{dS_1}{d\theta}, \frac{dt_1}{d\theta}$ qui proviennent des relations sur le choc.

Nous avons donc au total $3N$ équations différentielles en θ réparties comme suit :

- $2N$ obtenues par les relations intégrales (4.2)(4.3) pour $n = 1, \dots, N$.
- $N - 1$ provenant de l'écriture de l'équation de conservation du débit masse (3.9) sur chaque ligne intérieure pour $n = 2, \dots, N$.
- L'équation (3.6) qui détermine la position du choc.

Les inconnues sont :

- sur le choc ϵ, σ .
- sur le corps v_0 .
- sur les lignes intérieures u_n, v_n, ψ_n .

Le nombre des équations étant égal à celui des inconnues, le problème approximant semble bien posé.

4.2 Initialisation

Le calcul commence sur le rayon $\theta = 0$. Malheureusement nous n'avons pas affaire à un problème de Cauchy, car il nous manque des valeurs initiales de certaines inconnues. Pour $\theta = 0$, nous connaissons seulement $\sigma = \pi/2$, $v_n = 0$ pour $n \in \{0, \dots, N+1\}$ et l'entropie sur le corps (3.7) (c'est l'entropie en aval d'un choc droit, les conditions en amont étant fixées). Mais pour pouvoir intégrer le système, il faut choisir arbitrairement la distance de détachement ϵ_i et les $N - 1$ valeurs de u_{ni} pour $n = 2, \dots, N$ sur l'axe $\theta = 0$. Physiquement, nous savons qu'il y a unicité de la solution. Où se trouve la condition d'unicité dans notre formulation ?

Examinons les formules

$$\frac{dv_0}{d\theta} = \frac{E_0}{D} \quad \text{et} \quad \frac{dv_n}{d\theta} = \frac{E_n}{[a^{*2} + (2u_n^2/\gamma + 1)] - w_n^2} \quad \text{de (4.6).}$$

On voit que le dénominateur de $\frac{dv_n}{d\theta}$ s'annule lorsque la composante orthoradiale de la vitesse v devient proche de celle du son. On verra, par la suite qu'il en est de même pour $\frac{dv_0}{d\theta}$. Le rayon polaire est alors tangent à une ligne de Mach. Si les dénominateurs s'annulent, les dérivées $\frac{dv_0}{d\theta}$ et $\frac{dv_n}{d\theta}$ deviennent infinies et donc les v_n n'évoluent pas de façon continue ce qui n'est pas admissible physiquement. La seule possibilité pour que $\frac{dv_0}{d\theta}$ et $\frac{dv_n}{d\theta}$ restent finis, est donc que les numérateurs s'annulent en même temps que les dénominateurs. Ce résultat ne peut être obtenu que pour un choix unique des valeurs initiales des u_n et de ϵ . Ces $N - 2$ valeurs de u_n et la valeur de ϵ sont donc déterminées par les $N - 1$ conditions de régularité sur $\frac{dv_0}{d\theta}$ et $\frac{dv_n}{d\theta}$. Dans le cas où le corps n'est pas un cylindre, le dénominateur de $\frac{d\sigma}{d\theta}$ s'annule en même temps que celui de $\frac{dv_0}{d\theta}$ mais cela n'amène pas de condition en plus, Belotserkovsky a montré numériquement que si le numérateur de $\frac{dv_0}{d\theta}$ s'annule, celui de $\frac{d\sigma}{d\theta}$ s'annule simultanément [15].

4.3 Obtention des coefficients du système différentiel

4.3.1 Méthode générale

Nous allons maintenant expliquer comment on passe des équations adimensionnalisées au système différentiel (4.6).

Les dérivées $\frac{d\sigma}{d\theta}$ et de $\frac{dv_0}{d\theta}$ sont calculées au moyen des deux relations obtenues en intégrant les équations (4.2)(4.3) du corps $r = r_0$ jusqu'au choc $r = r_1$.

En dérivant les relations $S_0 = \rho_0 u_0 v_0 (r_0 \sin \theta)^j$ et $t_0 = \tau_0 v_0 (r_0 \sin \theta)^j$ on obtient :

$$(4.8) \quad \frac{dS_0}{d\theta} = \frac{\partial S_0}{\partial \theta} + \frac{\partial S_0}{\partial v_0} \frac{dv_0}{d\theta}$$

$$(4.9) \quad \frac{dt_0}{d\theta} = \frac{\partial t_0}{\partial \theta} + \frac{\partial t_0}{\partial v_0} \frac{dv_0}{d\theta}$$

avec :

$$\frac{\partial S_0}{\partial \theta} = \rho_0 v_0^2 \frac{d^2 \ln r_0}{d\theta^2} \left(1 - \frac{2u_0^2}{(\gamma-1)(1-w_0^2)} \right) (r_0 \sin \theta)^j + j \rho_0 u_0 v_0 \left(\frac{dr_0}{d\theta} \sin \theta + r_0 \cos \theta \right)$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial v_0} = 2\rho_0 u_0 \left(1 - \frac{w_0^2}{(\gamma-1)(1-w_0^2)} \right) (r_0 \sin \theta)^j$$

$$\frac{\partial t_0}{\partial \theta} = -\frac{2}{\gamma+1} v_0^2 u_0 \frac{d^2 \ln r_0}{d\theta^2} (1-w_0^2)^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} (r_0 \sin \theta)^j + j \tau_0 v_0 \left(\frac{dr_0}{d\theta} \sin \theta + r_0 \cos \theta \right)$$

$$\frac{\partial t_0}{\partial v_0} = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} - w_0^2 \right) (1-w_0^2)^{-\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} (r_0 \sin \theta)^j$$

De même, en utilisant les relations sur le choc et en dérivant $S_1 = \rho_1 u_1 v_1 (r_1 \sin \theta)^j$, $t_1 = \tau_1 v_1 (r_1 \sin \theta)^j$, nous aboutissons à :

$$(4.10) \quad \frac{dS_1}{d\theta} = \frac{\partial S_1}{\partial \theta} + \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\theta}$$

$$(4.11) \quad \frac{dt_1}{d\theta} = \frac{\partial t_1}{\partial \theta} + \frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\theta}$$

avec :

$$\frac{\partial S_1}{\partial \theta} = \left[-w_\infty^2 \cos 2\theta + 2 \cos 2(\theta + \sigma) \left(\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{1-w_\infty^2}{1-w_\infty^2 \cos^2 \sigma} + \frac{w_\infty^2 - 2}{\gamma-1} + \frac{2(1-w_\infty^2 \cos^2 \sigma)}{(\gamma+1)(\gamma-1)} \right) \right] (r_1 \sin \theta)^j + j \rho_1 u_1 v_1 \left(\frac{dr_1}{d\theta} \sin \theta + r_1 \cos \theta \right)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial \sigma} = \left[2 \cos 2(\theta + \sigma) \left(\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{1-w_\infty^2}{1-w_\infty^2 \cos^2 \sigma} + \frac{w_\infty^2 - 2}{\gamma-1} + \frac{2(1-w_\infty^2 \cos^2 \sigma)}{(\gamma+1)(\gamma-1)} \right) + w_\infty^2 \sin 2(\theta + \sigma) \sin 2\sigma \left(\frac{2}{(\gamma+1)(\gamma-1)} - \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{1-w_\infty^2}{(1-w_\infty^2 \cos^2 \sigma)^2} \right) \right] (r_1 \sin \theta)^j$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial \theta} = \tau_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} (r_1 \sin \theta)^j + j \tau_1 v_1 \left(\frac{dr_1}{d\theta} \sin \theta + r_1 \cos \theta \right)$$

$$\frac{\partial t_1}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial \sigma} \tau_1 \right) (r_1 \sin \theta)^j$$

et

$$\frac{\partial v_1}{\partial \theta} = w_\infty \cos \theta - \frac{\sin(\sigma + \theta)}{\gamma + 1} \left[2w_\infty \sin \sigma - \left(\frac{(\gamma - 1)(1 - w_\infty^2)}{w_\infty \sin \sigma} \right) \right]$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \sigma} = \frac{2w_\infty}{\gamma + 1} \cos(2\sigma + \theta) + \left[\frac{(\gamma - 1)(1 - w_\infty^2)}{(\gamma + 1)w_\infty} \right] \frac{\cos \theta}{\sin^2 \sigma}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_1}{\partial \sigma} &= \frac{w_\infty^2 \sin 2\sigma}{\gamma - 1} \left[1 - w_\infty^2 \cos^2 \sigma - \frac{w_\infty^2 \sin^2 \sigma}{\rho_1^2} \right]^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} \\ &\quad \left[1 - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{2w_\infty^2 - w_\infty^2 \cos^2 \sigma - 1}{w_\infty^2 \sin^2 \sigma} \right) \right] \end{aligned}$$

Dans les deux relations obtenues grâce aux équations (4.2)(4.3) intégrées du corps au choc, en remplaçant $\frac{dS_0}{d\theta}$, $\frac{dt_0}{d\theta}$, $\frac{dS_1}{d\theta}$, $\frac{dt_1}{d\theta}$ par les expressions (4.8)(4.9)(4.10)(4.11), nous aboutissons à deux relations de la forme :

$$(-1)^{N-1} \frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\theta} + \frac{\partial t_0}{\partial v_0} \frac{dv_0}{d\theta} + \mathcal{A} + \mathcal{C} \frac{d\epsilon}{d\theta} = 0$$

$$(-1)^{N-1} \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\theta} + \frac{\partial S_0}{\partial v_0} \frac{dv_0}{d\theta} + \mathcal{B} + \mathcal{D} \frac{d\epsilon}{d\theta} = 0$$

Les coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont fonctions de S_n, t_n, h_n, H_n, g_n et des inconnues primaires $\epsilon, \sigma, u_n, v_n$. Comme $\frac{d\epsilon}{d\theta}$ est connu par la géométrie du choc (3.6), il suffit de résoudre le système ci-dessus pour obtenir $\frac{d\sigma}{d\theta}$ et $\frac{dv_0}{d\theta}$.

Pour calculer les expressions de G_n et de E_n , nous partons également des définitions de $S_n = \rho_n u_n v_n (r_n \sin \theta)^j$ et de $t_n = \tau_n v_n (r_n \sin \theta)^j$. En prenant la dérivée logarithmique de ces deux égalités, il vient :

$$(4.12) \quad G_n = u_n \left(\frac{1}{S_n} \frac{dS_n}{d\theta} - \frac{1}{t_n} \frac{dt_n}{d\theta} \right) + \frac{1}{\gamma - 1} u_n \frac{1}{\phi_n} \frac{d\phi_n}{d\theta}$$

$$(4.13) \quad E_n = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left[(1 - w_n^2) \frac{1}{\rho_n u_n} \frac{dS_n}{d\theta} (r_n \sin \theta)^j + \frac{1}{\gamma - 1} v_n (1 - w_n^2) \frac{1}{\phi_n} \frac{d\phi_n}{d\theta} + \frac{2}{\gamma - 1} G_n u_n v_n - (1 - w_n^2) \frac{G_n v_n}{u_n} - j v_n (1 - w_n^2) \left(\frac{1}{r_n} \frac{dr_n}{d\theta} + \cot g \theta \right) \right]$$

Dans ces deux expressions apparaît le terme ϕ_n . Pour obtenir sa valeur, nous allons utiliser la conservation de l'entropie sur une ligne de courant en aval du choc. La

fonction d'entropie ϕ ne dépend que de ψ , d'où :

$$\phi_n|_{\psi_n} = \phi_1|_{\psi_1=\psi_n} \quad \text{pour} \quad n \in \{2, \dots, N\}$$

et ϕ_1 est connu par son expression obtenue par les relations (3.8).

4.3.2 Approximation à une bande

Dans ce cas simple, le domaine d'intégration comprend une seule bande ($N = 1$) et il n'y a lieu de considérer les inconnues que sur le choc et sur le corps. Nous approximons les inconnues intermédiaires S, t, g par des polynômes de degré 1 en ζ , ce qui donne par exemple pour S , une fois (4.5) résolu :

$$S = S_0 - (S_0 - S_1)\zeta$$

Le système différentiel (4.6) ne comprend seulement que trois équations pour les trois inconnues ϵ, σ, v_0 .

En intégrant sur l'unique bande les deux équations intégrales (4.2)(4.3), nous obtenons les deux relations suivantes :

$$\frac{dt_0}{d\theta} = -\frac{dt_1}{d\theta} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\theta} (t_0 - t_1) + \frac{2r_0}{\epsilon} (h_0 - h_1) - \frac{2}{\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (t_0 - t_1) - 2h_1$$

$$\frac{dS_0}{d\theta} = -\frac{dS_1}{d\theta} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\theta} (S_0 - S_1) + \frac{2r_0}{\epsilon} (H_0 - H_1) - \frac{2}{\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (S_0 - S_1) - 2H_1 + g_0 + g_1$$

Il suffit alors d'utiliser les formules (4.8)(4.9)(4.10)(4.11) pour calculer les coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ permettant d'obtenir les dérivées $\frac{d\sigma}{d\theta}, \frac{dv_0}{d\theta}$.

$$\mathcal{A} = \frac{\partial t_0}{\partial \theta} + \frac{\partial t_1}{\partial \theta} - \frac{2r_0}{\epsilon} (h_0 - h_1) + \frac{2}{\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (t_0 - t_1) + 2h_1$$

$$\mathcal{B} = \frac{\partial S_0}{\partial \theta} + \frac{\partial S_1}{\partial \theta} - \frac{2r_0}{\epsilon} (H_0 - H_1) + \frac{2}{\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (S_0 - S_1) + 2H_1 - g_0 - g_1$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\epsilon} (t_0 - t_1)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\epsilon} (S_0 - S_1)$$

Le système différentiel s'écrit alors :

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \frac{d\epsilon}{d\theta} &= -(\epsilon + r_0) \cot g(\sigma + \theta) - \frac{dr_0}{d\theta} \\ \frac{d\sigma}{d\theta} &= \frac{\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \left(\mathcal{A} + \mathcal{C} \frac{d\epsilon}{d\theta} \right) - \frac{\partial t_0}{\partial v_0} \left(\mathcal{B} + \mathcal{D} \frac{d\epsilon}{d\theta} \right)}{\frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \frac{\partial t_0}{\partial v_0} - \frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \frac{\partial S_0}{\partial v_0}} \\ \frac{dv_0}{d\theta} &= \frac{\frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \left(\mathcal{B} + \mathcal{D} \frac{d\epsilon}{d\theta} \right) - \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \left(\mathcal{A} + \mathcal{C} \frac{d\epsilon}{d\theta} \right)}{\frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \frac{\partial t_0}{\partial v_0} - \frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \frac{\partial S_0}{\partial v_0}} \end{aligned}$$

et il lui correspond les trois conditions :

$$\theta = 0 \quad \begin{cases} \sigma = \pi/2 \\ v_0 = 0 \\ \epsilon = \epsilon_i \end{cases} \quad \text{où } \epsilon_i \text{ est un paramètre.}$$

Comme la bande est unique, les équations différentielles en v_0 et σ sont singulières au voisinage de la ligne sonique. Il faut donc ajuster le paramètre ϵ_i de manière à ce que le numérateur et le dénominateur de $\frac{dv_0}{d\theta}$ s'annulent en même temps. L'équation en $\frac{d\sigma}{d\theta}$ est automatiquement résolue.

4.3.3 Approximation à deux bandes

Nous divisons maintenant le domaine d'intégration en deux bandes : $N = 2$. Il existe donc une ligne intermédiaire correspondant à $\zeta = 1/2$ que l'on place à égale distance du choc et du corps (figure 12a). Le système différentiel (4.6) comprend six équations pour les six variables $\epsilon, \sigma, v_0, u_2, v_2, \psi_2$. Pour approximer les variables intermédiaires S, t, g , nous utilisons des polynômes de degré 2 en ζ ; ainsi pour S , après avoir résolu (4.5), on obtient :

$$S = S_0 + (-3S_0 - S_1 + 4S_2)\zeta + 2(S_0 + S_1 - 2S_2)\zeta^2$$

Les deux équations (4.2)(4.3) intégrées du corps au choc, puis du corps à la ligne intermédiaire donnent alors quatre relations :

$$(4.15) \quad \frac{dt_0}{d\theta} = \frac{dt_1}{d\theta} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\theta} (t_0 + 3t_1 - 4t_2) + \frac{4r_0}{\epsilon} (h_0 + h_1 - 2h_2) + \frac{4}{\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (-t_0 - t_1 + 2t_2) + 4(h_1 - h_2)$$

$$(4.16) \quad \frac{dS_0}{d\theta} = \frac{dS_1}{d\theta} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\theta} (S_0 + 3S_1 - 4S_2) + \frac{4r_0}{\epsilon} (H_0 + H_1 - 2H_2) + \frac{4}{\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (-S_0 - S_1 + 2S_2) + 4(H_1 - H_2) + g_0 - g_1$$

$$(4.17) \quad \frac{dt_2}{d\theta} = -\frac{1}{2} \frac{dt_1}{d\theta} - \frac{2}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\theta} (-t_1 + t_2) + \frac{r_0}{2\epsilon} (h_0 - 5h_1 + 4h_2) - \frac{1}{2\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (t_0 - 5t_1 + 4t_2) - \frac{5}{2} h_1 + h_2$$

$$(4.18) \quad \frac{dS_2}{d\theta} = -\frac{1}{2} \frac{dS_1}{d\theta} - \frac{2}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\theta} (-S_1 + S_2) + \frac{r_0}{2\epsilon} (H_0 - 5H_1 + 4H_2) - \frac{1}{2\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (S_0 - 5S_1 + 4S_2) - \frac{5}{2} H_1 + H_2 + \frac{1}{2} g_1 + g_2$$

De façon similaire au cas à une bande, en transformant les équations (4.15)(4.16) et les égalités (4.8)(4.9)(4.10)(4.11) nous obtenons pour les coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ les

expressions suivantes :

$$\mathcal{A} = \frac{\partial t_0}{\partial \theta} - \frac{\partial t_1}{\partial \theta} - \frac{4r_0}{\epsilon}(h_0 + h_1 - 2h_2) - \frac{4}{\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta}(-t_0 - t_1 + 2t_2) - 4(h_1 - h_2)$$

$$\mathcal{B} = \frac{\partial S_0}{\partial \theta} - \frac{\partial S_1}{\partial \theta} - \frac{4r_0}{\epsilon}(H_0 + H_1 - 2H_2) - \frac{4}{\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta}(-S_0 - S_1 + 2S_2) - 4(H_1 - H_2) - g_0 + g_1$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\epsilon}(t_0 + 3t_1 - 4t_2)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\epsilon}(S_0 + 3S_1 - 4S_2)$$

Le système différentiel s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{d\theta} &= -(\epsilon + r_0) \cotg(\sigma + \theta) - \frac{dr_0}{d\theta} \\ \frac{d\sigma}{d\theta} &= \frac{\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \left(\mathcal{A} + \mathcal{C} \frac{d\epsilon}{d\theta} \right) - \frac{\partial t_0}{\partial v_0} \left(\mathcal{B} + \mathcal{D} \frac{d\epsilon}{d\theta} \right)}{\frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \frac{\partial S_0}{\partial v_0} - \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \frac{\partial t_0}{\partial v_0}} \\ \frac{dv_0}{d\theta} &= \frac{\frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \left(\mathcal{A} + \mathcal{C} \frac{d\epsilon}{d\theta} \right) - \frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \left(\mathcal{B} + \mathcal{D} \frac{d\epsilon}{d\theta} \right)}{\frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \frac{\partial S_0}{\partial v_0} - \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \frac{\partial t_0}{\partial v_0}} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\frac{du_2}{d\theta} = G_2$$

$$\frac{dv_2}{d\theta} = \frac{E_2}{[a^* + (2u_2^2/\gamma - 1)] - w_2^2}$$

$$\frac{d\psi_2}{d\theta} = \rho_2 \left[v_2 \frac{dr_2}{d\theta} - r_2 u_2 \right]$$

avec

$$G_2 = u_2 \left(\frac{1}{S_2} \frac{dS_2}{d\theta} - \frac{1}{t_2} \frac{dt_2}{d\theta} \right) + \frac{1}{\gamma - 1} u_2 \frac{1}{\phi_2} \frac{d\phi_2}{d\theta}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left[(1 - w_2^2) \frac{1}{\rho_2 u_2} \frac{dS_2}{d\theta} (r_2 \sin \theta)^j + \frac{1}{\gamma - 1} v_2 (1 - w_2^2) \frac{1}{\phi_2} \frac{d\phi_2}{d\theta} + \right. \\ &\quad \left. \frac{2}{\gamma - 1} G_2 u_2 v_2 - (1 - w_2^2) \frac{G_2 v_2}{u_2} - j v_2 (1 - w_2^2) \left(\frac{1}{r_2} \frac{dr_2}{d\theta} + \cotg \theta \right) \right] \end{aligned}$$

Il faut compléter ce système avec les équations (4.17)(4.18) qui permettent une fois $\frac{dS_0}{d\theta}$ et $\frac{dt_0}{d\theta}$ connus d'obtenir $\frac{dS_2}{d\theta}$ et $\frac{dt_2}{d\theta}$ pour calculer $\frac{du_2}{d\theta}$ et $\frac{dv_2}{d\theta}$.

Nous avons maintenant six conditions initiales qui contiennent les deux paramètres ϵ_i et u_{2i} :

$$\theta = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \pi/2 \\ \psi_2 = 0 \\ v_0 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \epsilon = \epsilon_i \\ u_2 = u_{2i} \end{array} \right.$$

Les valeurs de ϵ_i et de u_{2i} sont à déterminer de manière à ce que v_0 et v_2 soient réguliers. Il faut donc que le numérateur et le dénominateur de $\frac{dv_0}{d\theta}$ s'annulent simultanément. Il en va de même pour $\frac{dv_2}{d\theta}$.

4.3.4 Approximation à trois bandes

Dans le cas de l'approximation à trois bandes, les équations se compliquent encore. La couche de choc est maintenant divisée en trois, correspondant aux valeurs $\zeta = 1$, $\zeta = 1/3$, $\zeta = 2/3$. Les variables S, t, g sont représentées par des polynômes du troisième degré de la forme :

$$S = S_0 + \left(-\frac{11}{9}S_0 + S_1 - \frac{9}{2}S_2 + 9S_3 \right) \zeta + \left(9S_0 - \frac{9}{2}S_1 + 18S_2 - \frac{45}{2}S_3 \right) \zeta^2 + \left(-\frac{9}{2}S_0 + \frac{9}{2}S_1 - \frac{27}{2}S_2 + \frac{27}{2}S_3 \right) \zeta^3$$

En intégrant successivement sur les trois bandes les deux équations (4.2)(4.3), on aboutit aux six relations suivantes :

$$(4.20) \quad \frac{dt_0}{d\theta} = -\frac{dt_1}{d\theta} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\theta} \left(4t_0 - \frac{11}{2}t_1 + 9t_2 - \frac{9}{2}t_3 \right) + \frac{r_0}{2\epsilon} (13h_0 - 13h_1 + 27h_2 - 27h_3) + \frac{1}{2\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (-13t_0 + 13t_1 - 27t_2 + 27t_3) - \frac{13}{2}h_1 + 9h_2 - \frac{9}{2}h_3$$

$$(4.21) \quad \frac{dt_2}{d\theta} = -\frac{1}{3} \frac{dt_1}{d\theta} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\theta} \left(\frac{1}{3}t_0 - \frac{5}{2}t_1 + 2t_2 + \frac{1}{2}t_3 \right) + \frac{r_0}{6\epsilon} (-h_0 - 17h_1 + 9h_2 + 9h_3) + \frac{1}{6\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (t_0 + 17t_1 - 9t_2 - 9t_3) - \frac{17}{6}h_1 + h_2 + \frac{1}{2}h_3$$

$$(4.22) \quad \frac{dt_3}{d\theta} = \frac{1}{3} \frac{dt_1}{d\theta} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\theta} \left(-\frac{4}{3}t_0 + 2t_1 - 4t_2 + 2t_3 \right) + \frac{r_0}{3\epsilon} (2h_0 + 7h_1 - 18h_2 + 9h_3) + \frac{1}{3\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (-2t_0 - 7t_1 + 18t_2 - 9t_3) - \frac{7}{3}h_1 - 4h_2 + h_3$$

$$(4.23) \quad \frac{dS_0}{d\theta} = -\frac{dS_1}{d\theta} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\theta} \left(4S_0 - \frac{11}{2}S_1 + 9S_2 - \frac{9}{2}S_3 \right) +$$

$$\begin{aligned}
(4.24) \quad \frac{dS_2}{d\theta} &= \frac{r_0}{2\epsilon} (13H_0 - 13H_1 + 27H_2 - 27H_3) + \\
&\quad \frac{1}{2\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (-13S_0 + 13S_1 - 27S_2 + 27S_3) - \\
&\quad \frac{13}{2}H_1 + 9H_2 - \frac{9}{2}H_3 + g_1 + g_2 \\
(4.25) \quad \frac{dS_3}{d\theta} &= -\frac{1}{3} \frac{dS_1}{d\theta} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\theta} \left(\frac{1}{3}S_0 - \frac{5}{2}S_1 + 2S_2 + \frac{1}{2}S_3 \right) + \\
&\quad \frac{r_0}{6\epsilon} (-H_0 - 17H_1 + 9H_2 + 9H_3) + \\
&\quad \frac{1}{6\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (S_0 + 17S_1 - 9S_2 - 9S_3) - \\
&\quad \frac{17}{6}H_1 + H_2 + \frac{1}{2}H_3 + \frac{1}{3}g_1 + g_2 \\
(4.25) \quad \frac{dS_3}{d\theta} &= \frac{1}{3} \frac{dS_1}{d\theta} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\theta} \left(-\frac{4}{3}S_0 + 2S_1 - 4S_2 + 2S_3 \right) + \\
&\quad \frac{r_0}{3\epsilon} (2H_0 + 7H_1 - 18H_2 + 9H_3) + \\
&\quad \frac{1}{3\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (-2S_0 - 7S_1 + 18S_2 - 9S_3) - \\
&\quad \frac{7}{3}H_1 - 4H_2 + H_3 - \frac{1}{3}g_1 + g_3
\end{aligned}$$

Les coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ sont toujours calculés à partir des deux équations intégrales (4.20)(4.23) et des égalités (4.8)(4.9)(4.10)(4.11).

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{\partial t_0}{\partial \theta} + \frac{\partial t_1}{\partial \theta} - \frac{r_0}{2\epsilon} (13h_0 - 13h_1 + 27h_2 - 27h_3) - \\
&\quad \frac{1}{2\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (-13t_0 + 13t_1 - 27t_2 + 27t_3) - \frac{13}{2}h_1 + 9h_2 - \frac{9}{2}h_3 \\
\mathcal{B} &= \frac{\partial S_0}{\partial \theta} + \frac{\partial S_1}{\partial \theta} - \frac{r_0}{2\epsilon} (13H_0 - 13H_1 + 27H_2 - 27H_3) - g_1 - g_2 - \\
&\quad \frac{1}{2\epsilon} \frac{dr_0}{d\theta} (-13S_0 + 13S_1 - 27S_2 + 27S_3) - \frac{13}{2}H_1 + 9H_2 - \frac{9}{2}H_3 \\
\mathcal{C} &= \frac{1}{\epsilon} \left(4t_0 - \frac{11}{2}t_1 + 9t_2 - \frac{9}{2}t_3 \right) \\
\mathcal{D} &= \frac{1}{\epsilon} \left(4S_0 - \frac{11}{2}S_1 + 9t_2 - \frac{9}{2}S_3 \right)
\end{aligned}$$

Le système est maintenant composé de neuf équations différentielles ordinaires :

$$\frac{d\epsilon}{d\theta} = -(\epsilon + r_0) \cotg(\sigma + \theta) - \frac{dr_0}{d\theta}$$

$$(4.26) \quad \begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\theta} &= \frac{\frac{\partial S_0}{\partial v_0} \left(\mathcal{A} + \mathcal{C} \frac{d\epsilon}{d\theta} \right) - \frac{\partial t_0}{\partial v_0} \left(\mathcal{B} + \mathcal{D} \frac{d\epsilon}{d\theta} \right)}{\frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \frac{\partial t_0}{\partial v_0} - \frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \frac{\partial S_0}{\partial v_0}} \\ \frac{dv_0}{d\theta} &= \frac{\frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \left(\mathcal{B} + \mathcal{D} \frac{d\epsilon}{d\theta} \right) - \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \left(\mathcal{A} + \mathcal{C} \frac{d\epsilon}{d\theta} \right)}{\frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \frac{\partial t_0}{\partial v_0} - \frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \frac{\partial S_0}{\partial v_0}} \end{aligned}$$

$$\frac{du_n}{d\theta} = G_n$$

$$\frac{dv_n}{d\theta} = \frac{E_n}{[a^* + (2u_n^2/\gamma - 1)] - w_n^2}$$

$$\frac{d\psi_n}{d\theta} = \rho_n \left[v_n \frac{dr_n}{d\theta} - r_n u_n \right]$$

avec $n = 2$ et $n = 3$.

Le système (4.26) est complété par les quatre équations (4.21) (4.22)(4.24)(4.25) qui permettent de calculer $\frac{dS_n}{d\theta}$ et $\frac{dt_n}{d\theta}$ pour $n \neq 0$ et $n \neq 1$ et donc d'obtenir les coefficients E_n et G_n grâce à (4.13)(4.12).

Les neuf conditions initiales sont les suivantes :

$$\theta = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \pi/2 \\ \psi_2 = 0 \\ \psi_3 = 0 \\ v_0 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \epsilon = \epsilon_i \\ u_2 = u_{2i} \\ u_3 = u_{3i} \end{array} \right.$$

Il y a maintenant trois paramètres $\epsilon_i, u_{2i}, u_{3i}$ à ajuster pour que les fonctions v_0, v_2, v_3 soient régulières.

L'approximation à trois bandes n'a uniquement été résolue par Belotserkosky [14] [15] que pour le cas du cylindre à $M_\infty = 3$. En effet, plus le Mach amont est faible, plus la couche de choc est épaisse et donc plus il faut de bandes pour avoir une bonne précision. Par contre pour des corps de révolution ou des Mach importants ($M_\infty \geq 4$), l'approximation à deux bandes suffit amplement.

Chapitre 5

Mise en œuvre de la M.I.R.

5.1 Approximation à une bande en écoulement plan

5.1.1 Problème de l'initialisation

Comme nous l'avons signalé en 4.2, l'initialisation de l'intégration nécessite la connaissance de ϵ , σ , v_0 , u_n , v_n , ψ_n pour $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ en $\theta = 0$. Dans le cas de l'approximation à une bande, seuls σ , ϵ et v_0 sont nécessaires mais ϵ_i , valeur de ϵ en $\theta = 0$, est une inconnue du problème. En revanche, on a $v_{0i} = 0$ au point d'arrêt et $\sigma_i = \pi/2$ sur l'axe de symétrie.

L'unicité de la solution physique suppose qu'il est impossible de choisir arbitrairement ϵ_i . Il manque donc, en apparence, une équation. En effet, comme dans de nombreux problèmes physiques, la modélisation mathématique donne accès à une famille de solutions dont une seule correspond à la réalité car elle reste bornée. Ici, comme nous l'avons vu en 4.2, c'est la condition de régularité sur $\frac{dv_0}{d\theta} = \frac{E_0}{D}$ qui ferme le problème.

Pour une valeur de ϵ_i dépourvue de signification physique, la dérivée $\frac{dv_0}{d\theta} = \frac{E_0}{D}$ s'annule ou devient infinie quand l'intégration arrive au voisinage des conditions soniques.

Deux cas se présentent alors :

- Soit le dénominateur D s'annule avant le numérateur E_0 et $\frac{dv_0}{d\theta}$ tend vers l'infini. L'accélération devient infinie. Ce cas ne se présente, en fluide parfait, qu'aux points anguleux exclus de nos hypothèses.
- Soit le numérateur E_0 de $\frac{dv_0}{d\theta}$ s'annule avant D . L'accélération puis la vitesse deviennent négatives : ce qui signifie que le débit injecté sur l'axe est excessif par rapport à la solution physique.

En conséquence, seule une dérivée $\frac{dv_0}{d\theta}$ finie et non nulle est acceptable physiquement ce qui implique l'annulation simultanée du numérateur E_0 et du dénominateur D . Ce critère va donc nous permettre de choisir la bonne valeur initiale de la distance

de détachement ϵ_i et donc d'assurer l'unicité de la solution. C'est dans la façon de rechercher ϵ_i et d'éviter cette singularité que réside le problème majeur de la méthode des relations intégrales appliquée aux émoussements. Ce problème est d'ailleurs totalement éludé dans la littérature.

Dans le cas de l'approximation à une bande pour un écoulement plan, la détermination de ϵ_i s'effectue suivant une méthode très sommairement décrite par Belotserkovsky [5]. Elle est basée sur la recherche d'un minimum de différence au niveau de la singularité entre deux solutions obtenues avec deux initialisations différentes de ϵ_i .

Soit $\theta = \theta^*$ la position de la singularité. On choisit alors un angle θ_a proche de θ^* mais légèrement plus petit. L'angle θ_a sera la limite supérieure d'intégration durant la recherche de la valeur ϵ_i (figure 13a).

On intègre le système différentiel (4.14) avec une première valeur initiale $\epsilon_i^{(a)}$ jusqu'à θ_a et on sauvegarde les trois valeurs des dérivées au dernier point d'intégration :

$$\left. \frac{d\epsilon}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(a)}, \quad \left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(a)}, \quad \left. \frac{dv_0}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(a)}$$

On fait de même avec une deuxième valeur initiale $\epsilon_i^{(b)}$ et on obtient :

$$\left. \frac{d\epsilon}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(b)}, \quad \left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(b)}, \quad \left. \frac{dv_0}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(b)}$$

La différence, entre les deux solutions au niveau de la singularité, est calculée grâce à la norme suivante :

$$E_\epsilon = \left| \frac{\left. \frac{d\epsilon}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(b)} - \left. \frac{d\epsilon}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(a)}}{\left. \frac{d\epsilon}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(a)}} \right|$$

$$E_\sigma = \left| \frac{\left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(b)} - \left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(a)}}{\left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(a)}} \right|$$

$$E_{v_0} = \left| \frac{\left. \frac{dv_0}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(b)} - \left. \frac{dv_0}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(a)}}{\left. \frac{dv_0}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_a}^{(a)}} \right|$$

et

$$(5.1) \quad E = \max \{ E_\epsilon, E_\sigma, E_{v_0} \}$$

De par les propriétés de la singularité, il suffit alors de rechercher le minimum de E pour obtenir la bonne valeur de ϵ_i (figure 13b). On effectue cette opération numériquement en résolvant l'équation $\frac{dE}{d\epsilon_i} = 0$ par la méthode de Newton décrite dans l'annexe A.

5.1.2 Déroutement du programme

Pour intégrer le système différentiel (4.14) comprenant trois équations, dans le cas de l'approximation à une bande, nous utilisons la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre à pas variable (annexe C). Cette méthode garantit une précision fixée par l'utilisateur tout au long de l'intégration. Son principe est simple : on compare l'intégration obtenue en prenant un pas $\Delta\theta$ avec celle obtenue en faisant deux pas $\Delta\theta/2$. La différence entre les deux résultats permet d'avoir une estimation de l'erreur commise et en fonction de celle-ci, il y a une optimisation du pas de calcul. Cette méthode peut paraître assez longue car, pour avancer d'un pas, elle fait au minimum trois calculs. Mais cette précision est indispensable pour ne pas changer de courbes intégrales à l'approche de la singularité.

Il faut néanmoins distinguer deux parties dans la résolution numérique de ce système différentiel :

- la recherche de l'unique paramètre ϵ_i , distance de détachement choc sur l'axe de symétrie ;
- l'intégration du système, une fois le paramètre fixé, pour obtenir les grandeurs physiques.

Malheureusement, le fait que le numérateur et le dénominateur de $\frac{dv_0}{d\theta}$ tendent simultanément vers zéro, entraîne une importante perte de précision au voisinage de la singularité dans le schéma de Runge Kutta. La précision nécessaire sur ϵ_i pour passer la singularité dépasse alors la précision de la machine (10^{-15} en double précision). Nous ne pouvons donc pas passer le point singulier dans le cas de l'approximation à une bande. Ce phénomène avait été également constaté par Belotserkovsky [14][15].

5.2 Approximation à une bande en écoulement méridien

5.2.1 Calcul des dérivées initiales

Dans le cas de l'écoulement méridien ($j = 1$), un premier problème se pose avant celui de la recherche de ϵ_i et du passage de la singularité. Les équations du système différentiel (4.14) qui permettent de calculer les dérivées de σ et de v_0 sont indéterminées en $\theta = 0$ et ceci quelle que soit la valeur initiale de ϵ . Pour lever cette indétermination, il suffit de simplifier ces expressions par $\sin \theta$ et de chercher leur limite lorsque θ tend vers 0.

Afin de conserver une formulation générale, nous avons gardé l'exposant j dans les expressions une fois l'indétermination levée. En posant :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(\sin \theta)^j} \frac{dS_0}{d\theta} \right] = \left. \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right|^* + \left. \frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right|^* \left. \frac{dv_0}{d\theta} \right|_{\theta=0}$$
$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(\sin \theta)^j} \frac{dt_0}{d\theta} \right] = \left. \frac{\partial t_0}{\partial \theta} \right|^* + \left. \frac{\partial t_0}{\partial v_0} \right|^* \left. \frac{dv_0}{d\theta} \right|_{\theta=0}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(\sin \theta)^j} \frac{dS_1}{d\theta} \right] = \left. \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right|^* + \left. \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \right|^* \left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\theta=0}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(\sin \theta)^j} \frac{dt_1}{d\theta} \right] = \left. \frac{\partial t_1}{\partial \theta} \right|^* + \left. \frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \right|^* \left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\theta=0}$$

on obtient les coefficients :

$$\left. \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right|^* = 0$$

$$\left. \frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right|^* = 0$$

$$\left. \frac{\partial t_0}{\partial \theta} \right|^* = 0$$

$$\left. \frac{\partial t_0}{\partial v_0} \right|^* = (j+1) [r_0(0)]^j$$

$$\left. \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right|^* = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} [r_0(0) + \epsilon(0)]^j + j u_1(0) \rho_1(0) [r_0(0) + \epsilon(0)] \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{w_\infty}$$

$$\left. \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \right|^* = [r_0(0) + \epsilon(0)]^j \left(w_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) + j u_1(0) \rho_1(0) [r_0(0) + \epsilon(0)] \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1-w_\infty^2}{w_\infty} - \frac{2w_\infty}{\gamma+1} \right)$$

$$\left. \frac{\partial t_1}{\partial \theta} \right|^* = (1+j) \tau_1(0) [r_0(0) + \epsilon(0)]^j \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{w_\infty}$$

$$\left. \frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \right|^* = (1+j) \tau_1(0) [r_0(0) + \epsilon(0)]^j \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1-w_\infty^2}{w_\infty} - \frac{2w_\infty}{\gamma+1} \right)$$

On effectue la même opération sur les coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ et en notant :

$$\mathcal{A}^* = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{\mathcal{A}}{(\sin \theta)^j} \right], \quad \mathcal{B}^* = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{\mathcal{B}}{(\sin \theta)^j} \right]$$

$$\mathcal{C}^* = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{\mathcal{C}}{(\sin \theta)^j} \right], \quad \mathcal{D}^* = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{\mathcal{D}}{(\sin \theta)^j} \right]$$

on aboutit aux expressions suivantes :

$$\mathcal{A}^* = \left. \frac{\partial t_0}{\partial \theta} \right|^* + \left. \frac{\partial t_1}{\partial \theta} \right|^* + 2\tau_1(0) u_1(0) [r_0(0) + \epsilon(0)]^j \left(1 + \frac{r_0(0)}{\epsilon(0)} \right)$$

$$\mathcal{B}^* = \left. \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right|^* + \left. \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right|^* - \frac{2r_0^{j+1} p_0(0)}{\epsilon(0)} + 2 [r_0(0) + \epsilon(0)]^j [p_1(0) + \rho_1(0) u_1(0)^2]$$

$$\left(1 + \frac{r_0(0)}{\epsilon(0)}\right) - (j+1)p_0(0)r_0(0) - (j+1)p_1(0)[r_0(0) + \epsilon(0)]^j$$

$$\mathcal{C}^* = 0$$

$$\mathcal{D}^* = 0$$

Après passage à la limite, les dérivées en $\theta = 0$ sont donc :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\epsilon}{d\theta} \right|_{\theta=0} &= - \left. \frac{dr_0}{d\theta} \right|_{\theta=0} \\ \left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\theta=0} &= - \frac{\left. \frac{\partial t_0}{\partial v_0} \right|^* \mathcal{B}^*}{\left. \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \right|^* \left. \frac{\partial t_0}{\partial v_0} \right|^*} \\ \left. \frac{dv_0}{d\theta} \right|_{\theta=0} &= \frac{\left. \frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \right|^* \mathcal{B}^* - \left. \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \right|^* \mathcal{A}^*}{\left. \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \right|^* \left. \frac{\partial t_0}{\partial v_0} \right|^*} \end{aligned}$$

5.2.2 Initialisation et problème de la singularité

Nous avons, dans le cas méridien $j = 1$, essayé une technique d'initialisation identique au cas plan ($j = 0$). Malheureusement, celle-ci n'est plus assez fiable et ne permet pas d'avoir une valeur ϵ_i assez précise. Il a donc fallu mettre au point une nouvelle technique : il faut, en effet signaler ici, l'importance de la précision sur ϵ_i pour la détermination de l'écoulement dans la zone transsonique. Observons par exemple la figure 14a, qui présente $\frac{dv_0}{d\theta}$ en fonction de θ pour différentes valeurs de ϵ_i . On voit qu'à l'approche de la singularité le réseau ressemble à un ensemble d'hyperboles. Si ϵ_i est trop petit (c'est-à-dire que la couche de choc est trop mince) alors D s'annule avant E_0 . L'accélération est infinie positive au niveau de la singularité. Si ϵ_i est trop grand (la couche de choc est trop épaisse) E_0 s'annule en premier et l'accélération est négative.

La solution physique se situe entre ces deux familles de courbes et peut être approchée par une simple dichotomie dès que deux solutions de familles différentes sont identifiées. Au cours de cette recherche, le faisceau de courbes $\frac{dv_0}{d\theta} = \mathcal{F}(\theta)$ se rétrécit de plus en plus pour ne se différencier qu'à l'approche de la singularité par $\frac{dv_0}{d\theta} \rightarrow 0$ pour les unes et par $\frac{dv_0}{d\theta} \rightarrow +\infty$ pour les autres.

Une fois la distance de détachement calculée, il faut franchir la singularité dont la position n'est jamais obtenue exactement numériquement. Mais, une singularité de type col a la principale propriété d'être symétrique par rapport au point singulier (figure 14a). Nous allons utiliser cette propriété pour franchir la singularité. Dès que ϵ_i est obtenu, on intègre le système différentiel (4.14) jusqu'à un angle $\theta = \theta_a$ légèrement inférieur à $\theta = \theta^*$ position de la singularité. Puis on approxime les fonctions $\epsilon(\theta)$, $\sigma(\theta)$, $v_0(\theta)$ par des polynômes de degré trois de la forme :

$$\epsilon(\theta) = A_0 + A_1(\theta - \theta_a) + A_2(\theta - \theta_a)^2 + A_3(\theta - \theta_a)^3$$

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= B_0 + B_1(\theta - \theta_a) + B_2(\theta - \theta_a)^2 + B_3(\theta - \theta_a)^3 \\ v_0(\theta) &= C_0 + C_1(\theta - \theta_a) + C_2(\theta - \theta_a)^2 + C_3(\theta - \theta_a)^3\end{aligned}$$

Le degré 3 est choisi afin de permettre des raccords réguliers avec la solution numérique. Les A_i, B_i, C_i sont déterminés avec les valeurs des inconnues et leurs dérivées obtenues aux deux derniers points calculés. A l'aide de ces polynômes, on extrapole les valeurs de ϵ, σ, v_0 jusqu'à $\theta = \theta_b$ symétrique de θ_a par rapport à θ^* . Puis on reprend l'intégration du système différentiel (figure 14b). Il semble que Belotserkovsky ait utilisé une méthode analogue [19].

5.2.3 Déroulement du programme

L'intégration numérique du système différentiel (4.14) est réalisée par une méthode de Runge-Kutta, d'ordre quatre à pas variable (annexe C), pour garder durant l'intégration une bonne précision. Elle est indispensable, en particulier, dans la zone de la singularité. On a en effet une indétermination du type $\left[\frac{0}{0}\right]$ et pour respecter la topologie au voisinage du point col, il est impératif de ne pas passer d'une courbe intégrale à une autre afin que la dichotomie soit fiable et précise.

La résolution numérique du système se décompose en trois parties distinctes :

- Une dichotomie permet d'obtenir deux valeurs de ϵ_i correspondant l'une à une solution d'accélération infinie positive et l'autre à une solution d'accélération négative. La différence entre les deux valeurs de ϵ_i peut être aussi petite que l'on veut. Elle permet également d'avoir une approximation très fine de la position θ^* de la singularité.
- Une fois les deux valeurs de ϵ_i calculées, on intègre jusqu'à la singularité, une première fois avec la première valeur de ϵ_i puis une deuxième intégration est effectuée avec l'autre valeur de ϵ_i . L'angle θ_a , borne inférieure de l'intervalle dans lequel on utilise les développements polynômiaux des variables d'intégration, est obtenu dès que la différence entre les deux solutions est supérieure à une précision donnée. La borne supérieure θ_b de l'intervalle des développements est simplement calculée par symétrie de θ_a par rapport à θ^* .
- La dernière partie est l'intégration définitive. On utilise la méthode Runge-Kutta de $\theta = 0$ à θ_a . Les coefficients A_i, B_i, C_i sont calculés puis on utilise les développements jusqu'à θ_b . Finalement on reprend le calcul à partir de θ_b pour finir l'intégration.

Dans tout le processus, l'étape la plus longue est la dichotomie. Mais l'ensemble est tout de même assez rapide. Suivant la forme du corps et pour une précision de l'ordre de 10^{-8} sur ϵ_i et sur l'ensemble de la solution, il faut entre trois et cinq minutes C.P.U. sur une machine dont la vitesse est de l'ordre de 1,5 mips.

5.3 Approximation à deux bandes

5.3.1 Initialisation du calcul

Calcul des dérivées initiales de u_2 et v_2

Un nouveau problème typique de l'approximation à deux bandes se pose pour le calcul de $\frac{du_2}{d\theta}\Big|_{\theta=0}$ et de $\frac{dv_2}{d\theta}\Big|_{\theta=0}$. Quelle que soit la symétrie de l'écoulement ($j = 0$ ou $j = 1$), $S_2(0)$ et $t_2(0)$ sont nuls car $v_2(0) = 0$. L'expression

$$G_2 = u_2 \left(\frac{1}{S_2} \frac{dS_2}{d\theta} - \frac{1}{t_2} \frac{dt_2}{d\theta} \right) + \frac{1}{\gamma - 1} u_2 \frac{1}{\phi_2} \frac{d\phi_2}{d\theta}$$

est donc indéterminée, du type $[\infty - \infty]$. On ne parvient pas à lever cette indétermination à l'aide de développements car le système différentiel dégénère en une seule équation. Il faut donc calculer u_2 et v_2 en $\theta = \Delta\theta$ sans intégrer les équations singulières $\frac{du_2}{d\theta}$ et $\frac{dv_2}{d\theta}$.

Repartons des équations de conservation de la masse et de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial rh}{\partial r} + \frac{\partial t}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial rH}{\partial r} + \frac{\partial S}{\partial \theta} &= g \end{aligned}$$

Comme on se trouve sur ou proche de l'axe de symétrie de l'écoulement, l'angle θ est petit et on peut donc faire l'approximation suivante : $\sin \theta \simeq \theta$. On écrit maintenant les variables de la forme suivante :

$$S = (r\theta)^j \rho uv, \quad t = (r\theta)^j \tau v, \quad h = (r\theta)^j \tau u$$

$$H = (r\theta)^j (p + \rho u^2), \quad g = (r\theta)^j ((j+1)p + \rho v^2)$$

Nous appliquons alors le théorème de la divergence au système d'équations précédent sur le domaine $r \in [r_0, r_2]$, $\theta \in [0, \Delta\theta]$:

$$\begin{aligned} - \int_0^{\Delta\theta} r_0 h(r_0, \theta) d\theta + \int_0^{\Delta\theta} r_2 h(r_2, \theta) d\theta + \int_{r_0}^{r_2} t(r, \Delta\theta) dr &= 0 \\ - \int_0^{\Delta\theta} r_0 H(r_0, \theta) d\theta + \int_0^{\Delta\theta} r_2 H(r_2, \theta) d\theta + \int_{r_0}^{r_2} S(r, \Delta\theta) dr &= \\ \int_{r_0}^{r_2} \int_0^{\Delta\theta} g(r\theta) dr d\theta & \end{aligned}$$

En faisant les mêmes hypothèses que nécessite la méthode des relations intégrales pour la suite de l'intégration, c'est-à-dire en approximant S , t et g par des polynômes

du deuxième degré, les termes en $t(r, \Delta\theta)$ et $S(r, \Delta\theta)$ sont facilement calculés :

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^{r_2} t(r, \Delta\theta) dr &= \epsilon(\Delta\theta) \left[\frac{5}{24} t_0(\Delta\theta) - \frac{1}{24} t_1(\Delta\theta) + \frac{1}{3} t_2(\Delta\theta) \right] \\ \int_{r_0}^{r_2} S(r, \Delta\theta) dr &= \epsilon(\Delta\theta) \left[\frac{5}{24} S_0(\Delta\theta) - \frac{1}{24} S_1(\Delta\theta) + \frac{1}{3} S_2(\Delta\theta) \right]\end{aligned}$$

A cause de la symétrie de l'écoulement, on a d'une manière évidente $\left. \frac{\partial p}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0$ et donc on peut considérer que pour θ petit, la pression p est uniquement fonction du rayon polaire r . De plus, on a également la vitesse orthoradiale v très petite donc le terme source vérifie $g(r, \theta) = (j+1)(r\theta)^j p(r)$. On aboutit donc à :

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^{r_2} \int_0^{\Delta\theta} g(r, \theta) dr d\theta &= \int_{r_0}^{r_2} \int_0^{\Delta\theta} (j+1)(r\theta)^j p(r) dr d\theta \\ &= \Delta\theta \int_{r_0}^{r_2} \Delta\theta^j r^j (j+1) p(r) dr \\ &= \frac{\Delta\theta}{j+1} \epsilon(\Delta\theta) \left[\frac{5}{24} g_0(\Delta\theta) - \frac{1}{24} g_1(\Delta\theta) + \frac{1}{3} g_2(\Delta\theta) \right]\end{aligned}$$

Enfin, on peut exprimer les termes en h et H en fonction des variables en $\theta = 0$ en faisant l'approximation que $\Delta\theta$ est petit. On obtient, à des termes d'ordre $(\Delta\theta)^{j+2}$ près :

$$\begin{aligned}\int_0^{\Delta\theta} r_0 h(r_0, \theta) d\theta &= \int_0^{\Delta\theta} r_0^{j+1} \tau(r_0, 0) u(r_0, 0) \theta^j d\theta \\ &= \frac{(\Delta\theta)^{j+1}}{j+1} r_0^{j+1} \tau_0(0) u_0(0)\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\int_0^{\Delta\theta} r_2 h(r_2, \theta) d\theta &= \frac{(\Delta\theta)^{j+1}}{j+1} r_2^{j+1} \tau_2(0) u_2(0) \\ \int_0^{\Delta\theta} r_0 H(r_0, \theta) d\theta &= \frac{(\Delta\theta)^{j+1}}{j+1} r_0^{j+1} [p_0(0) + \rho_0(0) u_0^2(0)] \\ \int_0^{\Delta\theta} r_2 H(r_2, \theta) d\theta &= \frac{(\Delta\theta)^{j+1}}{j+1} r_2^{j+1} [p_2(0) + \rho_2(0) u_2^2(0)]\end{aligned}$$

On aboutit finalement aux deux équations qui permettent de calculer $t_2(\Delta\theta)$, $S_2(\Delta\theta)$:

$$(5.2) \quad t_2(\Delta\theta) = -\frac{3(\Delta\theta)^{j+1}}{(j+1)\epsilon(\Delta\theta)} \left[r_2^{j+1} \tau_2(0) u_2(0) - r_0^{j+1} \tau_0(0) u_0(0) \right] - \frac{5}{8} t_0(\Delta\theta) + \frac{1}{8} t_1(\Delta\theta)$$

$$(5.3) \quad S_2(\Delta\theta) = -\frac{3(\Delta\theta)^{j+1}}{(j+1)\epsilon(\Delta\theta)} \left[r_2^{j+1} (p_2(0) + \rho_2(0) u_2^2(0)) - r_0^{j+1} (p_0(0) + \rho_0(0) u_0^2(0)) \right] - \frac{5}{8} S_0(\Delta\theta) + \frac{1}{8} S_1(\Delta\theta) + \frac{\Delta\theta}{j+1} \left[\frac{5}{8} g_0(\Delta\theta) - \frac{1}{8} g_1(\Delta\theta) + g_2(\Delta\theta) \right]$$

Premier pas de calcul

Le premier pas de calcul se déroule en pratique de la manière suivante : on intègre (4.19) en substituant à $\frac{du_2}{d\theta}$ et $\frac{dv_2}{d\theta}$ les équations (5.2)(5.3). Il faut choisir par exemple $\Delta\theta \simeq 10^{-3}$, pour garder une grande précision. Les variables $\epsilon, \sigma, v_0, \psi_2$ sont ainsi connues en $\Delta\theta$ et permettent de calculer toutes les grandeurs en $\Delta\theta$ sur le corps et sur le choc. Comme d'après la symétrie, $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$, on a $p_2(\Delta\theta) = p_2(0)$. Alors, connaissant $\psi_2(\Delta\theta)$, on arrive facilement à $\rho_2(\Delta\theta)$. Grâce aux valeurs de $t_2(\Delta\theta)$ et $S_2(\Delta\theta)$ on obtient $u_2(\Delta\theta)$ et $v_2(\Delta\theta)$. On peut alors reprendre la méthode de Runge-Kutta pour intégrer le système différentiel (4.19) à partir de $\Delta\theta$ où l'équation G_2 n'est plus singulière.

5.3.2 Utilisation de la fonction de courant

Pour l'approximation à une bande, la seule ligne de courant prise en compte est l'obstacle lui même. On peut alors déterminer la valeur de $\frac{p_0}{\rho_0^\gamma}$ par (3.7). Ici, nous avons en plus la ligne intermédiaire $\zeta = 1/2$ qui n'est pas une ligne de courant. Pour obtenir la pression et la masse volumique en chaque point de cette ligne, il faut déterminer la valeur $\phi_2(\psi_2) = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma}$ de la fonction d'entropie à partir de la fonction de courant $\psi_2(\theta)$ connue par l'intégration de l'équation en $\frac{d\psi_2}{d\theta}$ du système (4.19).

Pour ce faire, nous utilisons la conservation de l'entropie sur une ligne de courant en aval du choc (figure 12b) qui s'écrit :

$$\phi_2(\psi_2) = \phi_1(\psi_1)|_{\psi_1=\psi_2}$$

A chaque pas d'intégration, les valeurs de ψ_1 et ϕ_1 sont sauvegardées. La fonction $\phi_1(\psi_1)$ est donc connue. De par la nature de l'écoulement, on a toujours $\psi_2 \leq \psi_1$. Dès que ψ_2 est fixé, il suffit alors de trouver les valeurs de ψ_1 qui l'encadrent et en interpolant la fonction $\phi_1(\psi_1)$, on obtient la valeur ϕ_2 de la fonction d'entropie. Connaissant u_2 et v_2 par l'intégration du système, on peut alors calculer toutes les grandeurs physiques sur la ligne intermédiaire.

Le même principe s'applique pour le calcul des expressions de $\frac{1}{\phi_2} \frac{d\phi_2}{d\theta}$ qui apparaissent dans les équations pour G_2 et E_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \phi_2}{d\theta} &= \frac{d \ln \phi_2}{d\psi_2} \frac{d\psi_2}{d\theta} \\ &= \left. \frac{d \ln \phi_1}{d\sigma} \right|_{\psi_1=\psi_2} \left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\psi_1=\psi_2} \left. \frac{d\theta}{d\psi_1} \right|_{\psi_1=\psi_2} \frac{d\psi_2}{d\theta} \end{aligned}$$

Les termes $\left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\psi_1=\psi_2}$ et $\left. \frac{d\psi_1}{d\theta} \right|_{\psi_1=\psi_2}$ sont eux aussi calculés par une interpolation des fonctions $\frac{d\sigma}{d\theta}(\psi)$ et $\frac{d\psi_1}{d\theta}(\psi)$ qui sont sauvegardées au cours de l'intégration. Quant au terme $\left. \frac{d \ln \phi_1}{d\sigma} \right|_{\psi_1=\psi_2}$, il s'obtient analytiquement en dérivant les relations sur le choc :

$$\frac{d \ln \phi_1}{d\sigma} = \gamma \sin 2\sigma \left[\frac{w_\infty^2 - 1}{\sin^2 \sigma (1 - w_\infty^2 \cos^2 \sigma)} + \frac{4w_\infty^2}{4\gamma w_\infty^2 \sin^2 \sigma - (\gamma - 1)^2 (1 - w_\infty^2)} \right]$$

5.3.3 Ecoulement plan

Initialisation

Pour initialiser le système différentiel (4.19), nous avons besoin de six conditions initiales. Seules quatre variables sont connues sur l'axe $\theta = 0$: $\sigma = \pi/2$, $v_0 = 0$, $v_2 = 0$, $\psi_2 = 0$. Il reste donc deux paramètres à déterminer ϵ_i et u_{2i} de manière à ce que les fonctions $v_0(\theta)$ et $v_2(\theta)$ soient régulières. Il faut que le numérateur et le dénominateur de $\frac{dv_0}{d\theta}$ s'annulent simultanément et de même pour $\frac{dv_2}{d\theta}$ car seules les dérivées finies et non nulles sont physiquement acceptables. En conséquence, au cours de l'intégration, nous devons traverser deux singularités de type col dans la région transsonique : une sur le corps et l'autre sur la ligne intermédiaire. La méthode est basée sur les mêmes concepts que dans le cas de l'approximation à une bande mais diffère néanmoins suivant le type de symétrie.

Dans le cas $j = 0$, les couches de choc sont épaisses et les deux singularités sont assez éloignées l'une de l'autre pour qu'elles n'interfèrent pas. On peut donc les traiter indépendamment l'une après l'autre.

On fixe u_{2i} puis on cherche deux valeurs de ϵ_i qui correspondent aux deux cas possibles pour la première singularité : $\frac{dv_0}{d\theta}$ nul ou infini. De manière identique au cas à une bande, ϵ_i est initialisé grâce à une dichotomie. Puis, toujours en utilisant les propriétés des points col, la singularité est franchie en développant les six variables avec des polynômes de degré trois. On reprend alors l'intégration du système de l'autre côté de la première singularité jusqu'à la deuxième. On retrouve un comportement tout à fait analogue à celui de $\frac{dv_0}{d\theta}$. Si u_{2i} est trop grand en valeur absolue alors E_2 s'annule avant le dénominateur ; si u_{2i} est trop petit en valeur absolue, $\frac{dv_2}{d\theta}$ tend vers l'infini. Il suffit donc de mettre en place deux dichotomies imbriquées pour arriver à initialiser ϵ_i et u_{2i} .

Déroulement du programme

L'intégration définitive se déroule maintenant en cinq parties (figure 15).

- Intégration avec la méthode de Runge-Kutta à pas variable jusqu'à θ_a avec arrêt un peu avant la première singularité.
- Développements polynômiaux des variables de θ_a à θ_b : passage du premier point singulier.
- Reprise de l'intégration avec le Runge-Kutta de θ_b à θ_c : arrêt un peu avant la deuxième singularité.
- Nouveaux développements des variables de θ_c à θ_d : passage du deuxième point singulier.
- Fin de l'intégration jusqu'à θ_{max} .

Les angles θ_c et θ_d de part et d'autre de la deuxième singularité sont calculés de la même façon que les angles θ_a et θ_b dans l'approximation à une bande.

5.3.4 Écoulement méridien

Calcul des dérivées initiales de σ et v_0

Comme dans le cas de l'approximation à une bande, en écoulement méridien ($j = 1$), les expressions de $\frac{d\sigma}{d\theta}$ et $\frac{dv_0}{d\theta}$ du système différentiel (4.19) présentent une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$ en $\theta = 0$. L'indétermination est levée de la même manière qu'en 5.3.2 en utilisant des développements.

Les coefficients $\left. \frac{\partial t_0}{\partial \theta} \right|^*$, $\left. \frac{\partial t_1}{\partial \theta} \right|^*$, $\left. \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right|^*$, $\left. \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right|^*$, $\left. \frac{\partial t_0}{\partial v_0} \right|^*$, $\left. \frac{\partial S_0}{\partial v_0} \right|^*$, $\left. \frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \right|^*$, $\left. \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \right|^*$ ont les mêmes valeurs que dans le cas de l'approximation à une bande. En revanche, les expressions de \mathcal{A}^* , \mathcal{B}^* , \mathcal{C}^* , \mathcal{D}^* sont modifiées :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^* &= \left. \frac{\partial t_0}{\partial \theta} \right|^* - \left. \frac{\partial t_1}{\partial \theta} \right|^* - 4\tau_1(0)u_1(0) [r_0(0) + \epsilon(0)]^j \left(1 + \frac{r_0(0)}{\epsilon(0)} \right) + \\ & 4\tau_2(0)u_2(0) \left[r_0(0) + \frac{\epsilon(0)}{2} \right]^j \left(1 + \frac{2r_0(0)}{\epsilon(0)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^* &= \left. \frac{\partial S_0}{\partial \theta} \right|^* - \left. \frac{\partial S_1}{\partial \theta} \right|^* - 4 [r_0(0) + \epsilon(0)]^j [p_1(0) + \rho_1(0)u_1(0)^2] \left(1 + \frac{r_0(0)}{\epsilon(0)} \right) + \\ & 4 \left[r_0(0) + \frac{\epsilon(0)}{2} \right]^j [p_2(0) + \rho_2(0)u_2(0)^2] \left(1 + \frac{2r_0(0)}{\epsilon(0)} \right) - \\ & (j+1)p_0(0) [r_0(0)]^j + (j+1)p_1(0) [r_0(0) + \epsilon(0)]^j - 4 \frac{r_0(0)}{\epsilon(0)} p_0(0) [r_0(0)]^j \end{aligned}$$

$$\mathcal{C}^* = 0$$

$$\mathcal{D}^* = 0$$

Les dérivées initiales s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\epsilon}{d\theta} \right|_{\theta=0} &= - \left. \frac{dr_0}{d\theta} \right|_{\theta=0} \\ \left. \frac{d\sigma}{d\theta} \right|_{\theta=0} &= \frac{\left. \frac{\partial t_0}{\partial v_0} \right|^* \mathcal{B}^*}{\left. \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \right|^* \left. \frac{\partial t_0}{\partial v_0} \right|^*} \\ \left. \frac{dv_0}{d\theta} \right|_{\theta=0} &= \frac{\left. \frac{\partial t_1}{\partial \sigma} \right|^* \mathcal{B}^* - \left. \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \right|^* \mathcal{A}^*}{\left. \frac{\partial S_1}{\partial \sigma} \right|^* \left. \frac{\partial t_0}{\partial v_0} \right|^*} \\ \left. \frac{d\psi_2}{d\theta} \right|_{\theta=0} &= -\rho_2(0)u_2(0)r_2(0) \end{aligned}$$

Initialisation

Pour le cas méridien ($j = 1$), les couches de choc sont nettement plus minces que dans le cas plan et les deux singularités sont proches l'une de l'autre. Il faut donc

les franchir en même temps. De plus, elles se présentent dans l'ordre inverse du cas $j = 0$. Alors que pour l'écoulement plan, le premier point singulier se trouvait sur le corps et concernait donc l'équation $\frac{dv_0}{d\theta}$, ici la première singularité se trouve sur la ligne intermédiaire et se rapporte à $\frac{dv_2}{d\theta}$.

A cause de la proximité des deux singularités, le calcul perd beaucoup en précision à l'approche de la région transsonique. En effet, deux des six équations du système différentiel (4.19) sont singulières et ceci quasi-simultanément. Ainsi lors de la première dichotomie, on n'arrive pas, par un simple ajustement du paramètre ϵ_i , à resserrer suffisamment le faisceau de courbes intégrales autour de la première singularité (figure 16). On atteint les limites de la précision de la machine et un comportement oscillatoire apparaît. Par différence entre les deux types de solutions, on obtient à la fin de la dichotomie l'angle θ_a marquant le début de l'utilisation des développements. Cet angle est loin du premier point singulier car les courbes divergent très vite. L'interpolation des variables d'intégration doit être utilisée sur un intervalle beaucoup trop grand ce qui entraîne une perte importante de précision sur le calcul.

Pour approcher le premier point singulier d'une façon plus précise, on utilise la méthode suivante : une fois ϵ_i initialisé à environ 10^{-8} (limite de précision du calcul avant d'obtenir des oscillations numériques) et l'angle θ_a calculé, on relance une nouvelle dichotomie sur ϵ , mais maintenant, à partir de l'angle θ_a . On suppose donc que toute la partie de l'intégration comprise entre $\theta = 0$ et $\theta = \theta_a$ reste inchangée. On modifie $\epsilon(\theta_a)$ de la même manière et avec les mêmes critères que l'on modifiait ϵ_i . Comme on s'est rapproché de la singularité, la précision sur $\epsilon(\theta_a)$ est encore faible. On peut alors resserrer le faisceau de courbes intégrales en affinant cette valeur. On s'approche ainsi "plus près" de la première singularité et en minimisant la différence entre deux solutions de chaque type, on peut calculer un angle θ_a^{bis} . Il n'est pas nécessaire de recommencer une troisième fois l'opération. On peut à partir de θ_a^{bis} utiliser le franchissement des singularités par des polynômes.

Contrairement au cas plan, les deux singularités sont très proches. Elles sont franchies ensemble.

Déroulement du programme

L'intégration définitive s'effectue donc en quatre étapes (figure 16) :

- Intégration avec la méthode de Runge-Kutta jusqu' à θ_a .
- Optimisation de la valeur de $\epsilon(\theta_a)$ et poursuite de l'intégration jusqu'à θ_a^{bis}
- Développements des variables de θ_a^{bis} à θ_b : passage des deux singularités de façon simultanée.
- Reprise de l'intégration avec le Runge-Kutta jusqu'à θ_{max} .

L'angle θ_b est calculé comme le symétrique de θ_a^{bis} par rapport à la position moyenne des deux singularités.

5.3.5 Accélération des deux dichotomies imbriquées

Comme dans le cas de l'approximation à une bande, le processus le plus long est toujours la recherche des bonnes valeurs d'initialisation de ϵ_i et de u_{2i} . Le système des deux dichotomies imbriquées, l'une sur ϵ_i , l'autre sur u_{2i} , est le seul moyen que nous ayons trouvé pour réaliser cette initialisation de façon la plus systématique possible et la plus robuste. Sachant que dans le cas de l'approximation à une bande, la recherche de ϵ_i , avec une précision de 10^{-8} , prend de l'ordre de trois à cinq minutes C.P.U. sur une machine dont la vitesse est de 1,5 mips et qu'il faut une trentaine d'itérations pour avoir u_{2i} avec la même précision, le temps de recherche de l'initialisation du schéma à deux bandes est alors d'environ deux heures C.P.U. .

Nous avons réussi à accélérer ce processus en faisant la remarque suivante : pour un nombre de Mach fixé, si on représente la fonction $\epsilon_i = \mathcal{F}(u_{2i})$ qui permet le passage de la première singularité, on trouve une droite (figure 17). Cela permet, au fur et à mesure des itérations sur u_{2i} , de réduire l'intervalle dans lequel se trouve la valeur de ϵ_i correspondant au passage de la première singularité, et donc de réduire le nombre d'itérations nécessaire à la première dichotomie.

Par exemple, si à deux valeurs u_{2i}^a et u_{2i}^b correspondent deux valeurs ϵ_i^a et ϵ_i^b qui permettent de passer le premier point singulier, alors pour une valeur de u_{2i} comprise entre u_{2i}^a et u_{2i}^b , la bonne valeur de ϵ qui permettra de passer la singularité sera dans l'intervalle $[\epsilon_i^a, \epsilon_i^b]$. Comme, au cours de la dichotomie sur u_{2i} , on augmente de plus en plus la précision sur u_{2i} , l'intervalle $[u_{2i}^a, u_{2i}^b]$ est de plus en plus petit, et il en est de même par conséquent pour l'intervalle $[\epsilon_i^a, \epsilon_i^b]$. On connaît donc, de façon de plus en plus précise, la valeur de ϵ qui permet de passer la première singularité. Le nombre d'itérations pour initialiser ϵ passe donc d'une trentaine au début de la dichotomie sur u_{2i} pour finir à trois ou quatre.

Le temps C.P.U. pour réaliser les deux initialisations passe alors à moins d'une heure.

Chapitre 6

Résultats

6.1 Ecoulement plan : approximation à une bande

Comme nous l'avons signalé au paragraphe 5.1.2, le cas de l'approximation à une bande pour un écoulement plan est un peu particulier. Outre le fait qu'il nécessite une technique spéciale d'initialisation de la distance de détachement ϵ_i , on ne peut pas franchir la singularité grâce à une extrapolation des variables d'intégrations.

Nous sommes donc obligés d'arrêter l'intégration pour un angle polaire θ légèrement inférieur à la position de la singularité. Nous pouvons néanmoins obtenir les distances de détachement sur l'axe ϵ_i en fonction du nombre de Mach amont :

M_∞	3	4	5	8	10	30	50
ϵ_i	0,69687	0,54275	0,48011	0,44000	0,39888	0,37716	0,37547

La forme du choc ainsi que la pression sur le corps rapportée à la pression au point d'arrêt sont présentées figure 18, pour un nombre de Mach amont variant de 3 à 30. Ces résultats sont en parfaite concordance avec ceux publiés par Belotserkovsky [5][14][15].

Comme nous connaissons les grandeurs physiques sur le corps et sur le choc, nous pouvons, en interpolant, obtenir les isomachs (figure 19) et les cartes de pression (figure 20) dans la couche de choc pour $M_\infty = 3, 4, 6$ et 10.

6.2 Ecoulement méridien : approximation à une bande

Les résultats calculés dans le cas de l'approximation à une bande pour les corps de révolution sont nettement meilleurs que ceux obtenus pour le cylindre. En effet, l'épaisseur de la couche de choc étant beaucoup plus faible que dans le cas plan : l'approximation de S, t et g est donc nettement meilleure et on peut intégrer au delà de la singularité dans tous les cas.

6.2.1 Ecoulement autour d'une sphère

Résultats de la M.I.R.

Nous présentons en premier lieu les résultats du calcul de l'écoulement autour de la sphère. On obtient avec la dichotomie les distances de détachement du choc ϵ_i suivantes :

M_∞	3	4	6	10	50
ϵ_i	0,21592947	0,17500021	0,14823572	0,13523985	0,12840631

La précision de l'intégration lors de la dichotomie, ainsi que sur ϵ_i , est de l'ordre de 10^{-8} .

La forme du choc et les répartitions de pression sur le corps sont présentées figure 21. Notons néanmoins le croisement inhabituel des courbes de pression pour $\theta = 1,2 \text{ rad}$ sur la figure 21b. Comme nous connaissons les grandeurs physiques sur le corps et sur le choc, nous pouvons, par interpolation, obtenir les cartes de pression ainsi que les courbes isomachs dans la couche de choc. Les isomachs sont tracées sur la figure 22 pour différents nombres de Mach amont et les cartes de pression sur la figure 23.

Nos résultats pour $M_\infty = 6$ sont comparés sur la figure 24 avec ceux de Diringer [18] et Belotserkovsky [5], ce dernier ayant également réalisé des expériences. Ils correspondent parfaitement avec le calcul fait en [5] avec l'approximation à deux bandes. Par contre, Diringer a utilisé la première approximation de la méthode des relations intégrales, mais en coordonnées curvilignes et il surestime la détente au niveau du corps. Ceci a pour effet de placer le choc en-dessous de la position indiquée par l'expérience. La principale différence entre la méthode en coordonnées polaires que nous utilisons et celle des coordonnées curvilignes de Diringer est que nous ne développons en polynômes de r que des variables thermodynamiques ou mécaniques (S, t, g), alors que Diringer développe un produit de ces variables avec la métrique. Il y a donc dans son cas une approximation géométrique de la couche de choc qui semble pénalisante sur le plan des résultats [18]. Quant à notre approximation à une bande, elle se comporte de manière opposée à celle de Diringer. Elle sous-estime la détente et place donc le choc au-dessus du choc obtenu par l'expérience. Elle reste cependant meilleure que celle de Diringer surtout en ce qui concerne la pression sur le corps. En fait pour $\theta \geq 0,9 \text{ rad}$, l'approximation linéaire de S, t, g n'est plus très bonne et cela entraîne une surestimation de la pression pariétale. Ce phénomène est d'autant plus important que le nombre de Mach est élevé ; il explique le croisement des courbes de pression de la figure 21.

Comparaison avec les méthodes approchées

Connaissant la variation de la distance de détachement du choc sur l'axe de symétrie en fonction du nombre de Mach amont, nous avons comparé nos résultats avec les différentes méthodes approchées existant dans la littérature.

La plus connue de ces méthodes est celle à densité constante. Elle a été développée par Hida [20] puis par Lighthill pour les écoulements hypersoniques [21]. Le

calcul analytique de la distance de détachement de l'onde de choc ϵ_i dans le cas de l'écoulement méridien aboutit à une équation quadratique dont la solution approchée est de la forme suivante [12] :

$$\epsilon_i = KR \left[1 - \sqrt{\frac{8K}{3}} + 3K - \frac{25}{8}K\sqrt{\frac{8K}{3}} + O(K^2) \right]$$

avec K petit, rapport de la masse volumique en amont du choc sur celle en aval et R rayon de la sphère.

Par la suite Li et Geiger [11][23] ont simplifié cette résolution et ont obtenu une autre expression de ϵ_i très proche de celle de Hida :

$$\epsilon_i = \frac{KR}{1 + \sqrt{\frac{8K}{3}}}$$

Lobb a mesuré ϵ_i expérimentalement lors de tirs de sphères dans l'air jusqu'à $M_\infty = 15$ [22]. Il en a déduit une relation approximative entre le nombre de Mach et la distance de détachement :

$$\epsilon_i = 0,41KR$$

Toutes ces techniques approchées sont comparées aux résultats de la M.I.R. sur la figure 25. On observe qu'elles sous-estiment toutes la distance de détachement ϵ_i par rapport à la M.I.R. .

6.2.2 Ecoulement autour d'un ellipsoïde

Nous avons également essayé notre programme sur des ellipsoïdes. Pour avoir une distance de détachement du choc, toujours du même ordre, quel que soit le rapport du demi axe a parallèle à l'écoulement au loin sur l'autre demi axe b , nous avons placé le centre du repère d'intégration au centre de courbure de l'ellipsoïde (figure 26). Le calcul est donc effectué dans le repère (O_1, x, y) avec pour angle polaire θ . L'ellipsoïde a donc pour équation :

$$r_0(\theta) = \frac{b^2 \sqrt{1 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2 \theta} - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos \theta}{a \left(1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2 \theta\right)}$$

Puis nous transposons les résultats dans le repère (O_2, X, Y) d'angle polaire ϑ . Nous effectuons également un changement d'échelle de manière à avoir, dans tous les cas, le grand axe a unitaire.

La dichotomie permet de calculer les distances de détachement en fonction du rapport b/a et du nombre de Mach amont avec une précision de 10^{-8} . On obtient, avec $a = 1$, les ϵ_i donnés dans le tableau suivant :

	$M_\infty = 3$	$M_\infty = 4$	$M_\infty = 6$	$M_\infty = 10$
$b/a = 1/5$	0,02879089	0,02735557	0,02620003	0,02555669
$b/a = 1/3$	0,02683501	0,02112782	0,01758804	0,01591868
$b/a = 1/2$	0,06087475	0,04820529	0,04022860	0,03643727
$b/a = 2/3$	0,10468837	0,08359039	0,07070728	0,06364973
$b/a = 1$	0,21592947	0,17500021	0,14823572	0,13523985
$b/a = 6/5$	0,29612074	0,24134241	0,20533974	0,18778047
$b/a = 3/2$	0,43870965	0,35407223	0,30281578	0,27772536
$b/a = 2$	0,68695453	0,56715856	0,48856755	0,44991509
$b/a = 5/2$	0,96194944	0,80000248	0,69347687	0,64083642

Ces résultats sont également présentés sous forme de courbes sur la figure 27.

Nous détaillons maintenant uniquement les cas d'un ellipsoïde allongé ($b/a = 0,5$) et d'un ellipsoïde très émoussé ($b/a = 1,5$) car ce sont les seuls qui permettent des comparaisons avec la littérature. La forme du choc et la pression sur le corps sont tracées pour l'ellipsoïde de rapport $b/a = 0,5$ sur la figure 28. De même que pour la sphère, on obtient les isomachs en interpolant les grandeurs physiques (figure 29). On remarque qu'on retrouve le même problème que pour la sphère c'est-à-dire un croisement des courbes (figure 28b) dû à une surestimation de la pression sur le corps.

En ce qui concerne l'ellipsoïde fortement émoussé ($b/a = 1,5$), le problème n'apparaît pas car l'intégration ne va pas aussi loin : on ne peut d'ailleurs pas intégrer jusqu'à θ_{max} correspondant à $\vartheta = \pi/2$ pour des raisons géométriques (figure 26a). La forme du choc et la pression sur le corps sont présentées figure 30. Les courbes isomachs sont tracées figure 31. La comparaison de nos résultats avec ceux des autres auteurs (figure 32) confirme les remarques faites sur la sphère. Diringer surestime beaucoup la détente ce qui entraîne une courbure de choc plus importante. Par contre, nos résultats sont très proches de ceux que Belotserkovsky a obtenus dans le cas de l'approximation à deux bandes. Nous avons également tracé sur ces graphiques les résultats obtenus en effectuant le calcul avec un repère d'intégration ayant pour origine le centre de l'ellipsoïde au lieu du centre de courbure. Dans ce cas, les défauts de l'approximation à une bande sont plus importants : la détente est sousestimée et la courbure du choc est trop faible. Il semble donc que la méthode est d'autant meilleure que la composante orthoradiale de la vitesse est grande par rapport à la composante radiale. En d'autres termes, il faut que les flux circulant entre les bandes soient faibles et à variation lente avec θ . Nous verrons une explication de cela au chapitre 7.

6.2.3 Ecoulement autour d'un corps en loi de puissance

Après les ellipsoïdes, nous avons étudié les corps en loi de puissance. Dans le repère choisi pour l'intégration, leur équation est de la forme :

$$y = (1 + x)^n \quad \text{avec} \quad 0 < n < 1$$

qui aboutit en coordonnées polaires à l'équation implicite suivante :

$$r_0(\theta) \sin \theta - (1 + r_0(\theta) \cos \theta)^n = 0$$

L'unité de longueur est donc $r_0(0) = 1$.

Le problème de ces corps est que le rayon de courbure en $\theta = 0$ est nul, ce qui ralentit l'intégration pour les angles polaires petits. De plus, si les corps sont peu émoussés ($n \simeq 1$) les distances de détachement du choc sont faibles. Néanmoins la recherche de ϵ_i nous a permis d'obtenir les courbes de distances de détachement en fonction du nombre de Mach amont et de l'exposant de la loi de puissance n (figure 33). La précision d'intégration est dans ce cas de 10^{-6} . Les résultats sont rassemblés sur le tableau suivant :

	$M_\infty = 3$	$M_\infty = 4$	$M_\infty = 6$	$M_\infty = 10$
$n = 1/4$	0,276295	0,234875	0,207309	0,193705
$n = 1/3$	0,215667	0,180277	0,156850	0,145356
$n = 1/2$	0,124070	0,098170	0,081718	0,073879
$n = 2/3$	0,058999	0,041794	0,031854	0,027418
$n = 3/4$	0,034492	0,021917	0,015307	0,012547

Nous présentons uniquement les résultats pour le corps en loi de puissance 2/3 sur la figure 34, car pour les autres valeurs de l'exposant n , les courbes sont du même type. Les isomachs sont tracées figure 35, pour différentes valeurs du nombre de Mach amont.

L'annexe D regroupe les résultats d'intégration de la M.I.R. à une bande pour le cylindre, la sphère, les ellipsoïdes et les corps en loi de puissance. Elle contient, tabulées en fonction de l'angle d'intégration θ , les grandeurs physiques sur le choc u_1, v_1, p_1 et sur le corps u_0, v_0, p_0 ainsi que la distance de détachement de l'onde de choc ϵ suivant les différents nombres de Mach.



6.3 Approximation à deux bandes

6.3.1 Écoulement plan : le cylindre

Comme il a été montré en 6.1, le calcul de l'écoulement autour d'un cylindre par l'approximation à une bande ne permettait pas de franchir le point singulier. Dans ce cas plan, la couche de choc est épaisse et l'approximation linéaire des variables S, t et g n'est pas assez fine.

Par contre, avec l'approximation à deux bandes, on arrive à traverser la ligne sonique mais l'intégration s'arrête avant $\theta_{max} = \pi/2$ car l'épaisseur de la couche de choc reste importante. Les deux dichotomies permettent d'obtenir avec une précision de 10^{-8} les conditions initiales suivantes :

M_∞	3	4	5
ϵ_i	0,71028966	0,54810728	0,48296476
u_{2i}	-0,12269972	-0,10709326	-0,09982588

La forme du choc et la pression sur le corps sont tracées figure 36. De plus, on peut également avoir les cartes de pression et les isomachs mais de façon nettement

plus précise que pour le cas de l'approximation à une bande. A partir des grandeurs physiques sur le corps, sur le choc et également sur la ligne intermédiaire, on peut obtenir les différents champs. Les courbes isomachs et les cartes de pression sont tracées sur les figures 37 et 38.

Nous comparons sur la figure 39 nos résultats avec ceux de l'approximation à une bande et avec ceux de Belotserkovsky [5]. Nos calculs, tout comme ceux de Belotserkovsky, coïncident avec les résultats expérimentaux [5]. De même, les valeurs initiales obtenues diffèrent de moins de 1,25% de celles publiées par Belotserkovsky. Cette légère différence s'explique simplement par l'évolution de la précision des machines. Par contre, on remarque la nette différence avec la première approximation. Sur la figure 40, sont tracées les isomachs pour les deux approximations : la modification de la courbure des lignes de Mach est très importante et la nette amélioration des résultats est parfaitement visible pour le cas à deux bandes.

6.3.2 Ecoulement méridien : la sphère

L'écoulement autour d'une sphère a été également calculé en utilisant l'approximation à deux bandes.

Nous obtenons avec une précision de 10^{-6} sur l'intégration et sur les conditions initiales les valeurs de ϵ_i et de u_{2i} suivantes :

M_∞	3	4	6	10
ϵ_i	0,21464	0,17496	0,14854	0,13541
u_{2i}	-0,107640	-0,095515	-0,086512	-0,081754

Ces valeurs initiales diffèrent au maximum de 1% de celles de Belotserkovsky [5]. Les répartitions de pression sur le corps ainsi que la position de l'onde de choc sont présentées figure 41 pour $M_\infty = 3, 4, 6, 10$. Les isomachs et les cartes de pression sont tracées figures 42 et 43. On remarque la courbure assez importante des lignes de Mach à l'intérieur de la couche de choc.

Comme dans tous les autres cas, outre les cartes de pression et les isomachs, on peut obtenir dans la couche de choc la masse volumique, la température adimensionnée par w_{max}^2 et les lignes de courant par interpolation entre les valeurs calculées sur le choc, la ligne intermédiaire et le corps. Dans le cas de la sphère, les cartes de masse volumique et de température sont présentées figures 44 et 45 pour différents nombres de Mach amont.

La figure 46, où sont dessinées les lignes de courant, met en évidence un phénomène important de l'hypersonique : la couche d'entropie. Elle apparaît surtout pour des nombres de Mach élevés et on distingue nettement le pincement de lignes de courant pour $\theta \simeq \pi/4$ puis le "décollement" de celles-ci qui caractérise la présence de la couche d'entropie.

La comparaison de nos résultats avec ceux de Belotserkovsky et avec l'expérience [5] montre un excellent accord (figure 47). Le passage à l'approximation à deux bandes corrige donc le principal défaut qui était apparu avec la première approximation, à savoir une surestimation de la pression sur le corps après le passage de la ligne

sonique. Comme la pression sur le corps diminue, la courbure du choc augmente et la position du choc calculée est identique à la position du choc déduite des expériences.

A l'aide de la figure 48, on peut comparer les résultats de la première approximation pour $M_\infty = 6$ avec ceux de l'approximation à deux bandes. On perçoit immédiatement l'importance de la ligne intermédiaire car la courbure de ligne de Mach est sensiblement modifiée dès que la couche de choc devient épaisse.

L'annexe E regroupe les résultats d'intégration de l'approximation à deux bandes de la M.I.R. pour le cylindre et la sphère. On a donc tabulé en fonction de l'angle d'intégration θ les vitesses $u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2$ et les pressions p_0, p_1, p_2 pour différentes valeurs du nombre de Mach amont.

6.4 Conclusion

Les différentes cartes que nous avons présentées dans ce chapitre correspondent à celles obtenues en intégrant les équations d'Euler par des schémas de différences finies du type Godounov [1]. Mais l'originalité de la M.I.R. réside en trois points essentiels que nous allons détailler :

- **Encombrement mémoire réduit :**

L'ensemble de l'exécutable représente environ de cinq cent kilo-octets. Il peut donc parfaitement être installé sur un petit ordinateur individuel du type P.C. . En plus, contrairement aux techniques de différences finies, la M.I.R. ne nécessite pas de maillage. La place mémoire est donc considérablement réduite et la possibilité de modifier la forme du corps favorisée.

- **Précision :**

Les résultats obtenus par la M.I.R. sont très précis et particulièrement dans le cas de l'approximation à deux bandes. Les calculs effectués avec une précision de l'ordre de 10^{-6} correspondent parfaitement aux résultats expérimentaux de Belotserkovsky pour un nombre de Mach compris entre 3 et 10.

Quant aux résultats obtenus par l'approximation à une bande, même s'ils diffèrent légèrement des expériences, ils permettent d'avoir une bonne idée des champs de vitesse et de pression ainsi que la position de choc pour les corps axisymétriques.

- **Rapidité :**

C'est ce dernier point qui représente la principale force de la M.I.R. . Pour l'approximation à une bande, la recherche de la distance de détachement ϵ ; puis l'intégration jusqu'à θ_{max} nécessitent au maximum trois minutes C.P.U. sur une machine dont la vitesse de calcul est de l'ordre de 1,5 mips. Le temps de calcul dépend bien sûr de la forme du corps choisie : il est plus long pour les corps en loi de puissance à cause du rayon de courbure nul sur l'axe de symétrie. Pour les sphères ou les ellipsoïdes, il reste toujours inférieur à deux minutes C.P.U. .

En ce qui concerne l'approximation à deux bandes, l'intégration, une fois les paramètres initiaux fixés, est aussi rapide mais la double dichotomie nécessaire au calcul de ϵ_i et de u_{2i} dure nettement plus longtemps. L'ensemble des calculs est quand même effectué en moins d'une heure C.P.U. toujours sur le même type de machine.

Par la suite, de nombreuses évolutions du programme sont envisageables. Ce qui caractérise surtout les écoulements hypersoniques est que, dans la plupart des cas, les vitesses et les températures mises en jeu sont très grandes de sorte que l'hypothèse de gaz parfait est rarement vérifiée.

Nous avons donc fait varier le rapport des chaleurs spécifiques γ afin de simuler des effets de gaz réels. La position du choc ainsi que la pression sur le corps pour une sphère placée dans un écoulement à $M_\infty = 4$ sont tracées figure 49 dans le cas de l'approximation à une bande ($N = 1$) pour différentes valeurs de γ comprises entre 1,1 et 1,667. Si la pression sur le corps divisée par la pression au point d'arrêt n'est pas sensible aux variations de γ , on observe tout de suite que la position du choc est considérablement modifiée. La distance de détachement ϵ_i varie elle, du simple au triple comme le montre le tableau suivant :

γ	1,1	1,2	1,333	1,4	1,667
ϵ_i	0,086505	0,117418	0,156306	0,175000	0,246110

Les effets de gaz réels, s'ils ne modifient pas la forme de la pression sur le corps, ont par contre une très grande influence sur la position du choc. Il faut donc se méfier des critères d'étalonnage de souffleries par la mesure de la distance de détachement de l'onde de choc devant une sphère ou un cylindre.

Une autre évolution possible est l'utilisation de formes de corps données de façon discrète. Jusqu'à présent, nous utilisons toujours les équations analytiques des corps car le calcul nécessite la connaissance du rayon polaire du corps et de ses dérivées première et seconde. Mais on peut envisager un programme où la forme du corps serait définie par un ensemble de points. Il suffit alors d'interpoler ces points avec une méthode de splines pour obtenir des dérivées régulières. Nous avons appliqué cette technique avec les sphères, les ellipsoïdes et les corps en loi de puissance dans le cas de l'approximation à une bande. La comparaison des résultats obtenus avec ceux calculés avec des corps analytiques montre que l'erreur relative effectuée est négligeable (inférieure à 0,1% sur ϵ_i). De plus, cette méthode accélère l'intégration dans le cas des corps en loi de puissance car elle masque le problème du rayon de courbure.

En ce qui concerne le traitement des résultats, on peut améliorer l'obtention des cartes des différentes grandeurs physiques dans la couche de choc. Jusqu'à maintenant, elles étaient calculées par interpolation entre les valeurs sur le choc, le corps et la ligne intermédiaire. Mais les variables S, t, g sont connues de façon analytique dans toute la couche de choc grâce aux équations (4.4). On peut alors essayer de remonter aux variables physiques u, v, p, ρ . Une des manières possibles est d'obtenir

la valeur de v en résolvant numériquement l'équation suivante où les valeurs de S, t, g sont données en tout point de la couche de choc par (4.4) :

$$(6.1) \quad g = \frac{\operatorname{sgn}(S)S}{v \left[1 - v^2 - \left(\frac{t}{v(r \sin \theta)^j} \right)^{\gamma-1} \right]} \left\{ (j+1) \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{t}{v(r \sin \theta)^j} \right)^{\gamma-1} + v^2 \right\}$$

On a alors très facilement u, p, ρ :

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sgn}(S) \sqrt{1 - v^2 - \left(\frac{t}{v(r \sin \theta)^j} \right)^{\gamma-1}} \\ \rho &= \frac{S}{uv(r \sin \theta)^j} \\ p &= \frac{\gamma-1}{2\gamma} (1 - u^2 - v^2) \rho \end{aligned}$$

Le principal problème de cette méthode est que la solution de (6.1), est souvent proche des bornes du domaine de définition de cette équation (par exemple, pour la sphère, $v_0 = 0$). Elle est donc difficile à résoudre numériquement car mal conditionnée.

Enfin, on pourrait obtenir des performances nettement supérieures en envisageant autrement le franchissement des singularités. Par exemple, en acceptant une certaine perte de précision sur ϵ_i et u_{2i} pour accélérer les dichotomies et en franchissant la zone transonique par une méthode de type Godounov, appliquée aux équations conservatives traitées ici. Nous allons donc étudier plus en détail les équations de Belotserkovsky dans la partie suivante.

Partie III

Analyse mathématique du problème de Belotserkovsky

Chapitre 7

Traitement mathématique des équations d'Euler

7.1 Généralités

Comme nous l'avons décrit dans la deuxième partie, le problème principal de l'utilisation de la M.I.R. pour le calcul de l'écoulement supersonique autour d'un corps émoussé, est l'apparition de points singuliers du type col lors de l'intégration. Bien sûr, cette propriété fixe l'unicité de la solution mais, pour franchir ces singularités de façon correcte (c'est-à-dire pour que la solution calculée soit la plus continue possible), il faut déterminer les paramètres ϵ_i et u_{2i} avec une très grande précision. Les dichotomies permettant de calculer ϵ_i et u_{2i} prennent la majeure partie du temps de calcul et pénalisent de ce fait, la méthode dont le principal avantage est la vitesse d'intégration numérique.

Pour comprendre et tenter de proposer des solutions à ce problème, nous allons ici étudier en détail les équations de Belotserkovsky. Nous repartons donc des équations d'Euler qui s'écrivent de la manière générale suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} V^2 &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \\ \frac{\partial H_t}{\partial t} + \vec{V} \operatorname{grad} H_t &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}\end{aligned}$$

avec H_t l'entropie totale définie par $H_t = e + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}$ où e représente l'énergie interne.

Une fois ces équations développées en coordonnées polaires, on obtient le système suivant avec $j = 0$ dans le cas de l'écoulement plan et $j = 1$ pour le cas méridien.

$$(7.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho r (r \sin \theta)^j \\ \rho u r (r \sin \theta)^j \\ \rho v r (r \sin \theta)^j \\ \rho H_t r (r \sin \theta)^j \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} \rho u r (r \sin \theta)^j \\ r(p + \rho u^2)(r \sin \theta)^j \\ \rho u r (r \sin \theta)^j \\ \rho u H_t r (r \sin \theta)^j \end{bmatrix} +$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} \rho v (r \sin \theta)^j \\ \rho u v (r \sin \theta)^j \\ (p + \rho v^2) (r \sin \theta)^j \\ \rho v H_t (r \sin \theta)^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (r \sin \theta)^j ((j+1)p + \rho v^2) \\ -\rho u v (r \sin \theta)^j + j r \rho \cos \theta \\ \frac{\partial p}{\partial t} \end{bmatrix}$$

Pour simplifier au maximum le problème, traitons d'abord le cas stationnaire.

7.2 Le cas stationnaire

7.2.1 Particularités des équations de Belotserkovsky

En plus de l'hypothèse d'écoulement stationnaire, remplaçons les deux dernières équations de (7.1) respectivement par l'équation de Bernoulli et par la conservation de l'entropie d'une particule s'il n'y a pas de choc entre la référence et le point considéré.

On aboutit alors au système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$(7.2) \quad \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} \rho u r (r \sin \theta)^j \\ r(p + \rho u^2) (r \sin \theta)^j \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} \rho v (r \sin \theta)^j \\ \rho u v (r \sin \theta)^j \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ (r \sin \theta)^j ((j+1)p + \rho v^2) \end{bmatrix}$$

complété par :

$$\phi(\psi) = \frac{p}{\rho^\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma-1}{2\gamma} (1-w^2)$$

C'est maintenant qu'apparaît la particularité de la démarche de Belotserkovsky. Au lieu de choisir comme inconnues conservatives les variables dérivées par rapport au temps t du système (7.1), il choisit S, t définies par (3.1) et (3.2). Il prend donc comme vecteur inconnu celui qui est dérivé par rapport à θ dans les équations (7.3). Ecrivons maintenant le système (7.3) sous la forme quasi-linéaire :

$$(7.3) \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} = \mathcal{Q}$$

avec :

$$(7.4) \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} S \\ t \end{pmatrix} \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{F}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} rH \\ rh \end{pmatrix}$$

où \mathcal{U} est le vecteur formé par les inconnues conservatives de Belotserkovsky. On pose également \mathcal{V} le vecteur inconnu physique défini par :

$$(7.5) \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

7.2.2 Calcul de la matrice $\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial u}$

Le calcul de la matrice $\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial u}$ s'effectue grâce à la décomposition suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial u} = \frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial \mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial u}$$

or

$$\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial \mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial rH}{\partial u} & \frac{\partial rH}{\partial v} \\ \frac{\partial rh}{\partial u} & \frac{\partial rh}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Il suffit alors d'exprimer les variables rH, rh en fonction de u, v et ϕ fonction d'entropie donnée par $\phi(\psi)$ et par (3.5). Dans ces expressions, $\frac{\partial}{\partial v}$ signifie une dérivation pour ϕ et donc ψ constant. On considère, en effet, le changement de variables (u, v, p, ρ) en (u, v, ϕ, ψ) et c'est donc dans ce deuxième système que l'on exprime le jacobien $\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial v}$. On obtient facilement par dérivation les coefficients de $\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial v}$:

$$\frac{\partial rH}{\partial u} = r(r \sin \theta)^j \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \phi^{-\frac{1}{\gamma-1}} u (1-w^2)^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} \left(1-v^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} u^2 \right)$$

$$\frac{\partial rH}{\partial v} = -r(r \sin \theta)^j \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \phi^{-\frac{1}{\gamma-1}} v (1-w^2)^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} \left(1-v^2 - \frac{3-\gamma}{\gamma-1} u^2 \right)$$

$$\frac{\partial rh}{\partial u} = r(r \sin \theta)^j (1-w^2)^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} \left(1-v^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} u^2 \right)$$

$$\frac{\partial rh}{\partial v} = -r(r \sin \theta)^j (1-w^2)^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} \frac{2uv}{\gamma-1}$$

Le calcul de $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial u}$ est similaire :

$$(7.6) \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial S} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial S} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial S} = \frac{(1-w^2)^{-\frac{1}{\gamma-1}}}{v(r \sin \theta)^j \phi^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(1-w^2)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \frac{u}{v(r \sin \theta)^j}$$

$$\frac{\partial v}{\partial S} = \frac{2u(1-w^2)^{-\frac{1}{\gamma-1}}}{(\gamma-1)(r \sin \theta)^j \phi^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} (1-u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v^2)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{(1-w^2)^{-\frac{1}{\gamma-1}} (1-v^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} u^2)}{(r \sin \theta)^j (1-u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v^2)}$$

Si on note :

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial rH}{\partial S} & \frac{\partial rH}{\partial t} \\ \frac{\partial rh}{\partial S} & \frac{\partial rh}{\partial t} \end{pmatrix}$$

on obtient $\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$ en effectuant le produit des deux matrices $\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{V}}$ et $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathcal{U}}$.

$$\frac{\partial rH}{\partial S} = \frac{ru}{(1-w^2)(1-u^2-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2)} \left\{ \frac{1}{v} \left[1 - \frac{2\gamma}{\gamma-1}u^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}u^4 \right] + v \left[\frac{2(\gamma^2+\gamma-2)}{(\gamma-1)^2}u^2 + \frac{\gamma+3}{\gamma-1}v^2 - 2\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial rH}{\partial t} = - \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \phi^{-\frac{1}{\gamma-1}} \frac{r(1-v^2-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}u^2)}{(1-w^2)(1-u^2-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2)} \left[\frac{u^2}{v}(1-u^2) + v(1-v^2-2u^2) \right]$$

$$\frac{\partial rh}{\partial S} = \frac{r \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \phi^{\frac{1}{\gamma-1}}}{(1-w^2)(1-u^2-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2)} \left\{ \frac{1}{v} \left[1 - \frac{2\gamma}{\gamma-1}u^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}u^4 \right] + v \left[2\frac{\gamma+1}{\gamma-1}u^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial rh}{\partial t} = - \frac{ru}{(1-w^2)(1-u^2-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2)} \left\{ \frac{1}{v} \left[1 - \frac{2\gamma}{\gamma-1}u^2 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}u^4 \right] + v \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}u^2 + v^2 - 2 \right] \right\}$$

On voit que les coefficients de la matrice $\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$ sont singuliers pour $1-u^2-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2=0$, condition qui détermine la ligne singulière voisine de la ligne sonique $1-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}w^2=0$ si $u \ll 1$.

7.2.3 Etude de la matrice $\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$

Une fois la matrice $\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$ calculée, nous obtenons facilement son déterminant et sa trace :

$$\det \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) = r^2 \frac{1-v^2-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}u^2}{1-u^2-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2}$$

et

$$\text{tr} \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) = -4 \frac{ruv}{\gamma-1} \frac{1}{1-u^2-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2}$$

L'équation caractéristique s'écrit alors :

$$\lambda_{\mathcal{F}}^2 - \text{tr} \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) \lambda_{\mathcal{F}} + \det \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) = 0$$

dont le discriminant est :

$$\Delta_{\mathcal{F}}^2 = -\frac{4r^2}{\left(1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2\right)^2}(1 - w^2) \left(1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}w^2\right)$$

Il devient positif dès que $w^2 > \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, c'est-à-dire à partir de la ligne sonique. Ceci est tout à fait normal car on passe alors dans le domaine hyperbolique des équations (7.3). La matrice $\frac{\partial \mathcal{F}(U)}{\partial U}$ admet alors deux valeurs propres réelles :

$$(7.7) \quad \lambda_{\mathcal{F}}^{\pm} = \frac{r}{1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2} \left[-\frac{2uv}{\gamma-1} + \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}w^2 - 1} \sqrt{1 - w^2} \right]$$

$$(7.8) \quad \lambda_{\mathcal{F}}^{\mp} = \frac{r}{1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2} \left[-\frac{2uv}{\gamma-1} - \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}w^2 - 1} \sqrt{1 - w^2} \right]$$

Pour $u \neq 0$, le problème devient singulier après la ligne sonique, et, pour $u = 0$ juste à la ligne sonique. Donc, dans le cas de la sphère ou du cylindre, la singularité sur le corps est confondue avec le point sonique.

Le déterminant de $\frac{\partial \mathcal{F}(U)}{\partial U}$ peut-il s'annuler au cours de l'intégration ?

- Si $v^2 > u^2$, on montre facilement que :

$$\frac{\det \left(\frac{\partial \mathcal{F}(U)}{\partial U} \right)}{r^2} > 1$$

Il ne peut donc pas passer par zéro.

- Par contre, si $u^2 > v^2$, le déterminant s'annule pour $w^2 > \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ donc au delà de la ligne sonique.

Cette remarque illustre l'importance du choix du repère d'intégration sur la qualité de la solution. En effet cette situation n'arrive pas si on choisit un repère tel que les lignes de courant soient aussi perpendiculaire que possible au rayon polaire dans le voisinage de la ligne sonique. Dans ce cas, v^2 devient supérieur à u^2 dans la zone subsonique avant que $1 - v^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}u^2$ puisse s'annuler.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si le déterminant tend vers zéro, il est évident que la solution devient imprécise puisque les équations de Belotserkovsky (7.3) ne permettent plus le calcul de H et de h à partir de S et de t . Ceci est vérifié par l'expérience numérique et c'est pour cette raison que lors du calcul de l'écoulement autour des ellipsoïdes (paragraphe 6.2.2), on place l'origine du repère au centre de courbure plutôt qu'à l'intersection du grand et du petit axe. Belotserkovsky avait également constaté numériquement cette propriété mais aucune justification de ce phénomène n'apparaît dans la littérature.

Ceci explique aussi, en partie, pourquoi les auteurs russes ont choisi de ne pas pousser l'intégration des équations de Belotserkovsky très loin dans la zone super-sonique. Ils ont souvent remplacé la M.I.R. par une méthode de caractéristiques, limitant le schéma de Belotserkovsky au rôle de "starter" du calcul.

7.2.4 Calcul des pentes de caractéristiques au voisinage de la ligne singulière

Plaçons nous maintenant dans le domaine hyperbolique et donc au delà de la ligne sonique. La matrice $\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial u}$ a deux valeurs propres réelles $\lambda_{\mathcal{F}}^+$ (7.7) et $\lambda_{\mathcal{F}}^-$ (7.8) qui semblent toutes les deux infinies sur la ligne singulière. Mais on peut calculer la pente des caractéristiques dans cette région par des développements limités. Considérons le petit paramètre δ tel que :

$$(7.9) \quad \delta = 1 - u^2 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} v^2$$

La ligne singulière est définie par $\delta = 0$. Supposons en plus $u \neq 0$, alors il arrive nécessairement un moment où

$$|\delta| \ll \left| 1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} v^2 \right|$$

car

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} v^2 \right) = u^2 \neq 0$$

On obtient alors les pentes suivantes :

- $u > 0$: en général, près du corps.

$$\lambda_{\mathcal{F}}^+ = \frac{r}{2v\sqrt{1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2}} \left(1 - \frac{2\gamma}{\gamma-1}v^2 \right)$$

$$\lambda_{\mathcal{F}}^- = -\frac{4r}{\gamma-1} \frac{v}{\delta} \sqrt{1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2}$$

Si $\delta = 0$, on a alors $\lambda_{\mathcal{F}}^+ = -\frac{r}{2uv}(u^2 - v^2)$ et $\lambda_{\mathcal{F}}^- \rightarrow \infty$ donc la caractéristique \mathcal{C}^+ a une pente finie et la \mathcal{C}^- a une pente infinie sur la ligne singulière donc admet un point de rebroussement.

- $u < 0$: en général, près du choc.

$$\lambda_{\mathcal{F}}^+ = \frac{4r}{\gamma-1} \frac{v}{\delta} \sqrt{1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2}$$

$$\lambda_{\mathcal{F}}^- = \frac{r}{2v\sqrt{1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1}v^2 - 1 \right)$$

Si $\delta = 0$, on a alors $\lambda_{\mathcal{F}}^+ \rightarrow \infty$ et $\lambda_{\mathcal{F}}^- = -\frac{r}{2uv}(u^2 - v^2)$ donc la caractéristique \mathcal{C}^+ a un point de rebroussement sur la ligne singulière et la pente de la caractéristique \mathcal{C}^- reste finie au passage de la ligne singulière.

- $u = 0$: dans ce cas particulier, les deux familles de caractéristiques ont des points de rebroussement quand $\delta = 0$.

Nous avons donc montré, contrairement à ce que laissent supposer les expressions (7.7)(7.8) des valeurs propres, que les caractéristiques de la matrice $\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial u}$ n'ont pas simultanément un point de rebroussement quand $\delta = 0$ sauf dans le cas très particulier où la vitesse radiale s'annule. C'est ce comportement des équations d'Euler qui se traduit dans la M.I.R. de Belotserkovsky par l'apparition de points singuliers de type col lors de l'intégration.

De plus, même si une des deux pentes de caractéristiques reste finie, la matrice $\frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial u}$ est toujours singulière pour $1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2 = 0$. La solution physique de 7.3 doit donc être telle que : $\frac{\partial u}{\partial r} \rightarrow 0$ au moins comme $1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2$ à l'approche de la ligne singulière. On a donc :

$$(7.10) \quad \lim \frac{\partial S}{\partial r} = 0 \quad \text{et} \quad \lim \frac{\partial t}{\partial r} = 0 \quad \text{quand} \quad 1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}v^2 \rightarrow 0$$

Cette condition continue sur la ligne singulière exacte, n'est pas réalisée sur les points singuliers des équations de Belotserkovsky. En fait, en choisissant a priori la forme de la solution, on substitue au problème physique, un problème numérique voisin mais non identique. Ainsi, dans le cas de l'approximation à une bande, S et t sont de la forme $S = S_0 + (S_1 - S_0)\zeta$, $t = t_0 + (t_1 - t_0)\zeta$ et la condition (7.10) implique $S_1 = S_0$ et $t_1 = t_0$ pour $\theta = \theta^*$, position de la singularité sur l'obstacle. Cette condition n'est pas vérifiée par la solution numérique ce qui montre que le point de type col n'est pas un point de la ligne singulière physique. En d'autres termes, en modélisant S et t par des polynômes du premier degré, on "déforme" le domaine physique.

Dans le cas de l'approximation à deux bandes, la condition (7.10) aboutit à deux équations algébriques uniquement valables pour les points singuliers physiques situés sur les lignes $\zeta = cste$:

$$\begin{aligned} 4S_2 - S_1 - 3S_0 &= 0 \\ 4t_2 - t_1 - 3t_0 &= 0 \end{aligned}$$

Ces deux équations ne sont pas vérifiées d'une façon exacte au niveau des points de type col de la solution numérique. Cependant, l'erreur est beaucoup plus réduite que dans le cas à une bande. Cela montre que les points singuliers du problème à deux bandes sont voisins de la ligne singulière physique. Il est clair que l'augmentation du nombre de bandes conduit à une plus grande précision et que les conditions algébriques sur la singularité physique seront de mieux en mieux vérifiées. En ce sens, la technique de Belotserkovsky peut-être considérée comme une méthode spectrale et on retrouve ici le même problème que celui qui était apparu en (2.5.2) pour les profils de Falkner-Skan de la couche limite. Dans le cas de l'émoussement, le niveau de troncature des polynômes caractérise donc la précision du problème numérique par rapport au problème physique ce qui se traduit par une plus ou moins bonne représentation de la ligne singulière. La méthode de Belotserkovsky est donc efficace si un niveau de troncature très bas est suffisant ce qui est le cas dans la partie elliptique du problème pour un grand nombre de Mach. En revanche, si la

couche de choc s'épaissit (M_∞ diminuant ou dans la région hyperbolique), la méthode requiert un grand nombre de bandes. Hélas, cela ne peut être envisagé techniquement que si un processus de franchissement rapide et automatique des points de type col est trouvé. Il faut donc abandonner la dichotomie et envisager l'étude du système algébrique $\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial t}{\partial r} = 0$ au voisinage de la ligne singulière. Cela peut être l'objet d'une suite possible de cette thèse.

La résolution de la méthode de Belotserkovsky ne respecte donc pas les conditions sur la singularité physique mais les approche plus ou moins bien suivant le nombre de bandes.

7.2.5 Passage en (ζ, θ)

Jusqu'à maintenant, nous avons toujours considéré le problème physique en l'écrivant de la forme (7.3) :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} \right|_r + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} \right|_\theta = \mathcal{Q}$$

Mais pour vraiment traiter les mêmes équations que la M.I.R. de Belotserkovsky, il faut remplacer les variables (r, θ) par (ζ, θ) définies dans le chapitre 4 par (4.1) et on a donc :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} \right|_\zeta + \frac{\partial \mathcal{H}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} \right|_\theta = \mathcal{Q}$$

En différenciant $r(\theta) = r_0(\theta) + \zeta \epsilon(\theta)$, on obtient facilement l'expression :

$$d\zeta = \frac{1}{\epsilon} dr - \frac{1}{\epsilon} \left. \frac{\partial r}{\partial \theta} \right|_\zeta d\theta$$

en notant

$$\left. \frac{\partial r}{\partial \theta} \right|_\zeta = \frac{dr_0}{d\theta} + \zeta \frac{d\epsilon}{d\theta}$$

Les équations du changement de variables s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} \right|_\theta &= \frac{1}{\epsilon} \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \zeta} \right|_\theta \\ \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} \right|_r &= \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} \right|_\zeta - \frac{1}{\epsilon} \left. \frac{\partial r}{\partial \theta} \right|_\zeta \left. \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \zeta} \right|_\theta \end{aligned}$$

L'expression de la matrice $\frac{\partial \mathcal{H}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$ en découle directement et si on pose \mathcal{I} la matrice unité, on aboutit à :

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} - \frac{1}{\epsilon} \left. \frac{\partial r}{\partial \theta} \right|_\zeta \mathcal{I}$$

Nous pouvons maintenant rechercher les valeurs propres de cette matrice. Son déterminant et sa trace s'expriment simplement en fonction du déterminant et de la

trace de la matrice $\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$.

$$\det \left(\frac{\partial \mathcal{H}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) = \frac{1}{\epsilon^2} \left[\det \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) - \text{tr} \left(\frac{\partial \mathcal{H}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) \frac{\partial r}{\partial \theta} \Big|_{\zeta} + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \Big|_{\zeta} \right)^2 \right]$$

$$\text{tr} \left(\frac{\partial \mathcal{H}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) = \frac{1}{\epsilon} \text{tr} \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) - \frac{2}{\epsilon} \frac{\partial r}{\partial \theta} \Big|_{\zeta}$$

Les valeurs propres de $\frac{\partial \mathcal{H}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$ sont solutions de :

$$\lambda_{\mathcal{H}}^2 - \text{tr} \left(\frac{\partial \mathcal{H}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) \lambda_{\mathcal{H}} + \det \left(\frac{\partial \mathcal{H}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) = 0$$

Comme $\Delta_{\mathcal{H}} = \Delta_{\mathcal{F}}/\epsilon^2$, il est positif dès que l'on a passé la ligne sonique et on obtient les valeurs propres suivantes :

$$(7.11) \quad \lambda_{\mathcal{H}}^+ = \frac{\lambda_{\mathcal{F}}^+}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial r}{\partial \theta} \Big|_{\zeta}$$

$$(7.12) \quad \lambda_{\mathcal{H}}^- = \frac{\lambda_{\mathcal{F}}^-}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial r}{\partial \theta} \Big|_{\zeta}$$

Ces valeurs propres se comportent de la même façon que celles de la matrice $\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$. Le problème écrit avec les variables de Belotserkovsky (ζ, θ) a donc les mêmes singularités que les équations physiques (7.3) en (r, θ) .

7.3 Le terme instationnaire

Pour traiter le cas instationnaire, nous repartons du système (7.1). Il faut maintenant faire l'hypothèse de quasi-stationnarité pour aboutir à un système proche de celui de Belotserkovsky. On suppose donc $\frac{d}{dt} \gg \frac{\partial}{\partial t}$, ce qui physiquement revient à dire que le temps de parcours d'une particule dans le domaine de calcul est très grand par rapport au temps caractéristique des variations instationnaires ceci afin de négliger le terme $\frac{\partial p}{\partial t}$ dans l'équation de l'énergie et afin de garder l'équivalent des équations de Bernoulli et d'entropie constante. Cette hypothèse se justifie par le fait que nous cherchons la limite stationnaire de ces équations.

On aboutit alors, de la même manière que dans le cas stationnaire, au système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$(7.13) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\begin{array}{c} \rho r (r \sin \theta)^j \\ \rho u r (r \sin \theta)^j \end{array} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\begin{array}{c} \rho u r (r \sin \theta)^j \\ r(p + \rho u^2)(r \sin \theta)^j \end{array} \right] +$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\begin{array}{c} \rho v (r \sin \theta)^j \\ \rho u v (r \sin \theta)^j \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ (r \sin \theta)^j ((j+1)p + \rho v^2) \end{array} \right]$$

Nous allons donc maintenant écrire (7.13) de la forme :

$$(7.14) \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \mathcal{Q}$$

avec

$$(7.15) \quad \mathcal{G}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \rho u r (r \sin \theta)^j \\ \tau r (r \sin \theta)^j \end{pmatrix}$$

les vecteurs \mathcal{U} , \mathcal{Q} , \mathcal{F} étant définis par (7.4).

7.3.1 Calcul de la matrice $\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$

Le calcul de la matrice $\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$ s'effectue de la même manière que pour $\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$. On écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} = \frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathcal{U}}$$

La matrice $\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{V}}$ s'obtient également par dérivation des variables $\rho u, \tau$ par rapport à u, v à $\phi = cste$:

$$\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho u r (r \sin \theta)^j}{\partial u} & \frac{\partial \rho u r (r \sin \theta)^j}{\partial v} \\ \frac{\partial \tau r (r \sin \theta)^j}{\partial u} & \frac{\partial \tau r (r \sin \theta)^j}{\partial v} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\frac{\partial \rho u r (r \sin \theta)^j}{\partial u} = r (r \sin \theta)^j (1 - w^2)^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \phi^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} u^2 - v^2 \right)$$

$$\frac{\partial \rho u r (r \sin \theta)^j}{\partial v} = -\frac{2}{\gamma-1} u v r (r \sin \theta)^j (1 - w^2)^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \phi^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\partial \tau r (r \sin \theta)^j}{\partial u} = -\frac{2}{\gamma-1} u r (r \sin \theta)^j (1 - w^2)^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\partial \tau r (r \sin \theta)^j}{\partial v} = -\frac{2}{\gamma-1} v r (r \sin \theta)^j (1 - w^2)^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}$$

On aboutit finalement à la matrice $\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$ en utilisant l'expression (7.6) de $\frac{\partial \mathcal{V}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$ et en effectuant le produit matriciel :

$$\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho u r (r \sin \theta)^j}{\partial S} & \frac{\partial \rho u r (r \sin \theta)^j}{\partial t} \\ \frac{\partial \tau r (r \sin \theta)^j}{\partial S} & \frac{\partial \tau r (r \sin \theta)^j}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Les coefficients de $\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$ sont :

$$\frac{\partial \rho u r (r \sin \theta)^j}{\partial S} = \frac{r \left(1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} w^2 \right)}{v \left(1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v^2 \right)}$$

$$\frac{\partial \rho u r (r \sin \theta)^j}{\partial t} = - \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \phi^{-\frac{1}{\gamma-1}} \frac{r u \left(1 - v^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} u^2 \right)}{v \left(1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v^2 \right)}$$

$$\frac{\partial \tau r (r \sin \theta)^j}{\partial S} = - \frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \phi^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{r u}{v \left(1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v^2 \right)}$$

$$\frac{\partial \tau r (r \sin \theta)^j}{\partial t} = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{r(u^2 - v^2)}{v \left(1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v^2 \right)}$$

7.3.2 Etude de la matrice $\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$

L'équation caractéristique de la matrice $\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$ est :

$$\lambda_{\mathcal{G}}^2 - \text{tr} \left(\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) \lambda_{\mathcal{G}} + \det \left(\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) = 0$$

avec les expressions suivantes pour la trace et le déterminant :

$$\det \left(\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) = \frac{2r^2}{(\gamma - 1) \left(1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v^2 \right)}$$

$$\text{tr} \left(\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) = \frac{r \left(1 - u^2 - \frac{\gamma+3}{\gamma-1} v^2 \right)}{v \left(1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v^2 \right)}$$

On voit que le problème instationnaire est lui aussi singulier quand $1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v^2$ tend vers zéro. On peut cependant calculer le discriminant de l'équation caractéristique de la matrice $\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$:

$$\Delta_{\mathcal{G}}^2 = \frac{r^2}{2v^2(\gamma - 1) \left(1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v^2 \right)^2} \left[(\gamma - 1) \left(1 - u^2 - \frac{\gamma+3}{\gamma-1} v^2 \right)^2 + 8v^2 \left(1 - u^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} v^2 \right) \right]$$

Le signe de $\Delta_{\mathcal{G}}^2$ n'est pas évident a priori mais, partout où il est régulier, le problème posé (7.14) peut aussi s'écrire de la façon suivante:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} + \left(\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = \left(\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right)^{-1} \mathcal{Q}$$

Cette équation est hyperbolique : la matrice $\left(\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right)^{-1}$ a des valeurs propres réelles. Il en va de même pour $\frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}}$. On a donc nécessairement $\Delta_{\mathcal{G}}^2$ positif pour w^2 supérieur à $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$.

Par ailleurs, en repartant de l'équation (7.14) et la multipliant par $\det \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right)$, on obtient :

$$\det \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} + \left[\det \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right] \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} +$$

$$\left[\det \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) \frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right] \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \det \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) \mathcal{Q}$$

Les deux matrices $\left[\det \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right]$ et $\left[\det \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) \frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right]$ ne sont plus indéterminées sur la singularité. De plus $\det \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) \mathcal{Q}$ tend vers zéro quand on s'approche de la ligne singulière. Une solution "lisse" à travers la singularité se traduit donc par $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta}$ fini, ainsi dans un voisinage proche de la ligne singulière, on a :

$$\left[\det \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) \frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right] \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} + \left[\det \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right) \frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{U})}{\partial \mathcal{U}} \right] \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \simeq 0$$

et donc $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r}$ est linéairement dépendant de $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}$. La solution lisse stationnaire est telle que $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} = 0$ sur la singularité physique. Ce que nous avons trouvé par une autre méthode en 7.2.4 .

On voit que le problème numérique impose une condition beaucoup plus faible puisque le même raisonnement appliqué aux équations sur les N bandes donne $N - 1$ équations sur les $N - 1$ lignes, au lieu de la condition continue précédente.

Conclusion générale

En conclusion, notre étude critique de la M.I.R. et son application à deux phénomènes très différents que sont la couche limite bidimensionnelle laminaire stationnaire incompressible et l'écoulement supersonique autour d'un corps émoussé, ont fait apparaître certaines caractéristiques qu'il est nécessaire de rappeler ici.

Si la M.I.R. semble être une excellente technique de résolution d'équations aux dérivées partielles bidimensionnelles, elle a certains désavantages qu'il ne faut pas hésiter à énumérer afin d'avertir ses futurs utilisateurs et préparer les améliorations.

Avant toute chose, une bonne connaissance physique du phénomène étudié est nécessaire. En effet, résoudre un problème avec cette méthode sans avoir une idée de la forme des solutions, peut donner des résultats catastrophiques. Pour appliquer la M.I.R. de façon judicieuse, il faut être capable de choisir la forme des différentes approximations les plus proches de la réalité ainsi que les fonctions de poids adaptées (paragraphe 1.4.3). Ce choix est d'autant plus important qu'il conditionne, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, la précision et l'efficacité de la technique. La M.I.R. ne peut donc pas être exploitée d'une façon fiable par un numéricien pur.

Une autre faiblesse de la M.I.R. est la difficulté d'estimer l'erreur commise. Par exemple, quand, dans une méthode de différences finies, on remplace une dérivée par une expression approchée, on connaît l'ordre de grandeur du terme négligé et donc la précision du calcul. Dans le cas de la M.I.R., cette estimation est plus délicate. Il faut se placer dans un espace fonctionnel et "mesurer" la différence entre la fonction et son approximation avec une norme appropriée. Mais, il faut remarquer que l'approximation ne se fait pas dans l'espace physique. Ainsi en approximant S et t dans le problème de l'émoussement, on modifie de façon indirecte et non explicite la position de la singularité physique.

Une étude approfondie des problèmes de l'approximation par la M.I.R. demande une recherche qui dépasse le cadre de cette thèse. Nous en avons tracé la première étape dans le chapitre 2 où nous avons signalé le fait qu'une modélisation trop rigide de la solution introduisait une équation différentielle parasite qui se substituait en quelque sorte à la solution physique (paragraphe 2.5.2). De même, lorsque l'approximation semble correcte pour les fonctions bornées ou à dérivées bornées, comme dans le cas de l'émoussement, nous avons vu qu'il en allait différemment près de la singularité de type col. Même si, dans un espace fonctionnel particulier qui n'est pas l'espace physique, le franchissement de cette singularité ne présente pas de problème, c'est la transposition à l'espace physique qui devient la difficulté

majeure, du fait de l'existence des points de rebroussement sur les caractéristiques des équations d'Euler écrites sous la forme (7.3) (partie III).

Ainsi, dans le cas du calcul de l'onde de choc détachée, la M.I.R. n'est pas vraiment une approximation au sens classique du problème dans l'espace physique. La transformation que l'on fait subir aux équations d'Euler, aboutit à un système différentiel ordinaire aux propriétés proches mais différentes de celles du problème physique car la solution numérique ne satisfait pas la condition $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ sur la ligne singulière (paragraphe 7.2.4). Si, pour le cas de l'émoussement, la comparaison calcul-expérience est d'autant meilleure que le nombre de bandes est grand, il en va différemment pour le problème de la couche limite de Dorodnitsyn pour les raisons évoquées ci-dessus.

Mais la M.I.R. n'a pas que des désavantages. Elle est très attrayante d'un point de vue purement numérique pour sa facilité de mise en œuvre.

La transformation de ces équations en un système différentiel ordinaire entraîne la possibilité d'utilisation de schémas d'intégration qui ont l'avantage d'être bien connus tel que la méthode de Runge-Kutta. C'est pour cette raison que la M.I.R. est une technique à la fois rapide et précise. De plus, la résolution numérique ne pose donc pas de problème de convergence ce qui rend la méthode très fiable. Par ailleurs, l'absence de discrétisation du domaine d'intégration, permet une très grande souplesse d'utilisation et une grande économie en place mémoire puisqu'il n'y a pas de grands systèmes linéaires à inverser. Mais si la simplicité numérique est très intéressante, cela se fait, en général, au détriment de calculs analytiques longs et fastidieux.

Il reste que l'intérêt primordial de la M.I.R. réside dans la possibilité de fonctionner sur des micro-ordinateurs et d'obtenir pour un certain nombre d'applications, des résultats pratiques aussi bons que ceux des méthodes de différences finies ou éléments finis, et ceci beaucoup plus rapidement et avec un très faible coût d'exploitation.

Dans le cas de la couche limite, la vitesse de calcul et la précision de la M.I.R. sont excellentes, la place mémoire nécessaire est ridicule alors qu'un schéma de différences finies comme celui de Crank-Nicholson exige environ cinquante points de maillage dans l'épaisseur de la couche limite pour approcher correctement un décollement. Pour le calcul de l'émoussement, dans le cas de l'approximation à deux bandes, l'heure C.P.U. nécessaire sur un P.C. est elle aussi très faible comparativement au temps de calcul des méthodes instationnaires et les résultats sont obtenus avec une grande précision (paragraphe 6.4).

C'est pourquoi, de nombreuses perspectives sont ouvertes à cette technique. Son utilisation pour résoudre des problèmes bidimensionnels peut être, bien sûr, généralisée à d'autres domaines. Elle peut très certainement remplacer d'autres techniques plus courantes d'une façon avantageuse. Par exemple, la résolution de phénomènes tridimensionnels grâce aux équations présentées dans le chapitre 1 n'a, à notre connaissance, jamais été utilisée dans le domaine de la mécanique des fluides et reste donc inexploitée. On peut également supposer qu'une formulation à base de fonc-

tions de courant serait facilement exploitable par la M.I.R. pour la couche limite tridimensionnelle.

Du point de vue des approximations, la perspective la plus intéressante est celle proposée dans le paragraphe 2.6.2 . Cette nouvelle forme d'approximation revient à une méthode spectrale sur une base polynômiale, mais le fait nouveau est l'intégration analytique suivant une dimension. Elle donne, en deux bandes, de bons résultats et il serait profitable de traiter un nombre supérieur de bandes. Il faut pour cela effectuer un important travail analytique mais qui, réalisé une fois pour toute, peut aboutir à une technique encore plus efficace.

Pour ce qui est des applications au calcul des ondes de choc détachées, l'utilisation de la méthode de Belotserkovsky pour étudier les effets de gaz réels est tout à fait envisageable et a déjà été exploitée par les Russes [16]. L'avantage de la M.I.R. est ici évident si on dispose d'un modèle global (type Tannehill et Mugge [25] pour le gaz à l'équilibre). En effet, il suffit de substituer aux expressions de l'enthalpie et de l'entropie du gaz parfait, celles du gaz réel (à l'équilibre ou non). Si cela est rapidement réalisable dans le cas de l'approximation à une bande, pour un nombre supérieur de bandes, tout est suspendu à la façon dont les singularités peuvent être franchies. Une étude locale s'impose à partir des résultats obtenus dans la partie III pour échapper au processus lent des dichotomies.

Partie IV

Annexes

Annexe A

Méthode de Newton [26]

Considérons un système de n équations non linéaires dont on cherche une solution. Il se présente, en général, de la forme suivante :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Ce système peut être écrit sous une forme abrégée. L'ensemble des inconnues x_1, x_2, \dots, x_n peut être considéré comme un vecteur inconnu de dimension n :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

De façon analogue, l'ensemble des fonctions f_1, f_2, \dots, f_n forme également un vecteur fonction :

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Le système peut alors s'écrire sous une forme plus simple :

$$(A.1) \quad f(x) = 0$$

Pour résoudre le système (A.1), on utilise une technique d'approximations successives. Supposons que l'on ait trouvé la p -ième approximation

$$x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_n^{(p)})$$

d'une des solutions isolées $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de l'équation vectorielle (A.1). La solution exacte de (A.1) peut se mettre sous la forme

$$(A.2) \quad x = x^{(p)} + \epsilon^{(p)}$$

où $\epsilon^{(p)} = (\epsilon_1^{(p)}, \epsilon_2^{(p)}, \dots, \epsilon_n^{(p)})$ est l'erreur que l'on commet si on considère $x^{(p)}$ comme solution du système.

Supposons que la fonction $f(x)$ soit continûment dérivable dans un domaine qui contient x et $x^{(p)}$. En reportant (A.2) dans l'équation (A.1), on obtient :

$$f(x^{(p)} + \epsilon^{(p)}) = 0.$$

On utilise alors un développement de Taylor de cette égalité par rapport aux puissances du vecteur $\epsilon^{(p)}$, en supposant la norme $\|\epsilon^{(p)}\|$ inférieure à 1. Si on se borne aux termes linéaires, ce développement s'écrit :

$$(A.3) \quad f(x^{(p)} + \epsilon^{(p)}) = f(x^{(p)}) + f'(x^{(p)})\epsilon^{(p)} + O(\|\epsilon^{(p)}\|^2) = 0$$

On entend par dérivée $f'(x)$ la matrice jacobienne du système des fonctions f_1, f_2, \dots, f_n par rapport aux variables x_1, x_2, \dots, x_n .

$$f'(x) = W(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

En supposant la matrice $W(x^{(p)})$ régulière, on obtient à partir de (A.3) :

$$\epsilon^{(p)} = -W^{-1}(x^{(p)})f(x^{(p)}) + O(\|\epsilon^{(p)}\|^2)$$

soit :

$$x = x^{(p)} - W^{-1}(x^{(p)})f(x^{(p)}) + O(\|\epsilon^{(p)}\|^2)$$

Par conséquent, on obtient une $(p + 1)$ -ième approximation de la solution x en posant :

$$x^{(p+1)} = x^{(p)} - W^{-1}(x^{(p)})f(x^{(p)}).$$

On remarque que l'erreur $|x - x^{(p+1)}|$ est de l'ordre de $\|\epsilon^{(p)}\|^2$. Il suffit donc de prendre, pour approximation initiale $x^{(0)}$, une valeur grossière de la solution et d'itérer pour obtenir la solution du système avec une précision donnée. Il faut néanmoins que l'erreur initiale $\epsilon^{(0)}$ soit telle que $\|\epsilon^{(0)}\|^2$ soit inférieure strictement à 1, pour que la méthode converge car l'erreur à la n -ième itération est $\|\epsilon^{(0)}\|^n$.

Annexe B

Coefficients A_n

B.1 Méthode de Dorodnitsyn

Interpolation de Θ et de $1/\Theta$:

$$\frac{1}{\Theta} = (1 - u) \sum_{m=0}^{N-1} a_m u^m$$

$$\Theta = \frac{1}{1 - u} \sum_{m=0}^{N-1} b_m u^m$$

B.1.1 Approximation à deux bandes $N = 2$

β	A_0	A_1
-0,096	7,50328465	5,50148996
-0,050	3,92919795	3,87816940
0,000	3,15539240	3,47920297
0,250	1,93820165	2,65047948
0,500	1,52373377	2,25799826
0,750	1,29558670	2,00512865
1,000	1,14617125	1,82314033
1,250	1,03867292	1,68366278
1,500	0,95659100	1,57221298
1,750	0,89128132	1,48044522
2,000	0,83772144	1,40314458

B.1.2 Approximation à trois bandes $N = 3$

β	A_0	A_1	A_2
-0,190	7,01626849	3,53952815	3,18155051
-0,150	5,53344210	3,63860665	3,55689893
-0,145	5,38255122	3,63774288	3,59335114
-0,140	5,23846757	3,63437284	3,62725261
-0,130	4,96977834	3,62081131	3,68742506
-0,120	4,72544714	3,59936649	3,73768491
-0,100	4,30188346	3,53853003	3,81093749
-0,050	3,53392970	3,33431265	3,87449000
0,000	3,03313877	3,11970033	3,84091517
0,250	1,94215921	2,36190487	3,39715473
0,500	1,52867359	1,95501031	3,01569338
0,750	1,29911933	1,70064630	2,73103530
1,000	1,14868381	1,52378854	2,51206618
1,250	1,04051335	1,39206647	2,33772580
1,500	0,95797802	1,28920326	2,19492694
1,750	0,89235101	1,20606214	2,07528224
2,000	0,83856138	1,13708409	1,97318928

B.1.3 Approximation à quatre bandes $N = 4$

β	A_0	A_1	A_2	A_3
-0,145	7,70952563	4,41822053	4,00295963	5,50588708
-0,140	6,72597461	4,28897594	3,93365222	5,21091209
-0,130	5,78493247	4,11823377	3,85467776	4,97302807
-0,120	5,22312227	3,98573692	3,79810879	4,85310128
-0,100	4,50591947	3,77072187	3,70826068	4,72410620
-0,050	3,54723823	3,36953170	3,52790194	4,58336131
0,000	3,01851327	3,07097776	3,37030375	4,50082050
0,250	1,93504458	2,22606584	2,75968135	4,11107127
0,500	1,52580865	1,81731617	2,36315516	3,74182064
0,750	1,29761306	1,56989937	2,09138202	3,43696262
1,000	1,14775270	1,40080368	1,89299452	3,18926591
1,250	1,03987696	1,27621095	1,74083121	2,98547985
1,500	0,95751335	1,17962721	1,61967150	2,81493768
1,750	0,89199582	1,10197512	1,52038703	2,66988243
2,000	0,83828073	1,03780863	1,43717244	2,54472909

B.2 Méthode modifiée

Interpolation de Θ uniquement :

$$\Theta = \frac{1}{1-u} \sum_{m=0}^{N-1} b_m u^m$$

B.2.1 Approximation à deux bandes $N = 2$

β	A_0	A_1
-0,095	4,38502229	4,40580638
-0,050	3,62586726	3,91790957
0,000	3,02876160	3,49538848
0,250	1,86057201	2,40626909
0,500	1,45582345	1,94023437
0,750	1,23543294	1,66920225
1,000	1,09195790	1,48693255
1,250	0,98907944	1,35366867
1,500	0,91068255	1,25079015
1,750	0,84838363	1,16827387
2,000	0,79733524	1,10018578

B.2.2 Approximation à trois bandes $N = 3$

β	A_0	A_1	A_2
-0,190	8,77196322	3,99560704	2,44052008
-0,150	6,10643919	3,89541213	3,29233773
-0,145	5,86549066	3,87263701	3,37323657
-0,140	5,64329284	3,84811348	3,44620035
-0,130	5,24969281	3,79508652	3,56956734
-0,120	4,91446224	3,73862452	3,66610920
-0,100	4,37900990	3,62198036	3,79604884
-0,050	3,51904066	3,33406390	3,90426297
0,000	3,00545504	3,10540650	3,87524403
0,250	1,93033441	2,34831358	3,41593161
0,500	1,52329907	1,94854860	3,02639087
0,750	1,29612707	1,69719528	2,73785163
1,000	1,14679471	1,52174906	2,51676546
1,250	1,03921832	1,39076836	2,34115287
1,500	0,95703776	1,28833041	2,19753217
1,750	0,89163902	1,20545025	2,07732644
2,000	0,83800473	1,13664101	1,97483354

B.2.3 Approximation à quatre bandes $N = 4$

β	A_0	A_1	A_2	A_3
-0,145	6,27781642	4,08432689	3,66942149	5,26846452
-0,140	5,95997584	4,04396388	3,67994913	5,16457816
-0,130	5,44080151	3,95832235	3,68419860	5,01104687
-0,120	5,03356031	3,87105885	3,67478020	4,90539230
-0,100	4,42940491	3,70184759	3,63505664	4,77269747
-0,050	3,52736768	3,33546232	3,49335886	4,61665072
0,000	3,00740710	3,04509051	3,34234844	4,52683852
0,250	1,93091401	2,21180776	2,73656793	4,12095926
0,500	1,52378183	1,80898955	2,34771715	3,74654653
0,750	1,29647011	1,56460451	2,08108768	3,43981820
1,000	1,14703725	1,39716795	1,88582316	3,19126594
1,250	1,03939390	1,27356244	1,73561008	2,98700823
1,500	0,95716836	1,17760882	1,61572437	2,81616986
1,750	0,89173862	1,10038212	1,51730857	2,67091126
2,000	0,83808240	1,03651600	1,43470881	2,54560945

B.3 Troisième méthode modifiée

Interpolation de $1/\Theta$ uniquement :

$$\frac{1}{\Theta} = (1 - u) \sum_{m=0}^{N-1} a_m u^m$$

B.3.1 Approximation à deux bandes $N = 2$

β	A_0	A_1
-0,019	13,24536386	3,58992571
-0,015	5,80572108	3,51539204
-0,010	4,14963042	3,34537525
-0,050	3,38078061	3,18417268
0,000	2,91473846	3,03916220
0,250	1,90626621	2,51283638
0,500	1,51209404	2,18463482
0,750	1,28953890	1,95732882
1,000	1,14239816	1,78839587
1,250	1,03604414	1,65661436
1,500	0,95462073	1,55014951
1,750	0,88972672	1,46183366
2,000	0,83644766	1,38704546

Annexe C

Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre à pas variable [27]

Considérons le système de n équations différentielles du premier ordre suivant :

$$\frac{d}{dx}\vec{Y}(x) = \vec{F}(x, \vec{Y}(x))$$

avec

$$\vec{Y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{F}(x, \vec{Y}(x)) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \\ f_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \end{bmatrix}.$$

La variable indépendante est x et les f_i forment le vecteur inconnu $\vec{Y}(x)$. Les f_i sont donc des fonctions connues de x et des y_i pour $i = 1, \dots, n$.

On note $h = x^{(j+1)} - x^{(j)}$ le pas d'intégration.

Supposons $y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_n^{(j)}$ correspondant à $x^{(j)}$ connus, soit par les conditions initiales ($j = 0$), soit comme résultat du pas d'intégration précédent. On obtient $y_1^{(j+1)}, y_2^{(j+1)}, \dots, y_n^{(j+1)}$ correspondant à $x^{(j+1)}$ en utilisant les formules de Runge-Kutta :

$$y_i^{(j+1)} = y_i^{(j)} + \frac{1}{6}[T_{1,i} + 2T_{2,i} + 2T_{3,i} + T_{4,i}] \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, n$$

avec

$$T_{k,i} = hf_i(x^{(j)} + \alpha h, y_1^{(j)} + \alpha T_{k-1,1}, \dots, y_n^{(j)} + \alpha T_{k-1,n})$$

et pour

$$\begin{array}{ll} k = 1 & \text{alors} \quad \alpha = 0 \\ k = 2 & \alpha = 1/2 \\ k = 3 & \alpha = 1/2 \\ k = 4 & \alpha = 0 \end{array}$$

Par exemple, pour une équation différentielle ordinaire de type Cauchy :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{et} \quad y(x_0) = y_0$$

la technique d'intégration de Runge-Kutta d'ordre quatre s'écrit :

$$y^{(j+1)} = y^{(j)} + \frac{1}{6}[T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4]$$

avec

$$\begin{aligned} T_1 &= hf(x^{(j)}, y^{(j)}) \\ T_2 &= hf\left(x^{(j)} + \frac{1}{2}h, y^{(j)} + \frac{1}{2}T_1\right) \\ T_3 &= hf\left(x^{(j)} + \frac{1}{2}h, y^{(j)} + \frac{1}{2}T_2\right) \\ T_4 &= hf(x^{(j)} + h, y^{(j)} + T_3) \end{aligned}$$

Afin de contrôler la précision d'intégration, on associe à cette méthode une technique de pas variable. Son principe est simple : elle compare l'intégration effectuée en prenant un pas h avec celle obtenue en faisant deux demi-pas $h/2$.

Notons $y(x+h)$ la solution exacte de l'intégration en $x+h$ et les deux approximations y_a, y_b calculées respectivement en effectuant un pas de h et deux pas de $h/2$. On peut écrire dans le cas d'une méthode d'ordre quatre :

$$(C.1) \quad y(x+h) = y_a + h^5 \mathcal{K} + O(h^6)$$

$$(C.2) \quad y(x+h) = y_b + 2 \left(\frac{h}{2}\right)^5 \mathcal{K} + O(h^6)$$

On peut supposer que la valeur de \mathcal{K} n'est pas modifiée entre les deux approximations car, d'après la formule de Taylor, \mathcal{K} est d'ordre $\frac{1}{5!} \frac{d^5 y}{dx^5}$.

La différence entre les deux approximations $\Delta = y_b - y_a$ permet d'estimer l'erreur d'intégration. Le but de la variation de pas est donc de garder Δ proche, mais quand même légèrement inférieur à la précision fixée par l'utilisateur.

En fait, si on néglige les termes d'ordre h^6 et en résolvant les équations (C.1) et (C.2), on peut calculer la solution $y(x+h)$ à l'ordre cinq. En effet :

$$y(x+h) = y_a + \frac{16}{15}\Delta + O(h^6)$$

Le passage de l'approximation d'ordre quatre à l'approximation d'ordre cinq est donc possible, mais il n'est pas intéressant car l'ordre quatre est déjà très précis. Par contre, le fait que Δ soit d'ordre h^5 nous donne une relation entre h et Δ .

Si un pas h_1 produit une erreur Δ_1 , alors le pas h_0 qui devrait donner une erreur Δ_0 peut être estimé par :

$$(C.3) \quad h_0 = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{\frac{1}{5}}$$

Cette équation permet par exemple d'adapter le pas pour obtenir une précision Δ_0 . Supposons le calcul effectué avec un pas h_1 et aboutissant à une erreur Δ_1 . Si Δ_1 est supérieur en valeur absolue à Δ_0 , (C.3) donne le nouveau pas h_0 qu'il faut utiliser pour refaire le calcul et obtenir la précision Δ_0 . Si Δ_1 est inférieur en valeur absolue à Δ_0 , alors l'équation (C.3) donne h_0 pour le pas d'intégration suivant et tel que la précision soit Δ_0 .

En pratique, on prend :

$$h_0 = \mathcal{S}h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{\frac{1}{5}} \quad \text{si} \quad \Delta_0 \geq \Delta_1$$

$$h_0 = \mathcal{S}h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{\frac{1}{4}} \quad \text{si} \quad \Delta_0 < \Delta_1$$

avec \mathcal{S} coefficient de sécurité proche de un ($\mathcal{S} \simeq 0,9$).

Annexe D

Emoussement : M.I.R. à une bande

D.1 Sphère $M_\infty = 3$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.00	.2159	-.2079	.0000	.5272	.0000	.0000	.6154
.05	.2162	-.2076	.0331	.5267	.0000	.0277	.6142
.10	.2173	-.2063	.0660	.5243	.0000	.0554	.6092
.15	.2191	-.2042	.0987	.5204	.0000	.0831	.6009
.20	.2217	-.2011	.1310	.5151	.0000	.1107	.5895
.25	.2250	-.1974	.1629	.5086	.0000	.1382	.5757
.30	.2292	-.1925	.1941	.5005	.0000	.1655	.5585
.35	.2342	-.1869	.2247	.4916	.0000	.1928	.5393
.40	.2403	-.1802	.2543	.4815	.0000	.2198	.5175
.45	.2472	-.1726	.2831	.4707	.0000	.2466	.4941
.50	.2551	-.1639	.3110	.4591	.0000	.2731	.4692
.55	.2642	-.1543	.3377	.4471	.0000	.2994	.4431
.60	.2747	-.1434	.3632	.4346	.0000	.3252	.4162
.65	.2864	-.1316	.3875	.4219	.0000	.3506	.3888
.70	.2995	-.1187	.4106	.4091	.0000	.3756	.3614
.75	.3143	-.1047	.4323	.3962	.0000	.4000	.3343
.80	.3308	-.0896	.4526	.3835	.0000	.4238	.3077
.85	.3487	-.0734	.4714	.3711	.0000	.4468	.2823
.90	.3692	-.0562	.4891	.3587	.0000	.4693	.2576
.95	.3918	-.0382	.5055	.3464	.0000	.4910	.2342

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
1.00	.4169	-.0192	.5205	.3344	.0000	.5119	.2124
1.05	.4445	.0006	.5342	.3227	.0000	.5319	.1920
1.10	.4754	.0212	.5465	.3111	.0000	.5510	.1734
1.15	.5091	.0424	.5576	.2997	.0000	.5692	.1563
1.20	.5465	.0643	.5675	.2885	.0000	.5863	.1408
1.25	.5878	.0867	.5761	.2774	.0000	.6025	.1269
1.30	.6331	.1095	.5836	.2665	.0000	.6178	.1144
1.35	.6831	.1328	.5900	.2557	.0000	.6322	.1032
1.40	.7380	.1564	.5951	.2450	.0000	.6457	.0931
1.45	.7982	.1803	.5992	.2345	.0000	.6584	.0841
1.50	.8660	.2044	.6018	.2242	.0000	.6703	.0762
1.55	.9483	.2313	.6004	.2117	.0000	.6799	.0679

D.2 Sphère $M_\infty = 4$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.00	.1750	-.1909	.0000	.6293	.0000	.0000	.7166
.05	.1753	-.1905	.0355	.6283	.0000	.0305	.7143
.10	.1763	-.1891	.0712	.6257	.0000	.0607	.7077
.15	.1781	-.1867	.1071	.6209	.0000	.0901	.6966
.20	.1804	-.1835	.1431	.6142	.0000	.1189	.6818
.25	.1834	-.1794	.1787	.6057	.0000	.1472	.6639
.30	.1871	-.1744	.2138	.5954	.0000	.1751	.6426
.35	.1913	-.1685	.2482	.5836	.0000	.2028	.6187
.40	.1964	-.1615	.2816	.5704	.0000	.2303	.5922
.45	.2022	-.1536	.3139	.5561	.0000	.2576	.5636
.50	.2089	-.1445	.3451	.5409	.0000	.2846	.5332
.55	.2166	-.1343	.3749	.5250	.0000	.3113	.5016
.60	.2252	-.1231	.4034	.5085	.0000	.3376	.4692
.65	.2350	-.1106	.4304	.4918	.0000	.3635	.4364
.70	.2459	-.0969	.4559	.4748	.0000	.3888	.4038
.75	.2582	-.0821	.4800	.4579	.0000	.4135	.3717
.80	.2717	-.0660	.5022	.4414	.0000	.4373	.3410
.85	.2871	-.0489	.5232	.4246	.0000	.4605	.3112
.90	.3041	-.0307	.5428	.4082	.0000	.4828	.2830
.95	.3230	-.0116	.5608	.3919	.0000	.5041	.2567
1.00	.3439	.0086	.5773	.3760	.0000	.5244	.2325
1.05	.3671	.0296	.5923	.3603	.0000	.5436	.2103
1.10	.3925	.0515	.6061	.3449	.0000	.5616	.1902
1.15	.4207	.0740	.6183	.3297	.0000	.5784	.1722
1.20	.4514	.0972	.6294	.3146	.0000	.5942	.1561
1.25	.4854	.1209	.6391	.2998	.0000	.6087	.1418
1.30	.5226	.1450	.6476	.2852	.0000	.6221	.1292
1.35	.5633	.1696	.6547	.2708	.0000	.6346	.1180
1.40	.6077	.1945	.6606	.2566	.0000	.6462	.1080
1.45	.6570	.2198	.6650	.2428	.0000	.6569	.0992
1.50	.7109	.2453	.6680	.2294	.0000	.6669	.0914
1.55	.7782	.2746	.6653	.2123	.0000	.6737	.0823

D.3 Sphère $M_\infty = 6$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.00	.1482	-.1779	.0000	.7288	.0000	.0000	.8156
.05	.1485	-.1775	.0376	.7281	.0000	.0331	.8134
.10	.1494	-.1761	.0759	.7253	.0000	.0653	.8051
.15	.1512	-.1733	.1151	.7190	.0000	.0955	.7902
.20	.1533	-.1701	.1547	.7113	.0000	.1249	.7729
.25	.1560	-.1656	.1940	.7003	.0000	.1534	.7506
.30	.1590	-.1609	.2332	.6885	.0000	.1817	.7270
.35	.1629	-.1545	.2708	.6734	.0000	.2096	.6978
.40	.1674	-.1470	.3073	.6568	.0000	.2375	.6660
.45	.1725	-.1385	.3425	.6390	.0000	.2651	.6320
.50	.1780	-.1295	.3771	.6205	.0000	.2927	.5966
.55	.1847	-.1186	.4094	.6007	.0000	.3198	.5593
.60	.1924	-.1064	.4401	.5803	.0000	.3464	.5213
.65	.2008	-.0933	.4695	.5597	.0000	.3727	.4833
.70	.2104	-.0788	.4972	.5388	.0000	.3982	.4457
.75	.2211	-.0631	.5233	.5179	.0000	.4230	.4091
.80	.2327	-.0461	.5475	.4975	.0000	.4467	.3741
.85	.2460	-.0281	.5704	.4768	.0000	.4698	.3407
.90	.2610	-.0088	.5915	.4564	.0000	.4915	.3098
.95	.2775	.0116	.6110	.4362	.0000	.5121	.2813
1.00	.2957	.0329	.6291	.4162	.0000	.5313	.2554
1.05	.3157	.0550	.6458	.3964	.0000	.5493	.2320
1.10	.3374	.0778	.6613	.3768	.0000	.5659	.2110
1.15	.3622	.1015	.6749	.3572	.0000	.5804	.1936
1.20	.3881	.1256	.6879	.3378	.0000	.5942	.1774
1.25	.4176	.1503	.6990	.3184	.0000	.6061	.1642
1.30	.4496	.1753	.7090	.2993	.0000	.6170	.1524
1.35	.4823	.2005	.7186	.2801	.0000	.6274	.1414
1.40	.5195	.2262	.7262	.2614	.0000	.6366	.1322
1.45	.5592	.2521	.7327	.2430	.0000	.6452	.1237
1.50	.6321	.2942	.7163	.2040	.0000	.6407	.1062

D.4 Sphère $M_\infty = 10$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.00	.1352	-.1708	.0000	.7925	.0000	.0000	.8790
.05	.1356	-.1702	.0391	.7914	.0000	.0343	.8754
.10	.1366	-.1686	.0791	.7878	.0000	.0672	.8653
.15	.1381	-.1660	.1202	.7817	.0000	.0983	.8499
.20	.1402	-.1625	.1619	.7725	.0000	.1277	.8300
.25	.1427	-.1580	.2034	.7607	.0000	.1564	.8061
.30	.1457	-.1527	.2443	.7464	.0000	.1847	.7785
.35	.1492	-.1464	.2842	.7301	.0000	.2129	.7475
.40	.1533	-.1389	.3227	.7118	.0000	.2410	.7130
.45	.1579	-.1303	.3600	.6920	.0000	.2689	.6761
.50	.1633	-.1205	.3957	.6710	.0000	.2966	.6369
.55	.1694	-.1094	.4298	.6490	.0000	.3240	.5963
.60	.1763	-.0971	.4623	.6263	.0000	.3509	.5549
.65	.1842	-.0834	.4931	.6032	.0000	.3773	.5136
.70	.1930	-.0684	.5222	.5798	.0000	.4029	.4728
.75	.2030	-.0521	.5494	.5565	.0000	.4278	.4333
.80	.2139	-.0344	.5746	.5336	.0000	.4512	.3963
.85	.2263	-.0156	.5985	.5103	.0000	.4738	.3610
.90	.2402	.0043	.6207	.4873	.0000	.4951	.3285
.95	.2556	.0253	.6414	.4644	.0000	.5149	.2991
1.00	.2725	.0472	.6605	.4417	.0000	.5331	.2727
1.05	.2912	.0700	.6784	.4189	.0000	.5497	.2495
1.10	.3116	.0934	.6949	.3962	.0000	.5646	.2293
1.15	.3339	.1175	.7103	.3733	.0000	.5778	.2121
1.20	.3583	.1419	.7247	.3502	.0000	.5894	.1973
1.25	.3847	.1666	.7380	.3270	.0000	.5997	.1848
1.30	.4132	.1915	.7503	.3037	.0000	.6087	.1739
1.35	.4440	.2167	.7614	.2805	.0000	.6169	.1644
1.40	.4772	.2419	.7714	.2575	.0000	.6246	.1557
1.45	.5131	.2673	.7799	.2350	.0000	.6320	.1476
1.50	.5513	.2928	.7871	.2132	.0000	.6394	.1397
1.55	.5932	.3186	.7923	.1926	.0000	.6470	.1318

D.5 Ellipsoide $b/a = 0,5$ $M_\infty = 3$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.00	.0609	-.2079	.0000	.5272	.0000	.0000	.6154
.10	.0614	-.2060	.0608	.5249	.0000	.0502	.6102
.20	.0629	-.1997	.1196	.5179	.0003	.0999	.5942
.30	.0655	-.1893	.1753	.5074	.0014	.1482	.5694
.40	.0692	-.1744	.2281	.4940	.0041	.1926	.5392
.50	.0739	-.1553	.2787	.4775	.0090	.2305	.5082
.60	.0797	-.1323	.3269	.4583	.0166	.2619	.4794
.70	.0865	-.1055	.3719	.4371	.0268	.2877	.4535
.80	.0944	-.0749	.4128	.4148	.0398	.3095	.4300
.90	.1036	-.0405	.4485	.3920	.0558	.3278	.4084
1.00	.1143	-.0028	.4793	.3693	.0744	.3436	.3878
1.10	.1266	.0381	.5044	.3473	.0954	.3570	.3681
1.20	.1415	.0815	.5245	.3256	.1188	.3686	.3485
1.30	.1594	.1271	.5391	.3047	.1445	.3783	.3287
1.40	.1812	.1744	.5483	.2845	.1724	.3863	.3086
1.50	.2083	.2228	.5523	.2648	.2023	.3928	.2878
1.60	.2424	.2717	.5513	.2457	.2343	.3977	.2660
1.70	.2862	.3208	.5455	.2270	.2683	.4015	.2430
1.80	.3439	.3694	.5352	.2087	.3045	.4042	.2185
1.90	.4222	.4172	.5205	.1908	.3431	.4062	.1923
2.00	.5311	.4637	.5016	.1734	.3842	.4079	.1645
2.10	.6893	.5087	.4785	.1568	.4281	.4096	.1355
2.20	.9319	.5517	.4512	.1411	.4747	.4117	.1060
2.30	1.3319	.5924	.4197	.1265	.5241	.4150	.0774
2.40	2.0635	.6306	.3842	.1130	.5760	.4207	.0511
2.50	3.6468	.6660	.3453	.1004	.6298	.4309	.0290

D.6 Ellipsoide $b/a = 0,5$ $M_\infty = 4$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.00	.0482	-.1909	.0000	.6293	.0000	.0000	.7166
.10	.0487	-.1888	.0662	.6263	.0000	.0559	.7089
.20	.0500	-.1823	.1317	.6173	.0003	.1094	.6872
.30	.0522	-.1712	.1946	.6030	.0015	.1596	.6548
.40	.0553	-.1555	.2544	.5844	.0044	.2047	.6169
.50	.0592	-.1354	.3112	.5620	.0095	.2435	.5785
.60	.0639	-.1109	.3643	.5365	.0174	.2758	.5427
.70	.0694	-.0821	.4132	.5089	.0282	.3029	.5102
.80	.0757	-.0490	.4569	.4802	.0420	.3256	.4808
.90	.0830	-.0118	.4949	.4511	.0587	.3447	.4540
1.00	.0914	.0291	.5272	.4224	.0781	.3608	.4292
1.10	.1011	.0733	.5534	.3945	.0999	.3740	.4060
1.20	.1126	.1202	.5739	.3671	.1241	.3850	.3834
1.30	.1262	.1694	.5887	.3405	.1504	.3939	.3613
1.40	.1429	.2203	.5974	.3148	.1787	.4005	.3392
1.50	.1632	.2723	.6007	.2897	.2089	.4055	.3168
1.60	.1884	.3247	.5987	.2653	.2409	.4089	.2934
1.70	.2203	.3771	.5916	.2414	.2748	.4111	.2686
1.80	.2614	.4288	.5796	.2182	.3109	.4126	.2418
1.90	.3154	.4796	.5627	.1958	.3493	.4136	.2129
2.00	.3890	.5288	.5410	.1745	.3903	.4143	.1820
2.10	.4920	.5761	.5147	.1543	.4337	.4150	.1501
2.20	.6426	.6210	.4841	.1353	.4795	.4158	.1180
2.30	.8750	.6633	.4493	.1177	.5272	.4175	.0872
2.40	1.2589	.7025	.4109	.1015	.5764	.4209	.0592
2.50	1.9631	.7385	.3692	.0866	.6258	.4281	.0359

D.7 Ellipsoide $b/a = 0,5$ $M_\infty = 6$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.00	.0402	-.1779	.0000	.7288	.0000	.0000	.8156
.10	.0406	-.1756	.0712	.7253	.0000	.0606	.8054
.20	.0419	-.1686	.1431	.7141	.0003	.1163	.7777
.30	.0438	-.1571	.2131	.6959	.0016	.1672	.7386
.40	.0465	-.1407	.2793	.6722	.0045	.2129	.6934
.50	.0498	-.1195	.3413	.6439	.0098	.2523	.6476
.60	.0538	-.0935	.3987	.6123	.0180	.2856	.6048
.70	.0584	-.0626	.4508	.5785	.0293	.3134	.5661
.80	.0637	-.0272	.4972	.5435	.0435	.3367	.5313
.90	.0697	.0127	.5374	.5084	.0606	.3559	.5003
1.00	.0766	.0566	.5711	.4739	.0803	.3712	.4729
1.10	.0847	.1039	.5989	.4395	.1024	.3834	.4477
1.20	.0941	.1541	.6205	.4059	.1265	.3926	.4247
1.30	.1051	.2065	.6362	.3729	.1523	.3989	.4032
1.40	.1182	.2606	.6461	.3405	.1797	.4027	.3827
1.50	.1339	.3156	.6506	.3083	.2085	.4047	.3619
1.60	.1764	.4261	.6440	.2456	.2716	.4064	.3136
1.70	.1764	.4261	.6440	.2456	.2716	.4064	.3136
1.80	.2056	.4806	.6325	.2160	.3071	.4076	.2838
1.90	.2428	.5341	.6151	.1883	.3453	.4088	.2504
2.00	.2916	.5861	.5918	.1627	.3861	.4099	.2146
2.10	.3575	.6360	.5630	.1392	.4292	.4107	.1778
2.20	.4501	.6833	.5290	.1179	.4744	.4114	.1410
2.30	.5863	.7276	.4903	.0986	.5212	.4126	.1059
2.40	.7968	.7684	.4474	.0814	.5688	.4154	.0741
2.50	1.1459	.8055	.4007	.0661	.6160	.4214	.0471

D.8 Ellipsoide $b/a = 0,5$ $M_\infty = 10$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.00	.0364	-.1708	.0000	.7925	.0000	.0000	.8790
.10	.0369	-.1683	.0742	.7885	.0000	.0630	.8669
.20	.0380	-.1612	.1504	.7760	.0003	.1198	.8359
.30	.0398	-.1494	.2246	.7552	.0016	.1709	.7925
.40	.0423	-.1326	.2945	.7281	.0046	.2168	.7426
.50	.0453	-.1107	.3597	.6962	.0100	.2567	.6922
.60	.0489	-.0837	.4196	.6607	.0183	.2905	.6449
.70	.0531	-.0516	.4738	.6229	.0297	.3187	.6022
.80	.0579	-.0145	.5217	.5841	.0442	.3419	.5645
.90	.0634	.0270	.5632	.5450	.0615	.3607	.5315
1.00	.0696	.0728	.5981	.5065	.0812	.3751	.5033
1.10	.0768	.1220	.6269	.4680	.1030	.3857	.4787
1.20	.0852	.1741	.6496	.4299	.1265	.3925	.4578
1.30	.0949	.2284	.6665	.3921	.1512	.3957	.4400
1.40	.1062	.2842	.6783	.3540	.1766	.3958	.4244
1.50	.1195	.3406	.6855	.3154	.2029	.3938	.4092
1.60	.1351	.3969	.6886	.2762	.2307	.3916	.3911
1.70	.1535	.4528	.6868	.2376	.2617	.3915	.3656
1.80	.1755	.5083	.6785	.2017	.2967	.3938	.3315
1.90	.2024	.5630	.6628	.1694	.3351	.3967	.2927
2.00	.2363	.6165	.6401	.1408	.3757	.3989	.2520
2.10	.2805	.6681	.6108	.1155	.4183	.4002	.2107
2.20	.3403	.7172	.5752	.0934	.4625	.4011	.1698
2.30	.4248	.7633	.5339	.0743	.5082	.4024	.1305
2.40	.5504	.8059	.4873	.0580	.5547	.4051	.0942
2.50	.7489	.8444	.4358	.0444	.6008	.4110	.0626

D.9 Ellipsoide $b/a = 1,5$ $M_\infty = 3$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.000	.4320	-.2079	.0000	.5272	.0000	.0000	.6154
.025	.4321	-.2079	.0179	.5272	.0000	.0153	.6153
.050	.4324	-.2076	.0359	.5264	.0000	.0306	.6136
.075	.4331	-.2072	.0539	.5251	.0000	.0459	.6110
.100	.4339	-.2067	.0718	.5233	.0000	.0612	.6074
.125	.4350	-.2061	.0898	.5212	-.0001	.0766	.6032
.150	.4364	-.2052	.1077	.5183	-.0002	.0921	.5974
.175	.4380	-.2043	.1257	.5152	-.0003	.1077	.5910
.200	.4400	-.2032	.1435	.5114	-.0006	.1236	.5831
.225	.4423	-.2020	.1613	.5072	-.0010	.1395	.5745
.250	.4449	-.2006	.1789	.5026	-.0016	.1558	.5648
.275	.4480	-.1991	.1964	.4976	-.0023	.1723	.5539
.300	.4515	-.1974	.2136	.4921	-.0034	.1891	.5418
.325	.4555	-.1955	.2306	.4863	-.0047	.2063	.5285
.350	.4602	-.1934	.2473	.4802	-.0065	.2239	.5139
.375	.4656	-.1911	.2636	.4739	-.0088	.2419	.4981
.400	.4715	-.1885	.2796	.4675	-.0115	.2603	.4813
.425	.4786	-.1855	.2949	.4609	-.0151	.2792	.4629
.450	.4867	-.1821	.3095	.4545	-.0196	.2984	.4434
.475	.4960	-.1783	.3235	.4481	-.0251	.3181	.4226
.500	.5063	-.1741	.3368	.4420	-.0314	.3380	.4011
.525	.5186	-.1691	.3489	.4364	-.0395	.3581	.3783
.550	.5327	-.1634	.3600	.4313	-.0491	.3783	.3549
.575	.5489	-.1571	.3699	.4269	-.0606	.3984	.3309
.600	.5666	-.1499	.3785	.4234	-.0739	.4178	.3072
.625	.5877	-.1421	.3860	.4204	-.0896	.4371	.2829
.650	.6117	-.1336	.3923	.4182	-.1078	.4553	.2591
.675	.6392	-.1245	.3974	.4168	-.1290	.4719	.2362
.700	.6705	-.1150	.4016	.4159	-.1532	.4866	.2143
.725	.7054	-.1053	.4054	.4151	-.1802	.4990	.1935
.750	.7451	-.0956	.4092	.4141	-.2108	.5081	.1743
.775	.7891	-.0861	.4140	.4123	-.2443	.5139	.1565
.800	.8379	-.0772	.4207	.4088	-.2810	.5154	.1403
.825	.8916	-.0690	.4302	.4030	-.3202	.5119	.1259
.850	.9501	-.0617	.4427	.3946	-.3614	.5027	.1134
.875	1.0213	-.0538	.4583	.3791	-.4098	.4804	.1004

D.10 Ellipsoide $b/a = 1,5$ $M_\infty = 4$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.000	.3541	-.1909	.0000	.6293	.0000	.0000	.7166
.025	.3542	-.1909	.0192	.6290	.0000	.0168	.7161
.050	.3545	-.1906	.0385	.6282	.0000	.0335	.7141
.075	.3551	-.1902	.0579	.6269	.0000	.0501	.7107
.100	.3560	-.1895	.0774	.6246	.0000	.0665	.7056
.125	.3571	-.1887	.0971	.6220	-.0001	.0829	.6997
.150	.3583	-.1879	.1169	.6188	-.0002	.0991	.6928
.175	.3599	-.1868	.1369	.6147	-.0004	.1154	.6839
.200	.3617	-.1856	.1569	.6101	-.0006	.1316	.6744
.225	.3638	-.1843	.1768	.6047	-.0011	.1481	.6631
.250	.3661	-.1829	.1967	.5988	-.0017	.1648	.6508
.275	.3687	-.1814	.2165	.5923	-.0025	.1817	.6371
.300	.3716	-.1797	.2361	.5853	-.0035	.1989	.6223
.325	.3751	-.1778	.2554	.5777	-.0050	.2166	.6057
.350	.3790	-.1758	.2745	.5697	-.0068	.2348	.5876
.375	.3835	-.1735	.2932	.5612	-.0092	.2534	.5679
.400	.3885	-.1711	.3115	.5526	-.0121	.2723	.5470
.425	.3944	-.1683	.3292	.5436	-.0159	.2919	.5242
.450	.4012	-.1651	.3463	.5346	-.0205	.3119	.5000
.475	.4087	-.1617	.3630	.5256	-.0259	.3323	.4747
.500	.4176	-.1577	.3787	.5167	-.0328	.3531	.4478
.525	.4281	-.1531	.3934	.5082	-.0413	.3742	.4197
.550	.4400	-.1479	.4072	.5001	-.0514	.3954	.3910
.575	.4535	-.1421	.4201	.4924	-.0633	.4165	.3617
.600	.4685	-.1354	.4315	.4857	-.0773	.4370	.3326
.625	.4863	-.1282	.4423	.4793	-.0937	.4573	.3031
.650	.5066	-.1204	.4521	.4735	-.1128	.4765	.2745
.675	.5300	-.1119	.4610	.4682	-.1351	.4940	.2471
.700	.5563	-.1030	.4694	.4632	-.1602	.5096	.2211
.725	.5861	-.0939	.4774	.4583	-.1888	.5222	.1972
.750	.6194	-.0846	.4854	.4531	-.2204	.5316	.1753
.775	.6565	-.0754	.4939	.4473	-.2551	.5370	.1558
.800	.6982	-.0665	.5032	.4404	-.2928	.5370	.1390
.825	.7442	-.0579	.5137	.4323	-.3327	.5316	.1247
.850	.7945	-.0498	.5252	.4228	-.3741	.5207	.1125
.875	.8578	-.0405	.5375	.4070	-.4229	.4954	.1000

D.11 Ellipsoide $b/a = 1,5$ $M_\infty = 6$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.000	.3028	-.1779	.0000	.7288	.0000	.0000	.8156
.025	.3029	-.1778	.0203	.7285	.0000	.0180	.8148
.050	.3033	-.1774	.0408	.7275	.0000	.0358	.8120
.075	.3039	-.1769	.0614	.7260	.0000	.0534	.8077
.100	.3048	-.1762	.0825	.7236	.0000	.0706	.8016
.125	.3059	-.1753	.1038	.7204	-.0001	.0875	.7941
.150	.3072	-.1743	.1255	.7164	-.0002	.1041	.7851
.175	.3086	-.1732	.1473	.7117	-.0004	.1206	.7750
.200	.3102	-.1720	.1693	.7062	-.0007	.1371	.7635
.225	.3121	-.1706	.1913	.6996	-.0011	.1538	.7501
.250	.3141	-.1692	.2133	.6926	-.0017	.1705	.7358
.275	.3164	-.1676	.2351	.6846	-.0025	.1877	.7195
.300	.3191	-.1659	.2567	.6759	-.0037	.2053	.7016
.325	.3221	-.1640	.2781	.6666	-.0052	.2233	.6819
.350	.3254	-.1620	.2992	.6568	-.0070	.2417	.6607
.375	.3293	-.1598	.3199	.6464	-.0095	.2606	.6374
.400	.3337	-.1573	.3402	.6356	-.0124	.2801	.6126
.425	.3388	-.1546	.3600	.6245	-.0163	.3001	.5857
.450	.3448	-.1515	.3792	.6131	-.0211	.3206	.5570
.475	.3516	-.1481	.3977	.6016	-.0269	.3415	.5269
.500	.3595	-.1442	.4155	.5903	-.0340	.3629	.4953
.525	.3685	-.1398	.4324	.5790	-.0425	.3845	.4625
.550	.3790	-.1348	.4483	.5682	-.0528	.4062	.4289
.575	.3911	-.1292	.4633	.5578	-.0650	.4278	.3947
.600	.4044	-.1227	.4767	.5483	-.0793	.4487	.3612
.625	.4204	-.1158	.4897	.5390	-.0962	.4694	.3273
.650	.4387	-.1081	.5017	.5303	-.1158	.4888	.2947
.675	.4596	-.0999	.5129	.5221	-.1383	.5066	.2636
.700	.4835	-.0911	.5233	.5143	-.1642	.5220	.2347
.725	.5103	-.0820	.5332	.5066	-.1931	.5347	.2080
.750	.5408	-.0726	.5430	.4989	-.2254	.5435	.1843
.775	.5746	-.0632	.5529	.4907	-.2606	.5484	.1632
.800	.6128	-.0538	.5631	.4819	-.2986	.5477	.1453
.825	.6553	-.0445	.5738	.4722	-.3388	.5414	.1303
.850	.7024	-.0355	.5852	.4615	-.3804	.5291	.1179
.875	.7579	-.0260	.5969	.4473	-.4256	.5068	.1066

D.12 Ellipsoide $b/a = 1,5$ $M_\infty = 10$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.000	.2777	-.1708	.0000	.7925	.0000	.0000	.8790
.025	.2779	-.1707	.0209	.7922	.0000	.0187	.8780
.050	.2782	-.1703	.0421	.7912	.0000	.0372	.8750
.075	.2789	-.1697	.0636	.7894	.0000	.0552	.8697
.100	.2798	-.1690	.0855	.7869	.0000	.0728	.8630
.125	.2808	-.1681	.1080	.7833	-.0001	.0899	.8545
.150	.2821	-.1670	.1308	.7789	-.0002	.1066	.8445
.175	.2834	-.1659	.1538	.7739	-.0004	.1232	.8336
.200	.2850	-.1646	.1770	.7675	-.0007	.1397	.8204
.225	.2867	-.1632	.2002	.7603	-.0011	.1564	.8061
.250	.2886	-.1617	.2234	.7525	-.0017	.1732	.7904
.275	.2908	-.1601	.2464	.7436	-.0026	.1905	.7724
.300	.2933	-.1584	.2692	.7339	-.0037	.2082	.7527
.325	.2960	-.1565	.2919	.7236	-.0052	.2263	.7314
.350	.2991	-.1544	.3141	.7125	-.0071	.2450	.7077
.375	.3027	-.1522	.3361	.7010	-.0095	.2641	.6825
.400	.3068	-.1497	.3575	.6888	-.0127	.2838	.6548
.425	.3116	-.1470	.3785	.6763	-.0166	.3041	.6252
.450	.3169	-.1440	.3990	.6635	-.0211	.3248	.5942
.475	.3232	-.1406	.4187	.6505	-.0269	.3460	.5611
.500	.3308	-.1367	.4375	.6375	-.0344	.3677	.5262
.525	.3394	-.1322	.4555	.6247	-.0431	.3896	.4902
.550	.3492	-.1273	.4726	.6122	-.0535	.4116	.4535
.575	.3606	-.1217	.4887	.6002	-.0659	.4335	.4164
.600	.3733	-.1152	.5032	.5891	-.0803	.4546	.3799
.625	.3885	-.1082	.5173	.5782	-.0975	.4753	.3435
.650	.4058	-.1007	.5304	.5678	-.1172	.4949	.3084
.675	.4259	-.0924	.5424	.5580	-.1402	.5125	.2753
.700	.4485	-.0835	.5538	.5487	-.1660	.5279	.2444
.725	.4741	-.0743	.5647	.5396	-.1951	.5405	.2162
.750	.5034	-.0647	.5751	.5304	-.2276	.5490	.1913
.775	.5362	-.0549	.5856	.5211	-.2631	.5531	.1696
.800	.5726	-.0451	.5961	.5113	-.3010	.5525	.1508
.825	.6136	-.0353	.6070	.5007	-.3411	.5456	.1355
.850	.6592	-.0258	.6184	.4892	-.3827	.5326	.1231
.875	.7215	-.0132	.6284	.4681	-.4342	.5000	.1096

D.13 Corps en loi de puissance $2/3 M_\infty = 3$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.00	.0590	-.2079	.0000	.5272	.0000	.0000	.6154
.05	.0667	-.2127	.0775	.5206	-.0239	.0866	.5994
.10	.0785	-.2192	.1310	.5086	-.0537	.1529	.5607
.15	.0913	-.2262	.1799	.4931	-.0755	.1969	.5249
.20	.1039	-.2321	.2228	.4760	-.0896	.2277	.4958
.25	.1162	-.2355	.2604	.4593	-.0984	.2527	.4711
.30	.1279	-.2364	.2939	.4434	-.1032	.2741	.4497
.35	.1391	-.2341	.3235	.4288	-.1041	.2927	.4314
.40	.1499	-.2298	.3509	.4151	-.1027	.3099	.4149
.45	.1602	-.2218	.3750	.4030	-.0976	.3250	.4011
.50	.1702	-.2124	.3979	.3915	-.0911	.3392	.3882
.55	.1801	-.2010	.4190	.3809	-.0828	.3524	.3764
.60	.1899	-.1879	.4388	.3710	-.0731	.3647	.3655
.65	.1997	-.1732	.4572	.3617	-.0619	.3761	.3553
.70	.2096	-.1565	.4736	.3532	-.0490	.3864	.3460
.75	.2196	-.1388	.4891	.3451	-.0353	.3962	.3368
.80	.2300	-.1200	.5034	.3373	-.0206	.4063	.3266
.85	.2405	-.1002	.5166	.3297	-.0049	.4127	.3201
.90	.2517	-.0790	.5279	.3229	.0117	.4190	.3129
.95	.2635	-.0569	.5379	.3165	.0289	.4250	.3053
1.00	.2761	-.0340	.5466	.3104	.0469	.4301	.2980
1.05	.2895	-.0104	.5541	.3044	.0654	.4343	.2907
1.10	.3041	.0139	.5601	.2987	.0846	.4375	.2836
1.15	.3198	.0387	.5648	.2932	.1042	.4398	.2766
1.20	.3370	.0639	.5681	.2879	.1242	.4412	.2696
1.25	.3558	.0896	.5702	.2827	.1446	.4417	.2626
1.30	.3765	.1155	.5708	.2776	.1654	.4412	.2556
1.35	.3994	.1416	.5702	.2727	.1864	.4399	.2485
1.40	.4249	.1679	.5682	.2679	.2077	.4377	.2413
1.45	.4538	.1942	.5648	.2631	.2293	.4345	.2340
1.50	.4861	.2205	.5601	.2585	.2511	.4305	.2266
1.55	.5230	.2468	.5540	.2539	.2730	.4256	.2190

D.14 Corps en loi de puissance $2/3 M_\infty = 4$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.00	.0418	-.1909	.0000	.6293	.0000	.0000	.7166
.05	.0493	-.1979	.0950	.6193	-.0292	.1050	.6875
.10	.0599	-.2099	.1663	.5992	-.0604	.1721	.6366
.15	.0707	-.2227	.2267	.5744	-.0824	.2144	.5930
.20	.0812	-.2328	.2765	.5493	-.0972	.2458	.5564
.25	.0911	-.2388	.3179	.5259	-.1062	.2711	.5258
.30	.1003	-.2407	.3538	.5044	-.1106	.2928	.4997
.35	.1088	-.2382	.3849	.4854	-.1106	.3116	.4778
.40	.1170	-.2335	.4140	.4675	-.1085	.3293	.4578
.45	.1247	-.2260	.4405	.4512	-.1039	.3455	.4399
.50	.1321	-.2156	.4647	.4364	-.0969	.3604	.4240
.55	.1393	-.2029	.4871	.4228	-.0880	.3742	.4095
.60	.1462	-.1882	.5077	.4102	-.0775	.3871	.3960
.65	.1531	-.1716	.5268	.3984	-.0655	.3997	.3828
.70	.1599	-.1534	.5444	.3874	-.0525	.4137	.3672
.75	.1667	-.1339	.5608	.3767	-.0375	.4203	.3608
.80	.1737	-.1126	.5752	.3673	-.0218	.4297	.3501
.85	.1809	-.0900	.5881	.3585	-.0052	.4381	.3398
.90	.1883	-.0662	.5995	.3501	.0124	.4457	.3299
.95	.1962	-.0415	.6094	.3422	.0308	.4524	.3202
1.00	.2045	-.0158	.6178	.3347	.0499	.4581	.3108
1.05	.2134	.0106	.6246	.3276	.0698	.4630	.3014
1.10	.2229	.0377	.6300	.3208	.0902	.4669	.2922
1.15	.2332	.0654	.6339	.3142	.1112	.4698	.2830
1.20	.2444	.0935	.6361	.3080	.1328	.4718	.2739
1.25	.2566	.1221	.6368	.3020	.1548	.4729	.2648
1.30	.2700	.1509	.6359	.2963	.1773	.4730	.2556
1.35	.2849	.1800	.6335	.2908	.2001	.4722	.2463
1.40	.3013	.2091	.6296	.2855	.2233	.4704	.2369
1.45	.3196	.2383	.6240	.2804	.2468	.4677	.2274
1.50	.3407	.2674	.6167	.2755	.2706	.4640	.2177
1.55	.3644	.2963	.6079	.2708	.2947	.4594	.2078

D.15 Corps en loi de puissance $2/3 M_\infty = 6$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.00	.0319	-.1779	.0000	.7288	.0000	.0000	.8156
.05	.0390	-.1876	.1144	.7146	-.0334	.1196	.7725
.10	.0485	-.2057	.2018	.6849	-.0650	.1852	.7109
.15	.0578	-.2234	.2703	.6510	-.0875	.2275	.6585
.20	.0666	-.2366	.3245	.6183	-.1026	.2594	.6145
.25	.0746	-.2440	.3687	.5888	-.1113	.2851	.5782
.30	.0820	-.2469	.4071	.5619	-.1157	.3075	.5469
.35	.0888	-.2460	.4414	.5374	-.1166	.3276	.5196
.40	.0951	-.2410	.4722	.5154	-.1141	.3457	.4960
.45	.1008	-.2324	.4999	.4956	-.1087	.3622	.4752
.50	.1063	-.2214	.5257	.4773	-.1015	.3778	.4561
.55	.1115	-.2079	.5496	.4603	-.0922	.3924	.4384
.60	.1164	-.1924	.5719	.4441	-.0813	.4065	.4216
.65	.1212	-.1754	.5932	.4282	-.0689	.4201	.4050
.70	.1260	-.1575	.6137	.4121	-.0551	.4340	.3878
.75	.1302	-.1351	.6299	.4005	-.0393	.4406	.3806
.80	.1346	-.1111	.6444	.3898	-.0229	.4505	.3679
.85	.1392	-.0858	.6572	.3797	-.0054	.4595	.3555
.90	.1439	-.0593	.6686	.3702	.0130	.4677	.3435
.95	.1488	-.0317	.6781	.3613	.0323	.4750	.3318
1.00	.1541	-.0032	.6861	.3529	.0525	.4813	.3202
1.05	.1596	.0261	.6924	.3449	.0733	.4868	.3088
1.10	.1656	.0562	.6970	.3373	.0949	.4913	.2975
1.15	.1721	.0869	.6998	.3302	.1172	.4948	.2863
1.20	.1792	.1180	.7009	.3234	.1400	.4974	.2751
1.25	.1869	.1496	.7003	.3170	.1633	.4990	.2639
1.30	.1955	.1814	.6978	.3109	.1872	.4996	.2526
1.35	.2049	.2134	.6937	.3052	.2115	.4993	.2413
1.40	.2155	.2455	.6875	.2997	.2363	.4978	.2298
1.45	.2275	.2775	.6796	.2946	.2615	.4954	.2183
1.50	.2408	.3094	.6700	.2897	.2870	.4920	.2067
1.55	.2562	.3411	.6580	.2857	.3132	.4882	.1941

D.16 Corps en loi de puissance $2/3 M_\infty = 10$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_0	v_0	p_0
.00	.0274	-.1708	.0000	.7925	.0000	.0000	.8790
.05	.0344	-.1826	.1276	.7750	-.0354	.1270	.8268
.10	.0432	-.2046	.2239	.7387	-.0674	.1919	.7583
.15	.0517	-.2247	.2959	.6993	-.0898	.2342	.7003
.20	.0595	-.2395	.3527	.6620	-.1051	.2666	.6514
.25	.0665	-.2481	.3992	.6282	-.1141	.2931	.6105
.30	.0730	-.2518	.4393	.5978	-.1186	.3160	.5756
.35	.0789	-.2513	.4753	.5700	-.1197	.3367	.5450
.40	.0841	-.2463	.5071	.5452	-.1171	.3552	.5188
.45	.0889	-.2376	.5361	.5228	-.1117	.3722	.4956
.50	.0934	-.2261	.5628	.5022	-.1043	.3882	.4744
.55	.0975	-.2119	.5875	.4832	-.0948	.4034	.4545
.60	.1014	-.1951	.6102	.4658	-.0833	.4165	.4381
.65	.1050	-.1759	.6308	.4499	-.0704	.4294	.4217
.70	.1086	-.1547	.6497	.4352	-.0560	.4413	.4063
.75	.1121	-.1319	.6670	.4215	-.0405	.4525	.3916
.80	.1156	-.1069	.6821	.4089	-.0235	.4625	.3776
.85	.1191	-.0810	.6961	.3969	-.0058	.4720	.3640
.90	.1227	-.0533	.7077	.3860	.0132	.4803	.3509
.95	.1264	-.0245	.7178	.3757	.0331	.4878	.3381
1.00	.1303	.0055	.7257	.3661	.0539	.4942	.3255
1.05	.1344	.0363	.7321	.3571	.0753	.4999	.3130
1.10	.1389	.0679	.7366	.3487	.0975	.5045	.3006
1.15	.1436	.1002	.7391	.3408	.1204	.5083	.2883
1.20	.1488	.1330	.7398	.3334	.1438	.5111	.2759
1.25	.1545	.1663	.7385	.3265	.1679	.5128	.2636
1.35	.1608	.1999	.7353	.3200	.1925	.5137	.2512
1.35	.1678	.2337	.7301	.3140	.2176	.5134	.2387
1.40	.1757	.2675	.7229	.3084	.2432	.5122	.2262
1.45	.1845	.3013	.7138	.3031	.2692	.5100	.2136
1.50	.1956	.3452	.6700	.3309	.3122	.5354	.1610
1.55	.2140	.3851	.6065	.3752	.3657	.5701	.1024

Annexe E

Emoussement : M.I.R. à deux bandes

E.1 Cylindre $M_\infty = 3$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_2	v_2	p_2	u_0	v_0	p_0
.00	.7103	-.2079	.0000	.5272	-.1227	.0000	.5835	.0000	.0000	.6154
.05	.7094	-.2074	.0234	.5270	-.1229	.0240	.5825	.0000	.0214	.6145
.10	.7132	-.2055	.0475	.5261	-.1222	.0474	.5795	.0000	.0439	.6112
.15	.7190	-.2026	.0723	.5246	-.1211	.0702	.5751	.0000	.0675	.6057
.20	.7269	-.1985	.0981	.5223	-.1193	.0922	.5693	.0000	.0921	.5973
.25	.7369	-.1933	.1245	.5190	-.1168	.1136	.5625	.0000	.1177	.5861
.30	.7488	-.1871	.1510	.5149	-.1136	.1345	.5548	.0000	.1437	.5722
.35	.7629	-.1797	.1772	.5098	-.1096	.1549	.5462	.0000	.1697	.5555
.40	.7790	-.1713	.2028	.5041	-.1049	.1750	.5368	.0000	.1956	.5369
.45	.7973	-.1618	.2275	.4978	-.0995	.1949	.5265	.0000	.2210	.5165
.50	.8179	-.1513	.2512	.4909	-.0932	.2145	.5156	.0000	.2459	.4947
.55	.8411	-.1397	.2741	.4836	-.0863	.2337	.5041	.0000	.2704	.4718
.60	.8671	-.1270	.2960	.4758	-.0785	.2524	.4920	.0000	.2945	.4480
.65	.8960	-.1134	.3170	.4677	-.0699	.2707	.4796	.0000	.3181	.4236
.70	.9279	-.0988	.3371	.4592	-.0605	.2883	.4668	.0000	.3414	.3988
.75	.9633	-.0833	.3562	.4504	-.0503	.3053	.4538	.0000	.3642	.3739
.80	1.0023	-.0669	.3743	.4412	-.0392	.3216	.4407	.0000	.3867	.3491
.85	1.0453	-.0496	.3915	.4318	-.0273	.3372	.4275	.0000	.4087	.3246
.90	1.0924	-.0316	.4076	.4222	-.0146	.3521	.4143	.0000	.4302	.3006
.95	1.1442	-.0127	.4226	.4124	-.0011	.3661	.4011	.0000	.4512	.2774
1.00	1.2011	.0068	.4364	.4024	.0132	.3794	.3880	.0000	.4717	.2550
1.05	1.2635	.0271	.4491	.3924	.0284	.3918	.3750	.0000	.4917	.2336
1.10	1.3322	.0479	.4605	.3823	.0443	.4033	.3621	.0000	.5111	.2133
1.15	1.4078	.0694	.4706	.3722	.0611	.4140	.3494	.0000	.5298	.1943
1.20	1.4910	.0914	.4794	.3622	.0786	.4237	.3369	.0000	.5478	.1765

E.2 Cylindre $M_\infty = 4$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_2	v_2	p_2	u_0	v_0	p_0
.00	.5481	-.1909	.0000	.6293	-.1071	.0000	.6882	.0000	.0000	.7166
.05	.5475	-.1904	.0268	.6289	-.1072	.0258	.6870	.0000	.0228	.7155
.10	.5503	-.1885	.0546	.6276	-.1064	.0510	.6832	.0000	.0470	.7113
.15	.5549	-.1853	.0835	.6251	-.1051	.0753	.6772	.0000	.0724	.7036
.20	.5610	-.1811	.1131	.6216	-.1032	.0990	.6697	.0000	.0988	.6926
.25	.5687	-.1756	.1431	.6167	-.1006	.1221	.6607	.0000	.1258	.6780
.30	.5782	-.1689	.1727	.6106	-.0973	.1449	.6500	.0000	.1527	.6598
.35	.5891	-.1611	.2016	.6035	-.0934	.1674	.6380	.0000	.1793	.6392
.40	.6018	-.1521	.2296	.5956	-.0888	.1896	.6248	.0000	.2054	.6163
.45	.6163	-.1420	.2566	.5870	-.0835	.2116	.6104	.0000	.2311	.5914
.50	.6327	-.1306	.2825	.5776	-.0774	.2331	.5949	.0000	.2563	.5649
.55	.6513	-.1182	.3076	.5676	-.0706	.2542	.5786	.0000	.2812	.5371
.60	.6720	-.1047	.3316	.5571	-.0630	.2747	.5617	.0000	.3057	.5083
.65	.6951	-.0901	.3547	.5460	-.0546	.2946	.5443	.0000	.3299	.4788
.70	.7207	-.0744	.3767	.5344	-.0453	.3137	.5265	.0000	.3537	.4489
.75	.7489	-.0577	.3977	.5224	-.0353	.3322	.5085	.0000	.3771	.4189
.80	.7802	-.0401	.4176	.5100	-.0243	.3498	.4905	.0000	.4001	.3891
.85	.8144	-.0215	.4364	.4973	-.0125	.3667	.4724	.0000	.4227	.3598
.90	.8520	-.0021	.4540	.4843	.0002	.3827	.4544	.0000	.4448	.3312
.95	.8932	.0181	.4704	.4712	.0137	.3979	.4366	.0000	.4665	.3036
1.00	.9384	.0392	.4855	.4578	.0282	.4121	.4190	.0000	.4875	.2772
1.05	.9879	.0610	.4992	.4444	.0435	.4255	.4017	.0000	.5080	.2521
1.10	1.0421	.0835	.5116	.4310	.0597	.4379	.3847	.0000	.5279	.2284
1.15	1.1015	.1066	.5225	.4177	.0767	.4493	.3680	.0000	.5471	.2064
1.20	1.1667	.1303	.5318	.4045	.0946	.4597	.3517	.0000	.5656	.1859

E.3 Cylindre $M_\infty = 5$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_2	v_2	p_2	u_0	v_0	p_0
.00	.4830	-.1826	.0000	.6905	-.0998	.0000	.7507	.0000	.0000	.7775
.05	.4824	-.1820	.0287	.6900	-.0999	.0269	.7492	.0000	.0234	.7762
.10	.4849	-.1800	.0586	.6884	-.0991	.0530	.7448	.0000	.0484	.7713
.15	.4890	-.1767	.0898	.6854	-.0977	.0782	.7380	.0000	.0747	.7624
.20	.4945	-.1723	.1217	.6809	-.0957	.1028	.7292	.0000	.1019	.7496
.25	.5014	-.1667	.1536	.6750	-.0931	.1269	.7186	.0000	.1294	.7329
.30	.5096	-.1599	.1850	.6679	-.0899	.1507	.7062	.0000	.1567	.7127
.35	.5194	-.1518	.2155	.6596	-.0860	.1743	.6921	.0000	.1835	.6896
.40	.5307	-.1425	.2449	.6503	-.0815	.1976	.6764	.0000	.2098	.6641
.45	.5435	-.1320	.2734	.6402	-.0763	.2206	.6594	.0000	.2358	.6366
.50	.5584	-.1202	.3008	.6292	-.0702	.2431	.6412	.0000	.2613	.6070
.55	.5750	-.1073	.3272	.6175	-.0635	.2651	.6220	.0000	.2864	.5762
.60	.5936	-.0933	.3526	.6052	-.0560	.2864	.6021	.0000	.3113	.5442
.65	.6144	-.0781	.3769	.5922	-.0477	.3071	.5817	.0000	.3358	.5115
.70	.6374	-.0618	.4001	.5787	-.0385	.3270	.5609	.0000	.3600	.4784
.75	.6628	-.0445	.4223	.5647	-.0285	.3461	.5399	.0000	.3837	.4452
.80	.6908	-.0261	.4432	.5503	-.0176	.3644	.5189	.0000	.4071	.4123
.85	.7215	-.0068	.4630	.5355	-.0059	.3819	.4980	.0000	.4301	.3800
.90	.7553	.0134	.4815	.5204	.0067	.3984	.4772	.0000	.4526	.3486
.95	.7922	.0345	.4987	.5051	.0203	.4140	.4567	.0000	.4746	.3183
1.00	.8327	.0564	.5146	.4897	.0347	.4287	.4366	.0000	.4960	.2894
1.05	.8769	.0791	.5290	.4742	.0501	.4424	.4169	.0000	.5168	.2620
1.10	.9253	.1025	.5420	.4587	.0663	.4550	.3976	.0000	.5371	.2363
1.15	.9783	.1266	.5535	.4432	.0834	.4667	.3788	.0000	.5566	.2123

E.4 Sphère $M_\infty = 3$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_2	v_2	p_2	u_0	v_0	p_0
.00	.2146	-.2079	.0000	.5272	-.1076	.0000	.5908	.0000	.0000	.6154
.05	.2150	-.2074	.0330	.5264	-.1073	.0299	.5895	.0000	.0273	.6138
.10	.2161	-.2062	.0660	.5241	-.1068	.0597	.5858	.0000	.0547	.6090
.15	.2179	-.2041	.0990	.5202	-.1059	.0892	.5796	.0000	.0821	.6009
.20	.2204	-.2012	.1317	.5148	-.1047	.1184	.5711	.0000	.1096	.5899
.25	.2236	-.1975	.1639	.5080	-.1032	.1474	.5604	.0000	.1370	.5759
.30	.2277	-.1928	.1956	.4999	-.1012	.1760	.5478	.0000	.1642	.5592
.35	.2325	-.1873	.2265	.4906	-.0988	.2042	.5333	.0000	.1913	.5401
.40	.2385	-.1808	.2567	.4802	-.0959	.2319	.5172	.0000	.2181	.5188
.45	.2451	-.1734	.2860	.4690	-.0925	.2590	.4998	.0000	.2448	.4957
.50	.2528	-.1650	.3143	.4569	-.0886	.2855	.4812	.0000	.2712	.4711
.55	.2615	-.1557	.3417	.4443	-.0841	.3113	.4618	.0000	.2973	.4451
.60	.2713	-.1453	.3680	.4311	-.0789	.3363	.4417	.0000	.3232	.4183
.65	.2824	-.1340	.3932	.4176	-.0731	.3606	.4212	.0000	.3488	.3908
.70	.2947	-.1216	.4172	.4038	-.0665	.3840	.4006	.0000	.3741	.3630
.75	.3085	-.1083	.4400	.3899	-.0591	.4066	.3799	.0000	.3992	.3351
.80	.3239	-.0939	.4615	.3760	-.0509	.4282	.3597	.0000	.4230	.3087
.85	.3409	-.0786	.4819	.3620	-.0416	.4486	.3401	.0000	.4466	.2825
.90	.3598	-.0622	.5008	.3483	-.0313	.4682	.3210	.0000	.4701	.2568
.95	.3806	-.0449	.5183	.3349	-.0202	.4867	.3024	.0000	.4930	.2322
1.00	.4037	-.0267	.5344	.3218	-.0080	.5042	.2846	.0000	.5153	.2090
1.05	.4292	-.0075	.5492	.3090	.0053	.5206	.2675	.0000	.5369	.1871
1.10	.4572	.0125	.5625	.2965	.0195	.5359	.2513	.0000	.5580	.1668
1.15	.4881	.0333	.5744	.2844	.0348	.5500	.2360	.0000	.5783	.1480
1.20	.5222	.0549	.5848	.2728	.0511	.5630	.2214	.0000	.5978	.1309
1.25	.5599	.0772	.5937	.2617	.0685	.5748	.2078	.0000	.6166	.1153
1.30	.6013	.1001	.6012	.2509	.0868	.5854	.1949	.0000	.6346	.1013
1.35	.6471	.1237	.6071	.2407	.1060	.5947	.1828	.0000	.6518	.0888
1.40	.6978	.1478	.6115	.2309	.1262	.6029	.1715	.0000	.6681	.0777
1.45	.7543	.1725	.6142	.2217	.1472	.6097	.1610	.0000	.6834	.0680
1.50	.8166	.1975	.6155	.2129	.1690	.6152	.1511	.0000	.6979	.0594
1.55	.8864	.2229	.6152	.2045	.1916	.6194	.1419	.0000	.7115	.0521
1.60	.9633	.2485	.6134	.1965	.2149	.6224	.1333	.0000	.7242	.0456

E.5 Sphère $M_\infty = 4$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_2	v_2	p_2	u_0	v_0	p_0
.00	.1750	-.1909	.0000	.6293	-.0955	.0000	.6940	.0000	.0000	.7166
.05	.1752	-.1905	.0371	.6282	-.0950	.0324	.6925	.0000	.0283	.7146
.10	.1761	-.1892	.0742	.6251	-.0945	.0647	.6877	.0000	.0565	.7086
.15	.1775	-.1871	.1112	.6199	-.0936	.0968	.6798	.0000	.0848	.6987
.20	.1794	-.1841	.1478	.6128	-.0924	.1286	.6690	.0000	.1131	.6851
.25	.1820	-.1803	.1838	.6038	-.0908	.1601	.6554	.0000	.1412	.6678
.30	.1853	-.1755	.2191	.5931	-.0888	.1911	.6391	.0000	.1692	.6473
.35	.1892	-.1698	.2536	.5808	-.0864	.2216	.6206	.0000	.1971	.6239
.40	.1937	-.1631	.2873	.5672	-.0836	.2516	.6000	.0000	.2247	.5977
.45	.1990	-.1554	.3200	.5523	-.0802	.2809	.5775	.0000	.2523	.5693
.50	.2051	-.1467	.3516	.5364	-.0763	.3095	.5537	.0000	.2796	.5390
.55	.2120	-.1370	.3821	.5197	-.0718	.3373	.5286	.0000	.3067	.5071
.60	.2199	-.1262	.4113	.5023	-.0667	.3643	.5027	.0000	.3337	.4741
.65	.2288	-.1143	.4392	.4845	-.0610	.3905	.4763	.0000	.3605	.4403
.70	.2387	-.1013	.4657	.4664	-.0545	.4157	.4496	.0000	.3871	.4060
.75	.2497	-.0872	.4908	.4482	-.0473	.4401	.4229	.0000	.4163	.3681
.80	.2621	-.0722	.5150	.4296	-.0387	.4623	.3984	.0000	.4356	.3431
.85	.2760	-.0559	.5371	.4115	-.0291	.4839	.3737	.0000	.4604	.3113
.90	.2913	-.0384	.5574	.3940	-.0186	.5046	.3495	.0000	.4848	.2805
.95	.3083	-.0198	.5762	.3768	-.0072	.5241	.3262	.0000	.5086	.2513
1.00	.3272	-.0002	.5934	.3600	.0052	.5424	.3038	.0000	.5318	.2239
1.05	.3481	.0204	.6091	.3436	.0187	.5595	.2826	.0000	.5542	.1984
1.10	.3712	.0418	.6232	.3277	.0333	.5753	.2626	.0000	.5759	.1748
1.15	.3967	.0642	.6357	.3123	.0490	.5899	.2437	.0000	.5969	.1533
1.20	.4247	.0874	.6466	.2975	.0658	.6032	.2260	.0000	.6172	.1338
1.25	.4556	.1114	.6558	.2833	.0838	.6152	.2095	.0000	.6366	.1162
1.30	.4898	.1361	.6633	.2698	.1029	.6258	.1940	.0000	.6552	.1006
1.35	.5272	.1614	.6692	.2569	.1230	.6352	.1795	.0000	.6730	.0867
1.40	.5688	.1874	.6732	.2447	.1443	.6430	.1661	.0000	.6900	.0746
1.45	.6147	.2140	.6755	.2331	.1664	.6496	.1538	.0000	.7060	.0640
1.50	.6658	.2410	.6759	.2223	.1896	.6546	.1423	.0000	.7211	.0549
1.55	.7224	.2684	.6746	.2120	.2138	.6582	.1316	.0000	.7352	.0471
1.60	.7845	.2960	.6718	.2024	.2389	.6603	.1217	.0000	.7486	.0403

E.6 Sphère $M_\infty = 6$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_2	v_2	p_2	u_0	v_0	p_0
.00	.1485	-.1779	.0000	.7288	-.0865	.0000	.7944	.0000	.0000	.8156
.05	.1488	-.1774	.0408	.7275	-.0859	.0347	.7926	.0000	.0290	.8132
.10	.1494	-.1761	.0817	.7236	-.0854	.0692	.7868	.0000	.0579	.8061
.15	.1506	-.1740	.1223	.7172	-.0845	.1036	.7772	.0000	.0868	.7943
.20	.1522	-.1709	.1625	.7083	-.0833	.1376	.7640	.0000	.1156	.7781
.25	.1543	-.1669	.2020	.6971	-.0817	.1712	.7474	.0000	.1444	.7576
.30	.1569	-.1620	.2408	.6838	-.0797	.2044	.7276	.0000	.1730	.7333
.35	.1600	-.1561	.2787	.6685	-.0773	.2369	.7049	.0000	.2015	.7055
.40	.1638	-.1493	.3157	.6515	-.0745	.2688	.6797	.0000	.2299	.6745
.45	.1681	-.1413	.3515	.6330	-.0711	.3000	.6523	.0000	.2581	.6408
.50	.1731	-.1323	.3862	.6132	-.0672	.3303	.6231	.0000	.2861	.6049
.55	.1788	-.1222	.4195	.5924	-.0627	.3597	.5926	.0000	.3139	.5674
.60	.1853	-.1110	.4514	.5709	-.0576	.3882	.5612	.0000	.3414	.5286
.65	.1927	-.0985	.4817	.5489	-.0517	.4156	.5294	.0000	.3686	.4893
.70	.2009	-.0848	.5105	.5266	-.0452	.4418	.4976	.0000	.3955	.4497
.75	.2102	-.0699	.5376	.5042	-.0377	.4670	.4658	.0000	.4201	.4133
.80	.2207	-.0539	.5634	.4816	-.0291	.4910	.4344	.0000	.4469	.3739
.85	.2324	-.0366	.5873	.4594	-.0197	.5138	.4038	.0000	.4728	.3365
.90	.2454	-.0182	.6095	.4375	-.0094	.5354	.3744	.0000	.4979	.3009
.95	.2599	.0014	.6299	.4161	.0020	.5555	.3462	.0000	.5223	.2674
1.00	.2760	.0221	.6487	.3952	.0144	.5744	.3195	.0000	.5462	.2360
1.05	.2937	.0438	.6657	.3748	.0280	.5918	.2944	.0000	.5693	.2070
1.10	.3133	.0665	.6810	.3550	.0428	.6078	.2707	.0000	.5919	.1803
1.15	.3350	.0902	.6945	.3360	.0587	.6224	.2487	.0000	.6137	.1560
1.20	.3588	.1148	.7062	.3176	.0758	.6355	.2282	.0000	.6348	.1341
1.25	.3850	.1401	.7162	.3000	.0941	.6472	.2092	.0000	.6552	.1145
1.30	.4138	.1662	.7244	.2831	.1136	.6575	.1916	.0000	.6750	.0970
1.35	.4456	.1931	.7307	.2670	.1342	.6662	.1754	.0000	.6939	.0818
1.40	.4805	.2205	.7352	.2517	.1560	.6735	.1605	.0000	.7122	.0685
1.45	.5189	.2485	.7379	.2372	.1789	.6791	.1467	.0000	.7298	.0569
1.50	.5616	.2770	.7386	.2235	.2030	.6831	.1341	.0000	.7466	.0470
1.55	.6086	.3059	.7374	.2106	.2283	.6854	.1225	.0000	.7627	.0386
1.60	.6605	.3352	.7342	.1986	.2548	.6859	.1119	.0000	.7782	.0314

E.7 Sphère $M_\infty = 10$

θ	ϵ	u_1	v_1	p_1	u_2	v_2	p_2	u_0	v_0	p_0
.00	.1354	-.1708	.0000	.7925	-.0818	.0000	.8586	.0000	.0000	.8790
.05	.1356	-.1703	.0431	.7911	-.0812	.0361	.8566	.0000	.0293	.8764
.10	.1362	-.1690	.0863	.7867	-.0806	.0720	.8501	.0000	.0586	.8685
.15	.1372	-.1668	.1292	.7794	-.0797	.1077	.8394	.0000	.0879	.8555
.20	.1386	-.1638	.1716	.7693	-.0785	.1431	.8246	.0000	.1171	.8376
.25	.1406	-.1598	.2134	.7566	-.0770	.1781	.8059	.0000	.1462	.8150
.30	.1429	-.1548	.2543	.7416	-.0750	.2125	.7838	.0000	.1752	.7881
.35	.1456	-.1488	.2943	.7243	-.0726	.2463	.7584	.0000	.2041	.7574
.40	.1489	-.1418	.3333	.7051	-.0697	.2794	.7301	.0000	.2329	.7231
.45	.1527	-.1337	.3712	.6841	-.0664	.3117	.6993	.0000	.2617	.6858
.50	.1572	-.1246	.4078	.6617	-.0625	.3431	.6663	.0000	.2903	.6459
.55	.1623	-.1143	.4430	.6381	-.0582	.3737	.6316	.0000	.3190	.6037
.60	.1680	-.1029	.4768	.6136	-.0533	.4034	.5955	.0000	.3480	.5595
.65	.1746	-.0902	.5089	.5886	-.0479	.4322	.5584	.0000	.3772	.5137
.70	.1819	-.0762	.5393	.5633	-.0420	.4601	.5208	.0000	.4069	.4665
.75	.1901	-.0617	.5694	.5364	-.0345	.4850	.4873	.0000	.4264	.4354
.80	.1994	-.0455	.5970	.5103	-.0250	.5087	.4545	.0000	.4524	.3944
.85	.2097	-.0276	.6217	.4856	-.0150	.5316	.4210	.0000	.4790	.3530
.90	.2213	-.0082	.6444	.4616	-.0044	.5533	.3884	.0000	.5050	.3136
.95	.2342	.0123	.6653	.4380	.0069	.5736	.3572	.0000	.5303	.2767
1.00	.2486	.0339	.6846	.4148	.0193	.5925	.3277	.0000	.5548	.2425
1.05	.2646	.0564	.7023	.3921	.0327	.6100	.3001	.0000	.5786	.2110
1.10	.2823	.0800	.7183	.3699	.0473	.6260	.2744	.0000	.6018	.1822
1.15	.3019	.1044	.7325	.3483	.0631	.6404	.2506	.0000	.6242	.1561
1.20	.3233	.1297	.7451	.3273	.0800	.6533	.2286	.0000	.6461	.1326
1.25	.3469	.1557	.7560	.3070	.0980	.6646	.2085	.0000	.6673	.1117
1.30	.3728	.1823	.7652	.2873	.1172	.6744	.1901	.0000	.6880	.0931
1.35	.4012	.2096	.7727	.2682	.1375	.6825	.1733	.0000	.7081	.0769
1.40	.4322	.2373	.7786	.2498	.1589	.6891	.1578	.0000	.7277	.0627
1.45	.4663	.2655	.7827	.2322	.1813	.6940	.1438	.0000	.7468	.0505
1.50	.5035	.2941	.7851	.2152	.2049	.6973	.1311	.0000	.7655	.0401
1.55	.5446	.3230	.7857	.1992	.2295	.6988	.1195	.0000	.7839	.0313
1.60	.5892	.3522	.7845	.1839	.2552	.6986	.1088	.0000	.8020	.0238

Bibliographie

- [1] S.K. Godounov, A.V. Zabrodin, G.P. Prokopov : *A computational schema for two-dimensional non stationary problems of gas dynamics and calculation of the flow from a shock wave approaching a stationary state.* Zh. Vych. Mat. 1 : n^o6, p1020-1050, 1961.
- [2] A.A. Dorodnitsyn : *On a method of numerical solution of some nonlinear problems of aero-hydrodynamics.* Proc. 9th Internatl. Congr. Appl. Mech., Vol.1, p.485 Univ. of Brussels, Brussels, 1957.
- [3] A.A. Dorodnitsyn : *General method of integral relations and its application to boundary layer theory.* Advances in Aeronautical Sciences, Vol.3 (Th. von Karman, chmn. ed. Comm.), p207-219. Macmillan, New York, 1962.
- [4] Y.N. Pavlovsky : Zh. Vych. Mat. Mat. Fiz. 2, p884-901, 1962.
- [5] O.M. Belotserkovsky : *Supersonic gas flow around blunt bodies : theoretical and experimental investigations.* Computer Center of the Academy of Sciences, URSS, Moscow, 1966.
- [6] O.M. Belotserkovsky and P.I. Chushkin : *A numerical methode of integral relations.* Comput. Mathem. and Mathem. Physics, URSS, 1962, p823-858.
- [7] M. Holt : *Numerical methods in fluid dynamics.* Springer Verlag Berlin Heidelberg New-York, 1977, p104-175.
- [8] C.A.J. Fletcher and M. Holt : *Supersonic flow over cones at large angles of attack.* J. Fluid Mechanics 74, p561-591, 1976.
- [9] L. Lees : *Laminar heat transfert over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds.* Jet Propulsion, Vol 26, numb4, p259-269, 1956.
- [10] W.H. Hayes and R.F. Probstein : *Hypersonic flow theory : inviscid flows.* Academic Press New-York and London, Vol.1, 1966, p391-479.
- [11] Li and Geiger : *Stagnation point of a blunt body in hypersonic flow* J.A.S. 1, 1957.
- [12] W.H. Hayes and R.F. Probstein : *Hypersonic flow theory : inviscid flows.* Academic Press New-York and London, Vol.1, 1966, p232-254.

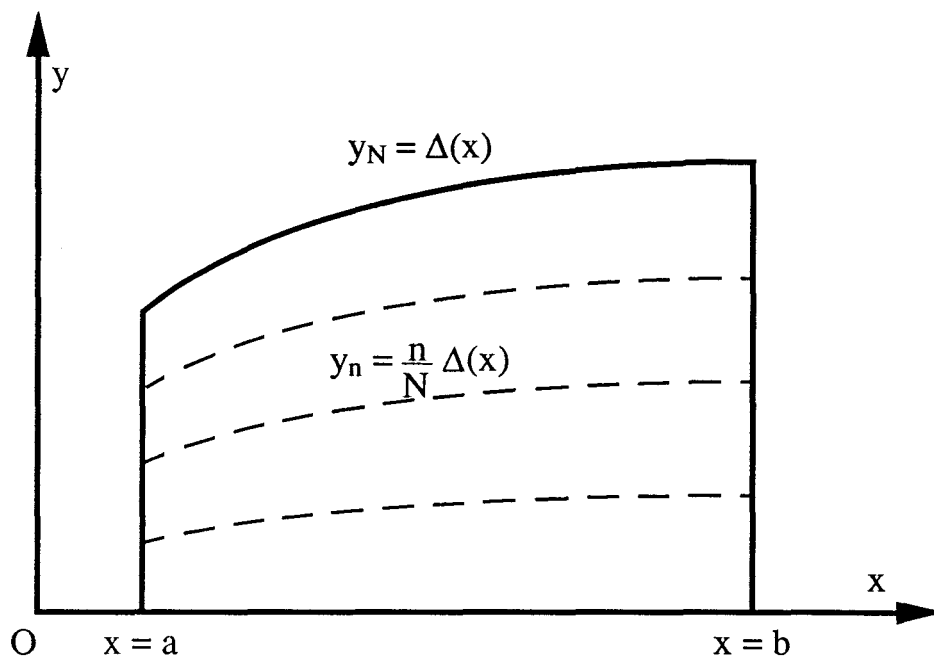
- [13] A.L. Jaumotte : *Chocs et ondes de choc*. Masson, 1971, p121-132.
- [14] O.M. Belotserkovsky : *Flow past a circular cylinder with a detached shock*, Dokladi akad. Nauk SSSR 113, p509-512, 1957. M.D. Friedman Transl. no. B-131.
- [15] O.M. Belotserkovsky : *Flow with a detached shock wave about a symmetrical profile*, J. Appl. Math. Mech. (Prikl. Mat. Mekh.) 22, p279-296, 1958.
- [16] O.M. Belotserkovsky : *The calculation of flows past axisymmetric bodies with detached shock waves (Calculations formulas and flow field tables)*. Vychislitel'nyi Tsentr Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1961. Transl. as Tech. Memo. no. RAD-TM-62-64, Research and Advanced Dev. Div., Avco Corp., Wilmington, Mass., 1962. See also J. Appl. Math. Mech. (Prikl. Math. Mekh.) 24, p744-755, 1960.
- [17] O.M. Belotserkovsky : *On the calculation of flow past axisymmetric bodies with detached shock waves using an electronic computing machine*. P.M.M. Vol.24, n°3, 1960, p511-517.
- [18] P. Diringer : *Calcul d'ondes de choc détachées*. La Recherche Aéronautique n° 88, Mai-Juin 1962.
- [19] O.M. Belotserkovsky : *Calcul de l'écoulement autour d'un cylindre avec une onde de choc détachée* Comput. Mathem., Vol.3, 1958, p149-185 (publication en russe).
- [20] K. Hida : *An approximate study on the detached shock wave in front of a circular cylinder and a sphere*. J. Phys. Soc. Japan 8, p740-745, 1953.
- [21] M.J. Lighthill : *Dynamics of a dissociating gas. Part 1. Equilibrium flow*. J. Fluid Mech. 2, p1-32, 1957.
- [22] R.K. Lobb : *Experimental measurement of shock detachment distance on spheres fired in air at hypervelocities*. Proc. of the high temperature aspects of hypersonic flows, Rhode-Saint Genèse, Belgique, ed. par C.W. Nelson, Pergamon Press, 68, p519-527, 1964.
- [23] J.P. Gilly, L. Rosenthal, Y. Sémézis : *Aérodynamique hypersonique*. Gauthier Villars, 1970, p74-89.
- [24] M. Holt : *Basic developments in fluid dynamics*. Academic Press New-York and London, Vol.1, p34-73.
- [25] C. Tannehill, P.H. Mugge : *Improved curve fits for the thermodynamic properties of equilibrium air suitable for numerical computation using time dependent or shock capturing methods*. Nasa contractor report C.R.2470, octobre 1974.
- [26] B. Démidovitch, I. Maron : *Eléments de calcul numérique*. Editions M.I.R. Moscou, 1973, p455-501.

[27] W. Press, S. Teukolsky : *Numerical recipes. The art of scientific computing.*
Cambridge University Press, 1985, p547-613.

Figures

Figure 1 : Domaine d'intégration.

a) Division en bandes :



b) Division en sous-régions :

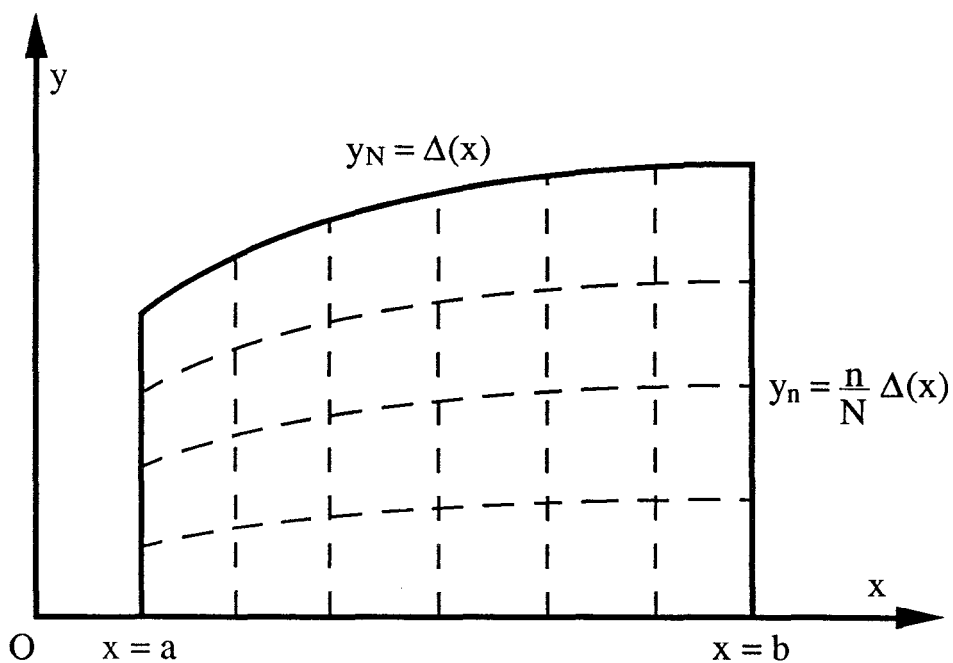
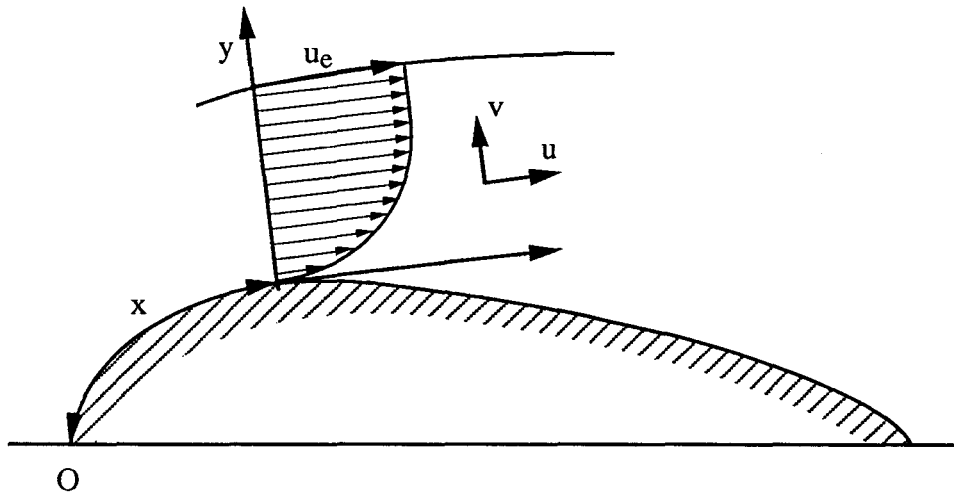


Figure 2 : Couche limite.

a) Notations principales :



b) Solution de Falkner et Skan :

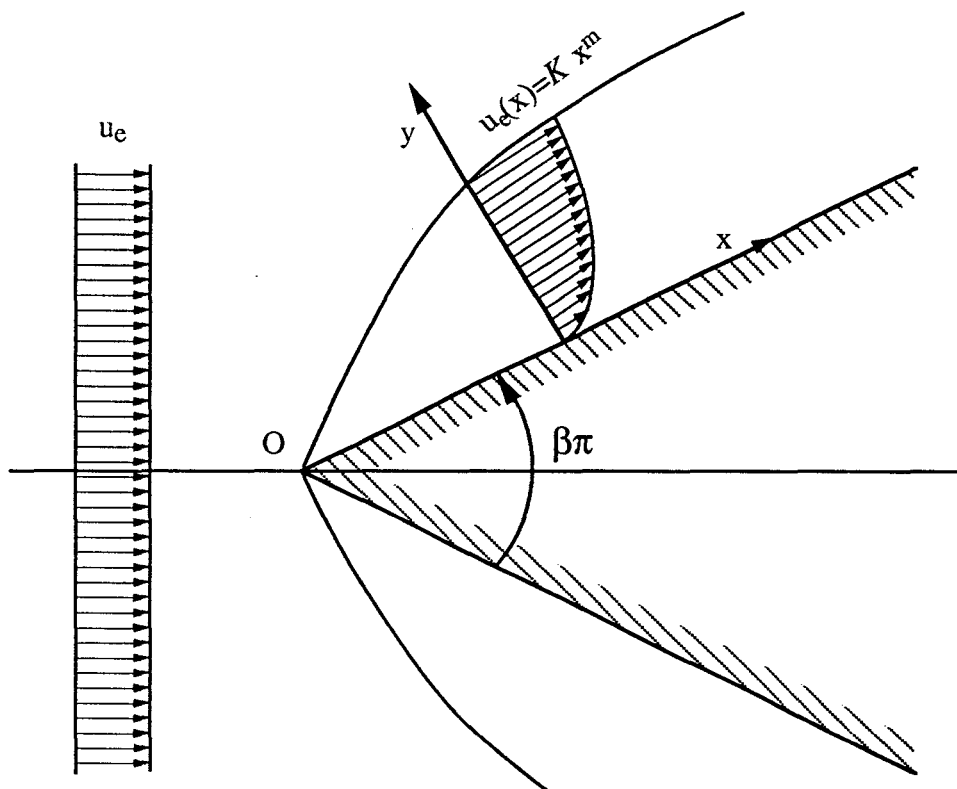


Figure 3 : Comparaison de $1/\Theta$ avec son approximation. $N=3$.

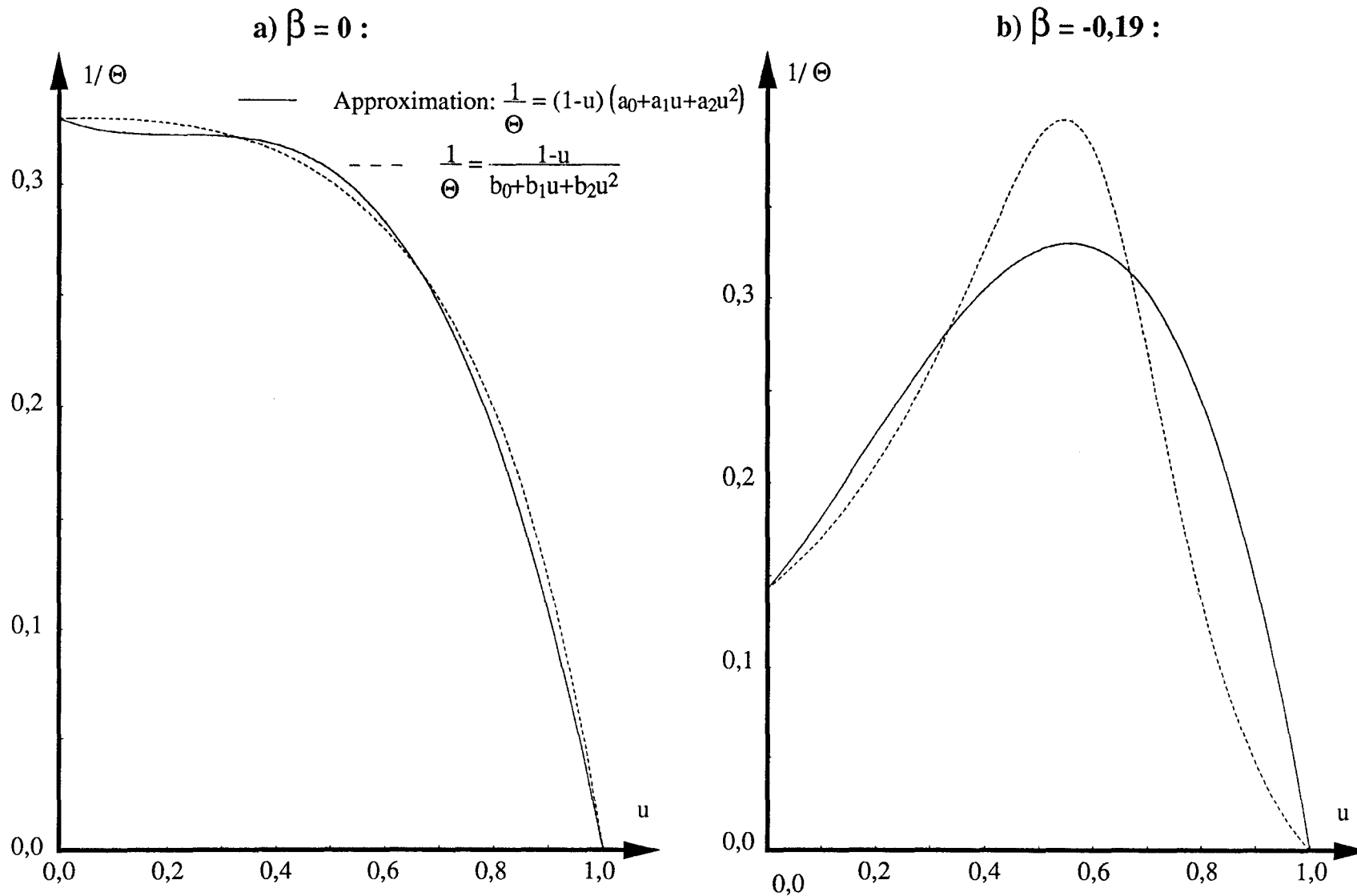
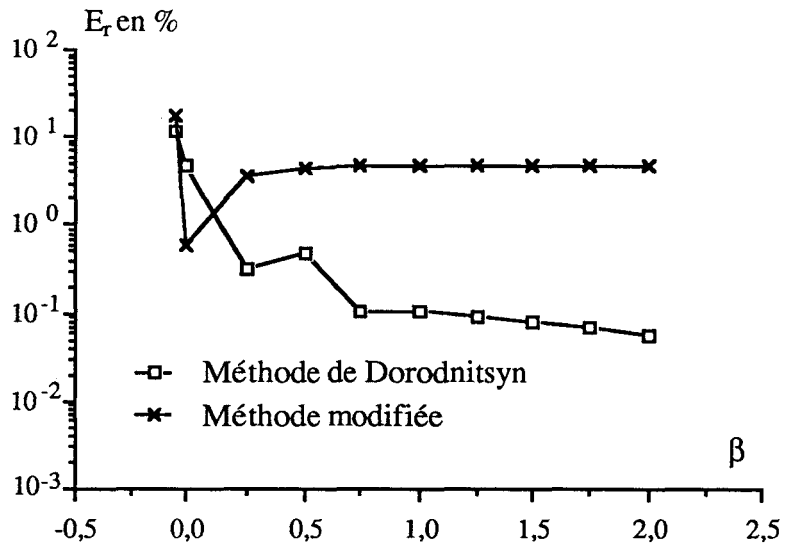
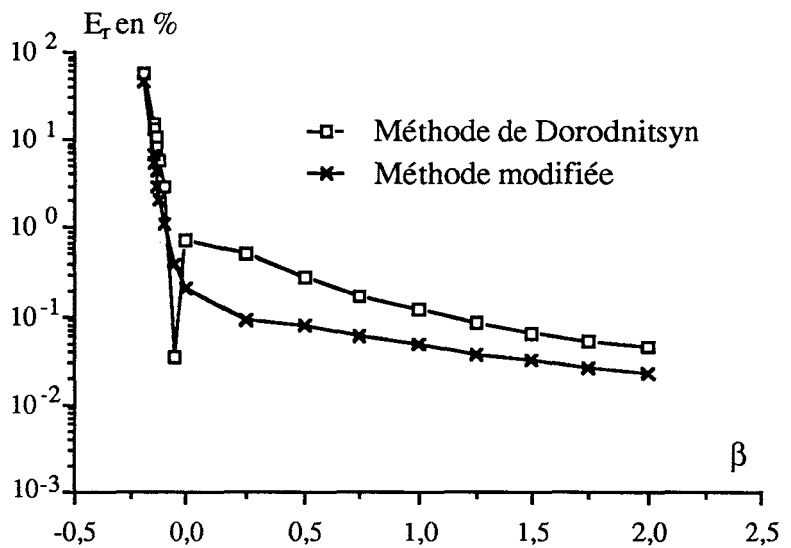


Figure 4 : Comparaison des deux méthodes.

a) Approximation à deux bandes :



b) Approximation à trois bandes :



c) Approximation à quatre bandes :

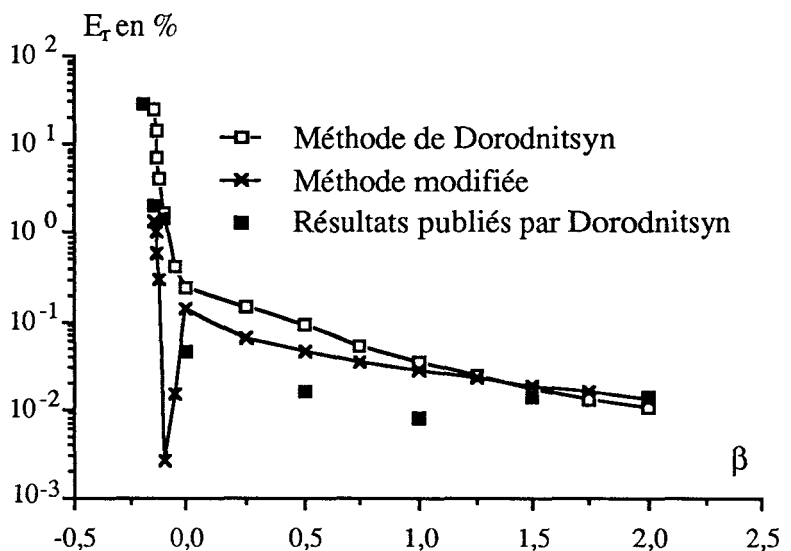
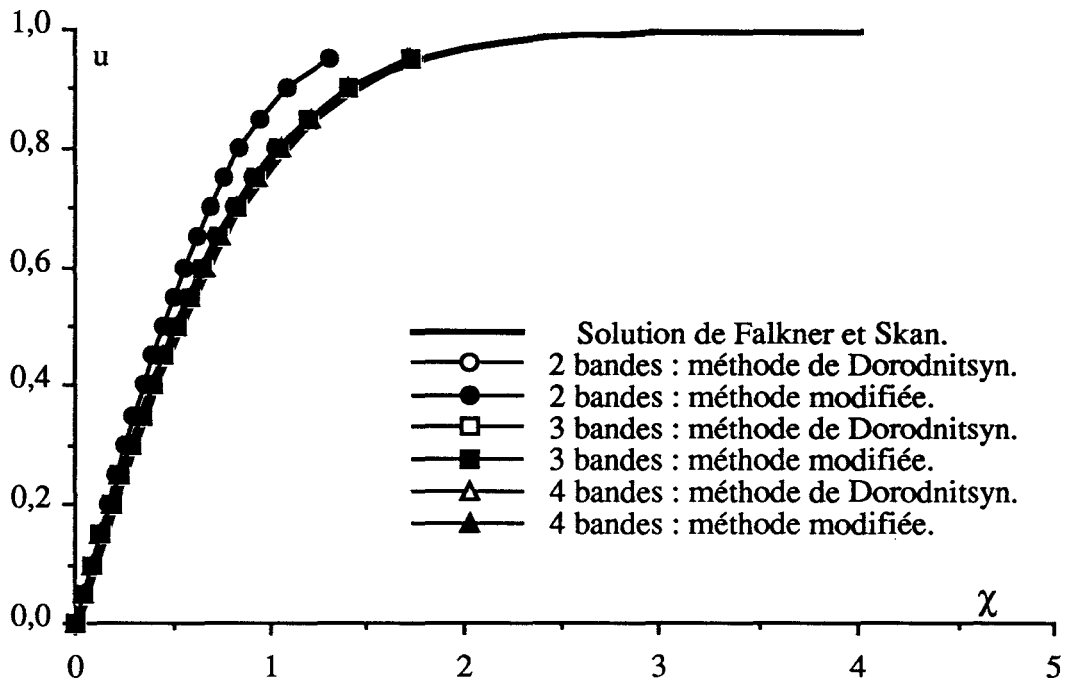


Figure 5 : Profils de vitesse. Gradient de pression négatif et nul.

a) $\beta = 1,00$



b) $\beta = 0,00$

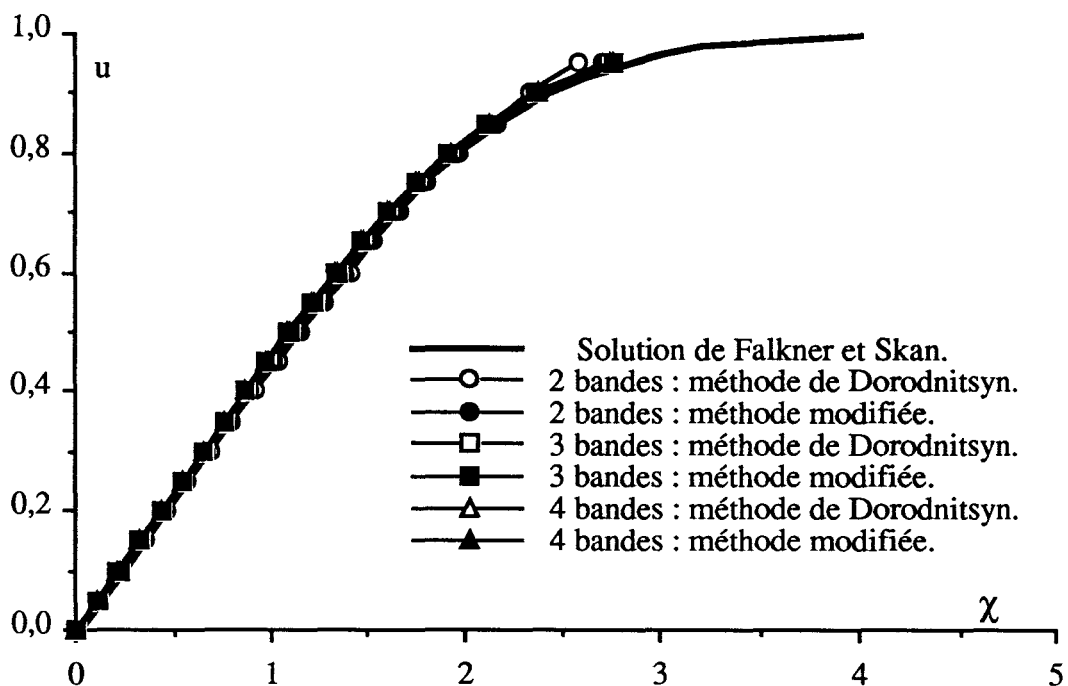
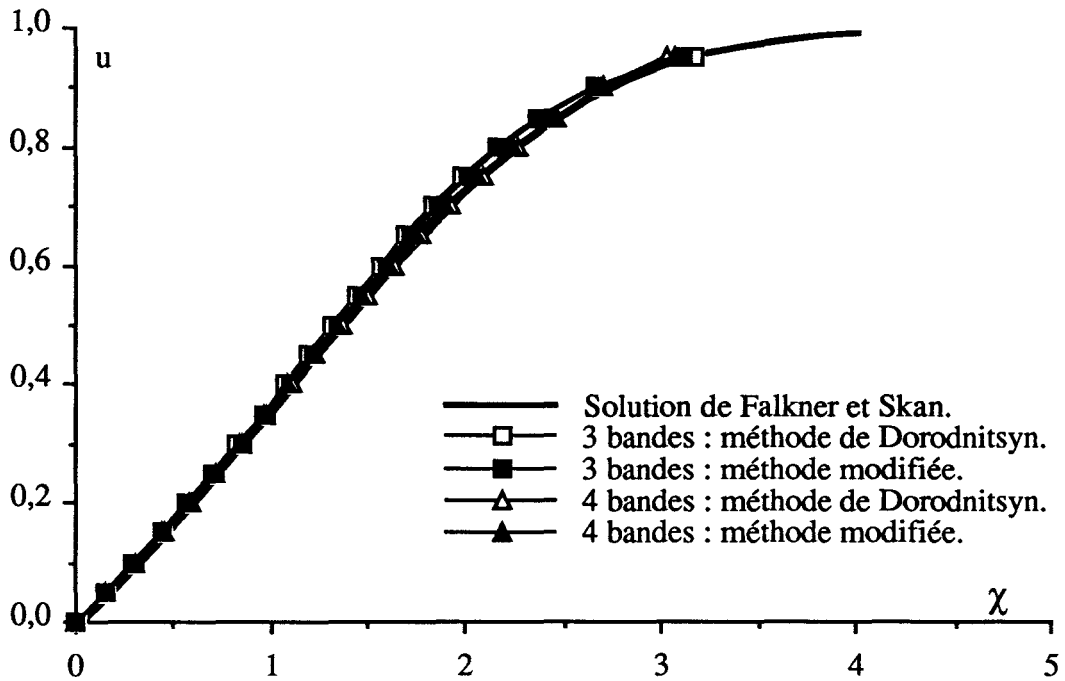


Figure 6 : Profils de vitesse. Gradient de pression positif.

a) $\beta = -0,10$



b) $\beta = -0,15$

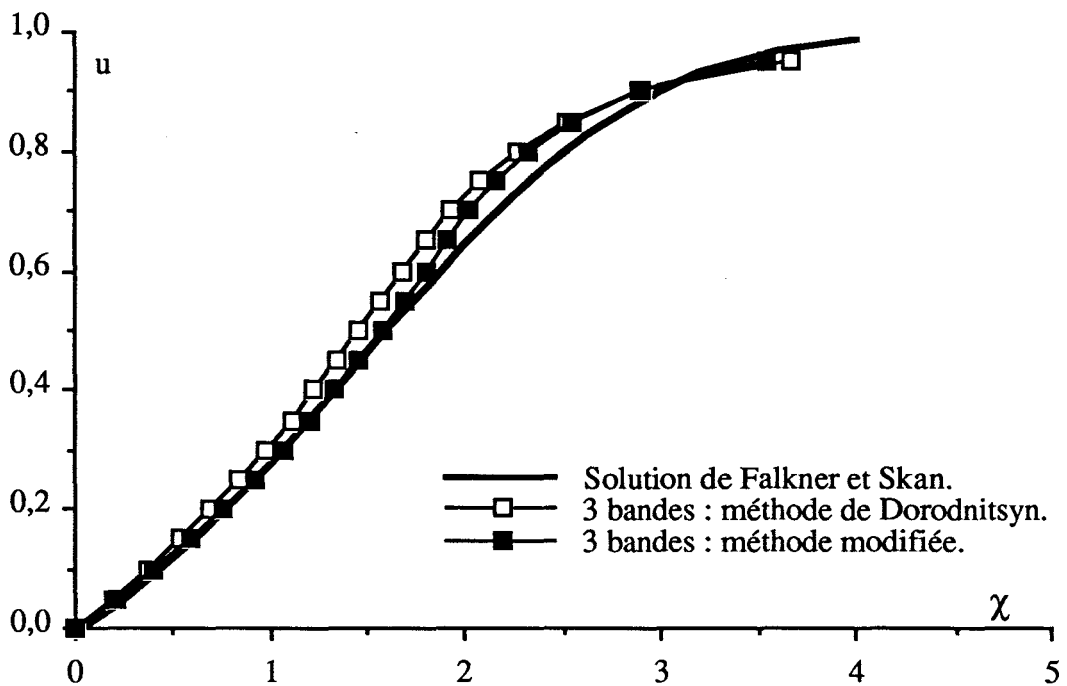
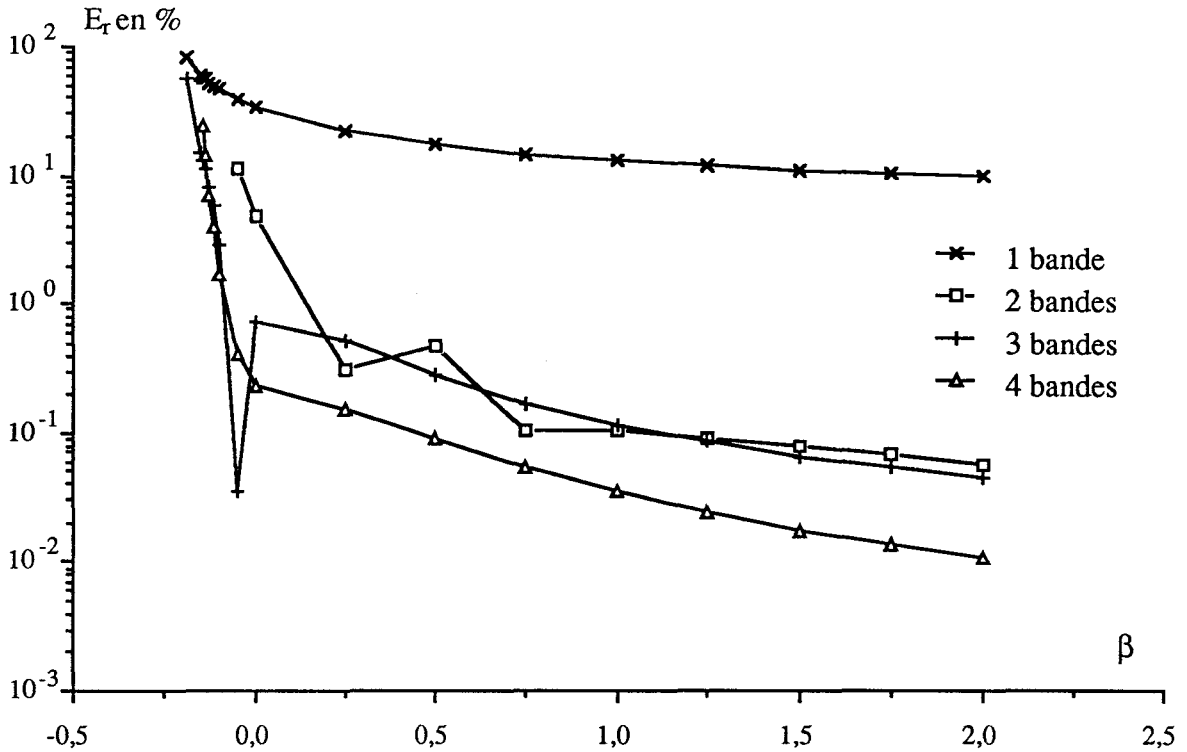
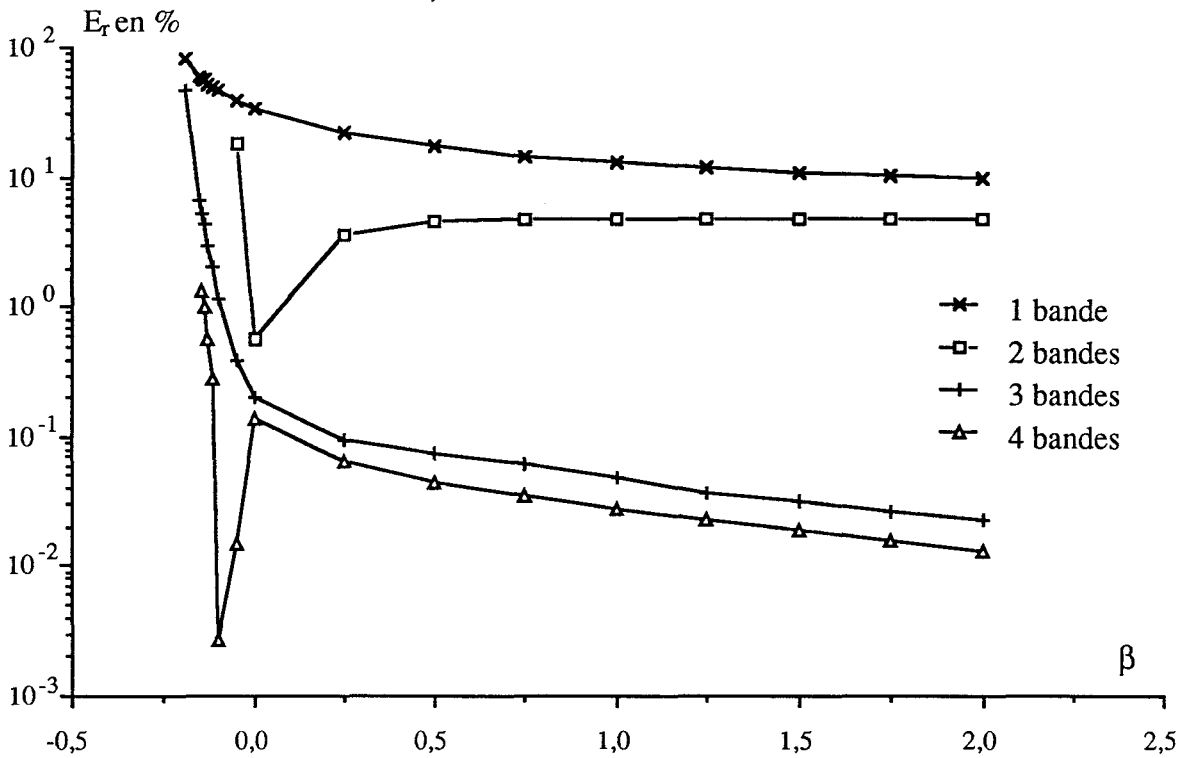


Figure 7 : Test de convergence.

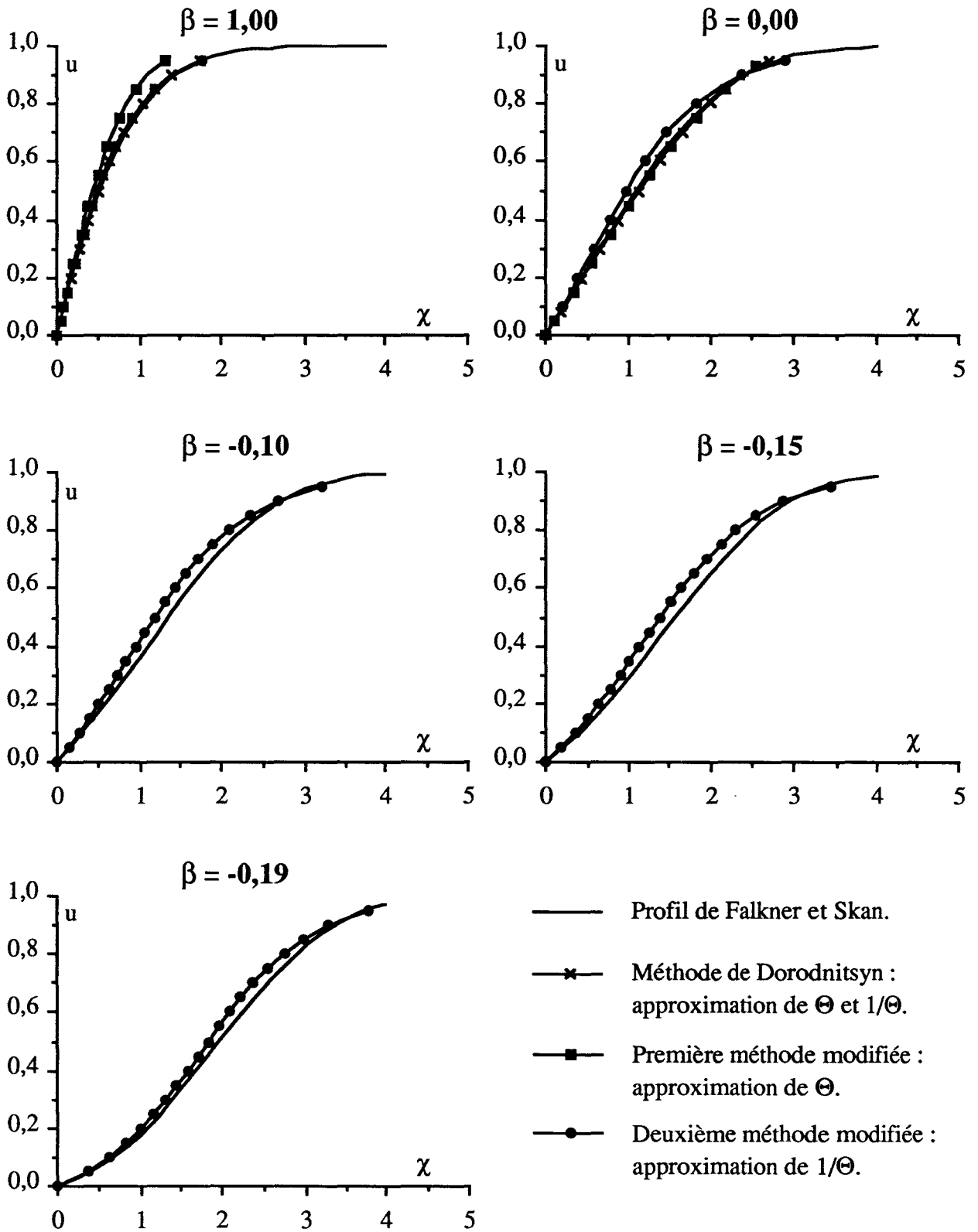
a) Méthode de Dorodnitsyn :



b) Méthode modifiée :



**Figure 8 : Approximation à deux bandes.
Comparaison des trois méthodes.**



**Figure 9 : Variation de la hauteur de bande.
Approximation de Dorodnitsyn à deux bandes.**

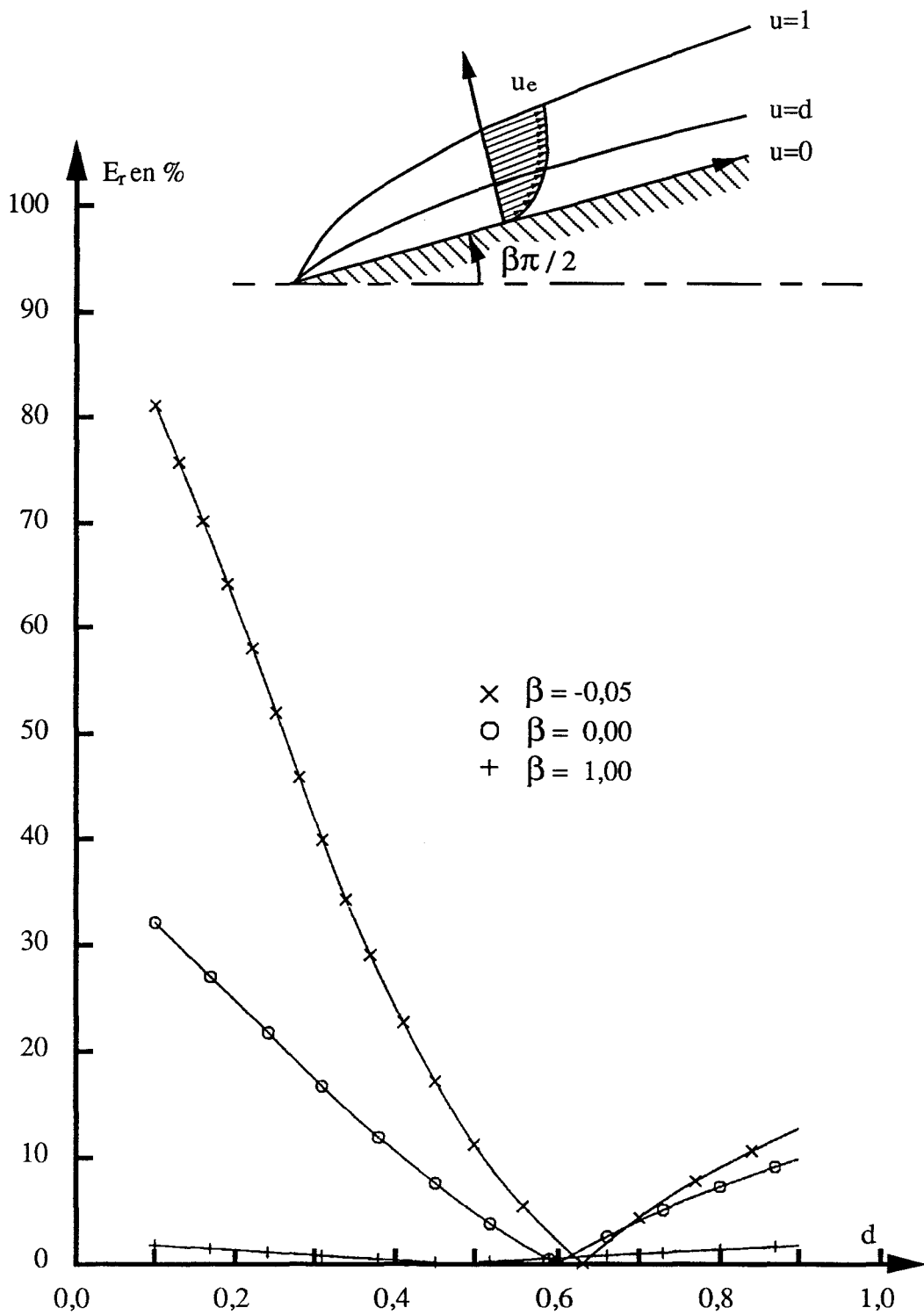


Figure 10 : Formes de la ligne sonique et des caractéristiques limites.

183

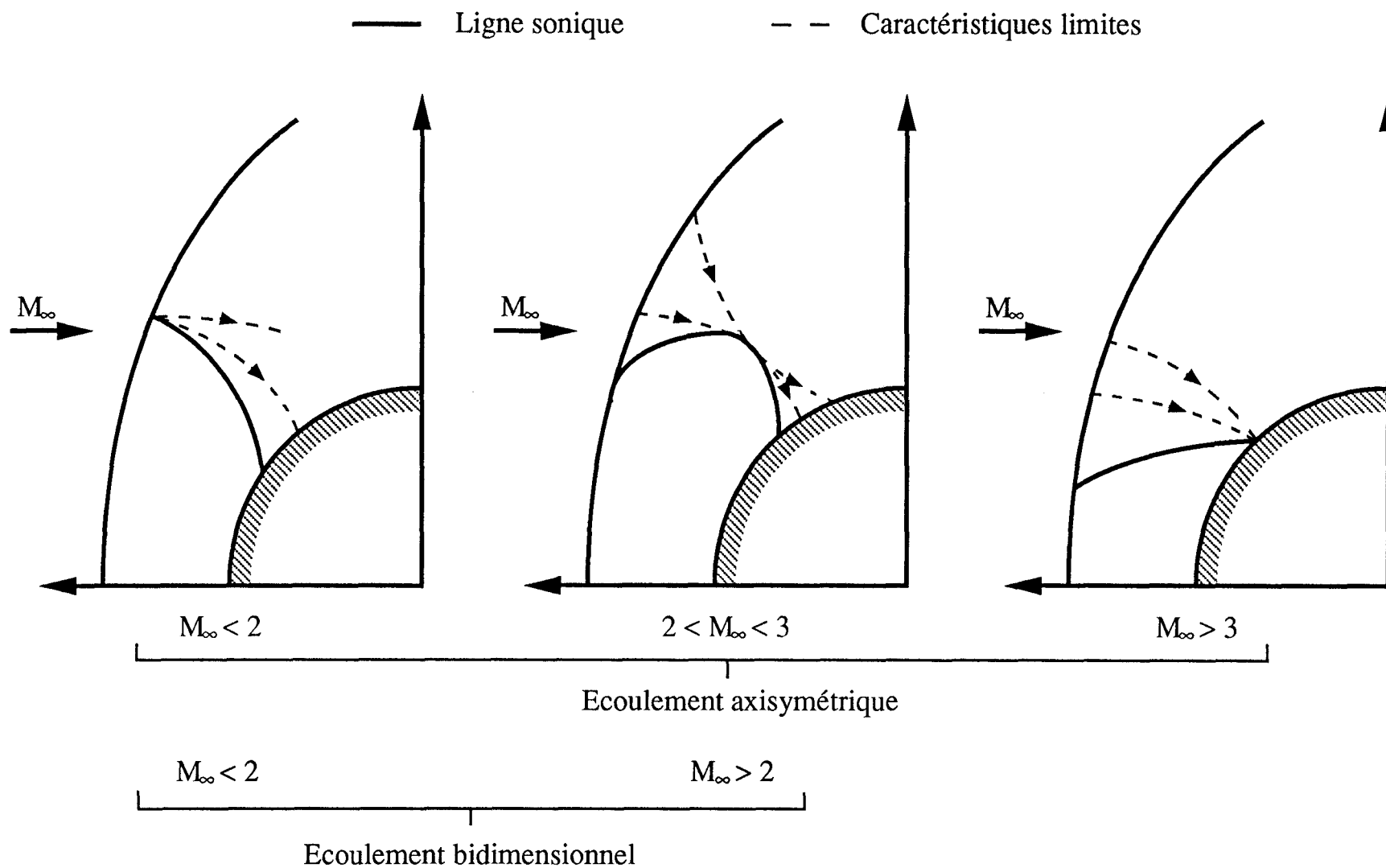
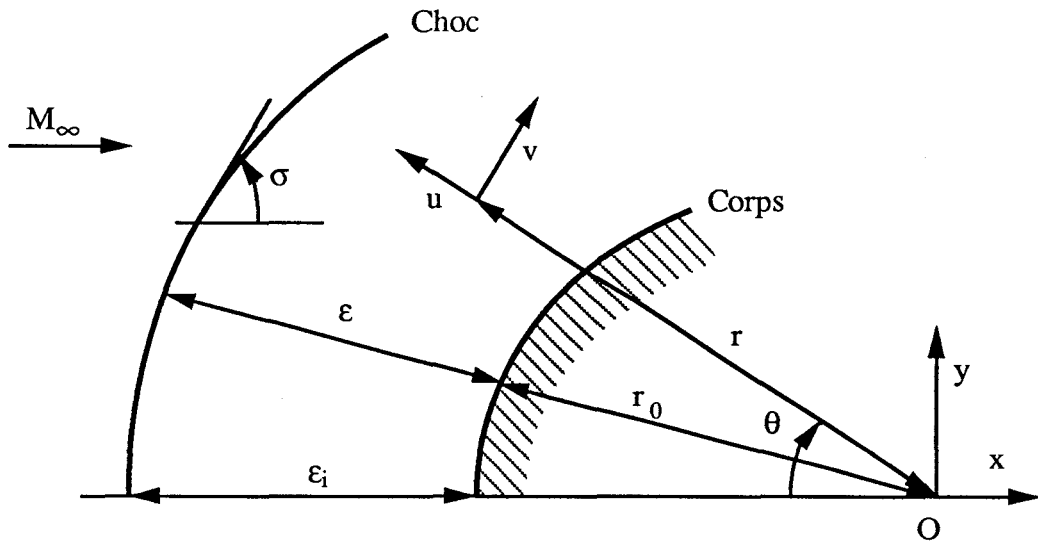


Figure 11 : Ecoulement.

a) Notations principales :



b) Division du domaine d'intégration :

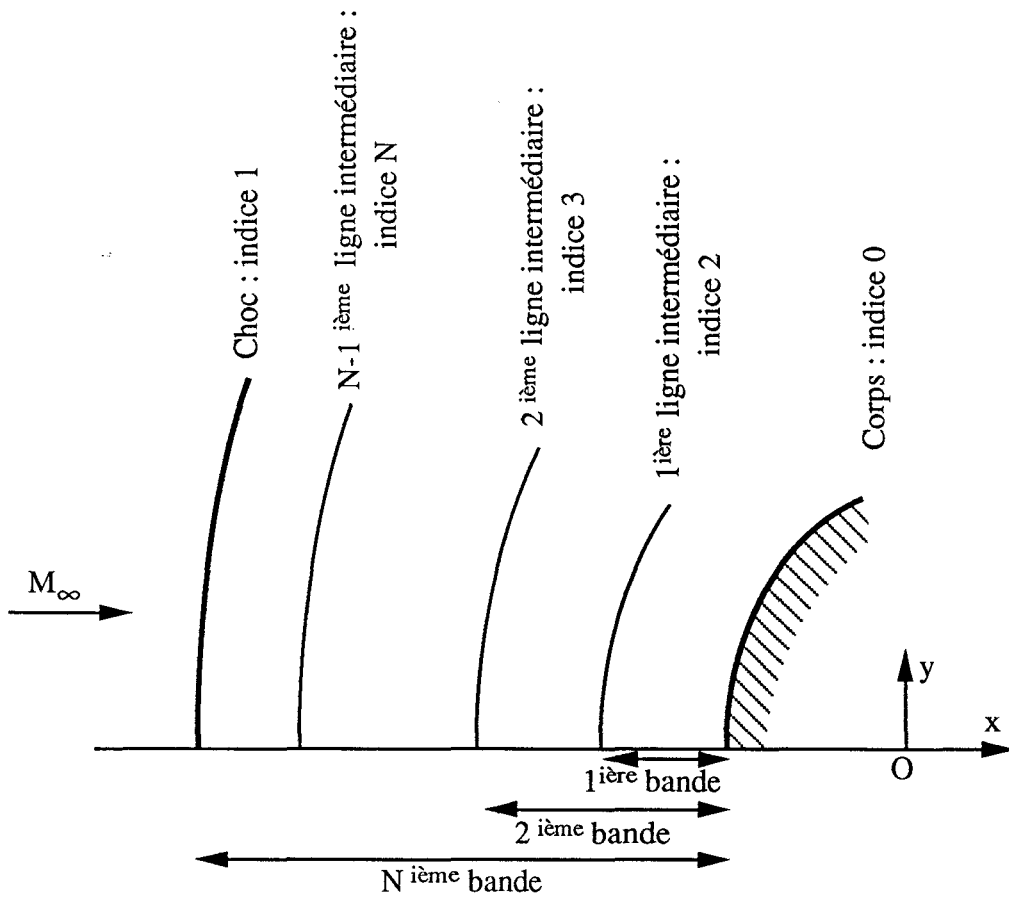
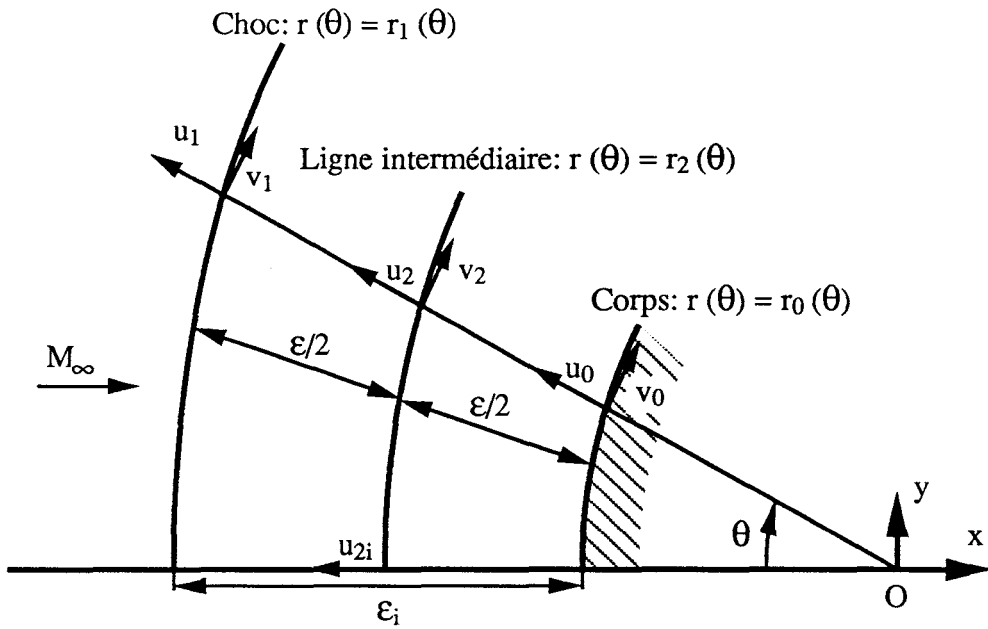


Figure 12 : Approximation à deux bandes.

a) Notations :



b) Utilisation de la fonction de courant :

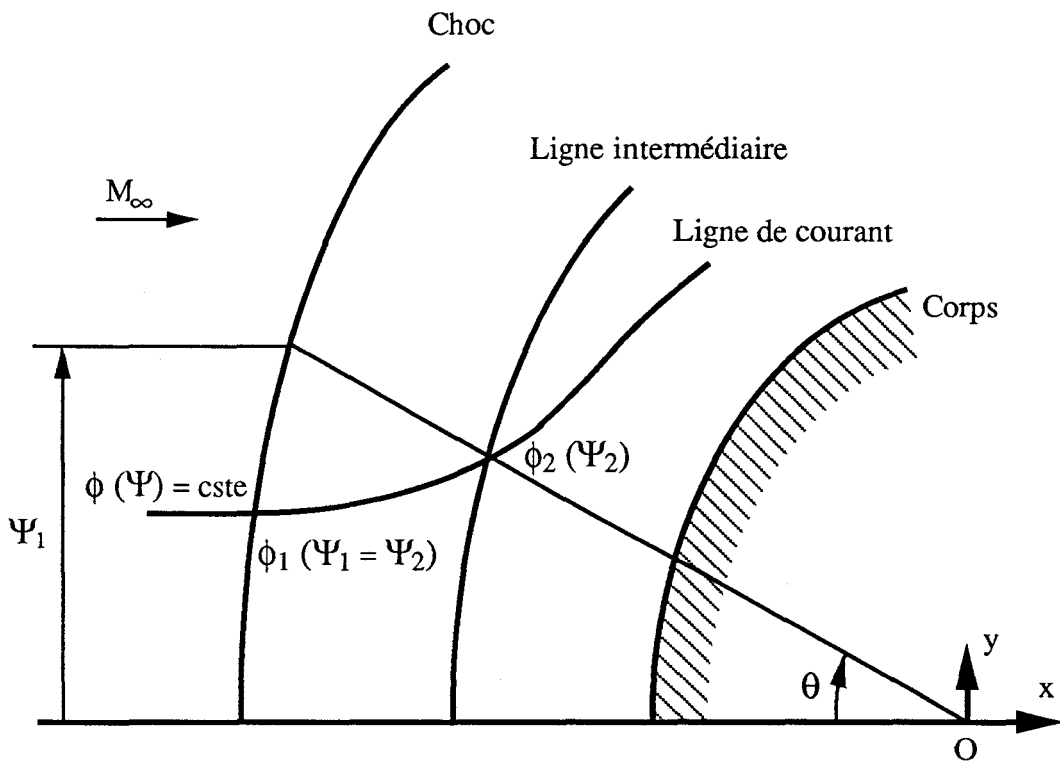
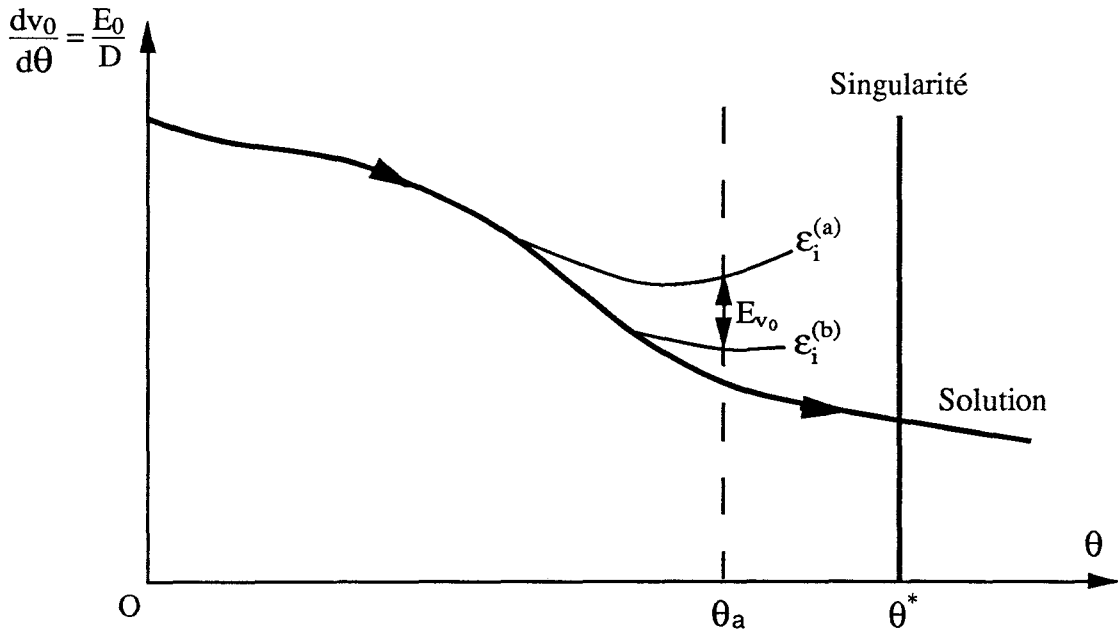


Figure 13 : Passage de la singularité en écoulement plan $N=1, j=0$.

a) Calcul de l'erreur relative :



b) Recherche du minimum de E :

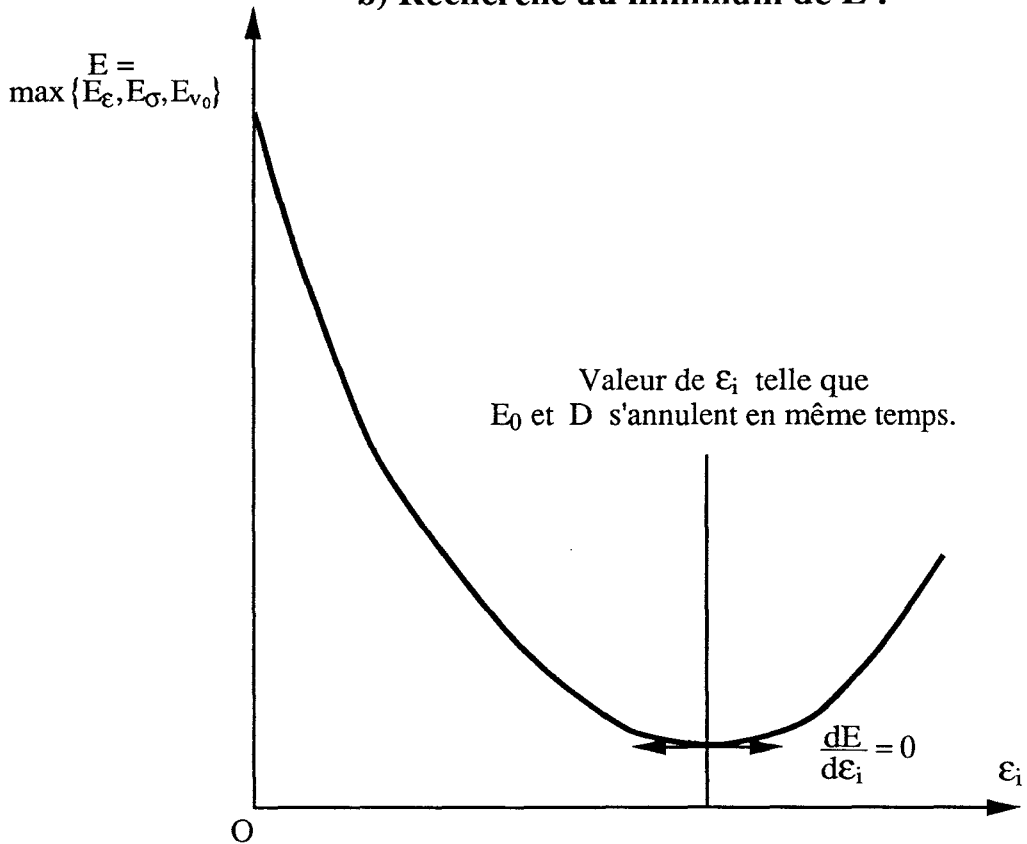
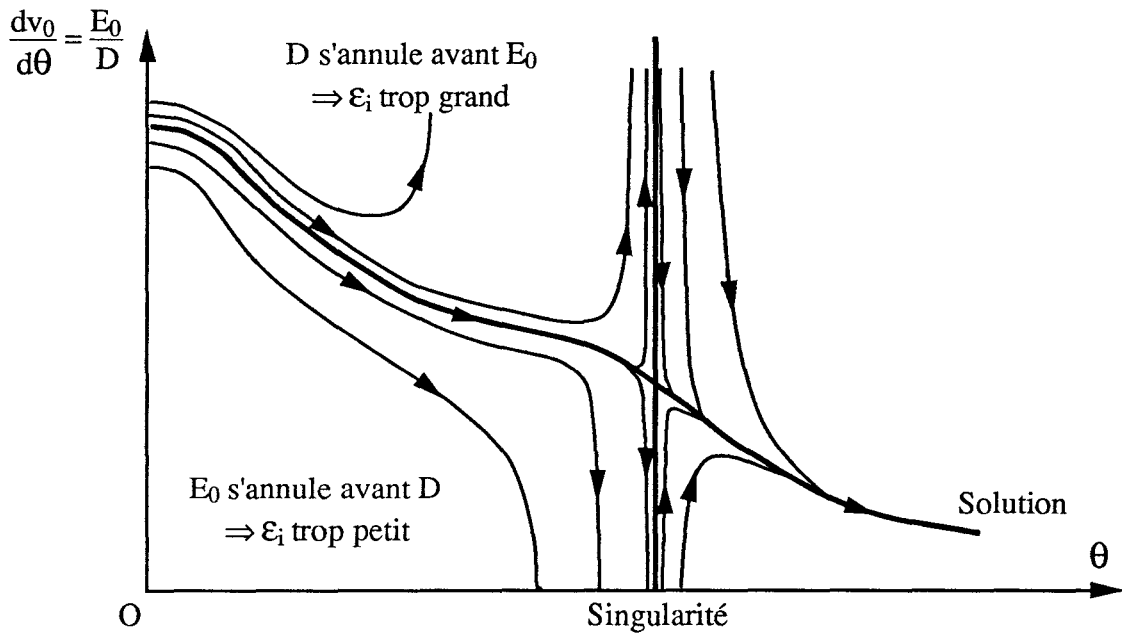


Figure 14 : Passage de la singularité en écoulement méridien $N=1, j=1$.

a) Allure de la singularité du type col :



b) Passage de la singularité :

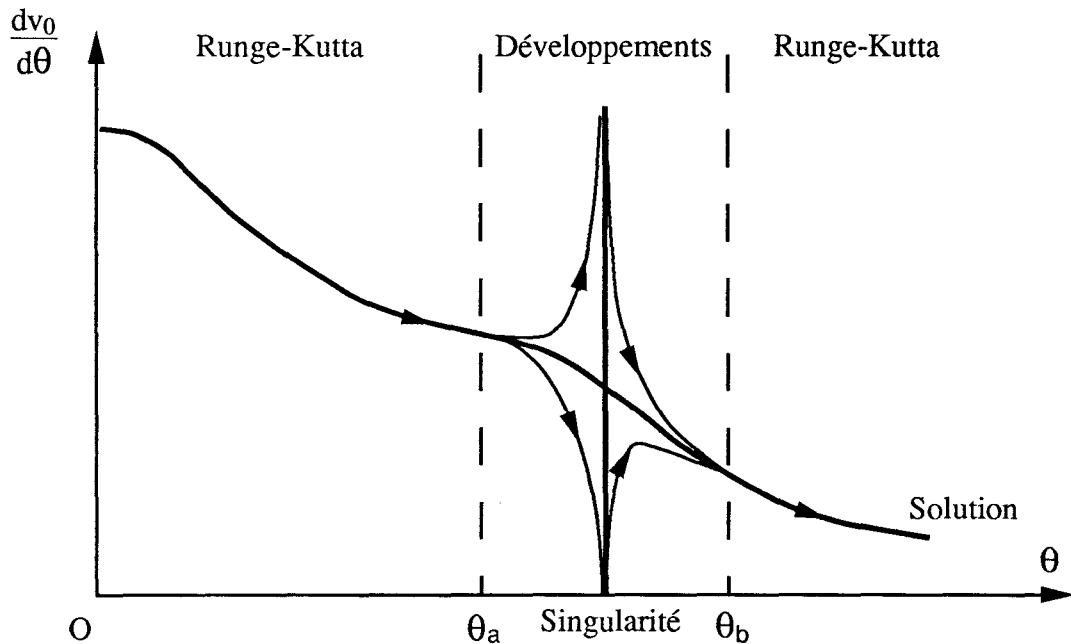


Figure 15 : Passage des deux singularités en écoulement plan $N=2, j=0$.

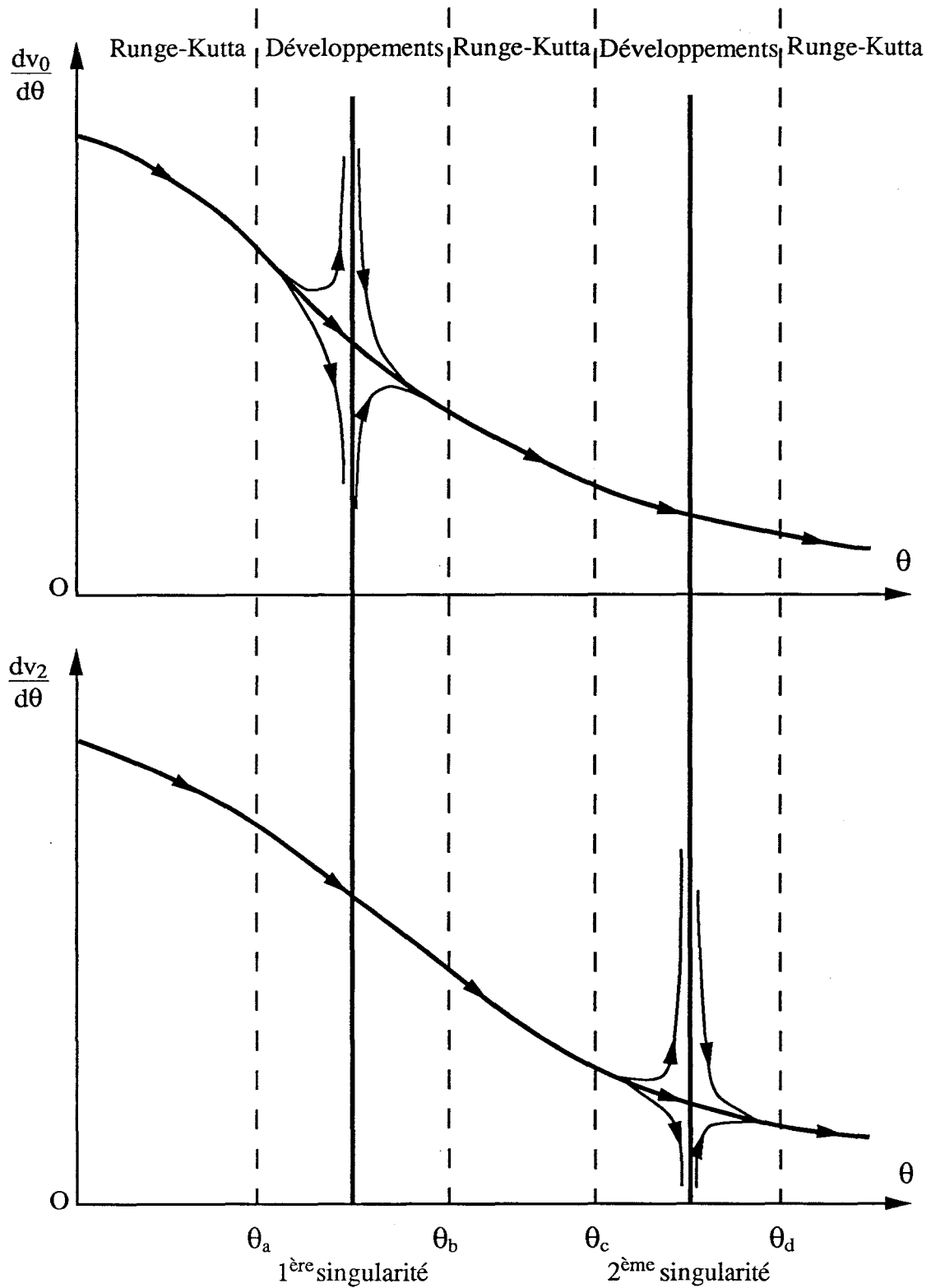


Figure 16 : Passage des deux singularités en écoulement méridien $N=2, j=1$.

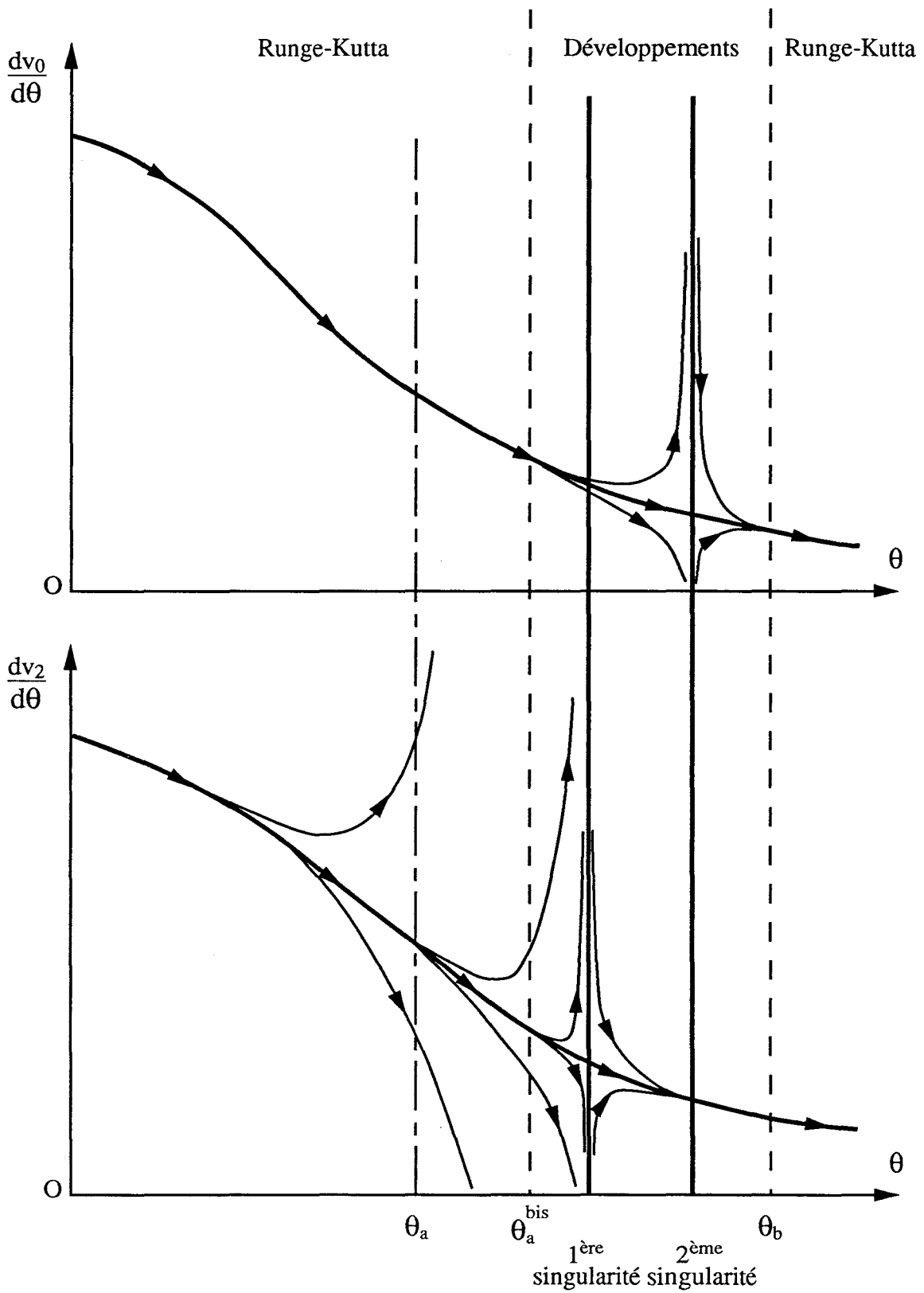
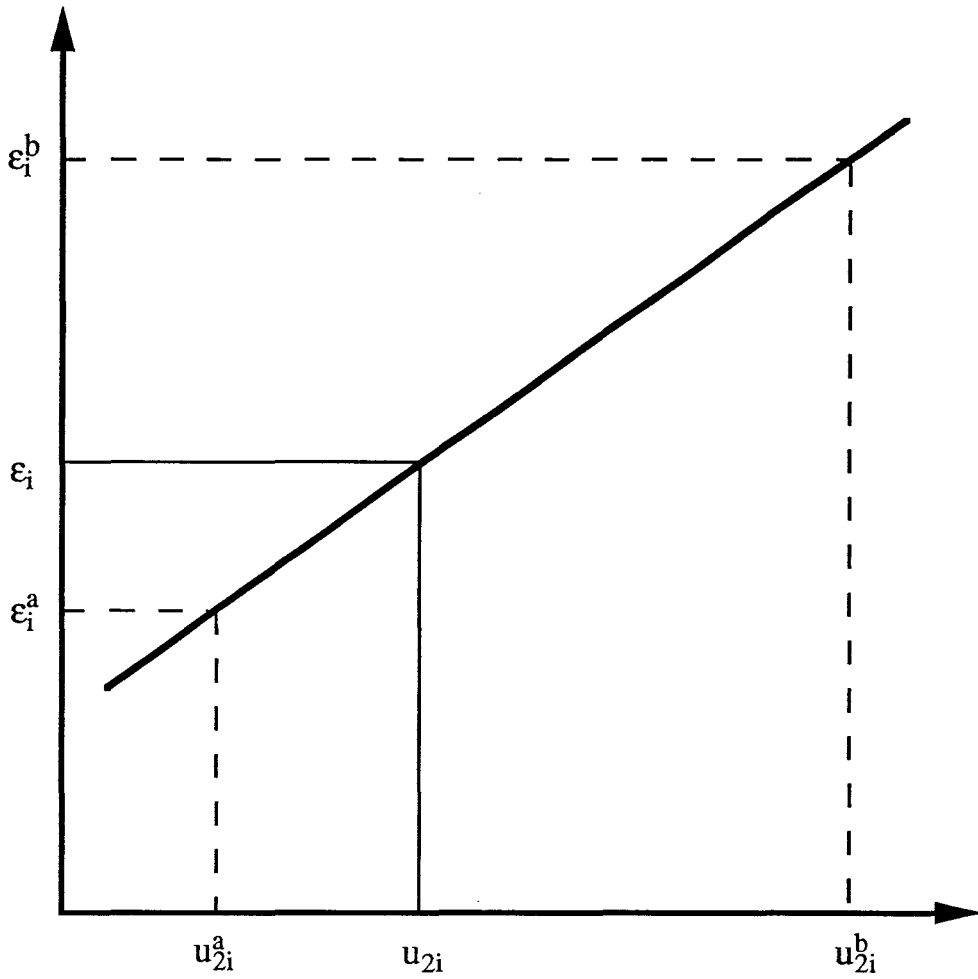


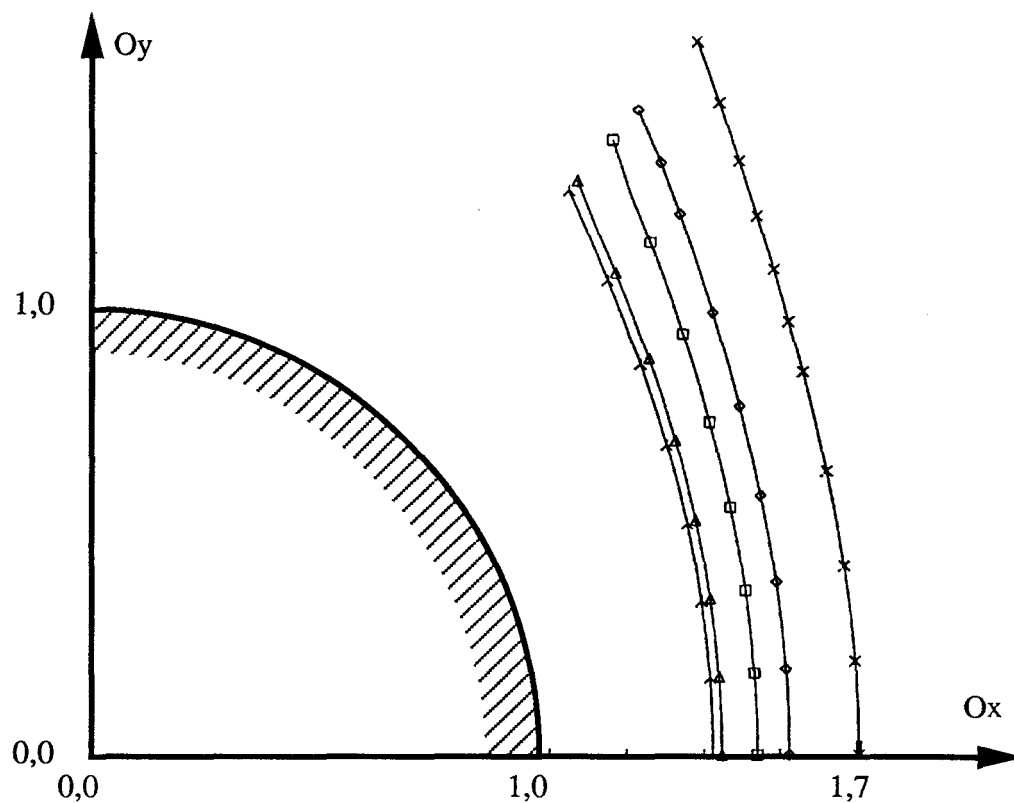
Figure 17 : Accélération des deux dichotomies imbriquées.



$$|u_{2i}^b - u_{2i}^a| \geq |\epsilon_i^b - \epsilon_i^a|$$

Figure 18 : Ecoulement autour d'un cylindre $N=1$.

a) Forme du choc :



b) Pression sur le corps :

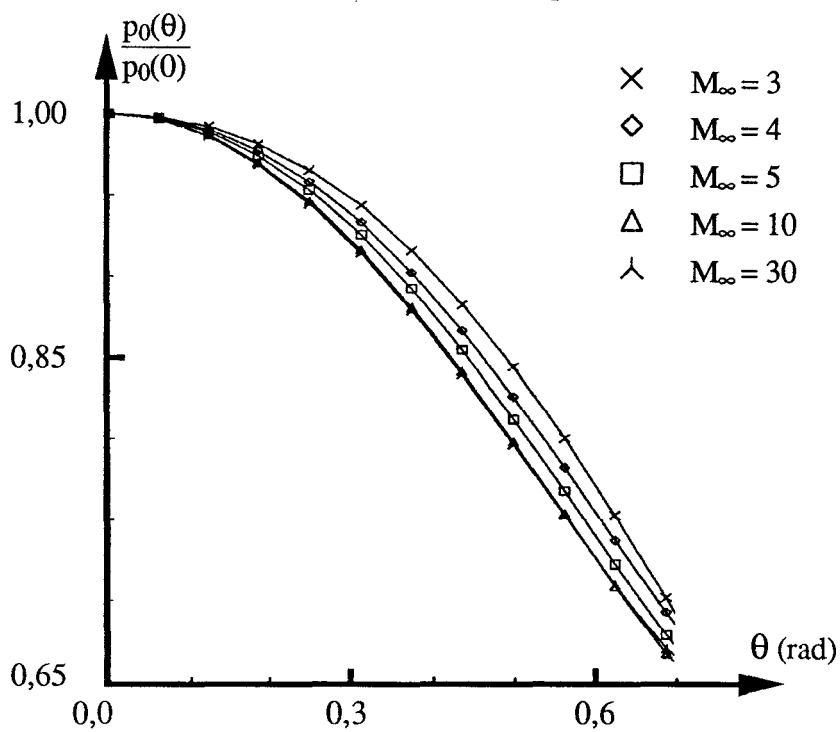
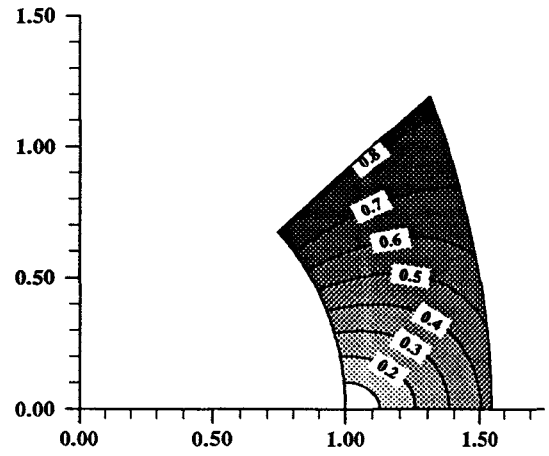
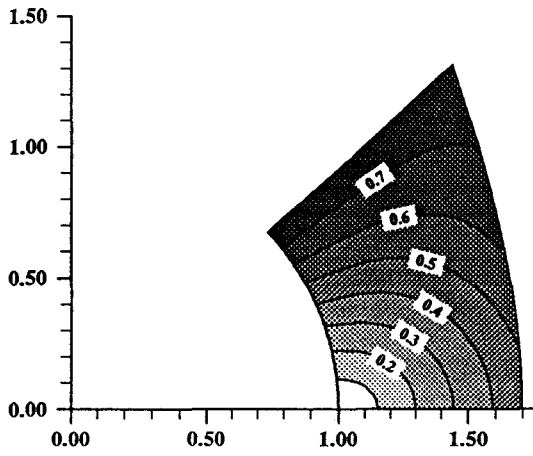


Figure 19 : Isomachs.
Ecoulement autour d'un cylindre : $N=1$.

$M_\infty=3$

$M_\infty=4$



$M_\infty=6$

$M_\infty=10$

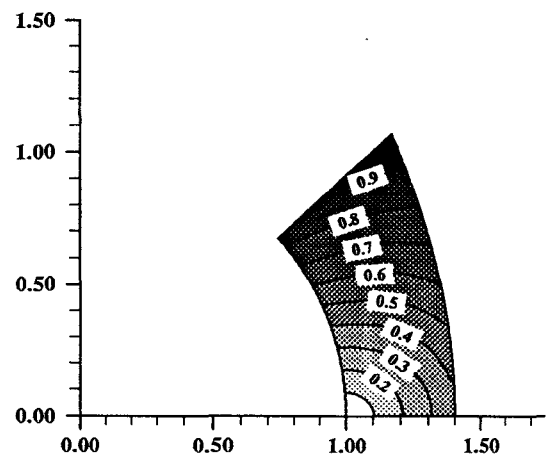
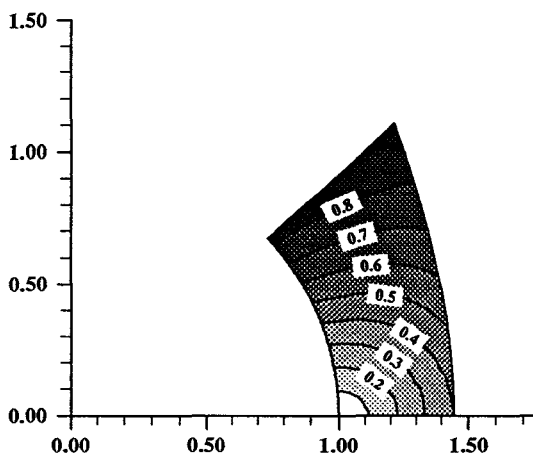
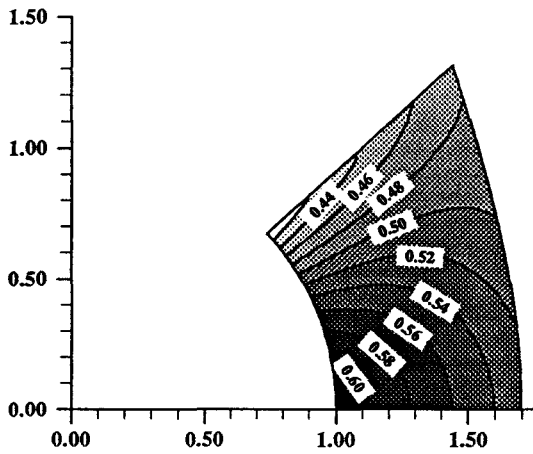
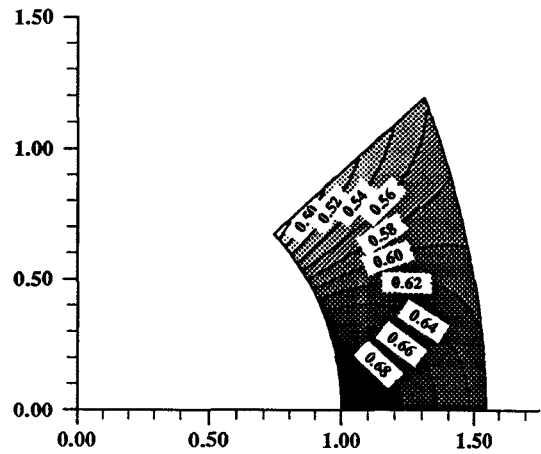


Figure 20 : Carte de pression.
Ecoulement autour d'un cylindre : $N=1$.

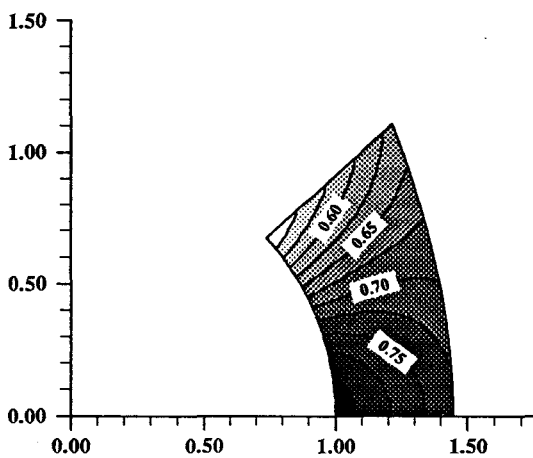
$M_\infty=3$



$M_\infty=4$



$M_\infty=6$



$M_\infty=10$

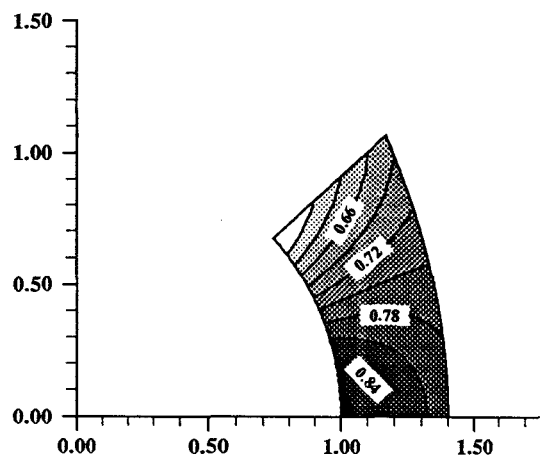
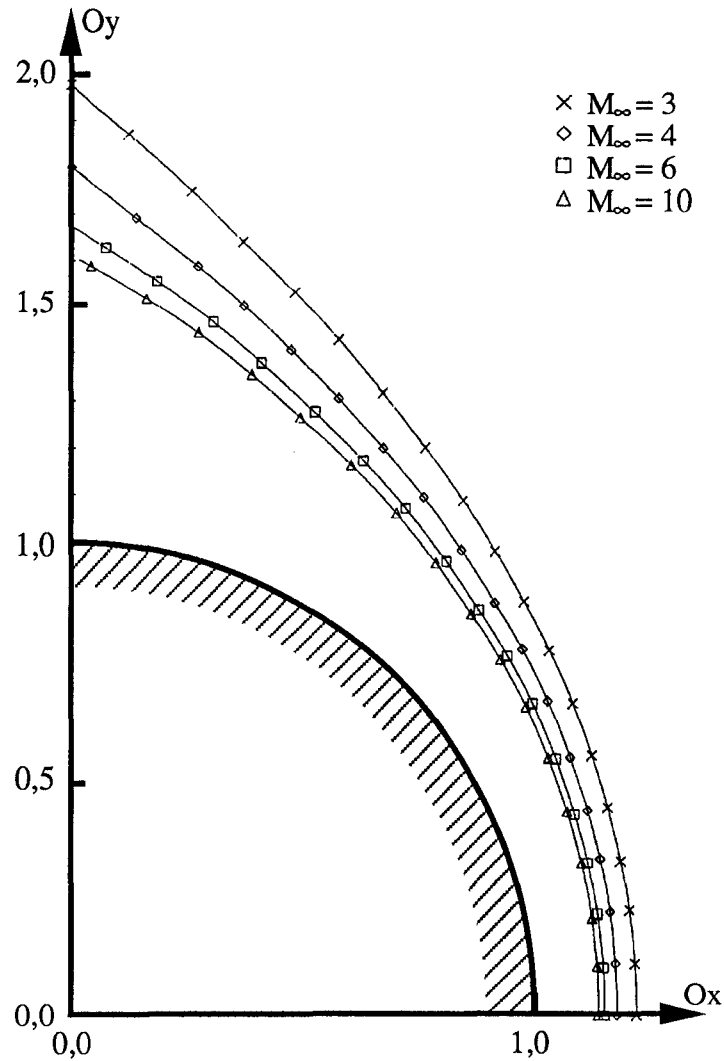


Figure 21 : Ecoulement autour d'une sphère $N=1$.

a) Forme du choc :



b) Pression sur le corps :

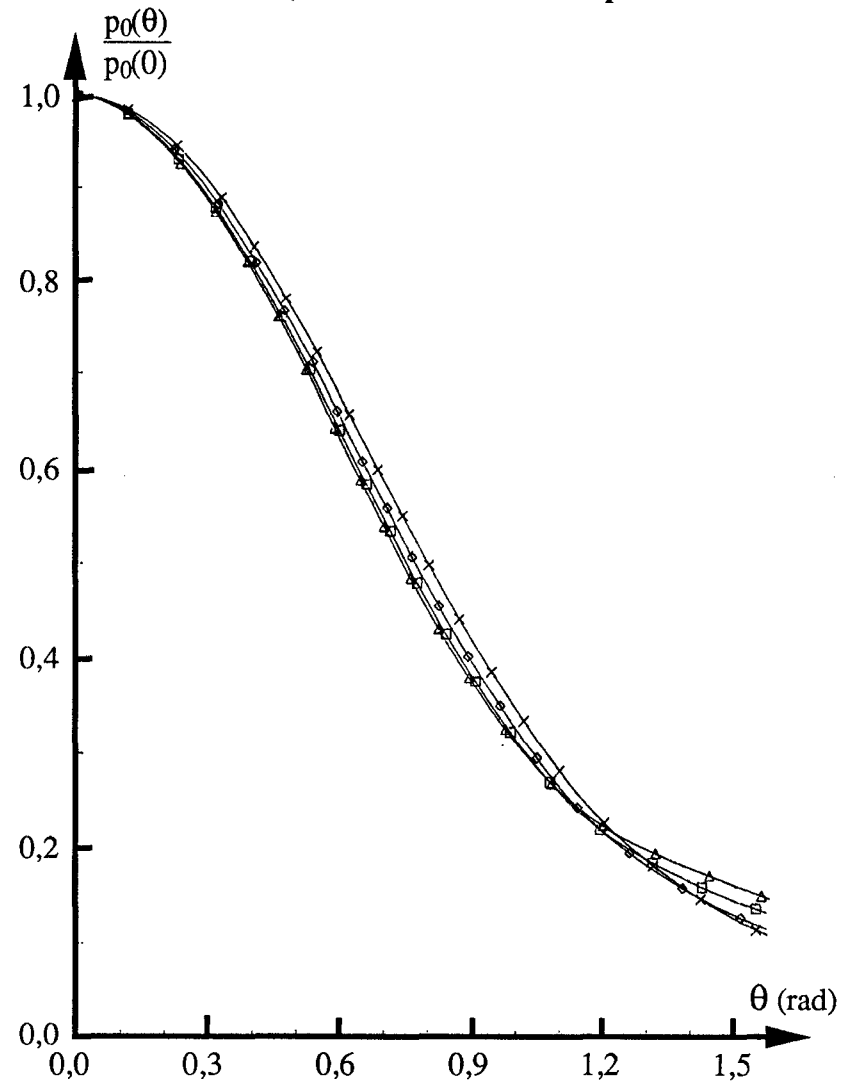
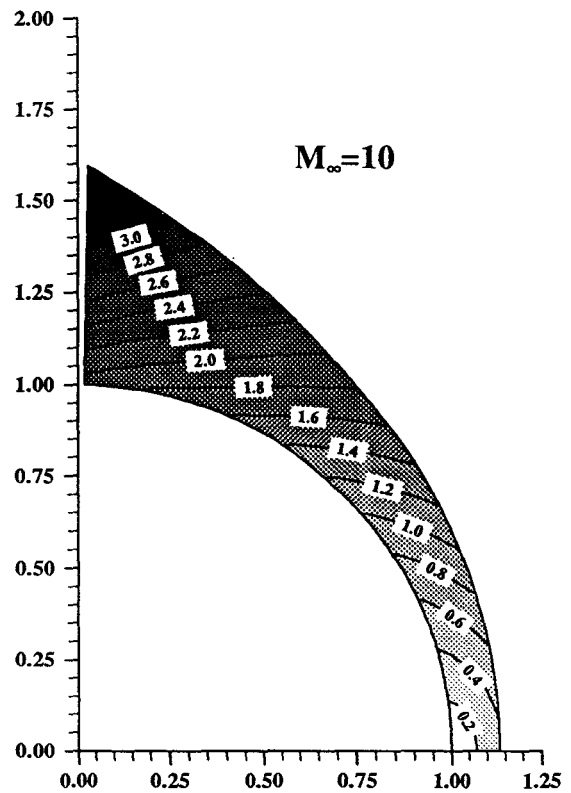
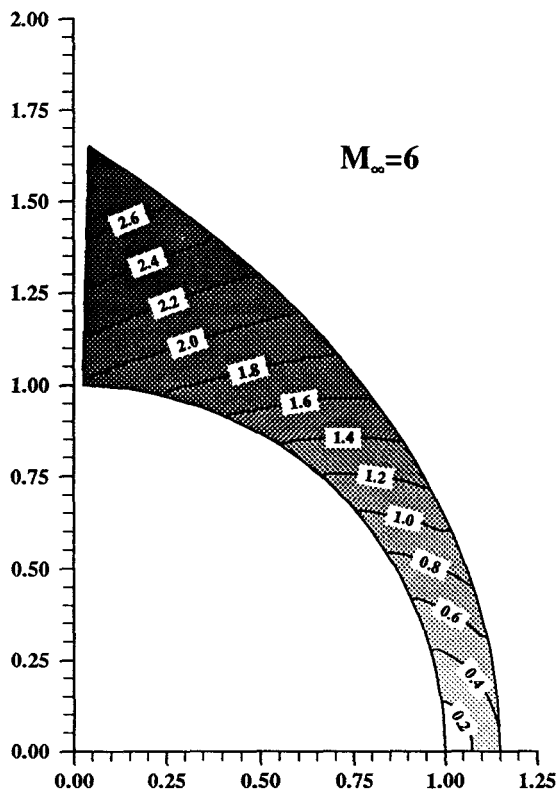
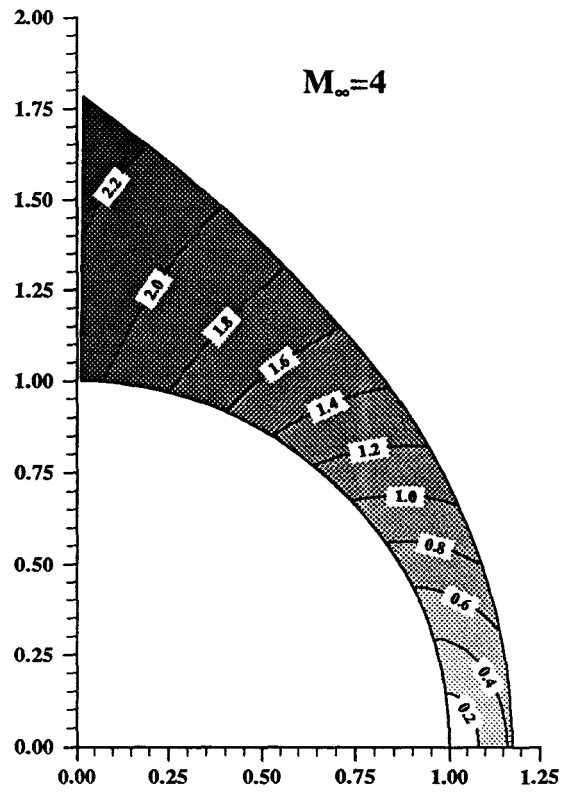
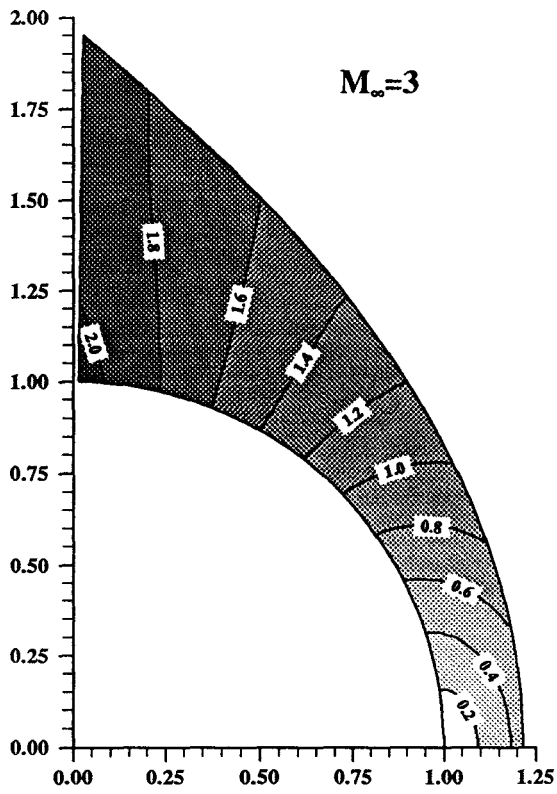
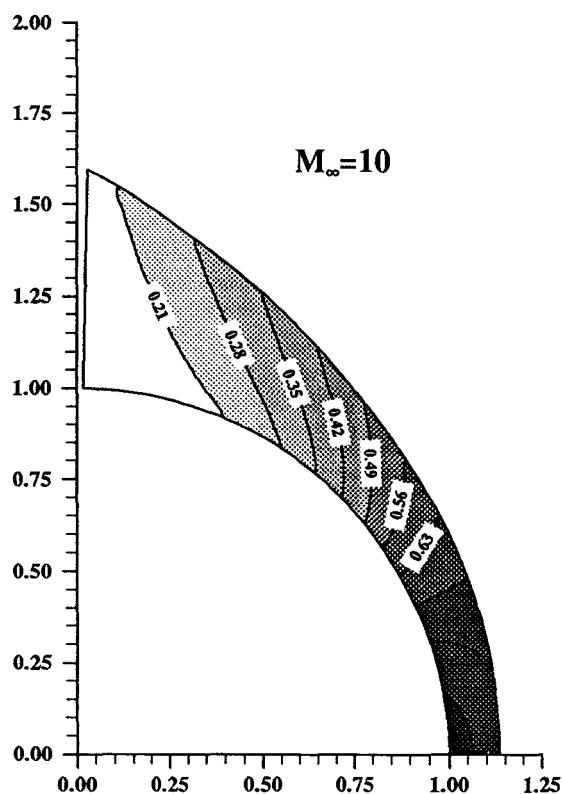
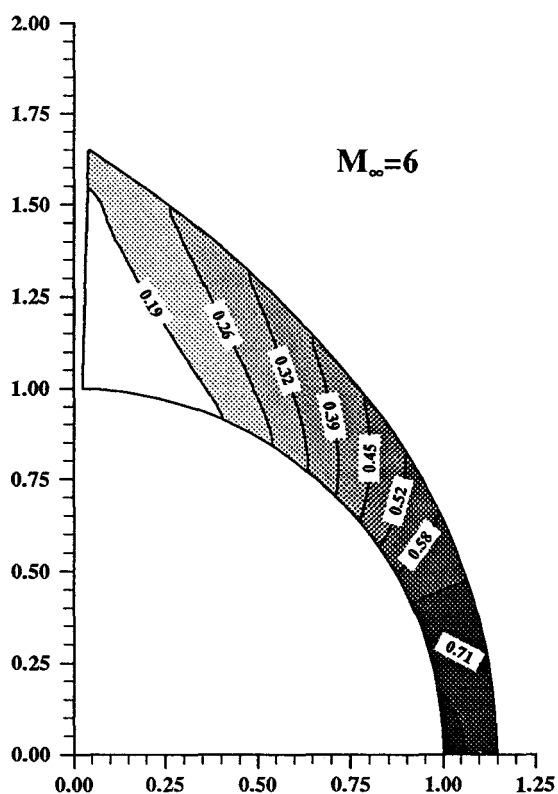
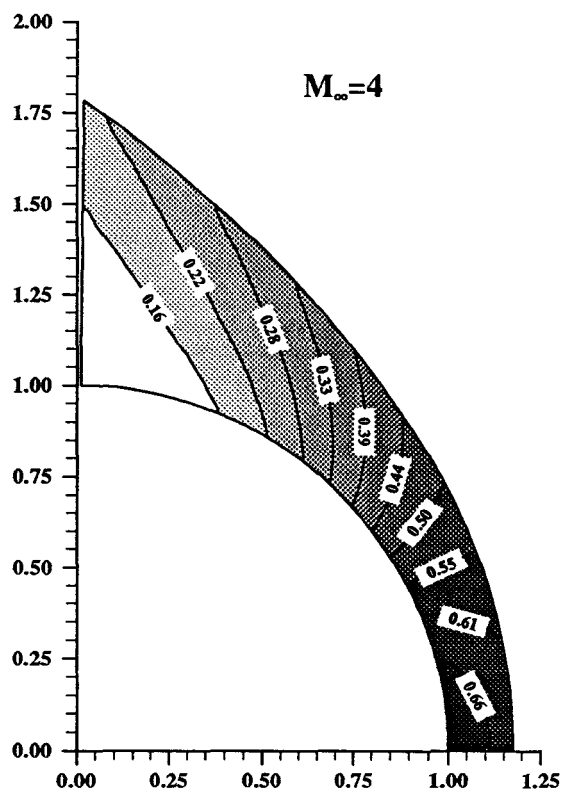
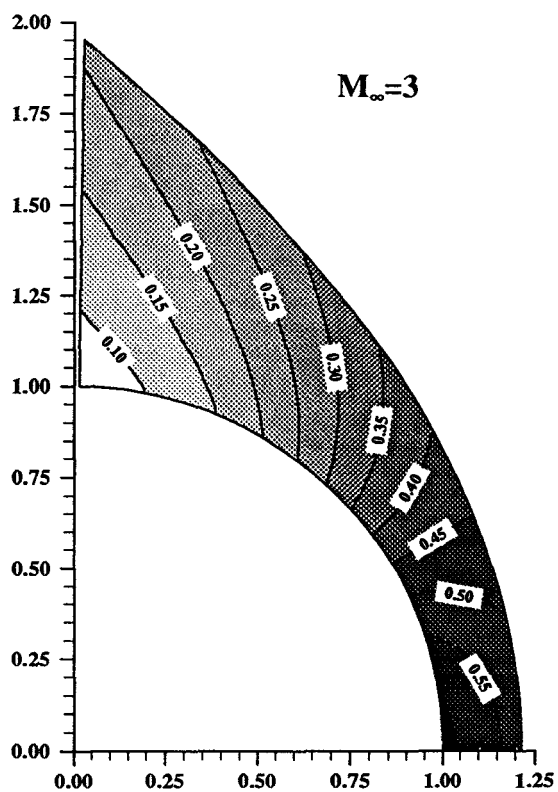


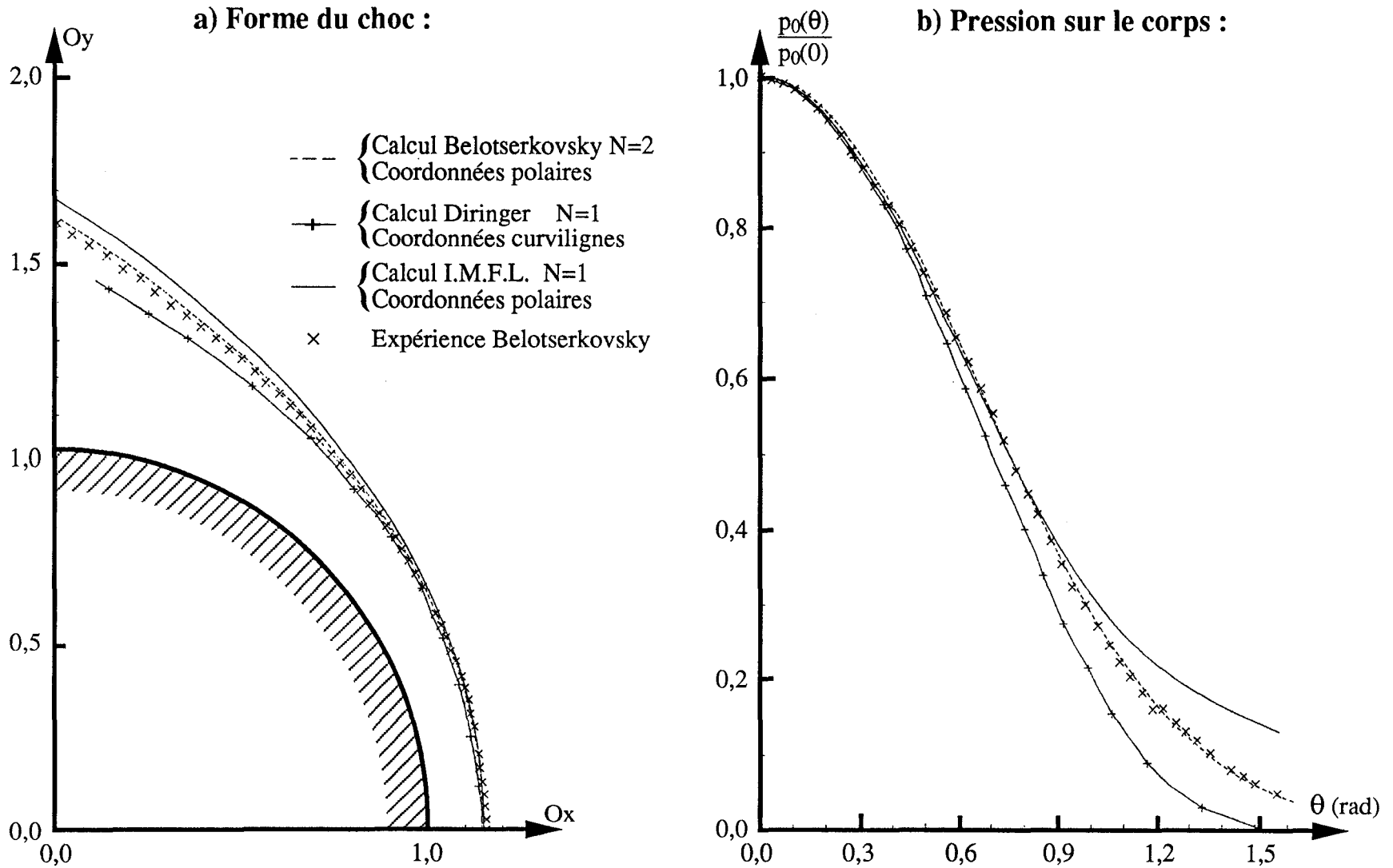
Figure 22 : Isomachs.
 Ecoulement autour d'une sphère : $N=1$.



**Figure 23 : Carte de pression.
Ecoulement autour d'une sphère : $N=1$.**



**Figure 24 : Comparaison des différentes méthodes des relations intégrales.
Écoulement autour d'une sphère $M_\infty = 6$.**



**Figure 25 : Distance de détachement du choc.
Ecoulement autour d'une sphère $N=1$ $\gamma=1,4$.**

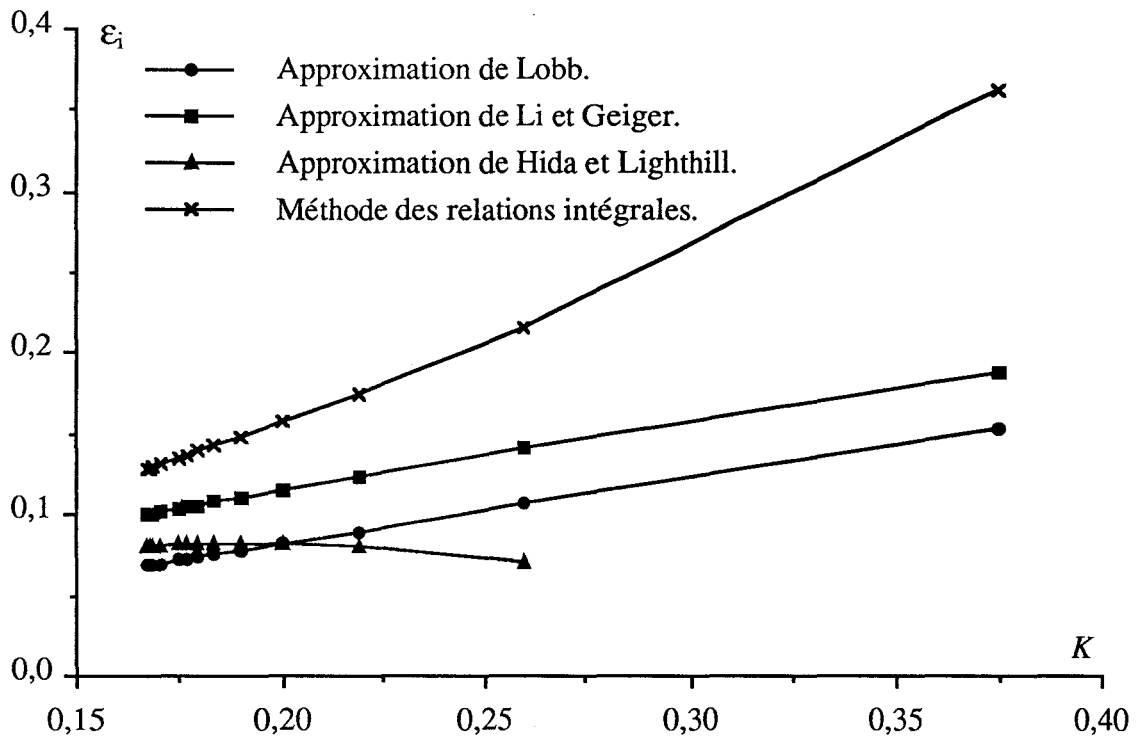
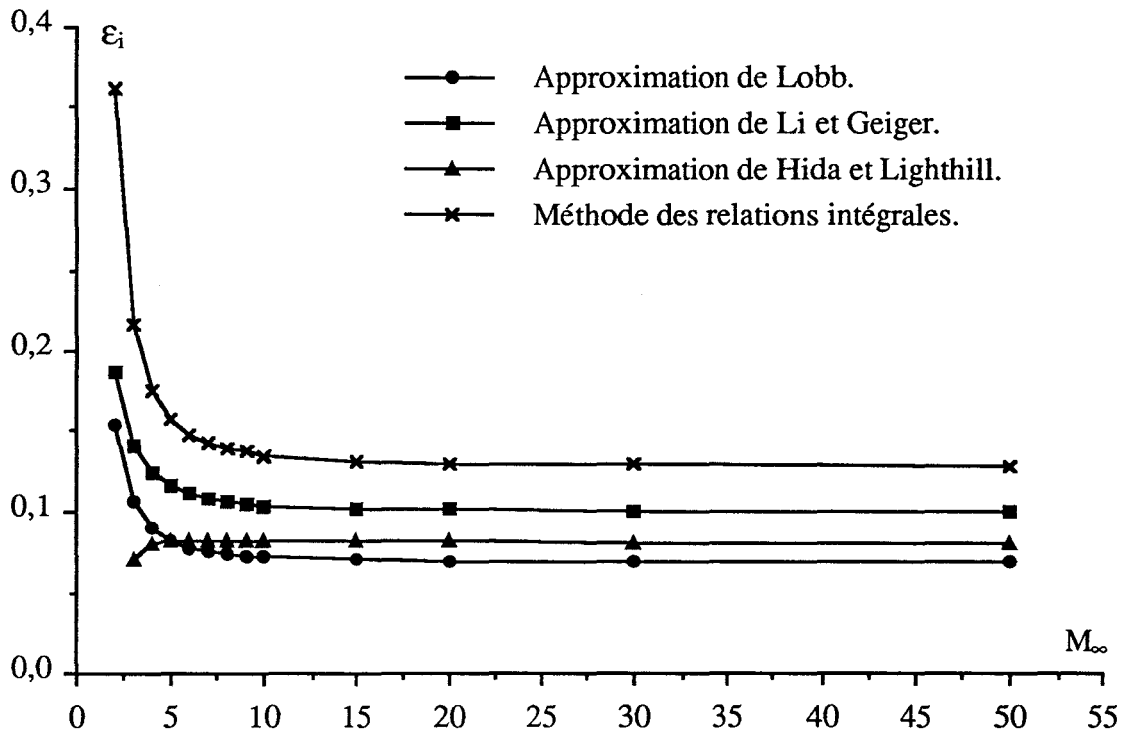
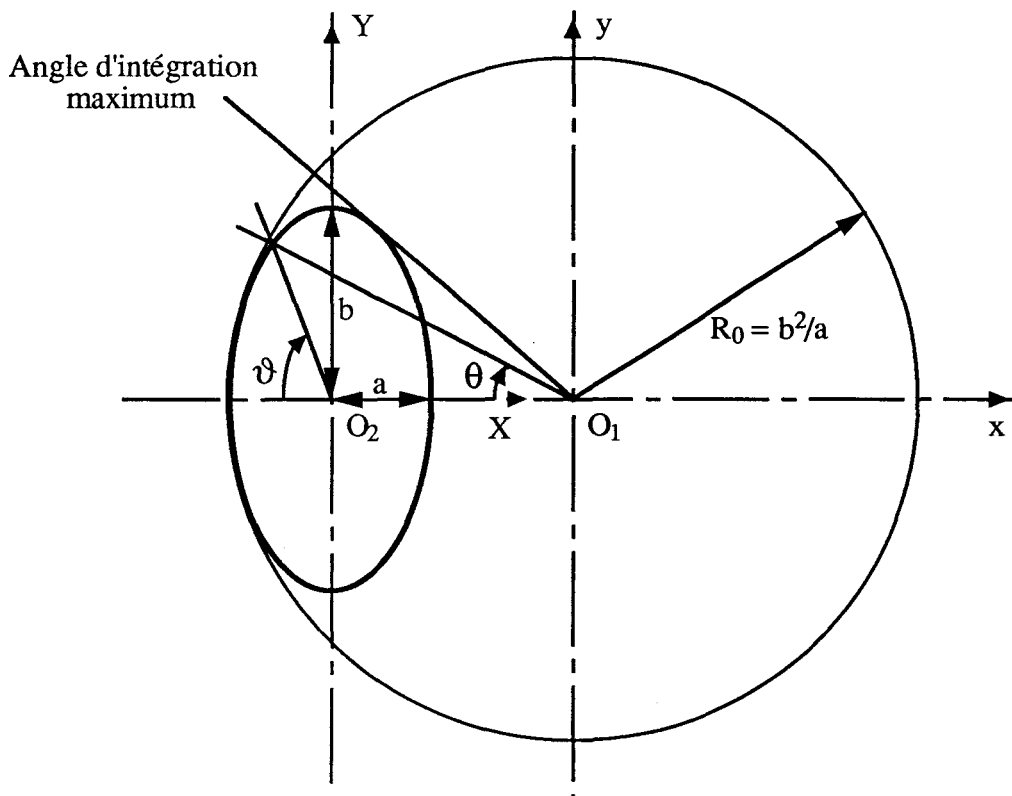
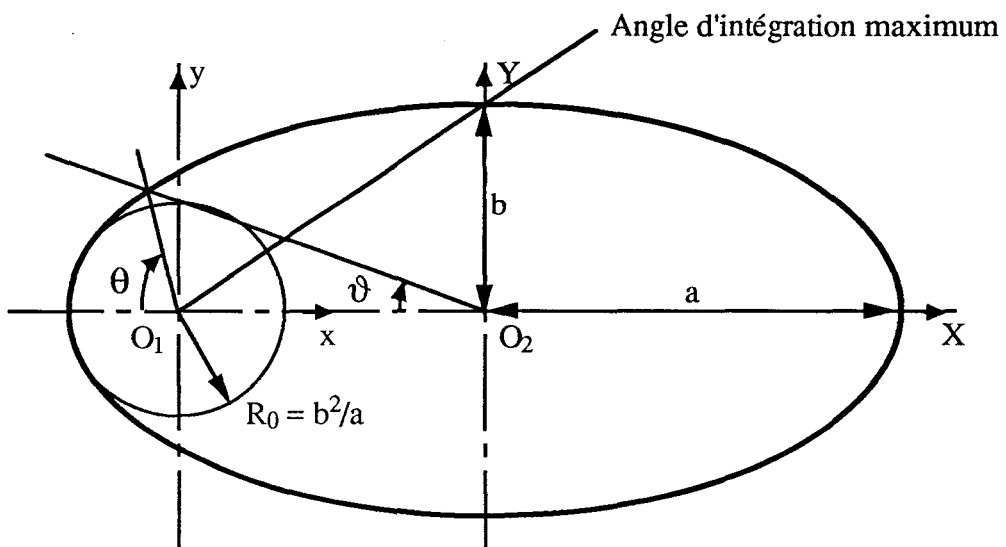


Figure 26 : Repère d'intégration.

a) Ellipse très émoussée : $b/a > 1$



b) Ellipse allongée : $b/a < 1$



**Figure 27 : Distance de détachement du choc
suivant la forme de l'ellipsoïde.
 $N=1 \quad j=1 \quad \gamma=1,4$**

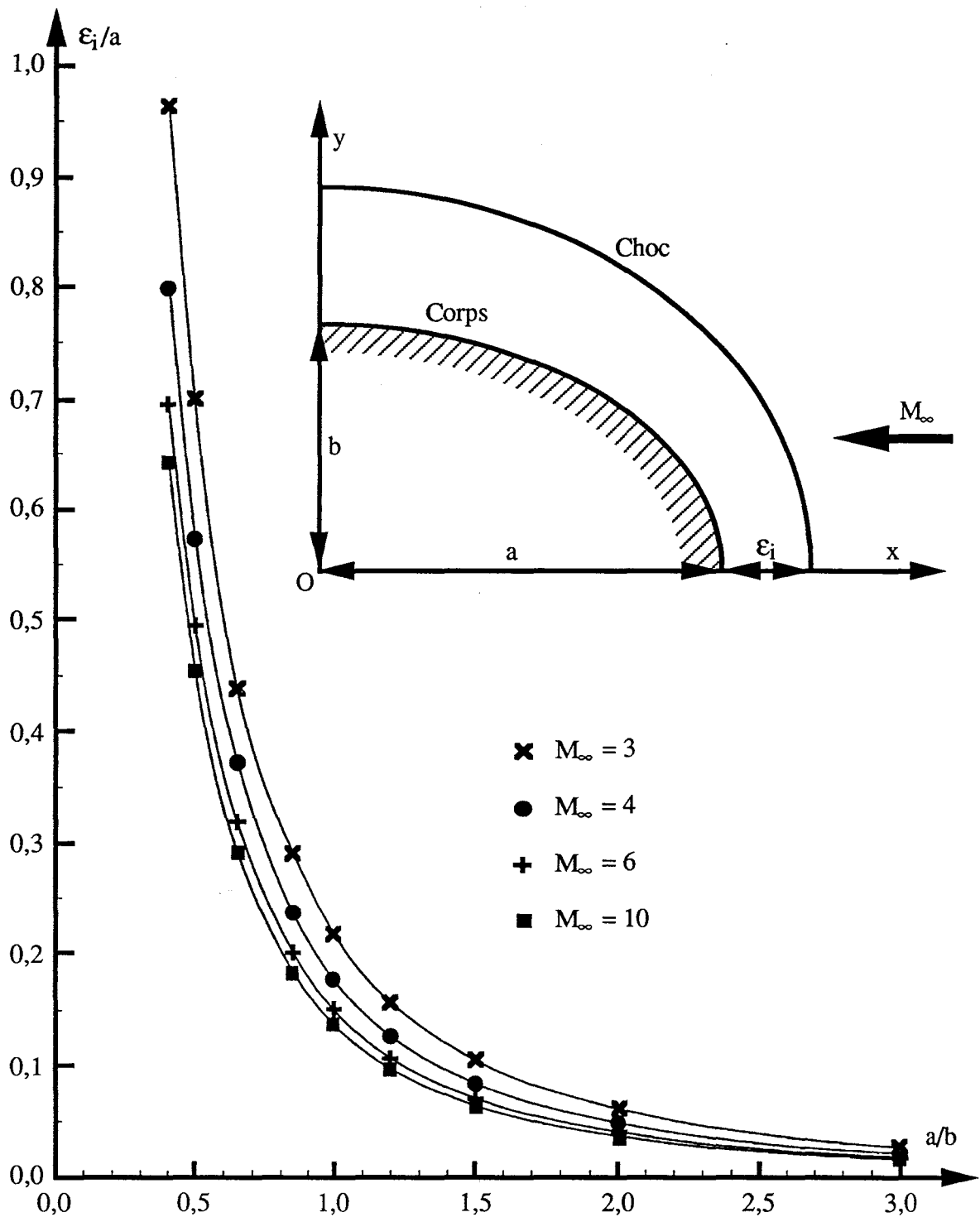
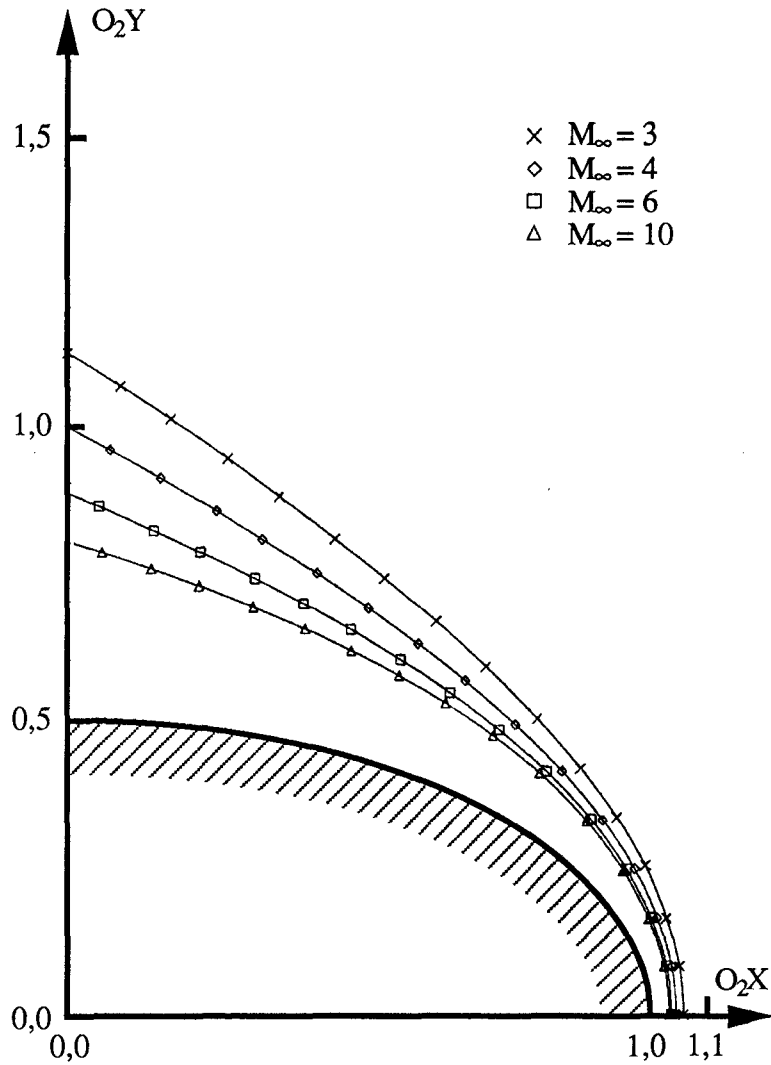


Figure 28 : Ecoulement autour d'un ellipsoïde $b/a=0,5$ $N=1$.

a) Forme du choc :



b) Pression sur le corps :

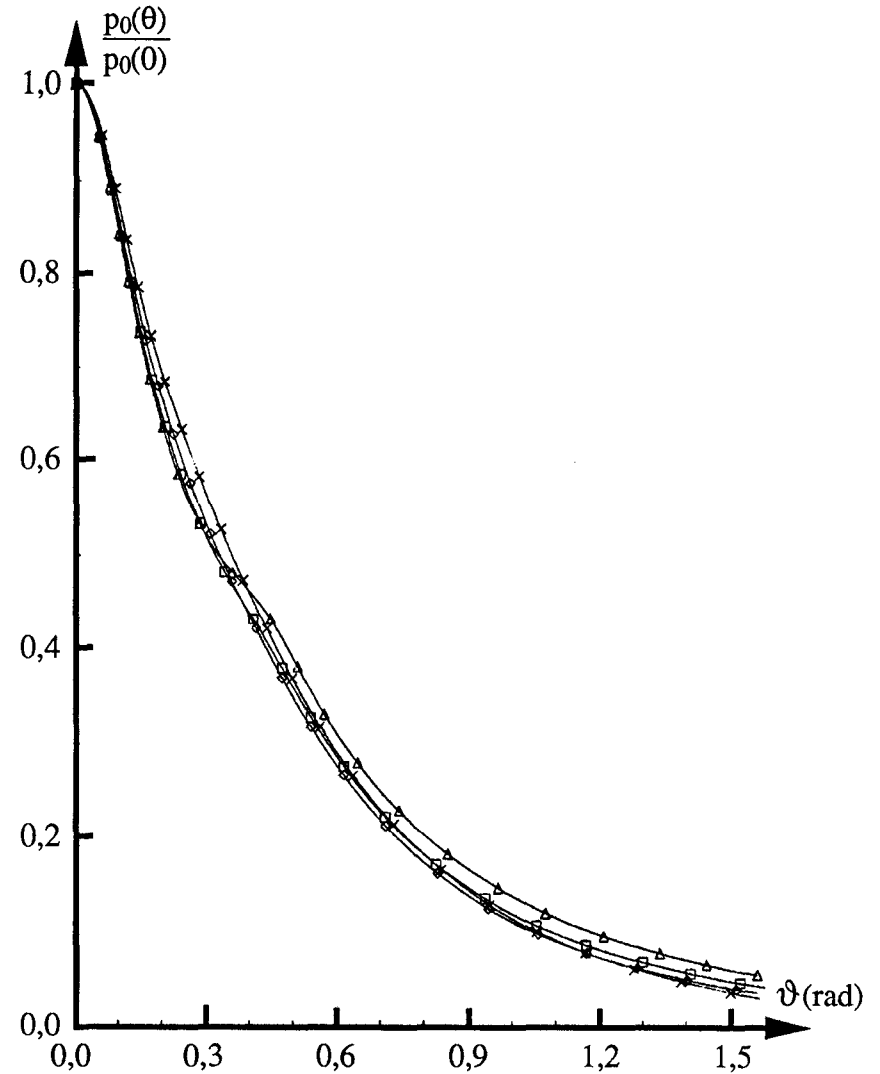
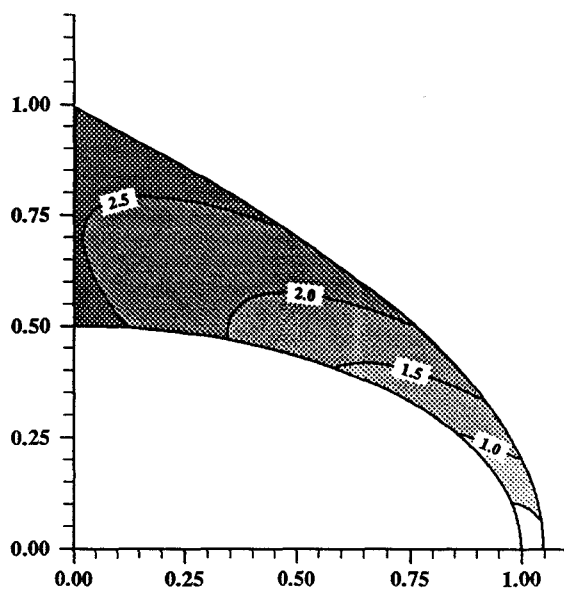
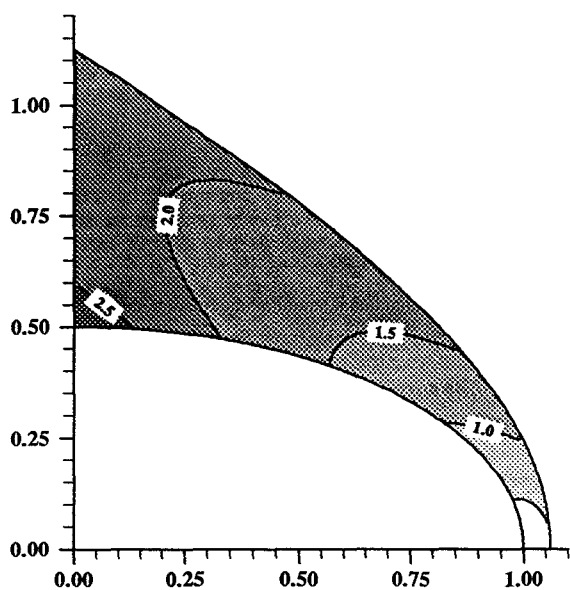


Figure 29 : Isomachs.
Ecoulement autour d'un ellipsoïde $b/a=0,5$: $N=1$.

$M_\infty=3$

$M_\infty=4$



$M_\infty=6$

$M_\infty=10$

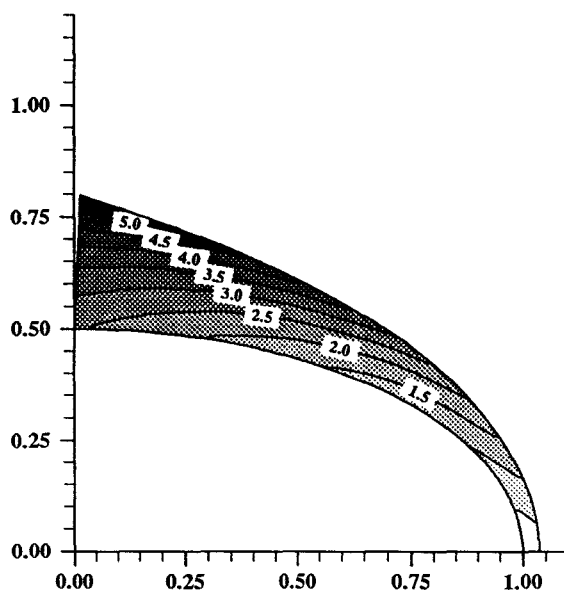
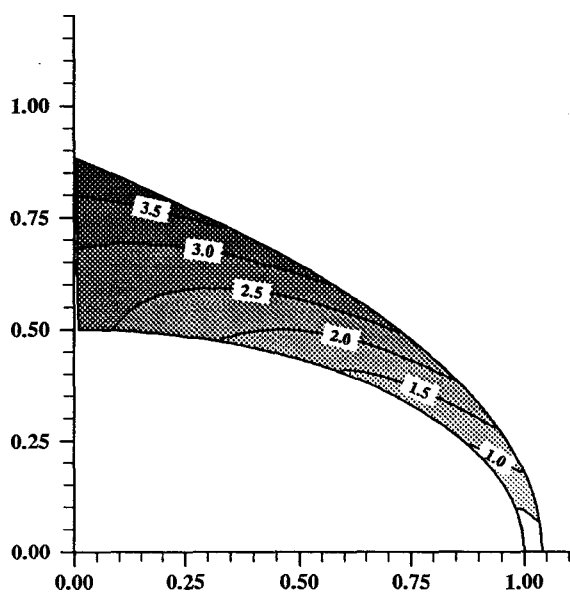
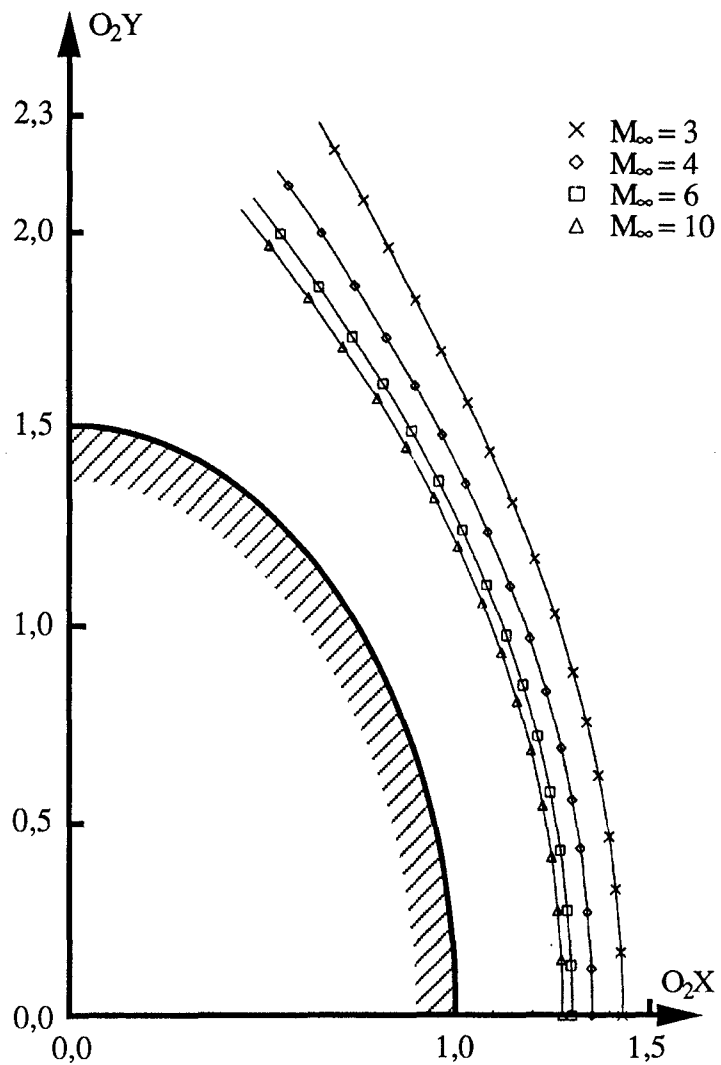


Figure 30 : Ecoulement autour d'un ellipsoïde $b/a=1,5$ $N=1$.

a) Forme du choc :



b) Pression sur le corps :

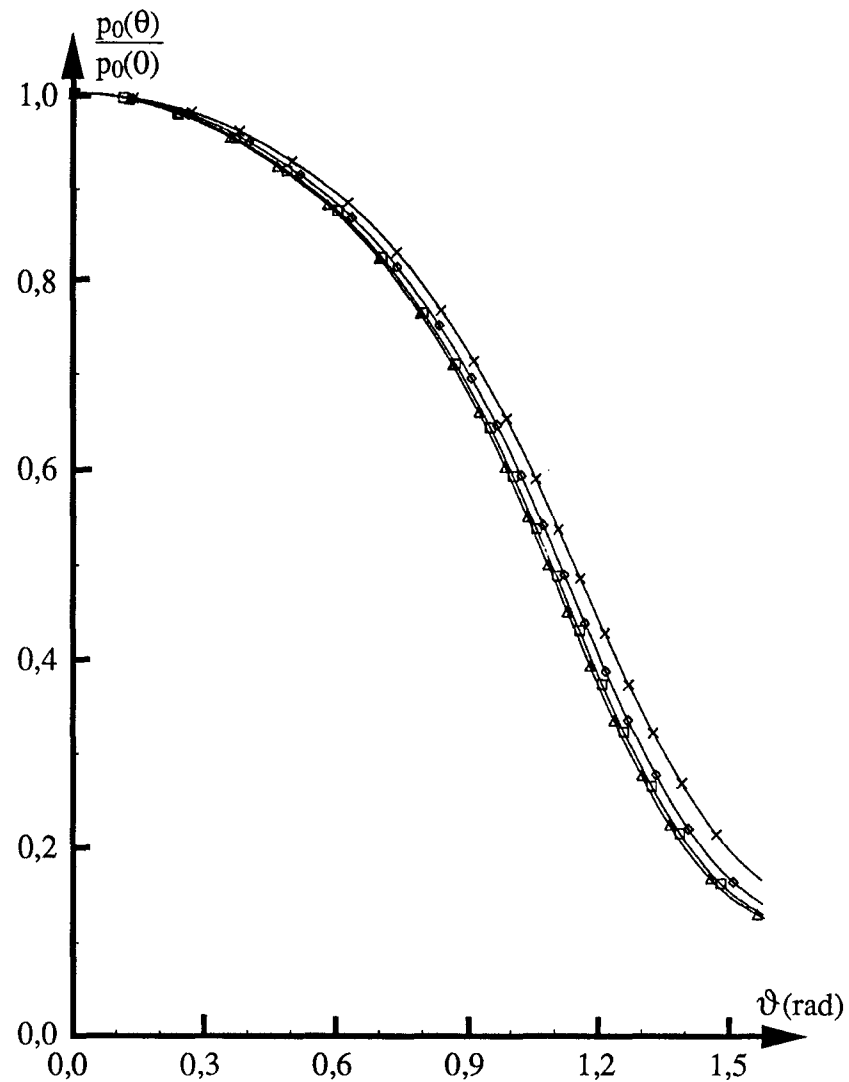
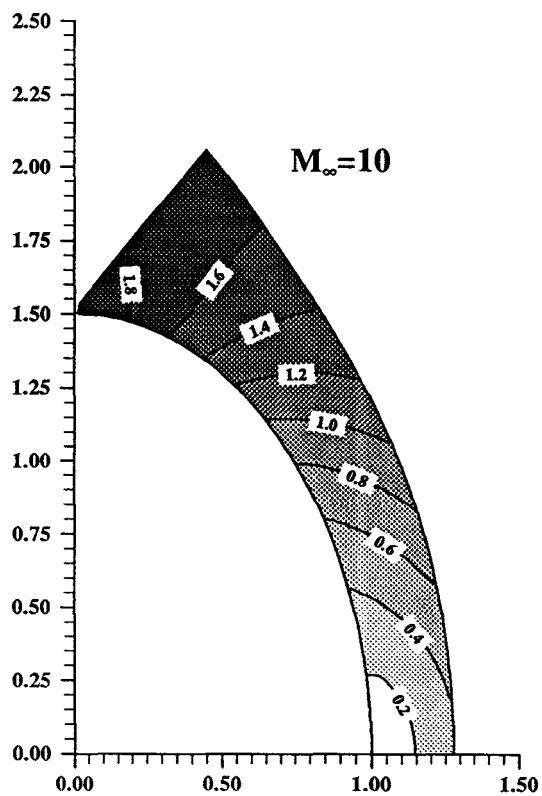
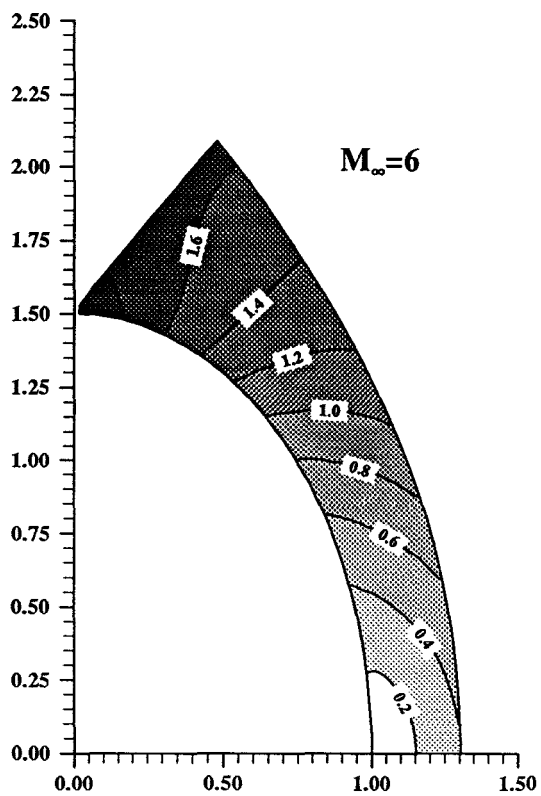
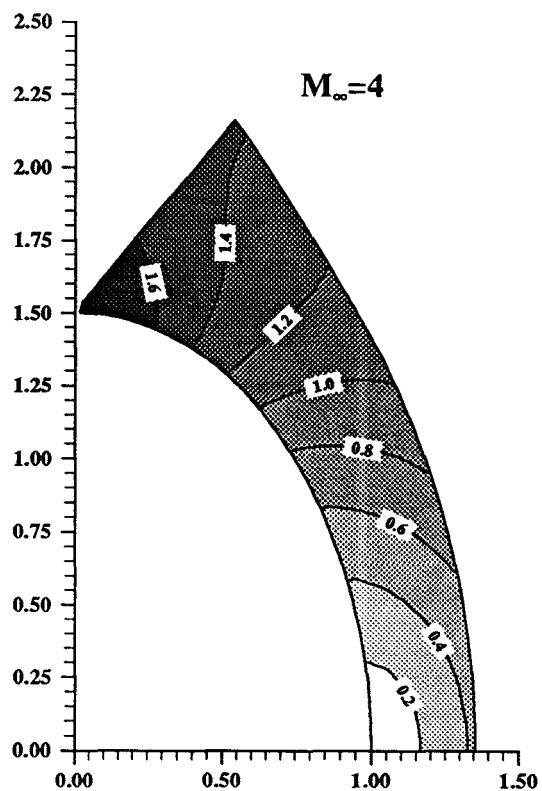
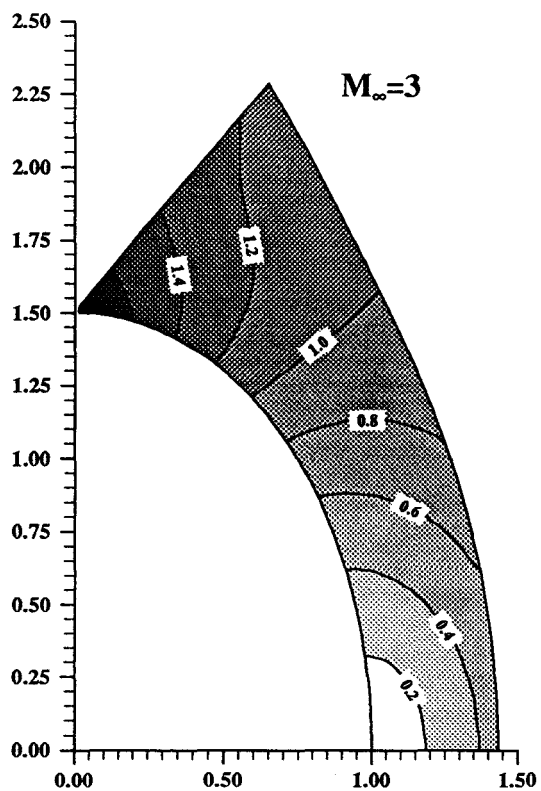
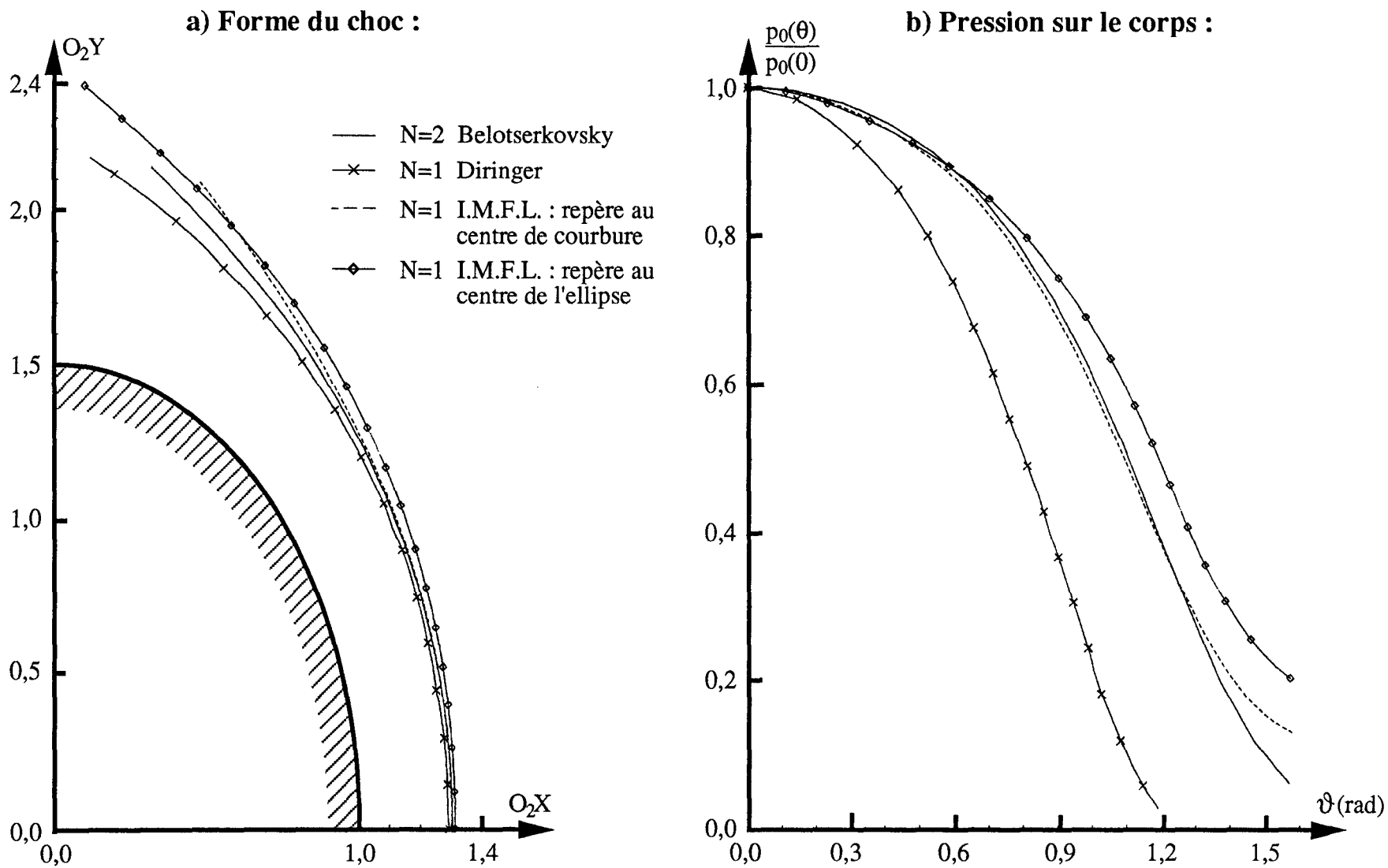


Figure 31 : Isomachs.
Ecoulement autour d'un ellipsoïde $b/a=1,5$: $N=1$.



**Figure 32 : Comparaison des différentes méthodes des relations intégrales.
Ecoulement autour d'un ellipsoïde $b/a=1,5$ $M_\infty = 6$.**



**Figure 33 : Distance de détachement du choc
suivant l'exposant de la loi de puissance.
 $N=1 \quad j=1 \quad \gamma=1,4$**

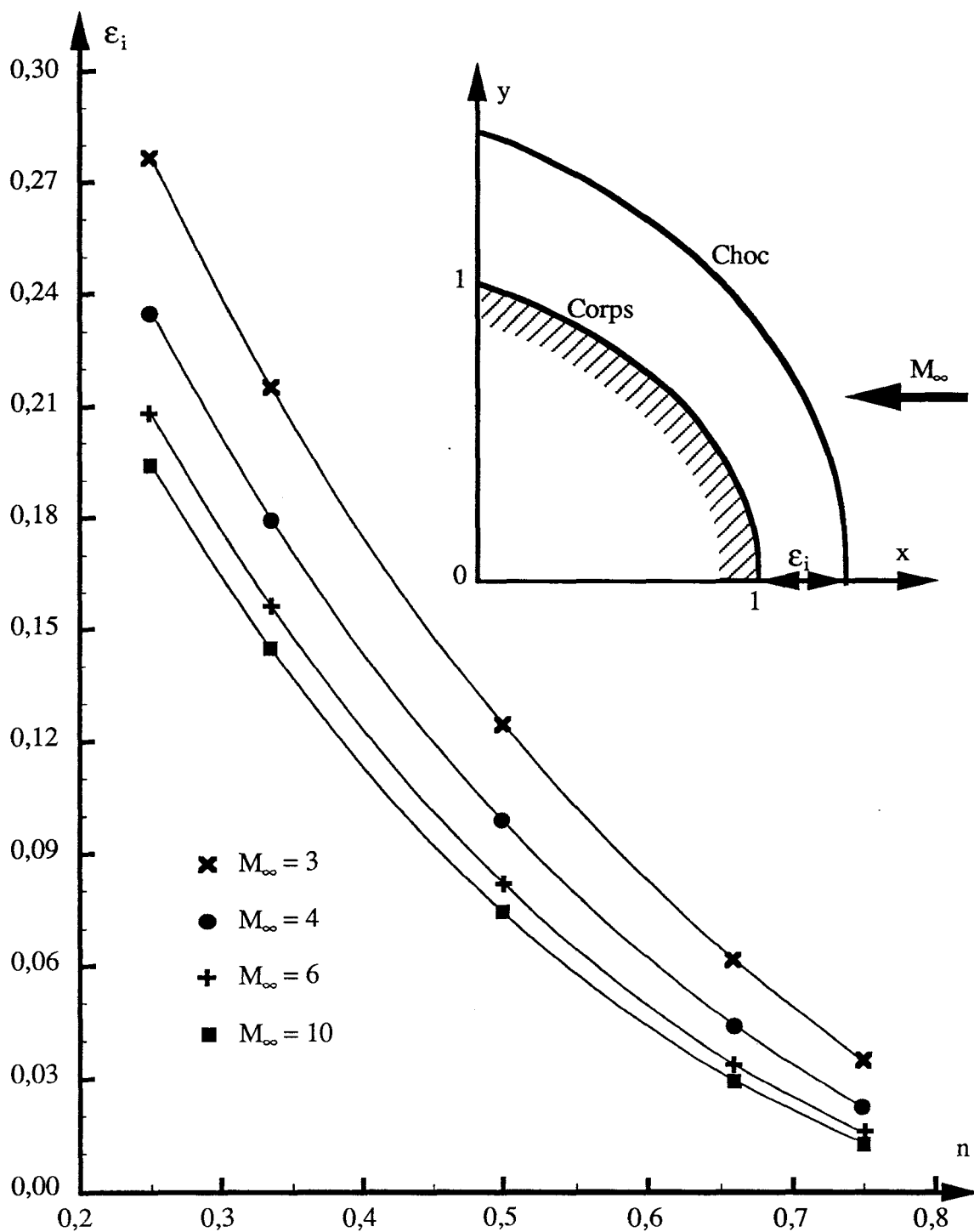
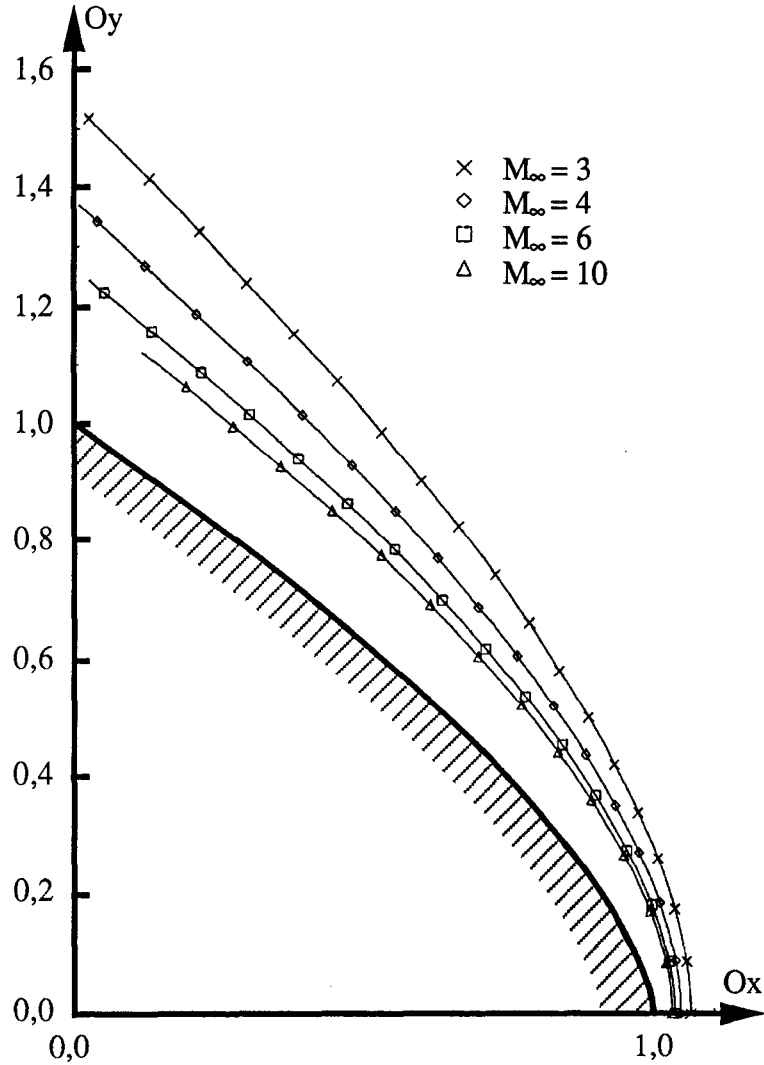


Figure 34 : Ecoulement autour d'un corps en loi de puissance 2/3 $N=1$.

a) Forme du choc :



b) Pression sur le corps :

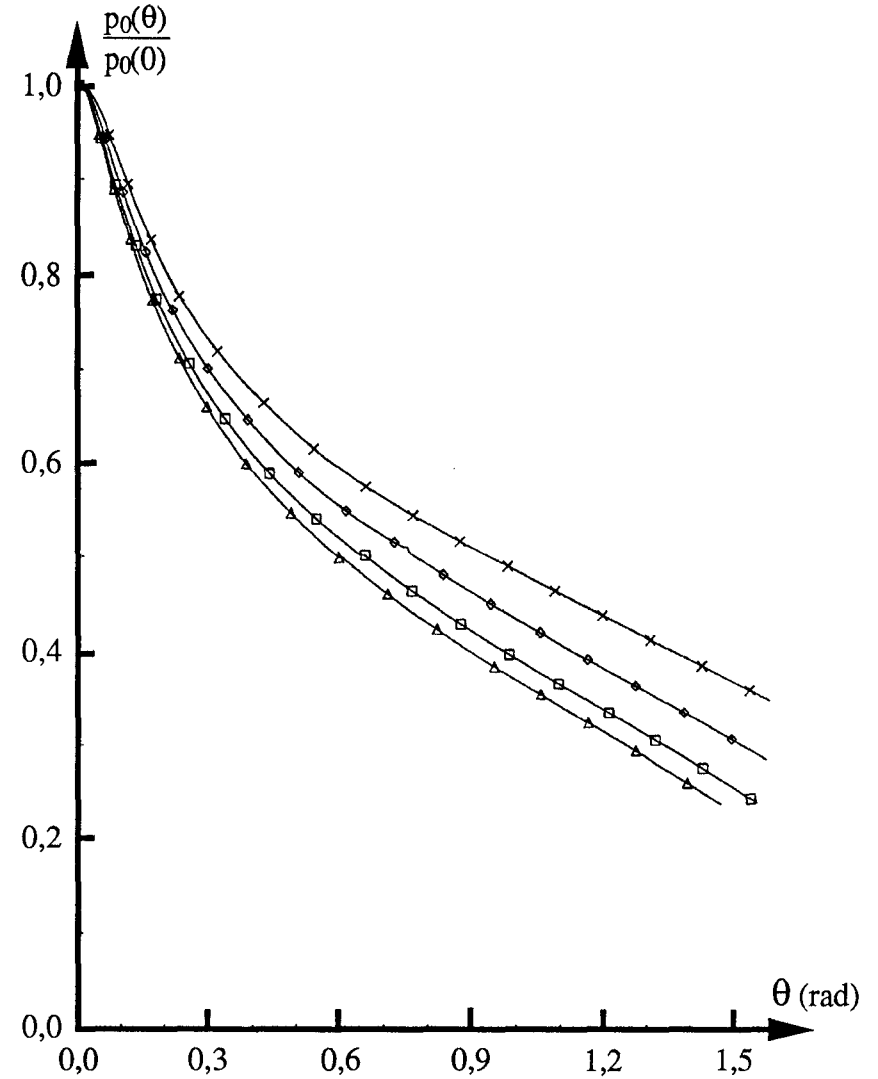


Figure 35 : Isomachs.

Ecoulement autour d'un corps en loi de puissance 2/3 : $N=1$.

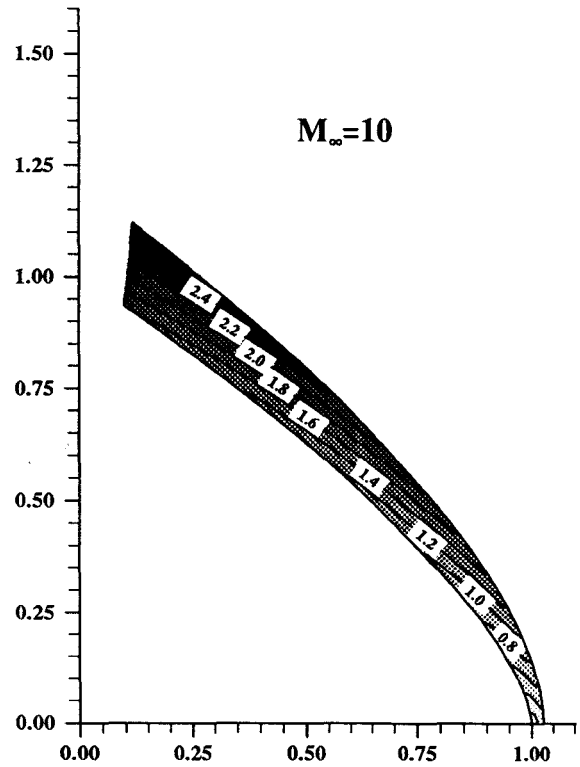
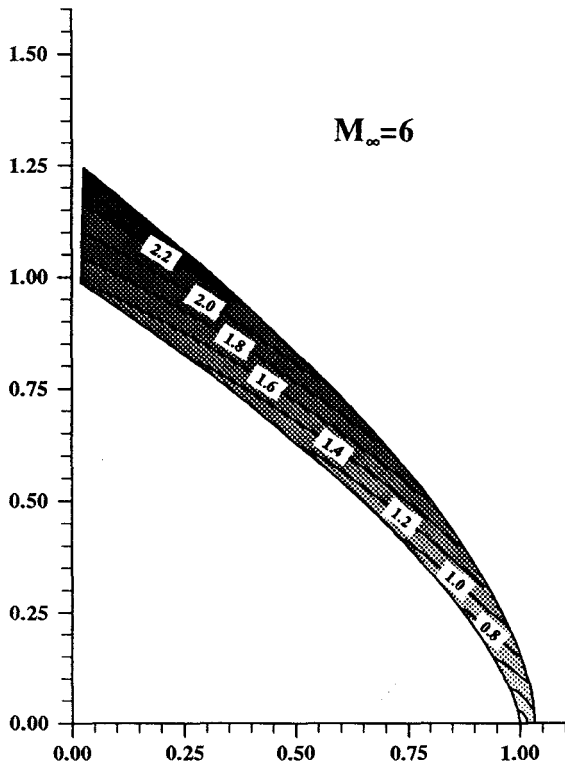
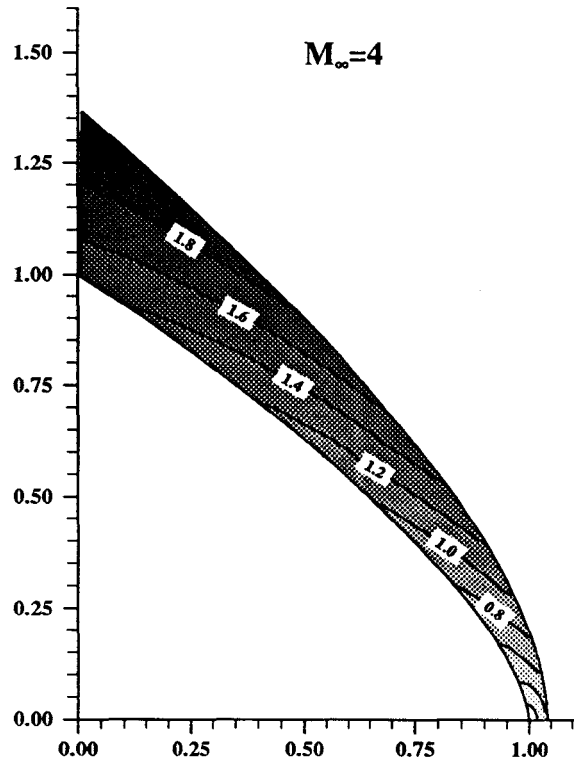
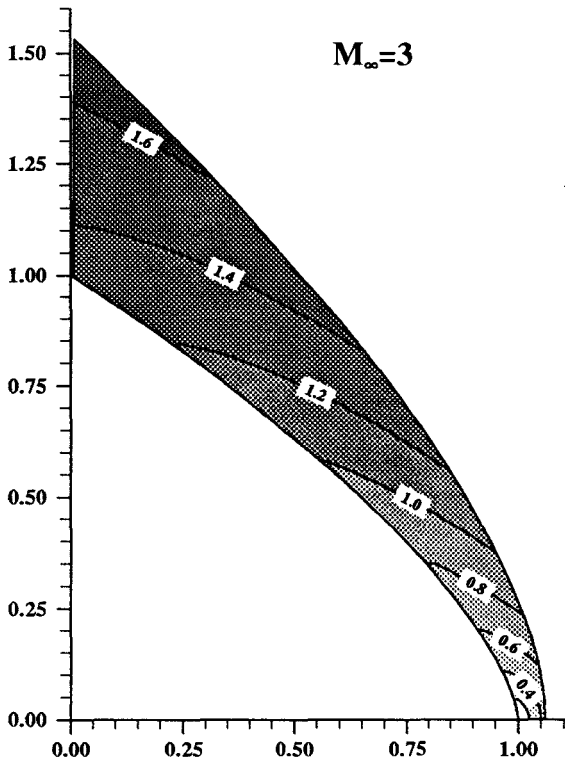
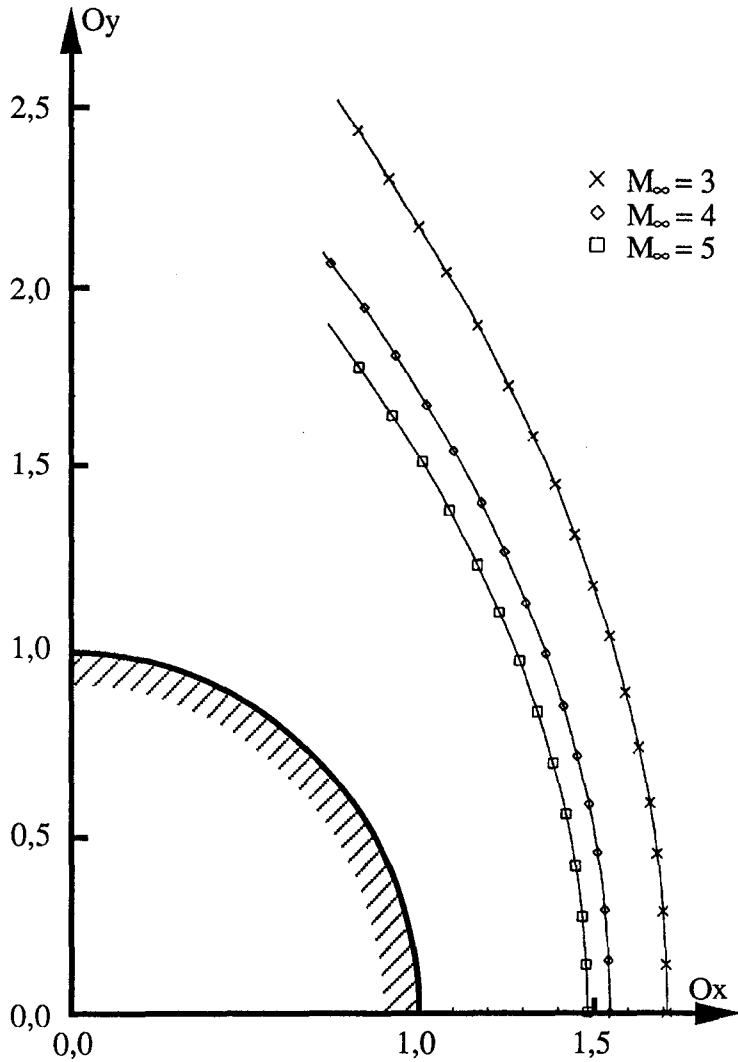


Figure 36 : Ecoulement autour d'un cylindre $N=2$.

a) Forme du choc :



b) Pression sur le corps :

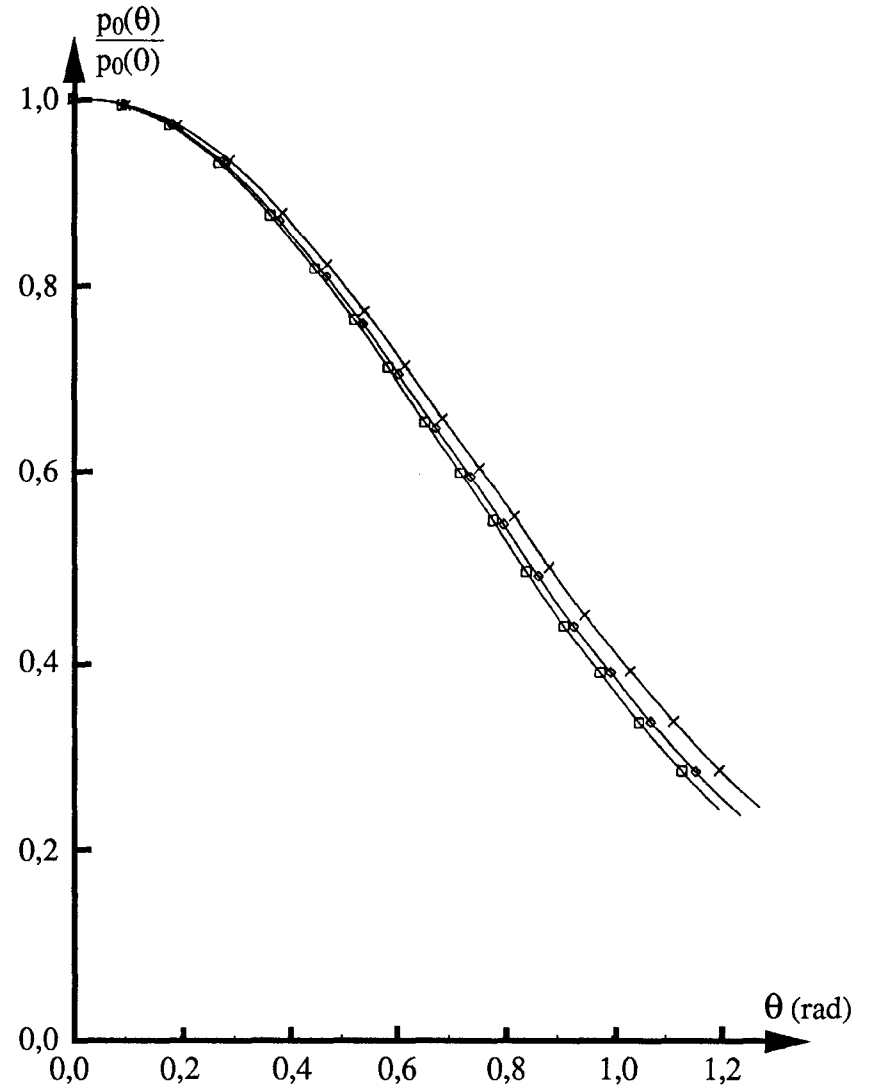
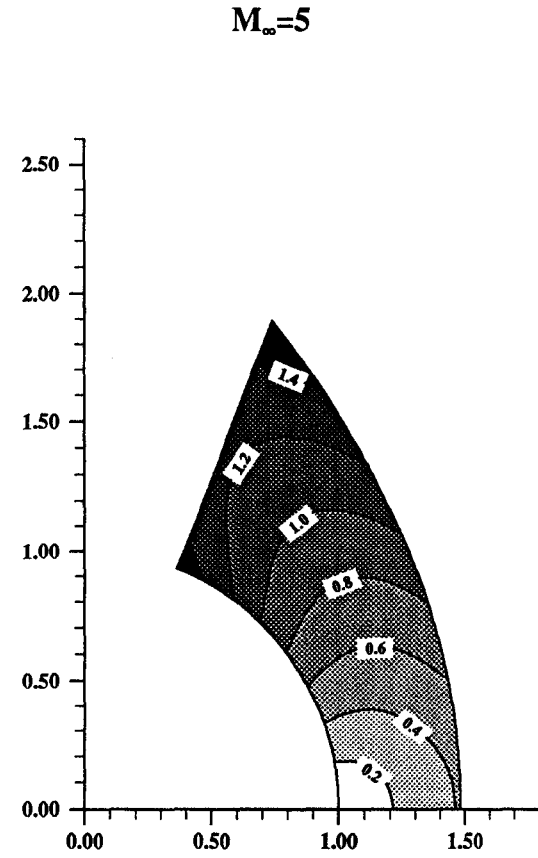
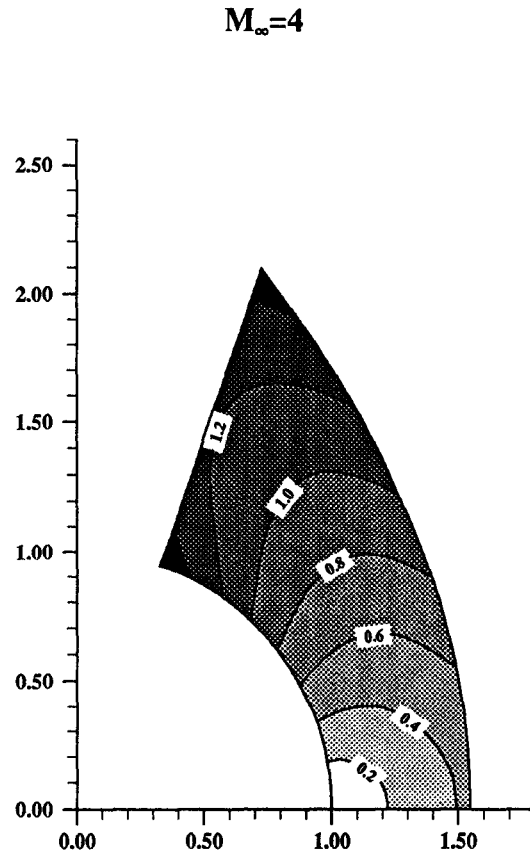
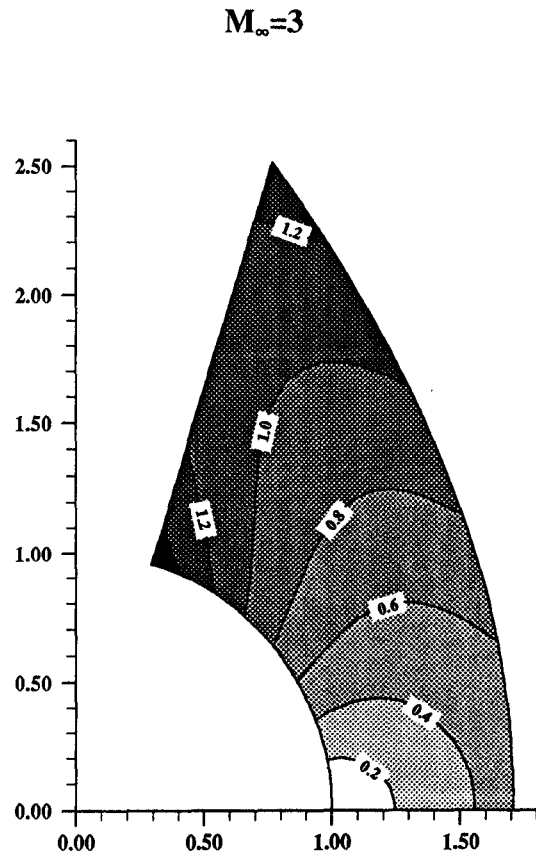
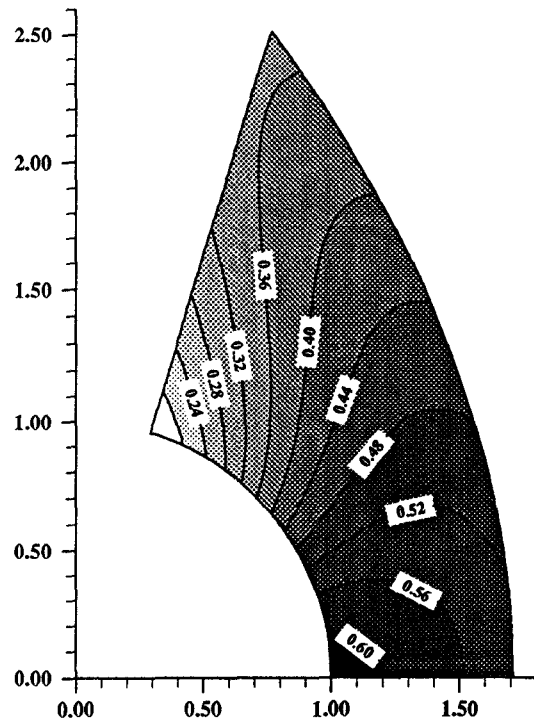


Figure 37 : Isomachs.
Ecoulement autour d'un cylindre : $N=2$.

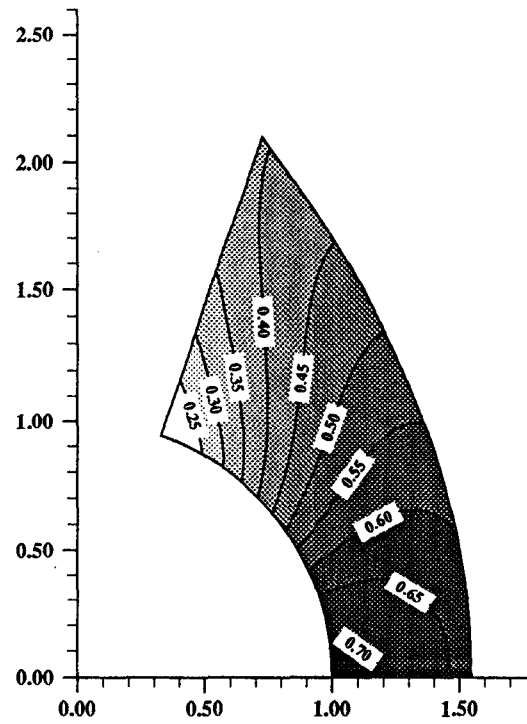


**Figure 38 : Carte de pression.
Ecoulement autour d'un cylindre : N=2.**

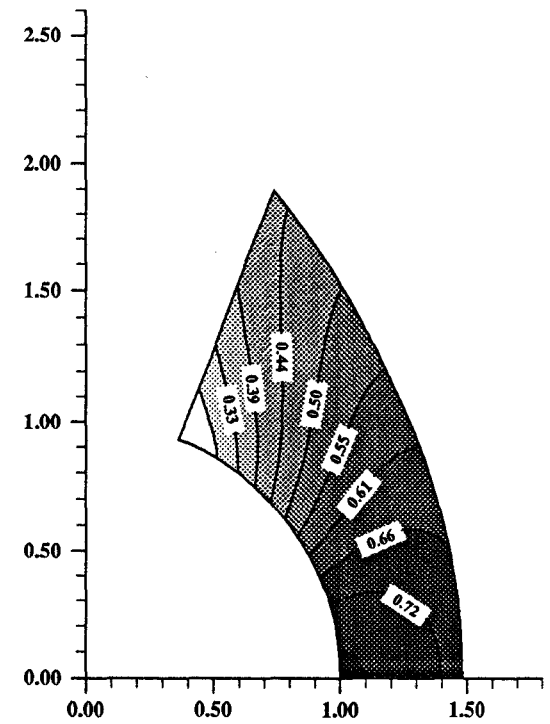
$M_\infty=3$



$M_\infty=4$

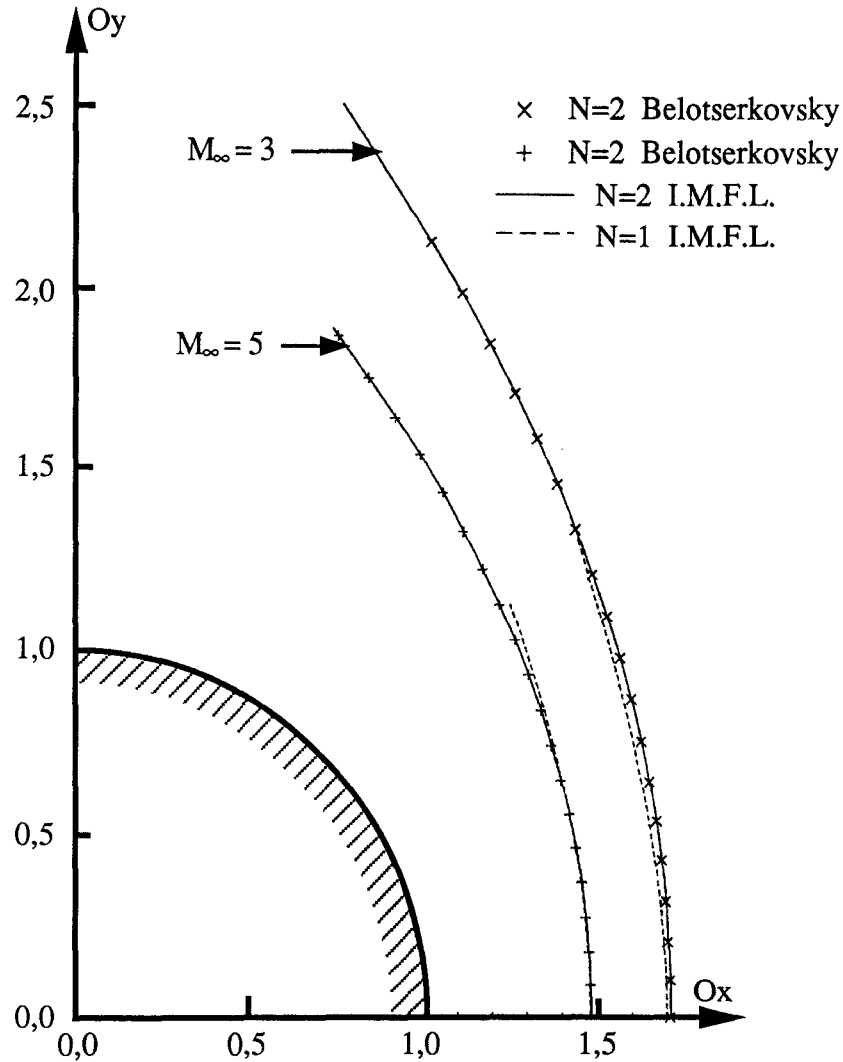


$M_\infty=5$

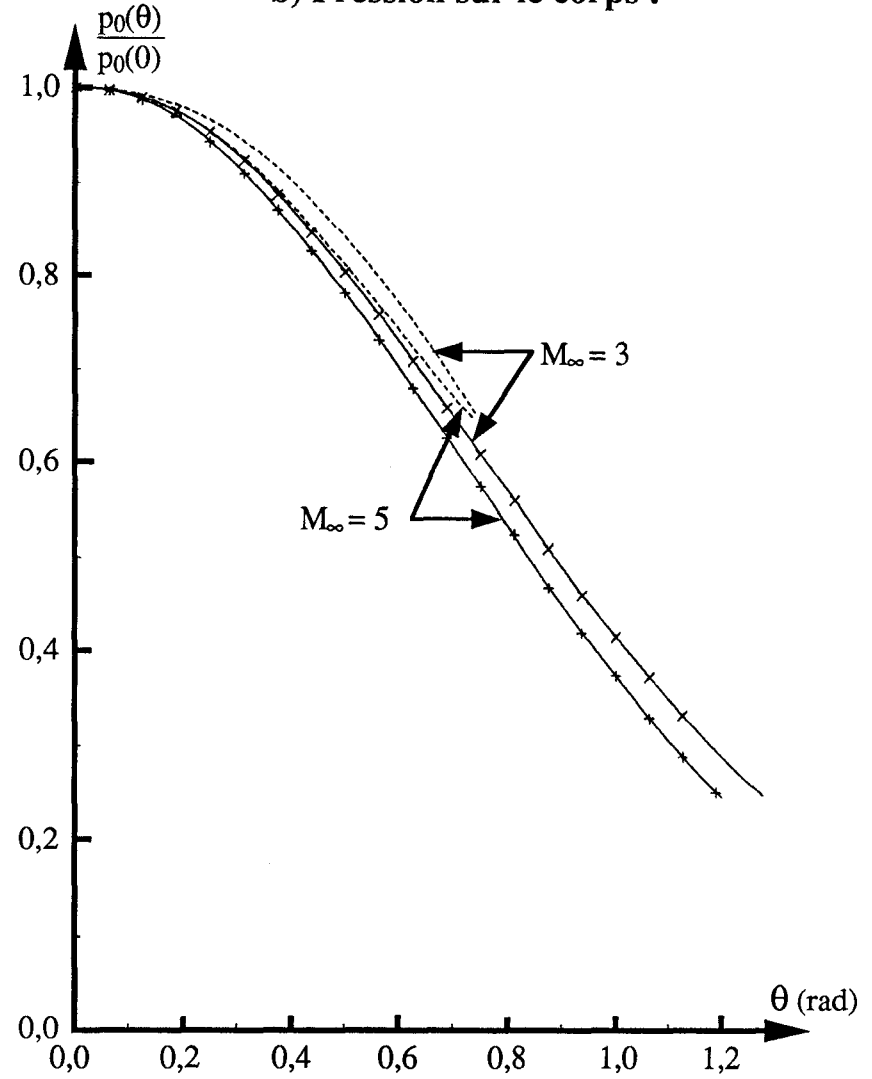


**Figure 39 : Comparaison des différentes méthodes des relations intégrales.
Écoulement autour d'un cylindre $M_\infty = 3$ et $M_\infty = 5$.**

a) Forme du choc :

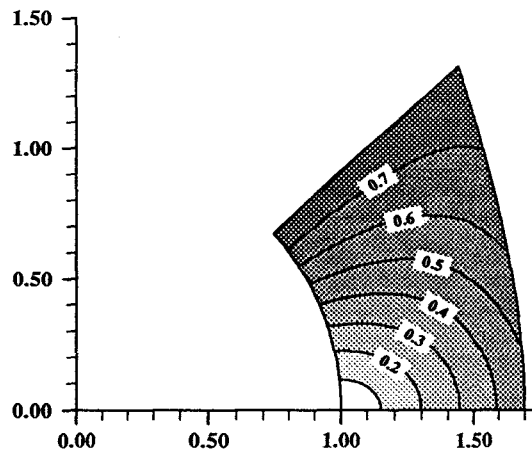


b) Pression sur le corps :



**Figure 40 : Comparaison des isomachs N=1 et N=2.
Ecoulement autour d'un cylindre : $M_\infty = 3$.**

N=1



N=2

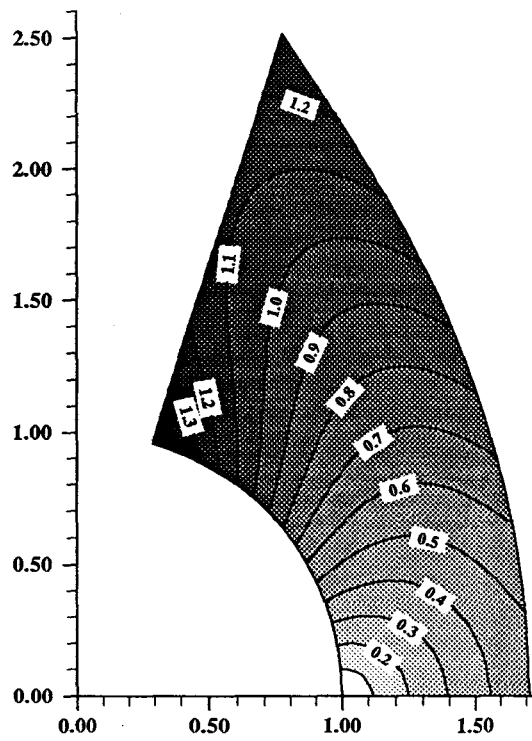
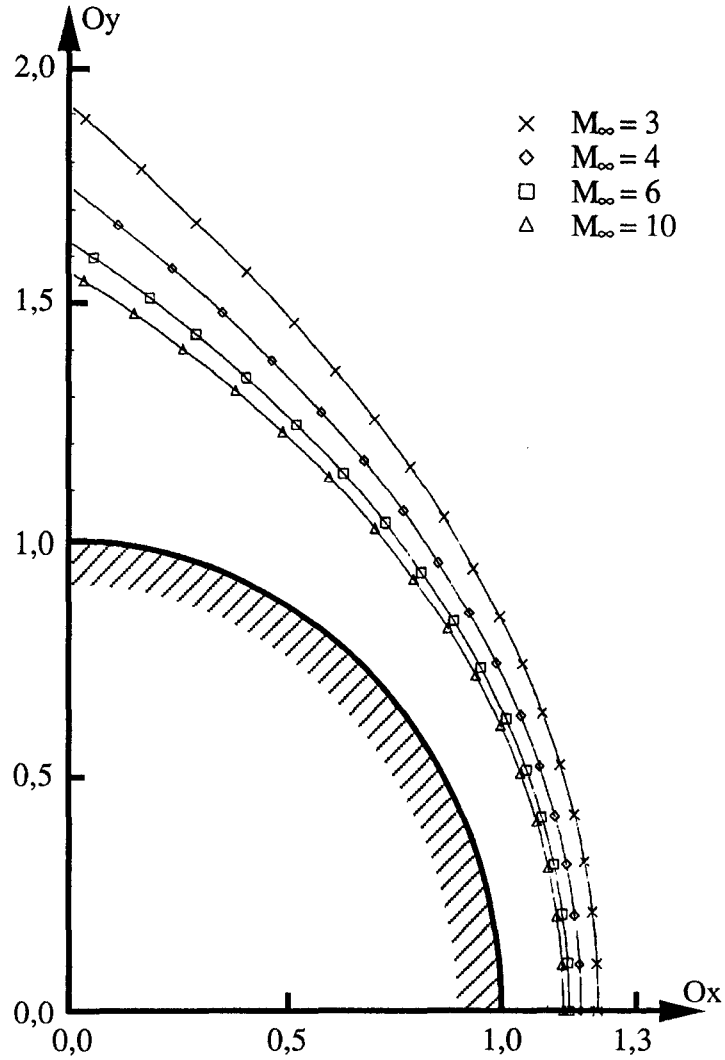


Figure 41 : Ecoulement autour d'une sphère $N=2$.

a) Forme du choc :



b) Pression sur le corps :

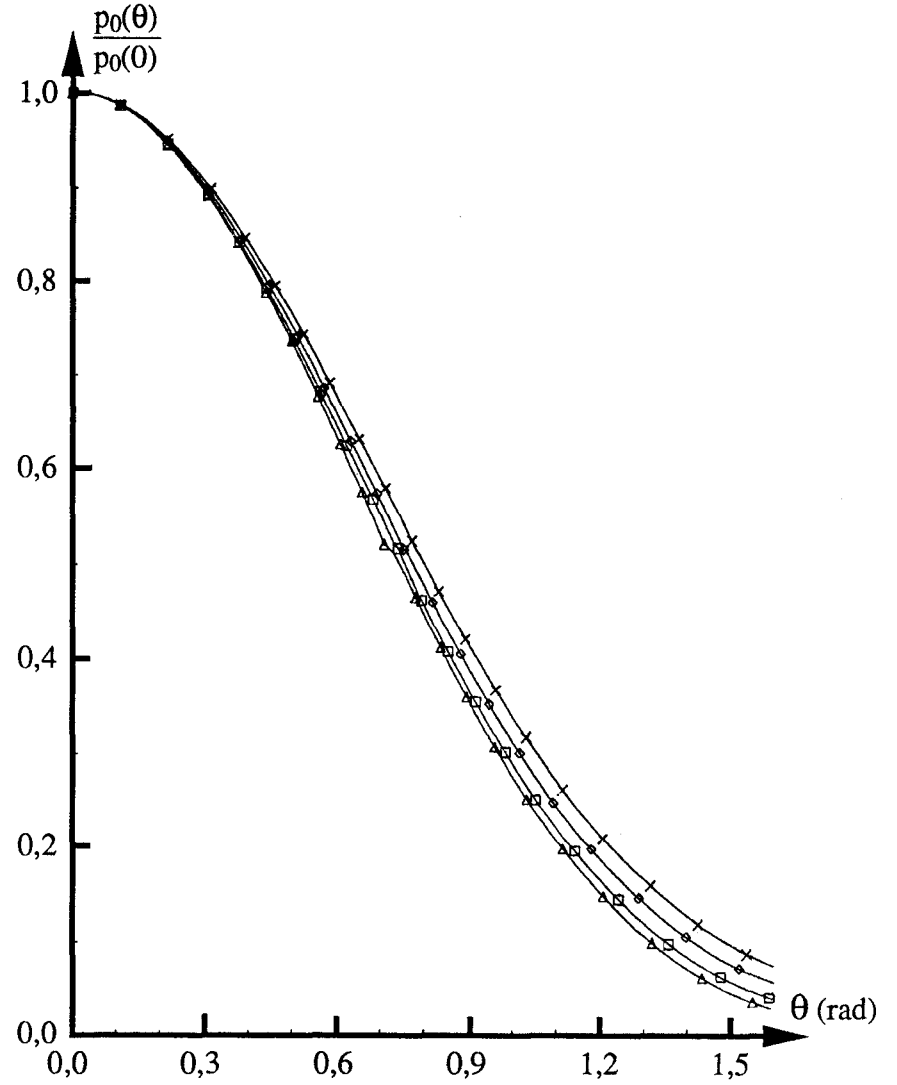


Figure 42 : Isomachs.
Ecoulement autour d'une sphère : N=2.

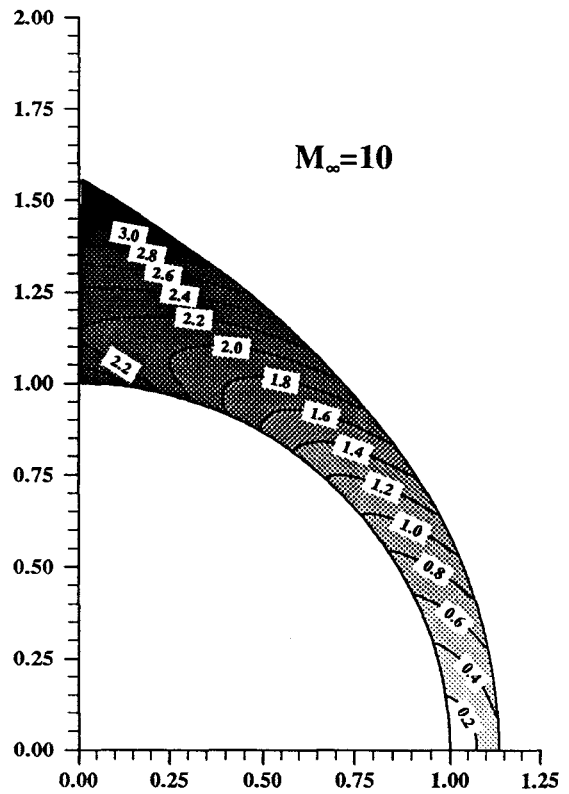
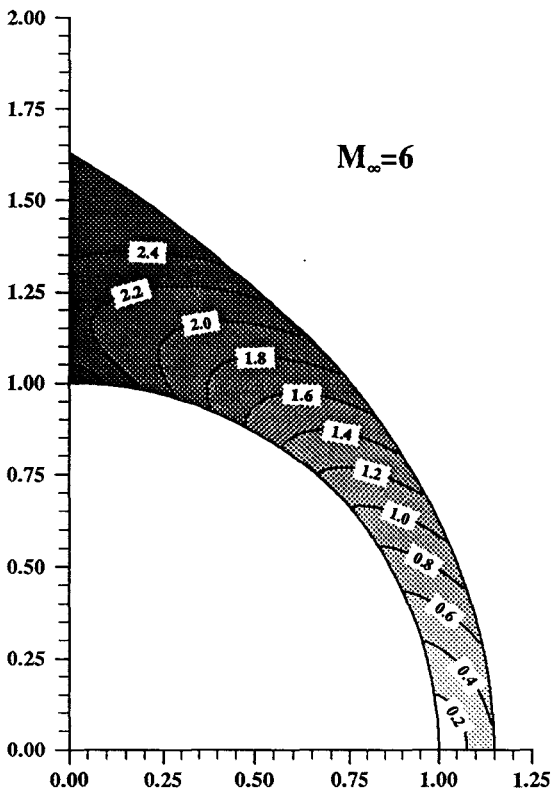
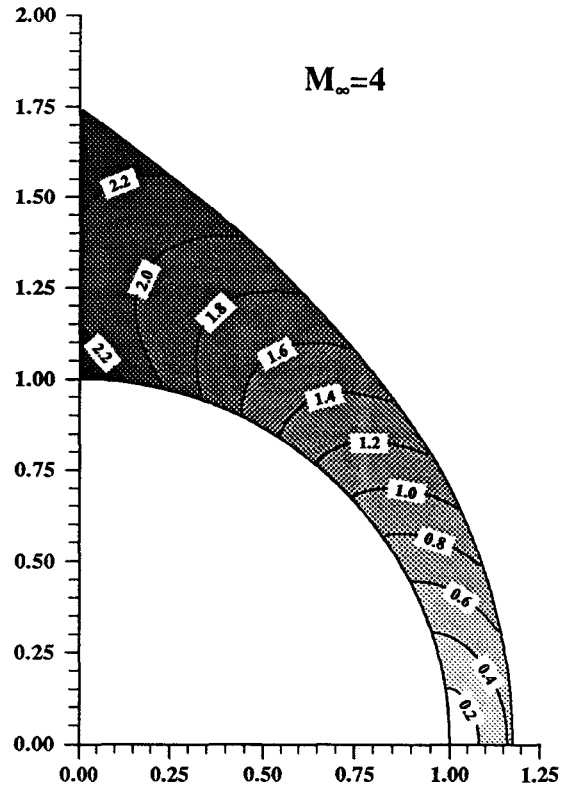
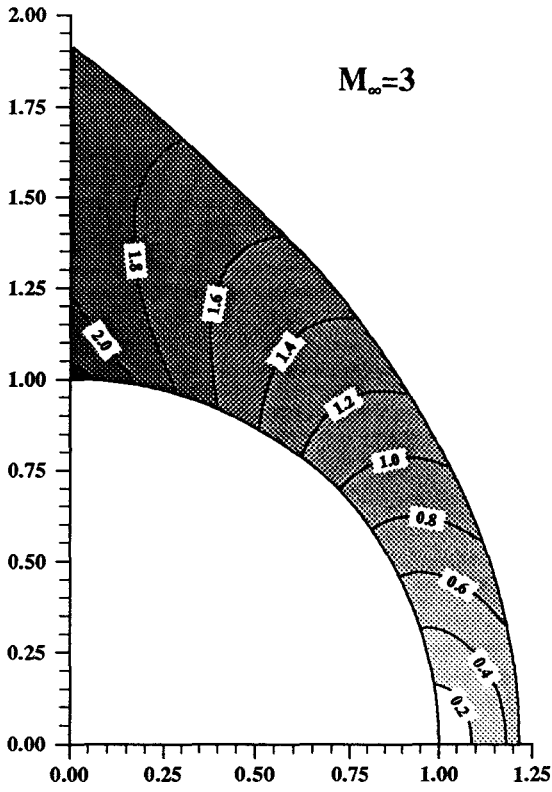
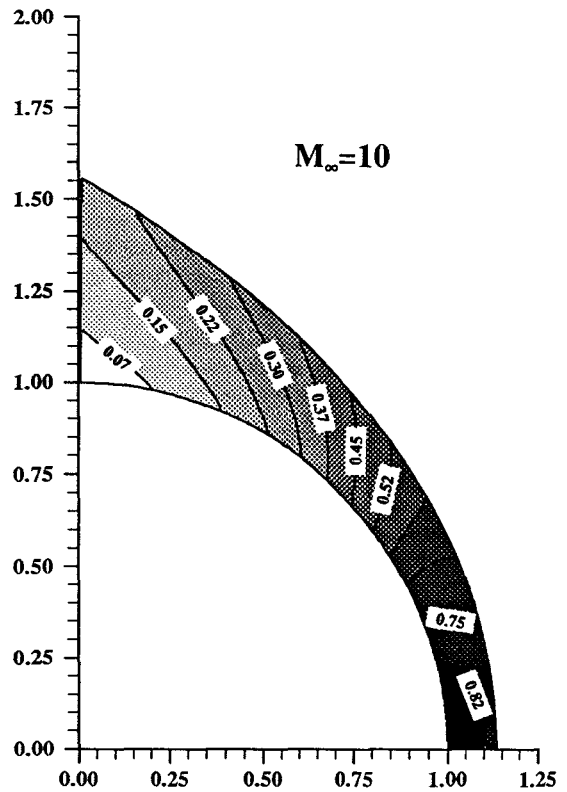
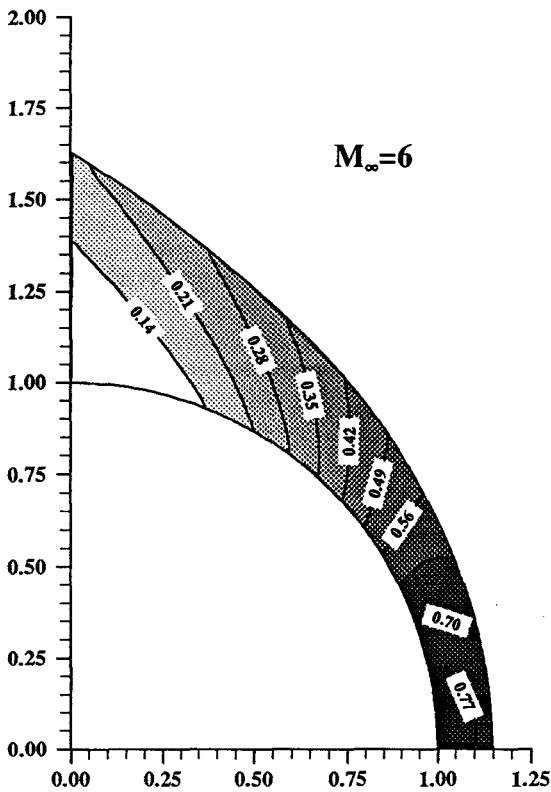
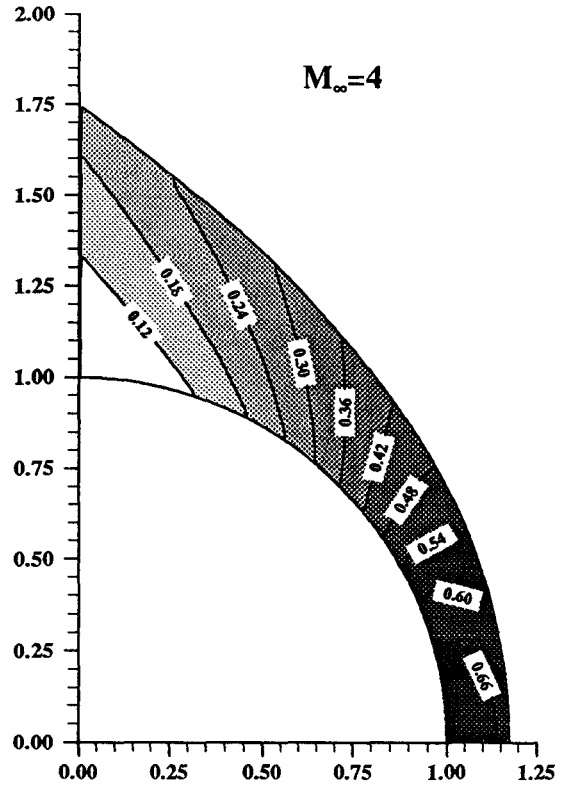
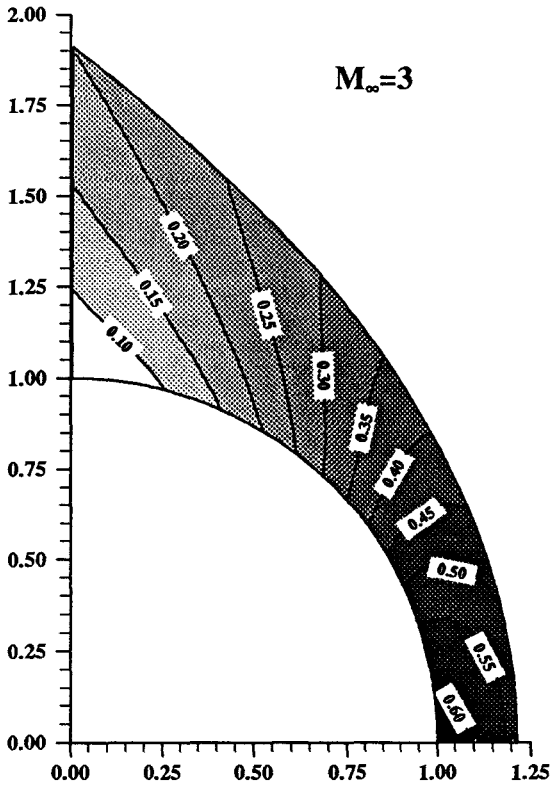


Figure 43 : Carte de pression.
 Ecoulement autour d'une sphère : $N=2$.



**Figure 44 : Carte de masse volumique.
Ecoulement autour d'une sphere : $N=2$.**

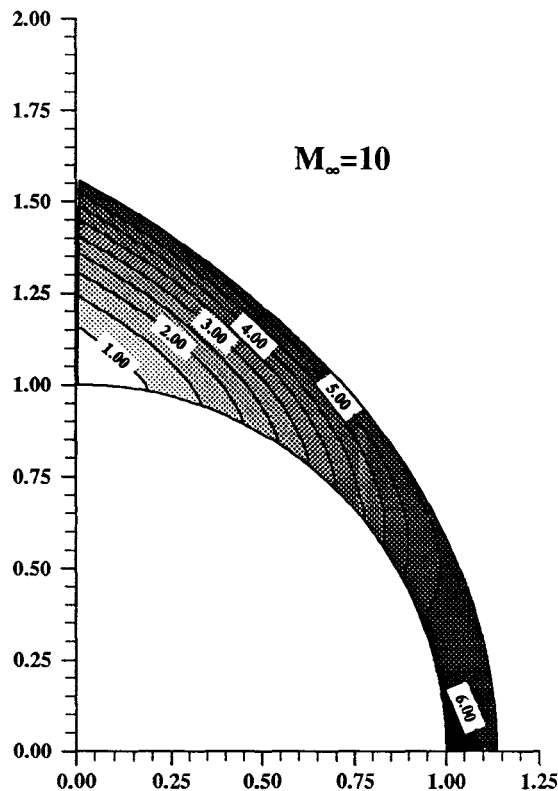
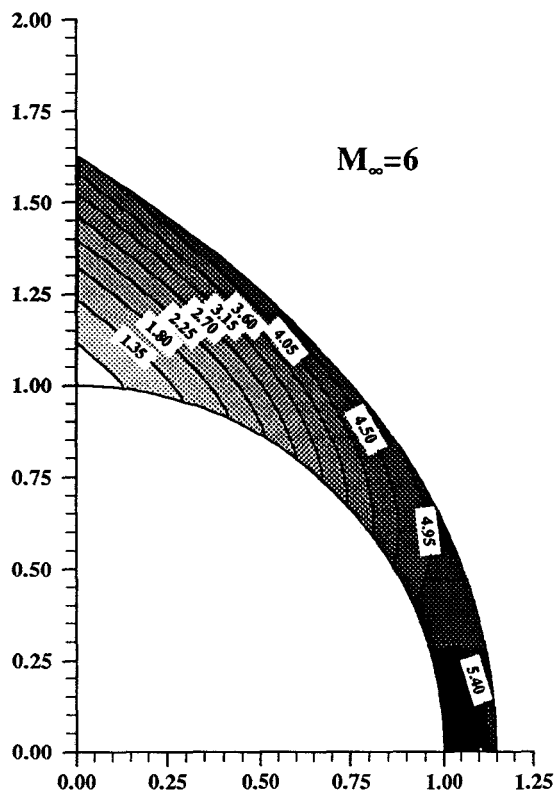
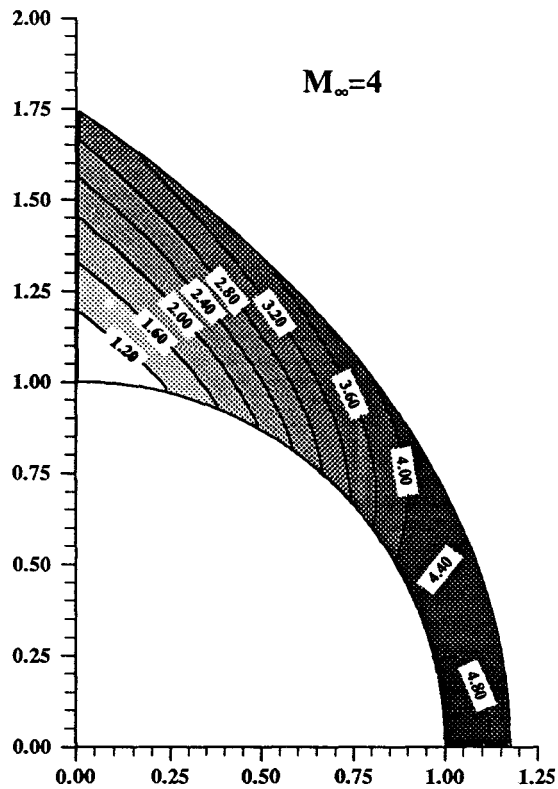
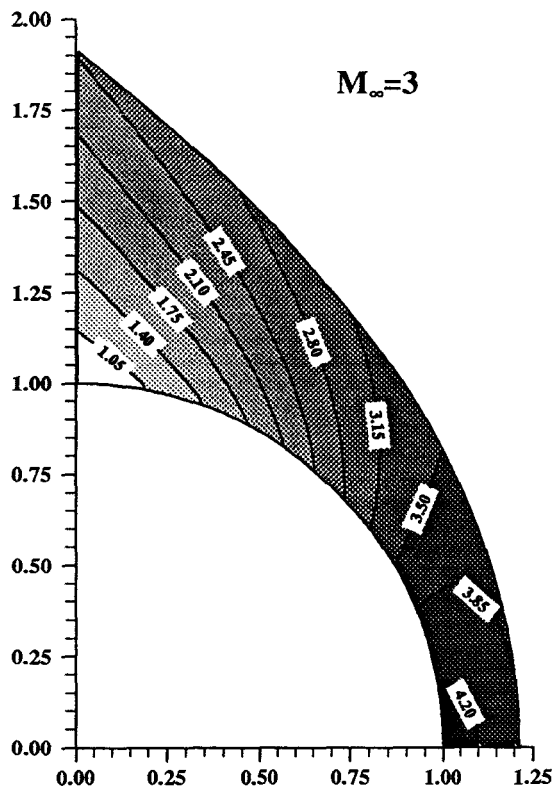


Figure 45 : Carte de température.
 Ecoulement autour d'une sphère : $N=2$.

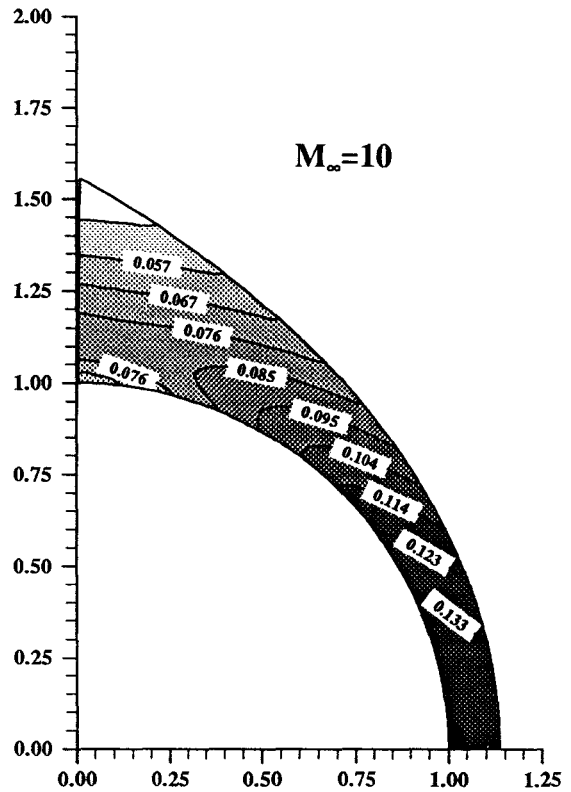
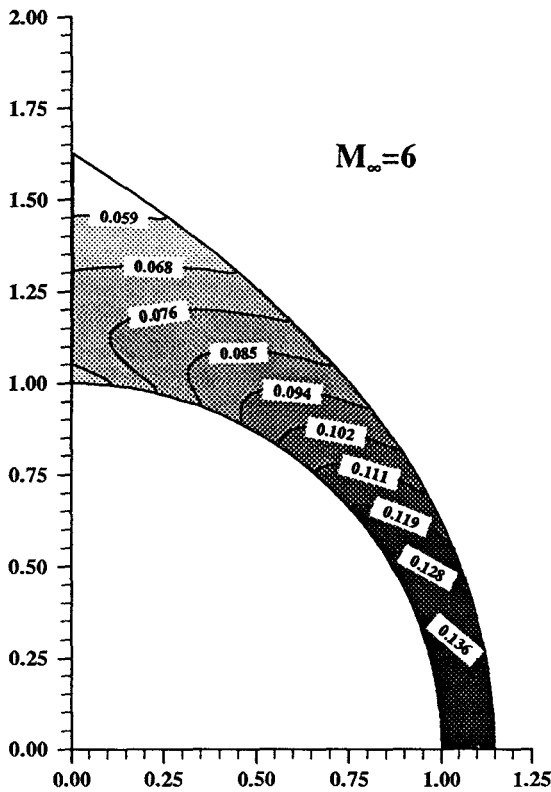
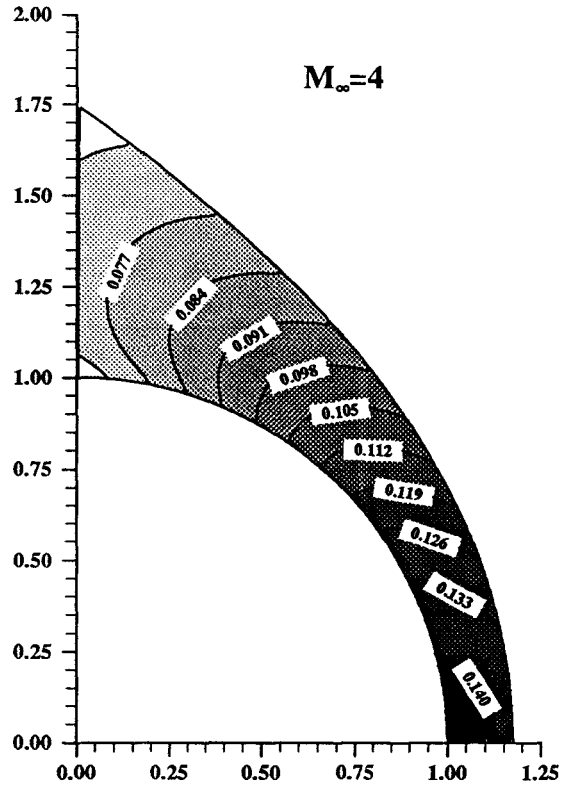
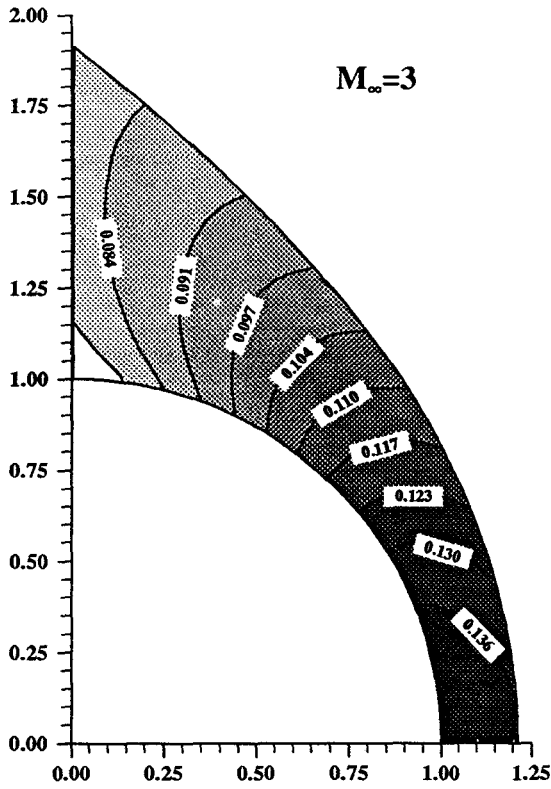
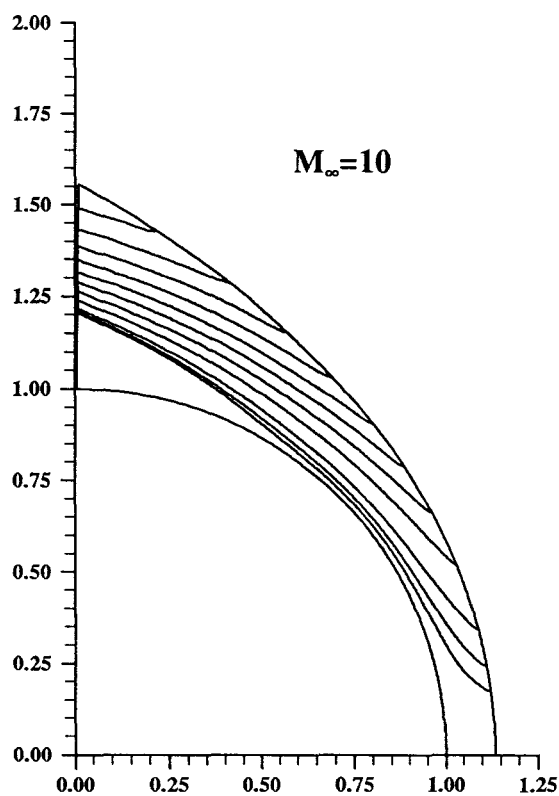
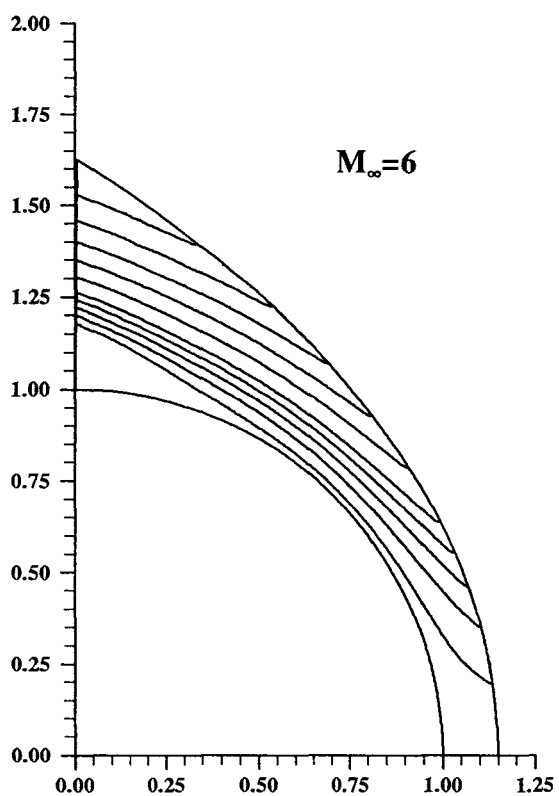
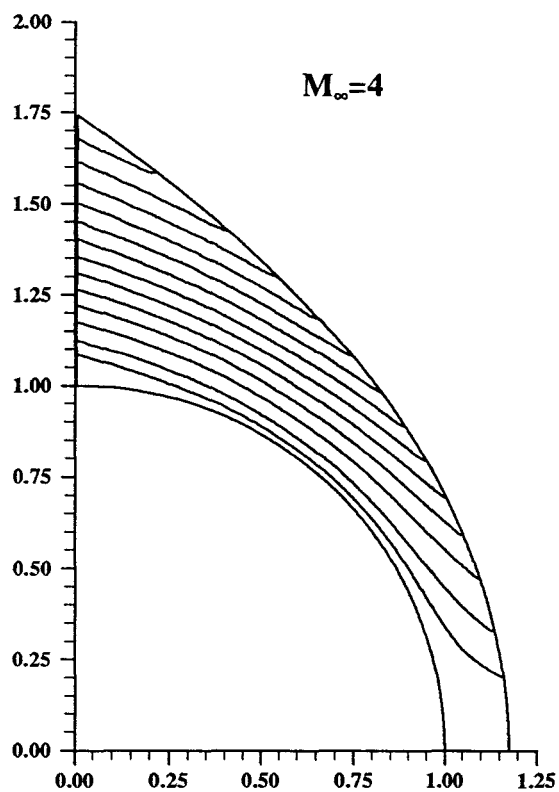
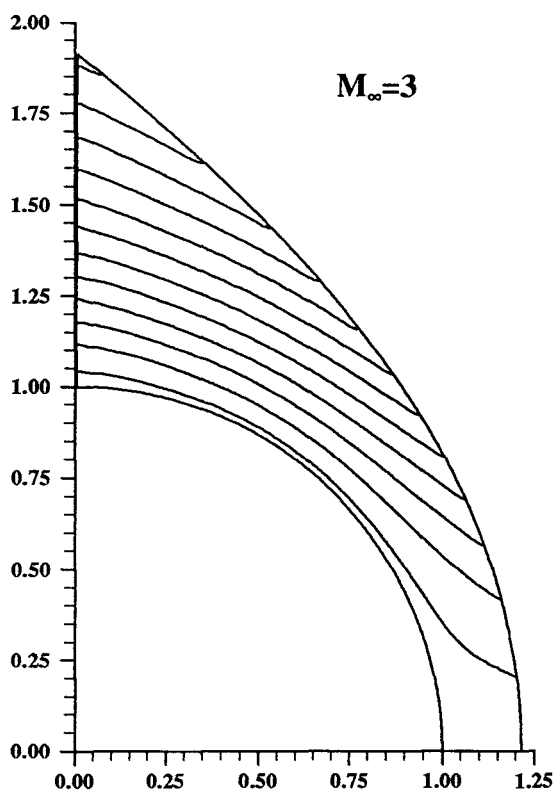


Figure 46 : Lignes de courant.
Ecoulement autour d'une sphère : $N=2$.



**Figure 47 : Comparaison des différentes méthodes des relations intégrales.
Écoulement autour d'une sphère $M_\infty = 6$.**

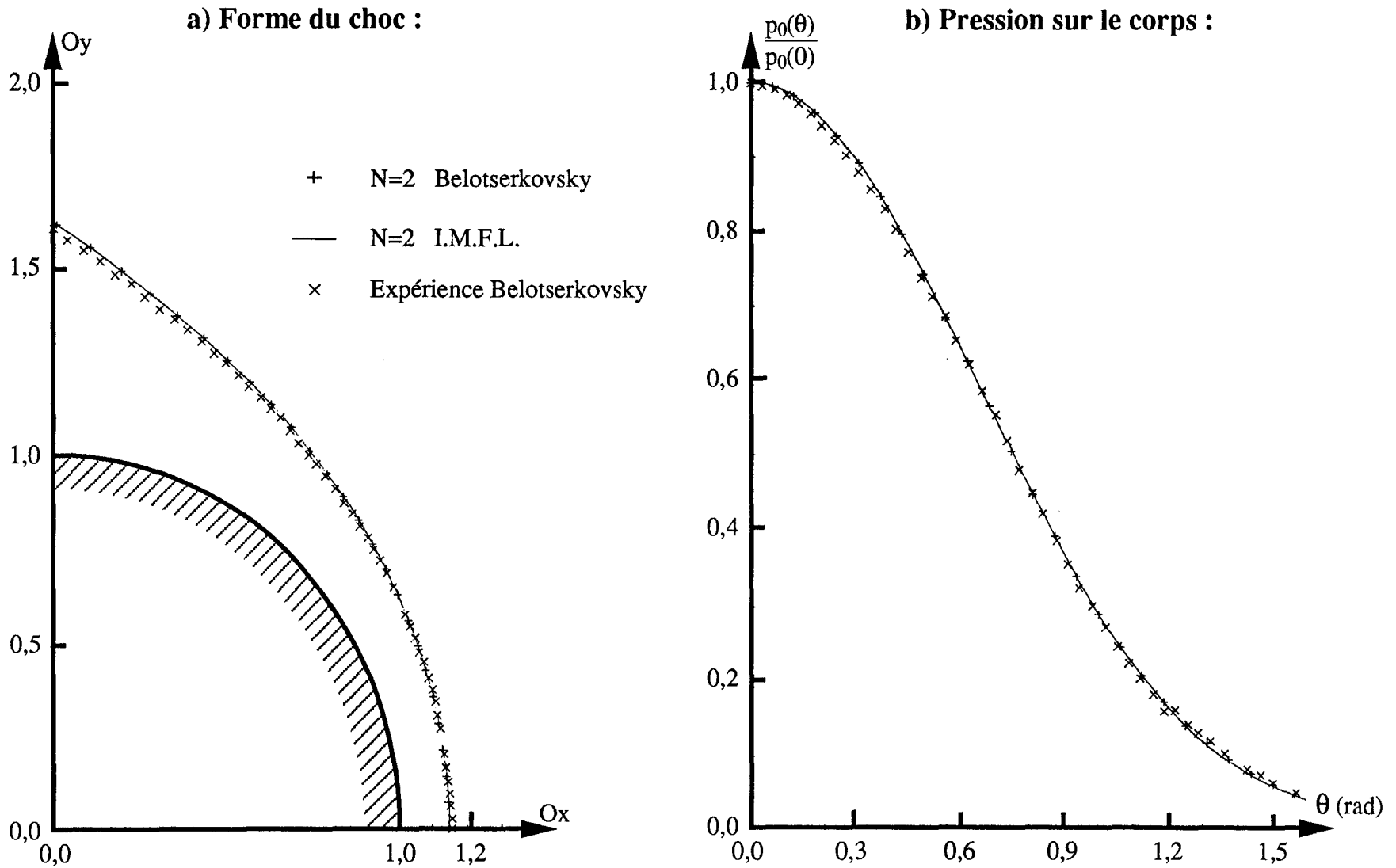
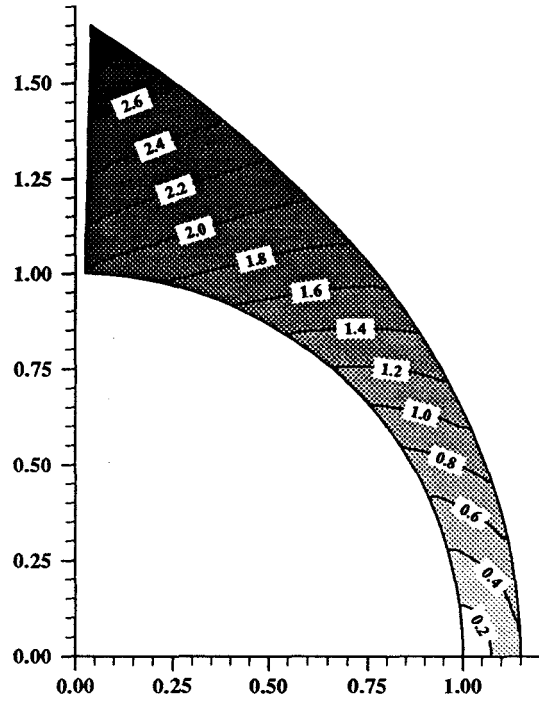
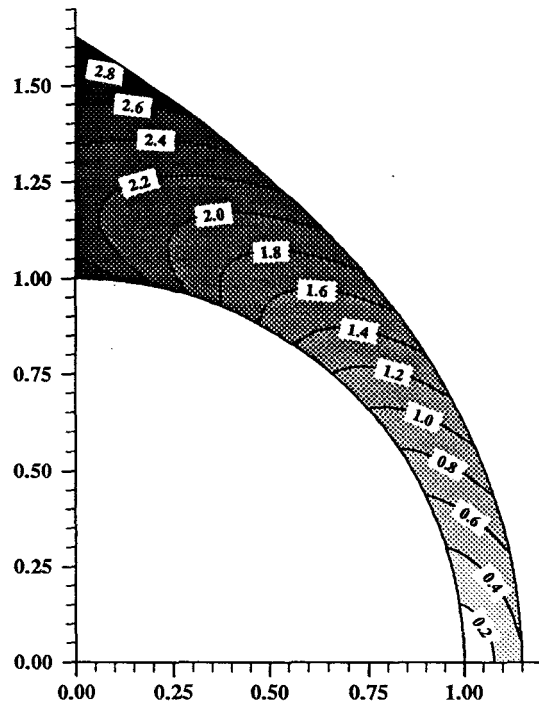


Figure 48 : Comparaison des isomachs $N=1$ et $N=2$.
Ecoulement autour d'une sphère : $M_\infty = 6$.

$N=1$

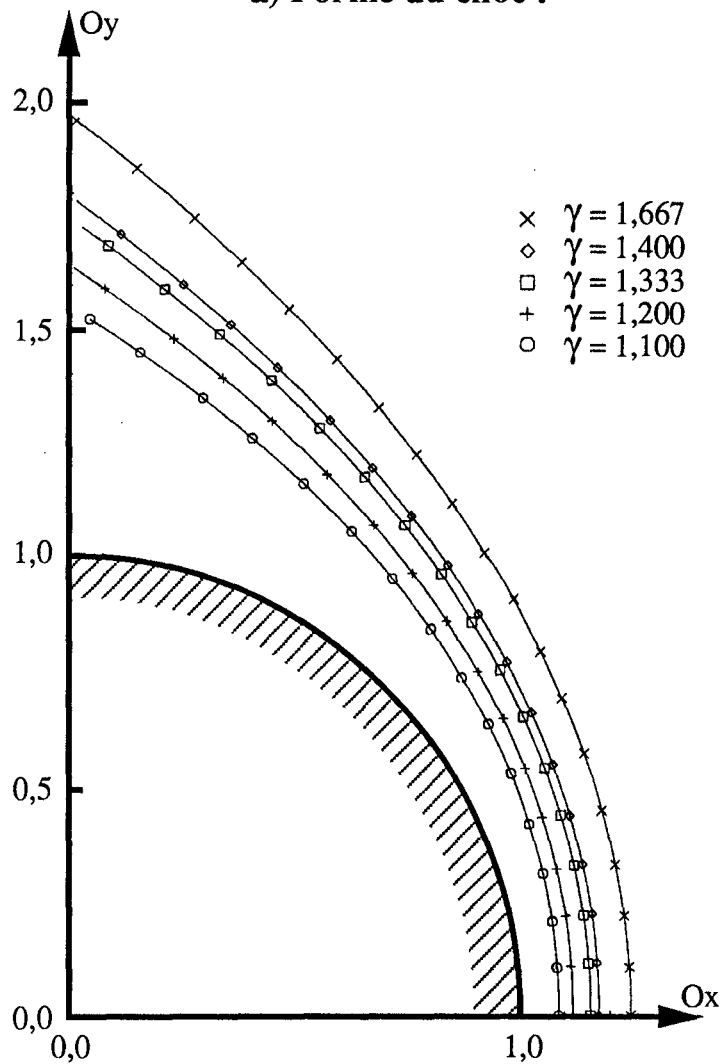


$N=2$



**Figure 49 : Variation du rapport de chaleur spécifique γ .
Ecoulement autour d'une sphère $M_\infty=4$ et $N=1$.**

a) Forme du choc :



b) Pression sur le corps :

