

UNIVERSITE DES SCIENCES
ET TECHNOLOGIES DE LILLE

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE DE LILLE
GROUPE "FIABILITE DES STRUCTURES"

N° d'ordre : 1187

Année Universitaire : 1992-1993

50376
1993
248

50376
1993
248

THÈSE DE DOCTORAT
"LABEL EUROPEEN"

présentée pour l'obtention du
DIPLOME DE DOCTORAT EN MÉCANIQUE

par

TEYEB Ould Mohamed Mahmoud

Sujet de thèse



**ANALYSE GEOMETRIQUEMENT
NON LINEAIRE DES COQUES ET PLAQUES :
APPLICATION AUX STRUCTURES LAMINEES**

**GEOMETRICALLY NONLINEAR
ANALYSIS OF SHELLS AND PLATES :
APPLICATION TO LAMINATED STRUCTURES**

Soutenue le : 09 Novembre 1993

devant le Jury composé de :

Président : Mr PARSY F. : Prof. à l'Université des Sciences et Technologies de Lille I

Rapporteurs :

Mr SCHMIDT R. : Prof. à l'Université de Wuppertal (ALLEMAGNE)

Mr VALID R. : Prof. à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures de Paris

Mr DE SAXCÉ G. : Prof. à la Faculté Polytechnique de Mons (BELGIQUE)

Examineur : Mr WEICHERT D. : Prof. à l'Université des Sciences et Technologies de Lille I

*à la mémoire de mes
grand-pères Abba & Amy*

*à mes grand-mères
Neïna & Hmouma*

REMERCIEMENTS

Ce travail, effectué au Laboratoire de Mécanique de Lille (L.M.L.), groupe "Fiabilité des Structures", a été réalisé au Département Mécanique de L'Ecole Universitaire D'Ingénieurs de Lille (E.U.D.I.L.), à l'Université des Sciences et Technologies de Lille (U.S.T.L.).

J'adresse mes remerciements au Professeur Dieter Weichert, dont l'enthousiasme dès la première heure a attiré mon attention sur la méthode de travail et dont la disponibilité et l'ouverture ont permis la réalisation de ce travail.

Je suis très reconnaissant à Messieurs R. Schmidt et R. Valid, d'une part, pour l'aide et les conseils qu'ils m'ont apportés, et d'autres part, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de rapporter ce travail. Je tiens à remercier également Monsieur G. De Saxcé pour avoir accepté d'être rapporteur.

Je suis sensible à l'honneur, que m'a fait Monsieur F. Parsy, de présider mon Jury, et qui a toujours, manifesté son intérêt pour mes travaux, je le remercie vivement.

Tout le mérite revient à Monsieur I. Kreja, à qui j'exprime tous mes remerciements et ma reconnaissance. C'est grâce à ses conseils et idées, que la partie numérique de ce travail a abouti.

Je remercie Monsieur P. Micheau, Directeur du Laboratoire de Mécanique de Lille et Monsieur C. Théron, Directeur des études du Département Mécanique de l'E.U.D.I.L., de m'avoir aidé.

Mes remerciements vont à mes collègues du Département Mécanique de l'E.U.D.I.L., Messieurs K. Woznica, J.-B. Tritsch, M. Pyrz, J.-L. Munoz, G. Delanaud.

Je suis reconnaissant à mes amis Y. Kaczmar, A. Haddi, A. Groß-Weege, B. Abdellahi, Mama, Debellahi, B. Fraikin, C. Fontaine, S. Goujon pour le soutien qu'ils n'ont cessé de m'apporter.

Enfin, je remercie beaucoup mes parents, grand-parents, frères et soeurs pour leur patience, et qui pensent à moi, plus que je pense à eux. C'est à eux que je dédie cette thèse.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

A) MOTIVATION

Différents secteurs technologiques modernes ont un besoin croissant d'utilisation de structures souvent complexes et en matériaux nouveaux, tels les composites, dont le comportement n'est pas tout à fait maîtrisé de nos jours. Ces secteurs vont de l'aérospatiale, en passant par les constructions automobiles, ferroviaires et navales, jusqu'aux appareils d'utilité publique : outils médicaux, sportifs, etc..

De nombreux auteurs se sont intéressés aux coques et plaques ces dernières décennies, en vue d'établir une théorie fiable pour une modélisation correcte tant au niveau de la validité physique qu'au niveau de la formulation mathématique. Par une théorie fiable, nous voulons dire une théorie qui permet de décrire le comportement des coques : solides occupant un volume entre deux surfaces telles que leur distance soit petite comparée aux deux autres dimensions. Bien que, nous ne pouvons pas dire qu'une telle théorie décrive exactement le vrai comportement des coques ; néanmoins, les résultats obtenus par quelques unes, sont généralement suffisants pour la plupart des applications scientifiques et technologiques d'aujourd'hui. Nous pouvons décrire toute la cinématique du solide tridimensionnel à partir de grandeurs définies sur la surface de référence de la coque. En fait, le mouvement est déduit d'un champ de translations et de rotations sur la surface de référence.

Par ailleurs, avec le développement des études sur les matériaux composites laminés, il est nécessaire de prendre en compte les effets de cisaillement et normaux, qui peuvent favoriser le délaminage.

La théorie géométriquement non linéaire, que nous développons ici est applicable aux coques minces ($\frac{h}{R} \ll 1$), dont la surface de référence avant et après la déformation reste régulière et dont le comportement reste élastique. L'anisotropie est prise en compte implicitement.

B) RAPPEL HISTORIQUE

Sous les hypothèses décrites ci-dessus, la théorie non linéaire se simplifie, si nous ajoutons celles de Love-Kirchhoff. Celles-ci expriment que la normale matérielle à la surface de référence de la coque ne subit pas de dilatation et reste toujours orthogonale à cette surface après la déformation. En d'autres termes : les rotations des fibres autour de la normale à la surface de référence, restent petites partout. Un nombre significatif de publications a paru dans ce domaine. Citons par exemple, parmi ceux qui ont développé des théories linéaires : NAGHDI [63], KOITER [41], VALID [96], WHITNEY & SUN [103], REDDY [75], SANDERS [77].

Des versions qui diffèrent des théories linéaires, par seulement l'ajout des termes de l'ordre de $\frac{\theta^3}{R}$, dans la mesure du tenseur de changement de courbure ont fait l'objet d'études par MARGUERRE [61], MUSHTARI [62], KOITER [42].

D'autres formes équivalentes de relations non linéaires pour les coques minces étaient données par BUDIANSKY [18], PIETRASZKIEWICZ [69], VALID [95] etc..

Les rotations modérées étaient ensuite étudiées par KOITER [42], PIETRASZKIEWICZ [67], WEMPNER [98], LIBRESCU [53], SCHMIDT & REDDY [79].

Enfin, les rotations larges ont attiré l'attention de quelques chercheurs tels que BUDIANSKY [18], HABIP & EBCIOGLU [28], YOOKO & MATSUNAGA [104], SCHMIDT & PIETRASZKIEWICZ [78], BAŞAR & DING [14], PIETRASZKIEWICZ [68].

Quelques lois comportements ont été données. Ainsi BAŞAR [15] a étudié le comportement élastique, SCHMIDT & WEICHERT [80] ont donné une loi élasto-plastique, ALLEN *et al.* [5] ont introduit l'endommagement et VALID [90-92] a fait une étude sur l'élastodynamique des coques.

Nous dressons ici un tableau récapitulatif qui donnera au lecteur une image historique approximative du développement qu'a suivi la théorie des coques suivant les documents en notre possession.

| | |
|----------------------------|--|
| LOVE-KIRCHHOFF [1888] | Hypothèses de Love-Kirchhoff |
| von KÁRMÁN [1910] | Théorie de von Kármán |
| MUSHTARI [1938] | Théorie des Coques Minces |
| MARGUERRE [1939] | Théorie Non Linéaire des Coques Minces |
| REISSNER [1950] | Théorie des Coques de Révolution Minces |
| NAGHDI [1956] | Théorie des Coques Elastiques |
| SANDERS [1959] | Théorie Non Linéaire des Coques Minces |
| KOITER [1960] | Théorie des Coques Minces |
| BUDIANSKY [1968] | Théorie Non Linéaire des Coques |
| WEMPNER [1973] | Appl. de la Méca. des Solides aux Coques |
| LIBRESCU [1973] | Structure des Coques Laminées |
| VALID [1973] et [1989] | Appl. du Calcul des Struct. aux Coques |
| YOOKO & MATSUNAGA [1974] | Théorie Générale Non Linéaire des Coques |
| PIETRASZKIEWICZ [1977] | Géométrie Non Linéaire des Coques |
| REDDY [1982] | Petites Déformations dans les Coques |
| SCHMIDT [1982] | Rotations Modérées dans les Coques |
| ALLEN <i>et al.</i> [1987] | Endommag. des Plaques en Composite |
| SCHMIDT & WEICHERT [1988] | Comport. élasto-plastique des Coques |
| BAŞAR [1988] | Modélisation Numérique des Coques |

C) CONTENU DU RAPPORT

Le premier chapitre de ce rapport donne une explication détaillée des différents symboles et relations tensorielles qui sont fort utiles pour la compréhension des autres chapitres. C'est un résumé simple des principaux résultats de la géométrie différentielle. Cela aidera le lecteur à se familiariser avec la notation utilisée pour les tenseurs dans la plupart des ouvrages.

Le deuxième chapitre décrit l'essentiel de la géométrie non linéaire des coques anisotropes. Ce chapitre mérite une attention particulière : nous y faisons la première grande hypothèse de cette théorie c'est à dire le développement en séries de Taylor des composantes du champ de déplacement, (LIBRESCU [54] et SCHMIDT & REDDY [79]). Ce développement est utilisé pour exprimer les composantes du tenseur de déformation de Green-Lagrange en fonction de celles du déplacement. Nous utilisons ensuite le principe des travaux virtuels pour obtenir les équations du mouvement c'est à dire les équations d'équilibre et les conditions aux limites.

L'obtention des équations d'équilibre et des conditions aux limites conduit au chapitre trois, qui est consacré aux lois de comportement. Après avoir fait un bref rappel sur les deux premiers principes de la thermodynamique, nous expliquons comment tenir compte de l'endommagement dans la loi constitutive en utilisant une méthode basée sur les variables de l'état interne, développée par ALLEN *et al.* [6].

Parmi les méthodes utilisées pour caractériser ce phénomène, citons les trois les plus employées. La première est la méthode expérimentale : des relations empiriques sont obtenues à partir de mesures expérimentales. Une théorie approximative est alors employée pour corrélérer avec ces résultats. La deuxième méthode est l'approche des propagations des fissures : l'endommagement est identifié à travers ces fissures, et une loi d'évolution est donnée. La troisième et la plus récente méthode est l'utilisation des variables de l'état interne pour définir un modèle d'accumulation de l'endommagement. Des valeurs locales et moyennes représentant l'endommagement sont alors introduites dans les relations constitutives.

En 1958, KACHANOV, a introduit une variable d'endommagement et l'a utilisée pour établir des équations constitutives inélastiques pour les solides mécaniques. Ces équations constitutives ont été formulées pour le cas d'une théorie basée sur les variables internes en thermodynamique. Elles étaient ensuite utilisées avec succès dans de nombreuses études dont la fatigue cyclique (LEMAÎTRE & CHABOCHE [48]), l'endommagement plastique ductile (LEMAÎTRE [51]). CORDEBOIS & SIDOROFF [22] ont étudié

l'endommagement plastique anisotrope et ont obtenu une relation constitutive pour les matériaux élasto-plastiques endommagés. Quelques études sur l'endommagement des composites laminés ont été menées par TALREJA [85]. Dans un volume élémentaire représentatif, en utilisant un tenseur de déformation et un tenseur d'endommagement, il a déduit des relations constitutives. ALLEN *et al.* [5] ont développé un modèle d'endommagement pour la prédiction de la rigidité d'un matériau composite. Ce modèle utilise une série de quantités tensorielles du second ordre proposées par KACHANOV [38] pour décrire chaque état d'endommagement interne.

L'objectif de la présente étude est d'étendre ce dernier modèle pour prédire le comportement des coques et plaques en matériaux composites laminés avec des détériorations intérieures telles que le délaminage. Des variables internes obtenues par l'application des principes thermodynamiques et représentatives de l'état interne sont introduites dans les relations constitutives. Ces dernières sont utilisées pour construire des relations contraintes-déformations pour les matériaux composites.

Le chapitre quatre est consacré à la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis. Celle-ci a nécessité l'écriture matricielle des composantes de la déformation. Cependant, la méthode matricielle n'est pas essentielle pour le processus des éléments finis. On pourrait utiliser avec autant de commodité une notation indicielle ou tensorielle. Après un bref rappel sur la méthode elle-même, nous donnons les différents termes de la matrice de rigidité permettant ainsi d'obtenir une écriture compatible de celle-ci.

Enfin, on trouvera à la fin de ce rapport, dans le chapitre cinq, des exemples numériques pratiques et des éléments de comparaison choisis par les problèmes qui se posent dans les différents secteurs scientifiques et technologiques.

CHAPITRE 1
ÉLÉMENTS DE
GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

CHAPITRE 1

ÉLÉMENTS DE GÉOMETRIE DIFFÉRENTIELLE

1.1. INTRODUCTION

Ce chapitre a pour objet de donner les définitions des champs de vecteurs de base, de leurs dérivées, des tenseurs métriques et de leurs inverses. Ces définitions joueront un rôle prépondérant par la suite dans ce rapport.

Nous adopterons la convention de sommation sur les indices répétés et nous supposerons que les indices grecs valent 1 ou 2 et que les indices latins valent 1, 2 ou 3.

1.2. COORDONNÉES CURVILIGNES

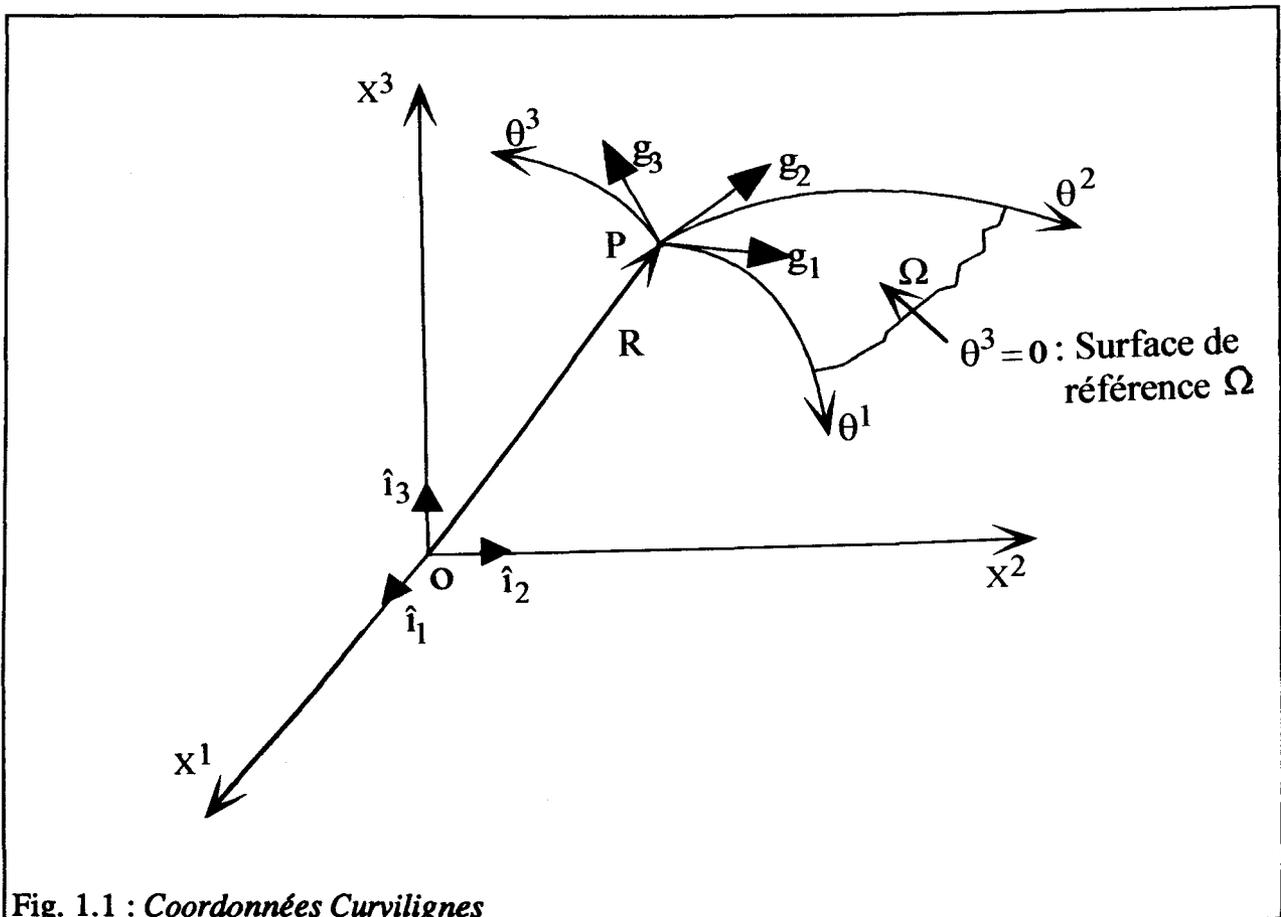


Fig. 1.1 : Coordonnées Curvilignes

1.2.1. Vecteurs de base de l'espace

Considérons un solide 3D, plongé dans l'espace à trois dimensions. Soit un point P quelconque de ce solide (donc de l'espace \mathbb{R}^3). Ce point peut être repéré par des coordonnées cartésiennes (x^1, x^2, x^3) ou curvilignes $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$. Les équations de transformation faisant passer d'un ensemble de coordonnées à un autre sont données par

$$x^k = x^k(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (1.1)$$

Ou inversement par

$$\theta^k = \theta^k(x^1, x^2, x^3) \quad (1.2)$$

Soit \mathbf{R} le vecteur de l'espace \mathbb{R}^3 d'origine O et d'extrémité P, orienté de O à P. Sa position est donnée par

$$\mathbf{R} = x^k \hat{\mathbf{i}}_k \quad (1.3)$$

où les $\hat{\mathbf{i}}_k$ sont les vecteurs unitaires du repère orthonormé cartésien (fig. 1.1).

Ce vecteur peut être exprimé par les formes alternatives

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{R}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (1.4)$$

Si θ^2 et θ^3 sont constantes et θ^1 varie, alors la position du vecteur \mathbf{R} décrit la ligne de coordonnées θ^1 . De manière analogue, on définit les lignes de coordonnées θ^2 et θ^3 passant par le point P. Les vecteurs $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^1}$, $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^2}$, $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^3}$ représentent donc les vecteurs tangents respectivement aux lignes de coordonnées θ^1 , θ^2 et θ^3 . En appelant \mathbf{g}_1 , \mathbf{g}_2 et \mathbf{g}_3 ces vecteurs respectivement, nous avons

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial x^k}{\partial \theta^i} \hat{\mathbf{i}}_k \quad (1.5)$$

Ces vecteurs \mathbf{g}_i sont appelés les *vecteurs de base de l'espace tridimensionnel*.

Nous définissons un autre trièdre de vecteurs \mathbf{g}^i tels que

$$\mathbf{g}^i \mathbf{g}_j = \delta_j^i \quad (1.6)$$

Les vecteurs \mathbf{g}^i sont appelés les *vecteurs de base réciproques de l'espace* ou *vecteurs de la cobase de l'espace*. Puisque les vecteurs \mathbf{g}_i sont tangents aux lignes de coordonnées θ^k , l'équation (1.6) entraîne que les vecteurs \mathbf{g}^i sont orthogonaux aux vecteurs de base \mathbf{g}_i de l'espace.

Le trièdre \mathbf{g}^i peut être exprimé comme combinaison linéaire du trièdre \mathbf{g}_i et vice versa. Nous définissons les coefficients g^{ij} et g_{ij} tels

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \quad (1.7)$$

$$\mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j \quad (1.8)$$

A partir de (1.6), (1.7) et (1.8), on en déduit que

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j \quad (1.9)$$

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \quad (1.10)$$

$$g^{im} g_{mj} = \delta_j^i \quad (1.11)$$

Les coefficients g_{ij} et g^{ij} sont le *tenseur métrique* et *son inverse* respectivement.

La dérivée première de \mathbf{R} est donc $d\mathbf{R} = \mathbf{R}_{,i} d\theta^i = \mathbf{g}_i d\theta^i$. Cette dérivée permet de donner la différentielle donnant l'élément de surface ds

$$ds^2 = d\mathbf{R}d\mathbf{R} = g_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (1.12)$$

L'équation (1.12) est appelée la *première forme fondamentale surfacique*.

1.2.2. Dérivées des vecteurs de base de l'espace

En utilisant la définition (1.5)

$$\mathbf{g}_{i,j} = \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \theta^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \theta^i \partial \theta^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}^p}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \hat{\mathbf{i}}_p \quad (1.13)$$

Lorsque les dérivées sont continues, alors

$$\mathbf{g}_{i,j} = \mathbf{g}_{j,i} \quad (1.14)$$

Le vecteur $\mathbf{g}_{i,j}$ peut être exprimé comme combinaison linéaire des vecteurs de base \mathbf{g}_i ou \mathbf{g}^i

$$\mathbf{g}_{i,j} = \Gamma_{ijk} \mathbf{g}^k = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k \quad (1.15a,b)$$

où les coefficients sont définis par

$$\Gamma_{ijk} = \mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_{i,j} \quad \Gamma_{ij}^k = \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_{i,j} \quad (1.16a,b)$$

Les coefficients Γ_{ijk} et Γ_{ij}^k sont les *symboles de Christoffel de première et de seconde espèces* respectivement.

En utilisant les expressions (1.14) et (1.16a,b), on déduit que les symboles sont symétriques pour les deux premiers indices inférieurs

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik} \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (1.17a,b)$$

A partir de (1.10), (1.14) et (1.16), on déduit que

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_{ik,j} + \mathbf{g}_{jk,i} - \mathbf{g}_{ij,k}) \quad (1.18)$$

Et à partir de (1.7), (1.8) et (1.16a,b), il en suit que

$$\Gamma_{ijk} = g_{kl} \Gamma_{ij}^l \quad \Gamma_{ij}^k = g^{kl} \Gamma_{ijl} \quad (1.19a,b)$$

En dérivant (1.6) et en utilisant (1.19a), on aboutit à

$$\mathbf{g}^i_{,k} \cdot \mathbf{g}_j = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_{j,k} = -\Gamma_{jk}^i \quad (1.20a)$$

$$\mathbf{g}^i_{,k} \cdot \mathbf{g}_j = -\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_{j,k} = -\Gamma_{jk}^i \quad (1.20b)$$

et

$$\mathbf{g}^i_{,k} = -\Gamma_{jk}^i \mathbf{g}^j \quad (1.20c)$$

1.2.3. Vecteurs dans l'espace

Tout vecteur de l'espace R^3 , peut être exprimé comme une combinaison linéaire des vecteurs de base g_i ou g^i . Ainsi, un vecteur V peut être écrit sous deux formes alternatives

$$V = V^i g_i = V_i g^i \quad (1.21)$$

En utilisant les relations (1.6), (1.7) et (1.8), on déduit les composantes alternatives

$$V^i = g^i \cdot V; \quad V_i = g_i \cdot V \quad (1.22a,b)$$

$$V^i = g^{ij} V_j; \quad V_i = g_{ij} V^j \quad (1.23a,b)$$

Les composantes V^i et V_i sont appelées les *composantes contravariantes et covariantes* respectivement du vecteur V .

La dérivée partielle du vecteur arbitraire V s'écrit sous la forme alternative suivante

$$V_{,i} = V^j{}_{,i} g_j + V^j g_{j,i} \quad (1.24a)$$

$$= V_{j,i} g^j + V_j g^{j,i} \quad (1.24b)$$

En utilisant (1.15b) et (1.20c), on déduit

$$V_{,i} = (V^j{}_{,i} + V^k \Gamma_{ik}^j) g_j = V^j|_i g_j \quad (1.25a,b)$$

$$= (V_{j,i} - V_k \Gamma_{ij}^k) g^j = V_j|_i g^j \quad (1.26a,b)$$

Les équations (1.25b) et (1.26b) servent à définir respectivement les dérivées covariantes des composantes contravariantes V^i et covariantes V_i du vecteur V .

Remarques

1) La dérivée covariante $V^j|_i$ (ou $V_j|_i$) joue le même rôle que, celui joué par la dérivée partielle $V_{j,i}$ dans le système de coordonnées cartésiennes.

2) Le vecteur de base de l'espace g_i (ou g^i) joue le même rôle que, celui joué par le vecteur unitaire \hat{i}_x dans le système de coordonnées cartésiennes.

3) Le tenseur métrique g_{ij} (ou g^{ij}) se réduit au symbole de Kronecker δ_{ij} dans le système de coordonnées cartésiennes.

1.3. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE POUR UNE SURFACE

1.3.1. Vecteurs de base et tenseurs métriques d'une surface

Considérons la surface Ω ($\theta^3 = 0$) (Fig. 1.1). Le vecteur position d'un point P sur cette surface Ω est donné par

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\theta^1, \theta^2, 0) = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) \quad (1.27)$$

Ainsi l'équation $\theta^3 = 0$ détermine $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2)$.

Soit θ^3 la distance le long de la normale à cette surface de référence Ω et soit $\hat{\mathbf{a}}_3$ le vecteur normal unitaire à Ω au point P. Le vecteur position d'un point quelconque Q qui se trouve sur une surface parallèle à Ω ($\theta^3 \neq 0$) est défini par

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \hat{\mathbf{a}}_3(\theta^1, \theta^2) \quad (1.28)$$

Notons que les θ^α ($\alpha = 1, 2$) sont des coordonnées curvilignes arbitraires de la surface Ω tandis que θ^3 est la coordonnée qui donne la distance le long de la normale à Ω .

Les vecteurs de base de l'espace donnés par (1.5) peuvent s'écrire sous la forme

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{R}_{,\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} + \theta^3 \hat{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{R}_{,3} = \hat{\mathbf{a}}_3 \quad (1.30)$$

Considérons les vecteurs tangents à la surface de référence Ω définis par

$$\mathbf{a}_i(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{g}_i(\theta^1, \theta^2, 0) \quad (1.31)$$

D'après (1.13), (1.29) et (1.31), nous déduisons les relations suivantes entre les vecteurs de base de l'espace et ceux de la surface de référence Ω

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \hat{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \quad (1.32)$$

L'identification de (1.29) avec (1.32) nous donne

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} \quad (1.33)$$

Comme pour (1.6), nous définissons le vecteur de base \mathbf{a}^i normal à la surface Ω par

$$\mathbf{a}^i(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{g}^i(\theta^1, \theta^2, 0) \quad (1.34)$$

$$\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i \quad (1.35)$$

Lorsque la distance θ^3 le long de la normale à la surface de référence Ω est nulle, alors

$$\mathbf{a}^3 = \mathbf{g}^3 = \hat{\mathbf{a}}_3 \quad (1.36)$$

Remarque

A chaque point de la surface de référence Ω , nous avons deux trièdres de base \mathbf{a}^i et \mathbf{a}_i , où \mathbf{a}_α et \mathbf{a}^α sont tangents à cette surface Ω et $\mathbf{a}^3 = \mathbf{a}_3 = \hat{\mathbf{a}}_3$ est sa normale unitaire. \mathbf{a}_α sont tangents aux lignes de coordonnées θ^α et \mathbf{a}^α est normal à ces lignes de coordonnées.

Les vecteurs \mathbf{a}^α peuvent être exprimés comme combinaison linéaire de \mathbf{a}_α et vice versa

$$\mathbf{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta; \quad \mathbf{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\beta \quad (1.37)$$

Nous constatons que les coefficients $a^{\alpha\beta}$ et $a_{\alpha\beta}$ sont les *composantes des tenseurs métriques contravariants et covariants* respectivement de la surface de référence Ω . Ces relations linéaires sont semblables aux relations (1.7) et (1.8).

Nous avons aussi les relations suivantes entre composantes des tenseurs métriques de l'espace et d'une surface

$$\mathbf{a}^{\alpha\beta}(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{g}^{\alpha\beta}(\theta^1, \theta^2, 0); \quad \mathbf{a}_{\alpha\beta}(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{g}_{\alpha\beta}(\theta^1, \theta^2, 0) \quad (1.38a,b)$$

A partir des équations (1.35) et (1.37) nous déduisons que

$$\mathbf{a}^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \mathbf{a}^\beta; \quad \mathbf{a}_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta \quad (1.39a,b)$$

et que

$$\mathbf{a}^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \quad (1.40)$$

Soit la notation

$$a = |a_{\alpha\beta}| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \quad (1.41)$$

Il en suit d'après (1.39) que

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{a}; \quad a^{22} = \frac{a_{11}}{a}; \quad a^{12} = -\frac{a_{12}}{a} \quad (1.42)$$

et que

$$\frac{1}{a} = |a^{\alpha\beta}| \quad (1.43)$$

1.3.2. Dérivées des vecteurs de base de la surface de référence

Comme en (1.16), nous définissons les symboles de Christoffel pour les coordonnées surfaciques

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{a}_\gamma \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta\gamma}(\theta^1, \theta^2, 0) \quad (1.44a,b)$$

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(\theta^1, \theta^2, 0) \quad (1.45a,b)$$

Ici, les termes portant une barre signifient qu'ils sont évalués dans la surface de référence ($\theta^3 = 0$). Si les dérivées sont continues (la surface supposée régulière), alors il en suit d'après (1.33a) d'une part, et des définitions (1.44a) et (1.45a) d'autre part, que

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \bar{\Gamma}_{\beta\alpha\gamma} \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^\gamma \quad (1.46a,b)$$

Aussi à partir de (1.38b) et (1.44b), nous déduisons que

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\gamma,\beta} + a_{\beta\gamma,\alpha} - a_{\alpha\beta,\gamma}) \quad (1.47)$$

De la même façon que (1.35), (1.36) et (1.37), nous obtenons

$$\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad \mathbf{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta \quad \mathbf{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\beta \quad (1.48a,b,c)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{a}_\alpha = \hat{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{a}^\alpha = 0 \quad \hat{\mathbf{a}}_3 \cdot \hat{\mathbf{a}}_3 = 1 \quad (1.49a,b,c)$$

A partir de (1.48a) et (1.45a), nous obtenons

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = -\mathbf{a}_{\alpha} \cdot \mathbf{a}^{\gamma}_{,\beta} \quad (1.50)$$

Nous déduisons à partir de (1.48b,c) et des définitions (1.44a) et (1.45a) que

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = a_{\gamma\eta} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\eta} \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = a^{\eta\gamma} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\eta} \quad (1.51a,b)$$

Les composantes des dérivées $\mathbf{a}_{\alpha,\beta}$ sont telles que

$$b_{\alpha\beta}(\theta^1, \theta^2) = \hat{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha\beta 3}(\theta^1, \theta^2, 0) \quad (1.52a,b)$$

$$b_{\beta}^{\alpha}(\theta^1, \theta^2) = \hat{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{a}^{\alpha}_{,\beta} = -\Gamma_{3\beta}^{\alpha}(\theta^1, \theta^2, 0) \quad (1.53a,b)$$

Les composantes $b_{\alpha\beta}$ sont donc les mesures des dérivées des vecteurs de base surfaciques suivant la normale à la surface de référence.

A partir de (1.52), (1.53) et (1.48), nous pouvons démontrer que

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -\mathbf{a}_{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{3,\beta} = -\hat{\mathbf{a}}_3 \cdot \mathbf{a}_{\beta,\alpha} = a_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\lambda} \quad (1.54a,b,c,d)$$

$$b_{\beta}^{\alpha} = -\mathbf{a}^{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{3,\beta} = a^{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta} = a_{\beta\lambda} b^{\lambda\alpha} \quad (1.55a,b,c)$$

Les coefficients $b_{\alpha\beta}$ et b_{β}^{α} constituent des composantes de tenseurs associés que nous appellerons *tenseurs de courbure*.

A partir de (1.44a), (1.45a) et (1.52a), nous déduisons que

$$\mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathbf{a}_{\gamma} + b_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{a}}_3 \quad (1.56a)$$

$$= \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{a}^{\gamma} + b_{\alpha\beta} \hat{\mathbf{a}}_3 \quad (1.56b)$$

A partir de (1.50) et de ce qui précède, nous déduisons que

$$\mathbf{a}^{\alpha}_{,\beta} = -\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} \mathbf{a}^{\gamma} + b_{\beta}^{\alpha} \hat{\mathbf{a}}_3 \quad (1.57)$$

Les équations (1.56) et (1.57) sont les *formules de Gauss* pour les dérivées des vecteurs tangents. Notons que, les symboles $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma}$ ou $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}$ sont les composantes de $\mathbf{a}_{\alpha,\beta}$ suivant les tangentes à la surface moyenne Ω , tandis que $b_{\alpha\beta}$ ou b_{β}^{α} sont les composantes suivant la normale à Ω .

Les dérivées de la normale \hat{a}_3 se déduisent à partir de (1.54) et (1.55)

$$\hat{a}_{3,\beta} = -b_{\alpha\beta} a^\alpha = -b_\beta^\alpha a_\alpha \quad (1.58a,b)$$

Les équations (1.58a) et (1.58b) sont connues sous le nom de *formules de Weingarten*.

Retournons aux vecteurs de base de l'espace g_α et utilisons (1.54b) et (1.55). Nous trouvons alors

$$g_\alpha = a_\alpha - \theta^3 b_\alpha^\beta a_\beta \quad (1.59a)$$

$$= a_\alpha - \theta^3 b_{\alpha\beta} a^\beta \quad (1.59b)$$

En utilisant les relations (1.29), (1.33), (1.54) et (1.58) et à cause de la symétrie des composantes du tenseur de courbure $b_{\alpha\beta}$, nous obtenons les composantes $g_{\alpha\beta}$ sous la forme

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\theta^3 b_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 b_{\alpha\gamma} b_\beta^\gamma \quad (1.60a)$$

A partir de (1.33b,c), (1.49) et (1.59a), nous obtenons

$$g_{\alpha 3} = 0; \quad g_{33} = 1 \quad (1.60b,c)$$

On appelle *courbure principale* de la surface de référence Ω , l'invariant défini par

$$H = \frac{1}{2} b_\alpha^\alpha \quad (1.61a)$$

et on appelle *courbure de Gauss* de Ω , l'invariant défini par

$$K = \frac{|b_{\alpha\alpha}|}{a} = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 \quad (1.61b)$$

La *deuxième forme fondamentale* de la surface Ω est donnée par

$$dr \cdot d\hat{a}_3 = -b_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta \quad (1.62)$$

A partir de (1.56), (1.57) et (1.58), nous définissons le produit scalaire

$$d\hat{a}_3 \cdot d\hat{a}_3 = b_{\alpha\beta} b_\gamma^\beta d\theta^\alpha d\theta^\gamma \quad (1.63)$$

qui est appelé la *troisième forme fondamentale* de la surface Ω .

1.4. THÉORIE DES COQUES

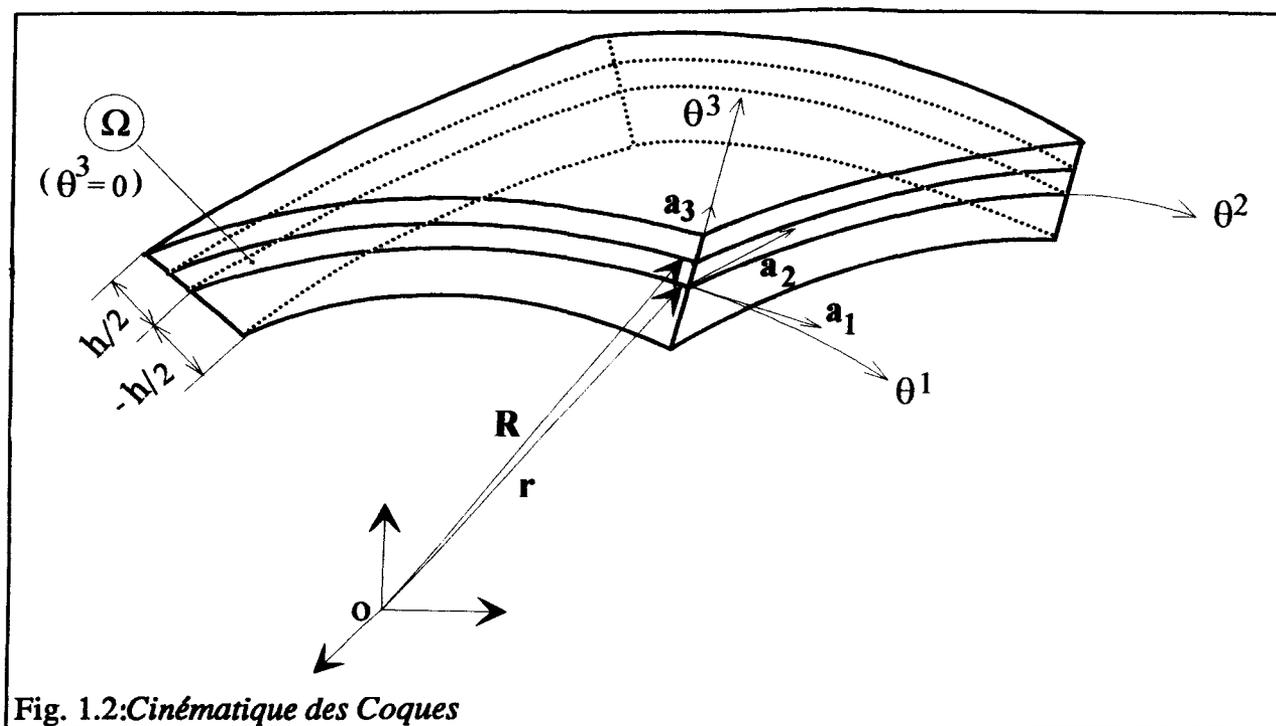
Soit la surface Ω définie sur la figure (1.1), appelée surface de référence. Désignons par \mathbf{r} , le vecteur position d'un point quelconque de Ω , repéré par rapport à l'origine du repère cartésien O . Les coordonnées curvilignes sur Ω sont notées θ^1 et θ^2 . Ainsi, nous pouvons écrire

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) \quad (1.64)$$

Quel que soit le point de Ω , nous construisons le vecteur normal $\hat{\mathbf{a}}_3$ et nous désignons par θ^3 , la distance du point de Ω le long de $\hat{\mathbf{a}}_3$. Donc $\theta^3 = 0$ détermine la surface Ω . Nous limitons notre étude au cas où

$$-\frac{1}{2}h \leq \theta^3 \leq \frac{1}{2}h \quad (1.65)$$

avec $h = h(\theta^1, \theta^2)$ est en général une fonction de θ^1 et θ^2 .



Dans cette étude, nous supposons que l'épaisseur h de la coque est constante bien qu'en général, ces résultats restent valables pour h variable. Deux surfaces supplémentaires sont définies par $\theta^3 = \pm \frac{h}{2}$. Ces surfaces sont prises comme limitant le corps B , qui contient la surface Ω .

Le corps B est appelé une coque; les surfaces limites de B sont appelées *surface inférieure* ($\theta^3 = -\frac{h}{2}$) et *surface supérieure* ($\theta^3 = \frac{h}{2}$) de la coque. La surface Ω est appelée la *surface moyenne* et h est appelé l'*épaisseur de coque*. Nous supposons que, la surface moyenne Ω et les deux surfaces inférieure et supérieure de la coque sont des surfaces continues sans singularités.

Le vecteur position d'un point de la coque peut être alors défini par (Fig. 1.2)

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \hat{\mathbf{a}}_3(\theta^1, \theta^2) \quad (1.66)$$

Nous pouvons maintenant définir certaines relations importantes entre des quantités définies dans la coque B et les quantités sur la surface moyenne Ω . A partir des relations (1.56), (1.57) et (1.58) et en utilisant (1.66), nous déduisons que les relations entre les vecteurs covariants de base de l'espace (corps B), et ceux de la surface moyenne Ω sont données par

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{R}_{,\alpha} = \mu_\alpha^\lambda \mathbf{a}_\lambda = \mu_{\lambda\alpha} \mathbf{a}^\lambda \quad (1.67a,b,c)$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{R}_{,3} = \hat{\mathbf{a}}_3 \quad (1.68a,b)$$

où

$$\mu_{\lambda\beta} = \mu_{\beta\lambda} = a_{\lambda\beta} - \theta^3 b_{\lambda\beta}; \quad \mu_\alpha^\lambda = \delta_\alpha^\lambda - \theta^3 b_\alpha^\lambda \quad (1.69a,b,c)$$

Les composantes du tenseur métrique du corps B sont alors données en fonction des composantes de celui de Ω par

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \mu_\alpha^\lambda \mu_{\lambda\beta} = a_{\lambda\rho} \mu_\alpha^\lambda \mu_\beta^\rho \quad (1.70a,b)$$

$$\mathbf{g}_{\alpha 3} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_3 = 0 \quad (1.71a,b)$$

$$\mathbf{g}_{33} = \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = 1 \quad (1.72a,b)$$

CHAPITRE 2
COMPORTEMENT GÉOMÉTRIQUEMENT
NON LINÉAIRE DES COQUES

CHAPITRE 2

COMPORTEMENT GÉOMÉTRIQUEMENT NON LINÉAIRE DES COQUES

2.1. INTRODUCTION

Dans cette partie, nous développons la théorie des coques géométriquement non linéaire. Après avoir exprimé les composantes du tenseur de déformation de Green-Lagrange en fonction des composantes du déplacement, nous utilisons le principe des travaux virtuels pour obtenir le champ des équations de mouvement : équations d'équilibre et conditions aux limites (LIBRESCU [53] et SCHMIDT & REDDY [79]).

2.2. GÉOMÉTRIE DES COQUES

V : est le volume de la coque considérée

S : est la surface de la coque, somme de la surface supérieure S^+ ($\theta^3 = h/2$) et de la surface inférieure S^- ($\theta^3 = -h/2$)

A : est la surface latérale de la coque

Ω : est la surface moyenne ($\theta^3 = 0$) de la coque

Γ : est la courbe limite de Ω , résultant de l'intersection de Ω et de A

h : est l'épaisseur de la coque

A_s : est une partie de A où les vecteurs de contrainte sont prescrits

Γ_s : est une partie de Γ où les vecteurs de contrainte sont prescrits

n_α : sont les composantes de la normale unitaire extérieure à A

v_α : sont les composantes de la normale unitaire extérieure à Γ

θ^i : sont les composantes curvilignes d'un point de la coque

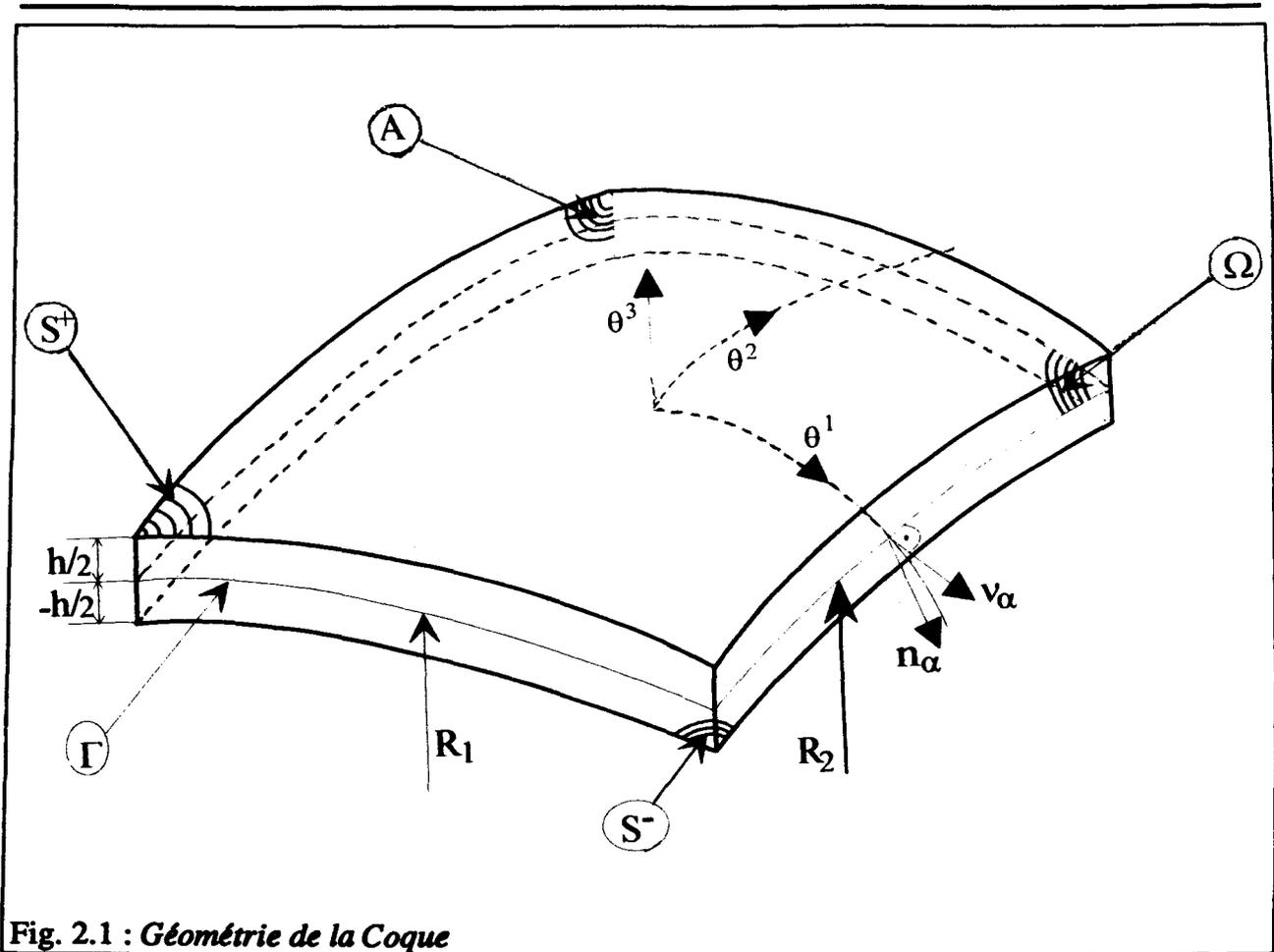


Fig. 2.1 : Géométrie de la Coque

2.3. RELATIONS DÉFORMATIONS - DÉPLACEMENTS

Un vecteur quelconque \mathbf{v} de l'espace peut être écrit par rapport aux bases spatiales covariantes ou contravariantes

$$\mathbf{v} = V^i \mathbf{g}_i = V_i \mathbf{g}^i \quad (2.1a,b)$$

avec

$$V^i = V^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3); \quad V_i = V_i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (2.2a,b)$$

Soit, si on se repère par rapport aux vecteurs de base surfaciques de Ω

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^\alpha \mathbf{a}_\alpha + v_3 \hat{\mathbf{a}}_3 \\ &= v_\alpha \mathbf{a}^\alpha + v_3 \hat{\mathbf{a}}_3 \end{aligned} \quad (2.3a,b)$$

avec

$$v^\alpha = v^\alpha(\theta^1, \theta^2, \theta^3); \quad v_3 = v_3(\theta^1, \theta^2, \theta^3); \quad v_\alpha = v_\alpha(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (2.4a,b,c)$$

On peut démontrer les relations suivantes entre les composantes dans l'espace et celles dans le plan

$$V_\alpha = \mu_\alpha^\beta v_\beta \quad V^\alpha = (\mu^{-1})^\alpha_\beta v^\beta \quad V^3 = V_3 = v^3 = v_3 \quad (2.5a,b,c)$$

où μ_α^β et $(\mu^{-1})^\alpha_\beta$ sont respectivement *le tenseur de changement de courbure et son inverse*.

Les composantes du tenseur de déformation de Green-Lagrange dans l'espace tridimensionnel sont définies en fonction des dérivées des composantes du vecteur de déplacement v par

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (V_i \parallel_j + V_j \parallel_i + V^k \parallel_i V_k \parallel_j) \quad (2.6)$$

où $(.) \parallel_i$ désigne la dérivée covariante dans l'espace par rapport à θ^i .

Les dérivées des composantes par rapport à la base spatiale et celles par rapport à la base de la surface moyenne sont reliées par les relations suivantes (LIBRESCU [53])

$$V_\alpha \parallel_\beta = \mu_\alpha^\gamma (v_\gamma \parallel_\beta - b_{\gamma\beta} v_3) \quad (2.7)$$

$$V^\alpha \parallel_\beta = (\mu^{-1})^\alpha_\gamma (v^\gamma \parallel_\beta - b_\beta^\gamma v_3) \quad (2.8)$$

$$V_\alpha \parallel_3 = \mu_\alpha^\gamma v_{\gamma,3} \quad (2.9)$$

$$V^\alpha \parallel_3 = (\mu^{-1})^\alpha_\gamma v^\gamma_{,3} \quad (2.10)$$

$$V^3 \parallel_\alpha = V_3 \parallel_\alpha = v_{3,\alpha} + b_{\alpha\lambda} v^\lambda \quad (2.11)$$

$$V_3 \parallel_3 = V^3 \parallel_3 = v_{3,3} = v^3_{,3} \quad (2.12)$$

où $(.) \parallel_\alpha$ désigne la dérivée covariante dans la surface moyenne par rapport à θ^α .

La première grande hypothèse de cette théorie est basée sur le fait que nous développons en séries de Taylor les composantes du déplacement jusqu'à l'ordre 1 pour les composantes membranaires et jusqu'à l'ordre 0 pour la composante suivant la normale à la surface moyenne (SCHMIDT & REDDY [79]). Ceci est justifié par le fait que la dimension suivant la normale est petite par rapport aux deux autres. Nous écrivons donc que

$$v_\alpha = v_\alpha^{(0)} + \theta^3 v_\alpha^{(1)} + \dots \quad (2.13a)$$

$$v_3 = v_3^{(0)} + \dots \quad (2.13b)$$

En utilisant les relations (2.7)-(2.12), les composantes de tenseur de déformation (2.6) peuvent alors s'écrire

$$\mathbf{E}_{\alpha\beta} = \overset{(0)}{\mathbf{E}}_{\alpha\beta} + \theta^3 \overset{(1)}{\mathbf{E}}_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 \overset{(2)}{\mathbf{E}}_{\alpha\beta} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{E}_{\alpha 3} = \overset{(0)}{\mathbf{E}}_{\alpha 3} + \theta^3 \overset{(1)}{\mathbf{E}}_{\alpha 3} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{E}_{33} = \overset{(0)}{\mathbf{E}}_{33} \quad (2.16)$$

où $\overset{(i)}{\mathbf{E}}_{mn}$ sont données par

$$\overset{(0)}{\mathbf{E}}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\overset{(0)}{\mathbf{v}}_{\alpha|\beta} + \overset{(0)}{\mathbf{v}}_{\beta|\alpha} \right) - \mathbf{b}_{\alpha\beta} \overset{(0)}{\mathbf{v}}_3 + \frac{1}{2} \left(\overset{(0)}{\mathbf{v}}_{3,\alpha} + \mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda} \overset{(0)}{\mathbf{v}}_{\lambda} \right) \left(\overset{(0)}{\mathbf{v}}_{3,\beta} + \mathbf{b}_{\beta}^{\delta} \overset{(0)}{\mathbf{v}}_{\delta} \right) + 0(\theta^3) \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\mathbf{E}}_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \left(\overset{(1)}{\mathbf{v}}_{\alpha|\beta} + \overset{(1)}{\mathbf{v}}_{\beta|\alpha} \right) - \frac{1}{2} \left(\mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda} \left(\overset{(0)}{\mathbf{v}}_{\lambda|\beta} - \mathbf{b}_{\lambda\beta} \overset{(0)}{\mathbf{v}}_3 \right) + \mathbf{b}_{\beta}^{\lambda} \left(\overset{(0)}{\mathbf{v}}_{\lambda|\alpha} - \mathbf{b}_{\lambda\alpha} \overset{(0)}{\mathbf{v}}_3 \right) \right) \\ & + \frac{1}{2} \left[\mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda} \left(\overset{(0)}{\mathbf{v}}_{3,\beta} + \mathbf{b}_{\beta}^{\delta} \overset{(0)}{\mathbf{v}}_{\delta} \right) + \mathbf{b}_{\beta}^{\lambda} \left(\overset{(0)}{\mathbf{v}}_{3,\alpha} + \mathbf{b}_{\alpha}^{\delta} \overset{(0)}{\mathbf{v}}_{\delta} \right) \right] \overset{(1)}{\mathbf{v}}_{\lambda} + 0(\theta^3) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\overset{(2)}{\mathbf{E}}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \left(\mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda} \overset{(1)}{\mathbf{v}}_{\lambda|\beta} + \mathbf{b}_{\beta}^{\lambda} \overset{(1)}{\mathbf{v}}_{\lambda|\alpha} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda} \mathbf{b}_{\beta}^{\delta} \overset{(1)}{\mathbf{v}}_{\lambda} \overset{(1)}{\mathbf{v}}_{\delta} + 0(\theta^3) \quad (2.19)$$

$$\overset{(0)}{\mathbf{E}}_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left(\overset{(0)}{\mathbf{v}}_{3,\alpha} + \mathbf{b}_{\alpha}^{\lambda} \overset{(0)}{\mathbf{v}}_{\lambda} + \overset{(1)}{\mathbf{v}}_{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \overset{(1)}{\mathbf{v}}^{\lambda} \left(\overset{(0)}{\mathbf{v}}_{\lambda|\alpha} - \mathbf{b}_{\lambda\alpha} \overset{(0)}{\mathbf{v}}_3 \right) + 0(\theta^3) \quad (2.20)$$

$$\overset{(1)}{\mathbf{E}}_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \overset{(1)}{\mathbf{v}}^{\lambda} \overset{(1)}{\mathbf{v}}_{\lambda|\alpha} + 0(\theta^3) \quad (2.21)$$

$$\overset{(0)}{\mathbf{E}}_{33} = \frac{1}{2} \overset{(1)}{\mathbf{v}}^{\lambda} \overset{(1)}{\mathbf{v}}_{\lambda} + 0(\theta^3) \quad (2.22)$$

2.4. EQUATIONS DE MOUVEMENT

Les équations de mouvement sont déduites à partir de l'utilisation du principe des travaux virtuels (VALID [95]).

2.4.1. Efforts internes

La variation du travail des efforts intérieurs est donnée par

$$-\delta W_i = \int_V S^{ij} \delta E_{ij} dV \quad (2.23)$$

où

S^{ij} : sont les composantes du second tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff

E_{ij} : sont les composantes du tenseur de déformation.

Si on utilise les relations (2.14)-(2.16), on aboutit à

$$\begin{aligned} -\delta W_i = \int_V S^{ij} \delta E_{ij} dV = \int_V \left\{ \delta \overset{(0)}{E}_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} + \delta \overset{(1)}{E}_{\alpha\beta} \theta^3 S^{\alpha\beta} + \delta \overset{(2)}{E}_{\alpha\beta} (\theta^3)^2 S^{\alpha\beta} \right. \\ \left. + 2\delta \overset{(0)}{E}_{\alpha 3} S^{\alpha 3} + 2\delta \overset{(1)}{E}_{\alpha 3} \theta^3 S^{\alpha 3} + \delta \overset{(0)}{E}_{33} S^{33} \right\} dV \end{aligned} \quad (2.24)$$

A partir des relations (2.17)-(2.22) et à cause de la symétrie des composantes S^{ij} nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} \int_V \delta \overset{(0)}{E}_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} dV = \int_V \left[S^{\alpha\beta} \delta \overset{(0)}{v}_\alpha \Big|_\beta - b_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \delta \overset{(0)}{v}_3 + S^{\alpha\beta} \left(\overset{(0)}{v}_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda \overset{(0)}{v}_\lambda \right) \left(\delta \overset{(0)}{v}_{3,\beta} + b_\beta^\gamma \delta \overset{(0)}{v}_\gamma \right) \right] dV \\ = \int_V \left\{ \left[S^{\alpha\beta} \delta \overset{(0)}{v}_\alpha \right] \Big|_\beta - S^{\alpha\beta} \Big|_\beta \delta \overset{(0)}{v}_\alpha - b_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \delta \overset{(0)}{v}_3 + \left[\left(\overset{(0)}{v}_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda \overset{(0)}{v}_\lambda \right) S^{\alpha\beta} \delta \overset{(0)}{v}_3 \right] \Big|_\beta \right. \\ \left. - \left[\left(\overset{(0)}{v}_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda \overset{(0)}{v}_\lambda \right) S^{\alpha\beta} \right] \Big|_\beta \delta \overset{(0)}{v}_3 + b_\beta^\gamma S^{\alpha\beta} \left(\overset{(0)}{v}_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda \overset{(0)}{v}_\lambda \right) \delta \overset{(0)}{v}_\gamma \right\} dV \end{aligned}$$

L'élément de volume est défini en fonction de l'élément de surface par la relation

$$dV = \mu d\theta^3 d\Omega \quad (2.25)$$

L'élément de surface supérieure ou inférieure peut s'écrire sous la forme

$$dS = \mu d\Omega \quad (2.26)$$

Sur la surface latérale A, on peut écrire que

$$n_\alpha dA = v_\alpha \mu d\theta^3 d\Gamma \quad (2.27)$$

où

$$\mu = |\mu_\alpha^\beta| \quad (2.28)$$

En utilisant les relations (2.25)-(2.28), le théorème de la divergence et l'intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_V \delta E_{\alpha\beta}^{(0)} S^{\alpha\beta} dV &= \int_A \left\{ S^{\alpha\beta} \delta v_\alpha^{(0)} + \left(v_{3,\alpha}^{(0)} + b_\alpha^\lambda v_\lambda^{(0)} \right) S^{\alpha\beta} \delta v_3^{(0)} \right\} n_\beta dA - \int_V \left\{ S^{\alpha\beta} |_\beta \delta v_\alpha^{(0)} + b_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \delta v_3^{(0)} \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(v_{3,\alpha}^{(0)} + b_\alpha^\lambda v_\lambda^{(0)} \right) S^{\alpha\beta} \right]_\beta \delta v_3^{(0)} - b_\beta^\gamma \left(v_{3,\alpha}^{(0)} + b_\alpha^\lambda v_\lambda^{(0)} \right) S^{\alpha\beta} \delta v_\gamma^{(0)} \right\} dV \\ &= \int_\Gamma \left\{ \delta v_\alpha^{(0)} L_{(0)}^{\alpha\beta} + \delta v_3^{(0)} \left(v_{3,\alpha}^{(0)} + b_\alpha^\lambda v_\lambda^{(0)} \right) L_{(0)}^{\alpha\beta} \right\} v_\beta d\Gamma - \int_\Omega \left\{ \delta v_\alpha^{(0)} L_{(0)}^{\alpha\beta} |_\beta + b_{\alpha\beta} \delta v_3^{(0)} L_{(0)}^{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + \delta v_3^{(0)} \left[\left(v_{3,\alpha}^{(0)} + b_\alpha^\lambda v_\lambda^{(0)} \right) L_{(0)}^{\alpha\beta} \right]_\beta - b_\beta^\gamma \delta v_\gamma^{(0)} \left(v_{3,\alpha}^{(0)} + b_\alpha^\lambda v_\lambda^{(0)} \right) L_{(0)}^{\alpha\beta} \right\} d\Omega \end{aligned}$$

De la même manière, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_V \delta E_{\alpha\beta}^{(1)} \theta^3 S^{\alpha\beta} dV &= \int_\Gamma \left\{ \delta v_\alpha^{(1)} L_{(1)}^{\alpha\beta} + \delta v_\lambda^{(0)} b_\alpha^\lambda L_{(1)}^{\alpha\beta} + \delta v_3^{(0)} b_\alpha^\lambda v_\lambda^{(1)} L_{(1)}^{\alpha\beta} \right\} v_\beta d\Gamma - \int_\Omega \left\{ \delta v_\alpha^{(1)} L_{(1)}^{\alpha\beta} |_\beta \right. \\ &\quad - \delta v_\lambda^{(0)} b_\alpha^\lambda L_{(1)}^{\alpha\beta} |_\beta - \delta v_3^{(0)} b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta} L_{(1)}^{\alpha\beta} + \delta v_3^{(0)} b_\alpha^\lambda v_\lambda^{(1)} L_{(1)}^{\alpha\beta} |_\beta \\ &\quad \left. - \delta v_\gamma^{(0)} b_\alpha^\lambda b_\beta^\gamma v_\lambda^{(1)} L_{(1)}^{\alpha\beta} + \delta v_\lambda^{(1)} b_\alpha^\lambda \left(v_{3,\beta}^{(0)} + b_\beta^\gamma v_\gamma^{(0)} \right) L_{(1)}^{\alpha\beta} \right\} d\Omega \end{aligned}$$

$$\int_V \delta E_{\alpha\beta}^{(2)} (\theta^3)^2 S^{\alpha\beta} dV = - \int_\Gamma \delta v_\lambda^{(1)} b_\alpha^\lambda L_{(2)}^{\alpha\beta} v_\beta d\Gamma + \int_\Omega \left\{ \delta v_\lambda^{(1)} b_\alpha^\lambda L_{(2)}^{\alpha\beta} |_\beta + \delta v_\gamma^{(1)} b_\alpha^\lambda b_\beta^\gamma v_\lambda^{(1)} L_{(2)}^{\alpha\beta} \right\} d\Omega$$

$$\int_V 2\delta \overset{(0)}{E}_{\alpha 3} S^{\alpha 3} dV = \int_{\Gamma} \left\{ \delta v_{\lambda} \overset{(1)}{v}^{\lambda} L_{(0)}^{\alpha 3} + \delta v_3 L_{(0)}^{\alpha 3} \right\} v_{\alpha} d\Gamma + \int_{\Omega} \left\{ \delta v_{\lambda} b_{\alpha}^{\lambda} L_{(0)}^{\alpha 3} - \delta v_3 L_{(0)}^{\alpha 3} \Big|_{\alpha} + \delta v_{\alpha} L_{(0)}^{\alpha 3} - \delta v_{\lambda} \overset{(1)}{v}^{\lambda} L_{(0)}^{\alpha 3} \Big|_{\alpha} - \delta v_3 b_{\lambda\alpha} \overset{(1)}{v}^{\lambda} L_{(0)}^{\alpha 3} + \delta v_{\gamma} a^{\lambda\gamma} \left(v_{\lambda} \Big|_{\alpha} - b_{\lambda\alpha} v_3 \right) L_{(0)}^{\alpha 3} \right\} d\Omega$$

$$\int_V 2\delta \overset{(1)}{E}_{\alpha 3} \theta^3 S^{\alpha 3} dV = \int_{\Gamma} \delta v_{\lambda} \overset{(1)}{v}^{\lambda} L_{(1)}^{\alpha 3} v_{\beta} d\Gamma - \int_{\Omega} \left\{ \delta v_{\lambda} \overset{(1)}{v}^{\lambda} L_{(1)}^{\alpha 3} \Big|_{\alpha} - \delta v_{\lambda} \overset{(1)}{v}^{\lambda} \Big|_{\alpha} L_{(1)}^{\alpha 3} \right\} d\Omega$$

$$\int_V \delta \overset{(0)}{E}_{33} S^{33} dV = \int_{\Omega} \delta v_{\lambda} \overset{(1)}{v}^{\lambda} L_{(0)}^{33} d\Omega$$

où

$$L_{(n)}^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu S^{ij} (\theta^3)^n d\theta^3, \quad n=0,1 \quad (2.29)$$

Les $L_{(n)}^{ij}$ sont les représentants du vecteur de contrainte intégrés sur l'épaisseur de la coque.

2.4.2. Efforts externes

Les efforts externes sont donnés par les efforts de volume, d'inertie, de surface et de pression. La variation du travail externe nous donne

$$\delta W_e = \int_V \rho (f^i - \ddot{V}^i) \delta V_i dV + \int_{A_s} \hat{S}^i \delta V_i dA + \int_S P^i \delta V_i dS \quad (2.30)$$

où

ρ : est la masse volumique du matériau

f^i : sont les composantes du vecteur force de volume

\ddot{V}^i : sont les composantes de l'accélération d'un point matériel de la coque

\hat{S}^i : sont les composantes prescrites du vecteur de contrainte sur une partie A_s de A

P^i : sont les composantes de pression agissant sur la surface $S = S^+ + S^-$

Nous détaillons l'écriture des différents termes intervenant dans l'équation (2.30)

Efforts volumiques

$$\int_V \rho f^i \delta V_i dV = \int_{\Omega} \left\{ \delta v_{\alpha}^{(0)} F_{(0)}^{\alpha} + \delta v_3^{(0)} F_{(0)}^3 + \delta v_{\alpha}^{(1)} F_{(1)}^{\alpha} \right\} d\Omega$$

où

$$F_{(n)}^i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \mu f^i (\theta^3)^n d\theta^3, \quad n=0,1 \quad (2.31)$$

Les $F_{(n)}^i$ sont les représentants des efforts volumiques intégrés sur l'épaisseur h de la coque

Efforts d'inertie

$$\int_V \rho \ddot{V}^i \delta V_i dV = \int_{\Omega} \left\{ \delta v_{\alpha}^{(0)} \left(\ddot{v}_{\alpha}^{(0)} I_{(0)} + \ddot{v}_{\alpha}^{(1)} I_{(1)} \right) + \delta v_3^{(0)} \left(\ddot{v}_3^{(0)} I_{(0)} + \ddot{v}_3^{(1)} I_{(1)} \right) + \delta v_{\alpha}^{(1)} \left(\ddot{v}_{\alpha}^{(0)} I_{(1)} + \ddot{v}_{\alpha}^{(1)} I_{(2)} \right) \right\} d\Omega$$

où

$$I_{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \mu (\theta^3)^n d\theta^3, \quad n=0,1,2 \quad (2.32)$$

Les $I_{(n)}$ sont les représentants des efforts d'inertie intégrés sur l'épaisseur de la coque

Efforts de surface

$$\int_{A_s} \hat{S}^i \delta V_i dA = \int_{\Gamma_s} \left\{ \delta v_{\alpha}^{(0)} \int_{-h/2}^{h/2} \mu \hat{t}^{\alpha\beta} v_{\beta} d\theta^3 + \delta v_3^{(0)} \int_{-h/2}^{h/2} \mu \hat{t}^{3\beta} v_{\beta} d\theta^3 + \delta v_{\alpha}^{(1)} \int_{-h/2}^{h/2} \mu \hat{t}^{\alpha\beta} v_{\beta} \theta^3 d\theta^3 \right\} d\Gamma$$

où les \hat{t}^{ij} sont les composantes du premier tenseur de Piola-Kirchhoff.

avec la relation $\hat{S}^i = \hat{t}^{ij} n_j$.

Efforts de pression

$$\int_S P^i \delta V_i dS = \int_{\Omega} \left\{ \delta v_{\alpha}^{(0)} P_{(0)}^{\alpha} + \delta v_3^{(0)} P_{(0)}^3 + \delta v_{\alpha}^{(1)} P_{(1)}^{\alpha} \right\} d\Omega$$

où

$$P_{(n)}^i = \left[\mu (\theta^3)^n P^i \right]_{-h/2}^{h/2}, \quad n=0,1 \quad (2.33)$$

Les $P_{(n)}^i$ sont les représentants des efforts de pression moyennés sur l'épaisseur de la coque.

2.4.3. Equations d'équilibre et conditions aux limites

L'équation variationnel correspondant au principe des travaux virtuels est donnée par

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_e = 0 \quad (2.34)$$

où δW_i et δW_e sont donnés respectivement par (2.24) et (2.30).

Dû au fait que les variations δv_i sont arbitraires, leurs coefficients dans l'intégrale précédente doivent varier indépendamment. Ainsi on établit les équations d'équilibre et les conditions aux limites suivantes

Equations d'équilibre

$$\begin{aligned} \delta v_{\alpha}^{(0)} : & \left[L_{(0)}^{\alpha\beta} - b_{\lambda}^{\alpha} L_{(1)}^{\lambda\beta} + v_{\alpha}^{(1)} L_{(0)}^{\beta 3} \right]_{\beta} - b_{\beta}^{\alpha} \left[L_{(0)}^{\beta 3} + \left(v_{3,\lambda}^{(0)} + b_{\lambda}^{\gamma} v_{\gamma}^{(0)} \right) L_{(0)}^{\lambda\beta} + b_{\lambda}^{\gamma} v_{\gamma}^{(1)} L_{(1)}^{\lambda\beta} \right] \\ & = v_{\alpha}^{(0)} I_{(0)} + v_{\alpha}^{(1)} I_{(1)} - P_{(0)}^{\alpha} - F_{(0)}^{\alpha} \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \delta v_3^{(0)} : & \left[L_{(0)}^{\beta 3} + \left(v_{3,\lambda}^{(0)} + b_{\lambda}^{\gamma} v_{\gamma}^{(0)} \right) L_{(0)}^{\lambda\beta} + b_{\lambda}^{\gamma} v_{\gamma}^{(1)} L_{(1)}^{\lambda\beta} \right]_{\beta} + b_{\alpha\beta} \left[L_{(0)}^{\alpha\beta} - b_{\lambda}^{\alpha} L_{(1)}^{\lambda\beta} + v_{\alpha}^{(1)} L_{(0)}^{\beta 3} \right] \\ & = v_3^{(0)} I_{(0)} - P_{(0)}^3 - F_{(0)}^3 \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \delta v_{\alpha}^{(1)} : & \left[L_{(1)}^{\alpha\beta} - b_{\lambda}^{\alpha} L_{(2)}^{\lambda\beta} + v_{\alpha}^{(1)} L_{(1)}^{\beta 3} \right]_{\beta} - b_{\beta}^{\alpha} \left[\left(v_{3,\lambda}^{(0)} + b_{\lambda}^{\gamma} v_{\gamma}^{(0)} \right) L_{(1)}^{\lambda\beta} + b_{\lambda}^{\gamma} v_{\gamma}^{(1)} L_{(2)}^{\lambda\beta} \right] - L_{(0)}^{\alpha 3} \\ & - a^{\alpha\beta} \left(v_{\beta}^{(0)} |_{\lambda} - b_{\beta\lambda} v_3^{(0)} \right) L_{(0)}^{\lambda 3} - v_{\alpha}^{(1)} |_{\lambda} L_{(1)}^{\lambda 3} - v_{\alpha}^{(1)} L_{(0)}^{33} = v_{\alpha}^{(0)} I_{(1)} + v_{\alpha}^{(1)} I_{(2)} - P_{(1)}^{\alpha} - F_{(1)}^{\alpha} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Conditions aux limites

$$\delta v_{\alpha}^{(0)} : \left[L_{(0)}^{\alpha\beta} - b_{\lambda}^{\alpha} L_{(1)}^{\lambda\beta} + v_{\alpha}^{(1)} L_{(0)}^{\beta 3} \right] v_{\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu \hat{t}^{\alpha\beta} v_{\beta} d\theta^3 \quad (2.38)$$

$$\delta v_3^{(0)} : \left[L_{(0)}^{\alpha 3} + \left(v_{3,\lambda}^{(0)} + b_{\lambda}^{\gamma} v_{\gamma}^{(0)} \right) L_{(0)}^{\lambda\alpha} + b_{\lambda}^{\gamma} v_{\gamma}^{(1)} L_{(1)}^{\lambda\alpha} \right] v_{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu \hat{t}^{3\alpha} v_{\alpha} d\theta^3 \quad (2.39)$$

$$\delta v_{\alpha}^{(1)} : \left[L_{(1)}^{\alpha\beta} - b_{\lambda}^{\alpha} L_{(2)}^{\lambda\beta} + v_{\alpha}^{(1)} L_{(1)}^{\beta 3} \right] v_{\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu \hat{t}^{\alpha\beta} v_{\beta} \theta^3 d\theta^3 \quad (2.40)$$

Nous obtenons ainsi cinq équations d'équilibre données par (2.35)-(2.37) et cinq conditions aux limites données (2.38)-(2.40) sous forme incrémentale que nous utiliserons par la suite dans le programme de calcul numérique.

CHAPITRE 3
LOIS DE COMPORTEMENT

CHAPITRE 3

LOIS DE COMPORTEMENT

3.1. PREMIER ET SECOND PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

3.1.1. Premier principe

Le premier principe de la thermodynamique (ou principe de conservation) se formule ainsi : à chaque instant, la dérivée matérielle de l'énergie mécanique ξ d'un système S occupant un volume noté V, est la somme de la puissance des efforts extérieurs P_e exercés sur le système et de la chaleur Q reçue par le système

$$\frac{d}{dt}[\xi] = P_e + Q \quad (3.1)$$

Nous supposons que les efforts extérieurs sont donnés d'une part par les efforts volumiques \mathbf{f} représentant l'action des systèmes extérieurs, et d'autre part par les efforts surfaciques \mathbf{T} définies sur la frontière de V

$$P_e = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \oint_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} dA \quad (3.2)$$

où \mathbf{u} est la vitesse d'une particule du système S.

L'énergie ξ est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne

$$\xi = \int_V \rho (e + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) dV \quad (3.3)$$

où ρ est la masse volumique supposée constante et e est l'énergie interne spécifique.

Par analogie avec les hypothèses faites pour les efforts extérieurs, nous supposons que la chaleur reçue par un système, est due à des effets de contact à travers la frontière - c'est la chaleur reçue par conduction - et éventuellement due aussi à des actions à distance. Nous posons alors

$$Q = \oint_{\partial V} q dA + \int_V r dV \quad (3.4)$$

où q est une densité surfacique de taux de chaleur reçue et traduit les échanges à travers ∂V , et r est une densité volumique définissant un taux de chaleur fournie à V par des systèmes extérieurs.

Le premier principe donné par l'équation (3.1) peut donc s'écrire sous la forme indicielle

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho (e + \frac{1}{2} u^i u_i) dV = \int_V (f^i u_i + r) dV + \oint_{\partial V} (T^i u_i + q) dA \quad (3.5)$$

La loi de mouvement est donnée par l'équation suivante

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dV = \int_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \oint_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} dA \quad (3.6)$$

où \mathbf{S} est le second tenseur de Piola-Kirchhoff.

Soit sous forme indicielle

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho u^i u_i dV + \int_V S^{ij} : \dot{E}_{ij} dV = \int_V f^i u_i dV + \oint_{\partial V} T^i u_i dA \quad (3.7)$$

En retranchant (3.7) de (3.5), nous obtenons l'équation suivante

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho e dV - \int_V S^{ij} : \dot{E}_{ij} dV = \int_V r dV + \oint_{\partial V} q dV \quad (3.8)$$

En effectuant la dérivée par rapport au temps de la première intégrale et en transformant l'intégrale de surface en intégrale de volume par l'intermédiaire du théorème de la divergence nous obtenons

$$\int_V (\rho \dot{e} - S^{ij} : \dot{E}_{ij}) dV = \int_V (r - \text{div} q) dV \quad (3.9)$$

Ce qui permet d'écrire que

$$\rho \dot{e} = S^{ij} : \dot{E}_{ij} + r - \text{div} q \quad (3.10)$$

qui traduit localement la conservation de l'énergie.

3.1.2. Second principe

L'idée, pour introduire le second principe de la thermodynamique, est de poser comme inégalité fondamentale celle qui généralisera en mécanique des milieux continus l'inégalité bien connue en thermostatique (GERMAIN [26])

$$\Delta s \geq \frac{\Delta Q}{T} \quad (3.11)$$

liant l'accroissement élémentaire d'entropie spécifique Δs et la quantité élémentaire de chaleur reçue par un système homogène à la température T .

L'inégalité fondamentale exprime qu'à tout instant t et pour toute partie V du système (seconde loi de la thermodynamique ou principe d'entropie sous forme d'inégalité de Clausius-Duhem), nous avons

$$\frac{d}{dt} \int_V s \rho dV \geq \int_V \frac{r}{T} dV - \oint_{\partial V} \frac{\bar{q}}{T} \cdot \bar{n} dA \quad (3.12)$$

où s est l'entropie par unité de masse, T est la température absolue.

Par l'utilisation du théorème de la divergence, nous transformons l'intégrale de surface en intégrale de volume et nous obtenons sous l'intégrale

$$\rho \dot{s} - \frac{r}{T} + \text{div} \left(\frac{q}{T} \right) \geq 0 \quad (3.13)$$

ou encore comme T est positive

$$\rho T \dot{s} - r + \text{div} q + g \cdot q \geq 0 \quad (3.14)$$

avec

$$g = - \frac{\text{grad} T}{T} \quad (3.15)$$

Il y a parfois intérêt à exprimer cette inégalité sous une forme qui ne fasse pas intervenir la quantité r . Il suffit pour cela d'éliminer celui-ci, grâce à l'équation (3.10). Nous obtenons alors

$$S^{ij} : \dot{E}_{ij} + \rho(T\dot{\delta} - \dot{e}) + g \cdot q \geq 0 \quad (3.16)$$

ou encore

$$S^{ij} : \dot{E}_{ij} - \rho(\dot{\Psi} + \delta\dot{T}) + g \cdot q \geq 0 \quad (3.17)$$

avec

$$\Psi = e - T\delta \quad (3.18)$$

est l'énergie libre par unité de masse. Cette énergie libre dépend des composantes de la déformation E_{ij} et de la température absolue T

$$\Psi = \Psi(E_{ij}, T) \quad (3.19)$$

Ainsi, la dérivée de l'énergie libre par rapport au temps donne

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}} : \dot{E}_{ij} + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} \quad (3.20)$$

En substituant cette égalité dans (3.17), nous obtenons

$$(S^{ij} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}}) : \dot{E}_{ij} - \rho(\delta + \frac{\partial \Psi}{\partial T}) \dot{T} + g \cdot q \geq 0 \quad (3.21)$$

Si \dot{E}_{ij} et \dot{T} sont arbitraires et indépendantes des expressions entre parenthèses qui les précèdent, nous obtenons les relations constitutives suivantes

$$S^{ij} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}} \quad (3.22)$$

et

$$\delta = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (3.23)$$

3.2. MODELE DE L'ENDOMMAGEMENT

Sous certaines conditions, des défauts microscopiques et des microfissures se produisent et grandissent dans les matériaux solides. Ils ont pour effet de réduire la vie des structures mécaniques. Cette détérioration des propriétés mécaniques du matériau est appelée endommagement.

3.2.1. Schéma cinématique

On considère un élément de volume local qu'on note V_L avec sa surface externe désignée par S , arbitrairement choisie (Fig. 3.1). Dans l'élément de volume V_L , extrait d'un corps B , vu du point de vue microscopique, de nouvelles surfaces notées S_2 , font leur apparition (ALLEN *et al.* [11]). Les dimensions de V_L sont choisies suffisamment petites comparées à celles du corps B , de telle sorte qu'elles garantissent macroscopiquement l'homogénéité du matériau. Ainsi l'élément de volume V_L satisfait à l'hypothèse de l'état local. Celle-ci peut s'énoncer selon GERMAIN [26], comme suit : "*à tout instant t fixé, on peut attacher à toute particule $(n+1)$ paramètres notés $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n$, tels que l'énergie interne spécifique e , l'entropie spécifique λ , la température absolue T (et plus généralement toutes les grandeurs continues) de cette particule à l'instant t , soient données en fonction de $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n$ par les mêmes expressions valables en thermostatique*".

En d'autres termes : "*à toute particule à un instant t fixé, on peut associer un état d'équilibre d'un système thermostatique défini par $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n$, décrivant une propriété thermostatique du système associé, et définissant également à l'instant t la propriété thermodynamique correspondante du milieu en mouvement*".

Si on considère le mouvement de l'élément local de volume V_L , dans le cas où les efforts et les déplacements sont appliqués uniformément sur le bord extérieur de V_L , les contraintes moyennes et les déplacements moyens dans V_L seront déterminés à partir des efforts et des déplacements sur le bord extérieur de V_L .

Bien que le processus d'endommagement entraîne la conversion de l'énergie de déformation en énergie de surface, le fait que l'endommagement soit reflété dans les équations constitutives plutôt que dans les conditions aux limites, suggère qu'il est traité dans

l'ensemble de l'énergie dissipative des variables internes lesquelles ne sont pas discernables sur le bord extérieur de l'élément de volume local.

Sous les hypothèses décrites précédemment, on peut décrire le système grâce à l'énergie libre spécifique par unité de masse (ou de volume) laquelle dépend de la partie élastique des composantes de la déformation E_{ij} et de la température absolue T

$$\Psi = \Psi(E_{ij}, T) = e - T\delta \quad (3.24)$$

Il est aisé de dégager la signification physique de l'état local (GERMAIN [26]) : *"elle implique en quelque sorte que, bien que le système soit en mouvement, chaque particule peut être considérée comme approximativement en équilibre du point de vue thermodynamique. Autrement dit, les temps de réponse permettant au système thermostatique (que constitue la particule légèrement perturbée par le mouvement) de retrouver un nouvel état d'équilibre thermostatique sont supposés négligeables par rapport aux durées qui caractérisent l'évolution cinématique et dynamique du milieu"*. Cet énoncé très schématique a toutes les chances d'être mis en défaut si l'évolution globale du système en mouvement est trop rapide. Par conséquent sa validité devra être appréciée et critiquée selon la nature des mouvements considérés. Mais les conséquences que l'on peut en déduire semblent, dans les situations les plus courantes envisagées en mécanique des milieux continus, raisonnablement en accord avec l'expérience.

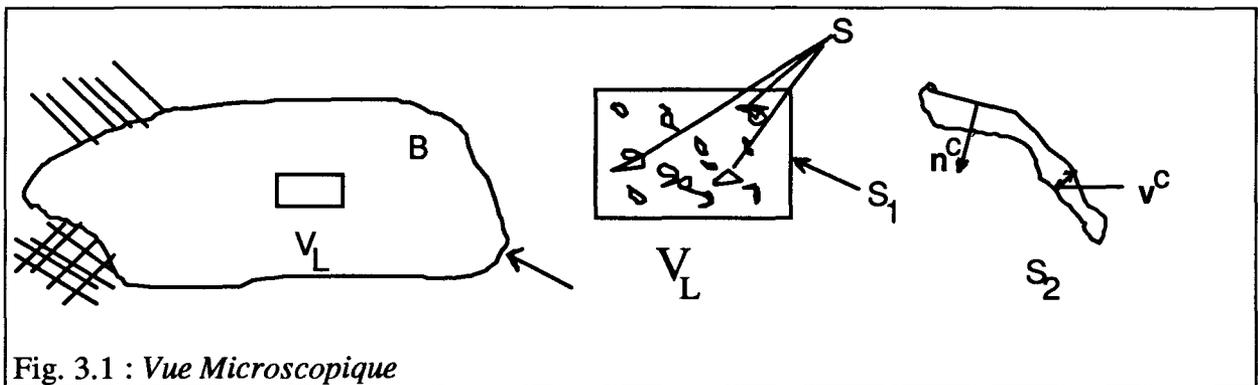


Fig. 3.1 : Vue Microscopique

Si nous regardons microscopiquement l'élément de volume V_L , nous constatons l'existence de quelques microfissures (vides, pores, etc..). Nous prenons par exemple, l'une de ces microfissures. Nous notons \mathbf{v}^c le vecteur qui a pour mesure la distance relative de l'une des faces de la microfissure par rapport à l'autre. Nous notons aussi \mathbf{n}^c la normale

extérieure à l'une ou l'autre des faces. Du fait que \mathbf{v}^c et \mathbf{n}^c décrivent la cinématique du processus d'endommagement, nous construisons un tenseur du second ordre évaluant une variable de l'état interne au niveau local

$$\alpha_{ij} = v_i^c n_j^c \quad (3.25)$$

Les v_i^c et n_j^c sont respectivement les composantes de \mathbf{v}^c et \mathbf{n}^c .

Notre nouvelle variable de l'état interne est bien représentative de la microfissure. Nous contrôlons la largeur de cette dernière grâce à son ouverture représentée par \mathbf{v}^c et à grâce sa direction de propagation donnée la normale \mathbf{n}^c . Cette description fut proposée pour la première fois par KACHANOV vers 1958.

Pour notre cas, nous ne considérerons que l'endommagement dû au délaminage. Les effets de celui-ci seront pris en compte à travers des quantités moyennes locales. Des efforts T_c^i fictifs équivalents sont appliqués le long de faces de couches (Fig. 3.2). Une énergie due à l'application de ces efforts fictifs est alors définie par

$$e^c = -\frac{1}{V_L} \int_{S_2} T_c^i \cdot v_i^c dS \quad (3.26)$$

En substituant l'équation (3.25) dans (3.26) et en utilisant la formule de Cauchy ($T_c^i = \sigma_c^{ij} n_j^c$), nous obtenons

$$e^c = -\frac{1}{V_L} \int_{S_2} \sigma_c^{ij} \alpha_{ij} dS \quad (3.27)$$

où les σ_c^{ij} sont les composantes d'un pseudo-vecteur de contrainte dû au délaminage.

3.2.2. Contraintes thermodynamiques

D'après la relation (3.22), la contrainte est une dérivée de l'énergie libre, qui est elle-même, dépendante de la déformation E et de la température T . En utilisant la relation (3.27), nous déduisons que notre nouvelle énergie interne (dû au délaminage) est une fonction des mêmes variables dont dépend σ_{ij}^c c'est à dire E_{ij} , T , et, de la nouvelle variable de l'état interne α_{ij} . Signalons que cette nouvelle énergie de l'état interne e^c n'a de sens qu'en présence de la nouvelle variable α_{ij} . Ainsi, nous pouvons écrire que

$$e^c = e^c(E_{ij}, T, \alpha_{ij}) \quad (3.28)$$

Notre intention maintenant, est de construire localement, un champ d'équations qui soient similaires dans la forme au champ d'équations de la thermodynamique.

L'application de la formule de la moyenne nous permet d'obtenir l'énergie interne donnée par (3.27) due au délaminage. Une modification de l'équation (3.24), permettant d'inclure l'énergie de conversion due aux différents phénomènes d'endommagement, est nécessaire. On considère l'élément de volume local V_L avec les porosités dues à l'endommagement. L'intérieur de V_L est supposé comme étant entièrement composé d'un matériau élastique délaminé. Si la structure dont on est extrait cet élément de volume local V_L est endommagée, on définit notre nouvelle énergie libre totale comme suit

$$\Psi^d = \Psi^d(E_{ij}, T, \alpha_{ij}) = e^d - T\delta = e + e^c - T\delta = \Psi + e^c \quad (3.29)$$

où e^d est appelée l'énergie interne locale effective. Elle est donnée par

$$e^d = e + e^c \quad (3.30)$$

avec e représentant l'énergie interne du corps équivalent non endommagé et e^c représentant l'énergie interne due à l'endommagement (ici le délaminage), qui est donnée par les relations (3.27) et (3.28).

Nous développons l'énergie libre Ψ^d en séries de puissance autour de l'état initial ($E_{ij} = 0, T = T_0, \alpha_{ij} = 0$)

$$\begin{aligned} \Psi^d &= \Psi^d|_0 + \frac{\partial \Psi^d}{\partial E_{ij}} \Big|_0 E_{ij} + \frac{\partial \Psi^d}{\partial T} \Big|_0 (T - T_0) + \frac{\partial \Psi^d}{\partial \alpha_{ij}} \Big|_0 \alpha_{ij} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \Big|_0 E_{ij} E_{kl} + \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial E_{ij} \partial T} \Big|_0 E_{ij} (T - T_0) + \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial E_{ij} \partial \alpha_{kl}} \Big|_0 E_{ij} \alpha_{kl} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial \alpha_{ij} \partial \alpha_{kl}} \Big|_0 \alpha_{ij} \alpha_{kl} + \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial \alpha_{ij} \partial E_{kl}} \Big|_0 \alpha_{ij} E_{kl} + \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial \alpha_{ij} \partial T} \Big|_0 \alpha_{ij} (T - T_0) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial T^2} \Big|_0 (T - T_0)^2 + \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial T \partial E_{ij}} \Big|_0 (T - T_0) E_{ij} + \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial T \partial \alpha_{ij}} \Big|_0 (T - T_0) \alpha_{ij} \right\} + \dots \quad (3.31) \end{aligned}$$

Si la déformation est suffisamment lente, le changement de température dans la structure sera considéré comme négligeable, alors le processus est isothermique ($T = T_0$). A l'état initial, l'énergie libre est absente (absence de déformation : $\Psi^d = \Psi^d|_0 = 0$). Donc l'équation (3.31) devient

$$\begin{aligned} \Psi^d &= \left. \frac{\partial \Psi^d}{\partial E_{ij}} \right|_0 E_{ij} + \left. \frac{\partial \Psi^d}{\partial \alpha_{ij}} \right|_0 \alpha_{ij} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \left. \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \right|_0 E_{ij} E_{kl} + \left. \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial E_{ij} \partial \alpha_{kl}} \right|_0 E_{ij} \alpha_{kl} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \left. \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial \alpha_{ij} \partial \alpha_{kl}} \right|_0 \alpha_{ij} \alpha_{kl} + \left. \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial \alpha_{ij} \partial E_{kl}} \right|_0 \alpha_{ij} E_{kl} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (3.32)$$

Les conditions imposées par les deux premiers principes de la thermodynamique par le biais de la relation (3.22) nous conduisent à

$$S_d^{ij} = \rho \left[\left. \frac{\partial \Psi^d}{\partial E_{ij}} \right|_0 + \left. \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \right|_0 E_{kl} + \left. \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial E_{ij} \partial \alpha_{kl}} \right|_0 \alpha_{kl} \right] \quad (3.33)$$

Dans le cas ici où nous faisons l'hypothèse que les contraintes sont absentes à l'état initial (état non chargé : absence de contraintes résiduelles (VALID [95]) : $\left. \frac{\partial \Psi^d}{\partial E_{ij}} \right|_0 = 0$),

l'équation (3.33) devient alors

$$S_d^{ij} = \rho \left[\left. \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \right|_0 E_{kl} + \left. \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial E_{ij} \partial \alpha_{kl}} \right|_0 \alpha_{kl} \right] \quad (3.34)$$

Si les déformations sont assez petites, le comportement du matériau élastique sous conditions isothermiques, peut être approximé par une relation linéaire entre les composantes de contrainte et celles de la déformation

$$S^{ij} = C^{ijkl} E_{kl} \quad (3.35)$$

où C^{ijkl} sont les composantes du tenseur d'élasticité.

En élasticité linéaire, nous avons la relation donnant les composantes du tenseur d'élasticité

$$C^{ijkl} = \rho \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \Big|_0 \quad (3.36)$$

Pour notre modèle, nous définissons un tenseur d'endommagement dont les composantes sont définies par

$$I^{ijkl} = \rho \frac{\partial^2 \Psi^d}{\partial E_{ij} \partial \alpha_{kl}} \Big|_0 \quad (3.37)$$

ALLEN et al. [6] ont démontré, en utilisant les conditions d'orthotropie, que les composantes du tenseur d'endommagement sont égales au signe près à celles du tenseur d'élasticité

$$I^{ijkl} \approx -C^{ijkl} \quad (3.38)$$

Ce qui implique que

$$S_d^{ij} = \rho C^{ijkl} (E_{kl} - \alpha_{kl}) \quad (3.39)$$

On voit d'après la relation précédente que dans le cas où il y a absence d'endommagement ($\alpha_{ij} = 0$), on retrouve la relation linéaire classique de l'élasticité en trois dimensions entre les composantes du second tenseur de Piola-Kirchhoff et celles de la déformation.

3.2.3 Lois constitutives pour les structures laminées

3.2.3.1. Loi d'évolution de l'endommagement

Notre modèle d'endommagement ne sera complet, que si on construit sa loi d'évolution.

Soient, dans une surface locale qu'on note A_L , les composantes de la variable de l'état interne donnée par (3.25), approximées par leur valeur moyenne

$$\alpha_{ij} = -\frac{1}{A_L} \int_{S_2} v_i^c n_j^c dS \quad (3.40)$$

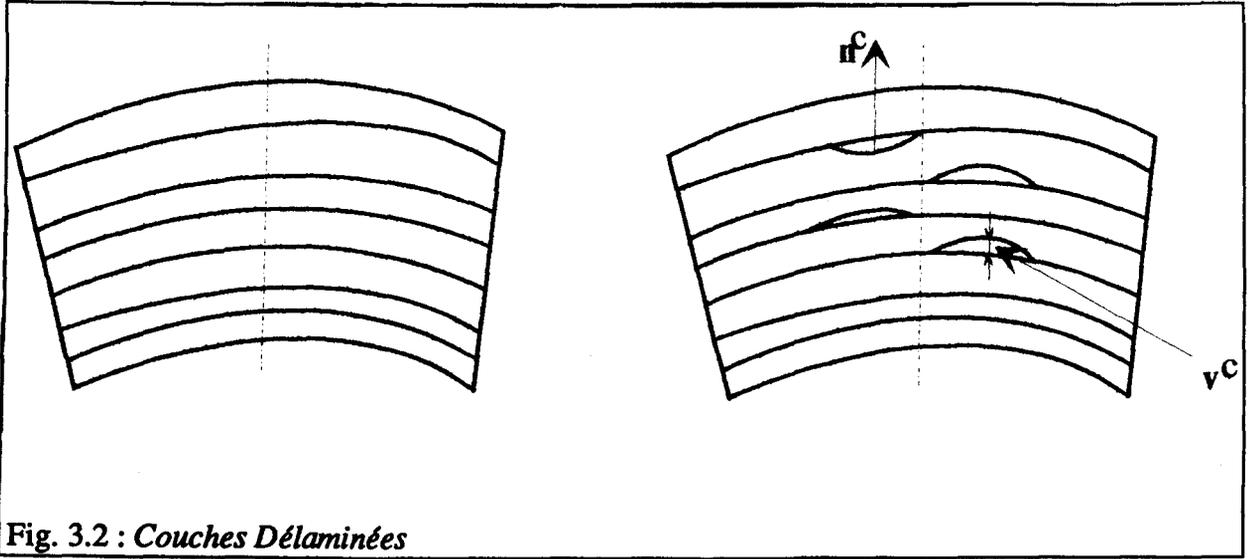


Fig. 3.2 : Couches Délaminées

Pour le cas des structures laminées, nous supposons que l'endommagement est causé seulement par le délaminage des couches adjacentes. Les efforts étant appliqués perpendiculairement à la surface du laminé, donc la normale à la surface S_2 est portée par \hat{i}_3 .

Ainsi, on peut écrire que

$$\mathbf{v}^c = v_1^c \hat{\mathbf{a}}_1 + v_2^c \hat{\mathbf{a}}_2 + v_3^c \hat{\mathbf{a}}_3 \quad (3.41a)$$

$$\mathbf{n}^c = n_3^c \hat{\mathbf{a}}_3 = \pm \hat{\mathbf{a}}_3 \quad (3.41b)$$

où $\hat{\mathbf{a}}_i$ sont les vecteurs orthonormés suivant les vecteurs de base surfaciques.

Donc seules les composantes α_{i3} sont différentes de zéro, toutes les autres sont nulles.

$$\alpha_{13} = -\frac{1}{A_L} \int_{S_2} v_1^c n_3^c dS \quad (3.42)$$

$$\alpha_{23} = -\frac{1}{A_L} \int_{S_2} v_2^c n_3^c dS \quad (3.43)$$

$$\alpha_{33} = -\frac{1}{A_L} \int_{S_2} v_3^c n_3^c dS \quad (3.44)$$

L'étape suivante consiste à intégrer ces équations à travers la surface délaminée. Nous utiliserons ici une loi approximative de O'BRIEN donnée par ALLEN *et al.* [8]. Cette loi a été déterminée expérimentalement sous la forme

$$\frac{\partial \alpha_{i3}}{\partial E_{i3}} = -\frac{n}{2} \frac{F_{x^i} \left(1 - \frac{1}{h} \sum_{j=1}^d h_j \right)}{C^{1i3}} \left(\frac{S_2}{S} \right) \quad (3.45)$$

où

E_{i3} : composantes de la déformation

n : nombre total de couches dans le laminé

F_{x^i} : module d'Young suivant la direction x^i

h : épaisseur totale du laminé

h_j : hauteur de l'écartement entre deux couches consécutives délaminées

d : nombre total de délaminages

C^{1i3} : composantes du tenseur d'élasticité

S_2 : surface totale délaminée

S : surface totale de contact entre les couches dans le laminé

Nous avons choisi cette loi de O'BRIEN car, nous avons remarqué qu'elle tient compte de suffisamment de paramètres physiques tels les surfaces, le nombre de couches etc., pour qu'elle soit la plus proche de la réalité.

Nous poserons alors

$$k = -\frac{n}{2} \frac{F_{x^i} \left(1 - \frac{1}{h} \sum_{j=1}^d h_j \right)}{C^{1i3}} \left(\frac{S_2}{S} \right) \quad (3.46)$$

Donc nous pouvons écrire

$$\alpha_{i3} = k E_{i3} \quad (3.47)$$

Par exemple, nous donnons deux valeurs de k selon Allen *et al.*

$$0.0 \leq k \leq 0.6613 \quad \text{pour } [0_r / 90_s] \text{ en verre/epoxyde}$$

$$0.0 \leq k \leq 0.6664 \quad \text{pour } [0_r / 90_s] \text{ en graphite/epoxyde}$$

3.2.3.2. Matrice constitutive du laminé

Nous limiterons notre étude aux matériaux laminés orthotropes. L'équation (2.29) s'écrit

$$L_{(n)}^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu S^{ij}(\theta^3)^n d\theta^3, \quad n=0,1 \quad (3.48)$$

où S^{ij} est donnée par la relation (3.39). Cette relation (3.39) écrite en bidimensionnelle devient

$$S_d^{\alpha\beta} = \rho C^{\alpha\beta\lambda\gamma} E_{\lambda\gamma} + \rho(1-k) C^{\alpha\beta 33} E_{33} \quad (3.49)$$

$$S_d^{\alpha 3} = 2\rho(1-k) C^{\alpha 3\lambda 3} E_{\lambda 3} \quad (3.50)$$

$$S_d^{33} = \rho C^{\alpha\beta 33} E_{\alpha\beta} + \rho(1-k) C^{3333} E_{33} \quad (3.51)$$

Par la suite, nous utiliserons la notation de Voigt pour les composantes du tenseur d'élasticité permettant une écriture matricielle pour un tenseur du quatrième ordre

11====>1; 22====>2; 33====>3; 23====>4; 13====>5; 12====>6.

Maintenant, nous allons intégrer l'équation constitutive (3.48), en utilisant le développement en séries de puissance des composantes de la déformation c'est-à-dire les équations (2.14)-(2.16).

La relation entre les composantes du vecteur contrainte et les composantes de la déformation s'écrit alors après certaines manipulations algébriques sous la forme

$$\begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & R_2 \\ R_1^T & \hat{R}_2 & R_3 \\ R_2^T & R_3^T & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

où

$$[L_0] = \begin{bmatrix} L_{(0)}^{11} \\ L_{(0)}^{22} \\ L_{(0)}^{12} \\ L_{(0)}^{33} \\ L_{(0)}^{12} \end{bmatrix} \quad [L_1] = \begin{bmatrix} L_{(1)}^{11} \\ L_{(1)}^{22} \\ L_{(1)}^{12} \end{bmatrix} \quad [L_2] = \begin{bmatrix} L_{(2)}^{11} \\ L_{(2)}^{22} \\ L_{(2)}^{12} \end{bmatrix}$$

$$[R_0] = \begin{bmatrix} R_{(0)}^{11} & R_{(0)}^{12} & R_{(0)}^{16} & R_{(0)}^{13} \\ R_{(0)}^{12} & R_{(0)}^{22} & R_{(0)}^{26} & R_{(0)}^{23} \\ R_{(0)}^{16} & R_{(0)}^{26} & R_{(0)}^{66} & R_{(0)}^{36} \\ R_{(0)}^{13} & R_{(0)}^{23} & R_{(0)}^{36} & R_{(0)}^{33} \end{bmatrix} \quad [R_1] = \begin{bmatrix} R_{(1)}^{11} & R_{(1)}^{12} & R_{(1)}^{16} \\ R_{(1)}^{12} & R_{(1)}^{22} & R_{(1)}^{26} \\ R_{(1)}^{16} & R_{(1)}^{26} & R_{(1)}^{66} \\ R_{(1)}^{13} & R_{(1)}^{23} & R_{(1)}^{36} \end{bmatrix}$$

$$[R_2] = \begin{bmatrix} R_{(2)}^{11} & R_{(2)}^{12} & R_{(2)}^{16} \\ R_{(2)}^{12} & R_{(2)}^{22} & R_{(2)}^{26} \\ R_{(2)}^{16} & R_{(2)}^{26} & R_{(2)}^{66} \\ R_{(2)}^{13} & R_{(2)}^{23} & R_{(2)}^{36} \end{bmatrix} \quad [\hat{R}_2] = \begin{bmatrix} R_{(2)}^{11} & R_{(2)}^{12} & R_{(2)}^{16} \\ R_{(2)}^{12} & R_{(2)}^{22} & R_{(2)}^{26} \\ R_{(2)}^{16} & R_{(2)}^{26} & R_{(2)}^{66} \end{bmatrix}$$

$$[R_3] = \begin{bmatrix} R_{(3)}^{11} & R_{(3)}^{12} & R_{(3)}^{16} \\ R_{(3)}^{12} & R_{(3)}^{22} & R_{(3)}^{26} \\ R_{(3)}^{16} & R_{(3)}^{26} & R_{(3)}^{66} \end{bmatrix} \quad [R_4] = \begin{bmatrix} R_{(4)}^{11} & R_{(4)}^{12} & R_{(4)}^{16} \\ R_{(4)}^{12} & R_{(4)}^{22} & R_{(4)}^{26} \\ R_{(4)}^{16} & R_{(4)}^{26} & R_{(4)}^{66} \end{bmatrix}$$

avec

$$R_{(n)}^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu C^{ij} (\theta^3)^n d\theta^3$$

et

$$[E_0] = \begin{bmatrix} E_{11}^{(0)} \\ E_{22}^{(0)} \\ 2 E_{12}^{(0)} \\ (1-k) E_{33}^{(0)} \end{bmatrix} \quad [E_n] = \begin{bmatrix} E_{11}^{(n)} \\ E_{22}^{(n)} \\ 2 E_{12}^{(n)} \end{bmatrix} \quad \text{pour } n=1,2$$

$$\begin{bmatrix} L_{(0)}^{23} \\ L_{(0)}^{13} \\ L_{(1)}^{23} \\ L_{(1)}^{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{(0)}^{44} & R_{(0)}^{45} & R_{(1)}^{44} & R_{(1)}^{45} \\ R_{(0)}^{45} & R_{(0)}^{55} & R_{(1)}^{45} & R_{(1)}^{55} \\ R_{(1)}^{44} & R_{(1)}^{45} & R_{(2)}^{44} & R_{(2)}^{45} \\ R_{(1)}^{45} & R_{(1)}^{55} & R_{(2)}^{45} & R_{(2)}^{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(1-k) \overset{(0)}{E}_{23} \\ 2(1-k) \overset{(0)}{E}_{13} \\ 2(1-k) \overset{(1)}{E}_{23} \\ 2(1-k) \overset{(1)}{E}_{13} \end{bmatrix}$$

Jusqu'ici, nous faisons les remarques suivantes

- i) le délaminage n'affecte que les termes de cisaillement et les termes normaux de la déformation.
- ii) Le coefficient k dû au délaminage dépend de la surface des faces délaminées, de la surface de contact entre deux couches successives, du nombre total de couches et des constantes matérielles et physiques du matériau.
- iii) Nous avons isolé les termes plans, les termes de cisaillement et le terme normal, ce qui va simplifier la modélisation numérique et donner lieu à une interprétation physique plus facile.
- iv) Ces relations vont nous servir dans les équations d'équilibre et dans les conditions aux limites des corps laminés en forme de coques ou plaques.
- v) Le déterminant du tenseur de changement de courbure μ dépend de θ^3 .

CHAPITRE 4
FORMULATION PAR LA
MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

CHAPITRE 4

FORMULATION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

4.1. INTRODUCTION

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes numériques utilisées pour la résolution de problèmes scientifiques. Depuis ces dernières années, sa technique a été assez bien établie, ce qui fait d'elle qu'elle soit la plus employée de nos jours. Sa popularité découle de son adaptation à résoudre beaucoup de problèmes numériques. Une fois qu'un programme est écrit en éléments finis, il peut être utilisé pour trouver la solution de différents problèmes, en changeant uniquement ses données.

La méthode elle-même, consiste à remplacer les structures complexes par un assemblage d'éléments structuraux, reliés par un nombre fini de noeuds ou points nodaux. Si nous connaissons le comportement de chacun des éléments, il est possible, en utilisant diverses techniques connues en analyse des structures (*BATHE & WILSON [16]*), d'en déduire le comportement général de la structure totale.

Etant donné qu'ici, nous utilisons des relations non linéaires, entre les composantes du vecteur de déplacement et celles de la déformation, nous procéderons à une réorganisation en profondeur de la formulation (*PALMERIO [65]*). Nous observerons que les processus itératifs fondamentaux des éléments finis, demeurent inchangés. Il faut cependant, mentionner quelques difficultés : alors que les problèmes linéaires ont une solution unique, cette propriété n'est pas vérifiée pour de nombreux problèmes non linéaires.

4.2. PRINCIPE

Lorsque la structure est composée d'un nombre fini d'éléments, les matrices de rigidité et les vecteurs de forces élémentaires, sont assemblées d'une manière convenable, et nous obtenons le système d'équations suivant pour la structure complète

$$[\bar{\mathbf{K}}](\{\underline{\mathbf{v}}\}) - \{\bar{\mathbf{R}}\} = 0 \quad (4.1)$$

où $[\bar{\mathbf{K}}]$ est la matrice de rigidité globale (après assemblage), $\{\underline{\mathbf{v}}\}$ est le vecteur déplacement nodal et $\{\bar{\mathbf{R}}\}$ est le vecteur représentant les forces dues aux charges extérieures, aux contraintes et déformations initiales, etc.. La barre au-dessus des termes signifie que, si les déplacements sont grands, les déformations dépendent des déplacements de façon non linéaire.

Pour notre cas, on suppose l'absence de contraintes et de déformations initiales, bien que dans la réalité, il y a toujours des contraintes résiduelles et des déformations initiales (la notion de structure vierge est très théorique).

Dans l'hypothèse d'un comportement élastique, on a la relation générale

$$\{\sigma\} = [\mathbf{H}]\{\mathbf{E}\} \quad (4.2)$$

où $[\mathbf{H}]$ est une matrice d'élasticité où entrent les propriétés du matériau.

Lorsque l'on veut traiter, des problèmes à lois de comportement non linéaires, les conditions de continuité des déplacements et d'équilibre doivent encore être vérifiées. Ainsi la seule relation à modifier est la relation (4.2) des contraintes-déformations.

Une nouvelle loi, en général, sera donnée par la relation du type

$$F(\{\sigma\}, \{\mathbf{E}\}) = 0 \quad (4.3)$$

Pour de nombreux problèmes réels, on ne peut pas écrire une relation du type (4.3) entre contraintes et déformations totales. On peut néanmoins en établir une, entre l'incrément de contrainte $\Delta\{\sigma\}$ et celui de la déformation $\Delta\{\mathbf{E}\}$. Dans de telles situations, on appliquera le processus itératif pour un incrément de charge. On constate que la définition de $[\mathbf{H}]$ constitue la donnée fondamentale ouvrant la voie à l'utilisation dans une forme incrémentale de la relation(4.2). Une telle donnée est donc l'élément essentiel de tout processus de résolution des problèmes non linéaires.

4.3. MATRICES DE RIGIDITÉ

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de revenir à la formulation fondamentale des équations des éléments finis déduites du principe des travaux virtuels, vue au chapitre précédent. On obtient les conditions d'équilibre en étudiant les variations du travail intérieur et extérieur. Ainsi, si $\{\phi\}$ représente le vecteur somme des forces intérieures et extérieures, on peut écrire

$$\delta\{\underline{v}\}^T\{\phi\} = \int_{\Omega} \delta\{E\}^T\{\sigma\}d\Omega - \delta\{\underline{v}\}^T\{\bar{R}\} = 0 \quad (4.4)$$

où $\{\bar{R}\}$ représente toutes les forces extérieures dues aux chargements imposés.

4.3.1. Écriture matricielle de la déformation

Revenons aux relations, donnant les composantes de la déformation en fonction de celles du déplacement, vues dans le chapitre 2, c'est à dire les relations (2.17)-(2.22).

Les composantes de la déformation peuvent être décomposées en une partie linéaire notée E_L et une partie non linéaire notée E_{NL} . Nous écrivons alors

$$\begin{aligned} E &= E_L + E_{NL} \\ &= [B_0][U] + \frac{1}{2}[A(\{\underline{v}\})][\mathcal{G}(\{\underline{v}\})] \end{aligned} \quad (4.5)$$

où

$[U]$: est le vecteur déplacement

$\{\underline{v}\}$: représente les composantes du vecteur de déplacement nodal

$[B_0]$, $[A]$: sont des opérateurs différentiels matriciels qui seront définis par la suite.

$[\mathcal{G}] = [G][U]$, avec $[G]$ un opérateur différentiel matriciel qui sera défini ultérieurement.

La variation de la relation (4.5) donne

$$\delta E = [B_0]\delta[U] + \frac{1}{2}\{\delta[A][\mathcal{G}] + [A]\delta[\mathcal{G}]\} \quad (4.6)$$

Comme on le verra par la suite, les opérateurs $[A]$ et $[\vartheta]$ sont choisis tels qu'ils vérifient la relation

$$\delta[A][\vartheta] = [A]\delta[\vartheta] \quad (4.7)$$

Sous cette hypothèse, la relation (4.6) devient

$$\delta E = [B_o]\delta[u] + [A]\delta[\vartheta] \quad (4.8)$$

Nous avons aussi la relation

$$\delta[\vartheta] = [G]\delta[u] \quad (4.9)$$

Par la suite nous faisons l'approximation suivante

$$[u] \approx [N](\{\underline{v}\}) \quad (4.10)$$

où

$[N]$: représente les fonctions d'approximation (ou d'interpolation ou de forme)

$\{\underline{v}\}$: représente les composantes nodales du point considéré

La variation de la relation (4.10) donne

$$\delta[u] = [N](\delta\{\underline{v}\}) \quad (4.11)$$

En utilisant les relations (4.9) et (4.11), la relation (4.8) devient

$$\delta\{E\} = [\bar{B}](\delta\{\underline{v}\}) \quad (4.12)$$

où

$$\begin{aligned} [\bar{B}] &= [B_L] + [B_{NL}(\{\underline{v}\})] \\ &= [B_o][N] + [A(\{\underline{v}\})][G(\{\underline{v}\})][N] \end{aligned} \quad (4.13)$$

avec $[B_L]$ représentant la matrice de rigidité qui intervient lorsque l'on ne considère que des déformations infinitésimales linéaires en fonction des déplacements, et où seule $[B_{NL}]$ est la partie nonlinéaire dépendant des déplacements. En général, on considérera que $[A]$ et $[G]$ sont des fonctions linéaires des composantes du déplacement.

4.3.2. Équation principale

Reportons maintenant la relation (4.12) dans (4.4) et éliminons par identification, le terme $\delta\{\underline{v}\}^T$. Nous obtenons l'équation valable de manière générale

$$\{\phi(\{\underline{v}\})\} = \int_{\Omega} [\overline{\mathbf{B}}]^T \{\sigma\} d\Omega - \{\overline{\mathbf{R}}\} = 0 \quad (4.14)$$

où $\{\sigma\}$ représente les contraintes réelles dépendant de l'état de déformation atteint.

Si la dépendance de $\{\sigma\}$ sur les déformations, et par conséquent, sur les déplacements peut être déterminée, nous sommes donc ramenés au problème de la résolution d'une équation non linéaire

$$\phi(\{\underline{v}\}) = 0 \quad (4.15)$$

Cette équation résume l'ensemble du problème des éléments finis.

4.3.3. Matrices de rigidité

Soit maintenant les variations de $\{\phi\}$ en (4.14) dues à des variations de $\{\underline{v}\}$

$$\delta\{\phi\} = \int_{\Omega} \delta[\overline{\mathbf{B}}]^T \{\sigma\} d\Omega + \int_{\Omega} [\overline{\mathbf{B}}]^T \delta\{\sigma\} d\Omega \quad (4.16)$$

où $\{\overline{\mathbf{R}}\}$ est absent de cette variation, car il ne dépend pas de $\{\underline{v}\}$.

En utilisant les relations (4.2) et (4.12), nous obtenons

$$\delta\{\sigma\} = [\mathbf{H}]\delta\{\mathbf{E}\} = [\mathbf{H}][\overline{\mathbf{B}}](\delta\{\underline{v}\}) \quad (4.17)$$

et compte tenu de (4.13), nous déduisons

$$\delta[\overline{\mathbf{B}}] = \delta[\mathbf{B}_{NL}] \quad (4.18)$$

Par conséquent, (4.16) devient

$$\delta\{\phi\} = \int_{\Omega} \delta[\mathbf{B}_{NL}]^T \{\sigma\} d\Omega + [\overline{\mathbf{K}}](\delta\{\underline{v}\}) \quad (4.19)$$

avec

$$[\bar{K}] = \int_{\Omega} [\bar{B}]^T [H] [\bar{B}] d\Omega = [K_L] + [K_{NL}] \quad (4.20)$$

où $[K_L]$ représente la matrice de rigidité rencontrée dans le cas des petits déplacements c'est à dire

$$[K_L] = \int_{\Omega} [B_L]^T [H] [B_L] d\Omega \quad (4.21)$$

tandis que la matrice $[K_{NL}]$ est due aux grands déplacements. Cette dernière est donnée par

$$[K_{NL}] = \int_{\Omega} \left\{ [B_L]^T [H] [B_{NL}] + [B_{NL}]^T [H] [B_{NL}] + [B_{NL}]^T [H] [B_L] \right\} d\Omega \quad (4.22)$$

Le premier terme du second membre de la relation (4.19) peut s'écrire de manière générale sous la forme qui ne paraîtra peut-être évidente qu'après des explications futures (voir & 4.3.4.3. à la fin de ce chapitre)

$$\int_{\Omega} \delta [B_{NL}]^T \{ \sigma \} d\Omega = [K_{\sigma}] (\delta \{ \underline{v} \}) \quad (4.23)$$

Dans cette expression $[K_{\sigma}]$ est une matrice symétrique dépendant de l'état des contraintes.

On a donc

$$\delta \{ \phi \} = ([K_L] + [K_{\sigma}] + [K_{NL}]) (\delta \{ \underline{v} \}) = [K_T] (\delta \{ \underline{v} \}) \quad (4.24)$$

$[K_T]$ représente la matrice de rigidité tangente totale.

4.3.4. Application de la M.E.F. à notre problème

4.3.4.1. Ecriture indicielle des composantes de la déformation

Nous utilisons maintenant les relations (1.25b) et (1.26b) qui s'écrivent respectivement

$$v^i|_j = v^i_{,j} + v^k \Gamma_{jk}^i \quad (4.25a)$$

$$v_i|_j = v_{i,j} - v_k \Gamma_{ij}^k \quad (4.25b)$$

et nous développons les relations (2.17) -(2.22) de la déformation en fonction de celles du déplacement.

Pour simplifier l'écriture nous utiliserons la notation suivante

$$u = \overset{(0)}{v}_1 \quad v = \overset{(0)}{v}_2 \quad w = \overset{(0)}{v}_3 \quad \Psi_x = \overset{(1)}{v}_1 \quad \Psi_y = \overset{(1)}{v}_2$$

et nous remplaçons les indices 1, 2, 3 des composantes de la déformation par x, y, z respectivement.

$$\overset{(0)}{E}_{xx} = u_{,x} - u\Gamma_{11}^1 - v\Gamma_{11}^2 - b_{11}w + \frac{1}{2}(w_{,x} + b_1^1u + b_1^2v)(w_{,x} + b_1^1u + b_1^2v) \quad (4.26)$$

$$\overset{(0)}{E}_{yy} = v_{,y} - u\Gamma_{22}^1 - v\Gamma_{22}^2 - b_{22}w + \frac{1}{2}(w_{,y} + b_2^1u + b_2^2v)(w_{,y} + b_2^1u + b_2^2v) \quad (4.27)$$

$$2\overset{(0)}{E}_{xy} = u_{,y} + v_{,x} - 2u\Gamma_{12}^1 - 2v\Gamma_{12}^2 - b_{12}w + (w_{,x} + b_1^1u + b_1^2v)(w_{,y} + b_2^1u + b_2^2v) \quad (4.28)$$

$$\overset{(1)}{E}_{xx} = \Psi_{x,x} - \Psi_x \Gamma_{11}^1 - \Psi_y \Gamma_{11}^2 - b_1^1(u_{,x} - u\Gamma_{11}^1 - v\Gamma_{11}^2 - b_{11}w) - b_1^2(v_{,x} - u\Gamma_{12}^1 - v\Gamma_{12}^2 - b_{21}w) + b_1^1(w_{,x} + b_1^1u + b_1^2v)\Psi_x + b_1^2(w_{,x} + b_1^1u + b_1^2v)\Psi_y \quad (4.29)$$

$$\overset{(1)}{E}_{yy} = \Psi_{y,y} - \Psi_x \Gamma_{22}^1 - \Psi_y \Gamma_{22}^2 - b_2^1(u_{,y} - u\Gamma_{12}^1 - v\Gamma_{12}^2 - b_{12}w) - b_2^2(v_{,y} - u\Gamma_{22}^1 - v\Gamma_{22}^2 - b_{22}w) + b_2^1(w_{,y} + b_2^1u + b_2^2v)\Psi_x + b_2^2(w_{,y} + b_2^1u + b_2^2v)\Psi_y \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} 2\overset{(1)}{E}_{xy} = & \Psi_{x,y} + \Psi_{y,x} - 2\Psi_x \Gamma_{12}^1 - 2\Psi_y \Gamma_{12}^2 - b_1^1(u_{,y} - u\Gamma_{12}^1 - v\Gamma_{12}^2 - b_{12}w) \\ & - b_1^2(v_{,y} - u\Gamma_{22}^1 - v\Gamma_{22}^2 - b_{22}w) - b_2^1(u_{,x} - u\Gamma_{11}^1 - v\Gamma_{11}^2 - b_{11}w) \\ & - b_2^2(v_{,x} - u\Gamma_{12}^1 - v\Gamma_{12}^2 - b_{21}w) + b_1^1(w_{,y} + b_2^1u + b_2^2v)\Psi_x \\ & + b_1^2(w_{,y} + b_2^1u + b_2^2v)\Psi_y + b_2^1(w_{,x} + b_1^1u + b_1^2v)\Psi_x + b_2^2(w_{,x} + b_1^1u + b_1^2v)\Psi_y \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \overset{(2)}{E}_{xx} = & -b_1^1(\psi_{x,x} - \psi_x \Gamma_{11}^1 - \psi_y \Gamma_{11}^2) - b_1^2(\psi_{y,x} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2) \\ & + \frac{1}{2}(b_1^1 b_1^1 \psi_x \psi_x + b_1^2 b_1^2 \psi_y \psi_y) + b_1^1 b_1^2 \psi_x \psi_y \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \overset{(2)}{E}_{yy} = & -b_2^1(\psi_{x,y} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2) - b_2^2(\psi_{y,y} - \psi_x \Gamma_{22}^1 - \psi_y \Gamma_{22}^2) \\ & + \frac{1}{2}(b_2^1 b_2^1 \psi_x \psi_x + b_2^2 b_2^2 \psi_y \psi_y) + b_2^1 b_2^2 \psi_x \psi_y \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} 2\overset{(2)}{E}_{xy} = & -b_1^1(\psi_{x,y} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2) - b_1^2(\psi_{y,y} - \psi_x \Gamma_{22}^1 - \psi_y \Gamma_{22}^2) \\ & - b_2^1(\psi_{x,x} - \psi_x \Gamma_{11}^1 - \psi_y \Gamma_{11}^2) - b_2^2(\psi_{y,x} - \psi_x \Gamma_{21}^1 - \psi_y \Gamma_{21}^2) \\ & + b_1^1(b_2^1 \psi_x + b_2^2 \psi_y) \psi_x + b_1^2(b_2^1 \psi_x + b_2^2 \psi_y) \psi_y \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} 2\overset{(0)}{E}_{yz} = & w_{,y} + b_2^1 u + b_2^2 v + \psi_y + (u_{,y} - u \Gamma_{12}^1 - v \Gamma_{12}^2 - b_{12} w)(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) \\ & + (v_{,y} - u \Gamma_{22}^1 - v \Gamma_{22}^2 - b_{22} w)(a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} 2\overset{(0)}{E}_{xz} = & w_{,x} + b_1^1 u + b_1^2 v + \psi_x + (u_{,x} - u \Gamma_{11}^1 - v \Gamma_{11}^2 - b_{11} w)(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) \\ & + (v_{,x} - u \Gamma_{12}^1 - v \Gamma_{12}^2 - b_{21} w)(a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y) \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$2\overset{(1)}{E}_{yz} = (\psi_{x,y} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2)(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) + (\psi_{y,y} - \psi_x \Gamma_{22}^1 - \psi_y \Gamma_{22}^2)(a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y) \quad (4.37)$$

$$2\overset{(1)}{E}_{xz} = (\psi_{x,x} - \psi_x \Gamma_{11}^1 - \psi_y \Gamma_{11}^2)(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) + (\psi_{y,x} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2)(a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y) \quad (4.38)$$

$$\overset{(0)}{E}_{zz} = \frac{1}{2}[(a^{11} \psi_x + a^{12} \psi_y) \psi_x + (a^{21} \psi_x + a^{22} \psi_y) \psi_y] \quad (4.39)$$

4.3.4.2. *Ecriture matricielle de la déformation*

Nous avons vu que la déformation E pouvait être décomposée en une partie linéaire plus une partie nonlinéaire

$$E = E_L + E_{NL} \quad (4.40)$$

Nous allons maintenant donner les différents opérateurs intervenant dans la relation (4.13) en utilisant l'expression des composantes de la déformation en fonction des composantes du déplacement, c'est à dire les relations (4.26) - (4.39). D'après ce qui précède, la variation de la déformation peut s'écrire

$$\begin{aligned} \delta E &= \delta(E_L + E_{NL}) \\ &= [\bar{B}](\delta\{\underline{v}\}) \\ &= \{[B_L] + [B_{NL}(\{\underline{v}\})]\}(\delta\{\underline{v}\}) \\ &= \{[B_0][N] + [A(\{\underline{v}\})][G(\{\underline{v}\})][N]\}(\delta\{\underline{v}\}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

4.3.4.2.1. *Opérateurs linéaires $[B_L]$*

4.3.4.2.1.1. *Composantes membranaires*

$$[B_L] = [B_0][N] = \begin{bmatrix} [B_1] & [0_2] \\ [0_1] & [B_2] \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

où

$$[B_1] = \begin{bmatrix} \Phi_{i,x} - \Gamma_{11}^1 \Phi_i & -\Gamma_{22}^2 \Phi_i & -b_{11} \Phi_i \\ -\Gamma_{22}^1 \Phi_i & (\Phi_{i,y} - \Gamma_{22}^2 \Phi_i) & -b_{22} \Phi_i \\ (\Phi_{i,y} - 2\Gamma_{12}^1 \Phi_i) & (\Phi_{i,x} - 2\Gamma_{12}^2 \Phi_i) & -2b_{12} \Phi_i \\ (-b_1^1 \Phi_{i,x} + b_1^1 \Gamma_{11}^1 \Phi_i + b_1^2 \Gamma_{12}^1 \Phi_i) & (-b_1^2 \Phi_{i,x} + b_1^1 \Gamma_{11}^2 \Phi_i + b_1^2 \Gamma_{12}^2 \Phi_i) & (b_1^1 b_{11} + b_1^2 b_{21}) \Phi_i \\ (-b_2^1 \Phi_{i,y} + b_2^1 \Gamma_{12}^1 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{22}^1 \Phi_i) & (-b_2^2 \Phi_{i,y} + b_2^1 \Gamma_{12}^2 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{22}^2 \Phi_i) & (b_2^1 b_{12} + b_2^2 b_{22}) \Phi_i \\ (-b_1^1 \Phi_{i,y} + b_1^1 \Gamma_{12}^1 \Phi_i + b_1^2 \Gamma_{22}^1 \Phi_i) & (-b_1^2 \Phi_{i,y} + b_1^1 \Gamma_{12}^2 \Phi_i + b_1^2 \Gamma_{22}^2 \Phi_i) & (b_1^1 b_{12} + b_1^2 b_{22}) \Phi_i \\ (-b_2^1 \Phi_{i,x} + b_2^1 \Gamma_{11}^1 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{12}^1 \Phi_i) & (-b_2^2 \Phi_{i,x} + b_2^1 \Gamma_{11}^2 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{12}^2 \Phi_i) & (+b_2^2 b_{21} + b_2^1 b_{11}) \Phi_i \end{bmatrix}$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} (\Phi_{i,x} - \Gamma_{11}^1 \Phi_i) & -\Gamma_{11}^2 \Phi_i \\ -\Gamma_{22}^1 \Phi_i & (\Phi_{i,y} - \Gamma_{22}^2 \Phi_i) \\ (\Phi_{i,y} - 2\Gamma_{12}^1 \Phi_i) & (\Phi_{i,x} - 2\Gamma_{12}^2 \Phi_i) \\ (-b_1^1 \Phi_{i,x} + b_1^1 \Gamma_{11}^1 \Phi_i + b_1^2 \Gamma_{12}^1 \Phi_i) & (-b_1^2 \Phi_{i,x} + b_1^1 \Gamma_{11}^2 \Phi_i + b_1^2 \Gamma_{12}^2 \Phi_i) \\ (-b_2^1 \Phi_{i,y} + b_2^1 \Gamma_{12}^1 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{22}^1 \Phi_i) & (-b_2^2 \Phi_{i,y} + b_2^1 \Gamma_{12}^2 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{22}^2 \Phi_i) \\ (-b_1^1 \Phi_{i,y} + b_1^1 \Gamma_{12}^1 \Phi_i + b_1^2 \Gamma_{22}^1 \Phi_i) & (-b_1^2 \Phi_{i,y} + b_1^1 \Gamma_{12}^2 \Phi_i + b_1^2 \Gamma_{22}^2 \Phi_i) \\ (-b_2^1 \Phi_{i,x} + b_2^1 \Gamma_{11}^1 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{12}^1 \Phi_i) & (-b_2^2 \Phi_{i,x} + b_2^1 \Gamma_{11}^2 \Phi_i + b_2^2 \Gamma_{12}^2 \Phi_i) \end{bmatrix}$$

$[0_1]$ est matrice nulle 3x3 et $[0_2]$ est matrice nulle 3x2. Les Φ_i sont les fonctions d'interpolation aux points nodaux.

4.3.4.2.1.2. Composantes de cisaillement et normales

$$[B_L] = [[B_0] \cdot [N]] = \begin{bmatrix} b_2^1 \Phi_i & b_2^2 \Phi_i & \Phi_{i,y} & 0 & \Phi_i \\ b_1^1 \Phi_i & b_1^2 \Phi_i & \Phi_{i,x} & \Phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

4.3.4.2.2. Termes nonlinéaires $[B_{NL}]$

Nous savons que $[B_{NL}]$ peut se mettre sous la forme

$$[B_{NL}] = [[A][G][N]] \quad (4.44)$$

où $[[G][N]]$ est obtenue à partir de la relation

$$\{\vartheta\} = \begin{Bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \\ \vartheta_5 \\ \vartheta_6 \\ \vartheta_7 \\ \vartheta_8 \\ \vartheta_9 \\ \vartheta_{10} \\ \vartheta_{11} \\ \vartheta_{12} \end{Bmatrix} = [[G][N]](\{\underline{v}\})$$

(4.45)

avec

$$\begin{aligned}
 \vartheta_1 &= b_1^1 u + b_1^2 v + w_{,x} & \vartheta_2 &= b_2^1 u + b_2^2 v + w_{,y} & \vartheta_3 &= \psi_x & \vartheta_4 &= \psi_y \\
 \vartheta_5 &= \psi_{x|x} = \psi_{x,x} - \psi_x \Gamma_{11}^1 - \psi_y \Gamma_{11}^2 & \vartheta_6 &= \psi_{x|y} = \psi_{x,y} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2 \\
 \vartheta_7 &= \psi_{y|x} = \psi_{y,x} - \psi_x \Gamma_{12}^1 - \psi_y \Gamma_{12}^2 & \vartheta_8 &= \psi_{y|y} = \psi_{y,y} - \psi_x \Gamma_{22}^1 - \psi_y \Gamma_{22}^2 \\
 \vartheta_9 &= u_{|x} - b_{11} w = u_{,x} - u \Gamma_{11}^1 - v \Gamma_{11}^2 - b_{11} w & \vartheta_{10} &= v_{|x} - b_{11} w = v_{,x} - u \Gamma_{12}^1 - v \Gamma_{12}^2 - b_{21} w \\
 \vartheta_{11} &= u_{|y} - b_{12} w = u_{,y} - u \Gamma_{12}^1 - v \Gamma_{12}^2 - b_{12} w & \vartheta_{12} &= v_{|y} - b_{22} w = v_{,y} - u \Gamma_{22}^1 - v \Gamma_{22}^2 - b_{22} w
 \end{aligned}$$

Donc l'opérateur $[[G][N]]$ est donné par

$$[[G][N]] = \begin{bmatrix}
 b_1^1 \Phi_i & b_1^2 \Phi_i & \Phi_{i,x} & 0 & 0 \\
 b_2^1 \Phi_i & b_2^2 \Phi_i & \Phi_{i,y} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \Phi_i & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_i \\
 0 & 0 & 0 & \Phi_{i,x} - \Gamma_{11}^1 \Phi_i & -\Gamma_{11}^2 \Phi_i \\
 0 & 0 & 0 & \Phi_{i,y} - \Gamma_{12}^1 \Phi_i & -\Gamma_{12}^2 \Phi_i \\
 0 & 0 & 0 & -\Gamma_{12}^1 \Phi_i & \Phi_{i,x} - \Gamma_{12}^2 \Phi_i \\
 0 & 0 & 0 & -\Gamma_{22}^1 \Phi_i & \Phi_{i,y} - \Gamma_{22}^2 \Phi_i \\
 \Phi_{i,x} - \Gamma_{11}^1 \Phi_i & -\Gamma_{11}^2 \Phi_i & -b_{11} \Phi_i & 0 & 0 \\
 -\Gamma_{12}^1 \Phi_i & \Phi_{i,x} - \Gamma_{12}^2 \Phi_i & -b_{21} \Phi_i & 0 & 0 \\
 \Phi_{i,y} - \Gamma_{12}^1 \Phi_i & -\Gamma_{12}^2 \Phi_i & -b_{12} \Phi_i & 0 & 0 \\
 -\Gamma_{22}^1 \Phi_i & \Phi_{i,y} - \Gamma_{22}^2 \Phi_i & -b_{22} \Phi_i & 0 & 0
 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

L'opérateur $[A]$ est défini comme suit

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_1] & [0] \\ [A_2] & [A_3] \end{bmatrix} \tag{4.47}$$

avec

$$[A_1] = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vartheta_2 & 0 & 0 \\ \vartheta_2 & \vartheta_1 & 0 & 0 \\ b_1^1 \vartheta_3 + b_1^2 \vartheta_4 & 0 & b_1^1 \vartheta_1 & b_1^2 \vartheta_1 \\ 0 & b_2^1 \vartheta_3 + b_2^2 \vartheta_4 & b_2^1 \vartheta_2 & b_2^2 \vartheta_2 \\ b_2^1 \vartheta_3 + b_2^2 \vartheta_4 & b_1^1 \vartheta_3 + b_1^2 \vartheta_4 & b_2^1 \vartheta_1 + b_1^1 \vartheta_2 & b_2^2 \vartheta_1 + b_1^2 \vartheta_2 \\ 0 & 0 & b_1^1 (b_1^1 \vartheta_3 + b_1^2 \vartheta_4) & b_1^2 (b_1^1 \vartheta_3 + b_1^2 \vartheta_4) \\ 0 & 0 & b_2^1 (b_2^1 \vartheta_3 + b_2^2 \vartheta_4) & b_2^2 (b_2^1 \vartheta_3 + b_2^2 \vartheta_4) \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} 2b_1^1 b_2^1 \vartheta_3 + \\ (b_1^1 b_2^2 + b_1^2 b_2^1) \vartheta_4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (b_1^1 b_2^2 + b_1^2 b_2^1) \vartheta_3 \\ + 2b_1^2 b_2^2 \vartheta_4 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^{11} \vartheta_{11} + a^{21} \vartheta_{12} & a^{12} \vartheta_{11} + a^{22} \vartheta_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{11} \vartheta_9 + a^{21} \vartheta_{10} & a^{12} \vartheta_9 + a^{22} \vartheta_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{11} \vartheta_6 + a^{21} \vartheta_8 & a^{12} \vartheta_6 + a^{22} \vartheta_8 & 0 & a^{11} \vartheta_3 + a^{12} \vartheta_4 \\ 0 & 0 & a^{11} \vartheta_5 + a^{21} \vartheta_7 & a^{12} \vartheta_5 + a^{22} \vartheta_7 & a^{11} \vartheta_3 + a^{12} \vartheta_4 & 0 \\ 0 & 0 & (a^{11} \vartheta_3 + a^{12} \vartheta_4) & (a^{12} \vartheta_3 + a^{22} \vartheta_4) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a^{11} \vartheta_3 + a^{12} \vartheta_4 & a^{21} \vartheta_3 + a^{22} \vartheta_4 \\ 0 & 0 & a^{11} \vartheta_3 + a^{12} \vartheta_4 & a^{21} \vartheta_3 + a^{22} \vartheta_4 & 0 & 0 \\ 0 & a^{21} \vartheta_3 + a^{22} \vartheta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{21} \vartheta_3 + a^{22} \vartheta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $[O]$ est une matrice nulle (9x8).

4.3.4.3. Calcul de la matrice de rigidité tangentielle totale $[K_T]$

Les matrices de rigidité sont déterminées à partir des définitions (4.21), (4.22) et des expressions (4.42), (4.43), (4.44) de $[B_L]$ et de $[B_{NL}]$.

Il faut enfin trouver $[K_\sigma]$ en utilisant la définition (4.23). D'après cette définition et en tenant compte de (4.44) nous pouvons écrire que

$$[K_\sigma](\delta\{\underline{v}\}) = \int_{\Omega} [N]^T [G]^T \delta[A]^T \{\sigma\} d\Omega \quad (4.48)$$

où les composantes de $\{\sigma\}$ ont été définies au (2.29)

$$\sigma_{(n)}^{ij} = L_{(n)}^{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu S^{ij} (\theta^3)^n d\theta^3 \quad (4.49)$$

On utilise la propriété suivante caractérisant les matrices

$$\delta[A]^T \{\sigma\} = [S] \delta\{\vartheta\} \quad (4.50)$$

où la matrice $[S]$ est obtenue par identification en effectuant le produit du premier membre

$$[S] = \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_2]^T & [0] \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

avec

$$[S_1] = \begin{bmatrix} L_{(0)}^{11} & L_{(0)}^{12} & b_1^1 L_{(1)}^{11} + b_2^1 L_{(1)}^{12} & b_1^2 L_{(1)}^{11} + b_2^2 L_{(1)}^{12} \\ x & L_{(0)}^{22} & b_2^1 L_{(1)}^{22} + b_1^1 L_{(1)}^{12} & b_2^2 L_{(1)}^{22} + b_1^2 L_{(1)}^{12} \\ x & x & \left(b_1^1 (b_1^1 L_{(2)}^{11} + 2b_2^1 L_{(2)}^{12}) \right) & \left(b_1^1 b_1^2 L_{(2)}^{11} + b_2^1 b_2^2 L_{(2)}^{22} \right) \\ & & \left(+b_2^1 b_2^1 L_{(2)}^{22} + a^{11} L_{(0)}^{33} \right) & \left(+ (b_1^1 b_2^2 + b_2^1 b_1^1) L_{(2)}^{22} \right) \\ & & & \left(+ \frac{1}{2} (a^{12} + a^{21}) L_{(0)}^{22} \right) \\ \text{SYM.} & x & x & \left(b_1^{21} b_2^1 L_{(2)}^{11} + b_2^2 b_2^2 L_{(2)}^{22} \right) \\ & & & \left(+ 2b_1^2 b_2^2 L_{(2)}^{12} + a^{22} L_{(0)}^{33} \right) \end{bmatrix}$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^{11}L_{(1)}^{13} & a^{11}L_{(1)}^{23} & a^{21}L_{(1)}^{13} & a^{21}L_{(1)}^{23} & a^{11}L_{(0)}^{13} & a^{21}L_{(0)}^{13} & a^{11}L_{(0)}^{23} & a^{21}L_{(0)}^{23} \\ a^{12}L_{(1)}^{13} & a^{12}L_{(1)}^{23} & a^{22}L_{(1)}^{13} & a^{22}L_{(1)}^{23} & a^{12}L_{(0)}^{13} & a^{22}L_{(0)}^{13} & a^{12}L_{(0)}^{23} & a^{22}L_{(0)}^{23} \end{bmatrix}$$

et $[0]$ est une matrice nulle 8×8 .

Donc en tenant compte de (4.45), nous pouvons écrire la relation

$$[K_\sigma](\delta\{\underline{v}\}) = \int_{\Omega} [N]^T [G]^T [S] [G] [N] d\Omega (\delta\{\underline{v}\}) \quad (4.52)$$

Soit

$$[K_\sigma] = \int_{\Omega} [N]^T [G]^T [S] [G] [N] d\Omega \quad (4.53)$$

Les matrices $[H]$ et $[S]$ étant symétriques, donc $[K_\tau]$ l'est aussi.

Dans l'annexe à la fin de ce rapport, nous donnons quelques exemples de calcul des différents coefficients de la géométrie différentielle.

CHAPITRE 5

ÉVALUATION DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

CHAPITRE 5

ÉVALUATION DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

5.1. INTRODUCTION

Ce chapitre est consacré aux quelques résultats de calcul obtenus et aux conditions dans lesquelles ce calcul a été fait. Ce programme de calcul a été réalisé en collaboration avec l'équipe de Wuppertal (Allemagne, Prof. Dr.-Ing. SCHMIDT & Dr. KREJA) et celle de Blacksburg (Virginie-U.S.A., Prof. REDDY & Dr. PALMERIO). En ce qui concerne le matériel utilisé, nous avons d'abord travaillé sur le CDC CYBER 9600 du CITILille. Ensuite, nous avons continué sur une station de travail IBM (RISC 6000) disponible à l'EUDIL dont les caractéristiques sont les suivantes

Mémoire centrale : 32 Mo

Lecteur disquette : 3.5"

disques durs : 400 Mo en interne et 1.2 Go en externe

Streamer : 150 Mo

Logiciels implantés :

environnement : Xwindow

compilateurs : C et Fortran

système d'exploitation : Unix

éditeurs de texte : vi, ed, e, emacs, imsl

5.2. TYPE D'ÉLÉMENTS UTILISÉS

Nous avons utilisé des éléments rectangulaires à quatre, huit ou neuf noeuds plutôt que d'autres types d'éléments à trois, six noeuds par exemple, pour les trois raisons suivantes :

1) la préparation des données est considérablement réduite, puisque le nombre d'éléments est réduit. On remplace par exemple, deux éléments à trois noeuds par un à quatre noeuds, ou encore quatre éléments à trois noeuds par un à neuf noeuds etc..

2) l'amélioration de la précision des résultats est considérable, bien que le temps de calcul augmente. Le problème de la rentabilité des éléments doit être alors considéré.

3) Nous pouvons utiliser une méthode d'intégration numérique déduite directement de la méthode de Gauss dans le cas unidimensionnel.

Les fonctions d'interpolation sont choisies du type quadratique. Ce qui est conforme à l'utilisation des coordonnées curvilignes.

Dans ce calcul, nous avons utilisé cinq degrés de liberté par noeud, u, v, w, ψ_x, ψ_y ; ce qui est compatible avec la première hypothèse pour formuler cette théorie. Le sixième degré de liberté ψ_z est souvent négligé dans beaucoup de théories, car la variation de la rotation autour de la normale à la surface moyenne est petite comparée aux autres rotations et déplacements.

5.3. INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Nous considérons la matrice de rigidité comme la somme d'une matrice de type membranaire et d'une matrice de type cisaillement (voir §.4.3.4.2.).

Le choix du nombre de points d'intégration dépend à la fois du type de l'élément utilisé et de la matrice de rigidité. On choisit le plus souvent un nombre de points aussi faible que possible pour diminuer le volume de calcul. Par expérience, on a constaté que l'intégration réduite est la plus utilisée puisque elle donne de meilleurs résultats que l'intégration complète. Par contre, il faut un nombre minimum de points d'intégration en dessous duquel, la matrice de rigidité reste singulière. Pour notre cas, il faut un minimum de (3x3) points pour les composantes membranaires et (2x2) points pour les composantes de cisaillement et normales.

La matrice globale de rigidité tangente $[K_T]$ donnée par (4.24), comporte un grand nombre de zéros. Pour ne pas saturer la mémoire de l'ordinateur, nous utilisons la méthode de stockage des matrices à ligne de ciel ouvert (voir BATHE *et al.* [16] ou DHATT *et al.* [23]).

5.4. RÉSOLUTION DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

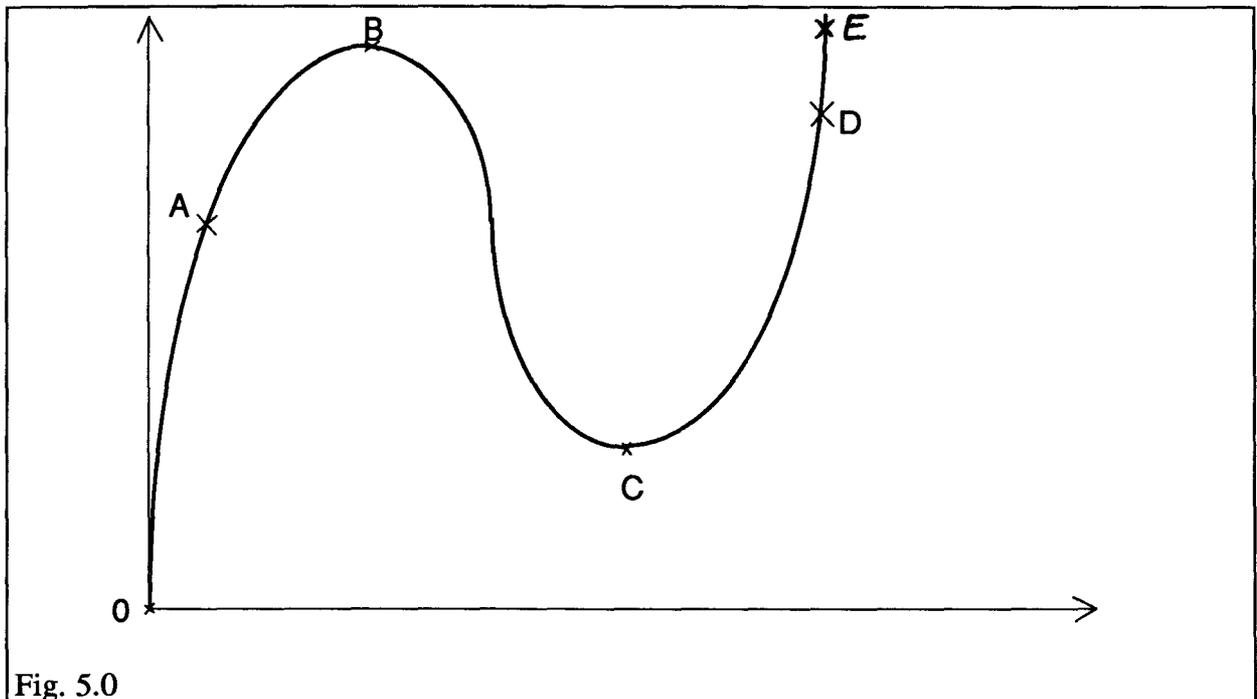
En pratique, il n'existe pas de méthode universelle pour résoudre un système d'équations. Néanmoins, par expérience, les numériciens utilisent en général, les trois méthodes suivantes ou leurs combinaisons

- 1) méthode de substitution
- 2) méthode de Newton-Raphson ou Newton-Raphson modifiée
- 3) méthode incrémentale.

Puisque dans notre calcul, nous considérons le flambement des coques, nous avons choisi d'utiliser la méthode des déplacements contrôlés, qui est en fait, la méthode de Newton-Raphson combinée avec la méthode incrémentale.

Explication de la méthode des déplacements contrôlés

Nous avons à résoudre l'équation donnée par (4.1), pour un problème non linéaire. Cette non-linéarité est due à la prise en compte du terme non linéaire dans l'expression de la déformation en fonction du déplacement donnée par la relation de Green-Lagrange (2.6).



La charge totale est divisée en un nombre fini d'incrément. Chaque incrément a pour intensité $\Delta\lambda$. Pour résoudre l'équation (4.1), nous l'écrivons autrement

$$[K_T](\Delta\{\underline{v}\}) = RS + \Delta\lambda\{F_0\} \quad (5.1)$$

où

$[K_T]$: est la matrice de rigidité globale tangente donnée par (4.24)

$\Delta\{\underline{v}\}$: est l'incrément de déplacement

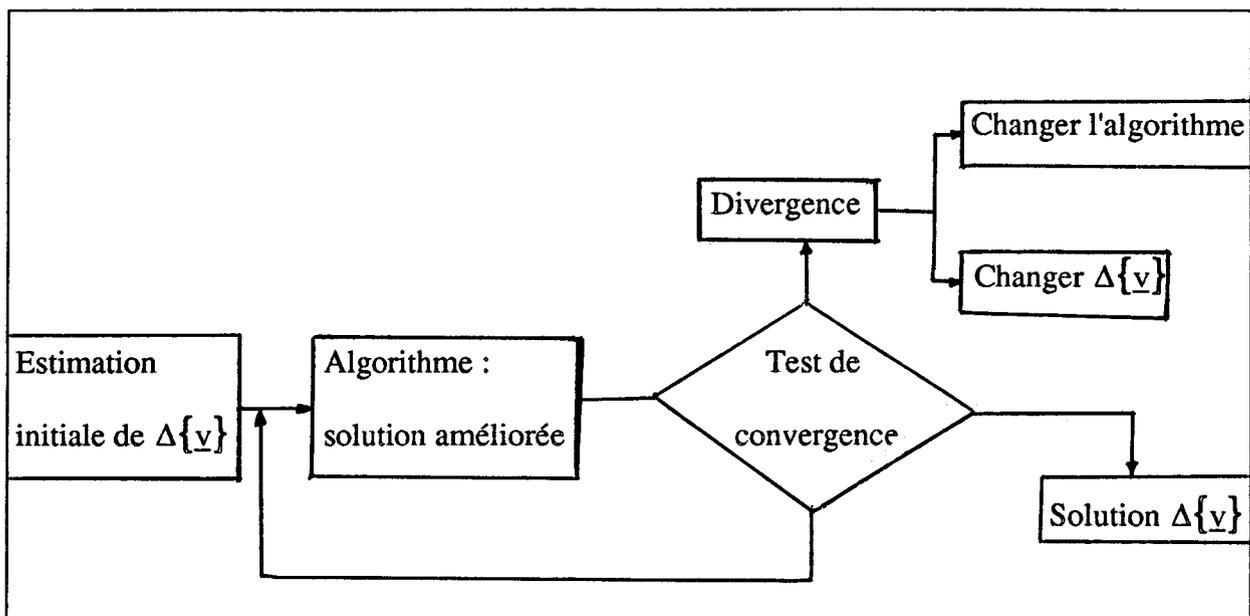
RS : est le résidu dû à l'estimation du déplacement initial (ou erreur due la méthode de résolution)

$\Delta\lambda$: est l'incrément de charge

$\{F_0\}$: est le vecteur unitaire parallèle à l'incrément de charge.

Résoudre (4.1) revient à chercher $\Delta\{\underline{v}\}$ qui rend RS aussi proche que possible de zéro. La solution exacte rend RS nul.

La solution est obtenue de la façon suivante



La méthode de Newton-Raphson peut fournir la solution dans les régions OAB et CDE (Fig. 5.0) . Pour obtenir la solution dans le domaine BC, nous pouvons considérer l'incrément de déplacement $\Delta\{\underline{v}\}$ comme connue et l'incrément de charge $\Delta\lambda$ est comme inconnue. En effet, il existe une seule valeur de $\Delta\lambda$ qui correspond à une valeur donnée de $\Delta\{\underline{v}\}$. Si nous transférons directement l'incrément $\Delta\lambda$ de l'équation (5.1), dans le vecteur des inconnues (premier membre) en imposant $\Delta\{\underline{v}\} = 0$, nous changeons la matrice de rigidité

$[K_T]$, qui perd sa symétrie et sa largeur de bande. Pour éviter cela, nous pouvons la résoudre deux fois, avec deux seconds membres différents, en utilisant la même matrice $[K_T]$

$$[K_T](\Delta\{\underline{v}^r\}) = RS \quad (5.2a)$$

$$[K_T](\Delta\{\underline{v}^{F_0}\}) = \{F_0\} \quad (5.2b)$$

La solution de (5.1) devient alors

$$\Delta\{\underline{v}\} = \Delta\{\underline{v}^r\} + \Delta\lambda\Delta\{\underline{v}^{F_0}\} \quad (5.3)$$

L'inconnue $\Delta\lambda$ est obtenue en écrivant

$$\Delta\{\underline{v}\} = 0 = \Delta\{\underline{v}^r\} + \Delta\lambda\Delta\{\underline{v}^{F_0}\} \quad (5.4)$$

Soit

$$\Delta\lambda = -\frac{\Delta\{\underline{v}^r\}}{\Delta\{\underline{v}^{F_0}\}} \quad (5.5)$$

Et finalement

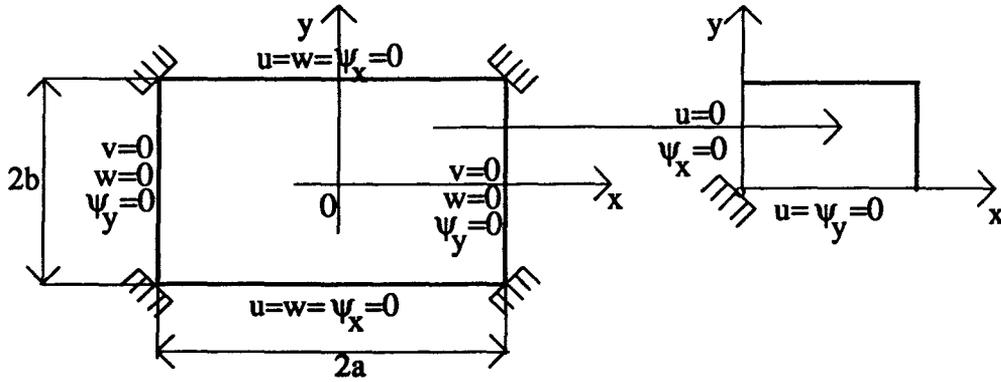
$$\{\underline{v}\} = \{\underline{v}\} + \Delta\{\underline{v}\} \quad (5.6)$$

$$\{\bar{R}\} = \{\bar{R}\} + \Delta\lambda\{\bar{R}\} \quad (5.7)$$

5.5. CONDITIONS AUX LIMITES

Pour des raisons de comparaisons avec d'autres résultats issus d'autres modèles, nous allons se servir de deux sortes de conditions aux limites sur les éléments que nous utilisons (REDDY [73]).

5.5.1. Conditions aux limites 1 (BC1) :



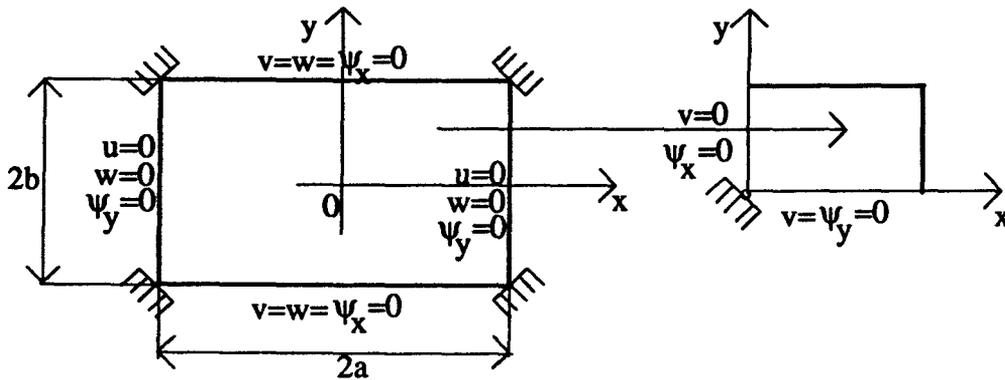
aux points $x = 0$: $u = \psi_x = 0$

aux points $y = 0$: $v = \psi_y = 0$

aux points $x = \mp a$: $v = w = \psi_y = 0$

aux points $y = \mp b$: $u = w = \psi_x = 0$

5.5.2. Conditions aux limites 2 (BC2) :



aux points $x = 0$: $v = \psi_x = 0$

aux points $y = 0$: $u = \psi_y = 0$

aux points $x = \mp a$: $u = w = \psi_y = 0$

aux points $y = \mp b$: $v = w = \psi_x = 0$

5.6. QUELQUES EXEMPLES NUMERIQUES

Pour alléger l'écriture, nous utilisons les abréviations suivantes :

MRT5 : Moderate Rotation Theory avec 5 paramètres u, v, w, ψ_x, ψ_y

RVK : Refined von Kármán Theory

DMRT5 : Damaged Moderate Rotation Theory avec 5 paramètres u, v, w, ψ_x, ψ_y

5.6.1. *Plaque orthotrope (BC1) sous chargement uniforme*

La figure 5.1, page 76, montre la croissance de la flèche au centre d'une plaque orthotrope, en fonction d'une charge appliquée uniformément. Les conditions aux limites sont les conditions (BC1). Les dimensions et les caractéristiques matérielles sont les suivantes

$$2a = 2b = 30.48 \text{ cm}; \quad h = 0.35 \text{ cm}; \quad E1 = 3.0 \text{ MPa}; \quad E2 = 1.28 \text{ MPa};$$

$$G12 = G13 = G23 = 0.37 \text{ MPa}; \quad \nu = 0.32.$$

A mesure que l'on augmente la charge, des itérations de plus en plus petites sont nécessaires pour la convergence vers la solution. Pour un déplacement de 4 cm, la différence entre la MRT5 et la RVK est de 2.17 %.

5.6.2. *Plaque orthotrope (0/90; BC1) sous chargement uniforme*

La figure 5.2, page 77, montre la flèche au centre de la plaque orthotrope de résine époxyde renforcée par des fibres de carbone, en fonction du chargement uniforme. Cette plaque orthotrope est formée d'une couche à 0 degré et d'une à 90 degrés. Les conditions aux limites sont les conditions (BC1). Les dimensions et les caractéristiques matérielles sont

$$2a = 2b = 243.8 \text{ cm}; \quad h = 0.635 \text{ cm}; \quad E1 = 175775.0 \text{ MPa}; \quad E2 = 7031.0 \text{ MPa}$$

$$G12 = G13 = 3515.5 \text{ MPa}; \quad G23 = 1406.2 \text{ MPa}; \quad \nu = 0.25.$$

Pour un déplacement de 2 cm, le pourcentage entre la MRT5 et la RVK est de 0.006 %, tandis que celui entre la MRT5 et la DMRT5 est de 1.89 %

5.6.3. Plaque (45/-45; BC2) sous chargement uniforme

la figure 5.3, page 78, montre le déplacement au centre d'une plaque en carbone/époxyde dont les dimensions et les caractéristiques physiques sont les suivantes

$$2a = 2b = 243.8 \text{ cm}; \quad h = 0.635 \text{ cm}; \quad E1 = 175775.0 \text{ MPa}; \quad E2 = 7031.0 \text{ MPa}$$

$$G12 = G13 = 3515.5 \text{ MPa}; \quad G23 = 1406.2 \text{ MPa}; \quad \nu = 0.25.$$

Cette plaque est formée de deux couches dont l'une est à 45 degrés et l'autre à -45 degrés. Les conditions aux limites sont les conditions (BC2). Le pourcentage entre la MRT5 et la RVK est de 5.02 %, et celui entre la MRT5 et la DMRT5 est de 3.83 %, pour un déplacement de 4.225 cm.

5.6.4. Cylindre isotrope encastré ($h = 2.54 \text{ cm}$)

La figure 5.4, page 79, montre la flèche en fonction d'une charge concentrée au centre d'un cylindre isotrope encastrée sur ses deux bords parallèles. Les conditions aux limites sont indiquées sur la figure et les dimensions et les constantes physiques sont les suivantes

$$L = S = 25.4 \text{ cm}; \quad R = 254.0 \text{ cm}; \quad h = 2.54 \text{ cm}; \quad E = 0.45 \text{ MPa}; \quad \nu = 0.3$$

pour un déplacement au centre de 4 cm, la différence entre la MRT5 et La RVK est 3.89%.

5.6.5. Cylindre isotrope encastré ($h = 1.27 \text{ cm}$)

Pour le même exemple que le 5.6.4., sauf qu'on a divisé l'épaisseur par 2, nous avons été obligés d'utiliser la méthode des déplacements contrôlés. Cet exemple est illustré par la figure 5.5, page 80, qui nous la flèche au centre en fonction de la charge au centre. Nous constatons que les deux méthodes MRT5 et RVK ont presque le même résultat.

5.6.6. *Cylindre orthotrope (BC1) sous charge concentrée*

La figure 5.6, page 81, donne la flèche centrale d'un cylindre orthotrope, en fonction d'une charge concentrée. Les conditions aux limites sont les conditions (BC1) et les dimensions et caractéristiques matérielles sont

$$L = S = 25.4 \text{ cm}; \quad R = 254.0 \text{ cm}; \quad h = 2.54 \text{ cm}; \quad E1 = 40.0 \text{ MPa};$$

$$E2 = 1.0 \text{ MPa}; \quad G12 = G13 = 0.6 \text{ MPa}; \quad G23 = 0.5 \text{ MPa}; \quad \nu = 0.25$$

Pour un déplacement de 4.1 cm, la MRT5 et la RVK ont une différence chiffrée en pourcentage de 0.84 %.

5.6.7. *Cylindre orthotrope 8x(0/90) encasté*

La figure 5.7, page 82, nous donne la flèche en fonction d'une charge concentrée au centre d'un cylindre orthotrope encasté. Ce cylindre est formée de huit couches dont quatre sont à 0 degré et quatre sont à 90 degrés. Les conditions aux limites sont les conditions (BC1) et les dimensions et caractéristiques sont les suivantes

$$L = S = 25.4 \text{ cm}; \quad R = 254.0 \text{ cm}; \quad h = 2.54 \text{ cm}; \quad E1 = 40.0 \text{ MPa};$$

$$E2 = 1.0 \text{ MPa}; \quad G12 = G13 = 0.6 \text{ MPa}; \quad G23 = 0.5 \text{ MPa}; \quad \nu = 0.25$$

Nous remarquons un léger écartement entre le modèle RVK et le modèle MRT5 et un écartement plus large par endroit entre la MRT5 et la DMRT5. Nous étions aussi amener à utiliser la méthode des déplacements contrôlés. Le pourcentage entre la MRT5 et la RVK est 0.116 % pour un déplacement de 2.5 cm, et il est de 3.89 % entre la MRT5 et DMRT5 pour le même déplacement.

5.6.8. Sphère (BC1) sous charge concentrée

La figure 5.8, page 83, nous donne la flèche d'une sphère sous un chargement concentré en son centre. Les conditions aux limites sont les conditions (BC1) et les dimensions et caractéristiques matérielles sont

$$a = b = 127.0 \text{ cm}; \quad R = 2540.0 \text{ cm}; \quad h = 2.54 \text{ cm}; \quad E1 = 40.0 \text{ MPa};$$
$$E2=1.0 \text{ MPa}; \quad G12 = G13 = 0.6 \text{ MPa}; \quad G23=0.5 \text{ MPa}; \quad \nu = 0.25$$

On constate un important écartement entre les deux théories : 12.57 % entre la MRT5 et la RVK pour un déplacement au centre de 10 cm.

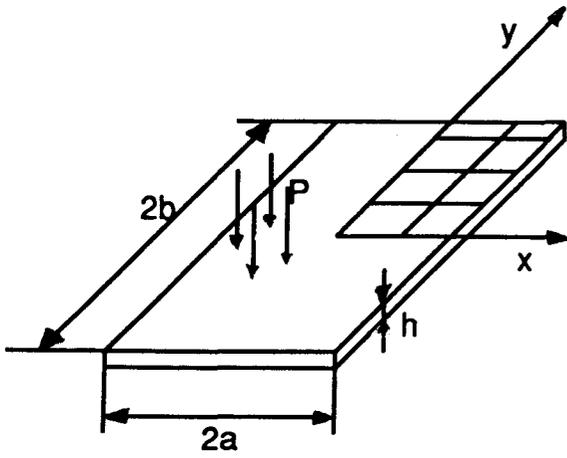
5.6.9. Sphère (0/90/0/90/0) sous chargement uniforme

La figure 5.9, page 84, montre le déplacement du centre d'une sphère en fonction d'une pression à l'intérieur. Cette sphère est composée de cinq couches dont trois sont à 0 degré et 2 sont à 90 degrés. Les conditions aux limites sont les conditions (BC1) et les dimensions et conditions matérielles sont

$$a = b = 127.0 \text{ cm}; \quad R = 2540.0 \text{ cm}; \quad h = 2.54 \text{ cm}; \quad E1 = 40.0 \text{ MPa};$$
$$E2=1.0 \text{ MPa}; \quad G12 = G13 = 0.6 \text{ MPa}; \quad G23=0.5 \text{ MPa}; \quad \nu = 0.25$$

On constate que, pour un déplacement de 6.26 cm, nous avons une différence donnée en pourcentage de 0.00 % entre la MRT5 et la RVK, et 9.03 % entre la MRT5 et la DMRT5.

On a fait des tests en augmentant à chaque fois le nombre de couches. Nous constatons que plus ce nombre est grand, plus la DMRT5 s'écarte de la MRT5. Ce qui est dû, selon nous, à la loi d'évolution qui est proportionnelle à la surface de contact totale entre les couches dans la structure.



$$x=0: u = \psi_x = 0$$

$$y=0: v = \psi_y = 0$$

$$x=\bar{x}a: v = w = \psi_y = 0$$

$$y=\bar{y}b: u = w = \psi_x = 0$$

Plaque Orth. (BC1)

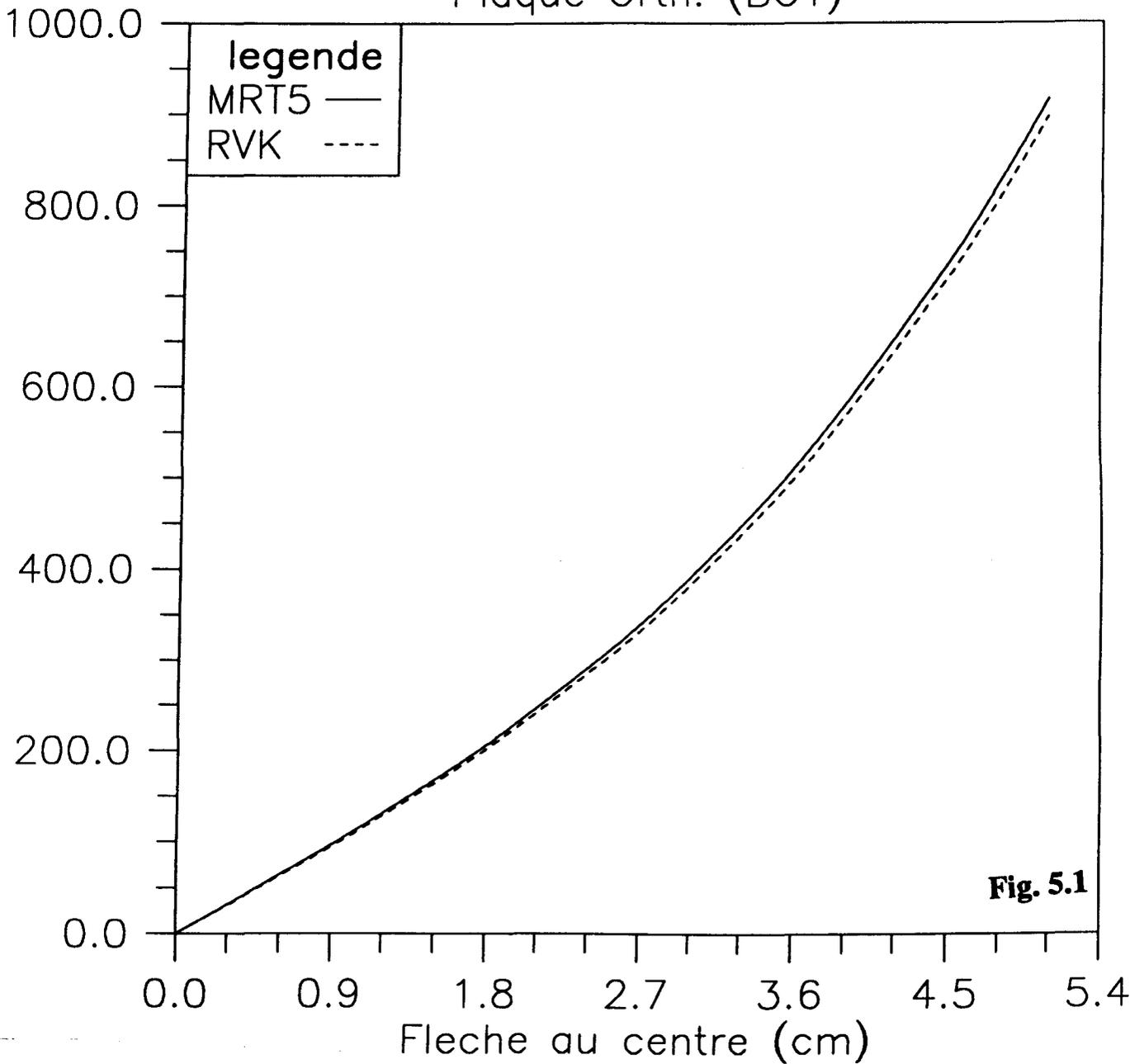
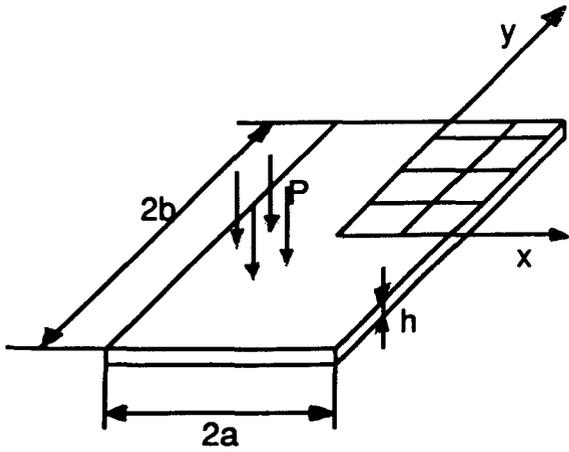
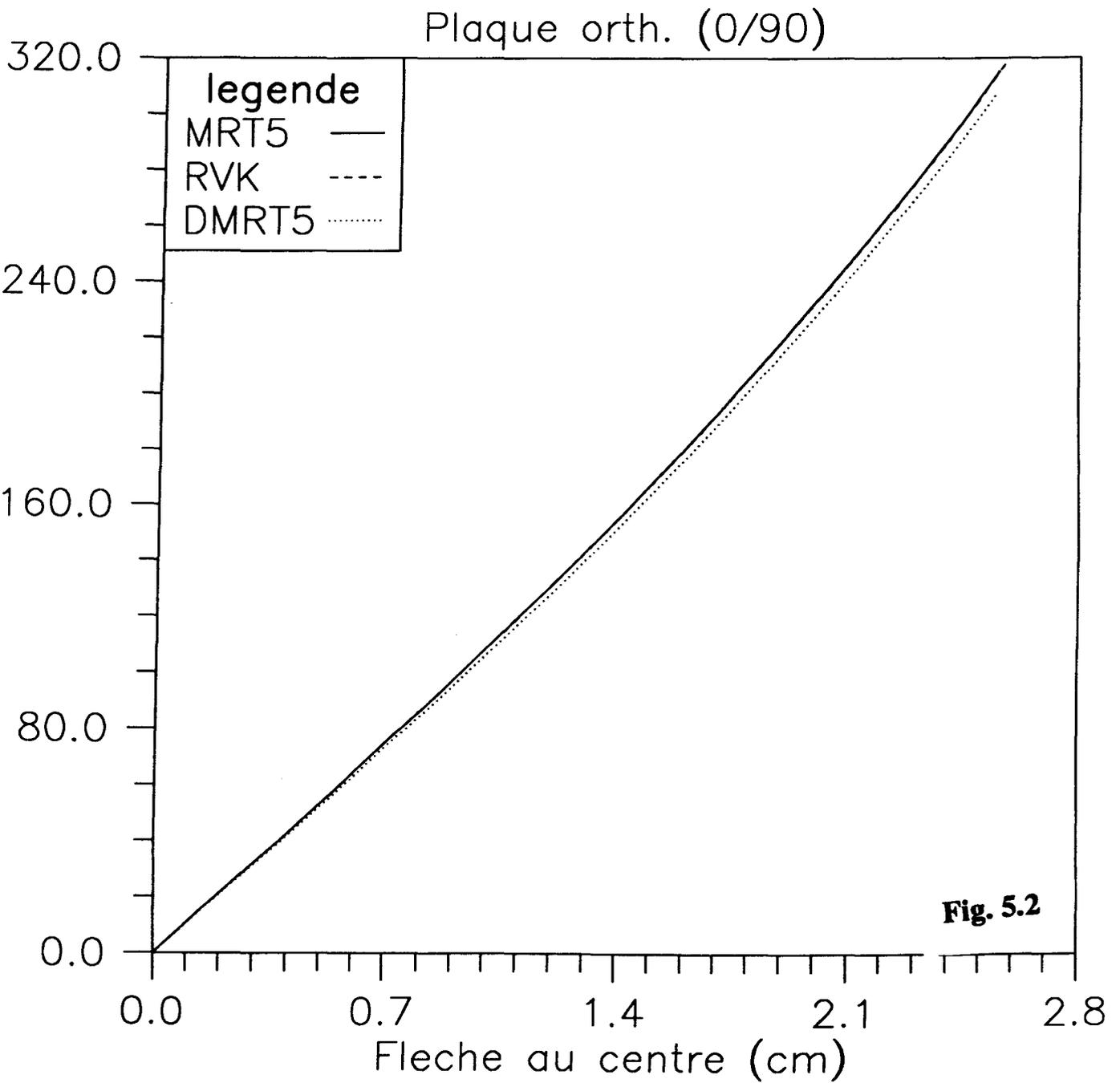
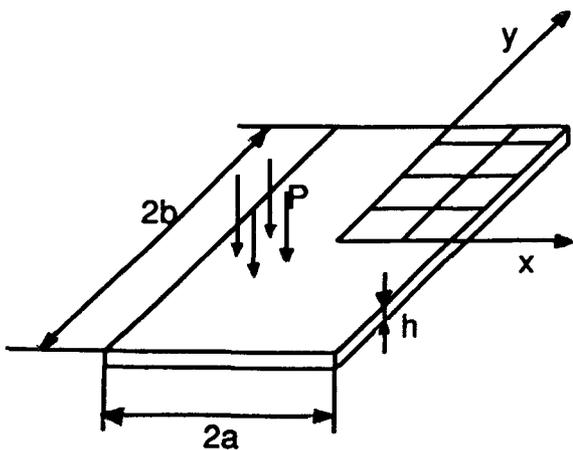


Fig. 5.1



$$\begin{aligned}
 x=0: u = \psi_x &= 0 \\
 y=0: v = \psi_y &= 0 \\
 x=\bar{r}a: v = w = \psi_y &= 0 \\
 y=\bar{r}b: u = w = \psi_x &= 0
 \end{aligned}$$





$$x=0: v = \psi_x = 0$$

$$y=0: u = \psi_y = 0$$

$$x=\bar{x}a: u = w = \psi_y = 0$$

$$y=\bar{y}b: v = w = \psi_x = 0$$

Plaque (45/-45) sous charg. unif.

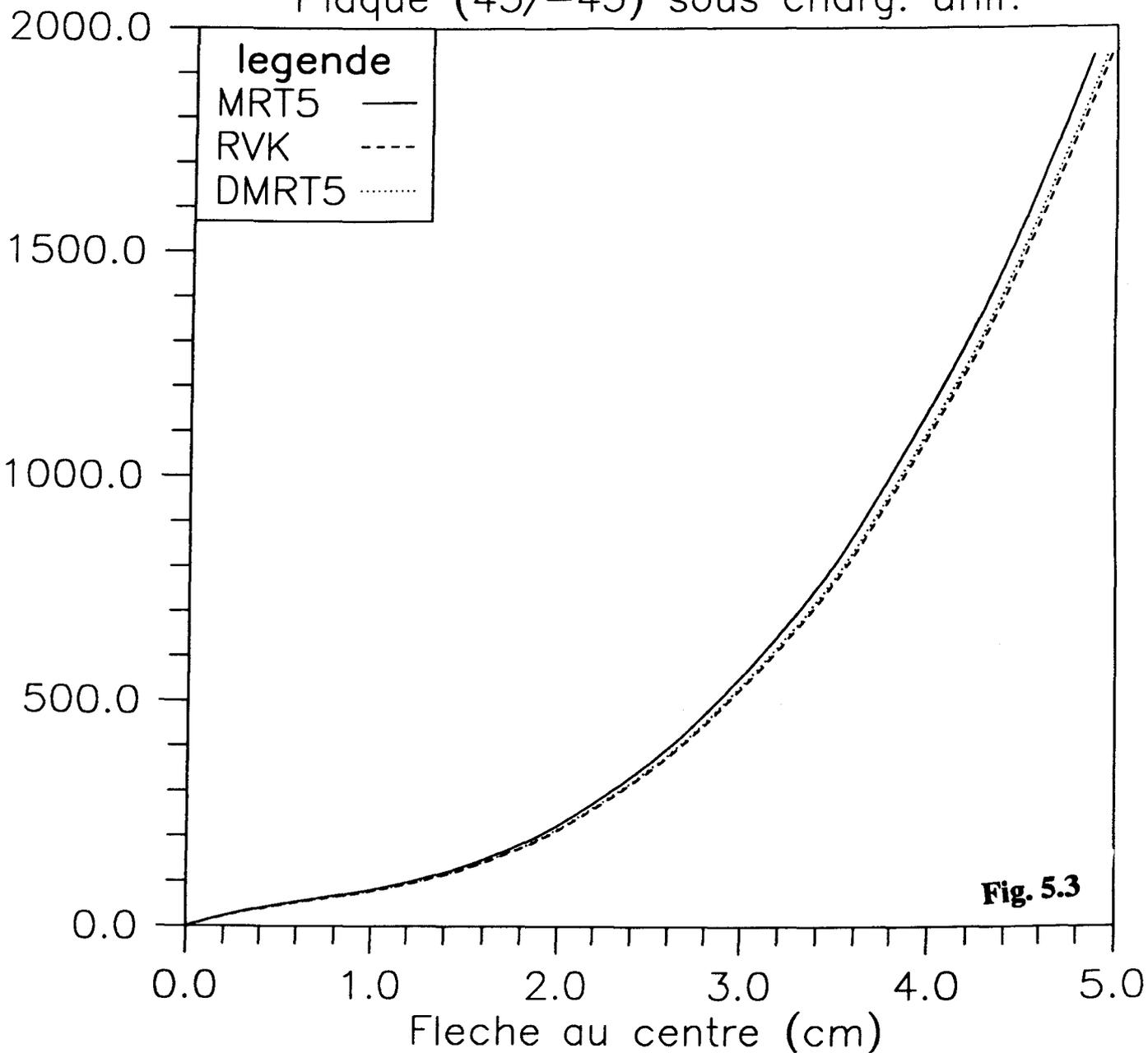
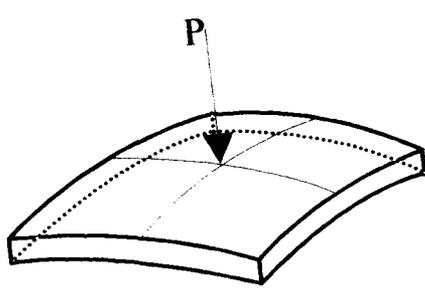
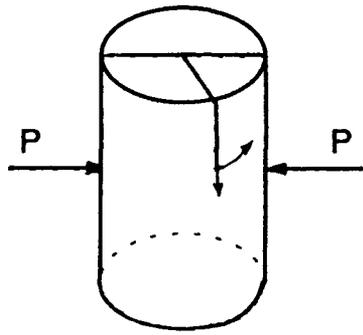


Fig. 5.3



$$x=0: v = \psi_x = 0$$

$$y=0: u = \psi_y = 0$$

$$x=\bar{r}a: u = w = \psi_y = 0$$

$$y=\bar{r}b: v = w = \psi_x = 0$$

Cylindre iso. encastre ($h=2.54$)

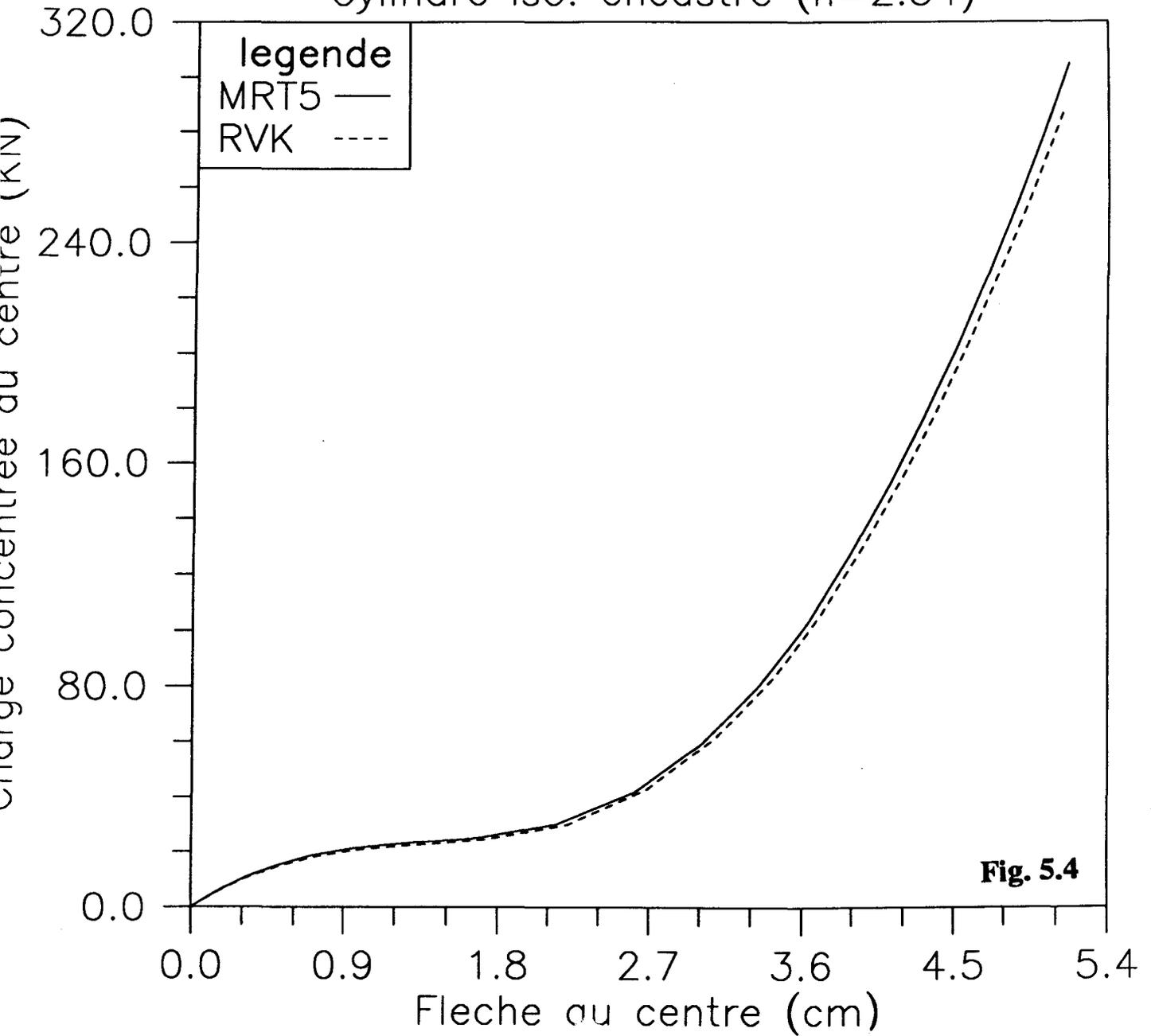
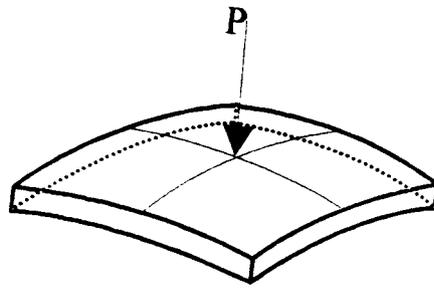
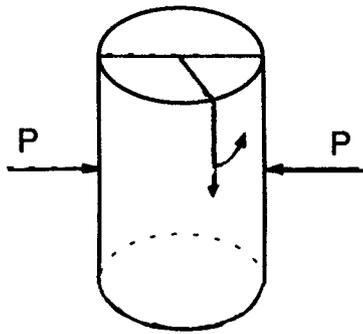


Fig. 5.4



$$x=0: v = \psi_x = 0$$

$$y=0: u = \psi_y = 0$$

$$x=\bar{r}a: u = w = \psi_y = 0$$

$$y=\bar{r}b: v = w = \psi_x = 0$$

Cyl. iso. encastre ($h=1.27$ cm)

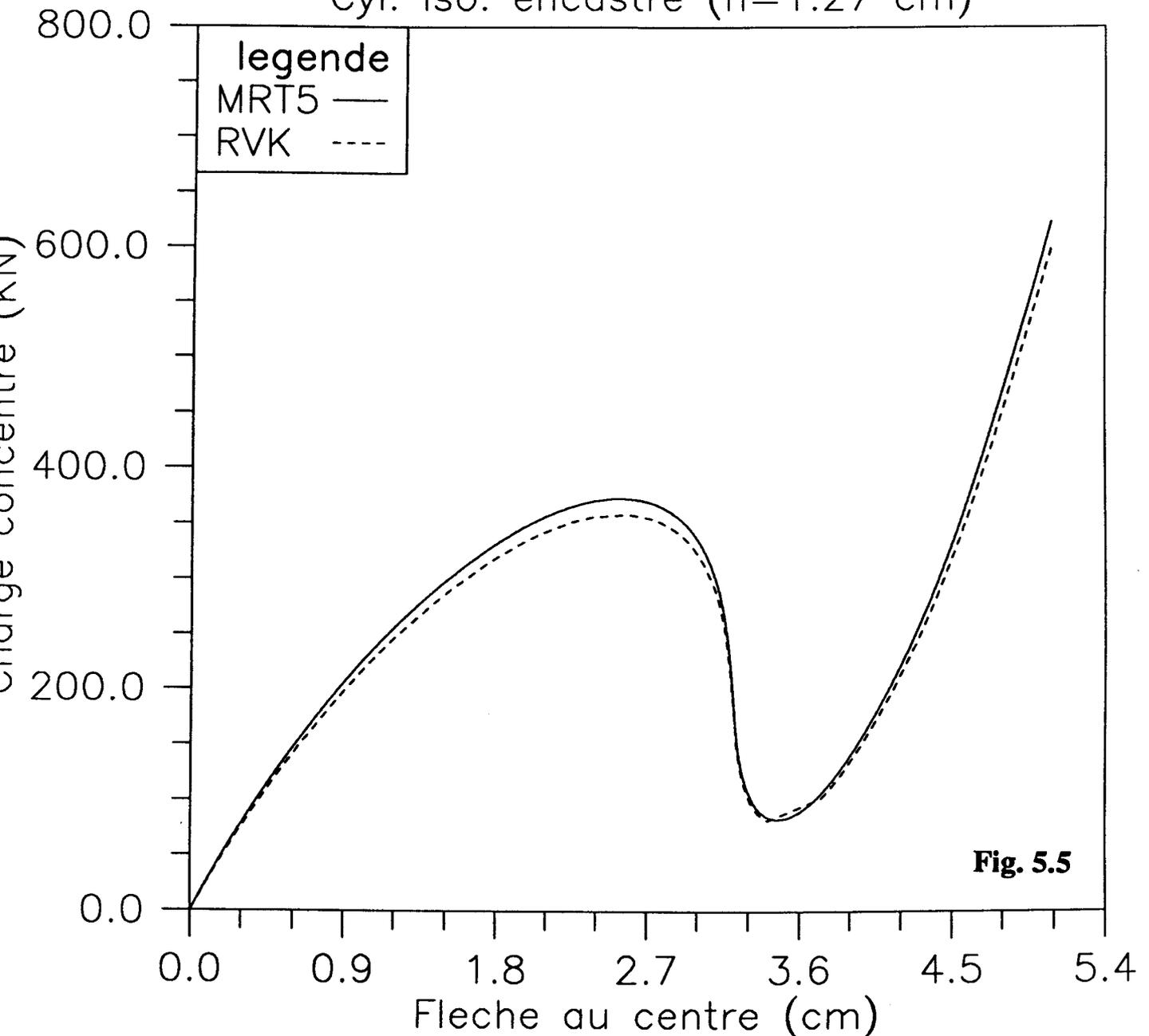
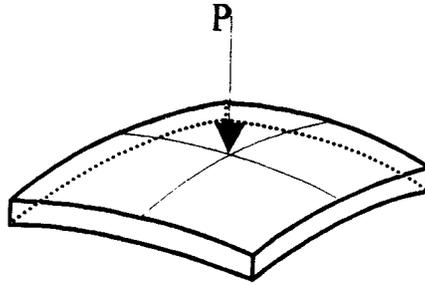
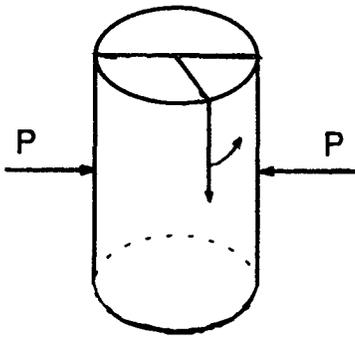


Fig. 5.5

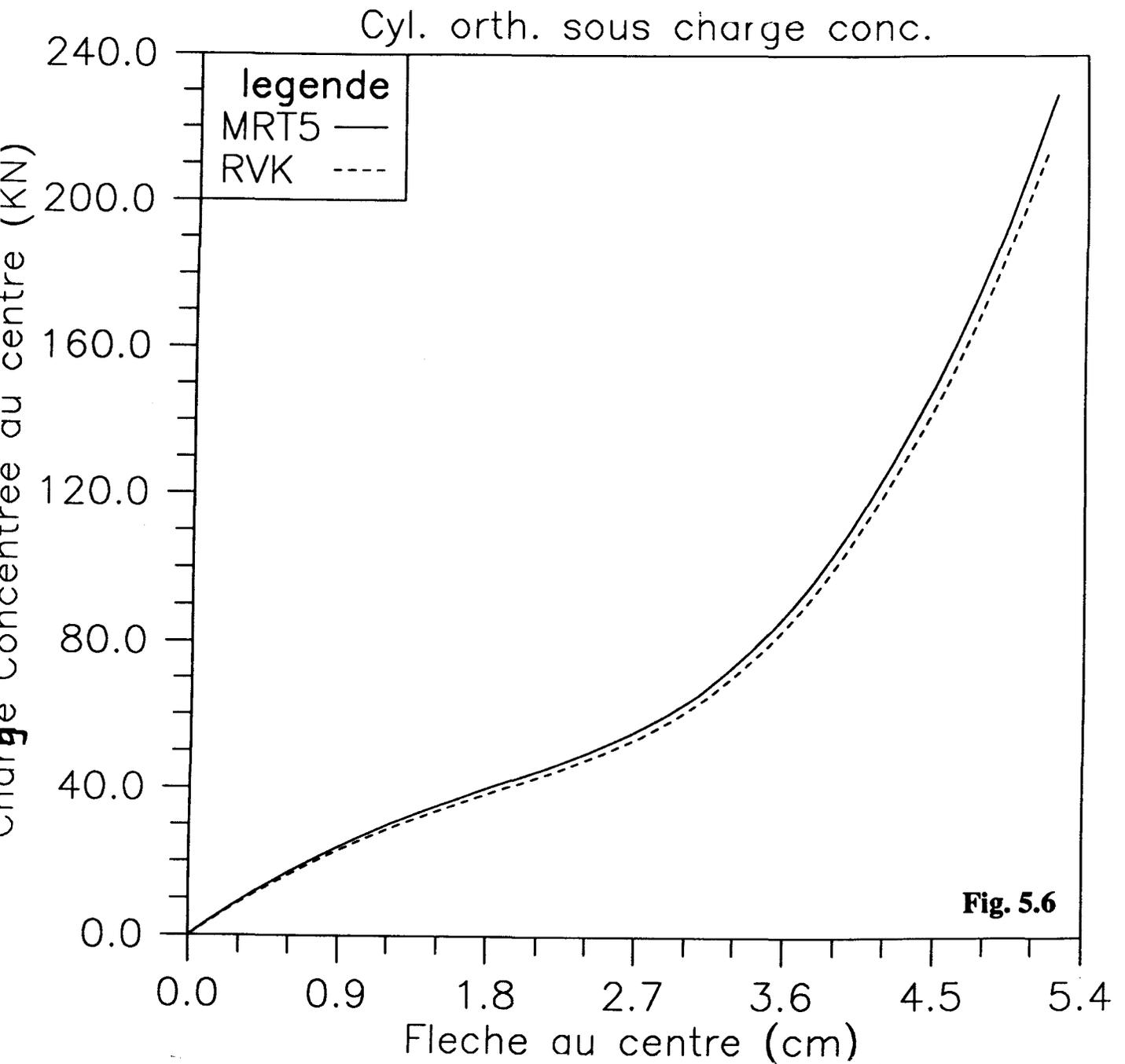


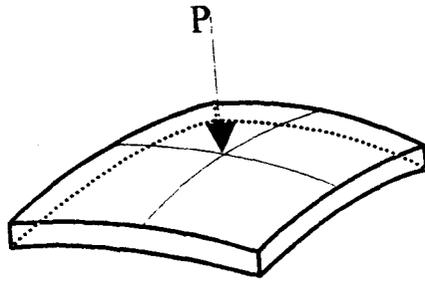
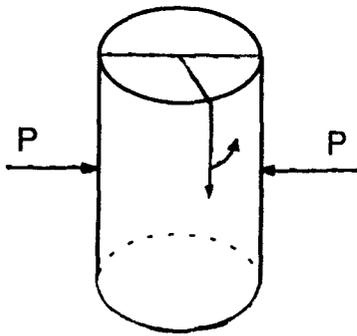
$$x=0: u = \psi_x = 0$$

$$y=0: v = \psi_y = 0$$

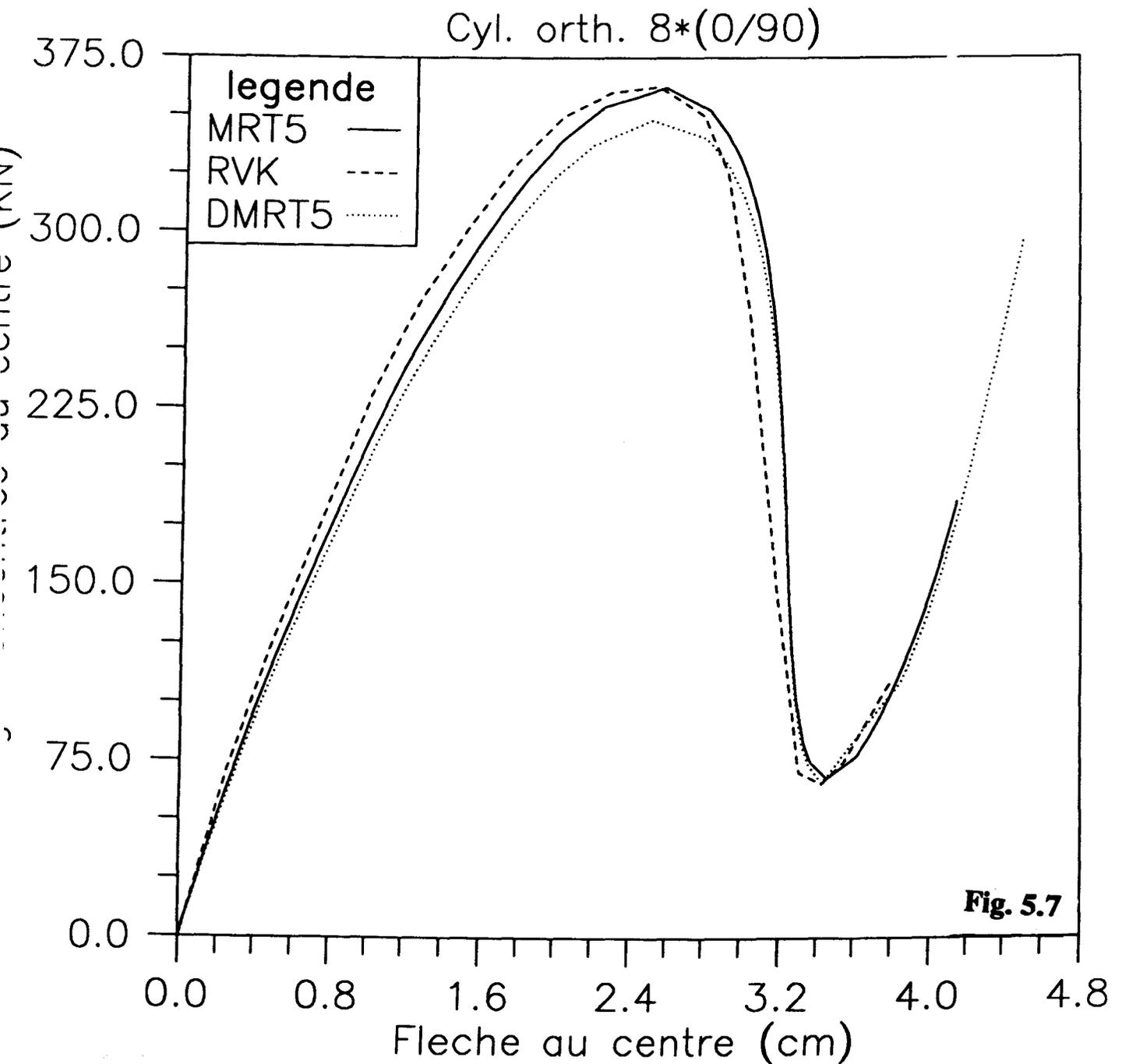
$$x=\bar{r}a: v = w = \psi_y = 0$$

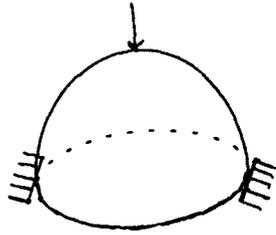
$$y=\bar{r}b: u = w = \psi_x = 0$$





$$\begin{aligned}
 x=0: u = \psi_x = 0 \\
 y=0: v = \psi_y = 0 \\
 x=\bar{r}a: v = w = \psi_y = 0 \\
 y=\bar{r}b: u = w = \psi_x = 0
 \end{aligned}$$



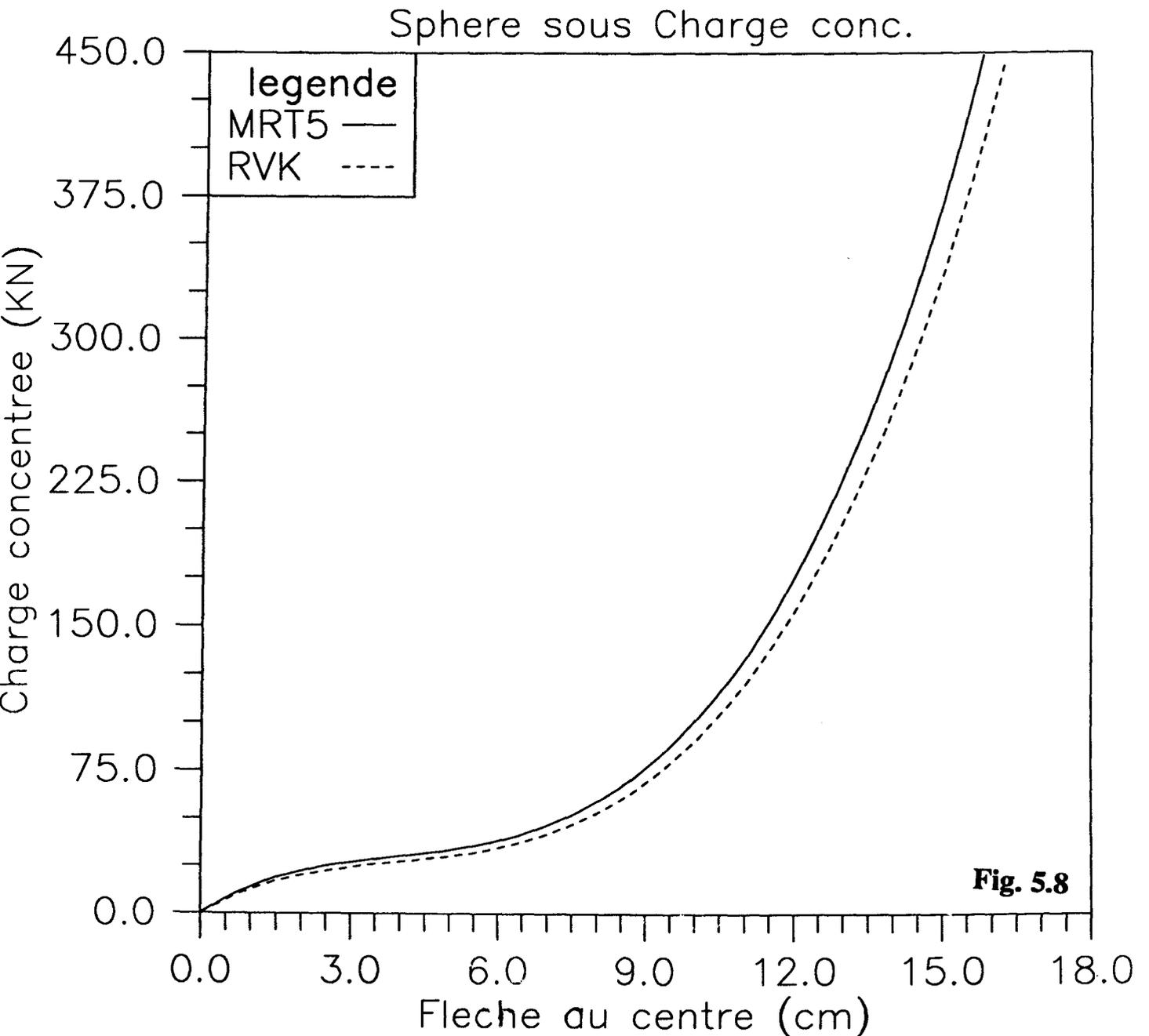


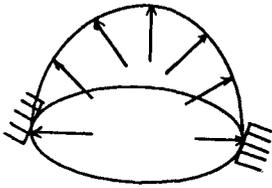
$$x=0: u = \psi_x = 0$$

$$y=0: v = \psi_y = 0$$

$$x=\bar{r}a: v = w = \psi_y = 0$$

$$y=\bar{r}b: u = w = \psi_x = 0$$



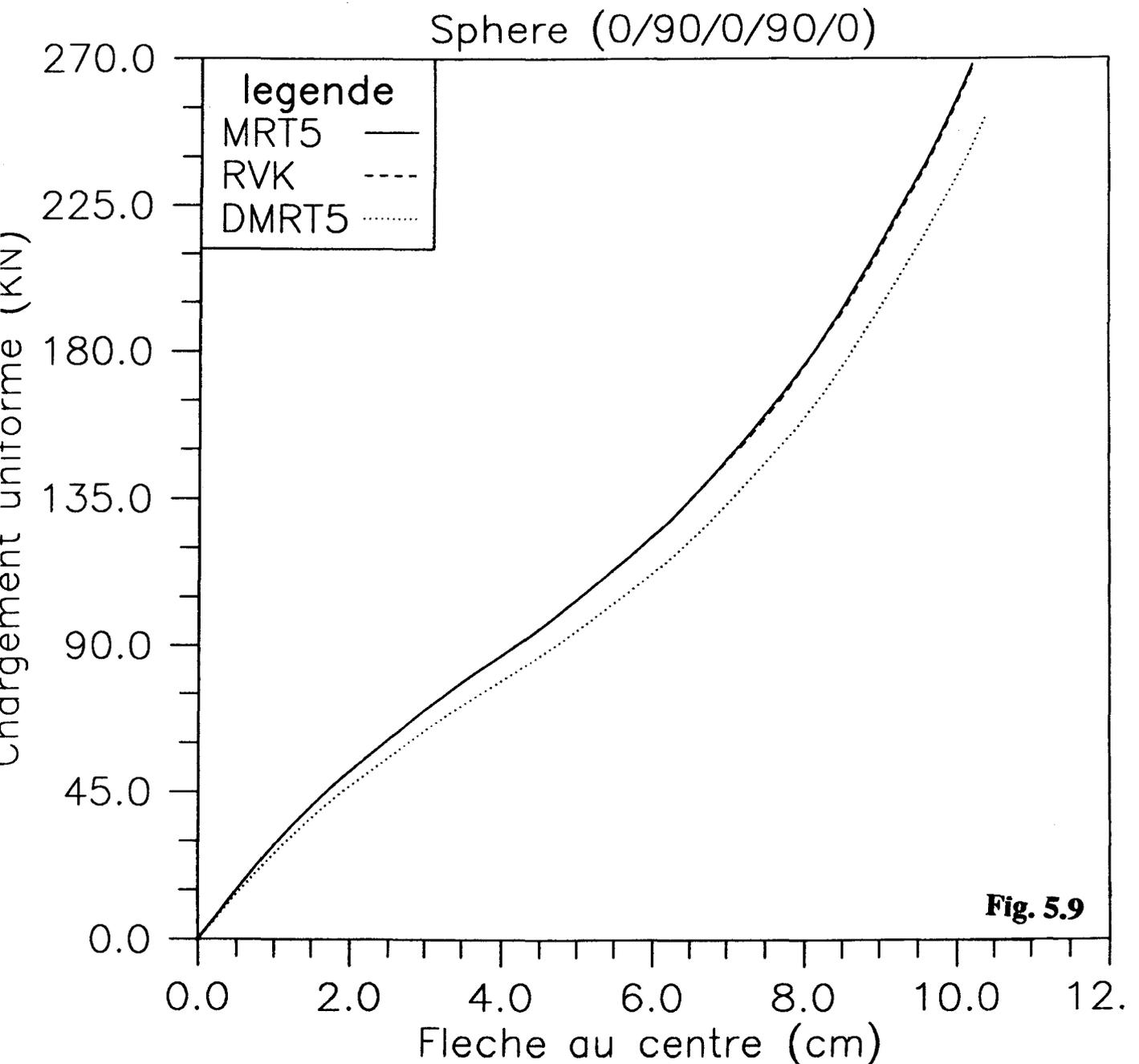


$$x=0: u = \psi_x = 0$$

$$y=0: v = \psi_y = 0$$

$$x=\bar{r}a: v = w = \psi_y = 0$$

$$y=\bar{r}b: u = w = \psi_x = 0$$



CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail, le comportement géométriquement non linéaire des coques et plaques anisotropes endommagées a été étudié. Une théorie bidimensionnelle est obtenue par l'application du principe des travaux virtuels. Les lois de comportement sont données, avec prise en compte d'un modèle d'endommagement pour les structures laminées. Une telle théorie, bien qu'elle soit applicable à de nombreux cas réels, ne peut pas être généralisée pour toutes les structures. Dans le développement en séries de Taylor suivant la plus petite des trois coordonnées curvilignes de la coque, nous nous sommes arrêtés au premier ordre. En utilisant d'autres termes d'ordre supérieurs, le comportement sera mieux détecté. Mais cela, entraînera des équations de mouvement trop complexes. Les effets du cisaillement et de la déformation normale, qui sont souvent négligés dans d'autres théories, ont été étudiés. La théorie de von Kármán est obtenue à partir de la MRT5, en négligeant quelques termes de double produit dans les composantes du champ de déplacement.

Pour étudier le comportement des structures, nous nous sommes limités au domaine élastique tout en incluant un modèle d'endommagement basé sur les variables de l'état interne dans la loi constitutive. D'autres phénomènes, comme la plasticité, la dynamique doivent être considérés pour raffiner la loi de comportement.

Le modèle d'endommagement d'ALLEN, qui est peu utilisé, doit être plus considéré dans l'avenir. Ce modèle est déterminé par l'utilisation d'un tenseur de second ordre, défini à partir des variables internes. Il s'intègre facilement dans la loi constitutive du matériau. Durant ce travail, seul le cas du délaminage a été pris en compte, car il semble être, un des plus fréquents problèmes qui se posent dans les matériaux composites. D'autres modes d'endommagement peuvent être envisagés, pour prédire la défaillance des matériaux. La loi d'évolution utilisée ici, doit être validée expérimentalement, car elle a été déterminée pour des cas particuliers de composites laminés.

Des équations du mouvement qui tiennent compte de l'endommagement sont obtenues. Après quelques manipulations algébriques, nous écrivons ces équations sous une forme matricielle qui s'adapte facilement dans un programme d'éléments finis.

La modélisation numérique du comportement des coques reste encore limitée. Les résultats existants aujourd'hui sont encourageants. Citons parmi ces résultats, ceux obtenus par Basar, pour de grandes rotations dans des éléments coques, et ceux obtenus par Palmerio, Kreja et Schmidt pour des rotations modérées, qui ont été relatés ici. Les difficultés sont en général, d'ordre technique. Elles sont pour la plupart des problèmes de convergence, malgré que les théories soient satisfaisantes. La méthode des déplacements contrôlés nous a permis de surmonter quelques problèmes de divergence. Mais, il faut utiliser de petits incréments de déplacement, ce qui prend beaucoup de temps de calcul. Il faut noter que les calculs sont assez longs. Cela provient du fait qu'on a traité des problèmes géométriquement non linéaires.

La comparaison des trois modèles que nous avons étudiés, montre une faible différence de la flèche en fonction de la charge concentrée ou uniforme. Cette différence est au maximum d'environ 12 à 15 %. Par manque de résultats numériques dans le domaine, nous n'avons pu effectuer d'autres comparaisons. L'utilisation des éléments à quatre, huit ou neuf noeuds, donne de meilleurs résultats d'après les expériences numériques.

Dans l'avenir, il faudra approfondir les points suivants

Tenir compte du sixième degré de liberté (la rotation autour de la normale à la surface moyenne), qui est présent dans l'étude de SCHMIDT & REDDY [79].

Faire une validation expérimentale du modèle d'endommagement étudié.

Regarder l'influence d'autres modes d'endommagement, à titre d'exemple, inclure dans l'endommagement la fissuration du composite laminé.

Etudier de plus près l'influence de l'endommagement sur les caractéristiques physiques du matériau (module d'Young, coefficient de Poisson etc..).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Ahmed K. N. & Burton W. S.** : "Assessment of Computational Models for Multiplayered Composite Shells", *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 43, N° 4, pp. 67-97 (1990).
- [2] **Allen D. H. & Lee J. W.** : "Matrix Cracking in Laminated Composites under Monotonic and Cyclic Loadings", *Composites Engineering*, Vol. 1, N° 5, pp. 319-334 (1991).
- [3] **Allen D. H. & Lo D. C.** : "A Model for the Progressive Failure of Laminated Composite Structural Components", *NDE-Vol. 10, Enhancing Analysis Techniques for Composite Materials*, ASME, pp. 125-131 (1991).
- [4] **Allen D. H., Groves S. E. & Harris C. E.** : "A Cumulative Damage Model for Continuous Fiber Composite Laminates with Matrix Cracking and Interply Delaminations", "*Composite Materials : Testing and Design (Eighth Conference)*", ASTM STP 972, J. D. Whitcomb ed., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp. 57-80 (1988).
- [5] **Allen D. H., Harris C. E. & Groves S. E.** : "A Thermomechanical Constitutive Theory for Elastic Composites with Distributed Damage - Part I : Theoretical Development", *Int. J. Solids & Struct.*, Vol. 23, N° 9, pp. 1301-1318 (1987).
- [6] **Allen D. H., Harris C. E. & Groves S. E.** : "A Thermomechanical Constitutive Theory for Elastic Composites with Distributed Damage Part II : Application to Matrix Cracking in Laminated Composites", *Int. J. Solids & Struct.*, Vol. 23, N° 9, pp. 1319-1338 (1987).
- [7] **Allen D. H., Harris C. E. & Groves S. E.** : "Damage Modelling in Laminated Composites", *Yielding Damage and Fatigue of Anisotropic Solids*, Boehler J. P. ed., Mechanical Engineering Publications Limited, London, pp. 535-550 (1990).
- [8] **Allen D. H., Harris C. E., Groves S. E. & Norvell R. G.** : "Characteristics of Stiffness Loss in Crossply Laminates With Curved Matrix Cracks", *Journal of Composite Materials*, Vol. 22, N° 1, pp. 71-80 (1988).

- [9] **Allen D. H., Lo D. C. & Buie K. D.** : "Computational Analysis of Laminated Composite Structures with Fatigue-Induced Damage", to appear in the Proceedings of "*International Conference on Computational Engineering Science*", Patras, Greece (1991).
- [10] **Allen D. H., Lo D. C., Georgiou I. T. & Harris C. E.** : "A Model for Predicting Damage Induced Fatigue Life of Laminated Composite Structural Components", ICAS Proceedings of "*17th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences*", Stockholm, pp. 682-692 (1990).
- [11] **Allen D. H., Nottorf E. W. & Harris C. E.** : "Effect of Microstructural Damage on Ply Stresses in Laminated Composites", Recent Advances in the Macro and Micro-Mechanics of Composite Materials Structures, AD-Vol. 13, Hui D. & Vinson J. R. eds., The American Society of Mechanical Engineers, New York, pp. 135-145 (1988).
- [12] **Allix O. & Ladevèze P.** : "A Damage Prediction Method for Composite Structures", Int. J. for Num. Meth. in Engng., Vol. 27, pp. 271-283 (1989).
- [13] **Badur J. & Pietraszkiewicz W.** : "On Geometrically Non-Linear Theory of Elastic Shells derived from Pseudo-Cosserat Continuum with constrained Micro-Rotations", "*Finite Rotations in Structural Mechanics*", Proceedings of the EUROMECH Colloquium 197, Jablonna (Poland), ed. by Pietraszkiewicz W., Springer-Verlag, Berlin, pp. 19-32 (1985).
- [14] **Basar Y. & Ding Y.** : "Finite-Rotations Elements for the Nonlinear Analysis of Thin Shell Structures", Int. J. Solids & Struct., Vol. 26, pp. 83-97 (1990).
- [15] **Basar Y.** : "A Consistent Theory of Geometrically Nonlinear Shells with an Independent Rotation Vector", Int. J. Solids & Struct., Vol. 23, N° 10, pp. 1401-1415 (1987).
- [16] **Bathe K. J. & Wilson E. L.** : "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, New Jersey (1976).

- [17] **Brun M. & Librescu L.** : "Strain Measures and Compatibility Equations in the Linear High-Order Shell Theories", *Quart. of Appl. Math.*, pp. 15-25 (1982).
- [18] **Budiansky B.** : "Notes on Nonlinear Shells Theory", *J. of Appl. Mech.*, Vol. 35, N° 90, pp. 393-401 (1968).
- [19] **Chaboche J. L.** : "Continuum Damage Mechanics", *J. of Appl. Mech.* Vol. 55, pp. 59-72 (1988).
- [20] **Chaboche J. L.** : "Le Concept de Contrainte Effective Appliqué à l'Élasticité et à la Viscoplasticité en Présence d'un Endommagement Anisotrope", *Colloques internationaux du CNRS, N° 295 : "Comportement Mécaniques des Solides Anisotropes"*.
- [21] **Chrosciekwski J. & Schmidt R.** : "Comparison of Numerical Results for Nonlinear Finite Element Analysis of Beams and Shells on 2-D Elasticity Theory and on Novel Finite Rotation Theories for Thin Structures", *"Finite Rotations in Structural Mechanics"*, Proceedings of the EUROMECH Colloquium 197, Jablonna (Poland), ed. by Pietraszkiewicz W., Springer-Verlag, Berlin, pp. 111-120 (1985).
- [22] **Cordebois J. P. & Sidoroff F.** : "Endommagement Anisotrope en Élasticité et Plasticité", *J. de Méca. Théorique et Appliquée*, N° Spécial, pp. 45-60 (1982).
- [23] **Dhatt G. & Touzot G.** : "Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis", deuxième édition, éd. Maloine S. A. (1984).
- [24] **Dumont J. P., Ladevèze P., Poss M. & Remond Y.** : "Damage Mechanics for 3-D Composites", *Composites Struct.*, Vol. 8, pp. 119-141 (1987).
- [25] **Germain P.** : "Cours de Mécanique des Milieux Continus", ed. Masson, Paris (1973).
- [26] **Germain P.** : "Cours de Mécanique", ed. de l'école polytechnique, tome I & II (1980).
- [27] **Green A. E. & Zerna W.** : "Theoretical Elasticity", second edition, Clarendon press, Oxford, Great Britain (1968).

- [28] **Habip L. M. & Ebcioğlu I. K.** : "On the Equations of Motion of Shells in the Reference State", *Ing. Arch.*, Vol. 34, pp. 28-32 (1965).
- [29] **Harris C. E. & Allen D. H.** : "A Continuum Damage Model of Fatigue Induced Damage in Laminated Composites", *SAMPE Journal July/August*, pp. 43-51 (1988).
- [30] **Harris C. E., Allen D. H. & Nottorf E. W.** : "Damage-Induced Changes in the Poisson's Ratio of Cross-Ply Laminates : an Application of Continuum Damage Mechanics Model for Laminated Composites", *Damage Mechanics in Composites, AD-Vol. 12*, Wang A. S. D. & Haritos G. K. eds., The American Society of Mechanical Engineers, New York, pp. 17-23 (1987).
- [31] **Harris C. E., Allen D. H. & Nottorf E. W.** : "Predictions of Poisson's Ratio in Cross-Laminates Containing Matrix Cracks and Delaminations", *J. of Composites Technology & Research*, Vol. 11, N° 2, pp. 53-58 (1989).
- [32] **Harris C. E., Allen D. H., Nottorf E. W. & Groves S. E.** : "Modelling Stiffness Loss in Quasi-Isotropic Laminates Due to Microstructural Damage", *J. of Eng. Mat. and Tech.*, Vol. 110, pp. 128-133 (1988).
- [33] **Henry J. P. & Parsy F.** : "Cours d'Élasticité", Ed. Dunod (1982).
- [34] **Iura M.** : "A Generalized Variational Principle for Thin Elastic Shells with Finite Rotations", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 22, N° 2, pp. 141-154 (1986).
- [35] **Jeffers R. G. & Brull M. A.** : "A Large Deflection Theory for Thin Elastic Shells", *Israel J. of Technology*, Vol. 13, pp. 111-121 (1975).
- [36] **Ju J. W.** : "On Energy-based Coupled Elastoplastic Damage Theories : Constitutive Modeling and Computational Aspects", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 25, N° 7, pp. 803-833 (1989).

- [37] **Kachanov L. M.** : "Crack Growth under Conditions of Creep and Damage", In *Creep in Structures*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 520-524 (1981).
- [38] **Kachanov L. M.** : "Time of the Rupture Process under Creep Conditions", *Izv Akad Nauk S.S.R. otd Tech. Nauk*, Vol. 8, pp. 26-31 (1985)
- [39] **Kattan P. I. & Voyiadjis G. Z.** : "A Coupled Theory of Damage Mechanics and Finite Strain Elasto-Plasticity - I : Damage and Elastic Deformations", *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 28, N° 5, pp. 421-435 (1990).
- [40] **Kattan P. I. & Voyiadjis G. Z.** : "A Coupled Theory of Damage Mechanics and Finite Strain Elasto-Plasticity - II : Damage and Finite Strain Plasticity", *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 28, N° 6, pp. 504-524 (1990).
- [41] **Koiter W. T.** : "A Consistent First Approximation in the General Theory of Thin Elastic Shells", *Proceedings of the "Symposium in the Theory of Thin Elastic Shells"*, ed. by Koiter W. T., North-Holland Publishing Co., Delft (Amsterdam), pp. 12-33 (1960).
- [42] **Koiter W. T.** : "On the Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells", *Proceedings of "Koninkl. Ned. Ak. Wet."*, Serie B, Vol. 69, N° 1, pp. 1-54 (1966).
- [43] **Kreja I., Schmidt R., Teyeb O. M. & Weichert D.** : "Plastic Ductile Damage Finite Element Analysis of Structures", *ZAMM*, Vol. 73, issue 4, T378-T381 (1993).
- [44] **Ladevèze P.** : "A Damage Approach for Composite Structures : Theory and Identification", *Proceedings of EUROMECH N°269 : "Experimental Identification of the Mechanical Characteristics of Composite Materials and Structures"*, Saint-Etienne (1990).
- [45] **Lee H., Peng K. & Wang J.** : "An Anisotropic Damage Criterion for Deformation Instability and its Application to Forming Limit Analysis of Metal Plates", *Eng. Fracture Mechanics* Vol. 21, N° 5, pp. 1031-1054 (1985).

- [46] Lee J. W., Allen D. H. & Harris C. E. : "Internal State Variable Approach for Predicting Stiffness Reductions in Fibrous Laminated Composites with Matrix Cracks", *J. of Composite Materials*, Vol. 23, pp. 1273-1290 (1989).
- [47] Lee J. W., Allen D. H. & Harris C. E. : "The Upper Bounds of Reduced Axial and Shear Moduli in Cross-Ply Laminates with Matrix Cracks", *Composite Materials : Fatigue and Fracture*, Vol. 3, ASMT STP 1110, O'Brien T. K. ed., American Society for Testing and Materials, Philadelphia (1991).
- [48] Lemaître J. & Chaboche J. L. : "A Nonlinear Model of Creep Fatigue Cumulation and Interaction", *Proc. IUTAM, Symposium on "Mechanics of Viscoelastic Media and Bodies"*, ed. by Hult, pp. 291-301 (1975).
- [49] Lemaître J. & Chaboche J. L. : "Aspect Phénoménologique de la Rupture par Endommagement", *J. de Méca. Appliquée*, Vol. 2, N° 3, pp. 317-365 (1978).
- [50] Lemaître J. & Chaboche J. L. : "Mechanics of Solids Materials", University Press, Cambridge (1990).
- [51] Lemaître J. : "Damage Modelling for Prediction of Plastic or Creep Fatigue Failure in Structures", "*5th Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*", SMIRT 5 (1979).
- [52] Librescu L. & Schmidt R. : "Higher-Order Moderate Rotation Theories for Elastic Anisotropic Plates", "*Finite Rotations in Structural Mechanics*", Proceedings of the EUROMECH Colloquium 197, Jablonna (Poland), ed. by Pietraszkiewicz W., Springer-Verlag, Berlin, pp. 158-174 (1985).
- [53] Librescu L. : "Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-type Structures", Noordhoff Int. Publ., Leyden (1975).
- [54] Librescu L. : "Refined Geometrically Nonlinear Theories of Anisotropic Laminated Shells", *Quart. Appl. Math.*, Vol. 44, pp. 1-22 (1987).

- [55] Lo D. C. & Allen D. H. : "A Continuum for Damage Evolution in Laminated Composites", IUTAM Symposium *"Inelastic Deformation of Composite Materials"*, Troy (New York), ed. by Dvorak G. J., Springer-Verlag (1991).
- [56] Lo D. C., Allen D. H. & Buie K. D. : "Damage Prediction in Laminated Composites with Continuum Damage Mechanics", to appear in the Proceedings of ASCE *"Materials Engineering Conference"*, Denver (1990).
- [57] Lo D. C., Allen D. H. & Harris C. E. : "A Procedure for Utilization of a Damage-Dependent Constitutive Model for Laminated Composites", to appear.
- [58] Lo D. C., Allen D. H. & Harris C. E. : "Modeling the Progressive Failure of Laminated Composites with Continuum Damage Mechanics", *"23rd National Symposium on Fracture Mechanics"*.
- [59] Loret B. : "On the Effects of Plastic Rotation in the Finite Deformation of Anisotropic Elastoplastic Materials", *Mech. of Materials*, N° 2, pp. 287-304 (1983).
- [60] Makowski J. & Pietraszkiewicz W. : "Work-Conjugate Boundary Conditions in the Non-linear Theory of Thin Shells", *J. of Appl. Mech.* Vol. 56, pp. 395-402 (1989).
- [61] Marguerre K. : "Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung", *Proc. of 5th Int. Cong. of Applied Mechanics*, Cambridge, Mass., pp. 93-101 (1938).
- [62] Mushtari K. M. : "Nonlinear Theory of Thin Elastic Shells", *The Israel program for Sci. Transl.*, Jerusalem (1961).
- [63] Naghdi P. M. : "On the Nonlinear Theory of Elastic Shells under the Kirchhoff Hypothesis", *Quart. Appl. Math.*, Vol. 21, N° 1, pp. 49-59 (1963).
- [64] Neale K. W. : "A General Variational Theorem for the Rate in Elasto-Plasticity", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 8, pp. 865-876 (1972).

- [65] **Palmerio A. F.** : "On a Moderate Rotation Theory for Anisotropic Shells", Engineering Science & Mechanics Department, Virginia Tech., Blacksburg University Thesis (1988).
- [66] **Pietraszkiewicz W. & Badur J.** : "Finite Rotations in the Description of Continuum Deformation", Int. J. Engng. Sci., Vol. 21, N° 9, pp. 1097-1115 (1983).
- [67] **Pietraszkiewicz W.** : "Finite Rotations and Lagrangian Description in the Non-Linear Theory of Shells", Polish Acad. of Sci., Warszawa-Poznan, Polish Sci. Publ. (1979).
- [68] **Pietraszkiewicz W.** : "Finite Rotations in Shells", Koiter W. T. & Mikhailov G. K. eds., "Theory of Shells", North-Holland Publishing Company, pp. 445-471 (1980).
- [69] **Pietraszkiewicz W.** : "Introduction to the Nonlinear Theory of Shells", Ruhr-Univ. Inst. f. Mech., Mitt., Nr. 10, Bochum (1977).
- [70] **Pietraszkiewicz W.** : "Lagrangian Description and Incremental Formulation in the Non-Linear Theory of Thin Shells", Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 19, N° 2, pp. 115-140 (1984).
- [71] **Pietraszkiewicz W.** : "On Antirely Lagrangian Displacement Form of Non-Linear Shells Equations", EUROMECH Colloquium 165 "Flexible Shells, Theory and Applications", ed. by Axelrad E. L. & Emmerling F. A., Springer-Verlag, München (1984).
- [72] **Pietraszkiewicz W.** : "On the Consistent Approximations in the Geometrically Nonlinear Theory of Shells", Ruhr-Univ. Inst. f. Mech., Mitt., Nr. 28, Bochum (1981).
- [73] **Reddy J. N.** : "A Note on Symmetry Considerations in the Transient Response of Unsymmetrically Laminated Anisotropic Plates", Int. J. for Num. Meths. in Engng., Vol. 20, pp. 175-1981 (1984).
- [74] **Reddy J. N.** : "A Small Strain and Moderate Rotation Theory of Laminated Anisotropic Plates", J. of Appl. Mech. (ASME), Vol. 54, pp. 623-626 (1987).

- [75] **Reddy J. N.** : "Bending of Laminate Anisotropic Shells by a Shear Deformable Finite Element", *Fibre Science and Technology*, Vol. 17, pp. 19-24 (1982).
- [76] **Reissner E.** : "On a Variational Theorem for Finite Elastic Deformations", *J. Math. Phys.*, Vol. 32, N° 129, pp. 865-876 (1953).
- [77] **Sanders J. L.** : "Nonlinear Theories for Thin Shells", *Quart. Appl. Maths.*, Vol. 21, pp. 21-36 (1963).
- [78] **Schmidt R. & Pietraszkiewicz W.** : "Variational Principles in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells Undergoing Moderate Rotations", *Ingenieur-Archiv.*, Vol. 50, pp. 187-201 (1981).
- [79] **Schmidt R. & Reddy J. N.** : "A Refined Small Strain and Moderate Rotation Theory of Elastic Anisotropic Shells", *J. of Appl. Mech. (ASME)*, 88-WA/APM-37.
- [80] **Schmidt R. & Weichert D.** : "Refined Theory Elastic-Plastic Shells at Moderate Rotations", *ZAMM*, Vol. 69, N° 1, pp. 11-21 (1989).
- [81] **Schmidt R.** : "A Current Trend in Shell Theory : Constrained Geometrically Nonlinear Kirchhoff-Love Type Theories Based on Polar Decomposition of Strains and Rotations", *Computers & Struct.*, Vol. 20, N° 1-3, pp. 265-275 (1985).
- [82] **Simmonds J. G.** : "A New Displacement Form for the Nonlinear Equations of Motion of Shells of Revolution", *J. of Appl. Mech. (ASME)*, Vol. 52, pp. 507-509 (1985).
- [83] **Simo J. C. & Ju J. W.** : "Strain and Stress-based Continuum Damage Models - I : Formulation", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 23, N° 7, pp. 821-840 (1987).
- [84] **Szwabowicz M. L.** : "Variational Formulation in the Geometrically Nonlinear Thin Elastic Shells Theory", *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 22, N° 11, pp. 1161-1175 (1986).
- [85] **Talreja R.** : "A Continuum Mechanics Characterization of Damage in Composite Materials", *Proc. R. Soc. London*, Vol. 399A, pp. 195-216 (1985).

- [86] Talreja R. : "Traverse Cracking and Stiffness Reduction in Composite Laminates", J. of Composite Materials, Vol. 21, pp. 355-375 (1985).
- [87] Telega J. J. : "Homogenization of Fissured Elastic Solids in the Presence of Unilateral Conditions and Fiction", Computational Mech., Vol. 6, pp. 109-127 (1990).
- [88] Teyeb O. M. & Weichert D. : "Un Modèle d'Endommagement des Coques et Plaques laminées", Actes du 11^{ième} Congrès Français de Mécanique (C.F.M.) de l'Association Universitaire de Mécanique (A.U.M.), Vol. 4, pp. 325-328, Lille - Villeneuve d'Ascq, 6-10 Septembre (1993).
- [89] Teyeb O. M., Schmidt R. & Weichert D. : "Coques Anisotropes Élasto-Plastiques Endommagées", Résumé des Communications du 10^{ième} Congrès Français de Mécanique (C.F.M.) de l'Association Universitaire de Mécanique (A.U.M.), Vol. 1, pp. 249-252, Paris, 2-6 Septembre (1991).
- [90] Valid R. : "The Nonlinear Principles of Complementary Energy in Shell Theory, Statics and Dynamics, I. Statics", European J. of Mech. A/Solids, Vol. 11, N° 5, pp. 625-651 (1992).
- [91] Valid R. : "The Nonlinear Principles of Complementary Energy in Shell Theory, Statics and Dynamics, II. Dynamics", European J. of Mech. A/Solids, Vol. 11, N° 6, pp. 791-834 (1992).
- [92] Valid R. : "Élastodynamique Non Linéaire des Coques Minces en Énergie Complémentaire", Compte Rendu de l'Acad. des Sci., Paris, T. 311, Série II, pp. 277-282 (1990).
- [93] Valid R. : "Finite Rotations, Variational Principles and Bucking in Shell Theory", *"Finite Rotations in Structural Mechanics"*, Proceedings of the EUROMECH Colloquium 197, Jablonna (Poland), ed. by Pietraszkiewicz W., Springer-Verlag, Berlin, pp. 317-332 (1985).

- [94] **Valid R.** : "Fondements de la Théorie des Coques : une Présentation Surfaccique Simple", J. de Méca. Théo. et Appl., Vol. 7, N° 2, pp. 135-156 (1988).
- [95] **Valid R.** : "La Mécanique des Milieux Continus et le Calcul des Structures", Collection des Etudes et Recherche D'Électricité de France, N° 31, ed. Eyrolles (1977).
- [96] **Valid R.** : "La Théorie Linéaire des Coques et son Application aux Calculs Inélastiques", Thèse d'État, Poitiers (1973), Publication O.N.E.R.A., N° 147 (1973).
- [97] **Valid R.** : "Le Principe Non-Linéaire d'Énergie Complémentaire en Théorie des Coques", Compte Rendu de l'Acad. des Sci., Paris, T. 309, Série II, pp. 1445-1449 (1989).
- [98] **Valid R.** : "Sur le Flambage des Coques en Formulation Duale Non Linéaire", Compte Rendu de l'Acad. des Sci., Paris, T. 315, Série II, pp. 15-20 (1992).
- [99] **Valid R.** : "Une Nouvelle Méthode de Calcul des Plaques et Coques en Composites Multicouches", Compte Rendu de l'Acad. des Sci., Paris, T. 304, Série II, N° 10, pp. 479-482 (1987).
- [100] **Wang J. & Chow C. L.** : "A Non-Proportional Loading Finite Element Analysis of Continuum Damage Mechanics for Ductile Fracture", Int. J. for Numerical Meth. in Engng., Vol. 29, pp. 197-209 (1990).
- [101] **Washizu K.** : "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, Oxford (1968).
- [102] **Wempner G.** : "Mechanics of Solids with Applications to Thin Bodies", Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands (1981).
- [103] **Whitney J. M. & Sun C. T.** : "A Refined Theory for Laminated Anisotropic, Cylindrical Shells", J. of Appl. Mechanics, pp. 471-476 (1974).



- [104] Yokoo Y. & Matsunaga H. : "A General Nonlinear Theory of Elastic Solids", Int. J. Solids and Struct., Vol. 10, pp. 261-272 (1974).
- [105] Zienkiewicz O. C. : "The Finite Element Method in Engineering Science", Mc. Graw-Hill, London (1971).

TABLES DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----|
| REMERCIEMENTS | 2 |
| INTRODUCTION GÉNÉRALE | 4 |
| A) MOTIVATION | 4 |
| B) RAPPEL HISTORIQUE | 5 |
| C) CONTENU DU RAPPORT | 6 |
| CHAPITRE 1 : ELEMENTS DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE | |
| 1.1. INTRODUCTION | 10 |
| 1.2. COORDONNÉES CURVILIGNES | 10 |
| 1.2.1. Vecteurs de base de l'espace | 11 |
| 1.2.2. Dérivées des vecteurs de base de l'espace | 12 |
| 1.2.3. Vecteurs dans l'espace | 14 |
| 1.3. GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE POUR UNE SURFACE | 15 |
| 1.3.1. Vecteurs de base et tenseurs métriques d'une surface | 15 |
| 1.3.2. Dérivées des vecteurs de base de la surface de référence | 17 |
| 1.4. THÉORIE DE COQUES | 20 |

CHAPITRE 2 : COMPORTEMENT GÉOMÉTRIQUEMENT NON LINÉAIRE DES COQUES

| | |
|---|-----------|
| 2.1. INTRODUCTION | 23 |
| 2.2. GÉOMÉTRIE DES COQUES..... | 23 |
| 2.3. RELATIONS DÉFORMATIONS-DÉPLACEMENTS | 24 |
| 2.4. ÉQUATIONS DE MOUVEMENT | 26 |
| 2.4.1. Efforts internes | 27 |
| 2.4.2. Efforts externes..... | 29 |
| 2.4.3. Equations d'équilibre et conditions aux limites | 31 |

CHAPITRE 3 : LOIS DE COMPORTEMENT

| | |
|---|-----------|
| 3.1. PREMIER ET SECOND PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE ... | 34 |
| 3.1.1. Premier principe | 34 |
| 3.1.2. Second principe | 36 |
| 3.2. MODÈLE DE L'ENDOMMAGEMENT | 38 |
| 3.2.1. Schéma cinématique | 38 |
| 3.2.2. Contraintes thermodynamiques | 40 |
| 3.2.3. Lois constitutives pour les structures laminées | 43 |
| 3.2.3.1. Loi d'évolution de l'endommagement | 43 |
| 3.2.3.2. Matrice constitutive du laminé | 46 |

CHAPITRE 4 : FORMULATION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

| | |
|---|----|
| 4.1. INTRODUCTION | 50 |
| 4.2. PRINCIPE..... | 51 |
| 4.3. MATRICES DE RIGIDITÉ | 52 |
| 4.3.1. Écriture matricielle de la déformation..... | 52 |
| 4.3.2. Équation principale | 54 |
| 4.3.3. Matrices de rigidité | 54 |
| 4.3.4. Application de la M.E.F. à notre problème..... | 55 |
| 4.3.4.1. Écriture indicielle des composantes de la déformation | 55 |
| 4.3.4.2. Écriture matricielle de la déformation | 58 |
| 4.3.4.2.1. Opérateurs linéaires $[B_L]$ | 58 |
| 4.3.4.2.1.1. Composantes membranaires | 58 |
| 4.3.4.2.1.2. composantes de cisaillement et normales..... | 60 |
| 4.3.4.2.2. Termes non linéaires $[B_{NL}]$ | 60 |
| 4.3.4.3. Calcul de la matrice de rigidité tangentielle totale $[K_T]$ | 63 |

CHAPITRE 5 : ÉVALUATION DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

| | |
|--------------------------------------|----|
| 5.1. INTRODUCTION | 66 |
| 5.2. TYPES D'ÉLÉMENTS UTILISÉS | 66 |
| 5.3. INTÉGRATION NUMÉRIQUE..... | 67 |

| | |
|--|----------------|
| 5.4. RÉOLUTION DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES | 68 |
| 5.5. CONDITIONS AUX LIMITES | 70 |
| 5.5.1. Conditions aux limites 1 (BC1)..... | 71 |
| 5.5.2. Conditions aux limites 2 (BC2)..... | 71 |
| 5.6. QUELQUES EXEMPLES NUMÉRIQUES | 72 |
| 5.6.1. Plaque orthotrope (BC1) sous chargement uniforme | 72 |
| 5.6.2. Plaque orthotrope (0/90; BC1) sous chargement uniforme | 72 |
| 5.6.3. Plaque (45/-45; BC2) sous chargement uniforme | 73 |
| 5.6.4. Cylindre isotrope encastré (h=2.54 cm) | 73 |
| 5.6.5. Cylindre isotrope encastré (h=1.27 cm) | 73 |
| 5.6.6. Cylindre orthotrope (BC1) sous charge concentrée | 74 |
| 5.6.7. Cylindre orthotrope 8x(0/90) encastré | 74 |
| 5.6.8. Sphère (BC1) sous charge concentrée | 75 |
| 5.6.9. Sphère (0/90/0/90/0) sous chargement uniforme | 75 |
| CONCLUSION GÉNÉRALE | 86 |
| BIBLIOGRAPHIE | 89 |
| TABLE DES MATIÈRES..... | 102 |
| LISTE DES FIGURES..... | 107 |
| ANNEXE | 109 |

LISTE DES FIGURES

LISTE DES FIGURES

CHAPITRE 1

| | |
|---|-----------|
| <i>Fig. 1.1 : Coordonnées Curvilignes</i> | <i>10</i> |
| <i>Fig. 1.2 : Cinématique des Coques</i> | <i>20</i> |

CHAPITRE 2

| | |
|---|-----------|
| <i>Fig. 2.1 : Géométrie de la Coque</i> | <i>24</i> |
|---|-----------|

CHAPITRE 3

| | |
|--|-----------|
| <i>Fig. 3.1 : Vue Microscopique.....</i> | <i>39</i> |
| <i>Fig. 3.2 : Couches Délaminées</i> | <i>44</i> |

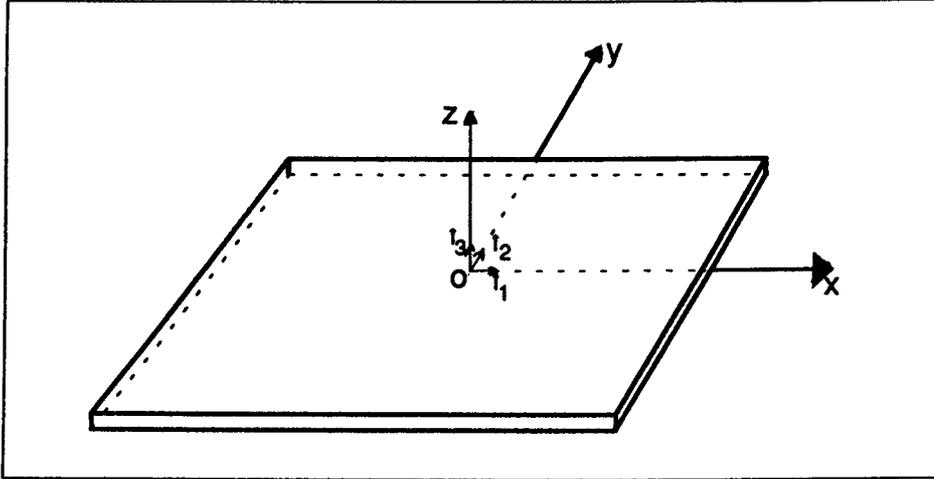
CHAPITRE 5

| | |
|--|-----------|
| <i>Fig. 5.0 :</i> | <i>68</i> |
| <i>Fig. 5.1 : Plaque Orthotrope (BC1)</i> | <i>76</i> |
| <i>Fig. 5.2 : Plaque Orthotrope (0/90)</i> | <i>77</i> |
| <i>Fig. 5.3 : Plaque (45/-45).....</i> | <i>78</i> |
| <i>Fig. 5.4 : Cylindre isotrope encastré(h=2.54 cm).....</i> | <i>79</i> |
| <i>Fig. 5.5 : Cylindre isotrope encastré(h=1.27 cm).....</i> | <i>80</i> |
| <i>Fig. 5.6 : Cylindre Orthotrope</i> | <i>81</i> |
| <i>Fig. 5.7 : Cylindre Orthotrope 8x(0/90).....</i> | <i>82</i> |
| <i>Fig. 5.8 : Sphère sous charge concentrée</i> | <i>83</i> |
| <i>Fig. 5.9 : Sphère (0/90/0/90/0).....</i> | <i>84</i> |

ANNEXE

ANNEXE A

I - PLAQUES



Pour les plaques, le vecteur position \mathbf{r} peut être défini sur la surface moyenne par

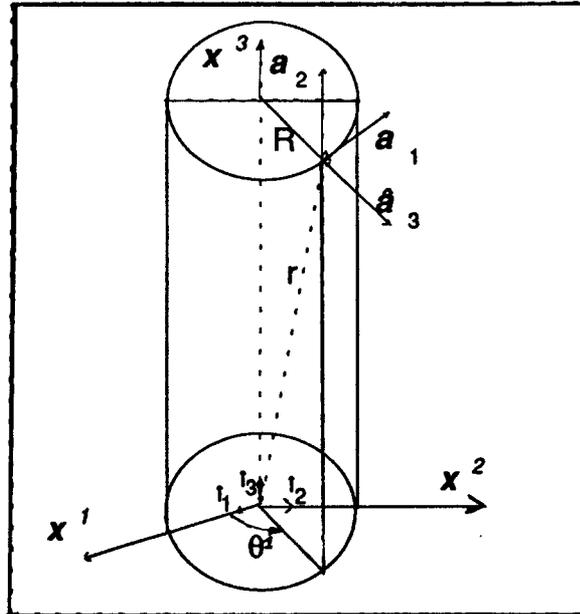
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(z^1, z^2, z^3) = \mathbf{r}(x, y, 0) \quad (\text{A.1})$$

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad a^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \equiv 0 \quad (\text{A.2})$$

$$b_{\alpha\beta} \equiv b_\alpha^\beta \equiv 0 \quad (\text{A.3})$$

II - COQUES CYLINDRIQUES

Soit la géométrie définie par la figure suivante



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) = R \cos \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + R \sin \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_2 + \theta^2 \hat{\mathbf{i}}_3 \quad (\text{A.4})$$

Vecteurs de base

$$\mathbf{a}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{,1} \\ \mathbf{r}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \sin \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + R \cos \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \hat{\mathbf{i}}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{n} = \hat{\mathbf{a}}_3 = \hat{\mathbf{a}}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2|} = \cos \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + \sin \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_2 \quad (\text{A.6})$$

Les vecteurs de base inverses sont tels que

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{a}^\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} \sin \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_1 + \frac{1}{R} \cos \theta^1 \hat{\mathbf{i}}_2 \\ \hat{\mathbf{i}}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Tenseur métrique

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad (\text{A.9})$$

$$[a_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$[a^{\alpha\beta}] = [\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta] = \begin{bmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$a = |a_{\alpha\beta}| = R^2 \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{1}{a} = |a^{\alpha\beta}| = \frac{1}{R^2} \quad (\text{A.13})$$

Vecteurs de base unitaires

$$\hat{\mathbf{a}}_\alpha = \frac{\mathbf{a}_\alpha}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} \quad (\text{A.14})$$

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{R} \quad (\text{A.15})$$

$$\hat{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{a}_2 \quad (\text{A.16})$$

Tenseur de courbure

$$[b_{\alpha\beta}] = [\mathbf{a}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{a}}_{3,\beta}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$[b^\beta_\alpha] = [-\mathbf{a}^\alpha \cdot \hat{\mathbf{a}}_{3,\beta}] = \begin{bmatrix} b^1_1 & b^1_2 \\ b^2_1 & b^2_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$H = \frac{1}{2} b^\alpha_\alpha = -\frac{1}{2R} \quad (\text{A.19})$$

$$K = \frac{|b_{\alpha\alpha}|}{a} = 0 \quad (\text{A.20})$$

Tenseur de changement de courbure

$$[\mu_\alpha^\beta] = [\delta_\alpha^\beta - \theta^3 b_\alpha^\beta] = \begin{bmatrix} \mu_1^1 & \mu_1^2 \\ \mu_2^1 & \mu_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\theta^3}{R} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Les symboles de Christoffel

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{\gamma,\beta} = 0 \quad (\text{A.22})$$

Composantes physiques

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{a}^i = \hat{v}_i \hat{\mathbf{a}}^i = \hat{v}_i \frac{\mathbf{a}^i}{\sqrt{a^{ii}}} \quad (\text{A.23})$$

Donc

$$\hat{v}_i = \sqrt{a^{ii}} v_i \quad (\text{A.24})$$

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{R} v_1 \quad \hat{v}_2 = v_2 \quad \hat{v}_3 = v_3 \quad (\text{A.25})$$

Tenseur d'ordre 2

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j = \hat{T}_{ij} \hat{\mathbf{a}}^i \otimes \hat{\mathbf{a}}^j \\ &= T^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j = \hat{T}^{ij} \hat{\mathbf{a}}_i \otimes \hat{\mathbf{a}}_j \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Donc

$$\hat{T}_{ij} = \sqrt{a^{ii}} \sqrt{a^{jj}} T_{ij} \quad (\text{A.27})$$

$$\hat{T}^{ij} = \sqrt{a_{ii}} \sqrt{a_{jj}} T^{ij} \quad (\text{A.28})$$

$$\hat{T}_{11} = \frac{1}{R^2} T_{11}; \quad \hat{T}_{12} = \frac{1}{R} T_{12}; \quad \hat{T}_{13} = \frac{1}{R} T_{13}; \quad \hat{T}_{21} = \frac{1}{R} T_{21}; \quad \hat{T}_{22} = T_{22}$$

$$\hat{T}_{23} = T_{23}; \quad \hat{T}_{31} = \frac{1}{R} T_{31}; \quad \hat{T}_{32} = T_{32}; \quad \hat{T}_{33} = T_{33}$$

$$\hat{T}^{11} = R^2 T^{11}; \quad \hat{T}^{12} = R T^{12}; \quad \hat{T}^{13} = R T^{13}; \quad \hat{T}^{21} = R T^{21}; \quad \hat{T}^{22} = T^{22}$$

$$\hat{T}^{23} = T^{23}; \quad \hat{T}^{31} = R T^{31}; \quad \hat{T}^{32} = T^{32}; \quad \hat{T}^{33} = T^{33}$$

Dérivées

$$v_{\alpha} \Big|_{\beta} = v_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} v_{\lambda} \quad (\text{A.29})$$

$$u \Big|_x = u_{,x} = R\hat{u}_{,x}; \quad v \Big|_x = v_{,x} = \hat{v}_{,x}; \quad w \Big|_x = w_{,x} = \hat{w}_{,x} \quad (\text{A.30})$$

$$u \Big|_y = u_{,y} = R\hat{u}_{,y}; \quad v \Big|_y = v_{,y} = \hat{v}_{,y}; \quad w \Big|_y = w_{,y} = \hat{w}_{,y}; \quad v^{\alpha} = a^{\alpha\beta} v_{\beta} \quad (\text{A.31})$$

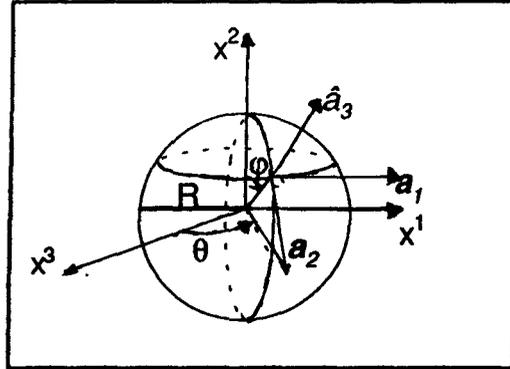
$$v^1 = \frac{1}{R^2} u = \frac{1}{R} \hat{u} \quad v^2 = v = \hat{v} \quad (\text{A.32})$$

Les composantes physiques de la déformation s'écrivent alors

$$\hat{E}_{xx} = \frac{E_{xx}}{R^2} \quad \hat{E}_{yy} = E_{yy} \quad 2\hat{E}_{xy} = \frac{2E_{xy}}{R} \quad (\text{A.33})$$

$$2\hat{E}_{xz} = \frac{2E_{xz}}{R} \quad 2\hat{E}_{yz} = 2E_{yz} \quad \hat{E}_{zz} = E_{zz} \quad (\text{A.34})$$

III - COQUES SPHÉRIQUES



$$\theta^1 \Leftrightarrow \theta^1 = R\varphi \quad (\text{A.35})$$

$$\theta^2 \Leftrightarrow \theta^2 = \theta \quad (\text{A.36})$$

$$x = R \sin \varphi \cos \theta \quad y = R \sin \varphi \sin \theta \quad z = R \cos \varphi \quad (\text{A.37})$$

Soit la géométrie de la sphère définie par la figure précédente, où φ et θ sont les coordonnées sphériques de la coque coïncidant avec les coordonnées curvilignes θ^1 et θ^2 respectivement. Le vecteur position d'un point de la coque est alors défini par

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{r}(R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi) \quad (\text{A.38})$$

Les vecteurs de base en 2-Dimensions

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^2} = R \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

Tenseurs métriques en 2-Dimensions

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad (\text{A.40})$$

$$[a_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (R \sin \varphi)^2 \end{bmatrix} \quad [a^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(R \sin \varphi)^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

$$a = |a_{\alpha\beta}| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = (R \sin \varphi)^2 \quad (\text{A.42})$$

Tenseurs de courbure

$$b_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{n} \quad \mathbf{a}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial \mathbf{a}_\alpha}{\partial \theta^\beta} \quad (\text{A.43})$$

$$\mathbf{a}_{1,1} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_{1,2} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.44})$$

$$\mathbf{a}_{2,1} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{a}_{2,2} = R \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

$$[b_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -R \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.46})$$

Composantes mixtes du tenseur de courbure

$$b_\beta^\alpha = a^{\alpha\lambda} b_{\lambda\beta} \quad b_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \quad (\text{A.47})$$

Composantes mixtes du tenseur de changement de courbure

$$\mu_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - \theta^3 b_\beta^\alpha \quad [\mu_\alpha^\beta] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\theta^3}{R} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\theta^3}{R} \end{bmatrix} \quad (\text{A.48})$$

Les symboles de Christoffel

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \mathbf{a}^{\gamma} \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta}; \quad [\Gamma_{\alpha\beta}^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R \sin \varphi \cos \theta \end{bmatrix}; \quad [\Gamma_{\alpha\beta}^2] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\cot g \varphi}{R} \\ \frac{\cot g \varphi}{R} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.49})$$

Composantes physiques

On a en général

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{a}^i = \hat{v}_i \hat{\mathbf{a}}^i = \hat{v}_i \frac{\mathbf{a}^i}{\sqrt{a^{ii}}} \quad (\text{A.50})$$

Ce qui donne la valeur de la composante physique

$$\hat{v}_i = \sqrt{a^{ii}} v_i \quad (\text{A.51})$$

Pour la sphère on a

$$\hat{v}_1 = v_1 \quad \hat{v}_2 = \frac{v_2}{R \sin \varphi} \quad \hat{v}_3 = v_3 \quad (\text{A.52})$$

$$v^{\alpha} = a^{\alpha\beta} v_{\beta} \quad (\text{A.53})$$

$$v^1 = v_1 = \hat{v}_1 \quad v^2 = \frac{v_2}{(R \sin \varphi)^2} = \frac{\hat{v}_2}{R \sin \varphi} \quad (\text{A.54})$$

Dérivées

$$v_{\alpha} |_{\beta} = v_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} v_{\lambda} \quad (\text{A.55})$$

$$v_1 |_1 = v_{1,1} \quad v_1 |_2 = v_{1,2} - v_2 \frac{\cot g \varphi}{R} \quad (\text{A.56})$$

$$v_2 |_1 = v_{2,1} - v_2 \frac{\cot g \varphi}{R} \quad v_2 |_2 = v_{2,2} + v_1 R \sin \varphi \cos \theta \quad (\text{A.57})$$

$$v^{\alpha} |_{\beta} = v^{\alpha}_{,\beta} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} v^{\lambda} \quad (\text{A.58})$$

$$v^1 |_1 = v^1_{,1} \quad v^1 |_2 = v^1_{,2} - v^2 R \sin \varphi \cos \theta \quad (\text{A.59})$$

$$v^2 |_1 = v^2_{,1} + v^2 \frac{\cot g \varphi}{R} \quad v^2 |_2 = v^2_{,2} + v^1 \frac{\cot g \varphi}{R} \quad (\text{A.60})$$

Composantes physiques de la déformation

$$\hat{E}_{xx} = E_{xx} \quad \hat{E}_{yy} = \frac{E_{yy}}{(R \sin \varphi)^2} \quad 2\hat{E}_{xy} = \frac{2E_{xy}}{R \sin \varphi} \quad (\text{A.61})$$

$$2\hat{E}_{yz} = \frac{2E_{yz}}{R \sin \varphi} \quad 2\hat{E}_{xz} = 2E_{xz} \quad \hat{E}_{zz} = E_{zz} \quad (\text{A.62})$$

