

50376
1993
260

50376
1993
260

N° d'ordre:1150

THESE

présentée à

**L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE LILLE**

par

HIMDI Morjane

pour l'obtention de grade de

DOCTEUR EN MECANIQUE



Titre

**CONTRIBUTION A LA SIMULATION NUMERIQUE DES
ECOULEMENTS DE FLUIDES COMPRESSIBLES ET PEU
COMPRESSIBLES
PAR LE CODE DE CALCUL KIVA-II.**

Soutenue le 29 JUIN 1993

devant la commission d'examen

Président:

G. CAIGNAERT, Professeur à l'E.N.S.A.M - Lille.

Rapporteurs:

A. LAVERDANT, Ingénieur de Recherches, O.N.E.R.A - Palaiseau;

P. PARANTHOEN, Directeur de Recherches, C.N.R.S - Rouen.

Examineurs:

P. MICHEAU, Professeur et Directeur du L.M.L - Lille;

H. NAJI, Maître de Conférences à l'E.U.D.I.L. - Lille;

M. SOUHAR, Directeur de Recherches, C.N.R.S - NANCY.



50376
1903
260

50376
1993
260



*A ma femme et ma fille pour toutes les
soirées qu'elles ont passé sans moi.
A mes parents.*



030 047583 9

Avant-propos

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Mécanique de Lille sous la direction de Monsieur P. MICHEAU, Professeur et Directeur du L-M-L.

Il m'a été très agréable de travailler avec Monsieur MICHEAU. Sa grande patience et sa disponibilité, malgré ses nombreuses activités et responsabilités, ont été pour moi inestimables et déterminantes. Ses qualités professionnelles et humaines m'ont profondément marqué. Qu'il veuille bien trouver ici ma sincère gratitude.

Ma reconnaissance va également à Monsieur H. NAJI, Maître de conférence à l'E.U.D.I.L pour son aide et sa disponibilité.

Monsieur A. LAVERDANT Ingénieur de Recherche à L'O.N.E.R.A, a bien voulu accepter d'examiner et de rapporter sur ce travail. Ses indications judicieuses m'ont aidé à le rendre plus complet. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance à Monsieur. P.PARANTHOEN Directeur de Recherche au C.N.R.S. - Rouen, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, et pour avoir accepté d'en être rapporteur.

Ma profonde gratitude s'adresse à Monsieur G. CAIGNEART Professeur à l'E.N.S.A.M. -Lille. Sa Présidence du jury a été pour moi un très grand honneur.

Je tiens à remercier Monsieur M. SOUHAR Professeur à l'I.N.P.L - E.N.S.E.M - Nancy, pour sa participation au jury.

J'exprime ma reconnaissance aux Ingénieurs informaticiens: Monsieur TINEL du C.I..T.I -Lille, et Monsieur TEULER du C.I.R.C.E -Orsay, pour l'aide précieuse qu'ils m'ont fourni tout au long de cette étude.

Enfin ce n'est pas en quelques lignes que je pourrai exprimer ma reconnaissance à tous les chercheurs du L.M.L et en particulier à ceux de l'équipe modélisation avec qui j'ai eu plusieurs discussions fructueuses. Leur amitié a été pour moi le plus grand des encouragements.

RESUME

L'objectif de cette thèse est d'apporter une contribution à la modélisation numérique des écoulements de fluides compressibles et peu compressibles en utilisant le code de calcul KIVA-II.

La première partie est consacrée à l'aspect théorique du problème, conduisant à une formulation mathématique adéquate. On y montre notamment les difficultés de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes dans le cas des écoulements de fluides dits peu compressibles (écoulements à faible nombre de Mach). Ces difficultés sont dues essentiellement à la grande disparité qu'il y a entre le temps caractéristique de la propagation des ondes acoustiques et celui lié à la convection. Une méthode est alors développée, elle consiste à utiliser l'hypothèse de faible nombre de Mach pour éliminer les ondes acoustiques présentes dans l'écoulement et qui sont sans intérêt dans ce cas.

Dans la deuxième partie, nous avons abordé l'étude des différentes méthodes numériques utilisées dans le code KIVA-II, ainsi que la caractérisation des algorithmes de résolution dont il fait appel.

Une discussion concernant ce code, et les principales modifications dont il a fait l'objet sont présentées dans la troisième et la quatrième partie.

La cinquième partie est consacrée à la présentation des cas tests que nous avons traités pour valider les différentes méthodes adoptées.

Dans la sixième partie, nous avons abordé les modèles physiques pour la turbulence. Trois modèles de fermeture (modèle longueur de mélange, modèle à une équation de transport et modèle à deux équations de transport) sont alors étudiés et comparés.

MOTS - CLES

Mécanique des fluides - Méthodes numériques - Méthode d'Euler-Lagrange - Méthodes des volumes finis - Ecoulement à faible nombre de Mach - Ondes acoustiques - Modèles de turbulence.

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to give a new contribution to numerical simulation of compressible and slightly compressible fluid flows using the Kiva-II computer code.

The first chapter is consecrated to the theoretical aspect of the problem, using an adequate mathematical formulation. On the other hand, we show difficulties of the numerical resolution of Navier-Stokes equations in the case of slightly compressible fluid flow (flow at low Mach number). These difficulties are essentially because the large disparity which exists between the time scale of wave propagation and the same of convection. So we have developed a special method using the low Mach number hypothesis to eliminate acoustical waves present in the flow, but they have any interest in this case.

In the second chapter, we have studied different numerical methods used in Kiva-II, and we have characterised several algorithms concerning them.

At third and fourth chapter, we continue our discussion about the code, adding improvements which are implemented by us.

The fifth chapter is consecrated to sample tests, treated to validate different computational methods.

The sixth chapter is related to turbulence. Three closure model (mixing length model, one transport equation model and two transport equations model) are studied and compared.

KEYS WORDS

Fluid Mechanics - Numerical Methods - Eulerian-Lagrangian Method - Finite volume Method - Flow at low Mach Number - Acoustical waves - Turbulence Models.

Table des matières

Nomenclature	1
Introduction	4
I Formulation mathématique du problème	
1/ Equations de Navier-Stokes	8
2/ Ecoulement subsonique à faible nombre de Mach	
a) Position du problème	10
b) Forme adimensionnelle des équations	13
c) Développement asymptotique	15
3/ Formulation mixte Eulérienne Lagrangienne	19
4/ Conditions aux limites	21
II Méthodes numériques de résolution	
1/ Discrétisation temporelle: Méthode A-L-E	24
4/ Discrétisation spatiale: Méthode de volumes finis	30
3/ Volume de contrôle et stockage des éléments	31
5/ Résolution numérique du problème couplé vitesse/pression	33
III Présentation du code KIVA-II	
1/ Introduction	34
2/ Maillage et stockage des éléments	35
3/ Choix des volumes de contrôle	37
4/ Calcul des intégrales de volume	40
5/ Calcul des intégrales de surface	40
6/ Calcul des masses de chaque type d'éléments	43
7/ Equations discrétisées résolues par le code	43
8/ Résolution des équations couplées de la phase B	53
9/ Critère de stabilité	58
IV Modifications apportées au code KIVA-II	
1/ Introduction	59
2/ Maillage et configuration géométrique	59

3/ Traitement des équations de la phase B: adaptation du code aux cas des écoulements peu compressibles	60
4/ Traitement des conditions aux limites	65
V Tests de validation en laminaire	
1/ Introduction	67
2/ Ecoulement visqueux dans un canal	67
3/ Ecoulement visqueux derrière une marche	71
4/ Figures du chapitre V	74
VI Modélisation des écoulements turbulents	
1/ Introduction	84
2/ Traitement statistique de la turbulence	85
3/ Equations de l'écoulement moyen	86
4/ Problème de fermeture, modèles de turbulence	86
a) Modèle à zéro équation: Longueur de mélange	87
b) Modèle à une équation de transport: $k - l$	89
c) Modèle à deux équations de transport: $k - \epsilon$	91
5/ Etude comparative et tests de validation	93
a) Cas d'écoulement cisailé dans un canal	94
b) Cas d'écoulement derrière une marche	94
6/ Figures du chapitre VI	96
VI Conclusion	100
Annexe A Calcul du gradient de vitesse et du tenseur de contraintes	103
Annexe B Méthodes itératives pour la résolution du système couplé vitesse pression	104
Annexe C Schémas de convection	111
Annexe D Détermination du paramètre de la procédure P.G.S	119
Annexe E Détermination des paramètres d'implicité	121
Bibliographie	125

Principales notations

Nous nous sommes efforcé d'adopter les notations qui sont celles classiquement utilisées, et de faire en sorte qu'elles soient le plus mnémotechniques possible. De ce fait, un même symbole peut revêtir différentes significations. Toutefois, lorsqu'un tel cas survient; il est immédiatement mentionné dans le texte, pour éviter toute confusion.

Nous donnons ci après les principales notations utilisées.

■ Les désignations accompagnées des symboles $(\bar{\quad})$ et $(\bar{\quad})$ concernent respectivement les variables adimensionnelles dans le chapitre [I], et les valeurs moyennes des variables dans le chapitre [VI]. Les moyennes pondérées par la masse de ce dernier chapitre sont accompagnées des symboles $(\tilde{\quad})$.

Dans le chapitre [I] la notation $O(\cdot)$ signifie ordre de (\cdot) : notation de LANDAU /48/.

Caractères usuels

A	Vecteur surface normale: $\mathbf{A} = A \mathbf{n}$
A	Surface
da	Élément de surface
c	Célérité du son
C_p	Chaleur spécifique à pression constante
C_v	Chaleur spécifique à volume constant
E	énergie totale
F, f	Force extérieur
g	Résultante des forces massiques, accélération de la pesanteur
H	enthalpie
I	Energie interne
J	Jacobien de la transformation
K	Coefficient de conductivité thermique
M	Masse
p	Pression

r	Constante des gaz parfaits
S	Entropie
T	Température
t	temps
\mathbf{u}	Vecteur vitesse du fluide $\mathbf{u} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k}$
V	volume
\mathbf{x}	Vecteur position $\mathbf{x} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$

Exposants

A	Relatif à la phase A
B	Relatif à la phase B
n	Relatif au temps de calcul $(n\Delta t)$
$n+1$	Relatif au temps de calcul $[(n+1)\Delta t]$
t	Relatif au sous cycle de la phase B, où l'on tient pas compte de la pression
ν	Numéro de sous cycle de calcul pour la convection
'	Relatif à la cellule de quantité de mouvement
''	Relatif à la cellule de vitesse à l'interface

Indices

i, j, k	Indice d'une cellule
α	Indice d'une face
0	Indice d'une quantité de référence

Opérateurs

$\nabla\phi$	Gradient de ϕ
$\nabla \cdot \mathbf{u}$	Divergence de \mathbf{u}

Caractères grecs et autres

γ	Rapport des coefficients de chaleur $\gamma = C_p / C_v$
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique

ρ	Masse volumique
σ	Tenseur de contraintes
τ	Tenseur de contraintes visqueuses
ϕ	Quantité scalaire
ϵ	Taux de dissipation turbulente
k	Energie cinétique turbulente
l	Longueur de mélange

Nombres sans dimensions

M	Nombre de Mach
Pr	Nombre de Prandtl
Re	Nombre de Reynolds
Sc	Nombre de Schmidt

INTRODUCTION

Les dispositifs industriels conçus pour utiliser l'énergie fournie par les écoulements de fluide, font intervenir plusieurs phénomènes.

Chacun de ces phénomènes: diffusion, convection, transfert thermique, turbulence, etc., pose individuellement un problème complexe.

Les méthodes numériques et les codes de calculs destinés à la modélisation des écoulements complexes contribuent à une meilleure compréhension du problème étudié, et permettent de prédire les phénomènes sans recourir systématiquement à l'expérience physique au préalable.

Depuis une dizaine d'années, de nombreux codes de calcul ont été développés pour résoudre les équations de la mécanique des fluides. On peut alors constater que les méthodes numériques utilisées se différencient, en général, selon le caractère plus ou moins visqueux de l'écoulement.

D'un côté se trouvent les codes qui résolvent les équations relatives aux écoulements de fluides incompressibles ou assimilés, comme en hydraulique. Les principales difficultés rencontrées lors de la réalisation de ces codes, résident dans le traitement des termes de pression couplés à la contrainte de continuité, c'est dans ce cadre que s'inscrit en général la simulation d'écoulements turbulents, surtout si on adopte le concept de viscosité turbulente.

De l'autre côté se trouvent les codes de simulation d'écoulements externes. Ils sont utilisés par exemple en aéronautique, pour calculer les écoulements autour de profils d'ailes ou de fuselages d'avions. Pour cette catégorie d'écoulements les effets visqueux se manifestent uniquement près des parois et dans les sillages. Partout ailleurs l'écoulement est considéré non visqueux. Ces codes de calculs sont souvent basés sur la résolution des

équations d'Euler avec une prise en compte de la couche limite.

Cependant il existe un grand nombre d'écoulements où tous les phénomènes sont importants, et qui sont donc régis par le système d'équations de Navier-Stokes complet. C'est le cas des écoulements subsoniques de fluides compressibles.

Les applications industrielles de ces écoulements sont très nombreuses. Nous citons à titre d'exemple le cas des écoulements subsoniques internes dans des éléments de machines, comme les chambres de combustion dans les moteurs à piston, les réacteurs d'avions, ou les conduites dans les circuits de refroidissement.

Dans le but d'avoir une approche numérique capable d'appréhender de tels écoulements, nous nous sommes fixés comme objectifs l'étude et la validation d'outils numériques et modèles physiques, et ceci dans le cadre général d'écoulements subsoniques de fluides compressibles et peu compressibles.

Tout au long de ce travail nous devons prendre en compte un certain nombre d'exigences nécessaires pour aboutir à un code de calcul destiné à la recherche en mécanique des fluides, c'est à dire évaluer les performances et les capacités, et rendre le champ d'application aussi étendu que possible.

Parmi les exigences préalables nous devons:

- avoir une formulation mathématique du problème qui permette l'extension de la résolution pour le cas où le domaine d'étude se déforme au cours du temps: (Formulation mixte Eulérienne Lagrangienne);
- pouvoir simuler les écoulements subsoniques, pour une gamme étendue du nombre de Reynolds: (Laminaire, turbulent);
- pouvoir résoudre le problème dans le cas des écoulements dits peu compressibles: (Ecoulement à faible nombre de Mach);
- pouvoir étudier des écoulements dans des domaines pourvus de différents types de conditions aux limites: paroi rigide, obstacle, entrée, sortie, etc..

Notre approche du problème et notre démarche pour le résoudre reposent sur les quatre phases suivantes:

- analyse physique du problème conduisant à une formulation mathématique adéquate;
- étude et adaptation des méthodes numériques pour la modélisation;
- Etude et caractérisation d'algorithmes de résolution et de code de calcul efficace;
- calcul des cas tests nécessaires pour la validation des techniques numériques retenues.

Dans chacune de ces étapes, notre objectif n'est pas d'apporter de nouvelles façons d'appréhender les différents problèmes qui se posent. Notre volonté est d'adapter et de valider un certain nombre de techniques numériques et de modèles physiques disponibles actuellement, mais dont les domaines d'applications méritent bien d'être étendus.

C'est dans ce cadre que nous nous sommes intéressés en particulier à des travaux élaborés ces dernières années au "Los Alamos National Laboratory". Ces travaux ont donné naissance à une série de codes de calcul de plus en plus performants, destinés à la modélisation des écoulements dans les chambres à combustion interne (Moteurs à pistons).

Le dernier de ces codes de calcul appelé KIVA-II /1/ répond à une grande partie de nos exigences, mais son champ d'application reste encore spécifique, et les principales techniques numériques auxquelles il fait appel méritent bien d'être étudiées et validées dans d'autres cas de figures que celui de la chambre à combustion interne.

Le premier chapitre de ce rapport est consacré aux aspects théoriques du problème, nécessaires pour sa formulation.

Dans le chapitre [II] nous exposons les principales techniques numériques adoptées.

Une présentation succincte du code KIVA-II et les principales modifications dont il a fait l'objet sont présentées respectivement dans les chapitres [III] et [IV].

Dans le chapitre [V], nous présentons les principaux tests en laminaire, auxquels nous avons procédé pour caractériser les méthodes numériques utilisées dans le code, et les modifications dont il a fait l'objet.

Le chapitre [VI] de ce rapport est consacré à l'étude et la validation de modèles physiques pour la turbulence. Trois modèles sont alors étudiés et comparés:

- Un modèle à zéro équation de transport dit longueur de mélange.
- Un modèle à une équation de transport dit $k - l$.
- Un modèle à deux équations de transport dit $k - \epsilon$.

L'étude et la comparaison de ces trois modèles sont faites dans les cas particuliers des écoulements cisailés et des écoulements avec recirculation.

Chapitre I:

Formulation mathématique du problème

Le comportement d'un fluide visqueux Newtonien en équilibre thermodynamique peut être décrit à partir de trois variables indépendantes:

- Une variable pour décrire la cinématique locale: c'est le vecteur vitesse \mathbf{u} ou la quantité de mouvement $\rho\mathbf{u}$.
- Deux variables d'états décrivant la thermodynamique: par exemple, la pression p et la masse volumique ρ .

Les trois variables indépendantes sont régies par les trois équations de conservation, ainsi que par l'équation d'état qui permet de déterminer les autres variables thermodynamiques.

I.1: Modèle de base; Equations de Navier-Stokes

Dans le cadre des milieux continus et pour les écoulements laminaires, les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie interne, la loi de comportement Newtonienne et la loi de Fourier fournissent le modèle de base de Navier-Stokes.

La première équation de conservation est celle de la conservation de la masse:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0 \quad [\text{I.1.1}]$$

La seconde équation de conservation traduit le principe fondamental de la mécanique, à savoir, la conservation de la quantité de mouvement; elle correspond pour un fluide Newtonien à l'équation de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad [\text{I.1.2}]$$

Dans cette équation $\boldsymbol{\tau}$ représente le tenseur des contraintes visqueuses:

$$\tau = \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] - \frac{2}{3} \mu [(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}]$$

μ est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

\mathbf{I} est le tenseur unité.

La troisième équation de conservation traduit le premier principe de la thermodynamique, à savoir la conservation de l'énergie interne.

$$\frac{\partial(\rho I)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} I) = \nabla \cdot \{ k \nabla T \} + \tau : \nabla \cdot \mathbf{u} \quad [\text{I.1.3}]$$

k est le coefficient de conductivité thermique.

A l'aide de relation de Gibbs:

$$T dS = dI + p d(1/\rho), \quad [\text{I.1.4}]$$

l'équation [I.1.3] peut se transformer en une équation sur l'entropie /39/.

$$T \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + T \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} S) = \nabla \cdot \{ k \nabla T \} + \tau : \nabla \cdot \mathbf{u} \quad [\text{I.1.5}]$$

L'équation de conservation [I.1.5] peut se mettre sous une autre forme; ainsi en introduisant l'enthalpie par unité de volume, nous avons:

$$\rho dH = \rho T dS + dP \quad [\text{I.1.6}]$$

on obtient alors l'équation de conservation de l'enthalpie:

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} H) = \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla P + \nabla \cdot \{ K \nabla T \} + \tau : \nabla \cdot \mathbf{u} \quad [\text{I.1.7}]$$

A ces équations, on adjoint l'équation d'état des gaz parfaits.

$$p = \rho r T \quad [\text{I.1.8}]$$

Pour un gaz parfait, l'équation de conservation de l'enthalpie peut se transformer en une équation de la température, puisque dans ce cas l'enthalpie H est une fonction uniquement de la température T :

$$dH = C_p dT \quad [\text{I.1.9}]$$

C_p est le coefficient de chaleur spécifique à pression constante.

L'équation [I.1.7] peut alors s'écrire comme une équation de la chaleur:

$$C_p \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + C_p \nabla \cdot (\rho u T) = \frac{\partial P}{\partial t} + u \cdot \nabla P + \nabla \cdot (K \nabla T) + \tau : \nabla u \quad [\text{I.1.10}]$$

L'équation de conservation de l'énergie peut donc prendre des formes variées. Le choix d'une forme particulière dépend évidemment du problème traité et des variables d'état choisies.

I.2: Ecoulement subsonique à faible nombre de Mach

a: Position du problème

Les écoulements qui nous intéressent sont subsoniques. La vitesse du fluide u est donc faible devant la célérité des ondes acoustiques c .

D'un point de vue physique, quand le nombre de Mach devient petit devant l'unité, la conséquence importante qui en découle est l'apparition d'une grande disparité, entre les deux phénomènes suivants:

- les phénomènes convectifs liés au mouvement des particules fluides;
- les phénomènes acoustiques liés à la propagation des ondes acoustiques.

En effet, si Δt_a est le temps caractéristique des phénomènes acoustiques et Δt_c est celui qui caractérise la convection, nous avons:

$$\Delta t_a = \frac{\Delta x}{c} \quad ; \quad \Delta t_c = \frac{\Delta x}{u}$$

et donc:

$$\frac{\Delta t_c}{\Delta t_a} = \frac{c}{u} = \frac{1}{M} \quad [\text{I.2.1}]$$

u et c sont respectivement la vitesse de l'écoulement et la célérité du son; M est le nombre de Mach de l'écoulement.

Le rapport entre les deux temps caractéristiques Δt_c et Δt_a devient infini quand le nombre de Mach tend vers zéro.

En général, la solution recherchée pour un écoulement est celle du régime stationnaire. Les équations de conservation de la mécanique des fluides sont censées vérifier d'une part des conditions aux limites et d'autres part, des conditions initiales. Dans ces conditions des ondes acoustiques vont être excitées par "la mise en régime" de l'écoulement. La superposition de ces perturbations sur l'écoulement stationnaire nuit à une convergence rapide vers le régime recherché.

Dans beaucoup d'applications, les ondes acoustiques sont sans grand intérêt, c'est notamment le cas pour les écoulements à faible nombre de Mach. Mais même si l'on ne souhaite pas entrer dans le détail de leur propagation au niveau de la résolution numérique, un problème demeure. Il se présente d'une manière différente selon que l'on adopte une méthode explicite ou implicite lors de la discrétisation temporelle des équations.

Les méthodes explicites sont soumises à une condition de stabilité qui porte sur le pas de temps, c'est le critère de Courant-Friedrich-Lewy qui s'écrit:

$$(|u| + c) \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad [\text{I.2.2}]$$

Δx et Δt sont respectivement la dimension caractéristique d'une maille et le pas de temps.

La condition [I.2.2] est évidemment plus restrictive que celle liée uniquement à la prise en compte des termes de convection et donc pénalisante pour l'avancement du calcul.

Cette difficulté peut être atténuée si on découple le traitement des termes de pression et celui de la convection, par exemple en introduisant au cours de chaque cycle principal, un sous-cycle de calcul, spécial pour le traitement des termes de pression /2/.

Les termes de convection sont alors pris en compte avec le pas de temps principal Δt , tandis que la contribution des termes de pression est calculée dans le sous-cycle de calcul, avec un pas de temps δt qui est un sous-multiple du pas de temps principal.

Le critère de stabilité pour le pas de temps principal Δt n'est alors basé que sur la vitesse du fluide:

$$|u| \Delta t / \Delta x \leq 1 \quad [\text{I.2.3}]$$

En revanche, le pas de temps des sous-cycles pour le traitement de la pression est soumis au critère de stabilité basé sur la vitesse du son:

$$c \delta t / \Delta x \leq 1 \quad [\text{I.2.4}]$$

Le rapport entre le pas de temps principal Δt et le pas de temps des sous cycles δt donne le nombre de sous cycles nécessaires pour le traitement des ondes acoustiques; ce nombre est inversement proportionnel au nombre de Mach.

$$\frac{\Delta t}{\delta t} \approx \frac{c}{u} = \frac{1}{M} \quad [\text{I.2.5}]$$

A faible nombre de Mach, cette méthode cesse d'être efficace car le nombre de sous-cycles nécessaires devient très élevé; de plus elle nous oblige à prendre en compte les ondes acoustiques qui sont sans intérêt dans ce cas, et dont la présence peut masquer d'autres phénomènes plus importants.

Ces méthodes sont cependant très utiles lorsqu'on s'intéresse à l'étude des ondes acoustiques /49/. Elles sont souvent couplées avec des procédures qui permettent d'augmenter artificiellement le nombre de Mach /3/ et diminuer le nombre de sous cycles nécessaires.

Les méthodes implicites¹ ne sont pas soumises à un critère de stabilité, et permettent en conséquence un bon avancement de calcul en utilisant un large pas de temps Δt . En revanche, elles font apparaître un système d'équations implicites fortement couplées. Ce dernier peut être résolu par les méthodes directes ou les méthodes itératives.

Les méthodes itératives sont très attractives, car à l'inverse des méthodes directes, elles n'exigent ni stockage d'éléments ni l'inversion d'une matrice. Ceci est très important lorsqu'on traite des domaines où le nombre de points est élevé.

Cependant, à faible nombre de Mach, ces méthodes rencontrent aussi des difficultés liées à leur vitesse de convergence qui devient de plus en plus faible.

Toutes ces raisons nous suggèrent d'examiner le système d'équations de Navier-Stokes sous sa forme adimensionnelle; ceci afin de mieux évaluer l'influence du nombre de Mach sur ses différents termes et de rechercher une simplification justifiée quand ce dernier tend vers zéro.

b:Forme adimensionnelle des équations de Navier-Stokes

Nous commençons par établir la forme adimensionnelle des équations. Pour cela, nous désignons respectivement L_0 , t_0 , u_0 , p_0 , ρ_0 , T_0 une longueur, un laps de temps, une vitesse, une pression, une masse volumique et une température caractéristiques de l'écoulement étudié. Soient μ_0 et k_0 une viscosité dynamique et un coefficient de conductivité thermique de référence.

¹ Dans ce paragraphe la discrétisation spatiale des termes convectifs est supposée du type "différence amont".

On peut exprimer toutes les grandeurs physiques dans les équations de Navier-Stokes en fonction des onze grandeurs caractéristiques précédentes. On introduit à cet effet les variables sans dimension suivantes:

$$\mathbf{x} = L_0 \bar{\mathbf{x}}, \quad t = t_0 \bar{t}, \quad \mathbf{u} = u_0 \bar{\mathbf{u}}, \quad p = p_0 \bar{p}, \quad \rho = \rho_0 \bar{\rho}, \quad T = T_0 \bar{T}.$$

Le système d'équations de Navier-Stokes réécrit avec les nouvelles variables sans dimensions est le suivant:

$$\diamond s \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\rho} + \bar{\rho} \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad [\text{I.2.6}]$$

$$\diamond s \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{\gamma M^2} \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{\nabla} \bar{p} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad [\text{I.2.7}]$$

$$\diamond \bar{\rho} \left\{ s \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\bar{T}}{\bar{p}} \left(s \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\nabla} \bar{p} \right) \right\} \\ = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \bar{T}) - (\gamma-1) \frac{M^2}{\text{Re}} \bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}} \quad [\text{I.2.8}]$$

$$\diamond \bar{p} = \bar{\rho} \bar{T} \quad [\text{I.2.9}]$$

Dans ces équations, nous avons négligé les forces de volume, étant donné que le problème est envisagé pour un mélange gazeux.

Les équations adimensionnelles font apparaître quatre paramètres sans dimension, nécessaires pour caractériser l'écoulement.

- $s = \frac{L_0}{u_0 t_0}$: Nombre de Strouhal qui caractérise les effets d'instationnarité.
- $\text{Re} = \frac{\rho_0 u_0 L_0}{\mu_0}$: Nombre de Reynolds qui caractérise les effets relatifs de l'inertie et de la dissipation visqueuse.

- $M_0 = \frac{u_0}{c_0}$: Nombre de Mach qui caractérise les effets de compressibilité.
- $Pr = \frac{C_p \mu_0}{k_0}$: Nombre de Prandtl qui caractérise les effets relatifs de la viscosité et la conduction de chaleur.

Remarque:

Le terme de pression qui n'apparaît qu'à travers son gradient dans l'équation de la quantité de mouvement est précédé du facteur $\frac{1}{\gamma M^2}$.

c: Développement asymptotique

la recherche de l'influence du nombre de Mach sur les équations et la remarque précédente, nous amènent à considérer une solution du problème, sous la forme du développement asymptotique régulier /4/ suivant:

\bar{x} , \bar{t} , S , Pr , Re , γ fixés, M tendant vers zéro.

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i^{(0)} + o(1)$$

$$\bar{p} = \bar{p}^{(0)} + M_0^{(\alpha)} \bar{p}^{(\alpha)} + o(M^\alpha)$$

[I.2.10]

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}^{(0)} + M_0^{(\beta)} \bar{\rho}^{(\beta)} + o(M^\beta)$$

$$\bar{T} = \bar{T}^{(0)} + M_0^{(\xi)} \bar{T}^{(\xi)} + o(M^\xi)$$

La notation $o(\cdot)$ signifie ordre de (\cdot) : notation de LANDAU /48/.

α , β , ξ sont des réels positifs à déterminer.

Nous postulons ici dès le départ que les séquences asymptotiques sont constituées par des puissances du nombre de Mach.

Lorsqu'on substitue le développement asymptotique [I.2.10] dans le système d'équation [I.2.6]-[I.2.9], on peut trouver une solution pour les coefficients α , β , ξ , en utilisant le principe de moindre dégénérescence /4/.

En effet, en identifiant l'équation de la quantité de mouvement à l'ordre zéro en nombre de Mach, on peut déduire:

$$1) \bar{\nabla} \bar{p}^{(0)} = 0;$$

$$2) \alpha = 2;$$

L'examen des ordres supérieurs en nombre de Mach de l'équation d'état et celle de l'énergie montre que:

$$\beta = \xi = 2$$

Une conséquence importante de ce résultat porte sur le terme de pression, on constate alors qu'il est constitué d'un premier terme, $\bar{p}^{(0)}(\bar{t})$, qui ne dépend que du temps et d'un deuxième terme fluctuant proportionnel au nombre de Mach au carré.

D'où la décomposition suivante du terme de la pression:

$$\bar{p}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = \bar{p}^{(0)}(\bar{t}) + M_0^2 \bar{p}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) \quad [\text{I.2.11}]$$

et donc

$$\bar{\nabla} \bar{p}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = M_0^2 \bar{\nabla} \bar{p}^{(2)}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t})$$

Pour que le système [I.2.6]-[I.2.9] soit fermé, il nous reste à présent à déterminer la valeur du terme $\bar{p}^{(0)}(\bar{t})$, cette valeur peut être prise égale à la pression moyenne dans tout le domaine d'étude.

$$\bar{p}^{(0)}(\bar{t}) = \frac{1}{V} \int_V \bar{p}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) \, dv$$

Si on s'arrête maintenant à l'ordre zéro du développement asymptotique, on obtient le système d'équations simplifié suivant:

$$\diamond s \frac{\partial \bar{\rho}^{(0)}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{u}}^{(0)} \cdot \bar{\nabla} \bar{\rho}^{(0)} + \bar{\rho}^{(0)} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{u}}^{(0)} = 0 \quad [\text{I.2.12}]$$

$$\diamond \bar{\rho}^{(0)} \left\{ s \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}^{(0)}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{u}}^{(0)} \cdot \bar{\nabla} \bar{\mathbf{u}}^{(0)} \right\} + \frac{1}{\gamma} \bar{\nabla} \bar{p}^{(2)} = \frac{1}{\text{Re}} \bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}^{(0)} \quad [\text{I.2.13}]$$

$$\diamond \bar{\rho}^{(0)} \left\{ s \frac{\partial \bar{T}^{(0)}}{\partial \bar{t}} + \bar{\mathbf{u}}^{(0)} \cdot \bar{\nabla} \bar{T}^{(0)} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\bar{T}^{(0)}}{\bar{p}^{(0)}} s \frac{\partial \bar{p}^{(0)}}{\partial \bar{t}} \right\} = \frac{1}{\text{Pr.Re}} \bar{\nabla} \cdot [\bar{\nabla} \bar{T}^{(0)}] \quad [\text{I.2.14}]$$

$$\diamond \bar{\rho}^{(0)} \bar{T}^{(0)} = \bar{p}^{(0)} \quad [\text{I.2.15}]$$

Au niveau du système d'équation [I.2.12]-[I.2.15] les conditions aux limites de type adhérence pour la vitesse et adiabaticité pour la température restent inchangées.

$$\bar{\mathbf{u}}^{(0)}(\mathbf{x}, t) |_{\text{paroi}} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{T}^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) |_{\text{paroi}} = 0$$

ZEYTOUNIAN /4/ a montré que la solution ($\beta = \xi = 2$) reste valable même dans le cas où le transfert de chaleur n'est pas nul à la paroi.

La simplification dans le système ci-dessus repose sur l'hypothèse de faible nombre de Mach ($M \ll 1$). Tous les termes proportionnels à M^2 ont été négligés. Ainsi, on a négligé la fonction de dissipation visqueuse et la fluctuation de pression dans l'équation d'énergie. Cette approximation est souvent utilisée pour étudier les problèmes de convection naturelle.

Si on revient à présent au système d'équations avec dimension à partir du système simplifié obtenu précédemment, on obtient une forme du système d'équations de Navier-Stokes qui prend en compte les effets de faible nombre de Mach.

$$\diamond \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{u}^{(0)} \cdot \nabla \rho^{(0)} + \rho^{(0)} \nabla \cdot \mathbf{u}^{(0)} = 0 \quad [\text{I.2.16}]$$

$$\diamond \rho^{(0)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{u}^{(0)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(0)} \right\} + M_0^2 \nabla p^{(2)} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{(0)} \quad [\text{I.2.17}]$$

$$\diamond \rho^{(0)} c_p \left\{ \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{u}^{(0)} \cdot \nabla T^{(0)} \right\} = \frac{\partial p^{(0)}}{\partial t} + \nabla \cdot [k \nabla T^{(0)}] \quad [\text{I.2.18}]$$

$$\diamond \rho^{(0)} T^{(0)} = p^{(0)} \quad [\text{I.2.19}]$$

La décomposition du terme de pression dans l'équation [I.2.10] réécrite en variables avec dimension est:

$$p(\mathbf{x}, t) = p^{(0)}(t) + M_0^2 p^{(2)}(\mathbf{x}, t) \quad [\text{I.2.20}]$$

et donc

$$\nabla p(\mathbf{x}, t) = M_0^2 \nabla p^{(2)}(\mathbf{x}, t) \quad [\text{I.2.21}]$$

Ceci montre que le terme $M_0^2 \nabla p^{(2)}$ de l'équation de la quantité de mouvement [I.2.17], peut être remplacé par ∇p .

L'équation [I.2.17] s'écrit donc:

$$\diamond \rho^{(0)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{u}^{(0)} \cdot \nabla \mathbf{u}^{(0)} \right\} + \nabla p = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{(0)} \quad [\text{I.2.22}]$$

Cette démarche revient à découpler les deux contributions de la pression: La valeur moyenne $p^{(0)}(t)$ qui a un rôle essentiellement thermodynamique et la fluctuation $p^{(2)}(\mathbf{x}, t)$ qui a un rôle dynamique lié aux fluctuations de vitesse.

Une conséquence importante de cette hypothèse est la suppression des phénomènes de propagation de l'onde de pression. En effet les fluctuations de vitesse induisent des fluctuations de pression dans l'équation de la quantité de mouvement, mais celles-ci n'interviennent plus dans les fluctuations de la masse volumique ρ , puisque $p^{(2)}$ n'intervient ni dans l'équation de l'énergie ni dans l'équation d'état.

L'état thermodynamique du fluide est alors caractérisé par une pression moyenne uniforme en espace mais variable en temps et par une température et une masse volumique variables en espace et en temps.

Pour que le système d'équations [I.2.16-I.2.19] soit fermé, il reste maintenant à déterminer la valeur de $p^{(0)}(t)$; cette dernière peut indifféremment être prise égale à la pression du fluide en un point ou à la moyenne de la pression sur tout le domaine étudié.

I.3: Formulation mixte Eulérienne Lagrangienne

Soit R_0 le référentiel fixe, ou "Eulérien" par rapport auquel on étudie le mouvement. Soient $v(t)$ un domaine mobile se déplaçant avec une vitesse $w(t)$ et $\phi(x,t)$ une propriété physique du fluide. La dérivée en suivant le domaine dans son déplacement est définie par:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt_w} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left[\frac{\phi(x+wdt, t+dt) - \phi(x, t)}{dt} \right] \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + w \cdot \nabla \phi(x, t) \right) \end{aligned} \quad [\text{I.3.1}]$$

Par ailleurs, on définit la dérivée de l'intégrale de volume de la quantité ϕ en suivant le domaine dans son déplacement par:

$$\frac{d}{dt_w} \int_v \phi \, dv \approx \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\int_{v'} \phi \, dv' - \int_v \phi \, dv}{dt} \quad [\text{I.3.2}]$$

Pour calculer la première intégrale du second membre cette équation, on peut se ramener au volume initial v en introduisant le jacobien J de la transformation /46/.

$$\int_{v'} dv' = \int_v J dv \quad [\text{I.3.3}]$$

Avec

$$J = 1 + \nabla \cdot \mathbf{w} dt \quad [\text{I.3.4}]$$

L'intégration sur le volume v' peut s'écrire en première approximation:

$$\begin{aligned} \int_{v'} \phi dv' &\approx \int_v \left(\phi + \frac{d\phi}{dt_{\mathbf{w}}} dt \right) J dv \approx \int_v \left(\phi + \frac{d\phi}{dt_{\mathbf{w}}} dt \right) (1 + \nabla \cdot \mathbf{w} dt) dv \\ &\approx \int_v \left(\phi + \frac{d\phi}{dt_{\mathbf{w}}} dt + \phi \nabla \cdot \mathbf{w} dt \right) dv \end{aligned} \quad [\text{I.3.5}]$$

La dérivée $\frac{d}{dt_{\mathbf{w}}}$ de l'intégrale de volume définie en [I.3.2] peut donc s'exprimer de la manière suivante:

$$\frac{d}{dt_{\mathbf{w}}} \int_v \phi dv \approx \int_v \left(\frac{d\phi}{dt_{\mathbf{w}}} + \phi \nabla \cdot \mathbf{w} \right) dv \quad [\text{I.3.6}]$$

Il en résulte, vue la relation [I.3.1], que:

$$\frac{d}{dt_{\mathbf{w}}} \int_v \phi dv \approx \int_v \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{w} \right) dv = \int_v \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{w} \phi) \right) dv \quad [\text{I.3.7}]$$

Soit \mathbf{u} la vitesse du fluide. L'équation [I.3.7] réécrite avec \mathbf{u} donne la dérivée en suivant le fluide dans son mouvement:

$$\frac{d}{dt_{\mathbf{u}}} \int_v \phi dv \approx \int_v \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dv = \int_v \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \phi) \right) dv \quad [\text{I.3.8}]$$

La comparaison de ces deux équations donne la relation entre les deux dérivées:

$$\frac{d}{dt_{\mathbf{w}}} \int_{\mathbf{v}} \phi \, dv \approx \frac{d}{dt_{\mathbf{u}}} \int_{\mathbf{v}} \phi \, dv + \int_{\mathbf{v}} \nabla \cdot [\phi(\mathbf{w}-\mathbf{u})] \, dv \quad [\text{I.3.9}]$$

Soit à présent l'équation de la conservation pour la quantité ϕ :

$$\frac{d}{dt_{\mathbf{u}}} \int_{\mathbf{v}} \phi \, dv = \int_{\mathbf{v}} f \, dv = \Phi \quad [\text{I.3.10}]$$

où f est la résultante des termes sources de la quantité ϕ par unité de volume.

A l'aide de cette équation, la dérivée $\frac{d}{dt_{\mathbf{w}}}$ de la relation [I.3.9] peut être formulée de la manière suivante:

$$/1/ \quad \frac{d}{dt_{\mathbf{u}}} \int_{\mathbf{v}} \phi \, dv = \Phi \quad [\text{I.3.11}]$$

$$/2/ \quad \frac{d}{dt_{\mathbf{w}}} \int_{\mathbf{v}} \phi \, dv = \Phi + \int_{\mathbf{v}} \nabla \cdot [\phi(\mathbf{w}-\mathbf{u})] \, dv \quad [\text{I.3.12}]$$

La formulation ci-dessus est une formulation mixte: Eulérienne-Lagrangienne où le domaine d'étude se déplace avec une vitesse arbitraire \mathbf{w} . Elle porte le nom de "A.L.E" pour "Arbitrary Eulerian Lagrangian".

I.4: Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont très importantes et exigent un traitement particulier pour chaque point frontière du domaine d'étude.

Il existe deux types de conditions aux limites:

■ Les conditions aux limites physiques: ce sont celles qu'on impose en présence de paroi solide et qui sont généralement dictées par la physique du problème.

Parois

Les éléments solides (parois en limite du domaine ou surfaces d'obstacles internes au domaine de calcul) sont simulés par des interfaces imperméables à l'écoulement.

Dans le cas des écoulements visqueux, les conditions aux limites physiques sur les parois sont les suivantes:

- Condition d'adhérence: toutes les composantes du vecteur vitesse sont prises égales à celles de la vitesse de la paroi. Elles sont prises nulles dans le cas particulier où celle-ci est fixe.
- Conditions sur les flux: les flux de toutes les grandeurs scalaires à travers les parois sont nuls, sauf pour l'enthalpie.

Dans la pratique, on distingue deux cas pour l'enthalpie:

- L'interface est adiabatique: le flux de chaleur y est nul.
- L'interface n'est pas adiabatique: le flux de chaleur qui la traverse est égale au flux de chaleur du côté du fluide.

■ Le deuxième type de condition aux limites sont des conditions imposées sur des frontières où les caractéristiques de l'écoulement ne sont pas connues *a priori*; par exemple: entrée, sortie.

Quelles sont les conditions aux limites numériques à imposer sur les frontières d'entrée et de sortie pour que système différentiel [I.1.1-I.1.8] soit bien posé² ? On ne le sait pas encore d'une façon précise, beaucoup de travaux sont actuellement consacrés à ce sujet. Nous citons à titre d'exemple les travaux de KEVINT et THOMPSON/5/,/6/ et de POINSOT /41/.

2 Un problème est bien posé au sens d'Hadamard, si et seulement si:
- la solution existe;
- la solution est unique;
- la solution dépend continûment des données.

Le choix des conditions aux limites sur ces frontières libres est un peu empirique, guidé par la méthode de discrétisation et justifié simplement a posteriori. C'est en se basant sur un exemple simple que D.DUTOYA /7/ a choisi les conditions d'entrée et sortie, et nous adopterons son choix.

L'étude de D.DUTOYA /7/ concerne un écoulement monodimensionnel, non visqueux, isentropique, de vitesse u , à l'intérieur d'une cavité de longueur L . Elle montre que si on impose le débit à l'entrée et la pression statique à la sortie, de manière à ce que le nombre de Mach soit inférieur à 1, alors le problème est bien posé. Le résultat est analogue lorsqu'on impose la pression d'arrêt à l'entrée et la pression statique à la sortie.

Entrée:

En suivant l'exemple de DUTOYA, on impose à l'entrée:

- Soit la pression statique et la masse volumique. Les valeurs du vecteur vitesse sont alors extrapolées pour le calcul des contraintes visqueuses.
- Soit le profil de vitesse et la masse volumique.

La température, ou l'entropie, est également imposée à l'entrée.

Sortie:

A la sortie, on impose la pression statique.

On utilise aussi dans les sections de sortie des conditions aux limites de Neumann sur la vitesse: ($\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$); ces conditions permettent de déterminer les contraintes visqueuses et sont basées sur l'hypothèse d'écoulement établi.

Symétrie:

Les conditions classiques de symétrie sont:

- la composante transversale de la vitesse est nulle
- les dérivées transversales de toutes les autres grandeurs sont nulles.

Chapitre II:

Méthodes numériques de résolution

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes [I.1.1-I.1.7], consiste à évaluer les variables indépendantes $\rho, u, p, T \dots$, à l'instant $(n+1) \Delta t$ connaissant leurs valeurs à l'instant $n \Delta t$.

Cette résolution doit être faite pour chaque point du maillage; elle nécessite donc une double discrétisation en espace et en temps.

II.1: Formulation A.L.E et discrétisation temporelle**II.1.1: Formulation A.L.E**

Nous avons vu dans la section [I.3] qu'il est possible d'envisager une formulation mixte, Eulerienne-Lagrangienne dans laquelle les éléments se déplacent avec une vitesse arbitraire dite "vitesse de grille". Cette formulation appelée A.L.E "Arbitrary-Lagrangian-Eulerian" /8/ permet, en plus de sa capacité à traiter des domaines déformables, de décomposer l'opérateur différentiel temporel en deux termes:

- Un premier terme qui prend en compte la contribution de tous les termes sources.
- Un deuxième terme qui ne prend en compte que les termes convectifs.

Considérons à nouveau l'équation de conservation [I.3.12] pour une quantité ϕ :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{v(t)} \phi \, dv \right] + \int_{\Gamma(t)} \phi (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \, da = \Phi$$

$$\text{Variation} \quad + \quad \text{Convection} \quad = \quad \text{Sources}$$

La décomposition de l'opérateur différentiel peut se faire de la manière suivante:

■ Une première étape, appelée étape B, au cours de laquelle on introduit la dérivée $\frac{d}{dt}_{\mathbf{u}}$ en suivant le fluide avec sa vitesse \mathbf{u} :

$$\frac{d}{dt}_{\mathbf{u}} \left(\int_{V(t)} \phi \, dv \right) = \Phi \quad [\text{II.1.1}]$$

■ Une deuxième étape appelée étape C, au cours de laquelle on suit le domaine dans son déplacement avec la vitesse \mathbf{w} et l'on prend en compte les phénomènes convectifs qui en résultent.

$$\frac{d}{dt}_{\mathbf{w}} \left(\int_{V(t)} \phi \, dv \right) + \int_{\Gamma(t)} \phi (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \, da = \frac{d}{dt}_{\mathbf{u}} \left(\int_{V(t)} \phi \, dv \right) \quad [\text{II.1.2}]$$

D'un point de vue physique, la décomposition de l'opérateur différentiel, peut s'interpréter de la manière suivante:

L'étape B étant purement Lagrangienne ($\mathbf{w}=\mathbf{0}$), la variation de la quantité ϕ ne tient compte que des termes sources (diffusion, force de pression etc..). Les termes de convection n'apparaissent pas dans cette étape puisqu'on suit le fluide avec sa vitesse \mathbf{u} .

L'étape C étant une étape où le maillage se déplace avec la vitesse arbitraire \mathbf{w} , la variation de ϕ est due exclusivement aux phénomènes convectifs, qui résultent de la différence entre la vitesse du fluide celle du maillage.

Si on applique cette décomposition au système d'équations de Navier-Stokes [I.1.1]-[I.1.7] en l'absence de force de volume, on obtient:

■ 1er demi-pas; Phase B

- Equation de continuité:

$$\frac{d}{dt_{\mathbf{u}}} \int_{\mathbf{v}} \rho \, dv = 0 \quad [\text{II.1.3}]$$

- Equation de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt_{\mathbf{u}}} \int_{\mathbf{v}} \rho \, \mathbf{u} \, dv = \int_{\mathbf{v}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \, dv - \int_{\mathbf{v}} \nabla p \, dv \quad [\text{II.1.4}]$$

- Equation d'énergie:

$$\frac{d}{dt_{\mathbf{u}}} \int_{\mathbf{v}} \rho E \, dv = \int_{\mathbf{v}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) \, dv - \int_{\mathbf{v}} \nabla \cdot (p \mathbf{u}) \, dv + \int_{\mathbf{v}} \nabla \cdot (k \nabla T) \, dv \quad [\text{II.1.5}]$$

■ 2ème demi-pas; Phase C

- Equation de continuité:

$$\left(\frac{d}{dt_{\mathbf{w}}} - \frac{d}{dt_{\mathbf{u}}} \right) \int_{\mathbf{v}} \rho \, dv - \int_{\mathbf{a}} \rho (\mathbf{w} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad [\text{II.1.6}]$$

- Equation de la quantité de mouvement:

$$\left(\frac{d}{dt_{\mathbf{w}}} - \frac{d}{dt_{\mathbf{u}}} \right) \int_{\mathbf{v}} \rho \, \mathbf{u} \, dv - \int_{\mathbf{a}} \rho \, \mathbf{u} (\mathbf{w} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad [\text{II.1.7}]$$

- Equation d'énergie:

$$\left(\frac{d}{dt_{\mathbf{w}}} - \frac{d}{dt_{\mathbf{u}}} \right) \int_{\mathbf{v}} \rho E \, dv - \int_{\mathbf{a}} \rho E (\mathbf{w} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad [\text{II.1.8}]$$

$$\text{Avec } \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

$E = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})/2 + I$; énergie totale

I étant l'énergie interne spécifique.

Dans le cas particulier où le domaine d'étude est fixe, ($w=0$), la dérivée $\frac{d}{dt}_w$ peut s'écrire:

$$\frac{d}{dt}_w = \frac{\partial}{\partial t}$$

Dans la suite de ce travail, comme nous nous intéressons uniquement aux problèmes où les domaines d'étude sont fixes, le système d'équations à résoudre est le suivant:

■ 1er demi-pas

$$\frac{d}{dt}_u \int_v \rho \, dv = 0 \quad [\text{II.1.9}]$$

$$\frac{d}{dt}_u \int_v \rho u \, dv = \int_v \nabla \cdot \tau \, dv - \int_v \nabla p \, dv \quad [\text{II.1.10}]$$

$$\frac{d}{dt}_u \int_v \rho E \, dv = \int_v \nabla \cdot (\tau \cdot u) \, dv - \int_v \nabla \cdot (p u) \, dv + \int_v \nabla \cdot (k \nabla T) \, dv \quad [\text{II.1.11}]$$

■ 2ème demi-pas

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{d}{dt}_u \right) \int_v \rho \, dv + \int_a \rho (u \cdot n) \, da = 0 \quad [\text{II.1.12}]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{d}{dt}_u \right) \int_v \rho u \, dv + \int_a \rho u (u \cdot n) \, da = 0 \quad [\text{II.1.13}]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{d}{dt}_u \right) \int_v \rho E \, dv - \int_a \rho E (u \cdot n) \, da = 0 \quad [\text{II.1.14}]$$

II.1.2: Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle est de type différences finies, elle consiste à faire l'approximation des dérivées temporelles au premier ordre.

Soit une quantité I qui représente les différents termes intégrales des équations [II.1.9–II.1.14]. Sa valeur de I à l'instant $n\Delta t$ est notée I^n , et $I^{(n+1)}$ à l'instant $(n+1)\Delta t$.

Afin d'utiliser la décomposition de l'opérateur différentiel, dont il est question dans la section précédente, on introduit à cet effet l'état intermédiaire B où la valeur de I est notée I^B .

Avec ses notations, l'approximation des dérivées temporelles s'écrit:

$$\frac{\partial I}{\partial t} \approx \frac{I^{n+1} - I^n}{\Delta t}$$

$$\frac{d I}{dt_{\mathbf{u}}} \approx \frac{I^B - I^n}{\Delta t}$$

et donc

$$\frac{\partial I}{\partial t} - \frac{d I}{dt_{\mathbf{u}}} \approx \frac{I^{n+1} - I^B}{\Delta t}$$

Le système d'équations discrétisées dans le temps est alors le suivant:

• Phase B

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\mathbf{v}^B} \rho^B dv - \int_{\mathbf{v}^n} \rho^n dv \right) = 0 \quad [\text{II.1.15}]$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\mathbf{v}^B} (\rho \mathbf{u})^B dv - \int_{\mathbf{v}^n} (\rho \mathbf{u})^n dv \right) = \int_{\mathbf{a}^B} \boldsymbol{\tau}^B \cdot \mathbf{n} da - \int_{\mathbf{a}^B} p^B \mathbf{n} da \quad [\text{II.1.16}]$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{\mathbf{v}^B} (\rho E)^B dv - \int_{\mathbf{v}^n} (\rho E)^n dv \right) = \int_{\mathbf{a}^B} (\boldsymbol{\tau}^B : \nabla \mathbf{u}^B) \cdot \mathbf{n} da - \int_{\mathbf{a}^B} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} da + \int_{\mathbf{a}^B} [k \nabla T]^B \cdot \mathbf{n} da$$

[II.1.17]

Les points de volumes v^B sont liés aux points de volumes v^n par la relation suivante:

$$\mathbf{x}^B = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{u}^B$$

Les termes sources dans ces équations apparaissent d'une manière implicite. Comme nous l'avons mentionné dans la section (I.2), le choix d'une méthode implicite à ce niveau est plus adéquat pour le traitement des ondes acoustiques, car il permet d'éviter le critère de stabilité basé sur la vitesse du son. En revanche, il oblige à résoudre un système couplé vitesse-pression. Une méthode itérative pour résoudre ce système est présentée dans la section (II.4).

• Phase C

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{v^{n+1}} \rho^{n+1} dv - \int_{v^B} \rho^B dv \right) + \int_{a^B} \rho^B [\mathbf{u}^B \cdot \mathbf{n}] da = 0 \quad [\text{II.1.18}]$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{v^{n+1}} (\rho \mathbf{u})^{n+1} dv - \int_{v^B} (\rho \mathbf{u})^B dv \right) + \int_{a^B} (\rho \mathbf{u})^B [\mathbf{u}^B \cdot \mathbf{n}] da = 0 \quad [\text{II.1.19}]$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{v^{n+1}} (\rho E)^{n+1} dv - \int_{v^B} (\rho E)^B dv \right) + \int_{a^B} (\rho E)^B [\mathbf{u}^B \cdot \mathbf{n}] da = 0 \quad [\text{II.1.20}]$$

Les points de volume v^{n+1} sont liés aux points de volumes v^B par la transformation suivante:

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^B - \Delta t \mathbf{u}^B$$

Comme en plus on s'intéresse à des volumes fixes, nous avons:

$$v^{n+1} = v^n \text{ et } a^{n+1} = a^n.$$

Dans les équations [II.1.18-II.1.20] de la phase C, les termes de convection apparaissent d'une manière explicite. La résolution de ces équations ne présente donc pas de difficultés, mais la stabilité d'un tel schéma n'est assurée que si le pas de temps satisfait le critère de Courant Friedrich Lewy /40/ basé sur la vitesse du fluide.

$$|\mathbf{u}| \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$$

A chaque pas de temps, on procède donc en deux étapes: Connaissant les variables à l'instant $n\Delta t$, on calcule leurs valeurs à la phase intermédiaire B à partir des relations [II.1.15-II.1.17]. On calcule ensuite les variables à l'instant $(n+1)\Delta t$ à partir de leurs valeurs intermédiaires de la phase B par les relations [II.1.18-II.1.20].

II.2: Discrétisation dans l'espace: Méthode de volumes finis

Les équations [II.1.15-II.1.20] déterminent les différents $(u, \rho, p, T..)$ à condition d'être écrites pour tout élément de volume v du domaine fluide.

La méthode des volumes finis, consiste à subdiviser le domaine d'étude en N volumes élémentaires $v_i(t)$ limités par une surface $a_i(t)$. Pour chacun de ces volumes élémentaires, appelé maille, on écrit les équations de conservation [II.1.15-II.1.20].

La résolution de telles équations nécessite deux types d'intégrations: intégrations volumiques et intégrations surfaciques. Ceci peut se faire aisément si l'on adopte les hypothèses suivantes:

- toute grandeur ϕ a une valeur uniforme à l'intérieur d'une cellule;
- les grandeurs ϕ sont également uniformes sur chaque portion de frontière a_i .

La difficulté dans ce genre de formulation est de pouvoir exprimer les variables sur les interfaces α , en fonction des variables à l'intérieur des cellules, et des conditions aux limites; c'est notamment le cas des termes de convection, figure (II.1).

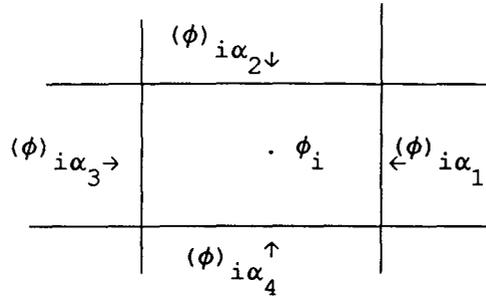


Figure II.1: Stockage d'une quantité ϕ en (2D).

Pour les termes de convection, plusieurs types d'interpolations existent. Ils consistent tous à exprimer le flux de la quantité ϕ à travers les interfaces de chaque cellule.

Les plus utilisés de ces schémas convectifs (différences amonts, schéma du second ordre) sont exposés dans l'annexe C.

II.3: Choix des volumes de contrôle et stockage des éléments

Le choix du volume de contrôle pour effectuer les intégrales des équations [II.1.15-II.1.20] et le type de stockage des éléments ne sont évidemment pas arbitraires et doivent être faits avec précaution.

L'exemple ci dessous illustre l'une des conséquences du choix de volume de contrôle lors de l'intégration de l'équation de la quantité de mouvement [II.1.19] en monodimensionnel.

En effet, la représentation du terme $-\int_a p n da$ intégré sur le volume de contrôle $[x_{i-1/2} - x_{i+1/2}]$ de la figure (II.2) est: $(p_{i-1/2} - p_{i+1/2})$.

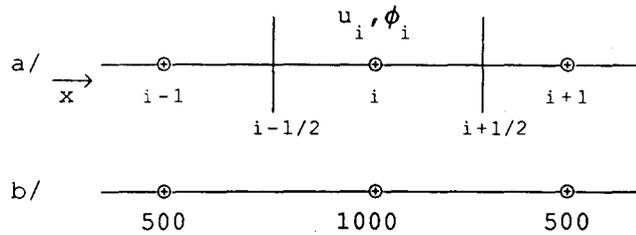


Figure II.2: a/ Volume de contrôle; b/ Champ de pression irrégulier

Si on utilise une interpolation centrée pour exprimer les valeurs de $p_{i-1/2}$ et de $p_{i+1/2}$ en fonction de p_{i-1} , p_i et p_{i+1} , on obtient:

$$p_{i-1/2} - p_{i+1/2} = (p_{i-1} + p_i)/2 - (p_i + p_{i+1})/2 = (p_{i-1} - p_{i+1})/2$$

Cela signifie que la contribution du gradient de pression dans l'équation de la quantité de mouvement pour la cellule i ne prend pas en compte la valeur de la pression dans cette même cellule.

Il en résulte qu'un champ de pression complètement irréaliste comme celui de la figure (II.2.b) est interprété par l'équation de la quantité de mouvement comme un champ uniforme. Le choix de ce volume de contrôle avec ce type de stockage des éléments doit donc être évité.

Remède: Maillage décalé

Pour lever cette difficulté Patankar /9/, propose de considérer un maillage décalé; les composantes du champ de vitesse sont stockées sur une grille décalée d'une demie cellule par rapport à celles où sont stockées toutes les autres quantités scalaires. Il en résulte que le volume de contrôle de l'équation de la quantité de mouvement se trouve aussi décalé par rapport à celui utilisé pour les équations de conservation des autres quantités scalaires.

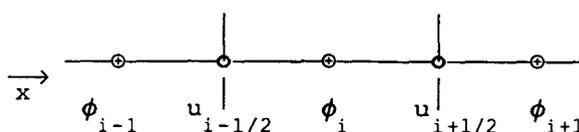


Figure II.3: Maillage décalé en monodimensionnel

L' équation de quantité de mouvement en monodimensionnel intégrée sur le volume de contrôle de la figure (II.3), permet de détecter le type d'irrégularité dans le champ de pression de la figure (II.2.b).

Un maillage décalé à deux ou à trois dimensions peut être facilement réalisé en décalant d'une demie cellule dans les deux ou trois directions du domaine.

Dans le cadre de ce travail, la technique du maillage décalé a été adoptée. Les volumes de contrôle pour l'intégration de chaque type d'équation de conservation sont choisis en conséquence et sont définis dans le chapitre III.

II.4: Résolution numérique du problème couplé vitesse-pression

Le choix d'une méthode implicite pour le traitement des équations de la phase B nécessite à chaque pas de temps la résolution d'un système d'équations couplées.

La résolution numérique d'un tel système par des méthodes directes est très difficile et même impraticable quand le nombre de points est important. On est donc confronté ici à l'un des problèmes majeurs de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes, qui est de trouver un algorithme efficace pour résoudre le système couplé vitesse-pression.

Les méthodes itératives sont très attractives, car à l'inverse des méthodes directes, elles ne nécessitent ni un stockage des éléments, ni le calcul d'une matrice inverse.

L'annexe B est consacrée à l'étude de quelques algorithmes itératifs. Elle montre en outre le cheminement qui conduit à considérer des algorithmes de plus en plus compliqués mais efficaces. Le plus élaboré parmi eux est sans doute l'algorithme du gradient conjugué. Son principe est de construire une suite de termes de pression Π^k associée au champ de vitesse, en utilisant des directions de descente conjuguées pour accélérer la convergence.

Chapitre III:

Présentation et discussion du code de calcul KIVA-II

III.1: Introduction

KIVA-II est le dernier d'une série de programmes de calcul élaborés depuis plus d'une dizaine année au " Los Alamos National Laboratory ".

Il permet de calculer des écoulements tridimensionnels, instationnaires, turbulents, réactifs et biphasiques de fluide compressible. Comme ses prédécesseurs, CONCHAS-SPRAY /10/ et KIVA /2/, il a été conçu pour la modélisation des écoulements dans les moteurs à combustion interne.

La structure du programme est modulaire et adaptable à d'autres types d'écoulements.

Les équations résolues par le code sont celles du mouvement turbulent d'un gaz parfait. La procédure de résolution est basée sur la méthode A-L-E: (Arbitrary-Lagrangian-Eulerian) /8/, avec une discrétisation spatiale de type volumes finis. Ce qui préserve le caractère conservatif des équations.

Par rapport à ses prédécesseurs, le code KIVA-II apporte des améliorations sensibles en ce qui concerne l'efficacité et la précision du calcul.

Une des plus grandes différences entre KIVA-II et sa version initiale KIVA porte sans doute sur le traitement des équations de la phase B: termes de diffusion et de pression..

En effet, KIVA utilise une méthode explicite pour le traitement des équations de la phase B, avec implantation de sous cycles de calcul pour les termes de pression.

Dans le code KIVA-II, la discrétisation des équations de la phase B est largement implicite, elle utilise la méthode I.C.E "Implicit Continuous Eulerian" /11/ avec un soin particulier pour le traitement de la pression. La contribution de cette dernière est calculée d'une manière séparée en intégrant l'équation de Poisson autour d'un volume de contrôle où le stockage des éléments évite le recours à toute interpolation lors de la discrétisation de cette équation.

Les équations couplées de la phase B résultant de l'utilisation de la méthode implicite, sont résolues par une méthode itérative similaire à l'algorithme SIMPLE "Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations" /9/, avec un traitement individuel des équations par la méthode des résidus conjugués /12/.

Le schéma explicite est utilisé pour calculer les termes convectifs de la phase C, mais ceci peut se faire pendant un nombre arbitraire de sous cycles de calcul, ainsi le pas de temps principal n'est pas restreint par le critère de stabilité des méthodes explicites.

III.2: Maillage et stockage des éléments

Le domaine d'étude est subdivisé en petits volumes de contrôle hexaédriques dont les positions des sommets sont fonction du temps, le maillage peut donc se déplacer et n'a pas besoin d'être orthogonal.

Pour chaque cellule, en adoptant la technique du maillage décalé /9/, les composantes du vecteur vitesse, sont stockées aux sommets, tandis que les quantités scalaires sont prises aux centres des cellules.

Par convention l'indice d'une cellule régulière est celui de son sommet numéro 4 comme l'indique la figure (III.2). Par conséquent, le stockage des éléments se fait dans des tableaux à une seule dimension, ce qui permet une économie appréciable de la place mémoire.

Le centre de chaque cellule est défini par les coordonnées

$$X_{i,j,k}^c = \frac{1}{8} \sum_{\alpha} X_{\alpha} ; \quad Y_{i,j,k}^c = \frac{1}{8} \sum_{\alpha} Y_{\alpha} ; \quad Z_{i,j,k}^c = \sum_{\alpha} Z_{\alpha} \quad \text{[III.2.1]}$$

$(X_{\alpha}, Y_{\alpha}, Z_{\alpha})$ sont les coordonnées du sommets α .

En plus des vitesses stockées aux sommets, KIVA-II utilise un autre champ de vitesse stocké aux centres des interfaces qui délimitent les mailles. Ce dernier est utilisé pour le calcul itératif de la pression et des variations de volume de la phase Lagrangienne. Les raisons de son utilisation sont les suivantes:

Considérons deux types de maillages M1 et M2, correspondants à deux stockages des composantes du vecteur vitesse différents.

Le premier M1, où les composantes du vecteur vitesse sont définies aux sommets de la maille.

Le deuxième M2, où les composantes du vecteur vitesse sont définies aux centres des interfaces qui délimitent la maille.

Ils sont représentés sur la figure III.1 en deux dimensions.

Le stockage des éléments du maillage M1 convient pour la méthode A-L-E, où le maillage se déplace, car il permet de calculer les nouvelles positions des mailles après le déplacement, sans avoir recours à une interpolation. Mais ce stockage a un inconvénient majeur qui est le couplage imparfait entre les vitesses et la pression.

En effet l'intégration de l'équation de la quantité de mouvement dans le volume de contrôle du maillage M1 nécessite une interpolation des composantes du vecteur vitesse ou de la pression.

Les travaux de A.Brandt /13/ montrent que toute interpolation, lors de la discrétisation implicite de l'équation couplée vitesse pression introduit des modes parasites. Ces derniers ont des effets néfastes sur la convergence des méthodes itératives généralement utilisées.

Afin d'éviter toute interpolation au cours du calcul itératif, A.Brandt suggère d'utiliser le maillage M2 pour calculer les effets de la pression, même si le maillage initial est de type M1. Lorsque la convergence est atteinte, on peut coupler les deux maillages en utilisant la valeur finale de la pression pour adapter le champ de vitesse du maillage M1.

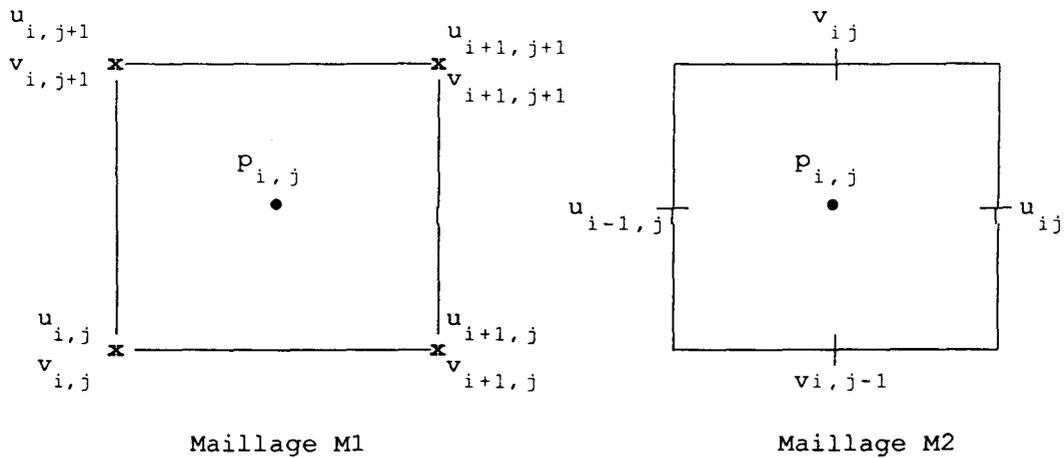


Figure III.1: Types de stockages des éléments (2D).

III.3: Choix des volumes de contrôle

Trois types de cellules sont à considérer pour représenter les volumes de contrôles nécessaires pour l'intégration des équations.

- 1) Cellules régulières, construites autour des quantités scalaires. Ces cellules représentent les volumes de contrôle pour l'intégration des équations de toutes les quantités scalaires (ρ, I, \dots), figure (III.2).
- 2) Cellules de quantités de mouvement, Centrées sur les sommets des éléments du maillage, là où sont stockées les vitesses. Ces cellules sont utilisées comme volumes de contrôle pour l'intégration de l'équation de la quantité de mouvement, figure (III.3).
- 3) Cellules pour les vitesses aux interfaces, construites autour de chaque face de cellule régulière. Elles sont une conséquence directe de l'utilisation de vitesses aux interfaces pour calculer les effets de la pression, figure (III.4).

Les détails de l'intégration des équations dans ces différents volumes de contrôle sont donnés dans les sections suivantes:

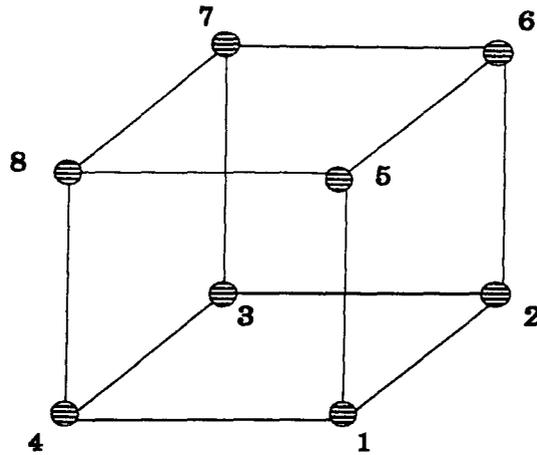


Figure III.2: Elément de maillage; numérotation

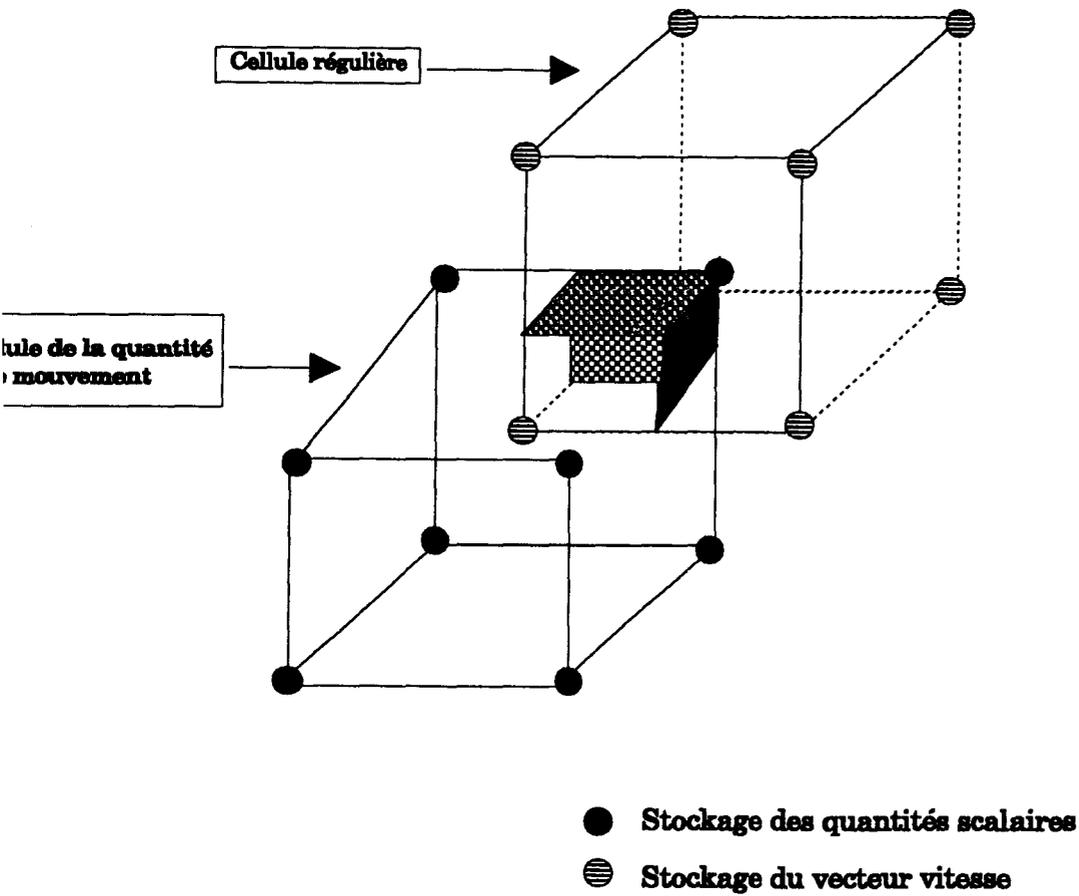


Figure III.3 : volumes de contrôle

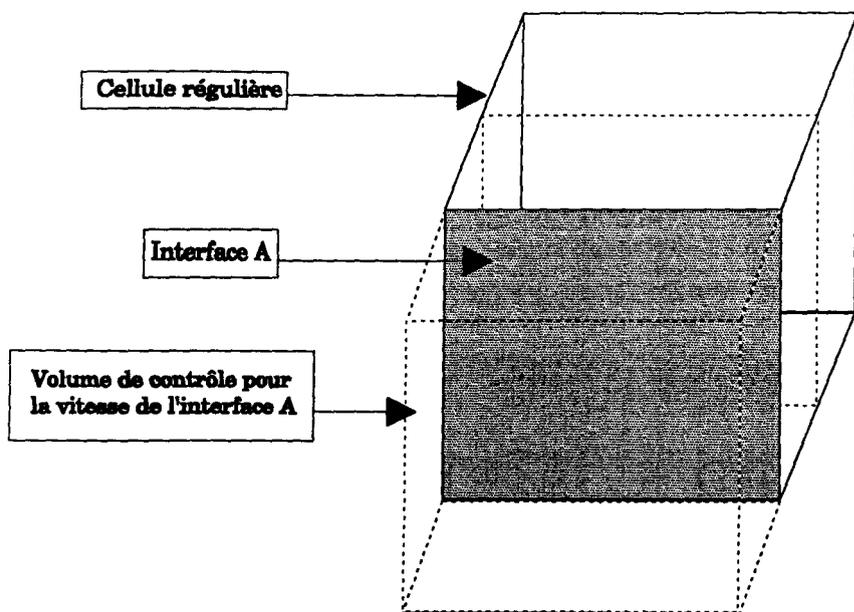


Figure III.4: Volume de contrôle pour les vitesses aux interfaces

Nous avons donc:

- Champ de vitesse aux sommets des mailles.

$$u_{i,j,k} = u (X_{i,j,k}, Y_{i,j,k}, Z_{i,j,k}) \quad [\text{III.3.1}]$$

- Quantités scalaires aux centres des mailles.

$$Q_{i,j,k} = Q (X_{i,j,k}^C, Y_{i,j,k}^C, Z_{i,j,k}^C) \quad [\text{III.3.2}]$$

où $Q = \rho, p, T, I, \dots$

A chaque fois qu'on a besoin d'une quantité là où elle n'est pas stockée, on l'obtient par interpolation de ses valeurs dans les cellules voisines.

III.4: Calcul des intégrales de volume

Les intégrales sur les volumes sont effectuées moyennant l'hypothèse d'uniformité de la quantité à intégrer dans tout le volume de contrôle.

Les intégrales des termes gradients et des termes divergences sont converties en intégrales de surfaces en utilisant le théorème de divergence.

$$\int_V \text{div } u \, dv = \int_A u \cdot n \, da$$

III.5: Calcul des intégrales de surface

Les intégrales surfaciques sont converties en sommes, en supposant uniformes les quantités à intégrer sur des portions de surface.

On définit par \mathbf{A}_α le vecteur surface normal de la face α .

$$\mathbf{A}_\alpha = n_\alpha A_\alpha$$

où A_α est l'aire de la face α ; n_α est le vecteur unitaire normal, orienté vers l'extérieur.

Nous avons:

$$\int_a \underline{F} \, d\mathbf{A} = \sum_{\alpha} \underline{F}_{\alpha} \cdot \mathbf{A}_{\alpha} \quad [\text{III.5.1}]$$

\mathbf{A}_{α} étant le vecteur surface relatif aux cellules régulières.

Les faces de cellules de quantité de mouvement ne sont pas explicitement calculées par le code. Les intégrales sur ces faces sont transformées, en intégrales sur les faces des cellules régulières. Ceci est fait de la manière suivante.

Considérons la portion de volume qui est commune à la cellule régulière et à la cellule de quantité de mouvement, figure (III.3).

Trois faces a, b, c de cette portion de volume sont à l'intérieur de la cellule régulière et sont faces de la cellule de quantité de mouvement; (Surfaces grises); notons leurs vecteurs de surface \mathbf{A}'_{α} . Les trois autres surfaces d, e, f sont faces de la cellule régulière et ont donc des vecteurs surfaces connus, et ont pour valeurs: $\left(\frac{1}{4} \mathbf{A}_{\alpha}\right)$. On cherche à exprimer les intégrales sur les faces a, b, c en fonction des intégrales sur les faces d, e, f . Pour ce faire, on utilise le théorème de divergence.

En effet $\int_A d\mathbf{A}$ sur l'ensemble des surfaces est nulle.

$$\int_A d\mathbf{A} = \int_{a+b+c} d\mathbf{A} + \int_{d+e+f} d\mathbf{A} = 0$$

et donc:

$$\mathbf{A}'_a + \mathbf{A}'_b + \mathbf{A}'_c = -\frac{1}{4} (\mathbf{A}_d + \mathbf{A}_e + \mathbf{A}_f) \quad [\text{III.5.2}]$$

Soit maintenant une quantité Q uniforme dans une cellule régulière. Son intégration à travers les trois surfaces a, b, c s'obtient facilement à l'aide de la relation [III.5.2].

D'où

$$\int_{a+bc} Q dA = Q_{i,j,k} (A'_a + A'_b + A'_c) = -\frac{1}{4} Q_{i,j,k} (A_d + A_e + A_f) \quad [\text{III.5.3}]$$

$Q_{i,j,k}$ est une quantité scalaire stockée au centre de la cellule régulière où se trouvent les surfaces A'_a, A'_b, A'_c .

Ceci montre qu'on n'a pas besoin de calculer explicitement les surfaces des cellules de quantité de mouvement. La même chose peut être dite à propos des surface A'_α des cellules de troisième type (cellules pour les vitesses aux interfaces).

Calcul des termes gradient:

Pour calculer la diffusion des quantités centrées Q , il est nécessaire d'évaluer les termes $(\nabla Q)_\alpha \cdot A_\alpha$. Ceci est approché de la manière suivante:

Soient \mathbf{x}_l et \mathbf{x}_r , figure (III.5), les vecteurs positions des centres des cellules de part et d'autre de la face α , et soient $\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_f$ et \mathbf{x}_d les milieux des quatre côtés de la face α . On commence par calculer les coefficients a_{lr}, a_{tb} et a_{fd} liés au vecteur surface A_α , par la relation:

$$a_{lr}(\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_r) + a_{tb}(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_b) + a_{fd}(\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_d) = A_\alpha \quad [\text{III.5.4}]$$

Notons ici que puisque le maillage n'est pas forcément orthogonal, le vecteur $\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_r$ n'est pas toujours parallèle à A_α .

Une approximation de la quantité $(\nabla Q)_\alpha \cdot A_\alpha$ est obtenue en multipliant par $(\nabla Q)_\alpha$ les deux membres de l'équation [III.5.4] et prenant uniquement les termes d'ordre 1; ce qui donne:

$$a_{lr}(Q_l - Q_r) + a_{tb}(Q_t - Q_b) + a_{fd}(Q_f - Q_d) = (\nabla Q)_\alpha \cdot A_\alpha \quad [\text{III.5.5}]$$

Q_t, Q_b, Q_f, Q_d, Q_r et Q_l sont les valeurs de Q sur les quatre côtés de la face α . Pour obtenir l'une de ces valeurs, Q_l par exemple, on peut faire la moyenne des valeurs de Q dans les quatre cellules entourant le côté correspondant.

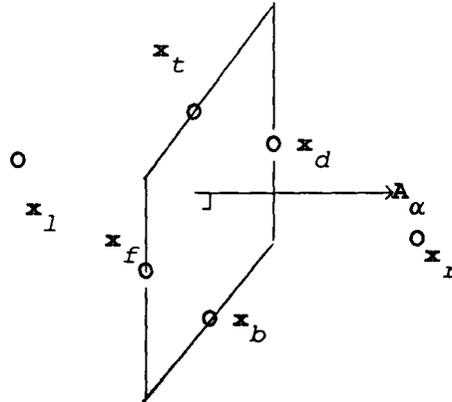


Figure III.5: Points utilisés pour définir le gradient d'une quantité scalaire

III.6: Calcul des masses de chaque type d'éléments

- La masse d'une cellule régulière (i,j,k) est:

$$M_{i,j,k} = \rho_{i,j,k} V_{i,j,k} \tag{III.6.1}$$

- La masse d'une cellule de quantité de mouvement est:

$$M'_{i,j,k} = \frac{1}{8} \left(M_{i,j,k} + M_{i-1,j,k} + M_{i-1,j-1,k} + M_{i,j-1,k} + M_{i,j,k-1} + M_{i-1,j,k-1} + M_{i-1,j-1,k-1} + M_{i,j-1,k-1} \right) \tag{III.6.2}$$

- Masse de la cellule pour la vitesse à l'interface gauche de la cellule (i,j,k):

$$M''_l = \frac{1}{2} (M_{i,j,k} + M_{i-1,j,k}) \tag{III.6.3}$$

III.7: Equations discrétisées résolues par le code

La discrétisation temporelle des équations est de type différences finies, et fait appel à la méthode A-L-E exposée dans le chapitre [II]. Elle se fait en trois étapes:

■ Phase A :

On calcule des termes sources d'origine chimique, plus ceux dûs à l'injection de gouttelettes liquides dans le mélange gazeux. Les forces de volume sont aussi prises en compte dans cette phase.

■ Phase B :

On calcule des termes de pression et de diffusion, ce calcul est fait d'une manière implicite.

Ces deux premières étapes constituent la phase Lagrangienne où le maillage suit le fluide dans son mouvement.

■ Phase C

On calcule des termes convectifs dus au déplacement du maillage par rapport au fluide. Ce calcul est fait au cours de la phase C d'une manière explicite.

Les équations discrétisées de la phase B et C

Nous allons à présent donner les équations résolues par le code KIVA-II pour la phase B et C. Les équations de la phase A, ne sont pas exposées dans ce rapport, vue que nous nous intéressons uniquement à des mélanges non réactifs constitués d'une seule espèce gazeuse où les forces de volumes sont négligés. Toutefois, du point de vue numérique, la prise en compte de ces termes, ne pose pas de difficultés particulières, car ils sont traités d'une manière totalement explicite.

a- Equations de la phase B

◇ Equation de continuité

L'équation de la conservation de la masse de la phase B s'écrit:

$$\frac{\rho_{i,j,k}^B V_{i,j,k}^B - \rho_{i,j,k}^n V_{i,j,k}^n}{\Delta t} = 0 \quad [\text{III.7.1}]$$

$$\rho_{i,j,k}^B V_{i,j,k}^B = \rho_{i,j,k}^n V_{i,j,k}^n = M_{i,j,k}^n = M_{i,j,k}^B \quad [\text{III.7.2}]$$

◇ Equation de la quantité de mouvement, Vitesse aux noeuds

Pour l'équation de la quantité de mouvement, la phase B est consacrée à la prise en compte du terme pression et des contraintes visqueuses.

$$\frac{(M')_{i,j,k}^B \mathbf{u}_{i,j,k}^B - (M')_{i,j,k}^n \mathbf{u}_{i,j,k}^n}{\Delta t} = - \sum_{\alpha} \left[\phi_p p^B + (1-\phi_p) p^n \right]_{\alpha} \cdot (\mathbf{A}')_{\alpha}^n + \sum_{\alpha} \left[\phi_D \tau(\mathbf{u}^B) + (1-\phi_D) \tau(\mathbf{u}^n) \right]_{\alpha} \cdot (\mathbf{A}')_{\alpha}^n$$

[III.7.3]

α est la face de la cellule de quantité de mouvement dont le vecteur normal à l'instant $n\Delta t$ est $(\mathbf{A}')^n$.

La pression p et le tenseur des contraintes τ sont supposés uniformes dans la cellule régulière où se trouve la face α .

Les surfaces \mathbf{A}' de la cellule de quantité de mouvement s'expriment en fonction des surfaces \mathbf{A} de la cellule régulière comme c'est décrit dans la section [III.2.1].

Pour la discrétisation du terme de pression, il est fait usage des variables ϕ_p et ϕ_D qui introduisent un caractère implicite. Ceci a pour but de faire converger le calcul d'une manière plus rapide. Les expressions de ces paramètres sont directement liées au critère de stabilité, elles sont exposées dans l'annexe E.

◇ Equation de la quantité de mouvement, vitesses aux interfaces

Comme nous l'avons mentionné précédemment, KIVA-II résout une équation de la quantité de mouvement qui ne prend en compte que le terme de pression. Pour ce faire il utilise un champ de vitesse stocké aux centres des interfaces des cellules régulières. Ce dernier sert à faire le calcul itératif de la pression et des variations de volume des mailles dans la phase Lagrangienne.

Nous allons voir à présent comment cette équation pour les vitesses aux interfaces est obtenue. La façon dont elle est résolue sera exposée dans la section [III.8].

Pour faciliter l'introduction et l'écriture d'un champ de vitesse aux interfaces, on introduit des facteurs de surfaces définis comme suit :

$$(uA)_\alpha = \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\alpha = (\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha) A_\alpha$$

C'est le produit scalaire entre le vecteur vitesse \mathbf{u} et le vecteur de surface normale de la face α : \mathbf{A}_α .

Une équation de (uA) peut être obtenue de la façon suivante:

Considérons un volume de contrôle v qui se déplace à la vitesse du fluide, nous avons:

$$\frac{D}{Dt} \int_v \rho \mathbf{u} \, dv = \mathbf{f} \quad [\text{III.7.4}]$$

où \mathbf{f} représente uniquement les forces de pression.

Si on multiplie scalairement les deux membres de cette équation par \mathbf{A} , où \mathbf{A} est une surface qui se déplace avec le volume v et ne dépend donc que du temps, on peut écrire:

$$\mathbf{A} \cdot \frac{D}{Dt} \int_v \rho \mathbf{u} \, dv = \mathbf{f} \cdot \mathbf{A}$$

or

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \frac{D}{Dt} \int_v \rho \mathbf{u} \, dv &= \frac{D}{Dt} \left\{ \mathbf{A} \cdot \int_v (\rho \mathbf{u}) \, dv \right\} - \frac{D\mathbf{A}}{Dt} \cdot \int_v (\rho \mathbf{u}) \, dv \\ &= \frac{D}{Dt} \int_v (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}) \, dv - \frac{D\mathbf{A}}{Dt} \cdot \int_v (\rho \mathbf{u}) \, dv \end{aligned}$$

et donc:

$$\frac{D}{Dt} \int_V (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}) dv = \mathbf{f} \cdot \mathbf{A} + \frac{DA}{Dt} \int_V (\rho \mathbf{u}) dv \quad [\text{III.7.5}]$$

L'équation [III.7.5] est écrite pour chaque face α dont on veut calculer la vitesse normale; le volume de contrôle v est donc construit autour de la face α en question.

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho (uA)_\alpha dv = \mathbf{f} \cdot \mathbf{A} + \frac{DA}{Dt} \int_V (\rho \mathbf{u}) dv$$

Comme \mathbf{f} représente uniquement les forces de pression, l'opérateur différentiel temporel exprime, pour chaque face α , la différence entre la quantité $(uA)_\alpha^B$ qui prend en compte le terme de pression et la quantité $(uA)_\alpha^t$ qui ne le prend pas en compte.

Pour déterminer les quantités $(uA)_\alpha^t$, on commence tout d'abord par le calcul d'un champ de vitesse aux sommets appelé \mathbf{u}^t qui ne tient compte que de la diffusion et donc pas de la pression. \mathbf{u}^t peut être obtenue à partir du champ de vitesse \mathbf{u}^n à l'instant $n\Delta t$ par la relation suivante:

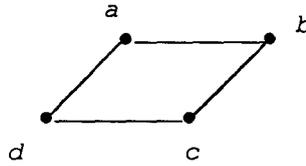
$$[(M')_{i,j,k}^B] \frac{u_{i,j,k}^t - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \sum_\alpha \left[\phi_D \tau(u^B) + (1-\phi_D) \tau(u^n) \right]_\alpha \cdot (A')_\alpha^n \quad [\text{III.7.6}]$$

Remarque:

Le champ de vitesse \mathbf{u}^t ainsi obtenu ne tient pas compte des forces de pression.

Les quantités $(uA)_\alpha^t$ sont alors calculées à partir du champ de vitesse \mathbf{u}^t par interpolation des quatre valeurs entourant la face α .

$$(uA)_\alpha^t = \frac{1}{4} (u_a^t + u_b^t + u_c^t + u_d^t) \cdot A_\alpha^n \quad [\text{III.7.7}]$$



a, b, c, d sont les indicateurs des quatre sommets de la face α .

Enfin l'équation [III.7.5] discrétisée donne les quantités $(uA)_\alpha^B$ à partir des $(uA)_\alpha^t$ et du champ de pression p^B :

$$(M'')_\alpha^B \frac{(uA)_\alpha^B - (uA)_\alpha^t}{\Delta t} = - \sum_\gamma \left[\phi_p p^B + (1-\phi_p) p^n \right]_\gamma \cdot (A'')_\gamma^n \cdot A_\alpha + (M'')_\alpha^B \frac{A_\alpha^t - A_\alpha^n}{\Delta t} \cdot \frac{u_a^n + u_b^n + u_c^n + u_d^n}{4}$$

[III.7.8]

les indices γ font références aux faces qui délimitent le volume de contrôle de la vitesse à l'interface α .

Dans l'équation [III.7.8], les A'' qui ne coïncident pas avec les faces d'une cellule régulière sont éliminées en faveur de ces dernières par la procédure exposée dans la section (III.5.3).

Pour une face γ qui se trouve entièrement dans une cellule régulière, les valeurs de la pression et du paramètre ϕ_p sont prises égales à celles au centre de la cellule. Si la face γ se trouve sur la frontière d'une cellule régulière les valeurs de p et de ϕ_p sont obtenues en faisant la moyenne de leurs valeurs respectives dans les cellules adjacentes.

Enfin dans la discrétisation de $\frac{DA}{Dt}$, le terme A_α^t est obtenu par:

$$A_\alpha^t = A_\alpha (x^n + u^n \Delta t)$$

[III.7.9]

◇ Equation des variations de volume de la phase B

Une équation pour les variations de volume au cours la phase B peut être obtenue par:

$$\frac{d}{dt} v = \int_A \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A}$$

d'où

$$v_{i,j,k}^B = v_{i,j,k}^n + \Delta t \sum_{\alpha} (uA)_{\alpha}^B \quad [\text{III.7.10}]$$

◇ Equation d'énergie

L'équation discrétisée de l'énergie interne pour la phase Lagrangienne est la suivante:

$$\begin{aligned} \frac{M_{i,j,k}^B I_{i,j,k}^B - M_{i,j,k}^A I_{i,j,k}^n}{\Delta t} &= - \frac{p_{i,j,k}^n + p_{i,j,k}^B}{2} \frac{v_{i,j,k}^B - v_{i,j,k}^n}{\Delta t} \\ &+ \left[\phi_D \tau(\mathbf{u}^B) : \nabla \mathbf{u}^B + (1-\phi_D) \tau(\mathbf{u}^n) : \nabla \mathbf{u}^n \right]_{i,j,k} v_{i,j,k}^n \\ &+ \sum_{\alpha} K_{\alpha}^n \nabla \left[\phi_D T^B + (1-\phi_D) T^n \right]_{\alpha} \cdot \mathbf{A}_{\alpha}^n \end{aligned} \quad [\text{III.7.11}]$$

Les tenseurs de contraintes et les termes $\nabla \mathbf{u}$ sont obtenus par approximation comme il est décrit en annexe A et sont stockés aux centres des cellules régulières.

◇ Equations d'état

Les équations d'état sont celles d'un gaz parfait:

$$p_{i,j,k} = \rho_{i,j,k} \cdot r T_{i,j,k} \quad [\text{III.7.12}]$$

et

$$I_{i,j,k} = C_v T_{i,j,k} \quad [III.7.13]$$

b- Les équations discrétisées de la phase C

La phase C est consacrée au calcul du transport convectif associé au mouvement relatif du maillage par rapport au fluide. Le calcul dans cette phase est fait d'une manière explicite mais peut être accompli au cours d'un certain nombre de sous-cycles dont le pas de temps Δt_s est un sous-multiple du pas de temps principal.

Dans ce cas, c'est seulement le pas de temps du sous cycle Δt_s qui est soumis au critère de Courant Friedrich Lewy pour assurer la stabilité du schéma explicite:

$$u_r (\Delta t_s / \Delta x) \leq 1$$

où u_r est la vitesse relative du maillage par rapport au fluide.

Le transport des quantités centrées est calculé en utilisant les incréments de volumes δv_α ; ces derniers représentent le débordement de volume dû au déplacement de la face α quand ses quatre sommets se déplacent de leurs positions de la phase B à leurs positions finales à l'étape $n+1$. Par convention δv_α est pris positif quand le mouvement de la face α tend à augmenter le volume total de la cellule régulière et négatif dans le cas contraire.

Soit NS le nombre total de sous cycles

$$NS = \Delta t / \Delta t_s$$

Nous avons :

$$v^B + NS \sum_{\alpha} \delta v_{\alpha} = v^{n+1} \quad [III.7.14]$$

or

$$v^B = v^n + \Delta t \sum_{\alpha} (uA)_{\alpha} \quad [III.7.15]$$

En introduisant la variation totale de volume δv^t due au mouvement des sommets de la face α de leurs positions initiales à l'instant n à leurs positions finales à l'instant $n+1$, nous avons:

$$\delta v_{\alpha}^v = \delta v_{\alpha}^t \frac{\Delta t_s}{\Delta t} - (uA)_{\alpha}^B \Delta t_s \quad [\text{III.7.16}]$$

Avec $\left\{ \begin{array}{l} \delta v_{\alpha}^v : \text{débordement de volume dû au déplacement des sommets de } \mathbf{x}^B \text{ à } \mathbf{x}^{n+1} \\ \delta v_{\alpha}^t : \text{débordement de volume dû au déplacement des sommets de } \mathbf{x}^n \text{ à } \mathbf{x}^{n+1} \end{array} \right.$

La convection de toute quantité scalaire Q se fait en tenant compte de la somme de toutes les contributions dues aux mouvements des différentes faces qui délimitent la cellule régulière:

◇ Equation de la convection de la masse volumique

La masse volumique ρ^v après v sous-cycles de calcul convectif est donnée par:

$$\rho_{i,j,k}^v v_{i,j,k}^v = \rho_{i,j,k}^{v-1} v_{i,j,k}^{v-1} + \sum_{\alpha} (\rho^{v-1})_{\alpha} \delta v_{\alpha} \quad [\text{III.7.17}]$$

L'initialisation est faite à partir de la valeur de ρ à la fin de l'étape B, soit:

$$\rho_{i,j,k}^0 = \rho_{i,j,k}^B \quad [\text{III.7.18}]$$

La valeur de $v_{i,j,k}^v$ pour chaque sous cycle est donnée par:

$$v_{i,j,k}^v = \left[v v_{i,j,k}^{n+1} + (NS-v) v_{i,j,k}^B \right] / NS \quad [\text{III.7.19}]$$

Le choix de la valeur $(\rho)_{\alpha}$ sur l'interface d'une cellule régulière fait l'objet de plusieurs types d'interpolations appelés schémas convectifs. Les plus connus de ces schémas: différence amont, différences interpolées etc... , sont présentés et discutés en Annexe C.

◇ Equation de convection de l'énergie

Le calcul convectif de l'énergie interne est donné par:

$$\rho_{i,j,k}^{\nu} v_{i,j,k}^{\nu} I_{i,j,k}^{\nu} = \rho_{i,j,k}^{\nu-1} v_{i,j,k}^{\nu-1} I_{i,j,k}^{\nu-1} + \sum_{\alpha} (\rho I)_{\alpha}^{\nu-1} \delta v_{\alpha} \quad [\text{III.7.20}]$$

Les $(\rho I)_{\alpha}^{\nu}$ sont déterminés par l'un des schémas convectifs de l'Annexe C.

◇ Equation de convection pour la quantité de mouvement

Le transport de la quantité de mouvement est calculé à partir des incréments de masse liés au déplacement de chaque face de la cellule de quantité de mouvement.

Remarque:

Vu que le code KIVA-II ne calcule pas les positions des sommets de la cellule de quantité de mouvement, le déplacement d'une face α de cette cellule est lié à celui des faces de la cellule régulière situées de part et d'autre de la face α (voir figure III.6).

L'incrément de masse lié au déplacement d'une face α de la cellule de quantité de mouvement est donné par:

$$(\delta M')_{\alpha}^{\nu-1} = \frac{1}{8} \left\{ \rho_{\circ}^{\nu-1} \delta v_{\circ} - \rho_i^{\nu-1} \delta v_i \right\} \quad [\text{III.7.21}]$$

Les indices \circ et i font référence aux faces de la cellule régulière situées de part et d'autre de la face α .

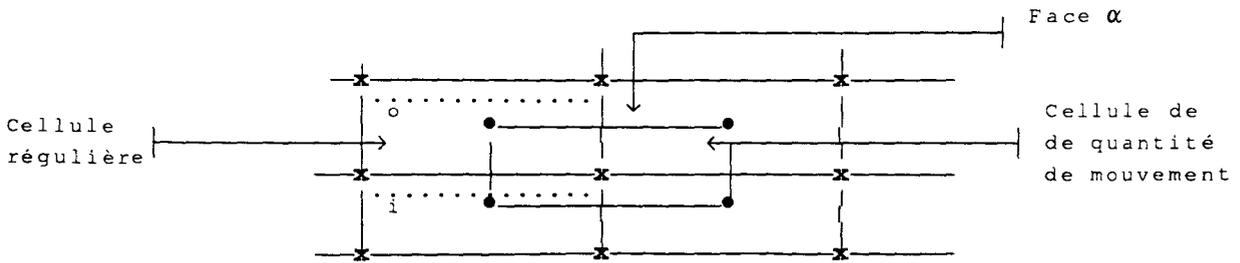


Figure III.6: Déplacement d'une face de la cellule de quantité de mouvement: projection sur le plan (i, k)

Le calcul convectif de la masse totale de la cellule de quantité de mouvement est obtenue par sommation des incréments sur toutes les faces de la cellule.

$$(M')_{i,j,k}^{\nu} = (M')_{i,j,k}^{\nu-1} + \sum_{\alpha} (\delta M)_{\alpha}^{\nu-1} \quad \text{[III.7.22]}$$

En réalité les incréments de masse $\delta M'_{\alpha}$ correspondent aux vingt quatre faces de la cellule de quantité de mouvement. Ils sont additionnés par groupe de quatre pour obtenir le flux de masse $(\delta M'_{\beta})^C$ à travers les six faces de la cellule de quantité de mouvement.

Le flux de la quantité de mouvement est alors calculé par:

$$(M')_{i,j,k}^{\nu} u_{i,j,k}^{\nu} = (M')_{i,j,k}^{\nu-1} u_{i,j,k}^{\nu-1} + \sum_{\alpha} (\delta M'_{\beta})^C u_{\beta}^{\nu-1} \quad \text{[III.7.23]}$$

Les valeurs de $u_{\beta}^{\nu-1}$ sont évaluées par l'un des schémas convectifs exposés en Annexe C.

III.8: Résolution des équations couplées de la phase B

Le choix d'une écriture implicite à la phase B nécessite la résolution d'un système d'équations couplées (vitesse-pression).

Dans le code de calcul KIVA-II, le calcul implicite de la phase B, est fait à l'aide d'une méthode itérative de type "prédicteur-correcteur" /9/,

avec un traitement individuel des équations en utilisant la méthode des résidus conjugués /12/.

Le principe de la méthode "prédicteur-correcteur" est le suivant: Après le choix d'une valeur 'prédicteur' de la pression p^p , cette valeur est fixée et on résout les équations pour les autres quantités, le champ de vitesse et les termes de diffusion étant implicite.

Dans une deuxième étape, on fixe les valeurs du champ de vitesse et des termes de diffusion obtenus dans la première étape et on résout les équations pour le terme 'correcteur' de la pression p^c en implicite.

Dans le code KIVA-II, les équations résolues pendant la deuxième étape sont: l'équation pour les vitesses aux interfaces, l'équation des variations de volumes de la phase Lagrangienne et une forme linéarisée de l'équation d'état.

Après la deuxième étape, les valeurs 'prédicteur' et 'correcteur' de la pression sont comparées. Le calcul s'arrête lorsque le test de convergence est atteint. Si non la valeur 'correcteur' de la pression devient valeur 'prédicteur' et le calcul reprend à la première étape.

L'algorithme de résolution des équations couplées de la phase B est le suivant:

0) Initialisation:

La valeur 'prédicteur' de la pression est initialisée par extrapolation linéaire en utilisant les valeurs de la pression aux deux cycles précédents:

$$p_{i,j,k}^p = (p_{i,j,k}^B)^n + \frac{\Delta t^n}{\Delta t^{n-1}} \left[(p_{i,j,k}^B)^{n-1} - (p_{i,j,k}^B)^{n-2} \right] \quad [\text{III.8.1}]$$

Cette extrapolation permet une meilleure réduction du nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence.

1) Première étape: Détermination des termes 'prédicteurs'

La détermination des termes 'prédicteurs' se fait par la résolution séquentielle des équations suivantes:

a: Détermination de u^p

La première équation résolue dans l'étape 1 est l'équation de la quantité de mouvement; avec $p^B = p^p$ et $u^B = u^p$:

$$\frac{(M')_{i,j,k}^B u_{i,j,k}^p - (M')_{i,j,k}^A u_{i,j,k}^A}{\Delta t} = - \sum_{\alpha} \left[\phi_p p^p + (1-\phi_p) p^n \right]_{\alpha} \cdot (A')_{\alpha}^n + \sum_{\alpha} \left[\phi_D \tau(u^p) + (1-\phi_D) \tau(u^A) \right]_{\alpha} \cdot (A')_{\alpha}^n \quad [\text{III.8.2}]$$

Cette équation est résolue en u^p .

b: Détermination de T^p

Une équation pour le champ 'prédicteur' de la température est obtenue en combinant les équations [III.7.2 ; III.7.14 ; III.7.15 ; III.7.16]. L'indice B est remplacé par l'indice p.

$$T_{i,j,k}^p = \left\{ T_{i,j,k}^A + \frac{p_{i,j,k}^n + p_{i,j,k}^p}{2 (Cv)_{i,j,k}} \frac{v_{i,j,k}^n}{M_{i,j,k}^B} + \frac{\Delta t}{M_{i,j,k}^B (Cv)_{i,j,k}^t} \left[\sum_{\alpha} k_{\alpha}^n \nabla [\phi_D T^p + (1-\phi_D) T^t]_{\alpha} \cdot A_{\alpha}^n + [\phi_D \tau(u^p) : \nabla u^p + (1-\phi_D) \tau(u^n) : \nabla u^n]_{i,j,k} \right] \right\} / \left\{ 1 + \frac{p_{i,j,k}^n + p_{i,j,k}^p}{2 (Cv)_{i,j,k}^t} \frac{r}{P_{i,j,k}^p} \right\}$$

[III.8.3]

c: Détermination de v^p

la valeur de $T_{i,j,k}^p$ ainsi obtenue est utilisée dans l'équation d'état pour le calcul de la valeur 'prédicteur' du volume:

$$v_{i,j,k}^p = \frac{M_{i,j,k}^B}{p_{i,j,k}^p} r T_{i,j,k}^p \quad [\text{III.8.4}]$$

2) Deuxième étape: Détermination de la valeur 'correcteur' de la pression.

La détermination de la valeur 'correcteur' de la pression met en jeu simultanément l'équation des vitesses aux interfaces, l'équation des échanges de volume et une forme linéarisée de l'équation d'état.

La forme linéarisée de l'équation d'état peut être obtenue en combinant les équations [III.8.3] dans lesquelles les termes de diffusion ont été négligés et l'équation [III.8.4]. En linéarisant autour de p^p et v^p on obtient:

$$v_{i,j,k}^c = v_{i,j,k}^p - \frac{1}{\gamma^t} \frac{v_{i,j,k}^p}{p_{i,j,k}^p} (p_{i,j,k}^c - p_{i,j,k}^p) \quad [\text{III.8.5}]$$

avec:

$$\frac{1}{\gamma^t} = \frac{2 (Cv)_{i,j,k}^t + r (1 - v_{i,j,k}^n / v_{i,j,k}^p)}{2 (Cv)_{i,j,k}^t + r (p_{i,j,k}^n + p_{i,j,k}^p) / p_{i,j,k}^p} \quad [\text{III.8.6}]$$

les valeurs correcteurs sont donc calculées en résolvant simultanément les équations suivantes que nous récapitulons:

$$(M'')_{\alpha}^B \frac{(uA)_{\alpha}^B - (uA)_{\alpha}^t}{\Delta t} = - \sum_{\gamma} \left[\phi_p p^C + (1-\phi_p) p^n \right]_{\gamma} \cdot (A'')_{\gamma}^n \cdot A_{\alpha} \\ + (M'')_{\alpha}^B \frac{A_{\alpha}^t - A_{\alpha}^n}{\Delta t} \cdot \frac{u_a^n + u_b^n + u_c^n + u_d^n}{4}$$

$$v_{i,j,k}^C = v_{i,j,k}^n + \Delta t \sum_{\alpha} (uA)_{\alpha}^B$$

$$v_{i,j,k}^C = v_{i,j,k}^p - \frac{1}{\gamma^t} \frac{v_{i,j,k}^p}{P_{i,j,k}^p} (p_{i,j,k}^C - p_{i,j,k}^p)$$

Ces équations couplées sont résolues à l'aide de l'algorithme de gradients conjugués.

Une fois calculé, le champ de pression 'correcteur' est comparé au champ 'prédicteur' pour vérifier si le test de convergence est atteint. Si ce n'est pas le cas la valeur de la pression 'correcteur' est affectée à la pression 'prédicteur' et le calcul reprend à l'étape 1.

Lorsque le test de convergence est atteint, $p_{i,j,k}^C$ est alors utilisée dans l'équation de la quantité de mouvement [III.7.14] pour le calcul de $u_{i,j,k}^B$ avec toutefois l'utilisation de la valeur la plus récente de $u_{i,j,k}$, soit: $u_{i,j,k}^p$ pour l'évaluation du tenseur des contraintes.

$I_{i,j,k}^B$ est calculée à partir de l'équation d'énergie [III.7.14] dans laquelle les valeurs les plus récentes de la vitesse et de la température, $u_{i,j,k}^p$ et $T_{i,j,k}^p$, sont utilisées pour évaluer les termes de diffusion et de la dissipation.

Et finalement, les nouvelles positions des sommets des mailles sont données par:

$$x_{i,j,k}^B = x_{i,j,k}^n + \Delta t u_{i,j,k}^B \quad [\text{III.8.7}]$$

III.9 Critère de stabilité

L'adoption d'un schéma explicite dans le traitement des équations de la phase C pour les termes convectifs nous impose une condition de stabilité sur le pas de temps, c'est le critère de Courant Friedrich lewy /40/. Soit pour un maillage rectangulaire:

$$\Delta t_s \leq \min \left\{ \frac{\Delta x}{|u|}, \frac{\Delta y}{|v|}, \frac{\Delta z}{|w|} \right\} \quad [\text{III.9.1}]$$

où (u, v, w) sont les composantes du vecteur vitesse.

Cette contrainte sur le pas de temps empêche le flux de volume d'être inférieur au volume lui même dans toutes les directions.

Dans le code KIVA-II, la relation [III.9.1] est remplacée par la relation suivante:

$$\Delta t_s^{\nu} \leq \Delta t_s^{\nu-1} \min \frac{v_{i,j,k}}{|\delta v_{\alpha}|} \quad [\text{III.9.2}]$$

où:

v_{ijk} est le volume total de la cellule (i,j,k) , δv_{α} est le débordement du volume dû au déplacement de la face α , dont il a été question dans la section [III.7.b].

Chapitre IV:

Discussion et modifications apportées au code Kiva-II

IV.1: Introduction

Comme nous l'avons déjà signalé au chapitre III, KIVA-II est un programme de calcul destiné à la simulation d'écoulement dans une chambre à combustion interne. Cependant la plupart des techniques numériques auxquelles il fait appel ne sont pas spécifiques, et peuvent être adaptées à d'autres applications.

Nous nous proposons dans ce chapitre de présenter une discussion des principales limitations de ce code, et des modifications dont il a fait l'objet, afin d'accroître ses capacités à traiter les écoulements peu compressibles, et pour l'adapter aux différents cas tests que nous voulons réaliser.

Les cas tests auxquels nous nous sommes intéressés sont les suivants:

- Cas d'un écoulement subsonique dans un canal plan ou axisymétrique.
- Cas d'un écoulement subsonique dans un canal présentant un élargissement brusque : Marche descendante.

Malgré leur simplicité, ces configurations constituent des cas limites pour le code KIVA-II. Ceci est dû principalement au fait qu'elles mettent en jeu des écoulements à faible nombre de Mach, et dans lesquels le gradient de pression joue un rôle important.

IV.2: Maillage et configurations géométriques

Dans un premier temps, nous avons commencé par la création d'un module de génération de maillage, adapté aux types d'écoulements que nous voulons traiter.

Le module que nous avons inséré dans le code permet de construire des maillages différents, du plus grossier au plus fin, dans le cas où les mailles sont orthogonales ou non orthogonales. La variation des paramètres de raffinement et d'orthogonalité nous permet d'étudier l'influence du maillage sur les résultats. Des exemples des maillages utilisés sont présentés dans les figures (V.2), (V.3) et (V.10).

IV.3: Traitement des équations de la phase B: Adaptation aux écoulements peu compressibles

Le choix de la méthode implicite "I.C.E." /11/ dans le code KIVA-II pour la phase B, est justifié en terme de stabilité et de performances /15/. Malheureusement, pour les écoulements à faible nombre de Mach, les procédures itératives auxquelles elle fait appel présentent quelques défaillances liées à leur vitesse de convergence.

Dans le code KIVA-II cette difficulté est en partie levée par l'utilisation d'une procédure appelée: P.G.S "Pressure gradient scaling". Cette procédure introduite par Ramshaw et O'Rourke /14/ s'apparente à la "transformation α " développée par O'Rourke et Bracco /16/. Elle consiste à augmenter artificiellement le nombre de Mach en introduisant un facteur d'échelle α pour augmenter l'efficacité du calcul quand ce dernier est petit.

Nous allons maintenant exposer le principe de cette procédure, et dire pourquoi il n'est pas souhaitable d'y avoir recours pour le type d'écoulement que nous voulons traiter.

Le principe de cette procédure est de décomposer le terme de pression en un terme uniforme en espace: $\bar{p}(t)$, et un terme fluctuant variable en espace et en temps: $\Pi(\mathbf{x},t)$. L'analyse adimensionnelle menée dans la section 2 du chapitre II, montre qu'il est possible d'envisager une telle décomposition pour les écoulements à faible nombre de Mach.

$$p(\mathbf{x},t) = \bar{p}(t) + \Pi(\mathbf{x},t)$$

[IV.3.1]

le système à résoudre devient alors

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad [\text{IV.3.2}]$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla \Pi + \mathbf{S} \quad [\text{IV.3.3}]$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -(\bar{p} + \Pi) \nabla \cdot \mathbf{u} + Q \quad [\text{IV.3.4}]$$

$$\bar{p} + \Pi = f(\rho, E) \quad [\text{IV.3.5}]$$

où

$\mathbf{S} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$; $Q = \nabla \cdot (k \nabla T) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}$; $f(\rho, E)$ est la relation d'état.

Pour introduire la procédure P.G.S, les auteurs utilisent un champ de pression, $\hat{p}(\mathbf{x}, t)$, dont la partie fluctuante est α^2 fois plus grande que celle du champ initial $p(\mathbf{x}, t)$; ceci repose sur le simple fait que si Π est négligeable devant \bar{p} ; $\alpha^2 \Pi$ l'est aussi; à condition que la valeur de α soit compatible.

Nous avons donc:

$$\hat{p}(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(t) + \alpha^2 \Pi(\mathbf{x}, t) \quad [\text{IV.3.6}]$$

avec:

$$\nabla \hat{p}(\mathbf{x}, t) = \alpha^2 \nabla \Pi(\mathbf{x}, t) \quad [\text{IV.3.7}]$$

Cette hypothèse permet de remplacer le terme $\bar{p}(t) + \Pi(\mathbf{x}, t)$ par $\bar{p}(t) + \alpha^2 \Pi(\mathbf{x}, t)$, dans les équations [IV.3.4] et [IV.3.5].

les équations [IV.3.2]-[IV.3.5] réécrites avec le nouveau champ de pression $\hat{p}(\mathbf{x}, t)$, deviennent:

$$\frac{D\rho}{Dt} = - \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad [\text{IV.3.7}]$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = - \frac{1}{\alpha^2} \nabla \hat{p} + \mathbf{S} \quad [\text{IV.3.8}]$$

$$\rho \frac{DE}{Dt} = - \hat{p} \nabla \cdot \mathbf{u} + Q \quad [\text{IV.3.9}]$$

$$\hat{p} = f(\rho, E) \quad [\text{IV.3.10}]$$

Il est clair que le système d'équations ainsi obtenu n'a plus la même forme que le système du départ, car même si le nouveau champ de pression \hat{p} joue le même rôle que celui du champ initial p , le gradient de pression se trouve divisé par le facteur $1/\alpha^2$.

Le paramètre α est proche de l'unité et uniforme en espace, il est calculé de telle façon que les hétérogénéités de la pression restent négligeables devant la pression moyenne. La façon dont il est calculé dans le code KIVA-II est exposée en annexe D.

L'utilité de cette procédure est de réduire d'un facteur α la célérité du son en agissant directement sur le gradient de pression ce qui a pour effet de réduire le temps caractéristique de la propagation des ondes acoustiques.

Cette procédure permet en effet d'avoir une convergence rapide du calcul itératif, en écrasant toutes les hétérogénéités de la pression. Mais elle n'est valable que lorsque ces hétérogénéités ne présentent pas d'intérêt. C'est le cas des écoulements dans une cellule fermée où règne une pression presque uniforme et où les perturbations sont d'ordre acoustique. Lorsqu'il s'agit de calculer des écoulements dans des domaines avec des frontières ouvertes (entrée, sortie). Cette procédure conduit à un gradient de pression biaisé, car elle ne fait pas la distinction entre les hétérogénéités de la pression d'ordre acoustique, et les hétérogénéités de pression importantes: celles qui véhiculent le mouvement des particules fluides.

Pour les écoulements qui nous intéressent il n'est donc pas souhaitable d'avoir recours à cette procédure car elle donne un gradient de pression α^2 fois plus grand que celui qu'il faut en réalité pour avoir le même écoulement.

Ceci est très néfaste lorsqu'il s'agit de calculer des caractéristiques directement liées au gradient de pression comme le coefficient de perte de charge d'une installation.

Pour éviter d'avoir recours à cette procédure tout en ayant une vitesse de convergence acceptable quand le nombre de Mach est petit, nous avons utilisé l'hypothèse de faible nombre de Mach au niveau du développement asymptotique mené dans la section [I.2]. Ceci consiste à introduire les simplifications dans le système de Navier-Stokes, pour éliminer les perturbations d'ordre acoustique et accélérer la convergence du calcul quand le nombre de Mach est petit. Ces simplifications consistent à :

- Décomposer le terme pression en terme stationnaire et terme fluctuant;

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(t) + \Pi(\mathbf{x}, t).$$

- négliger tous les termes proportionnels à M^2 dans les équations du mouvement adimensionnelles. Cela concerne le terme d'échauffement visqueux et la contribution de la fluctuation de pression Π dans l'équation de l'énergie.

Cette décomposition permet de découpler le terme de pression de l'équation de la quantité de mouvement qui a un rôle dynamique, lié aux fluctuations de vitesse, et celui de l'équation d'énergie où il joue un rôle thermodynamique.

L'intérêt de ce découplage est de s'affranchir des perturbations de pression d'ordre acoustique sans modifier le gradient de pression.

Compte tenu de ces considérations les équations de la phase B que nous avons modifié sont les suivantes:

l'équation pour le champ 'prédicteur' de la température, [III.8.3], dans laquelle nous avons supprimé:

- Le terme d'échauffement visqueux: $\tau(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{u}$.
- La contribution de la fluctuation de la pression $\Pi(\mathbf{x}, t)$.

Les termes de pression dans cette équation sont remplacés par la pression moyenne.

$$\bar{p} = \frac{\sum_{ijk} p_{ijk} V_{ijk}}{\sum_{ijk} V_{ijk}}$$

Ce qui donne pour le champ de température à l'étape 'prédicteur', l'expression suivante:

$$T_{i,j,k}^p = \left\{ T_{i,j,k}^A + \frac{\bar{p}^n + \bar{p}^p}{2 (C_v)_{i,j,k}} \frac{v_{i,j,k}^n}{M_{i,j,k}^B} + \frac{\Delta t}{M_{i,j,k}^B (C_v)_{i,j,k}^t} \left[\sum_{\alpha} k_{\alpha}^n \nabla [\phi_D T^p + (1-\phi_D) T^t]_{\alpha} \cdot \mathbf{A}_{\alpha}^n \right] \right. \\ \left. / \left\{ 1 + \frac{\bar{p}^n + \bar{p}^p}{2 (C_v)_{i,j,k}^t \bar{p}^p} r \right\} \right.$$

[IV.3.10]

L'équation d'état, [III.8.4], qui donne la valeur 'prédicteur' du volume à partir de la valeur 'prédicteur' de la température a été aussi modifiée, dans la mesure où c'est la valeur de la pression moyenne qui a été utilisée:

$$V_{i,j,k}^p = \frac{M_{i,j,k}^B}{\bar{p}^p} r T_{i,j,k}^p$$

[IV.3.11]

La troisième équation concernée par nos modifications est l'équation d'état pour l'étape 'correcteur'. En effet, l'échauffement visqueux étant négligeable, l'écoulement peut être considéré comme isentropique, l'équation [III.8.5] est remplacée par une équation plus simple, basée sur l'hypothèse physique d'une transformation isentropique:

$$(p V)^{\gamma} = \text{constante}$$

Ce qui donne:

$$V_{i,j,k}^C = V_{i,j,k}^P - \frac{1}{\gamma} \frac{V_{i,j,k}^P}{P_{i,j,k}^P} (P_{i,j}^C - P_{i,j,k}^P) \quad [\text{IV.3.12}]$$

où

$$\gamma = C_p / C_v$$

La structure générale de l'algorithme est préservée, à chaque étape le champ pression 'correcteur' ainsi obtenu est comparé au champ 'prédicteur' pour vérifier si le test de convergence est atteint. Si ce n'est pas le cas la valeur de la pression 'correcteur' est affectée à la pression 'prédicteur' et le calcul reprend à la première étape.

Lorsque le test de convergence est atteint, le calcul reprend de la même façon que dans la version initiale du code.

L'intérêt de ces modifications est d'accroître la vitesse de convergence des procédures itératives utilisées dans le code KIVA-II sans modifier le gradient de pression.

IV.4: Traitement des conditions aux limites

La prise en compte des conditions aux limites nécessite un traitement particulier des équations, ce qui est effectué après avoir testé des indicateurs affectés "flag" à chaque noeud et à chaque interface selon le type de limite dont ils font partie.

Trois types de conditions aux limites sont à considérer, selon qu'il s'agit d'une paroi solide, d'une frontière libre pour l'entrée du fluide, ou d'une frontière libre pour la sortie du fluide.

a- Conditions aux limites sur une paroi solide:

adhérence: Toutes les composantes du vecteur vitesse sont nulles à la limite si les parois sont fixes.

- Les flux de toutes les quantités scalaires sont nuls à la limite, y compris le flux de température dans le cas adiabatique.

b) Conditions aux limites sur une entrée:

à l'entrée on impose les composantes et la direction du vecteur vitesse, et la valeur de la masse volumique, ce qui revient à imposer le débit. La valeur de la température est également imposée.

c) Conditions aux limites sur une sortie:

à la sortie c'est seulement la valeur de la pression statique qui est imposée.

Chapitre V:

Tests de validation en laminaire

V.1: Introduction

Nous avons, dans un premier temps, effectué tous nos tests de validation en laminaire. La principale raison de ce choix est d'éviter que des erreurs éventuelles dues aux différents schémas numériques utilisés, ne soient attribuées aux modèles de la turbulence ou masquées par une viscosité turbulente trop forte.

V.2: Ecoulement visqueux dans un canal

La première configuration géométrique testée est celle d'un canal de profondeur infinie. L'analyse de ce type l'écoulement est fondamentale en mécanique des fluides et la solution analytique exacte est disponible dans le cas incompressible (solution de POISEUILLE) /39/.

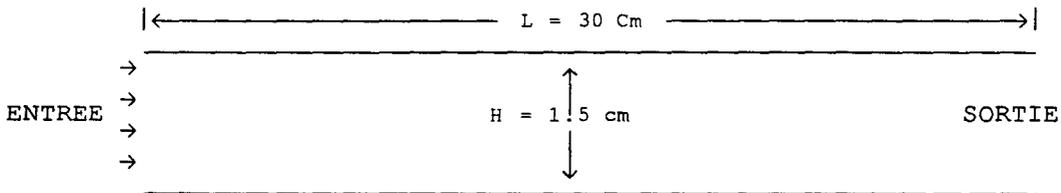
On peut supposer que la solution pour un fluide peu compressible diffère peu de celle d'un fluide incompressible pour ce type de configuration, ce qui nous fournit une solution de référence pour comparer nos résultats.

Les tests de validation portent sur les capacités du code:

- à atteindre un état stationnaire (régime établi).
- à donner une bonne conservation de débits (vérification de l'équation de continuité).
- à donner un profil de vitesse correct (vérification de l'équation de la quantité de mouvement).
- à donner une bonne répartition de la pression (vérification de la résolution du couplage vitesse-pression).

a- Principales caractéristiques

- Ecoulement visqueux dans un canal plan
- Laminaire
- Régime établi
- Pression de référence: 10e+5 Pascal
- Masse volumique de référence 1.129 kg/m³
- Température de référence 300 K
- Nombre de Reynolds 50 100 150 200

b- Géométrie

Configuration géométrique du canal

c- Maillage:

Les calculs ont été effectués avec plusieurs types de maillages, du plus grossier au plus fin, et ceci afin d'évaluer l'influence du maillage sur les résultats.

Le raffinement de maillage est obtenu à l'aide de fonction exponentielle:
 $f(x) = \exp[a * (1 - x^2)]$.

où a est le coefficient du raffinement du maillage, (a ≈ 4).

Trois exemples de maillages sont présentés respectivement sur les figures (V.1), (V.2) et (V.3).

- M1 est un maillage régulier de 240 noeuds.
- M2 est un maillage raffiné aux voisinages des parois et comporte 592 noeuds.
- M3 est un maillage raffiné dans les deux directions et comporte 1312 noeuds.

d- Conditions aux limites:

- Parois solides: adhérence; ($u=v=0$)
- Entrée: profil de vitesse uniforme ou parabolique pour $u, v = 0$
- Sortie: pression constante

e- Résultats:

Le tableau ci-dessous fait la comparaison entre les résultats de calcul donnés par le maillage M1 de la figure (V.1), le maillage M2 de la figure (V.2), et le maillage M3 de la figure (V.3).

La comparaison porte sur la précision du profil de vitesse à la sortie et du gradient de pression, la solution de POISEUILLE servant comme référence. Les calculs ont été effectués sur l'ordinateur (I.B.M. 3090) du Centre Inter-Régional du Calcul Electronique à ORSAY.

Maillage	Conditions aux limites	Précision sur le gradient de pression	Précision sur le profil de vitesse	Temps de calcul
M1 231 points	Entrée: profil de vitesse Sortie: pression	10 %	6 %	70mn cpu
M2 594 points	Entrée: profil de vitesse Sortie: pression	5 %	3 %	130mn cpu
M3 1312 points	Entrée: profil de vitesse Sortie: pression	4.8 %	3 %	190mn cpu

Tableau comparatif des résultats de calcul des maillages M1, M2 et M3

Le tableau ci-dessus montre que la précision progresse sensiblement en fonction du raffinement du maillage jusqu'à une certaine limite où elle semble se stabiliser. L'écart qui subsiste alors est dû en partie aux termes de compressibilité qui subsistent dans les équations, alors que pour la solution de POISEUILLE le fluide est supposé incompressible.

Pour le reste des illustrations nous adopterons le maillage M2.

- Le profil de vitesse obtenu avec ce maillage est représenté sur la figure (V.4), pour un nombre de Reynolds de 150 et un nombre de Mach de 0.005. Le résultat est comparé à la solution de POISEUILLE
- La figure (V.5), montre l'évolution du profil de vitesse à partir d'un profil uniforme à l'entrée, et ceci après avoir atteint l'état stationnaire.
- La figure (V.6) montre l'évolution des isobares correspondant.
- La figure (V.7) montre les lignes de courant.
- La figure (V.8) montre l'évolution de la pression en fonction de la distance z sur l'axe du canal.
- La figure (V.15) donne la vitesse de convergence du calcul itératif pour un pas de temps donné.
- La figure (V.16) donne le signal temporel représentant la perturbation de la pression $[(p - \bar{p}) / \bar{p}]$ au point $(x = L/2, y = H/2)$. \bar{p} étant la pression obtenue en ce point à l'état stationnaire.

f- Discussion:

Le but des tests ci-dessus est de montrer que le code de calcul KIVA-II modifié est capable de prédire l'écoulement dans un canal. Ce problème simple et fondamental en mécanique des fluides est pourtant un test intéressant pour tout code de calcul destiné à la simulation des écoulements subsoniques à faible nombre de Mach. Cela tient à l'importance du gradient de pression dans ce cas et la connaissance d'une solution de référence qui est celle de POISEUILLE.

1- Les tests montrent la capacité du code à vérifier l'équation de la quantité de mouvement, ce qui se traduit par une erreur sur la conservation de débit, facile à évaluer. Dans notre cas cette erreur ne dépasse pas 0.5 pour cent. Ce résultat pour la conservation de la masse s'explique par le fait que pour résoudre les équations de Navier-Stokes on fait appel à la méthode des volumes finis réputée pour son caractère conservatif.

2- Ils montrent aussi la capacité du code à rendre compte des phénomènes diffusifs et ceci sans raffinement excessif au voisinage des parois, figure (V.5).

3- Ils montrent l'utilité des modifications introduites dans le code pour le rendre capable de résoudre le problème couplé vitesse pression même à faible nombre de Mach et sans altérer le gradient de pression par l'utilisation la procédure "P.G.S", figures (V.6) et (V.8).

4- Ils montrent enfin les performances de la version modifiée du code en ce qui concerne la convergence du calcul itératif et l'obtention de l'état stationnaire, figures (V.15) et (V.16).

V.3: Calcul d'écoulement derrière une marche bidimensionnelle

L'analyse de l'écoulement derrière une marche est un test important pour évaluer les performances d'un code de calcul. Ce type d'écoulement a fait l'objet de plusieurs investigations autant sur le plan numérique qu'expérimental /42/, /43/, /44/, /45/ et /46/. Ceci est dû essentiellement au fait que, même si la configuration géométrique est simple, l'écoulement met en jeu des caractéristiques très compliquées et ses applications industrielles sont nombreuses (diffuseur, brûleur, etc...).

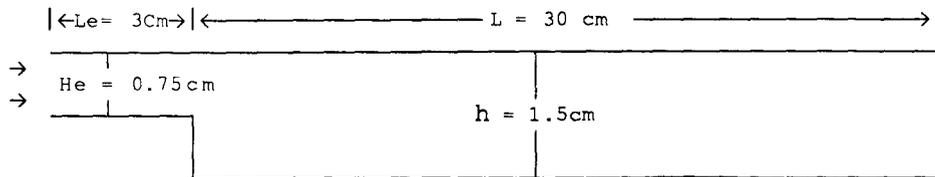
Les tests de validation portent sur la longueur de recollement, le champ de vitesse et le champ de pression.

a- Principales caractéristiques:

- Ecoulement visqueux derrière une marche
- Laminaire
- Régime établi
- Pression de référence: 10e+5 Pascal
- Masse volumique de référence 1.129 kg/m³
- Température de référence 300 K
- Nombre de Reynolds basé sur la hauteur de la marche:

$$R_h = \frac{U H}{\nu} = \quad 50 \quad 100 \quad 150 \quad 200$$

b- Géométrie



configuration géométrique de la marche

c- Maillage

Pour ce cas de figure, nous avons aussi effectué le calcul pour plusieurs types de maillages. La précision varie bien sûr en fonction de la finesse du maillage, mais reste néanmoins acceptable comme dans le cas du canal plan.

Deux types de maillage ont été utilisés:

- Le maillage M4, figure (V.9), est constitué de 740 cellules toutes orthogonales.
- Le maillage M5, est constitué de 1800. Le raffinement au voisinage de la marche est obtenu à l'aide de cellules non orthogonales. Un agrandissement de la partie non orthogonale de ce maillage est représentée sur la figure (V.10).

d- Conditions aux limites:

- Parois solides: adhérence; ($u=v=0$)
- Entrée: profil de vitesse parabolique pour $u, v = 0$.
- Sortie: pression constante

e- Résultats:

Le tableau ci dessous illustre la comparaison entre les résultats concernant la longueur de recollement obtenus par la version modifiée du code KIVA-II, pour les deux types de maillage M4 et M5. L'erreur est calculée par rapport aux résultats expérimentaux de DENHAM /42/.

Nombre de Reynolds	Expérience	Maillage M4 Lr/H	Erreur	Maillage M5 Lr/H	Erreur
100	3.0	3.1	5.7'/%	3.3	11'/%
150	3.9	4.0	2.6'/%	4.3	7.5'/%
200	4.6	4.75	3.3'/%	5.1	11'/%

Le tableau ci-dessus montre que la non orthogonalité des cellules introduit des erreurs non négligeables sur les résultats obtenus par le maillage M5.

Seul le maillage M4 sera retenu pour les illustrations suivantes:

Nous présentons sur la figure (V.11) le champ de vitesse obtenu à l'état stationnaire après 1500 itérations sur le pas de temps, pour un nombre de Reynolds de 150. Le profil de vitesse obtenu à la sortie est redevenu parabolique.

Dans la figure (V.12) nous présentons le champ des isobares correspondant.

La figure (V.13) représente la répartition de la pression le long de l'axe z. La valeur de la pression en chaque point z est la moyenne de cette dernière sur toute la station z.

La figure (V.14) récapitule les résultats de plusieurs essais avec différents nombre de Reynolds. Elle porte sur l'évolution de la longueur de recollement pour les nombres de Reynolds suivants: 50-100-150-200-250.

f- discussion:

Les tests de validation concernant l'écoulement derrière une marche montrent que le code de calcul est capable de prédire ce type d'écoulement avec une assez bonne précision dans le cas d'un maillage orthogonal.

Le champ de pression correspondant semble correct et n'est pas beaucoup perturbé par les hétérogénéités d'ordre acoustique, ceci est dû essentiellement au découplage de l'équation de la quantité de mouvement et celle de l'énergie.

Comme dans le cas du canal la conservation du débit est assurée avec une bonne précision (moins de 1'/.).

Enfin la longueur de recollement prédite par le code corrobore les résultats expérimentaux. Par ailleurs celle-ci est obtenue avec une meilleure précision lorsque le maillage est orthogonal.

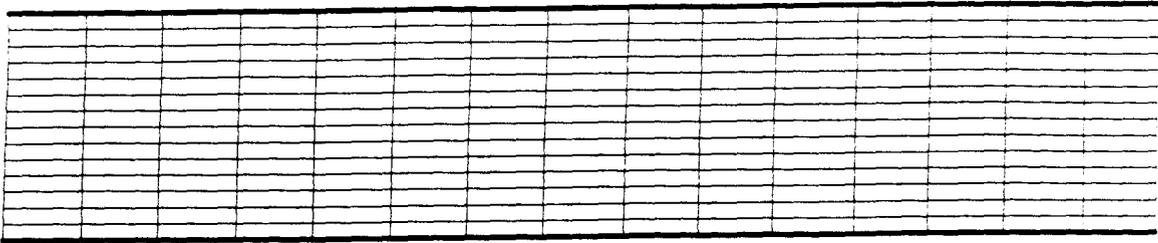


FIGURE V.1: MAILLAGE M1

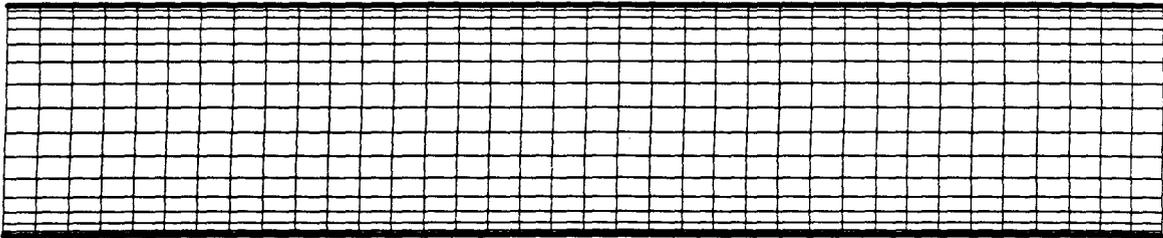


FIGURE V.2: MAILLAGE M2

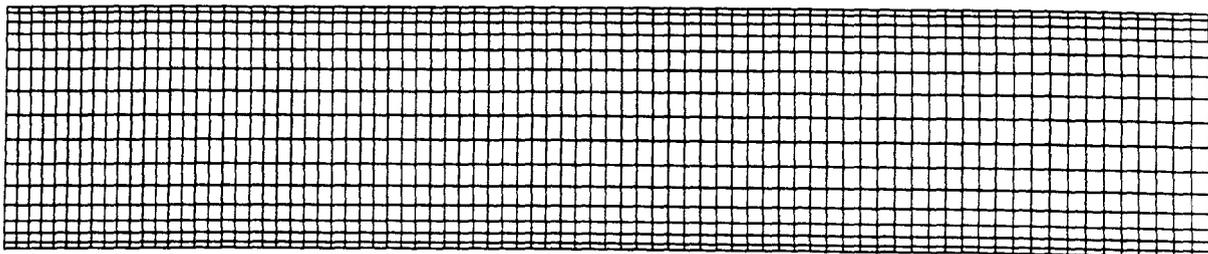


FIGURE V.3: MAILLAGE M3

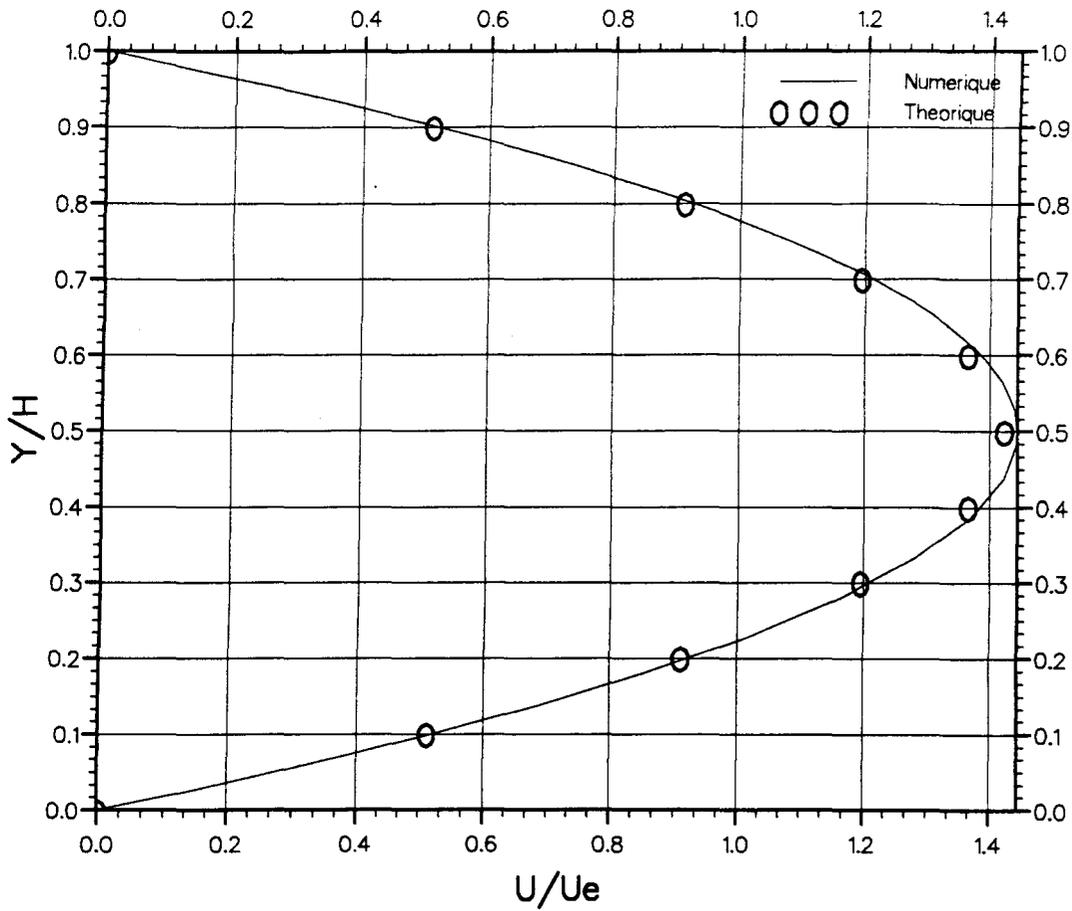


FIGURE V.4: PROFIL DE VITEESE A LA SORTIE
COMPARAISON AVEC LE RESULTAT THEORIQUE

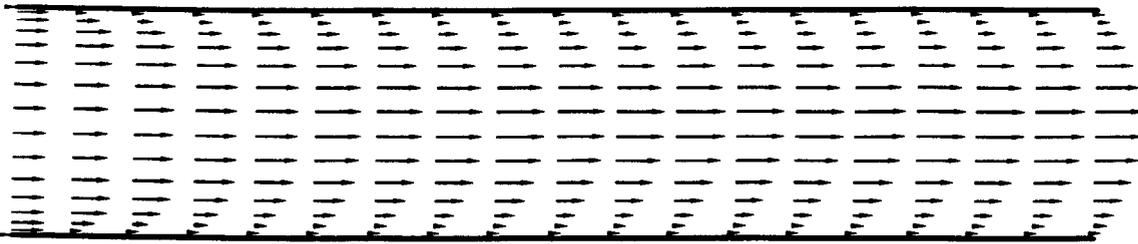


FIGURE V.5: EVOLUTION DU CHAMP DE VITESSE

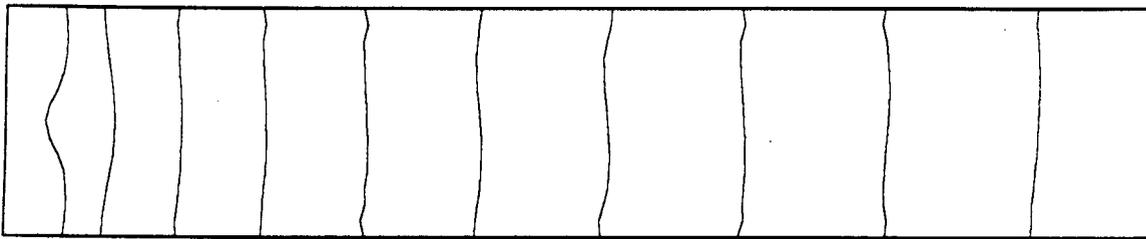


FIGURE V.6: CHAMP DE PRESSION

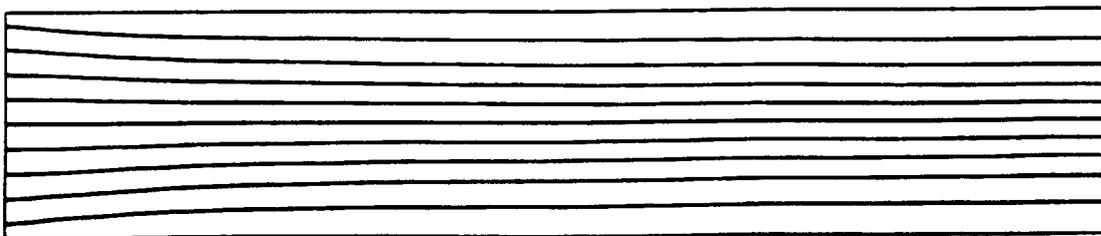


FIGURE V.7: LIGNES DE COURANT

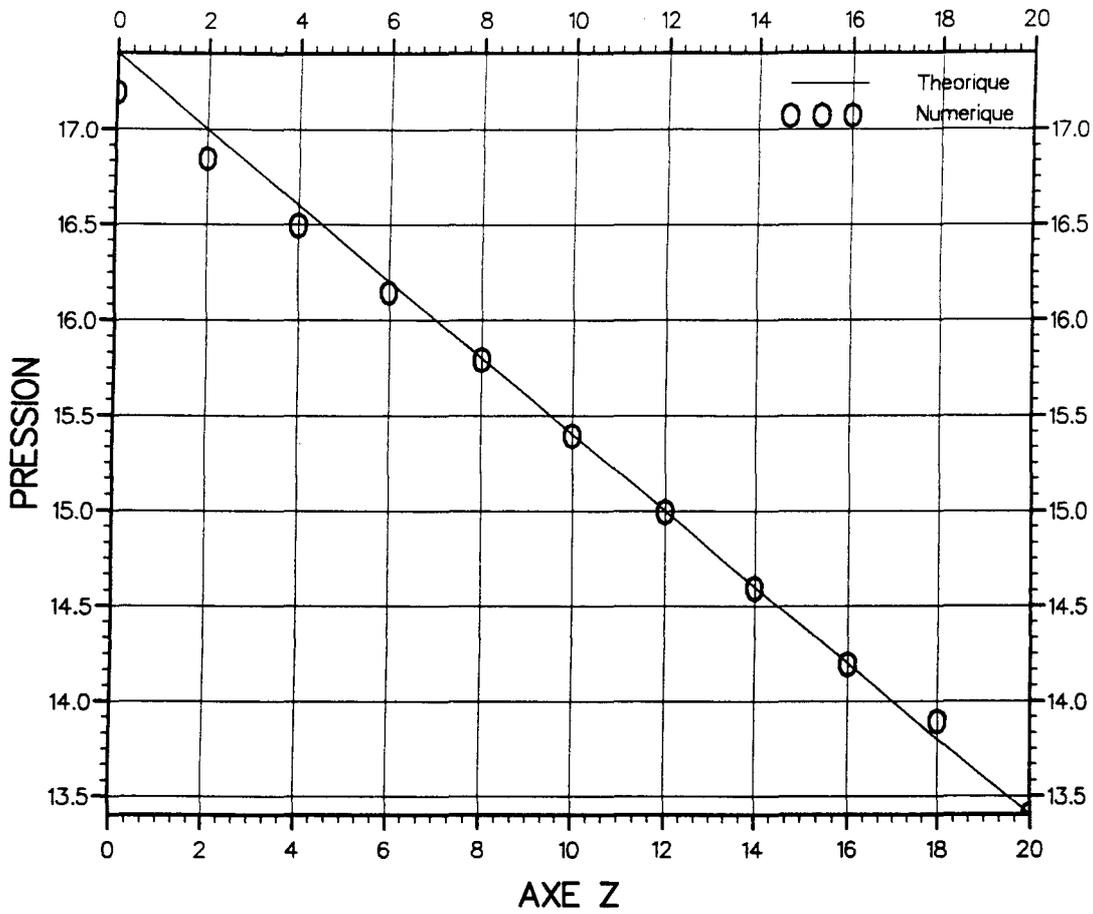


FIGURE V.8: PRESSION LE LONG DE L'AXE Z
COMPARAISON AVEC LE RESULTAT THEORIQUE

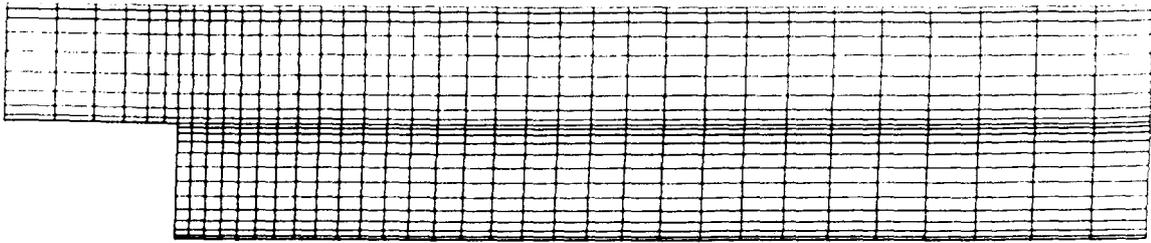


FIGURE V.9: MAILLAGE M4

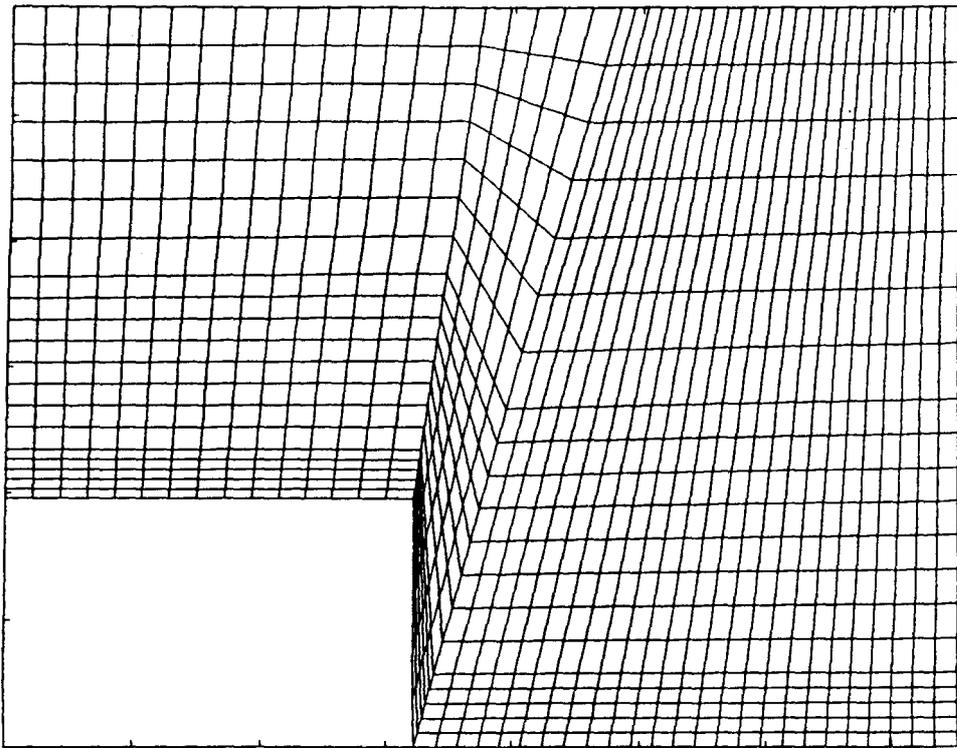


FIGURE V.10: MAILLAGE M5
PARTIE NON ORTHOGONALE

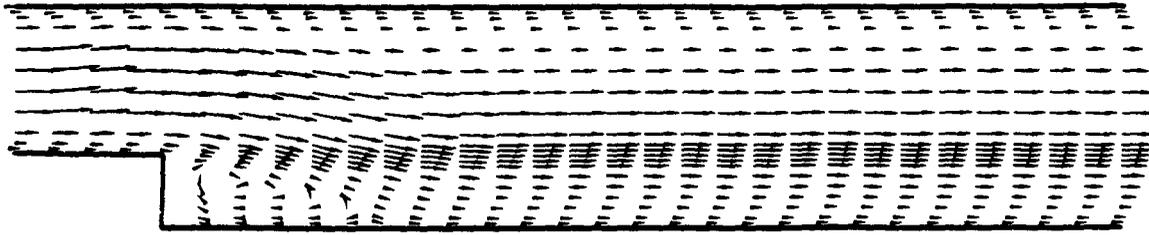


FIGURE V.11: CHAMP DE VITESSE

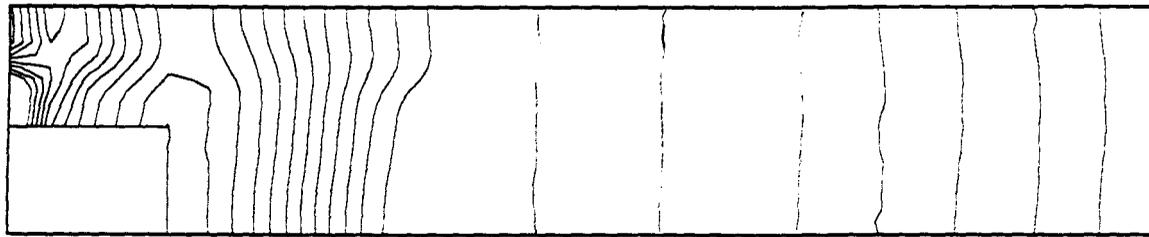


FIGURE V.12: CHAMP DE PRESSION

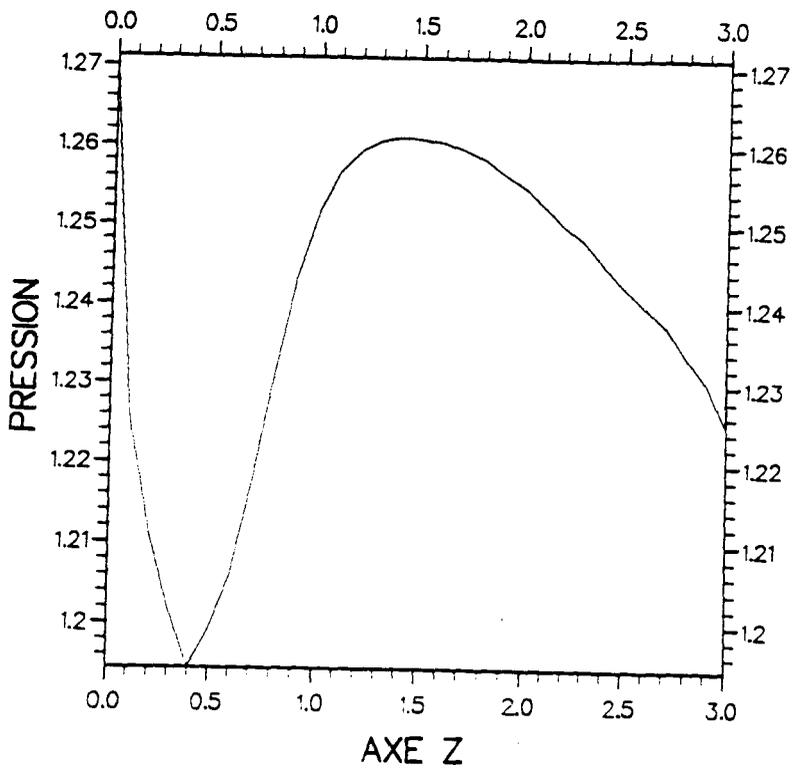


FIGURE V.13: PRESSION LE LONG DE L'AXE Z

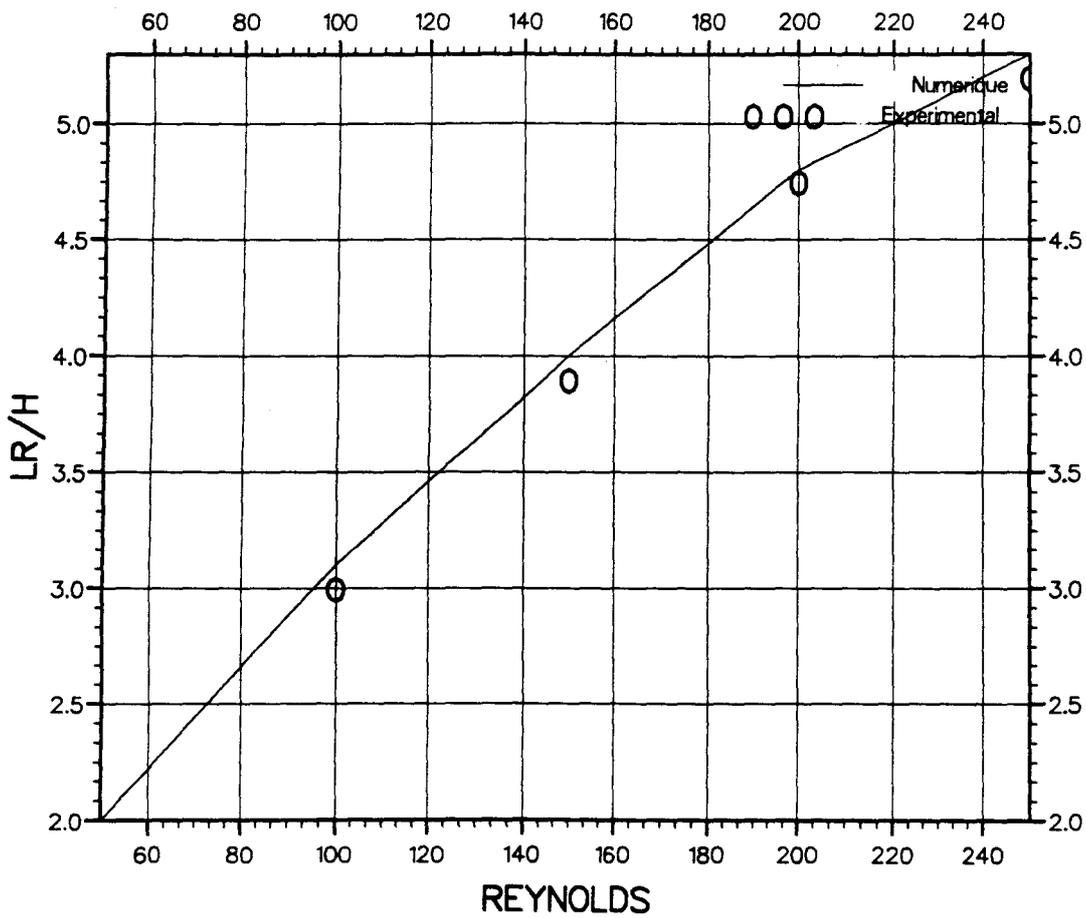
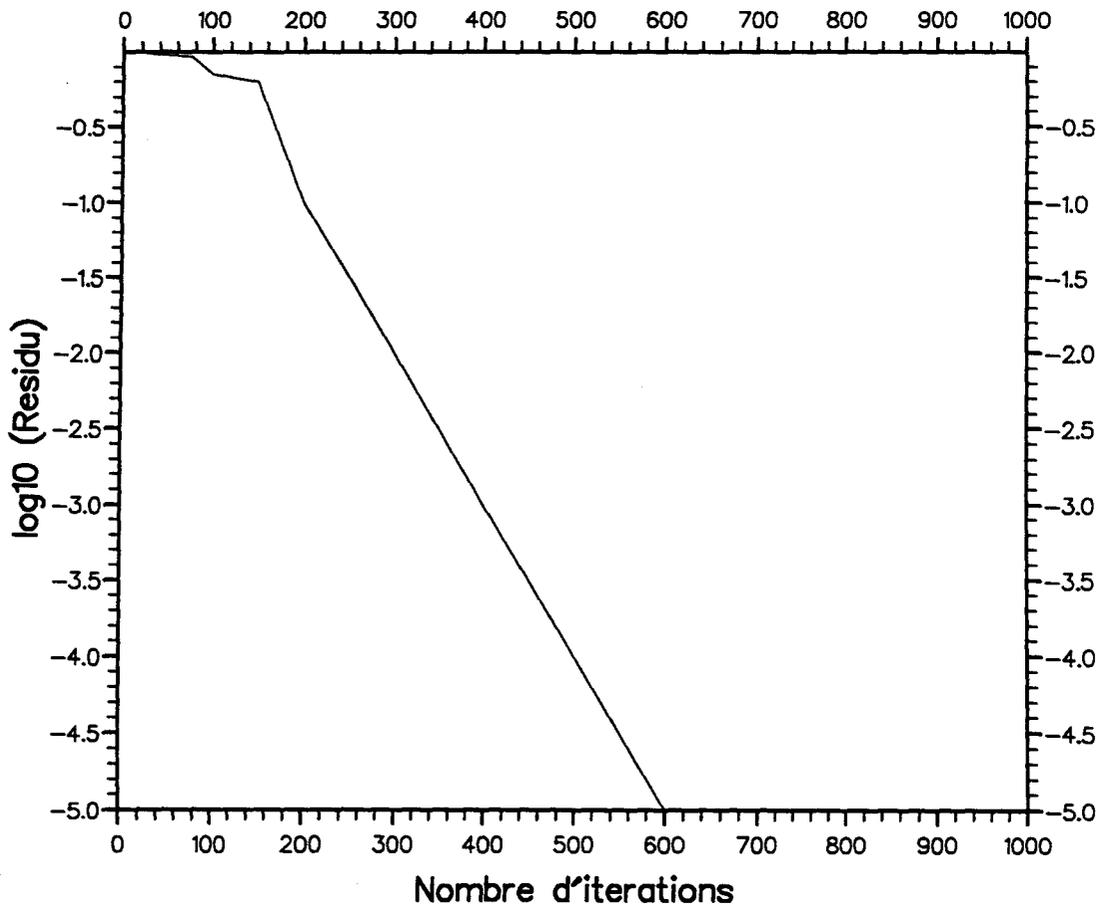


FIGURE V.14: EVOLUTION DE LA LONGUEUR DE RECIRCULATION



**Figure V.15: vitesse de convergence de l'algorithmé itératif
M= 0.005.**

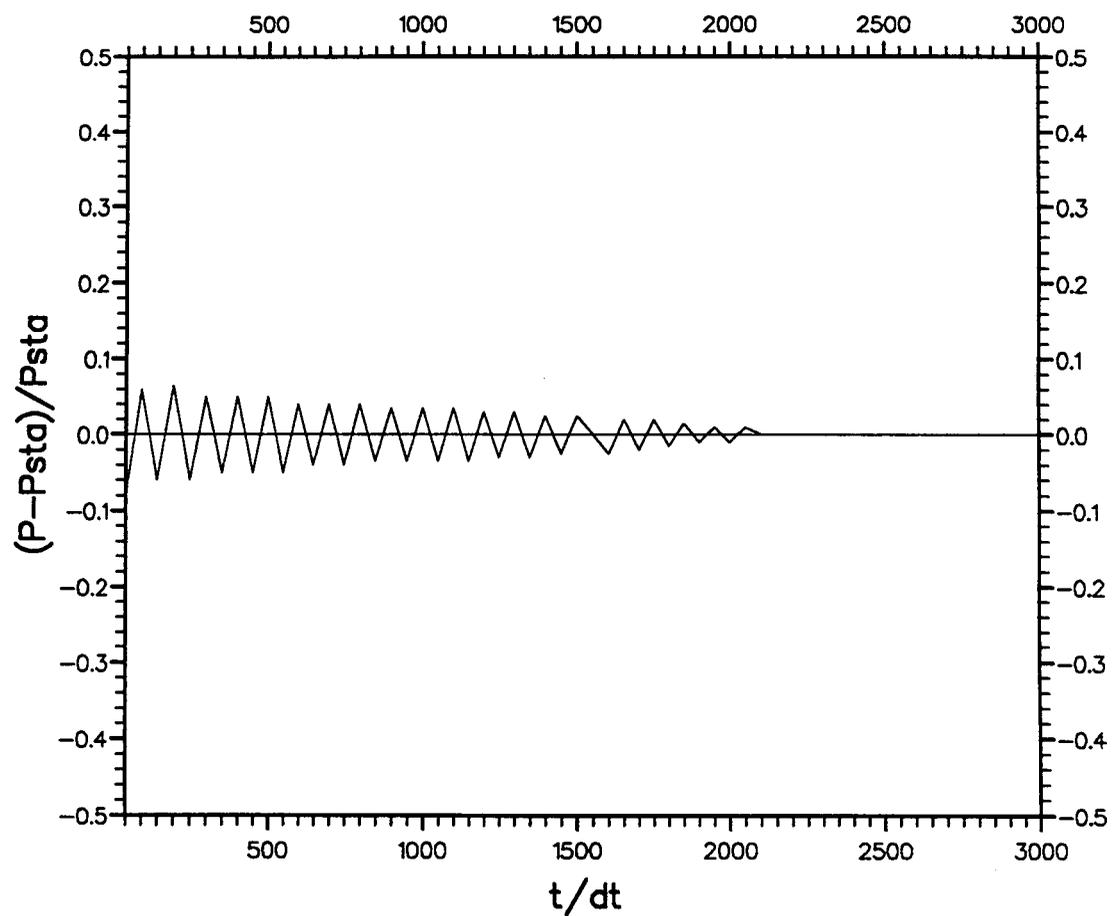


Figure V.16: signal temporel de la fluctuation de la pression en $(x = L/2, Y = H/2)$.

Chapitre VI:

Modélisation des écoulements turbulents

VI.1: Introduction

La plus part des écoulements rencontrés sont turbulents; d'où la nécessité de la prise en compte de ce phénomène.

C'est sans doute à cause des variations "irrégulières" des différentes grandeurs physiques mises en jeu, que l'une des premières caractéristiques attribuées à l'écoulement turbulent est son caractère "désordonné", ou "aléatoire".

D'un point de vue théorique, la turbulence est la conséquence directe des non-linéarités des modèles mathématiques associés aux phénomènes physiques mis en jeu. En effet la non-linéarité du système d'équations de Navier-Stokes se traduit par plusieurs conséquences, parmi elles:

- les échanges d'énergie entre des structures de différentes tailles;
- une grande sensibilité aux conditions aux limites et initiales.

La combinaison entre ces deux caractéristiques est à l'origine de la complexité des écoulements turbulents.

Cette complexité a poussé plusieurs auteurs à renoncer à suivre en détail le mouvement de toutes les structures présentes dans l'écoulement, et de faire un choix quant à la représentativité des grandeurs caractéristiques de l'écoulement turbulent.

REYNOLDS /18/ fût le premier à proposer de décomposer le mouvement instantané en composantes moyennes et fluctuantes. L'argument majeur en faveur de cette décomposition, est que bien souvent dans les problèmes pratiques posés pour l'ingénieur, la connaissance des grandeurs moyennes est largement suffisante. L'approche de Reynolds est alors un traitement statistique des équations avant toute résolution numérique. Ceci est complètement à l'opposé de la simulation directe de la turbulence où le traitement statistique n'intervient qu'à la fin, sur l'ensemble des réalisations numériques.

V.2: Traitement statistique de la turbulence

Dans le cadre du traitement statistique conventionnel, les grandeurs physiques sont décomposées en parties moyennes et parties fluctuantes. Deux types de moyennes sont alors considérés:

1) La moyenne temporelle classique définie par:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi', \quad [\text{VI.2.1}]$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_T \phi(t) dt; \quad \bar{\phi}' = 0. \quad [\text{VI.2.2}]$$

2) La moyenne pondérée par la masse: moyenne de FAVRE /19/, définie par:

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'', \quad [\text{VI.2.3}]$$

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}}. \quad [\text{VI.2.4}]$$

A partir de ces définitions, on peut déduire des relations reliant les deux moyennes:

$$\bar{\phi} = \tilde{\phi} + \frac{\overline{\rho'\phi'}}{\bar{\rho}}, \quad [\text{VI.2.5}]$$

$$\overline{\rho\phi'} = 0, \quad [\text{VI.2.6}]$$

$$\overline{\phi''} = - \frac{\overline{\rho'\phi''}}{\bar{\rho}} = - \frac{\overline{\rho'\phi'}}{\bar{\rho}}. \quad [\text{VI.2.7}]$$

L'intérêt de la moyenne au sens de FAVRE est principalement de minimiser le nombre d'inconnues en s'affranchissant des corrélations avec la masse volumique. De plus, il est montré dans la référence /20/ que lorsque le taux de turbulence est faible ou modéré les écarts entre moyennes conventionnelles et moyennes pondérées sont du second ordre, ce qui rend la comparaison avec les résultats expérimentaux tout-à-fait possible.

VI.3: Equations de l'écoulement moyen

Lorsqu'on réécrit les équations de Navier-Stokes en adoptant la moyenne temporelle pour décomposer la pression et la masse volumique et la moyenne de FAVRE pour décomposer toutes les autres grandeurs, on obtient:

◇ L'équation de continuité de l'écoulement moyen

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{u}_\alpha) = 0 \quad [\text{VI.3.1}]$$

◇ Equation de la quantité de mouvement pour l'écoulement moyen

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{u}_\alpha \tilde{u}_\beta) = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \bar{p} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\tilde{\tau}_{\alpha\beta} - \bar{\rho} (u'_\alpha u'_\beta) \right) \quad [\text{VI.3.2}]$$

avec

$$\tilde{\tau}_{\alpha\beta} = \mu_t \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tilde{u}_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \tilde{u}_\alpha \right) - 2/3 \mu_t \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \tilde{u}_\gamma \delta_{\alpha\beta}$$

◇ Equation de l'énergie interne pour l'écoulement moyen

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{I}) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{u}_\alpha \tilde{I}) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tilde{T} \right] - \bar{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tilde{u}_\alpha + \tilde{\tau}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tilde{u}_\beta - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \bar{\rho} u''_\alpha I'' \quad [\text{VI.3.3}]$$

Dans cette équation, certains termes ont été négligés comme la corrélation fluctuation de pression et gradient de vitesse, ainsi que les corrélations du second ordre.

VI.4: Problème de fermeture, modèles de turbulence

Dans les équations moyennes ci-dessus, de nouvelles inconnues apparaissent, elles correspondent aux flux turbulents de la quantité de mouvement et de l'énergie. Ainsi le passage à la moyenne provoque

systématiquement l'apparition de termes nouveaux et pose le problème de la fermeture.

Une première tentative de modélisation des flux turbulents fut avancée par BOUSSINESQ /21//22/, il suggéra alors de relier le flux turbulent de quantité de mouvement aux gradients de vitesse moyenne, par l'intermédiaire d'un coefficient jouant le rôle d'une viscosité "tourbillonnaire" (hypothèse de transport par gradient).

$$-\bar{\rho} (u'_\alpha u'_\beta) = \mu_t \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tilde{u}_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\beta} \tilde{u}_\alpha \right) - 2/3 \mu_t \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \tilde{u}_\gamma \delta_{\alpha\beta} - 2/3 \bar{\rho} k \delta_{\alpha\beta} \quad [\text{VI.4.1}]$$

μ_t représente la viscosité "tourbillonnaire"; $k = 1/2 u'_\alpha u'_\beta$ est l'énergie cinétique de la turbulence et $\delta_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Kronecker.

Dans ce cas μ_t n'est plus une propriété du fluide, comme c'est le cas en laminaire, mais dépend de la structure de la turbulence en chaque point de l'écoulement. Son expression dépend du modèle de fermeture adopté.

a) Modèle à zéro équation

Comme nous l'avons vu, l'usage de l'approximation de BOUSSINESQ requiert la détermination de la viscosité tourbillonnaire. La première formulation de cette viscosité fut donnée par PRANDTL /23/. Par analogie avec le mouvement moléculaire, PRANDTL développa une expression pour le transfert de la quantité de mouvement incluant une longueur de mélange. Cette longueur est l'analogue du libre parcours moyen de la théorie cinétique des gaz pour l'écoulement moyen. Ainsi, selon PRANDTL, dans le cas d'un écoulement de type couche limite, la viscosité tourbillonnaire est reliée à une échelle de longueur l_m ou longueur de mélange par la composante la plus significative du gradient de vitesse moyenne:

$$\mu_t = \bar{\rho} l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad [\text{VI.4.2}]$$

La longueur l_m doit être prescrite de façon empirique .

Il est possible de prescrire une expression pour la longueur de mélange l_m dans certains cas d'écoulements spécifiques. C'est notamment le cas pour les écoulements de type POISEUILLE où plusieurs expressions ont été proposées. Nous citons à titre d'exemple celles proposées par ELROD et NG /24/, NIKURADSE /25/ ou CONSTANTINESCU /26/. Mais c'est sans doute l'expression proposée par VAN DRIEST /27/ qui a eu le plus de succès, car elle consiste à introduire une fonction d'amortissement pour diminuer la valeur de l_m dans les zones pariétales:

$$l_m = K y \left(1 - \exp - \frac{Y^+}{A} \right) \quad [\text{VI.4.3}]$$

avec

$$Y^+ = y \frac{\sqrt{\tau_s \rho}}{\mu}$$

y étant la distance à la paroi la plus proche et τ_s la contrainte pariétale.

K est la constante de V. KARMAN

Les valeurs des constantes sont:

$$K = 0.41 \quad A = 26.0$$

Il existe plusieurs expressions pour la longueur de mélange utilisant la fonction d'amortissement de VAN DRIEST et qui donnent de bons résultats dans le cas des écoulements plans de type POISEUILLE /28/.

Cependant dans le cas de l'écoulement derrière une marche, ce modèle nécessite quelques arrangements pour que le coefficient de viscosité prenne en compte les composantes du gradient de vitesse dans toutes les directions.

En effet, en remarquant que la composante de cisaillement du tenseur de déformation s'écrit en bidimensionnel:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)$$

le coefficient de viscosité peut être noté:

$$\mu_t = \bar{\rho} l_m^2 | \varepsilon_{xy} |$$

on généralise cette relation par:

$$\mu_t = \bar{\rho} l_m^2 || \underline{\varepsilon} || \quad [VI.4.4]$$

où

$$|| \underline{\varepsilon} || = \left(2 \varepsilon_{xx}^2 + 2 \varepsilon_{yy}^2 + 4 \varepsilon_{xy}^2 \right)^{1/2}$$

Nous avons implanté dans le code KIVA-II un modèle longueur de mélange qui utilise la loi de variation de VAN DRIEST donné par la relation [VI.4.3]. La viscosité turbulente est alors calculée par la relation [VI.4.4].

Les modèles basés sur la relation de PRANDTL [VI.4.2], rencontrent quelques succès lorsqu'il s'agit de prédire des écoulements turbulents spécifiques, comme les écoulements cisailés ou de types couches limites (où il est possible de prescrire la longueur de mélange l_m). Ils sont cependant limités, car dans le cas d'écoulements plus complexes, il est difficile voire impossible de prescrire la longueur l_m . Mais l'inconvénient majeur de ce modèle, c'est qu'il repose sur hypothèse d'équilibre local: l'énergie cinétique de la turbulence est supposée produite et dissipée au même taux en tout point de l'écoulement. Ainsi, dans le cas de l'écoulement derrière une grille, où la turbulence est générée dans le sillage et transportée par l'écoulement moyen, il conduit à un coefficient de viscosité nul, du fait que la vitesse moyenne est uniforme en aval. Les modèles qui font intervenir une équation de bilan pour l'énergie cinétique de la turbulence pallient à cet inconvénient.

b) Modèle à une équation de transport

Une première approche a été initiée par KOLMOGOROV /29/; elle consiste à prendre en compte l'équation de bilan pour l'énergie cinétique de la turbulence k . Le coefficient de viscosité turbulente est alors relié à k par l'expression de KOLMOGOROV-PRANDTL:

$$\mu_t = \bar{\rho} C_\mu k^{1/2} l \quad [\text{VI.4.5}]$$

$$C_\mu = 0.09.$$

Dans cette expression l est une longueur caractéristique des grosses structures (longueur de mélange).

Une équation pour k peut être obtenue par contraction d'indices sur l'équation aux tensions de Reynolds, elle-même établie à partir des équations de Navier-Stokes. Le détail du calcul n'est pas rapporté ici, mais on pourra consulter par exemple R. BORGHI /30/ ou D. VANDROMME /31/.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} k) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{u}_\alpha k) = -\frac{2}{3} \bar{\rho} k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tilde{u}_\alpha + \tilde{\tau}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tilde{u}_\beta + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\mu \frac{\partial}{\partial x_\alpha} k \right) - C_d \bar{\rho} l^{-1} k^{3/2} \quad [\text{VI.4.6}]$$

où

$$\mu = \mu_l + \mu_t$$

μ_l étant la viscosité laminaire

C_d est de l'ordre de l'unité.

Parmi ces modèles à une équation, beaucoup utilisent la loi de variation de l donnée par VAN DRIEST qui donne des résultats appréciables près des parois.

Cependant, cette dernière n'est pas adaptée aux écoulements décollés, là où le gradient de vitesse est faible et la production de l'énergie cinétique de la turbulence est forte. Cet aspect de niveau de turbulence doit être pris en compte dans le choix de l'échelle de longueur caractéristique.

HASSID et POREH /38/ proposent de remplacer:

$$\frac{y}{\nu} \sqrt{\tau_s / \rho} \quad \text{par} \quad \frac{y}{\nu} \sqrt{k}$$

La longueur l et le coefficient de viscosité μ_t sont alors donnés par:

$$l = C_l y \left[1 - \exp\left(-\frac{y^*}{A^*}\right) \right] \quad [\text{VI.4.7}]$$

$$\mu_t = \bar{\rho} l C_\mu k^{1/2} \quad [\text{VI.4.8}]$$

avec

$$y^* = \frac{y k^{1/2}}{\nu} \quad A^* = 62. \quad C_l = 2.44 \quad C_\mu = 0.09$$

Nous adopterons ces expressions comme lois de variation de l et de μ_t lors de l'implantation du modèle "k - l" dans le code KIVA-II.

La mise en oeuvre du modèle à une équation nécessite que l'on se donne une loi pour la longueur caractéristique l . La prescription a priori d'une telle loi dans des situations complexes rend délicat l'emploi de ce type de modèle. C'est pour résoudre cette difficulté que des modèles à deux équations ont été élaborés.

c) Modèle à deux équations de transport

Peut-on établir une équation de transport pour l'échelle de longueur l ? La réponse à cette question est difficile, car il semble impossible d'établir de façon exacte une équation de transport pour l'échelle de longueur l . En revanche, sous certaines conditions, il est facile d'obtenir une équation de transport exacte pour des combinaisons de type:

$$z = k^m l^n \quad [\text{VI.4.9}]$$

Plusieurs modèles, basés sur des valeurs différentes de m et n ont été développés. Le plus ancien ($m = 1/2$; $n = 1$) est dû à KOLMOGOROV /29/, la variable z apparaît comme l'inverse d'un temps caractéristique des mouvements à grandes échelles. D'autres combinaisons ont été proposées telles que:

$m = 1$ $n = 1$ par K.H. NG et D.B. SPALDING /32/,

$m = 1$ $n = 2$ par P.G SAFFMAN et D.C. WILCOS /33/,

ou encore $m = 1$ $n = 3$ par A. LIN et M. WOLSHTEIN /34/.

C'est sans doute le modèle dit $k - \epsilon$, correspondant aux valeurs $m = 3/2$ et $n = -1$ qui a connu le plus de succès. Cela tient à la signification physique de la variable $z = k^{3/2} l^{-1}$ qui n'est autre que le taux de dissipation ϵ de l'énergie cinétique de la turbulence.

$$\epsilon = k^{3/2} l^{-1} \quad [\text{VI.4.10}]$$

Dans le cadre ainsi défini du modèle $k - \epsilon$, l'expression de KOILMOGOROV-PRANDTL pour le coefficient de viscosité turbulente est:

$$\mu_t = C_\mu \bar{\rho} k^2 / \epsilon \quad [\text{VI.4.11}]$$

où C_μ est une constante empirique ($C_\mu = 0.09$)

Dans ce cas l'équation pour k peut être réécrite sans modéliser les termes de dissipation mais en les regroupant sous la variable ϵ .

La forme exacte de l'équation pour ϵ , obtenue à partir des équations de Navier-Stokes est très compliquée, toutefois l'analyse menée par TENNEKES et LUMLEY /35/, dans le cadre de écoulements isovolumes, montre qu'il est possible d'obtenir une forme simplifiée aux nombres de Reynolds élevés.

Les équations pour k et ϵ incorporées dans le code KIVA-II sont celles du modèle standard /36/, avec un terme en plus pour l'équation de ϵ , qui tient compte de la compressibilité.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} k) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{u}_\alpha k) = - \frac{2}{3} \bar{\rho} k \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tilde{u}_\alpha + \bar{\rho} \tilde{\tau}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \tilde{u}_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\mu}{Pr_k} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} k \right) - \bar{\rho} \epsilon \quad [\text{VI.4.12}]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{\rho} \tilde{u}_\alpha \epsilon) = - (2/3 C_{\epsilon 1} - C_{\epsilon 3}) \bar{\rho} \epsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tilde{u}_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\left(\frac{\mu}{Pr_\epsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \epsilon \right] + \frac{\epsilon}{k} \left[C_{\epsilon 1} \tilde{\tau}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \tilde{u}_\alpha - C_{\epsilon 2} \bar{\rho} \epsilon \right] \quad [\text{VI.4.13}]$$

$$\mu = \mu_a + \mu_t \quad [\text{VI.4.14}]$$

où μ_a est un terme qui prend en compte les effets de la température:

$$\mu_a = \frac{A_1 T^{3/2}}{T + A_2} \quad (\text{loi de SUTHERLAND})$$

μ_t est calculé par la relation [VI.4.11].

Les valeurs des constantes sont celles du modèle $k - \varepsilon$ standard:

$$\begin{array}{ll} C_{\varepsilon 1} = 1.44 & Pr_k = 1 \\ C_{\varepsilon 2} = 1.92 & Pr_{\varepsilon} = 1.3 \\ C_{\varepsilon 3} = -1 & C_{\mu} = 0.09 \end{array}$$

Nous avons utilisées dans le cadre du modèle $k - \varepsilon$, les fonctions de parois disponibles dans le code KIVA-II, comme conditions aux limites pour la vitesse et la température. Ces dernières sont issues de la résolution de la couche limite turbulente sur plaque plane.

VI.5: Etude comparative et tests de validation

Nous allons dans ce chapitre faire une étude comparative de trois modèles de turbulence:

- Le modèle à zéro équation de transport dit longueur de mélange: lm .
- Le modèle à une équation de transport dits $k - l$.
- Le modèle à deux équations de transport dit $k - \varepsilon$.

Notre but n'est pas d'apporter une caractérisation globale de ces trois modèles, mais de comparer leurs performances lorsqu'il s'agit de prédire des écoulements turbulents spécifiques comme les écoulements cisailés entre deux plans parallèles ou les écoulements avec recirculation.

a) Ecoulement turbulent entre deux plans parallèles

Les figures (VI.1)-(VI.2) représentent les prédictions de l'écoulement de POISEUILLE données par les trois modèles de turbulence et comparées aux mesures expérimentales de HUSSAIN et REYNOLDS /37/.

Sur la figure (VI.1), les profils de vitesses obtenus sont similaires et proches des mesures expérimentales. La meilleure performance est obtenue avec le modèle $k - l$. Le modèle longueur de mélange donne néanmoins une bonne précision sauf pour la partie centrale du canal.

La figure (VI.2) montre la viscosité turbulente donnée par les trois modèles. La meilleure estimation de cette dernière est donnée par le modèle $k - l$. Le modèle longueur de mélange fournit une bonne prédiction de la viscosité turbulente aux voisinages des parois mais il donne une valeur nulle dans la partie centrale du canal. Ceci est dû à l'hypothèse de PRANDTL selon laquelle ce coefficient s'annule en même temps que le gradient de vitesse moyenne.

b) Ecoulement derrière une marche

Pour l'écoulement derrière une marche le critère de comparaison de la performance des modèles de turbulence porte sur la longueur de recollement.

Le tableau ci-dessous donne la prédiction de la longueur de recollement prédit par les trois modèles et ceci pour un nombre de Reynolds de 7000.

La valeur du nombre de Reynolds, ($Re = 7000$), choisie pour la comparaison des trois modèles de turbulence est celle pour laquelle s'accordent plusieurs investigations expérimentales et notamment celle de DRUST et PEREIRA /50/ et de ADAMS et EATON /51/.

Lr/H	Valeur numérique $Re_{\max} = 7000$	Valeur expérimentale $Re_{\max} = 7000$	Erreur %.
Modèle de turbulence			
Modèle Longueur de mélange	6.8	7.32	7.1
Modèle $k - l$	7.0	7.32	4.40
Modèle $k - \epsilon$	7.6	7.32	3.68

la prédiction de la longueur de recollement donnée par les trois modèles est à peu près la même. Les expressions de la longueur de mélange pour le modèle longueur de mélange et le modèle $k - l$, nécessite sans doute une amélioration pour prendre en compte les effets de la parois longitudinale de la marche, mais le résultat donné par ces deux modèles reste convenable.

Les figures (VI.3) et (VI.4) donnent respectivement les lignes de courant et les iso-lignes de l'énergie cinétique de la turbulence obtenues avec le modèle $k - l$.

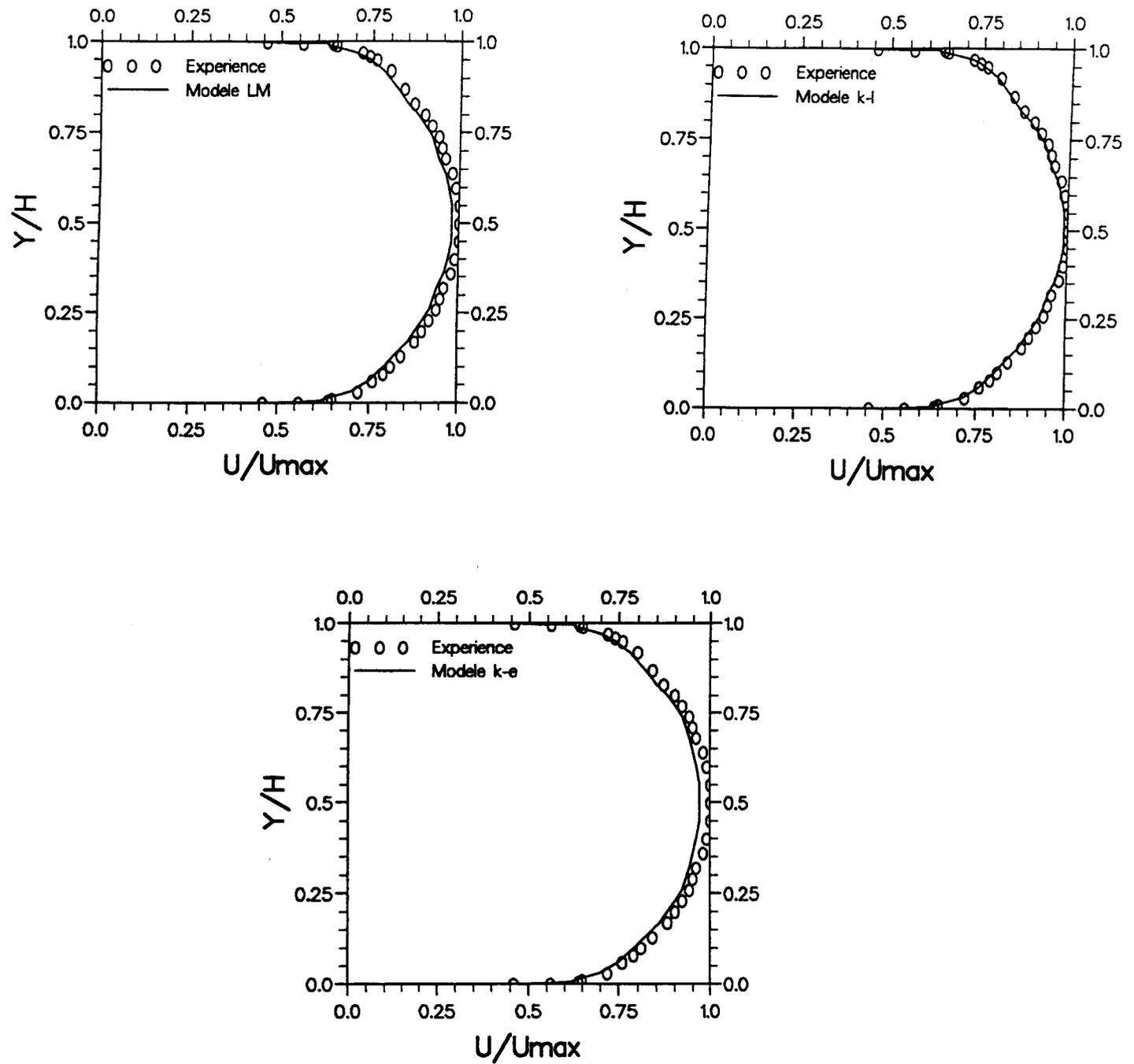


FIGURE VI.1: PROFIL DE VITESSE A LA SORTIE
COMPARAISON DES TROIS MODELES DE TURBULENCE

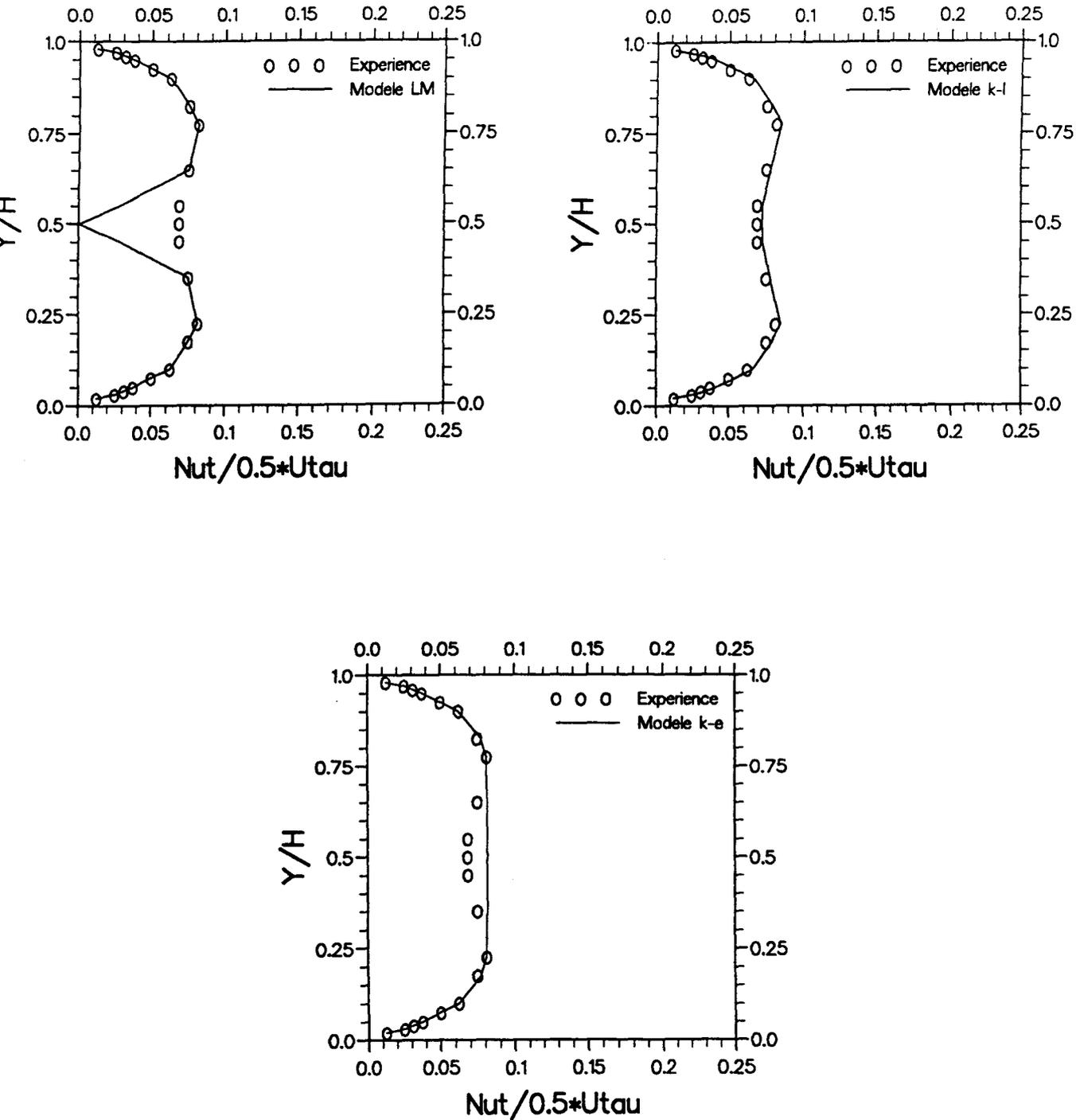


FIGURE VI.2: PROFIL DE VISCOSITE
COMPARAISON DES TROIS MODELES DE TURBULENCE

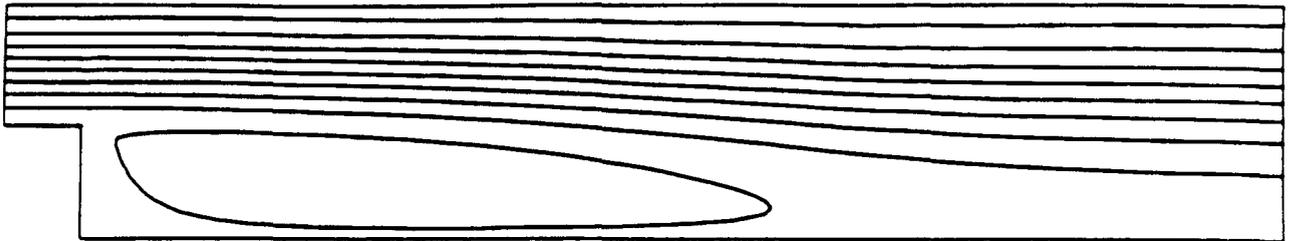


Figure VI.3: lignes de courant

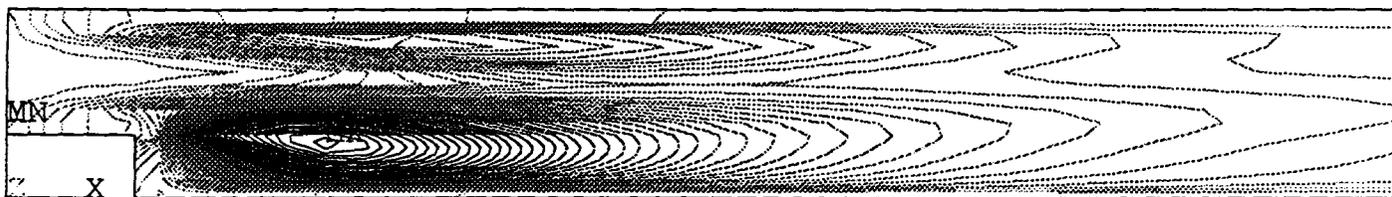


FIGURE VI.4: ISO-LIGNES DE L'ENERGIE
CINETIQUE TURBULENTE

CONCLUSION

Le code KIVA-II présenté et étudié dans ce rapport ainsi que les principales techniques numériques auxquelles il fait appel représentent un outil numérique important utilisé par beaucoup d'industriels.

Il présente le double intérêt de pouvoir traiter les problèmes d'une façon générale et de se prêter efficacement à des modifications pour des adaptations diverses.

Il est souhaitable, avant toute utilisation de ce code, d'étudier ses caractéristiques et de l'adapter à des configurations tests afin d'évaluer ses capacités et d'améliorer ses performances quand cela s'avère nécessaire.

Parmi les faits saillants du code KIVA-II que nous avons étudiés, on peut citer:

- 1) L'utilisation, au niveau de la discrétisation temporelle, de la technique de décomposition de l'opérateur et plus particulièrement de la méthode dite d'Euler-Lagrange.
- 2) L'utilisation de deux champs de vitesse: le premier est défini aux noeuds alors que le deuxième l'est aux centres des interfaces délimitant les mailles; ceci a pour but d'éviter toute interpolation lors de la résolution couplée de l'équation de quantité de mouvement et celle de continuité.
- 3) L'utilisation d'une méthode implicite pour le traitement des équations de la phase Lagrangienne, ce qui permet une bonne progression du calcul.

D'une façon générale, KIVA-II prend en compte la propagation des ondes acoustiques, ce qui rend difficile la convergence du calcul vers un état asymptotique lorsque le nombre de Mach est faible. C'est notamment le cas des écoulements à entrée-sortie où il est souhaitable d'obtenir une solution stationnaire. En effet, la version initiale du code KIVA-II ne permet pas d'obtenir une solution pour ce type d'écoulement quand le nombre de Mach est très faible (de l'ordre de 10^{-3}). Pour les nombres de Mach un peu plus élevés (de l'ordre de 10^{-2}) la solution ne peut être obtenue que si on utilise la procédure P.G.S./14/. Cette dernière n'est pas valable dans des configurations où le gradient de pression joue un rôle important.

Il s'est donc avéré nécessaire d'apporter des modifications au code pour étendre ses capacités à traiter ce type d'écoulements.

■ Nos modifications ont consistées à introduire des simplifications dans le système d'équations de Navier-Stokes, en utilisant l'hypothèse de faible nombre de Mach. Celles-ci sont issues d'un développement asymptotique des équations en fonction du nombre de Mach et ont pour effet d'éliminer les termes relatifs à l'onde acoustique.

■ La mise en oeuvre de la version modifiée du code nous a permis d'obtenir une convergence accélérée du calcul itératif, même à faible nombre de Mach. Ceci est obtenu sans modifier le gradient de pression, ce qui n'est pas le cas de la procédure P.G.S.

■ Par ailleurs, les tests de validation que nous avons réalisés montrent que cette version peut être utilisée pour traiter les cas des écoulements de fluides peu compressibles.

Les bons résultats obtenus en laminaire nous ont permis d'aborder l'étude et la caractérisation des modèles physiques pour la turbulence.

■ Trois modèles de turbulence ont été testés dans les cas des écoulements bidimensionnels dans un canal et derrière une marche descendante. Ces modèles sont les suivants:

1) Le modèle longueur de mélange.

2) Le modèle à une équation de transport " $k - l$ ".

Ces deux modèles ont été implantés dans le code KIVA-II.

3) Le modèle à deux équations de transport " $k - \epsilon$ " disponible dans le code KIVA-II.

Les tests de validation de ces trois modèles nous conduisent aux remarques suivantes:

- Dans le cas simple de l'écoulement dans un canal, ce sont les modèles longueur de mélange et " $k - l$ " qui donnent les meilleurs résultats.

Toutefois le modèle longueur de mélange, est le plus simple à mettre en oeuvre et son coût de calcul est moins élevé.

- Dans le cas des écoulements plus complexes comme l'écoulement avec recirculation, les trois modèles donnent des résultats semblables.

■ A l'issue de ce travail, nous disposons d'un code de calcul opérationnel en 2D. Ce dernier est capable de traiter des écoulements dans des configurations géométriques pourvues de différentes conditions aux limites quel que soit le nombre de Mach en subsonique. Ceci représente une garantie de son utilisation pour l'étude et la validation des modèles physiques comme ceux relatifs à la turbulence.

Annexe A:

Calcul du gradient de vitesse et du tenseur de contraintes:

Le calcul du tenseur de contraintes exige la connaissance de gradient de vitesse. Ces gradients sont stockés aux centres des cellules régulières et sont supposés uniformes à l'intérieur de chaque cellule.

Les gradients de vitesse sont calculés de la manière suivante:

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_m} = \nabla \cdot (u_l \mathbf{e}_m) \quad [\text{A.1}]$$

Avec $\begin{cases} u_l : \text{la } l^{\text{ieme}} \text{ composante du vecteur vitesse.} \\ \mathbf{e}_m : \text{le vecteur unitaire dans la direction } m \end{cases}$

Si on intègre l'équation [A.1] sur tout le volume de la cellule (i,j,k) et qu'on applique le théorème de la divergence, on obtient:

$$\int_{V_{i,j,k}} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} dv = \int_{S_{i,j,k}} u_l \mathbf{e}_m \cdot d\mathbf{A} \quad [\text{A.2}]$$

\mathbf{A} étant le vecteur surface normal: $\mathbf{A} = \mathbf{n} S$

Les deux membres de l'équation [A.2] peuvent être approchés par:

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_m} V_{i,j,k} = \sum_{\alpha} (u_l)_{\alpha} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{A}_{\alpha} \quad [\text{A.3}]$$

$(u_l)_{\alpha}$ est la moyenne des quatre valeurs de u_l associées aux quatre sommets de la face α .

A partir des gradients de vitesse, les composantes du tenseur des contraintes s'obtiennent facilement par :

$$[\tau_{lm}(\mathbf{u})^v]_{i,j,k} = \mu_{ijk}^v \left[\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right)_{i,j,k}^v + \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right)_{i,j,k}^v \right] + \lambda_{ijk}^v \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right)_{i,j,k}^v \delta_{lm} \quad [\text{A.4}]$$

v étant le niveau de temps du champ de vitesse.

Annexe B:

**Méthodes itératives pour la résolution du système
couplé Vitesse-pression**

Le choix d'une méthode implicite pour le traitement des équations de la phase B nécessite à chaque pas de temps la résolution d'un système d'équations fortement couplées.

La résolution numérique d'un tel système par des méthodes directes est très difficile et même impraticable quand le nombre de points est important. On est donc confronté ici à l'un des problèmes majeurs de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes, qui est de trouver un algorithme efficace pour résoudre le système couplé vitesse-pression.

Pour étudier les propriétés de quelques algorithmes itératifs, nous considérons dans un premier lieu le cas des écoulements instationnaires de fluide incompressible.

L'équation de continuité et celle de la quantité de mouvement dans ce cas peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$\begin{cases} C_{ij} U_j = 0 \\ A U_{ij} + B \pi_{ij} = 0 \end{cases} \quad [\text{B.1}]$$

En introduisant les composantes du vecteur vitesse $\mathbf{u}=(u^1, u^2, u^3)$, le système [B.1] peut se mettre sous forme matricielle:

$$\begin{vmatrix} A_{ij}^1 & 0 & 0 & B_{ij}^1 \\ 0 & A_{ij}^2 & 0 & B_{ij}^2 \\ 0 & 0 & A_{ij}^3 & B_{ij}^3 \\ C_{ij}^1 & C_{ij}^2 & C_{ij}^3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_j^1 \\ u_j^2 \\ u_j^3 \\ \Pi_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_j^1 \\ F_j^2 \\ F_j^3 \\ 0 \end{vmatrix} \quad [\text{B.2}]$$

La matrice B associée au gradient de pression est la transposée au signe près de la matrice C associée à la divergence du champ de vitesse.

La matrice A correspond à l'opérateur de convection-diffusion; elle est diagonale par bloc, mais elle n'est pas symétrique.

On peut écrire le problème dual sur la pression en éliminant la vitesse dans le système [B.1], on obtient ainsi le système linéaire suivant:

$$C.A^{-1} . B \Pi = C.A^{-1} . F \quad [\text{B.3}]$$

Si on n'impose aucune condition sur la pression, ce système linéaire est indéterminé puisque la pression est définie à une constante arbitraire près. Pour lever cette indétermination, on fixe la valeur de la pression en un point et on supprime la contrainte associée.

La résolution du système [B.1] par les méthodes directes est impraticable dès que le nombre de points N est grand. C'est en plus un système linéaire dont un bloc diagonal est nul, ce qui le rend mal conditionné. De même la résolution de l'équation duale [B.3] nécessite le calcul explicite de l'inverse de la matrice A et un produit matriciel, ce qui rend cette résolution très coûteuse et même impossible dans la pratique dès que N est grand.

Les méthodes itératives pour la résolution du système [B.1] sont très attractives car, à l'inverse des méthodes directes, elles ne nécessitent ni un stockage des éléments, ni le calcul d'une matrice inverse.

L'algorithme itératif le plus simple est celui de type **UZAWA** [Fortin, Glowinsky 1982], son principe est de construire une suite de multiplicateurs

Π^k associé à une suite de champs de vitesse, de façon à vérifier à la limite la contrainte: suite $\{\Pi^k\}$ telle que $\lim || C.U^k || > \varepsilon$:

L'algorithme d'UZAWA s'écrit:

- Initialisation

Π^0 donné

- ◊ Répéter

calcul de u^k solution du problème linéaire

$$A.U^k = F - B.\Pi^k$$

Détermination de la nouvelle valeur de Π^{k+1}

$$\Pi^{k+1} = \Pi^k - \rho^k C.U^k$$

- ◊ Tant que $|| C.U^k || > \varepsilon$

Cet algorithme peut s'interpréter comme un algorithme du point fixe appliqué au système dual [B.3].

Si A est une matrice définie positive, cet algorithme converge à condition que le paramètre ρ^k soit strictement positif et inférieur à la plus grande des valeurs propres de la composante symétrique de la matrice $C A^{-1} B$. En pratique, puisqu'on ne connaît pas les valeurs de cette matrice, on est contraint de choisir une valeur très petite pour le paramètre ρ^k . Ce qui a pour effet de ralentir la convergence.

L'inconvénient de l'algorithme D'UZAWA c'est qu'il possède une vitesse de convergence très faible; par conséquent il faut le modifier pour qu'il soit plus performant.

En effet la vitesse de convergence peut être améliorée en adoptant la méthode de résidu minimal, cette dernière consiste à construire une suite Π^k , en minimisant la norme du résidu r pour accélérer la convergence.

Soient: $P = C A^{-1} B$, $Q = C A^{-1} F$

Le résidu r de l'équation [B.1] est donné par:

$$r = P \Pi - Q$$

Si on adopte la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour désigner un produit scalaire, l'algorithme du résidu minimal s'écrit:

- Initialisation

$$\Pi^0 \text{ donné}$$

- Calcul du résidu initial r^0 et de la direction de descente q^0

$$\begin{aligned} r^0 &= P \Pi^0 - Q \\ q^0 &= r^0 \end{aligned}$$

◇ Répéter

Détermination du paramètre optimal de descente ρ^k , minimisant par rapport à ρ^k la norme de r^{k+1} dans la direction q^k .

$$\rho^k = - \frac{\langle r^k, Pq^k \rangle}{\langle Pq^k, Pq^k \rangle}$$

Calcul de la nouvelle valeur de Π^{k+1} et du nouveau résidu r^{k+1}

$$\begin{aligned} \Pi^{k+1} &= \Pi^k + \rho^k \cdot q^k \\ r^{k+1} &= r^k + \rho^k \cdot Pq^k \end{aligned}$$

Calcul d'une direction de descente conjuguée q^{k+1} , telle que

$$\begin{aligned} \langle P \cdot q^{k+1}, P \cdot q^k \rangle &= 0 \\ \gamma^{k+1} &= \frac{\langle Pr^{k+1}, Pq^k \rangle}{\langle Pq^k, Pq^k \rangle} \\ q^{k+1} &= r^{k+1} + \gamma^{k+1} \cdot q^{k+1} \end{aligned}$$

◇ Tant que $\| r^{k+1} \| > \epsilon$

Cet algorithme permet de construire automatiquement une suite Π^k , qui à chaque étape minimise le carré du résidu r^k en utilisant des directions de descente conjuguées pour accélérer la convergence. Si la partie symétrique de la matrice P est définie positive (ce qui est le cas), cet algorithme converge [Lascaux, 1987]. Le nombre d'itérations pour atteindre la convergence est fonction du conditionnement de la matrice P (c'est à dire, du rapport de la plus grande sur la plus petite des valeurs propres).

Pour accélérer la convergence, on peut introduire une matrice de préconditionnement S^{-1} , proche de P^{-1} . Dans ce cas l'algorithme du résidu minimal est appliqué au système équivalent suivant:

$$S^{-1} . P . \Pi = S^{-1} . Q$$

Ce préconditionnement équivaut à choisir comme direction de descente $S^{-1} . r^k$ à la place de r^k .

Pour ne pas avoir à calculer la matrice P explicitement on revient au système [B.1] en introduisant la variation z^k de la vitesse due à la variation q^k de la pression par la relation:

$$A . z^k = -B . q^k$$

L'algorithme du résidu minimal préconditionné s'écrit:

- Initialisation

$$\Pi^0 \text{ donnée}$$

- Calcul de la vitesse U^0

$$A . U^0 = -B . \Pi^0 + F$$

- Calcul du résidu de l'équation de continuité

$$r^0 = C . U^0$$

- Calcul des directions de descente

$$S.q^0 = r^0 \quad \text{direction de descente sur } \Pi$$

$$A.Z^0 = -B.q^0 \quad \text{direction de descente sur } U$$

◇ Répéter

Détermination du paramètre de descente ρ^k tel que la norme de r^k soit minimale

$$\rho^k = \frac{\langle r^k, C.Z^k \rangle}{\langle C.Z^k, C.Z^k \rangle}$$

Mise à jour des valeurs de Π et de W

$$\Pi^{k+1} = \Pi^k + \rho^k . q^k$$

$$W^{k+1} = W^k + \rho^k . z^k$$

$$r^{k+1} = r^k + \rho^k . C.Z^k$$

Calcul des gradients par rapport à r^{k+1}

$$S.g^{k+1} = r^{k+1} \quad \text{Gradient de } \Pi$$

$$A.Y^{k+1} = -B.g^{k+1}$$

Calcul du paramètre de conjugaison γ^{k+1} tel que les directions de descente z^{k+1} vérifient: $\langle C.Z^k, C.Z^{k+1} \rangle = 0$

$$\gamma^{k+1} = - \frac{\langle C.Y^{k+1}, C.Z^k \rangle}{\langle C.Z^k, C.Z^k \rangle}$$

Calcul des nouvelles directions de descente

$$q^{k+1} = g^k + \gamma^{k+1} . q^k$$

$$z^{k+1} = Y^k + \gamma^{k+1} . z^k$$

◇ Tant que $\| r^{k+1} \| > \varepsilon$

Pour avoir un bon préconditionnement pour accélérer la convergence, il faut que S^{-1} soit proche de P^{-1} et facile à calculer; de plus la matrice P n'est jamais calculée explicitement, ce qui rend le préconditionnement encore plus difficile.

Annexe C:

Schémas convectifs

Les schémas convectifs sont nécessaires pour exprimer les valeurs des flux des différentes quantités là où elles ne sont pas stockées, en fonction de celles qui sont stockées normalement aux centres des mailles.

Les schémas convectifs traditionnellement utilisés, sont:

- 1- Schéma aux différences centrées
- 2- Schéma aux différences amonts
- 3- schéma de Van Leer /17/
- 4- Schéma aux différences amonts du quasi-second ordre: "Q.S.O.U"

Pour étudier les caractéristiques de ces schémas, nous établissons au préalable quelques définitions:

On note par ρ_i la valeur de ρ au point x_i . Une fonction ρ est

- Monotone si:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 \leq \rho_2 & \text{Croissant} \\ \rho_1 \geq \rho_2 & \text{Décroissant} \end{cases}$$

[C.1]

- Faiblement monotone si:

$$\rho_i^n \leq \rho_{i+1}^n \leq \rho_{i+2}^n \quad \text{et} \quad x_i^n \leq x_{i+1}^{n+1} \leq x_{i+2}^n \quad \Rightarrow \quad \rho_i^n \leq \rho_{i+1}^{n+1} \leq \rho_{i+2}^n$$

[C.2]

- Fortement monotone si:

$$\rho_i^n \leq \rho_{i+1}^n \leq \rho_{i+2}^n \leq \rho_{i+3}^n \quad \text{et} \quad x_i^n \leq x_{i+1}^{n+1} \leq x_{i+2}^{n+1} \leq x_{i+3}^n$$

$$\Rightarrow \rho_i^n \leq \rho_{i+1}^n \leq \rho_{i+2}^n \leq \rho_{i+3}^n$$

[C.3]

La monotonie est une caractéristique très importante pour les schémas convectifs, car elle permet d'assurer la régularité de la fonction au voisinage des interfaces.

Les exemples de convection en monodimensionnelle illustrés par la figure ci dessous montre l'intérêt de cette régularité.

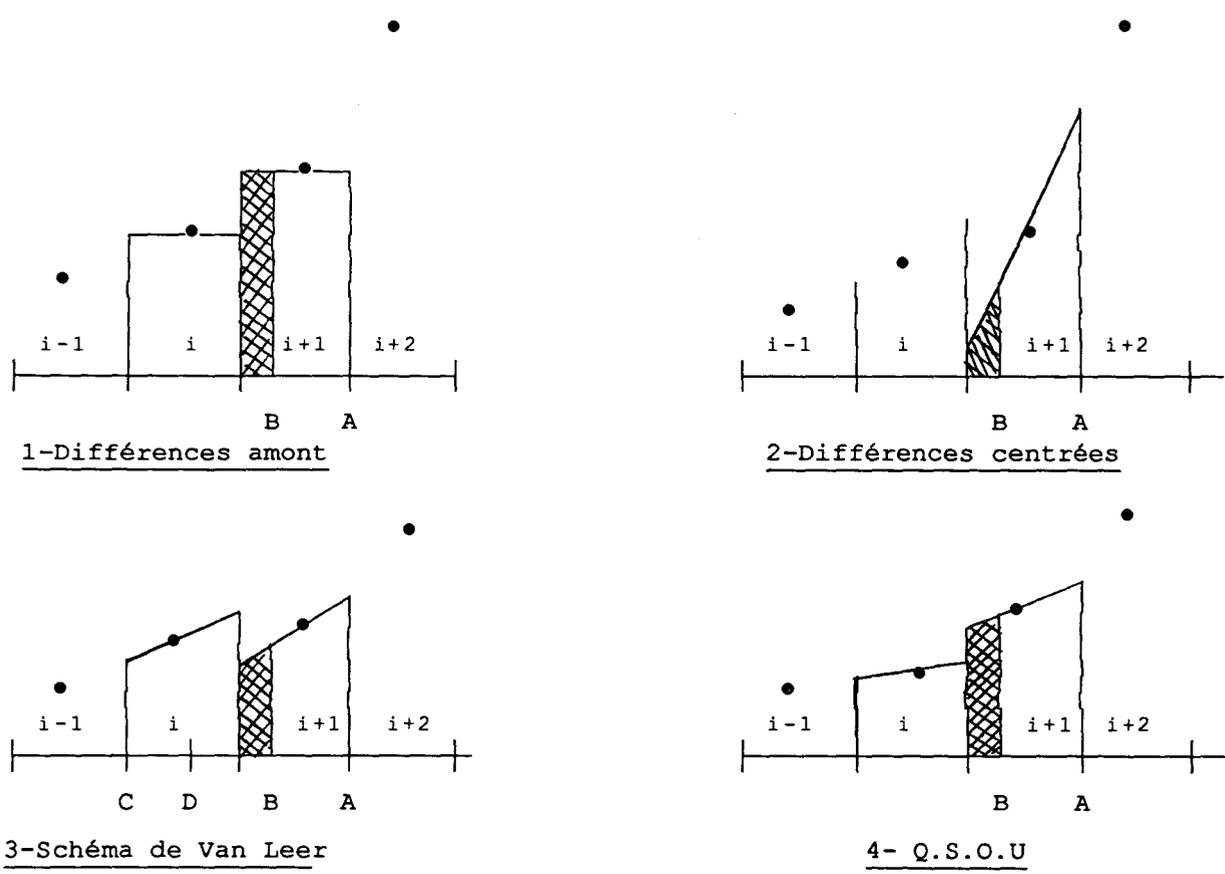


Figure 1: Schémas convectifs de la densité ρ en monodimensionnel

Dans les schémas de la figure 1, les points représentent les densités au pas de temps précédent, les traits continus représentent les profils de densité.

Pour chaque schéma, la masse convectée à travers la section qui se déplace du point A au point B est l'aire qui se trouve entre le profil et les

points A et B, la densité totale est représentée par la surface hachurée.

Dans le cas de la famille des schémas de la figure 1, une condition nécessaire et suffisante pour avoir une monotonie forte est la suivante:

Si $\rho_i^n \leq \rho_{i+1}^n \leq \rho_{i+2}^n$ alors les profils de densités dans les cellules i , $i+1$ et $i+2$ forment ensemble une fonction monotone.

Schéma 1.1: Différences amonts:

Il consiste à considérer une valeur constante de la quantité ρ à l'intérieur de chaque cellule, (profil plat), et d'attribuer la valeur dans la cellule amont à l'interface entre deux cellules voisines.

Les profils sont plats, les pentes sont donc nulles et la condition de profil est satisfaite ainsi que celle de la monotonie forte. Le schéma est donc du premier ordre en espace mais il est diffusif.

Remède:

Schéma 1.2: Différences centrées

Pour remédier à ce manque de précision, on peut considérer le schéma au gradient centré de la figure 1.2, la pente $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ dans chaque cellule est donnée par:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_i = \frac{\rho_{i+1} - \rho_{i-1}}{2 \Delta x} .$$

[C.4]

Ce schéma est du deuxième ordre en espace et il est stable, mais il n'est pas faiblement monotone. En effet les profils de densité dans les régions à fort changement de pente peuvent présenter des "undershoots" ou des sur "overshoots" comme le montre la figure 1.2.

Le profil de densité dans la cellule $i+1$ présente des valeurs plus petites que ρ_i^n et par conséquent ρ_{i+1}^{n+1} qui est la moyenne du profil sur la surface hachurée, est plus petit que ρ_i^n

$$\rho_i^n < \rho_{i+1}^n \quad \text{alors que} \quad \rho_i^{n+1} > \rho_{i+1}^{n+1}$$

Figure 1.3: Schéma de Van Leer:

Le schéma de Van Leer /17/ corrige ce problème en limitant la valeur de la pente: $\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_i$ à une valeur aussi petite, pour que toutes les valeurs de ρ dans le profil soient comprises entre ρ_{i-1}^n et ρ_{i+1}^n .

Si ρ_i^n n'est pas comprise entre ρ_{i-1}^n et ρ_{i+1}^n , alors la valeur de la pente sera nulle.

Le schéma de Van Leer est faiblement monotone, il est de second ordre quand le limiteur de pente n'est pas utilisé. Mais ce schéma n'est pas fortement monotone.

Supposons que le côté gauche de la cellule i passe du point C au point D (figure 1.c), nous aurons $\rho_i^{n+1} > \rho_{i+1}^{n+1}$ alors que $\rho_{i-1}^n < \rho_i^n < \rho_{i+1}^n < \rho_{i+2}^n$ sont monotones et croissants.

Figure 1.4: Schéma Q.S.O.U :

Le schéma Q.S.O.U, "Quasi-Second-Order-Upwind" est écrit pour satisfaire la condition de profil, et pour être donc fortement monotone.

Ce schéma peut aussi être appelé schéma du gradient minimum car pour ρ_i^n compris entre ρ_{i-1}^n et ρ_{i+1}^n la valeur de la pente est:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_i = \min \left[\frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{\Delta x}, \frac{\rho_i^n - \rho_{i-1}^n}{\Delta x} \right], \quad [\text{C.5}]$$

$$0 \leq \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{i-1} \leq \frac{\rho_i^n - \rho_{i-1}^n}{\Delta x},$$

$$0 \leq \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{i+1} \leq \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{\Delta x}.$$

Il est facile de vérifier que les profils de densité sont monotones décroissants dans les cellules $i-1$, i et $i+1$.

Ce schéma est de second ordre en espace lorsque $\frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{\Delta x}$ est constant indépendant de i , mais il est presque de second ordre lorsque $\frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{\Delta x}$ varie lentement. Quand $\frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{\Delta x} = 0$, il coïncide avec le schéma au différences amonts.

En monodimensionnel ce schéma peut s'écrire de la manière suivante:

Soit $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ et $\Delta \rho_i = \rho_{i+1} - \rho_i$

On calcule tout d'abord la valeur de la pente dans chaque cellule par:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_i = \begin{cases} \text{signe}(\Delta \rho_i) \min \left(\frac{|\Delta \rho_i|}{\Delta x_i}, \frac{|\Delta \rho_{i-1}|}{\Delta x_{i-1}} \right) & \text{Si } \Delta \rho_i \Delta \rho_{i-1} > 0, \\ 0 & \text{Si } \Delta \rho_i \Delta \rho_{i-1} < 0. \end{cases}$$

[C.6]

La valeur de ρ_α utilisée pour calculer le flux de densité de masse à travers l'interface α entre la cellule i et la cellule $i+1$ est donnée par:

$$\rho_\alpha = \begin{cases} \rho_i + \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_i (x_\alpha - x_i) \left(1 - \frac{\delta v_\alpha}{v_i} \right) & \text{Si } \delta v_\alpha > 0, \\ \rho_{i+1} - \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{i+1} (x_{i+1} - x_\alpha) \left(1 - \frac{\delta v_\alpha}{v_{i+1}} \right) & \text{Si } \delta v_\alpha < 0. \end{cases}$$

[C.7]

Dans l'expression précédente x_α représente la localité de la face α sur l'axe x , v_α est le flux de volume, si la cellule i est à l'amont de l'écoulement, v_i est le volume de cette cellule.

L'extension de cette méthode à un domaine à trois dimensions peut être faite de la manière suivante:

On suppose que le flux d'une quantité ρ dans chacune des directions du domaine d'étude dépend uniquement du gradient dans cette direction.

Considérons la quantité ρ_α , où α est l'interface entre les cellules (i,j,k) et $(i+1,j,k)$, La dérivée de ρ dans la direction est obtenue par extension de la relation [C.5]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial s} \Big|_i^\nu = \begin{cases} \text{signe}(\Delta \rho_i) \min \left(\frac{|\Delta \rho_i^\nu|}{|\Delta x_i|}, \frac{|\Delta \rho_{i-1}^\nu|}{|\Delta x_{i-1}|} \right) & \text{Si } \Delta \rho_i^\nu \Delta \rho_{i-1}^\nu > 0, \\ 0 & \text{Si } \Delta \rho_i^\nu \Delta \rho_{i-1}^\nu < 0. \end{cases}$$

[C.8]

où :

$$\Delta \rho_i^\nu = \rho_{i+1,j,k}^\nu - \rho_{i,j,k}^\nu,$$

$$\Delta x_i = x_{i+1,j,k}^c - x_{i,j,k}^c,$$

$x_{i,j,k}^c$ est la moyenne des positions des quatres sommets de la face α .

ρ_α^ν est alors obtenue par:

$$\rho_\alpha^\nu = \begin{cases} \rho_{i,j,k}^\nu + \frac{\partial \rho}{\partial s} \Big|_{i,j,k}^\nu |x_\alpha - x_{i,j,k}^c| \left(1 - \frac{\delta V_\alpha}{V_{i,j,k}^\nu} \right) & \text{Si } \delta V_\alpha > 0, \\ \rho_{i+1,j,k}^\nu - \frac{\partial \rho}{\partial s} \Big|_{i+1,j,k}^\nu |x_\alpha - x_{i+1,j,k}^c| \left(1 + \frac{\delta V_\alpha}{V_{i+1,j,k}^\nu} \right) & \text{Si } \delta V_\alpha < 0, \end{cases}$$

[C.9]

L'exposant ν indique l'indice du sous cycle convectif.

$V_{i,j,k}^\nu$ est le volume de la cellule (i,j,k) après ν sous cycles de convection.

δV_α est le flux de volume associé à la face α .

La quantité δV_α est positive si le mouvement de la face α tend à augmenter le volume dans la cellule $(i+1,j,k)$, dans ce cas la cellule (i,j,k)

est la cellule amont. δV_α est négative si la cellule $(i+1,j,k)$ perd du volume, dans ce cas c'est cette même cellule qui est cellule amont.

Une description spéciale doit être faite lorsque la face α se trouve sur l'une des frontières du domaine d'étude.

En effet si la face α se trouve sur une paroi solide ou sur une frontière de sortie la valeur de la dérivée est prise nulle à la limite:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_{i,j,k}^{\nu} = 0 \quad [\text{C.10}]$$

Si la face α se trouve sur une frontière d'entrée, c'est la relation [C.8] qui est utilisée pour le calcul de la dérivée, avec la modification qui consiste à attribuer à ρ_{i-1} la valeur de la densité imposée à l'entrée.

En plus des quantités scalaires nous avons aussi besoin des valeurs du vecteur vitesse \mathbf{u}_β^ν sur les interfaces qui composent les cellules de quantités de mouvement. Ceci est nécessaire pour l'évaluation des flux de quantité de mouvement à travers ces interfaces.

Comme pour les quantités scalaires, on commence par calculer les dérivées de \mathbf{u} dans les différentes directions, soit pour la direction i par exemple:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \right|_{i,j,k}^{\nu} = \begin{cases} \text{signe}(\Delta u_i^\nu) \min \left(\frac{|\Delta u_i^\nu|}{|\Delta x_i|}, \frac{|\Delta u_{i-1}^\nu|}{|\Delta x_{i-1}|} \right) & \text{si } \Delta u_i^\nu \Delta u_{i-1}^\nu > 0, \\ 0 & \text{si } \Delta u_i^\nu \Delta u_{i-1}^\nu < 0, \end{cases}$$

[C.11]

avec

$$\Delta u_i^\nu = u_{i+1,j,k}^\nu - u_{i,j,k}^\nu,$$

$$\Delta x_i = x_{i+1,j,k}^{n+1} - x_{i,j,k}^{n+1},$$

Quand le sommet (i,j,k) est sur une frontière, la valeur de la dérivée est égale à zéro.

Le calcul de u_{β}^{ν} pour les vitesses aux interfaces se fait de la même manière que pour une quantité scalaire, mais dans ce cas il est plus convenable de baser les flux de quantité de mouvement sur le taux de flux de masse plutôt que sur le taux de flux de volume.

$$u_{\beta}^{\nu} = \begin{cases} u_{i,j,k}^{\nu} + \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{i,j,k}^{\nu} \frac{|\mathbf{x}_{i+1,j,k}^{n+1} - \mathbf{x}_{i,j,k}^{n+1}|}{2} \left[1 - \frac{(\delta M_{\beta}^C)^{\nu}}{(M_{\beta}^0)^{\nu}} \right] & \text{si } (\delta M_{\beta}^C)^{\nu} > 0 \\ u_{i+1,j,k}^{\nu} - \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{i+1,j,k}^{\nu} \frac{|\mathbf{x}_{i+1,j,k}^{n+1} - \mathbf{x}_{i,j,k}^{n+1}|}{2} \left[1 + \frac{(\delta M_{\beta}^C)^{\nu}}{(M_{\beta}^0)^{\nu}} \right] & \text{si } (\delta M_{\beta}^C)^{\nu} < 0 \end{cases}$$

[C.12]

où

$(\delta M_{\beta}^C)^{\nu}$ est le flux de masse à travers la face β au cycle de calcul ν .

$(M_{\beta}^0)^{\nu}$ est la masse de la cellule de la quantité de mouvement.

Le flux de masse $(\delta M_{\beta}^C)^{\nu}$ est pris positif si la masse associée au point $(i+1, j, k)$ est augmentée par le mouvement de la face β et négatif dans le cas contraire.

Annexe D:

Détermination du paramètre α_n de la procédure P.G.S

L'objectif de la procédure " Pressure gradient scaling" introduite par les auteurs du code de calcul KIVA-II est d'augmenter l'efficacité du calcul dans le cas d'écoulements à faible nombre de Mach en augmentant l'échelle des fluctuations de pression.

Ceci se fait en multipliant le gradient de pression dans l'équation de la quantité de mouvement par un facteur $1/\alpha_n^2$, où α_n est un paramètre proche de 1 et ne dépendant que du temps.

En effet si le rapport $\delta p_\alpha / \bar{p}$ est petit devant l'unité, on peut supposer que le système d'équations ainsi modifié admette à peu près les mêmes solutions que le système non modifié, sauf pour la pression dont les fluctuations se trouvent augmentées d'un facteur α^2 .

Dans beaucoup de problèmes le rapport $\delta p / \bar{p}$ est de l'ordre de \sqrt{M} , on peut donc dire que la procédure P.S.G permet d'augmenter le nombre de Mach d'un facteur α_n . Le nombre de Courant, $C \Delta t / \Delta x$, basé sur la vitesse du son se trouve alors baissé d'un facteur $1/\alpha$.

La procédure P.G.S ne doit pas être utilisée dans les problèmes où les ondes acoustiques jouent un rôle important.

Dans le code de calcul KIVA-II, le facteur α_n est choisi de telle façon que les variations de la pression soient faibles devant la pression moyenne:

$$\delta p_\alpha / \bar{p} \leq 0.04$$

avec:

$$\delta p_\alpha / \bar{p} = \text{Max}_{ijk} \frac{|p_{ijk}^B - \bar{p}^n|}{\bar{p}^n} \quad [\text{D.1}]$$

où:

$$\bar{p}^{-n} = \frac{\sum_{ijk} P_{ijk}^B V_{ijk}^B}{\sum_{ijk} V_{ijk}^B}$$

Si on note α^* le paramètre qui permet de prendre une fluctuation de pression relative maximale, soit 0.04, nous avons:

$$\alpha^* / \alpha = [0.04 / (\delta p_{\alpha} / \bar{p})]^{1/2} \quad [\text{D.2}]$$

Dans la pratique le fait de prendre $\alpha_{n+1} = \alpha^*$ peut avoir comme effet des oscillations sévères dans le calcul des valeurs successives de α .

C'est pour cette raison que l'on a introduit une relaxation qui permet une évolution plus lisse de ce paramètre.

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} \alpha^* & \text{si } \alpha^* < \alpha_n \\ \alpha_n + A (\alpha^* - \alpha_n) & \text{si } \alpha^* > \alpha_n \end{cases} \quad [\text{D.3}]$$

A est un paramètre sans dimension qui dépend du pas de temps principal et du temps caractéristique de la propagation des ondes acoustiques à travers le domaine de longueur L.

$$A = \frac{\Delta t}{\tau_r} \quad [\text{D.4}]$$

$$\tau_r = \max \left\{ 20 \Delta t^n, \frac{4 L \alpha_n}{\bar{c}} \right\}$$

$$\bar{c} = \sqrt{1.4 \bar{p} / \bar{\rho}}$$

Annexe E : Détermination des paramètres des schémas implicites

Des paramètres des schémas implicites interviennent lors de la discrétisation des termes de pression et de diffusion. Ils sont choisis de manière à ce que la stabilité numérique des schémas aux volumes finis soit assurée.

Leurs but est de diminuer le temps de calcul nécessaire pour la résolution des équations de la phase B.

L'expérience montre que la méthode itérative (Méthode des Gradients Conjugués) utilisée dans le code KIVA-II, converge plus rapidement dans le cas d'une implicitité partielle que dans le cas pleinement implicite.

1: Détermination du paramètre ϕ_p pour la pression

La détermination du paramètre ϕ_p pour la pression est faite après l'examen des équations en monodimensionnel d'un fluide non visqueux discrétisées; soit:

$$\rho_0 \frac{u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j-1/2}^n}{\Delta t} + \left[\phi_p \frac{p_{j+1}^{n+1} - p_j^{n+1}}{\Delta x} + (1-\phi_p) \frac{p_{j+1}^n - p_j^n}{\Delta x} \right] = 0$$

[E.1]

Une autre équation pour la pression peut être obtenue à partir de l'équation des échanges de volumes [III.7.13] et une forme linéarisée de l'équation d'état [IV.5], soient:

$$v_j^B = v^0 + \Delta t A \left[u_{j+1/2}^{n+1} - u_{j-1/2}^{n+1} \right]$$

$$v_j^B = v^0 - \frac{1}{\gamma} \frac{v^0}{p^0} (p_j^{n+1} - p_j^n)$$

avec $v^0 = A \Delta x$

En combinant les deux équations précédentes on obtient:

$$\frac{p_j^{n+1} - p_j^n}{\Delta t} + \gamma p_0 \frac{u_{j+1/2}^n - u_{j-1/2}^n}{\Delta x} = 0 \quad [\text{E.2}]$$

Une solution du système (E.1 , E.2) peut être obtenue par analyse de Fourier.

Ainsi si on pose:

$$p_j^n = A^n \gamma p_0 \exp [ijk \Delta x]$$

$$u_{j+1/2}^n = B^n C_0 \exp [ik(j+1/2)\Delta x]$$

$$\begin{pmatrix} A^{n+1} \\ B^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\alpha^2(1-\phi_p)}{1-\alpha^2\phi_p} \\ \alpha \\ \alpha \\ \frac{1}{1-\alpha^2\phi_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1-\alpha^2\phi_p \\ 1 \\ 1-\alpha^2\phi_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^n \\ B^n \end{pmatrix}$$

où:

$$\alpha = -2i C_s \sin \frac{\Psi}{2}$$

$$C_s = C_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$C_0 = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\gamma P_0 / \rho_0}$$

$$\Psi = k \Delta x$$

La solution numérique est stable, si et seulement si, toutes les valeurs propres de la matrice sont plus petites que l'unité. Cette condition est vérifiée si:

$$(1 - \phi_p) C_s \leq 1 \quad [\text{E.3}]$$

Le schéma est donc stable pour $\phi_p \geq 1 - 1/C_s$

D'après ce résultat, ϕ_p doit être donc calculée à chaque pas de temps en fonction du nombre de Courant local basé sur la célérité du son.

2: Détermination du paramètre ϕ_D pour la diffusion

Comme pour le paramètre ϕ_p , la détermination du paramètre d'implicité ϕ_D est faite à partir de l'analyse d'une équation de diffusion à coefficient constant, en monodimensionnel.

$$\frac{Y_j^{n+1} - Y_j^n}{\Delta t} = \nu \left[(1 - \phi_D) \frac{Y_{j+1}^n - 2Y_j^n + Y_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \phi_D \frac{Y_{j+1}^{n+1} - 2Y_j^{n+1} + Y_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right]$$

[E.4]

On pose:

$$Y_j^n = A^n \exp(ijk \Delta x)$$

En remplaçant dans l'équation [E.4] on a:

$$\frac{A^{n+1}}{A^n} = \frac{1 + 2(1 - \phi_D) C_d (\cos\psi - 1)}{1 - 2\phi_D C_d (\cos\psi - 1)},$$

[E.5]

où

$$C_d = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2},$$

$$\psi = k \Delta x.$$

Pour que la solution ne change pas de signe et soit stable, il faut satisfaire la condition suivante:

$$0 \leq \frac{A^{n+1}}{A^n} \leq 1$$

[E.6]

Il est facile de voir que l'inégalité de droite de la relation [E.6] est vérifiée. Pour avoir $\frac{A^{n+1}}{A^n}$ positif, il faut que le numérateur de la relation [E.5] soit positif, puisque le dénominateur l'est toujours.

Le numérateur est minimal pour $\psi = \Pi$, il devient alors: $1 - 4(1 - \Phi_D) C_d$.
 D'où la condition: $(1 - \Phi_D) C_d \leq 1/4$; et donc:

$$\Phi_D \geq 1 - 1/4 C_d \quad [\text{E.7}]$$

Φ est calculé par l'équation:

$$\Phi_D = \begin{cases} 0 & \text{si } (C_d)_{ijk}^n \leq \frac{1}{4} , \\ \left[1 - \frac{1}{f(C_d)_{ijk}^n} \right] & \text{si } (C_d)_{ijk}^n > \frac{1}{4} , \end{cases}$$

où:

$$(C_d)_{ijk}^n = \frac{\mu_{ijk}^n}{\rho_{ijk}^n} M \Delta t \frac{\Delta x_i^2 \Delta x_j^2 + \Delta x_i^2 \Delta x_k^2 + \Delta x_j^2 \Delta x_k^2}{\Delta x_i^2 \Delta x_j^2 \Delta x_k^2} ,$$

$$M = \max \left(2 + A_3 , \frac{1}{Pr} , \frac{1}{Sc} , \frac{1}{Pr_k} , \frac{1}{Pr_\epsilon} \right) .$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1 A.A.AMSDEN, P.J.O'ROURKE et T.D.BUTLER, "KIVA-II: A Computer Program for Chemically Reactive Flows with Spray", Los Alamos National Laboratory report LA-11560-MS, (Mai 1989).
- 2 A.A.AMSDEN, T.D.BUTLER, P.J.O'ROURKE et J.D.RAMSHAW, "KIVA: A Computer for Two-and Three-Dimensinal Fluid Flows with Chemical Reactions and Fuel Spray", Los Alamos National Laboratory report LA-10245-MS (February 1985).
- 3 J.P.RAMSHAW, P.J.O'ROURKE et A.A.AMSDEN, " Acoustic Damping of explicit calculations of fluid flows at low Mach number", Los Alamos National Laboratory report LA-10641-MS, (January 1986).
- 4 R.Kh.ZEYTOUNIAN, "Les modèles asymptotiques de la mécanique des fluides", Notes in physics Springer-Verlag, (1986-1987).
- 5 KEVINT et W.THOMPSON, "Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems", Journal of computational Physics 68, 1-24, (1987).
- 6 KEVINT et W.THOMPSON, "Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems, II", Journal of computational Physics 89, (1990).
- 7 D.DUTOYA, "Simulation numérique des écoulements dans les cavités inter-disques. Présentation et discussion de la méthode de calcul utilisée dans le code ICARE", ONERA, RT n° 11/3469 EY, (1985).
- 8 C.W.HIRT, A.A.AMSDEN et J.L.COOK, "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds" Journal of computational Physics 14, pp 227-253, (1974).

- 9 S.V PATANKAR, "Numerical Heat Transfert and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Corporation, Washington D.C. (1980).
- 10 L.D.CLOUTMAN, J.K.DUKOWICZ et J.D.RAMSHAW, "CONCHAS-SPRAY: A Computer Code for reactive flows with Fuel Spray," Los Alamos National Laboratory report LA-9294-MS, (Mai 1982).
- 11 F.H.HARLOW et A.A.AMSDEN, "Numerical Calculation of Almost Incompressible Flow", Journal of Computational Physics 3, pp 80-93, (1968).
- 12 P.J.O'ROURKE et A.A.AMSDEN, "Implementation of a Conjugate Residual Iteration in the KIVA Computer Program", Los Alamos National Laboratory report LA-10849-MS, (octobre 1986).
- 13 A.BRANDT, J.E.DENDY, Jr. et H.RUPPEL, "The Multigrid Method for Semi-Implicit Hydrodynamic Codes", Journal of Computational Physics 34, 348-370, (1980).
- 14 J.D.RAMSHAW, P.J.O'ROURKE et L.R.STEIN, "Pressure Gradient Scaling Method for Fluid Flow With Nearly Unifom Pressure", J. of Computational Physics 58, pp 361-376, (1985).
- 15 A.A.AMSDEN, T.D.BUTLER et P.J. O'ROURKE, "The KIVA-II Computer for Multidimensional Chemically Reactive Flows with Sprays", Los Alamos National Laboratory, report NM-8702072.
- 16 P.J.O'ROURKE et F.V.BRACCO, "Two Scaling Tranformations for the Numerical Computation of Multidimensional Unsteady Laminar Flames", Journal of Computational Physics 33, pp 185-203, (November 1979).
- 17 B.VAN LEER, "Toward the Ultimate Conservative Difference Scheme, V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method", Journal of Computational Physics 32, pp 101-136 (1979).
- 18 O.REYNOLDS, "On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion".

-
- 19 A.FAVRE, "Equations statistiques des gaz turbulents", C.R.A.S. 246, (1958).
- 20 A.FAVRE, L.S.G.KOVASZNAY, R.DUMAS, J.CAVIGLIO et M.COANTIC, "La turbulence en mécanique des fluides", Gauthier-Villars, (1976).
- 21 J.BOUSSINESQ, "Essais sur la théorie des eaux courantes", Mémoire présenté par divers savants à l'Académie des Sciences, Paris; tome 23, n°1, (1877).
- 22 J.BOUSSINESQ, "Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section". I-II; Gauthier-Villards, Paris, (1897).
- 23 L.PRANDTL, "Uber die ausgebildete turbulenz", Z. Angew. Math. Mech. Vol 5, (1925).
- 24 H.G.ELROD et C.W.NG, "A theory for turbulent fluid films and its applications", J. of Lubrification technology ASME, vol 89, N° 3. (1967).
- 25 J.NIKURADSE, "Gesetzmässigkeiten der turbulenten Stromung in Glatten Rohren", Forshg arb Ing Wes, N° 356, (1932).
- 26 V.N.CONSTANTINESCU, "Influence of the Law of variation of the mixing length on the turbulent in the lubricant layer", Rev Mec Appli, 5, (1960).
- 27 E.R.VAN DRIEST, "On turbulence Flow near a Wall", J. of Aero Science, Vol 23, (1956).
- 28 J.C.MONNIER, "Thèse de doctorat à l'Université des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois", (1989).
- 29 A.N.KOLMOGOROV, "Equations of turbulent motion of incompressible fluid", Izv. Akad. Nauk. SSSR, Seria Fizickiska VI, 56, (1942).
- 30 R.BORGHI, "Réactions chimiques en milieu turbulent", Thèse de Doctorat

- d'Etat, Université de Pierre et Marie Curie, Paris VI, (1978).
- 31 D.VANDROMME, "Contribution à la modélisation et la prédiction d'écoulements turbulents à masse volumique variable", Thèse de doctorat d'Etat, Université des Sciences et techniques de Lille, (1983).
- 32 K.H.NG et D.B.SPALDING, "Some applications of a turbulence model to boundary layers near walls", Phys. of Fluids, vol. 15, (1974).
- 33 P.G.SAFFMAN et D.C.WILCOX, "Turbulence model predictions for turbulent boundary layers", AIAA Journal, Vol. 12, N° 4, (1974).
- 34 A.LIN et M.WOLFSHTEIN, "Tensorial volume of turbulence", Phys. of Fluids, Vol. 23, part 3, (1980).
- 35 H.TENNEKES et J.L.LUMLEY, "A first course on turbulence", MIT Press, Cambridge, Massachusetts, (1976).
- 36 B.E.LAUNDER et D.B.SPALDING, "Mathematical models of turbulence", Academic Press, London et New-York, (1972).
- 37 A.K.M.F.HUSSAIN et W.C.REYNOLDS, "Measurements in fully developed turbulent channel flow", J. of Fluid Engineering, vol 97, (1980).
- 38 S.HASSID et M.POREH, " A turbulent energy model for flows with drag reduction", J. of Fluids Engineering ASME, vol 97, (1965).
- 39 S.CANDEL "Mécanique des fluides", Dunod université (1990).
- 40 R.COURANT, K.O.FRIEDRICHS, H.LEWY
"Über die Parprillen Disserenzengleichungen der Mathematischn Phycis"
Mathematische Annulen Vol 100 pp 32-74.

-
- 41 T. POINSOT "Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous reacting flows" Ecole de printemps de Mécanique des fluides numériques, AUSSOIS (1991).
- 42 M.K. DENHAM et M.A. PATRICK "Laminar Flow over a downstream-facing step in a two-dimensional flow channel" Trans. inst. Chem. Engrs, Vol. 52 (1974).
- 43 A.F. GHONIEM et Y.CAGNON "Vortex Simulation of Laminar Recirculation Flow" Journal of computational Physics Vol. 68, (1987).
- 44 J.N. SCOTT, OH. DAYTON, W.L. HANKEY, Jr. WRIGHT-PATTERSON; "Numerical Simulation of Cold Flow in an Axisymmetric Centerbody Combustor"; Plasma Dynamics Conference; Danvers, Massachusetts. 12-14 Juillet (1983).
- 45 J. COUSTEIX, X. DE SAINT VICTOR, R. HOUEVILLE "X-Marching Methods to solve the Navier-Stokes Equations in the Two and Three-Dimensional Flows". Third Symposium on Numerical and Physical Aspects of Aerodynamics Flows. State University, long Beach, California.
- 46 O.K. KWON, R.H. PLECHER, J.P LEWIS "Prediction of Studden Expansion Flows Using the Boundary-Layer Equation" Jour of Fluids Engineering Vol 106 pp 285-291 (1984).
- 47 P. GERMAIN, P. MULLER "Introduction à la mécanique des milieux continus" Masson (1986).
- 48 NAYFEH "Perturbation Methods", Wiley. (1973).
- 49 A. LAVERDANT "Contribution à l'étude des instabilités de combustion des foyers aérobies" Thèse de Doctorat d'état, université de Rouen, Septembre (1991)
- 50 F. DURST, J.C.F. PEREIRA "Time-Dependent Laminar Backward-Facing Step Flow in a Two-Dimensional Duct", Jour. of Fluids Engineering, vol 110, pp 289-296. (1988).

- 51 E.W. ADAMS, J.K.EATON "An LDA study of the Backward-Facing Step Flow, Including the Effects of Velocity Bias", Jour. of Fluids Engineering, vol 110, pp 275-282. (1988).

