

50376  
1993  
266

50376  
1993  
266

N° d'ordre 1185

**ANALYSE D'ADAPTATION DES STRUCTURES ELASTO-PLASTIQUES  
AVEC PRISE EN COMPTE DES EFFETS GEOMETRIQUES**

**SHAKEDOWN ANALYSIS OF ELASTIC-PLASTIC STRUCTURES  
ACCOUNTING FOR GEOMETRICAL EFFECTS**

Travaux de thèse de doctorat présentés pour l'obtention du titre de Docteur en Sciences, dans la spécialité "Fiabilité des Structures Mécaniques", par

**J.-B. TRITSCH**



SOUTENUE le 22 NOVEMBRE 1993

Membres du Jury :

Président : **F. PARSY**  
Rapporteurs : **O. DEBORDES**  
**G. DE SAXCE**  
**J. GROSS-WEEGE**  
**NGUYEN DANG HUNG**  
Examineurs : **D. WEICHERT**

**ECOLE UNIVERSITAIRE D'INGENIEURS DE LILLE**

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE**

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma gratitude envers Monsieur le Professeur MICHEAU, alors directeur du département de mécanique de l'E.U.D.I.L., qui a pris la décision de m'accueillir dans sa structure en temps qu'enseignant chercheur, ainsi que envers Monsieur THERON, responsable de la scolarité, qui a encadré efficacement mes activités d'enseignement pendant cette période.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur WEICHERT, mon directeur de thèse, pour les conseils et l'aide indispensable qu'il m'a fournis tout au long de ce travail.

Je veux également remercier les membres du jury, Messieurs DEBORDES, DE SAXCE, GROSS-WEEGE, NGUYEN DANG HUNG et PARSY, pour avoir bien voulu s'intéresser à ce travail. Je remercierai particulièrement Monsieur le Professeur PARSY pour les "éclairages" théoriques qu'il m'a apporté, ainsi que Monsieur GROSS-WEEGE, qui m'a permis d'exploiter ces travaux et dont l'aide me fut toujours très précieuse.

Je suis reconnaissant envers mes collègues de bureau, Messieurs WOZNICA et TEYEB pour l'ambiance de travail et les discussions fructueuses que nous avons pu vivre ensemble.

Ma gratitude va également à tout ceux qui, directement ou indirectement, ont contribué au bon avancement de ce travail, agents de service, secrétaires, collègues... Parmi ceux-ci, je mentionnerai Monsieur MUNOZ, dont le travail d'assistance informatique me fut indispensable.

En dernier lieu, je tiens à remercier tous mes proches, parents et amis, et plus particulièrement mon épouse et mes enfants, pour le soutien moral qu'ils m'ont apporté. C'est à ces derniers et à leur patience que je dédie ce rapport.

# I

## PRESENTATION :

Chaque fois que l'on conçoit un système mécanique, se pose le problème de l'évaluation de sa résistance et de sa fiabilité vis-à-vis des charges qu'il aura à supporter. ("charges" est ici un terme général qui comprend à la fois les sollicitations mécaniques, thermiques, et cinématiques). La plus sûre manière d'arriver à un résultat concret est de procéder à des essais expérimentaux sur la structure; il n'est alors pas toujours évident de créer des conditions d'essais "parfaites"; de plus, le coup financier limite souvent les ambitions. Ce type d'expérimentation est par exemple utilisé lors de la certification de nouveaux produits.

Le recours à la programmation sur ordinateurs, qui permet la modélisation numérique de structures, offre de multiples avantages; en particulier celui de montrer le comportement d'une structure de façon précise. On peut alors envisager d'apporter des améliorations avant même le stade de leur fabrication; on accède ainsi à l'idée de structures optimisées. Il reste cependant à préciser le domaine de validité de la méthode numérique mise au point; cette validité dépend, pour une part, de la finesse du modèle numérique choisi pour représenter la loi de comportement du matériau, qui ne peut être appréhendée que par des expérimentations... Méthodes numériques et expérimentations sont donc complémentaires.

Parmi les différents principes d'évaluation de la fiabilité des structures élasto-plastiques existant, celui du calcul à l'adaptation occupe une place privilégiée. En effet, après l'Elasticité, l'Analyse Limite a proposé de déterminer les conditions de charges monotones limites après lesquelles la structure s'écroule. On accède alors à l'idée qu'avant de s'écrouler, la structure peut subir des déformations plastiques irréversibles; l'analyse d'adaptation généralise cette démarche au cas de l'histoire quelconque de charges évoluant entre des limites prescrites. C'est là l'intérêt de la méthode car il n'est pas toujours possible de prévoir avec exactitude l'histoire des charges que subira la structure. Cette évolution quelconque suscite parfois un certain scepticisme de la part de ceux qui pensent que, sans la connaissance complète de l'histoire du chargement, il est impossible de prévoir la réponse de la structure.

Certes nous serons incapables de donner le spectre des contraintes et des déformations en tous points, mais il est souvent plus important de savoir si la structure va s'écrouler ou s'adapter. Le théorème statique d'adaptation stipule simplement que, pour une histoire quelconque de charges évoluant entre des limites prescrites, si certaines conditions sont remplies, la réponse élasto-plastique de la structure deviendra purement élastique (la structure s'adaptera). On comprend mieux l'intérêt pratique de la méthode, puisqu'au lieu de faire un calcul incrémental sur l'histoire d'un chargement, on obtient directement une réponse valable pour tous les histoires de charges comprises dans le "domaine d'adaptation". Remarquons cependant que du fait de l'infinité des histoires possibles, la validation expérimentale de ce domaine n'est pas évidente.

### **I.1.Historique :**

La première étude sur les structures élasto-plastiques soumises à des charges variables semble être due à BLEICH ([3](1932); mais MELAN([50](1936), pour les poutres ([51](1938b)) pour les milieux continus tridimensionnels), est le premier à proposer une appréhension plus générale du phénomène d'adaptation sous la forme d'un théorème, abondamment cité dans la littérature comme "théorème de MELAN", ou encore "théorème statique d'adaptation" (statique se comprend ici par opposition à cinématique). La démonstration de ce dernier, dont l'ébauche est améliorée par SYMONDS ([82](1951)) et KOITER ([36](1952)), n'est obtenue que plus tard, dans un cadre mathématique rigoureux.

L'approche cinématique est due à KOITER; Dans un article synthétique ([37] (1960)), cet auteur introduit la notion de coefficient de sécurité vis-à-vis de l'adaptation, ce qui constitue un progrès incontestable vers la maturité de la théorie développée. On peut alors considérer que les bases de la théorie classique sont fondées; DEBORDES et NAYROLES ([10](1976)) en proposent une formulation mathématique dans un cadre algébrique rigoureux, et présentent une méthode de calcul par sous-structuration.

Le noyau de la théorie dite "classique" est caractérisé par les hypothèses restrictives suivantes :

- géométrie linéaire
- évolutions quasi-statiques

- les sollicitations thermiques ne sont pas considérées
- élasto-plasticité parfaite
- lois d'écoulement associées.

On cherche évidemment à repousser ces limites. Déjà, MELAN ([51](1938b)) propose l'introduction du modèle d'écrouissage linéaire cinématique illimité de PRAGER. Le premier article mentionnant la prise en compte des sollicitations thermiques est dû à PRAGER ([67](1957)). CERADINI ([5](1969)) étend le premier théorème au cas dynamique, l'extension du théorème cinématique étant due à CORRADI et MAIER. ([8](1974)); CERADINI [6](1980) fait le point sur la situation dans ce domaine.

Pour les sollicitations thermiques, l'approche cinématique est choisie par ROZENBLUM ([70](1965)), DEDONATO ([11](1970) pour des charges cycliques, MAIER ([41](1969)) qui montre les liaisons entre l'approche cinématique et l'approche statique au moyen de la dualité en programmation linéaire, et qui introduit la prise en compte de lois non associées. L'approche statique est utilisée par KÖNIG ([26](1969), [29](1979)) pour l'influence de la température sur le module d'élasticité et sur la limite élastique du matériau. Mentionnons également l'étude de PONTERS ([65](1972)), qui aborde le fluage visqueux. Enfin, WEICHERT & GROSS-WEEGE ([90](1988)), GROSS-WEEGE & WEICHERT ([19](1992)) proposent d'étudier ce type de sollicitations dans un cadre théorique plus général sur lequel nous reviendrons.

Après l'introduction de l'écrouissage par MELAN ([51](1938b)), les études sur la loi de comportement se poursuivent dans cette voie: avec NEAL ([58](1950)), MAIER ([42](1973)) qui utilise une surface d'écoulement linéarisée pour des considérations numériques; PONTER ([66](1975)), MANDEL ([48](1976)) qui utilise le modèle des Matériaux Standards Généralisés (M.S.G.) de HALPHEN et NGUYEN QUOC SON ([21](1975)); KÖNIG et SIEMASZKO ([35](1988)) qui reprennent la démarche adoptée par MAIER. Tous traitent le cas de l'écrouissage cinématique linéaire illimité. Mais PONTER ([66](1975)), ZARKA et CASIER ([96](1981)) et KÖNIG ([34](1987)) constatent que l'hypothèse de l'écrouissage illimité conduit à l'impossibilité de prédire la non-adaptation par déformations plastiques cumulées, et que seule la plasticité alternée peut causer l'effondrement de la structure. L'écrouissage cinématique limité est proposé par WEICHERT

et GROSS-WEEGE ([90](1988)) au moyen d'une condition d'écoulement simplifiée à deux surfaces et l'emploi du modèle (M.S.G), ainsi que par STEIN ZHANG et KÖNIG ([81](1990)) à l'aide d'une formulation non-linéaire, similaire au modèle micro-mécanique proposé par NEAL ([58](1950)) pour les états de contraintes unidimensionnels. Les derniers développements concernant la loi de comportement sont issus, d'une part, de l'intérêt d'appliquer la théorie d'adaptation aux géomatériaux comme les sols (WEICHERT et RAAD ([94](1992))), et d'autre part, de la nécessité de prendre en compte d'autres facteurs influençant la fiabilité pour les structures métalliques, comme par exemple l'endommagement (HACHEMI et WEICHERT ([20](1992))).

Dans le même temps, les performances du matériel informatique évoluent, et avec elles, la puissance des méthodes numériques disponibles. On passe ainsi de l'étude de structures discrétisées par des éléments unidimensionnels utilisant une formulation matricielle et l'optimisation linéaire, à l'étude de structures bidimensionnelles discrétisées par éléments finis et l'optimisation non-linéaire. Le lecteur trouvera les détails de cette évolution en se reportant aux synthèses réalisées par COHN et MAIER ([7](1979)), KÖNIG et MAIER([31](1981)), MAIER et LLOYD SMITH ([43](1986)), KÖNIG ([34](1987)), GROSS-WEEGE ([18](1990)).

Mais l'amélioration qui nous intéresse plus particulièrement, concerne l'influence des effets géométriques, dont la prise en compte sera justifiée dans le paragraphe suivant. Le premier qui aborde ce thème est MAIER ([42](1973)) qui parle d'effets géométriques du second ordre au sujet de l'influence des déplacements sur les équations d'équilibre. L'approche consiste à étudier les petites évolutions au voisinage d'une configuration déformée prise comme référence. Cette démarche est appliquée à l'étude des structures discrètes via une formulation matricielle simplifiée. Le domaine de validité de l'extension du théorème proposé a été discuté par NGUYEN QUOC SON et GARY ([61](1983)), qui mettent en évidence le risque de déstabilisation du processus d'adaptation par phénomène de rochet (accumulation de déformations plastiques de manière cyclique).

WEICHERT ([86](1983), [88](1986)) introduit l'étude de l'influence des non-linéarités géométriques dans le cadre tensoriel utilisé en Mécanique de Milieux Continus (M.M.C). L'extension du premier théorème est proposée pour les cas où les informations sur

la configuration déformée probable sont disponibles avec un degré d'imprécision connu. Les grands déplacements arbitraires peuvent être considérés sous certaines hypothèses restrictives supplémentaires, qui ne permettent pas l'application pratique dans le cas général. C'est pourquoi WEICHERT ([88](1986), [92](1989)) présente deux cas particuliers d'applications possibles, dont celui qui consiste à étudier les petites évolutions au voisinage d'une configuration déformée de référence (problème (ii)). Il mentionne l'intérêt des approximations cinématiques proposées par CASEY ([4](1985)). Celles-ci permettent en effets d'étendre la validité du cadre de la cinématique classique en géométrie linéaire, à certaines classes de transformations géométriques comme, par exemple, les petites elongations et rotations modérées; cette approximation s'appliquant particulièrement aux structures de type plaque et coque. On est alors attaché à la décomposition additive, en parties purement élastique et purement plastique, du tenseur des déformations totales, et du tenseur des vitesses de déformation qui en dérive. Ce sujet, point névralgique des développements en élasto-plasticité et géométrie non-linéaire, a fait couler beaucoup d'encre, et nous y reviendrons dans le chapitre consacré aux grandes déformations.

La méthode matricielle est mise à profit par KÖNIG ([30](1980), [33](1984)), KÖNIG et SIEMASZKO ([35](1988)) pour étudier l'influence des effets géométriques sur la stabilité des structures. GROSS-WEEGE ([17](1988)) présente une approche tensorielle non-linéaire dont la formulation correspond au problème (ii) présenté plus haut. L'auteur montre par la suite ([18](1990)) que cette formulation peut servir de base à une unification des différentes approches non-linéaire déjà établies. Il est suivi dans cette démarche par SACZUK et STUMPF ([71](1990)) qui aménagent la formulation, ainsi que par PYCKO & KÖNIG [68](1991). Toutes les formulations tensorielles utilisent l'artifice d'un "corps de comparaison purement élastique", soumis aux mêmes charges que le corps réel, et de forme de référence identique à celui-ci. Les résultats numériques présentés par GROSS-WEEGE concernent les coques de révolution faiblement courbées dont la modélisation par éléments finis repose en partie sur celle présentée par MORELLE et NGUYEN DANG HUNG ([53](1983)). Le problème de détermination du coefficient de sécurité à l'adaptation est résolu par un processus d'optimisation non-linéaire utilisant la méthode dite du Lagrangien Augmenté (voir : PIERRE et LOWE ([62](1975))).

Les résultats expérimentaux sur les structures de révolutions se limitent à ceux que LEERS, KLIE, KÖNIG, et MAHRENHOLTZ ([40](1985)) ont présentés. Pour les résultats antérieurs, le lecteur se reportera encore à KÖNIG et MAIER ([31](1981)), dans lequel on précise au sujet de résultats russes que "d'autres contributions, concernant le phénomène de rochet de composants nucléaires sous charges mécaniques et thermiques, sont dispersés dans la littérature spécialisée, souvent sous forme de rapports techniques".

## **I.2.Motivations :**

Dans les calculs de structures basés sur une théorie linéaire, on fait l'hypothèse des petits déplacements au voisinage de la configuration initiale, ce qui autorise à tout calculer dans celle-ci. Cette hypothèse est en général satisfaisante pour les structures rencontrées en génie civil, et plus particulièrement pour celles qui sont en béton; en revanche, ce n'est pas le cas pour les structures métalliques plaques et coques minces, car la théorie linéaire conventionnelle cesse d'être valable dès que les déplacements sont de l'ordre de l'épaisseur des parois (REISSNER ([69](1963)), PIETRASZKIEWICZ ([63](1980)), BASAR et KRÄTZIG ([1](1982)), SCHMIDT et WEICHERT ([73](1989)),...). Dans ce cas particulier, et en fonction des caractéristiques mécaniques du matériau métallique (par exemple acier doux), cela se produit alors que le comportement de la structure est encore purement élastique. Pour les structures de type plaque et coque minces, l'emploi d'une théorie non-linéaire est donc recommandée.

L'étude d'adaptation sous-entend la présence de déformations plastiques; pour les matériaux métalliques ductiles, celles-ci peuvent devenir bien plus grandes que les déformations élastiques supposées compatibles avec une approche géométriquement linéaire. De fait, se pose la question de la validité d'une théorie d'adaptation développée dans ce cadre, car l'effondrement de la structure peut intervenir alors que celui-ci n'est plus adapté pour l'étude.

La validation de la théorie d'adaptation dans une cadre géométrique aussi large que possible est donc nécessaire, et c'est dans cette optique que nous avons débuté nos travaux. Nous avons pour cela utilisé le formalisme tensoriel des grandes déformations dont

SIDOROFF ([76](1982)) a fait une présentation synthétique. Nos développements théoriques nous permettent d'obtenir d'une part une formulation originale du premier théorème d'adaptation, d'autre part un lien entre les différentes approches géométriquement non-linéaires. Nous utilisons la méthode numérique correspondant à l'une de ces approches et qui s'applique aux coques de révolution. Quelques aménagements nous conduisent à l'élaboration d'une méthode hybride.

Tous ces développements sont effectués sous les hypothèses suivantes :

- milieux continus isotropes
- élasto-plasticité
- phénomènes d'endommagement ignorés
- les déplacements qui permettent de distinguer les configurations restent modérés
- le problème de stabilité du processus d'adaptation vis-à-vis des effets géométriques n'est pas abordé.

# 1

## BASES DE LA THEORIE EN PETITS DEPLACEMENTS

Dans ce chapitre, nous rappelons les fondements de la théorie d'adaptation, fondements auxquels nous joignons nos remarques en guise de préambule à l'approche non-linéaire que nous adopterons plus loin.

Le matériau est supposé se comporter de manière élasto-parfaitement plastique.

Le cadre théorique est celui des petits déplacements. Les relations sont écrites par rapport à la configuration non déformée en repère orthonormé. Sans être restrictif sur le plan de la validité, le choix d'un tel repère permet de s'affranchir de la distinction entre composantes covariantes et composantes contravariantes.

### 1.1 Enoncé du premier théorème d'adaptation (dit statique) :

Si, pour une structure soumise à des charges extérieures évoluant de façon quelconque entre des limites prescrites, on peut trouver une distribution de contraintes résiduelles  $\bar{\rho}$  indépendante du temps telle que :

$$\sigma^{(e)}(t) + \bar{\rho} = \sigma^{(s)}(t) \quad \text{avec}$$

$\sigma^{(e)}(t)$  : contrainte due aux déformations élastiques libres

$\sigma^{(s)}(t)$  : état de contrainte sûr ( $\sigma^{(s)} < \sigma_{\text{limite}}$  en tous points)

alors, la structure s'adaptera à ce "domaine" de chargement, c'est-à-dire que les déformations plastiques cesseront d'évoluer après un intervalle de temps, et la réponse de la structure deviendra alors purement élastique.

#### Inversement :

Si l'on ne peut pas trouver de champ de contraintes résiduelles indépendant du temps tel que la somme de celui-ci avec le champ des contraintes élastiques libres soit un état de contrainte admissible  $\sigma^{(a)}$ , ( $\sigma^{(a)} \leq \sigma_{\text{limite}}$ ),

alors la structure ne s'adaptera pas.

## Démonstration de la première partie :

Pour cette démonstration, nous aurons besoin des entités suivantes :

$\sigma(t)$	: contrainte actuelle
$\varepsilon^{(e)}(t)$	: déformation élastique
$\varepsilon^P(t)$	: déformation plastique
$\rho(t)$	: contrainte résiduelle actuelle
$\varepsilon^{re}(t)$	: déformation élastique résiduelle correspondante
$\sigma^{(e)}(t)$	: contrainte due aux déformations élastiques libres
$\varepsilon^{(e)}(t)$	: déformation élastique libre correspondante

Pour simplifier l'écriture, nous supprimerons l'attribut "(t)" pour les entités dépendant du temps, la contrainte résiduelle indépendante du temps étant notée  $\bar{\rho}$ .

Les relations liant ces entités sont :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(e)} + \rho_{ij} \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ij}^{(s)} = \sigma_{ij}^{(e)} + \bar{\rho}_{ij} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^P \\ &= \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^{re} + \varepsilon_{ij}^P \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_{ij}^e = A_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(e)} = A_{ijkl} \sigma_{kl}^{(e)} \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_{ij}^{re} = A_{ijkl} \rho_{kl} \quad (1.6)$$

où "A", désignant le tenseur définit positif des coefficients élastiques, possède les symétries usuelles.

Supposons que  $\bar{\rho}$  existe, et introduisons la forme quadratique positive suivante :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A_{ijkl} (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij})(\rho_{kl} - \bar{\rho}_{kl}) dV \quad (1.7)$$

$$\text{alors } \dot{W} = \int_{\Omega} A_{ijkl} (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) \dot{\rho}_{kl} dV \quad (1.8)$$

$$\text{car } A_{ijkl} = A_{klij}$$

$$\text{et ou } \dot{W} = \frac{dW}{dt}$$

$$\text{donc } \dot{W} = \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^e dV \quad (1.9)$$

$$= \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(e)} - \dot{\epsilon}_{ij}^p) dV \quad (1.10)$$

$$= - \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^p dV + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^{(e)}) dV \quad (1.11)$$

$$\text{on a donc : } W = -I_1 + I_2$$

Or,  $I_2$  est nulle. Nous pouvons le montrer de deux façons différentes.

### Première méthode :

En petites déformations on définit

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\text{où } ( )_{,j} = \frac{\partial ( )}{\partial x_j}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$I_2 = \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(e)})_{,j} dV \quad (1.12)$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} I_2 = & - \int_{\Omega} (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij})_{,j} (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(e)}) dV \\ & + \int_{S_{\Omega}} (\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) (\dot{u}_i - \dot{u}_i^{(e)}) n_j dS \end{aligned} \quad (1.13)$$

Comme  $\rho$  et  $\bar{\rho}$  sont des champs de contraintes résiduelles, ils sont auto-équilibrés et vérifient donc les équations d'équilibre suivantes :

$$\rho_{ij,j} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\rho}_{ij,j} = 0 \quad (1.14)$$

sur  $S_f$ , partie de  $S$  où les efforts sont prescrits, on a :

$$\rho_{ij} n_j = 0 \quad \text{et} \quad \bar{\rho}_{ij} n_j = 0 \quad (1.15)$$

sur  $S_k$ , partie de  $S$  où les déplacements sont prescrits :

$$\dot{u} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{u}^{(e)} = 0 \quad (1.16)$$

**Conclusion :**

La deuxième partie de l'intégrale est nulle.

**Deuxième méthode :**

On peut appliquer le principe des puissances virtuelles à l'expression de  $dW/dt$ , sachant qu'en petites déformations celui-ci reste valable si l'on remplace les quantités par leurs dérivées par rapport au temps, ou inversement.

Appliquons ce principe à l'expression  $I_2$  de (1.11) :

Le champ des déformations  $\epsilon$  est un champ Cinématiquement Admissible (C.A), car il dérive du champ des déplacements réels.

Le champ des déformations  $\epsilon^{(e)}$  est lui aussi C.A, car issu du champ des déplacements "élastiques libres", c'est-à-dire de celui qui permet de passer de la configuration actuelle à une configuration déchargée réelle.

Comme  $\rho$  et  $\bar{\rho}$  vérifient (1.14) et (1.15) et que  $u$  et  $u^{(e)}$  sont C.A, on en déduit, d'après (1.13), que  $I_2$  est bien nulle.

**Remarques :**

-On ne peut en aucun cas appliquer ce principe à  $I_1$ , car le champ des déformations plastiques  $\epsilon^P$  pris séparément n'est pas cinématiquement admissible. Le champ des déformations élastiques totales  $\epsilon^e = \epsilon^{(e)} + \epsilon^{re}$  n'est pas, lui non plus, cinématiquement admissible. En fait, on peut réécrire l'équation (1.3) :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^P = \left( \epsilon_{ij}^{(e)} \right) + \left( \epsilon_{ij}^{re} + \epsilon_{ij}^P \right) \quad (1.3bis)$$

où les quantités entre parenthèses sont cinématiquement admissibles.

-La décomposition en trois parties permet donc de mettre en évidence des quantités Cinématiquement Admissibles.

**Conclusion :**

$$\dot{W} = -I_1$$

(1.1)-(1.2) donnent :

$$(\rho_{ij} - \bar{\rho}_{ij}) = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)}) \quad \text{dans } I_1$$

-En tenant compte de l'hypothèse de normalité pour la loi d'écoulement (stabilité du matériau au sens de DRUCKER), on en déduit que la dérivée par rapport au temps de la forme quadratique est strictement négative.

Pour la suite du raisonnement, la proposition classique est la suivante :

-La forme quadratique  $W$  ne peut pas devenir négative : elle doit donc "s'annuler" après un certain temps. Comme  $W$ , la dérivée  $dW/dt$  doit donc aussi s'annuler.  $dW/dt$  étant exprimée à partir d'un produit scalaire faisant intervenir le tenseur des taux de déformations plastiques et un tenseur non-nul (cf.1.11), cela revient à dire qu'après un certain temps", le taux de déformation plastique devient nul.

Comme l'ont fait remarquer certains auteurs (voir DEBORDES & NAYROLES ([10](1976)), DE SAXCE ([13](1989))), le raisonnement est faux d'un strict point de vue mathématique.; il suffit pour cela que " $W$ " tende asymptotiquement vers une valeur constante positive " $k$ " quand " $t$ " tend vers l'infini; on a alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (W) \rightarrow \text{cste} \quad \text{et} \quad W \geq 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{W}) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \dot{W} < 0$$

$$\text{donc} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{\epsilon}^p) \rightarrow 0$$

Cette idée de démonstration néanmoins ingénieuse est sauvée par l'introduction du coefficient de sécurité due à KOITER [37].

## 1.2. Coefficient de sécurité à l'adaptation :

Le coefficient de sécurité introduit par KOITER ([37](1960)) permet de dire de façon décisive que les déformations plastiques cessent d'évoluer après une durée déterminée. Cela revient à dire que l'énergie totale dissipée par déformations plastiques est bornée.

On avait :

$$\sigma^{(e)}(t) + \bar{\rho} = \sigma^{(s)}(t) \quad (1.2)$$

Supposons qu'il soit possible de trouver un coefficient de valeur  $m$ , dit de sécurité à l'adaptation, tel que :

$$m(\sigma_{ij}^{(e)} + \bar{\rho}_{ij}) \text{ avec } m > 1 \quad (1.17)$$

soit un état de contrainte admissible. De l'hypothèse de normalité, on déduit :

$$(\sigma_{ij} - m\sigma_{ij}^{(s)})\dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (1.18)$$

ce qui donne :

$$\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^p \leq \frac{m}{m-1}(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(s)})\dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (1.19)$$

$$\text{ou encore } \dot{W}_p = \int_{\Omega} \sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^p dV \leq -\frac{m}{m-1} \dot{W}$$

En intégrant par rapport au temps entre l'instant  $T_0$  du début des déformations plastiques et l'instant  $T$ , on obtient :

$$W_p \leq \frac{m}{m-1}(W(T_0) - W(T)) \quad (1.20)$$

Nous avons vu précédemment que la forme quadratique positive  $W$  tend vers une valeur constante de façon décroissante lorsque  $T$  tend vers l'infini. La valeur de  $W(T_0)$  est finie, et positive. Ainsi, pour toute valeur de  $m$  strictement supérieure à 1, l'énergie dissipée par déformations plastiques entre  $T_0$  et  $T$  est bornée. On est donc sûr qu'il y a adaptation.

Le cas  $m = 1$  conduit à une énergie dissipée infinie... cela revient à considérer qu'il n'y a pas adaptation.

Il reste à régler plusieurs questions, en particulier celle de la connaissance de l'énergie maximale que peut dissiper une structure pour les charges qu'elle supporte. Nous sommes limités par le fait que la théorie, développée sur la base des milieux continus, ignore le phénomène de fissuration et de rupture : les déformations plastiques peuvent donc évoluer localement sans limite dans le temps. L'énergie ainsi dissipée peut alors être théoriquement infinie. En fait, l'existence d'un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps garantit l'existence d'un "noyau" élastique vital pour la structure. C'est la notion de "sanctuaire d'élasticité" développée par NAYROLES et WEICHERT ([57](1993)).

### 1.3. Exemple illustratif :

Le but de ce paragraphe est d'illustrer la notion de champ de contraintes résiduelles tout en utilisant un cadre géométrique simple permettant de modéliser des "déformations" élastiques et plastiques. Deux démarches seront présentées : la première est issue directement de celle employée dans l'exposé du théorème statique; la seconde fait appel à la notion de corps de comparaison purement élastique, notion assez largement utilisée dans les études récentes visant à étendre le théorème précité.

Considérons une poutre en flexion, étudiée en petits déplacements, et en problème plan (plaque infinie). Soumettons cette poutre supposée élasto-parfaitement plastique à un couple pour lequel les fibres les plus éloignées de la fibre neutre dépassent leur limite élastique. Nous faisons l'hypothèse que les sections droites restent planes.

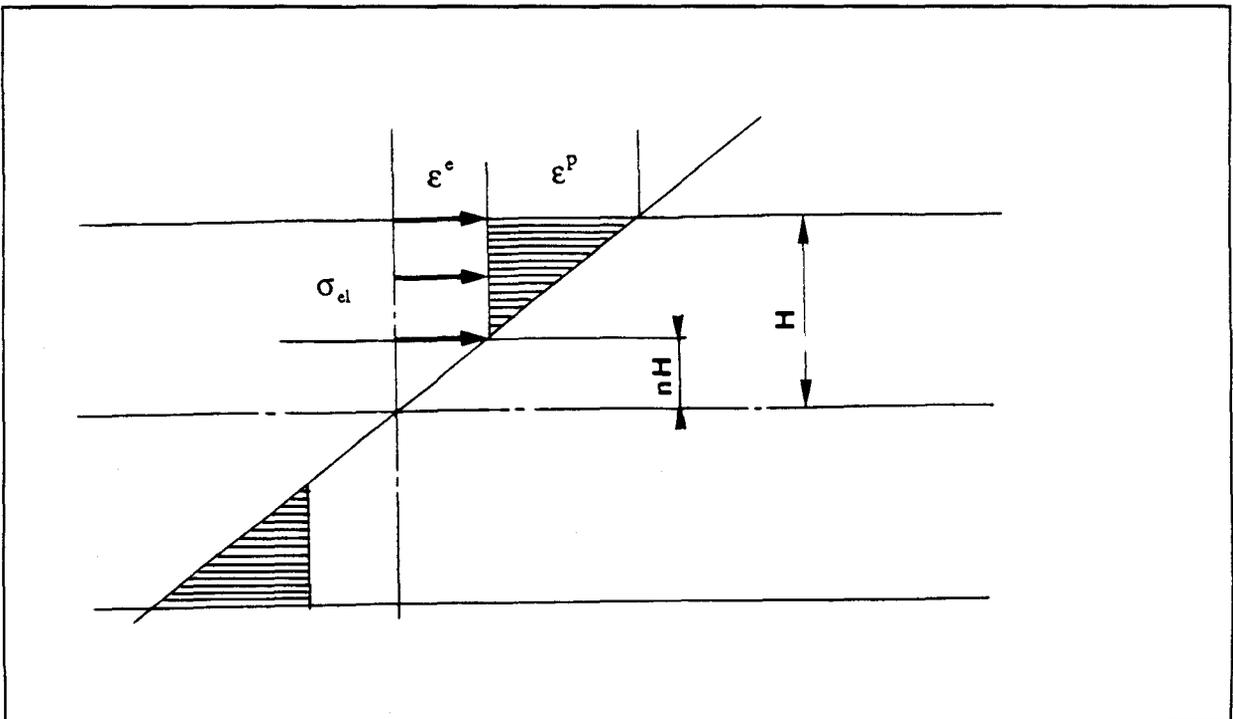


Figure 1.1 : Structure sous charge

La poutre comprend donc une zone restée élastique, et une zone où les déformations plastiques sont apparues (Figure 1.1). Lorsque nous déchargeons ensuite cette poutre, nous constatons une "rotation" résiduelle des sections droites notée  $\chi^*$ .

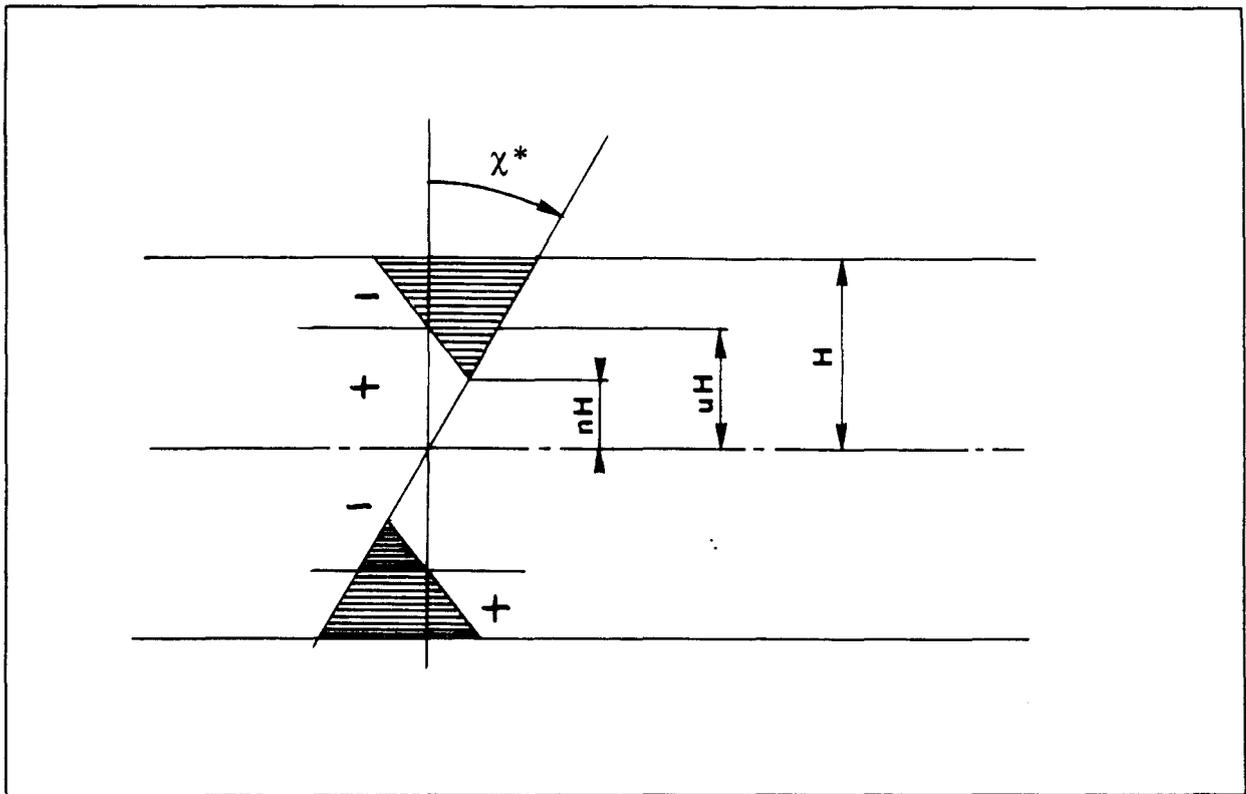


figure 1.2 : Structure déchargée

De deux zones pour les déformations, nous pouvons passer à un découpage en trois zones, en considérant les contraintes dans la configuration déchargée (Figure 1.2) :

- une zone en traction et déformations purement élastiques (de 0 à nH).
- une zone en traction et déformations élastiques et plastiques (de nH à uH).
- une zone en compression et à déformations élastiques et plastiques (de uH à H).
- on déduit la demi-poutre inférieure par analogie, mais avec des signes opposés.

Nous avons :

$$\chi = \frac{\sigma_{cl}}{nHE} \text{ rotation finale sous charge} \quad (1.21)$$

(En fait, ce que nous appelons rotation est homogène à une courbure)

$$M = \sigma_{cl} BH^2 \left(1 - \frac{n^2}{3}\right) \text{ moment appliqué} \quad (1.22)$$

$$u = \frac{2}{(3-n^2)}$$

$$\begin{aligned} \chi^* &= \chi - \frac{\sigma_{el}}{uHE} \\ &= \frac{(2-3n+n^2)\sigma_{el}}{2nHE} \end{aligned} \quad (1.23)$$

- $\sigma_{el}$  : contrainte limite d'élasticité  
 E : représente ici le module d'Young  
 H : demi-hauteur de la section droite  
 B : épaisseur de la poutre

Ainsi, en fonction de  $z$  (figure 1.2), la contrainte résiduelle est définie par :

de  $z = 0$  à  $z = nH$  :

$$\rho(z) = \chi^* Ez \quad (1.24)$$

de  $z = nH$  à  $z = H$  :

$$\rho(z) = \chi^* E \frac{(z-uH)}{(n-u)} \quad (1.25)$$

Soit  $B_0$  une poutre purement élastique de même forme et de même module d'élasticité que la poutre initiale et soumise au même moment de flexion. Le champ de contraintes est :

$$\sigma^o(z) = \chi^o Ez$$

$$\sigma_{max} = \chi^o EH \quad (1.26)$$

$$\text{et } M = \frac{2}{3} \sigma_{max} H^2 B \quad (1.27)$$

$$\text{donc } \sigma_{max} = \sigma_{el} \frac{(3-n^2)}{2} . \quad (1.28)$$

Vérifier s'il est possible de retrouver l'expression de la contrainte résiduelle en utilisant les relations fournies par la poutre  $B_0$  :

-de  $z = 0$  à  $z = nH$  (zone élastique) nous avons :

$$\varepsilon^e = \varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{re}$$

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{re}) = \sigma^{(e)} + \rho$$

donc (en utilisant 1.21, 1.26, 1.28 et en comparant avec 1.23)

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \sigma(z) - \sigma^{(e)}(z) \\ &= E(\chi - \chi^o)z \\ &= E\chi^* z \end{aligned} \tag{1.29}$$

et nous retrouvons bien le résultat initial (1.24); en résumé, nous pouvons écrire :

$$\chi - \chi^o = \chi^* \tag{1.30}$$

ce qui, avec la relation (1.23) donne :

$$\chi^o = \frac{\sigma_{e1}}{uHE}$$

donc avec (1.26) :

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_{e1}}{u}$$

-de  $z = nH$  à  $z = H$  :

$$\varepsilon = \varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{re} + \varepsilon^p$$

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{re}) = \sigma^{(e)} + \rho$$

donc

$$\begin{aligned} \rho(z) &= E\varepsilon^{re}(z) \\ &= E(\varepsilon(z) - \varepsilon^p(z) - \varepsilon^{(e)}(z)) \\ &= E((\chi - \chi^o)z - \varepsilon^p(z)) \\ &= E(\chi^* z - \chi(z - nH)) \end{aligned} \tag{1.31}$$

En exprimant  $\chi$  en fonction de  $\sigma_{e1}$  n H E (1.21), puis  $\sigma_{e1}$  en fonction de  $\chi^*$  n u H E (1.21 et 1.23), on obtient bien la relation (1.25).

### Conclusion :

Nous avons pu vérifier sur cet exemple que l'artifice du corps de comparaison purement élastique donne le même résultat que le calcul classique dans le cadre géométrique des petits déplacements.

D'après la formule (1.30), nous vérifions également que la déformée résiduelle peut être obtenue par comparaison de la déformée de la poutre réelle avec celle de la poutre purement élastique (Figure 1.3).

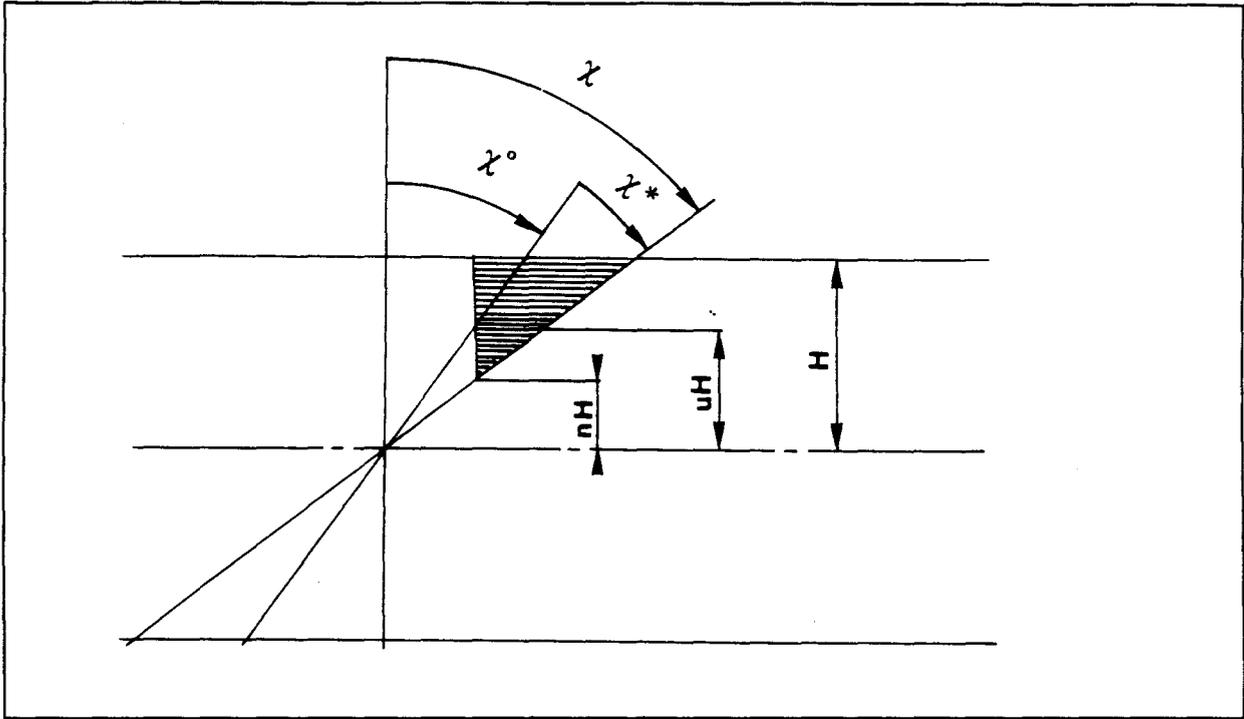


Figure 1.3 : Relation entre les différentes entités de déplacement.

Ajoutons la remarque suivante : quelle que soit l'évolution du moment sollicitant la poutre entre la valeur nulle et la valeur maximale atteinte (avant plastification de toute une section droite), il n'y aura plus d'autre déformation plastique, et la poutre répondra de façon purement élastique. L'adaptation de la poutre pour la valeur maximale atteinte par le moment est donc immédiate, pourvu que celle-ci soit inférieure à la valeur de charge-limite. Nous sommes donc en présence d'un cas particulier pour lequel la charge d'adaptation et la charge-limite sont identiques.

## GRANDES DEFORMATIONS ET FORMULATIONS DE L'ADAPTATION

Après avoir précisé les notations utilisées, nous porterons essentiellement notre attention sur les particularités de la description des grandes déformations élasto-plastiques. Puis nous situerons brièvement les précédentes travaux sur l'adaptation en géométrie non-linéaire.

### 2.1.NOTATIONS TENSORIELLES

#### 2.1.a.Notations

Tout au long de notre étude, nous utilisons la notion de tenseur. Ce paragraphe nous permet de préciser les notations employées. Nous voulons en particulier rappeler la distinction qu'il y a entre un tenseur et sa matrice de valeurs scalaires.

Un tenseur est une entité intrinsèque, et donc ne dépend pas du repère de projection. Comme exemple, prenons le tenseur de premier ordre, plus communément appelé vecteur. Tout vecteur peut être projeté dans un repère quelconque ; en utilisant la convention d'Einstein, on peut écrire :

$$V = v^i e_i = V^i E_i \quad (2.1.1)$$

où  $V$  est le vecteur,  $e_i$  et  $E_i$  les vecteurs de base de deux repères,  $v^i$  et  $V^i$  les composantes du vecteur relatives à chacune des bases.

Tous les repères de projections sont équivalents. Mais certains repères de projection sont plus pratiques que d'autres pour l'écriture des composantes matricielle. Les règles de passage d'un repère à l'autre mettent en évidence l'opposition de variance entre composantes et vecteurs de base. Cette opposition est d'ailleurs garante du caractère intrinsèque de l'entité résultante. Dans (2.1.1), nous avons pris deux bases covariantes dans lesquelles les composantes seront contravariantes; on pourrait choisir de travailler avec l'espace dual : les

variances seraient alors inversées. L'illustration d'un changement de base relatif à (2.1.1) donne :

$$E_I = a_i^I e_i \tag{a}$$

$$\tag{2.1.2}$$

$$V^I = b_i^I v^i \tag{b}$$

où les matrices de passage "a" et "b" sont inverses l'une de l'autre.

Ce qui précède se généralise aux tenseurs d'ordre n. Nous avons adopté la convention qui identifie les indices inférieurs et supérieurs comme indices respectivement covariants et contravariant. L'habitude de noter les composantes d'un vecteur sous forme de matrice colonne nous impose dans ce cas précis l'identification de l'indice supérieur comme indice de ligne et de l'indice inférieur comme indice de colonne, conformément à (2.1.2.b). Mais en présence de plusieurs indices, c'est en fait l'ordre qui importe, et on identifie le premier indice comme indice de ligne, le second comme indice de colonne. Dans le cas des tenseurs d'ordre supérieur à 1 "non-symétriques", l'ordre des indices doit être respecté; la conservation de cet ordre sera garantie par l'interposition d'un point indiciel. La confusion entre ce dernier et le point utilisé pour symboliser le produit scalaire de deux vecteurs est évitée, car les deux notations ne peuvent pas être utilisées simultanément.

L'équation (2.1.2.a) est particulière puisque les éléments transformés sont les vecteurs de base. La matrice particulière contenant ces éléments doit s'écrire comme une matrice ligne, conformément à la convention adoptée; l'écriture matricielle ordonnée est donc représentée par :

$$E_I = e_i a_i^I \tag{2.1.2.a.bis}$$

On notera la cohérence de l'enchaînement ascendant des indices entre (2.1.2.b) et (2.1.2.a.bis) qui nous indique l'ordre matricielle à respecter. Nous utiliserons la notation matricielle essentiellement pour les matrices des composantes. (2.1.2.b) sera représenté par :

$$[V] = [b][v] \quad \text{ou encore} \quad V = b v \quad .$$

Cette écriture présuppose le choix d'un repère de projection unique pour tous les tenseurs intervenant dans l'expression matricielle.

-le produit scalaire de deux vecteurs s'écrit :

$$U \cdot V = (U^i e_i) \cdot (V^j e_j) = U^i V^j (e_i \cdot e_j) \quad (2.1.3)$$

$$\text{où } (e_i \cdot e_j) = g_{ij}$$

définit les composantes du tenseur métrique. Ce tenseur ayant une matrice de coordonnées symétrique, la distinction ligne colonne est indifférente. Pour un repère orthonormé, la matrice des composantes de  $g$  est la matrice identité. Les composantes covariantes et contravariantes sont alors identiques. En appliquant la règle dite d'abaissement des indices

$$V^j g_{ij} = V_i$$

on arrive à l'expression du produit scalaire suivante :

$$U \cdot V = V_i U^i = U_j V^j \quad (2.1.4)$$

Le résultat est un scalaire indépendant du repère de projection, issu de la contraction complète de deux tenseurs. On voit qu'une notation tensorielle suffit à résumer toutes les écritures indicielles pour laquelle la contraction porte impérativement sur des indices de même nom mais de variance opposée.

### 2.1.b.Application au tenseur des déformations

Partons de la description du champ des déplacements :

$$x(X, t) = X + u(X, t) \quad (2.1.5)$$

où  $X$ ,  $u$ ,  $x$  sont respectivement le vecteur position initiale d'un point particulier de la structure, le vecteur déplacement de ce point, et son vecteur position à l'instant  $t$  ;  $x$  est une fonction apte à décrire le mouvement global. Pour une définition locale, on introduit le tenseur gradient de déformation  $F$ , tel que :

$$dx = F \cdot dX \quad (2.1.6)$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} dx^i e_i &= (F_J^i e_i \otimes E^J) \cdot (dX^K E_K) \\ &= F_J^i dX^K (e_i \otimes E^J) \cdot E_K \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

$$\text{avec } E^J \cdot E_K = \delta_K^J$$

(où  $\delta = 1$  si  $J=K$  ; si non  $\delta = 0$ , (symbole de Kronecker))

Le symbole " $\otimes$ " définit ici le produit tensoriel. On montre que la suite  $\delta$  des composantes de ce symbole satisfait les critères de tensorialité si ses indices sont de variance opposée. Nous arrivons donc à l'expression suivante de (2.1.7) :

$$dx^i = F_j^i dX^j \quad \text{où } F_j^i = \frac{\partial(x^i(X,t))}{\partial(X^j)} \quad (2.1.8)$$

La formulation (2.1.6) est beaucoup plus compacte. Le tenseur des déformations quantifie les variations de longueur et d'angle évaluées par produit scalaire. Cela conduit à une image des déformations définie par :

$$dx \cdot \delta x - dX \cdot \delta X = dx^i \delta x_i - dX^J \delta X_J \quad (2.1.9)$$

ou  $\delta x$  et  $\delta X$  sont ici des vecteurs au même titre que  $dx$  et  $dX$ .

Ce scalaire, tenseur d'ordre zéro, ne dépend d'aucun repère particulier. Seule compte la configuration de référence par rapport à laquelle on estime les déformations. En revanche, nous pouvons projeter cette expression dans deux repères particuliers; l'un étant lié à la configuration initiale, et l'autre à la configuration courante. Pour cela, nous utiliserons le tenseur gradient qui permet de passer de l'un à l'autre par (2.1.6). De fait :

$$dx \cdot \delta x = (F \cdot dX) \cdot (F \cdot \delta X) \quad (2.1.10)$$

La formulation indicielle donne d'après (2.1.8)

$$dx^i \delta x^j g_{ij} = (F_k^i dX^k) (F_L^j \delta X^L) g_{ij} \quad (2.1.11)$$

ce que nous pouvons transformer en

$$dx^i \delta x^j g_{ij} = dX_k (F_j^k F_L^j) \delta X^L \quad (2.1.12)$$

ou encore

$$dx \cdot \delta x = dX \cdot C \delta X \quad \text{avec } [C] = [F^T][F] \quad (2.1.13)$$

$[C]$  est l'expression d'un produit de matrice entre composantes duales du tenseur gradient où l'exposant "T" indique la transposition. Ainsi, (2.1.9) devient :

$$dX \cdot (2E) \delta X \quad \text{avec } E = \frac{1}{2} (F^T F - I) \quad (2.1.14)$$

Le produit scalaire des vecteurs infinitésimaux n'est ici pas explicité. La validité de cette expression est liée directement au respect de la dualité de variance des coordonnées employées. On peut, en repartant de (2.1.11), réexprimer (2.1.9) par rapport à des composantes de vecteur infinitésimaux de même variance :

$$dx^i \delta x^j g_{ij} = (F_{\cdot K}^i dX^K) (F_{\cdot L}^j \delta X^L) g_{ij} \quad (2.1.11 \text{ bis})$$

$$dx^i \delta x^j g_{ij} = dX^K (F_{\cdot K}^i g_{ij} F_{\cdot L}^j) \delta X^L \quad (2.1.12 \text{ bis})$$

$$\text{et avec } dX \cdot \delta X = dX^K \delta X_K = dX^K dX^L G_{KL}$$

où  $G$  est le tenseur métrique du repère de la configuration de référence. (2.1.9) peut alors se mettre sous la forme matricielle :

$$dx \cdot \delta x - dX \cdot \delta X = dX \left( [F^T] [g] [F] - [G] \right) \delta X \quad (2.1.15)$$

sachant que cela est écrit pour les composantes contravariantes des vecteurs infinitésimaux " $dX$ ", donc sans utilisation des "coordonnées duales". On interprète alors le tenseur des déformations comme la différence des tenseurs métriques propre à chaque configuration. Les matrices des composantes du tenseur gradient "appliquées" à " $g$ " s'interprètent alors comme les matrices du changement de base.

On peut de la même manière définir la déformation par rapport au produit scalaire de vecteur infinitésimaux de la configuration déformée. On obtient alors, comme pour (2.1.14)

$$dx \cdot \delta x - dx (b^{-1}) \delta x = dx \cdot (2e) \delta x \quad (2.1.16)$$

$$\text{avec } [b] = [F] [F^T] \text{ et } e = \frac{1}{2} \left( I - (F^{-1})^T (F^{-1}) \right)$$

où les exposants " $-1$ " et " $-T$ " sont mis respectivement pour la matrice inverse et la matrice inverse transposée. On appelle ' $C$ ', ' $b$ ', ' $E$ ', ' $e$ ' le "tenseur" des dilatations ou tenseur de CAUCHY-GREEN droit, le "tenseur" de CAUCHY-GREEN gauche, les "tenseurs" de déformations de GREEN-LAGRANGE, et d'EULER-ALMANSI. On peut aussi obtenir l'équivalent de (2.1.15), soit

$$dx \cdot \delta x - dX \cdot \delta X = dx \left( [g] - \left[ (F^{-1})^T \right] [G] [F^{-1}] \right) \delta x \quad (2.1.16 \text{ bis})$$

Quel que soit le tenseur de déformation employé pour une formulation, tous décrivent l'évolution du même produit scalaire. Les valeurs "brutes" de leur composantes n'ont pas de signification directe; en revanche, le produit matricielle à gauche et à droite par les entités issues des vecteurs élémentaires adéquates doit donner le même résultat. Nous avons néanmoins les relations suivantes entre leurs composantes :

$$\begin{aligned} [E] &= [F^T][e][F] \\ [e] &= [(F^{-1})^T][E][(F^{-1})] \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Nous pouvons faire une analyse similaire pour le tenseur des contraintes, et nous nous contenterons de rappeler les différentes définitions lors de leur première utilisation au chapitre 3. Néanmoins, et pour donner une illustration de la généralisation du produit contracté de deux tenseurs, regardons l'expression de la quantité intrinsèque que représente l'énergie interne locale de déformation.

$$W = S : E \quad (2.1.18)$$

où ":", "S" et "E" symbolisent respectivement le produit doublement contracté de deux tenseurs de deuxième ordre, le tenseur des contraintes et celui des déformations; le résultat doit être un scalaire intrinsèque. En utilisant la notation indicielle, et en projetant dans les deux bases distinctes citées précédemment, (2.1.18) devient :

$$W = S_{IJ} E^{IJ} = \tau_{ij} e^{ij} = S^{IJ} E_{IJ} = \tau^{ij} e_{ij} \quad (2.1.19)$$

où, en résumant, S et  $\tau$  représentent les matrices des composantes de tenseurs des contraintes exprimés par rapport au repère de la configuration initiale, finale respectivement. Cela illustre également la dualité entre tenseur des déformations et tenseur des contraintes.

De même, la loi de comportement ne dépend pas du repère d'observation mais uniquement des caractéristiques du matériaux. Elle peut donc aussi être définie de façon intrinsèque; on introduit en fait le principe d'objectivité, qui doit s'appliquer à la dérivation employée. Par exemple, pour la réponse élastique, on écrira en formulation lagrangienne :

$$\dot{S}^c = L : \dot{E}^c \quad (2.1.20)$$

où "L" représente le tenseur d'élasticité d'ordre quatre. Ici, le point symbolise la dérivation totale par rapport au temps. Pour les tenseurs exprimés par rapport à une

configuration fixe dans le temps, cette dérivation est de facto objective. Mais il existe de multiples façons de dériver objectivement, comme on peut en avoir un aperçu dans [F.SIDOROFF [76](1982)].

Dans la suite de notre présentation, et par souci de simplification, sans nuire à la généralité, nous utiliserons la formulation matricielle du raisonnement tensoriel. De plus, les propriétés intrinsèques des tenseurs ne dépendant pas des repères de projections employés, nous utiliserons les écritures simplifiées qui s'affranchissent de la présence du tenseur métrique propre à chaque configuration.

## 2.2. Rappels sur la description des grandes déformations :

Les difficultés liées aux grandes déformations viennent en partie du fait que l'on considère la configuration initiale et la configuration déformée comme distinctes. On peut donc avoir au moins deux points de vue différents pour examiner un phénomène dans ce cadre :

- soit choisir de tout calculer dans la configuration de référence; c'est l'approche Lagrangienne,
- soit effectuer les calculs dans la configuration déformée; c'est l'approche Eulerienne.

A cela s'ajoutent les possibilités de travailler dans des configurations intermédiaires particulières.

### 2.2.1. Description des déformations :

Rappel :

Nous avons vu que

$$x(X, t) = X + u(X, t) \quad (2.2.1)$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} \quad \text{avec} \quad dx = F dX \quad (2.2.2)$$

et nous avons été conduits aux expressions suivantes :

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \quad \text{avec} \quad C = F^T F \quad (2.2.3)$$

$$e = \frac{1}{2}(I - b^{-1}) \quad \text{avec} \quad b = FF^T . \quad (2.2.4)$$

Par abus de langage, nous appellerons :

- E** : tenseur des déformation de GREEN-LAGRANGE  
(défini dans la configuration de référence ou configuration initiale)
- e** : tenseur des déformations d'EULER-ALMANSI (dans la configuration déformée ou finale)
- C** : tenseur de CAUCHY-GREEN droit
- b** : tenseur de CAUCHY-GREEN gauche
- I** : identité tensorielle

l'exposant <sup>T</sup> indique la transposition

l'exposant <sup>-1</sup> indique l'inversion

nous avons remarqué (2.1.17) que :

$$E = F^T(e)F \quad \text{et donc} \quad e = (F^{-1})^T(E)(F^{-1})$$

-ce résultat définit les transport nécessaires au passage de l'une à l'autre des configurations.

### 2.2.2. Décomposition multiplicative de LEE :

Comme en petites déformations, et compte tenu du caractère élasto-plastique des transformations, on cherche à décomposer la déformation totale en une partie élastique et une partie plastique. Dans ce but, LEE ([39](1981)) propose de décomposer le tenseur gradient en introduisant une configuration intermédiaire relâchée. Cette configuration relâchée serait obtenue en admettant que l'on puisse récupérer toutes les déformations élastiques par un découpage du corps déformé. Ce point de vue conduit à l'illustration de la figure 1.2 avec :

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^J} = \frac{\partial x^i}{\partial X_X^K} \frac{\partial X_X^K}{\partial X^J} \quad (2.2.5)$$

soit :

$$F_J^i = (F^c)^i_k (F^p)^k_J \quad \text{soit} \quad F = F^c F^p \quad (2.2.6)$$

avec :

- $x$  : composantes dans la configuration déformée  $C(t)$ .
- $X_X$  : composantes dans la configurations relâchée  $C_X$ .
- $X$  : composantes dans la configuration initiale  $C_i$ .
- $F^e$  : partie élastique du tenseur gradient des déformations représentant le passage de  $C_X$  à  $C(t)$ .
- $F^p$  : partie plastique représentant le passage de  $C_i$  à  $C_X$ .

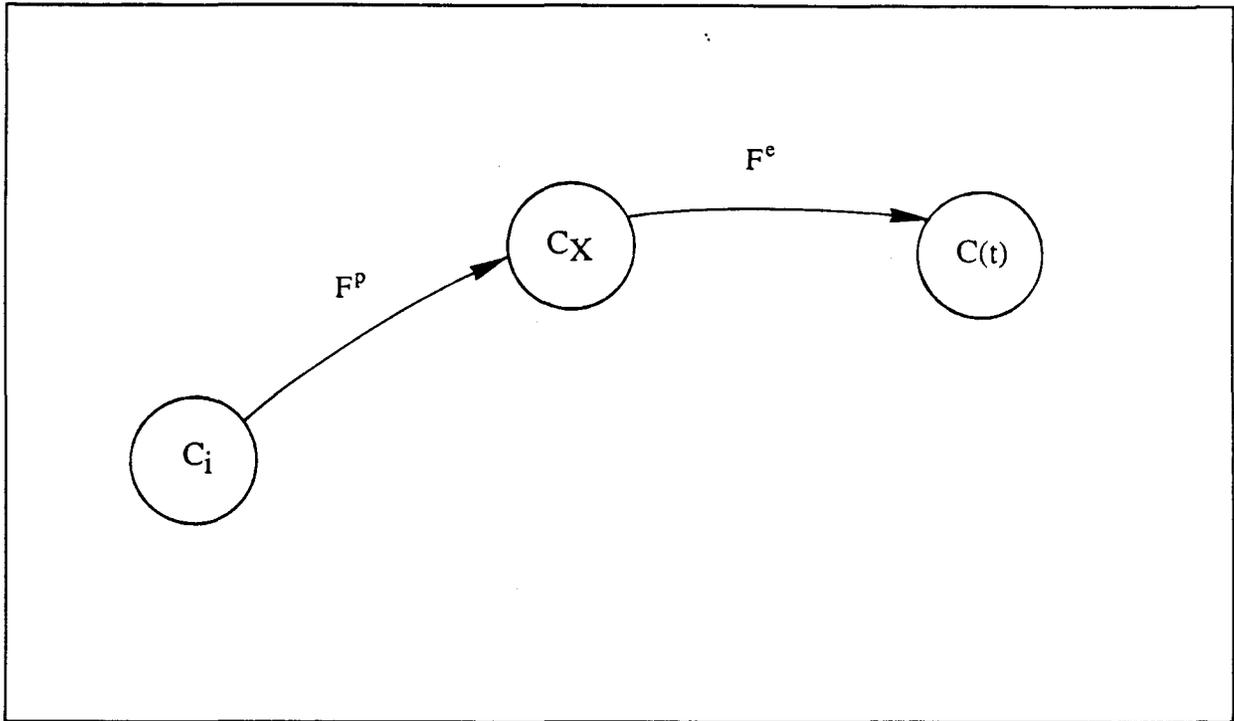


Figure.2.1 : Illustration de la décomposition multiplicative

Lorsque l'on applique la charge, la structure passe de la configuration  $C_i$  à la configuration  $C(t)$ . En supposant qu'après déchargement de la structure, on puisse libérer toutes les déformations élastiques par un découpage de celle-ci en morceaux infinitésimaux, on peut introduire la configuration intermédiaire relâchée  $C_X$ . Cette configuration est purement imaginaire, car elle est le résultat de la juxtaposition de morceaux déformés purement plastiquement et dont l'assemblage est a priori discontinu. La dérivation partielle n'est alors plus définie. D'après LEE [39](1981), " $F^e$  et  $F^p$  deviennent alors des fonctions ponctuelles des particules  $X$  sans pour autant que cela rende la théorie plus complexe". Elle a

le mérite de mettre en évidence une décomposition du tenseur gradient qui permet la distinction entre parties plastique et élastique.

Dans la chronologie du processus de déformation, on observe une phase initiale purement élastique. Cette phase étant réversible, le retour à la configuration initiale est possible ; il est en effet obtenu par simple déchargement de la structure.

Les déformations plastiques, qui apparaissent ensuite en certains points de la structure lorsque l'on poursuit le chargement, interdisent le retour à la configuration initiale. Cette chronologie est respectée par la décomposition multiplicative introduite par LEE.

On peut considérer chaque partie de la transformation séparément et utiliser le formalisme de la description globale. Ainsi, on peut définir le tenseur des déformations élastiques dans  $C_x$  ou  $C(t)$ , celui des déformations plastiques dans  $C_i$  ou  $C_x$ .

$$E_x^e = \frac{1}{2}(C^e - I) ; e^e = \frac{1}{2}(I - (b^e)^{-1}) \quad (2.2.7)$$

$$E^p = \frac{1}{2}(C^p - I) ; e_x^p = \frac{1}{2}(I - (b^p)^{-1}) \quad (2.2.8)$$

Cette décomposition multiplicative du tenseur gradient peut conduire à une décomposition additive des déformations. En effet, posons :

$$E^e = E - E^p = \frac{1}{2}(C - C^p) \quad (2.2.9)$$

$$\text{or : } C = (F^e F^p)^T (F^e F^p) = (F^p)^T (F^e)^T F^e F^p$$

$$\text{donc } E^e = \frac{1}{2}(F^p)^T \left( (F^e)^T F^e - I \right) F^p = F^T (e^e) F \quad (2.2.10)$$

de même,

$$\begin{aligned} e^p &= e - e^e = \frac{1}{2} \left( (b^e)^{-1} - (b)^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (F^e)^{-1} \right)^T \left( I - \left( (F^p)^{-1} \right)^T (F^p)^{-1} \right) (F^e)^{-1} \\ &= (F^{-1})^T (E^p) F^{-1} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

On constate donc que la propriété de transport, vue pour la transformation globale, reste valable pour la décomposition additive du tenseur des déformations issue de la décomposition multiplicative de LEE.

### 2.2.3. Opérateurs "Pull-back" et "Push-forward" :

(cf.MARSDEN & HUGHES [49](1983))

On a vu qu'on pouvait transporter les différents tenseurs des déformations de  $C_i$  à  $C(t)$  et inversement. Ces transports peuvent aussi être décomposés. En effet, notons :

$$\phi_*( ) = (F^{-1})^T ( ) F^{-1} \text{ correspondant à "Push-forward"} \quad (2.2.12)$$

$$\phi^*( ) = F^T ( ) F \text{ correspondant à "Pull-back"}$$

On peut écrire :

$$\phi_*( ) = \phi_*^p(\phi_*^e( )) \quad (2.2.13)$$

$$\phi^*( ) = \phi^{*p}(\phi^{*e}( ))$$

Il est donc possible d'utiliser les transports partiels pour exprimer les tenseurs dans la configuration intermédiaire relâchée, et en particulier le tenseur des déformations totales.

Nous avons donc à notre disposition :

$$E = E^e + E^p \text{ dans } C_i \quad (2.2.14)$$

$$E_x = E_x^e + e_x^p = e_x \text{ dans } C_x \quad (2.2.15)$$

$$e = e^e + e^p \text{ dans } C(t) \quad (2.2.16)$$

#### Remarques :

Cette formulation, élégante en apparence, cache une interdépendance entre les quantités plastiques et élastiques, si l'on se réfère à  $C_i$  ou à  $C(t)$ . On le voit avec les relations (2.2.10) et (2.2.11).

En revanche, dans  $C_x$ , les tenseurs des déformations élastiques et plastiques semblent indépendants; cf.(2.2.7) et (2.2.8).

Ces tenseurs exprimés dans  $C_x$  ne sont ni Euleriens ni Lagrangiens. Seule leur formulation est semblable à celle de GREEN-LAGRANGE pour la partie élastique cf.(2.2.3) et (2.2.7), et à celle d'EULER-ALMANSI pour la partie plastique cf.(2.2.4) et (2.2.8). On ne peut donc pas parler de mesures appropriées d'ALMANSI pour la partie plastique de  $E_x$

(STUMPF & BADUR ([85]1990)), ni de tenseur de LAGRANGE pour sa partie élastique (LEE [39](1981), CASEY [4](1985)).

#### 2.2.4. Vitesses ou taux de déformation :

Nous abordons ici une difficulté essentielle relative à l'amplitude des déformations. En effet, nous avons à notre disposition plusieurs configurations pour exprimer les différentes quantités; or certaines de ces configurations dépendent du temps. Il ne suffit donc plus de dériver par rapport au temps les expressions écrites dans celles-ci; il faut aussi tenir compte de leur mouvement.

On devra s'assurer, par exemple, que les vitesses (ou taux de déformation) obtenus sont invariants dans tout mouvement de corps rigide, quelle que soit la configuration de calcul choisie. SIMO ([80](1988)) utilise la condition d'invariance spatiale pour s'assurer de l'objectivité.

La configuration de référence  $C_i$  peut être intéressante car ne dépendant pas du temps, la dérivation y est trivialement objective.

Cependant, l'objectivité n'est pas un critère suffisant pour garantir, par exemple, la cohérence d'une loi de comportement. En effet, il existe plusieurs dérivations possibles : convective-covariante, convective contra-variante de TRUSDELL, de JAUMANN (SIDOROFF [76](1982)). Et ces dérivations n'engendrent pas le même comportement apparent pour une loi de comportement donnée faisant intervenir des vitesses de déformation.

#### Vitesses de déformation :

On introduit le vecteur vitesse  $V$ , dérivé par rapport au temps du vecteur position  $x(X,t)$  et qui peut être considéré comme fonction de  $X$ , description Lagrangienne, ou de  $x$ , description Eulerienne. La dérivée par rapport au temps du vecteur matériel  $dx$  est donc :

$$d\dot{x} = \dot{F}dX = Ldx \quad \text{avec } L = \dot{F}F^{-1} \quad (2.2.17)$$

On montre que :

$$d = \frac{1}{2}(L + L^T) \quad \text{vitesse de déformation mesurée dans } C(t)$$

$$w = \frac{1}{2}(L - L^T) \quad \text{vitesse de rotation du solide}$$

ou rotationnel du champ de vitesse 'v'.

Dans  $C_i$ , la vitesse de déformation totale est donnée par :

$$\dot{E} = \frac{d(E)}{d(t)}$$

De plus, on notera que ces deux tenseurs des vitesses de déformations sont liés par :

$$\dot{E} = (F)^T(d)(F) \quad (2.2.18)$$

### **Différenciation de LIE (dérivée convective covariante) :**

On peut donc obtenir les taux de déformation dans la configuration initiale par dérivation des expressions des tenseurs des déformations dans celle-ci.

LIE propose de déterminer les taux de déformation dans la configuration actuelle (ou finale). Pour cela, il emploie les transports convectifs Pull-back et Push-forward mentionnés plus haut.

$$Lv(e) = \phi_* \left( \frac{d(\phi^*(e))}{dt} \right) \quad (2.2.19)$$

$$= (F^{-1})^T \left( \frac{d(F^T(e)F)}{dt} \right) F^{-1}$$

Ainsi, cela revient à transporter le tenseur que l'on veut dériver, de la configuration actuelle à la configuration initiale, à le dériver par rapport au temps dans cette configuration, puis à le renvoyer de la configuration initiale dans la configuration actuelle. On peut écrire directement :

$$Lv(e) = (F^{-1})^T (\dot{E}) F^{-1} = d$$

La différenciation de LIE est associative. En effet, on peut vérifier qu'on a bien :

$$Lv(e) = Lv(e^e + e^p) = Lv(e^e) + Lv(e^p) \quad (2.2.20)$$

### **Remarques :**

Comme précédemment pour la décomposition en parties élastique et plastique des déformations, cette formulation en vitesse semble très élégante. Malheureusement, les

quantités ainsi définies ne sont pas "pures", puisque les transports convectifs Pull-back et Push-forward interviennent de façon complète dans leur définition. Quelle que soit la configuration dans laquelle on se place, l'une des parties est toujours perturbée par le tenseur gradient de l'autre. C'est l'une des difficultés posées par l'approche en grandes déformations.

### 2.2.5. Commentaires sur quelques tentatives de formulation :

La littérature est particulièrement abondante à ce sujet comme en témoignent les bibliographies de LEE ([39](1981)), NEMAT-NASSER ([60](1982)), SIMO ([80](1988)), NAGHDI ([55](1990)) et des deux articles qui ont servi de base à ce paragraphe. Nous avons choisi ces deux exemples pour donner un bref aperçu concernant des difficultés liées à la recherche de décompositions "pures" en grandes déformations.

Dans celui de STUMPF et BADUR ([85](1990)), les auteurs utilisent la différenciation de LIE localement, pour chaque partie de la déformation totale (formules (10)) . Ils obtiennent ainsi des expressions objectives purement élastique et purement plastique.

L'expression purement plastique correspond à la vitesse de déformation plastique calculée dans  $C_i$  qu'on a transportée dans la configuration intermédiaire relâchée  $C_X$ . On obtient ainsi la vitesse de déformation plastique établie dans  $C_X$ .

#### Remarque :

Ces auteurs, de même que CASEY(1985) utilisent les définitions suivantes :

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \text{ donc dans } C_i$$

$$e = \frac{1}{2}(I - b^{-1}) \text{ donc dans } C(t)$$

$$E^P = \frac{1}{2}(C^P - I) \text{ donc dans } C_i$$

$$e^P = \frac{1}{2}(I - (b^P)^{-1}) \text{ donc dans } C_X$$

$$E^e = \frac{1}{2}(C^e - I) \text{ donc dans } C_X$$

$$e^e = \frac{1}{2}(I - (b^e)^{-1}) \text{ donc dans } C(t)$$

ce qui conduit aux relations suivantes :

$$E = E^p + (F^p)^T E^e F^p \text{ dans } C_i \quad (2.2.21)$$

$$e = e^e + ((F^e)^{-1})^T e^p (F^e)^{-1} \text{ dans } C(t) \quad (2.2.22)$$

L'expression élastique est plus difficile à interpréter. On effectue la dérivation de " $E_X^e$ " dans la configuration relâchée, puis on transporte le résultat dans la configuration finale.

Pour retrouver à partir de ces entités une décomposition de la vitesse de déformation totale établie dans la configuration finale, les auteurs effectuent quelques transformations qui leur permettent de faire apparaître la dérivée de JAUMANN pour le terme élastique.

Cependant, cette nouvelle décomposition, si elle propose une séparation spécifique entre composantes élastique et plastique du taux de déformation total, ne permet pas d'éliminer les interférences entre ces deux parties.

S.NEMAT NASSER ([59](1979)) a aussi fait une tentative de décomposition en posant :

$$\bar{u} = x - x^p = (F - F^p)X = (F^e - I)x^p$$

$$d' \text{ où : } F = \bar{F}^e + F^p - I$$

$$\text{avec : } \bar{F}^e = I + (F^e - I)F^p$$

ce qui permet d'écrire :

$$L = \dot{F}F^{-1} = \dot{\bar{F}}^e F^{-1} + \dot{F}^p F^{-1} = \hat{L}^e + \hat{L}^p$$

$$\text{et aussi } d = \hat{d}^e + \hat{d}^p$$

LEE ([39](1981)) explique pourquoi selon lui cette décomposition n'a pas de réalité physique. Il fait remarquer que l'auteur lui-même constate un effet de couplage indésirable entre quantités élastiques et quantités plastiques.

## Conclusion :

Il nous apparaît difficile, compte tenu du modèle choisi, d'éviter les couplages formels entre entités élastiques et plastiques, le gradient de déformation de l'une intervenant dans la définition de l'autre suivant la configuration choisie.

L'interprétation physique ne doit pas être occultée par l'artifice d'une formulation apparemment simple, et les développements sur la nécessaire pureté des expressions nous paraît être un faux débat.

Les opérateurs "pull-back" et "push-forward", qui peuvent s'interpréter comme des transports (convectifs), nous semble être des outils très pratiques.

## 2.3. Prise en compte des grandes déformations pour la théorie d'adaptation :

La difficulté principale dans la prise en compte des grandes déformations est causée par l'existence des déformations élastiques résiduelles (emprisonnées), que la décomposition multiplicative de LEE ne décrit pas.

Dans ce paragraphe, nous examinons brièvement les approches proposées par différents auteurs.

### 2.3.1. WEICHERT ([88](1986)):

Pour remédier à ce problème, WEICHERT ([88](1986)) utilise la notion de corps de comparaison purement élastique  $B_0$ , dont la forme initiale serait la même que celle du corps élasto-plastique. Avec les hypothèses restrictives établies sur les bases de l'article de CASEY(1985), et qui permettent d'écrire :

$$E_{ij} = E_{ij}^e + E_{ij}^p$$

l'auteur montre que, pour certaines non-linéarités géométriques, il obtient :

$$E_{ij} - E_{ij}^o = E_{ij}^{re} + E_{ij}^p$$

$E_{ij}^o$  : déformation du corps purement élastique

$E_{ij}^{re}$  : déformation élastique résiduelle du corps élasto-plastique

On montre ensuite que l'adaptation est possible sous certaines conditions, tout en utilisant le formalisme propre aux grandes déformations; on obtient ainsi une extension du

théorème statique d'adaptation de MELAN. La condition est subordonnée à la valeur d'une intégrale " $W_G$ " en général difficile à évaluer: c'est pourquoi cette approche n'est applicable que pour les cas particuliers où l'évaluation de " $W_G$ " ne pose pas de problème.

L'auteur précise le champ d'application en proposant deux cas particuliers. Dans le premier (problème (i)), un domaine de configurations enveloppe des configurations déformées probables est utilisé ; dans l'autre (problème (ii)), l'étude porte sur les petites évolutions au voisinage d'une configuration déformée connue; une illustration numérique de la solution du problème (ii), appliquée aux plaques de type VON KARMAN, est présentée.

### **2.3.2. GROSS-WEEGE ([18](1990)) :**

Cet auteur reprend la démarche (ii) précédente et prend en compte l'influence de la température. Le cadre du développement tensoriel peut être considéré comme plus général, les restrictions nécessaires à l'application n'intervenant qu'à la fin. L'auteur expose les conditions qui permettent de retrouver certaines expressions de WEICHERT ([92](1989)), ainsi que celles de MAIER ([42](1973)).

### **2.3.3. SACZUK & STUMPF ([71](1990)) :**

Dans cet article, on reprend les développements des auteurs précédents; on prend donc comme état de référence un premier état d'équilibre sous charge, puis on examine les conditions d'adaptation pour les petites évolutions au voisinage de celui-ci, à l'aide du corps de comparaison purement élastique. Les restrictions inhérentes à l'emploi du corps de comparaison sont mises en place par l'intermédiaire d'une permutation qui n'a pas de signification physique, mais qui introduit des hypothèses sur l'ordre de grandeur des transformations.

Les auteurs présentent une généralisation, en mentionnant que l'une des hypothèses restrictives considérée par GROSS-WEEGE ([18](1990)) est superflue.

Les trois approches tensorielles précédentes, fondées sur le même principe, mettent donc en jeu des restrictions sur le champ des déformations; ces restrictions sont motivées par des considérations sur la faisabilité du calcul.

#### **2.3.4. G.MAIER ([42](1973)) :**

L'approche est ici fondamentalement différente, puisque la démarche est purement matricielle, et s'adresse aux systèmes discrets. Le formalisme employé est celui des petites déformations et l'influence des effets géométriques est pris en compte dans l'écriture des équations d'équilibre. Notons que déjà, MAIER considère un état de référence sous charge au voisinage duquel il étudie la réponse de la structure pour tout chargement supplémentaire (approche équivalente au problème (ii)). Il précise que cela ne tient compte que des effets géométriques du second ordre.

#### **2.3.5. Conclusion :**

On remarque donc que toutes ces approches suivent la même démarche (cf problème(ii)). On sait très bien étudier l'adaptation pour les petites évolutions; l'idée est de transposer cette étude à proximité d'un état d'équilibre de référence d'une configuration déformée du solide. L'intérêt est de pouvoir étudier cette configuration dans un cadre géométriquement non-linéaire.; on ne dispose pas à l'heure actuelle de démarche différente de celle-ci autorisant des applications pratiques de la théorie d'adaptation dans ce cadre.

Aucune application correspondant au problème(i) n'a été présentée à ce jour.

## CONTRIBUTION A L'ETUDE THEORIQUE DE L'ADAPTATION EN GEOMETRIE NON-LINEAIRE

Si les grands déplacements existent, l'approche grandes déformations ne s'applique qu'à des cas particuliers, comme par exemple : l'étude du comportement des pièces en matériaux souples, les procédés de fabrication de pièces mécaniques par "formage" (estampage, forgeage, tréfilage, laminage...); ces procédés induisant une anisotropie difficile à modéliser numériquement. Notre approche s'applique aux structures dont le matériau de constitution a des caractéristiques mécaniques isotropes.

Pour les matériaux métalliques élasto-plastiques, la valeur du module d'élasticité garantit une évolution en petites déformations élastiques (moins de 1%). Dans le cas des plaques et coques minces, le caractère des déplacements élastiques entraîne cependant des effets géométriques incompatibles avec l'approche linéaire classique (théorie de KIRCHHOFF). De plus; lors de la défaillance d'une structure élasto-plastique, le caractère des déformations plastiques (plusieurs pour-cents), reste rarement compatible avec une étude purement linéaire. Dans chaque cas, et suivant l'étendue du domaine des configurations que peut occuper la structure, des problèmes d'instabilité peuvent être rencontrés.

Si nous voulons étudier la fiabilité d'une structure élasto-plastique, nous devons donc nous placer dans un cadre théorique qui nous permettra d'appréhender les effets géométriques non-linéaires. L'approche choisie ne permet pas l'étude théorique des phénomènes d'instabilité, qui, à eux seuls, occupent un domaine de recherche vaste pour lequel nous sommes totalement novices.

Après les acquis et les remarques faites au paragraphe précédent, nous apportons notre contribution à la description des grandes déformations élasto-plastiques. Nous montrerons, tout d'abord que cette nouvelle description permet, en analogie avec la théorie linéaire, de représenter les déformations élastiques résiduelles. Puis, après un bref rappel sur les relations exploitables entre les tenseurs de contraintes, nous montrerons que cette approche permet

également d'obtenir une démonstration du théorème de MELAN, par une démarche analogue à celle qui est employée en petites déformations.

### 3.1. Motivations :

Nous avons constaté que l'une des spécificités de la théorie d'adaptation est la prise en compte de contraintes élastiques résiduelles; celles-ci sont liées aux déformations élastiques résiduelles, difficiles à décrire au moyen de la décomposition multiplicative de LEE. Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, l'artifice du corps de comparaison purement élastique donne des résultats en géométrie linéaire; mais son utilisation pour les approches non-linéaires, sauf pour des cas particuliers, reste plus délicate ( WEICHERT ([88](1986)) ).

Nous nous proposons d'adopter un point de vue différent.

### 3.2. Vers la formulation d'une décomposition multiplicative à trois entités :

Devant l'intérêt pratique de l'association de la décomposition multiplicative et des opérateurs de transport présentés au paragraphe 2.2.3, nous nous proposons d'en utiliser le principe en vue d'obtenir une décomposition multiplicative plus détaillée.

Nous avons vu au paragraphe 2.2.2 que :

$$F = F^e F^p$$

permet d'écrire :

$$E = E^e + E^p \text{ ou } e = e^e + e^p$$

Cette décomposition implique l'introduction d'une configuration intermédiaire relâchée qui est "artificielle", puisque libre de toute contrainte (paragraphe 2.2.2).

Une autre configuration intermédiaire peut être considérée : celle que l'on obtient par une décharge complète de la structure ; on "récupère" les déformations élastiques "libres". La déformée de la structure résulte alors des déformations plastiques et des déformations élastiques "emprisonnées". On peut donc proposer une décomposition multiplicative basée sur cette autre configuration intermédiaire , le gradient des déformations élastiques libres permettant le passage de celle-ci à la configuration actuelle de la structure sous charges. De même que précédemment, on aura :

$$F = F^{(e)} F^* \tag{3.1}$$

$$E = E^{(e)} + E^* \text{ ou } e = e^{(e)} + e^* \tag{3.2}$$

L'exposant " \* " indique que l'entité est due à la fois à la partie plastique et à la partie élastique piégée du processus de déformation. Cette partie permet le passage de la configuration initiale à la configuration déchargée réelle ; L'exposant "(e)" caractérise la partie élastique libre.

**Remarque :**

Comme nous l'a fait très justement remarqué le professeur J.KAMENJARZH de la Faculté de Mathématique et Mécanique de MOSCOU, il se peut que les déformations plastiques évoluent lors du déchargement complet de la structure ; le "retour" n'est donc pas toujours purement élastique.

Il est par conséquent plus judicieux d'interpréter cette décomposition multiplicative comme une représentation valable à tout instant du processus de déformation.

Pour retrouver la décomposition multiplicative de LEE, nous pouvons poser :

$$F^* = F^{re} F^p \tag{3.3}$$

ce qui permet d'écrire :

$$F = \left( F^{(e)} F^{re} \right) F^p \tag{3.4}$$

où le terme entre parenthèse n'est autre qu'une décomposition multiplicative du gradient  $F^e$  des déformations élastiques totales.

On peut ainsi faire le schéma de transport suivant :

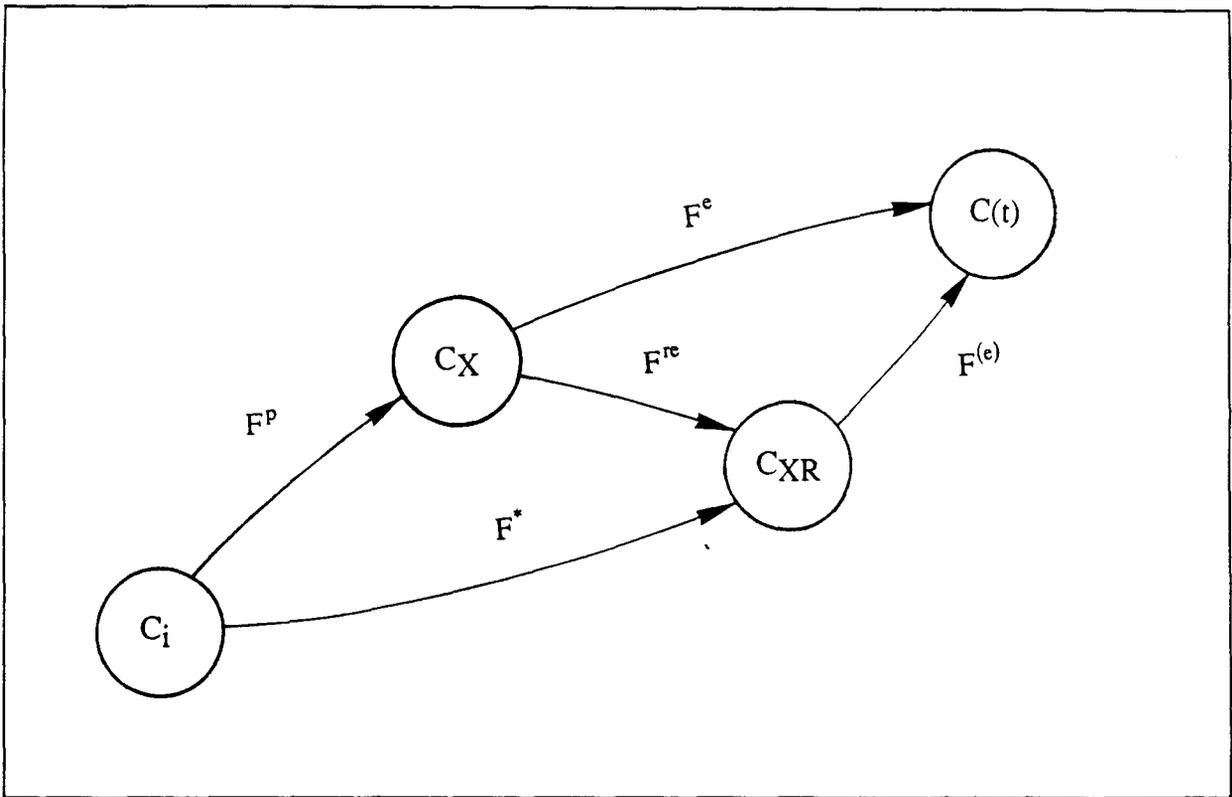


Figure 3.1 : Situation des différentes configurations

Nous devons à présent écrire les différentes entités souhaitées, une décomposition du gradient total en trois parties devant nous permettre de faire apparaître trois parties différentes de la déformation totale.

Globalement, rien ne change pour la déformation totale, et l'on écrit toujours :

$$E = \frac{1}{2}(C - 1) \text{ et } e = \frac{1}{2}(1 - b^{-1})$$

La partie élastique libre se situe en fin de transformation, d'où :

$$e^{(e)} = \frac{1}{2}\left(1 - (b^{(e)})^{-1}\right)$$

et par transport :  $E^{(e)} = F^T(e^{(e)})F$

La partie plastique, en revanche, se trouve en début de transformation, et l'on écrit :

$$E^p = \frac{1}{2}(C^p - 1)$$

et par transport :  $e^p = (F^{-1})^T(E^p)F^{-1}$

On peut donc déduire l'expression de  $E^{er}$  et  $e^{er}$  en posant :

$$e^{re} = e - e^{(e)} - e^p \tag{3.5}$$

On trouve :

$$e^{re} = \left( (F^{(e)})^{-1} \right)^T \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \left( (F^{re})^{-1} \right)^T (F^{re})^{-1} \right) \right] (F^{(e)})^{-1} . \quad (3.6)$$

Nous remarquerons que cette expression correspond au transport d'une quantité de la configuration relâchée réelle vers la configuration finale (push-forward). De même, :

$$E^{re} = E - E^{(e)} - E^p \quad (3.7)$$

donne :

$$E^{re} = (F^p)^T \left[ \frac{1}{2} \left( (F^{re})^T F^{re} - 1 \right) \right] F^p \quad (3.8)$$

Cette expression représente le transport d'une quantité de la configuration relâchée virtuelle vers la configuration initiale (pull-back).

D'après la figure 3.1, nous voyons que les configurations relâchées virtuelle et réelle sont respectivement celles de début et de fin de la transformation due au gradient résiduel élastique. Comme précédemment pour les parties élastique et plastique, nous pouvons définir la partie résiduelle élastique de la déformation par des expressions de type GREEN-LAGRANGE dans la configuration "de départ", et par des expressions de type EULER-ALMANSI dans la configuration "d'arrivée" du transport concerné, soit :

$$E_X^{re} = \frac{1}{2} \left( (F^{re})^T F^{re} - 1 \right) \quad (3.9)$$

dans la configuration relâchée virtuelle notée  $C_X$ ;

$$e_{XR}^{re} = \frac{1}{2} \left( 1 - \left( (F^{re})^{-1} \right)^T (F^{re})^{-1} \right) \quad (3.10)$$

dans la configuration relâchée réelle que nous noterons  $C_{XR}$ .

**Remarque :**

La cohérence est respectée, et nous avons :

$$e_{XR}^{re} = (F^{re})^T (E_X^{re}) F^{re} \quad (3.11)$$

et

$$e^{re} = F^T(E^{re})F \quad (3.12)$$

### Conclusion :

Nous avons donc pu définir la partie résiduelle de la déformation élastique, tout en restant cohérent avec le cadre des grandes déformations, et nous avons obtenu une formulation analogue à celle des petites déformations (Cf. chapitre 1, formule 1.3). Cette nouvelle décomposition multiplicative en trois parties apparaît, en fait, comme une évolution de la décomposition multiplicative de LEE.

La démarche utilisée montre que, si nécessaire, on peut généraliser la décomposition multiplicative à  $n$  facteurs.

On peut, entre autres, utiliser la différenciation de LIE pour l'évaluation des taux de déformation de chaque partie ; comme au paragraphe 2.2.4. Nous écrivons :

$$Lv(e) = Lv(e^{(e)}) + Lv(e^{re}) + Lv(e^p) \quad (3.13)$$

### 3.3. Equations d'équilibre, relations entre tenseurs :

La distinction entre les différentes configurations déformées conduit à la possibilité de représenter la contrainte de plusieurs façons. Cependant, notons que d'un point de vue physique, le repère le plus naturel pour observer définir entité est celui qui est lié à la matière. L'observation de l'évolution d'un champ de contrainte doit donc suivre l'évolution des configurations. Rappelons simplement l'existence :

- du tenseur de CAUCHY, qui permet d'exprimer la contrainte dans  $C(t)$  avec les caractéristiques géométriques de la structure dans  $C(t)$ .
- du premier tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF qui est mixte, et qui permet de définir la contrainte dans  $C(t)$  avec les caractéristiques dans  $C_1$ .
- du second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF, définissant une expression de la contrainte dans  $C_1$  avec les caractéristiques dans  $C_1$ .
- du tenseur dit de KIRCHHOFF, utilisé pour les formulations variationnelles.

Seuls le tenseur de CAUCHY et le premier tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF ont une signification physique directe, puisqu'ils caractérisent directement les efforts appliqués (cf.SIDOROFF ([76](1982))).

Dans la configuration actuelle ou finale  $C(t)$ , nous avons :

$$\text{Div}(\pi_t) = -\rho_0 f \quad \text{ou} \quad \text{div}(T_t) = -\rho f \quad (3.14)$$

$\pi$	: premier tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF
$T$	: tenseur de CAUCHY
$\rho_0$	: masse volumique dans $C_i$
$\rho$	: masse volumique dans $C(t)$
$f$	: forces extérieures de volume

Dans la configuration relâchée réelle  $C_{XR}$  :

$$\text{Div}(\pi_{XR}) = 0 \quad \text{ou} \quad \text{div}(T_{XR}) = 0 \quad (3.15)$$

car il n'y a plus de force extérieure appliquée, et les contraintes sont auto-équilibrées.

Les indices  $t$  et  $XR$  signifient que le tenseur concerné est utilisé pour décrire la contrainte siégeant respectivement dans la configuration  $C(t)$  et  $C_{XR}$ .

Pour les forces de surfaces, on pourrait écrire :

$$\pi_{ij} n_j = \dots \quad \text{ou} \quad T_{ij} n_j = \dots \quad (3.16)$$

mais il faudrait, pour compléter le second membre des équations, définir le mode d'application des efforts de surface, puisque la géométrie de la structure évolue.

Ce second membre sera nul pour l'équilibre dans la configuration relâchée réelle, pour les mêmes raisons qu'en ce qui concerne les forces de volume.

Nous pouvons exprimer les relations entre le premier et le second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF (respectivement  $\pi$  et  $S$ ) :

$$\pi_t = F^{(e)} F^* S_t \quad \text{pour les contraintes totales} \quad (3.17)$$

$$\pi_{XR} = F^* S_{XR} \quad \text{pour les contraintes résiduelles} \quad (3.18)$$

et, entre le second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF et celui de CAUCHY :

$$S_t = \det(F^{(e)} F^*) \left[ (F^{(e)} F^*)^{-1} (T_t) \left( (F^{(e)} F^*)^{-1} \right)^T \right] \quad (3.19)$$

$$S_{XR} = \det(F^*) \left[ (F^*)^{-1} (T_{XR}) \left( (F^*)^{-1} \right)^T \right] \quad (3.20)$$

On peut déduire aussi :

$$\begin{aligned}
S^{(e)} &= S_t - S_{XR} \\
&= \det(F)(F)^{-1} \left[ T_t - \left( \frac{1}{\det(F^{(e)})} F^{(e)}(T_{XR})(F^{(e)})^T \right) \right] ((F)^{-1})^T
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Ici, nous transportons l'expression de  $T_{XR}$  de la configuration relâchée réelle, où elle a été définie, vers la configuration finale. On tire de l'expression précédente :

$$T_t^{(e)} = T_t - \frac{1}{\det(F^{(e)})} F^{(e)}(T_{XR})(F^{(e)})^T \tag{3.22}$$

La contrainte élastique libre de CAUCHY est définie dans la configuration finale, alors que la contrainte résiduelle est définie dans la configuration relâchée réelle.

### Relations avec le premier tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF :

Notons par "df" le vecteur contrainte élémentaire . Nous aurons :

$$df_{XR} = \pi_{XR} N ds_0 \text{ dans } C_{XR} \tag{3.23}$$

$$df_t = \pi_t N ds_0 \text{ dans } C(t) \tag{3.24}$$

$$df_{tR} = F^{(e)} df_{XR} = F^{(e)} \pi_{XR} N ds_0 \tag{3.25}$$

Notons :

$$F^{(e)} \pi_{XR} = \pi_{tR} \tag{3.26}$$

$df_{tR}$  étant l'expression dans  $C(t)$  d'un effort élémentaire siégeant dans  $C_{XR}$ , nous pouvons définir :

$$df_t^{(e)} = df_t - df_{tR} = (\pi_t - \pi_{tR}) N ds_0 \text{ dans } C(t) \tag{3.27}$$

Soit :

$$(\pi_t - \pi_{tR}) = \pi_t^{(e)} \tag{3.28}$$

Nous vérifions que nous avons bien :

$$\pi_t^{(e)} = F S^{(e)} \tag{3.29}$$

Ce résultat est conforme au type de relation entre le premier tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF, relatif à la configuration finale, et le second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF, relatif à la configuration initiale.

**Remarque : Réduction de l'équation d'équilibre**

En utilisant (3.28), nous pouvons écrire :

$$\left(\pi_{i_j}\right)_J = -\rho_0 f_i = \left(\pi_{i_j}^{(e)}\right)_J + \left(F_{iK}^{(e)}\right)_J \left(\pi_{XR_{Kj}}\right) + F_{iK}^{(e)} \left(\pi_{XR_{Kj}}\right)_J \quad (3.30)$$

Mais, par définition des contraintes auto-équilibrées, on sait que :

$$\text{Div}(\pi_{XR}) = 0 \quad (3.31)$$

d'où :

$$\left(\pi_{i_j}^{(e)}\right)_J + \left(F_{iK}^{(e)}\right)_J \left(\pi_{XR_{Kj}}\right) = -\rho_0 f_i \quad (3.32)$$

Donc, compte tenu de l'existence d'une configuration déchargée à tout instant, il y a toujours une partie qui s'annule dans l'équation d'équilibre complète.

**3.4. Sur le théorème statique d'adaptation en déformations finies :**

(On se réfèrera à la figure 3.1.)

**loi de comportement :**

On utilisera la loi de comportement élasto-plastique parfaite dont le formalisme accepté pour la partie élastique sera :

$$\dot{S} = L^{-1} \dot{E}^e \quad (3.33)$$

où L est l'expression du tenseur de la loi de comportement dans la configuration initiale.

**THEOREME STATIQUE :**

**Rappel de l'énoncé (Elasto-plasticité parfaite) :**

Si, pour une structure donnée soumise à des charges évoluant entre des limites prescrites, on peut trouver un champ de contraintes résiduelles indépendant du temps  $\bar{S}$ , tel que la somme de ces contraintes résiduelles et des contraintes élastiques libres est un état de contrainte sûr en tous points :

$$S^{(e)} + \bar{S} = S^{(s)} \quad (3.34)$$

alors, la structure s'adaptera à tout programme de chargement respectant les limites prescrites, et la réponse de la structure tendra vers une réponse purement élastique.

**Démonstration :**

Soit la forme quadratique positive :

$$W = \frac{1}{2} \int_{D_0} L_{IJKL} (S_{IJ}^r - \bar{S}_{IJ}) (S_{KL}^r - \bar{S}_{KL}) dV_0 \quad (3.35)$$

$S^r$  : contrainte résiduelle actuelle dépendant du temps

Dérivons par rapport au temps :

$$\dot{W} = \int_{D_0} (S_{IJ}^r - \bar{S}_{IJ}) L_{IJKL} (\dot{S}_{KL}^r) dV_0 \quad \text{si } L_{IJKL} = L_{KLIJ}$$

$$\dot{W} = \int_{D_0} (S_{IJ}^r - \bar{S}_{IJ}) (\dot{E}_{IJ}^{re}) dV_0 \quad (3.36)$$

expression obtenue en admettant la validité de l'écriture suivante pour l'élasto-plasticité-parfaite :

$$\dot{S} = (L^{-1}) : (\dot{E}^e) = (L^{-1}) : (\dot{E}^{(e)} + \dot{E}^{re}) = \dot{S}^{(e)} + \dot{S}^{re} \quad (3.37)$$

pour laquelle la discussion est encore ouverte. Mais avec (3.7) :

$$\dot{W} = - \int_{D_0} (S_{IJ}^r - \bar{S}_{IJ}) (\dot{E}_{IJ}^p) dV_0 + \int_{D_0} (S_{IJ}^r - \bar{S}_{IJ}) (\dot{E}_{IJ} - \dot{E}_{IJ}^{(e)}) dV_0 \quad (3.38)$$

expression dans laquelle la deuxième intégrale,  $I_2$ , est nulle. En effet :

$$\dot{E} - \dot{E}^{(e)} = \dot{E}^* \quad \text{avec} \quad \dot{E}^* = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \left( (F^*)^T F^* - 1 \right) \right) \quad (3.39)$$

donc,

$$I_2 = \int_{D_0} (S_{IJ}^r - \bar{S}_{IJ}) (F_{ki}^* \dot{F}_{kj}^*) dV_0 \quad \text{car } S_{IJ} = S_{JI} \quad (3.40)$$

Néanmoins, les contraintes résiduelles vérifient l'équation d'équilibre dans la configuration relâchée réelle, et nous avons donc :

$$\left( \pi_{kj}^r \right)_{,j} = 0 \quad \text{avec} \quad \pi_{kj}^r = F_{ki}^* S_{ij}^r \quad (3.41)$$

donc

$$I_2 = \int_{D_0} \left( \pi_{kj}^r - \bar{\pi}_{kj} \right) (\dot{F}_{kj}^*) dV_0 \quad (3.42)$$

Par définition :

$$\dot{F}_{kI}^* = \left( V_k^* \right)_J \quad (3.43)$$

L'exposant \* indique que le transport concerné est celui qui permet de passer de la configuration initiale à la configuration déchargée "réelle". Les déplacements et vitesses relatifs à ce transport réel sont par conséquent cinématiquement admissibles, et nous pouvons appliquer le principe des puissance virtuelles en déformations finies à l'intégrale  $I_2$ .

Comme les contraintes résiduelles sont auto-équilibrées, les efforts extérieurs relatifs à ces états de contrainte sont nuls.

**L'intégrale  $I_2$  est donc bien nulle.**

Comme

$$S^r - \bar{S} = S - S^{(s)} \quad (3.44)$$

et compte tenu de l'hypothèse de normalité, on a

$$\dot{W} < 0 \quad (3.45)$$

et

$$\dot{W} = 0 \text{ si et seulement si } \dot{E}_{IJ}^p = 0 \text{ en tous point du domaine} \quad (3.46)$$

$W$  étant définie positive, nous en déduisons que sa valeur décroît, et tend vers une valeur, positive ou nulle, de manière éventuellement asymptotique.  $W$  est donc bornée lorsque  $t$  tend vers l'infini :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (W) \rightarrow \bar{W} \quad (3.47)$$

De fait,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{W}) \rightarrow 0. \quad (3.48)$$

Compte tenu de la remarque (3.46), nous en déduisons :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{E}^p) \rightarrow 0 \quad (3.49)$$

En conséquence, la réponse de la structure tend vers une réponse purement élastique.

### 3.5. Facteur de sécurité :

On peut, de manière identique au chapitre 1.2, mettre en évidence un facteur multiplicateur tel que :

$$S: \dot{E}^P \leq \frac{m}{m-1} (S - S^{(s)}): \dot{E}^P \quad (3.50)$$

Le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre deux donne un scalaire intrinsèque ; la relation (3.50) est donc valable quel que soit le repère choisi pour l'étude.

Cependant, le multiplicateur ainsi obtenu est exprimé vis-à-vis de l'état de contrainte . Dans le cadre théorique linéaire, on en déduit immédiatement le multiplicateur correspondant pour les charges extérieures appliquées. Nous obtenons ainsi directement le facteur de sécurité qui nous permet de limiter le domaine d'évolution des charges. Dans le cadre plus général des non-linéarités géométriques, il n'y a plus proportionnalité entre état de contrainte et charges extérieures appliquées. A tout instant, l'état d'équilibre dépend de la configuration occupée par la structure (en supposant que celle-ci soit stable...). Le multiplicateur de charge ne correspond donc pas à celui qui est utilisé pour les contraintes dans l'équation (3.50). L'étude du problème d'adaptation en géométrie non-linéaire est donc à ce stade loin d'être résolu dans le cas général.

#### Vis-à-vis de la stabilité :

Un domaine d'adaptation obtenu en tenant compte de ce phénomène est en fait un domaine pour lequel on vérifie qu'une quelconque histoire de charge ne peut conduire à la déstabilisation du processus d'adaptation.

#### Conclusion :

Nous sommes conscients de la limitation du champ d'application de l'analyse d'adaptation en géométrie non-linéaire par les phénomènes d'instabilité.

Du point de vue du formalisme adopté, la décomposition multiplicative proposée permet de mettre en évidence une analogie complète avec l'approche linéaire du théorème statique d'adaptation. Nous devons maintenant vérifier que ce formalisme est suffisamment large pour nous permettre de retrouver les approches précédentes.

## LIAISON AVEC LES APPROCHES PRECEDENTES

Dans ce chapitre, nous allons mettre en évidence les liaisons entre notre approche et celles qui précèdent; notre but est de montrer que nous obtenons ainsi une référence commune. Le dernier jalon a été posé par SACZUK et STUMPF ([71](1990)) : celui-ci utilise la décomposition proposée par WEICHERT ([88](1986)), fondée sur l'emploi de corps de comparaison également utilisé par GROSS-WEEGE ([17](1988)). Pour expliciter le passage de notre formulation à l'une de celles qui la précèdent, nous partirons de nos expressions; nous leurs appliquerons les hypothèses restrictives propres à l'approche concernée, et nous comparerons les résultats. Dans l'hypothèse où notre approche est effectivement un sur-ensemble des précédentes, nous pourrions vérifier si la cohérence est respectée, ou si certains termes ont pu être négligés.

### 4.1. Comparaison avec l'étude de SACZUK et STUMPF :

#### 4.1.1. Présentation :

Dans leur article, les auteurs utilisent la décomposition en deux étapes de l'application du chargement sur la structure; la première étape nous fait passer de la configuration initiale  $C_i$  à la configuration  $C_R$  ; la deuxième étape de  $C_R$  à  $C(t)$ . Ils introduisent le corps de comparaison, de forme identique, au niveau de la configuration  $C_R$  : celui-ci ne subit donc pas le premier chargement. L'application de la deuxième étape de chargement engendre, du fait de la caractéristique purement élastique du corps de comparaison, un gradient de déformation  $F^0$  différent de celui du corps réel  $F^T$ . On obtient ainsi la représentation de la figure 4.1.1 :

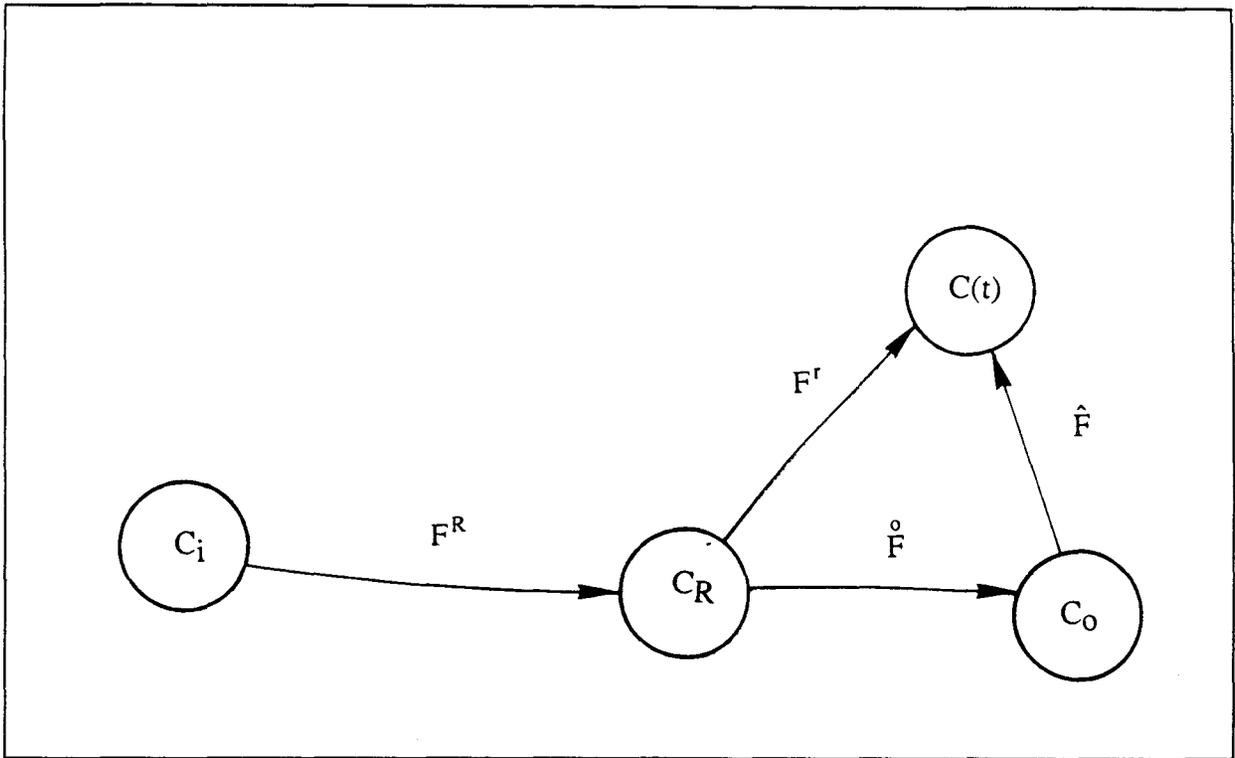


Figure 4.1.1 : Analyse en deux étapes avec utilisation du corps de comparaison

Dans notre modélisation, la partie élastique libre du gradient apparaît en fin de déformation ; c'est elle qui permet de passer de la configuration "déchargée réelle" à la configuration finale. Notre point de vue donne donc le schéma de transport de la figure 4.1.2 :

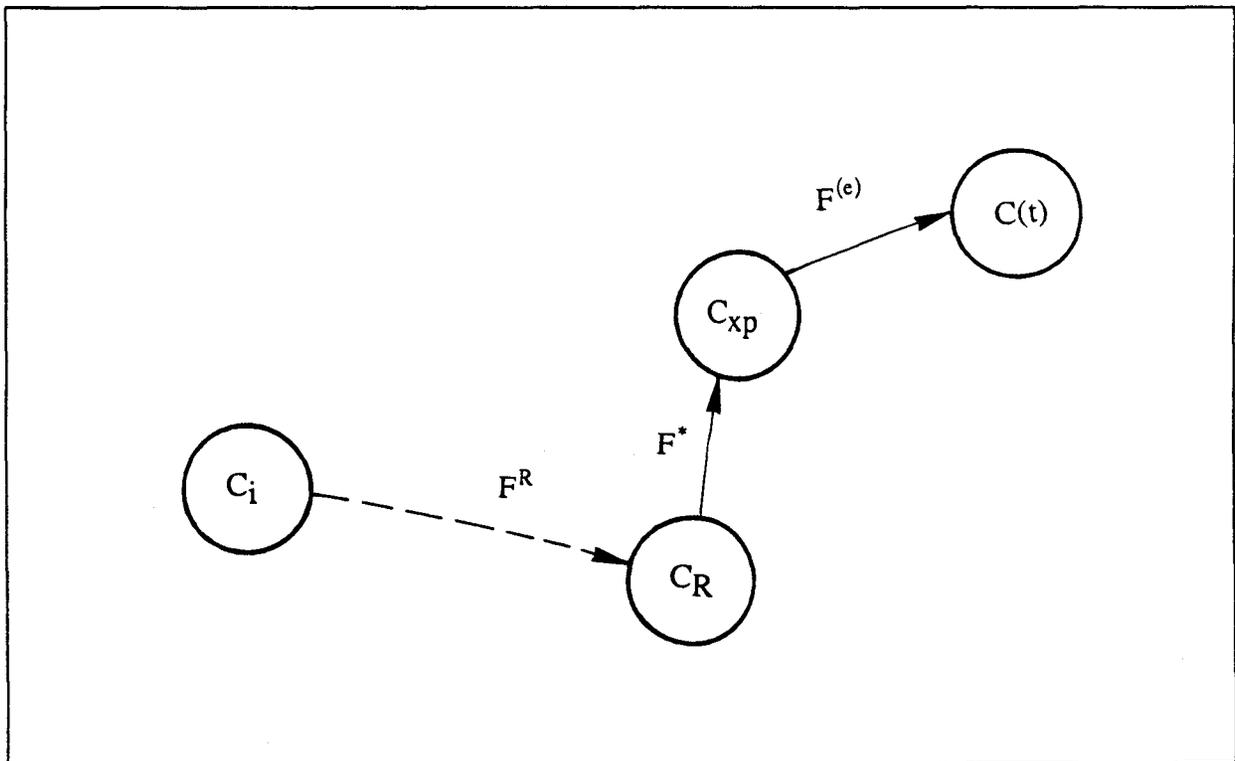


Figure 4.1.2 : Analyse en deux étapes sans utilisation du corps de comparaison

Les gradients  $F^{(e)}$  et  $F^*$ , correspondant respectivement à  $F^0$  et  $\hat{F}$ , ont donc commuté.

Par la suite, SACZUK recourt aux équations d'équilibre suivantes :

$$\text{Div}(\hat{F}F^R(S^R + \hat{S})) = -b^{*R} \text{ en } V$$

$$(\hat{F}F^R(S^R + \hat{S}))_n = -t^{*R} \text{ sur } s_t$$

Cette écriture suppose qu'on néglige l'influence du gradient  $F^0$ , et c'est ce que font les auteurs en "se restreignant à une classe de déformations  $P(H^0, H^F)$ , où  $P$  est une permutation d'ordre  $(O(\epsilon), O(\epsilon^{1/2}))$ .

**Remarques :**

Notre approche permet d'éviter cette restriction et d'obtenir les mêmes équations d'équilibre dans  $C_{xp}$ .

**4.1.2. Comparaison des équations d'équilibre :**

Dans notre formulation initiale (chapitre 3), la configuration intermédiaire est issue du déchargement total, contrairement à la démarche des auteurs qui décomposent la méthode d'application du chargement en deux temps.

Il est donc nécessaire de faire une mise au point sur la signification de ce chargement en deux temps pour notre approche.

Nous conservons les notations  $F^{(e)}$  et  $F^*$  pour les entités de la transformation globale. Nous adoptons les notations  $F^{e2}$  et  $\hat{F}$  pour les remplacer (décomposition de la deuxième étape). Nous pouvons résumer la situation par le schéma des transports de la figure 4.13. :

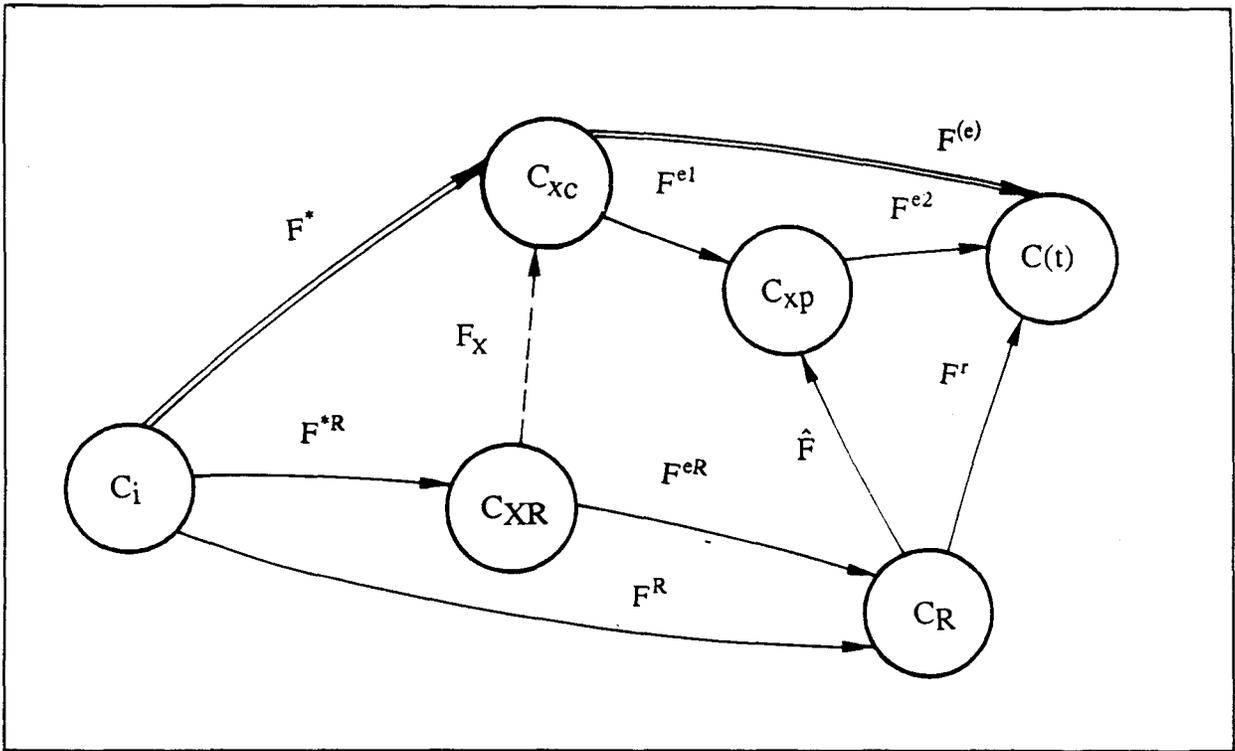


Figure 4.1.3 : Représentation détaillée des configurations étudiées

Nous mettons donc en évidence quatre configurations intermédiaires entre les configurations initiale et finale :

$C_R$  : configuration finale due au premier chargement

$C_{XR}$  : configuration déchargée obtenue par application et retrait du premier chargement seul

$C_{XC}$  : configuration déchargée complète obtenue après application et retrait du chargement total.

$C_{XP}$  : configuration relâchée partielle obtenue après application du chargement complet et retrait de la deuxième partie du chargement uniquement.

Nous définissons aussi :

$F_X$  : transport qui permet de passer de la configuration  $C_{XR}$  à la configuration  $C_{XC}$ .

On peut écrire les équations d'équilibre pour les forces de volume, par exemple :

$$\text{Div}(\mathbf{FS}) = -\mathbf{b}^{*R} - \mathbf{b}^{*r} \quad \text{dans } C(t) \quad (4.1.1)$$

$$\text{Div}(\hat{\mathbf{F}}\mathbf{F}^R(\mathbf{S}^R + \hat{\mathbf{S}})) = -\mathbf{b}^{*R} \quad \text{dans } C_{xp} \quad (4.1.2)$$

$$\text{Div}(\mathbf{F}^*\mathbf{S}^*) = 0 \quad \text{dans } C_{XC} \quad (4.1.3)$$

$$\text{Div}(\mathbf{F}^R\mathbf{S}^R) = -\mathbf{b}^{*R} \quad \text{dans } C_R \quad (4.1.4)$$

$$\text{Div}(\mathbf{F}^{*R}\mathbf{S}^{*R}) = 0 \quad \text{dans } C_{XR} \quad (4.1.5)$$

Le second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF  $\mathbf{S}$  représente une expression de la contrainte dans la configuration initiale; il est donc nécessaire, si l'on utilise ce tenseur pour écrire les équations d'équilibre, de le transporter dans la configuration adéquate.

- $\mathbf{S}$  : contrainte siégeant dans  $C(t)$  ( /et exprimée dans  $C_i/ )$
- $\mathbf{S}^R$  : contrainte siégeant dans  $C^R$  due à l'application du premier chargement uniquement ( /.../ )
- $\hat{\mathbf{S}}$  : partie résiduelle (partielle) de la contrainte siégeant dans  $C_{xp}$  ( /.../ )
- $\mathbf{S}^*$  : contrainte résiduelle 'totale' siégeant dans  $C_{XC}$  ( /.../ )
- $\mathbf{S}^{*R}$  : contrainte résiduelle entière siégeant dans  $C_{XR}$  due au chargement partielle ou premier chargement ( /.../ )

**Remarques :**

Les transports  $\hat{\mathbf{F}}\mathbf{F}^R$  et  $\mathbf{F}^{e1}\mathbf{F}^*$  sont équivalents

Pour les contraintes, exprimées à l'aide du second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF, on peut aussi écrire :

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^R + \hat{\mathbf{S}} + \mathbf{S}^{e2} = \mathbf{S}^* + \mathbf{S}^{e1} + \mathbf{S}^{e2} = \mathbf{S}^* + \mathbf{S}^e$$

- $\mathbf{S}^{e1}$  : partie élastique libre de la contrainte due au premier chargement à partir de  $C_{XC}$  donc siégeant dans  $C_{xp}$

- $S^{e2}$  : partie élastique libre de la contrainte due à l'ajout de la deuxième partie du chargement à partir de  $C_{xp}$ , donc siégeant dans  $C(t)$
- $S^e$  : partie élastique libre totale de la contrainte siégeant dans  $C(t)$

On peut ainsi réécrire l'équation d'équilibre (4.1.1) comme suit :

$$\text{Div}\left(F^{e2}\hat{F}F^R(S^R + \hat{S} + S^{e2})\right) = -b^{*R} - b^{*r} \quad (4.1.1.\text{bis})$$

Afin de voir l'influence de la deuxième partie du chargement sur l'équation d'équilibre, retranchons (4.1.2) de (4.1.1.bis) :

$$\text{Div}\left(F^{e2}\hat{F}F^R(S^R + \hat{S} + S^{e2}) - \hat{F}F^R(S^R + \hat{S})\right) = -b^{*r}$$

$$\text{Div}\left(H^{e2}\hat{F}F^R(S^R + \hat{S}) + F^{e2}\hat{F}F^R(S^{e2})\right) = -b^{*r} \quad (4.1.6)$$

en posant  $F = 1 + H$  ou  $H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$

Nous pouvons donc écrire l'équation (4.1.1) en ajoutant (4.1.6) à (4.1.2); (4.1.6) représente la contribution de la deuxième partie du chargement.

Pour une structure soumise à un chargement en deux temps ( $chgt_1 + chgt_2$ ), les équations d'équilibre sont donc de la forme :

$$\text{Div}(F_1 S_1) = -chgt_1$$

$$\text{Div}(F_1 S_1) + \text{Div}(H_2 F_1 S_1 + F_2 F_1 S_2) = -chgt_1 - chgt_2$$

$$\text{ou } \text{Div}(F_2 F_1 (S_1 + S_2)) = -chgt_1 - chgt_2$$

Appliquons cette remarque à l'équation (4.1.3), afin de retrouver (4.1.2). l'étape 1 étant la transformation \*, l'étape 2 étant la réapplication du premier chargement (R). La partie additionnelle, s'écrit :

$$\text{Div}\left(H^{e1}F^*S^* + F^{e1}F^*S^{e1}\right) = -b^{*R} \quad (4.1.7)$$

En ajoutant ce terme à (4.1.3), nous retrouvons bien (4.1.2).

L'expression "1.63" obtenue par SACZUK et STUMPF:

$$\hat{T} = \hat{H}F^R S^R + \hat{F}F^R \hat{S}$$

est le terme additionnel qu'il faut ajouter dans (4.1.4) pour obtenir (4.1.2). Le tenseur  $\hat{T}$  ainsi défini est du type "premier tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF", et il correspond à la contrainte additionnelle qui résulte du passage de la configuration  $C_R$  à la configuration relâchée  $C_{xp}$ .

$\hat{T}$  est donc bien une contrainte résiduelle, mais ne résulte que de l'application de la deuxième partie du chargement. La contrainte résiduelle "totale" apparaît dans l'équation (4.1.3).

On peut également envisager le passage de l'équation (4.1.5) à l'équation (4.1.3); on remarque que l'on a :

$$F^* = F_X F^{*R}$$

$$\text{posons : } S^* = S^{*R} + S^{*+}$$

Le terme à ajouter pour passer de (4.1.5) à (4.1.3), (ou à retrancher pour passer de (4.1.3) à (4.1.5)), d'après la remarque, est :

$$\text{Div} \left( H_X F^{*R} S^{*R} + F_X F^{*R} S^{*+} \right) = 0 . \quad (4.1.8)$$

Par conséquent, on a bien : (4.1.5) + (4.1.8) = (4.1.3)

### Conclusion :

Par l'intermédiaire des équations d'équilibre, nous avons montré les liens reliant nos deux approches; nous avons pour cela mis en évidence l'importance de la prise en compte d'une configuration que nous appelons "déchargée réelle", au lieu de la configuration relâchée "artificielle", et nous avons proposé une nouvelle approche des transports successifs dans le cas de chargement en plusieurs étapes.

### 4.2. Comparaison de notre approche avec celle de GROSS-WEEGE ([18](1990)) :

Dans la comparaison précédente, nous avons vu que SACZUK utilise une permutation pour la partie du processus dans laquelle on utilise le corps de comparaison; GROSS-WEEGE n'introduit pas cette permutation.

#### 4.2.1. Remarque sur les notations utilisées par GROSS-WEEGE :

On considère un chargement en deux étapes qui, en utilisant la notation "décomposition multiplicative", donne :

$$F = F^r F^R \quad (4.2.1)$$

GROSSWEEGE, quant à lui, préfère écrire :

$$F = F^R + F^r \quad (4.2.2)$$

ce qui constitue un abus d'écriture par rapport à la formule précédente. Il serait préférable d'écrire

$$F = F^R + H^r F^R \quad (4.2.3)$$

En factorisant, nous retrouvons bien la décomposition multiplicative (4.2.1). Pour obtenir cette décomposition additive, GROSS-WEEGE part en fait de la définition du gradient total défini par rapport aux coordonnées initiales :

$$F = \frac{\partial X}{\partial X} = \frac{\partial (X + u^R + u^r)}{\partial X} \quad (4.2.4)$$

Nos notations, formellement différentes au départ, sont donc bien équivalentes, mais lorsque nous verrons  $F^r$  dans les expressions de GROSS-WEEGE, il faudra comparer ce terme avec  $H^r F^R$  dans nos expressions. Pour éviter les confusions, nous noterons le terme de GROSSWEEGE :

$$F_G^r$$

Vérifions que les expressions globales, pour lesquelles nos approches adoptent le même point de vue, sont identiques. Pour celles-ci, la décomposition de la deuxième étape du processus n'est pas encore exploitée; par exemple l'expression :

$$\begin{aligned} 2E^r &= (F^R)^T \left[ (F^r)^T F^r - I \right] F^R \\ &= (F^R)^T \left[ (H^r)^T + H^r + (H^r)^T H^r \right] F^R \\ &= (F_G^r)^T F^R + (F^R)^T F_G^r + (F_G^r)^T F_G^r \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

est bien la formule numérotée "(16)<sub>2</sub>" que propose GROSS-WEEGE.

Nous devons pouvoir faire de même avec le premier tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF  $\pi^r$ , en remarquant que GROSS-WEEGE utilise le tenseur transposé du nôtre. Pour nous,

$$\begin{aligned}\pi^r &= H^r F^R S^R + F^r F^R S^r \\ &= H^r F^R S^R + F^R S^r + H^r F^R S^r \\ &= F_G^r S^R + F^R S^r + F_G^r S^r\end{aligned}\quad (4.2.6)$$

Nous retrouvons bien l'expression "(17)<sub>3</sub>" de GROSS-WEEGE.

#### 4.2.2. Comparaison proprement dite :

Les différences entre les deux approches apparaissent lorsque l'on explicite la décomposition de la deuxième partie du processus. Le corps de comparaison purement élastique est employé par GROSS-WEEGE: ce dernier utilise le même principe d'écriture que précédemment; aussi, nous noterons :

$$F_G^{\circ r} = H^{\circ r} F^R, \quad (4.2.7)$$

le symbole "  $\circ$  " étant mis pour la partie purement élastique concernant le corps de comparaison. On définira de même :

$$\hat{F}_G = F_G^r - F_G^{\circ r} \quad (4.2.8)$$

Considérons :

$$\hat{E} = E^r - E^{\circ r} \equiv E^{*r} = E^r - E^{e2} \quad (4.2.9)$$

La différence concerne le second terme du deuxième membre pour lequel GROSS-WEEGE obtient une expression du type de (4.2.5) :

$$2E^{\circ r} = \left( F_G^{\circ r} \right)^T F^R + \left( F^R \right)^T F_G^{\circ r} + \left( F_G^{\circ r} \right)^T F_G^{\circ r} . \quad (4.2.10)$$

Notre formulation conduit à :

$$2E^{e2} = \left( F^R \right)^T \left( F^{*r} \right)^T \left[ \left( H^{e2} \right)^T + H^{e2} + \left( H^{e2} \right)^T H^{e2} \right] F^{*r} F^R \quad (4.2.11)$$

Pour comparer ces deux expressions, on reprend le principe utilisé avec (4.2.5), en tenant compte cette fois de la commutation différenciant les deux approches :

$$u^r = u^{\circ r} + \hat{u} \text{ pour GROSS-WEEGE}$$

$$u^r = u^{*r} + u^{e2} \text{ pour nous}$$

On remarquera que d'un point de vue purement mathématique, l'addition des vecteurs (représentant par exemple les déplacements successifs d'un point dans l'espace) est commutative, mais qu'il n'en va pas de même lorsque l'on considère les configurations successives d'un milieu continu. La décomposition multiplicative du gradient de déformation total correspondante. (4.2.4) donne alors :

-pour GROSS-WEEGE :

$$F = F^R + \overset{\circ}{H} F^R + \hat{H} \overset{\circ}{F} F^R = F^R + \overset{\circ}{F}_G + \hat{F}_G$$

-pour nous :

$$F = F^R + H^{*r} F^R + H^{e2} F^{*r} F^R \equiv F^R + \hat{F}_G + \overset{\circ}{F}_G \quad (4.2.12)$$

En utilisant l'équivalence (4.2.12), (4.2.11) devient

$$2E^{\circ r} = \left( \overset{\circ}{F}_G \right)^T F^{*r} F^R + \left( F^R \right)^T \left( F^{*r} \right)^T \overset{\circ}{F}_G + \left( \overset{\circ}{F}_G \right)^T \overset{\circ}{F}_G \quad (4.2.13)$$

Avec

$$F^{*r} = I + H^{*r}$$

on obtient finalement,

$$2E^{e2} = \left( \overset{\circ}{F}_G \right)^T F^R + \left( F^R \right)^T \overset{\circ}{F}_G + \left( \overset{\circ}{F}_G \right)^T \overset{\circ}{F}_G + \underline{\left( \overset{\circ}{F}_G \right)^T \hat{F}_G + \left( \hat{F}_G \right)^T \overset{\circ}{F}_G} \quad (4.2.14)$$

Les termes soulignés forment une expression supplémentaire propre à notre formulation.

Notre expression "s'alourdit" du fait de l'intercalage, entre les gradients " e2 " et " R ", du gradient " \*r " qui résulte de la permutation différenciant nos deux approches. Cependant, GROSS-WEEGE émet l'hypothèse des petites évolutions au cours du temps pour la deuxième partie du processus; nous sommes donc amenés à négliger les termes du second ordre dans toutes les expressions où interviennent les entités qui définissent ce processus. Cela revient à négliger les produits

$$\left( F_G^r \right)^T F_G^r, \left( F_G^{\circ r} \right)^T F_G^{\circ r}, \left( F_G^{\circ r} \right)^T \hat{F}_G, \left( \hat{F}_G \right)^T F_G^{\circ r}$$

Nous retrouvons donc l'expression de GROSS-WEEGE en appliquant ses hypothèses restrictives à notre expression, soit, pour la déformation qui nous intéresse :

$$2\hat{E} = (\hat{F}_G)^T F^R + (F^R)^T \hat{F}_G \quad . \quad (4.2.15)$$

Nous pouvons aussi comparer nos expressions respectives de la contrainte résiduelle.

Pour notre part, nous avons obtenu :

$$\hat{\pi} = \hat{H}F^R S^R + \hat{F}F^R \hat{S} \quad , \quad (4.2.16)$$

avec par définition

$$\hat{S} = S^r - S^{e2} \quad . \quad (4.2.17)$$

De plus, en se rappelant que

$$\hat{F}_G = F_G^r - F_G^{\circ r} = H^r F^R - \hat{H}^r F^R = H^{*r} F^R \quad , \quad (4.2.18)$$

on peut réécrire :

$$\begin{aligned} \hat{\pi} &= \hat{H}F^R S^R + F^R \hat{S} + \hat{H}F^R (S^r - S^{e2}) \\ &= \hat{F}_G S^R + F^R \hat{S} + \underline{\hat{F}_G S^r} - \hat{F}_G S^{e2} \end{aligned} \quad . \quad (4.2.19)$$

D'après les hypothèses précédentes, on peut négliger le terme souligné; de fait, on retrouve, transposée, l'expression simplifiée de GROSS-WEEGE du type du premier tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF.

### Remarques :

Le terme que nous négligeons ici n'est pas identique à celui que néglige GROSS-WEEGE et qui, transposé, s'écrit :

$$F^r S^r - F_G^{\circ r} S^{\circ r} \quad (\text{avec } S^{\circ r} \equiv S^{e2})$$

On peut interpréter cette remarque comme une mise en évidence de la pertinence de la restriction introduite par GROSS-WEEGE, puisque celle-ci le conduit à éliminer des termes de discordance entre nos différentes approches. Sous cette restriction, les deux formulations apparaissent totalement équivalentes.

### Conclusion :

Cette deuxième comparaison permet de préciser les limites de validité de la méthode utilisant le corps de comparaison purement élastique. De même que GROSS-WEEGE,

SACZUK & STUMPF sont obligés de développer des considérations sur les ordres de grandeur des transformations (cf. permutations utilisées), pour la partie du processus dans laquelle on fait intervenir la comparaison avec le corps parfaitement élastique. Nous en déduisons que, si l'utilisation du corps de comparaison purement élastique est aisée, et conduit bien à une approche rigoureusement équivalente à l'approche classique dans le cas des petits déplacements/déformations, son domaine de validité dans le cadre des transformations géométriquement non-linéaires est limité.

Le passage de notre approche à celle de GROSS-WEEGE est relativement facile, puisqu'il suffit d'appliquer ses hypothèses restrictives et d'adopter sa notation pour retrouver ses expressions à partir des nôtres.

A la fin de son article, GROSS-WEEGE indique succinctement comment retrouver les approches antérieures à partir de la sienne; on pourrait donc, sur sa bonne foi, en déduire que notre travail, par transitivité, permet logiquement de retrouver ces mêmes approches. Cependant, il nous paraît utile d'explicitier également la comparaison avec les autres formulations, afin de bien voir si tout fonctionne de façon aussi automatique qu'avec GROSS-WEEGE, ou si quelques suppositions supplémentaires sont nécessaires.

#### **Remarque :**

GROSS-WEEGE, ainsi que SACZUK, distingue l'état de contrainte  $S^R$ , issu de l'application des charges extérieures  $a^R(X)$  indépendantes du temps, et l'état de contrainte  $S^I$ , issu de charges additionnelles variables  $a^I(X,t)$ . Dans tout notre développement, nous n'avons pas tenu compte de cette particularité; nous regardons si la structure s'adapte par rapport au chargement complet quelconque, alors que GROSS-WEEGE et SACZUK & STUMPF ne se préoccupent que de l'adaptation vis-à-vis du chargement additionnel. Cette démarche n'est pas fidèle au principe d'adaptation, qui doit être valable quelle que soit l'histoire des charges évoluant entre des limites prescrites (les limites étant par définition indépendantes du temps). L'approche de GROSS-WEEGE, reprise par SACZUK & STUMPF, revient à examiner une histoire de chargement particulière; on peut considérer que cette méthode, par l'application préalable des précharges  $a^R(X)$ , consiste à effectuer un décalage d'origine pour les limites

admissibles d'évolution des charges  $a^T(X,t)$ , au sujet desquelles on définit le domaine d'adaptation.

### 4.3. Comparaison avec l'approche de WEICHERT ([88](1986)) :

Rappelons que cette approche tensorielle est le point de départ des deux précédentes. Le corps de comparaison purement élastique y étant utilisé ; l'étude comparative sera donc basée sur les mêmes remarque qu'aux deux parties précédentes. Le chargement est étudié en une seule étape.

Nous pouvons rappeler la différence schématique suivante :

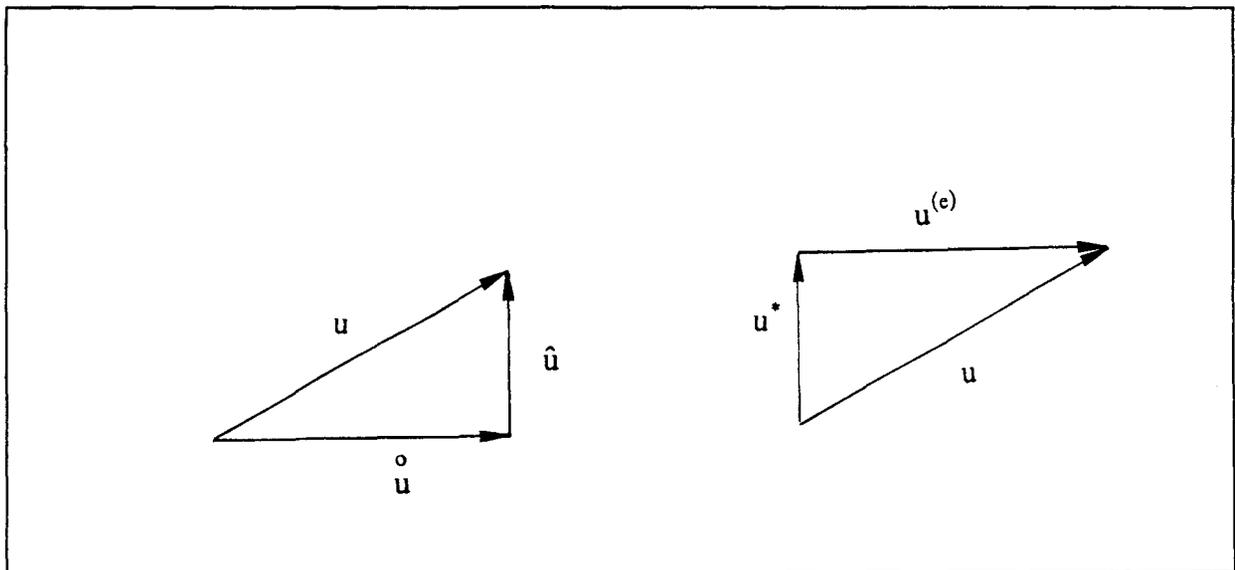


Figure 4.3.1 : Comparaison des notations relatives aux déplacements

ce qui permet d'écrire :

$$x = X + \overset{\circ}{u} + \hat{u} \quad \text{pour WEICHERT} \quad (4.3.1)$$

$$x = X + u^* + u^{(e)} \quad \text{pour nous} \quad , \quad (4.3.2)$$

vectoriellement identiques puisque l'ordre importe peu.

#### Abus de présentation :

Jusqu'à l'expression (4.3.10), nous présenterons notre formulation en parallèle à celle de WEICHERT; les expressions sont donc présentées par paires, dans le même ordre que pour (4.3.1) et (4.3.2).

Pour le tenseur gradient, nous obtenons

$$F = I + \frac{\partial \overset{\circ}{u}}{\partial X} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial X} = I + \overset{\circ}{H} + \hat{H} \overset{\circ}{F} = \hat{F} \overset{\circ}{F} \quad (4.3.3)$$

$$F = I + \frac{\partial u^*}{\partial X} + \frac{\partial u^{(e)}}{\partial X} = I + H^* + H^{(e)} F^* = F^{(e)} F^* \quad (4.3.4)$$

La différence entre nos deux approches apparaît donc ici avec la commutation de la décomposition multiplicative.

Pour la décomposition additive du tenseur des déformations totales de GREEN-LAGRANGE, nous pouvons écrire

$$E = \overset{\circ}{E} + \hat{E} \quad (4.3.5)$$

$$E = E^* + E^{(e)} \quad (4.3.6)$$

en explicitant chaque terme

$$2\overset{\circ}{E} = \left( \overset{\circ}{F} \right)^T \overset{\circ}{F} - I \quad (4.3.7)$$

$$2E^{(e)} = \left( F^* \right)^T \left[ \left( F^{(e)} \right)^T F^{(e)} - I \right] F^* \quad (4.3.8)$$

et

$$2\hat{E} = \left( \overset{\circ}{F} \right)^T \left[ \left( \hat{F} \right)^T \hat{F} - I \right] \overset{\circ}{F} \quad (4.3.9)$$

$$2E^* = \left( F^* \right)^T F^* - I \quad (4.3.10)$$

La différence apparaît lorsque nous tenons compte de l'ordre dans la dérivation de la somme vectorielle. Les formules (4.3.3) et (4.3.4) nous permettent d'identifier

$$\overset{\circ}{H} \equiv H^{(e)} F^* \quad (4.3.11)$$

et

$$\hat{H} \overset{\circ}{F} \equiv H^* \quad (4.3.12)$$

Mais suffit-il de remplacer les termes d'une expression par leurs homologues pour retrouver l'expression de l'autre approche ? Examinons le cas des tenseurs de GREEN-LAGRANGE décrit plus haut; d'après WEICHERT, on peut écrire

$$2\overset{\circ}{\mathbf{E}} = \left(\overset{\circ}{\mathbf{H}}\right)^T + \overset{\circ}{\mathbf{H}} + \left(\overset{\circ}{\mathbf{H}}\right)^T \overset{\circ}{\mathbf{H}} \quad (4.3.13)$$

ce qui, en identifiant donne

$$2\overset{\circ}{\mathbf{E}} = \left(\mathbf{F}^*\right)^T \left(\mathbf{H}^{(e)}\right)^T + \mathbf{H}^{(e)} \mathbf{F}^* + \left(\mathbf{F}^*\right)^T \left(\mathbf{H}^{(e)}\right)^T \mathbf{H}^{(e)} \mathbf{F}^* . \quad (4.3.14)$$

En décomposant notre expression, nous obtenons

$$\begin{aligned} 2\mathbf{E}^{(e)} = & \left(\mathbf{F}^*\right)^T \left(\mathbf{H}^{(e)}\right)^T + \mathbf{H}^{(e)} \mathbf{F}^* + \left(\mathbf{F}^*\right)^T \left(\mathbf{H}^{(e)}\right)^T \mathbf{H}^{(e)} \mathbf{F}^* \\ & + \left(\mathbf{F}^*\right)^T \left(\mathbf{H}^{(e)}\right)^T \mathbf{H}^* + \left(\mathbf{H}^*\right)^T \mathbf{H}^{(e)} \mathbf{F}^* \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Nous constatons la présence de deux termes supplémentaires, transposés l'un de l'autre.

Pour l'autre tenseur de GREEN-LAGRANGE ,on a

$$\begin{aligned} 2\hat{\mathbf{E}} = & \left(\overset{\circ}{\mathbf{F}}\right)^T \left(\hat{\mathbf{H}}\right)^T + \hat{\mathbf{H}} \overset{\circ}{\mathbf{F}} + \left(\overset{\circ}{\mathbf{F}}\right)^T \left(\hat{\mathbf{H}}\right)^T \hat{\mathbf{H}} \overset{\circ}{\mathbf{F}} \\ & + \left(\overset{\circ}{\mathbf{F}}\right)^T \left(\hat{\mathbf{H}}\right)^T \overset{\circ}{\mathbf{H}} + \left(\overset{\circ}{\mathbf{H}}\right)^T \hat{\mathbf{H}} \overset{\circ}{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

ce qui donne par identification

$$2\hat{\mathbf{E}} = \left(\mathbf{H}^*\right)^T + \mathbf{H}^* + \left(\mathbf{H}^*\right)^T \mathbf{H}^* + \left(\mathbf{H}^*\right)^T \mathbf{H}^{(e)} \mathbf{F}^* + \left(\mathbf{F}^*\right)^T \left(\mathbf{H}^{(e)}\right)^T \mathbf{H}^* \quad (4.3.17)$$

Or, pour nous,

$$2\mathbf{E}^* = \left(\mathbf{H}^*\right)^T + \mathbf{H}^* + \left(\mathbf{H}^*\right)^T \mathbf{H}^* \quad (4.3.18)$$

Ainsi, l'expression supplémentaire n'est pas présente dans le même terme de la décomposition additive du tenseur de déformation totale. Dans chaque cas, cette expression apparaît dans le terme relatif à la deuxième partie du processus.

Pour les besoins de la démonstration du théorème de MELAN suivant la voie classique, on est amené à dériver temporellement le dernier terme étudié ici, ou, ce qui revient au même, la différence

$$\mathbf{E} - \overset{\circ}{\mathbf{E}} .$$

Les termes de l'intégrale complétant cette dérivation sont symétriques, nous pouvons simplifier le résultat; cela revient pour nous à n'étudier qu'une partie de l'expression, puisque le calcul est équivalent pour la partie transposée. Ainsi,

$$\frac{d(\hat{E})}{dt} = \underline{\underline{(\dot{H}^*)^T + (\dot{H}^*)^T H^* + (\dot{H}^*)^T H^{(e)} F^*}} + \underline{\underline{(H^*)^T (\dot{H}^{(e)} F^* + H^{(e)} \dot{F}^*)}} \quad (4.3.19)$$

L'expression soulignée simplement est celle qui engendre la partie  $W_G$  de l'intégrale chez WEICHERT. En effet, on peut convertir cette expression sous la forme

$$\left( \overset{\circ}{H} \overset{\circ}{F} \right)^T \overset{\circ}{H} \equiv \hat{u}_{k,l} \overset{\circ}{F}_{kl} \quad (4.3.20)$$

qui correspond au terme générateur de  $W_G$ .

Notre expression, doublement soulignée, annule directement l'intégrale. En y ajoutant le terme non souligné, nous obtenons l'expression de WEICHERT qui permet l'annulation de la partie concernée. En effet,

$$\left( \dot{H}^* \right)^T \left( I + H^* + H^{(e)} F^* \right) \equiv \left( \dot{F}_{kl} - \overset{\circ}{F}_{kl} \right) F_{kl} \quad (4.3.21)$$

car (4.3.12) et (4.3.3) permettent d'écrire

$$H^* \equiv \hat{H} \overset{\circ}{F} = F - \overset{\circ}{F} = \Delta F \quad (4.3.22)$$

Ainsi, le passage de l'une à l'autre des formulations n'est pas immédiat, car la commutation de la décomposition multiplicative implique un "entrecroisement" des différentes expressions. Le fait d'utiliser le corps de comparaison purement élastique complique l'expression à dériver, et génère l'intégrale  $W_G$  difficile à évaluer. On notera cependant que dans l'approche proposée par WEICHERT, aucune hypothèse autre que celle de la validité de la décomposition additive du tenseur des déformations n'est faite. L'auteur mentionne seulement que cette hypothèse est vérifiée dans le cadre géométrique précisé par CASEY ([4](1985)). Nous avons vu au chapitre 2 que cette hypothèse est en faite valable dans le cas général, et que le domaine de validité dépend de ce que nous écrivons lorsque nous explicitons chaque partie. C'est en fait un problème de formalisme.

## **Commentaire sur les trois approches tensorielles comparées :**

Ces trois formulations utilisent "l'artifice" du corps de comparaison purement élastique fictif. Notre analyse révèle que cette démarche ne permet pas d'envisager l'étude de l'adaptation en grandes déformations sans quelques restrictions. C'est pourquoi, d'ailleurs, suite à la formulation présentée par WEICHERT ([88](1986)), GROSS-WEEGE ([18](1990)) et SACZUK & STUMPF ([71](1990)) se restreignent judicieusement au cas de déformations s'inscrivant dans le cadre défini par CASEY ([4](1985)), du moins au sujet de la deuxième partie du processus qui met en jeu cet artifice.

Dans la comparaison entre notre étude et celle de WEICHERT, on peut remarquer que si l'on néglige tous les termes doubles produits de type 'H H F' et leurs permutations avec transposition ou non, nos études sont rigoureusement équivalentes, le terme générant  $W_G$  devenant négligeable.

### **4.4. Comparaison avec l'approche matricielle de MAIER ([42](1973)) :**

Dans cette approche, Maier propose d'étudier l'influence de l'écroutissage et des effets géométriques du second ordre sur l'adaptation. Cette étude utilise une approche matricielle appliquée aux structures "discrètes" composées d'éléments unidimensionnels. Malgré l'apport d'éléments de comparaison entre approche matricielle et approche tensorielle par GROSS-WEEGE ([18](1990)), les liens entre les deux méthodes n'ont jusqu'à présent pas été explicités. Nous nous proposons, dans ce chapitre, d'apporter quelques éléments de réflexions sur ce sujet.

Comme précédemment pour SACZUK & STUMPF ([71](1990)), nous comparerons les équations d'équilibre et la façon de les écrire dans chaque cas. Noter que le fait de vouloir comparer une approche appliquée aux structures discrètes avec une approche milieux continus pourrait paraître hors de propos ; pourtant, sur le plan de l'application numérique, on calculera une structure discrète (constituée d'éléments unidimensionnels) dans un cas, et une structure le plus souvent discrétisée par éléments finis (bi-dimensionnels ou tri-dimensionnels) dans l'autre cas. La méthode matricielle apparaît donc comme une méthode

directe d'analyse des structures "simples"; la méthode tensorielle est beaucoup moins directe, mais n'est pas restreinte à un type de structure.

Nous considérerons que les équations présentées par MAIER peuvent être comparées avec celles de l'approche tensorielle de la façon suivante :

$$q_t = C u_t \quad \equiv \quad E_t = \frac{1}{2} \left( (F_t)^T F_t - I \right) \quad (4.4.1)$$

$$(C)^T Q_t = f_t \quad \equiv \quad \text{Div}(\pi_t) = -b_t \quad (4.4.2)$$

avec (cf.3.4)

$$\pi_t = F_t S_t \quad (4.4.3)$$

Ici, "C" est un opérateur linéaire de dérivation que l'on retrouve en partant des expressions de la théorie linéarisée. Les tenseurs étant alors symétriques, la dimension de C peut être réduite à (6 X 3) en notant les tenseurs q et Q, respectivement des déformations et des contraintes, directement par leur matrice :

$$(q)^T = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}]$$

$$(Q)^T = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}]$$

u et f, respectivement matrices des déplacements et des forces de volume.

Cependant, nous remarquons que dans l'équation d'équilibre tensorielle (4.4.2) intervient le premier tenseur des contraintes de PIOLA-KIRCHHOFF, qui est non symétrique. Il n'y a en fait équivalence entre les deux expressions que dans le cadre fixé par les petites déformations, pour lequel les configuration initiale et actuelle sont supposées confondues. Le tenseur gradient correspond alors à une identité. Dans cette hypothèse et d'après (4.4.3), il ne reste alors sous l'opérateur de divergence que "S", second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF, qui est symétrique.

Ainsi, l'emploi direct de matrice (dans la méthode matricielle) occulte le fait que ces éléments sont des représentants de tenseurs projetés dans un repère particulier, celui de la configuration initiale non déformée pour la théorie linéarisée. On se prive ainsi du moyen de prendre en compte totalement, du point de vue cinématique, l'influence de la non-identité des différentes configurations mises en évidence en grands déplacements/déformations.

Nous avons jusqu'à présent aussi utilisé les représentants matriciels des tenseurs, mais en tenant compte de la configuration dans laquelle ils sont valides, ce qui fait intervenir les différents transports Pull-back et Push-forward (cf.2.1.3) entre les différentes configurations, pour l'expression des déformations, et qui met en évidence l'existence des différents tenseurs de contrainte.

Dans son approche, MAIER décompose l'étude en deux étapes. Un premier chargement, indépendant du temps, met la structure dans un état d'équilibre correspondant à une première configuration déformée; MAIER prend cette configuration comme configuration de référence. Le deuxième chargement, qui vient s'ajouter au premier, est variable, et fait évoluer la structure dans le domaine des petite déformations autour de la configuration de référence précédente. Cela justifie l'emploi par MAIER d'équations d'équilibre linéarisées pour l'étude de la deuxième partie.

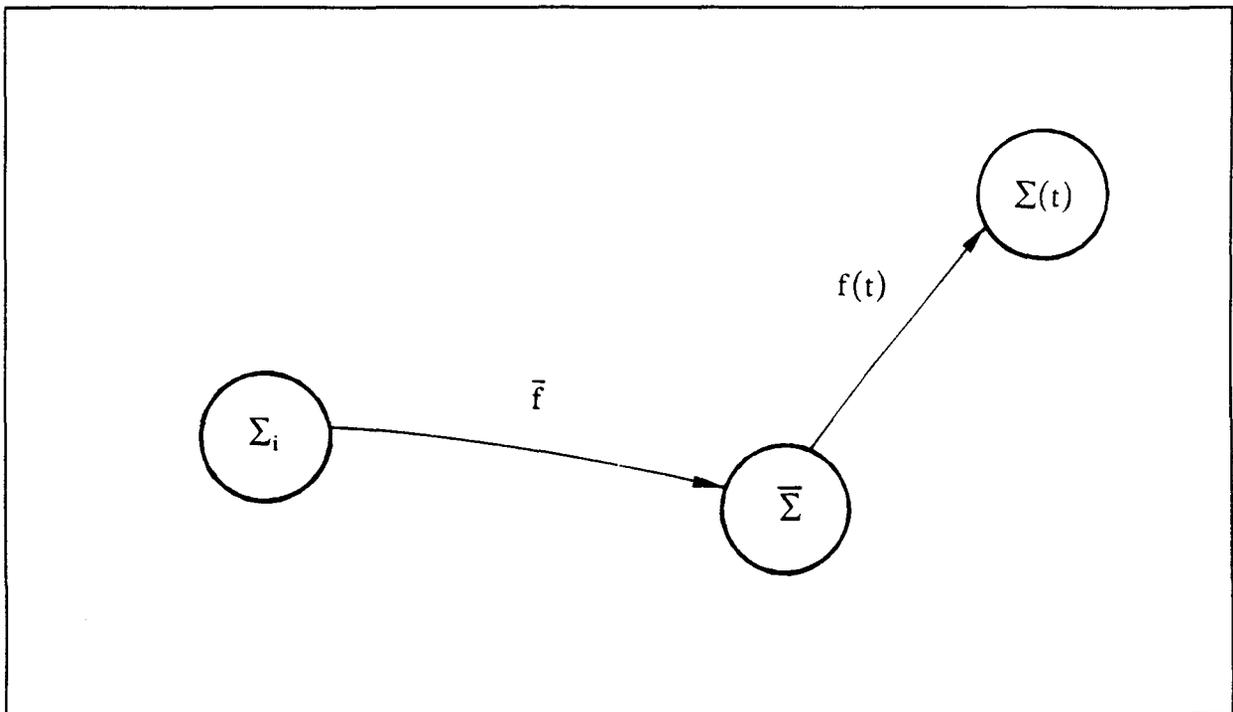


figure 4.4.1 : Configurations distinguées par MAIER

Nous remarquons que cette approche en deux temps nous est désormais familière, puisque longuement exposée dans la comparaison entre les approches tensorielle; il n'en reste pas moins que c'est chronologiquement MAIER qui utilisé cette idée le premier, et de là, a réveillé l'intérêt pour l'étude de l'influence des non-linéarités sur l'adaptation.

L'équation d'équilibre linéarisée proposée par MAIER, écrite dans la configuration d'équilibre de référence  $\bar{\Sigma}$  est la suivante :

$$(C)^T Q_t + G(\bar{Q}) u_t = f_t \quad (4.4.4)$$

La différence avec l'équation de la théorie linéarisée (cf.4.4.2) vient de l'apparition d'un deuxième terme dans le membre gauche de celle-ci. Ce terme doit représenter l'influence des effets géométriques du "second ordre" dus au premier chargement, sur l'équilibre de la structure dans ses petites évolutions au voisinage de la configuration d'équilibre de référence.

Ici,  $Q_t$ ,  $f_t$  et  $u_t$  représentent respectivement les contraintes, les forces de volume et les petits déplacements dépendant du temps et propres à la deuxième étape. "G" est un opérateur différentiel permettant de prendre en compte l'influence des contraintes issues du premier chargement, sur l'équilibre de la structure.

Avec l'approche tensorielle, l'équation d'équilibre complète écrite dans la configuration initiale est :

$$\text{Div}(F_t \bar{F}(\bar{S} + S_t)) = \bar{f} + f_t \quad (4.4.5)$$

En retranchant l'état d'équilibre

$$\text{Div}(\bar{F} \bar{S}) = \bar{f} \quad (4.4.6)$$

du premier chargement, on obtient :

$$\text{Div}(F_t \bar{F} S_t + H_t \bar{F} \bar{S}) = f_t \quad (4.4.7)$$

Réécrire cette équation dans la configuration d'équilibre de référence prise par MAIER revient à négliger l'effet du gradient de la première étape. En effet, prendre en compte cette nouvelle configuration comme point de départ de l'analyse revient à ignorer les déplacements qui la précèdent. On obtient en fait une configuration de référence avec pré-contrainte pour laquelle l'équation d'équilibre est directement issue de (4.4.7), en posant :

$$\bar{F} = I$$

d'où

$$\text{Div}(F_t S_t + H_t \bar{S}) = f_t \quad (4.4.8)$$

Nous n'avons à ce stade pas encore fait l'hypothèse des petites évolutions autour de cette configuration de référence.

En utilisant la décomposition du gradient

$$F = I + H$$

on peut réécrire (4.4.8) comme suit :

$$\text{Div}(S_t) + \text{Div}(H_t S_t) + \text{Div}(H_t \bar{S}) = f_t \quad (4.4.9)$$

L'hypothèse des petites évolutions engendrant la linéarisation de l'équation d'équilibre au voisinage de la configuration de référence rend le terme " dérivée partielle de  $(H_t)$ " négligeable, car du second ordre infinitésimal. D'où :

$$\text{Div}(S_t) + H_t \text{Div}(S_t) + H_t \text{Div}(\bar{S}) = f_t \quad (4.4.10)$$

Mise sous cette forme, l'équation d'équilibre peut être comparée avec celle de MAIER (4.4.4) puisque nous avons pris soin de mettre en évidence les seconds tenseurs de PIOLA-KIRCHHOFF ( ou plutôt leur matrice) qui sont symétriques.

Si l'on peut faire le parallèle entre  
 $\text{Div}(S_t)$  et  $(C)^T Q_t$

$H_t \text{Div}(\bar{S})$  et  $G(\bar{Q})u_t$  ,

il n'en va pas de même pour  
 $H_t \text{Div}(S_t)$

qui n'a pas d'équivalent dans la formulation de MAIER. Ce terme peut pourtant être du même ordre de grandeur que

$$H_t \text{Div}(\bar{S})$$

Sauf si l'on fait l'hypothèse restrictive supplémentaire que :

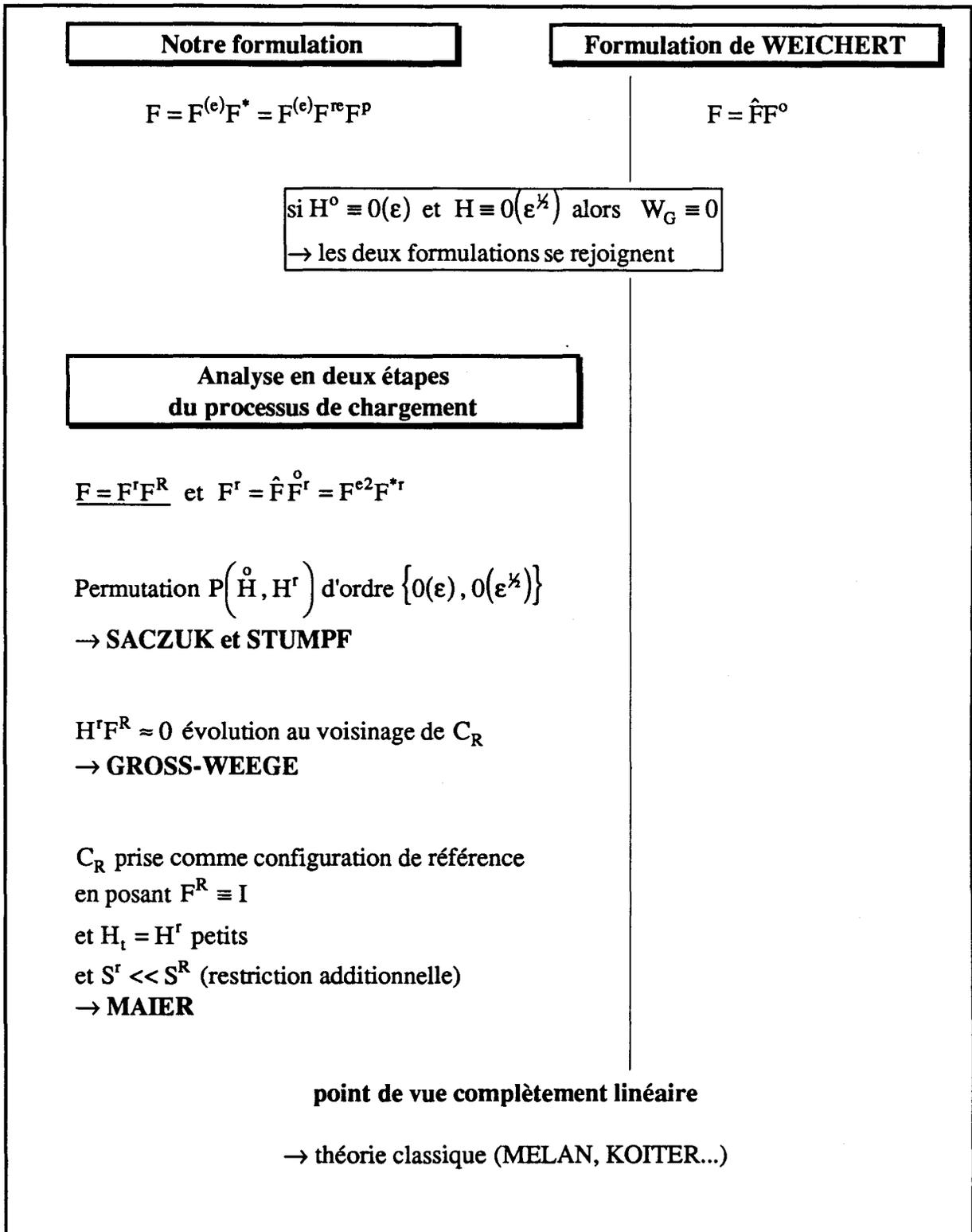
$$S_t \ll \bar{S}$$

Sous cette hypothèse restrictive supplémentaire, la formulation matricielle proposée par MAIER est donc valable dans le cas où l'on néglige l'influence des prédéformations dues à la première étape du chargement.

#### 4.5.Synthèse de l'étude comparative

Cette étude ne porte que sur la prise en compte des non-linéarités géométriques. Pour la résumer, on peut dresser un tableau récapitulatif permettant de situer les différentes approches entre elles.

theoreme statique pour les cas non-linéaires :



**Remarques :**

Bien que proposant un cadre théorique plus global, notre approche a un inconvénient majeur : la configuration intermédiaire utilisée n'est jamais connue, car l'étude d'adaptation

suppose que les charges évoluent de façon quelconque dans le domaine (qu'il faut définir). La configuration déchargée obtenue après adaptation de la structure n'est pas nécessairement unique. Le but de l'approche d'adaptation n'est pas non plus de chercher à déterminer celle-ci/celles-ci. Il est donc impossible de développer une méthode pratique basée sur cette approche. Dans le problème de type (i) proposé par WEICHERT ([88](1986)) (cf. paragraphe.2.3.1), l'auteur regarde les possibilités d'adaptation pour un domaine de configurations probables que peut occuper la structure. C'est une alternative qui n'a pas été exploitée jusqu'à présent.

Reconnaissons que l'utilisation du corps de comparaison purement élastique est un artifice qui permet de mettre un pied dans l'étude de l'adaptation en géométrie non-linéaire, et qui conduit à des applications possibles.

Notre étude comparative a permis de mettre en évidence l'intérêt de la formulation de GROSS-WEEGE, et d'apprécier la justesse de ses hypothèses.

Enfin, nous avons identifié l'une des faiblesses de la formulation matricielle dans la nécessité d'une hypothèse restrictive additionnelle ; nous pouvons ainsi préciser la validité des approches incrémentales de l'adaptation fondées sur cette formulation ; en particulier celles de SIEMASZKO & KÖNIG ([77](1985)) et précédentes des mêmes auteurs. Ces méthodes sont convenables si et seulement si l'incrément obtenu en contrainte est suffisamment petit par rapport à l'état de contrainte de la configuration déformée prise comme nouvelle référence à chaque pas. Si l'on désire employer cette méthode en partant d'un état vierge initial, l'erreur de méthode étant de l'ordre de :

$$H_t \text{Div}(S_t) ,$$

on aura intérêt, pour avoir  $H_t$  le plus petit possible, à l'utiliser pour des structures rigides. Au voisinage de la frontière du domaine élastique,  $H_t$  peut devenir significatif, mais l'incrément de contrainte est alors petit par rapport à l'état de contrainte actuel.

L'hypothèse restrictive est, en revanche, clairement traduite dans PYCKO & KÖNIG ([68](1991)), au sujet des équations d'équilibre (3.2). Cette approche théorique est fondée sur celle de MAIER ([42](1973)) ( $F^R \equiv I$ ), mais est développée en formalisme tensoriel indicé.

## FORMULATION ELEMENTS FINIS ET EXPLOITATION NUMERIQUE

Dans l'étude comparative précédente, l'approche de GROSS-WEEGE ([18](1990)) nous est apparue comme une méthode judicieuse, applicable à des cas concrets. Cette approche permet d'étudier les effets géométriquement non-linéaires par le biais de l'emploi d'une configuration prédéformée. La mise en application de cette approche a déjà été étudiée par l'auteur lors de ces travaux de thèse, GROSS-WEEGE ([17](1988)). Nous avons eu le privilège de pouvoir débiter nos investigations sur les bases numériques alors obtenues, et dans lesquelles nous distinguons :

- Un module de calcul élastique par éléments finis en géométrie linéaire, appliqué aux coques de révolution, capable de prendre en compte les caractéristiques d'une configuration préchargée. (traduction du comportement de la structure purement élastique de comparaison)
- Un module d'optimisation, travaillant à partir des résultats du module précédent, dont le but est de déterminer la valeur du coefficient de sécurité pour des charges extérieures évoluant entre des limites prescrites.

Ainsi, la recherche de la plus grande valeur possible du coefficient de sécurité à l'adaptation passe par l'optimisation d'un système : le nombre de contraintes est proportionnel au nombre de points-tests pour lesquels on souhaite évaluer le critère d'écoulement ; la non-linéarité de ces contraintes est ici liée au critère d'écoulement qu'elles représentent. La résolution de ce problème d'optimisation non-linéaire sous contraintes repose sur la méthode dite du LAGRANGIEN AUGMENTÉ exposée par PIERRE & LOWE ([62](1975)).

Pour générer la configuration prédéformée, nous avons utilisé le programme NONSAP élaboré vers 1974 [2], aménagé par KREJA à l'Université de WUPPERTAL, et qui permet de résoudre des problèmes de façon géométriquement non-linéaire par l'utilisation de

méthodes incrémentales. En outre, l'emploi de la méthode de RIKS-WEMPNER permet de garantir que le calcul est stable, c'est-à-dire que les configurations calculées sont "physiquement en équilibre".

## **5.1.Présentation du module d'adaptation**

Dans ce qui suit, nous nous restreindrons à l'étude des coques de révolution chargées de façon axisymétrique. De cette façon, le problème revient à étudier le comportement d'une tranche axiale de la structure.

Cependant, cette modélisation axisymétrique a pour inconvénient de ne pas pouvoir tenir compte des éventuels modes de défaillance non-axisymétriques qui peuvent par exemple se produire dans le cas du flambement. Les exemples traités devront donc être tels que pour la structure considérée, ou le cas de charge appliquée, le risque de flambement n'existe pas. Les cas de charge qui permettent d'éviter ce phénomène sont en général ceux qui n'engendrent pas de force de membrane de compression.

### **5.1.1.Modélisation :**

Cette présentation concerne le module établi par GROSS-WEEGE et à partir duquel nous avons travaillé. La modélisation restant la même, nous avons choisi de traduire et de restituer partiellement la présentation qui en a été faite par l'auteur ([17](1988)). Le lecteur pourra également se reporter à l'article de MORELLE & NGUYEN DANG HUNG ([53](1983)), sur lequel cette modélisation est en partie basée.

Dans la théorie simplifiée employée pour modéliser une coque, on rapporte l'étude à celle de la surface dite "moyenne", l'épaisseur étant supposée très petite par rapport aux deux autres dimensions. Du fait de l'axisymétrie du problème, cette démarche revient à étudier l'équilibre d'une ligne moyenne, intersection de la surface moyenne avec un plan contenant l'axe de symétrie.

## Modélisation géométrique

La surface moyenne est définie en coordonnées cylindriques par (base orthonormée globale  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ )

$$\mathbf{r}(s, \theta) = z(s)\mathbf{e}_z + r(s)\mathbf{e}_r(\theta) \quad (5.1.1.1)$$

En tout point de la surface (d'un élément), on peut définir une base locale orthonormée par [G64]

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_s = \mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_{,s} = z_{,s}\mathbf{e}_z + r_{,s}\mathbf{e}_r &= \cos(\phi)\mathbf{e}_z + \sin(\phi)\mathbf{e}_r \\ \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_2 = \mathbf{r}_{,\theta} = r \frac{d\mathbf{e}_r(\theta)}{d\theta} &= r\mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (5.1.1.2)$$

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_s \wedge \mathbf{a}_\theta}{|\mathbf{a}_s \wedge \mathbf{a}_\theta|} = -\sin(\phi)\mathbf{e}_z + \cos(\phi)\mathbf{e}_r$$

où  $\phi = \phi(s)$  est l'angle formé par la direction de l'axe et la tangente à la ligne méridienne, et  $\wedge$  symbolise le produit vectoriel. Compte tenu de l'axisymétrie, les composantes des tenseurs métriques, de courbure, et du symbole de Christoffel deviennent :

$$a_{11} = 1 \quad , \quad b_{11} = \theta_{,s} \quad , \quad \Gamma_{22}^1 = -r \sin(\phi) \quad (5.1.1.3)$$

$$a_{22} = r^2 \quad , \quad b_{22} = -r \cos(\phi) \quad , \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \sin(\phi)$$

Pour les coques de rayon méridien constant  $R$  (cône, cylindre, sphère) on a

$$r(s) = r_k + R(\cos(\phi(s)) - \cos(\phi_k)) \quad , \quad s \in [s_k, s_{k+1}] \quad (5.1.1.4)$$

$$\phi(s) = \phi_k - \frac{s - s_k}{R} \frac{180}{\Pi} \quad , \quad \phi_{,s} = -\frac{1}{R} \frac{180}{\Pi} \quad , \quad \phi_{,ss} = 0$$

L'axisymétrie du problème conduit à certaines simplifications au niveau des composantes: des charges extérieures, des éléments de réductions, des tenseurs des élongations et des rotations, et de déplacement

$$\begin{aligned} N^{12} = M^{12} = p^2 &= 0 \\ \gamma_{12} = \chi_{12} = u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.1.5)$$

"1" étant mis pour la direction méridienne tangente, et "2" pour la direction circonférencielle.

## Eléments de réduction de section

La représentation des contraintes utilise l'approximation des éléments de réduction de section, issu de l'intégration suivant l'épaisseur de la distribution des contraintes. Nous obtenons ainsi une résultante et un moment suivant les deux directions principales, qui, mis sous forme matricielle donnent

$$S^e = [N_s^e, N_\theta^e, M_s^e, M_\theta^e]^T \quad (5.1.1.6)$$

En introduisant la discrétisation

$$S^e = N_1 b_1^e + N_2 b_2^e \quad (5.1.1.7)$$

où les fonctions "N" sont les fonctions de forme telles que  $S^e$  satisfasse les équations d'équilibre. Celles-ci, si l'on néglige l'influence de  $N^R$  et si l'on a recours à (5.1.1.3) et (5.1.1.5), nous sont données en composantes physiques par

$$N_{s,s} r + N_s \sin(\phi) - N_\theta \sin(\phi) + p_s^* r = 0 \quad \text{en } V \quad (5.1.1.8)$$

$$\begin{aligned} & -N_\theta \cos(\phi) + N_s r (\phi_{,s} + u_{n,ss}^R) + [N_{s,s} r + N_s \sin(\phi)] u_{n,s}^R \\ & + M_{s,ss} r - M_{\theta,s} \sin(\phi) - M_\theta \phi_{,s} \cos(\phi) + 2M_{s,s} \sin(\phi) \\ & + M_s \phi_{,s} \cos(\phi) + p_n^* r = 0 \quad \text{en } V \end{aligned}$$

De plus,  $N_1$  et  $N_2$  dépendent aussi de  $u_n^R$ , que l'on peut aussi approximer par des fonctions de forme et des paramètres d'évaluation libres (nouveaux paramètres du problème). Ces paramètres d'évaluation libres vérifient les constantes de calcul. Ils sont nuls lorsque la configuration  $C_R$  est confondue avec la configuration initiale. (5.1.1.7) contient deux termes. Le premier, avec les paramètres  $b_1^e$ , vérifie les équations d'équilibre homogènes, alors que le deuxième contient les solutions particulières. Aussi les paramètres  $b_2^e$  sont-ils déterminés en fonction des charges données sur la coque  $p_s^*$  et  $p_n^*$ .

### Résolution du problème purement élastique de comparaison :

Pour résoudre ce problème, on utilise la formulation en terme du minimum de l'énergie complémentaire [G118], pour laquelle les conditions cinématiques sur la frontière

$S_k$  doivent s'annuler. En l'écrivant sous forme matricielle pour un élément "e" composé des noeuds k et k+1, on obtient

$$\pi_c^e = 2\Pi \int_{s_k}^{s_{k+1}} \left[ \frac{1}{2} (S^e)^T L S^e + (S^e)^T E^e \right] r ds, \quad (5.1.1.9)$$

où " $T$ " est mis pour la transposition, et où la matrice d'élasticité a pour expression

$$L = \frac{1}{2EH} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{H^2} & \frac{-3\nu}{H^2} \\ 0 & 0 & \frac{-3\nu}{H^2} & \frac{3}{H^2} \end{bmatrix} \quad (5.1.1.10)$$

et le vecteur de température

$$E = \alpha_\theta \begin{bmatrix} \bar{\theta}^* \\ \bar{\theta}^* \\ \Delta\theta^* / 2H \\ \Delta\theta^* / 2H \end{bmatrix} \quad (5.1.1.11)$$

En introduisant (5.1.1.7) dans (5.1.1.9) et par intégration sur un élément de coque, on obtient la forme discrétisée

$$\pi_c^e = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{1}{2} (b_i^e)^T F_{ij} b_j^e + (b_i^e)^T E_i^e \right] \quad (5.1.1.12)$$

avec la matrice de flexibilité élémentaire

$$F_{ij}^e = 2\Pi \int_{s_k}^{s_{k+1}} (N_i^e)^T L N_j^e r ds \quad (5.1.1.13)$$

et le vecteur

$$E_i^e = 2\Pi \int_{s_k}^{s_{k+1}} (N_i^e)^T E^e r ds \quad (5.1.1.14)$$

Par l'addition des énergies complémentaires élémentaires de tous les n éléments, on obtient l'énergie complémentaire de la structure complète

$$\pi_c = \sum_{e=1}^n \pi_c^e = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{1}{2} (b_i)^T F_{ij} b_j + (b_i)^T E_i \right] \quad (5.1.1.5)$$

Les conditions de raccordement entre deux éléments consécutifs n'ont pas encore été évoquées. En négligeant l'influence de  $N^R$  et avec l'aide de (5.1.1.3) et (5.1.1.5), nous pouvons écrire ces conditions en composantes physiques sous la forme

$$\begin{aligned} -N_s^e + N_s^{e+1} &= N_s^* , \\ -N_n^e + N_n^{e+1} &= N_n^* , \\ -M_s^e + M_s^{e+1} &= M_s^* \end{aligned} \quad (5.1.1.6)$$

avec

$$N_n^e = M_{s,s}^e + (M_s^e - M_\theta^e) \frac{1}{r} \sin(\phi) + N_s^e u_{n,s}^{Re} \quad (5.1.1.7)$$

On notera que les conditions-limites statiques doivent être écrites seulement lorsque les conditions-limites cinématiques correspondantes ne sont pas déterminées. Les éléments de conditions statiques au point nodal  $k$ ,  $[N_s^*, N_n^*, M_s^*]$ , sont définis comme sur la figure 5.1.1.1.

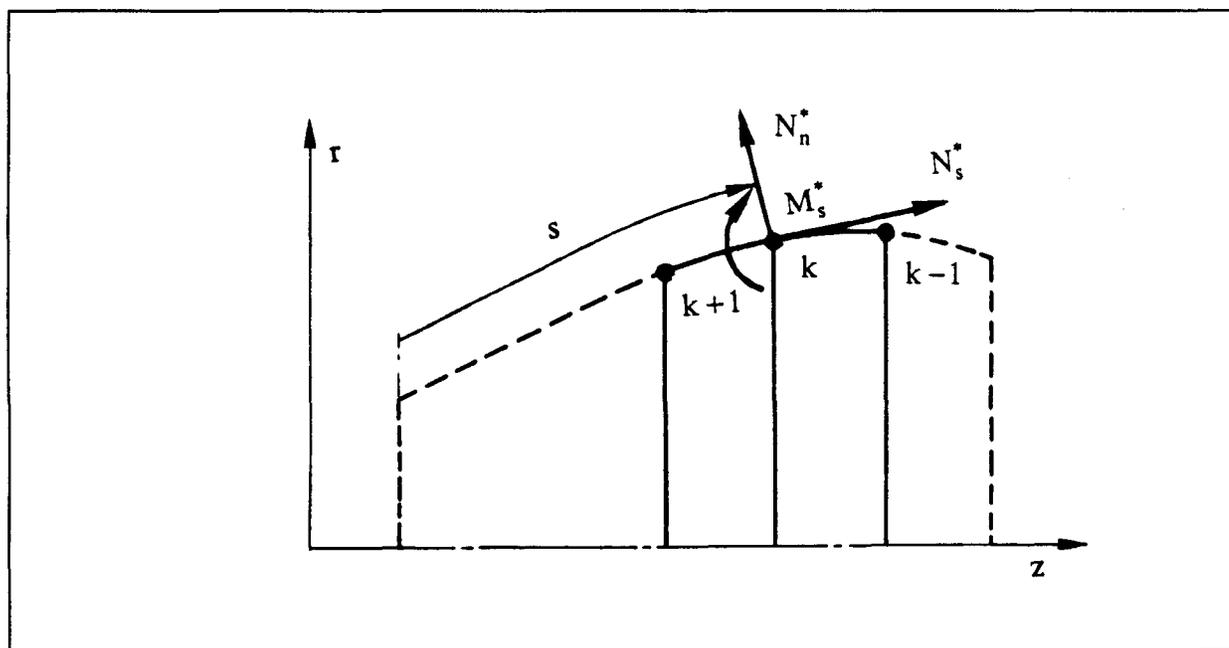


figure 5.1.1.1 : Conditions-limites statiques.

On pose les conditions-limites statiques en un point nodal  $k$  élément de "e" comme le vecteur

$${}^k g^e = \left[ N_s^e, N_n^e, M_s^e \right]^T \Big|_{s=s_k} . \quad (5.1.1.18)$$

Avec les considérations (5.1.1.17) et (5.1.1.7), on obtient la forme discrétisée

$${}^k g^e = {}^k C_1 b_1^e + {}^k C_2 b_2^e \quad (5.1.1.19)$$

où les matrices  ${}^k C_1$  et  ${}^k C_2$  dépendent de l'abscisse de chaque point  $k$  ainsi que des données du problème de référence  $u^R$  par (5.1.1.7) et (5.1.1.17). Ainsi, on obtient les conditions-limites et de continuité (5.1.1.16) en chaque point nodal  $k$  par

$$\begin{bmatrix} -{}^k C_1 & {}^k C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^e \\ b_1^{e+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -{}^k C_2 & {}^k C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2^e \\ b_2^{e+1} \end{bmatrix} = {}^k g^* . \quad (5.1.1.20)$$

On peut exprimer cela pour les  $n+1$  points nodaux de la structure. On obtient alors un système équivalent de la forme

$$C_1 b_1 + C_2 b_2 = g^* \quad (5.1.1.21)$$

En introduisant ce système équivalent dans (5.1.1.15) et avec l'aide du multiplicateur de Lagrange "q", nous obtenons

$$\hat{\pi}_c = \pi_c + \left( g^* - C_1 b_1 - C_2 b_2 \right)^T q \quad (5.1.1.22)$$

L'expression de l'énergie complémentaire obtenue représente un état stable vis-à-vis de la solution, de sorte que sa variation par rapport à  $b_1$  et  $q$  est nulle. En tenant compte de (5.1.1.15), on réunit ainsi les deux conditions:

$$F_{11} b_1 + F_{12} b_2 + E_1 - (C_1)^T q = 0 , \quad (5.1.1.23)$$

$$C_1 b_1 + C_2 b_2 = g^* . \quad (5.1.1.24)$$

En exprimant  $b_1$  à l'aide de (5.1.1.23)

$$b_1 = (F_{11})^{-1} \left[ (C_1)^T q - F_{12} b_2 - E_1 \right] \quad (5.1.1.25)$$

et en réécrivant (5.1.1.24), on trouve

$$C_1 (F_{11})^{-1} (C_1)^T q = C_1 (F_{11})^{-1} E_1 + \left[ C_1 (F_{11})^{-1} F_{12} - C_2 \right] b_2 + g^* \quad (5.1.1.26)$$

soit

$$K q = g^{\theta} + g^p + g^* \quad (5.1.1.27)$$

avec

$$K = C_1 (F_{11})^{-1} (C_1)^T \quad (5.1.1.28)$$

comme matrice de rigidité du système total,

$$g^0 = C_1 (F_{11})^{-1} E_1 \quad (5.1.1.29)$$

comme vecteur des températures, et

$$g^p = [C_1 (F_{11})^{-1} F_{12} - C_2] b_2 \quad (5.1.1.30)$$

comme vecteur des charges réparties de surfaces et  $g^*$  comme vecteur des condition de bord.

De la condition (5.1.1.22), on déduit les coefficients de Lagrange "q" tirés de la formulation énergétique telle qu'aux quantités statiques limites  $[N_s, N_n, M_s]$  correspondent les quantités cinématiques  $[u_s, u_n, \varphi_s]$ . Ainsi, à la formulation (5.1.1.27) correspond la formulation pas-à-pas élément-finis classique, quoiqu'ici nous ayons introduit dès le départ cette formulation pour les quantités de section.

Dans le travail de FRAEIJIS DE VEUBEKE [G28], on considère les conditions statiques de continuité et de bord au niveau de l'élément, directement tirées d'un principe variationnel appliqué à l'énergie complémentaire (voir également PIAN [G87]). La résolution du système (5.1.1.27) permet de connaître "q", que nous remplaçons dans (5.1.1.25): cette formulation donne alors  $b_1$ . Ainsi, avec (5.1.1.7), on peut déterminer  $S^e$ .

#### Détermination de l'état de contrainte différentiel :

Le champ de contrainte différentiel  $\Delta S^e$  satisfait les conditions statiques (5.1.1.8) et (5.1.1.16). On en déduit

$$b_2 = 0 \quad (5.1.1.31)$$

$$g^* = 0$$

Le système des équations d'équilibre (5.1.1.21) se réduit par conséquent à :

$$C_1 b_1 = 0. \quad (5.1.1.32)$$

Nous désignons par NE le nombre de degrés de liberté du vecteur  $b_1^e$ , ce qui nous donne le nombre NG de degrés de liberté total du système dans le vecteur  $b_1$  par

$$NG = n \times NE \quad (5.1.1.33)$$

où  $n$  désigne le nombre d'éléments. Les conditions statiques homogènes de bord et de continuité sont comprises dans la matrice  $C_1$ . Leur nombre  $NS$  est donné par

$$NS = 3 \times (n + 1) - NK, \quad (5.1.1.34)$$

où  $NK$  est le nombre des conditions-limites cinématiques imposées. Ainsi, le système (5.1.1.32) comprend  $NS$  équations pour  $NG$  inconnues. On peut donc décrire les degrés de liberté  $b_1$  du système total moyennant l'aide de  $NGU$  paramètres indépendants  $\Delta b_1$ , où

$$NGU = NG - NS, \quad (5.1.1.35)$$

par

$$b_1 = X \Delta b_1, \quad b_1^e = X^e \Delta b_1. \quad (5.1.1.36)$$

La matrice  $X$  est déterminée via l'utilisation du procédé d'élimination de GAUSS-JORDAN [G112] sous la condition

$$C_1 X = 0 \quad (5.1.1.37)$$

où la matrice  $X^e$  contient ce qui est propre à l'élément  $e$  dans la matrice  $X$ . De plus, la condition (5.1.1.32) est identiquement satisfaite quelles que soient les valeurs de  $\Delta b_1$  et l'état de contrainte différentielle (de section) dans l'élément  $e$  est donné par

$$\Delta S_1^e = N_1 X^e \Delta b_1. \quad (5.1.1.38)$$

Ainsi, par l'utilisation de la formulation en énergie complémentaire, nous avons accès à tout moment aux expressions des variables qui nous permettent d'obtenir directement la valeur des contraintes en tout point d'un élément. Ce point est essentiel pour l'étude d'adaptation: le raisonnement d'adaptation est en effet basé sur le respect, par la somme du champ des contraintes élastiques et du champ des contraintes résiduelles auto-équilibrées, du convexe d'élasticité en tous points de la structure.

### 5.1.2. Améliorations apportées

Dans son état initial, le module de calcul à l'adaptation offre la possibilité de prendre en compte trois types de charges différents :

- des charges mécaniques nodales
- des charges mécaniques réparties
- des charges thermiques (réparties).

Ces charges, compte tenu de la modélisation axisymétrique, représentent des chargement "de révolution".

Toute combinaison de charge comprend trois charges simultanées au maximum, parmi lesquelles on doit avoir aux maximum deux chargements variables (étude à deux paramètres de charge au maximum).

Dans ces conditions, l'étude d'un tronc de réservoir fermé, soumis à une pression interne et à une charge thermique variables, est impossible. En effet, la structure initiale du programme ne permet pas de considérer la charge "nodale" axiale comme une charge induite par la pression interne. On devrait donc considérer trois charges, dont deux varieraient avec le même paramètre. Nous avons réalisé la modification nécessaire qui permet de considérer ce type de problème. Le tronc de réservoir soumis à des charges thermique et mécanique de pression interne peut donc désormais être étudié comme un problème à deux charges variables.

Parmi les sollicitations axisymétriques possibles, celle de la torsion axiale est intéressante, car elle correspond à un type de charge souvent rencontré dans les systèmes mécaniques tels que : arbres de transmission de puissance, barres de torsion...Il nous a donc semblé opportun d'introduire ce type de sollicitation comme cas de charge possible pour les coques cylindriques; nous évaluerons cette sollicitation par rapport à la configuration initiale. L'état de contrainte de cisaillement engendrée par le moment axial de torsion est supposé uniforme sur la section, compte tenu du fait que la modélisation choisie nous ramène à l'étude de la surface moyenne.

Les effets du changement de géométrie sur la valeur des contraintes engendrées par le moment de torsion sont négligés, et le phénomène de flambement par torsion ignoré. Nous ne pourrions donc étudier que des structures pour lesquelles ce type de défaillance n'est pas possible.

Nous avons également introduit la possibilité de prendre en compte l'écroutissement cinématique limité comme l'ont proposé WEICHERT et GROSS-WEEGE ([90](1988)).

### **5.1.3.Résultats obtenus**

Les résultats présentés ici ne concernent que l'étude d'adaptation en géométrie linéaire; le but est de vérifier la validité de notre mise en oeuvre de ce module numérique.

(La méthode utilisée pour obtenir la totalité du domaine d'adaptation est exposée en annexe B).

#### **Remarque :**

L'étude d'adaptation est menée vis-à-vis de deux critères d'effondrements :

- le critère d'effondrement par déformations plastiques accumulées
- le critère d'effondrement par déformations plastiques alternées.

Chaque critère définit un domaine limite d'évolution des charges (contenant l'origine). Le domaine d'adaptation résulte de l'intersection de ces deux domaines, c'est à dire que la frontière du domaine d'adaptation obtenue est toujours définie par le plus sévère des deux critères (cf annexe A, expression A.4.19).

#### **5.1.3.1.Etude de l'influence du nombre d'éléments**

Dans toute étude numérique classique par éléments finis, le temps de calcul est une fonction non-linéaire croissante du nombre d'éléments.

Dans notre cas, la solution du problème d'adaptation est obtenue par optimisation non-linéaire sous contrainte; le nombre de contraintes est égal au nombre de points en lesquels le critère d'écoulement est évalué. Pour  $n$  points par éléments, le nombre de contraintes dépend donc directement du nombre d'éléments choisis pour modéliser la structure.

On sait aussi qu'il existe un nombre d'éléments maximum au-delà duquel la solution obtenue n'apporte pas d'amélioration significative. Le but ici est de quantifier ce nombre d'éléments, même si celui-ci dépend souvent directement du problème traité.

#### **Exemple A**

Nous considérons la coque cylindrique courte proposée par GROSS-WEEGE dans sa thèse ([17](1988)) (exemple.1). Cette coque est soumise à une pression interne et à une

charge annulaire concentrée à une extrémité. Ces charges varient indépendamment l'une de l'autre.

Les résultats sont présentés sur la figure (5.1.3.1.A). Les axes sont normalisés par rapport à la valeur de la charge d'adaptation correspondante.

Nous pouvons remarquer que les solutions obtenues pour six et dix éléments sont très proches; ce que nous gagnons en prenant dix éléments est assez faible en regard du coût numérique associé. En effet, pour six éléments, en évaluant le critère d'écoulement en trois points par élément, nous devons optimiser le problème sur

- 6 éléments
- 3 points par éléments
- 2 expressions différentes du critère d'écoulement (+/-)
- 4 combinaisons (2 x 2 bornes) dans le cas de deux charges variant indépendamment,

soit 144 contraintes.

Pour 10 éléments, nous devons donc optimiser sur  $10 \times 24$  soit 240 contraintes, ce qui accroît le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence, ainsi que la durée de chacune d'entre elles. Nous avons pu observer que le temps nécessaire était dans notre cas multiplié par un facteur d'environ 10.

L'étude de cette structure ne nécessite donc pas un nombre d'éléments supérieur à dix pour obtenir la convergence du résultat vis-à-vis de ce facteur de modélisation.

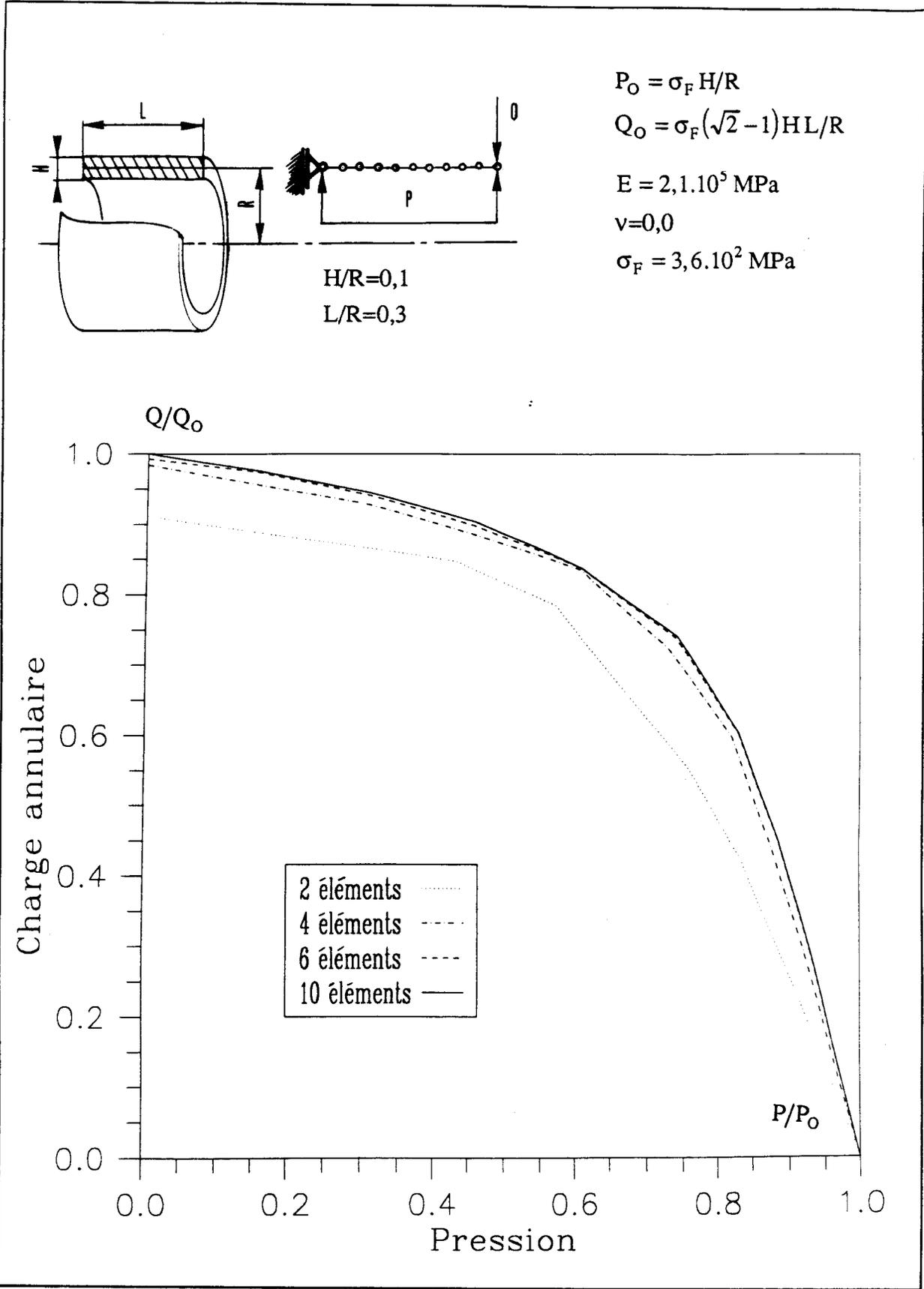


figure 5.1.3.1.A : Influence du nombre d'éléments (structure A).

### **Exemple B :**

Nous avons mené la même étude pour une portion conique de raccord en accordéon (fig.5.1.3.1.B), (cf GROSS-WEEGE [ ](1988) exemple 2).

On peut remarquer que les résultats obtenus avec six éléments sont dans certaines zones plus optimistes que pour dix éléments. Plusieurs explications peuvent être avancées :

- le nombre de points d'évaluation de la fonction d'écoulement n'est pas le même , et les points ne sont pas situés aux mêmes abscisses. Les valeurs des contraintes prises en compte sont différentes et peuvent donc influencer le résultat. Nous en déduisons que la présence de zones de concentration de contraintes est un facteur très pénalisant, de nature à remettre en cause la validité des résultats fondés sur l'évaluation discrétisée de la condition d'écoulement.

- le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence de l'optimisation augmente avec le nombre d'éléments -les erreurs numériques cumulées aussi !

Ce second exemple nous conforte dans l'idée que pour le modèle axisymétrique utilisé, il n'est pas utile de prendre un grand nombre d'éléments. La différence entre six et dix éléments est minime. Prendre plus de dix éléments n'apporterait qu'un temps de calcul supplémentaire, mais n'améliorerait pas le résultat. Travailler avec une dizaine d'éléments semble donc un choix raisonnable.

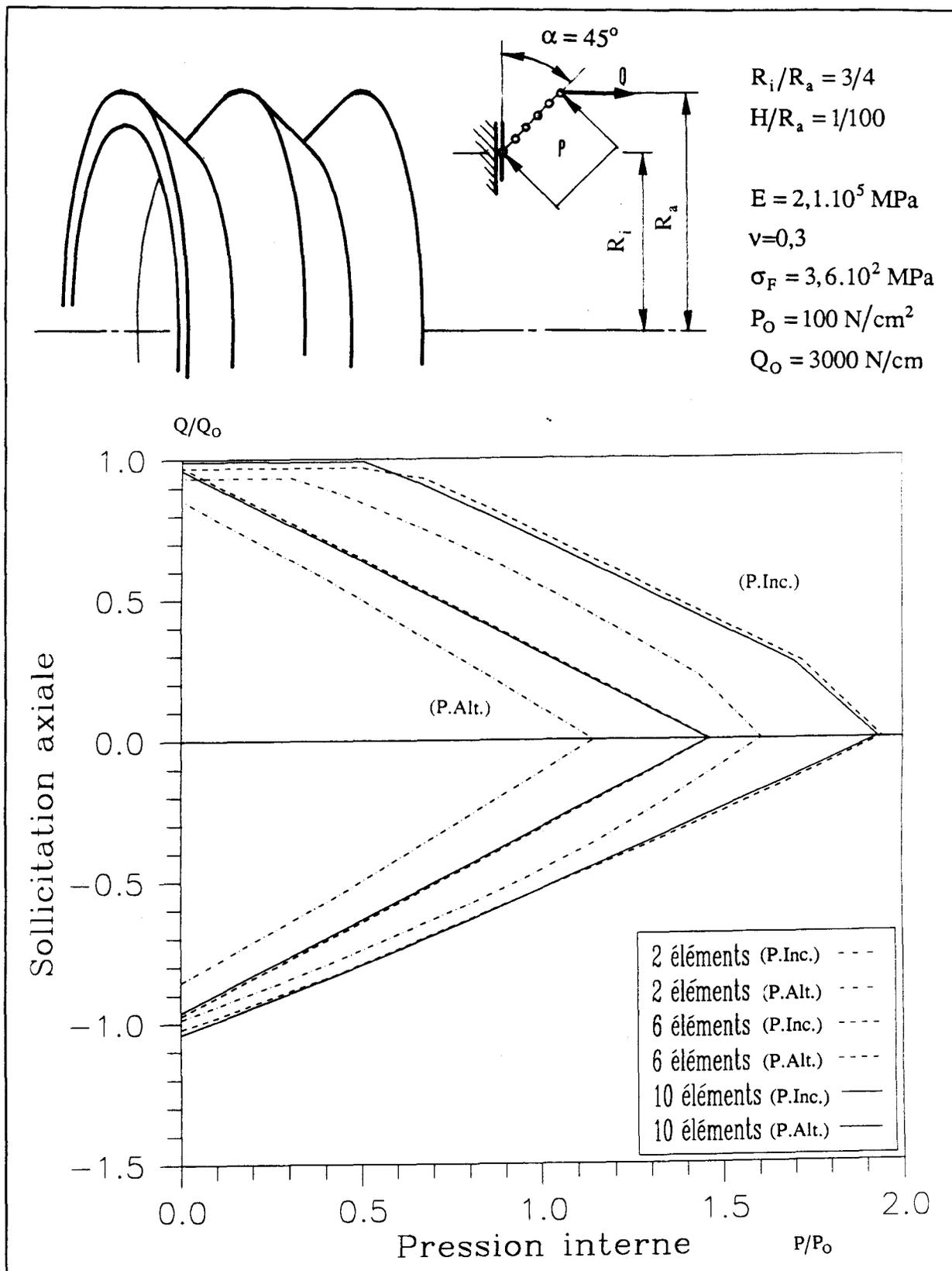
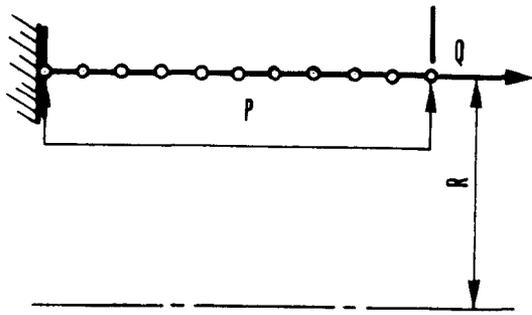


figure 5.1.3.1.B : Influence du nombre d'éléments (structure B).

### 5.1.3.2. Prise en compte de la charge axiale induite :

#### Exemple C :

Nous considérons un tronç de réservoir (tube fermé) précédemment traité par GROSS-WEERGE & WEICHERT [ ](1992), soumis à une pression interne, ainsi qu'à un gradient de température linéaire suivant l'épaisseur. Dans leur étude, les auteurs considèrent que la pression interne est constante (étude à une charge variable, solution /1/). Notre aménagement, qui concerne la possibilité de traiter la charge axiale comme une charge induite, permet d'étudier ce qui se passe pour une pression interne aussi variable (étude à deux charges variables, solution /2/). Les résultats sont reportés sur la figure (5.1.3.2.C). Le critère d'effondrement incrémental fournit la même limite dans les deux cas; en revanche, le critère d'effondrement par plasticité alternée est modifié. Le passage d'une pression interne constante à une pression interne variable réduit le domaine des charges admissibles.



$E = 1,6 \cdot 10^5 \text{ MPa}$   
 $\nu = 0,3$   
 $\sigma_F = 205 \text{ MPa}$   
 $P_0 = \sigma_F H/R$   
 $\vartheta_0 = 2(1-\nu)/E\alpha_\vartheta$   
 $\alpha_\vartheta = 0,2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$

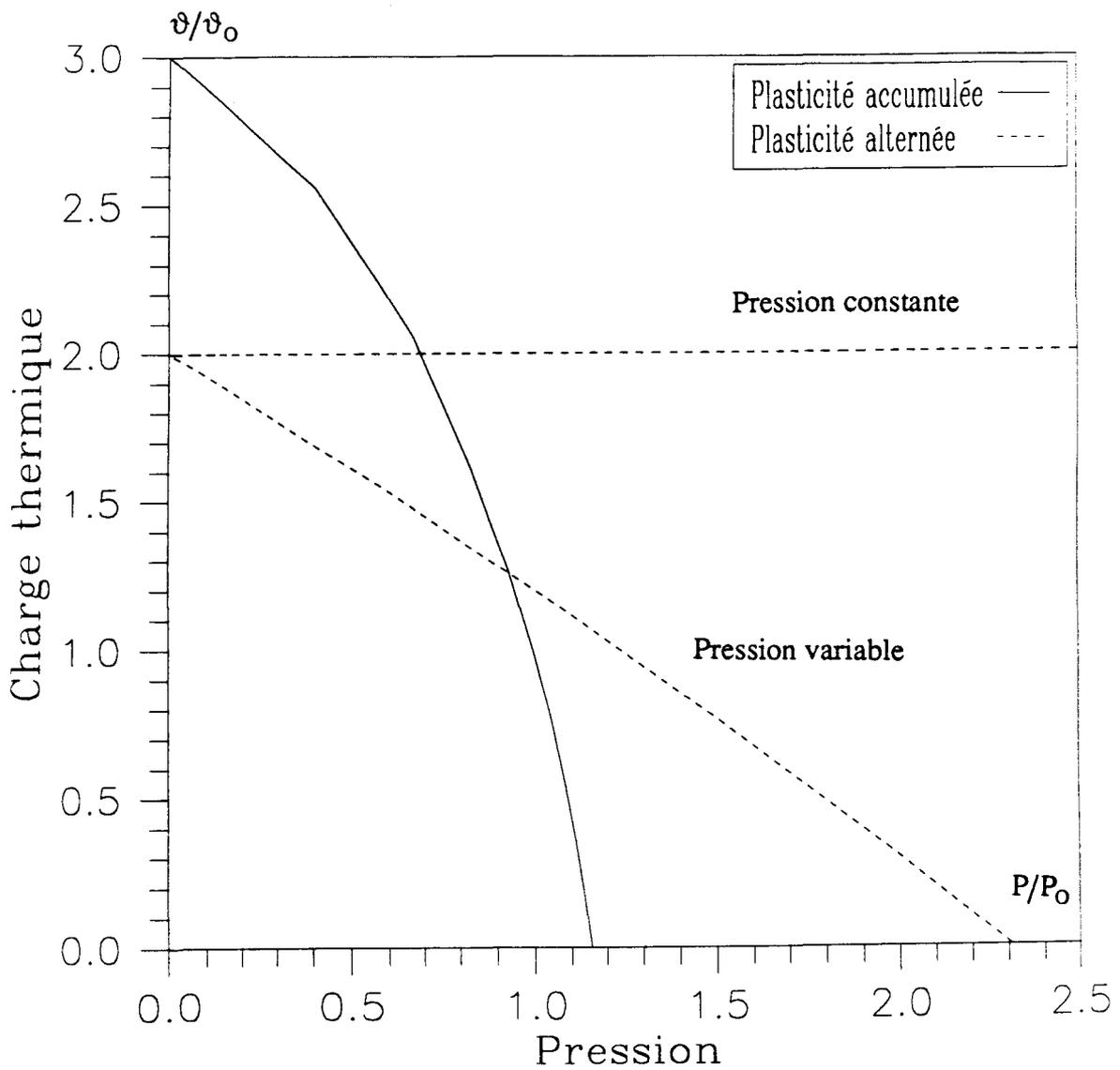


figure 5.1.3.2.C : Tube fermé sous pression et charge thermique variables.

### 5.1.3.3.Effet de l'érouissage linéaire cinématique limité :

L'érouissage linéaire cinématique limité est traduit par l'utilisation d'une deuxième surface d'écoulement (cf. WEICHERT & GROSS-WEEGE ([90](1988)) ). La valeur de la contrainte limite uniaxiale d'écoulement pour la deuxième surface est de la forme :

$$\sigma_B = \mu \sigma_F$$

ou  $\sigma_F$  est la contrainte uniaxiale initiale d'écoulement.

Ce modèle de comportement favorise la fiabilité vis-à-vis du critère d'effondrement incrémental, mais ne modifie en rien la fiabilité concernant le critère d'écroulement par plasticité alternée, car ce mode de ruine intervient chaque fois que l'état de contrainte franchit la première surface limite.

#### Exemple A :

Le résultat obtenu (figure 5.1.3.3.A) pour la même structure que précédemment (exemple A, figure 5.1.3.1.A), est conforme à ceux présentés par GROSS-WEEGE & WEICHERT ([19](1992)).

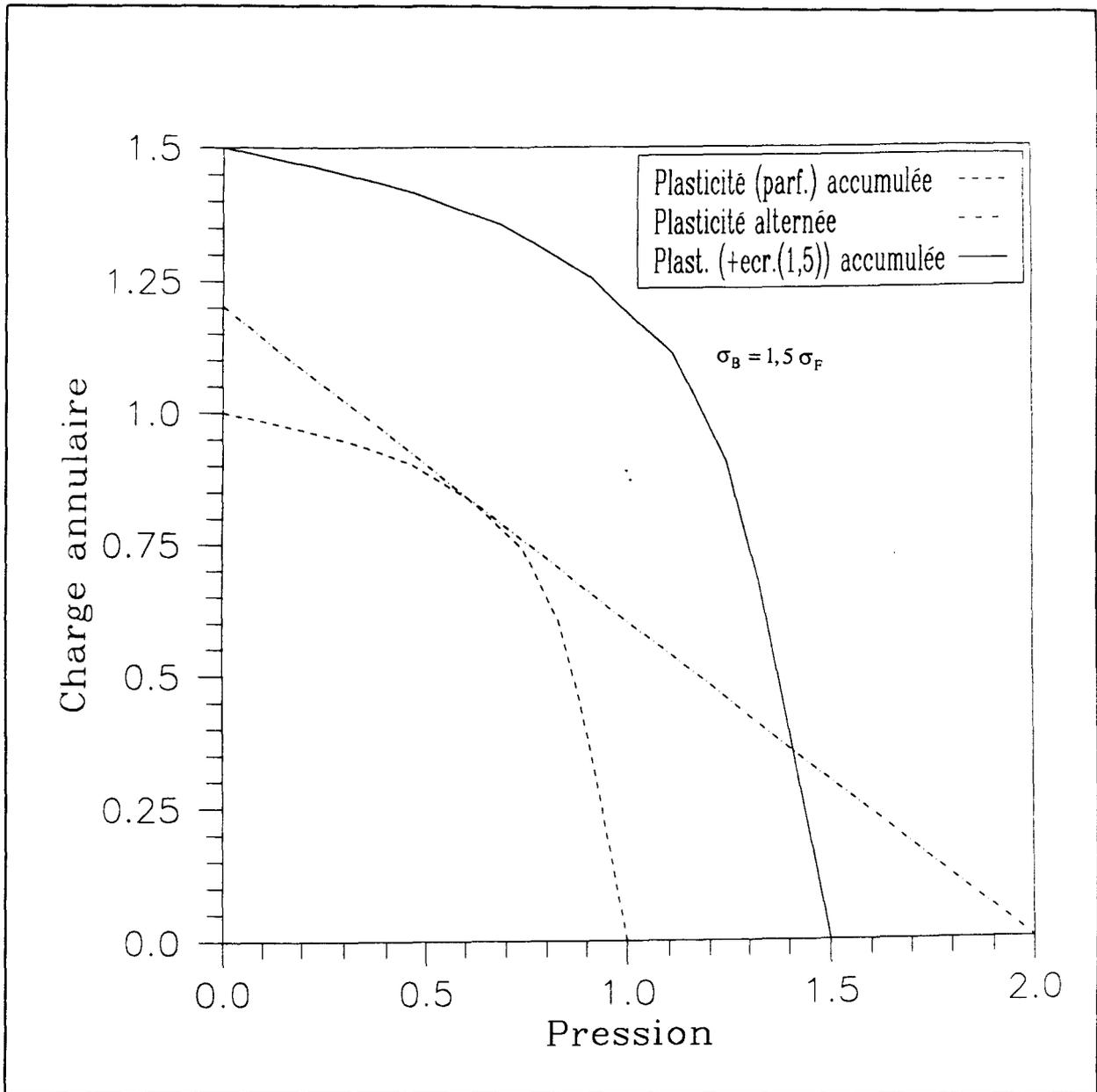


figure 5.1.3.3.A : Effet de l'écroissage linéaire cinématique limité (structure A).

**Exemple D :**

Nous considérons ici une coupelle conique d'étanchéité définie sur la figure (5.1.3.3.D); cette coupelle est soumise à une charge de pression et une charge de frottement au contact de l'alésage. La sollicitation due au frottement varie selon la pression, mais peut aussi varier en fonction de la vitesse de déplacement de la coupelle dans l'alésage ainsi qu'en fonction des états de surface et de l'éventuelle lubrification par le fluide étanché... Sa valeur exacte est donc difficile à évaluer. C'est pourquoi nous considérerons ces deux charges comme variant de façon indépendante; en outre, nous supposerons que la pression agit toujours dans le même sens, mais que la force de frottement peut s'inverser puisqu'elle dépend

du sens de déplacement. L'éventuel décollement du contact coupelle/alésage n'est pas considéré. On suppose que l'application de la pression suffit pour assurer ce contact.

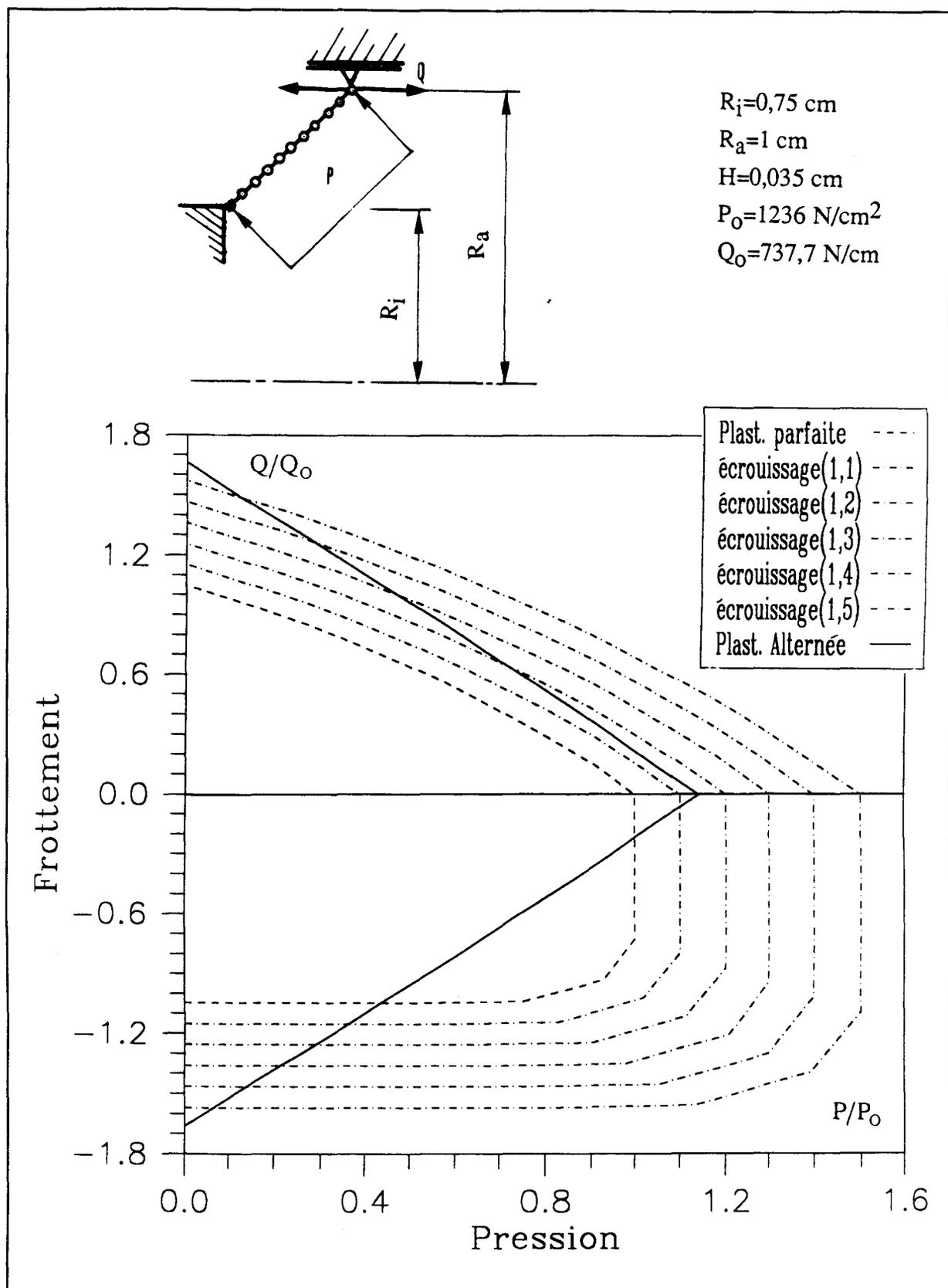


figure 5.1.3.3.D : Effet de l'écrouissage linéaire cinématique limité (structure D).

Les courbes sont tracées pour des valeurs de  $\mu$  allant de 1 à 1,5 ( $\sigma_B = \mu \sigma_F$ ), de dixième en dixième.

Le critère d'effondrement par déformations plastiques accumulées augmente avec  $\mu$  ; celui d'effondrement par plasticité alternée ne change pas, car il n'est fonction que du seuil initial de limite d'élasticité. Il devient donc prépondérant.

#### **5.1.3.4.Prise en compte de moment de torsion :**

##### **Exemple A :**

Cet exemple est compatible avec les remarques que nous avons faites au sujet du flambement dans le paragraphe (5.1.2). Le matériau est supposé élastique parfaitement plastique; seul le critère d'effondrement incrémental a été représenté; le domaine obtenu est représenté sur la figure (5.1.3.4.A).

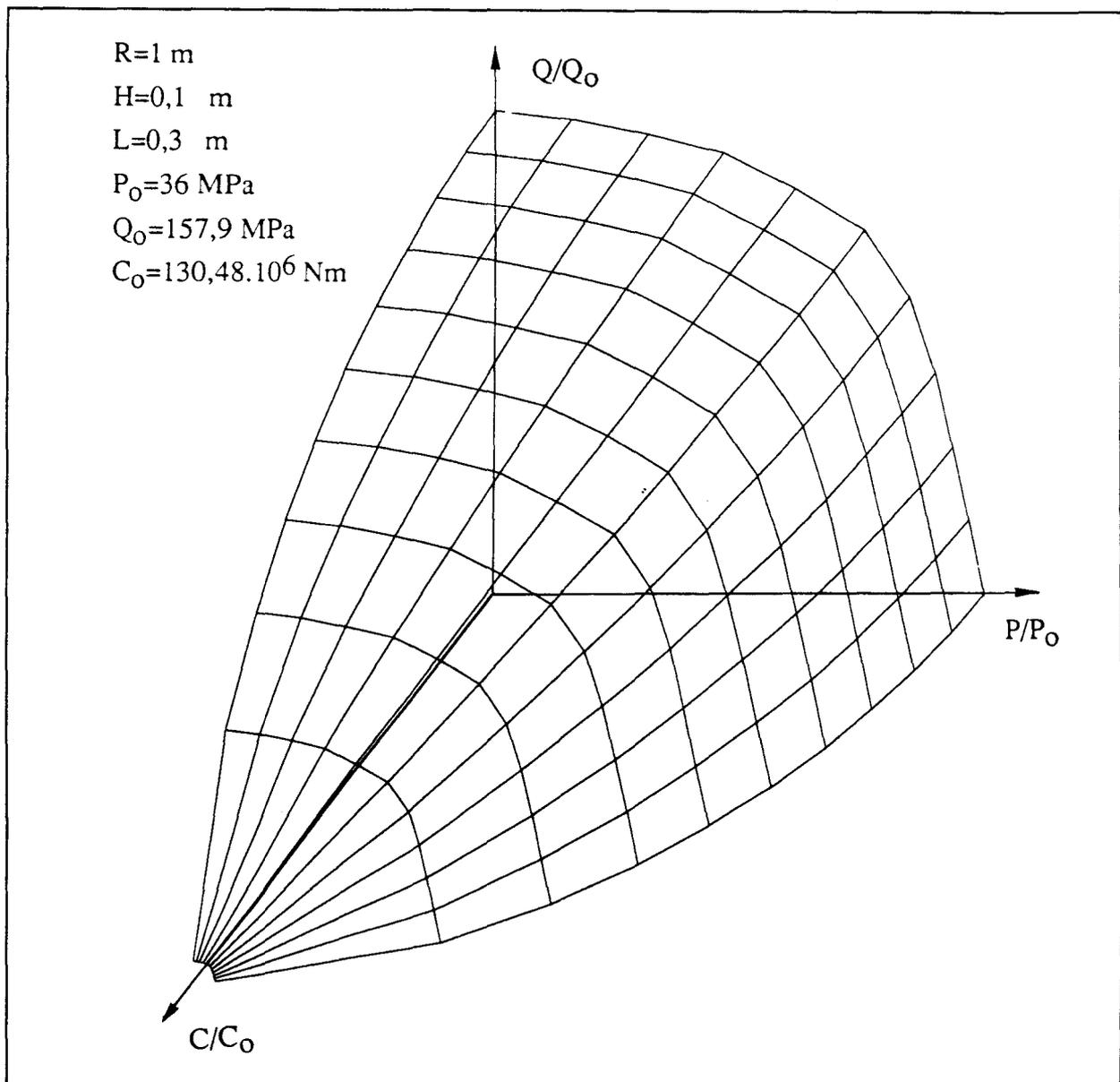


figure 5.1.3.4.A : Prise en compte du moment de torsion (structure A)

## 5.2.Présentation du module de calcul non-linéaire incrémental

### 5.2.1.Modélisation

Ce module, contrairement au précédent, n'est pas limité à l'étude des structures axisymétriques. Il offre cependant une modélisation propre à ce type particulier.

Une "tranche axiale" est modélisée à l'aide d'éléments bidimensionnels à quatre ou huit noeuds. Les coordonnées des points nodaux sont donc :

- l'abscisse axiale
- et le rayon

L'épaisseur peut éventuellement être modélisée par plusieurs "couches" d'éléments.

Les charges extérieures sont appliquées aux noeuds. La modélisation d'une charge répartie passe donc par l'emploi de coefficients d'équivalence appliqués aux charges nodales ; l'épaisseur circulaire de la tranche axiale modélisée est de 1 radian.

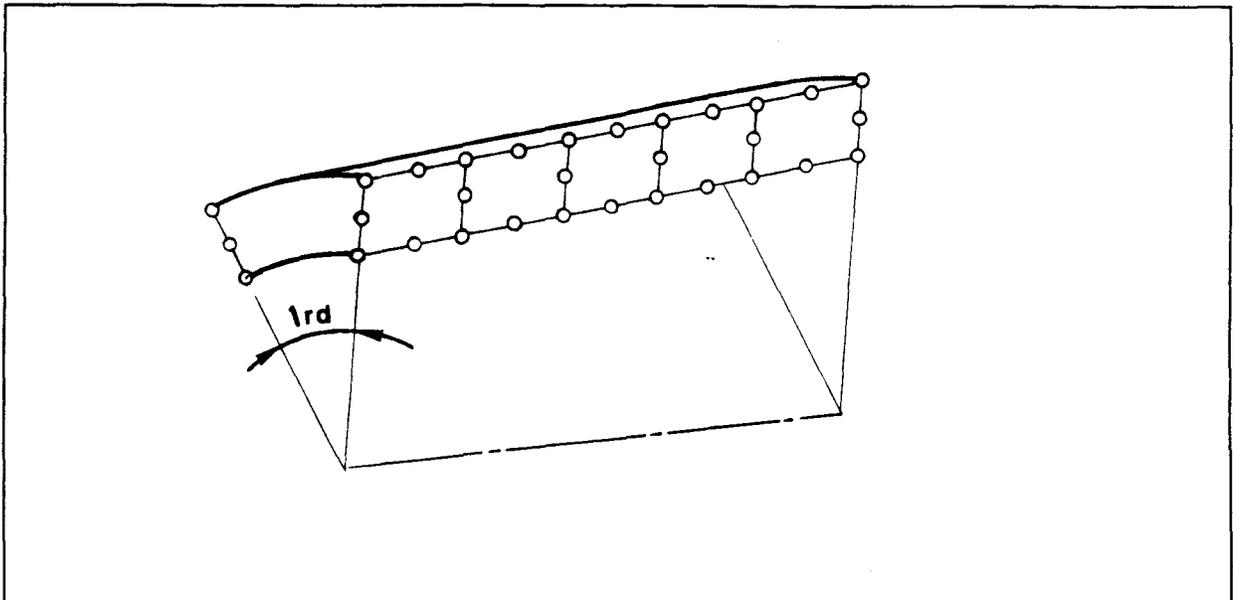


figure 5.2.1.1 : Modèle NONSAP d'une structure de révolution.

Les contraintes sont calculées aux points d'interpolation (de GAUSS) dont on peut choisir le nombre (1,4,9) par élément.

Les déplacements de la structures sont calculés aux noeuds. Les conditions-limites imposables concernent les déplacements de chaque noeud dans le plan axial d'étude. On ne peut donc pas imposer la non-rotation d'une section matérialisée par trois noeuds; dans le module précédent, cela revenait à imposer une rotation de section nulle à l'abscisse concernée.

### 5.2.2. Etalonnage du module par rapport à une solution analytique

Nous avons voulu ici vérifier la fidélité du module incrémental non-linéaire. Dans ce but, nous avons comparé les résultats obtenu avec une solution analytique élastique en géométrie linéaire. Nous avons considéré le cas d'une sollicitation faible, ainsi que celui d'une sollicitation engendrant, en certains points, un état de contrainte proche de l'état limite élastique.

Nous avons repris les dimensions radiales de la structure semi-épaisse précédente (exemple A) soumise uniquement à des pressions interne et externe (tube infini sous pression).

La solution élastique analytique proposée par TIMOCHENKO est

$$\sigma_r = \frac{P_a a^2 - P_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{(P_a - P_b) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_a a^2 - P_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{(P_a - P_b) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}$$

où  $\sigma_r / \sigma_\theta$ ,  $P_a / P_b$ ,  $a / b$ , sont respectivement les contraintes radiale / annulaire, les pressions interne / externe, les rayons interne / externe, et  $r$  le paramètre radial tel que :

$$a \leq r \leq b$$

Les contraintes sont comparées pour deux valeurs différentes de rayons , correspondant aux coordonnées radiales des points d'interpolation de GAUSS utilisés dans NONSAP (figure 5.2.2.1).

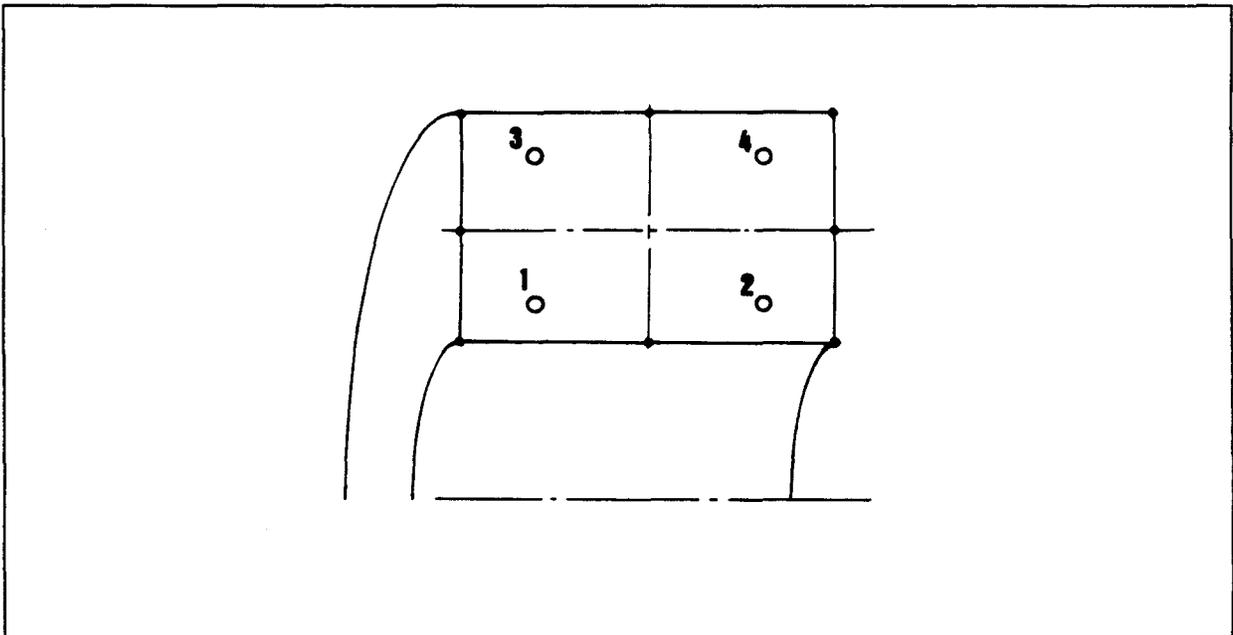


figure 5.2.2.1 : Numérotation pour quatre points de GAUSS dans NONSAP

La limite d'élasticité du matériau élasto-parfaitement plastique est de 360 MPa, et le module d'Young est de  $2,1 \cdot 10^5$  MPa. Les deux pressions internes appliquées sont :

$$P_a' = 3,5 \text{ MPa}$$

$$P_a'' = 35 \text{ MPa}$$

Compte tenu des caractéristiques dimensionnelles choisies, les contraintes annulaires doivent donc être de l'ordre de

$$\sigma_{\theta}' = 35 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\theta}'' = 350 \text{ MPa}$$

Les résultats en sont présentés dans les tableaux suivants :

$P_a' = 3,5 \text{ MPa}$	NONSAP	Solution analytique	écart
$\sigma_{r1} = \sigma_{r2}$	-2,66935	-2,66947	0,005%
$\sigma_{r3} = \sigma_{r4}$	-0,6544	-0,65543	0,16%
$\sigma_{\theta 1} = \sigma_{\theta 2}$	34,26385	34,25698	0,02%
$\sigma_{\theta 3} = \sigma_{\theta 4}$	32,24616	32,24293	0,01%

$P_a'' = 35 \text{ MPa}$	NONSAP	Solution analytique	écart
$\sigma_{r1} = \sigma_{r2}$	6,61251	6,69476	0,3%
$\sigma_{r3} = \sigma_{r4}$	-6,52571	-6,55429	0,43%
$\sigma_{\theta 1} = \sigma_{\theta 2}$	343,2478	342,56976	0,19%
$\sigma_{\theta 3} = \sigma_{\theta 4}$	322,91018	322,42293	0,15%

L'écart entre les deux solutions est très faible; il augmente avec la sollicitation. On vérifie ainsi que pour les faibles valeurs de la sollicitation, la solution non-linéaire incrémentale donne bien le même résultat que la solution analytique linéaire; plus la sollicitation augmente, plus on s'éloigne du cadre géométriquement linéaire, et plus la différence entre les deux solutions devient significative.

## **5.3.Réalisation de la liaison entre les modules :**

### **5.3.1.Liaison entre les modélisations :**

#### **Pour les coques cylindriques :**

Pour rendre compatibles les deux modélisations, nous avons choisi d'utiliser la correspondance d'élément à élément, ce qui implique la modélisation de l'épaisseur par une seule couche d'éléments dans le cas du modèle bidimensionnel utilisé par le module non-linéaire.

#### **Liaison en déplacements**

Dans le module d'adaptation, les déplacements utilisés sont ceux de la surface moyenne; ils sont pris en compte à la jonction entre les différents éléments. Par souci de simplicité, nous choisissons l'élément bidimensionnel à huit noeuds pour le calcul non-linéaire, car il permet de toujours avoir un noeud sur la surface moyenne à chaque jonction (noeuds de type 2 et 7). La correspondance d'élément à élément permet ainsi l'équivalence immédiate des déplacements axiaux et radiaux au niveau de la surface moyenne entre les deux modèles (figure 5.3.1.1).

#### **Liaison en rotation**

L'utilisation des éléments de réductions qui permettent de réduire l'étude à celle de la surface moyenne dans le calcul d'adaptation, nous impose la connaissance explicite de la rotation des sections. Cette notion de rotation de section n'existe pas dans la modélisation par éléments bidimensionnels: nous devons donc la faire apparaître en fonction de certains déplacements nodaux. Nous avons choisi d'utiliser les noeuds extrêmes de type 1,3 et 6,8 (figure 5.3.1.1) pour matérialiser la section supposée droite.



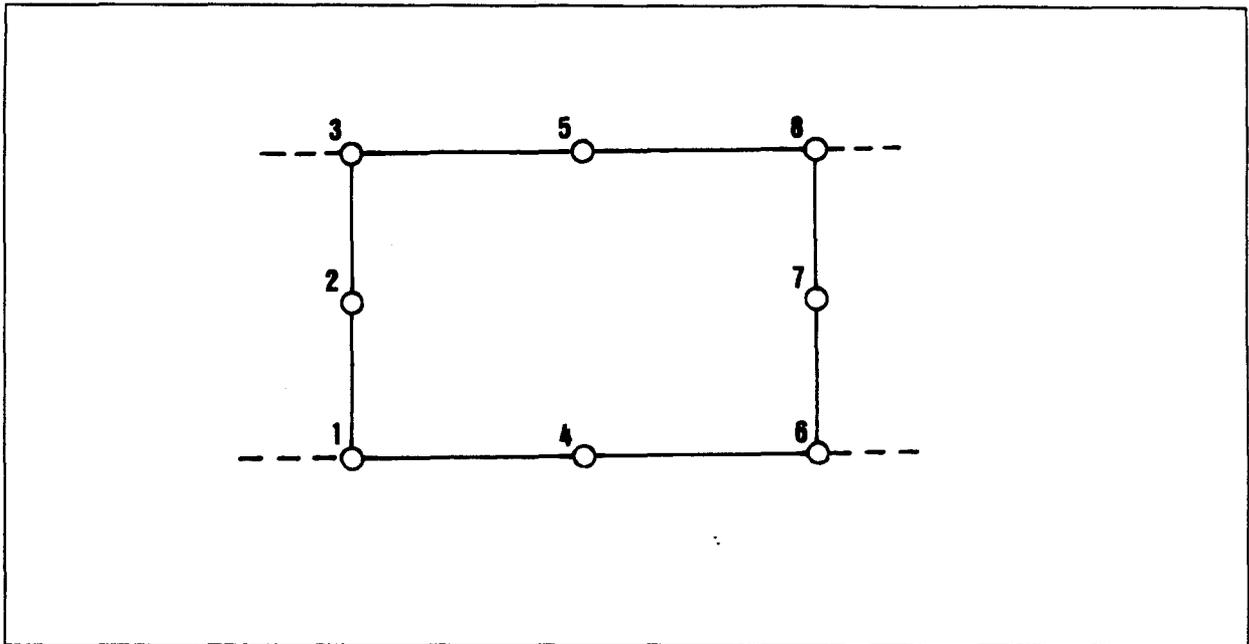


figure 5.3.1.1 : Numérotation pour un élément bidimensionnel à 8 noeuds.

### liaison en contraintes

Pour chaque élément, les contraintes sont calculées en deux points d'interpolation par le module d'adaptation, dans le cas où l'on tient compte d'une solution préchargée. Cette démarche nous amène à prendre deux points d'interpolations suivant la direction méridienne. Le nombre de points d'interpolation devant être le même suivant les deux directions de l'élément, le nombre de points de GAUSS par élément est donc de quatre. (figure 5.3.1.2). Nous supposons une répartition linéaire du champ de contrainte suivant l'épaisseur. (Cette répartition linéaire est une simplification qui s'affranchit de l'utilisation des fonctions de forme).

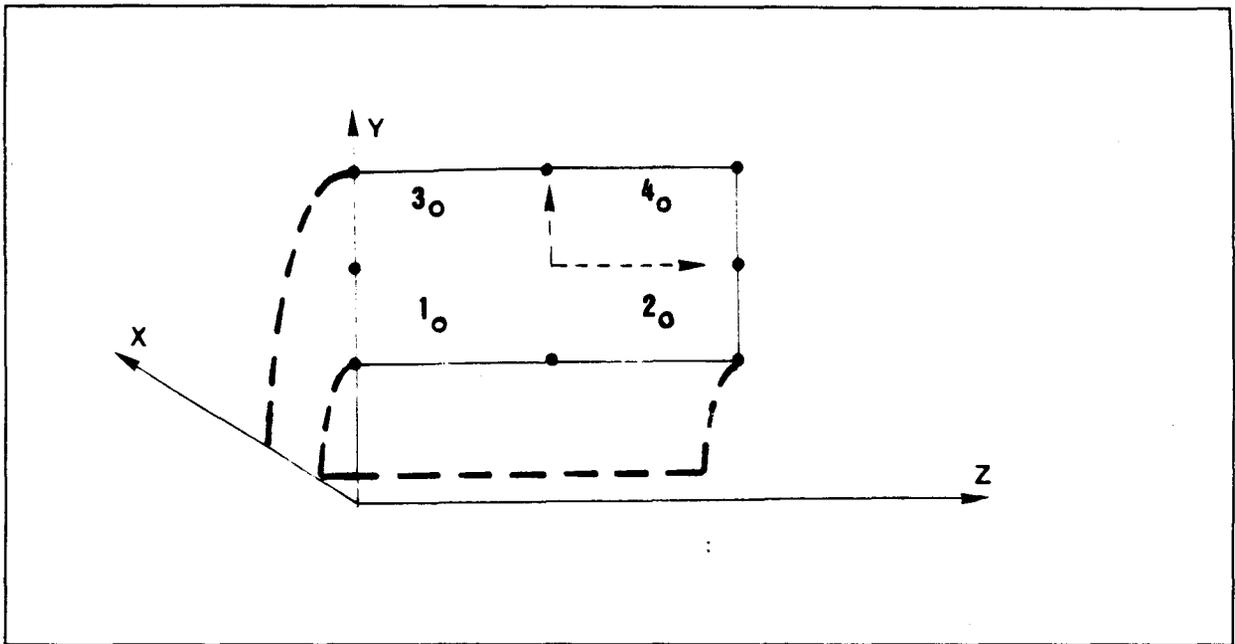


figure 5.3.1.2 : Points de d'interpolation et orientation du repère.

Les contraintes calculées par NONSAP pour les structures axisymétriques sont :

$$\sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xx}$$

Nous avons choisi la formulation lagrangienne totale proposée par NONSAP: la correspondance avec la configuration de référence du module d'adaptation est ainsi facilitée.

Les éléments de réductions manipulés par le module d'adaptation sont :

$$N_{ss}, N_{\theta\theta}, N_{ss}, M_{\theta\theta}$$

qui sont des quantités résultant de l'intégration du champ de contrainte suivant l'épaisseur. Pour les efforts normaux, nous aurons :

$$N_{ss1} = (\sigma_{zz1} + \sigma_{zz3})H/2$$

$$N_{ss2} = (\sigma_{zz2} + \sigma_{zz4})H/2$$

$$N_{\theta\theta1} = (\sigma_{xx1} + \sigma_{xx3})H/2$$

$$N_{\theta\theta2} = (\sigma_{xx2} + \sigma_{xx4})H/2$$

Pour les moments,

$$M_{ss1} = (\sigma_{zz3} - \sigma_{zz1})H^3/24a$$

$$M_{\theta\theta1} = (\sigma_{xx3} - \sigma_{xx1})H^3/24a$$

$$M_{ss2} = (\sigma_{4zz} - \sigma_{2zz})H^3/24a$$

$$M_{\theta\theta2} = (\sigma_{xx4} - \sigma_{xx2})H^3/24a$$

Nous avons utilisé ces formules afin de réaliser un module intermédiaire de conversion qui permet de transformer les résultats NONSAP/KREJA qui nous intéressent en données de configuration préchargée pour le module d'adaptation. Conformément à ce dernier, les valeurs transverses des contraintes ( $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{yz}$ ) sont supposées négligeables devant les valeurs des contraintes dans les deux autres directions.

**Pour les coques coniques :**

On adopte la même démarche que pour les coques cylindres. Il n'y a pas de modification pour les déplacements, les deux formulations évaluant ceux-ci dans le repère global; en revanche, les éléments de réduction des efforts intérieurs sont liés au repère de la surface moyenne de la coque. Cette orientation ne coïncide plus avec le repère global utilisé par NONSAP pour l'évaluation des contraintes en formulation lagrangienne. Nous avons donc tenu compte de ce changement de repère dans la conversion des résultats de NONSAP en données pour le module d'adaptation.

### 5.3.2. Etalonnage des modules entre eux

Avant d'utiliser une méthode hybride utilisant les deux modules, nous allons comparer leurs résultats respectifs obtenus pour un même problème. En effet, la méthode hybride ne sera cohérente que si les modules, malgré leur différence de nature, sont en mesure de fournir des résultats compatibles.

Pour cela, nous avons choisi de traiter le cas d'un tronc de tube, libre, soumis à une pression interne localisée dans sa partie centrale ( $R/H = 10$ ,  $L/H = 3$ , Module d'Young :  $2,1 \cdot 10^5$  MPa, Coefficient de Poisson : 0, Limite élastique : 360 MPa, modélisation par dix éléments élasto-parfaitement plastiques de longueur identique, Pression : 3,5 Mpa localisée

sur la partie d'abscisse 12 à 18). La schématisation de ce cas de charge relative au modèle linéaire est la suivante :

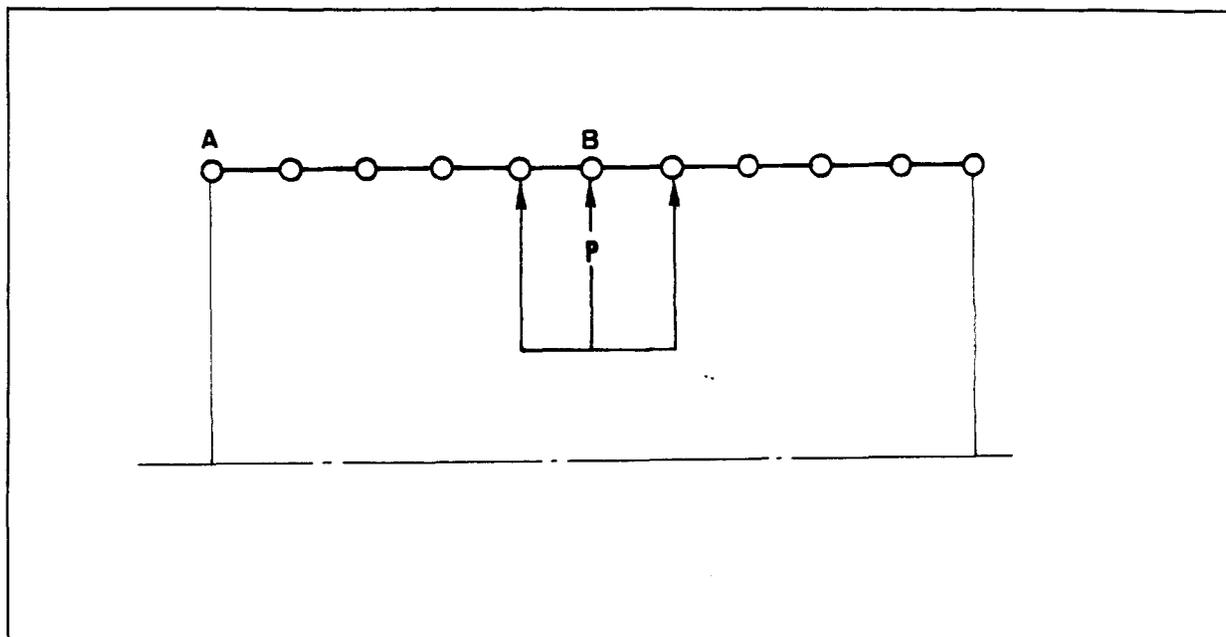
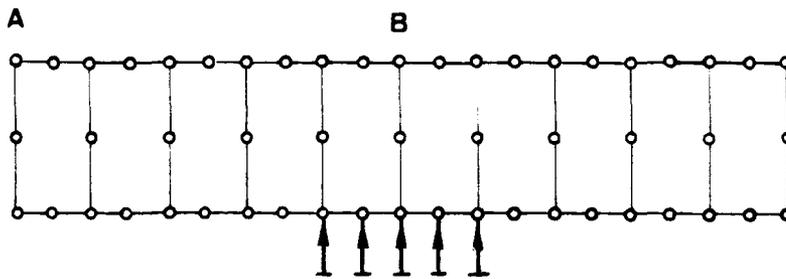


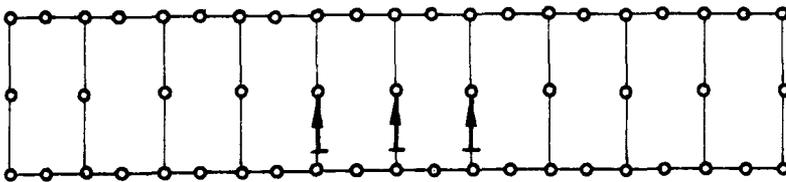
figure 5.3.2.1 : Problème de comparaison vu par le module linéaire.

Pour NONSAP, nous avons la possibilité de modéliser la charge correspondante d'au moins trois manières différentes. En effet, dans ce modèle, les charges réparties étant modélisées par des charges nodales coefficientées (charge nodales équivalentes), nous avons la possibilité de choisir diverses combinaisons de noeuds en mesure de représenter le chargement. Les combinaisons choisies pour la comparaison sont les suivantes :

### 1.localisation physique



### 2.Surface moyenne



### 3.Surface intérieure et extérieure

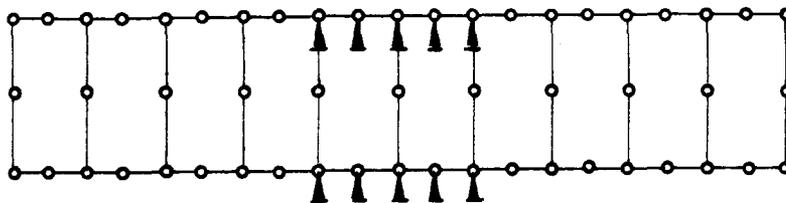


figure 5.3.2.2 : Problème de comparaison vu par NONSAP.

Le premier modèle est celui qui correspond le mieux au cas réel pour NONSAP; le second est un cas artificiel, dont l'objectif est de se rapprocher du modèle linéaire, par le choix des noeuds situés au niveau du rayon moyen. Le but du troisième est identique à celui du second ; cette fois, on applique la moitié de la charge sur chacune des faces interne et

externe. Une quatrième possibilité sera étudiée, identique à la première quant aux noeuds d'application, mais ses coefficients correspondront à l'application sur le rayon de la surface moyenne (coefficients corrigés).

Les résultats pris en compte pour la comparaison en déplacement sont les valeurs obtenues aux points A et B d'abscisses respectives 0 et 15. Pour les contraintes, les deux abscisses des points d'interpolation considérées sont  $s = (0,5 - 0,211) l_s$ , proche de A,  $s = 15 \pm 0,211 l_s$ , proche de B, où  $l_s$  est la longueur méridienne de chaque élément (Nous avons choisi une répartition uniforme). Les résultats représentent l'écart algébrique, en pourcentage (%), par rapport à la solution linéaire, où  $w$  et  $\varphi$  représentent respectivement le déplacement radial et la rotation :

	1 Loc.physique	2 Surf.moy.	3 Inter./exter.	4 physique corrigé
$w_A$	-5,77	-0,69	-0,81	-0,81
$\varphi_A$	-5,41	-2,49	-0,43	-0,43
$N_{sA}$				
$N_{\theta A}$	-5,77	-0,68	-0,79	-0,79
$M_{sA}$	-33,05	-29,43	-29,53	-29,53
$M_{\theta A}$				
$w_B$	-4,37	1	0,68	0,66
$\varphi_B$	99,47	-99,43	-99,46	-99,41
$N_{sB}$				
$N_{\theta B}$	-4	0,9	1,03	1,05
$M_{sB}$	-4,99	-4,22	0,01	0,0095
$M_{\theta B}$				

L'écart est infini lorsque le résultat linéaire pris comme référence est nul, alors qu'il est important lorsque les valeurs sont négligeables.

Pour les valeurs significatives, une différence apparaît, en fonction du modèle choisi: l'écart avec la modélisation rigoureuse de NONSAP (solution 1) est de 5% en moyenne. L'explication vient des dimensions particulières de notre structure, pour laquelle la théorie des coques minces employée dans le modèle linéaire avoue ses limites. Dans ces conditions, on sait que l'erreur commise est de l'ordre de :

$$\frac{H}{2R}$$

où H et R sont respectivement l'épaisseur et le rayon de courbure principal de la coque.

Les cas 3 et 4 sont assez semblables; d'un point de vue pratique cependant, le modèle 4 est moins lourd à manipuler (fichier de données, temps d'exécution).

Ainsi, bien qu'artificielle, la modélisation 4 semble la plus adéquate pour que NONSAP s'accorde avec le module linéaire. On peut l'interpréter comme une dégradation de la modélisation 1 (la plus fidèle vis-à-vis de la réalité physique), par la modification de ses coefficients, telle que ceux-ci correspondent au rayon de la surface moyenne.

On aurait pu en revanche espérer de meilleurs résultats de la solution 2 qui correspondait a priori mieux au modèle de la surface moyenne utilisé par le module linéaire. Mais les écarts observés sur les valeurs significatives de  $\varphi_A$ ,  $M_{sA}$  et  $M_{sB}$  peuvent s'expliquer: en effet, la charge répartie n'est dans ce modèle représentée qu'à l'aide de deux charges équivalentes, situées aux noeuds "moyens" de chaque élément à huit noeuds. Cela correspondrait plutôt à un chargement nodal de la modélisation simplifiée du module linéaire.

Pour l'étude qui va suivre, nous utiliserons la "modélisation-passerelle" de type 4 entre les deux modules.

### 5.3.3. Etude numérique de quelques cas :

#### **Exploitation de la liaison permettant d'étudier les effets engendrés par les non-linéarités géométriques :**

La méthode nécessite plusieurs étapes :

- La première est consacrée à la détermination du domaine d'adaptation en utilisant exclusivement le modèle géométriquement linéaire.

- Nous calculerons ensuite un jeu de précharges, résultat d'une homothétie de rapport 0,9, sur le domaine obtenu. Pour ces précharges, nous déterminerons avec NONSAP, conformément au modèle retenu au paragraphe précédents, la configuration obtenue et nous conserverons comme données utiles : les déplacements, les rotations, et le niveau de contraintes correspondants.

- Enfin, nous recherchons la valeur du coefficient de sécurité à l'adaptation par rapport à chacune des configurations préchargées calculées. (L'illustration de cette démarche est proposée en annexe C, ainsi qu'à la figure 5.3.3.A').

## Remarques :

-L'application de cette démarche à l'exemple A, a révélé une distortion de comportement pour la charge purement nodale. En effet, la charge d'adaptation obtenue par calcul linéaire, engendrait un calcul non convergeant dans NONSAP, c'est-à-dire que l'algorithme de RIKS-WEMPNER n'arrivait pas à trouver de position d'équilibre stable correspondant à cette charge. Nous avons alors remplacé la charge nodale d'extrémité par une charge répartie, localisée sur l'élément correspondant. (Le problème étant axisymétrique, une charge nodale modélise, en fait, une charge annulaire, concentrée dont la réalité physique peut être discutée). Cette modification du problème initial permet d'éliminer l'anomalie constatée.

-De plus, comme nous l'avons vu au paragraphe 5.1.1, les conditions-limites statiques sont liées au repère local. Dans le programme actuel, ces conditions limites sont écrites pour la configuration initiale. Les changements de géométrie ne sont pas pris en compte à ce niveau. Si cela ne pose pas de problème pour la correspondance entre éléments, il n'en va pas de même pour les conditions de bord. L'hypothèse concerne en particulier la non prise en compte de l'éventuelle rotation au noeud. Elle n'affecte donc pas la condition écrite pour les moments. Cette hypothèse reste valable pour des charges extérieures "suiveuses", comme la sollicitation de pression. En revanche, pour les charge mortes, et suivant la flexibilité des structures étudiées, nous devons nous attendre à des imperfections. On peut aussi éviter ces éventuelles imperfections en se restreignant à l'étude de structures encastées...Ce que nous ne ferons pas.

## Exemple A

Nous avons conservé le moment axial de torsion comme troisième sollicitation: les effets en sont calculés par rapport à la configuration initiale, malgré la prise en compte du changement de géométrie pour les autres. A priori simpliste, cette approximation est dans notre cas acceptable si l'on considère que la prise en compte de l'augmentation de rayon compense en partie la striction de la section qui en résulte. On peut même affirmer que cette hypothèse est plus contraignante dans notre cas: en approximant la contrainte de cisaillement par

$$\tau = C/(R(2\pi RH))$$

et en considérant la conservation du volume de matière

$$R H L = R' H' L',$$

la nouvelle contrainte de cisaillement est de l'ordre de

$$\tau' = C / (R' (2\pi R H(L/L')))$$

On a bien par conséquent  $\tau' < \tau$  dans le cas d'une augmentation de rayon. Cette hypothèse est, en revanche, défavorable dans le cas d'une diminution de rayon.

Pour chaque valeur de ce moment axial comprise entre zéro et la charge d'écroulement, nous obtenons ainsi une courbe limitant le domaine d'adaptation.

Le résultat obtenu en utilisant le critère d'écoulement formulé par ILYUSHIN pour les coques (voir A.3.20), est représenté sur la figure 5.3.3.A. Seule la comparaison des domaines obtenu en utilisant le critère d'écroulement incrémental est représenté. Pour le critère d'effondrement par plasticité alternée en effet, les résultats obtenus par la méthode hybride sont sans signification (et toujours bien supérieurs à ceux de l'autre critère).

La figure représente des courbes 2D décalées, fonctions des charges P et Q variables, obtenues pour des valeurs fixes du moment de torsion. Nous relierons ensuite entre eux les points issus de la même direction d'optimisation, de manière à obtenir des lisses. Nous avons superposé les résultats obtenus par calcul purement linéaire (traits pleins), et ceux obtenus à partir de chaque configuration préchargée (pointillés).

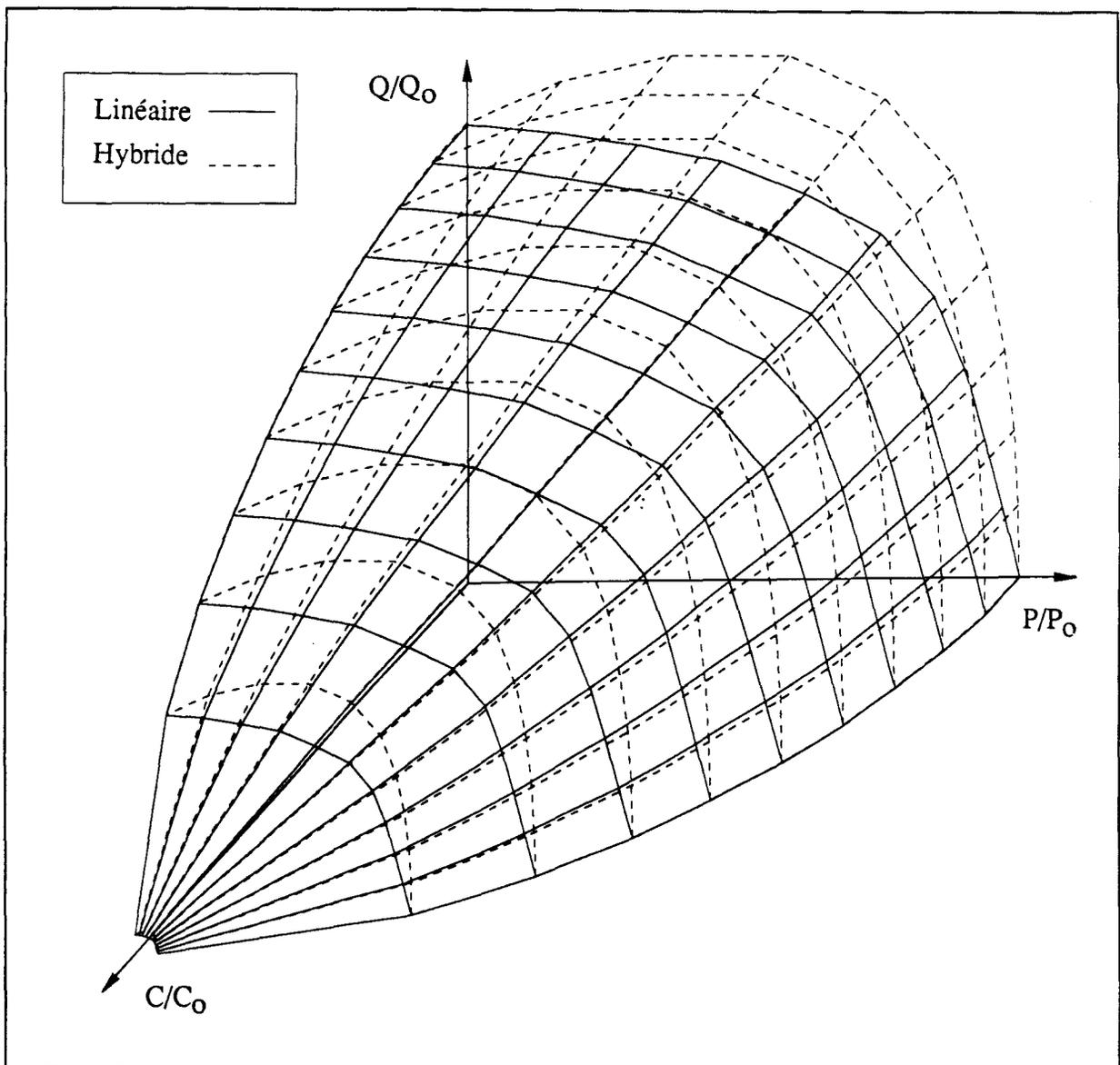


figure 5.3.3.A : Influence des non-linéarités géométriques sur l'exemple 5.1.3.4.A

Nous obtenons la superposition de deux nappes limitant le domaine d'évolution des trois charges considérées; l'allure des courbes obtenues pour chaque valeur du moment de torsion reste la même. Les résultats obtenus par la méthode hybride proposée sont supérieurs à ceux obtenus par l'approche linéaire. Nous vérifions que l'approche la plus restrictive (géométrie linéaire) fournit bien des résultats moins optimistes qu'une approche plus élaborée.

Cependant, le résultat proposé par la méthode hybride ignore totalement le risque de déstabilisation du processus d'adaptation mis en évidence par NUYEN QUOC SON & GARY ([61](1983)), car nous n'avons en fait généré qu'une configuration particulière par une histoire de charge simple. Nous pouvons rappeler que ce phénomène de déstabilisation est assez

caractéristique des structures soumises à de la compression (SIEMASZKO & KÖNIG ([77](1985))).

**Remarques :**

Pour cet exemple, nous avons généré les précharges de trois manières différentes :

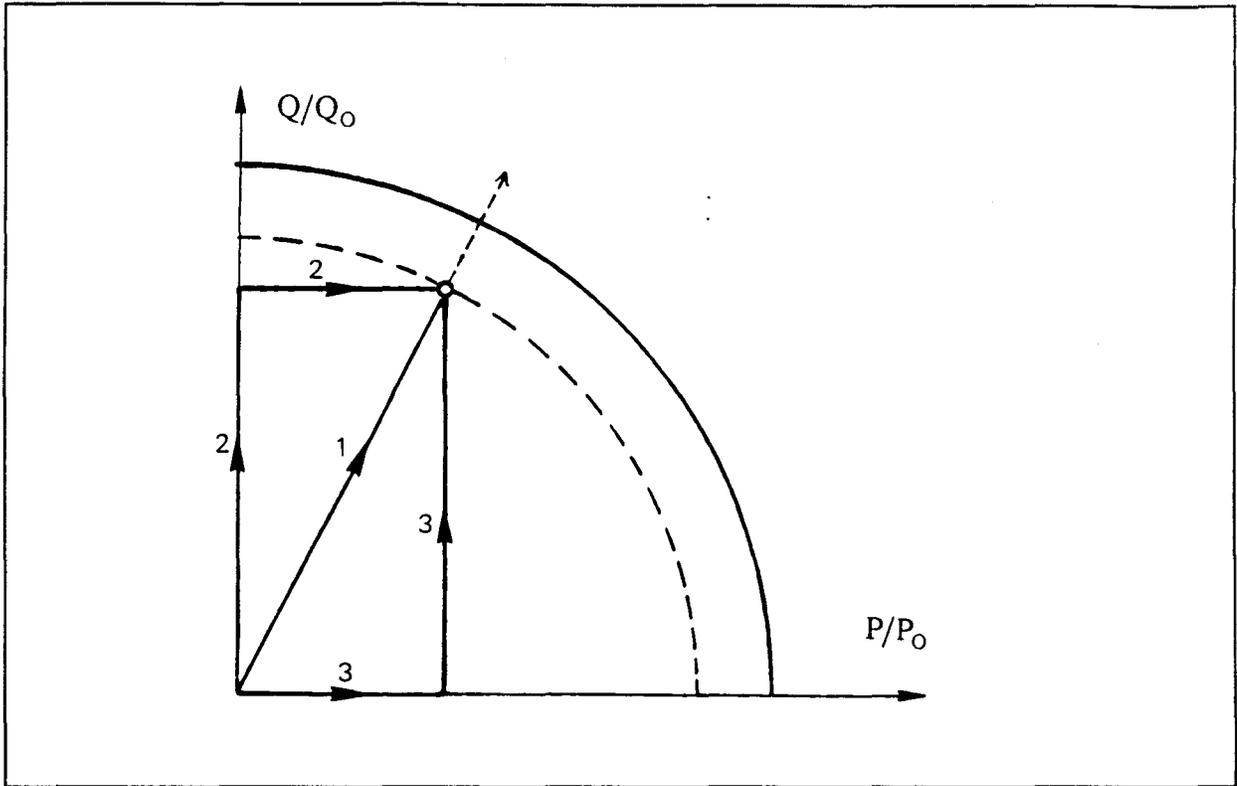


figure 5.3.3.A' : Obtention de la configuration préchargée de trois manières différentes  
Les valeurs obtenues sont identiques.

Enfin, la correction apportée par la méthode hybride ne porte que sur la condition d'effondrement par déformations plastiques accumulées. L'étude non-linéaire de l'adaptation concernant le critère de plasticité alternée, complément indispensable à celle-ci, nécessiterait une approche non-linéaire globale, inexistante à l'heure actuelle.

**Exemple D :**

Nous reprenons la structure conique présentée au paragraphe 5.1.3.3 (structure D).

Nous étudions dans cet exemple l'influence de la conicité et des conditions-limites sur la prise en compte des non-linéarités. Le but est d'observer si certaines géométries, et conditions-limites, sont plus favorables que d'autres. Les résultats sont obtenus pour les

valeurs de  $\alpha$  suivantes : (30°, 35°, 40°, 45°, 50°, 55°, 60°); où  $\alpha$  désigne l'angle complémentaire du demi-angle au sommet ( $\alpha=0$  correspond à un disque circulaire). La valeur  $\alpha=90^\circ$ , qui correspondrait à une structure cylindrique, ne peut pas être considérée (division par  $\cos(\alpha)$  dans la formulation). L'épaisseur reste la même quelle que soit la valeur de  $\alpha$ . Les valeurs de références utilisées pour normaliser les axes sont celles des charges d'adaptation de l'exemple initial 5.1.3.3.D ( $\alpha=45^\circ$ ), fournies par le critère d'effondrement incrémental. Les conditions-limites sont : l'articulation sur le moyeu et l'appui sur l'alésage. Nous avons également étudié ce qui se passe lorsque l'articulation sur le moyeu est remplacée par un encastrement.

### **Etudes linéaires préliminaires :**

Avant de prendre en considération l'influence des non-linéarités, nous allons exposer les résultats obtenus par la formulation géométriquement linéaire.

#### **Condition articulée-appuyée (figure 5.3.3.D1):**

Plus  $\alpha$  augmente (le cône est de plus en plus pointu), plus la limite engendrée par le critère de plasticité alternée s'éloigne ( abstraction faite des phénomènes observés vers les pressions élevées pour  $30^\circ < \alpha < 50^\circ$ ). En revanche, pour le domaine résultant du critère d'effondrement par déformations plastiques accumulées, nous observons l'existence de points de "pivot": lorsque  $\alpha$  augmente: la résistance vis-à-vis de l'effort de frottement s'améliore, alors qu'elle diminue en ce qui concerne la pression.

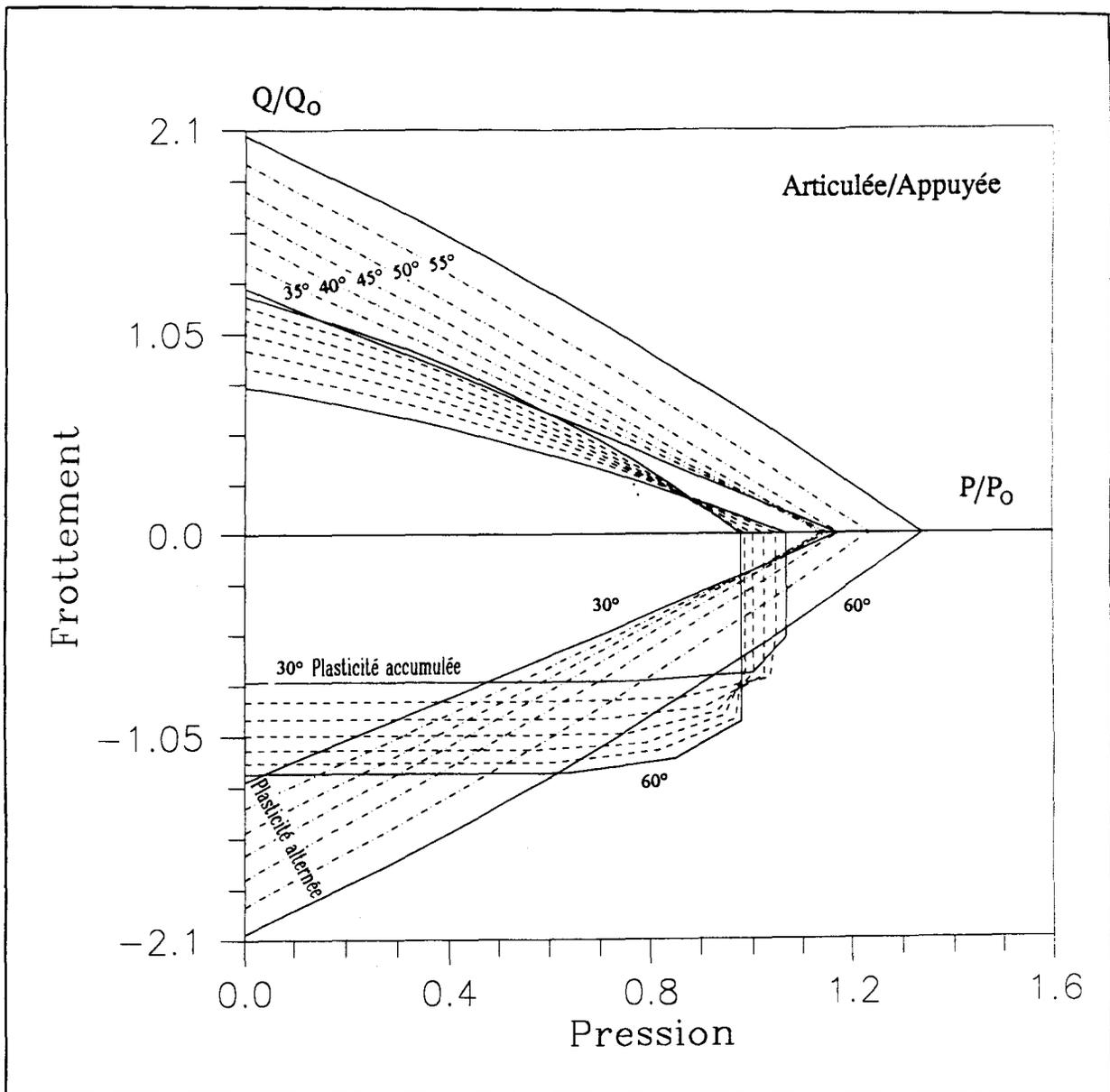


figure 5.3.3.D1 : Influence de la conicité (conditions-limites Articulée/Appuyée)

**Condition encastrée-appuyée ( figure 5.3.3.D2) :**

Les charges utilisées pour normaliser les axes sont les mêmes que précédemment. Pour les pressions, c'est maintenant le critère d'effondrement par plasticité alternée qui définit la valeur limite. Le critère d'effondrement par plasticité alternée devient prépondérant sur la majeure partie de la frontière.

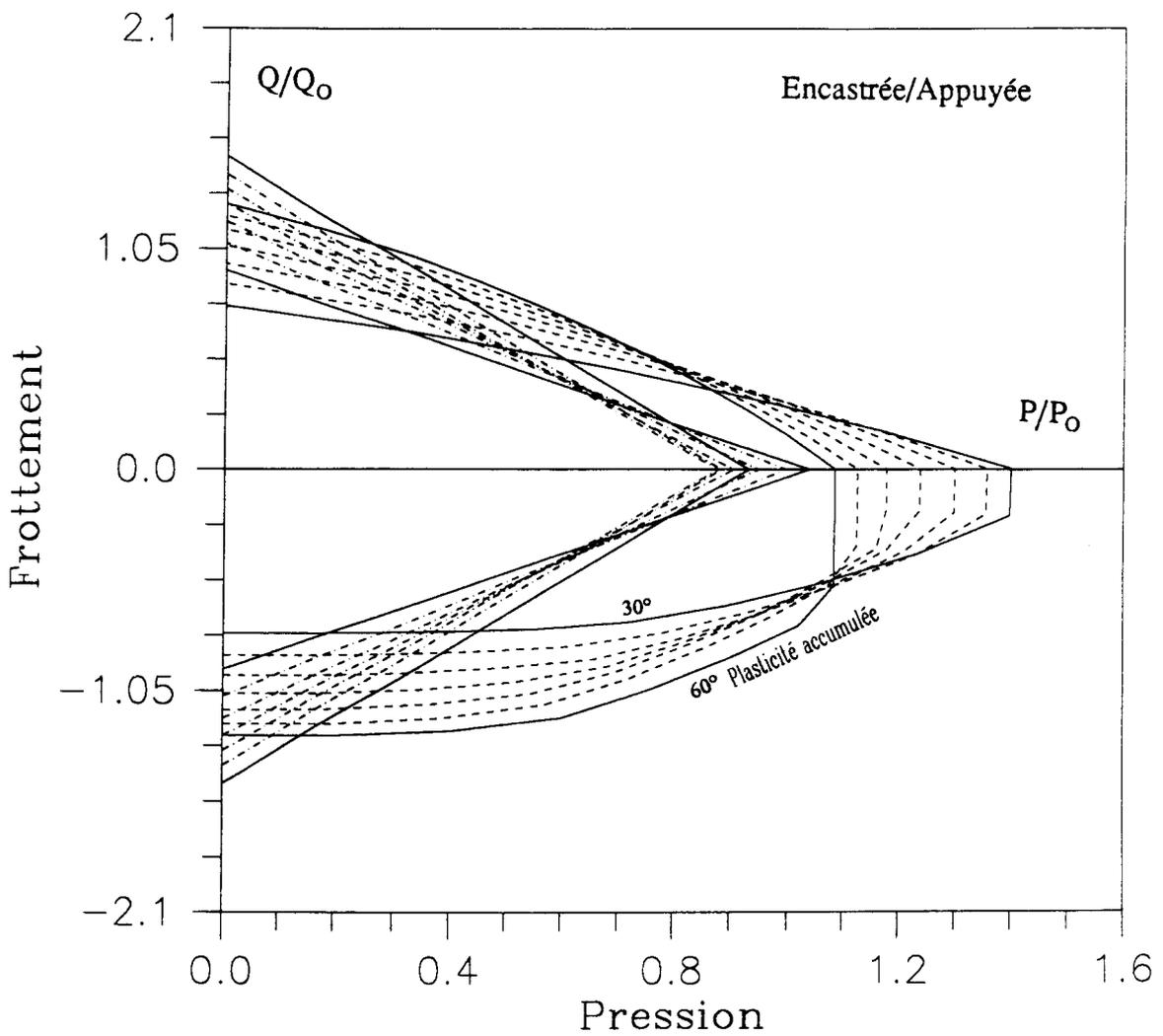
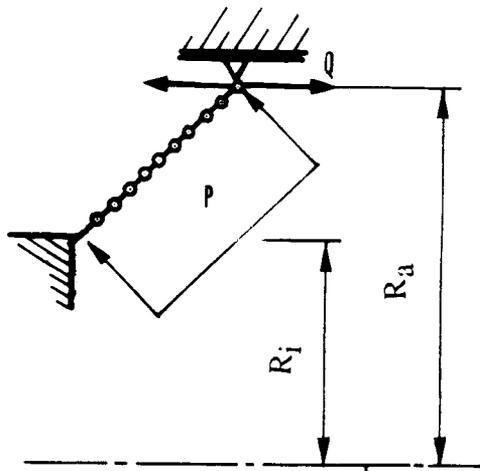


figure 5.3.3.D2 : Influence de la conicité (conditions-limites Encastrée/Appuyée)

### Comparaison par rapport aux conditions-limites (Figure 5.3.3.D3) :

Des deux études précédentes, on superpose les résultats concernant le cas où  $\alpha = 45^\circ$ . On peut ainsi étudier l'influence du type de liaison avec le moyeu.

L'encastrement améliorerait le comportement vis-à-vis de la défaillance par déformations plastiques accumulées. Or, c'est le mécanisme de défaillance par plasticité alternée qui est primordial dans ce cas: l'encastrement est donc une condition-limite défavorable pour la fiabilité de la structure vis-à-vis de la pression. Le faible gain obtenu très localement pour des valeurs de la force de frottement voisines de la limite, et des valeurs de pression modérées, présente peu d'intérêt.

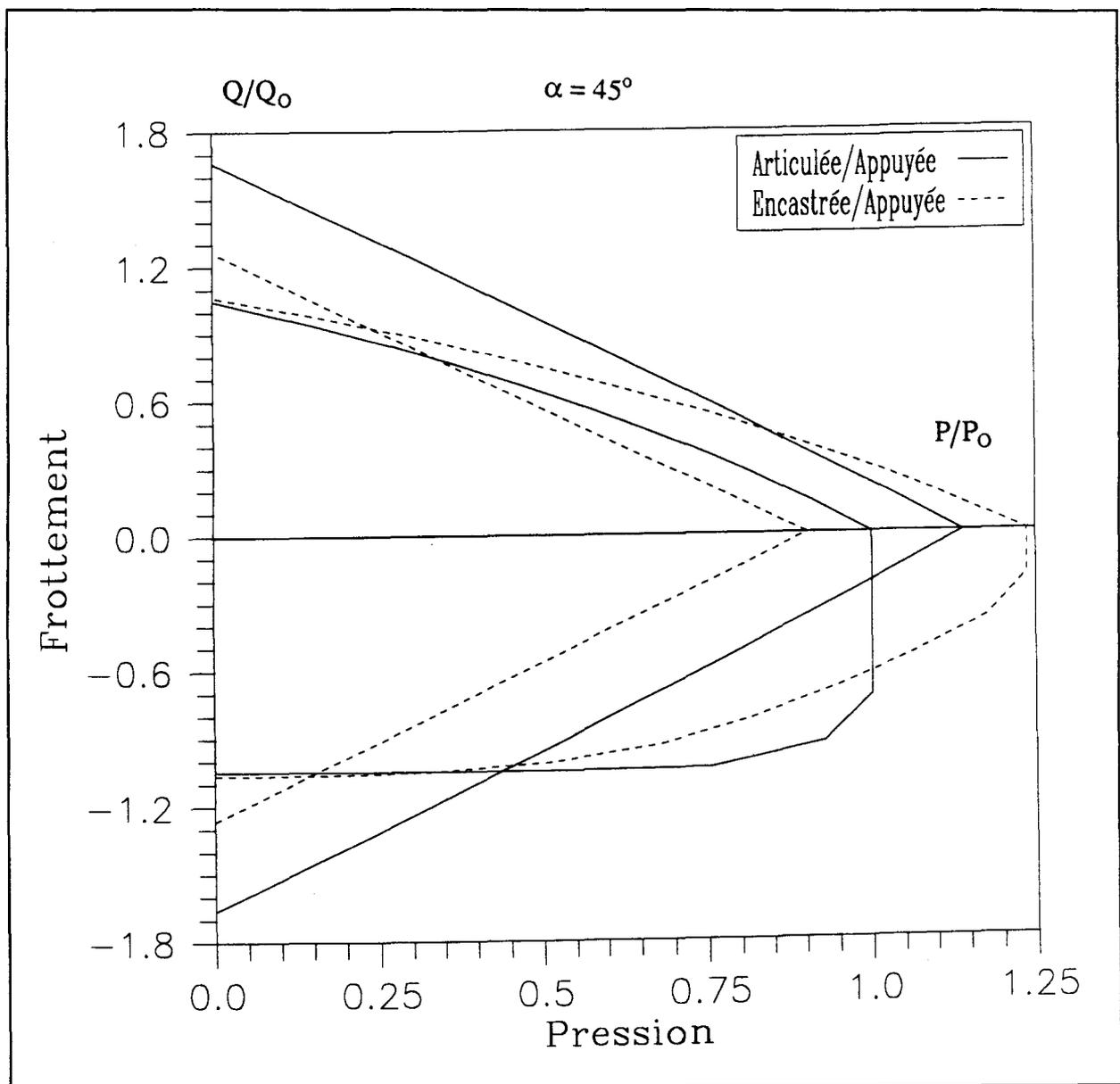


figure 5.3.3.D3 : Influence du type de conditions limites sur le résultat.

### Etude sur l'influence des non-linéarités géométriques :

(figures 5.3.3.D4 et 5.3.3.D5)

Sur chaque figure, nous avons reproduit en pointillés les résultats de l'approche linéaire afin de les comparer, comme pour la structure cylindrique, aux résultats respectifs issus de la méthode hybride proposée.

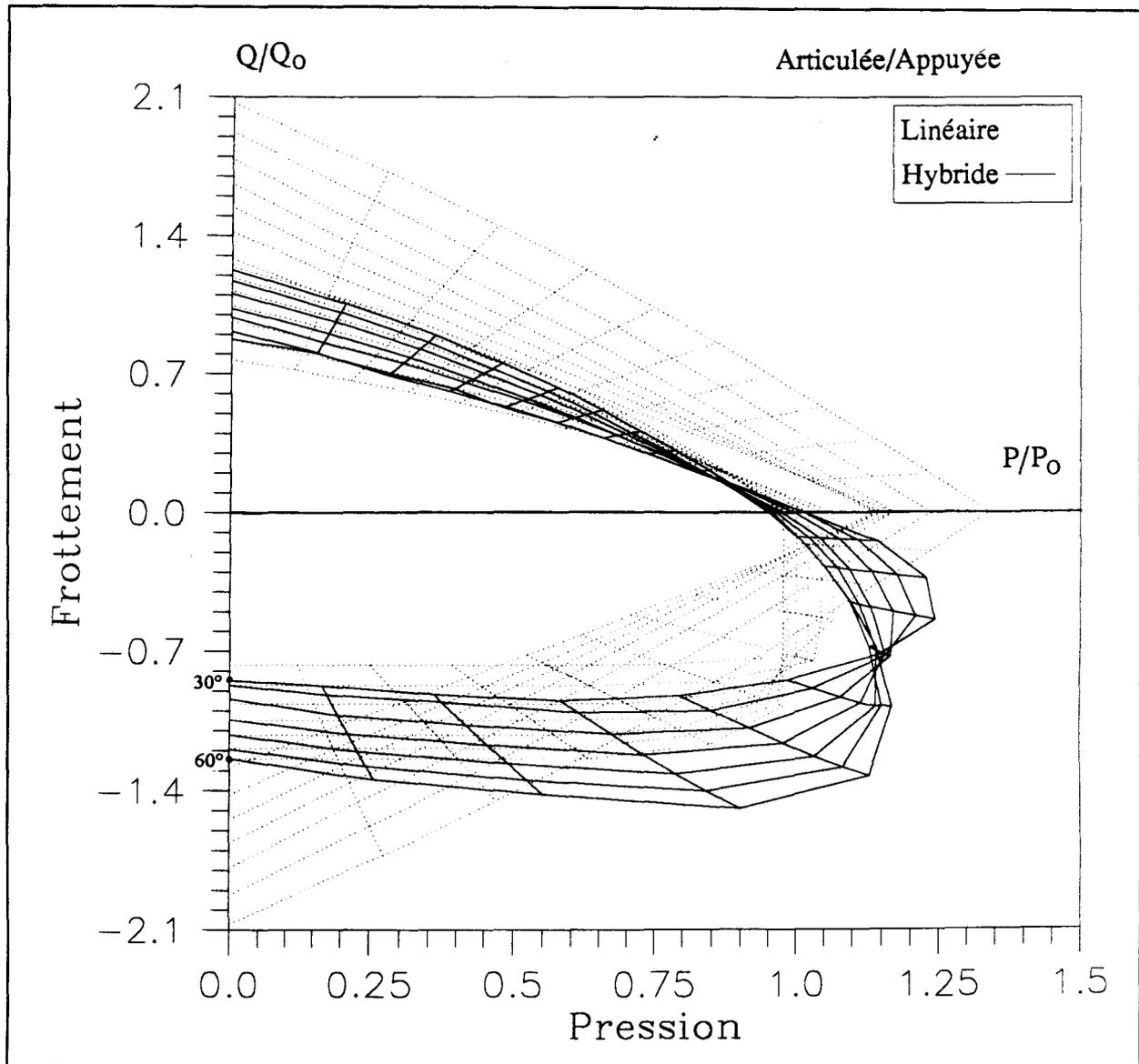


figure 5.3.3.D4 : Influence de la précharge (conditions limites Articulée/Appuyée).

Lorsque la pression et la force de frottement agissent dans le même sens, le gain dû à la prise en compte des configurations préchargées est nul.

En revanche, lorsque la force de frottement "compense" l'action de la pression, le gain pour une charge combinée devient significatif.

La limite uniaxiale d'adaptation en pression est modifiée défavorablement quelle que soit la conicité (figure 5.3.3.D4); ce qui n'est pas normal. La différence peut venir d'un calage relatif imparfait entre les modules pour cette sollicitation. (On peut faire la même remarque pour les courbes  $\alpha=30^\circ$ ,  $\alpha=35^\circ$ ,  $\alpha=40^\circ$ , relatives aux conditions limites Encastrée/Appuyée (figure 5.3.3.D5)).

Pour  $\alpha=30^\circ$  et  $\alpha=35^\circ$ , des problèmes de non-convexité apparaissent pour les grandes valeurs de la force de frottement. Ces anomalies peuvent être engendrées:

-Soit par la non-convergence lors du processus d'optimisation chargé de définir la limite: le maximum n'est pas atteint, le point obtenu ne devrait pas être pris en compte pour le tracer du domaine

-soit par un problème de calage que nous évoquerons plus loin et qui est illustré par la figure 5.3.3.D6.

Le critère d'effondrement par déformations plastiques alternée (domaines "triangulaires") issu de l'étude linéaire à été représenté. Il est valable pour des charges qui évoluent entre zéro et la limite du domaine. Les résultats obtenus par la méthode hybride pour le critère d'effondrement par plasticité accumulée sont obtenus pour une histoire de charge particulière, qui se résume à une précharge respectant le domaine d'adaptation, suivie de petites évolutions au voisinage de la configuration obtenue. En admettant que la validité de la limite obtenue de cette façon puisse être confirmée, le domaine d'adaptation résulte de la limitation par le plus sévère des deux critères. Pour cet exemple, le gain apporté par la prise en compte des effets géométriquement non-linéaires n'intervient alors pratiquement pas, puisque c'est le critère d'effondrement par plasticité alternée qui définit la majeure partie de la frontière du domaine d'évolution des charges; sauf pour les cas de charge où la force de frottement est "compensatrice" (opposée à l'action de la pression) et prépondérante, ce qui ne correspond pas à un cas probable.

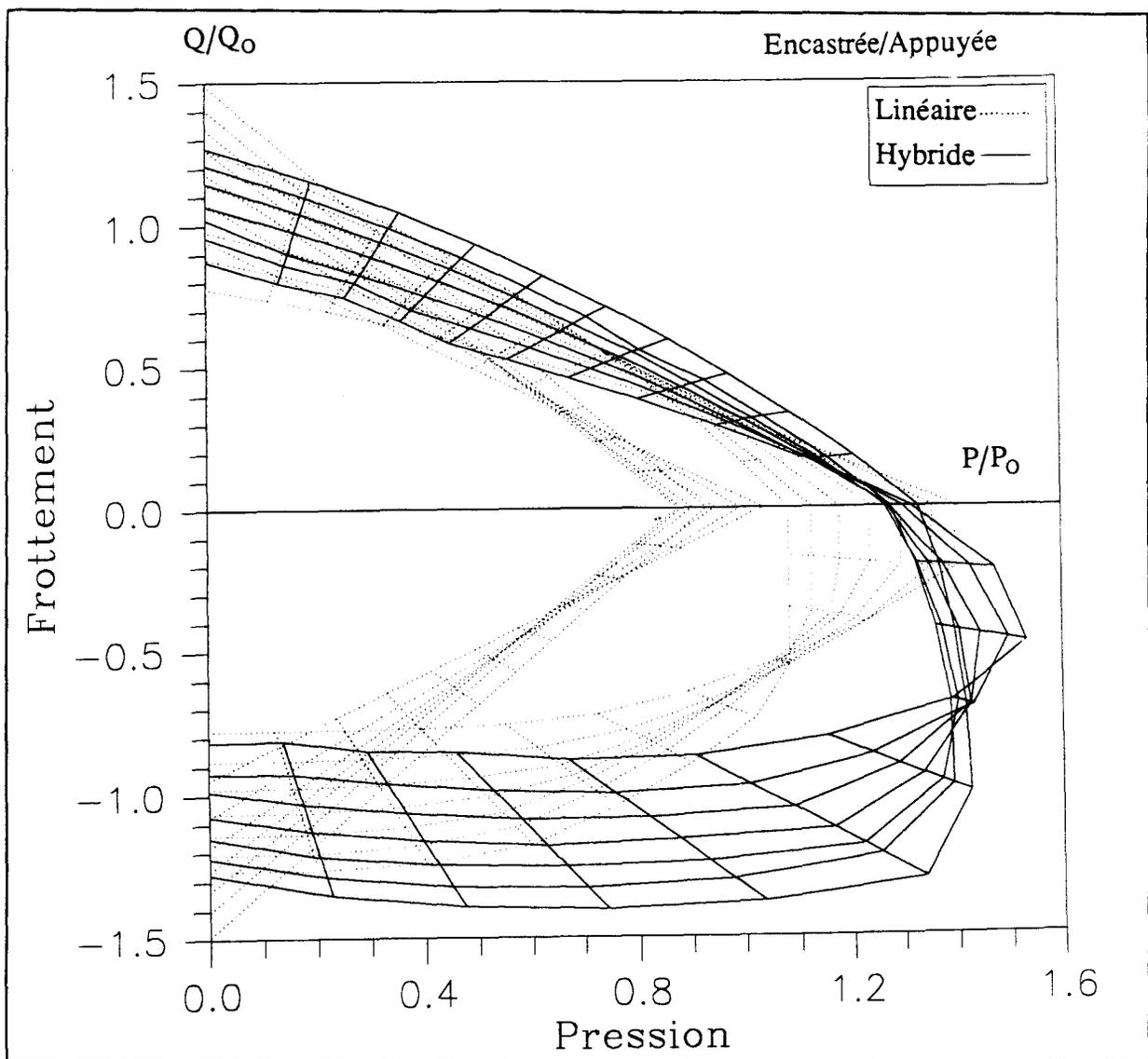


figure 5.3.3.D5 : Influence de la précharge (conditions-limites Encastree/Appuyee).

### Importance de la vérification de la stabilité :

Les configurations non-linéaires préchargées peuvent être obtenues par un calcul incrémental sans vérification de stabilité. Le risque de créer une solution irréaliste, et qui s'avèrerait instable, existe. Pour cela, les précharges ont été générées pour différentes valeurs de proximité vis-à-vis de la limite du domaine d'adaptation; soit :

$$Pre. = \lambda \text{ limite} \quad \text{avec ici } 0,7 \leq \lambda \leq 0,9 .$$

Les résultats concernant l'étude d'un tel cas sont représentés figure (5.3.3.D6) et concernent la structure pour laquelle on a  $\alpha=45^\circ$ , et les conditions limites Articulée/Encastree. Ils illustrent en particulier ce qui peut se produire lorsque les modules

linéaire et non-linéaire ne sont pas calés; les points recalculés à partir de configuration préchargées aberrantes entraînent la non-convexité du domaine.

Nous n'avons cependant pas étudié l'évolution d'une structure pouvant présenter deux configurations d'équilibre distinctes pour les mêmes conditions de charge extérieures comme cela se produit pour les structures qui "s'effondrent" puis se stabilisent après avoir changé de géométrie.

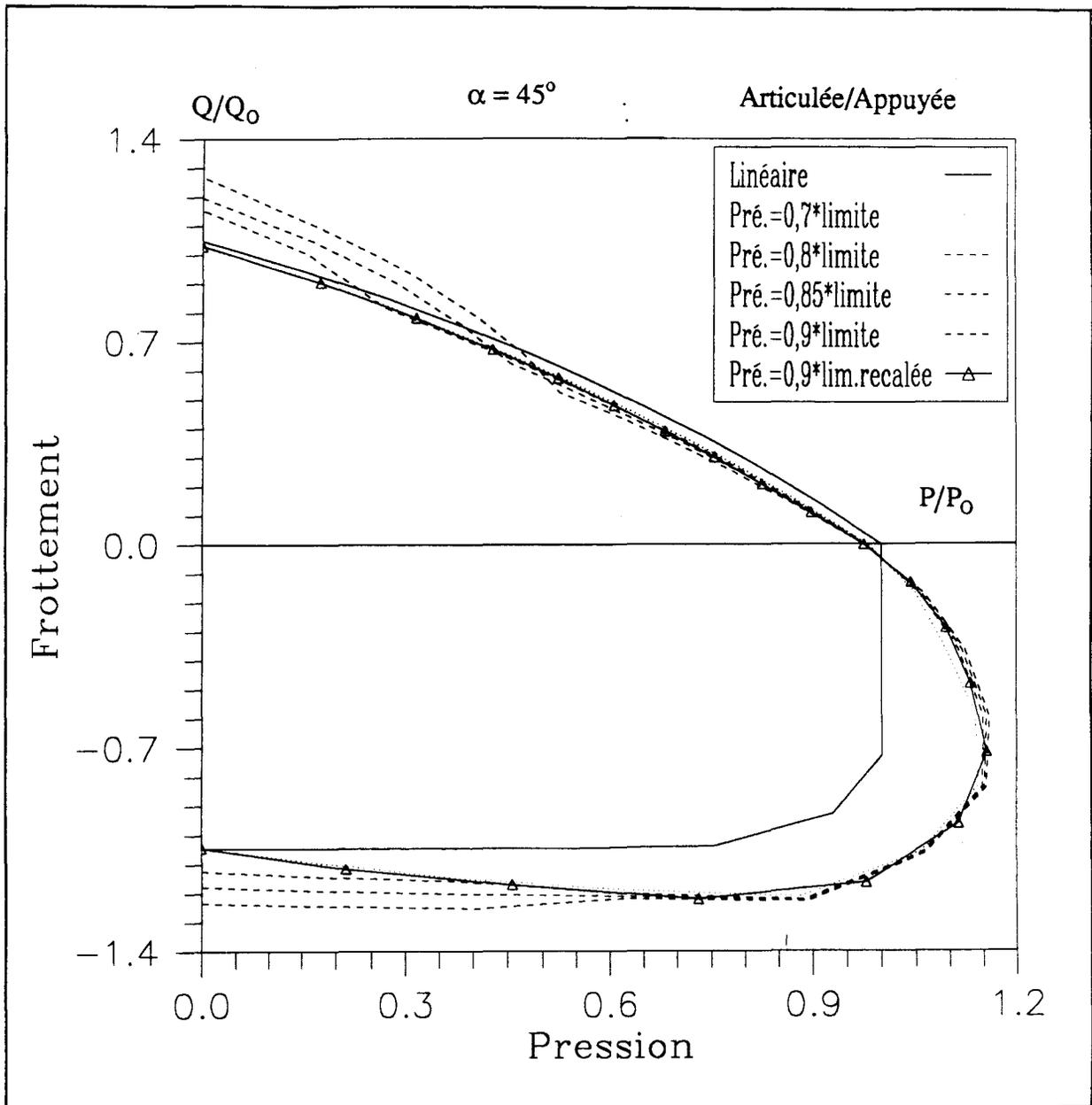


figure 5.3.3.D6 : Problème résultant de configurations préchargées "aberrantes".

On remarque de plus que la limite obtenue par la méthode hybride est un peu défavorable lorsque les sollicitations de pression et de frottement agissent dans le même sens.

Or le calage ne présente pas cette anomalie pour la valeur négative de la charge de frottement. L'hypothèse faite sur la prise en compte des conditions limites nous montre peut-être ses limites. Pourtant, les précharges étant différentes, les configurations générées par NONSAP ont donc des géométries différentes. L'imperfection de la prise en compte des effets géométriques dans les conditions-limites doit donc introduire des défauts distincts. On note que les différences observées entre les résultats sont faibles.

## CONCLUSION

Lorsque nous avons débuté nos travaux, un certain pessimisme pesait sur l'avenir de l'étude d'adaptation en transformations non-linéaires et de ses applications. Les raisons en sont compréhensibles: en effet, l'objectif d'une étude d'adaptation est de pouvoir s'affranchir de l'histoire des charges; en élasto-plasticité, cette histoire a une influence sur la géométrie des configurations obtenues. L'étude linéaire contourne le problème en ramenant tous les calculs dans la configuration initiale; le corps de comparaison purement élastique peut alors être utilisé efficacement. De plus, la définition du coefficient de sécurité ne pose pas de problème, car pour la réponse élastique les contraintes sont proportionnelles aux charges extérieures appliquées. Toutes ces commodités disparaissent dès que l'on s'intéresse à un cadre théorique non-linéaire: nous avons donc examiné l'état des recherches théoriques actuelles dans ce domaine.

Le formalisme "grandes déformations" que nous avons adopté, puis développé, nous a permis d'obtenir une démonstration du premier théorème statique par une démarche totalement analogue à celle qui est utilisée par la théorie linéaire; la seule restriction porte sur le formalisme précis de la loi de comportement, que nous avons volontairement restreinte au cas élastique parfaitement-plastique.

Certes, la généralité du formalisme nous conduit à utiliser des configurations intermédiaires, dont la connaissance ne serait possible que par un calcul pas-à-pas, correspondant à l'histoire des charges appliquées sur la structure : l'application à des cas pratiques est donc compromise dans le cadre général. Deux cas particuliers au moins sont envisageables :

- 1- une étude des chargements cycliques (historique du chargement connu).
- 2- une étude linéaire à partir d'une configuration préchargée.

(Nous avons étudié la deuxième approche.)

Cependant, l'outil théorique obtenu nous a servi à faire le lien entre les différentes approches non-linéaires précédentes: nous avons ainsi pu les situer les unes par rapport aux autres au moyen d'une étude comparative. L'approche utilisée par GROSS-WEEGE ([17](1988)), ([18](1990)) apparaît comme tout à fait juste en ce qui concerne les hypothèses restrictives retenues, qui correspondent à des cas d'application concrets.

L'application de cette approche aux coques de révolution nous a conduit à faire le lien entre deux modélisations différentes:

-La première, liée à l'étude linéaire d'adaptation, utilise un modèle de coque simplifié, ramenant le problème à l'étude du comportement de la surface moyenne. Du fait de l'axisymétrie du problème, les éléments de coque utilisés (cylindriques, coniques) sont unidimensionnels. La simplicité du modèle permet d'avoir, à tout instant, accès à l'évaluation du champ de contraintes issu de la solution élastique de référence. Cependant, du fait de son caractère axisymétrique, cette formulation ignore complètement tout phénomène d'effondrement non-axisymétrique (flambement en particulier).

-Le deuxième modèle, plus élaboré, modélise la tranche axiale d'une coque de révolution par des éléments bidimensionnels. Nous avons choisi l'élément bidimensionnel à huit noeuds. Le module NONSAP offre diverses manières d'effectuer le même calcul, ainsi que la possibilité de prendre en compte l'écrouissage, l'endommagement, ou de mener une étude dynamique.

Nous avons dans un premier temps évalué les possibilités de chaque module; à ce titre, nous avons apporté quelques modifications au module d'adaptation. La charge axiale peut désormais être considérée comme une charge induite par la pression interne pour les coques cylindriques. La sollicitation de torsion, (supposée constante), a été introduite également pour ce type de coque. Nous avons également introduit la prise en compte de l'écrouissage linéaire cinématique limité, conformément à la méthode proposée par WEICHERT & GROSS-WEEGE ([90](1988)). Puis, nous avons comparé leurs résultats sur un même exemple (étude purement élastique). Après avoir noté la nécessité d'un calage numérique entre les deux modèles, nous avons utilisés conjointement les module dans une procédure séquentielle, les résultats non-linéaires de NONSAP étant compris comme configuration préchargée de référence par le module d'adaptation.

Les résultats obtenus sont encourageants. L'utilisation de l'algorithme de RIKS-WEMPNER est justifiée pour le calcul des configurations préchargées; mais nous ne l'avons employé que pour nous assurer du non-effondrement de la configuration préchargée, et nous n'avons pas étudié l'influence du phénomène d'instabilité sur le calcul d'adaptation. Nous pouvons désormais envisager de travailler dans cette voie en utilisant l'algorithme précité pour étudier les structures pouvant présenter, au cours de leur changement de géométrie, différentes configurations pour le même cas de charge (dans la mesure où les configurations obtenues satisfont encore les critères d'utilisation de la structure étudiée). Les études menées sur les phénomènes d'instabilité, (par exemple SIEMASZKO & KÖNIG ([77](1985)), MAIER PAN & PEREGO ([44](1992)), s'intéressent essentiellement au phénomène d'écroulement incrémental.

Pour être complète, une étude de fiabilité aussi réaliste que possible se doit de prendre en compte tous les phénomènes conditionnant celle-ci : plasticité, endommagement, propagation de fissures, effets de la température sur les caractéristiques du matériau, effets d'instabilité géométrique...L'étude d'adaptation se devra un jour d'inclure ces aspects; à défaut, il nous faudra mener ces études en parallèle, mais nous perdrons alors la possibilité d'étudier les influences d'interactions (WEICHERT [91](1989)). La combinaison avec l'effet de l'endommagement semble accessible; puisque la version de NONSAP améliorée par KREJA permet de la prendre en considération. Certains auteurs ont déjà abordé le sujet: HACHEMI & WEICHERT ([20](1992)).

Enfin, du point de vue de l'intérêt pratique, l'application à des structures plus complexes est nécessaire. Compte tenu des moyens nécessaires pour réaliser les études sur nos exemples simples, nous pouvons d'ores et déjà affirmer que l'implémentation demandera d'importants moyens numériques, dont l'essentiel sera consommé par la partie optimisation. Cette remarque nous conforte d'ailleurs dans l'idée que la reformulation du problème d'optimisation sous la forme  $\min(\text{Max}\{\dots\})$  est à étudier. De plus, l'étude de structures plus complexes n'est envisageable que si le modèle choisi permet une évaluation directe du champ des contraintes issues de la solution élastique de référence, en fonction des facteurs des charges extérieures. Une première étape peut consister en l'association des éléments coniques

et cylindriques, avec tous les problèmes que posent les conditions de raccordement de ces deux types d'éléments.

Pour l'instant, les perspectives d'étude issues de la liaison entre le module d'adaptation et NONSAP sont :

- l'amélioration de la formulation des conditions limites,
- la prise en compte de l'endommagement,
- l'étude de l'influence des imperfections géométriques sur le résultat classique,
- l'amélioration de la prise en considération de l'écroutissage,
- l'étude de l'influence des instabilités.

Comme les sollicitations thermiques ne sont pas prévues par NONSAP, ce type de sollicitation n'est étudié que pour la partie linéaire.

Dans l'analyse d'adaptation utilisée, et qui distingue deux étapes dans le processus de chargement, nous voyons à plus long terme le moyen d'étudier les structures obtenues par un procédé de fabrication générant des grandes déformations, et dont l'utilisation est ensuite compatible avec une étude géométriquement linéaire (visserie à filets roulés, crochets de levage, pièces de carrosserie). On se rapprocherait ainsi un peu plus de l'état initial réel des structures utilisées, au lieu de considérer que celle-ci sont vierges de toute contrainte résiduelle.

L'idée de lier deux programmes utilisant des modélisations différentes est finalement assez féconde.

## Références bibliographiques

- 1 **BASAR, Y., KRÄTZIG, W.B.**, "Energy-consistent linear and non-linear stability equations for hyperelastic shells", In: **SCHROEDER, F.H.** (ed.): Stability in the mechanics of continua, Proc. IUTAM Sympos. Nümbrecht (1981), Springer Verlag, Berlin, 133-145, (1982).
- 2 **BATHE, K-J., WILSON, E.L., IDING, R.H.**, "NONSAP : A structural analysis program for static and dynamic response of nonlinear systems"., Report n° UGSESM 74-3, Structural and Material Research Departement of Civil engineering, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics. Structural Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, California, (1974).
- 3 **BLEICH, H.**, "Ueber die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Verhaltes des Baustoffes", Bauingenieur, vol.19/20, 1932, p.261.
- 4 **CASEY, J.**, "Approximate kinematical relations in plasticity", Int. J. Solids Structures, Vol. 21, n°.7, 671-682, (1985).
- 5 **CERADINI, G.**, "Sull'adattamento dei corpi elasto-plastici sogetti ad azioni dinamiche", Giornale del Genio Civile, 4/5, 239-250, (1969).
- 6 **CERADINI, G.**, "Dynamic shakedown in elastic-plastic bodies", J. Engrg. Mech. Div., Proc. ASCE 106 (3),481-498, (1980).
- 7 **COHN, M.Z., MAIER, G.**, "Engineering plasticity by Mathematical Programming", Pergamon Press, New York, (1979).
- 8 **CORRADI, L. & MAIER, G.**, "Dynamic inadaptation for elastic-perfectly plastic continua", J. Mech. Phys. Solids, 22, 401-413, (1974).
- 9 **DEBORDES, O.**, " 1. Contribution à la théorie et au calcul de l'élastoplasticité asymptotique, 2. Théorèmes d'existence récents en Mécanique des fluides parfaits incompressibles", Thèse, (1977).

- 10 **DEBORDES, O & NAYROLES, B** : "Sur la théorie et le calcul à l'adaptation des structures élastoplastiques", *J. de Mécanique*, Vol. 15, n° 1, 1-53, (1976).
- 11 **DE DONATO, O**, "Second shakedown theorem allowing for cycles of both loads and temperature". *Ist. Lombardo di Scienze e Lettere A104*, 265-277, (1970).
- 12 **DIACONITA, V.**, "A Theory of Elastic-Plastic Materials with Voids", *Z.A.M.M.*, 67, 3, 182-188, (1987)
- 13 **DE SAXCE, G.**, "Sur quelques problèmes de mécanique des solides considérés comme matériaux à potentiels convexes", Thèse de doctorat, Coll. Fac. Sci. Appl., 118, Uni. Liege, (1989).
- 14 **DE SAXCE, G., FENG, Z.Q.**, "New Inequality and Functional for Contact with Friction: The Implicit Standard Material Approach", *Mech. Struct. & Mach.*, 19(3), 301-325, (1991).
- 15 **DE SAXCE, G.**, "Une généralisation de l'inégalité de Fenchel et ses applications aux lois constitutives", *Comptes-rendus Acad. Sci. Paris série II* (sous presse).
- 16 **GREEN, A.E. & NAGHDI, P.M.**, "A General Theory of Elastic-Plastic Continuum", *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 18, 251-281, (1965)
- 17 **GROSS-WEEGE, J.** : "Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken", *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik n°58*, Ruhr-Universität Bochum, (Juin 1988).
- 18 **GROSS-WEEGE, J.**, "A unified formulation of statical shakedown criteria for geometrically nonlinear problems", *Int.J.Plasticity*, Vol 6, n°4, 433-447, (1990).
- 19 **GROSS-WEEGE, J. & WEICHERT, D., J.**, "Elastic-plastic shells under variable mechanical and thermal loads", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 34, No. 11, 863-880, (1992).
- 20 **HACHEMI, A. & WEICHERT, D.**, "An Extension of the Static Shakedown Theorem to a certain class of inelastic material with damage", *Arch. Mech.* 44, 5, 491-498, (1992).

- 21 **HALPHEN, B. & NGUYEN QUOC SON**, "Sur les matériaux standards généralisés", Journal de mécanique, Vol 14, n°1, 39-63, (1975).
- 22 **JARADEH, Y.**, "Analyse simplifiée de l'instabilité des structures élastiques élastiques sous charges cycliques", Thèse de doctorat, Paris VI, (1987).
- 23 **JOSPIN, R.J.**, "Etats limites des tuyauteries par la méthode des éléments finis et la programmation mathématique", Thèse de doctorat en sciences appliquées, Université de Liège, Faculté des sciences appliquées, (année académique 1991-1992)
- 24 **KAMENJARZH J. & WEICHERT D.**, "On kinematic upper bounds for the safety factor in shakedown theory", Int.J.Plasticity, Vol. 8, 827-837, (1992).
- 25 **KLEIBER M. & KÖNIG J. A.**, "Incremental shakedown analysis in the case of thermal effects", Int. J. for Num. Meth. in Engineering, Vol.20, 1567-1573, (1984).
- 26 **KÖNIG J. A.**, "A shakedown theorem for temperature dependent elastic moduli", Bull. Ac; Pol. Sci., Ser. Sci. Techn. 17, 161-165, (1969).
- 27 **KÖNIG, J.A.**, "Shakedown theory of plates", Arch. Mech. Stos. 21, 623-637, (1969).
- 28 **KÖNIG J. A. & KLEIBER M.**, "On a new method of shakedown analysis", Bulletin de l'académie polonaise des sciences, Série des sciences techniques, Vol. XXVI, 4, (1978).
- 29 **KÖNIG, J.A.** "On the incremental collapse criterion accounting for temperature dependence of yield point stress", Arch. Mech. 31, 317-325, (1979).
- 30 **KÖNIG J. A.**, "On the stability of the incremental collapse process", Arch. Inz. Lad., 27, 1, 219-229, (1980).
- 31 **KÖNIG, J.A. & MAIER, G.**, "Shakedown analysis of elastoplastic structures: A review of recent developments", Nuclear Engineering and design, 66, 81-95, (1981).
- 32 **KÖNIG J.A.**, "Stability of Incremental collapse", General lecture to Euromech Colloquium 174, Palermo, 1983.

- 33 **KÖNIG, J.A.**, "Stability of the incremental collapse", In: *Inelastic Structures under Variable Loads* (Eds. C. Polizzotto, A. Sawczuk), 329-344, COGRAS, Palermo, (1984).
- 34 **KÖNIG, J.A.**, "Shakedown of Elastic-Plastic Structures", Elsevier, Amsterdam, (1987).
- 35 **KÖNIG J. A. & SIEMASZKO A.**, "Strainhardening effects in shakedown processes", *Ing. Archiv*, 58, 58-66, (1988).
- 36 **KOITER, W.T.**, "Some remarks on plastic Shakedown Theorems", *Proc. 8th Int. Cong. Appl. Mech.*, n°1, Istanbul, p.220, (1952).
- 37 **KOITER, W.T.**, "General theorems for elastic-plastic solids", In *Progress in solid mechanics*, (Edited by I.N. SNEDDON and R. HILL), 165-221, North Holland, Amsterdam, (1960).
- 38 **LEE, E.H.**, "Elastic-plastic deformations at finite strains", *J. Appl. Mech.* 36, 1, (1969).
- 39 **LEE, E.H.**, "Some comments on elastic-plastic analysis", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 17, 859-872, (1981).
- 40 **LEERS, K., KLIE, W., KÖNIG J.A., MAHREHOLTZ, O.**, "Experimental investigation on shakedown of tubes", In : Sawczuk A., Bianchi G. (eds), *Plasticity Today (Proceedings)*, 259-275, London, Elsevier, (1985).
- 41 **MAIER, G.**, "Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and non-associated flow-laws", *Meccanica*, 6, 250-260, (1969).
- 42 **MAIER, G.**, "A shakedown matrix theorie allowing for work-hardening and second-order geometrical effects", in *Foundation in Plasticity*, 417-433, (1973).
- 43 **MAIER, G., LLOYD SMITH, D.**, "Update to Mathematical Programming Applications to Engineering Plastic Analysis", In **STEELE, C.R. & SPRINGER, G.S.** (eds.), *Applied Mechanics Update*, ASME, New York, 377-383, (1986).

- 44 **MAIER, G., PAN L. G. & PEREGO U.**, "Geometric effects on shakedown and ratchetting of axisymmetric cylindrical shells subjected to variable thermal loading", Engineering Structures, (Juin 1992).
- 45 **MANDEL, J.**, "Généralisation de la théorie de plasticité de W. T. KOITER", Int. J. Solids Structures, Vol.1, 273-295, Pergamon Press, (1965).
- 46 **MANDEL, J.**, "Plasticité classique et visco-plasticité", courses and lectures No. 97, Springer-Verlag, UDINE (1971).
- 47 **MANDEL, J.**, "Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques", Int. J. Solids Structures, Vol. 9, Pergamon Press, 725-740, (1973).
- 48 **MANDEL, J.**, "Adaptation d'une structure plastique écrouissable et approximations", Mech. Res. Comm., 3, 483-488, (1976).
- 49 **MARSDEN, J.E. & HUGHES, J.R.**, "Mathematical foundations of elasticity", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1983).
- 50 **MELAN, E.**, "Theorie statish unbestimmter Systeme aus ideal-plastischen Baustoff", Sitz. Ber. Ak. Wiss. Wien, IIa, 145-195, (1936).
- 51- **MELAN, E.**, "Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums", Ing.Arch.9, pp 116-126, (1938b).
- 52 **MORELLE, P.**, "Etude expérimentale et numérique (par éléments finis) de l'adaptation plastique (shakedown) des structures minces axisymétriques", travail de fin d'étude, Laboratoire de Mécanique des matériaux et stabilité des constructions, Liège, (1979-1980).
- 53 **MORELLE, P. & NGUYEN DANG HUNG**, " Etude de l'adaptation plastique des plaques et des coques de révolution par les éléments finis d'équilibre", J. Mech. Theorique et Appl., Vol.2, n°4, 567-599, (1983).
- 54 **NAGHDI & TRAPP**, "On finite elastic-plastic deformation of metal", J. Appl. Mech., 41, 254-260, (1974).

- 55 **NAGHDI, P.M.**, "A critical review of the state of finite plasticity", *J.of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, Vol. 41, (May 1990).
- 56 **NAYROLES, B.**, "Quelques applications variationnelles de la théorie des fonctions duales à la mécanique des solides", *J. de Mécanique*, Vol. 10, n°2, (1971).
- 57 **NAYROLES, B. & WEICHERT, D.**, "La notion de sanctuaire d'élasticité et l'adaptation des structures", *.C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 316, série II, 1493-1498, (1993).
- 58 **NEAL, B.G.**, "Plastic Collapse and Shake-Down Theorems for Structures of Strain-Hardening Materials", *J. Aeronaut. Sci.*, 17, 297-306, (1950).
- 59 **NEMAT-NASSER, S.**, "decomposition of strain measures and their rates in finite deformation elasto-plasticity", *Int. J. Solids Structures* 15, 155-156, (1979).
- 60 **NEMAT-NASSER, S.**, "On finite deformations elasto-plasticity", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 18, No. 10, 857-872, (1982).
- 61 **NGUYEN, Q.S. & GARY, G.**, "Flambage par déformations plastiques accumulées sous charge cyclique additionnelle", *J. de Méc. Théor. et Appl.* 2, 351-373, (1983).
- 62 **PIERRE, D.A., LOWE M.J.**, "Mathematical programming via augmented Lagrangians", London: Addison-Wesley 1975.
- 63 **PIETRASZKIEWICZ, W.**, "Finites rotations in the non-linear theory of thin shells", In : **OLSZAK W.** (ed) : "Thin shell theory. New trends and applications". Springer-Verlag, Wien-New York, 153-208, (1980).
- 64 **POLIZZOTTO, C.**, "A unified treatment of shakedown theory and related bounding techniques", *SM Archives*, vol.7, Issue 1, (Mars 1982).
- 65 **PONTER, A.R.S.**, "Deformation, displacement and work bounds for structures in a state of creep and subject to variable loading", *J. Appl. Mech.*, 39, 953-958, (1972).
- 66 **PONTER, A.R.S.**, "A General Shakedown Theorem for Elastic-Plastic Bodies with Workhardening", *Proc. SMiRT-3*, paper L5/2, London, (1975).

- 67 **PRAGER, W.**, "Shakedown in Elastic-Plastic Media Subjected to Cycles of Load and Temperature", Symp. su la plasticità nelle Scienze delle costruzioni", Bologne, (1957).
- 68 **PYCKO, S. & KÖNIG, J.A.**, "Steady plastic cycles on reference configuration in the presence of second-order geometric effects", Eur. J. Mech. and Solids, 10, n°6, 563-574, (1991).
- 69 **REISSNER, E.**, "On the equations for finite symmetrical deflexions of thin shells of revolution", In : Progress in Applied Mechanics, The Prager Anniversary Volume, New York, 171-178, (1963).
- 70 **ROZENBLUM, V.I.**, "On analysis of shakedown or uneven Heated elastic-plastic bodies", PMTF 5, 98-101, (1965), (en russe).
- 71 **SACZUK, J. & STUMPF, H.** : "On statical shakedown theorems for non-linear problems", Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Nr.47, Ruhr-Universität Bochum, (1990).
- 72 **SCHMIDT, R.**, "A current trend in shell theory : Constrained geometrically nonlinear Kirchhoff-Love type theories based on polar decomposition of strains and rotations".In : NOOR, A.K., HAVDUK, R.,J., (eds) : Advances and trends in structures and dynamics. Pergamon Press, New York, pp265-275, (1985). Reprinted in "Computers and Structures", 20, 265-275, (1985).
- 73 **SCHMIDT, R., WEICHERT, D.**, "A Refined Theory of Elastic-Plastic Shells at Moderate Rotations", ZAMM, Z. angew. Math. Mech, 69, 1, 11-21, (1989).
- 74 **SIDOROFF, F.**, "The geometrical concept of intermediate configuration and elastic-plastic finite strain", Arch. Mech. 25, 299, (1973).
- 75 **SIDOROFF, F.** : "Formulations élasto-plastiques en grandes déformations", rapport GRECO, n°29, (1981).
- 76 **SIDOROFF, F.** : "Cours sur les grandes déformations", rapport GRECO, n°51, (1982).

- 77 **SIEMASZKO, A., KÖNIG, J.A.**, "Analysis of Stability of Incremental Collapse of Skeletal Structures", *J. Struct. Mech.*, 13 (3 & 4), 301-321, (1985).
- 78 **SIEMASZKO, A., KÖNIG, J.A.**, "Geometric effect in shakedown of optimum structures", in *Inelastic Solids and Structures, Antoni Sawczuk Memorial Volume*, Pineridge (1990).
- 79 **SIEMASZKO A. & MROZ Z.**, "Sensitivity of plastic optimal structures to imperfections and non-linear geometrical effects", (*Structure Optimization ..?*), (1991)
- 80 **SIMO, J.C.** : "A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part.1 : Continuum formulation", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 66, 199-219, (1988).
- 81 **STEIN, E., ZHANG, G. & KÖNIG, J.A.**, "Micromechanical modelling and computation of shakedown nonlinear kinematic hardening including examples for 2-D problems", In *Recent Developments of Micromechanics* (Edited by D.R. AXELRAD et W. MUSCHIK), Springer-Verlag, Berlin, (1990).
- 82 **SYMONDS, P.S.**, "Shakedown in Continuous media (*J. Appl. Mech.*, 18-85, (1951).
- 83 **STUMPF, H.**, "Dual extremum principles and error bounds in the theory of plates with large deflexions", *Archives of Mechanics*, 27, 3, pp.485-496, Warszawa (Varsovie), (1975).
- 84 **STUMPF, H.**, "On shakedown analysis for large deformation problems", *Z.A.M.M.*, 71, 4, T297-T299, (1991).
- 85 **STUMPF, H. & BADUR, J.**, "On Missing Links of Rate-Independant Elastic-Plasticity at Finite Strains", *Mechanics Research Communications*, Vol. 17 (5), 353-364, Pergamon press, (1990).
- 86 **WEICHERT, D.**, "Shakedown at finite displacements; a note on Melan's theorem", *Mech. Res. Comm.* 11, 121-127 (1983).

- 87 **WEICHERT, D.** : "Elastic-plastic structures under variable loads at small strains and moderate rotations", Lecture Notes in Engineering, 19, Finite Rotations in Structural Mechanics, proceeding of the Euromech Colloquium 197 Jablonna, Poland, Springer-Verlag, (1985).
- 88 **WEICHERT, D.** : "On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic-plastic structures", Int.J.Plasticity, Vol.2, n°2, 135-148, (1986).
- 89 **WEICHERT, D.**, "Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie", Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr 53, Ruhr-Universität Bochum, (déc. 1987).
- 90 **WEICHERT, D. & GROSS-WEEGE, J.** : "The numerical assesement of elastic-plastic sheets under variable mechanical and thermal loads using a simplified two-surface yield condition", Int.J.Mech.Sci, Vol.30, n°10, 757-767, (1988).
- 91 **WEICHERT, D.** : "Failure assessment of structures using refined material laws", In: Advances in Constitutive laws for Engeneering Materials, Proceedings of ICCLM 1990, Ed.: Fan Jinghong and Sumio Murakami, Pergamon Press, New York (1989).
- 92 **WEICHERT, D.** : "Shakedown of shell-like structures allowing for certain geometrical nonlinearities", Arch. Mech., 41, 1, 61-71, (1989)
- 93 **WEICHERT, D.**, "Advances in the geometrically nonlinear shakedown theory", in Inelastic Solids and Structures, Antoni Sawczuk Memorial Volume, Pineridge,(1990).
- 94 **WEICHERT, D., RAAD, L.**, "Extention of the static shakedown-theorem to certain class of materials with variable elastic coefficients", Mech. Res.Comm., vol. 19 (6), (1992).
- 95 **ZARKA, J. & CASIER J.**, "Cyclic loading on an elastic plastic structure : Practical rules", Laboratoire de Mécanique des solides, Ecole Polytechnique / E.N.S. des Mines de Paris, (1977).
- 96 **ZARKA, J. & CASIER J.**, "Elastic-Plastic Response of a Structure to Cyclic Loading: Practical Rules", in NEMAT-NASSER, S. (ed), Mechanics Today, 6, Pergamon, Oxford,(1981).

**Références mentionnées dans la partie traduite (Début du chapitre 5) :**

- G11 **BREBBIA, C.A.**, 'Finite Element Systems', A Handbook, Berlin: Springer-Verlag 1982.
- G16 **CHROSCIELEWSKI, J., NOLTE, L.P.**, 'Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY', Mittelungen aus dem Institut für Mechanik 48, Ruhr-Universität Bochum (1985).
- G26 **ELIAS, Z.M.**, 'Duality in finite element methods', J. of Engng. Mech. Div., ASCE, 94, 931-946, (1968).
- G28 **FRAEIJIS DE VEUBEKE B.**, 'Displacement and equilibrium models in the finite element method', In: Zienkiewicz O.C.; Holister G.S. (eds.) Stress-Analysis, 145-197, John Wiley and Sons, (1965).
- G31 **GROSS-WEEGE, J., WEICHERT, D.**, 'Zur numerschen Untersuchung des Einspielverhaltens elasto-plastischer Scheiben unter mechanischen und thermischen Wechsellasten', Ing.-Archiv 57, 297-306, (1987).
- G64 **MAKOWSKI, J., NOLTE, L.-P.**, 'Simple equations in terms of displacements for finite axisymmetric deflections of shells of revolution', Int. J. Non-linear Mech., 22, 1-13, (1987).
- G69 **MORELLE, P., NGUYEN DANG HUNG**, 'Etude numérique de l'adaptation plastique des plaques et des coques de révolution par les éléments finis d'équilibre', J. de Mécan. Théor. et Appl. 2, 567-599, (1983).
- G75 **NGUYEN DANG HUNG, KÖNIG, J.A.**, 'A finite element formulation for shakedown problems using a yield criterion of the mean', Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. 8, 179-192, (1976).
- G84 **NOLTE, L.-P., CHROSCIELEWSKI J.**, 'Large rotation elastic-plastic analysis of flexible shells', In: Taylor C.; Owen D.R.J.; Hinton E.; Damjanic F.B. (eds) Numerical Methods for Non-linear Problems', Vol.3, Pineridge Press, (1986).

- G87 **PIAN T.H.H.**, 'Formulations of finite element methods for solid continua', In: **Gallager R.H.; Yamoda Y.; Oden J.T. (eds.) Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design**, 49-83, The University of Alabama Press, (1971).
- G88 **PIERRE D.A., LOWE, M.J.**, 'Mathematical programming via augmented Lagrangians', London: Addison-Wesley, (1975).
- G112 **STIEFEL, E.**, 'Note on Jordan elimination', linear programming and Tchebycheff approximation, *Numer. Math.* 2, 1-17, (1960).
- G118 **WASHIZU, K.**, 'Variational Methods in Elasticity and plasticity', 3rd edition, Oxford: Pergamon Press, (1982).

## Bibliographie

- **BELYTSCHKO, T.**, "Plane stress shakedown analysis by finite elements", Int. J. Mech. Sci. 14, 619-625, (1972).
- **BRAIBANT, V.**, "Condition d'optimalité en programmation mathématique ; Methode d'optimisation pour problèmes non linéaires contraints", rapport SF-130, annexe à la thèse : "optimisation de forme des structures en vue de la conception assistée par ordinateur", Université de Liège, (MAI 1985):
- **CASEY, J., NAGHDI, P.M.**, "A remark on the use of the decomposition  $F=F_e F_p$  in plasticity", ASME J. Appl. Mech., Vol. 47, 672-675, (1980).
- **CLEJA-TIGOIU, S. & SOOS, S.**, "Elastoviscoplastic models with relaxed configurations and internal state variables", ASME Book, Appl. Mech. Rev., vol.43, 7, (1990).
- **DONNELL, L.H.**, "Stability of thin walled tubes under torsion, NACA Technical Report No. 479, (1933).
- **ERBATUR, F.**, "Computer shakedown analysis of planar structures", Comp. & Struct. 18, 1121-1126, (1984).
- **GOKHFELD, D. A.**, "Some problems of shakedown of plates and shells", In : Proc.of VI Union Conf. on Plates and Sheels, Baku, Press 'Nauka', 284-291 (en Russe), (1966).
- **HYDE, T.H., SAHARI, B.B., WEBSTER J.J.**, "The effect of axial loading and axial restraint on the thermal ratcheting of thin tubes", Int. J. Mech. Sci. 27, 679-692, (1985).
- **ONATE, E., OLIVIER, J.**, "A total Lagrangian finite element formulation for large displacement/large rotation analysis of 3-D shells, arches and axi)symmetric shells", In : Taylor C. HINTON E. OWEN D.R..J. (eds) : Numerical methods for non-linear problems, Vol.2 Pinerdge Press, Swansea, (1984).

- **SAWCZUK A.**, "On incremental collapse of shells under cyclic loading", In :  
Noirdson F.I. (ed) Theory of thin shells, 328-340, Berlin, Springer-Verlag, (1969).
- **SAWCZUK, A.**, "Evaluation of upper bounds to shakedown loads for shells", J.  
Mech. Phys. Solids 17, 291-301, (1969).
- **WEICHERT, D.**, "The initial boundary-value problem for geometrically nonlinear  
elastic-plastic shells", Eng. Fract. Mech. 21, 799-806(1985).

## TABLE DES MATIERES

Remerciements .....	2
<b>I.Présentation</b>	
I.1.Historique.....	3
I.2.Motivation.....	8
<b>Chapitre 1 -Base de la théorie en petites déplacements-</b>	
1.1.Enoncé du premier théorème d'adaptation (dit statique).....	10
1.2.Coefficient de sécurité à l'adaptation .....	15
1.3. Exemple illustratif.....	16
<b>Chapitre 2 -Grandes déformations et formulations de l'adaptation-</b>	
2.1.Notations tensorielles	
2.1.a.Notations.....	22
2.1.b.Application au tenseur des déformations.....	24
2.2.Rappels sur la description des grandes déformations élasto-plastiques	
2.2.1.Description des déformations .....	29
2.2.2.Décomposition multiplicative de LEE .....	30
2.2.3.Opérateurs "Pull-Back" et "Push Forward" .....	32
2.2.4.Vitesses ou taux de déformation.....	33
2.2.5.Commentaire sur quelques tentatives de formulation .....	35
2.3.Prise en compte des grandes déformations pour la théorie d'adaptation	
2.3.1.WEICHERT .....	38
2.3.2.GROSS-WWEGE.....	39
2.3.3.SACZUK & STUMPF .....	39
2.3.4.MAIER .....	39
2.3.5.Conclusion.....	40

<b>Chapitre 3 -Contribution à l'étude théorique de l'adaptation en géométrie non-linéaire-</b> .....	39
3.1.Motivations.....	40
3.2.Vers la formulation d'une décomposition multiplicative à trois entités.....	40
3.3.Equation d'équilibre, relations entre les tenseurs de contrainte .....	44
3.4.Sur le théorème statique d'adaptation en déformations finies.....	47
3.5.Sur le facteur de sécurité .....	50
 <b>Chapitre 4 -Liaison avec les approches précédentes-</b>	
4.1.Comparaison avec l'étude de SACZUK	
4.1.1.Présentation .....	51
4.1.2.Comparaison des équations d'équilibre .....	53
4.2.Comparaison de notre approche avec celle de GROSS-WEEGE	
4.2.1.Remarque sur les notations utilisées par GROSS-WEEGE .....	58
4.2.2.Comparaison proprement dite .....	59
4.3.Comparaison avec l'approche de WEIHERT.....	63
4.4.Comparaison avec l'approche matricielle de MAIER.....	67
4.5.Synthèse de l'étude comparative .....	71
 <b>Chapitre 5 -Formulation éléments finis et exploitation numérique-</b> .....	74
5.1.Présentation du module d'adaptation	
5.1.1.Modélisation.....	75
5.1.2.Améliorations apportées.....	82
5.1.3.Résultats obtenus	
5.1.3.1.Etude de l'influence du nombre d'éléments.....	84
Exemple A.....	84
Exemple B.....	87
5.1.3.2.Prise en compte de la charge axiale induite	
Exemple C.....	89
5.1.3.3.Effet de l'érouissage linéaire cinématique limité	
Exemple A.....	91
Exemple D.....	92

5.1.3.4.Prise en compte du moment de torsion	
Exemple A.....	94
5.2.Présentation du module de calcul non-linéaire incrémental (NONSAP)	
5.2.1.Modélisation .....	95
5.2.2.Etalonnage par rapport à une solution analytique .....	96
5.3.Réalisation de la liaison entre les modules	
5.3.1.Liaison entre les modélisations.....	99
5.3.2.Etalonnage des modules entre eux.....	102
5.3.3.Etude numérique de quelques cas.....	107
Exploitation de la liaison permettant d'étudier les effets engendrés par les non- linéarités géométriques	
-Exemple A .....	108
-Exemple D .....	111
<b>Conclusion</b> .....	121
<b>Références bibliographiques</b> .....	125
<b>Bibliographie</b> .....	136
Annexe A	
Annexe B	
Annexe C	

## LISTE DES FIGURES :

figure 1.1 : Structure sous charge .....	16
figure 1.2 : Structure déchargée.....	17
figure 1.3 : Relation entre les différentes entités de déplacement .....	20
figure 2.1 : Illustration de la décomposition multiplicative.....	29
figure 3.1 : Situation des différentes configurations.....	42
figure 4.1.1 : Analyse en deux étapes avec utilisation du corps de comparaison .....	52
figure 4.1.2 : Analyse en deux étapes sans utilisation du corps de comparaison.....	52
figure 4.1.3 : Représentation détaillé des configurations étudiées.....	54
figure 4.3.1 : Comparaison des notations relatives aux déplacements.....	63
figure 4.4.1 : Configurations distinguées par MAIER.....	69
Tableau récapitulatif de l'étude comparative .....	72
figure 5.1.1.1 : Définition des conditions-limites statiques .....	79
figure 5.1.3.1.A : Influence du nombre d'éléments (structure A).....	86
figure 5.1.3.1.B : Influence du nombre d'éléments (structure B).....	88
figure 5.1.3.2.C : Tube fermé sous pression et charge thermique variables .....	90
figure 5.1.3.3.A : Effet de l'écroutissement linéaire cinématique limité (structure A) .....	92
figure 5.1.3.3.D : Effet de l'écroutissement linéaire cinématique limité (structure D) .....	93
figure 5.1.3.4.A :Prise en compte du moment de torsion (structure A).....	95
figure 5.2.1.1 : Modèle NONSAP d'une structure de révolution.....	96
figure 5.2.2.1 : Numérotation pour quatre points de GAUSS dans NONSAP .....	97
figure 5.3.1.1 : Numérotation pour un élément bidimensionnel à huit noeuds.....	100
figure 5.3.1.2 : Points d'interpolation et orientation du repère .....	101
figure 5.3.2.1 : Problème de comparaison vu par le module linéaire .....	103
figure 5.3.2.2 : Problème de comparaison vu par NONSAP .....	104
figure 5.3.3.A : Influence des non-linéarités géométriques sur l'exemple 5.1.3.4.A.....	110

figure 5.3.3.A' : Obtention de la configuration préchargée de trois manières différentes. ....	111
figure 5.3.3.D1 : Influence de la conicité (conditions-limites Articulée/Appuyée).....	113
figure 5.3.3.D2 : Influence de la conicité (conditions-limites Encastrée/Appuyée).....	114
figure 5.3.3.D3 : Influence du type de conditions-limites sur les résultats.....	115
figure 5.3.3.D4 : Influence de la précharge (conditions-limites Articulées/Appuyées) .....	116
figure 5.3.3.D5 : Influence de la précharge (conditions-limites Encastrée/Appuyée)..	118
figure 5.3.3.D6 : Problème résultant de configurations préchargées aberrantes .....	119

## ANNEXE A

### THEORIE DES COQUES

(traduction partielle du chapitre 3 de la thèse de Johannes GROSS-WEEGE)

#### A.1. geometrie

On parle de coques pour les corps volumiques dont l'une des dimensions, appelée épaisseur, est considérablement réduite par rapport aux deux autres. On accepte de modéliser ce type de structure en prenant en compte une surface moyenne ( $\Gamma$ ) divisant l'épaisseur en deux, et l'on adjoint à cette surface un système de coordonnées curvilignes défini, en tout point, par un vecteur normal et deux vecteurs distincts contenus dans un plan tangent à la surface moyenne. Ces vecteurs sont aussi appelés "vecteurs de base". On définit ainsi des lignes de coordonnées  $(\theta^1, \theta^2)$  sur la surface,  $\theta^3$  étant portée par la normale.

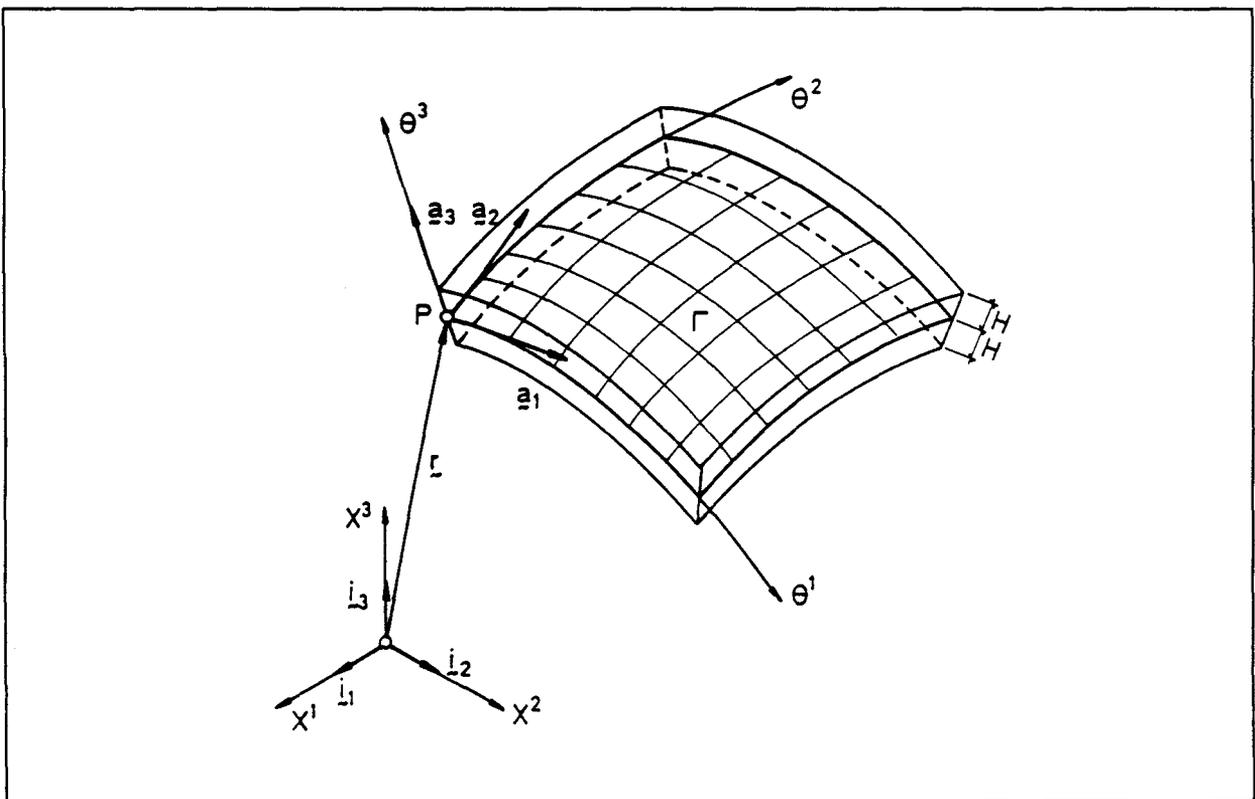


Figure A.1

La description de la surface moyenne dans un repère euclidien est définie par

$$\mathbf{r} = X^k (\theta^\alpha) \mathbf{i}_k \quad (\text{A.1.1})$$

où les  $X$  représentent les coordonnées euclidiennes d'un point quelconque de la surface dont le repérage curviligne est défini par  $(\theta^1, \theta^2)$ .

Ici, et par la suite également, la convention adoptée pour la notation indicielle prévoit l'utilisation des lettres grecques pour les indices variant de 1 à 2.

A l'aide de cette représentation, on peut exprimer les vecteurs de base covariants en chaque point de la surface par

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} \quad , \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2|} \quad (\text{A.1.2})$$

Comme précédemment, la virgule symbolise la dérivation partielle. Le signe " $\wedge$ " désigne ici le produit vectoriel.

Ainsi défini, le vecteur de base  $\mathbf{a}_3$  est orthogonal par rapport aux deux autres, et normé.

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3 = 0 \quad , \quad \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1 \quad (\text{A.1.3})$$

Le point matérialise le produit scalaire. Les composantes covariantes du tenseur métrique sur la surface moyenne sont données par

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad (\text{A.1.4})$$

avec pour déterminant

$$a = |a_{\alpha\beta}| = a_{11} a_{22} - (a_{12})^2 \quad (\text{A.1.5})$$

Les vecteurs de base contravariants  $\mathbf{a}^\alpha$ , duaux des vecteurs covariants, satisfont

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (\text{A.1.6})$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker. Les coordonnées contravariantes du tenseur métrique nous sont données par

$$a^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta \quad (\text{A.1.7})$$

avec comme relation entre déterminants

$$|a_{\alpha\beta}| = \frac{1}{a} \quad (\text{A.1.8})$$

Des relations (A.1.4), (A.1.6), (A.1.7), nous déduisons

$$\mathbf{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\beta, \quad \mathbf{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\beta, \quad a^{\alpha\lambda} a_{\lambda\beta} = \delta_\beta^\alpha \quad (\text{A.1.9})$$

Le tenseur de courbure en chaque point de la surface est obtenu par le moyen de la différenciation du vecteur normal  $\mathbf{a}_3$ . Pour les composante covariantes, on a

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_\beta = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \quad (\text{A.1.10})$$

On peut aussi définir des composantes mixtes

$$b_\beta^\alpha = \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_{,\beta}^\alpha \quad (\text{A.1.11})$$

Chaque point de la coque peut être identifié par ses composantes  $\theta^i$ ,  $\theta^3 = 0$  correspondant à la surface moyenne. Tout point élément d'une surface parallèle à la surface moyenne peut être décrit par

$$\bar{\mathbf{r}}(\theta_i) = \mathbf{r}(\theta_\alpha) + \theta^3 \mathbf{a}_3(\theta^\alpha) \quad (\text{A.1.12})$$

De même que pour la surface moyenne, on peut définir les vecteurs de base covariants

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \bar{\mathbf{r}}_{,\alpha} = \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha}, \quad \bar{\mathbf{a}}_3 = \bar{\mathbf{r}}_{,3} = \mathbf{a}_3 \quad (\text{A.1.13})$$

ainsi que les composantes covariante du tenseur métrique

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta, \quad \bar{a}_{\alpha 3} = 0, \quad \bar{a}_{33} = 1 \quad (\text{A.1.14})$$

En faisant apparaître les entités propres à la surface moyenne, on met en évidence le tenseur de décalage ou "shifter-tensor", qui permet d'obtenir les expressions pour une surface quelconque à partir de celles de la surface moyenne

$$\mu_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - \theta^3 b_\beta^\alpha \quad (\text{A.1.15})$$

On peut exprimer un vecteur quelconque avec les vecteurs de base de n'importe quelle surface parallèle à la surface moyenne.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{u}^\alpha \mathbf{a}_\alpha + \bar{u}^3 \mathbf{a}_3 = \bar{u}_\alpha \mathbf{a}^\alpha + \bar{u}_3 \mathbf{a}^3 \\ &= u^\alpha \mathbf{a}_\alpha + u^3 \mathbf{a}_3 = u_\alpha \mathbf{a}^\alpha + u_3 \mathbf{a}^3 \end{aligned} \quad (\text{A.1.16})$$

où les lettre surmontées d'un trait représentent les éléments appartenant à une surface parallèle à la surface moyenne. En utilisant le tenseur de décalage, on a

$$\bar{u}_\alpha = \mu_\alpha^\beta u_\beta \quad , \quad \bar{u}^\alpha = (\mu^{-1})^\alpha_\beta u^\beta \quad (\text{A.1.17})$$

avec

$$(\mu^{-1})^\alpha_\gamma \mu_\beta^\gamma = \delta_\beta^\alpha \quad (\text{A.1.18})$$

Pour la définition de la dérivation des quantités au niveau de la surface moyenne, nous aurons besoin du symbole de Christoffel de deuxième type, donné par

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{a}^\mu = \frac{1}{2} a^{\mu\lambda} (a_{\lambda\alpha,\beta} + a_{\beta\lambda,\alpha} - a_{\alpha\beta,\lambda}) \quad (\text{A.1.19})$$

La dérivée partielle d'un vecteur quelconque peut être donnée par

$$\begin{aligned} u_{,\beta} &= \left( u^\alpha \Big|_\beta - b_\beta^\alpha u_3 \right) \mathbf{a}_\alpha + \left( u_{3,\beta} + b_{\alpha\beta} u^\alpha \right) \mathbf{a}_3 \\ &= \left( u_\alpha \Big|_\beta - b_{\alpha\beta} u_3 \right) \mathbf{a}^\alpha + \left( u_{3,\beta} + b_\beta^\alpha u_\alpha \right) \mathbf{a}_3 \end{aligned} \quad (\text{A.1.20})$$

où la dérivation covariante sur la surface moyenne est définie par

$$u^\alpha \Big|_\beta = u_{,\beta}^\alpha + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha u^\lambda \quad (\text{A.1.21})$$

$$u_{\alpha,\beta} = u_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u_\lambda$$

De même pour la dérivation covariante de tenseur d'ordre supérieur, nous avons par exemple

$$u^{\alpha\beta} \Big|_\lambda = u_{,\lambda}^{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha u^{\mu\beta} + \Gamma_{\lambda\mu}^\beta u^{\alpha\mu} \quad (\text{A.1.22})$$

$$u_{\alpha\beta} \Big|_\lambda = u_{\alpha\beta,\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu u_{\mu\beta} - \Gamma_{\beta\lambda}^\mu u_{\alpha\mu}$$

### Hypothèses simplificatrices

Conformément aux publications de PIETRASZKIEWICZ [89] et WEICHERT [120,123] concernant les coques élasto-plastiques non-linéaires, on peut accepter les simplifications suivantes :

(1) Si l'épaisseur est plus petite que le rayon de courbure minimum de la coque, alors le tenseur de "décalage"  $\mu$  peut être approché par

$$\mu_{\beta}^{\alpha} \approx \delta_{\beta}^{\alpha} \quad (\text{A.1.23})$$

(2) Les composantes du vecteur "u" étant des fonctions analytiques de  $\theta^3$ , on peut utiliser un développement en série de Taylor:

$$u_i = \sum_{k=0}^n u_i^{(k)} (\theta^3)^k + R^n \quad (\text{A.1.24})$$

où n est l'ordre du développement et R le reste de YOUNG correspondant, avec

$$u_i^{(k)} = \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k u_i}{(\partial \theta^3)^k} \right|_{\theta^3=0} \quad (\text{A.1.25})$$

(3) Sous l'hypothèse que R peut être négligé, le développement des composantes  $u_i$  de (A.1.24) sera significatif jusqu'au terme d'ordre 1.

(4) Selon cette même hypothèse, le développement des composantes  $u_3$  ne comprendra que le terme constant (ordre 0).

(5) Les composantes  $E_{\alpha 3}$  du tenseur de GREEN des élongations (déformations transverses) sont très faibles en comparaison des  $E_{\alpha\beta}$ , et seront négligées

$$E_{\alpha 3} \approx 0 \quad (\text{A.1.26})$$

Ces restrictions conduisent à l'hypothèse de KIRCHHOFF-LOVE pour les coques minces; la supposition (4) conduit notamment au fait que l'épaisseur de la coque reste en tous points constante pendant le processus de déformation. Pour les parties élastiques de la coque, il est cependant possible d'évaluer en première approximation les variations d'épaisseur, en prenant en considération la contraction transversale élastique; pour les zones parfaitement plastiques, l'hypothèse d'incompressibilité reste valable, et peut être utilisée dans le même esprit. Pour finir, en première approximation [25], une formule est valable:

$$E_{33} = -E_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta} \quad (\text{A.1.27})$$

En fonction de ces considérations, les composantes du tenseur des élongations de GREEN E peuvent être décomposées en une partie indépendante de  $\theta^3$  et une partie en dépendant linéairement :

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta} + \theta^3 \chi_{\alpha\beta} \\ E_{\alpha 3} &= \gamma_{\alpha 3} + \theta^3 \chi_{\alpha 3} \\ E_{33} &= \gamma_{33} + \theta^3 \chi_{33} \end{aligned} \quad (\text{A.1.28})$$

Les composantes du tenseur des élongations  $\gamma$  et des déformations angulaires  $\chi$  (rotations) sont données par

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} u_3 \\ &+ \frac{1}{2} \left[ u_{3|\alpha} u_{3|\beta} + b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} (u_3)^2 + \frac{1}{2} (u^{\lambda} |_{\alpha} u_{\lambda|\alpha} + u^{\lambda} |_{\beta} u_{\lambda|\beta}) + b_{\alpha}^{\gamma} b_{\beta}^{\lambda} u_{\lambda} u_{\gamma} \right] \\ &+ \frac{1}{2} (b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda} u_{3|\beta} + b_{\beta}^{\lambda} u_{\lambda} u_{3|\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda|\beta} u_3 - b_{\beta}^{\lambda} u_{\lambda|\alpha} u_3) \end{aligned} \quad (\text{A.1.29})$$

$$\gamma_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left( \varphi_{\alpha} + u_{3|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda} + u^{\lambda} |_{\alpha} \varphi_{\lambda} + b_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda} u_3 \right)$$

$$\gamma_{33} = \frac{1}{2} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda}$$

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[ \varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} + u^{\lambda} |_{\alpha} \varphi_{\lambda|\beta} + u^{\lambda} |_{\beta} \varphi_{\lambda|\alpha} - (b_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda|\beta} + b_{\beta}^{\lambda} \varphi_{\lambda|\alpha}) u_3 \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[ (b_{\beta}^{\lambda} u_{3|\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} u_{3|\beta}) \varphi_{\lambda} + (b_{\alpha}^{\lambda} b_{\beta}^{\gamma} + b_{\beta}^{\lambda} b_{\alpha}^{\gamma}) u_{\gamma} \varphi_{\lambda} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1.30})$$

$$\chi_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left( b_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda} + \varphi^{\lambda} |_{\alpha} \varphi_{\lambda} \right)$$

$$\chi_{33} = -b_{\lambda}^{\gamma} \varphi_{\gamma} \varphi^{\lambda}$$

Ici,  $\varphi_{\alpha}$  représente le coefficient du terme linéaire de la décomposition de Taylor (A.1.24) pour  $u_{\alpha}$ . Nous souhaitons à présent n'exprimer les élongations qu'en fonction de  $u_{\alpha}$  et  $u_3$ . De (A.1.26), nous déduisons alors:

$$\gamma_{\alpha 3} = 0 \quad (\text{A.1.31})$$

$$\chi_{\alpha 3} = 0$$

Les expressions de  $\gamma_{\alpha\beta}$  and  $\chi_{\alpha\beta}$  sont compliquées. D'après les simplifications, on peut accepter que :

(6) Les élongations sont en chaque point de la coque assez petites pour que "n", la plus importante valeur du tenseur de GREEN-LAGRANGE, soit beaucoup plus petit que l'unité.

(7) La déformée de la surface moyenne obéit à  $(2H / L_w)^2 \ll 1$  où  $L_w$  représente la longueur d'ondulation de la déformée-type de la surface moyenne.

Les hypothèses (1) à (7) constituent le fondement de l'approximation dite de LOVE qui concernent la densité d'énergie de déformation pour des coques élastiques isotropes. De multiples travaux sont partis de cette approximation; ils s'occupent de la simplification des relations (A.1.29) et (A.1.30), dans le cadre des grandes déformations: mentionnons à titre d'exemples les théories de KOITER [53], SONDEERS [103], PIETRASZKIEWICZ [90], BASAR [5], NOLTE et STUMPF [82] ainsi que PIETRASZKIEWICZ et SZWABOWICZ [91]. Ces travaux se consacrent exclusivement aux coques élastiques, tandis que, pour l'étude des coques élasto-plastiques, des théories particulières ont été développées par DUSZEK [25] et SAWCZUK [109].

En raison de l'hypothèse de décomposition additive du tenseur des déformations de GREEN, conformément au paragraphe ("2.1.5"), nous devons admettre tout au plus les rotations modérées. Limitons-nous, en outre, aux coques faiblement déformées. Ainsi, en raison des études numériques de NOLTE [83] réalisées pour des coques purement élastiques, on peut supposer que la théorie de DONNELL [20] MUSHTARI [74] et VLASOV [117], concernant la plupart des calculs pratiques de construction, fournit des résultats tout à fait satisfaisants. La zone de validité de cette théorie, qui est un cas particulier des théories [25,82,90], est déterminée [89] par les restrictions qui suivent. Pour évaluer les ordres de grandeur "infinitésimaux", on se référera au paramètre commun  $\theta$  avec

$$\theta = \max\left(\frac{2H}{L_w}, \frac{2H}{d}, \sqrt{\frac{2H}{R_{\min}}}, \sqrt{\eta}\right), \quad \theta^2 \ll 1 \quad (\text{A.1.32})$$

En complément des variables déjà connues en  $\theta$ , "d" indique la distance d'un point P examiné depuis le bord de la coque :

(1) Limitation de la géométrie de la surface moyenne telle que seules les coques faiblement courbées sont admises, ce qui donne

$$|K| = 0 \left( \frac{\theta^2}{L_w^2} \right) \quad (\text{A.1.33})$$

où la courbure gaussienne est définie par

$$K = b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1 \quad (\text{A.1.34})$$

(2) Limitation des rotations et des déplacements tels que

-rotations modérées suivant les tangentes

$$\Omega \cdot \mathbf{a}_\alpha = 0(\theta)$$

-petites rotations suivant la normale

$$\Omega \cdot \mathbf{a}_3 = 0(\theta^2)$$

-petits déplacements tangents

$$u_\alpha = 0(\theta u_3)$$

Ici,  $\Omega$  représente le vecteur de rotation ayant pour valeur  $\sin(\omega)$  où " $\omega$ " est l'angle de rotation.

Sous ces conditions, on obtient pour les tenseurs d'élongation ' $\gamma$ ' et de déformation angulaire ' $\chi$ ', la forme simplifiée suivante :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_\alpha|_\beta + u_\beta|_\alpha - 2b_{\alpha\beta} u_3 + u_{3,\alpha} u_{3,\beta}) \quad (\text{A.1.36})$$

$$\chi_{\alpha\beta} = -u_3|_{\alpha\beta}$$

Afin de compléter les relations cinématiques, exprimons les conditions-limites

$$\begin{aligned} u_\nu &= u^\alpha v_\alpha = u_\nu^* \quad \text{sur } S_k \\ u_t &= u^\alpha t_\alpha = u_t^* \quad \text{sur } S_k \\ u_n &= u_3 = u_3^* \quad \text{sur } S_k \\ \beta_\nu &= -u_{3,\alpha} v^\alpha = \beta_\nu^* \quad \text{sur } S_k \end{aligned} \quad (\text{A.1.37})$$

$t_\alpha$  et  $v_\alpha$  représentent les composantes du vecteur tangent  $t$  et normal  $v$ ,  $t \cdot v$  et  $a_3$  définissant sur  $S$  un trièdre orthonormé.

## A.2. Modélisation des efforts intérieurs, equations d'équilibre

Alors que pour la réponse élastique du matériau, la forme de répartition des contraintes suivant l'épaisseur est définie sans ambiguïté par la loi de HOOKE sous les hypothèses cinématiques acceptables, elle apparaît au travers de contraintes liées aux évolutions des déformations, pour les déformations élasto-plastiques.

$$\sigma^{ij} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sigma_{(k)}^{ij} (\theta^3)^k \quad 1 < n < \infty \quad (\text{A.2.1})$$

$$\sigma_{(k)}^{ij}(\theta^1, \theta^2) = \left. \frac{\partial^k \sigma^{ij}}{(\partial \theta^3)^k} \right|_{\theta^3=0} \quad (\text{A.2.2})$$

PIETRASZKIEWICZ [89] a montré que dans le cadre des approximations précédentes, pour les coques élastiques isotropes, on pouvait considérer une définition approchée des contraintes. Nous supposons que cela est aussi valable pour les coques élasto-plastiques, ce qui nous conduit à négliger les composantes suivantes

$$\begin{aligned} \sigma^{33} &\approx 0 \\ \sigma^{3\alpha} &\approx 0 \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

En utilisant (A.2.1) et (A.1.28)<sub>1</sub> dans le principe du travail virtuel, on obtient [123] la définition des représentants des contraintes (éléments de réduction pour les coques)  $N$  et  $M$

$$N^{\alpha\beta}(\theta^1, \theta^2) = \int_{-H}^{+H} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} (\theta^3)^k d\theta^3 \quad (\text{A.2.4})$$

$$M^{\alpha\beta}(\theta^1, \theta^2) = \int_{-H}^{+H} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} (\theta^3)^{k+1} d\theta^3$$

Pour les coques linéaires-élastiques, les termes d'ordre  $n > 1$  seront négligés. De fait, la répartition de contraintes suivant l'épaisseur est linéaire, et l'on peut définir sans ambiguïté les

relations bijectives entre contraintes et éléments de réduction des coques. Par conséquent, on peut modéliser des contraintes linéaires élastiques (index e) d'intensité quelconque par

$${}^e\sigma^{\alpha\beta} = {}^e\sigma_{(0)}^{\alpha\beta} + {}^e\sigma_{(1)}^{\alpha\beta} \theta^3 = \frac{{}^eN^{\alpha\beta}}{2H} + \frac{3}{2} \frac{{}^eM^{\alpha\beta}}{H^3} \theta^3 \quad (\text{A.2.5})$$

Comme nous l'avons mentionné précédemment, cela ne nous donne pas, pour les coques élasto-plastiques, de relation bijective entre les contraintes et les éléments de réduction de section. Une paire  $[N, M]$  donnée peut être engendrée par différentes distributions de contraintes  $\sigma$ , qui se différencient les unes des autres par la contrainte résiduelle  $S$  conditionnelle, appelée pseudo-contrainte résiduelle. Sur cet état de fait, nous utiliserons l'expression suivante de  $\sigma$ , différente de celle que WEICHERT a présentée[120,123]:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^n \tilde{\sigma}_{(k)}^{\alpha\beta} (\theta^3)^k + s^{\alpha\beta} (\theta^3) \quad (\text{A.2.6})$$

où les coefficients  $\tilde{\sigma}_{(0)}^{\alpha\beta}$  et  $\tilde{\sigma}_{(1)}^{\alpha\beta}$  peuvent être déterminés à l'aide des conditions :

$$\int_{-H}^{+H} s^{\alpha\beta} d\theta^3 = {}^sN^{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{A.2.7})$$

$$\int_{-H}^{+H} s^{\alpha\beta} \theta^3 d\theta^3 = {}^sM^{\alpha\beta} = 0$$

Cette manière de présenter le problèmes sera justifiée ultérieurement pour des cas particuliers adéquats. Les représentants des contraintes  $N$  et  $M$  nous sont donnés comme suit:

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-H}^{+H} \sum_{k=0}^1 \tilde{\sigma}_{(k)}^{\alpha\beta} (\theta^3)^k d\theta^3 \quad (\text{A.2.8})$$

$$M^{\alpha\beta} = \int_{-H}^{+H} \sum_{k=0}^1 \tilde{\sigma}_{(k)}^{\alpha\beta} (\theta^3)^{k+1} d\theta^3$$

De même que pour (A.2.5), chaque état de contrainte élasto-plastique se laisse décrire par la formule suivante:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \tilde{\sigma}_{(0)}^{\alpha\beta} + \tilde{\sigma}_{(1)}^{\alpha\beta} \theta^3 + s^{\alpha\beta} (\theta^3) = \frac{N^{\alpha\beta}}{2H} + \frac{3}{2} \frac{M^{\alpha\beta}}{H^3} \theta^3 + s^{\alpha\beta} (\theta^3) \quad (\text{A.2.9})$$

Par comparaison avec (A.2.5), il apparaît par conséquent que l'existence de "s" est liée à celle des déformations plastiques.

A l'aide du principe des travaux virtuels, il est désormais possible de déterminer les conditions d'équilibre dans le milieu  $\Gamma$  et sur la surface frontière  $S_f$ . Selon la théorie de DONNELL-MUSHTARI-VLASOV, cela nous est donné comme suit [110,113]:

$$N^{\alpha\beta}\Big|_{\beta} + p^{\alpha*} = 0 \quad \text{en } \Gamma \tag{A.2.10}$$

$$\left( M^{\alpha\beta}\Big|_{\alpha} + u_{3,\alpha} N^{\alpha\beta} \right)\Big|_{\beta} + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + p^{3*} = 0 \quad \text{en } \Gamma$$

$$v_{\alpha} v_{\beta} N^{\alpha\beta} = N_{vv}^* \quad \text{sur } S_f$$

$$t_{\alpha} v_{\beta} N^{\alpha\beta} = N_{tv}^* \quad \text{sur } S_f$$

$$\tag{A.2.11}$$

$$v_{\beta} \left( M^{\alpha\beta}\Big|_{\alpha} + u_{3,\alpha} N^{\alpha\beta} \right) - M_{tv,\alpha} t^{\alpha} = N_{nv}^* - M_{tv,t}^* \quad \text{sur } S_f$$

$$v_{\alpha} v_{\beta} M^{\alpha\beta} = M_{vv}^* \quad \text{sur } S_f$$

$$\text{avec } M_{tv} = -M^{\alpha\beta} t_{\alpha} v_{\beta}$$

Ici, les termes  $p^{\alpha*}$  et  $p^{3*}$  désignent les composantes des charges surfaciques virtuelles  $p^*$ , par rapport à la surface moyenne non-déformée, et les grandeurs statiques frontières sont définies conformément à la figure A.2.

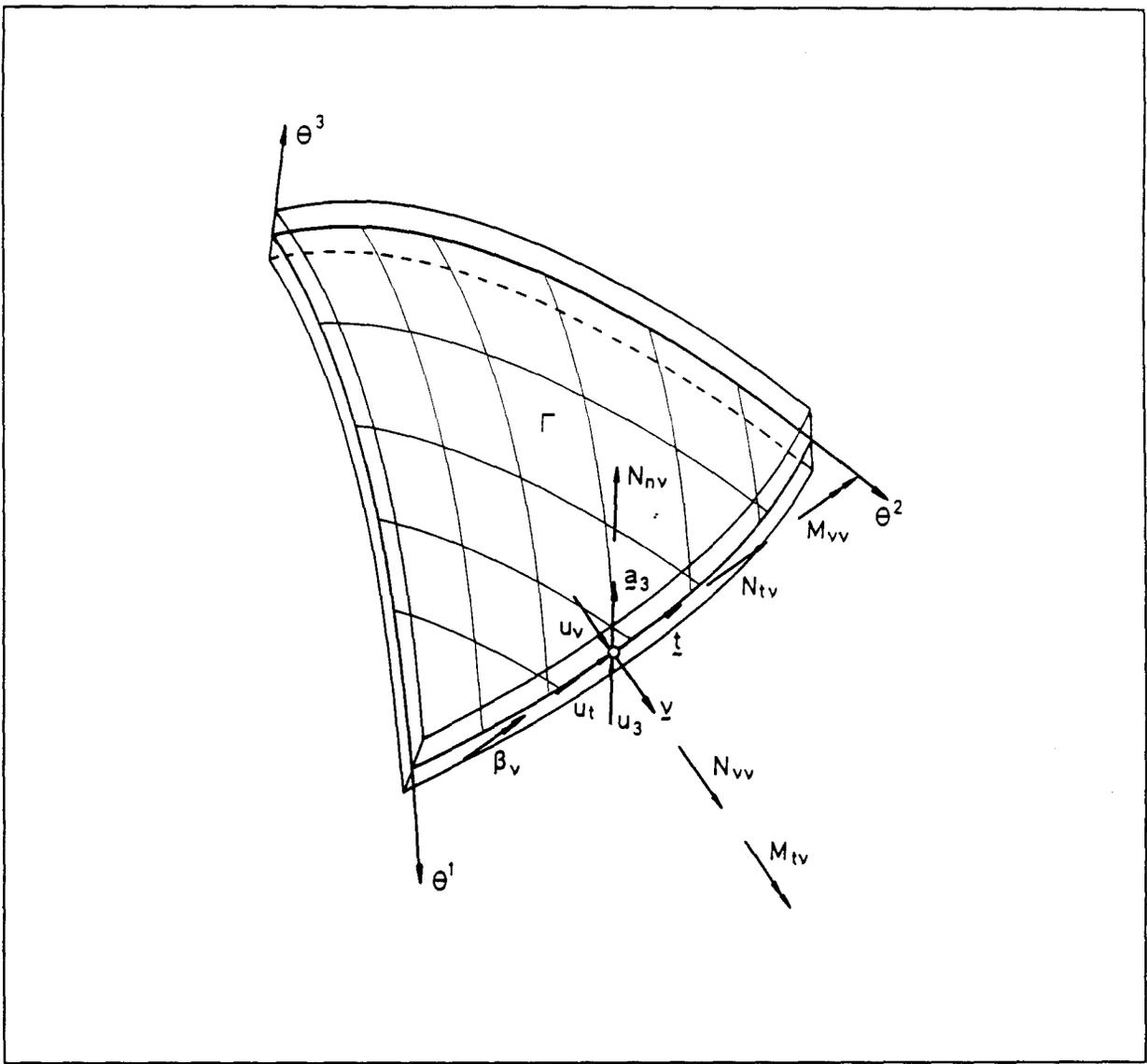


Figure A.2. Définition des quantités-frontières

### A.3.loi de comportement

La décomposition additive du tenseur des déformations totales  $E$ ,

$$E_{ij} = E_{ij}^e + E_{ij}^\phi + E_{ij}^p$$

donne, sous les considérations (A.1.28):

$$E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^e + E_{\alpha\beta}^\phi + E_{\alpha\beta}^p = \gamma_{\alpha\beta} + \theta^3 \chi_{\alpha\beta} \quad . \quad (A.3.1)$$

En supposant une répartition linéaire du champ de température suivant l'épaisseur

$$\vartheta^*(\theta^i) = \bar{\vartheta}^*(\theta^\alpha) + \frac{\Delta\vartheta^*(\theta^\alpha)}{2H} \theta^3 \quad (A.3.2)$$

on peut exprimer la dilatation thermique  $E^\vartheta$  correspondant à (A.1.28) par:

$$E_{\alpha\beta}^\vartheta = \gamma_{\alpha\beta}^\vartheta + \theta^3 \chi_{\alpha\beta}^\vartheta \quad (\text{A.3.3})$$

avec [6]:

$$\gamma_{\alpha\beta}^\vartheta = a_{\alpha\beta} \alpha_{,\vartheta} \bar{\vartheta}^* \quad , \quad \chi_{\alpha\beta}^\vartheta = a_{\alpha\beta} \alpha_{,\vartheta} \frac{\Delta\vartheta^*}{2H} \quad (\text{A.3.4})$$

Par conséquent, de (A.3.1), on déduit:

$$E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^e + E_{\alpha\beta}^p + \gamma_{\alpha\beta}^\vartheta + \theta^3 \chi_{\alpha\beta}^\vartheta \quad (\text{A.3.5})$$

Une décomposition analogue pour les parties élastique et plastique des déformations "E" n'est pas possible à cause de la présence des contraintes résiduelles "s", car, d'après (A.2.6), cette distribution n'est pas linéaire suivant l'épaisseur. En raison de la validité de la loi de HOOKE, les déformations élastiques et, de fait, les déformations plastiques, ne seront pas non plus distribuées linéairement suivant l'épaisseur. On peut aussi exprimer la loi de comportement du matériau uniquement à l'aide des contraintes et des déformations, même sans l'écrire avec les représentants de ceux-ci.

Une exception est cependant donnée par les deux cas suivants :

(1) L'élongation élastique est négligeable devant l'élongation plastique. C'est le cas, déjà formulé par nos prédécesseurs, qui constitue la théorie des corps parfaitement plastiques ( cf.[98]).

(2) La structure se comporte purement élastiquement: il n'y a donc pas de déformations plastiques; on peut alors exprimer la partie élastique à l'aide de (A.1.28): ainsi,

$$E_{\alpha\beta}^e = \gamma_{\alpha\beta}^e + \theta^3 \chi_{\alpha\beta}^e \quad (\text{A.3.6})$$

Pour les corps isotropes, on a d'ailleurs les composantes de  $\gamma^e$  et  $\chi^e$  par

$$\gamma_{\alpha\beta}^e = \frac{1}{D} G_{\alpha\beta\gamma\lambda} N^{\gamma\lambda} \quad (\text{A.3.7})$$

$$\chi_{\alpha\beta}^e = \frac{1}{B} G_{\alpha\beta\gamma\lambda} M^{\gamma\lambda}$$

où les facteurs d'élongation D et de rotation B sont tels que

$$D = 2 \frac{EH}{1-\nu^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{2}{3} \frac{EH^3}{1-\nu^2} \quad (\text{A.3.8})$$

Le tenseur d'élasticité  $G$ , avec les symétries habituelles, a les composantes suivantes

$$G_{\lambda\mu\rho\sigma} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left( a_{\lambda\rho} a_{\mu\sigma} + a_{\lambda\sigma} a_{\mu\rho} - \frac{2\nu}{1+\nu} a_{\lambda\mu} a_{\rho\sigma} \right) \quad (\text{A.3.9})$$

La fonction d'écoulement de HUBER-MISES considérée en ('2.1.12'), en tenant compte de la métrique des coques ainsi que de la simplification (A.3.23) donne :

$$F(\sigma) = 3 a_{ik} a_{jl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} - (a_{ij} \sigma^{ij})^2 - 2\sigma_F^2 = 0 \quad (\text{A.3.10})$$

Nous utiliserons ici encore la simplification (A.2.3), ce qui nous donne

$$F(\sigma) = 3 a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\lambda\mu} - (a_{\alpha\beta} \sigma^{\lambda\mu})^2 - 2\sigma_F^2 = 0 \quad (\text{A.3.11})$$

comme approximation de (A.3.10) pour les coques. On peut écrire la condition d'écoulement sous forme généralisée par

$$F(\sigma) = I_{\alpha\beta\lambda\mu} \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\lambda\mu} - 2\sigma_F^2 = 0 \quad (\text{A.3.12})$$

où le tenseur d'écoulement "I" est écrit pour le cas général d'anisotropie plastique [9], et s'écrit pour les matériaux isotropes

$$I_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{3}{2} a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} a_{\lambda\mu} \quad (\text{A.3.13})$$

Si l'on veut formuler la fonction d'écoulement à l'aide des éléments de réduction de section, on est conduit à reformuler le problème: en effet, l'état de contraintes en un point quelconque de la coque n'est pas une fonction évidente des éléments de réduction, si l'on est en présence de déformations plastiques, c'est-à-dire si "s" est différent de zéro. Tant que la coque se comporte de manière purement élastique, on peut exprimer l'état de contrainte de façon claire, en fonction des éléments de réduction, à l'aide de (A.2.5). Ainsi, les points possibles de contraintes maximales sont localisés dans la section au niveau des parois. Pour  $\theta^3 = \pm H$ , (A.2.5) devient donc

$${}^e \sigma_{\max}^{\alpha\beta} = \frac{{}^e N^{\alpha\beta}}{2H} \pm \frac{3}{2} \frac{{}^e M^{\alpha\beta}}{H^2} \quad (\text{A.3.14})$$

Nous introduisons cette relation dans l'expression générale de la loi d'écoulement (A.3.12). On exprime ici encore les tenseurs éléments de réduction N et M par

$$n^{\alpha\beta} = \frac{N^{\alpha\beta}}{N_p} , \quad m^{\alpha\beta} = \frac{M^{\alpha\beta}}{M_p} \quad (\text{A.3.15})$$

avec

$$N_p = \sigma_F 2H , \quad M_p = \sigma_F H^2 \quad (\text{A.3.16})$$

$N_p$  et  $M_p$  correspondant aux charges de plastification complète de la section; nous obtenons, après division par  $(\sigma_F)^2$

$$\frac{F(\sigma)}{\sigma_F^2} = I_{\alpha\beta\lambda\mu} \left( n^{\alpha\beta} n^{\lambda\mu} + \frac{9}{4} m^{\alpha\beta} m^{\lambda\mu} \pm 2 \frac{3}{2} n^{\alpha\beta} m^{\lambda\mu} \right) - 1 = 0 \quad (\text{A.3.17})$$

et, ainsi, une indication sur le début d'écoulement plastique pour les fibres de bordures (surfaces-frontières). Le cas-limite est atteint pour (A.3.17), lorsque l'expression est nulle, ce qui correspond au plus grandes contraintes élastiques présentes dans la section.

La condition de début d'écoulement du plus grand état élastique apparaît ainsi:

$$F_A = F_{nn} + \frac{9}{4} F_{mm} \pm 3 F_{nm} - 1 = 0 \quad (\text{A.3.18})$$

Dans ce cas, nous trouvons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} F_{nn} &= I_{\alpha\beta\lambda\mu} n^{\alpha\beta} n^{\lambda\mu} \\ F_{mm} &= I_{\alpha\beta\lambda\mu} m^{\alpha\beta} m^{\lambda\mu} \\ F_{nm} &= I_{\alpha\beta\lambda\mu} n^{\alpha\beta} m^{\lambda\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.3.19})$$

La condition de début d'écoulement définit la fin de l'état élastique de la section; on peut voir, sur la figure.A.3, ces différentes limites.

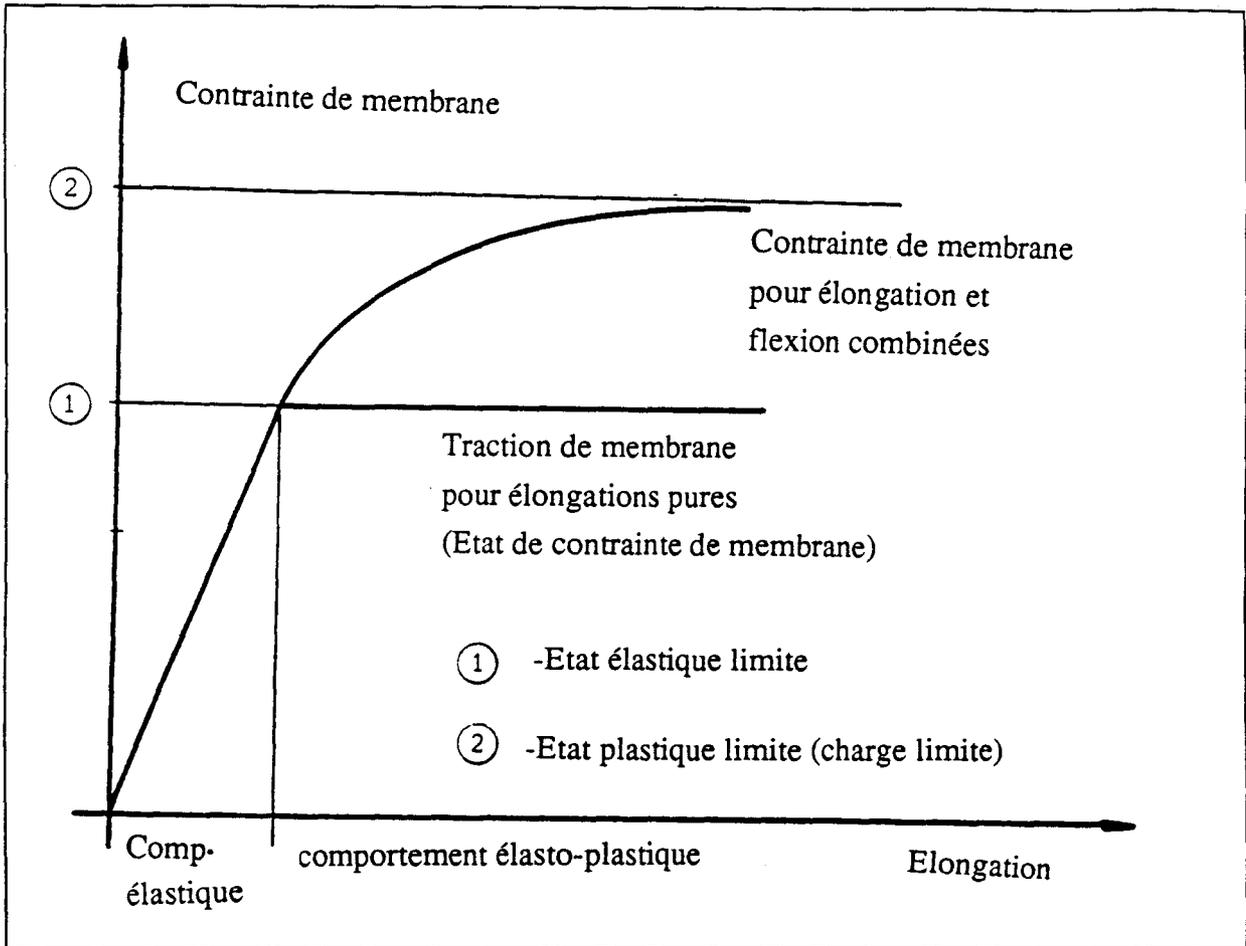


Figure A.3. Comportement uniaxial tension-élongation d'une section

On remarque que l'état-limite élastique: n'est atteint pour des charges-limites extérieures que dans le cas où l'on a un état de contrainte de membrane pure associé à un comportement parfaitement plastique. On considère, en revanche, que la fatigue n'a pas lieu si l'on augmente les charges mortes de section jusqu'au mécanisme plastique, c'est-à-dire lorsque la section devient un mécanisme plastique, de même que pour les section dont la loi de comportement du matériaux est élasto-parfaitement-plastique. Premièrement, avec une distribution de contraintes d'un état de plastification complète, on sera arrivé à la charge limite. On s'aperçoit, ensuite, que pour un état élasto-plastique quelconque, les éléments de réduction des charges de section dépendent des états de déformations respectifs et donc de l'histoire des charges ( voir à ce sujet [25,108]).

En effet, en s'intéressant seulement aux états complètement plastiques, problème d'analyse-limite, qui est de toute façon une analyse à démarche incrémentale, on peut définir la charge limite de section correspondante en fonction des éléments de réduction de façon

assez approximative. ILYUSHIN [35] a été le premier à s'intéresser à ce problème: il a proposé l'approximation suivante de la condition d'écoulement pour l'état-limite complètement plastique.

$$F_{G1} = F_{nn} + F_{mm} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} F_{nm} - 1 = 0 \quad (\text{A.3.20})$$

Sur la base des recherches de ROBINSON [101], la condition-limite d'écoulement va être étudiée dans diverses approximations, fournissant l'approximation des charges-limites qui, en regard de la solution exacte, sont au maximum affectées d'une erreur de 6% pour la sécurité, et de 3,5% pour la non-sécurité. Cela donne exactement l'approximation de IVANOV [36,101] qui, à cause de sa complexité ( utilisation de termes irrationnels), ne convient pas pour notre étude. Le grand avantage de l'équation (A.3.20) réside dans la linéarité polynomiale de "F", qui est donc quadratique par rapport aux éléments de réduction de section.

Une autre approximation existe; elle est dite des "coques-sandwich" [101]:

$$F_{G2} = F_{nn} + F_{mm} \pm 2 F_{nm} - 1 = 0 \quad (\text{A.3.21})$$

où les charges-limites cherchées ici approchent la solution exacte avec une erreur de 20% pour la sécurité, et 0% pour la non-sécurité [101]. Pour les "coques-sandwich", cette condition-limite fournit cependant le résultat correct.

On trouve les "coques-sandwich" dans les applications de constructions légères, par exemple les véhicules aéronautiques et spatiaux; la coque est constituée alors de deux couches minces et parallèles assurant la solidité, séparées par un noyau de résistance négligeable. Pour l'application de (A.3.21), on doit noter que les efforts de plastification totale  $N_p$  et  $M_p$ , à l'inverse de (A.3.16), sont maintenant définis comme suit :

$$N_p = 2 \sigma'_F T \quad , \quad M_p = 2 \sigma'_F T H' \quad (\text{A.3.22})$$

$\sigma'_F$  et  $T$  désignent la contrainte-limite et l'épaisseur d'une couche résistante, et  $2H'$  l'épaisseur du noyau, dont la résistance est négligeable. On doit encore mentionner que, dans le cas des "coques-sandwich", la condition de début d'écoulement (A.3.18) peut être remplacée par (A.3.21): dans ce cas, la condition de début d'écoulement et celle de plastification complète sont identiques. Les deux approximations (A.3.20) et (A.3.21) sont données en exemples pour deux états de membrane différents, en même temps que la

condition d'écoulement complet exact [101], représentée en figure.3.4 où, à titre de comparaison, nous avons également montré la condition de début d'écoulement (A.3.18).

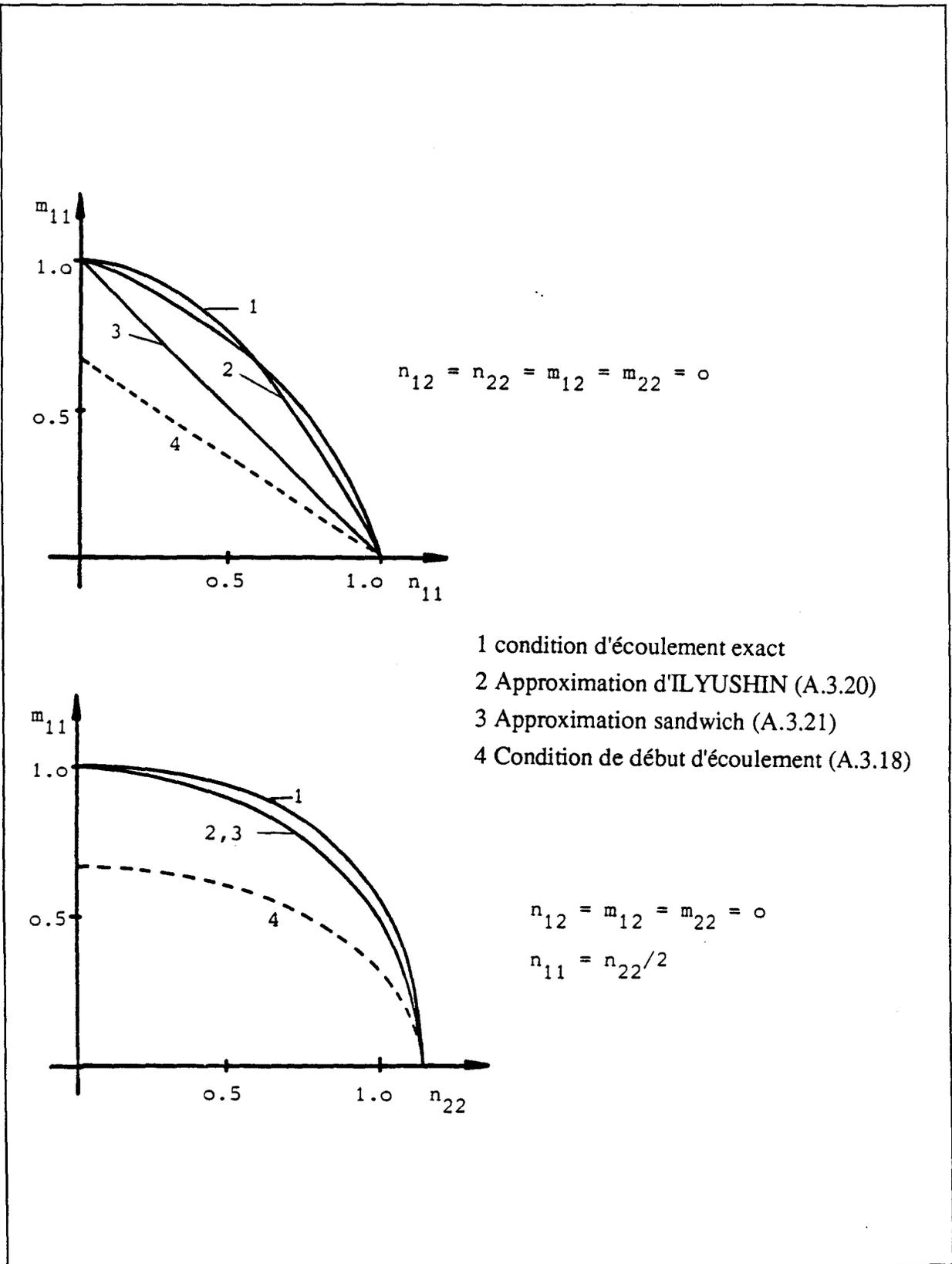


Figure A.4 Comparaison des différentes approximation de la condition d'écroulement ultime

#### A.4. détermination du facteur de sécurité à l'adaptation

Comme pour la réalisation du chapitre.2.3, on articule la détermination du facteur d'adaptation  $\alpha_{SD}$  sur quatre points, qui, compte tenu des considérations sur l'application aux coques, s'énoncent ainsi

- (1) Nous considérons de nouveau comme acquis, les solutions des problèmes de références constants fondés sur la théorie de DONNELL-MUSHTARIVLASOV, c'est-à-dire sur les conditions 1.36 - 37) et 2.10 - 11), ainsi que sur les lois de matériaux correspondantes.
- (2) A la solution du problème de comparaison purement élastique dépendant du temps, doivent maintenant correspondre les égalités linéarisées (A.1.36 - 37) et (A.10 - 11), relatives aux quantités additionnelles ( index "r" ) correspondant au développement du chapitre, ainsi que la loi de comportement élastique du matériau.

Pour la suite, nous omettrons donc l'index "r" dans les entités purement élastiques qui sont liées de façon évidente à cette partie.

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{u}_{\alpha} \Big|_{\beta} + \overset{\circ}{u}_{\beta} \Big|_{\alpha} - 2b_{\alpha\beta} \overset{\circ}{u}_3 + u_{3,\alpha}^R \overset{\circ}{u}_{3,\beta} + \overset{\circ}{u}_{3,\alpha} u_{3,\beta}^R \right) \text{ en } \Gamma \quad (\text{A.4.1})$$

$$\overset{\circ}{\chi}_{\alpha\beta} = -\overset{\circ}{u}_{3,\alpha\beta} \text{ en } \Gamma$$

$$\overset{\circ}{u}_v = u_v^* \text{ sur } S_k$$

$$\overset{\circ}{u}_t = u_t^* \text{ sur } S_k$$

$$\overset{\circ}{u}_3 = u_3^* \text{ sur } S_k$$

$$\overset{\circ}{\beta}_v = \beta_v^* \text{ sur } S_k$$

(A.4.2)

$$\overset{\circ}{N}^{\alpha\beta} \Big|_{\beta} + p^{\alpha*} = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (\text{A.4.3})$$

$$\left( \overset{\circ}{M}^{\alpha\beta} \Big|_{\beta} + u_{3,\alpha}^R \overset{\circ}{N}^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{u}_{3,\alpha} N^{R\alpha\beta} \right) + b_{\alpha\beta} \overset{\circ}{N}^{\alpha\beta} + p^{3*} = 0 \quad \text{en } \Gamma$$

$$v_{\alpha} v_{\beta} \overset{\circ}{N}^{\alpha\beta} = N_{vv}^* \quad \text{sur } S_f$$

$$t_{\alpha} v_{\beta} \overset{\circ}{N}^{\alpha\beta} = N_{tv}^* \quad \text{sur } S_f$$

$$v_{\beta} \left( \overset{\circ}{M}^{\alpha\beta} \Big|_{\beta} + u_{3,\alpha}^R \overset{\circ}{N}^{\alpha\beta} + \overset{\circ}{u}_{3,\alpha} N^{R\alpha\beta} \right) - \overset{\circ}{M}_{tv,\alpha} t^{\alpha} = N_{nv}^* - M_{tv,t}^* \quad \text{sur } S_f \quad (\text{A.4.4})$$

$$v_{\alpha} v_{\beta} \overset{\circ}{M}^{\alpha\beta} = M_{vv}^* \quad \text{sur } S_f$$

$$\text{avec } \overset{\circ}{M}_{tv} = \overset{\circ}{M}^{\alpha\beta} t_{\alpha} v_{\beta}$$

$$\overset{\circ}{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{D} G_{\alpha\beta\gamma\lambda} \overset{\circ}{N}^{\gamma\lambda} + a_{\alpha\beta} \alpha_{\phi} \bar{\vartheta}^* \quad (\text{A.4.5})$$

$$\overset{\circ}{\chi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{B} G_{\alpha\beta\gamma\lambda} \overset{\circ}{M}^{\gamma\lambda} + a_{\alpha\beta} \alpha_{\phi} \frac{\Delta\vartheta^*}{2H}$$

Ce problème doit être traité à l'aide de la détermination d'une solution approximative, si les conditions (A.4.3) et (A.4.4) sont vérifiées ponctuellement ( consulter ici MORELLE [70]).

- (3) Pour la détermination des états de contrainte différentiels, nous nous rappelons avant tout la définition

$$\Delta\sigma = \sigma - \overset{\circ}{\sigma} \quad (\text{A.4.6})$$

En remplaçant ici l'état de contraintes élasto-plastique réel  $\sigma$  par la relation (A.2.9), et, de même l'état de contrainte purement élastique par la relation (A.2.5), nous trouvons:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma^{\alpha\beta} &= \frac{N^{\alpha\beta}}{2H} + \frac{3}{2} \frac{M^{\alpha\beta}}{H^3} \theta^3 + s^{\alpha\beta}(\theta^3) - \left( \frac{\overset{\circ}{N}^{\alpha\beta}}{2H} + \frac{3}{2} \frac{\overset{\circ}{M}^{\alpha\beta}}{H^3} \theta^3 \right) \\ &= \frac{\Delta N^{\alpha\beta}}{2H} + \frac{3}{2} \frac{\Delta M^{\alpha\beta}}{H^3} \theta^3 + s^{\alpha\beta}(\theta^3)\end{aligned}\quad (\text{A.4.7})$$

où les tenseurs de différence d'éléments de réduction  $\Delta N$  et  $\Delta M$  correspondant à (A.4.6), sont définis par

$$\Delta N^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta} - \overset{\circ}{N}^{\alpha\beta} \quad , \quad \Delta M^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} - \overset{\circ}{M}^{\alpha\beta} \quad (\text{A.4.8})$$

pour le champ additionnel (index "r"), ces quantités doivent satisfaire les conditions linéarisées statiques homogènes :

$$\Delta N^{\alpha\beta} \Big|_{\beta} = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (\text{A.4.9})$$

$$\left( \Delta M^{\alpha\beta} \Big|_{\alpha} + u_{3,\alpha}^R \Delta N^{\alpha\beta} + \Delta u_{3,\alpha} N^{R\alpha\beta} \right) \Big|_{\beta} + b_{\alpha\beta} \Delta N^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{en } \Gamma$$

$$v_{\alpha} v_{\beta} \Delta N^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{sur } S_f$$

$$t_{\alpha} v_{\beta} \Delta N^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{sur } S_f$$

$$v_{\beta} \left( \Delta M^{\alpha\beta} \Big|_{\alpha} + u_{3,\alpha}^R \Delta N^{\alpha\beta} + \Delta u_{3,\alpha} N^{R\alpha\beta} \right) - \Delta M_{tv,\alpha} t^{\alpha} = 0 \quad \text{sur } S_f \quad (\text{A.4.10})$$

$$v_{\alpha} v_{\beta} \Delta M^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{sur } S_f$$

$$\Delta M_{tv} = -\Delta M^{\alpha\beta} t_{\alpha} v_{\beta}$$

D'après la définition (A.2.7), les contraintes résiduelles conditionnelles "s" ne rentrent pas dans le cadre des conditions statiques (A.4.9) et (A.4.10). Par conséquent, on doit avoir:

$$\Delta u_3 = 0 \quad \text{sur } S_k \quad (\text{A.4.11})$$

Après cela, il faut considérer que  $\Delta\sigma$  et  $\Delta u_3$  doivent eux aussi être indépendants du temps :

$$\Delta \dot{N}^{\alpha\beta} = \Delta \dot{M}^{\alpha\beta} = \Delta \dot{s}^{\alpha\beta} = \Delta \dot{u}_3 = 0 \quad (\text{A.4.12})$$

- (4) Le problème d'optimisation (2.3.2), dont la solution nous fournit le facteur  $\alpha_{SD}$ , devient maintenant, selon les hypothèses (A.2.5) et (A.4.7),

$$\alpha_{SD} = \max_{\Delta\bar{N}, \Delta\bar{M}, \bar{s}} \alpha \quad (\text{A.4.13})$$

sous la condition

$$F \left\{ \sigma^R + \alpha \left[ \frac{\overset{\circ}{N}(a^r)}{2H} + \frac{3}{2} \frac{\overset{\circ}{M}(a^r)}{H^3} \theta^3 \right] + \frac{\Delta\bar{N}}{2H} + \frac{3}{2} \frac{\Delta\bar{M}}{H^3} \theta^3 + \bar{s}(\theta^3) \right\} < 0 \quad \text{en } V$$

sur le domaine  $V$  et quel que soit  $a^r \in A$  et  $\Delta\bar{u}_3 \in \tilde{U}$ .

On doit utiliser ici la condition d'écoulement (A.3.11). L'application numérique de (A.4.13) implique la discrétisation de  $\Delta\bar{N}$ ,  $\Delta\bar{M}$  et  $\bar{s}$ , tout en vérifiant les conditions (A.2.7) et (A.4.9 - 11). Le respect de la condition d'écoulement doit donc être contrôlé à plusieurs reprises pour des surfaces parallèles à la surface moyenne (modèle des "coques-sandwich"). Aussi, l'implémentation numérique est-elle très coûteuse pour les problèmes tridimensionnels (voir à ce propos les travaux de MORELLE et FONDER [72]).

Pour parvenir à une description équivalente à (A.4.13) n'utilisant seulement que les représentants des contraintes, c'est-à-dire permettant de réduire le problème tridimensionnel à un problème bidimensionnel, on peut énoncer:

Pour une contrainte résiduelle conditionnelle  $\bar{s}$  donnée indépendante du temps, nous définissons une zone élastique  $S$  indépendante du temps, convexe dans l'espace des éléments de réduction avec l'aide de la condition  $\bar{S}(N, M) < 0$ . A ce propos, la forme de  $S$  est déterminée par la nécessité que la condition

$$\bar{S} \left\{ N^R + \overset{\circ}{N}(a^r) + \Delta\bar{N}, M^R + \overset{\circ}{M}(a^r) + \Delta\bar{M} \right\} < 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (\text{A.4.14})$$

doit être équivalente à la condition

$$F \left\{ \sigma^R + \frac{\overset{\circ}{N}(a^r) + \Delta\bar{N}}{2H} + \frac{3}{2} \frac{\overset{\circ}{M}(a^r) + \Delta\bar{M}}{H^3} \theta^3 + \bar{s}(\theta^3) \right\} < 0 \quad \text{en } V \quad (\text{A.4.15})$$

Cela signifie que si (A.4.14) est vérifiée, (A.4.15) l'est aussi automatiquement.

Sur ces prescriptions, nous donnons pour  $\bar{S}$  les qualités suivantes :

-  $\bar{S}$  dépend des états de contraintes résiduelles de condition de section respectifs choisis  $\bar{s}$ . Avec cela, le nombre de zones élastiques  $S$  différentes l'une de l'autre, dépend aussi du nombre d'états éventuels de contraintes résiduelles  $\bar{s}$ .

- Pour  $\bar{s} = 0$ , la condition  $\bar{S} = 0$  est égale à la condition de début d'écoulement  $F_A = 0$  (A.3.18).

- La zone élastique  $S$  définie par  $\bar{S} < 0$  est située à l'intérieur de la zone de charges de section définie par la condition-limite d'écoulement.

En raison de l'équivalence entre les conditions (A.4.14) et (A.4.15), on peut reformuler le problème d'optimisation (A.4.13) de la façon suivante :

$$\alpha_{SD} = \max_{\Delta\bar{N}, \Delta\bar{M}, \bar{S}} \alpha \quad (A.4.16)$$

sous les contraintes

$$\bar{S} \left\{ N^R + \alpha \dot{N}(a^r) + \Delta\bar{N}, M^R + \alpha \dot{M}(a^r) + \Delta\bar{M} \right\} < 0 \text{ en } \Gamma$$

pour tout  $a^r \in A$  et  $\Delta\bar{u}_3 \in \bar{U}$ .

Cette démarche satisfait de toute façon la notion de zone élastique indépendante du temps  $S$  (lieu élastique) due à KÖNIG [39]. KÖNIG [40,42] présente aussi comment on peut construire la zone élastique pour différentes structures et conditions d'écoulement. Cette façon de procéder est convenable pour les solutions analytiques, mais convient également pour les applications numériques fondées sur la résolution du problème originel (A.4.13).

D'après ces considérations, nous suivons dans ce travail une autre voie (comparer ici aussi les démarches de GOKHFELD et CHERNIAVSKI [30]). De fait, nous considérons les deux mécanismes de défaillance que sont, "l'effondrement incrémental" et "l'écoulement par plasticité alternée", qui peuvent être pris en compte pour la détermination de  $\alpha_{SD}$ . L'effondrement incrémental intervient lorsqu'une zone suffisamment importante de la surface moyenne  $\Gamma$  est à l'état-limite de plasticité complète de la section, de telle sorte que l'effondrement incrémental puisse avoir lieu. Un mécanisme basé sur la plasticité alternée peut intervenir lorsqu'il y a des déformations plastiques alternées dans une section transversale unique en un point de  $\Gamma$ , sans pour cela que l'état-limite de plasticité complète de la section soit nécessairement atteint.

Si nous voulons à présent déterminer seulement le facteur de sécurité vis-à-vis de l'effondrement incrémental  $\alpha_{IV}$ , nous devons, consécutivement aux considérations précédentes sur les contraintes du problème d'optimisation (A.4.16), utiliser, à la place des conditions  $\bar{S}(N,M) < 0$ , la condition-limite d'écoulement  $F_{G1}(N,M) < 0$  ( respectivement  $F_{G2}(N,M) < 0$ ). De cette façon, on obtient le facteur de sécurité  $\alpha_{IV}$  comme solution du problème d'optimisation suivant :

$$\alpha_{IV} = \max_{\Delta\bar{N}, \Delta\bar{M}} \alpha \tag{A.4.17}$$

sous les contraintes

$$F_{G1,2} \left\{ \left( \frac{N^R + \alpha \overset{\circ}{N}(a^r) + \Delta\bar{N}}{N_p} \right), \left( \frac{M^R + \alpha \overset{\circ}{M}(a^r) + \Delta\bar{M}}{M_p} \right) \right\} < 0 \text{ en } \Gamma$$

pour tout  $a^r \in A$  et  $\Delta\bar{u}_3 \in \tilde{U}$ .

Ici,  $N_p$  et  $M_p$  représentent les charges-limites de section transversales de plastification complète définies en (A.3.16) pour les sections uniformes, et en (A.3.22) pour les "sections-sandwich". Le respect de  $\alpha_{IV}$  seul ne garantit pas naturellement que la structure résiste, car conformément aux observations précédentes, un effondrement par plasticité alternée n'est ici pas encore exclu: nous devons aussi prendre en compte ce mécanisme. Le problème de la détermination du coefficient de sécurité  $\alpha_{AP}$  vis-à-vis de la plasticité alternée n'est en effet jamais éliminé. Pour les cas qui suivent uniquement, il existe un critère de sécurité, où les hypothèses respectives seront que la condition d'écoulement est une fonction linéaire de  $\sigma$  ( $F(\sigma) = F(-\sigma)$ ), ce qui est le cas pour l'utilisation de la condition d'écoulement de HUBER-MISES :

- Plaque sans état de membrane (KÖNIG [40,47])
- Etat de déformation sans élongation (par gauchissement de la coque)
- Chargement uniparamétrique, c'est-à-dire que la charge variable ne dépend que d'un paramètre libre (TIN LOI[115])
- Condition d'écoulement linéaire (TIN LOI [116]).

Dans ces cas, nous obtenons le facteur de sécurité  $\alpha_{AP}$  par

$$\alpha_{AP} = \max_{\hat{N}, \hat{M}} \alpha \quad (\text{A.4.18})$$

sous les contraintes

$$F_A \left\{ \left( \frac{\alpha \overset{\circ}{N}(a^r) + \hat{N}}{N_p} \right), \left( \frac{\alpha \overset{\circ}{M}(a^r) + \hat{M}}{M_p} \right) \right\} < 0 \text{ en } \Gamma$$

pour tout  $a^r \in A$ , où  $\hat{N}$  et  $\hat{M}$  représentent un état d'éléments de réduction indépendants du temps qui n'utilise aucune condition supplémentaire à vérifier.

De cette façon, les deux cas de défaillance devant être étudiés nous donnent finalement le coefficient de sécurité à l'adaptation par

$$\alpha_{SD} = \min(\alpha_{IV}, \alpha_{AP}) \quad (\text{A.4.19})$$

#### Cas particulier :

Dans tous les cas où aucune contrainte résiduelle de "condition de section" ne peut exister et où les conditions de début d'écoulement et de limite d'écoulement sont identiques, c'est-à-dire :

- les "coques-sandwich"
- les structures-disques
- les coques en état de membranes.

La condition-limite (A.4.17) est plus restrictive que la condition limite (A.4.18). a partir de là, on déduit directement

$$\alpha_{IV} \leq \alpha_{AP}$$

et, selon l'hypothèse (A.4.19), on obtient

$$\alpha_{SD} = \alpha_{IV}$$

Dans ces cas, la défaillance issue d'un mécanisme de plasticité alternée n'est donc pas à prendre en considération.

Remarque de conclusion :

(1) La solution de (A.4.18) fournit sans exception une limite supérieure pour le facteur de sécurité  $\alpha_{AP}$  (KÖNIG [44,48]) GOKHFELD et CHERNIAVSKI [30], et donc, compte tenu de (A.4.19), pour le facteur de sécurité à l'adaptation  $\alpha_{SD}$  également. Ce point est évident lorsqu'on explicite la signification de la condition (A.4.18): celle-ci stipule en effet que le domaine  $R$  des états possibles de contraintes "réduites" de section faisant partie du domaine donné  $A$  des charges extérieures possibles, peut être compris à l'intérieur du domaine élastique  $C$ , défini par la condition initiale d'écoulement  $F_A < 0$  (voir la figure 3.5).

(2) Dans le cas du chargement proportionnel, compte tenu des remarques du chapitre 2.3, le domaine  $R$  des états de contraintes "réduites" de section extérieure possible se restreint à un point. Il en résulte que la contrainte (A.4.18) peut toujours être simplifiée, de telle sorte qu'un mécanisme de plasticité alternée est exclu d'emblée; cela nous conduit à l'interprétation physique que, pour les chargements proportionnels, seule la condition (A.4.17) reste à vérifier.

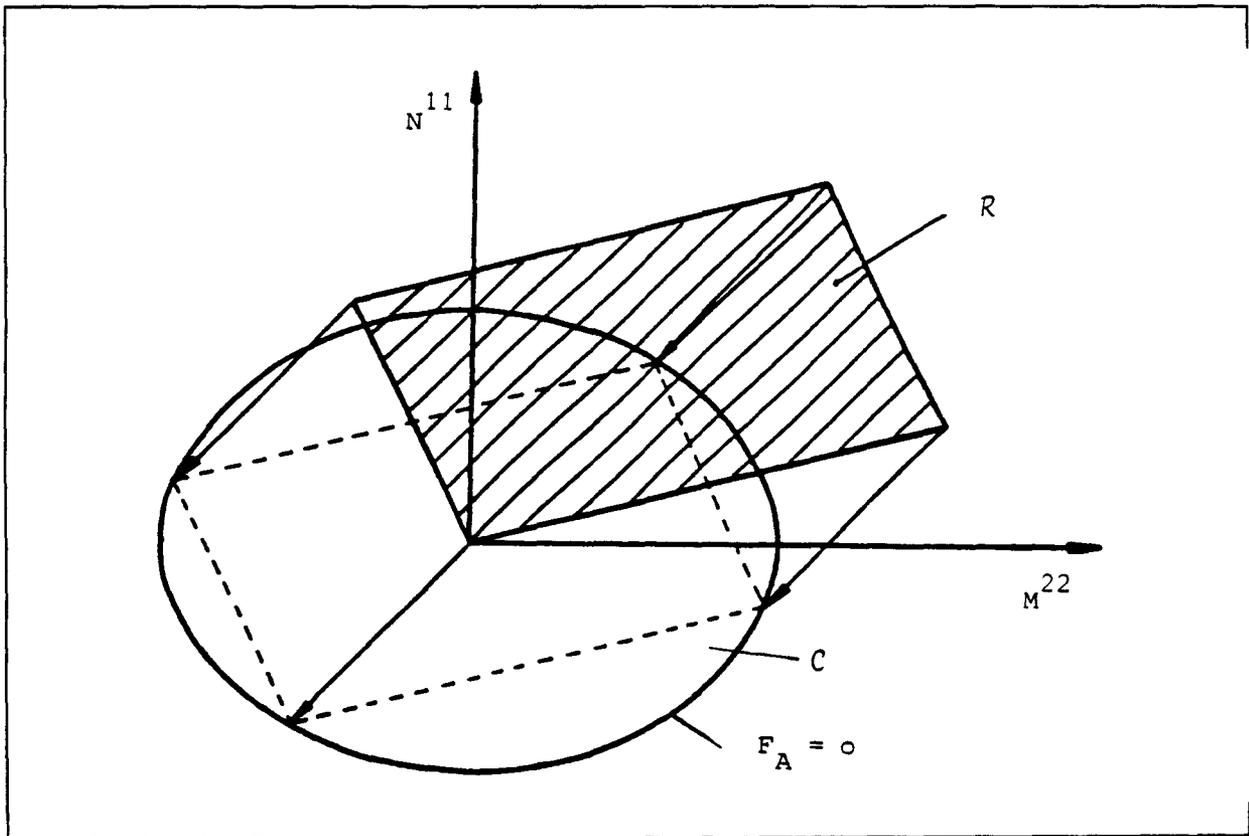


Figure A.5. Illustration de la condition supplémentaire (A.4.18)

## Références bibliographiques propres à l'annexe A :

- [5] BASAR, Y., 'Ein geometrisch nichtlineare Schalentheorie, Konstruktiver Ingenieurbau-Berichte', Nr.38/39, Ruhr-Universität Bochum (1981).
- [20] DONNELL, L.H., 'Stability of thin walled tubes under torsion, NACA Technical Report No.479, (1933).
- [25] DUSZEK, M.K., 'On stability of rigid-plastic structures at the yield-point load, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. 21, 79-87, (1973).
- [30] GOKHFELD, D.A., CHERNIAVSKY, O.F., 'Methods of solving problems in the shakedown theory of continua', In: SAWCZUK A. (ed.) Foundations of Plasticity (Proceedings) 435-450, Warsaw, (1972).
- [35] ILYUSHIN, A.A., 'Plasticite', Paris: Eyrolles 1956 (traduction française du texte Russe original, Moskau 1948).
- [39] KÖNIG, J.A., 'Theory of shakedown of elastic-plastic structures', Arch. Mech. Stos. 18, 227-238, (1966).
- [40] KÖNIG, J.A., 'Shakedown theory of plates', Arch. Mech. Stos. 21, 623-637, (1969).
- [42] KÖNIG, J.A., 'A method of shakedown analysis of frames and arches', Int. J. Solids Structures 7, 327-344, (1971).
- [44] KÖNIG, J.A., 'On upper bounds to shakedown loads', SAMM 59, 349-354, (1979).
- [48] KÖNIG, J.A., 'Shakedown criteria in the case of loading and temperature variations', J. de Mécan. Théor. et Appl. 21, 99-108, (édition spécial)(1982).
- [53] KOITER, W.T., 'On the nonlinear theory of thin shells', Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., Ser. B 69, 1-54, (1966).
- [57] LOVE, A.E.H., 'Mathematical theory of elasticity', 4th edition, Cambridge University Press, (1927).
- [70] MORELLE, P., 'Structural shakedown analysis by dual finite-element formulations', Eng. Struct. 6, 70-79, (1984).
- [74] MUSHTARI, K.M., 'Einige Verallgemeinerungen der Theorie dünner Schalen', (en Russe), Istvestia Fiz.-Mat. obsh. pri Kazanskam Universitete 11, Serie 8, (1938).
- [82] NOLTE, L.P., STUMPF, H., 'Energy-consistent large rotation shell theories in lagrangean description', Mech. Res. Comm. 10, 213-221, (1983).
- [83] NOLTE, L.P., 'Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung grosser Rotationen', Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 39, Ruhr-Universität Bochum, (1983).

- [89] PIETRASZKIEWICZ, W., 'Introduction to the nonlinear theory of shells',  
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 10, Ruhr-Universität Bochum, (1977).
- [90] PIETRASZKIEWICZ, W., 'Finite rotations in the nonlinear theory of thin shells', In:  
OLSAK W. (ed.) Thin Shell Theory, New Trends and Applications, 155-208, Wien:  
Springer-Verlag, (1980).
- [91] PIETRASZKIEWICZ, W., SZWABOWICZ, M.L., 'Entirely lagrangian nonlinear  
theory of thin shells', Arch. Mech. 33, 273-288, (1981).
- [98] PRAGER, W., 'Probleme der Plastizitätstheorie', Basel: Birkhäuser, (1955).
- [101] ROBINSON, M., 'A comparaison of yield surfaces for thin shells', Int. J. Mech. Sci.  
13, 345-354, (1971).
- [103] SANDERS, J.L., 'Nonlinear theories for thin shells', Quart. Appl. Math. 21, 21-36,  
(1963).
- [108] SAWCZUK, A., 'On plastic analysis of shells', In: KOITER W.T.; MIKHAILOV  
G.K. (eds.) Theory of shells, 27-63, North-Holland Publishing Company, (1980).
- [110] SCHMIDT, R., 'Variationsprinzip für geometrisch nichtlineare Schalen-theorien bei  
Rotationen mittlerer Grössenordnung', Dissertation, Ruhr-Universität Bochum,  
(1980).
- [113] STUMPF, H., 'Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and post-Buckling  
Analysis of Thin Elastic Shells' Mitteilunen aus dem Institut für Mechanik 34, Rhur-  
Universität Bochum, (1982).
- [117] VLASOV, V.Z., 'General theory of shells and its applications in engineering', NASA  
Technical Translation TTF-99, Washington, (1964).
- [120] WEICHERT, D., 'The initial boundary-value problem for geometrically nonlinear  
elastic-plastic shells', Eng. Fract. Mech. 21, (1985).
- [123] WEICHERT, D., 'Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der  
Plastizitätstheorie', Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 53, Rhur-Universität  
Bochum, (1987).

## ANNEXE B

### DESCRIPTION DE LA METHODE UTILISEE POUR DEFINIR LA TOTALITE DU DOMAINE D'ADAPTATION

#### Cas de deux charges variant indépendamment :

Sur les bases de l'article de MORELLE ([52](1980)) qui démontre la nécessaire convexité du domaine d'adaptation, MORELLE et NGUYEN DANG HUNG ([53](1983)) déduisent qu'il suffit de vérifier la condition d'adaptation aux points anguleux du domaine pour que la condition soit vérifiée pour la totalité de celui-ci.

Si nous considérons deux charges P et Q indépendantes, le domaine d'étude est un rectangle dont les coins dans l'espace des charges (P,Q) sont définis par :

$(P_{\text{mini}}, Q_{\text{mini}}), (P_{\text{mini}}, Q_{\text{maxi}}), (P_{\text{maxi}}, Q_{\text{maxi}}), (P_{\text{maxi}}, Q_{\text{mini}})$ .

Pour notre part, nous considérons les points anguleux suivants :

$(0,0), (0, Q_{\text{maxi}}), (P_{\text{maxi}}, Q_{\text{maxi}}), (P_{\text{maxi}}, 0)$ .

La méthode d'optimisation détermine la valeur du coefficient de sécurité vis-à-vis d'un cas de charge (recherche du plus grand "rectangle" possible) dans lequel on impose le rapport  $P_{\text{maxi}}/Q_{\text{maxi}}$ . On peut assimiler cette méthode à la recherche du coefficient de sécurité à l'adaptation dans une direction donnée du domaine de charge. La répétition de cette détermination dans plusieurs directions (balayage) permet d'obtenir plusieurs domaines rectangulaires pour lesquels la condition d'adaptation est vérifiée. La nécessaire convexité du domaine d'adaptation nous conduit à le définir comme l'enveloppe polygonale de tous les domaines rectangulaires. (figure B1)

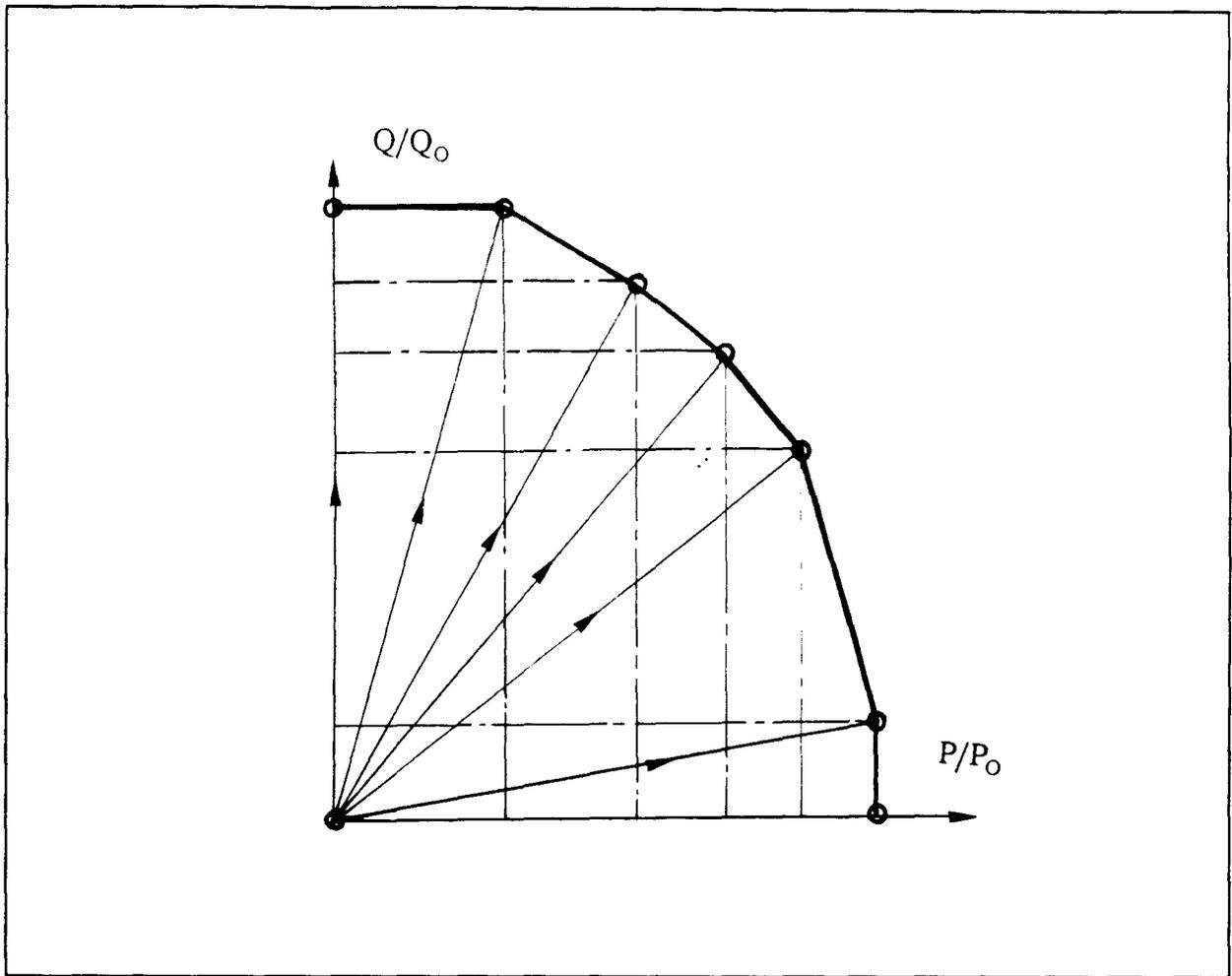


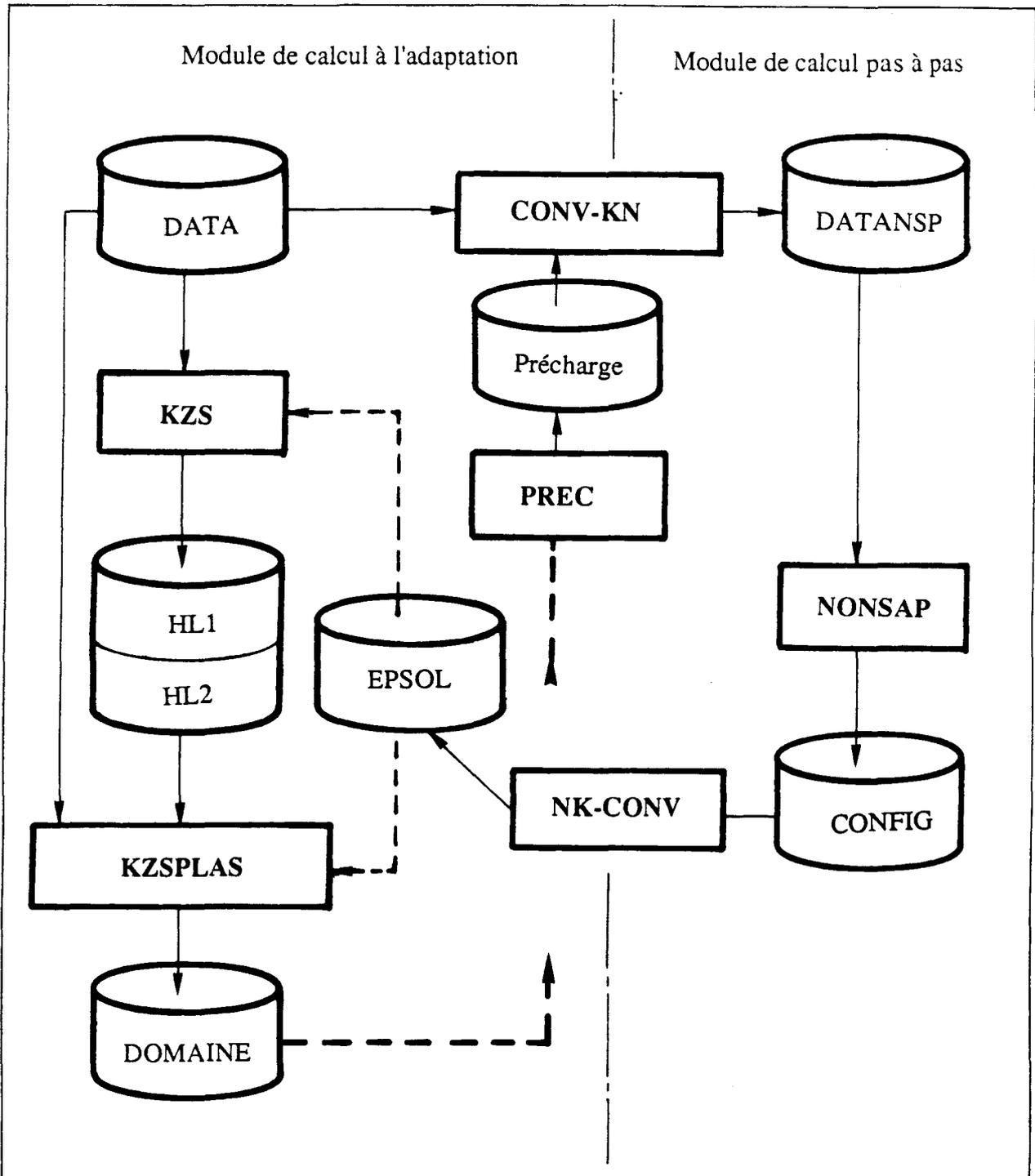
figure B1

**Remarque :**

Cette enveloppe polygonale doit être convexe. Cependant, des points "aberrants" peuvent apparaître lorsque l'optimisation sous contraintes non-linéaires n'a pas convergé. C'est pourquoi, à chaque valeur du coefficient de sécurité trouvé (par direction), nous associons un label de convergence; cela nous autorise à ne pas tenir compte du résultat si, à la suite d'un défaut de convergence, celui-ci engendre une concavité.

ANNEXE C

ARCHITECTURE LOGICIEL



**Programmes de traitement :**

- KZS : calcul de la solution élastique de référence propre à chaque cas de charge
- KZSPLAS : calcul du coefficient de sécurité
- CONV-KN : convertit le fichier de données de départ du module linéaire en fichier NONSAP
- NONSAP : module de calcul pas-à-pas en géométrie non-linéaire
- NK-CONV : convertit le fichier résultat caractérisant la configuration prédéformée obtenue par NONSAP en fichier de données pour le module d'adaptation.
- PREC : calcul de la précharge (charges nodales équivalentes) en fonction du domaine d'adaptation obtenu en géométrie linéaire

