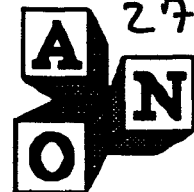


50376
1993
270

USTL

LABORATOIRE D'ANALYSE NUMERIQUE ET
D'OPTIMISATION



n° d'ordre : 1126

THESE

Nouveau régime

présentée à
l'Université des Sciences et Technologies de Lille

pour obtenir le titre de

DOCTEUR en MATHÉMATIQUES

par

Chen FANG



ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DE SUITES VECTORIELLES ET ALGORITHMES PARTICULIERS

soutenue le 23, 6.1993 devant la commission d'examen

Membres du jury

Président : Mr. C. BRÉZINSKI

Rapporteurs : Mr. R. ALT

Mr. A. DRAUX

Membres : Mme J. VAN ISEGHEM

Mr. B. GERMAIN BONNE

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1 Généralisations des Transformations Vectorielles	1
0 Introduction	2
1 Généralisation de la transformation vectorielle $h_k^{(n)}$	3
1.1 Définition de la transformation $h_k^{(n)}$	3
1.2 Implémentation de la transformation $h_k^{(n)}$ par le H -algorithme	11
1.3 Connexion de la généralisation de la transformation vectorielle $h_k^{(n)}$ avec les généralisations de l'approximation de Padé	13
1.4 Propriétés de la transformation $h_k^{(n)}$	20
1.5 Interprétation du calcul de la transformation $h_k^{(n)}$	28
1.6 Théorème d'accélération de la convergence.....	31
2 Généralisation de la transformation vectorielle avec des suites auxiliaires.....	40
2.1 Généralisation de la transformation d'Henrici	40
2.2 Généralisation de la E -transformation vectorielle	46
CHAPITRE 2 Etude de la Transformation de Wimp	50
0 Introduction	51
1 Transformation de Wimp.....	51
2 Etude de la transformation de Wimp	52
3 Propriétés d'accélération de la transformation de Wimp	58
3.1 Composantes de $(g_i(n))_n$ $i \geq 1$ à convergence linéaire.....	59
3.2 Composantes de $(g_i(n))_n$ $i \geq 1$ à convergence logarithmique.....	67
4 Choix particuliers de la suite de vecteurs (ϕ_n)	73
5 Traitement du problème des singularités.....	74

6	Une seconde transformation de Wimp	80
7	Propriétés et résultats de convergence de la seconde transformation de Wimp	84
CHAPITRE 3 Règles Particulières de Type E		93
0	Introduction	94
1	W -algorithme et son algorithme topologique	94
1.1	W -algorithme et sa règle particulière	94
1.2	Variantes de W -algorithme	103
1.3	W -algorithme topologique	108
2	Polynômes orthogonaux adjacents et leurs algorithmes	112
2.1	Définitions	112
2.2	Algorithmes et relations	113
2.3	Règles particulières	116
2.3.1	$r - s$ algorithme de type E et ses règles particulières	116
2.3.2	Algorithmes de calculs des polynômes orthogonaux adjacents et règles particulières	122
3	Règles particulières pour l'interpolation rationnelle généralisée	136
Références		148

CHAPITRE 1

Généralisations des Transformations Vectorielles

0 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier des généralisations de certaines transformations vectorielles.

Dans la première section, nous étudierons une transformation vectorielle $h_k^{(n)}$. Commenant par la définition, nous allons voir que son formalisme est une généralisation des autres transformations connues. Cette transformation peut être mise en oeuvre par le H -algorithme ou par un H -algorithme particulier qui nous fournit un algorithme plus concentré. Ensuite, on voit qu'elle a une connexion avec l'approximant de Padé vectoriel de J. Van Iseghem [2]. Enfin nous donnerons ses propriétés et comparerons avec celles des autres transformations vectorielles.

Dans la deuxième section, nous généraliserons deux transformations vectorielles avec des suites auxiliaires.

1 Généralisation de la transformation vectorielle $h_k^{(n)}$

1.1 Définition de la transformation $h_k^{(n)}$

Soient $\{s_n\}$ une suite de vecteurs complexes, $s_n \in \mathcal{C}^p$; $y_i \in \mathcal{C}^p$, $i = 1, \dots, q$ avec $q \leq p$, q vecteurs indépendants.

On définit la transformation vectorielle suivante:

$${}_q h_k^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{n+kq} \\ \langle y_1, \Delta s_n \rangle & \langle y_1, \Delta s_{n+1} \rangle & \cdots & \langle y_1, \Delta s_{n+kq} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_q, \Delta s_n \rangle & \langle y_q, \Delta s_{n+1} \rangle & \cdots & \langle y_q, \Delta s_{n+kq} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_1, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \langle y_1, \Delta s_{n+k} \rangle & \cdots & \langle y_1, \Delta s_{n+k(q+1)-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_q, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \langle y_q, \Delta s_{n+k} \rangle & \cdots & \langle y_q, \Delta s_{n+k(q+1)-1} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \langle y_1, \Delta s_n \rangle & \langle y_1, \Delta s_{n+1} \rangle & \cdots & \langle y_1, \Delta s_{n+kq} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_q, \Delta s_n \rangle & \langle y_q, \Delta s_{n+1} \rangle & \cdots & \langle y_q, \Delta s_{n+kq} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_1, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \langle y_1, \Delta s_{n+k} \rangle & \cdots & \langle y_1, \Delta s_{n+k(q+1)-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_q, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \langle y_q, \Delta s_{n+k} \rangle & \cdots & \langle y_q, \Delta s_{n+k(q+1)-1} \rangle \end{vmatrix}} \quad (1)$$

où $\langle y_i, \Delta s_j \rangle$ est une forme bilinéaire qui est définie par:

$$\left| \begin{array}{l} \text{Soit } a = (a_1, \dots, a_p)^T \in \mathcal{C}^p \\ b = (b_1, \dots, b_p)^T \in \mathcal{C}^p \\ \text{alors } \langle a, b \rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_p b_p, \text{ et} \\ \langle \alpha a, \beta b \rangle = \alpha \beta \langle a, b \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{C} \end{array} \right.$$

Le déterminant généralisé qui se trouve au numérateur de (1) se développe de façon habituelle et désigne un élément de $\mathcal{C}^p$.

Maintenant, on se pose une question? Comment peut-on choisir ces vecteurs indépendants y_i $i = 1, \dots, q$? En d'autres termes, est-ce que ${}_q h_k^{(n)}$ dépend des y_i $i = 1, \dots, q$. Pour répondre cette question, on va voir d'abord quelques définitions qui seront commodes pour la démonstration de la proposition 1 suivante.

Définition 1:

- Soit $I = \{1, 2, \dots, n\}$, pour $i \in I$, soit $j_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ on note $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ est une permutation de $(1, 2, \dots, n)$.
- Dans $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ s'il existe un couple (j_k, j_l) tels que $k < l$ et $j_k > j_l$, on l'appelle un couple inverse.
- On note $N(j_1, \dots, j_n)$ est le nombre de couples inverses dans $(j_1, \dots, j_n)$.

Définition 2:

Soient $x_i \in \mathcal{C}^p$; $a_{ij}, b_{ij} \in \mathcal{C}$; $k \in \mathcal{C}$

le déterminant $\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$ est un élément de $\mathcal{C}^p$

qui est développable suivant la première ligne.

Si $x_i = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ \vdots \\ b_{ip} \end{pmatrix}$, on définit $k x_i = \begin{pmatrix} k b_{i1} \\ \vdots \\ k b_{ip} \end{pmatrix}$.

Propriété 1:

Soient $x_i, y_i \in \mathcal{C}^p$, $y \in \mathcal{C}^p$; $a_{ij}, b_{ij} \in \mathcal{C}$, $k \in \mathcal{C}$, alors, on a:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} k x_1 & \cdots & k x_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k a_{i1} & \cdots & k a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & k x_i & \cdots & x_n \\ a_{11} & \cdots & k a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & k a_{n-1,i} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_i & \cdots & x_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,i} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} y & \cdots & a_{1n} y \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} y$$

$$(2) \begin{vmatrix} x_1 + y_1 & \cdots & x_n + y_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & \cdots & a'_{in} + a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a''_{i1} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x'_i + x''_i & \cdots & x_n \\ a_{11} & \cdots & a'_{1i} + a''_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a'_{n-1,i} + a''_{n-1,i} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x'_i & \cdots & x_n \\ a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a'_{n-1,i} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x''_i & \cdots & x_n \\ a_{11} & \cdots & a''_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a''_{n-1,i} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

$$(3) \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1p} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} b_{n1} \\ \vdots \\ b_{np} \end{pmatrix} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1j} + k a_{1l} \\ \vdots \\ b_{1p} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} b_{n1} \\ \vdots \\ b_{nj} + k a_{ln} \\ \vdots \\ b_{np} \end{pmatrix} \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \forall l = 1, 2, \dots, n-1. \\ j = 1, 2, \dots, p. \end{matrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + a_{1l} y & \cdots & x_n + a_{ln} y \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \quad \forall l = 1, 2, \dots, n-1.$$

Dém: Les démonstrations sont basées sur les propriétés du déterminant scalaire, si l'on compare chaque composante du vecteur à chaque côté, elles seront triviales.

■

On a maintenant le résultat suivant:

Proposition 1:

Si $q = p$, alors dans $\mathcal{C}^p$, la transformation ${}_ph_k^{(n)}$ ne dépend pas du choix des p vecteurs indépendants $y_1, \dots, y_p$.

Dém: Soient $z_1, \dots, z_p$ p autres vecteurs indépendants dans $\mathcal{C}^p$; on peut écrire:

$$\begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + \dots + a_{1p}y_p \\ \vdots \\ z_p = a_{p1}y_1 + \dots + a_{pp}y_p \end{cases} \quad a_{ij} \in \mathcal{C} \quad (2)$$

On considère d'abord le numérateur de (1)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} s_n & \dots & s_{n+kp} \\ \langle z_1, \Delta s_n \rangle & \dots & \langle z_1, \Delta s_{n+kp} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle z_p, \Delta s_n \rangle & \dots & \langle z_p, \Delta s_{n+kp} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \langle z_1, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \dots & \langle z_1, \Delta s_{n+k(p+1)-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle z_p, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \dots & \langle z_p, \Delta s_{n+k(p+1)-1} \rangle \end{vmatrix} \\ = & \begin{vmatrix} s_n & \dots & s_{n+kp} \\ \langle a_{11}y_1 + \dots + a_{1p}y_p, \Delta s_n \rangle & \dots & \langle a_{11}y_1 + \dots + a_{1p}y_p, \Delta s_{n+kp} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle a_{p1}y_1 + \dots + a_{pp}y_p, \Delta s_n \rangle & \dots & \langle a_{p1}y_1 + \dots + a_{pp}y_p, \Delta s_{n+kp} \rangle \\ \langle z_1, \Delta s_{n+1} \rangle & \dots & \langle z_1, \Delta s_{n+kp+1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle z_p, \Delta s_{n+1} \rangle & \dots & \langle z_p, \Delta s_{n+kp+1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \langle z_1, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \dots & \langle z_1, \Delta s_{n+k(p+1)-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle z_p, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \dots & \langle z_p, \Delta s_{n+k(p+1)-1} \rangle \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On remplace les $z_1, \dots, z_p$ des lignes 2 à $p+1$, par leurs expressions (2), les autres lignes restent les mêmes pour le moment. Utilisant la propriété d'une forme bilinéaire et celle de multilinéarité du déterminant (Propriété 1 relation (2)), on a alors:

$$= \sum_{\{(j_1, \dots, j_p)\}} (-1)^{N(j_1, \dots, j_p)} a_{1,j_1} \cdots a_{p,j_p} \begin{vmatrix} s_n & \cdots & s_{n+kp} \\ \langle y_1, \Delta s_n \rangle & \cdots & \langle y_1, \Delta s_{n+kp} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y_p, \Delta s_n \rangle & \cdots & \langle y_p, \Delta s_{n+kp} \rangle \\ \langle z_1, \Delta s_{n+1} \rangle & \cdots & \langle z_1, \Delta s_{n+kp+1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle z_p, \Delta s_{n+1} \rangle & \cdots & \langle z_p, \Delta s_{n+kp+1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \langle z_1, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \cdots & \langle z_1, \Delta s_{n+k(p+1)-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle z_p, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \cdots & \langle z_p, \Delta s_{n+k(p+1)-1} \rangle \end{vmatrix}$$

où $\{(j_1, \dots, j_p)\}$ est l'ensemble de toutes les permutations de $(1, 2, \dots, p)$ et les indices de a_{i,j_i} sont définis dans la définition 1.

Pour les lignes de $p+2$ à $2p+1$, les lignes $2p+2$ à $3p+1$, ... on répète le même processus et l'on obtient:

$$= \left(\sum_{\{(j_1, \dots, j_p)\}} (-1)^{N(j_1, \dots, j_p)} a_{1,j_1} \cdots a_{p,j_p} \right)^k \begin{vmatrix} s_n & \cdots & s_{n+kp} \\ \langle y_1, \Delta s_n \rangle & \cdots & \langle y_1, \Delta s_{n+kp} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y_p, \Delta s_n \rangle & \cdots & \langle y_p, \Delta s_{n+kp} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y_1, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \cdots & \langle y_1, \Delta s_{n+k(p+1)-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y_p, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \cdots & \langle y_p, \Delta s_{n+k(p+1)-1} \rangle \end{vmatrix} \quad (3)$$

Pour le dénominateur de (1), on obtient de même

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \langle z_1, \Delta s_n \rangle & \cdots & \langle z_1, \Delta s_{n+kp} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle z_p, \Delta s_n \rangle & \cdots & \langle z_p, \Delta s_{n+kp} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \langle z_1, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \cdots & \langle z_1, \Delta s_{n+k(p+1)-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle z_p, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \cdots & \langle z_p, \Delta s_{n+k(p+1)-1} \rangle \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{\{(j_1, \dots, j_p)\}} (-1)^{N(j_1, \dots, j_p)} a_{1, j_1} \cdots a_{p, j_p} \right)^k \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \langle y_1, \Delta s_n \rangle & \cdots & \langle y_1, \Delta s_{n+kp} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y_p, \Delta s_n \rangle & \cdots & \langle y_p, \Delta s_{n+kp} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y_1, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \cdots & \langle y_1, \Delta s_{n+k(p+1)-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y_p, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \cdots & \langle y_p, \Delta s_{n+k(p+1)-1} \rangle \end{vmatrix} \quad (4)$$

Divisant (3) par (4), nous obtenons le résultat. ■

D'après cette proposition, on peut choisir pour $y_1, \dots, y_p$, par exemple, la base canonique de $\mathbb{C}^p$; alors $\langle y_i, \Delta s_n \rangle = (\Delta s_n)_i$ pour $i = 1, \dots, p$ et $\forall n$, où $(\Delta s_n)_i$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de Δs_n .

La transformation ${}_p h_k^{(n)}$, notée simplement $h_k^{(n)}$, est équivalente à :

$$h_k^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{n+kp} \\ (\Delta s_n)_1 & (\Delta s_{n+1})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & (\Delta s_{n+1})_p & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_1 & (\Delta s_{n+k})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_p & (\Delta s_{n+k})_p & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (\Delta s_n)_1 & (\Delta s_{n+1})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & (\Delta s_{n+1})_p & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_1 & (\Delta s_{n+k})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_p & (\Delta s_{n+k})_p & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p \end{vmatrix}} \quad (5)$$

Remarque:

Si $q < p$, alors ${}_qh_k^{(n)}$ est certainement dépendant du choix des q vecteurs indépendants $y_1, \dots, y_q$.

On voit facilement que:

- Si $k = 1$ $\begin{cases} \text{quand } q < p, \text{ on retrouve la méthode MMPE [8].} \\ \text{quand } q = p, \text{ on retrouve la transformation d'Henrici [13].} \end{cases}$
- Si $q = p = 1$, on retrouve la transformation de Shanks [3].
- Si $q = 1, \forall k$, on retrouve la transformation de Shanks topologique [1].
- Si $q = p > 1$, on retrouve la transformation ψ de Van Iseghem [2, p.81].

Cette transformation apparaît donc comme une généralisation du procédé Δ^2 -d'Aitken le plus général.

D'après le fait que $h_k^{(n)}$ est indépendant du choix des p vecteurs indépendants $y_1, \dots, y_p$ dans la proposition 1, on a immédiatement le

Corollaire 1:

Si $q = p$, les méthodes MPE [5], RRE [10,11], MMPE [8], la transformation d'Henrici [13] et la transformation ψ [2] sont identiques.

Dém: C'est le cas particulier de la proposition 1 où $k = 1$.

■

Maintenant, rappelons la définition du produit scalaire dans $\mathcal{C}^p$:

$$\begin{aligned} \text{Soit } a &= (a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{C}^p \\ b &= (b_1, \dots, b_p) \in \mathcal{C}^p \\ \text{On définit } (a, b) &= a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_p \bar{b}_p \in \mathcal{C} \end{aligned} \tag{6}$$

et donc il vérifie la propriété suivante:

$$(\alpha a, \beta b) = \alpha \bar{\beta} (a, b) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{C}$$

où $\bar{z}$ est le nombre complexe conjugué du nombre z .

Dans [4] Roger C.E.TAN a utilisé un produit scalaire pour donner deux algorithmes correspondants de ε -algorithmes topologiques de BREZINSKI [1] qui a utilisé une forme bilinéaire. Il a indiqué que, dans le cas complexe, ces deux types méthodes sont différentes. Pour cette raison, on va définir une transformation similaire en utilisant un produit scalaire au lieu d'une forme bilinéaire.

On pose:

$${}_q \tilde{h}_k^{(n)} = \frac{\begin{array}{cccc} s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{n+kq} \\ (\Delta s_n, y_1) & (\Delta s_{n+1}, y_1) & \cdots & (\Delta s_{n+kq}, y_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n, y_q) & (\Delta s_{n+1}, y_q) & \cdots & (\Delta s_{n+kq}, y_q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1}, y_1) & (\Delta s_{n+k}, y_1) & \cdots & (\Delta s_{n+k(q+1)-1}, y_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1}, y_q) & (\Delta s_{n+k}, y_q) & \cdots & (\Delta s_{n+k(q+1)-1}, y_q) \end{array}}{\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (\Delta s_n, y_1) & (\Delta s_{n+1}, y_1) & \cdots & (\Delta s_{n+kq}, y_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n, y_q) & (\Delta s_{n+1}, y_q) & \cdots & (\Delta s_{n+kq}, y_q) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1}, y_1) & (\Delta s_{n+k}, y_1) & \cdots & (\Delta s_{n+k(q+1)-1}, y_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1}, y_q) & (\Delta s_{n+k}, y_q) & \cdots & (\Delta s_{n+k(q+1)-1}, y_q) \end{array}} \quad (7)$$

où $(\Delta s_n, y_j)$ est le produit scalaire défini en (6).

Evidemment, en général, ${}_q \tilde{h}_k^{(n)}$ est différent de ${}_q \tilde{h}_k^{(n)} = {}_q h_k^{(n)}$, mais on voit facilement que si $y_1, \dots, y_q \in \mathbb{R}^p$ alors ${}_q \tilde{h}_k^{(n)} = {}_q h_k^{(n)}$. D'autre part, si $q = p$, ${}_p \tilde{h}_k^{(n)}$ est aussi indépendant du choix des p vecteurs indépendants $y_1, \dots, y_p (\in \mathbb{C}^p)$ comme la démonstration de la proposition 1, alors ${}_p \tilde{h}_k^{(n)} = {}_p h_k^{(n)}$.

Remarquons que dans le cas vectoriel ($p \geq 2$), l' ε -algorithme topologique de BREZINSKI (en utilisant une forme bilinéaire) et la variété de l' ε -algorithme topologique de Tan (en utilisant un produit scalaire) correspondent toujours à $q=1 (\neq p)$, c'est pourquoi, dans le cas complexe, ils sont différents. Si $q = p$, dans ce cas, ces deux types de ε -algorithmes topologiques sont identiques.

Dans la suite, on va voir que le cas où $q=p$ semble plus intéressant que le cas où $q < p$, et dans ce cas, les deux types de transformations ${}_p h_k^{(n)}$ (en abrégé $h_k^{(n)}$) et ${}_p \tilde{h}_k^{(n)}$ sont les mêmes. Donc, désormais, on ne considère que la transformation (5) $h_k^{(n)}$.

1.2 Implémentation de la transformation $h_k^{(n)}$ par le H -algorithme

La transformation (5) $h_k^{(n)}$ peut être mise en oeuvre par le H -algorithme suivant [5]:

$$\left| \begin{array}{l} H_0^{(n)} = s_n \quad \text{et} \quad g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) \quad i = 1, 2, \dots \quad \text{et} \quad n = 0, 1, \dots \\ \text{pour } k = 1, 2, \dots \quad \text{et} \quad n = 0, 1, \dots \\ H_k^{(n)} = \frac{g_{k-1,k}^{(n+1)} \cdot H_{k-1}^{(n)} - g_{k-1,k}^{(n)} \cdot H_{k-1}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)} - g_{k-1,k}^{(n)}} \\ g_{k,i}^{(n)} = \frac{g_{k-1,k}^{(n+1)} \cdot g_{k-1,i}^{(n)} - g_{k-1,k}^{(n)} \cdot g_{k-1,i}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)} - g_{k-1,k}^{(n)}} \quad i = k+1, k+2, \dots \\ \text{où les } H_k^{(n)} \text{ sont des vecteurs et les } g_{k,i}^{(n)} \text{ des scalaires.} \end{array} \right.$$

On a le résultat suivant:

Si $g_{j+mp}(n) = (\Delta s_{n+m})_j \quad m = 0, 1, \dots, k-1.$ Alors $h_k^{(n)} = H_{kp}^{(n)}$	$j = 1, 2, \dots, p.$
--	-----------------------

D'après ce résultat, on voit facilement que le calcul de $h_k^{(n)}$ a besoin seulement des termes $H_0^{(n)}, H_p^{(n)}, H_{2p}^{(n)}, \dots$ tous les autres termes ne jouent qu'un rôle intermédiaire. Son calcul peut donc simplifier. Donnons d'abord le théorème suivant:

Théorème 1: [6]

Si l'on a les conditions initiales

$$H_0^{(n)} = s_n \quad \text{et} \quad g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots \quad \text{et} \quad n = 0, 1, \dots$$

Alors

$$H_{p+m}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} H_m^{(n)} & \dots & H_m^{(n+p)} \\ g_{m,m+1}^{(n)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+p)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+p}^{(n)} & \dots & g_{m,m+p}^{(n+p)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ g_{m,m+1}^{(n)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+p)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+p}^{(n)} & \dots & g_{m,m+p}^{(n+p)} \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad g_{p+m,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_{m,i}^{(n)} & \dots & g_{m,i}^{(n+p)} \\ g_{m,m+1}^{(n)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+p)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+p}^{(n)} & \dots & g_{m,m+p}^{(n+p)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ g_{m,m+1}^{(n)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+p)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+p}^{(n)} & \dots & g_{m,m+p}^{(n+p)} \end{vmatrix}}$$

avec $p \geq 1; \quad i > p+m.$

Si l'on prend $m = 0, p, 2p, \dots$ et compte tenu du fait que $H_{kp}^{(n)} = h_k^{(n)}$, on a le résultat suivant

Corollaire 2:

$h_k^{(n)}$ peut être calculé directement par l'algorithme suivant:

Conditions initiales:

$$h_0^{(n)} = s_n \quad \text{et} \quad \tilde{g}_{0, \frac{1}{p}}^{(n)} = g_{0,i}(n) = g_i(n) \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots$$

Règles du calcul de l'algorithme:

$$h_{k+1}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} h_k^{(n)} & \dots & h_k^{(n+p)} \\ \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n)} & \dots & \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n+p)} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{k, k+1}^{(n)} & \dots & \tilde{g}_{k, k+1}^{(n+p)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n)} & \dots & \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n+p)} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{k, k+1}^{(n)} & \dots & \tilde{g}_{k, k+1}^{(n+p)} \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad \tilde{g}_{k+1, k+1+\frac{1}{p}}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{g}_{k, k+1+\frac{1}{p}}^{(n)} & \dots & \tilde{g}_{k, k+1+\frac{1}{p}}^{(n+p)} \\ \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n)} & \dots & \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n+p)} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{k, k+1}^{(n)} & \dots & \tilde{g}_{k, k+1}^{(n+p)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n)} & \dots & \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n+p)} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{k, k+1}^{(n)} & \dots & \tilde{g}_{k, k+1}^{(n+p)} \end{vmatrix}}$$

avec $i = 1, 2, \dots$

Dém: Dans le théorème 1, on prend $m = kp$ et l'on pose $h_k^{(n)} = H_{kp}^{(n)}$ $\tilde{g}_{k, \frac{1}{p}}^{(n)} = g_{kp,i}^{(n)}$, $i \geq kp+1$. On obtient le résultat. ■

Remarque:

On peut écrire aussi

$$h_{k+1}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} h_k^{(n)} & \Delta h_k^{(n)} & \dots & \Delta h_k^{(n+p-1)} \\ \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n)} & \Delta \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n)} & \dots & \Delta \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n+p-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{k, k+1}^{(n)} & \Delta \tilde{g}_{k, k+1}^{(n)} & \dots & \Delta \tilde{g}_{k, k+1}^{(n+p-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n)} & \dots & \Delta \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n+p-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta \tilde{g}_{k, k+1}^{(n)} & \dots & \Delta \tilde{g}_{k, k+1}^{(n+p-1)} \end{vmatrix}}$$

et d'après l'identité de Magnus [7], on a:

$$h_{k+1}^{(n)} = h_k^{(n)} - (\Delta h_k^{(n)}, \dots, \Delta h_k^{(n+p-1)}) \begin{pmatrix} \Delta \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n)} & \dots & \Delta \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n+p-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta \tilde{g}_{k, k+1}^{(n)} & \dots & \Delta \tilde{g}_{k, k+1}^{(n+p-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n)} \\ \vdots \\ \tilde{g}_{k, k+1}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

$h_{k+1}^{(n)}$ peut être obtenu à partir de $h_k^{(n+i)}$ et de $\tilde{g}_{k, k+\frac{1}{p}}^{(n+i)}$ $i = 0, 1, \dots, p$ et $j = 1, 2, \dots, p$ en résolvant un système de p équations linéaires.

De même pour $\tilde{g}_{k+1, k+1+\frac{1}{p}}^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots$ on a:

$$\tilde{g}_{k+1,k+1+\frac{i}{p}}^{(n)} = \tilde{g}_{k,k+1+\frac{i}{p}}^{(n)} - (\Delta \tilde{g}_{k,k+1+\frac{i}{p}}^{(n)}, \dots, \Delta \tilde{g}_{k,k+1+\frac{i}{p}}^{(n+p-1)}) \begin{pmatrix} \Delta \tilde{g}_{k,k+1+\frac{1}{p}}^{(n)} & \dots & \Delta \tilde{g}_{k,k+1+\frac{1}{p}}^{(n+p-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta \tilde{g}_{k,k+1}^{(n)} & \dots & \Delta \tilde{g}_{k,k+1}^{(n+p-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{g}_{k,k+1+\frac{1}{p}}^{(n)} \\ \vdots \\ \tilde{g}_{k,k+1}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que le système de p équations linéaires à résoudre, pour obtenir $h_{k+1}^{(n)}$ et $\tilde{g}_{k+1,k+1+\frac{i}{p}}^{(n)}$, est le même.

1.3 Connexion de la généralisation de la transformation vectorielle $h_k^{(n)}$ avec les généralisations de l'approximation de Padé

On sait déjà que [19] dans le cas scalaire, il existe une relation entre l' ε -algorithme et la table de Padé. Dans le cas vectoriel, BREZINSKI [1] a proposé une généralisation de la transformation de Shanks et a donné une approximation de Padé correspondante. Mais il se présente plutôt comme un approximant de Padé dans la direction y [2]. Donc, cette approximation n'est pas très efficace.

Pour remédier à cet inconvénient, au lieu d'utiliser seulement un vecteur y , on utilise d vecteurs indépendants $y_1, \dots, y_d$ comme dans la section 1.1, ainsi, on peut trouver un approximant de Padé vectoriel dans toutes les directions, et ceci est déjà étudié profondément par J. Van Iseghem [2].

Position du problème:

Soit $F(t)$ une fonction vectorielle de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}^d$.

$$F(t) = (f_1(t), \dots, f_d(t))^T.$$

Elle peut s'écrire encore:

$$F(t) = \sum_{i \geq 0} C_i \cdot t^i \quad \text{avec} \quad C_i \in \mathcal{C}^d. \quad (8)$$

On veut chercher une fraction rationnelle $R(t) = \frac{P(t)}{q(t)}$

$$\text{où: } \begin{cases} P(t) = (p_1(t), \dots, p_d(t))^T \in \mathcal{C}^d, & q(t) \in \mathcal{C}. \\ d^0 p_i(t) = p, \quad i = 1, \dots, d & d^0 q(t) = q \\ \text{On définit} & \frac{P(t)}{q(t)} = \left(\frac{p_1(t)}{q(t)}, \dots, \frac{p_d(t)}{q(t)} \right)^T \\ \text{par} & F(t) - R(t) = 0(t^k) \end{cases}$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} k \text{ est le plus grand possible} \\ 0(t^k) = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot t^i \mid a_i = 0, i = 0, 1, \dots, k-1 \right\} \end{array} \right\}$$

Rappelons nous d'abord l'extension de l'approximation vectorielle due à C.BREZINSKI, dans une direction y , via la généralisation de la transformation de Shanks [1]. On suppose:

$$R(t) = \frac{P(t)}{q(t)} = \frac{\sum_{i=0}^p a_i t^i}{\sum_{i=0}^q b_i t^i} \quad \text{où } \begin{array}{l} a_i \in \mathcal{C}^d \\ b_i \in \mathcal{C}. \end{array}$$

Multiplions par le dénominateur et comparons les coefficients des termes $t^0, t^1, \dots$. On obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = C_0 \cdot b_0 \\ a_1 = C_1 \cdot b_0 + C_0 \cdot b_1 \\ \vdots \\ a_p = C_p \cdot b_0 + C_{p-1} \cdot b_1 + \dots + C_{p-q} \cdot b_q \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = C_{p+1} \cdot b_0 + C_p \cdot b_1 + \dots + C_{p-q+1} \cdot b_q \\ \vdots \\ 0 = C_{p+q} \cdot b_0 + C_{p+q-1} \cdot b_1 + \dots + C_p \cdot b_q \\ \vdots \end{array} \right. \quad (10)$$

A un coefficient multiplicatif près, on peut supposer $b_0 = 1$. Multiplions scalairement les relations (10) par le vecteur y , on obtient les b_i en résolvant le système linéaire suivant:

$$\left(\begin{array}{ccc} \langle y, C_{p-q+1} \rangle & \dots & \langle y, C_p \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y, C_p \rangle & \dots & \langle y, C_{p+q-1} \rangle \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} b_q \\ \vdots \\ b_1 \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{c} \langle y, C_{p+1} \rangle \\ \vdots \\ \langle y, C_{p+q} \rangle \end{array} \right).$$

Les vecteurs a_i sont obtenus par les relations (9).

On peut montrer que, analogue au cas scalaire [12], on a le

Théorème 2: [1]

$$R(t) = \frac{P(t)}{q(t)} = \frac{\left| \begin{array}{cccc} t^q \cdot S_{p-q}(t) & t^{q-1} \cdot S_{p-q+1}(t) & \dots & S_p(t) \\ \langle y, C_{p-q+1} \rangle & \langle y, C_{p-q+2} \rangle & \dots & \langle y, C_{p+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y, C_p \rangle & \langle y, C_{p+1} \rangle & \dots & \langle y, C_{p+q} \rangle \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cccc} t^q & t^{q-1} & \dots & 1 \\ \langle y, C_{p-q+1} \rangle & \langle y, C_{p-q+2} \rangle & \dots & \langle y, C_{p+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y, C_p \rangle & \langle y, C_{p+1} \rangle & \dots & \langle y, C_{p+q} \rangle \end{array} \right|}$$

$$\text{avec } S_k(t) = \sum_{i=0}^k C_i t^i, \quad k \geq 0 \quad \text{et} \quad S_k(t) = 0, \quad k < 0$$

D'après la construction de $\frac{P(t)}{q(t)}$, on voit que l'on a:

$$\langle y, \frac{P(t)}{q(t)} \rangle - \langle y, F(t) \rangle = 0(t^{p+q+1}).$$

Par contre, on a seulement:

$$\frac{P(t)}{q(t)} - F(t) = 0(t^{p+1}).$$

Ceci tient au fait que $\langle y, z \rangle = 0$ n'entraîne pas que $z = 0$, Donc le théorème 2 n'est pas très intéressant, puisque le degré du dénominateur n'intervient pas. Alors, comment peut-on perfectionner ce procédé ? C'est-à-dire faire intervenir le degré du dénominateur pour chaque composante dans l'approximation. C'est ce qu'on rappelle maintenant et qui est fait par J. VAN ISEGHEM [2].

Au lieu d'utiliser seulement un vecteur y , on utilise d vecteurs indépendants $y_1, \dots, y_d$.

On suppose que $q = m \cdot d$, où d est la dimension des vecteurs et $m \in \mathbb{N}^*$. Soient $y_1, \dots, y_d$, d vecteurs linéairement indépendants dans $\mathcal{C}^d$. Multiplions scalairement les m premières équations de la relation (10) par y_i $i = 1, \dots, d$. On obtient:

$$\begin{pmatrix} \langle y_1, C_{p-q+1} \rangle & \cdots & \langle y_1, C_p \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y_d, C_{p-q+1} \rangle & \cdots & \langle y_d, C_p \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y_1, C_{p-q+m} \rangle & \cdots & \langle y_1, C_{p+m-1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y_d, C_{p-q+m} \rangle & \cdots & \langle y_d, C_{p+m-1} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_q \\ b_{q-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \langle y_1, C_{p+1} \rangle \\ \vdots \\ \langle y_d, C_{p+1} \rangle \\ \vdots \\ \langle y_1, C_{p+m} \rangle \\ \vdots \\ \langle y_d, C_{p+m} \rangle \end{pmatrix}. \quad (11)$$

En résolvant ce système d'équations linéaires, on obtient les b_i et $b_0 = 1$ par convention; les a_i sont obtenus par les relations (9). On peut montrer également, comme dans le cas scalaire:

Théorème 3:

$$R(t) = \frac{P(t)}{q(t)} = \frac{\begin{vmatrix} t^q \cdot S_{p-q}(t) & t^{q-1} \cdot S_{p-q+1}(t) & \cdots & S_p(t) \\ \langle y_1, C_{p-q+1} \rangle & \langle y_1, C_{p-q+2} \rangle & \cdots & \langle y_1, C_{p+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_d, C_{p-q+1} \rangle & \langle y_d, C_{p-q+2} \rangle & \cdots & \langle y_d, C_{p+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_1, C_{p-q+m} \rangle & \langle y_1, C_{p-q+m+1} \rangle & \cdots & \langle y_1, C_{p+m} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_d, C_{p-q+m} \rangle & \langle y_d, C_{p-q+m+1} \rangle & \cdots & \langle y_d, C_{p+m} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t^q & t^{q-1} & \cdots & 1 \\ \langle y_1, C_{p-q+1} \rangle & \langle y_1, C_{p-q+2} \rangle & \cdots & \langle y_1, C_{p+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_d, C_{p-q+1} \rangle & \langle y_d, C_{p-q+2} \rangle & \cdots & \langle y_d, C_{p+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_1, C_{p-q+m} \rangle & \langle y_1, C_{p-q+m+1} \rangle & \cdots & \langle y_1, C_{p+m} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_d, C_{p-q+m} \rangle & \langle y_d, C_{p-q+m+1} \rangle & \cdots & \langle y_d, C_{p+m} \rangle \end{vmatrix}} \quad (12)$$

avec $S_k(t) = \sum_{i=0}^k C_i t^i, \quad k \geq 0 \quad \text{et} \quad S_k(t) = \emptyset, \quad k < 0$

Proposition 2:

Dans le théorème 3, la fraction rationnelle $R(t) = \frac{P(t)}{q(t)}$ ne dépend pas des d vecteurs indépendants $y_1, \dots, y_d$.

Dém: La démonstration est tout à fait analogue à celle de la proposition 1.

■

D'après cette proposition 2, on peut prendre simplement $y_i = e_i, \quad i = 1, \dots, d$, la base canon-

ique, et alors l'expression (12) est équivalente à:

$$R(t) = \frac{P(t)}{q(t)} = \frac{\begin{vmatrix} t^q \cdot S_{p-q}(t) & t^{q-1} \cdot S_{p-q+1}(t) & \cdots & S_p(t) \\ (C_{p-q+1})_1 & (C_{p-q+2})_1 & \cdots & (C_{p+1})_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (C_{p-q+1})_d & (C_{p-q+2})_d & \cdots & (C_{p+1})_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (C_{p-q+m})_1 & (C_{p-q+m+1})_1 & \cdots & (C_{p+m})_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (C_{p-q+m})_d & (C_{p-q+m+1})_d & \cdots & (C_{p+m})_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t^q & t^{q-1} & \cdots & 1 \\ (C_{p-q+1})_1 & (C_{p-q+2})_1 & \cdots & (C_{p+1})_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (C_{p-q+1})_d & (C_{p-q+2})_d & \cdots & (C_{p+1})_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (C_{p-q+m})_1 & (C_{p-q+m+1})_1 & \cdots & (C_{p+m})_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (C_{p-q+m})_d & (C_{p-q+m+1})_d & \cdots & (C_{p+m})_d \end{vmatrix}} \quad (13)$$

Maintenant, on a le théorème fondamental suivant:

Théorème 4:[2]

Si $q = m \cdot d$, alors $F(t) - R(t) = \mathcal{O}(t^{p+m+1})$

Dém: Grâce à la proposition 2, dans la construction de $R(t) = \frac{P(t)}{q(t)}$, on peut prendre $y_i = e_i$, $i = 1, \dots, d$, la base canonique. Donc, l'expression (11) pour obtenir les b_i devient:

$$\begin{pmatrix} (C_{p-q+1})_1 & \cdots & (C_p)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (C_{p-q+1})_d & \cdots & (C_p)_d \\ \vdots & & \vdots \\ (C_{p-q+m})_1 & \cdots & (C_{p+m-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (C_{p-q+m})_d & \cdots & (C_{p+m-1})_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_q \\ b_{q-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (C_{p+1})_1 \\ \vdots \\ (C_{p+1})_d \\ \vdots \\ (C_{p+m})_1 \\ \vdots \\ (C_{p+m})_d \end{pmatrix} \quad (14)$$

Cela veut dire que:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_{p-q+1} \cdot b_q + \cdots + C_p \cdot b_1 = -C_{p+1} \\ \vdots \\ C_{p-q+m} \cdot b_q + \cdots + C_{p+m-1} \cdot b_1 = -C_{p+m} \\ \mathcal{O} = C_{p+1} \cdot b_0 + C_p \cdot b_1 + \cdots + C_{p-q+1} \cdot b_q \\ \vdots \\ \mathcal{O} = C_{p+m} \cdot b_0 + C_{p+m-1} \cdot b_1 + \cdots + C_{p-q+m} \cdot b_q \end{cases}$$

qui sont les m premières équations de la relation (10). Compte tenu de la relation (9), on peut conclure que:

$$F(t) - R(t) = \mathcal{O}(t^{p+m+1})$$

■

Théorème 5:

Une condition nécessaire et suffisante pour que $R(t) = \frac{P(t)}{q(t)}$ défini par l'expression (13) existe est que le déterminant suivant soit différent de zéro:

$$\begin{vmatrix} (C_{p-q+1})_1 & \cdots & (C_p)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (C_{p-q+1})_d & \cdots & (C_p)_d \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (C_{p-q+m})_1 & \cdots & (C_{p+m-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (C_{p-q+m})_d & \cdots & (C_{p+m-1})_d \end{vmatrix} \neq 0$$

Dém: C'est tout simplement la condition nécessaire et suffisante pour que le système (14) donnant les b_i admette une solution.

■

Cette solution est d'ailleurs unique, d'où le

Théorème 6:

S'il existe, $R(t) = \frac{P(t)}{q(t)}$ défini par (13), est unique.

Remarque:

Si $q = m \cdot d + k$, avec $1 \leq k < d$, l'ordre d'approximation $R(t)$ ne peut être amélioré sur toutes les composantes à la fois par rapport à $q = m \cdot d$. Donc, ce procédé n'est pas intéressant, et plutôt c'est un procédé intermédiaire.

Voyons maintenant un exemple numérique:

Soit

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \ln(1+t) \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} - \dots \\ 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + \dots \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{24} \end{pmatrix} t^4 + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{120} \end{pmatrix} t^5 + \dots \\
 &= C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + C_4 t^4 + C_5 t^5 + \dots
 \end{aligned}$$

Si l'on choisit $p = 3$, $q = m \cdot d = 2 \cdot 2 = 4$ alors, le théorème nous donne:

$$\frac{P(t)}{q(t)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t^3 S_0(t) & t^2 S_1(t) & t S_2(t) & S_3(t) \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t^4 & t^3 & t^2 & t & 1 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} \end{vmatrix}}$$

$$\text{où } S_k(t) = \sum_{i=0}^k C_i t^i, \quad k \geq 0.$$

On calcule respectivement les deux déterminants, on obtient:

$$q(t) = \underbrace{0.001996527}_A t^4 - \underbrace{0.011168981}_B t^3 + \underbrace{0.026736111}_C t^2 - \underbrace{0.003472222}_D t - \underbrace{0.086805555}_E$$

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \begin{pmatrix} -2B + C + \frac{D}{2} - \frac{E}{3} \\ -B + C - \frac{D}{2} - \frac{E}{6} \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 2C - D + \frac{E}{2} \\ C - D - \frac{E}{2} \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -2D - E \\ -D - E \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2E \\ -E \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -0.022800925 \\ -0.000636573 \end{pmatrix} t^3 + \begin{pmatrix} 0.093402777 \\ -0.020138888 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} -0.093749999 \\ -0.090277777 \end{pmatrix} t \\
 &\quad + \begin{pmatrix} -0.173611110 \\ -0.086805555 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

On peut facilement vérifier que: $\frac{P(t)}{q(t)} - F(t) = \mathcal{O}(t^6)$

Mais si l'ordre de déterminant est plus élevé, son calcul est plus difficile. Cet inconvénient peut se résoudre dans la suite.

D'après ce que J. Van Iseghem [2] a fait, l'expression $R(t)$ (13) peut s'exprimer comme:

$$R(t) = \frac{P(t)}{q(t)} = \frac{\begin{vmatrix} S_{p-q} & \cdots & S_p \\ (\Delta S_{p-q})_1 & \cdots & (\Delta S_p)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta S_{p-q})_d & \cdots & (\Delta S_p)_d \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta S_{p-q+m-1})_1 & \cdots & (\Delta S_{p+m-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta S_{p-q+m-1})_d & \cdots & (\Delta S_{p+m-1})_d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ (\Delta S_{p-q})_1 & \cdots & (\Delta S_p)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta S_{p-q})_d & \cdots & (\Delta S_p)_d \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta S_{p-q+m-1})_1 & \cdots & (\Delta S_{p+m-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta S_{p-q+m-1})_d & \cdots & (\Delta S_{p+m-1})_d \end{vmatrix}}$$

$$\text{avec } S_k = S_k(t) = \sum_{i=0}^k C_i t^i, \quad k \geq 0 \quad \text{et} \quad S_k(t) = \emptyset, \quad k < 0$$

Donc, on a $R(t) = \frac{P(t)}{q(t)} = h_m^{(p-q)} = [md+p-q/md]_R(t) = \psi_{md}(s_{p-q})$ (notation de [2]). L'approximant de Padé vectoriel peut être calculé par le H -algorithme ou directement par le corollaire 2.

1.4 Propriétés de la transformation $h_k^{(n)}$

Commençons par donner un théorème sur le noyau de $h_k^{(n)}$. Pour faciliter la discussion, nous posons

$$\Delta S_{n,k} = \begin{pmatrix} (\Delta s_n)_1 & \cdots & (\Delta s_{n+kp-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & \cdots & (\Delta s_{n+kp-1})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-2})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-2})_p \end{pmatrix}$$

et

$$\Delta^2 S_{n,k} = \begin{pmatrix} (\Delta^2 s_n)_1 & \cdots & (\Delta^2 s_{n+kp-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 s_n)_p & \cdots & (\Delta^2 s_{n+kp-1})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 s_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta^2 s_{n+k(p+1)-2})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 s_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta^2 s_{n+k(p+1)-2})_p \end{pmatrix}$$

Théorème 7:[2]

Supposons que $\det(\Delta S_{n,k}) \neq 0$, et $\det(\Delta^2 S_{n,k}) \neq 0$, $\forall n$ et k . Une condition nécessaire et suffisante pour que $h_k^{(n)} = s \quad \forall n > N$, est que la suite $\{s_n\}$ vérifie:

$$\sum_{i=0}^{kp} a_i (s_{n+i} - s) = 0 \quad \forall n > N$$

$$\text{avec } a_i \in \mathcal{C} \text{ et } \sum_{i=0}^{kp} a_i = 1.$$

La démonstration est refaite ici, car la propriété est fondamentale (Voir aussi [2, p.82]).

Dém: Condition suffisante:

On a le système d'équations linéaires:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + \cdots + a_{kp} = 1 \\ a_0 \cdot s_n + \cdots + a_{kp} \cdot s_{n+kp} = s \\ \vdots \\ a_0 \cdot s_{n+k} + \cdots + a_{kp} \cdot s_{n+k(p+1)} = s \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + \cdots + a_{kp} = 1 & (15) \\ a_0 \cdot \Delta s_n + \cdots + a_{kp} \cdot \Delta s_{n+kp} = 0 & (16) \\ \vdots & \\ a_0 \cdot \Delta s_{n+k-1} + \cdots + a_{kp} \cdot \Delta s_{n+k(p+1)-1} = 0 & (17) \\ a_0 \cdot s_n + \cdots + a_{kp} \cdot s_{n+kp} = s & \end{cases}$$

Le déterminant principal du système d'équations linéaires $\begin{cases} (15) \\ (16) \end{cases}$ est le déterminant de la matrice $\Delta^2 S_{n,k}$ qui est non nul par hypothèse. Donc on peut déterminer $a_0, a_1, \dots, a_{kp}$ que l'on reporte dans (17) et l'on obtient $s = h_k^{(n)} \quad \forall n > N$.

Condition nécessaire:

$$h_k^{(n)} = s \quad \forall n > N \quad \text{équivalent à}$$

$$\begin{vmatrix}
s_n - s & s_{n+1} - s & \cdots & s_{n+kp} - s \\
(\Delta s_n)_1 & (\Delta s_{n+1})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(\Delta s_n)_p & (\Delta s_{n+1})_p & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_p \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(\Delta s_{n+k-1})_1 & (\Delta s_{n+k})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(\Delta s_{n+k-1})_p & (\Delta s_{n+k})_p & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p
\end{vmatrix} = \mathcal{O} \quad \forall n > N. \quad (18)$$

Développons le déterminant, on a alors:

$$x_0^{(n)} \cdot (s_n - s) + x_1^{(n)} \cdot (s_{n+1} - s) + \cdots + x_{kp}^{(n)} \cdot (s_{n+kp} - s) = \mathcal{O} \quad (19)$$

D'un autre côté:

$$\sum_{i=0}^{kp} x_i^{(n)} = \det(\Delta^2 S_{n,k}) \neq 0.$$

Posons alors

$$a_i^{(n)} = \frac{x_i^{(n)}}{\sum_{i=0}^{kp} x_i^{(n)}}.$$

La relation (19) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{kp} a_i^{(n)} (s_{n+i} - s) = \mathcal{O} \\ \text{et} \\ \sum_{i=0}^{kp} a_i^{(n)} = 1. \end{array} \right. \quad (20)$$

Utilisant la propriété 1 relation (3), la relation (18) peut s'écrire encore:

$$\begin{vmatrix}
s_{n+1} - s & s_{n+2} - s & \cdots & s_{n+kp+1} - s \\
(\Delta s_n)_1 & (\Delta s_{n+1})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(\Delta s_n)_p & (\Delta s_{n+1})_p & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_p \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(\Delta s_{n+k-1})_1 & (\Delta s_{n+k})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(\Delta s_{n+k-1})_p & (\Delta s_{n+k})_p & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p
\end{vmatrix} = \mathcal{O} \quad \forall n > N.$$

En utilisant le même raisonnement que précédemment, on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{kp} a_i^{(n)} (s_{n+i+1} - s) = 0 \\ \text{et} \\ \sum_{i=0}^{kp} a_i^{(n)} = 1. \end{array} \right. \quad (21)$$

Ecrivons la relation (20) en remplaçant n par $n+1$, et faisons la différence avec (21), on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^{kp} \Delta a_i^{(n)} = 0 \\ \text{et} \\ \sum_{i=0}^{kp} \Delta a_i^{(n)} (s_{n+i+1} - s) = 0. \end{array} \right.$$

Le déterminant de ce système d'équations homogènes n'est autre que le déterminant de la matrice $\Delta S_{n+1,k}$ qui est supposé par hypothèse non nul, et par conséquent:

$$\Delta a_i^{(n)} = 0 \quad i = 0, 1, \dots, kp.$$

$$\text{d'où} \quad a_i^{(n)} = a_i.$$

■

L'équation aux différences $\sum_{i=0}^{kp} a_i (s_{n+i} - s) = 0$ peut être résolue dans $\mathcal{C}^p$ de même façon que lorsque $s_n \in \mathcal{C}$. Voir [19]. On a donc immédiatement le résultat suivant:

Théorème 8:[2]

Supposons que $\det(\Delta S_{n,k}) \neq 0$ et $\det(\Delta^2 S_{n,k}) \neq 0, \forall n$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $h_k^{(n)} = s \quad \forall n > N$ est que:

$$s_n = s + \sum_{i=1}^p A_i(n) \cdot r_i^n + \sum_{i=p+1}^q [B_i(n) \cdot \cos(b_i n) + C_i(n) \cdot \sin(b_i n)] e^{w_i n} + \sum_{i=0}^m x_i \cdot \delta_{in}. \quad \forall n > N$$

r_i, w_i et b_i appartiennent à $\mathcal{C}$ et l'on a $r_i \neq 1$ pour $i = 1, \dots, p$ et $w_i \neq 0$ pour $i = p+1, \dots, q$. A_i, B_i et C_i sont des polynômes en n dont les coefficients appartiennent à $\mathcal{C}^p$. Les x_i appartiennent à $\mathcal{C}^p$ et δ_{in} est le symbole de Kronecker.

Si d_i désigne le degré de A_i plus un pour $i = 1, \dots, p$ et le plus grand des degrés de B_i et de C_i pour $i = p+1, \dots, q$. On doit avoir:

$$m + \sum_{i=1}^p d_i + 2 \cdot \sum_{i=p+1}^q d_i = kp - 1$$

avec la convention que $m = -1$ s'il n'y a aucun terme en δ_{in} .

Propriété 2:

Si l'application de la transformation $h_k^{(n)}$ aux suites $\{s_n\}$ et $\{As_n + b\}$ avec $A \in L(\mathcal{C}^p)$, A inversible et $b \in \mathcal{C}^p$ fournit respectivement les éléments $h_k^{(n)}$ et $\tilde{h}_k^{(n)}$, alors on a:

$$\tilde{h}_k^{(n)} = A \cdot h_k^{(n)} + b$$

Dém: Utilisant l'identité de Magnus [7], on obtient:

$$h_k^{(n)} = s_n - (\Delta s_n, \dots, \Delta s_{n+kp-1})(\Delta^2 S_{n,k})^{-1} \begin{pmatrix} \Delta s_n \\ \vdots \\ \Delta s_{n+k-1} \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on peut vérifier facilement que:

$$\begin{pmatrix} A \cdot \Delta s_n \\ \vdots \\ A \cdot \Delta s_{n+k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ & \ddots \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta s_n \\ \vdots \\ \Delta s_{n+k-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \cdot \Delta^2 s_n & \cdots & A \cdot \Delta^2 s_{n+kp-1} \\ \vdots & & \vdots \\ A \cdot \Delta^2 s_{n+k-1} & \cdots & A \cdot \Delta^2 s_{n+k(p+1)-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ & \ddots \\ 0 & A \end{pmatrix} \cdot \Delta^2 S_{n,k}$$

et

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ & \ddots \\ 0 & A \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned} & \tilde{h}_k^{(n)} \\ &= A \cdot s_n + b - A \cdot (\Delta s_n, \dots, \Delta s_{n+k-1})(\Delta^2 S_{n,k})^{-1} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ & \ddots \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta s_n \\ \vdots \\ \Delta s_{n+k-1} \end{pmatrix} \\ &= A \cdot \left[s_n - (\Delta s_n, \dots, \Delta s_{n+k-1})(\Delta^2 S_{n,k})^{-1} \begin{pmatrix} \Delta s_n \\ \vdots \\ \Delta s_{n+k-1} \end{pmatrix} \right] + b \\ &= A \cdot h_k^{(n)} + b. \end{aligned}$$

■

Propriété 3:

Soit $h_k^{(n)}$ l'élément de $\mathcal{C}^p$ obtenu en appliquant (5) à $s_n, s_{n+1}, \dots, s_{n+k(p+1)}$. Si l'on applique (5) à $u_n = s_{n+k(p+1)}, u_{n+1} = s_{n+k(p+1)-1}, \dots, u_{n+k(p+1)} = s_n$. Alors, on obtient la même quantité $h_k^{(n)}$.

Dém: On considère d'abord le numérateur de $h_k^{(n)}$ en (5). Utilisant la propriété 1 relation (3) successivement, on obtient:

$$\begin{vmatrix} s_n & \cdots & s_{n+kp} \\ (\Delta s_n)_1 & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_{n+1} & \cdots & s_{n+kp+1} \\ (\Delta s_n)_1 & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p \end{vmatrix} \\
 = \cdots = \begin{vmatrix} s_{n+k} & \cdots & s_{n+k(p+1)} \\ (\Delta s_n)_1 & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p \end{vmatrix} .$$

On inverse l'ordre des colonnes et puis l'ordre de la 2^{ème} ligne à la dernière; on a:

$$= (-1)^{1+2+\cdots+kp} \cdot (-1)^{1+2+\cdots+(kp-1)} \begin{vmatrix} s_{n+k(p+1)} & \cdots & s_{n+k} \\ (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p & \cdots & (\Delta s_{n+k-1})_p \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+k-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+kp})_p & \cdots & (\Delta s_n)_p \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+kp})_1 & \cdots & (\Delta s_n)_1 \end{vmatrix} .$$

On réordonne les vecteurs et l'on a:

$$= (-1)^{kp} \cdot (-1)^{k[1+2+\dots+(p-1)]} \begin{vmatrix} s_{n+k(p+1)} & \cdots & s_{n+k} \\ (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+k-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p & \cdots & (\Delta s_{n+k-1})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+kp})_1 & \cdots & (\Delta s_n)_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+kp})_p & \cdots & (\Delta s_n)_p \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{kp} \cdot (-1)^{k \frac{(p-1)p}{2}} \begin{vmatrix} u_n & \cdots & u_{n+kp} \\ -(\Delta u_n)_1 & \cdots & -(\Delta u_{n+kp})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ -(\Delta u_n)_p & \cdots & -(\Delta u_{n+kp})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ -(\Delta u_{n+k-1})_1 & \cdots & -(\Delta u_{n+k(p+1)-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ -(\Delta u_{n+k-1})_p & \cdots & -(\Delta u_{n+k(p+1)-1})_p \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{k \frac{(p-1)p}{2}} \begin{vmatrix} u_n & \cdots & u_{n+kp} \\ (\Delta u_n)_1 & \cdots & (\Delta u_{n+kp})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta u_n)_p & \cdots & (\Delta u_{n+kp})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta u_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta u_{n+k(p+1)-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta u_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta u_{n+k(p+1)-1})_p \end{vmatrix}.$$

Pour le dénominateur de $h_k^{(n)}$ (5), on a :

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{ccc} 1 & \cdots & 1 \\ (\Delta s_n)_1 & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} (\Delta^2 s_n)_1 & \cdots & (\Delta^2 s_{n+kp-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 s_n)_p & \cdots & (\Delta^2 s_{n+kp-1})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 s_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta^2 s_{n+k(p+1)-2})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 s_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta^2 s_{n+k(p+1)-2})_p \end{array} \right| \\
& = \left| \begin{array}{ccc} (\Delta^2 s_{n+k(p+1)-2})_p & \cdots & (\Delta^2 s_{n+k-1})_p \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 s_{n+k(p+1)-2})_1 & \cdots & (\Delta^2 s_{n+k-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 s_{n+kp-1})_p & \cdots & (\Delta^2 s_n)_p \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 s_{n+kp-1})_1 & \cdots & (\Delta^2 s_n)_1 \end{array} \right| = (-1)^{k \frac{(p-1)p}{2}} \left| \begin{array}{ccc} (\Delta^2 u_n)_1 & \cdots & (\Delta^2 u_{n+kp-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 u_n)_p & \cdots & (\Delta^2 u_{n+kp-1})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 u_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta^2 u_{n+k(p+1)-2})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 u_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta^2 u_{n+k(p+1)-2})_p \end{array} \right| \\
& = (-1)^{k \frac{(p-1)p}{2}} \left| \begin{array}{ccc} 1 & \cdots & 1 \\ (\Delta u_n)_1 & \cdots & (\Delta u_{n+kp})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta u_n)_p & \cdots & (\Delta u_{n+kp})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta u_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta u_{n+k(p+1)-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta u_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta u_{n+k(p+1)-1})_p \end{array} \right|.
\end{aligned}$$

Le résultat est obtenu immédiatement en faisant la division entre ces deux égalités.

■

1.5 Interprétation du calcul de la transformation $h_k^{(n)}$

Nous allons donner ici une interprétation pour le calcul de la transformation $h_k^{(n)}$ qui est similaire à celle de l' ε -algorithme scalaire [15], et qui retrouve l'interprétation dans le cas vectoriel de [2].

- On considère d'abord le système suivant:

$$\begin{cases} a_0 \cdot s_n + \cdots + a_{kp} \cdot s_{n+kp} = C \\ \vdots \\ a_0 \cdot s_{n+k} + \cdots + a_{kp} \cdot s_{n+k(p+1)} = C \end{cases} \quad (22)$$

avec $a_i \in \mathbb{C}$, $s_n \in \mathbb{C}^p$

où $C = (C_1, \dots, C_p)^T \in \mathbb{C}^p$ et $C_i \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, p$.

Dans ce système, remplaçons la seconde ligne par sa différence avec la première, la troisième par sa différence avec la seconde ... et à partir de la deuxième ligne, on écrit p équations scalaires au lieu d'une équation vectorielle, et avec l'une des équations scalaires de la première ligne, on écrit p systèmes scalaires en faisant varier i de 1 à p . Pour chaque i fixé, on a:

$$\begin{cases} a_0(s_n)_i + \cdots + a_{kp}(s_{n+kp})_i = C_i \\ a_0(\Delta s_n)_1 + \cdots + a_{kp}(\Delta s_{n+kp})_1 = 0 \\ \vdots \\ a_0(\Delta s_n)_p + \cdots + a_{kp}(\Delta s_{n+kp})_p = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_0(\Delta s_{n+k-1})_1 + \cdots + a_{kp}(\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 = 0 \\ \vdots \\ a_0(\Delta s_{n+k-1})_p + \cdots + a_{kp}(\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Effectuons maintenant les opérations sur les colonnes comme sur les lignes, on a:

$$\text{avec } b_j = \sum_{l=j}^{kp} a_l \quad j = 0, 1, \dots, kp.$$

En résolvant ce système par la règle de Cramer, on obtient:

$$b_0 = \sum_{l=0}^{kp} a_l = C_i \cdot \frac{\begin{vmatrix} (\Delta^2 s_n)_1 & \cdots & (\Delta^2 s_{n+kp-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 s_n)_p & \cdots & (\Delta^2 s_{n+kp-1})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 s_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta^2 s_{n+k(p+1)-2})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta^2 s_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta^2 s_{n+k(p+1)-2})_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s_n)_i & \cdots & (s_{n+kp})_i \\ (\Delta s_n)_1 & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p \end{vmatrix}}.$$

$$\text{Donc, on a: } \frac{C_i}{\sum_{l=0}^{kp} a_l} = (h_k^{(n)})_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, p.$$

$$\text{On peut écrire aussi: } h_k^{(n)} = \frac{C}{\sum_{l=0}^{kp} a_l}.$$

On voit que $\det(\Delta^2 S_{n,k}) \neq 0$ entraîne $\sum_{l=0}^{kp} a_l \neq 0$ et réciproquement. De plus, si l'on remplace $C = (C_1, \dots, C_p)$ par $a \cdot C$ où a est une constante non nulle, alors les a_l sont remplacés par $a \cdot a_l$ et par conséquent: $h_k^{(n)} = \frac{C}{\sum_{l=0}^{kp} a_l}$ demeure inchangé.

- Si l'on pose $C = h_k^{(n)} \sum_{l=0}^{kp} a_l$, le système (22) devient:

$$\begin{cases} a_0 \cdot s_n + \dots + a_{kp} \cdot s_{n+kp} = h_k^{(n)} \sum_{l=0}^{kp} a_l \\ \vdots \\ a_0 \cdot s_{n+k} + \dots + a_{kp} \cdot s_{n+k(p+1)} = h_k^{(n)} \sum_{l=0}^{kp} a_l \end{cases} .$$

Effectuons les mêmes opérations que pour obtenir le système (23), pour chaque i fixé ($i = 1, \dots, p$), on a:

$$\begin{cases} a_0(s_n - h_k^{(n)})_i + \dots + a_{kp}(s_{n+kp} - h_k^{(n)})_i = 0 \\ a_0(\Delta s_n)_1 + \dots + a_{kp}(\Delta s_{n+kp})_1 = 0 \\ \vdots \\ a_0(\Delta s_n)_p + \dots + a_{kp}(\Delta s_{n+kp})_p = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_0(\Delta s_{n+k-1})_1 + \dots + a_{kp}(\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 = 0 \\ \vdots \\ a_0(\Delta s_{n+k-1})_p + \dots + a_{kp}(\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p = 0 \end{cases}$$

d'où, pour avoir une solution différente de la solution nulle

$$\begin{vmatrix} (s_n - h_k^{(n)})_i & \dots & (s_{n+kp} - h_k^{(n)})_i \\ (\Delta s_n)_1 & \dots & (\Delta s_{n+kp})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & \dots & (\Delta s_{n+kp})_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_1 & \dots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_p & \dots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p \end{vmatrix} = 0$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{vmatrix}
(s_n)_i & \cdots & (s_{n+kp})_i \\
(\Delta s_n)_1 & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_1 \\
\vdots & & \vdots \\
(\Delta s_n)_p & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_p \\
\vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots \\
(\Delta s_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 \\
\vdots & & \vdots \\
(\Delta s_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p
\end{vmatrix} = (h_k^{(n)})_i \begin{vmatrix}
1 & \cdots & 1 \\
(\Delta s_n)_1 & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_1 \\
\vdots & & \vdots \\
(\Delta s_n)_p & \cdots & (\Delta s_{n+kp})_p \\
\vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots \\
(\Delta s_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 \\
\vdots & & \vdots \\
(\Delta s_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p
\end{vmatrix} = 0$$

pour $i = 1, \dots, p$.

Par conséquent $h_k^{(n)}$ a l'expression (5).

- On peut également poser $\sum_{l=0}^{kp} a_l = 1$, ce qui donne $C = h_k^{(n)}$, où le système (22) est devenu:

$$\begin{cases}
a_0 + \cdots + a_{kp} = 1 \\
-(h_k^{(n)})_i + a_0(s_n)_i + \cdots + a_{kp}(s_{n+kp})_i = 0 \\
a_0(\Delta s_n)_1 + \cdots + a_{kp}(\Delta s_{n+kp})_1 = 0 \\
\vdots \\
a_0(\Delta s_n)_p + \cdots + a_{kp}(\Delta s_{n+kp})_p = 0 \\
\vdots \\
\vdots \\
a_0(\Delta s_{n+k-1})_1 + \cdots + a_{kp}(\Delta s_{n+k(p+1)-1})_1 = 0 \\
\vdots \\
a_0(\Delta s_{n+k-1})_p + \cdots + a_{kp}(\Delta s_{n+k(p+1)-1})_p = 0
\end{cases} \quad \text{pour } i = 1, \dots, p$$

En résolvant ce système pour avoir $(h_k^{(n)})_i, i = 1, \dots, p$, on obtient aussi pour $h_k^{(n)}$ l'expression (5).

1.6 Théorème d'accélération de la convergence

Dans [8], Smith, Ford et Sidi ont généralisé au cas vectoriel deux approches équivalentes de la transformation de Shanks et ont donné une formulation générale des méthodes d'accélération qui permet d'obtenir comme cas particuliers des méthodes connues:

$$\begin{cases}
1^{\text{er}} \text{ type:} & \text{MPE [9], RRE [10,11], MMPE [8]} \\
2^{\text{ième}} \text{ type:} & \text{TEA } (\varepsilon\text{-algorithme topologique) [1].}
\end{cases}$$

Pour ces méthodes, ils ont donné des théorèmes d'accélération de la convergence.

On sait déjà que la transformation $h_k^{(n)}$ généralise ces méthodes. Pour cette raison, dans cette section, on donne un théorème d'accélération pour $h_k^{(n)}$, la démonstration du théorème étant calquée sur celle de [8]. Mais on va voir que la propriété est plus intéressante.

Maintenant, on considère une suite de vecteurs (s_n) qui est de la forme suivante:

$$\begin{aligned}
 s_n &\sim s + \sum_{i=1}^{\infty} V_i \lambda_i^n \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \\
 \text{où } s_n, s, V_i &\in \mathbb{C}^p; \quad \lambda_i \in \mathbb{C} \\
 \text{tels que } &\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \lambda_i \neq 1, \quad \forall i \geq 1 \\ (b) \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \forall i \neq j \\ (c) \quad |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \\ (d) \quad \text{si } \mathcal{A}_i = \{j \mid |\lambda_j| = |\lambda_i|\}, \text{ alors l'ensemble } \mathcal{A}_i \\ \quad \text{admet un nombre fini d'éléments.} \end{array} \right. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Il est évident que si $p = 1$ on retrouve le cas scalaire et que les transformations du 1^{er} type sont incapables d'accélérer la convergence. La transformation du 2^{ième} type TEA revient à la transformation de Shanks ainsi que $h_k^{(n)}$.

Dans le cas scalaire, on a le résultat suivant:

Théorème 9: [14]

Soit (s_n) une suite de scalaires de la forme (17) ($p = 1$)

$$s_n \sim s + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda_i^n \quad (n \rightarrow \infty)$$

Supposons que $\begin{array}{l} a) \quad |\lambda_k| > |\lambda_{k+1}| \\ b) \quad a_i \neq 0 \quad \forall i \end{array}$

Alors $h_k^{(n)} - s = \lambda(n) \cdot \lambda_{k+1}^n \cdot (1 + o(1)) \quad (n \rightarrow \infty)$

où $\lambda(n)$ est un scalaire non nul et borné pour n suffisamment grand.

Maintenant, on considère le cas $p \geq 2$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\lambda_i \neq 0$ et $V_i \neq \emptyset, \quad \forall i \geq 1$.

Alors, on a

$$\Delta s_n \sim \sum_{i=1}^{\infty} Z_i \lambda_i^n \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\text{où } Z_i = (\lambda_i - 1)V_i$$

$$\text{comme } \lambda_i \neq 1 \quad \text{et} \quad V_i \neq \emptyset \implies Z_i \neq \emptyset.$$

On a donc le résultat suivant:

Théorème 10:

Soit (s_n) une suite de vecteurs de la forme (24) ($p \geq 2$)

$$s_n \sim s + \sum_{i=1}^{\infty} V_i \lambda_i^n \quad n \longrightarrow \infty.$$

Supposons que a) $|\lambda_{kp}| > |\lambda_{kp+1}| = \dots = |\lambda_{kp+r}| > |\lambda_{kp+r+1}|$
 b) les V_i sont linéairement indépendants.

et que:

$$F = \begin{vmatrix} V_1^{(1)} & \dots & V_{kp}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ V_1^{(p)} & \dots & V_{kp}^{(p)} \\ \vdots & & \vdots \\ V_1^{(1)} \lambda_1^{k-1} & \dots & V_{kp}^{(1)} \lambda_{kp}^{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ V_1^{(p)} \lambda_1^{k-1} & \dots & V_{kp}^{(p)} \lambda_{kp}^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \tilde{F}_r = \begin{vmatrix} V_1 & \dots & V_{kp} & V_{kp+l} \\ Z_1^{(1)} & \dots & Z_{kp}^{(1)} & Z_{kp+l}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Z_1^{(p)} & \dots & Z_{kp}^{(p)} & Z_{kp+l}^{(p)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Z_1^{(1)} \lambda_1^{k-1} & \dots & Z_{kp}^{(1)} \lambda_{kp}^{k-1} & Z_{kp+l}^{(1)} \lambda_{kp+l}^{k-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Z_1^{(p)} \lambda_1^{k-1} & \dots & Z_{kp}^{(p)} \lambda_{kp}^{k-1} & Z_{kp+l}^{(p)} \lambda_{kp+l}^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

où $V_i^{(j)}$ ($Z_i^{(j)}$) est la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur V_i (Z_i) $j = 1, 2, \dots, p$.

Alors $h_k^{(n)} - s = \Lambda(n) \cdot \lambda_{kp+1}^n (1 + o(1)) \quad (n \longrightarrow \infty)$

où $\Lambda(n)$ est un vecteur non nul et borné pour n suffisamment grand.

Dém: (calquée sur celle de [8])

Posons $h_k^{(n)} - s = \frac{N_k^{(n)}}{D_k^{(n)}} \quad , \text{ on a:}$

$$D_k^{(n)} \sim \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \sum_{i_1=1}^{\infty} Z_{i_1}^{(1)} \lambda_{i_1}^n & \dots & \sum_{i_1=1}^{\infty} Z_{i_1}^{(1)} \lambda_{i_1}^{n+kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i_p=1}^{\infty} Z_{i_p}^{(p)} \lambda_{i_p}^n & \dots & \sum_{i_p=1}^{\infty} Z_{i_p}^{(p)} \lambda_{i_p}^{n+kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i_{(k-1)p+1}=1}^{\infty} Z_{i_{(k-1)p+1}}^{(1)} \lambda_{i_{(k-1)p+1}}^{n+k-1} & \dots & \sum_{i_{(k-1)p+1}=1}^{\infty} Z_{i_{(k-1)p+1}}^{(1)} \lambda_{i_{(k-1)p+1}}^{n+k(p+1)-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i_{kp}=1}^{\infty} Z_{i_{kp}}^{(p)} \lambda_{i_{kp}}^{n+k-1} & \dots & \sum_{i_{kp}=1}^{\infty} Z_{i_{kp}}^{(p)} \lambda_{i_{kp}}^{n+k(p+1)-1} \end{vmatrix}$$

où $Z_i^{(j)}$ est la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur Z_i , $j = 1, 2, \dots, p$.

$$D_k^{(n)} \sim \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \sum_{i_1=1}^{\infty} Z_{i_1}^{(1)} \lambda_{i_1}^n & \dots & \sum_{i_1=1}^{\infty} Z_{i_1}^{(1)} \lambda_{i_1}^{n+kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i_p=1}^{\infty} Z_{i_p}^{(p)} \lambda_{i_p}^n & \dots & \sum_{i_p=1}^{\infty} Z_{i_p}^{(p)} \lambda_{i_p}^{n+kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i_{(k-1)p+1}=1}^{\infty} (Z_{i_{(k-1)p+1}}^{(1)} \lambda_{i_{(k-1)p+1}}^{k-1}) \lambda_{i_{(k-1)p+1}}^n & \dots & \sum_{i_{(k-1)p+1}=1}^{\infty} (Z_{i_{(k-1)p+1}}^{(1)} \lambda_{i_{(k-1)p+1}}^{k-1}) \lambda_{i_{(k-1)p+1}}^{n+kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i_{kp}=1}^{\infty} (Z_{i_{kp}}^{(p)} \lambda_{i_{kp}}^{k-1}) \lambda_{i_{kp}}^n & \dots & \sum_{i_{kp}=1}^{\infty} (Z_{i_{kp}}^{(p)} \lambda_{i_{kp}}^{k-1}) \lambda_{i_{kp}}^{n+kp} \end{vmatrix}$$

Par la propriété de multilinéarité du déterminant, on a:

$$D_k^{(n)} \sim \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_p=1}^{\infty} \dots \sum_{i_{(k-1)p+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{i_{kp}=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^k \prod_{l=1}^p Z_{i_{(j-1)p+l}}^{(l)} \lambda_{i_{(j-1)p+l}}^{j-1} \right) \left(\prod_{j=1}^k \prod_{l=1}^p \lambda_{i_{(j-1)p+l}}^n \right) \cdot V(1, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p}, \dots, \lambda_{i_{(k-1)p+1}}, \dots, \lambda_{i_{kp}})$$

où $V(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k)$ est le déterminant de Vandermonde.

$$D_k^{(n)} \sim \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_p=1}^{\infty} \dots \sum_{i_{(k-1)p+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{i_{kp}=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^k \prod_{l=1}^p Z_{i_{(j-1)p+l}}^{(l)} \lambda_{i_{(j-1)p+l}}^{j-1} \right) \left(\prod_{m=1}^{kp} \lambda_{i_m}^n \right) \cdot V(1, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p}, \dots, \lambda_{i_{(k-1)p+1}}, \dots, \lambda_{i_{kp}})$$

D'après le lemme A1 [8, p.194], on a:

$$D_k^{(n)} \sim \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{kp}} \begin{vmatrix} Z_{i_1}^{(1)} & \dots & Z_{i_p}^{(1)} & \dots & Z_{i_{(k-1)p+1}}^{(1)} & \dots & Z_{i_{kp}}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{i_1}^{(p)} & \dots & Z_{i_p}^{(p)} & \dots & Z_{i_{(k-1)p+1}}^{(p)} & \dots & Z_{i_{kp}}^{(p)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{i_1}^{(1)} \lambda_{i_1}^{k-1} & \dots & Z_{i_p}^{(1)} \lambda_{i_p}^{k-1} & \dots & Z_{i_{(k-1)p+1}}^{(1)} \lambda_{i_{(k-1)p+1}}^{k-1} & \dots & Z_{i_{kp}}^{(1)} \lambda_{i_{kp}}^{k-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{i_1}^{(p)} \lambda_{i_1}^{k-1} & \dots & Z_{i_p}^{(p)} \lambda_{i_p}^{k-1} & \dots & Z_{i_{(k-1)p+1}}^{(p)} \lambda_{i_{(k-1)p+1}}^{k-1} & \dots & Z_{i_{kp}}^{(p)} \lambda_{i_{kp}}^{k-1} \end{vmatrix}$$

$$\cdot \left(\prod_{m=1}^{kp} \lambda_{i_m}^n \right) \cdot V(1, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_{kp}}) \quad (25)$$

Par l'hypothèse (24) sur les λ_i , le terme le plus important du côté droit (25), quand $n \rightarrow \infty$, est la somme avec les indices $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_{kp} = kp$.

Donc

$$D_k^{(n)} \sim \begin{vmatrix} Z_1^{(1)} & \dots & Z_{kp}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_1^{(p)} & \dots & Z_{kp}^{(p)} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_1^{(1)} \lambda_1^{k-1} & \dots & Z_{kp}^{(1)} \lambda_{kp}^{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_1^{(p)} \lambda_1^{k-1} & \dots & Z_{kp}^{(p)} \lambda_{kp}^{k-1} \end{vmatrix} \left(\prod_{m=1}^{kp} \lambda_m^n \right) \cdot V(1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{kp})$$

comme $Z_i = (\lambda_i - 1) \cdot V_i$, on a:

$$D_k^{(n)} \sim \left(\prod_{i=1}^{kp} \lambda_i - 1 \right) \begin{vmatrix} V_1^{(1)} & \dots & V_{kp}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ V_1^{(p)} & \dots & V_{kp}^{(p)} \\ \vdots & & \vdots \\ V_1^{(1)} \lambda_1^{k-1} & \dots & V_{kp}^{(1)} \lambda_{kp}^{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ V_1^{(p)} \lambda_1^{k-1} & \dots & V_{kp}^{(p)} \lambda_{kp}^{k-1} \end{vmatrix} \left(\prod_{m=1}^{kp} \lambda_m^n \right) \cdot V(1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{kp}) \quad (26)$$

où $V_i^{(j)}$ est la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur V_i , $j = 1, 2, \dots, p$.

De même, pour le numérateur $N_k^{(n)}$, on a:

$$N_k^{(n)} \sim \begin{vmatrix} \sum_{i_0=1}^{\infty} V_{i_0} \lambda_{i_0}^n & \dots & \sum_{i_0=1}^{\infty} V_{i_0} \lambda_{i_0}^{n+kp} \\ \sum_{i_1=1}^{\infty} Z_{i_1}^{(1)} \lambda_{i_1}^n & \dots & \sum_{i_1=1}^{\infty} Z_{i_1}^{(1)} \lambda_{i_1}^{n+kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i_p=1}^{\infty} Z_{i_p}^{(p)} \lambda_{i_p}^n & \dots & \sum_{i_p=1}^{\infty} Z_{i_p}^{(p)} \lambda_{i_p}^{n+kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i_{(k-1)p+1}=1}^{\infty} Z_{i_{(k-1)p+1}}^{(1)} \lambda_{i_{(k-1)p+1}}^{n+k-1} & \dots & \sum_{i_{(k-1)p+1}=1}^{\infty} Z_{i_{(k-1)p+1}}^{(1)} \lambda_{i_{(k-1)p+1}}^{n+k(p+1)-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i_{kp}=1}^{\infty} Z_{i_{kp}}^{(p)} \lambda_{i_{kp}}^{n+k-1} & \dots & \sum_{i_{kp}=1}^{\infty} Z_{i_{kp}}^{(p)} \lambda_{i_{kp}}^{n+k(p+1)-1} \end{vmatrix}.$$

Par la propriété de multilinéarité du déterminant, on a:

$$N_k^{(n)} \sim \sum_{i_0=1}^{\infty} \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_p=1}^{\infty} \dots \sum_{i_{(k-1)p+1}=1}^{\infty} \dots \sum_{i_{kp}=1}^{\infty} V_{i_0} \left(\prod_{j=1}^k \prod_{l=1}^p Z_{i_{(j-1)p+l}}^{(l)} \lambda_{i_{(j-1)p+l}}^{j-1} \right) \left(\prod_{m=0}^{kp} \lambda_{i_m}^n \right) \cdot V(\lambda_{i_0}, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p}, \dots, \lambda_{i_{(k-1)p+1}}, \dots, \lambda_{i_{kp}})$$

et d'après le lemme A1 [8, p.194], on a:

$$\begin{aligned} & N_k^{(n)} \\ & \sim \sum_{1 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_{kp}}^{\infty} \begin{vmatrix} V_{i_0} & V_{i_1} & \dots & V_{i_p} & \dots & V_{i_{(k-1)p+1}} & \dots & V_{i_{kp}} \\ Z_{i_0}^{(1)} & Z_{i_1}^{(1)} & \dots & Z_{i_p}^{(1)} & \dots & Z_{i_{(k-1)p+1}}^{(1)} & \dots & Z_{i_{kp}}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{i_0}^{(p)} & Z_{i_1}^{(p)} & \dots & Z_{i_p}^{(p)} & \dots & Z_{i_{(k-1)p+1}}^{(p)} & \dots & Z_{i_{kp}}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{i_0}^{(1)} \lambda_{i_0}^{k-1} & Z_{i_1}^{(1)} \lambda_{i_1}^{k-1} & \dots & Z_{i_p}^{(1)} \lambda_{i_p}^{k-1} & \dots & Z_{i_{(k-1)p+1}}^{(1)} \lambda_{i_{(k-1)p+1}}^{k-1} & \dots & Z_{i_{kp}}^{(1)} \lambda_{i_{kp}}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{i_0}^{(p)} \lambda_{i_0}^{k-1} & Z_{i_1}^{(p)} \lambda_{i_1}^{k-1} & \dots & Z_{i_p}^{(p)} \lambda_{i_p}^{k-1} & \dots & Z_{i_{(k-1)p+1}}^{(p)} \lambda_{i_{(k-1)p+1}}^{k-1} & \dots & Z_{i_{kp}}^{(p)} \lambda_{i_{kp}}^{k-1} \end{vmatrix} \\ & \cdot \left(\prod_{m=0}^{kp} \lambda_{i_m}^n \right) \cdot V(\lambda_{i_0}, \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_{kp}}) . \end{aligned} \quad (27)$$

Par l'hypothèse (24) sur les λ_i , $\mathcal{A}_i$ est un ensemble fini; supposons que $|\lambda_{kp+1}| = \dots = |\lambda_{kp+r}| > |\lambda_{kp+r+1}|$ alors, le terme le plus important du côté droit (27), quand $n \rightarrow \infty$, est la somme avec les indices $i_0 = 1, i_1 = 2, \dots, i_{kp-1} = kp, i_{kp} = kp+l, l = 1, \dots, r$.

C'est-à-dire que:

$$\sim \left(\prod_{m=1}^{kp} \lambda_m^n \right) \sum_{l=1}^r \lambda_{kp+l}^n \cdot V(\lambda_1, \dots, \lambda_{kp}, \lambda_{kp+l}) \begin{matrix} N_k^{(n)} \\ \left[\begin{array}{cccc} V_1 & \dots & V_{kp} & V_{kp+l} \\ Z_1^{(1)} & \dots & Z_{kp}^{(1)} & Z_{kp+l}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Z_1^{(p)} & \dots & Z_{kp}^{(p)} & Z_{kp+l}^{(p)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Z_1^{(1)} \lambda_1^{k-1} & \dots & Z_{kp}^{(1)} \lambda_{kp}^{k-1} & Z_{kp+l}^{(1)} \lambda_{kp+l}^{k-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ Z_1^{(p)} \lambda_1^{k-1} & \dots & Z_{kp}^{(p)} \lambda_{kp}^{k-1} & Z_{kp+l}^{(p)} \lambda_{kp+l}^{k-1} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (28)$$

D'après l'hypothèse, les expressions (26) et (28) ne s'annulent pas, on a donc:

$$\begin{aligned} h_k^{(n)} &= \frac{\sum_{l=1}^r \left(\lambda_{kp+l}^n \cdot V(\lambda_1, \dots, \lambda_{kp}, \lambda_{kp+l}) \cdot \tilde{F}_r \right)}{\prod_{i=1}^{kp} (\lambda_i - 1) \cdot V(1, \lambda_1, \dots, \lambda_{kp}) \cdot F} \cdot (1 + o(1)) \\ &= \frac{\sum_{l=1}^r \left(\lambda_{kp+l}^n \cdot \prod_{i=1}^{kp} (\lambda_{kp+l} - \lambda_i) \cdot \tilde{F}_r \right)}{\prod_{i=1}^{kp} (\lambda_i - 1)^2 \cdot F} (1 + o(1)) \\ &= \Lambda(n) \cdot \lambda_{kp+1}^n \cdot (1 + o(1)) \end{aligned}$$

$$\text{où } \Lambda(n) = \frac{\sum_{l=1}^r \left[\left(\frac{\lambda_{kp+l}}{\lambda_{kp+1}} \right)^n \cdot \prod_{i=1}^{kp} (\lambda_{kp+l} - \lambda_i) \cdot \tilde{F}_r \right]}{\prod_{i=1}^{kp} (\lambda_i - 1)^2 \cdot F}.$$

Si $r = 1$

$$\Lambda(n) = \frac{\prod_{i=1}^{kp} (\lambda_{kp+1} - \lambda_i) \cdot \tilde{F}_1}{\prod_{i=1}^{kp} (\lambda_i - 1)^2 \cdot F}$$

■

Remarque:

Pour la forme générale de s_n donnée par (24), le 1^{er} type de transformations $t_k^{(n)}$ n'est pas toujours possible puisqu'on doit avoir $k \leq p$. Donc, dans certains cas, ces méthodes d'accélération de la convergence sont restreintes.

Par contre, le 2^{ème} type de transformation: TEA, il n'y a pas le problème comme dans le 1^{er} type, mais elle n'est pas économique [8, p.190], puisqu'elle n'a pas assez profité de tous les termes donnés.

Donc, la transformation $h_k^{(n)}$ peut être considérée comme une transformation qui rassemble les intérêts de ces deux types de transformations.

Maintenant, voyons quelques exemples numériques:

Exemple n°1:

Soit la suite $\{s_n\}$ définie par:

$$\begin{aligned} s_n = & \begin{pmatrix} 1.7 \\ 1.8 \end{pmatrix} \cdot 0.9^n + \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.6 \end{pmatrix} \cdot 0.7^n + \begin{pmatrix} 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix} \cdot 0.5^n + \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.2 \end{pmatrix} \cdot 0.45^n + \\ & + \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0.2^n + \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.8 \end{pmatrix} \cdot 0.08^n + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.6 \end{pmatrix} \cdot 0.06^n + \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix} \cdot 0.04^n + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix} \cdot 0.02^n \\ & n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = (0, 0)^T$$

Posons:

$$\begin{aligned} e_n &= -\log_{10}(\|s_n - s\|_{\infty}) \\ f_k^{(n)} &= -\log_{10}(\|h_k^{(n)} - s\|_{\infty}) \quad \text{pour la transformation } h_k^{(n)} \\ L_k^{(n)} &= -\log_{10}(\|\varepsilon_{2k}^{(n)} - s\|_{\infty}) \quad \text{pour TEA } \varepsilon_{2k}^{(n)} \end{aligned}$$

avec le vecteur $y = (y_1, \dots, y_p)$ $y_i = i$ $i = 1, \dots, p$

n	e_{n+8}	$L_1^{(n+6)}$	$L_2^{(n+4)}$	$L_3^{(n+2)}$	$L_4^{(n)}$	$f_1^{(n+5)}$	$f_2^{(n+2)}$
0	0.058	0.439	0.804	0.923	0.987	0.82	0.28
1	0.116	0.551	0.975	1.17	1.32	0.98	1.81
2	0.171	0.668	1.15	1.53	1.87	1.16	1.82
3	0.224	0.778	1.33	2.02	2.62	1.35	1.88
4	0.275	0.912	1.54	2.57	3.30	1.56	2.80
5	0.325	1.04	1.76	3.12	3.77	1.79	3.06
6	0.374	1.17	2.01	3.62	4.15	2.05	3.86
7	0.422	1.30	2.27	4.05	4.55	2.32	4.59
8	0.470	1.44	2.55	4.44	4.99	2.60	5.30
9	0.517	1.58	2.83	4.79	5.51	2.90	6.00
10	0.564	1.72	3.13	5.13	6.10	3.20	6.71
11	0.611	1.87	3.42	5.47	6.74	3.50	7.40
12	0.657	2.02	3.73	5.80	7.41	3.81	8.11
13	0.704	2.16	4.03	6.13	8.10	4.12	8.79
14	0.750	2.31	4.34	6.47	8.79	4.44	9.51
15	0.796	2.46	4.64	6.80	9.49	4.75	10.4
16	0.842	2.62	4.95	7.14	10.2	5.06	10.4
17	0.888	2.77	5.26	7.48	10.9	5.37	11.1

On voit clairement que la colonne $L_2^{(n+4)}$ est approximativement égale à celle de $f_1^{(n+5)}$ et que la colonne $L_4^{(n)}$ est approximativement égale à celle de $f_2^{(n+2)}$, ce qui vérifie le théorème 5 et le théorème 5.1 [8, p.190]: C'est-à-dire:

$$h_k^{(n)} - s = \Lambda(n) \cdot \lambda_{kp+1}^n \cdot (1 + o(1)) \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\varepsilon_{2k}^{(n)} - s = \Lambda'(n) \cdot \lambda_{k+1}^n \cdot (1 + o(1)) \quad (n \rightarrow \infty)$$

d'où, quand la dimension $p = 2$

$$h_k^{(n)} - s = \varepsilon_{4k}^{(n)} - s \cdot (1 + o(1)) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Donc, on peut conclure que la transformation $h_k^{(n)}$ est plus favorable que le TEA.

Dans l'exemple n^01 , la suite $\{s_n\}$ est convergente; maintenant voyons un exemple où $\{s_n\}$ est divergente, et dans ce cas s sera l'anti-limite de la suite $\{s_n\}$ (C'est-à-dire s est la quantité apparaissant dans l'équation aux différences du théorème 7). Le théorème 5 et le théorème 5.1 [8, p.190] nous montrent que même si la suite initiale $\{s_n\}$ diverge, les transformations $h_k^{(n)}$ et $\varepsilon_{2k}^{(n)}$ peuvent converger.

Exemple n^02 :

Soit la suite $\{s_n\}$ définie par:

$$\begin{aligned}
s_n = & \begin{pmatrix} 0.85 \\ 0.9 \end{pmatrix} \cdot 1.2^n + \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.8 \end{pmatrix} \cdot 0.8^n + \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.7 \end{pmatrix} \cdot 0.5^n + \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.6 \end{pmatrix} \cdot 0.4^n + \\
& + \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.5 \end{pmatrix} \cdot 0.1^n + \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.4 \end{pmatrix} \cdot 0.08^n + \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.3 \end{pmatrix} \cdot 0.06^n + \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.2 \end{pmatrix} \cdot 0.04^n + \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.1 \end{pmatrix} \cdot 0.02^n \\
& n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

l'anti-limite $s = (0, 0)^T$

Utilisons les mêmes notations que pour l'exemple n^01 , on obtient:

n	$L_1^{(n+6)}$	$L_2^{(n+4)}$	$L_3^{(n+2)}$	$L_4^{(n)}$	$f_1^{(n+5)}$	$f_2^{(n+2)}$
0	0.040	0.385	0.523	0.777	0.405	0.644
1	0.150	0.544	0.992	1.44	0.572	0.924
2	0.256	0.726	1.59	1.87	0.765	1.34
3	0.359	0.937	2.06	2.26	0.989	2.57
4	0.460	1.17	2.45	2.77	1.24	3.64
5	0.559	1.44	2.81	3.51	1.51	4.68
6	0.657	1.71	3.17	4.44	1.80	5.71
7	0.754	2.00	3.54	5.44	2.10	6.71
8	0.852	2.30	3.91	6.45	2.40	7.90
9	0.949	2.60	4.29	7.47	2.71	8.16
10	1.05	2.91	4.67	8.49	3.01	8.33
11	1.14	3.21	5.05	9.27	3.32	9.40

2 Généralisation de la transformation vectorielle avec des suites auxiliaires

On sait déjà que la transformation de Shanks est un cas particulier de la E -transformation avec $g_i(n) = \Delta s_{n+i-1}$ (scalaire), et que l' ε -algorithme topologique est un cas particulier du E -algorithme vectoriel avec $g_i(n) = \Delta s_{n+i-1}$ (vecteur). Dans cette section, on va généraliser la transformation vectorielle avec des suites auxiliaires $g_i(n)$ (vecteur).

2.1 Généralisation de la transformation d'Henrici

On considère la suite de vecteurs (s_n) vérifiant la relation suivante:

$$\begin{aligned}
s_n - s &= a_1 g_1(n) + \dots + a_k g_k(n) \quad \forall n \\
&\text{où } a_i \in \mathcal{C}; \quad s_n, s, g_i(n) \in \mathcal{C}^p \quad i = 1, \dots, k \\
&\text{avec } k \leq p
\end{aligned}
\tag{29}$$

On peut écrire aussi:

$$\Delta s_n = a_1 \Delta g_1(n) + \dots + a_k \Delta g_k(n) \quad \forall n \quad (30)$$

On multiplie scalairement l'équation (30) par k vecteurs indépendants $y_1, \dots, y_k$. On obtient:

$$\begin{cases} \langle y_1, \Delta s_n \rangle = a_1 \langle y_1, \Delta g_1(n) \rangle + \dots + a_k \langle y_1, \Delta g_k(n) \rangle \\ \vdots \\ \langle y_k, \Delta s_n \rangle = a_1 \langle y_k, \Delta g_1(n) \rangle + \dots + a_k \langle y_k, \Delta g_k(n) \rangle \end{cases} \quad (31)$$

En résolvant le système (31) pour obtenir les a_i que l'on reporte dans (29), on obtient:

$$s = \frac{\begin{vmatrix} s_n & g_1(n) & \dots & g_k(n) \\ \langle y_1, \Delta s_n \rangle & \langle y_1, \Delta g_1(n) \rangle & \dots & \langle y_1, \Delta g_k(n) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_k, \Delta s_n \rangle & \langle y_k, \Delta g_1(n) \rangle & \dots & \langle y_k, \Delta g_k(n) \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle y_1, \Delta g_1(n) \rangle & \dots & \langle y_1, \Delta g_k(n) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y_k, \Delta g_1(n) \rangle & \dots & \langle y_k, \Delta g_k(n) \rangle \end{vmatrix}} = S_k(s_n) \quad (32)$$

Si la suite (s_n) n'est pas exactement la forme (29), alors la valeur s obtenue en résolvant le système (31) dépendra des indices n et k et on la notera $S_k(s_n)$.

Cette transformation peut être mise en oeuvre par l'algorithme suivant:

Conditions initiales:

$$\begin{aligned} n = 0, 1, \dots \quad \text{et} \quad i = 1, 2, \dots \\ S_0^{(n)} = s_n, \quad g_{0,i}^{(n)} = g_i(n), \quad \beta_0^{(n)} = \Delta s_n, \quad \gamma_{0,i}^{(n)} = \Delta g_{0,i}^{(n)} = \Delta g_i(n). \\ \text{Pour } k = 1, 2, \dots, p \quad \text{et} \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_k^{(n)} &= S_{k-1}^{(n)} - \frac{\langle y_k, \beta_{k-1}^{(n)} \rangle}{\langle y_k, \gamma_{k-1,k}^{(n)} \rangle} g_{k-1,k}^{(n)} \\ \beta_k^{(n)} &= \beta_{k-1}^{(n)} - \frac{\langle y_k, \beta_{k-1}^{(n)} \rangle}{\langle y_k, \gamma_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \gamma_{k-1,k}^{(n)}; \quad g_{k,i}^{(n)} = g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\langle y_k, \gamma_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle y_k, \gamma_{k-1,k}^{(n)} \rangle} g_{k-1,k}^{(n)} \quad i \geq k+1 \\ \gamma_{k,i}^{(n)} &= \gamma_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\langle y_k, \gamma_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle y_k, \gamma_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \gamma_{k-1,k}^{(n)} \end{aligned} \quad (33)$$

Théorème 11:

$$\forall k \leq p, \quad S_k^{(n)} = S_k(s_n)$$

Dém: On va montrer simultanément que $\beta_k^{(n)}$ satisfait (32) où la première ligne du numérateur est remplacée par $(\Delta s_n, \Delta g_1(n), \dots, \Delta g_k(n))$ et que $g_{k,i}^{(n)}$ satisfait aussi (32) où la première colonne

du numérateur est remplacée par $(g_i(n), \langle y_1, \Delta g_i(n) \rangle, \dots, \langle y_k, \Delta g_i(n) \rangle)$ et où $\gamma_{k,i}^{(n)}$ est défini par:

$$\gamma_{k,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} \Delta g_i(n) & \Delta g_1(n) & \dots & \Delta g_k(n) \\ \langle y_1, \Delta g_i(n) \rangle & \langle y_1, \Delta g_1(n) \rangle & \dots & \langle y_1, \Delta g_k(n) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y_k, \Delta g_i(n) \rangle & \langle y_k, \Delta g_1(n) \rangle & \dots & \langle y_k, \Delta g_k(n) \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle y_1, \Delta g_1(n) \rangle & \dots & \langle y_1, \Delta g_k(n) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y_k, \Delta g_1(n) \rangle & \dots & \langle y_k, \Delta g_k(n) \rangle \end{vmatrix}} \quad i \geq k+1.$$

On pose:

$$\gamma_{k,i}^{(n)} = \frac{N_{k,i}^{(n)}}{D_k^{(n)}}, \quad \beta_k^{(n)} = \frac{N_k^{(n)}}{D_k^{(n)}}, \quad g_{k,i}^{(n)} = \frac{M_{k,i}^{(n)}}{D_k^{(n)}}, \quad S_k^{(n)} = \frac{M_k^{(n)}}{D_k^{(n)}}.$$

Utilisant l'identité de Sylvester, on a:

$$N_{k,i}^{(n)} \cdot D_{k-1}^{(n)} = N_{k-1,i}^{(n)} \cdot D_k^{(n)} - (-1)^{k-1} N_{k-1,k}^{(n)} \cdot (-1)^{k-1} \langle y_k, N_{k-1,i}^{(n)} \rangle.$$

Divisons par $D_{k-1}^{(n)} D_k^{(n)}$, on obtient:

$$\begin{aligned} \gamma_{k,i}^{(n)} &= \gamma_{k-1,i}^{(n)} - \gamma_{k-1,k}^{(n)} \cdot \frac{\langle y_k, N_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{D_k^{(n)}} \\ &= \gamma_{k-1,i}^{(n)} - \gamma_{k-1,k}^{(n)} \cdot \frac{\langle y_k, \gamma_{k-1,i}^{(n)} \rangle D_{k-1}^{(n)}}{D_k^{(n)}}. \end{aligned}$$

Comme $\langle y_k, N_{k-1,k}^{(n)} \rangle = D_k^{(n)}$

on a:
$$\gamma_{k,i}^{(n)} = \gamma_{k-1,i}^{(n)} - \gamma_{k-1,k}^{(n)} \frac{\langle y_k, \gamma_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle y_k, \gamma_{k-1,k}^{(n)} \rangle}.$$

Les 3 autres identités sont tout à fait similaires, en remplaçant $N_{k,i}^{(n)}$ par $N_k^{(n)}$ ou $M_{k,i}^{(n)}$ ou $M_k^{(n)}$ pour l'identité de Sylvester.

■

Proposition 3:

La transformation $S_p(s_n)$, où p est la dimension des vecteurs, ne dépend pas des p vecteurs indépendants $y_1, \dots, y_p$.

Dém: Elle est tout à fait similaire à la proposition 1.

■

D'après cette proposition, on peut donc prendre pour $y_1, \dots, y_p$, par exemple, la base canonique; la transformation $S_p(s_n)$ est donc équivalente à:

$$S_p(s_n) = \frac{\begin{vmatrix} s_n & g_1(n) & \cdots & g_k(n) \\ (\Delta s_n)_1 & (\Delta g_1(n))_1 & \cdots & (\Delta g_k(n))_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & (\Delta g_1(n))_p & \cdots & (\Delta g_k(n))_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\Delta g_1(n))_1 & \cdots & (\Delta g_k(n))_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta g_1(n))_p & \cdots & (\Delta g_k(n))_p \end{vmatrix}}. \quad (34)$$

Alors, l'algorithme (33) peut se simplifier sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} S_k^{(n)} &= S_{k-1}^{(n)} - \frac{(\beta_{k-1}^{(n)})_k}{(\gamma_{k-1,k}^{(n)})_k} g_{k-1,k}^{(n)} \\ \beta_k^{(n)} &= \beta_{k-1}^{(n)} - \frac{(\beta_{k-1}^{(n)})_k}{(\gamma_{k-1,k}^{(n)})_k} \gamma_{k-1,k}^{(n)}; \quad g_{k,i}^{(n)} = g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{(\gamma_{k-1,i}^{(n)})_k}{(\gamma_{k-1,k}^{(n)})_k} g_{k-1,k}^{(n)} \quad i \geq k+1 \\ \gamma_{k,i}^{(n)} &= \gamma_{k-1,i}^{(n)} - \frac{(\gamma_{k-1,i}^{(n)})_k}{(\gamma_{k-1,k}^{(n)})_k} \gamma_{k-1,k}^{(n)} \end{aligned}$$

Remarques:

- (1) Si $k < p$, alors les 4 termes $S_k^{(n)}$, $\beta_k^{(n)}$, $g_{k,i}^{(n)}$ et $\gamma_{k,i}^{(n)}$ dépendent des k vecteurs indépendants $y_1, \dots, y_k$ que l'on a choisi. Dans la suite, on choisit toujours $y_i = e_i$ $i = 1, \dots, p$, la base canonique.
- (2) En particulier, si $g_i(n) = \Delta s_{n+i-1}$ $i = 1, \dots, p$, alors $S_p(s_n)$ n'est autre que la transformation d'Henrici [13].

D'après la construction de la transformation $S_k(s_n)$, on a évidemment le:

Théorème 12:

Si $s_n = s + a_1 g_1(n) + \dots + a_k g_k(n) \quad \forall n \text{ et } k \leq p$
alors $S_k(s_n) = s \quad \forall n$

Plus généralement, on a:

Théorème 13:

Si l'on a formellement $s_n - s = a_1 g_1(n) + a_2 g_2(n) + \dots$
alors, $\forall k \leq p$, on a formellement:

$$\begin{aligned} S_k(s_n) &= s + a_{k+1} g_{k,k+1}^{(n)} + a_{k+2} g_{k,k+2}^{(n)} + \dots \\ \beta_k^{(n)} &= a_{k+1} \gamma_{k,k+1}^{(n)} + a_{k+2} \gamma_{k,k+2}^{(n)} + \dots \end{aligned}$$

Dém: Par définition:

$$\beta_0^{(n)} = \Delta s_n = a_1 \Delta g_1(n) + a_2 \Delta g_2(n) + \dots$$

$$= a_1 \gamma_{0,1}^{(n)} + a_2 \gamma_{0,2}^{(n)} + \dots$$

Le résultat est donc vrai pour $k = 0$.

Supposons la propriété vraie pour $k-1$ ($< p$), on a alors:

$$\begin{aligned} \beta_k^{(n)} &= \beta_{k-1}^{(n)} - \frac{\langle y_k, \beta_{k-1}^{(n)} \rangle}{\langle y_k, \gamma_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \gamma_{k-1,k}^{(n)} \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} a_i \gamma_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\langle y_k, \sum_{i=k}^{\infty} a_i \gamma_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle y_k, \gamma_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \gamma_{k-1,k}^{(n)} \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} a_i \left(\gamma_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\langle y_k, \gamma_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle y_k, \gamma_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \gamma_{k-1,k}^{(n)} \right) \\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i \gamma_{k,i}^{(n)}, \end{aligned}$$

par récurrence sur $\gamma_{k,i}^{(n)}$ et $\gamma_{k,k}^{(n)} = \emptyset$.

Pour $S_k(s_n)$, d'après la condition, le résultat est vrai pour $k = 0$.

Supposons qu'il soit vrai pour $k-1$ ($< p$), on a alors:

$$\begin{aligned} S_k^{(n)} &= S_{k-1}^{(n)} - \frac{\langle y_k, \beta_{k-1}^{(n)} \rangle}{\langle y_k, \gamma_{k-1,k}^{(n)} \rangle} g_{k-1,k}^{(n)} \\ &= s + \sum_{i=k}^{\infty} a_i g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\langle y_k, \sum_{i=k}^{\infty} a_i \gamma_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle y_k, \gamma_{k-1,k}^{(n)} \rangle} g_{k-1,k}^{(n)} \\ &= s + \sum_{i=k}^{\infty} a_i \left(g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\langle y_k, \gamma_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle y_k, \gamma_{k-1,k}^{(n)} \rangle} g_{k-1,k}^{(n)} \right) \\ &= s + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i g_{k,i}^{(n)}, \end{aligned}$$

par récurrence sur $g_{k,i}^{(n)}$ et $g_{k,k}^{(n)} = \emptyset$.

■

Propriété 4:

$\forall k \leq p$, $\beta_k^{(n)}$, $\gamma_{k,i}^{(n)}$, $i \geq k+1$ ont leur k premières composantes nulles.

Dém: Comme on a pris toujours $y_i = e_i$, la base canonique, donc, d'après la définition de $\beta_k^{(n)}$ et $\gamma_{k,i}^{(n)}$, il est facile de voir que:

$$\langle y_j, \beta_k^{(n)} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle y_j, \gamma_{k,i}^{(n)} \rangle = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, k.$$

C'est-à-dire:

$$\langle y_j, \beta_k^{(n)} \rangle = (\beta_k^{(n)})_j = 0$$

$$\text{et} \quad \langle y_j, \gamma_{k,i}^{(n)} \rangle = (\gamma_{k,i}^{(n)})_j = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, k.$$

■

Corollaire 3:

$$\beta_p^{(n)} = \emptyset \quad \text{et} \quad \gamma_{p,i}^{(n)} = \emptyset, \quad i \geq p+1.$$

Dém: C'est le cas où $k = p$ dans la propriété précédente.

■

2.2 Généralisation de la E -transformation vectorielle

Comme dans la première section, on peut similairement définir la transformation suivante:

$$E_k(s_n; g_i(n)) = \frac{\begin{vmatrix} s_n & g_1(n) & \cdots & g_{kp}(n) \\ (\Delta s_n)_1 & (\Delta g_1(n))_1 & \cdots & (\Delta g_{kp}(n))_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & (\Delta g_1(n))_p & \cdots & (\Delta g_{kp}(n))_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_1 & (\Delta g_1(n+k-1))_1 & \cdots & (\Delta g_{kp}(n+k-1))_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_p & (\Delta g_1(n+k-1))_p & \cdots & (\Delta g_{kp}(n+k-1))_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\Delta g_1(n))_1 & \cdots & (\Delta g_{kp}(n))_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta g_1(n))_p & \cdots & (\Delta g_{kp}(n))_p \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta g_1(n+k-1))_1 & \cdots & (\Delta g_{kp}(n+k-1))_1 \\ \vdots & & \vdots \\ (\Delta g_1(n+k-1))_p & \cdots & (\Delta g_{kp}(n+k-1))_p \end{vmatrix}} \quad (35)$$

où le dénominateur est supposé toujours différent de zéro.

Théorème 14:

Si $s_n = s + a_1 g_1(n) + \dots + a_{kp} g_{kp}(n) \quad \forall n$
 alors $E_k(s_n; g_i(n)) = s \quad \forall n$

Dém: On a:

$$\begin{cases} \Delta s_n = a_1 \Delta g_1(n) + \dots + a_{kp} \Delta g_{kp}(n) \\ \vdots \\ \Delta s_{n+k-1} = a_1 \Delta g_1(n+k-1) + \dots + a_{kp} \Delta g_{kp}(n+k-1) \end{cases} .$$

Chaque équation vectorielle est considérée comme p équations scalaires. Résolvant ce système pour obtenir les a_i , que l'on reporte dans $s = s_n - a_1 g_1(n) - \dots - a_{kp} g_{kp}(n)$, on obtient: $s = E_k(s_n; g_i(n))$. ■

D'après la propriété 1 des déterminants généralisés de la 1^{ère} section, on a évidemment la:

Propriété 5:

- (a) $\forall a_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, kp$
 $E_k(s_n; a_i g_i(n)) = E_k(s_n; g_i(n))$
- (b) $\forall a_1 \neq 0, \quad a_2, \dots, a_{kp}$
 $E_k(s_n; a_1 g_1(n) + \dots + a_{kp} g_{kp}(n), g_2(n), \dots, g_{kp}(n)) = E_k(s_n; g_i(n))$

Si les $g_i(n)$ ne dépendent pas de s_n ou si les $g_i(n)$ restent les mêmes.

- (c) $\forall a_1, \dots, a_{kp}$
 $E_k(s_n + a_1 g_1(n) + \dots + a_{kp} g_{kp}(n); g_i(n)) = E_k(s_n; g_i(n))$
- (d) $\forall a \neq 0, \quad \text{et } b \in \mathcal{C}^p$
 $E_k(as_n + b; g_i(n)) = a E_k(s_n; g_i(n)) + b$

Propriété 6:

Soit $E_k(s_n; g_i(n))$ l'élément de $\mathcal{C}^p$ obtenu en appliquant (35) à $s_n, s_{n+1}, \dots, s_{n+k}$ et $g_1(n), \dots, g_{kp}(n)$. Si on applique (35) à $u_n = s_{n+k}, \dots, u_{n+k} = s_n$ et $f_i(n) = g_i(n+k), \dots, f_i(n+k) = g_i(n) \quad \forall i = 1, 2, \dots, kp$.

Alors, on a: $E_k(u_n; f_i(n)) = E_k(s_n; g_i(n))$

Dém: Pour faciliter l'écriture, on note:

$$\Delta s_{n+i} = \begin{pmatrix} (\Delta s_{n+i})_1 \\ \vdots \\ (\Delta s_{n+i})_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta g_j(n+i) = \begin{pmatrix} (\Delta g_j(n+i))_1 \\ \vdots \\ (\Delta g_j(n+i))_p \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, k-1 \\ j = 1, 2, \dots, kp. \end{matrix}$$

Alors, d'après la propriété 1 des déterminants généralisés, on a:

$$E_k(s_n; g_i(n))$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{cccc} s_n & g_1(n) & \cdots & g_{kp}(n) \\ \Delta s_n & \Delta g_1(n) & \cdots & \Delta g_{kp}(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta s_{n+k-1} & \Delta g_1(n+k-1) & \cdots & \Delta g_{kp}(n+k-1) \end{array} \right| / \left| \begin{array}{ccc} \Delta g_1(n) & \cdots & \Delta g_{kp}(n) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta g_1(n+k-1) & \cdots & \Delta g_{kp}(n+k-1) \end{array} \right| \\
&= \left| \begin{array}{cccc} s_{n+k} & g_1(n+k) & \cdots & g_{kp}(n+k) \\ \Delta s_n & \Delta g_1(n) & \cdots & \Delta g_{kp}(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta s_{n+k-1} & \Delta g_1(n+k-1) & \cdots & \Delta g_{kp}(n+k-1) \end{array} \right| / \left| \begin{array}{ccc} \Delta g_1(n) & \cdots & \Delta g_{kp}(n) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta g_1(n+k-1) & \cdots & \Delta g_{kp}(n+k-1) \end{array} \right| \\
&= \left| \begin{array}{cccc} s_{n+k} & g_1(n+k) & \cdots & g_{kp}(n+k) \\ \Delta s_{n+k-1} & \Delta g_1(n+k-1) & \cdots & \Delta g_{kp}(n+k-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta s_n & \Delta g_1(n) & \cdots & \Delta g_{kp}(n) \end{array} \right| / \left| \begin{array}{ccc} \Delta g_1(n+k-1) & \cdots & \Delta g_{kp}(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta g_1(n) & \cdots & \Delta g_{kp}(n) \end{array} \right| \\
&= \frac{\left| \begin{array}{cccc} u_n & f_1(n) & \cdots & f_{kp}(n) \\ -\Delta u_n & -\Delta f_1(n) & \cdots & -\Delta f_{kp}(n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\Delta u_{n+k-1} & -\Delta f_1(n+k-1) & \cdots & -\Delta f_{kp}(n+k-1) \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{ccc} -\Delta f_1(n) & \cdots & -\Delta f_{kp}(n) \\ \vdots & & \vdots \\ -\Delta f_1(n+k-1) & \cdots & -\Delta f_{kp}(n+k-1) \end{array} \right|} \\
&= E_k(u_n; f_i(n))
\end{aligned}$$

■

Maintenant on réécrit $E_k(s_n; g_i(n))$ sous la forme de H -transformation. On a:

$$E_k(s_n; g_i(n)) = \frac{\begin{array}{cccc} s_n & g_1(n) & \cdots & g_{kp}(n) \\ (\Delta s_n)_1 & (\Delta g_1(n))_1 & \cdots & (\Delta g_{kp}(n))_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & (\Delta g_1(n))_p & \cdots & (\Delta g_{kp}(n))_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_1 & (\Delta g_1(n+k-1))_1 & \cdots & (\Delta g_{kp}(n+k-1))_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_p & (\Delta g_1(n+k-1))_p & \cdots & (\Delta g_{kp}(n+k-1))_p \end{array}}{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ (\Delta s_n)_1 & (\Delta g_1(n))_1 & \cdots & (\Delta g_{kp}(n))_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & (\Delta g_1(n))_p & \cdots & (\Delta g_{kp}(n))_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_1 & (\Delta g_1(n+k-1))_1 & \cdots & (\Delta g_{kp}(n+k-1))_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_p & (\Delta g_1(n+k-1))_p & \cdots & (\Delta g_{kp}(n+k-1))_p \end{array}}$$

$$= \frac{\begin{array}{cccc} s_n & g_1(n) + s_n & \cdots & g_{kp}(n) + s_n \\ (\Delta s_n)_1 & (\Delta g_1(n) + \Delta s_n)_1 & \cdots & (\Delta g_{kp}(n) + \Delta s_n)_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & (\Delta g_1(n) + \Delta s_n)_p & \cdots & (\Delta g_{kp}(n) + \Delta s_n)_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_1 & (\Delta g_1(n+k-1) + \Delta s_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta g_{kp}(n+k-1) + \Delta s_{n+k-1})_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_p & (\Delta g_1(n+k-1) + \Delta s_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta g_{kp}(n+k-1) + \Delta s_{n+k-1})_p \end{array}}{\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (\Delta s_n)_1 & (\Delta g_1(n) + \Delta s_n)_1 & \cdots & (\Delta g_{kp}(n) + \Delta s_n)_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_n)_p & (\Delta g_1(n) + \Delta s_n)_p & \cdots & (\Delta g_{kp}(n) + \Delta s_n)_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_1 & (\Delta g_1(n+k-1) + \Delta s_{n+k-1})_1 & \cdots & (\Delta g_{kp}(n+k-1) + \Delta s_{n+k-1})_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Delta s_{n+k-1})_p & (\Delta g_1(n+k-1) + \Delta s_{n+k-1})_p & \cdots & (\Delta g_{kp}(n+k-1) + \Delta s_{n+k-1})_p \end{array}}$$

Sous cette forme, pour n fixé, la transformation $E_k(s_n; g_i(n))$ peut être calculée par le H -algorithme:

$$\begin{array}{|l}
 \text{Si} \quad H_0^{(0)} = s_n, \quad H_0^{(i)} = g_i(n) + s_n \quad i = 1, 2, \dots, kp \\
 \\
 f_{j+mp}(0) = (\Delta s_{n+m})_j \\
 f_{j+mp}(i) = (\Delta g_i(n+m) + \Delta s_{n+m})_j \quad i = 1, 2, \dots, kp \\
 \quad m = 0, 1, \dots, k-1 \\
 \quad j = 1, 2, \dots, p \\
 \\
 \text{Alors} \quad E_k(s_n; g_i(n)) = H_{kp}^{(0)} \quad .
 \end{array}$$

CHAPITRE 2

Etude de la Transformation de Wimp

0 Introduction

On considère des suites de vecteurs (s_n) de la forme suivante:

$$s_n - s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i g_i(n) \quad (1)$$

où

$$\begin{aligned} a_i &\in \mathcal{C} & \forall i \geq 1 \\ s_n, s, g_i(n) &\in \mathcal{C}^p & \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \geq 1 \end{aligned}$$

tel que la famille de suites $(g_i(n))_n$ vérifiant les propriétés suivantes:

$$(H) \quad \left| \begin{array}{ll} \text{(a)} & \lim_{n \rightarrow \infty} g_i(n) = 0 \in \mathcal{C}^p \quad \text{uniformément sur } i (\geq 1) \\ \text{(b)} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|g_{i+1}(n)\|}{\|g_i(n)\|} = 0 \in \mathcal{C} \quad \text{uniformément sur } i (\geq 1) \end{array} \right|$$

La propriété (H) veut dire que ces deux suites convergent vers zéro, uniformément sur $\mathbb{N}^*$ ($i \in \mathbb{N}^*$), c'est-à-dire: $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ (indépendants de i) tels que:

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \|g_i(n)\| < \varepsilon, \quad \frac{\|g_{i+1}(n)\|}{\|g_i(n)\|} < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Par exemple: $p = 2, g_i(n) = \begin{pmatrix} \lambda_i^n \\ \lambda_i^n/n \end{pmatrix}$, avec λ_i des scalaires, $\lambda_i \neq 1, i = 1, 2, \dots$ et $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots$. Dans la suite, on va utiliser cette notation.

On sait que l'algorithme d'extrapolation vectorielle le plus général pour accélérer de telles suites (s_n) , est le E -algorithme vectoriel, il est étudié par A.C.MATOS [14]. Dans ce chapitre, on va étudier la transformation de Wimp, dont la E -transformation vectorielle est un cas particulier. D'abord, on va donner un algorithme de calcul récursif pour cette transformation et puis on étudiera ses propriétés et l'on comparera ces deux transformations quand on utilise respectivement un vecteur auxiliaire y et une suite de vecteurs auxiliaires (ϕ_n) . Enfin, on donnera une seconde transformation de Wimp.

1 Transformation de Wimp

Soit (s_n) une suite de vecteurs complexes. Soient $(\phi_n), (g_i(n))_n$ des suites arbitraires, avec $\phi_n \in \mathcal{C}^p$ et $g_i(n) \in \mathcal{C}^p \quad i = 1, 2, \dots, k$. Wimp a défini la transformation suivante [15]:

$$E_k(s_n) = \frac{\begin{vmatrix} s_n & 0 & g_1(n) & \cdots & g_k(n) \\ \langle \phi_n, s_n \rangle & 1 & \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_k(n) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, s_{n+k} \rangle & 1 & \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_k(n+k) \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_k(n) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_k(n+k) \rangle \end{vmatrix}} \quad (2)$$

où $\langle \bullet, \bullet \rangle$ désigne le produit scalaire.

2 Etude de la transformation de Wimp

Comme toutes les autres transformations, pour éviter le calcul des déterminants, on a un algorithme récursif qui est le suivant:

$$\begin{aligned}
 E_0^{(n)} &= s_n & n &= 0, 1, \dots \\
 g_{0,i}^{(n)} &= g_i(n) & i &= 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \\
 \text{Pour } k &= 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots & & (3) \\
 E_k^{(n)} &= E_{k-1}^{(n)} - \frac{\langle \phi_{n+1}, E_{k-1}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, E_{k-1}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle} g_{k-1,k}^{(n)} \\
 g_{k,i}^{(n)} &= g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,i}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle} g_{k-1,k}^{(n)} & i &= k+1, k+2, \dots
 \end{aligned}$$

Avant de donner le théorème principal, on a besoin de quelques lemmes simples.

Lemme 1: Soit $a_{ij} \in \mathbb{C}$, on a une égalité suivante:

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & \cdots & a_{1,l-1} & 0 & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{11} & \cdots & a_{1,l-1} & 1 & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{31} & \cdots & a_{3,l-1} & 1 & a_{3,l+1} & \cdots & a_{3n} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
 a_{n1} & \cdots & a_{n,l-1} & 1 & a_{n,l+1} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix} = (-1)^{l+1} \begin{vmatrix}
 a_{11} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1n} \\
 a_{31} & \cdots & a_{3,l-1} & a_{3,l+1} & \cdots & a_{3n} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{nn}
 \end{vmatrix}$$

Dém: Elle est triviale, si l'on fait la différence entre la deuxième ligne et la première, et que l'on développe le déterminant suivant la deuxième ligne. Remarquons que ce lemme est utilisé ensuite dans le sens inverse. ■

Rappelons maintenant l'identité de Sylvester généralisée [16]. Soit E un espace vectoriel sur K , $x_i \in E$ $i = 1, 2, \dots$ $a_{ij} \in K$ $i, j = 0, 1, 2, \dots$ On a l'identité suivante:

$$\begin{vmatrix}
 x_0 & x_1 & \cdots & x_k \\
 a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0k} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,k}
 \end{vmatrix} \begin{vmatrix}
 a_{01} & \cdots & a_{0,k-1} \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{k-2,1} & \cdots & a_{k-2,k-1}
 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
 x_0 & x_1 & \cdots & x_{k-1} \\
 a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,k-1} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{k-2,0} & a_{k-2,1} & \cdots & a_{k-2,k-1}
 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}
 a_{01} & \cdots & a_{0k} \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,k}
 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix}
 x_1 & \cdots & x_k \\
 a_{01} & \cdots & a_{0k} \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{k-2,1} & \cdots & a_{k-2,k}
 \end{vmatrix} \begin{vmatrix}
 a_{00} & \cdots & a_{0,k-1} \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{k-1,0} & \cdots & a_{k-1,k-1}
 \end{vmatrix} .$$

Les déterminants généralisés, éléments de E , sont développés suivant la première ligne. Le déterminant:

$$\begin{vmatrix} a_{01} & \cdots & a_{0,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-2,1} & \cdots & a_{k-2,k-1} \end{vmatrix} \text{ s'appelle le centre du déterminant } \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_k \\ a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,k} \end{vmatrix}$$

Utilisant cette identité, on a:

Corollaire 1:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_k \\ a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{02} & \cdots & a_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-2,2} & \cdots & a_{k-2,k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & \cdots & x_k \\ a_{00} & a_{02} & \cdots & a_{0k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-2,0} & a_{k-2,2} & \cdots & a_{k-2,k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{01} & \cdots & a_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,k} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ a_{01} & \cdots & a_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-2,1} & \cdots & a_{k-2,k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} & \cdots & a_{0k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,k} \end{vmatrix}$$

Dém: Ce corollaire est une autre forme pour exprimer l'identité de Sylvester. Sa démonstration est obtenue en changeant simplement quelques colonnes. Pour le 1^{er} déterminant, on met la seconde colonne à la dernière place.

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_k \\ a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,k} \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} x_0 & x_2 & \cdots & x_k & x_1 \\ a_{00} & a_{02} & \cdots & a_{0k} & a_{01} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k-1,0} & a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,k} & a_{k-1,1} \end{vmatrix}$$

Pour le 4^{ième} déterminant, on met la première colonne à la dernière place.

$$\begin{vmatrix} a_{01} & \cdots & a_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-1,1} & \cdots & a_{k-1,k} \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} a_{02} & \cdots & a_{0k} & a_{01} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,k} & a_{k-1,1} \end{vmatrix}$$

Pour le 5^{ième} déterminant, on met la première colonne à la dernière place.

$$\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ a_{01} & \cdots & a_{0k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k-2,1} & \cdots & a_{k-2,k} \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} x_2 & \cdots & x_k & x_1 \\ a_{02} & \cdots & a_{0k} & a_{01} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k-2,2} & \cdots & a_{k-2,k} & a_{k-2,1} \end{vmatrix}$$

d'où le résultat en appliquant l'identité de Sylvester.

■

Nous pouvons aussi obtenir d'autres identités similaires. Pour être plus clair, à l'aide d'un schéma, ces deux identités peuvent s'exprimer comme suit:

$$\left| \begin{array}{c} \boxed{C} \\ \vdots \\ \boxed{C} \\ \times \times \times \times \times \end{array} \right| \cdot \left| \boxed{C} \right| = \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \boxed{C} \\ \vdots \\ \times \times \times \times \times \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} \boxed{C} \\ \vdots \\ \boxed{C} \\ \times \times \times \times \times \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \boxed{C} \\ \vdots \\ \times \times \times \times \times \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} \boxed{C} \\ \vdots \\ \boxed{C} \\ \times \times \times \times \times \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \boxed{C} \\ \vdots \\ \times \times \times \times \times \end{array} \right| \cdot \left| \boxed{C} \right| = \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \boxed{C} \\ \vdots \\ \times \times \times \times \times \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \boxed{C} \\ \vdots \\ \times \times \times \times \times \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \boxed{C} \\ \vdots \\ \times \times \times \times \times \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \boxed{C} \\ \vdots \\ \times \times \times \times \times \end{array} \right|$$

Maintenant, on démontre le résultat principal.

Théorème 1:

$$E_k^{(n)} = E_k(s_n) \quad k, n = 0, 1, \dots$$

Dém: On va démontrer simultanément que $g_{k,i}^{(n)}$ satisfait (2) où la première colonne du numérateur est remplacée par $g_i(n)$, $\langle \phi_n, g_i(n) \rangle, \dots, \langle \phi_{n+k}, g_i(n+k) \rangle$.

On pose:

$$E_k^{(n)} = \frac{N_k^{(n)}}{D_k^{(n)}} \quad \text{et} \quad g_{k,i}^{(n)} = \frac{N_{k,i}^{(n)}}{D_k^{(n)}} \quad .$$

D'après l'identité Sylvester généralisée, on obtient:

$$N_k^{(n)} D_{k-1}^{(n)} = N_{k-1}^{(n)} D_k^{(n)} - (-1)^k N_{k-1,k}^{(n)} A_k^{(n)}$$

où

$$A_k^{(n)} = \begin{vmatrix} \langle \phi_n, s_n \rangle & 1 & \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{k-1}(n) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, s_{n+k} \rangle & 1 & \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_{k-1}(n+k) \rangle \end{vmatrix} \quad . \quad (4)$$

Divisons $D_{k-1}^{(n)} D_k^{(n)}$, on a:

$$\frac{N_k^{(n)}}{D_k^{(n)}} = \frac{N_{k-1}^{(n)}}{D_{k-1}^{(n)}} - (-1)^k \frac{N_{k-1,k}^{(n)}}{D_{k-1}^{(n)}} \frac{A_k^{(n)}}{D_k^{(n)}} \quad .$$

Il suffit donc de démontrer que:

$$\frac{A_k^{(n)}}{D_k^{(n)}} = (-1)^k \frac{\langle \phi_{n+1}, E_{k-1}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, E_{k-1}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \quad .$$

Or, d'après le Corollaire 1, on a :

$$\begin{aligned}
& A_k^{(n)} \cdot \begin{vmatrix} \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_{k-1}(n+1) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k-1}, g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k-1}, g_{k-1}(n+k-1) \rangle \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \langle \phi_n, s_n \rangle & \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{k-1}(n) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k-1}, s_{n+k-1} \rangle & \langle \phi_{n+k-1}, g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k-1}, g_{k-1}(n+k-1) \rangle \end{vmatrix} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \\
&\quad - D_{k-1}^{(n)} \cdot \begin{vmatrix} \langle \phi_{n+1}, s_{n+1} \rangle & \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_{k-1}(n+1) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, s_{n+k} \rangle & \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_{k-1}(n+k) \rangle \end{vmatrix} \quad \underline{\text{Lemme 1}} \\
&= \begin{vmatrix} \langle \phi_n, s_n \rangle & 0 & \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{k-1}(n) \rangle \\ \langle \phi_n, s_n \rangle & 1 & \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{k-1}(n) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k-1}, s_{n+k-1} \rangle & 1 & \langle \phi_{n+k-1}, g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k-1}, g_{k-1}(n+k-1) \rangle \end{vmatrix} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \\
&\quad - D_{k-1}^{(n)} \cdot \begin{vmatrix} \langle \phi_{n+1}, s_{n+1} \rangle & 0 & \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_{k-1}(n+1) \rangle \\ \langle \phi_{n+1}, s_{n+1} \rangle & 1 & \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_{k-1}(n+1) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, s_{n+k} \rangle & 1 & \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_{k-1}(n+k) \rangle \end{vmatrix} \\
&= \langle \phi_n, N_{k-1}^{(n)} \rangle \cdot D_{k-1}^{(n+1)} - D_{k-1}^{(n)} \cdot \langle \phi_{n+1}, N_{k-1}^{(n+1)} \rangle \\
&= \langle \phi_n, E_{k-1}^{(n)} \rangle \cdot D_{k-1}^{(n)} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} - D_{k-1}^{(n)} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \cdot \langle \phi_{n+1}, E_{k-1}^{(n+1)} \rangle \tag{5}
\end{aligned}$$

Utilisant l'identité de Sylvester, on a :

$$\begin{aligned}
& D_k^{(n)} \cdot \begin{vmatrix} \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_{k-1}(n+1) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k-1}, g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k-1}, g_{k-1}(n+k-1) \rangle \end{vmatrix} \\
&= D_{k-1}^{(n)} \cdot \begin{vmatrix} \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_k(n+1) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_k(n+k) \rangle \end{vmatrix} \\
&\quad - \begin{vmatrix} \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_k(n) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k-1}, g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k-1}, g_k(n+k-1) \rangle \end{vmatrix} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \quad \underline{\text{Lemme 1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{k-1} \left\{ D_{k-1}^{(n)} \cdot \begin{vmatrix} \langle \phi_{n+1}, g_k(n+1) \rangle & 0 & \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_{k-1}(n+1) \rangle \\ \langle \phi_{n+1}, g_k(n+1) \rangle & 1 & \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_{k-1}(n+1) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, g_k(n+k) \rangle & 1 & \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_{k-1}(n+k) \rangle \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \begin{vmatrix} \langle \phi_n, g_k(n) \rangle & 0 & \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{k-1}(n) \rangle \\ \langle \phi_n, g_k(n) \rangle & 1 & \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{k-1}(n) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k-1}, g_k(n+k-1) \rangle & 1 & \langle \phi_{n+k-1}, g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k-1}, g_{k-1}(n+k-1) \rangle \end{vmatrix} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \right\} \\
&= (-1)^{k-1} \cdot \{ D_{k-1}^{(n)} \cdot \langle \phi_{n+1}, N_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, N_{k-1,k}^{(n)} \rangle \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \} \\
&= (-1)^k \cdot \{ \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle \cdot D_{k-1}^{(n)} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} - D_{k-1}^{(n)} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \cdot \langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle \} \quad . \quad (6)
\end{aligned}$$

Divisant (5) par (6), on obtient:

$$\frac{A_k^{(n)}}{D_k^{(n)}} = (-1)^k \frac{\langle \phi_{n+1}, E_{k-1}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, E_{k-1}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle} .$$

La démonstration est tout à fait similaire pour la règle auxiliaire, la seule chose différente est que dans le processus de la démonstration, on remplace les $N_k^{(n)}$, les s_n et les $E_k^{(n)}$ respectivement par les $N_{k,i}^{(n)}$, les $g_i(n)$ et les $g_{k,i}^{(n)}$.

■

Si $\phi_{n+i} = y$, $i = 0, 1, \dots, k$ l'algorithme précédent (3) devient E -algorithme vectoriel. On peut donc considérer le E -algorithme vectoriel comme un cas particulier de Wimp.

Si l'on multiplie scalairement tous les deux côtés de l'algorithme (3) par un vecteur ϕ_n , on obtient:

$$\begin{aligned}
\langle \phi_n, E_k^{(n)} \rangle &= \langle \phi_n, E_{k-1}^{(n)} \rangle - \frac{\langle \phi_{n+1}, E_{k-1}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, E_{k-1}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle \\
\langle \phi_n, g_{k,i}^{(n)} \rangle &= \langle \phi_n, g_{k-1,i}^{(n)} \rangle - \frac{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,i}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle .
\end{aligned}$$

Notons

$$\begin{aligned}
h_k^{(n)} &= \langle \phi_n, E_k^{(n)} \rangle & h_k^{(n)} &\in \mathcal{C} \\
f_{k,i}^{(n)} &= \langle \phi_n, g_{k,i}^{(n)} \rangle & f_{k,i}^{(n)} &\in \mathcal{C} \quad \forall i > k .
\end{aligned}$$

On obtient:

$$\begin{aligned} h_k^{(n)} &= h_{k-1}^{(n)} - \frac{h_{k-1}^{(n+1)} - h_{k-1}^{(n)}}{f_{k-1,k}^{(n+1)} - f_{k-1,k}^{(n)}} f_{k-1,k}^{(n)} \\ f_{k,i}^{(n)} &= f_{k-1,i}^{(n)} - \frac{f_{k-1,i}^{(n+1)} - f_{k-1,i}^{(n)}}{f_{k-1,k}^{(n+1)} - f_{k-1,k}^{(n)}} f_{k-1,k}^{(n)} \quad i = k+1, k+2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Ce n'est autre que le E -algorithme scalaire avec les initialisations:

$$\begin{aligned} h_0^{(n)} &= \langle \phi_n, E_0^{(n)} \rangle \quad n = 0, 1, \dots \\ f_{0,i}^{(n)} &= f_i(n) = \langle \phi_n, g_{0,i}^{(n)} \rangle = \langle \phi_n, g_i(n) \rangle \quad i = 1, 2, \dots \quad \text{et} \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

En d'autres termes, on peut réécrire la

Proposition 1:

$$\forall k \geq 0 \quad f_{k,i}^{(n)} = \langle \phi_n, g_{k,i}^{(n)} \rangle \quad \forall i \geq k+1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

où $f_{k,i}^{(n)}$ est définis par (7) avec les initialisations:

$$f_{0,i}^{(n)} = \langle \phi_n, g_i(n) \rangle \quad \forall i \geq 1$$

Dém: (par récurrence)

Soit $k = 0$, alors par définition on a $f_{0,i}^{(n)} = \langle \phi_n, g_i(n) \rangle = \langle \phi_n, g_{0,i}^{(n)} \rangle$ for all $i \geq 1$. Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre $k-1$, alors:

$$\begin{aligned} f_{k,i}^{(n)} &= f_{k-1,i}^{(n)} - \frac{f_{k-1,i}^{(n+1)} - f_{k-1,i}^{(n)}}{f_{k-1,k}^{(n+1)} - f_{k-1,k}^{(n)}} f_{k-1,k}^{(n)} = \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \langle \phi_n, g_{k-1,i}^{(n)} \rangle - \frac{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,i}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle \\ &= \left\langle \phi_n, g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,i}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle} g_{k-1,k}^{(n)} \right\rangle \\ &= \langle \phi_n, g_{k,i}^{(n)} \rangle \quad . \end{aligned}$$

■

Comme C.BREZINSKI a fait pour la E -transformation scalaire [26], en utilisant la propriété 1 des déterminants généralisés du Chapitre 1, on a immédiatement les résultats suivants:

Pour indiquer que $E_k(s_n)$ depend aussi des (ϕ_n) et des $(g_i(n))$, on le notera:

$$E_k(s_n; \phi_n; g_1(n), \dots, g_k(n)) = E_k(s_n)$$

Propriété 1:

(a) $\forall a_i \neq 0 \quad i = 1, 2, \dots, k$

$$E_k(s_n; \phi_n; a_1 g_1(n), \dots, a_k g_k(n)) = E_k(s_n; \phi_n; g_1(n), \dots, g_k(n))$$

(b) $\forall a_1 \neq 0, \quad a_2, \dots, a_k \in \mathbb{C}$

$$E_k(s_n; \phi_n; a_1 g_1(n) + a_k g_k(n), \dots, g_2(n), \dots, g_k(n)) = E_k(s_n; \phi_n; g_1(n), \dots, g_k(n)) \quad .$$

Propriété 2:

Si $a \neq 0$

$$E_k(s_n; a\phi_n; g_1(n), \dots, g_k(n)) = E_k(s_n; \phi_n; g_1(n), \dots, g_k(n)) \quad .$$

Si l'on suppose que les $g_i(n)$ ne dépendent pas de s_n , ou la transformation de Wimp utilise toujours les mêmes $g_i(n)$, on a:

Propriété 3:

(a) Si $a \neq 0$, et $b \in \mathcal{C}^p$

$$E_k(as_n + b; \phi_n; g_1(n), \dots, g_k(n)) = a \cdot E_k(s_n; \phi_n; g_1(n), \dots, g_k(n))$$

(b) $\forall a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathcal{C}$

$$E_k(s_n + a_1g_1(n) + \dots + a_kg_k(n); \phi_n; g_1(n), \dots, g_k(n)) = E_k(s_n; \phi_n; g_1(n), \dots, g_k(n)) \quad .$$

3 Propriétés d'accélération de la transformation de Wimp

Dans sa thèse, A.C.MATOS [14] a étudié les propriétés d'accélération du E -algorithme vectoriel. Dans cette section, on va voir que ces propriétés sont encore valables pour la méthode de Wimp, même si l'on remplace le vecteur auxiliaire y par une suite de vecteurs (ϕ_n) . On utilisera les mêmes notations, mais on suivra une autre idée pour démontrer les propriétés d'accélération de la convergence. On utilise aussi ses résultats sans presque rien changer. Dans la section suivante, on va s'intéresser à la différence entre ces deux transformations qui provient de leurs vecteurs auxiliaires y et (ϕ_n) respectivement.

Notre idée est la suivante: Supposons que les suites $(g_i(n))_n$ sous la forme (1) vérifient certaines conditions, on peut déduire qu'elles vérifient aussi les propriétés (H) . De plus, on peut aussi démontrer que:

$$E_k(s_n) - s = a_{k+1} g_{k,k+1}^{(n)} + a_{k+2} g_{k,k+2}^{(n)} + \dots \quad \forall k \geq 0$$

avec

$$(H') \quad \left| \begin{array}{ll} \text{(a)} & \lim_{n \rightarrow \infty} g_{k,i}^{(n)} = 0 \in \mathcal{C}^p \quad \text{uniformément sur } i (\geq k+1) \\ \text{(b)} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|g_{k,i+1}^{(n)}\|}{\|g_{k,i}^{(n)}\|} = 0 \in \mathcal{C} \quad \text{uniformément sur } i (\geq k+1) \end{array} \right|$$

Finalement, on obtient des théorèmes d'accélération.

3.1 Composantes de $(g_i(n))_n$ $i \geq 1$ à convergence linéaire

Considérons une famille de suite $(g_i(n))_n$ $i \in \mathbb{N}^*$ vérifiant les propriétés suivantes:

$$(A) \left[\begin{array}{l} (1) \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \text{ soit } g_i(n) = (g_i^1(n), \dots, g_i^p(n)) \in \mathcal{C}^p \\ \quad \text{(l'indice supérieur indiquant la composante)} \\ (2) \quad \text{Pour } i \in \mathbb{N}^*, \text{ soit } j_i \in \{1, 2, \dots, p\} \text{ tel que:} \\ \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}, \exists C_{ij} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{g_i^{j_i}(n)}{g_i^{j_i}(n)} \right| \leq C_{ij} \\ \quad \left(\begin{array}{l} \text{ce qui implique: } \exists A_i, B_i > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \\ \forall n \geq n_0 \quad A_i |g_i^{j_i}(n)| \leq \|g_i(n)\| \leq B_i |g_i^{j_i}(n)|. \end{array} \right) \\ \text{On a alors:} \\ (a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_i^{j_i}(n+1)}{g_i^{j_i}(n)} = b_i, \quad |b_i| < 1 \\ (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_i^{j_i}(n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{i+1}^{j_{i+1}}(n)}{g_i^{j_i}(n)} = 0 \quad \text{uniformément sur } i (\geq 1) \\ (c) \quad \forall i \neq j \quad b_i \neq b_j. \end{array} \right.$$

On choisit la suite de vecteurs (ϕ_n) tel que:

$$(B) \left[\begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle \phi_n, g_i(n) \rangle}{g_i^{j_i}(n)} = \alpha_i \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \\ \text{et l'on pose } f_i(n) = \langle \phi_n, g_i(n) \rangle = \sum_{j=1}^p \phi_n^j \cdot g_i^j(n) \quad i \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N} \\ \quad \text{(où } \phi_n^j \text{ dénote le } j^{\text{th}} \text{ composante de } \phi_n). \\ \text{Alors on obtient automatiquement:} \\ (a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_i(n+1)}{f_i(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_i^{j_i}(n+1)}{g_i^{j_i}(n)} = b_i \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \\ (b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{i+1}(n)}{f_i(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{i+1}^{j_{i+1}}(n)}{g_i^{j_i}(n)} = 0 \quad \text{uniformément sur } i (\geq 1). \end{array} \right.$$

Propriété 4: Si les suites $(g_i(n))_n$ $i \in \mathbb{N}^*$ sous la forme (1) vérifient les propriétés (A), elles vérifient aussi les propriété (H).

Dém.: D'après la condition (b) de (A) et la définition de $g_i^{j_i}(n)$, on obtient facilement que: $\lim_{n \rightarrow \infty} g_i(n) = \mathcal{O} \in \mathcal{C}^p$ uniformément sur $i (\geq 1)$ qui est une condition nécessaire pour la suite (s_n) converge vers s .

D'autre part, on a:

$$\frac{\|g_{i+1}(n)\|}{\|g_i(n)\|} \leq \frac{B_{i+1} |g_{i+1}^{j_{i+1}}(n)|}{A_i |g_i^{j_i}(n)|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{uniformément sur } i.$$

■

Proposition 2:

$$\forall k \geq 0, \quad \forall i > k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{k,i}^{(n)}}{g_i^{j_i}(n)} = \alpha_{k,i} \neq 0$$

où $f_{k,i}^{(n)}$ est défini par (7).

Dém: La démonstration est tout à fait la même que [14, p.248], même si l'on définit $f_{k,i}^{(n)}$ différemment.

■

Proposition 3:

$$\begin{aligned} & \forall k \geq 0, \quad \forall i > k \\ (a) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{k,i}^{(n+1)}}{f_{k,i}^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_i^{j_i}(n+1)}{g_i^{j_i}(n)} = b_i \\ (b) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{k,i+1}^{(n)}}{f_{k,i}^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{i+1}^{j_{i+1}}(n)}{g_i^{j_i}(n)} = 0 \quad \text{uniformément sur } i. \end{aligned}$$

Dém: (par récurrence)

Soit $k = 0$, d'après la propriété (B), on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{0,i}^{(n+1)}}{f_{0,i}^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_i^{j_i}(n+1)}{g_i^{j_i}(n)} = b_i$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{0,i+1}^{(n)}}{f_{0,i}^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{i+1}^{j_{i+1}}(n)}{g_i^{j_i}(n)} = 0 \quad \text{uniformément sur } i$$

Supposons que la propriété soit vraie jusqu'à $k - 1$, montrons qu'elle est encore vraie pour k .

$$\text{comme} \quad f_{k,i}^{(n)} = f_{k-1,i}^{(n)} \cdot \left[1 - \frac{\frac{f_{k-1,i}^{(n+1)}}{f_{k-1,i}^{(n)}} - 1}{\frac{f_{k-1,k}^{(n+1)}}{f_{k-1,k}^{(n)}} - 1} \right] \quad \forall i \geq k+1.$$

$$\text{On a:} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{k,i}^{(n)}}{f_{k-1,i}^{(n)}} = 1 - \frac{b_i - 1}{b_k - 1} = \frac{b_k - b_i}{b_k - 1} \neq 0 \quad \text{because } b_k \neq b_i \quad \forall i \geq k+1$$

Alors:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{k,i}^{(n+1)}}{f_{k,i}^{(n)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_{k,i}^{(n+1)}}{f_{k-1,i}^{(n+1)}} \cdot \frac{f_{k-1,i}^{(n+1)}}{f_{k-1,i}^{(n)}} \cdot \frac{f_{k-1,i}^{(n)}}{f_{k,i}^{(n)}} \right) \\
&= \frac{b_k - b_i}{b_k - 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{k-1,i}^{(n+1)}}{f_{k-1,i}^{(n)}} \cdot \frac{b_k - 1}{b_k - b_i} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_i^{j_i}(n+1)}{g_i^{j_i}(n)} = b_i \quad (\text{par hypothèse de récurrence}).
\end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{k,i+1}^{(n)}}{f_{k,i}^{(n)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_{k,i+1}^{(n)}}{f_{k-1,i+1}^{(n)}} \cdot \frac{f_{k-1,i+1}^{(n)}}{f_{k-1,i}^{(n)}} \cdot \frac{f_{k-1,i}^{(n)}}{f_{k,i}^{(n)}} \right) \\
&= \frac{b_k - b_{i+1}}{b_k - 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{k-1,i+1}^{(n)}}{f_{k-1,i}^{(n)}} \cdot \frac{b_k - 1}{b_k - b_i} \\
&= \frac{b_k - b_{i+1}}{b_k - b_i} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{i+1}^{j_{i+1}}(n)}{g_i^{j_i}(n)} = 0 \quad \text{uniformément sur } i
\end{aligned}$$

■

Proposition 4:

$\forall k \geq 0, \forall i \geq k+1$, les suites $(g_{k,i}^{(n)})_n$ définies par (3) vérifient:

$$(a) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}, \exists C_{ijk} > 0, \exists n_{ijk} \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq n_{ijk} \quad \left| \frac{g_{k,i}^{j_i}(n)}{g_i^{j_i}(n)} \right| \leq C_{ijk}$$

(où $g_{k,i}^{j_i}(n)$ dénote le j^{th} composante de $g_{k,i}^{(n)}$)

$$(b) \quad \exists A_{ik}, B_{ik} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq n_0 \quad A_{ik} \cdot |g_i^{j_i}(n)| \leq \|g_{k,i}^{(n)}\| \leq B_{ik} \cdot |g_i^{j_i}(n)|.$$

Dém: Dans la démonstration de la page 249 de [14], on remplace le vecteur y par une suite de vecteurs (ϕ_n) , et la démonstration n'a rien changer.

■

Proposition 5:

Si les suites $(g_i(n))_n$ $i \geq 1$ sous la forme (1) vérifient les propriétés (A) et si la suite (ϕ_n) vérifie la propriété (B). Alors, on a:

$$\forall k \geq 0, \quad \forall i \geq k+1$$

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_{k,i}^{(n)} = \emptyset \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|g_{k,i+1}^{(n)}\|}{\|g_{k,i}^{(n)}\|} = 0 \quad (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|g_{k,i}^{(n)}\|}{\|g_{k-1,k}^{(n)}\|} = 0 \quad \text{uniformément sur } i.$$

Dém: (1) D'après la Propriété 4, pour $k = 0$, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_i(n) = \emptyset \quad \text{uniformément sur } i (\geq 1).$$

Supposons les propriétés vraies jusqu'à l'ordre $k-1$. Alors pour l'ordre k , on a:

$$\begin{aligned}
 g_{k,i}^{(n)} &= g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,i}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \cdot g_{k-1,k}^{(n)} \\
 &= g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{f_{k-1,i}^{(n+1)} - f_{k-1,i}^{(n)}}{f_{k-1,k}^{(n+1)} - f_{k-1,k}^{(n)}} \cdot g_{k-1,k}^{(n)} \\
 &= g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\frac{f_{k-1,i}^{(n+1)}}{f_{k-1,i}^{(n)}} - 1}{\frac{f_{k-1,k}^{(n+1)}}{f_{k-1,k}^{(n)}} - 1} \cdot \frac{f_{k-1,i}^{(n)}}{f_{k-1,k}^{(n)}} \cdot g_{k-1,k}^{(n)}
 \end{aligned}$$

Or, d'après la Proposition 3, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{k-1,i}^{(n+1)}}{f_{k-1,i}^{(n)}} = b_i \neq 1 \quad \forall i \geq k$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{k-1,i}^{(n)}}{f_{k-1,k}^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_{k-1,i}^{(n)}}{f_{k-1,i-1}^{(n)}} \cdots \frac{f_{k-1,k+1}^{(n)}}{f_{k-1,k}^{(n)}} \right) = 0 \quad \text{uniformément sur } i (\geq k+1).$$

Par hypothèse de récurrence, on conclut que: $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{k,i}^{(n)} = \mathcal{O} \in \mathcal{C}^p$ uniformément sur i .

(2) C'est une conséquence (b) de la Proposition 4. En effet:

$$\frac{\|g_{k,i+1}^{(n)}\|}{\|g_{k,i}^{(n)}\|} \leq \frac{B_{i+1,k} \cdot |g_{i+1}^{j+1}(n)|}{A_{i,k} \cdot |g_i^j(n)|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{uniformément sur } i.$$

(3) Comme dans le cas (2), on a:

$$\frac{\|g_{k,i}^{(n)}\|}{\|g_{k-1,k}^{(n)}\|} \leq \frac{B_{i,k} \cdot |g_i^j(n)|}{A_{k,k-1} \cdot |g_k^{j_k}(n)|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{uniformément sur } i.$$

■

D'où le résultat suivant:

Théorème 2:

Si les suites $(g_i(n))_n$ sous la forme (1) vérifient les propriétés (A), on a la Propriété 4. De plus, si la suite (ϕ_n) vérifie la propriété (B), on a:

$$E_k(s_n) - s = a_{k+1} \cdot g_{k,k+1}^{(n)} + a_{k+2} \cdot g_{k,k+2}^{(n)} + \cdots \quad \forall k \geq 0$$

avec les suites $(g_{k,k+i}^{(n)})_n$ vérifient la propriété (H').

Dém: D'après la Proposition 5, il suffit de démontrer que :

$$E_k(s_n) - s = a_{k+1} g_{k,k+1}^{(n)} + a_{k+2} g_{k,k+2}^{(n)} + \dots$$

En effet, il est vrai pour $k = 0$. Suppose que il est vrai pour $k-1$, alors:

$$\begin{aligned} E_k^{(n)} &= E_{k-1}^{(n)} - \frac{\langle \phi_{n+1}, E_{k-1}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, E_{k-1}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle} g_{k-1,k}^{(n)} \\ &= s + \sum_{i \geq k} a_i \cdot g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\sum_{i \geq k} a_i \cdot (\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,i}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,i}^{(n)} \rangle)}{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \cdot g_{k-1,k}^{(n)} \\ &= s + \sum_{i \geq k} a_i \cdot \left(g_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,i}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \cdot g_{k-1,k}^{(n)} \right) \\ &= s + \sum_{i \geq k+1} a_i \cdot g_{k,i}^{(n)} \end{aligned}$$

par la relation récurrence de $g_{k,i}^{(n)}$ et $g_{k,k}^{(n)} = \emptyset \quad \forall n$.

■

Lemme 2:

Soient $a_i \in \mathcal{C}$, $b_i^{(n)} \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2, \dots$ tels que:

$$\exists M, \forall i, |a_i| < M, \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} b_i^{(n)} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{i+1}^{(n)}}{b_i^{(n)}} = 0 \text{ uniformément sur } i (\geq 1).$$

Alors, on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i^{(n)} = 0.$$

Dém: Par l'hypothèse, on a: $\forall 0 < r < 1$ fixé, $\exists n_0$ (indépendant de i), tel que:

$$\forall i \geq 1, \left| \frac{b_{i+1}^{(n)}}{b_i^{(n)}} \right| \leq r \quad \forall n \geq n_0.$$

D'autre part

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1, \forall n \geq n_1, |b_1^{(n)}| \leq \frac{(1-r) \cdot \varepsilon}{M}.$$

On pose $N = \max\{n_0, n_1\}$.

Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ (dépend seulement ε), tel que pour tout $n \geq N$, on a:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i^{(n)}| &\leq \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i^{(n)} \right| \leq M \cdot |b_1^{(n)}| \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{b_{i+1}^{(n)}}{b_1^{(n)}} \right| \right) \\
&= M \cdot |b_1^{(n)}| \left(1 + \left| \frac{b_2^{(n)}}{b_1^{(n)}} \right| + \left| \frac{b_3^{(n)}}{b_2^{(n)}} \right| \cdot \left| \frac{b_2^{(n)}}{b_1^{(n)}} \right| + \dots \right) \\
&\leq M \cdot |b_1^{(n)}| \cdot (1 + r + r^2 + \dots) \\
&= M \cdot |b_1^{(n)}| \cdot \frac{1}{1-r} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Théorème 3:

Si $s_n - s = \sum_{i \geq 1} a_i g_i(n)$ tels que les suites $(g_i(n))_n$ vérifient les propriétés (A) et si la suite (ϕ_n) vérifie la propriété (B), alors $\forall k \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|E_k^{(n)} - s\|}{\|E_{k-1}^{(n)} - s\|} = 0$$

Dém.: $\forall k \geq 1$, d'après le Théorème 2, on a:

$$E_k^{(n)} - s = a_{k+1} g_{k,k+1}^{(n)} + a_{k+2} g_{k,k+2}^{(n)} + \dots$$

où les suites $(g_{k,k+i}^{(n)})_n$ vérifient les propriétés (1) (2) (3) de la Proposition 5.

Alors:

$$\frac{\|E_k^{(n)} - s\|}{\|E_{k-1}^{(n)} - s\|} \leq \frac{\sum_{i=1}^{\infty} |a_{k+i}| \cdot \|g_{k,k+i}^{(n)}\|}{\left| |a_k| \cdot \|g_{k-1,k}^{(n)}\| - \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_{k+i} \cdot g_{k-1,k+i}^{(n)} \right\| \right|} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} |a_{k+i}| \cdot \frac{\|g_{k,k+i}^{(n)}\|}{\|g_{k-1,k}^{(n)}\|}}{\left| |a_k| - \frac{\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_{k+i} \cdot g_{k-1,k+i}^{(n)} \right\|}{\|g_{k-1,k}^{(n)}\|} \right|}$$

D'après la proposition 5 et le Lemme 2, on a:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} |a_{k+i}| \cdot \frac{\|g_{k,k+i}^{(n)}\|}{\|g_{k-1,k}^{(n)}\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\
\text{et } &\frac{\left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_{k+i} \cdot g_{k-1,k+i}^{(n)} \right\|}{\|g_{k-1,k}^{(n)}\|} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_{k+i}| \cdot \frac{\|g_{k-1,k+i}^{(n)}\|}{\|g_{k-1,k}^{(n)}\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Donc, on a:

$$\frac{\|E_k^{(n)} - s\|}{\|E_{k-1}^{(n)} - s\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

■

Un cas particulier est:

Corollaire 2:

Si $s_n - s = a_1 g_1(n) + \dots + a_k g_k(n)$ tels que les suites $(g_i(n))_n$ vérifient les propriétés (A) et si la suite (ϕ_n) vérifie la propriété (B), alors $\forall i \leq k-1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|E_i^{(n)} - s\|}{\|E_{i-1}^{(n)} - s\|} = 0.$$

Maintenant, donnons quelques exemples numériques.

Exemple n^01 :

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} \rho_i^n \\ \rho_i^n/(n+1) \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = 0.9, \quad \rho_2 = 0.4, \quad \rho_3 = 0.1, \quad \rho_4 = 0.08, \quad \rho_5 = 0.06$$

Posons: $e_n = -\log_{10}(\|s_n - s\|_\infty)$ et $f_k^{(n)} = -\log_{10}(\|E_k^{(n)} - s\|_\infty)$

		$\phi_n = (1, 1)^T$	$\phi_n = (2 + 0.8^n)(1, 1)^T$
n	e_{n+2}	$f_2^{(n)}$	$f_2^{(n)}$
0	-0.080	-1.40	-1.19
1	0.064	-0.39	-0.22
2	0.150	0.65	0.80
3	0.214	1.69	1.82
4	0.268	2.74	2.85
5	0.317	3.77	3.87
6	0.365	4.81	4.88
7	0.411	5.83	5.90
8	0.457	6.85	6.91
9	0.503	7.87	7.91
10	0.549	8.88	8.92
11	0.595	9.89	9.92
12	0.641	10.9	10.9
13	0.686	11.9	11.9
14	0.732	12.9	12.9
15	0.778	13.9	13.9
16	0.824	14.9	14.8
17	0.869	15.6	15.4

On voit facilement que pour les suites auxiliaires $\phi_n = (1, 1)^T$ et $\phi_n = (2 + 0.8^n)(1, 1)^T$, les résultats d'accélération sont presque les mêmes. Dans la suite, on donnera donc seulement les résultats avec la suite (ϕ_n) dépendant de n .

Exemple n°2:

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} (n+1)^{-i+1} \rho_i^n \\ (n+1)^{-i} \rho_i^n \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = 0.8, \quad \rho_2 = 0.4, \quad \rho_3 = 0.2, \quad \rho_4 = 0.09, \quad \rho_5 = 0.06$$

		$\phi_n = (1 + 0.5^n)(1, 0)^T$
n	e_{n+1}	$f_1^{(n)}$
0	0.194	-0.459
1	0.291	0.410
2	0.388	1.33
3	0.485	2.28
4	0.581	3.25
5	0.678	4.23
6	0.775	5.21
7	0.872	6.21
8	0.969	7.21
9	1.07	8.21
10	1.16	9.22
11	1.26	10.2
12	1.36	11.2
13	1.45	12.3
14	1.55	13.3
15	1.65	14.3
16	1.74	15.3
17	1.84	16.3

Exemple n°3:

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} (n+1)^{-i} 0.5^n \\ (n+1)^{-i-1} 0.5^n \end{pmatrix}$$

		$\phi_n = \left(3 + \frac{1}{n^2+1}\right) (1,1)^T$
n	e_{n+4}	$f_4^{(n)}$
0	1.71	4.62
1	2.13	5.76
2	2.52	6.73
3	2.89	7.60
4	3.26	8.39
5	3.62	9.13
6	3.97	9.82
7	4.32	10.5
8	4.66	11.1
9	5.00	11.7
10	5.33	12.3
11	5.66	12.8
12	5.99	13.4
13	6.32	13.9
14	6.65	14.4
15	6.98	14.9
16	7.30	15.4

3.2 Composantes de $(g_i(n))_n$ $i \geq 1$ à convergence logarithmique

Maintenant, on va étudier une famille de suites $(g_i(n))_n$, $g_i(n) \in \mathcal{C}^p$ qui vérifient les propriétés suivantes:

$$(C) \left[\begin{array}{l} (1) \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \quad g_i(n) \in \mathcal{C}^p \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ (2) \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \text{ soit } j_i \in \{1, 2, \dots, p\} \text{ tel que:} \\ \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}, \exists C_{ij} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{g_i^j(n)}{g_i^{j_i}(n)} \right| \leq C_{ij}. \\ \text{On suppose que:} \\ (H1) \quad \frac{g_i^{j_i}(n+1)}{g_i^{j_i}(n)} = 1 + U_i(n) \quad U_i(n) \sim \frac{\alpha_i}{n} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \alpha_i \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \\ (H2) \quad \frac{U_i(n)}{U_k(n)} = \alpha_{ik}(1 + \beta_{ik}(n)) \\ \quad \text{avec } \alpha_{ik} \neq 1, \beta_{ik}(n) \sim \frac{C}{\log(n)} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall i > k, \forall k \in \mathbb{N}^* \\ (H3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_i^{j_i}(n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{i+1}^{j_{i+1}}(n)}{g_i^{j_i}(n)} = 0 \quad \text{uniformément sur } i (\geq 1). \end{array} \right.$$

On choisit la suite de vecteurs (ϕ_n) , $\phi_n \in \mathcal{O}^p$ telle que:

$$(D) \quad \left[\begin{array}{l} \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\langle \phi_n, g_i(n) \rangle}{g_i^{j_i}(n)} = a_i (1 + \beta_i(n)) \quad \beta_i(n) \sim \frac{K_i}{\log(n)} \quad (n \rightarrow \infty) \\ \text{avec } a_i \neq 0. \\ \text{On pose } f_i(n) = \langle \phi_n, g_i(n) \rangle \quad i \in \mathbb{N}^*, \quad n \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \quad (8) \quad (9)$$

Les suites $(g_{k,i}^{(n)})_n$, $(f_{k,i}^{(n)})_n$ $k \in \mathbb{N}^*$, $i > k$ sont définies par (3) et (7), et la Proposition 1 est toujours vraie. Pour que les Propositions 2 and 4 soient encore vraies dans le cas de suites $(g_i(n))_n$ $i \geq 1$ vérifiant les propriétés (C), il suffit de démontrer que:

$$\forall k \geq 1, \quad \forall i > k \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{f_{k-1,i}^{(n+1)}}{f_{k-1,i}^{(n)}} - 1}{\frac{f_{k-1,k}^{(n+1)}}{f_{k-1,k}^{(n)}} - 1} = A_{ik} \quad \text{fini, } A_{ik} \neq 1.$$

Bien que l'on ait défini $f_i(n) = \langle \phi_n, g_i(n) \rangle$ au lieu de $f_i(n) = \langle y, g_i(n) \rangle$ in [2], on a quand même le résultat suivant:

Proposition 6:[14]

Soit $(g_i(n))_n$ $i \in \mathbb{N}^*$ une famille de suites vérifiant (C) et $(f_i(n))_n$ $i \in \mathbb{N}^*$ est défini par (9) avec la propriété (8) satisfaite.

Alors, on obtient:

$$\forall k \geq 0 \quad \forall i > k \quad \frac{f_{k,i}^{(n+1)}}{f_{k,i}^{(n)}} - 1 = U_i(n) (1 + V_{ki}(n)) \quad V_{ki} \sim \frac{K_{ki}}{\log(n)} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dém: Regarder la page 259 de [14].

■

On obtient donc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{f_{k-1,i}^{(n+1)}}{f_{k-1,i}^{(n)}} - 1}{\frac{f_{k-1,k}^{(n+1)}}{f_{k-1,k}^{(n)}} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_i(n)}{U_k(n)} = \alpha_{ik} \neq 1 \quad \forall i > k. \quad (10)$$

La Proposition 3 n'est plus valable, mais on a quand même la:

Proposition 7:

$$\forall k \geq 0, \quad \forall i > k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{k,i+1}^{(n)}}{f_{k,i}^{(n)}} = 0 \quad \text{uniformément sur } i.$$

Dém: D'après la Proposition 2, on a:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{k,i+1}^{(n)}}{f_{k,i}^{(n)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_{k,i+1}^{(n)}}{g_{i+1}^{j_{i+1}}(n)} \cdot \frac{g_{i+1}^{j_{i+1}}(n)}{g_i^{j_i}(n)} \cdot \frac{g_i^{j_i}(n)}{f_{k,i}^{(n)}} \right) \\ &= \alpha_{k,i+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{i+1}^{j_{i+1}}(n)}{g_i^{j_i}(n)} \cdot \frac{1}{\alpha_{k,i}} \\ &= 0 \quad \text{uniformément sur } i.\end{aligned}$$

puisque $\alpha_{k,i} \neq 0$ qui est défini dans la Proposition 2. ■

D'après la Proposition 7 et (10), la Proposition 5 est encore vraie dans le cas où les suites $(g_i(n))_n$ $i \in \mathbb{N}^*$ satisfont les propriétés (C). Comme la démonstration du Théorème 3 est basée sur la Proposition 5, on a immédiatement le résultat suivant:

Théorème 4:

Si $s_n - s = \sum_{i \geq 1} a_i g_i(n)$ où les suites $(g_i(n))_n$ vérifient les propriétés (C) et si la suite (ϕ_n) vérifie la propriété (D), alors, $\forall k \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|E_k^{(n)} - s\|}{\|E_{k-1}^{(n)} - s\|} = 0.$$

Corollaire 3:

Si $s_n - s = a_1 g_1(n) + \dots + a_k g_k(n)$ où les suites $(g_i(n))_n$ vérifient les propriétés (C) et si la suite (ϕ_n) vérifie la propriété (D), alors, $\forall i \leq k-1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|E_i^{(n)} - s\|}{\|E_{i-1}^{(n)} - s\|} = 0.$$

Donnons quelques exemples numériques.

Exemple n°4:

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} (n+1)^{-i} \\ (n+1)^{-i-1} \end{pmatrix}$$

En utilisant les suites auxiliaires $\phi_n = (1, 1)^T$ et $\phi_n = (1 + 0.7^n)(1, 1)^T$, on obtient:

		$\phi_n = (1, 1)^T$	$\phi_n = (1 + 0.7^n)(1, 1)^T$
n	e_{n+4}	$f_4^{(n)}$	$f_4^{(n)}$
0	0.506	0.283	0.294
2	0.711	2.44	2.47
4	0.852	3.49	3.49
6	0.959	4.19	4.19
8	1.04	4.72	4.72
10	1.12	5.06	5.08
12	1.18	5.33	5.35
14	1.23	5.58	5.60
16	1.28	5.80	5.81
18	1.32	6.01	6.01
20	1.36	6.20	6.20
22	1.40	6.37	6.37
24	1.43	6.53	6.53
26	1.46	6.68	6.68
28	1.49	6.82	6.82
30	1.52	6.95	6.95
32	1.54	7.08	7.07
34	1.57	7.19	7.19
36	1.59	7.30	7.30

On voit que pour les suites auxiliaires $\phi_n = (1, 1)^T$ et $\phi_n = (1 + 0.7^n)(1, 1)^T$, les résultats d'accélération sont presque les mêmes. Dans la suite, on donnera donc seulement les résultats avec la suite (ϕ_n) dépendant de n .

Exemple n^05 :

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} (n+1)^{-2i+1} \\ (n+1)^{-2i} \end{pmatrix}$$

On obtient:

		$\phi_n = \left(1 + \frac{1}{2(n+1)^2}, 0\right)^T$
n	e_{n+4}	$f_4^{(n)}$
0	0.664	0.0001
2	0.827	3.34
4	0.943	4.90
6	1.03	5.92
8	1.11	6.68
10	1.17	7.29
12	1.23	7.80
14	1.28	8.24
16	1.32	8.62
18	1.36	8.95
20	1.40	9.26
22	1.43	9.53
24	1.46	9.79
26	1.49	10.0
28	1.52	10.2
30	1.54	10.4
32	1.57	10.6
34	1.59	10.8
36	1.61	11.0

Exemple n^06 :

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} (n+1)^{-1}(\log(n+1))^{-i} \\ (n+1)^{-1}(\log(n+1))^{-i-3} \end{pmatrix}$$

On obtient:

		$\phi_n = \left(2 + \frac{1}{(n+1)}\right) (1, 1)^T$
n	e_{n+4}	$f_4^{(n)}$
10	1.22	3.72
14	1.40	4.21
18	1.53	4.57
22	1.64	4.84
26	1.73	5.06
30	1.81	5.25
34	1.88	5.40
38	1.94	5.54
42	2.00	5.66
46	2.05	5.77
50	2.10	5.87
54	2.14	5.96
58	2.18	6.05
62	2.22	6.12
66	2.25	6.19
70	2.28	6.26
74	2.31	6.32

Exemple n°7:

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} (n+1)^{-\frac{(i+1)}{2}} \\ (n+1)^{-\frac{(i+3)}{2}} \end{pmatrix}$$

On obtient:

		$\phi_n = (4+0.6^n, 0)^T$
n	e_{n+4}	$f_4^{(n)}$
10	0.92	3.34
14	1.05	3.69
18	1.16	3.96
22	1.25	4.19
26	1.32	4.39
30	1.38	4.55
34	1.44	4.70
38	1.49	4.84
42	1.54	4.96
46	1.58	5.07
50	1.61	5.17
54	1.65	5.27
58	1.68	5.36
62	1.71	5.44
66	1.74	5.52
70	1.77	5.59
74	1.79	5.66

4 Choix particuliers de la suite de vecteurs (ϕ_n)

Dans les théorèmes précédents, la suite (ϕ_n) de l'algorithme (3) doit satisfaire certaines propriétés. En effet on doit avoir:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle \phi_n, g_i(n) \rangle}{g_i^{j_i}(n)} = \alpha_i \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$ si les $(g_i(n))_n \quad i \in \mathbb{N}^*$ satisfont (A)

ou bien

2) $\frac{\langle \phi_n, g_i(n) \rangle}{g_i^{j_i}(n)} = \gamma_i(1 + \beta_i(n)) \quad \gamma_i \neq 0 \quad \text{et} \quad \beta_i(n) \sim \frac{K_i}{\log(n)} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall i \in \mathbb{N}^*$
si les $(g_i(n))_n \quad i \in \mathbb{N}^*$ satisfont (C) .

Comme dans le E -algorithme vectoriel

a) Supposons que:

$$a1) \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \quad \forall j \neq j_i \quad g_i^j(n) = o(g_i^{j_i}(n)) \quad (n \rightarrow \infty)$$

avec $\text{les}(g_i(n))_n \quad i \in \mathbb{N}^*$ vérifiant (A)

$$a2) \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \quad \forall j \neq j_i \quad \frac{g_i^j(n)}{g_i^{j_i}(n)} \sim \frac{K_{ij}}{\log(n)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

avec $\text{les}(g_i(n))_n \quad i \in \mathbb{N}^*$ vérifiant (C) .

Alors, il est facile de montrer que l'on peut choisir:

$$\phi_n = a_n \cdot (1, \dots, 1)^T \quad \text{où } \forall a_n \neq 0 \quad \text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$$

b) Supposons que:

$$\exists k_0 \in \{1, \dots, p\} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*, \quad j_i = k_0$$

Dans ce cas, on peut choisir:

$$\phi_n = a_n e_{k_0} \quad \text{où } \forall a_n \neq 0 \quad \text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$$

e_j : $j^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique.

Les exemples numériques, dans le cas linéaire ainsi que dans le cas logarithmique, sont donnés dans la section précédente.

5 Traitement du problème des singularités

On sait que le E -algorithme vectoriel est un cas particulier de l'algorithme (3) pour la transformation de Wimp, avec $\phi_n = y, \forall n$. Ils peuvent être utilisés, tous les deux, pour accélérer la convergence de suites vectorielles et, dans ce cas, il n'y a pas de très grande différence. Mais quand ils traitent certaines suites qui peuvent provoquer des problèmes de singularité ou d'instabilité numérique, il y a une différence.

Nous remarquons que, dans le E -algorithme vectoriel, si les deux termes $g_{k-1,k}^{(n+1)}$ et $g_{k-1,k}^{(n)}$ sont très proches ou égaux, avec le vecteur auxiliaire y , il peut arriver des problèmes d'instabilité numérique ou de singularité. Par contre, pour l'algorithme (3), on peut choisir la suite (ϕ_n) pour que le terme $\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle$ ne soit pas très petit ou nul. Un exemple facile est de prendre $\phi_n = (-1)^n (1, 1)^T$ au lieu de $y = (1, 1)^T$. Si $g_{k-1,k}^{(n)} = g_{k-1,k}^{(n+1)}$, par exemple, alors $\langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_n, g_{k-1,k}^{(n)} \rangle = 2 \langle \phi_{n+1}, g_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle$.

Voyons des exemples numériques:

Exemple n^08 :

$$s_n = \sum_{i=1}^5 i \left(\begin{array}{c} \rho_i^n \\ \rho_i^n / 5 \end{array} \right)$$

$$\rho_1 = \begin{cases} 0.9 \\ 0.999 \\ 0.999999 \end{cases}, \quad \rho_2 = 0.4, \quad \rho_3 = 0.1, \quad \rho_4 = 0.03, \quad \rho_5 = 0.06$$

$$\phi_n = (1, 1)^T$$

$$\rho_1 = 0.9$$

$$\rho_1 = 0.999$$

$$\rho_1 = 0.999999$$

n	e_{n+1}	$f_1^{(n)}$	e_{n+1}	$f_1^{(n)}$	e_{n+1}	$f_1^{(n)}$
0	-0.08	-1.06	-0.14	-3.12	$-1.4 \cdot 10^{-1}$	-6.12
1	-0.06	-0.34	-0.05	-2.14	$-5.5 \cdot 10^{-2}$	-5.14
2	0.15	0.16	-0.02	-1.92	$-2.2 \cdot 10^{-2}$	-4.92
3	0.21	0.59	-0.007	-1.49	$-8.8 \cdot 10^{-3}$	-4.49
4	0.27	0.99	-0.001	-1.09	$-3.5 \cdot 10^{-3}$	-4.09
5	0.32	1.39	0.002	-0.69	$-1.4 \cdot 10^{-3}$	-3.69
6	0.37	1.79	0.003	-0.29	$-5.7 \cdot 10^{-4}$	-3.29
7	0.41	2.18	0.0037	0.11	$-2.2 \cdot 10^{-4}$	-2.90
8	0.46	2.58	0.0043	0.50	$-8.7 \cdot 10^{-5}$	-2.50
9	0.50	2.98	0.0047	0.90	$-3.2 \cdot 10^{-5}$	-2.10
10	0.55	3.38	0.0052	1.30	$-9.4 \cdot 10^{-6}$	-1.70
11	0.60	3.78	0.0056	1.70	$-1.8 \cdot 10^{-7}$	-1.30
12	0.64	4.17	0.0061	2.09	$3.8 \cdot 10^{-6}$	-0.91
13	0.69	4.57	0.0065	2.49	$5.6 \cdot 10^{-6}$	-0.51
14	0.73	4.97	0.0070	2.89	$6.6 \cdot 10^{-6}$	-0.11
15	0.78	5.37	0.0074	3.29	$7.2 \cdot 10^{-6}$	0.29
16	0.82	5.76	0.0078	3.69	$7.8 \cdot 10^{-6}$	0.69
17	0.87	6.16	0.0083	4.08	$8.2 \cdot 10^{-6}$	1.08
18	0.91	6.56	0.0087	4.48	$8.7 \cdot 10^{-6}$	1.48

$$\phi_n = (-1)^n(1, 1)^T$$

n	$f_1^{(n)}$	$f_1^{(n)}$	$f_1^{(n)}$
0	0.22	0.18	0.18
1	0.94	0.89	0.89
2	1.44	1.39	1.39
3	1.86	1.81	1.81
4	2.27	2.21	2.21
5	2.67	2.61	2.61
6	3.06	3.01	3.01
7	3.46	3.41	3.41
8	3.86	3.80	3.80
9	4.26	4.20	4.20
10	4.66	4.60	4.60
11	5.05	5.00	5.00
12	5.45	5.40	5.40
13	5.85	5.79	5.79
14	6.25	6.19	6.19
15	6.65	6.59	6.59
16	7.04	6.99	6.99
17	7.44	7.39	7.38
18	7.84	7.78	7.78

On voit bien,dans le tableau du bas, qu'il y a bien conservation la propriété d'accélération de la convergence.

Exemple n°9:

$$s_n = \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} \rho_i^n \\ \rho_i^n/8 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{cases} 0.9 \\ 0.999 \\ 0.999999 \end{cases}, \quad \rho_2 = 0.6, \quad \rho_3 = 0.4, \quad \rho_4 = 0.1, \quad \rho_5 = 0.06$$

$\rho_1 = 0.9$			$\rho_1 = 0.999$		$\rho_1 = 0.999999$	
$\phi_n = (0.9, 0)^T$			$\phi_n = (0.999, 0)^T$		$\phi_n = (0.999999, 0)^T$	
n	e_{n+2}	$f_2^{(n)}$	e_{n+2}	$f_2^{(n)}$	e_{n+2}	$f_2^{(n)}$
0	-0.32	-2.02	-0.353	-4.07	$-3.5 \cdot 10^{-1}$	-7.07
1	-0.13	-1.02	-0.211	-3.08	$-2.1 \cdot 10^{-1}$	-6.08
2	0.003	-0.26	-0.125	-2.33	$-1.3 \cdot 10^{-1}$	-5.33
3	0.11	0.27	-0.072	-1.80	$-7.4 \cdot 10^{-2}$	-4.80
4	0.20	0.71	-0.041	-1.37	$-4.4 \cdot 10^{-2}$	-4.37
5	0.27	1.11	-0.023	-0.97	$-2.6 \cdot 10^{-2}$	-3.97
6	0.33	1.51	-0.012	-0.57	$-1.5 \cdot 10^{-2}$	-3.57
7	0.39	1.91	-0.005	-0.17	$-9.0 \cdot 10^{-3}$	-3.17
8	0.44	2.31	-0.001	0.23	$-5.4 \cdot 10^{-3}$	-2.77
9	0.49	2.71	0.0016	0.63	$-3.2 \cdot 10^{-3}$	-2.37
10	0.54	3.10	0.0033	1.03	$-1.9 \cdot 10^{-3}$	-1.97
11	0.59	3.50	0.0045	1.42	$-1.1 \cdot 10^{-3}$	-1.58
12	0.64	3.90	0.0054	1.82	$-6.9 \cdot 10^{-4}$	-1.18
13	0.68	4.30	0.0061	2.22	$-4.0 \cdot 10^{-4}$	-0.78
14	0.73	4.70	0.0067	2.62	$-2.4 \cdot 10^{-4}$	-0.38
15	0.78	5.09	0.0072	3.02	$-1.4 \cdot 10^{-4}$	0.015
16	0.82	5.49	0.0077	3.41	$-8.1 \cdot 10^{-5}$	0.413
17	0.87	5.89	0.0082	3.81	$-4.5 \cdot 10^{-5}$	0.811
18	0.92	6.29	0.0087	4.21	$-2.3 \cdot 10^{-5}$	1.21

$$\phi_n = (-1)^n (0.9, 0)^T \quad \phi_n = (-1)^n (0.999, 0)^T \quad \phi_n = (-1)^n (0.999999, 0)^T$$

n	$f_2^{(n)}$	$f_2^{(n)}$	$f_2^{(n)}$
0	-0.14	-0.17	-0.17
1	0.86	0.83	0.83
2	1.62	1.58	1.58
3	2.15	2.10	2.10
4	2.59	2.53	2.53
5	2.99	2.94	2.94
6	3.39	3.34	3.34
7	3.79	3.73	3.73
8	4.19	4.13	4.13
9	4.59	4.53	4.53
10	4.99	4.93	4.93
11	5.38	5.33	5.33
12	5.78	5.72	5.72
13	6.18	6.12	6.12
14	6.58	6.52	6.52
15	6.97	6.92	6.92
16	7.37	7.32	7.32
17	7.77	7.71	7.71
18	8.17	8.11	8.11

Exemple n^010 :

Soit $s_n = g_1(n) + \sum_{i=2}^5 i \cdot g_i(n)$

avec

$$g_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g_1(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, g_1(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, g_1(3) = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}, g_1(4) = \begin{pmatrix} 3 \\ x \end{pmatrix}, g_1(5) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $g_1(n) = \frac{1}{2} \cdot g_1(n-6) \quad n = 6, 7, \dots$

$$g_2(n) = \begin{pmatrix} 0.7^n \\ 0.7^n/9 \end{pmatrix}, g_3(n) = \begin{pmatrix} 0.1^n \\ 0.1^n/9 \end{pmatrix}, g_4(n) = \begin{pmatrix} 0.08^n \\ 0.08^n/9 \end{pmatrix}, g_5(n) = \begin{pmatrix} 0.06^n \\ 0.06^n/9 \end{pmatrix}.$$

Pour cet exemple, dans la transformation de Wimp (2) avec $k = 5$, doit donner:

$$E_5^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \phi_n, \forall n.$$

Mais, avec différentes valeurs de x , on obtient:

x	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	ϕ_n
$E_5^{(0)}$	$\begin{pmatrix} 0.56 \cdot 10^{-12} \\ -0.55 \cdot 10^{-12} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.12 \cdot 10^{-9} \\ -0.11 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.74 \cdot 10^{-6} \\ -0.73 \cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.15 \cdot 10^{-1} \\ -0.15 \cdot 10^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$E_5^{(0)}$	$\begin{pmatrix} -0.20 \cdot 10^{-15} \\ 0.18 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.18 \cdot 10^{-15} \\ 0.31 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.41 \cdot 10^{-15} \\ 0.63 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.59 \cdot 10^{-15} \\ 0.13 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}$	$0.2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On voit bien que avec différents valeurs de x , si $\phi_n = 0.2^n (1,1)^T$, $E_5^{(0)}$ est presque égal à zéro. Par contre, si $\phi_n = (1,1)^T \forall n$, (c'est-à-dire, devient le E -algorithme vectoriel) $E_5^{(0)}$ n'est pas la même résultat.

Une autre façon pour éviter ces problèmes, est de passer directement de la colonne $E_m^{(n)}$ à la colonne $E_{k+m}^{(n)}$ ($k \geq 1$) sans calculer les colonnes intermédiaires. Une telle règle peut être utilisée pour éviter une division par zéro, donc elle fournit une règle singulière. On va voir d'abord le théorème suivant:

Théorème 5:

$$\forall k \geq 1$$

$$E_{k+m}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} E_m^{(n)} & 0 & g_{m,m+1}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n)} \\ \langle \phi_n, E_m^{(n)} \rangle & 1 & \langle \phi_n, g_{m,m+1}^{(n)} \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{m,m+k}^{(n)} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, E_m^{(n+k)} \rangle & 1 & \langle \phi_{n+k}, g_{m,m+1}^{(n+k)} \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_{m,m+k}^{(n+k)} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \langle \phi_n, g_{m,m+1}^{(n)} \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{m,m+k}^{(n)} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \langle \phi_{n+k}, g_{m,m+1}^{(n+k)} \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_{m,m+k}^{(n+k)} \rangle \end{vmatrix}} \quad (11)$$

et une expression similaire pour $g_{k+m,i}^{(n)}$ en remplaçant $E_m^{(n)}$, $\langle \phi_n, E_m^{(n)} \rangle, \dots, \langle \phi_{n+k}, E_m^{(n+k)} \rangle$ par $g_{m,i}^{(n)}$, $\langle \phi_n, g_{m,i}^{(n)} \rangle, \dots, \langle \phi_{n+k}, g_{m,i}^{(n+k)} \rangle$.

Dém: On pose $\tilde{E}_k^{(n)}$ la quantité obtenue par utiliser l'algorithme (3) avec les initialisations: $\tilde{E}_0^{(n)} = E_m^{(n)}$ et $\tilde{g}_{0,i}^{(n)} = g_{m,m+i}^{(n)}$ m fixé. Alors, $\tilde{E}_k^{(n)}$ est donné par l'expression déterminantale du Théorème. Mais dans l'algorithme (3), chaque étape est obtenue à partir de la précédente. Donc, $\tilde{E}_k^{(n)}$ est la $(k+m)$ ième étape avec les initialisations usuelles. On a donc $\tilde{E}_k^{(n)} = E_{k+m}^{(n)}$. Il est de même raison pour l'expression de $g_{k+m,i}^{(n)}$. ■

Remarque:

Si l'on prend $m = 0$, on retrouve la transformation de Wimp (2).

Si l'on prend $k = 1$, on retrouve l'algorithme (3).

Si $\phi_n = y \forall n$, on retrouve les règles particulières pour le E -algorithme vectoriel.

Le calcul de $E_{k+m}^{(n)}$ peut s'effectuer en résolvant un système de $k+1$ équations linéaires. En effet, d'après l'identité de Magnus [7], on a:

$$E_{k+m}^{(n)} = E_m^{(n)} - (0, g_{m,m+1}^{(n)}, \dots, g_{m,m+k}^{(n)}) \begin{pmatrix} 1 & \langle \phi_n, g_{m,m+1}^{(n)} \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{m,m+k}^{(n)} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \langle \phi_{n+k}, g_{m,m+1}^{(n+k)} \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_{m,m+k}^{(n+k)} \rangle \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle \phi_n, E_m^{(n)} \rangle \\ \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, E_m^{(n+k)} \rangle \end{pmatrix}$$

Posons:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \langle \phi_n, g_{m,m+1}^{(n)} \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{m,m+k}^{(n)} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \langle \phi_{n+k}, g_{m,m+1}^{(n+k)} \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_{m,m+k}^{(n+k)} \rangle \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \langle \phi_n, E_m^{(n)} \rangle \\ \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, E_m^{(n+k)} \rangle \end{pmatrix} .$$

Alors, on a:

$$E_{k+m}^{(n)} = E_m^{(n)} - x_1 \cdot g_{m,m+1}^{(n)} - x_2 \cdot g_{m,m+2}^{(n)} - \cdots - x_k \cdot g_{m,m+k}^{(n)} .$$

Il en est de même pour $g_{k+m,i}^{(n)}$

$$g_{k+m,i}^{(n)} = g_{m,i}^{(n)} - y_1 \cdot g_{m,m+1}^{(n)} - y_2 \cdot g_{m,m+2}^{(n)} - \cdots - y_k \cdot g_{m,m+k}^{(n)}$$

où les y_i sont la solution du système linéaire suivant:

$$\begin{pmatrix} 1 & \langle \phi_n, g_{m,m+1}^{(n)} \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{m,m+k}^{(n)} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \langle \phi_{n+k}, g_{m,m+1}^{(n+k)} \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_{m,m+k}^{(n+k)} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \phi_n, g_{m,i}^{(n)} \rangle \\ \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, g_{m,i}^{(n+k)} \rangle \end{pmatrix} .$$

Maintenant, on reprend l'exemple $n^0 10$, utilisant le Théorème 5, on obtient:

x	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	ϕ_n
$E_5^{(0)}$	$\begin{pmatrix} 0.89 \cdot 10^{-15} \\ 0.22 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.25 \cdot 10^{-13} \\ 0.20 \cdot 10^{-14} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.12 \cdot 10^{-13} \\ 0.13 \cdot 10^{-14} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.98 \cdot 10^{-14} \\ 0.89 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$E_5^{(0)}$	$\begin{pmatrix} -0.99 \cdot 10^{-13} \\ 0.98 \cdot 10^{-13} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.63 \cdot 10^{-13} \\ 0.61 \cdot 10^{-13} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.34 \cdot 10^{-13} \\ -0.37 \cdot 10^{-13} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.16 \cdot 10^{-13} \\ 0.12 \cdot 10^{-13} \end{pmatrix}$	$0.2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On voit qu'avec la règle particulière du Théorème 5, $\forall x$ et $\forall \phi_n$ choisis, l'erreur est toujours du même ordre de grandeur que la précision de l'ordinateur utilisé.

Théorème 6:

Si les suites $(g_i(n))_n$ sous la forme (1) vérifient les propriétés (A) (ou (C)), et si la suite (ϕ_n) vérifie la propriété (B) (ou (D)), d'après le Théorème 2, on a:

$$E_m^{(n)} - s = a_{m+1} \cdot g_{m,m+1}^{(n)} + a_{m+2} \cdot g_{m,m+2}^{(n)} + \cdots$$

avec les suites $(g_{m,m+i}^{(n)})_n$ vérifient la propriété (H').

De plus, on a:

$$\forall k \geq 0 \quad E_{k+m}^{(n)} - s = a_{k+m+1} \cdot g_{k+m,k+m+1}^{(n)} + a_{k+m+2} \cdot g_{k+m,k+m+2}^{(n)} + \cdots$$

avec les suites $(g_{k+m,k+m+i}^{(n)})_n$ vérifient la propriété (H').

Dém: La démonstration est basée sur le fait que les termes $E_k^{(n)}$ et les termes $g_{k,i}^{(n)}$ sont les mêmes dans les Théorèmes 1 et 5. Alors la démonstration est donc évidente en tenant compte des indices inférieurs.

6 Une seconde transformation de Wimp

Dans la transformation de Wimp (2), que nous venons d'étudier, $E_k(s_n)$ qui est calculée à partir de $s_n, \dots, s_{n+k}$; $\phi_n, \dots, \phi_{n+k}$ et $g_i(n), \dots, g_i(n+k)$ $i = 1, \dots, k$. Si l'on remplace la première ligne du numérateur de (2) $s_n, 0, g_1(n), \dots, g_k(n)$ par $s_{n+k}, 0, g_1(n+k), \dots, g_k(n+k)$, on obtient la seconde transformation de Wimp qui est définie par:

$$\tilde{E}_k(s_n) = \frac{\begin{vmatrix} s_{n+k} & 0 & g_1(n+k) & \cdots & g_k(n+k) \\ \langle \phi_n, s_n \rangle & 1 & \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_k(n) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, s_{n+k} \rangle & 1 & \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_k(n+k) \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_k(n) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_k(n+k) \rangle \end{vmatrix}}. \quad (12)$$

Il est bien évident que (2) et (12) ne sont pas indépendents. On a la:

Propriété 5:

$\forall n \geq 0, \forall k \geq 0, \quad \langle \phi_n, E_k(s_n) \rangle = (-1)^k \langle \phi_{n+k}, \tilde{E}_k(s_n) \rangle = E_k(\langle \phi_n, s_n \rangle)$
où $E_k(\langle \phi_n, s_n \rangle)$ est la E -transformation scalaire appliquée à la suite $\langle \phi_n, s_n \rangle$

Dém: La démonstration est triviale à partir de (2) et (12)

Une autre propriété évidente est la:

Propriété 6:

Soient $E_k(s_n)$ et $\tilde{E}_k(s_n)$ les éléments de $\mathcal{C}^p$ obtenue en appliquant respectivement (2) et (12) aux éléments suivants:

$$s_n, s_{n+1}, \dots, s_{n+k} \quad \phi_n, \phi_{n+1}, \dots, \phi_{n+k} \quad g_i(n), g_i(n+1), \dots, g_i(n+k) \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Soient $E_k(u_n)$ et $\tilde{E}_k(u_n)$ les éléments de $\mathcal{C}^p$ obtenue en appliquant respectivement (2) et (12) aux éléments suivants:

$$u_n = s_{n+k}, u_{n+1} = s_{n+k-1}, \dots, u_{n+k} = s_n. \quad \psi_n = \phi_{n+k}, \psi_{n+1} = \phi_{n+k-1}, \dots, \psi_{n+k} = \phi_n.$$

$$f_i(n) = g_i(n+k), f_i(n+1) = g_i(n+k-1), \dots, f_i(n+k) = g_i(n) \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Alors: $E_k(s_n) = \tilde{E}_k(u_n) \quad E_k(u_n) = \tilde{E}_k(s_n)$

Les règles de calcul récursif pour la seconde transformation de Wimp $\tilde{E}_k(s_n)$ sont les suivantes:

$$\tilde{E}_0^{(n)} = s_n \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{0,i}^{(n)} &= g_i(n) \quad i = 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \\ \text{Pour } k &= 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_k^{(n)} &= \tilde{E}_{k-1}^{(n+1)} - \frac{\langle \phi_{n+k}, \tilde{E}_{k-1}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \tilde{E}_{k-1}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \tilde{g}_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \tilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} \\ \tilde{g}_{k,i}^{(n)} &= \tilde{g}_{k-1,i}^{(n+1)} - \frac{\langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{k-1,i}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \tilde{g}_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \tilde{g}_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \tilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} \quad i = k+1, k+2, \dots \end{aligned}$$

Théorème 7:

$$\tilde{E}_k^{(n)} = \tilde{E}_k(s_n) \quad k, n = 0, 1, \dots$$

Dém: Comme dans le Théorème 1, on va démontrer simultanément que $\tilde{g}_{k,i}^{(n)}$ satisfait (12) où la première colonne du numérateur est remplacée par $g_i(n+k)$, $\langle \phi_n, g_i(n) \rangle, \dots, \langle \phi_{n+k}, g_i(n+k) \rangle$.

On pose:

$$\tilde{E}_k^{(n)} = \frac{\tilde{N}_k^{(n)}}{D_k^{(n)}} \quad \text{et} \quad \tilde{g}_{k,i}^{(n)} = \frac{\tilde{N}_{k,i}^{(n)}}{D_k^{(n)}}$$

où $\tilde{N}_k^{(n)}$ peut s'écrire aussi:

$$\tilde{N}_k^{(n)} = (-1)^k \cdot \begin{vmatrix} s_{n+k} & 0 & g_1(n+k) & \cdots & g_k(n+k) \\ \langle \phi_{n+1}, s_{n+1} \rangle & 1 & \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_k(n+1) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, s_{n+k} \rangle & 1 & \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_k(n+k) \rangle \\ \langle \phi_n, s_n \rangle & 1 & \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_k(n) \rangle \end{vmatrix}.$$

Utilisant la généralisation de l'identité Sylvester, on a:

$$(-1)^k \tilde{N}_k^{(n)} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} = \tilde{N}_{k-1}^{(n+1)} \cdot (-1)^k D_k^{(n)} - (-1)^k \tilde{N}_{k-1,k}^{(n+1)} \cdot (-1)^k A_k^{(n)}$$

où $A_k^{(n)}$ est défini par (4).

Divisons $D_{k-1}^{(n+1)} D_k^{(n)}$, on obtient:

$$\frac{\tilde{N}_k^{(n)}}{D_k^{(n)}} = \frac{\tilde{N}_{k-1}^{(n+1)}}{D_{k-1}^{(n+1)}} - \frac{\tilde{N}_{k-1,k}^{(n+1)}}{D_{k-1}^{(n+1)}} \cdot (-1)^k \frac{A_k^{(n)}}{D_k^{(n)}}.$$

Il suffit donc de démontrer que:

$$\frac{A_k^{(n)}}{D_k^{(n)}} = (-1)^k \frac{\langle \phi_{n+k}, \tilde{E}_{k-1}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \tilde{E}_{k-1}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \tilde{g}_{k-1,k}^{(n)} \rangle}.$$

Or, comme dans la démonstration du Théorème 1, d'après le Corollaire 1, on a:

$$A_k^{(n)} \cdot \begin{vmatrix} \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_{k-1}(n+1) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k-1}, g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k-1}, g_{k-1}(n+k-1) \rangle \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \langle \phi_n, s_n \rangle & \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{k-1}(n) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k-1}, s_{n+k-1} \rangle & \langle \phi_{n+k-1}, g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k-1}, g_{k-1}(n+k-1) \rangle \end{vmatrix} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \\
&\quad - D_{k-1}^{(n)} \cdot \begin{vmatrix} \langle \phi_{n+1}, s_{n+1} \rangle & \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_{k-1}(n+1) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, s_{n+k} \rangle & \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_{k-1}(n+k) \rangle \end{vmatrix} \underline{\text{Lemme 1}} \\
&= (-1)^{k+3} \begin{vmatrix} \langle \phi_{n+k-1}, s_{n+k-1} \rangle & 0 & \langle \phi_{n+k-1}, g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k-1}, g_{k-1}(n+k-1) \rangle \\ \langle \phi_n, s_n \rangle & 1 & \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{k-1}(n) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k-1}, s_{n+k-1} \rangle & 1 & \langle \phi_{n+k-1}, g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k-1}, g_{k-1}(n+k-1) \rangle \end{vmatrix} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \\
&\quad - D_{k-1}^{(n)} \cdot (-1)^{k+3} \begin{vmatrix} \langle \phi_{n+k}, s_{n+k} \rangle & 0 & \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_{k-1}(n+k) \rangle \\ \langle \phi_{n+1}, s_{n+1} \rangle & 1 & \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_{k-1}(n+1) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, s_{n+k} \rangle & 1 & \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_{k-1}(n+k) \rangle \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{k+3} \left(\langle \phi_{n+k-1}, \widetilde{N}_{k-1}^{(n)} \rangle \cdot D_{k-1}^{(n+1)} - D_{k-1}^{(n)} \cdot \langle \phi_{n+k}, \widetilde{N}_{k-1}^{(n+1)} \rangle \right) \\
&= (-1)^k \left(D_{k-1}^{(n)} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \langle \phi_{n+k}, \widetilde{E}_{k-1}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \widetilde{E}_{k-1}^{(n)} \rangle \cdot D_{k-1}^{(n)} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \right). \quad (14)
\end{aligned}$$

D'autre part, utilisant la generalisation de l'identité Sylvester, on a:

$$\begin{aligned}
&D_k^{(n)} \cdot \begin{vmatrix} \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_{k-1}(n+1) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k-1}, g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k-1}, g_{k-1}(n+k-1) \rangle \end{vmatrix} \\
&= D_{k-1}^{(n)} \cdot \begin{vmatrix} \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_k(n+1) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_k(n+k) \rangle \end{vmatrix} \\
&\quad - \begin{vmatrix} \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_k(n) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k-1}, g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k-1}, g_k(n+k-1) \rangle \end{vmatrix} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \underline{\text{Lemme 1}} \\
&= (-1)^{k+1} (-1)^{k-1} \left\{ D_{k-1}^{(n)} \cdot \begin{vmatrix} \langle \phi_{n+k}, g_k(n+k) \rangle & 0 & \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_{k-1}(n+k) \rangle \\ \langle \phi_{n+1}, g_k(n+1) \rangle & 1 & \langle \phi_{n+1}, g_1(n+1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+1}, g_{k-1}(n+1) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, g_k(n+k) \rangle & 1 & \langle \phi_{n+k}, g_1(n+k) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k}, g_{k-1}(n+k) \rangle \end{vmatrix} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left| \begin{array}{cccc} \langle \phi_{n+k-1}, g_k(n+k-1) \rangle & 0 & \langle \phi_{n+k-1}, g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{k-1}(n) \rangle \\ \langle \phi_n, g_k(n) \rangle & 1 & \langle \phi_n, g_1(n) \rangle & \cdots & \langle \phi_n, g_{k-1}(n) \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k-1}, g_k(n+k-1) \rangle & 1 & \langle \phi_{n+k-1}, g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle \phi_{n+k-1}, g_{k-1}(n+k-1) \rangle \end{array} \right| \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \Bigg\} \\
& = D_{k-1}^{(n)} \cdot \langle \phi_{n+k}, \widetilde{N}_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \widetilde{N}_{k-1,k}^{(n)} \rangle \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \\
& = D_{k-1}^{(n)} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} \cdot \langle \phi_{n+k}, \widetilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \widetilde{g}_{k-1,k}^{(n)} \rangle \cdot D_{k-1}^{(n)} \cdot D_{k-1}^{(n+1)}. \tag{15}
\end{aligned}$$

On divise (14) par (15) et on obtient:

$$\frac{A_k^{(n)}}{D_k^{(n)}} = (-1)^k \frac{\langle \phi_{n+k}, \widetilde{E}_{k-1}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \widetilde{E}_{k-1}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+k}, \widetilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \widetilde{g}_{k-1,k}^{(n)} \rangle}.$$

De façon similaire, pour la règle auxiliaire, il suffit de remplacer $\widetilde{N}_k^{(n)}$, s_n et $\widetilde{E}_k^{(n)}$ respectivement par $\widetilde{N}_{k,i}^{(n)}$, $g_i(n)$ et $\widetilde{g}_{k,i}^{(n)}$. ■

Remarque:

Si $\phi_{n+i} = y$, $i = 0, 1, \dots, k$ alors l'expression (12) devient la 2^{ième} E -transformation vectorielle qui est définie par:

$$\widetilde{E}_k(s_n) = \frac{\left| \begin{array}{cccc} s_{n+k} & g_1(n+k) & \cdots & g_k(n+k) \\ \langle y, \Delta s_n \rangle & \langle y, \Delta g_1(n) \rangle & \cdots & \langle y, \Delta g_k(n) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y, \Delta s_{n+k-1} \rangle & \langle y, \Delta g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle y, \Delta g_k(n+k-1) \rangle \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{ccc} \langle y, \Delta g_1(n) \rangle & \cdots & \langle y, \Delta g_k(n) \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y, \Delta g_1(n+k-1) \rangle & \cdots & \langle y, \Delta g_k(n+k-1) \rangle \end{array} \right|}$$

et l'algorithme correspondant qui est déduit de (13) est:

$$\begin{aligned}
& \widetilde{E}_0^{(n)} = s_n \quad n = 0, 1, \dots \\
& \widetilde{g}_{0,i}^{(n)} = g_i(n) \quad i = 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \\
& \text{Pour } k = 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \\
& \widetilde{E}_k^{(n)} = \widetilde{E}_{k-1}^{(n+1)} - \frac{\langle y, \Delta \widetilde{E}_{k-1}^{(n)} \rangle}{\langle y, \Delta \widetilde{g}_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \widetilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} \\
& \widetilde{g}_{k,i}^{(n)} = \widetilde{g}_{k-1,i}^{(n+1)} - \frac{\langle y, \Delta \widetilde{g}_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle y, \Delta \widetilde{g}_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \widetilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} \quad i = k+1, k+2, \dots
\end{aligned}$$

Si la dimension p des vecteurs est égale à 1, on retrouve bien évidemment le E -algorithme scalaire:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_k^{(n)} &= \tilde{E}_{k-1}^{(n+1)} - \frac{\Delta \tilde{E}_{k-1}^{(n)}}{\Delta \tilde{g}_{k-1,k}^{(n)}} \tilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} = \tilde{E}_{k-1}^{(n)} - \frac{\Delta \tilde{E}_{k-1}^{(n)}}{\Delta \tilde{g}_{k-1,k}^{(n)}} \tilde{g}_{k-1,k}^{(n)} \\ \tilde{g}_{k,i}^{(n)} &= \tilde{g}_{k-1,i}^{(n+1)} - \frac{\Delta \tilde{g}_{k-1,i}^{(n)}}{\Delta \tilde{g}_{k-1,k}^{(n)}} \tilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} = \tilde{g}_{k-1,i}^{(n)} - \frac{\Delta \tilde{g}_{k-1,i}^{(n)}}{\Delta \tilde{g}_{k-1,k}^{(n)}} \tilde{g}_{k-1,k}^{(n)}\end{aligned}$$

7 Propriétés et résultats de convergence de la seconde transformation de Wimp

Cette seconde transformation de Wimp possède des propriétés analogues à celles de la première. D'abord, on voit la:

Proposition 8:

$$\forall k \geq 0, \quad \tilde{f}_{k,i}^{(n)} = \langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{k,i}^{(n)} \rangle \quad \forall i \geq k+1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

où $\tilde{f}_{k,i}^{(n)}$ est définie par:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{0,i}^{(n)} &= \langle \phi_n, g_i(n) \rangle \quad \forall i \geq 1 \\ \tilde{f}_{k,i}^{(n)} &= \tilde{f}_{k-1,i}^{(n+1)} - \frac{\tilde{f}_{k-1,i}^{(n+1)} - \tilde{f}_{k-1,i}^{(n)}}{\tilde{f}_{k-1,k}^{(n+1)} - \tilde{f}_{k-1,k}^{(n)}} \tilde{f}_{k-1,k}^{(n+1)} \quad \forall k \geq 1, \quad \forall i \geq k+1\end{aligned} \quad (16)$$

Dém: (par récurrence)

Soit $k = 0$, alors par définition on a $\tilde{f}_{0,i}^{(n)} = \langle \phi_n, g_i(n) \rangle = \langle \phi_n, \tilde{g}_{0,i}^{(n)} \rangle \quad \forall i \geq 1$. Supposons que la propriété soit vraie jusqu'à l'indice $k-1$, alors:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{k,i}^{(n)} &= \tilde{f}_{k-1,i}^{(n+1)} - \frac{\tilde{f}_{k-1,i}^{(n+1)} - \tilde{f}_{k-1,i}^{(n)}}{\tilde{f}_{k-1,k}^{(n+1)} - \tilde{f}_{k-1,k}^{(n)}} \tilde{f}_{k-1,k}^{(n+1)} = \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{k-1,i}^{(n+1)} \rangle - \frac{\langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{k-1,i}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \tilde{g}_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \tilde{g}_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle \\ &= \left\langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{k-1,i}^{(n+1)} - \frac{\langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{k-1,i}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \tilde{g}_{k-1,i}^{(n)} \rangle}{\langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} \rangle - \langle \phi_{n+k-1}, \tilde{g}_{k-1,k}^{(n)} \rangle} \tilde{g}_{k-1,k}^{(n+1)} \right\rangle \\ &= \langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{k,i}^{(n)} \rangle.\end{aligned}$$

■

Remarque:

Même si $g_{k,i}^{(n)}$ et $\tilde{g}_{k,i}^{(n)}$ sont définis différemment, on trouve que $f_{k,i}^{(n)}$ et $\tilde{f}_{k,i}^{(n)}$ identiques.

D'après cette remarque, toutes les propriétés et tous les résultats de la première transformation de Wimp sont encore valables pour la seconde. Mais il faut noter que: pour la première

transformation de Wimp, dans la démonstration de la Proposition 4, Page 249 dans [2], la propriété $\left| \frac{g_{k-1,i}^j(n)}{g_i^{j_i}(n)} \right| \leq C_{i,j,k-1}$ doit être remplacée par $\left| \frac{\tilde{g}_{k-1,i}^j(n+1)}{g_i^{j_i}(n)} \right| \leq \tilde{C}_{i,j,k-1}$ pour la seconde. En effet $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_i^{j_i}(n+1)}{g_i^{j_i}(n)} = b_i$, alors on a : $\left| \frac{\tilde{g}_{k-1,i}^j(n+1)}{g_i^{j_i}(n)} \right| = \left| \frac{\tilde{g}_{k-1,i}^j(n+1)}{g_i^{j_i}(n+1)} \right| \cdot \left| \frac{g_i^{j_i}(n+1)}{g_i^{j_i}(n)} \right| \leq C_{i,j,k-1} \cdot |b_i| = \tilde{C}_{i,j,k-1}$.

Pour les problèmes d'instabilité numérique, la seconde transformation de Wimp peut se traiter comme la première. Quant à la règle singulière, on a évidemment le :

Théorème 8:

$$\forall k \geq 1$$

$$\tilde{E}_{k+m}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{E}_m^{(n+k)} & 0 & \tilde{g}_{m,m+1}^{(n+k)} & \dots & \tilde{g}_{m,m+k}^{(n+k)} \\ \langle \phi_n, \tilde{E}_m^{(n)} \rangle & 1 & \langle \phi_n, \tilde{g}_{m,m+1}^{(n)} \rangle & \dots & \langle \phi_n, \tilde{g}_{m,m+k}^{(n)} \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_{n+k}, \tilde{E}_m^{(n+k)} \rangle & 1 & \langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{m,m+1}^{(n+k)} \rangle & \dots & \langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{m,m+k}^{(n+k)} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \langle \phi_n, \tilde{g}_{m,m+1}^{(n)} \rangle & \dots & \langle \phi_n, \tilde{g}_{m,m+k}^{(n)} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{m,m+1}^{(n+k)} \rangle & \dots & \langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{m,m+k}^{(n+k)} \rangle \end{vmatrix}} \quad (17)$$

et une expression similaire pour $\tilde{g}_{k+m,i}^{(n)}$ en remplaçant $\tilde{E}_m^{(n+k)}$, $\langle \phi_n, \tilde{E}_m^{(n)} \rangle$, ..., $\langle \phi_{n+k}, \tilde{E}_m^{(n+k)} \rangle$ par $\tilde{g}_{m,i}^{(n+k)}$, $\langle \phi_n, \tilde{g}_{m,i}^{(n)} \rangle$, ..., $\langle \phi_{n+k}, \tilde{g}_{m,i}^{(n+k)} \rangle$.

Exemples numériques:

Reprenant les exemples $n^01 - n^07$ et n^010 de la première transformation de Wimp; nous obtenons évidemment les mêmes résultats pour la seconde.

Exemple n^01^* :

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} \rho_i^n \\ \rho_i^n / (n+1) \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = 0.9, \quad \rho_2 = 0.4, \quad \rho_3 = 0.1, \quad \rho_4 = 0.08, \quad \rho_5 = 0.06$$

$$\text{Posons: } e_n = -\log_{10}(\|s_n - s\|_\infty) \quad \text{et} \quad \tilde{f}_k^{(n)} = -\log_{10}(\|\tilde{E}_k^{(n)} - s\|_\infty)$$

		$\phi_n = (1, 1)^T$	$\phi_n = (2 + 0.8^n)(1, 1)^T$
n	e_{n+2}	$\tilde{f}_2^{(n)}$	$\tilde{f}_2^{(n)}$
0	-0.080	-1.58	-1.42
1	0.064	-0.47	-0.34
2	0.150	0.60	0.71
3	0.214	1.66	1.76
4	0.268	2.72	2.80
5	0.317	3.76	3.83
6	0.365	4.79	4.85
7	0.411	5.82	5.87
8	0.457	6.84	6.88
9	0.503	7.86	7.89
10	0.549	8.87	8.90
11	0.595	9.89	9.91
12	0.641	10.9	10.9
13	0.686	11.9	11.9
14	0.732	12.9	12.9
15	0.778	13.9	13.9
16	0.824	14.9	14.9
17	0.869	15.6	15.5

Exemple n^02^* :

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} (n+1)^{-i+1} \rho_i^n \\ (n+1)^{-i} \rho_i^n \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = 0.8, \quad \rho_2 = 0.4, \quad \rho_3 = 0.2, \quad \rho_4 = 0.09, \quad \rho_5 = 0.06$$

		$\phi_n = (1+0.5^n)(1,0)^T$
n	e_{n+1}	$\tilde{f}_1^{(n)}$
0	0.194	0.41
1	0.291	1.33
2	0.388	2.28
3	0.485	3.25
4	0.581	4.23
5	0.678	5.21
6	0.775	6.21
7	0.872	7.21
8	0.969	8.21
9	1.07	9.22
10	1.16	10.2
11	1.26	11.2
12	1.36	12.3
13	1.45	13.3
14	1.55	14.3
15	1.65	15.3
16	1.74	16.3
17	1.84	17.4

Exemple n^03^* :

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} (n+1)^{-i} 0.5^n \\ (n+1)^{-i-1} 0.5^n \end{pmatrix}$$

		$\phi_n = \left(3+\frac{1}{n^2+1}\right)(1,1)^T$
n	e_{n+4}	$\tilde{f}_4^{(n)}$
0	1.71	4.82
1	2.13	5.59
2	2.52	6.64
3	2.89	7.54
4	3.26	8.35
5	3.62	9.10
6	3.97	9.79
7	4.32	10.5
8	4.66	11.1
9	5.00	11.7
10	5.33	12.3
11	5.66	12.8
12	5.99	13.4
13	6.32	13.9
14	6.65	14.4
15	6.98	14.9
16	7.30	15.4

Exemple n^{04*} :

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} (n+1)^{-i} \\ (n+1)^{-i-1} \end{pmatrix}$$

		$\phi_n = (1, 1)^T$	$\phi_n = (1 + 0.7^n)(1, 1)^T$
n	e_{n+4}	$\tilde{f}_4^{(n)}$	$\tilde{f}_4^{(n)}$
0	0.506	1.45	1.64
2	0.711	2.74	2.83
4	0.852	3.51	3.49
6	0.959	4.06	4.03
8	1.04	4.50	4.49
10	1.12	4.87	4.87
12	1.18	5.18	5.19
14	1.23	5.45	5.46
16	1.28	5.69	5.70
18	1.32	5.91	5.92
20	1.36	6.11	6.11
22	1.40	6.29	6.29
24	1.43	6.46	6.46
26	1.46	6.61	6.61
28	1.49	6.76	6.76
30	1.52	6.89	6.89
32	1.54	7.02	7.02
34	1.57	7.14	7.14
36	1.59	7.26	7.26

Exemple n^{05*} :

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} (n+1)^{-2i+1} \\ (n+1)^{-2i} \end{pmatrix}$$

On obtient:

		$\phi_n = \left(1 + \frac{1}{2(n+1)^2}, 0\right)^T$
n	e_{n+4}	$\tilde{f}_4^{(n)}$
0	0.664	2.77
2	0.827	5.37
4	0.943	7.06
6	1.03	7.48
8	1.11	7.88
10	1.17	8.28
12	1.23	8.64
14	1.28	8.97
16	1.32	9.27
18	1.36	9.54
20	1.40	9.79
22	1.43	10.0
24	1.46	10.2
26	1.49	10.4
28	1.52	10.6
30	1.54	10.8
32	1.57	11.0
34	1.59	11.1
36	1.61	11.3

Exemple n^{06*} :

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} (n+1)^{-1}(\log(n+1))^{-i} \\ (n+1)^{-1}(\log(n+1))^{-i-3} \end{pmatrix}$$

On obtient:

		$\phi_n = \left(2 + \frac{1}{(n+1)}\right) (1, 1)^T$
n	e_{n+4}	$\tilde{f}_4^{(n)}$
10	1.22	4.19
14	1.40	4.56
18	1.53	4.83
22	1.64	5.06
26	1.73	5.24
30	1.81	5.40
34	1.88	5.54
38	1.94	5.66
42	2.00	5.77
46	2.05	5.87
50	2.10	5.96
54	2.14	6.04
58	2.18	6.12
62	2.22	6.19
66	2.25	6.26
70	2.28	6.32
74	2.31	6.38

Exemple n^{07*} :

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^5 i \begin{pmatrix} (n+1)^{-\frac{(i+1)}{2}} \\ (n+1)^{-\frac{(i+3)}{2}} \end{pmatrix}$$

On obtient:

		$\phi_n = (4+0.6^n, 0)^T$
n	e_{n+4}	$f_4^{(n)}$
10	0.92	3.34
14	1.05	3.69
18	1.16	3.96
22	1.25	4.19
26	1.32	4.39
30	1.38	4.55
34	1.44	4.70
38	1.49	4.84
42	1.54	4.96
46	1.58	5.07
50	1.61	5.17
54	1.65	5.27
58	1.68	5.36
62	1.71	5.44
66	1.74	5.52
70	1.77	5.59
74	1.79	5.66

Exemple $n^0 10^*$:

Soit $s_n = g_1(n) + \sum_{i=2}^5 i \cdot g_i(n)$
avec

$$g_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g_1(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, g_1(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, g_1(3) = \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}, g_1(4) = \begin{pmatrix} 3 \\ x \end{pmatrix}, g_1(5) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $g_1(n) = \frac{1}{2} \cdot g_1(n - 6) \quad n = 6, 7, \dots$

$$g_2(n) = \begin{pmatrix} 0.7^n \\ 0.7^n/9 \end{pmatrix}, g_3(n) = \begin{pmatrix} 0.1^n \\ 0.1^n/9 \end{pmatrix}, g_4(n) = \begin{pmatrix} 0.08^n \\ 0.08^n/9 \end{pmatrix}, g_5(n) = \begin{pmatrix} 0.06^n \\ 0.06^n/9 \end{pmatrix}$$

Pour cet exemple, dans la seconde transformation de Wimp (12) avec $k = 5$, doit donner:

$$\tilde{E}_5^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \phi_n, \quad \forall n.$$

Mais, avec différentes valeurs de x , on obtient:

Algorithme (13)

x	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	ϕ_n
$\tilde{E}_5^{(0)}$	$\begin{pmatrix} -0.41.10^{-12} \\ -0.10.10^{-14} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.84.10^{-10} \\ -0.21.10^{-12} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.63.10^{-6} \\ 0.16.10^{-8} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.65.10^{-2} \\ -0.17.10^{-4} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\tilde{E}_5^{(0)}$	$\begin{pmatrix} 0.37.10^{-15} \\ 0.13.10^{-16} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.65.10^{-15} \\ 0.21.10^{-16} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.73.10^{-15} \\ 0.15.10^{-16} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.11.10^{-14} \\ -0.30.10^{-17} \end{pmatrix}$	$0.2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Règle particulière (Théorème 8)

x	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	ϕ_n
$\tilde{E}_5^{(0)}$	$\begin{pmatrix} -0.14.10^{-14} \\ 0.13.10^{-15} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.25.10^{-13} \\ 0.73.10^{-15} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.14.10^{-13} \\ 0.35.10^{-15} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.90.10^{-14} \\ 0.55.10^{-15} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\tilde{E}_5^{(0)}$	$\begin{pmatrix} 0.30.10^{-12} \\ -0.54.10^{-13} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.38.10^{-11} \\ -0.19.10^{-12} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.23.10^{-11} \\ -0.12.10^{-12} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.27.10^{-11} \\ -0.10.10^{-12} \end{pmatrix}$	$0.2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

CHAPITRE 3

Règles Particulières de Type *E*

0 Introduction

Il est déjà connu que la E -transformation contient la plupart des transformations de suites actuelles, un exemple simple, c'est la transformation de Shanks, avec le choix $g_i(n) = \Delta s_{n+i-1}$ [17]. Inversement, si l'on a une transformation comme celle de Shanks, peut-on y introduire des suites auxiliaires $(g_i(n))_n$ $i = 1, 2, \dots, k$ pour réaliser la transformation ? La réponse sera affirmative, et d'ailleurs, on va voir que cette méthode, grâce à l'introduction d'une règle auxiliaire, nous permet de traiter les problèmes de singularités ou d'instabilité numérique. Comme ces algorithmes et leurs règles particulières ont la même forme que E -algorithme, cette méthode sera appelée type E .

Utilisant ces techniques, dans les trois sections suivantes, on va discuter respectivement:

- 1 le W -algorithme et son algorithme topologique.
- 2 les polynômes orthogonaux adjacents et leurs algorithmes.
- 3 l'interpolation rationnelle généralisée.

1 W -algorithme et son algorithme topologique

1.1 W -algorithme et sa règle particulière

Soit à calculer les rapports de déterminants:

$$E_k^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+k} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+k} & a_{n+k+1} & \cdots & a_{n+2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{n+2} & \cdots & a_{n+k+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+k+1} & \cdots & a_{n+2k} \end{vmatrix}} = \frac{H_{k+1}(a_n)}{H_k(a_{n+2})} = \frac{H_{k+1}^{(n)}}{H_k^{(n+2)}} \quad \text{où } a_n \in \mathcal{C}$$

pour différentes valeurs de k et de n .

Ces rapports de déterminants peuvent être calculés par les méthodes suivantes [25]:

(1) La relation de récurrences des déterminants de Hankel:

$$\left| \begin{array}{l} H_0^{(n)} = 1, \quad H_1^{(n)} = a_n \quad n = 0, 1, \dots \\ H_{k+1}^{(n)} = \frac{H_k^{(n)} H_k^{(n+2)} - [H_k^{(n+1)}]^2}{H_{k-1}^{(n+2)}} \quad n = 0, 1, \dots \quad k = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

et on a:
$$E_k^{(n)} = \frac{H_{k+1}^{(n)}}{H_k^{(n+2)}}$$

(2) Le $q - d$ algorithm:

$$\left\{ \begin{array}{ll} q_0^{(n)} = e_0^{(n)} = 0, & q_1^{(n)} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad n = 0, 1, \dots \\ q_{k+1}^{(n)} + e_{k+1}^{(n)} = q_{k+1}^{(n+1)} + e_k^{(n+1)} & n, k = 0, 1, \dots \\ e_k^{(n)} \cdot q_{k+1}^{(n)} = e_k^{(n+1)} \cdot q_k^{(n+1)} & n = 0, 1, \dots \quad k = 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

et on a: $E_{k+1}^{(n)} = E_k^{(n)} \cdot \frac{e_{k+1}^{(n)}}{q_{k+1}^{(n+1)}}$

(3) Le W -algorithm:

$$\left\{ \begin{array}{ll} W_{-1}^{(n)} = 0, & W_0^{(n)} = a_n \quad n = 0, 1, \dots \\ W_{2k+1}^{(n)} = W_{2k-1}^{(n+1)} + \frac{W_{2k}^{(n)}}{W_{2k}^{(n+1)}} & \\ W_{2k+2}^{(n)} = W_{2k}^{(n+1)} \cdot (W_{2k+1}^{(n)} - W_{2k+1}^{(n+1)}) & n, k = 0, 1, \dots \end{array} \right.$$

Wynn a démontré que [18]: $E_k^{(n)} = W_{2k}^{(n)}$

Eliminant les quantités d'indice inférieur impair qui sont des calculs intermédiaires, on obtient alors l'algorithme:

$$\left\{ \begin{array}{ll} W_{-2}^{(n)} = \infty, & W_0^{(n)} = a_n \quad n = 0, 1, \dots \\ W_{2k+2}^{(n)} = W_{2k}^{(n)} - [W_{2k}^{(n+1)}]^2 \left[\frac{1}{W_{2k}^{(n+2)}} - \frac{1}{W_{2k-2}^{(n+2)}} \right] & n, k = 0, 1, \dots \end{array} \right. \quad (1)$$

Cet algorithme peut être aussi démontré directement par la relation de récurrence des déterminants de Hankel:

En effet, d'après la relation de Hankel, on a:

$$H_{k+2}^{(n)} \cdot H_k^{(n+2)} = H_{k+1}^{(n)} \cdot H_{k+1}^{(n+2)} - [H_{k+1}^{(n+1)}]^2 \quad (2)$$

$$H_{k+1}^{(n+2)} \cdot H_{k-1}^{(n+4)} = H_k^{(n+2)} \cdot H_k^{(n+4)} - [H_k^{(n+3)}]^2 \quad (3)$$

Divisons (2) par $H_k^{(n+2)} H_{k+1}^{(n+2)}$ et (3) par $H_k^{(n+2)} H_{k+1}^{(n+2)} [H_k^{(n+3)}]^2$; on obtient:

$$\frac{H_{k+2}^{(n)}}{H_{k+1}^{(n+2)}} = \frac{H_{k+1}^{(n)}}{H_k^{(n+2)}} - \frac{[H_{k+1}^{(n+1)}]^2}{H_k^{(n+2)} H_{k+1}^{(n+2)}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{[H_k^{(n+3)}]^2} \cdot \left[\frac{H_{k-1}^{(n+4)}}{H_k^{(n+2)}} - \frac{H_k^{(n+4)}}{H_{k+1}^{(n+2)}} \right] = -\frac{1}{H_k^{(n+2)} H_{k+1}^{(n+2)}} \quad (5)$$

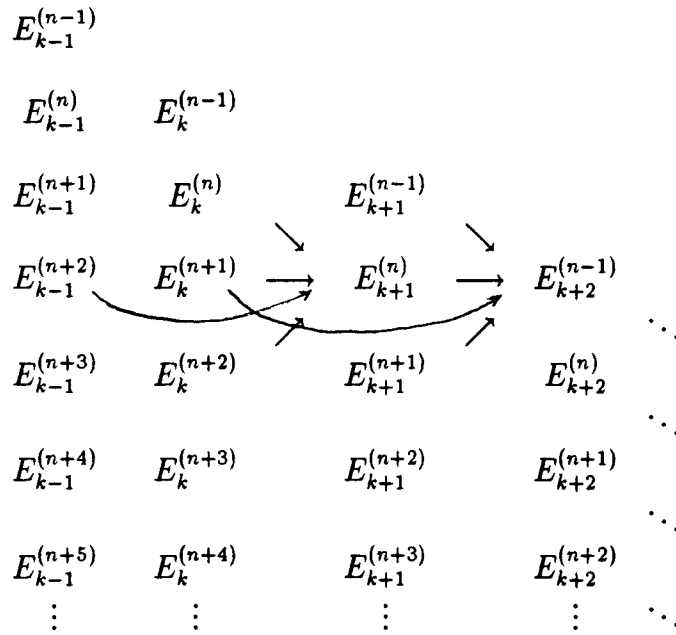
Remplaçons le terme $\frac{1}{H_k^{(n+2)} H_{k+1}^{(n+2)}}$ de (4) par celui de (5); on obtient:

$$E_{k+1}^{(n)} = E_k^{(n)} - [E_k^{(n+1)}]^2 \left[\frac{1}{E_k^{(n+2)}} - \frac{1}{E_{k-1}^{(n+2)}} \right]$$

qui n'est autre que la relation (1).

(4) Utilisation d'une règle auxiliaire:

On peut placer les quantités $E_k^{(n)}$ dans un tableau à double entrée: l'indice inférieur k représente une colonne et l'indice supérieur n une diagonale descendente. La quantité située la plus à droite est calculée à partir des quatre autres comme l'indiquent les flèches dans le schéma suivant:



S'il y a des $H_k^{(n)}$ qui sont nuls ou très petits, on voit que certains $E_k^{(n)}$ peuvent être nuls ou être très petits. Par exemple, on suppose que $E_k^{(n+2)} = 0$, les autres termes, qui concernent les calculs, sont différents de 0, et de ∞ . On a alors, d'après la relation (1):

$$E_{k+1}^{(n)} = \infty, \quad E_k^{(n+1)} = E_{k+1}^{(n+1)}$$

Il en résulte que $E_{k+2}^{(n-1)}$ devient indéterminé. Si $E_k^{(n+2)}$ est très petit, alors il y aura une grande erreur pour $E_{k+2}^{(n-1)}$. C'est le cas de l'instabilité numérique.

Pour éviter ce genre de problème, on introduit une suite auxiliaire, comme dans le E -algorithme.

On pose:

$$E_k^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+k} \\ g_1(n) & g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad g_{k,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_i(n) & g_i(n+1) & \cdots & g_i(n+k) \\ g_1(n) & g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}$$

Avec $g_i(n) = a_{n+i} \quad \forall i > k \quad \dots\dots\dots (5')$

On a les règles de l'algorithme suivantes (type E) :

$$\begin{aligned} E_0^{(n)} &= a_n & n &= 0, 1, \dots \\ g_{0,i}^{(n)} &= g_i(n) = a_{n+i} & i &= 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \\ \text{Pour } k &= 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots & & (6) \\ E_k^{(n)} &= E_{k-1}^{(n)} - E_{k-1}^{(n+1)} \cdot \frac{g_{k-1,k}^{(n)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)}} \\ g_{k,i}^{(n)} &= g_{k-1,i}^{(n)} - g_{k-1,i}^{(n+1)} \cdot \frac{g_{k-1,k}^{(n)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)}} & i &= k+1, k+2, \dots \end{aligned}$$

Dém: On pose:

$$E_k^{(n)} = \frac{NE_k^{(n)}}{DE_k^{(n)}} \quad \text{et} \quad g_{k,i}^{(n)} = \frac{Ng_{k,i}^{(n)}}{Dg_{k,i}^{(n)}}$$

On a:

$$DE_k^{(n)} = Dg_{k,i}^{(n)} \quad (7)$$

L'identité de Sylvester nous donne:

$$NE_k^{(n)} \cdot DE_{k-1}^{(n)} = NE_{k-1}^{(n)} \cdot DE_k^{(n)} - NE_{k-1}^{(n+1)} \cdot (-1)^{k-1} Ng_{k-1,k}^{(n)} \quad .$$

Divisons les deux membres par $DE_k^{(n)} DE_{k-1}^{(n)}$; on obtient:

$$E_k^{(n)} = E_{k-1}^{(n)} - \frac{NE_{k-1}^{(n+1)} \cdot (-1)^{k-1} Ng_{k-1,k}^{(n)}}{DE_k^{(n)} \cdot DE_{k-1}^{(n)}} \quad .$$

Compte tenu de $DE_k^{(n)} = (-1)^{k-1} Ng_{k-1,k}^{(n+1)}$ et de la relation (7), on a:

$$E_k^{(n)} = E_{k-1}^{(n)} - \frac{\frac{NE_{k-1}^{(n+1)}}{DE_{k-1}^{(n+1)}} \cdot \frac{(-1)^{k-1} Ng_{k-1,k}^{(n)}}{Dg_{k-1,k}^{(n)}}}{\frac{(-1)^{k-1} Ng_{k-1,k}^{(n+1)}}{Dg_{k-1,k}^{(n+1)}}} = E_{k-1}^{(n)} - \frac{E_{k-1}^{(n+1)} \cdot g_{k-1,k}^{(n)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)}} \quad .$$

Il en est de même pour $g_{k,i}^{(n)}$.

On voit facilement que $Ng_{k,k+1}^{(n)} = (-1)^k NE_k^{(n+1)}$. Donc, si $E_k^{(n+1)} = 0$, on a $g_{k,k+1}^{(n)} = 0$. Par conséquent, pour cet algorithme (6), les qualités intrinsèques du problème n'ont rien changé. Mais, grâce à la règle auxiliaire, on a l'algorithme particulier suivant:

Théorème 1:

$$E_{k+m}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} E_m^{(n)} & E_m^{(n+1)} & \dots & E_m^{(n+k)} \\ g_{m,m+1}^{(n)} & g_{m,m+1}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & g_{m,m+k}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{m,m+1}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad g_{k+m,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_{m,i}^{(n)} & \dots & g_{m,i}^{(n+k)} \\ g_{m,m+1}^{(n)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & \dots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{m,m+1}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}$$

avec $k \geq 1; \quad i > k + m.$

Dém: (analogue à celle de E -algorithme particulier)

On pose $\tilde{E}_k^{(n)}$ la quantité obtenue en utilisant l'algorithme (6) avec les initialisations: $\tilde{E}_0^{(n)} = E_m^{(n)}$ et $\tilde{g}_{0,i}^{(n)} = g_{m,m+i}^{(n)}$ m fixé. Alors, $\tilde{E}_k^{(n)}$ est donné par l'expression déterminantale du Théorème 1. Mais dans l'algorithme (6), chaque étape est obtenue à partir de la précédente. Donc, $\tilde{E}_k^{(n)}$ est la $(k+m)$ ^{ième} étape avec les initialisations usuelles. On a donc $\tilde{E}_k^{(n)} = E_{k+m}^{(n)}$. Il en est de même pour l'expression de $g_{k+m,i}^{(n)}$.

Ce théorème nous permet de calculer de la colonne $E_k^{(n)}$ à la colonne $E_{k+m}^{(n)}$ sans être obligé de savoir toutes les colonnes intermédiaires, de sorte qu'on peut éviter les problèmes de l'instabilité ou de singularité. Utilisons le complément de Schur, on obtient:

$$E_{k+m}^{(n)} = E_m^{(n)} - (E_m^{(n+1)}, \dots, E_m^{(n+k)}) \begin{pmatrix} g_{m,m+1}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_{m,m+1}^{(n)} \\ \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$g_{k+m,i}^{(n)} = g_{m,i}^{(n)} - (g_{m,i}^{(n+1)}, \dots, g_{m,i}^{(n+k)}) \begin{pmatrix} g_{m,m+1}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_{m,m+1}^{(n)} \\ \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Donc l'algorithme particulier peut être obtenu par résolution d'un système de k équations linéaires.

Pour illustrer le fonctionnement de cet algorithme particulier, donnons un exemple:

Soit à calculer $E_{15}^{(0)}$; supposons que, dans le calcul, on constate que le terme $E_3^{(0)}$ est très petit; pour éviter l'instabilité numérique, on calcule directement les $E_5^{(n)}$ (ou $E_6^{(n)}$, ou $E_7^{(n)}$) au lieu de calculer successivement $E_4^{(n)}$, $E_5^{(n)}$ (ou $E_4^{(n)}$, $E_5^{(n)}$, $E_6^{(n)}$ ou $E_4^{(n)}$, $E_5^{(n)}$, $E_6^{(n)}$, $E_7^{(n)}$). Après on peut réutiliser l'algorithme normal. Le processus se déroule selon le tableau suivant:

(Exemple: calcul direct de la colonne $E_3^{(n)}$ à la colonne $E_6^{(n)}$)

	E-tableau	G-tableau
Conditions	$E_0^{(0)}$	$g_{0,1}^{(0)} \dots g_{0,15}^{(0)}$
Initiales	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$
	$E_0^{(15)}$	$g_{0,1}^{(15)} \dots g_{0,15}^{(15)}$
1ère étape	$E_1^{(0)}$ ↓ ↘	$g_{1,2}^{(0)} \dots g_{1,15}^{(0)}$
	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$
	$E_1^{(14)}$	$g_{1,2}^{(14)} \dots g_{1,15}^{(14)}$
2ième étape	$E_2^{(0)}$ ↓ ↘	$g_{2,3}^{(0)} \dots g_{2,15}^{(0)}$
	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$
	$E_2^{(13)}$	$g_{2,3}^{(13)} \dots g_{2,15}^{(13)}$
3ième étape	$E_3^{(0)}$ ↓ ↘	$g_{3,4}^{(0)} \dots g_{3,15}^{(0)}$
	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$
	$E_3^{(12)}$	$g_{3,4}^{(12)} \dots g_{3,15}^{(12)}$
4ième étape	$E_6^{(0)}$ ↓ ↘	$g_{6,7}^{(0)} \dots g_{6,15}^{(0)}$
	$\vdots$	$\vdots$
Règle	$\vdots$	$\vdots$
Particulière	$E_6^{(9)}$	$g_{6,7}^{(9)} \dots g_{6,15}^{(9)}$
5ième étape	$E_7^{(0)}$ ↓ ↘	$g_{7,8}^{(0)} \dots g_{7,15}^{(0)}$
	$\vdots$	$\vdots$
	$\vdots$	$\vdots$
	$E_7^{(8)}$	$g_{7,8}^{(8)} \dots g_{7,15}^{(8)}$
⋮	$\vdots$	$\vdots$
12ième étape	$E_{14}^{(0)}$ ↓ ↘	$g_{14,15}^{(0)}$
	$E_{14}^{(1)}$	$g_{14,15}^{(1)}$
13ième étape	$E_{15}^{(0)}$	



Nombre d'opération:

Pour calculer $E_k^{(0)}$

(1) Relation de récurrences des déterminants de Hankel:

k^2 additions + $2k^2$ multiplications + (k^2+1) divisions
soit total $\approx 4k^2$ opérations quand k est grand.

(2) $q - d$ algorithme:

$2k^2$ additions + k^2 multiplications + $k(k+2)$ divisions
soit total $\approx 4k^2$ opérations quand k est grand.

(3) W -algorithme:

$k(2k+1)$ additions + k^2 multiplications + $k(k+1)$ divisions
soit total $\approx 4k^2$ opérations quand k est grand.

(4) W -algorithme avec indice inférieur pair (1):

$2k^2$ additions + $2k^2$ multiplications + $2k^2$ divisions
soit total $\approx 6k^2$ opérations quand k est grand.

(5) Algorithme de type E (6):

additions = multiplications = divisions = $\frac{k}{6}(k+1)(2k+1)$
soit total $\approx k^3$ opérations quand k est grand.

(6) Avec la règle particulière:

Le nombre d'opérations de cette règle particulière est assez compliqué à calculer, il varie en fonction de la dimension du système d'équations qu'on a choisit et de la position du terme où on a commencé (terme très petit ou zéro).

Tout d'abord, voyons le coût de méthode Gauss pour un système de n équations linéaires.

N	additions	multi.(divi.)
2	4	7
3	14	20
4	32	42
n	$\frac{1}{3}n(n^2+3n-4)$	$\frac{1}{6}n(2n^2+9n-5)$

Pour obtenir le résultat complet en utilisant (8), il faut ajouter encore n additions et n multiplications. Soit au total:

N	additions	multi.(divi.)
2	6	9
3	17	23
4	36	46
n	$\frac{1}{3}n(n^2+3n-1)$	$\frac{1}{6}n(2n^2+9n+1)$

Heureusement, d'après la formule (8), pour calculer $E_{k+m}^{(n)}$ et $g_{k+m,i}^{(n)}$, $i > k+m$, on a le même système à résoudre, soit:

$$\begin{pmatrix} g_{m,m+1}^{(n+1)} & \cdots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n+1)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{m,m+1}^{(n)} \\ \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} \end{pmatrix}$$

et d'ailleurs, dans le cas général, il suffit de prendre $n = 2, 3$ ou 4 . Le nombre d'opérations est donc le même ordre grandeur que celui de l'algorithme normal (6). Voyons un exemple:

Pour calculer $E_{15}^{(0)}$, on suppose que soit $E_3^{(n)}$ très petit (ou bien que $E_7^{(n)}$ très petit)

- (I) Utilisons l'algorithme normal (6).
- (II) Utilisons l'algorithme particulier avec un système de 2 équations: $n = 2$ de $E_3^{(n)}$ à $E_5^{(n)}$.
- (II') Utilisons l'algorithme particulier avec un système de 3 équations: $n = 3$ de $E_3^{(n)}$ à $E_6^{(n)}$.
- (II'') Utilisons l'algorithme particulier avec un système de 4 équations: $n = 4$ de $E_3^{(n)}$ à $E_7^{(n)}$.
- (III) Analogue à (II), mais de $E_7^{(n)}$ à $E_9^{(n)}$.
- (III') Analogue à (II'), mais de $E_7^{(n)}$ à $E_{10}^{(n)}$.
- (III'') Analogue à (II''), mais de $E_7^{(n)}$ à $E_{11}^{(n)}$.

	I	II	II'	II''	III	III'	III''
addition	1240	1261	1315	1356	1253	1283	1326
multi.(divi.)	3720	3509	3490	3530	3641	3650	3682
total	4960	4770	4805	4886	4894	4933	5008

Conclusion:

Pour réaliser la transformation $E_k^{(n)}$, les quatre premières méthodes utilisent moins d'opérations mais ils ne peuvent pas traiter les problèmes d'instabilité numérique. Poue la 5^{ième} méthode (algorithme normal de type E (6)), il n'a pas d'avantage, ni sur le nombre d'opération, ni en ce qui concerne le problème d'instabilité, mais c'est la base pour se donner la règle particulière. On remarque que pour la règle particulière, le nombre d'opération est presque le même que celui de 5^{ième} méthode, et que sa progammation est un peu plus compliquée.

Exemples numériques:

Si l'on choisit $a_n = \Delta^n s_i$ i fixé. On a: $E_k^{(0)} = e_k(s_i) = \varepsilon_{2k}^{(i)}$ [19]

Exemple n°1:

Dans ce 1^{er} exemple, on constate que le W -algorithme est plus stable que l' ε -algorithme. Considérons la suite générée par la relation:

$$s_{n+8} = \frac{1}{2}s_{n+4} + \frac{1}{8}s_n \quad n = 0, 1, \dots$$

avec $s_1 = 1.6, \quad s_2 = 3.4, \quad s_3 = 2.5, \quad s_4 = 1, \quad s_6 = 5, \quad s_7 = 1$

$$\left\{ \begin{matrix} s_0 = 3.99 \\ s_5 = 1.599 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} s_0 = 3.999 \\ s_5 = 1.5999 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} s_0 = 3.9999 \\ s_5 = 1.59999 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} s_0 = 3.99999 \\ s_5 = 1.599999 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} s_0 = 3.999999 \\ s_5 = 1.5999999 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} s_0 = 4 \\ s_5 = 1.6 \end{matrix} \right\}$$

On choisit $a_n = \Delta^n s_0$ $n = 0, 1, \dots$ D'après la théorie de l' ε -algorithm, on a: $\varepsilon_{16}^{(0)} = E_8^{(0)} = 0$. Avec les différentes valeurs choisies de s_0 et de s_5 , on obtient le tableau suivant:

	$\varepsilon_{16}^{(0)}$	$E_8^{(0)} = W_{16}^{(0)}$
$\left\{ \begin{matrix} s_0 = 3.99 \\ s_5 = 1.599 \end{matrix} \right\}$	$0.12251.10^{-8}$	$-0.13467.10^{-9}$
$\left\{ \begin{matrix} s_0 = 3.999 \\ s_5 = 1.5999 \end{matrix} \right\}$	$0.42410.10^{-6}$	$0.58303.10^{-8}$
$\left\{ \begin{matrix} s_0 = 3.9999 \\ s_5 = 1.59999 \end{matrix} \right\}$	$0.37108.10^{-4}$	$-0.27879.10^{-8}$
$\left\{ \begin{matrix} s_0 = 3.99999 \\ s_5 = 1.599999 \end{matrix} \right\}$	$-0.18692.10^{-2}$	$-0.55881.10^{-8}$
$\left\{ \begin{matrix} s_0 = 3.999999 \\ s_5 = 1.5999999 \end{matrix} \right\}$	$0.29454.10^0$	$0.55897.10^{-11}$
$\left\{ \begin{matrix} s_0 = 4 \\ s_5 = 1.6 \end{matrix} \right\}$	division par 0	$-0.81376.10^{-9}$

Si l'on regarde les suites initiales (a_n) et (s_n) , on trouve pourquoi le W -algorithm est stable et l' ε -algorithm est instable. (il n'y a aucun terme a_n qui soit très petits, par contre il existe deux termes consécutifs s_n qui sont très proches ou égaux.)

	$s_0 = 3.999999$	$s_5 = 1.5999999$	$s_0 = 4$	$s_5 = 1.6$
n	a_n	s_n	a_n	s_n
0	3.999999000	3.999999000	4.000000000	4.000000000
1	-2.399990000	1.600000000	-2.400000000	1.600000000
2	4.199999000	3.400000000	4.200000000	3.400000000
3	-6.899999000	2.500000000	-6.900000000	2.500000000
4	8.999999000	1.000000000	9.000000000	1.000000000
5	-8.399999100	1.599999900	-8.400000000	1.600000000
6	5.799999600	5.000000000	5.800000000	5.000000000
7	-12.10000100	<u>1.000000000</u>	-12.10000000	<u>1.000000000</u>
8	59.80000440	<u>0.999999875</u>	59.80000000	<u>1.000000000</u>
9	-218.4000105	<u>0.999999950</u>	-218.4000000	<u>1.000000000</u>
10	615.7250191	2.925000000	615.7250000	2.925000000
11	-1473.062527	0.812500000	-1473.062500	0.812500000
12	3173.925027	0.624999938	3173.925000	0.625000000
13	-6405.800002	0.699999963	-6405.800000	0.700000000
14	12444.13742	2.087500000	12444.13750	2.087500000
15	-23696.06847	0.531250000	-23696.06875	0.531250000
16	44709.93681	0.437499953	44709.93750	0.437500000

Exemple n^02 :

Dans ce exemple, on voit que ni l' ε -algorithm, ni le W -algorithm ne fonctionnent bien. Seule la règle particulière peut marcher bien. Considérons la suite générée par la relation:

$$s_{n+3} = \frac{1}{2}s_{n+2} + \frac{1}{4}s_{n+1} + \frac{1}{8}s_n \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\text{avec } \begin{cases} s_0 = 1.5999 \\ s_0 = 1.5999999 \\ s_0 = 1.59999999 \\ s_0 = 1.599999999 \end{cases} \quad , \quad s_1 = 1.2, \quad s_2 = 1$$

On choisit toujours $a_n = \Delta^n s_0 \quad n = 0, 1, \dots$ La théorie de l' ε -algorithm nous donne: $\varepsilon_6^{(0)} = E_3^{(0)} = 0$. Avec les différentes valeurs s_0 , on obtient:

	$\varepsilon_6^{(0)}$ ε -algorithm	$W_6^{(0)}$ W -algorithm	$E_3^{(0)}$ règle particulière
$s_0 = 1.5999$	$0.81177.10^{-7}$	$0.17086.10^{-9}$	$0.79875.10^{-14}$
$s_0 = 1.5999999$	$0.21491.10^{-1}$	$-0.64628.10^{-4}$	$-0.14654.10^{-13}$
$s_0 = 1.59999999$	$0.85199.10^0$	$-0.34055.10^{-2}$	$0.62172.10^{-14}$
$s_0 = 1.599999999$	$0.35187.10^0$	$-0.13333.10^0$	$-0.13322.10^{-14}$

Cette fois-ci, on vérifie que dans la suite (a_n) , il y a un terme qui est très petit et qu'il existe aussi deux termes consécutifs s_n qui sont très proches. Tous ces inconvénients peuvent, bien sûr, se résoudre par la règle particulière.

	a_3	s_2	s_3
$s_0 = 1.5999$	$0.875.10^{-4}$	1.000000000	0.9999875000
$s_0 = 1.5999999$	$0.875.10^{-7}$	1.000000000	0.9999999875
$s_0 = 1.59999999$	$0.875.10^{-8}$	1.000000000	0.9999999987
$s_0 = 1.599999999$	$0.875.10^{-9}$	1.000000000	0.9999999999

deux termes consécutifs dans la suite (s_n)

1.2 Variantes de W -algorithm:

Dans cette section, on va donner deux variantes de W -algorithm correspondant à des dénominateurs différents.

D'abord, on pose:

$$E_k^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+k} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+k} & a_{n+k+1} & \cdots & a_{n+2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_n & \cdots & a_{n+k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+k-1} & \cdots & a_{n+2k-2} \end{vmatrix}} = \frac{H_{k+1}(a_n)}{H_k(a_n)} = \frac{H_{k+1}^{(n)}}{H_k^{(n)}} \quad \text{où } a_n \in \mathbb{C} \quad (9)$$

pour différentes valeurs de k et de n .

Cette transformation, bien sûr, peut être aussi calculée par la relation de récurrence des déterminants de Hankel ou par le $q-d$ algorithme comme dans la section précédente, mais on a les relations de calculs respectivement:

$$E_k^{(n)} = \frac{H_{k+1}^{(n)}}{H_k^{(n)}} \quad \text{et} \quad E_{k+1}^{(n)} = E_k^{(n+2)} \cdot \frac{e_{k+1}^{(n)}}{q_{k+1}^{(n+1)}}$$

Si l'on utilise les relations de Hankel, on peut déduire l'algorithme suivant:

$$E_{-1}^{(n)} = \infty, \quad E_0^{(n)} = a_n \quad n = 0, 1, \dots \quad (10)$$

$$E_{k+1}^{(n)} = E_k^{(n+2)} - [E_k^{(n+1)}]^2 \left[\frac{1}{E_k^{(n)}} - \frac{1}{E_{k-1}^{(n+2)}} \right] \quad n, k = 0, 1, \dots$$

Dém: D'après la relation de Hankel, on a:

$$H_{k+2}^{(n)} \cdot H_k^{(n+2)} = H_{k+1}^{(n)} \cdot H_{k+1}^{(n+2)} - [H_{k+1}^{(n+1)}]^2 \quad (11)$$

$$H_{k+1}^{(n)} \cdot H_{k-1}^{(n+2)} = H_k^{(n)} \cdot H_k^{(n+2)} - [H_k^{(n+1)}]^2 \quad (12)$$

Divisons (11) par $H_{k+1}^{(n)} H_k^{(n+2)}$ et (12) par $H_{k+1}^{(n)} H_k^{(n+2)} [H_k^{(n+1)}]^2$; on obtient:

$$\frac{H_{k+2}^{(n)}}{H_{k+1}^{(n)}} = \frac{H_{k+1}^{(n+2)}}{H_k^{(n+2)}} - \frac{[H_{k+1}^{(n+1)}]^2}{H_{k+1}^{(n)} H_k^{(n+2)}} \quad (13)$$

$$\frac{1}{[H_k^{(n+1)}]^2} \cdot \left[\frac{H_{k-1}^{(n+2)}}{H_k^{(n+2)}} - \frac{H_k^{(n)}}{H_{k+1}^{(n)}} \right] = - \frac{1}{H_{k+1}^{(n)} H_k^{(n+2)}} \quad (14)$$

Remplaçons le terme $\frac{1}{H_{k+1}^{(n)} H_k^{(n+2)}}$ de (13) par celui de (14); on obtient:

$$E_{k+1}^{(n)} = E_k^{(n+2)} - [E_k^{(n+1)}]^2 \left[\frac{1}{E_k^{(n)}} - \frac{1}{E_{k-1}^{(n+2)}} \right] \quad .$$

■

Si l'on pose:

$$g_{k,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_i(n) & g_i(n+1) & \cdots & g_i(n+k) \\ g_1(n) & g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k-1) \end{vmatrix}} \quad \text{avec} \quad g_i(n) = a_{n+i-1} \quad (15)$$

On a l'algorithme suivant:

$$\begin{aligned}
 g_{0,i}^{(n)} &= g_i(n) = a_{n+i-1} \quad i = 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \\
 \text{Pour } k &= 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \\
 g_{k,i}^{(n)} &= \frac{g_{k-1,k}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n)}} \cdot g_{k-1,i}^{(n)} - g_{k-1,i}^{(n+1)} \quad i = k+1, k+2, \dots
 \end{aligned} \tag{16}$$

Dém: On pose:

$$g_{k,i}^{(n)} = \frac{N_{k,i}^{(n)}}{D_k^{(n)}}$$

On a:

$$N_{k-1,k}^{(n)} = (-1)^{k-1} D_k^{(n)} \quad . \tag{17}$$

D'après l'identité de Sylvester, on a:

$$N_{k,i}^{(n)} \cdot D_{k-1}^{(n+1)} = N_{k-1,i}^{(n)} \cdot D_k^{(n+1)} - N_{k-1,i}^{(n+1)} \cdot D_k^{(n)} \quad .$$

Divisons les deux membres par $D_k^{(n)} D_{k-1}^{(n+1)}$; on obtient:

$$\begin{aligned}
 \frac{N_{k,i}^{(n)}}{D_k^{(n)}} &= \frac{N_{k-1,i}^{(n)} \cdot D_k^{(n+1)}}{D_k^{(n)} \cdot D_{k-1}^{(n+1)}} - \frac{N_{k-1,i}^{(n+1)}}{D_{k-1}^{(n+1)}} \\
 \Rightarrow g_{k,i}^{(n)} &= \frac{N_{k-1,i}^{(n)}}{D_{k-1}^{(n)}} \cdot \frac{D_{k-1}^{(n)}}{D_k^{(n)}} \cdot \frac{D_k^{(n+1)}}{D_{k-1}^{(n+1)}} - g_{k-1,i}^{(n+1)} \quad .
 \end{aligned}$$

Compte tenue la relation (17), on a:

$$g_{k,i}^{(n)} = g_{k-1,i}^{(n)} \cdot \frac{1}{g_{k-1,k}^{(n)}} \cdot g_{k-1,k}^{(n+1)} - g_{k-1,i}^{(n+1)} \quad .$$

■

On a évidemment la relation: $g_{k,k+1}^{(n)} = (-1)^k E_k^{(n)}$ (18)

Donc, $E_k^{(n)}$ de (9) peut être calculée par l'agorithme (16).

2ième Variante de W-algorithme:

On peut aussi définir la transformation suivante:

$$E_k^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+k} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+k} & a_{n+k+1} & \cdots & a_{n+2k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{n+1} & \cdots & a_{n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+k} & \cdots & a_{n+2k-1} \end{vmatrix}} = \frac{H_{k+1}(a_n)}{H_k(a_{n+1})} = \frac{H_{k+1}^{(n)}}{H_k^{(n+1)}} \quad \text{où } a_n \in \mathcal{C} \tag{19}$$

pour différentes valeurs de k et de n .

La relation de cette transformation avec le $q-d$ algorithme est:

$$E_{k+1}^{(n)} = E_k^{(n)} \cdot e_{k+1}^{(n)}.$$

Si l'on utilise les relations de Hankel, on a l'algorithme suivant:

$$\begin{aligned} E_{-1}^{(n)} &= \infty, \quad E_0^{(n)} = a_n \quad n = 0, 1, \dots \\ E_{k+1}^{(n)} &= E_k^{(n)} \cdot E_k^{(n+2)} \cdot \left[\frac{1}{E_k^{(n+1)}} + \frac{1}{E_{k-1}^{(n+2)}} \right] - E_k^{(n+1)} \quad n, k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Dém: D'après la relation de Hankel, on a:

$$H_{k+2}^{(n)} \cdot H_k^{(n+2)} = H_{k+1}^{(n)} \cdot H_{k+1}^{(n+2)} - [H_{k+1}^{(n+1)}]^2 \quad (21)$$

$$H_{k+1}^{(n+1)} \cdot H_{k-1}^{(n+3)} = H_k^{(n+1)} \cdot H_k^{(n+3)} - [H_k^{(n+2)}]^2 \quad (22)$$

Divisons (21) et (22) par $H_k^{(n+2)} H_{k+1}^{(n+1)}$ respectivement; on obtient:

$$\begin{cases} \frac{H_{k+2}^{(n)}}{H_{k+1}^{(n+1)}} = \frac{H_{k+1}^{(n)} \cdot H_{k+1}^{(n+2)}}{H_k^{(n+2)} \cdot H_{k+1}^{(n+1)}} - \frac{H_{k+1}^{(n+1)}}{H_k^{(n+2)}} \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \frac{H_{k-1}^{(n+3)}}{H_k^{(n+2)}} = \frac{H_k^{(n+1)} \cdot H_k^{(n+3)}}{H_k^{(n+2)} \cdot H_{k+1}^{(n+1)}} - \frac{H_k^{(n+2)}}{H_{k+1}^{(n+1)}} \end{cases} \quad (24)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{k+1}^{(n)} = \frac{H_{k+1}^{(n)} \cdot H_{k+1}^{(n+2)}}{H_k^{(n+2)} \cdot H_{k+1}^{(n+1)}} - E_k^{(n+1)} \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{E_{k-1}^{(n+2)}} = \frac{H_k^{(n+1)} \cdot H_k^{(n+3)}}{H_k^{(n+2)} \cdot H_{k+1}^{(n+1)}} - \frac{1}{E_k^{(n+1)}} \end{cases} \quad (26)$$

Remplaçons le terme $H_k^{(n+2)} H_{k+1}^{(n+1)}$ de (25) par celui de (26); on obtient finalement:

$$E_{k+1}^{(n)} = E_k^{(n)} \cdot E_k^{(n+2)} \cdot \left[\frac{1}{E_k^{(n+1)}} + \frac{1}{E_{k-1}^{(n+2)}} \right] - E_k^{(n+1)}.$$

■

Si l'on pose:

$$g_{k,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_i^{(n)} & g_i^{(n+1)} & \cdots & g_i^{(n+k)} \\ g_1^{(n)} & g_1^{(n+1)} & \cdots & g_1^{(n+k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k^{(n)} & g_k^{(n+1)} & \cdots & g_k^{(n+k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1^{(n+1)} & \cdots & g_1^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_k^{(n+1)} & \cdots & g_k^{(n+k)} \end{vmatrix}} \quad \text{avec } i > k$$

alors, c'est la même transformation auxiliaire (5'). Donc, on obtient le même algorithme que (6) mais avec des initialisations différentes:

$$\begin{aligned}
 g_{0,i}^{(n)} &= g_i(n) = a_{n+i-1} \quad i = 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \\
 \text{Pour } k &= 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \\
 g_{k,i}^{(n)} &= g_{k-1,i}^{(n)} - g_{k-1,i}^{(n+1)} \cdot \frac{g_{k-1,k}^{(n)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)}} \quad i = k+1, k+2, \dots
 \end{aligned} \tag{27}$$

On a la relation: $g_{k,k+1}^{(n)} = (-1)^k E_k^{(n)}$.

Donc, $E_k^{(n)}$ de (19) peut être calculée par l'algorithme (27).

Règles particulières des deux variantes:

Comme le théorème 1, on a évidemment le:

Théorème 2:

$$g_{k+m,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_{m,i}^{(n)} & \cdots & g_{m,i}^{(n+k)} \\ g_{m,m+1}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{m,m+1}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+1}^{(n+k-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n+k-1)} \end{vmatrix}}$$

Règle particulière pour l'algorithme (16) avec $k \geq 1$; $i > k+m$.

$$g_{k+m,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_{m,i}^{(n)} & \cdots & g_{m,i}^{(n+k)} \\ g_{m,m+1}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{m,m+1}^{(n+1)} & \cdots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n+1)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}$$

Règle particulière pour l'algorithme (27) avec $k \geq 1$; $i > k+m$.

Dém: Elle est analogue à celle de théorème 1.

■

Application de ces deux variantes:

On sait que le $q-d$ algorithme peut aider à calculer les deux variantes de W -algorithme. Réciproquement, ces deux variantes peuvent servir à calculer le $q-d$ algorithme. On a les

relations suivantes:

$$\begin{aligned} q_{k+1}^{(n)} &= \frac{H_{k+1}^{(n+1)} \cdot H_k^{(n)}}{H_k^{(n+1)} \cdot H_{k+1}^{(n)}} = \frac{E_k^{(n+1)}}{E_k^{(n)}} && \text{pour la 1}^{\text{ère}} \text{ variante} \\ e_{k+1}^{(n)} &= \frac{H_{k+2}^{(n)} \cdot H_k^{(n+1)}}{H_{k+1}^{(n)} \cdot H_{k+1}^{(n+1)}} = \frac{E_{k+1}^{(n)}}{E_k^{(n)}} && \text{pour la 2}^{\text{ième}} \text{ variante} \end{aligned}$$

Donc, une fois que l'on sait calculer les $E_k^{(n)}$ de ces deux variantes, on peut aussi obtenir les $q_{k+1}^{(n)}$ et $e_{k+1}^{(n)}$.

Le plus important est que les règles particulières des deux variantes permettent de calculer le $q-d$ algorithme quand il rencontre des problèmes de singularité.

1.3 W-algorithme topologique

Dans cette section, on va considérer une suite de vecteurs. Soit $\{a_n\}$ une suite de vecteurs complexes, y un vecteur arbitraire.

On pose:

$$\tilde{E}_k^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+k} \\ \langle y, a_{n+1} \rangle & \langle y, a_{n+2} \rangle & \cdots & \langle y, a_{n+k+1} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle y, a_{n+k} \rangle & \langle y, a_{n+k+1} \rangle & \cdots & \langle y, a_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle y, a_{n+2} \rangle & \cdots & \langle y, a_{n+k+1} \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y, a_{n+k+1} \rangle & \cdots & \langle y, a_{n+2k} \rangle \end{vmatrix}} = \frac{\widetilde{H}_{k+1}(a_n)}{H_k(a_{n+2})} = \frac{\widetilde{H}_{k+1}^{(n)}}{H_k^{(n+2)}}$$

$$\text{avec} \quad \langle y, \tilde{E}_k^{(n)} \rangle = E_k^{(n)} \quad \text{et} \quad \langle y, \widetilde{H}_k^{(n)} \rangle = H_k^{(n)} \quad .$$

On a l'algorithme suivant:

$$\begin{aligned} &\text{pour } n = 0, 1, \dots \\ &\langle y, \tilde{E}_{-1}^{(n)} \rangle = E_{-1}^{(n)} = \infty, \quad \tilde{E}_0^{(n)} = a_n \\ &\text{pour } k = 0, 1, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_{k+1}^{(n)} = \tilde{E}_k^{(n)} - \tilde{E}_k^{(n+1)} \cdot \langle y, \tilde{E}_k^{(n+1)} \rangle \cdot \left[\frac{1}{\langle y, \tilde{E}_k^{(n+2)} \rangle} - \frac{1}{\langle y, \tilde{E}_{k-1}^{(n+2)} \rangle} \right]$$

Dém: D'après l'identité de Sylvester, on a:

$$\widetilde{H}_{k+2}^{(n)} \cdot H_k^{(n+2)} = \widetilde{H}_{k+1}^{(n)} \cdot H_{k+1}^{(n+2)} - \widetilde{H}_{k+1}^{(n+1)} \cdot H_{k+1}^{(n+1)} \quad (28)$$

$$H_{k+1}^{(n+2)} \cdot H_{k-1}^{(n+4)} = H_k^{(n+2)} \cdot H_k^{(n+4)} - [H_k^{(n+3)}]^2 \quad (29)$$

Divisons (28) par $H_k^{(n+2)} H_{k+1}^{(n+2)}$ et (29) par $H_k^{(n+2)} H_{k+1}^{(n+2)} [H_k^{(n+3)}]^2$; on obtient:

$$\frac{\widetilde{H}_{k+2}^{(n)}}{H_{k+1}^{(n+2)}} = \frac{\widetilde{H}_{k+1}^{(n)}}{H_k^{(n+2)}} - \frac{\widetilde{H}_{k+1}^{(n+1)} \cdot H_{k+1}^{(n+1)}}{H_k^{(n+2)} \cdot H_{k+1}^{(n+2)}} \quad (30)$$

$$\frac{1}{[H_k^{(n+3)}]^2} \cdot \left[\frac{H_{k-1}^{(n+4)}}{H_k^{(n+2)}} - \frac{H_k^{(n+4)}}{H_{k+1}^{(n+2)}} \right] = -\frac{1}{H_k^{(n+2)} H_{k+1}^{(n+2)}} \quad (31)$$

Remplaçons le terme $\frac{1}{H_k^{(n+2)} H_{k+1}^{(n+2)}}$ de (30) par celui de (31), et compte tenu du fait $\langle y, \widetilde{E}_k^{(n)} \rangle = E_k^{(n)}$, on obtient:

$$\widetilde{E}_{k+1}^{(n)} = \widetilde{E}_k^{(n)} - \widetilde{E}_k^{(n+1)} \cdot \langle y, \widetilde{E}_k^{(n+1)} \rangle \cdot \left[\frac{1}{\langle y, \widetilde{E}_k^{(n+2)} \rangle} - \frac{1}{\langle y, \widetilde{E}_{k-1}^{(n+2)} \rangle} \right]$$

■

Ce formalisme regroupe un certain nombre de transformations vectorielles de suites et de fonctions, comme le W -algorithme scalaire:

$$\begin{aligned} a_n &= \Delta^n s_i \quad i \text{ fixé} \quad \widetilde{E}_k^{(0)} = \varepsilon_{2k}^{(i)} \quad \varepsilon - \text{algorithme topologique} \\ a_n &= f^{(n)}(t) \quad t \text{ fixé} \quad \widetilde{E}_k^{(0)} = \varepsilon_{2k}(t) \quad \text{forme confluyente de } \varepsilon - \text{algorithme topologique} \\ a_n &= \frac{f^{(n)}(t)}{n!} \quad t \text{ fixé} \quad \widetilde{E}_k^{(0)} = \rho_{2k}(t) \quad \text{forme confluyente de } \rho - \text{algorithme topologique} \end{aligned}$$

On sait que [25] la transformation G généralisée peut être aussi utilisée pour mettre en oeuvre la forme confluyente de l' ε -algorithme topologique. Si nous appliquons la transformation G généralisée à la suite $\{s_n\}$ et à la suite auxiliaire $\{c_n\}$ définies par:

$$\Delta^n s_0 = f^{(n)}(t); \quad \Delta^n c_0 = \langle y, f^{(n+1)}(t) \rangle$$

$$\text{alors, on a: } G_k^{(0)} = \varepsilon_{2k}(t).$$

On peut voir que le calcul de $\varepsilon_{2k}(t)$ est plus facile en utilisant le W -algorithme topologique qu'en utilisant la transformation G généralisée. En effet, pour utiliser la transformation G généralisée, nous avons besoin du $r-s$ algorithme, et de plus, nous avons besoin de connaître les conditions initiales, à savoir: la suite vectorielle $\{s_n\}_{n=0}^k$ et la suite auxiliaire $\{c_n\}_{n=0}^{2k-1}$. Tandis que le nombre d'opération est presque de la même grandeur.

Supposons que la suite de vecteurs soit à p composantes. Le calcul de $\varepsilon_{2k}(t)$ en utilisant le W -algorithme topologique nécessite:

$$\begin{array}{ll} k^2p + k^2 & \text{additions} \\ k^2p + k^2 & \text{multiplications} \\ 2k^2 & \text{divisions} \\ 3k^2 & \text{calculs de produits scalaires} \end{array}$$

Soit un total de:

$$\begin{array}{ll} 2k^2(2p - 1) & \text{additions} \\ k^2(4p + 1) & \text{multiplications} \\ 2k^2 & \text{divisions} \end{array}$$

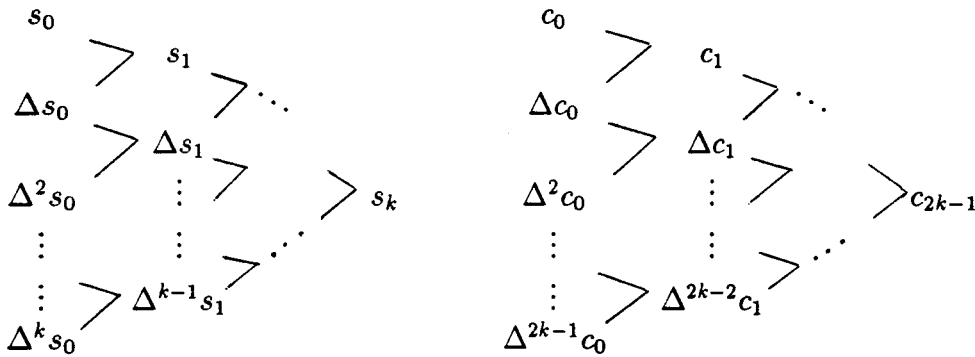
C'est-à-dire: $\boxed{k^2(8p + 1)}$ opérations arithmétiques.

Avec la transformation G généralisée, le même calcul demande:

(I) Pour l'obtention de la suite vectorielle $s_0, s_1, \dots, s_k$ et de la suite auxiliaire $c_0, c_1, \dots, c_{2k-1}$.

Dans les deux tableaux suivants:

A partir de $s_0, \Delta s_0, \dots, \Delta^k s_0$ et $c_0, \Delta c_0, \dots, \Delta^{2k-1} c_0$, on peut obtenir les suites $\{s_0, s_1, \dots, s_k\}$ et $\{c_0, c_1, \dots, c_{2k-1}\}$.



Remarques:

- (1) On remplace la soustraction traditionnelle par l'addition, et on progresse, dans le calcul du tableau, de gauche à droite.
- (2) Afin de diminuer le nombre d'opération, on pose: $\nabla f^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) + f^{(n+1)}(t)$.
On calcule le produit scalaire $\langle y, \nabla f^{(n)}(t) \rangle$ au lieu de $\langle y, f^{(n)}(t) \rangle + \langle y, f^{(n+1)}(t) \rangle$. Alors, on obtient:

$$\Delta^{n-i} c_i = \langle y, \nabla^i f^{(n-i+1)}(t) \rangle \quad n = 0, 1, \dots, 2k-1 \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

On a donc:

$$\frac{k(k+1)p}{2} \text{ additions pour la suite } \{s_n\}_{n=0}^k.$$

$$k(2k+1)p \text{ additions et } k(2k+1) \text{ calculs de produits scalaires pour la suite } \{c_n\}_{n=0}^{2k-1}.$$

(II) Pour l'algorithme $r - s$:

$$(2k^2 - k - 1) \text{ add.} + (2k^2 - k - 1) \text{ multi.} + (2k^2 - k - 1) \text{ div.}$$

(III) Pour le G -algorithme généralisé:

$$\frac{k(k+1)}{2}(p+1) \text{ add.} + \frac{k(k+1)}{2}p \text{ multi.} + \frac{k(k+1)}{2}(p+1) \text{ div.}$$

Soit un total de:

$$\begin{aligned} k(5k+3)p + \frac{k}{2}(k-3) - 1 & \text{ additions} \\ \frac{k}{2}(5k+3)p + (2k^2 - k - 1) & \text{ multiplications} \\ \frac{k}{2}(k+1)p + \frac{1}{2}(5k^2 - k - 2) & \text{ divisions} \end{aligned}$$

C'est-à-dire: $k(8k+5)p + (5k^2 - 3k - 3)$ opérations arithmétiques

Règle particulière:

Comme dans le cas scalaire, pour éviter dans l'algorithme un dénominateur très petit ou nul, on a une règle particulière. D'abord, on pose:

$$\tilde{E}_k^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+k} \\ g_1(n) & g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad g_{k,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_i(n) & g_i(n+1) & \cdots & g_i(n+k) \\ g_1(n) & g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}$$

$$\text{avec } g_i(n) = \langle y, a_{n+i} \rangle \quad \forall i > k.$$

Comme dans le cas scalaire de type E , on a l'algorithme:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_0^{(n)} &= a_n & n &= 0, 1, \dots \\ g_{0,i}^{(n)} &= g_i(n) = \langle y, a_{n+i} \rangle & i &= 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \\ \text{Pour } k &= 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \\ \tilde{E}_k^{(n)} &= \tilde{E}_{k-1}^{(n)} - \tilde{E}_{k-1}^{(n+1)} \cdot \frac{g_{k-1,k}^{(n)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)}} \\ g_{k,i}^{(n)} &= g_{k-1,i}^{(n)} - g_{k-1,i}^{(n+1)} \cdot \frac{g_{k-1,k}^{(n)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)}} & i &= k+1, k+2, \dots \end{aligned}$$

Dém: Elle est analogue à celle du cas scalaire (Page 97) .

Théorème 3: (règle particulière)

$$\tilde{E}_{k+m}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{E}_m^{(n)} & \tilde{E}_m^{(n+1)} & \dots & \tilde{E}_m^{(n+k)} \\ g_{m,m+1}^{(n)} & g_{m,m+1}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & g_{m,m+k}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{m,m+1}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad g_{k+m,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_{m,i}^{(n)} & \dots & g_{m,i}^{(n+k)} \\ g_{m,m+1}^{(n)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & \dots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{m,m+1}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}$$

avec $k \geq 1; \quad i > k + m.$

Dém: Elle est analogue à celle du cas scalaire (Page 98) .

2 Polynômes orthogonaux adjacents et leurs algorithmes

2.1 Définitions:

On définit:

$$H_k^{(n)} = H_k(c_n) = \begin{vmatrix} c_n & \dots & c_{n+k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+k-1} & \dots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \quad \overline{H}_k^{(n)} = H_k(\Delta c_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ c_n & \dots & c_{n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+k-1} & \dots & c_{n+2k-1} \end{vmatrix},$$

$$H_k^{(n)}(x) = \begin{vmatrix} c_n & \dots & c_{n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+k-1} & \dots & c_{n+2k-1} \\ 1 & \dots & x^k \end{vmatrix}.$$

$$r_k^{(n)} = \frac{H_k^{(n)}}{\overline{H}_{k-1}^{(n)}}, \quad s_k^{(n)} = \frac{\overline{H}_k^{(n)}}{H_k^{(n)}}; \quad q_{k+1}^{(n)} = \frac{H_{k+1}^{(n+1)} H_k^{(n)}}{H_k^{(n+1)} H_{k+1}^{(n)}}, \quad e_{k+1}^{(n)} = \frac{H_{k+2}^{(n)} H_k^{(n+1)}}{H_{k+1}^{(n)} H_{k+1}^{(n+1)}}.$$

Considérons les deux familles de polynômes:

$$P_k^{(n)}(x) = \frac{H_k^{(n)}(x)}{H_k^{(n)}}, \quad \overline{P}_k^{(n)}(x) = \frac{H_k^{(n)}(x)}{\overline{H}_k^{(n)}}.$$

Ces deux familles de polynômes sont orthogonaux par rapport à la fonctionnelle linéaire $c^{(n)}$ définie par:

$$c^{(n)}(x^i) = c_{n+i} \quad i \geq 0$$

2.2 Algorithmes et relations

L'algorithme $r-s$, qui est utilisé par Pye et Atchison pour mettre en oeuvre la transformation G , est le suivant [20]:

$$s_0^{(n)} = 1, \quad r_1^{(n)} = c_n \quad n = 0, 1, \dots \quad (32)$$

$$\frac{s_k^{(n+1)}}{s_k^{(n)}} = 1 + \frac{r_{k+1}^{(n)}}{r_k^{(n+1)}} \quad k, n = 0, 1, \dots \quad (33)$$

$$\frac{r_{k+1}^{(n+1)}}{r_k^{(n)}} = 1 + \frac{s_{k+1}^{(n)}}{s_k^{(n+1)}} \quad k, n = 0, 1, \dots \quad (34)$$

Cet algorithme peut être obtenu par trois façons différentes

- A l'aide de l'introduction d'une matrice [20].
- Utilisation des familles de polynômes orthogonaux adjacents [21].
- L'identité de Sylvester.

Dém:

$$(33) \iff \frac{\overline{H}_k^{(n+1)}}{H_k^{(n+1)}} \cdot \frac{H_k^{(n)}}{\overline{H}_k^{(n)}} = 1 + \frac{H_{k+1}^{(n)}}{\overline{H}_k^{(n)}} \cdot \frac{\overline{H}_{k-1}^{(n+1)}}{H_k^{(n+1)}}$$

Multiplions les deux membres par $H_k^{(n+1)}\overline{H}_k^{(n)}$

$$\begin{aligned} &\iff \overline{H}_k^{(n+1)} \cdot H_k^{(n)} = H_k^{(n+1)} \cdot \overline{H}_k^{(n)} + H_{k+1}^{(n)} \cdot \overline{H}_{k-1}^{(n+1)} \\ &\iff - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+k} \\ 0 & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n+k-1} & c_{n+k} & \dots & c_{n+2k-1} \\ 0 & c_{n+k} & c_{n+k+1} & \dots & c_{n+2k} \end{vmatrix} \cdot H_k^{(n)} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+k-1} \\ 0 & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n+k-1} & c_{n+k} & \dots & c_{n+2k-2} \\ 0 & c_{n+k} & c_{n+k+1} & \dots & c_{n+2k-1} \end{vmatrix} \cdot \overline{H}_k^{(n)} - H_{k+1}^{(n)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & c_n & \dots & c_{n+k-1} \\ 0 & c_{n+1} & \dots & c_{n+k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n+k-1} & \dots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix} \\ &\iff \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+k} \\ 0 & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n+k-1} & c_{n+k} & \dots & c_{n+2k-1} \\ 0 & c_{n+k} & c_{n+k+1} & \dots & c_{n+2k} \end{vmatrix} \cdot H_k^{(n)} \end{aligned}$$

$$= H_{k+1}^{(n)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & c_n & \cdots & c_{n+k-1} \\ 0 & c_{n+1} & \cdots & c_{n+k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n+k-1} & \cdots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+k-1} \\ 0 & c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{n+k} & c_{n+k+1} & \cdots & c_{n+2k-1} \end{vmatrix} \cdot \overline{H}_k^{(n)}$$

qui n'est autre que la relation de Sylvester.

$$(34) \iff \frac{H_{k+1}^{(n+1)}}{H_k^{(n+1)}} \cdot \frac{\overline{H}_k^{(n)}}{H_{k+1}^{(n)}} = 1 + \frac{\overline{H}_{k+1}^{(n)}}{H_{k+1}^{(n)}} \cdot \frac{H_k^{(n+1)}}{H_k^{(n+1)}}$$

Multiplions les deux membres par $H_{k+1}^{(n)} \overline{H}_k^{(n+1)}$

$$\iff H_{k+1}^{(n+1)} \cdot \overline{H}_k^{(n)} = \overline{H}_k^{(n+1)} \cdot H_{k+1}^{(n)} + \overline{H}_{k+1}^{(n)} \cdot H_k^{(n+1)}$$

$$\iff \overline{H}_{k+1}^{(n)} \cdot H_k^{(n+1)} = H_{k+1}^{(n+1)} \cdot \overline{H}_k^{(n)} - \overline{H}_k^{(n+1)} \cdot H_{k+1}^{(n)}$$

la dernière relation est l'identité de Sylvester.

■

Le $q-d$ algorithm:

$$q_0^{(n)} = e_0^{(n)} = 0, \quad q_1^{(n)} = \frac{c_{n+1}}{c_n} \quad n = 0, 1, \dots \quad (35)$$

$$q_{k+1}^{(n)} + e_{k+1}^{(n)} = q_{k+1}^{(n+1)} + e_k^{(n+1)} \quad n, k = 0, 1, \dots \quad (36)$$

$$e_k^{(n)} \cdot q_{k+1}^{(n)} = e_k^{(n+1)} \cdot q_k^{(n+1)} \quad n = 0, 1, \dots \text{ et } k = 1, 2, \dots \quad (37)$$

Cet algorithme peut aussi être démontré par l'identité de Sylvester.

Dém:

$$(36) \iff \frac{H_{k+1}^{(n+1)} \cdot H_k^{(n)}}{\underbrace{H_{k+1}^{(n)}} \cdot \underbrace{H_k^{(n+1)}}} + \frac{H_k^{(n+1)} \cdot H_{k+2}^{(n)}}{\underbrace{H_{k+1}^{(n)}} \cdot \underbrace{H_{k+1}^{(n+1)}}_{\star}} = \frac{H_{k+1}^{(n+2)} \cdot H_k^{(n+1)}}{\underbrace{H_{k+1}^{(n+1)}} \cdot \underbrace{H_k^{(n+2)}}_{\star}} + \frac{H_{k-1}^{(n+2)} \cdot H_{k+1}^{(n+1)}}{\underbrace{H_{k+1}^{(n+1)}} \cdot \underbrace{H_{k+1}^{(n+2)}}_{\star}}$$

Multiplions les deux membres par $\underbrace{H_{k+1}^{(n)}} \underbrace{H_k^{(n+1)}} \underbrace{H_{k+1}^{(n+1)}} \underbrace{H_k^{(n+2)}}_{\star}$

$$(36) \iff$$

$$\left[H_{k+1}^{(n+1)} \right]^2 H_k^{(n)} H_k^{(n+2)} + \left[H_k^{(n+1)} \right]^2 H_{k+2}^{(n)} H_k^{(n+2)} = \left[H_k^{(n+1)} \right]^2 H_{k+1}^{(n)} H_{k+1}^{(n+2)} + \left[H_{k+1}^{(n+1)} \right]^2 H_{k+1}^{(n)} H_{k-1}^{(n+2)}$$

$$\iff \left[H_{k+1}^{(n+1)} \right]^2 \left[\underbrace{H_k^{(n)} H_k^{(n+2)} - H_{k+1}^{(n)} H_{k-1}^{(n+2)}} \right] = \left[H_k^{(n+1)} \right]^2 \left[\underbrace{H_{k+1}^{(n)} H_{k+1}^{(n+2)} - H_{k+2}^{(n)} H_k^{(n+2)}} \right]$$

|| Identité Sylvester ||

$$\Leftrightarrow [H_{k+1}^{(n+1)}]^2 \cdot [H_k^{(n+1)}]^2 = [H_k^{(n+1)}]^2 \cdot [H_{k+1}^{(n+1)}]^2$$

$$(37) \Leftrightarrow \frac{H_{k-1}^{(n+1)} \cdot H_{k+1}^{(n)}}{H_k^{(n)} \cdot H_k^{(n+1)}} \cdot \frac{H_{k+1}^{(n+1)} \cdot H_k^{(n)}}{H_{k+1}^{(n)} \cdot H_k^{(n+1)}} = \frac{H_{k-1}^{(n+2)} \cdot H_{k+1}^{(n+1)}}{H_k^{(n+1)} \cdot H_k^{(n+2)}} \cdot \frac{H_k^{(n+2)} \cdot H_{k-1}^{(n+1)}}{H_k^{(n+1)} \cdot H_{k-1}^{(n+2)}}$$

après élimination, la formule précédente est évidemment vraie.

■

On a une relation entre ces deux algorithmes. Il est facile de vérifier que:

$$q_{k+1}^{(n)} = \frac{H_{k+1}^{(n+1)} H_k^{(n)}}{H_k^{(n+1)} H_{k+1}^{(n)}} = \frac{r_{k+1}^{(n+1)} s_k^{(n+1)}}{r_{k+1}^{(n)} s_k^{(n)}} \quad (38)$$

$$e_{k+1}^{(n)} = \frac{H_{k+2}^{(n)} H_k^{(n+1)}}{H_{k+1}^{(n)} H_{k+1}^{(n+1)}} = \frac{r_{k+2}^{(n)} s_{k+1}^{(n)}}{r_{k+1}^{(n+1)} s_k^{(n+1)}} \quad (39)$$

D'après (34), la relation (38) nous donne:

$$q_{k+1}^{(n)} = \frac{s_k^{(n+1)}}{s_k^{(n)}} \left(1 + \frac{s_{k+1}^{(n)}}{s_k^{(n+1)}} \right)$$

$$\text{et on obtient: } s_{k+1}^{(n)} = s_k^{(n)} \cdot q_{k+1}^{(n)} - s_k^{(n+1)} \quad (40)$$

D'après (34), la relation (39) nous donne:

$$e_{k+1}^{(n)} = \frac{r_{k+2}^{(n)}}{r_{k+1}^{(n+1)}} \left(\frac{r_{k+1}^{(n+1)}}{r_{k+1}^{(n)}} - 1 \right)$$

$$\text{et on obtient: } r_{k+2}^{(n)} = e_{k+1}^{(n)} \cdot \frac{r_{k+1}^{(n)} r_{k+1}^{(n+1)}}{r_{k+1}^{(n+1)} - r_{k+1}^{(n)}} \quad (41)$$

Les relations (38), (39) et (40), (41) permettent de passer de l'algorithme $r - s$ au $q - d$ et réciproquement.

L'algorithme $r - s$ peut servir à calculer récursivement la famille de polynômes orthogonaux adjacents $\overline{P}_k^{(n)}(x)$. On a la relation [21, p.103]:

$$\overline{P}_{k+1}^{(n)}(x) = \frac{s_k^{(n+1)}}{s_{k+1}^{(n)}} \left[x \cdot \overline{P}_k^{(n+1)}(x) - \frac{r_{k+1}^{(n+1)}}{r_{k+1}^{(n)}} \cdot \overline{P}_k^{(n)}(x) \right] \quad (42)$$

L'algorithme $q - d$ peut servir à calculer récursivement une autre famille de polynômes orthogonaux adjacents $P_k^{(n)}(x)$. On a la relation [21, p.95]:

$$P_{k+1}^{(n)}(x) = x \cdot P_k^{(n+1)}(x) - q_{k+1}^{(n)} \cdot P_k^{(n)}(x) \quad (43)$$

Les relations (42) et (43), grâce à la relation entre les algorithmes $r-s$ et $q-d$, peuvent se déduire l'une de l'autre.

D'après la définition, on a: $\overline{P}_{k+1}^{(n)}(x) = \frac{H_{k+1}^{(n)}}{\overline{H}_{k+1}^{(n)}} \cdot P_{k+1}^{(n)}(x)$.

Donc:

$$(42) \Leftrightarrow \frac{H_{k+1}^{(n)}}{\overline{H}_{k+1}^{(n)}} \cdot P_{k+1}^{(n)}(x) = \frac{\overline{H}_k^{(n+1)}}{H_k^{(n+1)}} \cdot \frac{H_{k+1}^{(n)}}{\overline{H}_{k+1}^{(n)}} \cdot \left[x \cdot \frac{H_k^{(n+1)}}{\overline{H}_k^{(n+1)}} \cdot P_{k+1}^{(n)}(x) - \frac{r_{k+1}^{(n+1)}}{r_{k+1}^{(n)}} \cdot \frac{H_k^{(n)}}{\overline{H}_k^{(n)}} \cdot P_k^{(n)}(x) \right]$$

$$\Leftrightarrow P_{k+1}^{(n)}(x) = x \cdot P_{k+1}^{(n)}(x) - \frac{r_{k+1}^{(n+1)}}{r_{k+1}^{(n)}} \cdot \frac{s_k^{(n+1)}}{s_k^{(n)}} \cdot P_k^{(n)}(x) \xLeftrightarrow{(38)} (43)$$

2.3 Règles particulières

2.3.1 $r-s$ algorithme de type E et ses règles particulières

Dans l'algorithme $r-s$, les termes $r_k^{(n)}$ et $s_k^{(n)}$ sont calculés alternativement l'un après l'autre. Ici, on va les calculer séparément. Bien entendu, une fois que l'on sait calculer l'une de deux parties, l'autre peut calculer avec la formule (33) (ou (34)). Mais ceci n'est pas notre but, notre but est de donner des règles particulières.

D'abord, on considère les termes $s_k^{(n)}$. Définissons:

$$s_k^{(n)} = \frac{\overline{H}_k^{(n)}}{H_k^{(n)}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ c_n & \cdots & c_{n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+k-1} & \cdots & c_{n+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_n & \cdots & c_{n+k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+k-1} & \cdots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} s_n & \cdots & s_{n+k} \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k-1) \end{vmatrix}}$$

avec $s_n = 1 \quad \forall n$ et $g_i(n) = c_{n+i-1} \quad i = 1, \dots, k$

$$\text{et } g_{k,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_i(n) & \cdots & g_i(n+k) \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k-1) \end{vmatrix}} \quad i > k.$$

Ils peuvent être calculés récursivement par les règles suivantes:

$$\begin{aligned}
 s_0^{(n)} &= s_n = 1 & n &= 0, 1, \dots \\
 g_{0,i}^{(n)} &= g_i(n) = c_{n+i-1} & i &= 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \\
 \text{Pour } n &= 0, 1, \dots \text{ et } k = 1, 2, \dots \\
 s_k^{(n)} &= s_{k-1}^{(n)} \cdot \frac{g_{k-1,k}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n)}} - s_{k-1}^{(n+1)} \\
 g_{k,i}^{(n)} &= g_{k-1,i}^{(n)} \cdot \frac{g_{k-1,k}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n)}} - g_{k-1,i}^{(n+1)} & i &= k+1, k+2, \dots
 \end{aligned} \tag{44}$$

Remarque:

$g_{k,i}^{(n)}$ est déjà définie dans (15).

Dém:

On pose:

$$s_k^{(n)} = \frac{Ns_k^{(n)}}{Ds_k^{(n)}}, \quad g_{k,i}^{(n)} = \frac{Ng_{k,i}^{(n)}}{Dg_{k,i}^{(n)}}.$$

D'après l'identité de Sylvester, on a:

$$Ns_k^{(n)} \cdot Ds_{k-1}^{(n+1)} = Ns_{k-1}^{(n)} \cdot Ds_k^{(n+1)} - Ns_{k-1}^{(n+1)} \cdot Ds_k^{(n)}.$$

Divisons cette relation par $Ds_k^{(n)} Ds_{k-1}^{(n+1)}$; on obtient:

$$\frac{Ns_k^{(n)}}{Ds_k^{(n)}} = \frac{Ns_{k-1}^{(n)}}{Ds_{k-1}^{(n)}} \cdot \frac{Ds_{k-1}^{(n)}}{Ds_k^{(n)}} \cdot \frac{Ds_k^{(n+1)}}{Ds_{k-1}^{(n+1)}} - \frac{Ns_{k-1}^{(n+1)}}{Ds_{k-1}^{(n+1)}}.$$

Compte tenu des faits:

$$\begin{cases} Ds_k^{(n)} = Dg_{k,k+1}^{(n)} \\ \text{et} \\ Ds_k^{(n)} = (-1)^{k-1} Ng_{k-1,k}^{(n)} \end{cases}.$$

On obtient:

$$\begin{aligned}
 s_k^{(n)} &= s_{k-1}^{(n)} \cdot \frac{Dg_{k-1,k}^{(n)} \cdot Ng_{k-1,k}^{(n+1)}}{Ng_{k-1,k}^{(n)} \cdot Dg_{k-1,k}^{(n+1)}} - s_{k-1}^{(n+1)} \\
 &= s_{k-1}^{(n)} \cdot \frac{g_{k-1,k}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n)}} - s_{k-1}^{(n+1)}.
 \end{aligned}$$

On a la même démonstration pour $g_{k,i}^{(n)}$ en remplaçant les $Ns_k^{(n)}$ par les $Ng_{k,i}^{(n)}$ et les $Ds_k^{(n)}$ par les $Dg_{k,i}^{(n)}$ respectivement.

■

Bien entendu, au lieu d'utiliser la règle auxiliaire dans la formule (44), on peut utiliser la relation de Hankel pour calculer les rapports $\frac{g_{k-1,k}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n)}}$ à savoir:

$$s_0^{(n)} = s_n = 1 \qquad n = 0, 1, \dots$$

$$s_k^{(n)} = s_{k-1}^{(n)} \cdot \frac{g_{k-1,k}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n)}} - s_{k-1}^{(n+1)} \qquad k = 1, 2, \dots \text{et } n = 0, 1, \dots$$

Avec (45)

$$\frac{g_{k-1,k}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n)}} = \frac{H_k^{(n+1)} H_{k-1}^{(n)}}{H_{k-1}^{(n+1)} H_k^{(n)}}$$

et

$$H_k^{(n)} = \frac{H_{k-1}^{(n)} \cdot H_{k-1}^{(n+2)} - [H_{k-1}^{(n+1)}]^2}{H_{k-2}^{(n+2)}} \text{ est calculé par la relation de Hankel}$$

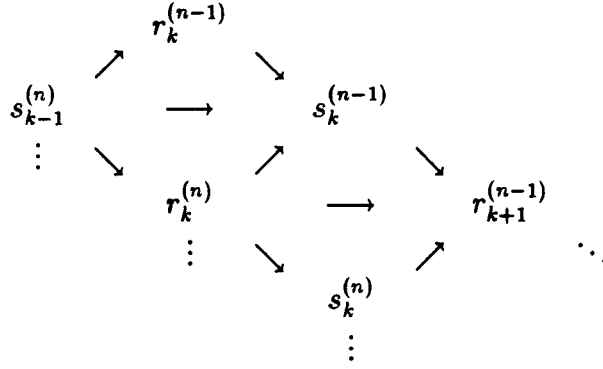
Comparons le nombre d'opérations des formules (44), (45) avec celui de $r - s$ algorithme, nous obtenons:

pour calculer $s_k^{(n)}$, on a besoin de:

Type d'opération nombre méthode d'opération	add.	multi.	div.	total
formule (44)	$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$	$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$	$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$	$\frac{k(k+1)(2k+1)}{2}$
formule (45)	$\frac{k}{2}(3k-1)$	$\frac{k}{2}(7k-1)$	$\frac{k}{2}(3k-1)$	$\frac{k}{2}(13k-3)$
$r - s$ algorithme	$k(2k-1)$	$k(2k-1)$	$k(2k-1)$	$3k(2k-1)$

On voit facilement que la formule (44) nécessite un plus grand nombre d'opérations que les deux autres, car on a introduit une suite auxiliaire dans le calcul. Mais cette méthode pourra être utilisé dans la suite pour obtenir une règle particulière.

Maintenant, on va discuter les problèmes de stabilité numérique; on voit que s'il y a des $H_k^{(n)}$ nuls ou très petits, ils peuvent provoquer des termes $s_k^{(n)}$ infinis ou très grand. Si l'on suppose $H_k^{(n)} = 0$, dans le tableau $r - s$, on a: $s_k^{(n)} = \infty$ et $r_k^{(n)} = 0$



Supposons que les autres termes aient des valeurs normales, alors le calcul de $r_{k+1}^{(n-1)}$ est indéterminé, on ne peut pas continuer de calculer. Si $H_k^{(n)}$ est très petit, alors il y aura des problèmes d'instabilité.

La situation est la même pour les formules (44) et (45); certains $H_k^{(n)}$ nuls ou très petits peuvent provoquer des $g_{k-1,k}^{(n)}$ nuls ou très petits, et donc les calculs ne peuvent pas fonctionner ou mal fonctionner.

Mais heureusement, grâce à l'introduction d'une règle auxiliaire, la formule (44) nous permet de donner une règle particulière qui peut éviter les problèmes indiqués au-dessus.

Théorème 4: (Règle particulière)

$$s_{k+m}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} s_m^{(n)} & s_m^{(n+1)} & \dots & s_m^{(n+k)} \\ g_{m,m+1}^{(n)} & g_{m,m+1}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & g_{m,m+k}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{m,m+1}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad g_{k+m,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_{m,i}^{(n)} & \dots & g_{m,i}^{(n+k)} \\ g_{m,m+1}^{(n)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & \dots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{m,m+1}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}$$

avec $k \geq 1, m \in \mathbb{N}, i > k + m.$

Dém: On pose $\tilde{s}_k^{(n)}$ la quantité obtenue par utilisation de la formule (44) avec les initialisations: $\tilde{s}_0^{(n)} = s_m^{(n)}$ et $\tilde{g}_{0,i}^{(n)} = g_{m,m+i}^{(n)}$ m fixé. Alors, $\tilde{s}_k^{(n)}$ est donné par l'expression déterminantale du théorème 4. Mais dans la formule (44), chaque étape est obtenue à partir de la précédente. Donc, $\tilde{s}_k^{(n)}$ est la $(k+m)$ ème étape avec les initialisations usuelles. On a donc $\tilde{s}_k^{(n)} = s_{k+m}^{(n)}$. Il en est de même pour l'expression de $g_{k+m,i}^{(n)}$.

■

De la même manière, maintenant on peut traiter les termes $r_k^{(n)}$. Définissons:

$$r_k^{(n)} = \frac{H_k^{(n)}}{H_{k-1}^{(n)}} = \frac{\begin{vmatrix} c_n & \cdots & c_{n+k-1} \\ \Delta c_n & \cdots & \Delta c_{n+k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta c_{n+k-2} & \cdots & \Delta c_{n+2k-3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Delta c_n & \cdots & \Delta c_{n+k-2} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta c_{n+k-2} & \cdots & \Delta c_{n+2k-4} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} r_1^{(n)} & \cdots & r_1^{(n+k-1)} \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n) & \cdots & g_{k-1}(n+k-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-2) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n) & \cdots & g_{k-1}(n+k-2) \end{vmatrix}}$$

avec $r_1^{(n)} = c_n \quad \forall n$ et $g_i(n) = \Delta c_{n+i-1} \quad i = 1, \dots, k-1$.

$$\text{et} \quad g_{k,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_i(n) & \cdots & g_i(n+k-1) \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n) & \cdots & g_{k-1}(n+k-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-2) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n) & \cdots & g_{k-1}(n+k-2) \end{vmatrix}} \quad \forall i \geq k.$$

On a l'algorithme suivant:

$$\begin{aligned} r_1^{(n)} &= c_n & n &= 0, 1, \dots \\ g_{1,i}^{(n)} &= g_i(n) = \Delta c_{n+i-1} & i &= 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \\ \text{Pour } n &= 0, 1, \dots \text{ et } k = 1, 2, \dots \\ r_{k+1}^{(n)} &= r_k^{(n)} \cdot \frac{g_{k,k}^{(n+1)}}{g_{k,k}^{(n)}} - r_k^{(n+1)} \\ g_{k+1,i}^{(n)} &= g_{k,i}^{(n)} \cdot \frac{g_{k,k}^{(n+1)}}{g_{k,k}^{(n)}} - g_{k,i}^{(n+1)} & i &= k+1, k+2, \dots \end{aligned} \tag{46}$$

Dém: (analogue à celle de la formule (44))

On pose: $r_{k+1}^{(n)} = \frac{Nr_{k+1}^{(n)}}{Dr_{k+1}^{(n)}}, \quad g_{k+1,i}^{(n)} = \frac{Ng_{k+1,i}^{(n)}}{Dg_{k+1,i}^{(n)}}.$

D'après l'identité de Sylvester, on a:

$$Nr_{k+1}^{(n)} \cdot Dr_k^{(n+1)} = Nr_k^{(n)} \cdot Dr_{k+1}^{(n+1)} - Nr_k^{(n+1)} \cdot Dr_{k+1}^{(n)}.$$

Divisons cette relation par $Dr_k^{(n+1)} Dr_{k+1}^{(n)}$; on obtient:

$$\frac{Nr_{k+1}^{(n)}}{Dr_{k+1}^{(n)}} = \frac{Nr_k^{(n)} \cdot Dr_{k+1}^{(n+1)}}{Dr_k^{(n+1)} \cdot Dr_{k+1}^{(n)}} - \frac{Nr_k^{(n+1)}}{Dr_k^{(n+1)}}.$$

Compte tenu des faits:

$$\begin{cases} Dr_{k+1}^{(n)} = (-1)^{k-1} Ng_{k,k}^{(n)} \\ \text{et} \\ Dr_k^{(n)} = Dg_{k,k}^{(n)} \end{cases}.$$

On obtient:

$$\begin{aligned} r_{k+1}^{(n)} &= \frac{Nr_k^{(n)} \cdot Dr_k^{(n)} \cdot Dr_{k+1}^{(n+1)}}{Dr_k^{(n)} \cdot Dr_k^{(n+1)} \cdot Dr_{k+1}^{(n)}} - r_k^{(n+1)} \\ &= \frac{Nr_k^{(n)} \cdot Dg_{k,k}^{(n)} \cdot (-1)^{k-1} Ng_{k,k}^{(n+1)}}{Dr_k^{(n)} \cdot Dg_{k,k}^{(n+1)} \cdot (-1)^{k-1} Ng_{k,k}^{(n)}} - r_k^{(n+1)} \\ &= r_k^{(n)} \cdot \frac{g_{k,k}^{(n+1)}}{g_{k,k}^{(n)}} - r_k^{(n+1)}. \end{aligned}$$

On a la même démonstration pour $g_{k+1,i}^{(n)}$, en remplaçant les $Nr_{k+1}^{(n)}$ par les $Ng_{k+1,i}^{(n)}$, et les $Dr_{k+1}^{(n)}$ par les $Dg_{k+1,i}^{(n)}$, respectivement. ■

Comme les calculs de $s_k^{(n)}$, l'algorithme (46) pour calculer $r_k^{(n)}$ peut se simplifier par la relation de Hankel. Quant à la règle particulière, on a évidemment le:

Théorème 5: (Règle particulière)

$$r_{k+m-1}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} r_m^{(n)} & r_m^{(n+1)} & \dots & r_m^{(n+k-1)} \\ g_{m,m}^{(n)} & g_{m,m}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m}^{(n+k-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k-2}^{(n)} & g_{m,m+k-2}^{(n+1)} & \dots & g_{m,m+k-2}^{(n+k-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{m,m}^{(n)} & \dots & g_{m,m}^{(n+k-2)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k-2}^{(n)} & \dots & g_{m,m+k-2}^{(n+k-2)} \end{vmatrix}}, \quad g_{k+m-1,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_{m,i}^{(n)} & \dots & g_{m,i}^{(n+k-1)} \\ g_{m,m}^{(n)} & \dots & g_{m,m+1}^{(n+k-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k-2}^{(n)} & \dots & g_{m,m+k-2}^{(n+k-1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{m,m}^{(n)} & \dots & g_{m,m}^{(n+k-2)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k-2}^{(n)} & \dots & g_{m,m+k-2}^{(n+k-2)} \end{vmatrix}}$$

avec $k > 1$, $m \in \mathbb{N}^*$ arbitraire, $i \geq k+m-1$.

Dém: Elle est analogue à celle du théorème 4. ■

Conclusion:

On a vu que les termes $s_k^{(n)}$ et $r_k^{(n)}$, peuvent se calculer séparément par (44) et (46) et en ce sens, ils sont indépendants. Si l'on a besoin seulement d'une partie, ou bien surtout s'il y a des problèmes d'instabilité numérique, il est mieux d'introduire une suite auxiliaire $\{g_i(n)\}_n$. En revanche, on utilise le $r-s$ algorithme pour économiser les calculs.

Exemple n°3:

Soit s_n une suite générée par la relation suivante:

$$s_{n+3} = \frac{1}{2}s_{n+2} + \frac{1}{4}s_{n+1} + \frac{1}{8}s_n \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\text{avec } s_0 = \begin{cases} 1.599 \\ 1.59999 \\ 1.6 \end{cases}, \quad s_1 = 1.2, \quad s_2 = 1.$$

et posons $c_n = \Delta s_n$.

Utilisant le $r - s$ algorithme ou les règles particulières (théorèmes 4 et 5) et comparant les valeurs exactes, avec les différents choix de s_0 , on obtient le tableau suivant:

Pour $s_3^{(0)}$

	$r - s$ algorithme	règle particulière
$s_0 = 1.599$	-0.1250000000000069	-0.1250000000000000
$s_0 = 1.59999$	-0.124999999912272	-0.1249999999999999
$s_0 = 1.6$	division par 0	-0.1250000000000000

$\forall s_0$ la valeur exacte de $s_3^{(0)} = -0.125$

Pour $r_4^{(0)}$

	$r - s$ algorithme	règle particulière
$s_0 = 1.599$	$0.6694.10^{-13}$	$-0.2361.10^{-15}$
$s_0 = 1.59999$	$-0.8597.10^{-10}$	$-0.5412.10^{-15}$
$s_0 = 1.6$	division par 0	$-0.3816.10^{-15}$

$\forall s_0$ la valeur exacte de $r_4^{(0)} = 0$

On voit facilement que les résultats sont meilleurs avec les règles particulières qu'avec le $r - s$ algorithme pour différentes valeurs de s_0 .

2.3.2 Algorithmes de calculs des polynômes orthogonaux adjacents et règles particulières

On a déjà vu que $\overline{P}_k^{(n)}(x)$ peut être calculé à l'aide de l'algorithme $r - s$ par la formule (42), et que $P_k^{(n)}(x)$ peut être calculé à l'aide de l'algorithme $q - d$ par la formule (43).

Maintenant, on va utiliser une suite auxiliaire pour réaliser ce calcul et l'on donnera une règle particulière pour traiter les problèmes d'instabilité numérique.

D'abord, voyons la famille $P_k^{(n)}(x)$. D'après la définition, on a:

$$P_k^{(n)}(x) = (-1)^k \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & x^k \\ c_n & \cdots & c_{n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+k-1} & \cdots & c_{n+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_n & \cdots & c_{n+k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+k-1} & \cdots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix}} = (-1)^k \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & x^k \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k-1) \end{vmatrix}}$$

$$\text{avec } g_i(n) = c_{n+i-1} \quad i = 1, \dots, k.$$

Posons:

$$g_{k,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_i(n) & \cdots & g_i(n+k) \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k-1) \end{vmatrix}} \quad i > k.$$

On a l'algorithme suivant:

$$P_0^{(n)}(x) = 1 \quad n = 0, 1, \dots$$

$$g_{0,i}^{(n)} = g_i(n) = c_{n+i-1} \quad i = 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots$$

Pour $n = 0, 1, \dots$ et $k = 1, 2, \dots$

$$P_k^{(n)}(x) = x \cdot P_{k-1}^{(n+1)}(x) - P_{k-1}^{(n)}(x) \cdot \frac{g_{k-1,k}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n)}} \quad (47)$$

$$g_{k,i}^{(n)} = g_{k-1,i}^{(n)} \cdot \frac{g_{k-1,k}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n)}} - g_{k-1,i}^{(n+1)} \quad i = k+1, k+2, \dots$$

Dém: On pose:

$$\tilde{P}_k^{(n)}(x) = (-1)^k \cdot P_k^{(n)}(x) = \frac{N \tilde{P}_k^{(n)}(x)}{D \tilde{P}_k^{(n)}(x)}, \quad g_{k,i}^{(n)} = \frac{N g_{k,i}^{(n)}}{D g_{k,i}^{(n)}}.$$

D'après l'identité de Sylvester, on a:

$$N \tilde{P}_k^{(n)}(x) \cdot D \tilde{P}_{k-1}^{(n+1)}(x) = N \tilde{P}_{k-1}^{(n)}(x) \cdot D \tilde{P}_k^{(n+1)}(x) - x \cdot N \tilde{P}_{k-1}^{(n+1)}(x) \cdot D \tilde{P}_k^{(n)}(x).$$

Divisons les deux membres par $D \tilde{P}_{k-1}^{(n+1)}(x) D \tilde{P}_k^{(n)}(x)$; on obtient:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_k^{(n)}(x) &= \frac{N \tilde{P}_{k-1}^{(n)}(x) \cdot D \tilde{P}_k^{(n+1)}(x)}{D \tilde{P}_{k-1}^{(n+1)}(x) \cdot D \tilde{P}_k^{(n)}(x)} - x \cdot \tilde{P}_{k-1}^{(n+1)}(x) \\ &= \frac{N \tilde{P}_{k-1}^{(n)}(x) \cdot D \tilde{P}_{k-1}^{(n)}(x) \cdot D \tilde{P}_k^{(n+1)}(x)}{D \tilde{P}_{k-1}^{(n)}(x) \cdot D \tilde{P}_{k-1}^{(n+1)}(x) \cdot D \tilde{P}_k^{(n)}(x)} - x \cdot \tilde{P}_{k-1}^{(n+1)}(x). \end{aligned}$$

Compte tenu des faits:

$$\left\{ \begin{array}{l} (-1)^{k-1} \cdot D\tilde{P}_k^{(n)}(x) = Ng_{k-1,k}^{(n)} \\ \text{et} \\ D\tilde{P}_{k-1}^{(n)}(x) = Dg_{k-1,k}^{(n)} \end{array} \right. .$$

On obtient:

$$\tilde{P}_k^{(n)}(x) = \tilde{P}_{k-1}^{(n)}(x) \cdot \frac{g_{k-1,k}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n)}} - x \cdot \tilde{P}_{k-1}^{(n+1)}(x) .$$

Donc

$$P_k^{(n)}(x) = x \cdot P_{k-1}^{(n+1)}(x) - P_{k-1}^{(n)}(x) \cdot \frac{g_{k-1,k}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n)}} .$$

On a la même démonstration pour $g_{k,i}^{(n)}$ en remplaçant les $N\tilde{P}_k^{(n)}(x)$ par les $Ng_{k,i}^{(n)}$ et les $D\tilde{P}_k^{(n)}(x)$ par les $Dg_{k,i}^{(n)}$ respectivement. ■

Remarque:

Pour réduire le nombre d'opérations, la règle auxiliaire dans la formule (47) peut être remplacée par la relation de Hankel.

Pour résoudre les problèmes d'instabilité numérique, on a le:

Théorème 6: (Règle particulière)

$$P_{k+m}^{(n)}(x) = (-1)^k \cdot \frac{\begin{vmatrix} P_m^{(n)}(x) & x \cdot P_m^{(n+1)}(x) & \cdots & x^k \cdot P_m^{(n+k)}(x) \\ g_{m,m+1}^{(n)} & g_{m,m+1}^{(n+1)} & \cdots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & g_{m,m+k}^{(n+1)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{m,m+1}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+1}^{(n+k-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n+k-1)} \end{vmatrix}}$$

avec $k \geq 1, m \in \mathbb{N}, i \geq k+m+1$

$$\text{et } g_{k+m,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_{m,i}^{(n)} & \cdots & g_{m,i}^{(n+k)} \\ g_{m,m+1}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{m,m+1}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+1}^{(n+k-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n+k-1)} \end{vmatrix}} .$$

Dém: Soit $\tilde{P}_k^{(n)}(x)$ la quantité obtenue en utilisant la formule (47) avec les initialisations: $\tilde{P}_0^{(n)}(x) = P_m^{(n)}(x)$ et $\tilde{g}_{0,i}^{(n)} = g_{m,m+i}^{(n)}$ m fixé. Alors, $\tilde{P}_k^{(n)}(x)$ est donné par l'expression déterminantale du théorème 6. Mais dans la formule (47), chaque étape est obtenue à partir de la précédente. Donc, $\tilde{P}_k^{(n)}$ est la $(k+m)$ ième étape avec les initialisations usuelles. On a donc $\tilde{P}_k^{(n)}(x) = P_{k+m}^{(n)}(x)$. Il en est de même pour l'expression de $g_{k+m,i}^{(n)}$.

■

Le complément de Schur nous donne:

$$P_{k+m}^{(n)}(x) = x^k P_m^{(n+k)}(x) - (P_m^{(n)}(x), \dots, x^{k-1} P_m^{(n+k-1)}(x)) \begin{pmatrix} g_{m,m+1}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+1}^{(n+k-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n+k-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{pmatrix}$$

Remarque:

Supposons M une matrice carrée divisée en 4 blocs et C une sous-matrice carrée non singulière, on a:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A \cdot C^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & (M/C) \\ C & D \end{pmatrix}$$

où $(M/C) = B - A \cdot C^{-1} \cdot D$

Si l'une des deux matrices C et (M/C) est de dimension paire, on a: $|M| = |C| \cdot |(M/C)|$, sinon, on a: $|M| = -|C| \cdot |(M/C)|$

Maintenant, voyons quelques exemples numériques. On verra que utilisation de la règle particulière (théorème 6) est meilleure que celle de l'algorithme habituel (47).

Exemple n°4:

Soit s_n une suite générée par la relation suivante:

$$s_{n+3} = \frac{1}{2}s_{n+2} + \frac{1}{4}s_{n+1} + \frac{1}{8}s_n \quad n = 0, 1, \dots$$

avec $s_0 = \begin{cases} 1.5999 \\ 1.5999999 \\ 1.6 \end{cases}, \quad s_1 = 1.4, \quad s_2 = 1.2$

et posons $c_n = \Delta s_n$, on obtient les résultats suivants:

$P_3^{(0)}(x) \ (x = 2)$	algorithme (47)	règle particulière (théorème 6)
$s_0 = 1.5999$	5.375000000000002	5.374999999999996
$s_0 = 1.5999999$	5.374999999986724	5.375000000000005
$s_0 = 1.6$	division par 0	5.375000000000001

$\forall s_0$ la valeur exacte de $P_3^{(0)}(2) = 5.375$

$P_3^{(0)}(x) \ (x = 3)$	algorithme (47)	règle particulière (théorème 6)
$s_0 = 1.5999$	21.6250000000003	21.6249999999999
$s_0 = 1.5999999$	21.6249999973452	21.6250000000001
$s_0 = 1.6$	division par 0	21.6250000000000

$\forall s_0$ la valeur exacte de $P_3^{(0)}(3) = 21.625$

$P_3^{(1)}(x) \ (x = -2)$	algorithme (47)	règle particulière (théorème 6)
$s_0 = 1.5999$	-9.62500000000006	-9.6250000000004
$s_0 = 1.5999999$	-9.62500000065344	-9.6249999999996
$s_0 = 1.6$	division par 0	-9.6249999999999

$\forall s_0$ la valeur exacte de $P_3^{(1)}(-2) = -9.625$

$P_3^{(1)}(x) \ (x = -3)$	algorithme (47)	règle particulière (théorème 6)
$s_0 = 1.5999$	-30.8750000000006	-30.8750000000001
$s_0 = 1.5999999$	-30.8750000064435	-30.8749999999999
$s_0 = 1.6$	division par 0	-30.8750000000000

$\forall s_0$ la valeur exacte de $P_3^{(1)}(-3) = -30.875$

Exemple n°5:

Soit s_n une suite générée par la relation suivante:

$$s_{n+4} = \frac{1}{2}s_{n+3} + \frac{1}{4}s_{n+2} + \frac{1}{8}s_{n+1} + \frac{1}{16}s_n \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\text{avec } s_0 = \begin{cases} 1.5999 \\ 1.5999999 \\ 1.6 \end{cases}, \quad s_1 = 1.4, \quad s_2 = 1.2, \quad s_3 = \begin{cases} 0.999 \\ 0.999999 \\ 1 \end{cases}$$

et posons $c_n = \Delta s_n$, on obtient les résultats suivants:

$P_4^{(0)}(x) \ (x = 2)$	algorithme (47)	règle particulière (théorème 6)
$\begin{cases} s_0 = 1.5999 \\ s_3 = 0.999 \end{cases}$	10.68750000000005	10.68750000000003
$\begin{cases} s_0 = 1.5999999 \\ s_3 = 0.9999999 \end{cases}$	10.68750000065447	10.68749999999999
$\begin{cases} s_0 = 1.6 \\ s_3 = 1 \end{cases}$	division par 0	10.68749999999995

$\forall s_0$ et s_3 la valeur exacte de $P_4^{(0)}(2) = 10.6875$

$P_4^{(0)}(x) \ (x = 3)$	algorithme (47)	règle particulière (théorème 6)
$\begin{cases} s_0 = 1.5999 \\ s_3 = 0.999 \end{cases}$	64.81250000000005	64.81249999999999
$\begin{cases} s_0 = 1.5999999 \\ s_3 = 0.9999999 \end{cases}$	64.8124999966453	64.81250000000000
$\begin{cases} s_0 = 1.6 \\ s_3 = 1 \end{cases}$	division par 0	64.81249999999986

$\forall s_0$ et s_3 la valeur exacte de $P_4^{(0)}(3) = 64.8125$

$P_4^{(1)}(x) \ (x = -2)$	algorithme (47)	règle particulière (théorème 6)
$\begin{cases} s_0 = 1.5999 \\ s_3 = 0.999 \end{cases}$	19.187500000000004	19.18749999999998
$\begin{cases} s_0 = 1.5999999 \\ s_3 = 0.9999999 \end{cases}$	19.18749999976534	19.18749999999998
$\begin{cases} s_0 = 1.6 \\ s_3 = 1 \end{cases}$	division par 0	19.18750000000001

$\forall s_0$ et s_3 la valeur exacte de $P_4^{(1)}(-2) = 19.1875$

$P_4^{(1)}(x) \ (x = -3)$	algorithme (47)	règle particulière (théorème 6)
$\begin{cases} s_0 = 1.5999 \\ s_3 = 0.999 \end{cases}$	92.56250000000006	92.56249999999992
$\begin{cases} s_0 = 1.5999999 \\ s_3 = 0.9999999 \end{cases}$	92.5624999977653	92.56249999999994
$\begin{cases} s_0 = 1.6 \\ s_3 = 1 \end{cases}$	division par 0	92.56250000000002

$\forall s_0$ et s_3 la valeur exacte de $P_4^{(1)}(-3) = 92.5625$

Maintenant, considérons la famille de polynômes orthogonaux adjacents $\overline{P}_k^{(n)}(x)$.
On pose:

$$(-1)^k \overline{P}_k^{(n)}(x) = (-1)^k \frac{H_k^{(n)}(x)}{H_k^{(n)}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & x^k \\ c_n & \cdots & c_{n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+k-1} & \cdots & c_{n+2k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ c_n & \cdots & c_{n+k} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n+k-1} & \cdots & c_{n+2k-1} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & x^k \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}$$

avec $g_i(n) = c_{n+i-1} \quad i = 1, \dots, k.$

$$\text{et } g_{k,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_i(n) & \cdots & g_i(n+k) \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}} \quad i > k.$$

On obtient l'algorithme suivant:

$$\begin{aligned} \overline{P}_0^{(n)}(x) &= 1 & n &= 0, 1, \dots \\ g_{0,i}^{(n)} &= g_i(n) = c_{n+i-1} & i &= 1, 2, \dots \text{ et } n = 0, 1, \dots \\ \text{Pour } n &= 0, 1, \dots \text{ et } k = 1, 2, \dots \\ \overline{P}_k^{(n)}(x) &= \frac{x \cdot \overline{P}_{k-1}^{(n+1)}(x) \cdot g_{k-1,k}^{(n)} - \overline{P}_{k-1}^{(n)}(x) \cdot g_{k-1,k}^{(n+1)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)} - g_{k-1,k}^{(n)}} & (48) \\ g_{k,i}^{(n)} &= \frac{g_{k-1,i}^{(n)} \cdot g_{k-1,k}^{(n+1)} - g_{k-1,i}^{(n+1)} \cdot g_{k-1,k}^{(n)}}{g_{k-1,k}^{(n+1)} - g_{k-1,k}^{(n)}} & i &= k+1, k+2, \dots \end{aligned}$$

Dém: (Par récurrence)

(1⁰) C'est vrai pour $k = 0$.

(2⁰) Supposons que ce soit vrai jusqu'à $k - 1$, alors on remplace les quantités par leurs expressions dans la règle de l'algorithme (48) et on réduit au même dénominateur.

On obtient:

$$\overline{P}_k^{(n)}(x) = \frac{N_k^{(n)}}{D_k^{(n)}}, \quad g_{k,i}^{(n)} = \frac{N_{k,i}^{(n)}}{D_{k,i}^{(n)}} \quad .$$

Avec

$$\begin{aligned} N_k^{(n)} &= (-1)^{k-1} \cdot x \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & x^{k-1} \\ g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n+1) & \cdots & g_{k-1}(n+k) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_k(n) & \cdots & g_k(n+k-1) \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n) & \cdots & g_{k-1}(n+k-1) \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{k-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & x^{k-1} \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n) & \cdots & g_{k-1}(n+k-1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \\ g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n+1) & \cdots & g_{k-1}(n+k) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & \cdots & x^k \\ g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n+1) & \cdots & g_{k-1}(n+k) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k-1) \end{vmatrix} \\ &\quad - \begin{vmatrix} 1 & \cdots & x^{k-1} \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n) & \cdots & g_{k-1}(n+k-1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix} \\ N_{k,i}^{(n)} &= \begin{vmatrix} g_i(n) & \cdots & g_i(n+k-1) \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n) & \cdots & g_{k-1}(n+k-1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \\ g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n+1) & \cdots & g_{k-1}(n+k) \end{vmatrix} \\ &\quad - \begin{vmatrix} g_i(n+1) & \cdots & g_i(n+k) \\ g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n+1) & \cdots & g_{k-1}(n+k) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_k(n) & \cdots & g_k(n+k-1) \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n) & \cdots & g_{k-1}(n+k-1) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

et

$$D_k^{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n) & \cdots & g_{k-1}(n+k-1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \\ g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n+1) & \cdots & g_{k-1}(n+k) \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned}
& - \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n+1) & \cdots & g_{k-1}(n+k) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_k(n) & \cdots & g_k(n+k-1) \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n) & \cdots & g_{k-1}(n+k-1) \end{vmatrix} \\
& = (-1)^{k-1} \left[|Id| \cdot \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n+1) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix} - |Id| \cdot \begin{vmatrix} g_1(n) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k-1) \end{vmatrix} \right].
\end{aligned}$$

Utilisons l'identité de Sylvester, on a:

$$N_k^{(n)} = - \begin{vmatrix} 1 & \cdots & x^k \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n+1) & \cdots & g_{k-1}(n+k-1) \end{vmatrix},$$

$$N_{k,i}^{(n)} = (-1)^{k-1} \cdot \begin{vmatrix} g_i(n) & \cdots & g_i(n+k) \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n+1) & \cdots & g_{k-1}(n+k-1) \end{vmatrix}$$

et

$$D_k^{(n)} = (-1)^{k-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_1(n+1) & \cdots & g_1(n+k-1) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{k-1}(n+1) & \cdots & g_{k-1}(n+k-1) \end{vmatrix}$$

d'où:

$$\overline{P}_k^{(n)}(x) = (-1)^k \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & x^k \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad g_{k,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_i(n) & \cdots & g_i(n+k) \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_1(n) & \cdots & g_1(n+k) \\ \vdots & & \vdots \\ g_k(n) & \cdots & g_k(n+k) \end{vmatrix}}.$$

■

Dans l'algorithme précédent (48), pour éviter $\Delta g_{k-1,k}^{(n)} = 0$ ou très petit, on a le:

Théorème 7: (Règle particulière)

$$\overline{P}_{k+m}^{(n)}(x) = \frac{\begin{vmatrix} \overline{P}_m^{(n)}(x) & x \cdot \overline{P}_m^{(n+1)}(x) & \cdots & x^k \cdot \overline{P}_m^{(n+k)}(x) \\ g_{m,m+1}^{(n)} & g_{m,m+1}^{(n+1)} & \cdots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & g_{m,m+k}^{(n+1)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ g_{m,m+1}^{(n)} & g_{m,m+1}^{(n+1)} & \cdots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & g_{m,m+k}^{(n+1)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}$$

avec $k \geq 1, m \in \mathbb{N}, i \geq k+m+1$

$$\text{et } g_{k+m,i}^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} g_{m,i}^{(n)} & \cdots & g_{m,i}^{(n+k)} \\ g_{m,m+1}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_{m,m+1}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+1}^{(n+k)} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} & \cdots & g_{m,m+k}^{(n+k)} \end{vmatrix}}.$$

Dém: Elle est analogue à celle de théorème 6.

■

Pour calculer les termes $\overline{P}_{k+m}^{(n)}(x)$ et $g_{k+m,i}^{(n)}$ dans le théorème 7, on utilise le complément de Schur; on obtient:

$$\overline{P}_{k+m}^{(n)}(x) = \overline{P}_m^{(n)}(x) - (x \cdot \overline{P}_m^{(n+1)}(x) - \overline{P}_m^{(n)}(x), \dots, x^k \cdot \overline{P}_m^{(n+k)}(x) - x^{k-1} \cdot \overline{P}_m^{(n+k-1)}(x)).$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \Delta g_{m,m+1}^{(n)} & \cdots & \Delta g_{m,m+1}^{(n+k-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta g_{m,m+k}^{(n)} & \cdots & \Delta g_{m,m+k}^{(n+k-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_{m,m+1}^{(n)} \\ \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$g_{k+m,i}^{(n)} = g_{m,i}^{(n)} - (\Delta g_{m,i}^{(n)}, \dots, \Delta g_{m,i}^{(n+k-1)}) \begin{pmatrix} \Delta g_{m,m+1}^{(n)} & \cdots & \Delta g_{m,m+1}^{(n+k-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \Delta g_{m,m+k}^{(n)} & \cdots & \Delta g_{m,m+k}^{(n+k-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_{m,m+1}^{(n)} \\ \vdots \\ g_{m,m+k}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Donc le calcul revient à la résolution d'un système de k équations linéaires.

Exemple n°6:

Considérons une suite générée par la relation suivante:

$$s_{n+4} = \frac{1}{2}s_{n+3} + \frac{1}{4}s_{n+2} + \frac{1}{8}s_{n+1} + \frac{1}{16}s_n \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\text{avec } s_0 = \begin{cases} 1.5 \overbrace{9 \dots 9}^9 \\ 1.6 \\ 1.6 \overbrace{0 \dots 0}^8 1 \end{cases}, \quad s_1 = 2.4, \quad s_2 = 0.4, \quad s_3 = 1$$

et posons $c_n = \Delta s_n \quad n = 0, 1, \dots$ Avec l'algorithme (48), on obtient le tableau suivant:

$\overline{P}_4^{(0)}(x)$	$x = 2$	$x = 3$
$s_0 = 1.5999$	170.999999998	1036.99999999
$s_0 = 1.5999999$	171.000001548	1037.00000965
$s_0 = 1.5 \overbrace{9 \dots 9}^9$	170.999857887	1036.99987997
$s_0 = 1.5 \overbrace{9 \dots 9}^{12}$	171.783899764	1042.27990284
$s_0 = 1.6$	9.373510862	1.69376314
$s_0 = 1.6001$	170.999999996	1036.99999997
$s_0 = 1.6000001$	170.999999369	1036.99999601
$s_0 = 1.6 \overbrace{0 \dots 0}^8 1$	170.999717625	1036.99687333
$s_0 = 1.6 \overbrace{0 \dots 0}^{11} 1$	173.520821492	1052.39602716

$\overline{P}_4^{(1)}(x)$	$x = -2$	$x = -3$
$s_0 = 1.5999$	306.999999996	1480.99999998
$s_0 = 1.5999999$	307.000003161	1481.00001437
$s_0 = 1.5 \overbrace{9 \dots 9}^9$	306.999869983	1480.99978676
$s_0 = 1.5 \overbrace{9 \dots 9}^{12}$	308.979524813	1490.13455493
$s_0 = 1.6$	66.217939734	263.69936931
$s_0 = 1.6001$	306.999999992	1480.99999996
$s_0 = 1.6000001$	306.999998738	1480.99999388
$s_0 = 1.6 \overbrace{0 \dots 0}^8 1$	306.999015654	1480.99537402
$s_0 = 1.6 \overbrace{0 \dots 0}^{11} 1$	311.282585934	1501.88317827

$\forall s_0$ les valeurs exactes de $\overline{P}_4^{(0)}(x)$ et de $\overline{P}_4^{(1)}(x)$ sont:

$\overline{P}_4^{(0)}(x) = 171$	si $x = 2$
$\overline{P}_4^{(0)}(x) = 1037$	si $x = 3$

$\overline{P}_4^{(1)}(x) = 307$	si $x = -2$
$\overline{P}_4^{(1)}(x) = 1481$	si $x = -3$

On voit que quand $s_0 = 1.6$, si on utilise l'algorithme (48), les valeurs $\overline{P}_4^{(0)}(x)$ et $\overline{P}_4^{(1)}(x)$ sont inexactes. Plus s_0 tend vers 1.6, moins on a de chiffres exacts. Mais si on utilise l'algorithme particulier (théorème 7), on obtient:

$\overline{P}_4^{(1)}(x)$	$x = -2$	$x = -3$
$s_0 = 1.5999$	306.99999999999930	1480.9999999999970
$s_0 = 1.5999999$	307.00000000000062	1481.0000000000030
$s_0 = 1.5 \underbrace{9 \dots 9}_9$	307.00000000000021	1481.0000000000010
$s_0 = 1.5 \underbrace{9 \dots 9}_{12}$	307.00000000000181	1481.0000000000090
$s_0 = 1.6$	307.00000000000002	1481.0000000000001
$s_0 = 1.6001$	306.99999999999064	1480.9999999999983
$s_0 = 1.6000001$	307.00000000000043	1481.0000000000020
$s_0 = 1.6 \underbrace{0 \dots 0}_8 1$	307.00000000000080	1481.0000000000040
$s_0 = 1.6 \underbrace{0 \dots 0}_{11} 1$	307.00000000000030	1481.0000000000014

Il y a 14 chiffres exacts, quelque soit s_0 . C'est la même chose pour $\overline{P}_4^{(0)}(x)$ quand $x = 2$ ou $x = 3$. Maintenant voyons un autre exemple.

Exemple n^07 :

Soit s_n une suite générée par la relation suivante:

$$s_{n+3} = \frac{1}{2}s_{n+2} + \frac{1}{4}s_{n+1} + \frac{1}{8}s_n \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\text{avec } s_0 = \begin{cases} 1.5 \underbrace{9 \dots 9} \\ 1.6 \\ 1.6 \underbrace{0 \dots 0}_8 1 \end{cases}, \quad s_1 = 1.2, \quad s_2 = 1$$

et posons $c_n = \Delta s_n \quad n = 0, 1, \dots$ Avec l'algorithme (48), on obtient le tableau suivant:

$\overline{P}_3^{(0)}(x)$	$x = 2$	$x = 3$
$s_0 = 1.5999$	-43.0000000001	-173.000000001
$s_0 = 1.5999999$	-43.0000000166	-173.000000141
$s_0 = 1.5 \underbrace{9 \dots 9}_9$	-42.9998762878	-172.999356697
$s_0 = 1.5 \underbrace{9 \dots 9}_{12}$	-43.0376635812	-173.158314714
$s_0 = 1.6$	-4.3846153846	-17.000000000
$s_0 = 1.6001$	-43.0000000000	-173.000000000
$s_0 = 1.6000001$	-42.9999999498	-172.999999909
$s_0 = 1.6 \underbrace{0 \dots 0}_8 1$	-43.0001592405	-173.000643308
$s_0 = 1.6 \underbrace{0 \dots 0}_{11} 1$	-42.8779402416	-172.513032422
	valeur exacte	valeur exacte
$\forall s_0$	-43	-173

$\overline{P}_3^{(1)}(x)$	$x = -2$	$x = -3$
$s_0 = 1.5999$	77.0000000000	247.000000000
$s_0 = 1.5999999$	76.9999999542	246.999999848
$s_0 = 1.5 \underbrace{9 \dots 9}_9$	76.9998742342	246.999622225
$s_0 = 1.5 \underbrace{9 \dots 9}_{12}$	77.0090923592	247.032541075
$s_0 = 1.6$	842.000000000	2629.000000000
$s_0 = 1.6001$	77.0000000000	247.000000000
$s_0 = 1.6000001$	77.0000000592	247.000000176
$s_0 = 1.6 \underbrace{0 \dots 0}_8 1$	77.0001213248	247.000377775
$s_0 = 1.6 \underbrace{0 \dots 0}_{11} 1$	76.8870453095	246.652520740
	valeur exacte	valeur exacte
$\forall s_0$	77	247

On voit que autour de la valeur $s_0 = 1.6$, les chiffres exacts de $\overline{P}_3^{(0)}(x)$ et de $\overline{P}_3^{(1)}(x)$ sont de moins en moins nombreux. Par contre, si l'on utilise la règle particulière, on obtient:

$\overline{P}_3^{(0)}(x)$	$x = 2$	$x = 3$
$s_0 = 1.5999$	-43.00000000000000	-173.00000000000000
$s_0 = 1.5999999$	-43.000000000000034	-173.00000000000014
$s_0 = 1.5 \underbrace{9 \dots 9}_9$	-43.00000000000000	-173.00000000000000
$s_0 = 1.5 \underbrace{9 \dots 9}_{12}$	-43.00000000000000	-173.00000000000000
$s_0 = 1.6$	-43.00000000000000	-173.00000000000000
$s_0 = 1.6001$	-43.00000000000000	-173.00000000000000
$s_0 = 1.6000001$	-43.000000000000002	-173.00000000000000
$s_0 = 1.6 \underbrace{0 \dots 0}_8 1$	-43.00000000000000	-173.00000000000000
$s_0 = 1.6 \underbrace{0 \dots 0}_{11} 1$	-43.00000000000000	-173.00000000000000

$\overline{P}_3^{(1)}(x)$	$x = -2$	$x = -3$
$s_0 = 1.5999$	76.99999999999999	247.00000000000000
$s_0 = 1.5999999$	77.00000000000005	247.00000000000014
$s_0 = 1.5 \underbrace{9 \dots 9}_9$	77.00000000000000	247.00000000000000
$s_0 = 1.5 \underbrace{9 \dots 9}_{12}$	77.00000000000002	247.00000000000010
$s_0 = 1.6$	76.99999999999999	247.00000000000000
$s_0 = 1.6001$	77.00000000000000	247.00000000000000
$s_0 = 1.6000001$	76.99999999999998	246.99999999999993
$s_0 = 1.6 \underbrace{0 \dots 0}_8 1$	77.00000000000004	247.00000000000013
$s_0 = 1.6 \underbrace{0 \dots 0}_{11} 1$	77.00000000000002	247.00000000000010

Le nombre de chiffres exacts est toujours du même ordre de grandeur que la précision de l'ordinateur utilisé.

3 Règles particulières pour l'interpolation rationnelle généralisée

Dans [22] C.BREZINSKI a proposé d'étudier le problème de l'interpolation par une fraction rationnelle généralisée:

$$R_{m,n}^{(i)}(x) = \frac{a_0 \cdot f_0(x) + \dots + a_m \cdot f_m(x)}{b_0 \cdot f_0(x) + \dots + b_n \cdot f_n(x)} \quad (49)$$

telle que $R_{m,n}^{(i)}(x_j) = f(x_j) = f_j$ pour $j = i, i+1, \dots, i+m+n$.

$i = 0, 1, 2, \dots$

où $f_i(x)$ est une famille de fonctions, et $f(x)$ la fonction à interpoler.

Cette question a été résolue par S.L.LOI et A.W.MCINNES [23].

On peut supposer, sans restreindre la généralité, que $b_0 = 1$. La relation (49) devient:

$$f_0(x) \cdot R_{m,n}^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^m a_j \cdot f_j(x) + R_{m,n}^{(i)}(x) \cdot \sum_{j=1}^n b_j \cdot f_j(x). \quad (50)$$

On pose:

$$\begin{cases} g_0(x_j) = f_0(x_j) \\ g_l(x_j) = f_l(x_j) & l = 1, \dots, m. \text{ où } x_j \text{ représente : } x, x_i, \dots, x_{i+m+n} \\ \tilde{g}_l(x_j) = f_l(x_j) \cdot R_{m,n}^{(i)}(x_j) & l = 1, \dots, n \end{cases}$$

Notons $g_{i,j} = g_i(x_j)$, $\tilde{g}_{i,j} = \tilde{g}_i(x_j)$. On suppose $f_0(x_j) = 1$, $j = i, i+1, \dots, i+m+n$. En résolvant le système (50), on obtient:

$$R^i(m, n; x) = R_{m,n}^{(i)}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -f_i & \dots & -f_{i+m+n} \\ g_0(x) & 1 & \dots & 1 \\ g_1(x) & g_{1,i} & \dots & g_{1,i+m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_m(x) & g_{m,i} & \dots & g_{m,i+m+n} \\ \tilde{g}_1(x) & \tilde{g}_{1,i} & \dots & \tilde{g}_{1,i+m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_n(x) & \tilde{g}_{n,i} & \dots & \tilde{g}_{n,i+m+n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ g_{1,i} & \dots & g_{1,i+m+n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,i} & \dots & g_{m,i+m+n} \\ \tilde{g}_{1,i} & \dots & \tilde{g}_{1,i+m+n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n,i} & \dots & \tilde{g}_{n,i+m+n} \end{vmatrix}}. \quad (51)$$

Remarque:

Pour simplifier les notations, on a supposé $f_0(x_j) = 1$, $j = i, \dots, i+m+n$. Sinon on remplace les deux premières lignes du numérateur respectivement par $0, -f_i f_0(x_i), \dots, -f_{i+m+n} f_0(x_{i+m+n})$ et $g_0(x), g_{0,i}, \dots, g_{0,i+m+n}$ la première ligne du dénominateur par $g_{0,i}, \dots, g_{0,i+m+n}$. On a également la même forme:

$$R^i(m, n; x) = R_{m,n}^{(i)}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -f_i & \cdots & -f_{i+m+n} \\ g_0(x) & 1 & \cdots & 1 \\ g_1(x) & g_{1,i}/g_{0,i} & \cdots & g_{1,i+m+n}/g_{0,i+m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_m(x) & g_{m,i}/g_{0,i} & \cdots & g_{m,i+m+n}/g_{0,i+m+n} \\ \tilde{g}_1(x) & \tilde{g}_{1,i}/g_{0,i} & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n}/g_{0,i+m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_n(x) & \tilde{g}_{n,i}/g_{0,i} & \cdots & \tilde{g}_{n,i+m+n}/g_{0,i+m+n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_{1,i}/g_{0,i} & \cdots & g_{1,i+m+n}/g_{0,i+m+n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,i}/g_{0,i} & \cdots & g_{m,i+m+n}/g_{0,i+m+n} \\ \tilde{g}_{1,i}/g_{0,i} & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n}/g_{0,i+m+n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n,i}/g_{0,i} & \cdots & \tilde{g}_{n,i+m+n}/g_{0,i+m+n} \end{vmatrix}}.$$

On définit les transformations auxiliaires suivantes:

$$Hg^i(m, n; x) = \frac{\begin{vmatrix} -\tilde{g}_n(x) & -\tilde{g}_{n,i} & \cdots & -\tilde{g}_{n,i+m+n-1} \\ g_0(x) & 1 & \cdots & 1 \\ g_1(x) & g_{1,i} & \cdots & g_{1,i+m+n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_m(x) & g_{m,i} & \cdots & g_{m,i+m+n-1} \\ \tilde{g}_1(x) & \tilde{g}_{1,i} & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n-1}(x) & \tilde{g}_{n-1,i} & \cdots & \tilde{g}_{n-1,i+m+n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_{1,i} & \cdots & g_{1,i+m+n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,i} & \cdots & g_{m,i+m+n-1} \\ \tilde{g}_{1,i} & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n-1,i} & \cdots & \tilde{g}_{n-1,i+m+n-1} \end{vmatrix}} \quad (52)$$

$$Vg^i(m, n; x) = \frac{\begin{vmatrix} -g_m(x) & -g_{m,i} & \cdots & -g_{m,i+m+n-1} \\ g_0(x) & 1 & \cdots & 1 \\ g_1(x) & g_{1,i} & \cdots & g_{1,i+m+n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m-1}(x) & g_{m-1,i} & \cdots & g_{m-1,i+m+n-1} \\ \tilde{g}_1(x) & \tilde{g}_{1,i} & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_n(x) & \tilde{g}_{n,i} & \cdots & \tilde{g}_{n,i+m+n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_{1,i} & \cdots & g_{1,i+m+n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m-1,i} & \cdots & g_{m-1,i+m+n-1} \\ \tilde{g}_{1,i} & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n,i} & \cdots & \tilde{g}_{n,i+m+n-1} \end{vmatrix}}. \quad (53)$$

Remarques: [23]

1. Les expressions pour $Hg^i(m, n; x)$ et $Vg^i(m, n; x)$ ont le même numérateur et les dénominateurs ont une ligne différente.
2. Les expressions pour $Hg^i(m-1, n; x)$ et $Vg^i(m, n-1; x)$ ont le même dénominateur et les numérateurs ont une ligne différente.

Si $N+1$ points d'interpolation sont donnés, après ces définitions, on a les algorithmes suivants [23]:

1. Initialisation:

Pour $m, n = 1, 2, \dots, N$ et pour $i = 0, 1, \dots, N-1$

$$Vg^i(m, 1-m; x) = Hg^i(m, 1-m; x) = g_{0,m}^i(x) \quad (54-A)$$

$$Vg^i(1-n, n; x) = Hg^i(1-n, n; x) = \tilde{g}_{0,n}^i(x) \quad (54-B)$$

où $g_{0,m}^i(x) = g_m(x_i) \cdot g_0(x) - g_m(x)$

$$\tilde{g}_{0,n}^i(x) = \tilde{g}_n(x_i) \cdot g_0(x) - \tilde{g}_n(x) \quad m, n = 1, 2, \dots$$

et $g_0(x_j) = 1, \quad g_m(x_j) = f_m(x_j), \quad \tilde{g}_n(x_j) = f_n(x_j) \cdot f(x_j) \quad j = i, \dots, i+m+n$

2. Pour $k = 2, 3, \dots, N$.

pour $m = N, N-1, \dots, k-N$.

pose $n = k-m$

pour $i = 0, 1, \dots, N-k$.

$$Hg^i(m, n; x) = Hg^i(m-1, n; x) - \frac{\Delta Hg^i(m-1, n; x)}{\Delta Vg^i(m, n-1; x)} \cdot Vg^i(m, n-1; x)$$

.....(54 - C)

$$Vg^i(m, n; x) = Vg^i(m, n-1; x) - \frac{\Delta Vg^i(m, n-1; x)}{\Delta Hg^i(m-1, n; x)} \cdot Hg^i(m-1, n; x)$$

.....(54 - D)

3. Pour $i = 0, 1, \dots, N$ défini $R^i(0, 0; x) = f_i$

pour $n = 1, 2, \dots, N$.

pour $i = 0, 1, \dots, N - n$.

$$R^i(0, n; x) = R^i(0, n-1; x) - \frac{\Delta R^i(0, n-1; x)}{\Delta Hg^i(0, n; x)} \cdot Hg^i(0, n; x)$$

pour $m = 1, 2, \dots, N$.

pour $i = 0, 1, \dots, N - m$.

$$R^i(m, 0; x) = R^i(m-1, 0; x) - \frac{\Delta R^i(m-1, 0; x)}{\Delta Vg^i(m, 0; x)} \cdot Vg^i(m, 0; x)$$

pour $m, n = 1, 2, \dots, N$.

pour $i = 0, 1, \dots, N - m - n$.

$$R^i(m, n; x) = R^i(m, n-1; x) - \frac{\Delta R^i(m, n-1; x)}{\Delta Hg^i(m, n; x)} \cdot Hg^i(m, n; x)$$

ou bien(54 - E)

$$R^i(m, n; x) = R^i(m-1, n; x) - \frac{\Delta R^i(m-1, n; x)}{\Delta Vg^i(m, n; x)} \cdot Vg^i(m, n; x)$$

.....(54 - F)

Les algorithmes précédents peuvent bien fonctionner, à condition que l'ensemble des fonctions $[\{g_i(x)\}_{i=1}^m, \{\tilde{g}_i(x)\}_{i=1}^n]$ forme un système de Chebyshev complet sur l'ensemble des points d'interpolation. Si il forme seulement un système de Chebyshev quasicomplet, dans ce cas, il peut arriver que deux termes adjacents soient égaux; il faut alors utiliser des algorithmes spéciaux [23, p.112] pour éviter la situation de singularité.

Si l'on n'impose aucune condition, c'est-à-dire que de telles singularités ne soient pas forcément isolées [24], la méthode ci-dessus n'est pas suffisante et il faut chercher une autre méthode, qui est plus générale. Voyons d'abord le théorème suivant:

Théorème 8:

$$R^i(m+m', n+n'; x) = \frac{\begin{vmatrix} R^i(m, n; x) & \dots & R^{i+m'+n'}(m, n; x) \\ Vg^i(m+1, n; x) & \dots & Vg^{i+m'+n'}(m+1, n; x) \\ \vdots & & \vdots \\ Vg^i(m+m', n-m'+1; x) & \dots & Vg^{i+m'+n'}(m+n', n-m'+1; x) \\ Hg^i(m, n+1; x) & \dots & Hg^{i+m'+n'}(m, n+1; x) \\ \vdots & & \vdots \\ Hg^i(m-n'+1, n+n'; x) & \dots & Hg^{i+m'+n'}(m-n'+1, n+n'; x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & & & & \\ & & \text{Id} & & \end{vmatrix}} \quad (55)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-m-m'-n-n' \quad m', n' \geq 0$$

où: la notation $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ & & \text{Id} \end{vmatrix}$ dénote le dénominateur, où l'on remplace la première ligne du numérateur par 1, ..., 1.

$$H^i(m+m'-1, n+n'; x)$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} Hg^i(m-n', n+n'; x) & \dots & Hg^{i+m'+n'-1}(m-n', n+n'; x) \\ Vg^i(m, n; x) & \dots & Vg^{i+m'+n'-1}(m, n; x) \\ \vdots & & \vdots \\ Vg^i(m+m'-1, n-m'+1; x) & \dots & Vg^{i+m'+n'-1}(m+n'-1, n-m'+1; x) \\ Hg^i(m-1, n+1; x) & \dots & Hg^{i+m'+n'-1}(m-1, n+1; x) \\ \vdots & & \vdots \\ Hg^i(m-n'+1, n+n'-1; x) & \dots & Hg^{i+m'+n'-1}(m-n'+1, n+n'-1; x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & & & & \\ & & \text{Id} & & \end{vmatrix}} \quad (56)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-m-m'-n-n'+1 \quad n' \geq 1$$

$$\begin{aligned}
& V^i(m+m', n+n'-1; x) \\
& = \frac{\begin{vmatrix} Vg^i(m+m', n-m'; x) & \cdots & Vg^{i+m'+n'-1}(m+m', n-m'; x) \\ Hg^i(m, n; x) & \cdots & Hg^{i+m'+n'-1}(m, n; x) \\ \vdots & & \vdots \\ Hg^i(m-n'+1, n+n'-1; x) & \cdots & Hg^{i+m'+n'-1}(m-n'+1, n+n'-1; x) \\ Vg^i(m+1, n-1; x) & \cdots & Vg^{i+m'+n'-1}(m+1, n-1; x) \\ \vdots & & \vdots \\ Vg^i(m+m'-1, n-m'+1; x) & \cdots & Vg^{i+m'+n'-1}(m+m'-1, n-m'+1; x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & & & & \\ & & \text{Id} & & \end{vmatrix}} \quad (57)
\end{aligned}$$

$$i = 0, 1, \dots, N-m-m'-n-n'+1 \quad m' \geq 1.$$

Dém:

$$\begin{aligned}
R^i(m, n; x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -f_i & \cdots & -f_{i+m+n} \\ g_0(x) & 1 & \cdots & 1 \\ g_1(x) & g_{1,i} & \cdots & g_{1,i+m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_m(x) & g_{m,i} & \cdots & g_{m,i+m+n} \\ \tilde{g}_1(x) & \tilde{g}_{1,i} & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_n(x) & \tilde{g}_{n,i} & \cdots & \tilde{g}_{n,i+m+n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_{1,i} & \cdots & g_{1,i+m+n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,i} & \cdots & g_{m,i+m+n} \\ \tilde{g}_{1,i} & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n,i} & \cdots & \tilde{g}_{n,i+m+n} \end{vmatrix}} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -f_i g_0(x) & \cdots & -f_{i+m+n} g_0(x) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ g_1(x)/g_0(x) & g_{1,i} & \cdots & g_{1,i+m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_m(x)/g_0(x) & g_{m,i} & \cdots & g_{m,i+m+n} \\ \tilde{g}_1(x)/g_0(x) & \tilde{g}_{1,i} & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_n(x)/g_0(x) & \tilde{g}_{n,i} & \cdots & \tilde{g}_{n,i+m+n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_{1,i} & \cdots & g_{1,i+m+n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,i} & \cdots & g_{m,i+m+n} \\ \tilde{g}_{1,i} & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n,i} & \cdots & \tilde{g}_{n,i+m+n} \end{vmatrix}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} 0 & -f_i g_0(x) & \cdots & -f_{i+m+n} g_0(x) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_1(x)/g_0(x) & g_{1,i} - g_1(x)/g_0(x) & \cdots & g_{1,i+m+n} - g_1(x)/g_0(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_m(x)/g_0(x) & g_{m,i} - g_m(x)/g_0(x) & \cdots & g_{m,i+m+n} - g_m(x)/g_0(x) \\ \tilde{g}_1(x)/g_0(x) & \tilde{g}_{1,i} - \tilde{g}_1(x)/g_0(x) & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n} - \tilde{g}_1(x)/g_0(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_n(x)/g_0(x) & \tilde{g}_{n,i} - \tilde{g}_n(x)/g_0(x) & \cdots & \tilde{g}_{n,i+m+n} - \tilde{g}_n(x)/g_0(x) \end{vmatrix} \\
= & \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_{1,i} - g_1(x)/g_0(x) & \cdots & g_{1,i+m+n} - g_1(x)/g_0(x) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,i} - g_m(x)/g_0(x) & \cdots & g_{m,i+m+n} - g_m(x)/g_0(x) \\ \tilde{g}_{1,i} - \tilde{g}_1(x)/g_0(x) & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n} - \tilde{g}_1(x)/g_0(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n,i} - \tilde{g}_n(x)/g_0(x) & \cdots & \tilde{g}_{n,i+m+n} - \tilde{g}_n(x)/g_0(x) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} f_i g_0(x) & \cdots & f_{i+m+n} g_0(x) \\ g_{1,i} g_0(x) - g_1(x) & \cdots & g_{1,i+m+n} g_0(x) - g_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,i} g_0(x) - g_m(x) & \cdots & g_{m,i+m+n} g_0(x) - g_m(x) \\ \tilde{g}_{1,i} g_0(x) - \tilde{g}_1(x) & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n} g_0(x) - \tilde{g}_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n,i} g_0(x) - \tilde{g}_n(x) & \cdots & \tilde{g}_{n,i+m+n} g_0(x) - \tilde{g}_n(x) \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \text{Id} & \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} f_i g_0(x) & \cdots & f_{i+m+n} g_0(x) \\ g_{0,1}^i(x) & \cdots & g_{0,1}^{i+m+n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ g_{0,m}^i(x) & \cdots & g_{0,m}^{i+m+n}(x) \\ \tilde{g}_{0,1}^i(x) & \cdots & \tilde{g}_{0,1}^{i+m+n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{0,n}^i(x) & \cdots & \tilde{g}_{0,n}^{i+m+n}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R^i(0,0;x) & \cdots & R^{i+m+n}(0,0;x) \\ Vg^i(1,0;x) & \cdots & Vg^{i+m+n}(1,0;x) \\ \vdots & & \vdots \\ Vg^i(m,1-m;x) & \cdots & Vg^{i+m+n}(m,1-m;x) \\ Hg^i(0,1;x) & \cdots & Hg^{i+m+n}(0,1;x) \\ \vdots & & \vdots \\ Hg^i(1-n,n;x) & \cdots & Hg^{i+m+n}(1-n,n;x) \end{vmatrix} \\
= & \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & \text{Id} & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & \text{Id} & & & \end{vmatrix} \quad (58)
\end{aligned}$$

qui correspond à la relation (55) avec $m = 0$, $n = 0$.

Soient $\tilde{R}^i(m', n'; x)$ les quantités obtenues par application des algorithmes (54 - A ~ F) avec les initialisations:

$$\begin{aligned} \tilde{R}^i(0, 0; x) &= \tilde{R}^i(m, n; x) \\ V\tilde{g}^i(j, 1-j; x) &= Vg^i(m+j, n+1-j; x) \quad j = 1, \dots, m'. \\ H\tilde{g}^i(1-j, j; x) &= Hg^i(m+1-j, n+j; x) \quad j = 1, \dots, n'. \end{aligned}$$

m, n fixés

Alors $\tilde{R}^i(m', n'; x)$ est donné par l'expression déterminantale (55) du théorème. Mais dans les algorithmes (54 - $A \sim F$) chaque étape est obtenue à partir de la précédente. Donc $\tilde{R}^i(m', n'; x)$ est la $(m + n + m' + n')$ ^{ième} étape avec les initialisations usuelles. On a donc $\tilde{R}^i(m', n'; x) = R^i(m + m', n + n'; x)$.

La démonstration est similaire pour la relation (56); on a:

$$Hg^i(m, n; x) = \begin{vmatrix} -\tilde{g}_n(x) & -\tilde{g}_{n,i} & \cdots & -\tilde{g}_{n,i+m+n-1} \\ g_0(x) & 1 & \cdots & 1 \\ g_1(x) & g_{1,i} & \cdots & g_{1,i+m+n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_m(x) & g_{m,i} & \cdots & g_{m,i+m+n-1} \\ \tilde{g}_1(x) & \tilde{g}_{1,i} & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n-1}(x) & \tilde{g}_{n-1,i} & \cdots & \tilde{g}_{n-1,i+m+n-1} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ g_{1,i} & \cdots & g_{1,i+m+n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m,i} & \cdots & g_{m,i+m+n-1} \\ \tilde{g}_{1,i} & \cdots & \tilde{g}_{1,i+m+n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{g}_{n-1,i} & \cdots & \tilde{g}_{n-1,i+m+n-1} \end{vmatrix}.$$

On fait la même chose que l'obtention de la relation (58) et l'on trouve:

[illegible]

qui correspond à la relation (56) avec $m = 1, n = 0$. Après, on fait le même raisonnement que dans la 2^{ème} partie pour l'obtention de la relation (55) et l'on obtient la relation (56).

La relation (57) est démontrée par la même façon en échangeant les rôles de m et de n .

■

Dans la relation (55), si $m' = 1, n' = 0$, on retrouve la relation (54 - F), si $m' = 0, n' = 1$, on retrouve la relation (54 - E).

Dans la relation (56), si $m' = n' = 1$, on retrouve la relation (54 - C).

Dans la relation (57), si $m' = n' = 1$, on retrouve la relation (54 - D).

Dans les relations (55), (56), (57), si l'on prend m' et n' supérieurs à 1, on obtient donc les algorithmes pour passer des singularités qui ne sont pas forcément isolées.

Un résultat immédiat qui s'obtient à partir du théorème 8 est le:

Corollaire:

$$R^i(m+m', n; x) = \frac{\begin{vmatrix} R^i(m, n; x) & \dots & R^{i+m'}(m, n; x) \\ Vg^i(m+1, n; x) & \dots & Vg^{i+m'}(m+1, n; x) \\ \vdots & & \vdots \\ Vg^i(m+m', n-m'+1; x) & \dots & Vg^{i+m'}(m+m', n-m'+1; x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & & \text{Id} & & \end{vmatrix}} \quad (60)$$

$i = 0, 1, \dots, N-m-m'-n. \quad \text{et} \quad m' \geq 0$

$$R^i(m, n+n'; x) = \frac{\begin{vmatrix} R^i(m, n; x) & \dots & R^{i+n'}(m, n; x) \\ Hg^i(m, n+1; x) & \dots & Hg^{i+n'}(m, n+1; x) \\ \vdots & & \vdots \\ Hg^i(m-n'+1, n+n'; x) & \dots & Hg^{i+n'}(m-n'+1, n+n'; x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & & \text{Id} & & \end{vmatrix}} \quad (61)$$

$i = 0, 1, \dots, N-m-n-n'. \quad \text{et} \quad n' \geq 0$

$$Hg^i(m+m', n+1; x) = \frac{\begin{vmatrix} Hg^i(m, n+1; x) & \dots & Hg^{i+m'}(m, n+1; x) \\ Vg^i(m+1, n; x) & \dots & Vg^{i+m'}(m+1, n; x) \\ \vdots & & \vdots \\ Vg^i(m+m', n-m'+1; x) & \dots & Vg^{i+m'}(m+m', n-m'+1; x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & & \text{Id} & & \end{vmatrix}} \quad (62)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-m-m'-n-1. \quad \text{et} \quad m' \geq 0$$

$$Vg^i(m+1, n+n'; x) = \frac{\begin{vmatrix} Vg^i(m+1, n; x) & \dots & Hg^{i+n'}(m+1, n; x) \\ Hg^i(m, n+1; x) & \dots & Hg^{i+n'}(m, n+1; x) \\ \vdots & & \vdots \\ Hg^i(m-n'+1, n+n'; x) & \dots & Hg^{i+n'}(m-n'+1, n+n'; x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ & & \text{Id} & & \end{vmatrix}} \quad (63)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-m-n-n'-1. \quad \text{et} \quad n' \geq 0$$

Dém: Dans le théorème 8, on prend $m' = 0, n' = 0, n' = 1, m' = 1$ respectivement.

■

Maintenant, donnons quelques exemples numériques. D'abord, on vérifie que la règle particulière du théorème 8 donne le même résultat que l'algorithme habituel (54). Ensuite on donne deux exemples en cas d'instabilité numérique.

Dans les exemples suivants, on prend toujours la famille de fonctions $f_i(x) = x^i \quad i = 0, 1, \dots$

Exemple n^0 8:

On reprend l'exemple n^0 1 [23] avec les conditions données

i	x_i	$R^i(0,0;x)$
0	0	2
1	1	3/2
2	2	4/5
3	3	1/2
4	4	6/17

On obtient le tableau suivant:

Pour $R^0(2,2;x)$ avec $x = 3.5$

Algorithme habituel (54)	Règle particulière (théorème 8)	Valeur exacte
0.415094339622644	0.415094339622641	0.415094339622642

Si l'on reprend l'exemple n^o2 [23] avec les conditions données

i	x_i	$R^i(0,0;x)$
0	1	4
1	2	1
2	3	0
3	4	1
4	5	2

On obtient le tableau suivant:

Pour $R^0(2,2;x)$ avec $x = 2.5$

Algorithme habituel (54)	Règle particulière (théorème 8)	Valeur exacte
0.0769230769230784	0.0769230769230767	0.0769230769230769

On voit que dans ce exemple, la règle particulière ainsi que l'algorithme habituel donnent presque les mêmes bons résultats.

Exemple n^o9:

Avec les conditions suivantes:

i	x_i	$R^i(0,0;x)$
0	1	4
1	2	1
2	3	0
3	3.01	0.01
4	5	2

On obtient le tableau suivant:

Pour $R^0(2, 2; x)$ avec $x = 3$

Algorithme habituel (54)	Règle particulière (théorème 8)	Valeur exacte
0.8615.10 ⁻⁹	0.4665.10 ⁻¹⁵	0

Mais si l'on remplace x_3 par 3.0001, on obtient:

Pour $R^0(2, 2; x)$ avec $x = 3$

Algorithme habituel (54)	Règle particulière (théorème 8)	Valeur exacte
0.7532.10 ⁻²	0.2415.10 ⁻¹³	0

Exemple n°10:

Avec les conditions suivantes:

i	x_i	$R^i(0, 0; x)$
0	0	2
1	1	1.5
2	2	0.8
3	2.01	0.75
4	4	6/17

On obtient le tableau suivant:

Pour $R^0(2, 2; x)$ avec $x = 2$

Algorithme habituel (54)	Règle particulière (théorème 8)	Valeur exacte
0.799999997542881	0.799999999999998	0.8

Si l'on remplace x_3 par 2.0001, on obtient:

Pour $R^0(2, 2; x)$ avec $x = 2$

Algorithme habituel (54)	Règle particulière (théorème 8)	Valeur exacte
0.799876634475235	0.799999999999714	0.8

On voit que pour les exemples n°9 et n°10, la règle particulière est beaucoup mieux que l'algorithme habituel.

REFERENCES

- [1] C. BREZINSKI
"Généralisations de la Transformation de Shaks, de la Table de Padé et de l' ϵ -algorithme"
Calcolo 12 (1975), 317-360.
- [2] J. VAN ISEGHEM
"Approximants de Padé Vectoriels"
Thèse, Université de Lille I . (1987)
- [3] D. SHANKS
"Nonlinear transformations of divergent and slowly convergent sequences"
J. Math. Phys., 34 (1955) 1-42.
- [4] ROGER C.E. TAN
"Implementation of the Topological ϵ -algorithm"
SIAM J. Sci. Stat. Comput. Vol. 9, N°5, September 1988, 839-848.
- [5] C. BREZINSKI
"About Henrici's method for non linear equations"
Symposium on numerical analysis and computational complex analysis, Zurich, Août
15-17,1983, non publié.
- [6] C. BREZINSKI
"Other manifestations of the Schur complement"
Linear Alg. Appl., 111(1988) 231-247.
- [7] AL. MAGNUS,
"Fractions continues généralisées: théorie et applications"
Thèse, Université Catholique de Louvain, 1976.
- [8] A.SIDI, W.FORD, J.SMITH
"Acceleration of convergence of vector sequences"
SIAM J. Numer. Anal. 23, N°1 (1986), 178-196.
- [9] S.CARAY, L.W.JACKSON
"A Polynomial Extrapolation Method for Finding Limits and Antilimits for Vector
Sequences"
SIAM J. Numer. Anal. 13 (1976), 734-752.
- [10] R.P.EDDY
"Extrapolating to the limit of a vector sequence"
In Information Linkage Between Applied Mathematics and Industry. P.C.C. Wang, ed.,
Academic Press, New-York, 1979, PP. 387-396.

- [11] M. MESINA
 "Convergence acceleration for the iterative solution of the equations $X = AX + f$ "
 Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 10 (1977), PP. 165-173.
- [12] C. BREZINSKI
 "Outlines of Padé approximation"
 in Computational Aspects of Complex Analysis. Editors: H.WERNER et al., 1983
 PP.1-50, Reidel, Dordrecht.
- [13] P.HENRICI
 "Elements of numerical analysis" Wiley, New-York, 1964.
- [14] A.C. MATOS
 "Construction de Méthodes d'Extrapolation à partir de Développements
 Asymptotiques"
 Thèse, Université de Lille I, 1989.
- [15] J. WIMP
 "Sequence transformation and their applications"
 Academic Press, New-York, 1981.
- [16] C. BREZINSKI
 "Some determinantal identities in a vector space with applications" dans 'Padé approximation and its applications'
 H.Werner and H.J.Bunger eds. LNM 1071 Springer-Verlag, Heidelberg, 1984.
- [17] C.BREZINSKI
 "A General Extrapolation Algorithm"
 Numer. Math. 35 (1980), 175-187.
- [18] P. WYNN
 "Upon some continuous prediction algorithms"
 Calcolo, 9 (1972) 177-234.
- [19] C. BREZINSKI
 "Accélération de la convergence en analyse numérique"
 Lecture Notes in Mathématiques, N°584, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.
- [20] W.C.PYE, T.A.ATCHISON
 "An algorithm for the computation of higher order G-transformation"
 SIAM J.Numer.Anal. 10 (1973) 1-7.
- [21] C. BREZINSKI
 "Padé-Type approximation and general orthogonal polynomials"
 ISNM Vol. 50, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1980.

- [22] C.BREZINSKI
 "The Mühlbach-Neuville-Aitken algorithm and some extentions"
 BIT 20 (1980), 444-451.
- [23] S.L.LOI and A.W.MCINNES
 "An algorithm for generalized rational interpolation"
 BIT 23 (1983), 105-117.
- [24] P. WYNN
 "Singular rules for certain non-linear algorithms"
 BIT 3 (1963), 175-195.
- [25] C. BREZINSKI
 "Sur le calcul de certains rapports de déterminants"
 dans ' Padé approximation and its applications' L. Wuytack ed., LNM 765, Springer-Verlag, Heidelberg, 1979.
- [26] C. BREZINSKI
 "Algebraic properties of the E-transformation"
 In Numerical Analysis and Mathematical Modelling, Volume 24 of PWN, pp.85-90,
 Warsaw, 1990. Banach Center Publications.

