

50376
1993
274

50376
1993
274

THESE

N° d'ordre 1169

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

en

LASERS, MOLECULES ET RAYONNEMENT ATMOSPHERIQUE

par

Hervé DELBARRE

RFTOU



ETUDE DE L'ORIGINE DES INSTABILITES SPECTRALES DANS UN LASER A ELECTRONS LIBRES EN REGIME COMPTON

Soutenue le 24 Septembre 1993 devant la commission d'examen

B. Macke	Professeur, Université de Lille I	Président
A. Dubrulle	Président de l'Université du Littoral	Rapporteur
J. M. Ortega	Directeur de Recherche, Université d'Orsay	Rapporteur
D. Iracane	Ingénieur en chef, CEA	Rapporteur
D. Boucher	Professeur, Université de Lille I	Examineur

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne (LSH) de l'Université des Sciences et Technologies de Lille et au Service de Physique et Techniques Nucléaires du Commissariat à l'Energie Atomique à Bruyères-le-Châtel.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur B. MACKE, pour m'avoir accueilli au LSH et me faire l'honneur de présider le jury, ainsi qu'à son successeur Monsieur le Professeur P. GLORIEUX. Je dois également des remerciements à Monsieur R. DEI-CAS et Monsieur S. JOLY, responsables successifs du Laser à Electrons Libres "ELSA" de Bruyères-le-Châtel.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur le Professeur A. DUBRULLE - Président de l'Université du Littoral - pour m'avoir fait l'honneur de juger ce travail. Ces remerciements s'adressent aussi à Monsieur J. M. ORTEGA - Directeur de Recherches au CNRS et responsable du Lasers à Electrons Libres "CLIO" de l'Université d'Orsay -, également rapporteur et dont j'ai apprécié les remarques constructives.

Je tiens à exprimer ma plus vive reconnaissance au Professeur Daniel BOUCHER et à Daniel IRACANE - Ingénieur en chef et responsable du Laser à Electrons Libres de Bruyères-le-Châtel - grâce auxquels ce travail a pu être mené à bien dans d'excellentes conditions. La patience, la compétence, la confiance sans faille et la disponibilité dont ils ont fait preuve, ont enrichi cette expérience passionnante dont j'espère avoir tiré, chaque jour, les leçons. Qu'ils me pardonnent ce maigre témoignage bien loin d'illustrer leurs qualités respectives. L'acharnement avec lequel Daniel Boucher a défendu le projet de Laser à Electrons Libres et le dynamisme permanent de Daniel Iracane au cours de ce travail resteront dans mon souvenir. Je ne saurais enfin oublier Pascal Chaix dont j'ai apprécié la contribution et la présence amicale.

J'ai eu le plaisir d'être amicalement entouré, au LSH, de Robin BOCQUET, "Jules" BURIE, Monsieur CHEN, Jean COSLEOU, Jean DEMAISON, Mireille LEGUENNEC, Monsieur LI, Georges WLODARCZAK et , au CEA, de A. BINET, Philippe GUIMBAL, Nadine LABBAL, J. G. MARMOUGET, Yves PRANAL...(et bien d'autres qui me pardonnerons, je l'espère, de ne pas les citer). Je les remercie de la sympathie quotidienne qu'ils m'ont témoignée bien que nos domaines de prédilection soient bien différents.

*Laser . . . inter eximia naturae dona numeratum
plurimis compositionibus inseritur*

The Laser is numbered among the most miraculous gifts
of nature and lends itself to a variety of applications

Plinius, Naturalis Historia, XXII, 49 (first century A.D.)

*An Elaboration of the Quotation from Pliny the Elder:
The Laser during the Greco-Roman Civilization*

During the Greco-Roman civilization (roughly from the sixth century B.C. to the second century A.D.) the Laser was well known and much celebrated. Unlike its present-day homonym, it was actually a plant, but with no less wonderful properties. This plant, perhaps belonging to the *Umbelliferae*, grew wild over a large area around Cyrene, in present-day Libya. Sometimes also called *Laserpitium*, it was considered to be a gift of God because of its almost miraculous properties. It was used to cure a variety of diseases, from pleurisy to various epidemic infections. It was an effective antidote against the poison of snakes, scorpions, and enemy arrows. Its delicate flavor led to its use as an exquisite dressing in the best cuisine. It was so valuable as to be the main source of Cyrenaean prosperity and it was exported to both Greeks and Romans. During the period of Roman domination, it was the only tribute paid by the Cyrenaeans to the Romans, who kept the Laser in their coffers together with their golden ingots. What is perhaps the best testimony to the Laser of those days is to be found on the celebrated Arcesilao cup (now in the Cyrene Museum), where porters can be seen loading the Laser onto a ship under the supervision of King Arcesilao. Both Greeks and Romans tried hard, but without success, to grow the Laser in various parts of *Apulia* and *Ionia* (in the south of Italy). Consequently the Laser became more and more rare and seems to have disappeared around the second century A.D. Ever since then, despite several efforts, no one has been able to find the Laser in the deserts south of Cyrene, and so it remains the lost treasure of the Greco-Roman civilization.

O. SVELTO

Résumé

Cette étude a pour but de comprendre les conditions d'obtention de la pureté spectrale ultime du laser à électrons libres (LEL) en régime Compton dans la limite du faisceau continu. Elle a été menée autour du projet de LEL en infrarouge lointain de Lille et du LEL de puissance en infrarouge proche (ELSA) du Commissariat à l'Energie Atomique. Notre démarche se divise en trois parties. D'abord, la transition entre un régime de spectre fin stable et un régime de spectre large instable a pu être clairement identifiée à la génération de raies satellites dans la phase de saturation du régime de spectre fin. Puis, un modèle semi-analytique, confrontant une approche analytique à la simulation numérique, a mis en évidence la dynamique des raies satellites, y compris un régime transitoire ignoré jusqu'à présent. La structure des raies satellites a été élucidée en régime asymptotique. Divers moyens d'assurer la transition entre spectre large et spectre fin ont été analysés. Ces méthodes consistent, soit à agir sur le champ laser par filtrage optique, soit à modifier l'interaction du champ laser et du faisceau d'électrons (tapering et onduleur à deux fréquences), ou encore à moduler l'énergie du faisceau d'électrons. Enfin, nos résultats ont été connectés au projet de Lille et aux expériences récentes.

Abstract

This work is intended to understand the conditions for obtaining the ultimate spectral thickness of free electron laser (FEL) in the Compton regime, in the limit of continuous beam. This study has been realised around the far-infrared FEL project in Lille, and the near-infrared FEL (ELSA) at the Commissariat à l'Energie Atomique. Our work is divided into three parts. First, the transition between a stable regime with thick spectrum and a broadband unstable regime has been identified with sideband generation during the saturation phase. Then, a semi-analytical model collates an analytical approach with numerical simulation, and leads to determine sideband dynamics, including a transient regime, up to now ignored. The sideband structure has been determined in the asymptotic regime. Several ways for ensuring transition between broad and thick spectrum have been analysed. These methods consist in filtering the laser spectrum, or in modifying the laser-electrons interaction (with a tapering or two-frequency wiggler), or in modulating electron energy. Finally, our results have been linked to the project and recent experiences.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

INTRODUCTION

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE I : LE LEL ET SON COMPORTEMENT SPECTRAL

I. A. CADRE DE L'ETUDE DANS LE DOMAINE DU LEL

I. A. a. L'origine historique du LEL

I. A. b. Description générale du LEL

I. A. b. 1. Approche physique du LEL

I. A. b. 2. Position de cette étude parmi les différents types de LEL

I. A. c. Développement récent des LEL. Réalisations et projets

I. A. d. Applications

I. B. LA DYNAMIQUE SPECTRALE DU LEL. POSITION DE L'ETUDE

I. B. a. Etat de l'art dans le domaine du comportement spectral

I. B. b. Dynamique du spectre du LEL et origine des instabilités spectrales

CHAPITRE II : MODELE ET SIMULATION NUMERIQUE

II. A. DESCRIPTION DU MODELE ET ADAPTATION DU FORMALISME

II. A. a. Description générale du modèle

II. A. a. 1. Le formalisme associé au faisceau d'électrons

II. A. a. 2. Introduction qualitative à partir du mouvement des électrons

II. A. a. 3. Couplage du faisceau d'électrons au champ laser. Hypothèses sur le champ laser

II. A. b. Modèle de base

II. A. b. 1. Echantillonnage du spectre

II. A. b. 2. Equation de Vlasov

II. A. b. 3. Equation de Maxwell

II. A. c. Changement de variables et choix d'une nouvelle distribution électronique. Système d'équations de référence

II. A. c. 1. Nouvelle formulation de l'équation de Vlasov et équations du mouvement associées

II. A. c. 2. Nouvelle formulation de l'équation de Maxwell à terme source continu pour chaque mode et distribution résonante associée

II. A. c. 3. Equation de Maxwell à terme source discret

II. B. ILLUSTRATION DU MODELE DANS LE CAS MONOCHROMATIQUE. SIMULATION MULTIFREQUENCE ET SES PARAMETRES

II. B. a. Cas monochromatique

II. B. a. 1. Equation du pendule

II. B. a. 2. Trajectoire des électrons dans l'espace des phases

II. B. a. 3. Du régime linéaire à faible champ et faible gain à l'instabilité de bande latérale

II. B. b. Simulation multifréquence

II. B. b. 1 Simulation multifréquence

II. B. b. 2. Bruit numérique en régime non-linéaire

SECONDE PARTIE

CHAPITRE III : APPROCHE SEMI-ANALYTIQUE DE LA DYNAMIQUE DES RAIES SATELLITES

III. A. CALCUL PERTURBATIF DU GAIN DES RAIES AUTOUR D'UN ETAT D'EQUILIBRE AU VOISINAGE DES POINTS RESONANTS

III. A. a. Etat d'équilibre stable

III. A. a. 1. Hypothèses sur le champ laser et le faisceau d'électrons

III. A. a. 2. Calcul de la distribution d'équilibre à l'ordre 0

III. A. b. Calcul perturbatif au premier ordre

III. A. b. 1. Calcul de la distribution au premier ordre

III. A. b. 2. Description de l'évolution des raies satellites par une matrice de couplage

III. B. DYNAMIQUE DES RAIES SATELLITES. LIMITE DES HYPOTHESES DU CALCUL PERTURBATIF

III. B. a. Etude de la croissance des raies satellites avec le modèle "fond de puits"

III. B. a. 1. Validation numérique du calcul perturbatif

III. B. a. 2. Propriétés des raies satellites dans l'hypothèse "fond de puits"

III. B. b. Exploitation physique du calcul perturbatif

III. B. b. 1. La croissance des raies satellites avec une distribution réaliste

III. B. b. 2. Examen des hypothèses d'équilibre et de localisation des électrons en fond de puits

III. B. c. Caractérisation du quasi-équilibre

III. B. c. 1. L'équilibre en dehors du "fond de puits"

III. B. c. 2. Injection des électrons sur une trajectoire d'équilibre

CHAPITRE IV : INHIBITION DES RAIES SATELLITES

IV. A. METHODE DE DETERMINATION DES PARAMETRES DE FILTRAGE A PARTIR DE SIMULATIONS REALISTES A BAS BRUIT NUMERIQUE

IV. A. a. Vérification de la propriété de couplage des raies satellites. Méthode d'évaluation du gain des raies satellites

IV. A. b. Exploitation du couplage de modes : variation du gain des raies satellites avec l'énergie du mode pompage

IV. B. EFFET COMBINE D'UN TAPERING ET D'UN FILTRAGE SUR LES RAIES SATELLITES

IV. B. a. Introduction de la notion de tapering

IV. B. b. Etude systématique de la dynamique spectrale en présence d'un tapering et d'un filtrage

IV. B. c. Extension du modèle académique en "fond de puits" au tapering

**IV. C. AUTRES EXEMPLES : LE BI-ONDULEUR ET LA MODULATION
D'ENERGIE DU FAISCEAU D'ELECTRONS**

IV. C. a. Onduleur à 2 fréquences

IV. C. b. Modulation d'énergie du faisceau d'électrons

TROISIEME PARTIE

**CHAPITRE V : LIEN AVEC LES EXPERIENCES ET LE
PROJET DE LILLE**

V. A. OBJECTIFS DU PROJET ET INCIDENCE DE NOTRE ETUDE

V. B. CONTRAINTES EXPERIMENTALES DU PROJET

CONCLUSION

INTRODUCTION

Le domaine des lasers à électrons libres (LEL) atteint le stade de la maturité expérimentale. Plusieurs machines offrent désormais le rayonnement aux utilisateurs. C'est par exemple le cas des systèmes CLIO en France, FELIX en Hollande, MARK III et le LEL de l'Université de Santa-Barbara aux Etats-Unis. A ce jour, seul ce dernier laser couvre le domaine infrarouge lointain.

Le Laboratoire de Spectroscopie Hertziennne de l'Université des Sciences et Technologies de Lille a présenté un projet de laser à électrons libres dans la gamme infrarouge lointain [1]. Ce projet est bâti autour d'une source d'électrons de type Van de Graaff d'énergie variant de 2 à 6 Mev afin de délivrer un rayonnement de longueur d'onde comprise entre 100 μm et 1000 μm . Spécialisé dans les applications à haute résolution, le laboratoire s'est naturellement tourné vers l'analyse de la stabilité et des conditions d'obtention de la pureté spectrale limite. Il s'agit de l'un des problèmes les plus actuels dans le domaine de la physique du LEL. Les analyses de dynamique spectrale sont en effet peu nombreuses concernant les expériences actuellement disponibles et ont parfois fait l'objet de controverses.

Notre étude a été menée en collaboration directe avec le Service de Physique et Techniques Nucléaires du Commissariat à l'Energie Atomique à Bruyères-Le-Châtel où un LEL de forte puissance est maintenant opérationnel (projet ELSA). Nous nous sommes proposés d'examiner conjointement la dynamique spectrale du LEL et d'apprendre à la contrôler. Notre étude se limite aux LEL de type Compton dans la limite du faisceau d'électrons continu.

Le travail joint une approche analytique à la simulation numérique. Le document est divisé en trois parties : une approche du LEL et du phénomène que nous avons examiné, nos résultats théoriques concernant ce phénomène et enfin, le lien avec les expériences et le projet de Lille. Détaillons maintenant les étapes de notre progression :

Destinée plus particulièrement aux lecteurs peu familiarisés avec le sujet, une première partie sera consacrée à la présentation progressive des notions de base. Cette première partie comprend les deux premiers chapitres et inclura les premiers résultats acquis.

Ce premier chapitre restera très qualitatif. Il concernera l'histoire et le principe de fonctionnement du LEL. Nous dresserons un rapide bilan des opérations en cours et tenterons de faire un point sur les applications afin de situer ce travail dans un contexte général. Nous positionnerons ensuite cette étude dans le cadre plus restreint des

connaissances de la dynamique spectrale du LEL. Une première analyse numérique nous permettra la mise en évidence de deux régimes de fonctionnement spectral radicalement opposés :

- une évolution vers un spectre fin stable dit régime d'affinement spectral*
- une évolution vers un spectre large instable dit régime d'élargissement spectral.*

Ce dernier régime a été décrit pour la première fois par D. Iracane lors d'études sur le projet infrarouge proche ELSA . Nous montrerons que ce processus se manifeste également dans l'infrarouge lointain. Nous montrerons de plus que la bifurcation entre les deux régimes résulte de la génération de raies satellites. L'effet apparaît au voisinage de la saturation du régime d'affinement spectral. Il n'existe aucune autre source apparente d'instabilités. Le phénomène de génération de raies satellites est essentiel à l'interprétation de l'évolution du spectre du LEL. Il fera l'objet d'une étude approfondie dans la seconde partie.

Le formalisme et la simulation numérique sont présentés de manière progressive au second chapitre.

Le modèle ayant été développé par ailleurs [2], nous insisterons sur les hypothèses essentielles permettant d'établir les équations de base. Le modèle repose sur les équations couplées de Maxwell et de Vlasov dans le cadre d'une décomposition de Fourier du champ laser. Nous introduirons, de façon simple, le principe de l'interaction du faisceau d'électrons et du champ laser. Le formalisme de base sera adapté à l'exploitation analytique menée aux chapitres ultérieurs.

Le modèle sera d'abord utilisé, à titre d'illustration, dans le cas monochromatique. Nous montrerons les différents régimes de fonctionnement monochromatique, partant du régime linéaire de faible champ pour arriver à la génération des raies satellites. Nous présenterons ensuite la simulation multifréquence SPECTRE qui occupe une place importante dans notre analyse. Nous préciserons les critères dont nous disposons afin de fiabiliser nos résultats. Nous verrons en particulier comment il est possible de forcer le bruit numérique et de réaliser des simulations à bas bruit numérique. Ce type de simulation sera précieux lors de l'examen de la génération des raies satellites.

La seconde partie est consacrée à l'étude théorique de la génération de raies satellites et l'analyse de moyens permettant de contrôler la transition entre les régimes d'élargissement et d'affinement spectral. Elle représente la plus grande partie de notre contribution personnelle à l'étude de la dynamique spectrale. Elle se compose des chapitres III et IV.

Nous avons en premier lieu adopté une démarche semi-analytique (chapitre III).

Un modèle académique sera ainsi développé sur la base d'hypothèses simples. Il sera mené par un calcul perturbatif au premier ordre autour d'un état d'équilibre du système. La dynamique des raies satellites y sera décrite grâce à un système d'équations différentielles simple. Ce modèle présente l'intérêt de permettre une description analytique de la dynamique des raies satellites depuis le niveau de bruit jusqu'au régime asymptotique.

Ce modèle sera ensuite analysé et confronté à des simulations réalistes. L'exploitation directe du calcul mettra en évidence l'existence d'un régime transitoire et d'un régime asymptotique dans le développement des raies satellites. Le régime transitoire généralement ignoré, ne peut cependant être négligé dans la plupart des LEL existants. On montrera par ailleurs que le système tend naturellement, en régime asymptotique, vers un état d'équilibre différent de celui proposé dans le modèle analytique. Nous caractériserons la structure des raies satellites dans ce régime.

Si ce modèle simple permet de comprendre la génération de raies satellites en régime asymptotique, il s'avère insuffisant pour interpréter le régime transitoire. Or la plupart des LEL existants n'atteignent que le début du régime asymptotique.

En second lieu, une démarche essentiellement numérique est ainsi nécessaire pour caractériser les différentes méthodes d'élimination des raies satellites (chapitre IV). La maîtrise du bruit numérique, inhérent à la simulation, s'est avérée indispensable pour examiner le développement des raies satellites à bas niveau.

Le filtrage est le moyen le plus élémentaire de suppression des raies satellites. L'analyse de simulations à bas bruit donnera une idée assez précise des caractéristiques du filtrage adapté à l'obtention d'un spectre fin.

Le tapering (diminution du couplage entre le faisceau d'électrons et le champ laser) ou l'onduleur à deux fréquences peuvent offrir une autre voie d'élimination des bandes latérales. Nous en examinerons donc les effets. Nous montrerons en particulier que le tapering n'exprime en réalité son efficacité que s'il est aidé d'un filtrage. Enfin, on présentera rapidement une nouvelle méthode de contrôle des raies satellites par modulation de l'énergie du faisceau électronique.

Dans la dernière partie (chapitre V), nous confronterons les conclusions de notre analyse aux quelques résultats expérimentaux disponibles dans la bibliographie récente. Nous dresserons le bilan de cette étude dans le cadre restreint du projet lillois dont les principales composantes et contraintes seront exposées.

CHAPITRE I

LE LEL ET SON COMPORTEMENT SPECTRAL

Le Laser à Electrons Libres (LEL) a connu au cours de ces dernières années un essor sans précédent. Sa longue histoire se concrétise maintenant par un nombre de réalisations et de projets sans cesse croissant en Europe, aux Etats-Unis et au Japon dont une grande partie est destinée aux applications.

Cependant, sa dynamique spectrale très riche est encore mal comprise. Il reste des inconnues de taille qui peuvent nuire aux applications à venir ou tout simplement masquer les potentialités réelles du LEL. Quelle est l'évolution spectrale du LEL et par quels phénomènes est-elle gouvernée? Comment maîtriser les instabilités spectrales observées expérimentalement? Le LEL peut-il délivrer naturellement un rayonnement de spectre fin stable? Quelle finesse spectrale peut-on attendre de ce type de laser?

Ce chapitre a pour but de situer le travail entrepris dans le contexte actuel du LEL et des connaissances que nous en avons, à la fois dans le domaine expérimental et dans le domaine théorique. Pour ce faire, il comprend deux parties distinctes et complémentaires. La première partie présentera le LEL dans un cadre très général ; il s'agira essentiellement de donner un contexte expérimental à cette étude à travers une présentation du LEL et de son utilisation. Cette présentation n'est pas exhaustive et le lecteur désireux de parfaire ses connaissances peut par exemple consulter C. Brau [3] ou T. C. Marshall [4]. Dans la seconde partie, nous focaliserons plus particulièrement notre attention sur la dynamique spectrale du LEL ; on identifiera alors clairement le choix de l'étude qui va suivre.

Le lecteur familier du domaine du LEL pourra se rendre directement à cette seconde partie.

I. A. CADRE DE L'ETUDE DANS LE DOMAINE DU LEL

Sous le couvert de son nom, le Laser à Electrons Libres cache en réalité une grande variété de sources de rayonnement dans les différentes gammes du spectre électromagnétique. S'il existe une base commune à l'ensemble des LEL, des différences importantes donnent à chaque machine une physique et une vocation propres. Aussi est-il indispensable, dans un domaine aussi vaste, de définir précisément d'une part les limites de cette étude et d'autre part son intérêt dans le domaine actuel du LEL.

Dans ce but, après une présentation de son origine historique, nous décrirons de façon générale la physique du LEL. Les principales hypothèses du modèle que nous avons adopté permettront alors de situer à quel type de LEL il s'applique surtout. Le développement récent du LEL et de ses applications nous montrera ensuite la nécessité d'une étude approfondie de son comportement spectral.

I. A. a. L'origine historique du LEL

Dans le principe, le LEL peut être considéré comme une source de rayonnement idéale. Il peut en effet délivrer un rayonnement cohérent continûment accordable des longueurs d'onde centimétriques jusqu'à l'ultraviolet voire même les rayons X si toutefois on pouvait disposer de miroirs à ces longueurs d'onde extrêmement courtes. Son milieu actif est un faisceau d'électrons relativistes traversant une structure magnétique périodique (l'onduleur) ; il est par conséquent non destructif contrairement aux lasers classiques. Le LEL est donc un candidat de premier choix pour la génération de rayonnement de forte puissance accordable.

Pourtant, le LEL a subi un développement retardé par rapport aux lasers conventionnels, bien que curieusement les bases en aient été jetées bien avant que T. H. Maiman ne conçoive le laser à rubis en 1960. L'idée de l'utilisation d'un onduteur, (tel que celui utilisé aujourd'hui) pour produire un rayonnement spontané à partir d'un faisceau d'électrons, fut en effet avancée par H. Motz de l'Université de Stanford en 1951, dans le but de pousser les limites imposées par la technologie des tubes électroniques vers des longueurs d'onde plus courtes. Ces expériences aboutirent à l'émission d'un rayonnement millimétrique.

A sa suite, Philipps développa quelques années plus tard (en 1960) une source de rayonnement à "électrons libres" (au sens où les électrons ne sont pas liés à un noyau atomique). Le dispositif appelé "ubitron" identique à celui de Motz délivrait un rayonnement allant des longueurs d'onde centimétriques à millimétriques grâce à un faisceau d'électrons faiblement relativistes (150 keV) mais de densité électronique beaucoup plus importante (créant une charge d'espace). Cependant, ces résultats furent

éclipsés par le développement d'une part des tubes à onde progressive et d'autre part des lasers atomiques et moléculaires devenus classiques depuis.

Néanmoins, les recherches se sont poursuivies à Stanford et en 1970, J. M. J. Madey proposa ce qu'il appela un "Laser à Electrons Libres" pour la génération de rayonnement de courte longueur d'onde où les guides d'onde ne sont plus nécessaires. La dénomination "Laser" tient au fait que le modèle qu'il développa était purement quantique ; parallèlement aux lasers classiques, le principe du laser pouvait se caractériser par une émission stimulée due à une inversion de population entre états quantiques du faisceau d'électrons. On montrera plus tard qu'un modèle classique est en réalité suffisant (nous reviendrons sur l'historique de l'approche théorique du LEL au Chapitre II).

La première émission stimulée [5] sera observée en 1976 par l'équipe de Madey en pompant le faisceau d'électrons (de 24 MeV traversant un onduleur de 5m) avec un laser CO₂. L'addition de miroirs à cette expérience aboutit une année plus tard au premier Laser à Electrons Libres (au sens où on l'entend aujourd'hui ie sans dispositif de pompage externe) à 3,5 μm [6].

Dès lors, un travail théorique et expérimental débuta dans plusieurs laboratoires. En 1983, trois LEL devinrent opérationnels la même année : le premier dans le visible sur l'anneau de stockage ACO de l'Université d'Orsay [7, 8], les deux suivants dans l'infrarouge sur des accélérateurs linéaires aux Etats-Unis, à Stanford et à Los Alamos [9, 10].

Depuis, de nombreux LEL ont été développés sur la quasi-totalité du spectre et certains lasers fonctionnent presque exclusivement pour les applications. Afin de mieux comprendre un tel engouement pour le LEL, décrivons-en d'abord le principe.

I. A. b. Description générale du LEL

La variété des LEL tient à la grande diversité des sources électroniques. En effet, le principe de fonctionnement est commun à l'ensemble des LEL. Nous examinerons donc d'abord la physique du LEL indépendamment des caractéristiques de la source d'électrons. On insistera sur les différentes échelles de temps qui entrent en jeu et on introduira les paramètres caractéristiques du laser. Une description sommaire des sources électroniques permettra enfin de définir à quel type de LEL cette étude s'applique.

I. A. b. 1. Approche physique du LEL

* Le principe

Le principe du LEL repose sur la conversion d'une faible partie de l'énergie d'un faisceau d'électrons relativistes en énergie électromagnétique.

Ce processus est rendu possible en soumettant le faisceau d'électrons à un champ magnétique statique créé par un "onduleur". L'onduleur peut être un arrangement d'aimants permanents (figure I. 1) créant sur l'axe du mouvement des électrons un champ magnétique statique sinusoïdal polarisé rectilignement (onduleur plan) ou un enroulement hélicoïdal de conducteurs créant une polarisation circulaire (onduleur circulaire). Une onde électromagnétique se propageant sur l'axe en sens inverse du faisceau d'électrons peut aussi faire office d'onduleur. Nous considérerons dans ce document le cas classique d'un onduleur plan tout à fait équivalent du point de vue de la physique du LEL à un onduleur circulaire.

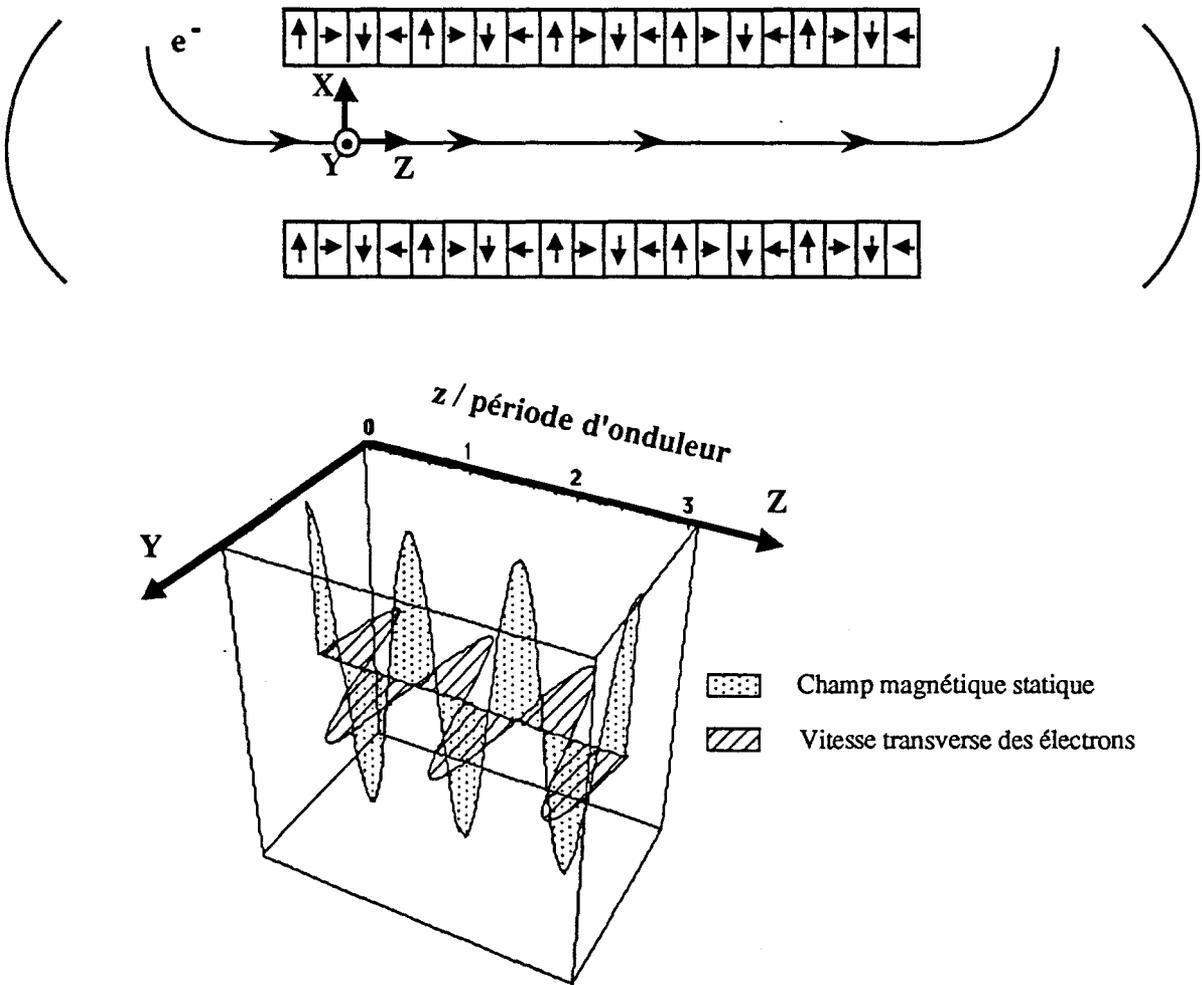


Figure I. 1. L'onduleur plan de longueur L_w crée un champ magnétique statique périodique transverse d'amplitude B_w (de l'ordre du Tesla) et de période λ_w (de quelques centimètres). Sous l'effet du champ magnétostatique, les électrons adoptent un mouvement transverse et rayonnent. Ce rayonnement confiné dans la cavité optique se couple au mouvement transverse des électrons permettant ainsi un transfert d'énergie entre le faisceau d'électrons et l'onde.

Les électrons traversant un onduleur plan (ou respectivement circulaire) adoptent un mouvement transverse périodique sinusoïdal (resp. hélicoïdal) de période égale à celle de l'onduleur λ_w et orthogonal à la direction de leur mouvement (figure I. 1) et à celle du champ magnétique (resp. orthogonal à la direction du mouvement et colinéaire à celle du champ magnétique).

Le mouvement transverse des électrons joue un rôle fondamental tant dans le phénomène d'émission spontanée que dans le processus d'émission stimulée :

D'une part, les électrons ainsi accélérés dans l'onduleur rayonnent (les lignes de rayonnement synchrotron utilisent le même principe). L'oscillation transverse des électrons et leur mouvement relativiste génère un rayonnement incohérent de courte longueur d'onde (beaucoup plus courte que la période de l'onduleur). Dans le cas particulier de l'onduleur plan, les électrons émettent spontanément un rayonnement centré sur la longueur d'onde d'émission spontanée λ_{sp} suivante :

$$\lambda_{sp} = \frac{\lambda_w}{2 \gamma^2} (1 + a_w^2 / 2) \quad (I-1)$$

La fréquence du rayonnement émis est accordée principalement par le choix de l'énergie E des électrons (rapportée ici à l'énergie de masse : $\gamma = E / (m c^2)$) et la période λ_w de l'onduleur. La constante d'onduleur a_w (généralement inférieure à 1) :

$$a_w = \frac{e B_w}{m c k_w} \quad (I-2)$$

est un terme correctif donnant la possibilité d'un accord plus fin. Dans la pratique, on réalise cet accord en variant l'amplitude du champ magnétique par le biais de l'entrefer des aimants aisément ajustable.

D'autre part, le rayonnement émis spontanément est confiné dans une cavité optique et se couple au faisceau d'électrons par le biais de leur mouvement transverse autorisant ainsi un échange d'énergie entre le faisceau d'électrons et l'onde laser. Plus précisément, la partie électrique \vec{E} du champ associée à une densité de courant transverse $\vec{J}_\perp = \rho \vec{v}_\perp$ (où ρ et \vec{v}_\perp sont respectivement la densité électronique et la vitesse transverse locales) permet d'échanger la puissance électrocinétique $\vec{J}_\perp \cdot \vec{E}$. Ce couplage est maximum lorsque le champ électrique et le mouvement transverse sont colinéaires et le champ laser sera donc polarisé rectilignement. L'oscillation transverse s'accompagne d'une modulation longitudinale de la densité électronique (rassemblement par paquets ou "bunching" dans le cas monochromatique) qui va permettre l'amplification du champ laser (et le ralentissement moyen du faisceau d'électrons). En régime de faible champ laser, le

maximum de gain du champ laser est obtenu à une fréquence proche du maximum d'émission spontanée typiquement à un écart relatif en fréquence de l'ordre de -1% de celui-ci.

* Les échelles du LEL

Les conditions de résonance autorisent l'amplification de l'onde laser uniquement lorsqu'elle se déplace dans le sens du mouvement des électrons. Ainsi, dans une cavité optique classique à deux miroirs, le rayonnement est amplifié du début à la fin de l'onduleur et effectue le chemin inverse sans interagir avec le faisceau d'électrons jusqu'à l'entrée de l'onduleur. Afin de caractériser l'amplification du champ électromagnétique, nous aurons souvent recours au "gain par passage" de l'onde (de même que nous mesurerons parfois le temps en nombre de passages) ; il s'agit du rapport de l'énergie laser à la sortie de l'onduleur à son énergie initiale à l'entrée de l'onduleur ou encore le gain du laser pendant la durée d'un aller-retour de l'onde dans la cavité.

Par ailleurs, la durée d'interaction d'un électron avec l'onde se limite à son temps de traversée de l'onduleur (soit une dizaine de ns). Les électrons sont par conséquent "rafraîchis" à chaque nouveau passage. Ceci implique en particulier de manipuler les équations d'interaction champ-électrons en temps fini (sauf dans le cas très particulier où la source électronique est un anneau de stockage).

Aussi la physique du LEL doit-elle prendre en compte des échelles de temps et de longueur couvrant plusieurs décades : la longueur d'onde du rayonnement est inférieure au millimètre (la durée équivalente est 3 ps), l'onduleur a une période de quelques centimètres (équivalent à 100 ps), la longueur de l'onduleur est de plusieurs mètres (la durée d'interaction est de l'ordre 10 ns) et enfin nous serons amenés à étudier l'évolution du LEL sur quelques centaines de passages (soit quelques dizaines de μ s). Ces échelles de grandeur seront complétées ensuite par les temps caractéristiques associés à la structure du faisceau d'électrons.

* Les paramètres importants : quelques ordres de grandeur

Bien entendu, les paramètres qui nous permettront de quantifier les qualités premières du laser sont directement liées aux échelles de temps et de longueur qui viennent d'être évoquées. Il est possible d'apprécier les caractéristiques d'un LEL à partir d'un nombre restreint de paramètres.

Nous avons déjà mentionné le gain par passage. Outre les caractéristiques de l'onduleur communes à l'ensemble des LEL, il dépend principalement de la densité électronique (ie de façon moins restrictive de l'intensité du faisceau d'électrons) et de l'énergie des électrons ; il doit bien sûr être supérieur aux pertes de la cavité optique. Afin de se fixer les idées, retenons que le gain en régime de faible champ est proportionnel à l'intensité du faisceau d'électrons et à l'inverse du cube de son énergie : ainsi, par exemple, si un courant de 1 A est suffisant pour engendrer une oscillation laser à une longueur d'onde de 250 μm (4 Mev), il faudra 1 kA pour conserver le même gain à 20 μm (20 Mev). Le gain par passage est un paramètre crucial ; il détermine non seulement les conditions d'oscillation du laser mais aussi le temps de montée à la saturation. Ce dernier point prend toute son importance dans la mesure où tous les LEL fonctionnent en impulsions ; il est indispensable de disposer d'un temps utile de l'impulsion laser aussi long que possible.

Le second paramètre est le rendement extrait du laser c'est à dire l'énergie laser extraite du faisceau d'électron pendant la durée d'interaction rapportée à l'énergie initiale du faisceau d'électrons. Le rendement extrait à la saturation du laser dépend bien entendu des paramètres et du régime de fonctionnement du LEL comme nous le verrons plus tard ; cependant, on peut estimer qu'il ne dépasse guère quelques % (résultat médiocre par rapport aux lasers classiques). Dans le cas particulier du projet de Lille dont les paramètres sont présentés au paragraphe suivant, le rendement est proche de 0,2 % en fonctionnement quasi-monochromatique : un faisceau d'électrons de 1 A d'énergie égale à 4 Mev (soit une puissance de 4 MW) permet de délivrer à la saturation une puissance laser d'environ 10 kW.

I. A. b. 2. Position de cette étude parmi les différents types de LEL

Le domaine du LEL peut être divisé en deux grandes catégories : les LEL de type Compton et ceux de type Raman. Les LEL de type Compton se caractérisent par une énergie de faisceau d'électrons élevée (électrons ultra-relativistes). Dans ce régime, l'interaction directe entre les électrons est négligeable ; les électrons sont couplés entre eux uniquement par l'intermédiaire du champ laser. Au contraire, dans le cas des LEL de type Raman, les effets de charge d'espace ne peuvent être ignorés ; ce type de LEL relève d'une physique très différente de celle que nous allons présenter ici.

La frontière entre les deux régimes est déterminée par la longueur d'onde associée à la fréquence d'oscillation du plasma : le régime Compton est réalisé lorsque cette longueur est très supérieure à la longueur de l'onduleur. On peut estimer qu'un LEL fonctionne en régime Compton dès que l'énergie des électrons est supérieure à 2 Mev (ou

la longueur d'onde du rayonnement est inférieure au millimètre avec un onduleur classique). La plupart des LEL actuels fonctionnent dans ce régime.

Les LEL de type Compton fournissent actuellement du rayonnement sur une large gamme du spectre électromagnétique. Cette couverture découle de l'utilisation d'une grande variété de technologies d'accélération des électrons adaptée à chaque domaine spectral. En effet, les onduleurs des LEL existants ont tous une période de quelques centimètres. A ce jour, aucune expérience positive avec un onduleur de période beaucoup plus courte (micro-onduleur) n'a été relatée. La longueur d'onde d'un LEL (I-1) est donc toujours essentiellement déterminée par l'énergie des électrons. La figure I. 2 donne une idée des accélérateurs employés dans chaque gamme spectrale.

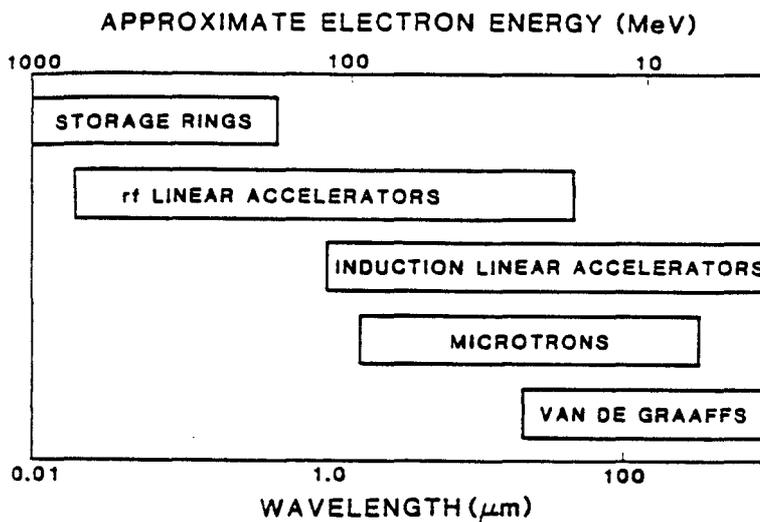


Figure I. 2. On peut associer à chaque domaine spectral un type particulier d'accélérateur. Le LEL nécessite un faisceau d'électrons de densité et d'énergie d'autant plus grandes que la longueur d'onde est courte. Dans le domaine infrarouge proche et lointain, la technologie simple des accélérateurs électrostatiques de type Van de Graaff est particulièrement bien adaptée. Ce schéma sera probablement bouleversé par l'apparition des micro-onduleurs.

Bien sûr, il n'est pas question ici d'entrer dans le détail de la technologie des différents accélérateurs. Cependant, il est important de situer le domaine d'application expérimental du modèle que nous allons développer. Deux hypothèses essentielles permettent de délimiter sa frontière.

Nous supposons d'abord que les électrons ne traversent l'onduleur qu'une seule fois ou de façon moins restrictive que le faisceau d'électrons à l'entrée de l'onduleur est vierge de toute interaction antérieure avec le champ laser et par conséquent quasi-

monocinétique. Cette hypothèse écarte d'emblée les anneaux de stockage où chaque paquet d'électrons contient l'histoire de ses passages précédents dans l'onduleur. Ceci donne d'ailleurs lieu à une physique propre à ce type de laser pouvant engendrer dans certaines conditions des phénomènes chaotiques (cascade de doublement de périodes).

Par ailleurs, le modèle a été conçu dans la limite du faisceau d'électrons continu (les raisons de ce choix sont imposées par la représentation en Fourier du spectre). Or chaque accélérateur délivre un faisceau d'électrons impulsionnel avec une structure temporelle propre (figure 1. 3).

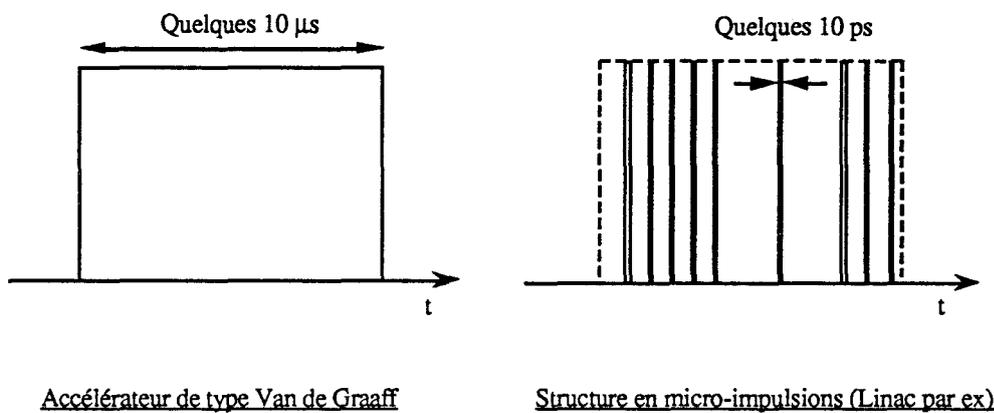


Figure 1. 3. Les échelles de temps et de longueur associées au faisceau d'électrons couvrent elles-aussi plusieurs décades. La structure des impulsions électroniques dépend du type d'accélérateur. L'accélérateur de Van de Graaff fournit des macro-impulsions durant quelques dizaines de μs . Dans la plupart des autres accélérateurs, chaque macro-impulsion est divisée en micro-impulsions durant quelques dizaines de ps.

De façon générale, lorsque la durée d'une impulsion électronique est très supérieure au temps de passage d'un électron dans l'onduleur (une dizaine de ns), le faisceau d'électrons peut être considéré continu. L'accélérateur électrostatique de type Van de Graaff [1] par exemple fournit des impulsions durant quelques dizaines de μs et correspond bien à ce cadre. Un critère plus restrictif sera détaillé au chapitre suivant et montrera que le modèle peut être valable pour des faisceaux hachés en micro-impulsions (comme celles fournies par un Linac ou une cavité RF par exemple) si celles-ci demeurent assez longues. Dans le domaine infrarouge proche (autour de $\lambda = 10 \mu\text{m}$), on peut d'ores et déjà avancer une durée limite de 100 ps (équivalente à une longueur de 3 cm) en deçà de laquelle l'hypothèse du faisceau continu devient déraisonnable.

I. A. c. Développement récent des LEL. Réalisations et projets

A la suite des expériences pionnières dont l'histoire a été brièvement rappelée au début de ce chapitre, le LEL s'est réellement développé au cours des dix dernières années principalement aux Etats-Unis et en Europe (soit dans l'ordre du nombre de réalisations la

France, la Hollande, l'Allemagne et l'Italie). Le tableau I. 1 récapitule les réalisations de LEL durant cette période. S'il fallait faire un état des projets, un autre tableau de même dimension serait nécessaire. En effet, on peut déjà dénombrer au Japon seulement une quinzaine de projets sur une grande partie du spectre.

L'ensemble des réalisations se regroupent autour de quelques centres d'intérêt. Outre les expériences de recherche sur le LEL, il y a d'une part la volonté de développer des lasers de très forte puissance (plusieurs MW) en poussant les possibilités du LEL à leur extrémité et d'autre part celle de créer des sources destinées aux physiciens d'autres disciplines ou des chercheurs d'horizons scientifiques différents tels que la biologie et la médecine.

Les expériences de Boeing et de Los Alamos aux Etats-Unis puis le LEL nommé ELSA du Commissariat à l'Energie Atomique à Bruyères-le-Châtel sont des exemples de la catégorie des LEL de puissance.

Quant aux LEL ouverts aux applications, leur évolution s'est effectuée en deux étapes. Une étape de faisabilité a été réalisée au centre d'études des LEL à l'Université de Californie à Santa-Barbara (UCSB) où L. R. Elias (en 1984) a développé un LEL en infrarouge lointain basé sur un accélérateur électrostatique de type Van de Graaff. La seconde étape est caractérisée par une utilisation plus intensive du rayonnement du LEL. Elle a été menée d'abord à l'UCSB par G. Ramian puis de façon plus tardive en Europe. Ainsi, le LEL de l'UCSB a multiplié ces lignes de rayonnement, couvre maintenant couramment la gamme de longueur d'onde 2,5 mm-63 μm et tend à évoluer vers des longueurs d'onde plus courtes (projet jusqu'à 30 μm). Le développement des LEL européens ne s'est concrétisé que très récemment par la réalisation concomitante en 1991-92 de deux LEL destinés aux utilisateurs : il s'agit des lasers FELIX dans l'infrarouge moyen (6-110 μm) à l'Institut FOM de Physique des plasmas en Hollande et CLIO en infra-rouge (2-15 μm) au Laboratoire d'Utilisation du Rayonnement Electromagnétique (LURE) de l'Université d'Orsay. Parallèlement aux sources infrarouge, l'Université de Vanderbilt (USA) a développé un LEL dans le visible et l'infrarouge proche (devenu opérationnel en 1991) en complément de l'UCSB [11].

Tableau I. 1. Etat des réalisations récentes.

Nom / Organisme	Date	Spectre-Energie	Accélérateur	Vocation
ACO/LURE. Orsay	1983	Visible	Anneau de stockage	Recherche
Univ. de Stanford. USA	1983	1,6 μm / 60 Mev	Linac	Recherche
Lab. Los Alamos. USA	1983	20 μm / 20 Mev	Linac	Recherche
UCSB. Santa Barbara. USA	1984	400 μm / 3 Mev	Electrostatique	Applications IRL
	1992	2,5-340 μm /6 Mev	Electrostatique	Applications IRL
	1992	313-63 μm /6 Mev	Electrostatique	Applications IRL
	en cours	30 μm (harmonique)	Electrostatique	Applications IR
	projet	2 Mev	Electrostatique	LEL compact
M. I. T (USA)	1985	1,4 cm/0,175 Mev	Générateur de Marx	
Lab. Rech. phot. Stanford. (USA)	1985	3 μm / 40 Mev	Linac	
Lab Livermore. (USA)	1985	0,86 cm / 4,5 Mev	Linac	
APPLE/BOEING. Washington. USA	1988	0,63 μm / 110 Mev	Linac	LEL de puissance
Novossibirsk (URSS)	1988	0,38 μm / 350 Mev	Anneau de stockage	
Ecole Polytech(France)	1988	2 mm /1 Mev	générateur de Marx	
Super-ACO/LURE.		350 nm / 800 Mev	Anneau de stockage	Laser visible
Univ. de Vanderbilt. Nashville. USA	1991	Visible et Infrarouge proche		Applications
FELIX/Institut FOM. Hollande	1991	17-110 μm / 15-25 Mev	Linac	Applications
	1992	6-30 μm / 25-45 Mev	Linac en cascade	Applications
	Projet	130-250 GHz / 2 Mev	Electrostatique	Diagnostic plasmas
CLIO/LURE. Orsay	1992	2-15 μm / 30-70Mev	Linac	Applications
ELSA/CEA. Bruyères-Le-Châtel	1992	20 μm / 15-17 Mev	Cavité RF	Laser de puissance
ENEA. Frascati. Italie	1992	2. 43 mm / 2. 3 Mev	Microtron	LEL compact
UVSOR/Okazaki. Japon	1992	456 nm / 500 Mev	Anneau de stockage	
MarkIII /Duke. USA		2,2-9 μm	Anneau de stockage	Applications
Univ. Tel-Aviv. Israel	en cours	3-5 Mev	Electrostatique	
FELICITA/Institut de Dortmund. Allemagne	Prévu 1994	20-100 nm / 0,5-1,5 Gev	Anneau de stockage	

Tableau I. 2. Quelques projets et leurs applications.

USTL/LSH. Lille	Projet	0,1-1 mm / 2-6 Mev	Van de Graaff	Applications. Spectroscopie
Univ. de Liverpool	Projet	100 μ m-1mm / < 1 Mev	Electrostatique micro-onduleur	Applications industrielles
Univ. Californie. Berkeley. USA	Projet	3-50 μ m / 60 Mev	Cavité RF	Applications Chimie dynamique
Univ. du Maryland. USA	Projet	Millimétrique / 0,5 Mev		Chauffage des plasmas

Les applications du rayonnement (principalement dans la gamme infrarouge) sont devenues un souci permanent de la communauté du LEL. Les projets attestent aussi de cette préoccupation. Notons pour exemple (Tableau I. 2) le projet de l'Université de Lille, dont l'objectif initial est la Spectroscopie Moléculaire des gaz, le projet de l'Université de Berkeley uniquement voué à l'utilisation en Chimie dynamique ou le projet de l'Université de Liverpool à vocation industrielle. L'évolution future du LEL ira donc probablement vers une plus grande facilité d'utilisation et une compacité accrue par l'emploi par exemple de "micro-onduleurs".

Dans la suite de ce document, nous ferons souvent référence au LEL de puissance ELSA (proche de celui de Los-Alamos) et au projet de LEL de Lille (proche de celui de l'UCSB) dont voici les paramètres principaux :

Tableau I. 3. Paramètres de référence

	<u>REALISATION ELSA</u>	<u>PROJET DE LILLE</u>
ELECTRONS		
Courant crête	150 - 300 A	≤ 2 A
Energie	20 Mev ($\gamma = 40$)	4 Mev ($\gamma = 8$)
Dispersion en énergie	0,3 Mev	Négligeable
Longueur micro-impulsions	6 cm (200 ps)	Pas de micro-impulsion
Longueur macro-impulsions	Quelques 10 μ s	Quelques 10 μ s
Fréquence macro-impulsions	< 50 Hz	< 50 Hz
Rayon	1 mm	8,5 mm
ONDULEUR		
Longueur	1 m	2 m
Période	3,2 cm	2,5 cm
Champ statique (a_w)	0,4 T ($a_w = 1$)	0,35 T ($a_w = 0,817$)
LASER		
Longueur d'onde	20 μ m	260 μ m
Cavité optique	10 m	2,5 m
Waist	1 mm	6 mm
Pertes typiques/passage	4 %	5 %

I. A. d. Applications

Les applications actuelles exploitent l'accordabilité et la puissance du rayonnement du LEL. Le nombre d'expériences a longtemps été limité à l'unique machine en fonctionnement à savoir le LEL de l'UCSB jusqu'en 1992 où les LEL français (CLIO) et hollandais (FELIX) ont vu le jour.

Ces deux derniers lasers récents ont déjà à leur actif quelques applications en Physique. Le rayonnement infrarouge de CLIO par exemple a permis de réaliser des expériences d'absorption à deux photons dans l'InSb [12], de microscopie infrarouge et de génération de somme de fréquences sur des surfaces [13].

Les applications à l'UCSB [14] sont focalisées sur la physique du solide et la biologie. Les premières études de biologie ont porté sur les effets d'un rayonnement infrarouge lointain (IRL) de forte puissance sur les cellules vivantes. Burns [15] rapporte une inhibition de la synthèse de l'ADN sur des cellules de rat. Le rayonnement IRL de l'UCSB a aussi permis par exemple d'analyser les perturbations des taux de réaction dans le sang. (Austin [16]).

Ces applications en biologie demeurent cependant peu nombreuses et le LEL est essentiellement utilisé en physique du solide. Les premières expériences ont été réalisées en 1987 sur les modes de spin dans FeF₂ par J. Kaminski [17] et son équipe. C'est à cette époque que le LEL s'est révélé être un outil utile pour les régimes non-linéaires nécessitant une forte puissance à des fréquences non disponibles sur un laser moléculaire classique. Les énergies d'excitation des donneurs de beaucoup de semi-conducteurs à basse température correspondant à un rayonnement IRL, les caractéristiques de n-AsGa ont pu être étudiées en présence de champ magnétiques forts (magnéto-photoconductivité, magnéto-transmission [18], effet "photo-Hall" [19]). Une nouvelle réponse au rayonnement a par ailleurs été mise en évidence dans des hétérojonctions métal-isolant-semiconducteurs [20].

Ces expériences ont montré, pour des problèmes d'échauffement des matériaux, la nécessité de disposer d'impulsions beaucoup plus courtes que les macro-impulsions (de l'ordre de 10 μ s). Pour cela, une expérience de "Q-Switching" (modulation des pertes de la cavité optique) a été réalisée en utilisant une fenêtre de Si illuminée par un laser Nd-YAG [21]. Cette méthode a permis d'obtenir des impulsions laser d'une quarantaine de ns avec une puissance crête sept fois supérieure à celle obtenue habituellement avec un couplage par trou.

L'intérêt se porte maintenant plutôt sur les supraconducteurs à haute température. J. Kaminski et son équipe ont récemment étudié [22] la réponse en IRL de films fins supra-conducteurs à haute température ($\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$) (impulsions de 5 μs environ dans la gamme 50-125 cm^{-1}) et la photoconductivité dans SmB_6 [23] (30-105 cm^{-1})

Enfin, mentionnons une utilisation du LEL de l'Université de Vanderbilt à des fins médicales par exemple en chirurgie de l'os.

Cette présentation non exhaustive des applications réalisées pendant les dix dernières années montre que le LEL a dépassé le stade de faisabilité et a d'ores et déjà fait la preuve de ses potentialités dans des domaines scientifiques très variés.

Cependant, quelques questions restent en suspens quant à son évolution spectrale. Les expériences de l'UCSB ont montré que le LEL pouvait délivrer un rayonnement de spectre fin. Bien qu'une publication spectaculaire d'Elias ait annoncé en 1986 la mesure d'une finesse spectrale relative de 10^{-8} , il a fallu par la suite modérer ce résultat. A ce jour, le spectre le plus fin observé à l'UCSB a une finesse spectrale relative de 10^{-4} et le meilleur résultat a été observé depuis peu sur le LEL hollandais : un spectre de finesse relative égale à 10^{-6} a été observé grâce à un filtrage optique de même taille [24]. De plus, les expériences de l'UCSB (entre autres) ont révélé un comportement instable du laser au delà d'un certain seuil en courant ; il devient par exemple difficile dans certaines conditions de reproduire des impulsions laser stables d'une macro-impulsion à la suivante.

L'ensemble des résultats expérimentaux nous a convaincu de la nécessité d'un examen plus approfondi de la dynamique spectrale du LEL ; sa compréhension et sa maîtrise conditionnent en effet largement ses applications futures. Les problèmes posés ont été induits par l'expérience et concernent les conditions d'obtention d'un spectre fin stable. Bien sûr, il convient de préciser cet objectif général dans le cadre des connaissances plus théoriques déjà acquises.

I. B. LA DYNAMIQUE SPECTRALE DU LEL. POSITION DE L'ETUDE

L'évolution du spectre du LEL a fait l'objet de nombreux travaux, depuis qu'a été publiée en 1986 la première observation à l'UCSB d'un rayonnement de spectre fin. Certains aspects de sa dynamique ont été élucidés, d'autres font encore l'objet de controverses. Un rappel des résultats importants est donc indispensable dans un premier temps afin de définir le contexte théorique et numérique dont nous avons bénéficié.

Nous étudierons ensuite le comportement spectral du LEL avant l'introduction de tout formalisme. Cette démarche physique mettra en évidence l'objet de l'étude et soulèvera les problèmes auxquels nous nous sommes attachés. Dans ce second paragraphe, on anticipera un peu en annonçant des résultats issus de simulations numériques. Elles ont été réalisées dans un premier temps au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne sur la base d'un modèle développé par T. M. Antonsen et B. Levush puis au Commissariat à l'Energie Atomique grâce au code SPECTRE développé par D. Iracane sur la base du modèle de Kroll, Morton et Rosenbluth (KMR) [25] généralisé à plusieurs fréquences. Le code SPECTRE a fait l'objet au cours de son élaboration de nombreuses validations analytiques [26]. Par ailleurs, les développements théoriques de ce document sont basés sur le modèle KMR généralisé. Ce modèle et la simulation SPECTRE seront présentés dans le détail au Chapitre II. Afin de ne pas surcharger le document, le modèle d'Antonsen ne sera pas présenté ici mais peut être consulté dans les références [27, 28, 29]

I. B. a. Etat de l'art dans le domaine du comportement spectral

Les travaux auxquels nous faisons référence ici concernent avant tout l'interaction des modes longitudinaux du laser en l'absence de tout effet transverse. Le comportement multimode du LEL a été abordé sous différents angles. On distinguera les études numériques des études analytiques et aussi celles où ces deux opérations sont menées de front. Dans un domaine où les instabilités peuvent régner en maître, le couplage des études numériques et analytiques est en effet indispensable afin de fiabiliser les résultats numériques à défaut d'expérience véritable.

* Etudes analytiques

L'étude du comportement spectral du LEL a été, à ses débuts, fortement influencée par les observations expérimentales. Les premiers calculs analytiques concernant la compétition de modes ont été menés par Kimel dans le but de démontrer analytiquement

les résultats expérimentaux obtenus par Elias en 1986. Elias relate en effet l'observation d'un rayonnement de pureté spectrale relative $\Delta\omega/\omega = 10^{-8}$ sur le LEL de l'UCSB [30]. Dans son approche de ce vaste domaine, Kimel s'est attaché à l'interaction entre modes propres de cavité proches en régime de faible gain puis de fort gain [31, 32, 33, 34]. Un calcul perturbatif en champ au troisième ordre a montré sur quelques modes propres voisins que les effets de saturation croisée sont deux fois plus forts que les effets de saturation propre de sorte que le résultat de la compétition est une raie unique. Ce calcul conséquent a pourtant été simplifié à l'extrême en se limitant à un intervalle spectral très étroit (quelques modes propres de cavité). Par là même, des effets importants ont été négligés en particulier :

- la possibilité d'une génération de raies satellites quand un mode dominant s'approche de sa saturation. Ce phénomène apparaît à un écart en fréquence (à partir de la raie en saturation) très supérieur à l'intervalle entre modes propres de cavité comme nous le verrons ensuite.
- la possibilité d'une génération de nouvelles raies lorsque deux modes du même ordre de grandeur coexistent.

Par conséquent, les effets que Kimel a montré analytiquement sont fiables à la seule condition qu'un filtrage du spectre soit opéré, autorisant seulement le développement de quelques modes propres de cavité. Pour fixer les idées, un tel filtre aurait une taille relative en fréquence de quelques 10^{-5} pour une cavité de 6 m et une fréquence infrarouge lointain de 500 GHz ; nous verrons que les raies satellites apparaissent à un écart relatif en fréquence de l'ordre de 1%.

* Etudes numériques

Les simulations numériques de l'évolution du spectre ont montré par la suite qu'en réalité, la dynamique spectrale du LEL était bien plus compliquée.

En particulier, Antonsen et Levush [27, 29, 35, 36, 37] ont constaté numériquement l'existence d'un seuil de courant électronique en deçà duquel le spectre du laser devient monochromatique et stable une dizaine de μs après le démarrage du laser et au delà duquel s'installe un régime multimode instable. Le modèle d'Antonsen est dans le principe très proche du modèle KMR généralisé à plusieurs fréquences que nous allons présenter au chapitre II. Il s'en distingue par les deux choix suivants : le calcul est réalisé dans l'hypothèse d'un faible gain par passage et il repose sur une décomposition de Fourier du spectre suivant les modes propres de la cavité optique. La seconde hypothèse a des conséquences importantes sur le temps de calcul des simulations numériques (nous reviendrons sur ce point au chapitre II).

Avant tout, il est important de préciser que les simulations numériques d'Antonsen et Levush ont été menées avec des paramètres ne correspondant pas à une situation physique réelle pour des raisons de temps de calcul directement liées à l'échantillonnage du spectre. Cette remarque est importante dans le cas du LEL où l'énergie du faisceau d'électrons par exemple joue un rôle incontournable dans la dynamique du système. Par ailleurs, leur étude s'est limitée à des spectres relativement étroits (bien que beaucoup plus larges que la largeur spectrale envisagée par Kimel dans son calcul) devant la taille des phénomènes responsables des instabilités.

* Etudes numériques et analytiques

Dans des travaux récents, D. Iracane [38, 39] envisage en effet des spectres beaucoup plus larges que ceux d'Antonsen et Levush. Cette approche permet alors de distinguer les différents processus non linéaires de la dynamique du spectre du LEL. Ces études ont été menées dans le cadre du projet de laser de puissance ELSA maintenant opérationnel.

Les effets de compétition de modes sont abordés à la fois numériquement avec le code SPECTRE basée sur le modèle KMR [25] et une décomposition de Fourier du spectre et analytiquement via un calcul perturbatif en champ au troisième ordre. Les résultats analytiques sont comparés directement à ceux du code. Cette démarche a abouti à une classification des couplages non-linéaires entre modes et a mis en évidence un scénario d'apparition des instabilités spectrales. La présente étude s'appuie sur ces derniers résultats.

Ces travaux concernant l'évolution du spectre ont été accompagnés d'analyses plus ponctuelles de la génération de raies satellites. On y fera référence au moment où ces problèmes seront abordés.

I. B. b. Dynamique du spectre du LEL et origine des instabilités spectrales

Durant ces dernières années, de nombreux comportements de type chaotique ont été mis en évidence entre autres dans le domaine des lasers et les routes vers le chaos sont désormais bien connues. Nous allons montrer ici que la dynamique du spectre du LEL n'entre dans aucun de ces schémas traditionnels d'évolution vers un régime instable, erratique.

* Comportement spectral du LEL

Le LEL présente deux types de comportement antagonistes dont le paramètre de contrôle principal est le courant du faisceau d'électrons (à niveau de pertes donné) :

- A faible courant, le spectre évolue naturellement vers un régime de spectre fin stable (figure I. 4)
- Au-delà d'un seuil en courant, il apparaît sur le bord basse fréquence de la fenêtre spectrale une nouvelle raie (figure I. 5) ; le spectre devient alors instable et large bande (ici, le seuil en courant est environ égal à trois fois le courant de démarrage du laser).

Dans ces exemples, la fenêtre spectrale envisagée est en réalité trop étroite pour mettre en évidence l'origine des instabilités spectrales. Des simulations sur un intervalle de fréquence beaucoup plus large (soit typiquement une largeur relative en fréquence de 10 %) montrent beaucoup plus clairement le processus de dégénérescence du spectre. Elles permettront par ailleurs d'identifier l'origine des instabilités observées.

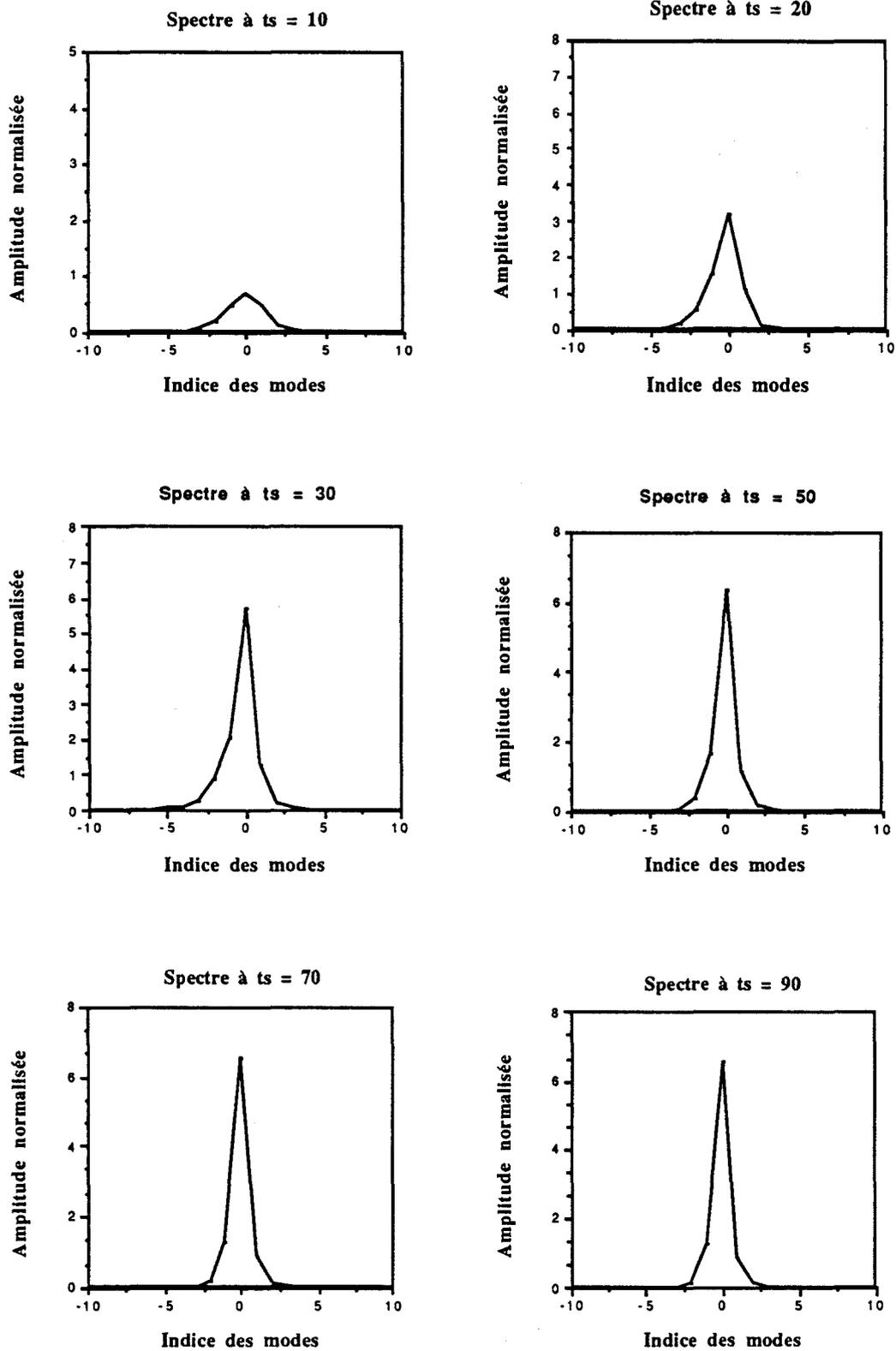


Figure I. 4. Simulation basée sur le modèle d'Antonsen et Levush. A faible courant (ici égal à deux fois le courant de démarrage du laser), les effets de compétition de modes se traduisent par un affinement du spectre. Le temps τ_s est ici normalisé au temps de décroissance de l'onde dans la cavité en l'absence de milieu actif.

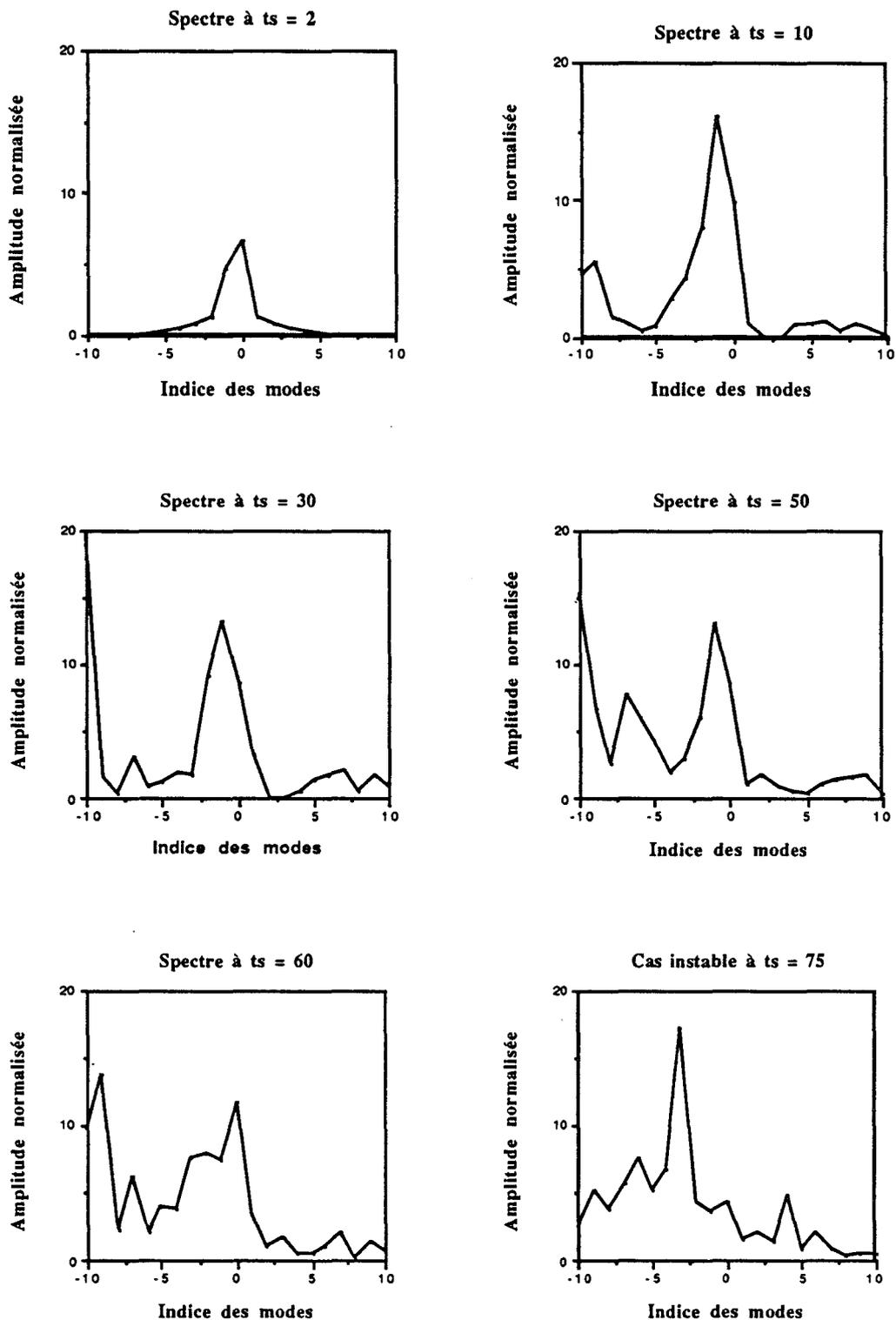


Figure I. 5. Simulation basée sur le modèle d'Antonsen et Levush. A fort courant (ici égal à 8 fois le courant de démarrage du laser), la croissance en régime linéaire est poursuivie de la croissance de modes sur le bord basse fréquence de la fenêtre spectrale. Le spectre suit alors une évolution erratique. On voit que la largeur de la fenêtre spectrale est insuffisante pour rendre compte de l'évolution du spectre dans une situation réelle sans filtrage annexe.

* Processus de dégénérescence du spectre

Le processus de dégénérescence du spectre a été mis en évidence pour la première fois par D. Iracane avec les paramètres du LEL ELSA (ie à une énergie électronique de 20 Mev soit un rayonnement à 20 μm). Les simulations suivantes réalisées avec les paramètres du projet de Lille (ie avec un faisceau d'énergie 4 Mev ou de façon équivalente un rayonnement à 260 μm) ont révélé un comportement identique à celui d'ELSA. Ceci nous permet de supposer la généralité de ce comportement au moins dans le domaine infrarouge.

Les figures I. 7 et I. 8 montrent l'évolution du spectre à partir du bruit dans deux cas de figure où seul varie le courant du faisceau d'électrons. Le scénario menant au régime instable est très clair :

- 1) La raie fondamentale croît à partir du bruit en suivant la courbe de gain linéaire (figure I. 6). La croissance de cette raie s'obtient par simple itération de la courbe de gain linéaire de passage en passage (un passage est un aller-retour de l'onde dans la cavité).
- 2) Lorsque la raie fondamentale atteint une amplitude proche de sa saturation, il apparaît de part et d'autre de cette raie, des raies satellites à un écart relatif en fréquence δ_0 environ égal à 1,5 % dans cet exemple (ou 2 à 3% avec les paramètres ELSA).
- 3) Le couplage de la raie fondamentale et de la raie satellite basse fréquence génère une troisième raie en basse fréquence par rapport à la raie fondamentale et à un écart relatif en fréquence environ égal à $2 \delta_0$ de celle-ci etc...
- 4) L'élargissement spectral est alors engagé et le spectre dégénère en un spectre large bande instable. Les simulations sur une fenêtre spectrale plus grande ont montré que l'élargissement spectral s'arrête lorsque la largeur spectrale relative totale du spectre atteint environ 10%. Les raies contenues dans cet intervalle de fréquence évoluent de façon erratique. Par ailleurs, l'élargissement spectral apparaît majoritairement du côté basse fréquence de la raie fondamentale.

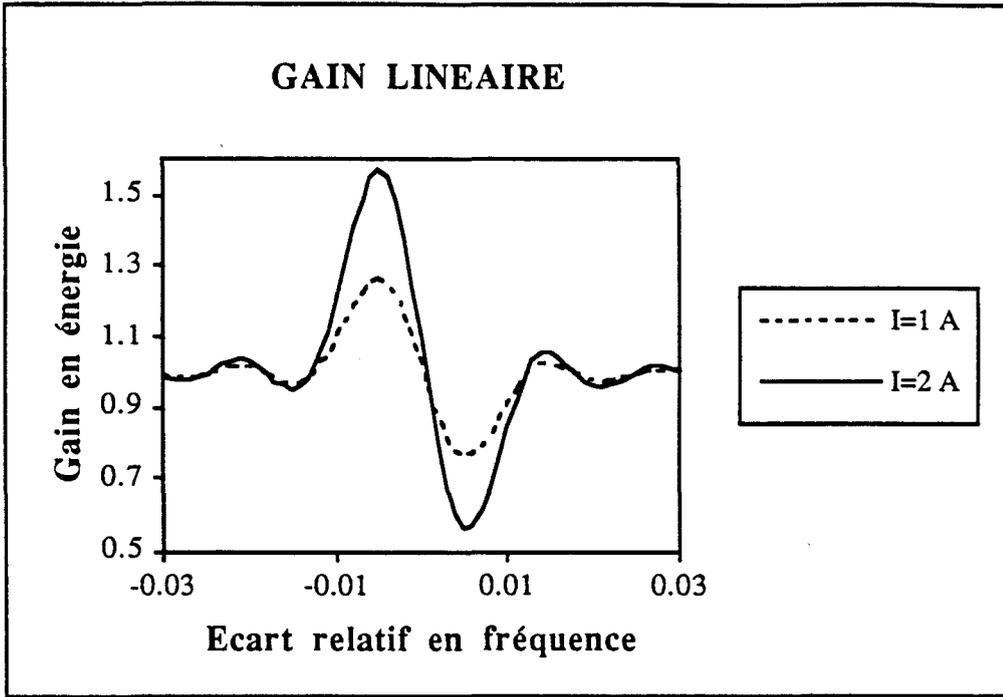


Figure I. 6. Courbe de gain linéaire pour les paramètres du projet de Lille autour de $\lambda_L = 260 \mu\text{m}$. Le gain linéaire est abordé au Chapitre II. L'évolution du spectre en régime linéaire peut-être obtenue simplement en itérant cette courbe sur un grand nombre de passages.

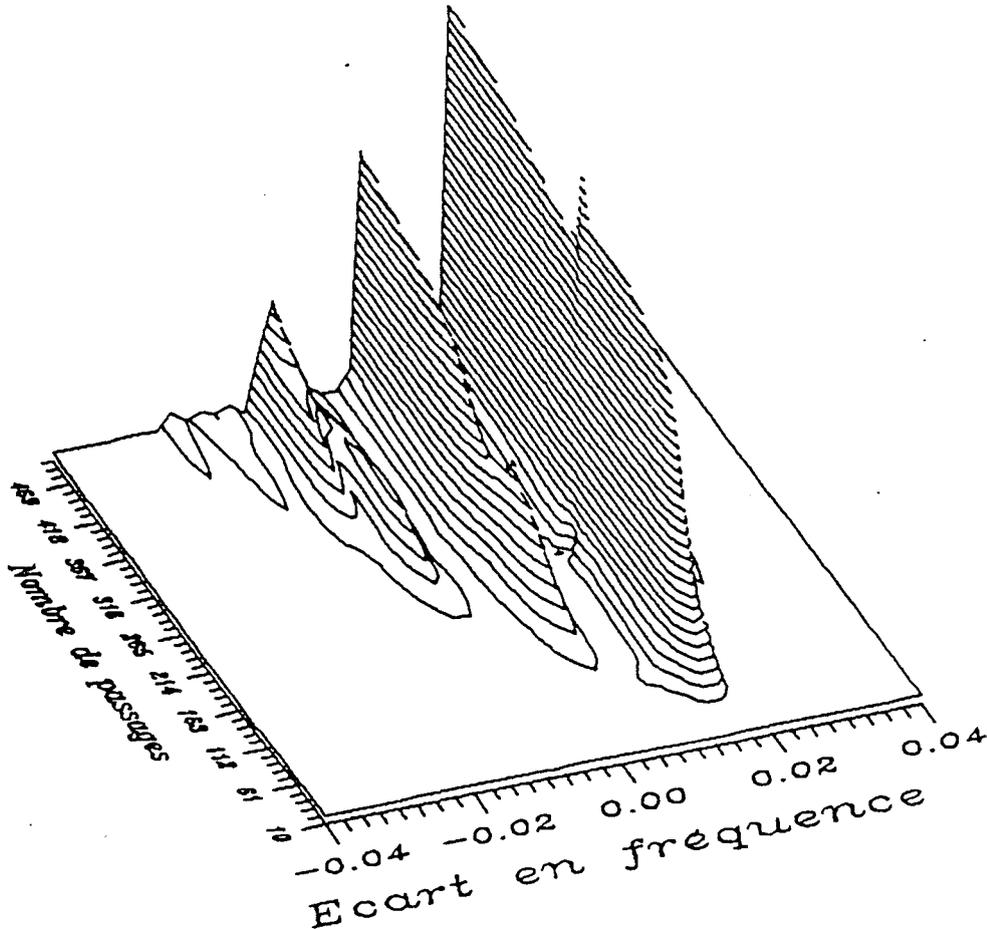


Figure I. 7. Evolution du spectre à partir du bruit avec les paramètres du projet de Lille ($I = 0,6$ A). La raie fondamentale croît jusqu'à une amplitude proche de sa saturation en suivant la courbe de gain linéaire (figure I. 6), crée alors une raie satellite. Ces deux raies se couplent ensuite pour donner naissance à une troisième raie... C'est le début de l'élargissement spectral. Si la cavité a pour longueur 3m, ce phénomène dure $10 \mu\text{s}$ dans notre exemple.

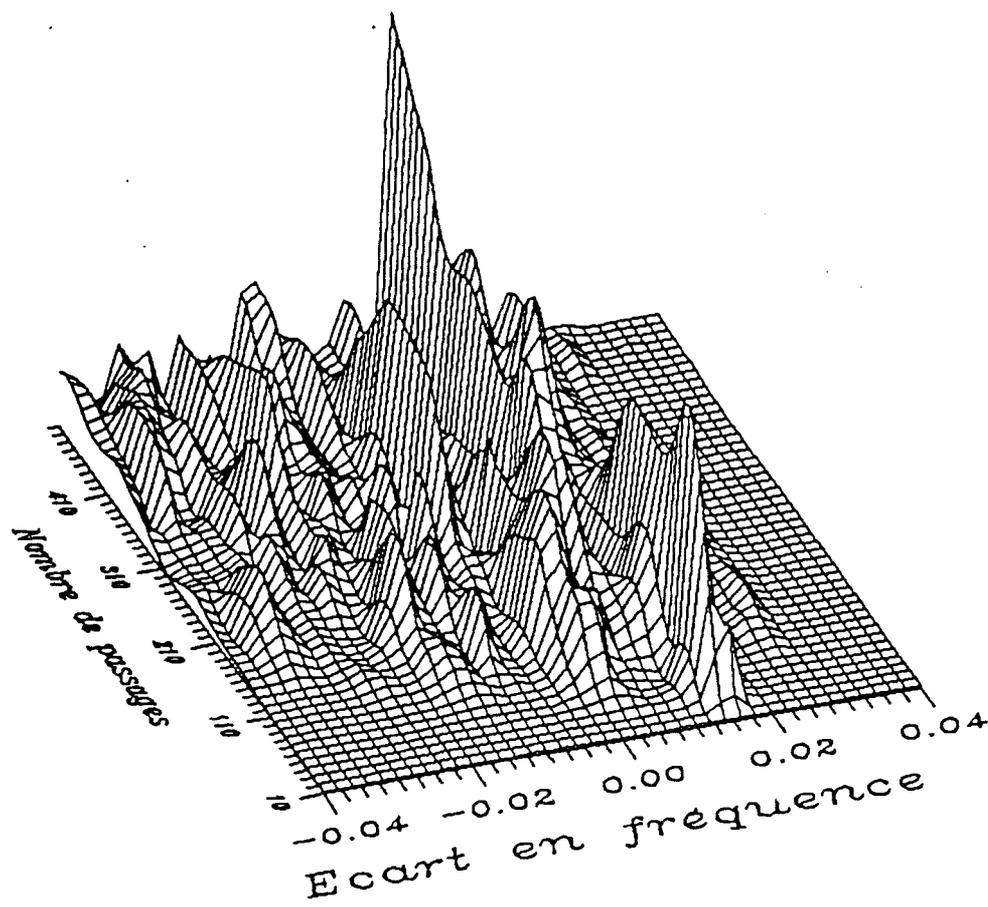
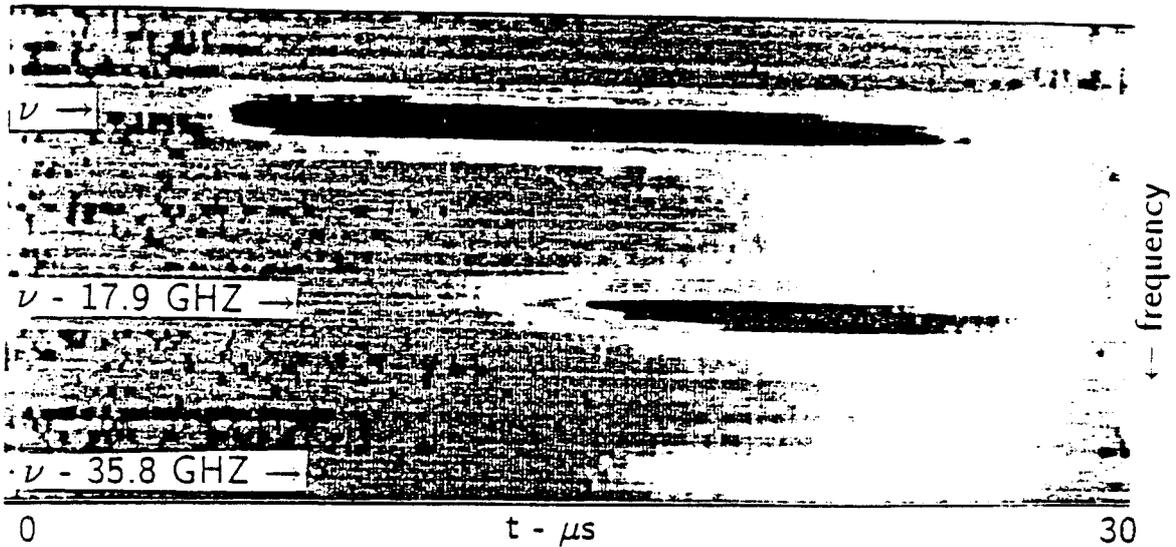


Figure I. 8. Evolution du spectre à partir du bruit avec les paramètres du projet de Lille. Avec un courant trois fois plus fort que celui de la figure I. 7, le spectre dégénère en un spectre large bande jusqu'à déborder de la fenêtre spectrale.

Ce comportement spectral a été récemment observé expérimentalement par G. Ramian sur le LEL de l'UCSB [40]. La figure I. 9 montre l'évolution du spectre sur une impulsion électronique de durée $30 \mu\text{s}$ et illustre expérimentalement le début de la dégénérescence du spectre. La raie fondamentale génère une raie satellite, ces deux raies couplées en génèrent une troisième. Le spectre perd alors toute structure. L'élargissement spectral proprement dit n'a jamais été observé expérimentalement. Dans la plupart des expériences, la durée de vie du milieu actif (ie la durée des macro-impulsions) est trop courte pour cela.



Time resolved spectrum of lasing with sideband present.

Figure I. 9. Le début du processus de dégénérescence du spectre a été observé récemment à l'UCSB à $\lambda = 140 \mu\text{m}$ avec un courant de 2 A (les paramètres du projet de Lille sont proches de ceux de l'UCSB). La croissance de la raie fondamentale s'effectue pendant les 10 premières μs . La raie fondamentale génère ensuite une raie satellite à un écart relatif en fréquence d'environ 1%. Le couplage de ces deux raies génère une troisième raie à environ 1% de la raie satellite.

Le régime d'élargissement spectral présente quelques caractéristiques importantes qui le distingue du régime d'affinement spectral.

Définissons d'abord le rendement extrait ρ comme le rapport de l'énergie extraite du laser sur l'énergie initiale du faisceau d'électrons pendant le même temps et la brillance β comme le rapport du rendement extrait sur la largeur spectrale relative soit :

$$\beta = \frac{\rho}{\Sigma} \quad \text{où} \quad \rho = \frac{\text{Energie extraite du laser}}{\text{Energie du faisceau d'électrons}} \quad \text{et} \quad \Sigma = \frac{\sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2}}{k_L} \quad (\text{I-1})$$

La brillance traduit la densité spectrale moyenne d'énergie extraite du laser.

Le régime d'élargissement spectral possède deux propriétés essentielles :

- 1) Le rendement extrait en régime d'élargissement spectral est plusieurs fois supérieur au rendement extrait avec un spectre fin, les paramètres physiques étant égaux dans les deux situations. On suppose ici que le spectre fin est obtenu avec un

filtre carré centré sur le fondamental et dont nous préciserons plus tard la largeur spectrale. En ordre de grandeur et afin de fixer les idées, on obtient, avec les paramètres du projet de Lille, un rendement extrait de 2% en spectre large contre 0,2% en spectre fin pour un courant de 1 A et 5 % de pertes.

2) En régime d'élargissement spectral, la brillance tend vers une constante environ égale à 0,8. Cette relation empirique initialement observée sur les simulations ELSA se trouve également vérifiée sur les simulations du projet de Lille ; elle est illustrée sur la figure I. 10 montrant l'évolution de la brillance dans le cas très instable présenté précédemment (figure I. 8). En régime d'affinement spectral, la brillance devient très supérieure à 1. Le rendement extrait croît en effet jusqu'à sa valeur de saturation tandis que le spectre ne cesse de s'affiner. La brillance est donc un paramètre caractéristique du régime de fonctionnement du LEL.

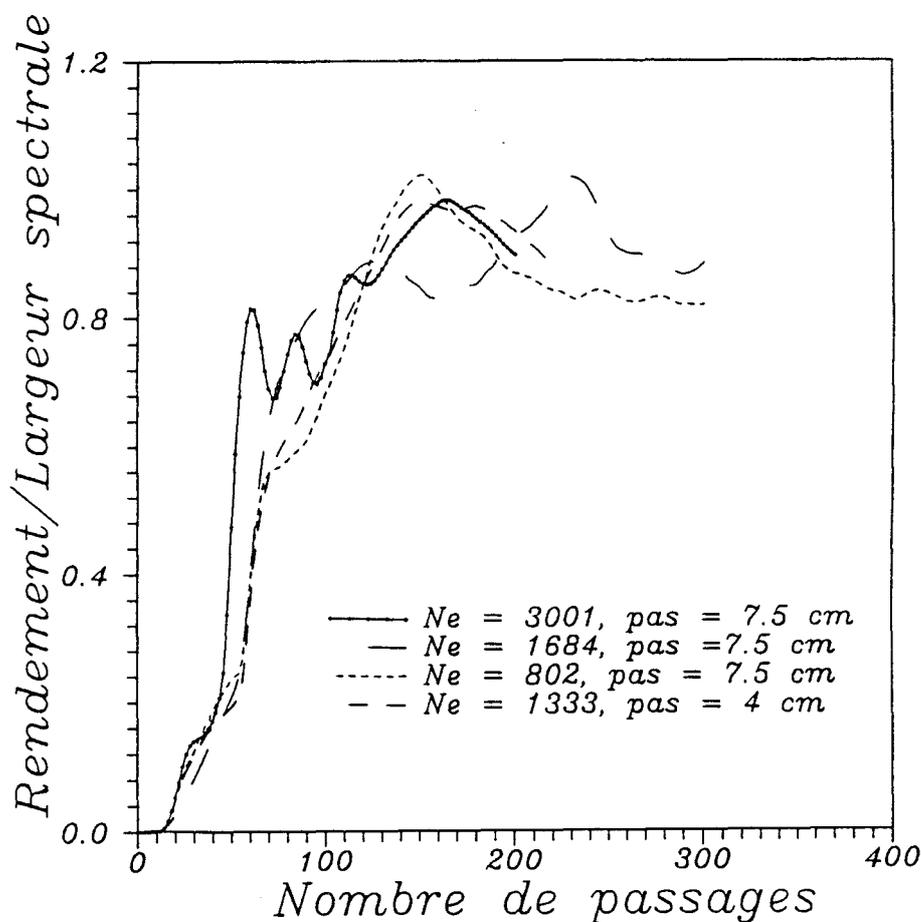


Figure I. 10. Evolution de la brillance dans le cas instable de la figure I. 8. Le régime d'élargissement spectral est par nature très sensible aux paramètres numériques (ici le nombre d'électrons et le pas de calcul). Cependant, l'ensemble de ces courbes convergent vers une constante égale à 0,8 (les aspects numériques sont abordés au chapitre II)

* Origine des instabilités

Le scénario ci-dessus fait pressentir la génération de raies satellites comme la première cause des instabilités observées. Il est possible de s'en convaincre par des moyens rudimentaires soit en jouant sur les pertes soit en filtrant le spectre de façon à éliminer les raies satellites : le spectre doit alors s'affiner à condition qu'aucun autre processus ne crée de nouvelles instabilités.

La première méthode consiste à augmenter les pertes jusqu'à ce que le gain des raies satellites soit inférieur aux pertes. Elle présente évidemment le défaut majeur de diminuer l'intensité de la raie fondamentale. Cependant, les simulations à partir du bruit montrent qu'elle permet d'assurer la transition entre spectre large et spectre fin.

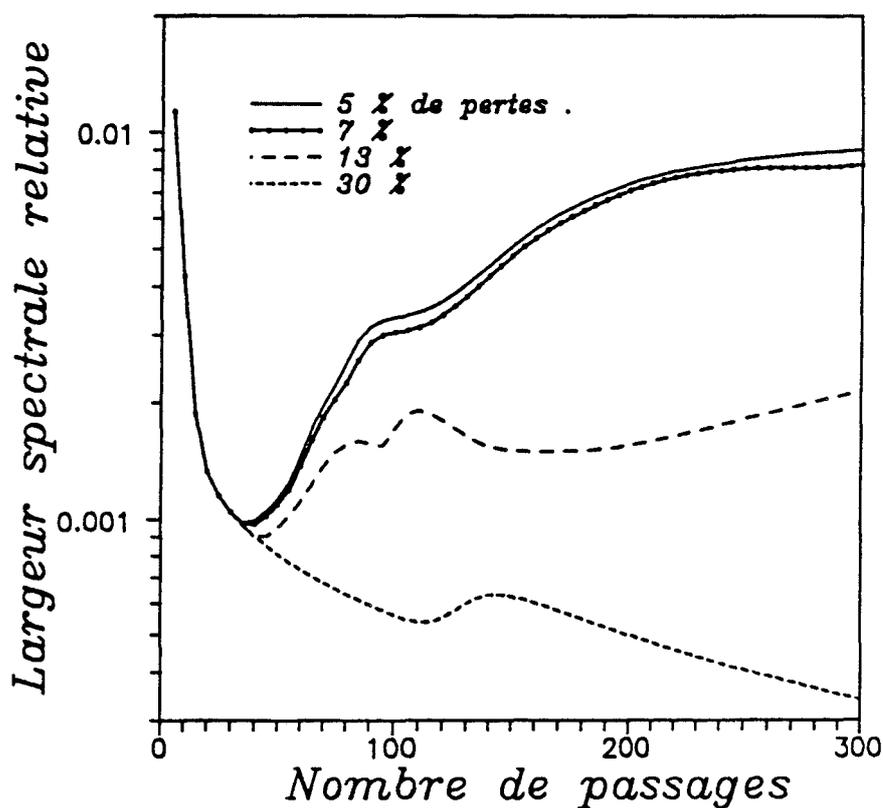


Figure I. 11. Suppression des raies satellites par le niveau de pertes. Cette figure montre l'évolution de la largeur spectrale relative dans le cas très instable de la figure I. 8 pour différents niveaux de pertes. En régime linéaire, la largeur spectrale est indifférente aux pertes. La bifurcation entre le régime d'élargissement spectral et celui d'affinement spectral s'effectue au 30^{ème} passage (voir aussi les figures I. 12 et I. 13). $I = 1,8 \text{ A}$.

En régime linéaire, le gain par passage de chacune des fréquences du spectre est constant. Le champ laser se construit de passage en passage par itération de la courbe de gain linéaire dont on ôte les pertes : sa croissance en fonction du nombre de passages est donc exponentielle. Il s'ensuit que l'énergie extraite par passage (donc le rendement extrait) évolue exponentiellement (figure I. 12 : ce sont les 30 premiers passages). Par ailleurs, la largeur spectrale relative (figure I. 11) est indifférente aux pertes (le taux de pertes est supposé indépendant de la fréquence) : les courbes se superposent quel que soit le niveau de pertes par passage sur les 30 premiers passages.

La bifurcation entre les deux régimes d'affinement et d'élargissement spectral intervient au 30^{ème} passage (figure I. 11) au moment de la saturation du champ laser comme le montre la courbe de rendement extrait (figure I. 12). Lorsque le taux de pertes est insuffisant, des raies satellites se développent : le spectre s'élargit (figure I. 11) et la brillance tend vers une constante (figure I. 13). Avec 30% de pertes, les raies satellites sont atténuées : la finesse spectrale devient inférieure à 0,1 % (figure I. 8) et la brillance devient très supérieure à 1 (figure I. 10).

La suppression des raies satellites résulte ici à la fois de l'augmentation du niveau de pertes mais aussi de la diminution du gain des raies satellites par la diminution de l'énergie de la raie fondamentale qui les génère.

On obtient le même effet en utilisant un filtre carré dont on fait varier la bande passante. Cette méthode présente l'avantage de ne pas atténuer la raie fondamentale. Dans le cas de la figure I. 8, la raie satellite apparaît à environ 1,5 % de la raie fondamentale. Un filtrage à 0,4 % de la raie fondamentale empêche l'apparition des instabilités (figure I. 14). Il faut noter que le spectre devient alors beaucoup plus fin que la largeur du filtre ; ceci permet de conserver une certaine accordabilité du laser sur une gamme de fréquences cependant très inférieure à la taille du filtre. Pour assurer un spectre fin, il est donc inutile d'utiliser un filtre très étroit à condition de disposer d'impulsions électroniques suffisamment longues pour faire jouer la compétition de modes à plein.

Avec un filtrage à 1% de la raie fondamentale, le phénomène des raies satellites apparaît à nouveau. Les effets de compétition de modes déstabilisent alors la raie fondamentale (figure I. 15). Généralement, le spectre dégénère alors à nouveau. Cependant, il est possible dans certains cas que le laser devienne stable à la fréquence de la raie satellite (nous en verrons un exemple au Chapitre IV). Ce phénomène a d'ailleurs été observé récemment à l'UCSB [40, 41] et illustre la complexité de la dynamique spectrale du LEL.

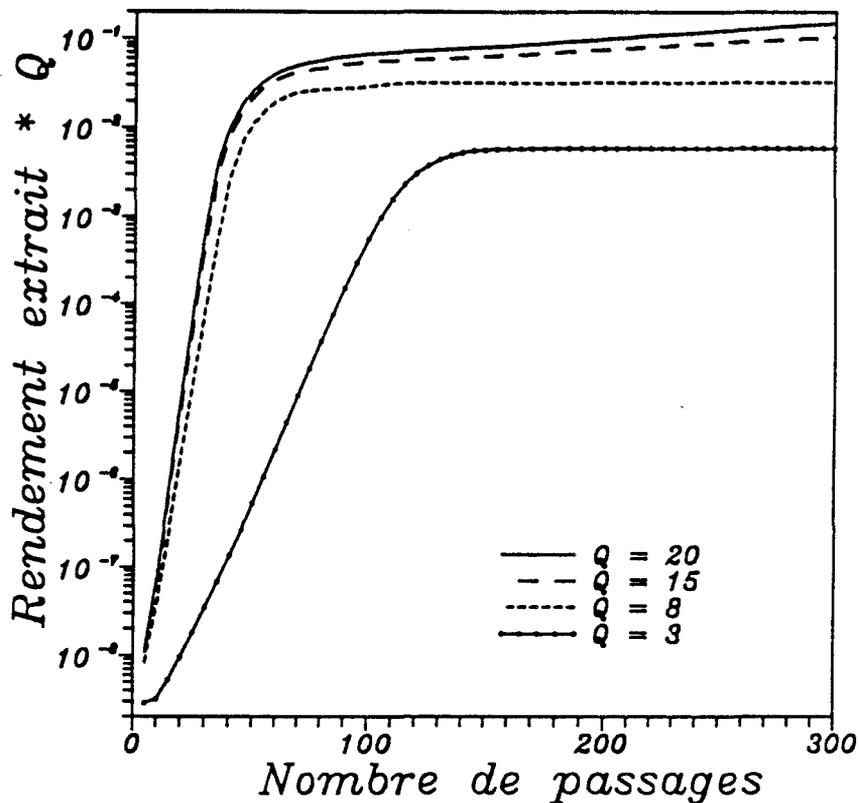


Figure I. 12. Suppression des raies satellites par le niveau de pertes (à comparer avec les figures I. 11 et I. 13). On donne ici le produit du rendement extrait et du facteur de qualité Q de la cavité proportionnelle à l'énergie intracavité du laser (Q détermine le niveau de pertes : énergie extraite du laser = énergie intracavité/ Q). En régime linéaire, les raies du spectre évoluent indépendamment et leur croissance (donc celle du rendement) est exponentielle. La saturation du laser intervient ici environ au 30^{ème} passage.

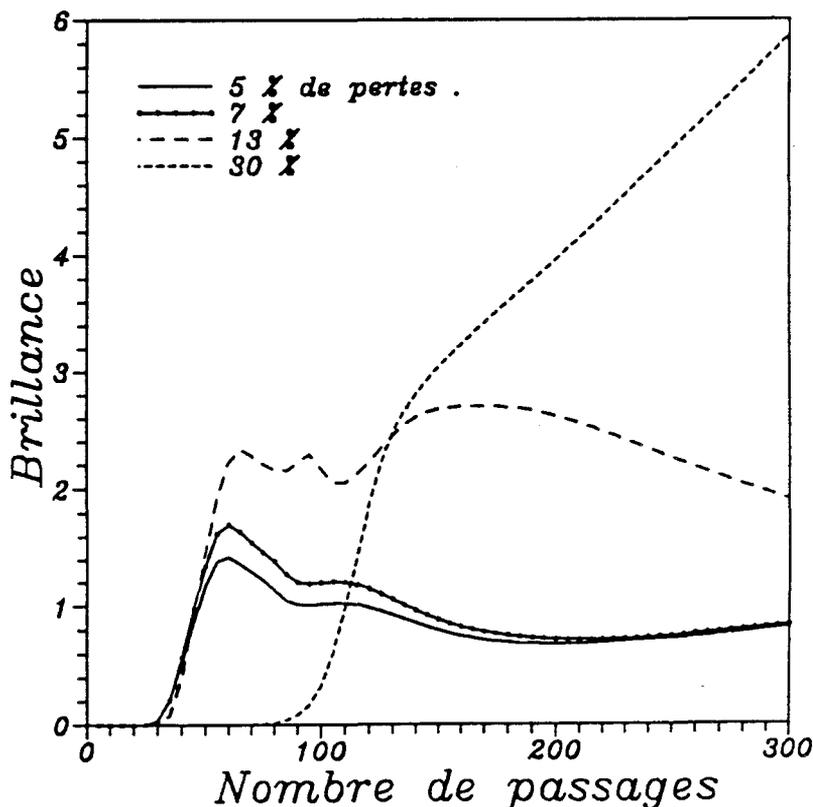


Figure I. 13 Suppression des raies satellites par le niveau de pertes (à comparer avec les figures I. 11 et I. 12). La brillance montre que les raies satellites sont supprimées avec un taux de pertes de 30%. Dans ce cas, le spectre s'affine et la brillance prend une valeur d'autant plus grande que le spectre est fin. Dans les autres cas, elle tend vers la constante universelle environ égale à 0,8.

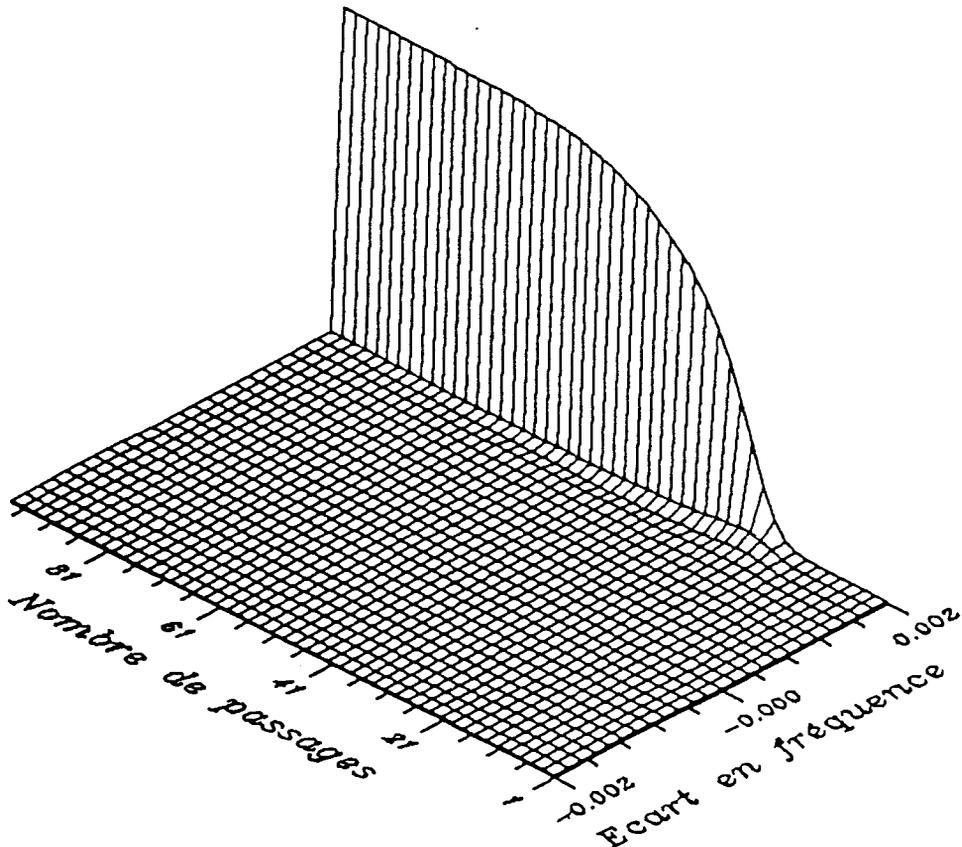


Figure I. 14. Suppression des raies satellites par filtrage à taux de pertes donné. Les raies satellites apparaissent à environ 1,5% de la raie fondamentale. Un filtrage à 0,4% permet de supprimer les raies satellites et d'assurer un spectre fin. Le spectre est beaucoup plus fin que la taille du filtre. Après 100 passages, la finesse spectrale est ici inférieure à l'échantillonnage en fréquence soit 0,01%.

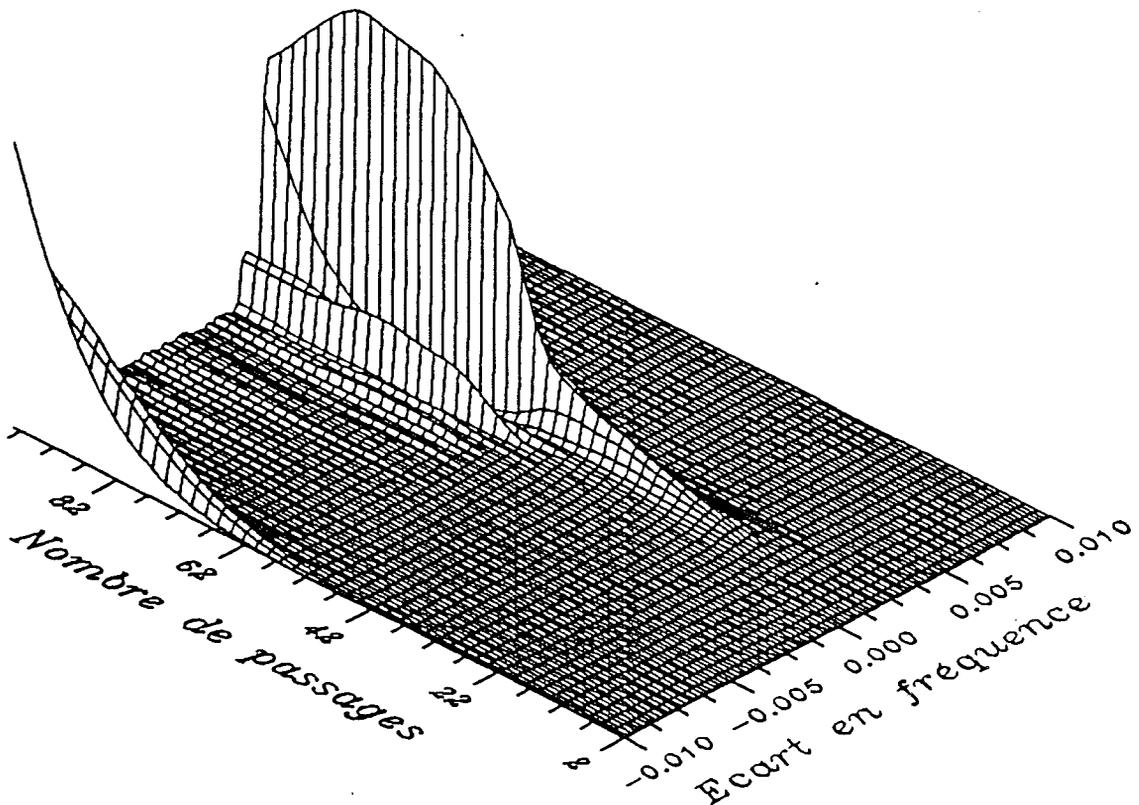


Figure I. 15. Suppression des raies satellites par filtrage à taux de pertes donné. Un filtrage à 1% de la raie fondamentale autorise à nouveau le développement d'une raie satellite. Après 100 passages, celle-ci a atteint le niveau du fondamental. La compétition de modes décidera de l'évolution future du spectre.

Les simulations numériques ont mis en évidence l'existence de deux types de comportement spectral du LEL radicalement opposés contrôlés par le courant du faisceau d'électrons. A faible courant, le spectre s'affine et tend vers une situation stable. Au delà d'un seuil en courant, le spectre devient instable ; il s'élargit en suivant le processus de dégénérescence du spectre qui conduit à attribuer un rôle important au phénomène de génération de raies satellites. En effet, l'atténuation ou le filtrage des raies satellites dans un cas très instable est suffisant pour contraindre le spectre à devenir fin. Il est important de constater qu'aucun autre phénomène ne crée alors de nouvelles instabilités lorsque les raies satellites sont empêchées. La génération de raies satellites est donc le phénomène essentiel qui gère la transition entre les régimes d'affinement spectral et d'élargissement spectral.

Dans le contexte actuel du LEL, les applications du rayonnement sont devenues la préoccupation première. Les expériences de LEL (particulièrement à l'UCSB) ont révélé une maîtrise incomplète de son évolution spectrale préjudiciable aux applications futures. Ces incertitudes expérimentales démontrent la nécessité d'une meilleure compréhension du comportement spectral d'une source dont les qualités sont par ailleurs indéniables (accordabilité, puissance).

Une première analyse à partir de simulations numériques nous a enseigné que les potentialités du LEL ne se limitent pas à la génération d'un rayonnement de spectre fin. Il existe en effet un régime de spectre large dont le rendement est très supérieur à celui du régime de spectre fin. Le phénomène de génération de raies satellites détermine la transition entre ces deux régimes extrêmes. L'étude de cette instabilité se situe donc à la frontière du domaine des applications courantes du LEL nécessitant un spectre fin (c'est une des sollicitations du projet de Lille) et du domaine des LEL de puissance nécessitant un rendement aussi élevé que possible (c'est le but de la réalisation ELSA).

Par conséquent, il est important de comprendre l'origine du phénomène des raies satellites et de quantifier les moyens dont nous disposons afin de maîtriser son apparition. Enfin, la question concernant la pureté spectrale ultime du LEL reste entièrement ouverte.

CHAPITRE II

MODELE ET SIMULATION NUMERIQUE

Nous devons la première description théorique du LEL à J. M. J. Madey dont le modèle purement quantique a permis de calculer le gain du LEL en régime linéaire à faible champ et à faible gain [42]. Madey a montré que le gain linéaire (présenté plus loin) est en fait la dérivée du spectre d'émission spontanée des électrons accélérés dans l'onduleur. Il en a résulté la première expérience de laser réalisée par L. R. Elias en 1977 à l'Université de Stanford [6].

En fait, l'interaction du faisceau d'électrons relativistes avec une onde électromagnétique peut être entièrement décrite de façon classique. W. B. Colson [43, 44] a retrouvé la "célèbre" courbe de gain de Madey en utilisant simplement les lois classiques de la dynamique relativiste et les équations de Maxwell. Depuis, ce modèle prévaut. Il contient en effet tous les éléments de base de la physique du LEL.

Kroll, Morton et Rosenbluth [25] ont écrit un modèle équivalent en formalisme hamiltonien. Le modèle adopté ici est une généralisation multifréquence du modèle KMR. Une approche en transformée de Fourier du champ laser permet d'aborder le vaste domaine de la dynamique spectrale du LEL dans les régimes linéaires et non-linéaires, en particulier la compétition de modes et la génération des raies satellites à l'origine des instabilités spectrales. Ce modèle a déjà été développé amplement par ailleurs [38, 2, 26].

Nous nous contenterons, dans une première partie, d'en rappeler les indispensables étapes conduisant aux équations de base utilisées par la suite analytiquement ou dans les simulations numériques. On introduira au passage de façon très simple le mécanisme d'interaction du faisceau d'électrons et du faisceau laser.

Dans la seconde partie, on illustrera d'abord le modèle dans le cas le plus simple, c'est à dire en régime monochromatique, en s'attachant particulièrement à la dynamique des électrons. On présentera ensuite la simulation multifréquence réalisée grâce au code SPECTRE. La validation des résultats numériques est une étape essentielle surtout dans le cas de systèmes naturellement sujets à des comportements instables. On insistera donc sur le choix des paramètres numériques et ses critères. Nous montrerons aussi comment on peut s'affranchir du bruit numérique issu de l'échantillonnage du faisceau d'électrons. Les simulations à bas bruit numérique s'avèreront en effet d'un grand intérêt afin d'examiner les conditions d'apparition des raies satellites.

Le lecteur pour lequel les éléments de base de la théorie du LEL sont familiers pourra directement passer à ce dernier paragraphe.

II. A. DESCRIPTION DU MODELE ET ADAPTATION DU FORMALISME

Nous nous intéressons ici à l'interaction d'un faisceau d'électrons avec une onde électromagnétique lorsqu'il traverse un champ magnétique statique périodique polarisé rectilignement. Rappelons que les électrons dans l'onduleur adoptent un mouvement transverse périodique de période égale à celle de l'onduleur ; ceci leur confère une accélération et ils rayonnent. Ce rayonnement spontané confiné dans une cavité optique agit à son tour sur le faisceau d'électrons, le rayonnement est alors amplifié tout en devenant cohérent (en régime d'affinement spectral).

La démarche adoptée consiste en une présentation générale du modèle au cours de laquelle les hypothèses et les choix réalisés seront détaillés, en particulier le choix des variables inhérent à la physique du LEL. Ce paragraphe a pour seul but de donner les points de repère du modèle et nous avancerons ensuite directement les équations de base du modèle multifréquence. Pour les besoins des calculs qui seront faits aux chapitres suivants, le modèle sera alors adapté.

II. A. a. Description générale du modèle

Contrairement aux lasers classiques, que les modèles quantiques permettent souvent de décrire de façon macroscopique avec un nombre de grandeurs physiques réduit (telles que la population des différents niveaux, la polarisation du milieu et l'énergie du faisceau laser), il n'est pas possible dans le cas du LEL de s'affranchir des équations microscopiques du faisceau d'électrons. Ainsi, l'évolution du champ laser se calcule grâce à une moyenne statistique sur tous les électrons sans qu'il soit possible d'écrire une équation d'évolution macroscopique de cette moyenne du fait de la nature des équations microscopiques.

Analytiquement, le faisceau d'électrons sera généralement décrit par une distribution électronique d'un espace des phases dont l'évolution est donnée par l'équation de Vlasov. Le formalisme continu de l'équation de Vlasov est bien adapté à l'étude analytique du comportement du LEL par exemple autour de situations d'équilibre ; nous l'utiliserons abondamment au Chapitre III pour comprendre l'origine des instabilités. Au contraire, le formalisme particulaire où les électrons sont traités indépendamment à partir des équations de leur mouvement sera surtout utilisé pour les simulations numériques. Nous allons voir que ces deux approches sont équivalentes. Le champ laser est bien entendu régi par les équations de Maxwell.

II. A. a. 1. Le formalisme associé au faisceau d'électrons

Nous allons supposer ici le faisceau d'électrons continu. Plus exactement, les électrons sont supposés interagir avec l'onde pendant toute la durée de sa traversée de l'onduleur. Le modèle reste donc valable pour une structure du faisceau d'électrons en micro-impulsions (comme celles fournies par un LINAC ou une cavité RF par exemple) tant que la distance de glissement de l'onde sur le faisceau d'électrons (due à la différence de vitesse entre le faisceau d'électrons et l'onde) est très petite devant la longueur de la micro-impulsion : en supposant le faisceau d'électrons se déplaçant à la vitesse de résonance (II-10), la longueur de glissement est égale à $N_w \lambda_L$ où N_w est le nombre de périodes de l'onduleur et λ_L une longueur d'onde caractéristique du rayonnement : afin de fixer les idées, la distance de glissement est de l'ordre de grandeur du centimètre à $\lambda=100 \mu\text{m}$ (soit une durée équivalente de 30 ps) et de l'ordre du millimètre (soit 3 ps) à $10 \mu\text{m}$.

De façon générale, le faisceau d'électrons peut être décrit par une distribution continue $f(t, \vec{r}, \vec{p})$ donnant la densité électronique dans l'espace des phases position-impulsion (\vec{r}, \vec{p}) à l'instant t . En présence d'une onde électromagnétique de champ électrique \vec{E} et de champ magnétique \vec{B} , la distribution f évolue en suivant l'équation de Vlasov [45] traduisant la conservation au cours du temps d'un élément de volume de l'espace des phases :

$$\frac{d f(t, \vec{r}, \vec{p})}{d t} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} + \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{p}} \right] f(t, \vec{r}, \vec{p}) = 0 \quad (\text{II-1})$$

où $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ est la force de Lorentz.

La fonction de distribution est normalisée au nombre total de particules considérées N_e :

$$\int d r^3 d p^3 f(t, \vec{r}, \vec{p}) = N_e \quad (\text{II-2})$$

Le passage du formalisme continu au formalisme particulaire s'effectue en considérant la trajectoire d'une particule unique dont la position et l'impulsion en fonction du temps sont respectivement $\vec{r}(t)$ et $\vec{p}(t)$. La distribution électronique f s'écrit alors :

$$f(t, \vec{r}, \vec{p}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}(t)) \delta(\vec{p} - \vec{p}(t)) \quad (\text{II-3})$$

On montre alors sans difficultés que l'équation de Vlasov (II-1) est équivalente aux équations du mouvement suivantes :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \end{array} \right. \quad (\text{II-4})$$

Nous reviendrons souvent sur cette équivalence. Les trajectoires électroniques dans l'espace des phases offrent par rapport à l'équation de Vlasov l'avantage d'une visualisation directe de la dynamique des électrons (au moins dans le cas monochromatique). Nous verrons que cet aspect est important pour la compréhension du fonctionnement du LEL et particulièrement dans le cas de l'instabilité qui nous préoccupe.

II. A. a. 2. Introduction qualitative à partir du mouvement des électrons

Les équations du mouvement et de Vlasov vont être par la suite écrites en variables mieux adaptées pour l'étude de l'interaction électrons-laser. Le choix des variables utilisées pour décrire la dynamique des électrons et du champ laser est intimement lié à la physique du LEL. On peut s'en faire une idée très précise à partir des équations du mouvement des électrons qui montrent de façon simple le fonctionnement du LEL dans le cas monochromatique. Pour cela, il suffit d'examiner le mouvement des électrons en présence du champ magnétique statique de l'onduleur et d'une onde plane monochromatique.

Le champ magnétique statique \vec{B} de l'onduleur est supposé parfaitement périodique de période λ_w en tout point où s'effectue l'interaction entre les faisceaux d'électrons et du laser (on néglige les variations transverses du champ statique responsable des oscillations bétatron) soit :

$$\vec{B}_w = B_w \cos(k_w z) \vec{x} \quad (\text{II-5})$$

où B_w est l'amplitude du champ magnétique statique et $k_w = \frac{2\pi}{\lambda_w}$.

La direction de propagation du faisceau d'électrons est choisie suivant l'axe \vec{z} .

En présence du champ statique seul, les équations du mouvement (II-4) s'intègrent sans difficultés et montrent que les électrons adoptent dans l'onduleur un mouvement transverse périodique perpendiculaire au champ magnétique (voir figure I. 1) :

$$\vec{\beta}_{\perp} = \frac{\vec{v}_{\perp}}{c} = - \frac{a_w}{\gamma} \sin(k_w z) \vec{y} \quad (\text{II-6})$$

où z est la position longitudinale de l'électron dont la moyenne est :

$$z = \bar{\beta}_{\parallel} c t = \left[1 - \left(1 + \frac{a_w^2}{2} \right) / 2 \gamma^2 \right] c t \quad (\text{II-7})$$

$a_w = \frac{e B_w}{m c k_w}$ est la constante d'onduleur et γ est l'énergie incidente E des électrons rapportée à leur énergie de masse ($\gamma = \frac{E}{m c^2}$).

Remarque : Du fait de la conservation de l'énergie, le mouvement transverse périodique s'accompagne d'une oscillation longitudinale de période $\lambda_w / 2$ autour de la vitesse longitudinale moyenne (II-6). Cette oscillation n'est pas essentielle à la compréhension du fonctionnement du LEL ; durant le calcul, ces oscillations rapides sont d'ailleurs lissées et il en résulte l'apparition de fonctions de Bessel dans l'équation de Vlasov et les équations du mouvement. Ces oscillations propres à l'onduleur plan n'existent pas dans un onduleur circulaire et sont responsables de la différence de gain entre ces deux types d'onduleurs.

Lorsque, de plus, une onde que l'on supposera pour l'instant monochromatique de fréquence ω_L , plane, d'amplitude et de phase constantes, est présente soit :

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \sin(-\omega_L t + k_L z) \vec{y} \quad \text{et} \quad \vec{B}(z, t) = B_0 \sin(-\omega_L t + k_L z) \vec{x} \quad (\text{II-8})$$

le mouvement transverse se couple à la partie magnétique du champ électromagnétique pour agir longitudinalement sur le faisceau d'électrons ; un électron subit alors une force de Lorentz moyenne \vec{F} suivant l'axe de propagation proportionnelle à la constante d'onduleur et au module du champ magnétique B_w et inversement proportionnelle à l'énergie des électrons :

$$\vec{F} \approx \frac{a_w B_0}{\gamma} \sin(-\omega_L t + (k_w + k_L) z) \vec{z} \quad (\text{II-9})$$

Ainsi, au cours de leur traversée de l'onduleur, les électrons "voient" une suite de puits de potentiel de période spatiale environ égale à une période du champ laser et se déplaçant à la vitesse V_r dite vitesse de résonance proche de la vitesse des électrons :

$$V_r = \frac{\omega_L}{k_w + k_L} \quad (\text{II-10})$$

Il en résulte que le faisceau d'électrons au cours de l'interaction se rassemble par paquets, de période environ égale à celle de l'onde : une fraction des électrons dans un puits est ralentie tandis que l'autre est accélérée.

On peut d'ores et déjà se faire une idée des régimes extrêmes de fonctionnement monochromatique du LEL uniquement à partir du mouvement des électrons grâce à la conservation de l'énergie ; l'énergie absorbée ou émise par le champ laser est en effet égale à la variation de l'énergie moyenne des électrons :

En régime de faible gain et faible champ, la "hauteur des puits" (équivalente à l'amplitude de la force \vec{F}) est très inférieure à l'énergie des électrons et les électrons peuvent passer d'un puits à l'autre. Trois situations peuvent alors se présenter :

- Les conditions d'amplification de l'onde laser sont réalisées lorsque le faisceau d'électrons a une vitesse initiale supérieure à la vitesse de résonance de sorte que la proportion d'électrons ralentis soit supérieure à celle des électrons accélérés.
- Dans le cas contraire, où les électrons ont une vitesse initiale inférieure à la vitesse de résonance, le faisceau d'électrons est accéléré en moyenne et l'énergie du champ laser décroît.
- Enfin, lorsque la vitesse initiale du faisceau d'électrons est égale à la vitesse de résonance, il y a autant d'électrons accélérés que d'électrons ralentis et le gain du laser est nul (bien qu'il y ait un rassemblement par paquets).

La différence entre la vitesse du faisceau d'électrons et celle des puits imposée par la fréquence de l'onde et la période de l'onduleur est à l'origine de l'amplification ou de l'absorption de l'onde.

Quand l'énergie du champ laser est suffisamment intense, la hauteur des puits devient supérieure à l'énergie des électrons. Les électrons sont alors majoritairement piégés dans les puits. Dans un repère se déplaçant à la vitesse de résonance, la position de chacun des électrons oscille autour d'un point résonant correspondant au fond du puits, l'amplitude de cette oscillation dépendant de la position et de l'énergie initiale de l'électron. Cette situation génère l'instabilité qui fera l'objet des deux chapitres suivants dont le résultat sur le spectre du laser est l'apparition des raies satellites.

Par conséquent, le comportement d'un électron localisé dépend de son énergie caractérisée par le facteur relativiste γ et de sa position dans un puits de potentiel. Cette dernière est définie par la donnée de sa phase $\psi(z,t)$:

$$\psi (z, t) = - \omega_L t + (k_w + k_L) z \quad (\text{II-11})$$

L'amplification ou l'absorption du champ laser monochromatique se caractérisent par un rassemblement par paquets dans chaque puits de périodicité exactement égale à 2π en variable ψ .

Ainsi, l'électron localisé au fonds d'un puits dont la vitesse initiale est égale à la vitesse de résonance a une phase constante au cours de sa traversée de l'onduleur : il sera dit électron résonant.

On voit donc que la phase ψ et l'énergie γ des électrons sont des paramètres de choix pour visualiser l'état des électrons dans le cadre d'une approche particulière. L'évolution de l'énergie et de la phase se déduisent des équations du mouvement (II-4) et nous détaillerons le mouvement des électrons dans l'espace des phases (ψ, γ) à la fin de ce chapitre. Il est important de noter que la phase ψ est rapportée à une fréquence particulière ω_L . Dans le cas multifréquence, on choisira une fréquence de référence et on continuera de décrire l'état d'un électron par la phase ψ rapportée à cette fréquence. En effet, la phase rapportée à une autre fréquence se déduit de celle rapportée à la fréquence de référence ; il n'est donc pas utile d'introduire une phase électronique pour chaque fréquence. Nous reviendrons ensuite sur ce choix.

L'importance du point de vue électronique de la phase ψ , dépendante du temps t et de la position longitudinale z , a conduit à introduire de nouvelles variables qui facilitent la compréhension de la dynamique du faisceau d'électrons. Ainsi, dans les développements qui vont suivre, les variables de position z et de temps t seront remplacées par les variables suivantes :

- la variable $z' = c t$ jouera le rôle du temps et donnera la position d'un paquet d'électrons dans l'onduleur.
- la phase des électrons $\psi(z, t) = - \omega_L t + (k_w + k_L) z$ fixera la position d'un électron dans un repère se déplaçant à la vitesse de résonance associé à la fréquence de référence.

L'équation de Vlasov et les équations du mouvement ainsi que les équations de Maxwell seront écrites dans ce système de variables. On sera alors amené à "penser" le faisceau d'électrons et le faisceau laser en variables (z', ψ) . Le choix de la variable ψ est intéressant à la fois dans une approche particulière car il donne la position d'un électron dans un puits correspondant à une fréquence choisie et dans une approche continue car la distribution électronique est alors donnée dans le référentiel du puits.

II. A. a. 3. Couplage du faisceau d'électrons au champ laser. Hypothèses sur le champ laser

Le champ laser peut être décrit par son potentiel vecteur \vec{A} dont l'évolution est donnée par l'équation de Maxwell :

$$\left[\vec{\Delta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{A} = \mu_0 \vec{J} \quad (\text{II-12})$$

où \vec{J} est la densité de courant du faisceau électronique.

Le champ laser est choisi polarisé rectilignement conformément à la polarisation du champ émis spontanément par le faisceau d'électrons [46].

Nous verrons dans les chapitres suivants que l'étude de la génération de raies satellites est assez complexe. Afin de focaliser notre attention sur ce seul phénomène, nous avons fait le choix de négliger l'aspect transverse du champ laser bien que ce problème soit d'un grand intérêt et pourrait faire en soi l'objet d'une étude séparée. Ainsi, aucune diffraction tant sur le faisceau laser que sur le faisceau d'électrons n'est prise en compte. Cette restriction présente l'avantage de ne pas limiter notre analyse à un domaine spectral donné en choisissant une base de profils transverses arbitraire. On négligera donc la partie transverse du Laplacien Δ_{\perp} de l'équation de Maxwell (II-12) et la direction du champ est perpendiculaire à la direction de propagation.

Néanmoins, afin de s'approcher au mieux des conditions expérimentales, on ne se limite pas au modèle en onde plane : le profil transverse du champ laser est choisi gaussien de rayon quadratique moyen σ_L compatible avec les dimensions de l'onduleur de même que le profil transverse de la distribution électronique de rayon quadratique moyen σ_e . Ces deux profils imposent le facteur de recouvrement entre le faisceau d'électrons et le champ laser et restent figés au cours de l'interaction électrons-laser. Les rayons quadratiques moyens σ_L et σ_e sont ici choisis de façon que le recouvrement soit maximum [47] (c'est à dire que le couplage est maximum) soit :

$$\sigma_L = \frac{\sigma_e}{\sqrt{2}} \quad (\text{II-13})$$

Dans la pratique, le spectre du champ laser va être échantillonné suivant un certain nombre de raies régulièrement espacées. Nous supposons que l'amplitude et la phase de chaque raie évoluent lentement à l'échelle d'une période de référence. L'approximation classique de l'amplitude et de la phase lentement variables permet d'écrire l'équation d'évolution de chaque composante du champ laser en calculant la transformée de Fourier de la densité de courant transverse de l'équation de Maxwell (II-12) :

$$\overrightarrow{J}_\perp(z, t) = \rho(z, t) \overrightarrow{v}_\perp(z) \quad (\text{II-14})$$

L'échange d'énergie entre le faisceau d'électrons et l'onde est issu du couplage du mouvement transverse des électrons \overrightarrow{v}_\perp créé par l'onduleur et du rassemblement par paquets du faisceau d'électrons qui module longitudinalement la densité électronique.

Enfin, une opération de lissage sur une période d'onduleur est effectuée afin de moyennner les oscillations rapides à l'échelle d'une période d'onduleur due à l'onduleur plan.

II. A. b. Modèle de base

Les principales hypothèses rapidement décrites ont permis d'écrire les équations de Maxwell et de Vlasov constituant le point de départ de cette étude. Une de étapes importantes du calcul est le passage des variables de position et de temps (z, t) au nouveau système de variables (z', ψ) . L'ensemble des équations de base va maintenant être écrit dans ce système de même que les développements à suivre. Parmi les différents choix réalisés, la décomposition de Fourier du champ laser s'avèrera être une caractéristique essentielle du modèle qu'il importe auparavant de définir clairement.

II. A. b. 1. Echantillonnage du spectre

La simulation numérique multifréquence nécessite une échantillonnage du spectre du champ laser. Dans une cavité de type Pérot-Fabry, le spectre se décompose naturellement en modes propres de cavité dont l'écart en fréquence entre 2 modes successifs est :

$$\Delta\nu = \frac{c}{2 L_c} \quad (\text{II-15})$$

où L_c est la longueur de la cavité.

Le nombre de modes propres inclus dans un intervalle du spectre de largeur relative en fréquence x est donc :

$$N_{\text{modes}} = \frac{2 L_c x}{\lambda} \quad (\text{II-16})$$

Les raies satellites apparaissent en ordre de grandeur à un écart relatif en fréquence de 1% de la raie en saturation (2 à 3 % pour les paramètres de l'expérience ELSA et 1,5% pour le projet de Lille). De plus, en régime d'élargissement spectral, le spectre du laser peut s'étendre sur un intervalle relatif en fréquence de 10%. Typiquement, pour une cavité de longueur 3 m, un intervalle de largeur relative en fréquence égale à 1% contient une centaine de modes à une longueur d'onde de 500 μm et 3000 modes à 20 μm . Les phénomènes ci-dessus se manifestent donc à une échelle en fréquence très supérieure à l'intervalle entre modes propres. Le temps de calcul des simulations numériques étant proportionnel au nombre de modes dont on veut calculer l'évolution, il est par conséquent déraisonnable de décomposer directement le spectre en modes propres. Il vaut mieux garder une certaine liberté du choix de l'écart entre modes afin d'adapter cet écart à l'échelle des phénomènes en jeu.

Le champ laser est décomposé en série de Fourier par rapport à la variable z et le spectre est échantillonné suivant un ensemble de raies régulièrement espacées autour d'une fréquence de référence arbitraire (ω_L, k_L) soit :

$$k_n = \left(1 + \frac{n}{N} \right) k_L \quad (\text{II-17})$$

où n est un entier relatif représentant l'indice du mode considéré et N est un entier imposant l'intervalle en fréquence entre 2 modes consécutifs.

Le potentiel vecteur associé à l'onde laser s'écrit donc :

$$\overrightarrow{A_L(z, t)} = \frac{m c}{e} \text{Re} \left[\sum_{n < N} \frac{E_n(t)}{k_n} \exp[i k_n (z - c t)] \right] \vec{x} \quad (\text{II-18})$$

où E_n est l'amplitude complexe du champ électrique sur l'axe de propagation. Rappelons

que le profil du champ laser est gaussien. Cette hypothèse intégrée dans le calcul est cependant transparente dans le résultat ; le champ E_n représente le champ au centre du profil gaussien.

Il est important de noter que le champ laser ainsi décomposé est périodique spatialement de période $L = N \lambda_L$. Ceci signifie qu'à l'instant t , la longueur de l'impulsion laser nécessaire pour résoudre un spectre dont les raies sont espacées de :

$$\Delta\omega/\omega = 1/N$$

ne peut en aucun cas être inférieure à L sans perte d'information sur le spectre. La périodicité spatiale du champ laser va bien sûr entraîner une périodicité de la distribution électronique. L'hypothèse du faisceau d'électrons continu est associée à un spectre du laser continu (ie un échantillonnage infiniment fin du spectre du laser). En pratique, cette hypothèse n'est pas nécessaire ; il est suffisant de considérer les électrons sur la longueur de périodicité de la distribution électronique. La durée des impulsions électroniques et laser que nous considérons est donc imposée par la précision que nous désirons dans la résolution du spectre.

II. A. b. 2. Equation de Vlasov

La dynamique du faisceau d'électrons est décrite par l'équation d'évolution de la distribution électronique $g(z, \psi, \gamma)$ dans l'espace des phases (ψ, γ) soit l'équation de Vlasov suivante :

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + v \frac{\partial}{\partial \psi} + F \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{1}{\gamma} \right) \right] g(z, \psi, \gamma) = 0 \quad (\text{II-19})$$

où

$$\left[\begin{array}{l} v = k_w - \frac{k_L}{2\gamma^2} \left(1 + \frac{a_w^2}{2} \right) \\ F = \frac{a_w K_1}{2} \operatorname{Im} \left[\sum_{m \ll N} E_m \exp \left[-i \frac{m}{N} k_w z \right] \frac{\exp \left[i \left(1 + \frac{m}{N} \right) \psi \right]}{2\gamma} \right] \end{array} \right] \quad (\text{II-20})$$

Note : Dans ce système, on a omis le prime de z' . Cette omission est désormais permanente.

Le terme v décrit le "mouvement en ψ " de la distribution électronique. Ce terme s'annule lorsque la vitesse des électrons est égale à la vitesse de résonance (II-10) associée à la fréquence de référence. Le terme force F contient maintenant l'ensemble des modes du champ laser. Cette équation contient par ailleurs un terme non différentiel en $1/\gamma$ provenant de la projection de la distribution électronique initialement tridimensionnelle suivant l'axe z de propagation du fait d'un traitement à une dimension du faisceau d'électrons.

La périodicité spatiale du champ laser issue de l'échantillonnage du spectre entraîne, nous l'avons annoncé, une périodicité de la distribution électronique g . Ainsi, on peut montrer que l'échantillonnage du spectre (II-17) est équivalent pour la distribution électronique à une périodicité en ψ exactement égale à $2\pi N$ [26]. Dans la simulation, l'échantillonnage du faisceau électronique se fera donc en répartissant les électrons d'énergie donnée sur l'intervalle de phase $[0, 2\pi N]$. Dans l'espace direct, cette opération équivaut à répartir initialement les électrons sur une longueur très proche de N périodes laser λ_L . Par exemple, une impulsion électronique de 6 cm, soit une durée de 200 ps, est nécessaire pour résoudre un spectre avec une précision relative en fréquence de 10^{-3} à une fréquence de 500 GHz (Si le spectre devient monochromatique, chaque électron oscille alors dans un parmi mille puits de potentiel).

La distribution électronique g dans l'espace des phases est normalisée à la densité électronique ρ_e (en nombre d'électrons / m) soit sur la longueur de périodicité de l'impulsion électronique en ψ égale à $2\pi N$:

$$\frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi N} d\psi \int_1^{+\infty} d\gamma g(z, \psi, \gamma) mc = \rho_e \quad (\text{II-21})$$

Le choix d'une distribution continue est motivé par sa facilité d'utilisation dans les calculs analytiques. Toutefois, nous reviendrons souvent au mouvement propre des électrons dans l'espace des phases. L'équation de Vlasov (II-22-23) est tout à fait équivalente aux équations du mouvement des électrons issues des lois de la dynamique :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial z} = v \\ \frac{\partial \gamma}{\partial z} = F \end{array} \right. \quad (\text{II-22})$$

En présence de plusieurs fréquences, le faisceau d'électrons "voit" une superposition de série de puits de potentiel. Chaque série est associée à une fréquence ω_n du spectre, se déplace à sa vitesse de résonance propre $V_n = \frac{\omega_n}{k_w + k_n}$ et son amplitude est proportionnelle à celle de ce mode.

II. A. b. 3. Equation de Maxwell

L'évolution du mode n est obtenue par la transformée de Fourier de la densité de courant transverse. En variables (z, ψ), la transformée s'effectue sur la longueur de périodicité de la distribution électronique donc ψ variant de 0 à $2\pi N$:

$$i \frac{\partial E_n}{\partial z} = \frac{\mu_0 e^2 c}{2 \pi N} a_w K_1 \exp\left[i \frac{n}{N} k_w z \right] \int_1^{+\infty} d\gamma \int_0^{2\pi N} d\psi g(z, \psi, \gamma) \exp\left[-i \left(1 + \frac{n}{N} \right) \psi \right]$$

(II-23)

On peut reconnaître sous l'exponentielle l'expression de la phase électronique résonnante avec le mode n de fréquence ω_n . En effet, cette phase que l'on notera ψ_n peut encore s'écrire en fonction de la phase ψ rapportée au mode de référence de fréquence ω_L de la façon suivante d'après l'échantillonnage du spectre (II-17) :

$$\psi_n = -\omega_n t + (k_w + k_n) z = \left(1 + \frac{n}{N} \right) \psi - \frac{n}{N} k_w z \quad (\text{II-24})$$

II.A.c. Changement de variables et choix d'une nouvelle distribution électronique. Système d'équations de référence

Dans sa forme (II-19) présentée précédemment, l'équation de Vlasov est difficilement intégrable même en présence d'un mode unique. Plus précisément, le terme "force" de cette équation dépend de γ et contient un terme non différentiel en $1/\gamma$. Cette formulation rend difficile la recherche de solutions d'équilibre et conduit le plus souvent à négliger ce terme.

II. A. c. 1. Nouvelle formulation de l'équation de Vlasov et équations du mouvement associées

On peut s'affranchir exactement de cette difficulté en posant une nouvelle variable pour l'énergie électronique :

$$\Gamma = \gamma^2 \quad (\text{II-25})$$

L'équation de Vlasov en variables (z, ψ, Γ) s'écrit alors :

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + v(\Gamma) \frac{\partial}{\partial \psi} + F(\psi) \frac{\partial}{\partial \Gamma} \right] h(z, \psi, \Gamma) = 0 \quad (\text{II-26})$$

où on a introduit une nouvelle distribution électronique h :

$$h(z, \psi, \Gamma) = \frac{g(z, \psi, \Gamma)}{2\sqrt{\Gamma}} \quad (\text{II-27})$$

Le choix de cette nouvelle distribution nous a été dicté par la volonté de garder pour h une normalisation identique à celle de g . Ainsi, h est normalisée de la façon suivante :

$$\frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi N} d\psi \int_1^{+\infty} d\Gamma h(z, \psi, \Gamma) mc = \rho_e \quad (\text{II-28})$$

Dans ces nouvelles variables, le terme de v "mouvement en ψ " et le "terme force" F de l'équation de Vlasov en h s'écrit :

$$\left[\begin{array}{l} v(\Gamma) = k_w - \frac{k_L}{2\Gamma} \left(1 + \frac{a_w^2}{2} \right) \\ F(\psi) = \frac{a_w K_1}{2} \operatorname{Im} \left[\sum_{m \ll N} E_m \exp \left[-i \frac{m}{N} k_w z \right] \exp \left[i \left(1 + \frac{m}{N} \right) \psi \right] \right] \end{array} \right] \quad (\text{II-29})$$

Le terme v de "mouvement en ψ " est maintenant indépendant de ψ . De même, le "terme force" est indépendant du carré de l'énergie $\Gamma (= \gamma^2)$.

Ainsi, dans la nouvelle formulation de l'équation de Vlasov (II-26), des solutions d'équilibre en présence d'un mode unique peuvent être trouvées aisément puisque

l'équation (II-26) est alors une équation à variables séparées. Cette formulation révélera son utilité au chapitre III.

A l'équation de Vlasov en h , il convient d'associer le système équivalent des équations du mouvement permettant une "visualisation" plus simple des électrons. Les équations du mouvement en variables (z, ψ, Γ) s'écrivent de la façon suivante :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial z} = v(\Gamma) \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = F(\psi) \end{array} \right. \quad (\text{II-33-34})$$

II. A. c. 2. Nouvelle formulation de l'équation de Maxwell à terme source continu pour chaque mode et distribution résonante associée

En ce qui concerne l'évolution des modes, on introduit sans difficultés la nouvelle distribution dans l'équation de Maxwell (II-23) :

$$i \frac{\partial E_n}{\partial z} = \frac{\mu_0 e^2 c}{2 \pi N} a_w K_1 \exp\left[i \frac{n}{N} k_w z\right] \int_1^{+\infty} \frac{d\Gamma}{2 \sqrt{\Gamma}} \int_0^{2\pi N} d\psi h(z, \psi, \Gamma) \exp\left[-i \left(1 + \frac{n}{N}\right) \psi\right] \quad (\text{II-32})$$

L'évolution de chaque mode n est due à un rassemblement par paquets des électrons dans le puits associé à la fréquence ω_n correspondante. L'amplification ou l'absorption du mode n sont donc associées à l'apparition d'une périodicité en ψ_n exactement égale à 2π de la distribution électronique h . Pour s'en convaincre, considérons une distribution h de périodicité en ψ_n égale à 2π . Par définition de ψ_n , cette distribution particulière est $2\pi N / (N + n)$ périodique en ψ ; la longueur de périodicité totale $2\pi N$ contient donc $N+n$ sous-périodes de longueur $2\pi N / (N + n)$. Ceci peut se traduire de la façon suivante :

$$h(z, \psi, \Gamma) = h\left(z, \psi + \frac{2\pi N}{N+n}, \Gamma\right) \quad (\text{II-33})$$

Calculons l'évolution du mode q en présence de cette distribution d'après l'équation de Maxwell (II-32) en décomposant la somme sur la distribution électronique suivant les $N+n$ sous-périodes :

$$i \frac{\partial E_q}{\partial z} = \frac{\mu_0 e^2 c}{2 \pi N} a_w K_1 \exp \left[i \frac{n}{N} k_w z \right] \int_1^{+\infty} \frac{d\Gamma}{2 \sqrt{\Gamma}} \sum_{p=1}^{N+n} \int_{\frac{2\pi N}{N+n}}^{\frac{2\pi N p}{N+n}} d\psi h(z, \psi, \Gamma) \exp \left[-i \left(1 + \frac{q}{N} \right) \psi \right] \quad (\text{II-34})$$

En posant :

$$\psi'' = \psi - \frac{2 \pi N (p - 1)}{N + n} \quad (\text{II-35})$$

et en tenant compte de la 2π périodicité en ψ_n :

$$i \frac{\partial E_q}{\partial z} = \frac{\mu_0 e^2 c}{2 \pi N} a_w K_1 \exp \left[i \frac{n}{N} k_w z \right] \int_1^{+\infty} \frac{d\Gamma}{2 \sqrt{\Gamma}} \int_0^{\frac{2\pi N}{N+n}} d\psi'' h(z, \psi'', \Gamma) S$$

$$\text{où } S = \sum_{p=1}^{N+n} \exp \left[-i 2\pi (p-1) \frac{N+q}{N+n} \right] \quad (\text{II-36})$$

La suite géométrique S est non nulle uniquement si $q=n$. Dans ce cas, l'évolution du mode n s'écrit :

$$i \frac{\partial E_n}{\partial z} = \frac{\mu_0 e^2 c}{2 \pi N} a_w K_1 \exp \left[i \frac{n}{N} k_w z \right] \int_1^{+\infty} \frac{d\Gamma}{2 \sqrt{\Gamma}} \int_0^{\frac{2\pi N}{N+n}} d\psi'' h(z, \psi'', \Gamma) (N+n) \quad (\text{II-37})$$

Par conséquent, une distribution électronique 2π périodique en ψ_n ou de façon équivalente $2\pi N/(N+n)$ périodique en ψ n'affecte que le mode n correspondant. Pratiquement, la périodicité de la distribution électronique peut être visualisée en représentant le mouvement des électrons dans l'espace des phases (ψ_n, Γ) associé à chaque fréquence ω_n ; l'altération du mode n correspondant se traduit par un rassemblement par paquets de période en ψ_n égale à 2π . La notion de périodicité de la distribution sera très utile pour la réalisation de simulation à bas bruit numérique.

II. A. c. 3. Equation de Maxwell à terme source discret

Enfin, à l'équation de Maxwell (II-32) dont le terme source est donné en fonction de la distribution continue h , il est intéressant d'associer l'équation équivalente où le faisceau est considéré comme un ensemble de particules. Du fait de l'échantillonnage du spectre, la distribution électronique h est $2\pi N$ périodique en ψ . Compte tenu de la condition de normalisation (II-28), la distribution h s'écrit en fonction du nombre total d'électrons N_T contenus dans l'impulsion de longueur $2\pi N$ en ψ :

$$h(z, \psi, \Gamma) = \frac{2\pi N}{N_T} \frac{\rho_e}{m c} \sum_{i=1}^{N_T} \delta(\psi - \psi_i) \delta(\Gamma - \Gamma_i) \quad (\text{II-38})$$

L'évolution du mode n sous une forme particulière se calcule alors sans difficultés grâce à l'équation précédente (II-32) soit :

$$i \frac{\partial E_n}{\partial z} = \frac{\mu_0 e^2}{m} a_w K_1 \rho_e \exp(-i \frac{n}{N} k_w z) \left\langle \frac{\exp(-i(1 + \frac{n}{N})\psi)}{2\sqrt{\Gamma}} \right\rangle \quad (\text{II-39})$$

L'évolution du champ se calcule donc comme une moyenne statistique sur la phase et l'énergie des électrons initialement répartis sur l'intervalle $[0, 2\pi N]$. Cette écriture associée aux équations du mouvement (II-33-34) constitue les éléments de base de la simulation numérique détaillée dans la partie suivante.

L'ensemble des équations couplées de Maxwell et de Vlasov à une dimension ainsi que les équations du mouvement des électrons ont été réécrites dans le système de variables (z, ψ, Γ) . L'équation de Vlasov en h (II-26) équivalente aux équations du mouvement (II-33-34) et l'équation de Maxwell à terme source continu (II-32) équivalente à l'équation à terme source discret (II-39) constituent le système d'équations de base. Il sera utilisé aux chapitres suivants dans les calculs analytiques et dans la simulation numérique SPECTRE.

II. B. ILLUSTRATION DU MODELE DANS LE CAS MONOCHROMATIQUE. SIMULATION MULTIFREQUENCE ET SES PARAMETRES

Parmi les différents régimes de fonctionnement du LEL, le cas monochromatique occupe une place importante. D'une part, en régime de faible champ et faible gain, les modes laser peuvent être considérés indépendants et les équations de Maxwell et de Vlasov monochromatiques sont suffisantes pour calculer le gain du LEL. D'autre part, l'instabilité décrite au Chapitre I apparaît au moment où le spectre est devenu suffisamment fin pour qu'on puisse le considérer monochromatique à l'issue d'un affinement spectral (dû au gain linéaire d'abord puis aux effets de compétition de modes). Dans ces deux cas de figure réductibles au cas monochromatique, il est possible de visualiser simplement le comportement du faisceau d'électrons ; il s'agit d'une aide très précieuse afin de calculer l'évolution du champ laser. Dès que plusieurs fréquences sont présentes, le mouvement des électrons devient rapidement inextricable. Le recours aux simulations numériques est alors indispensable pour comprendre l'évolution du spectre du laser et en isoler la physique. Les exemples très instables du chapitre I nous ont démontré la nécessité d'une bonne maîtrise des paramètres de la simulation numérique.

II. B. a. Cas monochromatique

Afin d'introduire les différents régimes de fonctionnement monochromatique à partir de l'évolution du faisceau d'électrons sur un passage, nous considérons ici l'amplitude et la phase du champ laser variant peu pendant la traversée de l'onduleur. Grâce à cette hypothèse, on pourra décrire le mouvement des électrons en fonction de l'amplitude du champ laser monochromatique. On considérera alors deux situations opposées du point de vue de la dynamique des électrons à savoir le régime de faible champ-faible gain puis l'instabilité qui génère les raies satellites.

II. B. a. 1. Equation du pendule

En présence du seul mode de fréquence ω_L , le mouvement d'un électron décrit par le système (II-33-34) est donné par les équations du mouvement suivantes :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial z} = v(\Gamma) = k_w - \frac{k_L}{2\Gamma} \left(1 + \frac{a_w^2}{2} \right) \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \frac{a_w K_1}{2} \operatorname{Im} (E_0 \exp(i\psi)) \end{array} \right. \quad (\text{II-40})$$

Soient ψ_i et $\Gamma_i = \gamma_i^2$ la phase et le carré de l'énergie initiale de l'électron considéré. La variation d'énergie d'un électron au cours de sa traversée de l'onduleur est très inférieure à γ_i (En ordre de grandeur, la variation relative d'énergie est au maximum de l'ordre de quelques %). Il est donc raisonnable de linéariser $v(\Gamma)$ autour de sa valeur initiale soit en posant $\Gamma = \Gamma_i + \Gamma_1$:

$$v(\Gamma) = v_0 + \frac{k_L}{2\Gamma_i^2} \left(1 + \frac{a_w^2}{2} \right) \Gamma_1 \quad \text{avec } v_0 = v(\Gamma_i) \quad (\text{II-41})$$

Le paramètre v_0 mesure l'écart à la résonance c'est à dire l'écart de vitesse entre le faisceau d'électrons V_e et la vitesse de résonance V_r (II-10). En effet, en dérivant la phase d'un électron (II-11) par rapport au temps t , on voit immédiatement que v_0 est proportionnel à cet écart de vitesse :

$$v_0 = \frac{k_w + k_L}{c} (V_e - V_r) \quad (\text{II-42})$$

Rappelons au passage que la vitesse de résonance dépend seulement de la période de l'onduleur et de la fréquence de l'onde.

Posons :

$$\left[\begin{array}{l} p = v_0 + \frac{k_L}{2\Gamma_i^2} \left(1 + \frac{a_w^2}{2} \right) (\Gamma - \Gamma_i) \\ \psi' = \psi + \pi \end{array} \right. \quad (\text{II-43})$$

A une constante près, la grandeur p est proportionnelle au carré de l'énergie de l'électron.

On retrouve alors l'équation classique du pendule :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \psi'}{\partial z} = p \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\Omega_0^2 \sin \psi' \end{array} \right. \quad \text{avec la condition initiale } p_i = v_0, \psi'_i = \psi_i + \pi \quad (\text{II-44})$$

où Ω_0 est la fréquence synchrotron et jouera un rôle important dans l'étude de l'instabilité :

$$\Omega_0^2 = \frac{k_w a_w K_1}{2 \Gamma_r} |E_0| \quad (\text{II-45})$$

L'Hamiltonien du système permet d'écrire l'équation de la trajectoire d'un électron dans l'espace des phases (ψ' , p) de condition initiale ($\psi'=\psi'_i$, $p=v_0$). Il se calcule aisément à partir de l'équation du pendule (II-44) :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \psi'}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial H}{\partial \psi'} = -\Omega_0^2 \sin \psi' \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad H = \frac{p^2}{2} - \Omega_0^2 \cos \psi' + \text{cte} = \frac{v_0^2}{2} - \Omega_0^2 \cos \psi'_i + \text{cte} \quad (\text{II-46})$$

II. B. a. 2. Trajectoire des électrons dans l'espace des phases

Outre sa phase ψ_i (ou ψ'_i) et son énergie initiale γ_i (ou $p(z=0) = v_0 = v(\Gamma_i)$), l'Hamiltonien d'un électron donné dépend uniquement de la fréquence synchrotron Ω_0 dont le carré est proportionnel à l'amplitude du champ laser. La variété de comportement du faisceau d'électrons en régime monochromatique tient au fait que l'énergie du champ laser varie sur plusieurs décades depuis le démarrage à partir du bruit jusqu'à la saturation. Ainsi, le mouvement d'un électron est équivalent à celui d'un pendule dans un champ gravitationnel dont l'intensité pourrait varier sur plusieurs décades.

A l'image du pendule, les trajectoires électroniques dans l'espace des phases (ψ' , p) se divisent en deux groupes (figure II. 1) :

- * Les électrons ayant une énergie cinétique suffisante pour "sauter" d'un puits au

suisant décrivent dans l'espace des phases des trajectoires ouvertes (le pendule effectue plusieurs tours).

* Les électrons piégés dans les puits ont une trajectoire fermée dans l'espace des phases (elle correspond aux petites oscillations du pendule décrivant moins d'un tour). Dans le cas des oscillations d'angle petit, il est possible de linéariser en ψ l'équation du pendule (II-45). La phase et l'énergie de l'électron oscille de façon sinusoïdale autour du point résonant ($\psi'_r = \pi$, $p = v_0$) et la fréquence de rotation de l'électron dans l'espace des phases est égale à la fréquence synchrotron Ω_0 .

Ces deux groupes sont séparés dans l'espace des phases par la séparatrice qui détermine la "bulle de piégeage". Elle correspond au cas où le pendule approche asymptotiquement le sommet de sa trajectoire. La période de rotation tend donc vers l'infini. La séparatrice passe par les points instables correspondant au sommet de la trajectoire du pendule ($\psi' = \pm \pi$, $p = v_0$) ; son équation se calcule aisément grâce à l'Hamiltonien (II-46) soit :

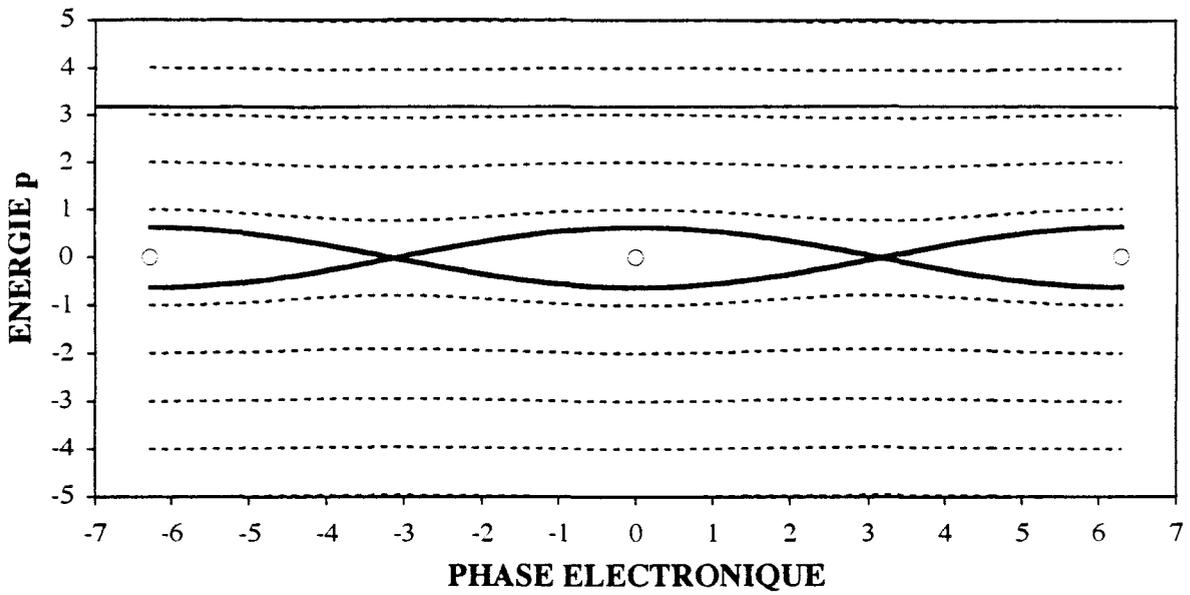
$$p^2 = 2 \Omega_0^2 (1 + \cos \psi') \quad (\text{II-47})$$

A l'intérieur de la "bulle de piégeage", la fréquence de rotation d'un électron dans l'espace des phases varie donc de la fréquence synchrotron Ω_0 lorsque sa position est proche du point résonant à une valeur nulle près de la séparatrice (la fréquence de rotation d'un électron quelconque est calculée explicitement au chapitre III). On peut dire que la fréquence de rotation des électrons en "fonds de puits" Ω_0 est caractéristique de la rotation d'ensemble des électrons dans l'espace des phases.

Par ailleurs, la hauteur en énergie de la séparatrice dépend de la fréquence synchrotron ie de l'amplitude du champ du laser. Initialement, le faisceau d'électrons est monocinétique ; les électrons sont donc injectés sur une droite définie par $p=v_0$ (figure II. 1).

En régime de faible champ (figure II. 1. a), les électrons peuvent suivre une trajectoire ouverte ou fermée suivant la fréquence de l'onde. Il existe une fréquence du rayonnement pour laquelle la vitesse des électrons est égale à la vitesse de résonance (ie $v_0 = 0$) : tous les électrons suivent une trajectoire fermée et évoluent dans l'espace des phases de façon symétrique par rapport au point résonant de sorte que l'énergie totale du faisceau d'électrons est conservée (le gain est nul). Au contraire pour une fréquence proche du maximum de gain ($v_0 = \pi \text{ m}^{-1}$ pour un onduleur de 2 m), la hauteur en énergie d'injection v_0 des électrons est très supérieure à la hauteur de la séparatrice ; les électrons suivent alors les trajectoires ouvertes.

a. CHAMP FAIBLE ($L_s=20m$)



b. CHAMP FORT ($L_s=2m$)

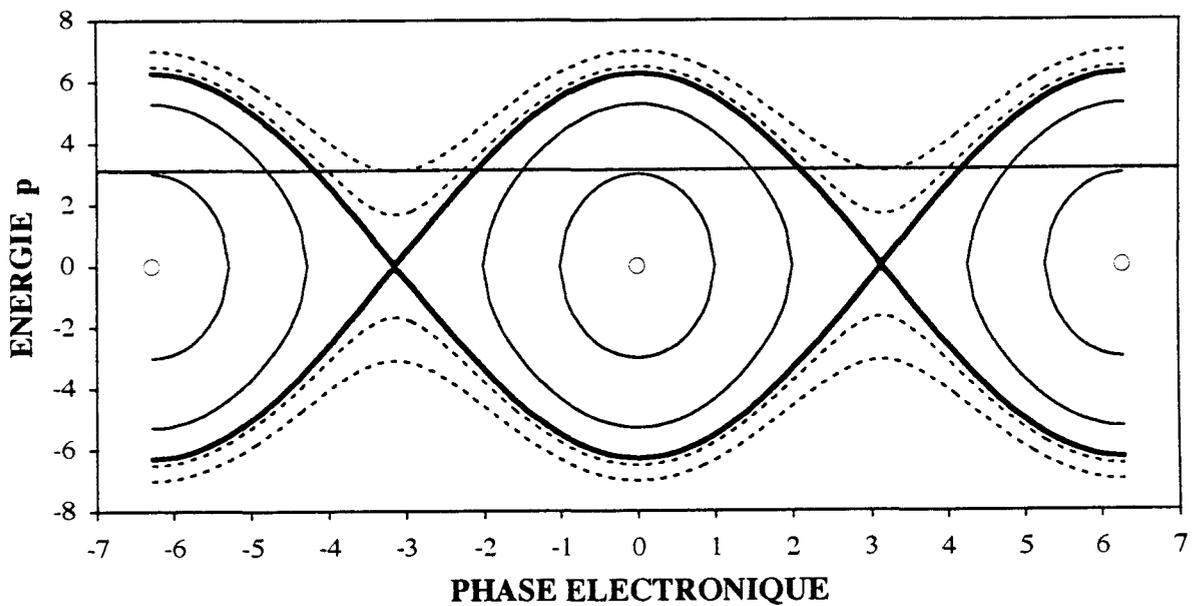


Figure II. 1. Trajectoires des électrons dans l'espace des phase (ψ', p). Le mouvement des électrons est déterminé par la taille de la "bulle de piégeage" centrée sur le point résonant (en trait fin). A faible champ (a), la hauteur de la séparatrice (en trait plein et en gras) est très inférieure au niveau d'injection des électrons pour une fréquence proche du maximum de gain ($p=v_0=\pi m^{-1}$) de sorte que l'ensemble des électrons suivent pour cette fréquence une trajectoire ouverte. La taille de la "bulle de piégeage" augmente avec l'énergie du champ laser. En champ fort (b), la majeure partie des électrons est piégée et suit une trajectoire fermée (en trait plein) (ici, la période synchrotron est environ 3m).

En régime de champ fort (figure II. 1. b), c'est à dire quand le laser est en saturation, la hauteur en énergie de la séparatrice est très supérieure à la hauteur d'injection des électrons : la majorité des électrons suit une trajectoire fermée (il faut préciser ici que la fréquence de l'onde dans ce régime est imposée par l'histoire du spectre).

En régime monochromatique, la fréquence synchrotron Ω_0 joue un rôle essentiel : elle mesure à la fois la taille de la "bulle de piégeage" (ou la hauteur des puits) donc la fraction d'électrons piégés ainsi que la fréquence de rotation des électrons dans la "bulle de piégeage".

II. B. a. 3. Du régime linéaire à faible champ et faible gain à l'instabilité de bande latérale

Le calcul du gain par passage du laser a une complexité croissante avec l'amplitude du champ laser c'est à dire avec "l'amplitude" du mouvement des électrons dans l'espace des phases (même dans le cas monochromatique).

En régime de faible champ faible gain, les différentes fréquences sont indépendantes et les électrons restent proches de leur position initiale. Par conséquent, le gain du laser se calcule sans difficulté.

En revanche, en présence d'un mode en saturation, les électrons piégés effectuent une large rotation dans l'espace des phases. Typiquement, les électrons proches des points résonants (où la fréquence de rotation est maximum) font environ un tour dans l'espace des phases pendant leur traversée de l'onduleur. Le mouvement d'ensemble des électrons génère l'instabilité de bande latérale. Avant d'aborder son étude aux chapitres suivants, il est intéressant d'introduire le phénomène.

* Gain linéaire

L'hypothèse de faible gain permet de supposer l'amplitude et la phase du champ laser constantes sur la longueur de l'onduleur. A faible champ, les électrons s'écartent peu de leur position initiale dans l'espace des phases au cours de leur traversée de l'onduleur. Dans ces conditions, le gain linéaire s'obtient par un calcul perturbatif en champ au premier ordre. En linéarisant les équations du mouvement monochromatiques autour de la position initiale de chaque électron, la correction d'ordre 1 de la phase et de l'énergie de l'électron se calcule sans difficultés. L'évolution du champ se calcule en faisant la moyenne statistique sur les phases de l'ensemble des électrons.

D'après les équations du mouvement (II-44), en l'absence de champ, la phase des électrons évolue linéairement en z selon le désaccord à la résonance initial v_0 et leur énergie est constante.

$$\left[\begin{array}{l} \psi'_0 = \psi'_i + v_0 z \\ p_0 = v_0 \end{array} \right. \quad (\text{II-48})$$

Soient ψ'_1 et p_1 la correction à apporter à l'ordre 1 :

$$\left[\begin{array}{l} \psi' = \psi'_0 + \psi'_1 \\ p = v_0 + p_1 \end{array} \right. \quad \text{où} \quad p_1 = \frac{k_L}{2 \Gamma_i^2} \left(1 + \frac{a_w^2}{2} \right) (\Gamma - \Gamma_i) \quad (\text{II-49})$$

En linéarisant les équations du mouvement en ψ'_1 et p_1 , on obtient au premier ordre :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \psi'_1}{\partial z} = p_1 \\ \frac{\partial p_1}{\partial z} = -\Omega^2 \sin(\psi'_i + v_0 z) \end{array} \right. \quad (\text{II-50})$$

d'où la correction d'ordre 1 sur la phase et l'énergie d'un électron :

$$\left[\begin{array}{l} \psi'_1 = \frac{\Omega^2}{v_0^2} (\sin(\psi'_i + v_0 z) - \sin \psi'_i - v_0 z \cos \psi'_i) \\ p_1 = \frac{\Omega^2}{v_0} (\cos(\psi'_i + v_0 z) - \cos \psi'_i) \end{array} \right. \quad (\text{II-51})$$

L'évolution du champ s'obtient à partir de l'équation de Maxwell monochromatique soit à partir de (II-39) :

$$i \frac{\partial E_0}{\partial z} = \frac{\mu_0 e^2}{m} a_w K_1 \rho_e \left\langle \frac{\exp(-i \psi)}{2 \sqrt{\Gamma}} \right\rangle \quad (\text{II-52})$$

De même, l'équation de Maxwell (II-52) est linéarisée en ψ'_1 et p_1 . En utilisant la correction d'ordre 1 sur la trajectoire des électrons calculée précédemment (II-51), l'évolution du champ découle d'une moyenne statistique sur l'ensemble des phases initiales ie en intégrant par rapport à ψ'_i sur $[0, 2\pi]$ et d'une intégrale sur z . Après ces calculs fastidieux, le gain en énergie du champ laser s'écrit sous la forme bien connue de

la dérivée d'un sinus cardinal qui n'est autre que le spectre d'émission spontanée selon le théorème de Madey [42] :

$$G(v_0, z) = \frac{\Delta E_L}{E_L} = - \frac{\mu_0 e^2}{8 m} \frac{\rho_e}{\pi \sigma_e^2} \frac{a_w^2 K_1^2}{\gamma_i^3} k_w z^2 \frac{\partial \text{sinc}^2 \left(\frac{v_0 z}{2} \right)}{\partial v_0} \quad (\text{II-53})$$

Le gain linéaire (figure I. 3) est inversement proportionnel au cube de l'énergie des électrons et proportionnel au carré de la constante d'ondeur et à la densité électronique du faisceau (ρ_e est le nombre d'électrons par m et σ_e le rayon quadratique moyen du faisceau d'électrons de profil gaussien). Le maximum de gain linéaire est obtenu pour : $v_0 L_w = 2 \pi$.

* Origine des raies satellites

A l'issue de sa croissance en régime linéaire puis des effets de compétition de modes, le champ tend à devenir monochromatique et atteint par sa propre saturation un équilibre où son gain égale les pertes. Comme nous l'avons constaté au premier chapitre, cet équilibre peut être détruit par le développement des raies satellites de part et d'autre de la raie en saturation. En régime de saturation, nous avons vu que la hauteur en énergie de la séparatrice est supérieure à la hauteur d'injection des électrons qui sont pour la plupart d'entre-eux piégés. En d'autres termes, les électrons oscillent dans les puits de potentiel créés par la raie en saturation. Il est possible de mettre en évidence l'origine du phénomène des raies satellites comme une résonance des équations de Maxwell.

Pour cela, supposons l'ensemble des électrons concentrés autour des points résonants (c'est à dire au fond des puits de potentiel). L'ensemble des électrons oscillent autour du point résonant à la fréquence synchrotron Ω_0 ; la phase d'un électron particulier évolue sinusoïdalement :

$$\psi = \psi_r + \varepsilon_i \cos(\Omega_0 z) \quad \text{avec } \varepsilon_i \ll 1 \quad (\text{II-54})$$

Le terme source de l'équation de Maxwell (II-39) pour le mode n est proportionnel à la moyenne statistique sur l'ensemble des phases électroniques rapportées à la fréquence ω_n soit :

$$\langle \exp(-i \psi_n) \rangle = \left\langle \exp\left(-i \frac{n}{N} k_w z - i \left(1 + \frac{n}{N}\right) \psi\right) \right\rangle \quad (\text{II-55})$$

Du fait du mouvement des électrons en "fonds de puits" (II-53), on peut développer l'équation (II-55) au premier ordre en ε_i . Le terme source est alors proportionnel à :

$$\left(\exp(-i(\frac{n}{N}k_w - \Omega_0)z) - \exp(-i(\frac{n}{N}k_w + \Omega_0)z) \right) \quad (\text{II-56})$$

et montre donc une résonance centrée sur les modes dont l'écart en fréquence à la raie fondamentale est :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{n}{N} = \pm \frac{\Omega_0}{k_w} = \pm \frac{L_w}{N_w L_s} \quad (\text{II-57})$$

où L_s est la période synchrotron associée à la fréquence synchrotron Ω_0 ($L_s = \frac{2\pi}{\Omega_0}$), L_w est la longueur de l'onduleur qui contient N_w périodes.

Cet écart relatif en fréquence correspond approximativement à celui où apparaissent les raies satellites observées dans les simulations présentées au premier chapitre soit 1,5%. Dans cet exemple, les raies satellites apparaissent en effet lorsque la longueur synchrotron est proche de la longueur de l'onduleur. On voit d'après (II-57) que l'écart en relatif en fréquence correspondant est égal à l'inverse du nombre de périodes d'onduleur soit 1,2% (pour 80 périodes).

Ainsi, cette explication simple mais insuffisante de l'origine des raies satellites basée sur l'hypothèse des électrons en "fonds de puits" fournit un bon ordre de grandeur de la position des raies satellites. L'hypothèse des électrons en "fonds de puits" sera utilisée au chapitre suivant pour le calcul de l'évolution des raies satellites et sa validité sera ensuite discutée.

II. B. b. Simulation multifréquence

L'aspect non-linéaire des équations du mouvement (II-33-34) rend difficile l'écriture d'une équation ou d'un système d'équations d'évolution macroscopique de la moyenne statistique sur l'ensemble des phases électroniques de l'équation de Maxwell (II-45) (même dans le cas monochromatique). La dynamique du système ne peut donc être réduite à un nombre limité d'équations valable dans tous les régimes de fonctionnement. Le système comprend forcément de façon "self-consistante" une échelle microscopique, c'est à dire les électrons dont il est nécessaire de calculer le mouvement

individuel et une échelle macroscopique, c'est à dire le champ laser multifréquence. La simulation numérique SPECTRE intègre ces contraintes propres au LEL.

II. B. b. 1 Simulation multifréquence

Le faisceau d'électrons est traité de manière particulière. La simulation consiste à suivre l'interaction d'un champ laser multifréquence et d'un paquet d'électrons que nous allons définir, pendant le temps de traversée de l'onduleur. Le calcul de l'énergie et de la phase de chacun des électrons est réalisé par intégration des équations du mouvement (II-33-34). L'évolution des modes du laser est calculée à chaque instant z de façon "self-consistante" avec l'évolution du faisceau d'électrons par la moyenne statistique sur les phases électroniques $\langle \exp(-i(1+n/N)\psi) \rangle$ de l'équation de Maxwell (II-45). Par conséquent, les paramètres numériques importants de la simulation sont l'échantillonnage en fréquence du champ laser, l'échantillonnage du faisceau d'électrons et le pas de calcul en z de l'intégration.

* Echantillonnage du spectre

Le spectre est échantillonné autour de la fréquence de référence arbitraire ω_L (II-17). L'intervalle entre deux modes consécutifs est fixé, nous l'avons vu, par le choix du nombre de périodes laser N (périodicité spatiale du champ laser de période $N\lambda_L$). La largeur totale de la fenêtre spectrale est donc fixée par le nombre de périodes laser N et le nombre de modes n_0 de part et d'autre de la raie centrale :

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{\text{fenêtre}} = \frac{2n_0 + 1}{N} \quad (\text{II-58})$$

Par exemple, $N=1000$ périodes laser sont nécessaires pour obtenir une finesse spectrale (ie l'écart relatif en fréquence entre deux modes consécutifs) égale à 10^{-3} et $n_0 = 30$ modes de part et d'autre de la raie centrale couvrent une fenêtre spectrale de $\pm 3\%$ autour de la raie centrale.

Dans la pratique, la largeur relative en fréquence de la fenêtre spectrale pourra varier d'environ 10% pour des phénomènes d'élargissement spectral à quelques % pour la génération de raies satellites. Dans un cas comme dans l'autre, la finesse spectrale est bien entendu largement conditionnée par le temps de calcul. Le modèle comporte cependant des limitations propres dans le cas de spectres beaucoup plus fins (pour des fenêtres spectrales typiquement très inférieures à 1%).

* Echantillonnage du faisceau d'électrons

La périodicité du champ laser implique une $2\pi N$ périodicité en ψ de la distribution électronique. Pour calculer l'évolution du spectre sur un passage, il est donc suffisant de considérer une impulsion électronique de longueur $2\pi N$ en ψ . De plus, le paquet d'électrons sera supposé monocinétique (projet de Lille) ou quasi-monocinétique (une dispersion en énergie de 1,5% est introduite dans les simulations ELSA). Dans l'espace des phases (ψ, Γ) , les électrons sont initialement répartis uniformément en phase ψ sur l'intervalle $[0, 2\pi N]$ (équivalente dans l'espace direct à une impulsion électronique de longueur environ égale à $N \lambda_L$). En fait, il n'est pas nécessaire de considérer le nombre total des électrons d'une impulsion pour rendre compte de la dynamique du faisceau d'électrons (cette opération serait d'ailleurs impossible compte tenu du temps de calcul). Le faisceau d'électrons est traité sous la forme d'un nombre beaucoup plus limité de "macro-électrons" dont la phase initiale est définie de la façon suivante :

$$\psi^j = j \frac{2\pi N}{N_e} \quad \text{où } j \in [1, N_e] \quad (\text{II-58})$$

où N_e est le nombre de macro-électrons de l'impulsion de longueur $L = N \lambda_L$.

Le choix d'une distribution initiale des phases uniforme est tout à fait cohérent avec un nombre limité de macro-électrons inférieur de plusieurs décades au nombre réel d'électrons. En effet, le poids statistique d'un seul macro-électron est trop important pour autoriser une distribution aléatoire. Par ailleurs, une distribution uniforme offre la possibilité de "jouer" sur l'échantillonnage des électrons afin d'approcher au mieux une distribution réelle ou de maîtriser en partie le bruit numérique comme nous le verrons ensuite.

Le nombre limité de macro-électrons imposé par le temps de calcul entraîne des problèmes numériques délicats qui n'existent pas dans la réalité mais sont incontournables dans la simulation. Deux points importants doivent être pris en compte dans la répartition initiale des électrons (II-58) c'est à dire le choix du nombre de macro-électrons N_e (puisque le nombre de périodes N est déterminé par la finesse spectrale désirée) :

- 1) L'échantillonnage des électrons est effectué sur la phase ψ rapportée à une fréquence particulière, celle du mode de référence de fréquence ω_L . En d'autres termes, les électrons sont initialement répartis uniformément dans le référentiel des puits associés au mode de référence. Il ne faut pas oublier que l'échantillonnage des électrons doit être correct dans le référentiel des puits associés aux autres modes

présents. Ainsi, nous allons voir qu'un échantillonnage correct en ψ (phase rapportée au mode central) n'implique pas toujours un bon échantillonnage en ψ_n (phase rapportée au mode n de fréquence ω_n).

2) L'évolution du mode n (II-39) est donnée par le calcul d'une moyenne statistique sur l'ensemble des phases ψ_n soit la moyenne :

$$\langle \exp(-i \psi_n) \rangle = \langle \exp(-i (1+n/N) \psi) \rangle$$

Par conséquent, la phase ψ_n de chaque électron (déduite de la phase ψ) contribue à l'altération du mode n via son modulo 2π seulement.

Le faible nombre d'électrons utilisé rend possible un sous-échantillonnage des électrons pour certains modes. Par exemple, $N_e = 300$ macro-électrons répartis sur $N = 100$ périodes donne un échantillonnage en ψ :

$$\psi^j = j \frac{2\pi}{3} \quad \text{où } j \text{ varie de } 1 \text{ à } 300.$$

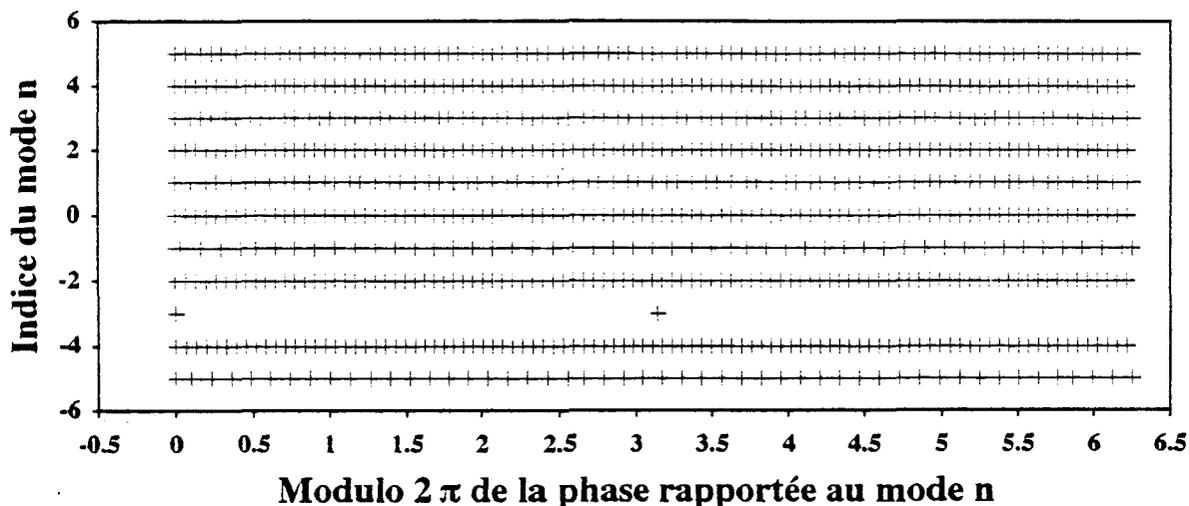
Le modulo 2π de la phase ψ replie tous les électrons sur trois points de phase $0, \frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$. Ceci révèle un sous-échantillonnage du faisceau d'électrons dans le puits associé au mode central puisque la dynamique du faisceau d'électrons n'est alors décrite que par 3 électrons. La conséquence immédiate de ce sous-échantillonnage est une évolution anormale du mode central.

Un échantillonnage sera considéré correct si tout repliement (modulo 2π de la phase) de chaque phase ψ_n (associée au mode n) des N_e macro-électrons de l'impulsion sur un nombre limité d'électrons (typiquement inférieur à 10) est évité pour l'ensemble des modes effectivement calculés. Définissons plus précisément cette règle :

L'échantillonnage en ψ_n se déduit par définition de l'échantillonnage en ψ :

$$\psi_n^j = \left(1 + \frac{n}{N}\right) \psi^j = j 2\pi \frac{N+n}{N_e} \quad \text{où } j \text{ varie de } 1 \text{ à } N_e. \quad (\text{II-59})$$

REPLIEMENT DES PHASES N = 100 , Ne = 194



REPLIEMENT DES PHASES N = 100 , Ne = 213

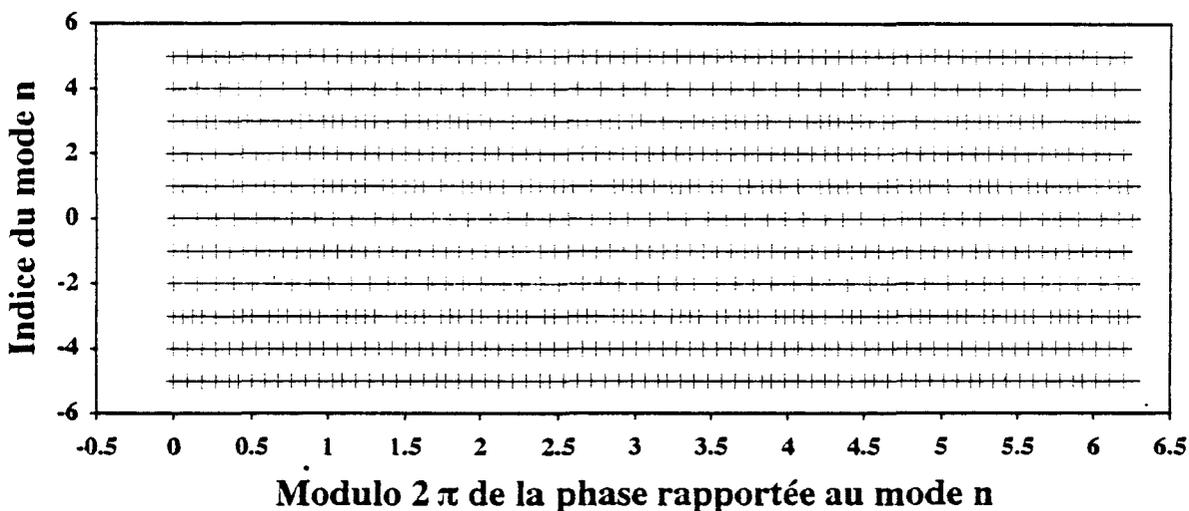


Figure II. 2. Le sous-échantillonnage peut être facilement mis en évidence en calculant le modulo 2π de la phase ψ_n des N_e macro-électrons. Les deux figures ci-dessus en donnent un exemple. Elles montrent l'échantillonnage des N_e macro-électrons en vue d'une simulation de l'évolution de 11 modes avec une finesse spectrale de 1% soit une fenêtre spectrale de 10%. Pour chacun des 11 modes, on a calculé le modulo 2π de la phase ψ_n de chacun des N_e macro-électrons. Le repliement des phases montre dans le premier cas (figure du haut) un sous-échantillonnage des électrons dans le puits associé au mode -3 (ψ_{-3}) : les N_e macro-électrons se replient sur deux points ; ce qui est insuffisant pour décrire la dynamique du faisceau d'électrons dans les puits associés à ce mode. Dans le second cas (figure du bas), le faisceau d'électrons est correctement échantillonné. On ne note en effet aucun repliement sur un nombre limité de points et ce sur tous les modes présents.

Pour éviter tout sous-échantillonnage dans le puits associé au mode n , une condition suffisante consiste à choisir un nombre de macro-électrons N_e qui ne soit pas un multiple de la somme $N+n$ du nombre de périodes et de l'indice du mode considéré. En effet, s'il existe p tel que :

$$N+n = p N_e \Leftrightarrow \psi_n^j = j \frac{2 \pi}{p} \quad (\text{II-60})$$

alors les N_e macro-électrons se replient sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ en p électrons. En interdisant la relation (II-60) pour tous les modes calculés, on évite l'occurrence d'un sous-échantillonnage. La figure II. 2 illustre cette méthode. Il peut arriver, notamment dans les simulations à bas bruit numérique qui sont abordées au paragraphe suivant, que les repliements des phases sur quelques points ne puissent être évités. Dans ce cas, il faut s'assurer que les électrons se replient sur un nombre de points suffisants (typiquement $p > 10$).

En pratique, le repliement des électrons pour chaque mode calculé détermine en partie le nombre d'électrons. La stabilité des résultats numériques avec le nombre d'électrons doit être testée systématiquement. Il est en effet difficile de déterminer à l'avance le nombre minimum d'électrons suffisants pour calculer la dynamique des modes du laser. Ce nombre dépend du régime de fonctionnement du laser. Le régime linéaire par exemple nécessite peu d'électrons ; de très bons résultats peuvent être obtenus avec moins de 1 électron par période laser. Le régime non-linéaire est par contre beaucoup plus "gourmand" et nécessite au minimum 10 électrons par période laser. De façon générale, le nombre d'électrons est un paramètre critique qu'il importe de fiabiliser dans toutes les simulations.

* Choix du pas de calcul en z

Le pas de calcul en z est un paramètre beaucoup moins contraignant et beaucoup plus simple à maîtriser que le nombre d'électrons. Il est choisi suivant la précision souhaitée. La précision est mesurée à chaque instant z du calcul par la conservation de l'énergie totale égale à la somme de l'énergie électronique U_e et de l'énergie du laser U_L soit dans le cas d'un faisceau d'électrons et un faisceau laser gaussiens :

$$\left[\begin{array}{l} U_e = \sum_{i=1}^{N_e} \gamma_i m c^2 \\ U_L = \frac{m^2 c^2}{2 \mu_0 e^2} \pi \sigma_L^2 L \sum_n E_n E_n^* \end{array} \right. \quad (\text{II-59})$$

La finesse des phénomènes que l'on désire observer gère la précision souhaitée. Ainsi, dans les simulations multifréquences courantes telles que celles présentées au premier chapitre, une précision relative sur l'énergie totale de 10^{-3} est suffisante. Par contre, il est nécessaire dans certaines situations de disposer d'une précision de calcul bien meilleure. Ainsi, nous présenterons aux deux chapitres suivants des simulations à bas bruit numérique du gain des raies satellites. Ces simulations sont réalisées sur un passage à partir d'un mode d'énergie égale à l'énergie de saturation monochromatique du laser et des modes adjacents au niveau de bruit. Dans ce cas, le rapport d'énergie entre le mode fondamental en saturation et les raies satellites peut être de 10^{+10} et nécessite une précision relative de l'ordre de 10^{-12} .

II. B. b. 2. Bruit numérique en régime non-linéaire

Bien que les trajectoires des électrons soient calculées de façon suffisamment précise, il existe dans toutes les simulations courantes un bruit numérique gênant l'observation de phénomènes à bas niveau. Par exemple, en présence d'un mode dominant, le bruit numérique peut amplifier anormalement les modes adjacents de plusieurs décades en quelques passages seulement (on parle alors d'un "mur de bruit").

Ce bruit numérique a pour origine l'utilisation d'un nombre restreint de macro-électrons (du fait des contraintes de temps de calcul). Chaque événement particulier que subit un macro-électron se répercute sur le champ laser avec un poids de l'ordre de grandeur de son poids statistique.

Ainsi, par exemple, on a pu montrer [26] que le franchissement d'une séparatrice (c'est à dire le saut d'un puits au suivant) par un électron dont la trajectoire change alors de nature, génère un bruit blanc par transformée de Fourier de cet événement ponctuel. Dans ce cas, si l'échantillonnage électronique comporte 1000 électrons (c'est l'ordre de grandeur des simulations courantes), la précision obtenue sur l'énergie totale ne peut être inférieure au poids d'un électron soit 10^{-3} . Dans la réalité, le poids statistique très faible d'un électron rend cet événement négligeable (on suppose ici qu'il n'existe pas d'autres sources de bruit ; le faisceau est supposé quasi-monocinétique).

Néanmoins, dans certaines situations particulières, la décomposition de Fourier du spectre permet de s'affranchir en partie du bruit numérique par un choix adéquat de l'échantillonnage initial du faisceau d'électrons. Supposons, par exemple, un mode central dominant dont l'énergie est supérieure à celle des modes adjacents de plusieurs décades. En imposant à l'échantillonnage en ψ initial des électrons une 2π périodicité

(p entier) , on autorise seulement la croissance des modes dont l'écart relatif en fréquence au mode central est égal à :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = i \frac{1}{p} \quad \text{où } i \text{ est un entier} \quad (\text{II-60})$$

En effet, cette périodicité $2\pi p$ de l'échantillonnage empêche toute modulation de la distribution électronique à une échelle supérieure à $2\pi p$ et par conséquent évite la croissance anormale des modes dont l'écart en fréquence au mode central n'est pas un multiple de $1/p$ comme l'illustre la figure II. 3. Afin d'éviter le bruit numérique, il suffit de choisir une fenêtre spectrale dont la largeur totale est inférieure à la distance entre deux raies altérées.

Dans la pratique, la $2\pi p$ périodicité en ψ de la distribution électronique est réalisée en choisissant un nombre de périodes N et un nombre d'électrons N_e ayant pour plus grand diviseur commun m soit :

$$\left[\begin{array}{l} N = m p \\ N_e = m q \end{array} \right] \Leftrightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} = i \frac{1}{p} \quad (\text{II-61})$$

où m, p, q sont des entiers.

p est choisi de telle sorte que la fenêtre spectrale soit plus étroite que la distance entre les raies altérées :

$$\frac{n_0}{N} < \frac{1}{p} \quad (\text{II-62})$$

où n_0 est le nombre de modes de part et d'autre du mode central.

En forçant le bruit numérique issu de l'échantillonnage électronique, les simulations à bas bruit numérique sont un bon outil pour l'étude numérique des raies satellites. Elles se développent en effet à partir du niveau de bruit alors que le mode de pompage est proche de sa saturation. Elles permettront dans un premier temps (chapitre III) de confronter l'approche analytique à l'évolution réelle des raies satellites, puis d'évaluer le gain des raies satellites (chapitre IV) en fonction de l'intensité du mode de pompage.

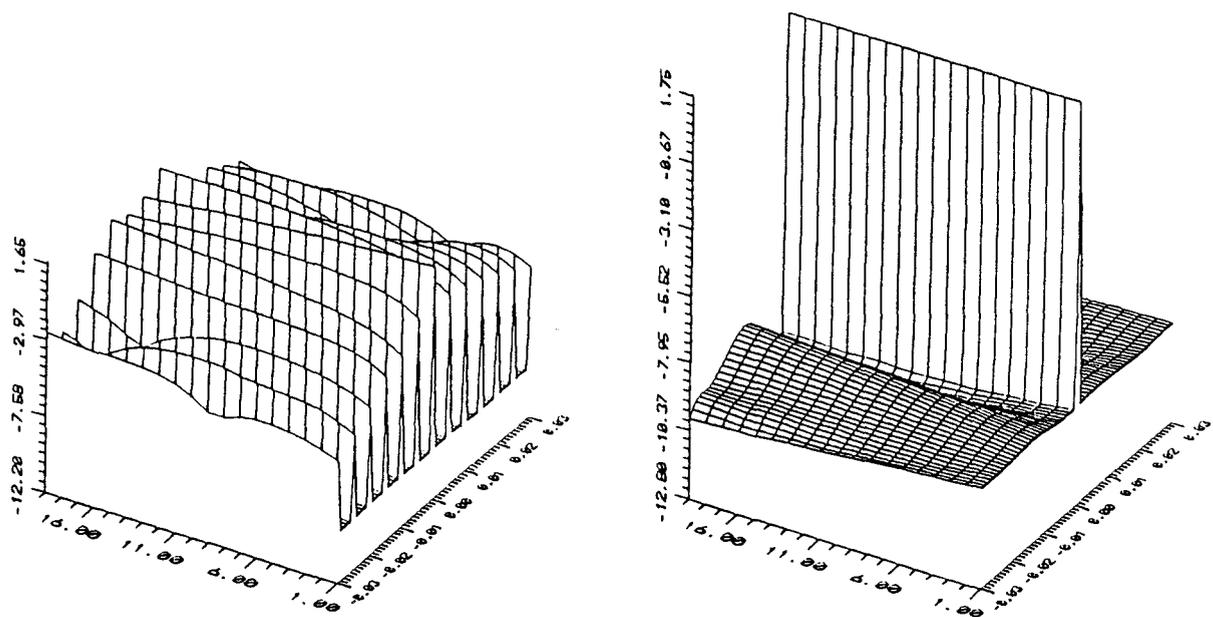


Figure II. 3. Il est possible de maîtriser le bruit numérique dans le cas particulier où un mode central dominant et des modes satellites petits coexistent par le choix du couple (N, N_e) . Ces deux figures montrent l'évolution du spectre (chaque mode est représenté ici par le logarithme de son % en énergie) sur un intervalle relatif en fréquence de $\pm 3\%$ autour du mode central dominant pendant une vingtaine de passages. Ces deux simulations ont été réalisées avec les mêmes paramètres physiques ; seul l'échantillonnage des électrons varie d'une figure à l'autre. Les électrons sont échantillonnés sur 1000 périodes soit une finesse spectrale de 10^{-3} . Sur la figure de gauche, l'échantillonnage électronique est 200π périodique en ψ ($N=1000$) ; ceci entraîne une croissance anormale des raies espacées de 0.5% dont le niveau passe brusquement de 10^{-10} à 10^{-2} . Sur la figure de droite, la périodicité initiale est choisie de telle sorte que les raies anormalement amplifiées soient repoussées en dehors de la fenêtre spectrale ; ceci permet de voir la croissance des modes adjacents à très niveau (ici 10^{-10}).

CHAPITRE III

APPROCHE SEMI- ANALYTIQUE DE LA DYNAMIQUE DES RAIES SATELLITES

Nous avons vu au premier chapitre que l'origine des instabilités spectrales observées est intimement liée à la croissance de raies satellites sans lesquelles la génération de doublement de fréquence n'apparaît pas naturellement. L'apparition ou non des raies satellites assure la transition entre les deux régimes de fonctionnement radicalement opposés que sont l'élargissement spectral et l'affinement spectral. Afin de pouvoir contrôler cette transition, il est important de comprendre comment naissent les raies satellites et surtout quelle est leur dynamique.

De nombreux travaux ont déjà été consacrés à ce sujet et s'attachent uniquement au comportement asymptotique des raies satellites à partir d'hypothèses simples. La génération de raies satellites a été prédite théoriquement par Kroll, Morton et Rosenbluth [25] qui ont montré pour la première fois en idéalisant le système que le mouvement oscillatoire des électrons en présence d'une raie laser intense pouvait créer des bandes latérales de part et d'autre de cette raie. Pour cela, en supposant les électrons concentrés au fonds des puits de potentiel, un équilibre artificiel a été créé en ajoutant un champ électrique longitudinal chargé de compenser les variations d'amplitude et de phase du mode central ; cet équilibre est perturbé par les raies satellites.

Les travaux qui ont suivi ont montré qu'en présence d'un mode en saturation unique, les équations de Maxwell et de Vlasov admettent des états d'équilibre. Il a alors été possible de calculer le gain des raies satellites par un calcul perturbatif autour d'un état d'équilibre arbitraire. Yu [48] calcule de cette façon le gain des raies satellites en envisageant diverses formes de la distribution électronique d'équilibre (distributions monocinétique, marche et rampe) ainsi qu'en intégrant un profil radial du laser. La méthode consiste à calculer l'équation de dispersion des raies satellites, le gain des raies satellites est alors donné par la partie imaginaire des racines d'une équation de degré 4. La structure radiale des raies satellites affecte en effet leur gain du fait de la variation du recouvrement avec le faisceau d'électrons. Ce calcul a permis d'établir un critère de suffisance de l'approximation à une dimension pour ces diverses distributions d'équilibre.

Rosenbluth, Wong et Moore [49] montrent à la manière de Yu que tous les équilibres sont instables y compris avec un faible tapering ie une légère chute de l'amplitude du champ magnétique statique. Yang et Davidson [50] reprennent les hypothèses de Sharp et Yu et dans les mêmes conditions, analysent l'effet de la puissance du pompage sur le gain des raies satellites avec une distribution d'équilibre où le puits de potentiel est entièrement rempli. Le gain des raies satellites montre des pics de résonances intenses lorsque le pompage est fort. Plus tard, ils établissent un modèle permettant de décrire l'évolution non-linéaire de deux raies satellites lorsque l'une de ces raies atteint une amplitude de l'ordre de grandeur mais inférieure au mode en saturation dans l'hypothèse où tous les électrons sont piégés.

L'ensemble de ces travaux, dont les calculs sont très lourds, repose sur la définition d'un état d'équilibre arbitraire. Cette hypothèse d'équilibre n'a jamais été mise en évidence ni expérimentalement, ni par simulation numérique. Par ailleurs, le gain des raies satellites est calculé, dans tous les cas, en régime asymptotique (c'est à dire à partir de la partie imaginaire des solutions d'une équation de dispersion).

Dans la première partie, nous établirons un modèle simple de la génération de raies satellites sur la base d'hypothèses simples sur le faisceau laser et le faisceau d'électrons. Ce calcul analytique a pour but de décrire la dynamique des raies satellites. Contrairement aux travaux rapidement décrits ci-dessus, il ne se limite pas au régime asymptotique. Il donne, au contraire, une description complète de l'évolution des raies satellites depuis leur naissance, au début de l'ondeur, jusqu'au régime asymptotique.

Dans la seconde partie, nous exploiterons notre modèle et nous le confronterons aux simulations. En particulier, nous montrerons que les raies satellites suivent un régime transitoire non négligeable. Nous discuterons la validité des hypothèses. Nous montrerons que les raies satellites suivent bien le comportement prédit par le modèle. Cependant, les hypothèses s'avèreront trop restrictives pour décrire complètement l'évolution des raies satellites. Nous les adapterons alors, afin de décrire, de façon phénoménologique, le comportement asymptotique réel des raies satellites.

III. A. CALCUL PERTURBATIF DU GAIN DES RAIES AUTOUR D'UN ETAT D'EQUILIBRE AU VOISINAGE DES POINTS RESONANTS

Les simulations numériques ont montré (Chapitre I) que les raies satellites apparaissent lorsque la raie issue du régime linéaire atteint une énergie proche de son énergie de saturation. A ce stade, les effets non-linéaires de compétition de modes ont déjà joué et accéléré l'affinement du spectre, de sorte que la largeur spectrale est devenue beaucoup plus petite qu'au début du régime linéaire. Nous nous placerons donc raisonnablement dans le cas le plus simple où la raie proche de la saturation est monochromatique.

Dans un premier temps, après avoir décrit les hypothèses utilisées, nous examinerons l'existence d'un équilibre stable du faisceau laser monochromatique et du faisceau d'électrons. Nous considérerons ensuite l'introduction de raies satellites du champ laser initial comme une perturbation de cet équilibre. Un calcul perturbatif au

premier ordre montrera alors que l'équilibre devient instable et autorise le développement des raies satellites. Ce calcul permettra de déterminer les paramètres pertinents du problème et de décrire la dynamique des raies satellites sous la forme d'un système d'équations différentielles simple.

III. A. a. Etat d'équilibre stable

III. A. a. 1. Hypothèses sur le champ laser et le faisceau d'électrons

Nous choisissons ici une décomposition discrète du spectre du laser. Ainsi, le spectre est représenté par un certain nombre de modes de part et d'autre d'une raie centrale de fréquence ω_L dont l'espacement en fréquence est :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{N}$$

où N est le nombre de périodes λ_L de la boîte de périodicité.

Le mode en saturation est le mode central, dont l'amplitude et la dérivée de phase v_r , sont supposées constantes et l'ensemble des autres modes a une amplitude nulle soit :

$$E_0 = |E_0| \exp[-i v_r z] \quad \text{et} \quad E_{n \neq 0} = 0 \quad (\text{III-1})$$

Le choix de l'échantillonnage en fréquence impose une $2\pi N$ périodicité en ψ du champ laser et de la distribution des électrons ; comme nous l'avons vu au chapitre II, les électrons sont donc répartis dans l'espace des phases sur $\psi \in [0, 2\pi N]$

En présence d'un champ laser monochromatique, le mouvement des électrons dans l'espace des phases $(\bar{\psi}, \Gamma)$ est régi par les équations du mouvement :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} = (k_w - v_r) - \frac{k_L}{2\Gamma} \left(1 + \frac{a_w^2}{2}\right) \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \frac{a_w K_1}{2} |E_0| \sin(\bar{\psi}) \end{array} \right. \quad (\text{III-2})$$

$$\text{où } \bar{\Psi} = \Psi - v_r z \quad (\text{III-3})$$

La phase $\bar{\Psi}$ contient la phase du champ laser et sera expliquée par la suite.

Les équations du mouvement (II-2) permettent de calculer les positions ($\bar{\Psi}_r, \Gamma_r$) dans l'espace des phases des électrons résonants dont la phase et l'énergie sont constantes. Nous ne retenons ici que les électrons ayant une position stable (ie les électrons au fond des puits de potentiel) :

$$\left[\begin{array}{l} \bar{\Psi}_r = \pi + 2\pi l \quad \text{où } l \in [0, N-1] \\ \Gamma_r = \frac{k_L (1 + \frac{a_w^2}{2})}{2(k_w - v_r)} \end{array} \right. \quad (\text{III-4-5})$$

Il est important de constater que l'énergie résonante dépend de la dérivée de la phase du champ laser.

Dans la limite du faible gain, l'équation (III-2) peut être linéarisée en $\Gamma_c = \Gamma - \Gamma_r$. Dans ce cas, les équations du mouvement se réduisent à l'équation du pendule bien connue :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \psi_c}{\partial z} = \frac{k_L}{2\Gamma_r^2} (1 + \frac{a_w^2}{2}) \Gamma_c \\ \frac{\partial \Gamma_c}{\partial z} = \frac{a_w K_1}{2} |E_0| \sin[\psi_c] \end{array} \right.$$

soit l'équation du pendule :

$$\frac{\partial^2 \psi_c}{\partial z^2} = -\Omega_0^2 \sin \psi_c \quad (\text{III-6})$$

où on a introduit les variables (ψ_c, Γ_c) centrées sur les points résonants stables :

$$\left[\begin{array}{l} \psi_c = \bar{\Psi} - \bar{\Psi}_r \\ \Gamma_c = \Gamma - \Gamma_r \end{array} \right. \quad (\text{III-7})$$

et la fréquence synchrotron Ω_0 :

$$\Omega_0^2 = \frac{k_w a_w K_1}{2 \Gamma_r} |E_0| \quad (\text{III-8})$$

Les électrons se déplacent donc dans les puits créés par le couplage du champ laser monochromatique et du champ magnétique statique se déplaçant à la vitesse de résonance :

$$V_r = \frac{\omega_L}{(k_w - v_r) + k_L}$$

dépendante de la dérivée de la phase du champ laser. Ceci explique le choix précédent de la variable $\bar{\Psi}$ pour la phase des électrons afin de corriger l'écart de vitesse dû à l'évolution de la phase du champ laser.

Les trajectoires des électrons dans l'espace des phases ont été décrites au chapitre II. Rappelons simplement que, suivant leur énergie et leur phase initiale, les électrons suivront une trajectoire ouverte à l'extérieur de la zone délimitée par la séparatrice (électron libre) ou fermée à l'intérieur de la "bulle" (électron piégé). La hauteur de la "bulle" dépend de l'amplitude du champ laser et le nombre d'électrons piégés augmente donc avec l'intensité du mode en saturation. Il est raisonnable de considérer le champ laser suffisamment intense pour piéger l'ensemble des électrons.

Par ailleurs, la résolution en l'état des équations du mouvement ou de l'équation de Vlasov en présence d'un champ laser monochromatique implique un calcul très lourd comportant des intégrales elliptiques. Par souci de simplicité et pour une première approche du phénomène des raies satellites, nous supposons, pour l'instant, l'ensemble des électrons localisés au voisinage des points résonants ie au fond des puits de potentiel. Cette hypothèse sera ensuite analysée en détail.

Dans ces conditions, les équations du mouvement et l'équation du pendule (III-6) peuvent alors être linéarisée en ψ_c :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \psi_c}{\partial z} = \frac{k_L}{2 \Gamma_r^2} \left(1 + \frac{a_w^2}{2} \right) \Gamma_c \\ \frac{\partial \Gamma_c}{\partial z} = \frac{a_w K_1}{2} |E_0| \psi_c \end{array} \right] \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \psi_c}{\partial z^2} = - \Omega_0^2 \psi_c \quad (\text{III-9})$$

Tous les électrons tournent dans l'espace des phases à la même fréquence synchrotron Ω_0 . Il est important de noter que cette affirmation n'est valide que tant que les électrons sont en fond de puits. Pour la suite, nous noterons d'ailleurs Ω la fréquence de rotation d'un électron sur une trajectoire quelconque. En effet pour les électrons piégés, la fréquence de rotation Ω dépend de sa distance au point résonant ; elle varie ainsi de Ω_0 au fond du puits à 0 en se rapprochant infiniment près de la séparatrice. Nous reviendrons sur les trajectoires hors fond de puits par la suite.

III. A. a. 2. Calcul de la distribution d'équilibre à l'ordre 0

Du fait du choix de l'hypothèse des électrons en fonds de puits, il s'avère intéressant d'utiliser les variables centrées (ψ_c, Γ_c) sur les N points résonants de la boîte de périodicité. En effet, nous allons être amenés à linéariser les équations de Maxwell et de Vlasov comme nous l'avons fait pour les équations du mouvement.

Dans cette perspective, la distribution $h(z, \bar{\psi}, \Gamma)$, $2\pi N$ périodique en $\bar{\psi}$, est segmentée en N distributions h_p :

$$\left[\begin{array}{l} h_p(z, \bar{\psi}, \Gamma) = h(z, \bar{\psi}, \Gamma) \quad \text{si } \bar{\psi} \in [2\pi p, 2(p+1)\pi] \\ \quad \quad \quad = 0 \quad \quad \quad \text{sinon} \\ \\ h(z, \bar{\psi}, \Gamma) = \sum_{p=0}^{N-1} h_p(z, \bar{\psi}, \Gamma) \end{array} \right. \quad \text{(III-10)}$$

Ainsi, chaque densité h_p sera supposée concentrée autour du point résonant (ψ_r, Γ_r) de l'intervalle $[2\pi p, 2\pi(p+1)]$. Cette présentation est tout à fait adaptée à l'utilisation des variables centrées.

* Linéarisation de l'équation de Vlasov

La distribution électronique h est donc remplacée par la distribution h_p locale à l'intervalle $[2\pi p, 2\pi(p+1)]$ en $\bar{\psi}$ (correspondant à un puits de potentiel particulier) et nous utilisons maintenant les variables (ψ_c, Γ_c) centrées sur le point résonant appartenant à cet intervalle.

Avec ces nouvelles notations, l'équation de Vlasov (III-10) dans le cas monochromatique s'écrit alors :

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + (v(\Gamma_c) - v_r) \frac{\partial}{\partial \psi_c} + F(\psi_c) \frac{\partial}{\partial \Gamma_c} \right] h_p(z, \psi_c, \Gamma_c) = 0$$

$$\text{avec } v(\Gamma_c) = k_w - \frac{k_L}{2(\Gamma_r + \Gamma_c)} \left(1 + \frac{a_w^2}{2} \right)$$

$$F(\psi_c) = -\frac{a_w K_1}{2} |E_0| \sin \psi_c$$

(III-11)

Les électrons étant localisés au voisinage du point résonant, l'équation de Vlasov (III-11) en variables centrées peut être linéarisée en ψ_c et en Γ_c :

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{k_L}{2\Gamma_r^2} \left(1 + \frac{a_w^2}{2} \right) \Gamma_c \frac{\partial}{\partial \psi_c} - \frac{a_w K_1}{2} |E_0| \psi_c \frac{\partial}{\partial \Gamma_c} \right] h_p(z, \psi_c, \Gamma_c) = 0$$

(III-12)

Notons D_0 l'opérateur entre crochets agissant sur la distribution.

* Distribution d'équilibre dans un champ monochromatique

Nous cherchons la distribution d'équilibre associée à un champ laser monochromatique. L'hypothèse des électrons en fond de puits nous a permis de linéariser l'équation de Vlasov (III-12). A partir de cette équation, la distribution d'équilibre se calcule sans difficultés en posant :

$$\frac{\partial h_p}{\partial z} = 0$$

Il s'agit alors d'une équation à variables séparées dont la solution est une fonction du type suivant :

$$h_p^0(\psi_c, \Gamma_c) = f \left(\frac{a_w K_1}{2} |E_0| \psi_c^2 + \frac{k_L}{2\Gamma_r^2} \left(1 + \frac{a_w^2}{2} \right) \Gamma_c^2 \right)$$

(III-14)

La distribution d'équilibre est une fonction constante sur des cercles centrés sur le point résonant ie le long des trajectoires des électrons dans l'espace des phases d'après les équations du mouvement (III-6).

Par ailleurs, la définition de la phase des électrons $\bar{\Psi}$ montre qu'en présence d'un mode central unique (ω_L, k_L) , la distribution $h(z, \bar{\Psi}, \Gamma)$ est 2π périodique en $\bar{\Psi}$. La distribution d'équilibre est donc la même quelle que soit le puits considéré. La normalisation de la distribution d'équilibre h_p^0 se déduit donc de la normalisation (III-15) de h en décomposant h en N fonctions identiques h_p^0 et en tenant compte de la $2\pi N$ périodicité en ψ de h :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\psi_c \int_1^{+\infty} d\Gamma_c h_p^0(\psi_c, \Gamma_c) m c = \rho_e \quad (\text{III-15})$$

* Les hypothèses sur le champ sont-elles valables ?

Nous avons fait l'hypothèse que l'amplitude du champ laser était constante de même que la dérivée de sa phase. Sous ces conditions, il s'avère qu'il existe une distribution d'équilibre en présence du seul mode central. Il faut maintenant vérifier qu'elle est compatible avec les hypothèses faites sur le champ.

Pour cela, l'équation de Maxwell (II-16) va être linéarisée à son tour en ψ_c et Γ_c . Dans l'équation de Maxwell (II-16), la distribution h est décomposée sur les N puits par l'introduction des distributions h_p et en tenant compte de la $2\pi N$ périodicité en ψ de h et l'équation est écrite en variables centrées :

$$i \frac{\partial E_n}{\partial z} = \frac{\mu_0 e^2 c}{2 \pi N} a_w K_1 \sum_{p=0}^{N-1} \int_1^{+\infty} \frac{d\Gamma_c}{2 \sqrt{\Gamma_r + \Gamma_c}} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi_c h_p^0(z, \psi_c, \Gamma_c) \exp[-i \psi_n] \quad (\text{III-16})$$

$$\psi_n = -\frac{n}{N} k_w z + \left(1 + \frac{n}{N}\right) (\psi_c + \bar{\Psi}_r + v_r z) \quad (\text{III-17})$$

ψ_n est la phase des électrons rapportée non plus au mode de référence mais au mode n de fréquence (ω_n, k_n) .

Pour le mode central, au premier ordre en (ψ_c, Γ_c) , l'équation (III-16) s'écrit, en tenant compte du fait que les distributions d'équilibre locales sont identiques dans tous les puits :

$$i \frac{\partial E_0}{\partial z} = - \frac{\mu_0 e^2 c}{4 \pi} \frac{a_w K_1}{\gamma_r} \exp[-i v_r z] \int_1^{+\infty} d\Gamma_c \int_{-\pi}^{-\pi} d\psi_c h_p^0(\psi_c, \Gamma_c) \quad (\text{III-18})$$

En injectant dans l'équation ci-dessus l'expression du champ (III-1) utilisée pour calculer l'équilibre, on voit que l'hypothèse d'une amplitude constante est bien vérifiée. Ceci nous permet, par ailleurs, de calculer la dérivée de la phase du champ laser v_r :

$$v_r = - \frac{\mu_0 e^2 c}{2 m} \frac{a_w K_1}{\gamma_r} \frac{\rho_e}{|E_0|} \quad (\text{III-19})$$

Nous verrons par la suite que v_r est une grandeur fondamentale pour la croissance des raies satellites. Dans l'équation (III-19), il apparait que v_r est imposée essentiellement par la densité électronique, l'amplitude du mode central et l'énergie résonante.

Il nous reste à montrer que la distribution d'équilibre n'engendre aucune croissance des modes adjacents au mode central. Cette propriété découle de la 2π périodicité en ψ de la distribution d'équilibre (les distributions d'équilibre sont identiques dans tous les puits) :

En effet, l'équation d'évolution du mode n (III-16) peut se mettre sous la forme suivante :

$$i \frac{\partial E_n}{\partial z} = \frac{\mu_0 e^2 c}{2 \pi N} a_w K_1 \int_1^{+\infty} \frac{d\Gamma_c}{2 \sqrt{\Gamma_r + \Gamma_c}} \int_{-\pi}^{-\pi} d\psi_c h_0^p(z, \psi_c, v_c) \left(\sum_{p=0}^{N-1} \exp[-i \psi_n] \right)$$

avec

$$\sum_{p=0}^{N-1} \exp[-i \psi_n] = \exp\left[-i \left(1 + \frac{n}{N}\right) (\psi_c + \pi + v_r z)\right] \sum_{p=0}^{N-1} \exp\left[-i \left(1 + \frac{n}{N}\right) 2\pi p\right] = 0 \text{ si } n \neq 0 \quad (\text{III-20})$$

La sommation sur N périodes s'annule pour tous les modes autres que le mode central. En présence de la distribution d'équilibre, l'amplitude des modes adjacents reste nulle. La distribution d'équilibre n'agit donc que sur la phase du mode central dominant et n'est pas une source de création de modes adjacents.

En résumé, dans l'hypothèse des électrons proches des points résonants, il existe un état d'équilibre du système constitué par un champ laser monochromatique d'amplitude et de dérivée de phase constantes et une distribution électronique uniforme le long des trajectoires électroniques. L'équilibre ne crée pas de modes adjacents ; leur amplitude reste nulle tant que l'équilibre n'est pas perturbé. Enfin, on peut montrer par ailleurs que cet équilibre est stable.

III. A. b. Calcul perturbatif au premier ordre

Nous avons calculé la distribution d'équilibre h_0 lorsqu'un seul mode est présent soit l'équation de Vlasov d'après l'équation (III-12) :

$$D_0 h_0 = 0 \quad (\text{III-21})$$

Nous introduisons maintenant des modes adjacents au mode central et d'amplitude petite devant celle du mode dominant. En présence de ce bruit, l'équilibre décrit précédemment devient instable et les raies satellites vont croître.

Pour calculer la croissance des raies, nous allons ajouter dans l'équation de Vlasov un opérateur D_1 contenant l'ensemble des modes adjacents petits :

$$(D_0 + D_1) (h_0 + h_1) = 0 \quad (\text{III-22})$$

L'étude se limitera à chercher une solution au premier ordre. Il s'agit alors de déterminer la distribution h_1 telle que :

$$D_0 h_1 = - D_1 h_0 \quad (\text{III-23})$$

Cette distribution au premier ordre nous servira de relais pour calculer l'évolution des raies satellites grâce aux équations de Maxwell.

Dans un premier temps, nous introduirons de nouvelles variables adaptées à la symétrie de la distribution d'équilibre et remplaçant les variables centrées (ψ_c, Γ_c). Elles nous permettront d'écrire la distribution au premier ordre sous une forme intégral-différentielle. En utilisant les propriétés de la forme intégral-différentielle particulière de la

distribution, nous verrons qu'il est possible d'écrire l'évolution des modes sous forme matricielle.

III. A. b. 1. Calcul de la distribution au premier ordre

* Introduction des variables action-angle

La distribution d'équilibre (III-14) est constante le long de trajectoires électroniques sur des cercles centrés sur les points résonants. Cette symétrie circulaire suggère d'introduire des variables polaires (ρ, θ, z) centrées sur les points résonants au lieu des variables (ψ_c, Γ_c, z) soit :

$$\left[\begin{array}{l} \psi_c = \frac{\rho}{A} \cos \theta \\ \Gamma_c = \frac{\rho}{B} \sin \theta \end{array} \right. \quad (\text{III-24})$$

où

$$\left[\begin{array}{l} A^2 = \frac{a_w K_1}{2} |E_0| \\ B^2 = \frac{k_L}{2 \Gamma_r^2} \left(1 + \frac{a_w^2}{2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III-25-26})$$

Notons que le produit des constantes A et B donne la fréquence synchrotron Ω_0 de rotation des électrons au fond du puits.

Dans l'équation de Vlasov linéarisée à l'ordre 0 (III-12) écrite en variables (ρ, θ, z) , il n'apparaît pas de dérivée selon la variable radiale ρ de sorte que la distribution d'équilibre (III-14) est évidente :

$$D_0 h_0 = \left[\frac{\partial}{\partial z} - \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} \right] h_0 = 0 \Leftrightarrow h_0 = f(\rho) \quad (\text{III-27})$$

Une distribution initiale à symétrie circulaire dans l'espace des phases est tout à fait en accord avec la stabilité du mode central. En effet, chaque électron dans l'espace des

phases trouve son symétrique par rapport au point résonant de telle sorte que l'énergie totale est conservée.

Nous verrons plus tard que l'introduction de modes satellites non nuls rompt la symétrie autorisant ainsi la croissance de ces raies.

* Equation de Vlasov au premier ordre en variables action-angle

Au paragraphe précédent, nous avons écrit l'opérateur d'ordre 0, D_0 de l'équation de Vlasov. Les raies satellites sont maintenant introduites pour le calcul au premier ordre dans le nouvel opérateur D_1 .

L'opérateur D_1 est le terme force de l'équation de Vlasov (II-11 et II-14). La somme est effectuée sur l'ensemble des modes hormis le mode central. L'opérateur D_1 est écrit en variables centrées d'abord :

$$D_1 = \frac{a_w}{2} \text{Im} \left[\sum_{m \neq 0} E_m \exp \left[-i \frac{m}{N} k_w z \right] \exp \left[i \left(1 + \frac{m}{N} \right) (\psi_r + \psi_c) \right] \right] \frac{\partial}{\partial \Gamma_c} \quad (\text{III-28})$$

puis en variables action-angle :

$$\left[\begin{array}{l} D_1 = \Omega A \text{Im} \left[\sum_{m \neq 0} X_m \exp \left[i \left[\alpha_m + \beta_m z + \gamma_m \rho \cos \theta \right] \right] \right] \sin \theta \frac{\partial h_0^p}{\partial \rho} \\ \text{où} \\ X_m = \frac{E_m}{|E_0|} \\ \alpha_m = \left(1 + \frac{m}{N} \right) (\pi + 2\pi p) \\ \beta_m = \left(1 + \frac{m}{N} \right) v_r - \frac{m}{N} k_w \\ \gamma_m = \left(1 + \frac{m}{N} \right) \frac{1}{A} \end{array} \right. \quad (\text{III-29})$$

Conformément à l'hypothèse des électrons en fond de puits, l'opérateur D_1 du premier ordre est linéarisé comme nous l'avons fait à l'ordre 0. A présent, la linéarisation s'effectue par rapport à la variable ρ mesurant dans l'espace des phases la distance des électrons au point résonant : $\rho \ll 1$. Sous cette hypothèse, l'opérateur D_1 devient :

$$D_1 = -\Omega A \operatorname{Im} \left[\sum_{m \neq 0} X_m \exp [i (\alpha_m + \beta_m z)] \left[\sin \theta + \frac{i}{2} \gamma_m \rho \sin (2 \theta) \right] \right] \frac{\partial h_0^p}{\partial \rho} \quad (\text{III-30})$$

En insérant l'opérateur linéarisé D_1 dans l'expression (III-23) et en utilisant l'opérateur D_0 d'ordre 0 (III-27) calculé précédemment, on obtient l'équation de Vlasov du premier ordre linéarisée :

$$\left[\begin{array}{l} \left[\frac{\partial}{\partial z} - \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} \right] h_1^p = f_1(z, \rho) \sin \theta + \rho f_2(z, \rho) \sin (2 \theta) \\ \text{avec} \\ f_1(z, \rho) = -\Omega A \frac{\partial h_0}{\partial \rho} \operatorname{Im} \left[\sum_{m \neq 0} X_m \exp [i (\alpha_m + \beta_m z)] \right] \\ f_2(z, \rho) = -\frac{i}{2} \Omega A \frac{\partial h_0}{\partial \rho} \operatorname{Im} \left[\sum_{m \neq 0} \gamma_m X_m \exp [i (\alpha_m + \beta_m z)] \right] \end{array} \right] \quad (\text{III-31})$$

On reconnaît dans le terme de gauche l'opérateur d'ordre 0. Le terme de droite est une somme de deux termes, chacun étant le produit d'une fonction de z et de ρ et d'un sinus de l'angle θ uniquement. Cette équation peut être écrite sous une forme intégrale. En effet, les équations du type (III-31) sont équivalentes à une équation intégral-différentielle dont le noyau est un sinus :

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + a \frac{\partial}{\partial \theta} \right] h(z, \theta) = f(z) \sin(b \theta) \\ \Leftrightarrow h(z, \theta) = \int_0^z dz' f(z') \sin[b \theta + a b (z' - z)] \quad (\text{III-32})$$

d'où la distribution à l'ordre 1 sous une forme intégral-différentielle :

$$h_1(z, \rho, \theta) = \int_0^z dz' f_1(z', \rho) \sin[\theta - \Omega(z' - z)] \\ + \rho \int_0^z dz' f_2(z', \rho) \sin[2\theta - 2\Omega(z' - z)] \quad (\text{III-33})$$

L'écriture ci-dessus de la distribution au premier ordre contient l'histoire de l'interaction du faisceau d'électrons avec l'ensemble des modes. h_1 est une intégrale dont le noyau est un sinus. Nous verrons dans le paragraphe suivant que cette propriété est d'un grand intérêt puisqu'elle va permettre de décrire l'évolution des modes satellites sans calculer explicitement la distribution au premier ordre.

Cependant, il apparaît d'ores et déjà que la distribution au premier ordre dépend maintenant de la variable angulaire θ , de sorte qu'elle perd maintenant sa symétrie circulaire dans l'espace des phases. Nous allons voir maintenant que cette propriété autorise la croissance de raies satellites.

III. A. b. 2. Description de l'évolution des raies satellites par une matrice de couplage

Nous allons utiliser la distribution au premier ordre h_1 dans sa forme intégrale pour calculer l'évolution des modes. Pour cela, l'équation de Maxwell (III-16) écrite en variables (ψ_c, Γ_c, z) est d'abord décomposée sur l'ensemble des puits. Nous avons montré que la contribution de la distribution d'équilibre sur les modes satellites est nulle. En conséquence, seule la distribution du premier ordre intervient. Cette équation est d'abord écrite en variables circulaires puis linéarisée par rapport à ρ :

$$i \frac{\partial E_n}{\partial z} = \frac{\mu_0 e^2 c}{4 \pi N} \frac{a_w K_1}{\Omega} \sum_{p=0}^{N-1} \int_{-\pi}^{+\pi} \rho \, d\rho \quad * \int_0^{2\pi} d\theta \left(1 - \frac{\rho \sin \theta}{2 B v_r}\right) (1 - i \gamma_n \rho \cos \theta) h_1^p \exp[-i(\alpha_n + \beta_n z)] \quad (\text{III-34})$$

Nous nous limitons au premier ordre non nul en ρ soit l'ordre 2 comme nous allons le voir. En tenant compte du fait que :

$$2 B \gamma_r^2 \gamma_n = 2 \frac{k_w}{\Omega} \gg 1$$

l'équation (III-34) se réduit à l'équation suivante :

$$i \frac{\partial E_n}{\partial z} = \frac{\mu_0 e^2 c}{4 \pi N} \frac{a_w K_1}{\Omega} \sum_{p=0}^{N-1} \int_{-\pi}^{+\pi} \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (1 - i \gamma_n \rho \cos \theta) h_1^p \exp[-i(\alpha_n + \beta_n z)] \quad (\text{III-35})$$

L'expression intégrale de h_1 (III-33) est une fonction sinusoïdale en θ , de sorte que sa somme par rapport à l'angle sur $[0, 2\pi]$ s'annule. Par ailleurs, le terme en f_2 est un terme d'ordre supérieur en ρ que nous négligeons par conséquent d'où l'évolution du mode n :

$$i \frac{\partial E_n}{\partial z} = - \frac{\mu_0 e^2 c}{8} \frac{a_w K_1}{\gamma_r} \left(1 + \frac{n}{N}\right) \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \left[\int_{-\pi}^{+\pi} d\rho \rho^2 \frac{\partial h_0^p}{\partial \rho} \right] \exp[-i(\alpha_n + \beta_n z)]$$

$$* \sum_{m \neq 0} \int_0^{z'} dz' \left[X_m \exp[i(\alpha_m + \beta_m z')] + X_m^* \exp[-i(\alpha_m + \beta_m z')] \right] \sin[\Omega(z' - z)]$$

(III-36)

Nous avons vu que la distribution d'équilibre h_0^p était indépendante du puits considéré du fait de la 2π périodicité de h_0 . Ceci nous autorise à sortir le terme de distribution d'ordre 0 de la somme sur les N périodes (i variant de 0 à N). Dans ces conditions, il est alors possible de calculer cette somme. En effet :

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{p=0}^{N-1} \exp[-i(\alpha_n - \alpha_m)] = \begin{cases} N & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \\ \sum_{p=0}^{N-1} \exp[-i(\alpha_n + \alpha_m)] = \begin{cases} N & \text{si } n = -m \\ 0 & \text{si } n \neq -m \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{(III-37)}$$

D'autre part, la somme sur la variable radiale ρ peut être intégrée par parties ; on retrouve alors la densité électronique ρ_e .

Finalement, l'équation d'évolution du mode n s'écrit de façon plus simple :

$$i \frac{\partial E_n}{\partial z} = - \frac{1}{2} v_r \Omega_0 \left(1 + \frac{n}{N}\right) \exp[-i\beta_n z]$$

$$* \int_0^z dz' \left[E_n \exp[i\beta_n z'] - E_{-n}^* \exp[-i\beta_{-n} z'] \right] \sin[\Omega_0(z' - z)]$$

(III-38)

Comme l'ont montré les relations (III-37), les modes symétriques par rapport au mode dominant sont couplés : l'évolution du mode n ne dépend que du mode central en

saturation et du mode symétrique par rapport au mode central. Nous allons donc pouvoir décrire la dynamique des raies satellites par une matrice de couplage.

La croissance des raies satellites est proportionnelle à la dérivée de la phase du mode central imposée par la distribution d'équilibre. Par ailleurs, du fait du terme en $(1+n/N)$, il apparait une dissymétrie dans la croissance des modes symétriques.

Nous retrouvons ici, par ailleurs, une équation intégral-différentielle avec un noyau en sinus. Nous allons voir maintenant que cette intégrale n'a pas besoin d'être calculée explicitement.

* Matrice de couplage entre modes

La forme de l'intégrale (III-38) suggère de poser :

$$\begin{cases} Y_n = E_n \exp[i \beta_n z] \\ Y_{-n}^* = E_{-n}^* \exp[- i \beta_{-n} z] \end{cases} \quad (\text{III-39})$$

On déduit de (III-38) l'évolution de Y_n et Y_{-n} :

$$\begin{cases} i \frac{\partial Y_n}{\partial Z} = - \left(\frac{\beta_n}{\Omega_0} \right) Y_n - \frac{1}{2} \left(\frac{v_r}{\Omega_0} \right) \left(1 + \frac{n}{N} \right) (p_n - p_{-n}^*) \\ i \frac{\partial Y_{-n}^*}{\partial Z} = \left(\frac{\beta_{-n}}{\Omega_0} \right) Y_{-n}^* - \frac{1}{2} \left(\frac{v_r}{\Omega_0} \right) \left(1 - \frac{n}{N} \right) (p_n - p_{-n}^*) \end{cases} \quad (\text{III-40})$$

où on a posé : $Z = \Omega_0 z$.

p_n et p_{-n} sont les intégrales avec un noyau en sinus de l'équation (III-38) :

$$\begin{cases} p_n = \int_0^Z dZ' Y_n \sin (Z' - Z) \\ p_{-n}^* = \int_0^Z dZ' Y_{-n}^* \sin (Z' - Z) \end{cases} \quad (\text{III-41})$$

Le système (III-40) n'est pas complet puisque les quantités p_n ne sont pas connues. Mais le noyau des intégrales (III-41) est un sinus. Or la dérivée de ce type d'intégrale

donne une intégrale avec un noyau en cosinus que nous pouvons dériver à nouveau ; on retrouve alors une intégrale avec un noyau en sinus. Cette propriété permet de fermer le système (III-40) en lui ajoutant deux équations différentielles du type suivant pour chacun des modes n et $-n$:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial p_n}{\partial Z} = - \int_0^z dZ' Y_n \cos (Z' - Z) = - q_n \\ \frac{\partial q_n}{\partial Z} = p_n + Y_n \end{array} \right. \quad (\text{III-42})$$

Nous obtenons donc une matrice de couplage de dimension 6. Néanmoins, ce système peut être réduit à un système d'équations différentielles de dimension 4 en utilisant la somme et la différence des champs :

$$\left[\begin{array}{l} A_n = Y_n + Y_{-n}^* \\ \Pi_n = i (Y_n - Y_{-n}^*) \\ P_n = p_n - p_{-n}^* \\ Q_n = q_n - q_{-n}^* \end{array} \right. \quad (\text{III-43})$$

Avec ces nouvelles définitions, l'équation d'évolution des modes (III-40) et le système (III-42), la dynamique des modes est finalement décrite par une matrice de couplage de dimension 4 :

$$i \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} A_n \\ \Pi_n \\ P_n \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{N} \left(\frac{k_w - v_r^0}{\Omega_0} \right) & i \frac{v_r^0}{\Omega_0} & - \frac{v_r^0}{\Omega_0} & 0 \\ -i \frac{v_r^0}{\Omega_0} & \frac{n}{N} \left(\frac{k_w - v_r^0}{\Omega_0} \right) & -i \frac{n}{N} \frac{v_r^0}{\Omega_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ \Pi_n \\ P_n \\ Q_n \end{bmatrix}$$

(III-44. 1)

Compte tenu des définitions précédentes, les paramètres de la matrice de couplage peuvent être exprimés en fonction des paramètres plus immédiats que sont la charge Q et

l'énergie E_L contenues dans une impulsion de longueur L ainsi que les rayons quadratiques moyens σ_L de l'impulsion laser et σ_e de l'impulsion électronique. Dans l'hypothèse des électrons en fond de puits, la dérivée de la phase du champ laser et la fréquence synchrotron s'écrivent donc :

$$\left[\begin{array}{l} v_r^0 = -\frac{\mu_0 e}{2 m} \frac{a_w Q}{(\pi \sigma_e^2) L \gamma_r |E_d|} \\ \Omega = \sqrt{\frac{k_w a_w |E_d|}{2 \gamma_r^2}} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad |E_d| = \sqrt{\frac{2 \mu_0 e^2 E_L}{m^2 c^2 (\pi \sigma_L^2) L}} \quad (\text{III-44. 2})$$

La matrice de couplage 4*4 peut être divisée en 4 blocs de dimension 2. Cette décomposition est intéressante car elle isole les deux grandeurs physiques importantes que sont A_n et Π_n c'est à dire respectivement la somme et la différence des champs des 2 modes symétriques par rapport au mode central. Les matrices 2*2 sur la diagonale sont hermitiennes de sorte qu'elles n'engendrent que des rotations de phases et ne génèrent aucun gain ni atténuation des raies satellites. Cette dernière fonction est donc assurée par les blocs non diagonaux. Plus précisément, la dérivée de la phase du mode central v_r^0 imposée par la distribution d'équilibre en est le vecteur. On peut d'ailleurs négliger $\frac{n v_r^0}{N \Omega_0}$ devant $\frac{v_r^0}{N}$ de sorte que le couplage entre les parties supérieure et inférieure de la

matrice se fait uniquement par le terme $\frac{-v_r^0}{N}$.

En résumé, nous avons montré, dans le cas où les électrons sont en fond de puits, qu'il existe une situation d'équilibre stable où le mode en saturation a une amplitude et une dérivée de phase constante.

Cet équilibre a ensuite été perturbé par l'introduction de modes adjacents petits devant le mode de pompage. Le calcul perturbatif au premier ordre autour de l'équilibre a mis en évidence un couplage entre modes symétriques par rapport au mode en saturation. La dynamique des raies satellites est alors décrite par une matrice de couplage de dimension 4. Dans ce contexte, les paramètres essentiels à l'évolution des raies satellites sont la dérivée de la phase du mode en saturation v_r^0 (équivalent à l'indice du milieu à la fréquence correspondante) et la fréquence synchrotron Ω_0 de rotation des électrons en fond de puits.

Ce formalisme contient toute la dynamique des raies satellites dans l'onduleur. Nous allons, en effet, montrer, dans la partie suivante, qu'il existe un régime transitoire dont la longueur est proche de celle d'un onduleur classique. Les études auxquelles nous avons fait référence dans l'introduction de ce chapitre se limitent au régime asymptotique. Nous retrouverons d'ailleurs bien leur résultat : les raies satellites ont, en régime asymptotique, un taux de croissance exponentiel donné par une équation de degré 4 (III-46).

Il s'agit maintenant de décrire l'évolution des raies satellites en fonction de ces paramètres.

III. B. DYNAMIQUE DES RAIES SATELLITES. LIMITE DES HYPOTHESES DU CALCUL PERTURBATIF

Le calcul perturbatif qui vient d'être développé est basé sur deux hypothèses importantes. En effet, il suppose, d'une part, l'existence d'un équilibre entre le faisceau laser et le faisceau d'électrons et d'autre part, la localisation des électrons au fond des puits.

Or, en réalité, les trajectoires électroniques dans l'espace des phases ne sont pas uniquement localisées autour du point résonant mais occupent, au contraire, l'ensemble de la "bulle" comme nous l'avons vu au chapitre II. Par ailleurs, au vu de ces trajectoires, les électrons ne sont pas, à priori, répartis sur une trajectoire électronique d'équilibre. Il s'agit donc de préciser la validité de nos hypothèses et faire le lien entre le calcul perturbatif et la simulation numérique dans des conditions réalistes.

Nous examinons d'abord l'évolution des raies satellites et ses propriétés suivant le modèle "fond de puits" par intégration de la matrice de couplage et le calcul précédent sera validé en comparant ses résultats au code configuré dans les mêmes conditions. Les paramètres essentiels issus de la théorie "fond de puits" seront ensuite analysés dans des conditions réalistes afin de faire le pont entre nos hypothèses et la réalité. Cette approche nous permettra alors de donner une description du phénomène des raies satellites en dépassant le cadre de nos hypothèses initiales.

III. B. a. Etude de la croissance des raies satellites avec le modèle "fonds de puits"

Du point de vue du code SPECTRE, l'équilibre supposé précédemment est assez simple. Il repose en effet uniquement sur une injection correcte des électrons dans l'onduleur par un choix adéquat de leur phase et leur énergie initiales. Cet atout est utilisé ici pour valider le calcul en reconstituant dans la simulation les hypothèses d'équilibre et de localisation des électrons en fond de puits. Sur cette base, les propriétés issues de la matrice de couplage sont ensuite décrites.

III. B. a. 1. Validation numérique du calcul perturbatif

Dans le cas d'une distribution réaliste, la phase initiale ψ des électrons est choisie de façon que ceux-ci occupent uniformément l'intervalle $[0, 2\pi N]$ imposé par l'échantillonnage du spectre et l'énergie initiale est souvent choisie égale pour tous les électrons en l'absence de dispersion. Nous allons oublier cette distribution réaliste pour recréer numériquement les conditions de l'équilibre d'ordre 0 puis calculer l'ordre 1. Cette démarche est tout à fait identique à celle suivie au cours du calcul. Les exemples suivants ont été réalisés avec des paramètres proches du projet de Lille sur un onduleur long soit : $\lambda_w = 2.5$ cm, $\gamma = 8$, $I = 10$ A, $Q=20$ (5% de pertes).

* Ordre 0 : l'équilibre

Le champ laser

A l'ordre 0, le champ laser est monochromatique de fréquence ω_L . Dans notre exemple, la longueur d'onde du laser est choisie égale à celle du maximum d'émission spontanée soit $\lambda_L = 260$ μm . Le mode central est supposé en saturation. Sa puissance est donc choisie égale à l'énergie de saturation du laser. Cette dernière est obtenue par une simulation monochromatique sur une centaine de passages dans des conditions réalistes d'injection des électrons avec un onduleur court.

Pour fixer les idées, les paramètres essentiels de la matrice de couplage ie la période synchrotron L_s (III-8), la dérivée de la phase v_r^0 (III-19) du champ laser et k_w sont, dans ces conditions :

$$L_s = 3.4 \text{ m} \quad \text{donc} \quad \Omega_0 = 1.85 \text{ m}^{-1}$$

$$v_r^0 = -0.7 \text{ m}^{-1}$$

$$k_w = 250 \text{ m}^{-1}$$

Aucune contrainte initiale autre que la monochromaticité et l'énergie initiale n'est imposée au champ laser. Si l'équilibre est réalisé dans la simulation, la dérivée de la phase du faisceau laser s'ajustera d'elle même à la valeur v_r^0 qui vient d'être calculée.

Les électrons

Conformément à la distribution d'équilibre d'ordre 0 (III-14), les électrons sont initialement uniformément répartis le long de trajectoires très proches du fond des puits de potentiel. L'échantillonnage du spectre en $1/N$ nécessite l'utilisation d'une boîte de périodicité de longueur $2\pi N$ en ψ soit N périodes laser ou N puits. La distribution des électrons dans l'espace des phases (ψ, Γ) se fait donc le long de N "cercles" de rayon en ψ très inférieur à π et centrés sur les points résonants (ψ_r, Γ_r) dont la définition est donnée par l'équilibre :

$$\left[\begin{array}{l} \psi_r = \pi + 2\pi l \quad \text{où} \quad l \in [0, N-1] \\ \Gamma_r = \gamma_r^2 = \frac{k_L (1 + a_w^2)}{2 (k_w - v_r^0)} \end{array} \right. \quad \text{(III-45)}$$



Dans la formule ci-dessus, l'énergie résonante γ_r pour chaque puits dépend de la dérivée de la phase du champ laser v_r^0 imposée par l'équilibre et calculée précédemment (III-19). Rappelons au passage que v_r^0 est proportionnelle à l'intensité électronique et inversement proportionnelle à l'amplitude du champ laser.

Il faut noter que v_r^0 est très inférieur à $k_w = 250 \text{ m}^{-1}$ et on est tenté de le négliger dans les conditions initiales (III-45). Néanmoins, il s'agit d'un terme indispensable et la simulation a montré que l'équilibre n'est réalisé qu'en sa présence. En effet, si l'énergie des électrons est légèrement différente de l'énergie résonante, les électrons ne sont plus répartis uniformément le long d'une trajectoire unique mais sur plusieurs trajectoires et de façon non uniforme et la distribution initiale devient légèrement dissymétrique par rapport au point résonant. Il s'ensuit une modulation de la dérivée de la phase du champ laser à la fréquence de rotation des électrons en fond de puits. Cette modulation se retrouve ensuite sur les modes satellites quand on les introduit. Cette remarque donne une idée de la sensibilité de la simulation réalisée.

L'équilibre

Pour montrer que l'équilibre stable est réalisé dans la simulation, nous disposons des critères sur les faisceaux laser et électronique définis dans la partie A :

1) Le faisceau laser a une amplitude constante et une dérivée de phase égale à la valeur fond. de puits initiale v_r^0

Une simulation avec les paramètres de l'exemple ci-dessus sur une longueur de 15 m montre que la dérivée de la phase laser est constante et égale à la valeur "fond. de puits" v_r^0 (figure III. 1). De même, l'amplitude du champ laser est constante

2) L'opposé de la dérivée de la phase moyenne des électrons doit être égal à v_r^0

La figure III. 1 montre par ailleurs que l'opposé de la dérivée de la phase moyenne des électrons est en tout point égal à la dérivée de la phase du champ laser.

Ceci signifie que l'ensemble des puits se déplace à une vitesse constante dépendante de la dérivée de la phase du champ laser :

$$V_r = \frac{\omega_L}{k_w - v_r^0 + k_L}$$

et les électrons suivent des trajectoires invariantes "circulaires" dans l'espace des phases ($\bar{\psi} = \psi - v_r^0 z, \Gamma$). Cet équilibre est remarquablement maintenu sur toute la longueur de l'onduleur. Les conditions d'équilibre d'ordre 0 avec lesquelles nous avons fait le calcul du gain des raies satellites au premier ordre sont maintenant numériquement réalisées. Il est maintenant possible d'aborder la croissance des raies satellites à l'ordre 1.

EQUILIBRE D'ORDRE 0

$$\gamma = 8. E = 1 \text{ mJ. } Q = 50 \text{ nC}$$

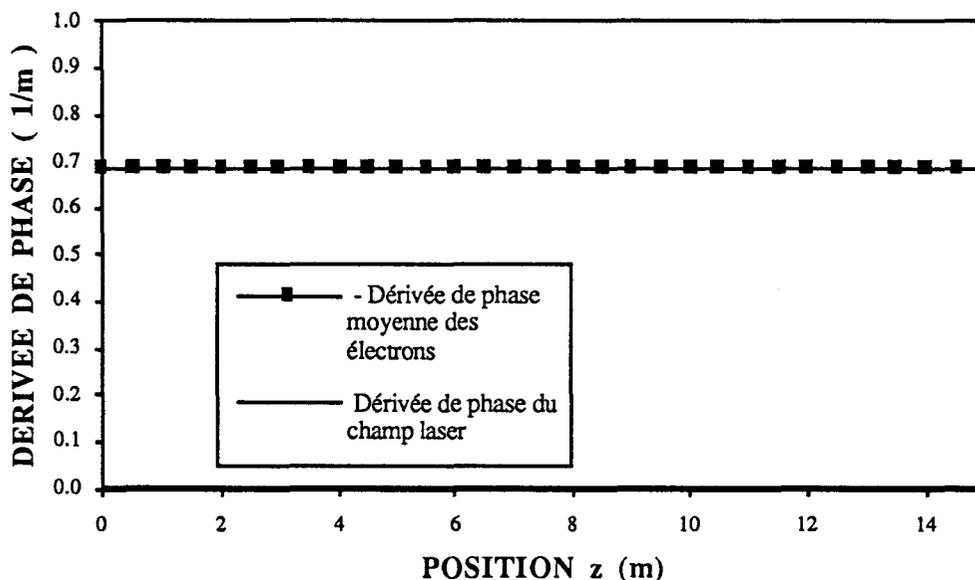


Figure III. 1. La comparaison de l'évolution de la phase du champ laser et de la moyenne des phases des électrons est un bon critère pour tester la réalisation et la stabilité de l'équilibre d'ordre 0 dans la simulation en "fond de puits". L'énergie E de l'impulsion laser et la charge Q de l'impulsion électronique considérées sont normalisées à une longueur d'impulsion de 1,5 m (il ne s'agit cependant que d'une longueur de normalisation; la longueur réelle de l'impulsion sera imposée par l'échantillonnage du spectre).

* Ordre 1 : l'instabilité

A l'ordre 1, nous introduisons des modes satellites d'énergie très inférieure à l'énergie du mode en saturation qui génère l'instabilité. La présence de ces raies rend l'équilibre instable et elles vont se développer.

En l'occurrence, il s'agit de 2 modes symétriques par rapport au mode central en saturation. Leur énergie rapportée à celle du mode central est 10^{-5} et l'écart en fréquence au mode central est choisi égal à :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Omega}{k_w} \text{ soit environ } 0,75 \% \text{ dans notre cas}$$

Nous verrons qu'il s'agit en fait de l'écart en fréquence pour lequel les raies satellites ont le gain maximum (dans l'hypothèse des électrons en fond de puits).

La figure III. 2 compare l'évolution du mode central en saturation et des 2 modes satellites obtenue des deux manières suivantes :

- par intégration directe de la matrice de couplage (III-44).
- par la simulation dans les conditions "fond de puits".

En ce qui concerne la simulation dans les conditions "fond de puits", nous pouvons distinguer ici 2 régimes :

Régime linéaire

En régime de croissance linéaire des raies satellites ($z < 10$ m), la simulation donne exactement le même résultat que la matrice de couplage (figure II. 2). Les conditions de l'équilibre restent bien réalisées pendant cette période malgré la présence des raies satellites : la figure III. 3 montre que la dérivée de la phase laser est bien égale à l'opposé de la dérivée de la phase moyenne des électrons.

Régime non-linéaire

Lorsque l'un des modes satellites a atteint un niveau comparable au mode central en saturation ($z > 10$ m), les effets non linéaires de compétition de modes entrent en jeu. L'équilibre du mode en saturation et du faisceau d'électrons en fond de puits est alors rompu.

Dans le cas présent, le mode en saturation reste stable en amplitude (figure III. 2) et en phase (figure III. 3) tant que l'énergie du mode de fréquence basse n'a pas atteint environ un dixième de l'énergie du mode central. Dès lors, le mode en saturation est déstabilisé : l'amplitude de ce mode et de la raie de fréquence haute s'atténue au profit de la raie basse fréquence qui devient dominante.

De même, la relation d'égalité entre la dérivée de la phase du mode en saturation et la dérivée de la phase moyenne des électrons est rompue marquant ainsi la transition entre le régime de croissance linéaire des raies satellites et le régime non linéaire.

Ordre 1.
Validation du calcul perturbatif.

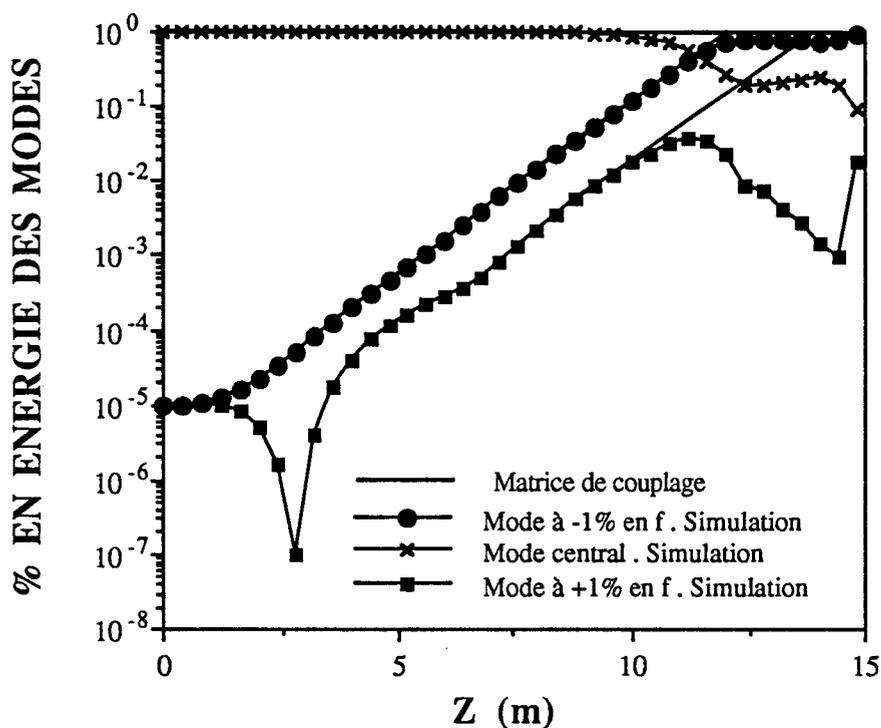


Figure III. 2. Evolution de deux raies symétriques par rapport au mode de pompage et proches du maximum de gain des raies satellites obtenues par intégration de la matrice de couplage et par la simulation dans les conditions "fond" de puits".

Ordre 1
Stabilité de l'équilibre

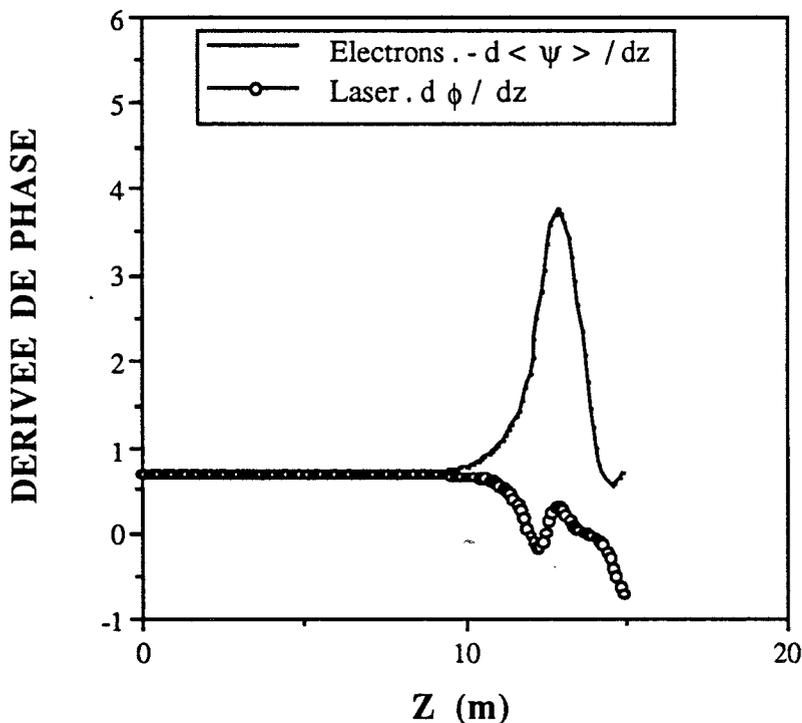


Figure III. 3. La stabilité de l'équilibre est parfaite tant que le régime linéaire est maintenu.

Bien sûr, dans le cadre de cette étude, nous ne nous intéressons qu'au régime linéaire de croissance des raies satellites. C'est le domaine de validité du calcul précédent. Les 2 outils que sont le calcul analytique et le code donnent dans cette région des résultats tout à fait identiques. Il s'agit là d'une validation importante du calcul perturbatif dont nous examinons maintenant les résultats.

III. B. a. 2. Propriétés des raies satellites dans l'hypothèse "fond de puits"

L'intégration de la matrice de couplage (figure III. 2) montre qu'à l'intérieur du régime linéaire, il existe un régime transitoire et un régime de croissance exponentielle.

* Régime transitoire

L'existence d'un régime transitoire est une information nouvelle importante que nous validerons plus tard dans un cas réaliste. En effet, on peut voir sur la figure III. 2 que la durée du régime transitoire est de l'ordre de grandeur de la longueur synchrotron c'est à dire celle d'un onduleur classique. Dans ce cas, la partie importante de cette courbe se limite au tout début de la partie exponentielle alors que le régime transitoire n'est pas encore devenu négligeable. Les travaux théoriques et numériques précédemment évoqués se sont limités au régime asymptotique.

Pendant le régime transitoire, le mode de fréquence haute s'atténue d'abord avant de croître exponentiellement dans l'onduleur. Au contraire, le mode de fréquence basse atteint rapidement son régime exponentiel. Cet effet de "retard au démarrage" de la raie haute fréquence est persistant pour tous les jeux de paramètres que nous avons pu envisager à condition que la dérivée de la phase v_r soit négative (c'est le cas lorsque les électrons sont en fond de puits). Il est par ailleurs tout à fait cohérent, comme nous le verrons par la suite, avec les expériences (Los Alamos) et les simulations dans des conditions réalistes : pendant le régime transitoire, la croissance des raies satellites est dissymétrique en fréquence par rapport au mode en saturation et la raie basse fréquence a une énergie supérieure à la raie haute fréquence.

Remarque : Lorsque v_r change de signe, le phénomène est inversé et la raie haute fréquence "démarré" avant la raie basse fréquence. Par contre, le gain en régime asymptotique est indépendant du signe de v_r . Dans les conditions "fond de puits", v_r est

négatif. Cependant, le signe de v_r change dans le cas d'une distribution d'équilibre en dehors du fond de puits comme nous le verrons ensuite.

* Régime asymptotique

L'évolution asymptotique des raies satellites se calcule grâce aux valeurs propres de la matrice de couplage (III-44). Les valeurs propres λ de cette matrice sont données par une équation de degré 4 :

$$(\lambda^2 - \Omega_0^2) [(\delta (k_w - v_r^0) - \lambda)^2 - v_r^{02}] + v_r^{02} \Omega_0^2 = 0 \quad (\text{III-46})$$

où Ω_0 est la fréquence de rotation des électrons en fonds puits. v_r^0 est la dérivée de la phase du mode en saturation égale à la dérivée de la phase moyenne des électrons. δ est l'écart en fréquence par rapport au mode central des 2 modes satellites considérés.

Bien que ne posant aucun problème, la résolution de cette équation est un peu fastidieuse ; c'est pourquoi nous la traiterons numériquement. Les valeurs propres sont :

- soit toutes réelles et le gain des raies satellites est nul
- soit 2 valeurs propres réelles et 2 valeurs propres complexes conjuguées et il y a du gain

La partie imaginaire des valeurs propres complexes conjuguées donne le gain logarithmique r des modes satellites. Le gain du mode haute fréquence E_n et celui du mode basse fréquence E_{-n} sont égaux soit :

$$r = \frac{\partial \text{Log} (E_\delta)}{\partial z} = \frac{\partial \text{Log} (E_{-\delta})}{\partial z} \quad (\text{III-47})$$

La figure III. 4 donne le gain r des raies satellites en fonction de l'écart relatif en fréquence au mode central δ . Ces courbes de gain, en régime asymptotique, sont identiques à celles déjà obtenues par Yu par une autre approche consistant à calculer l'équation de dispersion associée à l'évolution des raies satellites.

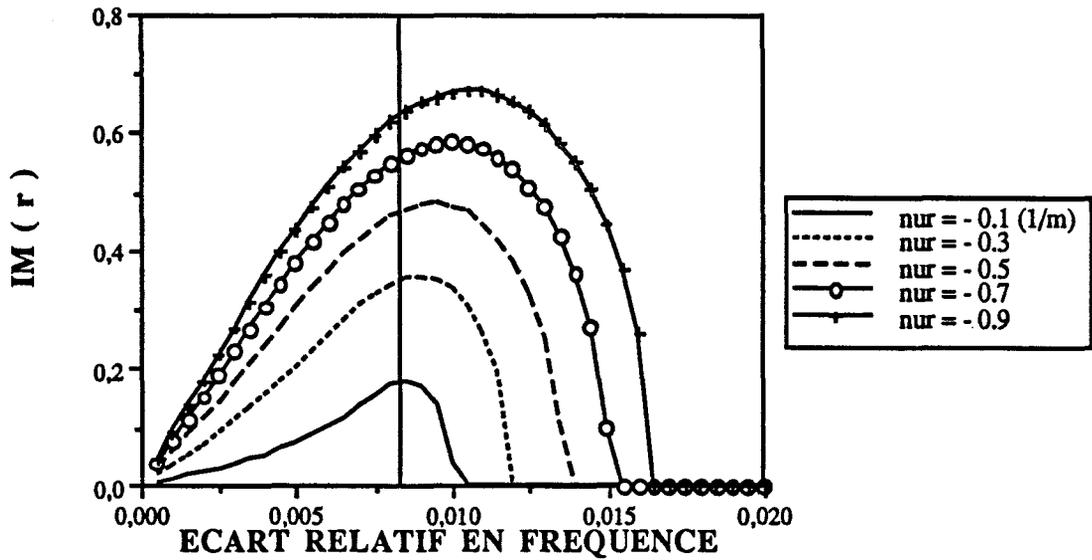


Figure III. 4. Les valeurs propres de la matrice de couplage donnent le gain des raies satellites en régime asymptotique pour différentes dérivées de la phase du champ laser. Ce faisceau de courbes a été réalisé avec une longueur synchrotron de 3 m et une période d'onduleur de 2.5 cm.

Comme le laissait présager la forme de la matrice de couplage, ν_r^0 est un paramètre essentiel. Lorsque ν_r^0 s'annule, le couplage entre la partie "modes" et la partie "gain" de la matrice de couplage devient inexistant. L'évolution de A_n et P_n est alors donnée par une matrice 2*2 hermitienne et le gain des raies satellites est nul. Quand ν_r^0 est non nul, le gain des raies satellites est d'autant plus important que ce couplage est grand. La figure III. 5 donne le maximum de gain en fonction de ν_r^0 et montre qu'il est une fonction croissante de ν_r^0

Sur la figure III. 4 est aussi reportée la position de la fréquence δ_{max} :

$$\delta_{max} = \frac{\Omega_0}{k_w} \quad (III-48)$$

On voit qu'il s'agit de la position en fréquence du maximum de gain des raies satellites lorsque ν_r^0 est petit devant 1 m^{-1} . Cependant, elle dépend de ν_r^0 . La figure III. 6 compare la position de ce maximum à la fréquence δ_{max} pour différentes valeurs de ν_r^0 . Pour ν_r^0 est de l'ordre de 1 m^{-1} , la position du maximum de gain s'écarte d'environ 30 % de sa valeur en fond de puits. La fréquence δ_{max} ne fournit donc qu'une approximation de la position des raies satellites dans la plupart des cas classiques.

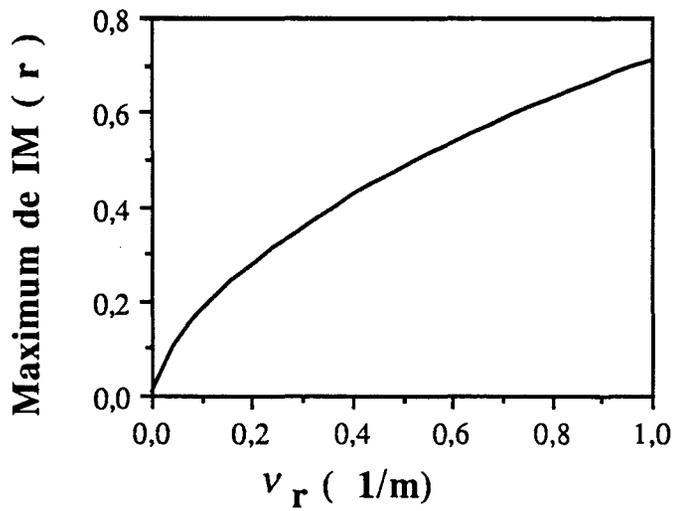


Figure III. 5. Matrice de couplage. Gain maximum des raies satellites en régime asymptotique. $L_s=3m$, $\lambda_w=2.5cm$

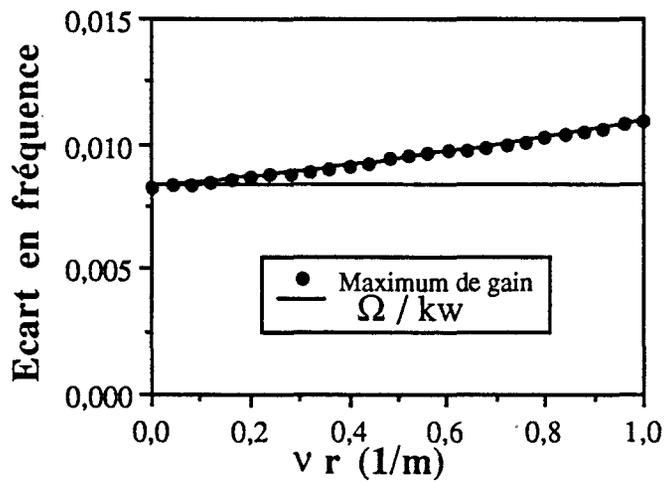


Figure III. 6. Matrice de couplage. Position en fréquence du maximum de gain des raies satellites. $L_s=3m$, $\lambda_w=2.5cm$

III. B. b. Exploitation physique du calcul perturbatif

Afin de fixer les idées, il est intéressant, à ce stade, de rappeler les différentes étapes de notre approche de l'instabilité. A l'issue de la phase non-linéaire de compétition de modes, le spectre est devenu suffisamment étroit pour pouvoir le supposer monochromatique. La majorité des électrons est piégée dans les puits que ce mode en saturation crée en se couplant au champ magnétique statique de l'onduleur. Il est équivalent de dire que, dans l'espace des phases, les électrons ont pour la plupart une trajectoire contenue dans la zone délimitée par la séparatrice.

Afin de simplifier les calculs, nous avons réduit le problème en supposant les électrons localisés au voisinage du fond des puits. Ceci a permis de linéariser les équations de Maxwell et Vlasov. Un calcul perturbatif autour d'un équilibre des électrons et du champ laser montre que l'équilibre est instable : des raies satellites se développent de part et d'autre du mode en saturation. L'écart relatif en fréquence de ces raies au mode en saturation est proportionnel à la fréquence de rotation des électrons dans l'espace des phases et leur dynamique comporte un régime transitoire où les raies ont une croissance dissymétrique et un régime asymptotique où elles ont le même taux de croissance.

Deux des hypothèses réalisées sont fondamentales. D'une part, nous ne savons pas si un équilibre est effectivement atteint dans une situation réelle. D'autre part, le mouvement des électrons dépend de leur position dans l'espace des phases. En particulier, la fréquence de rotation des électrons n'est pas égale en tout point de la bulle à la fréquence de rotation en fond de puits. Or nous avons vu que la fréquence de rotation est essentielle puisqu'elle détermine la position des raies satellites.

En utilisant les paramètres pertinents issus du calcul perturbatif, nous allons maintenant montrer qu'en réalité le système atteint bien un équilibre mais l'hypothèse des électrons en fond de puits est beaucoup trop restrictive.

III. B. b. 1. La croissance des raies satellites avec une distribution réaliste

* Distribution électronique réaliste

Nous entendons ici par distribution électronique réaliste une distribution proche des conditions expérimentales. Le faisceau d'électrons pénétrant dans l'onduleur est supposé monocinétique (nous négligeons ici tout effet de dispersion d'énergie), continu et

d'énergie constante. Néanmoins, nous avons vu qu'il est suffisant de considérer la boîte de périodicité suivante pour la phase ψ :

$$\psi \in [0, 2\pi N] \text{ équivalent à la discrétisation } \frac{\Delta k}{k} = \frac{1}{N} \quad (\text{III-49})$$

Pour les simulations en conditions réalistes, les électrons sont répartis uniformément en ψ sur la boîte de périodicité. L'énergie des électrons est arbitraire contrairement aux simulations "fond de puits" où l'énergie de chaque électron est imposée par l'équilibre, les électrons étant répartis uniformément sur une distribution d'équilibre proche des points résonants.

* Croissance de deux raies symétriques avec une distribution réelle

Une première approche de lien entre la théorie "fond de puits" et une distribution réaliste consiste à comparer brutalement, sur quelques mètres d'onduleur, l'évolution de 2 modes symétriques par rapport à un mode central en saturation.

La fréquence du mode en saturation est choisie au maximum d'émission spontanée, elle est donnée par la relation classique :

$$k_w = \frac{k_L}{2\gamma^2} (1 + a_w^2) \quad (\text{III-50})$$

On voit que cette condition est très proche de la condition de résonance (III-5) donnant l'énergie résonante dans les conditions "fond de puits". Il ne manque en effet que le terme v_r^0 petit devant k_w que nous ne connaissons pas à priori dans des conditions réalistes. Dans le cas réaliste, les électrons sont donc injectés dans l'espace des phases (ψ, γ) sur une droite proche de l'axe en ψ de la "bulle de piégeage". La longueur synchrotron est 3.4 m et le maximum de gain des raies satellites est obtenu à environ 1% en fréquence du mode central en saturation. Nous choisissons cet écart pour positionner les modes adjacents en fréquence. L'énergie initiale des modes adjacents rapportée à celle du mode en saturation est 10^{-5} .

La figure III. 7 compare l'évolution des raies satellites dans les deux cas considérés ici. La comparaison de l'évolution des raies satellites dans l'onduleur avec une distribution réaliste et une distribution en fond de puits montre que la durée du régime transitoire et le gain en régime asymptotique sont différents dans les 2 cas envisagés.

Cependant, les raies satellites ont un comportement similaire à savoir une atténuation de la raie haute fréquence et une croissance de la raie basse fréquence pendant le régime transitoire suivi d'un régime exponentiel. L'existence d'un régime transitoire de longueur comparable à celle d'un onduleur classique est donc une propriété conservée dans la réalité et nous aurons à en tenir compte dans l'appréciation des limites de validité du calcul perturbatif en "fond. de puits".

Par ailleurs, dans le cas réaliste, les deux régimes s'accompagnent d'oscillations attribuables au fait que les électrons ne sont à priori pas injectés exactement sur l'axe en ψ de la bulle mais avec une énergie proche de l'énergie résonante. Enfin, en agrandissant les courbes d'évolution réaliste des raies satellites sur les deux premiers mètres, on pourrait voir que les raies évoluent de façon exactement antisymétrique. Ce phénomène est un effet transitoire supplémentaire traduisant le rassemblement par paquets du faisceau d'électrons initialement monocinétique.

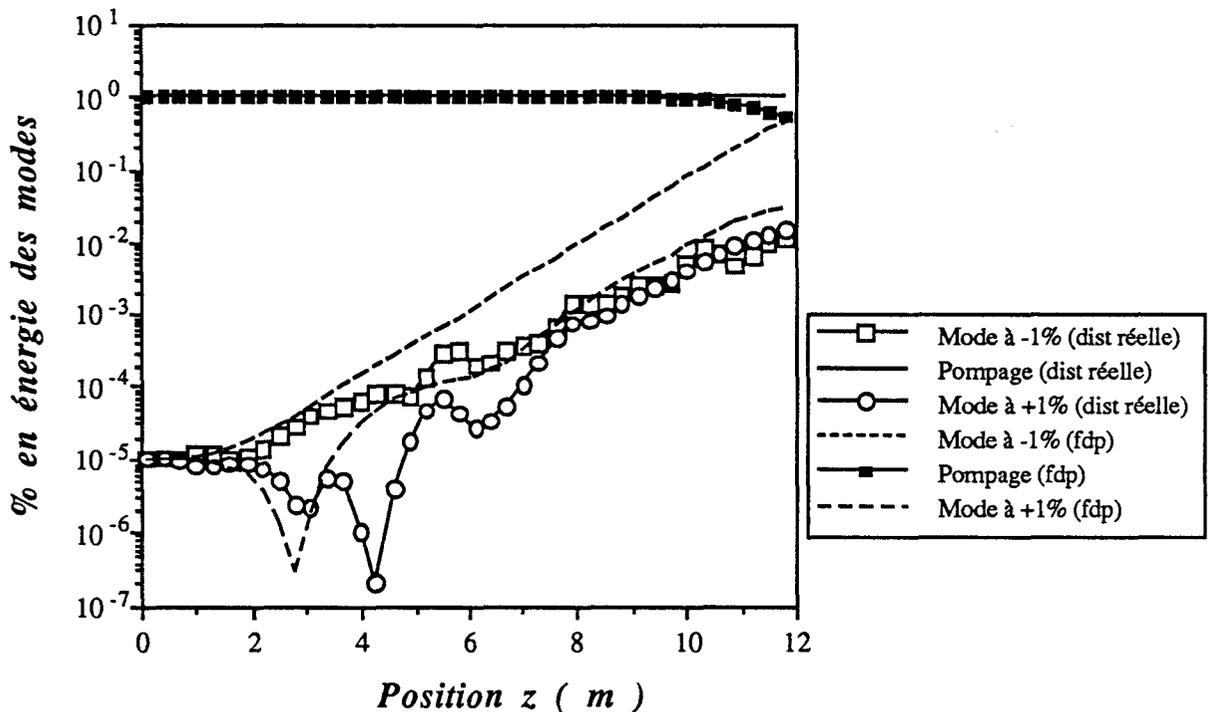


Figure III. 7. Comparaison de la croissance de deux modes symétriques par rapport au mode de pompage avec une distribution réaliste (dist réelle) et une distribution "fond de puits". $E = 1$ mJ, $Q=50$ nC, $\gamma=8$, $\lambda_w=2.5$ cm.

III. B. b. 2. Examen des hypothèses d'équilibre et de localisation des électrons en fond de puits

Dans l'exemple précédent, nous nous sommes attachés à comparer l'évolution du champ laser et plus particulièrement celle des raies satellites. Cette comparaison serait incomplète sans décrire le comportement des électrons dans la même situation. Comme nous l'avons déjà montré, il s'agit de 2 aspects indissociables.

Plus précisément, nous allons d'abord montrer qu'un équilibre est effectivement atteint au cours de l'interaction du faisceau d'électrons avec un mode laser unique en saturation. Nous verrons ensuite que, par contre, l'hypothèse des électrons en fonds de puits est trop restrictive pour décrire complètement le phénomène des raies satellites. Il s'agira alors d'élargir le contexte du calcul perturbatif.

Position des électrons dans l'espace
des phases . $Q = 50 \text{ nC}$. $E = 1 \text{ mJ}$.

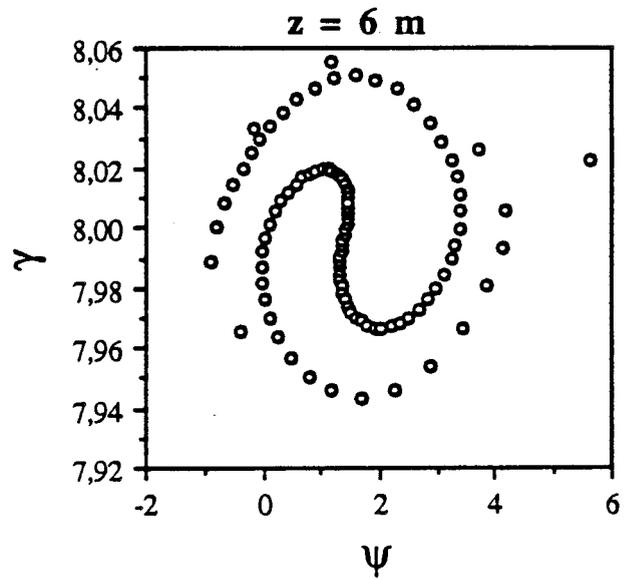
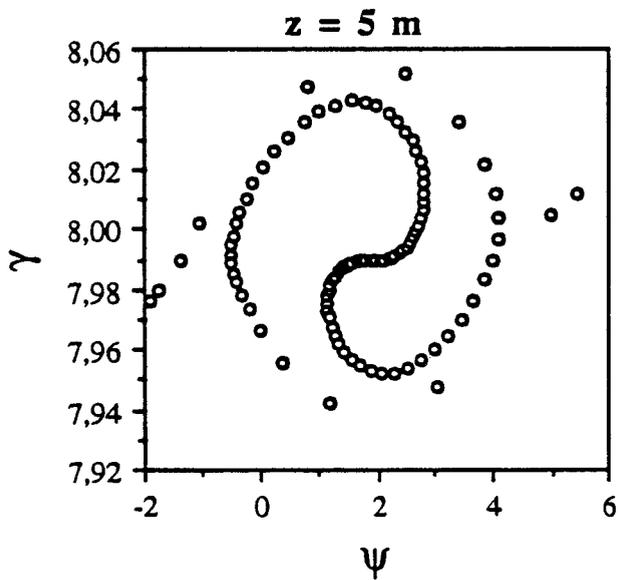
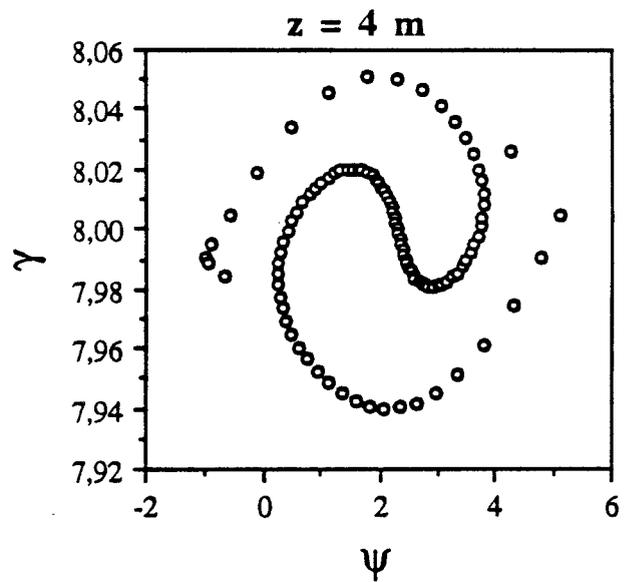
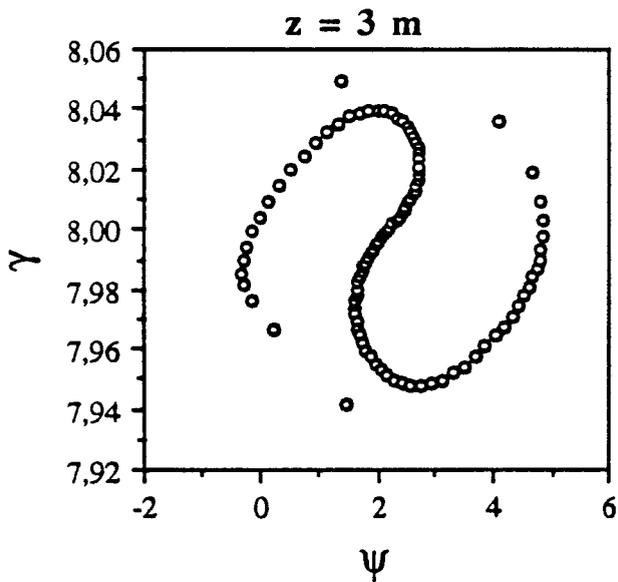
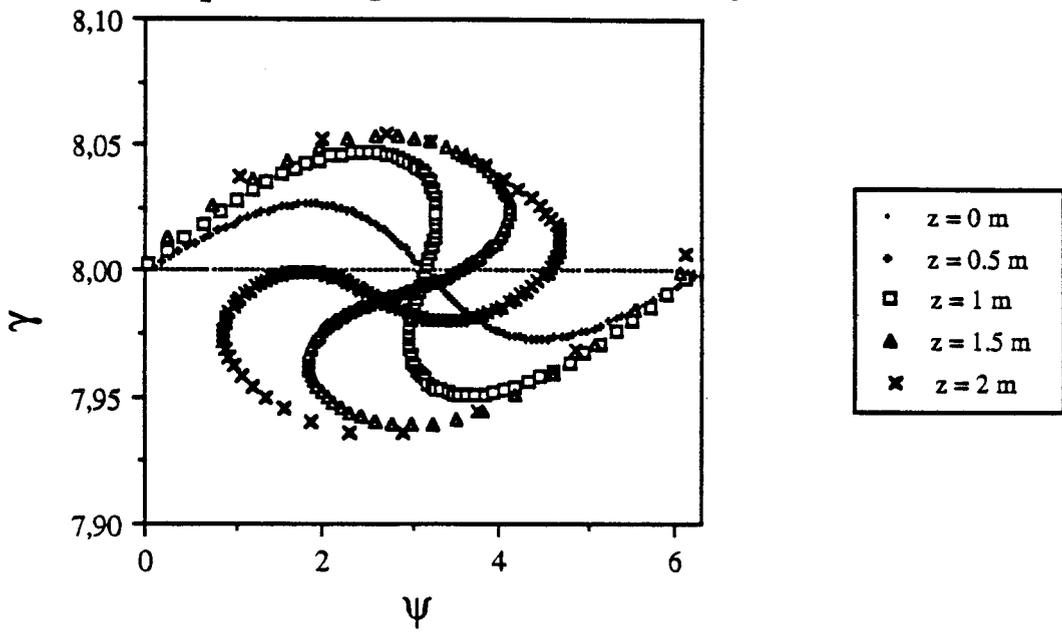


Figure III. 8 : Mouvement réel des électrons dans l'espace des phases en présence d'un mode unique en saturation.

* Notion de quasi-équilibre

Les trajectoires électroniques dans l'espace des phases ont été décrites au chapitre II dans différents cas de figure. Afin de fixer les idées, nous allons d'abord analyser l'évolution des électrons dans l'espace des phases en présence d'un mode en saturation. Pour cela, une simulation monochromatique est réalisée dans des conditions identiques à celles du paragraphe précédent où notre intérêt se portait sur les modes satellites uniquement.

Injection des électrons

La condition d'injection sur l'énergie des électrons (III-50) n'a pas été choisie innocemment. En effet, elle correspond à celle d'un électron résonant lorsque la dérivée de la phase du champ laser est nulle. Nous avons vu, dans le cas "fond de puits", que la phase varie lentement à l'échelle d'un onduleur classique, il en résulte un décalage de l'énergie résonante (III-45) petit devant la hauteur de la bulle. Cela reste le cas avec une distribution réaliste comme nous allons le montrer bientôt.

Grâce à la condition (III-50), les électrons sont donc injectés dans l'espace des phases avec une énergie très proche de l'énergie résonante.

La figure III. 8 illustre ce propos. Elle donne la position dans l'espace des phases d'une centaine d'électrons à différents instants de leur traversée de l'onduleur. La position de la séparatrice est ici bien délimitée et la hauteur en énergie de la "bulle" est environ 1,5 %. Initialement, dans notre exemple, les électrons sont injectés très près de l'axe horizontal de la "bulle" de sorte que la majorité d'entre-eux est piégée dans le puits. En réalité, cela n'est pas toujours le cas. En effet, l'énergie résonante (donnant la position en énergie de la "bulle") dépend de la fréquence du mode en saturation. Typiquement, positionner la fréquence du mode en saturation au maximum de gain linéaire est équivalent à injecter les électrons environ au tiers de la demi-hauteur de la bulle. Dans ce cas, certains électrons ne sont plus piégés ; leur trajectoire est proche de la séparatrice mais à l'extérieur de la "bulle de piégeage". La fraction des électrons non piégés étant beaucoup plus petite que celle des électrons piégés, on néglige ici leur contribution.

Rotation des électrons

A l'intérieur de la zone délimitée par la séparatrice, les électrons tournent d'autant plus lentement qu'ils sont éloignés du point résonant autour duquel l'approximation "fonds de puits" est valable (figure III. 8). Au voisinage du point résonant, l'ensemble

des électrons tournent à la même fréquence de rotation Ω_0 (c'est l'approximation aux angles petits pour un pendule) ; ceci se traduit sur la position instantanée des électrons dans l'espace des phases, par l'existence d'un "barreau d'électrons" (ici la longueur synchrotron est environ 3 m).

En s'écartant du point résonant, la fréquence de rotation diminue de façon monotone de Ω_0 en fond de puits à une valeur nulle sur la séparatrice (le pendule est en position verticale instable). Ceci explique l'aspect en forme de "galaxie" de la position instantanée des électrons. La fréquence de rotation des électrons en fonction de leur écart au point résonant sera calculée précisément par la suite.

Le voisinage de la séparatrice est une zone très instable et donc très sensible aux fluctuations numériques de sorte que certains électrons initialement piégés peuvent se retrouver non piégés au bout de quelques mètres d'onduleur du simple fait d'une précision numérique insuffisante (voir figure III. 8 en $z=6m$).

Quasi-équilibre

Le calcul analytique a montré que l'équilibre entre le faisceau d'électrons et le mode en saturation implique l'égalité de la dérivée de la phase du mode et de l'opposé de la dérivée de la phase moyenne des électrons. Ceci nous fournit un critère pour tester l'évolution de la distribution réelle.

La figure III. 8 montre que la rotation des électrons dans l'espace des phases s'accompagne d'un mouvement de translation d'ensemble le long de l'axe en ψ . Cette propriété apparaît clairement en traçant la phase moyenne de l'ensemble des électrons en fonction de la position dans l'onduleur (figure III. 9) et la dérivée de cette phase (figure III. 10). On voit que la dérivée de la phase moyenne des électrons oscille autour d'une valeur moyenne qu'elle atteint après 2 m d'onduleur environ ; ce qui correspond à l'évolution initialement antisymétrique des raies satellites au début de l'onduleur constaté sur la figure III. 7.

On a aussi reporté sur ces graphes la phase et la dérivée de la phase du mode en saturation. L'évolution de la phase du laser dans l'onduleur est parallèle à celle de l'opposé de la phase moyenne des électrons. Il faut noter que, par ailleurs, la dérivée de la phase du laser est beaucoup plus stable que celle de la phase moyenne des électrons. Pour la suite, nous noterons $\langle v_r \rangle$ la moyenne de la dérivée de la phase pour le laser et pour les électrons. Ici, $\langle v_r \rangle$ est environ égale à 0.3 m^{-1} , or la valeur correspondante de v_r lorsque les électrons sont injectés sur une trajectoire d'équilibre en "fond de puits" était 0.7 m^{-1} .

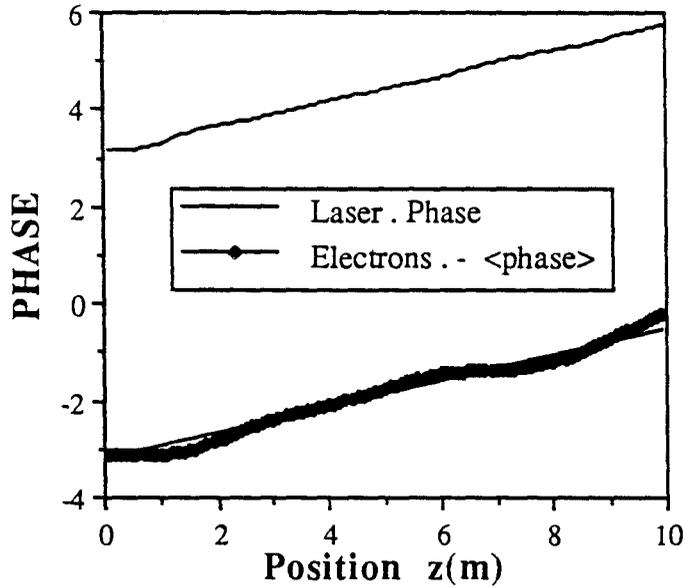


Figure III. 9. Evolution de la phase du laser et de l'opposé de la moyenne des phases des électrons.

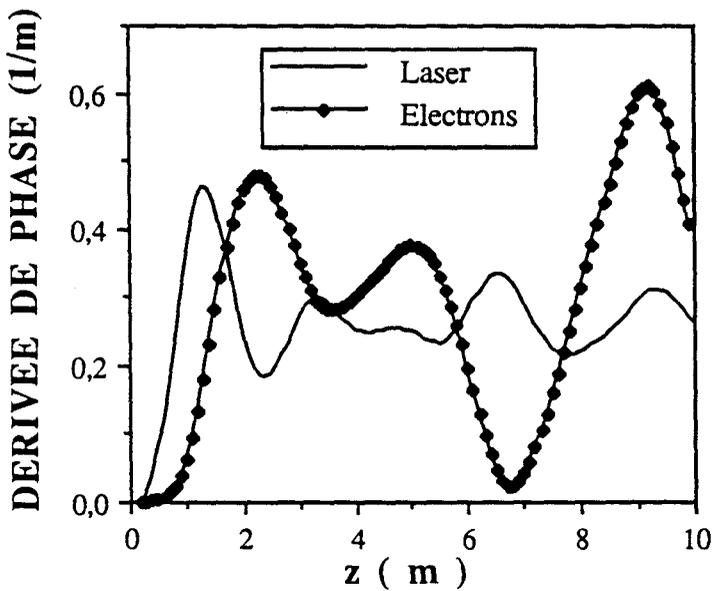


Figure III. 10. Dérivée de la phase du champ laser et opposé de la dérivée de la phase moyenne des électrons.

Ainsi, le critère d'équilibre, selon lequel la dérivée de la phase moyenne des électrons est égale à l'opposé de la dérivée de la phase du laser, se trouve vérifié avec une distribution électronique réaliste. Cet équilibre n'est pas aussi parfait que celui décrit analytiquement ; c'est pourquoi nous parlerons ici plutôt de "quasi-équilibre". Le "quasi-

équilibre" n'est atteint qu'après quelques mètres d'onduleur et ne concerne par conséquent que le régime asymptotique décrit auparavant. Son domaine de validité est celui des ondulateurs longs (ici avec nos paramètres $L_w > 2m$).

* L'hypothèse "fonds de puits"

Après avoir constaté numériquement l'existence d'un "quasi-équilibre", nous allons tenter de caractériser cet équilibre. En premier lieu, il s'agit de déterminer la validité de l'hypothèse "fond de puits". Pour cela, on dispose des paramètres pertinents que le calcul analytique a révélés c'est à dire la dérivée de la phase que nous avons appelée v_r^0 en "fond de puits" et la fréquence de rotation des électrons en fond de puits Ω_0 . La donnée de ces deux paramètres est-elle suffisante pour décrire l'évolution des raies satellites en régime asymptotique dans le cas réel grâce à la matrice de couplage?

Le calcul analytique a montré que la dérivée de la phase v_r^0 d'équilibre en "fond de puits" s'avère être proportionnelle à la densité électronique du faisceau et inversement proportionnelle à l'amplitude du mode de pompage. Il est intéressant de voir si ces lois de proportionnalité sont aussi vérifiées avec la moyenne de la dérivée de phase $\langle v_r \rangle$ du "quasi-équilibre". $\langle v_r \rangle$ a donc été déterminée pour une série de simulations monochromatiques dans les conditions précédentes en variant la charge de l'impulsion tout en maintenant l'énergie du mode central constante puis en variant l'amplitude du mode central en maintenant la charge constante. $\langle v_r \rangle$ est ici calculée en faisant la moyenne de la dérivée de la phase du champ laser. Les figures III. 11 et III. 12 montrent la dérivée de la phase $\langle v_r \rangle$ en fonction de l'amplitude du mode central et de la charge de l'impulsion respectivement. Les lois de proportionnalités sont bien vérifiées avec une distribution réelle en régime asymptotique. Toutefois, lorsque l'amplitude du mode central devient trop faible, le phénomène des raies satellites disparaît et $\langle v_r \rangle$ n'est plus proportionnelle à l'amplitude du mode central.

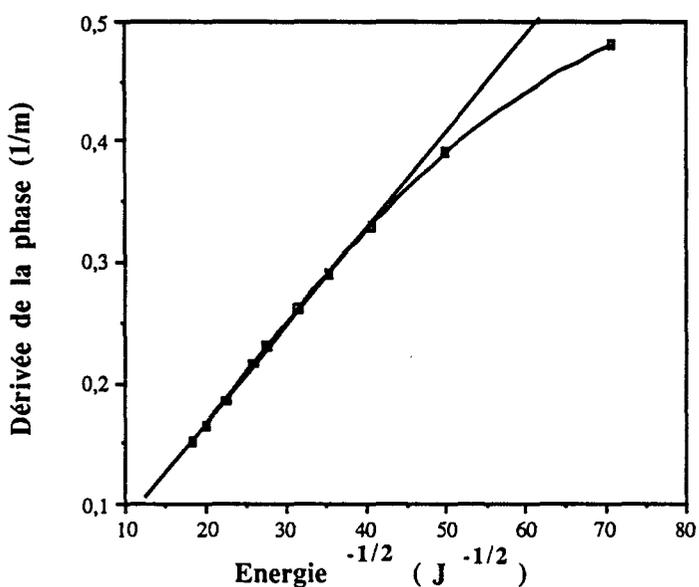


Figure III. 11. Afin de tester le quasi-équilibre, on vérifie la loi de proportionnalité de la valeur moyenne de la dérivée de la phase du champ laser avec l'inverse de la racine de l'énergie du mode de pompage. Cette loi se trouve vérifiée tant que l'énergie du mode de pompage est suffisante pour générer des modes satellites (divergence de la courbe avec la droite moyenne).

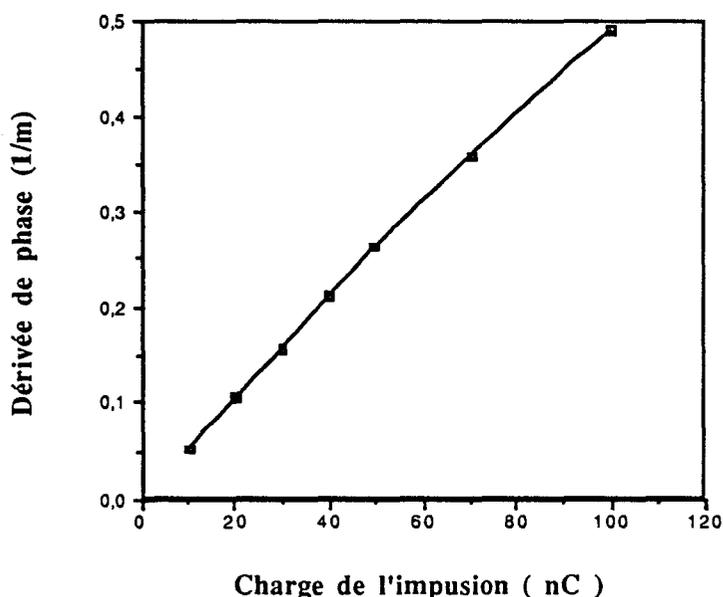


Figure III. 12. De même, la proportionnalité de la valeur moyenne de la dérivée de la phase du champ laser avec la densité électronique est vérifiée.

La dérivée de la phase du champ laser ou de la phase moyenne des électrons $\langle v_r \rangle$ est une grandeur facilement accessible dans la simulation. Il n'en est pas de même pour la fréquence de rotation Ω_0 qui n'est pas une grandeur directement mesurable. Cependant, il

existe une manière indirecte de vérifier les lois de proportionnalité de la fréquence de rotation. Il s'agit de tester la dépendance des paramètres $\langle v_r \rangle$ et Ω_0 avec l'énergie de l'impulsion laser E_0 , la densité électronique et l'énergie des électrons γ en variant ces 3 dernières grandeurs de façon à maintenir $\langle v_r \rangle$ et Ω_0 constants.

Pour réaliser cette condition à partir du triplet (E_0, γ_0, Q_0) et en multipliant l'énergie laser par a , il faut multiplier l'énergie des électrons par $a^{1/4}$ et la charge de l'impulsion par $a^{3/4}$:

$$\begin{aligned} E &= a E_0 \\ \gamma &= a^{1/4} \gamma_0 \\ \rho &= a^{3/4} \rho_0 \end{aligned} \quad (\text{III-51})$$

Ces relations se trouvent parfaitement vérifiées dans toutes les simulations sur une large gamme de paramètres y compris dans les cas où les raies satellites n'apparaissent pas (en régime linéaire par exemple). En fait, aucune propriété sur les raies satellites ne peut en être déduite. En effet, en remplaçant les relations (III-51) dans les équations de Maxwell et de Vlasov, on voit qu'elles sont toujours vérifiées (quel que soit le régime de fonctionnement). Par conséquent, il s'agit d'une loi d'échelle non triviale.

Lorsque le "quasi-équilibre" est réalisé, la dérivée moyenne de la phase du laser $\langle v_r \rangle$ suit bien les lois de proportionnalité que nous attendions d'après le calcul analytique. Afin de tester la validité de la matrice de couplage en régime asymptotique, le taux de croissance des raies satellites a par ailleurs été comparé en régime asymptotique dans les deux cas suivants :

- 1) par simulation avec une distribution réaliste
- 2) par intégration de la matrice de couplage en choisissant pour fréquence de rotation la fréquence de rotation en fond de puits Ω_0 et pour dérivée de phase la valeur moyenne de la dérivée de la phase du champ laser $\langle v_r \rangle$

Cette approche infructueuse a montré qu'il n'est pas possible de considérer l'ensemble des électrons concentrés au voisinage des points résonants dans une situation réaliste en supposant que la fréquence de rotation de chacun des électrons est égale à la fréquence en fond de puits. Il n'en demeure pas moins qu'un équilibre est atteint. La compréhension du problème des raies satellites passe donc par une nouvelle définition de l'équilibre tenant compte des électrons éloignés des points résonants.

III. B. c. Caractérisation du quasi-équilibre

La description de l'équilibre s'était jusqu'à présent limitée aux électrons proches des points résonants. Nous montrerons d'abord qu'il existe des équilibres en dehors du "fond du puits" et nous calculerons ensuite numériquement le gain des raies satellites pour un de ces équilibres. On interprétera alors le phénomène des raies satellites en régime asymptotique de façon plus générale.

III. B. c. 1. L'équilibre en dehors du "fond de puits"

Nous examinons maintenant l'équilibre d'ordre 0 quand les électrons ne sont à priori plus concentrés autour des points résonants mais peuvent au contraire se trouver en n'importe quel point de la "bulle" de piégeage. Rappelons la forme du mode de pompe E_0 :

$$E_0 = |E_0| \exp[-i v_r z] \quad \text{et} \quad E_{n \neq 0} = 0$$

* La distribution électronique d'équilibre

Afin de calculer analytiquement l'évolution des raies satellites, les équations de Vlasov et de Maxwell écrites en variables $\psi_c = \psi - \psi_r$ et $\Gamma_c = \gamma^2 - \gamma_r^2$ centrées sur les points résonants ont été linéarisées autour des points résonants dans le calcul précédent.

Rappelons que les équations du mouvement (III-2) ont permis de définir de façon générale la position des points résonants dont l'expression est la suivante :

$$\left[\begin{array}{l} \bar{\psi}_r = \pi + 2\pi l \quad \text{où} \quad l \in [0, N-1] \\ \Gamma_r = \frac{k_L (1 + \frac{a_w^2}{2})}{2(k_w - v_r)} \end{array} \right. \quad \text{(III-52)}$$

Nous abandonnons maintenant l'hypothèse des électrons en "fond de puits" pour considérer des électrons éloignés des points résonants (ψ_c varie alors de $-\pi$ à π). Il n'est donc plus possible de linéariser les équations en ψ_c .

Par contre, la hauteur relative en énergie de la séparatrice est de l'ordre de 2 % avec les paramètres usuels ; il est donc tout à fait raisonnable de linéariser les équations en Γ_c . Ainsi, d'après (III-11), en présence d'un champ laser monochromatique d'amplitude

constante $|E_0|$ et à dérivée de phase constante v_r , la distribution électronique $h(z, \psi_c, \Gamma_c)$ vérifie l'équation de Vlasov suivante :

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{k_L}{2 \Gamma_r^2} (1 + \frac{a_w^2}{2}) \Gamma_c \frac{\partial}{\partial \psi_c} - \frac{a_w K_1}{2} |E_0| \sin(\psi_c) \frac{\partial}{\partial \Gamma_c} \right] h_p(z, \psi_c, \Gamma_c) = 0 \quad (\text{III-53})$$

Cette équation admet des solutions d'équilibre. En posant :

$$\frac{\partial h_p}{\partial z} = 0$$

il s'agit d'une équation à variables séparées dont la solution est une fonction du type suivant :

$$h_p^0(\psi_c, \Gamma_c) = f\left(\frac{a_w K_1}{2} |E_0| (1 - \cos \psi_c) + \frac{k_L}{2 \Gamma_r^2} \left(1 + \frac{a_w^2}{2}\right) \Gamma_c^2\right) \quad (\text{III-54})$$

Les distributions électroniques d'équilibre sont des fonctions constantes le long des trajectoires des électrons dans l'espace des phases définies par les équations (III-6). On étend donc ici les résultats obtenus dans le cas particulier du "fond de puits".

* Equilibre du champ laser

De même que l'équation de Vlasov ne peut plus être linéarisée en ψ_c , l'équation de Maxwell (III-18) donnant l'évolution du mode en saturation s'écrit maintenant à partir (III-17) :

$$i \frac{\partial E_0}{\partial z} = - \frac{\mu_0 e^2 c}{4 \pi} \frac{a_w K_1}{\gamma_r} \exp[-i v_r z] \int_1^{+\infty} d\Gamma_c \int_{-\pi}^{-\pi} d\psi_c h_p^0(\psi_c, \Gamma_c) \exp[-i \psi_c]$$

La distribution d'équilibre (III-54) est une fonction paire en ψ_c :

$$\int_{-\pi}^{-\pi} d\psi_c h_p^0(\psi_c, \Gamma_c) \sin[\psi_c] = 0$$

Par conséquent, l'amplitude du champ laser est constante. Par ailleurs, la dérivée de sa phase v_r diffère de la valeur calculée en "fond de puits" :

$$v_r = - \frac{\mu_0 e^2}{4 \pi} \frac{a_w K_1}{\gamma_r |E_0|} \int_{1-\Gamma_r}^{+\infty} d\Gamma_c \int_{-\pi}^{+\pi} d\psi_c h_p^0(\psi_c, \Gamma_c) \cos \psi_c \quad (\text{III-55})$$

Le calcul analytique a été mené grâce à l'équilibre très particulier où la distribution électronique est constante le long d'une trajectoire proche du point résonant. Cependant, l'existence des trajectoires en dehors du fond de puits atteste que l'équilibre peut être en réalité beaucoup plus compliqué. Il suffit en effet que la distribution électronique correspondante soit constante le long de n'importe quelle trajectoire électronique de l'espace des phases.

Le quasi-équilibre ne se réduit donc pas à une trajectoire unique mais peut au contraire être décrit par un faisceau de trajectoires. En présence d'une telle distribution d'équilibre, le champ laser a une amplitude constante. La dérivée de sa phase est constante mais dépend de la forme de la distribution d'équilibre dans l'espace des phases.

Il est difficile de caractériser le "quasi-équilibre" que le système atteint après quelques mètres d'interaction autrement que par la dérivée de la phase du champ laser égale en moyenne à la dérivée de la moyenne des phases des électrons. Il faudrait pour cela être capable d'affecter un poids à chacune des trajectoires de façon à calculer explicitement la distribution h_p^0 . Par ailleurs, le calcul de la croissance des raies satellites devient très lourd hors du voisinage des points résonants. Cependant, une approche numérique du gain des raies satellites en régime asymptotique est possible en choisissant une distribution d'équilibre élémentaire en l'occurrence celle où l'ensemble des électrons est réparti le long d'une trajectoire unique.

III. B. c. 2. Injection des électrons sur une trajectoire d'équilibre

Dans un premier temps, nous allons calculer précisément les caractéristiques d'un équilibre où les électrons occupent une seule trajectoire en dehors du "fond du puits". Une approche numérique du gain des raies satellites montrera ensuite que le phénomène des raies satellites en régime asymptotique ne peut être abordé simplement en supposant que les électrons oscillent dans les puits à une fréquence unique.

* Caractéristiques de l'équilibre

Définissons une trajectoire d'équilibre par le rayon ρ_0 :

$$\frac{a_w K_1}{2} |E_0| (1 - \cos \psi_c) + \frac{k_L}{2 \Gamma_r^2} \left(1 + \frac{a_w^2}{2}\right) \Gamma_c^2 = \rho_0^2 \quad (\text{III-56})$$

La distribution correspondante uniforme le long d'une trajectoire de rayon ρ_0 s'écrit sous la forme d'une fonction de Dirac δ :

$$h_p^0(\psi_c, \Gamma_c) = a \delta \left[\frac{a_w K_1}{2} |E_0| (1 - \cos \psi_c) + \frac{k_L}{2 \Gamma_r^2} \left(1 + \frac{a_w^2}{2}\right) \Gamma_c^2 - \rho_0^2 \right] \quad (\text{III-57})$$

Le facteur de normalisation a se déduit de la normalisation (III-15) de h_p^0 soit :

$$a = \frac{\pi \rho_e \rho_0}{m c a_w K_1 |E_0|} \sqrt{\frac{k_w}{2 \Gamma_r}} \left[\int_0^1 dx [(1-x^2)(\alpha-1+x^2)]^{-1/2} \right]^{-1} \quad (\text{III-58})$$

où

$$\alpha = \frac{a_w K_1 |E_0|}{\rho_0^2} \quad (\text{III-59})$$

La distribution d'équilibre h_p^0 permet de calculer la dérivée de la phase du champ laser v_r à partir de son expression générale (III-55). On exprime ici v_r en fonction de sa valeur en "fond de puits" v_r^0 :

$$v_r = v_r^0 \left[1 - 2 \frac{F(1-\alpha)}{\alpha} \right]$$

$$\text{où} \quad F(C) = \frac{\int_0^1 dx [1-x^2]^{1/2} [C+x^2]^{-1/2}}{\int_0^1 [1-x^2]^{-1/2} [C+x^2]^{-1/2}} \quad (\text{III-60})$$

La dérivée de phase v_r étant proportionnelle à sa valeur en fond de puits v_r^0 , elle vérifie donc bien les mêmes lois de proportionnalité avec la densité électronique et l'énergies du mode de pompage.

Grâce à l'équation de la trajectoire (III-60), la constante α dépendante du rayon de la trajectoire peut encore être exprimée en fonction du rayon en ψ de la trajectoire ψ_{rayon}

c'est à dire la distance du point où la trajectoire coupe l'axe des ψ dans l'espace des phases au point résonant. Cette dernière distance est commode pour évaluer la taille de la trajectoire et varie bien entendu de 0 en "fond de puits" à π sur la séparatrice :

$$\alpha = \frac{2}{1 - \cos(\psi_{\text{rayon}} - \pi)} \quad (\text{III-61})$$

α tend vers 0 lorsque la trajectoire s'approche de la séparatrice et vers l'infini en "fond de puits".

* Gain des raies satellites

Dans la simulation, l'injection des électrons sur une trajectoire d'équilibre est assez délicate. La position des points résonants est parfaitement définie (III. 52) par le calcul de la dérivée de la phase du champ laser associée à cette trajectoire (III-60) (figure III. 13).

En pratique, la position initiale des électrons est calculée par intégration des équations du mouvement sur une période de rotation des électrons dans l'espace des phases en tenant compte de la dérivée de la phase du champ laser (cette condition est impérative sinon l'équilibre est rapidement rompu).

La période de rotation des électrons dépend de la taille des trajectoires (figure III. 14). A l'image du pendule, elle varie de sa période en fond de puits (oscillations du pendule dans l'approximation des angles petits) à une valeur infinie pour un électron s'approchant infiniment près de la séparatrice (le pendule met un temps infini pour s'approcher infiniment près de sa position haute instable). Les électrons sont positionnés sur une trajectoire à intervalle de temps égaux sur une durée égale à une période de la trajectoire.

La stabilité de l'équilibre au cours de l'interaction est testée, comme nous l'avons fait pour les simulations en fonds de puits, en vérifiant l'égalité de la dérivée de la phase du mode de pompage à la dérivée de la moyenne des phases électroniques. Les simulations ont montré que dans la plupart des cas, l'équilibre est remarquablement maintenu sur plusieurs mètres d'onduleur comme en atteste la figure III. 15. Seules les trajectoires très proches de la séparatrice posent des problèmes de stabilité.

Le calcul du gain des raies satellites pour diverses trajectoires a mis en évidence l'apparition des raies satellites à des fréquences inattendues. L'injection des électrons sur une trajectoire proche des points résonants fait bien apparaître les raies satellites à l'écart relatif en fréquence démontré dans le calcul analytique proportionnel à la fréquence de rotation des électrons en fond de puits Ω_0 (figure III. 16) :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Omega_0}{k_w} \quad (\text{III-62})$$

Par contre, dans le cas d'une injection sur une trajectoire de rayon suffisamment important pour que l'approximation "fond de puits" ne soit plus valable (typiquement de rayon en ψ supérieur à 1), des résonances apparaissent aux fréquences harmoniques du rapport de la fréquence synchrotron de la trajectoire considérée et k_w . Les raies satellites présentent des pics aux écarts relatifs en fréquence suivants (figure III. 16) :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = i \frac{\Omega}{k_w} \quad \text{où } i = 1, 2, 3 \dots \quad (\text{III-63})$$

Ces résonances ont pour origine l'anharmonicité des trajectoires des électrons éloignés des points résonants. En effet, l'augmentation de la taille des trajectoires se traduit d'une part par une diminution de la fréquence synchrotron et d'autre part par une augmentation du nombre de composantes spectrales de la trajectoire comme le montre la figure III. 17. La densité des composantes spectrales c'est à dire le nombre de composantes spectrales par intervalle de fréquence croît au fur et à mesure que la trajectoire se rapproche de la séparatrice. A la limite, elle devient infinie pour une trajectoire infiniment proche de la séparatrice.

Pour le spectre, cette densification se traduit par une augmentation et un resserrement des pics de résonance jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de les discriminer. Cependant, quel que soit la taille de la trajectoire, la largeur spectrale de chacune des raies satellites demeure approximativement la même qu'en fond de puits.

Cette analyse d'un état d'équilibre élémentaire constitué par une seule trajectoire d'équilibre met en évidence la complexité du phénomène de génération de raies satellites en régime asymptotique. Dans le principe, il est possible de généraliser l'approche analytique harmonique (supposant les électrons en fonds de puits) en intégrant les harmoniques dans ce calcul. Cependant, cette approche ne permettrait pas de prendre en compte les trajectoires infiniment proches de la séparatrice dont le nombre de composantes spectrales est infini. Il apparaît donc déraisonnable d'aborder analytiquement l'étude de la génération de raies satellites par une décomposition de Fourier des trajectoires électroniques (une approche de ce type a été développée par S.Riyopoulos dans la référence [51]).

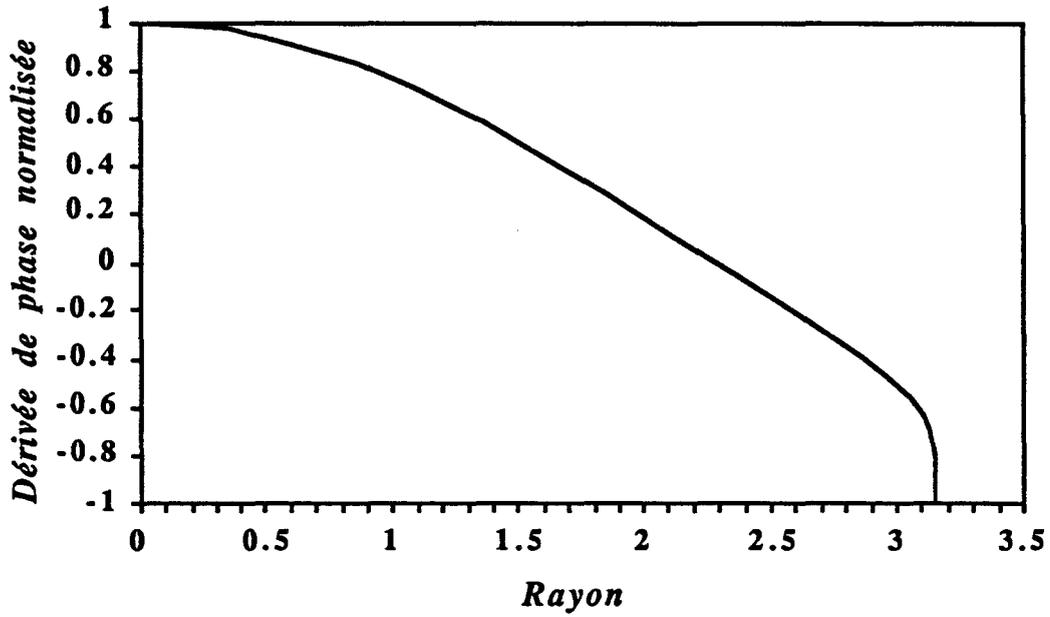


Figure III. 13. Suivant la taille de la trajectoire d'équilibre, mesurée ici par son rayon en ψ , la dérivée de la phase du champ laser v_r (rapportée à sa valeur en fond de puits v_r^0) varie de la valeur en fond de puits à son opposé, infiniment près de la séparatrice.

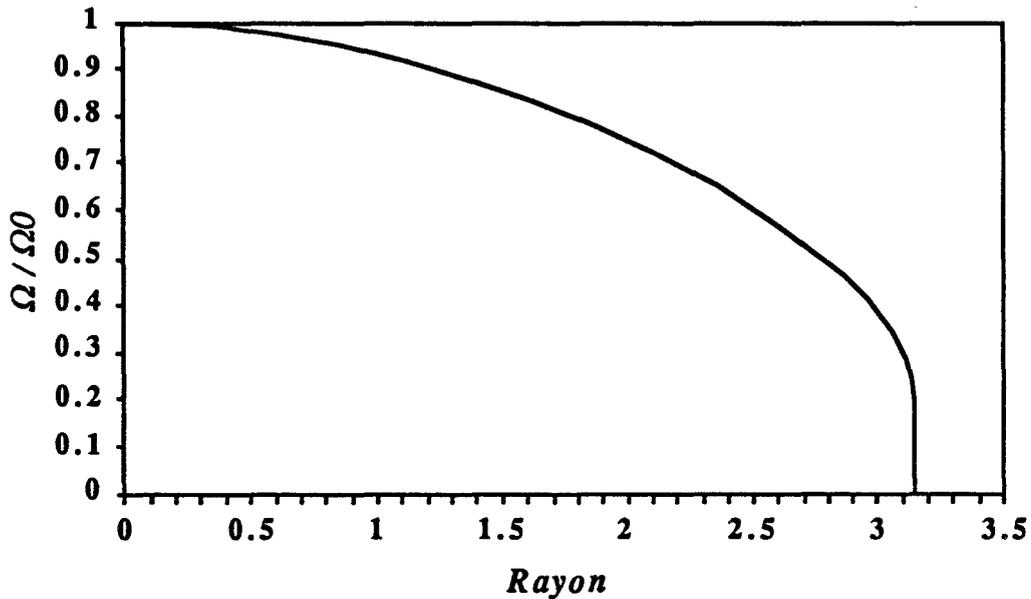


Figure III. 14. Suivant la taille de la trajectoire d'équilibre, mesurée ici par son rayon en ψ , la fréquence de rotation des électrons Ω (rapportée ici à la fréquence de rotation Ω_0 en fond de puits) varie de Ω_0 pour un rayon typiquement inférieur à 0.5 à une valeur nulle, qu'elle atteint asymptotiquement quand la trajectoire s'approche très près de la séparatrice.

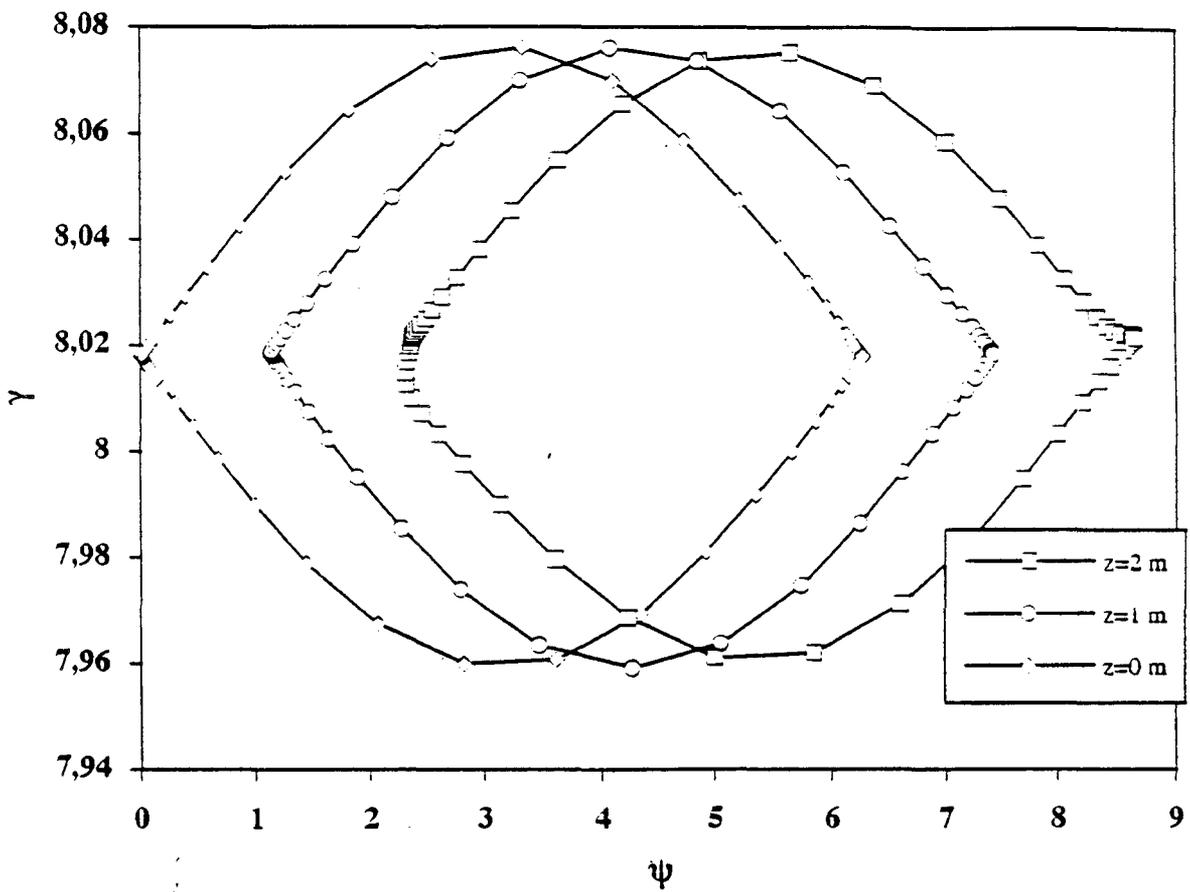


Figure III. 15. Dans la simulation, les électrons sont initialement injectés uniformément sur une trajectoire d'équilibre, dans cet exemple, très proche de la séparatrice (le rayon en ψ vaut 3.14). L'examen de la position des électrons dans l'espace des phases pendant l'interaction (à chaque mètre) montre que l'équilibre est très stable même pour une trajectoire très proche de la séparatrice. Cet exemple représente cependant un cas limite et il est difficile de s'approcher plus près de la séparatrice.

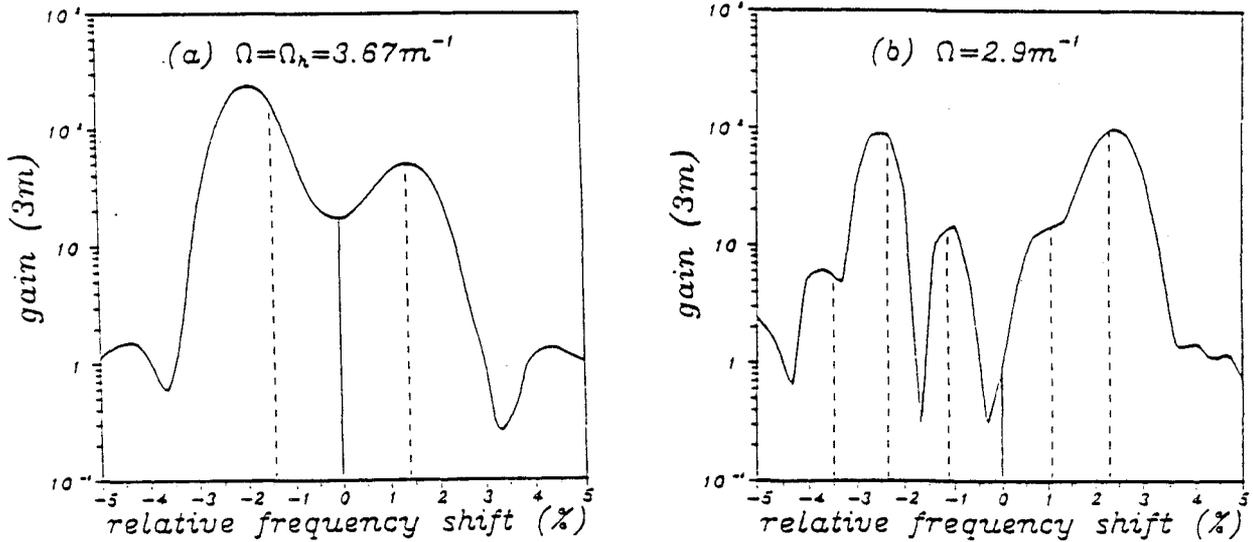
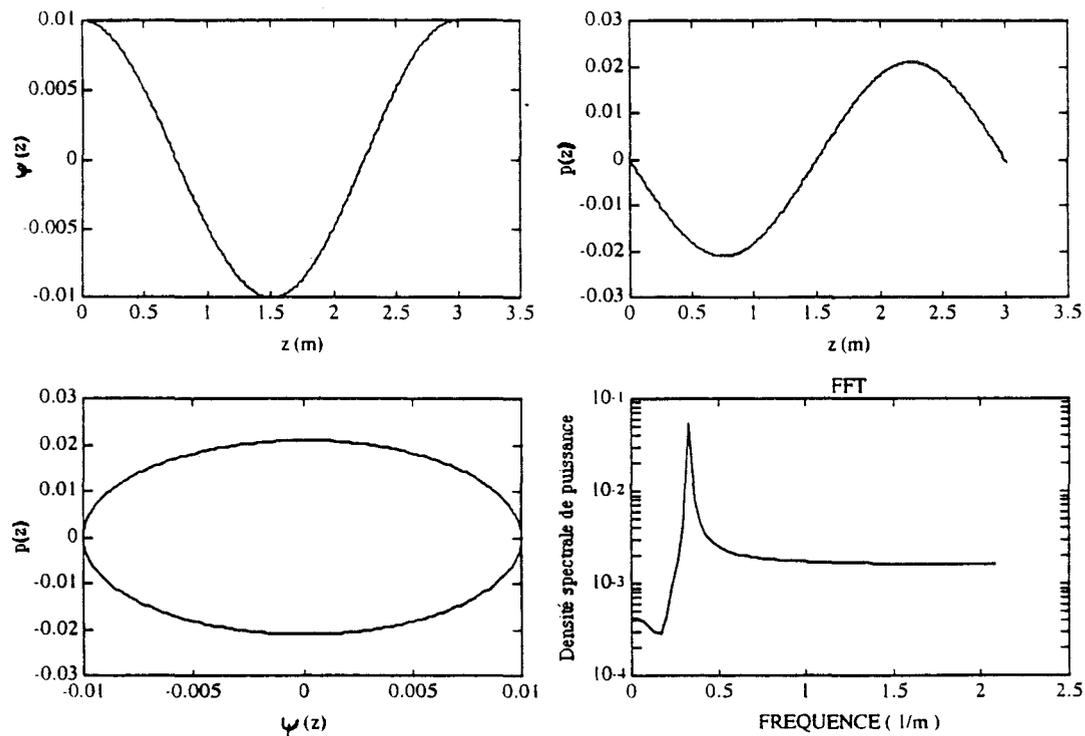


Figure III. 16. Gain des raies satellites en régime asymptotique avec injection des électrons sur une trajectoire d'équilibre (paramètres ELSA). Initialement, les modes adjacents au mode de pompage (au centre de la fenêtre spectrale) ont des amplitudes égales. La figure de gauche donne de gain obtenu avec une trajectoire proche du point résonant et la figure de droite, avec une trajectoire de rayon en ψ environ égal à 2.

Rayon $\psi = 0.01$. $L_s(\text{fdp}) = 3$ m . $L_s = 3$ m



Rayon $\psi = 3.141$. $L_s(\text{fdp}) = 3$ m . $L_s = 18.17$ m

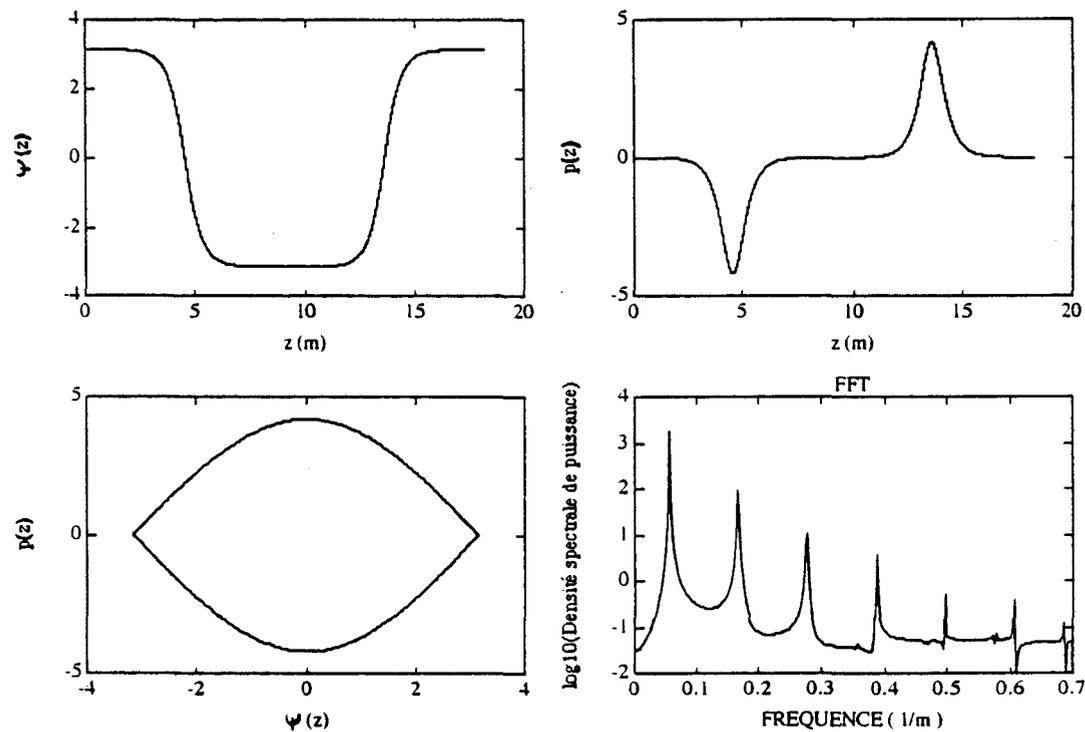


Figure III. 17. La transformée de Fourier en z des trajectoires met en évidence leur anharmonicité en dehors du domaine de validité de l'approximation "fond de puits". Ici, on calcule la transformée de Fourier de la phase $\psi(z)$. Avec l'augmentation du rayon en ψ , les composantes spectrales se densifient : ceci est dû à la diminution de la fréquence synchrotron, qui rapproche la composante fondamentale et ses harmoniques du mode de pompage, et aussi, à l'accentuation de l'anharmonicité de la trajectoire. Enfin, notons que les composantes spectrales occupent, pour les différents rayons, approximativement le même intervalle spectral (entre 0 et 0.7 m^{-1})

En conclusion, notre approche du phénomène des raies satellites couple un calcul analytique et la simulation numérique dans des conditions réalistes.

Dans une première partie, un modèle académique de la dynamique des raies satellites a été développé sur la base de deux hypothèses importantes. D'une part, les électrons ont été supposés localisés au voisinage des points résonants. D'autre part, nous avons supposé un état d'équilibre du système constitué par le faisceau d'électrons et un mode de pompage ; l'équilibre se compose d'un mode de pompage d'amplitude et de dérivée de phase constantes et d'une distribution électronique uniforme le long des trajectoires électroniques proches des points résonants.

L'introduction de raies satellites perturbe cet équilibre. Un calcul perturbatif au premier ordre a montré que la dynamique du système peut être décrite par un système d'équations différentielles simple liant les modes symétriques par rapport au mode de pompage. Les paramètres pertinents qui gèrent l'évolution des raies satellites sont la dérivée de la phase du mode de pompage et la fréquence d'oscillation des électrons en fond de puits. Il est important de rappeler que la simplicité du résultat acquis tient à l'hypothèse selon laquelle les électrons oscillent à la même fréquence (ie à l'existence d'un noyau en sinus) ; c'était le prix à payer pour accéder à une description de la dynamique des raies satellites.

L'intégration de la matrice de couplage a mis en évidence l'existence d'un régime transitoire pendant lequel les raies satellites évoluent de façon antisymétrique et d'un régime asymptotique se traduisant par une croissance exponentielle. La durée du régime transitoire étant de l'ordre de grandeur d'une période synchrotron, il ne peut être négligé dans le cas classique d'un onduleur court. Par conséquent, il apparaît maintenant que l'étude des raies satellites ne peut se limiter au régime asymptotique.

La seconde partie est consacrée à la connexion du calcul analytique à l'évolution réelle des raies satellites issue des simulations numériques. Le comportement des raies satellites dans le cas réel s'est avéré similaire au comportement mis à jour grâce au calcul ; en particulier, il existe un régime transitoire identique dont la durée est du même ordre de grandeur. Cependant, il n'a pas été possible de réduire l'évolution réelle des raies satellites aux seuls paramètres que sont la dérivée de la phase du champ laser et la fréquence de rotation des électrons en fond de puits.

La recherche d'un état d'équilibre a montré qu'un "quasi-équilibre" est effectivement atteint en régime asymptotique mais l'hypothèse des électrons proches des points résonants est insuffisante.

On peut décrire le quasi-équilibre en généralisant l'équilibre aux électrons éloignés des points résonants ; les distributions électroniques correspondantes sont des fonctions

constantes le long des trajectoires électroniques. En réalité, la distribution d'équilibre est difficilement accessible.

Cependant, les propriétés des raies satellites peuvent se comprendre numériquement à partir d'un équilibre élémentaire constitué d'une seule trajectoire. L'anharmonicité des trajectoires des électrons dans l'espace des phases fait apparaître des résonances sur le spectre aux harmoniques de la composante fondamentale égale au rapport de la période de l'onduleur et de la longueur synchrotron. Ces résonances sont d'autant plus denses que la trajectoire est proche de la séparatrice, endroit où le nombre de résonances devient infini. Cette extension en dehors du fond des puits confirme que l'approche harmonique (tous les électrons ont la même fréquence d'oscillation) est insuffisante pour décrire l'évolution complexe des raies satellites en régime asymptotique. Par cette approche simple, nous avons montré la richesse spectrale du phénomène.

La plupart des expériences de LEL utilisent un onduleur court. Par conséquent, les raies satellites voient la fin du régime transitoire ou tout au plus le début du régime asymptotique. Au chapitre suivant, le gain par passage des raies satellites sera analysé avec un onduleur court à partir de simulations à bas bruit numérique. Cette nouvelle approche complètera quantitativement notre modèle semi--analytique.

Néanmoins, il serait intéressant de disposer d'un calcul analytique de l'évolution des raies satellites pendant le régime transitoire ; ceci présenterait l'avantage de s'affranchir des problèmes numériques délicats inhérents aux simulations. Pour cela, il est nécessaire de connaître les trajectoires des électrons en présence d'un mode de pompage sans aucune hypothèse d'équilibre. Une solution consiste à trouver un développement polynômial en z des trajectoires des électrons pendant la durée de leur traversée de l'onduleur. L'évolution des raies satellites dans l'onduleur peut alors être déterminée par un calcul perturbatif au premier ordre du même type que celui réalisé dans ce chapitre. Une pré-étude a d'ores et déjà montré que le flot de trajectoires, y compris près de la séparatrice, peut être décrit sur un tiers de période synchrotron par un polynôme d'ordre 20. Ce développement reste insuffisant pour décrire l'évolution des raies satellites sur la longueur d'un onduleur classique. La description du régime transitoire est essentiellement limitée par l'ordre élevé des polynômes. La solution réside dans la méthode de calcul des polynômes.

CHAPITRE IV

INHIBITION DES RAIES SATELLITES

Le développement des raies satellites a été observé expérimentalement dès 1985 dans l'infrarouge sur le LEL de Los Alamos [52], sur les expériences de Columbia [53] et Stanford [54], puis plus récemment à l'UCSB [40]. L'expérience a montré que l'apparition des raies satellites s'accompagne d'instabilités du spectre bien que le processus d'élargissement spectral proprement dit n'ait été observé qu'à l'UCSB.

Très tôt, afin de supprimer les raies satellites, plusieurs méthodes ont été proposées à Los Alamos par R. W. Warren [55] : le filtrage optique qui atténue les raies satellites par les pertes, le désynchronisme de la cavité qui joue sur la synchronisation de l'impulsion laser et de l'impulsion électronique ou encore l'introduction d'un élément dispersif dans la cavité [52] (ce moyen actuellement utilisé semble donner de bons résultats).

Hormis le filtrage optique, ces méthodes sont avant tout adaptées à un LEL dont le faisceau est haché en micro-impulsions de durée courte (quelques ps) et inapplicables dans le cas d'un faisceau quasi-continu. Par ailleurs, elles ne touchent pas au principe même de l'interaction des électrons et du laser dans l'onduleur. Parallèlement, le souci d'une amélioration du rendement du laser a conduit à envisager une modification des caractéristiques de l'onduleur. La notion de tapering tout d'abord consiste en une diminution progressive de l'amplitude du champ magnétique statique. Si elle permet d'améliorer le rendement lorsque le spectre est monochromatique, son effet sur la génération de raies satellites demeure controversé. Ensuite, beaucoup plus récemment, D. Iracane a envisagé l'introduction d'une seconde périodicité dans l'onduleur. Le bi-onduleur s'est alors révélé un excellent moyen d'obtenir, à la fois, un spectre fin et une amélioration du rendement.

Notre but est ici d'analyser et si possible de quantifier les différentes méthodes permettant d'assurer la transition entre les régimes de spectre fin et de spectre large. Le filtrage des raies satellites est satisfaisant pour les applications nécessitant peu de puissance ; une connaissance plus approfondie de la position et du gain des raies satellites est cependant indispensable afin de définir les paramètres de filtrage. Au contraire, la notion de tapering est dédiée aux LEL de puissance. Nous tenterons de comprendre son effet sur la génération de raies satellites. Enfin, on examinera le développement des raies satellites dans un bi-onduleur puis dans un LEL dont l'énergie des électrons est modulée.

IV. A. METHODE DE DETERMINATION DES PARAMETRES DE FILTRAGE A PARTIR DE SIMULATIONS REALISTES A BAS BRUIT NUMERIQUE

L'approche semi-analytique des raies satellites est satisfaisante pour la compréhension du phénomène des raies satellites. Cependant, elle devient insuffisante dès qu'il est nécessaire de quantifier beaucoup plus précisément le gain des raies satellites dans le cas réaliste d'un fonctionnement en oscillateur avec un onduleur court et un faisceau d'électrons initialement monocinétique (conditions non "bunchées").

Afin de maîtriser l'apparition des raies satellites, de nouveaux moyens de caractériser leur développement doivent être mis en œuvre. Il serait par exemple intéressant d'optimiser le niveau de pertes pour atténuer les raies satellites sans avoir recours à des simulations systématiques sur plusieurs centaines de passages dont le coût numérique est important. Ceci implique une meilleure compréhension du développement des raies satellites.

Parallèlement aux simulations de l'évolution du spectre, les simulations à bas bruit numérique et la connaissance des propriétés des raies satellites ont rendu possible l'élaboration d'une méthode simple d'évaluation de la position et du gain des raies satellites à partir de simulations sur un seul passage. Il s'agira d'abord de vérifier le couplage de modes démontré dans l'hypothèse des électrons en fond de puits, puis d'exploiter cette propriété afin de quantifier le gain des raies satellites.

Une étude de gain en fonction de l'énergie du mode de pompage montrera alors l'existence d'un régime de génération de raies satellites.

IV. A. a. Vérification de la propriété de couplage des raies satellites. Méthode d'évaluation du gain des raies satellites

Les simulations à bas bruit numérique se sont révélées utiles au chapitre précédent dans l'examen de l'évolution des raies satellites dans l'onduleur à des fins de comparaison avec la théorie semi-analytique. Dans le cadre de cette étude, l'intérêt majeur de ce type de simulation réside dans la possibilité d'observer le développement des raies satellites au moment où celles-ci sont encore au niveau de bruit. La précision de ces simulations rend alors possible une analyse très fine du gain par passage des raies satellites en vue de gérer la transition entre spectre large et spectre fin. Nous allons utiliser cette opportunité afin d'examiner la croissance des raies satellites et les propriétés de couplage.

* Naissance des raies satellites

D'après les simulations de l'évolution du spectre sur plusieurs centaines de passages (Chapitre I), la croissance des raies satellites est concomitante à celle du mode de pompage (ie la raie fondamentale issue du régime linéaire). Celles-ci deviennent apparentes lorsque le mode de pompage atteint une amplitude comparable à l'énergie de saturation monochromatique du laser (à niveau de pertes donné).

Afin de reproduire les conditions de la génération de raies satellites, nous allons pour l'instant supposer une raie de pompage quasi-monochromatique d'énergie proche de l'énergie de saturation (cette hypothèse sera discutée dans la partie suivante). Dans la simulation, la raie fondamentale est réduite à un seul mode en saturation ; ceci signifie que la largeur en fréquence de la raie fondamentale est supposée inférieure à la finesse de l'échantillonnage du spectre soit environ 10^{-3} . La position en fréquence du mode de pompage est choisie au maximum de gain linéaire conformément à l'évolution naturelle du spectre.

Dans la réalité, le bruit est à l'origine du démarrage de l'instabilité. Cette situation est modélisée simplement par l'introduction de modes adjacents au mode de pompage d'énergie très petite devant celle du mode en saturation et égale pour tous les modes comme l'illustre la figure IV. 1.

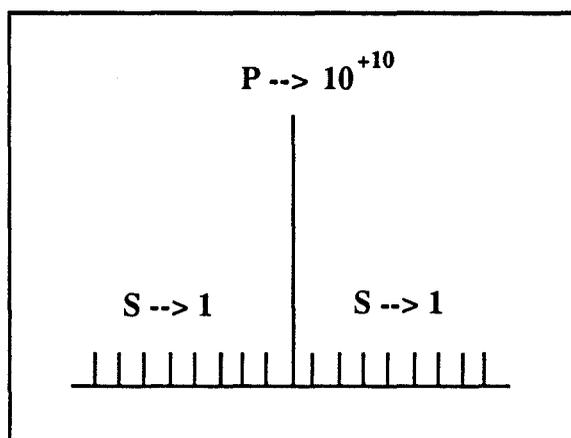


Figure IV. 1. Les conditions de la génération de raies satellites sont modélisées par un mode de pompage (P) d'énergie proche de l'énergie de saturation monochromatique du laser et des modes adjacents (S) d'énergie très inférieure. Ici le rapport de l'énergie d'un mode adjacent à celle du fondamental est initialement égal à 10^{-10} . Le choix de ce rapport est compatible avec la précision du calcul de 10^{-12} ! Rappelons que la précision des simulations multifréquence courantes est 10^{-3} ; la réalisation d'une meilleure précision est possible en présence d'un mode d'amplitude forte par un choix adéquat de l'échantillonnage des macro-électrons.

Une simulation sur une centaine de passages à partir de cette configuration initiale permet de visualiser la naissance des raies satellites à bas niveau (figure IV. 2).

L'évolution asymptotique des raies est grossièrement exponentielle. On remarque que la raie en haute fréquence présente un retard de croissance devant la raie en basse fréquence. Ce phénomène a pour origine l'existence du régime transitoire de l'évolution des raies dans l'onduleur. Cette propriété a été mise en évidence au chapitre précédent analytiquement puis vérifiée sur des simulations réalistes. Dans l'onduleur, deux modes symétriques par rapport au mode de pompage évoluent d'abord antisymétriquement puis croissent exponentiellement : le mode en basse fréquence adopte rapidement une croissance exponentielle contrairement au mode en haute fréquence qui s'atténue d'abord avant de rejoindre le régime asymptotique ; la croissance du mode en haute fréquence est donc retardée. Il en résulte une dissymétrie en fréquence du gain par passage des raies.

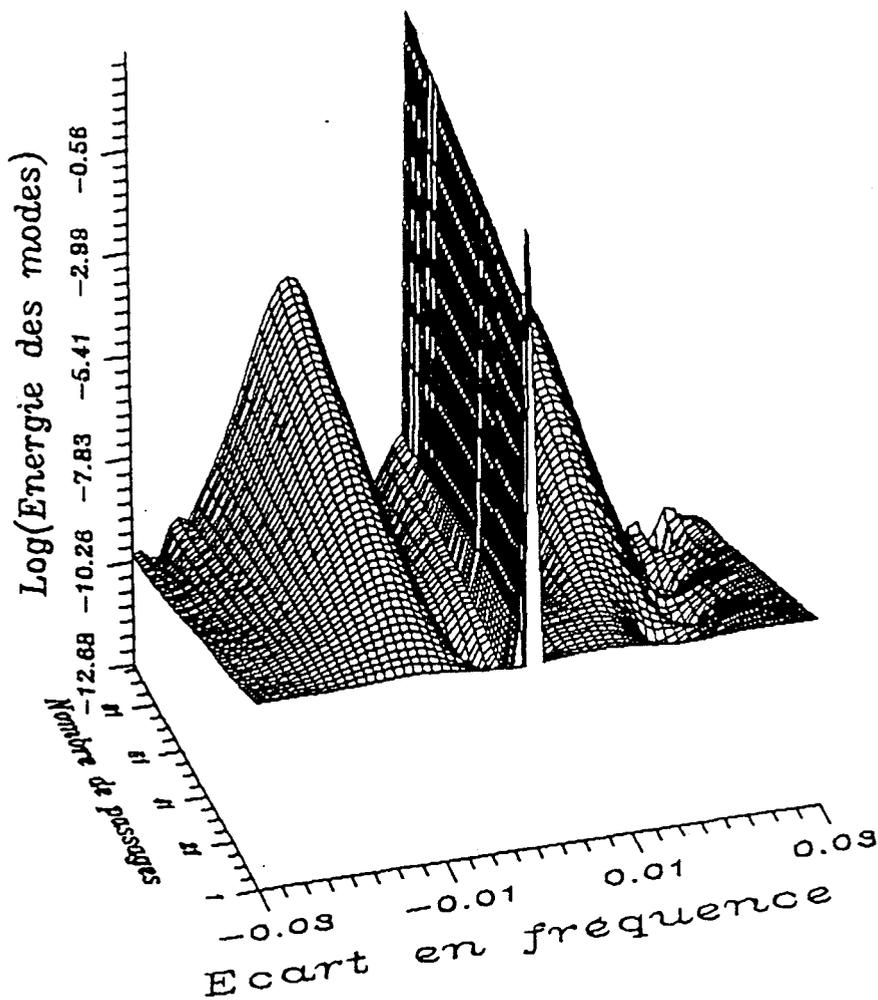


Figure IV. 2. Naissance des raies satellites sur une centaine de passages avec les paramètres du projet de Lille. Les paramètres sont compatibles avec le cas très instable présenté au Chapitre I (figure I. 8) : $I = 2$ A, $Q=20$. L'énergie du mode de pompage est choisie égale à l'énergie de saturation monochromatique du laser et il est positionné en fréquence au maximum de gain linéaire à $\lambda=260 \mu\text{m}$. Les raies satellites apparaissent à un écart relatif en fréquence d'environ 1% du mode de pompage.

Par ailleurs, contrairement au régime linéaire, l'évolution des raies ne peut être décrite simplement par itération du gain par passage des raies satellites. En effet, le gain par passage évolue en fonction du temps bien que le mode central soit relativement stable. Ce point sera éclairci plus loin ; on montrera que ceci est dû au couplage des raies satellites.

* Couplage des raies satellites

En supposant l'ensemble des électrons concentrés au voisinage des points résonants, le couplage entre deux modes symétriques par rapport à un mode d'énergie forte a été démontré analytiquement. Il est difficile de démontrer la propriété de couplage dans le cas général d'une distribution réaliste des électrons. Cependant, grâce aux simulations bas bruit, sa validité peut être vérifiée assez facilement.

Pour cela, considérons une situation de génération de raies satellites un peu particulière. La configuration initiale des raies satellites est proche de la configuration précédente (figure IV. 1) mais privilégie un mode unique en haute ou en basse fréquence comme le montre la figure IV. 3.

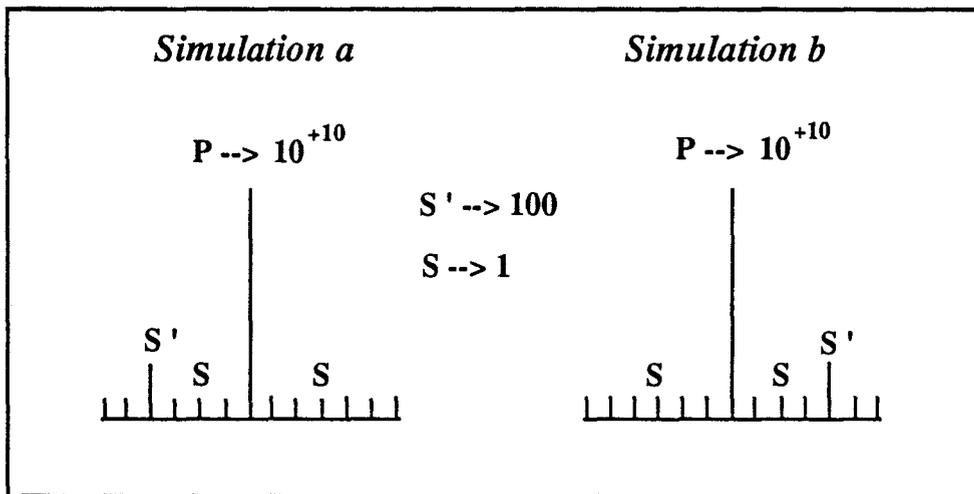


Figure IV. 3. Le couplage entre modes peut être mis en évidence en utilisant une configuration initiale particulière des modes. Il s'agit de calculer le gain par passage en présence d'un mode de pompage (P) dans une situation où tous les modes satellites sont initialement égaux (S) sauf un (S') dont l'amplitude est 100 fois plus forte. Du fait du couplage entre modes symétriques, on s'attend à une altération du mode symétrique de la raie S' par rapport au mode de pompage.

Les courbes de gain par passage obtenues à partir des deux exemples de configuration ci-dessus (simulations a et b de la figure IV. 3) montre un couplage entre raies symétriques par rapport au mode dominant (figure IV. 4). En effet, l'excitation initiale d'un mode satellite donné (en basse ou en haute fréquence) se manifeste après un

passage par une réponse de ce mode mais aussi du mode qui lui est exactement symétrique par rapport au mode de pompage.

La figure IV. 4 montre par ailleurs le gain par passage des raies satellites à partir d'une configuration initiale où tous les modes satellites sont égaux. Le régime transitoire du développement des raies satellites dans l'onduleur a des conséquences sur la courbe de gain par passage des raies. D'une part, la raie haute fréquence a un gain inférieur à la raie basse fréquence. D'autre part, notons que la courbe de gain est dissymétrique en fréquence par rapport au mode de pompage ; les maxima de gain des raies satellites ne sont pas symétriques en fréquence par rapport au mode central.

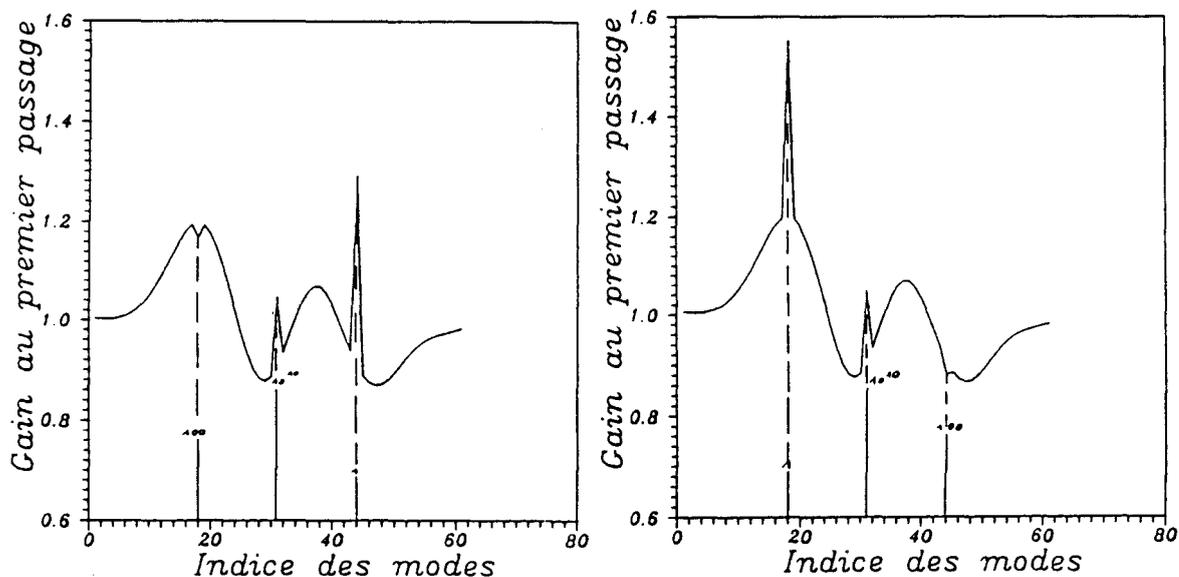


Figure IV. 4. Le couplage entre modes symétriques est conservé dans le cas d'une distribution réaliste. Ces deux figures montrent la courbe de gain par passage obtenue à partir de chacune des deux configurations initiales a et b décrites précédemment (figure IV. 3) (Paramètres du projet de Lille. Cas très instable). On reconnaît au centre de chaque figure le mode de pompage (mode 31) et la réponse sur les deux raies exactement symétriques à l'excitation initiale d'une seule raie respectivement en basse et haute fréquence. La courbe de fond est le gain par passage des raies satellites (en enlevant les pics de réponse) ; notons qu'elle est identique dans les deux cas, ce qui prouve que l'excitation d'un mode donné n'a aucun effet sur les modes autres que son symétrique. La finesse de l'échantillonnage est ici 10^{-3} et le mode pompage est en saturation.

Les caractéristiques d'un filtrage des raies satellites ne peuvent être déterminées directement à partir de la courbe de gain par passage brute (celle de la figure IV. 4 par exemple). En effet, il ne faut pas oublier que la croissance d'un mode satellite dépend de son amplitude et de sa phase ainsi que l'amplitude et la phase du mode symétrique qui lui est désormais associé. Or dans la réalité, les raies satellites démarrent à partir du bruit c'est à dire d'une grande variété d'amplitude et de phase. Il n'est donc pas possible de déterminer la condition [gain des raies satellites < pertes par passage] pour toutes les

configurations initiales de modes satellites imaginables à partir du gain brut obtenu pour une configuration initiale particulière (comme celle de la figure IV par exemple).

Cependant, la croissance des raies satellites étant linéaire, nous allons exploiter le couplage entre modes symétriques afin de caractériser le développement des raies satellites indépendamment de l'amplitude et de la phase initiales des modes satellites.

Dans le cas présent, il est en effet possible de définir une matrice de couplage liant deux modes symétriques par rapport au mode de pompage à l'entrée et à la sortie de l'onduleur, cette matrice étant indépendante de l'amplitude et de la phase des modes. On comprend dès lors que l'évolution sur plusieurs passages d'un mode satellite particulier ne s'obtient pas par simple itération de son gain par passage mais par itération de la matrice de couplage qui le lie au mode symétrique associé. Les conditions d'amplification ou d'atténuation des raies satellites peuvent être obtenues en diagonalisant la matrice de couplage. Les deux modes satellites vont se développer si une seule des directions propres de la matrice de couplage a suffisamment de gain c'est à dire si le module d'une seule des valeurs propres auquel on ôte les pertes par passage est supérieur à 1.

* Détermination de la matrice de couplage

Grâce aux simulations à bas bruit numérique, la détermination de la matrice de couplage ne pose aucune difficulté. Il s'agit de déterminer les coefficients réels de la matrice 4 * 4 qui lie les parties réelle et imaginaire de modes symétriques à l'entrée et à la sortie de l'onduleur :

$$\begin{bmatrix} \text{Re} [E_n (L_w)] \\ \text{Im} [E_n (L_w)] \\ \text{Re} [E_{-n} (L_w)] \\ \text{Im} [E_{-n} (L_w)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Re} [E_n (0)] \\ \text{Im} [E_n (0)] \\ \text{Re} [E_{-n} (0)] \\ \text{Im} [E_{-n} (0)] \end{bmatrix} \quad (\text{IV-1})$$

où E_n et E_{-n} sont les amplitudes complexes de deux modes symétriques par rapport au mode de pompage à un écart relatif en fréquence $\Delta\omega/\omega = n / N$ de celui ci :

$$E_n = |E_n| \exp [i \phi_n] \quad (\text{IV-2})$$

Note : cette matrice 4 * 4 à coefficients réels n'est pas équivalente à une matrice 2 * 2 à coefficients complexes liant les amplitudes complexes E_n et E_{-n} !

La matrice de couplage est résolue par un simple jeu sur les amplitudes et les phases initiales des modes. Pour cela, quatre simulations sur un passage avec des configurations initiales des modes différentes sont nécessaires. Dans la pratique, on utilise les configurations d'amplitude 1 et 2 présentées sur la figure IV. 5 avec pour chacune deux jeux de phases. La matrice de couplage est déterminée pour chaque couple de modes symétriques de la fenêtre spectrale envisagée soit n_0 couples donc n_0 matrices pour $2n_0$ modes.

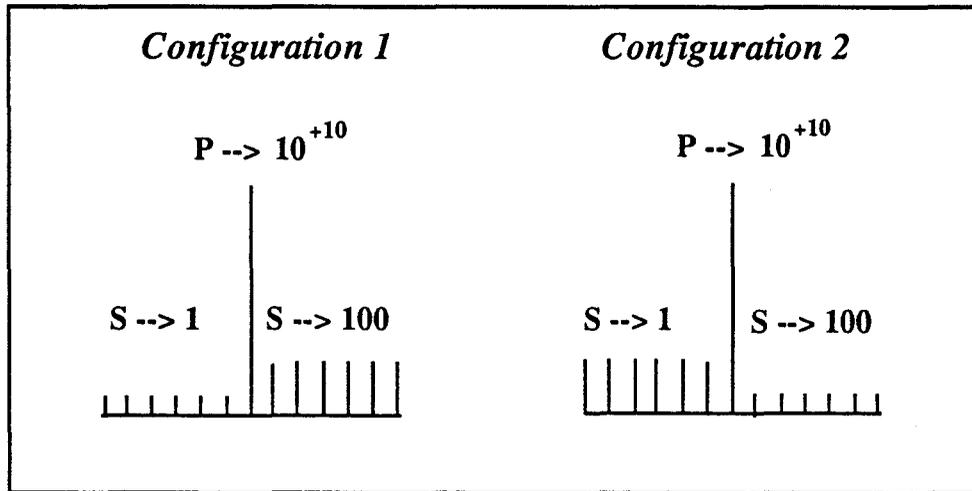


Figure IV. 5. Les 16 coefficients de la matrice de couplage d'un couple de modes satellites donné sont déterminés à partir de deux configurations initiales d'énergie des modes satellites et deux jeux de phases. Les 2 configurations d'amplitude sont obtenues en modifiant le poids en énergie de chaque mode d'une configuration à l'autre. Le gain par passage obtenu pour chaque configuration fournit quatre équations liant la partie réelle et la partie imaginaire de 2 modes symétriques en entrée et en sortie de l'onduleur (figure IV. 1). Avec quatre configurations, on résout les 16 coefficients de la matrice de couplage.

Chaque matrice de couplage ainsi calculée est ensuite vérifiée avec une autre configuration dont le jeu d'amplitudes est du type présenté à la figure IV. 1. Il est alors possible de diagonaliser chaque matrice en vue de déterminer le niveau de pertes nécessaire pour entraver ou favoriser la croissance de chaque couple de fréquences.

Pour chacune des simulations sur un passage, le choix du nombre de macro-électrons est assez délicat. D'une part, il est choisi à l'unité près afin d'éviter le bruit numérique. D'autre part, il est très important de tester systématiquement la stabilité des résultats avec le nombre d'électrons en réalisant plusieurs simulations. Généralement, les termes non diagonaux de la matrice de couplage sont inférieurs aux termes diagonaux d'un ordre de grandeur. Ceci les rend très sensibles à toute fluctuation numérique et en fait de bon "indicateurs numériques".

La méthode de diagonalisation de la matrice de couplage donne la possibilité de quantifier assez précisément les paramètres de filtrage nécessaires à l'atténuation des raies

satellites comme nous allons le voir maintenant. Elle tient sa généralité dans le fait qu'elle donne un accès direct à la structure des raies satellites indépendamment de l'amplitude complexe de celles-ci ; elle s'applique donc bien à une situation réelle où l'origine des raies satellites est le bruit. Enfin, notons que le coût numérique de cette méthode est nettement inférieur à celui des simulations multifréquence sur plusieurs centaines de passages.

IV. A. b. Exploitation du couplage de modes : variation du gain des raies satellites avec l'énergie du mode pompage

Dans les simulations multifréquence sur plusieurs centaines de passages, les raies satellites deviennent visibles lorsque l'énergie du mode de pompage atteint une amplitude proche de la saturation. Nous avons d'ailleurs pour l'instant supposé l'énergie du mode de pompage proche de l'énergie de saturation. Cette hypothèse doit être discutée afin de déterminer les paramètres de filtrage dans la mesure où, en réalité, les raies satellites se développent en même temps que le mode central évolue vers la saturation.

Le problème de l'évolution conjuguée des raies satellites et du mode central sur un grand nombre de passages peut être étudié à partir d'un certain nombre de situations "statiques" en examinant l'effet d'une variation de l'énergie du mode de pompage sur le gain par passage des raies satellites ; il s'agit en quelque sorte de faire une stroboscopie du gain lors de la croissance conjuguée du mode de pompage et des raies satellites afin de préciser l'expression "mode de pompage au voisinage de la saturation".

Examinons dans un premier temps le gain par passage des raies satellites dans le cas d'une configuration initiale simple où tous les modes satellites ont initialement la même énergie ; il s'agit de la configuration présentée sur la figure IV. 1. Le mode de pompage est positionné en fréquence au maximum de gain linéaire et on varie maintenant son énergie.

Les courbes de gain brut permettent d'ores et déjà de préciser les conditions d'apparition des raies satellites (figure IV. 6). En effet, en variant l'énergie du mode de pompage, la courbe de gain passe "continûment" du régime de génération de raies satellites au régime linéaire.

Quand l'énergie du mode de pompage est égale à l'énergie de saturation E_{laser} , on retrouve un gain dissymétrique en fréquence ; la raie satellite en basse fréquence apparaît à un écart relatif en fréquence proche de 1,5% du mode de pompage alors que la raie haute fréquence est à moins de 1% de celui-ci.

On voit nettement une transition entre le régime de génération de raies satellites et un régime intermédiaire menant au régime linéaire. En effet pour une énergie égale au dixième de l'énergie du mode de pompage, la courbe de gain devient antisymétrique par rapport au mode de pompage. En deçà de cette énergie, la courbe de gain se rapproche du gain linéaire qu'elle épouse parfaitement lorsque l'énergie du mode de pompage est inférieure au millième de l'énergie de saturation.

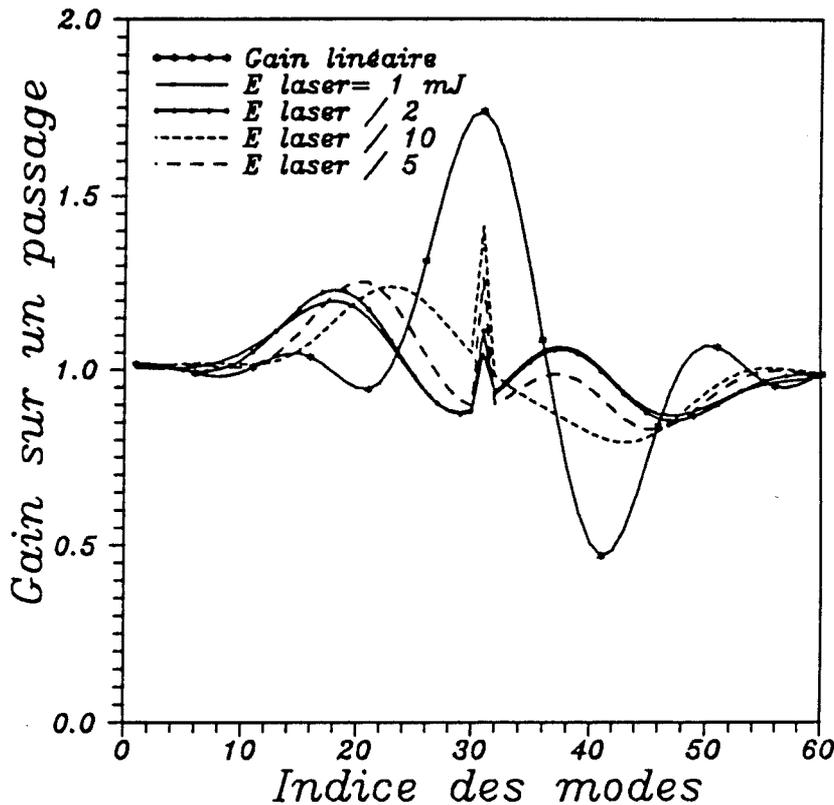


Figure IV. 6. Courbes de gain par passage brut obtenues à partir de la configuration initiale présentée sur la figure IV. 1. On étudie l'évolution de la courbe de gain par passage des raies satellites en fonction de l'énergie du mode de pompage avec les paramètres du projet de Lille. Le mode central est le mode 31, reconnaissable au pic de gain. L'écart relatif en fréquence entre deux modes consécutifs est 10^{-3} . L'énergie du mode de pompage varie de l'énergie de saturation du laser ($I = 2$ A, $Q=20$) à un millième de cette énergie (courbe de gain linéaire).

Les matrices de couplage liant chaque couple de modes symétriques par rapport au mode de pompage sont déterminées à partir de plusieurs configurations initiales suivant la méthode indiquée précédemment. Leur diagonalisation permet maintenant de caractériser le gain des raies satellites indépendamment de l'amplitude et de la phase initiale des modes.

La figure IV. 7 montre quelques courbes de valeurs propres obtenues pour différentes énergies du mode de pompage en fonction de l'écart relatif en fréquence de chaque couple de modes au mode de pompage. Suivant l'énergie du mode de pompage, on a distingué le régime de génération de raies satellites où les raies satellites apparaissent clairement détachées du mode de pompage du régime intermédiaire menant vers le régime linéaire.

La transition entre les deux régimes peut être déterminée assez précisément en mesurant l'écart en fréquence du maximum de gain (la valeur propre de module maximum) en fonction de l'énergie du mode de pompage. En saturation, les raies satellites apparaissent à un écart relatif en fréquence voisin de :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Omega_0}{k_w} \quad (\text{IV-3})$$

Les courbes de valeurs propres montrent qu'en régime de génération satellites, la position du maximum de gain varie comme la racine quatrième de l'énergie du mode pompage (figure IV. 8) tout comme la fréquence de rotation Ω . Cette propriété met nettement en évidence une transition entre le régime de génération de raies satellites et le régime intermédiaire. La transition s'effectue pour une énergie proche de la moitié de l'énergie de saturation ; à cette énergie, il apparaît sur les courbes de valeurs propres un second maximum (figure IV. 8) beaucoup plus proche du mode de pompage. En deçà de cette énergie, les raies satellites disparaissent. Le second maximum reste identifiable jusqu'à un quart de l'énergie de saturation ; il n'a cependant rien à voir avec les raies satellites.

Dans le régime intermédiaire, l'évolution du gain vers le régime linéaire s'effectue par une diminution progressive du couplage des modes symétriques ; les termes non diagonaux de la matrice de couplage deviennent de plus en plus petit devant les termes diagonaux jusqu'à s'annuler en régime linéaire.

En régime de génération de raies satellites, le gain des raies satellites varie peu avec l'énergie du mode de pompage dans cet exemple (figure IV. 9). Le gain des raies satellites permet d'évaluer le taux de pertes nécessaire pour empêcher le développement de l'instabilité soit environ 20%. Les simulations présentes ont été réalisées avec des paramètres proches de ceux utilisés dans l'étude de la pureté spectrale en fonction du taux de pertes au premier chapitre (figure I. 11). Les simulations sur plusieurs centaines de passages situent la transition entre spectre large et spectre fin entre 13 et 30% de pertes. Il faut préciser que la détermination précise du taux de pertes par simulation directe de l'évolution du spectre est difficile car elle implique des simulations d'autant plus longues

que l'on se rapproche de la transition spectre large-spectre fin (le gain des raies satellites étant proche du niveau de pertes).

A la saturation, la connaissance du gain des couples de modes satellites (ie du carré du module des valeurs propres) offre la possibilité de définir les paramètres d'un filtrage afin d'assurer un spectre fin. Par exemple, dans le cas d'un filtre carré centré sur le mode de pompage, la condition sur les valeurs propres pour chaque couple de modes:

$$[(r r^* - 1) < \text{pertes}] \quad (\text{IV-4})$$

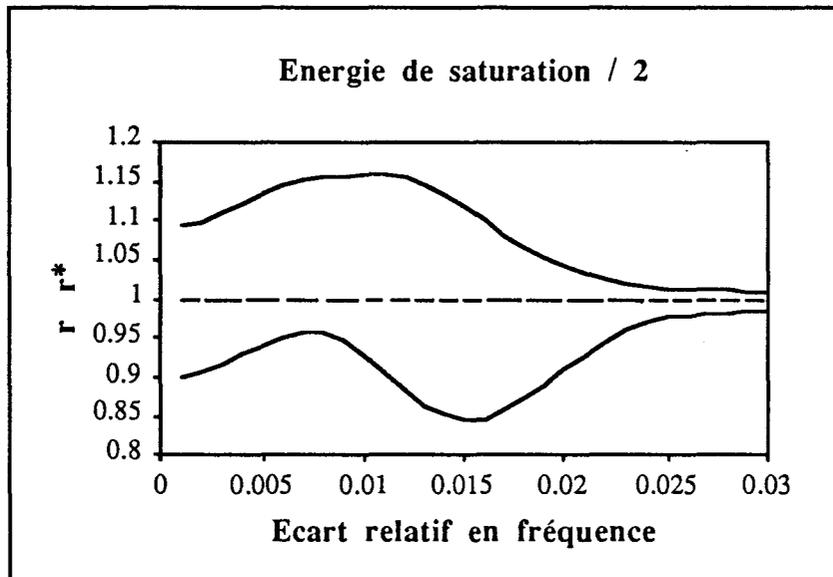
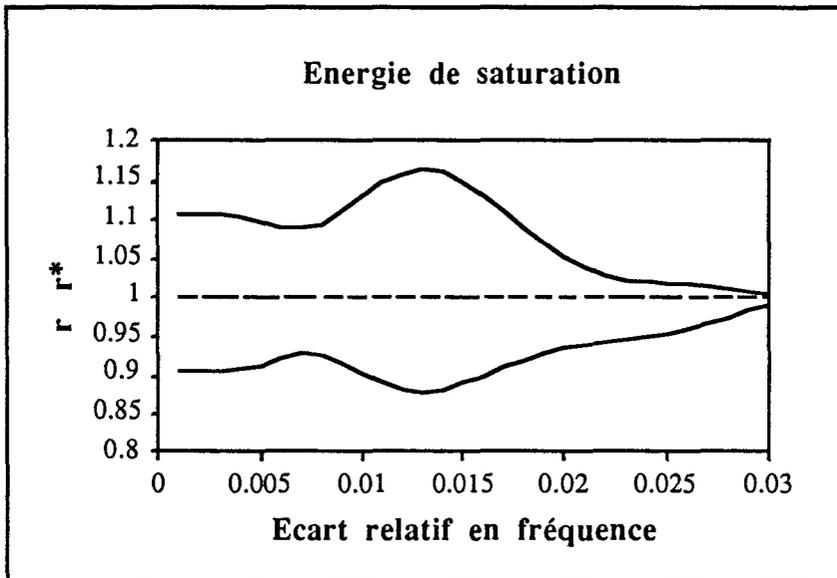
détermine la largeur du filtre et son taux de pertes. Cependant, cette méthode n'est pas une panacée et doit être manipulée avec beaucoup de précautions. Dans certains cas de filtrage, il est en effet possible (comme nous le verrons bientôt avec les paramètres ELSA) que le mode de pompage n'atteigne jamais la saturation. Au fur et à mesure de la croissance du mode de pompage, les raies satellites s'écartent du mode de pompage. Elles peuvent se développer à l'intérieur même de la bande passante du filtre et, si leur gain est important, atteindre une amplitude suffisante pour faire bifurquer le système par déstabilisation du mode de pompage. Dans ce cas, la détermination des paramètres de filtrage à partir des courbes de valeurs propres à la saturation n'a plus de sens puisque le mode de pompage ne voit jamais la saturation.

En variant l'énergie du mode de pompage, nous avons pu examiner le gain des raies satellites depuis le gain linéaire jusqu'à la génération de raies satellites. Cette nouvelle approche a montré qu'il existe un régime de génération de raies satellites ; dans notre exemple, celles-ci se développent seulement quand l'énergie du mode de pompage est de l'ordre de l'énergie de saturation.

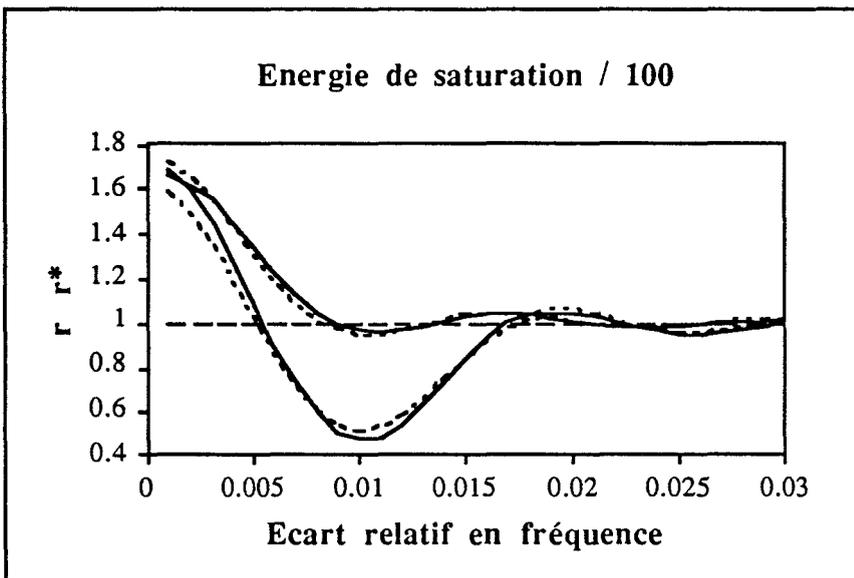
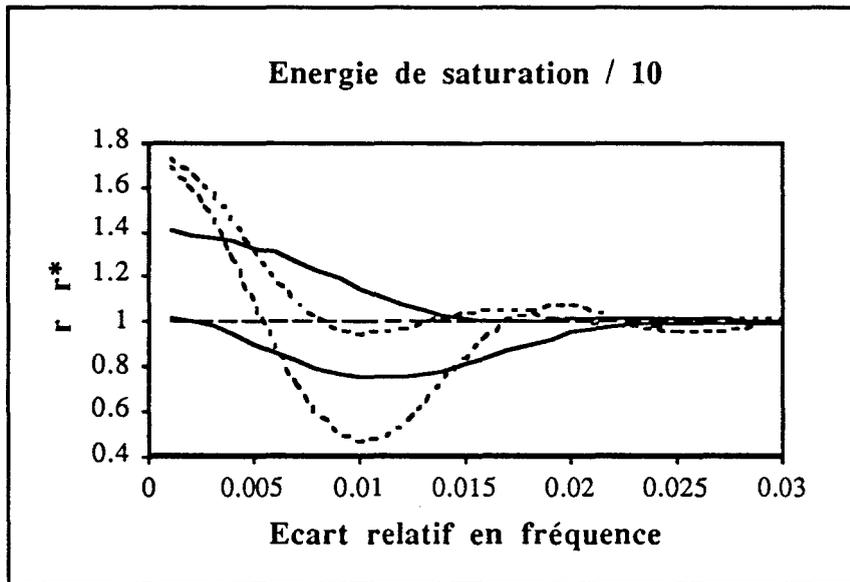
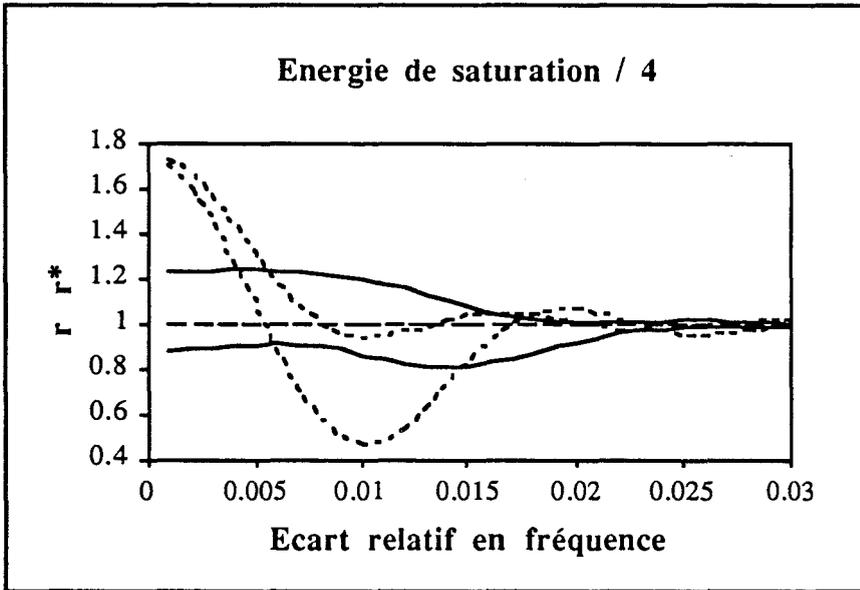
Il est délicat de tirer des conclusions sur la dynamique du système à partir de l'examen de situations "statiques". La diagonalisation des matrices de couplage dans des situations particulières ne remplace pas totalement les simulations sur plusieurs centaines de passages mais se veut avant tout un outil complémentaire afin d'analyser le gain des raies satellites dans des conditions réalistes d'injection des électrons dans un onduleur court. En ce sens, cette analyse complète l'approche semi-analytique développée au chapitre précédent.

Figure IV. 7. Diagonalisation de la matrice de couplage pour différentes énergies laser. Les valeurs propres obtenues sont deux à deux complexes conjuguées. Les courbes du carré du module des valeurs propres (en trait noir) ont été calculées pour chaque énergie du mode de pompage. Dans le régime intermédiaire, elles sont comparées à celles obtenues en régime linéaire (en pointillés).

DU REGIME DE GENERATION DE RAIES SATELLITES



VERS LE REGIME LINEAIRE



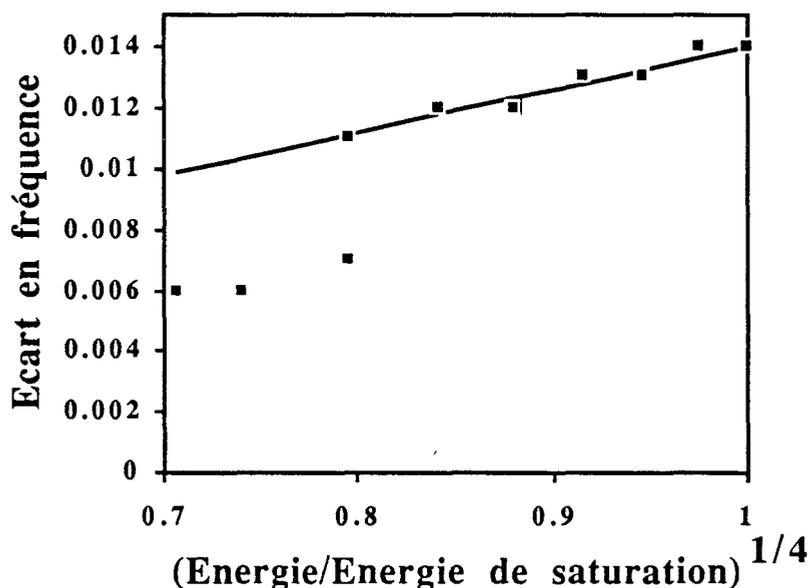


Figure IV. 8. En régime de génération de raies satellites, l'écart relatif en fréquence de la valeur propre de module maximum (carrés noirs) est proportionnel à la racine quatrième de l'énergie du mode de pompage rapportée ici à l'énergie de saturation. Pour une énergie égale à 2/5 de l'énergie de saturation, il apparaît un second maximum. En deçà de cette énergie, il n'est plus possible de distinguer les raies satellites. L'abscisse minimum correspond à 1/4 de l'énergie de saturation ; en dessous de cette énergie, le second maximum disparaît et le mode de gain maximum est le mode central.

Taux de pertes pour un spectre fin

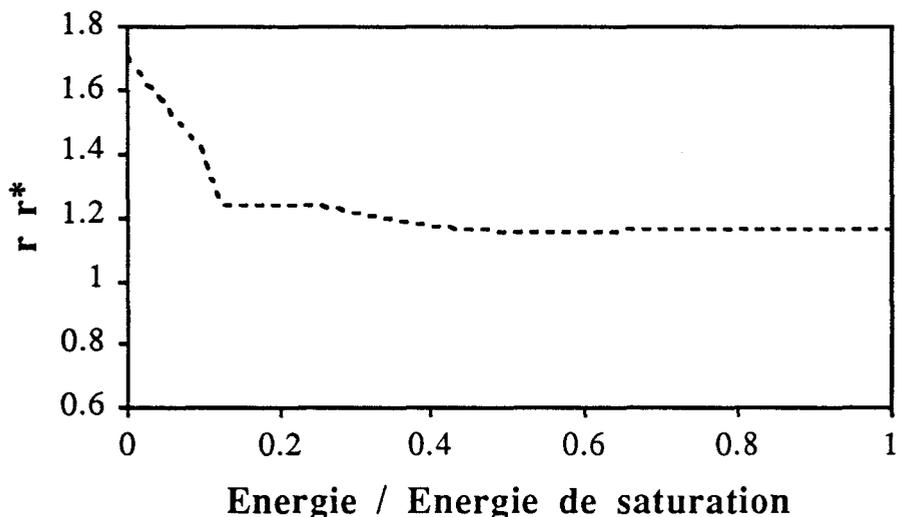


Figure IV. 9. L'évaluation du taux de pertes nécessaire pour atténuer les raies satellites peut être réalisée à partir du maximum du carré du module des valeurs propres en fonction de l'énergie du mode de pompage rapportée à l'énergie de saturation. Le régime de génération de raies satellites se situe à une énergie supérieure à 2/5 de l'énergie de saturation ; le gain des raies satellites est constant. Le régime intermédiaire se traduit par une augmentation du gain mais le maximum de gain se situe à des fréquences beaucoup plus proches du mode de pompage que ne le sont les raies satellites.

IV. B. EFFET COMBINE D'UN TAPERING ET D'UN FILTRAGE SUR LES RAIES SATELLITES

L'utilisation d'un onduleur à champ magnétique d'amplitude uniforme limite le rendement du laser. En effet, en régime monochromatique, l'énergie cédée par un électron ne peut être supérieure à la hauteur relative en énergie de la bulle de piégeage délimitée par la séparatrice. Par exemple, dans le cas du projet de Lille, cette dernière étant de l'ordre de 1%, on ne peut espérer un rendement supérieur à 1% (en réalité, le rendement est environ 0.3 % pour un courant de 2 A).

Cette sévère restriction peut être relâchée si la bulle de piégeage possède un degré de liberté supplémentaire ; une telle opération est réalisée en autorisant une variation des paramètres de l'onduleur. C'est la notion de tapering qui consiste en une diminution progressive de l'amplitude du champ magnétique dans l'onduleur tout en conservant sa périodicité. Dans l'espace des phases, la mobilité de la bulle de piégeage qui en découle doit améliorer substantiellement le rendement du laser en régime monochromatique.

Une telle modification du mouvement des électrons dans l'espace des phases a des conséquences sur la génération de raies satellites et donc sur la transition entre spectre large et spectre fin. Notre but ici est de clarifier l'effet du tapering sur la génération de raies satellites. Une introduction plus détaillée de la notion de tapering permettra d'abord de fixer la direction de notre étude. Notre démarche pour aborder l'effet du tapering sur les raies satellites comprendra ensuite deux volets. Dans un premier temps, on examinera le comportement spectral du LEL en tant qu'oscillateur en réponse à la combinaison d'un tapering et d'un filtrage grâce à une étude systématique ; on montrera que ces résultats et ceux obtenus par diagonalisation de la matrice de couplage se corroborent. Ensuite, afin de mieux comprendre la génération de raies satellites en présence de tapering, on étendra le modèle académique "fond de puits" de la génération de raies satellites.

IV. B. a. Introduction de la notion de tapering

Considérons une décroissance du champ magnétique statique de profil parabolique. L'amplitude du champ magnétique dans l'onduleur peut s'écrire de la façon suivante :

$$B_w(z) = B_w^0 \left[1 - \frac{\Delta B}{B_w^0} \left(\frac{z}{L_w} \right)^2 \right] \quad (\text{IV-5})$$

où B_w^0 est l'amplitude du champ magnétique à l'entrée de l'onduleur, ΔB est la variation totale de l'amplitude du champ magnétique du début à la fin de l'onduleur et L_w la

longueur de l'onduleur Le profil du champ statique est illustré par la figure IV. 10 pour différents tapering.

Il existe différents types de tapering et le choix d'un profil parabolique est un bon compromis parmi les profils les plus simples que l'on peut envisager. Par exemple, il offre l'avantage d'une décroissance du champ beaucoup plus douce, au début de l'onduleur, qu'un profil linéaire. Des solutions beaucoup plus complexes sont d'ailleurs envisagées maintenant afin d'améliorer les qualités du LEL. En particulier, le rendement peut être amélioré en optimisant le profil de l'onduleur par la technique du contrôle optimal.

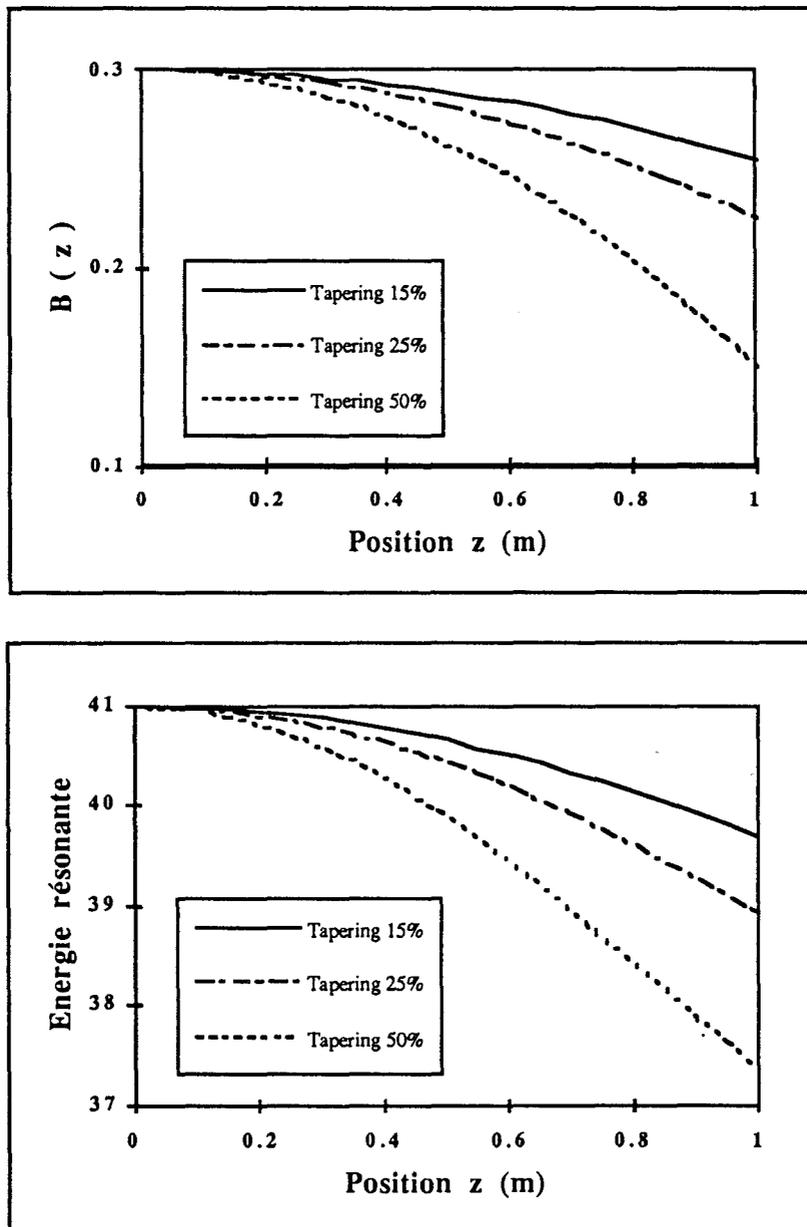


Figure IV. 10. La décroissance de type parabolique de l'amplitude du champ magnétique statique de l'onduleur (figure du haut) se traduit par une décroissance de l'énergie résonante γ_r . (figure du bas). Le choix d'un tapering parabolique est guidé par la volonté de piéger les électrons au début de l'onduleur par une décroissance d'abord lente de l'énergie résonante. Les paramètres sont ceux d'ELSA que nous

utiliserons aussi au paragraphe suivant. "L'intensité" du tapering est représentée par le taux de décroissance du champ magnétique statique du début à la fin de l'onduleur.

En présence de tapering, la constante d'onduleur devient maintenant dépendante de la position dans l'onduleur soit :

$$a_w(z) = \frac{e B_w(z)}{m c k_w} \quad (\text{IV-6})$$

Si le spectre peut être considéré monochromatique en saturation, l'effet d'un tapering sur la dynamique des électrons et le couplage du faisceau d'électrons au champ laser se comprend aisément en intégrant la dépendance en z de la constante d'onduleur dans les équations de base :

a) Le tapering a deux conséquences immédiates sur le faisceau d'électrons que nous montrent les équations du mouvement :

$$\left[\begin{array}{l} 1) \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = v(\Gamma) = k_w - \frac{k_L}{2\Gamma} \left(1 + \frac{a_w(z)^2}{2} \right) \\ 2) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \frac{a_w(z) K_1}{2} \text{Im} (E_0 \exp(i\psi)) \end{array} \right. \quad (\text{IV-7})$$

D'une part, il se traduit par un déplacement dans l'espace des phases des points résonants (IV-4. 1) (donc de chaque bulle de piégeage centrée sur les points résonants) dont l'énergie représentée par $(\Gamma_r = \gamma_r^2)$ dépend maintenant de z :

$$\Gamma_r = \frac{k_L}{2 k_w} \left(1 + \frac{1}{2} a_w(z)^2 \right) \quad (\text{IV-8})$$

L'évolution de l'énergie résonante dans l'onduleur (figure IV. 10) montre d'abord une décroissance douce au début de l'onduleur puis beaucoup plus rapide. Le principe d'un tapering parabolique repose d'abord sur un piégeage des électrons au début de l'onduleur, puis une décroissance forcée de l'énergie de l'ensemble des électrons piégées. En effet, chaque bulle de piégeage (centrée sur un point résonant) "descend" dans l'espace des phases au fur et à mesure de son avancement dans l'onduleur. Ainsi, le mouvement des électrons dans l'espace des phases ne se limite plus à la région délimitée par la bulle de piégeage fixe de l'onduleur uniforme mais s'étend au domaine que parcourt la bulle de piégeage lors de sa "descente" en énergie. L'énergie moyenne des électrons en sortie d'onduleur est d'autant plus basse que le tapering est fort et on s'attend par conséquent à une augmentation du rendement du laser avec l'intensité du tapering.

D'autre part, les équations du mouvement montrent une diminution progressive de la hauteur de la séparatrice (IV-7. 2). Sa conséquence est un dépiégeage progressif des électrons lors de leur progression dans l'onduleur. Cet effet s'oppose à l'augmentation du rendement du laser qui vient d'être décrite.

b) Du point de vue du champ laser, l'effet d'une variation de la constante d'onduleur peut être mis en évidence grâce à l'équation de Maxwell gérant l'évolution des modes :

$$i \frac{\partial E_n}{\partial z} = \frac{\mu_0 e^2}{m} a_w(z) K_1 \rho_e \exp(-i \frac{n}{N} k_w z) \left\langle \frac{\exp(-i(1 + \frac{n}{N})\psi)}{2\sqrt{\Gamma}} \right\rangle \quad (IV-9)$$

Le tapering se traduit par une diminution progressive du couplage du faisceau d'électrons au champ laser qui va à l'encontre d'une amélioration du rendement.

Cette première analyse du tapering montre que son efficacité relève de plusieurs effets antagonistes : d'une part une augmentation du rendement due à une forte décroissance de l'énergie moyenne des électrons au cours de leur traversée de l'onduleur et d'autre part l'effet inverse dû à un dépiégeage des électrons et une diminution de leur couplage au champ laser.

Par ailleurs, il est important de noter que le concept de tapering n'a de sens que si le spectre est monochromatique. Il doit en effet exister une bulle de piégeage ; l'efficacité du tapering est donc d'abord conditionnée par l'obtention d'un spectre fin. Quel est l'effet du tapering sur la génération de raies satellites?. Les études réalisées dans ce sens sont ponctuelles et présentent des résultats variés. Ainsi, W. B Colson et R. A Freedman annoncent une atténuation des raies satellites en présence de tapering [57, 58] et C. M. Tang leur suppression [59, 60]. Les expériences effectuées à Los-Alamos [61] ont montré que le rendement était effectivement amélioré quand le tapering est activé à condition que le spectre soit fin. Notons cependant que ce résultat a été obtenu en jouant sur le synchronisme des micro-impulsions électroniques et laser. Le tapering est-il suffisant pour générer un spectre fin ou faut-il lui adjoindre un dispositif annexe?. Les expériences [61, 56] tendent à montrer que le tapering seul est inefficace pour supprimer les raies satellites. Aussi allons-nous d'abord lui associer un filtrage et étudier l'évolution du spectre en fonction de ces deux paramètres.

IV. B. b. Etude systématique de la dynamique spectrale en présence d'un tapering et d'un filtrage

Cette première approche a pour objectif de déterminer l'impact de la conjugaison d'un tapering et d'un filtrage sur le comportement asymptotique d'un LEL fonctionnant en oscillateur. Pour cela, des simulations multifréquence systématiques ont été conduites jusqu'au régime asymptotique pour différents valeurs du tapering et du filtrage afin de construire une carte de l'état asymptotique du spectre. Cette étude à priori destinée au LEL de puissance a été menée avec les paramètres ELSA.

Le profil du tapering est choisi parabolique (IV-5) et son intensité sera représentée par le taux de décroissance du champ magnétique statique du début à la fin de l'onduleur :

$$\frac{\Delta B}{B} = \frac{B_w(0) - B_w(L_w)}{B_w(0)} \quad (\text{IV-10})$$

Le filtrage réalisé consiste simplement en un filtre carré. La fréquence centrale du filtre ω_L est initialement positionnée au maximum de gain linéaire. Nous définissons la taille du filtre par sa largeur relative totale en fréquence F et son niveau de pertes par le facteur de qualité correspondant Q .

Pratiquement, une simulation pour chaque couple (tapering-filtre) est conduite sur plusieurs centaines de passages jusqu'à ce que le régime asymptotique soit estimé atteint ; afin de fixer les idées, les simulations rapportées ici ont duré moins de 1000 passages. Afin de représenter l'état asymptotique du spectre, la brillance (rapport du rendement extrait du laser sur la largeur spectrale relative) et la largeur spectrale sont des grandeurs commodes. Rappelons que la brillance est caractéristique du régime spectral ; comme nous avons pu le constater au premier chapitre, le régime d'élargissement spectral est caractérisé par une brillance tendant asymptotiquement vers la constante universelle proche de 0,8 alors que l'affinement spectral se traduit par une brillance très supérieure à l'unité.

Les résultats des simulations systématiques sont consignés sur la carte (filtre-tapering) (figure IV-11). Examinons d'abord la carte filtre-tapering de façon générale.

La brillance et la largeur spectrale divisent la carte en quatre régions distinctes :

1) L'examen de la largeur spectrale permet d'abord de définir une frontière très nette entre une région de spectre large (régions III et IV) et une région de spectre fin (régions I et II). Au voisinage de la ligne de séparation spectre fin-spectre large, la largeur spectrale décroît rapidement de quelques % à une valeur proche de la résolution

numérique (soit quelques 10^{-3}). Ceci permet de séparer la carte entre deux grandes parties (figure IV. 11) : l'une de spectre fin (points blancs), l'autre de spectre large (points noirs)

2) La brillance divise ensuite chaque région ainsi définie en deux sous-régions. Passons d'un extrême à l'autre. La région I se caractérise par une brillance très supérieure à 1 caractéristique d'un spectre fin. Dans la région IV, la brillance tend vers la constante universelle ; il s'agit du régime d'élargissement spectral. Cependant le passage entre les deux régimes extrêmes ne se fait pas brutalement. Comme le montre la figure IV. 12, de la région III à la région II, la brillance adopte des valeurs supérieures à la brillance d'élargissement spectral mais restant du même ordre de grandeur.

En absence de tapering, la brillance évolue vers la valeur universelle excepté dans une fenêtre étroite (autour de $F=2\%$). Il existe une taille de filtre pour laquelle elle atteint une valeur élevée ; les raies satellites sont supprimées et le spectre devient fin. En dehors de cet intervalle étroit (y compris pour les tailles de filtre inférieures), les raies satellites se développent et le processus d'élargissement spectral s'engage. Le rendement extrait du laser en l'absence de tapering est proportionnel à la taille du filtrage réalisé (figure IV. 13).

Pour chaque tapering, il existe au contraire une taille de filtre critique en dessous de laquelle le spectre devient fin et dessus de laquelle il s'élargit. Cette taille de filtre critique dépend de l'intensité du tapering. Afin d'obtenir un spectre fin, on voit que le filtre peut être d'autant plus large que le tapering est fort. Ainsi, le tapering facilite l'obtention d'un spectre fin. Cependant, au delà d'une certaine taille du filtre (ici environ 10%), le tapering ne permet plus d'empêcher l'élargissement du spectre. Cet exemple corrobore l'idée que le tapering seul est inefficace pour supprimer les raies satellites. Pour cela, il est nécessaire de lui associer un second paramètre : soit un filtrage ou encore le désynchronisme de la cavité comme l'ont montré les expériences de Los-Alamos.

L'effet du tapering sur le rendement extrait est compliqué. En effet, si le rendement est croissant avec la taille du filtre en l'absence de tapering, il devient décroissant pour un tapering de 50% comme le montre la figure IV. 13.

Au vu, des courbes de rendement, on constate que le maximum de rendement peut être obtenu de deux façons différentes suivant l'intensité du tapering. Sans tapering, le meilleur rendement est obtenu en laissant le spectre s'élargir et donc en bénéficiant des propriétés du régime d'élargissement spectral. Au contraire, avec un tapering de 50%, le meilleur rendement est réalisé avec un filtrage étroit donc un spectre fin ; on exploite là le principe même du tapering consistant à piéger les électrons dans une bulle de piégeage qui

"descend" dans l'espace des phases au fur et à mesure de l'avancée des électrons dans l'onduleur.

Ainsi, à taille de filtre donnée, l'augmentation de l'intensité du tapering n'est pas toujours équivalente à une augmentation du rendement. L'efficacité du tapering en matière de rendement est intimement liée au régime spectral dans lequel il opère.

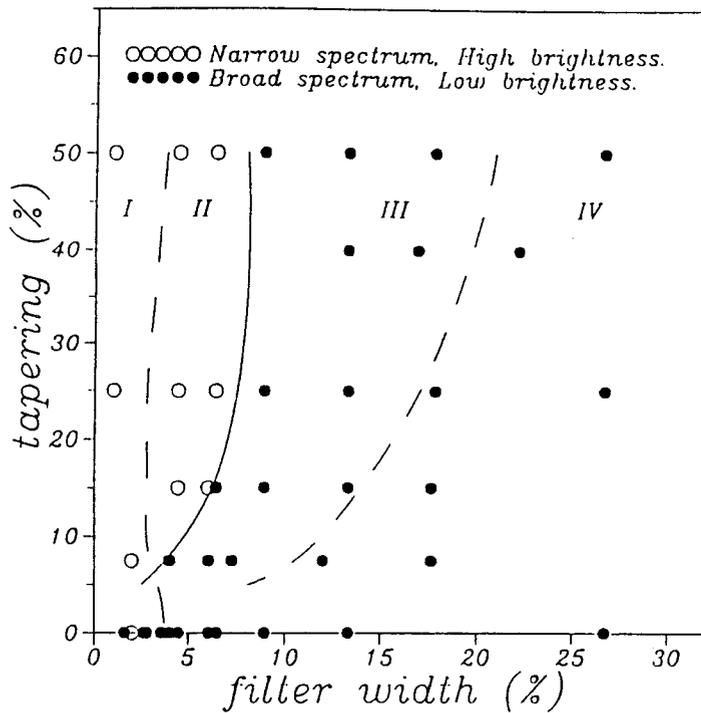


Figure IV. 11. Carte Filtre-Tapering pour les paramètres d'ELSA. Chaque point de cette carte est issu d'une simulation multifréquence sur plusieurs centaines de passages et décrit le comportement asymptotique du spectre pour un tapering et une taille de filtre donnés. Le courant est ici $I = A$ et le niveau de pertes est donné par le coefficient de qualité $Q=25$

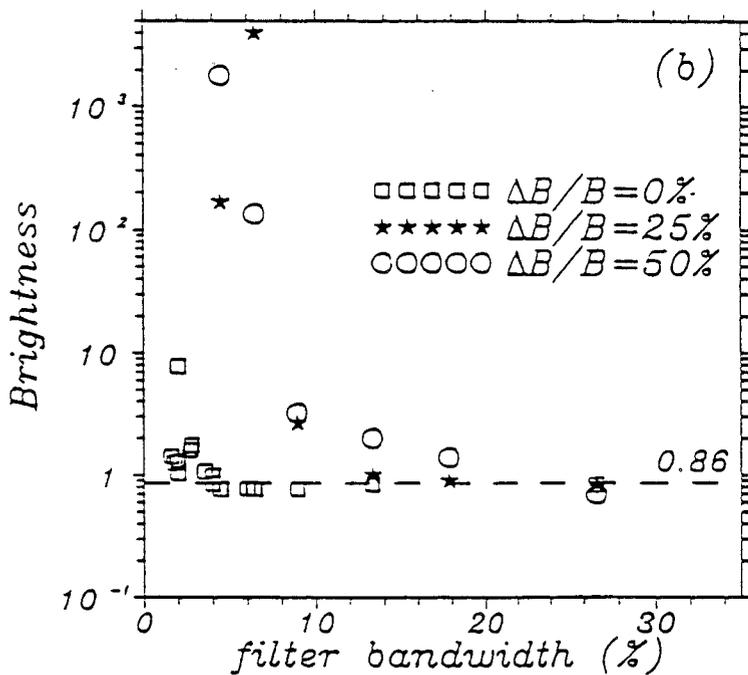


Figure IV. 12. Brillance associée à la carte Filtre-Tapering. La région I (spectre fin) de la carte filtre-tapering se caractérise par une brillance élevée (typiquement supérieure à 100). La région IV (spectre large) a une brillance de l'ordre de 0.8. Entre ces deux extrêmes, la brillance reste de l'ordre de grandeur de l'unité.

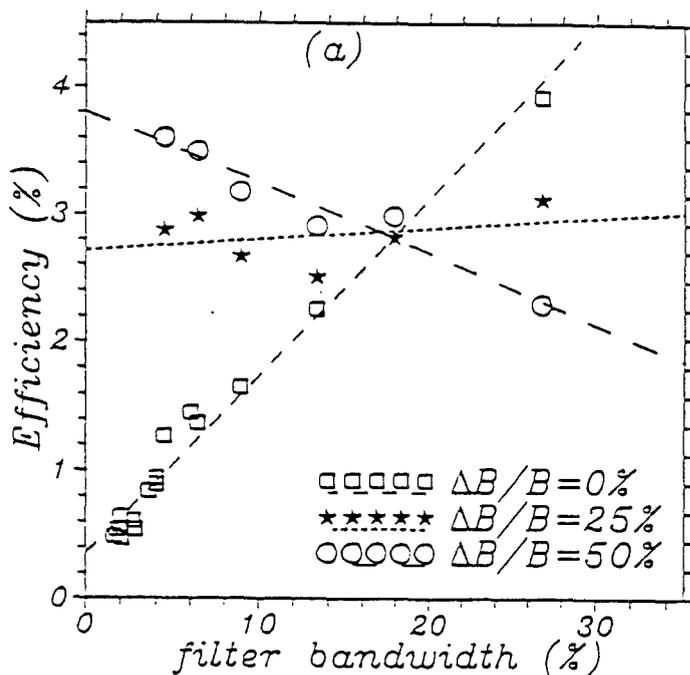


Figure IV. 13. Rendement extrait du laser associé à la carte filtre-tapering.

Une analyse plus fine de la carte peut être réalisée en étudiant le gain des raies satellites par la méthode de diagonalisation des matrices de couplage. En effet, les courbes de valeurs propres obtenues à partir d'un mode de pompage en saturation permettent de définir, à niveau de pertes donné, la taille maximale du filtre nécessaire pour éliminer les raies satellites et empêcher le processus d'élargissement spectral.

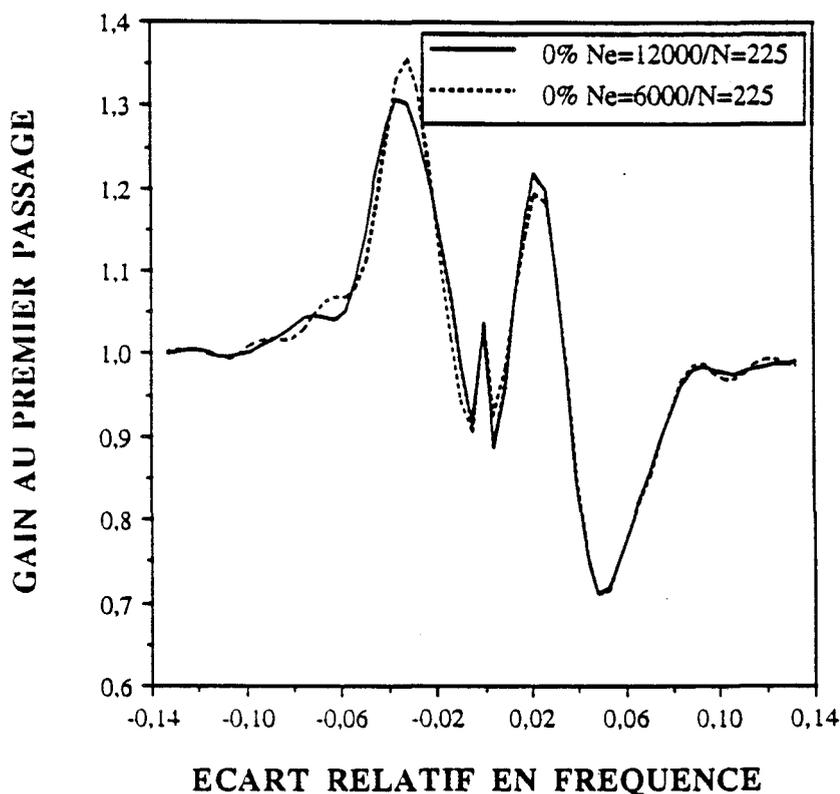
Avec ce jeu de paramètres, les simulations se sont avérées difficiles à stabiliser numériquement. Les courbes de gain par passage brutes obtenues à partir d'une configuration initiale où tous les modes sont égaux montrent une sensibilité au nombre d'électrons de la simulation comme l'indique la figure IV. 14. Néanmoins, les résultats numériques sont suffisamment fiables pour définir grossièrement le seuil d'apparition des raies satellites.

Les courbes de valeurs propres ont été calculées pour un mode de pompage en saturation au maximum de gain linéaire. Elles révèlent la structure compliquée des raies satellites en présence de tapering comme le montre la figure IV. 15. Les raies satellites sont bien atténuées par le tapering mais cette atténuation n'est pas suffisante pour que leur gain devienne inférieur aux pertes de la cavité quel que soit l'écart en fréquence. Conformément à la carte filtre-tapering, il est donc indispensable de joindre un filtrage pour les éliminer.

L'examen des fréquences pour lesquelles le gain des raies est effectivement inférieur aux pertes a permis de définir grossièrement la région I de la carte. Dans cette région, les raies satellites sont atténuées et le spectre s'affine. Pourtant, il existe des points de spectre large dans la région I au voisinage du tapering nul. Comme on l'a indiqué précédemment, il ne faut pas oublier que le mode de pompage et les raies satellites évoluent en même temps ; l'analyse des courbes de valeurs propres obtenues à partir d'un mode de pompage en saturation est valable à condition que le système atteigne la saturation. Dans le cas présent, le gain des raies satellites dépend de l'énergie du mode de pompage ; on peut voir sur la figure IV. 15 que le gain obtenu avec une énergie inférieure à la saturation est supérieur au gain en saturation. Les raies satellites se développent donc dans la bande passante du filtre et détériore le spectre avant que le mode de pompage n'atteigne la saturation ; ceci explique la présence de spectres large là où on s'attendait qu'ils soient fins.

Un second paradoxe apparaît dans la région II. En effet, les raies satellites ont suffisamment de gain pour se développer et le spectre devient pourtant fin. L'examen des simulations a montré que les raies satellites se développent effectivement. La raie fondamentale croît à partir du bruit jusqu'à un niveau suffisant pour générer des raies satellites, les raies satellites se développent jusqu'à atteindre le même ordre de grandeur que la raie fondamentale, la taille étroite du filtre empêche la génération d'une troisième fréquence et la compétition de modes entre le fondamental et les raies satellites conduit à l'amortissement du mode fondamental. Le laser oscille donc sur la raie satellite dominante en basse fréquence de façon stable. Les spectres fins observés dans la région II ne résultent pas d'une simple atténuation des raies satellites par les pertes (c'est à dire d'un effet direct du filtrage) mais bien de la compétition de modes. Ce type de comportement a été récemment observé à l'UCSB [41]. La dynamique du spectre du LEL recèle des effets inattendus.

Gain brut au premier passage
sans tapering .Paramètres ELSA.
Stabilité avec Ne



Gain brut au premier passage.
Paramètres ELSA . Tapering 25%
Stabilité avec Ne.

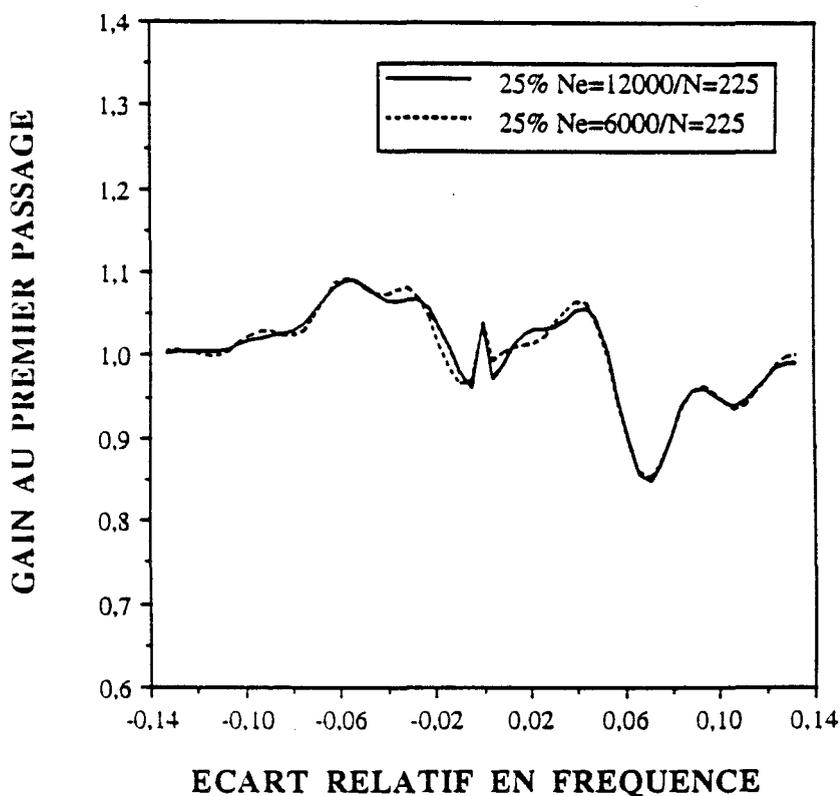


Figure IV. 14. Stabilité des courbes de gain brutes avec le nombre d'électrons N_e , sans tapering et avec un tapering de 25%. Les courbes de gain brutes sont obtenues sur un passage à partir d'une configuration où tous les modes sont égaux. Le mode de pompage (au centre de la fenêtre spectrale) est ici en saturation et positionné au maximum de gain linéaire.

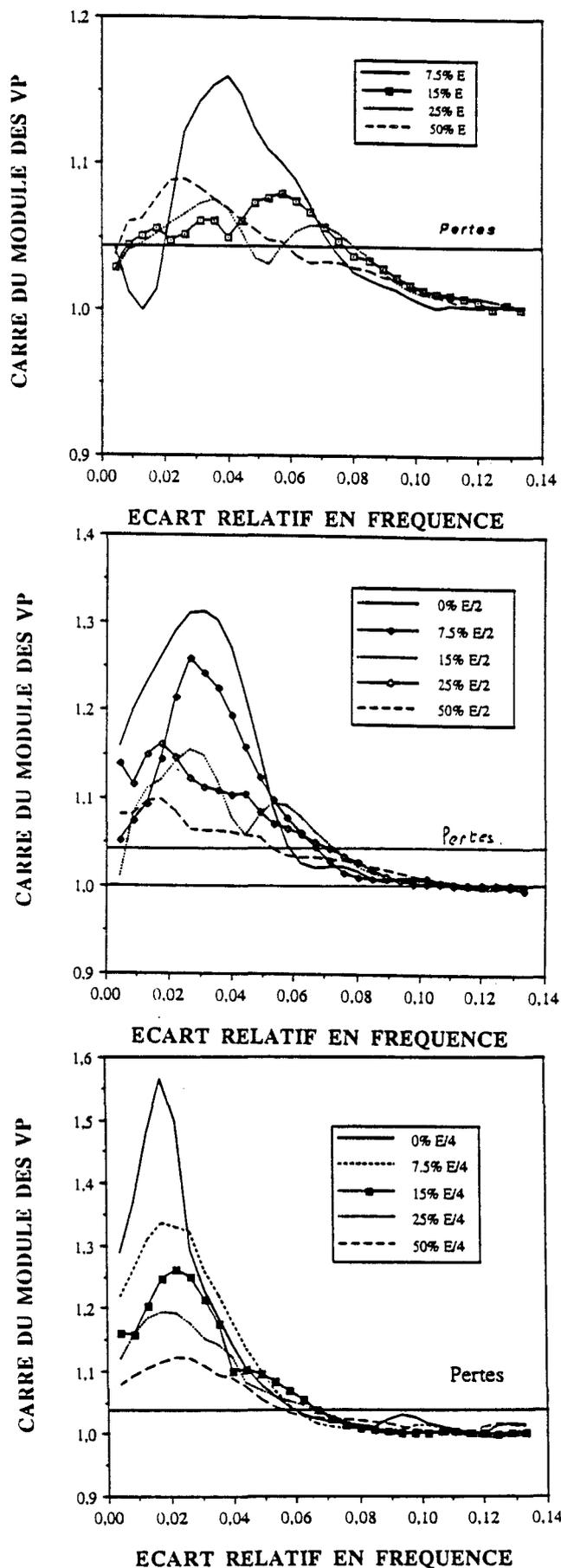


Figure IV. 15. Diagonalisation des matrices de couplage. Le carré du module de la valeur propre de module maximum pour chaque couple de modes symétriques est comparé au niveau de pertes pour différents tapering lorsque l'énergie du mode de pompage est égale à l'énergie de saturation (figure du haut), la moitié (figure du centre) et le quart (figure du bas). La position du mode de pompage est choisie au maximum de gain linéaire.

IV. B. c. Extension du modèle académique en "fond de puits" au tapering

Afin de mieux comprendre l'effet d'un tapering sur la génération de raies satellites, nous avons tenté d'extrapoler le résultat du calcul analytique du chapitre précédent. Dans ce chapitre, on a montré que sous l'hypothèse des électrons en fonds de puits, l'évolution dans l'onduleur de deux raies symétriques par rapport au mode de pompage peut être décrite par une matrice de couplage dépendant de la fréquence synchrotron Ω_0 et de la dérivée de la phase du mode de pompage v_r . En présence d'un tapering, la constante de l'onduleur dépend de la position z dans l'onduleur (IV-6), il s'ensuit que la fréquence synchrotron et la dérivée de la phase en dépendent aussi. Nous allons tenir compte de cette variation pour l'intégration de la matrice de couplage.

L'énergie des électrons que nous utilisons ici est proche de celle d'ELSA ; il s'agit en fait des paramètres de la référence [59, 60] à laquelle nous référons nos simulations dans ce paragraphe. Nous nous intéressons à l'évolution des raies satellites sur un passage dans un onduleur long de 25 m avec un tapering parabolique sur les deux premiers mètres, puis un tapering linéaire jusqu'à la fin de l'onduleur (afin d'atténuer la décroissance parabolique) ; ces deux tapering sont choisis de façon que la dérivée du champ à la fin de la première section soit égale à la dérivée du champ au début de la seconde section. Afin d'assurer un couplage suffisant en tout point de l'onduleur, la constante d'onduleur est initialement choisie suffisamment forte ; elle varie sur les 25 m de $a_w = 1,7$ à $a_w = 0,4$ soit une diminution de 35% de l'énergie résonante.

Comparons d'abord l'évolution des raies satellites avec et sans tapering obtenue par simulation à partir d'une distribution uniforme (étoiles sur les figures IV. 16 a et b). Conformément aux simulations présentées dans la référence [59], on observe bien une forte atténuation des raies satellites quand le tapering est activé. En régime asymptotique, le taux de croissance exponentiel des raies satellites passe de $0,36 \text{ m}^{-1}$ dans le cas de l'onduleur uniforme à $0,16 \text{ m}^{-1}$ en présence du tapering. Dans ces deux simulations, le pourcentage moyen d'électrons piégés dans la bulle de piégeage est de 75% pour l'onduleur uniforme et 45% avec tapering.

Afin de comparer cette évolution des raies satellites avec le calcul analytique que nous désirons extrapoler, la matrice de couplage (III-44) est intégrée en utilisant d'une part, une charge effective représentant la charge des électrons piégés en moyenne (soit 75 % (resp 45 %) de la charge totale sans tapering (resp avec tapering)) et d'autre part, la dépendance en z de la fréquence synchrotron et de la dérivée de la phase du mode de

pompage. La figure IV. 16 compare l'évolution des raies satellites obtenues dans les cas suivants :

- 1) Simulation avec une distribution uniforme avec et sans tapering (étoiles)
- 2) Simulation avec une distribution concentrée au voisinage des points résonants et la charge effective, avec et sans tapering
- 3) Intégration de la matrice de couplage avec une charge effective avec et sans tapering en tenant compte de la dépendance en z de Ω et v_r

Les taux de croissance des raies satellites en régime asymptotique sont en accord par les trois approches avec ou sans tapering.

Ces résultats pourraient être améliorés en introduisant la charge effective instantanée au lieu de la charge effective moyenne puisque la diminution de la taille de la séparatrice entraîne un dépiégeage progressif des électrons dans l'onduleur ; néanmoins, une grande partie des électrons initialement piégés reste piégée tout au long de l'onduleur.

Ainsi, en tenant simplement compte de la diminution de la constante d'onduleur, nous avons étendu au tapering le modèle initialement établi pour un onduleur simple. Cette démarche, extrêmement simple, montre que le comportement des raies satellites en régime asymptotique, avec ou sans tapering, dépend seulement des électrons piégés. Par ailleurs, la diminution du gain des raies satellites en présence de tapering a pour origine la dépendance en z de la constante a_w (et donc la fréquence synchrotron et la dérivée de la phase du mode de pompage) et la diminution du taux de piégeage des électrons par rapport à l'absence de tapering.

Par contre, avec ou sans tapering, l'évolution des raies satellites dans le régime transitoire ne peut être décrite par simple intégration de la matrice de couplage comme nous l'avons déjà constaté au chapitre III. Enfin, il est important de noter que les raies satellites sont fortement atténuées par le tapering mais pas suffisamment pour empêcher leur développement dans le cadre d'un fonctionnement du LEL en oscillateur.

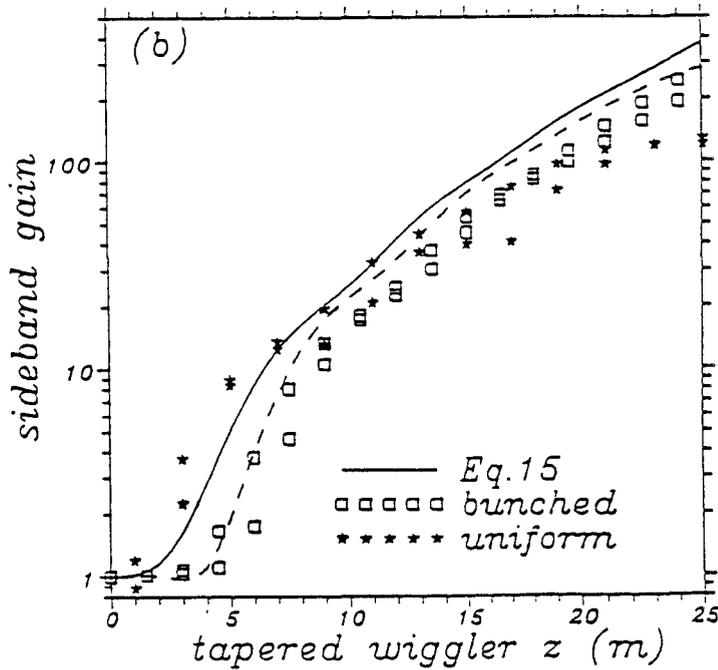
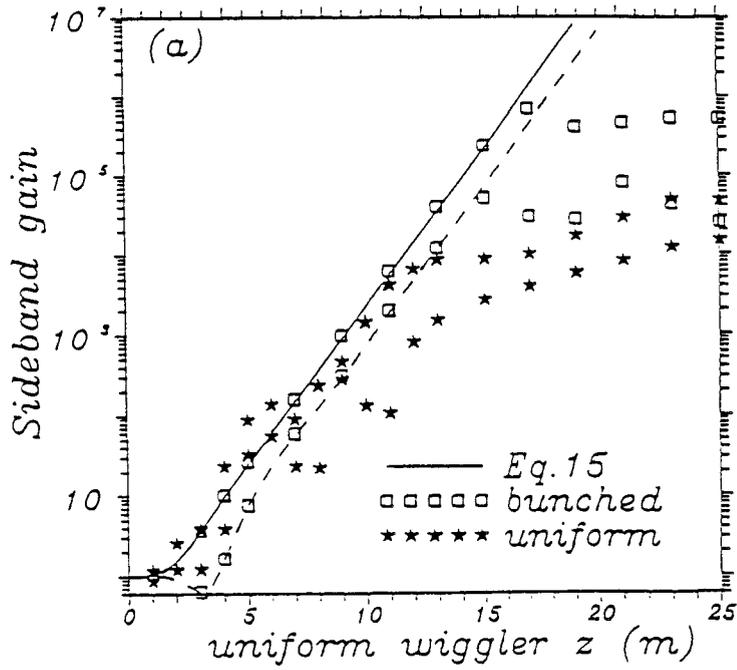


Figure IV. 16. On compare ici l'évolution de deux raies satellites symétriques par rapport au mode de pompage et proches du maximum de gain dans le cas d'un onduleur uniforme (figure a) et du tapering (figure b). Sur ces deux figures, on compare l'évolution des deux raies obtenue par intégration de la matrice de couplage (lignes continues et pointillés), par simulation avec une distribution uniforme (étoiles), par simulation avec une distribution concentrée sur les points résonants (carrés).

IV. C. AUTRES EXEMPLES : LE BI-ONDULEUR ET LA MODULATION D'ENERGIE DU FAISCEAU D'ELECTRONS

Cette dernière partie est consacrée à deux voies récentes en matière de contrôle du comportement du LEL. Le bi-onduleur, d'abord, a déjà fait l'objet d'une étude approfondie dans le cadre du LEL ELSA [47]. Après un bref rappel des caractéristiques et des qualités de cet onduleur de nouvelle génération, on tentera de comprendre si le phénomène de génération des raies satellites persiste. Ensuite, nous montrerons qu'il est concevable de contrôler les raies satellites en modulant l'énergie du faisceau d'électrons ; nous verrons alors les effets de ce type d'opération sur le faisceau laser.

IV. C. a. Onduleur à 2 fréquences

Le principe du bi-onduleur repose sur l'introduction d'une seconde périodicité du champ magnétique statique de l'onduleur proche de la périodicité principale. Le potentiel vecteur associé au champ magnétique statique du bi-onduleur s'écrit en fonction de la périodicité principale λ_1 et de la périodicité secondaire λ_2 :

$$A_w = \frac{m c}{e} [a_1 \cos (k_{w1} z) + a_2 \cos (k_{w2} z)] \quad (IV-11)$$

où

$$\left[\begin{array}{l} k_{w1} = \frac{2 \pi}{\lambda_{w1}} \quad , \quad k_{w2} = \frac{2 \pi}{\lambda_{w2}} \\ k_{w2} = k_{w1} (1 - b) \end{array} \right. \quad (IV-12)$$

Les nombres d'onde k_{w1} et k_{w2} sont décalés d'un facteur b inférieur à 5%. L'amplitude a_2 associée à la périodicité secondaire est petite devant l'amplitude a_1 associée à la périodicité principale soit en fonction de la constante d'onduleur a_w :

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = a_w (1 - a) \\ a_2 = a_w \frac{a}{1 - b} \end{array} \right. \quad (IV-13)$$

où a est inférieur à 20% (notons que si a s'annule, on retrouve l'expression de l'onduleur simple).

La première étude du bi-onduleur [47] réalisée avec des paramètres proches du LEL ELSA a montré qu'en régime de faible champ, le gain par passage est radicalement

modifié par l'introduction d'une seconde périodicité. Le spectre d'émission spontanée se décompose en plusieurs pics dont l'écart en fréquence dépend de la différence b des nombres d'onde k_{w1} et k_{w2} et donc de la période du battement de la double périodicité :

$$\omega_n = \frac{2 \gamma^2}{1 + K^2} k_{w1} (1 \pm n b) c \quad (\text{IV-14})$$

où $K^2 = (a_1^2 + a_2^2) / 2$

La courbe de gain linéaire se déduit de la courbe d'émission spontanée d'après le théorème de Madey. Dans le cas où les pics sont bien distincts, le gain linéaire comporte donc lui aussi plusieurs pics dont les maxima sont proches des maxima d'émission spontanée (IV-14). Il peut arriver néanmoins que les pics d'émission spontanée interfèrent ; il en résulte alors un gain beaucoup plus compliqué. Cependant, le gain est connu et il est possible d'ajuster les paramètres du bi-onduleur de façon à positionner le maximum de gain à la fréquence désirée. En tous les cas, le gain du bi-onduleur est diminué par rapport à l'onduleur simple typiquement d'un facteur deux. Par conséquent, le bi-onduleur est adapté aux LEL de fort courant ; par exemple, le courant envisagé ici avec les paramètres d'ELSA est de 350 A.

En ce qui concerne l'évolution du spectre sur plusieurs centaines de passages, une analyse numérique systématique a montré qu'il est possible d'optimiser les paramètres du bi-onduleur afin d'obtenir à la fois un spectre fin et un bon rendement. Par exemple, avec les paramètres d'ELSA, pour un courant de 500A (et un taux de pertes de 2%), le spectre demeure fin (la largeur spectrale inférieure à 0,1%) après 1000 passages avec un rendement extrait de 4% pour les paramètres du bi-onduleur optimisé :

$$a = 17.5\% \text{ et } b = 3.5\%$$

Avec les mêmes paramètres mais dans le cas de l'onduleur simple, le spectre s'élargit suivant le processus de dégénérescence décrit au premier chapitre et le rendement extrait vaut alors 5%. Il convient de rappeler que l'obtention d'un spectre fin par filtrage des raies satellites par exemple, occasionne une diminution du rendement d'un facteur 10 environ par rapport au rendement obtenu en régime de spectre large. Le bi-onduleur est donc un moyen remarquable d'obtenir un spectre fin tout en conservant un rendement proche du rendement de spectre large.

En contrepartie, le régime de saturation n'est plus stationnaire contrairement à l'onduleur simple. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, le laser atteint son régime de saturation après 300 passages avec un rendement de 4.5% puis le rendement diminue progressivement pour atteindre 4% au millième passage.

Afin de comprendre comment il est possible d'allier une bonne finesse spectrale et un bon rendement, le bi-onduleur peut être appréhendé de deux manières complémentaires en examinant, d'une part, le mouvement des électrons dans l'espace des phases (ψ, γ) et en étudiant, d'autre part, le développement des raies satellites.

Nous ne présenterons ici que quelques aspects du mouvement des électrons dans l'espace des phases détaillé amplement par ailleurs dans la référence [62]. Dans le cas de l'onduleur simple, nous avons vu au chapitre précédent que les raies satellites sont dues au piégeage des électrons dans les puits centrés sur les points résonants d'énergie γ_r :

$$\gamma_r^2 = \frac{k_L (1 + a_w^2/2)}{2 k_w} \quad (\text{IV-15})$$

Dans le cas du bi-onduleur, P. Chaix a montré que de nouvelles résonances apparaissent. Chacune des résonances est identifiée à une fréquence particulière :

* la fréquence principale k_{w1} :

$$\gamma_r^2 = \frac{k_L (1 + K^2)}{2 k_{w1}} \quad (\text{IV-16})$$

* la fréquence secondaire k_{w2} :

$$\gamma^2 = \frac{k_L (1 + K^2)}{2 k_{w2}} \quad (\text{IV-17})$$

* les harmoniques du battement des deux fréquences $k_b = k_{w2} - k_{w1}$:

$$\gamma^2 = \gamma_r^2 \left(1 + n \frac{k_b}{k_{w1}} \right) \quad \text{où } n \text{ est entier} \quad (\text{IV-18})$$

Le mouvement des électrons dans l'espace des phases en présence d'un champ laser monochromatique est très différent de ce que nous avons pu étudier jusqu'à présent avec un onduleur simple. Il ne se réduit plus à la zone de l'espace des phases délimitée par la séparatrice que nous avons défini pour l'onduleur simple. P. Chaix a montré qu'au contraire les électrons diffusent dans une région plus large de l'espace des phases jusqu'à occuper uniformément cette région dite "région de stochasticité". L'énergie moyenne des électrons est alors inférieure l'énergie moyenne que l'on peut obtenir avec un onduleur simple en régime monochromatique. Ceci explique que le rendement d'un bi-onduleur est très supérieur au rendement de l'onduleur simple.

Du point de vue du champ laser, nous devons examiner pourquoi les raies satellites ne se développent pas pendant la phase de croissance du mode de pompage et pendant la phase de saturation de sorte que le spectre demeure monochromatique pendant une longue durée (1000 passages) avec le bi-onduleur optimisé.

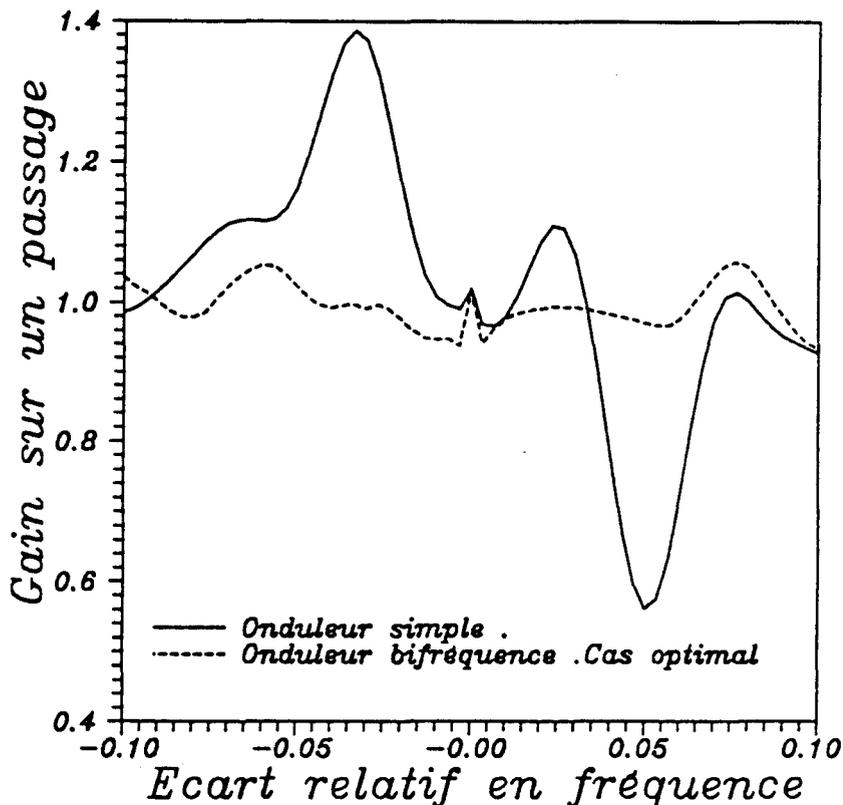
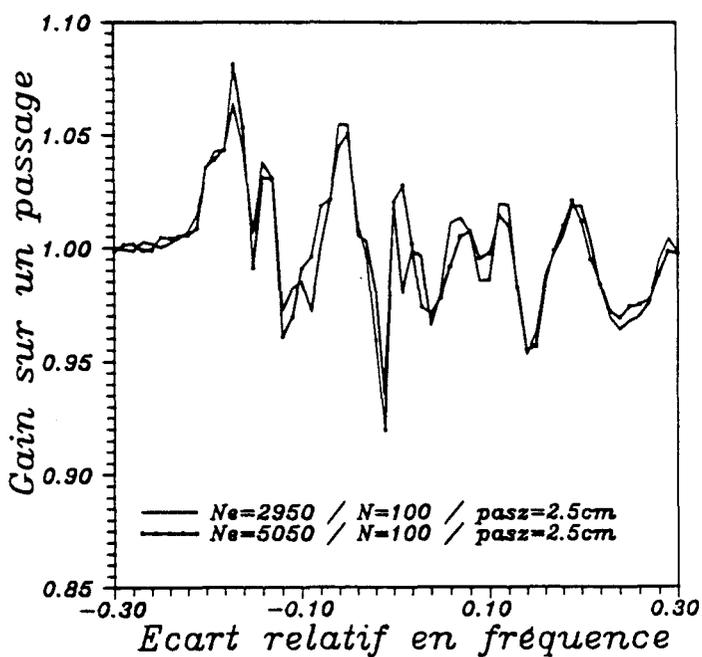


Figure IV. 17. Comparaison du gain par passage des raies satellites obtenu avec un ondulateur simple et un bi-ondulateur optimisé ($a = 17.5\%$, $b = 3.5\%$ avec les paramètres ELSA). La configuration des modes à l'entrée de l'ondulateur comporte un mode de pompage (au centre de la fenêtre spectrale) d'énergie proche du régime de saturation et des modes satellites d'énergie égale à 10^{-5} fois l'énergie du mode de pompage. Dans chaque cas, le mode de pompage est positionné en fréquence au maximum de gain linéaire. L'énergie de saturation est l'énergie de saturation monochromatique à cette fréquence.

Il est d'abord instructif de comparer le gain par passage des raies satellites avec et sans bi-ondulateur dans des conditions identiques quand le mode de pompage est en saturation. Avec les paramètres évoqués précédemment, on voit sur la figure IV. 17 qu'en absence de modulation du champ statique, les raies satellites ont un gain suffisamment important pour se développer rapidement et engendrer le processus de dégénérescence du spectre comme l'ont montré les simulations multifréquences correspondantes [47]. L'usage du bi-ondulateur optimisé atténue considérablement le gain des raies satellites de sorte qu'il n'est plus possible de distinguer la courbe habituelle obtenue avec un ondulateur simple.

Onduleur bifréquence . Cas optimal
 $a = 0.175$, $b = 0.035$, $E_{sat} = 2.9$ J



Onduleur bifréquence . Cas optimal
 $a = 0.215$, $b = 0.04$, $E_{sat} = 1$ J

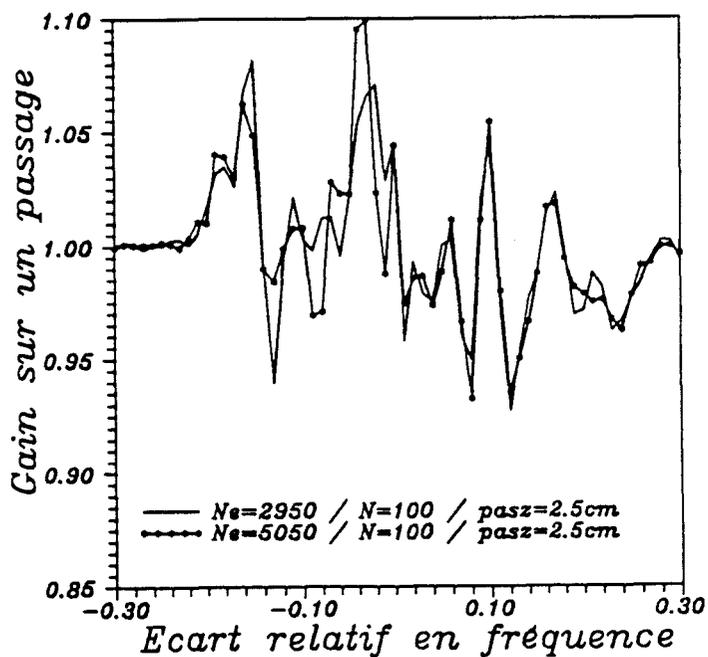


Figure IV. 18. Evolution du gain par passage des modes satellites avec l'énergie du mode de pompage dans le cas du bi-onduleur optimisé (comme pour la figure précédente, le mode de pompage est au centre de la fenêtre spectrale). On compare ici le gain par passage obtenu avec l'énergie du régime de saturation (figure du haut) et un tiers de cette énergie (figure du bas). Le gain se révèle difficile à stabiliser avec le nombre d'électrons.

Cependant, il n'est pas exclu, dans ce cas particulier, que des raies adjacentes au mode de pompage se développent puisque le gain demeure supérieur aux pertes (2% de pertes) pour certaines fréquences. Cette croissance de modes satellites s'effectue cependant très lentement et justifie la durée pendant laquelle le spectre reste monochromatique.

Pendant la phase de croissance du mode de pompage, le gain des modes adjacents garde le même ordre de grandeur qu'en saturation comme l'illustre la figure IV. 18. Cependant, il fluctue avec l'énergie du mode de pompage. Cette absence de cohérence du gain de passage en passage et sa faiblesse empêchent le développement des modes adjacents au cours de la phase de croissance du mode de pompage et le spectre reste monochromatique. Par ailleurs, elle illustre le mouvement incohérent des électrons dans l'espace des phases au sens où ce mouvement n'est pas associé à l'amplification cohérente de fréquences particulières comme nous avons pu le constater avec la génération de raies satellites dans un onduleur simple.

Etant donné la complexité des équations du mouvement des électrons dans un bi-onduleur, il paraît difficile de traiter le bi-onduleur de façon plus formelle afin de déterminer par exemple les conditions de son optimisation ou examiner la génération de raies satellites analytiquement. Ainsi, l'analyse qu'on peut en faire demeure qualitative. Toutes les études ont largement fait appel aux simulations numériques (coûteuses). A ce jour, aucun LEL fonctionnant sur un bi-onduleur n'a en effet oscillé, bien qu'un prototype ait d'ores et déjà été réalisé au CEA. Cette nouvelle voie suscite cependant un intérêt certain dans le domaine des LEL de puissance.

IV. C. b. Modulation d'énergie du faisceau d'électrons

Etant donné la difficulté de réaliser des filtres dont la bande passante est de quelques % autour d'une fréquence centrale dominante, il peut être intéressant de disposer d'un moyen d'empêcher l'élargissement du spectre sans l'usage d'un filtrage optique. Le bi-onduleur touche au principe même de l'interaction du faisceau d'électrons et du champ laser dans l'onduleur afin d'obtenir une amélioration substantielle du rendement.

Nous proposons ici une seconde méthode destinée au contraire aux applications nécessitant peu de puissance. Il s'agit de moduler l'énergie du faisceau d'électrons à une échelle supérieure à quelques passages donc bien supérieure au temps d'interaction des électrons dans l'onduleur. La génération de raies satellites intervient lorsque le mode de

pompage atteint une amplitude de l'ordre de grandeur de l'énergie de saturation ; l'idée de la modulation d'énergie est d'obtenir un fonctionnement pulsé du LEL de façon que le mode de pompage reste peu de temps en saturation empêchant par là-même la croissance des raies satellites.

La modulation d'énergie est réalisée en variant l'énergie des électrons à chaque nouveau passage de sorte que l'énergie au $i^{\text{ème}}$ passage s'écrit :

$$\gamma = \gamma_0 \left(1 + a_m \sin \left(2\pi \frac{i}{n_p} \right) \right) \quad (\text{IV-19})$$

où γ_0 est l'énergie moyenne du faisceau d'électrons, a_m l'amplitude relative de modulation et n_p la période de modulation mesurée en nombre de passages. On ne modifie pas l'interaction du faisceau d'électrons et du champ laser à l'intérieur de l'onduleur.

L'effet de la modulation d'énergie sur le gain linéaire est assez clair. Il se manifeste à l'échelle du passage. La position en fréquence du gain linéaire peut être caractérisée par le centre de la courbe de gain antisymétrique correspondant au maximum d'émission spontanée ω_{sp} (gain nul). Compte tenu de l'amplitude faible de la modulation que nous envisageons (quelques %), la position en fréquence du gain linéaire oscille avec la même période et une amplitude relative double :

$$\omega_{sp} = \frac{2 k_w c \gamma^2}{1 + a_w^2/2} = \frac{2 k_w c \gamma_0^2}{1 + a_w^2/2} \left(1 + 2 a_m \sin \left(2\pi \frac{i}{n_p} \right) \right) \quad (\text{IV-20})$$

La connaissance du gain linéaire permet dans le principe de calculer l'évolution du spectre par itération successive du gain décalé en fréquence à chaque passage.

En ce qui concerne l'évolution du spectre quand les non-linéarités se manifestent (compétition de modes et génération de raies satellites), seules les simulations numériques à partir du bruit et sur plusieurs centaines de passages peuvent apporter des éclaircissements. Nous avons choisi les paramètres du projet de Lille avec un courant de 1,5 A ($Q=20$) donc proche du cas très instable présenté au premier chapitre. Avec ces paramètres, le régime d'élargissement spectral est largement engagé après 100 passages et en régime de spectre large, le rendement extrait se stabilise à 1,5% environ.

Afin de se fixer les idées sur la modulation réalisée, rappelons que la largeur relative en fréquence de la courbe de gain linéaire est proche de 1%. Dans cette étude, la

période de modulation n_p sera comprise entre 10 et 100 passages soit $0,2 \mu\text{s}$ à $2 \mu\text{s}$ environ pour une cavité de $2,5 \text{ m}$. On variera l'amplitude a_m de $0,5\%$ à 2% ; ceci correspond à une modulation de la position en fréquence du gain linéaire de 1% à 4% donc de l'ordre de grandeur ou supérieure à la largeur en fréquence du gain linéaire. Les simulations multifréquence à partir du bruit sont ici menées sur 250 passages avec une fenêtre spectrale de 8% . Enfin, la position en fréquence de la fenêtre est choisie de façon que le maximum de gain soit au centre de la fenêtre spectrale quand l'énergie du faisceau d'électrons atteint sa valeur moyenne γ_0 .

Le tableau IV-1 résume les résultats obtenus pour différentes amplitudes et périodes de modulation.

	0,5 %	1 %	2 %
Amplitude			
Période			
10 passages	Multimode	Multimode rdt max = 0,3 %	Multimode rdt max = 0,2 %
50 passages	Multimode rdt max = 1 %	Monomode à 74 % rdt max = 0,4 %	Monomode à 98 % rdt max = 0,2 %
100 passages	Multimode rdt max = 1 %	Multimode rdt = 0,4 %	Monomode rdt max = 0,2 %

Tableau IV-1. Récapitulatif de l'état du spectre après 300 passages en fonction de la modulation.

* Un fonctionnement de spectre fin peut être obtenu en optimisant les paramètres de la modulation. Pour le couple de paramètres ($a_m=2\%$, $n_p=50$), le spectre devient monochromatique à 98% comme le montre la figure IV. 19 avec une fréquence stable sur le bord inférieur de la fenêtre spectrale. Le faisceau laser est pulsé avec une périodicité égale à la période de modulation. Son rendement extrait maximum est proche du rendement que l'on pourrait obtenir en l'absence de modulation en filtrant les raies satellites soit $0,2\%$. Notons que le temps de montée en puissance est d'autant plus long que l'amplitude de modulation est grande traduisant une diminution du gain moyen.

* Avec la même période de modulation, il existe un cas intermédiaire monochromatique à 74% ($a_m=1\%$, $n_p=50$). Cependant, on voit clairement sur la figure IV. 19 que le spectre commence à s'élargir traduisant le développement des raies satellites. Pour une amplitude de modulation plus faible ($a_m=0,5\%$, $n_p=50$), le spectre s'élargit effectivement et le rendement augmente en conséquence.

* Dans le cas d'une modulation de période courte (10 passages) et quel que soit l'amplitude de la modulation, on ne note aucun affinement ni élargissement du spectre. La fréquence moyenne et la largeur en fréquence du spectre oscillent à la fréquence de modulation. La largeur spectrale relative moyenne demeure proche de 3% (resp 1,5%) avec une amplitude de modulation de 2% (resp 1%) au delà d'une centaine de passages. Cette période de modulation est par ailleurs trop courte pour obtenir un fonctionnement en régime pulsé (figure IV. 20).

* Avec une modulation de période longue (100 passages), le laser évolue vers un régime pulsé monochromatique si l'amplitude de modulation atteint 2% (figure IV. 21). On obtient alors un rendement extrait de 0,2% identique au cas ($a_m=2\%$, $n_p=50$). En deçà de cette amplitude de modulation, le spectre s'élargit.

Cette étude a montré qu'il est concevable d'envisager la modulation d'énergie du faisceau d'électrons comme un nouveau moyen d'obtenir un fonctionnement du LEL en régime monochromatique, l'élargissement spectral étant inéluctable en absence de modulation. La contrepartie de cette propriété est un régime pulsé du laser (à l'échelle de la μs). Bien entendu, cette analyse doit être affinée. En effet, n'oublions pas qu'implicitement, un filtrage très large a été introduit par le choix de la fenêtre spectrale de la simulation. Il reste à déterminer si la modulation d'énergie seule peut suffire à obtenir le régime pulsé de spectre fin et s'il est possible de prévoir la position finale de la raie en l'absence de filtrage.

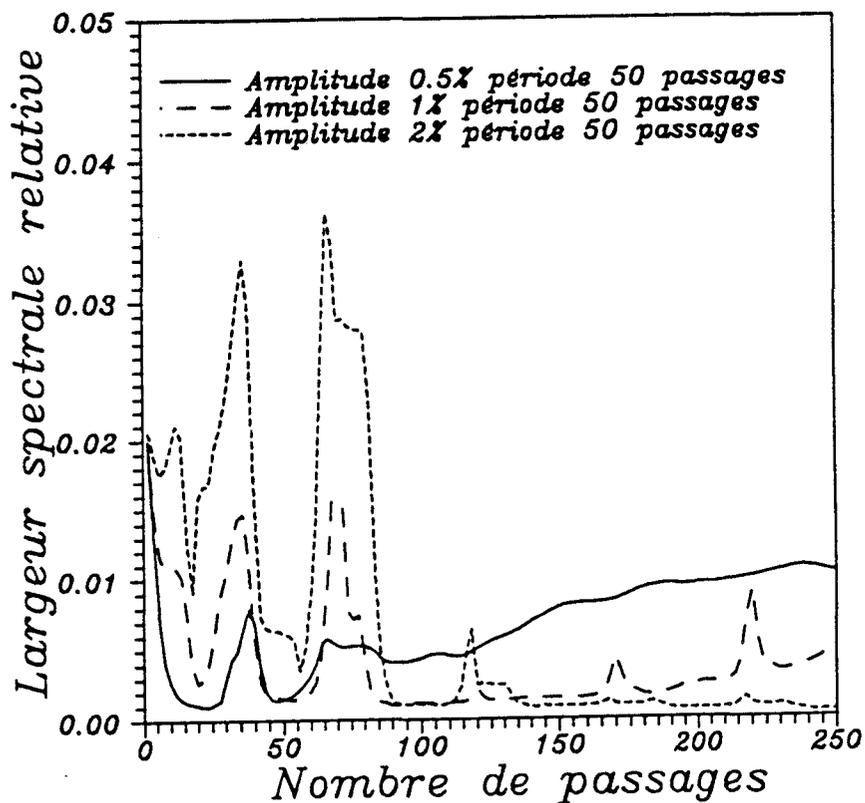
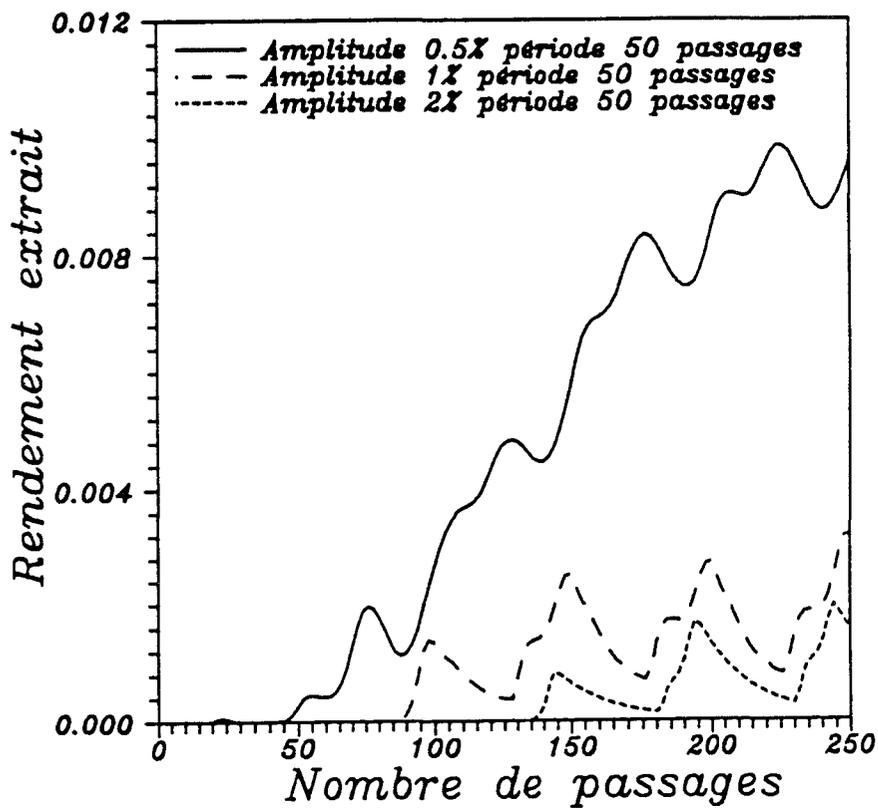


Figure IV. 19. Evolution du rendement extrait (figure du haut) et de la largeur spectrale relative (figure du bas) pour une période de modulation de 50 passages et différentes amplitudes de modulation. Avec une amplitude de modulation de 2%, le spectre devient monochromatique. Pour une amplitude inférieure (0,5% et 1%), il s'élargit. En régime monochromatique, le faisceau laser est pulsé à la période de modulation.

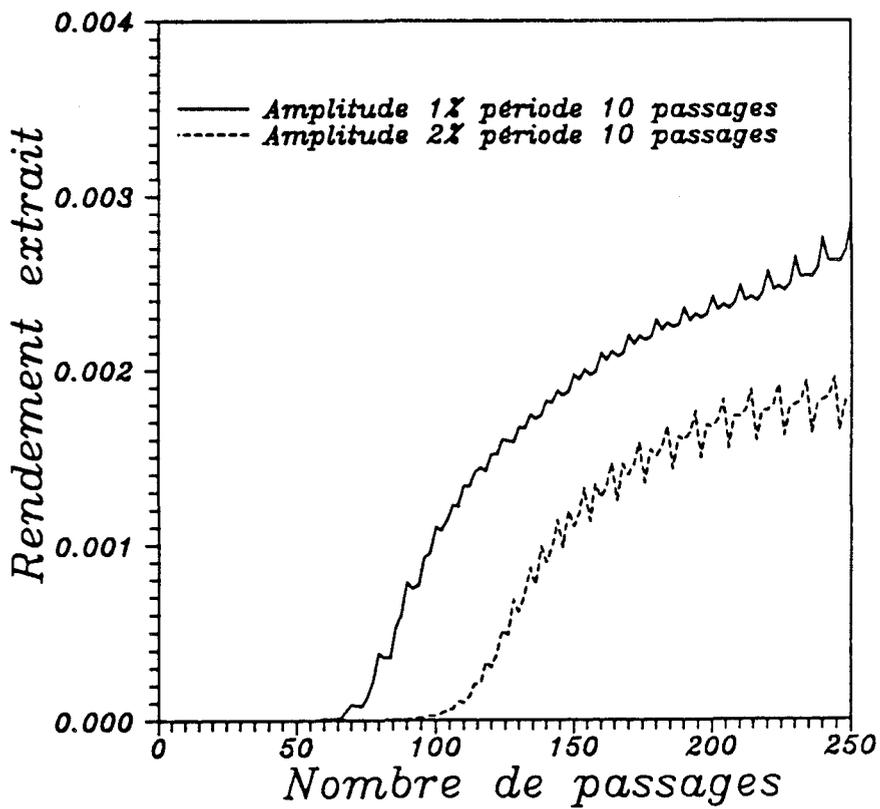


Figure IV. 20. Evolution du rendement extrait avec une modulation de période courte égale à 10 passages.

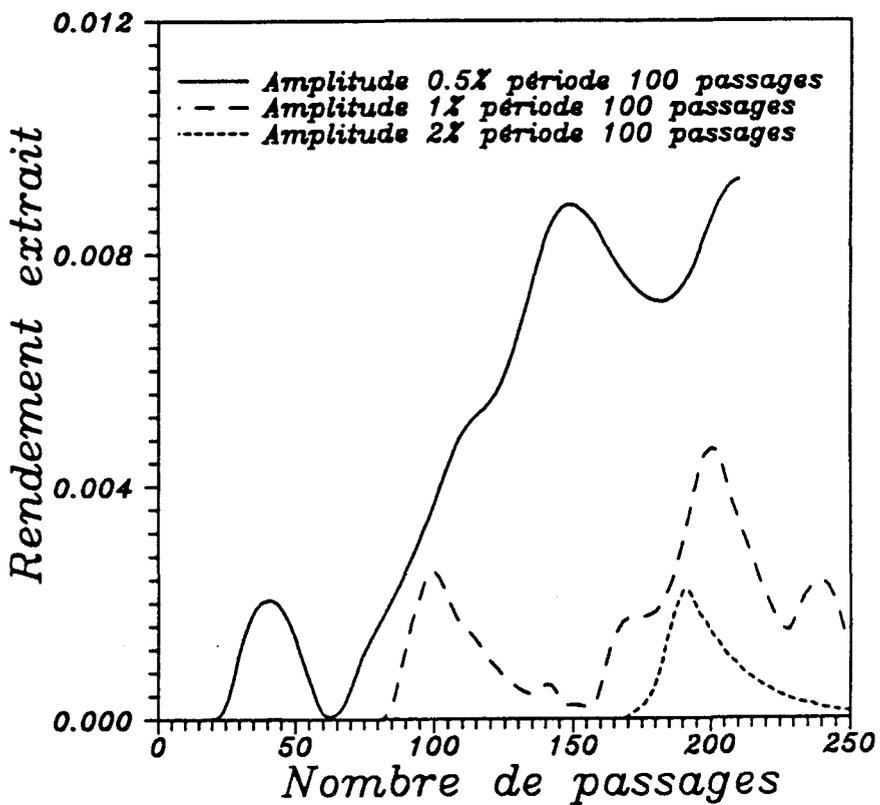


Figure IV. 21. Evolution du rendement extrait avec une modulation de période longue égale à 100 passages.

Ce chapitre a été consacré aux différentes méthodes actuellement disponibles afin d'assurer la transition entre spectre large et spectre fin.

Le moyen le plus immédiat de supprimer les raies satellites est le filtrage optique déjà utilisé au premier chapitre. L'approche semi-analytique développée au chapitre III est impuissante pour quantifier le gain des raies satellites et déterminer ainsi les caractéristiques du filtrage. En particulier, le calcul ne décrit pas le régime transitoire or seul le début du régime asymptotique est généralement atteint dans un LEL à onduleur court.

Grâce aux simulations à bas bruit numérique, une analyse du gain des raies satellites a permis de combler cette lacune. En exploitant le couplage de chaque couple de modes symétriques par rapport au mode de pompage, il est possible de déterminer une matrice de couplage liant chaque couple à partir de diverses configurations initiales du champ laser. La croissance ou l'atténuation des raies satellites est donnée par la comparaison des valeurs propres de la matrice au niveau de pertes.

L'analyse du gain en fonction de l'énergie du mode de pompage a permis de distinguer un régime de génération de raies satellites d'un régime intermédiaire menant au régime linéaire. Les caractéristiques d'un filtrage des raies satellites sont données par leur gain quand le mode de pompage est en saturation.

Néanmoins, la position en fréquence des raies satellites dépend de l'énergie du mode de pompage. Si le gain des raies satellites est suffisant, il est possible que le système bifurque avant d'atteindre la saturation en développant des raies satellites à l'intérieur du filtre. Cette méthode doit donc être manipulée avec précaution et elle ne remplace pas totalement les simulations sur plusieurs centaines de passages.

La quête d'une amélioration du rendement du LEL a conduit à modifier les caractéristiques de l'onduleur. Le tapering a souvent été associé à la fois à une amélioration du rendement et à la suppression des raies satellites.

Nous avons montré que le tapering seul est inefficace afin d'empêcher la croissance des raies satellites bien qu'il atténue leur gain. Il est nécessaire de lui associer un second paramètre afin d'assurer la transition spectre large-spectre fin en l'occurrence un filtrage. L'analyse conjointe des simulations sur plusieurs centaines de passages et des simulations à bas bruit a permis de distinguer un régime de spectre fin où les raies satellites sont effectivement supprimées, d'un régime de spectre large où les raies satellites se développent ainsi qu'un régime exotique où le laser oscille de façon stable sur une raie satellite.

Par ailleurs, la notion de rendement ne peut en aucun cas être dissociée du régime spectral du LEL. Ainsi, un même rendement peut être obtenu soit en régime

monochromatique conformément au principe de base du tapering, soit en régime de spectre large grâce aux propriétés de l'élargissement spectral.

Afin de mieux comprendre l'effet du tapering sur le gain des raies satellites, le modèle académique, développé au chapitre III, a été étendu au tapering en intégrant la variation de la constante d'onduleur. L'atténuation des raies satellites en régime s'est avérée essentiellement due aux électrons piégés dans la bulle de piégeage mobile dans l'espace des phases et au dépiégeage progressif des électrons.

Enfin, nous avons rapidement examiné deux méthodes récentes susceptibles de contrôler la transition spectre fin-spectre large.

L'onduleur à deux fréquences est adapté aux LEL de puissance. Il s'est d'ores et déjà montré un excellent moyen d'associer la finesse spectrale et le rendement. Le mouvement des électrons dans l'espace est très différent de celui obtenu avec un onduleur simple. Comme l'ont montré les simulations à bas bruit numérique, les raies satellites perdent toute structure, empêchant ainsi leur développement cohérent.

Au contraire, la modulation d'énergie du faisceau d'électrons à l'échelle de plusieurs passages est plutôt associée aux LEL pour lesquels un faible rendement est suffisant. Une analyse systématique en fonction des paramètres de modulation a mis en évidence un régime de spectre fin pulsé à l'échelle de la μs .

CHAPITRE V

LIEN AVEC LES EXPERIENCES ET LE PROJET DE LILLE

Notre étude a été réalisée avec les paramètres du projet de Lille et ceux du LEL ELSA auxquels nous avons fait référence au fur et à mesure. Ainsi, les phénomènes mis en évidence dans l'approche semi-analytique ont été vérifiés pour ces deux jeux de paramètres. Pour l'étude de l'effet du tapering sur les raies satellites, on s'est attaché principalement au laser de puissance ELSA. Une étude du gain des raies satellites avec les paramètres du projet de Lille (non rapportée ici) a cependant révélé un comportement équivalent en présence de tapering (à savoir une atténuation des raies satellites mais pas leur suppression). L'analyse de l'action du bi-onduleur et de la modulation d'énergie sur le développement des raies satellites a été menée respectivement pour le LEL ELSA et pour le projet de Lille.

Bien entendu, les développements théoriques et les simulations numériques comportent un certain nombre de limitations. Aussi est-il important de situer ce travail dans un contexte plus expérimental. Nous nous proposons ici, dans le cadre restreint du projet de Lille, d'examiner d'une part les hypothèses réalisées et les résultats de cette étude et d'autre part les contraintes imposées par l'expérience. Le projet de Lille est très proche du LEL de l'UCSB ; ce dernier fonctionne depuis 1984 et délivre maintenant le rayonnement dans la gamme de longueurs d'onde allant de 2,5 mm à 63 μm . Nous disposons donc d'une machine de référence dont la faisabilité est acquise.

V. A. OBJECTIFS DU PROJET ET INCIDENCE DE NOTRE ETUDE

* Rappel des objectifs du projet de Lille et de ses composantes principales

L'étude menée a été orientée en direction de domaines de compétences traditionnels du Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne parmi lesquels la haute pureté spectrale et l'infrarouge lointain. Cette étude a ainsi concerné le développement d'une source de rayonnement continûment accordable dans la gamme 100 μm - 1000 μm et la recherche des conditions d'obtention de la pureté spectrale ultime.

Dans ce domaine spectral, pour une taille d'onduleur classique, un faisceau d'électrons de quelques Mev est suffisant. Dans le cadre des objectifs poursuivis, l'accélérateur électrostatique de Van de Graaff est un candidat idéal. Il est actuellement le seul accélérateur capable de délivrer des impulsions électroniques quasi-continues longues de quelques dizaines de μs à un taux de répétition de quelques Hz. Le courant délivré est de l'ordre de quelques ampères avec une dispersion en énergie remarquablement faible. Afin de fixer les idées, actuellement, la dispersion relative en énergie est environ 10^{-5} à l'UCSB (elle vaut par comparaison 1,5 % pour le LEL ELSA). Or la hauteur de la bulle de piégeage en régime de saturation est de l'ordre de 1% ; la dispersion en énergie est donc négligeable dans notre cas.

Avec un accélérateur d'énergie ajustable entre 2 et 6 Mev, la gamme spectrale envisagée peut être couverte avec un onduleur de périodicité égale à 2,5 cm, donc de conception très classique, par exemple en configuration à 4 aimants par période. Dans ce cas, le champ magnétique sur l'axe vaut approximativement en fonction de l'entrefer H et de la période λ_w :

$$B_w = 1,43 B_{\text{rem}} \exp \left[\frac{-\pi H}{\lambda_w} \right] \quad (\text{V-1})$$

où B_{rem} est le champ magnétique rémanent des aimants. Une largeur d'entrefer proche de 2 cm permet aisément de satisfaire les contraintes optiques et mécaniques. Une amplitude du champ magnétique statique de 0,4 T correspondant à une constante d'onduleur égale à 0,8 est atteinte sans difficultés avec des aimants de type samarium cobalt.

Les contraintes imposées par l'accélérateur de Van de Graaff et les éléments relatifs à la cavité optique seront analysées dans la partie suivante.

Les caractéristiques de gain et la dynamique du spectre présentées dans ce document ont été menées grâce au code SPECTRE avec le jeu de paramètres présentés dans la tableau I-3.

Rappelons quelques ordres de grandeur importants. Dans les conditions du modèle simulé par le code SPECTRE (voir chapitre II), nous attendons un gain par passage proche de 50% avec un courant de 2 A autour de 260 μm (figure I.6). La largeur spectrale relative de la courbe de gain linéaire est dans ces conditions de l'ordre de 1%. Le rendement extrait en saturation avec un taux de pertes par passage de 5% est alors de 0,3 % en régime de spectre fin ; ceci correspond à une puissance d'environ 20 kW. La saturation de la raie fondamentale est atteinte quelques μs après le démarrage à partir du bruit (en considérant une cavité optique longue de 2,5 m), cette durée est inférieure d'un facteur 10 en ordre de grandeur à la durée de vie du faisceau d'électrons (cette durée peut aller jusqu'à 50 μs à l'UCSB). L'ensemble de ces ordres de grandeur est confirmé par les caractéristiques connues de la machine de l'UCSB.

Les caractéristiques du gain ont été analysées en détail grâce à une simulation développée par C. Brau (OKPULSE) [3]. Ces résultats sont présentés en détail dans le document relatif au projet [1] ; nous n'y reviendrons pas ici.

* Analyse de la dynamique spectrale

Nous nous sommes proposé d'examiner les conditions d'obtention d'un spectre fin. Ceci nous a naturellement amené à étudier la dynamique spectrale du LEL. Rappelons les hypothèses essentielles de notre analyse.

Le faisceau d'électrons est considéré continu et monocinétique. Aucune diffraction du faisceau laser ni du faisceau d'électrons n'a été prise en compte : le faisceau laser et le faisceau d'électrons sont considérés transversalement gaussiens , les rayons des faisceaux sont choisis de façon à assurer un recouvrement maximum (c'est à dire un couplage maximum du faisceau d'électrons et du champ laser). La taille du faisceau laser est compatible avec la dimension de l'entrefer de l'onduleur. Le champ laser est par ailleurs décomposé en série de Fourier et la finesse de l'échantillonnage du spectre est supérieure à l'intervalle entre modes propres de cavité. Ceci nous a permis, d'une part, de réaliser des simulations à bas bruit numérique et, d'autre part, d'étudier des phénomènes apparaissant à quelques % de la raie fondamentale.

Sur la base de ces hypothèses, les résultats de notre étude peuvent être résumés en 5 points :

- 1) Deux régimes de fonctionnement peuvent être constatés aux basses énergies électroniques (quelques Mev c'est à dire dans l'infrarouge lointain) ainsi que nous l'avons montré au premier chapitre. Il s'agit des régimes d'affinement spectral ou d'élargissement spectral. Le processus menant au régime d'élargissement spectral est similaire à celui

préalablement analysé par D. Iracane concernant la machine ELSA (à 20 Mev c'est à dire dans l'infrarouge proche).

L'existence du régime d'élargissement spectral avancé dans notre étude vient d'être confirmé expérimentalement par des observations effectuées à l'UCSB, sur le laser infrarouge lointain [40] (voir la figure I. 9).

2) Le processus d'élargissement spectral permet de supposer que la génération de raies satellites joue un rôle majeur dans l'évolution vers le régime de spectre large instable. Nous avons montré clairement que ce phénomène est le vecteur unique des instabilités spectrales dans la limite de nos hypothèses. Afin d'obtenir une évolution vers un spectre fin, il est suffisant de filtrer les raies satellites.

3) L'importance du phénomène de raies satellites dans la dynamique spectrale nous a naturellement amenés à tenter d'éclaircir les conditions de leur développement au chapitre III. Nous avons montré que les raies satellites suivent dans l'onduleur un régime transitoire avant d'atteindre le régime asymptotique bien connu. Par ailleurs, un LEL en onduleur court ne voit que le régime transitoire. Ceci explique pourquoi les raies satellites ont été observées en basse fréquence par rapport à la raie fondamentale alors que les études précédentes en régime asymptotique prévoient des raies satellites de part et d'autre de cette raie. De plus, l'approche analytique a mis en évidence les propriétés de couplage des raies satellites.

4) Le calcul s'est révélé insuffisant pour quantifier le gain des raies satellites. En particulier, le modèle ne décrit pas totalement le régime transitoire. Afin de compléter notre analyse dans le régime transitoire, nous avons utilisé la propriété de couplage des raies satellites pour mettre au point une méthode d'évaluation des caractéristiques de leur gain au chapitre IV. Cette approche a été rendue possible grâce à la maîtrise du bruit numérique inhérent à la simulation. Nous avons montré l'existence d'un régime de génération de raies satellites : celles-ci se développent lorsque la raie fondamentale atteint une énergie proche de la saturation. L'étude a permis de donner les ordres de grandeur essentiels des caractéristiques de filtrage des raies satellites.

5) Enfin, nous avons étudié une nouvelle méthode de suppression des raies satellites par modulation d'énergie du faisceau d'électrons à l'échelle de plusieurs passages.

Bien entendu, cette étude n'a pu être réalisée qu'au prix des hypothèses forcément réductrices que nous venons de rappeler. Nous allons maintenant indiquer les contraintes expérimentales liées au projet de Lille, en utilisant la machine de l'UCSB comme référence.

V. B. CONTRAINTES EXPERIMENTALES DU PROJET

* Contraintes dues à l'accélérateur de Van de Graaff

Dans notre étude, nous avons supposé le faisceau d'électrons continu et monocinétique. Trois points importants doivent être pris en compte :

1) La durée de vie du milieu actif est limitée à la durée de l'impulsion électronique. L'accélérateur de l'UCSB, par exemple, génère des impulsions pouvant durer jusqu'à 50 μs . Nos simulations confirmées par l'expérience montrent que cette durée est largement suffisante pour que la raie fondamentale atteigne la saturation, génère des raies satellites et engage le début de l'élargissement spectral. Cette situation de dégénérescence spectrale peut être évitée en filtrant les raies satellites.

2) La tension d'accélération décroît pendant la durée de vie de l'impulsion et implique une diminution lente de l'énergie des électrons. Cette décroissance a pour origine le décharge de la capacité de l'accélérateur due au courant électronique. La variation de la tension d'accélération dépend de l'intensité du faisceau I , de la capacité du terminal C et du taux de récupération des électrons R selon:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{I}{C} (1 - R) \quad (V-2)$$

Typiquement, en considérant un courant de 1 A, une capacité de 200 pF et un taux de récupération de 90 %, on aboutit à une chute de l'énergie des électrons de 0,5 kV/ μs . En régime linéaire, cette chute de tension entraîne un déplacement de la courbe de gain linéaire décrit par:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = 2 \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \approx 10^{-4} \mu\text{s}^{-1} \quad (V-3)$$

pour une énergie de 5 Mev. La largeur relative en fréquence du gain linéaire étant de l'ordre de 1 %, la chute en énergie du faisceau entraîne un déplacement relatif en fréquence de 10 % de cette largeur par dizaine de μs .

En conséquence, la position en fréquence de la raie fondamentale en saturation n'est pas la position du maximum de gain au démarrage du laser. Il s'ensuit une augmentation de la durée de montée en puissance.

La récupération du faisceau d'électrons, nécessaire en technologie électrostatique, est l'un des points les plus délicats à résoudre en raison des valeurs importantes que peut prendre la dispersion en énergie du faisceau d'électrons après son interaction avec le faisceau laser. Afin de fixer les idées, en régime de saturation, la hauteur relative en énergie de la bulle de piégeage

est de l'ordre de 1 % ; elle donne un bon ordre de grandeur de la dispersion en énergie des électrons en sortie d'onduleur. Les taux de récupération constatés sur la machine de l'UCSB sont en constant progrès [40], atteignant désormais des valeurs de 99%. Le maximum de la courbe de gain linéaire parcourt donc l'intervalle entre modes propres d'une cavité de 2,5 m en 5 μ s.

* Contraintes de la cavité optique

La cavité optique doit intégrer un certain nombre de contraintes. Elle doit permettre l'injection et l'extraction du faisceau d'électrons. Elle doit prendre place dans la largeur d'entrefer l'onduleur (environ 2 cm). Elle doit enfin assurer la sélection des modes dans les conditions définies par notre étude dynamique. Dans le domaine infrarouge lointain, ces contraintes ne peuvent être réalisées dans leur ensemble que par une solution guidée.

La contrainte de sélection de modes nécessite en outre une solution plus sophistiquée que celle de la cavité simple entre miroirs habituellement envisagée. Nous avons proposé une cavité à coupleur de type Fox-Smith représenté sur la figure V. 1. Le coupleur de Fox-Smith est constitué des miroirs M_3 , M_4 supposés parfaitement réfléchissants et du miroir semi-réfléchissant M_2 . La puissance du laser est extraite latéralement par le miroir M_2 sur la totalité de l'aire du faisceau. La solution du coupleur de Smith évite le couplage classique par trou au centre d'un des miroirs qui présente l'inconvénient de perturber la structure de mode .

L'unique composant spécial de cette cavité est le coupleur M_2 pour lequel il existe des solutions à faibles pertes dans l'infrarouge lointain :

- La grille à fils tendus sans substrat. Cette solution est idéale tant que la longueur d'onde se situe au delà de 200 μ m. En deçà, la fabrication est problématique car la distance entre fils est d'environ 30 μ m.
- La grille lithographiée sur substrat quartz aisément réalisable pour des longueurs d'ondes allant jusqu'à 100 μ m. L'inconvénient de ce type de grille réside dans les réflexions sur les faces du substrat et dans l'effet interférométrique associé.

Le coefficient de réflexion de la grille peut être ajusté par rotation de la grille pour les systèmes proposés.

Les conditions de résonance de cette double-cavité sont imposées par les distances L_3+L_4 et L_1+L_3 :

$$\begin{aligned} L_3 + L_4 &= r \frac{\lambda}{2} \\ L_1 + L_3 &= s \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \quad (V-4)$$

où r et s sont des entiers.

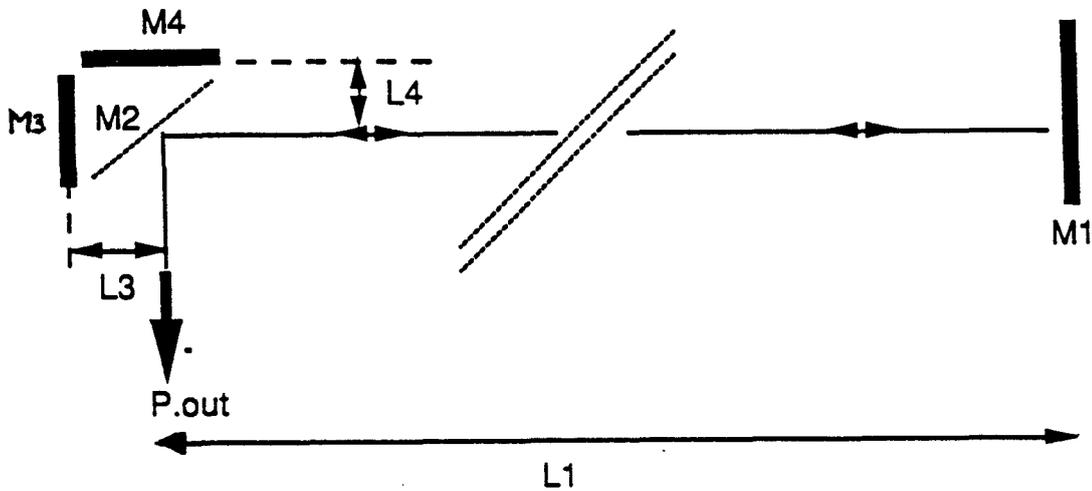


Figure V. 1. Cavité optique de type Fox-Smith.

La réflectivité en puissance R du coupleur de Fox-Smith dans l'axe de la cavité optique s'écrit en fonction du coefficient de réflexion en puissance R_2 , du taux de transmission T_2 de M_2 et du taux de pertes a_0 dans M_2 :

$$R = \frac{T_2^2 (1 - a_0)^2}{(1 - R_2)^2 + 4 R_2 \sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)}$$

avec $\Phi = \frac{4\pi}{\lambda} (L_3 + L_4)$ (V-5)

La réflectivité du coupleur présente des maxima de transmission dans l'axe optique séparés de $\Delta\nu$:

$$\Delta\nu = \frac{c}{2(L_3 + L_4)} \quad (V-6)$$

La largeur à mi-hauteur des pics de transmission a pour valeur :

$$\delta\nu = \frac{c}{2(L_3 + L_4)} \frac{1 - R_2}{\pi \sqrt{R_2}} \quad (V-7)$$

A titre d'exemple, considérons une réflectivité égale à 95 % pour M_2 . Les tailles de faisceau autorisent à admettre une valeur limite plausible de 3 cm pour les distances L_3 et L_4 . Dans ce cas limite, l'écart entre deux maxima de transmission vaut $\Delta\nu = 2,5$ GHz et la largeur des pics vaut $\delta\nu = 37$ MHz (soit une finesse spectrale inférieure à 10^{-4}). L'intervalle entre deux modes propres successifs de la cavité principale longue de 2,5 m est de 60 MHz donc supérieur à la largeur des pics de transmission du coupleur.

Si un des pics de résonance est positionné au maximum de gain linéaire, le pic suivant apparaît à un écart relatif en fréquence de 0,5 % de celui-ci (pour une fréquence de 500 GHz). C'est précisément la taille du filtre envisagé pour supprimer les raies satellites. Cette cavité est donc insuffisante : il existe des pics de résonance là où l'instabilité présente un gain important. Il n'est pas exclu que le spectre devienne monomode par des effets de compétition de modes. Cependant un dispositif annexe doit être envisagé pour supprimer les raies satellites. On peut pour cela ajouter un interféromètre de Pérot-Fabry intracavité ou encore utiliser les propriétés de filtrage passe-haut du coupleur. Ces solutions ne posent pas de difficulté majeure.

Compte tenu de la divergence naturelle des faisceaux et des dimensions transverses imposées par l'entrefer de l'onduleur, une propagation en guide d'onde s'impose dans la gamme spectrale envisagée. Le guide d'onde peut être plan-parallèle puisqu'aucune limitation de taille n'intervient dans la direction perpendiculaire au champ magnétique de l'onduleur et à la direction de propagation. Dans ce cas, le profil des modes est guidé dans la direction du champ magnétique et gaussien dans la direction non-guidée. La cavité plan-parallèle supporte les modes TEM, TM et TE. Parmi ces trois types, les modes TE présentent les plus faibles pertes (les modes TE ont un champ électrique parallèle aux plateaux du guide). Il convient de considérer que :

- les pertes augmentent avec l'ordre des modes
- l'aire du mode croît également avec l'ordre des modes diminuant le couplage avec le faisceau d'électrons
- certains modes ont un champ nul au centre du guide et par conséquent ne peuvent être couplés au faisceau d'électrons.

Le mode de plus faibles pertes et de couplage maximum est le mode TE_{01} .

Bien entendu, une analyse plus approfondie de cette question complexe serait nécessaire.

La dynamique des modes transverses pendant l'établissement du champ laser (jusqu'à la saturation), n'a pas été examinée jusqu'à présent. Les résultats expérimentaux rapportés à ce

jour ne permettent pas d'aborder valablement le problème. L. R. Elias et J. C. Gallardo ont établi par la théorie la structure des modes ainsi que leurs pertes du guide d'onde plan parallèle [63]. L'émission spontanée du faisceau d'électrons dans une cavité guidée a par ailleurs été étudiée par A. Amir, I. Boscolo et L. R. Elias [64]. A notre connaissance ces études n'ont été prolongées ni théoriquement ni expérimentalement par l'analyse de l'évolution des modes transverses en présence d'un faisceau d'électrons. De telles simulations ne pourraient d'ailleurs être envisagées qu'au prix de calculs très lourds. Il est intéressant de préciser ici la limite des codes de simulation actuels : il s'agit soit de simulations monochromatiques à trois dimensions ou multifréquences à une seule dimension (le code SPECTRE peut traiter plusieurs fréquences et une propagation à symétrie cylindrique donc à deux dimensions). Il est fort probable que seule l'expérience pourra apporter une réponse.

Des expériences ont été réalisées à l'UCSB visant à caractériser les fluctuations de la fréquence d'émission du laser lors des impulsions successives, et, en particulier à observer les évolutions de la structure des modes de cette émission [65, 66]. Il paraît délicat de tirer des conclusions quantitatives des résultats rapportés, ainsi que le remarquent les auteurs. Le principe expérimental retenu n'est pas apte à analyser la dynamique du système.

Afin de stabiliser le laser en fréquence, des expériences d'injection ont été tentées en 1990-91 à l'UCSB. On a injecté un laser infrarouge lointain pompé par un laser CO₂ (à $\lambda=200 \mu\text{m}$ environ). Les fluctuations de la fréquence lors des impulsions successives ont pu être réduites d'un facteur 10 environ sous l'effet de l'injection, passant de 1,6 GHz à 0,16 GHz environ. Le temps de démarrage du laser est par ailleurs réduit de 30%. Vis à vis des utilisations, la technique de l'injection est de peu d'avantages, le LEL perdant l'atout majeur de l'accordabilité.

Sur la base de telles expériences, il est par conséquent difficile d'estimer si les comportements multimodes observés sont liées à des contraintes d'accélérateur, à la génération de raies satellites ou à d'autres causes. L'expérience de Santa-Barbara a été récemment améliorée [40]. C'est sur cette nouvelle machine que le processus d'élargissement spectral relaté précédemment, a pu être observé.

CONCLUSION

Cette étude a été consacrée à l'analyse des instabilités spectrales dans le laser à électrons libres en régime Compton. Elle a été menée dans la limite du faisceau continu. Nous avons focalisé notre attention sur le projet de LEL en infrarouge lointain de Lille et le LEL de puissance en infrarouge proche ELSA.

Nous montrons que la dynamique spectrale est essentiellement réglée par le phénomène de génération de raies satellites. Le processus d'élargissement spectral suit un scénario mis en évidence pour la première fois par D. Iracane dans l'infrarouge proche (ELSA). Nous avons mis en évidence un comportement similaire du LEL en infrarouge lointain. Par conséquent, il semble que ce comportement soit assez général, au moins dans le domaine infrarouge, si les conditions d'un gain fort sont réalisées. Les expériences menées à l'UCSB l'ont récemment confirmé.

Le phénomène des raies satellites semble jouer un rôle majeur dans le processus d'élargissement spectral. Nous avons montré qu'elles en sont le vecteur unique dans les limites de notre modèle. Leur suppression par filtrage conduit à une évolution vers le régime de spectre fin stable.

Notre modèle privilégie le comportement longitudinal du faisceau d'électrons (qui génère l'instabilité) et du faisceau laser au détriment de leur comportement transverse (émittance et diffraction). Un aspect important est la décomposition du champ laser en série de Fourier avec une finesse d'échantillonnage variable ; ce choix autorise d'une part une maîtrise partielle du bruit numérique et d'autre part l'analyse de spectres larges. Dans la simulation multifréquence SPECTRE, le faisceau d'électrons est traité sous une forme particulière. La stabilité des résultats numériques a été un souci permanent. Par un choix adéquat de l'échantillonnage du spectre et du faisceau d'électrons, il a été possible de réaliser les simulations à bas bruit numérique auxquelles nous avons largement fait appel .

Notre étude semi-analytique a mis en évidence et caractérisé la dynamique des raies satellites dans l'onduleur. L'existence d'un régime transitoire non négligeable est un résultat essentiel ignoré dans les études précédentes. De plus, la structure des raies satellites en régime asymptotique a été élucidée. En régime asymptotique, un quasi-équilibre est effectivement atteint et la description des raies satellites doit prendre en compte l'anharmonicité du mouvement des électrons.

Nous avons pu, par voie numérique, étudier différents moyens de contrôler les instabilités soit en agissant sur le champ laser (le filtrage), soit en modifiant les caractéristiques de l'onduleur (le tapering et l'onduleur à deux fréquences), soit encore en variant l'énergie du faisceau d'électrons (la modulation d'énergie).

Afin de concevoir un filtrage optique, une méthode d'évaluation du gain des raies satellites dans un onduleur court a été mise au point ; elle complète l'approche semi-analytique dans le régime transitoire. Un résultat important est l'existence d'un régime de génération de raies satellites.

Le tapering n'est efficace que s'il est aidé d'un filtrage ; il atténue seulement les raies satellites mais ne les supprime pas. Par ailleurs, son effet sur le rendement doit être relativisé au régime de fonctionnement (spectre fin ou spectre large). L'extension du modèle semi-analytique a montré la contribution essentielle des électrons piégés et de la diminution de la constante d'onduleur, en régime asymptotique.

L'onduleur à deux fréquences optimisé associe rendement et finesse spectrale. Le mouvement particulier des électrons ne permet pas le développement cohérent des raies satellites. Enfin, la finesse spectrale peut être obtenue en modulant l'énergie du faisceau d'électrons à l'échelle de plusieurs passages. Il est possible d'obtenir, par ce moyen, un fonctionnement pulsé monochromatique.

Dans l'exemple du projet de Lille, la cavité optique à coupleur de type Fox-Smith est bien adaptée aux contraintes propres au LEL et aux conditions d'obtention d'un spectre fin. Comme le montrent les expériences, la stabilité des impulsions électroniques est un aspect crucial.

La génération de raies satellites dans un onduleur simple s'est avérée complexe et n'est pas totalement résolue. En particulier, une approche analytique serait utile dans le régime transitoire. Elle fiabiliserait nos résultats numériques et permettrait, peut-être, d'avancer des critères plus précis d'apparition des instabilités.

Par ailleurs, dans le cas du projet de Lille, l'obtention d'un spectre fin est envisagée par un filtrage de bande passante très fine réalisé par le coupleur de type Fox-Smith. Or, nous savons maintenant qu'un filtrage de bande passante beaucoup plus large est suffisant (de l'ordre du %). Par exemple, les simulations ont montré qu'une finesse spectrale égale à 10^{-4} peut être obtenue avec un filtre 200 fois plus large ! Il serait intéressant de déterminer, dans ces conditions, à quelle vitesse le spectre s'affine par le simple jeu de la dynamique spectrale. Cette information aiderait, sans doute, à mieux comprendre les expériences actuelles.

REFERENCES

- [1] : "Projet de Laser à Electrons Libres en Infra-Rouge Lointain. Application à l'analyse atmosphérique", Université des Sciences et Techniques de Lille, Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, D. Boucher, H. Delbarre (Avril 92).
- [2] : Modélisation multifréquence et bidimensionnelle d'un laser à électrons libres, D. Iracane, J. L. Ferrer, Note CEA-N-2635 (Janvier 90).
- [3] : "Free-Electron Lasers", C. A. Brau, Academic Press, 90.
- [4] : Free-Electron lasers,
T. C. Marshall, Macmillan publishing Company (85)
- [5] : Observation of Stimulated Emission of Radiation by Relativistic Electrons in a Spatially Periodic Transverse Magnetic Field,
L. R. Elias, W. M. Fairbank, J. M. J. Madey, H. A. Schwettman, T. I. Smith, Phys. Rev. Lett 36, 717 (76)
- [6] : First operation of a free electron laser,
DAG. Deacon, L. R. Elias, J. M. Madey, G. J. Ramian, H. A. Schettman, T. I. Smith, Phys. Rev. Lett. 38, 892 (77).
- [7] : First operation of a storage ring free-electron laser,
M. Billardon, P. Elleaume, J. M. Ortega, C. Bazin, M. Bergher, M. Velghe, Y. Petroff, D. A. G. Deacon, K. E. Robinson, J. M. J. Madey, Phys. Rev. Lett. 51, 1652 (83)
- [8] : Results of the free electron laser oscillation experiments on the ACO storage ring,
P. Elleaume, J. M. Ortega, M. Billardon, C. Bazin, M. Bergher, M. Velghe, Y. Petroff, D. A. G. Deacon, K. E. Robinson, J. M. J. Madey, J. Phys. 45, 989 (84)
- [9] : Variable-wiggler free-electron laser oscillation,
J. A. Edighoffer, G. R. Neil, C. E. Hess, T. I. Smith, S. W. Fornacca, H. A. Schwettman, Phys. Rev. Lett. 52, 344 (84)
- [10] : The Los-Alamos free electron laser oscillation : optical performance,
B. E. Newman, R. W. Warren, J. C. Goldstein, C. A. Brau, Nucl. Inst. Methods Phys. Res A237, 38 (85)
- [11] : C. Brau, Proceedings of the 14th International FEL Conference (92). Kobe (Japan), to be published in Nucl. Inst. Meth.
- [12] : D. A. Jaroszynski, J. M. Ortega, Proceedings of the 14th International FEL Conference (92), Kobe (Japan), to be published in Nucl. Inst. Meth.
- [13] : Status of the CLIO facility, J. M. Ortega, Proceedings of the European Workshop on Free-Electron Laser. Warrington (93).
- [14] : J. Kaminski, Nucl. Inst. Methods A296, 784 (90).
- [15] : M. Burns and W. Bewley, Photochem. Photobiol. 46, 165 (87).
- [16] : R. Austin, M. Roberson and P. Mansky, Phys. Rev. Lett. 62, 1912 (89).

- [17] : J. Spector, J. Kaminski and V. Jaccarino, *Solid State Commun.* **63**, 1093 (87).
- [18] : J. Kaminski, J. Spector, W. Prettl and M. Weispfinning, *Appl. Phys. Lett.* **52**, 233 (88).
- [19] : J. Kaminski, J. Spector, T. Klaassen, W. Th. Wenckebach and C. T. Foxon, *J. Opt. Soc. Am B* **6**, 1030 (89).
- [20] : E. Batke, J. Kaminski, J. Kothhäus and J. Spector, *Appl. Phys. Lett.* **53**, 233 (89).
- [21] : J. P. Kaminski, J. S. Spector, C. L. Felix, D. P. Enyeart, D. T. White, G. Ramian, *Appl. Phys. Lett.* **57**, 2770 (90).
- [22] : W. Prettl, H. Lengfeller, J. P. Kaminski and co, *Int. J. Infrared & Millimeter Waves*, **13**, 1659 (92).
- [23] : J. Kaminski, *Proceedings of the 14th International FEL Conference*. 92. Kobe (Japan), to be published in *Nucl. Inst. Meth.*
- [24] : Selection of Single-Mode Radiation from a Short-Pulse Free-Electron Laser, D. Oepts, A. F. G. van der Meer, R. J. Bakker, P. W. van Amersfoort, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3255 (93).
- [25] : Free-Electron Lasers with variable parameter wigglers. N. M. Kroll, P. L. Morton, M. N. Rosenbluth, *IEEE J. Quantum Electron.* **QE-17**, 1436 (81).
- [26] : Etude de la dynamique non-linéaire du spectre d'un laser à électrons libres en régime Compton, J. L. Ferrer, Thèse de docteur en science, Université d'Orsay, n°1474 (90).
- [27] : Mode competition and control in Free-Electron Laser oscillators, T. M. Antonsen, B. Levush, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1488 (89).
- [28] : Suppression of sidebands by diffraction in a Free-Electron Laser, T. M. Antonsen, G. Laval, *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.* **1039**, 43 (88).
- [29] : Spectral characteristics of a FEL with time dependent energy, T. M. Antonsen, B. Levush, *Phys. Fluids B* **2**, 2791 (90).
- [30] : Observation of single mode operation in a Free-Electron Laser, L. R. Elias, G. Ramian, J. Hu, A. Amir, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 424 (86).
- [31] : Narrow-band radiation for long-pulse free electron lasers, I. Kimel, L. R. Elias, *Phys. Rev. A* **35**, 3818 (87).
- [32] : Long-pulse FELs as sources of monochromatic radiation, I. Kimel, L. R. Elias, *Nucl. Inst. and Methods in Phys. Res.* **A272**, 368 (88).
- [33] : Mode competition in long-pulse FELs, I. Kimel, L. R. Elias, *Nucl. Inst. and Methods in Phys. Res.* **A285**, 132 (89).
- [34] : Perturbative analytical study of long pulse free electron lasers : mode competition for a high gain Compton regime, I. Kimel, L. R. Elias, *Phys. Rev. A* **38**, 2289 (88).

- [35] : Effect of non linear mode competition on the efficiency of a low gain FEL oscillator,
B. Levush, T. M. Antonsen, Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng. **1061**, 2 (89).
- [36] : Non linear mode competition and coherence in low gain FEL oscillators,
B. Levush, T. M. Antonsen, Nucl. Inst. and Methods in Phys. Res. **A285**, 136 (89).
- [37] : Regions of stability of FEL oscillators,
B. Levush, T. M. Antonsen, Nucl. Inst. and Methods in Phys. Res. **A272**, 375 (88).
- [38] : Stability of Free-Electron-Laser Spectrum in the Continuous-Beam Limit,
D. Iracane, J. L. Ferrer, Phys. Rev. Lett **66**, 33 (91).
- [39] : Etude de la stabilité d'un laser à électrons libres : une nouvelle cause d'élargissement spectral,
D. Iracane, J. L. Ferrer, Note CEA-N-2650 (Mai 90).
- [40] : The new UCSB free-electron lasers,
G. Ramian, Nucl. Inst. Methods Phys. Res. **A318**, 225 (92).
- [41] : G. Ramian, Proceedings of the 14th International FEL Conference. 92, Kobe (Japan).
- [42] : J. M. J Madey, Journ of Appl. Phys. , **42**, 1906 (71).
- [43] : Theory of a Free-Electron-Laser, W. B. Colson, Phys. Lett **59A**, 187 (76).
- [44] : One-body electron dynamics in a Free-Electron-Laser,
W. B. Colson, Phys. Lett. **64A**, 190 (77).
- [45] : "Principles of plasma physics",
N. A. Krall, A. W. Trivelpiece, Mc Graw-Hill Book Company (73).
- [46] : Spontaneous emission in Free-electron lasers,
W. B. Colson, Phys. Lett. , **59A**,187(76).
- [47] : D. Iracane, P. Bamas, Phys. Rev. Lett **67** (91), 3086.
- [48] : Two dimensional Vlasov treatment of free electron laser sidebands, W. M. Sharp, S. S. Yu, Phys. Fluids B **2**, 581 (90).
- [49] : Sideband instabilities in free electron laser,
M. N. Rosenbluth, H. V. Wong, B. N. Moore, Phys. Fluids B **2**, 1635 (90).
- [50] : Influence of the trapped electron distribution on the sideband instability in a helical wiggler free electron laser,
T. Y. B. Yang, R. C. Davidson, Phys. Fluids B **2**, 2456 (90).
- [51] : Analytical study of the sideband instability in free electron laser oscillators,
S. Riyopoulos Phys. Fluids B **3**, 2684 (91).
- [52] : R. W. Warren, B. E. Newnam, J. C. Goldstein,
IEEE J. Quantum Electron. **QE-21** , 882 (85).
- [53] : F. G. Yee, J. Masud, T. C. Marshall, P. Schlesinger,
Nucl. Inst. Methods Phys. Res. **A259**, 104 (87).

- [54] : H. Takeda, J. E. Sollid, NIM A 285, 197 (89).
- [55] : Sideband suppression for free electron laser,
J. E. Sollid, D. W. Feldman, R. W. Warren, Nucl. Inst. Methods Phys. Res.
A 285, 153 (89).
- [56] : Communication privée avec O'SHEAH (Los Alamos) (Kobe 92).
- [57] : R. A. Freedman, W. B. Colson, Optics Communications, 52, 409 (85).
- [58] : W. B. Colson, Free Electron Generators of Coherent Radiation,
C. A. Brau, S. F. Jacobs, M. O. Scully Editors, Proc. SPIE 453, 290 (84).
- [59] : B. Hafizi, A. Ting, P. Sprangle, C. M. Tang, Phys. Rev. A 38, 197 (88).
- [60] : B. Hafizi, A. Ting, P. Sprangle, C. M. Tang, Phys. Rev. Lett. 64, 180 (90).
- [61] : R. W. Warren, Nucl. Inst. Meth, A285, 1 (89).
- [62] : F. Derayaux, P. Chaix, D. Iracane, Note CEA-R-5612 (92).
- [63] : Cylindrical Gaussian-Hermite Modes in Rectangular Waveguide Resonators,
L. R. Elias, J. C. Gallardo, Appl. Phys. B 31, 229 (83)
- [64] : Spontaneous emission in the waveguide free-electron laser,
A. Amir, I. Boscolo, L. R. Elias, Phys. Rev. A 32, 2864 (85)
- [65] : Narrow-Bandwidth Operation of a Free-Electron Laser Enforced by Seeding,
A. Amir, J. F. Knox-Seith, M. Warden, Phys. Rev. Lett 66, 29 (91).
- [66] : Direct Spectral Measurements of a Quasi-CW Free Electron Laser Oscillator,
B. G. Danly, S. G. Evangelides, T. S. Chu, R. J. Temkin, G. Ramian, J. Hu,
Phys. Rev. Lett 65, 2251 (90).

PUBLICATIONS

Spectral broadening and the sideband instability

P. Chaix and D. Iracane

Commissariat à l'Energie Atomique, Centre d'Etudes de Bruyères-le-Châtel, PTN, 91680, Bruyères-le-Châtel, France

H. Delbarre

Université des Sciences et Technologies de Lille, Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, URA CNRS 249, 59655, Villeneuve d'Ascq, France

We present an analysis of the sideband instability including the transient regime, both analytically for deeply trapped electrons and numerically for nonbunched initial conditions. We show that both the standard “deeply trapped electrons” and “exponential regime” assumptions are most often irrelevant for describing realistic situations. We also compare the results of this low signal analysis to a biparametric numerical investigation on tapered and filtered systems. We show that tapering must in general be assisted by filtering to prevent spectral broadening. Moreover, spectral broadening is not related in a simple way to sideband inhibition, due to nonlinear mechanisms.

1. Introduction

It is expected on theoretical and numerical grounds that the sideband instability in high power FELs opens the door to a broadening of the emitted spectrum at saturation [1], due to diffusion in the electron phase space [2]. To control the spectral width it is therefore necessary to control first the sideband instability.

Tapering has often been said to inhibit sideband generation [3,4]. However the idea of tapering – adiabatically lowering the ponderomotive bucket – is meaningful only in a monochromatic field; accordingly, systematic numerical simulations show that tapering may not be efficient when a wide spectrum regime is expected. Fig. 1 presents a plot of the brightness \mathcal{B} (ratio of the extracted efficiency to the relative spectral width), as a function of tapering amplitude $\Delta B/B$ and filter width. It exhibits a transition between the high brightness and broad spectrum regimes. In any case, tapering must be assisted by filtering to avoid the sideband instability and the consequent spectrum broadening. The asymptotic spectral behaviour actually results from a competition between the sideband inhibition due to tapering, and the randomization of phase space due to spectrum broadening.

In order to understand these results more precisely, we present first an analysis of the sideband instability, and then consider the relation between sideband inhibition (by tapering and/or filtering) and spectral broadening, on the basis of the data displayed in fig. 1.

As a first step of our analysis of the sideband instability, we consider an academic situation starting with a monochromatic laser and an electron distribution in equilibrium (section 2); we do *not* assume an exponential growth of the instability, and we will see that for most standard FEL experiments the transient regime actually lasts longer than the wiggler length, which makes the usual asymptotic exponential gain calculations irrelevant. As a second step, we consider the system with more realistic nonbunched nonequilibrium initial conditions (section 3); we show how a low noise numerical simulation, on a single round trip, allows prediction of whether or not the sideband will grow in a tapered and filtered system. Finally (section 4) we come back to the problem of the evolution over a large number of round trips for a tapered FEL oscillator assisted by filtering, and we show that the sideband instability does not necessarily lead to a broad spectrum.

2. Sideband gain from an equilibrium initial condition

For a monochromatic laser vector potential (pump mode)

$$A_L = \frac{mc}{eq_L} \operatorname{Re} \mathcal{E} e^{iq_L(z-t)}$$

(where t is the time multiplied by c , and with $\mathcal{E} = |\mathcal{E}| e^{-i\phi}$), the coupled FEL Maxwell–Vlasov equations

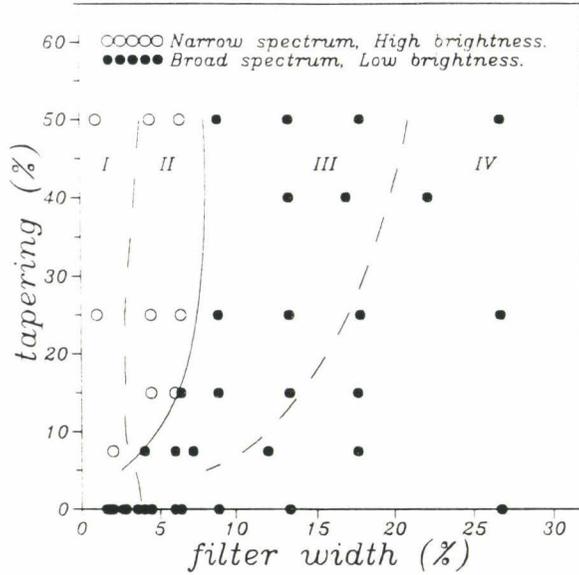


Fig. 1. Spectral behaviour of a tapered and filtered system, as a function of tapering amplitude $\Delta B/B$ and filter width. In any case tapering must be assisted by filtering to prevent spectrum broadening. However tapering allows wider filters.

may be written (with $p \equiv \gamma^2$ and $\psi \equiv (k_w + q_L)z - q_L t - \phi$):

$$\left\{ \partial_t + \left[-d_t \phi + k_w - q_L(1 + K^2)/2p \right] \partial_\psi + [a_w |\mathcal{E}| \sin \psi] \partial_p \right\} h(t, \psi, p) = 0, \quad (1)$$

$$\{d_t \phi + i d_t\} |\mathcal{E}| = -\frac{\mu_0 e^2 a_w}{m} \rho_e \langle e^{-i\psi} / 2\sqrt{p} \rangle. \quad (2)$$

At equilibrium $d_t |\mathcal{E}| = 0$ and $\partial_t h = 0$. This leads to:

$$h(\psi, p) = f(H(\psi, p)), \quad (3)$$

$$d_t \phi = -\frac{\mu_0 e^2 a_w}{m} \frac{\rho_e}{|\mathcal{E}|} \langle e^{-i\psi} / 2\sqrt{p} \rangle = \nu = \text{constant}, \quad (4)$$

where f is any function and where H is the Hamiltonian of eq. (1) with $d_t \phi = \nu$:

$$H(\psi, p) = (k_w - \nu)p - q_L \frac{(1 + K^2)}{2} \log(p) + a_w |\mathcal{E}| \cos \psi. \quad (5)$$

Since we deal with the linear regime for the sideband modes, the sideband gain due to the distribution f will be the integral of the independent contributions of different energies $\mathcal{W} = H(\psi, p)$. It is therefore enough to consider first an invariant distribution concentrated on a given energy \mathcal{W} :

$$h(\psi, p) = \delta(H(\psi, p) - \mathcal{W}). \quad (6)$$

The corresponding value of ν can be evaluated after

linearizing H in p around the resonant value $p_r = q_L(1 + K^2)/2(k_w - \nu)$, and can be written:

$$\nu = \nu_h F(\mathcal{W}/a_w |\mathcal{E}|), \quad \nu_h \equiv -\frac{\mu_0 e^2 a_w}{m} \frac{\rho_e}{|\mathcal{E}|} \frac{1}{2\sqrt{p_r}}, \quad (7)$$

where ν_h is the harmonic value at the bottom of the well, and where the function $F = \langle e^{-i\psi} \rangle$ (a ratio of elliptic integrals) decreases from 1 to -1 between the bottom and the separatrix of the well.

We study now the stability of the equilibrium when small adjacent modes are present. Let us consider first the standard case of electrons concentrated at the bottom of the well (harmonic motion at the synchrotron frequency $\Omega_h/2\pi$). A first order calculation shows that symmetrical modes of wave numbers $q_L(1 \pm \delta)$ are coupled, and evolve according to the following integro-differential equation:

$$\begin{aligned} \text{id}_t \mathcal{E}_\delta &= \frac{1}{2} \nu_h \Omega_h (1 + \delta) \exp(-i\beta_\delta t) \\ &\times \int_0^t dt' \sin(\Omega_h(t-t')) \\ &\times \{Y_\delta(t') - Y_{-\delta}^*(t')\}, \end{aligned} \quad (8)$$

where $Y_\delta(t) \equiv \mathcal{E}_\delta(t) \exp(i\beta_\delta t)$, and $\beta_\delta \equiv \nu + \delta(\nu - k_w)$. The evolution of the sideband modes is therefore non-local in time. However, taking advantage of the sine form of its kernel, one can reduce eq. (8) to a simple matrix differential equation. Introducing:

$$A_\delta \equiv Y_\delta + Y_{-\delta}^*, \quad \Pi_\delta \equiv i(Y_\delta - Y_{-\delta}^*),$$

$$P_\delta \equiv i \int_0^t dt' \sin(\Omega_h(t-t')) \Pi_\delta(t'),$$

$$Q_\delta \equiv -i \int_0^t dt' \cos(\Omega_h(t-t')) \Pi_\delta(t'),$$

one obtains:

$$\text{id}_t \begin{bmatrix} A \\ \Pi \\ P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(k_w - \nu) & i\nu & -\nu & 0 \\ -i\nu & \delta(k_w - \nu) & -i\nu\delta\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\Omega \\ 0 & 1 & i\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \Pi \\ P \\ Q \end{bmatrix}. \quad (9)$$

This equation shows that the sideband instability for trapped electrons at the bottom of the well is essentially controlled by two parameters: the synchrotron frequency Ω_h (related to the amplitude $|\mathcal{E}|$ of the pump mode) and the phase derivative $\nu = d_t \phi$ (related to the phase velocity of the pump mode). The sideband growth rates for a given initial condition $\mathcal{E}_{\pm\delta}(0)$ are controlled by the eigenvalues of the matrix in eq. (9). The eigenvalue of largest imaginary part gives the sideband growth rate in the exponential regime; since both coupled sidebands $\mathcal{E}_{\pm\delta}$ will in general have a component on the corresponding eigenvector, they will

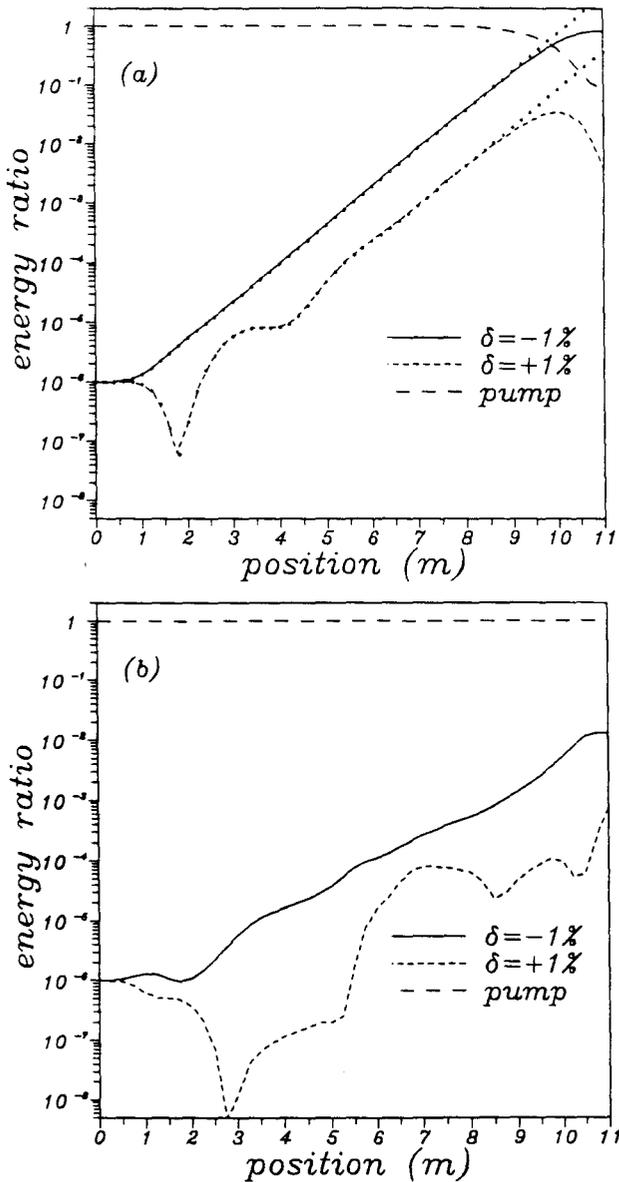


Fig. 2. Typical behaviour of two coupled symmetrical sideband modes, (a) for electrons initially trapped at the bottom of the well, obtained with eq. (9) (dotted lines) and with a full multifrequency numerical simulation of the Maxwell-Vlasov equations (solid and broken lines). One can see the transient and exponential regimes, and finally the saturation regime where perturbation and eq. (9) fail. Energies are in units of the pump mode energy, and position should be compared to the synchrotron length $L_s \approx 3.4$ m in this case; (b) for a realistic non bunched initial condition, obtained with a full multifrequency low noise numerical simulation of the Maxwell-Vlasov equations.

have the same exponential growth rate (fig. 2a). However, since they have a different history during the transient regime, their gains for one round trip will in general be different. Furthermore it must be realized

that most often in realistic situations the asymptotic regime is not attained within the wiggler length. In particular, even though they have the same asymptotic exponential growth rate, the coupled modes may have very unsymmetrical behaviours when a wiggler of finite length is considered (see $L_w = 2m$ for instance in fig. 2a).

Let us now consider the general case of an initial equilibrium electron distribution concentrated on a generic invariant curve somewhere between the bottom of the well and the separatrix. The evolution equation cannot be easily put under a simple form similar to eq. (9), since the kernel of eq. (8) is now a non harmonic function of period $2\pi/\Omega$ instead of a mere sinus (a generalization of eq. (9) involves a $(2n + 2) \times (2n + 2)$ matrix, where n is the number of harmonics of the electronic motion one wants to take into account). However numerical simulations show features that remain very similar to the previous situation: asymmetrical starting of the instability, and equal asymptotic exponential regime growth rates for coupled modes $\pm\delta$. In the exponential regime, the gain curves are peaked at $\delta = n\Omega/k_w$, resulting from resonance between the harmonics of the synchrotron motion at pulsation $n\Omega$ and the beating wave due to the interference between the pump and sideband modes at δk_w (fig. 3) [5]. Furthermore the size of these peaks if found to be maximum when the synchrotron frequency Ω is a multiple of Ω_h .

3. Sideband gain from realistic non bunched initial conditions

The analysis presented in the preceding section supposes that we start from an equilibrium of the electron + laser system. In an actual standard experiment the initial electron distribution is independent of ψ . We performed very low noise numerical simulations starting from a realistic non bunched electron distribution, with an initial ratio between the pump and sideband mode energies of 10^{10} (optimizing the electron sampling is then necessary to inhibit numerical noise). One observes the typical behaviour depicted in fig. 2b, which qualitatively looks very much like the bottom of well case of fig. 2a. One difference however is the appearance of a preliminary phase (≈ 1.5 m in our case) during which the electrons bunch and the electron + laser system reaches a quasi equilibrium state similar to the initial state considered in the previous section; only in a second phase the electron motion begins to feed the sidebands in a way similar to the idealized case. Of course, sidebands will begin to grow even during the bunching phase (except if the coupling is too weak). In a standard experiment, the synchrotron length at saturation and the wiggler length are of the

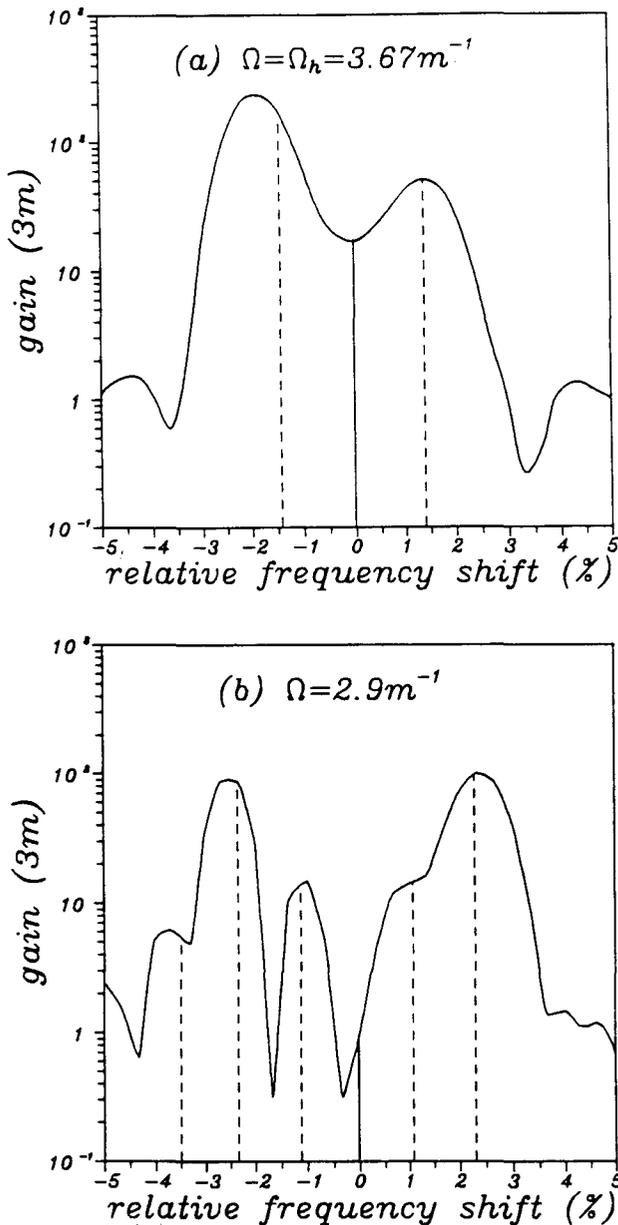


Fig. 3. Gain curves for two equilibrium initial conditions labelled with their synchrotron frequency Ω . The positions of the resonant frequencies $\delta = n\Omega/k_w$ are also indicated.

same order of magnitude, and electrons just have time to bunch: they do not actually experience the second phase. This is a major limitation of the academic sideband analysis.

4. Sideband inhibition and spectrum broadening

Still using low noise numerical simulations, one can plot sideband gain curves for tapered systems (fig. 4). Note that since the symmetrical $\pm\delta$ modes are cou-

pled, the gain is a matrix from which we have to extract the eigenvalue of maximum amplitude. As expected, it appears that tapering lowers the sideband gain. These curves provide a simple manner to find the size of a filter necessary to kill the sideband for a given value of the losses, provided that the pump mode amplitude is kept fixed. This corresponds to region I of fig. 1. However in an actual experiment the pump mode grows from noise to saturation, and the corresponding sideband gain curve evolves accordingly. It happens that sideband gain can be higher for smaller pump mode amplitudes, so that the sideband grows even with filters narrower than predicted by considering only the saturation pump mode amplitude. This is what happens for the uniform wiggler ($\Delta B/B = 0\%$) with narrow filters (up to 3% bandwidth) at the bottom left of fig. 1.

On the other side, with wide filters (region IV), the sideband develops, and non linear difference frequency generation [6] leads to a broad spectrum with universal brightness $\mathcal{B} = 0.8$ [1].

Between these two extreme regimes (inhibited sideband and broad spectrum) we observe two intermediary regions. Going from region IV to region III, the brightness becomes slightly higher than the universal value: the effects of filtering begin to appear. But going from region III to region II one crosses a sharp transition line, and the spectral width drops to very small values (down to numerical resolution). This is not inconsistent with the developing of the sideband instability outside region I: In region II the sideband develops, and reaches the same order of magnitude as the pump mode; the filter prevents the generation of a

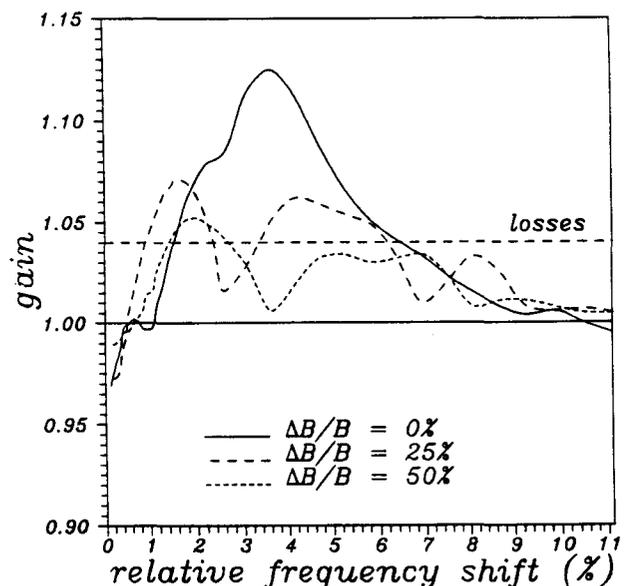


Fig. 4. Sideband gain curves for various values of the tapering amplitude $\Delta B/B$.

third frequency, and mode competition between the pump and sideband modes leads to the killing of the pump mode, leading to the observed high brightness. This nontrivial effect of filtering illustrates the interaction between different modes in the nonlinear regime.

5. Discussion and conclusion

We presented an analysis of the sideband instability, including the transient regime, both analytically for deeply trapped electrons and numerically for realistic non bunched initial conditions. We observed that both the “deeply trapped electrons” and the “exponential regime” assumptions are most often irrelevant for describing realistic situations, where electrons wrap along the separatrix around the bottom of the well without actually reaching it, and where the transient regime lasts longer than the wiggler length. Furthermore, the nonbunched initial condition is not an equilibrium initial condition like used in section 2. The electrons reach such an equilibrium state only after a length longer than the wiggler. It results from this analysis that a short time perturbation theory would certainly be more useful to understand the sideband instability in high current FEL oscillators. This work is in progress.

We also compared the results of i) the low signal analysis of the sideband instability and ii) the multifrequency numerical simulation of filtered and tapered systems on a large number of round trips up to saturation. It appeared that tapering in general lowers the sideband gain as expected, but must in general be assisted by filtering to provide a high brightness spectrum. Furthermore, even for a set of tapering and filter parameters allowing the sideband growth, the spectrum may nevertheless be narrow due to nonlinear mode competition between pump and sideband modes within the allowed frequency window.

References

- [1] D. Iracane and J.L. Ferrer, *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991) 33.
- [2] P. Chaix and D. Iracane, these Proceedings (14th Int. Free Electron Laser Conf., Kobe, Japan, 1992) *Nucl. Instr. and Meth. A* 331 (1993) 406.
- [3] A. Freedman and W.B. Colson, *Opt. Commun.* 52 (1985) 409.
- [4] B. Hafizi et al., *Phys. Rev.* A38 (1988) 197.
- [5] J.N. Elgin, *Phys. Rev.* A43 (1991) 2514.
- [6] D. Iracane and J.L. Ferrer, *Nucl. Instr. and Meth.* A304 (1991) 626.

Chaos and the taming of free electron laser spectral dynamics

P. Chaix and D. Iracane

Commissariat à l'Energie Atomique, Centre d'Etudes de Bruyères-le-Châtel, PTN, 91680, Bruyères-le-Châtel, France

H. Delbarre

Université des Sciences et Technologies de Lille, Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, URA CNRS 249, 59655, Villeneuve d'Ascq, France

We provide a semi-quantitative analysis of the electron phase space in a uniform wiggler with a broad spectrum laser field, and in an optimized two frequency wiggler with a monochromatic laser field. We show that the two problems are formally equivalent, and for the first one we reach a theoretical interpretation and an estimate for the universal ratio between extracted efficiency and relative spectral width.

1. Introduction

Both numerical simulations and perturbative calculations have shown that the sideband instability is the first step of a spectral broadening mechanism [1] which leads to a regime where the laser energy and spectral width remain essentially constant. Furthermore it has been observed on numerical simulations for uniform wigglers that the brightness (the ratio of the extracted efficiency to the relative width of the spectrum), is "universal" in the sense that it depends very little on the operating parameters (cavity losses, beam current, etc.). A major consequence of this remarkable result is that one can increase the extracted laser energy only to the expense of spectrum broadening, except if one changes completely the nature of the electron dynamics in order to infringe the universality of the brightness ratio.

It has been shown numerically [2] that a properly optimized two frequency wiggler (TFW) can actually change the electronic phase space structure in such a way as to inhibit the sideband instability, keeping the whole laser energy concentrated in a single mode, with no significant loss of efficiency (which is not the case of filtering for instance).

This paper presents a first interpretation of these numerical results, in terms of electronic phase space structure. We approach both problems (uniform wiggler with and broad spectrum laser, and two frequency wiggler with a single mode spectrum) in the same frame. It can even be shown that the electron dynamics in both cases are formally equivalent (eq. (11)).

Section 2 briefly recalls the equations of the model; then we show in section 3 how the brightness universal-

ity reflects the underlying structure of the electron phase space, and we give a very simple theoretical evaluation of the brightness, which is found to agree with the value resulting from complete numerical simulations. Section 4 shows how a TFW allows replacement of the synchrotron motion of the electrons by a chaotic motion which does not lead to any sideband instability.

2. Model

We consider a planar wiggler generating a static magnetic field of vector potential A_w perpendicular to the propagation axis z :

$$A_w = \frac{mc}{e} \text{Re} \{ a_1 \exp[-ik_1 z] + a_2 \exp[-ik_2 z] \}, \quad (1)$$

where $\lambda_1 = 2\pi/k_1$ and $\lambda_2 = 2\pi/k_2$ are the two wavelengths of the wiggler, and a_1 and a_2 are the amplitudes of its two spectral components. $k_b \equiv k_2 - k_1$ is the beating wave number. For a uniform wiggler (section 3) we simply consider $a_1 = a_w$ and $a_2 = 0$. For a TFW (section 4) we will consider $a_2/a_1 \sim 0.1$.

We write the laser vector potential (where t is the time multiplied by c):

$$A_L(z, t) = \frac{mc}{e} \text{Re} \int dq \frac{1}{q} \mathcal{E}(q, t) \exp[iq(z - t)]. \quad (2)$$

In a uniform wiggler of parameters a_1 and k_1 , and a monochromatic laser field of wave number q_L , the phase

$$\psi \equiv (k_1 + q_L)z - q_L t \quad (3)$$

is a natural variable of the problem. This is no more the case in the broad spectrum regime, or in a TFW, when the problem loses its periodicity. However, one can still introduce a reference wave number q_L , for instance the wave number of the laser instability, and a ψ coordinate, with the usual approximations [3] one obtains the equations for electron i in a uniform wiggler in the broad spectrum regime (to be used in section 3):

$$d_t \psi_i = k_1 - q_L(1 + K^2)/2\gamma_i^2, \quad (4a)$$

$$2\gamma_i d_t \gamma_i = \text{Im} \int dq \mathcal{E}(q, t) a_i \exp i \left(\psi - k_1 \frac{(q - q_L)}{q_L} t \right), \quad (4b)$$

and for electrons in a TFW in the monochromatic regime (to be used in section 4):

$$d_t \psi_i = k_1 - q_L(1 + K^2) \{1 + d \cos(k_b t)\} / 2\gamma_i^2, \quad (5a)$$

$$2\gamma_i d_t \gamma_i = \text{Im} \mathcal{E}(t) \{a_1 \exp i\psi + a_2 \exp i(\psi + k_b t)\}, \quad (5b)$$

with $2K^2 \equiv a_1^2 + a_2^2$, and $d \equiv a_1 a_2 / (1 + K^2)$.

3. Universal brightness

Let us first concentrate on the uniform wiggler ($a_2 = 0$). High power FELs are characterized by a complicated nonlinear equilibrium reached according

to a two steps scenario [1]: first, the well-known sideband instability causes the emergence of a second mode q_{sb} close to the fundamental lasing mode q_L stemmed from the linear regime; second a sequence of harmonics of the difference $q_L - q_{sb}$ is generated. This process, which can be singled out in a third order perturbation theory [4], is the beginning of a more complex broadening due to higher order couplings: numerical simulations show that the new lines reach the same order of magnitude as the fundamental line, and that they generate their own sideband instabilities. These new sideband lines couple with the already present ones, thus leading to more lines again by third order frequency generation.

Numerical simulations show that after a number of round trips, the system reaches an equilibrium such that the ratio between the extracted efficiency and the relative spectral width is largely independent of the FEL operating conditions. As long as the broad spectrum regime has been attained, one observes that:

$$\mathcal{B} \equiv \frac{E_L}{QE_e \Sigma} = \text{universal constant} \approx 0.8, \quad (6)$$

where

$$\Sigma \equiv \sqrt{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2} / q_L$$

is the relative width of the spectrum, E_e is the electronic energy, and Q is the quality factor of the optical cavity.

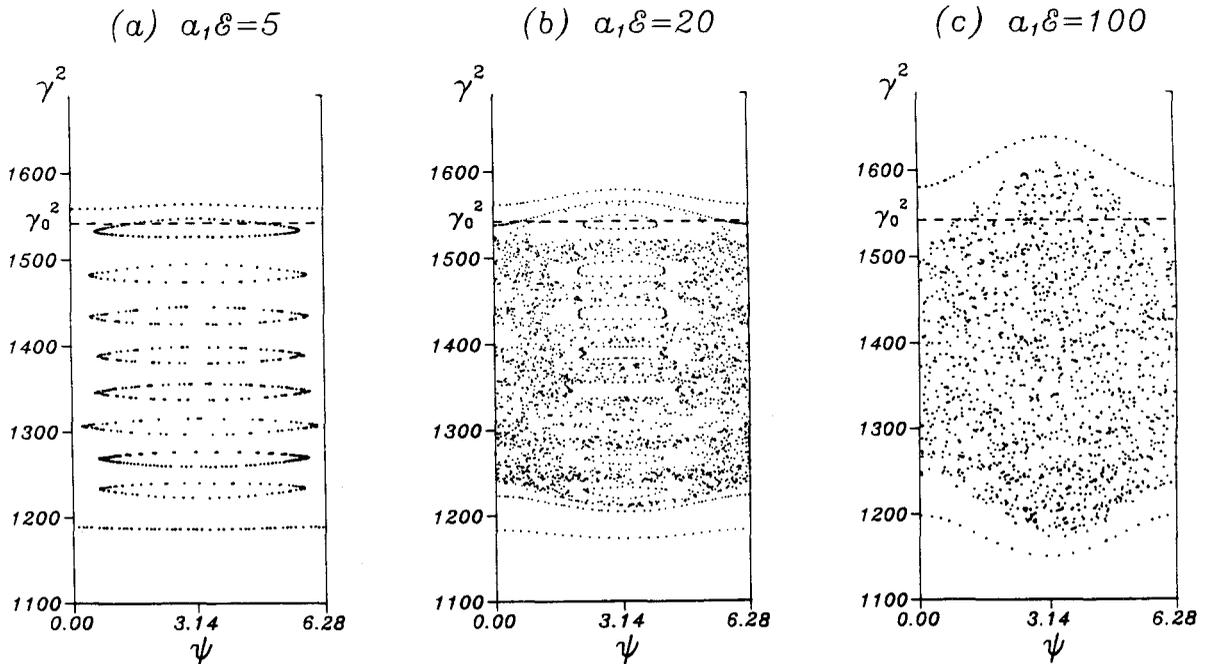


Fig. 1. Poincaré sections of the electronic phase space in a broad spectrum laser represented by several equidistant modes of equal intensity, for increasing values of the intensity.

The universality of eq. (6) for the broad spectrum regime typical of high power FELs is a crucial result since it suggests that some important characteristics of the electron + laser dynamics do not depend on most of the experimental parameters. This is actually the case, as follows from the interpretation we give of this remarkable result.

The laser spectrum in the asymptotic regime lies from a maximum wave number $q_{\max} = q_L$ to a minimum wave number q_{\min} . It can be crudely modeled by a set of equidistant lines of equal intensity, the distance δq between two neighboring lines being taken for example equal to the difference $q_L - q_{\text{sb}}$ between the fundamental and sideband lines (the value of δq is not important for our problem).

The electronic equations of motion may be deduced from eq. (4), considering that the electromagnetic field is frozen (low gain at saturation). After linearization in the electron energy γ , and supposing that the relative spectral width

$$\Sigma = \sqrt{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2} / q_L \approx \left(1 - \frac{q_{\min}}{q_{\max}}\right) / 2\sqrt{3}$$

is not too large, one obtains:

$$d_t^2 \psi = \Omega^2 \sum_n \sin(\psi - n \delta q t), \quad (7)$$

where the squared synchrotron pulsation $\Omega^2 \equiv k_1 a_1 \mathcal{E} / \gamma^2$ is proportional to the common field amplitude of each spectrum line.

To each wave number $q_n = q_L - n \delta q$ between q_{\max} and q_{\min} is associated a pendulumlike resonance. The corresponding resonant electron has $d_t \psi = n \delta q$, and has an energy γ_n proportional to $q_n^{1/2}$, given by the well-known relation:

$$\gamma_n = b q_n^{1/2},$$

where $b^2 \equiv (1 + \frac{1}{2} a_1^2) / 2k_1$. (8)

The nature of the motion in this column of resonances depends on the strength Ω^2 [5]. At low Ω^2 each resonance keeps its identity, and electrons within the bucket associated with the n th mode remain trapped around the corresponding energy γ_n (fig. 1a). However, the separatrices of the buckets are blurred into stochastic layers, and the thickness of these layers increases with Ω^2 , up to a point where neighbouring resonances overlap and merge into a stochastic column coming down from $\gamma_{\max} \approx b q_{\max}^{1/2}$ to $\gamma_{\min} \approx b q_{\min}^{1/2}$ (figs. 1b and 1c). In this regime of global stochasticity, the chaotic motion of the electrons in the column of overlapping resonances is a diffusion leading to an equipartition of the electrons all over the available phase space. Let us now consider N electrons entering the wiggler when the broad spectrum regime has been reached. Their total initial energy is $E_e = N \gamma_{\max}$. They

experience a chaotic motion which eventually leads at the end of the wiggler to an equipartition between the energies γ_{\max} and γ_{\min} , that is to a total energy $N(\gamma_{\max} + \gamma_{\min})/2$.

The total energy lost by the electrons is therefore:

$$\begin{aligned} -\Delta E_e &= \frac{1}{2} N (\gamma_{\max} - \gamma_{\min}) \approx \frac{1}{2} N b (q_{\max}^{1/2} - q_{\min}^{1/2}) \\ &= \frac{1}{2} N b q_{\max}^{1/2} \Sigma \sqrt{3} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} E_e \Sigma. \end{aligned}$$

Since the total energy of the electrons + laser system is conserved in the wiggler, the laser increased its energy by an amount $\Delta E_L = -\Delta E_e = \sqrt{3} E_e \Sigma / 2$; at the equilibrium this is just the energy extracted from the cavity: $\Delta E_L = E_L / Q$ where Q is the optical cavity quality factor. Concatenating these simple equalities leads to:

$$\mathcal{R} = \frac{E_L}{Q E_e \Sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86, \quad (9)$$

which is in fairly good agreement with the values issued both from numerical simulations [1] and from experiments [6]. One may therefore conclude that the energy transfer in a standard high power FEL occurs via a chaotic diffusion toward lower energies in the electronic phase space. What remains to be understood however is the coupled dynamics of the phases and amplitudes of the different laser modes with the electrons.

4. Two-frequency wiggler

The understanding of the TFW behaviour is twofold: on the one hand we have to understand why the sideband instability is inhibited, and on the other hand we have to understand the efficiency, knowing that the laser remains monochromatic. Our aim here will be to characterize the electronic phase space in a TFW when the laser is monochromatic, and give an interpretation of the efficiency in this case.

Eq. (5) describing the motion of the electrons in a TFW with a monochromatic laser may be written:

$$d_t \psi = A - B \{1 + d \cos(k_b t)\} / \gamma^2, \quad (10a)$$

$$d_t \gamma^2 = C \{ \sin \psi + \beta \sin(\psi + k_b t) \}, \quad (10b)$$

with $A \equiv k_1$, $B \equiv q_L (1 + K^2) / 2$, $C \equiv a_1 \mathcal{E}$, and $\beta \equiv a_2 / a_1$.

For a given set of parameters A , B , etc., this is a time dependent Hamiltonian system for the canonical conjugate variables ψ and γ^2 .

The phase space structure can be understood by examining first the uniform FEL characterized by $d = \beta = 0$ (this is not strictly equivalent to setting $a_2 = 0$, since B also depends on a_2). It has a stable fixed point (resonant electron) at $\psi = \pi$, $\gamma^2 = \gamma_R^2 \equiv B/A = (1 +$

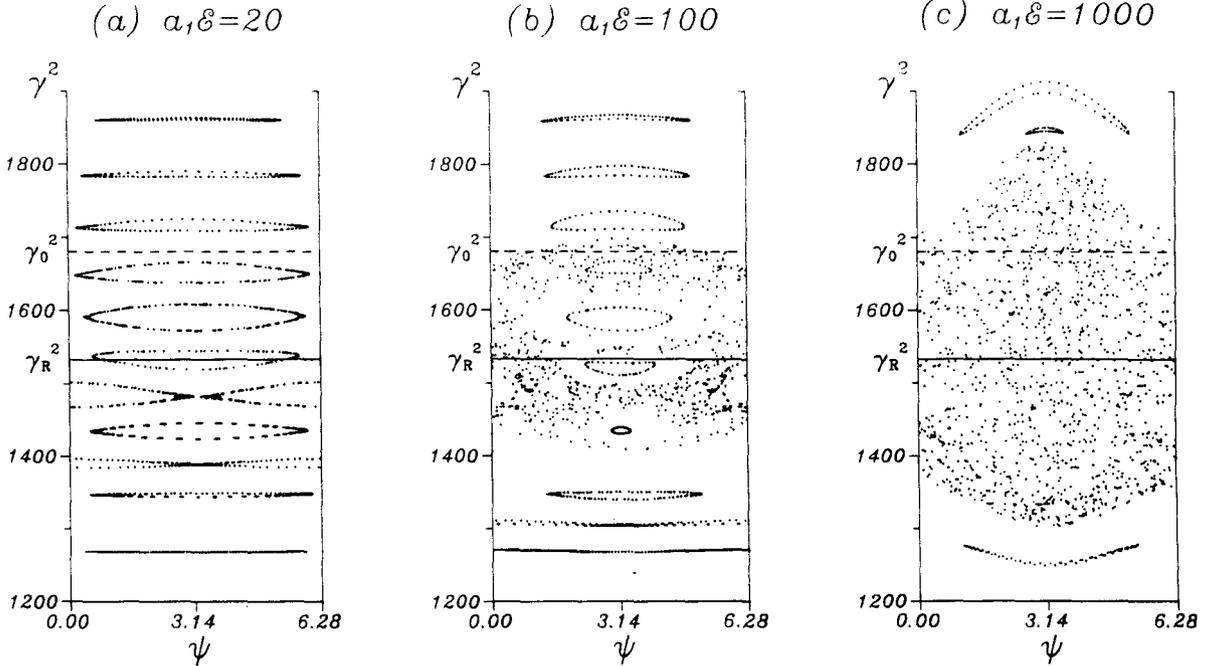


Fig. 2. Poincaré sections of the electronic phase space in a TFW for a monochromatic laser field, for increasing values of the intensity.

$K^2)q_L/2k_1$. For a TFW new resonances appear: i) the resonance corresponding to the second frequency of the wiggler, at $\gamma^2 = B/(A + k_b) = (1 + K^2)q_L/2k_2$, and ii) the resonances between the electron periodic motion at $\gamma^2 = \gamma_R^2(1 + nk_b/k_1)$ and the beating pulsation k_b . The structure of the phase space is most conveniently seen by rewriting eqs. (10) with the new variables $\bar{t} \equiv t - (d/\omega)\sin k_b t$, $\bar{\psi} \equiv \psi + (Ad/k_b)\sin k_b t$:

$$d_{\bar{t}}\bar{\psi} = A - B/\gamma^2, \quad (11a)$$

$$d_{\bar{t}}\gamma^2 = \sum_n C_n \sin(\bar{\psi} - nk_b\bar{t}), \quad (11b)$$

with $C_0 \equiv CJ_0$, and for $n \geq 1$:

$$C_n \equiv C \left(J_n - \frac{d}{2}(J_{n-1} + J_{n+1}) \right),$$

$$C_{-n} \equiv (-1)^n C \left(J_n + \frac{d}{2}(J_{n-1} + J_{n+1}) \right), \quad (12)$$

where the J_n are Bessel functions of Ad/k_b . Comparison with eq. (7) shows that the electron motion in a two frequency wiggler with a single mode laser is formally equivalent to the motion in a uniform wiggler with a broad spectrum given by eq. (12). The whole set of resonances are apparent on these equations, with their widths proportional to $C_n^{1/2}$. At low laser energy they also appear on a Poincaré section (fig. 2a). Each of these resonances is associated with a contribution to the gain in the weak field limit, which explains the multipeak structure of the gain curve [2] (note that for the uniform wiggler all these resonances disappear

except for $n = 0$, restoring the standard result). When the laser energy increases, the resonances overlap, stochastic layers develop nearby the separatrices (fig.

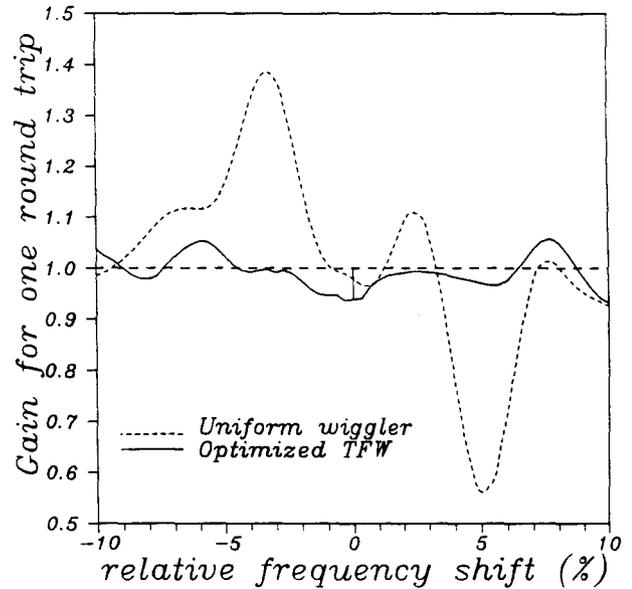


Fig. 3. Low noise numerical calculation of the gain versus frequency in the presence of a fundamental mode. For the uniform wiggler the gain has a peak at the sideband position. For the TFW, this peak is considerably reduced, and will eventually be smaller than the cavity losses, so that the sideband will not develop. Note that the sideband growth is very strongly inhibited around its frequency of maximum gain for the uniform wiggler.

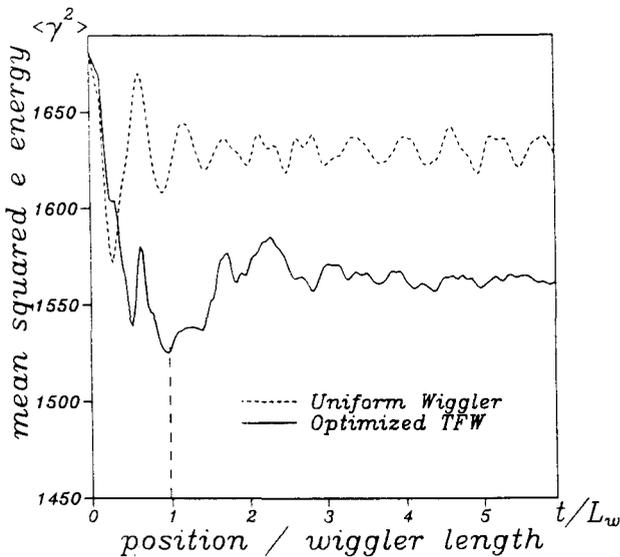


Fig. 4. Optimized TFW: evolution of the mean γ^2 of the electrons, following eq. (10), with values of A , B , etc. corresponding to a realistic optimization [2]; Uniform wiggler: evolution of the mean γ^2 of the electrons, following eq. (10), with the same parameters except $d = \beta = 0$. The difference between the saturation levels is due to the presence of untrapped electrons for the uniform wiggler. Note that the uniform wiggler curve does not correspond to a realistic case since in this regime the laser energy will in fact spread in a broad spectrum.

2b) and eventually merge in a stochastic region (fig. 2c).

The motion of the electrons in such a phase space is quite different from what is usual in FELs: the N electrons lose their energy by diffusion in the stochastic region, rather than by a coherent synchrotron motion responsible for the sideband instability. Finally their chaotic motion does not rise to the sideband instability (fig. 3 shows numerical sideband gain curves for a uniform wiggler and for the corresponding optimized TFW).

This chaotic motion results in an equipartition of the electrons in the available phase space region. Fig. 4 shows how the mean electron energy oscillates and, after complete diffusion, finally reaches the average energy $\langle \gamma \rangle \approx \gamma_R$ of the stochastic region.

In an infinite TFW, the energy the lost by the electrons is therefore $N(\gamma_0 - \gamma_R)$, and the efficiency is $\rho = (\gamma_0 - \gamma_R)/\gamma_0$. The same reasoning in the case of a standard uniform wiggler leads to an efficiency in the monochromatic regime of $\rho = x(\gamma_0 - \gamma_R)/\gamma_0$, where x is the ratio of trapped electrons. One can see that the TFW offers a double opportunity to increase the efficiency: i) to increase $\gamma_0 - \gamma_R$ by taking advantage of the multippeak structure of the gain curve, and ii) to trap all the electrons by taking advantage of the thickness of the stochastic region. One may finally remark that the wiggler actually has a finite length, and the optimization of the TFW parameters leads to minimization of the total electron energy at the end of the wiggler ($t/L_w = 1$ on fig. 4), so that the above crude estimates of the efficiencies are only lower bounds.

5. Conclusion

We have shown that, for a uniform wiggler in the broad spectrum regime, the electrons lose their energy via a chaotic diffusion in phase space rather than via a collective synchrotron motion. This explains the existence and numerical value of the universal brightness \mathcal{B} . We have also shown that the sideband instability inhibition in a two frequency wiggler is again related to the chaotic character of the electron motion: when coupled to the regular synchrotron motion, the laser evolves to a complicated fluctuating spectrum, while coupled to an adequate chaotic electronic motion, it remains monochromatic. In a way, complexity is transferred from the electromagnetic field to the electrons.

References

- [1] D. Iracane and J.L. Ferrer, Phys. Rev. Lett. 66 (1991) 33.
- [2] D. Iracane and P. Bamas, Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 3086.
- [3] N.M. Kroll, P.L. Morton and M.N. Rosenbluth, IEEE J. Quantum Electron. QE-17 (1981) 1436.
- [4] D. Iracane and J.L. Ferrer, Nucl. Instr. and Meth. A304 (1991) 626.
- [5] A.J. Lichtenberg and M.A. Lieberman. Regular and Stochastic Motion (Springer, New York, 1983).
- [6] R.W. Warren et al., Nucl. Instr. and Meth. A285 (1989) 1.

SPECTRAL BEHAVIOUR OF HIGH POWER COMPTON FREE ELECTRON LASERS

II. EFFECT OF FILTERING AND TAPERING ON SIDEBAND GENERATION

D.Iracane , P.Chaix

Commissariat à l'Energie Atomique

Centre d'Etudes de Bruyères-le-Châtel, PTN

BP12, 91680, Bruyères-le-Châtel, FRANCE.

H.Delbarre

Université des Sciences et Technologies de Lille,

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, URA CNRS 249,

59655, Villeneuve d'Asq, France.

We show via a numerical study of the asymptotic spectral behaviour of filtered and tapered FEL oscillators that tapering must in general be assisted by filtering to prevent spectral broadening. To interpret these results, we present a theoretical analysis of the sideband instability, including the transient regime. For long amplifiers, analysis of trapped particules appears to be relevant. This is not the case for FEL oscillator where the standard "deeply trapped electrons" and "exponential regime" assumptions are most often irrelevant. Moreover, spectral broadening is not related in a simple way to the sideband inhibition, due to the multiplicity of non linear mechanisms involved in FEL dynamics.

I. Introduction

It is expected, on both theoretical and numerical grounds, that the sideband instability in high power FEL's is the first step of a broadening of the emitted spectrum, due to the diffusion of the electrons in their phase space (Part.I). More than an academic investigation of the sideband mechanism, the present paper is an attempt to understand the transient regime responsible for spectral broadening. This work will show that the realistic FEL spectral behaviour is very intricate, and cannot be understood by simply defining the sideband generation as a trapping instability [1].

Many publications are devoted to the sideband generation, associated in most cases with complementary mechanisms like filtering or tapering (lowering of the ponderomotive bucket in the electron phase space).

Tapering has often been said to slow sideband generation [2,3], or even to inhibit it [4]. This can be due to two effects: first the distortion of the orbit when the resonant electron is slowed down at a rate comparable with the synchrotron motion. Second, for a tapered wiggler, the bucket is smaller so that a smaller number of electrons can couple with the sidebands.

However the concept of tapering is meaningful only with a monochromatic laser field. Indeed, many publications [5,6] emphasize that a small amount of sideband can detrap electrons from the ponderomotive bucket, which can make the tapering inefficient.

Now, the effect of filtering is not trivial. On one hand, following Part.I, one expects that the extraction efficiency is decreased by filtering. Such a result has been stated in many publications, either for non tapered wigglers [7] or tapered ones [8,9]. On the other hand, the tapering scheme may be more efficient for a filtered LEL, so that one can expect to enhance the efficiency; this prediction has also been observed [10]. Experimental

data also corroborate these statements. Indeed, in ref [11], three different tapered wigglers were used and spectral broadening was controlled by detuning the optical cavity [7]; it is claimed that, for some cavity detuning, broad spectrum regimes are observed whatever the tapering. For a shorter optical cavity, the spectrum gets narrow and the efficiency is improved [11] (resp. depleted [7]) for tapered (resp. non tapered) wigglers. For some intermediate detuning, the plot of the efficiency versus time, within a single macropulse, exhibits a very subtle behaviour since the tapering begins to increase the efficiency, but then sidebands appear and the efficiency collapses.

Considering parameters close to those of the experiment of ref.[7], but in the continuous beam limit, we exhibited, in Part.I, a strong spectral broadening phenomenon, related to some randomization of the electron phase space. In such a case, tapering becomes inefficient due to the very complicated phase space structure [12]. Note that this second regime is characteristic of high power FEL's, and requires high electronic currents and long interaction times. This is why the broad spectrum regime was only observed in few experiments, up to now [7]. Therefore, there is clearly a threshold in the physical experimental parameters, that controls which asymptotic regime will occur.

Experimental evidences show that tapering is not expected to kill the sidebands, but only to delay them. Then, trying to understand the variety of FEL behaviours depending on the rate of tapering, it is necessary to use a second independent parameter that governs the spectral regime. The simplest one is a filter. For theoretical purposes, a filter provides a better control parameter than the electronic current, the pulse length or the optical cavity detuning, since it does not change the coupling constants of the problem. Furthermore, it can be easily implemented in our numerical simulations

working on a Fourier expansion of the laser field.

We therefore consider the spectral behaviour of a high current FEL oscillator, with parabolic tapering and a filtering device. The starting point of our analysis is a numerical investigation, versus the tapering amplitude $\Delta B/B$ and the filter width (Sect.II). This two-parameter set of numerical experiments shows a transition between narrow and broad spectra. To understand this transition, we first present an analysis of the sideband instability, and then consider the relation between sideband inhibition (by tapering and/or filtering) and spectral broadening.

To investigate the effects of sideband generation, numerical simulations are required and widely used [2-4,6,8-10]. Other studies are devoted to the interpretation of the sideband instability from a basic point of view [5,13-18]. As an academic starting point, most of these papers assume that electrons are initially bunched on the orbits of the ponderomotive well. Even if they shed some light on the mechanisms of the sideband instability, one should question their reliability for a realistic description. Therefore, it is necessary to address the connection between the academic approach and full numerical simulations.

As a first step of our analysis of the sideband instability, we provide a generalization of the standard sideband model, starting with a monochromatic laser and an electron distribution in equilibrium in the ponderomotive wells (Sects.III and IV), but not assuming an exponential growth of the instability. This allows us to study the transient regime. We will show that, for most oscillator experiments, the transient regime actually lasts longer than the wiggler length, which makes then irrelevant the usual asymptotic exponential gain calculations.

As a second step, we implement the time dependent perturbation theory

presented in Sect.III by using an adiabatic assumption. Within an investigation of the sideband generation in a strongly tapered long amplifier (Sect.V), we obtain *i*) an expected result about the importance of the trapping ratio and *ii*) a more surprising outcome about the adiabaticity of the trapped particle motion. This allows to interpret the sideband depletion in a strong tapered amplifier. Nevertheless, sidebands appears to be inhibited mainly because an amplifier is a finite time experiment: the same tapering rate within a resonator experiment would lead to a quite different spectral behaviour.

As a third step, we consider the system with more realistic non-bunched non-equilibrium initial conditions. Low noise numerical simulations allow to test whether or not the sideband will grow in a given tapered and filtered system. Then we come back to the problem of the evolution over a large number of round trips for a tapered FEL oscillator assisted by filtering (Sect.VI). In particular, we show that the sideband instability in a filtered system does not necessarily lead to a broad spectrum (that is a spectrum as wide as the filter): mode competition between fundamental and sideband modes can actually lead to a spectrum much narrower than the filter.

As mentioned in Part.I, the spectral dynamics can be studied using a 1D model. For that purpose, we assume that the laser electric field \mathcal{E}_n and electron density are proportional to gaussian radial profiles $S(r)$ and $T(r)$. This leads to the following set of equations where we recognize the standard 1D formulation [1,19,20]. For analytical investigations, the Vlasov-Maxwell approach is well suited especially if we define $p=\gamma^2$ where γ is the electron kinetic energy normalized to its rest energy. The electronic motion can then be put easily under a Hamiltonian form with conjugate variables $(\psi, p=\gamma^2)$, and with the transformed density $h(z, \psi, p)=g(z, \psi, \sqrt{p})/\sqrt{p}$. We define a reference

wave number k_L and recall the equations of the model:

$$A_L = \frac{mc}{e} \operatorname{Re} \sum_{n \ll N} \frac{\mathcal{E}_n(z)}{k_n} e^{ik_n(z-ct)} \quad (1)$$

$$i d_z \mathcal{E}_n = \mu_0 e^2 c a_w \mathcal{K}_1 \frac{1}{\pi r_e^2} \int_1^{+\infty} \frac{dp}{2\sqrt{p}} \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi N} d\psi h(z, \psi, p) \exp(-i\psi_n) \quad (2a)$$

$$\text{with } k_n = (1 + \frac{n}{N}) k_L, \quad \psi = (k_L + k_w)z - k_L ct, \quad \psi_n = (1 + \frac{n}{N})\psi - \frac{n}{N} k_w z \quad (2b)$$

$$\left(\partial_z + (\partial_p H) \partial_\psi - (\partial_\psi H) \partial_p \right) h(z, \psi, p) = 0 \quad (3a)$$

$$\partial_p H = k_w - k_L (1 + a_w^2/2)/2p \quad (3b)$$

$$-\partial_\psi H = \langle ST \rangle (\pi r_L^2)^{1/2} \mathcal{K}_1 a_w \operatorname{Im} \sum_{n \ll N} \mathcal{E}_n \exp(i\psi_n) \quad (3c)$$

$$\frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi N} d\psi \int_1^{+\infty} dp h(z, \psi, p) = \frac{1}{mc} \rho_e \quad (4)$$

where the on-axis electric field \mathcal{E}_n depends on the z coordinate, where ρ_e is the number of electrons per unit of length, and where r_e and r_L are the quadratic mean radius of the electron and laser beams. In the following we will consider without loss of generality that $r_e^2 = 2r_L^2$, which leads to $\langle ST \rangle (\pi r_L^2)^{1/2} = 1/2$. The Hamiltonian H describing the electronic motion is defined by Eq.3b,c.

II. Spectral behaviour versus tapering and filtering

This section is devoted to the analysis of the spectral behaviour of an FEL oscillator, which basically implies that the wiggler length and the synchrotron period have the same order of magnitude at saturation.

As a first step, let us consider a uniform wiggler (square points

on Fig.1). We know from Part.I that the coupling between the sideband and the fundamental mode will lead to a broad spectrum. We define a central mode at the wave-number k_L of maximum linear gain. A square filter with a bandwidth \mathcal{F} is used to cut off the modes of wave-number k with $|k-k_L|/k_L > \mathcal{F}/2$. To analyse the effects of this filter, we define the efficiency ρ as the ratio of the extracted laser energy to the initial electron energy, the relative spectral width $\Sigma = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2} / k_L$, and the brightness $\mathcal{B} = \rho / \Sigma$.

On one side for large enough filters ($\mathcal{F} > 3\%$ in our case), Fig.1a shows that the extracted efficiency ρ increases monotonously with \mathcal{F} , while Fig.1b shows that the brightness \mathcal{B} reaches its universal value $\mathcal{B} = \sqrt{3}/2$. This is consistent with a laser spectrum looking like a plateau truncated by the filter, and we call this the broad spectrum regime. On the other side Fig.1b shows a sharp transition toward high values of \mathcal{B} for $\mathcal{F} < 3\%$: the sideband has been suppressed, and the laser spectrum is much narrower than the filter. This case will be referred hereafter as the narrow spectrum regime.

The problem of determining how narrow can be the laser spectrum, once the sideband inhibited, is under investigation and will be addressed elsewhere. As a preliminary result, it seems that the ultimate relative width is less than 10^{-4} and can be obtained with a filter bandwidth in the range of $\mathcal{F} = 1\%$ (in our case the sideband grows with a relative frequency shift of about 3%). So, by using rough gratings, it is possible to kill the sideband and then, by a purely dynamical effect, to get a very sharp spectrum. This result has to be validated so that FEL devices can be used for spectroscopy purposes.

As a second step, let us consider a tapered wiggler (stars and circles on Fig.1). Simulations presented in Part.I have shown that for a non filtered ($\mathcal{F} \rightarrow \infty$) high power FEL, tapering becomes inefficient: it does not

eliminate spectral broadening and does not increase the efficiency. A two-parameter analysis is then necessary to understand the effect of tapering for a given value of the filter. We consider a parabolic profile of the wiggler magnetic field defined by:

$$B(z) = B_0 - \frac{\Delta B}{L_w^2} z^2$$

where z is the longitudinal position ranging from 0 to the length of the wiggler L_w (since most of FEL oscillator wigglers are short, such a simple parametrization of the wiggler magnetic field envelope is in general sufficient for our purpose). For each value of the magnetic field, one can define the energy of the resonant electron:

$$\gamma_r^2(z) = \frac{k_L}{2k_w} \left(1 + \frac{1}{2} a_w^2(z) \right). \quad (5)$$

For example, with a wiggler parameter a_w close to 0.75, a 50% variation of the magnetic field gives a 9% relative decrease for the resonant energy.

It is clear on Fig.1b that the spectral behaviour is affected by tapering since a larger filter bandwidth is sufficient to reach a given brightness. Nevertheless, for large enough filters, the broad spectrum regime is reached.

The intricate consequences of filtering and tapering on the efficiency [7-11] are manifest on Fig.1a where the efficiency versus filtering presents a positive (resp. negative) slope for small (resp. large) tapering rates. It should be noticed that maximum efficiency can be reached by two basically different ways. One can let the spectrum broaden and, following Part.1, electronic diffusion enhances the efficiency, or one can filter the spectrum and use a tapered wiggler to decelerate the electrons.

The map on Fig.2 aims at pointing out the diversity of the

asymptotic regimes. The plane $(\Delta B/B, \mathcal{F})$ is divided into four regions according to the value of the brightness: black points indicate a brightness $\mathcal{B} \gg 1$, and white points indicate a brightness of the order of magnitude unity (a criterion based on the fraction of the total laser energy enclosed in a 1% spectral band around k_L , leads to the same partition of the $(\Delta B/B, \mathcal{F})$ plane). This map reveals that the transition between the narrow and broad spectrum regimes depends on tapering: although tapering does not always imply a monochromatic laser field, we see that it makes easier to avoid the sideband instability and the consecutive spectral broadening. However, it appears that tapering always need to be assisted by filtering. Furthermore a strong enhancement of the tapering is required to compensate a small enlargement of the filter. Since a too strong tapering (say $\Delta B/B$ beyond 50%) also switches off the interaction, tapering cannot be used efficiently to control the spectrum of high power FEL oscillators.

More precisely, for a narrow window (region I in Fig.2), the sideband is clearly suppressed, so that we get a very narrow spectrum. For a large filter (region IV), tapering becomes inefficient. In that case, the sideband develops and non linear difference frequency generation leads to a broad spectrum with universal brightness $\mathcal{B} \cong \sqrt{3}/2$ [21, Part.I]. This implies that, even with a 50% variation of the magnetic field, we observe the same extracted efficiency and the same spectral width than for a non tapered wiggler. For realistic high power FEL's, the broadening mechanism is strong and fast enough to complicate the phase space structure so that it is no more possible to define the resonant electron and its adiabatic motion induced by tapering.

Between these two extreme regimes (inhibited sideband and broad spectrum) we observe two intermediary regions. Going from region IV to region

III, the brightness gets somewhat higher than the universal value: the effects of filtering begin to appear. But going from region III to region II one crosses a sharp transition line, and the spectral width drops to very small values (down to numerical resolution and in any case much smaller than the filter width).

III. Sideband growth for deeply trapped electrons

To get more insight in the dynamics of spectral broadening, we present an analysis of the sideband instability, including the transient regime. In fact, one usually works in the asymptotic regime by computing exponential growth rates [13]. But if we consider an oscillator, the synchrotron length at saturation is close to the wiggler length, so that the sideband exponential growth rate is not relevant, as will be seen for instance on Fig 3.

We will define an equilibrium characterized by a monochromatic laser field \mathcal{E}_0 and a stationary electronic distribution h_0 . A perturbation taking into account the coupling to new laser modes \mathcal{E}_n with $n \neq 0$ makes this equilibrium unstable. An integro-differential equation will be derived for the evolution of the sidebands in the linear regime, when the initial electronic distribution h_0 is peaked at the bottom of the potential wells. This equation can be solved for all times without supposing an exponential growth. Because electrons are coupled to the laser field through its real part, the modes \mathcal{E}_n and \mathcal{E}_{-n} are coupled [14] and will have to be considered within the same calculation.

For a monochromatic laser field $\mathcal{E}_0(z) = |\mathcal{E}_0(z)| \exp^{-i\phi(z)}$, the force $-\partial_{\psi} H_0$ acting on an electron is from Eq.3c:

$$-\partial_\psi H_0 = \frac{1}{2} a_w \mathcal{K}_1 |\mathcal{E}_0| \sin(\psi - \phi), \quad (6)$$

and is therefore 2π -periodic in the variable $\zeta = \psi - \phi$ which takes into account the drift due to the changing the laser field. Using this variable, the dynamical equations become:

$$(d_z \phi + i d_z) |\mathcal{E}_0| = \mu_0 e^2 c a_w \mathcal{K}_1 \int_1^{+\infty} \frac{dp}{2\sqrt{p}} \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi N} d\zeta h(z, \zeta, p) \exp(-i\zeta) \quad (7)$$

$$\left(\partial_z + (\partial_p H_0) \partial_\zeta - (\partial_\zeta H_0) \partial_p \right) h(z, \zeta, p) = 0, \quad (8a)$$

$$\partial_p H_0 = (k_w - d_z \phi) - \frac{1}{2} k_L (1 + a_w^2/2) / p, \quad (8b)$$

$$-\partial_\zeta H_0 = \frac{1}{2} \mathcal{K}_1 a_w |\mathcal{E}_0| \sin(\zeta). \quad (8c)$$

The equilibrium is characterized by $d_z |\mathcal{E}_0| = 0$ and $\partial_z h = 0$. This leads to:

$$d_z \phi = \frac{\mu_0 e^2 c a_w \mathcal{K}_1}{|\mathcal{E}_0|} \int_1^{+\infty} \frac{dp}{2\sqrt{p}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\zeta h_0(\zeta, p) \exp(-i\zeta) = \nu_r = \text{constant}, \quad (9)$$

$$h_0(\zeta, p) = f(H_0(\zeta, p)), \quad (10)$$

where f is any function, and where H_0 is the periodic Hamiltonian determined by Eq.8b,c, with $d_z \phi = \nu_r$ (the calculation of ν_r is detailed in appendix 1):

$$H_0(\zeta, p) = (k_w - \nu_r) p - \frac{1}{2} k_L (1 + a_w^2/2) \log(p) + \frac{1}{2} \mathcal{K}_1 a_w |\mathcal{E}_0| \cos(\zeta). \quad (11)$$

This Hamiltonian has elliptic fixed points given by:

$$\zeta = \zeta_n = \pi + 2\pi n, \quad p = p_r = \frac{1}{2} k_L (1 + a_w^2/2) / (k_w - \nu_r). \quad (12)$$

Let us concentrate first on deeply trapped electrons, that is let us consider an equilibrium electronic distribution $h_0(\zeta, p) = f(H_0(\zeta, p))$ where f is peaked at the minimum value of the Hamiltonian, $H_0(\zeta = \pi, p = p_r)$, so that the electron

motion is harmonic. In this case, one can then readily obtain the value ν_h of ν_r from Eqs.9,4:

$$\nu_h = - \frac{\mu_0 e^2 a_w K_1 \rho_e}{2\sqrt{p_r} |\epsilon_0| m} . \quad (13)$$

Actually, this formula involves the resonant energy $\sqrt{p_r}$, which is itself a function of ν (Eq.12). One has therefore to solve a quadratic equation to find the exact value of ν_r . Since ν_h will appear as a coupling constant for the sideband growth with deeply trapped electrons, it is useful to notice that a rough estimate gives $\nu_h = (\Omega_h^2/k_w)(E_{elec}/E_{las})$ where Ω_h is the pulsation of the harmonic motion of the electrons at the bottom of the wells. For a typical case where $E_{elec} \approx E_{las}$ inside the optical cavity, we get that $\nu_h \approx \Omega_h^2/k_w \ll \Omega_h$.

The equilibrium described by Eq.8-11 is unstable when a new laser mode is assumed to have a small but non zero amplitude, which generates a non 2π -periodic perturbation. Now, the Vlasov equation (8a) and the Hamiltonian (11) have to be implemented by new terms proportional to the sideband modes \mathcal{E}_n and \mathcal{E}_{-n} , where n labels the relative frequency shift n/N . The dynamical equations for the laser modes $\mathcal{E}_{\pm n}$ and the perturbed density $h=h_0+h_1$ can be linearized in $\mathcal{E}_{\pm n}$ and h_1 to calculate the first order evolution of the sideband modes. The details of this calculation are given in Appendix 2, and we obtain:

$$(\beta_n + id) \mathcal{Y}_n = \frac{1}{2} \nu_h \Omega_h \left(1 + \frac{n}{N}\right) \int_0^z dz' \sin(\Omega_h(z-z')) (\mathcal{Y}_n(z') - \mathcal{Y}_{-n}^*(z')) , \quad (14)$$

where $\mathcal{Y}_n(z) \equiv \mathcal{E}_n(z) \exp(i\beta_n z)$, and $\beta_n \equiv \nu_h + \frac{n}{N}(\nu_h - k_w)$.

It appears, as expected, that symmetrical sidebands are coupled, each pair being independent of the others as long as we remain in the perturbative domain, at the first order. Note that the "natural" laser

variable \mathcal{Y} is the electric field with a phase shift $i\beta_n z$; this is consistent with the standard choice made for instance in [18]. However, we do not assume here that \mathcal{Y} varies slowly neither in amplitude nor in phase. Furthermore we do not assume any peculiar form for the sideband evolution, so that we can follow its whole history including the transient regime, from noise up to the exponential regime. The price we pay for having a description valid for high and non-exponential sideband gains, is a restriction to the deeply trapped electrons. However, this will give us an insight in the transient strong amplification of the sidebands, which is necessary if one wants to deal with realistic high power FEL oscillators. Furthermore this will enable us to validate the numerical simulations performed in more realistic situations. A natural way for extending the above treatment to a general initial equilibrium electronic distribution is presented in the next section.

The evolution of the sidebands as given by Eq.14 is non local in time. However, taking advantage of the simple sine form of the kernel, one can reduce Eq.14 to a simple matrix differential equation. Defining:

$$A_n \equiv \mathcal{Y}_n + \mathcal{Y}_{-n}^* , \quad \Pi_n \equiv i(\mathcal{Y}_n - \mathcal{Y}_{-n}^*) ,$$

$$P_n \equiv i \int_0^z dz' \sin(\Omega_h(z-z')) \Pi_n(z') , \quad Q_n \equiv -i \int_0^z dz' \cos(\Omega_h(z-z')) \Pi_n(z') ,$$

one obtains:

$$i \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} A \\ \Pi \\ P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(k_w - \nu) & i\nu & -\nu & 0 \\ -i\nu & \frac{n}{N}(k_w - \nu) & -i\frac{n}{N}\nu\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\Omega \\ 0 & 1 & i\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \Pi \\ P \\ Q \end{bmatrix} . \quad (15)$$

This equation shows that the sideband instability for trapped electrons at the bottom of the well is essentially controlled by two parameters: the

synchrotron frequency Ω_h (related to the amplitude $|\mathcal{E}_0|$ of the pump mode) and the phase derivative $v_h = d_z \phi$ (related to the phase velocity of the pump mode). The sideband growth rates for a given initial condition $\mathcal{E}_{\pm n}(z=0)$ are controlled by the eigenvalues of the matrix in Eq.15. The eigenvalue of largest imaginary part gives the sideband growth rate in the exponential regime; since both coupled sidebands $\mathcal{E}_{\pm n}$ will in general (but not necessarily) have a component on the corresponding eigenvector, they will have the same exponential growth rate (Fig.3a). However, since they have a different history during the transient regime, their gains for one pass will in general be different. Furthermore it must be realized that most often in realistic situations the asymptotic regime is not attained within the wiggler length. In particular, even though they have the same asymptotic exponential growth rate, the coupled modes may have very asymmetrical behaviours when a wiggler of finite length is considered (see $L_w = 2m$ for instance on Fig.3a), which is in general the case when dealing with oscillators: the transient regime lasts one or a few synchrotron lengths, and in an oscillator at saturation the synchrotron period of the electrons in the ponderomotive well is precisely of the order of magnitude of the wiggler length.

The study of the largest imaginary part eigenvalue of the matrix in Eq.15 shows that there is, as expected, a resonance between the synchrotron motion of the electrons at the bottom of the potential wells and the beating between the pump and sideband modes, so that the exponential gain is peaked at $n/N = \Omega_h / k_w$ (Fig.4a). The Eq.14 describes the time dependant building of this resonance.

IV. Sideband growth for non deeply trapped electrons

Let us now consider the case of a general initial equilibrium

electronic distribution. Since we deal with the linear regime, we can consider the independent contributions of distributions concentrated on generic invariant curves of H_0 . The integro-differential structure of Eq.14 is preserved:

$$(\beta_n + id_z) y_n = \frac{1}{2} \nu_h \Omega_h (1 + \frac{n}{N}) \int_0^z dz' \mathcal{K}(z-z') (y_n(z') - y_{-n}^*(z')), \quad (16)$$

where the kernel $\mathcal{K}(z)$ is now an anharmonic $2\pi/\Omega$ -periodic function, where Ω is the pulsation of the motion on the considered invariant curve. Using the action-angle variables, it is possible to give in closed form an expression for this kernel [18], but the evolution equation cannot anymore be easily put under a simple form similar to Eq.15. However, expanding the kernel as a Fourier series, and keeping only a finite number k of terms:

$$\mathcal{K}(z) = \sum_{j=1}^k \mathcal{K}_j \sin(j\Omega z), \quad (17)$$

we can generalize (15) with a square matrix of dimension $(2+2k)$. This formulation shows that the beating wave due to the sideband will resonate with all the present harmonics \mathcal{K}_j of the electronic motion, at $n/N = j\Omega/k_w$. As Ω goes to zero close to the separatrix, one observes more and more resonances. This remark is used in [18] where it is shown that in the low gain asymptotic regime the sideband generation is mainly due to electrons close to the separatrix.

We performed very low noise numerical simulations to picture the sideband evolution including the transient regime, starting with an equilibrium electronic distribution concentrated on an invariant curve of H_0 . With an initial ratio between the sideband and pump mode energies of 10^{-6} , an optimization of the electron sampling allows to inhibit numerical noise down to 10^{-10} . We found features that remain very similar to the situation described in Sect.III: although they have equal asymptotic

exponential growth rates, the high and low frequency symmetrical sidebands have very different histories, including a strong depletion of the high frequency sideband for short times. This is why the finite length sideband gain curves (Fig.4) are not symmetrical and may have a complicated shape. Nevertheless, the resonances at $n/N = j\Omega/k_w$ are visible for frequency shifts such that the asymptotic regime has been attained.

It appears on Fig.4 that the envelop of the resonances occurring for different orbits, either deep in the well or not, remains roughly constant. This illustrates the prediction of [18] where it is stated that the same sideband frequency is generated either by deeply trapped electrons or by the summation of the resonances for electrons close to the separatrix.

However, in an actual standard experiment the initial electron distribution is uniform in ψ . For an oscillator, it is necessary to bridge the gap between academic approaches and the more realistic results presented in Sect.II. For that purpose, we performed very low noise one-pass numerical simulations starting from a non bunched electron distribution.

Some results for non bunched beams are depicted on Fig.3b. Qualitatively, they look very much like the academic case of Fig.3a. One difference however is the appearance of a preliminary phase (about 1.5 m in our case) during which the electrons bunch, and the electron+laser system reaches a quasi equilibrium state similar to the initial state of the previous section; this is supported by noticing that it takes about the same bunching time (1.5m) to the phase derivative ν of the laser field for reaching its "asymptotic" value. Only in a second phase the electron motion begins to feed the sidebands in a way similar to the idealized case, beginning with a strong depletion of the high frequency sideband. Of course, except if the coupling is too weak, sidebands will begin to grow even during

the bunching phase. Now in a standard experiment where the fundamental mode has been brought to saturation, the synchrotron and wiggler lengths are of the same order of magnitude. Therefore electrons just have enough time to bunch, so that they do not actually experience the second phase, and *a fortiori* they never see the exponential regime. This shows a major limitation of the usual academic sideband analysis for FEL oscillators.

V. Sideband instability and tapering in an amplifier FEL

To investigate the effect of tapering, we first consider one pass simulations in a long wiggler. The initial value of a_w is supposed to be large enough to support a strong tapering without killing the coupling at the end of the wiggler. This is typically the situation of Ref.4 where it appears that sidebands are strongly inhibited.

We consider the FEL parameters given in [4]: a 25 m long wiggler is tapered from $a_w=1.7$ down to $a_w=0.4$. This implies that the resonant electron energy is decreased by an amount of 35%. In accordance with [4], we observe a strong depletion of the sideband due to the tapered wiggler.

In Fig.5, we plot the growth of two symmetrical typical sideband lines for uniform (Fig.5a) and tapered wigglers (Fig.5b). For positions z larger than 5 m, the exponential growth rate decreases from 0.36 m^{-1} down to 0.16 m^{-1} from the uniform to the tapered case. Accordingly to [4], this leads at the end of the wiggler to a fundamental mode many decades above the rest of the spectrum. To clarify this, we compare three different approaches.

Approach 1: we perform a realistic simulation with a non bunched initial condition (stars in Fig.5). From this simulation, we measure the average trapping ratio over the wiggler length. We find 75% (resp. 45%) for the uniform (resp. tapered) wiggler.

Approach 2: we generalize the model developed in Sect.III by using an adiabatic assumption: Eq.15 is unchanged but now the synchrotron frequency Ω and the phase drift ν are function of z . These functions depend on $a_w(z)$ and on the laser energy which is evaluated as the complementary variation of the resonant electron energy. We use this adiabatic generalization with the effective trapped charge (full lines in Fig.5).

Approach 3: to check this adiabatic assumption, we also provide full numerical simulations for the dynamics of deeply trapped electrons (square points in Fig.5). For uniform wigglers this fits perfectly Eq.15 up to the saturation (Fig.3a). For tapered wigglers, some differences can emerge because of inertial forces. Indeed [1], the ponderomotive potential $\sin(\psi)$ is incremented by a linear term $\psi d_z p_r$, where p_r depends on $a_w(z)$ (Eq.12). The induced constant force will clearly shift the value of the phase derivative ν_h (Eq.13) used in Eq.15 by an amount proportional to $d_z^2 p_r$.

For large values of z , the agreement between the three simulations shown on Fig.5 is good. It can even be improved if one considers the instantaneous trapping ratio to solve Eq.15. This corroborates clearly, for wigglers long compared to the synchrotron length, that the sideband instability is only due to trapped electrons [3]. More surprisingly, the collapse of the sideband gain is mainly due to the variation of instantaneous FEL parameters like $a_w(z)$ or the trapping ratio, and not to some inertial force induced by the time dependent Hamiltonian. This is clearly shown by Fig.6 where approaches 2 and 3 are compared for three different taperings.

This shows that, although the detrapping is the sign of non adiabatic dynamics, the particles remaining in the bucket essentially follow an adiabatic dynamics. The usual picture based upon the non adiabatic distortion of electronic motion in the bucket is clearly wrong in that case.

For small values of z in the tapered wiggler, Fig.5b exhibits large discrepancies between the three computations. For trapped electrons, the realistic sideband evolution is delayed from the one given by Eq.15. For non bunched electrons, the growth rate is even larger. Such a large disagreement is not well understood, and it illustrates the complexity of transient regimes where bunching mechanisms can induce delays.

Moreover, one observes that even with such a strong tapering rate, the effective sideband gain is still close to 10 after 5 m of tapered wiggler. Clearly, in an oscillator experiment, this would lead to a strong broadening. This is basically due to the fact that it is not possible to taper strongly the beginning of the wiggler since some bunching length is required before lowering the bucket. It is the case for simulations of Ref.4 and Fig.5 where the first two meters of the wiggler are not tapered.

To enforce this conclusion, we use a comparable strong parabolic tapering ($a_w=1.7$ down to $a_w=0.4$) in an oscillator computation with a one meter long wiggler. The trapping ratio goes from 75% down to 10% at $z=0.5$ m because of the parabolic profile of magnetic field. But, at the same time, the synchrotron length shortened at $L_w=0.5$ m due to a strong efficiency enhancement. So, a large amount of trapped particles undergo a full synchrotron period which generates sidebands: after a large number of round-trips, we observed a broad spectrum regime.

As an essential difference with oscillator experiments, it is not possible in an amplifier to speak about the asymptotic equilibrium. Indeed, it would imply to push the dynamics for arbitrary large wiggler lengths, which is clearly impossible with a decreasing magnetic field. So, a tapered amplifier experiment is basically a finite time experiment, such that sidebands' can appear to be definitively suppressed. At the opposite, in an

FEL oscillator, a realistic asymptotic regime is defined with an arbitrary number of round-trips. This basic distinction is emphasized by the following analysis.

VI. Sideband instability and tapering in an FEL oscillator

We are now in position to come back to the study of sideband generation in a tapered FEL oscillator, as it appears in Sect.II. Sideband computations in Sect.IV assume some given laser initial conditions (here both symmetrical sidebands of zero phase and equal amplitude). Since the symmetrical modes are coupled, the actual gain per pass, which relates the value $\mathcal{E}_{\pm n}(L_w)$ of the sidebands at the end of the wiggler to their value $\mathcal{E}_{\pm n}(0)$ at the entrance, is a 4×4 real matrix \mathcal{G} . This matrix can be obtained numerically by computing the laser field $\mathcal{E}_{\pm n}(L_w)$ with 4 different choices of the initial conditions $\mathcal{E}_{\pm n}(0)$. However a scalar sideband gain can be defined as the maximum amplitude of the eigenvalues of \mathcal{G} . Comparing this gain to the cavity losses tells us whether or not the sideband instability will be triggered. This is what we did for tapered systems, for the parameters corresponding to Fig.2. Although these sideband gain curves have a rather complicated shape, which is numerically difficult to stabilize, the thresholds are not very sensitive, and one can draw some semi-quantitative conclusions. As expected, it appears that tapering lowers the sideband gain (Fig.7) so that, in certain cases, it will drop below the losses: this is sideband inhibition. More generally, these gain curves provide a simple way to find the size of a filter necessary to kill the sideband for a given value of the cavity losses, provided the pump mode amplitude and position are kept fixed (the following shows that the situation is actually more complicated).

The inspection of gain curves similar to those of Fig.7 leads to

the definition of region I in the map of Fig.2: it is the regime where the sideband should not grow, according to the previous analysis. It appears that we are far from the end of the story, since we observe both low brightness spectra in region I, and high brightness spectra outside region I (where the sideband instability is expected). Actually, it should not be forgotten that i) the pump mode still evolves while the sideband develops, and ii) that the system still has a history after the sideband instability, until saturation. Let us briefly review these two issues.

First: to analyse the sideband growth, we fixed the position and amplitude of the fundamental mode. But, in a realistic FEL oscillator, this amplitude varies continuously from noise up to saturation, and the corresponding sideband gain curve evolves accordingly. Therefore it is clearly not true that the sideband only develops after that the fundamental mode has reached its saturation level. It happens that the sideband growth rate can be higher for a lower energy of the pump mode, so that sidebands can be observed for filters narrower than those predicted by only considering the saturation level of the pump mode. This is what happens on Fig.2 for uniform wigglers ($\Delta B/B=0$) and narrow filters ($\mathcal{F}<3\%$).

Second: a careful analysis of the data in region II shows that a final monochromatic laser field can result from a complicated dynamics due to mode competition. Various scenarii may occur depending on the filter width \mathcal{F} . With a very narrow filter ($\ll 1\%$), the linear gain is almost constant over the filter range, so that the spectrum at the beginning of the non linear regime is still flat, which is completely different from the usual situation where a monochromatic field is assumed. The evolution of this flat spectrum is not driven by the sideband instability but by mode competition [22], which leads to a monochromatic field with a frequency equal to the lower bound of the

filter. This evolution can be interpreted as a boundary effect: each mode within the filter bandwidth is coupled by mode competition to its closest neighbours with higher and lower frequencies, except at the edge of the filter where the competition is roughly twice smaller. For an intermediate filter bandwidth, the scenario is different: a monochromatic laser field develops as usual, followed by a sideband which reaches the same order of magnitude. But then the filter prevents the generation of a third frequency, and mode competition between the pump and sideband modes leads to the killing of the pump mode, and to the observed high brightness. Such a non trivial effect of filtering illustrates the interaction between different modes in the non linear regime.

VII. Conclusion

The optimization of efficiency and monochromaticity in high power FEL's makes necessary an improved understanding of the mechanisms controlling spectral broadening effects in uniform as well as in tapered wigglers. We presented first an investigation based on full numerical simulations for tapered FEL oscillators. This shows that tapering does not always provide an efficient way to control the spectral evolution: it can be overwhelmed by broadening mechanisms which induce a complex electronic phase space structure. Nevertheless, by coupling a filter and a tapered wiggler, we can exhibit the connection between tapering and spectral dynamics; this generates the intricate map given on Fig.2, resulting from the antagonisms between tapering and the broadening mechanisms.

In order to understand, and eventually to control, the transition between narrow and broad spectrum regimes, it is necessary to go beyond the numerical investigations presented on Fig.2. Since the sideband instability

is given as the driving mechanism responsible for spectral broadening, we devoted an important part of this paper to its analysis.

Long amplifiers investigations in Sect.V emphasize *i*) the important role of the detrapping in the sideband inhibition and *ii*) the adiabaticity of the trapped particles motion even for strong tapering. In practice, the decrease of the exponential growth rate can lead, for long but finite wigglers, to a strong depletion of the sideband. But, in general, this decrease is not large enough to prevent sideband generation in an FEL oscillator. From a basic point of view, this stresses that the sideband cannot be said to be fully destroyed in tapered amplifiers.

For FEL oscillators, the standard presentation of the sideband instability, starting from an equilibrium with deeply trapped electrons and assuming an exponential growth rate, is largely irrelevant for the prediction of the spectral behaviour at saturation. There are two kinds of reasons for this.

i) First, such an analysis of the sideband instability overlooks very important issues. At saturation for the fundamental laser mode, the synchrotron and wiggler lengths are roughly equal. Even in strongly tapered wigglers with shortened synchrotron length L_s , trapped electrons run over a period L_s and can generate sidebands.

As detailed in Sect.III, this implies that the sideband gain per pass is given by the transient regime, which is very different from the exponential gain. Furthermore, it is known that electrons that are not deeply trapped give an important contribution to the exponential sideband gain, especially those near the separatrix. Numerical simulations show (Fig.4) that this is true even in the transient regime. The approach developed in Sect.III could be extended to take into account more and more anharmonic orbits; however, it

will not enable us to consider orbits very close to the separatrix. Therefore, further developments are required to make the connection between the attractive idea of resonance resummation close to the separatrix [18], and the approaches available for the transient regime. But, even if this was done, it should be taken into account that the initial condition for the electrons is not an equilibrium, but a monochromatic translationally invariant beam. Even a full understanding of the sideband instability starting with an equilibrium as an initial condition, would not make available any quantitative prediction for the realistic sideband evolution: the sideband evolutions with non bunched and equilibrium initial conditions present the same general outlook only after a bunching phase (Figs.3).

ii) Secondly, the sideband instability is far from being the only mechanism involved in the long term spectral evolution. For example, the FEL oscillator behaviour is also driven by mode competition or difference frequency generation, as presented in Part.I. Examining in detail the spectral behaviour versus filter and tapering (Fig.2), we were led to divide the plane into different regions dominated by different mechanisms. For very narrow filters (region I), the sideband instability is inhibited by the combined effect of filtering and cavity losses (Fig.7), so that we get a monochromatic laser field with very high brightnesses ($\mathcal{B} \gg 3$). At the opposite, very wide filters (region IV) allow a broad spectrum with universal brightness ($\mathcal{B} \leq 1$), extensively studied in Part.I, and which is driven by a sequence of sideband instabilities and difference frequency generations. But for filters of intermediate width, and depending on tapering rates, we observe complex equilibria. For example, one can observe a transition region (region III) where the spectrum is broad, but narrower than the filter ($1 \leq \mathcal{B} \leq 3$). Finally in region II the asymptotic spectrum is very narrow

(although the sideband does develop), due to non linear mode competition within a small available frequency interval.

This paper has shown the multiplicity of the possible spectral evolutions allowed by the FEL dynamics with strong couplings. A perturbative analysis working in the small field limit is unable to explain these global results presented on Fig.2. As suggested in Part.I, it is therefore necessary to develop approaches complementary to the sideband instability or the difference frequency generation, to understand the spectral evolution and the asymptotic equilibrium as a whole.

Appendix 1: Calculation of the phase drift ν_r at equilibrium.

We consider an equilibrium electronic distribution $h_0(\zeta, p) = f(H_0(\zeta, p))$.

The normalization (Eq.4) and the phase drift (Eq.9) give:

$$\rho_e = mc \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\zeta \int_1^{+\infty} dp h_0(\zeta, p), \quad \nu_r = A \int_1^{+\infty} dp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\zeta h_0(\zeta, p) \exp(-i\zeta),$$

with $A = \mu_0 e^2 c a_w K_1 / 2\sqrt{p_r} |\mathcal{E}_0|$. Since $(p-p_r)/p_r$ remains small we only kept the lowest order in $(p-p_r)/p_r$. The Hamiltonian is:

$$H_0(\zeta, p) = B(1-p/p_r)^2 + C \cos\zeta,$$

where $B = \frac{1}{2} k_L (1 + \frac{1}{2} a_w^2)$ and $C = \frac{1}{2} K_1 a_w |\mathcal{E}_0|$, and the distribution h_0 can be decomposed in elementary equilibrium distributions each characterized by an energy $W = (2\mu - 1)/C$ (we will consider trapped electrons: from the bottom to the top of the potential well, W ranges from $-C$ to C , and μ ranges from 0 to 1):

$$h_0(\zeta, p) = f(H_0(\zeta, p)) = \int dW f(W) \delta(H_0(\zeta, p) - W).$$

This leads to:

$$\rho_e = mc \int dW f(W) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\zeta \int_1^{+\infty} dp \delta(H_0(\zeta, p) - W),$$

$$\nu_r = A \int dW f(W) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\zeta \exp(-i\zeta) \int_1^{+\infty} dp \delta(H_0(\zeta, p) - W).$$

The p integral is readily evaluated: it is zero for $W/C - \cos\zeta < 0$, and

$$\int_1^{+\infty} dp \delta(H_0(\zeta, p) - W) = \frac{1}{2\sqrt{BC}} (W/C - \cos\zeta)^{-1/2} \quad \text{for } W/C - \cos\zeta > 0,$$

so that:

$$\rho_e = \frac{mc}{2\sqrt{BC}} \int dW f(W) \frac{1}{\pi} \int_0^\phi d\zeta (W/C + \cos\zeta)^{-1/2},$$

$$\nu_r = \frac{-A}{2\sqrt{BC}} \int dW f(W) \frac{1}{\pi} \int_0^\phi d\zeta \cos\zeta (W/C + \cos\zeta)^{-1/2},$$

where $W/C - \cos\zeta > 0$ for $\zeta \in [\pi - \phi, \pi + \phi]$. With $u = \mu^{-1/2} \sin(\zeta/2)$, the ζ integrals are complete elliptic integrals of the first and second kind [23]:

$$\int_0^\phi d\zeta (W/C + \cos\zeta)^{-1/2} = \int_0^1 du (1 - \mu u^2)^{-1/2} (1 - u^2)^{-1/2} = K(\mu),$$

$$\int_0^\phi d\zeta \cos\zeta (W/C + \cos\zeta)^{-1/2} = \int_0^1 du (1 - \mu u^2)^{-1/2} (1 - 2\mu u^2) (1 - u^2)^{-1/2} = 2E(\mu) - K(\mu),$$

so that:

$$\rho_e = \frac{mc}{2\pi\sqrt{BC}} \int dW f(W) K(\mu),$$

$$\nu_r = \frac{-A}{2\pi\sqrt{BC}} \int dW f(W) \{2E(\mu) - K(\mu)\}.$$

The normalization of the distribution f can be eliminated from these equations, so that

$$\nu_r = \nu_h \frac{\int dW f(W) \{2E(\mu) - K(\mu)\}}{\int dW f(W) K(\mu)},$$

where ν_h is given by Eq.13. If f is a Dirac distribution centred on a given energy W , this reduces to:

$$\nu_r = \nu_h \mathcal{F}\left(\frac{1+W/C}{2}\right), \quad \text{with } \mathcal{F}(\mu) = 2 \frac{E(\mu)}{K(\mu)} - 1.$$

At the bottom of the well $W = -C$ and $\mu = 0$, so that we find $\nu_r = \nu_h$. Although the integrals present logarithmic singularities at the separatrix ($W = C$ and $\mu = 1$), the function \mathcal{F} is regular and ranges from 1 to -1 when the equilibrium trajectory ranges from the bottom to the top of the potential well.

Appendix 2: Derivation of the first order equations for the sideband growth.

Once an equilibrium distribution given, we have seen that the natural phase variable for the electrons is $\zeta = \psi - \nu_r z$ where ν_r has been calculated in appendix 1. The dynamical equations (Eqs.2,3) can be restated with this variable, which induces a corresponding change of variable for the electric field phases:

$$y_n = \varepsilon_n \exp i \beta_n z, \quad \text{with} \quad \beta_n = \nu_r + \frac{n}{N}(\nu_r - k_w).$$

One finds:

$$(\beta_n + i d_z) y_n = \mu_0 e^2 c a_w K_1 \int_1^{+\infty} \frac{dp}{2\sqrt{p}} \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi N} d\zeta h(z, \zeta, p) \exp[-i(1 + \frac{n}{N})\zeta],$$

$$\left(\partial_z + (\partial_p H) \partial_\zeta - (\partial_\zeta H) \partial_p \right) h(z, \zeta, p) = 0,$$

$$\partial_p H = (k_w - \nu_r) - k_L (1 + a_w^2/2)/2p,$$

$$-\partial_\zeta H = \frac{1}{2} K_1 a_w \operatorname{Im} \sum_{n \ll N} y_n \exp[i(1 + \frac{n}{N})\zeta].$$

The electronic density and the Vlasov operator can be decomposed into an equilibrium part and a perturbation, $h = h_0 + h_1$ and $D = D_0 + D_1$ with:

$$D_0 = \left(\partial_z + (\partial_p H_0) \partial_\zeta - (\partial_\zeta H_0) \partial_p \right), \quad D_1 = \frac{1}{2} K_1 a_w \operatorname{Im} \sum_{n \neq 0} y_n \exp[i(1 + \frac{n}{N})\zeta] \partial_p,$$

so that, to the first order in $y_{n \neq 0}$ and h_1 , the dynamical equations become:

$$(\beta_n + i d_z) y_n = \mu_0 e^2 c a_w K_1 \int_1^{+\infty} \frac{dp}{2\sqrt{p}} \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi N} d\zeta h_1(z, \zeta, p) \exp[-i(1 + \frac{n}{N})\zeta],$$

$$D_0 h_1 = -D_1 h_0.$$

Now we deal with deeply trapped electrons, so that h_0 and h_1 are concentrated around the resonant points ($\zeta = (2m+1)\pi, p = p_r$):

$$h_0(\zeta, p) = \sum_m h_0^m(\zeta - (2m+1)\pi, p - p_r), \quad h_1(z, \zeta, p) = \sum_m h_1^m(z, \zeta - (2m+1)\pi, p - p_r),$$

where the functions h_0^0 and h_1^m are peaked around the origin (the functions h_1^m are different from one another, so that the perturbation h_1 is not 2π periodic). We can now expand D_0 around each resonant point:

$$D_0 = \left(\partial_z + A(p-p_r)\partial_\zeta - B(\zeta-(2m+1)\pi)\partial_p \right),$$

with $A = \frac{2(k_w - \nu_h)^2}{k_L(1 + \frac{1}{2}a^2)}$, $B = \frac{1}{2}K_1 a \gamma_0$, and $\Omega_h = (AB)^{1/2}$.

It is then useful to use variables proportional to the action and angle centered on each resonant point:

$$\zeta = (2m+1)\pi - A^{1/2}J_m \cos\theta_m, \quad p = p_r + B^{1/2}J_m \sin\theta_m,$$

so that in the vicinity of $(\zeta=(2m+1)\pi, p=p_r)$:

$$h_0(\zeta, p) = h_0^0(J_m), \quad h_1(z, \zeta, p) = h_1^m(z, J_m, \theta_m).$$

$$D_0 = \left(\partial_z + \Omega_h \partial_{\theta_m} \right), \quad D_1 = -B^{1/2} \text{Im} \sum_{n \neq 0} (\gamma_n / \gamma_0) \exp[i \frac{n}{N} (2m+1)\pi] \left(\sin\theta_m \frac{d}{dJ_m} + \frac{1}{J_m} \cos\theta_m \frac{d}{d\theta_m} \right).$$

The first order Vlasov equation can now be written around each resonant point:

$$(\partial_z + \Omega_h \partial_{\theta_m}) h_1^m(z, J, \theta) = B^{1/2} \sin(\theta) \frac{dh_0^0}{dJ} \text{Im} \sum_{n \neq 0} (\gamma_n(z) / \gamma_0) \exp[i \frac{n}{N} (2m+1)\pi].$$

This equation is readily integrated by changing the variable θ into $\theta - \Omega_h z$:

$$h_1^m(z, J, \theta) = B^{1/2} \frac{dh_0^0}{dJ} \int_0^z dz' \sin(\theta - \Omega_h(z-z')) \text{Im} \sum_{n \neq 0} (\gamma_n(z') / \gamma_0) \exp[i \frac{n}{N} (2m+1)\pi].$$

We can now go to the equation on the electromagnetic field:

$$(\beta_n + i d_z) \gamma_n = D \int_1^{+\infty} dp \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi N} d\zeta \sum_m h_1^m(z, \zeta - (2m+1)\pi, p - p_r) \exp[-i(1 + \frac{n}{N})\zeta],$$

with $D = \frac{\mu_0 e^2 c a_w K_1}{2\sqrt{p}}$. Since each of the h_1^m is peaked in a given 2π interval in ζ , this can be rewritten:

$$(\beta_n + id_z) y_n = D \int_1^{+\infty} dp \frac{1}{2\pi N} \int_0^{2\pi} d\zeta \sum_m h_1^m(z, \zeta - \pi, p - p_r) \exp[-i(1 + \frac{n}{N})(\zeta + 2m\pi)].$$

Since h_1^m is peaked at $\zeta = \pi$, we can expand the exponential to the first order in $\zeta - \pi$ ($\zeta = \pi$ gives a zero contribution):

$$(\beta_n + id_z) y_n = i(1 + \frac{n}{N}) D \frac{1}{2\pi N} \sum_m \int_1^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\zeta (\zeta - \pi) h_1^m(z, \zeta - \pi, p - p_r) \exp[-i\frac{n}{N}(2m+1)\pi].$$

Going to the (J, θ) variables (the jacobian is $\Omega_h J$), this becomes:

$$(\beta_n + id_z) y_n = -iA^{1/2} D(1 + \frac{n}{N}) \frac{1}{2\pi N} \sum_m \int_{\Omega_h} J^2 dJ d\theta \cos\theta h_1^m(z, J, \theta) \exp[-i\frac{n}{N}(2m+1)\pi].$$

Let us put the expression of h_1^m in this formula; the θ integral is trivial since we are at the bottom of the well where the motion is harmonic. The J integral can be performed by parts, which leads to the density ρ_e :

$$(\beta_n + id_z) y_n = iD(1 + \frac{n}{N}) \frac{\Omega_h \rho_e}{mc y_0} \int_0^z dz' \sin(\Omega_h(z' - z)) \frac{1}{N} \sum_{\substack{k \\ k \neq 0}} \text{Im} \left(y_k \exp[i\frac{k}{N}(2m+1)\pi] \right) \exp[-i\frac{n}{N}(2m+1)\pi].$$

The summation on m (position of the resonant points along the electron beam) and on k (laser mode coupled to y_n) leads to:

$$(\beta_n + id_z) y_n = iD(1 + \frac{n}{N}) \frac{\Omega_h \rho_e}{mc y_0} \int_0^z dz' \sin(\Omega_h(z' - z)) (-i/2) (y_n(z') - y_{-n}^*(z')),$$

where * denotes the complex conjugate. This can be rewritten:

$$(\beta_n + id_z) y_n = \frac{1}{2} \nu \Omega_h (1 + \frac{n}{N}) \int_0^z dz' \sin(\Omega_h(z - z')) (y_n(z') - y_{-n}^*(z')).$$

References

- [1] N.M.Kroll,P.L.Morton,M.N.Rosenbluth, IEEE J. Quant. Electron. 17,1436 (1981).
- [2] R.A.Freedman,W.B.Colson, Optics Communications, 52,409 (1985).
- [3] W.B.Colson, Free Electron Generators of Coherent Radiation, C.A.Brau, S.F.Jacobs, M.O.Scully editors, Proc. SPIE V453,290,(1984).
- [4] B.Hafizi, A.Ting, P.Sprangle, L.M.Tang, Phys.Rev. A38, 197 (1988) and B.Hafizi, A.Ting, P.Sprangle, L.M.Tang, Phys.Rev.Lett. 64, 180 (1990).
- [5] N.M.Kroll, M.N.Rosenbluth, Physics of Quantum Electronics edited by S.F.Jacobs et al (Addison - Wesley Reading. MA, 1980), Vol 7, p147. S.Riyopoulos, C.M.Tang, Phys. Fluids 31,3387 (1988).
- [6] D.C.Quimby, Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.738,103 (1987)
- [7] R.W.Warren et al., Nucl.Instr.Meth. A285,1 (1989).
- [8] J.C.Goldstein, Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.453,2 (1984).
- [9] J.C.Goldstein, B.E.Newnam, R.W.Warren, Nucl.Instr.Meth. A272,150 (1988).
- [10] D.C.Quimby, J.M.Slater, J.P.Wilcoxon, IEEE Jour. of Quant.Elect. QE-21 (1985) p979
- [11] D.W.Feldman et al, Nucl.Instr.Meth. A285,11 (1989).
- [12] J.L.Ferrer, D.Iracane Nucl.Instr. and Meth. A318,564 (1992).
- [13] W.M.Sharp,S.S.Yu, Phys.Fluids B2,581 (1990).
- [14] J.N.Elgin, Nucl.Instr.Meth. A285, 144 (1989).
- [15] N.M.Rosenbluth, W.V.Wong, B.N.Moore, Phys.Fluids B2,1635 (1990).
- [16] T.Y.B.Yang, R.C. Davidson, Phys. Fluids B2,2456 (1990).
- [17] S.Riyopoulos, Phys. Fluids B3,2684 (1991).
- [18] J.N.Elgin, Phys.Rev.A43, 2514, (1991).
- [19] W.B.Colson,S.K.Ride, Phys.Letter 76A, 379 (1980)

- [20] W.B.Colson,R.A.Freedman, Optics Communications, 46,37 (1983).
- [21] D.Iracane and J.L.Ferrer, Phys.Rev.Lett. 66 (1991) 33.
- [22] I.Kimel, L.R.Elias, Phys.Rev.A 35, 3818 (1987).
- [23] M.Abramowitz, I.E.Stegun: Handbook of Mathematical Functions, (1972).

Figure captions

Fig.1: Behaviour of a high power filtered FEL.

(a) For a uniform wiggler, the extracted efficiency is roughly proportionnal to the filter width \mathcal{F} : the spectrum is nearly flat, and merely truncated by the filter. For strongly tapered wiggler, the efficiency versus \mathcal{F} decreases because of the spectral broadening.

(b) Narrow filters prevent from spectral broadening, so that the asymptotic spectral width is much smaller than the filter width, and the brightness \mathcal{B} is large. As soon as the filter is wide enough to allow spectral broadening, the brightness is constant and equal to its universal value $\mathcal{B} = \sqrt{3}/2 \approx 0.86$. For tapered wiggler, the broadening is simply delayed.

Fig.2: Spectral behaviour of a tapered and filtered system, as a function of tapering amplitude $\Delta B/B$ and relative filter width \mathcal{F} . A sharp transition appears between broad spectrum and narrow spectrum regimes. In any case tapering must be assisted by filtering to prevent spectral broadening. However tapering has an effect since it allows wider filters. See the text for a detailed description.

Fig.3: Typical behaviour of two coupled symmetrical sideband modes, with a relative frequency shift $\delta = n/N = \pm 1\%$,

(a) for electrons initially trapped at the bottom of the well, obtained with Eq.15 – dotted lines – and with a full multifrequency numerical simulation of the Maxwell-Vlasov equations (2,3) – solid and broken lines–. One can see the transient and exponential regimes, and finally the saturation regime where perturbation and Eq.15 fail. Energies are in units of the pump

mode energy, and position should be compared to the synchrotron length $L_s \approx 3.4\text{m}$ and the wiggler length $L_w = 2\text{m}$ in this case.

(b): for a realistic non bunched initial condition, obtained with a full multifrequency low noise numerical simulation of the Maxwell-Vlasov equations. We recover qualitative features of the idealized case (asymmetrical instability with a depletion of the high frequency sideband), except for a delay due to a preliminary bunching phase.

Fig.4: One pass gain curves for two equilibrium initial conditions labelled with their synchrotron frequency Ω . The positions of the resonant frequencies $n/N = j\Omega/k_w$ are also indicated. Since the transient regime is different for symmetrical sidebands, these curves are not symmetrical.

Fig.5: Sideband gain curves for tapered and non tapered amplifiers. For each simulation, lower and upper sideband modes are presented. The stars are given by a realistic simulation assuming a uniform initial electron beam. The same simulation, but with a bunched beam (deeply trapped particles), provides the square points. The full line is obtained by solving within an adiabatic assumption the perturbation theory in Sect.III (Eq.15). If the sideband is clearly depleted from non tapered to tapered wiggler, it is still large for short distances.

Fig.6: Comparison for deeply trapped particles between the adiabatic model and full simulation (Sect.V). The agreement is correct for the uniform wiggler (curves "a") and for a tapered wiggler where the wiggler parameter goes from $a_w = 1.72$ down to $a_w = 1.02$ (curves "b"). For a stronger tapering ($a_w = 0.32$ at the end of the wiggler), we observe a slight difference (curves

"c"). This shows that the effect of tapering on sideband generation is mainly explained by parameter variations and not by inertial forces.

Fig.7: Sideband gain curves for various values of the tapering amplitude $\Delta B/B$. Although tapering tends to lower the sideband gain, the inhibition can be made complete only with the help of a filter. The maximum authorized width for this filter may be determined from the comparison between the gain curve and the losses threshold.

