

N° d'ordre : 1162

50376
1993
290

50376
1993
290

THESE

présentée à

**L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE
LILLE**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

Spécialité Productique :

Automatique et Informatique Industrielle

par

Ahmed RAHMANI

Maître E E A



**ETUDE STRUCTURELLE DES SYSTEMES LINEAIRES PAR
L'APPROCHE BOND GRAPH**

Soutenue le 11 octobre 1993 devant le jury d'examen

Mr	P. BORNE	Président
Mr	J.M. DION	Rapporteur
Mr	S. SCAVARDA	Rapporteur
Mme	G. DAUPHIN-TANGUY	Examineur, directeur de thèse
Mme	M. DELGADO	Examineur
Mr	M. STAROSWIECKI	Examineur
Mr	C. SUEUR	Examineur, codirecteur de thèse

Thèse préparée au sein du L.A.I.L, U.R.A, CNRS D 1440, Ecole Centrale de Lille.

A la mémoire de ma soeur
A mes parents

AVANT PROPOS

Ce travail de recherche a été effectué au sein du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique de Lille (L.A.I.L, U.R.A, CNRS D 1440) à l'Ecole Centrale de Lille d'Octobre 1990 à Octobre 1993 sous la codirection de Mme G. DAUPHIN-TANGUY, Professeur et de Mr C SUEUR, Maître de conférences.

Notre reconnaissance va tout particulièrement à Madame G. DAUPHIN-TANGUY, pour son soutien tout au long de ces années passées au laboratoire. La liberté de travail dont elle a su nous faire profiter, les conseils, les remarques judicieuses et sa compétence dans les divers domaines abordés ont été à la base de la réussite de nos travaux. Qu'elle trouve ici notre profonde gratitude et amitié pour sa bienveillance et sa gentillesse.

Pour sa motivation pour la recherche qu'il a su nous faire partager, nous sommes très redevable à Monsieur P BORNE, Professeur, Directeur scientifique de l'Ecole Centrale de Lille. Nous sommes très honoré qu'il ait accepté de présider notre jury de thèse.

La compétence de Monsieur J.M. DION, Professeur à l'E.N.S.I.E.G, dans divers domaines de l'automatique est reconnue par de nombreux scientifiques. Aussi sommes-nous très honoré qu'il ait accepté d'être rapporteur de cette thèse. Nous le remercions pour l'intérêt qu'il a porté à nos travaux et les nombreux conseils qu'il nous a prodigués lors des discussions que nous avons menées ensemble.

Monsieur S. SCAVARDA, Professeur à l'I.N.S.A de LYON, nous fait un grand honneur en acceptant d'être rapporteur de cette thèse. Sa notoriété dans le domaine des bond graphs est internationale, et nous sommes sincèrement touché par l'intérêt qu'il a montré pour nos travaux et par la gentillesse de son accueil lors de notre passage dans son laboratoire.

Madame M. DELGADO, Professeur à l'université de CARACAS, a accepté de participer à ce jury et nous l'en remercions.

Nous sommes également heureux que Monsieur M STAROSWIECKI, Professeur à l'E.U.D.I.L, ait accepté de prendre part à ce jury.

Monsieur C. SUEUR Maître de conférences à l'Ecole Centrale de Lille a suivi nos travaux depuis le début. Son aide et ses conseils nous ont été précieux et utiles, qu'il soit sincèrement remercié.

Nous tenons enfin à remercier tous les membres du L.A.I.L de l'Ecole de Centrale de Lille pour leur accueil dont nous avons bénéficié durant notre séjour au sein Laboratoire.

SOMMAIRE

<p>ETUDE STRUCTURELLE DES SYSTEMES LINEAIRES PAR L'APPROCHE BOND GRAPH</p>

INTRODUCTION GENERALE15

**CHAPITRE 1: ETUDE DES PROPRIETES STRUCTURELLES
PAR LES APPROCHES DES GRAPHES ET DES BOND GRAPHS**

I.Introduction.....25

II.Présentation des propriétés structurelles25

II.1.Introduction.....25

II.2.Définitions26

II.2.1.Propriété structurelle26

II.2.2.Matrice structurelle26

II.2.3.Matrice booléenne27

II.2.4.Matrice numérique admissible.....27

II.2.5.Matrices structurellement équivalentes28

II.2.6.Système structurel28

II.3.Notions de rang28

II.3.1.Rang générique29

II.3.1.1.Propriété générique29

II.3.1.2.Définitions du rang générique30

II.3.1.3.Principaux algorithmes de calcul du rang générique31

II.3.2.Rang terme31

II.3.2.1.Définition.....31

II.3.2.2.Interprétation booléenne du rang terme.....32

II.3.3.Rang structurel.....33

II.4.Conclusion.....34

III. Etude des propriétés structurelles par la technique des graphes orientés.....	34
III.1. Introduction.....	34
III.2. Association matrice - graphe.....	35
III.3. Interprétation graphique du rang d'une matrice structurelle.....	36
III.3.1. Interprétation du rang par décomposition d'un digraphe.....	36
III.3.2. Interprétation par dilatation	39
III.3.3. Algorithmes graphiques.....	41
III.4. Conclusion.....	42
IV. Etude des propriétés structurelles par la technique des bond graphs.....	42
IV.1. Introduction.....	42
IV.2. Rang de la matrice d'état	43
IV.3. Conclusion.....	45
V. Comparaison entre les notions de rang par graphe et par bond graph	45
V.1. Introduction.....	45
V.2. Calcul des rangs.....	46
V.3. Interprétation.....	47
VI. Extension à un cas non linéaire	47
VII. Conclusion	51

CHAPITRE 2 : COMMANDABILITE EN ETAT ET OBSERVABILITE STRUCTURELLES

I. Introduction.....	57
II. Etude de la commandabilité / observabilité à partir de la représentation d'état.....	57
II.1. Introduction.....	57
II.2. Commandabilité / observabilité au sens numérique.....	58
II.2.1. Commandabilité.....	58

II.2.1.1.Définitions	58
II.2.1.2.Méthodes d'étude	59
II.2.2.Observabilité	60
II.2.2.1.Définition.....	61
II.2.2.2.Méthodes d'étude	61
II.2.3.Formes de commandabilité / observabilité.....	62
II.2.3.1.Formes de commandabilité.....	62
II.2.3.2.Formes d'observabilité	63
II.2.4.Indices de commandabilité / observabilité	64
II.2.4.1.Indices de commandabilité	64
II.2.4.2.Indices d'observabilité.....	65
II.3.Commandabilité / observabilité structurelle.....	66
II.3.1.Commandabilité en état structurelle.....	66
II.3.1.1.Définitions	66
II.3.1.1.Critères d'étude.....	67
II.3.2.Observabilité structurelle.....	68
II.4.Conclusion.....	69

III.Approche des graphes pour l'étude de la commandabilité / observabilité structurelles.....69

III.1.Introduction.....	69
III.2.Commandabilité structurelle	71
III.2.1.Accessibilité	71
III.2.2.Critères graphiques.....	71
III.3.Observabilité structurelle.....	74
III.4.Système structurellement complet.....	75
III.5.Indices de commandabilité / observabilité structurelle.....	75

IV.Etude de la commandabilité / observabilité des systèmes multivariés modélisés par bond graph.....76

IV.1.Introduction.....	76
IV.2.Etude de la commandabilité / observabilité structurelle.....	76
IV.3.Calcul formel des matrices de commandabilité / observabilité.....	80
IV.3.1.Caractéristiques d'un chemin causal.....	81
IV.3.2.Méthodes de calcul	82
IV.3.2.1.Matrice de commandabilité.....	82
IV.3.2.2.Matrice d'observabilité	83
IV.3.3.Calcul des matrices de passage.....	84
IV.3.3.1.Calcul de C_i^1	85

IV.3.3.2.Calcul de C_s^2	86
IV.4.Conclusion.....	89
IV.5.Implantation sur l'exemple d'un bras de robot flexible.....	89

V.Conclusion.....	92
--------------------------	-----------

CHAPITRE 3 : PLACEMENT DE PÔLES PAR RETOUR D'ETAT

I.Introduction.....	99
----------------------------	-----------

II.Formes canoniques de commandabilité.....	99
--	-----------

II.1.Cas monovariabale	99
II.2.Cas multivariable.....	100
II.2.1.Première forme de commandabilité	100
II.2.1.1.A partir de C_s^1	100
II.2.1.2.A partir de C_s^2	101
II.2.2.Forme de Luenberger.....	102
II.3.Calcul formel des formes de commandabilité/observabilité	103
II.3.1.Détermination des coefficients du polynôme caractéristique	103
II.3.1.1.Règle de Mason.....	104
II.3.1.2.Règle de Reinschke	104
II.3.1.3.Règle bond graph.....	108
II.3.1.3.1.Définitions	108
II.3.1.3.2.Critère graphique.....	113
II.3.2.Discussion	116

III.Placement de pôles par retour d'état	116
---	------------

III.1.Introduction.....	116
III.2.Position du problème	117
III.2.1.Propriétés	117
III.2.2.Cas monovariabale.....	118
III.2.3.Cas multivariable.....	118
III.3.Approche graphique	121
III.3.1.Placement de pôles structurel.....	121
III.3.2.Interprétation par bond graph.....	122

III.3.2.1.Cas monovariante	122
a) Méthode 1 : Calcul formel du polynôme caractéristique en boucle fermée.....	122
b) Méthode 2 : Mise sous forme canonique de la matrice d'état.....	125
III.3.2.2.Cas multivariable.....	128
IV.Conclusion.....	135

CHAPITRE 4 : COMMANDABILITE EN SORTIE ET DECOUPLAGE ENTRES-SORTIES PAR RETOUR D'ETAT

I.Introduction..... 141

II.Commandabilité en sortie et commandabilité fonctionnelle 141

II.1.Commandabilité en sortie	142
II.1.1.Définitions.....	142
II.1.2.Méthodes d'étude.....	142
II.2.Interprétation par les bond graphs.....	143
II.2.1.Calcul formel de la matrice de commandabilité en sortie.....	143
II.2.2.Analyse graphique de la commandabilité en sortie structurelle.....	146

III.Commandabilité fonctionnelle et inversibilité..... 149

III.1.Commandabilité fonctionnelle.....	149
III.2.Inversibilité	150
III.2.1.Matrice de transfert.....	150
III.2.1.1.Calcul de la matrice de transfert	150
a) Méthode matricielle	151
b) Méthode des graphes.....	151
c) Méthode des bond graphs	153
III.2.1.2.Rang de la matrice de transfert.....	156
a) Rang normal	157
b) Rang normal structurel	157
c) Rang bond graph de la matrice de transfert.....	159
III.2.2.Calcul du déterminant de la matrice système	161

III.2.3. Test de l'inversibilité	165
III.3. Conclusion.....	169
IV. Découplage entrées-sorties par retour d'état.....	169
IV.1. Introduction.....	169
IV.2. Présentation du problème	171
IV.3. Découplage par inversion du système	171
IV.4. Commandabilité en sortie et découplage.....	171
IV.5. Approche matricielle.....	172
IV.5.1. Découplage par retour d'état statique	172
IV.5.1.2. Critère d'étude	172
IV.5.3. Découplage par compensation dynamique	173
IV.5.4. Analyse par la matrice de transfert	174
IV.6. Approche par les graphes	175
IV.6.1. Découplage structurel.....	175
IV.6.2. Méthode de couplage	175
IV.6.3. Interprétation des résultats géométriques.....	176
IV.6.4. Conclusion.....	178
IV.7. Approche par les bond graphs	178
IV.7.1. Calcul formel de la matrice de découplage.....	178
IV.7.1.1. Règle de calcul de B^*	178
IV.7.1.2. Règle de calcul de A^*	182
IV.7.2. Découplage par retour d'état statique	184
IV.7.3. Découplage par compensation dynamique.....	185
V. Conclusion.....	191
CONCLUSION GENERALE.....	195
ANNEXE GENERALE	
Annexe 1 : Eléments d'algèbre.....	201
I. Notations.....	201

II.Variété algébrique	201
III.Polynôme algébrique.....	202
Annexe 2 : Eléments de la théorie des graphes.....	203
I.Notion de graphe	203
I.1.Définitions.....	203
I.2.Caractéristiques	203
I.2.1.Successeur et prédécesseur.....	203
I.2.2.Degré d'un sommet.....	204
I.2.3.Connexité d'un digraphe.....	204
I.2.4.Graphe biparti.....	204
II.Cheminement dans un digraphe.....	204
II.1.1.Chemin.....	204
II.1.2.Cycle.....	205
II.1.3.Arbre.....	205
III.Couplage dans un digraphe.....	205
III.1.Définition d'un couplage.....	205
III.2.Couplage maximum dans un digraphe biparti.....	205
IV.Graphes spécifiques.....	206
IV.1.Tige.....	206
IV.2.Bouton	206
IV.3.Cactus.....	206
IV.4.Concept de dilatation.	207
Annexe 3 : Bond graph.....	208
I.Variables mises en jeu.....	208
I.1.Variables de puissance	208
I.2.Variables d'énergie	208
II.Propriétés causales d'un bond graph	210
II.1.Notion de causalité.....	210

II.2.Causalité sur les Jonctions	210
III.Notion de signal.....	211
IV.Propriétés causales d'un bond graph	212
IV.1.Transmittance d'un élément 1-port.....	212
Transmittance de I	212
Transmittance de C	212
Transmittance de R	213
IV.2.Chemin causal.....	213
V.Equation d'état associée au modèle bond graph	214
Annexe 4 : Analogie bond graph - digraphe.....	218
I.Caractérisation d'un digraphe par des matrices.....	218
I.1.A partir d'une matrice carrée quelconque.....	218
I.2.A partir d'une représentation d'état	218
I.3.A partir du modèle bond graph	220
II.Equivalence bond graph / digraphe.....	223
Annexe 5 : Algorithme de Sinha.....	226
BIBLIOGRAPHIE	233

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Les méthodes mathématiques utilisées habituellement pour l'analyse des systèmes dynamiques s'avèrent très complexes et nécessitent l'aide d'une machine.

L'approche structurelle a été introduite pour des systèmes à paramètres inconnus par manque de valeurs quantitatives ou incorrects pour des raisons d'erreurs de mesure. Ce dernier aspect étant inévitable dans la modélisation de processus physiques. Il s'agit donc d'exploiter au maximum sa structure avant tout calcul numérique. Rosenbrock (1970) utilise la matrice système pour étudier les propriétés de systèmes dynamiques pour presque toutes les valeurs de s (s étant l'opérateur de Laplace). La structure à l'infini d'un système a aussi été utilisée pour résoudre les problèmes de commande [Dion, Descusse, Malabre, Lafay, Commault...].

Les méthodes se basant sur la théorie des graphes perdent parfois certaines informations lors de l'écriture du graphe de structure (ou matrice de structure) représentant la structure du système. Ceci est dû au fait que la construction se fait en général à partir de l'équation d'état, qui n'explique pas totalement toutes les relations constitutives du système étudié.

L'outil bond graph (ou graphe à liens), défini par [Paynter, 1955,1961], formalisé par [Karnopp et Rosenberg, 1975, 1983], [Thoma, 1975, 1990] et [Breedveld, 1984], est un langage graphique de type réseau qui permet de représenter graphiquement, avec un langage unique, de nombreux systèmes physiques. Il se place comme étape intermédiaire entre la description physique d'un système dynamique et la phase de construction d'un modèle mathématique, par représentation graphique des échanges de puissances entre les différents constituants du système. La modélisation d'un système physique par bond graph ne nécessite pas l'écriture de lois générales de conservation. Elle repose essentiellement sur la caractérisation des phénomènes d'échanges de puissance au sein du système. Cette approche se prête bien à l'étude des systèmes à paramètres localisés. Pour la modélisation des systèmes à paramètres distribués, une discrétisation s'avère nécessaire.

La notion de causalité décrit la relation de cause à effet entre les différents éléments de la structure de jonction et permet de guider la mise en équation du système dynamique en écrivant les lois correspondant aux éléments et aux structures. De plus, la nature graphique du modèle bond graph associée à la causalité peut être utilisée directement pour l'analyse des propriétés du système physique, en parcourant le modèle bond graph causal suivant des chemins particuliers appelés chemins causaux. Des recherches essentiellement basées sur les concepts de structure et de causalité ont été menées ces dernières années pour étudier des propriétés structurelles des

systèmes modélisés par bond graph [Rosenberg, 1987 ; Suda et Hatanaka, 1986 ; Sueur et Dauphin-Tanguy, 1989, 1991 ; Rahmani et al, 1992].

Lors de la modélisation des systèmes dynamiques par l'outil bond graph, l'utilisateur a souvent recours à des logiciels de simulation pour résoudre les problèmes de commande (ENPORT, CAMAS, CAMP, MS-BOND...). Connaissant, d'une part l'importance des propriétés structurelles utiles avant tout calcul numérique, d'autre part la complexité des calculs matriciels nécessaires dans l'étude des propriétés de commande, nous nous sommes intéressés à trouver des méthodes consacrées à la détermination, à partir du modèle bond graph, des matrices sous forme d'expressions formelles. Ces méthodes sont graphiques et se basent sur la règle de Mason appliquée aux bond graphs. Elles sont pratiques puisqu'elles se basent uniquement sur le parcours des chemins causaux dans un modèle bond graph. Elles sont complètes car tous les cas de figures susceptibles d'exister dans un modèle bond graph (boucles algébriques, présence d'éléments en causalité dérivée, présence de liens d'informations...) sont traités. Ces règles de calcul nous permettent de nous passer du calcul matriciel qui n'est pas toujours facile à réaliser. Ces dernières sont destinées à l'étude de la commandabilité en état et en sortie, de l'inversibilité, du placement de pôles par retour d'état et du découplage par retour d'état. Une analyse graphique est faite lors de la résolution de chaque problème ainsi qu'une expertise à chaque étape pour bien choisir le nombre et l'emplacement des sources d'énergie et des capteurs afin de commander ou de découpler les systèmes.

Tout au long de ce mémoire, nous utiliserons des résultats déjà établis dans la théorie des graphes pour étudier les propriétés structurelles des systèmes modélisés par bond graph.

Dans le premier chapitre, nous présentons dans un premier temps la notion de propriété structurelle d'un système. Ensuite, nous proposons une synthèse des différentes terminologies utilisées pour l'étude du rang d'une matrice (rangs générique, terme et structurel) ainsi que leur interprétation en termes de théorie des graphes. Enfin, une comparaison entre ces rangs équivalents et le rang bond graph est proposée.

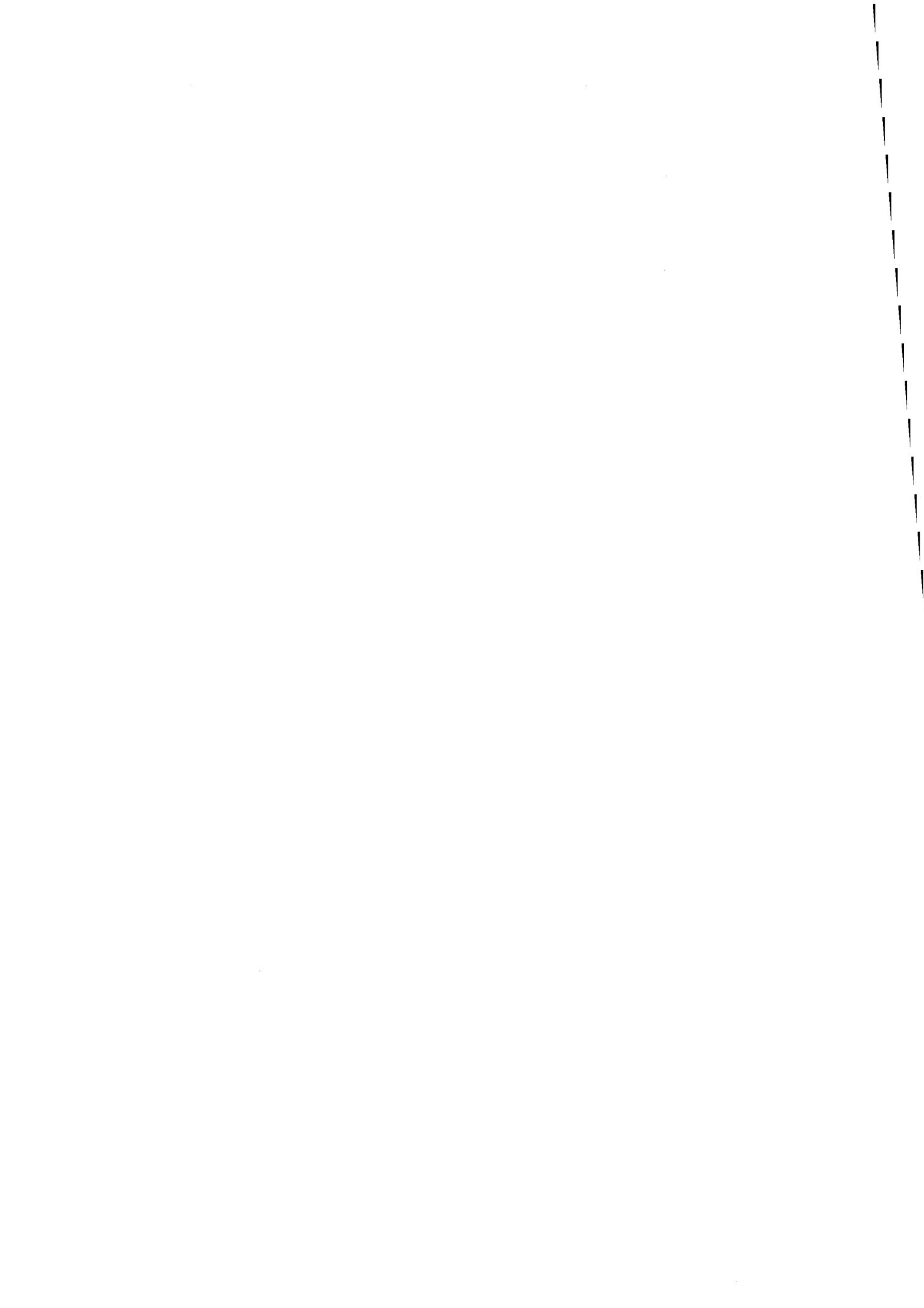
Dans le deuxième chapitre, dans le cadre de l'étude de la commandabilité en état et de l'observabilité structurelles des systèmes linéaires par l'approche bond graph, nous proposons une méthode de calcul formel des matrices de commandabilité et d'observabilité ainsi que des matrices de changement de base correspondantes. Une règle de détermination formelle des indices de commandabilité et d'observabilité directement à partir du modèle bond graph est également proposée.

Des méthodes de calcul formel des coefficients du polynôme caractéristique d'un système en boucle ouverte et en boucle fermée sont présentées dans la première partie du troisième chapitre. Ces coefficients sont à la base d'une méthode de placement de pôles formel par retour d'état statique à partir du modèle bond graph que nous présentons dans la seconde partie. En

effet, nous proposons la mise sous forme canonique des matrices d'état et de commande, ainsi qu'une relation formelle entre ses coefficients et les composants de la matrice de retour qui nous permettent de placer formellement les pôles.

Le quatrième chapitre traite, dans un premier temps de l'étude de la commandabilité en sortie structurelle. Pour cela, nous proposons une méthode de détermination formelle de la matrice de commandabilité en sortie directement à partir du modèle bond graph, puis nous présentons des conditions suffisantes de commandabilité en sortie en termes de chemins causaux dans un modèle bond graph. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la résolution du problème de découplage par retour d'état des systèmes linéaires à cet effet nous présentons les différentes méthodes existantes notamment celles proposées par Linneman (1981) utilisant la notion de couplage dans un digraphe ainsi que celle proposée par Dion et Commault (1991), se basant sur une interprétation de la structure à l'infinie d'un système en termes de chemins entrées-sorties dans un digraphe. La troisième partie de chapitre a pour objet de présenter ; tout d'abord une méthode de calcul formel de la matrice de transfert. Une interprétation du rang de la matrice système est proposée en termes de chemins causaux entrées-sorties différents, ce qui nous permet de disposer d'une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'un système. Ensuite, une condition nécessaire et suffisante de découplage par retour d'état statique en termes de chemins causaux entrées-sorties dans un modèle bond graph est présentée. Une détermination formelle de la matrice de découplage nous permet ensuite de calculer les matrices de retour d'état.

**CHAPITRE 1 : ETUDE DES PROPRIETES
STRUCTURELLES PAR LES APPROCHES
DES GRAPHS ET DES BOND GRAPHS**



CHAPITRE 1 : ETUDE DES PROPRIETES STRUCTURELLES PAR LES APPROCHES DES GRAPHES ET DES BOND GRAPHS

I.Introduction.....	25
II.Présentation des propriétés structurelles	25
II.1.Introduction.....	25
II.2.Définitions.....	26
II.2.1.Propriété structurelle	26
II.2.2.Matrice structurelle	26
II.2.3.Matrice booléenne	27
II.2.4.Matrice numérique admissible.....	27
II.2.5.Matrices structurellement équivalentes	28
II.2.6.Système structurel.....	28
II.3.Notions de rang	28
II.3.1.Rang générique	29
II.3.1.1.Propriété générique	29
II.3.1.2.Définitions du rang générique	30
II.3.1.3.Principaux algorithmes de calcul du rang générique.....	31
II.3.2.Rang terme	31
II.3.2.1.Définition.....	31
II.3.2.2.Interprétation booléenne du rang terme.....	32
II.3.3.Rang structurel.....	33
II.4.Conclusion.....	34
III.Etude des propriétés structurelles par la technique des graphes orientés.....	34
III.1.Introduction.....	34
III.2.Association matrice - graphe.....	35
III.3.Interprétation graphique du rang d'une matrice structurelle.....	36
III.3.1.Interprétation du rang par décomposition d'un digraphe.....	36
III.3.2.Interprétation par dilatation	39
III.3.3.Algorithmes graphiques.....	41
III.4.Conclusion.....	42

IV.Etude des propriétés structurelles par la technique des bond graphs.....	42
IV.1.Introduction.....	42
IV.2.Rang de la matrice d'état	43
IV.3.Conclusion.....	45
V.Comparaison entre les notions de rang par graphe et par bond graph	45
V.1.Introduction.....	45
V.2.Calcul des rangs.....	46
V.3.Interprétation.....	47
VI.Extension à un cas non linéaire	47
VII.Conclusion	51

I. Introduction

Des outils performants pour une analyse rapide et fiable des systèmes dynamiques sont exigés à plusieurs niveaux. Dans un premier temps, le concepteur doit utiliser une représentation simple permettant de valider ou de remettre en cause soit le modèle choisi soit son concept. Le modèle étant validé, en ce qui concerne les considérations physiques, l'automaticien a besoin d'une représentation adaptée pour l'analyse et la commande de son système dynamique.

La représentation structurelle est, à ce niveau, un bon compromis entre la définition précise du modèle mathématique et une représentation macroscopique des phénomènes étudiés. La représentation structurelle consiste donc à décrire les phénomènes physiques à l'aide d'un modèle mathématique ou graphique, où les termes non nuls qui représentent les relations entre les différentes variables sont décrits sans préciser leur valeur numérique. Les termes nuls et non nuls décrivent la structure du modèle et leur connaissance permet de faire ce que l'on appelle "une analyse structurelle".

Différentes méthodes, directement liées à la forme de représentation, ont été utilisées pour étudier les propriétés structurelles d'un système dynamique.

La première partie de ce chapitre est consacrée à une présentation générale des principes d'étude des propriétés structurelles des systèmes dynamiques, et des différentes terminologies de rangs structurels de matrices. L'intérêt d'utiliser la théorie des graphes dans l'interprétation du rang d'une matrice structurelle fera l'objet de la deuxième partie. Au cours de la troisième partie, des manipulations causales opérées sur le modèle bond graph nous permettent de trouver le rang bond graph de la matrice d'état structurelle. Nous comparerons dans la dernière partie les rangs utilisés dans la théorie des graphes et le rang bond graph.

II. Présentation des propriétés structurelles

II.1. Introduction

Les premières investigations des propriétés structurelles des matrices ont été faites par Frobenius en 1912, et de manière plus générale par König en 1931. Quelques décennies plus tard, Lin (1974) propose une condition nécessaire et suffisante de commandabilité structurelle des systèmes monovariables à l'aide de la théorie des graphes. Il a développé ses travaux pour les systèmes multivariables en 1977. Entre temps, Shields et Pearson (1976) ont étendu les travaux de Lin (1974) aux systèmes multivariables. A cet effet, ils établissent une relation entre le théorème de König et les propriétés structurelles d'une matrice. Ils proposent un algorithme

de détermination du rang générique d'une matrice structurelle. Parallèlement à ces travaux, Glover et Silverman (1976) ont proposé une approche alternative en utilisant des opérations booléennes. Depuis, ces études ont fait l'objet de nombreux travaux ; Franksen et al. (1979 I et II), Schizas et Evans (1981) ont contribué au développement de l'approche structurelle pour l'étude de propriétés telles que la commandabilité et l'observabilité.

Dans ce paragraphe, nous présentons les différentes notions de représentation structurelle, notamment les matrices structurelles. Parallèlement à ces représentations, les différentes définitions de rang sont rappelées.

II.2. Définitions

II.2.1. Propriété structurelle

Définitions 1.1

1) Une propriété d'un système est dite "structurelle" si elle ne dépend que du type d'éléments qui composent ce système et de la façon dont ils sont interconnectés, non pas de la valeur numérique de ses paramètres.

2) Une propriété est dite "structurelle" si elle est vérifiée pour toutes les valeurs des paramètres sauf éventuellement pour quelques valeurs particulières.

II.2.2. Matrice structurelle

L'utilisation des représentations matricielles dans l'étude des systèmes dynamiques a motivé l'introduction de la notion de matrice structurelle. Cette représentation consiste à différencier les termes nuls des termes non nuls, ces derniers étant, quant à eux, quelconques. Nous rappelons quelques définitions équivalentes.

Définition 1.2

Une matrice structurelle, notée $[A]$, est composée de termes nuls, notés " 0 ", et de termes de valeurs non nulles mais indéterminées, notés " * ", " L ", ou " X ". Les termes non nuls sont supposés indépendants les uns des autres.

Définition 1.3

Une matrice structurelle $[A]$ est une matrice constituée de paramètres libres (modifiables indépendamment les uns des autres) et de zéros fixés.

II.2.3. Matrice booléenne

Les propriétés structurelles de toute matrice $[A]$ peuvent être explicitées en utilisant une matrice booléenne associée. Dans cette optique, l'analyse combinatoire est employée.

Définition 1.4

Une matrice booléenne, notée A_b , associée à la matrice structurelle $[A]$, est définie en remplaçant les zéros fixés par des "zéros" booléens et les termes non nuls par des "uns" booléens, notés 1.

II.2.4. Matrice numérique admissible

Définition 1.5

Une matrice numérique A_n représente une réalisation numérique admissible de la matrice structurelle $[A]$, si nous pouvons l'obtenir en fixant tous les éléments indéterminés de $[A]$ à des valeurs particulières.

Ainsi, considérons une matrice carrée A définie par l'expression formelle :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

La matrice structurelle associée s'écrit, suivant les auteurs :

$$[A] = \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & * \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [A] = \begin{bmatrix} L & 0 \\ L & L \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [A] = \begin{bmatrix} X & 0 \\ X & X \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

La matrice booléenne associée s'écrit :

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Une réalisation numérique admissible de $[A]$ est, par exemple :

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

II.2.5. Matrices structurellement équivalentes

Définition 1.6

Deux matrices A' et A'' sont structurellement équivalentes si elles sont toutes les deux des réalisations numériques de la même matrice structurelle $[A]$.

Définition 1.7

Deux matrices A' et A'' de mêmes dimensions ont la même structure si elles ont le même nombre de coefficients fixés à zéro de mêmes indices en ligne et en colonne.

II.2.6. Système structurel

Soit un système dynamique linéaire invariant (Σ) à n états, m entrées et p sorties, décrit en continu par l'équation (1.5) :

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = A x + B u \\ y = C x + D u \end{cases} \quad (1.5)$$

où $A \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n$, $B \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$, $C \in \mathcal{R}^p \times \mathcal{R}^n$ et $D \in \mathcal{R}^p \times \mathcal{R}^m$ sont des matrices à coefficients constants.

Définition 1.8 [Linneman, 1981]

Le système $\Sigma([A],[B],[C],[D])$ est dit structurel à paramètres dans $\Lambda \subset \mathcal{R}^k$, si Λ est un ouvert et si la matrice (1.6) est structurelle.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} : \Lambda \rightarrow M_{n+p, n+m} \quad (1.6)$$

D'une façon générale, la détermination de la structure d'un système est possible si et seulement si l'existence et la position de tous les coefficients fixés à zéro dans la matrice sont bien connues.

II.3. Notions de rang

Pour l'étude des propriétés structurelles des matrices, plusieurs terminologies ont été utilisées afin de désigner la notion de rang. Les définitions les plus répandues sont le rang générique, le rang terme et le rang structurel. Toutes ces notions reposent sur la définition de termes indépendants proposée par Frobenius (1912) et par König (1936):

Définition 1.9

Un ensemble de termes indépendants d'une matrice A est un ensemble de termes non nuls dont un seul apparaît par ligne et par colonne.

II.3.1. Rang générique

Avant d'évoquer la notion de rang générique, nous rappelons la notion de propriété générique.

Des propriétés relatives à la notion de variété algébrique sont rappelées en annexe 1.

Soit $[A]$ une matrice structurelle appartenant à $\mathfrak{R}^{n \times n}$. Si N est le nombre de termes non nuls dans $[A]$, alors l'espace associé à $[A]$ est \mathfrak{R}^N . Chaque ensemble de N paramètres représente un vecteur $p \in \mathfrak{R}^N$.

II.3.1.1. Propriété générique [Shields et Pearson, 1976]

Une propriété Π est une fonction de \mathfrak{R}^N vers l'ensemble $\{0,1\}$, avec :

$$\Pi(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Pi \text{ fausse} \\ 1 & \text{si } \Pi \text{ vraie} \end{cases} \text{ en } p. \quad (1.7)$$

Une propriété Π est générique relativement à la variété propre V si $\text{Ker } \Pi \subset V$, et si une telle variété V existe.

Proposition 1.1 [Shields et Pearson, 1976]

Une propriété d'un système est générique, si elle peut être vérifiée pour presque chaque ensemble de valeurs.

Nous résumons par deux propositions les conséquences de l'analyse générique détaillée dans Shields et Pearson (1976).

Si $V \subset \mathfrak{R}^N$ est une variété propre non triviale, alors V est un ensemble fermé. Par conséquent :

Proposition 1.2

Si une propriété est générique relativement à V , alors elle sera vérifiée pour tout élément appartenant au complémentaire de V (V^c) et dans tout voisinage suffisamment petit de cet élément.

Proposition 1.3

Tout élément de V peut être amené à satisfaire la propriété par une perturbation adéquate mais faible.

II.3.1.2. Définitions du rang générique**Définition 1.10** [Jacobson, 1964 ; Murota, 1987]

Soit A une matrice dont les coefficients a_{ij} sont des fonctions rationnelles dans un anneau K à q paramètres indépendants $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. Si le rang de A est déterminé de façon unique excepté pour les valeurs des paramètres, à l'extérieur d'une variété algébrique propre dans K^q , le rang déterminé d'une manière unique est appelé le rang générique relativement à $\lambda_1, \dots, \lambda_q$. Il est noté (rang-g $[A]$).

Définition 1.11 [Glover et Silverman, 1976]

Le rang générique d'une matrice structurelle $[A]$ est défini comme le rang maximal que cette matrice peut atteindre en fonction de ses paramètres indéterminés.

Proposition 1.4 [Murota, 1987]

Si chaque terme de la matrice A est une fonction rationnelle de $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ sur K , le rang-g $[A]$ est égal au rang maximum de A quand les paramètres sont fixés à des valeurs particulières dans K .

Théorème 1.1

La matrice structurelle $[A]$ a un rang générique maximal si et seulement s'il existe une matrice numérique admissible A_n avec un rang plein.

Remarque

L'indépendance des paramètres de la matrice structurelle $[A]$ n'implique pas nécessairement l'indépendance linéaire des vecteurs lignes ou colonnes. C'est ce que nous pouvons vérifier par l'exemple suivant :

$$[A] = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 \end{bmatrix}$$

Les termes non nuls de $[A]$ sont indépendants, toutefois rang-g $[A] = 2$.

II.3.1.3. Principaux algorithmes de calcul du rang générique

Le calcul du rang générique d'une matrice structurelle (appliqué à des problèmes d'étude de la commandabilité) se fait à l'aide de plusieurs types d'algorithmes. Nous pouvons les classer en deux types, graphiques et algébriques. Nous nous limiterons dans ce paragraphe au rappel des travaux concernant ces derniers. Les méthodes graphiques seront, quant à elles, introduites plus tard.

Shields et Pearson (1976) ont présenté un algorithme algébrique connu sous le nom de Fixed-Zero-Rank-Finder. Ce dernier est fondé sur le réarrangement de la matrice sous une forme particulière pour détecter la sous-matrice nulle à l'aide d'une séquence d'opérations de permutations. A l'aide d'un contre-exemple, Morari et Stephanopoulos (1978) ont montré la non-fiabilité de F.Z.R.F. Davison (1977), par une génération aléatoire de valeurs numériques attribuées aux divers paramètres, propose de calculer le rang générique d'une matrice structurelle. Cette méthode s'avère peu satisfaisante dans le cas de matrices de grandes dimensions. Les algorithmes de Morari et Stephanopoulos (1980), Johnston et Barton (1984), quant à eux, se basent sur le réarrangement de la matrice A afin de détecter la présence éventuelle de dilatation (voir annexe 2). Tandis que Burrows et Sahinkaya (1981) ont présenté un algorithme pour tester l'existence des formes I et II de Lin (introduites dans le chapitre 2 § II.2.1.1.) ; Linneman (1982) en a donné un contre-exemple. De ce fait, Burrows et Sahinkaya (1983) ont présenté un algorithme modifié, basé sur le même principe que le précédent.

II.3.2. Rang terme

La notion de rang terme est employée depuis longtemps dans les travaux de mathématiques combinatoires [Dulmage et Mendelsohn, 1959 ; Ore, 1962 ; Ford et Fulkerson, 1962 ; Haber, 1960 ; Ryser, 1958].

II.3.2.1. Définition

Définition 1.12 [Murota, 1987]

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $(m) \times (n)$ dans K , avec un choix convenable de lignes distinctes $i(1), \dots, i(k)$ et de colonnes distinctes $j(1), \dots, j(k)$.

Le rang terme de A , noté $\text{rang-t}(A)$, est égal à k maximum tel que $a_{i(1)j(1)} a_{i(2)j(2)} \dots a_{i(k)j(k)} \neq 0$ où $i(p) \neq i(q)$ et $j(p) \neq j(q) \quad \forall p \neq q$.

Exemple 1.1

Soit la matrice A de la forme suivante:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} a_{i(1)j(1)} = a_{21} = b \\ a_{i(2)j(2)} = a_{12} = a \end{array}$$

En appliquant la définition (1.12), $k = 2$ donc $\text{rang-t}(A) = 2$.

II.3.2.2. Interprétation booléenne du rang terme

La détermination du rang terme d'une matrice booléenne A_b peut être obtenue suivant deux approches fondées sur le théorème de Frobenius (1912) et König (1936) :

La première est liée au problème d'assignement, en identifiant la matrice de permutation maximale associée à la matrice A_b [Ford et Fulkerson, 1962].

La seconde a été déduite de l'analyse générique en établissant le maximum de sous-matrices nulles dans A_b [Ore, 1962 ; Shields et Pearson, 1976].

L'interprétation booléenne du rang terme d'une matrice A peut se faire à l'aide de la matrice de permutation A_p , associée à la matrice booléenne A_b , que nous définissons ci-dessous.

Définition 1.13 [Ryser, 1962]

Une matrice de permutation A_p , associée à la matrice A_b , est une matrice booléenne contenant un et un seul " un " par ligne et par colonne, retenu dans la matrice A_b .

Définition 1.14

Une matrice de permutation maximale $A_{p_{\max}}$, par rapport à la matrice booléenne A_b , est une matrice de permutation d'ordre le plus grand que nous puissions extraire de A_b .

Les différentes interprétations booléennes du rang terme sont présentées sous forme de propositions.

Remarque

Puisque le rang terme d'une matrice A est souvent calculé à partir de la matrice booléenne A_b associée, l'utilisation de l'appellation "rang terme de A_b " sous-entend le rang terme de A.

Proposition 1.5 [Schizas et Evans, 1981]

Le rang terme de la matrice booléenne A_b est égal à la dimension de la matrice de permutation maximale $A_{p_{\max}}$ extraite de A_b .

Proposition 1.6 [Schizas et Evans, 1981]

Le rang terme d'une matrice booléenne A_b est égal au nombre total d'éléments unité dans la matrice de permutation maximale $A_{P_{\max}}$ contenue dans A_b .

Proposition 1.7 [Franken et al, 1979]

Le rang terme d'une matrice booléenne A_b est déterminé par le nombre maximal de termes indépendants (au sens de la définition 1.9) contenu dans cette matrice.

A titre d'exemple, considérons la matrice A et la matrice booléenne A_b associée (1.8). Un choix possible pour $A_{P_{\max}}$ extrait de A_b est donné par (1.9).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

$$A_{P_{\max}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

Le nombre d'éléments unités dans $A_{P_{\max}}$ est égal à 3, donc $A_{P_{\max}}$ est de dimension 3 d'où $\text{rang-t}(A) = 3$.

II.3.3. Rang structurel

Reinschke (1984) utilise la terminologie de rang structurel pour l'étude générale des systèmes dynamiques par l'approche des graphes orientés. Dion (1991) emploie la même terminologie pour interpréter graphiquement la notion de structure à l'infini afin d'étudier le problème du découplage. Tous les deux supposent l'hypothèse d'indépendance entre les termes d'une matrice structurelle vérifiée.

Définition 1.15 [Reinschke, 1984]

Le rang structurel de $[A]$, noté $\text{rang-s}[A]$, est égal au nombre maximal d'éléments contenus dans au moins un ensemble de termes indépendants au sens de Frobenius-Konig.

De la même manière que pour le rang générique, le rang structurel de $[A]$ est égal au rang maximal de toutes les matrices numériques admissibles A_n .

Exemple 1.2

Considérons une matrice structurelle $[A]$. Un choix possible de termes indépendants est donné par la matrice $[A]_1$.

$$[A] = \begin{bmatrix} L & L & L \\ L & L & 0 \\ L & L & 0 \end{bmatrix} \quad [A]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L \\ L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \end{bmatrix}$$

Le nombre d'éléments non nuls contenus dans $[A]_1$ est de 3, donc rang-s $[A] = 3$.

II.4. Conclusion

La détermination du rang d'une matrice peut se faire, soit par une approche booléenne utilisant le rang terme, soit par une approche structurelle utilisant le rang générique.

La notion de rang structurel est un élément essentiel dans l'étude des propriétés structurelles des systèmes dynamiques. Cette notion est très liée à la forme de représentation des matrices structurelles. A ce sujet, de nombreux algorithmes de calcul, dont certains sont complexes et peu fiables, sont proposés dans la littérature.

Un nouvel essor a été donné à cette approche, notamment grâce à Lin (1974), qui propose une étude structurelle à l'aide des graphes orientés. L'association graphe orienté - matrice de structure est présentée dans le paragraphe suivant.

III. Etude des propriétés structurelles par la technique des graphes orientés**III.1. Introduction**

Dans de nombreux domaines de la science, l'utilisateur est amené à traduire les problèmes par des schémas avec des points représentant des individus, des objets, des situations et avec des lignes ou des flèches reliant certaines paires de ces points et symbolisant une relation entre eux. Nous connaissons ces schémas sous différentes appellations telles que réseaux de communication, circuits électriques, etc... Il semble que la terminologie "graphe" soit apparue pour la première fois dans König (1936) puis dans Berge (1958) avec les notions de "sommet" pour désigner les points, et d' "arc" ou "arête" pour les lignes. Depuis les premiers travaux sur ce type de représentation [Euler, 1736], la théorie des graphes a énormément progressé et a été utilisée pour représenter les structures d'une grande variété de problèmes pratiques. Les types de graphes sont multiples : graphe de fluence, graphe linéaire, graphe fonctionnel, grafcet,

réseaux de Piétri, réseaux neuronnax, bond graph (ou "graphe à liens"), graphe orienté (ou "digraphe")...

Notre étude concerne les systèmes dynamiques représentés par un modèle d'état.

III.2.Association matrice - graphe

La représentation graphique est un élément essentiel pour une étude visuelle. Elle met en évidence de nombreuses propriétés difficilement obtenues par la représentation matricielle. Par contre, le traitement "informatique" peut s'avérer délicat. L'association matrice - graphe semble donc être un atout dans l'étude structurelle des systèmes dynamiques. Kirchoff (1847) a, par exemple, introduit la notion de matrice d'incidence pour les circuits électriques. Nous rappelons quelques représentations.

Lorsque le modèle initial se présente sous forme matricielle, le graphe orienté (digraphe) $G(A)$ associé à une matrice carrée $A = \{ a_{ij} ; i,j \in (1...n) \}$ est construit en définissant un ensemble fini Z d'éléments z_i appelés sommets (ou nœuds) de cardinal n , et un ensemble E d'arcs orientés e_i dirigés de z_j à z_i , de poids a_{ij} . Les arcs de poids nul n'apparaissent pas.

Avec $Z = X \cup U \cup Y$,

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ est l'ensemble des sommets x_i représentant les variables d'état x_i .

$U = \{u_1, \dots, u_m\}$ est l'ensemble des sommets u_i représentant les variables d'entrées u_i . (a.1)

$Y = \{y_1, \dots, y_p\}$ est l'ensemble des sommets y_i représentant les variables de sorties y_i .

Ainsi, le digraphe $G(A)$ associé à la matrice A , définie par (1.10), se représente par la figure 1.1 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

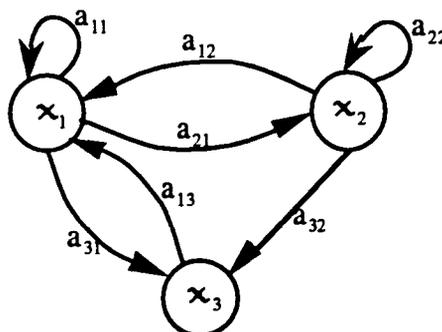


Figure 1.1 : Digraphe $G(A)$

Le digraphe structurel, noté $G[A]$, associé à la matrice structurelle $[A]$ issue de A , ne tient pas compte des valeurs des a_{ij} mais de la seule existence des arcs.

III.3. Interprétation graphique du rang d'une matrice structurelle

III.3.1. Interprétation du rang par décomposition d'un digraphe

Nous commençons par évoquer une interprétation qui repose sur la mise en évidence de cycles dans un digraphe. Pour cela, nous rappelons ci-dessous la définition d'un digraphe cyclique.

Définition 1.16

Un digraphe cyclique est un digraphe dans lequel tous les nœuds sont mutuellement accessibles par un chemin orienté ; sinon il est dit acyclique.

Dans le digraphe de la figure 1.2, les sommets (x_1, x_2, x_3) et (x_5, x_6, x_7) forment deux composantes cycliques (du digraphe), tandis que le sommet x_4 est un nœud acyclique.

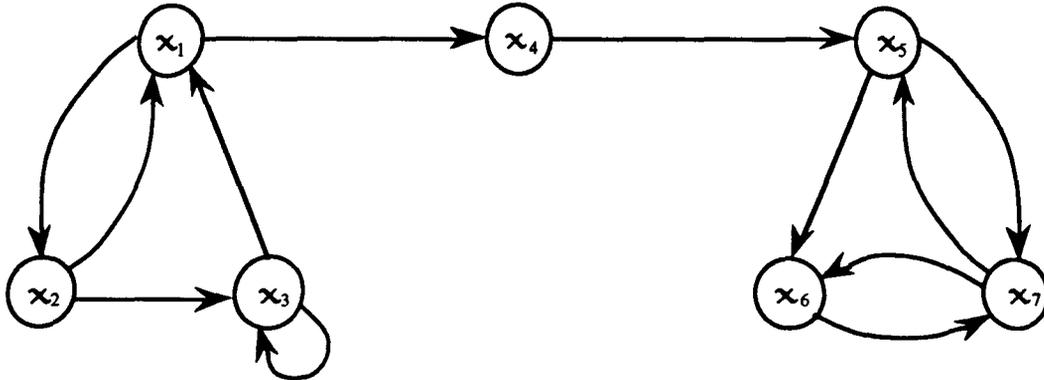


Figure 1.2

Proposition 1.8 [Schizas et Evans, 1980]

Si une matrice structurelle peut être décomposable en composantes cycliques et acycliques, alors le rang terme de cette matrice est égal à la somme des rangs termes de chaque composante.

Exemple 1.3

Considérons le digraphe de la figure 1.3 et sa matrice booléenne associée.

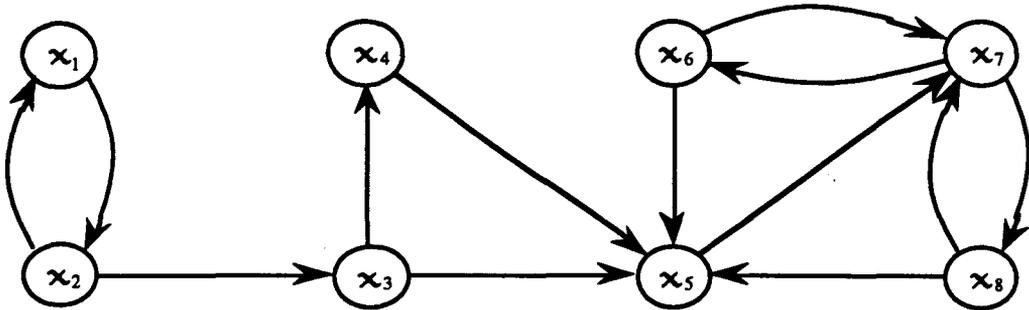


Figure 1.3

$$A_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce digraphe peut être scindé en composantes cycliques (figure 1.4 (a)) et en composante acyclique (figure 1.4 (b)).

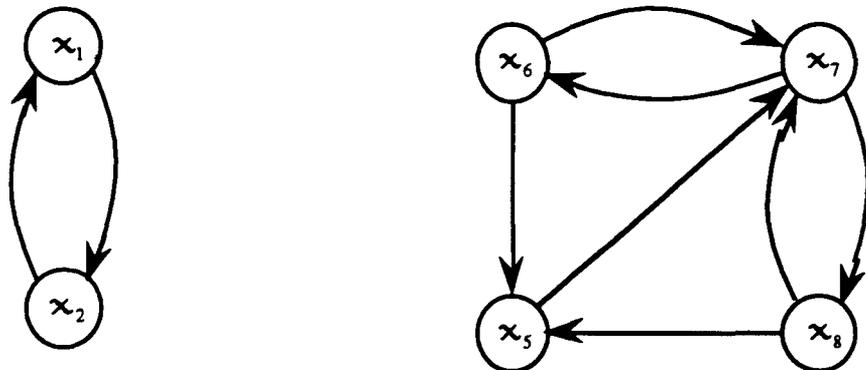


Figure 1.4 (a) : Composantes cycliques

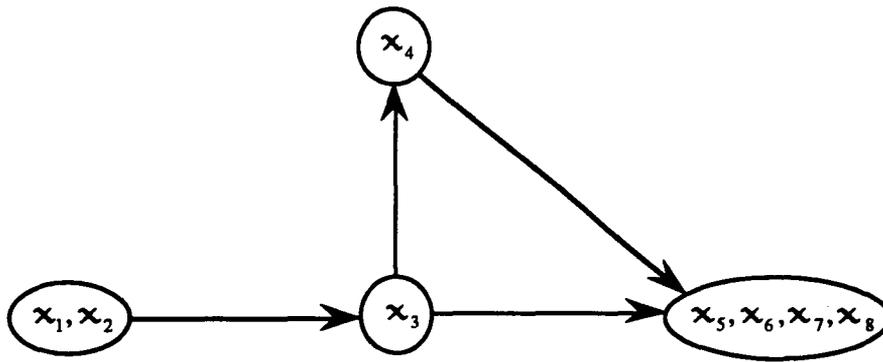


Figure 1.4 (b) : Composante acyclique

A_b peut être décomposée en trois sous-matrices représentant des composantes cycliques et acycliques.

$$A_b^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_b^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_b^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang} - t (A_b^1) = 2$$

$$\text{rang} - t (A_b^2) = 3$$

$$\text{rang} - t (A_b^3) = 1$$

$$\text{rang} - t (A_b) = \sum_{i=1}^3 \text{rang} - t (A_b^i) = 6$$

Nous pouvons faire apparaître les blocs diagonaux correspondants aux composantes cycliques et acycliques, en effectuant les permutations nécessaires. La matrice A_b peut être ainsi écrite sous forme triangulaire supérieure.

Plusieurs algorithmes graphiques se basent sur la recherche d'un couplage maximal dans un digraphe. La relation entre cette notion et le rang de la matrice associée est définie d'après cette proposition.

Proposition 1.9 [Murota, 1987]

Le rang terme de la matrice booléenne A_b est égal à la cardinalité du couplage maximal sur le graphe biparti $G_B \equiv (Z^+, Z^-, E)$ associé (voir annexe 2).

La détection de valeurs propres nulles structurelles dans une matrice structurelle carrée constitue une autre approche. Harary (1959) a été le premier à établir une relation entre les valeurs propres structurelles d'une matrice et la décomposition du graphe associé en

composantes cycliques et acycliques. Franksen et al (1979 I et II), quant à eux, ont longuement développé cette approche.

Définition 1.17 [Schizas et Evans, 1980]

Une valeur propre nulle est dite structurellement déterminée si elle reste nulle pour toute perturbation sur un coefficient non nul de la matrice structurelle $[A]$.

Une valeur propre nulle non structurellement déterminée est appelée "numériquement déterminée".

Théorème 1.2 [Schizas et Evans, 1980]

Tous les nœuds acycliques sont associés aux valeurs propres nulles déterminées structurellement.

Théorème 1.3 [Schizas et Evans, 1980]

Les valeurs propres, associées à chaque sous-système cyclique, sont des valeurs propres du système entier.

Proposition 1.10 [Schizas et Evans, 1980]

La déficience du rang terme d'une matrice structurelle $[A]$ indique le nombre de valeurs propres nulles structurellement déterminées.

Exemple 1.4

Sur l'exemple de la figure 1.2, le sommet x_4 est associé à une valeur propre nulle déterminée structurellement.

Schizas et Evans (1981) utilisent ces résultats pour établir une relation entre les valeurs propres d'une matrice structurelle et son rang terme.

Proposition 1.11 [Schizas et Evans, 1981]

Le rang numérique d'une matrice A est égal à la différence entre le rang terme de la matrice booléenne A_b et le nombre de valeurs propres nulles associées aux composantes cycliques.

III.3.2. Interprétation par dilatation

Lin (1972, 1974) a introduit la notion de dilatation pour exprimer la dégénérescence du rang générique d'une matrice structurelle.

Définition 1.18 [Lin, 1972, 1974]

Un digraphe $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$ contient une dilatation si et seulement s'il existe un ensemble S de k sommets dont son antécédent $T(S)$ dans $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$ contient au plus $(k-1)$ sommets. S ne contient pas le sommet origine de $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$ mais $T(S)$ peut le contenir.

Exemple 1.5

Considérons la matrice booléenne A_b et son graphe associé $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$, figure 1.5 (a) :

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

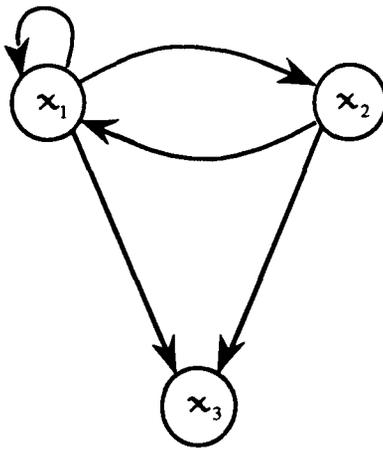


Figure 1.5 (a) : Digraphe $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$

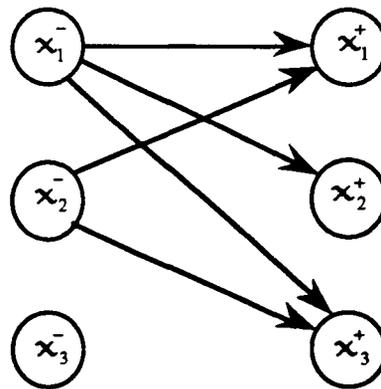


Figure 1.5 (b) : Digraphe biparti associé

La visualisation de la dilatation est toute naturelle sur le graphe biparti $G_B \equiv (\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-, \mathcal{E})$ (figure 1.5 (b), associé à $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$).

A partir de $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$ ou de $G_B \equiv (\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-, \mathcal{E})$, nous déduisons les ensembles S et $T(S)$ (définition 1.18) :

$$S = \{x_1, x_2, x_3\} \text{ et } T(S) = \{x_1, x_2\}$$

Proposition 1.12

Si $\text{Card } S = k$ et $\text{Card } T(S) = k-d$, alors d est la déficience en cardinalité du couplage dans le graphe biparti $G_B \equiv (\mathcal{Z}^+, \mathcal{Z}^-, \mathcal{E})$ associé au graphe $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$ donc de manière équivalente, la dégénérescence du rang terme de la matrice A .

Sur l'exemple 1.5, $\text{Card } S = 3$ et $\text{Card } T(S) = 2$ donc $d = 1$. Le rang terme de la matrice associée à ce graphe est donc égal à 2.

III.3.3. Algorithmes graphiques

Un des premiers algorithmes graphiques de calcul du rang d'une matrice concerne la détermination d'un couplage maximal dans un digraphe biparti [Ford et Fulkerson, 1962]. Cet algorithme est basé sur une détermination itérative du nombre de lignes couvertes (lignes contenant des termes indépendants). Utilisant le même principe, plusieurs algorithmes se sont développés avec le même souci de faciliter cette recherche ; citons Hopcroft et Karp (1973), Lawer (1976), Kabekode Bhat (1981), Papadimitriou-Steiglitz (1982).

Franksen et al. (1979 I et II) proposent une méthode appelée méthode des chemins de Peterson [Peterson, 1891 et Ore, 1962] pour déterminer le rang terme d'une matrice par une procédure purement graphique. Elle se base sur la transformation des chemins dits alternés. En effet, ils établissent une équivalence entre la recherche d'un couplage maximal dans un digraphe (ou, par équivalence, l'extraction d'une matrice de permutation maximale) et le problème d'identification des chemins alternés dans un digraphe.

Schizas et al (1979) ont montré qu'en théorie des graphes, la matrice booléenne A_b se traduit par la matrice d'adjacence dans le digraphe. Ainsi, la matrice de permutation maximale, associée à la matrice A_b , correspond au plus large sous-graphe généré par un ensemble de sommets, avec le nombre de degré entrant et de degré sortant égal à 1 à chaque sommet (i.e un arc arrive et un arc part de chaque sommet). Le nombre d'arcs est égal au rang terme.

Pour calculer le déterminant d'une matrice carrée de dimension n par une procédure purement graphique, Reinschke (1984) utilise le principe de recherche de familles de cycles d'ordre n dans un digraphe (voir annexe 4). Il a notamment montré que chaque élément du déterminant correspond à une famille de cycles d'ordre n , et que s'il n'existe pas de famille de cycles d'ordre n , ce déterminant est nul. En utilisant ce même principe, nous proposons une règle heuristique pour le calcul du rang terme d'une matrice carrée d'ordre n à partir de son digraphe associé.

Proposition 1.13

Le rang terme d'une matrice structurelle de dimension n est égal à la différence entre n et le nombre minimal d'arcs qu'il est nécessaire d'ajouter pour former une famille de cycles d'ordre n dans le digraphe associé.

Preuve

Puisque chaque élément du déterminant est représenté par une famille de cycles d'ordre n , une condition suffisante pour que celui-ci soit structurellement non nul, est qu'il existe au moins une famille de cycles d'ordre n .

Si cette condition n'est pas remplie, nous pouvons alors, en rajoutant des arcs sur le digraphe, former une famille de cycles d'ordre n .

Sur l'exemple de la figure 1.3, il n'existe pas de famille de cycles d'ordre 8. L'ajout des deux arcs $e(x_4, x_3)$ et $e(x_5, x_8)$ permet de trouver un cycle d'ordre 8. Donc $\text{rang-t}(A_b) = 8 - 2 = 6$.

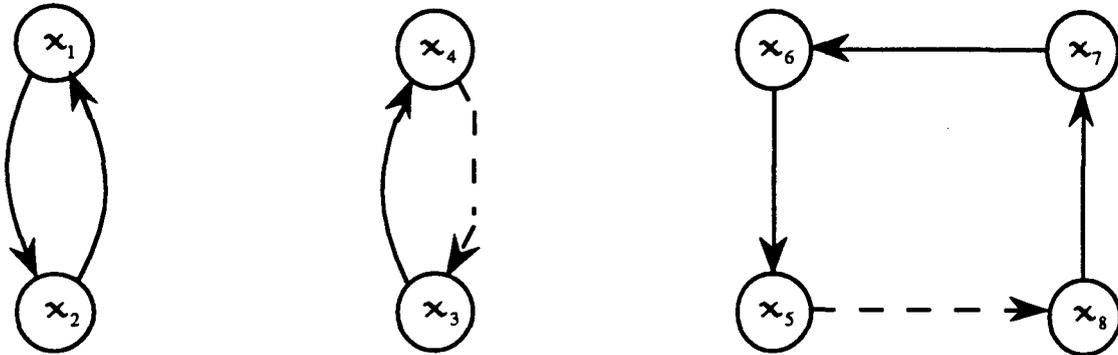


Figure 1.6 : Famille de cycles d'ordre 8

III.4. Conclusion

Nous avons vu comment calculer les rangs d'une matrice, dans les cas d'une approche structurelle par la théorie des graphes. Nous présenterons dans le paragraphe suivant cette approche à partir de l'outil bond graph.

IV. Etude des propriétés structurelles par la technique des bond graphs

IV.1. Introduction

Le modèle bond graph peut être considéré comme un graphe, quand on le parcourt en suivant les chemins causaux. La matrice d'état associée aux modèles bond graphs considérés (sans signaux) a une forme particulière à cause du choix des variables d'état : deux termes symétriques par rapport à la diagonale sont simultanément nuls ou non nuls. Aucune hypothèse sur l'indépendance des termes n'est faite a priori. La méthode de calcul du rang structurel de la matrice d'état A conduit à la détermination du nombre de valeurs propres structurellement nulles de la matrice d'état, c'est à dire la valeur de l'exposant q telle que le polynôme caractéristique de A s'écrive: $P(s) = \det(sI - A) = s^q \left[s^{n-q} + \sum_{i=1}^{n-q} a_i s^{n-q-i} \right] = s^q (s^{n-q} + \dots + a_{n-q})$.

Cependant, certaines valeurs propres des paramètres des éléments bond graph peuvent conduire à l'annulation du coefficient a_{n-q} , ce qui introduirait alors une autre valeur propre nulle, mais non décelable par les manipulations causales proposées.

Notre démarche s'adresse surtout aux utilisateurs de modèles bond graph, permettant de mettre en évidence des propriétés structurelles directement à partir du bond graph.

Quelques notions relatives à la théorie des bond graphs sont rappelées dans l'annexe 3.

Hypothèses

- Les bond graphs considérés contiennent des éléments 1-port : une relation scalaire entre les variables (systèmes électriques monophasés, hydrauliques, mécaniques (1.D)).
- L' équation d'état associée à un modèle bond graph d'un système dynamique est supposée linéaire.
- les modèles bond graph considérés contiennent uniquement des liens de puissance (absence de signaux).

Si la terminologie " structurelle" utilisée dans la théorie des graphes sous-entend l'hypothèse d'indépendance des termes d'une matrice. Par contre, dans la théorie des bond graphs, l'appellation " structurelle" est utilisée pour indiquer que les propriétés sont vraies presque partout sauf pour quelques valeurs particulières.

Nous rappelons des résultats présentés par Sueur et Dauphin-Tanguy (1989, 1991) pour l'étude structurelle du rang de la matrice d'état A directement sur le modèle bond graph. La méthode proposée repose sur des manipulations causales. Pour éviter toute confusion avec la définition précédente, nous noterons le rang ainsi défini par rang-bg (A).

IV.2.Rang de la matrice d'état

Théorème 1.5 [Sueur et Dauphin-Tanguy, 1991]

Le rang-bg de la matrice d'état formelle (A) associée à un modèle bond graph est égal à $n - t$, avec:

n : nombre d'éléments I et C en causalité intégrale quand le modèle bond graph est en causalité intégrale (ce qui correspond au nombre de variables statiquement indépendantes).

t : nombre d'éléments dynamiques I,C restant en causalité intégrale lorsque la causalité dérivée est imposée sur le modèle bond graph.

Ce résultat a été démontré dans le cas des modèles bond graphs ne contenant ni signal, ni source commandée, ni lien d'information.

Remarque

Les différents vecteurs état entrée et sortie utilisés sont représentés par l'équation (1.11).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{I_1} \\ p_{I_2} \\ \vdots \\ q_{C_1} \\ q_{C_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{e_1} \\ S_{e_2} \\ \vdots \\ S_{f_1} \\ S_{f_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{e_1} \\ D_{e_2} \\ \vdots \\ D_{f_1} \\ D_{f_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Exemple 1.7

Soit le modèle bond graph de la figure 1.7, les 3 éléments dynamiques I,C ont une causalité intégrale, donc $n = 3$.

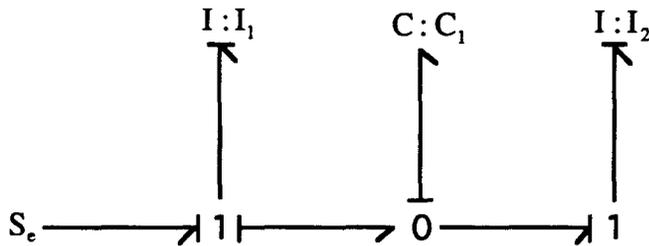


Figure 1.7 : Bond graph en causalité intégrale

L'élément I_1 (ou I_2) conserve la causalité intégrale lorsque la causalité dérivée est imposée (figure 1.8), donc $t = 1$. Nous concluons que $\text{rang-bg}(A) = n - t = 2$, ce qui correspond au rang réel de la matrice d'état associée au modèle bond graph.

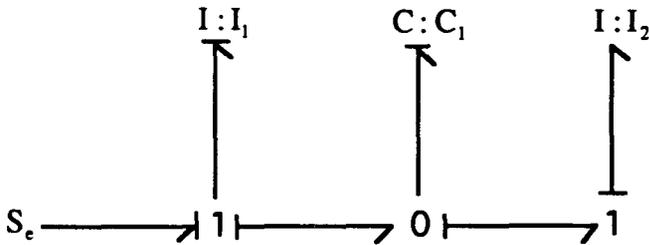


Figure 1.8 : Bond graph en causalité dérivée

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Remarques

1) La causalité dérivée affectée sur le modèle bond graph doit éviter les conflits de causalité et les problèmes qui pourraient apparaître, tels que les boucles de causalités non solvables.

2) L'équation d'état associée à un bond graph en causalité intégrale, en absence d'entrée, s'écrit :

$$\dot{x} = A x \quad (1.12)$$

Imposer la causalité dérivée sur le modèle bond graph équivaut à écrire cette équation sous la forme (1.13) lorsque celle-ci est possible.

$$x = A^{-1} \dot{x} \quad (1.13)$$

L'inversibilité de A est donc liée à la possibilité d'affecter une causalité dérivée à tout le bond graph.

3) L'affectation préférentielle de la causalité dérivée sur le modèle bond graph laisse inchangés les éléments I_1, C_1 en causalité dérivée ainsi obtenus dans une affectation préférentielle intégrale.

IV.3. Conclusion

L'intérêt de la théorie des bond graphs dans l'étude des systèmes dynamiques n'est plus à démontrer. Tout au long de ce mémoire, nous l'utiliserons pour l'investigation de divers problèmes comme la commandabilité, l'observabilité ou le découplage.

V. Comparaison entre les notions de rang par graphe et par bond graph

V.1. Introduction

En se basant sur les résultats de Ort et Martens (1974), Bell et Martens (1974) ont fait une comparaison très détaillée entre les graphes linéaires et les bond graphs. Ils ont exposé des similarités et des différences entre les deux approches des points de vue modélisation et mise en équation. Nous présentons en annexe 4 une analogie bond graph - digraphe ainsi qu'une procédure pour convertir un bond graph en digraphe.

Notre propos consiste à comparer les deux approches du point de vue étude des propriétés structurelles. Ceci est traduit par une comparaison des rangs.

Considérons le système électrique de la figure 1.9 et son modèle bond graph associé représenté par la figure 1.10.

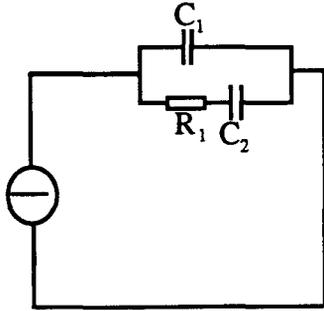


Figure 1.9 : Circuit électrique

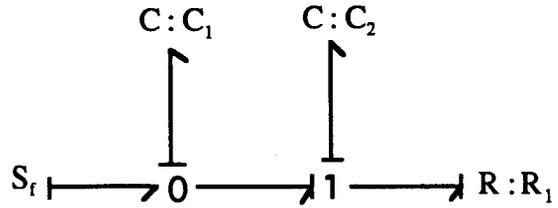


Figure 1.10 : Bond graph du circuit (figure 1.9) en causalité intégrale

L'équation d'état formelle, associée à ce modèle bond graph, est :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_1} & \frac{-1}{R_1 C_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} S_f \quad \text{où } x = \begin{pmatrix} q_{c_1} \\ q_{c_2} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

V.2.Calcul des rangs

Rang générique, rang structurel

La matrice [A] associée à la représentation (1.14) est donnée par (1.15).

$$[A] = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

rang-g [A] = rang-s [A] = 2, conformément à la proposition 1.4 et à la définition 1.15.

Rang terme

La matrice booléenne A_b associée s'écrit sous la forme (1.16).

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

rang-t (A_b) = 2 (proposition 1.6).

Rang bond graph

Lorsque la causalité dérivée est imposée au modèle bond graph (figure 1.11), un conflit apparaît si on met les deux éléments C en causalité dérivée.

Donc, $t = 1$ et $\text{rang-bg}(A) = 1$.

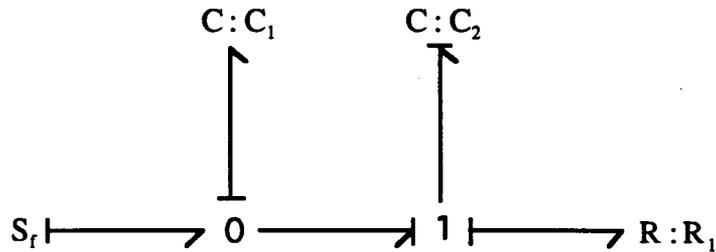


Figure 1.11 : Bond graph du circuit (figure 1.9) en causalité dérivée

Rang réel

$$\begin{cases} \det A = \frac{-1}{RC_1} \cdot \frac{-1}{RC_2} - \frac{1}{RC_1} \cdot \frac{1}{RC_2} = 0 \\ \text{rang } A = 1 \end{cases} \quad (1.17)$$

V.3. Interprétation

Le résultat obtenu par l'approche bond graph correspond au rang numérique réel de A , contrairement aux résultats obtenus pour le rang terme, le rang structurel et le rang générique. La raison est que les termes de la matrice A ne sont pas indépendants. Il apparaît donc que la condition d'indépendance entre les paramètres est nécessaire au niveau structurel pour que les méthodes énoncées (hors bond graph) soient valides. Cette hypothèse peut ne pas être vérifiée, d'un point de vue structurel, à cause de la physique du système, comme cela apparaît dans l'exemple.

À l'inverse, la méthode bond graph tient compte de ces dépendances formelles grâce à la cohérence des règles d'affectation de la causalité et des relations causales implicites apparaissant sur le bond graph.

VI. Extension à un cas non linéaire

Les méthodes proposées (hors bond graph) sont strictement limitées au cas linéaire.

Le calcul du rang structurel d'une matrice d'état de la forme 1.18, obtenue pour un modèle bond graph d'un système non linéaire, est présenté en appliquant les mêmes principes que dans le cas linéaire.

$$\dot{x} = A(x, \cdot)x \quad (1.18)$$

Considérons le pendule élastique (figure 1.12) et son modèle bond graph en causalité intégrale (figure 1.13).

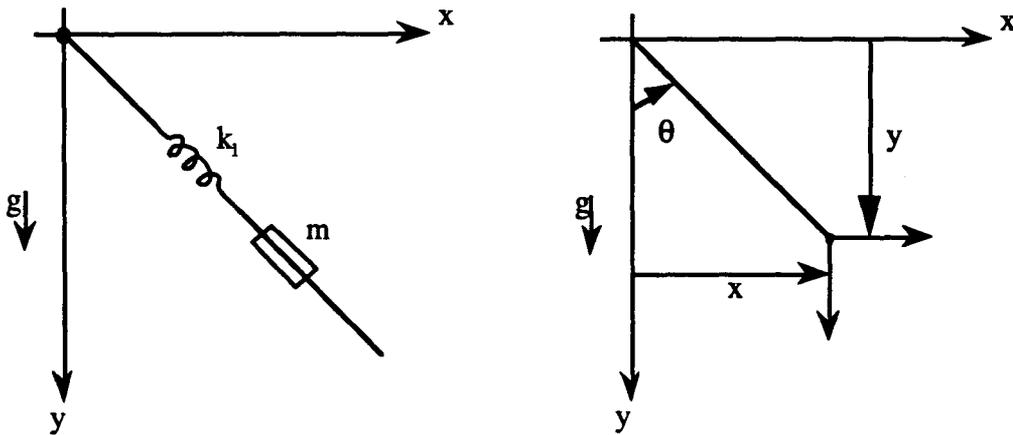


Figure 1.12 : Le pendule élastique en mouvement plan et ses variables géométriques

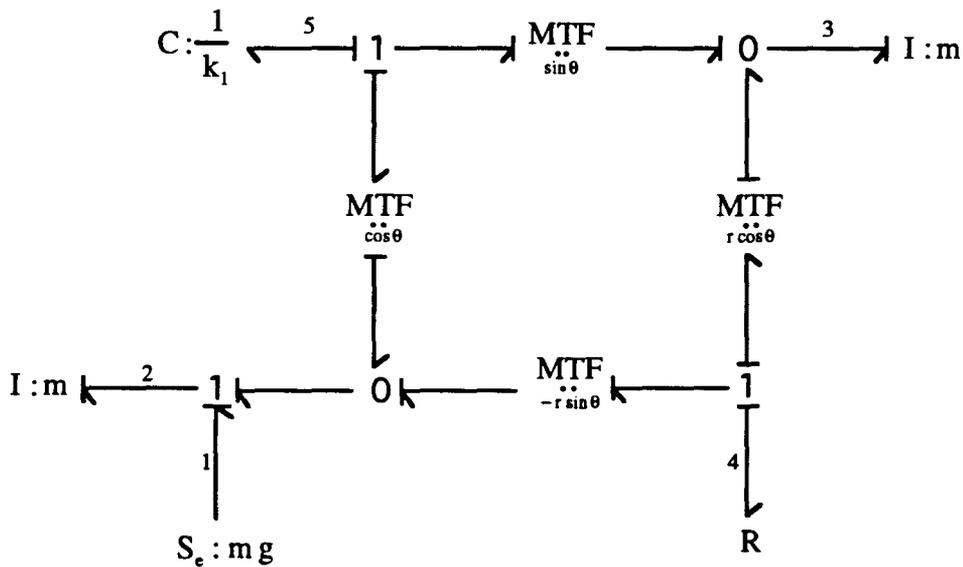


Figure 1.13 : Modèle bond graph en causalité intégrale

Les éléments sont linéaires, et la structure de jonction non linéaire. Les différents vecteurs sont :

$$x^i = \begin{pmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ r \end{pmatrix}, \quad Z^i = \begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \\ e_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ r - L_0 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

où L_0 est la longueur à vide du ressort :

$$D_{in} = [f_4], \quad D_{out} = [e_4] = [R] D_{in}, \quad u = [e_1]. \quad (1.20)$$

L'équation de structure de jonction s'écrit :

$$\begin{pmatrix} e_3 \\ e_2 \\ f_5 \\ \dots \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta & \vdots & \frac{-\cos\theta}{r} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\theta & \vdots & \frac{\sin\theta}{r} & \vdots & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ \frac{\cos\theta}{r} & \frac{-\sin\theta}{r} & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \\ e_5 \\ \dots \\ e_4 \\ \dots \\ e_1 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

L'équation d'état associée est :

$$\begin{aligned} \dot{p}_3 = \dot{p}_x &= -R \frac{\cos^2\theta}{r^2} \frac{p_3}{m} + R \frac{\sin\theta \cos\theta}{r^2} \frac{p_2}{m} - \sin\theta k_1 (r - L_0), \\ \dot{p}_2 = \dot{p}_y &= \frac{R}{r^2} \sin\theta \cos\theta \frac{p_3}{m} - \frac{R}{r^2} \sin^2\theta \frac{p_2}{m} - \cos\theta k_1 (r - L_0) + mg, \\ \dot{q}_5 = \dot{r} &= \sin\theta \frac{p_3}{m} + \cos\theta \frac{p_2}{m}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

avec

$$\dot{\theta} = \frac{\cos\theta}{r} \frac{p_3}{m} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{p_2}{m}. \quad (1.23)$$

Ce modèle se présente sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x, \theta)x + Bu \\ \dot{\theta} &= f(x, \theta) \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$A(r, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{-R \cos^2\theta}{m r^2} & \frac{R \sin\theta \cos\theta}{m r^2} & -k_1 \sin\theta \\ \frac{R \sin\theta \cos\theta}{m r^2} & \frac{-R \sin^2\theta}{m r^2} & -k_1 \cos\theta \\ \frac{\sin\theta}{m} & \frac{\cos\theta}{m} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Pour ce cas non linéaire, nous allons vérifier si $A^{-1}(r, \theta)$ existe en procédant de la même manière qu'en linéaire.

Lorsque la causalité dérivée est affectée aux éléments I,C comme le montre la figure 1.14, aucun conflit n'apparaît. Les trois éléments dynamiques I_2 , I_3 et C_5 sont affectés d'une causalité dérivée. Ceci peut donc s'interpréter comme dans le cas linéaire à partir de l'équation d'état, qui peut être inversée telle que $X = A^{-1}[(x, \theta)\dot{x} - Bu]$.

Ce résultat est vérifié par le calcul du déterminant $\Delta(r)$ de la matrice $A(r, \theta)$.

$$\Delta(r) = \det A(r, \theta) = \frac{-k_1 R}{m^2 r^2} \tag{1.26}$$

avec $L_0 \leq r \leq L_{\max}$.

$\Delta(r)$ est indépendant de θ et toujours non nul. Le rang-bg $[A]$ est donc toujours maximal et égal à 3 quelques soient les valeurs de r et de θ .

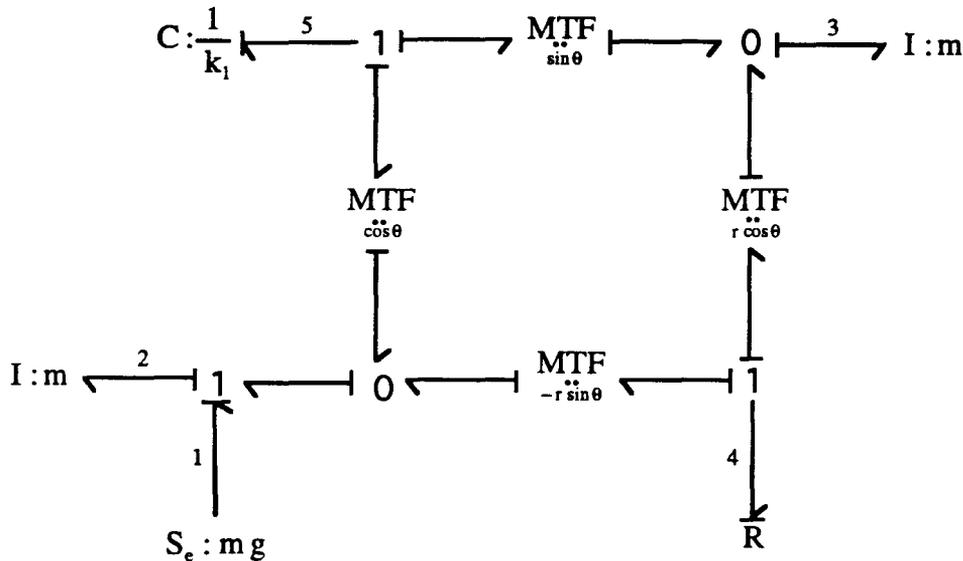


Figure 1.14 : Modèle bond graph en causalité dérivée

Discussion

Pour la démonstration de ce résultat dans le cas linéaire, Sueur et Dauphin-Tanguy (1991) ont utilisé l'égalité rang-bg $A = \text{rang} [S_{11} \ S_{13}] = n - t$.

Si nous appliquons ce résultat à l'équation (1.21), nous obtenons :

$$\text{Det} [S_{11} \ S_{13}] = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin \theta & \frac{-\cos \theta}{r} \\ 0 & 0 & -\cos \theta & \frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

Ce déterminant est toujours non nul, même pour les valeurs particulières de θ qui pouvaient poser problème, c'est-à-dire $\theta = 0 \ (2\pi)$ et $\theta = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$ pour lesquelles il vaut alors

$$\left(\frac{-1}{r} \right).$$

VII. Conclusion

L'approche structurelle (utilisant la théorie des graphes) pour l'étude des systèmes dynamiques est très répandue. Les nombreux avantages de cette approche ont été rappelés. Elle repose sur l'hypothèse à priori d'indépendance des termes de la matrice associée au graphe.

Une discussion rapide a permis de rappeler l'avantage certain du modèle bond graph par rapport aux autres représentations pour le calcul du rang structurel de la matrice d'état issue du bond graph. Une simple manipulation causale est nécessaire sur le modèle bond graph, alors que les autres représentations requièrent des algorithmes parfois peu performants.

Ces notions de rang structurel étant rappelées, l'étape suivante consiste à évoquer et définir d'autres propriétés structurelles, telles que la commandabilité / observabilité structurelles. Ceci est l'objet du prochain chapitre.

**CHAPITRE 2 : COMMANDABILITE EN
ETAT ET OBSERVABILITE
STRUCTURELLES**

CHAPITRE 2 : COMMANDABILITE EN ETAT ET OBSERVABILITE STRUCTURELLES

I.Introduction.....	57
II.Etude de la commandabilité / observabilité à partir de la représentation d'état.....	57
II.1.Introduction.....	57
II.2.Commandabilité / observabilité au sens numérique.....	58
II.2.1.Commandabilité.....	58
II.2.1.1.Définitions	58
II.2.1.2.Méthodes d'étude	59
II.2.2.Observabilité	60
II.2.2.1.Définition.....	61
II.2.2.2.Méthodes d'étude	61
II.2.3.Formes de commandabilité / observabilité.....	62
II.2.3.1.Formes de commandabilité.....	62
II.2.3.2.Formes d'observabilité.....	63
II.2.4.Indices de commandabilité / observabilité	64
II.2.4.1.Indices de commandabilité.....	64
II.2.4.2.Indices d'observabilité.....	65
II.3.Commandabilité / observabilité structurelle.....	66
II.3.1.Commandabilité en état structurelle.....	66
II.3.1.1.Définitions	66
II.3.1.1.Critères d'étude.....	67
II.3.2.Observabilité structurelle.....	68
II.4.Conclusion.....	69
III.Approche des graphes pour l'étude de la commandabilité / observabilité structurelles.....	69
III.1.Introduction.....	69
III.2.Commandabilité structurelle	71
III.2.1.Accessibilité	71
III.2.2.Critères graphiques.....	71
III.3.Observabilité structurelle.....	74
III.4.Système structurellement complet.....	75

III.5.Indices de commandabilité / observabilité structurelle	75
--	----

IV. Etude de la commandabilité / observabilité des systèmes multivariés modélisés par bond graph.....76

IV.1.Introduction.....	76
IV.2.Etude de la commandabilité / observabilité structurelle	76
IV.3.Calcul formel des matrices de commandabilité / observabilité	80
IV.3.1.Caractéristiques d'un chemin causal.....	81
IV.3.2.Méthodes de calcul.....	82
IV.3.2.1.Matrice de commandabilité.....	82
IV.3.2.2.Matrice d'observabilité.....	83
IV.3.3.Calcul des matrices de passage.....	84
IV.3.3.1.Calcul de C_s^1	85
IV.3.3.2.Calcul de C_s^2	86
IV.4.Conclusion.....	89
IV.5.Implantation sur l'exemple d'un bras de robot flexible.....	89

V. Conclusion.....92

I.Introduction

L'importance des notions de commandabilité et d'observabilité dans l'étude des systèmes n'est plus à démontrer. Ces notions ont été introduites par Gilbert (1963). Kalman (1963) a présenté une description mathématique des systèmes, en faisant apparaître la structure canonique qui décrit les différents sous-espaces en fonction de leurs propriétés de commandabilité et d'observabilité. Rosenbrock (1974) a élaboré une théorie très intéressante à l'aide de la représentation sous forme de matrice système. L'approche géométrique, quant à elle, a été introduite par Wonham (1970). Lin (1974) a donné une interprétation du problème de l'étude structurelle en terme de graphe. Depuis, d'autres travaux se basant sur l'approche graphique ont été consacrés à ce problème. L'approche par bond graphs a également été exploitée pour traiter ce problème [Rosenberg, 1973 ; Suda et Hatanaka, 1986 ; Sueur et Dauphin-Tanguy, 1989].

Ce chapitre est scindé en trois parties.

La première partie de ce chapitre rappelle les principales définitions de la commandabilité et de l'observabilité relatives à la représentation d'état des systèmes linéaires. La deuxième partie est consacrée à l'étude de la commandabilité et de l'observabilité structurelles par la théorie des graphes, pour laquelle nous présentons une synthèse des principaux critères graphiques traitant ce problème. Dans la dernière partie, en utilisant l'approche des bond graphs, nous présentons une méthode basée sur les chemins causaux et les manipulations causales, pour tester la commandabilité et l'observabilité. Nous en déduisons les indices de commandabilité et d'observabilité et calculons formellement les différentes formes des matrices correspondantes. Enfin, le modèle bond graph simplifié d'un bras de robot à articulation flexible simplifié est présenté comme exemple pour appliquer ces méthodologies.

II.Etude de la commandabilité / observabilité à partir de la représentation d'état

II.1.Introduction

Les relations entrées - sorties d'un système sont, en général, définies par un ensemble de relations mathématiques (équations différentielles, relations algébriques,...). Dans le cas d'un processus linéaire stationnaire à états continus, les relations peuvent être définies par la fonction (ou matrice) de transfert [Rosenbrock, 1970]. Mais cette description représente uniquement le sous-espace à la fois commandable et observable du système. Elle apparaît donc quelques fois insuffisante pour décrire un système. Par contre, la représentation d'état de Kalman (1963) permet de mettre en évidence des informations internes d'un système, qui

n'apparaissent pas nécessairement sur la description par fonction (ou matrice) de transfert ; notamment l'existence de sous-espaces non commandables et / ou non observables. De plus, la notion d'état renseigne l'utilisateur sur le nombre maximal (n) de variables indépendantes qu'il aura à mesurer ou à reconstituer pour générer la meilleure commande possible d'un système. La représentation d'état semble alors être, en général, un bon outil pour l'analyse des systèmes dynamiques.

II.2. Commandabilité / observabilité au sens numérique

Les entrées sont le moyen que l'on a d'agir sur l'état du système ; les sorties sont les grandeurs par l'intermédiaire desquelles nous observons ces états. Dans sa définition fondamentale de la commandabilité et de l'observabilité en état, Kalman (1963) se pose les deux questions suivantes :

i) Est-il possible de générer une commande qui permette de faire passer le système d'un état quelconque $x(t_1)$ (à l'instant t_1) à un autre état quelconque $x(t_2)$ (à l'instant t_2) ?

ii) En supposant que l'entrée du système est connue, peut-on, par la seule mesure des sorties du processus sur un intervalle de temps (t_1, t_2) , reconstituer l'état initial $x(t_1)$ du système ?

Au cours de ce chapitre, notre étude se limite à la commandabilité en état et à l'observabilité. Parfois, le mot état sera omis par souci de simplification.

II.2.1. Commandabilité

Considérons le système linéaire multivariable (Σ), décrit par l'équation d'état (2.1).

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $A \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n$, $B \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m$, $C \in \mathcal{R}^p \times \mathcal{R}^n$ et $D \in \mathcal{R}^p \times \mathcal{R}^m$.

II.2.1.1. Définitions

La commandabilité en état s'étudie à l'aide des matrices d'état et de commande du système, c'est-à-dire à l'aide de l'équation d'état proprement dite. Donc nous réduisons l'étude du système Σ , défini par (2.1), représenté par ses matrices A , B , C , et D (noté $\Sigma(A,B,C,D)$), à celle du système Σ représenté par ses matrices A et B que nous notons $\Sigma(A,B)$.

Définition 2.1 (commandabilité vers l'origine) [Popov, 1973]

Le système $\Sigma(A,B)$ (2.1) est complètement commandable si, pour tout vecteur x_1 et tout intervalle de temps $t_1 < t < t_2$, il existe une fonction de commande $u_{x_1}(t)$ continue et définie pour $t_1 \leq t \leq t_2$, telle que la solution du système $\Sigma(A,B)$, pour $u(t) = u_{x_1}(t)$ et $x(t_1) = x_1$, satisfasse $x(t_2) = 0$.

En d'autres termes, le système $\Sigma(A,B)$ est complètement commandable s'il peut être amené, en un temps fini, d'un état quelconque $x(t_1)$, à l'instant t_1 , à un autre état quelconque $x(t_2)$, à l'instant t_2 , avec une commande appropriée.

La notion d'accessibilité est fortement liée à la notion de commandabilité en état dans le cas des systèmes linéaires stationnaires continus.

Définition 2.2 (commandabilité depuis l'origine) [Popov, 1973]

Le système $\Sigma(A,B)$ (2.1) est complètement accessible, si pour tout vecteur x_2 et tout intervalle $t_1 < t < t_2$, il existe une fonction de commande $u_{x_2}(t)$ continue et définie pour $t_1 \leq t \leq t_2$, telle que la solution du système $\Sigma(A,B)$ pour $u(t) = u_{x_2}(t)$ et $x(t_1) = 0$, satisfasse la condition $x(t_2) = x_2$.

Propriété 2.1 [Popov, 1973]

Le système $\Sigma(A,B)$ est complètement commandable si et seulement s'il est complètement accessible.

II.2.1.2. Méthodes d'étude

Plusieurs formulations équivalentes existent sous forme de théorèmes. Ces derniers sont démontrés dans plusieurs ouvrages, notamment chez Popov (1973), Kalman et al (1969). Nous avons choisi de rappeler ceux qui se prêtent le mieux à une interprétation graphique.

Théorème 2.1

Le système $\Sigma(A,B)$ est complètement commandable si l'un des critères équivalents suivants est vérifié :

Critère 1 (de Kalman)

La matrice de commandabilité C_c , de dimension $(n) \times (n.m)$ définie par (2.2) est de rang maximal (donc égal à n):

$$C_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (2.2)$$

Critère 2

Pour tout s , le rang de la matrice $[sI_n - A, B]$ est maximal (donc égal à n), où s est l'opérateur de Laplace.

Critère 3

Il n'existe aucune matrice de sortie C non nulle qui vérifie l'identité $C(sI_n - A)^{-1}B \equiv 0$ pour tout s . Ce qui revient à dire que les lignes de $(sI - A)^{-1}B$ sont linéairement indépendantes, pour tout s tel que cette matrice est définie.

Critère 4 (Forme I de Lin)

Il n'existe aucune matrice régulière P telle que :

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \quad PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

où les matrices A_{11} , A_{22} et B_1 sont de dimensions respectives $(q) \times (q)$, $(n-q) \times (n-q)$ et $(q) \times (m)$ avec $q < n$.

Critère 5 [Rosenbrock, 1970]

Les matrices $(sI_n - A)$ et B sont premières entre elles à gauche (en mono-entrée, la matrice de transfert $(sI_n - A)^{-1}B$ n'admet pas d'annulation pôle-zéro).

Remarques

La commandabilité du système $\Sigma(A,B)$ est invariante dans tout changement de base.

Le terme de "gouvernabilité" est parfois utilisé de façon équivalente à "commandabilité", et celui "d'atteignabilité" au lieu "d'accessibilité".

II.2.2. Observabilité

L'observabilité concerne la possibilité d'estimer l'état à partir des informations du vecteur de sortie. Seules les matrices A et C interviennent dans une telle étude. Nous limitons donc, l'étude de l'observabilité au système représenté par ses matrices A et C noté $\Sigma(A,C)$.

II.2.2.1. Définition

Définition 2.3

Le système $\Sigma(A,C)$ est complètement observable si pour tout état initial $x(t_1)$, à l'instant initial t_1 , dans l'espace d'état, il existe un temps $t_2 > t_1$ fini, tel que la connaissance de la commande $u(t)$ et de la sortie $y(t)$ sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ suffisent pour déterminer l'état $x(t_1)$.

Dualité

Deux systèmes Σ_1 et Σ_2 , ayant le même nombre d'entrées et de sorties, sont duaux s'ils sont définis de la manière suivante:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x} = A^t x + C^t u \\ y = B^t x + D^t u \end{cases} \quad (2.4)$$

où A^t est la matrice transposée de A .

La commandabilité et l'observabilité sont deux concepts duaux. Nous pouvons donc tester l'observabilité d'un système à partir de la commandabilité de son système dual.

II.2.2.2. Méthodes d'étude

Comme pour la commandabilité, nous rappelons quelques théorèmes équivalents relatifs à la représentation d'état, sachant que tous les critères de commandabilité peuvent être transcrits par dualité pour obtenir des critères d'observabilité.

Théorème 2.2

Le système $\Sigma(A,C)$ est complètement observable si l'un des critères équivalents suivants est vérifié :

Critère 1 (de Kalman)

La matrice d'observabilité O_b de dimension $(n) \times (n.p)$, définie par (2.5), est de rang maximal (donc égal à n).

$$O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Critère 2

Le rang de la matrice $\begin{bmatrix} C \\ s I_n - A \end{bmatrix}$ est maximal (égal à n), pour tout s .

Remarque

Un système $\Sigma(A,B,C,D)$ est complet s'il est à la fois commandable et observable.

II.2.3. Formes de commandabilité / observabilité**II.2.3.1. Formes de commandabilité**

Le calcul du rang de la matrice de commandabilité C_s définie en (2.2), permettant de connaître le nombre de variables commandables du système s'interprète comme le nombre de colonnes indépendantes parmi les $n \times m$ colonnes de C_s . Ces colonnes indépendantes peuvent être déterminées de différentes façons. Néanmoins, un choix approprié des n colonnes indépendantes, lorsque le système est commandable, permet de mettre en évidence des propriétés intrinsèques que nous détaillons maintenant.

Supposons un système complètement commandable et sa matrice de commandabilité associée C_s (2.2). Plusieurs possibilités s'offrent à nous pour construire n vecteurs colonnes linéairement indépendants à partir de la matrice C_s , notamment les matrices C_s^1 et C_s^2 définies respectivement par (2.6) et (2.7), ou toutes les matrices déduites par permutation entre les colonnes. Dans le premier cas, un nombre maximal de q vecteurs colonne de B est nécessaire pour le calcul de C_s^1 où $q \leq m$. Dans le deuxième, en faisant l'hypothèse non restrictive que le rang de B est maximal et égal à m , les m vecteurs colonnes apparaissent.

$$C_s^1 = [B_1 \ AB_1 \ \dots \ A^{v_1-1}B_1 \ B_2 \ AB_2 \ \dots \ A^{v_1-1}B_2 \ \dots \ B_q \ AB_q \ \dots \ A^{v_q-1}B_q] \quad (2.6)$$

$$C_s^2 = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_m \ AB_1 \ AB_2 \ \dots \ AB_m \ \dots \ A^{\mu_1-1}B_1 \ A^{\mu_2-1}B_2 \ \dots \ A^{\mu_m-1}B_m] \quad (2.7)$$

Les valeurs caractéristiques v_j et μ_j ($j = 1 \dots n$) seront précisées par la suite.

Les différentes formes des matrices de commandabilité sont définies à l'aide d'algorithmes proposés dans la littérature [Datta, 1976 ; Luenberger, 1967 ; Denham, 1974 ; Aplenich, 1974 ; Jordan et Sridhar, 1973 ; Hickin et Sinha, 1977].

Nous rappelons deux algorithmes de calcul des matrices C_s^1 et C_s^2 .

a) Construction de la matrice C_i^1 (Algorithme de Bass et Gura, 1965)

1) Partant du vecteur B_1 , poursuivre la construction de la chaîne $B_1, AB_1, \dots, A^{j-1}B_1$ jusqu'à obtenir un vecteur linéairement dépendant des précédents. C'est-à-dire maximiser j , que l'on note v_1 ;

2) Sélectionner la colonne B_2 suivante, si elle est linéairement indépendante des $A^i B_1$ ($i = 1, \dots, v_1$) ;

3) Recommencer les procédures 1 et 2 pour les autres vecteurs colonnes de B , jusqu'à obtenir n vecteurs colonnes linéairement indépendants.

b).Construction de la matrice C_i^2 (Algorithme de Luenberger, 1967)

1) Sélectionner les m vecteurs colonnes B_i de B s'ils sont linéairement indépendants, sinon, ne retenir qu'un nombre maximal de colonnes indépendantes ; nous supposons ici que $\text{rang } B = m$ maximal ;

2) Sélectionner le vecteur colonne AB_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, s'il est linéairement indépendant des vecteurs colonnes $B_1, \dots, B_m, AB_1, \dots, AB_{i-1}$;

3) Sélectionner le vecteur colonne $A^2 B_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$, s'il est linéairement indépendant des vecteurs colonnes précédemment sélectionnés $B_1, \dots, B_m, AB_1, \dots, A^2 B_1, \dots, A^2 B_{i-1}$;

4) Continuer jusqu'à ce que l'on obtienne une sélection de n vecteurs colonnes linéairement indépendants.

Remarques

Le choix de l'ordre des colonnes de la matrice B conditionne fortement les deux formes C_i^1 et C_i^2 .

Le choix de la forme C_i^1 s'impose, si nous voulons privilégier la commande du système par un nombre minimal d'entrées $q \leq m$.

Le choix de la forme C_i^2 implique l'utilisation d'un nombre maximal d'entrées pour commander le système, que nous supposons égal à m (maximal).

II.2.3.2. Formes d'observabilité

En appliquant le principe de la dualité, les résultats concernant les matrices de commandabilité se transposent pour donner celles des matrices d'observabilité. Nous rappelons ici deux matrices possibles de la matrice d'observabilité :

$$O_b^1 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A \\ \vdots \\ C_1 A^{\tau_1-1} \\ C_2 \\ C_2 A \\ \vdots \\ C_2 A^{\tau_2-1} \\ \vdots \\ C_p \\ C_p A \\ \vdots \\ C_p A^{\tau_p-1} \end{bmatrix} \quad O_b^2 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_p \\ C_1 A \\ C_2 A \\ \vdots \\ C_p A \\ \vdots \\ C_1 A^{\theta_1-1} \\ C_2 A^{\theta_2-1} \\ \vdots \\ C_p A^{\theta_p-1} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Les matrices O_b^1 et O_b^2 se calculent d'une manière similaire à celle de C_s^1 et C_s^2 , avec les mêmes remarques énoncées précédemment sur le nombre de lignes de la matrice C apparaissant dans O_b^1 et O_b^2 .

C_s^1 et C_s^2 (resp O_b^1 et O_b^2) sont utilisées comme matrices de passage pour obtenir des représentations d'état sous forme canonique. De telles formes sont très utiles pour la synthèse et la commande des systèmes multivariables, comme le placement de pôles ou le découplage entrée-sortie.

II.2.4.Indices de commandabilité / observabilité

Les indices de commandabilité ont diverses applications lors de l'analyse des systèmes multivariables. Ils peuvent, par exemple, être une mesure de l'influence des entrées sur les états ou être employés pour l'étude de commandes découplantes. Nous rappelons leur expression.

II.2.4.1.Indices de commandabilité

Les indices de commandabilité pour un système commandable sont définis lors du calcul de la matrice de commandabilité C_s^2 . Après réarrangement de l'ordre des vecteurs colonnes de l'équation (2.7), nous obtenons :

$$C_s^2 = [B_1 \ AB_1 \ \dots \ A^{\mu_1-1}B_1 \ B_2 \ AB_2 \ \dots \ A^{\mu_2-1}B_2 \ \dots \ B_m \ AB_m \ \dots \ A^{\mu_m-1}B_m] \quad (2.9)$$

Les $\mu_i, i \in \{1, \dots, m\}$, sont les indices de commandabilité vérifiant :

$$\sum_{i=1}^m \mu_i = n \quad (2.10)$$

L'index de commandabilité σ , défini par (2.11), est aussi le plus petit entier vérifiant (2.12).

$$\sigma = \text{MAX}_{i=1}^m \mu_i \quad (2.11)$$

$$\text{Rang} [B \ AB \ \dots \ A^\sigma B] = n \quad (2.12)$$

II.2.4.2. Indices d'observabilité

Les indices d'observabilité sont définis à partir de la seconde matrice d'observabilité O_b^2 . Le réarrangement de l'ordre des lignes dans l'équation (2.8) permet d'écrire :

$$O_b^2 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A \\ \vdots \\ C_1 A^{\theta_1 - 1} \\ C_2 \\ C_2 A \\ \vdots \\ C_2 A^{\theta_2 - 1} \\ \vdots \\ C_p \\ C_p A \\ \vdots \\ C_p A^{\theta_p - 1} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Les indices d'observabilité sont donnés par les $\theta_i, i \in \{1, \dots, p\}$, avec :

$$\sum_{i=1}^p \theta_i = n \quad (2.14)$$

L'index d'observabilité ν , défini par (2.15), est aussi le plus petit entier vérifiant (2.16).

$$\nu = \text{MAX}_{i=1}^p \theta_i \quad (2.15)$$

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\nu} \end{bmatrix} = n \quad (2.16)$$

Conclusion

L'analyse de la commandabilité et de l'observabilité sous les différentes formes présentées précédemment requiert de nombreux calculs numériques. Celle-ci peut être peu précise pour les modèles mal conditionnés ou pour les modèles faisant apparaître des paramètres mal connus. Chaque modification numérique exige un nouveau calcul. De plus, le zéro numérique demande à être défini en fonction de la précision souhaitée. Il paraît donc intéressant d'introduire des concepts liés à la structure du système, indépendamment des valeurs numériques. Ces concepts se traduisent par ce que l'on appelle "l'analyse structurelle".

II.3. Commandabilité / observabilité structurelle

Glover et Silverman (1976) utilisent les formes I (équation (2.3) et II (définition 2.8) de LIN pour établir un critère de commandabilité. Des auteurs, comme Momen (1982) et Raske (1982), étendent le critère de Kalman à la commandabilité structurelle.

II.3.1. Commandabilité en état structurelle

La commandabilité en état structurelle concerne les matrices structurelles $[A]$ et $[B]$. Donc, nous utiliserons le système $\Sigma([A],[B])$ pour étudier ce problème.

II.3.1.1. Définitions

Les définitions suivantes sont équivalentes.

Définition 2.4

Un système structurel $\Sigma([A],[B])$ est structurellement commandable si tous les systèmes complètement commandables, au sens numérique, ont la même structure.

La définition 1.6, relative à une matrice numérique admissible, peut être étendue pour définir une paire de matrices (A,B) admissible.

Définition 2.5

La paire de matrices (A,B) représente une réalisation numérique admissible de la paire de matrices structurelles ([A],[B]) si tous les paramètres non nuls de ([A],[B]) sont fixés à des valeurs particulières.

Définition 2.6 [Shields et Pearson, 1976]

Un système structurel $\Sigma([A],[B])$ est structurellement commandable s'il existe au moins une réalisation admissible (A,B) $\in ([A],[B])$ qui soit commandable au sens numérique.

Définition 2.7 [Shields et Pearson, 1976]

Un système structurel $\Sigma([A],[B])$ est structurellement commandable s'il est commandable au sens numérique pour presque toutes les valeurs des paramètres.

Définition 2.8 [Lin, 1974]

Un système est dit de la forme II si $\text{rang-g}([A] [B]) < n$.

II.3.1.1. Critères d'étude

Deux critères d'études employés couramment sont rappelés:

Critère 1 [Glover et Silverman, 1976]

Un système $\Sigma([A],[B])$ est commandable en état structurellement s'il n'est ni sous la forme I ni sous la forme II.

Critère 2 [Momen, 1982 ; Raske, 1982]

Un système $\Sigma([A],[B])$ est commandable en état structurellement si:

$$\text{rang} - s \begin{bmatrix} [B] \\ [AB] \\ [A^2B] \\ \dots \\ [A^{n-1}B] \end{bmatrix} = n. \quad (2.17)$$

Nous montrons sur un exemple que ces deux critères ne sont pas équivalents puisqu'ils ne conduisent pas forcément aux mêmes conclusions.

Exemple 2.1

Considérons un système défini par ses matrices A et B ci-dessous.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Application du critère 1 : $\text{rang} -g ([A] [B]) = \text{rang} -g \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$

Application du critère 2 : $(B \ AB \ A^2B) = \begin{bmatrix} b & a_{11}b & (a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31})b \\ 0 & a_{21}b & a_{11}a_{21}b \\ 0 & a_{31}b & a_{11}a_{31}b \end{bmatrix}$

$$\text{rang} -s ([B] \ [AB] \ [A^2B]) = \text{rang} -s \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} = 3$$

Le calcul formel du déterminant est :

$$\det (B \ AB \ A^2B) = b^3 (a_{11} a_{21} a_{31} - a_{11} a_{21} a_{31}) = 0$$

Sur cet exemple, aucune paire admissible $(A,B) \in ([A],[B])$ n'est commandable. D'après le critère 1, le système n'est pas structurellement commandable, alors qu'il l'est d'après le critère 2. Ceci montre donc l'importance de définir des critères fiables, conservant le maximum d'information sur la structure du système.

II.3.2.Observabilité structurelle**Définition 2.9**

Un système structurel caractérisé par ses matrices structurelles [A] et [C] noté $\Sigma ([A],[C])$ est structurellement observable, s'il existe une réalisation admissible $(A_1, C_1) \in ([A],[C])$ qui soit observable au sens numérique.

Définition 2.10

Un système structurel $\Sigma ([A],[C])$ est structurellement observable s'il est complètement observable au sens numérique pour presque toutes les valeurs des paramètres.

Les principaux critères de commandabilité peuvent être transposés pour donner des critères d'observabilité.

II.4. Conclusion

Plusieurs critères pour l'étude de la commandabilité et de l'observabilité au sens numérique des systèmes dynamiques représentés sous forme d'équation d'état ont été rappelés. Quelques formes dites de commandabilité ou d'observabilité nous ont permis de montrer la difficulté de l'étude en terme de calcul.

Une autre approche, dite structurelle s'appuyant sur des critères semblables conduit à une analyse plus simple. Néanmoins, il apparaît clairement que celle-ci est moins fiable, en général à cause de la perte d'information sur les coefficients mis en jeu. Cette approche est satisfaisante en prenant quelques précautions.

Mais des difficultés subsistent lorsque nous voulons, par exemple, calculer une forme précise de matrice de commandabilité. Le calcul direct de colonnes indépendantes de manière structurelle semble délicat. Une autre approche, utilisant à la fois les matrices structurelles et les graphes orientés, conduit à un résultat satisfaisant. Nous rappelons dans le paragraphe suivant quelques travaux sur ce sujet.

III. Approche des graphes pour l'étude de la commandabilité / observabilité structurelles

III.1. Introduction

Le premier à avoir considéré le problème de commandabilité structurelle fut Lin (1974). Il a montré que la propriété de commandabilité structurelle d'un système monovarié représenté par la paire de matrices structurelles $([A],[B])$ peut être réduite à une propriété du graphe $G(A,B)$. Ainsi, Lin a introduit deux sous-graphes interdits (tige et bouton) comme conditions suffisantes de non commandabilité et un sous-graphe (cactus) comme condition nécessaire et suffisante de commandabilité. En 1977, Lin a introduit la commandabilité structurelle au sens minimal. Entre temps, Shields et Pearson (1976) ont étendu les résultats de Lin (1974) aux systèmes multivariés et, en particulier, ils identifient les sous-graphes interdits de Lin par une détermination purement algébrique, en introduisant la notion de rang terme d'une matrice. Glover et Silverman (1976) ont considérablement simplifié l'approche algébrique de Shields et Pearson (1976). Ils ont montré que les sous-graphes interdits de Lin représentent une propriété purement logique, qui peut être déterminée par des opérations sur la matrice booléenne. De manière indépendante, Franksen et al. (1979 II) ont montré que la commandabilité et l'observabilité structurelles peuvent être étudiées par deux tests indépendants : le test

d'accessibilité et le test du rang terme, ce qui représente le résultat le plus important dans l'étude de la commandabilité.

Dès que ce théorème essentiel de commandabilité a été émis, plusieurs auteurs ont tenté d'en simplifier les preuves. Hosoe et Matsumoto (1979) montrent que la condition d'irréductibilité dans le théorème de commandabilité structurelle seule implique que tous les modes non nuls de $([A],[B])$ sont génériquement commandables. Ils montrent également que la forme canonique de Jordan de $([A],[B])$ n'est pas affectée dans le sens générique par la variation des paramètres libres de la paire de matrices $([A],[B])$. Morari (1977, 1980) a mis qualitativement l'accent sur le rôle des modes nuls structurels et a donné une formulation du critère pour la configuration de type retour d'état.

Mayeda et Yamada (1979) ont défini la notion de commandabilité structurelle forte pour les systèmes ayant une seule entrée et en ont donné une interprétation graphique. Andersens et Hong (1982) ont étudié la commandabilité structurelle pour les systèmes dont les éléments constants ne sont pas nécessairement nuls, et les éléments libres ne sont pas nécessairement indépendants les uns des autres. Willems (1986) expose une méthode d'étude de la commandabilité / observabilité structurelle dans le cas où les paramètres non nuls des matrices structurelles peuvent varier.

Siljak (1977 a, b, 1978) a introduit la notion d'accessibilité en entrée et en sortie en compensation de la commandabilité structurelle. Il a ensuite proposé une méthode de décomposition des grands systèmes [Sezer et Siljak, 1981]. Davison (1977) a donné aux opérations booléennes une interprétation en termes de propriétés d'accessibilité d'un graphe linéaire dans le cas des systèmes composés. Hosoe (1980) propose deux méthodes simples pour déterminer génériquement les dimensions des sous-espaces commandables. Ses résultats sont appliqués à la détermination des types de systèmes multivariables à retour unité. Vardulakis (1978) a étudié le problème de détermination de la structure des matrices de base de tous les sous-espaces commandables d'une paire de matrices $[A \ B]$ sous la forme canonique commandable de Brunovski (1966) et de Luenberger (1967). Mortazavian (1982) introduit la notion de k -commandabilité / k -observabilité pour prévoir une contrepartie structurelle à la notion d'indice de commandabilité / observabilité classique. Tao et Hsia (1982) appliquent les graphes de structure à la théorie des systèmes. Corfmat et Morse (1975) ont étudié la commandabilité et l'observabilité structurelles des systèmes linéaires paramétrés. Johnston et Barton (1985) ont utilisé les techniques de l'analyse structurelle pour obtenir la réduction de modèles structurels. Maione et Turchiano (1986) ont élaboré, dans le cadre des matrices systèmes polynomiales de Rosenbrock (1970), des critères de détection de pertes de commandabilité. Georgiou et Flaudas (1990) étudient les propriétés structurelles des systèmes de grandes dimensions en vue de la synthèse de commandes.

Plusieurs algorithmes ont été proposés pour tester le critère de commandabilité structurelle. Reinschke (1981), Trave et Titli (1985), Johnston et al (1984) ont introduit des méthodes qui reposent sur la décomposition du graphe associé de la matrice d'état en

composants fortement connexes. Sezer et Siljak (1981), Pichai et al (1983) proposent une décomposition du graphe $G([A],[B])$ en composantes structurellement commandables. Burrows et Sahinkaya (1981, 1983) ont présenté un algorithme qui permet non seulement de tester le critère, mais également de spécifier le nombre d'entrées requises et leur point d'application en vue de la commande du système.

III.2.Commandabilité structurelle

III.2.1.Accessibilité

Une pré-condition de la commandabilité en état est que les variables d'entrées soient capables d'influencer toutes les variables d'état. Ce qui se traduit, en théorie des graphes, par la notion d'accessibilité.

Définition 2.11

Sur le digraphe $G(\mathcal{Z},\mathcal{E})$, un sommet état $\alpha_i \in \mathcal{Z}$ est accessible en entrée s'il existe au moins un chemin reliant ce sommet état à un sommet entrée $u \in \mathcal{Z}$.

III.2.2.Critères graphiques

Lin (1974) a proposé un critère graphique dans le cas des systèmes à une seule entrée. La matrice B est réduite au vecteur colonne b .

Théorème 2.3 [Lin, 1974]

Un système structurel $\Sigma([A],[b])$ est structurellement commandable si et seulement si le digraphe $G([A],[b])$ est couvert par un cactus (annexe 2).

L'extension aux systèmes multi-entrées a été faite par Shields et Pearson (1976), Glover et Silverman (1976), et Davison (1977) en terme de matrices algébriques. Le théorème 2.4 en est l'illustration.

Les théorèmes suivants (2.4, 2.5 et 2.6) donnent des conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité structurelle.

Un système structurel $\Sigma([A],[B])$ est structurellement commandable si et seulement si:

Théorème 2.4

Les propriétés (a) et (b) sont vérifiées :

(a) Sur le digraphe $G(\mathcal{Z},\mathcal{E})$, tous les sommets états $\alpha_i \in \mathcal{Z}$ sont accessibles en entrée, par au moins un des m sommets entrée $u \in \mathcal{Z}$.

(b) Rang-t $[A_b \ B_b] = n$ (ou rang-g $([A] \ [B]) = n$ ou rang-s $([A] \ [B]) = n$).

Théorème 2.5 [Mayeda, 1981]

Une des propriétés (a) et (b) est vérifiée :

(a) La matrice structurelle $([A] \ [B])$ est irréductible et rang-g $([A] \ [B]) = n$.

(b) Le digraphe $G([A],[B])$ est couvert par un cactus.

La première propriété du théorème 2.4 est équivalente à l'irréductibilité de $([A] \ [B])$ ou à ce que le digraphe $G([A],[B])$ soit accessible par les nœuds entrées. Elle est assez facile à vérifier ; par contre la détermination du rang-g $([A] \ [B])$ est plus difficile. Plusieurs algorithmes combinatoires existent (voir, par exemple, Ford et Fulkerson (1962), Kaufman (1968), Franksen et al (1979 I et II), Johnston et al (1984), etc...).

Pour l'étude de la commandabilité structurelle, Reinschke (1988) considère la matrice structurelle $[Q_1]$, définie en 2.18 où E est une matrice de retour d'état pleine, et son digraphe structurel associé $G([Q_1])$.

$$[Q_1] = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [E] & 0 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Il établit un critère graphique de commandabilité structurelle en utilisant la notion d'ordre d'une famille de cycles (voir annexe 2).

Définition 2.12

Une famille de cycles dans un digraphe est dite d'ordre k, si elle touche exactement k sommets état.

Théorème 2.6 [Reinschke, 1988]

Le système structurel $\Sigma([A],[B])$ est structurellement commandable si et seulement si le digraphe $G([Q_1])$ vérifie les deux conditions suivantes:

(a) Chaque sommet état $x_i \in Z$ est accessible en entrée par au moins un des m sommets entrée u_i .

(b) Il existe au moins une famille de cycles d'ordre n dans $G([Q_1])$.

Si le nombre de familles de cycles d'ordre n, dans $G([Q_1])$, est égal à 1, nous parlerons alors de commandabilité structurelle forte.

Exemple 2.2

Considérons un système structurel $\Sigma([A],[B])$ défini par les deux matrices structurelles $[A]$ et $[B]$ suivantes.

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

Ce système peut être représenté par la matrice structurelle $[Q_1]$ et son digraphe structurel $G([Q_1])$ associé (figure 2.1). Les arcs représentés en pointillé sur $G([Q_1])$ correspondant aux termes de la matrice de retour d'état E.

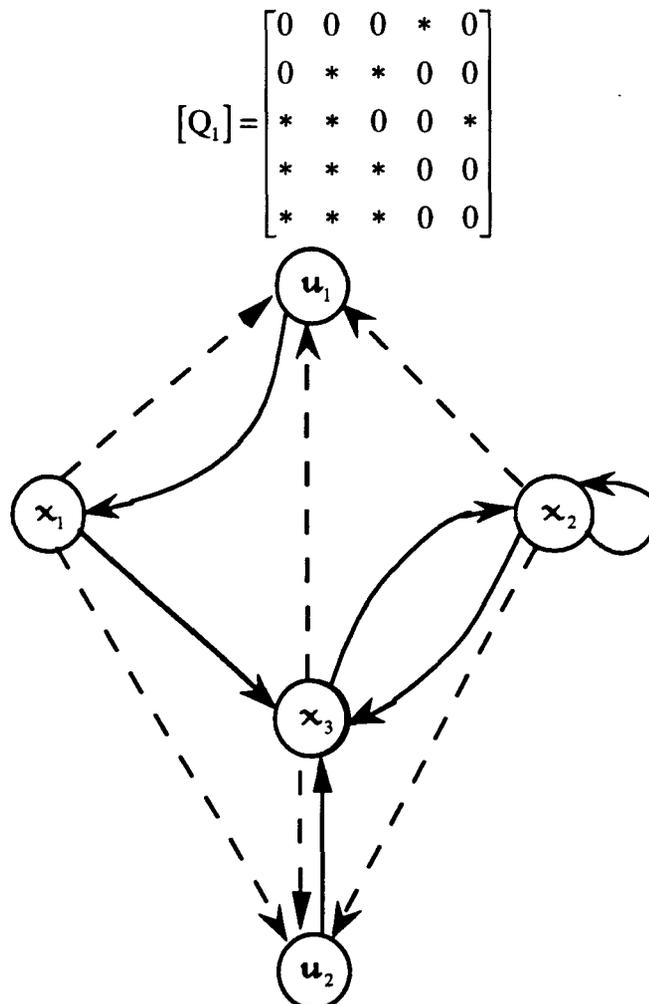


Figure 2.1 : Digraphe structurel $G([Q_1])$

La première condition d'accessibilité est assez facile à vérifier sur le digraphe $G([Q_1])$ de la figure 2.1.

Plusieurs choix de familles de cycles d'ordre 3 sont possibles, en particulier celui représenté par la figure 2.2. Donc le système est structurellement commandable en état.

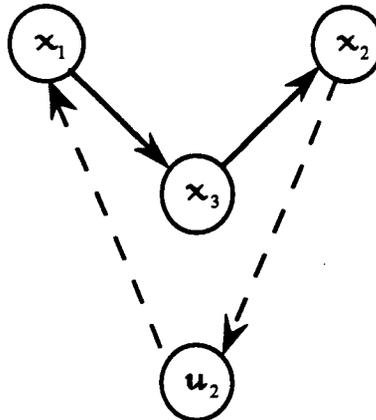


Figure 2.2 : Famille de cycles d'ordre 3

III.3. Observabilité structurelle

En utilisant le principe de dualité entre la commandabilité et l'observabilité, la notion d'état accessible en entrée sera remplacée par la notion d'état accessible en sortie et la matrice $[Q_1]$ sera relayée par la matrice $[Q_2]$ définie par l'équation (2.19) :

$$[Q_2] = \begin{bmatrix} 0 & [C] \\ [E] & [A] \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Définition 2.13

Sur le graphe $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$, un sommet état $x_i \in \mathcal{Z}$ est accessible en sortie s'il existe au moins un chemin de ce sommet état vers un sommet sortie, $y \in \mathcal{Z}$.

Un théorème pour l'étude graphique d'observabilité structurelle est rappelé.

Théorème 2.7

Le système structurel $\Sigma([A],[C])$ est structurellement observable si et seulement si le graphe $G([Q_2])$ vérifie les deux conditions (a) et (b) suivantes :

- (a) Chaque sommet état $x_i \in \mathcal{Z}$ dans $G([Q_2])$ est accessible en sortie par au moins un des p sommets sorties $y \in \mathcal{Z}$.
- (b) Il existe au moins une famille de cycles d'ordre n dans $G([Q_2])$.

Si le nombre de famille de cycles d'ordre n dans $G([Q_2])$ est égal à 1, alors le système est fortement observable.

III.4. Système structurellement complet

Définition 2.14

Un système $\Sigma([A],[B],[C],[D])$ est dit structurellement complet s'il est à la fois structurellement commandable en état et structurellement observable.

Le regroupement des deux critères graphiques de commandabilité structurelle et d'observabilité structurelle nous permet d'établir un critère graphique pour vérifier si un système est structurellement complet.

A cet effet, une nouvelle matrice $[Q_3]$ est définie équation 2.20.

$$[Q_3] = \begin{bmatrix} 0 & [C] & 0 \\ 0 & [A] & [B] \\ [E] & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Théorème 2.8

Un système $\Sigma([A],[B],[C],[D])$ est structurellement complet si et seulement si le digraphe $G([Q_3])$ vérifie les deux conditions (a) et (b) suivantes :

- (a) Chaque sommet état $x_i \in Z$ dans $G([Q_3])$ est à la fois accessible en entrée par l'un des m sommets entrées $u \in Z$ et accessible en sortie par l'un des p sommets sorties $y \in Z$.
- (b) Il existe au moins une famille de cycles d'ordre n dans $G([Q_3])$.

S'il existe une seule famille de cycles d'ordre n dans $G([Q_3])$ alors, le système est fortement complet.

III.5. Indices de commandabilité / observabilité structurelle

Mortazavian (1982) a introduit la notion de k -commandabilité (resp. k -observabilité), où k correspond au chemin le plus long entre un sommet d'entrée (resp. de sortie) et un sommet état. Il a montré que la longueur du plus long chemin élémentaire liant les sommets entrées aux sommets états peut être considérée comme l'index de commandabilité structurelle. Ensuite, il montre que cet index représente la limite inférieure de l'index de commandabilité au sens numérique.

Théorème 2.9 [Mortazavian (1982)]

L'index σ de commandabilité (resp. ν , l'index d'observabilité) du système est supérieur ou égal à la longueur $\bar{\sigma}$ (resp. $\bar{\nu}$) du plus long chemin élémentaire liant les sommets entrées (resp. sommets sorties) aux sommets états :

$$\sigma \geq \bar{\sigma} \qquad \nu \geq \bar{\nu}$$

IV. Etude de la commandabilité / observabilité des systèmes multivariables modélisés par bond graph**IV.1. Introduction**

Le bond graph est aussi un graphe, donc pratiquement certaines méthodes d'étude des systèmes dynamiques par l'approche des graphes peuvent être transposées au bond graph.

De plus, l'analyse des propriétés structurelles d'un système dynamique peut être faite directement sur le modèle bond graph à l'aide de deux notions importantes que sont la causalité et les chemins causaux.

A notre connaissance, le premier à avoir étudié les propriétés de commandabilité et d'observabilité par la théorie des bond graphs fut Rosenberg (1979). Ce dernier a présenté une méthode graphique qui consiste à remplacer sur le modèle bond graph toutes les sources d'entrée par des résistances avant d'assigner les causalités suivant la procédure habituelle [Rosenberg, 1975]. Il suffit qu'un seul élément dynamique reste en causalité dérivée pour que le système soit non commandable en état.

Suda et Hatanaka (1986) ont établi une correspondance entre la méthode de la théorie des graphes et l'analyse de la fonction de transfert du modèle bond graph. Sueur et Dauphin-Tanguy (1989) ont montré que la structure de jonction des bond graphs contient de nombreuses informations structurelles et proposent des méthodes causales pour l'étude des propriétés structurelles.

IV.2. Etude de la commandabilité / observabilité structurelle

Les critères de commandabilité et d'observabilité structurelles, présentés ci-dessous, sont une simple reprise de ceux présentés pour les graphes. Les notions d'accessibilité en entrée (resp. d'accessibilité en sortie) s'expriment sur le modèle bond graph en causalité intégrale comme l'existence d'un chemin causal entre les éléments dynamiques I et C en causalité intégrale et les sources (resp. les détecteurs).

Théorème 2.10 [Sueur et Dauphin-Tanguy, 1991]

Un système $\Sigma(A,B)$ est structurellement commandable si et seulement si les propriétés (a) et (b) sont vérifiées:

(a) Tous les éléments dynamiques en causalité intégrale sont causalement atteints par une source d'entrée.

(b) Rang-bg $(A \ B) = n$.

Le critère d'observabilité est déduit en appliquant le principe de dualité.

Théorème 2.11 [Sueur et Dauphin-Tanguy, 1991]

Un système $\Sigma(A,C)$ est structurellement observable si et seulement si les propriétés (a) et (b) sont vérifiées:

(a) Tous les éléments dynamiques en causalité intégrale sont causalement connectés à un détecteur.

(b) Rang-bg $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = n$.

Le calcul du rang-bg des matrices $(A \ B)$ et $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ est déterminé à l'aide de manipulations causales que nous rappelons.

Propriété 2.2 [Sueur et Dauphin-Tanguy, 1991]

Rang-bg $(A \ B) = n - t_s$

Rang-bg $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = n - t_d$

avec t_s (resp. t_d), nombre d'éléments dynamiques restant en causalité intégrale quand les assertions (a) et (b) sont appliquées:

(a) La causalité dérivée est assignée au modèle bond graph.

(b) La dualisation du nombre maximal de sources d'entrées (resp. détecteurs) est effectuée afin d'éliminer les causalités intégrales restantes, si possible.

Exemple 2.3

Considérons le modèle bond graph de la figure 2.3.

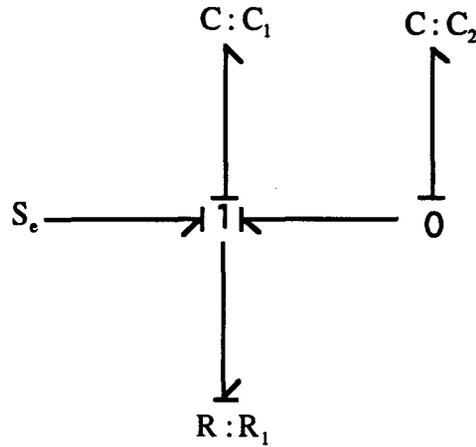


Figure 2.3 : Modèle bond graph en causalité intégrale

Les vecteurs d'état et de commande sont donnés par:

$$x = \begin{bmatrix} q_{c_1} \\ q_{c_2} \end{bmatrix} \quad u = [S_e]$$

L'équation d'état formelle associée à ce modèle bond graph est:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_1} & \frac{-1}{R_1 C_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ \frac{-1}{R_1} \end{bmatrix} u$$

Le graphe $G([A],[B])$ associé est donné par la figure 2.4.

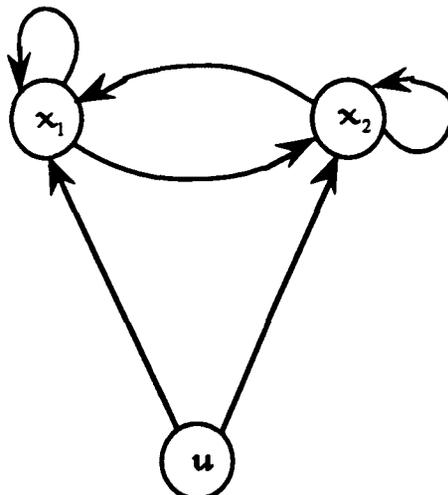


Figure 2.4 : Digraphe $G([A],[B])$

1) Application du critère classique

(a) Les deux sommets états x_1 et x_2 sont accessibles en entrée par le sommet entrée u .

(b) $\text{Rang-s } ([A] \ [B]) = \text{rang-s } \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = 2$

Donc d'après ce critère, le système est commandable structurellement.

2) Critère graphique de Reinschke

Ce critère aboutit à la même conclusion, puisque sur le digraphe structurel $G([Q_1])$ donné par la figure 2.5, nous pouvons extraire au moins une famille de cycles d'ordre 2. Un choix possible est donné dans la figure 2.6.

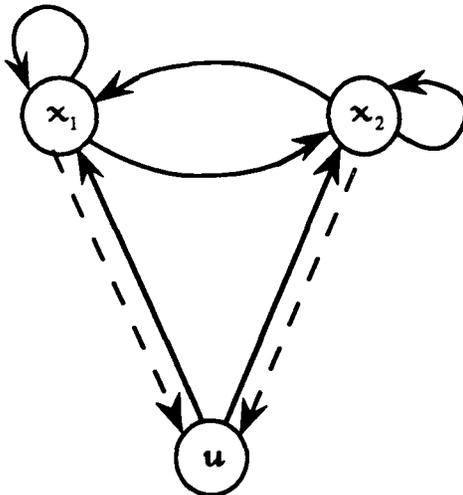


Figure 2.5 : Digraphe structurel $G([Q_1])$

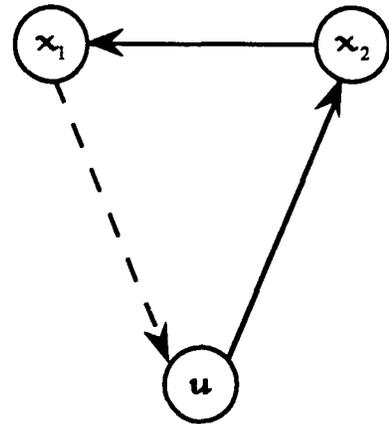


Figure 2.6 : Famille de cycles d'ordre 2

3) Critère structurel relatif au bond graph

(a) Les deux éléments dynamiques C_1 et C_2 en causalité intégrale sont accessibles à partir de la source d'effort S_e par au moins un chemin causal.

(b) Calcul de rang-bg (A B)

(i) Quand nous mettons le bond graph en causalité dérivée (figure 2.7), l'élément dynamique C_1 garde sa causalité intégrale.

(ii) La dualisation de la source d'effort S_e laisse inchangée la causalité intégrale de C_1 (figure 2.8) et entraîne une mise en causalité intégrale de C_2 .

Donc $\text{rang-bg } (A \ B) = n - t_c = 1$. Ce qui implique que le système n'est pas commandable structurellement.

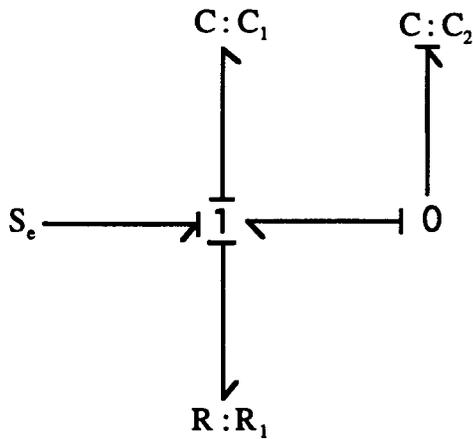


Figure 2.7 : Bond graph en causalité dérivée

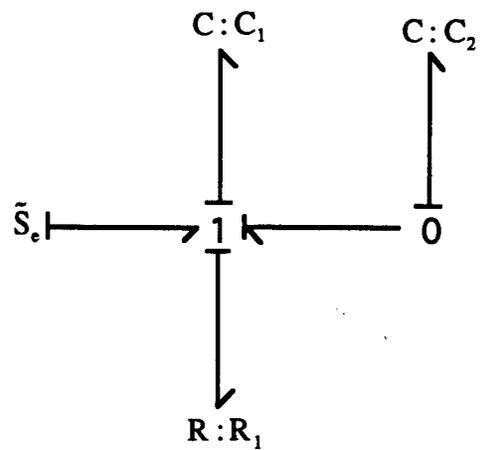


Figure 2.8 : Bond graph en causalité dérivée après dualisation de S_e

4) Rang réel de C_s

$$\left. \begin{aligned} \text{Det } C_s &= \det (B \ AB) = \det \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{R_1} & \frac{-1}{R_1^2 C_1} & \frac{1}{R_1^2 C_2} \\ -1 & \frac{1}{R_1^2 C_1} + \frac{1}{R_1^2 C_2} & \frac{1}{R_1^2 C_2} \end{array} \right) \\ \text{Det } C_s &= \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{R_1^2 C_1} + \frac{1}{R_1^2 C_2} \right) - \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{R_1^2 C_1} + \frac{1}{R_1^2 C_2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{rang } C_s = 1$$

Donc le système n'est commandable ni structurellement ni numériquement.

5) Interprétation

Le résultat structurel obtenu par l'approche bond graph est le seul qui correspond à la propriété réelle du système contrairement au critère classique et aux critères graphiques.

Ces derniers utilisent l'hypothèse d'indépendance entre les termes des matrices A et B, alors que dans l'approche bond graph, la dépendance formelle entre ces termes est prise en compte.

IV.3. Calcul formel des matrices de commandabilité / observabilité

Nous connaissons bien l'importance des matrices C_s^1 et C_s^2 (resp O_b^1 et O_b^2) de commandabilité et d'observabilité qui peuvent être utilisées comme matrices de changement de base pour dans la transformation de la matrice d'état en forme canonique. Cette dernière est très utile pour la synthèse de commande des systèmes multivariables, telle que le placement de pôles. Malheureusement le calcul formel de ces formes s'avère long et fastidieux. Cela a

motivé l'introduction d'une méthode qui se base sur la combinaison des concepts de causalité et de gain d'un chemin causal [Rahmani et al. 1992]. Elle nous permet de nous rendre compte de la signification de chaque terme qui compose les matrices.

IV.3.1. Caractéristiques d'un chemin causal

Les définitions de chemin causal et de gain de chemin causal sont rappelées en annexe 2. Nous définissons ici la longueur du chemin causal.

Définition 2.15 [Rahmani et al, 1992]

La longueur, notée L_k , d'un chemin causal, reliant un élément e_j à un élément e_i , avec e_j appartenant à $\{S_e, S_r\}$ et e_i appartenant à $\{I, C, D_e, D_r\}$, est égale au nombre k d'éléments I, C en causalité intégrale rencontrés, quand on parcourt le chemin causal de e_j vers e_i .

Dans le cas où e_i et e_j appartiennent à $\{I, C\}$, la longueur du chemin causal reliant e_j à e_i est égale à $(k+1)$ et notée L_{k+1} .

L'existence d'un élément I ou C en causalité dérivée dans le chemin causal laisse L_k inchangée.

Exemple 2.4

Supposons le modèle bond graph de la figure 2.9:

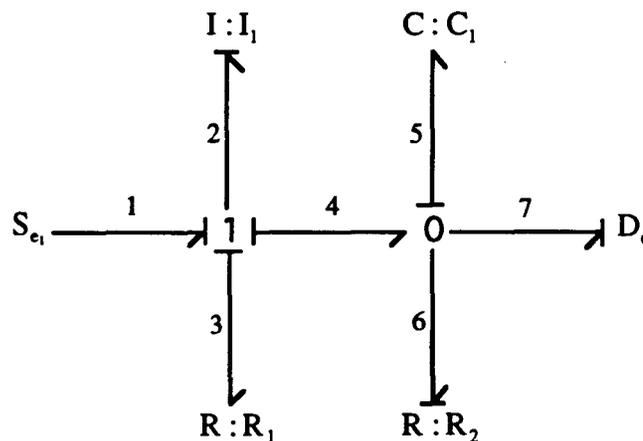


Figure 2.9 : Bond graph en causalité intégrale

Les vecteurs d'état, de commande et de sortie sont données par :

$$x = \begin{bmatrix} p_{I_1} \\ q_{C_1} \end{bmatrix} \quad u = [S_{e_1}] \quad y = [D_e]$$

- Le chemin causal entre S_e et I_1 (de S_e vers I_1), passant par les liens 1 et 2 que nous notons : $(S_e, I_1) : 1-2$, est de longueur 0.

- Les chemins causaux suivants sont de longueur 1.

* $(I_1, C_1) : 2-4-5$,

* $(S_e, I_1) : 1-2-2-3-3-2$ (le fait de passer par l' élément R_1 n'augmente pas la longueur).

- Exemples de chemins causaux de longueur 2.

* $(S_e, D_e) : 1-2-2-4-4-5-5-7$,

* $(S_e, I_1) : 1-2-2-3-3-2-2-3-3-2$.

IV.3.2.Méthodes de calcul

Le calcul formel des matrices de commandabilité et d'observabilité peut être relativement difficile du fait du calcul des puissances successives de la matrice A. Dans le cas général, où la matrice A est quelconque, le recours à des algorithmes de calcul formel s'impose.

Dans la théorie des graphes le vecteur $(A^k B_j)$ peut être interprété comme un chemin de longueur k reliant un sommet entrée u_j à des sommets états x . donc pour calculer le gain de ce vecteur il suffit de calculer le produit des poids des arcs qui composent le chemin.

Dans le même esprit, nous proposons une interprétation graphique des termes des matrices de commandabilité et d'observabilité.

Dans cette partie, nous limitons notre étude aux cas de bond graphs ayant les propriétés suivantes:

- (a) Tous les éléments dynamiques sont en causalité intégrale.
- (b) Il n'y a pas de boucles causales entre des éléments résistifs (R).

Remarque

Par abus de langage, un élément dynamique (I,C) et sa variable dynamique associée x_i seront confondus.

IV.3.2.1.Matrice de commandabilité

Dans la matrice C_s , le $i^{\text{ème}}$ terme du vecteur $(A^k B_j)$ est obtenu par :

$$(A^k B_j)(i) = \sum \tilde{G}_{L_k}(u_j, x_i) \quad \text{où } i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, m ; 0 \leq k \leq n-1 \quad (2.21)$$

où $\tilde{G}_{L_k}(u_j, x_i)$ est le terme constant du gain du chemin causal de longueur L_k entre l'entrée u_j (S_e ou S_f) et x_i (élément I,C en causalité intégrale).

La sommation s'explique par le fait que l'on tient compte de l'éventuelle existence de plusieurs chemins causaux entre u_j et x_i [Rahmani et Dauphin-Tanguy, 1992].

IV.3.2.2. Matrice d'observabilité

Le même principe est utilisé pour le calcul de la matrice d'observabilité.

Dans la matrice O_b le $i^{\text{ème}}$ terme du vecteur $(C_1 A^k)$ est obtenu par :

$$(C_r A^k)(i) = \left[\sum \tilde{G}_{L_k}(x_i, y_r) \right] \times \tilde{g}(x_i) \quad \text{où } i = 1, \dots, n; r = 1, \dots, p; 0 \leq k \leq n-1 \quad (2.22)$$

avec $\tilde{G}_{L_k}(x_i, y_r)$, le terme constant du gain du chemin causal de longueur L_k entre un élément I,C en causalité intégrale associé à x_i et une sortie (D_e ou D_f) associée à y_r [Rahmani et Dauphin-Tanguy, 1992].

Exemple 2.5

Soit le modèle bond graph représenté par la figure 2.9, avec $\text{Dim } x = 2$, $\text{Dim } u = \text{Dim } y = 1$.

Matrice de commandabilité

1 - Calcul de la matrice $A^0 B$: il faut trouver tous les chemins de longueur 0 entre S_e et les variables dynamiques. Un seul chemin existe entre S_e à I_1 par les liens de puissances 1 et 2 que nous notons:

$$* (S_e, I_1) : 1-2 \text{ donc } (A^0 B_1)(1) = \sum \tilde{G}_{L_0}(u_1, x_1) = \sum \tilde{G}_{L_0}(S_e, I_1) = 1.$$

2 - Calcul de la matrice AB : il s'agit de rechercher tous les chemins de longueur 1 liant S_e aux variables dynamiques.

$$* (S_e, I_1) : 1-2-2-3-3-2 \text{ donc } (AB_1)(1) = \sum \tilde{G}_{L_1}(u_1, x_1) = \sum \tilde{G}_{L_1}(S_e, I_1) = \frac{-R_1}{I_1},$$

$$* (S_e, C_1) : 1-2-2-4-5 \text{ donc } (AB_1)(2) = \sum \tilde{G}_{L_1}(u_1, x_2) = \sum \tilde{G}_{L_1}(S_e, C_1) = \frac{1}{I_1}.$$

D'où la matrice de commandabilité :

$$C_s = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-R_1}{I_1} \\ 0 & \frac{1}{I_1} \end{bmatrix}$$

Matrice d'observabilité

De la même façon, en nous fondant sur le principe de dualité, nous recherchons des chemins causaux liant les éléments dynamiques aux détecteurs.

1 - Calcul de la matrice CA^0

$$* (C_1, D_e) : 5-7 \text{ donc } (C_1 A^0)(2) = \left[\sum \tilde{G}_{L_0}(x_2, y_1) \right] \times \tilde{g}(x_2) = \left[\sum \tilde{G}_{L_0}(C_1, D_e) \right] \times \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_1}.$$

2 - Calcul de la matrice CA

$$* (I_1, D_e) : 2-4-5-5-7 \text{ donc } (C_1 A)(1) = \left[\sum \tilde{G}_{L_1}(x_1, y_1) \right] \times \tilde{g}(x_1) = \left[\sum \tilde{G}_{L_1}(I_1, D_e) \right] \times \frac{1}{I_1} = \frac{1}{I_1 C_1},$$

* $(C_1, D_e) : 5-6-6-5-5-7 \text{ donc}$

$$(C_1 A)(2) = \left[\sum \tilde{G}_{L_1}(x_2, y_1) \right] \times \tilde{g}(x_2) = \left[\sum \tilde{G}_{L_1}(C_1, D_e) \right] \times \frac{1}{C_1} = \frac{-1}{R_2 C_1^2}.$$

D'où la matrice d'observabilité :

$$O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{I_1 C_1} & \frac{-1}{R_2 C_1^2} \end{bmatrix}$$

IV.3.3. Calcul des matrices de passage

En combinant les règles de détermination formelle des matrices et les critères d'étude de la commandabilité, nous proposons le calcul des matrices de passage. Celles ci ne sont calculées que lorsque le système est commandable / observable.

Par souci de simplification, seul le calcul des matrices C_s^1 et C_s^2 est présenté, sachant que celui O_b^1 et O_b^2 s'obtient par simple dualité.

Avant de présenter les méthodes de calcul, nous rappelons quelques résultats concernant le calcul de rang de matrices particulières à l'aide de manipulations causales sur le modèle bond graph.

Proposition 2.1 [Sueur et Dauphin-Tanguy, 1991]

Le rang-bg (B) (resp. le rang-bg (C)) est égal au nombre de sources d'entrées (resp. détecteurs de sortie) qui peuvent être dualisées sur le modèle bond graph en causalité intégrale, sans introduire de conflits et en acceptant les causalités dérivées sur les éléments dynamiques.

Remarques

1) La proposition 2.1 nous permet de choisir le nombre et l'emplacement des sources et des capteurs nécessaires dans le modèle bond graph pour éviter la redondance et de garantir ainsi le bon fonctionnement du système.

2) Si rang-bg (A) = n-q, alors q sources sont suffisantes pour commander le modèle.

3) Le raisonnement se fera par rapport aux entrées puisque nous assimilerons un vecteur colonne de C_s à l'effet d'une source d'entrée par une longueur de chemin donnée.

IV.3.3.1. Calcul de C_s^1

Le calcul de cette première forme est immédiat pour un modèle bond graph en observant qu'un sous-espace commandable est associé à chaque entrée.

Hypothèse

Les sources et les détecteurs redondants sont supprimés pour ne garder que le nombre nécessaire afin d'assurer aux matrices de commande B et de sortie C un rang plein. Nous supposons que la matrice d'état est de rang n-q. Il faut donc trouver les q sources entrées nécessaires pour avoir rang-bg (A B) = n. En particulier, si rang-bg (A B_j) = n-q+1 pour $j \in \{1...m\}$, alors : rang [B_j AB_j...A^{n-q}B_j] = n-q+1. Les (n-q+1) vecteurs colonnes pour un indice j choisi, forment les (n-q+1) premiers vecteurs colonnes indépendants de C_s^1 .

Puisque q sources d'entrées sont nécessaires pour commander le modèle, nous complétons alors C_s^1 avec les (q-1) vecteurs colonnes B_k associés aux (q-1) autres sources d'entrées choisies. Le choix de l'ordre des sources d'entrée est arbitraire. C_s^1 peut ainsi s'écrire

$$C_s^1 = [B_j \ AB_j \ \dots \ A^{n-q}B_j \ B_1 \ B_2 \ \dots \ B_{j-1} \ B_{j+1} \ B_{j+2} \ \dots \ B_q] \quad (2.23)$$

Cette forme de C_i^1 sera toujours la même. A partir de la forme générale de l'équation (2.6), nous pouvons définir les valeurs caractéristiques : $v_j = n-q+1$, $v_h = 1$, $h = 1, \dots, q$ et $h \neq j$.

Nous déduisons alors une procédure pour calculer C_i^1 [Rahmani et al. 1992]. Cette procédure n'est employée que si le système $\Sigma(A,B)$ est structurellement commandable.

Procédure 2.1 (construction de C_i^1)

1 - Déterminer le nombre q de sources d'entrées nécessaires pour commander le système en calculant $\text{rang-bg}(A)$.

2 - Vérifier que le système $\Sigma(A,B)$ est structurellement commandable en état.

3 - Former C_i^1 en utilisant l'équation (2.23) et calculer les vecteurs $(A^k B_j)$ correspondants.

Remarques

1) Si $\text{rang-bg}(A \ B_j) = n-t$, alors le sous-espace d'état non commandable associé à u_j est de rang t .

2) L'intersection des sous-espaces d'état non commandables associés à chaque entrée nous donne le sous-espace d'état non commandable du système tout entier.

IV.3.3.2. Calcul de C_i^2

Dans Rahmani et al (1992), la procédure de construction de la matrice C_i^2 s'avère incomplète dans certains cas particuliers. Des étapes supplémentaires sont nécessaires pour la compléter, ce qui la rend très lourde à appliquer. Nous avons préféré exposer une nouvelle procédure avec le même principe mais se basant sur une nouvelle notion appelée "arbre causal".

Définitions 2.16

Un arbre causal est un chemin causal ayant un seul point de départ et un ou plusieurs points d'arrivée.

Définitions 2.17

Le $i^{\text{ème}}$ arbre causal entrée-état est un arbre ayant pour point de départ une entrée u_i (S_e ou S_r) et pour point d'arrivée des éléments dynamiques (I,C) en causalité intégrale dans le modèle bond graph.

Définitions 2.18

Le $i^{\text{ème}}$ arbre causal sortie-état est un arbre ayant pour point de départ une sortie y_i (D_e ou D_f) et pour point d'arrivée des variables dynamiques en causalité intégrale dans le modèle bond graph.

Définitions 2.19

4) Un arbre causal est dit simple s'il a un seul point de départ et un seul point d'arrivée (chemin causal).

Définition 2.20

La longueur d'un arbre causal est égale à la longueur du plus long chemin causal reliant le point de départ à un des points d'arrivée.

Définition 2.21

Deux arbres causaux sont différents s'ils n'ont aucun élément dynamique en commun.

Il est bien connu que les indices de commandabilité sont déduits de la matrice C_s^2 (après réarrangement des vecteurs colonnes). Nous proposons une démarche inverse qui consiste à déterminer d'abord les indices de commandabilité à partir desquelles la forme finale de la matrice C_s^2 (après réarrangement des vecteurs colonnes) sera obtenue.

Nous choisis de présenter la méthode graphique de calcul des indices de commandabilité sous forme d'une règle heuristique. Puisqu'à l'heure actuelle, nous ne disposons pas d'éléments mathématiques pour proposer une démonstration rigoureuse. Une explication graphique est néanmoins proposée.

Règle (calcul des indices de commandabilité)

L'indice de commandabilité μ_i de la commande u_i (S_e ou S_f) $i \in (1, \dots, m)$ peut être exprimé par la longueur du $i^{\text{ème}}$ arbre causal entrée-état appartenant à un ensemble de m arbres causaux entrée-état différents, il est donné par l'équation (2.24).

$$\mu_i = (L_k)_i + 1 \quad (2.24)$$

où $(L_k)_i$ est la longueur de $i^{\text{ème}}$ arbre causal entrée-état relatif à l'entrée u_i .

Interprétation graphique

En supposant que la matrice B est de rang maximal (égal à m). Cette hypothèse est facilement vérifiable par simple dualisation des sources.

Pour démontrer cette règle, nous traduisons simplement l'algorithme de Luenberger en termes de chemins causaux sur le modèle bond graph:

- Dans un modèle bond graph, à partir des m sources (supposées indépendantes et prise dans un ordre arbitraire), nous choisissons m arbres causaux différents de longueur 0 reliant ces m sources à des éléments dynamiques (étape 1 de l'algorithme).

- Les étapes 2 et 3 de l'algorithme consistent à prolonger la longueur de chaque arbre causal si celui ci reste différent des autres. (en respectant l'ordre choisi dans l'étape 1).

- Refaire la même démarche, jusqu'à ce que tous les éléments dynamiques soient atteints avec des arbres causaux différents. Dès qu'un arbre causal arrive à son extrémité (si sa longueur ne peut plus être augmentée, faute de quoi il n'est plus différent des autres), déduire l'indice de commandabilité de l'entrée de cet arbre.

La procédure 2.2, proposée ci-dessous pour construire la forme C_i^2 , n'est utilisée que si le système $\Sigma(A,B)$ est structurellement commandable en état. Nous faisons l'hypothèse que $\text{rang-bg } [B] = m$.

Procédure 2.2 (construction de C_i^2)

1 - Vérifier que les m sources d'entrées sont nécessaires pour commander le système en calculant $\text{rang-bg } [A]$.

2 - Vérifier que le système $\Sigma(A,B)$ est structurellement commandable en état.

3 - Chercher m arbres causaux différents reliant les m sources d'entrées aux n éléments dynamiques en causalité intégrale dans le modèle bond graph.

4 - Déduire les indices de commandabilité μ_i $i \in (1, \dots, m)$, donc la forme de C_i^2 .

5 - Pour chaque B_j , calculer alors les vecteurs $(A^\alpha B_j)$ pour $\alpha \in (0, \mu_j - 1)$.

Les matrices O_b^1 et O_b^2 associées à l'observabilité ne sont pas traitées à cause de la dualité entre la commandabilité et l'observabilité. Toutefois, il nous semble intéressant de présenter une propriété pour déterminer graphiquement les indices d'observabilité.

Règle (calcul des indices d'observabilité)

L'indice d'observabilité θ_i du détecteur y_i (D_e ou D_r) $i \in (1, \dots, p)$ peut être exprimé par la longueur du $i^{\text{ème}}$ arbre causal sortie-état appartenant à un ensemble de p arbres causaux sortie-état différents, il est donné par l'équation (2.25)

$$\theta_i = (L_k)_i + 1 \quad (2.25)$$

où $(L_k)_i$ est la longueur de $i^{\text{ème}}$ arbre causal relatif à l'entrée u_i .

IV.4. Conclusion

L'emploi simultané des concepts de causalité et de gain de chemin causal sur le modèle bond graph a permis d'une part de dégager des propriétés structurelles nécessaires à l'étude de la commandabilité et de l'observabilité, d'autre part de déterminer l'expression formelle des matrices associées et d'éviter des calculs complexes.

L'utilisation de la notion d'arbres causaux différents dans un modèle bond graph nous a permis de mettre en évidence le degré d'influence de chaque source d'entrée sur les variables dynamiques. Ce degré est connu sous le nom usuel d'indice de commandabilité.

IV.5. Implantation sur l'exemple d'un bras de robot flexible

Considérons le modèle bond graph d'un bras de robot à articulation flexible simplifié [Sueur, 1990] (figure 2.10).

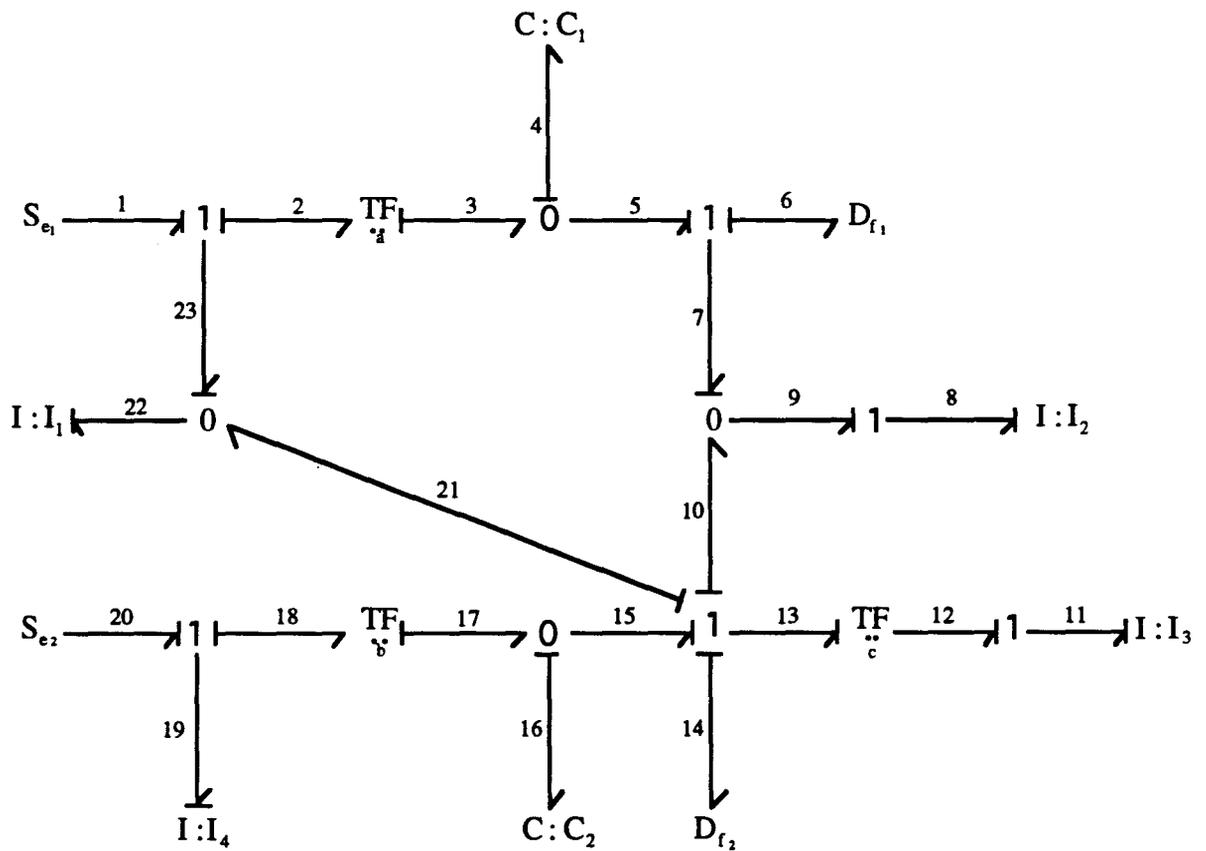


Figure 2.10 : Bond graph d'un bras de robot flexible simplifié

Ce modèle bond graph contient six éléments dynamiques (I,C) en causalité intégrale, deux sources d'effort (S_{e1}, S_{e2}) et deux détecteurs de flux (D_{f1}, D_{f2}). Donc les différentes matrices de l'équation d'état (2.1) ont des dimensions égales à 6 x 6 pour A, 2 x 6 pour B et 2 x 6 pour C. La matrice D est nulle.

Les vecteurs d'entrée et de sortie sont respectivement :

$$u = \begin{pmatrix} S_{e_1} \\ S_{e_2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} D_{f_1} \\ D_{f_{21}} \end{pmatrix}$$

Calcul de C_i^1

- Quand la causalité dérivée est imposée, deux éléments dynamiques restent en causalité intégrale (I_1, I_4). Nous pouvons alors conclure que $\text{rang-bg } [A] = 6 - 2 = 4$ et que deux sources d'entrées sont nécessaires pour commander le modèle.

- Quand la dualisation de la source d'entrée S_{e_1} (resp. S_{e_2}) est appliquée sur le modèle bond graph en causalité dérivée, l'élément I_1 (resp. I_4) conserve sa causalité intégrale ; nous concluons que $\text{rang-bg } [A \ B_1] = 5$ (resp. $\text{rang-bg } [A \ B_2] = 5$).

- Pour faire disparaître ces causalités intégrales, la dualisation simultanée des deux sources d'entrée est appliquée sur le modèle bond graph. Tous les éléments dynamiques (I,C) admettent une causalité dérivée. Nous pouvons alors conclure que $\text{rang-bg } [A \ B] = 6$. Le système est structurellement commandable en état par les deux sources.

$\text{Rang - bg } [A \ B_1] = \text{rang - bg } [A \ B_2] = 5$ donc C_i^1 peut être sous les deux formes suivantes :

$$C_i^1 = [B_1, AB_1, A^2 B_1, A^3 B_1, A^4 B_1, B_2] \quad (2.26)$$

ou

$$C_i^1 = [B_2, AB_2, A^2 B_2, A^3 B_2, A^4 B_2, B_1] \quad (2.27)$$

Pour une raison de simplicité de présentation, nous proposons l'expression de la forme (2.27). Le calcul des différents termes de cette matrice se fait avec l'équation (2.21).

$$C_s^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{abc^2(a-1)}{I_3 I_4 C_1 C_2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-bc^2(a-1)}{I_3 I_4 C_1 C_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-bc}{I_4 C_2} & 0 & bc \left[\frac{c^2(a-1)^2}{I_3 I_4 C_1 C_2} + \frac{c^2}{I_3 I_4 C_2^2} + \frac{b^2}{I_4 C_2^2} \right] & -c \\ 1 & 0 & \frac{-b^2}{I_4 C_2} & 0 & b^2 \left(\frac{c^2}{I_3 I_4 C_2^2} + \frac{b^2}{I_4 C_2^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-bc^2(a-1)}{I_3 I_4 C_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{I_4} & 0 & b \left(\frac{c^2}{I_3 I_4 C_2} + \frac{b^2}{I_4 C_2} \right) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcul de C_s^2

Le modèle est commandable en état par les deux sources : les étapes 1) et 2) sont vérifiées dans la procédure 2.1.

3) Les deux arbres causaux simples suivant, reliant les deux entrées aux variables d'état, sont différents.

$$\left[(S_{e_1}, I_1, C_1, I_2), 1-23-22-22-23-2-3-4-4-5-7-9-8 \right]$$

et

$$\left[(S_{e_2}, I_4, C_2, I_3), 20-19-19-18-17-16-16-15-13-12-11 \right]$$

Ils ont la même longueur $(L_k)_1 = (L_k)_2 = 2$.

4) Nous déduisons alors que S_{e_1} et S_{e_2} ont respectivement pour indice de commandabilité $\mu_1 = 3$ et $\mu_2 = 3$.

D'où la forme suivante de C_s^2 :

$$C_s^2 = [B_1, AB_1, A^2 B_1, B_2, AB_2, A^2 B_2] \tag{2.28}$$

5) Le calcul des différents vecteurs par l'équation (2.21), conduit à l'expression suivante de C_s^2 .

$$C_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{a}{C_1} \left[\frac{-a}{I_1} + \frac{c^2(a-1)}{I_3} \right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} \left[\frac{-a}{I_1} + \frac{c^2(a-1)}{I_3} \right] & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & \frac{-ac(a-1)}{I_1 C_1} + \frac{c^2}{I_3} \left[\frac{ac(a-1)}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right] & 0 & 0 & \frac{-bc}{I_4 C_2} \\ 0 & 0 & \frac{bc^2}{I_3 C_2} & 1 & 0 & \frac{-b^2}{I_4 C_2} \\ 0 & \frac{a}{I_1} + \frac{c^2(a-1)}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-c^2}{I_3} & 0 & 0 & \frac{b}{I_4} & 0 \end{bmatrix}$$

Tous ces résultats sont bien entendu vérifiables en utilisant les matrices A, B, C déduites formellement du modèle bond graph de la figure 2.10.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-a}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c(1-a)}{C_1} & \frac{-c}{C_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-b}{C_2} \\ \frac{a}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & \frac{c(a-1)}{I_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{I_3} & \frac{b}{I_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -c & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{I_2} & \frac{-c}{I_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{I_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V. Conclusion

Nous avons proposé des règles de détermination formelle des différentes matrices de commandabilité et d'observabilité directement à partir du modèle bond graph et sans aucun calcul. L'importance de ces méthodes est d'autant plus évidente dans le cas des systèmes de grandes dimensions, où le calcul matriciel formel est très complexe. Les manipulations causales effectuées sur le modèle bond graph nous ont permis, par une analyse graphique, d'expertiser le modèle afin de choisir le nombre et l'emplacement des sources et des capteurs nécessaires pour assurer la commandabilité et l'observabilité en état du système, et d'éviter ainsi la redondance. Une règle de détermination formelle des indices de commandabilité et d'observabilité directement à partir du modèle bond graph a été proposée. Cette règle est à la base de l'une des deux procédures de construction des matrices de passage. Ces deux matrices

ainsi obtenues sont très utiles dans les problèmes de commande et notamment celui du placement de pôles par retour d'état qui fera l'objet du chapitre suivant.

**CHAPITRE 3 : PLACEMENT DE POLES
PAR RETOUR D'ETAT**

CHAPITRE 3 : PLACEMENT DE POLES PAR RETOUR D'ETAT

I.Introduction.....	99
II.Formes canoniques de commandabilité.....	99
II.1.Cas monovisible.....	99
II.2.Cas multivariable.....	100
II.2.1.Première forme de commandabilité.....	100
II.2.1.1.A partir de C_s^1	100
II.2.1.2.A partir de C_s^2	101
II.2.2.Forme de Luenberger.....	102
II.3.Calcul formel des formes de commandabilité/observabilité.....	103
II.3.1.Détermination des coefficients du polynôme caractéristique.....	103
II.3.1.1.Règle de Mason.....	104
II.3.1.2.Règle de Reinschke.....	104
II.3.1.3.Règle bond graph.....	108
II.3.1.3.1.Définitions.....	108
II.3.1.3.2.Critère graphique.....	113
II.3.2.Discussion.....	116
III.Placement de pôles par retour d'état.....	116
III.1.Introduction.....	116
III.2.Position du problème.....	117
III.2.1.Propriétés.....	117
III.2.2.Cas monovisible.....	118
III.2.3.Cas multivariable.....	118
III.3.Approche graphique.....	121
III.3.1.Placement de pôles structurel.....	121
III.3.2.Interprétation par bond graph.....	122
III.3.2.1.Cas monovisible.....	122
a) Méthode 1 : Calcul formel du polynôme caractéristique en boucle fermée.....	122
b) Méthode 2 : Mise sous forme canonique de la matrice d'état.....	125
III.3.2.2.Cas multivariable.....	128
IV.Conclusion.....	135

I. Introduction

Une méthode importante pour le calcul des lois de commande des systèmes linéaires est celle du placement de pôles par retour d'état. Celle-ci est intimement liée aux propriétés de commandabilité en état. Plusieurs auteurs ont étudié ce problème en utilisant pour cela les différentes approches : algébrique, géométrique et graphique.

Dans ce chapitre, nous consacrons une première partie aux rappels des formes canoniques de commandabilité ainsi que des méthodes numériques utilisées habituellement pour le placement de pôles des systèmes multivariables linéaires. Ensuite, nous proposons une méthode graphique issue de la règle de Mason et basée sur la notion de familles causales pour calculer les coefficients du polynôme caractéristique d'un système modélisé par bond graph (en boucle ouverte et en boucle fermée). Ces coefficients sont à la base d'une première méthode graphique que nous proposons pour placer les pôles des systèmes monovariables. Cette méthode s'avère être difficile à appliquer dans le cas multivariable. Une seconde méthode utilisant la matrice de commandabilité monovariante C_c sera également proposée. Cette dernière sera étendue au cas multivariable.

II. Formes canoniques de commandabilité



II.1. Cas monovariante

Considérons un système $\Sigma(A,B)$ (2.1) monovariante complètement commandable et sa matrice de commandabilité C_c (3.1) associée, de rang maximal.

$$C_c = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (3.1)$$

Les n vecteurs colonne linéairement indépendants de C_c peuvent être utilisés comme matrice de changement de base, notée P , pour obtenir une représentation d'état canonique que nous rappelons ci-dessous.

Dans le cas monovariante, en opérant un changement de base défini par $x = P\bar{x}$, le système $\Sigma(A,B)$ peut être écrit sous la forme (3.2).

$$\dot{\bar{x}} = A_c \bar{x} + B_c u \quad \text{avec} \quad A_c = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad B_c = P^{-1}B \quad (3.2)$$

Les nouvelles matrices A_c et B_c s'écrivent alors sous la forme (3.3).

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

La dernière colonne de A_c contient les coefficients du polynôme caractéristique $P_A(s)$ (3.4) de la matrice A , dont les racines sont les modes du système en boucle ouverte.

$$P_A(s) = \det(sI_n - A) = a_n + a_{n-1}s + \dots + a_1s^{n-1} + s^n \quad (3.4)$$

La paire (A_c, B_c) est toujours commandable. Elle est appelée forme canonique de commandabilité monovariante. En utilisant la matrice de passage de Luenberger monovariante (présentée au paragraphe II.2.2 dans le cas multivariable), nous aboutissons à la forme transposée de A_c .

Notre but est d'étudier ces formes canoniques dans le cas multivariable. Pour cela, nous sommes amené à partitionner le système multivariable en plusieurs sous-systèmes monovariants.

II.2.Cas multivariable

Contrairement au cas monovariante, plusieurs formes de commandabilité sont proposées [Luenberger, 1967 ; Brunovski, 1970 ; ...]. Les matrices de passage $P_1 = C_1^1$ et $P_2 = C_2^2$ conduisent à la première forme de commandabilité ; la forme commandable de Luenberger (ou seconde forme de commandabilité) est obtenue après inversion de la matrice P_2 .

II.2.1.Première forme de commandabilité

II.2.1.1.A partir de C_1^1

La première forme de commandabilité est caractérisée par un changement de base $P_1 = C_1^1$ où C_1^1 est une matrice de commandabilité définie par l'équation (2.6). Les nouvelles matrices d'état A_{c_1} et de commande B_{c_1} obtenues sont définies par l'équation (3.5).

$$A_{c_1} = P_1^{-1} A P_1 \quad B_{c_1} = P_1^{-1} B \quad (3.5)$$

A titre d'exemple, considérons le cas d'un système comportant 7 variables dynamiques. L'application du changement de base de matrice $C_s^1 = [B_1, AB_1, A^2 B_1, A^3 B_1, B_2, AB_2, A^2 B_2]$ conduit à la première forme de commandabilité pour les matrices A_{c_1} et B_{c_1} qui s'écrivent alors:

$$A_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x & \vdots & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & x & \vdots & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & x & \vdots & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & \vdots & 0 & 0 & x \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad B_{c_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$$

Les termes marqués d'une croix "x" dépendent des termes des matrices A et B initiales. La matrice A_{c_1} est sous forme triangulaire supérieure.

II.2.1.2.A partir de C_s^2

La deuxième présentation dans la nouvelle base est d'abord caractérisée par le changement de base $P_2 = C_s^2$ où C_s^2 est la matrice de commandabilité définie par l'équation (2.7). Les nouvelles matrices d'état A_{c_2} et de commande B_{c_2} sont définies par l'équation (3.6).

$$A_{c_2} = P_2^{-1} A P_2 \quad B_{c_2} = P_2^{-1} B \quad (3.6)$$

Ainsi, considérons un système ayant 8 variables d'état, pour lequel la matrice C_s^2 construite (suivant l'équation (2.7)) sous la forme

$C_s^2 = [B_1, B_2, B_3, AB_1, AB_2, AB_3, A^2 B_1, A^2 B_3]$ est réordonnée sous la forme (3.7) pour donner la matrice P_2 ,

$$P_2 = [B_1, AB_1, A^2 B_1, B_2, AB_2, B_3, AB_3, A^2 B_3]. \quad (3.7)$$

Les indices de commandabilité μ_i ($i = 1, 2, 3$) sont $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 3$. Les matrices A_{c_2} et B_{c_2} sont décomposées en trois blocs de dimensions respectives 3, 2 et 3.

Elles ont la structure suivante :

$$A_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x & \vdots & 0 & x & \vdots & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & \vdots & 0 & x & \vdots & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & x & \vdots & 0 & x & \vdots & 0 & 0 & x \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & x & \vdots & 0 & x & \vdots & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & \vdots & 1 & x & \vdots & 0 & 0 & x \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & x & \vdots & 0 & x & \vdots & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & \vdots & 0 & x & \vdots & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & \vdots & 0 & x & \vdots & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad B_{c_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque

Si la matrice de commande B est de rang plein, la matrice B_{c₂} n'est composée que de "0" et de "1". Une nouvelle transformation permet d'obtenir la deuxième forme de commandabilité.

II.2.2. Forme de Luenberger

La forme de Luenberger (ou seconde forme de commandabilité) s'obtient à partir de la matrice P₂ en utilisant de nouveaux indices ϑ_i définis par l'équation (3.8).

$$\vartheta_i = \sum_{j=1}^i \mu_j \quad i \in \{1, \dots, m\} \tag{3.8}$$

Soit p_i^T, la i^{ème} ligne de P₂. La nouvelle matrice de changement de base P₃ est de la forme (3.9) et les nouvelles matrices A_L et B_L sont définies par (3.10).

$$P_3^T = [p_{\vartheta_1}, A^T p_{\vartheta_1}, \dots, A^{T(\mu_1-1)} p_{\vartheta_1}, p_{\vartheta_2}, A^T p_{\vartheta_2}, \dots, p_{\vartheta_m}, A^T p_{\vartheta_m}, \dots, A^{T(\mu_m-1)} p_{\vartheta_m}] \tag{3.9}$$

$$A_L = P_3 A P_3^{-1} \quad B_L = P_3 B \tag{3.10}$$

A partir de P₂ = C_s² (3.7), P₃ est calculée pour donner les formes de A_L et B_L (3.11).

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & & \vdots & & & & \\ x & x & x & \vdots & x & x & \vdots & x & x & x \\ \dots & \dots \\ & & & \vdots & 0 & 1 & \vdots & & & \\ x & x & x & \vdots & x & x & \vdots & x & x & x \\ \dots & \dots \\ & & & \vdots & & & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ & & & \vdots & & & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ x & x & x & \vdots & x & x & \vdots & x & x & x \end{bmatrix} \quad B_L = \begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Cette représentation est la plus utilisée dans des problèmes de synthèse de commande tels que le placement de pôles ou le découplage par des commandes de type retour d'état. D'autres formes peuvent être définies à partir de celles citées ci-dessus par simple permutation entre les colonnes des matrices de commandabilité C_s^1 et C_s^2 .

II.3.Calcul formel des formes de commandabilité/observabilité

Les différentes formes de commandabilité citées ci-dessus font apparaître les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice d'état A. Nous proposons ici une méthode, permettant de calculer ces coefficients d'une manière formelle.

II.3.1.Détermination des coefficients du polynôme caractéristique

Considérons un système $\Sigma(A,B)$ de dimension n. Le polynôme caractéristique d'une matrice A, noté $P_A(s)$, est égal au déterminant de la matrice $(sI_n - A)$. Il peut s'écrire sous la forme (3.12).

$$P_A(s) = \det(sI_n - A) = s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i} \quad (3.12)$$

Le calcul direct du déterminant de la matrice $(sI_n - A)$ est assez complexe surtout pour des systèmes de grande dimension. C'est pourquoi, des méthodes graphiques se basant sur la règle de Mason ont été introduites.

II.3.1.1. Règle de Mason

La règle de Mason permet de calculer la relation de transfert entrée-sortie (fonction de transfert) d'un système à partir de sa représentation par un graphe (graphe de fluence, digraphe, bond graph,...).

Dans le cas monovarié, la fonction de transfert est définie sous forme symbolique par la relation (3.13).

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_k T_k(s) D_k(s)}{D(s)} \quad (3.13)$$

Dans cette partie, nous rappelons uniquement l'application de cette règle pour le calcul du dénominateur $D(s)$. Ce dernier représente le polynôme caractéristique $P_A(s)$ du système en boucle ouverte.

Le déterminant du système en boucle ouverte se calcule par l'équation (3.14),

$$P_A(s) = D(s) = 1 - \sum_j B_j(s) + \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} B_j(s) B_k(s) - \sum_{\substack{j,k,l \\ j \neq k \neq l}} B_j(s) B_k(s) B_l(s) + \dots \quad (3.14)$$

où les $B_j(s)$ représentent les gains des boucles du système intervenant lorsqu'elles sont disjointes en produit 2 à 2 puis 3 à 3 (etc). $T_k(s)$ est le gain du $k^{\text{ième}}$ chemin liant la sortie y à l'entrée u .

$D_k(s)$ se calcule de la même manière que $D(s)$ avec la condition supplémentaire que les boucles retenues pour le calcul ne doivent pas toucher le $k^{\text{ième}}$ chemin liant la sortie y à l'entrée u .

II.3.1.2. Règle de Reinschke

Reinschke (1988) a présenté une méthode permettant de calculer les coefficients du polynôme caractéristique d'un système en boucle ouverte représenté par un digraphe. Cette règle est déduite de la règle de Mason. Elle se base sur la notion de familles de cycles dans le digraphe $G(A)$.

Théorème 3.1 [Reinschke, 1988]

Les coefficients a_i ($1 \leq i \leq n$) du polynôme caractéristique $P_A(s)$ (3.12) sont déterminés par la famille de cycles d'ordre i dans le digraphe $G(A)$. Chaque famille de cycles d'ordre i correspond à un terme de a_i . La valeur de la somme des poids de la famille de cycles correspondants doit être multipliée par $(-1)^d$, où d est le nombre de cycles disjoints que contient la famille de cycles.

En particulier :

a_1 résulte de tous les cycles d'ordre 1 (boucle) avec un signe (-1).

a_2 résulte de tous les cycles d'ordre 2 avec chacun un signe (-1) et de toutes les paires de cycles d'ordre 1 disjoints, chaque paire avec un signe (+1).

a_3 résulte de tous les cycles d'ordre 3 avec chacun un signe (-1), de toutes les paires de cycles disjoints d'ordre 2, associées à un cycle d'ordre 1, chaque paire a un signe (+1), et de tous les triplets de cycles d'ordre 1 disjoints, chaque triplet avec un signe (-1),..., etc.

La démonstration de ce théorème se trouve dans Reinschke (1988).

Exemple 3.1

Considérons un système représenté par sa matrice d'état A et son digraphe associé (figure 3.1).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

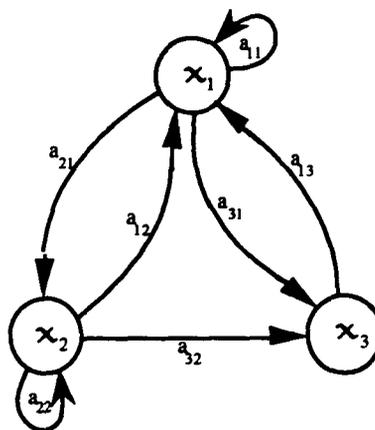


Figure 3.1 : Digraphe comportant 3 variables dynamiques

Pour calculer les coefficients a_i du polynôme caractéristique $P_A(s)$ (3.15), il suffit de dénombrer toutes les familles de cycles d'ordre 1, 2 et 3.

$$P_A(s) = \det(sI_3 - A) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \quad (3.15)$$

Pour simplifier la présentation des résultats, nous noterons $G_{(\alpha)}$ la valeur de la famille de cycles représentée par (α) ce qui donne $a_i = \sum_{\alpha} G_{(\alpha)}$.

Ainsi dans la première ligne du tableau récapitulatif (Tableau 3.1), l'expression de a_i se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} G_{(a)} &= -a_{11} \\ G_{(b)} &= -a_{22} \end{aligned} \quad \text{donc } a_1 = G_{(a)} + G_{(b)} = -a_{11} - a_{22}$$

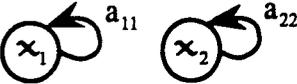
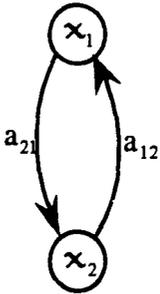
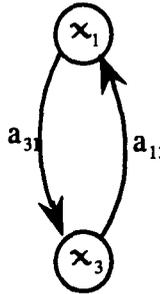
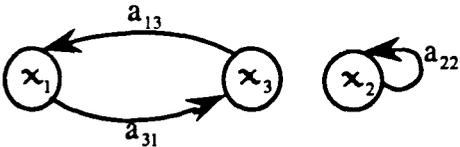
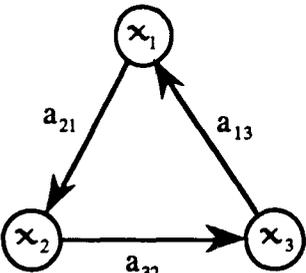
a_i	Familles de cycles correspondants	Expressions
a_1	 <p>(a) Cycle d'ordre 1 ($d = 1$)</p>  <p>(b) Cycle d'ordre 1 ($d = 1$)</p>	$G_{(a)} = -a_{11}$ $G_{(b)} = -a_{22}$ $\Rightarrow a_1 = -a_{11} - a_{22}$
a_2	 <p>(a) Famille d'ordre 2 ($d = 2$)</p>  <p>(b) Cycle d'ordre 2 ($d = 1$)</p>  <p>(c) Cycle d'ordre 2 ($d = 1$)</p>	$G_{(a)} = a_{11}a_{22}$ $G_{(b)} = -a_{12}a_{21}$ $G_{(c)} = -a_{31}a_{13}$ $\Rightarrow a_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - a_{31}a_{13}$
a_3	 <p>(a) Famille d'ordre 3 ($d = 2$)</p>  <p>(b) Cycle d'ordre 3 ($d = 1$)</p>	$G_{(a)} = a_{22}a_{13}a_{31}$ $G_{(b)} = -a_{13}a_{21}a_{32}$ $\Rightarrow a_3 = a_{22}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32}$

Tableau 3.1 : Calcul des coefficients du polynôme caractéristique

En remplaçant les a_i ($i = 1,2,3$) par leurs expressions respectives dans (3.15), nous obtenons $P_A(s)$.

$$P_A(s) = s^3 + s^2[-a_{11} - a_{22}] + s[a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31}] + [a_{13}a_{31}a_{22} - a_{13}a_{21}a_{32}]$$

En calculant directement $\det(sI_3 - A)$ par la méthode classique nous retrouvons le même résultat.

II.3.1.3. Règle bond graph

La règle de Mason appliquée aux bond graphs en causalité intégrale conduit à une expression de $P_A(s)$ exprimée en termes d'opérateur $1/s$. Ce qui n'est pas pratique pour une éventuelle utilisation directe. Pour obtenir la forme classique en s , il existe deux possibilités. La première consiste, à partir du résultat précédent et moyennant quelques transformations mathématiques, à factoriser suivant les puissances de s . La seconde consiste à utiliser le modèle bond graph dans lequel tous les éléments dynamiques (I,C) sont en causalité dérivée.

Dans les deux cas, nous sommes amené à effectuer des calculs qui peuvent être complexes pour des systèmes de grandes dimensions puisqu'il faut effectuer le produit des gains des différentes boucles disjointes d'une manière formelle, puis réarranger tous les termes pour déterminer les coefficients du polynôme. Une méthode alternative de calcul des coefficients du polynôme caractéristique d'un système modélisé par bond graph a donc été introduite. Cette méthode est déduite à la fois de la règle de Mason appliquée aux bond graphs et de la méthode proposée par Reinschke (1988) se basant sur la notion de familles de cycles causaux.

Pour cela et en analogie avec la notion de famille de cycles dans un digraphe, nous définissons la notion de famille de cycles causaux par une série de définitions relatives aux bond graphs.

II.3.1.3.1. Définitions

La notion de boucle causale a été introduite pour définir un chemin causal fermé entre deux éléments $X - Y$ de type (I,C,R). Elle contient au maximum deux éléments dynamiques.

Définition 3.1

Un cycle causal est un chemin causal fermé pouvant contenir plusieurs éléments dynamiques distincts.

Définition 3.2

Un cycle causal propre ne contient que des liens de puissance. Un cycle causal impropre contient au moins un lien d'information.

Définition 3.3

Un cycle causal est d'ordre k s'il contient k éléments dynamiques distincts (I,C) en causalité intégrale.

Définition 3.4

Le gain d'un cycle causal propre est égal au produit des gains des éléments dynamiques (I,C) et des gains des chemins causaux qui le composent.

Définition 3.5

Deux cycles causaux sont différents s'ils n'ont aucun élément dynamique en commun.

Définition 3.6

Une famille de cycles causaux est un ensemble de cycles causaux différents.

Définition 3.7

Une famille de cycles causaux est d'ordre k si elle contient k éléments dynamiques distincts (I,C) en causalité intégrale.

Définition 3.8

Le gain d'une famille de cycles causaux est égal au produit des gains des différents cycles causaux qui la composent.

Considérons le système représenté par son modèle bond graph (figure 3.2).

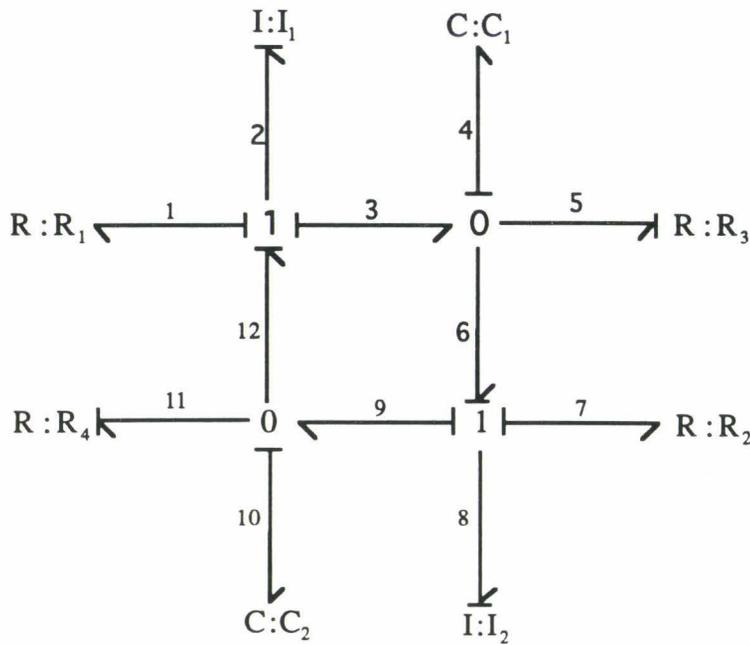


Figure 3.2 : Modèle bond graph

A partir de ce modèle bond graph, nous présentons quelques exemples de familles de cycles causaux.

Les cycles causaux d'ordre 1 sont formés par chacune des boucles causales entre un élément dynamique (I ou C) et un élément résistif R. Une boucle causale entre deux éléments dynamiques I,C forme un cycle causal d'ordre 2.

Les familles de cycles causaux d'ordre 2 contiennent les cycles causaux d'ordre 1 associés deux à deux et les cycles causaux d'ordre 2. Ces cycles sont représentés sur les figures (figure 3.3) et (figure 3.4).

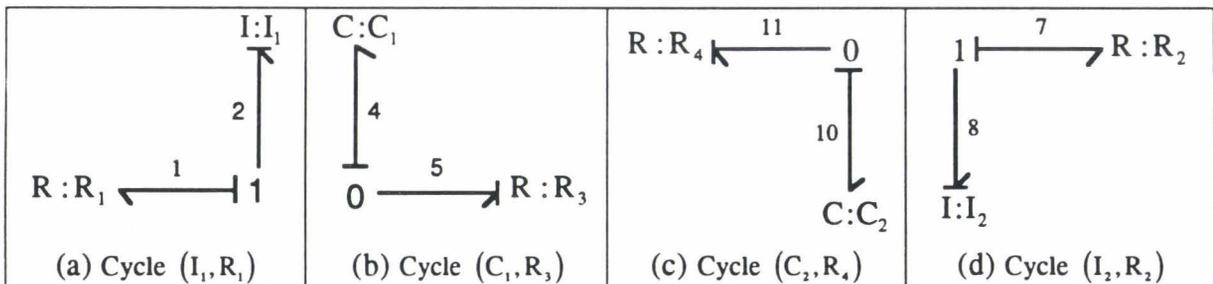


Figure 3.3 : Famille de cycles d'ordre 1

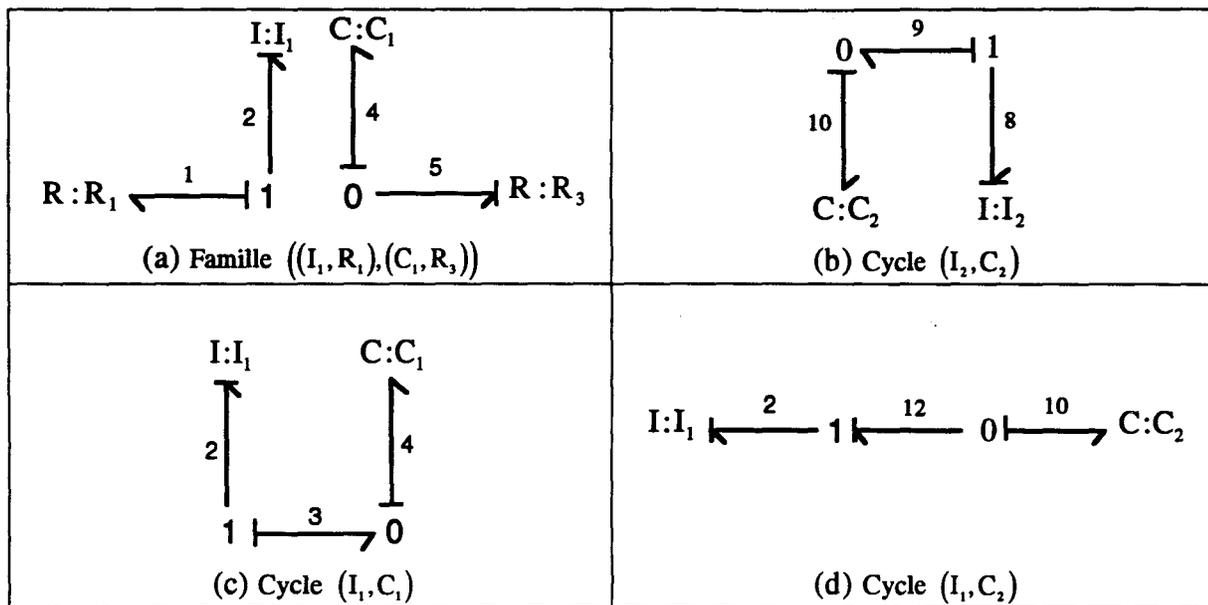


Figure 3.4 : Cycles d'ordre 2

Une famille de cycles causaux d'ordre 3 peut être obtenue soit par l'union de 3 cycles causaux différents d'ordre 1, soit par l'association de deux cycles causaux différents d'ordre 1 et 2. Elle peut également être formée par un cycle causal d'ordre 3 (dans cet exemple, il n'en existe pas). Quelques familles d'ordre 3 de l'exemple étudié sont représentées par la figure 3.5.

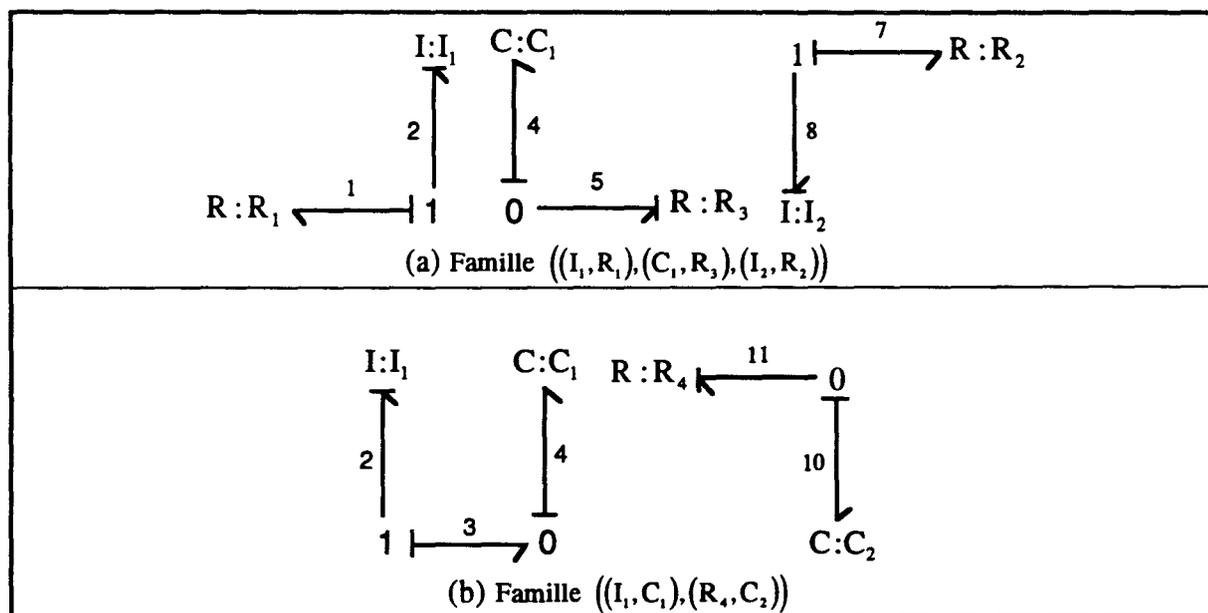


Figure 3.5 : Familles de cycles d'ordre 3

Une famille de cycles causaux d'ordre 4 peut être obtenue par les différentes combinaisons de cycles causaux différents ou par un cycle causal d'ordre 4.

La figure 3.6 représente des familles d'ordre 4.

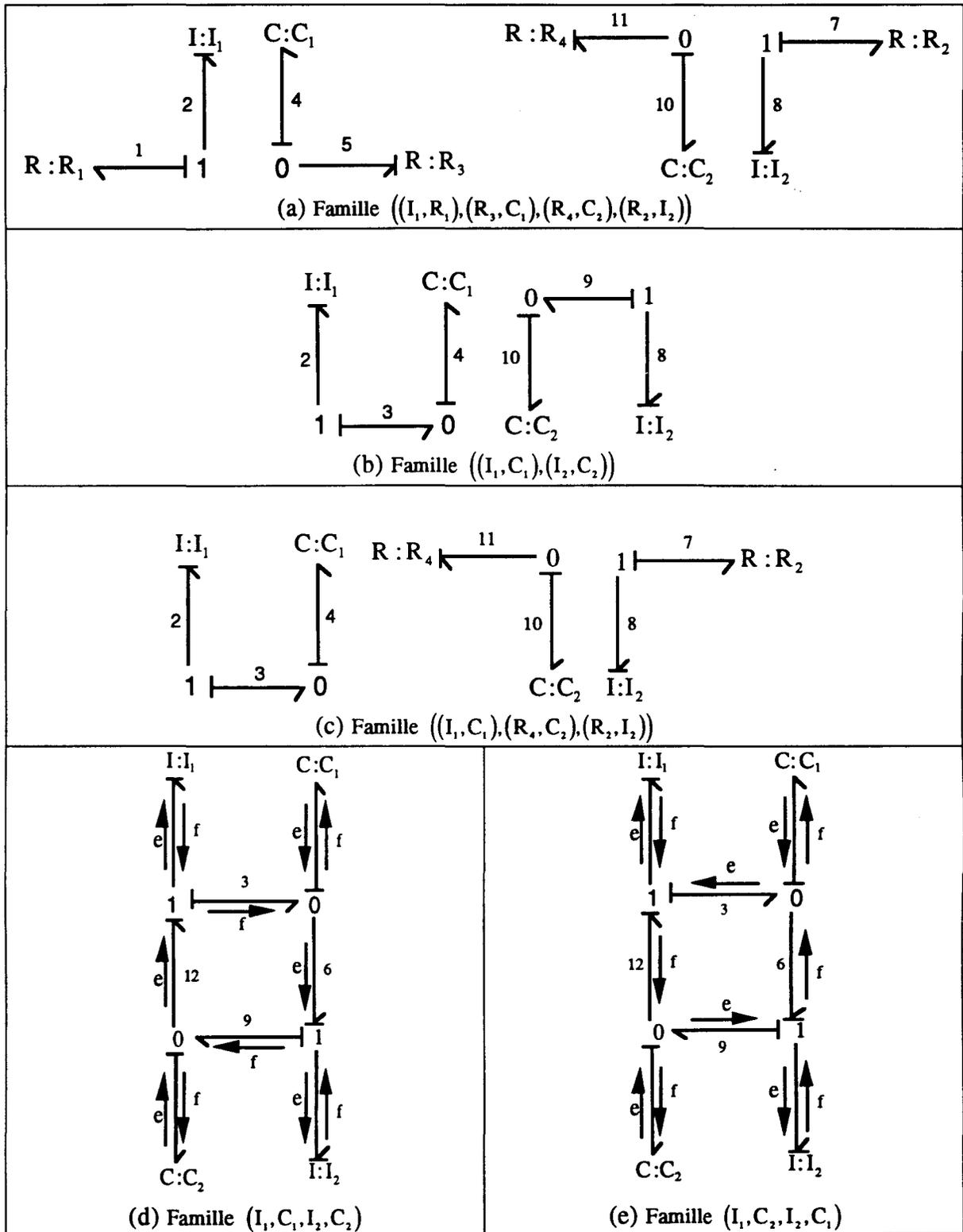


Figure 3.6 : Familles de cycles d'ordre 4

A priori, les familles de cycles causaux présentées figures 3.6 (d) et (e) sont identiques, puisqu'elles ont le même ordre et qu'elles contiennent les mêmes éléments dynamiques $I_1, I_2,$

C_1 et C_2 . En fait, elles sont considérées comme différentes car les liens causaux 3-6-9-12 sont parcourus suivant deux directions opposées, une fois suivant l'effort et l'autre suivant le flux.

II.3.1.3.2. Critère graphique

Nous pouvons alors énoncer un critère graphique équivalent au critère de Reinschke (théorème 3.1) dans lequel une famille de cycles dans un digraphe est remplacée par une famille de cycles causaux dans un bond graph.

Théorème 3.2

La valeur de chaque coefficient a_i ($1 \leq i \leq n$) du polynôme caractéristique $P_A(s)$, défini par l'équation (3.12), est égale au terme constant du gain total des familles de cycles causaux d'ordre i dans le modèle bond graph. Le gain de chaque famille de cycles causaux intervenant doit être multiplié par $(-1)^d$ si la famille est constituée de d cycles causaux différents.

Démonstration

Le théorème 3.2 est une simple reprise du théorème 3.1 [Reinschke, 1988]. Il est clair que le théorème 3.2 peut être démontré en reprenant la démonstration du théorème 3.1 et en utilisant l'analogie entre une famille de cycles dans un digraphe et une famille de cycles causaux dans un bond graph (annexe 4).

Ainsi calculons le gain d'un élément de la famille de cycles d'ordre 2, composée des deux cycles d'ordre 1 (figures 3.3 (a) et (b)). Le gain de cette famille, noté G , est égal au produit des gains des deux cycles causaux différents qui la composent.

$$G = \frac{-R_1}{I_1 s} \cdot \frac{-1}{R_3 C s} = \frac{R_1}{R_3 I_1 C s^2}$$

Seul le terme constant du gain G d'une famille de cycles causaux, noté \tilde{G} , intervient dans le calcul du polynôme caractéristique. Ainsi nous pouvons l'écrire directement comme le produit des termes constants des gains de chaque cycle.

$$\tilde{G} = \frac{-R_1}{I_1} \cdot \frac{-1}{R_3 C} = \frac{R_1}{R_3 I_1 C}$$

A titre d'exemple, considérons le modèle bond graph représenté figure 3.7.

Le bond graph a trois éléments dynamiques en causalité intégrale, donc le polynôme caractéristique recherché sera de la forme :

$$P_A(s) = \det(sI_3 - A) = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$$

Le tableau suivant (tableau 3.2) met en évidence les différents cycles causaux nécessaires au calcul du polynôme caractéristique.

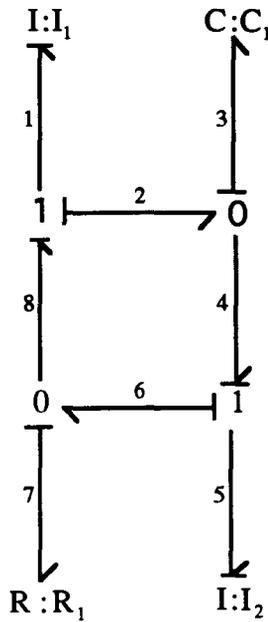


Figure 3.7 : Bond graph

a_i	Familles de cycles	Gains
a_1	$I:I_1 \xleftarrow{1} 1 \xleftarrow{8} 0 \xrightarrow{7} R:R_1$ (a) Cycle d'ordre 1 ($d = 1$)	$G_{(a)} = \frac{R_1}{I_1 s}$
	$R:R_1 \xleftarrow{7} 0 \xleftarrow{6} 1 \xrightarrow{5} I:I_2$ (b) Cycle d'ordre 1 ($d = 1$)	$G_{(b)} = \frac{R_1}{I_2 s}$
a_2	$I:I_1 \xleftarrow{1} 1 \xleftarrow{8} 0 \xrightarrow{7} R:R_1$ $R:R_1 \xleftarrow{7} 0 \xleftarrow{6} 1 \xrightarrow{5} I:I_2$ (c) Famille d'ordre 2 ($d = 2$)	$G_{(c)} = \frac{R_1^2}{I_1 I_2 s^2}$
	$1 \xleftarrow{8} 0 \xleftarrow{6} 1$ $\begin{matrix} \downarrow 1 \\ I:I_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow 7 \\ R:R_1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \downarrow 5 \\ I:I_2 \end{matrix}$ (d) Cycle d'ordre 2 ($d = 1$)	$G_{(d)} = \frac{-R_1^2}{I_1 I_2 s^2}$
	$I:I_1 \quad C:C_1 \quad C:C_1 \quad I:I_2$ $1 \quad 3 \quad 3 \quad 5$ $1 \xrightarrow{2} 0 \quad 0 \xrightarrow{4} 1$ (e) Cycle d'ordre 2 ($d = 1$) (f) Cycle d'ordre 2 ($d = 1$)	$G_{(e)} = \frac{1}{I_1 C_1 s^2}$ $G_{(f)} = \frac{1}{I_2 C_1 s^2}$

	<p>(g) Famille d'ordre 3 (d = 2)</p>	$G_{(g)} = \frac{R_1}{I_1 I_2 C_1 s^3}$
	<p>(h) Famille d'ordre 3 (d = 2)</p>	$G_{(h)} = \frac{R_1}{I_1 I_2 C_1 s^3}$
<p>a₃</p>	<p>(i) Cycles d'ordre 3 (d = 1) (j) Cycles d'ordre 3 (d = 1)</p>	$G_{(i)} = \frac{-R_1}{I_1 I_2 C_1 s^3}$ $G_{(j)} = \frac{-R_1}{I_1 I_2 C_1 s^3}$

Tableau 3.2 : Calcul des coefficients du polynôme caractéristique

La somme des différentes expressions nous permet d'obtenir le résultat suivant :

$$P_A(s) = s^3 + s^2 \left(\frac{R_1}{I_1} + \frac{R_1}{I_2} \right) + s \left(\frac{R_1^2}{I_1 I_2} + \frac{1}{I_1 C_1} - \frac{R_1^2}{I_1 I_2} + \frac{1}{I_2 C_1} \right) + \left(\frac{-R_1}{I_1 I_2 C_1} + \frac{R_1}{I_1 I_2 C_1} + \frac{-R_1}{I_1 I_2 C_1} + \frac{R_1}{I_1 I_2 C_1} \right)$$

$$P_A(s) = s^3 + s^2 \left(\frac{R_1}{I_1} + \frac{R_1}{I_2} \right) + s \left(\frac{1}{I_1 C_1} + \frac{1}{I_2 C_1} \right)$$

Il est très facile de vérifier ce résultat par calcul direct de $P_A(s)$.

Remarque

Nous remarquons que le terme constant a_3 de $P_A(s)$ s'annule formellement. Ce résultat était prévisible puisque le rang de la matrice A est dégénéré.

En règle générale, avant d'entamer le calcul des coefficients du polynôme caractéristique, il faut exploiter toutes les informations structurelles dont nous disposons, tel que le rang-bond graph de la matrice d'état A obtenu par une simple manipulation causale.

II.3.2. Discussion

Dans le cas des systèmes monovariabiles modélisés par bond graph, nous avons montré que la matrice de changement de base P peut être obtenue formellement ainsi que la forme canonique de commandabilité A_c puisque les seuls paramètres non nuls qui la composent sont les coefficients du polynôme caractéristique et les termes égaux à "1".

Par contre, dans le cas multivariable, si le calcul des matrices de changement de base P_1 et P_2 se fait sans problèmes d'une manière formelle à partir des formes C_s^1 et C_s^2 , celui des matrices inverses P_1^{-1} et P_2^{-1} est beaucoup plus difficile à réaliser formellement. De plus, les différentes formes A_{c_1} , A_{c_2} , et A_L contiennent des termes non nuls supplémentaires qui interviennent dans le calcul du polynôme caractéristique. Sachant que ces termes sont très difficiles à calculer directement. Les seules informations que nous pouvons donner formellement sont les dispositions des "1", des "0" et des coefficients du polynôme caractéristique.

III. Placement de pôles par retour d'état

III.1. Introduction

Depuis le résultat fondamental utilisant l'approche géométrique présenté par Wonham (1967), le problème de placement de pôles a reçu une grande attention. Wonham a établi que, si un système est commandable, on peut placer arbitrairement les pôles du système en boucle fermée en choisissant un retour d'état approprié.

Pour résoudre le problème de non commandabilité et de non observabilité, Pearson et Ding (1969) ont montré qu'il est possible d'obtenir un placement de pôles arbitraire en utilisant un compensateur dynamique. Ce résultat a été étendu par Brasch et Pearson (1970) qui ont montré que l'ordre du compensateur dynamique dépend des index de commandabilité et d'observabilité.

Davison (1970) a étudié le placement de pôles par retour de sortie. Il a montré que, si un système est à la fois commandable et observable, p pôles du système en boucle fermée peuvent

être placés par retour de sortie, où p est le nombre de sorties indépendantes. Ce résultat a été étendu par Davison et Chatteyée (1971) et Sridhar et Lindorff (1973) qui ont montré, que sous les mêmes conditions que celles imposées par Davison (1970), les valeurs propres assignables par retour de sortie sont égales au maximum de (m,p) , avec m , le nombre d'entrées indépendantes. Kimura (1975) a montré que pour un système complet, si $n \leq m+p-1$ alors un ensemble de pôles distincts est assignable par retour de sortie. Davison et Wang (1975) ont montré que pour un système m entrées p sorties, le nombre de pôles à placer par retour de sortie est égal à $\min(n, m+p-1)$.

Sefik et Sezer (1991) ont étudié l'analyse structurelle du problème de placement de pôles utilisant la théorie des graphes formulée auparavant par Reinschke (1984). Leur résultat donne une condition graphique suffisante du placement de pôles générique par un retour de sortie. Katayama et Ichikawa (1992) ont proposé une méthode graphique pour le placement de pôles à l'aide de la représentation d'une matrice par un graphe de transition.

Plusieurs autres auteurs ont contribué aux travaux sur le placement de pôles, nous citons à titre d'exemple Ahmari et Vacroux (1973), Bayoumi et Duffield (1977), Fahmy et O'Reilly (1983).

III.2.Position du problème

Le placement de pôles par retour d'état a pour objectif d'imposer au système un comportement dynamique souhaité par un choix approprié du retour d'état statique.

Plusieurs méthodes existent pour une telle étude suivant des approches algébriques, graphiques et géométriques. Notre propos concerne ici les deux premières. De nombreuses publications traitant la méthode géométrique sont citées en bibliographie.

III.2.1.Propriétés

1) Un système $\Sigma(A,B)$ possède la propriété de placement arbitraire de pôles sous un retour d'état statique s'il est complètement commandable en état.

2) Un système possède la propriété d'assignement arbitraire de pôles sous un retour d'état statique si pour tout polynôme réel $P(s)$, il existe une matrice réelle K (m) x (n) telle que l'équation (3.16) soit vérifiée.

$$P(s) = \det(sI_n - A - BK) \quad (3.16)$$

III.2.2.Cas monovariabile

En considérant un système $\Sigma(A,B)$ complètement commandable et un retour d'état de la forme $u = K x$, placer les pôles de $\Sigma(A,B)$ consiste à trouver un changement de base défini par $x = P \tilde{x}$ permettant de mettre le système sous la forme (3.17).

$$\dot{\tilde{x}} = (A_c + B_c \tilde{K}) \tilde{x} \tag{3.17}$$

avec $A_c + B_c \tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \tilde{k}_n - a_n & \tilde{k}_{n-1} - a_{n-1} & \dots & \dots & \dots & \tilde{k}_1 - a_1 \end{bmatrix}$

La dernière ligne de cette matrice représente les coefficients du polynôme caractéristique $P_{A_c + B_c \tilde{K}}(s)$ du système en boucle fermée (3.18),

$$P_{A_c + B_c \tilde{K}}(s) = s^n + (a_1 - \tilde{k}_1)s^{n-1} + (a_2 - \tilde{k}_2)s^{n-2} + \dots + (a_{n-1} - \tilde{k}_{n-1})s + (a_n - \tilde{k}_n). \tag{3.18}$$

Le problème de placement de pôles est équivalent à l'affectation des modes du système bouclé à des valeurs réelles choisies arbitrairement, donc à imposer les coefficients α_i du polynôme $P_{A_c + B_c \tilde{K}}(s)$ défini par l'équation (3.19).

$$P_{A_c + B_c \tilde{K}}(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n. \tag{3.19}$$

Le calcul de \tilde{K} donne

$$\tilde{K} = [a_1 - \alpha_1, a_2 - \alpha_2, \dots, a_{n-1} - \alpha_{n-1}, a_n - \alpha_n] \tag{3.20}$$

III.2.3.Cas multivariable

Pour le placement des pôles par retour d'état des systèmes multivariables, deux cas peuvent se présenter, selon que nous voulons placer les pôles en utilisant un nombre minimum de commandes ou en utilisant l'ensemble des commandes disponibles.

1^{er} cas

Si $\text{rang}(A \ B_i) = n$, le système peut être commandé par la $i^{\text{ème}}$ entrée u_i . Il est alors possible d'imposer les modes du système en appliquant le retour uniquement sur cette entrée u_i . La méthode utilisée est identique à celle appliquée dans le cas monovariable.

2^{ème} cas

L'ensemble des entrées est utilisé pour commander le système, donc le retour doit être appliqué à l'ensemble des entrées. Ce cas est le plus intéressant et le plus fréquent.

La méthode de détermination du gain du bouclage est basée sur la décomposition du système en r sous-systèmes, commandés chacun par une seule entrée.

Le sous-système Σ_i , $i = \{1, \dots, r\}$, est décrit par $\bar{x}_i \in \mathcal{R}^{n_i}$ donné par la forme (3.21) avec $\sum_{i=1}^r n_i = n$.

$$\dot{\bar{x}}_i = \bar{A}_{ii} \bar{x}_i + \sum_{j=i+1}^r \bar{A}_{ij} \bar{x}_j + \bar{B}_i u_i + \beta_i \bar{u} \quad (3.21)$$

avec $u = [u_1, u_2, \dots, u_r, \bar{u}^T]^T$ et $\bar{u} = [u_{r+1}, \dots, u_m]^T$.

Si $r = m$, alors $\beta_i = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, r\}$.

Les nouvelles matrices \bar{A} et \bar{B} , définies par (3.22), sont exprimées dans une base telle qu'elles aient la structure présentée en (3.23).

$$\bar{A} = P^{-1}AP \quad \bar{B} = P^{-1}B \quad (3.22)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \dots & \bar{A}_{1r} \\ 0 & \bar{A}_{22} & \dots & \bar{A}_{2r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \bar{A}_{rr} \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & \bar{B}_2 & \ddots & \vdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \bar{B}_r & b_r \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ si } i > j, \quad (3.24)$$

$$\tilde{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n^i & -a_{n-1}^i & -a_{n-2}^i & \dots & -a_2^i & -a_1^i \end{bmatrix} \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Dans le cas où $r = m$, cette structure correspond à la forme canonique commandable de Luenberger et les n_i correspondent aux m indices de commandabilité.

Le polynôme caractéristique, associé au $i^{\text{ème}}$ bloc diagonal, se met sous la forme (3.26).

$$P_{\tilde{A}_{ii}}(s) = a_n^i + a_{n-1}^i s + a_{n-2}^i s^2 + \dots + a_1^i s^{n_i-1} + s^{n_i} \quad (3.26)$$

Ce qui donne
$$P_A(s) = \prod_{i=1}^r P_{\tilde{A}_{ii}}(s)$$

Il suffit donc, pour imposer les divers modes de la matrice du régime libre du système bouclé, d'imposer les modes de chaque sous-système pris isolément.

Le choix du vecteur ligne \tilde{K}_i , définissant le retour $u_i = \tilde{K}_i x_i$ (ou $u_i = \tilde{K}_i \tilde{x}_i + e_i$), permet d'atteindre cet objectif.

$$\text{Posons } \tilde{K}_i = [a_n^i - \alpha_n^i, a_{n-1}^i - \alpha_{n-1}^i, \dots, a_1^i - \alpha_1^i] \quad (3.27)$$

Pour le système bouclé, une matrice de régime libre $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ de forme triangulaire supérieure par blocs dont le $i^{\text{ème}}$ bloc diagonal est sous forme compagne est obtenu. Celui ci admet le polynôme caractéristique (3.28).

$$P_{\tilde{A}_{ii} + \tilde{B}_i \tilde{K}_i}(s) = \alpha_n^i + \alpha_{n-1}^i s + \alpha_{n-2}^i s^2 + \dots + \alpha_1^i s^{n_i-1} + s^{n_i} \quad (3.28)$$

Pour le système complet, nous obtenons $u = \tilde{K}\tilde{x}$ avec \tilde{K} donnée par (3.29).

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{k}_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \tilde{k}_m \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

et le gain de retour K , à mettre en œuvre pour le système initial $u = Kx$ (ou $u = Kx+e$), s'exprime alors sous la forme (3.30).

$$K = \tilde{K} P^{-1} \quad (3.30)$$

III.3.Approche graphique

De manière équivalente aux définitions relatives à la commandabilité structurelle, la définition de placement de pôles structurel a été introduite [Sefik et Sezer, 1991]. Dans cette partie, nous proposons de nouvelles techniques pour le placement de pôles par retour d'état statique à partir du modèle bond graph.

III.3.1.Placement de pôles structurel

Définition 3.9

Un système structurel $\Sigma([A],[B],[C])$ possède des pôles qui peuvent être placés structurellement par retour d'état K s'il existe un système structurellement équivalent à Σ , dont les pôles peuvent être placés par K .

Théorème 3.3

Considérons un système structurel $\Sigma([A],[B],[C])$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (a) Le système Σ est structurellement commandable.
- (b) Il est possible de placer structurellement les pôles du système Σ .

Théorème 3.4

La commandabilité structurelle d'un système structurel $\Sigma([A],[B])$ implique le placement de pôles par retour d'état statique pour presque tous les systèmes admissibles $\Sigma(A,B) \in \Sigma([A],[B])$.

Des méthodes graphiques existent notamment celle de Sefik et Sezer (1991) ainsi que celle se basant sur les graphes de transition de Katayama et Ichikawa (1992).

III.3.2. Interprétation par bond graph

III.3.2.1. Cas monovarié

Dans le cas monovarié, nous proposons deux méthodes permettant de placer les pôles par retour d'état d'une manière formelle. La première se base sur le calcul des coefficients du polynôme caractéristique en boucle fermée et la seconde sur la mise sous forme canonique de commandabilité de la matrice d'état, à partir du calcul formel de la matrice de commandabilité C_s .

a) Méthode 1 : Calcul formel du polynôme caractéristique en boucle fermée

Soient un modèle bond graph et sa représentation d'état. Le calcul formel, à partir du modèle bond graph, des coefficients du polynôme caractéristique du système, obtenu par retour d'état statique, est possible en considérant des liens d'informations (signaux) ayant pour gain les paramètres de la matrice de retour K . Nous reprenons simplement le critère graphique (théorème 3.2) en précisant que les familles de cycles causaux utilisées pour cette méthode peuvent contenir des liens de retour entre les variables dynamiques et les sources de commande. Ces liens sont des signaux que nous représentons par des arcs sur le modèle bond graph.

L'expression du polynôme caractéristique en boucle fermée, $P_{(A+BK)}$, fait apparaître des relations non linéaires entre les coefficients k_i de la matrice K , dans le cas général où le vecteur de commande B contient peu de termes nuls. Cependant, pour les systèmes modélisés par bond graph, il s'avère que B contient peu de termes non nuls (voir généralement un seul terme non nul). Cette méthode s'applique donc avec simplicité.

Avant de présenter un exemple de calcul formel du polynôme caractéristique, il est nécessaire de montrer l'influence de la présence d'un lien d'information dans un cycle causal impropre.

Lors du calcul du gain d'un chemin causal dans un modèle bond graph (annexe 3), le gain d'un élément dynamique n'est pris en compte que si celui-ci est parcouru suivant les deux variables effort et flux.

Dans un cycle causal propre, tous les éléments dynamiques sont parcourus suivant les deux variables effort et flux.

Par contre, dans un cycle causal impropre, la présence d'un lien d'information implique l'existence d'un élément dynamique parcouru suivant une seule variable, donc son gain n'est pas pris en compte lors du calcul de celui du cycle causal.

Considérons les deux exemples de cycles causaux impropres, donnés par les figures 3.8 (a) et (b).

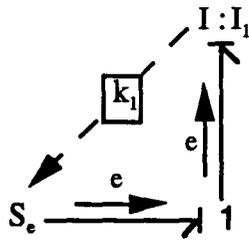


Figure 3.8 (a) : Cycle causal d'ordre 1

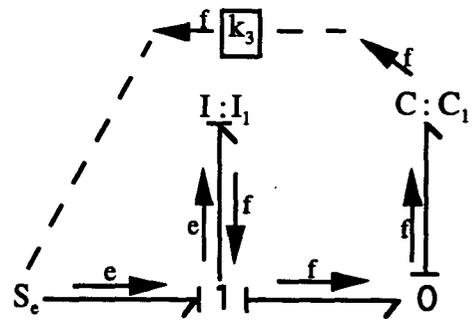


Figure 3.8 (b) : Cycle causal d'ordre 2

Pour le cycle causal de la figure 3.8 (a), I_1 est parcouru uniquement suivant l'effort, donc son gain n'est pas pris en compte lors du calcul de celui du cycle qui est égal à k_1 .

Pour le cycle causal de la figure 3.8 (b), I_1 est parcouru suivant les deux variables, alors que C_1 l'est uniquement par le flux ; donc le terme constant du gain est égal à $\frac{k_3}{I_1}$.

Exemple 3.2

Considérons le modèle bond graph de la figure 3.9 lorsque l'on applique un retour d'état de la forme $u = K x$ avec $K = [k_1, k_2, k_3]$.

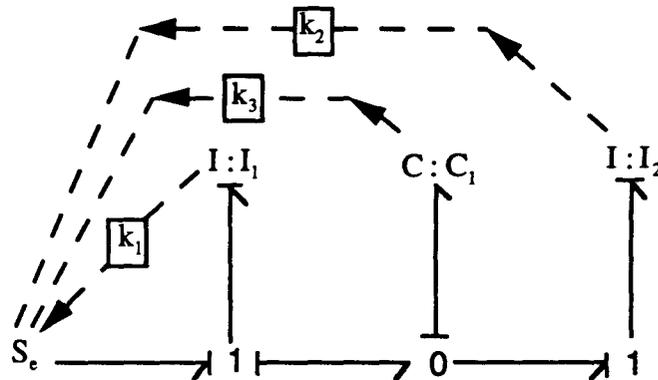


Figure 3.9 : Modèle bond graph

Les matrices d'état et de commande en boucle ouverte sont alors :

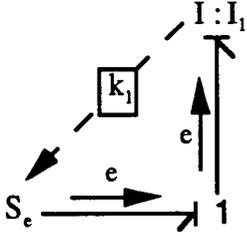
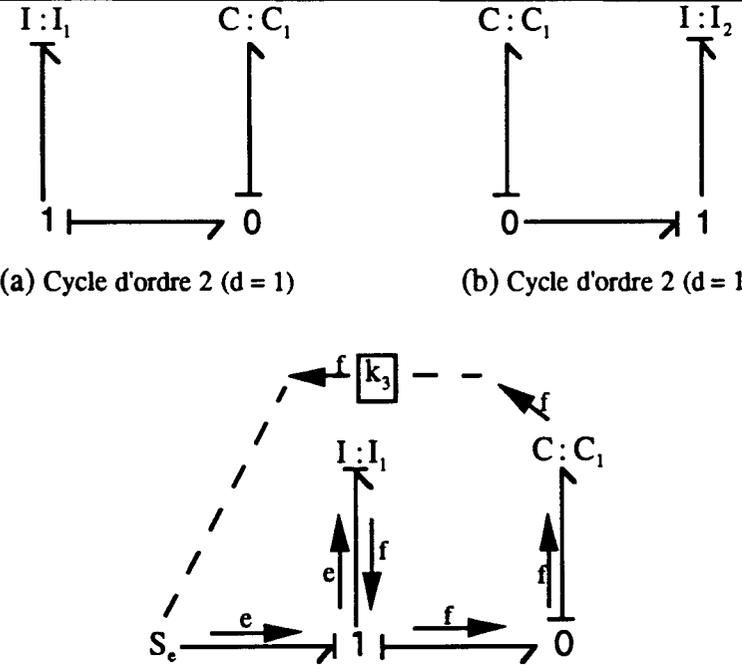
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et en boucle fermée :

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 - \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & 0 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique en boucle fermée s'écrit dans ce cas $P_{(A+BK)} = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3$.

Les arcs de retour de gain k_i sont représentés par des traits en pointillés. Nous rassemblons, dans le Tableau 3.3 suivant, l'ensemble des familles de cycles causaux permettant de calculer le polynôme caractéristique.

a_i	Familles de cycles causaux correspondants	Expressions
a_1	 <p>(a) Cycle d'ordre 1 (d = 1)</p>	$\tilde{G}_{(a)} = -k_1$ $\Rightarrow a_1 = -k_1$
a_2	 <p>(a) Cycle d'ordre 2 (d = 1) (b) Cycle d'ordre 2 (d = 1)</p> <p>(c) Cycle d'ordre 2 (d = 1)</p>	$\tilde{G}_{(a)} = \frac{1}{I_1 C_1}$ $\tilde{G}_{(b)} = \frac{1}{I_2 C_1}$ $\tilde{G}_{(c)} = \frac{-k_3}{I_1}$ $\Rightarrow a_2 = \frac{1}{I_1 C_1} + \frac{1}{I_2 C_1} + \frac{-k_3}{I_1}$

a_3	<p style="text-align: center;">(a) Famille de cycles d'ordre 3 ($d = 2$)</p>	$\tilde{G}_{(a)} = \frac{-k_1}{I_2 C_1}$
	<p style="text-align: center;">(b) Cycle d'ordre 3 ($d = 1$)</p>	$\tilde{G}_{(b)} = \frac{-k_2}{I_1 C_1}$ $\Rightarrow a_3 = \frac{-k_1}{I_2 C_1} + \frac{-k_2}{I_1 C_1}$

Tableau 3.3 : Calcul des coefficients du polynôme caractéristique

En remplaçant chaque coefficient a_i par son expression, nous obtenons le résultat (3.31).

$$P_{(A+BK)}(s) = s^3 - k_1 s^2 + \left(\frac{1}{I_1 C} + \frac{1}{I_2 C} + \frac{-k_3}{I_1} \right) s + \left(\frac{-k_1}{I_2 C} + \frac{-k_2}{I_1 C} \right) \quad (3.31)$$

En procédant par identification avec le polynôme $P(s) = s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_0$, nous obtenons les relations formelles entre les coefficients désirés α_i ($i = 1,2,3$) et les coefficients de retour k_i ($i = 1,2,3$).

$$\alpha_1 = -k_1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{I_1 C} + \frac{1}{I_2 C} + \frac{-k_3}{I_1}, \quad \alpha_3 = \frac{-k_1}{I_2 C} + \frac{-k_2}{I_1 C}$$

Il apparaît clairement que même pour un exemple simple, le calcul de la matrice K ne peut se faire de manière systématique. Nous proposons une nouvelle méthode, présentée ci-dessous, permettant de contourner cette difficulté.

b) Méthode 2 : Mise sous forme canonique de la matrice d'état

Les résultats concernant le test graphique de la commandabilité en état des systèmes multivariables modélisés par bond graph sont, bien entendu, valables en monovariable.

Par contre, le calcul formel des formes de commandabilité C_c est plus facile en monovariante, puisque les formes C_c^1 et C_c^2 sont confondues du fait de l'existence d'une seule entrée.

Théorème 3.5

Considérons un retour d'état de la forme $u = K_c \bar{x}$ avec

$$K_c = [k_{c_1}, k_{c_2}, \dots, k_{c_{n-1}}, k_{c_n}]$$

Si on note par $P_d(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$ le polynôme caractéristique dont les racines sont les modes en boucle fermée souhaités, alors les coefficients de la matrice de retour K_c sont calculés par une simple récurrence (3.32).

$$k_{c_i} = a_i - \alpha_i - \sum_{j=1}^{i-1} (k_{c_j} a_{i-j}), \quad i > 1 \text{ et } k_{c_1} = a_1 - \alpha_1 \tag{3.32}$$

Preuve

La matrice en boucle fermée A_c^* est donnée par (3.33)

$$A_c^* = (A_c + B_c K_c) = \begin{bmatrix} k_{c_1} & k_{c_2} & \dots & \dots & \dots & k_{c_n} - a_n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

dont le polynôme caractéristique est noté $P_{A_c^*}(s)$.

Il est suffisant d'identifier les termes de même puissance en s dans $P_{A_c^*}(s)$ et $P_d(s)$ pour obtenir l'équation (3.33).

Le retour d'état dans la nouvelle base $u = K_c \bar{x}$ conduit à celui du modèle initial par $u = Kx$ avec $K = K_c (C_c)^{-1}$. $(C_c)^{-1}$ ne peut pas être formellement déterminée directement à partir du modèle bond graph. Le recours à un calculateur sera imposé.

Nous proposons d'appliquer cette méthode sur le modèle bond graph de la figure 3.10. Les matrices d'état A et de commande B sont calculées.

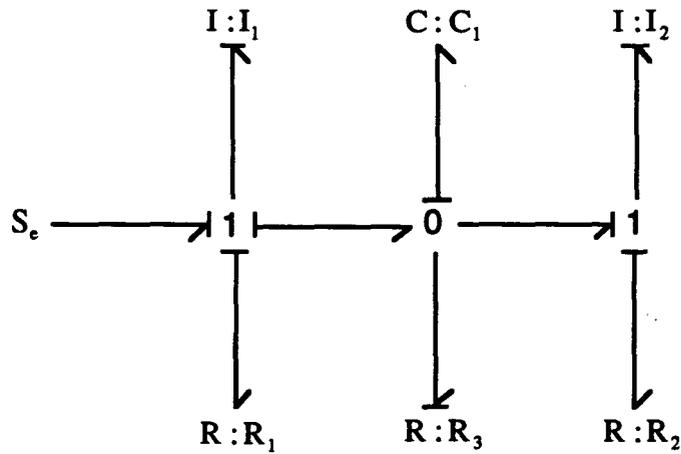


Figure 3.10 : Modèle bond graph

Par une analyse graphique nous obtenons les coefficients du polynôme caractéristique de A et nous déduisons sans calcul les matrices A_c et B_c .

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-R_1}{I_1 I_2 C_1} + \frac{-R_2}{I_1 I_2 C_1} + \frac{-R_1 R_2}{R_3 I_1 I_2 C_1} \\ 1 & 0 & \frac{-1}{I_1 C_1} + \frac{-1}{I_2 C_1} + \frac{-R_1 R_2}{I_1 I_2} + \frac{-R_1}{R_3 I_1 C_1} + \frac{-R_2}{R_3 I_2 C_1} \\ 0 & 1 & \frac{-R_1}{I_1} + \frac{-R_2}{I_2} + \frac{-1}{R_3 C_1} \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Afin de placer les pôles désirés, c'est-à-dire les coefficients α_i ($i = 1,2,3$) du polynôme caractéristique choisi, nous déterminons les expressions des coefficients k_{c_i} ($i = 1,2,3$) de la matrice $K_c = [k_{c_1}, k_{c_2}, k_{c_3}]$, en appliquant la relation de récurrence (3.34).

Pour déterminer les coefficients k_i ($i = 1,2,3$) dans l'ancienne base, c'est-à-dire à partir de l'équation d'état initiale, nous devons calculer l'inverse de la matrice de changement de base $P = C_s$. Ce calcul ne peut se faire à partir du modèle bond graph.

Pour calculer C_s , nous appliquons la procédure définie au chapitre 2 (Procédure 2.1).

$$P = C_s = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-R_1}{I_1} & \left(\frac{R_1}{I_1}\right)^2 + \frac{-1}{I_1 C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_1 C_1} \\ 0 & \frac{1}{I_1} & \frac{-R_1}{I_1^2} + \frac{-1}{R_3 I_1 C_1} \end{bmatrix}$$

La matrice $(C_s)^{-1}$ étant calculée à l'aide d'un logiciel de calcul formel sous la forme

$$p^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 + \frac{R_1}{R_3} & R_1 \\ 0 & R_1 C_1 + \frac{I_1}{R_3} & I_1 \\ 0 & I_1 C_1 & 0 \end{bmatrix},$$

la matrice de retour d'état K est alors $K = K_c P^{-1}$.

III.3.2.2.Cas multivariable

Les deux méthodes utilisées pour le cas monovariante peuvent être étendues aux cas multivariants. En ce qui concerne la première méthode, les relations non linéaires pour le calcul de la matrice K sont assez complexes et ne peuvent être résolues formellement. Cette méthode est employée avec des calculs numériques. Nous nous attardons ici sur l'extension au cas multivariable de la deuxième méthode présentée en monovariante. Pour cela, nous utilisons la forme C_s^1 .

Nous disposons de règles nous permettant de connaître le nombre d'entrées nécessaires pour commander en état un système multivariable modélisé par bond graph (chapitre 2). Tout comme pour la méthode classique de placement de pôles, deux cas sont envisageables suivant le nombre d'entrées choisies pour commander le système.

1^{er} cas

Si le système peut être commandé par la $i^{\text{ème}}$ entrée u_i , l'étude se réduit alors à celle d'un système monovariante. Il est alors possible d'imposer les pôles du système en appliquant la règle décrite dans le cas monovariante.

2^{ème} cas

Dans ce cas, l'ensemble des entrées (q) est utilisé pour commander le système modélisé par bond graph.

Supposons que $\text{rang-bg}[A] = n - q$; le modèle possède alors q modes nuls. Le polynôme caractéristique de A s'écrit donc sous la forme (3.34) :

$$P_A(s) = s^q \left[s^{n-q} + \sum_{i=1}^{n-q} a_i s^{n-q-i} \right]. \quad (3.34)$$

La matrice de commandabilité C_s^1 est alors de la forme :

$$C_s^1 = [B_1, AB_1, \dots, A^{n-1} B_1, B_2, B_3, \dots, B_q] \quad (3.35)$$

Théorème 3.6

Si nous appliquons à un modèle d'état déduit d'un modèle bond graph un changement de base défini par la matrice $P_1 = C_s^1$, alors,

1) Les nouvelles matrices d'état A_{c_1} et de commande B_{c_1} défini par l'équation (3.63)

$$A_{c_1} = (C_s^1)^{-1} A C_s^1 \quad \text{and} \quad B_{c_1} = (C_s^1)^{-1} B \quad (3.36)$$

et exprimées sous la forme (3.37) :

$$A_{c_1} = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_{n-q} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{matrix}}^{n-q+1} & \overbrace{\begin{matrix} x & x & \dots & x \\ x & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x & x & \dots & x \\ x & x & \dots & x \end{matrix}}^{q-1} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & x & \dots & x \\ 0 & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\} \begin{array}{l} n-q+1 \\ q-1 \end{array}$$

$$B_{c_1} = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}^q & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \end{array} \right] \quad (3.37)$$

avec "x" représentant les termes non définis.

2) Les termes a_i $i = 1, \dots, n-q$ sont les coefficients de $P_A(s)$ avec des signes négatif.

Preuve

Comme dans le cas monovariante, si nous considérons un modèle d'état déduit d'un modèle bond graph et un changement de base défini par la matrice $P_1 = C_s^1$, les formes A_{c_1} et B_{c_1} (3.37) sont obtenues par simple résolution formelle de l'équation (3.36).

Le système est décomposé en q sous-systèmes. Le premier de dimension $(n-q+1)$, a un mode nul et est commandé par une entrée (même forme que la matrice de commandabilité A_c en monovariante). Chacun des $(q-1)$ sous-systèmes restant de premier ordre a un mode nul et est commandé par une seule entrée.

Alors la matrice A_{c_1} (3.37) est sous forme triangulaire supérieure et comporte un bloc de dimension $(n-q+1) \times (n-q+1)$ et $(q-1)$ blocs nuls de dimension 1 avec des zéros sur la diagonale.

Il suffit alors pour placer les pôles du système tout entier d'appliquer la règle décrite dans le cas monovarié, pour placer les pôles contenus dans le premier bloc de dimension $(n-q+1)$ avec la première entrée, puisque les autres modes contenus dans les $(q-1)$ blocs restants sont placés par les autres $(q-1)$ entrées.

Théorème 3.7

Considérons la matrice de retour d'état K_c définie par (3.38).

$$K_c = \begin{bmatrix} k_{c_{1x1}} & k_{c_{1x2}} & \dots & k_{c_{1x(n-q+1)}} & k_{c_{1x(n-q+2)}} & \dots & k_{c_{1xn}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_{c_{2x(n-q+2)}} & \dots & k_{c_{2xn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & k_{c_{qxn}} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Si on note par $P_d(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$ le polynôme caractéristique, alors les coefficients de la matrice de retour d'état K_c sont défini de la manière suivante :

- i) $K_{c_{1xj}}$ avec $j = 1, \dots, n-q+1$ sont déterminés en utilisant l'équation (3.32).
- ii) $K_{c_{\lambda x(n-q+\lambda)}} = \alpha_{(n-q+\lambda)}$ avec $\lambda = 2, \dots, q$
- iii) Les coefficients K_c restant non définis ni en i) ni en ii) ne sont pas utilisé dans le problème de placement de pôles.

Preuve

La forme particulière de cette matrice est imposée par la forme des matrices A_{c_1} et B_{c_1} (forme triangulaire supérieure).

Le résultat est obtenu directement par un calcul formel après détermination de la matrice d'état en boucle fermée $A_{c_1}^* = (A_{c_1} + B_{c_1} K_c)$ et de l'identification des différents coefficients dans $P_{A_{c_1}^*}(s)$ et $P_d(s)$ comme dans le cas SISO.

Les coefficients de la matrice de retour d'état initiale K sont définis utilisant l'équation (3.39).

$$K = K_c (C_1^*)^{-1} \quad (3.39).$$

Ainsi, considérons le modèle bond graph de la figure 3.11, d'ordre $n = 5$ (5 éléments I,C en causalité intégrale).

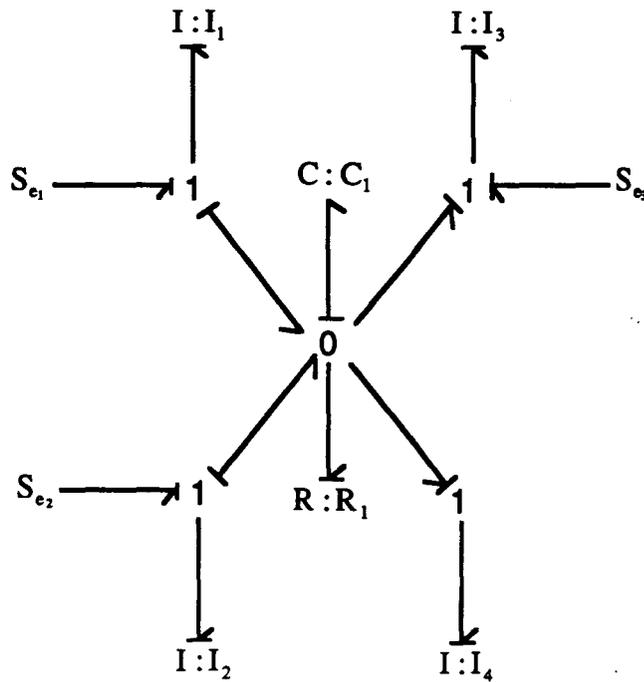


Figure 3.11 : Bond graph en causalité intégrale

Lorsque nous imposons au modèle une causalité dérivée (figure 3.12), les éléments dynamiques I_1 , I_2 et I_3 conservent la causalité intégrale, donc $\text{rang} - \text{bg}[A] = n - 3 = 2$.

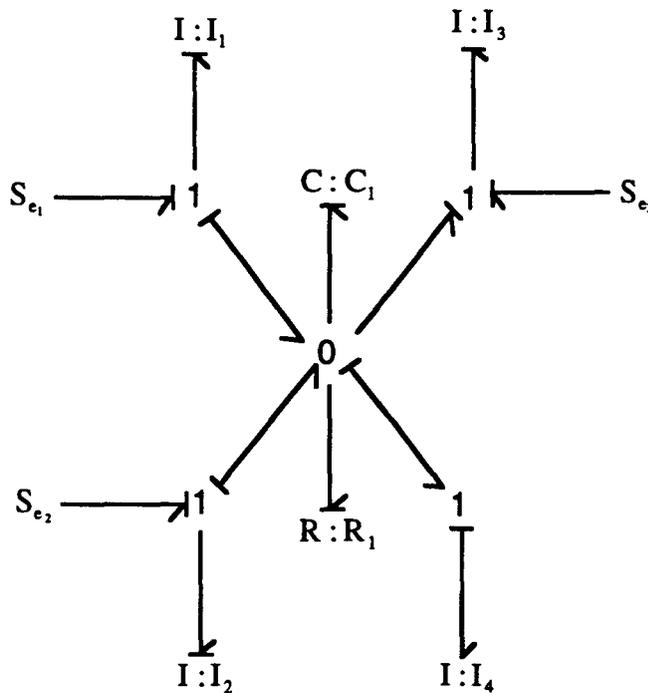


Figure 3.12 : Bond graph en causalité dérivée

La dualisation séparée de chacune des sources permet de faire passer en causalité dérivée un des éléments restés en intégrale, ce qui s'exprime par :

$$\text{rang} - \text{bg}[A \ B_1] = 3, \text{rang} - \text{bg}[A \ B_2] = 3, \text{rang} - \text{bg}[A \ B_3] = 3.$$

La dualisation simultanée de toutes les sources permet d'imposer une causalité dérivée à tous les éléments dynamiques (figure 3.13), d'où :

$$\text{rang} - \text{bg} [A \ B_1 \ B_2 \ B_3] = 5.$$

Les trois entrées sont donc nécessaires pour commander le système.

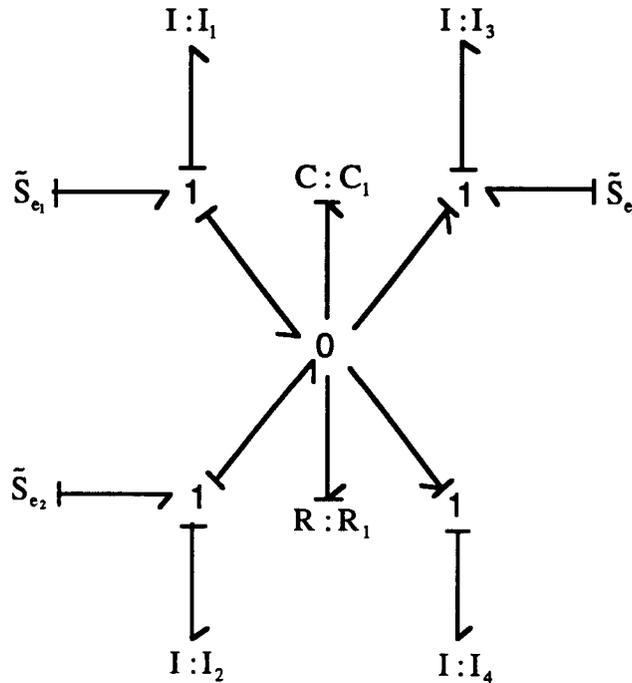


Figure 3.13 : Bond graph en causalité dérivée + sources dualisées

Suivant la forme C_s^1 , trois choix sont possibles pour former la matrice de passage P_1 .

$$P_1 = C_s^1 = [B_1 \ AB_1 \ A^2B_1 \ B_2 \ B_3] \quad (a)$$

ou

$$P_1 = C_s^1 = [B_2 \ AB_2 \ A^2B_2 \ B_1 \ B_3] \quad (b) \quad (3.40)$$

ou

$$P_1 = C_s^1 = [B_3 \ AB_3 \ A^2B_3 \ B_1 \ B_2] \quad (c)$$

Suivant l'expression de P_1 , diverses formes sont obtenues par changement de base.

Pour P_1 définie en (3.40. a), nous obtenons :

$$A_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & x & \vdots & x \\ 1 & 0 & -\left[\frac{1}{I_1 C_1} + \frac{1}{I_2 C_1} + \frac{1}{I_3 C_1} + \frac{1}{I_4 C_1}\right] & \vdots & x & \vdots & x \\ 0 & 1 & \frac{-1}{RC_1} & \vdots & x & \vdots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad B_{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

Pour P_1 définie en (3.40. b), nous obtenons $A_{c_2} = A_{c_1}$ et $B_{c_2} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant P_1 définie en (3.40.c), nous obtenons $A_{c_2} = A_{c_1}$ et $B_{c_3} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Nous choisissons ici l'expression définie en (3.40.a). En utilisant le calcul formel, nous obtenons la matrice C_s^1 (3.41)

$$C_s^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{I_1 C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{I_1 C_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_1 C_1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_1 C_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{I_1 R C_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Les matrices d'état et de commande dans la nouvelle base sont alors données par l'équation (3.42).

$$A_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & -\left[\frac{1}{I_1 C_1} + \frac{1}{I_2 C_1} + \frac{1}{I_3 C_1} + \frac{1}{I_4 C_1}\right] & \vdots & x & \vdots & x \\ 0 & 1 & \frac{-1}{R C_1} & \vdots & x & \vdots & x \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad B_{c_3} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Soit K_c la matrice de retour d'état définie par (3.43).

$$K_c = \begin{bmatrix} k_{c_{11}} & k_{c_{12}} & k_{c_{13}} & \vdots & k_{c_{14}} & \vdots & k_{c_{15}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & k_{c_{24}} & \vdots & k_{c_{25}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots & k_{c_{35}} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Etant données les formes des matrices A_{c_i} et B_{c_i} , seuls les termes $k_{c_{11}}$, $k_{c_{12}}$, $k_{c_{13}}$, $k_{c_{24}}$ et $k_{c_{35}}$ sont nécessaires au placement de pôles, les autres pouvant être quelconques.

Soient α_i les termes du polynôme caractéristique désiré ($i = 1, \dots, n$). En appliquant l'équation de récurrence (3.44), nous obtenons les valeurs formelles des coefficients de retour k_i .

$$\begin{aligned} \text{i) } k_{c_{11}} &= a_1 - \alpha_1 \\ k_{c_{12}} &= a_2 - \alpha_2 - a_1 k_{c_{11}} \\ k_{c_{13}} &= a_3 - \alpha_3 - a_2 k_{c_{11}} - a_1 k_{c_{12}} \\ \text{ii) } k_{c_{24}} &= \alpha_4 \\ k_{c_{35}} &= \alpha_5 \\ \text{iii) } k_{c_{14}}, k_{c_{15}} \text{ et } k_{c_{25}} &\text{ ne sont pas utilisés dans le problème de placement de pôles} \end{aligned} \quad (3.44)$$

La matrice $(C_s^1)^{-1}$ étant calculée à l'aide d'un logiciel de calcul formel sous la forme

$$(C_s^1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{I_1}{R} & I_1 \\ 0 & 0 & 0 & I_1 C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Les coefficients de la matrice de retour d'état initiale K sont alors déterminés en utilisant l'équation $K = K_c (C_s^1)^{-1}$.

IV. Conclusion

Le but de ce chapitre a été d'étudier le problème du placement de pôles par retour d'état des systèmes multivariables modélisés par bond graph. Les méthodes graphiques existant pour les systèmes modélisés par des digraphes se basent généralement sur la triangularisation de la matrice d'état A directement à partir du digraphe. Mais ces méthodes s'avèrent non utilisables pour les bond graphs à cause de la forte connexité de ces derniers.

Nous avons proposé de nouvelles méthodes, basées exclusivement sur des manipulations causales et le calcul de gains de chemins causaux à partir du modèle bond graph, nous permettant de placer les pôles formellement.

**CHAPITRE 4 : COMMANDABILITE EN
SORTIE ET DECOUPLAGE ENTREES-
SORTIES PAR RETOUR D'ETAT**

CHAPITRE 4 : COMMANDABILITE EN SORTIE ET DECOUPLAGE ENTREES- SORTIES PAR RETOUR D'ETAT

I.Introduction.....	141
II.Commandabilité en sortie et commandabilité fonctionnelle	141
II.1.Commandabilité en sortie	142
II.1.1.Définitions.....	142
II.1.2.Méthodes d'étude.....	142
II.2.Interprétation par les bond graphs.....	143
II.2.1.Calcul formel de la matrice de commandabilité en sortie.....	143
II.2.2.Analyse graphique de la commandabilité en sortie structurelle....	146
III.Commandabilité fonctionnelle et inversibilité.....	149
III.1.Commandabilité fonctionnelle.....	149
III.2.Inversibilité	150
III.2.1.Matrice de transfert	150
III.2.1.1.Calcul de la matrice de transfert	150
a) Méthode matricielle	151
b) Méthode des graphes.....	151
c) Méthode des bond graphs.....	153
III.2.1.2.Rang de la matrice de transfert.....	156
a) Rang normal	157
b) Rang normal structurel	157
c) Rang bond graph de la matrice de transfert.....	159
III.2.2.Calcul du déterminant de la matrice système	161
III.2.3.Test de l'inversibilité	165
III.3.Conclusion.....	169
IV.Découplage entrées-sorties par retour d'état	169
IV.1.Introduction.....	169
IV.2.Présentation du problème	171
IV.3.Découplage par inversion du système.....	171
IV.4.Commandabilité en sortie et découplage	171
IV.5.Approche matricielle.....	172

IV.5.1.Découplage par retour d'état statique	172
IV.5.1.2.Critère d'étude	172
IV.5.3.Découplage par compensation dynamique	173
IV.5.4.Analyse par la matrice de transfert	174
IV.6.Approche par les graphes	175
IV.6.1.Découplage structurel.....	175
IV.6.2.Méthode de couplage	175
IV.6.3.Interprétation des résultats géométriques.....	176
IV.6.4.Conclusion.....	178
IV.7.Approche par les bond graphs	178
IV.7.1.Calcul formel de la matrice de découplage	178
IV.7.1.1.Règle de calcul de B^*	178
IV.7.1.2.Règle de calcul de A^*	182
IV.7.2.Découplage par retour d'état statique	184
IV.7.3.Découplage par compensation dynamique	185

V.Conclusion..... 191

I.Introduction

Le découplage entrées-sorties par retour d'état des systèmes multivariables est un problème très étudié. Les trois approches, algébrique, géométrique et structurelle, sont employées pour les systèmes linéaires ; ces approches sont similaires mais requièrent des efforts plus ou moins importants.

Ce chapitre est scindé en trois parties.

Dans la première, nous étudions la notion de commandabilité en sortie et plus particulièrement nous présentons une méthode de calcul formel de la matrice de commandabilité en sortie. Puis, nous présentons des conditions nécessaires de commandabilité en sortie en termes de chemins causaux dans un modèle bond graph.

Dans la deuxième partie, nous considérons le problème de l'inversibilité d'un système. Une règle de calcul formel de la matrice de transfert et de son rang est proposée. Cette règle se base à la fois sur la règle de Mason et sur les chemins causaux du modèle bond graph. Enfin, une méthode de calcul formel du déterminant de la matrice système nous permet de compléter un critère graphique de test de l'inversibilité directement à partir du modèle bond graph.

Ces outils seront repris dans une troisième partie consacrée au problème de découplage par retour d'état. Nous montrerons, dans un premier temps, que contrairement à des idées reçues, la commandabilité en sortie n'est pas une condition suffisante pour le découplage par retour d'état. Après un rappel des différentes méthodes d'études existantes, algébriques et graphiques, nous présentons une analyse par bond graph. Cette analyse se base d'une part sur le critère graphique du test de l'inversibilité présenté dans la deuxième partie, et d'autre part sur l'utilisation d'un critère graphique pour vérifier la singularité de la matrice de découplage. Et pour clore le problème du découplage par retour d'état statique, nous proposons une règle de calcul formel de la matrice de découplage.

II.Commandabilité en sortie et commandabilité fonctionnelle

La notion de commandabilité en sortie a été peu étudiée dans la littérature, contrairement à la notion de commandabilité en état. La bibliographie est par conséquent assez pauvre : Kreindler et Sarachik (1964), Sinha (1977), Evans (1981).

II.1. Commandabilité en sortie

La commandabilité en sortie est définie de manière similaire à la commandabilité en état. Cette propriété permet de garantir l'existence d'une commande pour amener l'état du système d'un état initial x_0 donné à un état x_1 donné. La commandabilité en sortie consiste à amener le vecteur de sortie $y(t)$ d'une valeur initiale y_0 quelconque au temps t_0 à la valeur y_1 fixée au temps t_1 . La commandabilité en état est définie par des équations dynamiques alors que la commandabilité en sortie est définie pour la description entrées-sorties (réponse impulsionnelle) du système. La commandabilité en sortie ne nécessite ni la commandabilité en état ni l'observabilité. Ce concept a été étudié pour la première fois par Kreindler et Sarachik (1964).

II.1.1. Définitions

Nous rappelons quelques définitions relatives à la commandabilité en sortie.

Définition 4.1 [Kreindler et Sarachik, 1964]

Un système est commandable en sortie sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, si pour tous t_0 et t_1 donnés, tout vecteur de sortie pris à l'instant t_1 , $y(t_1)$ peut être obtenu en partant des considérations initiales arbitraires à $t = t_0$.

Malgré son indépendance vis à vis de la commandabilité et de l'observabilité en état, la commandabilité en sortie peut être définie à partir de ces deux notions.

Définition 4.2 [Sinha, 1977]

Un système est commandable en sortie si tous ses modes observables sont commandables en état.

Définition 4.3 [Kreindler et Sarachik, 1964]

Un système est fortement commandable en sortie s'il est commandable en sortie pour chaque entrée séparément, sinon il est faiblement commandable en sortie.

II.1.2. Méthodes d'étude

A chaque représentation entrées-sorties d'un système linéaire correspond un ou plusieurs critères permettant de conclure sur la propriété de commandabilité en sortie. Nous rappelons quelques uns de ces critères.

1) Un système défini par sa matrice de transfert $W(s)$ strictement propre est commandable en sortie si et seulement si les lignes de $W(s)$ sont linéairement indépendantes.

2) Un système linéaire stationnaire sans transfert direct $\Sigma(A,B,C)$ est commandable en sortie si et seulement si le rang de la matrice de commandabilité en sortie notée C_0 , définie par (4.1), est de rang maximal (donc égal à p).

$$C_0 = [CB \quad CAB \quad CA^2B \dots CA^{n-1}B] \quad (4.1)$$

3) Un système linéaire stationnaire avec un transfert direct $\Sigma(A,B,C,D)$ est commandable en sortie si et seulement si le rang de la matrice C_0 , définie par (4.2), est de rang maximal (donc égal à p).

$$C_0 = [D \quad CB \quad CAB \quad CA^2B \dots CA^{n-1}B] \quad (4.2)$$

Un autre critère, utilisant les notions de commandabilité en état et d'observabilité, peut être utilisé comme condition suffisante de commandabilité en sortie.

Théorème 4.1

Un système $\Sigma(A,B,C,D)$ est complètement commandable en sortie s'il est complètement commandable en état et si les lignes de la matrice de sortie C sont linéairement indépendantes.

II.2. Interprétation par les bond graphs

Les multiplications matricielles, surtout pour des systèmes de grande dimension, rendent le calcul formel de la matrice C_0 complexe. Pour éviter ces calculs, nous proposons une méthode de calcul formel basée sur la notion de chemin causal dans un modèle bond graph.

II.2.1. Calcul formel de la matrice de commandabilité en sortie

Calcul formel de C_0

La matrice D intervenant dans C_0 correspond aux chemins de longueur zéro entre les sources et les détecteurs y_j , chaque terme de la matrice $CA^k B$ est donné par l'équation (4.3) :

$$CA^k B(ji) = C_j A^k B_i = \sum \tilde{G}_{L_{k+1}}(u_i, y_j) \quad i \in \{1 \dots m\}, j \in \{1 \dots p\}, 0 \leq k \leq n-1 \quad (4.3)$$

où $\sum \tilde{G}_{L_{k+1}}(u_i, y_j)$ regroupe les termes constants des gains des chemins causaux de longueur L_{k+1} entre l'entrée u_i (S_e ou S_r) et la sortie y_j (D_e ou D_r).

Exemple 4.1

Considérons un système modélisé par le bond graph de la figure 4.1.

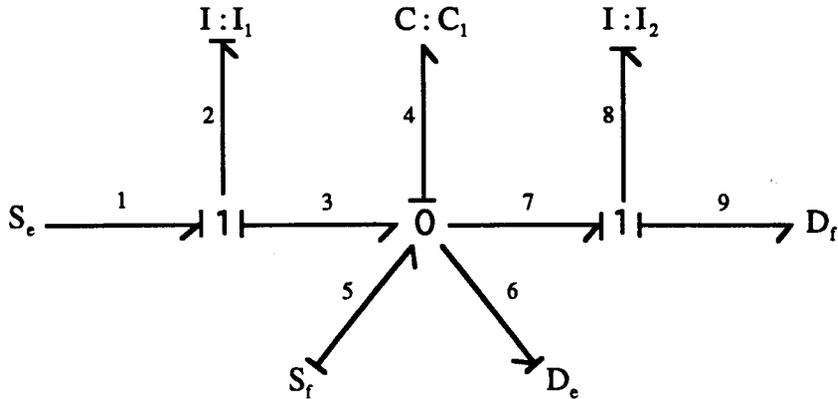


Figure 4.1 : Modèle bond graph

Les vecteurs d'entrées et de sorties sont:

$$u = \begin{pmatrix} S_e \\ S_f \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} D_e \\ D_f \end{pmatrix}$$

Le modèle bond graph comporte trois éléments dynamiques en causalité intégrale ; il n'existe pas de chemin causal de longueur 0 reliant une entrée à une sortie. La matrice de commandabilité en sortie C_0 se présente donc sous la forme $C_0 = [CB \quad CAB \quad CA^2B]$.

Le modèle bond graph contient deux sources et deux détecteurs, donc la matrice C_0 peut être décomposée de la façon suivante :

$$C_0 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} C_1 B_1 & C_1 B_2 & C_1 A B_1 & C_1 A B_2 & C_1 A^2 B_1 & C_1 A^2 B_2 \\ C_2 B_1 & C_2 B_2 & C_2 A B_1 & C_2 A B_2 & C_2 A^2 B_1 & C_2 A^2 B_2 \end{array} \right]$$

Chaque sous-matrice $CA^k B$ ($k = 0,1,2$) est composée de quatre termes représentant les liaisons causales des détecteurs D_e et D_f avec les sources d'effort S_e et de flux S_f . Ainsi, pour calculer ces termes, il suffit de déterminer tous les chemins causaux de longueur L_{k+1} pour $k = 0,1,2$ reliant une entrée à une sortie.

*** Calcul de CB**

- Il n'existe pas de chemin causal de longueur 1 reliant la source d'effort S_e au détecteur d'effort D_e , donc $C_1 B_1 = 0$.

- De la même manière, le détecteur de flux D_f n'est relié à aucune des deux sources par un chemin causal de longueur 1, donc $C_2 B_1 = C_2 B_2 = 0$.

- Par contre, il existe un chemin causal de longueur 1 entre S_f et D_e : (S_f, D_e) : 5-4-4-6
Le gain de ce chemin causal, noté $G_{(S_f, D_e)}$, est donné par :

$$G_{(S_f, D_e)} = \frac{1}{C_1 s} \text{ donc le terme constant de ce gain est } \tilde{G}_{(S_f, D_e)} = \frac{1}{C_1} \text{ d'où } C_1 B_2 = \frac{1}{C_1}.$$

* Calcul de CAB

- S_f et D_e , ainsi que S_e et D_f , ne sont reliés par aucun chemin causal de longueur 2, donc $C_1 A B_2 = C_2 A B_1 = 0$.

- Il existe un chemin causal de longueur 2 reliant S_e à D_e et un reliant S_f à D_f

$$(S_e, D_e) : 1-2-2-3-4-4-6 \quad \Rightarrow \quad G_{(S_e, D_e)} = \frac{1}{I_1 C_1 s^2} \text{ et } \tilde{G}_{(S_e, D_e)} = \frac{1}{I_1 C_1},$$

$$(S_f, D_f) : 5-4-4-7-8-8-9 \quad \Rightarrow \quad G_{(S_f, D_f)} = \frac{1}{I_2 C_1 s^2} \text{ et } \tilde{G}_{(S_f, D_f)} = \frac{1}{I_2 C_1},$$

$$\text{donc } C_1 A B_1 = \frac{1}{I_1 C_1} \text{ et } C_2 A B_2 = \frac{1}{I_2 C_1}.$$

* Calcul de CA^2B

- Il n'existe pas de chemin causal de longueur 3 reliant S_e à D_e ni S_f à D_f , donc $C_1 A^2 B_1 = C_2 A^2 B_2 = 0$.

- S_e et D_f sont reliés par un chemin causal de longueur 3.

$$(S_e, D_f) : 1-2-2-3-4-4-7-8-8-9 \quad \Rightarrow \quad G_{(S_e, D_f)} = \frac{1}{I_1 I_2 C_1 s^3} \text{ et } \tilde{G}_{(S_e, D_f)} = \frac{1}{I_1 I_2 C_1},$$

$$\text{donc } C_2 A^2 B_1 = \frac{1}{I_1 I_2 C_1}.$$

- S_f et D_e sont reliés par deux chemins causaux distincts de longueur 3.

$$(S_f, D_e)_1 : 5-4-4-3-2-2-3-4-4-6 \quad \Rightarrow \quad G_{(S_f, D_e)_1} = \frac{-1}{I_1 C_1^2 s^3} \text{ et } \tilde{G}_{(S_f, D_e)_1} = \frac{-1}{I_1 C_1^2},$$

$$(S_f, D_e)_2 : 5-4-4-7-8-8-7-4-4-6 \quad \Rightarrow \quad G_{(S_f, D_e)_2} = \frac{-1}{I_2 C_1^2 s^3} \text{ et } \tilde{G}_{(S_f, D_e)_2} = \frac{-1}{I_2 C_1^2},$$

$$\text{donc } C_1 A^2 B_2 = \frac{-1}{I_1 C_1^2} + \frac{-1}{I_2 C_1^2}.$$

Ces résultats sont regroupés pour donner l'expression de C_0 (4.4).

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} & \frac{1}{I_1 C_1} & 0 & 0 & \frac{-1}{I_1 C_1^2} + \frac{-1}{I_2 C_1^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_2 C_1} & \frac{1}{I_1 I_2 C_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Un des intérêts de cette méthode réside dans la mise en évidence immédiate des termes nuls.

II.2.2. Analyse graphique de la commandabilité en sortie structurelle

Une condition nécessaire de commandabilité en sortie est que chaque détecteur soit relié par un chemin causal à au moins une source. En effet, s'il existe une sortie y_i (D_e ou D_f) qui n'est jamais atteinte par une source (S_e ou S_f) alors tous les termes $C_i A^k B$ ($0 \leq k \leq n-1$) de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice C_0 sont nuls. Cette condition est généralement vérifiée pour les modèles bond graphs grâce à leur forte connexité.

L'application de la règle de Mason sur un modèle bond graph fait intervenir la notion de chemins disjoints ne possédant aucune jonction, aucun élément en commun, ni aucun lien parcouru en suivant la même variable. Nous introduisons ici la notion de "chemins différents" que nous utilisons pour proposer un critère graphique de commandabilité en sortie structurelle.

Définition 4.4

Dans un bond graph, un chemin causal entrée-sortie est un chemin ayant comme point de départ une d'entrée u_i (S_e ou S_f) et comme point d'arrivée une sortie y_j (D_e ou D_f).

Définition 4.5

Dans un bond graph, deux chemins causaux entrées-sorties sont dits "différents" s'ils n'ont aucun élément dynamique en commun. Chaque entrée et chaque sortie n'apparaissent qu'une seule fois dans chaque chemin.

Critère 1

Un système linéaire stationnaire à m entrées et p sorties ($p \leq m$) est structurellement commandable en sortie s'il existe un seul choix possible de p chemins entrées-sorties différents dans le modèle bond graph.

Démonstration

La matrice de commandabilité en sortie C_0 se présente sous la forme suivante

$$C_0 = \begin{bmatrix} C_1 B_1 & \dots & C_1 B_m & C_1 A B_1 & \dots & C_1 A B_m & \dots & \dots & C_1 A^{p-1} B_1 & \dots & C_1 A^{p-1} B_m \\ C_2 B_1 & \dots & C_2 B_m & C_2 A B_1 & \dots & C_2 A B_m & \dots & \dots & C_2 A^{p-1} B_1 & \dots & C_2 A^{p-1} B_m \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_p B_1 & \dots & C_p B_m & C_p A B_1 & \dots & C_p A B_m & \dots & \dots & C_p A^{p-1} B_1 & \dots & C_p A^{p-1} B_m \end{bmatrix}$$

Chaque terme de la matrice C_0 représente une relation causale reliant une sortie y_j (D_e ou D_r) à une entrée u_i (S_e ou S_r).

Il est clair que le choix de p termes indépendants (définition 1.9) dans la matrice C_0 garantit sa non singularité. L'existence de ces p termes indépendants est équivalente à celle d'un seul terme non nul par ligne et par colonne dans C_0 . Ce qui se traduit en termes de chemins causaux par l'existence de p chemins causaux entrées-sorties différents dans le modèle bond graph.

L'existence de deux ensembles de termes indépendants ne remet pas en cause la non singularité de la matrice C_0 . Par contre, ce n'est pas le cas de l'existence de deux choix possibles d'ensemble de p chemins causaux entrées-sorties différents dans le modèle bond graph. En effet, il est possible dans des cas particuliers que les gains des deux ensembles soient égaux auxquels cas, leur somme pondérée est nulle ce qui implique la singularité de la matrice C_0 .

Un second critère de commandabilité en sortie structurelle peut être déduit en appliquant le théorème 4.1. En effet, il suffit de vérifier la commandabilité en état structurelle ainsi que le rang de la matrice de sortie C en termes bond graph.

Critère 2

Un système linéaire stationnaire à m entrées et p sorties ($p \leq m$) est structurellement commandable en sortie si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- a) Tous les éléments dynamiques en causalité intégrale sont causalement atteints par une source d'entrée.
- b) Rang-bg (A B) = n .
- c) Rang-bg (C) = p

Lorsque les sorties sont indépendantes, la commandabilité en état implique celle vis à vis des sorties.

Exemple 4.2

Considérons le système $\Sigma(A,B,C)$ modélisé par le bond graph (figure 4.2).

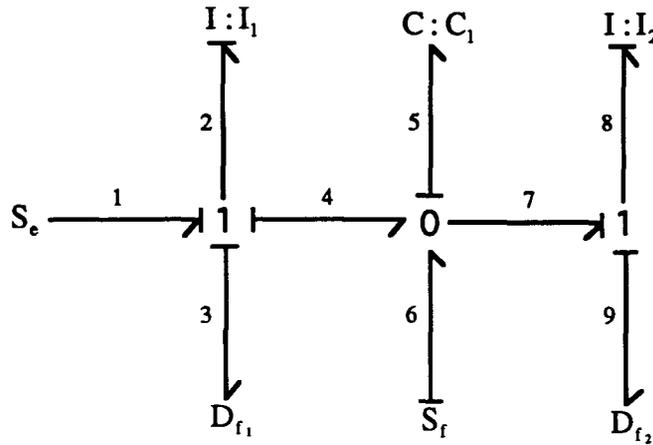


Figure 4.2 : Modèle bond graph

Les vecteurs d'entrées et de sorties sont donnés par :

$$u = \begin{pmatrix} S_e \\ S_f \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} D_{f_1} \\ D_{f_2} \end{pmatrix}$$

Application du critère 1

Les deux chemins causaux entrées-sorties [$(S_e, D_{f_1}), 1-2-2-3$] et [$(S_f, D_{f_2}), 6-5-5-7-8-8-9$] sont différents, donc le système est commandable en sortie.

Application du critère 2

1) Lorsque nous imposons la causalité dérivée au modèle bond graph et que nous dualisons les deux sources S_e et S_f , tous les éléments dynamiques acquièrent une causalité dérivée, donc le modèle est commandable en état.

2) La dualisation simultanée des deux détecteurs D_e et D_f est possible sans introduction de conflit, donc les deux sorties sont indépendantes.

La vérification des conditions du critère 2 entraîne la commandabilité en sortie du système modélisé par ce bond graph.

Remarques

L'existence de chemins causaux entrées-sorties différents n'est pas une condition nécessaire de commandabilité en sortie comme le montre l'exemple 4.1.

* En effet, le système est commandable en sortie ($\text{rang } C_0 = 2$), alors que le modèle bond graph ne contient pas deux chemins causaux entrées-sorties différents.

* A partir de la matrice C_0 (4.4), nous pouvons extraire une sous-matrice de rang 2 dans laquelle les termes non nuls proviennent uniquement des chemins causaux liant la seule source de flux S_f (resp. d'effort S_e) aux deux sorties, soit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C_1 & \\ 0 & \frac{1}{I_2 C_1} \end{bmatrix} \quad (\text{resp. } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ I_1 C_1 & \\ 0 & \frac{1}{I_1 I_2 C_1} \end{bmatrix})$$

Donc le système modélisé par ce bond graph est fortement commandable en sortie.

III. Commandabilité fonctionnelle et inversibilité

III.1. Commandabilité fonctionnelle

La propriété de commandabilité en sortie indique que les sorties du système peuvent atteindre une valeur choisie en un certain temps fini, la trajectoire n'étant pas spécifiée. Est-il possible de commander la sortie sur un intervalle de temps suivant une trajectoire pré-définie ? C'est la notion de commandabilité en sortie fonctionnelle ou reproductibilité fonctionnelle. Nous rappelons quelques unes de ses caractéristiques.

Définition 4.6

Un système est fonctionnellement commandable en sortie (ou fonctionnellement reproductible) si ses sorties peuvent être commandées sur tout intervalle de temps suivant une trajectoire pré-définie.

Considérons un système décrit par sa matrice de transfert $W(s)$ ou par sa matrice système $P(s)$, avec $W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ et $P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix}$.

Théorème 4.2 [Rosenbrock, 1970]

Un système carré est fonctionnellement commandable en sortie si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée.

- (a) $\text{Det } W(s) \neq 0$.
- (b) $\text{Det } P(s) \neq 0$.

Considérons un système carré décrit par sa matrice de transfert $W(s)$ $(m) \times (m)$. Chaque ligne de $W(s)$ peut s'écrire sous la forme de (4.5) :

$$W_i(s) = C_i (sI - A)^{-1} B \quad i \in \{1 \dots p\} \quad (4.5)$$

avec C_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de C .

Il existe une analogie entre la commandabilité en sortie et la commandabilité fonctionnelle. En effet, la matrice de transfert $W(s)$ sous sa forme irréductible de dimension $(m) \times (m)$ représente le sous-système commandable et observable de tout système. Par conséquent, si toutes les lignes $W_i(s)$ de $W(s)$ sont linéairement indépendantes (i.e $\text{rang } W(s) = m$), alors tous les modes observables sont indépendamment commandables, ce qui implique que le système est commandable en sortie (d'après le théorème 4.1).

III.2. Inversibilité

La notion d'inversibilité correspond à l'étude du rang de la matrice de transfert $W(s)$. Pour une matrice non carrée, l'inversibilité à droite ou à gauche est définie. On dira que le système est inversible si le rang est maximal.

Définition 4.7

Un système $\Sigma(A,B,C)$, défini par sa matrice de transfert $W(s)$ carrée de dimension $(m) \times (m)$, est inversible si $W(s)$ est non singulière.

Un système non carré ($m \neq p$) est inversible à droite (resp. à gauche) si $\text{rang } W(s) = p$ (resp. $\text{rang } W(s) = m$).

Cette notion d'inversibilité, utilisée par exemple pour le découplage, requiert une étude particulière de la matrice de transfert. Celle-ci sera proposée dans la partie suivante.

III.2.1. Matrice de transfert

Pour les systèmes de grande dimension, le calcul de $W(s)$ ainsi que son rang est parfois délicat. Il nous paraît donc intéressant de disposer d'une méthode de calcul formel de $W(s)$ ainsi que de son rang pour les modèles bond graphs.

III.2.1.1. Calcul de la matrice de transfert

Les méthodes habituelles, matricielles et graphiques employées pour les systèmes monovariabiles, sont étendues aux systèmes multivariabiles.

a) Méthode matricielle

La matrice de transfert $W(s)$ de dimensions $(p) \times (m)$ associée au système $\Sigma(A,B,C,D)$ est représentée par l'équation (4.6).

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (4.6)$$

Cette matrice se décompose en éléments représentant chacun une fonction de transfert, $W_{ji}(s)$, de l'entrée u_i vers la sortie y_j (4.7).

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & \cdots & W_{1m}(s) \\ W_{21}(s) & \cdots & W_{2m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ W_{p1}(s) & \cdots & W_{pm}(s) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Le calcul matriciel sous forme formel est assez difficile à réaliser pour des systèmes de grande dimension. Généralement, le recours à un calculateur s'impose.

b) Méthode des graphes

Une des règles classiques de calcul de la matrice de transfert utilisant la théorie des graphes ou bond graph est la règle de Mason que nous avons rappelée lors du calcul du polynôme caractéristique (chapitre 3).

Chaque terme de la matrice de transfert (4.7) peut être reformulé par (4.8) avec $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p)$. Ainsi l'équation (4.7) peut être réécrite sous la forme (4.9).

$$W_{ji}(s) = \frac{N_{ji}(s)}{\det(sI_n - A)} + D_{ji}(s) \quad (4.8)$$

$$W(s) = \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} N_{11}(s) & \cdots & N_{1m}(s) \\ N_{21}(s) & \cdots & N_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{p1}(s) & \cdots & N_{pm}(s) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Le calcul formel du dénominateur de $W_{ji}(s)$ est présenté dans le chapitre 3. Nous nous intéressons ici uniquement au calcul du numérateur $N_{ji}(s)$. Ce dernier s'écrit sous la forme (4.10).

$$N_{ji}(s) = p_1^{ji} s^{n-1} + p_2^{ji} s^{n-2} + \dots + p_{n-1}^{ji} s + p_n^{ji} \quad (4.10)$$

Pour trouver une interprétation par la théorie des graphes des coefficients p_k^{ji} ($1 \leq k \leq n$) du numérateur, Reinschke (1988) propose une méthode qui se base sur la notion de famille de cycles de retour dans le digraphe $G(Q^{ji})$ avec Q^{ji} une matrice $(n+m+p) \times (n+m+p)$ donnée par (4.11), où Q^{ji} est un cas particulier de la matrice Q_3 (2.20), sous la forme :

$$Q^{ji} = \begin{bmatrix} 0 & C_j & 0 \\ 0 & A & B_i \\ E & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

avec $E = \{e_{ij} = -1 ; i = 1\dots m, j = 1\dots p\}$.

Théorème 4.3 [Reinschke, 1988]

La valeur de chaque coefficient p_k^{ji} est égale au poids de la famille de cycles (contenant le cycle reliant le sommet entrée u_i au sommet sortie y_j) d'ordre k dans le digraphe $G(Q^{ji})$. Cette valeur doit être multipliée par un signe $(-1)^d$ si la famille de cycles est constituée de d cycles disjoints.

Exemple 4.3

Considérons les matrices A, B et C déduites du bond graph de la figure 4.2. Le digraphe $G(Q^{ji})$ associé est donné par la figure 4.3.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \end{bmatrix}$$

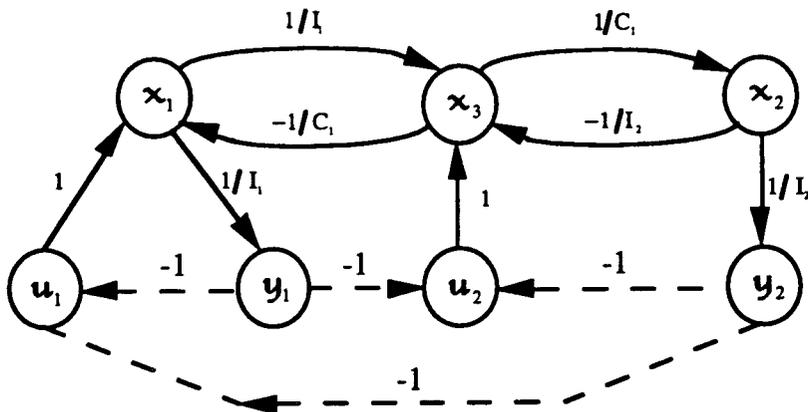


Figure 4.3 : Digraphe $G(Q^{ji})$

Le système possède deux entrées et deux sorties, donc la matrice de transfert se présente sous forme d'une matrice carrée.

$$W(s) = \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) \end{bmatrix}$$

Nous choisissons de développer le calcul du seul élément $N_{11}(s)$ de $W(s)$ sachant que les autres sont obtenus de la même manière.

* Calcul de $N_{11}(s)$

$N_{11}(s)$ représente la relation entre l'entrée u_1 et la sortie y_1 .

$$N_{11}(s) = p_1^{11} s^2 + p_2^{11} s + p_3^{11}$$

p_i^{11}	Familles de cycles	Expressions
p_1^{11}	<p style="text-align: center;">$d = 1$</p>	$p_1^{11} = \frac{1}{I_1}$
p_3^{11}	<p style="text-align: center;">$d = 2$</p>	$p_3^{11} = \frac{1}{I_1 I_2 C_1}$

Tableau 4.1 : Familles de cycles

D'où $N_{11}(s) = \frac{1}{I_1} s^2 + \frac{1}{I_1 I_2 C_1}$

c) Méthode des bond graphs

Nous avons montré dans le chapitre 3 (II.3.1) que la règle de Mason utilisée dans le calcul du polynôme caractéristique présente certains inconvénients. Ces remarques restent bien entendu valables dans le cas de l'application de cette règle dans le calcul de la fonction de

transfert. Dans la continuité de l'analyse graphique par bond graph, en complément de la méthode graphique proposée pour le calcul des coefficients du polynôme caractéristique, nous proposons une méthode de calcul de la matrice de transfert d'une manière formelle directement à partir du bond graph et d'interprétation graphique de chacun de ses composants. Cette règle est basée à la fois sur la règle de Mason, sur la notion de famille de cycles causaux et sur la notion de chemins causaux entrées-sorties.

Le calcul formel du dénominateur de $W_{ji}(s)$ est présenté dans le chapitre 3. Nous présentons ici l'interprétation graphique du numérateur $N_{ji}(s)$.

Théorème 4.4

Le numérateur $N_{ji}(s)$ est déterminé par :

$$N_{ji}(s) = \sum_k \tilde{G}_{(u_i, y_j)_k} \times P^R_{(u_i, y_j)_k} \quad (4.12)$$

$\tilde{G}_{(u_i, y_j)_k}$ est le terme constant du $k^{\text{ième}}$ chemin causal entre l'entrée u_i et la sortie y_j et $P^R_{(u_i, y_j)_k}$ est le polynôme caractéristique du modèle bond graph réduit, obtenu à partir du bond graph de départ en supprimant le $k^{\text{ième}}$ chemin causal entrée-sortie $(u_i, y_j)_k$.

L'expression (4.12) est en fait une autre formulation du calcul du numérateur de la fonction de transfert par la règle de Mason.

Exemple 4.4

Considérons le modèle bond graph de la figure 4.2. Nous calculons la matrice de transfert $W(s)$ associée.

$$W(s) = \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) \\ N_{21}(s) & N_{22}(s) \end{bmatrix}$$

Le résultat du calcul du dénominateur $D(s)$ (théorème 3.2) est donné par :

$$D(s) = s^3 + s \left(\frac{1}{I_1 C_1} + \frac{1}{I_2 C_1} \right)$$

Calcul des numérateurs $N_{ji}(s)$

* Calcul de $N_{11}(s)$: relation causale entre S_e et D_{f_1}

Le chemin causal (S_e, D_{f_1}) , 1-2-2-3, a pour gain $G_{(S_e, D_{f_1})} = \frac{1}{I_1 s}$, donc le terme constant de ce gain est égal à $\tilde{G}_{(S_e, D_{f_1})} = \frac{1}{I_1}$.

En supprimant le chemin causal entrée-sortie (S_e, D_{f_1}) , nous obtenons le modèle bond graph réduit de la figure 4.4. L'application de la règle graphique du calcul des coefficients du polynôme caractéristique, nous permet d'écrire $P_{(S_e, D_{f_1})}^R = s^2 + \frac{1}{I_2 C_1}$, donc

$$N_{11}(s) = \frac{1}{I_1} \left(s^2 + \frac{1}{I_2 C_1} \right).$$

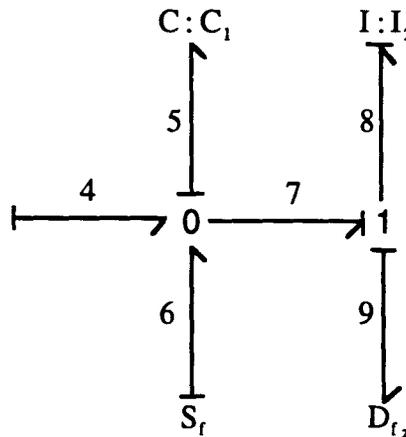


Figure 4.4 : Bond graph après suppression de (S_e, D_{f_1})

* Calcul de $N_{21}(s)$: relation entrée-sortie entre S_e et D_{f_2}

Le chemin causal entrée-sortie (S_e, D_{f_2}) , 1-2-2-4-5-5-7-8-8-9, a pour gain $G_{(S_e, D_{f_2})} = \frac{1}{I_1 I_2 C_1 s^3}$ donc $\tilde{G}_{(S_e, D_{f_2})} = \frac{1}{I_1 I_2 C_1}$.

La suppression de ce chemin causal entrée-sortie (S_e, D_{f_2}) du bond graph, nous donne un modèle bond graph réduit ne contenant aucun élément dynamique donc $P_{(S_e, D_{f_2})}^R = 1$, d'où

$$N_{21}(s) = \frac{1}{I_1 I_2 C_1}.$$

* Calcul de $N_{12}(s)$: relation entrée-sortie entre S_f et D_{f_1}

Le chemin causal (S_f, D_{f_1}) , 6-5-5-4-2-2-3, a pour gain $G_{(S_f, D_{f_1})} = \frac{-1}{I_1 C_1 s^2}$ donc $\tilde{G}_{(S_f, D_{f_1})} = \frac{-1}{I_1 C_1}$.

Le modèle bond graph réduit (figure 4.5 (a) obtenu après suppression de ce chemin causal entrée-sortie (S_f, D_{f_1}) contient un seul élément dynamique donc $P_{(S_f, D_{f_1})}^R = s$, d'où

$$N_{12}(s) = \frac{-1}{I_1 C_1} \times s.$$

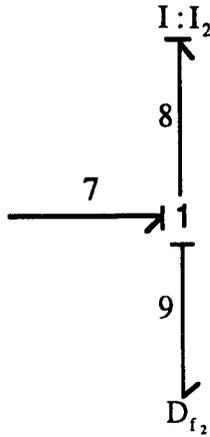


Figure 4.5 (a)

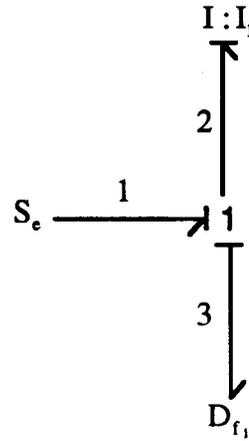


Figure 4.5 (b)

Figure 4.5 (a) Après suppression de (S_f, D_{f_1}) , (b) après suppression de (S_f, D_{f_2}) ,

* Calcul de $N_{22}(s)$: relation entrée-sortie entre S_f et D_{f_2}

Le chemin causal (S_f, D_{f_2}) , 6-5-5-7-8-8-9, a pour gain $G_{(S_f, D_{f_2})} = \frac{1}{I_2 C_1 s^2}$, donc

$$\tilde{G}_{(S_f, D_{f_2})} = \frac{1}{I_2 C_1}.$$

La suppression de ce chemin causal entrée-sortie (S_f, D_{f_2}) du bond graph (figure 4.1), nous donne un modèle bond graph réduit (figure 4.5 (b), donc $P_{(S_f, D_{f_2})}^R = s$, d'où

$$N_{22}(s) = \frac{1}{I_2 C_1} \times s.$$

$$\text{Donc } W(s) = \frac{1}{s^3 + s \left[\frac{1}{I_1 C_1} + \frac{1}{I_2 C_1} \right]} \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} \left(s^2 + \frac{1}{I_2 C_1} \right) & \frac{-s}{I_1 C_1} \\ \frac{1}{I_1 I_2 C_1} & \frac{s}{I_2 C_1} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

III.2.1.2. Rang de la matrice de transfert

Le calcul du rang de la matrice de transfert $W(s)$ est complexe car il dépend du paramètre s . Certaines définitions permettent d'éviter cette difficulté.

a) Rang normal

Définition 4.8 [Reinschke, 1988]

Le rang de la matrice de transfert $W(s)$ est une fonction de "s" calculée pour une valeur complexe " s' " en déterminant le rang numérique de la matrice $W(s')$ pour presque toutes les valeurs $s' \in \mathbb{C}$. Cette notion est appelée rang normal de $W(s)$ et notée rang-n [$W(s)$]. Elle est définie par l'égalité (4.14).

$$\text{Rang-n } [W(s)] = \underset{s \in \mathbb{C}}{\text{Max}} \text{rang } [W(s)] \quad (4.14)$$

b) Rang normal structurel

Définition 4.9 [Reinschke, 1988]

Le rang normal structurel, noté rang-n.s [$W(s)$], de la matrice de transfert $W(s)$ associée à un système structurel $\Sigma([A],[B],[C],[D])$, est égal au rang normal maximal que peut atteindre une réalisation admissible $(A,B,C,D) \in ([A],[B],[C],[D])$.

$$\text{Rang-n.s } [W(s)] = \underset{(A,B,C,D) \in ([A],[B],[C],[D])}{\text{Max}} (\text{rang} - n [W(s)]) \quad (4.15)$$

Reinschke (1988) présente une méthode graphique de calcul du rang normal structurel de la matrice de transfert en utilisant la notion de famille de cycles dans un digraphe.

Théorème 4.5 [Reinschke, 1988]

Le rang normal structurel de la matrice de transfert $W(s)$ est égal au nombre maximal d'arcs de retour, dénombrés dans au moins une famille de cycles contenus dans le digraphe $G([Q_3])$ (2.20).

Exemple 4.5

Considérons le digraphe structurel de la figure 4.3. Nous calculons le rang structurel de la matrice de transfert en employant le théorème 4.5.

Nous remarquons facilement que deux arcs de retour sont utilisés dans la famille de cycles d'ordre 3 représentée par (figure 4.6). Nous en concluons que le rang normal structurel de la matrice fonction de transfert associée à ce système est égal à 2.

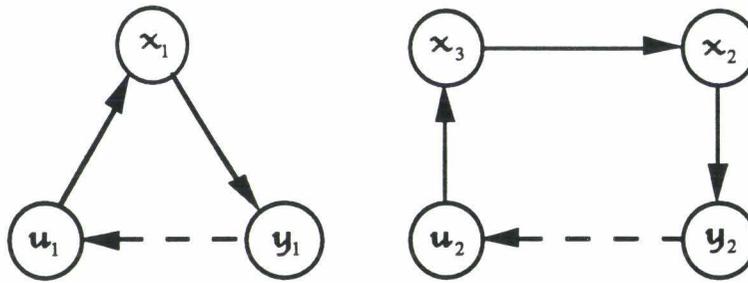


Figure 4.6 : Famille de cycles d'ordre 3

Il est clair, à partir de l'expression de $W(s)$ donnée par (4.13) (calculé pour le bond graph équivalent) que le rang réel de $W(s)$ est égal à 2. Dans ce cas, le rang normal structural et le rang réel de la matrice fonction de transfert sont égaux. Cependant ce critère s'avère non applicable dans certains cas particuliers.

Exemple 4.6

Considérons le système défini par sa représentation d'état. Le digraphe structural $G([Q_3])$ associé est donné par la figure 4.7 (a).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{I_1} & -\frac{1}{I_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{I_1} & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \end{bmatrix}$$

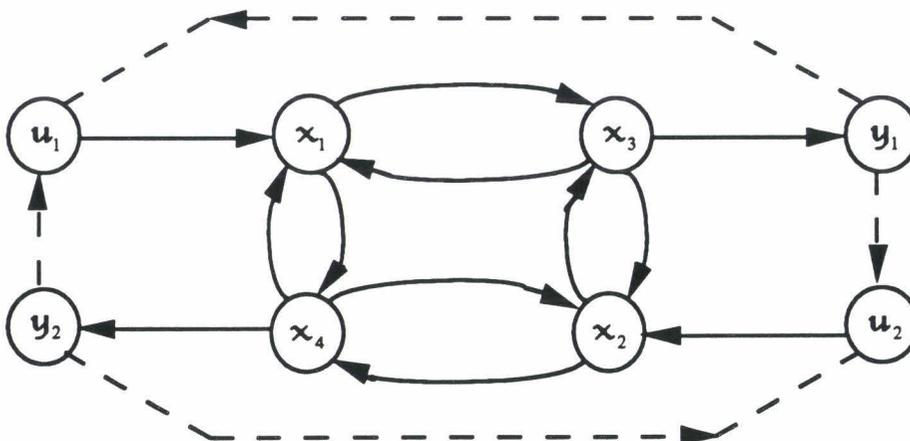


Figure 4.7 (a) : Digraphe structural $G([Q_3])$

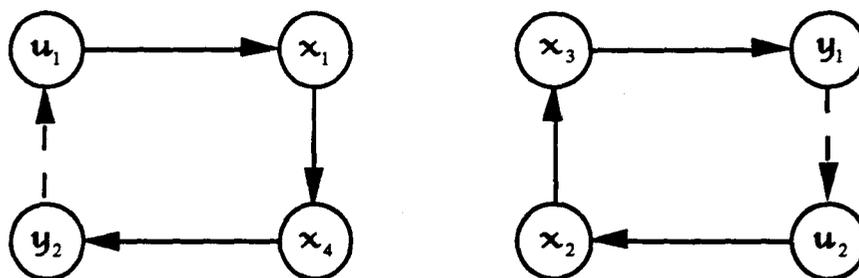


Figure 4.7 (b) : Famille de cycles avec deux arcs de retour

A partir de la représentation d'état et du digraphe, nous calculons les différents rangs.

* Rang structurel

Nous pouvons extraire la famille de cycles (figure 4.7 (b) qui contient deux arcs de retour. Donc, d'après le théorème 4.6, nous concluons que $\text{rang } n-s (W(s)) = 2$.

* Rang réel de $W(s)$

Il est évident que les deux lignes de $W(s)$ sont liées, donc $\text{rang } W(s) = 1$.

$$W(s) = \frac{1}{s^2(I_1 I_2 C_1 C_2) + [(I_1 + I_2)(C_1 + C_2)]} \begin{bmatrix} I_2 C_2 & -I_1 C_2 \\ -I_2 C_1 & I_1 C_1 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que le rang de $W(s)$ est dégénéré d'une manière structurelle, malheureusement, ces cas particuliers ne sont pas résolus en théorie des graphes. Cette dernière sous-entend toujours vérifiée l'hypothèse de non dépendance entre les termes des matrices structurelles étudiées.

Pour résoudre ce problème, nous proposons une méthode qui nous permet de déterminer d'une manière formelle le rang de la matrice de transfert dans le cas général et de détecter graphiquement les cas présentant des difficultés.

c) Rang bond graph de la matrice de transfert

Le calcul du rang-bg de la matrice de transfert se base sur la recherche des chemins causaux entrées-sorties différents dans un modèle bond graph.

Critère

Lorsqu'un seul choix de q chemins causaux entrées-sorties différents est possible dans le modèle bond graph, alors le rang bond graph de la matrice de transfert $W(s)$ est égal à q .

Démonstration

Les arguments utilisés afin de démontrer le critère graphique de commandabilité en sortie (critère 1) sont repris pour démontrer ce critère. En effet, les termes du numérateur de la matrice de transfert sont de la forme $CA^k B$. Donc ils se traduisent de la même manière que les termes de la matrice de commandabilité en sortie.

Exemples 4.7

1) Nous reprenons le modèle bond graph de la figure 4.2. Il existe deux chemins causaux entrées-sorties différents $[(S_{e_1}, D_{f_1}) : 1-2-2-3]$ et $[(S_{f_1}, D_{f_2}) : 6-5-5-7-8-8-9]$, donc $\text{rang-bg } W(s) = 2$. Le rang bond graph est alors égal au rang réel de $W(s)$ (4.13).

2) Les matrices A, B, C (exemple 4.6) ont été déduites du modèle bond graph de la figure 4.8. Nous proposons d'étudier son rang-bg.

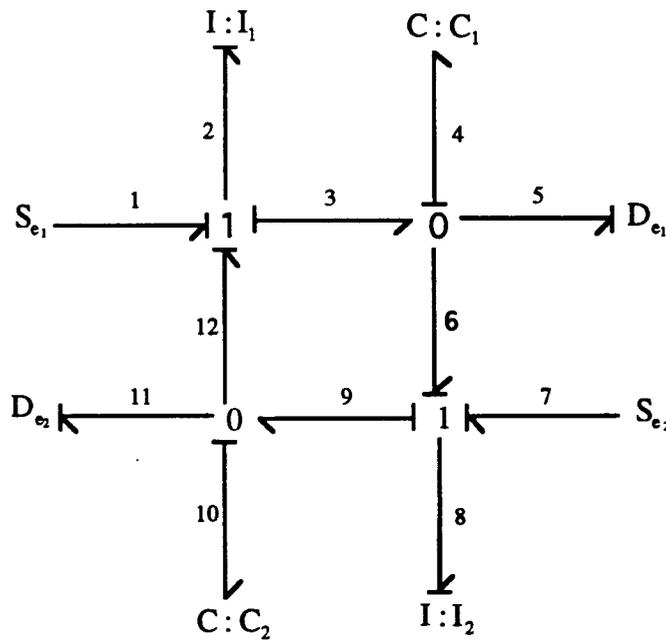


Figure 4.8

Les vecteurs d'entrées et de sorties sont donnés par:

$$u = \begin{pmatrix} S_{e_1} \\ S_{e_2} \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} D_{e_1} \\ D_{e_2} \end{pmatrix}$$

Deux choix de chemins causaux entrées-sorties différents sont possibles:

$$\left\{ \begin{array}{l} (S_{e_1}, D_{e_1}) : 1-2-2-3-4-4-5 \\ (S_{e_2}, D_{e_2}) : 7-8-8-9-10-10-11 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} (S_{e_1}, D_{e_2}) : 1-2-2-12-10-10-11 \\ (S_{e_2}, D_{e_1}) : 7-8-8-6-4-4-5 \end{array} \right.$$

L'existence de ces deux choix possibles ne nous permet pas de fournir le rang-bg du système modélisé par ce bond graph. Un calcul plus approfondi s'impose.

De manière générale, lorsque plusieurs choix de chemins causaux entrées-sorties différents sont possibles, un critère plus précis est nécessaire. Celui-ci conduit au calcul du déterminant de la matrice de transfert.

Or, il existe une équivalence entre la matrice système $P(s)$ et la matrice de transfert $W(s)$:

$$\text{Rang } P(s) = \text{rang}(sI - A) + \text{rang} \left[C(sI - A)^{-1} B + D \right], \text{ donc } \text{Rang } P(s) = n + \text{rang } W(s)$$

Ainsi, si $\det P(s) \neq 0$, alors $\det W(s) \neq 0$ et réciproquement. Donc nous pouvons calculer indifféremment le déterminant de la matrice de transfert $W(s)$ ou celui de la matrice système $P(s)$. Nous nous proposons de calculer ce dernier car une interprétation directe à partir du modèle bond graph est possible.

III.2.2. Calcul du déterminant de la matrice système

Théorème 4.5

Le déterminant de la matrice système $P(s)$ est donné par l'expression suivante :

$$\text{Det } P(s) = \sum_q (-1)^{q-1} \left(\prod_{i,j}^m \tilde{G}_{(u_i, y_j)} \times P^R \right)_q \text{ avec } i \in \{1, \dots, m\} \text{ et } j \in \{1, \dots, m\} \quad (4.16)$$

avec $\prod_{i,j}^m \tilde{G}_{(u_i, y_j)}$, le produit des termes constants des gains des m chemins causaux entrées-sorties différents ; q , le nombre de choix possibles de chemins entrées-sorties différents. P^R est le polynôme caractéristique du bond graph réduit, obtenu en éliminant les m chemins entrées-sorties différents. Le signe $(-1)^{q-1}$ a la même signification que les signes apparaissant dans le calcul d'un déterminant de matrice.

Ce théorème peut être prouvé en utilisant la démonstration du théorème de calcul du déterminant d'une matrice carrée (Reinschke 1988) et en utilisant l'équivalence entre les familles de cycles contenant obligatoirement un arc de poids égal à -1 (calcul du numérateur de la fonction de transfert (théorème 4.4)) et les chemins causaux entrées-sorties différents.

Remarque

Cette expression est donnée dans le cas où il existe au moins un choix possible de m chemins entrées-sorties différents. Si ce n'est pas le cas, le déterminant de $P(s)$ est nul.

Considérons le modèle bond graph de la figure 4.8 auquel nous appliquons l'équation 4.16 pour calculer le déterminant de la matrice système.

Deux choix de chemins causaux entrées-sorties différents sont possibles :

$$\begin{aligned} \text{Premier choix : } & \begin{cases} (S_{e_1}, D_{e_1}) : 1-2-2-3-4-4-5 \\ (S_{e_2}, D_{e_2}) : 7-8-8-9-10-10-11 \end{cases} \\ \text{Second choix : } & \begin{cases} (S_{e_1}, D_{e_2}) : 1-2-2-12-10-10-11 \\ (S_{e_2}, D_{e_1}) : 7-8-8-6-4-4-5 \end{cases} \end{aligned}$$

a) Calcul du premier terme (correspondant au 1^{er} choix).

1) Calcul des gains des chemins causaux entrées-sorties

$$\begin{cases} \tilde{G}_{(S_{e_1}, D_{e_1})} = \frac{1}{I_1 C_1} \\ \tilde{G}_{(S_{e_2}, D_{e_2})} = \frac{1}{I_2 C_2} \end{cases}$$

2) Après suppression de ces deux chemins aucun élément dynamique ne reste sur le bond graph donc $P^R = 1$.

$$\left(\prod^2 \left(\tilde{G}_{(u_i, y_j)} \right) \times P^R \right)_1 = \frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2}$$

b) Calcul du premier terme (correspondant au 1^{er} choix).

1) Calcul des gains des chemins causaux entrées-sorties

$$\begin{cases} \tilde{G}_{(S_{e_1}, D_{e_2})} = \frac{-1}{I_1 C_2} \\ \tilde{G}_{(S_{e_2}, D_{e_1})} = \frac{-1}{I_2 C_1} \end{cases}$$

2) Après suppression de ces deux chemins aucun élément dynamique ne reste sur le bond graph donc $P^R = 1$.

$$\left(\prod^2 \left(\tilde{G}_{(u_i, y_j)} \right) \times P^R \right)_2 = \frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2}$$

$$\text{Det } P(s) = \left(\frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2} - \frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2} \right) = 0$$

Conclusion

Le calcul du déterminant de la matrice système nous permet de connaître le rang réel de la matrice de transfert. Celui ci est différent du rang structural calculé par les graphes.

Considérons le modèle bond graph de la figure 4.9 auquel nous appliquons l'équation 4.16 pour calculer le déterminant de la matrice système.

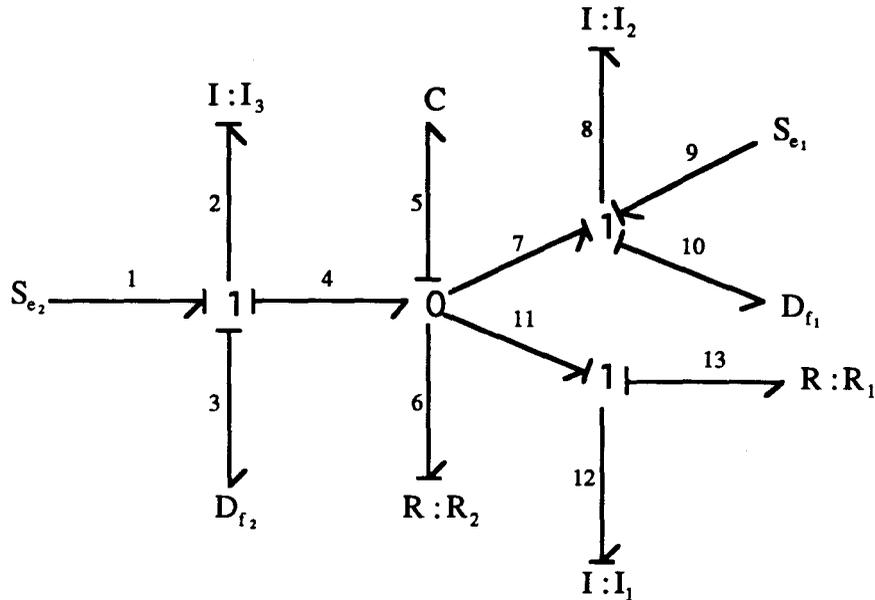


Figure 4.9

Les vecteurs d'entrées et de sorties sont donnés par :

$$u = \begin{pmatrix} S_{e_1} \\ S_{e_2} \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} D_{f_1} \\ D_{f_2} \end{pmatrix}$$

Un seul choix de deux chemins causaux entrées-sorties différents est possible.

* Calcul des gains des chemins causaux entrées-sorties.

Les deux chemins causaux entrées-sorties différents sont $[(S_{e_1}, D_{f_1}) : 9-8-8-10]$ et $[(S_{e_2}, D_{f_2}) : 1-2-2-3]$. Leurs termes constants des gains respectifs sont $\tilde{G}_{(S_{e_1}, D_{f_1})} = \frac{1}{I_2}$ et $\tilde{G}_{(S_{e_2}, D_{f_2})} = \frac{1}{I_3}$.

En éliminant ces chemins causaux entrées-sorties du modèle bond graph de la figure 4.9, nous obtenons le modèle bond graph réduit de la figure 4.10.

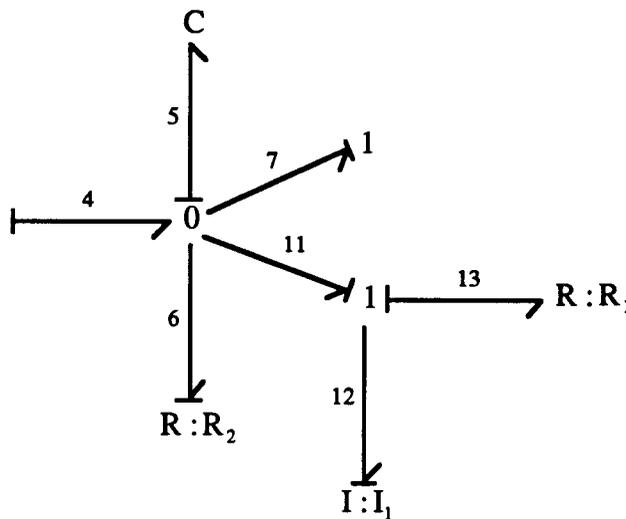


Figure 4.10 : Bond graph après suppression des chemins (S_e, D_t) et (S_e, D_t)

Nous appliquons le théorème 3.2 pour calculer le polynôme caractéristique du bond graph réduit.

$$P^R = s^2 + s \left(\frac{R_1}{I_1} + \frac{1}{R_2 C} \right) + \left(\frac{R_1}{I_1} \cdot \frac{1}{R_2 C} + \frac{1}{I_1 C} \right)$$

En utilisant l'équation (4.17), nous déduisons l'expression du déterminant de P(s).

$$\text{Det } P(s) = \frac{1}{I_2 I_3} \left[s^2 + s \left(\frac{R_1}{I_1} + \frac{1}{R_2 C} \right) + \left(\frac{R_1}{I_1} \cdot \frac{1}{R_2 C} + \frac{1}{I_1 C} \right) \right]$$

L'étude des différents chemins causaux permet de calculer les matrices A, B et C. Par le calcul classique, nous retrouvons le même résultat (4.17).

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{I_1} & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ \frac{-1}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & \frac{1}{I_3} & \frac{-1}{R_2 C_1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det } P(s) &= \det \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{I_2 I_3} \left(s^2 + s \left(\frac{R_1}{I_1} + \frac{1}{R_2 C_1} \right) + \frac{R_1}{I_1} \cdot \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{I_1 C_1} \right) \end{aligned} \tag{4.17}$$

III.2.3. Test de l'inversibilité

En nous basant sur le critère graphique de calcul du rang bond graph de la matrice de transfert, nous proposons des critères graphiques pour tester l'inversibilité d'un système.

Critères

1) Un système carré à m entrées- m sorties est non inversible si le modèle bond graph associé ne contient pas m chemins causaux entrées-sorties différents.

2) Un système est inversible si le modèle bond graph associé contient un seul choix possible de m chemins causaux entrées-sorties différents.

Dans le cas où le modèle bond graph associé contient plusieurs choix possibles de m chemins entrées-sorties différents, il faut alors calculer le déterminant de la matrice système en utilisant le critère proposé précédemment.

Démonstration

1) La non inversibilité du système implique que le déterminant de la matrice de transfert est nul. $W(s)$ est une matrice carrée et à ce titre nous lui appliquons le même raisonnement que la matrice de commandabilité en sortie C_0 . L'absence de m chemins causaux entrées-sorties différents dans le modèle bond graph implique celle de m termes indépendants dans la matrice $W(s)$, ce qui vaut sa singularité.

Le critère 2 utilise les mêmes conditions que celle utilisée pour vérifier la non singularité de la matrice C_0 . Donc pour démontrer ce critère, il suffit de reprendre les arguments présentés dans la démonstration du critère de commandabilité en sortie (II.2.2).

Remarques

i) Une condition nécessaire d'inversibilité est que les rangs bond graph de B et de C soient pleins (égaux à m). Cette condition nécessaire est facilement vérifiable par simple manipulation causale sur le bond graph. En effet, nous avons montré dans le chapitre 2 que le rang bond graph de B (resp. de C) est égal au nombre de sources (resp. de détecteurs) pouvant être dualisées sans créer de conflit dans le bond graph en causalité intégrale.

ii) Il est donc conseillé, avant d'entamer la réalisation du problème de découplage (inversibilité), de vérifier sur le bond graph que les rangs de B et de C sont pleins. La source (resp. le détecteur) ne pouvant être dualisée, est forcément liée aux autres, donc peut être éliminée.

Exemple 4.8

1) Le modèle bond graph de la figure 4.9 présente un seul choix de deux chemins entrées-sorties différents : $[(S_{e_1}, D_{f_1}) : 9-8-8-10]$ et $[(S_{e_2}, D_{f_2}) : 1-2-2-3]$. Donc le système est inversible. Ce résultat est confirmé par le fait que le déterminant calculé est non nul.

2) Considérons le modèle bond graph de la figure 4.11. Les vecteurs d'entrée et de sortie sont représentés par : $u = \begin{pmatrix} S_{e_1} \\ S_{e_2} \\ S_f \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} D_{e_1} \\ D_{e_2} \\ D_{e_3} \end{pmatrix}$

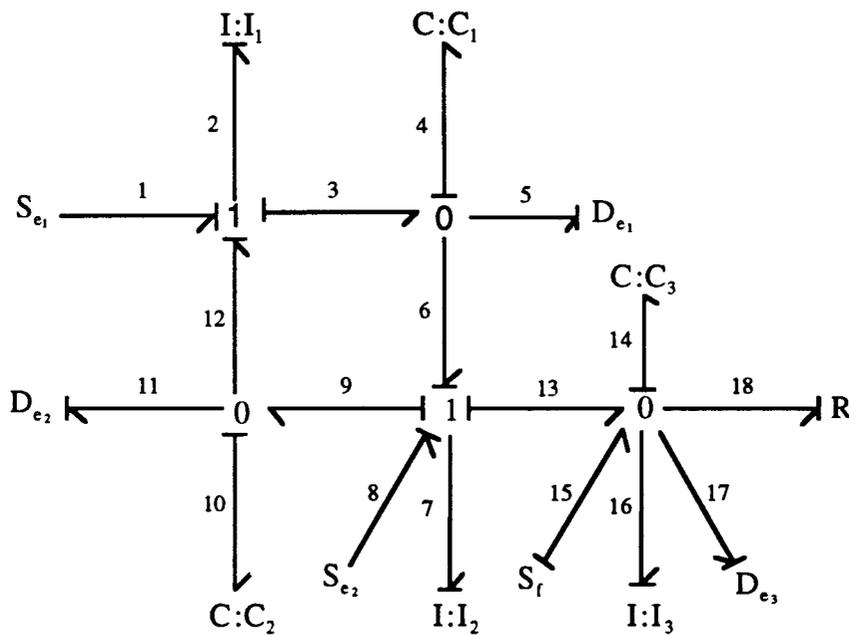


Figure 4.11

Les deux choix possibles qui permettent de former trois chemins causaux entrées-sorties différents sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} (S_{e_1}, D_{e_1}) : 1-2-2-3-4-4-5 \\ (S_{e_2}, D_{e_2}) : 8-7-7-9-10-10-11 \\ (S_f, D_{e_3}) : 15-14-14-17 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} (S_{e_1}, D_{e_2}) : 1-2-2-12-10-10-11 \\ (S_{e_2}, D_{e_1}) : 8-7-7-6-4-4-5 \\ (S_f, D_{e_3}) : 15-14-14-17 \end{array} \right.$$

Ces deux choix possibles ne nous permettent pas de conclure directement sur l'inversibilité du système. Le calcul du déterminant de la matrice $P(s)$ s'impose.

Les deux choix de chemins entrées-sorties différents se traduisent par l'existence de deux termes dans l'expression du déterminant de $P(s)$.

* Calcul du terme $\left(\prod_{k=1}^3 \tilde{G}_{(u_i, y_j)_k} \times P^R \right)_1$ (correspondant au premier choix).

Les termes constants des gains des chemins causaux entrées-sorties (S_{e_1}, D_{e_1}) , (S_{e_2}, D_{e_2}) et (S_f, D_{e_3}) sont respectivement $\frac{1}{I_1 C_1}$, $\frac{1}{I_2 C_2}$ et $\frac{1}{C_3}$.

Quand ces trois chemins causaux sont supprimés, seul l'élément I_3 reste sur le bond graph donc $P^R = s$.

$$\text{Donc } \left(\prod_{k=1}^3 \left(\tilde{G}_{(u_i, y_j)_k} \right) \times P^R \right)_1 = \frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2 C_3} \times s.$$

* Calcul du terme $\left(\prod_{k=1}^3 \tilde{G}_{(u_i, y_j)_k} \times P^R \right)_2$ (correspondant au second choix).

Les chemins causaux entrées-sorties (S_{e_1}, D_{e_2}) , (S_{e_2}, D_{e_1}) et (S_f, D_{e_3}) ont respectivement pour termes constants des gains $\frac{-1}{I_1 C_2}$, $\frac{-1}{I_2 C_1}$ et $\frac{1}{C_3}$.

Seul l'élément dynamique I_3 reste sur le modèle bond graph quand les chemins entrée-sortie sont éliminés, donc $P^R = s$.

$$\text{D'où } \left(\prod_{k=1}^3 \left(\tilde{G}_{(u_i, y_j)_k} \right) \times P^R \right)_2 = \frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2 C_3} \times s$$

$$\text{L'équation (4.16) nous donne alors } \det P(s) = \left(\frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2 C_3} - \frac{1}{I_1 I_2 C_1 C_2 C_3} \right) \times s = 0.$$

Ce système n'est pas inversible structurellement.

Remarque

Le chemin causal entrée-sortie (S_f, D_{e_3}) est inchangé entre les deux choix, le terme constant de son gain peut être mis en facteur dans l'expression du déterminant de $P(s)$.

Les matrices A, B et C sont calculées formellement directement à partir du modèle bond graph. Le calcul du déterminant de $P(s)$ nous permet de vérifier la non inversibilité du système.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & \frac{-1}{C_2} & \frac{-1}{C_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \\ \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{I_1} & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & \frac{-1}{I_3} & 0 & 0 & \frac{-1}{RC_3} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_3} \end{bmatrix}$$

Par souci de clarté, nous avons traité jusqu'à maintenant des systèmes qui possèdent des matrices de sorties C de formes assez simple. Cependant pour montrer que notre méthode est complète, nous considérons un modèle bond graph (figure 4.12) dans lequel les détecteurs sont directement liés à plusieurs éléments dynamiques.

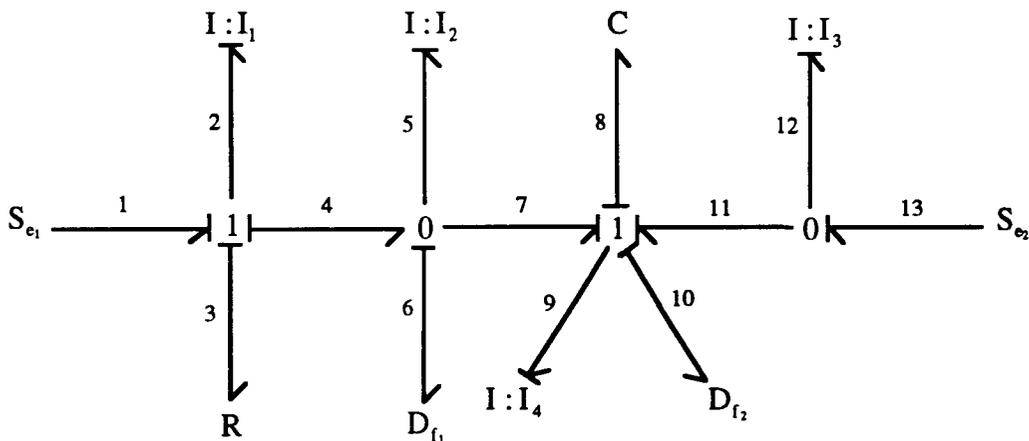


Figure 4.12

Les vecteurs d'entrées et de sorties sont donnés par :

$$u = \begin{pmatrix} S_{e_1} \\ S_{e_2} \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} D_{f_1} \\ D_{f_2} \end{pmatrix}$$

Un seul choix de deux chemins causaux entrées-sorties différents est possible. Il s'agit des chemins $[(S_{e_1}, D_{f_1}) : 1-2-2-4-6]$ et $[(S_{e_2}, D_{f_2}) : 13-11-9-9-10]$. Donc le système modélisé par le bond graph de la figure 4.12 est structurellement inversible.

Pour vérifier notre résultat, nous calculons le déterminant de la matrice système $P(s)$ d'une manière formelle en utilisant l'équation (4.16).

L'expression du déterminant de $P(s)$ comprend un seul terme, puisqu'il existe un seul choix possible.

- Les termes constants des gains des deux chemins causaux entrées-sorties (S_{e_1}, D_{f_1}) et (S_{e_2}, D_{f_2}) sont respectivement $\tilde{G}_{(S_{e_1}, D_{f_1})} = \frac{1}{I_1}$ et $\tilde{G}_{(S_{e_2}, D_{f_2})} = \frac{1}{I_4}$.

- Lorsque les deux chemins causaux entrées-sorties sont supprimés, trois éléments dynamiques constituent le modèle bond graph réduit, donc $P^R = s^3$.

D'où $\det P(s) = \frac{s^3}{I_1 I_4}$. Le déterminant est non nul, donc le système est inversible.

En utilisant la représentation d'état déduite du bond graph, nous pouvons vérifier l'inversibilité en calculant le rang réel de $P(s)$.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{C} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_4} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & 0 & \frac{-1}{I_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_4} & 0 \end{bmatrix}$$

III.3. Conclusion

L'importance de l'inversibilité d'un système est incontestable surtout dans la résolution du problème de découplage. Donc à partir des différents critères graphiques présentés dans cette partie, nous possédons un bagage intéressant pour aborder le problème de découplage des systèmes multivariables modélisés par bond graph.

En effet, la notion d'inversibilité a été utilisée directement comme moyen de découplage entrées-sorties notamment par Silverman (1968 et 1969), mais en général, elle l'est plutôt comme condition nécessaire de découplage. Nous reviendrons sur cette notion dans le paragraphe suivant.

IV. Découplage entrées-sorties par retour d'état

IV.1. Introduction

La théorie du découplage ou de la non-interaction est née tout naturellement de l'apparition des systèmes multivariables. Les techniques du monovarié se sont révélées souvent inefficaces en raison des interactions internes qu'elles ne pouvaient évidemment pas prendre en compte.

Morgan (1964) a été le premier à considérer le problème du découplage des systèmes multivariables. Il inscrit ce problème dans le cadre de l'espace d'état en se limitant à l'étude des systèmes carrés. Ces résultats ont été complétés par la suite par Rekasius (1965). Mais aucun d'entre eux n'a donné une preuve claire pour démontrer la condition suffisante de découplage. Il a fallu attendre 1967 pour que Falb et Wolovich (1967), suivant rapidement les travaux de Morgan (1964) et de Rekasius (1965), établissent une procédure de synthèse du problème en proposant une condition nécessaire et suffisante de découplage par retour d'état statique des systèmes linéaires carrés. Ils ont proposé une caractérisation complète de la classe des retours d'état qui découpent le système. Gilbert (1969) a développé la méthode de Falb et Wolovich (1967) en caractérisant d'une manière simple la classe des matrices de découplage susceptibles de résoudre ce problème. L'approche utilisée par ces auteurs pour aborder le problème est une approche que nous pouvons qualifier de matricielle.

Mais malgré l'apparition d'autres méthodes, la méthode matricielle a toujours ses adeptes. Citons, par exemple, Brockett (1965), Cremer (1971), Paul (1972), Sinha (1976-1977), Wang (1970), Panda (1971), Mufti (1971), Merry et Power (1977), Freund (1975), Troch (1991), Yamada et Saga (1985), Gilbert et Pivnichy (1969).

D'autres dérivations de cette approche matricielle ont été utilisées, notamment par Hautus et Heyman (1983), Shaohua Tan et Joos Vandewalle (1987) qui abordent le problème par l'analyse de la matrice de transfert. Silverman (1969, 1970), Silverman et Payne (1971), quant à eux, développent des méthodes basées sur l'inversion de système. Malheureusement, leurs techniques requièrent des manipulations d'équations matricielles compliquées.

Descusse et Dion (1982) ont révisé le problème classique de découplage par retour d'état statique. Ils ont traduit la condition nécessaire et suffisante de Falb et Wolovich (1967) par une autre, basée sur la notion de structure infinie du système. Dans Commault et al (1986), les ordres essentiels caractérisant la structure infinie minimale du système découplé sont présentés pour le problème général de découplage ligne par ligne.

Linneman (1981) a présenté une condition de découplage des systèmes structurels en utilisant la notion de couplage entrées-sorties dans un graphe. Hayakawa et Siljak (1988) ont proposé une caractérisation des systèmes structurels qui peuvent être découplés en utilisant le même concept. Dion et Commault (1991) donnent une interprétation graphique de la structure infinie d'un système et donnent ainsi une condition de découplage en termes de chemins entrées-sorties. Reinschke (1988) a présenté une étude du problème en se basant sur la décomposition d'un graphe.

Le découplage est impossible quand le rang de B est inférieur au rang de C. Des conditions suffisantes ont été proposées par Silverman et Payne (1971) ; Kano et Sugima (1974) pour le cas où le rang de B est supérieur au rang de C. Yamada et Saga (1985) ont donné une condition suffisante de découplage par retour d'état des systèmes structurels non carrés en utilisant la représentation par les graphes. Pour cela, ils transforment les systèmes non

carrés en systèmes carrés, dont le découplage implique nécessairement celui du système original.

IV.2.Présentation du problème

En 1963, Morgan s'est intéressé au problème du découplage des systèmes multivariables linéaires carrés. Par extension, il est courant d'appeler problème de Morgan tout problème de découplage statique. Ce problème peut être traduit par la question suivante :

A quelle(s) condition(s) existe-t-il une loi de commande par retour d'état telle que u_i commande la sortie y_i sans affecter les $(p-1)$ autres sorties y_j , et ceci pour $i = 1, 2, \dots, p$?

Le système se comporte alors comme p sous-systèmes monovariabiles indépendants.

Différents types de retour d'état sont possibles. Un retour d'état peut être d'une part statique ou dynamique et, d'autre part régulier ou irrégulier, selon que l'on conserve au système bouclé le nombre d'entrées qu'il avait en boucle ouverte ou non. Le découplage peut être ligne par ligne, diagonal, triangulaire ou par blocs.

IV.3.Découplage par inversion du système

Brokett et Mesarovic (1965), Brokett (1965) ont donné la première condition nécessaire et suffisante d'inversibilité en termes de coefficients de matrices et ont proposé un algorithme dans le cas monovariabiles (SISO). Youla et Dorato (1966) déduisent un critère d'inversibilité plus simple et proposent un algorithme d'inversion dans le cas multivariable (MIMO). Silverman (1968) a montré que l'algorithme d'inversion de Brokett peut être généralisé aux systèmes discrets monovariabiles. Il traite à la fois les systèmes discrets et continus et propose un nouvel algorithme. Il met en évidence une relation précise entre le nombre de dérivations des sorties requises et le nombre total d'intégrateurs nécessaires à la réalisation de l'inverse.

Plusieurs auteurs ont utilisé la notion d'inversibilité d'un système pour résoudre le problème de découplage et ont présenté des algorithmes de détermination de l'inversibilité d'un système dans les cas linéaire et non linéaire, citons par exemple, Silverman (1968 et 1969), Porter (1969), Sain et Massey (1969), Silverman et Payne (1971), Sinha (1976), Rosenbrock et Vanderweiden (1979), Hirchorm (1979), Singh (1981), Nijmeijer et Respondek (1988).

IV.4.Commandabilité en sortie et découplage

Sinha (1977) a proposé des propriétés permettant de rapprocher les notions de commandabilité en sortie, commandabilité fonctionnelle en sortie et le découplage par retour

d'état. Il a notamment établi une relation entre la commandabilité en sortie forte et le découplage.

Cependant, la commandabilité en sortie simple (faible) n'est pas une condition suffisante de découplage. En effet, nous avons vérifié que le système présenté dans l'exemple 4.1 est commandable en sortie, alors qu'il n'est pas inversible (non découplable). Par contre la commandabilité fonctionnelle en sortie est une condition nécessaire de découplage.

IV.5.Approche matricielle

IV.5.1.Découplage par retour d'état statique

IV.5.1.2.Critère d'étude

La première condition nécessaire et suffisante de découplage d'un système sans transfert direct $\Sigma(A,B,C)$ donnée par Falb et Wolovich (1967) se base sur le calcul de la matrice B^* appelée généralement matrice de découplage, sous la forme donnée dans (4.22).

Les indices d_i définis par l'équation (4.25) sont souvent appelés indices relatifs.

$$d_i = \min \{j : C_i A^j B \neq 0, j = 0, 1, \dots, n-1\}$$

ou

$$d_i = n-1 \quad \text{si} \quad C_i A^j B = 0 \quad \text{pour tout } j$$
(4.25)

C_i est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice C .

Théorème 4.6 [Falb et Wolovich, 1967]

Un système linéaire stationnaire sans transfert direct $\Sigma(A,B,C)$ est découplable par un retour d'état de la forme $u = Kx + Lv$ avec K $(m) \times (n)$ et L $(m) \times (m)$ non singulière si et seulement si la matrice de découplage B^* $(m) \times (m)$ donnée par l'équation (4.22) est non singulière.

Conclusion

En plus de la complexité inévitable du calcul matriciel, cette approche s'est avérée trop hermétique pour aborder avec succès des problèmes plus généraux tels que le découplage par blocs ou le découplage des systèmes non carrés.

Dans le cas où un retour d'état statique n'est pas suffisant pour découpler un système, un compensateur dynamique peut résoudre le problème.

IV.5.3. Découplage par compensation dynamique

Gilbert (1969) a montré qu'il existe une classe de systèmes inversibles non découplables par retour d'état statique, mais qui nécessitent un compensateur dynamique pour accomplir le découplage par retour d'état. Il les appelle systèmes à faible couplage propre. Il présente une méthode de compensation du système pour éliminer le couplage propre faible, mais il n'a pas proposé d'algorithmes. Morse et Wonham (1970) ont utilisé l'idée à fond pour les triplets matriciels. Wang (1970) développe un algorithme pour modifier B^* par une série d'opérations sur les colonnes et met en série des intégrateurs. Cette méthode ne spécifie pas l'ordre optimum nécessaire du compensateur. Cremer (1972) développe une méthode longue et compliquée pour calculer un pré-compensateur d'ordre minimal. Panda (1971) présente une procédure pour désigner un pré-compensateur mais considère uniquement l'ordre minimal des compensateurs incorporant des intégrateurs. Sinha (1977) a proposé une procédure de calcul d'un pré-compensateur dynamique. Nous le présentons en annexe 5. Silverman (1971) a une façon différente de désigner un pré-compensateur basée sur l'inversion du système.

Théorème 4.7 [Sinha, 1976]

Tout système inversible avec une matrice de découplage B^* singulière peut toujours être augmenté par un pré-compensateur dynamique. Le système augmenté possède alors une matrice de découplage \bar{B}^* non singulière.

Le système $\Sigma(A,B,C)$ est augmenté par un pré-compensateur dynamique $\Sigma_c(A_c, B_c, C_c, D_c)$ d'ordre n_c . Le système ainsi augmenté $\bar{\Sigma}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ est de rang $n+n_c$, il peut être écrit sous la forme (4.26).

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B} v(t) \\ y(t) &= \bar{C} \bar{x}(t) \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$ est le vecteur état du système augmenté, avec $x_c(t) \in \mathcal{R}^{n_c}$, le vecteur état du compensateur dynamique.

\bar{A} , \bar{B} et \bar{C} (4.33) sont des matrices de rangs respectifs $(n+n_c) \times (n+n_c)$, $(n+n_c) \times (m)$, $(m) \times (n+n_c)$.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} BD_c \\ B_c \end{bmatrix} \quad \bar{C} = [C \quad 0] \quad (4.27)$$

La nouvelle matrice de découplage \bar{B}^* du système augmenté est calculée de la même manière que dans le cas précédent.

$$\begin{aligned} \bar{d}_i &= \min k \{ : \bar{C}_i \bar{A}^k \bar{B} \neq 0, k \in (0, 1, \dots, n + n_c) \} \quad i \in (1, \dots, m) \\ \text{ou} \\ \bar{d}_i &= (n + n_c - 1) \quad \text{si } \bar{C}_i \bar{A}^k \bar{B} = 0 \quad \text{pour tout } k \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\bar{B}^* = \begin{bmatrix} \bar{B}_1^* \\ \vdots \\ \bar{B}_i^* \\ \vdots \\ \bar{B}_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \bar{A}^{\bar{d}_1} \bar{B} \\ \vdots \\ \bar{C}_i \bar{A}^{\bar{d}_i} \bar{B} \\ \vdots \\ \bar{C}_m \bar{A}^{\bar{d}_m} \bar{B} \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

Tout système inversible est découplable, donc, tout système à faible couplage propre peut être dynamiquement compensé pour que le système augmenté n'admette plus de couplage propre.

Le problème est de déterminer l'ordre minimal de ce pré-compensateur et une expression des matrices inconnues pour que le système augmenté (4.27) satisfasse la condition nécessaire et suffisante de Falb et Wolovich (1967).

IV.5.4. Analyse par la matrice de transfert

La matrice de transfert peut être utilisée pour étudier le problème de découplage. Les indices relatifs d_i sont calculés à partir de $W(s)$.

Définition 4.10 [Paul, 1972]

Un système linéaire stationnaire $\Sigma(A, B, C, D)$ est complètement découplable par retour d'état si l'une des deux propriétés (a) et (b) suivantes est vérifiée :

- (a) La matrice de transfert en boucle ouverte $W(s)$ est diagonale et non singulière.
- (b) La matrice de transfert en boucle fermée $\tilde{W}(s)$ est diagonale et non singulière.

Propriété 4.1 [Gilbert, 1969]

Les entiers d_i ($i = 1 \dots m$) peuvent être déterminés à partir de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice de transfert $W_i(s)$ ($i = 1 \dots m$):

$$\begin{aligned} d_i &= \min \left\{ \alpha : \lim_{s \rightarrow \infty} s^{\alpha+1} W_i(s) \neq 0 \right\} \quad \text{avec } \alpha = 0, 1, \dots, (n-1) \\ \text{ou} \\ d_i &= (n-1) \quad \text{si } W_i(s) = 0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

donc la $i^{\text{ème}}$ ligne de B^* est donnée par:

$$B_i^* = \lim_{i \rightarrow \infty} s^{d_i+1} W_i(s) \quad (4.31)$$

IV.6.Approche par les graphes

IV.6.1.Découplage structurel

La notion de découplage structurel par retour d'état est introduite dans le même esprit que les notions de propriétés structurelles précédentes (l'hypothèse d'indépendance entre les termes d'une matrice est vérifiée).

Définition 4.11

Un système structurel $\Sigma([A],[B],[C])$ est structurellement découplable par retour d'état s'il existe un système $\Sigma(A,B,C)$ structurellement équivalent découplable par retour d'état.

IV.6.2.Méthode de couplage

Nous rappelons quelques définitions relatives au concept de couplage entrées-sorties dans un digraphe.

Définition 4.12

La longueur d'un chemin dans un digraphe $G(\mathcal{Z},\mathcal{E})$ est égale au nombre d'arcs, qui le composent.

Définition 4.13 [Linneman 1981]

Une séquence $M = \{P_1 \dots P_m\}$ de chemins P_i dans un digraphe structurel $G([\mathcal{Z},\mathcal{E}])$ est appelée couplage entrées-sorties, si les deux conditions (a) et(b) sont vérifiées :

a) Il existe une permutation π de $(1\dots m)$ telle que pour $i \in m$, P_i est un chemin partant du sommet $u_{\pi(i)}$ vers le sommet y_i ,

b) P_i est le chemin le plus court reliant un sommet entrée u au sommet sortie y_i . En d'autres termes, la longueur de P_i est égale à \bar{d}_i , avec :

$\bar{d}_i = \min \{\text{longueur de } P/P \text{ est un chemin reliant un sommet } u \text{ au sommet } y_i \text{ dans } G([\mathcal{Z},\mathcal{E}])\}$.

Définition 4.14 [Linneman, 1981]

Un couplage entrée-sortie est élémentaire si aucun sommet dans $G([\mathcal{Z},\mathcal{E}])$ n'est incident avec deux chemins disjoints de M .

Théorème 4.8 [Linneman, 1981]

Un système structural $\Sigma([A],[B],[C])$ peut être structurellement découplable par retour d'état de la forme $u = Kx + Lv$, (L non singulière) si et seulement s'il existe un couplage élémentaire entrées-sorties dans le digraphe structural $G([A],[B],[C])$.

Exemple 4.9

Considérons un système défini par ses matrices A , B et C .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & b_{23} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ 0 & c_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

Le digraphe structural associé est représenté par la figure 4.13.

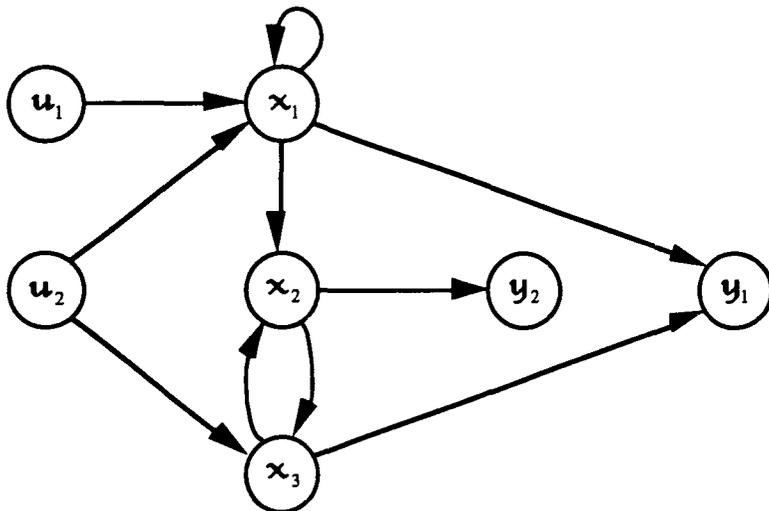


Figure 4.13 : Digraphe structural $G([Q,])$

Les chemins entrées-sorties les plus courts reliant un sommet entrée u au sommet sortie y_1 (resp. y_2) sont de longueur 2 (resp. 3). Ce sont des couplages entrées-sorties élémentaires dans le digraphe $G([Z,E])$: $M_1 = \{(u_1, x_1, y_1), (u_2, x_3, x_2, y_2)\}$ et $M_2 = \{(u_2, x_3, y_1), (u_1, x_1, x_2, y_2)\}$.

Donc, en application du théorème 4.8, nous déduisons que ce système est structurellement découplable par retour d'état.

IV.6.3. Interprétation des résultats géométriques

L'approche géométrique se base sur la structure à l'infini (zéros infinis) d'un système. Descusse et Dion (1982) ont révisé le problème classique de découplage par retour d'état statique. Ils ont traduit la condition nécessaire et suffisante de Falb et Wolovich (1967) en terme

de structure à l'infini. Commault et al. (1986) ont utilisé les ordres essentiels caractérisant la structure à l'infini minimale du système pour résoudre le problème de découplage. Dion et Commault (1988) ont considéré le retour dynamique pour découpler un système en caractérisant sa structure à l'infini. Plusieurs publications utilisant cette approche sont disponibles, nous en proposons quelques unes en bibliographie.

Dion et Commault (1991) utilisent la caractérisation de la structure à l'infini pour donner une condition nécessaire et suffisante de découplage par retour d'état des systèmes linéaires structurels. Ils en donnent une interprétation graphique en termes de chemin entrées-sorties. Pour cela, ils définissent le rang structurel d'un système. Leur critère est équivalent à celui de Linneman (1981).

Définition 4.15 [Dion et Commault, 1991]

Le rang structurel d'un système structurel $\Sigma([A],[B],[C])$ est égal au nombre maximal de chemins entrées-sorties disjoints dans le digraphe structurel $G([A],[B],[C])$ associé.

Théorème 4.9 [Dion et Commault, 1991]

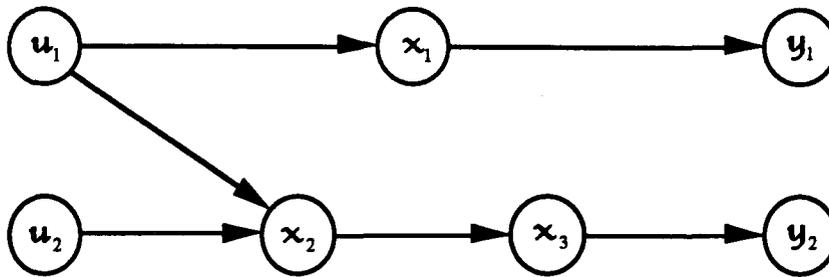
Soit un système structurel $\Sigma([A],[B],[C])$, de rang structurel p , Σ est structurellement découplable par retour d'état $u = Kx + Lv$, (L non singulière), si et seulement si $L_p = \sum_{i=1}^p l_i$ avec L_p , la somme minimale des longueurs de p chemins entrées-sorties disjoints et l_i , la longueur du chemin le plus court allant des entrées vers la $i^{\text{ème}}$ sortie dans le digraphe structurel associé $G(\Sigma)$.

Si $L_p \neq \sum_{i=1}^p l_i$, alors le système n'est pas structurellement découplable par retour d'état statique, mais découplable par retour d'état dynamique.

Exemple 4.10

Considérons le système défini par les matrices A, B, C . Le digraphe $G([Q_3])$ associé est donné par la figure 4.14.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} \end{bmatrix}$$

Figure 4.14 : Digraphe structurel $G([Q,])$

Les deux chemins entrées-sorties disjoints (u_1, x_1, y_1) et (u_2, x_2, x_3, y_2) sont de longueurs respectives $L_1 = 2$ et $L_2 = 3$. Ce sont les chemins les plus courts reliant les entrées aux sorties. Par conséquent $L_2 = 5$.

$L_2 = L_1 + L_2$, donc en application du théorème 4.9, le système est structurellement découplable.

IV.6.4. Conclusion

Les méthodes graphiques rappelées dans ce paragraphe supposent que le système étudié est inversible (ou au moins inversible à droite pour la méthode géométrique). Notre démarche consiste à ne pas faire cette hypothèse d'inversibilité à priori et à inclure dans l'étude du découplage la vérification de cette propriété.

IV.7. Approche par les bond graphs

Maschke (1990) a transformé le modèle bond graph en un graphe particulier appelé "graphe des chemins causaux" pour déterminer des lois de commandes de robots contenant des segments flexibles. Notre propos consiste à étudier le problème de découplage directement sur le modèle bond graph et sans effectuer de calcul.

IV.7.1. Calcul formel de la matrice de découplage

Dans la continuité des méthodes de calcul formel que nous avons présenté auparavant, nous proposons une méthode se basant sur les chemins causaux dans un modèle bond graph pour le calcul formel de la matrice de découplage B^* , ainsi que celui de la matrice A^* .

IV.7.1.1. Règle de calcul de B^*

Chaque vecteur ligne $B_i^* = C_i A^{d_i} B$ de la matrice de découplage B^* se calcule de la même manière qu'un terme $CA^k B$ de la matrice de commandabilité en sortie C_0 . Par contre, les méthodes de calcul des deux matrices ne sont pas identiques, puisque lors du calcul de C_0 , tous les termes de la forme $CA^k B$ ($0 \leq k \leq n-1$) sont calculés, alors que pour B^* nous ne calculons que le premier terme non nul de la forme $C_i A^{d_i} B$.

Nous proposons une interprétation du degré relatif en termes de chemins causaux dans un modèle bond graph.

Proposition 4.1

Le degré relatif d_j de y_j (D_e ou D_f) est donné par:

$$d_j = L_{(u_i, y_j)} - 1$$

où $L_{(u_i, y_j)}$ est la longueur du chemin entrées-sorties le plus court reliant la sortie y_j à une entrée u_i (S_e ou S_f).

Démonstration

Chaque terme du vecteur ligne $C_j A^k B$, noté $C_j A^k B_i$, est donné par les termes constants des gains des chemins causaux de longueur L_{k+1} entre une entrée $u_i \in u$ et une sortie y_j . Nous pouvons donc écrire la relation suivante :

$$\text{puissance de } A \underset{\text{(dans } C_j A^k B_i)}{=} \text{longueur du chemin} \underset{\text{(entre } u_i \text{ et } y_j)}{-1}$$

L'indice relatif associé à la sortie y_j correspond à la valeur de k minimale, associée au premier terme non nul apparaissant dans la ligne $C_j A^k B$, quand nous cherchons à atteindre une entrée à partir de la sortie y_j , ce qui donne la relation suivante:

$$d_j = L_{(u_i, y_j)} - 1$$

où $L_{(u_i, y_j)}$ est le chemin le plus court entre la sortie y_j et l'entrée la plus proche u_i .

Procédure 4.1 (Détermination de B^*)

- 1) Pour chacune des m sorties y_j (D_e ou D_f):
 - i) Déterminer l'indice relatif d_j (proposition 4.1).
 - ii) Calculer le vecteur ligne $B_j^* = C_j A^{d_j} B$ (équation 4.3).

2) La matrice de découplage B^* est alors donnée par:

$$B^* = \begin{bmatrix} B_1^* \\ \vdots \\ B_j^* \\ \vdots \\ B_m^* \end{bmatrix}$$

Exemple 4.11

Considérons le modèle bond graph de la figure 4.15. Les matrices A, B et C sont données ci-dessous. Nous proposons le calcul formel de la matrice B*.

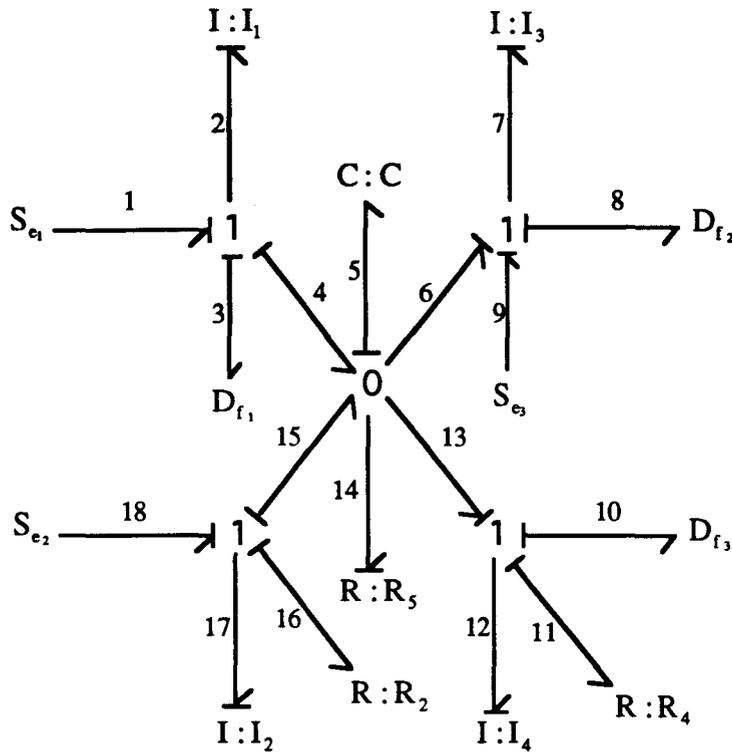


Figure 4.15

Les vecteurs d'entrée et de sortie sont donnés par :

$$u = \begin{pmatrix} S_{e_1} \\ S_{e_2} \\ S_{e_3} \end{pmatrix} \text{ et } y = \begin{pmatrix} D_{f_1} \\ D_{f_2} \\ D_{f_3} \end{pmatrix}$$

Application de la procédure 4.1

1.i) Calcul des indices relatifs (proposition 4.1)

- Le chemin causal le plus court, reliant le détecteur de flux $y_1 = D_{f_1}$ à une source d'entrée, a pour longueur $L_{(u_1, y_1)} = 1$, d'où l'indice relatif $d_1 = 0$ (ici $u_1 = S_{e_1}$).

- Le chemin causal de longueur minimale liant $y_2 = D_{f_2}$ à une source est de longueur $L_{(u_3, y_2)} = 1$, d'où l'indice relatif $d_2 = 0$ (ici $u_3 = S_{e_3}$).

- Il existe trois chemins causaux de longueur minimale reliant $y_3 = D_{f_3}$ aux trois sources d'entrée S_{e_1} , S_{e_2} et S_{e_3} . Leurs longueurs, égales, valent $L_{(u_1, y_3)} = L_{(u_2, y_3)} = L_{(u_3, y_3)} = 3$ d'où l'indice relatif $d_3 = 2$.

Donc les vecteurs lignes sont respectivement $B_1^* = [C_1 B_1 \ 0 \ 0]$, $B_2^* = [0 \ 0 \ C_2 B_3]$, $B_3^* = [C_3 A^2 B_1 \ C_3 A^2 B_2 \ C_3 A^2 B_3]$.

1.ii) Calcul des vecteurs lignes B_1^* , B_2^* , B_3^* .

- calcul de B_1^*

Le terme constant du gain du chemin $[(S_{e_1}, D_{f_1}) : 1-2-2-3]$ est exprimé par $\tilde{G}_{(S_{e_1}, D_{f_1})} = \frac{1}{I_1}$

d'où $B_1^* = \begin{bmatrix} 1 \\ I_1 \ 0 \ 0 \end{bmatrix}$.

- Calcul de B_2^*

Le terme constant du gain du chemin $[(S_{e_3}, D_{f_2}) : 9-7-7-8]$ est $\tilde{G}_{(S_{e_3}, D_{f_2})} = \frac{1}{I_3}$ d'où

$$B_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{I_3} \end{bmatrix}.$$

- Calcul de B_3^*

Il existe trois chemins causaux de longueur 3 reliant D_{f_3} à des sources d'entrée. Ces trois chemins sont respectivement définis par les liens $[(S_{e_1}, D_{f_3}) : 1-2-2-4-5-5-13-12-12-10]$ ayant

un terme constant du gain $\tilde{G}_{(S_{e_1}, D_{f_3})} = \frac{1}{I_1 I_4 C}$, $[(S_{e_2}, D_{f_3}) : 18-17-17-15-5-5-13-12-12-10]$ avec

un terme constant du gain $\tilde{G}_{(S_{e_2}, D_{f_3})} = \frac{1}{I_2 I_4 C}$ et $[(S_{e_3}, D_{f_3}) : 9-7-7-6-5-5-13-12-12-10]$ avec

$$\tilde{G}_{(S_{e_3}, D_{f_3})} = \frac{-1}{I_3 I_4 C}. \text{ Donc } B_3^* = C_3 A^2 B = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1 I_4 C} & \frac{1}{I_2 I_4 C} & \frac{-1}{I_3 I_4 C} \end{bmatrix}.$$

2) La matrice de découplage s'écrit ici:

$$B^* = \begin{bmatrix} C_1 B \\ C_2 B \\ C_3 A^2 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} \\ \frac{1}{I_1 I_4 C} & \frac{1}{I_2 I_4 C} & \frac{-1}{I_3 I_4 C} \end{bmatrix}$$

Le calcul matriciel nous permet de retrouver la même expression en utilisant les matrices A, B et C déduites du modèle bond graph (figure 4.15).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{C} \\ 0 & \frac{-R_2}{I_2} & 0 & 0 & \frac{-1}{C} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-R_4}{I_4} & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{I_1} & \frac{1}{I_2} & \frac{-1}{I_3} & \frac{-1}{I_4} & \frac{-1}{R_5 C} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_4} & 0 \end{bmatrix}$$

IV.7.1.2. Règle de calcul de A*

Chaque vecteur ligne $C_i A^k$ de la matrice A^* (équation 4.22) se calcule formellement de la même manière qu'un terme de la matrice d'observabilité O_b (équation 2.22).

Les indices relatifs d_i déterminés lors du calcul de B^* (proposition 4.1) sont utilisés pour proposer une règle pour calculer la matrice A^* sous forme formelle.

Procédure 4.2 (Détermination de A*)

- 1) Pour chacune des p sorties y_i , calculer le vecteur ligne $A_i^* = C_i A^{d_i+1}$
- 2) La matrice de découplage A^* est alors donnée par:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1^* \\ \vdots \\ A_i^* \\ \vdots \\ A_m^* \end{bmatrix}$$

Exemple 4.12

Nous reprenons l'exemple 4.11 pour le calcul formel de la matrice A^* .

- 1) Les indices relatifs d_i déterminés graphiquement dans l'exemple 4.11 sont: $d_1 = 0$, $d_2 = 0$ et $d_3 = 2$. Les vecteurs lignes A_i^* sont alors donnés par :

$$(A_1^* = C_1 A), (A_2^* = C_2 A) \text{ et } (A_3^* = C_3 A^3)$$

La matrice A^* s'écrit alors sous la forme: $A^* = \begin{bmatrix} A_1^* \\ A_2^* \\ A_3^* \end{bmatrix}$

- Calcul de A_1^*

Seul l'élément dynamique C est lié à D_{f_1} avec un chemin causal de longueur 2. Ce chemin est défini par les liens [(C, D_{f_1}): 5-4-2-2-3], par conséquent, le gain est

$$G_{(C,D_{f_1})} = \left(\frac{-1}{I_1 \cdot s} \right) \left(\frac{1}{C \cdot s} \right), \text{ donc } A_1^* = C_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{I_1 C} \end{bmatrix}.$$

- Calcul de A_2^*

De la même manière, seul C est lié à D_{f_2} avec un chemin causal de longueur 2,

$$[(C,D_{f_2}): 5-6-7-7-8], G_{(C,D_{f_2})} = \left(\frac{1}{I_3 \cdot s} \right) \left(\frac{1}{C \cdot s} \right) \text{ et } A_2^* = C_2 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_3 C} \end{bmatrix}.$$

- Calcul de A_3^*

Tous les éléments dynamiques sont liés à D_{f_3} avec des chemins causaux de longueur 3.

Nous présentons le calcul des deux premiers termes, sachant que les autres s'obtiennent de la même manière.

- Le chemin causal [I_1, D_{f_3} : 2-4-5-5-14-14-5-5-13-12-12-10] a pour gain

$$G_{(I_1, D_{f_3})} = \left(\frac{-1}{R_5 I_4 C^2 s^3} \right) \left(\frac{1}{I_1 \cdot s} \right).$$

- D_{f_3} est lié à I_2 par deux chemins causaux: [(I_2, D_{f_3})₁: 17-16-16-17-17-15-5-5-13-12-12-10] et [(I_2, D_{f_3})₂: 17-15-5-5-14-14-5-5-13-12-12-10]. Leur gains sont respectivement

$$G_{(I_2, D_{f_3})_1} = \left(\frac{-R_2}{I_2 I_4 C s^3} \right) \left(\frac{1}{I_2 \cdot s} \right) \quad \text{et} \quad G_{(I_2, D_{f_3})_2} = \left(\frac{1}{R_5 I_4 C^2 s^3} \right) \left(\frac{1}{I_2 \cdot s} \right), \quad \text{donc}$$

$$G_{(I_2, D_{f_3})} = \left(\frac{-R_2}{I_2 I_4 C s^3} + \frac{1}{R_5 I_4 C^2 s^3} \right) \left(\frac{1}{I_2 \cdot s} \right).$$

Par conséquent,

$$A_3^* = C_3 A^2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_5 I_1 I_4 C^2} & \frac{-R_2}{I_2^2 I_4 C} + \frac{1}{R_5 I_2 I_4 C^2} & \frac{1}{R_5 I_3 I_4 C^2} & \frac{1}{R_5 I_4^2 C^2} & \frac{1}{I_1 I_4 C^2} + \frac{1}{I_2 I_4 C^2} + \frac{1}{I_3 I_4 C^2} + \frac{-1}{I_4 C^3 R_5^2} \end{bmatrix},$$

donc

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{I_1 C} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_3 C} \\ \frac{-1}{R_5 I_1 I_4 C^2} & \frac{-R_2}{I_2^2 I_4 C} + \frac{1}{R_5 I_2 I_4 C^2} & \frac{1}{R_5 I_3 I_4 C^2} & \frac{1}{R_5 I_4^2 C^2} & \frac{1}{I_1 I_4 C^2} + \frac{1}{I_2 I_4 C^2} + \frac{1}{I_3 I_4 C^2} + \frac{-1}{I_4 C^3 R_5^2} \end{bmatrix}$$

IV.7.2. Découplage par retour d'état statique

En utilisant la notion de chemins causaux entrées-sorties, nous proposons un critère graphique d'étude du découplage. Nous faisons l'hypothèse qu'une étude préalable de l'inversibilité du système a été faite.

Critère

Un système inversible (m entrées-m sorties) est découplable par retour d'état statique, si chacun des m chemins causaux entrées-sorties différents (choisis pour assurer l'inversibilité) est le plus court qui puisse exister entre une entrée (S_e ou S_f) et la sortie y_j (D_e ou D_f).

Démonstration

Ce critère se compose de deux conditions, la première qui exprime l'existence de m chemins causaux entrées-sorties différents est justifiée par l'inversibilité du système. La seconde condition qui impose à ces m chemins causaux entrées-sorties différents d'être les plus courts est due à la procédure 4.1 de calcul formel de la matrice B^* . En effet, nous avons montré lors de la présentation de la procédure que seuls les vecteurs $B_i^* = C_i A^{d_i} B$ sont calculés ; avec d_j , le degré relatif donné par la longueur du chemin entrées-sorties le plus court reliant la sortie y_j à une entrée u_i (S_e ou S_f).

Remarque

L'existence d'une sortie qui n'est jamais atteinte par une entrée, ou d'une entrée qui n'atteint jamais une sortie sont deux conditions suffisantes de dégénérescence du rang de la matrice B^* .

Ces deux conditions se traduisent respectivement par l'existence d'un vecteur ligne nul dans la matrice de sortie C, et par celle d'un vecteur colonne nul dans la matrice de commande B. La dégénérescence du rang de l'une des deux matrices B et C est une condition suffisante de dégénérescence de celui de la matrice B^* .

Il est donc conseillé d'opérer des manipulations causales pour ne garder que les sources et détecteurs qui garantissent aux matrices B et C des rangs maximaux.

Les vecteurs d'entrée et de sortie sont donnés par :

$$u = \begin{pmatrix} S_e \\ S_f \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} D_{f_1} \\ D_{f_2} \end{pmatrix}$$

1) Inversibilité

Deux choix de chemins causaux entrées-sorties différents sont possibles. Nous ne pouvons pas conclure directement. Il est alors préférable de calculer le déterminant de la matrice système.

L'existence de deux paires de chemins causaux différents se traduit par l'existence de deux termes dans l'expression de $\det P(s)$:

* Calcul du terme $\left(\prod_{k=1}^2 \tilde{G}_{(u_i, y_j)_k} \times P^R \right)_1$ (correspondant au premier choix).

-Les deux chemins formant le premier choix sont donnés par:

$$\begin{cases} (S_e, D_{f_1}) : 2-3-5-5-4 & \text{avec } \tilde{G}_{(S_e, D_{f_1})} = \frac{1}{I_1} \\ (S_f, D_{f_2}) : 8-7-7-9-10-10-11 & \text{avec } \tilde{G}_{(S_f, D_{f_2})} = \frac{1}{I_2 C} \end{cases}$$

Aucun élément dynamique ne reste sur le modèle bond graph de la figure 4.16, lorsque ces deux chemins causaux sont supprimés donc $P^R = 1$.

$$\text{Donc } \left(\prod_{k=1}^2 \tilde{G}_{(u_i, y_j)_k} \times P^R \right)_1 = \frac{1}{I_1 I_2 C}$$

* Calcul du terme $\left(\prod_{k=1}^2 \tilde{G}_{(u_i, y_j)_k} \times P^R \right)_2$ (correspondant au second choix).

- Le second choix est donné par les deux chemins suivants :

$$\begin{cases} (S_e, D_{f_2}) : 2-12-10-10-11 & \text{avec } \tilde{G}_{(S_e, D_{f_2})} = \frac{1}{I_2} \\ (S_f, D_{f_1}) : 8-7-7-6-5-5-4 & \text{avec } \tilde{G}_{(S_f, D_{f_1})} = \frac{-1}{I_1 C} \end{cases}$$

De la même manière, aucun élément dynamique ne reste sur le bond graph de la figure 4.16, quand ces chemins entrées-sorties sont supprimés, donc $P^R = 1$.

$$D'où \left(\prod_{k=1}^2 \bar{G}_{(u_i, y_j)_k} \times P^R \right)_2 = \frac{-1}{I_1 I_2 C}.$$

L'équation (4.16) nous donne alors $\det P(s) = \frac{1}{I_1 I_2 C} - \frac{-1}{I_1 I_2 C} = \frac{2}{I_1 I_2 C} \neq 0$. Le système est donc structurellement inversible. Quel retour d'état doit-on appliquer pour découpler se système ?

2) Retour statique

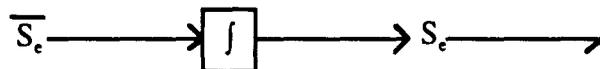
Les chemins causaux $[(S_e, D_{f_1}) : 2-3-5-5-4]$ et $[(S_e, D_{f_2}) : 2-12-10-10-11]$ sont les plus courts liant respectivement D_{f_1} et D_{f_2} à une source.

Ces deux chemins ne sont pas différents donc B^* est singulière. Il n'existe pas de retour d'état statique pour découpler le système. Cette singularité s'explique par la plus grande longueur des chemins de la source d'entrée S_f par rapport à l'entrée S_e sur les deux sorties.

3) Compensation dynamique

La source d'entrée S_f agit avec un certain retard par rapport à S_e . Il faudra donc rallonger les chemins causaux partant de la source d'entrée S_e .

Soit \bar{S}_e , la source déduite de S_e en insérant un intégrateur.



Le modèle bond graph augmenté est représenté par la figure 4.17.

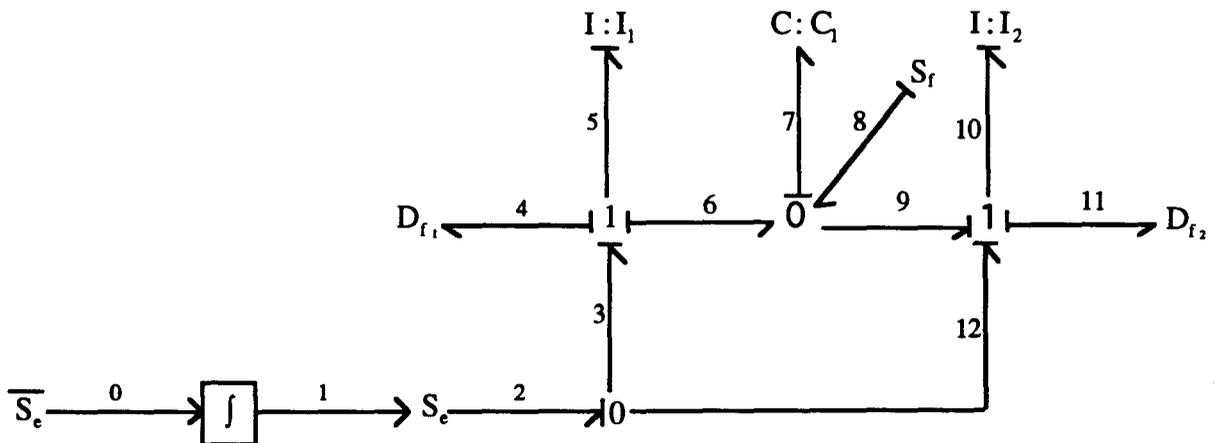


Figure 4.17 : Modèle bond graph augmenté

Les chemins causaux partant de la source S_e sont rallongés de 1. Les chemins causaux donnés par $[(\bar{S}_e, D_{f_1}) : 1-2-3-5-5-4]$ et $[(S_f, D_{f_2}) : 8-7-7-9-10-10-11]$ sont les plus courts. Et puisqu'ils sont différents nous déduisons alors que le système est découplable par compensation dynamique.

Remarque

Dans le cas de cet exemple, un autre choix de plus courts chemins causaux différents est possible : $[(\bar{S}_e, D_{f_1}) : 1-2-12-10-10-11]$ et $[(S_f, D_{f_1}) : 8-7-7-6-5-5-4]$. Ceci a pour effet d'avoir une nouvelle matrice de découplage avec tous les termes non nuls, mais il n'a aucune incidence sur le résultat.

4) Vérification des résultats par le calcul

Les matrices A, B et C déduites du modèle bond graph de la figure 4.14 sont :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad B = (B_1 \quad B_2) \quad C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Nous vérifions que le système est inversible en calculant, par exemple, le déterminant de la matrice système $P(s)$.

$$B^* = \begin{bmatrix} C_1 B \\ C_2 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 \\ \frac{1}{I_2} & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de découplage B^* est de rang 1, donc il n'existe pas de retour d'état statique qui découple le système.

Le système étant inversible, il existe alors un compensateur dynamique qui le découple.

L'écriture des équations différentielles montre que l'entrée u_1 apparaît avant u_2 dans les équations de sorties dérivées.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{-1}{C_1} x_3 + u_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C_1} x_3 + u_1 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{I_1} x_1 - \frac{1}{I_2} x_2 + u_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{I_1} x_1 \\ y_2 = \frac{1}{I_2} x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = \frac{1}{I_1} \dot{x}_1 = \frac{-1}{I_1 C_1} x_3 + \frac{1}{I_1} u_1 \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{I_2} \dot{x}_2 = \frac{1}{I_2 C_1} x_3 + \frac{1}{I_2} u_1 \end{cases}$$

nous introduisons alors une nouvelle variable z définie par :

$$z = u_1 \Rightarrow \dot{z} = \omega_1$$

Le système augmenté s'écrit alors sous la forme de l'équation (4.30).

$$\Sigma_a : \begin{cases} \dot{x}_a = A_a x_a + B_a u_a \\ y_a = C_a x_a \end{cases} \quad \text{avec} \quad x_a = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad y_a = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad u_a = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Les matrices du système augmenté sont alors définies par :

$$A_a = \begin{pmatrix} A & B_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_a = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C_a = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 1 \\ \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_a B_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_a A_a B_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{C_1 I_1} \\ \frac{1}{I_2} & \frac{1}{I_2 C_1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } B_a^* = \frac{1}{I_1 I_2 C_1} + \frac{1}{I_1 I_2 C_1} \neq 0$$

La nouvelle matrice de découplage B_a^* est non singulière, donc le système est découplable par retour d'état dynamique.

Cette méthode qui consiste à insérer des intégrateurs pour retarder l'action des entrées n'est pas toujours suffisante pour découpler un système. Le seul recours reste l'utilisation d'algorithmes de compensation dynamique.

Exemple 4.15

Considérons le modèle bond graph d'un bras de robot à articulation flexible simplifié, représenté sur la figure 4.18.

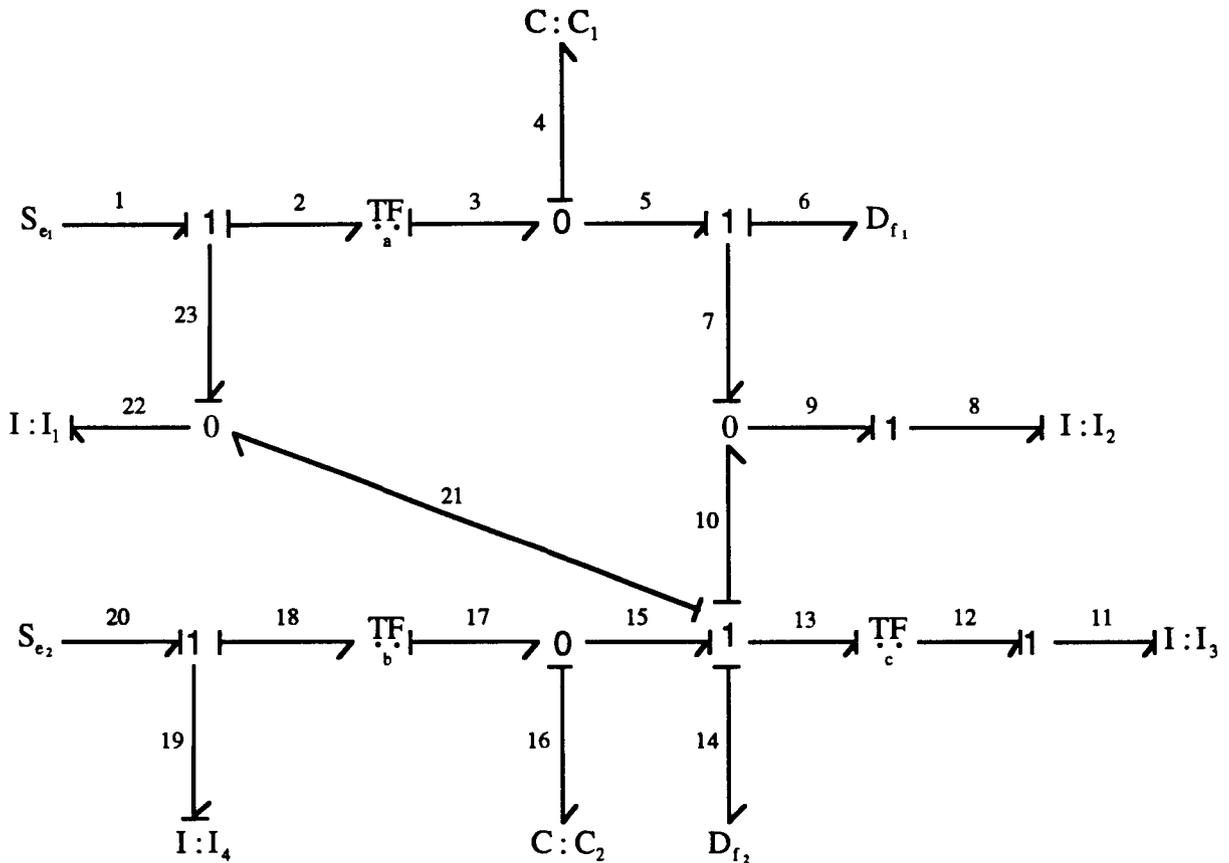


Figure 4.18

1) Test de l'inversibilité

Les deux chemins causaux entrées-sorties $[(S_{e_1}, D_{f_1}) : 1-23-22-22-23-2-3-4-4-5-7-9-8-8-9-7-6]$ et $[(S_{e_2}, D_{f_2}) : 20-19-19-18-17-16-16-15-14]$ sont différents. Donc, le système est inversible.

2) Retour d'état statique

Les chemins différents (S_{e_1}, D_{f_1}) et (S_{e_2}, D_{f_2}) ont tous les deux pour longueur 3. Ce ne sont donc pas les plus courts puisque D_{f_2} peut être atteint par S_{e_1} avec un chemin de longueur 1. Donc, le système n'est pas découplable par retour d'état statique.

3) compensation dynamique

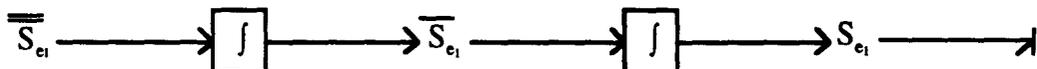
Le système est inversible, donc il existe un compensateur dynamique qui peut découpler le système.

La source S_{e_1} apparaît dans les deux chemins causaux les plus courts atteignant les deux détecteurs. Donc, il faut retarder son effet par un intégrateur.



Les nouveaux chemins causaux différents $(\overline{S}_{e_1}, D_{f_1})$ et (S_{e_2}, D_{f_2}) ont respectivement pour longueur 4 et 3. Ce ne sont toujours pas les plus courts, car D_{f_2} est atteint par \overline{S}_{e_1} avec un chemin de longueur 2. Donc ce retour ne découple pas le système. Ce résultat était prévisible puisque la source S_{e_1} atteint D_{f_2} avec un chemin de longueur 1, alors que S_{e_2} l'atteint avec un chemin de longueur 3. Donc, pour espérer équilibrer les longueurs des chemins entre S_{e_1} et S_{e_2} , il fallait insérer deux intégrateurs devant S_{e_1} .

Donc, $\overline{\overline{S}}_{e_1}$, la nouvelle source d'effort, est définie par :



La longueur des chemins causaux entrées-sorties différents $(\overline{\overline{S}}_{e_1}, D_{f_1})$ et (S_{e_2}, D_{f_2}) devient alors égale respectivement à 5 et 3. Mais il existe un chemin causal de longueur 3 liant $\overline{\overline{S}}_{e_1}$ à D_{f_2} . Donc, $(\overline{\overline{S}}_{e_1}, D_{f_1})$ et (S_{e_2}, D_{f_2}) ne sont pas les plus courts. D'où l'inefficacité de ce retour.

Nous remarquons que le fait d'augmenter la longueur des chemins causaux ne garantit pas le découplage par retour dynamique. L'utilisation de l'algorithme de Sinha (1977), exposé en annexe 5 nous permet de vérifier que ce système est bien découplable.

V. Conclusion

Nous avons montré que la notion de commandabilité en sortie est une notion importante de la commande des systèmes multivariables linéaires. Par contre, elle ne représente pas une condition nécessaire pour le découplage par retour d'état contrairement à des idées reçues. A l'inverse, la notion d'inversibilité est nécessaire pour résoudre le problème de découplage. Ce problème est totalement résolu en utilisant des méthodes numériques. Les méthodes graphiques rappelées dans ce chapitre utilisent une hypothèse restrictive qui consiste à supposer que le

Le système est inversible (ou inversible à droite). Cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée. La méthode basée sur la notion de chemins et de familles de cycles causaux, que nous avons présentée, a l'avantage de tester l'inversibilité avant de commencer la résolution du problème du découplage. Le type de retour nécessaire est aussi présenté.

Lorsque la sortie n'est pas un détecteur d'effort ou de flux (D_e ou D_f) mais un élément dynamique (I,C) ou une combinaison d'éléments dynamiques, les chemins vers la sortie sont rallongés. La même méthode peut être appliquée.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Le modèle bond graph apparaît comme un excellent outil d'aide à l'analyse des systèmes grâce à sa structure de jonction et au concept de causalité. Il fournit directement des informations originales, parfois difficiles à obtenir par d'autres voies.

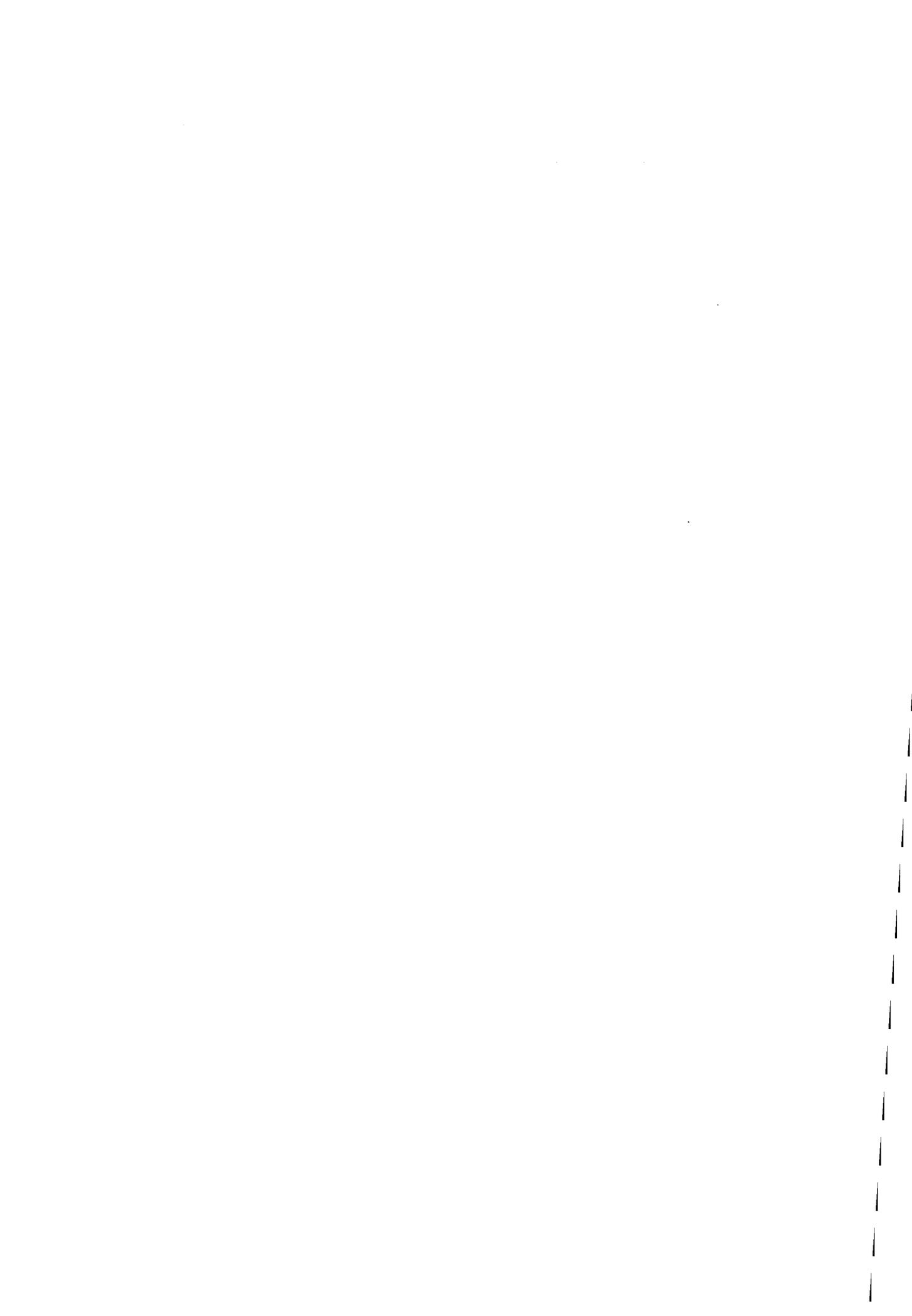
Les différentes matrices utilisées dans l'étude des problèmes de commandabilité en état et en sortie, d'observabilité et de découplage sont déterminées formellement. Et une interprétation de chaque terme de ces matrices est proposée en terme de chemins causaux sur le modèle bond graph. Pour cela, nous avons utilisé la notion de chemins causaux, ainsi que de nouvelles notions que nous avons introduit appelées "cycles causaux" et "arbres causaux" dans un modèle bond graph.

Par de simples manipulations causales, une analyse graphique directement sur le modèle bond graph a été opérée pour connaître le nombre et l'emplacement des sources d'énergie et des capteurs nécessaires pour résoudre les différents problèmes de commande.

Les différentes méthodes graphiques que nous avons proposées sont simples et facilement programmables à l'aide des méthodes de l'informatique telle que l'intelligence artificielle. Elles reposent sur l'utilisation d'informations causales disponibles dans le logiciel ARCHER en cours de développement au laboratoire. ARCHER étant un programme utilisant à la fois la méthodologie bond graph et les techniques de l'intelligence artificielle.

Les travaux développés au laboratoire utilisant cette approche structurelle ont déjà trouvé des champs d'application, citons LIN et al. (1991) (étude des propriétés structurelles de l'ensemble réservoir servovalve-vérin), Vaz et al. (1993) (étude de la commande du modèle bond graph d'une poutre). Actuellement des travaux sont en cours, utilisant les mêmes outils pour l'étude de la surveillance des systèmes physiques Tagina et al. (1993).

Lorsque le modèle bond-graph a des causalités dérivées ou quand il y a des liens d'informations pour moduler les éléments ou les MTF, les méthodes de calculs formels que nous avons présenté restent valables, par contre l'interprétation diffère.



ANNEXE GENERALE

Annexe générale

Annexe 1 : Eléments d'algèbre.....	201
I.Notations.....	201
II.Variété algébrique	201
III.Polynôme algébrique.....	202
Annexe 2 : Eléments de la théorie des graphes.....	203
I.Notion de graphe	203
I.1.Définitions.....	203
I.2.Caractéristiques	203
I.2.1.Successeur et prédécesseur.....	203
I.2.2.Degré d'un sommet.....	204
I.2.3.Connexité d'un digraphe.....	204
I.2.4.Graphe biparti.....	204
II.Cheminement dans un digraphe.....	204
II.1.1.Chemin.....	204
II.1.2.Cycle.....	205
II.1.3.Arbre.....	205
III.Couplage dans un digraphe.....	205
III.1.Définition d'un couplage.....	205
III.2.Couplage maximum dans un digraphe biparti.....	205
IV.Graphes spécifiques.....	206
IV.1.Tige.....	206
IV.2.Bouton	206
IV.3.Cactus	206
IV.4.Concept de dilatation.....	207

Annexe 3 : Bond graph.....	208
I.Variables mises en jeu	208
I.1.Variables de puissance.....	208
I.2.Variables d'énergie.....	208
II.Propriétés causales d'un bond graph	210
II.1.Notion de causalité.....	210
II.2.Causalité sur les Jonctions	210
III.Notion de signal.....	211
IV.Propriétés causales d'un bond graph	212
IV.1.Transmittance d'un élément 1-port.....	212
Transmittance de I	212
Transmittance de C	212
Transmittance de R	213
IV.2.Chemin causal	213
V.Equation d'état associée au modèle bond graph	214
Annexe 4 : Analogie bond graph - digraphe.....	218
I.Caractérisation d'un digraphe par des matrices.....	218
I.1.A partir d'une matrice carrée quelconque.....	218
I.2.A partir d'une représentation d'état	218
I.3.A partir du modèle bond graph	220
II.Equivalence bond graph / digraphe.....	223
Algorithme de Sinha.....	226

Annexe 1 : Eléments d'algèbre**I. Notations**

La plupart des définitions concernant les propriétés algébriques et par la même celles des propriétés génériques sont définies par rapport à l'anneau K des coefficients rationnels q . Notre domaine de travail est l'ensemble des réels \mathfrak{R} , donc les définitions seront indifféremment rappelées pour K ou \mathfrak{R} .

Soit N le nombre de termes non nuls dans une matrice structurale $[A]$, à paramètres dans \mathfrak{R} , alors l'espace associé à ces matrices structurales est noté \mathfrak{R}^N .

Chaque ensemble de N termes arbitraires représente un vecteur $p \in \mathfrak{R}^N$.

II. Variété algébrique

Nous présentons une série de définitions concernant une variété algébrique notée V .

Définition a.1

Soit un ensemble fini de polynômes non triviaux dans \mathfrak{R} , Ψ_1, \dots, Ψ_k . L'ensemble des zéros communs aux Ψ_i tels que $\Psi_i(y) = 0$ avec $i \in 1, \dots, k$, $Y = (y_1, \dots, y_q) \in \mathfrak{R}^N$ forme une variété algébrique.

Définition a.2

Une variété algébrique $V \subset \mathfrak{R}^N$ est l'ensemble de zéros communs aux polynômes Ψ_1, \dots, Ψ_k .

Définition a.3

Une variété algébrique V est dite propre si $V \neq \mathfrak{R}^N$.

Définition a.4

Une variété algébrique V est dite non triviale si $V \neq 0$.

Définition a.5

Un sous-ensemble $Y = (y_1, \dots, y_q)$ de F est dit algébriquement indépendant s'il n'existe aucun polynôme non trivial $p(x_1, \dots, x_q)$ à q indéterminées tel que dans K $p(y_1, \dots, y_q) = 0$.

III. Polynôme algébrique

Considérons les polynômes $\Psi_i \in R[\lambda]$.

Définition a.6

Un vecteur $p \in \mathfrak{R}^N$ est typiquement relatif à V si $p \in V^c$ (V^c est le complément de V).

Définition a.7

Un polynôme en $x_1, x_2, x_3, \dots, x_q$ à coefficients dans l'anneau K est dit non trivial si certains de ses coefficients sont différents de zéro.

Définition a.8

Soit F une extension de K , c'est-à-dire $K \in F$:

Un élément y de F est dit algébrique dans K s'il existe un polynôme non trivial en x , $p(x)$ à une indéterminée x dans K tel que $p(y) = 0$.

Annexe 2 : Eléments de la théorie des graphes**I. Notion de graphe**

Notre étude se limite au graphe orienté, également appelé digraphe.

I.1. Définitions**Définition a.9**

Un digraphe $G = (\mathcal{Z}, \mathcal{E})$ est une structure mathématique déterminée par la donnée de:

i) Un ensemble fini $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_n\}$ d'éléments appelés sommets (ou nœuds).

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{u_1, \dots, u_m\} \\ \mathcal{Z} &= \mathcal{U} \cup \mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \quad \text{avec} \quad \mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \\ \mathcal{Y} &= \{y_1, \dots, y_p\} \end{aligned} \quad .(a.1)$$

Si Cardinal $\mathcal{Z} = n$ (égal au nombre de sommets), le digraphe $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$ est d'ordre n .

ii) Un ensemble fini $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ dont les éléments sont des couples ordonnés de sommets appelés des arcs. Si $e(z_i, z_j)$ est un arc de $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$, z_i est son extrémité initiale et z_j son extrémité finale.

Propriétés a.1

1) Un arc de la forme $e(z_i, z_j)$ de $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$, dont les extrémités coïncident, est une boucle.

2) Un graphe $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$ est simple si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

i) Il n'a pas de boucles.

ii) Entre deux sommets, il n'y a jamais plus d'un arc pour les relier.

I.2. Caractéristiques**I.2.1. Successeur et prédécesseur**

1) Le sommet z_j est un successeur du sommet z_i dans $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$, s'il existe un arc $e(z_i, z_j)$ ayant z_i comme extrémité initiale et z_j comme extrémité terminale.

2) Le sommet z_j est un prédécesseur du sommet z_i s'il existe un arc de la forme $e(z_i, z_j)$.

I.2.2. Degré d'un sommet

Si un sommet z_i est l'extrémité initiale d'un arc $e(z_i, z_j)$, on dit que l'arc e est incident au sommet z_i vers l'extérieur.

Dans un digraphe $G(Z, E)$, le nombre d'arcs incidents à un sommet z_i vers l'extérieur s'appelle le demi-degré extérieur du sommet z_i .

Nous définissons de la même manière le demi-degré intérieur du sommet z_i et nous déduisons alors la définition du degré d'un sommet :

Définition a.10

Le degré d'un sommet z_i est donné par le nombre d'arcs ayant une extrémité en z_i .

I.2.3. Connexité d'un digraphe

Un digraphe $G(Z, E)$ est dit fortement connexe, si pour tout couple de sommets z_i et $z_j \in Z$ il existe un chemin de z_i vers z_j et un chemin de z_j vers z_i .

I.2.4. Graphe biparti

Un digraphe $G(Z, E)$ peut être partitionné en deux classes de sommets Z^- et Z^+ , de sorte que deux sommets de la même classe ne soient jamais adjacents. Il est noté $G_B = (Z^-, Z^+, E)$, avec Z^- l'ensemble des sommets initiaux et Z^+ celui des sommets terminaux.

II. Cheminement dans un digraphe

Les problèmes de cheminement sont parmi les problèmes les plus anciens de la théorie des graphes puisque nous les retrouvons dans la résolution de vieux problèmes célèbres qui étaient présentés sous forme de jeu.

De nombreuses propriétés des systèmes réels, qui nous intéressent, dépendent uniquement de la forme. Donc, pour extraire toutes les informations concernant un système, il faut analyser sa structure graphique. Pour cela, des concepts comme "chaîne" et "chemin" ont été introduits.

Les notions de chaînes et de circuits sont aussi utilisées avec des définitions équivalentes

II.1.1. Chemin

1) Un chemin de longueur q (de cardinalité q) est une séquence de q arcs $P = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ orientés dans le même sens ayant la forme $e_1 = (z_0, z_1)$, $e_2 = (z_1, z_2), \dots, e_q = (z_{q-1}, z_q)$.

2) Le sommet z_i de e_1 non adjacent à e_2 , et le sommet z_j de e_q non adjacent à e_{q-1} sont appelés les extrémités du chemin P. On dit aussi que le chemin P joint les sommets z_i et z_j .

3) Un chemin est élémentaire si en le parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet. Dans un chemin élémentaire tous les sommets sont de degré 2 au plus.

II.1.2.Cycle

1) Un cycle est un chemin dont les extrémités coïncident.

2) Un cycle est dit élémentaire, si en le parcourant, on ne rencontre pas deux fois le même sommet (sauf le sommet choisi comme origine du parcours).

3) Un cycle élémentaire est minimal s'il ne contient strictement aucun autre cycle.

4) La longueur d'un cycle dans un digraphe est égale au nombre d'arcs qui le composent.

5) Un cycle de longueur 1 est appelé auto-cycle ou boucle.

II.1.3.Arbre

Un arbre d'un digraphe $G(Z, E)$ est un sous-graphe partiel connexe de $G(Z, E)$ (il contient un sous-ensemble de sommets et un certain sous-ensemble d'arcs reliant ces sommets) ne comportant aucun cycle.

III.Couplage dans un digraphe

III.1.Définition d'un couplage

Définition a.11

Un couplage entrée / sortie élémentaire peut être considéré comme un graphe partiel de G_x , puisque tout arc apparaît au plus une fois.

Définition a.12

Un couplage est complet si aucun des chemins entrée / sortie ne rencontre tous les autres.

Définition a.13

Un couplage est le plus court si chacun des chemins entrée / sortie Π_i est le plus court chemin de u vers y_i ($i = 1...m$).

III.2.Couplage maximum dans un digraphe biparti

Soit $G_b \equiv (Z^-, Z^+, E)$ un graphe biparti avec les conventions adoptées ci-dessus.

Définition a.14

Un couplage C dans $G_B = (Z^-, Z^+, E)$ est un sous-ensemble d'arcs de E tel qu'il part au plus un arc d'un sommet initial de Z^+ et qu'il arrive au plus un arc sur un sommet terminal de Z^- .

Définition a.15

Le couplage C est dit de "cardinalité maximale" ou "maximal" si son nombre d'arcs est maximal.

IV. Graphes spécifiques

Lin, 1974 a introduit des définitions particulières de graphe dont nous énonçons une forme descriptive.

IV.1. Tige

Une tige T est un chemin d'arcs orientés fini (non cyclique) reliant une origine à une extrémité.

IV.2. Bouton

Un bouton B est constitué d'un arc reliant une origine à une extrémité sur laquelle est fixé un cycle passant par un ou plusieurs nœuds.

Ce digraphe a été appelé initialement "feuille" dans [Lin, 1972].

IV.3. Cactus**Définition a.16 [Mayeda et al, 1979]**

Etant donné un bouton B_0 et p tiges, B_1, B_2, \dots, B_p , le sous-graphe $B_0 \cup B_1 \cup B_2 \dots \cup B_p$ sera appelé "cactus" si, pour $j = 1, \dots, p$, l'origine de B_j n'est pas le sommet final de B_0 et l'unique sommet qui appartient en même temps à B_j et à $B_0 \cup B_1 \cup B_2 \dots \cup B_{j-1}$.

Définition a.17 (Cactus à une origine)

Un digraphe $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$ est un cactus s'il est obtenu à partir d'une tige T en construisant une séquence de digraphes $(G_0 = T) \subset G_1 \dots \subset G_k \dots \subset (G_p = G)$ $p \geq 0$, de la manière suivante

:

Le premier digraphe de la séquence est la tige T .

Le dernier digraphe est le digraphe $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$ lui-même.

$\forall k = 1, 2, \dots, p$, G_k est obtenu à partir de G_{k-1} en ajoutant un bouton B_k à G_{k-1} tel que l'origine e_k de B_k est le seul nœud commun à G_k et G_{k-1} (B_k est appelé le $k^{\text{ième}}$ bouton de $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$). L'origine du bouton introduit ne pouvant jamais coïncider avec l'extrémité de la tige.

Définition a.18 (Cactus à plusieurs origines)

Dans le cas de plusieurs origines, un cactus est une réunion disjointe de cactus mono-origine.

IV.4. Concept de dilatation.**Définition a.19 [Lin, 1972, 1974]**

Un digraphe $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$ contient une dilatation si et seulement si un ensemble s de K nœuds dont son antécédent $T(S)$ dans $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$ contient au plus $(k-1)$ nœuds (S ne contient pas l'origine de $G(\mathcal{Z}, \mathcal{E})$).

Annexe 3 : Bond graph**I. Variables mises en jeu**

Nous présentons les outils de base de la modélisation par bond graph, en définissant notamment les variables de puissance et les variables d'énergie.

I.1. Variables de puissance

La puissance échangée entre deux sous-systèmes s'exprime par le produit de deux variables généralisées, "effort" et "flux", nommées variables de puissance et notées respectivement "e" et "f".

Par convention, le symbole d'effort s'écrit au-dessus du lien et celui du flux au-dessous, respectivement à gauche et à droite pour les liens verticaux.

I.2. Variables d'énergie

Les variables de puissance e et f sont associées aux variables d'énergie p et q par les relations intégrales suivantes :

p(t) est le moment généralisé et q(t) le déplacement généralisé.

Ces variables sont choisies comme variables d'état associées respectivement aux éléments I et C qui les font intervenir dans leurs relations caractéristiques.

$$\text{I en causalité intégrale : } f = \frac{p}{I}$$

$$\text{C en causalité intégrale : } e = \frac{q}{C}$$

$$\text{I en causalité dérivée : } p = I.f$$

$$\text{C en causalité dérivée : } q = C.e$$

Le Tableau a.1 indique la signification des variables généralisées pour quelques domaines de la physique.

Remarque

Les éléments bond graph, qui sont représentés ici, sont des éléments simples (éléments dits 1-port) permettant de représenter les lois simples des systèmes électriques hydrauliques, mécaniques mono-dimensionnels. Cependant dans certains cas plus complexes, les lois mises en œuvres sont vectorielles et les éléments utilisés sont des éléments multi-ports [Karnopp et Rosenberg, 1983 ; Rosenberg, 1972 ; Thoma 1991].

Tableau. a.1

LES ÉLÉMENTS DE BASE BOND-GRAPH ET LEURS PROPRIÉTÉS.				
Eléments bond graph	Symboles	Loi générique	Exemples physiques	Causalités
Variables de puissance	effort e flux f		force, couple, tension, pression... vitesse, vit. ang., courant, débit vol...	
Variables d'énergie	moment p déplacement q	$p = \int e dt$ $q = \int f dt$	impulsion, flux (self),... déplacement, charge, volume...	
Eléments actifs (sources)	$Se \xrightarrow{e}$ $Sf \xleftarrow{e}$	e indépendant de f f indépendant de e	pesanteur, générateur de tension,... générateur de courant, pompe,...	$Se \xrightarrow{e}$, e donné $Sf \xleftarrow{e}$, f donné
Eléments passifs 1-port	$\xrightarrow{e} R$	$\Phi_R(e, f) = 0$	amortisseur, résistance, restriction hydraulique, frottement...	$\xrightarrow{e} R \quad e = F_R(f) \quad (e = Rf)$ $\xleftarrow{e} R \quad f = F_R^{-1}(e) \quad (f = 1/Re)$
	$\xrightarrow{e} C$ $f = \dot{q}$	$\Phi_C(e, q) = 0$	ressort, condensateur, réservoir, élasticité,...	$\xrightarrow{e} C \quad e = F_C(q) \quad (e = q/C)$ $\xleftarrow{e} C \quad q = F_C^{-1}(e) \quad (q = Ce)$
	$\xrightarrow{e} I$ $e = \dot{p}$	$\Phi_I(p, f) = 0$	masse, inertie, self,...	$\xrightarrow{e} I \quad f = F_I(p) \quad (f = p/I)$ $\xleftarrow{e} I \quad p = F_I^{-1}(f) \quad (p = If)$

II. Propriétés causales d'un bond graph

II.1. Notion de causalité

La causalité se traduit, par un trait causal défini de la façon suivante : "Un trait causal est placé perpendiculairement au lien de puissance. Par convention, le trait causal est toujours placé près de l'élément pour lequel l'effort est connu, le flux étant toujours considéré comme connu dans le sens opposé au trait causal."

Le sens de la demi-flèche sur le lien qui indique le sens de $P > 0$, est indépendant de la position du trait causal.

Remarques

1) Dualiser une source revient à changer sa causalité, ainsi une source d'effort S_e dualisée devient une source de flux S_f et inversement une source de flux S_f dualisée devient une source d'effort S_e .

2) De la même manière, dualiser un détecteur revient à changer sa causalité, ainsi un détecteur d'effort D_e dualisé devient un détecteur de flux D_f et inversement un détecteur de flux D_f dualisé devient un détecteur d'effort D_e .

3) Dans le cas linéaire, la causalité sur R est une causalité arbitraire, par contre elle peut apparaître comme causalité obligatoire dans le cas non linéaire.

Les causalités sur C et I peuvent être soit intégrales (ou différentielles) soit dérivées.

II.2. Causalité sur les Jonctions

Les Jonctions 0, 1, TF, GY sont décrites par des relations caractéristiques. Le positionnement des traits causaux sur ces Jonctions nous permet de dégager directement à partir de ces relations les informations sur l'effort et le flux.

Le Tableau a.2 résume les types de causalité rencontrés sur les éléments de base du bond graph.

causalité obligatoire	$S_e \longrightarrow \nearrow$	$S_f \longleftarrow \nearrow$
causalité intégrale	$\longrightarrow \nearrow I$	$\longleftarrow \nearrow C$
causalité dérivée	$\longleftarrow \nearrow I$	$\longrightarrow \nearrow C$
causalité arbitraire	$\longrightarrow \nearrow R$	ou $\longleftarrow \nearrow R$
causalité restreinte	$\longrightarrow \nearrow TF \longrightarrow \nearrow$	ou $\longleftarrow \nearrow TF \longleftarrow \nearrow$
	$\longleftarrow \nearrow GY \longrightarrow \nearrow$	ou $\longrightarrow \nearrow GY \longleftarrow \nearrow$
	$\text{---} \begin{array}{c} \\ 1 \\ \end{array} \text{---}$	ou $\text{---} \begin{array}{c} \\ 1 \\ \end{array} \text{---}$
	$\text{---} \begin{array}{c} \\ 0 \\ \end{array} \text{---}$	ou $\text{---} \begin{array}{c} \\ 0 \\ \end{array} \text{---}$

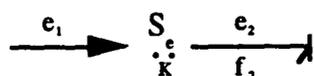
Tableau a.2 : Causalité des éléments de base d'un bond graph

III. Notion de signal

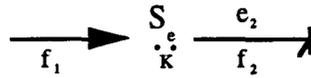
Lorsque la puissance transmise à travers un lien est négligeable ou nulle, ce lien n'est plus un lien de puissance mais un lien d'information. Nous pourrions ainsi faire apparaître dans un modèle bond graph des capteurs et des instruments de mesures (supposés idéaux). Au cours de ce travail, des détecteurs d'effort D_e et de flux D_f sont utilisés comme sorties.

Les sources, présentées précédemment, ne sont pas toujours indépendantes ; pour les représenter nous utilisons la notion de source commandée. Il existe plusieurs types :

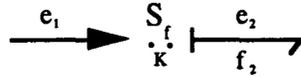
- 1) Source d'effort commandée en effort : $e_2 = K e_1$



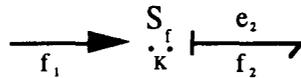
2) Source d'effort commandée en flux : $e_2 = K f_1$



3) Source de flux commandée en effort : $f_2 = K e_1$



4) Source de flux commandée en flux : $f_2 = K f_1$



IV. Propriétés causales d'un bond graph

IV.1. Transmittance d'un élément 1-port

La causalité sur un élément 1-port (I, C, ou R) nous permet d'écrire une relation entre l'effort et le flux donc une relation entre la variable d'entrée et la variable de sortie de cet élément. En linéaire, l'utilisation de l'opérateur symbolique de Laplace s nous permet d'écrire le rapport entre la variable de sortie et la variable d'entrée d'un élément 1-port (I, C, ou R) sous forme symbolique que nous appellerons transmittance (ou gain).

Transmittance de I

i) Si I est en causalité intégrale, la relation entre l'effort et le flux, en linéaire, s'écrit :

$f = \frac{1}{I} \int e dt$, donc $F(s) = \frac{1}{I s} E(s)$, d'où la Transmittance de l'élément I en causalité

intégrale : $g_{(I)} = \frac{F(s)}{E(s)} = \frac{1}{I \cdot s}$.

ii) Si I est en causalité dérivée $e = I \frac{df}{dt}$, donc $E(s) = I s F(s)$ et $g_{(I)} = s \cdot I$

Transmittance de C

i) C en causalité intégrale : $g_{(C)} = \frac{1}{C \cdot s}$

ii) C en causalité dérivée : $g_{(C)} = C \cdot s$

Transmittance de R

La transmittance de R est une constante, donnée suivant la causalité par :

$$g_{(R)} = \frac{1}{R} \text{ ou } g_{(R)} = R$$

IV.2. Chemin causal

i) Un chemin causal dans une structure de jonction bond graph causal (causalité affectée) est une succession de liens et de jonctions liant deux éléments bond graph X de type (S_e, S_f, I, C, R) et Y de type (I, C, R, D_e, D_f) .

ii) Un chemin causal est simple, s'il peut être parcouru en suivant toujours la même variable soit l'effort soit le flux.

iii) Un chemin causal est mixte, si en le parcourant on est amené à changer de variable.

iv) Un chemin causal liant l'élément X à l'élément Y est indirect, si en le parcourant on passe par un élément (I, C, R) au moins une fois, sinon il est direct.

Gain d'un chemin causal

Le gain d'un chemin causal est donné par :

$$G = (-1)^{n_0 + n_1} \cdot \prod_{i=1}^{\alpha} (m_i)^h \cdot \prod_{j=1}^{\beta} (r_j)^k \cdot T_r$$

Avec :

n_0 : nombre total de changements d'orientation des liens à la Jonction 0, quand on parcourt le chemin causal en suivant la variable flux.

n_1 : nombre total de changements d'orientation des liens à la Jonction 1, quand on parcourt le chemin causal en suivant la variable effort.

α : nombre de transformateurs intervenant dans le chemin causal.

β : nombre de gyrateurs intervenant dans le chemin causal.

$h = \pm 1$ suivant la causalité affectée au transformateur.

$k = \pm 1$ suivant la causalité affectée au gyrateur.

T_r : Transmittance des éléments 1-port $(I, C, \text{ ou } R)$ intervenant dans le chemin causal (si aucun élément $(I, C, \text{ ou } R)$ n'intervient dans le chemin causal : $T_r = 1$).

V. Equation d'état associée au modèle bond graph

Le modèle bond-graph causal permet de dégager un ensemble d'équations mathématiques sous forme d'équation d'état. Nous disposons de deux méthodes pour trouver l'équation d'état. la première consiste à écrire les lois élémentaires des éléments et des jonctions, la seconde traduit la structure de jonction. Cette dernière est présentée ci-dessous.

Cette méthode consiste à regrouper sous forme de vecteurs les variables mises en œuvre dans le bond graph.

Un bond graph peut se schématiser de la façon suivante :

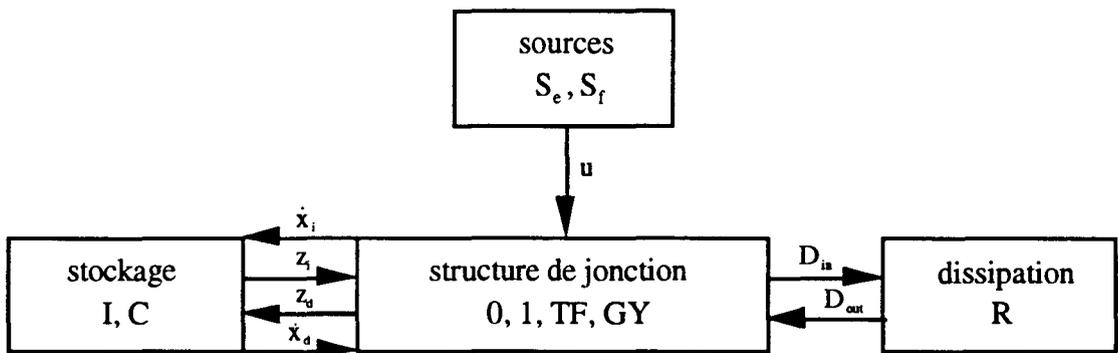


Figure a.1 : Représentation vectorielle d'un bond graph

où D_{in} et D_{out} regroupent les efforts et les flux respectivement entrants et sortants pour les éléments R; x_i et x_d sont les variables d'état p et q associées aux éléments I et C respectivement en causalité intégrale et dérivée; z_i et z_d sont les "vecteurs état complémentaires" composés d'efforts et de flux.

Tous ces vecteurs satisfont les relations suivantes, constitutives des éléments :

$$D_{out} = L D_{in}, \text{ avec } L = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}, \text{ ou } D_{out} = L(D_{in}),$$

$$z_i = F_i x_i, \text{ avec } F_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_i} \end{bmatrix}, \text{ ou } z_i = F_i(x_i), \quad (\text{a.2})$$

$$z_d = F_d x_d, \text{ avec } F_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_d} \end{bmatrix}, \text{ ou } z_d = F_d(x_d),$$

suivant que les éléments R, I et C sont linéaires ou non linéaires.

Dans le cas linéaire (et avec des éléments R, C, I simples), les matrices L, F_i et F_d sont diagonales.

La structure de jonction est caractérisée par la matrice S, construite à partir de la relation :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ z_d \\ D_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{x}_d \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (\text{a.3})$$

Cette matrice est composée uniquement de 0, -1, +1, m ou 1/m, r ou 1/r, et caractérise l'architecture du système. Les matrices S₁₁ et S₃₃ sont antisymétriques et nous avons la relation :

$$S_{21} = -S_{12}^T \quad (\text{a.4})$$

L'équation d'état est déduite de cette expression en exprimant tous les vecteurs pour ne conserver que x_i et u, sous la forme générale :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A_1 x_i + A_2 \dot{x}_d + B_1 u, \\ x_d &= A_3 x_i + A_4 \dot{x}_d + B_2 u \end{aligned} \quad (\text{a.5})$$

avec :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(S_{11} + S_{13} (I_d - L S_{33})^{-1} L S_{31} \right) F_i, \\ A_2 &= \left(S_{12} + S_{13} (I_d - L S_{33})^{-1} L S_{32} \right), \\ A_3 &= F_d^{-1} \left(S_{21} + S_{23} (I_d - L S_{33})^{-1} L S_{31} \right) F_i, \\ A_4 &= F_d^{-1} \left(S_{22} + S_{23} (I_d - L S_{33})^{-1} L S_{32} \right), \\ B_1 &= S_{14} + S_{13} (I_d - L S_{33})^{-1} L S_{34}, \\ B_2 &= F_d^{-1} \left(S_{24} + S_{23} (I_d - L S_{33})^{-1} L S_{34} \right). \end{aligned} \quad (\text{a.6})$$

En général, ces relations se simplifient. En particulier, si A₄ = 0, on peut remplacer x_d par son expression en fonction de x_i et u.

TABLEAU 1 : R, C, L							
Système physique	Variable d'effort e	Variable de flux f	Moment généralisé $p = \int e dt$	Déplacement généralisé $q = \int f dt$	Elément Dissipatif $\Phi_R(e, f) = 0, e = Rf$	Eléments de stockage $e = \frac{1}{C} \int f dt = \frac{q}{C}$	Elément de stockage $f = \frac{1}{L} \int e dt = \frac{p}{L}$
Electrique	tension u (V)	intensité i (A)	impulsion de tension (Vs)	charge électrique q (C)	résistance R ($\Omega, V/A$)	capacité C (F, C/V)	inductance L (H, Wb/A)
Hydraulique	pression P (Pa, N/m ²)	débit volumique q (m ³ /s)	impulsion de pression Γ (Pa s)	volume V (m ³)	résistance hydraulique $8\pi\mu l/A^2$ (Ns/m)	capacité hydraulique V/P ou $A/\rho g$	inductance hydraulique $\rho l/A$
Pneumatique isotherme	pression P (Pa)	débit volumique q (m ³ /s)	impulsion de pression Γ (Pa s)	volume V (m ³)	résistance pneumatique $8\pi\mu l/A^2$ Ns/m	capacité pneumatique V/P ou $V\chi_T$ ou $V^2/(RT)$	inductance pneumatique $\rho l/A$
Pneumatique adiabatique	pression P (Pa)	débit volumique q (m ³ /s)	impulsion de pression Γ (Pa s)	volume V (m ³)	résistance pneumatique $8\pi\mu l/A^2$ Ns/m	capacité pneumatique $V/(\gamma P)$ ou $V\chi_a$	inductance pneumatique $\rho l/A$
Mécanique translation	force F (N)	vitesse v m/s	impulsion p (Ns)	déplacement x (m)	amortisseur frottement visqueux f	ressort $1/k$	masse m (Kg)
Mécanique rotation	couple Γ (Nm/rad)	vitesse angulaire ω (rad/s)	impulsion angulaire h (Nm s/rad)	angle θ rad	frottement visqueux f	ressort $1/k$	moment d'inertie J
Thermique	température T, θ (K)	flux thermique ϕ (WK ⁻¹)			résistance thermique conduction : $l/(\lambda A)$ rayonnement : $1/(\alpha A)$ convection : $1/(\dot{m}c)$	capacité thermique mc	

l : longueur, A : section, V : volume, Tube à section circulaire de rayon R : $A = \pi R^2$, γ : coefficient adiabatique, μ : viscosité, ρ : masse volumique, $\nu = \mu/\rho$: viscosité cinématique, R : constante des gaz parfaits, f : coefficient de frottement, k : raideur du ressort, λ : coefficient de conductibilité thermique, α : coefficient de rayonnement thermique, g : accélérateur de la pesanteur, C : chaleur massique, χ_T : coefficient de compressibilité isotherme, χ_a : coefficient de compressibilité adiabatique.

LES ÉLÉMENTS DE BASE BOND-GRAPH ET LEURS PROPRIÉTÉS (SUITE).				
Éléments bond-graph	Symboles	Loi générale	Exemples physiques	Causalités
Eléments de jonction		$e_1 = \dots = e_n$ $\sum_{i=1}^n a_i f_i = 0 \quad (a_i = \pm 1)$	connection série en mécanique connection parallèle en électrique	 1 seul trait causal près de la jonction 0 ex : $e_1 = e_2, \dots, e_n = e_2, \quad f_2 = a_2 \sum_{i=1, i \neq 2}^n a_i f_i$
		$f_1 = \dots = f_n$ $\sum_{i=1}^n a_i e_i = 0 \quad (a_i = \pm 1)$	connection parallèle en mécanique connection série en électrique	 1 seul lien sans trait causal près de la jonction 0 ex : $f_1 = f_2, \dots, f_n = f_2, \quad e_2 = a_2 \sum_{i=1, i \neq 2}^n a_i e_i$
(conservatifs de puissance)		$e_1 = m e_2$ $f_2 = m f_1$	levier, système d'engrenages ou de poulies, réducteur, transformateur électrique....	 $\begin{cases} e_1 = m e_2 \\ f_2 = m f_1 \end{cases}$ $\begin{cases} e_2 = 1/m e_1 \\ f_1 = 1/m f_2 \end{cases}$
		$e_1 = r f_2$ $e_2 = r f_1$	moteur à courant continu, capteur à effet Hall....	 $\begin{cases} e_1 = r f_2 \\ f_2 = r f_1 \end{cases}$ $\begin{cases} f_2 = 1/r e_1 \\ f_1 = 1/r e_2 \end{cases}$

Annexe 4 : Analogie bond graph - digraphe
I. Caractérisation d'un digraphe par des matrices

Il existe plusieurs possibilités pour construire un digraphe à partir d'une matrice. Nous avons basé notre étude sur une représentation utilisée par Coates (1959).

I.1.A partir d'une matrice carrée quelconque

Pour une matrice carrée $A = \{a_{ij}; i, j \in (1, \dots, n)\}$ d'ordre n donné, il y a une correspondance entre la matrice A et le digraphe $G(A)$ qui possède n sommets $z_i \in Z$ et un arc dirigé (z_i, z_j) du sommet initial z_i vers le sommet final z_j si l'élément de la matrice a_{ij} est différent de zéro ($i, j \in (1, \dots, n)$). Le poids de l'arc est donné par la valeur de a_{ij} .

Exemple a.1

Etant donné la matrice carrée A , le digraphe associé est représenté par la figure a.1.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

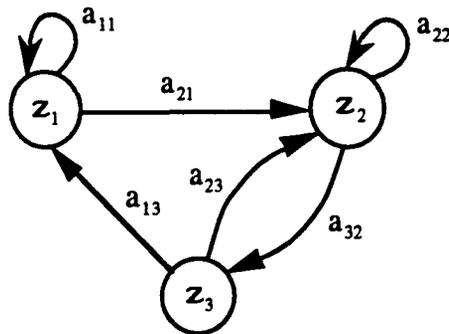


Figure a.2 : Digraphe $G(A)$

I.2.A partir d'une représentation d'état

Considérons un système défini par une représentation d'état.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{a.7})$$

Les matrices A, B et C sont données par l'équation (a.8).

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R_1}{I_1} & 0 & \frac{-1}{C_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{I_1} & \frac{1}{C_1} \\ \frac{1}{I_1} & \frac{-1}{I_1} & \frac{-1}{R_3 C_1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{a.8})$$

Le digraphe représentant ce système est donné par la figure (a.3).

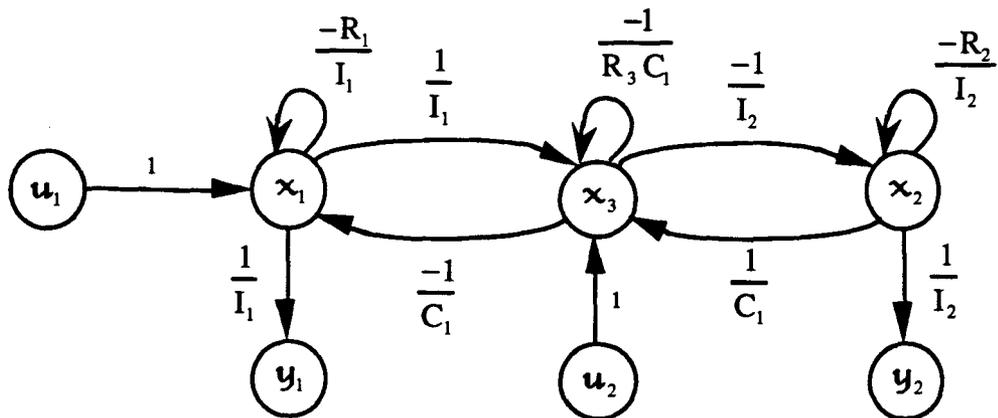


Figure a.3 : Digraphe G(A,B,C)

Ces matrices données par (a.8) peuvent être déduites directement à partir du modèle bond graph de la figure a.4.

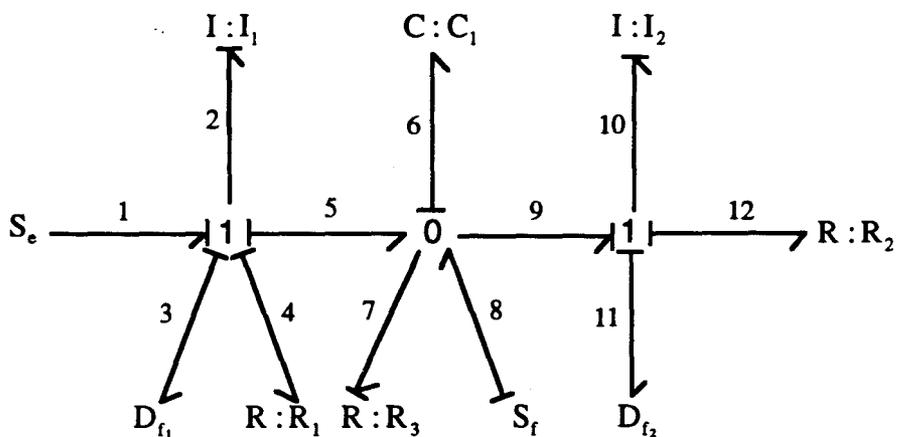


Figure a.4

En effet, chaque terme a_{ij} de la matrice A est donné par le terme constant du gain du chemin causal reliant l'élément dynamique x_j à x_i .

Chaque terme b_{ij} (resp. c_{ij}) de la matrice B (resp. C) est égal au terme constant du gain du chemin causal reliant l'élément dynamique x_j à l'entrée u_i (S_e ou S_f) (resp. la sortie y_i (D_e ou D_f)).

Nous pouvons donc construire un digraphe à partir du modèle bond graph d'une manière indirecte. Pour cela, il suffit dans un premier temps de déterminer la représentation d'état à partir du modèle bond graph, puis de construire le digraphe correspondant. Nous proposons de supprimer la première étape et de construire le digraphe directement à partir du modèle bond graph.

I.3.A partir du modèle bond graph

La méthode directe consiste à utiliser les chemins causaux dans un modèle bond graph pour construire le digraphe équivalent.

Pour cela, nous énonçons la règle suivante :

Règle

1) Chaque élément dynamique en causalité intégrale, chaque source d'entrée et chaque détecteur de sorties dans un modèle bond graph sont respectivement représentés par un sommet état x_i , entrée u_i et sortie y_i dans un digraphe.

2) Un chemin causal de longueur 0 reliant un élément dynamique à lui-même (boucle causale) est représenté par un arc reliant un sommet état x_i à lui-même (boucle).

3) Un chemin causal de longueur 0 reliant un élément dynamique à une source est représenté par un arc reliant un sommet état x_i à un sommet entrée u_i .

4) Un chemin causal de longueur 0 reliant un élément dynamique à un détecteur est représenté par un arc reliant un sommet état x_i à un sommet sortie y_i .

5) Un chemin causal de longueur 1 reliant deux éléments dynamiques est remplacé par un arc reliant deux sommets états x_i

6) Les gains des chemins causaux sont remplacés par les poids des arcs.

Remarques

Pour transformer un chemin causal sur un modèle bond graph en un arc sur un digraphe, il faut respecter les points de départ et d'arrivée.

Le digraphe obtenu acquiert ainsi quelques propriétés caractérisant le bond graph (le sous-graphe des sommets état est symétrique et surtout, il est fortement connexe).

En application de cette règle, nous proposons d'établir une correspondance directe entre le modèle bond graph de la figure a.5 et le digraphe équivalent de la figure a.2.

Le tableau a.2 résume cette équivalence.

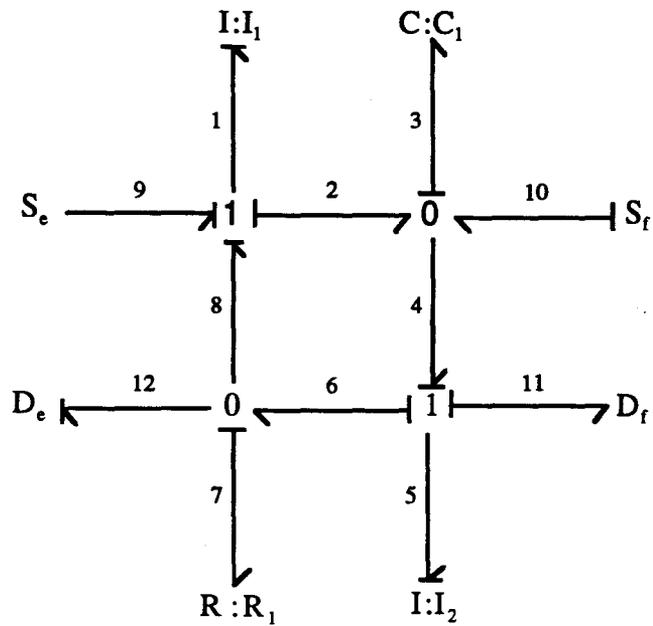


Figure a.5 : Bond graph

	Elément dans un modèle bond graph	Terme constant du gain	Elément du digraphe équivalent
Chemins de longueur 0	$I:I_1 \begin{matrix} \xrightarrow{e} \\ \xleftarrow{f} \end{matrix} 1 \begin{matrix} \xrightarrow{e} \\ \xleftarrow{f} \end{matrix} 0 \begin{matrix} \xrightarrow{e} \\ \xleftarrow{f} \end{matrix} R:R_1$	$\frac{-R_1}{I_1}$	
	$R:R_1 \begin{matrix} \xrightarrow{e} \\ \xleftarrow{f} \end{matrix} 0 \begin{matrix} \xrightarrow{e} \\ \xleftarrow{f} \end{matrix} 1 \begin{matrix} \xrightarrow{e} \\ \xleftarrow{f} \end{matrix} I:I_2$	$\frac{-R_2}{I_2}$	
	$S_e \xrightarrow{\quad} 1 \xrightarrow{\quad} I:I_1$	1	
	$S_f \xrightarrow{\quad} 0 \xrightarrow{\quad} C:C_1$	1	
Chemins de longueur 1	$\begin{matrix} 1 \xleftarrow{e} 0 \xleftarrow{f} 1 \\ \downarrow e \quad \downarrow f \quad \downarrow e \\ I:I_1 \quad R:R_1 \quad I:I_2 \end{matrix}$	$\frac{R_1}{I_2}$	
	$\begin{matrix} 1 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{e} 1 \\ \downarrow f \quad \downarrow e \quad \downarrow e \\ I:I_1 \quad R:R_1 \quad I:I_2 \end{matrix}$	$\frac{R_1}{I_1}$	

	$-\frac{1}{C_1}$	
	$\frac{1}{I_1}$	
	$-\frac{1}{I_2}$	
	$\frac{1}{C_1}$	
	$\frac{1}{I_2}$	
	$-\frac{R_1}{I_1}$	
	$\frac{R_1}{I_2}$	

En regroupant tous les éléments, nous retrouvons le digraphe de la figure a.6.

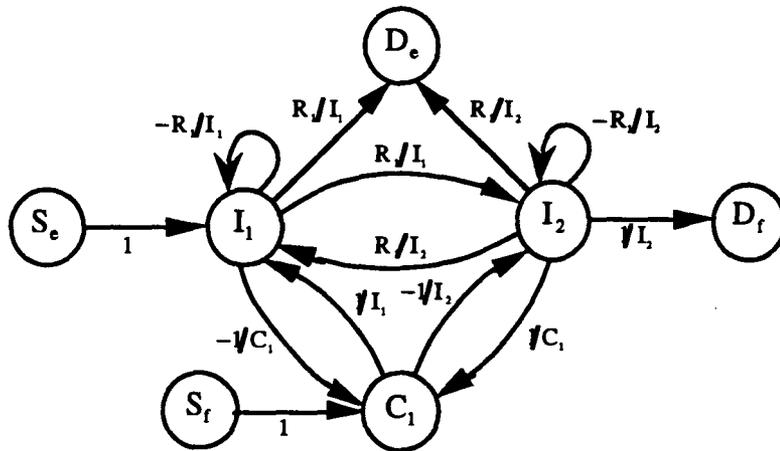


Figure a.6

II. Equivalence bond graph / digraphe

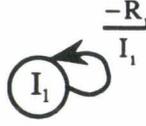
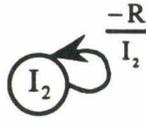
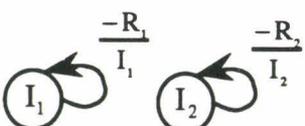
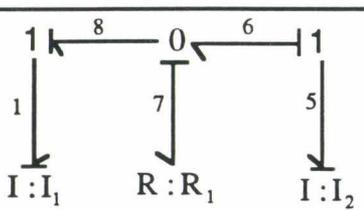
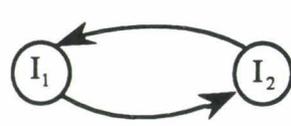
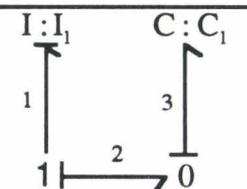
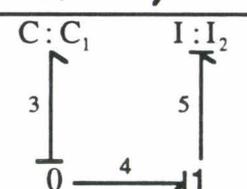
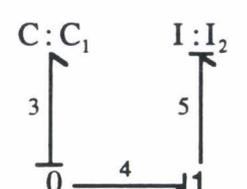
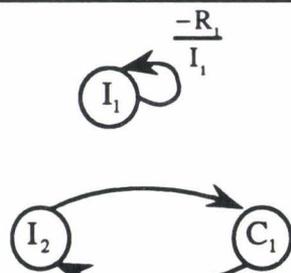
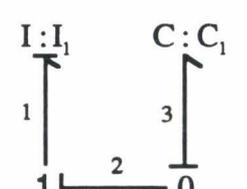
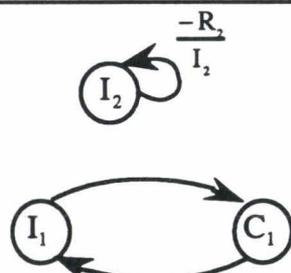
La conversion d'un bond graph en un graphe linéaire, a été proposé par Bell et Martens (1974), Ort et Martens (1974), Perelson et Oster (1976). Ils ont établi une comparaison entre les bond graphs et les graphes linéaires. Birkett (1989) a proposé une conversion des bond graphs à partir des matroïdes

La notion de famille de cycles est à la base de plusieurs règles de calcul présentées par Reinschke (1988). Les différentes définitions relatives à cette notion sont rappelées ci dessous:

Définitions a.20

- 1) L'ordre d'un cycle dans un digraphe est donné par le nombre de sommets qui le composent.
- 2) Deux cycles sont disjoints s'ils n'ont ni sommets ni arcs en commun.
- 3) Un ensemble de cycles disjoints dans un digraphe forme une famille de cycles.
- 4) Une famille de cycles est dite directrice d'un digraphe G si elle est formée par tous les sommets de G .
- 5) Une famille de cycles qui contient au moins un arc de retour est appelé une famille de cycles de retour.

Par analogie à cette notion, nous avons présenté dans le chapitre 2, la notion de famille de cycle causaux dans un modèle bond graph. Pour mettre en évidence la correspondance entre ces deux notions nous cherchons les familles de cycles causaux dans le modèle bond-graph de la figure a.5, et par équivalence, nous retrouvons les familles de cycles dans le digraphe de la figure a.6.

ordre k	Famille de cycles causaux dans le bond graph	Familles de cycles dans le digraphe	Expressions
k = 1	$I:I_1 \xleftarrow{1} 1 \xleftarrow{0} 0 \xrightarrow{1} R:R_1$		$\frac{-R_1}{I_1}$
	$R:R_1 \xleftarrow{1} 0 \xleftarrow{1} 1 \xrightarrow{1} I:I_2$		$\frac{-R_2}{I_2}$
k = 2	$\begin{array}{l} I:I_1 \xleftarrow{1} 1 \xleftarrow{0} 0 \xrightarrow{1} R:R_1 \\ R:R_1 \xleftarrow{1} 0 \xleftarrow{1} 1 \xrightarrow{1} I:I_2 \end{array}$		$\frac{R_1^2}{I_1 I_2}$
			$\frac{-R_1^2}{I_1 I_2}$
			$\frac{1}{I_1 C_1}$
			$\frac{1}{I_2 C_1}$
	$I:I_1 \xleftarrow{1} 1 \xleftarrow{0} 0 \xrightarrow{1} R:R_1$ 		$\frac{R_1}{I_1 I_2 C_1}$
	$R:R_1 \xleftarrow{1} 0 \xleftarrow{1} 1 \xrightarrow{1} I:I_2$ 		$\frac{R_1}{I_1 I_2 C_1}$

			$\frac{-R_1}{I_1 I_2 C_1}$
			$\frac{-R_1}{I_1 I_2 C_1}$

Annexe 5 : Algorithme de Sinha
Algorithme de Sinha

Dans cette annexe nous présentons l'algorithme de Sinha de détermination d'un compensateur dynamique. Les détails des calculs sont disponibles dans Sinha (1976).

Un système $\Sigma(A,B,C)$ est augmenté par un pré-compensateur dynamique $\Sigma_c(A_c,B_c,C_c,D_c)$ d'ordre n_c . Le système ainsi augmenté $\bar{\Sigma}(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$ est de rang $n+n_c$, il peut être écrit sous la forme (a.9).

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B} v(t) \\ y(t) &= \bar{C} \bar{x}(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{a.9})$$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$ est le vecteur état du système augmenté avec $x_c(t) \in \mathfrak{R}^{n_c}$, le vecteur état du compensateur dynamique.

Les matrices \bar{A} , \bar{B} et \bar{C} (a.9) sont des matrices de rangs respectifs $(n+n_c) \times (n+n_c)$, $(n+n_c) \times (m)$, $(m) \times (n+n_c)$.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ 0 & A_c \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} BD_c \\ B_c \end{bmatrix} \quad \bar{C} = [C \ 0] \quad (\text{a.10})$$

La nouvelle matrice de découplage \bar{B}^* du système augmenté est calculée de la même manière que dans le cas précédent.

$$\begin{aligned} \bar{d}_i &= \min k \{ : \bar{C}_i \bar{A}^k \bar{B} \neq 0, k \in (0, 1, \dots, \overline{n+n_c}) \} \quad i \in (1, \dots, m) \\ &= (n+n_c - 1) \quad \text{si } \bar{C}_i \bar{A}^k \bar{B} = 0 \quad \text{pour tout } k \end{aligned} \quad (\text{a.11})$$

$$\bar{B}^* = \begin{bmatrix} \bar{B}_1^* \\ \vdots \\ \bar{B}_i^* \\ \vdots \\ \bar{B}_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 \bar{A}^{\bar{d}_1} \bar{B} \\ \vdots \\ \bar{C}_i \bar{A}^{\bar{d}_i} \bar{B} \\ \vdots \\ \bar{C}_m \bar{A}^{\bar{d}_m} \bar{B} \end{bmatrix} \quad (\text{a.12})$$

1.a) Calcul de \bar{d}_i , \bar{B}^* .

1.b) calcul de $r = m - \text{rang}(\bar{B}^*)$.

$$\begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B & 0 & 0 \\ C_{m-r} A^{d_{m-r}} B & 0 & 0 \\ C_{m-r+1} A^{d_{m-r+1}} B & 0 & 0 \\ C_{m-r+1} A^{d_{m-r+1}} B & 0 & C_m A^{d_m} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_c \\ C_c A_c \\ \vdots \\ C_c A_c^{p_m-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}^* = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B & 0 & 0 \\ C_{m-r} A^{d_{m-r}} B & 0 & 0 \\ C_{m-r+1} A^{d_{m-r+1}} B & 0 & 0 \\ C_{m-r+1} A^{d_{m-r+1}} B & 0 & C_m A^{d_m} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_c \\ C_c A_c \\ \vdots \\ C_c A_c^{p_m-1} \end{bmatrix}$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} C_1 B_1 & \dots & C_1 B_m & C_1 A B_1 & \dots & C_1 A B_m & \dots & \dots & C_1 A^{s+1} B_1 & \dots & C_1 A^{s+1} B_m \\ C_2 B_1 & \dots & C_2 B_m & C_2 A B_1 & \dots & C_2 A B_m & \dots & \dots & C_2 A^{s+1} B_1 & \dots & C_2 A^{s+1} B_m \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_p B_1 & \dots & C_p B_m & C_p A B_1 & \dots & C_p A B_m & \dots & \dots & C_p A^{s+1} B_1 & \dots & C_p A^{s+1} B_m \end{bmatrix}$$

Si $r > 0$, alors un pré compensateur S_c est nécessaire pour augmenter S , donc le système augmenté \bar{S} n'a plus de couplage propre.

1.c) L'ordre minimal de $S_c = \mu_0 = m$.

2) La matrice de transmission D_c est calculée par $B.D_c = 0$.

3.a) Les indices d_i sont choisis comme :

$$\begin{aligned} \bar{d}_i &= d_{i+1} & i \in [1 \quad \overline{m-r}] \\ \bar{d}_i &= d_{i+1+j} & i \in [\overline{m-r+1} \quad m] \quad j \in [1 \dots r] \end{aligned}$$

3.b) La matrice \bar{B}^* est choisie comme une matrice identité $m \times m$.

4.a) Si une dynamique de S_c est spécifiée, alors A_c est choisie convenablement et B_c et C_c sont calculées par les équations (a.13) et (a.14).

4.b) Si aucune dynamique n'est spécifiée, la procédure suivante est adoptée.

$$B_c = B^* - \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1+1} B \\ C_{m-r} A^{d_{m-r}+1} B \\ C_{m-r+1} A^{d_{m-r+1}+2} B \\ C_m A^{d_{m-r+1}} B \end{bmatrix} D_c \quad (\text{a.13})$$

$$\bar{B}^* = \begin{bmatrix} C_1 A^{d_1} B & 0 & 0 \\ C_{m-r} A^{d_{m-r}} B & 0 & 0 \\ C_{m-r+1} A^{d_{m-r+1}} B & 0 & 0 \\ C_{m-r+1} A^{d_{m-r+1}} B & 0 & C_m A^{d_m} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_c \\ C_c A_c \\ \vdots \\ C_c A_c^{p_{\max}-1} \end{bmatrix} \quad (\text{a.14})$$

5) Le système augmenté $\bar{S}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ est calculé par (a.9).

Nous présentons sans détailler les calculs, l'application de cet algorithme à l'exemple 4.15. Pour cela, nous utilisons les matrices A, B et C déduites du modèle bond graph.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-a}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c(1-a)}{C_1} & \frac{-c}{C_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-b}{C_2} \\ \frac{a}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & \frac{c(a-1)}{I_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{I_3} & \frac{b}{I_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -c & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{I_2} & \frac{-c}{I_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{I_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices du compensateur dynamique $\Sigma(A_c, B_c, C_c, D_c)$ sont calculées à partir de l'algorithme. Les matrices du système augmenté $\bar{\Sigma}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ sont alors déduites pour tester la validité de ce pré-compensateur.

$$A_c = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B_c = B^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_c = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-a}{C_1} & 0 & \frac{I_3}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c(1-a)}{C_1} & \frac{-c}{C_2} & \frac{-I_3}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-b}{C_2} & \lambda_{21} & \lambda_{22} \\ \frac{a}{I_1} & \frac{-1}{I_2} & \frac{c(a-1)}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{I_3} & \frac{b}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{I_2} & \frac{-c}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour vérifier la validité de ce pré-compensateur, il faut s'assurer que la nouvelle matrice de découplage est bien une matrice identité, pour cela nous calculons les nouveaux indices relatifs :

$$\bar{d}_1 = d_1 + 1 = 1$$

$$\bar{d}_2 = d_2 + 2 = 2$$

$$\bar{B}^* = \begin{bmatrix} C_1 A^{\bar{d}_1} B \\ C_2 A^{\bar{d}_2} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 A B \\ C_2 A^2 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Remarque

Nous remarquons que le vecteur $C_2 A B$ est non nul, pourtant il n'est pas pris en compte dans le calcul de la nouvelle matrice de découplage \bar{B}^* .

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

R. AHMARI & A.G. VACROUX

"On the Pole Assignment in Linear Systems with Fixed"

Int. J. Control, vol. 17, n° 2, pp. 397- 404, 1973.

B.D.O. ANDERSON & H.-M. HONG

"Structural Controllability and Matrix Nets"

Int. J. Control, vol. 35, n° 3, pp. 397-416, 1982.

A. AZMANI & G. DAUPHIN-TANDUY

"Archer : a Program for Computer Aided Modelling and Analysis"

Bond Graph for Engineers. Elsevier Science Publishers B.V, IMACS, pp. 263-277, 1992

G.W. BARTON, R.D. JOHNSTON & M.L. BRISK

"Comments on Determining Structural Controllability"

Int. J. Control, vol. 38, n° 5, pp. 1081-1083, 1983.

A.C. BELL & H.R. MARTENS

"A Comparison of Linear Graphs and Bond Graphs in the Modeling Process"

Automatic Control Conference, pp. 777-794, 1974.

A.C. BELL & H.R. MARTENS

"A Comparison of Linear Graphs and Bond Graphs in the Modeling Process"

Automatic Control Conference, 1974.

C. BERGE

"Théorie des Graphes et ses Applications"

Paris, Dunod, 1983.

P. BORNE, G. DAUPHIN-TANGUY, J.P. RICHARD, F. ROTELLA & I. ZAMBETTAKIS

"Commande et Optimisation des Processus"

Méthodes et Techniques de L'ingénieur, Editions TECHNIP, 1990.

P. BORNE , G. DAUPHIN-TANGUY, J.P. RICHARD, F. ROTELLA & I. ZAMBETTAKIS

"Modélisation et Identification des Processus"

Tome 1 &2, Méthodes et Tehcniques de L'ingénieur, Editions TECHNIP, 1992.

A.M. BOSS & P.C. BREEVELD

"1985 Update of the Bond Graph Bibliography"

Journ. of the Franklin Inst., vol. 319, n° 1/2, 1985.

F. BRASCH & J. PEARSON

"Pole Placement Using Dynamic Compensators"

IEEE Trans. Automatic Control, pp. 34-43, 1970.

R.W. BROCKETT & M.D. MESAROVIC

"The Reproductibility of Multivariable Control Systems"

J. Math. Anal. Appl., vol. 11,pp. 548-563, July 1965.

R.W. BROCKETT

"Poles, Zeros and Feedback : State Space Interpretation"

I.E.E.E. Trans. Aut. Control, vol. AC-10, pp.129-135, April 1965.

J.F. BROENINK

"Outline of CAMAS : a Computer Aided Modelling, Analysis and Simulation Environment"

2nd European Simulation Congress, Antwerpen, pp. 320-325, 1986.

F.T. BROWN

"Direct Application of the Loop Rule to Bond Graphs"

Journal of Dynamic Systems, Meas. and Cont., pp. 253-261, 1972.

P. BRUNOVSKY

"On Stabilization of Linear Systems under a Class of Persistent Perturbations"

Differential Equations (in Russian), vol. 2, pp. 401-405, 1966.

P. BRUNOVSKY

"A classification of linear controllable systems"

Kybernetika (Praha), 6, pp. 173-187, 1970.

C.R. BURROWS & M.N. SAHINKAYA

"A New Algorithm for Determining Structural Controllability"

Int. J. Control., vol. 33, n° 2, pp. 379-392, 1981.

C.R. BURROWS & M.N. SAHINKAYA

"A Modified Algorithm for Determining Structural Controllability"

Int. J. Control., vol. 37, n° 6, pp. 1417-1431, 1983.

J.P. CASSAR, M. STAROSWIECKI & P. DECLERCK

"Structural Decomposition of Large Scale Systems for the Design of Failure Detection and Identification Procedures"

System Science XI, Wroclant Poland, Septembre 22-25, 1992.

C.T. CHEN

"Linear Systems Theory and Design"

Holt, Rinehart and Winston, New York 1984.

C.F. CHEN & M.B. AHMAD

"Evaluating the Gain of a Flow Graph by the Grassmann Algebra"

Int. J. Control, vol. 39, n° 6, pp. 1329-1337, 1984.

C.L. COATES

"Flow-Graph Solutions of Algebraic Equations"

I.E.E.E. Trans. Aut. Control, vol. CT-6, pp. 170-187, 1959.

C. COMMAULT & J.M. DION

"Structure at Infinity of Linear Multivariable Systems: A Geometric Approach"

I.E.E.E. Trans. Aut. Control, vol. AC-27, pp.693-696, 1982.

C.COMMAULT, J. DESCUSSE, J.M. DION, J.F. LAFAY & M. MALABRE

"New Decoupling Invariants : the Essential Ordres"

Int. J. Control, vol. 44, n° 3, pp. 689-700, 1986.

C. COMMAULT, J.M. DION & J.A. TORRES

"Minimal Structure in the Block Decoupling Problem with Stability"

Automatica, vol. 27, n° 2, pp. 331-338, 1991.

C.B. COOPER, M.J. LUDOWISE, V. AEBI & R.L. MOON

"Rank-invariant Transformations and Controllability of Large-scale Systems"

Electronics Letters, vol. 16, n° 1, pp. 19-20, 1980.

J.P. COFRMAT & A.S. MORSE

"Structural Controllable and Structurally Canonical Systems"

I.E.E.E. Trans. Aut. Control, vol. AC-21, pp.129-131, Feb 1976.

M. CREMER

"Correspondence : Comments on S. P. Panda "Compensator Design for Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback"

Int. J. Control, vol. 14, n° 4, pp. 795-798, 1971.

M. CREMER

"A Precompensator of Minimal Order for Decoupling a Linear Multi-variable System"

Int. J. Control, vol. 14, n° 6, pp. 1089-1103, 1971.

K.B. DATTA

"An Algorithm to Compute Canonical Forms in Multivariable Control Systems"

IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 129-132, 1977.

G. DAUPHIN-TANGUY, P. BORNE & M. LEBRUN

"Order Reduction of Multi-time Scale Systems Using Bond Graphs, the Reciprocal System and the Singular Perturbation Method"

The Franklin Institute, vol. 319, n° 1/2, pp. 157-171, 1985.

E.J. DAVISON

"On Pole Assignment in Linear Systems with Incomplete State Feedback"

IEEE Trans. Automatic Control, AC-15, pp. 348-351, 1970.

E.J. DAVISON & R. CHATTERJEE

"A Note on Pole Assignment in Linear System with Incomplete State Feedback"

IEEE Trans. Automatic Control (corresp.), AC-16, pp. 98-99, 1971.

E. DAVISON & S. WANG

"On Pole-assignment in Linear Multivariable Systems using Output Feedback"

IEEE Trans. on Auto. Cont., pp. 516-518, 1975.

F.J. DAVISON

"Connectability and Structural Controllability of Composite Systems"
Automatic, vol. 13, n° 2, pp. 109-123, 1977.

J. DESCUSSE & J.M. DION

"On the Structure at Infinity of Linear Square Decouplable Systems"
I.E.E.E. Trans. Aut. Control, vol. AC-27, pp.971-974, 1982.

J. DESCUSSE & C.H. MOOG

"Decoupling with Dynamic Compensation for Strong Invertible Affine Non-linear Systems"
Int. J. Control, vol. 42, n° 6, pp. 1387-1398, 1985.

J. DESCUSSE, J.F. LAFAY & M. MALABRE

"Solution to Morgan's Problem"
I.E.E.E. Trans. Aut. Control, vol. 33, N° 8, pp.732-739, 1988.

J.M. DION & C. COMMAULT

"Feedback Decoupling of Structured Systems"
European Control Conference, Grenoble, 1991.

J.M. DION, C. COMMAULT & J. MONTOYA

"Simultaneous Decoupling and Disturbance Rejection a Structural Approach"
Intern. Report LAG 92, Sept. 1992.

J.J. DISTEFANO

"On the Relationship Between Structural Identifiability and the Controllability, Observability Properties"
IEEE Trans. on Auto. Control, vol AC-22, pp. 652-652, 1977.

L. DUGARD & L. D. LANDAU

"Commande Adaptative des Systèmes : Théorie, Méthodologie, Applications"
Ecole d'été d'automatique de Grenoble, Sept. 1990

F.J. EVANS & C. SCHIZAS

"Digraph Analysis of Large-Scale systems : The System Primitive"
Electr. Lett., 15, pp. 613-614, 1979.

M. M. FAHMI & J. O'REILLY

"On Eigenstructure Assignment in Linear. Multivariable Systems"

IEEE Trans. on Auto., vol. AC-27, n° 3, pp. 690-693, 1982.

P.L. FALB & W.A. WOLOVICH

"Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems"

IEEE Trans. on Aut. Cont., vol. AC-12, n° 6, 651-659, 1967.

L.R. FORD J.R & D.R. FULKERSON

"Flows in Networks"

Princeton, 1962.

A. FOSSARD

"Commande des Systèmes Multidimensionnels"

Dunod, Paris, 1972.

G. FRADELLOS, M. RAPANAKIS & F.J. EVANS

"Structural Controllability in Non-linear Systems"

Int. J. Systems SCI, vol. 8, n° 8, pp. 915-932, 1977.

O.I. FRANKSEN, P. FALSTER & F.J. EVANS

"Structural Aspects of Controllability and Observability - I. Tensorial Aggregation"

J. Franklin Inst., 308, pp. 79-104, 1979.

O.I. FRANKSEN, P. FALSTER & F.J. EVANS

"Structural Aspects of Controllability and Observability - II. Digraph Decomposition"

J. Franklin Inst., 308, pp. 105-124, 1979.

E. FREUND

"The Structure of Decoupled Non-linear Systems"

Int. J. Control, vol. 21, n° 3, pp. 443-450, 1975.

G. FROBENIUS

"Über Zerlegbare Determinanten"

Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., pp. 174-277, 1917.

P.A. FUHRMANN

"Linear Feedback via Polynomial Models"

Int. J. Control, 30, pp. 363-377, 1979.

F.R. GANTMACHER

"Théorie des Matrices"

Dunod, vol. 1, Paris, 1966.

E.G. GILBERT

"Controllability and Observability in Multivariable Control Systems"

J.S.I.A.M. Control, Ser. A, vol. 2, n° 1, pp.128-151, 1963.

E.G. GILBERT

"The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback"

S.I.A.M. Journal of Control, 7, pp. 50-63, 1969.

E.G. GILBERT & L.M. SILVERMAN

"Characterization of Structural Controllability"

IEEE Trans. Aut. Cont., pp. 334-337, 1976.

K. GLOVER & L.M. SILVERMAN

"Characterization of Structural Controllability"

IEEE Trans. Aut. Cont., 1976.

M. GOUDRAN & M. MINOUX

"Graphes et Algorithmes"

Collection de la direction des études et de recherches d'électricité de France, Edition Eyrolles, 1985.

I.-J. HA

"Canonical Forms of Decouplable and Controllable Linear Systems"

Int. J. Control, vol. 56, n° 3, pp. 691-701, 1992.

F. HARARY

"A Graph Theoretic Method for the Complete Reduction of a Matrix with a View to Finding its Eigenvalues".

J. Math and Phys., vol. 38. pp. 104-111, 1959.

M.L.J. HAUTUS & M. HEYMANN

"Linear Feedback - An Algebraic Approach"
SIAM J. Contr. Opt., vol. 16, pp. 83-105, 1978.

M.L. HAUTUS & M. HEYMANN

"Linear Feedback Decoupling-Transfer Function Analysis"
IEEE Trans. Aut. Cont., vol. AC-28, n° 8, pp. 823-832, 1983.

Y. HAYAKAWA, S. HOSOE, M. HAYASHI & M. ITO

"On the Structural Controllability of Comportemental Systems"
IEEE Trans. Aut. Cont., vol. AC-29, n° 1, pp. 17-24, 1984.

Y. HAYAKAWA & D.D. SILJAK

"On Almost Invariant Subspaces of Structured Systems and Decentralized Control"
IEEE Trans. Aut. Cont., vol. 33, n° 10, 1988.

J. HICKIN & N.K. SINHA

"An Efficient Algorithm for Transformer of State Equations to Canonical Forms"
IEEE Trans. on Auto. Control, vol. AC-22, pp. 652-653, 1977.

R.M. HIRSCHORN

"Invertibility of Nonlinear Control Systems"
SIAM J. Cont. and Opt., vol. 17, n° 2, pp. 289-297, 1979.

R.M. HIRSCHORN

"Invertibility of Multivariable Nonlinear Control Systems"
IEEE Trans. Aut. Cont., vol. AC-24, n° 6, pp. 855-865, 1979.

J.E. HOPCROFT & R.M. KARP

"An $n^{\frac{1}{2}}$ Algorithm for Maximum Matchings in Bipartite Graphs"
SIAM J. Comput., 2, pp. 225-231, 1973.

S. HOSOE & K. MATSUMOTO

"On the Irreducibility Condition in the Structural Controllability Theorem"
IEEE Trans. Aut. Cont., vol. AC-24, n° 6, pp. 963-966, 1979.

S. HOSOE

"Determination of Generic Dimensions of Controllable Subspaces and Its Application"
IEEE Trans. Aut. Cont., vol. AC-25, n° 6, pp. 1192-1196, 1979.

A. ICHIKAWA & H. KATAYAMA

"The Design of DeadBeat Controllers by State Transition Graph"
IEEE Trans. on Auto. Control, vol. 36, n° 6, pp. 752-756, 1991.

N. JACOBSON

"Lectures in abstract algebra, III - Theory of Fields and Galois theory"
D. Van Nostrand, Princeton, 1964.

D. JAUNE, S. THELLIEZ & M. VERGE

"Applications du Formalisme d'Etat à la Commande des Systèmes Continus"
Eyrolles, Paris, 1989.

R.D. JOHNSTON, G.W. BARTON & M.L. BRISK

"Determination of the Generic Rank of Structural Matrices"
Int. J. Control, vol. 40, n° 2, pp. 257-264, 1984.

R.D. JOHNSTON & G.W. BARTON

"Structural Interaction Analysis"
Int. J. Control, vol. 41, n° 4, pp. 1005-1013, 1985.

R.D. JOHNSTON & G.W. BARTON

"Structural Equivalence and Model Reduction"
Int. J. Control, vol. 41, n° 6, pp. 1477-1491, 1985.

T. KAILATH

"Linear Systems"
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.

R.F. KALMAN

"Mathematical Description of Linear Dynamical Systems"
J. S.I.A.M. Control, Ser. A, vol. 1, n° 2, pp. 153-192, 1963.

R.E. KALMAN, P.L. FALB & M.A. ARBIB

"Topics in Mathematical System Theory"

Mac Graw Hill, 1969.

S.B. KARMAKAR

"Determination of a Circuit in a Directed Graph"

Int. J. Systems SCI, vol. 17, n° 5, pp. 717-724, 1986.

D. KARNOPP & C. ROSENBERG

"System Dynamics : a Unified Approach"

John Wiley and Sons, N. Y., 1975.

D. KARNOPP

"Power and Energy in Linearized Physical Systems"

The Franklin Institute, vol. 303, n° 1, pp. 86-98, 1977.

D. KARNOPP & C. ROSENBERG

"Introduction to Physical System Dynamics"

Mac Graw Hill, 1983.

D. KARNOPP

"Modeling and Simulation of Adoptive Vehicule Air Suspensions with Pseudo Bond Graphs, camp and ACSL"

Complex and Distrib. Syst. : Analysis, Simulation and Control, IMACS, 1986.

H. KATAYAMA & A. ICHIKAWA

"Pole Assignment by State Transition Graph"

IEEE Trans. on Auto. Control, vol. 37, n° 8, pp. 1196-1201, 1992.

H. KIMURA

"Pole Assignment by Gain Output Feedback"

IEEE Trans. on Auto., pp. 509-516, 1975.

KIRCHOFF

Poggendorf annalen, 72, p 497, 1847.

G. KLEIN & B.C. MOORE

"Eigenvalue-Generalized Eigenvector. Assignment with State Feedback"
IEEE Trans. on Auto., pp. 140-141, 1977.

D. KÖNIG

"Graphak es Matrixik"
Mater. Fiziol. Lapok., vol.38, pp. 116-119, 1931.

D. KÖNIG

"Theorir der Endlichen und Unendlichen Graphen."
Leipzig 1936.

M. KONO & I. SUGIRA

"Generalization of Decoupling Control"
I.E.E.E. Trans. Aut. Control, vol. AC-19, pp.281-282, 1974.

B. KOUVARITAKIS & A.G.J. MAC FARLANE

"Geometric Approach to Analysis and Synthesis of System Zeros. Part I Square Systems"
Int. J. Control, vol. 23, n° 2, pp. 149-166, 1976.

E. KREINDLER & P.E. SARACHIK

"On the Concept of Controllability and Observability of Linear Systems"
IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 129-136, 1964.

M. LAL & H. SINGH

"On the Determination of a Transfer Function Matrix from the Given State Equations"
Int. J. Control, vol. 15, n° 2, pp. 333-335, 1972.

M. LEBRUN

"Les Bond Graphs : Un Cadre pour une Approche Unifiée des Systèmes Dynamiques un Outil pour l'Ingénierie"
AFCET / INTERFACES, n° 77, pp. 4-13, 1989.

C.T. LIN

"Structural Controllability"
IEEE Trans. Aut. Cont., Vol. AC-19, pp. 201-208, 1974.

C.T. LIN

"System Structure and Minimal Structure Controllability"

IEEE Trans. Aut. Cont., Vol. AC-22, n° 5, pp. 855-862, 1977.

X.F. LIN, S. SCAVARDA & E. RICHARD

"Modelling and Simulation of a Long Actuator"

Proceedings of the First International Symposium on Fluid Power transmission and Control, Beijing, (CHINE), October 13-15, 1991.

A. LINNEMANN

"Decoupling of Structured Systems"

Syst. and Contr. Lett., vol. 1 N° 2, pp. 72-86, 1981.

A. LINNEMANN

"A Further Simplification in the Proof of the Structural Controllability Theorem"

IEEE Trans. on Auto. Control, vol. AC-31, n° 7, pp. 638-639, 1986.

F. LORENZ & M. WLASOWSKI

"How to Determine the Solvability of Bond Graph Linear Junction Structures"

Journal of the Franklin Institute, 1989.

F. LORENZ

"A Causal Information Bonds in Bond Graph Models"

Symposium AIPAC' 89, Nancy, 3-5 July 1989.

D.G. LUENBERGER

"Canonical Forms for Linear Multivariable Systems"

IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 290-293, 1967.

D.G. LUENBERGER

"Dynamic Equations in Descriptor Form"

IEEE Trans. Automatic Control, AC-22, 312-321, 1977.

D.G. LUENBERGER

"Time-invariant Descriptor Systems"

Automatica, 14, pp.473-480, 1978.

A.G.J. MAC FARLANE & N. KARCANIAS

"Poles and Zeros of Linear Multivariable Systems : a Survey of the Algebraic, Geometric and Complex-variable Theory"

Int. J. Control, vol. 24, n° 1, pp. 33-74, 1976.

B. MAIONE & B. TURCHIANO

"Input- and Output-decoupling Structural Zeros of Linear Systems Described by Rosenbrock's Polynomial Matrices"

Int. J. Control, vol. 44, n° 6, pp. 1641-1659, 1986.

B. MASCHKE

"Contribution à une Approche par Bond Graph de l'Etude et la Conception de Lois de Commande de Robots contenant des Segments Flexibles"

Thèse de Doctorat, n° 1168, Orsay, 1990.

S.J. MASON

"Feedback Theory, Some Properties of Signal Flow-Graphs"

Proc. IRE 41, pp.1144-1156, 1953.

H. MAYEDA & T. YAMADA

"Strong Structural Controllability"

SIAM J. Control and Optimization, vol. 17, n° 1, pp 123-138, 1979.

H. MAYEDA

"On Structural Controllability Theorem"

IEEE Trans. Aut. Cont., Vol. AC-26, n° 3, pp. 795-798, 1981.

T. MITA

"On Maximal Unobservable Subspace, Zeros and their Applications"

Int. J. Control, vol. 25, n° 6, pp. 885-899, 1977.

T. MITA & H. ARAKAWA

"On Eigenvectors of the Canonical Matrix for Multiple - Input Controllable Systems"

IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 262-263, 1977.

B.P. MOLINARY

"Structural Invariants of Linear Multivariable Systems"

Int. J. Control, n° 4, pp. 493-510, 1978.

S. MOMEN

"Structural Controllability and Stability of Decentralised Systems"

Ph.d.thesis, Queen mary College, University of London, 1982.

M. MORARI & G. STEPHANOPOULOS

"Comments on Finding the Generic Rank of a Structural Matrix"

IEEE Trans. on Auto. Control, vol. AC-23, n° 3, pp.509-510, 1978.

B.S. MORGAN

"The Synthesis of Multivariable Systems by State Variable Feedback"

Joint. Aut. Control. Conf.(Stanford, Calif.,June 1964), pp 468-472. Also I.E.E.E. Trans. Aut. Control, vol. AC-9, pp.405-411, October 1964.

H. MORTAZAVIAN

"On k-controllability and k-observability of Linear Systems"

pp. 601-612, 1982.

A.S. MORSE

"Output Controllability and System Synthesis"

SIAM J. Control, vol. 9, n° 2, pp.143-148, 1971.

I.H. MUFTI

"Some Results on the Decoupling of Multi-variable Systems"

Int. J. Control, vol. 14, n° 3, pp. 477-485, 1971.

K. MUROTA

"Systems Analysis by Graphs and Matroids : Structural Solvability and Contollability"

Algorithms and Combinatorics 3, Springer-Verlag, 1987.

H. NIJMEIJER & W. RESPONDEK

"Dynamic Input-Output Decoupling of Nonlinear Control Systems"

Trans. Aut. Control, vol. 33, n° 11, pp. 1065-1065, 1988.

Y. OHTA & S. KODAMA

"Structural Inversibility of Transfer functions"

IEEE Trans. on Auto. Control, vol. AC-30, n° 8, pp. 818-819, 1985.

O. ORE

"Graphs and Matching Theorems"

Duke Math. J., 22, pp. 625-639, 1955.

O. ORE

"Theory of Graphs"

Amer. Math. Soc., Colloquium. Publications, 1962.

S. ORE

"Les Graphes et leurs Applications"

Dunod, Paris, 1962.

J.R. ORT & H.R. MARTENS

"The Properties of Bond Graph Junction Structure Matrices"

Trans. of ASME, J. Dyn. Sys., Meas. & Cont., Dec. 73, pp. 362-367, 1973.

J.R. ORT & H.R. MARTENS

"A Topological Procedure for Converting a Bond Graph to a Linear Graph"

Journ. Dyn. Syst., Meas. & Cont., Sept. 74, pp. 307-314, 1974.

S.P. PANDA

"Compensator Design for Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback"

Int. J. Control, vol. 13, n° 4, pp. 721-735, 1971.

R.V. PATEL

"On Zeros of Multivariable Systems"

Int. J. Control, vol. 21, n° 4, pp. 599-608, 1975.

C.R. PAUL

"Pole Specification in Decoupled Systems"

Int. J. Control, vol. 15, n° 4, pp. 651-664, 1972.

M. PAYNTER

"Analysis and Design of Engineering Systems"

MIT Press, 1961.

A.S. PERELSON

"The Properties of Bond Graph Junction structure Matrices"

Journal of Dynamic Systems, Meas., and Control, pp. 209-210, 1976.

A.S. PERELSON & G.F. OSTER

"Bond Graphs and Linear Graphs"

Journ. of the Franklin Inst., vol. 302, n° 2, pp. 159-185, 1976.

B. PETERSEN

"Investigating Solvability and Complexity of Linear Active Networks by Means of Matroids"

IEEE Trans. Circuits Syst., CAS-26, 330-342, 1979.

V. PICHAI, M.E. SEZER & D.D. SILJAK

"A Graph Theoretic Algorithm for Hierarchical Decomposition of Dynamical Systems with Applications to estimation and Control"

I.E.E.E. Trans.SMC-13, pp.197-207, 1983.

V.M. POPOV

"L'Hyperstabilité des Systèmes Automatiques"

Bibliothèque de l'automaticien, DUNOD, PARIS, 1973.

W.A. PORTER

"Decoupling of and Inverses for Time-varying Linear Systems"

IEEE Trans. on Auto. Control, pp. 378-380, 1969.

H.M. POWER

"Simplification and Extension of the Falb-Wolovich Decoupling Theory"

Int. J. Control, vol. 25, n° 5, pp. 805-818, 1977.

D. PRÄTZEL-WOLTERS

"Brunovsky Equivalence of System Matrices : The Reachable Case"

IEEE Trans. on Auto. Control, vol. AC-26, n° 2, 1981.

W.L. PRICE

"Introduction aux Graphes et aux Réseaux"
Mason et Cie, Paris, 1974.

A.C. PUGH

"The MacMillan Degree of Polynomial Systems Matrix"
Int. J. Control, vol. 24, n° 1, pp. 129-135, 1976.

A.C. PUGH

"Transmission and System Zeros"
Int. J. Control, vol. 26, n° 2, pp. 315-324, 1977.

A.C. PUGH & V. KRISHNASWAMY

"Algebraic and Dynamic Characterizations of Poles and Zeros at Infinity"
Int. J. Control, vol. 42, n° 5, pp. 1145-1153, 1985.

A. RAHMANI, C. SUEUR & G. DAUPHIN-TANGUY

"Formal Determination of Controllability/Observability Matrices for Multivariable Systems Modelled by Bond-Graph".
IMACS/SICE, International Symposium of Robotics, Mechatronics and Manufacturing Systems'92 Kobe, Japan, pp. 573-580 Sep. 16-20, 1992.

A. RAHMANI & G. DAUPHIN-TANGUY

"Commandabilité et Observabilité Structurelles des Systèmes Modélisés par Bond Graph"
1er Colloque des Etudiants Doctorants des Ecoles Centrales, Nantes, Nov. 1992.

C. RECH

"Commandabilité et Observabilité Structurelles des Systèmes Interconnectés"
Thèse 50376 61, 1988.

C. RECH & R. PERRET

"About Structural Controllability of Interconnected Dynamical Systems"
Automatica, vol. 27, n° 5, pp. 877-881, 1991.

K.J. REINSCHKE

"Graph-theoretic Characterization of Fixed Modes in Centralized and Decentralized Control"
Int. j. Control, vol. 39, n° 4, pp. 715-729, 1984.

K.J. REINSCHKE

"Multivariable Control : a Graph-theoric Approach"

Lect. Notes in Cont & Inf. Sciences, n° 108, Springer-Verlag, 1988.

Z.V. REKASIUS

"Decoupling of Multivariable Systems by Means of State Variable Feedback"

Proc. 6rd Ann. Allerton Conf. on Circuit and System Theory (Urbana, Ill., 1965), pp 439-447, 1965.

R.C. ROSENBERG

"Multiport Models in Mechanics"

Transactions of the ASME, pp. 206-212, 1972.

R.C. ROSENBERG

"Essential Gytrators and Reciprocity in Junction structures"

The Franklin Institute, vol. 308, n° 3, pp. 343-352, 1979.

R.C. ROSENBERG & A.N. ANDRY

"A Controllability Test for Linear System using a Graphical Technique"

IFAC Symp. on Computer Aided Design of Control Systems, Zürich, pp. 143-147, 1979.

H.H. ROSENBROCK

"State-Space and Multivariable Theory"

Study in Dynamical Syst, Welson, R.W. Brocket & H.H. Rosenbrock, 1970.

H.H. ROSENBROCK

"State-space and Multivariable Theory"

Study in Dynamical Syst, Nelson, R.W. Brocket & H.H. Rosenbrock, 1970.

H.H. ROSENBROCK

"The Zeros of a System"

Int. J. Control, vol. 18, n° 2, pp. 297-299, 1973.

H.H. ROSENBROCK

"Correction to "The Zeros of a System"

Int. J. Control, vol. 20, n° 3, pp. 525-527, 1974.

H.H. ROSENBROCK

"Structural Properties of Linear Dynamical Systems"

Int. J. Control, vol. 20, n° 2, pp. 191-202, 1974.

H.H. ROSENBROCK

"Comments on "Poles and Zeros of Linear Multivariable Systems a Survey of the Algebraic, Geometric and Complex-variable Theory"

Int. J. Control, vol. 26, n° 1, pp. 157-161, 1977.

H.H. ROSENBROCK & A.J.J. VAN DER WEIDEN

"Inverse Systems"

Int. J. Control, vol. 25, n° 3, pp. 389-392, 1977.

M.J. RYSER

"Mathématiques combinatoires"

Dunod, Paris, 1969.

M.K. SAIN & J.L. MASSEY

"Invertibility of Linear Time-invariant Dynamical Systems"

IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-14, pp. 141-149, 1969.

B. SAMANTA & A. MUKHERJEE

"Dynamics of a Class of Repeated Systems with non-identical Elastic and Visco-elastic Interconnections - a Bond Graph Approach"

The Franklin Institute, vol. 319, n° 5, pp. 473-497, 1985.

P. SANNUTI & A. SABER

"Special Coordinate Basis for Multivariable Linear Systems-finite and Infinite Zero Structure, Squaring Down and Decoupling"

Int. J. Control, vol. 45, n° 5, pp. 1655-1704, 1987.

C. SCHIZAS & F.J. EVANS

"Rank Invariant Transformations and the Controllability of Large-scale Systems"

Electr. Lett., 16, pp. 19-20, 1980.

C. SCHIZAS & F.J. EVANS

"A Graph Theoretic Approach to Multivariable Control System Design"

Automatica, vol. 17, n° 2, pp. 371-377, 1981.

A. SEFIK & M.E. SEZER

"Pole Assignment Problem : a Structural Investigation"

Int. J. Control, vol. 54, n° 4, 973-998, 1991.

M.E. SEZER & D.D. SILJAK

"On Structural Decomposition and Stabilization of Large-scale Control Systems"

IEEE Trans. Automatic Control, AC-26, pp. 439-444, 1981.

R.N. SHIELDS and J.B. PEARSON

"Structural Controllability of Multi-input Linear Systems"

IEEE Trans. Aut. Cont., vol. AC-21, n° 2, pp. 203-212, 1976.

D.D. SILJAK

"On Reachability of Dynamic Systems"

Int. J. Systems Sci., vol. 8, n° 3, pp. 321-338, 1977.

L.M. SILVERMAN & H.E. MEADOWS

"Controllability and Observability in Time-variable Linear Systems"

SIAM J. Control, 5, pp. 64-73, 1967.

L.M. SILVERMAN

"Properties and Application of Inverse Systems"

IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-13, pp. 436-437, 1968.

L.M. SILVERMAN

"Inversion of Multivariable Linear Systems"

IEEE Trans., vol. AC-14, n° 3, pp. 270-276, 1969.

L.M. SILVERMAN & H.J. PAYNE

"Input-output Structure of Linear Systems with Application to the Decoupling Problem"

SIAM J. Control, vol. 9, n° 2, pp. 199-233, 1971.

S.N. SINGH

"Decoupling of Invertible Nonlinear Systems with State Feedback and Precompensation"
IEEE Trans. Aut. Cont., vol. AC-25, n° 6, pp. 1237-1239, 1980.

S.N. SINGH, B. E., M. E. & Ph. D.

"Generalised Decoupled-control Synthesis for Invertible Nonlinear Systems"
IEEE Proc., vol. 128, Pt. D., n° 4, pp. 157-161, 1981.

P.K. SINHA

"Dynamic Compensation for State Feedback Decoupling of Multivariable Systems"
Int. J. Control, vol. 24, n° 5, pp. 673-684, 1976.

P.K. SINHA

"State Feedback Decoupling of Nonlinear Systems"
Tech. Notes and Corres., pp. 487-489, 1976.

P.K. SINHA

"Controllability, Observability and Decoupling of Multivariable Systems"
Int. J. Control, vol. 26, n° 4, pp. 603-620, 1977.

V. SINSWAT & F. FALLSIDE

"Determination of Invariant Zeros and Transmission Zeros of all Classes of Invertible Systems"
Int. J. Control, vol. 26, n° 1, pp. 97-114, 1977.

M. STAROSWIECKI, M. BAYART & J.P. CASSAR

"Structural Approach for Fault Detection and Isolation in Discrete Event Systems"
IMACS / SICE International Symposium on robotics Mechatronics et Manufacturing Systems,
Kobe, 16-20 September, 1992.

STEINORE

"Les Graphes et leurs Applications"
Dunod, Paris, 1970.

N. SUDA & T. HATANAKA

"Structural Properties of Systems Represented by Bond Graphs"
C. & D. Syst. : Analysis, Sim. & Cont., Congrès IMACS, pp. 73-80, 1986.

C. SUEUR & G. DAUPHIN-TANGUY

"Structural Controllability / Observability of Linear Systems Represented by Bond Graphs"
J. of the Franklin Institute, vol. 326, n° 6, pp. 869-883, 1989.

C. SUEUR & G. DAUPHIN-TANGUY

"Bond Graph Approach for Structural Analysis of MIMO Linear Systems"
J. of the Franklin Institute, vol.328, n° 1, pp. 55-70, 1991.

M.TAGINA, J.P. CASSAR, G. DAUPHIN-TANGUY & M. STAROSWIEKI

"Generation of Fault Detection Systems From Bond Graph Model"
A soumettre à lecture en 1993 à la Revue Européenne : Diagnostic et Sûreté de Fonctionnement

S. TAN & J. VANDEWALLE

"Complete Decoupling of Linear Multivariable Systems by Means of Linear Static and Differential State Feedback"
Int. J. Control, vol. 46, n° 4, pp. 1261-1266, 1987.

K.M. TAO & P. HSIA

"On the Structure of Directed Graphs with Applications : Part I, II"
Int. J. General Systems, vol. 8, pp. 147-159, pp. 211-224, 1982.

I. TROCH

"Decoupling Systems Consisting of Partially Decoupled Subsystems"
Syst. Anal. Model. Simul., vol. 8, n° 9, pp. 647-656, 1991.

K.T. ULRICH & W.P. SEERING

"Synthesis of Schematic Description in Mechanical Design"
Research in Engineering Design, Springer-Verlag, 1988.

A.J.J. VAN DER WEIDEN

"Inversion of Rational Matrices"
Int. J. Control, vol. 25, n° 3, pp. 393-402, 1977.

A.J.J. VAN DER WEIDEN & O.H. BOSGRA

"The Determination of Structural Properties of a Linear Multivariable System by Operations of System Similarity. 1. Strictly Proper Systems"
Int. J. Control, vol. 29, n° 5, pp. 835-860, 1979.

A. VAZ, A. MUKHERJEE & B. SAMANTA

"Some Aspects of Beam Models From the Vontrol Theory Standpoint Using Bond Graphs"
International Conference on Bond Graph Modeling, I.C.B.G.M'93. San Diego Ca, 1993.

M.E. WARREN & S.K. MITTER

"Generic Solvability of Morgan's Problem"
IEEE Trans. Automatic Control, vol. AC-20, pp. 268-269, 1975.

J.L. WILLEMS

"Structural Controllability and Observability"
Systems & Control Letters, 8, pp. 5-12, 1986.

A. WOLOVICH

"Linear Multivariable Systems"
Springer verlag, 1974.

V.M. WONHAM

"Linear Multivariable Control : a Geometric Approach"
2nd Ed, Springer-Verlag, J. Diff. Equations, 31, pp. 53-98, 1979.

W.M. WONHAM

"On Pole Assignment in Multi-input Controllable Linear Systems"
IEEE Trans. Autom. Control, vol. PGAC-12, n°6, pp.660-665, 1968.

W.M. WONHAM & A.S. MORSE

"Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems : a Geometric Approach"
SIAM J. of Control, vol.8, pp. 1-18, Feb. 1970.

T. YAMADA

"Comments on "On structural Controllability Theorem"
IEEE Trans. on Auto. Control, vol. AC-29, n° 12, pp. 1130-1131, 1984.

T. YAMADA & T. SAGA

"A Sufficient Condition for Structural Decouplability of Linear Nonsquare Systems"
IEEE Trans. Aut. Cont., vol. AC-30, n° 9, pp. 918-921, 1985.

TITLE : BOND GRAPH APPROACH FOR STRUCTURAL STUDY OF LINEAR SYSTEMS

Summary

The purpose of this report is the study of structural properties of linear dynamical systems by use of their bond graph model.

After a brief recall of the structural property notions, the different terminologies used for a matrix rank study and its graph interpretation are presented. A comparison between these equivalent rank and the bond graph ranks is proposed.

Within the frame of the structural state controllability / observability study, we propose a graphical method for formal calculation of the state controllability / observability matrices and the correspondent basis change matrices. A rule for formal determination of controllability / observability indices directly from the bond graph model is proposed.

The formal calculation of the opened loop characteristic polynomial coefficients of a system is presented thus a formal relation between these coefficients and the component of the feedback matrices are proposed. These results lead to the formal determination of a static state feedback for pole placement from the bond graph model.

The formal determination of the output controllability matrix directly from the bond graph model, thus graphical criterion to study the output controllability in terms of causal path in a model bond graph are developed.

A method for formal calculation of the transfer matrix, a graphical interpretation of its rank and a rule for calculation of the system matrix rank are presented, which allows us to dispose of a necessary and sufficient condition of invertibility

A necessary and sufficient condition for decoupling by static state feedback, a method to determine a dynamic compensation are proposed in terms of causal input-output path in a model bond graph is presented. A formal determination of the decoupling matrix involves the state feedback matrices calculation.

Keywords :

Bond graph

Structural properties

State controllability - output controllability

Pole placement

Invertibility of a system

Decoupling