

50376
1993
292

50376
1993
292

N° d'ordre:1136

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

en Productique: Automatique et Informatique Industrielle

par

Lotfi BELKOURA

MODÈLE DYNAMIQUE DE ROBOTS

ET

MÉTHODE D'IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES INERTIELS

Soutenu le 1 juillet 1993 devant la commission d'examen:



MM.

P. VIDAL	Président	Professeur à l'USTL
L. POVY	Directeur de recherche	Professeur à l'USTL
M. GAUTIER	Rapporteur	Professeur à l'Université de Nantes
S. TARASIEWICZ	Rapporteur	Professeur à l'Université Laval (Québec)
D. WEICHERT	Examineur	Professeur à l' E.U.D.I.L.

AVANT PROPOS

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au Centre d'Automatique de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, dirigé par Monsieur le Professeur Pierre VIDAL. Je le remercie de m'avoir permis de travailler au sein de son laboratoire, ainsi que d'avoir accepté la présidence du jury de thèse.

J'adresse tous mes remerciements à Monsieur Lucien POVY, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, pour avoir accepté de diriger cette thèse, ainsi que pour son soutien tout au long de mes travaux.

J'exprime également mes sincères remerciements à Monsieur Maxime GAUTIER, Professeur à l'Université de Nantes, pour avoir accepté de juger ce travail qui, je l'espère, se situe bien dans le prolongement des recherches effectuées au sein de son équipe.

Que Monsieur Stanislaw TARASIEWICZ, Professeur à l'Université Laval, trouve ici toute ma reconnaissance pour avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse.

Je remercie également Monsieur Dieter WEICHERT, Professeur à l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille, pour sa participation au jury de thèse.

Je termine enfin cet avant propos en remerciant tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont aidé par leur compétence et leur amitié dans l'élaboration de ce travail.

SOMMAIRE

Introduction générale	4
 CHAPITRE I : ELEMENTS DE MODELISATION	
I.INTRODUCTION	7
II.DESCRPTION DES ROBOTS	7
II.1.Introduction	7
II.2.Changement de repère et matrice de transformation homogène	8
II.3.Convention de représentation	10
II.3.1.Description de Denavit et Hartenberg	10
II.3.2.Description de Denavit et Hartenberg Modifiée	12
II.3.3.Description de Mayeda	13
II.3.4.Comparaison des descriptions	14
III.MODELE GEOMETRIQUE DIRECT	15
IV.MODELE CINEMATIQUE	16
V.MODELE DYNAMIQUE	19
V.1.Introduction	19
V.2.Formalisme de Lagrange	20
VI. CALCUL DES ENERGIES	22
VI.1.Energie cinétique, linéarisation et paramètres inertiels standards	22
VI.2.Energie potentielle	24
VI.3.Energie totale du robot	25
VII.LINEARITÉ DU MODELE DYNAMIQUE	26
VIII.CONCLUSION	27

CHAPITRE II : PARAMETRES INERTIELS MINIMAUX

I.INTRODUCTION	28
II. NOTION DE CORPS AUGMENTE ET PREMIERE SOLUTION DE BASE	30
II.1 Notion de corps augmenté	30
II.2 Premiere solution de base	31
III. APPROCHE ENERGETIQUE ET DEUXIEME SOLUTION DE BASE	34
III.1 Principe de la recherche des paramètres de base	34
III.1.1 Approche dynamique	34
III.1.2 Approche énergétique	36
III.2 Paramètres inertiels sans effet sur le modèle	37
III.3 Relations générales de regroupement des paramètres	42
III.3.1 Principe de regroupement	42
III.3.2 Regroupements des paramètres d'une articulation rotoïde	45
III.3.3 Regroupements des paramètres d'une articulation prismatique	47
III.3.4 Application à l'ensemble des corps	49
III.4 Etude des cas particuliers dépendant de la morphologie du robot	49
III.4.1 Unicité des relations générales de regroupements	49
III.4.2 Travaux antérieurs	50
III.4.3 Etude complète	52
III.5 Etapes de calcul des paramètres de base	56
III.6 Détermination du nombre de paramètres de base	57
III.6.1 Nombre de paramètres de base des articulations rotoïdes	58
III.6.2 Nombre de paramètres de base des articulations prismatiques	59
IV. MODELE ENERGETIQUE ET PREMIERE SOLUTION DE BASE	60
IV.1 Paramètres inertiels sans effet sur le modèle	60
IV.2 Relations générales de regroupements de paramètres	61
IV.3 Regroupements particuliers	64
V. APPLICATIONS	66
VI. CONCLUSION	75

CHAPITRE III : METHODE D'IDENTIFICATION

I. INTRODUCTION	76
II. EXPRESSION GENERALE DU MODELE ENERGETIQUE	78
III. MOUVEMENTS TEST ET PARAMETRES A IDENTIFIER	81
III.1 Test 1: Mouvement axe par axe des articulations prismatiques	81
III.2 Test 2: Mouvement axe par axe des articulations rotoïdes à vitesse constante	83
III.3 Test 3: Mouvement simultané d'une articulation rotoïde à vitesse constante et d'une articulation prismatique à vitesse non constante	85
III.4 Test 4: Mouvement axe par axe des articulations rotoïdes à vitesse non constante	91
III.5 Test 6: Mouvement simultané de deux articulations rotoïdes d'axes non parallèles	97
III.6 Test 6: Mouvement simultané d'une articulation prismatique et de la première articulation rotoïde	99
III.7 Etapes d'identification	101
IV. EXEMPLE	105
V. CONCLUSION	110
Conclusion générale	111
Annexes	113
Références bibliographiques	141

INTRODUCTION GENERALE

Le travail présenté dans cette thèse apporte une contribution à la modélisation dynamique et à l'identification de paramètres inertiels des robots à structure ouverte simple.

L'étude sur les modèles de comportement dynamique concerne la recherche des paramètres inertiels minimaux. Ce travail se situe dans le prolongement des recherches réalisées au Laboratoire d'Automatique de Nantes par W. Kalil, M. Gautier, J.F. Kleinfinger et F. Bennis. Cette étude est de type formel, basée sur une approche énergétique, et conduit à un modèle dynamique optimisé du point de vue des temps de calcul. Elle constitue en outre une étape préliminaire indispensable au problème d'identification des paramètres inertiels, en ce sens qu'elle fournit un ensemble de paramètres identifiables, évitant ainsi une perte de rang structurelle des systèmes linéaires formés.

Les modèles représentant le comportement dynamique du robot, ou traduisant un bilan énergétique, s'expriment linéairement vis à vis des mêmes paramètres inertiels standards, à savoir les masses, premiers moments et moments d'inertie. Il s'agit alors de déterminer une base de l'espace engendré par les coefficients dynamiques du modèle étudié. Notre contribution réside notamment dans le passage d'une solution quasi-minimale à un ensemble minimal de paramètres inertiels.

La minimalité de l'ensemble des paramètres inertiels étant établie, nous proposons une méthode systématique permettant d'identifier, de proche en proche, l'ensemble de ces paramètres inertiels ainsi que les coefficients de frottement secs et visqueux des articulations. Cette méthode consiste à faire réaliser par le robot un ensemble

de trajectoires simples, ne mettant pas en jeu plus de deux articulations simultanément. Les bilans énergétiques issus des différents déplacements permettent d'identifier à chaque étape un nombre réduit de paramètres. Les tests statiques n'ont pas été considérés afin de ne pas soulever d'ambiguïté quant à la modélisation des frottements secs des articulations en absence de mouvement. Outre la dimension fortement réduite des systèmes linéaires formés, cette approche permet de s'affranchir de la mesure ou de l'estimation des accélérations articulaires.

Ce mémoire se divise en trois chapitres:

Le premier chapitre effectue un rappel de quelques notions nécessaires à l'écriture des différents modèles géométrique, cinématique et enfin dynamique. Nous y présentons notamment différentes conventions utilisées pour décrire la structure géométrique des robots, et ce afin de mettre en évidence les avantages et inconvénients qu'elles peuvent présenter. Nous utilisons par la suite une description géométrique partielle qui sera suffisante pour l'ensemble des développements ultérieurs. Le calcul des énergies est traité plus en détail car il se situe à la base des études effectuées aux chapitres suivants.

Le second chapitre concerne la recherche d'un ensemble minimal de paramètres inertiels. Il débute par la présentation d'une solution minimale utilisant la notion de paramètres inertiels des corps augmentés. Nous présentons ensuite, en les complétant, les trois principales étapes utilisées pour aboutir à une seconde solution minimale. Cette solution est basée sur le regroupement des paramètres inertiels standards, plus fréquemment utilisés, et les trois étapes en question sont les suivantes:

- Recherche exhaustive (et élimination) des paramètres sans effet sur le modèle dynamique.
- Regroupements généraux des paramètres.
- Etude complète des cas particuliers de regroupement.

Nous montrons enfin comment la même approche énergétique permet de retrouver la solution minimale basée sur la notion de corps augmenté.

Le troisième chapitre est consacré au développement d'une méthode séquentielle d'identification des paramètres inertiels minimaux ainsi que des frottements secs et visqueux des articulations. Cette méthode nécessite au maximum six catégories de "mouvements tests". Nous présentons pour chacune d'elle l'équation issue du bilan énergétique en mettant en évidence les paramètres qui pourront y être identifiés. L'enchaînement des différents tests est enfin regroupé sous forme d'organigramme indiquant à chaque étape le type de mouvement à effectuer, les articulations concernées ainsi que les paramètres à identifier.

CHAPITRE I

CHAPITRE I

ELEMENTS DE MODELISATION

I / INTRODUCTION

Ce premier chapitre constitue un rappel de quelques notions de base nécessaires à l'écriture des différents modèles mathématiques utilisés en robotique. Nous effectuons dans un premier temps une brève présentation des principales conventions rencontrées pour décrire la structure géométrique des robots, et ce afin de mettre en évidence les propriétés communes qu'elles peuvent présenter. Cela nous permettra par la suite de conserver une formulation générale des résultats qui seront établis. Nous rappelons ensuite quelques éléments nécessaires à l'écriture des modèles de représentation géométrique, cinématique, et enfin dynamique des robots. Le calcul de l'énergie du robot est traité plus en détail car il sera à la base des développements utilisés tout au long de notre étude.

II / DESCRIPTION DES ROBOTS

II.1 / Introduction

Du point de vue de la mécanique, un robot est constitué d'un ensemble de corps reliés entre eux par des articulations; Ces articulations peuvent être prismatiques (translations pures), rotoïdes (rotations pures), ou constituées de combinaisons de ces articulations élémentaires. Lorsque chacun des corps est relié au plus à deux articulations, nous sommes en présence d'une chaîne cinématique simple. Dans le cas contraire, la chaîne est dite complexe (arborescente ou fermée).

Dans notre étude, nous nous intéresserons aux chaînes ouvertes simples, composées de $N+1$ corps rigides reliés entre eux par N articulations. Les liaisons seront de plus supposées sans jeu ni élasticité. Partant de la base du robot vers l'organe terminal, ces corps seront désignés par $C_0 \dots C_i \dots C_N$; De même, l'articulation i sera celle reliant les corps C_{i-1} et C_i , $i=1, \dots, N$.

Enfin, pour les différentes modélisations, il est nécessaire de connaître la situation d'un point quelconque du robot dans un repère absolu, le plus souvent lié à la terre. Ainsi, à chaque corps C_i est associé un repère $R_i (O_i, x_i, y_i, z_i)$ qui lui est lié. Ces repères peuvent être à priori choisis arbitrairement. Cependant, un choix judicieux de leur emplacement et de leur enchaînement permet de simplifier grandement l'écriture des différents modèles mathématiques. Aussi allons nous, après un bref rappel sur les matrices de transformations homogènes, introduire les principales descriptions utilisées pour décrire la structure géométrique des robots.

II.2 / Changement de repère et matrice de transformation homogène

Nous introduisons les notations suivantes:

${}^iA^j$: matrice de rotation 3×3 exprimant l'orientation du repère R_j par rapport au repère R_i

${}^iP^j$: matrice 3×1 exprimant les coordonnées de l'origine du repère R_j dans R_i

${}^iN^j$: matrice 3×1 exprimant les coordonnées d'un point quelconque N_j du corps C_j dans R_i

Connaissant la situation d'un point N_j du corps C_j dans son propre repère R_j , ses coordonnées dans le repère R_i s'obtiennent à partir de la relation bien connue de transformation de coordonnées par:

$${}^iN^j = {}^iP^j + {}^iA^j {}^jN^j \quad (1-1)$$

En utilisant les matrices de transformation homogènes introduites par [Denavit-Hartenberg 55], la relation affine (1-1) peut être ramenée à une expression linéaire sous la forme:

$$\begin{bmatrix} {}^iN^j \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^iA^j & {}^iP^j \\ 0_{13} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^jN^j \\ 1 \end{bmatrix} = {}^iT^j \begin{bmatrix} {}^jN^j \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

Les vecteurs sont ainsi augmentés d'une dimension, correspondant en fait à un facteur d'échelle [Craig 86]. La matrice de passage obtenue, ${}^iT^j$, représente à la fois l'orientation et la position du repère R_j dans R_i . Lorsque cela ne présente pas d'ambiguïté, cette relation s'écrit plus simplement:

$${}^iN^j = {}^iT^j {}^jN^j \quad (1-3)$$

Propriétés de la matrice de transformation homogène:

La matrice ${}^iA^j$ est une matrice de rotation. Elle est donc unitaire et cela se traduit par:

$$|\det({}^iA^j)| = 1 \quad \text{et} \quad ({}^iA^j)^{-1} = ({}^iA^j)^T = {}^jA^i \quad (1-4)$$

On obtient alors sans difficulté la matrice de transformation inverse:

$$({}^iT^j)^{-1} = \begin{bmatrix} {}^iA^{jT} & -{}^iA^{jT} {}^iP^j \\ 0_{13} & 1 \end{bmatrix} = {}^jT^i \quad (1-5)$$

La composition de deux transformations successives s'écrit quant à elle:

$${}^iT^k {}^kT^j = \begin{bmatrix} {}^iA^{kT} {}^kA^j & {}^iP^k + {}^iA^{kT} {}^kP^j \\ 0_{13} & 1 \end{bmatrix} = {}^iT^j \quad (1-6)$$

L'utilisation de cette dernière propriété permet, à partir de transformations successives, de déterminer la position de tout point du système dans un repère de référence R_0 .

généralement pris lié à la terre :

$${}^0N^j = {}^0T^1 {}^1T^2 \dots {}^{j-1}T^j {}^jN^j \quad (1.7)$$

Les simplifications d'écriture des différents modèles proviennent pour une grande part des paramètres géométriques utilisés pour décrire le passage entre deux repères consécutifs. La méthode de description la plus répandue en robotique est celle introduite par [Denavit, Hartenberg, 55]. Elle permet une description homogène avec un nombre minimal de paramètres. Plus récemment, de nouvelles descriptions dites de Denavit et Hartenberg Modifiées (DHM) ont été proposées [Khalil, Kleinfinger, 86], [Giordano, 86], [Craig, 86]. Leur avantage par rapport à la première méthode se traduit par une description plus aisée des chaînes complexes, ainsi qu'une simplification de l'écriture des torseurs cinématiques. Une autre approche se retrouve dans [Mayeda, Yoshida, Ohashi, 89] où l'on effectue notamment un double indexage des repères permettant de différencier les articulations rotoïdes et prismatiques. Le paragraphe qui va suivre effectue un bref rappel de ces descriptions.

II.3 / Conventions de représentation

II.3.1 / Description de Denavit et Hartenberg (DH)

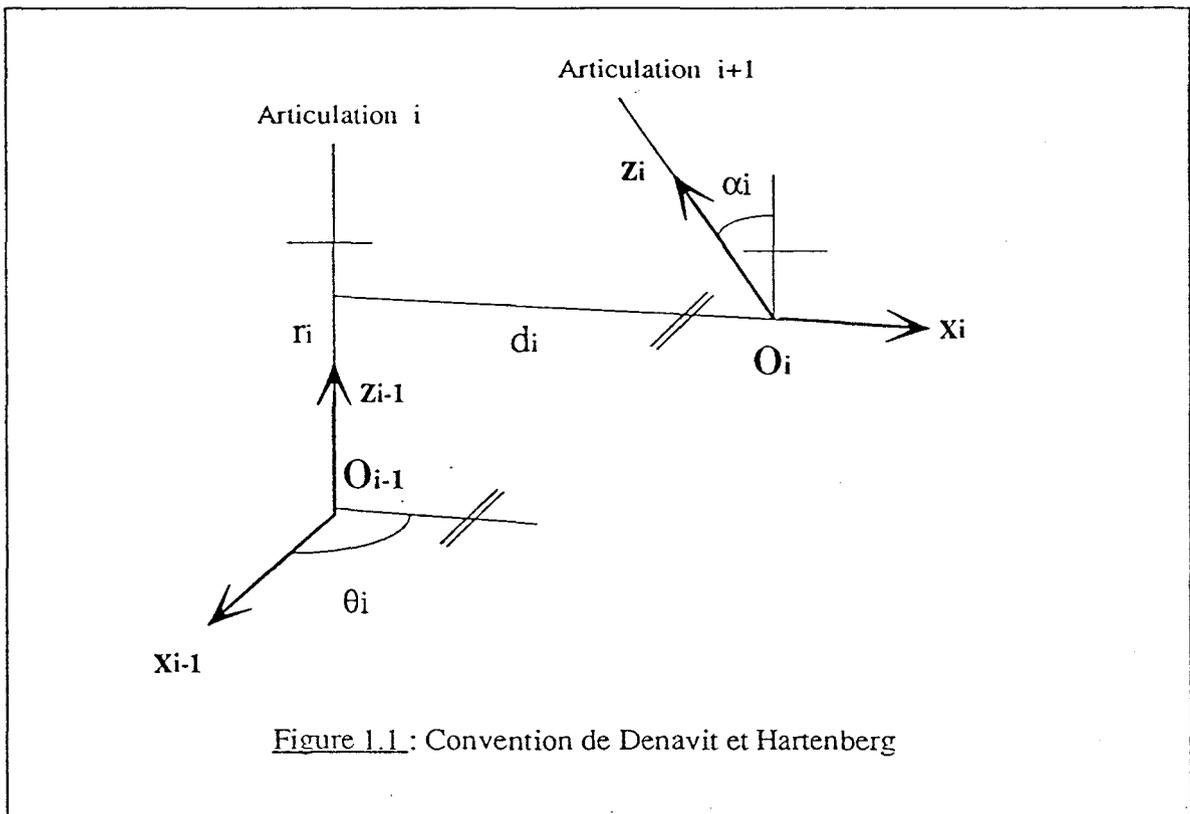
La convention de Denavit et Hartenberg se présente de la manière suivante: (Fig.:1.1). L'axe z_{i-1} , $i=1, \dots, N$, est situé sur l'axe de l'articulation i , tandis que l'axe x_i est porté par la normale commune aux axes z_i et z_{i-1} . Le passage du repère R_{i-1} au repère R_i s'effectue à l'aide de quatre paramètres géométriques (θ_i , d_i , α_i , r_i) suivant:

$${}^{i-1}T^i = \text{Rot}(z, \theta_i) \text{Trans}(z, r_i) \text{Rot}(x, \alpha_i) \text{Trans}(x, d_i) \quad (1.8)$$

soit encore

$${}^{i-1}T^i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & d_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & d_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

où $C(\cdot)$ et $S(\cdot)$ désignent respectivement $\text{Cos}(\cdot)$ et $\text{Sin}(\cdot)$. La variable articulaire de l'articulation i sera θ_i dans le cas d'une liaison rotoïde, et r_i dans le cas d'une liaison prismatique.



D'une manière plus générale, la variable articulaire peut être définie par la relation :

$$q_i = \sigma_i (r_i - r_{i_0}) + \bar{\sigma}_i (\theta_i - \theta_{i_0}) \quad (1.10)$$

avec $\sigma_i = 0$ ou 1 respectivement si l'articulation est rotoïde ou prismatique, $\bar{\sigma}_i = 1 - \sigma_i$, r_{i_0} et θ_{i_0} sont des valeurs initiales choisies arbitrairement et pour lesquelles $q_i = 0$.

II.3.2 / Description de Denavit et Hartenberg Modifiées (DHM) :

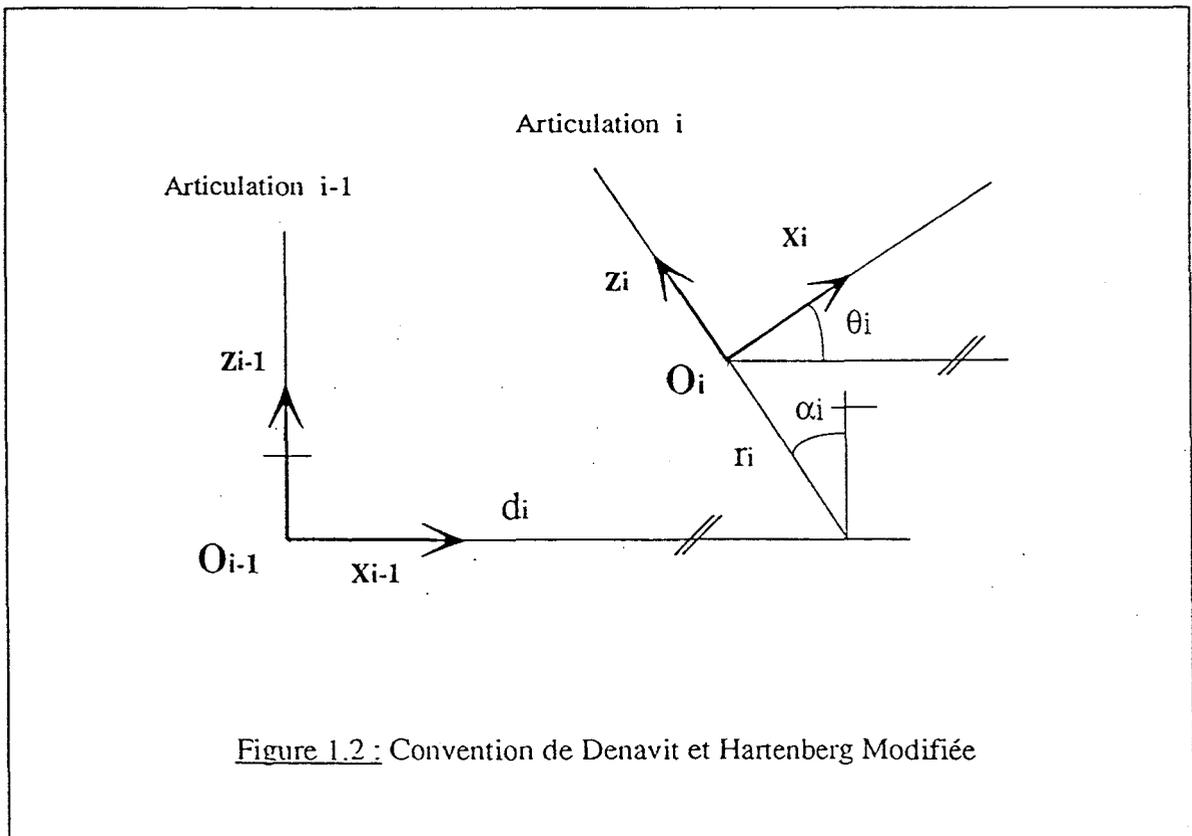
Les représentations de DHM diffèrent de la précédente essentiellement par le choix de l'axe z_i . Celui-ci est en effet situé sur l'axe de l'articulation i , tandis que l'axe x_i est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_{i-1} et z_i (Fig 1.2). Le passage du repère R_{i-1} au repère R_i s'effectue à l'aide des quatre paramètres $(\theta_i, d_i, \alpha_i, r_i)$ suivant:

$${}^{i-1}T^i = \text{Rot}(x, \alpha_i) \text{Trans}(x, d_i) \text{Rot}(z, \theta_i) \text{Trans}(z, r_i) \quad (1.11)$$

soit encore

$${}^{i-1}T^i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & d_i \\ C\alpha_i S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i & -r_i S\alpha_i \\ S\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i C\theta_i & C\alpha_i & r_i C\alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

La variable articulaire est définie comme précédemment.



Remarque 1:

La convention présentée ici correspond à celle introduite par [Khalil, Kleinfinger-86]. Les descriptions rencontrées dans [Giordano 86] et [Craig 86] diffèrent de la présente uniquement par l'indication des paramètres α et d . Ceux-ci sont en effet indicés $i-1$ car ils renseignent sur la longueur du corps C_{i-1} ainsi que sur son orientation par rapport à l'axe z_i .

Remarque 2:

Des simplifications supplémentaires d'écriture peuvent être faites en choisissant R_1 confondu avec R_0 lorsque $q_1 = 0$, et en prenant x_N colinéaire à x_{N-1} lorsque $q_N = 0$. Ceci a pour effet d'annuler les paramètres $\alpha_1, d_1, (r_1 \text{ ou } \theta_1)$, ainsi que $(r_N \text{ ou } \theta_N)$, selon que l'articulation est rotoïde ou prismatique.

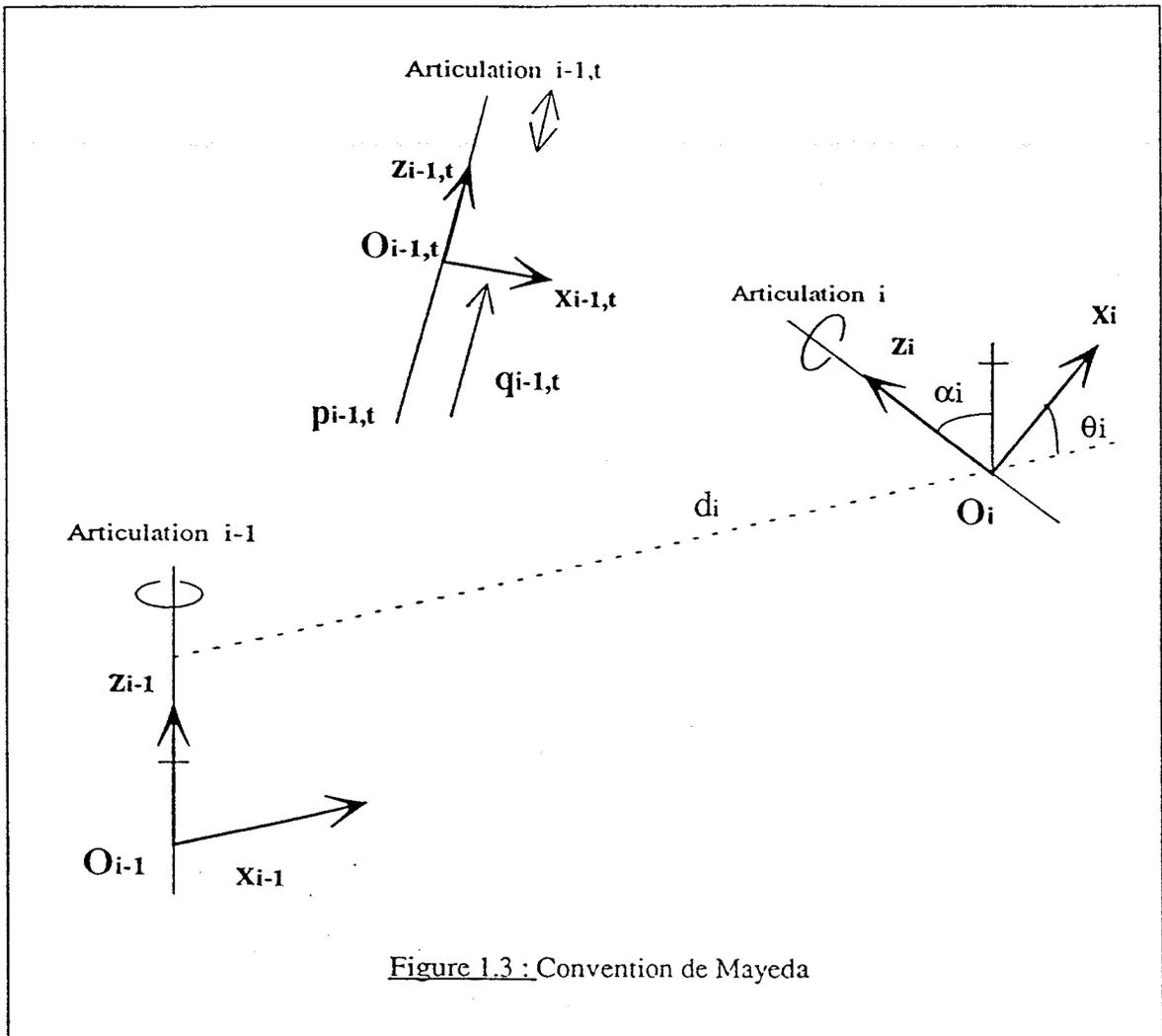
II.3.3 / Description de Mayeda

La représentation de [Mayeda, Yoshida, Ohashi, 89] effectue une différenciation entre les articulations rotoïdes et prismatiques de la manière suivante (Figure 1.3) : Un repère $R_i (O_i, x_i, y_i, z_i)$ est associé aux articulations rotoïdes, tandis que les articulations prismatiques sont repérées par $R_{i,t} (O_{i,t}, x_{i,t}, y_{i,t}, z_{i,t})$ où l'indice t représente la $t^{\text{ème}}$ articulation située entre R_i et R_{i+1} . L'axe z_i (ou $z_{i,t}$) est situé sur l'axe de l'articulation i (ou i,t). Les axes $x_{i,t}$ et $y_{i,t}$ sont choisis arbitrairement. Une origine arbitraire $p_{i,t}$ est fixée sur l'axe de l'articulation (i,t) pour désigner l'origine ($q_{i,t}=0$) de la variable articulaire prismatique. L'axe x_i est parallèle (et non plus confondu) à la normale commune aux axes des rotoïdes i et $i+1$. Enfin l'origine O_{i+1} est prise à l'intersection de l'axe $i+1$ avec la normale précédente. Le passage du repère R_i au repère R_{i+1} peut alors s'exprimer par la relation:

$${}^{i-1}T^i = \text{Trans}(z, r_i) \text{Trans}(x, d_i) \text{Rot}(x, \alpha_i) \text{Rot}(z, \theta_i) \quad (1.13)$$

Rappelons que cette transformation ne concerne que le passage entre deux articulations rotoïdes consécutives. Son avantage, cependant, est de n'utiliser que deux coordonnées pour décrire la position de l'origine O_{i+1} dans le repère R_i . Nous avons en effet:

$${}^{i-1}P^i = [d_i \ 0 \ r_i]^T \quad (1.14)$$



II.3.4 / Comparaison des descriptions

Aussi bien dans la représentation de Mayeda, qui utilise un double indexage pour les repères, que dans les représentations de DHM, le choix de l'axe z_i (ou $z_{i,t}$) sur l'axe de l'articulation i entraîne les propriétés suivantes:

i) Pour une articulation i prismatique, la matrice de rotation ${}^{i-1}A^i$ est constante, tandis que pour une articulation rotoïde, la transformation effectuée pour passer du repère R_{i-1} au repère R_i peut toujours s'exprimer par :

$${}^{i-1}A^i = \text{Rot}(x, \alpha_i) \text{Rot}(z, \theta_i) \quad (1.15)$$

ii) Le vecteur de translation ${}^{i-1}P^i$ entre deux articulations consécutives quelconques est indépendant de la variable articulaire rotoïde et peut s'exprimer linéairement en fonction de la variable articulaire prismatique par la relation:

$${}^{i-1}P^i = {}^{i-1}P_0^i + \overline{\sigma}_i q_i {}^{i-1}z_i \quad (1.16)$$

où ${}^{i-1}P_0^i$ est un vecteur constant et ${}^{i-1}z_i$ représente l'orientation du vecteur z_i dans R_{i-1} . Cette écriture sera notamment utilisée pour introduire la notion de corps augmenté lors du calcul des paramètres inertiels minimaux des robots.

La représentation de DH, quant à elle, ne vérifie pas les relations (1.13) et (1.14). Dans la relation (1.13), c'est la rotation autour de l'axe z_i qui précède celle autour de l'axe x_i , tandis que dans la relation (1.14), le vecteur ${}^{i-1}P_0^i$ n'est pas constant pour une articulation rotoïde. Nous verrons au prochain chapitre que ce mode de représentation alourdit l'écriture des torseurs cinématiques et complique le calcul des paramètres inertiels minimaux. Dans la suite de notre étude, et sauf indication contraire, les développements seront basés sur les précédentes descriptions. De plus, nous utiliserons par la suite, et sans perte de généralité, le simple indilage utilisé dans la description de D.H.M.

III / MODÈLE GÉOMÉTRIQUE DIRECT

Les résultats précédemment établis nous permettent de calculer la matrice de passage exprimant la position et l'orientation de l'organe terminal (effecteur) dans le

référentiel de base R_0 , en fonction des différents paramètres géométriques utilisés:

$${}^0_T^N = {}^0_T^1 {}^1_T^2 \dots {}^{N-1}_T^N \quad (1.17)$$

${}^0_T^N$ est encore appelée matrice de passage du robot. En désignant par X le vecteur exprimant la situation de l'effecteur que l'on désire connaître, le modèle géométrique s'écrit:

$$X(R_0) = f(q) \quad (1.18)$$

où $q = [q_1, q_2 \dots q_N]^T$ est le vecteur des variables articulaires ou coordonnées généralisées. Il existe différentes façons de définir la situation X de l'effecteur. Si nous choisissons la position cartésienne de O_N , origine du repère R_N , et ces cosinus directeurs, la fonction $f(q)$ est donnée directement par les éléments de la matrice de passage du robot.

Remarque 3:

L'utilisation d'un robot dans un poste de travail conduit parfois à définir un repère de référence R_f autre que le repère de base R_0 (par exemple lorsque plusieurs systèmes mécaniques articulés travaillent ensemble). On note $Z = {}^f_T^0$ la matrice de transformation du repère R_0 dans R_f . De même, l'utilisation d'outils interchangeables conduit à définir pour chacun d'eux un repère outil R_e ainsi que la transformation associée $E = {}^N_T^e$. La matrice de transformation globale s'écrira alors [Dombre, Khalil 88] :

$${}^f_T^e = Z {}^0_T^N E \quad (1.19)$$

IV / MODÈLE CINÉMATIQUE

L'approche cinématique offre l'accès aux vitesses de déplacement de l'effecteur. Sa mise en équation peut se faire en utilisant les notions de cinématique du solide. Les

relations bien connues de la mécanique sur les composition des vitesses permettent d'établir les relations vectorielles suivantes:

$$\begin{aligned}\omega_i &= \omega_{i-1} + \overline{\sigma}_i \dot{q}_i z_i \\ V_i &= V_{i-1} + \omega_{i-1} \times L_i + \sigma_i \dot{q}_i z_i\end{aligned}\quad (1.20)$$

avec

ω_i : vitesse angulaire du corps C_i

V_i : vitesse du point O_i origine du repère R_i

L_i : vecteur $O_{i-1} \vec{O}_i$.

En utilisant la matrice du préproduit vectoriel et en projetant ces relations dans R_i , il vient la relation matricielle:

$$\begin{bmatrix} {}^i V_i \\ {}^i \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^i A^{i-1} & -{}^i A^{i-1} {}^{i-1} \hat{P}^i \\ 0_{33} & {}^i A^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{i-1} V_{i-1} \\ {}^{i-1} \omega_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{\sigma}_i & {}^i z_i \\ \sigma_i & {}^i z_i \end{bmatrix} \dot{q}_i \quad (1.21)$$

que l'on notera encore:

$${}^i V_i = {}^i T^{i-1} {}^{i-1} V_{i-1} + \dot{q}_i a_i \quad (1.22)$$

expression dans laquelle

$${}^i V_i = \begin{bmatrix} {}^i V_i \\ {}^i \omega_i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad a_i = \begin{bmatrix} \overline{\sigma}_i & {}^i z_i \\ \sigma_i & {}^i z_i \end{bmatrix}$$

L'initialisation de la récurrence se fait avec ${}^0 V_0 = 0_{1 \times 6}$.

La matrice ${}^i T^{i-1}$ est appelée matrice de transformation globale et permet la transformation des éléments du torseur cinématique ${}^{i-1} V_{i-1}$ du repère R_{i-1} dans le repère R_i . En notant ${}^i T^j$ le produit des transformations ${}^i T^{i+1} \dots {}^j T^j$, le développement de la récurrence (1.20)

permet d'exprimer les éléments du torseur cinématique ${}^N V_N$ de l'organe terminal en fonction des vitesses des variables articulaires sous la forme:

$${}^N V_N = [{}^N T^1 a_1, \dots, {}^N T^{N-1} a_{N-1}, a_N] \dot{\mathbf{q}} = {}^N J_N(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (1.23)$$

${}^N J_N(\mathbf{q})$, de dimension $6 \times N$, est appelé le jacobien de base du robot.

Remarque 4:

Les vitesses de déplacement de l'effecteur peuvent aussi être obtenues directement par différenciation des relations décrivant le modèle géométrique:

$$\mathbf{X} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \right) \dot{\mathbf{q}} = {}^0 J_x(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (1.24)$$

Le jacobien obtenu ici dépend des coordonnées opérationnelles \mathbf{X} choisies. On montre [Dombre, Khalil, 88] que son expression peut être obtenue à partir du jacobien de base par une simple transformation linéaire dépendant des coordonnées opérationnelles choisies.

Remarque 5:

Une méthode équivalente pour le calcul du jacobien de base consiste à déterminer les variations élémentaires de position $d_{k,N}$, et d'orientation $\delta_{k,N}$ du repère terminal R_N provoquées par les variations élémentaires dq_k de la variable articulaire q_k . En additionnant les contributions de chaque articulation, on obtient les vecteurs de translations et de rotations différentielles du repère terminal.

Remarque 6:

La matrice du préproduit vectoriel est celle qui au produit vectoriel ($\mathbf{a} \times \mathbf{b}$) fait correspondre le produit matriciel ($\hat{\mathbf{a}} \mathbf{b}$), avec:

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

Notons enfin qu'avec la représentation géométrique de Denavit et Hartenberg, les relations (1.17) à (1.20) doivent être modifiées. En effet, la contribution en vitesse de chaque articulation i est représentée par la quantité $(\dot{q}_i {}^i z_{i-1})$ et non plus $(\dot{q}_i {}^i z_i)$. Il apparaît ainsi des termes supplémentaires ayant pour effet d'alourdir les expressions, et par conséquent le temps de calcul, des torseurs cinématiques.

Parmi les avantages de l'approche cinématique (ou différentielle), nous pouvons citer la linéarisation du modèle géométrique, facilitant ainsi, en général, l'obtention d'un modèle inverse en vue d'une commande en vitesse du système. Le calcul du modèle inverse n'entre pas dans le cadre de notre étude et le lecteur intéressé trouvera tous les détails dans des ouvrages tels que [Asada, Slotine, 86], [Fu, Conzalez, Lee, 87], [Dombre, Khalil, 88].

Néanmoins, pour une commande basée aussi bien sur une approche géométrique que différentielle, nous supposons que l'équilibre statique est réalisé pour toute configuration prise par le robot au cours de son déplacement. A mesure que la vitesse augmente, les forces inertielles, centrifuges et de couplage vont apparaître. L'hypothèse statique n'est alors plus valable et il faudra tenir compte des phénomènes dynamiques.

V / MODELE DYNAMIQUE

V.1 / Introduction

Le modèle dynamique traduit les relations existantes entre les couples (et/ou) forces appliqués aux actionneurs et les positions, vitesses, et accélérations des variables articulaires. Divers formalismes peuvent être utilisés parmi lesquels les plus répandus sont le formalisme de Newton-Euler, basé sur les théorèmes généraux de la dynamique des solides, et le formalisme de Lagrange.

Les relations (1.32) et (1.33) montrent que l'énergie cinétique n'est pas linéaire vis à vis des coefficients de S_i . Celle ci peut cependant être linéarisée et mise sous la forme [Dombre 88]:

$$E_i = \frac{1}{2} (\omega_i^T J_i \omega_i + 2 V_i^T \hat{\omega}_i MS_i + V_i^T V_i M_i) \quad (1.34)$$

avec

$$J_i = I_i - M_i \hat{S}_i \hat{S}_i$$

$$MS_i = M_i S_i$$

MS_i est le moment d'ordre un du corps C_i dans R_i tandis que J_i représente, d'après le théorème de Koenig, le moment d'ordre deux de C_i dans R_i . J_i est une matrice symétrique et la relation (1.34) peut être réécrite:

$$E_i = DE_J^i \bar{J}_i + DE_S^i MS_i + DE_M^i M_i \quad (1.35)$$

avec

\bar{J}_i le vecteur de dimension 6x1 regroupant les éléments de la matrice symétrique J_i :

$$\bar{J}_i = [XX_i, XY_i, XZ_i, YY_i, YZ_i, ZZ_i]^T \quad (\text{dim. } 6 \times 1)$$

$$DE_J^i = \frac{\partial E_i}{\partial \bar{J}_i} = 1/2 \omega_i^T (\cdot \omega_i) \quad (\text{dim. } 1 \times 6)$$

$$DE_S^i = \frac{\partial E_i}{\partial MS_i} = V_i^T \hat{\omega}_i \quad (\text{dim. } 1 \times 3)$$

$$DE_M^i = \frac{\partial E_i}{\partial M_i} = 1/2 V_i^T V_i \quad (\text{dim. } 1 \times 1)$$

J_i , MS_i et M_i représentent l'ensemble des paramètres inertiels du corps C_i . Ils sont utilisés

de façon classique en mécanique et sont désignés sous le nom de paramètres inertiels standards. La matrice $(\cdot \omega_i)$ intervenant dans l'expression de DEJ^i est celle qui associe au vecteur ω_i la matrice 3×6 définie par [Atkeson, An, Hollerbach, 85]:

$$(\cdot \omega_i) = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_x & 0 & \omega_y & \omega_z & 0 \\ 0 & 0 & \omega_x & 0 & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

VI.2 / Energie potentielle

L'énergie potentielle du corps C_i s'exprime, à une constante arbitraire près, par la relation:

$$U_i = - {}^0g^T M_i {}^0P_{Gi} \quad (1.37)$$

En utilisant la relation:

$${}^0P_{Gi} = {}^0P^i + {}^0A^i S_i \quad (1.38)$$

où ${}^0P^i$ est le vecteur des composantes de O_i dans R_0 , et ${}^0A^i$ la matrice de rotation de R_i dans R_0 , cette énergie peut aussi être exprimée en fonction des paramètres inertiels précédemment cités. Il vient:

$$U_i = DU_S^i MS_i + DU_M^i M_i \quad (1.39)$$

avec

$$DU_S^i = \frac{\partial U_i}{\partial MS_i} = - {}^0g^T {}^0A^i \quad (\text{dim } 1 \times 3)$$

$$DU_M^i = \frac{\partial U_i}{\partial M_i} = - {}^0g^T {}^0P^i \quad (\text{dim } 1 \times 1)$$

où C_{ri} désigne le coefficient des frottements secs agissant sur l'articulation i , $sg(\cdot)$ désigne la fonction signe, et V représente la fonction de dissipation de Rayleigh [Vibet 87] définie par:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N F_i \dot{q}_i^2 \quad (1.27)$$

où F_i représente le coefficient de frottements visqueux de l'articulation i . Pratiquement, cela revient dans la relation (1.25) à ajouter à Γ_i un terme correctif pour avoir:

$$\tilde{\Gamma}_i = \Gamma_i - C_{ri} \operatorname{sg}(\dot{q}_i) - F_i \dot{q}_i \quad (1.28)$$

où $\tilde{\Gamma}_i$ est le nouveau couple tenant compte des effets de frottements. Nous utiliserons par la suite la première relation sans perte de généralité pour nos développements.

L'énergie cinétique E du robot est une forme quadratique des vitesses articulaires, de matrice $A(\mathbf{q})$ de dimension $N \times N$, symétrique et définie positive, encore appelée matrice d'inertie du robot:

$$E = \dot{\mathbf{q}}^T A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (1.29)$$

L'hypothèse des corps rigides réduit l'énergie potentielle du système à la somme des énergies potentielles de pesanteur de chacun des corps:

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^N -M_i {}^0\mathbf{g}^T {}^0\mathbf{P}_{G_i} \quad (1.30)$$

où U_0 est une constante de référence arbitraire, M_i est la masse du corps C_i , ${}^0\mathbf{g}$ est l'accélération de pesanteur exprimée dans le repère de base R_0 , et ${}^0\mathbf{P}_{G_i}$ est le vecteur localisant le centre de masse du corps C_i dans R_0 . Dans ces conditions, le modèle

Les équations de Newton-Euler sont de nature itérative et font apparaître les efforts d'interaction au sein du système. Elles sont cependant bien adaptées à la commande dynamique du fait de leur coût relativement réduit en temps de calcul.

Le formalisme de Lagrange, de son côté, ne fait pas intervenir ces efforts d'interaction et fournit un modèle sous une forme explicite. L'avantage d'une telle description pour la recherche, au second chapitre, des paramètres inertiels minimaux, conduit à utiliser ce formalisme par la suite.

V.2 / Formalisme de Lagrange

Les équations de Lagrange opèrent à partir des énergies cinétique et potentielle du système; Lorsque les efforts extérieurs ainsi que les frottements sont supposés nuls, ces équations s'écrivent:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Gamma_i \quad \text{pour } i=1 \dots N \quad (1.25)$$

avec

L : Lagrangien du système, défini par: $L = E - U$

E : Energie cinétique du système

U : Energie potentielle du système

Γ_i : Couple (ou force) agissant sur l'articulation i

Si l'on tient compte des frottements secs et visqueux, la relation (1.25) doit être modifiée et réécrite sous la forme:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Gamma_i - C_{r_i} \operatorname{sg}(\dot{q}_i) - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{pour } i=1 \dots N \quad (1.26)$$

dynamique peut être mis sous la forme:

$$\Gamma = A(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + Q(\mathbf{q}) \quad (1.31)$$

où le vecteur $B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ regroupe les effets des forces centrifuges et de Coriolis, et $Q(\mathbf{q})$ représente le vecteur des forces de gravité. Les éléments de A , B , et Q sont appelés coefficients dynamiques du robot. De l'énergie cinétique sont déduits les éléments de la matrice A , puis ceux de B par dérivation des éléments A_{ij} par rapport aux variables articulaires. De l'énergie potentielle sont déduits les éléments de Q .

Dans le paragraphe qui va suivre nous allons développer le calcul des énergies mises en jeu en mettant en évidence la contribution des différents paramètres inertiels.

VI / CALCUL DES ÉNERGIES

VI.1 / Energie cinétique, linéarisation et paramètres inertiels standards

L'énergie cinétique du corps C_i est la somme de ses énergies cinétiques de rotation et de translation. Celle ci s'exprime dans son propre repère par:

$$E_i = \frac{1}{2} (\omega_i^T I_i \omega_i + M_i V_{G_i}^T V_{G_i}) \quad (1.32)$$

avec

$$V_{G_i} = V_i + \omega_i \times S_i \quad (1.33)$$

où V_{G_i} est la vitesse du centre de masse du corps C_i , S_i est le vecteur liant l'origine du repère R_i au centre de masse de C_i , M_i est la masse du corps C_i , et I_i est le tenseur d'inertie de C_i par rapport au repère parallèle à R_i et d'origine le centre de masse de C_i .

L'énergie potentielle s'exprime donc aussi linéairement en fonction des masses et moments d'ordre un mis en jeu.

VI.3 / Energie totale du robot

Compte tenu de ce qui précède, l'énergie totale H du robot peut s'écrire :

$$H = \sum_{i=1}^N h_J^i \bar{J}_i + h_S^i M S_i + h_M^i M_i = \sum_{i=1}^N h^i X^i \quad (1.41)$$

avec

$$h_J^i = DE_J^i = 1/2 \omega_i^T (\cdot \omega_i) \quad (\text{dim } 1 \times 6)$$

$$h_S^i = DE_S^i + DU_S^i = V_i^T \hat{\omega}_i - {}^0g^T {}^0A^i \quad (\text{dim } 1 \times 3)$$

$$h_M^i = DE_M^i + DU_M^i = 1/2 V_i^T V_i - {}^0g^T {}^0P^i \quad (\text{dim } 1 \times 1)$$

$$h^i = [h_J^i \ h_S^i \ h_M^i] \quad (\text{dim } 1 \times 10)$$

$$X^{iT} = [\bar{J}_i^T \ M S_i^T \ M_i] \quad (\text{dim } 10 \times 1)$$

Les composantes des matrices h^i sont nommées fonctions d'énergie du robot. Elles seront à la base des simplifications ultérieures du modèle dynamique.

Remarque7:

En effectuant la somme des énergies de l'ensemble des corps du robot, certains auteurs modifient la formulation précédente en introduisant la notion de paramètres inertiels des corps augmentés. Les fonctions d'énergie sont alors modifiées. Pour un robot

ne comprenant que des articulations rotoïdes, cette notion présentait l'avantage de n'utiliser systématiquement que neuf paramètres inertiels au lieu des dix présentés plus haut. Ceci pourrait donc être vu comme une première approche au problème de recherche des paramètres inertiels minimaux. Cette notion de corps augmenté ainsi que la solution minimale associée seront abordées au prochain chapitre.

VII / LINEARITE DU MODELE DYNAMIQUE

En rappelant que l'énergie cinétique est une forme quadratique des vitesses articulaires et que l'énergie potentielle est indépendante de ces mêmes vitesses, le Lagrangien du système peut encore être écrit:

$$L = H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - 2 H(\mathbf{q}, \mathbf{0}) = \sum_{i=1}^N L^i X^i \quad (1.42)$$

avec

$$L^i = h^i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - 2 h^i(\mathbf{q}, \mathbf{0}) \quad (1.43)$$

En permutant le signe somme cette expression avec les dérivations de la relation (1.25), il vient:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{q}}} L^i - \nabla_{\mathbf{q}} L^i \right] X^i \quad (1.44)$$

où $\nabla_{\mathbf{q}}$ et $\nabla_{\dot{\mathbf{q}}}$ désignent respectivement les gradients par rapport à \mathbf{q} et $\dot{\mathbf{q}}$. Le modèle dynamique ainsi obtenu est linéaire vis à vis des paramètres inertiels du robot.

Remarque 8:

La transformation du tenseur d'inertie utilisée dans la relation (1.34) conduit à

une formulation de Newton-Euler du modèle linéaire vis à vis des mêmes paramètres inertiels [Atkeson, An, Hollerbach 85], [Khosla, Kanade, 85], [Dombre, Khalil, 88]. D'une manière plus générale, les formalismes étant équivalents, l'ensemble des résultats qui seront établis au prochain chapitre seront directement exploitables pour tout modèle dynamique ayant subi la linéarisation citée plus haut.

VIII / CONCLUSION

Ce chapitre a présenté les principales méthodes rencontrées pour décrire la morphologie des chaînes cinématiques simples ainsi que les outils de base nécessaires aux écritures des modèles cinématiques et dynamiques, en précisant un des inconvénients que pouvait présenter la description de D.H par rapport aux autres types de descriptions évoqués. Il a enfin été mis en évidence la linéarité de l'énergie du robot ainsi que de son modèle dynamique vis à vis des paramètres inertiels des corps le constituant. Cette linéarité sera mise à profit dans le prochain chapitre afin d'établir des règles simples d'élimination et de regroupements de paramètres, et ce dans un but de réduction du modèle.

CHAPITRE II

CHAPITRE II

PARAMETRES INERTIELS MINIMAUX

I / INTRODUCTION

Ainsi que le démontre le chapitre précédent, l'énergie du robot ainsi que son modèle dynamique s'expriment linéairement en fonction des paramètres inertiels des différents corps le constituant. Ces corps étant reliés entre eux par des articulations, leurs mouvements relatifs, et par suite les coefficients dynamiques associés aux différents paramètres inertiels, ne sont pas tous indépendants. C'est cette propriété qui sera mise à profit pour la simplification des modèles.

En d'autres termes, il s'agira de déterminer une base de l'espace vectoriel engendré par les coefficients dynamiques décrivant le modèle étudié. La recherche d'une telle base aura pour effet d'éliminer certains paramètres et d'effectuer des regroupements d'autres paramètres inertiels. Les paramètres ainsi obtenus porteront le nom de paramètres de base ou encore paramètres inertiels minimaux, ces deux terminologies étant respectivement introduites par [Mayeda, Yoshida, Osuka, 88] et [Gautier,90].

De nombreux travaux ont été réalisés en vue de déterminer les paramètres inertiels minimaux de robots: Des méthodes numériques ont été notamment proposées par [Sheu, Walker 89a, 89b] ainsi que par [Gautier 90]. Parmi les approches formelles utilisant les formalismes de Lagrange ou de Newton-Euler, nous pouvons citer les travaux de [Khalil, Kleinfinger 87], ou encore [Khosla, 88,89]. Ces approches restent cependant fastidieuses et nécessitent une étude au cas par cas pour chaque robot étudié.

Les résultats les plus concluants ont été obtenus par [Mayeda, Yoshida, Osuka 88], [Mayeda, Yoshida, Ohashi 89], [Mayeda, Ohashi 89], ainsi que par [Gautier, Khalil 88, 90], [Gautier, 90] [Khalil, Bennis, Gautier 90], [Bennis 91]. Les premiers déterminent une solution de base en utilisant une forme explicite du modèle dynamique. Ce dernier est établi à partir du formalisme de lagrange, en fonction des paramètres inertiels des corps augmentés, et utilise la description géométrique de Mayeda présentée au premier chapitre. Les seconds travaux utilisent la représentation de DHM, une approche énergétique ainsi que des relations de récurrence permettant d'effectuer des regroupements de paramètres de deux corps consécutifs. Cette méthode n'a cependant pas permis de conclure avec certitude sur la minimalité de la solution obtenue. Notons enfin qu'hormis une description géométrique différente, les solutions minimales (ou quasi-minimales) obtenues en présence d'articulations prismatiques ne sont pas identiques, de même qu'elles nécessitent une formulation différente du modèle dynamique.

Dans ce chapitre nous proposons de reprendre, en la complétant, la méthode récursive précédente. Nous reconsidérons dans un premier temps la recherche des paramètres inertiels sans effet sur le modèle, effectuée notamment par [Bennis 91], et ce afin d'en établir une liste exhaustive. Après avoir présenté les relations générales de regroupements de paramètres, nous effectuons une étude complète des cas particuliers de regroupements dépendant de la morphologie des robots. L'ensemble de ces résultats nous permettra ainsi de nous assurer de la minimalité de la solution obtenue, sans avoir recours à des traitements au cas par cas ou à des méthodes numériques. Nous montrerons ensuite comment, en utilisant pour les articulations prismatiques d'autres relations de regroupements que celles établies par les premiers auteurs, nous pouvons retrouver la solution de base utilisant les paramètres inertiels des corps augmentés. Enfin, les paramètres géométriques définissant le passage entre deux repères consécutifs pouvant être différents selon les conventions choisies, nous utiliserons une description géométrique partielle afin de conserver la généralité des relations obtenues. Mais avant d'aborder cette étude, nous effectuons une brève présentation de la notion de corps augmenté et de la solution de base établie par [Mayeda, Ohashi, 89].

II / NOTION DE CORPS AUGMENTE ET PREMIERE SOLUTION DE BASE

II.1 / Notion de corps augmenté

Le corps C_i augmenté, noté C_i^* , est un corps fictif composé du corps C_i et d'une masse ponctuelle égale à celle des corps C_{i+1}, \dots, C_N , située à l'origine O_{i+1} . Les moments d'ordre zéro (masse), un et deux seront désignés respectivement par M_i^* , MS_i^* et J_i^* . Ils s'expriment en fonction des paramètres inertiels standards par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} M_i^* &= M_i + M_{i+1}^* \\ MS_i^* &= MS_i + M_{i+1}^* {}^i P^{i+1} \\ J_i^* &= J_i - M_{i+1}^* \hat{P}^{i+1} {}^{i+1} \hat{P}^i \end{aligned} \quad (2.1)$$

Lorsque l'articulation (i+1) est rotoïde, le corps C_i^* est un corps rigide et les paramètres définis ci-dessus sont constants. Si l'articulation (i+1) est prismatique, C_i^* n'est pas un corps rigide (${}^i P^{i+1}$ est variable) et les moments d'ordre un et deux ne sont pas constants. Aussi, afin de conserver un jeu de paramètres constants, on retiendra pour les valeurs de MS_i^* et J_i^* celles pour lesquelles la variable articulaire prismatique q_{i+1} est nulle, à savoir:

$$\sigma_{i+1} q_{i+1} = 0 \quad , \text{ et par suite, } \quad {}^i P^{i+1} = {}^i P_0^{i+1} \quad (2.2)$$

Les paramètres inertiels qui seront utilisés par la suite sont donc définis comme suit:

$$\begin{aligned} M_i^* &= M_i + M_{i+1}^* \\ MS_i^* &= MS_i + M_{i+1}^* {}^i P_0^{i+1} \\ J_i^* &= J_i - M_{i+1}^* \hat{P}_0^{i+1} {}^i \hat{P}_0^{i+1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

II.2 / Première solution de base

Dans ce paragraphe nous nous contentons uniquement de présenter les paramètres inertiels minimaux obtenus par les auteurs précédemment cités. Ces derniers utilisent une forme explicite du modèle dynamique exprimé en fonction des paramètres des corps augmentés. La solution de base est définie comme étant l'ensemble minimal de paramètres inertiels suffisant à déterminer de façon unique les équations du modèle étudié. Afin de présenter cette première solution, et pour conserver des notations homogènes avec le reste des développements, nous introduisons les notation suivantes: On désigne par $S(i)$ (respectivement $R(i)$) la première articulation rotoïde succédant (respectivement précédant) à une articulation i quelconque. On note $R1$ la première articulation rotoïde et $R2$ la première articulation rotoïde succédant à $R1$ et d'axe non parallèle à z_{R1} . On définit les grandeurs suivantes:

$${}^i P_0^{S(i)} = \sum_{k=i}^{S(i)-1} {}^i A^k {}^k P_0^{k+1} \quad (2.4)$$

${}^i P_0^{S(i)}$ représente les composantes dans le repère R_i du vecteur $O_i \vec{O}_{S(i)}$ lorsque toutes les variables prismatiques (éventuelles) situées entre i et $S(i)$ sont mises à zéro. Ces composantes seront désignées par ${}^i P_x^{S(i)}$, ${}^i P_y^{S(i)}$ et ${}^i P_z^{S(i)}$. Compte tenu de la description géométrique utilisée par les auteurs, on notera que pour une articulation i rotoïde, la composante ${}^i P_y^{S(i)}$ est toujours nulle.

$$MC_i = \sum_{k=i}^{S(i)-1} {}^i A^k MS_k^* \quad (2.5)$$

$$JRC_i = {}^i A^{i+1} J_{i+1}^* {}^{i+1} A^i + {}^i \hat{MS}^{*i+1} {}^i \hat{P}_0^{i+1} + ({}^i \hat{MS}^{*i+1} {}^i \hat{P}_0^{i+1})^T \quad (2.6)$$

où ${}^i \hat{MS}^{*i+1}$ traduit le changement de base:

$${}^i \widehat{MS}^{*i+1} = {}^i A^{i+1} \widehat{MS}_{i+1}^* {}^{i+1} A^i \quad (2.7)$$

$$JC_i = J_i^* + \sum_{k=i}^{S(i)-2} \bar{\sigma}_{i+1} {}^i A^k JRC_k {}^k A^i \quad (2.8)$$

Si on souhaite donner un sens physique aux paramètres inertiels définis ci dessus, nous pouvons montrer que MC_i et JC_i représentent les moments d'ordre un et deux du corps rigide composé des corps C_i^* , ..., $C_{S(i)-1}^*$ lorsque les variables prismatiques situées entre i et $S(i)$ sont mises à zéro. Les composantes de MC_i seront désignées par MC_i^x , MC_i^y et MC_i^z , tandis que celles de JC_i seront notées J_i^x , J_i^{xy} , J_i^{xz} , J_i^y , J_i^{yz} , J_i^z . Les paramètres de base sont présentés séparément selon la nature de l'articulation étudiée; Pour une articulation i rotoïde, on définit les variables intermédiaires suivantes:

$$MCZ(i) = MC_{S(i)}^z + \sum_{k=S(i)}^N \left(\prod_{j=S(i)}^k \cos(\bar{\sigma}_j \alpha_j) \right) \bar{\sigma}_k MC_k^z$$

$$\tilde{J}_i^y = J_i^y + 2 {}^i P_z^{S(i)} \cos(\alpha_{S(i)}) MCZ(i)$$

$$\tilde{J}_i^{xy} = J_i^{xy} + {}^i P_x^{S(i)} \sin(\alpha_{S(i)}) MCZ(i)$$

$$\tilde{J}_i^{xz} = J_i^{xz} - {}^i P_x^{S(i)} \cos(\alpha_{S(i)}) MCZ(i)$$

$$\tilde{J}_i^{yz} = J_i^{yz} + {}^i P_z^{S(i)} \sin(\alpha_{S(i)}) MCZ(i)$$

$$\tilde{MC}_i^y = MC_i^y - \sin(\alpha_{S(i)}) MCZ(i)$$

$$JY(i) = \tilde{J}_{S(i)}^y + \sum_{k=S(i)}^N \left(\prod_{j=S(i)}^k \cos^2(\bar{\sigma}_j \alpha_j) \right) \bar{\sigma}_k \tilde{J}_k^y \quad (2.9)$$

Rappelons qu'en accord avec la description géométrique des auteurs présentée au premier chapitre, α_i représente, pour une articulation i rotoïde, l'angle entre z_i et $z_{R(i)}$ (articulation

rotoïde qui la précède) mesuré autour de x_i . Les paramètres de base des articulations rotoïdes sont alors les suivants:

$$J_i^z + \sin^2(\alpha_{S(i)}) JY(i) \quad \text{pour } 1 \leq \bar{\sigma}_i, i \leq N$$

$$J_i^x - J_i^y + \sin^2(\alpha_{S(i)}) JY(i), \tilde{J}_i^{xy}, \tilde{J}_i^{xz},$$

$$J_i^{xy} + \sin(\alpha_{S(i)}) \cos(\alpha_{S(i)}) JY(i) \quad \text{pour } R2 \leq \bar{\sigma}_i, i \leq N$$

$$MC_i^x, \tilde{MC}_i^y \quad \text{pour } Q \leq \bar{\sigma}_i, i \leq N \quad (2.10)$$

Q étant l'indice de la première articulation d'axe non parallèle à la gravité ou non confondu avec R1. Pour une articulation i prismatique, on définit les variables intermédiaires:

$$\begin{bmatrix} \tilde{MC}_i^x \\ \tilde{MC}_i^y \\ \tilde{MC}_i^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MC_i^x \\ MC_i^y \\ MC_i^z \end{bmatrix} + {}^i A^{R(i)} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha_{S(i)}) MCZ(i) \\ \cos(\alpha_{S(i)}) MCZ(i) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

En désignant pour simplifier les écritures par A_{ij} l'élément générique de la matrice ${}^{R(i)} A^i$, les paramètres minimaux des articulations i prismatiques sont donnés par:

$$M_i^* \quad \text{pour } 1 \leq \sigma_i, i \leq N$$

$$\tilde{MC}_i^x, \tilde{MC}_i^y, \tilde{MC}_i^z \quad \text{pour } R2 \leq \sigma_i, i \leq N$$

$$\tilde{MC}_i^z (1 - A_{33}^2) + \tilde{MC}_i^x A_{31} A_{33} + \tilde{MC}_i^y A_{32} A_{33},$$

$$\tilde{MC}_i^y A_{31} - \tilde{MC}_i^x A_{32} \quad \text{pour } R1 \leq \sigma_i, i \leq R2-1 \quad (2.12)$$

Malgré sa forme explicite, cette solution de base est proposée (notamment en présence d'articulations prismatiques) dans le cadre d'une description géométrique particulière et nécessite l'utilisation des paramètres inertiels des corps augmentés pour décrire le comportement dynamique du robot. L'approche énergétique qui va suivre utilise les paramètres inertiels standards, plus fréquemment rencontrés dans la littérature, et permet, comme nous allons le voir, une description géométrique moins restrictive. Nous montrerons de plus comment, par cette même approche, nous pouvons retrouver la solution précédente.

III/ APPROCHE ENERGETIQUE ET DEUXIEME SOLUTION DE BASE

III.1 / Principe de la recherche des paramètres de base

III.1.1 / Approche dynamique

Une première approche a consisté à rechercher les paramètres inertiels minimaux en exploitant directement la linéarité du modèle dynamique vis à vis des paramètres inertiels standards. Cette linéarité permet d'écrire, d'une façon générale:

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{10N} D_k X_k = \mathbf{D} \mathbf{X} \quad (2.13)$$

où \mathbf{D} est une matrice ($N \times 10N$) fonction des variables articulaires \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$, et $\ddot{\mathbf{q}}$, et \mathbf{X} est un vecteur ($10N \times 1$) regroupant l'ensemble des paramètres inertiels du robot. La simplification du modèle s'effectue en deux étapes:

La première étape consiste en la recherche des colonnes D_k de \mathbf{D} nulles. Lorsque cela se présente, nous pouvons déjà affirmer que le paramètre inertiel X_k correspondant est sans effet sur le modèle et peut donc être éliminé. D_k est également éliminé de la matrice

D. La nouvelle matrice **D** ainsi que le nouveau vecteur **X** sont de dimension ($N \times c$) et ($c \times 1$), avec $c \leq 10 \times N$.

Dans la seconde étape nous recherchons des relations linéaires à coefficients constants entre les colonnes D_k de **D**. Le choix le plus simple adopté par [Gautier 90] pour la simplification du modèle consiste alors à construire une matrice **D1** formée de b colonnes indépendantes, et une matrice **D2** formée des $(c-b)$ colonnes s'exprimant linéairement en fonction de **D1**. Ces relations linéaires s'exprimeront par:

$$\mathbf{D2} = \mathbf{D1} \beta \quad (2.14)$$

où β est la matrice ($b \times (c-b)$) définissant les $(c-b)$ relations linéaires. On définit pour cela une matrice de permutation **P** permettant de réordonner les éléments de **D** et **X** telle que:

$$\mathbf{D P} = [\mathbf{D1} \ \mathbf{D2}] \quad \text{et} \quad \mathbf{P}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X1} \\ \mathbf{X2} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Le modèle dynamique s'écrit alors :

$$\Gamma = \mathbf{D P P}^T \mathbf{X} = \mathbf{D1 X1} + \mathbf{D2 X2} \quad (2.16)$$

et la relation (2.2) fournit la forme simplifiée:

$$\Gamma = \mathbf{D1} (\mathbf{X1} + \beta \mathbf{X2}) = \mathbf{D1 XB1} \quad (2.17)$$

La simplification ainsi apportée revient à annuler $(c-b)$ colonnes de **D** et à regrouper $(c-b)$ composantes de **X** sur les b autres restantes. **XB1** est appelée solution de base à (b)

composantes ou solution minimale du système d'équations de la relation (2.13). Elle correspond à une solution à nombre minimal de composantes.

Cependant, du fait du nombre important des coefficients mis en jeu, l'utilisation du modèle dynamique s'avère fastidieuse. C'est pourquoi, aussi bien dans le cadre d'un calcul formel que numérique, certains auteurs ([Gautier 90], [Sheu, Walker, 86]) ont opté pour une approche énergétique mettant en oeuvre un nombre de termes bien plus réduit.

III.1.2 / Approche énergétique

Le modèle énergétique est issu du théorème de l'énergie qui s'énonce comme suit: La variation de l'énergie totale du robot est égale au travail de toutes les forces agissant sur le système et ne dérivant pas d'un potentiel. Cela s'exprime par:

$$\Delta H = H(t) - H(t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{T}^T \dot{\mathbf{q}} dt \quad (2.18)$$

où H est l'énergie totale du robot et \mathbf{T} le vecteur des couples ne dérivant pas d'un potentiel. L'énergie étant linéaire vis à vis des paramètres inertiels, il vient également:

$$\Delta H = \sum_{k=1}^{10 \times N} \Delta h_k X_k = \Delta \mathbf{h} \mathbf{X} \quad (2.19)$$

La simplification du modèle énergétique peut se faire suivant le même principe utilisé pour le modèle dynamique, à savoir les deux principales étapes:

- i) Recherche des termes Δh_k nuls (ou h_k constants) et élimination des paramètres inertiels X_k correspondants.

ii) Recherche des (c-b) relations linéaires à coefficients constants entre les (c) composantes restantes de $\Delta \mathbf{h}$ (ou \mathbf{h}), et calcul d'une solution de base. Ce calcul est lui-même divisé en deux parties:

ii-a) La première partie établit les relations linéaires générales à coefficients constants existantes entre les fonctions d'énergie de deux corps consécutifs. Celles-ci permettront d'effectuer de proche en proche des regroupements systématiques de paramètres sur l'ensemble des corps du robot.

ii-b) La seconde partie consiste en la recherche d'éventuelles relations linéaires supplémentaires. L'existence de telles relations dépend de la morphologie propre à chaque robot. Elles apparaissent notamment pour les corps proches de la base et donnent lieu à des regroupements de paramètres supplémentaires.

L'intérêt de l'approche énergétique est qu'elle ne met en jeu que des grandeurs scalaires Δh_k ou h_k au lieu des matrices colonnes D_k du modèle dynamique. L'équivalence des deux approches ayant été démontrée dans [Sheu, Walker, 88] et [Gautier 90], c'est donc naturellement le modèle énergétique qui servira à la recherche des paramètres inertiels minimaux.

III.2 / Paramètres inertiels sans effet sur le modèle

Cette étape de calcul consiste à examiner la contribution de chaque paramètre inertiel aux énergies cinétique et potentielle du robot. Des considérations géométriques ainsi que l'étude des composantes des torseurs cinématiques permettent de déterminer tous les paramètres inertiels n'affectant pas l'énergie (et donc le modèle dynamique). Ce paragraphe constitue un complément aux travaux déjà réalisés en grande partie par [Gautier.90] et [Bennis.91]. Notre contribution réside dans le recensement exhaustif des paramètres recherchés, contribuant ainsi à nous assurer par la suite de la minimalité de la

solution globale. Dans cette étude, le cas des articulations rotoïdes d'axes confondus a été écarté. Par ailleurs, les résultats obtenus ne sont pas limités à la seule description géométrique de D.H.M., mais à toute description ayant convenu de situer l'axe z_i du repère R_i sur l'axe de l'articulation i .

Un paramètre inertiel est sans effet sur le modèle si le coefficient correspondant dans l'expression de l'énergie est constant. Cela se produit généralement pour les corps proches de la base du robot et dont le mouvement est restreint. Certaines composantes du torseur cinématique peuvent alors être nulles, de même que l'effet de la pesanteur sur certains paramètres inertiels peut être constant, entraînant ainsi des termes h_k^i également constants. (h_k^i désignant la $k^{\text{ème}}$ composante de la matrice (1×10) h^i associée au vecteur paramètre X^i du corps C_i). Ecrivons tout d'abord les expressions de ces différents coefficients h_k^i . Compte tenu des relations obtenues au premier chapitre, il vient:

Coefficients du tenseur d'inertie \bar{J}_i ($\bar{J}_i = [XX_i, XY_i, XZ_i, YY_i, YZ_i, ZZ_i]^T$)

$$\begin{aligned} h_1^i &= \frac{1}{2} \omega_{i1}^2 & h_2^i &= \omega_{i1} \omega_{i2} & h_3^i &= \omega_{i1} \omega_{i3} \\ h_4^i &= \frac{1}{2} \omega_{i2}^2 & h_5^i &= \omega_{i2} \omega_{i3} & h_6^i &= \frac{1}{2} \omega_{i3}^2 \end{aligned}$$

Coefficients du moment d'ordre un MS_i ($MS_i = [MX_i, MY_i, MZ_i]^T$)

$$\begin{aligned} h_7^i &= \omega_{i3} V_{i2} - \omega_{i2} V_{i3} - {}^0g^T {}^0s^i \\ h_8^i &= \omega_{i1} V_{i3} - \omega_{i3} V_{i1} - {}^0g^T {}^0n^i \\ h_9^i &= \omega_{i2} V_{i1} - \omega_{i1} V_{i2} - {}^0g^T {}^0a^i \end{aligned}$$

Coefficient de la masse M_i :

$$h_{10}^i = \frac{1}{2} V^T V - {}^0g^T {}^0P^i \quad (2.20)$$

où ${}^0s^i$, ${}^0n^i$ et ${}^0a^i$ représentent les composantes des vecteurs x_i , y_i , et z_i dans R_0 , soit encore les trois colonnes de la matrice de rotation ${}^0A^i$. Par souci de clarté, nous ne présentons dans ce paragraphe que l'ensemble des propriétés et relations utilisées pour déterminer les coefficients h_k^i constants, ainsi que le résultat final sous forme de tableau.

Les calculs détaillés sont reportés à l'Annexe 1. On note R1 la première articulation rotoïde et R2 la première articulation rotoïde succédant à R1 et d'axe non parallèle à z_{R1} :

Propriété a :

Pour toutes les articulations i antérieures à R1, $\omega_i = 0_{3 \times 1}$

Pour toutes les articulations i rotoïdes comprises entre R1 et R2, $\omega_i = [0 \ 0 \ \omega_{i3}]^T$

Pour toutes les articulations $i \geq R2$, on démontre ([Gautier 90]) que les trois composantes de ω_i sont non nulles et indépendantes. (2.21)

Propriété b:

Pour une articulation i rotoïde, on établit aisément les équivalences ([Bennis.91]):

$$\omega_{i1} = 0 \iff \omega_{i2} = 0$$

$$V_{i1} = 0 \iff V_{i2} = 0$$

$$\omega_{i1} \neq 0 \quad \text{et} \quad \omega_{i2} \neq 0 \iff \omega_{i1} \text{ et } \omega_{i2} \text{ sont indépendants}$$

$$V_{i1} \neq 0 \iff V_{i2} \neq 0 \iff V_{i1} \text{ et } V_{i2} \text{ sont indépendants} \quad (2.22)$$

Propriété c:

La relation de récurrence sur h^i , qui sera examinée plus en détail au paragraphe III.3.2 s'écrit sous la forme :

$$h^i = h^{i-1} \lambda^i + \dot{q}_i f^i \quad \text{avec} \quad (2.23)$$

$$f^i = [0 \ 0 \ \omega_{i1} \ 0 \ \omega_{i2} \ (\omega_{i3} - \frac{\dot{q}_i}{2}) \ V_{i2} \ -V_{i1} \ 0 \ 0] \quad \text{pour une liaison rotoïde}$$

$$f^i = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\omega_{i2} \ \omega_{i1} \ 0 \ (V_{i3} - \frac{\dot{q}_i}{2})] \quad \text{pour une liaison prismatique}$$

Les composantes non nulles de f^i pourront dans certains cas fournir des conditions nécessaires pour qu'un coefficient h_k^i soit constant.

Propriété d:

La recherche des composantes h_k^i constantes se fait en examinant séparément la contribution du paramètre inertiel aux énergies cinétique et potentielle. La contribution à l'énergie cinétique se fait en étudiant les composantes du torseur cinématique intervenant l'expression de h_k^i . Nous rappelons l'expression de ce torseur:

$$\begin{bmatrix} V_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^i \begin{bmatrix} \sigma_k \quad {}^i A^k \quad z_0 - \bar{\sigma}_k \quad {}^i A^k \quad {}^k \hat{P}^i \quad z_0 \\ \bar{\sigma}_k \quad {}^i A^k \quad z_0 \end{bmatrix} \dot{q}_k \quad (2.24)$$

L'étude de la contribution de toutes les articulations (k) antérieures à (i) fournira les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un paramètre du corps C_i n'affecte pas l'énergie cinétique du robot.

L'ensemble des paramètres inertiels sans effet sur le modèle est regroupé dans le tableau 2.1 suivant: On notera $X_k(C_i, j)$ lorsque le paramètre X_k n'affecte pas le modèle aux conditions C_i ou C_j indiquées à la suite du tableau.

Articulation i	Rotoïde			Prismatique		
	J_i	MS_i	M_i	J_i	MS_i	M_i
$i < R1$	---	---	---	XX XY XZ YY YZ ZZ	MX MY MZ	
$i = R1$	XX XY	MX (C1) MY (C1) MZ	M (C3)	---	---	---
$R1 < i < R2$	XZ YY YZ	MZ		XX (C5) YY (C6) ZZ (C7) XY (C5,6) XZ (C5,7) YZ (C6,7)	MX (C8,9) MY (C10,11) MZ (C12)	
$i = R2$		MZ (C2)	M (C4)	---	---	---
$i > R2$						

Tableau 2.1 : Paramètres inertiels sans effet sur le modèle dynamique

Conditions C_i :

$C1$: Toutes les articulations précédant $R1$ sont parallèles à z_{R1} et à la direction de la gravité

$C2$: $R1=1$ est parallèle à la direction de la gravité, $R2 = 2$, x_2 et y_2 sont concourant avec z_1

$C3$: $R1=1$.

$C4$: $R1=1$, $R2=2$ et l'origine O_2 du repère $R2$ est située sur l'axe de l'articulation $R1$.

$C5$: x_i est perpendiculaire à z_{R1}

$C6$: y_i est perpendiculaire à z_{R1}

$C7$: z_i est perpendiculaire à z_{R1}

$C8$: x_i est parallèle à z_{R1}

$C9$: $R1$ est l'unique articulation rotoïde antérieure à l'articulation i . z_i est parallèle à z_1 et y_i est concourant avec z_1 . Toutes les articulations antérieures à i sont parallèles à z_1 et à la direction de la gravité

$C10$: y_i est parallèle à z_{R1}

$C11$: même condition que $C9$ en remplaçant y_i par x_i .

$C12$: z_i est parallèle à z_{R1} .

Avec cette étude s'achève la première étape dans la recherche des paramètres inertiels minimaux. Les paramètres ainsi recensés sont éliminés du modèle. Les étapes qui vont suivre sont consacrées à la recherche de relations linéaires à coefficients constants entre les fonctions h_k^i du modèle. Chaque relation obtenue permettra d'effectuer le regroupement d'un paramètre inertiel, contribuant ainsi à la réduction du modèle. Nous présentons dans un premier temps les relations générales de regroupements de paramètres, avant d'aborder l'étude des regroupements particuliers qui dépendent de la morphologie du robot.

III.3 / Relations générales de regroupement de paramètres

III.3.1 / Principe de regroupement

L'idée principale développée dans [Gautier 90] consiste à établir et exploiter les relations de récurrence existant entre les fonctions d'énergie h^i de deux corps consécutifs. L'existence de relations linéaires à coefficients constants permet alors de simplifier l'expression de la somme des énergies des deux corps en effectuant des regroupements de paramètres du corps C_i sur d'autres paramètres des corps C_{i-1} et C_i . Les relations de regroupements de paramètres sont alors appliquées de manière récursive à l'ensemble des corps, en partant de l'effecteur vers la base du robot. L'exploitation des relations de récurrence sur les torseurs cinématiques ainsi que sur les matrices ${}^0A^i$ et ${}^0P^i$ permet d'établir la relation suivante:

$$h^i = h^{i-1} \lambda^i + \dot{q}_i f^i \quad (2.25)$$

λ^i est une matrice de dimension (10x10) fonction de la variable articulaire q_i et de paramètres géométriques constants, tandis que f^i est une matrice (1x10) s'exprimant en fonction de la vitesse articulaire \dot{q}_i ainsi que des éléments du torseur cinématique iV_i . Dans un souci de clarté, les expressions explicites de ces matrices ainsi que certains

développements des calculs sont renvoyés à l'Annexe 2. Sous une forme semi-développée, on écrit:

$$\lambda^i = \begin{bmatrix} \lambda_J^i & \lambda_S^i & \lambda_M^i \\ 0_{36} & {}^{i-1}A^i & {}^{i-1}P^i \\ 0_{16} & 0_{13} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{f}^i = [\dot{f}_J^i \quad \dot{f}_S^i \quad \dot{f}_M^i] \quad (2.26)$$

On retiendra cependant que pour une articulation rotoïde, les éléments de la matrice λ^i sont constituées de fonctions trigonométriques de la variable articulaire θ_i , tandis que dans le cas d'une liaison prismatique, cette même matrice peut s'exprimer en fonction de la variable articulaire q_i sous la forme:

$$\lambda^i = \lambda_0^i + q_i \lambda_1^i + q_i^2 \lambda_2^i \quad (2.27)$$

ou encore sous une forme plus développée:

$$\lambda^i = \begin{bmatrix} \lambda_J^i & \lambda_{S0}^i & \lambda_{M0}^i \\ 0_{36} & {}^{i-1}A^i & {}^{i-1}P_0^i \\ 0_{16} & 0_{13} & 1 \end{bmatrix} + q_i \begin{bmatrix} 0_{66} & \lambda_{S1}^i & \lambda_{M1}^i \\ 0_{36} & 0_{33} & {}^{i-1}Z_i \\ 0_{16} & 0_{13} & 0 \end{bmatrix} + q_i^2 \begin{bmatrix} 0_{66} & 0_{63} & \lambda_{M2}^i \\ 0_{36} & 0_{33} & 0_{31} \\ 0_{16} & 0_{13} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Les différentes matrices intervenant dans cette relation sont constantes. Leur expression explicite est présentée en Annexe 2. Cette forme polynomiale en q_i ainsi que la forme particulière des matrices constantes λ_0^i , λ_1^i et λ_2^i seront utilisées ultérieurement pour proposer de nouveaux regroupements de paramètres pour les articulations prismatiques, ainsi que pour effectuer une étude exhaustive des regroupements particuliers.

Dans ce paragraphe sont étudiées les relations générales de regroupement et deux hypothèses sont émises:

- i) Les composantes du tenseur ${}^i V_i$ apparaissant dans l'expression de f^i sont indépendantes.
- ii) Les composantes de h^{i-1} sont indépendantes.

Sous ces deux hypothèses, on montre que les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de relations linéaires à coefficients constants entre h^{i-1} et h^i se traduisent par l'existence d'une matrice colonne b (10×1) de coefficients constants et telle que:

$$\begin{aligned} f^i b &= 0 \\ \lambda^i b &= c \end{aligned} \quad (2.29)$$

où c est une matrice colonne de coefficients constants. La relation linéaire s'exprime alors par:

$$h^i b = h^{i-1} \lambda^i b \quad (2.30)$$

Pratiquement, cela revient à rechercher les composantes nulles de f^i , ainsi que les colonnes constantes, ou combinaisons linéaires de colonnes, à coefficients constants dans la matrice λ^i . Chaque relation obtenue va permettre d'éliminer une composante de h^i dans l'expression de la somme des énergies des corps C_{i-1} et C_i . Après avoir choisi les fonctions à éliminer, on définit une matrice de permutation P^i qui réordonne les composantes de h^i :

$$h^i P^i = [h1^i, h2^i] \quad (2.31)$$

où $h1^i$ est la partie à conserver et $h2^i$ regroupe les fonctions à éliminer. Les relations linéaires s'exprimeront alors par:

$$h2^i = h^{i-1} \beta1^i + h1^i \beta2^i \quad (2.32)$$

où $\beta 1^i$ et $\beta 2^i$ sont les matrices de coefficients constants traduisant les relations linéaires obtenues. On permute de même les éléments de X^i de manière à exprimer l'énergie par:

$$h^i X^i = h^i P^i P^{i T} X^i = [h1^i \ h2^i] \begin{bmatrix} X1^i \\ X2^i \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

La somme des énergies des corps C_{i-1} et C_i se simplifie alors comme suit:

$$h^{i-1} X^{i-1} + h^i X^i = h^{i-1} XR^{i-1} + h1^i XR1^i \quad (2.34)$$

avec

$$\begin{aligned} XR^{i-1} &= X^{i-1} + \beta 1^i X2^i \\ XR1^i &= X1^i + \beta 2^i X2^i \end{aligned} \quad (2.35)$$

$X2^i$ représente le groupe de paramètres inertiels à regrouper sur X^{i-1} et $X1^i$. Si les hypothèses émises précédemment sont vérifiées, alors XR^{i-1} et $XR1^i$ représentent les paramètres inertiels minimaux suffisants à déterminer la somme des énergies des corps C_{i-1} et C_i . Dans le cas contraire, une étude complémentaire doit être réalisée afin de rechercher d'éventuels regroupements supplémentaires de paramètres. Ces cas particuliers seront abordés au paragraphe III.4.

III.3.2 / Regroupement des paramètres d'une articulation rotoïde

La recherche des composantes nulles de f^i ainsi que des colonnes constantes (ou combinaisons linéaires à coefficients constants entre colonnes) de λ^i a permis à [Gautier 90] d'établir les relations suivantes (On notera λ_k^i la $k^{\text{ème}}$ colonne de λ^i):

$$\begin{aligned}
h_{10}^i &= h^{i-1} \lambda_{10}^i \\
h_9^i &= h^{i-1} \lambda_9^i \\
h_1^i + h_4^i &= h^{i-1} [\lambda_1^i + \lambda_4^i]
\end{aligned} \tag{2.36}$$

En choisissant d'éliminer, dans cette dernière équation, la fonction d'indice le plus élevé (h_4^i), on déduit de la relation (2.32):

$$\begin{aligned}
h_2^i &= [h_4^i \ h_9^i \ h_{10}^i] \\
h_1^i &= [h_1^i \ h_2^i \ h_3^i \ h_5^i \ h_6^i \ h_7^i \ h_8^i] \\
X_2^i &= [YY_i \ MZ_i \ M_i]^T \\
X_1^i &= [XX_i \ XY_i \ XZ_i \ YZ_i \ ZZ_i \ MX_i \ MY_i]^T \\
\beta_1^i &= [(\lambda_1^i + \lambda_4^i) \ \lambda_9^i \ \lambda_{10}^i] \\
\beta_2^i &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ & 0_{6 \times 3} & \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Les paramètres regroupés des corps C_i et C_{i-1} , à savoir XR_1^i et XR^{i-1} seront donc:

$$\begin{aligned}
XR_1^i &= [(XX_i - YY_i) \ XY_i \ XZ_i \ YZ_i \ ZZ_i \ MX_i \ MY_i]^T \\
XR^{i-1} &= X^{i-1} + [\lambda_1^i + \lambda_4^i] YY_i + \lambda_9^i MZ_i + \lambda_{10}^i M_i
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Ici encore, les relations de regroupements obtenues ne sont pas limitées à la seule représentation de D.H.M. En désignant par s, n, a les trois vecteurs colonne de la matrice de rotation ${}^{i-1}A^i$, et P_x, P_y, P_z les trois composantes de ${}^{i-1}P^i$, nous pouvons montrer que la forme explicite des regroupements sur le corps C_{i-1} s'écrit d'une manière plus générale:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{XR}^{i-1} = \mathbf{X}^{i-1} + & \begin{bmatrix}
 s_1^2 + n_1^2 & 2(a_2 P_y + a_3 P_z) & P_y^2 + P_z^2 \\
 s_1 s_2 + n_1 n_2 & -(a_1 P_y + a_2 P_z) & -P_x P_y \\
 s_1 s_3 + n_1 n_3 & -(a_1 P_z + a_3 P_x) & -P_x P_z \\
 s_2^2 + n_2^2 & 2(a_1 P_x + a_3 P_z) & P_x^2 + P_z^2 \\
 s_2 s_3 + n_2 n_3 & -(a_2 P_z + a_3 P_y) & -P_y P_z \\
 s_3^2 + n_3^2 & 2(a_1 P_x + a_2 P_y) & P_x^2 + P_y^2 \\
 0 & a_1 & P_x \\
 0 & a_2 & P_y \\
 0 & a_3 & P_z \\
 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}
 \mathbf{YY}_i \\
 \mathbf{MZ}_i \\
 \mathbf{M}_i
 \end{bmatrix} \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

La généralisation des résultats présentée ici demeure valable pour l'ensemble des développements qui vont suivre.

III.3.2 / Regroupement des paramètres d'une articulation prismatique

En appliquant le même principe que précédemment, il vient:

$$h_k^i = h^{i-1} \lambda_k^i \quad \text{pour } k=1, \dots, 6 \quad (2.40)$$

On en déduit alors:

$$h_2^i = [h_1^i \dots h_6^i]$$

$$h_1^i = [h_7^i \dots h_{10}^i]$$

$$\beta_1^i = [\lambda_1^i \dots \lambda_6^i]$$

$$\beta_2^i = 0_{4 \times 6}$$

$$\mathbf{X}_2^i = [\mathbf{XX}_i \dots \mathbf{ZZ}_i]^T = \bar{\mathbf{J}}_i$$

$$\mathbf{X}_1^i = [\mathbf{MX}_i \mathbf{MY}_i \mathbf{MZ}_i \mathbf{M}_i]^T \quad (2.41)$$

d'où les regroupements:

$$XR1^i = X1^i = [MX_i \ MY_i \ MZ_i \ M_i]^T$$

$$XR^{i-1} = X^{i-1} + [\lambda_1^i \ \dots \ \lambda_6^i] \bar{J}_i \quad (2.42)$$

Compte tenu des expressions de $\beta 1^i$ et $\beta 2^i$, le regroupement des paramètres inertiels se réduit à celui de la matrice d'inertie J_i et peut encore s'exprimer sous la forme simple:

$$JR_{i-1} = J_{i-1} + {}^{i-1}A^i J_i {}^iA^{i-1} \quad (2.43)$$

Cette expression traduit la somme des tenseurs d'inertie des corps C_{i-1} et C_i , exprimée dans la base du repère R_{i-1} .

III.3.3 / Application à l'ensemble des corps

Compte tenu des résultats précédents, l'expression de l'énergie totale pourra être simplifiée de proche en proche, en partant de l'effecteur vers la base du robot. On considère tout d'abord la somme des énergies des corps C_{N-1} et C_N . Il vient:

$$h^{N-1} X^{N-1} + h^N X^N = h^{N-1} XR^{N-1} + h1^N XR1^N \quad (2.44)$$

En ajoutant l'énergie du corps C_{N-2} , la même méthode de simplification est appliquée aux paramètres inertiels X^{N-2} et XR^{N-1} .

$$h^{N-2} X^{N-2} + h^{N-1} XR^{N-1} + h1^N XR1^N = h^{N-2} XR^{N-2} + h1^{N-1} XR1^{N-1} + h1^N XR1^N \quad (2.45)$$

On procède ainsi de proche en proche jusqu'au corps C_2 :

$$h^1 X^1 + h^2 XR^2 + \dots + h^N XR^N = h^1 XR^1 + h^2 XR^2 + \dots + h^N XR^N \quad (2.46)$$

Notons enfin que, dans la pratique, le calcul des paramètres regroupés XR_k^i correspondant à des paramètres X_k^i sans effet sur le modèle est inutile. Rappelons cependant que pour établir ces règles générales de regroupements, des hypothèses d'indépendance entre les termes apparaissant dans les relations de récurrence ont été émises. Ces hypothèses ne sont malheureusement pas toujours vérifiées et des cas supplémentaires de regroupements peuvent apparaître. Ces cas particuliers font l'objet de l'étude qui va suivre.

III.4 / Etude des cas particuliers dépendant de la morphologie du robot

III.4.1 / Unicité des relations générales de regroupements

Comme il a été mentionné au paragraphe III.3, si les composantes de V_i et de h^{i-1} ne sont pas indépendantes, des regroupements supplémentaires de paramètres peuvent apparaître. Cela est dû au fait que pour les corps proches de la base du robot, certains paramètres inertiels sont sans effet sur le modèle et leur fonction d'énergie h_k^i est constante. De même, certaines composantes de V_i apparaissant dans l'expression de f^i peuvent ne pas être indépendantes. Il s'agit de démontrer dans ce paragraphe que seuls les moments d'ordre un des articulations prismatiques situées entre les rotations R_1 et R_2 peuvent être sujets à des regroupements particuliers. En supposant que les composantes du torseur cinématique V_{i-1} sont indépendantes, et en utilisant le fait que la matrice de transformation ${}^i T^{i-1}$ est inversible, [Gautier 90] est arrivé à la conclusion suivante:

$\{V_{i-1}\}$ est indépendant implique que $\{h^{i-1}\}$ est indépendant et que $\{V_i\}$ est indépendant.

On conclut alors que la recherche des regroupements particuliers ne concerne que les corps C_i $i = 1, \dots, (p-1)$ tels que $\{V_{p-1}\}$ est indépendant. Un problème cependant demeure

concernant l'indétermination de l'articulation p-1. Aussi allons nous considérer séparément le cas des articulations rotoïdes et prismatiques.

Le cas des articulations prismatiques ne présente pas de difficultés, en ce sens que nous démontrons que le torseur de toutes les articulations succédant à R2 est indépendant. Les regroupements supplémentaires ne concernent donc que les paramètres MS_i et M_i des corps précédant R2. On établit aussi aisément que le coefficient de la masse M_i est le seul terme à contenir la forme quadratique \dot{q}^2 . Par conséquent, il ne peut être regroupé et seule l'étude de MS_i est à envisager. Le traitement des articulations rotoïdes se fait différemment du cas précédent. Nous montrons que les fonctions h_k^i restant après les étapes de regroupements généraux et d'élimination des paramètres sans effet sur le modèle demeurent indépendantes entre elles, de même qu'elles sont indépendantes de la famille de fonctions $\{ h^{i-1} \}$. On en déduit alors qu'il n'y a pas de regroupements supplémentaires pour les articulations rotoïdes.

Pour la clarté de l'exposé, ces développements sont reportés à l'Annexe 3. Nous nous intéressons dans ce qui suit aux relations de regroupements proprement dites et présentons dans un premier temps les résultats de travaux antérieurs.

III.4.2/ Travaux antérieurs

Nous présentons ici les résultats de travaux traitant des cas particuliers de regroupements dans le cadre de la représentation de D.H.M. Pour des articulations prismatiques i situées entre les deux articulations rotoïdes R1 et R2, ces résultats proposent des regroupements supplémentaires des éléments de MS_i en fonction des configurations des articulations i et $i-1$ vis à vis de l'articulation rotoïde R1. Les conditions d'existence de relations linéaires à coefficients constants présentées au paragraphe III.3 sont ici généralisées. On rappelle que celles ci se traduisaient par l'existence d'une matrice b (10x1) de coefficients constants satisfaisant:

$$\begin{aligned} f^j b &= 0 \\ \lambda^i b &= c \end{aligned} \tag{2.47}$$

où c est une matrice (10x1) constante. En utilisant la notion de corps généralisé pour obtenir le regroupement de paramètres, [Bennis 91] généralise les conditions précédentes en recherchant une matrice b satisfaisant:

$$\begin{aligned} f^j b &= 0 \\ \delta^{i-1} \lambda^i b &= c \end{aligned} \tag{2.48}$$

où δ^{i-1} est une matrice diagonale (10x10) telle que $\delta^{i-1}(k,k) = 0$ si le paramètre X_k^{i-1} n'affecte pas le modèle, et 1 sinon. Dans ces conditions, le transport des paramètres inertiels du corps C_i sur des paramètres du corps C_{i-1} n'affectant pas le modèle n'est pas pris en compte dans la recherche des relations linéaires. La multiplication par la matrice δ^{i-1} a ainsi pour effet d'annuler les lignes de la matrice λ^i qui correspondent à des paramètres du corps C_{i-1} sans effet sur le modèle. En utilisant la représentation de DHM (Denavit et Hartenberg Modifiée), les regroupements obtenus en fonction de la morphologie particulière du robot sont regroupés dans le tableau 2.2 ci après. Il est à noter que les regroupements présentés ne sont pas uniques et dépendent du choix effectué par l'auteur. Cependant, l'étude réalisée par [Bennis 91] n'a pas permis de conclure de manière exhaustive sur l'existence de regroupements supplémentaires, excepté dans le cas de robot dont les articulations situées entre R1 et R2 sont parallèles ou perpendiculaires. Le tableau ci-après résume ces cas supplémentaires de regroupements.

Dans le paragraphe qui va suivre nous utiliserons une autre approche qui nous permettra d'établir tous les cas supplémentaires de regroupements.

	z_i est parallèle à z_{R1}	Aucun axe de R_i n'est parallèle à z_{R1}
x_{i-1} est parallèle à z_{R1}	---	$MYR_i = MY_i + \tan(\theta_i) MX_i$
y_{i-1} est parallèle à z_{R1}	$YYR_{i-1} = YY_{i-1} + 2d_i C\theta_i MX_i - 2d_i S\theta_i MY_i$ $MXR_{i-1} = MX_{i-1} + C\theta_i MX_i - S\theta_i MY_i$ $MZR_{i-1} = MZ_{i-1} + S\alpha_i S\theta_i MX_i + S\alpha_i C\theta_i MY_i$	$MXR_i = MX_i - \tan(\theta_i) MY_i$ $MZR_i = MZ_i + \tan(\alpha_i)/C\theta_i MY_i$
z_{i-1} est parallèle à z_{R1}	$ZZR_{i-1} = ZZ_{i-1} + 2d_i C\theta_i MX_i - 2d_i S\theta_i MY_i$ $MXR_{i-1} = MX_{i-1} + C\theta_i MX_i - S\theta_i MY_i$ $MYR_{i-1} = MY_{i-1} + S\alpha_i S\theta_i MX_i + C\alpha_i C\theta_i MY_i$	$MXR_i = MX_i - \tan(\theta_i) MY_i$ $MZR_i = MZ_i - C\alpha_i/S\alpha_i C\theta_i MY_i$

Tableau 2.2 : Regroupements supplémentaires de paramètres dans le cadre de la représentation géométrique de DHM.

III.4.3 / Etude complète

On établit dans un premier temps que lorsque z_i est parallèle à z_{R1} , les trois composantes de MS_i (ou du moins celles qui affectent le modèle) peuvent toujours être regroupées sur le corps C_{i-1} . On montre dans un second temps que lorsque z_i n'est pas parallèle à z_{R1} , il existe toujours une (et une seule) relation linéaire à coefficients constants entre les composantes de MS_i . Cette relation nous fournit alors l'ensemble des regroupements recherchés. Partant de l'expression développée de la matrice λ^i (relation 2.26), nous pouvons écrire:

$$h_s^i = h^{i-1} \begin{bmatrix} \lambda_{s0}^i \\ {}^{i-1}A^i \\ 0 \end{bmatrix} + g_s(q_i, \dot{q}_i) \quad (2.49)$$

avec

$$g_S(q_i, \dot{q}_i) = q_i h_J^{i-1} \lambda_{S1}^i + \dot{q}_i f_S^i \quad (2.50)$$

Lorsque cela ne présente pas d'ambiguïté, nous désignerons par R la dernière articulation rotoïde précédant l'articulation i et par A_{ij} l'élément générique (constant) de la matrice de rotation ${}^R A^i$. On montre alors que l'expression de $g_S(q_i, \dot{q}_i)$ dans la relation (2.50) peut être ramenée à la forme simple:

$$g_S(q_i, \dot{q}_i) = q_i \dot{q}_\Sigma^2 [A_{33}A_{31} \quad A_{33}A_{32} \quad -1+A_{33}^2] + \dot{q}_i \dot{q}_\Sigma [-A_{32} \quad A_{31} \quad 0] \quad (2.51)$$

où \dot{q}_Σ est la somme des vitesses des variables articulaires rotoïdes antérieures à l'articulation i. La démonstration de cette relation est renvoyée à l'Annexe 3.

Considérons le cas où z_i est parallèle à z_R (ou z_{R1}); Dans ce cas, $A_{31}=A_{32}=0$ et $A_{33}=1$. Par suite, les trois composantes de $g_S(q_i, \dot{q}_i)$ sont nulles et la relation (2.49) nous fournit directement la relation de regroupement des paramètres de MS_i sur le corps C_{i-1} :

$$X^R{}^{i-1} = X^{i-1} + \begin{bmatrix} \lambda_{S0}^i \\ {}^{i-1}A^i \\ 0 \end{bmatrix} MS_i \quad (2.52)$$

Dans le cas où z_i n'est pas parallèle à z_{R1} , nous recherchons une relation linéaire à coefficients constants entre les composantes de h_S^i ; Compte tenu de l'expression de h_S^i (relation 2.49), cela revient à rechercher une matrice constante b (3×1) satisfaisant les trois relations:

$$\begin{aligned} g_S(q_i, \dot{q}_i) &= b = 0 \\ h_J^{i-1} \lambda_{S0}^i &= b = \text{constante} \\ h_S^{i-1} {}^{i-1}A^i &= b = \text{constante} \end{aligned} \quad (2.53)$$

La recherche de relations linéaires pour la première égalité fournit aisément la solution unique:

$$\mathbf{b} = [A_{31} \quad A_{32} \quad A_{33}]^T = {}^i z_R \quad (2.54)$$

Le vecteur \mathbf{b} représente en fait les composantes de z_R dans le repère R_i . Le calcul qui suit prouve que cette solution satisfait aussi les deux autres égalités: Les développements effectués pour simplifier l'expression de $g_S(q_i, \dot{q}_i)$ (Cf. Annexe 3) permettent d'écrire la deuxième relation sous la forme:

$$h_J {}^{i-1} \lambda_{S0} {}^i \mathbf{b} = 2 \dot{q}_\Sigma^2 \sum_{p=1}^3 b_p z_0^T {}^R A^i \hat{e}_p V_p \quad (2.55)$$

expression dans laquelle $e_1=[100]^T, \dots, e_3=[001]^T$, et V_p est une matrice (3x1) fonction des éléments de ${}^i A^{i-1}$, ${}^{i-1} A^R$ et ${}^{i-1} P_0^i$:

$$V_p = {}^i A^{i-1} {}^{i-1} \hat{P}_0^i {}^{i-1} A^R z_0 \quad (2.56)$$

Compte tenu que $b_p = A_{3p}$, on montre sans difficulté que pour toute matrice V_p , la quantité exprimée par la relation (2.55) est nulle. Concernant la troisième égalité de la relation (2.53), nous avons:

$$h_S {}^{i-1} {}^{i-1} A^i \mathbf{b} = (V_{i-1}^T \hat{\omega}_{i-1} - {}^0 g^T {}^0 A^{i-1}) {}^{i-1} z_R = V_{i-1}^T \hat{\omega}_{i-1} {}^{i-1} z_R - {}^0 g^T {}^0 z_R \quad (2.57)$$

ω_{i-1} et z_R étant parallèles, leur produit vectoriel est nul, tandis que l'orientation de z_R dans R_0 est fixe. Par suite, la quantité exprimée par la relation (2.57) est constante, ce qui achève notre démonstration. Nous aboutissons finalement à la relation linéaire à coefficients constants:

$$h_S {}^i \mathbf{b} = \text{constante} \quad (2.58)$$

Les relations de regroupements à effectuer sont simples mais dépendent des composantes non nulles de b . En choisissant de regrouper un élément MS_{ik} de MS_i pour lequel la composante b_k est non nulle, l'expression de l'énergie due au moment d'ordre un prend alors la forme:

$$h_s^i MS_i = C_0 + h1_s^i MSR_i \quad (2.59)$$

où C_0 est un terme d'énergie constant qui sera éliminé du modèle, $h1_s^i$ est la matrice h_s^i à laquelle nous avons retiré la composante h_{sk}^i , et MSR_i est le vecteur des deux paramètres regroupés. Les regroupements peuvent être les suivant:

-Si x_i n'est pas perpendiculaire à z_{R1} ($A_{31} \neq 0$), MX_i peut être regroupé suivant les relations:

$$\begin{aligned} MYR_i &= MY_i - ({}^R A^i)_{32} / ({}^R A^i)_{31} MX_i \\ MZR_i &= MZ_i - ({}^R A^i)_{33} / ({}^R A^i)_{31} MX_i \end{aligned} \quad (2.60)$$

D'après l'étude des paramètres inertiels sans effet sur le modèle, une condition nécessaire pour que MYR_i ou MZR_i n'affecte pas le modèle est que y_i ou z_i soit parallèle à z_{R1} . Cette condition étant incompatible avec la condition de regroupement, nous pouvons en déduire que ces deux paramètres affectent le modèle.

-Si y_i n'est pas perpendiculaire à z_{R1} ($A_{32} \neq 0$), MY_i peut être regroupé suivant les relations:

$$\begin{aligned} MXR_i &= MX_i - ({}^R A^i)_{31} / ({}^R A^i)_{32} MY_i \\ MZR_i &= MZ_i - ({}^R A^i)_{33} / ({}^R A^i)_{32} MY_i \end{aligned} \quad (2.61)$$

La même remarque que précédemment nous permet d'affirmer que ces deux paramètres regroupés affectent le modèle.

-Si z_i n'est pas perpendiculaire à z_{R1} ($A_{33} \neq 0$), MZ_i peut être regroupé suivant les relations:

$$\begin{aligned} \text{MXR}_i &= \text{MX}_i - ({}^R A^i)_{31} / ({}^R A^i)_{33} \text{MZ}_i \\ \text{MYR}_i &= \text{MY}_i - ({}^R A^i)_{32} / ({}^R A^i)_{33} \text{MZ}_i \end{aligned} \quad (2.62)$$

Sachant que z_i n'est pas parallèle à z_{R1} , nous pouvons conclure que ces deux paramètres regroupés affectent le modèle.

En conclusion nous pouvons noter que dans le cas où z_i est parallèle à z_{R1} , les trois composantes de MS_i sont regroupées sur le corps C_{i-1} . Dans le cas où z_i n'est pas parallèle à z_{R1} , nous pouvons toujours regrouper une composante de MS_i sur les deux autres. Par conséquent, deux paramètres regroupés de MS_i sur trois affectent le modèle si z_i n'est pas parallèle à z_{R1} , zéro sinon. En tenant compte des configurations particulières que peut prendre le repère R_{i-1} , nous pouvons sans difficulté retrouver les relations de regroupements du tableau 2.2 du paragraphe III.4.2.

Avec cette étude s'achève la dernière étape du calcul des paramètres de base. L'application des relations (2.60-61-62) nous permet désormais de déterminer tous les regroupements supplémentaires possibles. Le paragraphe qui va suivre présente un récapitulatif du déroulement des calculs, ainsi qu'une conclusion sur la minimalité de la solution obtenue.

III.5 / Etapes de calcul des paramètres de base

Le déroulement des opérations s'effectue en trois étapes:

(1) : *Elimination des paramètres inertiels sans effet sur le modèle:*

L'ensemble de ces paramètres est regroupé dans le tableau 2.1 du paragraphe III.2 avec les conditions C_i qui leur sont associées.

(2) : *Regroupements généraux des paramètres:*

Les paramètres regroupés sont obtenus par application récursive des relations (2.38 et 2.42) . Cette récurrence est appliquée en partant de l'effecteur vers la base du robot. Il est à noter que le calcul des paramètres regroupés correspondant à des paramètres sans effet sur le modèle est inutile.

(3) : *Traitement des cas particuliers:*

L'application des résultats du paragraphe III.4 permet de déterminer tous les cas particuliers supplémentaires dépendants de la morphologie du robot.

Les études exhaustives réalisées pour la recherche des paramètres inertiels sans effet sur le modèle, ainsi que pour le traitement des cas particuliers nous permettent d'affirmer que les solutions obtenues à l'issue de ces trois étapes représentent les paramètres inertiels **minimaux** des modèles. Il n'est par conséquent plus nécessaire d'avoir recours à des méthodes numériques pour valider ou modifier la solution obtenue par une méthode formelle.

La minimalité de la solution étant assurée, il est désormais possible de déterminer le nombre de paramètres de base. Cette étude fait l'objet du paragraphe qui va suivre.

III.6 / Détermination du nombre de paramètres de base

Une première estimation est faite en calculant le nombre de paramètres restant après l'application des relations générales de regroupement. Cette estimation est ensuite corrigée en lui déduisant (1) le nombre de paramètres sans effet sur le modèle et (2) le nombre de paramètres éliminés ou regroupés après l'étape du traitement des cas particuliers. Nous traiterons séparément les cas des articulations rotoïdes et prismatiques.

III.6.1 / Nombre de paramètres de base des articulations rotoïdes

Nous introduisons les notations suivantes:

Σ_R : Nombre total d'articulations rotoïdes

R_{12} : Nombre d'articulations rotoïdes comprises entre R_1 et R_2

$g(R_1)$: Variable prenant la valeur 1 si la proposition : " z_{R_1} et toutes les articulations prismatiques antérieures à R_1 sont parallèles à la direction de la gravité " est vraie, 0 sinon

Pour toutes les articulations rotoïdes i telles que $i > R_1$, il reste après les étapes de regroupements généraux 7 paramètres par articulation, à savoir: XX_i , XY_i , XZ_i , YZ_i , ZZ_i , MX_i et MY_i . Le nombre de paramètres de la première articulation conservant la valeur 10, les regroupements généraux nous fournissent une première estimation valant:

$$7 (\Sigma_R - \bar{\sigma}_1) + 10 \bar{\sigma}_1 \quad (2.63)$$

Il n'y a pas de regroupements particuliers pour les articulations rotoïdes. L'examen du tableau 2.1 des paramètres sans effet sur le modèle nous renseigne alors sur le nombre de paramètres à déduire selon les valeurs de $g(R_1)$, R_{12} et la nature de la première articulation:

- Si $\sigma_1=0$ ($R_1=1$) , et $g(R_1)=1$, 9 paramètres sur 10 sont à éliminer soit donc $9 \bar{\sigma}_1 g(R_1)$
- Si $\sigma_1=0$ ($R_1=1$) , et $g(R_1)=0$, 7 paramètres sont à éliminer soit donc $7 \bar{\sigma}_1 (1-g(R_1))$
- Si $\sigma_1=1$ ($R_1>1$) , et $g(R_1)=1$, 6 paramètres sur 7 sont à éliminer du modèle pour l'articulation R_1 (XX_{R_1} , XY_{R_1} , XZ_{R_1} , YZ_{R_1} , MX_{R_1} , MY_{R_1}) soit donc $6 \sigma_1 g(R_1)$
- Si $\sigma_1=1$ ($R_1>1$) , et $g(R_1)=0$, 4 paramètres sur 7 sont à éliminer du modèle pour l'articulation R_1 (XX_{R_1} , XY_{R_1} , XZ_{R_1} , YZ_{R_1}) soit donc $4 \sigma_1 (1-g(R_1))$
- Enfin, R_{12} étant le nombre d'articulations rotoïdes comprises entre R_1 et R_2 , 4 paramètres sur 7 doivent être déduits (XX_i , XY_i , XZ_i et YZ_i) soit $4 R_{12}$.

Le nombre de paramètres de base des articulations rotoïdes, que l'on notera N_R , sera donc:

$$N_R = 7 \Sigma_R - 4 (1 + R12) - 2 g(R1) \quad (2.64)$$

III.6.2 / Nombre de paramètres de base des articulations prismatiques

Nous introduisons les notations suivantes:

Σ_T : Nombre total d'articulations prismatiques

$T1R1$: Nombre d'articulations prismatiques situées entre la première articulation et $R1$

$g(z_i)$: Variable prenant la valeur 1 si la proposition : " z_i est parallèle à z_{R1} " est vraie, 0 sinon

Pour toutes les articulations prismatiques i telles que $i > R1$, il reste après l'étape des regroupements généraux 4 paramètres par articulation à savoir MX_i , MY_i , MZ_i et M_i . La première estimation vaut ainsi:

$$4 (\Sigma_T - \sigma_1) + 10 \sigma_1 \quad (2.65)$$

L'examen du tableau des paramètres sans effet sur le modèle nous indique que 3 $T1R1$ ainsi que $9\sigma_1$ paramètres sont à déduire de la première estimation. Enfin, l'étude des cas particuliers du paragraphe IV nous montre que 1 ou 3 paramètres pour les articulations comprises entre $R1$ et $R2$ seront à déduire selon que z_i est ou n'est pas parallèle à z_{R1} . Le nombre de paramètres de base des articulations prismatiques, que l'on notera N_T , sera donc:

$$N_T = 4 \Sigma_T - 3 \sigma_1 - 3 T1R1 - \sum_{i=R1}^{R2} \sigma_i (1 + 2 g(z_i)) \quad (2.66)$$

Une remarque concernant cette dernière relation doit cependant être notée; En effet, certains robots, comme par exemple ceux du type SCARA, ont une morphologie qui ne comporte pas d'articulation rotoïde R2, toutes les articulations étant parallèles à la première rotoïde R1. La somme apparaissant dans l'expression précédente doit alors être effectuée sur l'ensemble des articulations succédant à R1. Cette précision étant apportée, le nombre total des paramètres de base, que l'on notera N_B , sera par conséquent:

$$N_B = N_R + N_T \quad (2.67)$$

La détermination de N_B va ainsi permettre de conforter les calculs effectués en s'assurant de la minimalité de la solution obtenue.

Dans la paragraphe qui va suivre, nous proposons de retrouver, par la méthode énergétique, la première solution de base, établie par [Mayeda, Ohashi 89] et utilisant les paramètres inertiels des corps augmentés. Nous utiliserons pour cela d'autres relations de regroupements de paramètres pour les articulations prismatiques.

IV / MODELE ENERGETIQUE ET PREMIERE SOLUTION DE BASE

IV.1 / Paramètres inertiels sans effet sur le modèle

Les résultats obtenus dans le cas des paramètres inertiels standards demeurent valables pour les corps augmentés. En effet, les paramètres inertiels étant indépendants entre eux, si un paramètre standard X_k^i affecte l'énergie du robot par un terme constant, il en est de même pour le paramètre augmenté $(X_k^i + \alpha_0 M_{i+1}^*)$, α_0 étant un scalaire constant.

IV.2 / Relations générales de regroupements de paramètres

Les regroupements proposés pour retrouver la première solution de base ne diffèrent des précédents que dans le cas des articulations prismatiques. La forme particulière de la matrice λ^i (relation 2.27 et 2.28) permettait en effet d'écrire:

$$\lambda^i = \lambda_0^i + q_i \lambda_1^i + q_i^2 \lambda_2^i \quad (2.68)$$

ou encore:

$$\lambda^i = \begin{bmatrix} \lambda_J^i & \lambda_{S0}^i & \lambda_{M0}^i \\ 0_{36} & {}^{i-1}A^i & {}^{i-1}P_0^i \\ 0_{16} & 0_{13} & 1 \end{bmatrix} + q_i \begin{bmatrix} 0_{66} & \lambda_{S1}^i & \lambda_{M1}^i \\ 0_{36} & 0_{33} & {}^{i-1}z_i \\ 0_{16} & 0_{13} & 0 \end{bmatrix} + q_i^2 \begin{bmatrix} 0_{66} & 0_{63} & \lambda_{M2}^i \\ 0_{36} & 0_{33} & 0_{31} \\ 0_{16} & 0_{13} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

La récurrence sur h^i peut alors se mettre sous la forme :

$$h^i = h^{i-1} \lambda_0^i + g(q_i, \dot{q}_i) \quad (2.70)$$

et la somme des énergies des corps C_{i-1} et C_i s'exprime par:

$$h^{i-1} X^{i-1} + h^i X^i = h^{i-1} [X^{i-1} + \lambda_0^i X^i] + g(q_i, \dot{q}_i) X^i \quad (2.71)$$

expression dans laquelle $g(q_i, \dot{q}_i)$ ne contient pas de terme constant non nul:

$$g(q_i, \dot{q}_i) = h^{i-1} (q_i \lambda_1^i + q_i^2 \lambda_2^i) + \dot{q}_i f^i \quad (2.72)$$

La relation (2.71) ainsi obtenue fait apparaître des regroupements systématiques des paramètres du corps C_i sur le corps C_{i-1} . La présence des termes q_i et \dot{q}_i dans l'expression de $g(q_i, \dot{q}_i)$ ne permet aucun regroupement supplémentaire de paramètres du

corps C_i sur C_{i-1} . En observant que les six premières composantes de $g(q_i, \dot{q}_i)$ sont nulles, la réduction du modèle a consisté ici à éliminer par regroupement sur le corps C_{i-1} les éléments de la matrice d'inertie J_i . La différence fondamentale avec la simplification précédente réside dans le fait que les fonctions d'énergie initiales h_k^i du corps C_i ont été remplacées par les composantes de $g(q_i, \dot{q}_i)$. Notons aussi que, contrairement à l'étude précédente, le regroupement des paramètres MS_i et M_i sur le corps C_{i-1} n'entraîne pas nécessairement leur élimination à l'ordre i . Ainsi, les paramètres qui sont maintenus à l'ordre i sont:

$$XR_i^i = [MX_i, MY_i, MZ_i, M_i]^T \quad (2.73)$$

Le regroupement de paramètres du corps C_i sur le corps C_{i-1} s'exprime quant à lui par:

$$JR_{i-1} = J_{i-1} + \lambda_J^i J_i + \lambda_{S0}^i MS_i + \lambda_{M0}^i M_i$$

$$MSR_{i-1} = MS_{i-1} + {}^{i-1}A^i MS_i + {}^{i-1}P_0^i M_i$$

$$MR_{i-1} = M_{i-1} + M_i \quad (2.74)$$

Si l'on conserve l'hypothèse d'indépendance des éléments de h^{i-1} et f^i introduite au paragraphe précédent, il est inutile de chercher d'éventuelles réductions supplémentaires puisque les vecteurs regroupés par les deux méthodes sont de même dimension. En désignant par XB et XB' ces paramètres regroupés $[XR^{i-1T} \ XR_i^{iT}]^T$ obtenus respectivement par les deux formes de regroupement, le passage de la première à la seconde solution s'obtient à partir de la transformation linéaire, à coefficients constants, et non singulière suivante:

$$XB' = \begin{bmatrix} I_{10} & \lambda_{S0} & \lambda_{M0} \\ 0 & I_4 & {}^{i-1}P_0^i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} XB \quad (2.75)$$

Ainsi, si XB est une solution minimale du système exprimant la somme des énergies des corps C_i et C_{i-1} , XB' constitue elle aussi une solution de base.

Notons enfin que les matrices λ_M^i et λ_{M0}^i (de dimension 6×1) que l'on retrouve dans les regroupements généraux des articulations rotoïdes et prismatiques ne sont que les formes développées des matrices (3×3) apparaissant dans la définition des corps augmentés et s'expriment par:

$$\lambda_M^i = - \overline{({}^{i+1}\hat{P}^i \quad {}^{i+1}\hat{P}^i)}$$

$$\lambda_{M0}^i = - \overline{({}^{i+1}\hat{P}_0^i \quad {}^{i+1}\hat{P}_0^i)} \quad (2.76)$$

En rappelant que ces regroupements s'effectuent de proche en proche en partant de l'effecteur vers la base du robot, les relations (2.38) pour les articulations rotoïdes, et (2.74) pour les articulations prismatiques, font apparaître de manière implicite les paramètres inertiels des corps augmentés. Les relations générales de regroupements peuvent alors s'exprimer comme suit:

Regroupements pour une articulation rotoïde :

$$XR1^{*i} = [(XX_i^* - YY_i^*) \quad XY_i^* \quad XZ_i^* \quad YZ_i^* \quad ZZ_i^* \quad MX_i^* \quad MY_i^*]^T$$

$$XR^{*i-1} = X^{*i-1} + [\lambda_1^i + \lambda_4^i] YY_i^* + \lambda_9^i MZ_i^* \quad (2.77)$$

Regroupements pour une articulation prismatique :

$$XR1^{*i} = [MX_i^* \quad MY_i^* \quad MZ_i^* \quad M_i^*]^T$$

$$\overline{JR_{i-1}^*} = \overline{J_{i-1}^*} + \lambda_J^i \overline{J_i^*} + \lambda_{S0}^i MS_i^*$$

$$MSR_{i-1}^* = MS_{i-1}^* + {}^{i-1}A^i MS_i^*$$

$$MR_{i-1}^* = M_{i-1}^* \quad (2.78)$$

Remarque 1:

Ramené à des matrices de dimension (3x3), le regroupement de paramètres sur le tenseur d'inertie JR_{i-1}^* s'écrit:

$$JR_{i-1}^* = J_{i-1}^* + {}^{i-1}A^i J_i^* {}^{i-1}A^{i-1} + {}^{i-1}\hat{MS}^{*i} {}^{i-1}\hat{P}_0^i + ({}^{i-1}\hat{MS}^{*i} {}^{i-1}\hat{P}_0^i)^T \quad (2.79)$$

où ${}^{i-1}\hat{MS}^{*i}$ traduit le changement de base:

$${}^{i-1}\hat{MS}^{*i} = {}^{i-1}A^i MS_i^* {}^iA^{i-1} \quad (2.80)$$

On peut alors montrer que les paramètres inertiels M_{i-1}^* , MSR_{i-1}^* et JR_{i-1}^* représentent les moments d'ordre 0, 1 et 2 du corps rigide composé des corps C_{i-1}^* et C_i^* lorsque $q_i = 0$.

IV.3 / Regroupements particuliers

L'étude des regroupements supplémentaires se base sur les résultats précédemment obtenus pour la première solution minimale. Le nombre de paramètres de base devant être identique pour les deux approches, on en déduit dans un premier temps qu'il n'y a pas de cas particuliers à envisager pour les articulations succédant à l'articulation R2. De plus, les mêmes relations de regroupements étant appliquées pour les articulations rotoïdes, celles ci ne donnent donc pas lieu à une étude supplémentaire. Concernant les articulations prismatiques, la présence des termes en q_i et \dot{q}_i dans l'expression de $g(q_i, \dot{q}_i)$ ne permet aucun regroupement sur le corps C_{i-1} . Enfin, le coefficient de la masse augmentée étant le seul terme à contenir la forme quadratique q_i^2 ,

seul demeure à envisager le regroupement entre les composantes de MS_i^* . Rappelons l'expression des coefficients associés à ces paramètres:

$$g_s(q_i, \dot{q}_i) = q_i \dot{q}_\Sigma^2 [A_{31} \ A_{32} \ -1+A_{33}^2] + \dot{q}_i \dot{q}_\Sigma [-A_{32} \ A_{31} \ 0] \quad (2.81)$$

La contribution de MS_i^* à l'énergie du robot s'exprime alors sous la forme simple:

$$g_s(q_i, \dot{q}_i) MS_i^* = q_i \dot{q}_\Sigma^2 M1_i + \dot{q}_i \dot{q}_\Sigma M2_i \quad (2.82)$$

où $M1_i$ et $M2_i$ sont les paramètres regroupés. Ces nouveaux paramètres inertiels sont:

$$M1_i = A_{33} [A_{31} MX_i^* + A_{32} MY_i^*] + (1-A_{33}^2) MZ_i^*$$

$$M2_i = -A_{32} MX_i^* + A_{31} MY_i^* \quad (2.83)$$

Nous pouvons aisément vérifier que l'unique cas pour lequel un des paramètres est nul se traduit par la relation:

$$M1_i = 0 \Leftrightarrow M2_i = 0 \Leftrightarrow z_i \text{ est parallèle à } z_{R1} \ (A_{33}=0) \quad (2.84)$$

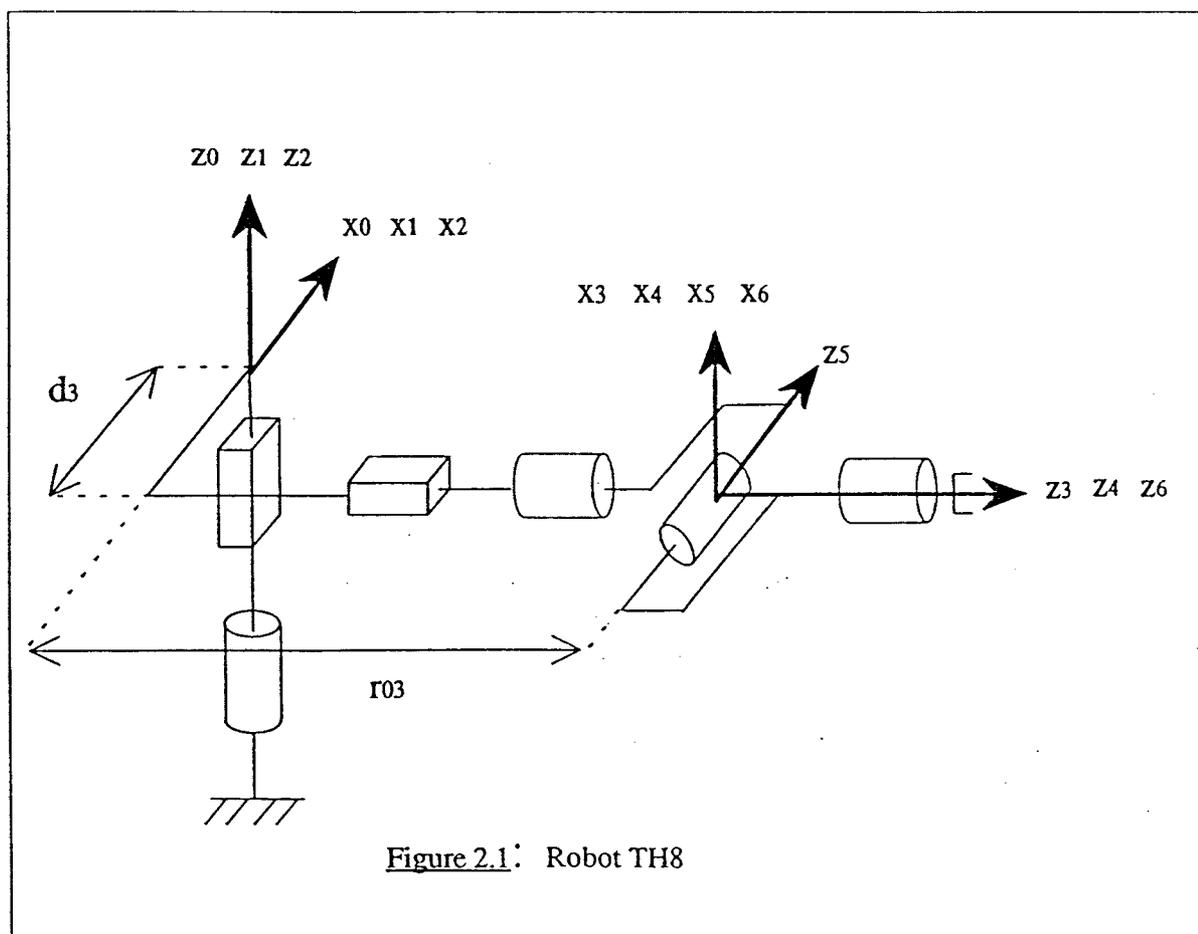
Cette solution a notamment pour avantage de ne pas avoir à considérer les cas des configurations particulières du robot. Elle met aussi aisément en évidence le fait que zéro ou deux paramètres regroupés de MS_i^* sur les trois affectent le modèle.

L'application des trois étapes précédentes permet d'utiliser cette solution minimale dans les modèles dynamiques basés sur le formalisme de Lagrange [Mayeda, Yoshida, Osuka 88], [Mayeda, Yoshida, Ohashi 89], [Mayeda, Ohashi 89] ou de Newton-Euler [Constantinos, Rajnikant, Pradeep 88], et utilisant la notion de corps augmenté.

V / APPLICATIONS

les exemples qui vont être traités sont ceux du robot TH8 de Renault - Acma et du robot Stanford. Ces derniers ont été choisis du fait de la présence d'articulations prismatiques dans leur chaîne cinématique. Nous utiliserons pour leur description les paramètres géométriques de DHM. Ces derniers sont regroupés respectivement dans les tableaux 2.3 et 2.5, et les robots sont représentés dans leur configuration initiale ($q=0$) par les figures 2.1 et 2.2. Nous utiliserons les regroupements correspondant à la première solution de base ainsi que les paramètres inertiels des corps augmentés.

V.1 / Robot TH8



j	σ_j	α_i	d_i	θ_j	r_i
1	0	0	0	θ_1	0
2	1	0	0	0	r_2
3	1	90	d_3	90	r_3
4	0	0	0	θ_4	0
5	0	90	0	θ_5	0
6	0	-90	0	θ_6	0

Tableau 2.3 : Paramètres géométriques du robot TH8

Etape (1) : Paramètres inertiels sans effet sur le modèle dynamique

L'examen du tableau 2.1 fournit l'ensemble des paramètres n'affectant pas le modèle:

Corps C3 : XY_3^* XZ_3^* YY_3^* YZ_3^* ZZ_3^* MX_3^*

Corps C2 : XX_2^* XY_2^* XZ_2^* YY_2^* YZ_2^* MX_2^* MY_2^* MZ_2^*

Corps C1 : XX_1^* XY_1^* XZ_1^* YY_1^* YZ_1^* MX_1^* MY_1^* MZ_1^* M_1^*

Etape (2) : Regroupements généraux

Corps C6 : Les paramètres YY_6^* et MZ_6^* sont regroupés suivant les relations:

$$XXR_6^* = XX_6^* - YY_6^*$$

$$XXR_5^* = XX_5^* + YY_6^*$$

$$ZZR_5^* = ZZ_5^* + YY_6^*$$

$$MYR_5^* = MY_5^* + MZ_6^*$$

Les paramètres minimaux du corps C6 sont:

$$XXR_6^* , XY_6^* , XZ_6^* , YZ_6^* , ZZ_6^* , MX_6^* , MY_6^*$$

Corps C5 : Les paramètres YY_5^* et MZ_5^* sont regroupés suivant les relations:

$$XXR_5^* = XXR_5^* - YY_5^* = XX_5^* + YY_6^* - YY_5^*$$

$$XXR_4^* = XX_4^* + YY_5^*$$

$$ZZR_4^* = ZZ_4^* + YY_5^*$$

$$MYR_4^* = MY_4^* - MZ_5^*$$

Les paramètres minimaux du corps C5 sont:

$$XXR_5^*, XY_5^*, XZ_5^*, YZ_5^*, ZZR_5^*, MX_5^*, MYR_5^*$$

Corps C4 : Les paramètres YY_4^* et MZ_4^* sont regroupés suivant les relations:

$$XXR_4^* = XXR_4^* - YY_4^* = XX_4^* + YY_5^* - YY_4^*$$

$$XXR_3^* = XX_3^* + YY_4^*$$

$$MZR_3^* = MZ_3^* + MZ_4^*$$

Les paramètres minimaux du corps C4 sont:

$$XXR_4^*, XY_4^*, XZ_4^*, YZ_4^*, ZZR_4^*, MX_4^*, MYR_4^*$$

Corps C3 : En tenant compte des paramètres des corps C3 et C2 sans effet sur le modèle, il ne reste plus que le regroupement de XX_3^* , MY_3^* et MZ_3^* sur ZZ_2^* suivant la relation:

$$\begin{aligned} ZZR_2^* &= ZZ_2^* + XXR_3^* - 2 d_3 MY_3^* + 2 r_{03} MZR_3^* \\ &= ZZ_2^* + XX_3^* + YY_4^* - 2 d_3 MY_3^* + 2 r_{03} (MZ_3^* + MZ_4^*) \end{aligned}$$

Les paramètres minimaux du corps C3 sont:

$$MY_3^*, MZR_3^*, M_3^*$$

Corps C2 : Seul ZZR_2^* est regroupé sur ZZ_1^* suivant la relation:

$$\begin{aligned} ZZR_1^* &= ZZ_1^* + ZZR_2^* \\ &= ZZ_1^* + ZZ_2^* + XX_3^* + YY_4^* - 2 d_3 MY_3^* + 2 r_{03} (MZ_3^* + MZ_4^*) \end{aligned}$$

L'unique paramètre du corps C2 est M_2^*

Corps C1: L'unique paramètre du corps C1 est ZZR_1^*

Etape (3) : Cas particuliers

L'axe z_2 étant parallèle à z_1 , seule l'élimination de MX_2^* et MY_2^* est à envisager. Cette opération a déjà été effectuée lors de la première étape.

Résumé

Sur les 60 paramètres de départ,

23 paramètres sont sans effet sur le modèle:

$$\begin{aligned} &XY_3^* \quad XZ_3^* \quad YY_3^* \quad YZ_3^* \quad ZZ_3^* \quad MX_3^* \\ &XX_2^* \quad XY_2^* \quad XZ_2^* \quad YY_2^* \quad YZ_2^* \quad MX_2^* \quad MY_2^* \quad MZ_2^* \\ &XX_1^* \quad XY_1^* \quad XZ_1^* \quad YY_1^* \quad YZ_1^* \quad MX_1^* \quad MY_1^* \quad MZ_1^* \quad M_1^* \end{aligned}$$

17 paramètres sont inchangés:

$$\begin{aligned} &XY_6^* , XZ_6^* , YZ_6^* , ZZ_6^* , MX_6^* , MY_6^* \\ &XY_5^* , XZ_5^* , YZ_5^* , MX_5^* \\ &XY_4^* , XZ_4^* , YZ_4^* , MX_4^* \\ &MY_3^* , M_3^* \\ &M_2^* \end{aligned}$$

9 paramètres sont modifiés du fait des regroupements suivant les relations:

$$\begin{aligned} &XXR_6^* = XX_6^* - YY_6^* \\ &XXR_5^* = XX_5^* + YY_6^* - YY_5^* \\ &ZZR_5^* = ZZ_5^* + YY_6^* \\ &MYR_5^* = MY_5^* + MZ_6^* \\ &XXR_4^* = XX_4^* + YY_5^* - YY_6^* \\ &ZZR_4^* = ZZ_4^* + YY_5^* \\ &MYR_4^* = MY_4^* - MZ_5^* \\ &MZR_3^* = MZ_3^* + MZ_4^* \\ &ZZR_1 = ZZ_1^* + ZZ_2^* + XX_3^* + YY_4^* - 2 d_3 MY_3^* + 2 r_{03} (MZ_3^* + MZ_4^*) \end{aligned}$$

Il reste donc 26 paramètres de base regroupés dans le tableau 2.4 suivant.

j	XX_i^*	XY_i^*	XZ_i^*	YY_i^*	YZ_i^*	ZZ_i^*	MX_i^*	MY_i^*	MZ_i^*	M_i^*
1						ZZR_1^*				
2										M_2^*
3								MY_3^*	MZR_3^*	M_3^*
4	XXR_4^*	XY_4^*	XZ_4^*		YZ_4^*	ZZR_4^*	MX_4^*	MY_4^*		
5	XXR_5^*	XY_5^*	XZ_5^*		YZ_5^*	ZZR_5^*	MX_5^*	MY_5^*		
6	XXR_6^*	XY_6^*	XZ_6^*		YZ_6^*	ZZ_6^*	MX_6^*	MY_6^*		

Tableau 2.4: paramètres de base du robot TH8

L'application des relations (2.64) et (2.66) nous permet de conforter ce résultat. En effet:

$$\Sigma_R = 4, R_{12} = 0, \bar{\sigma}_1 = 1, g(R_1) = 1 \quad \text{et par suite} \quad N_R = 28 - 4 - 2 = 22$$

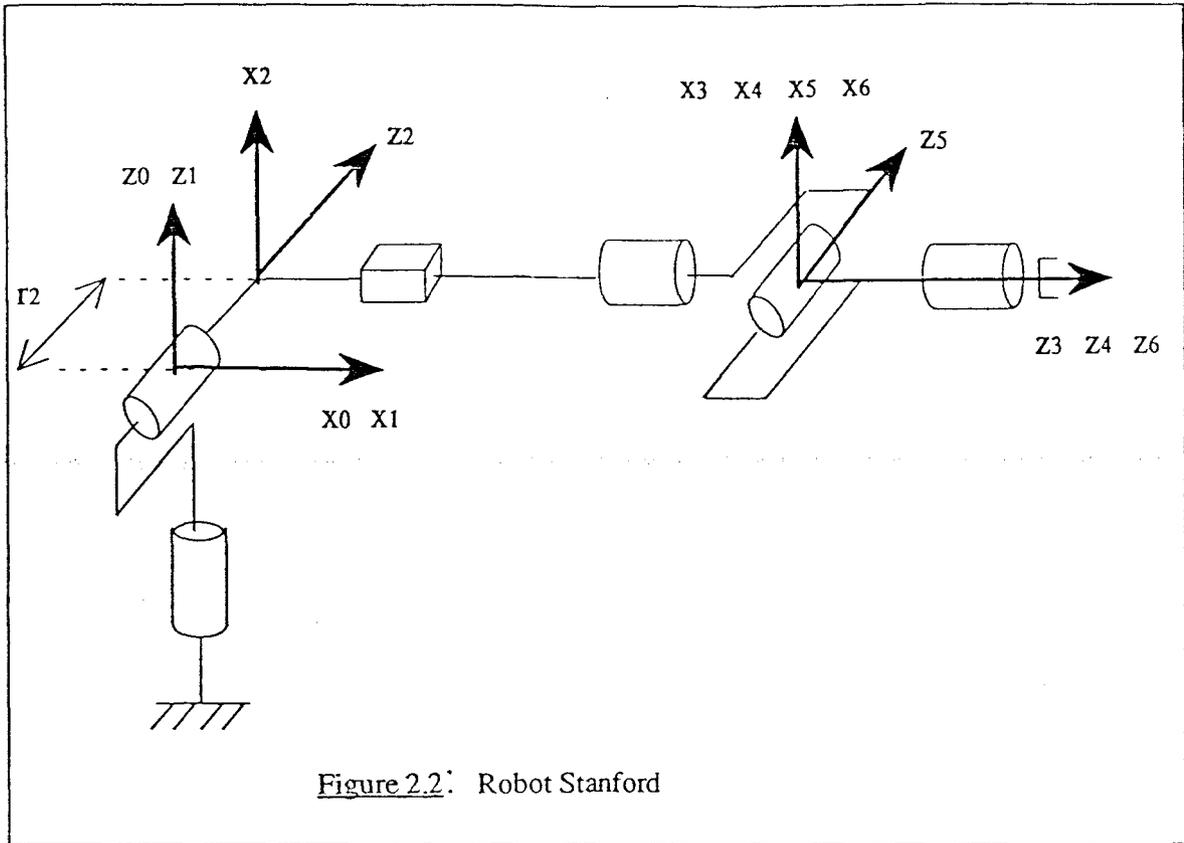
$$\Sigma_T = 2, T_{1R_1} = 0, g(z_2) = 1, g(z_3) = 0 \quad \text{et par suite} \quad N_T = 8 - 3 - 1 = 4$$

Soit donc un total $N_B = N_R + N_T = 26$ paramètres.

V.2 / Robot Stanford

j	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
1	0	0	0	θ_1	0
2	0	-90	0	θ_2	r_2
3	1	-90	0	0	r_3
4	0	0	0	θ_4	0
5	0	90	0	θ_5	0
6	0	-90	0	θ_6	0

Tableau 2.5 : Paramètres géométriques du robot Stanford



Etape (1) : Paramètres inertiels sans effet sur le modèle

L'examen du tableau 2.1 nous fournit l'ensemble des paramètres n'affectant pas le modèle:

Corps C1 : XX_1^* XY_1^* XZ_1^* YY_1^* YZ_1^* MX_1^* MY_1^* MZ_1^* M_1^*

Etape (2) : Regroupements généraux

Les paramètres géométriques des 4 dernières liaisons étant identiques à ceux du robot TH8, les paramètres minimaux des corps C6, C5 et C4 seront les mêmes, soit donc:

Corps C6: XXR_6^* , XY_6^* , XZ_6^* , YZ_6^* , ZZ_6^* , MX_6^* , MY_6^*

avec les regroupements:

$$XXR_6^* = XX_6^* - YY_6^*$$

$$XXR_5^* = XX_5^* + YY_6^*$$

$$ZZR_5^* = ZZ_5^* + YY_6^*$$

$$\text{MYR}_5^* = \text{MY}_5^* + \text{MZ}_6^*$$

Corps C5: XXR_5^* , XY_5^* , XZ_5^* , YZ_5^* , ZZR_5^* , MX_5^* , MYR_5^*

avec les regroupements:

$$\text{XXR}_5^* = \text{XX}_5^* + \text{YY}_6^* - \text{YY}_5^*$$

$$\text{XXR}_4^* = \text{XX}_4^* + \text{YY}_5^*$$

$$\text{ZZR}_4^* = \text{ZZ}_4^* + \text{YY}_5^*$$

$$\text{MYR}_4^* = \text{MY}_4^* - \text{MZ}_5^*$$

Corps C4: XXR_4^* , XY_4^* , XZ_4^* , YZ_4^* , ZZR_4^* , MX_4^* , MYR_4^*

avec les regroupements:

$$\text{XXR}_4^* = \text{XX}_4^* + \text{YY}_5^* - \text{YY}_4^*$$

$$\text{XXR}_3^* = \text{XX}_3^* + \text{YY}_4^*$$

$$\text{YYR}_3^* = \text{YY}_3^* + \text{YY}_4^*$$

$$\text{MZR}_3^* = \text{MZ}_3^* + \text{MZ}_4^*$$

Corps C3: Les paramètres du corps C3 se regroupent sur C2 suivant les relations:

$$\text{XXR}_2^* = \text{XX}_2^* + (\text{XX}_3^* + \text{YY}_4^*) + 2 r_{03} (\text{MZ}_3^* + \text{MZ}_4^*)$$

$$\text{XYR}_2^* = \text{XY}_2^* + \text{XZ}_3^* - r_{03} (\text{MZ}_3^* + \text{MZ}_4^*)$$

$$\text{XZR}_2^* = \text{XZ}_2^* - \text{XY}_3^*$$

$$\text{YYR}_2^* = \text{YY}_2^* + \text{ZZ}_3^*$$

$$\text{YZR}_2^* = \text{YZ}_2^* - \text{YZ}_3^*$$

$$\text{ZZR}_2^* = \text{ZZ}_2^* + (\text{YY}_3^* + \text{YY}_4^*) + 2 r_{03} (\text{MZ}_3^* + \text{MZ}_4^*)$$

$$\text{MXR}_2^* = \text{MX}_2^* + \text{MX}_3^*$$

$$\text{MYR}_2^* = \text{MY}_2^* + (\text{MZ}_3^* + \text{MZ}_4^*)$$

$$\text{MZR}_2^* = \text{MZ}_2^* - \text{MY}_3^*$$

Les paramètres minimaux du corps C3 sont:

MX_3^* , MY_3^* , MZR_3^* , M_3^*

Corps C2: Seul ZZ_1^* affecte le modèle, d'où les regroupements:

$$\begin{aligned}XXR_2^* &= XXR_2^* - YYR_2^* \\ &= XX_2^* + (XX_3^* + YY_4^*) - (YY_2^* + ZZ_3^*) + 3 r_{03} (MZ_3^* + MZ_4^*) \\ZZR_1^* &= ZZ_1^* + YYR_2^* + 2 r_{02} MZR_2^* \\ &= ZZ_1^* + (YY_2^* + ZZ_3^*) + 2 r_{02} (MZ_2^* - MY_3^*)\end{aligned}$$

Les paramètres minimaux du corps C2 sont:

XXR_2^* , XYR_2^* , XZR_2^* , YZR_2^* , ZZR_2^* , MXR_2^* , MYR_2^*

Corps C1: L'unique paramètre du corps C1 est ZZR_1^*

Etape (3) : Cas particuliers

Il n'existe pas d'articulation prismatique située entre les articulations R1 et R2. Aucune opération supplémentaire n'est à effectuer.

Résumé

Sur les 60 paramètres de départ,

9 paramètres n'affectent pas le modèle:

XX_1^* , XY_1^* , XZ_1^* , YY_1^* , YZ_1^* , MX_1^* , MY_1^* , MZ_1^* , M_1^*

17 paramètres sont inchangés:

XY_6^* , XZ_6^* , YZ_6^* , ZZ_6^* , MX_6^* , MY_6^*

XY_5^* , XZ_5^* , YZ_5^* , MX_5^*

XY_4^* , XZ_4^* , YZ_4^* , MX_4^*

MX_3^* , MY_3^* , M_3^*

16 paramètres sont modifiés du fait du regroupement suivant les relations:

$$XXR_6^* = XX_6^* - YY_6^*$$

$$XXR_5^* = XX_5^* + YY_6^* - YY_5^*$$

$$ZZR_5^* = ZZ_5^* + YY_6^*$$

$$MYR_5^* = MY_5^* + MZ_6^*$$

$$XXR_4^* = XX_4^* + YY_5^* - YY_4^*$$

$$ZZR_4^* = ZZ_4^* + YY_5^*$$

$$MYR_4^* = MY_4^* - MZ_5^*$$

$$MZR_3^* = MZ_3^* + MZ_4^*$$

$$XXR_2^* = XX_2^* + (XX_3^* + YY_4^*) + 2 r_{03} (MZ_3^* + MZ_4^*)$$

$$XYR_2^* = XY_2^* + XZ_3^* - r_{03} (MZ_3^* + MZ_4^*)$$

$$XZR_2^* = XZ_2^* - XY_3^*$$

$$YZR_2^* = YZ_2^* - YZ_3^*$$

$$ZZR_2^* = ZZ_2^* + (YY_3^* + YY_4^*) + 2 r_{03} (MZ_3^* + MZ_4^*)$$

$$MXR_2^* = MX_2^* + MX_3^*$$

$$MYR_2^* = MY_2^* + (MZ_3^* + MZ_4^*)$$

$$ZZR_1^* = ZZ_1^* + (YY_2^* + ZZ_3^*) + 2 r_{02} (MZ_2^* - MY_3^*)$$

Il reste donc 33 paramètres de base regroupés dans le tableau 2.6 suivant.

j	XX_i^*	XY_i^*	XZ_i^*	YY_i^*	YZ_i^*	ZZ_i^*	MX_i^*	MY_i^*	MZ_i^*	M_i^*
1						ZZR_1^*				
2	XXR_2^*	XYR_2^*	XZR_2^*		YZR_2^*	ZZR_2^*	MXR_2^*			
3							MX_3^*	MY_3^*	MZR_3^*	M_3^*
4	XXR_4^*	XY_4^*	XZ_4^*		YZ_4^*	ZZR_4^*	MX_4^*	MY_4^*		
5	XXR_5^*	XY_5^*	XZ_5^*		YZ_5^*	ZZR_5^*	MX_5^*	MY_5^*		
6	XXR_6^*	XY_6^*	XZ_6^*		YZ_6^*	ZZ_6^*	MX_6^*	MY_6^*		

Tableau 2.6: paramètres de base du robot Stanford

L'application des relations (2.90) et (2.91) nous permet de conforter ce résultat. En effet:

$$\begin{aligned} \Sigma_R = 5, R12 = 0, \bar{\sigma}_1 = 1, g(R1) = 1 & \quad \text{et par suite} \quad N_R = 35 - 4 - 2 = 29 \\ \Sigma_T = 1, T1R1 = 0 & \quad \text{et par suite} \quad N_T = 4 \end{aligned}$$

Soit donc un total $N = N_R + N_T = 33$ paramètres.

VIII / CONCLUSION

Les développements effectués au début de ce chapitre ont permis d'établir une liste exhaustive des paramètres inertiels sans effet sur le modèle dynamique de robot à structure ouverte simple. Les calculs ont été menés en écartant le cas des robots présentant des articulations rotoïdes d'axes confondus et parallèles à la première rotoïde R1. Suite à cette étude, la minimalité de la solution au problème de recherche des paramètres de base a pu être assurée en effectuant une étude complète des cas particuliers de regroupements. Des relations simples permettent en outre de déterminer le nombre exact des paramètres de base. La minimalité de la solution étant assurée, il est alors possible d'envisager le développement d'une méthode séquentielle d'identification des paramètres inertiels, ainsi que des frottements. Cette étude fait l'objet du chapitre qui va suivre.

CHAPITRE III

CHAPITRE III

METHODE D'IDENTIFICATION

I / INTRODUCTION

La recherche des paramètres de base constitue une étape préliminaire essentielle à l'identification des paramètres inertiels. Celle ci fournit en effet un ensemble de paramètres identifiables, évitant ainsi une perte de rang structurelle des matrices traduisant le comportement linéaire des différents modèles vis à vis des paramètres inertiels.

La méthode d'identification généralement adoptée consiste à échantillonner l'équation du modèle utilisé à différents instants pour construire un système linéaire surdéterminé. Ce dernier permettra ensuite d'avoir une estimation au sens des moindres carrés des paramètres minimaux recherchés. La recherche d'un bon estimateur se heurte cependant à de nombreuses difficultés:

Une des principales sources d'erreurs provient de l'utilisation de données perturbées; Aux bruits de mesure sur les couples des actionneurs, ainsi que sur les positions et vitesses articulaires, vient s'ajouter, pour les modèles dynamiques, le problème de la mesure ou de l'estimation des accélérations. Par ailleurs, les systèmes linéaires formés comprennent des termes fortement non linéaires vis à vis des positions et vitesses articulaires (fonctions trigonométriques ou encore formes quadratiques). Ces non linéarités ne permettent pas, en général, un calcul littéral du biais des estimations dû aux bruits de mesures.

Outre les bruits de mesures précédents, il faut tenir compte des erreurs de modélisation systématiques dues à des phénomènes non pris en compte dans les équations

utilisées. Citons ici les phénomènes de jeu et d'élasticité au niveau des articulations, ou encore une modélisation imparfaite des frottements.

La troisième source d'erreurs est d'ordre numérique; En effet, le nombre de paramètres à identifier demeure souvent élevé et il faut traiter des systèmes linéaires de taille importante. Dans l'exemple du robot TH8 présenté au chapitre précédent, 38 paramètres sont à identifier si l'on tient compte des frottements secs et visqueux. Le nombre important d'opérations à effectuer peut alors entraîner un biais non négligeable de l'information.

Pour palier à ces difficultés, les approches les plus concluantes se sont orientées vers la recherche de trajectoires réalisables par le robot et offrant un comportement robuste du modèle formé vis à vis des perturbations évoquées plus haut. [Amstrong 87,89] utilise le modèle dynamique pour la recherche des trajectoires dites excitantes: Soit $\mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ la matrice du système linéaire obtenu à partir d'une trajectoire initiale quelconque. Par un programme d'optimisation non linéaire avec contraintes, l'auteur détermine une nouvelle trajectoire assurant un meilleur facteur de conditionnement de la matrice $\mathbf{W}^T\mathbf{W}$. Ce conditionnement peut être défini comme le produit de la norme de \mathbf{W} par la norme de sa pseudo inverse. Cette amélioration (diminution) du nombre de conditionnement assure au système linéaire formé une meilleure immunité au bruit. On dit alors que le problème est bien posé. La recherche de trajectoires excitantes est abordée différemment dans [Gautier 90]. Ce dernier utilise tout d'abord le modèle énergétique permettant de s'affranchir des accélérations articulaires. Il adopte ensuite un critère d'optimisation faisant intervenir le conditionnement défini plus haut ainsi qu'un terme supplémentaire traduisant l'équilibrage des éléments de la matrice $\mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ formée. La diminution de ce nouveau terme a pour but de limiter les perturbations d'ordre numérique. L'utilisation de séquences aléatoires pour les positions et vitesses articulaires, ainsi que d'un algorithme d'optimisation non linéaire permet d'obtenir une trajectoire assurant une valeur acceptable (non optimale) du critère adopté.

Un autre type d'approche consiste à faire exécuter par le robot un ensemble de trajectoires particulières, chacune d'entre elles conduisant à un système linéaire réduit permettant d'identifier, de manière séquentielle, un nombre limité de paramètres [Khosla, Kanade, 86], [Lai, Lan, 88], [Olsen, Bekey, 86], [Bu, Wang, 88], [Mayeda, Osuka, Kawanga, 84]. La méthode proposée dans [Mayeda, Maruyama, 89] présente au préalable, et de façon explicite, l'ensemble des paramètres de base qui seront identifiés au cours des différents tests. Cette solution de base est celle utilisant les paramètres inertiels des corps augmentés. On notera cependant que les frottements secs des articulations ne sont pas pris en compte dans les relations traduisant l'équilibre statique du robot. En outre, toutes les approches citées ici utilisent un modèle dynamique basé sur le formalisme de Lagrange ou de Newton-Euler.

Ce chapitre présente une méthode d'identification séquentielle basée sur une approche énergétique, évitant ainsi la mesure ou l'estimation des accélérations articulaires. Les paramètres inertiels seront ceux de la seconde solution du chapitre précédent, c'est à dire basés sur les regroupements des paramètres inertiels standards. Nous éviterons enfin les tests portant sur l'équilibre statique du robot afin de ne pas soulever d'ambiguïté quant à la modélisation des frottements secs en l'absence de mouvement.

II / E XPRESSION GENERALE DU MODELE ENERGETIQUE

En faisant passer le robot d'une configuration A à l'instant t_A à une configuration B à l'instant t_B , le bilan énergétique s'écrit:

$$\Delta H = H(t_A) - H(t_B) = \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{T}^T \dot{\mathbf{q}} dt \quad (3.1)$$

Développons cette expression afin de mettre en évidence la contribution des différents paramètres inertiels aux énergies cinétique et potentielle, ainsi que la contribution des

frottements secs et visqueux (que l'on avait désignés respectivement par F_{S_i} et F_{V_i}). Pour cela on définit les grandeurs suivantes:

$$\begin{aligned} W_i &= \int_{t_A}^{t_B} \Gamma_i^T \dot{q}_i dt \\ \Delta f_{S_i} &= \int_{t_A}^{t_B} \dot{q}_i \operatorname{sg}(\dot{q}_i) dt \\ \Delta f_{V_i} &= \int_{t_A}^{t_B} \dot{q}_i^2 dt \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ces grandeurs scalaires sont supposées connues par la mesure des couples et vitesses articulaires tout au long des déplacements. Celles ci devront être discrétisées et transformées en sommes lors des essais d'identification. Rappelons également les fonctions d'énergie cinétique et potentielle associées aux différents paramètres inertiels (cf. premier chapitre):

$$\begin{aligned} DE_J^k &= \frac{1}{2} \omega_k \cdot \omega_k && \text{(fonction d'énergie cinétique du tenseur d'inertie } J_k) \\ DE_S^k &= V_k^T \hat{\omega}_k && \text{(fonction d'énergie cinétique de } MS_k) \\ DE_M^k &= \frac{1}{2} V_k^T V_k && \text{(fonction d'énergie cinétique de la masse } M_k) \\ DU_S^k &= -{}^0_g^T {}^0_A^k && \text{(fonction d'énergie potentielle de } MS_k) \\ DU_M^k &= -{}^0_g^T {}^0_P^k && \text{(fonction d'énergie potentielle de la masse } M_k) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ces fonctions des positions et vitesses articulaires n'interviennent dans le bilan énergétique que par leurs valeurs prises aux instants t_A et t_B . On définit à cet effet l'opérateur $\Delta [.]$ qui associe à une grandeur quelconque sa différence entre les instants t_B et t_A :

$$\Delta[\cdot] = [\cdot]_{t_b} - [\cdot]_{t_a} \quad (3.4)$$

Le bilan énergétique, faisant apparaître l'ensemble des termes à identifier, s'écrit alors sous la forme générale:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (W_k - \Delta f_{S_k} F_{S_k} - \Delta f_{V_k} F_{V_k}) \\ & = \sum_{k=1}^N (\Delta [DE_J^k] \bar{J}_k + \Delta [DE_S^k + DU_S^k] MS_k + \Delta [DE_M^k + DU_M^k] M_k) \quad (3.5) \end{aligned}$$

Cette dernière équation sera à la base de l'ensemble des systèmes linéaires qui seront obtenus à partir des différents mouvements tests. Il est important de noter que les paramètres inertiels apparaissant dans cette relation désignent ici les paramètres de base. Les paramètres regroupés ou sans effet sur le modèle sont mis à zéro. Le tableau qui suit rappelle les paramètres minimaux obtenus au chapitre précédent.

Articulation	$i < R1$	$i = R1$	$R1 < i < R2$	$i \geq R2$
Rotoïde	--	ZZ MX(C1) MY(C1)	ZZ MX MY	XX, XY, XZ, YZ, ZZ MX, MY
Prismatique	M	--	(MX, MY) (C2) ou (MX, MZ) (C3) ou (MY, MZ) (C4) et M	MX, MY, MZ M

Tableau 3-1 : Paramètres inertiels minimaux

Conditions Ci:

Condition C1: Il existe une articulation $k \leq R1$ non parallèle à la direction de la gravité.

Condition C2: z_i n'est ni parallèle ni perpendiculaire à z_{R1}

Condition C3: $y_i n$ n'est pas perpendiculaire à z_{R1}

Condition C4: $x_i n$ n'est pas perpendiculaire à z_{R1}

Les mouvements tests qui vont suivre vont permettre de traduire le bilan énergétique sous forme de systèmes d'équations faisant intervenir un nombre limité de paramètres à identifier. Afin d'éviter des développements inutiles, toutes les articulations qui ne sont pas mises en mouvement seront supposées dans leur configuration d'initialisation ($q = 0$).

Lors de calculs intermédiaires, on établit sans difficulté la relation:

$${}^j A^i ({}^i \hat{A}^j z_0) = \hat{z}_0 {}^i A^j \quad (3.6)$$

Par ailleurs, pour une articulation rotoïde k située entre deux articulations i et j et dont l'axe n'est pas parallèle à z_i , nous pouvons aisément démontrer que les éléments $({}^i A^j)_{31}$ et $({}^i A^j)_{32}$ sont des fonctions de la variable articulaire θ_k linéairement indépendantes. Le terme $({}^i A^j)_{33}$ est quant à lui constant, voire nul si les articulations i et j sont perpendiculaires.

III / MOUVEMENTS TESTS ET PARAMETRES A IDENTIFIER

III.1 / Tests 1: Mouvements axe par axe des articulations prismatiques

On effectue un déplacement le long d'une articulation i prismatique, les autres articulations étant fixes. Les vitesses de rotation ω_k sont alors nulles, de même que les matrices de rotation ${}^0 A^k$ sont constantes, pour $k=1, \dots, N$. De plus, les corps antérieurs à l'articulation i étant immobiles, il vient les relations:

$$DE_J^k = 0_{16} \quad , \quad DE_S^k = 0_{13} \quad , \quad \Delta [DU_S^k] = 0_{13} \quad \text{pour } k=1, \dots, N$$

$$DE_M^k = 0 \quad , \quad \Delta [DU_M^k] = 0 \quad \text{pour } k < i$$

La relation (3.5) se réduit alors à:

$$W_i - \Delta f_{v_i} F_{v_i} - \Delta f_{s_i} F_{s_i} = \sum_{k=i}^N \Delta [DE_M^k + DU_M^k] M_k \quad (3.7)$$

Le tableau 3-1 précédent nous indique que seules les masses (regroupées) M_k des articulations prismatiques sont des paramètres de base. Par ailleurs, les relations générales de regroupements obtenues au second chapitre nous permettent aisément d'établir que la somme de ces masses (somme de k à N) n'est autre que la masse augmentée M_k^* . La variation d'énergie cinétique exprimée dans le second membre se traduit alors sans difficulté par la relation:

$$\sum_{k=i}^N \Delta [DE_M^k] M_k = \frac{1}{2} \Delta [\dot{q}_i^2] M_i^* \quad (3.8)$$

En développant l'expression de ${}^0P^k$ pour faire apparaître les variables articulaires prismatiques, la variation d'énergie potentielle s'écrit, après calcul:

$$\sum_{k=i}^N \Delta [DU_M^k] M_k = -{}^0g^T {}^0z_i \Delta [q_i] M_i^* \quad (3.9)$$

L'équation énergétique s'exprime alors linéairement en fonction de la masse augmentée et des frottements de l'articulation i :

$$W = [(\frac{1}{2} \Delta [\dot{q}_i^2] - {}^0g^T {}^0z_i \Delta [q_i]) \quad \Delta f_{v_i} \quad \Delta f_{s_i}] \begin{bmatrix} M_i^* \\ F_{v_i} \\ F_{s_i} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

En réalisant ainsi $Q \geq 3$ mouvements adéquats de l'articulation i , on aboutit à un système linéaire de Q équations à trois inconnues, M_i^* , F_{v_i} et F_{s_i} . Pour des articulations prismatiques non perpendiculaires à la gravité, Q déplacements à différentes vitesses

constantes suffisent à identifier les paramètres recherchés. Le terme $\Delta [\dot{q}_i^2]$ de la relation (3.10) est alors toujours nul. A l'inverse, pour des articulations prismatiques perpendiculaires à la gravité, il faut au contraire veiller à ce que les déplacements ne s'effectuent pas à vitesse constante. En effet, le produit scalaire ${}^0g^T {}^0z_i$ étant nul, un mouvement à vitesse constante entrainerait un coefficient de la masse augmentée également nul et cette masse ne pourrait être identifiée.

Au terme de cette première série de mouvements, nous sommes en mesure d'avoir une estimation des masses augmentées et des frottements secs et visqueux de toutes les articulations prismatiques. Le paramètre de base recherché M_i est donné simplement par la différence des masses augmentées M_i^* et M_{i+1}^* . Les paramètres pouvant être estimés par cette procédure seront supposés connus par la suite.

III.2 / Tests 2: Mouvement axe par axe des articulations rotoïdes, à vitesse constante

Le choix des déplacements à vitesses constantes a pour but de s'affranchir de la connaissance des variations des fonctions d'énergie cinétique. Cette dernière étant la même aux instants t_A et t_B , seules subsistent les fonctions d'énergie potentielle et le bilan énergétique s'écrit:

$$W_i - \Delta f_{S_i} F_{S_i} - \Delta f_{S_i} F_{S_i} = \sum_{k=i}^N \Delta [DU_S^k] MS_k + \Delta [DU_M^k] M_k \quad (3.11)$$

En désignant par ${}^i g = [{}^i g_x \quad {}^i g_y \quad {}^i g_z]^T$ les composantes de l'accélération de la gravité dans le repère R_i , nous pouvons établir sans difficulté que les composantes ${}^i g_x$ et ${}^i g_y$ sont des fonctions de la variable articulaire q_i linéairement indépendantes, et ce pour toutes les articulations i rotoïdes si l'articulation R_1 n'est pas parallèle à la gravité, et pour toutes les

articulations rotoïdes $i \geq R2$ sinon. Dans ce dernier cas nous avons ${}^i g_x = {}^i g_y = 0$ pour $i < R2$. La composante ${}^i g_z$ est toujours constante.

Il apparaît de la relation (3.11) et des fonctions d'énergie mises en jeu que les paramètres inertiels qui seront estimés seront des combinaisons linéaires des paramètres de base recherchés. Aussi allons nous définir un certain nombre de grandeurs inertielles qui nous serviront pour l'ensemble des développements ultérieurs. On désignera par e_1, e_2 et e_3 les trois vecteurs d'une base orthonormée. On définit les scalaires suivants:

$$m_{p,q}^{ij} = \sum_{k=i}^j e_p^T ({}^i P^k {}^i P^{kT}) e_q M_k \quad (p,q) = 1,2,3$$

$$m_{c_u}^{ij} = \sum_{k=i}^j e_3^T \hat{P}^k \hat{e}_3 {}^u A^k M S_k$$

On note également les matrices (3x1) suivantes:

$$Q_u^{ij} = \sum_{k=i}^j {}^u P^k M_k = [Q_{u_x}^{ij} \quad Q_{u_y}^{ij} \quad Q_{u_z}^{ij}]^T$$

$$RC_p^{ij} = \sum_{k=i}^j (e_p^T {}^i P^k) {}^i A^k M S_k = [RC_{p_x}^{ij} \quad RC_{p_y}^{ij} \quad RC_{p_z}^{ij}] \quad p = 1,2,3$$

$$MC^{ij} = \sum_{k=i}^j {}^i A^k M S_k = [MC_x^{ij} \quad MC_y^{ij} \quad MC_z^{ij}]^T \quad (3.12)$$

Pour alléger les écritures, l'indice (j) des paramètres ci dessus pourra être omis lorsque les sommes seront appliquées jusqu'à l'ordre N, de même que les indices (u) lorsque (u=i). Par la suite, seul le terme MC^i sera directement identifié. Les autres termes ne serviront qu'à exprimer de manière concise des quantités utilisant des termes inertiels déjà estimés lors de précédents tests.

Les masses (regroupées) des articulations prismatiques ayant été estimées lors des tests du paragraphe précédent, les composantes de Q^i sont ici supposées connues. Cela nous permet alors d'écrire:

$$W_i + \Delta [{}^i g_x] Q_x^i + \Delta [{}^i g_y] Q_y^i = [-\Delta [{}^i g_x] \quad -\Delta [{}^i g_y] \quad \Delta f_{v_i} \quad \Delta f_{s_i}] \begin{bmatrix} MC_x^i \\ MC_y^i \\ F_{v_i} \\ F_{s_i} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Dans le cas où l'articulation rotoïde est toujours parallèle à la gravité, la relation précédente se réduit à l'équation ci après où seuls les frottements peuvent être identifiés:

$$W_i = [\Delta f_{v_i} \quad \Delta f_{s_i}] \begin{bmatrix} F_{v_i} \\ F_{s_i} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Les relations (3.13) et (3.14) nous permettent ainsi d'estimer les frottements secs et visqueux de toutes les articulations i rotoïdes, ainsi que les composantes MC_x^i et MC_y^i du paramètre MC^i défini plus haut pour $i \geq R1$ si $R1$ n'est pas parallèle à la gravité, et pour $i \geq R2$ sinon. La connaissance de ces deux dernières composantes sera utilisée lors des tests qui vont suivre pour retrouver les paramètres de base recherchés. Notons que si la dernière articulation N est rotoïde, les termes MC_x^i et MC_y^i correspondent aux paramètres minimaux recherchés MX_N et MY_N .

III.3 / Tests 3: Mouvements simultanés d'une articulation rotoïde (i) à vitesse constante et d'une articulation prismatique ($p > i$) à vitesse non constante

Le choix d'une vitesse de rotation constante a ici pour but de ne pas avoir à faire intervenir les composantes des tenseurs d'inertie dans le bilan énergétique. La position relative de l'articulation prismatique p par rapport à l'articulation rotoïde i sera précisée

par la suite. Compte tenu que la variation d'énergie cinétique de tous les corps antérieurs à la prismatique p est nulle, le bilan énergétique s'écrit:

$$\begin{aligned}
 & W_i + W_p - (\Delta f_{S_i} F_{S_i} + \Delta f_{V_i} F_{V_i} + \Delta f_{S_p} F_{S_p} + \Delta f_{V_p} F_{V_p}) \\
 & = \sum_{k=i}^N (\Delta [DU_S^k] MS_k + \Delta [DU_M^k] M_k) + \sum_{k=p}^N (\Delta [DE_S^k] MS_k + \Delta [DE_M^k] M_k)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nous développons l'expression du second membre de cette relation afin de mettre en évidence les grandeurs inertielles déjà identifiées lors des tests précédents et celles qu'il nous reste à estimer. Afin de ne pas alourdir les expressions, nous désignerons par a_{ij} l'élément générique (constant) de la matrice de rotation ${}^iA^P$. La contribution des différentes masses aux variations d'énergie potentielle s'écrit, après calcul:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=i}^N \Delta [DU_M^k] M_k & = \Delta [{}^i g_x] Q_x^i + \Delta [{}^i g_y] Q_y^i \\
 & + (a_{13} \Delta [q_p {}^i g_x] + a_{23} \Delta [q_p {}^i g_y] + a_{33} {}^i g_z \Delta [q_p]) M_p^*
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Le terme de masse augmentée est utilisé sachant qu'il correspond à la somme des masses regroupées des articulations prismatiques. Les moments d'ordre un contribuent pour leur part à la variation d'énergie potentielle suivant la relation:

$$\sum_{k=i}^N \Delta [DU_S^k] MS_k = \Delta [{}^i g_x] MC_x^i + \Delta [{}^i g_y] MC_y^i \tag{3.17}$$

La variation d'énergie cinétique due aux masses regroupées se traduit par la relation:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^N \Delta [DE_M^k] M_k &= \frac{1}{2} (\Delta [\dot{q}_p^2] - \dot{q}_i^2 (a_{13}^2 + a_{23}^2) \Delta [q_p^2]) M_p^* \\
&+ (a_{13} \dot{q}_i^2 \Delta [q_p] + a_{23} \dot{q}_i \Delta [\dot{q}_p]) Q_x^p \\
&+ (a_{23} \dot{q}_i^2 \Delta [q_p] - a_{13} \dot{q}_i \Delta [\dot{q}_p]) Q_y^p
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Compte tenu des deux étapes précédentes, les relations (3.16) à (3.18) s'expriment en fonction de paramètres inertiels déjà estimés. Lorsque l'on considère l'apport des moments d'ordre un à la variation d'énergie cinétique, il vient:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^N \Delta [DE_S^k] MS_k &= (\dot{q}_i^2 \Delta [q_p] [-a_{21} a_{33} \quad -a_{32} a_{33} \quad 1-a_{33}^2] \\
&+ \dot{q}_i \Delta [\dot{q}_p] [-a_{32} \quad a_{31} \quad 0]) MC^p
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Cette dernière équation est la seule du bilan énergétique à faire intervenir des termes inertiels inconnus, en l'occurrence le paramètre MC^p . Il apparaît de cette relation que l'identification des moments d'ordre un des articulations prismatiques se fera de proche en proche, en faisant intervenir les composantes MC_x^i et MC_y^i identifiées précédemment pour les articulations rotoïdes. Nous considérerons séparément les cas où l'articulation prismatique p succède ou précède l'articulation rotoïde R2. Les articulations seront désignées de la manière suivante:

S(i) : première articulation rotoïde succédant à l'articulation i .

R(i) : première articulation rotoïde précédant l'articulation i .

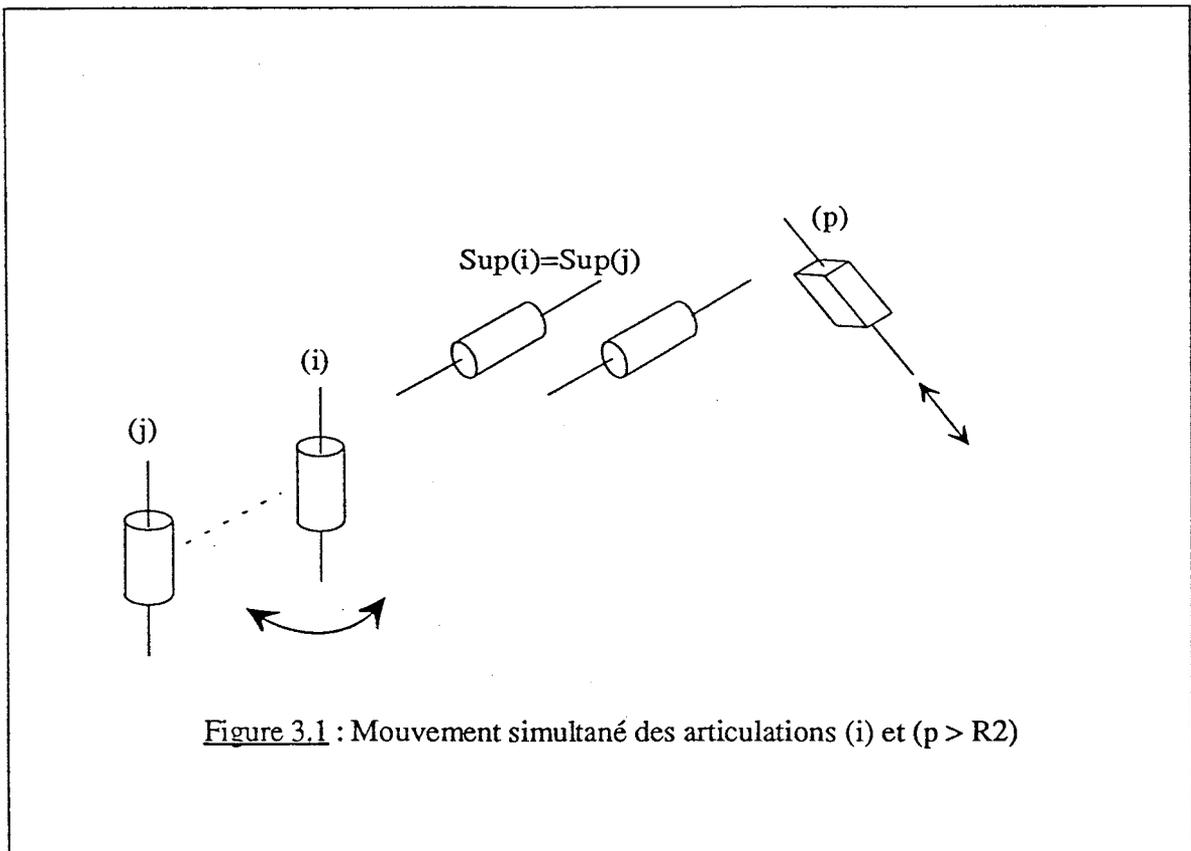
Sup(i) : première articulation rotoïde succédant à l'articulation i et d'axe non parallèle à z_i .

Inf(i) : première articulation rotoïde précédant l'articulation i et d'axe non parallèle à z_i .

Ainsi, toutes les articulations comprises entre Inf (i) et Sup (i) sont parallèles, de même que Sup(R1) représente la rotoïde R2.

a) L'articulation prismatique p succède à l'articulation rotoïde $R2$

Les articulations rotoïde i et prismatique p qui sont mises en mouvement sont choisies telles que $p > \text{Sup}(i)$. (figure 3.1) On montre alors que les coefficients a_{31} , a_{32} et a_{33} sont des fonctions linéairement indépendantes des variables articulaires rotoïdes q_j avec $j \geq \text{Sup}(i)$. (Le terme a_{33} peut être constant si $p < \text{Sup}(\text{Sup}(i))$ mais les trois coefficients demeurent indépendants). Ainsi, en choisissant $Q \geq 3$ positions adéquates pour ces variables articulaires rotoïdes q_j et en réalisant Q mouvements tests, la relation (3.19) utilisée dans le bilan énergétique permet de former un système linéaire de Q équations à trois inconnues permettant d'identifier les trois composantes du paramètre MC^p .



La connaissance des termes MC_x^i et MC_y^i des articulations i rotoïdes (tests précédents) ainsi que des trois composantes de MC^p des articulations prismatiques permet de déterminer tous les paramètres de base des moments d'ordre un des articulations $R2$ à N . En effet, partant de l'effecteur vers la base du robot et tenant compte du fait que la

composante MZ_k des articulations rotoïdes est mise à zéro, nous retrouvons tous les paramètres recherchés grâce à la relation:

$$MC^k = MS_k + {}^k A^{k+1} MC^{k+1} \quad (3.20)$$

b) l'articulation prismatique p précède l'articulation rotoïde R2

Dans ce cas, il n'est plus possible d'avoir la configuration $p > \text{Sup}(i)$. Nous prendrons pour articulation rotoïde i la dernière articulation précédant la prismatique p . (en d'autres termes $i=R(p)$). (figure 3.2) Les coefficients a_{ij} définis plus haut sont alors ceux des regroupements particuliers du second chapitre. Ceux ci sont désormais constants.

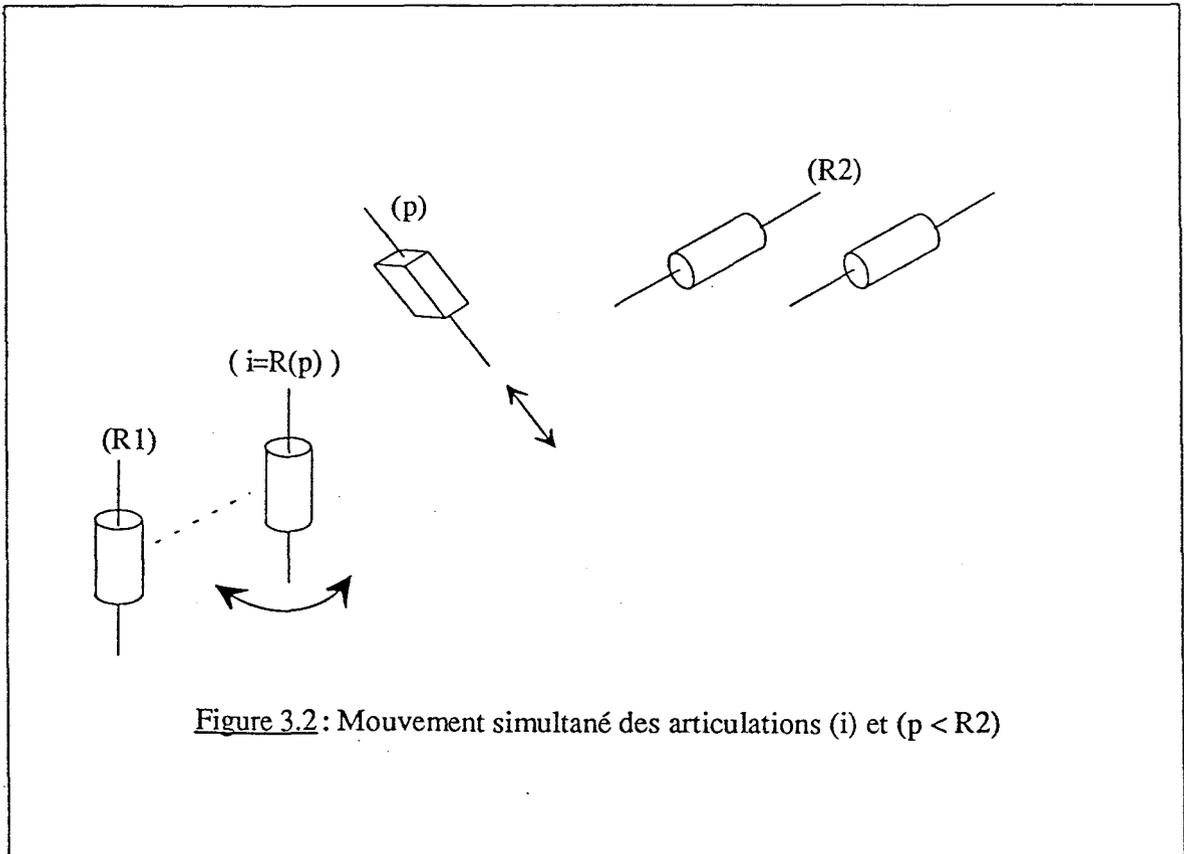


Figure 3.2 : Mouvement simultané des articulations (i) et ($p < R2$)

Supposons dans un premier temps connus le paramètre MC^{p+1} . Les relations (3.19) et (3.20) nous permettent alors de n'avoir pour seules inconnues que les composantes de

MS_k . Celles ci étant affectées de coefficients non indépendants, elles ne pourront être identifiées que sous forme de combinaisons linéaires à coefficients constants. Si l'on désigne par $G(q, \dot{q})$ la fonction de l'équation énergétique regroupant l'ensemble des termes connus, la relation de départ (3.15) peut être réécrite sous la forme:

$$G(q, \dot{q}) = \dot{q}_i^2 \Delta [q_p] M1_p + q_i \Delta [\dot{q}_p] M2_p \quad (3.21)$$

où $M1_p$ et $M2_p$ représentent les paramètres à estimer, avec:

$$\begin{aligned} M1_p &= -a_{31} a_{33} MX_p - a_{32} a_{33} MY_p + (1 - a_{33}^2) MZ_p \\ M2_p &= -a_{32} MX_p - a_{31} MY_p \end{aligned} \quad (3.22)$$

En réalisant ainsi $Q \geq 2$ tests à différentes vitesses constantes \dot{q}_i , la relation (3.21) nous fournit un système linéaire de Q équations à deux inconnues, $M1_p$ et $M2_p$. Selon l'orientation de l'axe z_p par rapport au repère R_1 , et en accord avec les regroupements particuliers du second chapitre, on retrouve sans difficulté les paramètres de base recherchés. Par exemple, lorsque z_p n'est ni parallèle ni perpendiculaire à z_{R1} , le paramètre MZ_p est mis à zéro (car il est regroupé), et l'on déduit les solutions MX_p et MY_p recherchées:

$$\begin{aligned} MX_p &= -1/(1-a_{33}^2) (a_{32} M2_p + a_{31}/a_{33} M1_p) \\ MY_p &= 1/(1-a_{33}^2) (a_{32} M1_p - a_{32}/a_{33} M1_p) \end{aligned} \quad (3.23)$$

De même, lorsque c'est MX_p qui est regroupé, il vient:

$$\begin{aligned} MY_p &= M2_p / a_{31} \\ MZ_p &= 1/(1 - a_{33}^2) (M1_p + a_{32} a_{33}/a_{31} M2_p) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Rappelons enfin que l'identification de ces paramètres est soumise à la condition que les paramètres MC^{p+1} soient connus. Si R1 n'est pas parallèle à la gravité, une identification de proche en proche permet effectivement d'avoir accès à l'ensemble des paramètres recherchés. Dans le cas contraire, on se heurte à l'indétermination des composantes MC_x^i et MC_y^i des articulations i rotoïdes antérieures à R2, celles-ci n'ayant pu être identifiées lors de mouvements axe par axe à vitesse constante. Ces deux inconnues devront être estimées au moyen d'autres mouvements tests avant de revenir à la présente procédure.

Pour résumer, nous pouvons identifier à ce stade les frottements secs et visqueux de toutes les articulations, ainsi que les masses regroupées de toutes les articulations prismatiques. Les moments d'ordre un peuvent être identifiés pour toutes les articulations si R1 n'est pas parallèle à la gravité, et pour les articulations succédant à $\text{Inf}(R2)$ sinon. Les procédures qui vont suivre sont consacrées à l'identification des composantes des tenseurs d'inertie des articulations rotoïdes ainsi que des termes MC_x^i et MC_y^i des articulations rotoïdes $i \leq \text{Inf}(R2)$.

III.4 / Test 4: Mouvements axe par axe des articulations i rotoïdes, à vitesse non constante

Nous ne considérons pas, dans un premier temps, les articulations antérieures à $\text{Inf}(R2)$, afin de ne pas faire intervenir d'éventuels paramètres MX_i ou MY_i non encore identifiés. La variation d'énergie potentielle du robot s'exprime de la même manière que lors des mouvements à vitesse constante, à savoir:

$$\sum_{k=i}^N \Delta [DU_S^k] MS_k = -\Delta [{}^i g_x] MC_x^i - \Delta [{}^i g_y] MC_y^i$$

$$\sum_{k=i}^N \Delta [DU_M^k] M_k = -\Delta [{}^i g_x] Q_x^i - \Delta [{}^i g_y] Q_y^i \quad (3.25)$$

a) $i \geq \text{Inf}(R2)$

La variation d'énergie cinétique due aux masses et moments d'ordre un se traduit, après calculs, par les relations :

$$\sum_{k=i}^N \Delta [DE_M^k] M_k = -\frac{1}{2} \Delta [\dot{q}_i^2] (m_{1,1}^i + m_{2,2}^i)$$

$$\sum_{k=i}^N \Delta [DE_S^k] MS_k = \Delta [\dot{q}_i^2] mc^i \quad (3.26)$$

Pour toutes les rotoïdes $i \geq \text{Inf}(R2)$, les relations (3.25) et (3.26) s'expriment en fonction de paramètres inertiels déjà estimés. Les seuls termes restant à identifier seront donc les éléments des tenseurs d'inertie des articulations rotoïdes. Comme précédemment, nous procédons de proche en proche, de l'effecteur vers la base du robot. Sachant que les articulations rotoïdes antérieures à $\text{Sup}(i)$ sont parallèles à z_i , les fonctions d'énergie associées aux tenseurs d'inertie nous permettent d'écrire:

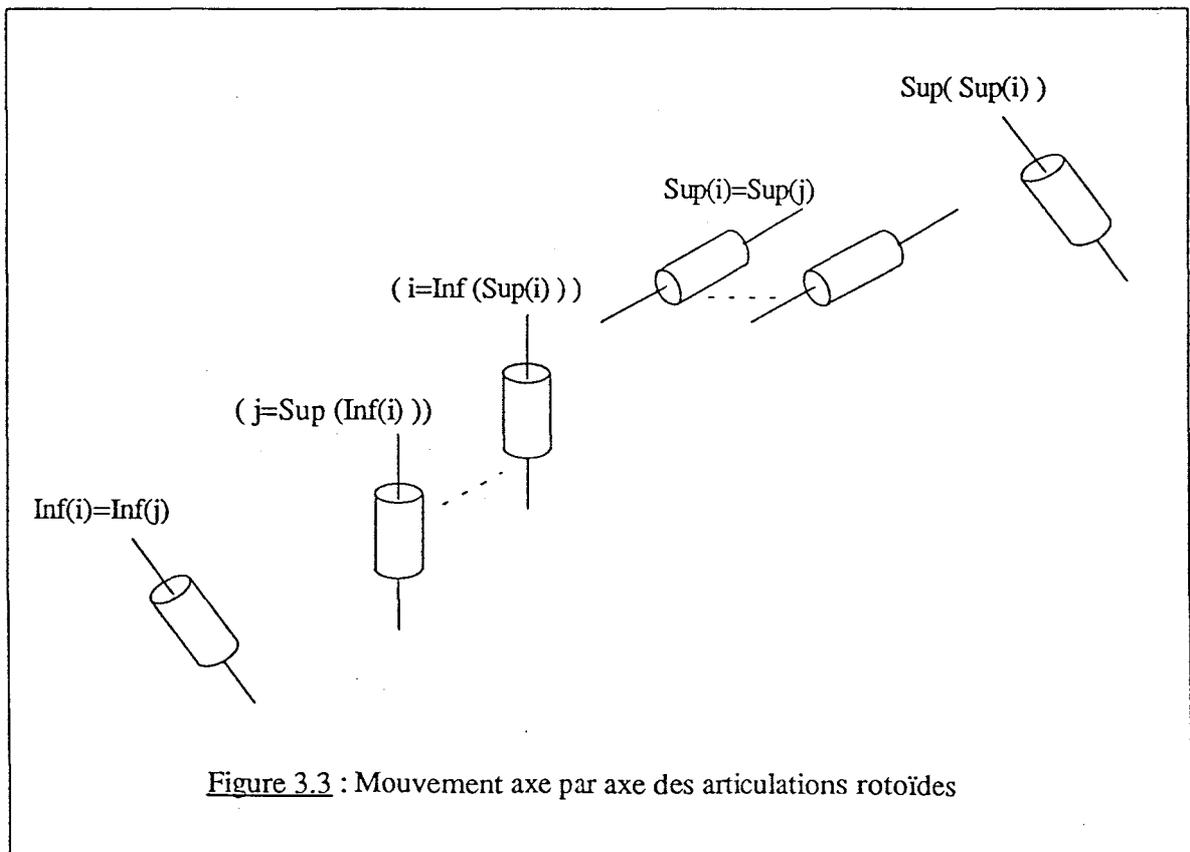
$$\sum_{k=i}^N \Delta [DE_J^k] \bar{J}_k = \Delta [\dot{q}_i^2] \sum_{k=i}^{\text{Inf}(\text{Sup}(i))} ZZ_k + \sum_{k=\text{Sup}(i)}^N \Delta [DE_J^k] \bar{J}_k \quad (3.27)$$

Rappelons que les éléments des tenseurs d'inertie des articulations prismatiques sont mis à zéro dans cette relation.

Considérons tout d'abord la dernière rotoïde i de la chaîne cinématique; Aucune articulation rotoïde ne lui succède et la relation (3.27), utilisée dans le bilan énergétique, permet d'identifier directement le paramètre ZZ_i . Considérons maintenant le dernier groupe d'articulations rotoïdes parallèles de la chaîne cinématique; Il n'existe pas d'articulation $\text{Sup}(i)$. En procédant de proche en proche, nous pouvons ainsi identifier l'ensemble des paramètres ZZ_k de ce groupe d'articulations.

D'une manière plus générale, supposons connus les tenseurs d'inertie J_k pour $k \geq \text{Sup}(i)$, la même procédure permet d'identifier les composantes ZZ_k pour $\text{Inf}(i) < k < \text{Sup}(i)$

Dans un second temps, l'articulation i mise en mouvement sera la première rotoïde antérieure à $\text{Sup}(i)$, en d'autres termes $i = \text{Inf}(\text{Sup}(i))$. Supposons connus les termes ZZ_k pour $\text{Sup}(i) \leq k < \text{Sup}(\text{Sup}(i))$, ainsi que les tenseurs d'inertie J_k pour $k \geq \text{Sup}(\text{Sup}(i))$. Notre but est d'identifier les paramètres ZZ_i et XX_k, XY_k, XZ_k, YZ_k pour $\text{Sup}(i) \leq k < \text{Sup}(\text{Sup}(i))$. (figure 3.3). Les tenseurs d'inertie J_k seront alors connus pour $k \geq \text{Sup}(i)$ et la relation (3.27) nous permettra d'avoir accès aux termes ZZ_k pour $\text{Sup}(\text{Inf}(i)) \leq k < \text{Inf}(\text{Sup}(i))$. La procédure est ainsi réitérée jusqu'à identifier le paramètre $ZZ_{\text{Inf}(R2)}$ ainsi que les tenseurs d'inertie J_k pour $k \geq R2$. Examinons maintenant comment identifier ZZ_i et XX_k, XY_k, XZ_k, YZ_k pour $\text{Sup}(i) \leq k < \text{Sup}(\text{Sup}(i))$:



On notera pour simplifier $a_{ij}(k)$ l'élément générique de la matrice de rotation ${}^iA^k$. On établit aisément que pour le groupe d'articulations rotoïdes parallèles k telles que $\text{Sup}(i) \leq k < \text{Sup}(\text{Sup}(i))$, les composantes $a_{31}(k)$ et $a_{32}(k)$ sont des fonctions de la variable articulaire θ_k linéairement indépendantes. L'orientation de z_k étant constante dans le repère R_i , le terme $a_{33}(k)$ est, quant à lui, constant, éventuellement nul si $\text{Sup}(i)$ est perpendiculaire à l'articulation i . ($a_{33}(k)=a_{33}$). Enfin, les termes inertiels YY_k n'étant pas pris en compte du fait de leur regroupement, la variation d'énergie cinétique due aux tenseurs d'inertie peut s'écrire:

$$\sum_{k=i}^N \Delta [DE_j^k] \bar{J}_k = \sum_{k=\text{Sup}(\text{Sup}(i))}^N \Delta [DE_j^k] \bar{J}_k + \Delta [\dot{q}_i^2] \frac{1}{2} a_{33}^2 \sum_{k=\text{Sup}(i)}^{\text{Inf}(\text{Sup}(\text{Sup}(i)))} ZZ_k$$

$$+ \Delta [\dot{q}_i^2] \left(ZZ_i + \sum_{k=\text{Sup}(i)}^{\text{Inf}(\text{Sup}(\text{Sup}(i)))} \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} a_{31}^2(k) & a_{31}(k) a_{32}(k) & a_{31}(k) a_{33} & a_{32}(k) a_{33} \end{array} \right] \begin{array}{l} XX_k \\ XY_k \\ XZ_k \\ YZ_k \end{array} \right)$$

(3.28)

La seconde ligne de cette équation regroupe l'ensemble des paramètres inertiels inconnus dans le bilan énergétique. L'étude se fera en une ou deux étapes selon que $\text{Sup}(i)$ est perpendiculaire ou non à l'articulation i :

***i*) $\text{Sup}(i)$ n'est pas perpendiculaire à (i) .**

Supposons dans un premier temps que $\text{Sup}(i)$ n'est pas perpendiculaire à i , ce qui correspond à $a_{33} \neq 0$. Dans ce cas, les coefficients $a_{31}^2(k)$, $a_{31}(k) a_{32}(k)$, $a_{31}(k) a_{33}$ et $a_{32}(k) a_{33}$ sont des fonctions de la variable articulaire θ_k linéairement indépendantes. Soit $r(i)$ le nombre d'articulations rotoïdes comprises entre $\text{Inf}(\text{Sup}(i))$ et $\text{Sup}(\text{Sup}(i))$; En choisissant $Q \geq 1+4r(i)$ positions adéquates pour les variables θ_k , les

bilans énergétiques nous fournissent un système linéaire de Q équations à $1+4r(i)$ inconnues permettant d'identifier les termes ZZ_i et XX_k , XY_k , XZ_k , YZ_k pour $\text{Sup}(i) \leq k < \text{Sup}(\text{Sup}(i))$.

ii) $\text{Sup}(i)$ est perpendiculaire à (i)

Si maintenant $\text{Sup}(i)$ est perpendiculaire à l'articulation i ($a_{33}=0$), les paramètres XZ_k et YZ_k ci dessus ne pourront être identifiés par cette procédure et l'on aboutit à un système de Q équation à $1+2r(i)$ inconnues.

$$\sum_{k=i}^N \Delta [DE_j^k] \bar{J}_k = \sum_{k=\text{Sup}(\text{Sup}(i))}^N \Delta [DE_j^k] \bar{J}_k +$$

$$\Delta [\dot{q}_i^2] \left(ZZ_i + \sum_{k=\text{Sup}(i)}^{\text{Inf}(\text{Sup}(\text{Sup}(i)))} \left(\left[\frac{1}{2} a_{31}^2(k) \quad a_{31}(k) \quad a_{32}(k) \right] \begin{bmatrix} XX_k \\ XY_k \end{bmatrix} \right) \right) \quad (3.29)$$

L'estimation de XZ_k et YZ_k devra alors se faire par un autre moyen avant de revenir à la présente procédure. Cette étude fait l'objet du test 5.

b) $i < \text{Inf}(R2)$

Rappelons que nous n'avons considéré en début de paragraphe que les articulations rotoïdes supérieures ou égale à $\text{Inf}(R2)$. Si $R1$ n'est pas parallèle à la gravité, il n'y a pas d'indétermination sur les paramètres MC_x^i et MC_y^i des articulations i rotoïdes comprises entre $R1$ et $R2$, et les développements ci dessus peuvent être prolongés jusqu'à identifier les termes $ZZ_{R1}, \dots, ZZ_{\text{Inf}(R2)}$, ainsi que les tenseurs d'inertie J_k pour $k \geq R2$, ce qui correspond à l'ensemble des paramètres inertiels recherchés.

Si R1 est parallèle à la gravité, aux inconnues ZZ_k antérieures à $\text{Inf}(R2)$ viennent s'ajouter les composantes MC_x^i et MC_y^i des articulations i comprises entre R1 et R2. En effet, la contribution des moments d'ordre un à la variation d'énergie potentielle est nulle (relation (3.25) dans laquelle $\Delta [{}^i g_x] = \Delta [{}^i g_y] = 0$), tandis que la variation d'énergie cinétique ne s'exprime plus uniquement en fonction de termes inertiels connus. Aussi allons nous chercher à identifier les paramètres MC_x^i et MC_y^i jusque là indéterminés, ainsi que les termes ZZ_k pour $R1 \leq k < \text{Inf}(R2)$, en faisant appel alternativement aux tests 3 et 4.

La contribution des moments d'ordre un et des tenseurs d'inertie à la variation d'énergie cinétique peut s'écrire:

$$\sum_{k=i}^N \Delta [DE_j^k] \bar{J}_k + \Delta [DE_s^k] MS_k = \Delta [q_i^2] (mc^i + ZZ_i + \dots + ZZ_{\text{Inf}(R2)}) + \sum_{k=R2}^N \Delta [DE_j^k] \bar{J}_k \quad (3.30)$$

Le second terme du deuxième membre étant désormais connu, on développe l'expression du premier membre afin de mettre en évidence les grandeurs inertielles à identifier. Soit j la première rotoïde succédant à l'articulation i ; En désignant pour simplifier par a_{ij} et P_x, \dots, P_z les composantes de ${}^i A^j$ et ${}^i P^j$, il vient après calcul:

$$\Delta [q_i^2] (mc_i^{i,N} + ZZ_i + \dots + ZZ_{\text{Inf}(R2)}) = \Delta [q_i^2] ((mc_i^{i,j-1} + mc_i^{j+1,N} + ZZ_i + \dots + ZZ_{\text{Inf}(R2)}) + [(a_{11}P_x + a_{21}P_y) (a_{12}P_x + a_{22}P_y)] \begin{bmatrix} MX_j \\ MY_j \end{bmatrix}) \quad (3.31)$$

L'articulation i mise en mouvement est, dans un premier temps, la première rotoïde antérieure à $\text{Inf}(R2)$, soit $i=R(\text{Inf}(R2))$, et par suite $j=\text{Inf}(R2)$.

Le cas des articulations rotoïdes confondues étant écarté ($(P_x, P_y) = (0, 0)$), nous pouvons établir sans difficulté que les deux composantes MX_i et MY_i sont affectées de coefficients de la variable articulaire θ_i linéairement indépendants.

Les moments d'ordre un des articulations succédant à $j = \text{Inf}(R_2)$ étant connus, le paramètre $mc_i^{j,N}$ est connu. Il en est de même pour $ZZ_j = ZZ_{\text{Inf}(R_2)}$. En prenant $Q \geq 3$ positions adéquates pour θ_i , les relations (3.30) et (3.31) utilisées dans le bilan énergétique permettent d'identifier MX_j , MY_j , ainsi que le terme inertiel $[(ZZ_i + mc_i^{i,j-1}) + (ZZ_j + mc_i^{j+1,N})]$.

Connaissant MX_j et MY_j , on revient au test 3 afin d'identifier tous les termes MC^k des articulations prismatiques comprises entre i et j . Dès lors, le paramètre $mc_i^{i,j-1}$ devient connu ce qui nous permet d'avoir accès au terme ZZ_j .

Le même procédé est effectué pour l'articulation rotoïde $R(i)$ antérieure à i ; (les articulations rotoïdes (i) et (j) sont *décalées* d'un cran vers la base du robot.) On identifie MX_i et MY_i , puis, à l'aide du test 3, les paramètres MC^k pour $R(i) < k < i$, et, en revenant au test 4, le terme $ZZ_{R(i)}$. L'opération est ainsi répétée de proche en proche jusqu'à identifier ZZ_{R_1} ainsi que MC^k pour $k > R_1$.

A ce stade de notre étude, les seuls paramètres non encore identifiés sont les moments MX_{R_1} et MY_{R_1} dans le cas où R_1 est parallèle à la gravité et où il existe une articulation prismatique antérieure et non parallèle à R_1 , ainsi que les composantes XZ_k et YZ_k pour les articulations rotoïdes telles que l'axe z_k est perpendiculaire à $\text{Inf}(k)$. L'identification de ces deux derniers paramètres fait l'objet du paragraphe qui va suivre.

III.5 / Tests 5: Mouvement simultané de deux articulations rotoïdes i et $(j > i)$ d'axes non parallèles, à des vitesses \dot{q}_i constante et \dot{q}_j non constante

Cette étape a pour but d'identifier les paramètres XZ_k et YZ_k des articulations rotoïdes k telles que l'axe z_k est perpendiculaire à $\text{Inf}(k)$. La variation d'énergie potentielle du robot se traduit par les relations:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^N \Delta [DU_M^k] M_k &= -\Delta [{}^i g^T] (Q^{i,j-1} + {}^i P^j M_j^*) - \Delta [{}^j g^T] Q^j \\
\sum_{k=i}^N \Delta [DU_S^k] MS_k &= -\Delta [{}^i g^T] MC^{i,j-1} - \Delta [{}^j g^T] MC^j
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Les corps précédant l'articulation (j) ont une variation d'énergie cinétique nulle. En désignant par a_{ij} l'élément générique de la matrice de rotation ${}^i A^j$, la contribution des masses aux variations d'énergie cinétique fournit, après calcul:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=j}^N \Delta [DE_M^k] M_k &= m_{11}^j (-\dot{q}_i^2 \Delta[a_{31}^2] - \Delta[\dot{q}_j^2]) + m_{12}^j (2 \dot{q}_i^2 \Delta[a_{31} a_{32}]) \\
&+ m_{13}^j (2 \dot{q}_i \Delta[\dot{q}_j a_{31}]) + m_{22}^j (-\dot{q}_i^2 \Delta[a_{32}^2] - \Delta[\dot{q}_j^2]) \\
&+ m_{23}^j (2 \dot{q}_i \Delta[\dot{q}_j a_{32}]) \\
&+ 2 \dot{q}_i (-P_y \Delta[\dot{q}_j a_{11}] + P_x \Delta[\dot{q}_j a_{21}]) Q_x^j \\
&+ 2 \dot{q}_i (P_y \Delta[\dot{q}_j a_{12}] - P_x \Delta[\dot{q}_j a_{22}]) Q_y^j \\
&- 2 \dot{q}_i^2 (P_x \Delta[a_{11} a_{12} a_{13}] + P_y \Delta[a_{21} a_{22} a_{23}]) Q^j
\end{aligned} \tag{3.33}$$

La variation d'énergie cinétique des moments d'ordre un s'écrit:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=j}^N \Delta [DE_S^k] MS_k &= RC_{1x}^j (\dot{q}_i^2 \Delta[a_{11}] + \Delta[\dot{q}_j^2] - \dot{q}_i \Delta[a_{22} \dot{q}_j]) \\
&+ RC_{1y}^j (\dot{q}_i^2 \Delta[a_{21}] + \dot{q}_i \Delta[a_{12} \dot{q}_j]) \\
&+ RC_{2x}^j (\dot{q}_i^2 \Delta[a_{12}] + \dot{q}_i \Delta[a_{21} \dot{q}_j]) \\
&+ RC_{2y}^j (\dot{q}_i^2 \Delta[a_{22}] + \Delta[\dot{q}_j^2] - \dot{q}_i \Delta[a_{11} \dot{q}_j]) \\
&+ RC_{3x}^j (\dot{q}_i^2 \Delta[a_{13}] - \dot{q}_i \Delta[a_{31} \dot{q}_j]) + RC_{3y}^j (\dot{q}_i^2 \Delta[a_{23}] - \dot{q}_i \Delta[a_{32} \dot{q}_j]) \\
&+ (\dot{q}_i P_x \Delta[-a_{22} \dot{q}_j \ a_{21} \dot{q}_j \ 0] + \dot{q}_i P_y \Delta[a_{12} \dot{q}_j \ -a_{11} \dot{q}_j \ 0]) MC^j
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Les relations (3.32) à (3.34) s'expriment toutes en fonction de grandeurs inertielles désormais connues. L'articulation j choisie sera telle que $\text{Sup}(i) \leq j < \text{Sup}(\text{Sup}(i))$.

Lorsque l'on considère les éléments de tenseurs d'inertie, il vient la relation:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=j}^N \Delta [DE_j^k] \bar{J}_k &= \sum_{k=j+1}^N \Delta [DE_j^k] \bar{J}_k \\
&+ \frac{1}{2} \dot{q}_i^2 \Delta [a_{31}^2] XX_j + \dot{q}_i^2 \Delta [a_{31}a_{32}] XY_j + \frac{1}{2} \Delta [q_j^2] ZZ_j \\
&+ \dot{q}_i (\Delta [\dot{q}_j a_{31}] \quad \Delta [\dot{q}_j a_{32}]) \begin{bmatrix} XZ_j \\ YZ_j \end{bmatrix} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Les coefficients a_{31} et a_{32} sont des fonctions de la variable articulaire θ_j linéairement indépendantes. Supposons connus les tenseurs d'inertie pour $k > j$. La dernière ligne de cette équation est alors la seule à faire intervenir des paramètres inertiels inconnus. En choisissant $Q \geq 2$ positions adéquates pour θ_j , la relation (3.33) utilisée dans le bilan énergétique nous fournit un système linéaire de deux équations à deux inconnues XZ_j et YZ_j . Le tenseur d'inertie J_j est alors entièrement déterminé et la procédure est réitérée de proche en proche de l'effecteur vers la base du robot.

La paragraphe suivant est consacré à l'identification des derniers paramètres de base MX_{R1} et MY_{R1} dans le cas où $R1$ est parallèle à la gravité et où il existe une articulation prismatique antérieure et non parallèle à $R1$.

III.6 / Tests 6: Mouvements simultanés d'une articulation prismatique p à vitesse non constante et de l'articulation rotoïde $R1$ à vitesse constante

Le choix de la vitesse de rotation constante a pour but de s'affranchir de l'utilisation des composantes des tenseurs d'inertie dans le bilan énergétique. $R1$ étant parallèle à la gravité, la variation de l'énergie potentielle due aux moments d'ordre un est également nulle. Le bilan énergétique ne fera donc intervenir que les contributions des masses regroupées aux variations d'énergie cinétique et potentielle, ainsi que des moments

d'ordre un aux variations d'énergie cinétique. L'articulation prismatique p (antérieure à R1) mise en mouvement est choisie non parallèle à R1. On désignera enfin par a_{ij} les composantes de la matrice de rotation ${}^pA^{R1}$. Il vient les relations:

$$\sum_{k=p}^N \Delta [DU_M^k] M_k = -\Delta [q_p] ({}^0g^T \quad {}^0z_p) M_p^*$$

$$\sum_{k=p}^N \Delta [DE_M^k] M_k = \Delta [\dot{q}_p^2] M_p^* + 2 \dot{q}_{R1} - (\Delta [\dot{q}_p a_{31}] Q_y^{R1} + \Delta [\dot{q}_p a_{32}] Q_x^{R1})$$

$$\sum_{k=R1}^N \Delta [DE_S^k] MS_k = \dot{q}_{R1} (\Delta [\dot{q}_p a_{32}] \quad \Delta [\dot{q}_p a_{31}]) \begin{bmatrix} MX_{R1} \\ MY_{R1} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

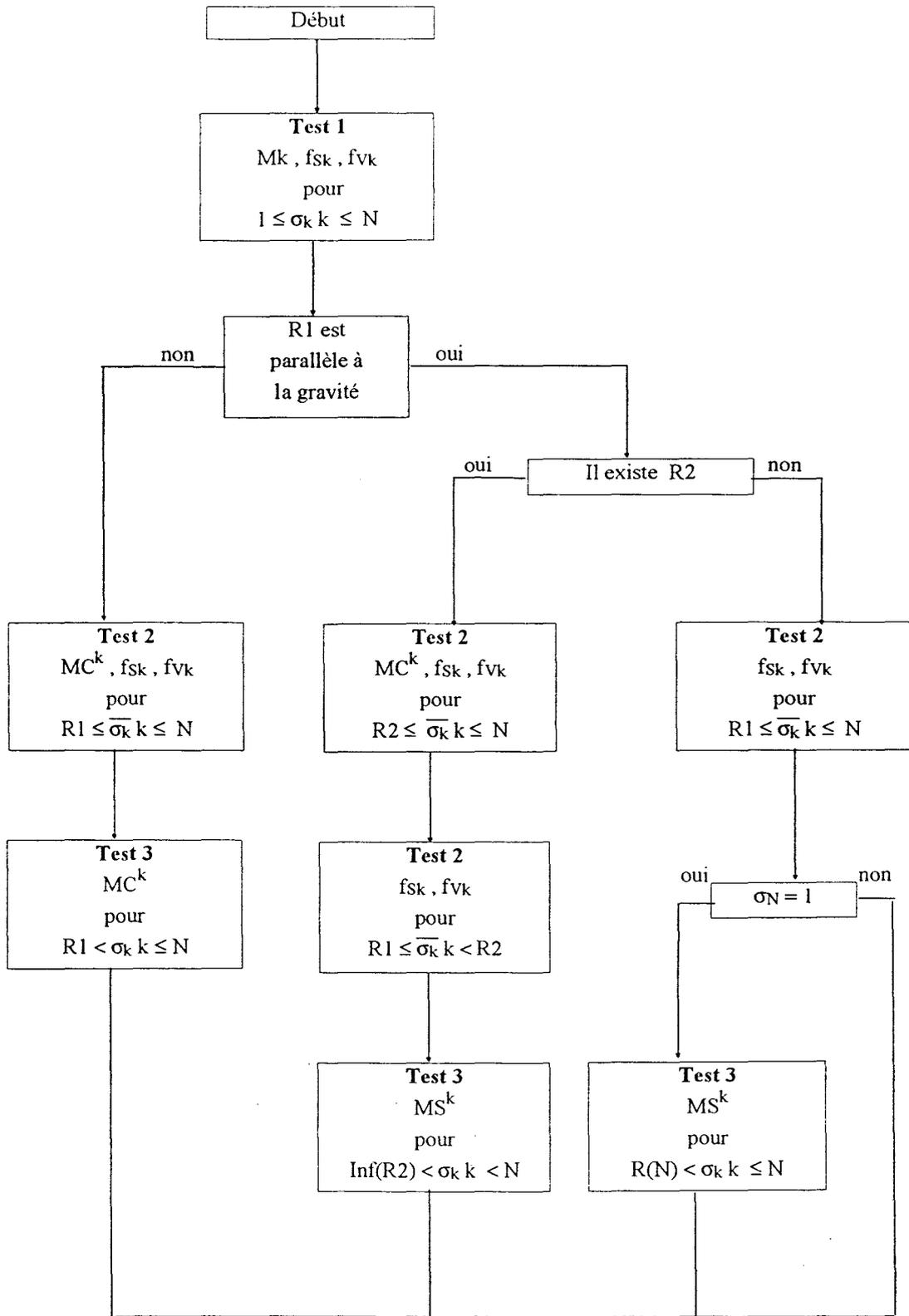
Les termes a_{31} et a_{32} sont des fonctions de la variable θ_{R1} linéairement indépendantes. En utilisant les relations (3.36) dans le bilan énergétique, le même test réalisé pour $Q \geq 2$ positions adéquates de θ_{R1} permet d'avoir accès aux paramètres MX_{R1} et MY_{R1} recherchés.

Avec cette étude s'achève la dernière étape de la procédure d'identification des paramètres inertiels minimaux. Le paragraphe qui va suivre effectue, sous forme d'organigramme, un récapitulatif de l'enchaînement des différents tests.

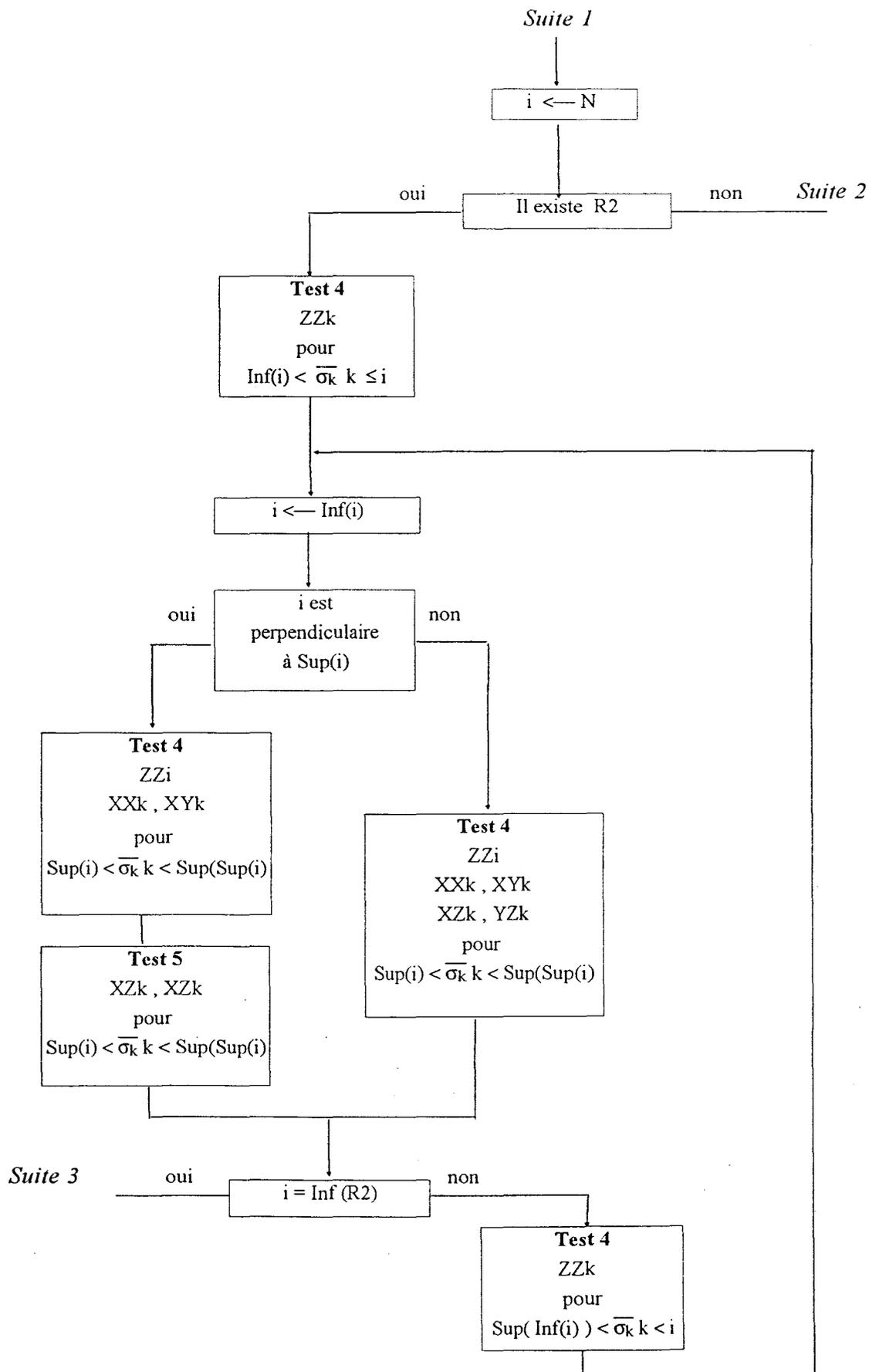
III.7 / Etapes d'identification

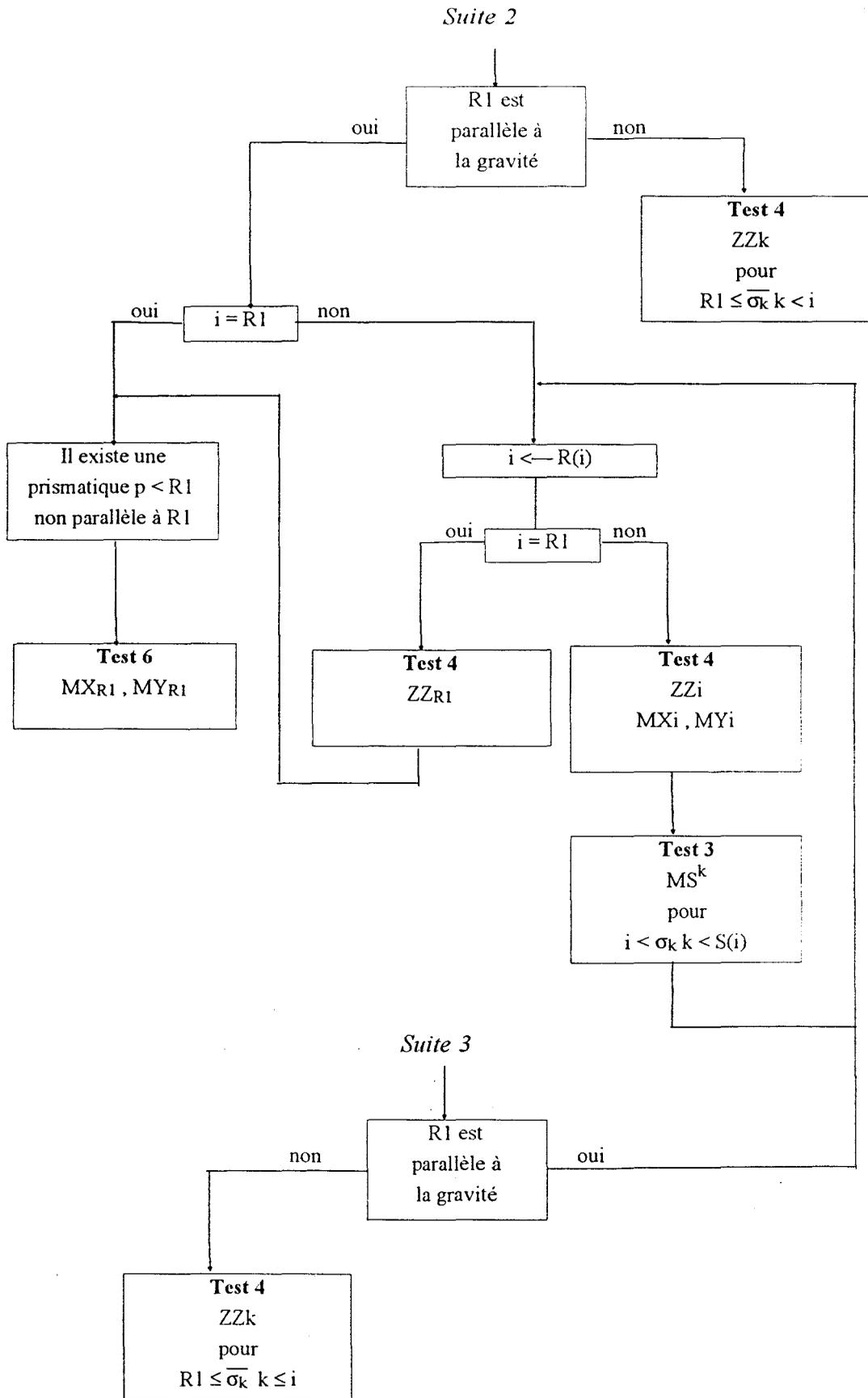
L'organigramme présenté ci après offre une méthode systématique d'identification des paramètres inertiels minimaux ainsi que des frottements secs et visqueux des articulations. Chaque étape indique le type de mouvement à réaliser ainsi que les paramètres de base qui y seront identifiés. Certaines morphologies de robots ne présentant pas d'articulation de type R2, un test supplémentaire portant sur l'existence de ce type d'articulation a été introduit.

On rappelle que $\text{Sup}(i)$ (respectivement $\text{Inf}(i)$) désigne la première articulation rotoïde succédant (respectivement précédant) l'articulation i et d'axe non parallèle à z_i . De même, $S(i)$ ou $R(i)$ désignent respectivement la première articulation rotoïde succédant ou précédant l'articulation i .



Suite 1





IV / EXEMPLE DU ROBOT TH8

Nous présentons dans cet exemple du robot TH8 l'enchaînement des différents tests en y faisant apparaître la relation traduisant le bilan énergétique, les paramètres qui y seront identifiés ainsi que ceux que l'on suppose déjà estimés et qui interviennent dans le bilan énergétique. L'accélération de la gravité a pour composantes ${}^0g=(00g)^T$. Les articulations qui ne sont pas mises en mouvement sont supposées dans leur configuration d'initialisation ($q=0$). Les paramètres de base sont résumés dans le tableau 3-2 suivant:

j	XX _i	XY _i	XZ _i	YY _i	YZ _i	ZZ _i	MX _i	MY _i	MZ _i	M _i
1						ZZR ₁				
2										M ₂
3								MY ₃	MZR ₃	M ₃
4	XXR ₄	XY ₄	XZ ₄		YZ ₄	ZZR ₄	MX ₄	MY ₄		
5	XXR ₅	XY ₅	XZ ₅		YZ ₅	ZZR ₅	MX ₅	MY ₅		
6	XXR ₆	XY ₆	XZ ₆		YZ ₆	ZZ ₆	MX ₆	MY ₆		

Tableau 3-2: Paramètres de base du robot TH8

1/ Test 1: Déplacement à vitesse non constante de l'articulation 3

Paramètres identifiés: M₃, F_{S3}, F_{V3}

$$W_3 = \left[\frac{1}{2} \Delta[\dot{q}_3^2] \quad \Delta f_{S3} \quad \Delta f_{V3} \right] \begin{bmatrix} M_3 \\ F_{S3} \\ F_{V3} \end{bmatrix}$$

2/Test 1: Déplacement à vitesse quelconque de l'articulation 2

Paramètres identifiés: M₂, F_{S2}, F_{V2}

Paramètre utilisé : M₃.

$$W_2 = \left[\left(\frac{1}{2} \Delta[\dot{q}_2^2] - g \Delta[q_3] \right) \Delta f_{S2} \quad \Delta f_{V2} \right] \begin{bmatrix} M_2 + M_3 \\ F_{S2} \\ F_{V2} \end{bmatrix}$$

3/ Test 2: Déplacement à vitesse constante de l'articulation 6

Paramètres identifiés: MX_6, MY_6, FS_6, FV_6

$$W_6 = [-g \Delta[C_6] \quad g \Delta[S_6] \quad \Delta f_{S_6} \quad \Delta f_{V_6}] \begin{bmatrix} MX_6 \\ MY_6 \\ FS_6 \\ FV_6 \end{bmatrix}$$

4/ Test 2: Déplacement à vitesse constante de l'articulation 5

Paramètres identifiés: MX_5, MY_5, FS_5, FV_5

Paramètre utilisé : MX_6

$$W_5 = [-g \Delta[C_5] \quad g \Delta[S_5] \quad \Delta f_{S_5} \quad \Delta f_{V_5}] \begin{bmatrix} MC_x^5 \\ MC_y^5 \\ FS_5 \\ FV_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} MX_5 = MC_x^5 - MX_6 \\ MY_5 = MC_y^5 \end{cases}$$

5/ Test 2: Déplacement à vitesse constante de l'articulation 4

Paramètres identifiés: MX_4, MY_4, FS_4, FV_4

Paramètres utilisés : MX_5, MX_6, MY_6

$$W_4 = [-g \Delta[C_4] \quad g \Delta[S_4] \quad \Delta f_{S_4} \quad \Delta f_{V_4}] \begin{bmatrix} MC_x^4 \\ MC_y^4 \\ FS_4 \\ FV_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} MX_4 = MC_x^4 - MX_5 - MX_6 \\ MY_4 = MC_y^4 - MY_6 \end{cases}$$

6/ Test 2: Déplacement à vitesse constante de l'articulation 1

Paramètres identifiés: FS_1, FV_1

$$W_1 = [\Delta f_{S1} \quad \Delta f_{V1}] \begin{bmatrix} F_{S1} \\ F_{V1} \end{bmatrix}$$

7/ **Test 3:** Déplacement de l'articulation 1 à vitesse constante, et de l'articulation 3 à vitesse non constante

Paramètres identifiés: MY₃, MZ₃.

Paramètres utilisés : MY₄, MY₅, MY₆, FS₁, FV₁, FS₃, FV₃

$$W_1 + W_3 - \Delta f_{S1} F_{S1} - \Delta f_{V1} F_{V1} - \Delta f_{S3} F_{S3} - \Delta f_{V3} F_{V3}$$

$$- (\frac{1}{2} \Delta[\dot{q}_3^2] - \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 \Delta[q_3^2] + \dot{q}_1 r_{03} \Delta[\dot{q}_3]) M_3$$

$$= (\dot{q}_1^2 \Delta[q_3] \quad -\dot{q}_1 \Delta[\dot{q}_3]) \begin{bmatrix} M_{13} \\ M_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} MY_3 = M_{23} - MY_4 - MY_6 \\ MZ_3 = M_{13} - MY_5 \end{cases}$$

8/ **Test 4:** Déplacement à vitesse non constante de l'articulation 6

Paramètres identifiés: ZZ₆

Paramètres utilisés : MX₆, MY₆, FS₆, FV₆

$$W_6 - \Delta f_{S6} F_{S6} - \Delta f_{V6} F_{V6} - g \Delta[S6] MY_6 + g \Delta[C6] MX_6 = \Delta[\dot{q}_6^2] ZZ_6$$

9/ **Test 4:** Déplacement à vitesse non constante de l'articulation 5

Paramètres identifiés: ZZ₅, XX₆, XY₆

Paramètres utilisés : MC_x⁵, MC_y⁵, FS₅, FV₅

$$\begin{aligned}
W_5 - \Delta f_{S5} F_{S5} - \Delta f_{V5} F_{V5} - g \Delta[S5] MC_y^5 + g \Delta[C5] MC_x^5 \\
= \Delta[\dot{q}_5^2] \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} S_5^2 & C_5 S_5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} ZZ_5 \\ XX_6 \\ XY_6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

10/ Test 5: Déplacement de l'articulation 5 à vitesse constante et de l'articulation 6 à vitesse non constante.

Paramètres identifiés: XZ_6, YZ_6

Paramètres utilisés : $MX_5, MY_5, MX_6, MY_6, ZZ_6, XX_6, XY_6, F_{S5}, F_{V5}, F_{S6}, F_{V6}$

$$\begin{aligned}
W_5 + W_6 - \Delta f_{S5} F_{S5} - \Delta f_{V5} F_{V5} - \Delta f_{S6} F_{S6} - \Delta f_{V6} F_{V6} \\
- g (-\Delta[C5] MX_5 + \Delta[S5] MY_5 - \Delta[C5C6] MX_6 + \Delta[C5S6] MY_6) \\
- \frac{1}{2} \dot{q}_5^2 \Delta[S_6^2] XX_6 + \dot{q}_5^2 \Delta[C_6 S_6] XY_6 - \Delta[\dot{q}_6^2] ZZ_6 \\
= -2 \dot{q}_5 (\Delta[\dot{q}_6 S_6] \Delta[\dot{q}_6 C_6]) \begin{bmatrix} XZ_6 \\ YZ_6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

11/ Test 4: Déplacement à vitesse non constante de l'articulation 4

Paramètres identifiés: ZZ_4, XX_5, XY_5

Paramètres utilisés : $MC_x^4, MC_y^4, ZZ_6, F_{S4}, F_{V4}$

$$\begin{aligned}
W_4 - \Delta f_{S4} F_{S4} - \Delta f_{V4} F_{V4} - g (-\Delta[C4] MC_x^4 + \Delta[S4] MC_y^4) - \Delta[\dot{q}_4^2] ZZ_6 \\
= \Delta[\dot{q}_4^2] \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} S_4^2 & C_4 S_4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} ZZ_4 \\ XX_5 \\ XY_5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

12/ Test 5: Déplacement de l'articulation 4 à vitesse constante et de l'articulation 5 à vitesse non constante.

Paramètres identifiés: XZ_5, YZ_5

Paramètres utilisés : $MX_4, MY_4, MC_x^5, MC_y^5, MC_z^5, ZZ_5, XX_5, XY_5, XX_6, XY_6, XZ_6, YZ_6, ZZ_6, F_{S4}, F_{V4}, F_{S5}, F_{V5}$

$$\begin{aligned}
& W_4 + W_5 - \Delta f_{S4} F_{S4} - \Delta f_{V4} F_{V4} - \Delta f_{S5} F_{S5} - \Delta f_{V5} F_{V5} \\
& - g (\Delta [C4] M_{X4} - \Delta [S4] M_{Y4} - \Delta [C4C5] M_{C_x^5} - \Delta [C4S5] M_{C_y^5} - \Delta [S4] M_{C_z^5}) \\
& - \dot{q}_4^2 \left(\frac{1}{2} \Delta [S5^2] (XX_5 + XX_6) + \Delta [S5C5] (XY_5 + XZ_6) + \frac{1}{2} \Delta [C5^2] ZZ_6 \right) \\
& - \dot{q}_4 (\Delta [S5 \dot{q}_5] XY_6 + \Delta [C5 \dot{q}_5] YZ_6) - \Delta [\dot{q}_5^2] ZZ_5 \\
& = 2 \dot{q}_4 (\Delta [\dot{q}_5 S5] \Delta [\dot{q}_5 C5]) \begin{bmatrix} XZ_5 \\ YZ_5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

13/ Test 4: Déplacement à vitesse non constante de l'articulation 1

Paramètres identifiés: ZZ_1, XX_4, XY_4

Paramètres utilisés : $M_3, MY_3, MY_4, MY_5, MY_6, MZ_3, XX_5, XZ_5, YZ_5, ZZ_5, XX_6, XY_6, FS_4, FV_4$

$$\begin{aligned}
& W_1 - \Delta f_{S1} F_{S1} - \Delta f_{V1} F_{V1} - \Delta [\dot{q}_1^2] \left(\frac{1}{2} (d_3^2 + r_{03}^2) M_3 - d_3 (MY_3 + MY_4 + MY_6) \right. \\
& \left. + r_{03} (MZ_3 + MY_5) + \frac{1}{2} C_4^2 (XX_5 + XX_6) + S_4 C_4 (XZ_5 - XY_6) + \frac{1}{2} S_4^2 ZZ_5 \right) \\
& = \Delta [\dot{q}_1^2] \left(1 - \frac{1}{2} C_4^2 - S_4 C_4 \right) \begin{bmatrix} ZZ_1 \\ XX_4 \\ XY_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

14/ Test 5: Déplacement à vitesse non constante des articulations 1 et 4

Paramètres identifiés: XZ_4, YZ_4

Paramètres utilisés : $MX_4, MY_4, MX_5, MY_5, MX_6, MY_6, ZZ_1, ZZ_4, XX_4, XY_4, ZZ_5, XX_5, XY_5, ZZ_6, XX_6, XY_6, FS_4, FV_4, FS_5, FV_5$

$$\begin{aligned}
& W_1 + W_4 - \Delta f_{S1} F_{S1} - \Delta f_{V1} F_{V1} - \Delta f_{S4} F_{S4} - \Delta f_{V4} F_{V4} \\
& - M_{C_x^4} (-g \Delta [C4] - d_3 \dot{q}_1^2 \Delta [S4] + d_3 \Delta [\dot{q}_4^2] + 2 \dot{q}_1 r_{03} \Delta [C4 \dot{q}_4]) \\
& - M_{C_y^4} (g \Delta [S4] - d_3 \dot{q}_1 \Delta [C4 \dot{q}_4] - r_{03} \Delta [\dot{q}_4^2] - \dot{q}_1 r_{03} \Delta [S4 \dot{q}_4]) \\
& + \dot{q}_1^2 \left(-\frac{1}{2} \Delta [C4^2] (XX_4 + XX_5 + XX_6) + \Delta [S4C4] (-XY_4 - XZ_5 + XY_6) - \frac{1}{2} \Delta [S4^2] ZZ_5 \right) \\
& - \dot{q}_1 (\Delta [C4 \dot{q}_4] (XY_5 + XZ_6) + \Delta [S4 \dot{q}_4] (YZ_5 - YZ_6)) - \frac{1}{2} \Delta [\dot{q}_4^2] (ZZ_4 + ZZ_6) \\
& = \dot{q}_1 (\Delta [C4 \dot{q}_4] - \Delta [S4 \dot{q}_4]) \begin{bmatrix} XZ_4 \\ YZ_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

IV / CONCLUSION

Dans ce chapitre a été proposée une méthode systématique d'identification des paramètres inertiels minimaux, ainsi que des frottements des articulations. Ainsi que l'illustre l'exemple du robot TH8, à mesure que l'on se dirige vers la base du robot, les bilans énergétiques mis en équation font intervenir un nombre croissant de paramètres supposés estimés lors de précédents tests. Il faut donc souligner l'importance que revêt la précision des estimations effectuées notamment en bout de chaîne cinématique, et ce afin de minimiser les effets de propagation d'erreurs.

De bonnes performances peuvent cependant être atteintes grâce au nombre réduit de paramètres à identifier à chaque test. En effet, outre l'absence des accélérations articulaires, généralement fortement bruitées, la faible dimension des systèmes formés permet d'aborder le problème de recherche de trajectoires excitantes avec un nombre de variable d'optimisation fortement réduit.

CONCLUSION GENERALE

Les travaux effectués au Centre d'automatique de Lille ont porté sur la modélisation dynamique et l'identification des robots à structure ouverte simple.

Dans l'écriture des différents modèles, nous avons utilisé une description géométrique partielle pour laquelle l'unique restriction est que l'axe z_i du repère lié au corps C_i soit porté par l'axe de l'articulation i .

L'étude des paramètres inertiels minimaux est une étape indispensable à la mise en équation du comportement dynamique du robot. Celle-ci est basée sur une approche énergétique et fournit des relations simples de regroupements de paramètres de deux corps consécutifs. Ces regroupements s'effectuent alors de proche en proche, de l'effecteur vers la base du robot. La solution de base obtenue conduit à un modèle dynamique sensiblement simplifié du point de vue du nombre d'opérations à effectuer. Les recherches exhaustives des paramètres inertiels sans effet sur le modèle, ainsi que des cas particuliers de regroupements nous ont permis de conclure quant à la minimalité de l'ensemble des termes inertiels obtenus.

L'identification des paramètres inertiels ne pourrait être envisagée sans être assurée de la minimalité des paramètres citée ci-dessus. Il faut en effet disposer d'un ensemble de termes identifiables afin d'éviter une perte de rang structurelle des systèmes linéaires formés. Dès lors, nous proposons une méthode séquentielle permettant d'identifier, de proche en proche, l'ensemble des termes inertiels ainsi que des frottements des articulations. Cette méthode consiste à faire réaliser par le robot un ensemble de trajectoires simples, ne mettant pas en jeu plus de deux articulations simultanément. Outre la dimension fortement réduite des systèmes linéaires formés, cette approche permet de s'affranchir de la mesure ou de l'estimation des accélérations articulaires. Il faut

néanmoins souligner l'importance que revêt la précision des estimations effectuées en bout de chaîne cinématique, et ce afin de minimiser les effets de propagation d'erreurs. Notons à cet effet que le nombre réduit de termes à identifier à chaque étape permet, entre autres, d'envisager la recherche de trajectoires excitantes avec un nombre de variables d'optimisation fortement réduit.

En outre, il pourrait être avantageux d'envisager une méthode d'identification que l'on qualifierait d'hybride et dans laquelle une approche globale viendrait compléter l'utilisation des mouvements tests présentés au troisième chapitre.

Parmi les futurs travaux pouvant être envisagés, citons enfin l'identification et la commande adaptative, ainsi que la généralisation des résultats obtenus aux robots à structure complexe.

ANNEXES

PARAMÈTRES INERTIELS SANS EFFET SUR LE MODÈLE DYNAMIQUE

A1 / Introduction

Cette annexe est une reprise de l'Annexe C de la thèse de [Bennis 91] dans laquelle nous cherchons à établir une liste exhaustive des paramètres inertiels sans effet sur le modèle. L'intérêt d'une telle étude réside dans le fait qu'elle nous servira ultérieurement à nous assurer de la minimalité de la solution au problème de recherche des paramètres de base. Enfin les résultats établis ne sont pas limités à la représentation géométrique de D.H.M. Un paramètre inertiel X_k^i n'affecte pas le modèle si son coefficient h_k^i est constant. Rappelons l'expression de ces différents coefficients:

Coefficients du tenseur d'inertie $\bar{J}_i = [XX_i, XY_i, XZ_i, YY_i, YZ_i, ZZ_i]^T$:

$$\begin{aligned} h_1^i &= \frac{1}{2} \omega_{i1}^2 & h_2^i &= \omega_{i1} \omega_{i2} & h_3^i &= \omega_{i1} \omega_{i3} \\ h_4^i &= \frac{1}{2} \omega_{i2}^2 & h_5^i &= \omega_{i2} \omega_{i3} & h_6^i &= \frac{1}{2} \omega_{i3}^2 \end{aligned}$$

Coefficients du moment d'ordre un $MS_i = [MX_i, MY_i, MZ_i]^T$:

$$\begin{aligned} h_7^i &= \omega_{i3} V_{i2} - \omega_{i2} V_{i3} - \mathbf{g}^T \mathbf{s}^i \\ h_8^i &= \omega_{i1} V_{i3} - \omega_{i3} V_{i1} - \mathbf{g}^T \mathbf{n}^i \\ h_9^i &= \omega_{i2} V_{i1} - \omega_{i1} V_{i2} - \mathbf{g}^T \mathbf{a}^i \end{aligned}$$

Coefficient de la masse M_i :

$$h_{10}^i = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{V} - \mathbf{g}^T \mathbf{P}^i \tag{a1.1}$$

où ${}^0s^i$, ${}^0n^i$ et ${}^0a^i$ représentent les composantes des vecteurs x_i , y_i , et z_i dans R_0 , soit encore les trois colonnes de la matrice de rotation ${}^0A^i$.

A2 / Résultats préliminaires

Nous présentons dans ce paragraphe quelques résultats et propriétés déjà établis qui nous servirons par la suite pour nos développements:

propriété a :

On note R1 la première articulation rotoïde et R2 la première articulation rotoïde succédant à R1 et d'axe non parallèle à z_{R1} :

-Pour toutes les articulations i antérieures à R1, $\omega_i = 0_{3 \times 1}$

-Pour toutes les articulations i rotoïdes comprises entre R1 et R2, $\omega_i = [0 \ 0 \ \omega_{i3}]^T$

-Pour toutes les articulations $i \geq R2$, on démontre ([Gautier 90]) que les trois composantes de ω_i sont non nulles et indépendantes. (a1.2)

propriété. b:

Pour une articulation i rotoïde, on établit aisément les équivalences ([Bennis.91]):

$$\omega_{i1} = 0 \iff \omega_{i2} = 0$$

$$V_{i1} = 0 \iff V_{i2} = 0$$

$$\omega_{i1} \neq 0 \quad \text{et} \quad \omega_{i2} \neq 0 \iff \omega_{i1} \text{ et } \omega_{i2} \text{ sont indépendants}$$

$$V_{i1} \neq 0 \iff V_{i2} \neq 0 \iff V_{i1} \text{ et } V_{i2} \text{ sont indépendants} \quad \text{(a1.3)}$$

propriété c:

La relation de récurrence sur h^i , qui sera examinée plus en détail au paragraphe III.3.2 s'écrit sous la forme :

$$h^i = h^{i-1} \lambda^i + \dot{q}_i f^i \quad \text{avec} \quad \text{(a1.4)}$$

$$f^i = [0 \ 0 \ \omega_{i1} \ 0 \ \omega_{i2} \ (\omega_{i3} - \frac{\dot{q}_i}{2}) \ V_{i2} \ -V_{i1} \ 0 \ 0] \quad \text{pour une liaison rotoïde}$$

$$f^i = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\omega_{i2} \ \omega_{i1} \ 0 \ (V_{i3} - \frac{\dot{q}_i}{2})] \quad \text{pour une liaison prismatique}$$

Les composantes non nulles de f^i pourront dans certains cas fournir des conditions nécessaires pour qu'un coefficient h_k^i soit constant.

propriété d:

La recherche des composantes h_k^i constantes se fait en examinant séparément la contribution du paramètre inertiel aux énergies cinétique et potentielle. La contribution à l'énergie cinétique se fait en étudiant les composantes du torseur cinématique intervenant l'expression de h_k^i . Nous rappelons l'expression de ce torseur:

$$\begin{bmatrix} V_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^i \begin{bmatrix} \sigma_k \quad {}^i A^k \quad z_0 - \bar{\sigma}_k \quad {}^i A^k \quad {}^k \hat{P}^i \quad z_0 \\ \bar{\sigma}_k \quad {}^i A^k \quad z_0 \end{bmatrix} \dot{q}_k \quad (a1.5)$$

L'étude de la contribution de toutes les articulations k antérieures à i fournira les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un paramètre du corps C_i n'affecte pas l'énergie cinétique du robot.

A3 / Paramètres d'une articulation i rotoïde sans effet sur le modèle

A3.1 / Eléments du tenseur d'inertie J_i

A3.1.1 / $R1 \leq i < R2$

Toutes les articulations rotoïdes comprises entre $R1$ et $R2$ étant parallèles à $R1$, $\omega_{i1} = \omega_{i2} = 0$ et $\omega_{i3} \neq 0$ (propriété a/). Par suite, $h_k^i = 0$ pour $k=1, \dots, 5$ et donc seul le paramètre ZZ_i affecte le modèle.

A3.1.2 / $R2 \leq i$

Les trois composantes de ω_i sont non nulles et indépendantes (propriété a/). Par conséquent, tous les éléments de J_i affectent le modèle.

A3.2 / Eléments de MSi

A3.2.1 / $i = R1$

A3.2.1.1 / Paramètre MX_{R1}

Pour que le paramètre MX_{R1} n'affecte pas le modèle, il faut et il suffit que:

$$\begin{aligned} \omega_{3R1} V_{2R1} - \omega_{2R1} V_{3R1} &= 0 && \text{(contribution à l'énergie cinétique)} \\ {}^0_g^T {}^0_s^{R1} &= \text{constante} && \text{(contribution à l'énergie potentielle)} \end{aligned} \quad (a1.6)$$

Compte tenu que ($\omega_{1R1} = \omega_{2R1} = 0$) (prop. a/), et que ($V_{1R1} = 0 \Leftrightarrow V_{2R1} = 0$) (prop.b/), il reste à vérifier que:

$$\begin{aligned} V_{1R1} = V_{2R1} &= 0 \\ {}^0_g^T {}^0_s^{R1} &= \text{constante} \end{aligned} \quad (a1.7)$$

L'expression du torseur cinématique nous donne:

$$V_{R1} = \sum_{k=1}^{R1-1} {}^{R1}A^k z_0 \dot{q}_k \quad (a1.8)$$

${}^{R1}A^k z_0$ représente les composantes du vecteur z_k dans le repère $R1$. Par suite, pour vérifier la première condition (annuler les deux premières composantes de V_{R1}), il faut que les deux premières composantes de chacun des vecteur de cette somme soient nulles. Il faut donc que toutes les articulations (qui sont prismatiques) précédant $R1$ soient parallèles à z_{R1} . Il reste à vérifier la deuxième condition, ${}^0_g^T {}^0_s^{R1} = \text{constante}$. 0_g est un vecteur fixe, tandis que l'axe x_{R1} tourne autour de z_{R1} . Le produit ne sera alors constant (nul) que si 0_g est perpendiculaire au plan de rotation de x_{R1} . Il s'ensuit que z_{R1} est parallèle à la direction de la gravité.

En résumé, pour que MX_{R1} n'affecte pas le modèle, il faut et il suffit que toutes les articulations précédant $R1$ soient parallèles à z_{R1} et à la direction de la gravité.

A3.2.1.2 / Paramètre MY_{R1}

La même étude conduit aux mêmes conclusions que précédemment.

A3.2.1.3 / Paramètre MZ_{R1}

On a toujours $\omega_{1R1} = \omega_{2R1} = 0$ et la direction de z_{R1} est fixe. Par suite, $h_9^{R1}=0$ et MZ_{R1} n'affecte pas le modèle.

A3.2.2 / $R1 < i < R2$

$\omega_{1i} = \omega_{2i} = 0$ et la direction de z_i est fixe. Comme précédemment, MZ_i n'affecte pas le modèle. Une condition nécessaire pour que MX_i ou MY_i n'affecte pas le modèle est que $V_{i1} = V_{i2} = 0$. Nous montrons ici que cette condition ne peut être satisfaite. Considérons pour cela la première articulation rotoïde i succédant à $R1$. Compte tenu de l'expression du torseur cinématique, satisfaire la condition nécessaire précédente revient à vérifier l'équation:

$${}^i A^{R1} \hat{P}^{R1} z_0 = \alpha z_0 \quad (a1.9)$$

où α est un scalaire quelconque. les articulations $R1$ et i étant deux articulations rotoïdes successives d'axes parallèles, la matrice de rotation ${}^{R1} A^i$ peut s'exprimer par:

$${}^{R1} A^i = \text{Rot}(z, \tilde{\theta}_i) \quad (a1.10)$$

où $\tilde{\theta}_i = \theta_i + \text{constante}$, constante due aux éventuelles articulations prismatiques situées entre les deux articulations rotoïdes. En écrivant de même que:

$${}^{R1\hat{i}}\mathbf{P} z_0 = [P_y, -P_x, 0]^T \quad (a1.11)$$

la résolution de l'équation (a1.9) nous fournit la solution $P_x = P_y = 0$ et par suite les axes z_i et z_{R1} sont confondus. Cette solution, bien que théoriquement valable, est écartée.

A3.2.3 / $i = R2$

Les axes x_{R2} et y_{R2} subissent les effets des rotations (indépendantes) autour des axes non parallèles z_{R1} et z_{R2} . Par conséquent, leur direction est quelconque et il ne peut exister de vecteur fixe ${}^0\mathbf{g}$ tel que les produits ${}^0\mathbf{g}^T {}^0\mathbf{s}^{R2}$ et ${}^0\mathbf{g}^T {}^0\mathbf{n}^{R2}$ soient constants. On en déduit que les paramètres MX_{R2} et MY_{R2} affectent l'énergie potentielle et donc le modèle.

Une condition nécessaire pour que MZ_i n'affecte pas le modèle est que $V_{1R2} = V_{2R2} = 0$. Considérons pour cela l'articulation rotoïde antérieure à $R2$, que l'on notera Rd . L'expression du torseur cinématique nous amène à vérifier la relation:

$${}^{R2}\mathbf{A}^{Rd} {}^{Rd\hat{R2}}\mathbf{P} z_0 = \alpha z_0 \quad (a1.12)$$

où α est un scalaire quelconque. On en déduit:

$${}^{Rd\hat{R2}}\mathbf{P} z_0 = \alpha {}^{Rd}\mathbf{A}^{R2} z_0 = \alpha {}^{Rd}\mathbf{z}_{R2} \quad (a1.13)$$

Soient (u, v, w) les composantes de z_{R2} dans Rd , nous avons:

$$\begin{bmatrix} P_y \\ -P_x \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (a1.14)$$

Deux cas peuvent se présenter:

a/ $\alpha = 0$ (la vitesse d'entraînement du repère R2 engendrée par Rd est nulle). Il vient alors $P_x = P_y = 0$. L'origine O_{R2} du repère R2 est située sur l'axe de la rotation Rd. Cette situation ne peut avoir lieu que pour $R_d=R_1$.

b/ $\alpha \neq 0$ et dans ce cas d'une part, $w = 0$ et donc z_{R2} est perpendiculaire à z_{Rd} , d'autre part, nous avons le produit scalaire nul entre z_{R2} et $O_{Rd}\vec{O}_{R2}$:

$$u P_x + v P_y + w P_z = 0 \tag{a1.15}$$

Finalement, z_{R2} est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs z_{Rd} et $O_{Rd}\vec{O}_{R2}$. Ici aussi, il ne peut y avoir d'articulation rotoïde supplémentaire antérieure à Rd. (A moins d'avoir des axes de rotation confondus, solution que nous avons écartée, z_{R2} ne peut pas être simultanément perpendiculaire à deux plans qui ne sont pas parallèles). Par suite, $R_d = R_1$.

Concernant les articulations prismatiques, l'examen du torseur cinématique nous indique que toutes les articulations prismatiques antérieures à R2 doivent être parallèles à z_{R2} . Cette condition est incompatible aussi bien avec la condition du a/ (O_{R2} ne resterait alors plus sur l'axe de rotation de R1) qu'avec celle du b/ (le vecteur $O_{Rd}\vec{O}_{R2}$ aurait alors une composante parallèle à z_{R2} et ces deux vecteurs ne seraient plus perpendiculaires)

Enfin pour aboutir à des conditions nécessaires et suffisantes, il faut satisfaire la condition de l'énergie potentielle, à savoir ${}^0_g T {}^0_a R2 = \text{constante}$. z_2 effectuant une rotation autour de z_1 , il faut que z_1 soit parallèle à la direction de la gravité.

En résumé, pour que MZ_{R2} n'affecte pas le modèle, il faut et il suffit de satisfaire les conditions suivantes:

$R1=1$ et $R2=2$. De plus, l'origine du repère $R2$ est située sur l'axe de l'articulation $R1$. Autrement, il faut que z_2 soit perpendiculaire aux vecteurs z_1 et $O_1\vec{O}_2$. Enfin z_1 est parallèle à la direction de la gravité. Une façon équivalente d'exprimer ce résultat serait: $R1=1$ est parallèle à la direction de la gravité . $R2=2$ et les vecteurs x_2 et y_2 sont concourants avec z_1

A3.2.4 / $i > R2$

Les axes x_i et y_i ayant des directions quelconques, ils affectent l'énergie potentielle par des coefficients non constants. Donc MX_i et MY_i affectent le modèle.

De même, si z_i n'est pas parallèle à z_{R2} , MZ_i affecte l'énergie potentielle. Dans le cas contraire, il resterait à satisfaire la condition $V_{i1} = V_{i2} = 0$. Il faudrait pour cela (toujours à partir de l'expression du torseur cinématique) que z_i soit perpendiculaire à toutes les articulations rotoïdes qui lui sont antérieures (vitesse d'entraînement selon z_i), situation impossible compte tenu des définitions de $R1$ et $R2$. Par conséquent, MZ_i affecte le modèle. (Remarque: le cas où les axes des articulations i et $R2$ seraient confondus a ici aussi été exclu).

A3.3 / La masse M_i

Pour que la masse n'affecte pas le modèle, il faudrait que l'origine du repère R_i soit fixe. Cette situation ne permet pas la présence d'articulations prismatiques antérieures à i . Toujours en excluant le cas des axes de rotation confondus, trois cas peuvent se produire:

- $R1 = 1$ auquel cas M_1 n'affecte pas le modèle. ($V_{R1} = 0_{3 \times 1}$)

- $R2 = 2$ et l'origine O_2 de $R2$ est située sur l'axe z_{R1} et dans ce cas M_2 n'affecte pas non plus le modèle. ($V_{R2} = 0_{3 \times 1}$)

- S'il existe une troisième articulation rotoïde, que l'on notera $R3$, succédant à $R2$, alors les axes des trois rotations sont concourants et les origines des repères $R2$ et $R3$ sont confondues. Dans ce cas M_3 n'affecte pas non plus le modèle. ($V_{R3} = 0_{3 \times 1}$). Notons cependant que cette configuration correspond en général à celle du poignet du robot et non du porteur.

A4 / Paramètres d'une articulation i prismatique sans effet sur le modèle

A4.1 / Éléments du tenseur d'inertie J_i

A4.1.1 / $i < R1$

Pour toutes ces articulations, $\omega_i = 0_{31}$. Par conséquent, aucun élément du tenseur d'inertie n'affecte le modèle.

A4.1.2 / $R1 < i < R2$

D'après les expressions de h_k^i , $k=1..6$, les paramètres XX_i , YY_i , ZZ_i n'affectent pas le modèle si et seulement si nous avons respectivement $\omega_{i1} = 0$, $\omega_{i2} = 0$ et $\omega_{i3} = 0$. Rappelons l'expression de ω_i :

$$\omega_i = \sum_{k=1}^i \bar{\sigma}_k^i A^k z_0 \dot{q}_k = \sum_{k=1}^i \bar{\sigma}_k^i z_k \dot{q}_k \quad (\text{a1.16})$$

Celle ci ne dépend donc que des orientations des axes des articulation rotoïdes antérieures. Ces dernières étant parallèles à z_{R1} , on en déduit que XX_i (resp. YY_i , ZZ_i) n'affecte pas le modèle si et seulement si x_i (resp. y_i , z_i) est perpendiculaire à z_{R1} :

De même, pour les paramètres XY_i , XZ_i , YZ_i , nous déduisons:

XY_i n'affecte pas le modèle $\Leftrightarrow x_i$ ou y_i est perpendiculaire à z_{R1} .

XZ_i n'affecte pas le modèle $\Leftrightarrow x_i$ ou z_i est perpendiculaire à z_{R1}

YZ_i n'affecte pas le modèle $\Leftrightarrow y_i$ ou z_i est perpendiculaire à z_{R1}

A4.1.3 / $i > R2$

Les composantes de ω_i sont non nulles et indépendantes et donc tous les éléments du tenseur d'inertie affectent le modèle.

A4.2 / Eléments de MS_i

A4.2.1 / $i < R1$

$\omega_i = 031$ et l'orientation ${}^0A^i$ de R_i dans R_0 est constante. Par suite, aucun élément de MS_i n'affecte le modèle.

A4.2.2 / $R1 < i < R2$

A4.2.2.1 / Paramètre MX_i

Dans la relation de récurrence sur h^i (résultats préliminaires c/), $f_7^i = \omega_{i2}$. Une première condition nécessaire à satisfaire est donc que $\omega_{i2} = 0$. L'expression de h_7^i nous renseigne alors sur le reste des conditions à satisfaire, à savoir:

$$\omega_{i3} = V_{i2} = 0 \text{ et } {}^0g^T {}^0s^i = \text{constante} \quad (\text{a1.17})$$

Par conséquent, MX_i n'affecte pas le modèle si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite:

$$\begin{aligned} \omega_{i2} = \omega_{i3} = 0 \text{ et } {}^0g^T {}^0s^i &= \text{constante} && (\text{condition a}) \\ \omega_{i2} = V_{i2} = 0 \text{ et } {}^0g^T {}^0s^i &= \text{constante} && (\text{condition b}) \end{aligned} \quad (\text{a1.18})$$

Condition a:

L'expression de ω_i nous indique que pour toutes les articulations rotoïdes k antérieures à i , x_i est parallèle à z_k (donc à z_{R1}). Par ailleurs la direction de z_{R1} étant fixe, le produit ${}^0_g T_0^i$ est constant. Par conséquent, la *condition a* se résume à la seule proposition:

x_i est parallèle à z_{R1}

Condition b:

L'expression de ω_i nous indique que $\omega_{i2} = 0$ se traduit par le relation $({}^i A^k)_{23} = 0$ soit donc y_i est perpendiculaire aux articulations rotoïdes k antérieures, et donc à z_{R1} . Pour satisfaire $V_{i2} = 0$, une condition nécessaire à satisfaire pour les articulations rotoïdes k antérieures se traduit par la relation:

$${}^i A^k \hat{P}^k z_0 = [v_1 \ 0 \ v_3]^T \quad (a1.19)$$

où v_1 et v_3 sont des scalaires quelconques. L'articulation i étant prismatique, nous pouvons écrire:

$${}^k P^i = {}^k P_0^i + q_i {}^k z_i \quad (a1.20)$$

où ${}^k P_0^i$ est un vecteur indépendant de la variable articulaire q_i , et ${}^k z_i$ représente l'orientation de z_i dans R_k , soit encore ${}^k z_i = [({}^k A^i)_{13}, ({}^k A^i)_{23}, ({}^k A^i)_{33}]^T$. q_i étant une variable indépendante, la relation (a.19) nous fournit une autre condition nécessaire:

$${}^i A^k \hat{z}_i z_0 = [v_1 \ 0 \ v_3]^T \quad (a1.21)$$

En cherchant à résoudre la seconde ligne de cette égalité matricielle, on obtient la relation:

$$({}^i A^k)_{21} ({}^i A^k)_{32} - ({}^i A^k)_{22} ({}^i A^k)_{31} = 0 \quad (a1.22)$$

En remarquant que les éléments d'une matrice de rotation sont égaux aux éléments de la matrice des cofacteurs (il suffit pour cela de considérer son inverse), le déterminant précédent n'est autre que le coefficient $({}^iA^k)_{13}$. Finalement, $({}^iA^k)_{13} = ({}^iA^k)_{23} = 0$, d'où $({}^iA^k)_{33} = 1$ et z_i est parallèle à z_k (donc à z_{R1}).

Revenons maintenant à la relation (a.19); Son développement conduit aux relations $v_3=0$ et:

$$\begin{bmatrix} P_y \\ -P_x \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} ({}^iA^k)_{11} \\ ({}^iA^k)_{12} \end{bmatrix} \quad (a1.23)$$

Si $v_1=0$ alors $P_x = P_y = 0$ et z_i se trouve sur l'axe de l'articulation rotoïde z_k . Si $v_1 \neq 0$ alors nous pourrions écrire:

$$({}^iA^k)_{11} P_x + ({}^iA^k)_{12} P_y + 0 P_z = 0 \quad (a1.24)$$

Cela représente un produit scalaire nul entre les vecteurs ${}^kP^i$ et kx_i . Par conséquent, x_i est perpendiculaire au plan contenant z_k , z_i et ${}^kP^i$, soit encore y_i est concourant avec z_k .

En résumé, z_i est parallèle à z_k et y_i est concourant avec z_k . La condition concernant y_i ne peut être conservée pour plus d'une articulation rotoïde antérieure à i (La situation des axes de rotations confondus ayant été exclue). Par suite, $k=R1$.

Concernant les articulations prismatiques, l'expression de V_i nous indique que toutes les axes de ces articulations doivent être perpendiculaires à y_i . Pour que y_i demeure concourant avec z_{R1} , il faudra que ces mouvements de translation s'effectuent parallèlement à z_{R1} .

Enfin x_i étant perpendiculaire à z_{R1} , l'effet de la pesanteur ${}^0g^T {}^0s^i$ ne sera constant (nul) que si z_{R1} est parallèle à la direction de la gravité

Finalement, R1 est l'unique articulation rotoïde antérieure à i , z_i et toutes les articulations antérieures sont parallèles à z_{R1} et à la direction de la gravité, y_i est concourant avec z_{R1} .

A4.2.2.2 / Paramètre MY_i

Même conclusion que précédemment en remplaçant y_i par x_i .

A4.2.2.3 / Paramètre MZ_i

Contrairement aux résultats précédents, la relation de récurrence sur h^i ne nous fournit pas de condition nécessaire à respecter. L'examen de h^i nous donne alors quatre possibilités pour que MZ_i n'affecte pas le modèle.

$$\begin{aligned} \omega_{i1} = \omega_{i2} = 0 \text{ et } {}^0g^T {}^0a^i &= \text{constante} && \text{(condition a)} \\ \omega_{i1} = V_{i1} = 0 \text{ et } {}^0g^T {}^0a^i &= \text{constante} && \text{(condition b)} \\ \omega_{i2} = V_{i2} = 0 \text{ et } {}^0g^T {}^0a^i &= \text{constante} && \text{(condition c)} \\ V_{i1} = V_{i2} = 0 \text{ et } {}^0g^T {}^0a^i &= \text{constante} && \text{(condition d)} \end{aligned} \tag{a1.25}$$

Condition a:

Nous obtenons sans difficultés l'unique condition: z_i est parallèle à z_{R1} .

Condition b:

La relation $\omega_{i2} = V_{i2} = 0$ a déjà été traitée pour le paramètre MX_i et conduisait notamment à la condition nécessaire que z_i soit parallèle à z_{R1} . Cette dernière étant une condition nécessaire et suffisante du point précédent, il est inutile d'aller plus loin.

Condition c:

Comme précédemment, nous aboutissons à la première condition.

Condition d:

La condition nécessaire $V_{i1} = V_{i2} = 0$ nous amène à résoudre l'équation:

$${}^i A^k \hat{P}^k z_0 = \alpha z_0 \quad (a1.26)$$

où α est un scalaire quelconque. En utilisant la propriété précédente, il vient:

$$\begin{bmatrix} ({}^k A^i)_{23} \\ -({}^k A^i)_{13} \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha z_i = \alpha \begin{bmatrix} ({}^k A^i)_{13} \\ ({}^k A^i)_{23} \\ ({}^k A^i)_{33} \end{bmatrix} \quad (a1.27)$$

-Si $\alpha = 0$, on en déduit que z_i est parallèle à z_{R1} . Nous retrouvons un cas particulier de la condition a.

-Si $\alpha \neq 0$, alors cette relation n'a pas de solution, z_i ne pouvant être le vecteur nul.

Finalement, MZ_i n'affecte pas le modèle à l'unique condition que z_i soit parallèle à z_{R1} .

A4.2.2 / $i > R2$

Pour une articulation prismatique, la composante V_{i3} n'est jamais nulle du fait de la présence du terme $\sigma_i \dot{q}_i z_0$ dans l'équation de récurrence sur V_i . Par ailleurs, les trois composantes de ω_i étant non nulles et indépendantes, nous déduisons que les termes h_7^i et h_8^i ne sont pas constants. Par suite, MX_i et MY_i affectent le modèle. De même, une condition nécessaire pour que MZ_i n'affecte pas le modèle est que $V_{i1} = V_{i2} = 0$. Le même raisonnement que celui effectué au paragraphe précédent nous conduirait à une situation impossible.

A4.3 /La masse M_i

V_{i3} n'étant jamais nul, le produit $V_i^T V_i$ est non nul et la masse affecte le modèle.

ANNEXE 2

EXPRESSIONS DES MATRICES λ^i ET F^i

L'exploitation des relations de récurrence sur les torseurs cinématiques ainsi que sur les matrices ${}^0A^i$ et ${}^0P^i$ permet d'établir la relation de récurrence suivante:

$$h^i = h^{i-1} \lambda^i + \dot{q}_i f^i \quad (a2.1)$$

avec

$$\begin{aligned} h^i &= [h_J^i \quad h_S^i \quad h_M^i] \\ f^i &= [f_J^i \quad f_S^i \quad f_M^i] \\ \lambda^i &= \begin{bmatrix} \lambda_J^i & \lambda_S^i & \lambda_M^i \\ 0_{36} & {}^{i-1}A^i & {}^{i-1}P^i \\ 0_{16} & 0_{13} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Avant de donner les expressions des différents termes mis en jeu, nous introduisons les notations suivantes:

$${}^{i-1}A^i = [s \quad n \quad a] = \begin{bmatrix} s_1 & n_1 & a_1 \\ s_2 & n_2 & a_2 \\ s_3 & n_3 & a_3 \end{bmatrix}$$

$${}^{i-1} \hat{e}_p^i = {}^{i-1}A^i \hat{e}_p {}^iA^{i-1} \quad (a2.2)$$

où e_p ($p=1,2,3$) est un vecteur unitaire tel que $e_1 = [100]^T$, $e_2 = [010]^T$, $e_3 = [001]^T$

On désignera par P_x, P_y, P_z les composantes de ${}^{i-1}P^i$. Il vient:

$$\lambda_J^i = [\overline{ss^T}, \overline{sn^T + ns^T}, \overline{sa^T + as^T}, \overline{nn^T}, \overline{na^T + an^T}, \overline{aa^T}]$$

$$\lambda_J = \begin{bmatrix} s_1^2 & 2s_1n_1 & 2s_1a_1 & n_1^2 & 2n_1a_1 & a_1^2 \\ s_1s_2 & s_1n_2 + s_2n_1 & s_1a_2 + s_2a_1 & n_1n_2 & n_1a_2 + n_2a_1 & a_1a_2 \\ s_1s_3 & s_1n_3 + s_3n_1 & s_1a_3 + s_3a_1 & n_1n_3 & n_1a_3 + n_3a_1 & a_1a_3 \\ s_2^2 & 2s_2n_2 & 2s_2a_2 & n_2^2 & 2n_2a_2 & a_2^2 \\ s_2s_3 & s_2n_3 + s_3n_2 & s_2a_3 + s_3a_2 & n_2n_3 & n_2a_3 + n_3a_2 & a_2a_3 \\ s_3^2 & 2s_3n_3 & 2s_3a_3 & n_3^2 & 2n_3a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_S^i = [\overline{\lambda_{S1}^i}, \overline{\lambda_{S2}^i}, \overline{\lambda_{S3}^i}] \quad \text{avec}$$

$$\lambda_{Sp}^i = {}^{i-1}\hat{e}_p^i \quad {}^{i-1}\hat{P}^i + ({}^{i-1}\hat{e}_p^i \quad {}^{i-1}\hat{P}^i)^T$$

$$\lambda_S = - \begin{bmatrix} -2(s_2P_y + s_3P_z) & -2(n_2P_y + n_3P_z) & -2(a_2P_y + a_3P_z) \\ s_1P_y + s_2P_x & n_1P_y + n_2P_x & a_1P_y + a_2P_x \\ s_1P_z + s_3P_x & n_1P_z + n_3P_x & a_1P_z + a_3P_x \\ -2(s_1P_x + s_3P_z) & -2(n_1P_x + n_3P_z) & -2(a_1P_x + a_3P_z) \\ s_1P_y + s_2P_x & n_1P_y + n_2P_x & a_1P_y + a_2P_x \\ -2(s_1P_x + s_2P_y) & -2(n_1P_x + n_2P_y) & -2(a_1P_x + a_2P_y) \end{bmatrix}$$

$$\lambda_M^i = \overline{{}^{i-1}\hat{P}^i \quad {}^{i-1}\hat{P}^{iT}}$$

$$\lambda_M = \begin{bmatrix} P_y^2 + P_z^2 \\ -P_x P_y \\ -P_x P_z \\ P_x^2 + P_z^2 \\ -P_y P_z \\ P_x^2 + P_y^2 \end{bmatrix} \quad (a2.3)$$

$$f_J^i = \bar{\sigma}_i \left[0 \quad 0 \quad \omega_{i1} \quad 0 \quad \omega_{i2} \quad \left(\omega_{i3} - \frac{\dot{q}_i}{2} \right) \right]$$

$$f_S^i = \sigma_i \left[-\omega_{i2} \quad \omega_{i1} \quad 0 \right] + \bar{\sigma}_i \left[V_{i2} \quad -V_{i1} \quad 0 \right]$$

$$f_M^i = \sigma_i \left(V_{i3} - \frac{\dot{q}_i}{2} \right) \tag{a2.4}$$

La deuxième forme de regroupement proposée met à profit la forme polynomiale en q_i de la matrice λ^i . En utilisant la relation:

$${}^{i-1}P^i = {}^{i-1}P_0^i + \bar{\sigma}_i q_i {}^{i-1}Z_i \tag{a2.4}$$

nous pourrions écrire, pour une articulation prismatique:

$$\lambda^i = \begin{bmatrix} \lambda_J^i & \lambda_{S0}^i & \lambda_{M0}^i \\ 0_{36} & {}^{i-1}A^i & {}^{i-1}P_0^i \\ 0_{16} & 0_{13} & 1 \end{bmatrix} + q_i \begin{bmatrix} 0_{66} & \lambda_{S1}^i & \lambda_{M1}^i \\ 0_{36} & 0_{33} & {}^{i-1}Z_i \\ 0_{16} & 0_{13} & 0 \end{bmatrix} + q_i^2 \begin{bmatrix} 0_{66} & 0_{63} & \lambda_{M2}^i \\ 0_{36} & 0_{33} & 0_{31} \\ 0_{16} & 0_{13} & 0 \end{bmatrix} \tag{a2.6}$$

Les expressions des matrices λ_{S0}^i et λ_{S1}^i s'obtiennent de la même manière que λ_S^i en remplaçant les composantes de ${}^{i-1}P^i$ respectivement par ${}^{i-1}P_0^i$ et ${}^{i-1}Z_i$.

Les expressions des matrices λ_{M0}^i , λ_{M1}^i et λ_{M2}^i s'obtiennent en utilisant la relation

$${}^{i-1}P^i = {}^{i-1}P_0^i + \sigma_i q_i {}^{i-1}Z_i \tag{a2.7}$$

dans l'expression de λ_M^i . Il vient:

$$\lambda_{M0}^i = \frac{{}^{i-1}\hat{A}^i}{{}^{i-1}P_0^i} \frac{{}^{i-1}\hat{A}^i}{P_0^i}$$

$$\lambda_{M1}^i = \overline{{}^{i-1}\hat{P}_0}^T \overline{{}^{i-1}\hat{Z}_i}^T + \overline{{}^{i-1}\hat{Z}_i}^T \overline{{}^{i-1}\hat{P}_0}^T$$

$$\lambda_{M2}^i = \overline{{}^{i-1}\hat{Z}_i}^T \overline{{}^{i-1}\hat{Z}_i}^T \quad (a2.8)$$

Enfin dans le cadre de la représentation géométrique de D.H.M., la forme explicite de la matrice λ_0^i est présentée dans le tableau de la page ci après:

$$\lambda_0^i = \begin{bmatrix} \lambda_J^i & \lambda_{S0}^i & \lambda_{M0}^i \\ 0_{3 \times 6} & {}^{i-1}A^i & {}^{i-1}P_0^i \\ 0_{1 \times 6} & 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \quad (a2.9)$$

$CC\theta$	$-2CS\theta$	0	$SS\theta$	0	0	0	0	$2r_0$	r_0^2
$CS\theta C\alpha$	$(CC\theta-SS\theta)C\alpha$	$-C\theta S\alpha$	$-CS\theta C\alpha$	$S\theta S\alpha$	0	$-dS\theta C\alpha+r_0C\theta S\alpha$	$-dC\theta C\alpha-r_0S\theta S\alpha$	$dS\alpha$	$dr_0S\alpha$
$CS\theta S\alpha$	$(CC\theta-SS\theta)S\alpha$	$C\theta C\alpha$	$-CS\theta S\alpha$	$-S\theta C\alpha$	0	$-dS\theta S\alpha-r_0C\theta C\alpha$	$-dC\theta S\alpha+r_0S\theta C\alpha$	$-dC\alpha$	$-dr_0C\alpha$
$SS\theta CC\alpha$	$2CS\theta CC\alpha$	$-2S\theta CS\alpha$	$CC\theta CC\alpha$	$-2C\theta CS\alpha$	$SS\alpha$	$2(dC\theta+r_0S\theta CS\alpha)$	$2(-dS\theta+r_0C\theta CS\alpha)$	$2r_0CC\alpha$	$d^2+r_0^2CC\alpha$
$SS\theta CS\alpha$	$2CS\theta CS\alpha$	$S\theta(CC\alpha-SS\alpha)$	$CC\theta CS\alpha$	$C\theta(CC\alpha-SS\alpha)$	$-CS\alpha$	$r_0S\theta(SS\alpha-CC\alpha)$	$r_0C\theta(SS\alpha-CC\alpha)$	$2r_0CS\alpha$	$r_0^2CS\alpha$
$SS\theta SS\alpha$	$2CS\theta SS\alpha$	$2S\theta CS\alpha$	$CC\theta SS\alpha$	$2C\theta CS\alpha$	$CC\alpha$	$2(dC\theta-r_0S\theta CS\alpha)$	$2(-dS\theta-r_0C\theta CS\alpha)$	$2r_0SS\alpha$	$d^2+r_0^2SS\alpha$
0	0	0	0	0	0	$C\theta$	$-S\theta$	0	d
0	0	0	0	0	0	$S\theta C\alpha$	$C\theta C\alpha$	$-S\alpha$	$-r_0S\alpha$
0	0	0	0	0	0	$S\theta S\alpha$	$C\theta S\alpha$	$C\alpha$	$r_0C\alpha$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tableau A2 : Expression de la matrice λ_0^i dans la cadre de la représentation géométrique de D.H.M.

UNICITÉ DES RELATIONS GÉNÉRALES DE REGROUPEMENTS

A3-1.1 / Introduction

Il s'agit de démontrer dans cette annexe que seuls les moments d'ordre un des articulations prismatiques situées entre les articulations rotoïdes R1 et R2 peuvent être sujets à des regroupements supplémentaires. En supposant que les composantes du torseur cinématique V_{i-1} sont indépendantes, et en utilisant le fait que la matrice de transformation ${}^i T^{i-1}$ est inversible, [Gautier 90] est arrivé à la conclusion suivante:

$\{V_{i-1}\}$ est indépendant implique que $\{h^{i-1}\}$ est indépendant et que $\{V_i\}$ est indépendant.

On conclut alors que la recherche des regroupements particuliers ne concerne que les corps C_i $i = 1, \dots, (p-1)$ tels que $\{V_{p-1}\}$ est indépendant. Un problème cependant demeure concernant l'indétermination de l'articulation p-1. Aussi allons nous, dans l'étude qui va suivre, considérer séparément le cas des articulations prismatiques et rotoïdes. Le cas des articulations prismatiques ne présente pas de difficultés, en ce sens que nous démontrons que le torseur de toutes les articulations succédant à R2 est indépendant. Les regroupements supplémentaires ne concernent donc que les paramètres MS_i et M_i des corps précédant R2. Enfin, le coefficient de la masse M_i étant le seul à contenir la forme quadratique q^2 , il ne peut être regroupé et seule l'étude de MS_i est à envisager. Le traitement des articulations rotoïdes se fera en montrant que les fonctions h_k^i restant après les étapes de regroupements généraux et d'élimination des paramètres sans effet sur le modèle demeurent indépendantes entre elles, de même qu'elles sont indépendantes des fonctions h_k^{i-1} . Par suite, il n'y a pas de regroupements supplémentaires pour ces articulations.

Rappelons au préalable les expressions des torseurs cinématiques:

$$V_i = \sum_{k=1}^i {}^i T^k Z_0 \dot{q}_k = \sum_{k=1}^i \begin{bmatrix} {}^i A^k & -{}^i A^k \hat{k} P^i \\ 0 & {}^i A^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_k Z_0 \\ \bar{\sigma}_k Z_0 \end{bmatrix} \dot{q}_k \quad (a3.1)$$

ou encore

$$V_i = {}^i T^k V_k + \sum_{u=k+1}^i {}^i T^u Z_0 \dot{q}_u \quad (a3.2)$$

selon les besoins, nous utiliserons l'une ou l'autre de ces expressions. Compte tenu de la relation (a3.1), l'indépendance du torseur cinématique peut se traduire par la relation:

$$s^T V_i = 0 \Leftrightarrow s^T {}^i T^k Z_0 = 0 \text{ pour } k=1..i \Leftrightarrow s = 0_{6 \times 1} \quad (a3.3)$$

A3.2/ Unicité des regroupements pour les articulations prismatiques

Nous démontrons dans ce paragraphe que le torseur de toutes les articulations prismatiques succédant à l'articulation rotoïde R2 est indépendant. En prenant k=i dans la relation (a3.1), une première condition nécessaire à vérifier est:

$$s^T Z_0 \dot{q}_i = 0 \quad (a3.4)$$

et par suite $s_3 = 0$. Considérons maintenant l'articulation rotoïde k=R2 ainsi que la relation (a3.2). Nous avons:

$$s^T \begin{bmatrix} -{}^i A^{R2} \hat{R2} P^i & \omega_{R2} \\ {}^i A^{R2} & \omega_{R2} \end{bmatrix} = 0 \quad (a3.5)$$

L'articulation i étant prismatique, nous pouvons écrire:

$${}^{R2}P^i = P_0 + q_i {}^{R2}A^i z_0 \quad (a3.6)$$

où P_0 est indépendant de la variable articulaire q_i . Nous déduisons alors de la relation (a3.5) une nouvelle condition nécessaire:

$$[s_1 \ s_2 \ s_3] {}^i A^{R2} ({}^{R2} \hat{A}^i z_0) \omega_{R2} = 0 \quad (a3.7)$$

Les composantes de ω_{R2} sont non nulles et indépendantes, par suite:

$$[s_1 \ s_2 \ s_3] {}^i A^{R2} ({}^{R2} \hat{A}^i z_0) = 0_{1 \times 3} \quad (a3.8)$$

En désignant par a_{ij} l'élément générique de la matrice ${}^{R2}A^i$, on développe pour obtenir:

$$[s_1 \ s_2] \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \end{bmatrix} = 0_{1 \times 2} \quad (a3.9)$$

Les déterminants deux à deux de cette dernière matrice correspondent respectivement aux coefficients a_{33} , a_{23} et a_{13} . Ils ne peuvent être simultanément nuls. Une des matrices extraites est ainsi inversible, et par conséquent $s_1 = s_2 = 0$. Revenons à la relation (a3.5). Il reste:

$$[s_4 \ s_5 \ s_6] {}^i A^{R2} \omega_{R2} = 0 \quad (a3.10)$$

ω_{R2} étant indépendant et la matrice ${}^i A^{R2}$ inversible, on en déduit que $s_4 = s_5 = s_6 = 0$.

Finalement, $s=0_{16}$ et le torseur des articulations prismatiques succédant à R2 est indépendant. Le regroupement de paramètres ne concerne donc que les paramètres MS_i et M_i des articulations antérieures à R2 (la matrice d'inertie étant quant à elle déjà

regroupée). En observant, dans la relation de récurrence sur h^i , que la fonction h_{10}^i associée à la masse M_i est le seul coefficient à contenir la forme quadratique en \dot{q}_i^2 , on en déduit que seules les composantes de MS_i sont concernées par les regroupements supplémentaires.

A3.3 / Unicité des regroupements généraux pour les articulations rotoïdes

A3.3.1 / Articulations $i \geq R2$

Pour les articulations $i \geq R2$, il reste après les regroupements généraux les sept fonctions d'énergie suivantes:

$$h_1^i = \frac{1}{2} \omega_{i1}^2, \quad h_2^i = \omega_{i1} \omega_{i2}, \quad h_3^i = \omega_{i1} \omega_{i3},$$

$$h_5^i = \omega_{i2} \omega_{i3}, \quad h_6^i = \frac{1}{2} \omega_{i3}^2$$

et

$$h_7^i = \omega_{i3} V_{i2} - \omega_{i2} V_{i3} - \mathbf{g}^0 \mathbf{T}^0 \mathbf{s}^i$$

$$h_8^i = \omega_{i1} V_{i3} - \omega_{i3} V_{i1} - \mathbf{g}^0 \mathbf{T}^0 \mathbf{n}^i \tag{a3.11}$$

Nous cherchons à établir que les éléments de la famille $\{ h_1^i, h_2^i, h_3^i, h_5^i, h_6^i, h_7^i, h_8^i \}$ sont d'une part indépendants, et d'autre part que toute combinaison linéaire de ces fonctions est indépendante des fonctions de $\{ h^{i-1} \}$. Pour montrer que cette famille est indépendante, nous établissons que les éléments des deux ensembles de fonctions $\{ h_1^i, h_2^i, h_3^i, h_5^i, h_6^i \}$ et $\{ h_7^i, h_8^i \}$ sont indépendants, et que ces deux ensembles sont mutuellement indépendants. Pour montrer que cette famille est indépendante de $\{ h^{i-1} \}$, on montre que toute combinaison linéaire de ses composantes s'exprime en fonction des variables articulaires q_i ou \dot{q}_i . Concernant les fonctions h_7^i et h_8^i , nous ne considérerons que leur contribution à l'énergie potentielle, que l'on désignera respectivement par DU_7^i et DU_8^i . Ces dernières ont pour expression:

$$\begin{aligned} DU_7^i &= {}^0 g^T {}^0 A^i e_1 = {}^0 g^T {}^0 s \\ DU_8^i &= {}^0 g^T {}^0 A^i e_2 = {}^0 g^T {}^0 n \end{aligned} \quad (a3.12)$$

Pour mettre en évidence la contribution des différentes variables articulaires aux précédentes fonctions, on définit un repère fictif $R1$ correspondant au repère de la première rotation $R1$ lorsque $q_1=0$. Nous pourrions alors écrire:

$${}^0 g^T {}^0 A^i e_1 = {}^0 g^T {}^0 A^{R1} \text{Rot}(z_1, q_1) {}^{R1}M^i \text{Rot}(z_i, q_i) \quad (a3.13)$$

où ${}^{R1}M^i$ est une matrice de transformation quelconque possédant la propriété: $({}^{R1}M^i)_{33} \neq 1$, car l'axe z_i ne peut être parallèle à z_{R1} par définition des articulations $R1$ et $R2$. En faisant de même pour la fonction DU_8^i , et en désignant par m_{ij} l'élément générique de ${}^{R1}M^i$ il vient après calcul:

$$\begin{aligned} DU_7^i &= \alpha \cos(q_i) - \beta \sin(q_i) \\ DU_8^i &= \beta \cos(q_i) + \alpha \sin(q_i) \end{aligned} \quad (a3.14)$$

expressions dans lesquelles:

$$\begin{aligned} \alpha &= {}^{R1}g^T \begin{bmatrix} m_{11} & -m_{21} & 0 \\ m_{21} & m_{11} & 0 \\ 0 & 0 & m_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \\ 1 \end{bmatrix} \\ \beta &= {}^{R1}g^T \begin{bmatrix} m_{12} & m_{22} & 0 \\ -m_{22} & m_{12} & 0 \\ 0 & 0 & m_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (a3.15)$$

Sachant que ${}^{R1}g \neq 0_{31}$ et que $m_{33} \neq 1$ on montre sans difficulté que α et β ne peuvent être simultanément nuls. Par conséquent, DU_7^i et DU_8^i sont indépendants. Par ailleurs, ω_i étant non nul et indépendant, les fonctions $h_1^i, h_2^i, h_3^i, h_5^i, h_6^i$ sont indépendantes. En outre, l'expression du torseur cinématique nous indique que tous ces termes sont fonction

des vitesses des variables articulaires $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_i$. On en déduit alors que les familles $\{ h_1^i, h_2^i, h_3^i, h_5^i, h_6^i \}$ et $\{ h_7^i, h_8^i \}$ sont indépendantes. La relation (a3.14) nous montre que toute combinaison linéaire à coefficients constants de DU_7^i et DU_8^i est fonction de la variable q_i , et par suite $\{ h_7^i, h_8^i \}$ sont indépendants de $\{ h^{i-1} \}$. De même, la variable ω_{i3} s'exprimant linéairement en fonction de la vitesse \dot{q}_i , on en déduit que les fonctions h_3^i, h_5^i et h_6^i son indépendantes de $\{ h^{i-1} \}$. Il reste enfin à démontrer que les fonctions h_1^i et h_2^i sont indépendantes de $\{ h^{i-1} \}$; La relation de récurrence sur ω_i peut s'écrire:

$$\omega_i = \text{Rot}(z_i, -q_i) M \omega_{i-1} + \dot{q}_i z_0 \quad (\text{a3.16})$$

où M est une matrice de rotation constante. On posera pour simplifier $V=M \omega_{i-1} = [v_1, v_2, v_3]^T$. Il vient:

$$\begin{aligned} \omega_{i1} &= \cos(q_i) v_1 - \sin(q_i) v_2 \\ \omega_{i2} &= \sin(q_i) v_1 + \cos(q_i) v_2 \end{aligned} \quad (\text{a3.17})$$

et par suite

$$\begin{aligned} \omega_{i1}^2 &= \cos^2(q_i) (v_1^2 - v_2^2) - \cos(q_i) \sin(q_i) (2 v_1 v_2) + v_2^2 \\ \omega_{i1} \omega_{i2} &= \cos^2(q_i) (2 v_1 v_2) + \cos(q_i) \sin(q_i) (v_1^2 - v_2^2) - v_1 v_2 \end{aligned} \quad (\text{a3.18})$$

Pour avoir une combinaison linéaire de ces deux fonctions indépendante de q_i , il faut qu'il existe un vecteur s (1x2) non nul de coefficients constants vérifiant les relations:

$$s \begin{bmatrix} v_1^2 - v_2^2 \\ v_1 v_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} v_1 v_2 \\ v_1^2 - v_2^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{a3.19})$$

v_1 et v_2 ne pouvant être simultanément nuls (car ω_{i1} et ω_{i2} sont non nuls), on en déduit que h_1^i et h_2^i sont indépendant de $\{ h^{i-1} \}$.

En conclusion, les fonctions $h_1^i, h_2^i, h_3^i, h_5^i, h_6^i, h_7^i, h_8^i$ sont indépendantes entre elles et toute combinaison de ces fonctions est indépendante de $\{h^{i-1}\}$. Il ne peut donc y avoir de regroupements supplémentaires pour les articulations $i \geq R2$.

A3.2 / Articulations $i < R2$

Pour ces articulations, il reste au plus trois fonctions d'énergie après les étapes de regroupements généraux et d'élimination des paramètres inertiels sans effet sur le modèle, à savoir: h_6^i, h_7^i et h_8^i . La fonction $h_6^i = 1/2 \omega_{i3}^2$ est la seule à contenir la forme quadratique \dot{q}_i^2 . le paramètre ZZ_i ne peut donc être sujet à des regroupements supplémentaires. En procédant d'une manière analogue à celle du paragraphe précédent pour les fonctions h_6^i et h_7^i , il vient:

$$\begin{aligned} DU_7^i &= \overset{R_i}{g}_1 \cos(q_i) - \overset{R_i}{g}_2 \sin(q_i) \\ DU_8^i &= \overset{R_i}{g}_2 \cos(q_i) - \overset{R_i}{g}_1 \sin(q_i) \end{aligned} \quad (a3.20)$$

où $\overset{R_i}{R}_i$ représente le repère R_i lorsque $q_i=0$. Si $\overset{R_i}{g}_1 = \overset{R_i}{g}_2 = 0$, alors l'axe z_i est parallèle à la gravité et les paramètres MX_i et MY_i sont sans effet sur le modèle. Dans le cas contraire, les fonctions h_6^i et h_7^i sont indépendantes entre elles, indépendantes de h_6^i et de $\{h^{i-1}\}$. Par conséquent, il n'y a pas non plus de regroupements supplémentaires pour ces articulations.

ANNEXE 4

EXPRESSION DE LA MATRICE $g_s(q_i, \dot{q}_i)$

On considère pour cela chacun des termes des matrices (1x3) intervenant dans l'expression de $g_s(q_i, \dot{q}_i)$ (relation 2.50): La première matrice s'exprime par:

$$h_J^{i-1} \lambda_{S1}^i = [h_J^{i-1} \overline{\lambda_{S1_1}^i}, h_J^{i-1} \overline{\lambda_{S1_2}^i}, h_J^{i-1} \overline{\lambda_{S1_3}^i}] \quad (a4.1)$$

Comme pour le tenseur d'inertie, un terme barré désigne la matrice (6x1) des éléments de la matrice symétrique (3x3) correspondante. Chacun des scalaires précédents peut ainsi s'exprimer sous la forme de produit suivant:

$$h_J^{i-1} \overline{\lambda_{S1_p}^i} = \omega_{i-1}^T \lambda_{S1_p}^i \omega_{i-1} \quad (a4.2)$$

En utilisant les résultats établis dans [Gautier 90], la matrice $\lambda_{S1_p}^i$ s'écrit:

$$\lambda_{S1_p}^i = {}^{i-1}\hat{e}_p^i \quad {}^{i-1}\hat{z}_i + ({}^{i-1}\hat{e}_p^i \quad {}^{i-1}\hat{z}_i)^T \quad (a4.3)$$

où ${}^{i-1}\hat{e}_p^i$ traduit, pour $e_1=[100]^T \dots e_3=[001]^T$, le changement de base:

$${}^{i-1}\hat{e}_p^i = {}^{i-1}A^i \hat{e}_p^i A^{i-1} \quad (a4.4)$$

Compte tenu qu'il n'existe pas d'articulation rotoïde entre $i-1$ et R et que toutes les articulations rotoïdes antérieures à i sont parallèles à $R1$, il vient:

$$\omega_{i-1} = {}^{i-1}A^R \omega_R = {}^{i-1}A^R [0 \ 0 \ \dot{q}_\Sigma]^T \quad (a4.5)$$

où \dot{q}_Σ est la somme des vitesses des variables articulaires rotoïdes antérieures à i . Cette propriété permet alors d'écrire:

$$h_J^{i-1} \overline{\lambda_{S1_p}^i} = \dot{q}_\Sigma^2 z_0^T (W_p + W_p^T) z_0 = 2 \dot{q}_\Sigma^2 z_0^T W_p z_0 \quad (\text{a4.6})$$

avec

$$W_p = {}^R A^i \hat{e}_p \wedge {}^i A^{i-1} \wedge {}^{i-1} z_i \wedge {}^{i-1} A^R \quad (\text{a4.7})$$

En utilisant le fait que les éléments d'une matrice de rotation sont égaux à ceux de la matrice des cofacteurs (il suffit pour cela de considérer son inverse), les calculs intermédiaires nous fournissent:

$${}^i A^{i-1} \wedge {}^{i-1} z_i \wedge {}^{i-1} A^R z_0 = [-A_{32} \ A_{31} \ 0]^T \quad (\text{a4.8})$$

On obtient par la suite :

$$\begin{aligned} h_J^{i-1} \lambda_{S1_1}^i &= \dot{q}_\Sigma^2 A_{31} A_{33} \\ h_J^{i-1} \lambda_{S1_2}^i &= \dot{q}_\Sigma^2 A_{32} A_{33} \\ h_J^{i-1} \lambda_{S1_3}^i &= \dot{q}_\Sigma^2 [-1 + A_{33}^2] \end{aligned} \quad (\text{a4.9})$$

De la même manière, la seconde matrice intervenant dans la relation (2.60) peut s'écrire:

$$f_S^i = [-\omega_2^i, \omega_1^i, 0] = \dot{q}_\Sigma [-A_{32} \ A_{31} \ 0] \quad (\text{a4.10})$$

d'où l'expression de $g_S(q_i, \dot{q}_i)$ obtenue.

BIBLIOGRAPHIE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [Amstrong, 87]: B. Amstrong. "On finding exciting trajectories for identification experiments involving systems with non linear dynamics". Proc IEEE Conf on Robotics and Automation pp 1131-1139 1987.
- [Amstrong, 89]: B. Amstrong. "On finding exciting trajectories for identification experiments involving systems with non linear dynamics". International Journal of Robotics Research Vol 8 n° 6 pp 28-48 1989.
- [Asada, Slotine, 86]: H. Asada, J.J.E. Slotine. "Robot analysis and control". Wiley Interscience Publishing, New York, 1987.
- [Atkeson, An, Hollerbach, 85]: C.G. Atkeson, C.H. An, J.M. Hollerbach. " Rigid body load identification for manipulators". Proc. 24th Conf. on Decision and Control, pp 996-1002, 1985.
- [Belkoura, Povy, 92]: L. Belkoura, L. Povy. "The use of the augmented link notion to determine the minimum inertial parameters of robots". 2nd Int. Conf. on Automation, Robotics and Vision, ICARV 1992, pp RO-211- 215
- [Bennis, 91]: F. Bennis. "Contribution à la modélisation géométrique et dynamique des robots à chaînes cinématique simple et complexe". Thèse de Doctorat ENSM, Nantes 1991.
- [Bu, Wang, 88]: Y.H. Bu, Y. Wang. "A new approach of dynamic modelling and parameter estimation of robot manipulators". Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation pp 103-106 1988
- [Constantinos, Rajnikant, Misra, 88]: Constantinos A. Balafoutis, Rajnikant V. Patel, Pradeep Misra. "Efficient modeling and computation of manipulator dynamics using orthogonal cartesian tensors". IEEE Journal of Robotics and Automation, vol.4, n°6, Decembre 1988.
- [Craig, 86]: J.J. Craig. "Introduction to robotics: mechanics and control". Addison Wesley Publishing Company, Reading, 1986.

- [**Denavit, Hartenberg, 55**]: J. Denavit, R.S. Hartenberg. "A kinematic notation for lower pair mechanism based on matrices", Trans. of ASME J. of Applied Mechanics, vol. 22, pp 215-21, 1955.
- [**Dombre, Khalil, 88**]: E. Dombre, W. Khalil. "Modélisation et commande des robots". Editions Hermès, Paris 1988.
- [**Fu, Gonzalez, Lee, 1987**]: K.S. Fu, R.C. Gonzalez, C.S.G. Lee. "Robotics: control, sensing, vision, and intelligence". McGraw-Hill International Editions, Singapore, 1987.
- [**Gautier, 90**]: M. Gautier. "Contribution à la modélisation et à l'identification des robots". Thèse de Doctorat d'Etat, ENSM, Nantes 1990.
- [**Gautier, Khalil, 88**]: M. Gautier, W. Khalil. "A direct determination of minimum inertial parameters of robots". Proc IEE Conf. on Robotics and Automation, pp 1682-87, 1988.
- [**Gautier, Khalil, 90**]: M. Gautier, W. Khalil. "Direct calculation of minimum set of inertial parameters of robots". IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol 6, N° 3, pp 368-73, 1990.
- [**Giordano, 86**]: M. Giordano. "Dynamic model of robots with a complex kinematic chain", Proc. 16th Int. Symp. on Industrial Robots, Bruxelles, pp 377-88, 1986.
- [**Khalil, Kleinfinger, 86**]: W. Khalil, J.F. Kleinfinger. "A new geometric notation for open and closed loop robot". Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation, San Francisco, pp 1174-80, 1986.
- [**Khalil, Bennis, Gautier, 90**]: W. Khalil, F. Bennis, M. Gautier. "The use of the generalized links to determine the minimum inertial parameters of robots". J. of Robotic Systems, 7 (2), pp 225-42, 1990.
- [**Khosla, 88**]: P.K. Khosla. "Estimation of robot dynamics parameters: theory and application" J. of Robotics and Automation, vol 3, N° 1, pp 35-41. 1988.
- [**Khosla, 88**]: P.K. Khosla. "Categorization of parameters in the dynamic robot model". IEEE Trans. on Robotics and Automation, vol 5 N° 3, pp 261-68, 1989.
- [**Khosla, Kanade, 85**]: P.K. Khosla, T. Kanade. "parameter identification of robot dynamics". Proc. 24th Conf. on Decision and Control, pp 1754-60, 1985.
- [**Lai, Lan, 88**]: J. Lai, H.X. Lan. "Identification of dynamic parameters in Lagrange robot model". Proc IEEE Conf. on Robotics and Automation pp 90-93 1988

- [**Mayeda, Ohashi, 89**]: H. Mayeda, K. Ohashi. "Base parameters of dynamic models for general open loop kinematic chains". 5th ISSR, Tokyo, Aug. 1989.
- [**Mayeda, Yoshida, Osuka, 88**]: H. Mayeda, K. Yoshida, K. Osuka. "Base parameters of manipulator dynamics". Proc IEE Conf. on Robotics and Automation, pp 1367-73, 1988.
- [**Mayeda, Yoshida, Ohashi, 89**]: H. Mayeda, K. Yoshida, K. Ohashi. "Base parameters dynamic models for manipulator with rotationnal and translationnal joints". Proc IEE Conf. on Robotics and Automation, pp 1523-28, 1989.
- [**Mayeda, Osuka, Kangawa, 84**]: H. Mayeda, K. Osuka, A. Kangawa. "A new identification method for serial manipulator arm". Proc. IFAC 9th Triennial World Congress pp 2429-2434 1984.
- [**Mayeda, Maruyama, 89**]: H. Mayeda, M. Maruyama. "Identification method for general open loop kinematic chain dynamic models". Proc. SICE, July 89
- [**Olsen, Bekey, 86**]: H.B. Olsen, G.A. Bekey. "Identification of robot dynamics". Proc. IEEE Conf on Robotics and Automation pp1004-1010 1986
- [**Sheu, Walker, 89a**]: S.Y. Sheu, M.W. Walker. "Basis set for manipulator inertial parameters". Proc. IEEE Conf. on Robotic and Automation, pp 1517-22, 1989.
- [**Sheu, Walker, 89b**]: S.Y. Sheu, M.W. Walker. "Estimating the essential parameter space of the robot manipulator dynamics" . Proc. 28th IEEE Conf. on Decision and Control, 1989.
- [**Vibet, 87**]: C. Vibet. "Robots: principes et contrôle". Editions Marketing, Paris, 1987.